ریچارد ا. سیلورمن

آنالیز مختلط و کاربردهای آن

ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب

آنالیز مختلط و کاربردهای آن

ریچارد ا. سیلورمن

ترجمهٔ علی عمیدی، خلیل پاریاب

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

مرکز نشر دانشگاهی
۲۹۰

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۳۰

Complex Analysis with Applications
Richard A. Silverman
Prentice-Hall, INC, 1974

آنالیز مختلط و کاربردهای آن
تألیف ریچارد ا. سیلورمن
ترجمهٔ دکتر علی عمیدی، خلیل پاریاب
ویراستهٔ دکتر منوچهر وصال

مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۶۶
چاپ سوم ۱۳۷۵
تعداد ۳۰۰۰
لیتوگرافی : بهزاد
چاپ و صحافی : نیل
شابک : ۳ـ ۰۲۹۰ـ ۰۱ـ ۹۶۴

سیلورمن، ریچارد Silverman, Richard A.
آنالیز مختلط و کاربردهای آن
عنوان اصلی: Complex analysis with applications
واژه‌نامه: ص.
کتابنامه: ص.
۱. توابع متغیر مختلط. الف. عمیدی، علی، مترجم. ب. پاریاب، خلیل، مترجم. ب. عنوان.
QA۳۳۱ ۵۱۵٫۹

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه
۲.۷. تعیین شعاع همگرایی	۱۲۷
چند توضیح	۱۳۳
مسائل	۱۳۳
فصل هشت. برخی از نگاشتهای ویژه	۱۳۶
۱.۸. توابع نمایی و توابع وابسته	۱۳۶
۲.۸. تبدیلهای خطی کسری	۱۴۳
چند توضیح	۱۵۱
مسائل	۱۵۲
فصل نه. توابع چندمقداری	۱۵۸
۱.۹. حوزه‌های تك ارزی	۱۵۸
۲.۹. شاخه‌ها و نقطه‌های شاخه‌ای	۱۶۴
۳.۹. سطوح ریمان	۱۷۰
چند توضیح	۱۷۳
مسائل	۱۷۳
فصل ده. سری تیلر	۱۷۸
۱.۱۰. بسط تیلر یك تابع تحلیلی	۱۷۸
۲.۱۰. قضایای یکتایی	۱۸۲
۳.۱۰. اصل قدرمطلق ماکزیموم	۱۸۸
چند توضیح	۱۹۱
مسائل	۱۹۲
فصل یازده. سری لوران	۱۹۸
۱.۱۱. بسط لوران یك تابع تحلیلی	۱۹۸
۲.۱۱. نقاط تکین منفرد	۲۰۴
۳.۱۱. مانده‌ها	۲۱۰
چند توضیح	۲۱۴
مسائل	۲۱۵
فصل دوازده. کاربردهای مانده‌ها	۲۲۱
۱.۱۲. مانده‌های لگاریتمی و اصل آوند	۲۲۱
۲.۱۲. قضیهٔ روشه و نتایج آن	۲۲۴

عنوان | صفحه

پیشگفتار

درنگارش این کتاب، هدف من ارائهٔ بحثی مختصر ازمبادی آنالیز مختلط کاربردی بوده است که درآن انگیزهٔ طرح مطالب، کاملاً توجیه شده وبه‌اندازه‌ای کامل باشدکه تمام جنبه‌های اساسی موضوع را دربرگرفته وبه‌قدرکافی آنها را تشریح کند، ولی آن‌قدر مفصل نباشدکه دانشجوی مبتدی را با ارائهٔ بیش از حد نتایج فرعی سردرگم نماید. من براین باورم‌که بایاری گرفتن ازتدابیرآموزشی زیر (وتدابیردیگر) به‌این هدف‌رسیده‌ام. ارائه:

۱) مجموعه‌ای جامع ازمسائل درانتهای هرفصل؛ این مجموعه‌ها هم شامل‌تمرینهای زیاد مربوط به‌متن است، وهم شامل مسائلی است‌که مطالب نظری متن را ادامه و گسترش می‌دهند.

۲) راهنمائیها وپاسخها برای بسیاری ازمسائل، که ازصفحهٔ ۳۲۰ آغازشده‌اند وشامل پاسخهای عددی بوده، درصورت ضرورت تا راه‌حلهای تفصیلی گسترش یافته‌اند.

۳) مجموعه‌ای ازتوضیحها درانتهای هرفصل (قبل ازمجموعهٔ مسائل مربوط)؛ این توضیحهای بخش به‌بخش، به‌میزان زیادی، طبیعتی رهگشا دارند، و به‌این منظورآمده‌اند که دانشجو دربارهٔ آنچه «واقعاً» دنبال می‌شود وآنچه که بعدپیش می‌آید بیشترآگاه‌شود.

امید برآن است‌که تدابیر بالا، همراه باروانی خاص واختصار مطالب اصلی، کتاب را بخصوص برای آنهایی‌که اولین‌بار باآنالیزمختلط مواجه می‌شوند قابل استفاده‌نماید. بویژه امید است‌که روش منتخب به‌دانشجو کمك‌کند تا درزمینهٔ وسیع نظریهٔ متغیرمختلط، اصول وفروع را ازهم تمیزدهد.

عناوین مطالبی‌که درکتاب آمده‌اند در جدول فهرست مندرجات درج شده‌اند، اما چند نکتهٔ مهم نیزوجود دارندکه اشاره به‌آنها ضروری است:

۱) عنوان اصلی انتگرال‌گیری درصفحهٔ مختلط (نظریهٔ کوشی) با سرعتی سنجیده معرفی وبه‌صورت هستهٔ اصلی آنالیزمختلط ارائه شده است.

۲) همچنین، دانشجو درنیمهٔ اول کتاب با سری مختلط و مبحث کلیدی سری توانی مواجه می‌شود. بنابراین وقتی دربخشهای ۱۰ و ۱۱ به‌سری تیلـر ولوران می‌رسد قـادر است، بدون اینکه بامطالب جنبی‌نظیرهمگرایی مطلق ویکنواخت ویا اعتبار انتگرال‌گیری جمله به‌جمله ازسریها وغیره ازموضوع منحرف شود، توجه خـود را برمطالب در دست مطالعه متمرکز کند.

۳) به‌اصل آوند وقضیهٔ روشه توجـــه خاصـــی‌به‌عمل آمده‌است (بخشهای ۱.۱۲ و ۲.۱۲ را ببینید). نظریهٔ مانده برای محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی ناسره، دربحثی تفصیلی که درخور این نظریه است، آمده است (بخشهای ۳.۱۲ و ۴.۱۲ را ببینید).

۴) مطالب فصل ۱۳، پیشرفته‌تر ازسایرمطالب کتاب است، و دریك درس خـلاصهٔ یك ترمی بایـد ازآن چشم‌پوشی کرد، بجزآن مطالبی کـه در نتیجه‌گیری تبـدیل کلیدی شوراتس-کریستوفل نقشی دارند.

۵) فصل ۱۵ از دوکاربرد نمونه‌ای فیزیکی آنالیز مختلط، یعنی‌کاربرد آنالیزمختلط درمکانیك مایعات والکتروسـتاتیك بحث می‌کند. دراین فصل شیوهٔکار به‌جای شیوهٔ ریاضی محض، شیوهٔ ریاضی فیزیك است. قضیهٔ‌کوتا-ژوکوفسکی (که دربخش ۶.۲.۱۵ به‌دست آمده است) بخصوص‌یك‌کاربردی زیبا ازنظریهٔ متغیرمختلط است. فصل ۱۵ بجزیك یا دو مورد، مستقل ازفصول ۱۲ تا ۱۴ است، ومدرسینی که به‌جنبهٔ‌کاربردی نظردارند می‌توانند درست بعد ازفصل ۱۱ به‌فصل ۱۵ بپردازند.

بین منابع مفیدی‌که به‌هنگام نگارش‌کتاب دراختیار بوده است،کتاب درسی‌توابع متغیر مختلط، نگارش ی. ی. پری والف[1] و چاپهای مختلف ترجمه‌های خودم از کتابی با همین عنوان، نگارش آ. ا. مارکوشویچ[2] (چاپ پرینتیس-هال[3]، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷) راذکر می‌کنم. گروهی ازتجدیدنظرکنندگان کتاب، مرکب از پروفسور لری زالکمن[4] ازدانشگاه مریلند[5]، پروفسور ریموند ولزجونیور[6]، از دانشگاه رایس[7]، پروفسور کنت گـراس[8] از کالج دارتمث[9]، پروفسور پال‌سالی[10] از دانشگاه شیکاگو، پروفسور لورنس هافمن[11] از کالج پسرانهٔ‌کلارمونت[12]، و پروفسورکنت‌هافمن[13] از ام. آی. تی، انبوهی از انتقادهای با ارزش دربارهٔ پیشنویس اولیهٔ‌کتاب عرضه کرده‌اندکه درهدایت هریك از پیشنویسهای بعدی درجهت اصلاحـاتی اساسی اثر مطلوبی داشته‌اند. از دو نفرآخر ایـن تجدیدنظر-

---

1. I. I. Privalov
2. A. I. Markushevich
3. Prentice-Hall
4. Larry zalcman
5. Maryland
6. Raymond wells, Jr
7. Rice
8. Kenneth Gross
9. Darmouth
10. Paul Sally
11. Laurence Hoffmann
12. Claremont
13. Kenneth Hoffman

کنندگان، توضیحاتی مفصل دریافت داشته‌ام که به‌خصـــوص مفید واقع شده‌اند وطــرح نهایی دستنویس، بسیارمدیون نظرات آموزندهٔ آنها بوده است. تصور نمی‌کنم این‌کتاب بدون تشویق و ابراز محبت مــداوم دوستم آرثر وستر[1]، و ویراستار پرینتیس‌هال، به‌وضع فعلی عرضه می‌شد.

ر. ا. س

1. Arthur Wester

۱

اعداد مختلط

۱.۱ . مفاهیم اساسی

۱.۱.۱ . منظورما ازعدد مختلط α یك‌زوج‌مرتب (a,b) ازاعدادحقیقی a وbاست:

$$\alpha = (a, b). \tag{۱}$$

اگر $b = 0$، قرار می‌گذاریم بنویسیم $a = (a, 0)$، به‌طوری‌که دراین حالت (۱) به‌شکل زیرساده می‌شود

$$\alpha = a.$$

بنابراین مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی R یك زیرمجموعهٔ سره ازمجموعهٔ تمام اعداد مختلط C است.

۲.۱.۱ . اینك اعمال اساسی حساب دراعداد مختلط را تعریف می‌کنیم. اما تعاریف هرچه باشند، چون R زیرمجموعهٔ C است، ازطرفی لازم است‌که وقتی آنها را در اعداد حقیقی به‌کار می‌بریم همان نتایج‌حساب معمولی اعداد حقیقی به‌دست آیند. ازطرف‌دیگر برای اینکه بتوان آنها را به طور عـام درمسائل آنالیز به‌کاربرد، لازم می‌آیدکه اعمال روی اعداد مختلط دراصول موضوعهٔ «حساب حقیقی» صدق‌کنند.

الف. $\alpha+\beta$، مجموع دوعدد مختلط $\alpha = (a, b)$ و $\beta = (c, d)$، به‌وسیلهٔ فرمول زیرتعریف می‌شود

$$\alpha+\beta=(a+c,\ b+d). \qquad (۲)$$

اگراین تعریف را برای دوعدد حقیقی a و c به‌کار بریم به‌دست می‌آوریم

$$(a,\ ۰)+(c,\ ۰)=(a+c,\ ۰)=a+c,$$

یعنی عمل جمع درشرط اول از دوشرط بالا صدق می‌کند.

ب. $\alpha\beta$، حاصلضرب دوعدد مختلط $\alpha=(a,\ b)$ و $\beta=(c,\ d)$، توسط فرمول‌زیر تعریف می‌شود

$$\alpha\beta=(ac-bd,\ ad+bc). \qquad (۳)$$

این تعریف را برای دوعدد حقیقی a و c به‌کاربرده به‌دست می‌آوریم

$$(a,\ ۰)(c,\ ۰)=(ac,\ ۰)=ac,$$

یعنی عمل ضرب باحساب اعداد حقیقی سازگار است.

ج. خواننده بسهولت می‌تواند تحقیق کند که اگر تعریفهای (۲) و (۳) را به‌کار بریم، اعمال جمع وضرب اعداد مختلط ازپنج قانون آشنای زیردرحساب پیروی‌می‌کنند:

۱) عمل‌جمع جابه‌جایی است: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$؛

۲) عمل ضرب جابه‌جایی است: $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$؛

۳) عمل جمع شرکتپذیراست: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$؛

۴) عمل ضرب شرکتپذیراست: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$؛

۵) عمل ضرب نسبت به‌عمل جمع توزیعپذیراست: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$؛

(جزئیات تحقیق در درستی این قوانین به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود).

۳.۱.۱. عددی‌که با زوج (۱ ,۰) معرفی می‌شود در عملیات با اعداد مختلط نقش ویژه‌ای ایفا می‌کند. این عدد را با i نمایش می‌دهند. مربع (۱ ,۰)، یعنی حاصلضرب این عدد درخودش را با استفاده ازتعریف (۳) به‌دست می‌آوریم:

$$(۰,۱)(۰,۱)=(-۱,\ ۰)=-۱.$$

پس $i^{۲}=-۱$، که منتهی به‌فرمول زیرمی‌شود

$$i=\sqrt{-۱}.$$

بنابراین رابطه، عدد دلخواه مختلط $\alpha=(a,\ b)$ را می‌توانیم به‌شکل زیر بنویسیم

$$\alpha=(a,\ b)=(a,\ ۰)+(۰,\ b)=(a,\ ۰)+(b,\ ۰)(۰,\ ۱)=a+bi$$

(به‌عبارت دیگر $\alpha=a+bi$). عدد a را قسمت حقیقی عدد مختلط α می‌نامند وبا $Re\ \alpha$ نمایش می‌دهند، همچنین b (ضریب i درجمله bi) به قسمت موهومی α موسوم است و به‌شکل $\mathrm{Im}\ \alpha$ نوشته می‌شود. خاطرنشان می‌کنیم که اگر $\mathrm{Im}\ \alpha=۰$، عدد $a+bi$ به‌عدد حقیقی a تبدیل می‌شود. عدد مختلط $\alpha=a+bi$ را موهومی محض می‌نامند، اگر

$\operatorname{Re}\alpha=\text{۰}$، $\operatorname{Im}\alpha\neq\text{۰}$.* دو عدد مختلط α و β را برابر می‌گویند، اگر قسمتهای حقیقی وموهومی آنها متناظراً برابر باشند، یعنی اگر

$$\operatorname{Re}\alpha=\operatorname{Re}\beta,\ \operatorname{Im}\alpha=\operatorname{Im}\beta.$$

۴.۱.۰ عدد مختلط $\alpha=a+bi$ داده شده‌است، عدد مختلط $\overline{\alpha}=a-bi$ که‌قسمت حقیقی‌اش با قسمت حقیقی α برابر وقسمت موهومی آن قرینهٔ قسمت موهومی α است مزدوج مختلط α خوانده می‌شود. از(۳) نتیجه می‌شود که

$$\alpha\overline{\alpha}=a^{۲}+b^{۲}.$$

۵.۱.۰ در حساب حقیقی، هم عنصر یکهٔ جمعی ۰ وهم عنصر یکهٔ ضربی ۱ وجود دارد، یعنی اعداد (یکتای) صفر ویك به‌طوری هستند که برای تمام اعداد حقیقی a، $a+\text{۰}=a$ و $a.\text{۱}=a$. همین اعداد صفر ویك به‌عنوان عناصر یکهٔ جمع وضرب در «حساب مختلط» به‌کار می‌روند. زیرا اگر δ را عنصر یکهٔ جمع مختلط فرض کنیم به‌قسمی که برای هرعدد مختلط $\alpha=(a,\,b)$

$$\alpha+\delta=\alpha, \tag{۴}$$

آنگاه با افزودن عدد

$$-\alpha=-\text{۱}\cdot\alpha=(-a,-b) \tag{۵}$$

(که منهای α نامیده می‌شود) به‌دو طرف رابطهٔ (۴)، به‌دست می‌آید

$$\delta=\text{۰},$$

زیرا واضح است‌که $\alpha+(-\alpha)=(\text{۰},\,\text{۰})=\text{۰}$. به‌همین ترتیب اگر ϵ عنصر یکهٔ‌ضرب مختلط باشد، یعنی اگر برای هرعدد مختلط $\alpha\neq\text{۰}$

$$\alpha\epsilon=\alpha, \tag{۶}$$

آنگاه ازضرب دوطرف (۶) درعدد

$$\gamma=\frac{\text{۱}}{a^{۲}+b^{۲}}\overline{\alpha}, \tag{۷}$$

به‌دست می‌آید

$$\frac{\text{۱}}{a^{۲}+b^{۲}}\alpha\overline{\alpha}\epsilon=\frac{\text{۱}}{a^{۲}+b^{۲}}\alpha\overline{\alpha}.$$

اما $\alpha\overline{\alpha}=a^{۲}+b^{۲}$ وازآنجا

$$\epsilon=\text{۱}.$$

---

* درتعاریف، «اگر» به‌معنای «اگر وفقط اگر» به‌کارخواهد رفت. مثلاً درتعریف عدد موهومی محض «اگر $\operatorname{Re}\alpha=\text{۰}$، ...» به‌معنای «اگر وفقط اگر $\operatorname{Re}\alpha=\text{۰}$، ...» آمده است.

۱.۱.۶. از تعریف (۳) نتیجه می‌شود که حاصلضرب دوعدد مختلط صفر است اگر یکی یا هردو عامل صفر باشند. برعکس اگر حاصلضرب دوعـدد مختلط صفر باشد حداقل یکی از دوعامل ضرب صفراست. زیرا اگر فرض کنیم

$$\alpha\cdot\beta=0 \tag{۸}$$

و $\alpha\neq 0$، با ضرب طرفین رابطهٔ (۸) درعدد (۷) بی‌درنگ $\beta=0$ نتیجه می‌شود.

۱.۱.۷. عمل تفریق به‌صورت عکس عمـل جمع تعریف می‌شود، یعنـی منظور از $\beta-\alpha$، تفاضل دوعددمختلط $\beta=c+di$ و $\alpha=a+bi$، عددمختلط γ است، به‌طوری که

$$\alpha+\gamma=\beta. \tag{۹}$$

عدد (۵) را به‌دوطرف (۹) می‌افزائیم وازحل آن برحسب γ به‌دست می‌آوریم

$$\gamma=\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)=(c-a)+(d-b)i. \tag{۱۰}$$

توجه کنید که منهای α که به‌وسیلهٔ (۵) تعریف شده است، دقیقاً تفاضل $0-\alpha$ است.

۱.۱.۸. عمل تقسیم نیز، عکس عمل ضرب تعریف می‌شود. فرض کنیم

$$\frac{1}{\alpha}\ (\alpha\neq 0)$$

(عکس عدد α) عدد γ باشد، به‌طوری که

$$\alpha\gamma=1.$$

لذا γ همان عددی است که با رابطهٔ (۷) داده شده است، زیرا برای این انتخاب γ

$$\alpha\gamma=\frac{1}{a^2+b^2}\alpha\bar{\alpha}=1.$$

β/α، خارج‌قسمت دوعدد مختلط $\beta=c+di$ و $\alpha=a+bi$ همانند فرمولی که درحساب حقیقی وجود دارد به‌صورت

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\beta \qquad (\alpha\neq 0),$$

تعریف می‌شود. بنابراین

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\bar{\alpha}\beta}{a^2+b^2}=\frac{(a-bi)(c+di)}{a^2+b^2}=\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}. \tag{۱۱}$$

از (۱۰) و (۱۱) آشکار است که اعداد $\beta-\alpha$ و β/α به‌طور یکتا تعریف شده‌اند.

۱.۱.۹. ازمقایسهٔ فرمولهای

$$(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di),$$
$$(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)(c-di)$$

با (۲) و (۳) می‌بینیم که مزدوج مختلط مجموع، یا مزدوج حاصلضرب دو عدد مختلط α و β برابر بـا مجموع، یـا حاصلضرب $\bar{\alpha}$ و $\bar{\beta}$، مزدوجهای α و β است، ویـا به‌صورت خلاصه‌تر

$$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta},\ \ \overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}.$$

چون اعمال تفریق وتقسیم، عکس اعمال جمع وضرب‌اند، بسهولت می‌توان دیدکـه نظیر روابط بالا برای تفاضل و تقسیم دوعدد مختلط نیزصحیح است، یعنی

$$\overline{\beta-\alpha}=\bar{\beta}-\bar{\alpha},\ \ \overline{\beta/\alpha}=\bar{\beta}/\bar{\alpha}.$$

معادله‌ای را درنظرمی‌گیریم که طرفین آن ازمجموع، تفاضل، حاصلضرب و خارج‌قسمت اعداد مختلط متعددی تشکیل شده‌اند. واضح است که اگرتمام اعداد مختلط موجود در دو طرف معادله، بـا مزدوجهای مختلطشان جایگزین شوند ، آنگاه معادله معتبر باقی می‌ماند. برای مثال

$$\frac{۱+i}{۱-i}=i,$$

نتیجه می‌دهد

$$\frac{۱-i}{۱+i}=-i,$$

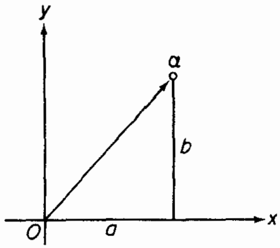
و برعکس.

۲.۱. صفحهٔ مختلط

۱.۲.۱. می‌توانیم هرعدد مفروض مختلط $\alpha=(a,b)$ را با یك نقطهٔ صفحه نمایش دهیم، نقطهٔ به‌مختصات قائم aوb (شکل۱را ببینید). هرنقطهٔ این‌صفحه‌که به‌صفحهٔ مختلط* موسوم است یك عدد مختلط را نمایش می‌دهد و برعکس. بـا توجه به‌این صفحهٔ مختلط، عبارتهای «عدد مختلط α» و «نقطه α» را به‌جای یکدیگر به‌کارخواهیم برد.

روشن است که هرنقطهٔ محور xها یك عدد حقیقی را نمایش می‌دهد، درحالی کـه هرنقطه ازمحور yها یك عدد موهومی محض را نمایش می‌دهد (به‌استثنای مبدأ مختصات

* یا صفحه z یا صفحه w یا ...، بسته به‌این که عدد مختلط در صفحه را بـا حرف z یا w یا ... نمایش دهیم.

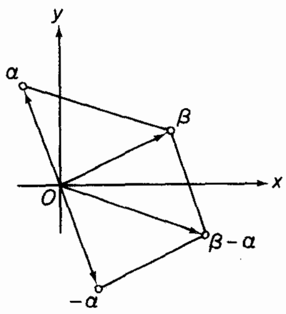


شکل ۱

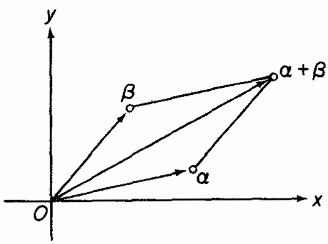
که عدد مختلط صفررا نشان می‌دهد). به‌این دلیل درصفحهٔ مختلط محور xها معمولاً محور حقیقی ومحور yها محور موهومی خوانده می‌شود.

۲۰۲۰۱ عدد مختلط $\alpha=(a, b)$ را همچنین می‌توان به‌وسیلهٔ یك بردار که ازمبدأ به α کشیده شده است مطابق شکل ۱ نمایش داد. قسمت حقیقی α، تصویـر بردار α روی محورحقیقی وقسمت موهومی آن، تصویر بردار α روی محور موهومی است.

۳۰۲۰۱ برای رسم هندسی مجموع دوعدد مختلط α و β، ابتــدا α و β را مطابق شکل ۲ با بردارهای متناظرشان نمایش می‌دهیم. از تعریف (۲) نتیجه می‌شود که‌مجموع $\alpha+\beta$ برداری است که مؤلفه‌هایش، مجمــوع مؤلفه‌های متناظر بردارهای α و β است، یعنی بردار $\alpha+\beta$ قطــرمتوازی‌الاضلاعی است کــه بردارهای α و β دو ضلع آن هستند (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۳



شکل ۲

همان‌طور که درشکل ۳ نشان داده شده است، برداری که تفاضل

$$\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$$

را نمایش می‌دهد از رسم مجموع بردارهای β و $-\alpha$ با روش «متوازی‌الاضلاع» مذکور در بالا به‌دست می‌آید.

۳.۱. قدر مطلق وآوند

۱.۳.۱. فرض می‌کنیم $\alpha=(a, b)$ نقطه‌ای ازصفحهٔ مختلط باشد. مقدار

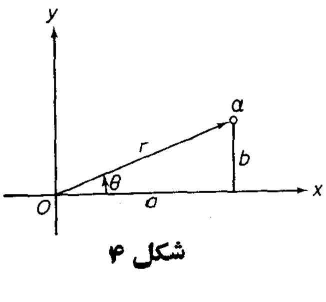
$$r=\sqrt{a^{2}+b^{2}}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}},$$

یعنی، فاصلهٔمبدأ تا α (یاطول بردار α) رامدول یا قدرمطلق α می‌نامیم وآن‌رابه‌صورت $|\alpha|$ نشان می‌دهیم. اگر α عددی حقیقی باشد، روشن است که مدول α به‌قدرمطلق معمولی α تبدیل می‌شود. مجموعهٔ تمام اعداد مختلطی که دارای قدرمطلق r هستند، بوضوح با دایره‌ای به‌شعاع r و به‌مرکز مبدأ نمایش داده می‌شود. عدد صفر تنها عدد مختلطی است که قدرمطلقش صفراست.

۲.۳.۱. حال α را به‌صورت یك بردار درصفحهٔ مختلط تصور می‌کنیم. θ، زاویهٔ بین بردار α وجهت مثبت محور xها، ویا دقیقتر بگوییم زاویه‌ای که محور اعداد حقیقی مثبت باید دوران کند تا درامتداد α قرارگیرد (اگر دوران خلاف جهت عقربهٔ ساعت باشد، θ مثبت ودرغیراین صورت منفی‌است) به‌آوند α موسوم است. آوند α رابه‌صورت $\arg \alpha$ نشان می‌دهیم*، واضح است که

$$\operatorname{tg} \theta=\frac{b}{a}$$

(شکل ۴ را ببینید). توجه کنیدکه صفرتنهاعدد مختلطی است که آوندش تعریف‌نشده‌است.



شکل ۴

۳.۳.۱. آوند هرعدد مختلط $\alpha \neq 0$ فقط با تقریب مضرب صحیحی از 2π تعریف شده است، و لذا مقادیر بیشماری دارد. چون r و θ مختصات قطبی نقطهٔ $\alpha=(a, b)$

* arg مخفف argument است وآوند اصطلاح فارسی آن است. ـم.

هستند، داریم

$$a=r\cos\theta, \qquad b=r\sin\theta,$$

نتیجه می‌شود که

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{۱۲}$$

رابطهٔ (۱۲) شکل مثلثاتی (یا قطبی) عدد مختلط α خوانده می‌شود.

۴.۳.۱ حاصلضرب دوعدد مختلط

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta), \qquad \beta=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

راکه به‌شکل مثلثاتی داده شده‌اند تشکیل می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$\alpha\beta=r\rho[(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)]$$
$$=r\rho[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)].$$

نتیجه می‌گیریم که

$$|\alpha\beta|=r\rho=|\alpha|\cdot|\beta|, \quad \arg(\alpha\beta)=\theta+\varphi=\arg\alpha+\arg\beta, \tag{۱۳}$$

یعنی، قدرمطلق حاصلضرب دوعدد مختلط، برابرحاصلضرب قدرمطلقهای‌آن دوعدد است، درحالی‌که آوند حاصلضرب دوعدد مختلط با مجموع آوندهای آن دوعدد برابر است.

پس، برداری که $\alpha\beta$ رانمایش می‌دهد به‌این‌طریق به‌دست می‌آیدکه بردارنمایشگر α را، به‌اندازهٔ $\arg\beta$ در خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت دوران دهیم وسپس آن را، درعدد $|\beta|$ ضرب کنیم*. اگر $|\beta|=۱$، ضرب به‌دوران صرف تبدیل می‌شود. برای مثال، ضرب در i، با دوران به‌اندازهٔ ۹۰°، و ضرب در -۱، با دوران به‌اندازهٔ ۱۸۰° متناظراست. اگر $\arg\beta=۰$ (یعنی اگر β عددی حقیقی ومثبت باشد)، عمل ضرب با یك تجانس محض متناظرمی‌شود.

۵.۳.۱ می‌توانیم بآسانی (۱۳) را به‌حالت حاصلضرب $\alpha\beta\ldots\lambda$، مرکب از هرتعداد ازعاملهای مختلط تعمیم دهیم. پس داریم

$$|\alpha\beta\ldots\lambda|=|\alpha|\,|\beta|\ldots|\lambda|,$$
$$\arg(\alpha\beta\ldots\lambda)=\arg\alpha+\arg\beta+\ldots+\arg\lambda,$$

ودرحالت خاص

$$|\alpha^n|=|\alpha|^n, \qquad \arg(\alpha^n)=n\arg\alpha. \tag{۱۴}$$

* در ارتباط با مقدار $|\beta|$، «تجانس» متناظر با انبساط است (اگر $|\beta|>۱$)، و با انقباض (اگر $|\beta|<۱$)، ویا هیچکدام (اگر $|\beta|=۱$).

می‌توانیم (۱۴) را به‌شکل زیر بنویسیم

$$[\mathrm{r}(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta), \qquad (۱۴')$$

این نتیجه به قضیهٔ دموآور معروف است.

۶.۳.۱. ریشه‌های مختلط. عدد مختلط زیرمفروض است

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

ریشهٔ nام α، $\sqrt[n]{\alpha}$، را به‌صورت عدد مختلطی تعریف می‌کنیم که وقتی به‌توان n برسد عدد α حاصل شود. واضح است که قدرمطلق $\sqrt[n]{\alpha}$ دقیقاً $\sqrt[n]{r}$ است و آوند آن مساوی

$$\frac{\theta+۲k\pi}{n}$$

است، که در آن k عددی صحیح است. اگر به k مقادیر ۰، ۱، ۲، ...، $n-۱$ نسبت‌دهیم، n مقدار متمایز برای آوند $\sqrt[n]{\alpha}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $\sqrt[n]{\alpha}$ فقط n مقدار متمایز زیررا دارد (چرا؟)

$$\sqrt[n]{\alpha}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+۲k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+۲k\pi}{n}\right) \quad (k=۰,\ ۱,\ \ldots,\ n-۱).$$

ازنظر هندسی، این n مقدار $\sqrt[n]{\alpha}$ با رئوس یك nضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt[n]{r}$ وبه‌مرکز مبدأ مختصات تطبیق می‌کند (شکل را رسم کنید).

۷.۳.۱. به‌موضوع خارج‌قسمت اعداد مختلط برمی‌گردیم. توجه می‌کنیم که

$$\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\beta \qquad (\beta\neq ۰),$$

وازآنجا با توجه به (۱۳)،

$$|\alpha|=\left|\frac{\alpha}{\beta}\right||\beta|,\ \arg\alpha=\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\arg\beta,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|},\ \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\arg\alpha-\arg\beta,$$

یعنی قدرمطلق خارج‌قسمت دو عدد مختلط، برابر با خارج‌قسمت قدرمطلقهای آنهاست،

درحالی‌که آوند خارج‌قسمت دو عدد مختلط، مساوی تفاضل آوندهای آن دو است. پس بردار نمایش α/β از دوران بردار α به‌اندازهٔ $\arg\beta-$، در خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت (یعنی به‌اندازهٔ زاویهٔ $\arg\beta$ درجهت حرکت عقربهٔ ساعت) وضرب بردار حاصل در $1/|\beta|$ به‌دست می‌آید.

۰۸۰۳۰۱ از شکل ۲ روشن است‌که قدرمطلق مجموع دو عدد مختلط، نمی‌تواند از مجموع قدرمطلقهای آن دو عدد بیشتر باشد. یعنی

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|. \tag{۱۵}$$

این نتیجهٔ مستقیمی است ازاین‌که درازای یك ضلع مثلث، نمی‌تواند ازمجموع درازای دوضلع دیگر بیشترباشد (تساوی درحالتی روی می‌دهدکه مثلث به‌یك قطعه خط راست تبدیل شود). اگر در «نامساوی مثلثی» (۱۵) عدد $\beta-\alpha$ را جانشین β کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$|\beta|=|\alpha+(\beta-\alpha)|\leqslant|\alpha|+|\beta-\alpha|,$$

ویا معادل آن

$$|\beta-\alpha|\geqslant|\beta|-|\alpha|. \tag{۱۶}$$

بعلاوه، با تعویض β و α در (۱۶)، داریم

$$|\alpha-\beta|\geqslant|\alpha|-|\beta|. \tag{۱۶'}$$

چون واضح است‌که $|\beta-\alpha|=|\alpha-\beta|$، می‌توانیم (۱۶) و ('۱۶) را دریك‌نامساوی ساده ادغام‌کنیم

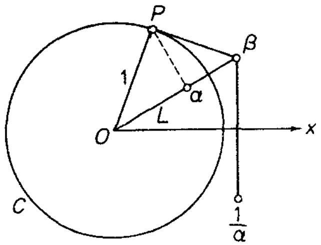
$$|\alpha-\beta|\geqslant\big|\,|\alpha|-|\beta|\,\big|. \tag{۱۷}$$

۴.۱ . انعکاس

۰۱۰۴۰۱ نقطهٔ α درصفحهٔ مختلط مفروض است، اکنون نقطه‌ای که عدد مختلط $1/\overline{\alpha}$ را نمایش می‌دهد رسم می‌کنیم. اگر $|\alpha|>1$، رسم نقطهٔ مزبور را می‌توان با فرایند زیرکه به انعکاس معروف است انجام داد (شکل ۵ را ببینید):

۱) رسم دایرهٔ C به‌مرکز مبدأ O وبه‌شعاع ۱؛
۲) رسم خط L که نقطهٔ O را به α وصل می‌کند؛
۳) اخراج عمودی بر L ازنقطهٔ α تا دایرهٔ C را درنقطهٔ P قطع کند؛
۴) رسم مماس بردایرهٔ C درنقطهٔ P تا L را درنقطهٔ β قطع نماید.

بنابراین، نقطهٔ β، نقطهٔ موردنظر، یعنی $1/\overline{\alpha}$ است. زیرا بررسی مثلث $OP\beta$ نشان می‌دهدکه



شکل ۵

$$\frac{|\beta|}{۱}=\frac{۱}{|\alpha|}\cdot$$

اما

$$\left|\frac{1}{\bar{\alpha}}\right|=\frac{۱}{|\bar{\alpha}|}=\frac{۱}{|\alpha|},$$

از طرف دیگر واضح است که

$$\arg\beta=\arg\alpha$$

و توجه داریم که

$$\arg\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)=-\arg\bar{\alpha}=\arg\alpha\cdot$$

دو نقطهٔ α و β را نسبت به دایرهٔ C* متقارن می‌گویند. توجه کنید که وقتی نقطهٔ

$$\beta=\frac{1}{\bar{\alpha}}$$

تعیین شد، فقط با رسم قرینهٔ آن نسبت به محور حقیقی،

$$\bar{\beta}=\frac{1}{\alpha}$$

به‌دست می‌آید (شکل ۵ را ببینید).

۱.۴.۲.۰ اگر همین ترسیم به‌جای دایرهٔ C، با دایرهٔ C_R به‌شعاع R و به‌مرکز مبدأ O به‌عمل آید، نقطهٔ

---

* رسم β درحالات $|\alpha|>۱$ و $|\alpha|=۱$ به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود (وقتی $|\alpha|>۱$، ابتدا مماس را رسم کنید).

$$\beta=\frac{R^{2}}{\overline{\alpha}}$$

به‌دست می‌آید. دراین حالت نیز، نقاط α و β را نسبت به‌دایرهٔ C_R متقارن می‌گویند. پس دونقطهٔ α و β را، نسبت به‌دایرهٔ C_R متقارن می‌نامند، اگر وفقط اگرروی یك شعاع مرسوم از O باشند، و

$$|\alpha|\,|\beta|=R^{2}.$$

چند توضیح

۱۰۱. قواعد اعمال جبری روی اعداد مختلط $\alpha=(a, b)$ و $\beta=(c, d)$ و ...، دقیقاً همان‌گونه به‌دست می‌آیند که α، β، ... را دوجمله‌ایهایی به‌شکل $a+bi$، $c+di$، ... از یکهٔ موهومی $i=\sqrt{-1}$ (مسئلهٔ ۱) تصور کنیم. واضح است که $\pm i$ جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2}+1=0$ است که برای مقادیر حقیقی x جواب ندارد. البته جالب توجه است که وقتی اعداد مختلط به‌شکل $z=x+iy$ (x و y حقیقی) را پذیرفتیم، هر معادلهٔ جبری

$$a_{0}+a_{1}z+\cdots+a_{n}z^{n}=0$$

با ضرایب حقیقی (یا دراین مورد مختلط) a_0، a_1، ...، a_n، یك ریشه، و درواقع n ریشه دارد! این محتوای قضیهٔ مشهوری به نام «قضیهٔ اساسی جبر» است (قضیهٔ ۳.۲.۱۲).

۲۰۱. توجه کنید که یك تناظریك به‌یك، بین‌مجموعهٔ تمام اعداد مختلط C ومجموعهٔ تمام نقاط صفحه ویا به‌عبارت دیگر بین C ومجموعهٔ تمام بردارهای صفحه وجود دارد. همچنین توجه کنید که قرینهٔ نقطه (یا برداری) که عدد مختلط α را نمایش می‌دهد، نسبت به‌محور حقیقی همان نقطه (یا برداری) است که عدد مزدوج مختلط $\overline{\alpha}$ را نمایش می‌دهد.

۳۰۱. همان‌طورکه درمسائلی به‌کاربردن مختصات قطبی مناسبتر از مختصات قائم است، به‌همین طریق نیزاغلب مشخص کردن یك عدد مختلط با قدرمطلق وآوندش، مفیدتر از بیان آن به‌وسیلهٔ قسمتهای حقیقی وموهومی آن است. فیزیکدانان نیز برای تعیین‌بردار، امتداد واندازه را بیشتر از مؤلفه‌های آن به‌کار می‌برند.

۴۰۱. دربخش ۷.۲.۸، درجایی که تبدیلهایی از صفحهٔ مختلط را بررسی می‌کنیم که نقاط متقارن نسبت به‌یك دایره را به‌نقاط متقارن نسبت به‌دایرهٔ دیگر می‌برند، مفید‌بودن عمل انعکاس بیشترظاهرخواهد شد.

مسائل

۱. ثابت کنید که نتیجهٔ هرعمل جبری روی اعداد مختلط $a+bi$، $c+di$،... را می‌توان به این ترتیب به دست آورد که درعمل، $a+bi$، $c+di$،... را دو جمله‌ایهایی از مجهول i درنظربگیریم و برای حذف توانهای بیش‌ازیك i، قاعدهٔ

$$i^{2}=-1, \quad i^{3}=-i, \quad i^{4}=1, \quad i^{5}=i, \ldots$$

را به‌کار بریم.

۲. اعداد مختلطی را پیدا کنید که مزدوجهای مختلط آنها
الف) مربع خودشان باشند؛ ب) مکعب خودشان باشند.

۳. مقادیر زیر را حساب کنید:

الف) $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$؛ ب) $\dfrac{(1+2i)^{3}-(1-i)^{3}}{(3+2i)^{3}-(2+i)^{2}}$؛

ج) $\dfrac{(1-i)^{5}-1}{(1+i)^{5}+1}$؛ د) $\dfrac{(1+i)^{9}}{(1-i)^{7}}$.

۴. مطلوب است مکان هندسی نقاط $z=x+iy$، به قسمی که $|z|+\operatorname{Re} z\leqslant 1$.

۵. نقاط $z=x+iy$ را طوری بیابید که

الف) $|z|\leqslant 2$؛ ب) $\operatorname{Im} z>0$؛ ج) $\operatorname{Re} z\leqslant \frac{1}{2}$؛ د) $\operatorname{Re}(z^{2})=a$؛

ه) $|z^{2}-1|=a$؛ و) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$؛ ز) $\left|\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}\right|=1$.

۶. اعداد مختلط زیر را به‌شکل مثلثاتی نمایش دهید:

الف) $1+i$؛ ب) $-1+i$؛ ج) $-1-i$؛ د) $1-i$؛

ه) $1+\sqrt{3}i$؛ و) $-1+\sqrt{3}i$؛ ز) $-1-\sqrt{3}i$؛

ح) $1-\sqrt{3}i$؛ ط) $\sqrt{3}-i$؛ ی) $2+\sqrt{3}+i$.

۷. باتکرارکاربرد نامساوی (۱۵)، ثابت کنید که برای اعداد مختلط اختیاری z_{1}، z_{2}،...،z_{n} داریم

$$|z_{1}+z_{2}+\cdots+z_{n}|\leqslant|z_{1}|+|z_{2}|+\cdots+|z_{n}|.$$

۸. اتحاد زیررا ثابت کنید

$$|z_{1}+z_{2}|^{2}+|z_{1}-z_{2}|^{2}=2(|z_{1}|^{2}+|z_{2}|^{2}),$$

وآن را از نظر هندسی تعبیر نمایید.

۹. چه موقع سه نقطهٔ z_1، z_2، z_3 بریك خط راست قراردارند؟

۱۰. فرض می‌کنیم σ پاره خط واصل دونقطهٔ z_1 و z_2 باشد. نقطه‌ای بیابیدکه σ را به نسبت $\lambda_1:\lambda_2$ تقسیم کند.

۱۱. z_1، z_2، z_3 سه رأس متوالی یك متوازی‌الاضلاع‌اند. رأس چهارم z_4 (رو به روی z_2) را پیدا کنید.

۱۲. نشان دهید که مرکز ثقل یك دستگاه نقاط مادی با جرمهای m_1، m_2،...، m_n که در نقاط z_1، z_2،...، z_n قرار دارند، برنقطهٔ

$$z=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

واقع است.

۱۳. سه نقطهٔ z_1، z_2، z_3 درشرایط زیر صادق‌اند

$$z_1+z_2+z_3=0,\quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=1.$$

نشان دهید که این نقاط رأسهای یك مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ واحد $|z|=1$ هستند.

۱۴. چهار نقطهٔ z_1، z_2، z_3، z_4 درشرایط زیر صادق‌اند

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,\quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1.$$

نشان دهیدکه یا این نقاط رأسهای مربع محاط در دایرهٔ واحدند، و یا دوبه دو برهم منطبق‌اند.

۱۵. مقادیر زیر را حساب کنید:

الف) $(1+i)^{25}$؛ ب) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{30}$؛ ج) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$؛

د) $\frac{(-1+\sqrt{3}i)^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-\sqrt{3}i)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

۱۶. با استفاده ازقضیهٔ دمواور، $\cos nx$ و $\sin nx$ را برحسب قوای $\sin x$ و $\cos x$ بیان کنید.

۱۷. $\tan 6x$ را برحسب $\tan x$ بیان کنید.

۱۸. مقدار $\sqrt{1+i}$ را به‌صورت مثلثاتی بنویسید.

۱۹. اگر $x+yi=\sqrt{a+bi}$ باشد x و y را بیابید.

۲۰. تمام مقادیر ریشه‌های زیر را بیابید:

الف) $\sqrt[3]{1}$؛ ب) $\sqrt[3]{i}$؛ ج) $\sqrt[4]{-1}$؛ د) $\sqrt[6]{-8}$؛ ه) $\sqrt[8]{1}$؛
و) $\sqrt{3+4i}$؛ ز) $\sqrt[3]{-2+2i}$؛ ح) $\sqrt[5]{-4+3i}$؛
ط) $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$؛ ی) $\sqrt[8]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

۲۱. ثابت کنید که مجموع تمام ریشه‌های n ام متمایز عدد یك، برابر صفر است. این رابطه کدام واقعیت هندسی را بیان می‌کند؟

۲۲. فرض کنید ε یکی از ریشه‌های n ام عدد واحد به غیر از یك باشد، ثابت کنید که

$$1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1}=\frac{n}{\varepsilon-1}\cdot$$

۲۳. ثابت کنید هرعدد مختلط $\alpha\neq -1$ به قدر مطلق واحد را می‌توان به‌صورت

$$\alpha=\frac{1+it}{1-it}$$

نمایش داد، که در آن t عددی حقیقی است.

۲۴. بایك استدلال هندسی محض، ثابت کنید که

$$|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|.$$

۲۵. ثابت کنید که معادلهٔ هردایره ویا هرخط راست را درصفحهٔ مختلط z می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0 \qquad (A \text{ و } D \text{ حقیقی‌اند})$$

که دایره است اگر $A\neq 0$، $E\bar{E}-AD>0$، وخط راست است اگر $A=0$، $E\neq 0$.

۲

حد در صفحهٔ مختلط

۱.۲ . اصل مستطیلهای تودرتو

۱.۱.۲ . درفصل اول اعداد مختلط را معرفی وعملیات مربوط به آنهارا تعریف کردیم، حال یك عمل اساسی آنالیز مختلط، یعنی حدگیری در صفحهٔ مختلط را بررسی می‌کنیم. مطلب را با اثبات یك قضیهٔ آنالیز حقیقی که با آن آشنایی دارید آغاز می‌کنیم:

قضیه (اصل فاصله‌های تودرتو). فرض کنید ... ,i_n ,... ,i_2 ,i_1 دنباله‌ای از فاصله‌های بسته روی خط حقیقی باشند به‌طوری‌که

۱) فاصله‌ها «تودرتو» باشند، یعنی، به‌ازای هر n، i_n شامل i_{n+1} باشد؛
۲) درازای i_n به‌صفر میل کند وقتی‌که $n \to \infty$.

آنگاه یك وفقط یك نقطهٔ a وجود دارد که به‌همهٔ این فاصله‌ها متعلق است.

برهان. فرض کنید که $i_n = [a_n, b_n]$ و E مجموعهٔ تمام اعداد ... ,$a_1, a_2, \ldots, a_n$ باشد. چون فاصله‌ها تودرتو هستند، به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت k، وبرای تمام مقادیر ... ,$n = 1, 2$ داریم $a_n \leqslant b_k$ («هر b_k یك کران بالای E است»). فرض کنید a کوچکترین کران بالای E باشد از این فرض نتیجه می‌شود که به‌ازای هر... ,$n = 1, 2$، $a_n \leqslant a$.*

* وجود a ازکمال دستگاه اعداد حقیقی نتیجه می‌شود («هرمجموعهٔ اعداد حقیقی که از بالا
←

پس a باید به‌همهٔ فاصله‌های I_n تعلق داشته باشد، زیرا درغیراین‌صورت a باید از یك b_k بزرگتر باشد، و این غیرممکن است. یکتایی a بدیهی است، زیـرا اگردونقطهٔ a و a' به‌همهٔ فاصله‌ها متعلق باشند (شکل ۶ را ببینید)، درازای هیچ یك از I_nهـا نمی‌تواند از فاصلهٔ بین a و a' کمترباشد، واین باشرط ۲ مغایراست. □ *

شکل ۶

۲۰۱۰۲. قضیهٔ فوق بسادگی برای اعداد مختلط تعمیم داده می‌شود:

قضیه (اصل مستطیلهای تودرتو). فرض‌کنید... $r_1, r_2, \ldots, r_n$... دنباله‌ای‌ازمستطیلهای صفحهٔ مختلط به‌اضلاع موازی با محورهای مختصات باشند، به‌طوری که:

۱) مستطیلها «تودرتو» باشند، یعنی، به‌ازای هرمقدار n، r_n شامل r_{n+1} باشد؛

۲) درازای قطر r_n وقتی $n \to \infty$، به‌صفر میل‌کند.

آنگاه یك وفقط یك نقطهٔ a وجود دارد که متعلق به‌همهٔ مستطیلهاست.

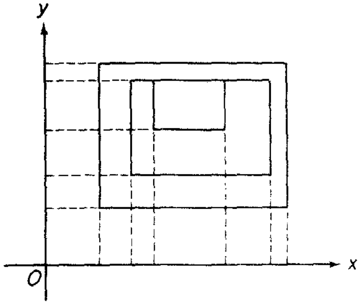
برهان. دودنبالهٔ ... $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ و ... $j_1, j_2, \ldots j_n, \ldots$ ازفاصله‌های بستهٔ تودرتو راکه بترتیب از تصویر مستطیلهای تودرتوی ... $r_1, r_2, \ldots, r_n,$ روی محورهای‌حقیقی وموهومی به‌دست‌می‌آیند، درنظرمی‌گیریم (شکل۷ را ببینید). چـون درازای قطر r_n وقتی $n \to \infty$، به‌صفرمیل می‌کند، درازای فاصله‌های i_n و j_n نیز به‌صفـرمیل می‌کنند. طبـق قضیهٔ ۱.۱.۲** یك نقطهٔ یکتای a روی محور حقیقی هست که به همهٔ فاصله‌های i_n متعلق است وهمچنین یك نقطهٔ یکتای b از محور موهومی هست کـه به‌همهٔ فاصله‌های j_n متعلق است. واضح است که نقطهٔ $\alpha = a + bi$ به‌تمام مستطیلهای r_n تعلق دارد. یکتایی α بدیهی است، زیرا اگر دونقطهٔ α و α' متعلق به‌همهٔ مستطیلها باشند، درازای قطرهر r_n نمی‌تواند ازفاصلهٔ بین α و α' کمترباشد، واین با شرط (۲) تناقض دارد. □

کراندار باشد، کوچکترین‌کران بالا دارد»). مثلاً کتاب زیررا ببینید:

R. A. silverman, *Modern Calculus and Analytic Geometry*, The Macmillan Company, New York (1969). Theorem 2.11.

* نماد □ پایان برهان را مشخص می‌کند.

** منظور از قضیهٔ ۱.۱.۲ ارجاع به قضیهٔ (یکتایی) قسمت ۱.۱.۲ و مثال ۳.۲.۲ب ارجاع به‌مثالی است‌که درقسمت ۳.۲.۲ ب آمده است وما نند اینها.



شکل ۷

۲.۲. نقاط حدی

۱.۲.۲. تعریف. عدد مختلط α را نقطهٔ حدی دنبالهٔ نامتناهی اعداد مختلط

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \qquad (1)$$

گویند، اگر برای $0 < \epsilon$ مفروض (هر اندازه کوچك فرض‌شده باشد) نامساوی $|z_n - \alpha| < \epsilon$ به‌ازای بینهایت مقدار n برقرار باشد.*

۲.۲.۲. منظور از همسایگی نقطهٔ α درصفحهٔ مختلط، هر قرص (گرد) $|z-\alpha| < \epsilon$ به‌شعاع ϵ و به مرکز α است. پس اگر اعداد (۱) را بـا نقاطی از صفحهٔ مختلط نمایش دهیم[1]، می‌بینیم که α نقطهٔ حدی دنباله (۱) است اگروفقط اگر هرهمسایگی α شامل بینهایت جملهٔ (۱) باشد.

۳.۲.۲. چند مثال

الف. یك نقطهٔ صفحهٔ مختلط ممکن است با چند یا حتی تعداد بینهایت جملهٔ متمایز دنبالهٔ (۱) متناظر باشد. مثلاً دنبالهٔ

$$1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \dots$$

دارای نقطهٔ حدی یکتای ۰ است[2].

---

* (۱) را اجمالاً دنبالهٔ (مختلط) می‌گوییم بدون ذکر اینکه دنباله نامتناهی است در بخش ۱.۱.۳ خواهیم دید که دنباله، تابع مختلطی است که حوزهٔ تعریف آن مجموعهٔ تمام اعداد صحیح ومثبت ... ,۲ ,۱ $= n$ است. همچنین وقتی می‌گوییم «دنبالهٔ z_n» منظور دنبالهٔ (۱) است که «جملهٔ عمومی» آن z_n است.

۱. اعداد (یا نقاط) دنباله را جمله‌های دنباله نیز می‌گویند.ـ م.

۲. دراین مثال جمله‌های زوج دنباله با نقطهٔ ۰ متناظر است. یا به‌عبارت دیگر مقدار جمله‌های زوج دنباله صفر است.ـ م.

ب. دنبالهٔ

$$۱, ۲, ۳, \ldots, n, \ldots$$

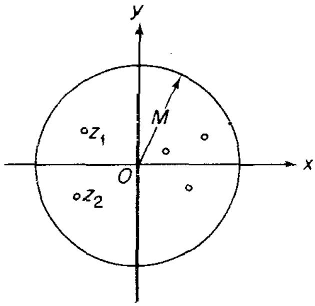
هیچ نقطهٔ حدی ندارد.

ج. دنبالهٔ

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۴}{۵}, \ldots$$

دارای دونقطهٔ حدی ۱ و ۰ است که اولی متعلق به دنباله است ودومی به‌آن تعلق ندارد.

۴.۲.۲. تعریف. دنبالهٔ مختلط z_n را کراندار گویند هرگاه قدرمطلق هرجملهٔ دنباله از عدد مثبتی مانند M کوچکتر باشد، یعنی، اگر به‌ازای هر n، $|z_n|<M$*؛ در غیر این صورت دنباله را بیکران گویند. از نظر هندسی بدین معناست که هرجملهٔ یك دنبالهٔ کراندار در داخل دایره‌ای به‌شعاع M و به مرکز مبدأ مختصات واقع است (اگر M به قدر کافی بزرگ باشد). (شکل۸ را ببینید).



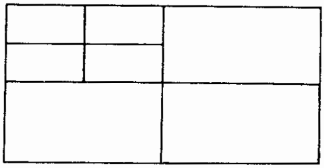
شکل ۸

۵.۲.۲. مثال ۳.۲.۲ ب، نشان می‌دهد که دنبالهٔ مختلط بیکران ممکن است که نقطهٔ حدی‌نداشته باشد. درزیر نشان می‌دهیم که اگردنباله کراندارباشد این‌حالت روی‌نمی‌دهد.

قضیه (بولتسانو–وایرشتراس). هردنبالهٔ مختلط کراندار z_n حداقل یك نقطهٔ حدی دارد.

* آشکارا می‌توانیم بدون اینکه مفهوم کراندار بودن را عوض‌کنیم، $|z_n|\leqslant M$ را به جای $|z_n|<M$ بنویسیم.

برهان. هرجملهٔ دنبالهٔ z_n در داخل مستطیلی مانند r_1 با اضلاعی موازی محورهای مختصات واقع است (چرا؟). اضلاع r_1 را نصف و اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می‌کنیم، r_1 به‌چهار زیرمستطیل برابرافراز می‌شود (شکل ۹ را ببینید). حداقل یکی از این چهار مستطیل، که آن را r_2 می‌نامیم شامل بینهایت جملهٔ دنبالهٔ z_n است، زیرا در غیراین‌صورت مستطیل r_1 فقط شامل تعدادمتناهی ازجملات دنباله می‌شود که بافرض‌تناقض دارد. مجدداً r_2 را به‌همین طریق به‌چهار زیر مستطیل مساوی تقسیم می‌کنیم، حداقل یکی از مستطیلهای اخیر که آن را r_3 می‌نامیم شامل بینهایت جملهٔ دنباله است. این فرایند را به‌طور نامحدود ادامه می‌دهیم، دنباله‌ای نامتناهی از مستطیلهای $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ حاصل می‌شودکه درشرایط قضیهٔ ۲.۱.۲ صدق می‌کند، وتعدادی بینهایت جمله ازدنبالهٔ



شکل ۹

مختلط مفروض z_n به هر r_n متعلق است*. ازقضیهٔ ۲.۱.۲ نتیجه می‌شودکه یك نقطهٔ یکتای α وجود داردکه متعلق به‌همهٔ مستطیلهای r_n است. آشکار است‌که α نقطهٔ حدی دنبالهٔ z_n است: برای هر $\epsilon>0$، قرص k به‌شعاع ϵ وبه‌مرکز α را درنظربگیرید، اگر n به‌قدرکافی بزرگ باشد واضح است که r_n در k واقع است ولی r_n شامل تعدادی بینهایت جملهٔ دنبالهٔ z_n است، بنابراین k نیزشامل بینهایت جمله ازدنبالهٔ z_n است. □

۳.۲. دنباله‌های مختلط همگرا

۱.۳.۲. تعریف. می‌گوییم دنبالهٔ مختلط z_n همگرا و حدش α است (یا به حد α همگراست، یا به α همگراست) ومی‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\alpha \tag{۲}$$

یا می‌نویسیم وقتی $n\to\infty$، $z_n\to\alpha$، اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض[1] (هراندازه کوچك

* باز توجه داریم که تعدادی (شاید بینهایت) جمله از دنبالهٔ z_n ممکن است با نقطه‌ای از صفحهٔ مختلط متناظر باشند.

۱. به‌جای عبارت «به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض» اغلب گفته می‌شود «به‌ازای هر $\epsilon>0$». هریك ازاین دوعبارت را به‌کار بریم، چون مقید نیستیم که ϵ بزرگ یا کوچك باشد، می‌توانیم ϵ را هراندازه کوچك فرض‌کنیم وجملهٔ داخل پرانتز تأکیدی بجا براین حقیقت است. ـ م.

فرض شده باشد)، عددی صحیح مانند $N=N(\epsilon)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n>N$ داشته باشیم $|z_n-\alpha|<\epsilon$. تعبیرهندسی (۲) این است که هرهمسایگی α شامل همهٔ جمله‌های z_n، جزچندجمله به‌تعدادی متناهی، است[1].

۲.۳.۲. قضیه. دو دنبالهٔ z_n و z'_n داده شده‌اند، فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\alpha,\quad \lim_{n\to\infty} z'_n=\alpha',$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}(z_n\pm z'_n)=\alpha\pm\alpha',$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n z'_n=\alpha\alpha',$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{z'_n}=\frac{\alpha}{\alpha'},$$

به‌شرط اینکه در فرمول اخیر $\alpha'\neq 0$.

برهان. برهانها کاملاً نظیر برهانهای قضیهٔ نظیر درمورد دنباله‌های حقیقی است (بتفصیل قضیه را اثبات کنید).

۳.۳.۲. ارزش آزمون مهم همگرایی زیر دراین است که فقط جمله‌های دنبالهٔ z_n را به‌کار می‌گیرد وحد پیشنهادی z_n درآن مطرح نیست.

قضیه (محك همگرایی کوشی) دنبالهٔ مختلط z_n همگراست اگر و فقط اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$ عددصحیح $N=N(\epsilon)>0$ وجود داشته باشد، به‌طوری که به‌ازای هر $m, n>N$ داشته باشیم*

$$|z_m-z_n|<\epsilon$$

برهان. اگر $z_n\to\alpha$ وقتی $n\to\infty$، آنگاه به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض، یك عدد مثبت وصحیح N وجود دارد به‌طوری که $m, n>N$، نتیجه می‌دهد

$$|z_m-\alpha|<\frac{\epsilon}{2},\quad |z_n-\alpha|<\frac{\epsilon}{2}$$

بنابراین برای هر $m, n>N$،

---

۱. به‌عبارتی دیگر، تعداد جمله‌های z_n واقع درخارج هرهمسایگی α متناهی است. ـ م.

* یعنی هر وقت m و n هر دو از N بیشترند.

$$|z_m - z_n| = |(z_m - \alpha) + (\alpha - z_n)| \leqslant |z_m - \alpha| + |z_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon$$

برعکس، فرض کنید که دنبالهٔ z_n در محك همگرایی کـوشی صدق می‌کند. در این صورت با انتخاب مثلاً $\epsilon = ۱$ و $m_\circ > N(۱)$، همهٔ جمله‌های z_n، جـز تعدادی متناهی، درهمسایگی $|z - z_{m_\circ}| < ۱$ واقـع می‌شوند. بنابراین دنبالهٔ z_n کراندار است واز قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس نتیجه می‌شود که z_n یـك نقطهٔ حدی دارد. حـال N را $N(\epsilon/۲)$ بگیرید و $m_۱ > N$ را طوری انتخاب کنید که

$$|z_{m_۱} - \alpha| < \frac{\epsilon}{۲}$$

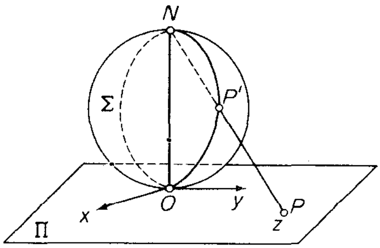
(عدد صحیح $m_۱$ وجـود دارد، زیرا هرهمسایگی α شامل تعدادی بینهایت نقطه از دنبالهٔ z_n است). اما دراین صورت برای هر $n > N$ داریم

$$\begin{aligned}|z_n - \alpha| &= |(z_n - z_{m_۱}) + (z_{m_۱} - \alpha)| \leqslant |z_n - z_{m_۱}| + |z_{m_۱} - \alpha| \\ &< \frac{\epsilon}{۲} + \frac{\epsilon}{۲} = \epsilon\end{aligned}$$

یعنی وقتی $n \to \infty$، $z_n \to \alpha$. □

۴.۲ کرهٔ ریمان وصفحهٔ مختلط گسترش‌یافته

۱.۴.۲ حال روشی را ارائه می‌دهیم که اعداد مختلط را به‌وسیلهٔ نقاط روی یـك کـره نشان می‌دهد. برای این منظور یـك کره برصفحهٔ مختلط Π در مبدأ مختصات مماس می‌کنیم وآن را Σ می‌نـامیم (شکل ۱۰ را ببینید). قطر Σ که از O می‌گذرد عمود بـر Π است و Σ را در N، که بـه‌دلیل واضحی قطب (شمال) نامیده می‌شود، قطع می‌کند*.



شکل ۱۰

* واضح است که قطب جنوب Σ مبدأ مختصات است.

فرض کنید که z عدد مختلط دلخواهی است که به‌وسیلهٔ نقطهٔ P واقع در Π نشان داده شده‌است، وفرض کنید که PN خط راستی‌است که نقطهٔ P را به‌قطب N وصل می‌کند. دراین صورت PN کرهٔ Σ را درنقطهٔ P' (متمایز از N) قطع می‌کند، که آن را به‌عنوان نمایش عدد مختلط مفروض z درنظرمی گیریم. پس بدین‌ترتیب هرعدد مختلط z، با یك‌نقطهٔ یکتای Σ نمایش داده می‌شود. برعکس، هرنقطهٔ Σ (بجز N)، مانند P'، با یك عدد مختلط یکتای z متناظراست: عددی که به‌وسیلهٔ نقطهٔ P محل تلاقی خط NP' با صفحهٔ Π نشان‌داده‌شده‌است. به‌این‌طریق تناظری یك به‌یك بین نقاط Σ (غیراز N) ونقاط صفحهٔ Π به‌وجود می‌آید، که درحقیقت تناظری یك به‌یك بین کرهٔ Σ (با حذف N) ومجموعهٔ تمام اعداد مختلط است.

۲.۴.۲. تعریف. می‌گوییم که دنبالهٔ مختلط z_n به بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\infty \tag{۳}$$

یا $z_n \to \infty$ وقتی $n \to \infty$، اگر به ازای هر $M>0$ (هراندازه بزرگ باشد) یك عدد صحیح $v=v(M)>0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $n>v$ داشته باشیم $|z_n|>M$. تعبیرهندسی (۳) این است که همهٔ جمله‌های دنبالهٔ z_n، جز تعدادی متناهی، در خارج هردایرهٔ (به‌طور دلخواه بزرگ) به‌مرکز مبدأ مختصات واقع‌اند.

۳.۴.۲. فرض کنید که z_n دنبالهٔ مختلطی باشد که به‌بینهایت میل می‌کند، و P'_n دنبالهٔ متناظر نقاط روی کرهٔ Σ، که دربالا ساخته شده باشد. آشکار است که P'_n به قطب N نزدیك می‌شود (این مطلب با دقتی بیشتر درمسئلهٔ ۱۶ آمده است). پس طبیعی است که N را متناظر به‌یك «نقطهٔ ایده‌آل» یکتا ازصفحه بگیریم. این نقطهٔ ایده‌آل را نقطهٔ بینهایت صفحهٔ مختلط می‌نامیم وآن را با نماد ∞ نشان می‌دهیم. صفحهٔ مختلط معمولی مجهز بااین نقطهٔ اضافی ∞ را صفحهٔ (مختلط) گسترش یافته می‌گویند. برای تأکید اینکه ∞ نقطه‌ای در صفحهٔ مختلط معمولی نیست، اغلب صفحهٔ مختلط معمولی را صفحهٔ (مختلط) متناهی می‌گوییم ونقاط آن (و اعداد مختلط متناظر) را نقاط واعداد متناهی می‌نامیم. کرهٔ Σ به‌انضمام نقطهٔ N را کرهٔ ریمان گویند، و نگاشتی که هم‌اکنون توضیح داده شد، و بویژه ∞ را به N می‌نگارد ونگاشت معکوس آن تصویر گنجنگاری نامیده می‌شود. بدین‌ترتیب می‌بینیم که تصویرگنجنگاری بین صفحهٔ مختلط گسترش یافته وکرهٔ ریمان تناظری یك به‌یك برقرارمی‌کند. نقاط P (یا z) و P' از شکل ۱۰ را نگاره‌های یکدیگر تحت تصویر گنجنگاری گویند.

۴.۴.۲. تبصره. E، خارج هردایرهٔ (به‌دلخواه بزرگ) به‌مرکز مبدأ مختصات را یك همسایگی بینهایت گویند اگرآن را مجموعه‌ای درصفحهٔ گسترش یافته (شامل ∞) فرض کنیم و همسایگی سفتهٔ بینهایت گویند اگر E را درصفحهٔ متناهی (که شامل ∞

نیست) فرض کنیم. با این تعریفها رابطهٔ (۳) بدین‌معنی است که هرهمسایگی (یا همسایگی سفته) بینهایت، تمام جمله‌های z_n جز چندجمله به‌تعدادی متناهی،را شامل است، و این کاملاً نظیر تعریف حد است وقتی حد دنباله متناهی است (بخش ۱.۳.۲ را ببینید).

چند توضیح

۱.۲. قضیهٔ ۱.۱.۲ و مشابه مختلط آن یعنی قضیهٔ ۲.۱.۲ نتایج مستقیم اصل کمال دستگاه اعداد حقیقی‌اند، و برای اثبات قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس (قضیهٔ ۵.۲.۲) به‌کار می‌روند. از قضیهٔ اخیرهم برای اثبات محک کلیدی همگرایی کوشی استفاده می‌شود (قضیه ۳.۳.۲).

۲.۲. می‌توان تصور کرد که نقطهٔ حدی یک مجموعهٔ نامتناهی نقطه‌ای است که به‌وسیلهٔ ابری متشکل از بینهایت نقطهٔ مجموعه احاطه شده است (مسئلهٔ ۲)، همین تصور برای نقطهٔ حدی یک دنباله درست است با این تفاوت که دراینجا «ابر» از بینهایت جملهٔ دنباله تشکیل شده است و درنتیجه تعداد نقاط متناظر به‌این بینهایت جمله ممکن است متناهی باشد. (به‌مثال ۳.۲.۲ الف مراجعه‌شود). طبق‌قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس،جمله‌های دنبالهٔ مختلط دراطراف حداقل یک نقطهٔ حدی تجمع می‌کنند مگراینکه قدرمطلق جملاتی از دنباله به‌دلخواه بزرگ باشند (دراین حالت این جمله‌ها «به‌بینهایت روی‌می‌آورند»). به‌عبارت دیگر، هیچ قسمت متناهی از صفحه نمی‌تواند ازجمله‌های یک دنباله تعدادی نامتناهی را درخود جای دهد بدون‌اینکه درآن حداقل یک نقطهٔ حدی جمله‌ها وجودداشته باشد.

۳.۲. می‌نویسیم $N=N(\epsilon)$، برای تأکید وابستگی عدد صحیح ومثبت N به‌عدد مثبت ϵ که از پیش تعیین شده است. حد خودبه‌خود یک نقطهٔ حدی است، زیرا تمام جمله‌های دنبالهٔ مفروض z_n، جزتعدادی متناهی، ودرنتیجه تعدادی نامتناهی از جمله‌های z_n را «به‌طرف خود می‌کشد». ازطرف دیگر نقطهٔ حدی لازم نیست یک‌حد باشد. درواقع دنبالهٔ مختلط z_n دارای حد (متناهی) α است اگر و فقط اگر z_n کراندار و α تنها نقطهٔ حدی دنباله باشد (مسئلهٔ ۴). بویژه دنباله‌ای با چند نقطهٔ حدی نمی‌تواند همگرا باشد. اگررعایت دقت نشود، بیان سادهٔ محک همگرایی کوشی این است که ردهٔ دنباله‌هایی که جمله‌های آنها (وقتی n به ∞ میل می‌کند) به‌نقطه‌ای نزدیک ونزدیکتر می‌شوند همان رده‌ای است که جمله‌های هردنبالهٔ آن به‌همدیگر نزدیک ونزدیکتر می‌شوند.

۴.۲. تذکارهای بخش ۴.۲ از این فکر که نقطهٔ ∞ را در ردیف اعداد معمولی متناهی مختلط قرار دهیم جلوگیری می‌کند. با توجه به‌این امر، ∞ را می‌توان به‌عنوان یک‌حد یا یک نقطهٔ‌حدی‌درنظر گرفت. دراین صورت‌درقضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس(۵.۲.۲)

می‌توان شرط کراندار بودن را حذف کرد (مسئلهٔ ۱۸) . می‌توان نشان* داد که تصویر گنجنگاری هردایرهٔ کرهٔ ریمان را به‌دایره‌ای (یا خط راستی) درصفحهٔ گسترش‌یافته تبدیل می‌کند، و برعکس.

مسائل

۱. تمام نقاط حدی دنباله‌های زیررا بیابید:

الف) $z_n = ۱+(-۱)^n \frac{n}{n+۱}$ ب) $z_n = ۱+i^n \frac{n}{n+۱}$

۲. نقطهٔ α را نقطهٔ حدی یك مجموعهٔ E از نقاط صفحهٔ مختلط (مقایسه کنید با نقطهٔ حدی دنبالهٔ z_n) گویند، اگر هرهمسایگی α شامل بینهایت نقطهٔ (متمایز) E باشد. نشان دهید که ممکن است α نقطهٔ حدی یك دنبالهٔ z_n باشد (به‌بخش ۱.۲.۲ رجوع کنید) بدون اینکه α نقطهٔ حدی مجموعهٔ E متشکل ازنقاط متناظر با جمله‌های z_n باشد. ثابت کنید که α نقطهٔ حدی یك مجموعهٔ E است، اگروفقط اگر یك دنبالهٔ z_n از نقاط متمایز مجموعهٔ E وجود داشته باشد که به α همگرا باشد. قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس را درمورد نقاط حدی مجموعه‌ها بیان کنید.

۳. نقاط حدی مجموعه‌های تمام نقاط z راکه در زیر تعریف شده‌اند، بیابید

الف) $z=\frac{۱}{m}+\frac{i}{n} \quad (m, n=\pm ۱, \pm ۲, \cdots),$

ب) $z=\frac{p}{m}+i\frac{q}{n} \quad (m, n, p, q=\pm ۱, \pm ۲, \cdots),$

ج) $|z|<۱.$

۴. ثابت کنید $z_n \to \alpha$ وقتی $n \to \infty$ اگروفقط اگر

الف) $|z_n-\alpha| \to ۰$، وقتی $n \to \infty$.

ب) z_n کراندار و α نقطهٔ حدی یکتای z_n باشد.

---

* مثلاً کتاب زیررا ببینید:

A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, in three volumes (translated by R. A. Silverman), Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs. N. J. (1965, 1967), Volume I, Sec. 21.

۵. ثابت کنید که دنبالهٔ مختلط $z_n = x_n + iy_n$ به‌حد $\alpha = a + ib$ همگراست اگر و فقط اگر

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

۶. ثابت کنید اگر $z_n \to \alpha$ وقتی $n \to \infty$، آنگاه $|z_n| \to |\alpha|$ وقتی $n \to \infty$.
نشان دهید که عکس این قضیه صحیح نیست.

۷. اگر $z_n \to \alpha \neq 0$ وقتی $n \to \infty$، و اگر θ یکی از مقادیر $\arg \alpha$ باشد ثابت کنید که دراین صورت یك دنبالهٔ θ_n، که در آن θ_n یکی از مقادیر $\arg z_n$ است، وجود دارد به‌طوری که $\theta_n \to \theta$ وقتی $n \to \infty$ (تعدادی متناهی از جملات z_n را که ممکن است صفر شوند، نادیده بگیرید).
توضیح این واقعیت با نوشتن رابطهٔ زیر نشان داده می‌شود.

$$\lim_{n \to \infty} \arg z_n = \arg \alpha$$

۸. منظور ما از مقدار اصلی آوند عدد z که آن را با $\arg_p z$ نشان می‌دهیم، مقدار (یکتای) $\arg z$ است که در نامساوی $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ صدق می‌کند. مثالی ارائه دهید که دنبالهٔ مختلط z_n به‌حد α همگراست و $\arg_p z_n$ همگرا نیست. نشان دهید که این تنها وقتی اتفاق می‌افتد که α مساوی صفر یا -1 باشد.

۹. فرض کنید که z_n دنبالهٔ مختلطی است به‌طوری که $|z_n| \to r$، $\arg_p z_n \to \theta$ وقتی $n \to \infty$. ثابت کنید که z_n به‌حد $\alpha = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ همگراست.

۱۰. ثابت کنید که اگر α یك نقطهٔ حدی دنبالهٔ z_n باشد، آنگاه z_n دارای یك زیر دنبالهٔ z_{k_n} است که به α همگراست.

۱۱. ثابت کنید که دنبالهٔ

$$z_n = \frac{q^n}{1 + q^{2n}}$$

درهردوحالت $|q| < 1$ و $|q| > 1$ به‌یك‌حد (که 0 است) همگراست.

۱۲. حد هریك از دنباله‌های زیر را، اگر وجود داشته باشد، پیدا کنید:

الف) $z_n = \dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{i^n}{2^n}$، ب) $z_n = \sqrt[n]{n} + inq^n \ (|q| < 1)$،

ج) $z_n = \sqrt[n]{a} + i \sin\dfrac{1}{n} \ (a > 0)$،

۱۳. ثابت کنید اگر $z_n \to \alpha$ وقتی $n \to \infty$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\alpha$$

۱۴. محک کوشی را که به‌صورتی کمی متفاوت درزیر آمده است، ثابت کنید:
دنبالهٔ مختلط z_n همگراست اگرو فقط اگر به ازای هر $\epsilon>0$ مفروض، یک عدد صحیح $N=N(\epsilon)>0$ وجود داشته‌باشد، به‌طوری که به‌ازای هر $n>N$ و $P=1, 2, \ldots$ رابطهٔ $|z_{n+p}-z_n|<\epsilon$ برقرار باشد.

۱۵. ثابت کنید که دنبالهٔ مختلط z_n به‌بینهایت میل می‌کند اگروفقط اگر z_n دنبالهٔ کراندار نباشد و نقطهٔ حدی متناهی‌نداشته‌باشد.

۱۶. منظوراز همسایگی قطب N روی کرهٔ ریمان Σ، نگارهٔ یک همسایگی بینهایت به وسیلهٔ تصویر گنجنگاری در صفحهٔ مختلط گسترش یافته است. این همسایگی را به صورت هندسی تعبیر کنید. یک دنبالهٔ z_n از نقاط صفحهٔ متناهی را در نظر بگیرید، فرض کنید که P'_n دنبالهٔ نقاط متناظر روی Σ باشد، ثابت کنید $z_n \to \infty$ وقتی $n\to\infty$، اگرو فقط اگر $P'_n \to N$ وقتی $n\to\infty$. یعنی اگر و فقط اگر هر همسایگی N تمام جمله‌های دنباله P'_n، جز تعدادی متناهی، را شامل باشد.

۱۷. مثالی بیاورید از دنبالهٔ بیکران که به ∞ میل نمی‌کند.

۱۸. ثابت کنید که هرمجموعهٔ نامتناهی، کراندار یا بیکران، حداقل دارای یک نقطهٔ حدی درصفحهٔ مختلط گسترش یافته است.

۱۹. فرض کنید که $z_n \to \infty$ وقتی $n\to\infty$. دربارهٔ $Re\, z_n$، $\mathrm{Im}\, z_n$، $|z_n|$، $\arg z_n$ چه می‌توان گفت؟

۲۰. مجموعه‌هایی از نقاط صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته را بیابید که نگاره‌های چهار نیمکره (شمالی، جنوبی، شرقی وغربی) از کرهٔ ریمان به‌وسیلهٔ تصویر گنجنگاری باشند.

۲۱. چه خمی از کرهٔ ریمان، نگارهٔ یک خط راست از صفحهٔ گسترش‌یافته به‌وسیلهٔ تصویر گنجنگاری است؟

۲۲. آیا مسئلهٔ ۱۳ برای $\alpha=\infty$ درست است؟

۳

توابع مختلط

۳ . ۱ مفاهیم اساسی

۳ . ۱ . ۱ . تابعها و متغیرها. فرض می‌کنیم E مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد که می‌توانیم آن را به صورت مجموعه‌ای از نقاط، در صفحهٔ مختلط و یا روی کرهٔ ریمان تصور کنیم (در حالت اخیر، E ممکن است شامل قطب شمال کره که متناظر با نقطهٔ بینهایت است باشد). منظور ما از متغیر مختلط، عدد مختلط $z=x+iy$ است که می‌تواند هر مقدار از مجموعهٔ E را بپذیرد، و منظور از تابع (مختلط) w از متغیرz، قاعده‌ای است که به هر z متعلق به E یك عدد مختلط یکتای w را نسبت می‌دهد. در این صورت می‌نویسیم $w=f(z)$ و E را حوزهٔ (تعریف) تابع می‌خوانیم*. E'، مجموعهٔ تمام مقادیر w را که از تغییر z روی مجموعهٔ E به دست می‌آید، برد تابع $w=f(z)$ می‌نامیم. بدیهی است، E' را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از نقاط صفحهٔ مختلط، یا مجموعه‌ای از نقاط کرهٔ ریمان تصور کرد. پس w خود متغیری مختلط است که برای تمایز آن از متغیر مستقل z، متغیر وابسته خوانده می‌شود. توجه کنید که مشخص کردن تابع $w=f(z)$ معادل با تعیین نگاشتی از E به روی E' است، یعنی برقراری تناظری بین مجموعه‌های E و E' به قسمی که هر نقطهٔ z از E، به یك نقطهٔ یکتای w از E' برود

---

* به همین جهت می‌گوییم $f(z)$ در E (یا در هر زیر مجموعهٔ E) تعریف شده است.

(w را اغلب نگارهٔ z تحت این نگاشت می‌نامند).

۲.۱.۳. تبصره. اگر $w=u+iv$ تابعی از $z=x+iy$ باشد u و v دو تابع حقیقی ازمتغیرهای حقیقی x و y هستند. ازاین دیدکلی، تعیین یك تابع مختلط ازیك متغیر مختلط، معادل با معین‌کردن دوتابع حقیقی از دومتغیر حقیقی است.

۳.۱.۳. تابعهای یك مقداری و چند مقداری. همان‌طور که تعریف‌کردیم، تابع $w=f(z)$ یك مقداری است، با این مفهوم که درازای یك مقدار z در حوزهٔ تعریف E، فقط وفقط یك مقدار به w نسبت می‌دهد. گاهی اقتضا می‌کند که تعریف تابع را گسترش دهیم، تا تابع f به بعضی (یا تمام) مقادیر z، چند (یا حتی تعدادی نامتناهی) مقدار به w نسبت دهد. چنین توابعی را چند مقداری می‌نامیم. در هرصورت کلمهٔ «تابع» بدون توصیف دیگری، همواره به مفهوم «تابع یك مقداری» است.

۴.۱.۳. توابع معکوس. همیشه می‌توان نگاشت E برروی E' راکه‌به توسط یك تابع(یك‌مقداری) $w=f(z)$ مشخص‌شده، «درجهت‌معکوس»درنظرگرفت ویك تابع‌جدید $z=\varphi(w)$ راکه درحالت کلی چند مقداری است به دست آورد. این تابع هرنقطهٔ w از E' را به تمام نقاطی از E مانند z می‌بردکه نگارهٔ آنها تحت نگاشت اصلی $w=f(z)$، wی مفروض است. تابع $z=\varphi(w)$ را معکوس تابع $w=f(z)$ می‌خوانیم. توجه‌کنید که تابع $z=\varphi(w)$ یك مقداری است اگر وفقط اگر $f(z_1)\neq f(z_2)$ وقتی $z_1\neq z_2$، یعنی اگروفقط اگر $w=f(z)$ «نقاط‌متمایز E را به‌نقاط متمایز E' ببرد». دراین‌صورت تابع اصلی $w=f(z)$ و نگاشت متناظر آن، که از E به روی E' است، «یك به یك» خوانده می‌شود.

۵.۱.۳. مثال. تابع

$$w=|z|$$

تابعی یك‌مقداری است، اما معکوس‌آن‌تابعی چند مقداری است که هرنقطهٔ $w=c$ $(c>0)$ را به بینهایت نقطه (نقاط دایرهٔ $|z|=c$) می‌برد.

۲.۳. خمها وحوزه‌ها

۱.۲.۳. الف. فرض‌می‌کنیم $x(t)$ و$y(t)$ دوتابع‌حقیقی پیوسته باشندازمتغیرحقیقی tکه تمام مقادیر فاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ را اختیار می‌کند. آنگاه با معادلات پارامتری

$$x=x(t),\qquad y=y(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{1}$$

یك خم (پیوستهٔ) C مشخص می‌شود که ازهمهٔ نقاط $(x(t)\ ,\ y(t))$ با شرط $a\leqslant t\leqslant b$

به‌وجود می آید. اگر بنویسیم $z=x+iy$، $z(t)=x(t)+iy(t)$، می توانیم (۱) را به‌صورت یك تك‌معادلهٔ پارامتری مختلط زیردرآوریم

$$z=z(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b). \qquad (1')$$

وقتی پارامتر t از a تا b تغییر می‌کند نقطهٔ $z=z(t)$ خم C را از نقطهٔ آغازی $z(a)$ تا نقطهٔ پایانی $z(b)$ رسم می کند. به‌این طریق با ('۱) خم C به‌یك جهت طبیعی حرکت، که جهت مثبت C نام دارد مجهزمی‌شود. اگر نقطه‌های آغازی و پایانی خم برهم منطبق باشند، یعنی اگر $z(b)=z(a)$، خم C را بسته می‌خوانیم، در غیراین‌صورت اغلب C را یك کمان می گویند (تا تأکید شودکه بسته نیست).

ب. یك‌مجموعهٔ Eازنقاط صفحهٔ مختلط را (به‌طور کمانی) همبند می‌خوانیم اگر بتوانیم هردو نقطهٔ z_1 و z_2 از E را، به‌وسیلهٔ یك خم که تماماً در E جای دارد به‌هم‌وصل کنیم (z_1 نقطهٔ آغازی، و z_2، نقطهٔ پایانی است). پس استان‌اصفهان (به‌عنوان یك‌مجموعهٔ نقاط) همبند است، اما کشور ژاپن چنین نیست.

۲.۲.۳. الف. نقطهٔ z را نقطهٔداخلی یك مجموعهٔ مفروض E واقع درصفحهٔمختلط می گویند اگر E شامل یك همسایگی z باشد، یعنی اگر، E شامل z و هرنقطه‌ای باشد که به‌اندازهٔ کافی نزدیك به z است. به‌عنوان مثال، فرض می کنیم E مجموعهٔ نقاط بین دو دایرهٔ هم‌مرکز، به‌استثنای نقاط روی دو دایره باشد. آنگاه هرنقطهٔ E یك نقطهٔ داخلی(از E) است. اگر فرض کنیم که E شامل نقاط روی یك یا هردودایره باشد دیگرچنین‌نیست. مجموعهٔ E بازگفته می‌شود اگرتماماً از نقاط داخلی تشکیل شده باشد.

ب. یك مجموعهٔ G از صفحهٔ مختلط را حوزه گوییم اگر باز و همبند باشد*. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ نقاط بین دودایرهٔ هم‌مرکز، یك حوزه است، مشروط براینکه هیچ‌یك ازنقاط روی دو دایره را شامل نباشد.

ج. هماهنگ با بخش ۴.۲.۲، یك حوزهٔ G (یا عمومیتر، هر مجموعهٔ E در صفحهٔ مختلط) کراندارگفته می‌شود اگرتمام نقاطش درداریره‌ای به‌مرکز مبدأ و به‌شعاعی به‌اندازهٔ کافی بزرگ، قرار بگیرد؛ درغیراین‌صورت G را بیکران می گویند.

۳.۲.۳. الف. حوزهٔ G مفروض است، فرض می کنیم G^c متمم G، یعنی مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه که به G تعلق ندارند باشد. اگر z به G^c متعلق باشد، یا یکی از همسایگیهای z تماماً در G^c جای دارد و یا هرهمسایگی z شامل نقاطی‌از G^c و G است. درحالت اول z را یك نقطهٔ خارجی Gگویند، درحالت دوم z را یك نقطهٔ مرزی G می‌نامند. مجموعهٔ تمام نقاط مرزی G را مرز G می گویند. به‌استثنای صفحهٔ مختلط

* حوزه را اغلب باحرف G نشان‌می‌دهند (ازکلمهٔ آلمانی *Gebiet*)، درحالی که یك‌مجموعهٔ عمومی اغلب باحرف E نشان داده می‌شود (ازکلمه فرانسوی *ensemble*). نبایداصطلاح فعلی «حوزه» را با اصطلاح قبلی «حوزهٔ تعریف» اشتباه‌کرد.

گسترش‌یافته، هرحوزه‌ای یك مرز دارد. با این‌حال، حوزه‌هایی وجود دارندکه نقاط خارجی ندارند، به‌عنوان مثال، مجموعهٔ تمام نقاطی‌ازصفحه‌که متعلق به فاصلهٔ [۱ , ۱ −] محور حقیقی نیستند، ازاین‌گونه است.

ب. مجموعهٔ مرکب از حوزهٔ مفروض G و مرزش را، با $\overline{G}$ نشان می‌دهند. چنین مجموعه‌ای را یك حوزهٔ بسته می‌خوانند. به‌طورکلیتر $\overline{G}$ مجموعه‌ای فرض می‌شود که مرکب ازحوزهٔ G وبرخی (شاید تمام یا هیچ‌یك) ازنقاط مرزیش باشد. دراین صورت $\overline{G}$ را یك ناحیه می‌نامند. هرحوزهٔ باز G ویا حوزهٔ بستهٔ $\overline{G}$ یك ناحیه است، اما ناحیه‌هایی وجوددارند، نظیرمجموعهٔ تمام zها به‌قسمی‌که $1>|z|$ یا $z=1$ (حوزهٔ $|z|<1$ به‌علاوه نقطهٔ منفرد مرزی $z=1$)، که نه‌حوزهٔ بازند ونه حوزهٔ بسته. نقاط مرزی $\overline{G}$ همانند نقاط مرزی G تعریف می‌شوند، با این تفاوت‌که نقطهٔ مرزی $\overline{G}$ می‌تواند متعلق به $\overline{G}$ باشد. لذا معمولاً مرز $\overline{G}$ برمرز G منطبق است.

۳.۲.۴. الف. خم C با معادلهٔ $(1')$ داده شده است، فرض می‌کنیم مقادیرمتمایز t درفاصلهٔ نیم‌باز $a\leqslant t<b$، با نقاط‌متمایز C متناظرباشند. در این صورت C را یك خم ـ ژردان می‌نامند*. می‌توان نشان دادکه، هرخم بستهٔ ژردان C، صفحه را به‌دوحوزهٔ متمایز تقسیم می‌کندکه C مرزمشترك آنهاست، یکی‌ازدوحوزه‌که داخل C نامیده می‌شودکراندار است وحوزهٔ دیگرکه خارج C نام داردبیکران است**. بدون‌کاستن‌ازکلیت مطلب(چرا؟) می‌توان فرض‌کرد، جهت مثبت خم C طوری است‌که وقتی ناظری درطول C ودر جهت مثبت حرکت می‌کند، داخل C در طرف چپ اوواقع می‌شود (این‌جهت با پیمایش C در جهت خلاف عقربهٔ ساعت تطبیق می‌کند).

ب. اگرداخل یك خم بستهٔ ژردان، I باشد، آنگاه داخل هرخم بستهٔ (دیگر)ژردان Cکه واقع درI است، نیز درI قرار دارد (برای‌آن شکلی رسم‌کنید). هرحوزهٔ دلخواه Gکه این ویژگی راداشته باشد همبند ساده‌گفته می‌شود، درغیراین صورت همبندچندگانه نام دارد. به‌عنوان مثال اگرG خارج یك مثلث باشد، آنگاه G همبند چندگانه است،زیرا داخل یك‌خم بستهٔ ژردان‌که مثلث را دربرمی‌گیرد تماماً در G واقع نیست. همچنین حوزهٔ حلقه‌ای شکل یا حلقهٔ

$$r<|z|<R \tag{۲}$$

* برای اینکه بتوانیم C را بسته فرض‌کنیم درتعریف خم ژردان فاصلهٔ نیمه‌باز $a\leqslant t<b$ را به‌کاربردیم.

** برای اثبات این نتیجه‌که به قضیهٔ خم ژردان معروف است به‌عنوان مثال به‌کتاب
P. S. Aleksandrov *Combinatorial Topology*, vol 1 (H. Komm ترجمهٔ)
Graylock Press, Rochester, N. Y. (1965) chap. 2
رجوع‌کنید. دربیان معمولی، نقطه‌ای را داخل خم بستهٔ ژردان C می‌نامند که به‌داخل C متعلق باشد ونقطه‌ای را خارج Cگویندکه به‌خارج C متعلق باشد.

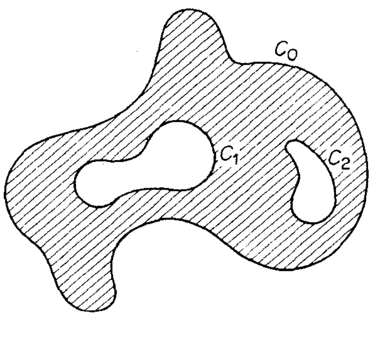
همبند چندگانه است، زیرا داخل هیچیك ازدایره‌های

$$|z|=\rho \quad (r<\rho<R)$$

را شامل نیست.

ج. ملاحظات بالا مربوط به‌صفحهٔ متناهی بود. درمورد صفحهٔ گسترش‌یافته، تعریف حوزهٔ همبند ساده را به‌صورت زیرتغییر می‌دهیم: یك حوزهٔ G را درصفحهٔ گسترش‌یافته همبند ساده می‌نامند، هرگاه هرخم مفروض بستهٔ ژردان C که در G است، داخل یاخارجش (شامل نقطهٔ بینهایت) نیز در G باشد. با این تعریف، خارج یك مثلث، حوزهٔ همبند ساده است اگرفرض کنیم نقطهٔ بینهایت را شامل است، درغیراین صورت همبند چندگانه است.

د. فرض می‌کنیم $C_\circ$، $C_\backslash$،...، C_n نمایش $n+\backslash$ خم ژردان بسته باشند به قسمی که خمهای $C_\backslash$ ، ... ، C_n تماماً داخل $C_\circ$ بوده، یکدیگر را قطع نکنند (به شکل ۱۱ رجوع کنید). آنگاه مجموعهٔ نقاطی که داخل‌خم $C_\circ$ وخارج n خم دیگر $C_\backslash$، ...، C_n هستند یك حوزهٔ G_n است (چرا؟). اگر $n=\circ$، یعنی‌ابداً «خمهای داخلی» وجود نداشته باشند، حوزهٔ $G_n=G_\circ$ همبند ساده‌ای است‌که داخل یك خم بستهٔ ژردان است. اگر $n>\circ$، بدیهی است که خمهای ژردان بسته‌ای در G_n وجود دارند (کدامها؟) که داخل آنها در G_n نیست. بنابراین G_n همبندچندگانه‌است. دقیقتربگوییم‌حوزهٔ G_n همبند $(n+\backslash)$گانه‌خوانده می‌شود، زیرا مرزش عبارت از $n+\backslash$ «جزء» مجزا (نامتقاطع) است، که همان خمهای $C_\circ$ ، $C_\backslash$، ...، C_n هستند. بنابراین حلقه، همبند دوگانه است (مرزش عبارت از دو دایرهٔ $|z|=r$ و $|z|=R$ است)، درحالی‌که حوزهٔ هاشورخورده‌ای‌که در شکل ۱۱ نشان داده شده است همبند سه‌گانه است.



شکل ۱۱

۳.۰۳ پیوستگی تابع مختلط

۱.۳.۰۳ الف. می‌گوییم تابع مختلط $f(z)$ که درحوزهٔ G تعریف شده است به‌حد

A میل می‌کند، وقتی که در حوزهٔ G نقطهٔ z به‌نقطهٔ $z_\circ$ میل می‌کند[1] ومی‌نویسیم

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z)=A,$$

یا $f(z)\to A$ وقتی $z\to z_\circ$، اگر برای هر $\epsilon>\circ$ مفروض، عدد $\delta=\delta(\epsilon)>\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر z که درشرط

$$\circ<|z-z_\circ|<\delta$$

صدق می‌کند، داشته باشیم

$$|f(z)-A|<\epsilon.$$

اگرعلاوه براین فرض کنیم $A=f(z_\circ)$ به‌قسمی که

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z)=f(z_\circ), \qquad (۳)$$

می‌گوییم که $f(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است.

ب. بنابراین $f(z)$ را در $z_\circ$ پیوسته گویند اگر برای هر $\epsilon>\circ$ مفروض، یك عدد $\delta=\delta(\epsilon)>\circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر z که در

$$|z-z_\circ|<\delta \qquad (۴)$$

صدق می‌کند*، داشته باشیم

$$|f(z)-f(z_\circ)|<\epsilon.$$

مفهوم هندسی آن، این‌است که اگرهمسایگی $z_\circ$، مانند $|z-z_\circ|<\delta$ به‌قدر کافی کوچك باشد، درهریك‌از نقاط z این‌همسایگی، مقادیر $w=f(z)$ درداخل یك همسایگی به‌دلخواه کوچك $w_\circ=f(z_\circ)$، مانند $|w-w_\circ|<\epsilon$، واقع می‌شوند.

ج. اگر $f(z)$ درهر نقطهٔ $z_\circ$ از حوزهٔ G پیوسته باشد، می‌گوییم که $f(z)$ در G پیوسته است.

۲.۳.۳. مثال. تابع

$$w=z^n \quad (n=۲,۳,\dots)$$

درتمام‌صفحهٔ‌متناهی پیوسته‌است. زیرا اگر بنویسیم $w_\circ=z_\circ^n$، که درآن $z_\circ$ نقطه‌ای متناهی است، داریم

---

۱. گاهی به جای «میل می‌کند» می‌گوییم «می‌گراید» بدون اینکه تمایزی بین‌گرائیدن و میل‌کردن قائل شویم.ـم.

* در اینجا قید $|z-z_\circ|>\circ$ یا معادل آن $z\neq z_\circ$ غیر ضروری است (چرا؟). همواره می‌توان‌نقاط z صادق در(۴) را، داخل G فرض‌کرد (اگرچنین نباشد، δ راکوچکترانتخاب می‌کنیم).

$$w-w_\circ=z^n-z_\circ^n=(z-z_\circ)(z^{n-۱}+z^{n-۲}z_\circ+\cdots+z_\circ^{n-۱})$$

به‌قسمی که

$$|w-w_\circ|=|z-z_\circ|\,|z^{n-۱}+z^{n-۲}z_\circ+\cdots+z_\circ^{n-۱}|$$
$$\leqslant|z-z_\circ|(r^{n-۱}+r^{n-۲}r_\circ+\cdots+r_\circ^{n-۱})$$

(به‌فصل ۱، مسئلهٔ ۷ رجوع کنید)، که در آن $r_\circ=|z_\circ|$، $r=|z|$. اما $|z-z_\circ|<\delta$ نتیجه می‌دهد

$$r=|z|=|z_\circ+(z-z_\circ)|\leqslant|z_\circ|+|z-z_\circ|<r_\circ+\delta$$

وازاین‌رو

$$|w-w_\circ|<|z-z_\circ|[(r_\circ+\delta)^{n-۱}+(r_\circ+\delta)^{n-۲}r_\circ+\cdots+r_\circ^{n-۱}]$$
$$<n\delta(r_\circ+\delta)^{n-۱}.$$

ازاین نتیجه می‌شود که $|w-w_\circ|$ با انتخاب مناسب δ ازهرعدد مثبت ϵ مفروض کوچکتر می‌شود. بنابراین تابع $w=z^n$ درهرنقطهٔ $z_\circ\neq\infty$ پیوسته است.

۳.۳.۳. چون پیوستگی برای توابع مختلط به‌همان صورتی تعریف می‌شود که برای توابع حقیقی تعریف شده است، اثبات قضایای آشنای مربوط به‌اعمال جبری، درتوابع پیوستهٔ حقیقی* را می‌توان برای توابع پیوستهٔ مختلط به‌کار برد. بنابراین اگر توابع $f(z)$ و $g(z)$ هردو درنقطهٔ $z_\circ$ پیوسته باشند، آنگاه توابع $f(z)\mp g(z)$، $f(z)\cdot g(z)$ و $f(z)/g(z)$ نیز پیوسته‌اند، به‌شرط آنکه درحالت تقسیم $g(z_\circ)\neq\circ$. بعلاوه، اگر تابع $f(z)$ در نقطهٔ $z_\circ$ وتابع $\varphi(w)$ در نقطهٔ $w_\circ=f(z_\circ)$ پیوسته باشند، «تابع مرکب» $\varphi(f(z))$ درنقطهٔ $z_\circ$ پیوسته است.

۴.۳.۳. تبصره. فرض می‌کنیم $f(z)$ در ناحیهٔ $\tilde{G}$ که شامل برخی نقاط مرزی G است تعریف شده است. (بویژه، $\tilde{G}$ ممکن است حوزهٔ بستهٔ $\bar{G}$ باشد). دراین صورت پیوستگی $f(z)$ دریك نقطهٔ مرزی $\tilde{G}$ مانند $z_\circ$، به‌همان مفهوم مذکور درقسمت ۱.۳.۳ب است، به‌استثنای آنکه رابطهٔ زیرجانشین (۴) می‌شود.**

$$|z-z_\circ|<\delta,\qquad z\in\tilde{G};$$

یعنی نقاط z صادق در (۴)، لازم است که در $\tilde{G}$ باشند (دراینجا دیگر تعلق z به $\tilde{G}$ فقط با کوچکی δ تضمین نمی‌شود). متناظراً، به‌جای (۳) می‌نویسیم.

---

* قضیه‌های ۱۸.۴ تا ۲۰.۴ ازکتاب R.A. Silverman، که قبلاً نام بردیم.

** طبق معمول، نماد ϵ، «عنصری است از» یا «متعلق است به» معنی می‌دهد.

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \bar{G}}} f(z) = f(z_0).$$

اگر $f(z)$ در هر نقطهٔ z_0 از ناحیه $\bar{G}$ پیوسته باشد، می‌گوییم $f(z)$ در $\bar{G}$ پیوسته است (به بخش ۱.۳.۲ ج رجوع کنید). دقیقاً به‌همین طریق می‌توانیم پیوستگی دریك نقطهٔ خم C (واقع درحوزهٔ تعریف تابع مفروض)، مانند z_0، را مطرح کنیم، این بار به‌جای (۳) و (۴) می‌نویسیم

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in C}} f(z) = f(z_0)$$

و

$$|z - z_0| < \delta, \quad z \in C.$$

اگر $f(z)$ در هرنقطهٔ خم C پیوسته باشد، می‌گوییم که $f(z)$ روی C پیوسته است.

۴.۳. پیوستگی یکنواخت

۱.۴.۳. تعریف. تابع مختلط $f(z)$ که درحوزهٔ G تعریف شده است، در G پیوستهٔ یکنواخت گفته می‌شود اگر برای هر $\epsilon > 0$ مفروض، عدد $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ وجود داشته‌باشد، به‌قسمی که رابطهٔ

$$|f(z') - f(z'')| < \epsilon$$

برای تمام نقاط z' و z'' در G که در

$$|z' - z''| < \delta \tag{5}$$

صدق می‌کنند برقرار باشد. همین تعریف برای هرناحیهٔ $\bar{G}$ یا خم C به‌کار می‌رود (اگر به‌جای G همه‌جا $\bar{G}$ یا C بنویسیم).

۲.۴.۳. تبصره. پیوستگی‌معمولی درنقطهٔ z_0 راتعریف کردیم، اما پیوستگی‌یکنواخت دریك نقطهٔ منفرد z_0 بی‌معناست. دراینجا مشاهدهٔ کلیدی آن است که عدد δ در (۵) باید مستقل از نقاط z' و z'' در G باشد. اگر $f(z)$ در یك حوزهٔ G پیوستهٔ یکنواخت باشد، آنگاه $f(z)$ بوضوح در G پیوسته است، اما ممکن است تابعی در G پیوسته باشد بدون آنکه در G پیوستهٔ یکنواخت باشد (مسئلهٔ ۱۳ را ببینید).

۳.۴.۳. دربخش بعد نشان خواهیم داد که تابع پیوسته دریك حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{G}$ خود به‌خود در $\bar{G}$ پیوستهٔ یکنواخت است. اثبات مطلب به‌قضیهٔ بسیار جالب زیر بستگی دارد:

قضیه (هاینه-بورل) حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{G}$ مفروض است. فرض می‌کنیم هرنقطهٔ $\bar{G}$ مرکز یك قرص K_z است. آنگاه $\bar{G}$ می‌تواند به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی ازقرصهای K_z «پوشیده» شود. دقیقتربگوییم تعدادی‌متناهی از نقاط z_1، ...، z_n در $\bar{G}$ وجود دارد، به‌قسمی که هرنقطهٔ $\bar{G}$ حداقل متعلق به‌یکی از قرصهای K_{z_1}، ...، K_{z_n} است.

برهان. چون حوزهٔ $\bar{G}$ کراندار است، داخل مستطیلی مانند r_1 که اضلاعش موازی محورهای مختصات است جای می گیرد. فرض می کنیم که $\bar{G}$ با تعدادی متناهی‌ازقرصهای K_z پوشانده نشود، آنگاه r_1 را به‌چهارزیرمستطیل مساوی تقسیم می کنیم (دقیقاً همان‌طور که دراثبات قضیهٔ ۵.۲.۲ دیدیم)، درمی‌یابیم که حداقل یکی ازاین مستطیلها، که آن را r_2 می‌نامیم شامل قسمتی از $\bar{G}$ است که باتعدادی متناهی ازقرصهای K_z پوشانده‌نمی‌شود. بعد r_2 را هم به‌چهارزیرمستطیل مساوی دیگر تقسیم می کنیم، همچنان درمی‌یابیم که‌حداقل یکی ازاین مستطیلهای جدید که آن را r_3 می‌نامیم شامل قسمتی از $\bar{G}$ است که با تعدادی متناهی ازقرصهای K_z پوشانده نمی‌شود. این عمل را به‌طور نامحدود ادامه می‌دهیم، یك دنبالهٔ نامتناهی از مستطیلهای r_1، r_2، ...، r_n، ... راکه در شرایط قضیهٔ ۲.۱.۲ (اصل مستطیلهای تودرتو) صادق‌اند به‌دست می‌آوریم. این مستطیلها به‌قسمی هستند که قسمت $\bar{G}$ واقع درهریك ازآنها فقط با تعدادی نامتناهی از K_zها پوشانده می‌شود. ازقضیهٔ ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود که یك نقطهٔ (یکتای) α وجود دارد که متعلق به‌تمام مستطیلهای r_n است. اما اگر n به‌قدرکافی بزرگ باشد، هرهمسایگی مفروض α، شامل‌مستطیل r_n و در نتیجه شامل نقاطی از $\bar{G}$ است. بنابراین α به $\bar{G}$ تعلق دارد (چرا؟) و ازاین نتیجه می‌شود که α مرکزقرص K_α است. فرض می کنیم ρ شعاع K_α باشد، و n را آن‌قدر بزرگ انتخاب می کنیم که طول قطر r_n کوچکتر از ρ باشد. پس تمام نقاط $\bar{G}$ واقع در r_n، تنها با یك قرص K_α پوشانده می‌شوند، و این خلاف این فرض است که برای پوشاندن این نقاط تعدادی نامتناهی قرص لازم است. این تناقض نشان می‌دهد که حوزهٔ اصلی $\bar{G}$ را درواقع می‌توان باتعدادی متناهی K_z پوشاند. □

۰۴.۴.۳ قضیه. اگر $f(z)$ درحوزهٔ کراندار بستهٔ $\bar{G}$ پیوسته باشد، آنگاه $f(z)$ در $\bar{G}$ پیوستهٔ یکنواخت است.

برهان. فرض می‌کنیم $f(z)$ در $\bar{G}$، یعنی درهرنقطهٔ $\bar{G}$، پیوسته باشد. آنگاه برای هر $z\in\bar{G}$ و $\epsilon>0$ مفروض، یك دایرهٔ K_z^* به‌شعاع ρ_z و به‌مرکز z وجود دارد که برای‌تمام z'های‌متعلق به K_z^* و $\bar{G}$، $|f(z')-f(z)|<\epsilon/2$. اما برای هردو z' و z'' متعلق به K_z^* و $\bar{G}$ داریم

$$|f(z')-f(z'')|\leqslant|f(z')-f(z)|+|f(z)-f(z'')|<\epsilon.$$

حال به‌جای هر K_z^* قرص کوچکتر K_z به‌شعاع $\frac{1}{2}\rho_z$ و با همان مرکز z را می گذاریم.

بنابرقضیهٔ هاینه‌ـبورل، $\overline{G}$ را می‌توان با تعدادی متناهی ازاین قرصهای کوچکتر، که آنها را K_{z_1}، ...، K_{z_n} می‌نامیم پوشانید. فرض می‌کنیم δ شعاع کوچکترین این n قرص K_{z_1} ، ...، K_{z_n} باشد. آنگاه برای هردو z' و z'' متعلق به $\overline{G}$، به‌قسمی که $|z'-z''|<\delta$، نامساوی $|f(z')-f(z'')|<\epsilon$ برقرار است، و به‌این وسیله پیوستگی یکنواخت $f(z)$ در $\overline{G}$ ثابت می‌شود. زیرا اگر z' و z'' دونقطهٔ $\overline{G}$ باشند به‌قسمی که $|z'-z''|<\delta$، آنگاه همان‌طورکه الان نشان دادیم، z' داخل یك قرص K_{z_ν} به‌شعاع $(۱/۲)\rho_{z_\nu}$ و به‌مرکز یکی ازنقاط z_1، ...، z_n قرارمی‌گیرد. اما چون $(۱/۲)\rho_{z_\nu}\leqslant\delta$، هردو نقطهٔ z' و z'' داخل قرص K_z^* با شعاع ρ_{z_ν} و به‌مرکز z_ν قرار دارند. پس همان‌طورکه ادعا کردیم $|f(z')-f(z'')|<\epsilon$ برقراراست. □

چند توضیح

۱.۳. نگاشتهای «به‌توی» و «به‌روی». فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی یك مقداری، تعریف شده در E با برد E' باشد، اگرمجموعهٔ E^* شامل E' یا احیاناً خود E' باشد می‌گویند $f(z)$ مجموعهٔ E را به‌توی E^* می‌نگارد. اگر $E'=E^*$، همان‌طورکه‌دربخش ۱.۱.۳ گفتیم، اگربخواهیم برابری E' و E^* را مورد تأکید قراردهیم می‌گوییم $f(z)$ مجموعهٔ E را به‌روی E^* می‌نگارد. پس هرنگاشت «به‌روی» یك نگاشت «به‌توی» است، اما عکس آن صحیح نیست.

۲.۳. حوزه را اغلب برای تأکید اینکه مجموعه‌ای بازاست «حوزهٔ باز» می‌خوانند. اصطلاح «حوزهٔ بسته» گرچه‌کاملاً متعارف است ولی بی‌مسمی است، زیرا حوزهٔ بسته یك مجموعهٔ بازنیست و بنابراین ابداً حوزه نیست. اصطلاح «حوزه» بدون توصیف بیشتر به‌معنای هرحوزهٔ «باز» درصفحهٔ متناهی است، خواه‌کراندار باشد یا بیکران، همبند ساده باشد یا همبند چندگانه.

۳.۳. حالات مهم‌حدهای نامحدود، وحدهای دربینهایت، درمسائل ۳ و ۴ موردنظر قرارگرفته‌اند. اگربدانیم که حاصلضرب دوتابع پیوسته، نیزپیوسته است (۳.۳.۳ را ببینید)، مثال ۲.۳.۳ بی‌درنگ (به‌وسیلهٔ استقراء) ازپیوستگی واضح تابع $w=z$ در هرنقطهٔ صفحهٔ متناهی نتیجه می‌شود. وقتی دربارهٔ خواصی‌که در هرنقطهٔ یك خم معتبرند گفتگو می‌کنیم، به‌کار بردن «روی» به‌جای (در) ازنظرتوجیه هندسی ارجح است. لذا تابعی راکه درهرنقطه ازخم C تعریف‌شده (پیوسته وغیره) باشد، می‌گویند روی C تعریف شده (پیوسته و غیره) است. توجه کنید که وقتی از حد یا پیوستگی تابعی مانند $f(z)$ در یك نقطهٔ z_0 گفتگو می‌کنیم، به طور ضمنی فرض براین است‌که $f(z)$ در نقطه‌هایی بدلخواه نزدیك z_0 (و مخالف z_0) تعریف شده است. برای تضمین این مطلب، همواره فرض می‌کنیم‌که حوزهٔ تعریف $f(z)$ یك ناحیه یا یك خم است.

۴.۰.۳ قضیهٔ هاینه-بورل که بظاهرمورد استعمال محدود دارد یکی ازمهمترین‌ابزار آنالیزمختلط است که به‌ما اجازه می‌دهد که به‌جای «پوششهای نامتناهی» مجموعه‌های بستهٔ کراندار «زیرپوششهـــای متناهـــی» بگـــذاریم (مسئلهٔ ۱۱). قضیهٔ هاینه-بورل در اثبات قضایای ۴.۴.۳، ۹.۳.۶ و ۵.۱.۱۰ وهمچنین در بخش ۲.۴.۵ به‌کارمی‌رود.

مسائل

۱. فرض می‌کنیم σ_1، σ_2، ...، σ_n مجموعه‌ای متناهی ازقطعه خطها درصفحهٔ مختلط باشند که امتدادهایشان معین و به‌قسمی هستندکه نقطهٔ‌پایانی‌هرقطعهٔ σ_k $(k<n)$ برنقطهٔ آغازی قطعه خط بعدی یعنی σ_{k+1}، منطبق باشد. دراین صورت خم حاصل، یـك خم‌چندضلعی نام دارد به‌رأسهـای متوالی P_0، P_1، ...، P_n؛که درآن P_0 نقطـهٔ آغازی σ_1 و P_k نقطـهٔ پایانی σ_k است $(k=1, 2, \dots, n)$. معادلـهٔ پارامتـری $(1')$ چنین‌خمی را بنویسید.

۲. مثالی ازیك حوزهٔ G ارائه دهید به‌قسمی که G و $\bar{G}$ مرزهای مختلفی داشته باشند.

۳. می‌گوییم تابع $f(z)$ کـه درحوزهٔ G تعریف شده است،وقتی z به‌نقطهٔ z_0 در G میل می‌کند به حد بینهایت (∞) میل می‌کند، اگربرای هـر $M>0$ مفروض، یـك عدد $\delta=\delta(\epsilon)>0$ وجـود داشته باشـد به‌طوری کـه برای تمـام zهایی کـه در شرط $0<|z-z_0|<\delta$ صادق‌اند، داشته باشیم $|f(z)|>M$. دراین صورت‌می‌نویسیم

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

یا $f(z)\to\infty$ وقتی $z\to z_0$. ثابت‌کنیدکه $f(z)\to\infty$ وقتی $z\to z_0$، اگـرو فقط اگر $\varphi(z)=1/f(z)\to 0$ وقتی $z\to z_0$.

۴. می‌گوییم‌تابع $f(z)$ که دریك همسایگی سفتهٔ بینهایت (بخش ۴.۴.۲ را ببینید)تعریف شده است،وقتی z به‌بینهایت (∞) میل می‌کند به‌سوی‌حد A میل می‌نماید، اگربرای هر $\epsilon>0$ مفروض،یك‌عدد $M=M(\epsilon)>0$وجود داشته‌باشدبه‌قسمی که‌برای‌هر$z>M$، شرط $|f(z)-A|<\epsilon$ برقرارباشد. دراین صورت می‌نویسیم

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A$$

یا $f(z)\to A$ وقتی $z\to\infty$. ثابت‌کنید $f(z)\to A$ وقتی $z\to\infty$ اگر و فقط اگر $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)\to A$ وقتی $\zeta\to 0$. معنای دقیق

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$$

چیست؟

۵ . ثابت کنید $A \to f(z)$ وقتی $z \to z_0$ اگر و فقط اگر وقتی دنبالهٔ z_n به z_0 می‌گراید، دنبالهٔ $f(z_n)$ به A میل کند.

۶ . تعمیم آزمون همگرایی کوشی برای دنباله‌ها (قضیهٔ ۳.۳.۲) را که ذیلاً می‌آید اثبات کنید: وقتی $z \to z_0$ تابع $f(z)$ حد دارد، اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$ مفروض، عدد $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$ وقتی $0 < |z' - z_0| < \delta$ و $0 < |z'' - z_0| < \delta$.

۷ . فرض می‌کنیم $f(z)$ یک تابع کسری، یعنی خارج قسمت دو کثیرالجمله باشد:

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n}, (a_m \neq 0,\ b_n \neq 0). \qquad (۶)$$

درمورد مقادیرممکن $\lim_{z \to \infty} f(z)$ بحث کنید.

۸ . تابع (۶) کجا پیوسته است؟

۹ . «هرخم بستهٔ ژردان نگارهٔ پیوستهٔ یک به‌یک دایره‌ای است.» این حکم را توضیح دهید.

۱۰ . ثابت کنید اگر $f(z)$ درناحیهٔ $\bar{G}$ پیوسته باشد، $|f(z)|$ نیز پیوسته است.

۱۱ . یک مجموعهٔ E درصفحه را کراندار گویند، اگر تمام نقاطش درداخل دایره‌ای به‌مرکز مبدأ و به شعاع به‌اندازهٔ کافی بزرگ واقع باشد، وآن را بسته گویند، اگر شامل همهٔ نقاط حدی‌اش باشد. (توجه کنید که یک حوزهٔ بستهٔ $\bar{G}$ که دربخش ۳.۲.۳ب تعریف شد به‌این معنی نیزبسته است). ثابت کنید هرخم پیوستهٔ C کراندار وبسته است. ثابت کنید مرزهرحوزهٔ G بسته است. نشان دهید که برای هرمجموعهٔ بستهٔ کراندار E و بویژه برای هرخم پیوسته، اگر E جانشین $\bar{G}$ شود، قضیهٔ هاینه بورل معتبر باقی‌می‌ماند.

۱۲ . E را یک حوزهٔ بستهٔ کراندار یا یک خم پیوسته می‌گیریم، وفرض می‌کنیم $f(z)$ در E پیوسته است. ثابت کنید که

الف) $f(z)$ در E کراندار است، یعنی یک عدد $M > 0$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $z \in E$ داریم $|f(z)| \leqslant M$.

ب) نگارهٔ E تحت $f(z)$، یعنی ε، مجموعهٔ تمام نقاط $w = f(z)$، $z \in E$، خود کراندار وبسته است؛

ج) در E نقاط z_0 و Z وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $z \in E$ داریم

$$|f(z_0)| \leqslant |f(z)| \leqslant |f(Z)|$$

توضیح: دراین‌صورت $|f(z_0)|$ را مینیموم $f(z)$ در E می‌نامیم وآن را با

$$\min_{z \in G} |f(z)|$$

نشان می‌دهیم و $|f(Z)|$ را ماکزیموم $f(z)$ در E می‌خوانیم و آن را با نماد زیر نشان می‌دهیم

$$\max_{z\in E}|f(z)|.$$

۱۳. آیا تابع

$$f(z)=\frac{۱}{۱-z}$$

درقرص باز $|z|<۱$ پیوسته است؟ آیا پیوستهٔ یکنواخت است؟

۱۴. فرض می کنیم K قرص‌واحد $|z|<۱$، و C (دایرهٔ واحد $|z|=۱$) مرز آن، و $f(z)$ در K پیوستهٔ یکنواخت باشد. ثابت کنید که حد

$$\lim_{\substack{z\to z_{\circ}\\ z\in G}} f(z) \qquad (۷)$$

درهر نقطهٔ $z_{\circ}\in C$ وجود دارد.

۱۵. فرض می کنیم $f(z)$ همان تابع مسئلهٔ قبل باشد که «مقادیر مرزی» آن توسط (۷) تعریف شده‌اند. ثابت کنید که $f(z)$ روی دایرهٔ C پیوسته است.

۱۶. توابع

$$\frac{\operatorname{Re} z}{|z|},\quad \frac{z}{|z|},\quad \frac{\operatorname{Re} z^{۲}}{|z|^{۲}},\quad \frac{z\operatorname{Re} z}{|z|}$$

همگی برای $z\neq ۰$ تعریف شده‌اند، کدام یك از اینها را می‌توان در $z=۰$ طوری تعریف کرد که تابع «گسترش یافته‌اش» در $z=۰$ پیوسته باشد؟

۱۷. درصفحهٔ متناهی، G، حوزهٔ دلخواهی متمایزازخود صفحه است، C را یك خم واقع در G و Γ را مرز G می گیریم، اگر ρ فاصلهٔ بین C و Γ، یعنی، بزرگترین کران پایین مجموعهٔ تمام اعداد $|\zeta-z|$ باشد که در آن $z\in C$, $\zeta\in\Gamma$، ثابت کنید که $\rho>۰$.

۱۸. فرض می کنیم G، C، Γ و ρ همان مفاهیم مسئلهٔ قبل را داشته باشند، و D مجموعهٔ تمام نقاط z باشد به‌قسمی که برای برخی از نقاط C مانند $z_{\circ}$، $|z-z_{\circ}|<\frac{۱}{۲}\rho$. ثابت کنید که D یك حوزهٔ کراندار (شامل C) است. ثابت کنید که حوزهٔ بستهٔ $\bar{D}$ در G قرار دارد.

۴

مشتق گیری در صفحهٔ مختلط

۱.۴ . مشتق تابع مختلط

۱.۱.۴ . مشتق توابع مختلط. می گوییم تابع مختلط $f(z)$ که درحوزهٔ G تعریف شده است در یك نقطهٔ G مانند z مشتق‌پذیر است هر گاه حد زیر موجود و متناهی باشد،

$$f'(z)= \lim_{\Delta z\longrightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \quad (z,\ z+\Delta z \in G) \qquad (۱)$$

خود حد را با $f'(z)$ نشان داده، آن‌را مشتق $f(z)$ در z گویند.

۲.۱.۴ . توابع تحلیلی. تابع $f(z)$ را در حوزهٔ G تحلیلی گویند، هر گاه $f(z)$ در هر نقطهٔ G مشتق‌پذیر باشد و درنقطهٔ z تحلیلی گویند اگر $f(z)$ دریك همسایگی z تحلیلی باشد. توجه کنید که هر تابع تحلیلی درحوزهٔ G ، درهر نقطهٔ G تحلیلی است.

۳.۱.۴ چندمثال

الف. تابع

$$f(z)=z^{2}$$

درتمام صفحهٔ z مشتق‌پذیر است، زیرا واضح است که حد

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=2z+\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z$$

موجود و در هر نقطهٔ (متناهی) z برابر با $2z$ است.

ب. تابع

$$f(z)=\operatorname{Re} z$$

درتمام صفحهٔ z پیوسته است (چرا ؟)، ولی درهیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست. در واقع حد

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re} z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}\quad(\Delta z=\Delta x+i\Delta y)$$

در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. برای اثبات، نخست فرض کنید $\Delta z=\Delta x$ ، $\Delta y=0$ ، به‌طوری‌که Δz در امتداد محور حقیقی به صفر میل می‌کند، و سپس فرض کنید $\Delta z=i\Delta y$ ، $\Delta x=0$ ، به‌قسمی‌که Δz درامتداد محور موهومی به صفر میل می‌کند. درحالت اول داریم

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

حال آنکه درحالت دوم

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\operatorname{Re}\Delta z}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{0}{i\Delta y}=0$$

چون این دو مقدار برابر نیستند، مشتق $f'(z)$ وجود ندارد.

ج. درست به‌همین طریق می‌توان نشان داد که تابع

$$f(z)=\bar z=x-iy$$

هم درهیچ نقطهٔ z مشتق ندارد (عملیات را بتفصیل بنویسید).

۴۰۱۰۴. تبصره. اینکه دربالا توانستیم براحتی توابع مشتق‌ناپذیر را ارائه دهیم به‌این‌علت است که شرط مشتق‌پذیری نسبت به‌متغیر مختلط خیلی قویتر ازشرط مشتق‌پذیری نسبت به متغیر حقیقی است. زیرا، برای مشتق‌پذیری $f(z)$ درنقطهٔ z ، لازم است که حد «نسبت تفاضلهای» زیر

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مستقل از امتدادی باشد که نقطهٔ متغیر $z+\Delta z$ به نقطهٔ ثابت z میل می‌کند. شرط مشتق‌پذیری درتمام نقاط یك حوزه حتی از این‌هم قویتر است و این برای توابع تحلیلی

دریك حوزه خواصی به‌وجود می‌آورد که آنها را از سایر توابع مختلط متمایز می‌کنند. قسمت قابل‌توجهی از این کتاب به‌بررسی خواص جالب تـوابع تحلیلی اختصاص دارد.

۵۰۱۰۴. بین فرمول (۱) که با آن مشتق تابع مختلط تعریف مـی‌شود و فـرمول متناظر یعنی

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad (a<x<b)$$

که برای تعریف مشتق تابع حقیقی به‌کار می‌رود، شباهت کاملـی وجـود دارد. لذا کلیهٔ دستورهای مشتق‌گیری که درحساب دیفرانسیل باآنها آشنا شده‌ایم، برای توابع مختلطهم صادق‌اند*، یعنی، اگر $f(z)$ در z مشتق‌پذیر و c عدد مختلطی باشد،

$$[cf(z)]'=cf'(z)$$

اگر $f(z)$ و $g(z)$ درنقطهٔ z مشتق‌پذیر باشند،

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

اگر $f(z)$ و $g(z)$ درنقطهٔ z مشتق‌پذیر باشند و $g(z)\neq 0$،

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^{2}(z)}$$

و هرگاه $f(z)$ در z و $\varphi(w)$ در $w=f(z)$ مشتق‌پذیر باشند داریم

$$[\varphi(f(z))]'=\varphi'(f(z))f'(z)$$

همچنین مانند حالت حقیقی برای تمام مقادیر $n=1,2,\ldots$ داریم

$$(z^{n})'=nz^{n-1}$$

از این روابط نتیجه می‌شود که هرچند جمله‌ای درتمام صفحهٔ مختلط تحلیلی است، و هر تابع کسری (مسئله ۷ فصل ۳) همه‌جا بجز درنقاطی کـه مخرج آن صفر می‌شود، تحلیلی است.

۶۰۱۰۴. دیفرانسیلهای مختلط. مفهوم دیفرانسیل تابع مختلط ازنظر صورت همان است که در دیفرانسیل تابع حقیقی آمده است. فرض کنید $w=f(z)$ درنقطهٔ z مشتق‌پذیر باشد و $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$، به‌طوری که

---

* کتاب سابق‌الذکر R. A. Silverman, Theorems 5.3-5.6. را ببینید.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$$

آنگاه

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \epsilon$$

که درآن وقتی $\Delta z \to 0$ ، ϵ به صفر میل می‌کند. این رابطه معادل است با

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \epsilon\,\Delta z\,. \qquad (۲)$$

اولین‌جملهٔ سمت‌راست رابطهٔ(۲) را دیفرانسیل تابع w (یا قسمت خطی اصلی نمو Δw) گویند، و آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهند

$$dw = f'(z)\Delta z\,. \qquad (۳)$$

درحالت خاصی که $w = z$ ، داریم

$$dz = 1 \cdot \Delta z = \Delta z$$

یعنی ، نمو متغیر مستقل با دیفرانسیل آن برابر است. اگر در رابطهٔ (۳) به‌جای Δz ، dz بگذاریم، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود،

$$dw = f'(z)dz\,. \qquad (۳')$$

از این رابطه فرمول زیر نتیجه می‌شود

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{df(z)}{dz}$$

دوعبارت سمت راست را ، که نسبت دو دیفرانسیل هستند، مـی‌توان به‌عنوان نمادهـای دیگری برای مشتق $f'(z)$ درنظر گرفت.

۲۰۴. معادلات کوشی ـ ریمان

۱۰۲۰۴. تابع حقیقی $u(x, y)$ را درنقطهٔ (x, y) مشتق‌پذیر گویند اگر نمو

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)$$

را به‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \qquad (۴)$$

که‌درآن A و B مستقل از Δx و Δy هستند و ϵ_1, ϵ_2 وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$،هردو به‌صفر

میل می‌کنند. بسهولت می‌توان دید که A و B همان $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$، مشتقات جزئی تابع u در نقطهٔ (x, y) هستند. زیرا اگر نخست $\Delta y=0$ و سپس $\Delta x=0$ انتخاب شوند، داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x, y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+\epsilon_1\Delta x}{\Delta x}$$

$$=A+\lim_{\Delta x\to 0}\epsilon_1=A,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x, y+\Delta y)-u(x, y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{B\Delta y+\epsilon_2\Delta y}{\Delta y}$$

$$=B+\lim_{\Delta y\to 0}\epsilon_2=B.$$

۲.۲.۴. همان‌گونه که در بخش ۲.۱.۳ خاطرنشان کردیم، مشخص کردن تابع $w=f(z)=u+iv$ از متغیر مختلط $z=x+iy$ با مشخص کردن دوتابع حقیقی u و v از دو متغیر حقیقی x و y معادل است. آشکار است که از پیوستگی u و v پیوستگی w نتیجه می‌شود، اما مشتق‌پذیری u و v دلیل بر مشتق‌پذیری w نیست. زیرا، همان‌طور که درمثال ۳.۱.۴ ب بررسی کردیم، تابع $w=Re\, z=x$ تابعی پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست. حال آنکه توابع $u=x$ و $v=0$ درهر نقطهٔ صفحهٔ مختلط مشتق دارند. بنابراین قسمتهای حقیقی و موهومی یك تابع مشتق‌پذیر $w=u+iv$ از یکدیگر مستقل نیستند بلکه این دو باید درشرایطی که به معادله‌های کوشی - ریمان معروف‌اند، صدق کنند؛ این شرایط درقضیهٔ زیر آمده‌اند.

قضیه. تابع $w=f(z)=u+iv$ درنقطهٔ $z=x+iy$ مشتق‌پذیر است اگر وفقط اگرتوابع u و v در نقطهٔ (x, y) مشتق‌پذیر باشند و در **معادله‌های کوشی - ریمان** زیر در نقطهٔ (x, y) صدق کنند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۵}$$

برهان. فرض کنید $w=f(z)$ درنقطهٔ z مشتق‌پذیر باشد. آنگاه

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=f'(z)\Delta z+\epsilon\Delta z,$$

که در آن $\epsilon\to 0$ وقتی $\Delta z\to 0$. می‌نویسیم

$$f'(z)=a+ib, \qquad \epsilon=\epsilon_1+i\epsilon_2,$$

داریم

$$\Delta u+i\Delta v=(a+ib)(\Delta x+i\Delta y)+(\epsilon_1+i\epsilon_2)(\Delta x+i\Delta y)$$

یا از مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی‌دوطرف رابطه وهمچنین قسمتهای مختلط دوطرف، روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\epsilon_1\Delta x-\epsilon_2\Delta y,$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\epsilon_2\Delta x+\epsilon_1\Delta y$$

که درآن $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$ زیرا

$$|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}, \qquad |\epsilon_1|\leqslant|\epsilon|, \qquad |\epsilon_2|\leqslant|\epsilon|.$$

از این نتیجه می‌شود که u و v در (x, y) مشتق‌پذیرند و

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-b, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=b, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=a. \tag{۶}$$

بی‌درنگ رابطهٔ (۶) از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود.

برعکس فرض‌کنید که u و v در (x, y) مشتق‌پذیر باشند و معادله‌های کوشی - ریمان، یعنی معادله‌های (۵) ، برقرار باشند. آنگاه

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$
$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y$$
$$=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

که درآن $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$ وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$ ، از این نتیجه می‌شود

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\beta_1)\Delta x+(\alpha_2+i\beta_2)\Delta y$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z+\epsilon\Delta z,$$

که درآن

$$\epsilon=(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot$$

ولی

$$|\epsilon|\leqslant|\alpha_1+i\beta_1|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|+|\alpha_2+i\beta_2|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|$$
$$\leqslant|\alpha_1+i\beta_1|+|a_2+i\beta_2|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta_1|+|\beta_2|,$$

از این‌رو $\epsilon \to 0$ وقتی $\Delta z \to 0$، زیرا $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$ وقتی $\Delta x, \Delta y \to 0$.
بنابراین

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\lim_{\Delta z\to 0}\epsilon=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

وجود دارد (و متناهی است)، یعنی، $w=f(z)$ در z مشتق‌پذیر است. □

۳.۲.۴. تبصره. از قضیهٔ ۲.۲.۴ نتیجه می‌شود که تابع $w=f(z)=u+iv$ در حوزهٔ G تحلیلی است اگر و فقط اگر قسمتهای حقیقی و موهومی u و v درهر نقطهٔ G مشتق‌پذیر باشند و درمعادله‌های کوشی ـ ریمان صدق کنند. $f'(z)$ را می‌توان به‌یکی از صورتهای زیر نوشت

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\cdot$$

همان طوری که درحسابان دیده‌ایم* شرط کافی (ولی نه‌لازم) برای اینکه u و v درنقطهٔ (x, y) مشتق داشته باشند آن است که u و v درنقطهٔ (x, y) مشتقهای جزئی پیوسته داشته باشند.

۳.۴ نگاشت همدیس

۱.۳.۴. فرض کنید که C یك خم (پیوسته) به معادلهٔ

$$z=z(t) \qquad (a\leqslant t\leqslant b),$$

و t_0 نقطه‌ای از فاصلهٔ $[a, b]$ باشد. همچنین فرض کنید که C درنقطهٔ $z_0=z(t_0)$ خط مماس دارد یعنی بردار

---

* کتاب سابق‌الذکر
R. A. Silverman, Theorem 12.3 (also Prob. 10 p. 716).
را ببینید.

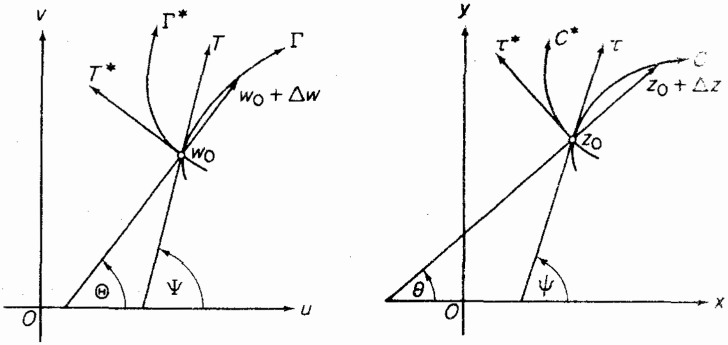
$$\Delta z = z(t_{\circ} + \Delta t) - z(t_{\circ})$$

وقتی $\Delta t \to \circ$ ، دارای «امتداد حدی» است. یا دقیقتر بگوئیم، حد زیر

$$\Psi = \lim_{\Delta t \to \circ} \arg \Delta z \tag{۷}$$

وجود دارد.* زیرا از $\Delta t \to \circ$ نتیجه می‌شود که $\Delta z \to \circ$ ، پس می‌توانیم رابطهٔ (۷) را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$\Psi = \lim_{\Delta z \to \circ} \arg \Delta z \tag{۷'}$$



(ب) (الف)

شکل ۱۲

ازنظر هندسی مماس برخم C در نقطهٔ $z_{\circ}$ ، با نیمخط τ به مبدأ $z_{\circ}$ ، که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ψ می‌سازد، نشان داده می‌شود (شکل ۱۲ الف را ببینید که درآن $\theta = \arg \Delta z$).

حال فرض کنید $f(z)$ دریك حوزهٔ G که شامل خم C است، پیوسته باشد . آنگاه $f(z)$ خم C را روی خم Γ واقع درصفحهٔ w و به معادلهٔ زیر، می‌نگارد

$$w = f(z(t)) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

بنویسید

$$\Delta w = f(z_{\circ} + \Delta z) - f(z_{\circ}),$$

چون f پیوسته است $\Delta w \to \circ$ وقتی که $\Delta z \to \circ$. بعلاوه فرض کنید که $f'(z_{\circ})$ ، مشتق $f(z)$ درنقطهٔ $z_{\circ} \in C$ ، صفر نباشد، آنگاه چون

---

* اگر $z_{\circ}$ یکی‌از دوسر خم C باشد، یعنی $t=a$ یا $t=b$ ، آنگاه $\Delta t \to \circ$ به‌طوری‌که Δt مثبت (برای $t=a$) یا منفی (برای $t=b$) باقی می‌ماند.

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0), \qquad (۸)$$

داریم

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z_0)$$

(به‌مسئله ۷ از فصل ۲ رجوع کنید)، که در آن $f'(z_0) \neq 0$ شرط لازم است، زیرا $\arg 0$ تعریف نشده است. از طرف دیگر

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z.$$

(قسمت ۷.۳.۱ را ببینید)، پس

$$\lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z + \arg f'(z_0).$$

چون حد طرف راست تساوی وجود دارد، حد طرف چپ‌هم وجود دارد، یعنی، Γ درنقطهٔ $w_0 = f(z_0)$ دارای مماس T باشیب

$$\Psi = \psi + \arg f'(z_0) \qquad (۹)$$

است (شکل ۱۲ ب را ببینید که در آن $\Theta = \arg \Delta w$). به‌عبارت دیگر شیب مماس T از شیب τ به‌اندازهٔ زاویهٔ $\arg f'(z_0)$ بیشتر است.

۲.۳.۴ اینك تابع $f(z)$ راکه در بالا آمده است، درنظر می گیریم وفرض می کنیم C و C^* دو خم واقع درحوزهٔ G هستند که درنقطهٔ z_0 متقاطع‌اند، مماسهای آنها دراین نقطه را بترتیب τ و τ^* می‌نامیم (شکل ۱۲ الف را ببینید)، سپس زاویهٔ بین C و C^* (به‌همین‌ترتیب) را زاویهٔ بین τ و τ^* از τ به τ^*، تعریف می کنیم. فرض‌کنیدکه Γ و Γ^* «نگاره‌های C و C^* تحت نگاشت $f(z)$ باشند»، یعنی، فرض‌کنیدکه $f(z)$ خمهای C و C^* را به خمهای Γ و Γ^* واقع درصفحهٔ w تبدیل می کند. آنگاه همانطوری‌که دیدیم T و T^*، مماسهای بر Γ و Γ^* درنقطهٔ $w_0 = f(z_0)$ هر دو از دوران τ و τ^* به‌اندازهٔ زاویهٔ $\arg f'(z_0)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین زاویهٔ بین Γ و Γ^* با زاویهٔ بین C و C^* برابر است، و هردو زاویه یك جهت دارند. (یعنی قدرمطلق وعلامت هر دو زاویه یکی است).

۳.۳.۴ نگاشت پیوسته‌ای‌که اندازهٔ زوایای بین خمهای مار بریك نقطهٔ مفروض z_0 را حفظ نماید، حافظ زاویه در z_0 گویند. اگر $f(z)$ در z_0 حافظ زاویه باشد و بعلاوه جهت‌زوایای بین‌خمهای مار برنقطهٔ z_0 را نیز حفظ نماید،می گویند $f(z)$ در z_0 همدیس است[1]. بنابراین دربالا نشان داده‌ایم که اگر $f(z)$ در حوزهٔ G پیوسته باشد و درنقطهٔ

۱. معمولاً نگاشت حافظ زاویه و «نگاشت همدیس» را مترادف یکدیگر می‌گیرند ولی دراین کتاب همدیس نگاشتی است که جهت زاویه را نیز حفظ می‌کند. ـم.

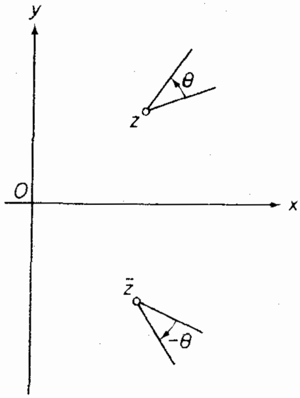
$z_\circ \in G$، $f'(z_\circ)$، مشتق $f(z)$،مخالف صفر باشد، آنگاه $f(z)$ در نقطهٔ $z_\circ$ همدیس است. به‌این‌ترتیب اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشد،آنگاه $f(z)$ درهرنقطهٔ Gکه $f'(z)$صفر نباشد، همدیس است*.

۴.۳.۴. چندمثال

الف. نگاشت $w=z^{۲}$ درهرنقطهٔ $z\neq\circ$ همدیس‌است. زیرا مشتق‌آن یعنی$w'=۲z$ در $z\neq\circ$، مخالف صفر است. اما $w=z^{۲}$ درنقطهٔ $z=\circ$ کـه w'، مشتق w، صفرمی‌شود، همدیس نیست. زیرا درواقع

$$\arg w=\arg z^{۲}=۲ \arg z,$$

این نگاشت هرزاویه به‌رأس مبدأ مختصات را دوبرابرمی‌کند.



شکل ۱۳

ب. نگاشت $w=\bar{z}$ درهرنقطهٔ z «حافظ زاویه» است ولی همدیس نیست. درواقع، این نگاشت همان تقارن نسبت به‌محور حقیقی است، لذا هردو نیمخط متقاطع به‌زاویهٔ θ را به‌دو نیمخط متقاطع به‌زاویهٔ $-\theta$ تبدیل می‌کند (به‌شکل ۱۳ کـه درآن دوصفحهٔ z و w برهم منطبق فرض شده‌اند رجوع کنید).

۵.۳.۴. حال‌که تعبیرهندسی ساده‌ای برای آوند $f'(z_\circ)$ یافتیم، قدرمطلق مشتق‌یعنی $|f'(z_\circ)|$ را تعبیرمی‌کنیم. برای این منظوربه‌رابطهٔ زیرکه مستقیماً از (۸) نتیجه می‌شود، توجه می‌کنیم

---

* برعکس می‌توان نشان داد (فصل ۱۰ مسئلهٔ ۲۴ را ببینید) اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ درهرنقطهٔ G که $f'(z)$ صفرباشد، همدیس نیست.

$$|f'(z_\circ)| = \lim_{\Delta z \to \circ} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to \circ} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

(به فصل ۲ مسئلهٔ ۶ رجوع کنید). اما $|\Delta z|$ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ مجاور $z_\circ$ و $z_\circ + \Delta z$ در صفحهٔ z و $|\Delta w|$ فاصلهٔ بین نگاره‌های این دو نقطه یعنی $w_\circ = f(z_\circ)$ و

$$w_\circ + \Delta w = f(z_\circ + \Delta z)$$

درصفحهٔ w است. بنابراین نسبت

$$\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

درواقع انبساط بردار بینهایت کوچك Δz حاصل ازنگاشت $w = f(z)$ می‌باشد[۱]، و $|f'(z_\circ)| = \mu$ انبساط «حدی» (وقتی $\Delta z \to \circ$) درنقطهٔ $z_\circ$ است. دراینجانیزهمان طورکه در (۴.۳.۱) آمده است، اگر $\mu > ۱$، با یك انبساط و اگر $\mu < ۱$، با یك انقباض روبه‌رو هستیم.

چند توضیح

۱.۴. رابطهٔ (۱) طبق بخش ۱.۳.۳ الف بدین‌معنی است که برای هرعدد مفروض $\epsilon > \circ$ عددی مانند $\delta = \delta(\epsilon) > \circ$ وجود دارد به طوری که وقتی Δz در نامساوی $\delta > |\Delta z| > \circ$ صدق می‌کند نامساوی زیر برقرار باشد

$$\left| f'(z) - \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| < \epsilon .$$

درارتباط با (۲) توجه کنید که اگر داشته باشیم

$$\Delta w = A\,\Delta z + \epsilon\,\Delta z$$

که در آن A مستقل از Δz است و $\epsilon \to \circ$ وقتی $\Delta z \to \circ$، آنگاه $f'(z)$ وجود دارد و با A برابراست (پس از تقسیم بر Δz، Δz را به‌صفرمیل دهید).

۲.۴. درارتباط باقضیهٔ ۲.۲.۴ لازم است توجه کنید که ردهٔ توابع دومتغیره مانند $u = u(x, y)$ که مشتق‌پذیرند، از ردهٔ توابعی که‌دارای مشتقهای‌جزئی $\partial u/\partial x$، $\partial u/\partial y$ هستند، کوچکتر است (مسئله ۵ را ببینید) و از ردهٔ توابعی که مشتقهای جزئی پیوسته‌دارند بزرگتر است. (به‌بخش ۳.۲.۴ رجوع کنید). در توابع یك متغیرهٔ خواه‌حقیقی یا مختلط،

---

۱. یعنی این کسر نشان می‌دهد که نگاشت $w = f(z)$ بردار بینهایت کوچك Δz را به‌چه نسبتی بزرگ کرده است. ـ م.

به‌طوری که از تعریفهای بخش ۱.۱.۴ برمی‌آید تابع مشتق‌پذیر از تابعی کــه مشتق دارد متمایز نیست. (چرا؟) اثبات اینکه اگــر تابع مختلط $w=u+iv$ در نقطهٔ z مشتق داشته باشد، درمعادله‌های کوشی-ریمان صدق می کند، بسیارساده است (مسئلهٔ ۴). اما حکم قضیهٔ ۲.۲.۴ خیلی بیش ازاین است یعنی این قضیه می گوید ردهٔ توابع مختلط $w=u+iv$ که درنقطهٔ z مشتق دارند دقیقاً همان ردهٔ توابعی است که قسمت حقیقی وموهومی آنها یعنی u و v در z مشتق دارند ودرمعادله‌های کوشی-ریمان درنقطهٔ z صدق می کنند.

۳.۴. فرمول (۷) بدین‌معنی است که به ازای هر $\epsilon>0$، یك عدد $\delta=\delta(\epsilon)>0$ و یك تابع $\theta(\Delta t)$ که با یکی از مقادیر $\arg \Delta z$ برای هر $\Delta t\neq 0$ برابراست وجــود دارد به‌طوری که $|\theta(\Delta t)-\psi|<\epsilon$ وقتی که $0<|\Delta t|<\delta$، (به‌فصل ۲ مسئلهٔ ۷ رجوع کنید). بدیهی است که ψ با تقریب مضرب صحیحی از 2π تعریف می‌شود. می‌توان نشان داد که تصویر گنجنگاری در بخش ۳.۴.۲ یك نگاشت همدیس است* (زوایای بین خمهای روی کرهٔ ریمان طبق معمول تعریف می‌شوند).

مسائل

۱. به‌ازای چه مقادیر z تابع $f(z)=z\operatorname{Re} z$ وهمچنین تابــع $f(z)=|z|$ مشتق‌پذیرند؟

۲. ثابت کنید که اگر $w=f(z)$ درنقطهٔ z مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در z پیوسته است.

۳. ثابت کنید که اگر درهر نقطهٔ حوزهٔ G، $f'(z)=0$، آنگاه $f(z)$ در G ثابت است.

۴. معادله‌های کــوشی-ریمان را بــا برهانی کوتاه ازراه زیر ثابت کنید: Δz را درحالت $\Delta z=\Delta x$ و $\Delta z=i\Delta y$ به‌صفرمیل‌دهید (یعنی $z+\Delta z$ را یك‌باردرطول خطی‌موازی با محور حقیقی وباردیگرآن را درطول‌خطی موازی با محورموهومی به z میل‌دهید) وفرض کنید دومقداری که برای

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$$

به‌دست می‌آیند با هم برابرند.

۵. ثابت کنید که تابع

$$u(x,y)=\begin{cases} x & \text{اگر } |y|>|x| \\ -x & \text{اگر } |y|\leqslant|x| \end{cases}$$

پیوسته است ودرمبدأ دارای مشتقات جزئی $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ می‌باشد ولی در ایــن

---

* مثلاً کتاب زیررا ببینید.

A. I. Markushevich, Volume 1. sec. 23

نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۶. نشان دهید که تابع $f(z)=\sqrt{|xy|}$ پیوسته است و در معادلات کوشی-ریمان در مبدأ صدق می‌کند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۷. ثابت کنید که معادله‌های کوشی-ریمان (۵) در مختصات قطبی

$$(x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$$

به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{۱}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{۱}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad (۵')$$

۸. رابطهٔ $(۵')$ را برای تحقیق اینکه $f(z)=z^n$، $(n=۱,۲,\ldots)$ در تمام صفحهٔ مختلط تحلیلی است به‌کار برید.

۹. تابع $f(z)$ را در حوزهٔ G بینهایت مرتبه مشتق‌پذیر گویند اگر تابع $f(z)$ در هر نقطهٔ G دارای مشتقهای مرتبه‌های اول[1] و دوم و تمام مراتب بالاتر باشد، یعنی در هر نقطهٔ G مشتقهای زیر وجود داشته باشند.

$$f'(z), \quad f''(z)=\frac{df'(z)}{dz}, \qquad f'''(z)=\frac{df''(z)}{dz}, \ldots$$

چندمثال از توابع بینهایت مرتبه مشتق‌پذیر ارائه دهید.

۱۰. نگارهٔ قطعه‌خط

$$z=۱+it \qquad (-۱\leqslant t\leqslant ۱)$$

درصفحهٔ w تحت نگاشت $w=z^۲$ چیست؟

۱۱. α، زاویهٔ دوران یك‌خم مرسوم از نقطهٔ $z_۰$ تحت $w=z^۲$، را برای هریك از نقاط زیر به‌دست آورید

الف) $z_۰=i$، ب) $z_۰=-\frac{۱}{۴}$

ج) $z_۰=۱+i$، د) $z_۰=-۳+۴i$

انبساط μ مربوط به‌این نقاط را بیابید.

۱۲. به‌سؤال بالا وقتی نگاشت $w=z^۳$ است، پاسخ دهید.

۱۳. ثابت کنید که اگر $f(z)$ در حوزهٔ G تحلیلی باشد، آنگاه $\overline{f(z)}$ در هر نقطهٔ G مانند

---

۱. $f'(z)$، مشتق $f(z)$، را مشتق مرتبهٔ اول $f(z)$ نیز می‌گوییم. - م.

z که $f'(z)\neq 0$ «حافظ زاویه» است ولی همدیس نیست. درمورد $f(\bar{z})$ چه‌می‌توان گفت؟

۱۴. کدام‌قسمت ازصفحهٔ مختلط به‌وسیلهٔ نگاشتهای زیرمنبسط وکدام قسمت ازآن منقبض می‌شود:

الف) $w=z^2$، ب) $w=z^2+z$، ج) $w=\frac{1}{z}$

۱۵. تابعی تحلیلی بیابیدکه هرزاویه درنقطهٔ z_0 را درپنج برابرآن زاویه بنگارد.

۱۶. نگاشت

$$w=f(z)=az+b \qquad (a\neq 0) \qquad (۱۰)$$

راکه درآن a و b اعداد مختلط‌دلخواهی هستند (بجزاینکه $a\neq 0$) تبدیل خطی تام گویند. ثابت کنیدکه

الف) $f(z)$ درصفحهٔ گسترش‌یافته یك‌به‌یك است (و ∞ را در∞ می‌نگارد)،

ب) $f(z)$ درهر نقطهٔ صفحهٔ متناهی همدیس است،

ج) در صفحهٔ متناهی، مماس بر هر خم ، تحت نگاشت $f(z)$، به اندازهٔ $\arg a$ دوران می‌کند (یعنی تمام مماسها به‌یك اندازه دوران می‌کنند) وبزرگ نمایی در هرنقطه برابر $|a|$ است.

د) اگر $a=1$ آنگاه $f(z)$ یك انتقال تمام صفحه است‌که با بردار b مشخص می‌شود.

۱۷. در (۱۰) علاوه برفرض $a\neq 0$، فرض کنید $a\neq 1$. ثابت‌کنیدکه رابطهٔ (۱۰) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$w-z_0=a(z-z_0), \qquad (۱۰')$$

که درآن z_0 ازمعادلهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$z_0=az_0+b.$$

توضیح. نقطهٔ z_0 را نقطهٔ ثابت تبدیل (۱۰) گویند، زیرا نگاشت (۱۰) z_0 را به‌خودش تبدیل می‌کند ، یعنی z_0 در تبدیل ثابت می‌ماند*. نقطهٔ بینهایت (∞) همواره یك نقطهٔ ثابت تبدیل (۱۰) است و وقتی $a=1$ و $b\neq 0$، تنها نقطهٔ ثابت است.

۱۸. با استفاده از (۱۰′) نشان دهیدکه تبدیل (۱۰) با فرض $a\neq 1$ معادل با دوران‌تمام صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $\arg a$ درحول نقطهٔ ثابت (متناهی)

---

* همچنین می‌گویند z_0 تحت رابطهٔ (۱۰) پایاست.

$$z_\circ=\frac{b}{1-a}$$

همراه باانبساط یکنواخت $|a|$ نسبت به‌نقطهٔ $z_\circ$ است (به‌عبارت دیگرهمراه باتجانس به‌مرکز $z_\circ$ و نسبت $|a|$).

۱۹. دوران، انبساط ونقطهٔ ثابت متناهی مربوط به‌هریك ازتبدیلهای خطی تام زیررا (اگر نقطهٔ ثابت متناهی وجود داشته باشد) بیابید.

الف) $w=2z+1-3i$، ب) $w=iz+4$، ج) $w=z+1-2i$.

۲۰. تبدیل خطی تامی بیابید که نقطهٔ ثابت آن $1+2i$ است و نقطهٔ i را به‌نقطهٔ $(-i)$ تبدیل می‌کند.

۲۱. تبدیل خطی تامی بیابید که مثلث به‌رئوس $i, 1, \circ$ را به‌مثلث مشابه به‌رئوس $1+i, 2, \circ$ تبدیل کند.

۲۲. نگاشت

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{11}$$

را تبدیل خطی کسری (یا تبدیل موبیوس) گویند. a، b، c، و d اعداد مختلط دلخواهی هستند (بجزاینکه c و d باهم صفر نیستند) ثابت کنید که:

الف) اگر $c=\circ$، $f(x)$ یك تبدیل‌خطی تام است؛

ب) اگر $ad-bc=\circ$، $f(z)$ مقداری ثابت است؛

ج) اگر $c\neq\circ$ و $ad-bc\neq\circ$، آنگاه $f(z)$ درهر نقطهٔ z به‌استثنای $z=\delta=-d/c$، دارای مشتق مخالف صفر است.

د) اگر $c\neq\circ$ و $ad-bc\neq\circ$، آنگاه $f(z)$ درتمام نقاط متناهی‌صفحه مگر احتمالاً[4] در نقطهٔ δ (مسئله ۲۶ را ببینید) نگاشتی همدیس است، که در آن α، زاویهٔ دوران مماس برمنحنیها درنقطهٔ z، برابراست با

$$\alpha=\arg f'(z)=\arg\frac{ad-bc}{c^2}-2\arg(z-\delta)$$

ودرطول هرنیمخط به‌مبدأ δ ثابت می‌ماند ودرآن انبساط برابراست با

$$\mu=|f'(z)|=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|\frac{1}{|z-\delta|^2}$$

ودرطول هردایرهٔ به‌مرکز δ ثابت می‌ماند.

۲۳. فرض کنید که μ همان مقدارقبل باشد. نشان دهید که:

الف) درهرنقطهٔ دایرهٔ γ به‌معادلهٔ

$$|z-\delta|=\frac{1}{|c|}\sqrt{|ad-bc|},$$

که دایرهٔ ایزومتریك تبدیل (۱۱) نامیده می‌شود، $\mu=1$

ب) درداخل γ، $\mu>1$؛ و وقتی $z\to\delta$ به‌بینهایت میل می‌کند؛

ج) درخارج γ، $\mu<1$؛ ووقتی $z\to\delta$ به‌صفرمی‌گراید*.

۲۴. فرض کنید

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (c\neq 0,\ ad-bc\neq 0). \qquad (11')$$

آنگاه واضح است که

$$\lim_{z\to\delta} f(z)=\infty,\ \lim_{z\to\infty} f(z)=\frac{a}{c}=A$$

$(\delta=-d/c)$. فرض کنید تعریف $f(z)$ را با روابط زیر کامل کنیم

$$f(\delta)=\infty,\quad f(\infty)=A$$

نشان دهید که $f(z)$ نگاشت یك به‌یك از صفحهٔ مختلط توسعه‌یافته به‌روی خود آن صفحه است ومعکوس آن

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}$$

است.

۲۵. می گویند دوخم پیوستهٔ C و C^* درصفحهٔ گسترش‌یافته z یك‌زاویهٔ α رادیان به رأس بینهایت تشکیل می‌دهند، اگرنگاره‌های L و L^* ایـن دوخم تحت نگاشت $\zeta=1/z$ زاویهٔ α رادیان به رأس مبدأ (در صفحهٔ ζ) بسازند. نشان دهید که محورهای حقیقی وموهومی زاویهٔ $\pi/2$ رادیان به‌رأس بینهایت تشکیل می‌دهند.

۲۶. نشان دهید که نگاشت $(11')$ درنقطهٔ $\delta=-d/c$ همدیس است، یعنی هردوخم C و C^* واقع درصفحهٔ z که زاویهٔ بین آنها α رادیان وبه‌رأس δ است به‌دوخم Γ و Γ^* واقع درصفحهٔ w که زاویهٔ بین‌آنها α رادیان به‌رأس بینهایت است، تبدیل می‌شود.

۲۷. ثابت‌کنیدکـه نگاشت $(11')$ در بینهایت همدیس است؛ یعنی، دوخـم C و C^* در صفحهٔ z راکه زاویهٔ بین‌آنها α رادیان به‌رأس بینهایت است به‌دوخم Γ و Γ^* در صفحهٔ w که زاویهٔ بین‌آنها α رادیان به‌رأس $A=a/c$ است، تبدیل می‌کند.

توضیح. به این ترتیب بالاخره نشان دادیم که «تبدیل خطی کسری» $(11')$ درهرنقطهٔ

---

* مسائل ۳ و ۴ فصل ۳ را ببینید.

صفحهٔ گسترش‌یافتهٔ z همدیس است.

۲۸. ثابت کنید که اگر $a\neq 0$، تبدیل خطی تام (۱۰) در بینهایت همدیس است (و بنابراین درهر نقطهٔ صفحهٔ گسترش‌یافتهٔ z هم همدیس است).

۲۹. تابع $f(z)$ را در بینهایت تحلیلی گویند اگر تابع $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)$ در $\zeta=0$ تحلیلی باشد. فرض می‌کنیم $f(z)$ دربینهایت تحلیلی است. آنگاه $f(\infty)$، مقدار $f(z)$ در بینهایت، با

$$f(\infty)=\varphi(0).$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=f(\infty),$$

درصورتی که

$$\lim_{z\to\infty} f'(z)=0.$$

۳۰. فرض می‌کنیم $f(z)$ دربینهایت تحلیلی است. آنگاه $f'(\infty)$ مشتق $f(z)$ در بینهایت با

$$f'(\infty)=\varphi'(0),$$

تعریف می‌شود که درآن $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)$. نشان دهید که درحالت کلی

$$f'(\infty)\neq \lim_{z\to\infty} f'(z).$$

۳۱. مطلوب است محاسبهٔ $f'(\infty)$ درتبدیل خطی کسری ('۱۱). از نتیجهٔ این محاسبه، همدیسی ('۱۱) در بینهایت چگونه روشن می‌شود؟

۳۲. فرض می‌کنیم

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

(z_0 می‌تواند بینهایت باشد.) وفرض می‌کنیم که تابع

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

درنقطهٔ z_0 تحلیلی است و $\varphi'(z_0)\neq 0$. ثابت کنید که $f(z)$ در z_0 همدیس است.

۵

انتگرال‌گیری در صفحهٔ مختلط

۱.۵. انتگرال تابع مختلط

۱.۱.۵. خم C به‌معادلهٔ پارامتری

$$z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

هموار گفته می‌شود اگر $z(t)$ درهر نقطه ازفاصلهٔ $a \leqslant t \leqslant b$* دارای مشتق پیوسته ومخالف صفر، $z'(t) \neq 0$، باشد. فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی ازمتغیرمختلط است که دریك حوزهٔ G ازصفحهٔ z تعریف شده است، و C خمی هموار واقع در G با نقطهٔ آغازی z_0 ونقطهٔ پایانی Z است. نقاط $z_0, z_1, \ldots, z_n = Z$ را متوالیاً در طول C ودرجهت مثبت (در جهت افزایش t) انتخاب می‌کنیم، مجموع زیررا تشکیل می‌دهیم

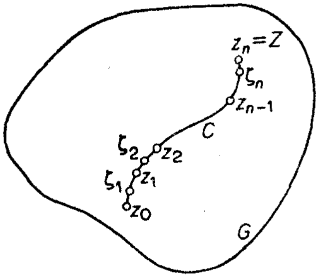
$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{1}$$

که در آن، $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ و ζ_k یك نقطهٔ اختیاری از کمان $\widehat{z_{k-1}z_k}$ است (شکل ۱۴).

فرض می‌کنیم l_k طول $\widehat{z_{k-1}z_k}$ باشد (مسئلهٔ ۲ را ببینید) ومی‌نویسیم

---

* $z'(t)$ در $t=a$ را مشتق راست فرض می‌کنیم واز راست پیوسته است، همچنین $z'(t)$ در $t=b$ را مشتق چپ می‌گیریم واز چپ پیوسته است.



شکل ۱۴

$$\lambda = \max\{l_1, l_2, \dots, l_n\}.$$

فرض می‌کنیم که حد

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad (۲)$$

به‌هر ترتیبی که نقاط z_k و ζ_k انتخاب شوند وجود داشته باشد[۱]. دراین‌صورت می‌گویند $f(z)$ در طول C انتگرال‌پذیر است، وحد (۲) راکه با نماد

$$\int_C f(z)\,dz,$$

نمایش داده می‌شود انتگرال $f(z)$ در طول C می‌نامند.

۲۰۱۰۵. قضیه. اگر $f(z)$ درحوزهٔ G که شامل یك خم هموار C است پیوسته‌باشد، آنگاه $f(z)$ در طول C انتگرال‌پذیر است.

برهان. فرض می‌کنیم

$$z_k = x_k + iy_k,\ \ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k,\ \ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

و

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

دراین‌صورت (۱) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k),$$

۱. یعنی حد (۲) به‌انتخاب نقاط z_k و ζ_k بستگی نداشته باشد. ـ م.

که در آن

$$u_k = u(\xi_k, \eta_k), \ \ v_k = v(\xi_k, \eta_k).$$

اما وقتی $\lambda \to 0$، اولین مجموع سمت راست به‌انتگرال خطی زیرمیل می‌کند

$$\int_C u\,dx - v\,dy,$$

درحالی‌که مجموع دوم به‌انتگرال‌خطی زیرمیل می‌کند

$$\int_C v\,dx + u\,dy.$$

این نتیجه می‌دهد که (۲) وجود دارد* و برابراست با

$$\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \tag{۳}$$

توجه کنید که اگر $f(z)$ به‌جای‌اینکه درحوزه‌ای شامل C پیوسته باشد، درطول C پیوسته باشد، باز قضیه معتبراست (۴.۳.۳ را ببینید). □

۳.۱.۵. می‌توانیم (۳) را به‌صورت اختصاری زیر بنویسیم

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+i\,dy). \tag{۳'}$$

فرض می‌کنیم معادلهٔ پارامتری C

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{۴}$$

باشد. آنگاه واضح است که

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]\,dt \\ &\quad + i\int_a^b [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)]\,dt,\end{aligned}$$

یعنی

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b R(t)\,dt + i\int_a^b I(t)\,dt, \tag{۵}$$

* نقشی که پیوستگی $f(z)$ وهمواری C در تضمین وجود انتگرالهای خطی دارند ازفرمولهای (۵) و ('۵) بخوبی آشکاراست.

که درآن

$$R(t) = \operatorname{Re} f(z(t))z'(t),$$
$$I(t) = \operatorname{Im} f(z(t))z'(t). \qquad (۵')$$

پس با استفاده از (۵)، محاسبهٔ انتگرال مختلط، به‌محاسبهٔ دوانتگرال حقیقی تبدیل‌می‌شود.

۴.۱.۵. فرض‌می کنیم C خمی‌هموار باشد که از کمانهای(هموار) C_1، C_2، ...، C_n که سربه‌سر به‌یکدیگر متصل شده‌اند* تشکیل شده است، و فرض می کنیم $f(z)$ روی C پیوسته است (یعنی درحوزه‌ای شامل C ویا فقط درطول خود C پیوسته است). آنگاه اگر درمجموع (۱)، z_kها $(k=0, 1, ..., n)$ را طوری انتخاب کنیم که هر نقطهٔ انتهایی کمانهای C_1 ، C_2 ، ... ، C_n یکی از z_kها باشد، رابطهٔ زیر آشکار می‌شود

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{C_n} f(z)\,dz. \qquad (۶)$$

یك خم C متشکل ازکمانهای هموار که سر به‌سر به‌یکدیگرمتصل شده‌اند، ممکن است‌خود هموار نباشد؛ درچنین حالتی می گوییم که C هموار تکه‌ای است وانتگرال $f(z)$ درطول C را با رابطهٔ (۶) تعریف می کنیم (مسئلهٔ ۶ را ببینید). آشکار است که اگر بعضی از کمانهای C_k به‌جای هموار، فقط تکه‌ای هموار باشند، (۶) همچنان استواراست. این‌امر با تجزیهٔ هرخم هموار تکه‌ای C_k به‌زیرخمهای هموار دیده می‌شود.

۵.۱.۵. مثال. فرض‌کنیم C خمی هموار تکه‌ای باشدکه دونقطهٔ z_0 و Z را به‌هم وصل می کند. دراین‌صورت

$$\int_C z^n\,dz = \frac{1}{n+1}(Z^{n+1} - z_0^{n+1}), \qquad (۷)$$

که در آن n عددی صحیح دلخواه است، اگر n منفی باشد فرض‌می کنیم که C از $z=0$ عبور نمی‌کند، زیرا اگر (۴) معادلهٔ پارامتری C باشد آنگاه

$$\int_C z^n\,dz = \int_a^b z^n(t)z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{n+1}\frac{d}{dt}z^{n+1}(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{n+1}z^{n+1}(t)\Big|_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{n+1}(Z^{n+1} - z_0^{n+1}) \qquad (n \neq -1).$$

توجه‌کنید که این انتگرال به‌خم‌خاص C که z_0 و Z را به هم وصل می کند بستگی ندارد. اگر C یك‌خم بسته باشد، آنگاه $Z=z_0$، و (۷) به‌صورت زیرمختصرمی‌شود

---

* دقیقتربگوییم. نقطهٔ پایانی C_k برنقطهٔ آغازی C_{k+1}، $k=1, 2, ..., n-1$ منطبق‌است.

$$\int_C z^n \, dz = \circ.$$

فرمول (۷) برای $n=\circ$ محقق است، زیرا دراین‌صورت

$$\int_C dz = \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_\circ = Z - z_\circ.$$

۲.۵. خواص اساسی انتگرال

۱.۲.۵. قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ روی خم هموار تکه‌ای C پیوسته باشد،دراین صورت

$$\int_{C^-} f(z)\, dz = -\int_C f(z)\, dz,$$

که درآن C^-، یعنی خم C که در جهت منفی* پیموده شود.

برهان. کافی است توجه کنیم که

$$\int_{C^-} f(z)\, dz = \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_{n-k+1})(z_{n-k} - z_{n-k+1})$$
$$= -\lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = -\int_C f(z)\, dz,$$

که درآن λ، z_k و ζ_k همان معانی دربخش ۱.۱.۵ را دارند. □

۲.۲.۵. قضیه. فرض می‌کنیم‌که $f(z)$ و $g(z)$ روی خم هموار تکه‌ای C، پیوسته باشند، دراین‌صورت

$$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\, dz = \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C f(z)\, dz,$$

که درآن α و β دو عدد مختلط دلخواه هستند.

برهان. دراینجا داریم

$$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\, dz = \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} [\alpha f(\zeta_k) + \beta g(\zeta_k)] \Delta z_k$$
$$= \alpha \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k + \beta \lim_{\lambda \to \circ} \sum_{k=1}^{n} g(\zeta_k)\Delta z_k$$

---

* یعنی، درخلاف جهت مثبت (بخش ۱.۲.۳ الف را ببینید).

$$= \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz. \square$$

۰۳۰۲۰۵ قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ روی خم هموار تکه‌ای C، پیوسته باشد وفرض می‌کنیم برای هر $z \epsilon C$، $|f(z)| \leqslant M$*. دراین‌صورت

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqslant Ml,$$

که درآن l طول C است.

برهان. توجه کنید که

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant Ml,$$

آخرین نامساوی، ازاینکه درازای هرخم چندضلعی محاط در C، کوچکتراز درازای خود C است نتیجه می‌شود**. $\square$

۳۰۵. انتگرال درطول خمهای چندضلعی

ممکن است به‌نظر رسد که طرح دو قضیهٔ زیر، مربوط به‌انتگرال در طول خمهای چندضلعی، برای ایـن متن کمی تخصصی باشد، اما دربخش‌آینده بـرای اثبات یکـی از قضایای کلیدی آنالیز مختلط (قضیهٔ انتگرال کوشی)مورد نیازخواهند بود.

۰۱۰۳۰۵ لم. فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ G کـه شامل خـم هموار تکه‌ای C است پیوسته‌باشد. دراین‌صورت برای هر $\epsilon > 0$ مفروض، یك خم چندضلعی L محاط در C و واقع در G وجود دارد، به‌قسمی که

$$\left| \int_C f(z)\, dz - \int_L f(z)\, dz \right| < \epsilon.$$

برهان. فرض می‌کنیم D حـوزه‌ای کراندار وشامل C باشد، بـه‌طوری‌کـه حوزهٔ

---

* توجه کنید که M را می‌توان $\max\limits_{z \epsilon C} |f(z)|$ انتخاب کرد.

** خم C به‌معادلهٔ پارامتری (۴) مفروض است، به تعبیری هندسی، هرخم‌چندضلعی (به‌فصل ۳ مسئلهٔ ۱ رجوع‌کنید.) به‌رئوس متوالی $z_k = z(t_k)$ را، که درآن

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

محاط در C، می‌گویند.

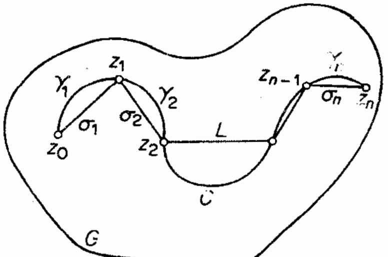
بستهٔ $\bar{D}$ در G قرار گیرد*،مرزD را Γ وفاصلهٔ بین C و Γ را ρ مـی‌نامیم (فصل ۳، مسئلهٔ ۱۷ را ببینید). از پیوستگی $f(z)$ در G، پیوستگی آن در $\bar{D}$ نتیجـه می‌شود. پس بنا بر قضیهٔ ۴.۴.۳، $f(z)$ در$\bar{D}$ پیوستهٔ یکنواخت است. لذا، برای هر $\epsilon>0$ مفروض، یك‌عدد $\delta=\delta(\epsilon)>0$ وجود دارد، به‌طوری‌که اگرنقاط $z', z''\epsilon\bar{D}$ و $|z'-z''|<\delta$، آنگاه

$$|f(z')-f(z'')|<\frac{\epsilon}{2l},$$

کـه درآن l درازای C است. فرض‌کنیم خم C را بـا نقاط z_0، z_1، z_2، ...، z_{n-1}، z_n واقع در روی C ودرجهت مثبت (z_0 نقطهٔ آغازی و z_n نقطهٔ پایانی C هستند) به‌کمانهای γ_1، γ_2، ...، γ_n که درازای هریك از

$$\delta^*=\min\{\delta, \rho\}$$

کوچکتراست، تقسیم‌کرده‌ایم. فرض‌می‌کنیم L خم چندضلعی محاط در C به‌رئوس متوالی z_0، z_1، ... و z_n واضلاع σ_1، σ_2، ... و σ_n باشد (شکل ۱۵ راکـه درآن حوزهٔ D نشان داده نشده است ببینید). چون درازای هرγ_k از δ^*کوچکتراست، فاصلهٔ بین هردونقطهٔ γ_k



شکل ۱۵

یا σ_k، محققاً از δ^*کوچکتراست. بویژه‌هرضلع σ_k ازخم چندضلعی L، از δ^*کوچکتراست. اما $\rho\leqslant\delta^*$، وبنابراین L باید در $\bar{D}$ ولذا در G واقع باشد.

حال مجموع

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(z_k)\Delta z_k \quad (\Delta z_k=z_k-z_{k-1}),$$

راکه تقریبی ازانتگرال $\int_C f(z)\,dz$ است درنظرمی‌گیریم. واضح است که

$$S=\int_{\gamma_1}f(z_1)\,dz+\dots+\int_{\gamma_n}f(z_n)\,dz, \tag{8}$$

* برای دیدن اینکه D وجود دارد، فصل ۳ مسئلهٔ ۱۸ را ببینید، توجه‌کنید که اگرG، تمام صفحهٔ مختلط باشد، می‌توانیم D را هرقرص $|z|<R$، که شامل خم C باشد انتخاب کنیم.

زیرا

$$\Delta z_k=\int_{\gamma_k} dz$$

(مثال ۵.۱.۵ را یادآوری می‌کنیم). ازطرف دیگر

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\dots+\int_{\gamma_n} f(z)\,dz, \qquad (۹)$$

اکنون (۸) را از(۹)کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$\int_C f(z)\,dz-S=\int_{\gamma_1}[f(z)-f(z_1)]\,dz+\dots+\int_{\gamma_n}[f(z)-f(z_n)]\,dz.$$

اما روی هرکمان γ_k داریم $|f(z)-f(z_k)|<\epsilon/2l$،وبنابراین از قضیهٔ ۳.۲.۵ نتیجه می‌شود

$$\left|\int_C f(z)\,dz-S\right|\leqslant\left|\int_{\gamma_1}[f(z)-f(z_1)]\,dz\right|+\dots$$
$$+\left|\int_{\gamma_n}[f(z)-f(z_n)]\,dz\right|$$
$$<l_1\frac{\epsilon}{2l}+\dots+l_n\frac{\epsilon}{2l},$$

که درآن l_k درازای کمان γ_k است. بنابراین

$$\left|\int_C f(z)\,dz-S\right|<\frac{\epsilon}{2}, \qquad (۱۰)$$

زیرا $l_1+l_2+\dots+l_n=l$.

ازهمین راه، اگر به‌جای C، L وبه‌جای γ_k، σ_k بگذاریم، به‌جای (۸) داریم

$$S=\int_{\sigma_1} f(z_1)\,dz+\dots+\int_{\sigma_n} f(z_n)\,dz, \qquad (۸')$$

چون

$$\Delta z_k=\int_{\sigma_k} dz,$$

وبه‌جای (۹) داریم:

$$\int_L f(z)\,dz=\int_{\sigma_1} f(z)\,dz+\dots+\int_{\sigma_n} f(z)\,dz. \qquad (۹')$$

نتیجه اینکه

$$\int_L f(z)\,dz - S = \int_{\sigma_1} [f(z)-f(z_1)]\,dz + \dots$$
$$+ \int_{\sigma_n} [f(z)-f(z_n)]\,dz.$$

اما روی هرضلع σ_k، $|f(z)-f(z_k)| < \epsilon/2l$، ولذا

$$\left|\int_L f(z)\,dz - S\right| < \lambda_1 \frac{\epsilon}{2l} + \dots + \lambda_n \frac{\epsilon}{2l},$$

که در آن λ_k درازای σ_k است. بنابراین

$$\left|\int_L f(z)\,dz - S\right| < \frac{\epsilon}{2}, \tag{10'}$$

زیرا $\lambda_1 + \dots + \lambda_n \leqslant l$ (درازای‌خم چندضلعی محاطی L نمی‌تواند‌از درازای خم C بزرگتر باشد). اکنون (۱۰) و (۱۰′) را با هم ادغام می کنیم، سرانجام به‌دست‌می‌آوریم

$$\left|\int_C f(z)\,dz - \int_L f(z)\,dz\right| \leqslant \left|\int_C f(z)\,dz - S\right|$$
$$+ \left|S - \int_L f(z)\,dz\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \square$$

۰۲۰۳۰۵ لم. فرض‌می‌کنیم تابع $f(z)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ G که شامل خم‌چندضلعی بستهٔ L است پیوسته باشد، دراین‌صورت

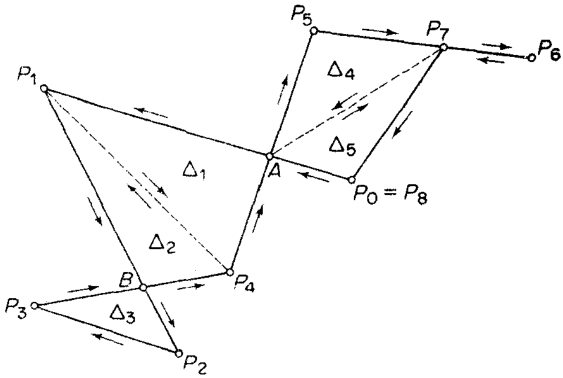
$$\int_L f(z)\,dz = \int_{\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\Delta_2} f(z)\,dz + \dots + \int_{\Delta_n} f(z)\,dz. \tag{11}$$

خمهای Δ_1، Δ_2، ...، Δ_n «مرزهای مثلثی»* هستند که در G واقع‌اند.

برهان. فرض می کنیم L خم چندضلعی بستهٔ $P_0P_1 \dots P_6P_7P_8$ باشد که در شکل ۱۶ نشان داده شده است، ودرجهتی که با سهمها مشخص شده، طی می‌شود. این خم رفتار نوعی‌خم‌چندضلعی‌بسته درحالت کلی را نشان می‌دهد** یعنی خمی که درنقاط A و B «خود را قطع می کند» (A و B رئوس L نیستند) وضلع P_6P_7 دوبار در دوجهت‌مخالف طی

* یعنی، محیطهای مثلثها. اصطلاح مرز دراینجا مترادف باخم است وبیشتر وقتی خم بسته است به‌کار می‌رود.

** برای توجیه بیشتراین ادعا، A. I. Markushevich, Volume 1, pp, 266-268 سابق‌الذکر را ببینید.



شکل ۱۶

می‌شود. ازشکل بالا وازفرمول (۶) آشکاراست که

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{AP_1P_2P_3P_4A} f(z)\,dz + \int_{P_0AP_5P_6P_7P_0} f(z)\,dz$$
$$= \int_{AP_1BP_4A} f(z)\,dz + \int_{BP_2P_3B} f(z)\,dz$$
$$+ \int_{P_0AP_5P_6P_1P_0} f(z)\,dz = \int_{AP_1BP_4A} f(z)\,dz$$
$$+ \int_{BP_2B_3B} f(z)\,dz + \int_{P_0AP_5P_7P_0} f(z)\,dz$$
$$+ \int_{P_7P_6} f(z)\,dz + \int_{P_6P_7} f(z)\,dz.$$

اما دوانتگرال اخیر بنابرقضیهٔ ۱.۲.۵ همدیگر را خنثی می‌کنند، وداریم

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{AP_1BP_4A} f(z)\,dz + \int_{BP_2P_3B} f(z)\,dz$$
$$+ \int_{P_0AP_5P_7P_0} f(z)\,dz, \tag{۱۲}$$

انتگرال $f(z)$ درطول خم‌چندضلعی بستهٔ مفروض L را به‌مجموع انتگرالهایی درطول سه‌خم (یکی ازسه‌خم خود مرز مثلثی است) که خمهای ژردان وهمچنین خمهای چندضلعی بسته هستند تبدیل کرده‌ایم. داخل هرچنین خمی مانند Λ را می‌توان با رسم «میان برهای»

مناسبی که برخی رئوس Λ را به‌هم‌وصل می‌کنند به‌تعداد محدودی مثلث تقسیم کرد(خطوط نقطه‌چین شکل). اما مجموع انتگرالهای $f(z)$ درطول مرزهای مثلثی Δ_α، Δ_β، ... Δ_ν که محیطهای مثلثهاست (طی شده درجهتهایی که از جهت روی Λ ، یعنی در واقع از جهت روی L مشخص می‌شوند) برابر با انتگرال درطول خود Λ است. زیرا هرمیان‌بر دوبار درجهتهای مخالف طی می‌شود، به قسمی که انتگرالهای متناظر آنها یکدیگر را خنثی می‌کنند، درحالی که اضلاع مثلثها صرفنظر از میان‌برها خم Λ را تشکیل می‌دهند. بعلاوه Λ ، که قسمتی از L است در G وبنابراین درون Λ نیز در G واقع است، زیرا G همبند ساده‌است (بخش۴.۲.۳ب رابه‌یادآورید). بنا براین تمام‌مرزهای‌مثلثی Δ_α ، Δ_β ، ... ، Δ_ν در G واقع‌اند. درمثال نمونه ما

$$\int_{Ap_1BP_4A} f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz,$$

$$\int_{BP_3P_2B} f(z)dz = \int_{\Delta_3} f(z)dz,$$

$$\int_{P_0AP_5P_2P_0} f(z)dz = \int_{\Delta_4} f(z)dz + \int_{\Delta_5} f(z)dz,$$

که Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 ، Δ_4 ، Δ_5 مرزهای مثلثی‌ای هستند که درشکل نشان داده شده‌اند (از نظر سادگی، برای مثلث و محیطش یك نماد به‌کار می‌بریم). با منظورکردن این فرمولها در (۱۲) سرانجام رابطهٔ مطلوب را موافق با (۱۱) به‌دست می‌آوریم.

$$\int_L f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz + \int_{\Delta_3} f(z)dz$$
$$+ \int_{\Delta_4} f(z)dz + \int_{\Delta_5} f(z)dz.$$

راه اثبات برای یك خم چند ضلعی بستهٔ‌کلی، برهمین اساس است. ابتدا در L تمام پاره‌خطهایی راکه دوبار درجهتهای مخالف طی شده‌اند حذف‌کرده، سپس آن را به خمهای ژردان چند ضلعی بستهٔ Λ_1 ، Λ_2 ، ... ، Λ_N تجزیه می‌کنیم ، آنگاه درون Λ_1 ، Λ_2 ، ... ، Λ_N را به مثلثهای Δ_1 ، Δ_2 ، ... ، Δ_n تقسیم می‌کنیم، رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید. □

۴.۵. قضیهٔ انتگرال کوشی

۱.۴.۵ فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ G پیوسته باشد و فرض می‌کنیم دو خم C_1 و C_2 واقع در G یك نقطهٔ آغازی و یك نقطهٔ پایانی داشته باشند. دراین‌صورت ممکن است رابطهٔ

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \tag{۱۳}$$

برای هردو خم نظیر C_1 و C_2 برقرار باشد، نظیر مثال ۵.۱.۵ که درآن $f(z)=z^n$ ، ویا اینکه (۱۳) برقرار نباشد ، نظیر مسئلهٔ ۹ که درآن $f(z)=\operatorname{Re} z$. بنابراین به‌این مسئله هدایت می‌شویم که درچه‌شرایطی برای تمام خمهای C_1 و C_2 که دونقطهٔ مفروض را به یکدیگر وصل می‌کنند (۱۳) برقرار است . این مسئله معادل است با این سؤال که درچه شرایطی رابطهٔ

$$\int_{C} f(z)dz = 0 \tag{۱۴}$$

برای هرخم بستهٔ C که در G واقع باشد صادق است (مسئلهٔ ۸ را ببینید). دراولین مورد از دوحالتی که هم‌اینك موردنظر قرارگرفت، تابع $f(z)$ تحلیلی‌است، درحالی که درمورد دوم، چنین‌نیست (مثال ۳.۱.۴ ب رایادآوری می‌کنیم). این‌مطلب‌این اندیشه را به ذهن القاء می‌کند که شاید تحلیلی‌بودن $f(z)$ موجب برقراری (۱۴) است، قضیهٔ کلیدی‌آنالیز مختلط که در زیر می‌آید این‌گمان را تأیید می‌کند.

قضیه (قضیهٔ انتگرال کوشی).* فرض می‌کنیم $f(z)$ در حوزهٔ همبند سادهٔ G تحلیلی باشد، دراین‌صورت برای هر خم بستهٔ هموار تکه‌ای C ، واقع در G

$$\int_{C} f(z)dz = 0 .$$

برهان. فرض می‌کنیم برای هرمرز مثلثی Δ ، واقع در G

$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0 . \tag{۱۵}$$

دراین‌صورت برای هر خم چندضلعی بستهٔ L ، واقع در G ، بنابر لم ۲.۳.۵

$$\int_{L} f(z)dz = 0 , \tag{۱۶}$$

زیرا انتگرال سمت چپ را می‌توان همیشه به‌مجموع تعداد محدودی انتگرال درطول مرزهای مثلثی تبدیل کرد. بعلاوه بنابر لم ۱.۳.۵ برای هر $\epsilon>0$ مفروض، خم چندضلعی بستهٔ L وجود دارد به‌قسمی‌که

$$\left|\int_{C} f(z)dz - \int_{L} f(z)dz\right| < \epsilon,$$

* برای صورتی ضعیفتر ازقضیهٔ انتگرال‌کوشی‌که اثبات آن ساده‌تراست، مسئلهٔ ۱۴ را ببینید.

و بنابراین از (۱۶) نتیجه می‌شود

$$\left|\int_C f(z)dz\right| < \epsilon.$$

اما چون ε بدلخواه کوچك است، داریم

$$\int_C f(z)\, dz = \circ,$$

بنابراین، تمام برهان، به‌اثبات (۱۵) برمی‌گردد، یعنی به‌اینکه نشان دهیم انتگرال $f(z)$ درطول هرمرز مثلثی Δ واقع در G صفرمی‌شود. پس می‌نویسیم

$$\left|\int_\Delta f(z)\, dz\right| = M, \tag{۱۷}$$

با این هدف که نشان دهیم $M = \circ$. برای این منظور، پاره‌خطهای واصل اوساط اضلاع Δ را رسم می‌کنیم، به‌این وسیله Δ به چهارزیرمثلث مساوی $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$ و $\Delta_۴$ تقسیم می‌شود، وهمان‌طورکه درشکل ۱۷ نشان داده شده است، همگی درجهت خلاف حرکت عقربهٔ ساعت طی می‌شوند.* چون هریك ازسه پاره‌خط واصل اوساط Δ دوبار در جهات مخالف طی شده است، واضح است که

$$\int_\Delta f(z)\, dz = \int_{\Delta_۱} f(z)\, dz + \int_{\Delta_۲} f(z)\, dz +$$
$$+ \int_{\Delta_۳} f(z)\, dz + \int_{\Delta_۴} f(z)\, dz,$$

زیرا دوانتگرال مربوط به‌هریك ازاین سه پاره‌خط یکدیگررا خنثی می‌کنند و اضلاعی‌که از $\Delta_۱$ ، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$ و $\Delta_۴$ باقی می‌مانند محیط Δ را می‌سازند. از این نتیجه می‌شودکه انتگرال درطول حداقل یکی ازمرزهای $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$ و $\Delta_۴$ که آن را $\Delta^{(1)}$ می‌خوانیم ازنظرقدرمطلق از $M/۴$ کوچکترنیست، یعنی

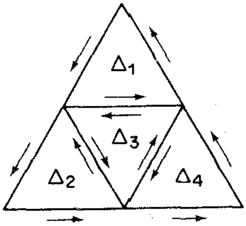
$$\left|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)\, dz\right| \geqslant \frac{M}{۴}, \tag{۱۸}$$

چون درغیر این‌صورت

$$\left|\int_\Delta f(z)\, dz\right| \leqslant \left|\int_{\Delta_۱} f(z)\, dz\right| + \cdots + \left|\int_{\Delta_۴} f(z)\, dz\right| < M,$$

---

* برای سهولت، نمادهای Δ، $\Delta_۱$، $\Delta_۲$ وغیرآن را، هم‌برای نمایش مرزهای مثلثی، هم‌برای حوزه‌های بسته‌ای‌که مرزهای آن مثلثی هستند، به کار برده مرز مثلثی وحوزهٔ محدود به‌آن را مثلث می‌گوییم بدون اینکه ابهامی پیش‌آید. زیرا همیشه از متن روشن است که بحث دربارهٔ مرزاست یا دربارهٔ حوزه.



شکل ۱۷

که با (۱۷) درتناقض است. سپس مثلث $\Delta^{(۱)}$ را به‌چهار زیرمثلث مساوی تقسیم می‌کنیم. دراین صورت با استدلال قبلی می‌بینیم که قدرمطلق انتگرال درطول یکی از این مثلثهای جدید، که آن را $\Delta^{(۲)}$ می‌نامیم از $M/۴^۲$ کوچکتر نیست، یعنی اگر (۱۸) استوار باشد

$$\left|\int_{\Delta^{(۲)}} f(z)\, dz\right| \geqslant M/۴^۲.$$

با ادامهٔ این عمل به‌طور نامحدود یك دنبالهٔ نامتناهی ازمثلثهای

$$\Delta^{(۰)}=\Delta,\ \Delta^{(۱)},\ \ldots,\ \Delta^{(n)},\ \ldots$$

واقع در G به‌دست می‌آوریم که هریك شامل مثلث‌بعدی است (در اینجا ما ازاین‌واقعیت که G همبند ساده است استفاده می‌کنیم). این دنباله به‌قسمی است که

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)\, dz\right| \geqslant M/۴^n \qquad (n=۰,\ ۱,\ ۲,\ \ldots). \tag{۱۹}$$

توجه کنید که اگر l محیط Δ و l_n محیط $\Delta^{(n)}$ باشد، آنگاه

$$l_n=\frac{l}{۲^n}\cdot$$

امّا آشکاراست که حکم قضیهٔ ۲.۱.۲ برای مثلثهای تودرتو به‌جای مستطیلهای تودرتو، اگر l_n نقش r_n را بازی کند همچنان استوار است (چرا؟). بنابراین یك نقطهٔ یکتای $z_۰\in G$ وجود دارد که به‌تمام بینهایت مثلث $\Delta^{(۰)}$، $\Delta^{(۱)}$، ...، $\Delta^{(n)}$، ... متعلق است.

اکنون از اینکه $f(z)$ در G تحلیلی فرض شده است استفاده کرده می‌گوییم که $f(z)$ در $z_۰$ دارای مشتق متناهی $f'(z_۰)$ است. لذا برای هر $\epsilon>۰$ مفروض، یك $\delta>۰$ وجود دارد به‌قسمی که از $۰<|z-z_۰|<\delta$، نامساوی

$$\left|\frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}-f'(z_۰)\right|<\epsilon$$

یا معادل آن

$$|f(z)-f(z_۰)-(z-z_۰)f'(z_۰)|<\epsilon|z-z_۰| \tag{۲۰}$$

نتیجه می‌شود. بعلاوه

$$\int_{\Delta^{(n)}}[f(z)-f(z_\circ)-(z-z_\circ)f'(z_\circ)]\,dz$$

$$=\int_{\Delta^{(n)}}f(z)\,dz-f(z_\circ)\int_{\Delta^{(n)}}dz-f'(z_\circ)\int_{\Delta^{(n)}}z\,dz$$

$$+z_\circ f'(z_\circ)\int_{\Delta^{(n)}}dz=\int_{\Delta^{(n)}}f(z)\,dz,$$

زیرا بنابر بخش ۵.۱.۰۵ و مسئلهٔ ۱۱

$$\int_{\Delta^{(n)}}dz=\int_{\Delta^{(n)}}z\,dz=\circ.$$

ازطرف‌دیگربرای هر $z\in\Delta^{(n)}$ اگر n به‌قدرکافی بزرگ یعنی از N بزرگتر باشد رابطهٔ (۲۰) استوار است، زیرا در این صورت $\Delta^{(n)}$ درقرص $|z-z_\circ|<\delta$ واقع می‌شود. اما $z\in\Delta^{(n)}$ نتیجه می‌دهد که $|z-z_\circ|<l_n$ (چرا؟) و بنابراین اگر $n>N$، برای هر $z\in\Delta^{(n)}$

$$|f(z)-f(z_\circ)-(z-z_\circ)f'(z_\circ)|<\epsilon\, l_n.$$

بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ ۳.۲.۰۵،

$$\left|\int_{\Delta^{(n)}}f(z)\,dz\right|=\left|\int_{\Delta^{(n)}}[f(z)-f(z_\circ)-(z-z_\circ)f'(z_\circ)]\,dz\right|<\epsilon l_n^{۲}=\frac{\epsilon l^{۲}}{۴^n}.$$

از مقایسهٔ این رابطه با (۱۹) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{M}{۴^n}\leqslant\left|\int_{\Delta^{(n)}}f(z)\,dz\right|<\frac{\epsilon l^{۲}}{۴^n}\quad(n>N),$$

که نتیجه می‌دهد $M<\epsilon l^{۲}$. اما در این صورت $M=\circ$، زیرا M ذاتاً غیرمنفی، و ϵ بدلخواه کوچك است. □

۲.۴.۰۵. فرض می‌کنیم C یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای و I داخل آن باشد، $f(z)$ را در «داخل و روی» C یعنی درحوزهٔ بستهٔ $\bar{I}$ تحلیلی می‌گیریم. در این صورت $f(z)$ دریك حوزهٔ همبند سادهٔ G که شامل $\bar{I}$ و درنتیجه شامل C است تحلیلی است، به‌قسمی که بنابرقضیهٔ انتگرال کوشی

$$\int_C f(z)\,dz=\circ\cdot \tag{۲۱}$$

درواقع درهرنقطهٔ مفروض $z\in\bar{I}$، تابع $f(z)$ در یك قرص باز K_z به‌مرکز z تحلیلی است (بخش ۲.۱.۰۴ را ببینید). پس بنابرقضیهٔ هاینه-بورل، تعدادی متناهی ازاین قرصها،

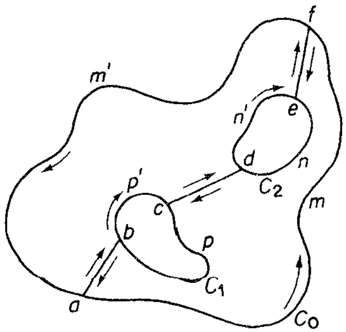
مانند K_{z_1}، ...، K_{z_n}، وجود دارند که $\bar{I}$ را می‌پوشانند. مجموعهٔ تمام نقاط متعلق به حداقل یکی از این قرصهای K_{z_1}،...،K_{z_n} که آشکارا باز و همبند است، حوزه‌ای است مانند G که شامل $\bar{I}$ است. بعلاوه G همبند ساده است زیرا نقاط داخل یك خم ژردان بسته است (کدام یك؟).

درواقع، می‌توان نشان دادکه اگر $f(z)$ در I تحلیلی و در $\bar{I}$ فقط پیوسته باشد، (۲۱) معتبر باقی می‌ماند، نتیجه‌ای که به‌تعمیم قضیهٔ انتگرال کوشی معروف است*.

۳۰۴۰۵ اکنون، مانند بخش ۴.۲.۳ د، فرض می‌کنیم C_0، C_1، ...، C_n نمایش $n+1$ خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای باشند به‌قسمی که خمهای C_1، ...، C_n همگی درون C_0 باشند ویکدیگررا قطع نکنند. پس مجموعهٔ نقاط داخل خم C_0 که خارج n خم دیگر C_1، ...، C_n واقع‌اند یك حوزهٔ همبند $(n+1)$گانهٔ D است، که مرزش عبارت است از $n+1$ خم C_0، C_1، ...، C_n. فرض می‌کنیم $f(z)$ در $\bar{D}$ تحلیلی است. دراین صورت داریم

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz. \tag{۲۲}$$

برای اثبات، $n+1$ کمان کمکی غیرمتقاطع γ_0، γ_1، ...، γ_n را رسم می‌کنیم که هریك از خمهای C_0، C_1، ...، C_n را به‌خم بعدی و C_n را به C_0 وصل می‌کنند، به‌این ترتیب $\bar{D}$ به‌دو حوزهٔ بسته تقسیم می‌شود که به‌دو خم ژردان بستهٔ Γ و Γ' که ازکمانهای γ_0، γ_1، ...، γ_n وقسمتهایی ازخمهای C_0، C_1، ...، C_n تشکیل شده محدود هستند، نظیر شکل ۱۸ که برای‌حالت $n=2$ رسم شده است (دراینجا $\gamma_0=ab$، $\gamma_1=cd$، $\gamma_2=ef$، $\Gamma=amfendcpba$، $\Gamma'=abp'cdn'efm'a$).



شکل ۱۸

* مثلاً به‌کتاب سابق‌الذکر A. I. Markushevich, Volume III, Theorem 3. 10 رجوع کنید.

امـا $f(z)$ درداخل و روی Γ و Γ' تحلیلی است، به طوری که بنابرقضیهٔ انتگرال کوشی

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0, \int_{\Gamma'} f(z)dz = 0.$$

این دوانتگرال را باهم جمع کرده، توجه می‌کنیم که هریك از کمانهای γ_0، γ_1، ...، γ_n دوبار درجهت عکس‌یکدیگرطی می‌شوند، به‌قسمی که انتگرالهای متناظر آنها یکدیگـررا خنثی می‌کنند، برای حالتی که درشکل نشان داده‌ایم

$$\int_{C_0} f(z)\,dz + \int_{C_1^-} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz$$
$$= \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0$$

ودرحالت کلیتر

$$\int_{C_0} f(z)\,dz + \int_{C_1^-} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz + \cdots$$
$$+ \int_{C_n^-} f(z)\,dz = 0. \qquad (۲۳)$$

اما این رابطه بنابر قضیهٔ ۱.۲.۵ با (۲۲) معادل است. اگر فقط دو خم C_0 و C_1 وجود داشته باشند (C_1 داخل C_0 است)، آنگاه (۲۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz, \qquad (۲۲')$$

البته‌مشروط براینکه $f(z)$ در $\bar{D}$، یعنی‌روی‌خمهای C_0،C_1 و درحوزهٔ بین‌آنها تحلیلی باشد.

۴.۴.۵ مثال. فرض می‌کنیم C یك خم‌ژردان‌بستهٔ‌هموارتکه‌ای‌باشد،وفرض‌می‌کنیم نقطهٔ $z=0$ خارج C است. در این صورت، چون تابع $1/z$ در همه‌جا، به استثنای نقطهٔ $z=0$ تحلیلی است،

$$\int_C \frac{dz}{z}$$

بنـــابر قضیهٔ انتـگرال کـوشی صفراست. اما اگر C شامل $z=0$ باشد (یعنی اگر $z=0$ در داخل C باشد)،آنگاه بنابر (۲۲')

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z},$$

که درآن، γ دایره‌ای به‌مرکز $z=0$ وواقع درداخل C است. شعاع γ را R فرض می-

کنیم، آنگاه اگر $z\in\gamma$ باشد*

$$z=R(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$$dz=R(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta=iR(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta,$$

$$\frac{dz}{z}=i\,d\theta,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}=\int_{\circ}^{۲\pi} i\,d\theta=۲\pi i.$$

بنابراین برای هر خم ژردان بستهٔ هموارتکه‌ای C وشامل $z=\circ$

$$\int_C \frac{dz}{z}=۲\pi i\,.$$

انتگرال کمی کلیتر

$$\int_C \frac{dz}{z-z_\circ}$$

را درنظرمی گیریم که در آن C خم‌ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای شامل نقطهٔ $z=z_\circ$ است.

با تبدیل متغیر $\zeta=z-z_\circ$ و $dz=d\zeta$ می بینیم که

$$\int_C \frac{dz}{z-z_\circ}=\int_{C'} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

که در آن خم جدید C' اینك شامل نقطهٔ $\zeta=\circ$ است (C' را مشخص کنید). از این‌نتیجه می‌شود

$$\int_C \frac{dz}{z-z_\circ}=۲\pi i. \qquad (۲۴)$$

از طرف دیگر، اگر نقطهٔ $z=z_\circ$ خارج C جای داشته باشد، داریم

$$\int_C \frac{dz}{z-z_\circ}=\circ,$$

زیرا تابع $۱/(z-z_\circ)$، روی C وودرداخل آن تحلیلی است.

---

* در بخش ۳.۱.۸ الف خواهیم دید که می‌توان نوشت

$$z=Re^{i\theta},\quad dz=iRe^{i\theta}\,d\theta,\quad \frac{dz}{z}=id\theta.$$

۵.۵. انتگرالهای مختلط نامعین

۵.۵.۱. قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ همبندسادهٔ G تحلیلی باشدآنگاه انتگرال*

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \qquad (۲۵)$$

در طول هرخم هموار تکه‌ای واقع در G با نقطهٔ آغازی ثابت z_0 ونقطهٔ متغیر پایانی z، یك تابع تحلیلی یك مقداری $F(z)$ را در G تعریف می‌کندکه مشتق آن $F'(z)=f(z)$.

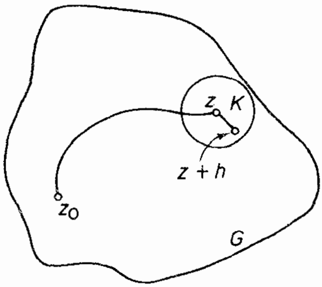
برهان. این امر کــه $F(z)$ مستقل از خم واصل بین z_0 و z است (و بنابرایــن یك مقداری‌است) بی‌درنگ ازقضیهٔ انتگرال کوشی‌ومسئلهٔ ۸ نتیجه می‌شود. $z\in G$ مفروض‌است. فرض می‌کنیم K یك همسایگی z، واقع در G، و $z+h$ یك نقطهٔ K باشد، آنگاه

$$F(z+h)-F(z)=\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta=\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta, \qquad (۲۶)$$

کــه می‌توانیم در آخرین انتگرال «مسیر انتگرال‌گیری» را پاره‌خط واصل z به $z+h$ انتخاب کنیم (شکل ۱۹ را ببینید). رابطهٔ (۲۶)رابر h تقسیم کرده با استفاده‌از

$$f(z)=f(z)\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} d\zeta=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta,$$

به دست می‌آوریم



شکل ۱۹

* توجه کنیدکه اگر $z=z_0$، آنگاه $F(z)$ خود به‌خود صفر می‌شود.

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}[f(\zeta)-f(z)]d\zeta. \qquad (۲۷)$$

چون $f(z)$ در z پیوسته است، برای هر $\varepsilon>0$ مفروض، یك عدد $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ وجود دارد به قسمی که از $|z-\zeta|<\delta$ نتیجه می‌شود

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$$

اکنون قضیهٔ ۳.۲.۵ رادرمورد (۲۷) به‌کارمی‌بریم. به‌دست‌می‌آید که اگر $|h|<\delta$، آنگاه

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon\frac{|h|}{|h|}=\varepsilon.$$

پس

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z),$$

یعنی $F(z)$ در z مشتق‌پذیراست (وبنابراین در G تحلیلی است، زیرا $z\in G$ اختیاری است) ومشتق آن $F'(z)=f(z)$. $\square$

۲.۵.۵. تبصره. خوب است توجه کنیم که ما دراثبات قضیهٔ ۱.۵.۵ به‌فرض تحلیلی بودن $f(z)$ نیاز نداریم، زیرا بوضوح کافی است که فرض کنیم $f(z)$ در G پیوسته است وانتگرال $f(z)$ درطول هرخم بستهٔ هموار تکه‌ای واقع در G صفر می‌شود. در واقع با این فرض، دیگر نیازی نیست که G همبند ساده باشد (چرا نیاز نیست؟).

۳.۵.۵. هر تابع یك مقداری $\Phi(z)$ که درحوزهٔ G به قسمی تعریف شده است که برای‌هر $z\in G$، $\Phi'(z)=f(z)$، یك انتگرال نامعین (یا تابع اولیهٔ) $f(z)$ نامیده می‌شود. پس برطبق قضیهٔ ۱.۵.۵، تابع (۲۵) یك انتگرال نامعین $f(z)$ است. در واقع (۲۵) اساساً همان‌طور که درزیرنشان می‌دهیم «کلیترین» انتگرال نامعین $f(z)$ است.

قضیه. هر انتگرال نامعین $f(z)$ به صورت زیر است

$$\Phi(z)=F(z)+c=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta+c \quad (z_0,z\in G), \qquad (۲۸)$$

که درآن c یك ثابت مختلط است.

برهان. فرض می‌کنیم

$$\Phi(z)-F(z)=\Psi(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

پس واضح است که $\Psi(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی است، ومشتق آن

$$\Psi'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

اما

$$\Psi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

(بخش ۳.۲.۴ را ببینید)، بنابراین، درهر نقطهٔ G

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,\cdot$$

در نتیجه u و v در G ثابت هستند، یعنی

$$\Psi(z) = u + iv = c \qquad (c = \text{ثابت})$$

که رابطه‌ای معادل با (۲۸) است. □

۴.۵.۵ در (۲۸) z را z_0 انتخاب کرده، به دست می‌آوریم $c = \Phi(z_0)$. از این رابطه بی‌درنگ به فرمول زیر می‌رسیم

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

این رابطه «انتگرال معین» درسمت چپ را به صورت تفاضـــل مقـادیر انتگرال نامعین، در دوسر مسیرانتگرال‌گیری بیان‌می‌کند. پس درمحدودهٔ توابع تحلیلی درحوزهٔ همبندساده، می‌بینیم که انتگرال‌گیری مختلط‌را (دقیقاً نظیر انتگرال‌گیری حقیقی) می‌توان هم به‌عنوان یك عمل جمع (به بخش ۱.۱.۵ رجوع کنید) و هم بـه عنوان عمل عکس مشتق‌گیری در نظر گرفت.

۶.۵ فرمول انتگرال کوشی

۱.۶.۵ قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ G کـه شامل یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C و داخل آن است تحلیلی باشد پس اگر z_0 داخل C باشد

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz. \tag{۲۹}$$

برهان. اگر z_0 داخل C باشد، تابع

$$\frac{f(z)}{z - z_0} \tag{۳۰}$$

درهمه جا به‌استثنای نقطهٔ $z_\circ$ تحلیلی است. فرض می کنیم γ_R دایره‌ای به‌شعاع R و به‌مرکز $z_\circ$ و آن‌قدر کوچك باشد که درون C قرار گیرد. پس بنا بر $(۲۲')$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_\circ}dz=\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz.$$

اما مقدار انتگرال طرف چپ ، مستقل از شعاع γ_R است، وبنا براین

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_\circ}dz=\lim_{R\to\circ}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz.$$

پس، برای اثبات (۲۹) باید نشان دهیم که

$$\lim_{R\to\circ}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz=۲\pi i f(z_\circ), \qquad (۳۱)$$

یعنی نشان دهیم که برای هر $\varepsilon>\circ$ مفروض، یك عدد $\delta=\delta(\varepsilon)>\circ$ وجود دارد به‌قسمی که‌از $R<\delta$ نتیجه شود

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz-۲\pi i f(z_\circ)\right|<\varepsilon \qquad (۳۲)$$

طرف چپ (۳۲) را می‌توان با استفاده از (۲۴) به‌صورت

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz-f(z_\circ)\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z-z_\circ}\right|=\left|\int_{\gamma_R}\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}dz\right|,$$

نوشت. اما $f(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است (به‌مسئلهٔ ۲، فصل ۴ رجوع کنید)، پس برای هر $\varepsilon>\circ$ مفروض یك $\delta=\delta(\varepsilon)>\circ$ وجود دارد به قسمی که اگر $|z-z_\circ|<\delta$، آنگاه

$$|f(z)-f(z_\circ)|<\frac{\varepsilon}{۲\pi}.$$

بنا براین طبق قضیهٔ ۳.۲.۵ هرگاه $R<\delta$ داریم

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z-z_\circ}dz-۲\pi i f(z_\circ)\right|<\frac{۱}{R}\frac{\varepsilon}{۲\pi}۲\pi R=\varepsilon،$$

در نتیجه (۳۱) ثابت می‌شود. □

۲.۶.۵. فرمول (۲۹) که به‌فرمول انتگرال کوشی معروف است، مقادیر $f(z)$ در داخل مرز C را به مقادیر $f(z)$ درروی خم C مربوط می کند. توجه کنید که اگر $z_\circ$ خارج C باشد، آنگاه (۳۰) داخل و روی C تحلیلی است وبنا براین طبق قضیهٔ انتگرال کوشی

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_\circ}=\circ\cdot$$

۷.۵. مشتق‌پذیری نامتناهی توابع تحلیلی

۱.۷.۵. قضیه. اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ بینهایت مرتبه در G مشتق پذیر است، یعنی در G مشتقهای تمام مراتب $f(z)$ وجود دارند. درواقع مشتق مرتبهٔ n ام $f(z)$ با فرمول زیر داده می‌شود*

$$f^{(n)}(z_\circ)=\frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}dz \quad (z_\circ\in G, n=\circ,۱,۲,\dots) \qquad (۳۳)$$

که درآن C یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای شامل $z_\circ$ است و به قسمی است‌که G شامل C و داخل آن است.

برهان. ما (۳۳) را با استقراء ثابت می‌کنیم، نخست توجه می‌کنیم، که اگر $n=\circ$، آنگاه (۳۳) به‌فرمول (۲۹) انتگرال کوشی تبدیل می‌شود. سپس فرض می‌کنیم که (۳۳) برای یك عدد صحیح غیر منفی $n-۱$ استواراست ونشان می‌دهیم که (۳۳) همچنین‌برای n استوار است، وبه این ترتیب استقراءکامل می‌شود. این امر را بامحاسبهٔ مستقیم‌مقدار

$$f^{(n)}(z_\circ)=\lim_{n\to\circ}\frac{f^{(n-۱)}(z_\circ+h)-f^{(n-۱)}(z_\circ)}{h}, (z_\circ\in G),$$

به انجام می‌رسانیم. به روشی که‌دربرهان قضیهٔ ۱.۶.۵ به‌کاررفته، عبارت

$$\frac{n!}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}dz,$$

راکه درآن γ_R دایره‌ای است به شعاع R وبه مرکز $z_\circ$ وآن‌قدر کوچك است که درداخل C جای می‌گیرد، جانشین طرف راست (۳۳) می‌کنیم. بنابراین با انتخاب $|h|<R$ بسه قسمی که $z_\circ+h$ داخل γ_R واقع‌شود وبافرض اینکه (۳۳) برای $n-۱$ استواراست، داریم

$$\frac{f^{(n-۱)}(z_\circ+h)-f^{(n-۱)}(z_\circ)}{h} \qquad (۳۴)$$

$$=\frac{(n-۱)!}{۲\pi ih}\int_{\gamma_R} f(z)\left[\frac{۱}{(z-z_\circ-h)^n}-\frac{۱}{(z-z_\circ)^n}\right]dz$$

---

* بنا به تعریف، $f^{(\circ)}(z)=f(z), \circ!=۱$.

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i h}\int_{\gamma_R} f(z)\frac{(z-z_0)^n-(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^n}dz$$

$$=\frac{(n-1)!}{2\pi i}$$

$$\times\int_{\gamma_R} f(z)\frac{(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\dots+(z-z_0-h)^{n-1}}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^n}dz, \quad (34)$$

درآخرین مرحله، اتحاد جبری زیر را به‌کار برده‌ایم

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}).$$

فرض می‌کنیم ،مانندمسئلهٔ دوازدهم، فصل سوم

$$M=\max_{z\in\gamma_R}|f(z)|, \quad (35)$$

دراین صورت به‌کمك قضیهٔ ۳.۲.۵ از (۳۴) و (۳۵) نتیجه می‌شودکه

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h}-\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right|$$

$$=\left|\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(z-z_0)^{n-i}(z-z_0-h)^i-n(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^{n+1}}dz\right.$$

$$\leqslant\frac{(n-1)!}{2\pi}2\pi RM|h|\frac{(2R)^{n-1}+2(2R)^{n-1}+\dots+n(2R)^{n-1}}{(R-|h|)^nR^{n+1}}, \quad (36)$$

توضیح آنکه در آخرین مرحله، برآورد

$$R-|h|=||z-z_0|-|h||\leqslant|z-z_0-h|\leqslant|z-z_0|+|h|<2R$$

(به بخش ۸.۳.۱ رجوع کنید) وعملیات زیر را به کاربرده‌ایم

$$\begin{aligned}(z-z_0)^n&+(z-z_0)^{n-1}(z-z_0-h)+\dots\\&+(z-z_0)(z-z_0-h)^{n-1}-n(z-z_0-h)^n\\&=[(z-z_0)^n-(z-z_0-h)^n]+\dots\\&\quad+[(z-z_0)^2(z-z_0-h)^{n-2}-(z-z_0-h)^n]\\&\quad+[(z-z_0)(z-z_0-h)^{n-1}-(z-z_0-h)^n]\\&=h[(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\dots+(z-z_0-h)^{n-1}]\end{aligned}$$

$$+\cdots+h(z-z_\circ-h)^{n-۲}[(z-z_\circ)+(z-z_\circ-h)]$$
$$+h(z-z_\circ-h)^{n-۱}.$$

اما وقتی $h\to \circ$، طرف راست (۳۶) به صفر میل می‌کند، پس طرف چپ آن نیز به صفر می‌گراید، یعنی

$$f^{(n)}(z_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{f^{(n-۱)}(z_\circ+h)-f^{(n-۱)}(z_\circ)}{h}$$
$$=\frac{n!}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}dz=\frac{n!}{۲\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}dz\cdot \square$$

۲.۷.۵. تبصره. این یك نتیجهٔ فوری‌ازقضیهٔ ۱.۷.۵ است‌که اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشد،آنگاه تمام مشتقها،

$$f'(z),f''(z),\ldots f^{(n)}(z),\ldots \qquad (۳۷)$$

نیز تحلیلی هستند. بویژه مشتقهای (۳۷)، همگی خود به خود در G پیوسته‌اند(به فصل ۴، مسئلهٔ ۲ رجوع کنید).

۳.۷.۵. اینك اثبات قضیه‌ای کـه اساساً عکس قضیهٔ انتگرال کوشـی است مطلب ساده‌ای است:

قضیهٔ (مورر۱). فرض می‌کنیم $f(z)$ درحوزهٔ G پیوسته باشد، وفرض‌می‌کنیم‌روی هر خم بستهٔ هموار تکه‌ای C واقع در G

$$\int_C f(z)dz=\circ \qquad (۳۸)$$

در این صورت $f(z)$ در G تحلیلی است.

برهان. طبق قضیهٔ ۱.۵.۵ وبخش ۲.۵.۵، با انتگرال

$$F(z)=\int_{z_\circ}^{z}f(\zeta)d\zeta,$$

درطول یك خم هموار تکه‌ای در G بانقطهٔ آغـازی $z_\circ$ ونقطهٔ پایانی z، یك تابع تحلیلی یك مقداری درG تعریف می‌شود که $F'(z)$، مشتق آن، $f(z)$ است. اما الان‌توجه‌کردیم که $F'(z)$ خود در G تحلیلی است،چون مشتق یك تابع تحلیلی در G است. بنابـراین $f(z)$ در G تحلیلی است. $\square$

۸.۵. تابعهای همساز

۱.۸.۵. تعاریف. تابع حقیقی $u=u(x,y)$ از دومتغیرحقیقی xوy را درحوزهٔ G همسازگویند اگر درهر نقطهٔ G مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}},\qquad \frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^{۲}u}{\partial y\partial x},\qquad \frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}$$

پیوسته باشند*، ودرهرنقطهٔ G درمعادلهٔ لاپلاس صدق کنند

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}+\frac{\partial^{۲}u}{\partial y^{۲}}=۰.$$

فرض می‌کنیم $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ در حوزهٔ G دوتابع همساز باشند ودرهرنقطهٔ G، درمعادلات کوشی ـ ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{۳۹}$$

صادق باشند (بخش ۲.۲.۴)، دراین صورت u و v را درG توابع همساز مزدوج می‌گویند و هریك از توابع u و v را تابع همساز مزدوج دیگری (یا به‌طور خلاصه مزدوج همساز) می‌نامند.

۲.۸.۵. همان‌طورکه در قضیهٔ زیر نشان داده شده است، بین توابع همساز وتوابع تحلیلی رابطهٔ نزدیکی وجوددارد:

قضیه. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را یك تابع مختلط تعریف شده‌در حوزهٔ G می‌گیریم. دراین صورت $f(z)$ در G تحلیلی است اگر و فقط اگر $u=u(x,y)$، قسمت حقیقی و $v=v(x,y)$، قسمت موهومی آن در G، توابع همساز مزدوج باشند.

برهان. اگر $f(z)$ در G تحلیلی‌باشد،آنگاه بنابرقضیهٔ ۲.۲.۴، u و v مشتق‌پذیرندو در هرنقطهٔ G درمعادلات کوشی ـ ریمان (۳۹) صدق می‌کنند. بعلاوه، تابع $f'(z)$ که مشتق یك تابع تحلیلی در G است نیز در G تحلیلی است، (بخش ۲.۷.۵). اما

---

* در این صورت تابع u و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول آن $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ خود به خود در G پیوسته هستند و

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^{۲}u}{\partial y\partial x}.$$

(R.A.Silverman, *op.cit*, Theorems ۱۲.۱—۱۲.۳).

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

(بخش ۳.۲.۴)، وبنابراین هردوجفت تابع

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{۴۰}$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} \tag{۴۰'}$$

در G مشتق پذیرند و درهرنقطهٔ G در معادلات کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند. اولین‌معادلهٔ کوشی ـ ریمان را برای (۴۰) ودومین معادله رابرای ('۴۰) می‌نویسیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

یا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

بنابراین در هر نقطهٔ G، هر دو تابع u و v درمعادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند، وبرای تکمیل اثبات اینکه u و v توابع همساز مزدوج در G هستند، فقط لازم است نشان دهیم که u و v در هر نقطهٔ G دارای مشتقهای جزئـی مرتبهٔ دوم پیوسته هستند. اما این، مستقیماً از ایـن واقعیت‌کـه $f''(z)$ تحلیلی ولذا در G پیوسته است نتیجه می‌شود (بخش ۲.۷.۵)، زیرا می‌توان $f''(z)$ را به هر یك ازصورتهای

$$f''(z)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$=-i\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},$$

نوشت. برعکس، اگر u و v در G توابع همساز مزدوج باشند، آنگاه بویژه u و v درهر نقطهٔ G دارای مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول پیوسته هستند،وبنا براین در G مشتق‌پذیرند (بخش ۳.۲.۴ را یادآوری‌می‌کنیم). چون u و v همچنین درهرنقطهٔ G درمعادلات کوشی‌ـ‌ریمان صادق‌اند، از قضیهٔ ۲.۲.۴ نتیجه می‌شود که $f(z)=u+iv$ در G تحلیلی است. □

۳.۸.۵. مثال. تابع

$$f(z)=z^{۳}$$

درتمام صفحه تحلیلی است، و بنابراین قسمتهای حقیقی وموهومی آن

$$u=x^{۳}-۳xy^{۲}, \qquad v=۳x^{۲}y-y^{۳} \tag{۴۱}$$

در تمام صفحه یك جفت تابع همساز مزدوج هستند. بآسانی هم می‌توان تحقیق کرد که هر دو تابع (۴۱) درمعادلهٔ لاپلاس صادق‌اند.

۴.۸.۵. قضیه. اگر $u=u(x,y)$ درحوزهٔ همبند سادهٔ G همساز باشد، آنگاه مزدوج همساز u به وسیلهٔ

$$v=v(x,y)=\int_{(x_{۰},y_{۰})}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c, \tag{۴۲}$$

داده می‌شود، که c یك ثابت حقیقی اختیاری وانتگرال خطی درطول هرخم هموارتکه‌ای واقع در G بانقطهٔ آغازی $(x_{۰},y_{۰})\in G$ ونقطهٔ پایانی $(x,y)\in G$ است.

برهان. اگر v وجودداشته باشد، آنگاه

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy, \tag{۴۳}$$

زیرا v باید درمعادلات کوشی ــ ریمان (۳۹) صدق کند. اگــر طرف راست (۴۳) در G دیفرانسیل کامل باشد، وجود v تضمین می‌شود، که آن هم از شرط

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}\Big). \tag{۴۴}$$

نتیجه می‌شود*. اما (۴۴) خود به‌خودبرقراراست، زیرا صورت دیگری ازمعادلهٔ لاپلاس برای تابع همساز u است. مقدار dv در (۴۳) را در اتحاد بدیهی

$$v=\int_{(x_{۰},y_{۰})}^{(x,y)} dv+c,$$

می‌گذاریم، و (۴۲) را به‌دست می‌آوریم. □

۵.۸.۵. از قضایای ۲.۸.۵ و ۴.۸.۵ نتیجه می‌شود که با تقریب یك ثابت دلخواه موهومی محض، تابع

---

* درقسمت چند توضیح فصل ۵، بخش ۸.۵ را ببینید.

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(x,y)+i\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

تنها تابع تحلیلی در G است که قسمت حقیقی آن $u(x,y)$ است.

چند توضیح

۱.۰۵ انتگرال $f(z)$ درطول C را می‌توان برای هر خم «درازا پذیر» کلی تعریف کرد، یعنی برای هرخمی که درازای آن خوشتعریف باشد[1] (مسئلهٔ ۲ را ببینید)، گرچه انتگرال $f(z)$ درطول C در حالت کلیتر $f(z)$ وجود دارد، اما برای مطالبی که در این کتاب مورد بحث واقع می‌شوند، کافی است C راهموار تکه‌ای و $f(z)$ را پیوسته فرض کنیم.

۲.۰۵ واضح است که هریك ازقضایای ۱.۲.۵ تا ۳.۲.۵ استوار است اگردرآنها به جای کلمهٔ «پیوسته» کلمهٔ «انتگرال‌پذیر» بنویسیم.

۳.۰۵ اندیشهٔ کلیدی لم ۱.۳.۵ این است که انتگرال $f(z)$ درطول خم هموار تکه‌ای C واقع درحوزهٔ زیربنایی G را می‌توان با انتگرال $f(z)$ درطول خمی چند ضلعی محاط در C و واقع در G تقریب زد به‌طوری، که مقدار آن بدلخواه به انتگرال مزبور نزدیك باشد. بویژه اگر بتوان نشان داد انتگرال $f(z)$ درطول تمام خمهای چند ضلعی واقع در G صفر است، انتگرال $f(z)$ در طول خم مفروض C هم صفر است. (تنها عددی که بدلخواه به صفر نزدیك است خود عدد صفر است.) اندیشهٔ کلیدی لم ۲.۳.۵ این است که انتگرال $f(z)$ درطول یك خم چند ضلعی واقع در G را می‌توان به‌مجموعی متناهی از انتگرالهای $f(z)$ درطول مرزهای مثلثی واقع در G تبدیل کرد، مشروط بر اینکه G همبند ساده باشد. بویژه اگر بتوان نشان داد که انتگرال $f(z)$ در طول همهٔ مرزهای مثلثی واقع در G صفر است، انتگرال $f(z)$ روی هر خم چند ضلعی بستهٔ واقع در G، و درنتیجه درطول هرخم هموار تکه‌ای بستهٔ واقع در G نیز باید صفر باشد. حال بخوبی در جریان اثبات قضیهٔ اساسی انتگرال کوشی (قضیهٔ ۱.۴.۵) قرار گرفته‌ایم.

۴.۰۵ در ارتباط با قضیهٔ انتگرال کوشی لازم است توجه شود که $f(z)$ در G فقط تحلیلی فرض شده است، یعنی درهرنقطهٔ G دارای مشتق $f'(z)$ است. اگر معلوم باشد که $f(z)$ در G دارای مشتق پیوسته است، آنگاه به‌اثبات پیچیدهٔ قضیهٔ کوشی که در بخش ۱.۴.۵ آمده است وبویژه به لمهای ۱.۳.۵ و ۲.۳.۵ نیازی نیست، زیرا حداقل در حالتی که C یك خم ژردان است، برهان ساده‌تری که مبتنی بر استفاده از قضیهٔ گرین است کفایت می‌کند

---

۱. یعنی درازای خم عددی مشخص (و یکتا) باشد و به فرایندی که برای تعریف آن به‌کار می‌رود بستگی نداشته تنها به‌خم بستگی داشته باشد.ـ م.

(مسئلهٔ ۱۴ را ببینید). بنابراین قضیهٔ ۱.۴.۵ از این نظر جالب توجه است که $f(z)$ تنها تحلیلی فرض شده و به هیچ شرایط دیگری محدود نشده است. پیوستگی $f(z)$، و بینهایت مرتبه مشتق پذیری آن، نتایجی بسیارمهم ازقضیهٔ ۱.۴.۵ هستند (بخش ۲.۷.۵ را ببینید). هراندازه براهمیت این امرتأکید شود زیاده روی نشده است.

۵.۵ درقضیهٔ ۱.۵.۵ لازم است که G همبند ساده باشد، در غیر این صورت $F(z)$ ممکن است مانند مسئلهٔ ۲۰ از فصل نهم، چند مقداری باشد.

۶.۵ بنابر فرمول انتگرال کوشی (قضیهٔ ۱.۶.۵)، اگر مقادیر $f(z)$ درداخل خم C عوض شوند و بخواهیم $f(z)$ تحلیلی باقی بماند، آنگاه مقادیر $f(z)$ روی C نیز باید عوض شوند. این مطلب شاهد دیگری نیز برسرشت خاص توابع تحلیلی است (به‌بخشهای ۴.۱.۴ و ۴.۲.۱۰ رجوع کنید.)

۷.۵ محاسبات جبری برهان قضیهٔ ۱.۷.۵ کمی خسته‌کننده است ولازم نیست بدقت مورد مطالعه قرار گیرد. باید توجه کنید که (۳۳) دقیقاً نتیجهٔ n بار مشتق گیری از فرمول انتگرال کوشی (۲۹) است، با فرض اینکه مشتق گیری از عبارت زیر انتگرال توجیه شده باشد. اثبات (۳۳) بویژه برای $n=1$ بسیار ساده است.کافی است توجه کنیم که

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi ih}\int_{\gamma_R} f(z)\left[\frac{1}{z-z_0-h}-\frac{1}{z-z_0}\right]dz$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)}dz,$$

و ازآنجا

$$\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}2\pi RM|h|\frac{1}{(R-|h|)R^2},$$

که درآن، عبارت سمت راست وقتی $h\to 0$، بوضوح به صفر می‌گراید ونتیجه می‌دهد:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

۸.۵ بنابر قضیهٔ‌گرین که درحسابان پیشرفته ثابت شده است، اگر توابع $P=P(x,y)$ و $Q=Q(x,y)$ و مشتقهای جزئی آنها روی یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C ودرداخل آن، I، پیوسته باشند، آنگاه

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_I\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

بنابراین، اگر تساوی $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ درهمهٔ نقاط حوزهٔ همبند سادهٔ G کـه شامل C است برقرار باشد، داریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0,$$

وبنابراین انتگرال

$$\Phi = \Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

(بنابر مسئلهٔ ۸ با تغییری جزئی) «مستقل از مسیر» است، یـا هم ارزآن، $P\,dx + Q\,dy$ یك دیفرانسیل کامل(تابع Φ) است.

مسائل

۱. «یك خم هموار،مماسی داردکه به‌طور پیوسته تغییرمی‌کند» این حکم را توضیح دهید.

۲. خم پیوستهٔ C با معادلهٔ پارامتری زیر داده شده است.

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \qquad (۴۵)$$

فرض می‌کنیم L یك خم چند ضلعی محاط در C با رئوس $z_k = z(t_k)$ باشد، که در آن $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. آنگاه واضح است که

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \qquad (۴۶)$$

درازای L است. فرض می‌کنیم مجموعهٔ اعداد (۴۶) متناظر با تمام خمهای چندضلعی که در C می‌توان محاط کرد، کمترین کران بالای متناهیی مانند l داشته باشد. دراین‌صورت l را درازای C می‌خوانیم، وخم C را درازاپذیرمی‌گوییم (باختصار، می‌گوییم، C به درازای l). ثابت کنیدکه اگر C هموار باشدآنگاه l درازای C است ودربرآورد زیر صدق می‌کند

$$\sqrt{m_x^2 + m_y^2}\,(b-a) \leqslant l \leqslant \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,(b-a),$$

که درآن

$$m_x = \min_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|, \qquad m_y = \min_{a \leqslant t \leqslant b} |y'(t)|,$$

$$M_x = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t)|, \qquad M_y = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y'(t)|.$$

۳. خم پیوستهٔ $\widehat{AB}$ با دوسر A و B، داده شده است. P را هر نقطهٔ دیگر خم $\widehat{AB}$ می گیریم. ثابت کنید که $\widehat{AB}$ درازاپذیر است، اگر و فقط اگر کمانهای $\widehat{AP}$ و $\widehat{PB}$ درازاپذیر باشند. آنگاه ثابت کنید کــه درازای $\widehat{AB}$ مجموع درازاهای $\widehat{AP}$ و $\widehat{PB}$ است. ثابت کنید که هر خم هموار تکه‌ای، درازاپذیر است.

۴. ثابت کنید که درازای l یك خم هموار با معادلهٔ پارامتری (۴۵) برابر است با

$$l=\int_a^b|z'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\,.$$

ثابت کنید این رابطه برای یك خم هموار تکه‌ای نیز صحیح است. با اینکــه ممکن است در این حالت، $z'(t)$ در تعداد محدودی ازنقاط فاصلهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ وجود نداشته باشد.

۵. فرض می کنیم خم هموار تکه‌ای C از کمانهای هموار C_1 ، C_2 ، ...، C_n تشکیل شده باشد، و $f(z)$ را روی C پیوسته می گیریم. مستقیماً از تعریف

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k$$

ثابت کنید که

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1}f(z)dz+\int_{C_2}f(z)dz+\dots+\int_{C_n}f(z)dz$$

(بخش ۱.۱.۵ را ببینید).

۶. فرض می کنیم C یك خم هموار تکه‌ای به درازای l، با معادلهٔ پارامتری (۴۵) است، همچنین فرض‌می کنیم $s(t)$ درازای کمان متغیری‌از C با نقطهٔ آغازی $z(a)$ ونقطهٔ پایانی $z(t)$ است. ثابت کنید $s=s(t)$ درفاصلهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ پیوسته واکیداً صعودی وهمچنین دارای تابع معکوس پیوسته واکیداً صعودی $t=t(s)$ درفاصلهٔ $0\leqslant s\leqslant l$ است. نشان دهید که یك نمایش پارامتری C، به‌صورت

$$z=\tilde{z}(s)\qquad (0\leqslant s\leqslant l \qquad\qquad (45')$$

است که در آن پارامتر، درازای s است. ثابت کنیدکــه بجز درتعدادی متناهی ازنقاط فاصلهٔ $0\leqslant s\leqslant l$ ، $\tilde{z}'(s)$ وجود دارد و دارای قدرمطلق واحد است.

۷. فرض می کنیم C یك خم بسته بامعادلهٔ پارامتری (۴۵) باشد. t_0 را یکی ازنقاط فاصلهٔ باز $a\leqslant t\leqslant b$ می گیریم. فرض می کنیم C_1 خم

$$z=z(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant t_0),$$

وγ، خم

$$z=z(t) \qquad (t_{\circ}\leqslant t\leqslant b),$$

است، به قسمی که $C=C_{۱}+\gamma$، یعنی C به این طریق حاصل می‌شود که ابتدا $C_{۱}$ و بعد γ راطی کنیم. ثابت کنید که نقاط آغازی وهمچنین پایانی خمهای $C_{۱}$ و $C_{۲}=\gamma^{-}$ برهم منطبق‌اند.

۸. ثابت کنید برای تمام خمهای $C_{۱}$ و $C_{۲}$ واقع‌دریك حوزهٔ مفروض G، که درنقاط آغازی وپایانی مشترك هستند، داریم

$$\int_{C_{۱}} f(z)dz=\int_{C_{۲}} f(z)dz \qquad (۴۷)$$

اگر وفقط اگر، برای تمام خمهای بستهٔ C واقع در G، داشته باشیم

$$\int_{C} f(z)dz=\circ. \qquad (۴۸)$$

۹. فرض می‌کنیم $\sigma_{۱}$ پاره خط واصل نقاط $\circ$ و $i+۲$، $\sigma_{۲}$ پاره خط واصل نقاط $\circ$ و ۲، و $\sigma_{۳}$ پاره خط واصل نقاط ۲ و $i+۲$ است. بعلاوه فرض‌می‌کنیم، $C_{۱}=\sigma_{۱}$، $C_{۲}=\sigma_{۲}+\sigma_{۳}$، $C=C_{۱}+C_{۲}^{-}$، به قسمی که نقاط آغازی و پایانی $C_{۱}$ و $C_{۲}$ یکی هستند، و C بسته است. ثابت کنید که

$$\int_{C_{۱}} Re\, z\, dz\neq\int_{C_{۲}} Re\, z\, dz,$$

و

$$\int_{C} Re\, z\, dz\neq\circ.$$

توضیح. بنابراین «استقلال از مسیر» انتگرالهای مختلط، که در مثال ۵.۱.۵ نشان داده‌ایم، و در مسئلهٔ ۸ تجزیه وتحلیل کرده‌ایم درحالتی خاص استوار است ودرحالت کلی مقدار انتگرال مختلط به مسیرانتگرال بستگی دارد.

۱۰. انتگرال

$$\int_{C} |z|\, dz$$

را محاسبه کنید که درآن، C

الف) قطعه خطی است که نقطهٔ آغازی آن ۱ــ ونقطهٔ پایانی‌آن ۱ است؛

ب) نیمدایرهٔ $|z|=۱$، $\mathrm{Im}z\geqslant\circ$ با نقطهٔ آغازی ۱ــ ونقطهٔ پایانی ۱ است؛

ج) دایرهٔ $|z|=r$ با نقطهٔ آغازی (وپایانی) اختیاری است.

۱۱. انتگرال $\int_C z\,dz$ را مستقیماً ازروی تعریف

$$\int_C f(z)dz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

حساب کنید (به‌بخش ۱.۱.۵ رجوع کنید).

۱۲. تابع $f(z)$ درتمام صفحهٔ z پیوسته فرض شده است، گیریم

$$M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|$$

وفرض می‌کنیم وقتی $R\to\infty$، $RM(R)\to 0$. ثابت کنید که

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R} f(z)dz=0.$$

۱۳. فرض می‌کنیم تابع $f(z)$ روی خم تکه‌ای هموار C پیوسته باشد. ثابت کنید که

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqslant\int_C |f(z)|ds(t),$$

که درآن $s(t)$ همان است که درمسئلهٔ ۶ آمده است. قضیهٔ ۳.۲.۵ را از این برآورد دقیقتر نتیجه بگیرید.

۱۴. با استفاده ازقضیهٔ گرین (قسمت چند توضیح، شماره ۸.۵)، قضیهٔ زیر را که صورت ضعیفتری از قضیهٔ انتگرال کوشی است، ثابت کنید: اگر $f(z)$ درهرنقطهٔ حوزهٔ همبند سادهٔ G دارای مشتقی پیوسته باشد، آنگاه برای‌هرخم ژردان‌بستهٔ هموارتکه‌ای C که در G واقع است، داریم

$$\int_C f(z)dz=0$$

توضیح. البته فرض پیوستگی $f'(z)$ کاملاً غیر ضروری (قضیه ۱.۴.۵ را ببینید) و در واقع کاملاً زاید است (۲.۷.۵ را ببینید). همچنین نیازی نیست که C یك خم ژردان باشد.

۱۵. اگر C، یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای، واقع درحلقهٔ $1<|z|<R$ باشد، ثابت کنید

$$\int_C \frac{dz}{z^۲+۱}=۰.$$

۱۶. انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z^۲+۱}$$

را در حالات زیر حساب کنید
الف) C دایرهٔ $|z-i|=۱$ است؛
ب) C دایرهٔ $|z+i|=۱$ است؛
ج) C دایرهٔ $|z|=۲$ است؛
(مسیرهای بالا درخلاف جهت عقربهٔ ساعت طی می‌شوند).

۱۷. آیا تابع

$$f(z)=\frac{۱}{z(۱-z^۲)}$$

درحوزهٔ $۰<|z|<۱$ دارای انتگرالی نامعین است؟

۱۸. رفتار انتگرال

$$\int_{|z-a|=R} \frac{z^۴+z^۲+۱}{z(z^۲+۱)}dz$$

را به عنوان تابعی از $R>۰$ شرح دهید.

۱۹. تمام مقادیر ممکن انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z^۲+۱},$$

را حساب کنید که درآن خم C هموارتکه‌ای با نقطهٔ آغازی ۰ ونقطهٔ پایانی ۱ است.
چه شرطی باید برای خم C قائل شویم؟

۲۰. تحقیق کنید کــه در تمام صفحهٔ مختلط، $u=x^۲-y^۲+x$ تابعـی همساز است. v، مزدوج همساز u و هـمچنین تابـع تحلیلی $f(z)=u+iv$ متناظر با u و v را پیدا کنید.

۲۱. تحقیق کنید که تابع

$$v=y-\frac{y}{x^۲+y^۲}$$

بجز درمبدأ مختصات، همسازاست. مزدوج همساز v وتابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ متناظر با v و u را بیابید.

۲۲. اگر تابع u همساز باشد آیا u^2 هم همساز است؟ به طورکلی وقتی u همساز است، چه توابعی از u نیز همساز هستند؟

۲۳. ثابت کنید که اگر u_1 و u_2 دوتابع همساز باشند، آنگاه هرترکیب خطی $c_1u_1+c_2u_2$ با ضرایب حقیقی c_1 و c_2 نیز همساز است.

۲۴. فرض کنید u و v درحوزهٔ G دو تابع همساز مزدوج باشند، نشان دهید که توابع

$$U=au-bv, \qquad V=bu+av,$$

نیز همساز مزدوج هستندکه درآنها a و b دو عدد حقیقی ثابت دلخواه‌اند.

۲۵. فرض می‌کنیم $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ درحوزهٔ G توابع همساز مزدوج باشند، و همچنین $U=U(u,v)$ و $V=V(u,v)$ دوتابع همساز مزدوج در حوزهٔ D باشند. علاوه براین فرض‌می‌کنیم که برای هر $x+iy\in G$، داریم $u+iv\in D$. ثابت کنید که

$$U(u(x,y),\ v(x,y)), \qquad V(u(x,y),\ v(x,y))$$

درحوزهٔ G دو تابع همساز مزدوج هستند.

۲۶. ثابت کنیدکه یك‌تابع‌همسازاز یك‌تابع‌تحلیلی، همساز است. دقیقتر بگوییم‌ثابت کنید که اگرتابع $U(w)$ درحوزهٔ D همسازباشد واگر تابع $w=f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی و مقادیرش در D باشند، آنگاه تابع $U(f(z))$ در G همساز است.

۲۷. فرض می‌کنیم $f(z)$ یك انتگرال از نوع کوشی یعنی به صورت

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

باشد که درآن C یك خم هموار تکه‌ای است (لازم نیست بسته باشد) و $\varphi(\zeta)$ هر تابع پیوسته روی C است (اما لازم نیست تحلیلی باشد). ثابت کنیدکه $f(z)$ در هر حوزهٔ G که شامل نقاط C نیست تحلیلی است، و فرمول (۳۳) مشتقهای آن هستند.

۲۸. حوزهٔ همبند سادهٔ G در صفحهٔ z و خم هموار تکه‌ای Γ در صفحهٔ ζ داده شده است، فرض می‌کنیم $f(z,\zeta)$ تابعی از دومتغیر مختلط zوζ است، به طوری‌که
(۱) برای هر $\zeta\in\Gamma$ تابع $f(z,\zeta)$ در G تحلیلی است.
(۲) تابع $f(z,\zeta)$ نسبت به هر دو متغیر z و ζ برای هر $z\in G$ و هر $\zeta\in\Gamma$

پیوسته است*. ثابت کنید تابعی که با انتگرال

$$F(z)=\int_{\Gamma} f(z,\zeta)d\zeta$$

تعریف می‌شود در G تحلیلی است.

---

* دقیقتر بگوییم. برای هر $z_0 \in G$، هر $\zeta_0 \in \Gamma$ وهر $\epsilon > 0$ مفروض، عدد $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $z \in G$ وهر $\zeta \in \Gamma$ که در $|z - z_0| < \delta$ و $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ صدق کنند، داریم $|f(z,\zeta) - f(z_0,\zeta_0)| < \epsilon$.

۶

سریهای مختلط

۱.۶. همگرایی و واگرایی

۱.۱.۶. سریها و مجموعهای جزئی. فرض می‌کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad (1)$$

یك سری نامتناهی است،که تمام جملات آن اعداد مختلط هستند (به‌طور خلاصه‌می گوییم سری مختلط)، وهمچنین فرض می‌کنیم

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

مجموع جزئی nام سری (۱)، یعنی مجموع nجملهٔ اول (۱)، است، آنگاه می‌گوییم‌دنبالهٔ نامتناهی اعداد مختلط

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots \qquad (2)$$

به‌وسیلهٔ سری (۱) تولید شده است، برعکس، سری اصلی (۱) بآسانی از (۲) به‌دست می‌آید: فقط کافی است توجه کنیم که (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1}) + \cdots.$$

۲.۱.۶. تعریف. می‌گوییم‌سری (۱)همگراست(یا به s همگراست)، اگر دنبالهٔ‌متناظر (۲) به‌حدمتناهی s همگرا باشد؛ آنگاه، s رامجموع‌سری (۱) می‌گوییم. به‌طور خلاصه‌تر، سری (۱) به‌مجموع s همگراست، اگروفقط اگر

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

اگردنبالهٔ (۲) به‌یك‌حدمتناهی‌همگرا نباشد، می‌گوییم سری(۱) واگراست. درسری‌واگرا، یا s_n به‌بینهایت میل می‌کند ویا s_n ابداً حدی ندارد؛ درحالت‌اول آن راواگرای سره ودر حالت دوم واگرای نوسانی گویند.

۳.۱.۶. از مطالب فوق واضح می‌شود کـه بررسی همگرایی سری (۱) با بررسی همگرایی دنبالهٔ (۲) معادل است. مثلاً، سری هندسی

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \tag{۳}$$

به‌ازای $|q|<1$ همگرا، و به‌ازای $|q|>1$ واگراست. زیرا مجموع جزئی nام رابطهٔ (۳) عبارت است از

$$s_n = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

چون $|q^n| = |q|^n$، وقتی $n\to\infty$ اگـر $|q|<1$ آنگـاه $q^n\to 0$، واگر $|q|>1$، آنگاه $q^n\to\infty$. ازاین نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & |q|<1 \\ \infty & |q|>1 \end{cases}$$

۴.۱.۶. حال یك شرط لازم همگرایی سری‌را ثابت می‌کنیم:

قضیه. اگر سری (۱) همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{۴}$$

برهان. اگرسری (۱) همگرا باشد، دنبالهٔ (۲) به‌حد متناهی s میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0.\ \square$$

پس هر گاه شرط (۴) برقرار نباشد، سری (۱) واگراست.

۵.۱.۶. اگر $|q|=1$، آنگاه به‌ازای هر n، $|q^n|=1$؛ حال‌آنکه اگر $|q|>1$، وقتی $n \to \infty$، آنگاه $q^n \to \infty$. ازقضیهٔ (۴.۱.۶) نتیجه می‌شود که، برای $|q|\geqslant 1$، سری(۳) واگراست. درواقع، (۳) برای $|q|>1$ و $q=1$ واگرای سره (بخش ۳.۱.۶ را ببینید)، وبرای $q=-1$، واگرای نوسانی است، زیرا مجموع جزئی

$$s_n=\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q\neq 1)$$

وقتی $n \to \infty$، به‌بینهایت میل نمی‌کند[1].

۶.۱.۶. تبصره. سری همساز

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots \tag{۵}$$

مثالی از سری واگرایی است که در شرط (۴) صــدق می‌کند*. بنابراین شرط (۴) برای همگرایی سری لازم است ولی کافی نیست.

۲.۶. همگرایی مشروط و همگرایی مطلق

۱.۲.۶. سری مختلط

$$z_1+z_2+\dots+z_n+\dots, \tag{۶}$$

مفــروض است، سری جدید زیررا، کــه جمله‌هایش قدرمطلق جمله‌های (۶) است، درنظر می گیریم

$$|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|+\dots \tag{۶'}$$

تحقیق درهمگرایی سری (′۶) به‌مراتب ساده‌تراز تحقیق در همگرایی‌سری (۶) است. زیرا مجموعهای جزئی (′۶)، یعنی

$$\sigma_n=|z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|$$

---

۱. بلکه متناوباً برابر ۱ و ۰ می‌شود.ـم.

* اثبات واگرایی سری (۵) مثلاً درصفحهٔ ۱۰ کتاب زیرآمده است؛

G. M. Fichtenholz, *Infinite series: Rudiments* (Translated by R. A. silverman), Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York (1970), p.10.

یك دنبالهٔ مثبت غیرنزولی است. پس دنبالهٔ σ_n، یاکراندار است و یا وقتی $n \to \infty$، به‌بینهایت میل می‌کند. درحالت اول σ_n دارای حدی متناهی و درنتیجه ('۶) همگراست، حال آنکه درحالت دوم ('۶) واگرای سره است.

۲.۲.۶. قضیه. اگر سری ('۶) همگرا باشد، سری (۶) نیز همگراست.

برهان. اگر ('۶) همگرا باشد از

$$|s_{n+p}-s_n|=|z_{n+1}+\dots+z_{n+p}|\leqslant|z_{n+1}|+\dots+|z_{n+p}|$$

نتیجه می‌شود که

$$|s_{n+p}-s_n|\leqslant\sigma_{n+p}-\sigma_n. \qquad (۷)$$

آنگاه، بنا به‌محك کوشی،(به‌فصل ۲ مسئلهٔ ۱۴ رجوع کنید) به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض، عدد صحیح $N=N(\varepsilon)>0$ وجود دارد به‌طوری که، به‌ازای هر $n>N$، $p=1, 2, \dots$ داریم

$$\sigma_{n+p}-\sigma_n<\epsilon.$$

پس بنا به (۷)، به‌ازای همان مقادیر n و p داریم،

$$|s_{n+p}-s_n|<\epsilon$$

پس دوباره به‌محك کوشی استناد کرده نتیجه می‌گیریم که (۶) همگراست. □

اگرسری ('۶) همگرا باشد، می‌گوییم که سری اصلی (۶) **همگرای مطلق** (یا **همگرای نامشروط**) است. بنا براین قضیه بیان می کند که سری همگرای مطلق خودهمگراست. اهمیت سریهای همگرای مطلق در این است که عملیات روی آنها، ازهمان قواعد مربوط به‌عملیات روی مجموعهای متناهی پیروی می‌کنند (مطالب زیر را ببینید). عکس قضیهٔ ۲.۲.۶ صحیح نیست، یعنی سریهای همگرایی وجود دارندکه همگرای مطلق نیستند؛ چنین سریهایی را **همگرای مشروط**، گویند.

۳.۲.۶. چندمثال

الف. سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \qquad (۸)$$

یك سری همگرای مشروط است. زیرا سری (۸) بنا به‌آزمون لایبنیتز* (همچنین فصل ۷ مسئلهٔ ۱۲ را ببینید) همگرا وسری همساز

---

* رجوع کنید به‌صفحه ۷۳ کتاب سابق‌الذکر G. M. Fichtenholz.

$$۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}+\cdots$$

متشکل ازقدرمطلق جمله‌های سری (۸)، همان‌طور که قبلاً* نشان دادیم، واگراست.

ب. سری

$$۱-\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{۴^۲}+\cdots$$

همگرای مطلق است*.

۴.۲.۶. قضیه (جمع و تفریق سریها). اگر دو سری مختلط

$$z_۱+z_۲+\cdots+z_n+\cdots, \qquad (۹)$$

$$z'_۱+z'_۲+\cdots+z'_n+\cdots \qquad (۹')$$

همگرا و بترتیب مجموعشان s و s' باشند، سری

$$(z_۱\pm z'_۱)+(z_۲\pm z'_۲)+\cdots+(z_n\pm z'_n)+\cdots \qquad (۱۰)$$

همگرا و مجموعش $s\pm s'$ است.

برهان. فرض می‌کنیم s_n و s'_n، بترتیب، مجموعهای جزئی nام سریهای (۹) و(۹′) باشند. به‌فرض

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s, \quad \lim_{n\to\infty} s'_n=s'$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}[(z_۱\pm z'_۱)+\cdots+(z_۲\pm z'_۲)+\cdots+(z_n\pm z'_n)]=\lim_{n\to\infty}(s_n\pm s'_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty} s_n\pm\lim_{n\to\infty} s'_n=s\pm s'.\square$$

پس دوسری همگرا رامی‌توان «جمله به‌جمله» با هم‌جمع ویا ازهم‌کم‌کرد. بنابراین عملیات جمع و تفریق در ردهٔ مجموعهای متناهی را می‌توان به‌ردهٔ تمام سریهای همگرا (مشروط یا نامشروط) تعمیم داد. این تعمیم درمورد عمل ضرب درست نیست زیرا آن را برای سریهای همگرای مشروط نمی‌توان اعمال‌کرد (بخش ۸.۲.۶ را ببینید).

۵.۲.۶. سری

---

* رجوع کنید به‌صفحات ۱۱ و ۷۳ کتاب سابق‌الذکر G. M. Fichtenholz

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots,$$

یا به‌صورت خلاصه‌تر

$$z_1+z_2+\cdots, \tag{۱۱}$$

را درنظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم

$$z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}+\cdots,$$
$$z_{\beta_1}+z_{\beta_2}+\cdots, \tag{۱۲}$$
$$\cdots$$

مجموعه‌ای نامتناهی از سریهای جدیدی باشند که با جملات سری (۱۱) ساخته شده‌اند به‌طوری‌که هرجملهٔ سری (۱۱) دریکی و فقط یکی از سریهای (۱۲) ظاهرمی‌شود. مثلاً (تعدادی نامتناهی از این مجموعه‌ها وجود دارد)

$$z_1+z_2+z_4+z_7+z_{11}+\cdots,$$
$$z_3+z_5+z_8+z_{12}+\cdots,$$
$$z_6+z_9+z_{13}+\cdots,$$
$$z_{10}+z_{14}+\cdots,$$
$$z_{15}+\cdots,$$
$$\cdots$$

یکی ازاین مجموعه‌هاست (قاعدهٔ تشکیل این مجموعه چیست؟)

لم. فرض می‌کنیم که سری (۱۱) همگرای مطلق و مجموعش s باشد. آنگاه‌هریك از سریهای (۱۲) همگرای مطلق است. بعلاوه سری

$$Z_1+Z_2+\cdots$$

که درآن

$$Z_1=z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}+\cdots,$$
$$Z_2=z_{\beta_1}+z_{\beta_2}+\cdots,$$
$$\cdots$$

همگرای مطلق و مجموعش s است.

برهان. با توجه به‌اینکه سری (۱۱) همگرای مطلق فرض شده است، می‌نویسیم

$$\sigma=|z_1|+|z_2|+\cdots$$

واضح است که هرمجموع جزئی هریك از سریهای زیر

$$|z_{\alpha_1}|+|z_{\alpha_2}|+\cdots,$$

$$|z_{\beta_1}|+|z_{\beta_2}|+\cdots,$$

از σ کوچکتر است. پس بنا به‌همان استدلال بخش ۱.۲.۶، سریهای (۱۲) همگرای مطلق هستند. بعلاوه ازجمع نامساویهای زیر

$$|Z_1|\leqslant|z_{\alpha_1}|+|z_{\alpha_2}|+\cdots,$$

$$|Z_2|\leqslant|z_{\beta_1}|+|z_{\beta_2}|+\cdots,$$

$$\cdots$$

$$|Z_m|\leqslant|z_{\mu_1}|+|z_{\mu_2}|+\cdots$$

(مسئلهٔ ۶ را ببینید.) به‌دست می‌آیدکه به‌ازای هر $m=1, 2, \ldots$، داریم

$$|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|+\cdots+|Z_m|\leqslant\sigma.$$

با این نامساوی همگرایی مطلق سری

$$Z_1+Z_2+Z_3+\cdots$$

ثابت می‌شود.

برای اثبات رابطهٔ

$$Z_1+Z_2+Z_3+\cdots=s$$

که درحکم آمده است،کافی است نشان دهیم که تفاضل

$$s-(Z_1+Z_2+\cdots+Z_m)$$

وقتی $m\to\infty$، به‌صفر همگراست. واضح است که

$$|s-(Z_1+Z_2+\cdots+Z_m)|\leqslant|z_{\nu_1}|+|z_{\nu_2}|+\cdots,$$

که درآن $\nu_1, \nu_2, \ldots$ اندیسهای همهٔ جملاتی ازسری (۱۱) هستندکه درهیچ یك از m سری اول مجموعهٔ (۱۲) ظاهر نشده‌اند. به‌ازای هرعدد صحیح ومثبت مفروض m عدد n را آن‌قدر بزرگ انتخاب می‌کنیم که تمام اعداد صحیح $\nu_1, \nu_2, \ldots$ از n بیشتر باشند، آنگاه واضح است که

$$|s-(Z_1+\cdots+Z_m)|\leqslant|z_{n+1}|+|z_{n+2}|+\cdots.$$

ولی چون (۱۱) همگرای‌مطلق است، طرف‌راست رابطهٔ فوق به‌ازای تمام nهای‌به‌اندازه کافی بزرگ، ازهرعدد مفروض $\epsilon>0$ کمتراست. از آن نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر m که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد،

$$|s-(Z_1+Z_2+\cdots+Z_m)|<\epsilon. \ \square$$

۶.۲.۶. قضیه (آرایش مجدد سریها). جمله‌های سری همگرای مطلق را می‌توان به‌دلخواه از نو آرایش داد، بدون‌اینکه مجموع سری تغییرکند.

برهان. سری همگرای مطلق $z_1+z_2+\cdots$، به‌مجموع s مفروض است، فرض می‌کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ آرایش دیگری از دنبالهٔ $1, 2, \ldots$ و

$$z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}+\cdots \tag{۱۳}$$

آرایش متناظرسری مفروض باشد. می‌نویسیم

$$Z_1=z_{\alpha_1}, \quad Z_2=z_{\alpha_2}, \ldots,$$

و لم ۵.۲.۶ را به‌کار می‌بریم، به دست می‌آید که (۱۳) هم همگرای مطلق و مجموعش s است. $\square$

۷.۲.۶. حاصلضرب دوسری

$$z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots \tag{۱۴}$$

و

$$z'_1+z'_2+\cdots+z'_n+\cdots, \tag{۱۴'}$$

را (به‌تعبیرکوشی) با سری زیر تعریف می‌کنیم

$$z_1z'_1+(z_1z'_2+z_2z'_1)+\cdots+(z_1z'_n+z_2z'_{n-1}+\cdots+z_nz'_1)+\cdots \tag{۱۵}$$

قضیه (ضرب سریها). اگر دوسری (۱۴) و (۱۴′)، به‌مجموعهای s و s' همگرای مطلق باشند، آنگاه سری (۱۵) هم همگرای مطلق و مجموعش ss' است.

برهان. پرانتزها را در (۱۵) حذف می‌کنیم سری زیرحاصل می‌شود:

$$z_1z'_1+z_1z'_2+z_2z'_1+z_1z'_3+z_2z'_2+\cdots \tag{۱۶}$$

این سری همگرای مطلق است. زیرا نشان خواهیم دادکه هرمجموعی به‌صورت

$$|z_1z'_1|+|z_1z'_2|+|z_2z'_1|+\cdots+|z_jz'_k|, \tag{۱۷}$$

درنظربگیریم، ازعدد ثابتی کوچکتراست: اگر n بزرگترین اندیس جمله‌های سریهای (۱۴) و (۱۴′) موجود در (۱۷) باشد، بدیهی است که (۱۷) ازحاصلضرب

$$(|z_1|+\cdots+|z_n|)(|z'_1|+\cdots+|z'_n|)$$

بزرگترنیست، اما (۱۴) و (۱۴′) همگرای مطلق فرض شده‌اند، پس اگر بنویسیم

$$\sigma=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+\cdots,\quad \sigma'=|z'_1|+z'_2|+\cdots+|z'_n|+\cdots,$$

دیده می‌شود که(۱۷) از $\sigma\sigma'$ بزرگتر نیست. بنابراین (۱۶) همگرای مطلق است. (به‌بخش ۱.۲.۶ رجوع کنید) مجموع (۱۶) را S می‌نامیم. اکنون لم ۵.۲.۶ را درمورد (۱۶) و سریهای[1] زیر

$$Z_1=z_1z'_1,\quad Z_2=z_1z'_2+z_2z'_1,\ \dots,$$
$$Z_n=z_1z'_n+z_2z'_{n-1}+\cdots+z_nz'_1,\ \dots,$$

که از (۱۶) ساخته شده‌اند، به‌کار برده نتیجه می‌گیریم کـه سری (۱۵) همگرای مطلق و مجموعش S است. برای اثبات اینکه $S=ss'$، باردیگرلم ۵.۲.۶ را درمورد (۱۶) به‌کار می‌بریم، اما این‌بار سریهای ساخته شده از (۱۶) را سریهای جدید زیر

$$z_1z'_1+z_1z'_2+z_1z'_3+\cdots,$$
$$z_2z'_1+z_2z'_2+z_2z'_3+\cdots,$$
$$\cdots$$

انتخاب می‌کنیم. ایـن سریها همگـرای مطلـق هستند ومجموعشان بترتیب عبارت‌اند از $z_1s',\ z_2s',\ \dots$ (مسئلهٔ ۱ را ببینید)، وبنا برلم (۵.۲.۶) با انتخاب

$$Z_1=z_1z'_1+z_1z'_2+z_1z'_3+\cdots=z_1s',$$
$$Z_2=z_2z'_1+z_2z'_2+z_2z'_3+\cdots=z_2s',$$
$$\cdots$$

داریم

$$S=Z_1+Z_2+\cdots=(z_1+z_2+\cdots)s'=ss'.\ \square$$

۸.۲.۶. تبصره. اگرسریهای (۱۴) و(′۱۴) فقط همگرای مشروط باشندنمی‌توانیم ادعا کنیم که ($S=ss'$.) درواقـع حاصلضرب چنین دوسری ممکـن است واگـرا باشد (مسئلهٔ ۱۰ راببینید) باوجود این‌حتی برای سریهای همگرای مشروط، هرگاه ازقبل‌بدانیم که حاصلضربشان همگراست، S برابر با ss' است (فصل ۷ مسئلهٔ ۱۳ را ببینید).

۳.۶ همگرایی یکنواخت

۱.۳.۶ سری‌توابع. فرض می‌کنیم جمله‌های سری

---

۱. مجموع چندجمله را می‌توان سری‌ای فرض‌کرد که تعداد جمله‌هـای مخالف صفرش‌متناهی است.ــم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \tag{۱۸}$$

توابعی مختلط یک مقداری هستندکه دریک مجموعهٔ E تعریف شده‌اند. همچنین فرض می‌کنیم سری (۱۸) در E یعنی، درهر نقطهٔ E، همگرا است. آنگاه مجموع (۱۸) درهر نقطهٔ E یك مقدار مشخصی دارد و بنابراین معرف تابعی یك مقداری در E مانند $s(z)$ است. اکنون فرض می‌کنیم که تمام‌جمله‌های (۱۸) درE پیوسته هستند*. آنگاه، بااینکه مجموع تعدادی متناهی ازاین جمله‌ها در E پیوسته است ممکن است که $s(z)$ در E پیوسته‌نباشد، مانند سری زیر

$$z + (z^2 - z) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) + \cdots \tag{۱۹}$$

که $s_n(z)$ ، مجموع جزئی nام آن، z^n است. آشکار است‌که (۱۹) در ناحیهٔ E متشکل ازقرص $|z| < 1$ و نقطهٔ $z = 1$ همگرا و در سایرنقاط واگراست (چرا؟)، ومجموعش برابراست با

$$s(z) = \lim_{n \to \infty} s_n(z) = \begin{cases} 0 & |z| < 1, \\ 1 & z = 1. \end{cases} \tag{۲۰}$$

ولی تابع (۲۰) در E پیوسته نیست، زیرا واضح است‌که در نقطهٔ $z = 1$ پیوسته نیست.

پس برای‌اینکه مجموع سری توابع پیوسته خود پیوسته باشد، شرطی اضافی لازم است. در زیر نشان می‌دهیم (قضیهٔ ۵.۳.۶) که شرط مناسب آن است که سری، همگرای یکنواخت باشد.

۲.۳.۶. تعریف. فرض می‌کنیم $s_n(z)$، مجموع جزئی nام سری (۱۸)، درهر نقطهٔ مجموعهٔ E به‌تابع $s(z)$ همگراست. آنگاه می‌گویند (۱۸) در E همگرای یکنواخت است اگر، به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیح $N = N(\epsilon) > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $n > N$ و هر z در E داشته باشیم.

$$|s_n(z) - s(z)| < \epsilon. \tag{۲۱}$$

۳.۳.۶. تبصره. بنابراین با عباراتی نه‌چندان دقیق، می‌توان گفت، سری همگرای یکنواخت در E را می‌توان درتمام نقاط E با مجموع nجملهٔ اول آن تقریب زد، به‌شرط آنکه n به‌قدرکافی بزرگ باشد. دراینجا بازهم نکتهٔ کلیدی این است‌که عدد N ازنقطهٔ z در E مستقل است. (به‌بخش ۲.۴.۳ رجوع کنید) درحالت‌کلی که سری همگرا ممکن

---

* توجه‌کنیدکه این فرض به‌طورضمنی الزام‌آور است‌که E یك‌ناحیه یا یك خم باشد (توضیح ۳.۳ را ببینید).

است همگرای یکنواخت نباشد، نامساوی (۲۱) برای هرz مفروض برقرار می‌شودمشروط براینکه n ازیك عدد صحیح $N=N(\epsilon, z)>0$ که به z بستگی دارد بزرگترباشد. اگر به‌ازای تمام zهای در E، $N(\epsilon, z)$ از عددی صحیح ومثبت وثابت مانند $N(\epsilon)$ بزرگتر نشود، آنگاه به‌ازای هر z در E، مشروط برآنکه $n>N(\epsilon)$، نامساوی (۲۱) برقرار و درواقع همگرایی یکنواخت است. درغیراین‌صورت واضح است که همگرایی یکنواخت امکان‌پذیر نیست.

۴.۳.۶ مثال. سری (۱۹) درقرص باز $|z|<1$ همگرای یکنواخت نیست. زیرا نامساوی

$$|s_n(z)-s(z)|=|z^n|<\epsilon \tag{۲۲}$$

وقتی درتمام نقاط قرص برقرار است که نامساوی

$$n>\frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{|z|}}$$

که با $|z^n|<\epsilon$ معادل‌است، برقرارباشد[۱]. فرض می‌کنیم $N(\epsilon, z)$ بزرگترین عددصحیحی باشد که از

$$\frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{|z|}}$$

بزرگتر نیست. آنگاه اگروفقط اگر $n>N(\epsilon, z)$، رابطهٔ (۲۲) برقرار است. ولی $N(\epsilon, z)$، وقتی $|z|\to 1$ به بینهایت میل‌می‌کند، ودرنتیجه هیچ عدد مثبت و صحیح N که به‌ازای تمام zهای قرص $|z|<1$ از $N(\epsilon, z)$ بزرگتر باشد، وجود ندارد. بنابراین سری (۱۹) درقرص $|z|<1$ ودرنتیجه در E که از این قرص و نقطهٔ $z=1$ تشکیل شده است همگرای یکنواخت نیست.

ازطرف دیگر، سری (۱۹) درهرقرص بستهٔ

$$|z|\leqslant r<1. \tag{۲۳}$$

همگرای یکنواخت است. زیرا اینك داریم

$$\ln \frac{1}{|z|}\geqslant \ln \frac{1}{r},$$

که نتیجه می‌دهد

---

۱. عدد $\epsilon>0$ کوچکتراز ۱ فرض شده است.ـم.

$$\frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{|z|}} \leqslant \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln \frac{1}{r}}.$$

بنابراین اگر $N=N(\epsilon)$ را بزرگترین عدد صحیحی که از

$$\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{r}}$$

بزرگتر نیست، انتخاب کنیم به‌ازای تمام zهای واقع در مجموعهٔ (۲۳) داریم، $N(\epsilon, z) \leqslant N$.

۵.۳.۶. قضیه. اگر سری (۱۸) درمجموعهٔ E همگرای یکنواخت باشد و اگر هرجملهٔ (۱۸) دریك نقطهٔ $z_\circ$ واقع در E پیوسته باشد، آنگاه $s(z)$، مجموع سری هم، در $z_\circ$ پیوسته است.

برهان. فرض می‌کنیم $z_\circ+h$ متعلق به E باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} s(z_\circ+h)-s(z_\circ) &= [s(z_\circ+h)-s_N(z_\circ+h)] \\ &\quad +[s_N(z_\circ+h)-s_N(z_\circ)]+[s_N(z_\circ)-s(z_\circ)], \end{aligned}$$

که درآن $s_N(z)$ مجموع جزئی Nام سری (۱۸) است، وبنابراین

$$\begin{aligned} |s(z_\circ+h)-s(z_\circ)| &\leqslant |s(z_\circ+h)-s_N(z_\circ+h)|+|s_N(z_\circ+h)-s_N(z_\circ)| \\ &\quad +|s_N(z_\circ)-s(z_\circ)|. \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

چون بنا به‌فرض (۱۸) همگرای یکنواخت است، عدد N را می‌توان طوری انتخاب کرد که به‌ازای تمام zهای واقع در E داشته باشیم

$$|s(z)-s_N(z)|<\frac{\epsilon}{۳}. \qquad (۲۵)$$

در (۲۵) نخست z را برابر $z_\circ$ وسپس برابر $z_\circ+h$ می گیریم، به‌دست می‌آید،

$$|s(z_\circ)-s_N(z_\circ)|<\frac{\epsilon}{۳}, \qquad |s(z_\circ+h)-s_N(z_\circ+h)|<\frac{\epsilon}{۳}. \qquad (۲۶)$$

ازطرف دیگر $s_N(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است، چراکه مجموع تعدادی متناهی ازتوابع پیوسته در $z_\circ$ است (بخش ۳.۳.۳ را ببینید). بنابراین $\delta>\circ$ وجود دارد به‌طوری که وقتی $|h|<\delta$،

$$|s_N(z_\circ+h)-s_N(z_\circ)|<\frac{\epsilon}{۳}. \qquad (۲۷)$$

از ترکیب (۲۴)، (۲۶) و (۲۷) به‌دست می‌آید که اگر $|h|<\delta$، آنگاه

$$|s(z_\circ+h)-s(z_\circ)|<\frac{\epsilon}{۳}+\frac{\epsilon}{۳}+\frac{\epsilon}{۳}=\epsilon,$$

یعنی $s(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است. □

یك نتیجهٔ مستقیم این قضیه این است که اگر یك سری از توابع پیوسته در E همگرای یکنواخت باشد، مجموعش نیز در E پیوسته است. (زیرا پیوستگی در E، به معنای پیوستگی در هر نقطهٔ E است).

۶.۳.۶. حال آزمون ساده‌ای برای تشخیص همگرایی یکنواخت سری توابع ارائه می‌دهیم.

قضیه. فرض می‌کنیم جملات سری (۱۸) به ازای هر z واقع در یك مجموعهٔ E در نامساویهای زیر صدق می‌کنند

$$|f_n(z)|\leqslant a_n \quad (n=۱, ۲, \dots)$$

و سری عددی

$$a_۱+a_۲+\dots+a_n+\dots \qquad (۲۸)$$

همگراست. آنگاه سری (۱۸) در E همگرای یکنواخت (و همگرای مطلق) است.

برهان. فرض می‌کنیم سری (۲۸) همگراست. پس سری

$$|f_۱(z)|+|f_۲(z)|+\dots+|f_n(z)|+\dots$$

در هر نقطهٔ z در E، بنا به آزمون مقایسه (مسئلهٔ ۳ را ببینید) همگراست، یعنی سری (۱۸) در E همگرای مطلق است. بعلاوه اگر $s(z)$ مجموع (۱۸) و $s_n(z)$ مجموع جزئی nام آن باشد، آنگاه[۱]

$$|s_n(z)-s(z)|\leqslant|f_{n+۱}(z)+f_{n+۲}(z)+\dots|$$

---

۱. درواقع $|s_n(z)-s(z)|=|f_{n+۱}(z)+f_{n+۲}(z)+\dots|$، اما چون از $A=B$ رابطهٔ ضعیفتر $A\leqslant B$ نتیجه می‌شود (زیرا $A\leqslant B$ یعنی «$A=B$ یا $A<B$») و از رابطهٔ ضعیفتر متن هم نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید، ایرادی به‌متن وارد نیست. همچنین توجه کنید که از $A<B$ رابطهٔ ضعیفتر $A\leqslant B$ نتیجه می‌شود و اگر بخواهیم می‌توانیم بنویسیم $A\leqslant B$، اگرچه می‌دانیم که $A=B$ نیست.ـم.

$$\leqslant |f_{n+۱}(z)|+|f_{n+۲}(z)|+\cdots$$
$$\leqslant a_{n+۱}+a_{n+۲}+\cdots.$$

اما ماندهٔ سری همگرای (۲۸)، یعنی $a_{n+۱}+a_{n+۲}+\cdots$ به‌ازای $n>N$، اگر N به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، از هر $۰<\epsilon$ مفروض کوچکتر است. ازاین نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n>N$ و هر z در E، داریم $|s_n(z)-s(z)|<\epsilon$، یعنی، (۱۸) در E همگرای یکنواخت است. □

۷.۳.۶ مثال. درسری (۱۹)

$$|f_n(z)|=|z^n-z^{n-۱}|=|z^{n-۱}||z-۱|$$

بنابراین اگر $|z|\leqslant r$ داریم

$$|f_n(z)|\leqslant r^{n-۱}(r+۱).$$

اما

$$\sum_{n=۱}^{\infty} r^{n-۱}(r+۱)=(r+۱)\sum_{n=۱}^{\infty} r^{n-۱}$$

برای $r<۱$، همگراست (بخش ۳.۱.۶). ازقضیهٔ ۶.۳.۶ نتیجه می‌شود که سری (۱۹) در هرقرص بستهٔ $|z|\leqslant r<۱$ همگرای یکنواخت (ومطلق) است، واین با نتیجهٔ قسمت آخر مثال ۴.۳.۶ مطابقت دارد.

۸.۳.۶ اگر قضیهٔ ۲.۲.۵ را چندبار به‌کار بریم، می‌بینیم که ازمجموع تعدادی متناهی تابع پیوسته، مانند $f_۱(z), \ldots, f_n(z)$، می‌توان درطول هرخم هموار تکه‌ای C جمله به‌جمله انتگرال گرفت، یعنی،

$$\int_C [f_۱(z)+\cdots+f_n(z)]\,dz=\int_C f_۱(z)\,dz+\cdots+\int_C f_n(z)\,dz.$$

حال نشان می‌دهیم که این مطلب برای یک سری نامتناهی از توابع پیوسته هم صحیح است اگرسری روی C همگرای یکنواخت باشد.

قضیه (انتگرال‌گیری از سری). فرض می‌کنیم $s(z)$ مجموع سری نامتناهی

$$s(z)=f_۱(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots \tag{۲۹}$$

است وهرجملهٔ سری روی خم هموار تکه‌ای C تابعی پیوسته است. دراین صورت اگر(۲۹) روی C همگرای یکنواخت باشد، داریم

$$\int_C s(z)\,dz=\int_C f_۱(z)\,dz+\cdots+\int_C f_n(z)\,dz+\cdots, \tag{۳۰}$$

برهان. چون توابع $f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ همگی روی C پیوسته هستند، بنا به قضیهٔ ۵.۳.۶ تابع $s(z)$ هم روی C پیوسته است. آنگاه بنا به‌قضیهٔ ۲.۱.۵، $s(z)$ درطول C انتگرال‌پذیراست. فرض می‌کنیم

$$s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$$

مجموع جزئی nام، سری (۲۹) باشد. چون (۲۹) روی خم C همگرای یکنواخت است به‌ازای هر $\epsilon > 0$ مفروض، یك عدد صحیح $N = N(\epsilon) > 0$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n > N$ و هر $z \in C$ داریم

$$|s(z) - s_n(z)| < \epsilon$$

(قسمت ۲.۳.۶ را ببینید). اینك، بنا به‌قضیهٔ ۳.۲.۵،

$$\left|\int_C [s(z) - s_n(z)]\,dz\right| \leqslant \epsilon l,$$

که در آن l درازای خم C است. چون ϵ عددی بدلخواه کوچك است، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n \to \infty} \left|\int_C [s(z) - s_n(z)]\,dz\right| = 0$$

و بنا براین

$$\lim_{n \to \infty} \int_C [s(z) - s_n(z)]\,dz = 0.$$

پس رابطهٔ زیر، که با (۳۰) معادل است، برقراراست:

$$\int_C s(z)\,dz = \lim_{n \to \infty} \int_C s_n(z)\,dz = \lim_{n \to \infty} \left\{\int_C f_1(z)\,dz + \cdots + \int_C f_n(z)\,dz\right\}. \square$$

۹.۳.۶. قضیهٔ زیرمربوط به‌سری توابع تحلیلی و یك ابزار مهم آنالیزمختلط است:

قضیه (وایرشتراس). فرض می‌کنیم‌که هرجملهٔ سری (۲۹) در یک حوزهٔ G تابعی تحلیلی و $s(z)$ مجموع (۲۹) است وهمچنین فرض می‌کنیم (۲۹) در هرحوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}$ واقع در G همگرای یکنواخت است. آنگاه $s(z)$، مجموع سری، در G تحلیلی است. بعلاوه، درهرنقطهٔ $z \in G$ می‌توان از سری (۲۹) جمله به‌جمله، وهرچندبار که بخواهیم، مشتق گرفت، یعنی

$$s^{(k)}(z) = f_1^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) + \cdots \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (۳۱)$$

وهر سری مشتق در هر حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}$ واقع در G همگرای یکنواخت است.

برهان. فرض می‌کنیم $z_\circ$ یك نقطهٔ دلخواه G و γ_R دایره‌ای به‌شعاع R و به‌مرکز $z_\circ$ و به‌قدری کوچك باشد که γ_R و I، داخل آن، در G واقع باشند. اما بنا به‌فرض سری (۲۹) در $\bar{I}$ همگرای یکنواخت است. پس این سری وهریك از سریهای زیر

$$\frac{k!}{۲\pi i}\frac{s(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}=\frac{k!}{۲\pi i}\frac{f_۱(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}+\cdots$$

$$+\frac{k!}{۲\pi i}\frac{f_n(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}+\cdots \quad (k=\circ,۱,۲,\ldots), \qquad (۳۲)$$

روی γ_R همگرای یکنواخت هستند؛ زیرا به‌ازای هر $z\in\gamma_R$ داریم

$$\left|\frac{k!}{۲\pi i}\frac{۱}{(z-z_\circ)^{k+۱}}\right|=\frac{k!}{۲\pi R^{k+۱}}$$

(مسئلهٔ ۱۲ را ببینید) پس بنا به‌قضیهٔ ۸.۳.۶ می‌توان از (۳۲) در طول γ_R جمله به‌جمله انتگرال گرفته رابطهٔ زیررا به‌دست آورد،

$$\frac{k!}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{s(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}dz=\frac{k!}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f_۱(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}dz+\cdots$$

$$+\frac{k!}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f_n(z)}{(z-z_\circ)^{k+۱}}dz+\cdots \quad (k=\circ,۱,۲,\ldots). \qquad (۳۳)$$

به‌ازای $k=\circ$، (۳۳) به‌رابطهٔ زیرتبدیل می‌شود

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{s(z)}{z-z_\circ}dz=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f_۱(z)}{z-z_\circ}dz+\cdots+\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f_n(z)}{z-z_\circ}dz+\cdots$$

اما بنا به‌فرمول انتگرال کوشی، مجموع طرف راست این رابطه برابراست با

$$f_۱(z_\circ)+\cdots+f_n(z_\circ)+\cdots=s(z_\circ).$$

زیرا هرجملهٔ (۲۹) در داخل و روی γ_R تحلیلی است. ازاین نتیجه می‌شود که

$$s(z_\circ)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{s(z)}{z-z_\circ}dz \quad (z_\circ\in G), \qquad (۳۴)$$

یعنی، $s(z)$ هم، درفرمول انتگرال کوشی صدق می‌کند. اما برای اثبات قضیهٔ ۱.۷.۵، از تحلیلی بودن تابع مفروض فقط برای به‌دست آوردن فرمول (۳۳)، صفحهٔ ۸۴ درحالت $n=\circ$ استفاده کردیم بنابراین اگرتابع $s(z)$ در(۳۴)صدق کند، بینهایت مرتبه درهرنقطهٔ

$z_\circ \in G$ مشتق دارد[1] و بنابراین در G تحلیلی است. برای $k > \circ$ (۳۳) به (۳۱)، که در آن $z_\circ$ جانشین z شده است تبدیل می‌شود، زیرا اکنون می‌دانیم که $s(z)$ و $f_n(z)$ در G تحلیلی هستند و بنابر قضیهٔ ۱.۷.۵ داریم

$$s^{(k)}(z_\circ) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{s(z)}{(z-z_\circ)^{k+1}}\,dz \quad (z_\circ \in G,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

و

$$f_n^{(k)}(z_\circ) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f_n(z)}{(z-z_\circ)^{k+1}}\,dz \quad (z_\circ \in G,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

حال نشان می‌دهیم که سری مشتق زیر

$$f_1^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) + \cdots \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (۳۵)$$

درهرحوزهٔ بسته و کراندار $\bar{D}$ واقع در G، همگرای یکنواخت است. فرض می‌کنیم $\gamma_{z_\circ}$، که قبلاً با γ_R نشان داده شده است، دایرهٔ به‌شعاع R و به‌مرکز $z_\circ$ و $k_{z_\circ}$ قرص بازبه‌شعاع $R/2$ و بمرکز $z_\circ$ باشند. قبلاً نشان دادیم که سری (۲۹) روی $\gamma_{z_\circ}$ همگرای یکنواخت است، پس عدد صحیح $N_{z_\circ} = N_{z_\circ}(\epsilon) > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n > N_{z_\circ}$ و $\zeta \in \gamma_{z_\circ}$، داریم

$$|s_n(\zeta) - s(\zeta)| < \epsilon \qquad (۳۶)$$

که در آن $s_n(z)$ مجموع جزئی nام (۲۹) است. از قضیهٔ (۳.۲.۵) و رابطهٔ (۳۶) نتیجه می‌شود که برای هر $n > N_{z_\circ}$ و هر $z \in K_{z_\circ}$،

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_\circ}} \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta + \cdots + \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_\circ}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta - \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_\circ}} \frac{s(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| \qquad (۳۷)$$

$$= \left|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_\circ}} \frac{s_n(\zeta)-s(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi}\frac{\epsilon}{(R/2)^{k+1}}2\pi R.$$

واضح است که طرف راست رابطهٔ (۳۷) وقتی که $\epsilon \to 0$، به‌صفر میل می‌کند. بنابراین سری (۳۵) در $K_{z_\circ}$ همگرای یکنواخت است. ولی بنابه‌قضیهٔ (هاینه-بورل)، هر حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}$ و واقع در G، را می‌توان با تعدادی متناهی از قرصهای $K_{z_\circ}(z_\circ \in G)$ مانند $K_{z_1}, K_{z_2}, \ldots, K_{z_n}$ پوشانید. اگر $N = \max\{N_{z_1}, \ldots, N_{z_n}\}$ انتخاب

---

۱. به‌صورتی دیگرمی‌توان گفت ازرابطهٔ (۳۴) باستقراء (بدون اینکه $s(z)$ تحلیلی فرض‌شود) نتیجه می‌شود: $s^{(n)}(z_\circ) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_R}\frac{s(z)}{(z-z_\circ)^{n+1}}\,dz \ (n = 1, 2, \ldots;\ z_\circ \in G)$ (برهان قضیهٔ ۱.۷.۵ را ببینید). بنابراین $s(z)$ در $z_\circ \in G$ بینهایت مرتبه مشتق دارد.-م.

شود، دیده می‌شود که نامساوی برای هر $n>N$ و هر $z\in\bar{D}$ برقرار است، یعنی هریک ازسریهای مشتق (۳۵) در $\bar{D}$ همگرای یکنواخت است. □

چند توضیح

۱.۶. تعاریف و قضایایی که در بخشهای ۱.۶ و ۲.۶ آمده‌اند دقیقاً نظیر مطالبی هستند که درسریهای حقیقی گفته می‌شوند. خواننده‌ای که قبلاً با این مطالب در سریهای حقیقی آشنا شده است، درصورت نیاز می‌تواند به‌آنها رجوع کند.

۲.۶. بنابریك قضیهٔ «ریمان» که دراین کتاب ثابت نشده است*، می‌توان یك‌سری حقیقی همگرای مشروط را طوری مرتب کرد که مجموع آن برابر هرعدد حقیقی (و یا $\pm\infty$) باشد. درمورد سری مختلط همگرای مشروط می‌توان نشان داد که مجموعهٔ تمام این سریها به‌دودستهٔ C_1 و C_2 تقسیم می‌شوند به‌طوری که

۱) دستهٔ C_1 از سریهایی تشکیل شده است که برای هرسری یك‌خط مستقیم L در صفحهٔ‌مختلط‌وجود داردبه‌طوری که هرنقطهٔ L مجموع یك آرایش مجدد سری است‌وهیچ آرایش مجدد سری وجود ندارد که مجموع آن نقطه‌ای از L نباشد.

۲) برای هرسری در C_2 یك آرایش مجدد سری وجود دارد که مجموع آن هرنقطهٔ مفروض صفحهٔ گسترش‌یافته باشد.**

مثلاً سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

در C_1 وسری

$$1+i-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}+\frac{1}{3}+\frac{i}{3}-\frac{1}{4}-\frac{i}{4}+\cdots$$

در C_2 است.

۳.۶. توجه کنید که آنچه پیوستگی یکنواخت را از همگرای یکنواخت قطعاً متمایز می‌کند این است که درپیوستگی یکنواخت رفتار یك تابع $f(z)$ (ازنظرنزدیکی‌مقادیردر

---

* مثلا به‌کتاب زیررجوع کنید

G. E. shilov *Real and complex Calculus* (translated by R. A. Silverman). The MIT press, Cambridge, Mass, (1973), Theorem 6. 37.

** این صورت قضیهٔ استینیتس (steinitz) درحالت دوبعدی است.کتاب زیررا ببینید

(G. E. shilov chap. 6, Probs. 17-22).

نقاط نزدیك به‌یکدیگر) دریك مجموعهٔ E مطرح است ودرهمگرایی یکنواخت رفتار کل سری $f_1(z)+f_2(z)+\ldots$ یا دنبالهٔ $f_1(z), f_2(z), \ldots$ در یك مجموعهٔ E (از نظر سرعت همگرایی) بررسی می‌شود (به‌مسائل ۱۸، ۲۰، ۲۳ رجوع کنید).

مسائل

۰۱ ثابت کنید اگر سری $z_1+z_2+\ldots$ همگرا و مجموعش s باشد، آنگاه سری $\alpha z_1+\alpha z_2+\ldots$ همگرا ومجموعش αs است، (α عددی مختلط است).

۰۲ ثابت کنید که سری مختلط $z_1+z_2+\ldots$، که جملهٔ عمومی‌اش $z_n=x_n+iy_n$ است، همگراست، اگروفقط اگر سریهای حقیقی $x_1+x_2+\ldots$ و $y_1+y_2+\ldots$ همگرا باشند.

۰۳ آزمون مقایسه‌ای زیررا برای سری مختلط $z_1+z_2+z_3+\ldots$ ثابت کنید: اگر به‌ازای هرمقدار به‌قدرکافی بزرگ n، $|z_n|\leqslant a_n$ و $a_1+a_2+\ldots$ یك سری حقیقی همگرا باشد، آنگاه $z_1+z_2+\ldots$ همگرای مطلق است.

۰۴ ثابت کنید که اگر سری $z_1+z_2+\ldots$ همگرای مطلق باشد، آنگاه سری $z_1^2+z_2^2+\ldots$ نیز همگرای مطلق است.

۰۵ آیا عکس مسئله قبلی صحیح است؟

۰۶ ثابت کنید که اگر سری $z_1+z_2+\ldots$ همگرای مطلق ومجموعش s باشد، آنگاه

$$|s|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots.$$

۰۷ مثالی بیاورید که لم (۵.۲.۶) را برای سری همگرای مشروط نقض کند.

۰۸ نظیر آزمونهای نسبت و ریشه راکه درسریهای حقیقی با آنها آشنا شده‌اید، برای سریهای مختلط بیان وثابت کنید.*

۰۹ همگرایی سریهای زیررا بررسی کنید:

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$؛

ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$؛

ج) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

---

* به کتاب G. M. Fichtenholz, Sec 5 رجوع کنید.

۱۰. ثابت کنید که سری

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$$

همگرای مشروط است. ثابت کنیدکه حاصلضرب این سری درخودش یک سری واگراست.

۱۱. یک سری مثال بزنیدکه دریک ناحیه $\bar{G}$ همگرای یکنواخت نباشد و در $\bar{G}$ دارای مجموعی پیوسته باشد.

۱۲. ثابت کنیدکه اگرسری

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (۳۸)$$

درمجموعهٔ E همگرای یکنواخت ومجموعش $s(z)$ باشد، واگر به‌ازای هرz در E، $|\varphi(z)|$ از مقدار ثابتی بزرگتر نباشد، آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(z) f_n(z)$$

در E همگرای یکنواخت ومجموعش $\varphi(z)s(z)$ است.

۱۳. نظیرمحك همگرایی کوشی (قضیه ۳.۳.۲ ومسئلهٔ ۱۵ ازفصل دو) را درحالتهای زیر بیان وثابت کنید:

الف) همگرایی سری عددی،

ب) همگرایی «نقطه‌ای» سری توابع،

ج) همگرایی یکنواخت سری توابع.

۱۴. محك همگرایی کوشی را برای اثبات قضیهٔ ۶.۳.۶ به‌کاربرید. ثابت کنیدکه قضیه معتبراست اگر $|f_n(z)| \leqslant a_n$ به ازای هر z در E وهر... $n=N, N+1,$ (یعنی برای هر n به‌قدرکافی بزرگ).

۱۵. ثابت کنیدکه اگرسری

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(z)|$$

درمجموعهٔ E همگرای یکنواخت باشد وبرای هرz درE وهرn (به‌قدرکافی بزرگ) $|f_n(z)| \leqslant |g_n(z)|$، آنگاه سری (۳۸) در$E$ همگرای یکنواخت است.

۱۶. نشان دهید که سری هندسی

$$1+z+z^2+\dots+z^n+\dots$$

در هرقرص بستهٔ $|z|\leqslant r<1$ همگرای یکنواخت است ولی درقرص باز $|z|<1$ همگرای یکنواخت نیست.

۱۷. ثابت کنید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

درقرص بستهٔ $|z|\leqslant 1$ همگـرای یکنواخت است و درخارج از قـرص واگراست. درمورد سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

چه می‌توان نوشت؟

۱۸. همگرایی یکنواخت دنبالهٔ توابع

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \dots,\ f_n(z),\dots$$

را تعریف کرده مورد بحث قراردهید.

۱۹. مثالی بیاورید که نفی رابطهٔ (۳۰) را وقتی‌که سری (۲۹) همگرای یکنواخت‌نیست، نشان دهد.

۲۰. نظیر قضیهٔ (۸.۳.۶) را برای دنباله‌هـای توابع همگرای یکنـواخت، بیان و ثابت کنید.

۲۱. مثالی بیاورید که نشان دهد، حتی اگر درقضیهٔ وایرشتراس سری

$$s(z)=f_1(z)+\dots+f_n(z)+\dots$$

درتمام حوزهٔ G، همگرای یکنواخت باشد، لزومی ندارد که سری مشتق آن یعنی،

$$s'(z)=f'_1(z)+\dots+f'_n(z)+\dots$$

هم درآن حوزه، همگرای یکنواخت باشد.

۲۲. مثالی بیاورید که نشان دهد، مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ سری توابع تحلیلی همگـرای یکنواخت اگـر سری در مجموعه‌ای غیر از حوزه، تعریف شده باشد، ممکن است مجاز نباشد.

۲۳. نظیــر قضیهٔ «وایرشتراس» را برای دنبالههــای توابع همگرای یکنواخت، بیان و ثابت کنید.

۲۴. برای تحلیلی بودن $s(z)$ در قضیهٔ وایرشتراس، برهان دیگری بیاورید کــه با قضیهٔ ۳.۷.۵ شروع شود.

۷

سری توانی

۱.۷ . نظریهٔ اساسی

۱.۱.۷. تعریف. حال یك رده از سریها راکه درآنالیزمختلط اهمیت کلیدی دارند درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که از سری کلی توابع به صورت

$$f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots,$$

شکل خاص

$$f_n(z)=c_n(z-a)^n$$

راکه‌شامل‌متغیرمختلط z واعدادمختلط اختیاری a، c_0، c_1،...، c_n،... است انتخاب کرده‌ایم. دراین‌صورت سری

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots,$$

که سری توانی یا سری تام نام دارد به دست می‌آید. با انتخاب $a=0$، که بوضوح از کلیت مطلب نمی‌کاهد (مسئلهٔ ۱ را ببینید)، سری توانی زیررا کـه تا حدی ساده‌تر است به دست می‌آوریم

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots. \tag{۱}$$

۲.۱.۷. منظور ما از ناحیهٔ همگرایی سری توانی (۱)، مجموعهٔ تمام نقاطی است که درآنها (۱) همگراست*. سری بـه طور آشکار درنقطهٔ $z=0$ همگراست، وبنابراین ناحیهٔ همگرایی (۱) همواره شامل نقطهٔ $z=0$ است. علاوه براین، بسهولت می‌توان دید سریهای توانیی وجود دارند کـه برای آنها ناحیهٔ همگرایی فقط از نقطهٔ منفرد $z=0$ تشکیل شده است. برای مثال، سری زیر را درنظر بگیرید

$$1+z+2^2z^2+\cdots+n^nz^n+\cdots \qquad (2)$$

اگر n به قدرکافی بزرگ باشد، داریم $n|z|>2$، وبنابراین برای هـر $z\neq 0$ مفروض

$$|n^nz^n|=(n|z|)^n>2^n.$$

اما در این صورت جملهٔ عمومی n^nz^n سری (۲) وقتی $n\to\infty$، به بینهایت میل می‌کند. ازقضیهٔ ۴.۱.۶ نتیجه می‌شودکـه سری (۲) برای تمام مقادیـر $z\neq 0$ واگراست. چنین سری توانی «تباهیده»ای بوضوح فقط از لحاظ نظری مـورد توجه است. بنابراین توجه خود را معطوف به سریهای توانیی می کنیم کـه ناحیهٔ همگرایی آنها حداقل شامل یك نقطهٔ غیرصفر است.

۳.۱.۷. لم. فرض می‌کنیم که سری توانی (۱) در نقطهٔ $z_0\neq 0$ همگراست. دراین صورت (۱) برای‌هر z که درشرط** $|z|<|z_0|$ صدق‌کند همگراست (و در واقع همگرای مطلق است).

برهان. اگر سری

$$c_0+c_1z_0+\cdots+c_nz_0^n+\cdots$$

همگرا باشد، آنگاه بنابه قضیهٔ ۴.۱.۶

$$\lim_{n\to\infty} c_nz_0^n=0 \qquad (3)$$

اما، (۳) نتیجه می‌دهدکه نقاط $c_nz_0^n$ همگی در یك همسایگی مبدأ جای دارند، یعنی برای تمام مقادیر $n=1,2,\ldots$ ویك عدد مثبت به قدرکافی بزرگ M، داریم

$$|c_nz_0^n|<M .$$

فرض می‌کنیم $|z|<|z_0|$، آنگاه

---

* بعداً (بخش ۶.۱.۷) خواهیم دیدکه ناحیهٔ همگرایی (۱)، یك ناحیهٔ واقعی به‌معنای بخش ۳.۲.۳ ب است.

** نتیجه می‌شودکه اگر(۱)در z_0 واگرا باشدآنگاه (۱) برای هرمقدار z که در $|z|>z_0$ صدق‌کند نیز واگراست، زیرا درغیر این صورت باید در z_0 همگرا باشد.

$$|c_n z^n| = |c_n z_\circ^n| \left|\frac{z}{z_\circ}\right|^n < M \left|\frac{z}{z_\circ}\right|^n = Mk^n,$$

که درآن

$$k = \left|\frac{z}{z_\circ}\right| < ۱,$$

به قسمی که قدر مطلق هرجملهٔ سری (۱) ازجملهٔ متناظرش درسری هندسی همگرای زیر کوچکتر است

$$M + Mk + \dots + Mk^n + \dots \qquad (k < ۱).$$

پس بنا به آزمون‌مقایسه(فصل۶، مسئلهٔ۳)، سری (۱) همگرای‌مطلق،و بنا براین همگراست. □

مفهوم هندسی مطلب بالا این است که، اگر سری (۱) درنقطهٔ $z_\circ$ همگرا باشد،آنگاه درهر نقطهٔ z واقع در داخل دایرهٔ $|z| = |z_\circ|$ کــه ازنقطهٔ $z_\circ$ می‌گذرد و مرکز آن مبدأ است همگرای مطلق است.

۴.۱.۷ همان طورکه دربخش ۲.۱.۷ دیدیم سریهای توانیی وجود دارند کـه ناحیهٔ همگرایی آنها عبارت از نقطهٔ منفرد $z = \circ$ است. درمقابل سریهای توانیـی هستند که در هر نقطهٔ متناهی همگرایند، یعنی، ناحیهٔ همگرایی این سریها تمـام صفحهٔ (متناهی) است. برای مثال سری زیـر را درنظر بگیرید.

$$۱ + z + \frac{z^۲}{۲^۲} + \dots + \frac{z^n}{n^n} + \dots \quad . \tag{۴}$$

اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، داریم

$$\left|\frac{z}{n}\right| < \frac{۱}{۲},$$

وبنابراین برای هر z مفروض،

$$\left|\frac{z^n}{n^n}\right| = \left(\frac{|z|}{n}\right)^n < \left(\frac{۱}{۲}\right)^n,$$

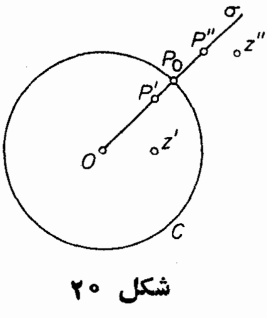
یعنی بجز تعدادی متناهی ازجملات، قدرمطلق هرجملهٔ سری (۴) ازجملهٔ متناظرش درسری همگرای هندسی زیرکمتر است

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \dots \quad .$$

بنابراین سری (۴) برای تمام zهای متناهی همگرا (همگرای مطلق) است.
علاوه بردو نوع سری توانی (نوعی‌که فقط در $z=0$، ونوع دیگری که برای‌تمام zها همگراست)، که هم‌اکنون دربارۀ آنها بحث شد، نوع سومی از سریهای توانی وجود دارند که فقط در برخی از نقاط مخالف صفر همگرا هستند. ما اینك ناحیۀ همگرایی را برای این نوع اخیر بررسی می‌کنیم.

۵.۱.۷. قضیه. فرض‌می‌کنیم‌که سری (۱) به ازای بعضی از مقادیر مخالف صفر z و نه‌به‌ازای همۀ این مقادیر، همگراست، دراین صورت یك عدد $R>0$ وجود دارد به قسمی که (۱) برای هر $|z|<R$ همگرا (در واقع همگرای مطلق) است و برای هر $|z|>R$ واگراست*.

برهان. هر نیمخط σ که از O رسم شود، شامل نقطه‌ای مخالف صفر است که سری (۱) در آن‌همگراست، وهمچنین شامل‌نقطه‌ای است‌که سری (۱) در آن واگراست (وجود چنین نقاطی از لم ۳.۱.۷، و از اینکه سری از نوع سوم است نتیجه می‌شود). مجموعۀ تمام نقاط $P\in\sigma$، به‌قسمی که‌سری (۱) در P همگراست را E، ومجموعۀ تمام اعداد OP، $P\in E$ را Ω می‌نامیم وفرض می‌کنیم R کوچکترین‌کران بالای مجموعۀ Ω باشد**. وجود R از کران‌دار بودن Ω (سری در نقطه‌ای از σ واگراست) وخاصیت‌کمال دستگاه اعداد حقیقی نتیجه می‌شود. بوضوح $R>0$ (چرا؟). فرض می‌کنیم P_0 نقطه‌ای از σ است به قسمی که $OP_0=R$، و C دایره‌ای به مرکز O و مار بر P_0 است (شکل ۲۰ را ببینید). ازلم ۳.۱.۷ وتعریف R نتیجه می‌شود‌که سری (۱) درهر نقطۀ مفروض $P\in\sigma$ همگراست، اگر $OP<R$، و واگراست، اگر $OP>R$. اما بازبراساس لم ۳.۱.۷، سری درهر نقطۀ z' واقع در داخل C (به طور مطلق) همگراست ($P'\in\sigma$ را قسمی انتخاب کنید که



شکل ۲۰

* برای سادگی بیان به جای «برای هر z به قسمی که $|z|<R$» می‌گوییم «برای هر $|z|<R$».

** دراینجا وسایرجاها، یك قطعه خط ودرازای‌آن را بایك نماد (مثل OP) نشان می‌دهیم.

$R<OP'<|z'|$)، ودرنقطهٔ z'' واقع‌درخارج C واگراست($P''\in\sigma$ را به‌قسمی‌انتخاب کنید که $|z''|<OP''<R$).□

۶.۱۰۷.شعاع همگرایی ودایرهٔ همگرایی. شعاع R که درقضیهٔ بالا مورد بحث بود شعاع همگرایی سری توانی (۱) خوانده می‌شود، و دایرهٔ C، یعنی دایرهٔ $|z|=R$ دایرهٔ همگرایی (۱) نام‌دارد. قضیه در بارهٔ رفتار سری روی خود C هیچ حکمی نمی‌کند، ودرواقع‌سری(۱)ممکن‌است در نقطهٔ مفروضی‌از C، بسته به ماهیت مشخص سری، همگرا یا واگرا باشد. بنابراین ناحیهٔ همگرایی سری توانی (۱)، قرص مستدیر باز $|z|<R$ و برخی از نقاط مرزی آن (شاید تمام وشاید هیچ‌یك از نقاط مرزی) است (بخش ۵.۲.۷ را ببینید).

سرانجام درحالتی که سری فقط درنقطهٔ $z=0$ همگراست، R را صفر، و در حالتی که سری درتمام صفحه همگراست، R را $+\infty$ می‌گیریم. بنابراین می‌بینیم که هر سری توانی یك شعاع همگرایی مشخص R درفاصلهٔ $0\leqslant R\leqslant\infty$ دارد.

۷.۱۰۷. ازمثال سری هندسی

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

(فصل ۶، مسئلهٔ ۱۶ را ببینید) می‌دانیم که یك سری توانی با شعاع همگرایی R ممکن است درقرص باز $|z|<R$ همگرای یکنواخت نباشد. ولی در زیرنشان می‌دهیم که سری درقرص کوچکتر همگرای یکنواخت است.

قضیه. اگر سری توانی (۱) دارای شعاع همگرایی R باشد، آنگاه سری در هر قرص بستهٔ $|z|\leqslant r<R$ همگرای یکنواخت است.

برهان. توجه می‌کنیم که از $|z|\leqslant r$، رابطهٔ

$$|c_nz^n|=|c_n||z|^n\leqslant|c_n|r^n,$$

نتیجه می‌شود وسری عددی

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

برای تمام مقادیر $r<R$ همگراست، حال‌کافی است قضیهٔ ۶.۳.۶ را به کاربریم.□

۸.۱۰۷ قضیه. مجموع سری توانی (۱) به شعاع همگرایی R، در قرص $|z|<R$ تابعی پیوسته است.

برهان. از قضیهٔ قبلی وقضیهٔ ۵.۳.۶ نتیجه می‌شود که $s(z)$ مجموع سری توانی(۱) در هر قرص بستهٔ $|z|\leqslant r<R$ پیوسته است. بنابراین $s(z)$ در قرص باز $|z|<R$

پیوسته می‌باشد. □

۹.۱.۷. در بخش ۵.۱.۴ دیدیم که هر چند جمله‌ای در تمام صفحهٔ مختلط تابعی تحلیلی است. حال نتیجهٔ مشابهی را برای سریهای توانی ثابت می‌کنیم، در واقع سریهای توانی را می‌توان به عنوان «چند جمله‌هایی از درجه بینهایت*» درنظر گرفت.

قضیه . فرض کنیم

$$s(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots \tag{۵}$$

یك سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت $s(z)$، مجموع آن، در قرص $|z|<R$ تحلیلی است. بعلاوه می‌توان از سری (۵) جمله به جمله مشتق‌گرفت، یعنی

$$s'(z)=c_1+2c_2z+\cdots+nc_nz^{n-1}+\cdots . \tag{۶}$$

شعاع همگرایی سری‌مشتق (۶) برابر R، شعاع همگرایی سری اصلی (۵)، است.

برهان. بنا به قضیهٔ ۷.۱.۷، سری (۵) درهر قرص بستهٔ $|z|\leqslant r<R$ همگرای یکنواخت است و بنابراین درهر حوزهٔ بستهٔ $\bar{D}$ (کراندار) واقع در قرص $|z|<R$ نیز همگرای یکنواخت است (چرا؟). بعلاوه، هرجملهٔ (۵) بوضوح درقرص $|z|<R$ تحلیلی است (در این مورد، در تمام صفحه). پس بنا به قضیهٔ ۹.۳.۶، $s(z)$ درقرص $|z|<R$ تحلیلی است و می‌توان ازسری (۵) جمله به جمله مشتق گرفت، وفرمول (۶) که برای تمام مقادیر z از قرص $|z|<R$ معتبر است به دست می‌آید. اگر R' شعاع همگرایی سری (۶) باشد، آنگاه بوضوح $R\leqslant R'$. فرض می‌کنیم $R'>R$، و C یك خم هموار تکه‌ای درقرص $|z|<R'$ باشد که نقاط 0 و z را بههم وصل می‌کند. سری (۶) روی C همگرای یکنواخت است، زیرا در یك حوزهٔ بستهٔ $\bar{D}$ که شامل C است همگرای یکنواخت است (این مطلب از قضیهٔ ۷.۱.۷ و یا قضیهٔ ۹.۳.۶ نتیجه می‌شود). بنابراین می‌توانیم قضیهٔ ۸.۳.۶ را برای انتگرال گیری جمله به جمله (۶) درطول C به‌کاربریم، با کمك قضیه‌های ۱.۵.۵ و ۳.۵.۵ درمی‌یابیم که سری اصلی (۵) در قرص $|z|<R'$ همگراست وبنابراین شعاع همگراییش از R بزرگتر است، که بافرض تناقض دارد.** این تناقض نشان می‌دهد که $R'=R$، یعنی سری‌مشتق (۶) دارای همان شعاع‌همگرایی‌سری‌اصلی (۵) است.*** □

* برعکس، چند جمله‌ایها، نوعی خاص ازسریهای توانی هستند (فقط تعدادی متناهی ازضرایب سری مخالف صفرند.) برای چنین سریهایی، شعاع همگرایی خود بــه خود نامتناهی است (چرا؟).

** توجــه کنید که $n\int_0^z \zeta^{n-1}d\zeta=z^n$ (به بخش ۵.۱.۵ رجوع کنید)، به‌طوری که ازانتگرال‌گیری جمله به‌جمله از (۶) درطول C، تساوی (۵) به استثنای جملهٔ ثابت C_0 نتیجه‌می‌شود.

*** برای اثبات دیگر این‌رابطه، مسئلهٔ ۱۰ را ببینید.

چون‌سری (۶) نیز یك سری‌توانی به‌شعاع همگرایی R است، می‌توان‌از(۶) جمله به‌جمله مشتق گرفت و یك‌سری توانی جدیدی به‌همان شعاع همگرایی R به‌دست آورد، و این‌کار قابل تکـرار است. بنابراین ازسری (۵) می‌توانیم هرچندبارکـه بخواهیم جمله به‌جمله مشتق بگیریم، یعنی

$$s^{(k)}(z)=۲.۳...kc_k+۲.۳...k(k+۱)c_{k+۱}z+\cdots \quad (k=۱, ۲, \cdots), \qquad (۶')$$

که در آن هرسری مشتق دارای همان شعاع همگرایی سری (۵) است.

۲.۷. تعیین شعاع همگرایی

۱.۲.۷. حال مسئلهٔ تعیین شعاع همگرایی یك سری توانی دلخواه

$$c_{\circ}+c_{۱}z+c_{۲}z^{۲}+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

را برحسب ضرایب c_n بررسی می‌کنیم. حل‌کامل این مسئله (قضیهٔ ۴.۲.۷) درارتباط بـا مفهوم «حد بالای» یك دنبالهٔ حقیقی است،که ما آن را درحالت خاص یك دنبالهٔ‌غیرمنفی (که برای منظور ما کافی است) معرفی می‌کنیم.

۲.۲.۷. تعریف. فرض می‌کنیم

$$a_{۱}, a_{۲}, \cdots, a_n, \cdots \qquad (۷)$$

دنباله‌ای ازاعداد حقیقی غیرمنفی باشد. دراین صورت منظـور از حد بالای (۷)،کـه با

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

نشان می‌دهیم، بزرگترین نقطهٔ حدی (۷) است اگر دنباله‌کراندار* باشـد، وگرنه $+\infty$ است.

۳.۲.۷. تبصره. درحالتی‌که a_n همگراست (به‌فصل ۲، مسئلهٔ ۴ ب رجـوع کنید)، واضح است‌که

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=\lim_{n\to\infty} a_n.$$

۴.۲.۷. قضیهٔ (کوشی-آدامار) سری توانی

---

* دنبالهٔ‌کراندار، لزوماً حداقل دارای یك نقطهٔ حدی است (قضیهٔ ۵.۲.۲). در تعریف‌نقطهٔ حدی α برای دنبالهٔ حقیقی (۷)، همسایگیها به جای قرصهای $|z-\alpha|<\epsilon$ که دربخش ۲.۲.۲ آمده‌اند، فاصله‌های باز به صورت $|x-\alpha|<\epsilon$ هستند.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots , \tag{8}$$

به‌ضرایب c_n مفروض است. گیریم

$$l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

دراین صورت شعاع همگرایی (۸) برابر است با

$$R = \frac{1}{l}, \tag{9}$$

بااین قرار که

$$R = \begin{cases} +\infty & l = 0 \quad \text{اگر} \\ 0 & l = +\infty \quad \text{اگر} \end{cases}$$

برهان. سه‌حالت زیررا تشخیص می‌دهیم.

حالت ۱. $l = +\infty$، دراین حالت دنبالهٔ اعداد حقیقی غیرمنفی

$$|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots \tag{10}$$

کراندار نیست. باید نشان دهیم‌که $R = 0$، یعنی سری توانی (۸) درهـرنقطهٔ $z_0 \neq 0$ واگراست. برخلاف حکم، فرض می‌کنیم که سری (۸) دریك نقطهٔ $z_0 \neq 0$ همگراباشد. پس بنا برقضیهٔ ۴.۱.۶

$$\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0,$$

وبنا براین یك عدد $M > 0$ وجود داردکه برای تمام مقادیر $n = 0, 1, \dots$

$$|c_n z_0^n| < M. \tag{11}$$

بدیهی است که فرض $M > 1$، ازکلیت مطلب نمی‌کاهد. بنا براین از نامساوی (۱۱)نتیجه می‌شود

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_0| < \sqrt[n]{M}$$

یا*

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{M}{|z_0|},$$

واین محال است، زیرا دنبالهٔ (۱۰)کراندار نیست. این تناقض نشان می‌دهدکه (۸)واقعاً

---

* توجه‌کنیدکه اگر $M > 1$، $\sqrt[n]{M} < M$.

درهرنقطهٔ $z_\circ \neq \circ$ واگراست.

حالت ۲. $l = \circ$. لذا باید نشان دهیم که $R = +\infty$، یعنی، سری (۸) درهرنقطهٔ $z_\circ \neq \circ$ همگراست. چون هرنقطهٔ حدی یك دنبالهٔ غیرمنفی لزوماً غیرمنفی است، از $l = \circ$ نتیجه می‌شود که وقتی $n \to \infty$، $\sqrt[n]{|c_n|} \to \circ$. بنابراین برای $\epsilon > \circ$ دلخواه و مقدار به‌قدرکافی بزرگ n،

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \epsilon,$$

مثلاً برای $\epsilon = 1/2|z_\circ|$،

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|z_\circ|}.$$

بنابراین

$$\sqrt[n]{|c_n|}\, |z_\circ| < \frac{1}{2},$$

ویا معادل آن

$$|c_n|\, |z_\circ|^n = |c_n z_\circ^n| < \frac{1}{2^n}.$$

چون سری با جملهٔ عمومی $1/2^n$ همگراست، ازاین رابطه همگرایی مطلق سری (۸) در هرنقطهٔ $z_\circ$ نتیجه می‌شود.

حالت ۳. سرانجام $l \neq \circ$، $l \neq \infty$. پس برای اثبات (۹) کافی است نشان دهیم که سری (۸) درهـرنقطهٔ z_1 به‌قسمی‌که $|z_1| < 1/l$ همگـرا، و در هرنقطهٔ z_2 به‌قسمی کـه $|z_2| > 1/l$ واگراست. چون l بزرگترین نقطهٔ حدی دنبالهٔ (۱۰) است، بـرای $\epsilon > \circ$ دلخواه وتمام مقادیر به‌قدرکافی بزرگ n، داریم

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon. \tag{12}$$

با توجه به‌اینکه $l|z_1| < 1$، فرض می‌کنیم

$$\epsilon = \frac{1 - l|z_1|}{2|z_1|}.$$

آنگاه، (۱۲) به‌شکل زیردرمی‌آید

$$\sqrt[n]{|c_n|} < l + \frac{1 - l|z_1|}{2|z_1|} = \frac{1 + l|z_1|}{2|z_1|},$$

یا

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_1|<\frac{1+l|z_1|}{2}=q<1.$$

دوطرف را به‌قوهٔ n می‌رسانیم تا نتیجه شود

$$|c_n|\,|z_1|^n<q^n,$$

یا

$$|c_n z_1^n|<q^n. \tag{۱۳}$$

چون سری با جملهٔ عمومی $q^n(q<1)$ همگراست، از نامساوی (۱۳)، همگرایی مطلق سری (۸) در z_1 نتیجه می‌شود. بار دیگر تعریف l را به‌کاربرده می‌گوییم: برای $\epsilon>0$ دلخواه، و بینهایت مقدار n، داریم

$$\sqrt[n]{|c_n|}>l-\epsilon. \tag{۱۴}$$

با توجه به $l|z_2|>1$، فرض می‌کنیم

$$\epsilon=\frac{l|z_2|-1}{|z_2|}.$$

دراین صورت (۱۴) به‌شکل زیردرمی‌آید

$$\sqrt[n]{|c_n|}>\frac{1}{|z_2|},$$

یا

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z_2|>1,$$

که نتیجه می‌دهد

$$|c_n|\,|z_2|^n>1,$$

یا

$$|c_n z_2^n|>1\ . \tag{۱۵}$$

چون (۱۵) برای بینهایت مقدار n استوار است، $c_n z^n$ وقتی $n\to\infty$ نمی‌تواند به‌صفر میل کند. ازقضیهٔ ۴.۱.۶ نتیجه می‌شودکه سری (۸) در z_2 واگراست. □

۵.۲.۷. چندمثال

الف. شعاع همگرایی سری

$$1+z+z^4+z^9+\dots$$

مساوی ۱ است. زیرا، دراینجا اگر n مربع یك عدد صحیح m باشد $c_n=1$، ودرغیراین صورت $c_n=0$. بنابراین بسته به اینکه $n=m^2$ باشد یا نه، $\sqrt[n]{|c_n|}$ مساوی ۱ یا صفر است، بهقسمی که دنبالهٔ (۱۰) دارای دونقطهٔ حدی صفرویك‌است. پس $l=1$ و $R=1$.

ب. شعاع همگرایی سری

$$1+\frac{z}{1^s}+\frac{z^2}{2^s}+\dots+\frac{z^n}{n^s}+\dots \quad (s\geqslant 0)$$

مساوی ۱ است. زیرا، دراینجا داریم

$$\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{n^{s/n}}=\frac{1}{e^{(s\ln n)/n}}.$$

اما وقتی $n\to\infty$، $(\ln n)/n\to 0$، وبنابراین $\sqrt[n]{|c_n|}\to 1$، پس $l=1$، $R=1$.

ج. سری

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots$$

درتمام صفحهٔ مختلط همگراست. برای اثبات، ابتدا توجه می‌کنیم که

$$(n!)^2=(1\cdot n)(2(n-1))\dots(n\cdot 1),$$

که درآن، هریك از n جمله درون پرانتزها از n کوچکتر نیست، زیرا

$$k(n-k+1)-n=(k-1)(n-k)\geqslant 0 \quad (k=1,2,\dots,n).$$

بنابراین

$$(n!)^2\geqslant n^n$$

یا

$$n!\geqslant(\sqrt{n})^n,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\sqrt[n]{n!}\geqslant\sqrt{n},$$

وبنابراین

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

ازاین رابطه نتیجه می‌شود که دراین‌حالت

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0,$$

پس $l=0$ و $R=+\infty$.

۵. به‌همین طریق، بی‌درنگ می‌بینیم که هردوسری

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots,$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots,$$

درتمام صفحهٔ مختلط همگرا هستند ($R=+\infty$)، درحالی‌که سری

$$1+z+2!z^2+\dots+n!z^n+\dots$$

فقط درنقطهٔ $z=0$ همگراست ($R=0$).

۶.۲.۷. قبلاً دربخش ۶.۱.۷ توجه‌کردیم که رفتار سریهای توانی روی دایره‌های همگرایی همیشه یکسان‌نیست. برای مثال، اگردرمثال ۵.۲.۷ ب، بنوبت s را ۰، ۱، ۲ بگیریم، سه‌سری مختلف زیر با یك شعاع همگرایی $R=1$ به‌دست می‌آوریم، یعنی

$$1+z+z^2+\dots+z^n+\dots,$$

$$1+z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^n}{n}+\dots,$$

$$1+z+\frac{z^2}{2^2}+\dots+\frac{z^n}{n^2}+\dots.$$

اولین‌سری‌درهرنقطهٔ دایره همگرایی C (دایرهٔ به‌شعاع واحد، یعنی $|z|=1$) واگراست، درحالی‌که سری سوم درهر نقطهٔ C همگراست. درمورد سری‌دوم، این سری دربعضی نقاط C همگراست (مانند نقطهٔ $z=-1$) ودر برخی‌نقاط دیگر واگراست (مثلاً درنقطهٔ $z=1$).*

---

* درواقع، می‌توان نشان داد که این سری فقط در $z=1$ واگراست ودر هرنقطهٔ دیگر C همگراست (به جلد اول کتاب سابق‌الذکر A. I. Markushevich، مثال ۱: صفحهٔ ۴۰۸ رجوع کنید).

چند توضیح

۱.۷. درارتباط با اهمیت سری توانی درآنالیز مختلط، توجه می کنیم که نه‌تنها با هرسری توانی درداخل دایرهٔ همگرائیش یك تابع تحلیلی نمایش داده می‌شود (قضیهٔ ۹.۱.۷)، بلکه برعکس هرتابع تحلیلی $f(z)$ در یك قرص K را می‌توان با مجموع یك سری توانی همگرا در K نمایش داد (قضیهٔ ۳.۱.۱۰). بنابراین بسیارقابل توجه است که ردهٔ توابع تحلیلی در K، با ردهٔ توابعی که با سری توانی در K نشان داده می‌شوند تطبیق می کند.

۲.۷. چون یك مجموعهٔ کراندار نامتناهی ممکن است بزرگترین عضو نداشته‌باشد (مجموعهٔ $\dots, ۴/۵, ۳/۴, ۲/۳, ۱/۲$ را درنظربگیرید)، تعریف ۲.۲.۷ به‌طور ضمنی متکی براین‌واقعیت است که مجموعهٔ E متشکل‌از تمام نقاط حدی یك دنبالهٔ کرانداراعداد غیرمنفی، دارای بزرگترین عضواست. برای درك این مطلب،کافی است توجه کنیم که کمترین کران بالای E، خود عضوی از E است (چرا؟)، وبنابراین بوضوح بزرگترین عضو E است.

مسائل

۱. نظایرنتایج مختلف این فصل را برای یك‌سری توانی کلی

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\dots+c_n(z-a)^n+\dots$$

«به‌مرکز $a\neq 0$» به‌دست آورید.

۲. فرض می کنیم سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (۱۶)$$

به‌شعاع همگرایی R درنقطه‌ای ازدایرهٔ همگرائیش همگرای مطلق است. ثابت کنید که این سری در هر $|z|\leqslant R$ همگرای مطلق وهمچنین همگرای یکنواخت است.

۳. ثابت کنید که اگر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=R,$$

آنگاه R شعاع همگرایی سری (۱۶) است.

۴. شعاع همگرایی هریك از سریهای توانی زیررا بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$؛ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$؛ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$؛ د) $\sum_{n=0}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$؛

ه) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n$.

۵. ثابت کنید که شعاع همگرایی سری

$$z+\frac{2^2}{2!}z^2+\cdots+\frac{n^n}{n!}z^n+\cdots$$

مساوی $1/e$ است.

۶. شعاع همگرایی سری زیررا به‌دست آورید

$$z+\frac{z^{2^2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{n^2}}{n!}+\cdots.$$

۷. به‌فرض آنکه شعاع‌همگرایی‌سری(۱۶) برابر R $(0<R<\infty)$ باشد، شعاع‌همگرایی هریك از سریهای زیررا به‌دست آورید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n z^n$؛ ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$؛ ج) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k z^n$؛

د) $(k=1, 2, \dots)$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn}$.

۸. فرض می‌کنیم که شعاع همگرایی دوسری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n z^n \tag{۱۷}$$

بترتیب r و r' باشد. دربارهٔ شعاع همگرایی هریك از سریهای زیرچه‌می‌توان گفت؟

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\pm c'_n)z^n$؛ ب) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n c'_n z^n$؛ ج) $(c'_n\neq 0)$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{c'_n}z^n$.

۹. مثالی از دو سری (۱۷) با یك شعاع همگرایی متناهی ارائه دهید، به‌طوری که شعاع همگرایی سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n+c'_n)z^n$$

نامتناهی باشد.

۱۰. با استفاده از قضیهٔ کوشی‌ـ‌آدامار نشان دهید که سری حاصل از مشتق‌گیری جمله به‌جملهٔ یك سری‌توانی، دارای همان شعاع همگرایی‌سری اصلی است.

۱۱. حکم زیرراکه به‌قضیهٔ آبل معروف است ثابت‌کنید: اگرسری توانی

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (18)$$

دریك نقطهٔ z_0 ازدایرهٔ همگرایی $R=|z|$ همگرا باشد، آنگاه وقتی z درطول شعاع oz_0 بهسمت z_0 میل می‌کند، $s(z)$ به $s(z_0)$ می‌گراید.

۱۲. قضیهٔ آبل را درمورد اعداد حقیقی به‌کاربرده نشان دهیدکه مجموع سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$\ln 2$ است.

۱۳. ازقضیهٔ آبل برای اثبات تعمیم زیراز قضیهٔ ۷.۲.۶ کـه مربوط بهضرب سریهاست استفاده کنید:
اگردوسری (عددی)

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z'_n \qquad (19)$$

همگرا (درحالت‌کلی فقط همگرای مشروط) و مجموع آنهـا بترتیب s و s' باشد، و اگر حاصلضرب صوری آنها، یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_1 z'_n+z_2 z'_{n-1}+\cdots+z_n z'_1)$$

همگرا ومجموعش S باشد، آنگاه $S=ss'$.

۱۴. مثالی ارائه دهیدکه نشان دهد عکس قضیهٔ آبل درست نیست.

توضیح. با وجود این، مسئلهٔ بعدی نشان می‌دهدکه اگر برای ضرایب c_n شرایط‌مناسبی قائل شویم عکس قضیهٔ آبل استوار است.

۱۵. حکم زیررا که به‌قضیهٔ تاوبرمعروف است ثابت‌کنید: اگرضرایب سری توانی (۱۸) درشرط زیرصدق کنند

$$\lim_{n\to\infty} nc_n=0$$

و اگر

$$\lim_{z\to 1} s(z)=A \quad (0<z<1),$$

آنگاه سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

همگرا ومجموع آن A است.

۸

برخی از نگاشتهای ویژه

۱.۸. توابع‌نمایی و توابع وابسته

۱.۱.۸. تابع‌مختلط $f(z)$ را تام گویند اگردرهرنقطهٔ صفحهٔ متناهی z تحلیلی باشد. دربخش ۵.۲.۷ دیدیم که شعاع همگرایی هریك از سریهای زیر نامتناهی است،

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots, \quad 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots, \quad z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots, \tag{1}$$

پس بنابه‌قضیهٔ ۹.۱.۷ مجموع هریك ازاین سریها تابعی تام است. اما درحسابان دیده‌ایم که اگر z عدد حقیقی x باشد، مجموع سریهای(۱) بترتیب توابع e^x ، $\cos x$ و $\sin x$ هستند. بدین‌لحاظ وقتی z عدد مختلط دلخواهی است، توابع‌نمایی، کسینوس و سینوس را بترتیب، مجموع سریهای زیر تعریف می‌کنیم

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots, \tag{2}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\cdots, \tag{3}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots. \tag{4}$$

۲.۱.۸. فرمول کلیدی

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \tag{۵}$$

که درآن z_1 و z_2 اعدادی حقیقی هستند، برای مقادیر مختلط دلخواه z_1 و z_2 نیز برقرار است. برای اثبات این رابطه کافی است دوسری توانی

$$e^{z_1}=1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\cdots,$$

$$e^{z_2}=1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}+\cdots,$$

را (که همگرای مطلق هستند) با استفاده از قضیهٔ ۷.۲.۶ ، درهم ضرب کنیم و سری زیر را به‌دست آوریم.

$$1+(z_2+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}+\cdots. \tag{۶}$$

(۵) از(۶) نتیجه می‌شود، زیرا بی‌درنگ دیده می‌شودکه (۶) سری‌توانی $e^{z_1+z_2}$ است. اگر در (۵) بنویسیم $z_1=z$ و $z_2=-z$ به

$$e^{z}e^{-z}=e^{0}=1$$

یا

$$e^{-z}=\frac{1}{e^{z}} \tag{۷}$$

می‌رسیم. از (۷) نتیجه می‌شودکه

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1}e^{-z_2}=e^{z_1-z_2}.$$

۳.۱.۸. الف. هرگاه دررابطهٔ (۲) به‌جای z ، iz بگذاریم و قسمتهای حقیقی و موهومی سری حاصل را ازهم جدا کنیم، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$e^{iz}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right).$$

که درآن دوسری واقع درپرانتز بترتیب $\cos z$ و $\sin z$ هستند، از این رابطه بی‌درنگ به فرمول جالب زیر می‌رسیم

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \tag{۸}$$

که به فرمول اویلر معروف است،ونشان می‌دهدکه بین تابع مختلط نمایی و توابع مختلط

مثلثاتی یك رابطهٔ بسیار نزدیك وجود دارد.

ب. واضح است که

$$\cos(-z)=\cos z, \qquad \sin(-z)=-\sin z, \tag{۹}$$

زیرا سری (۳) که مجموعش $\cos z$ است فقط شامل توانهای زوج z و سری (۴) که مجموعش $\sin z$ است فقط شامل توانهای فرد z است. بنابراین اگر در (۸) z را به $-z$ تبدیل کنیم رابطهٔ

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z \tag{۸'}$$

حاصل می‌شود. از جمع (۸) و (۸') رابطهٔ

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} \tag{۱۰}$$

و از کم کردن (۸') از (۸) رابطهٔ

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i} \tag{۱۰'}$$

به‌دست می‌آید.

ج. تابع e^z متناوب و دورهٔ تناوبش $۲\pi i$ است، یعنی به‌ازای هر z،

$$e^{z+۲\pi i}=e^z,$$

زیرا بنا به رابطهٔ (۵)

$$e^{z+۲\pi i}=e^z e^{۲\pi i}$$

و بنا به‌رابطهٔ (۸)

$$e^{۲\pi i}=\cos ۲\pi+i\sin ۲\pi=۱.$$

د. هرعدد مختلط z را می‌توان به‌شکل مثلثاتی

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{۱۱}$$

نوشت (بخش ۳.۳.۱ را ببینید). با استفاده از (۸) رابطهٔ (۱۱) به شکل‌نمایی معادل نوشته می‌شود:

$$z=re^{i\theta} \tag{۱۱'}$$

هـ. تابع e^z به‌ازای هرعدد مختلط z مخالف صفر است. زیرا اگر $z=x+iy$ آنگاه بنا به روابط (۵) و (۸)، داریم

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

به‌طوری که

$$|e^z| = e^x$$

ولی e^x به‌ازای تمام مقادیر حقیقی x مخالف صفراست. بنا براین $|e^z|$ (درنتیجه خود e^z) به‌ازای تمام مقادیر مختلط z مخالف صفر است.

۴۰۱۰۸. الف. با فرمولهای مثلثاتی

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

برای z_1 و z_2 حقیقی‌آشنا هستید. این‌فرمولها برای مقادیر مختلط z_1 و z_2 برقرارند، زیرا

$$e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1}e^{iz_2}$$

و درنتیجه، بنابه فرمول اویلر

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2) \\ &= (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\ &\quad + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned}$$

دراین رابطهٔ اخیربه‌جای z_1 و z_2 بترتیب $-z_1$ و $-z_2$ می‌گذاریم[1]، با استفاده از (۹) رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \cos(z_1+z_2)-i\sin(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) \\ &\quad -i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 + \sin z_2). \end{aligned}$$

سپس از جمع و تفریق دو رابطهٔ اخیر، (۱۲) حاصل می‌شود. همچنین در (۱۲) به‌جای z_2، $-z_2$ گذارده از (۹) استفاده می‌کنیم. فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند،

$$\begin{aligned} \cos(z_1-z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1-z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned} \tag{۱۲'}$$

بعلاوه، در (۱۲)، z_1 را z و z_2 را 2π می‌گیریم، حاصل می‌شود

$$\cos(z+2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z,$$

---

۱. توجه کنید که اگر z_1 و z_2 اعداد حقیقی باشند، کسینوسها و سینوسهای z_1، z_2 و z_1+z_2 اعداد حقیقی هستند و می‌توان از مساوی قرار دادن قسمتهای حقیقی و موهومی دوطرف این رابطه (۱۲) را به‌دست آورد. ـم.

$$\sin(z+2\pi)=\sin z\cos 2\pi+\cos z\sin 2\pi=\sin z,$$

یعنی توابع سینوس و کسینوس‌هم در تمام صفحهٔ مختلط و هم‌روی محـور حقیقی، متناوب هستند و دورهٔ تناوبشان 2π است. دراولین فرمول (′۱۲)، z_1 و z_2 را z می گیریم، رابطهٔ

$$\cos 0=\cos^2 z+\sin^2 z,$$

یا

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1 \tag{۱۳}$$

که برفرمول درحالت z حقیقی منطبق است، به‌دست می‌آید. اما بـرخلاف حالت حقیقی، از رابطهٔ (۱۳)، دیگر $|\sin z|\leqslant 1,\ |\cos z|\leqslant 1$ نتیجه نمی‌شونـد. در واقع (به‌طور تقریب) داریم

$$\cos i=\cosh 1=1{,}543, \qquad \sin i=i\sinh 1=1{,}175i$$

(قسمت ۵.۱.۸ را ببینید).

ب. حال صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ ، یعنی نقاطی از صفحهٔ مختلط را کـه در آنها $\sin z$ یا $\cos z$ صفر می‌شوند: پیدا می کنیم. بنا به رابطهٔ (′۱۰)، معادلهٔ $\sin z=0$ ، به $e^{iz}=e^{-iz}$ یا $e^{2iz}=1$ تبدیل می‌شود، اما $z=x+iy$ ، پس معادله به‌صورت

$$e^{2i(x+iy)}=1$$

یا

$$e^{2ix}e^{-2y}=1 \tag{۱۴}$$

درمی‌آید. طرف چپ (۱۴) عددمختلطی‌است به‌آوند $2x$ و قدرمطلق e^{-2y} درصورتی که طرف راست آن عدد ۱ است. پس داریم

$$2x=2\pi k, \qquad e^{-2y}=1,$$

که در آن k عددی صحیح است. پس داریم $x=\pi k$ ، $y=0$. بنابـراین $\sin z$ صفر می‌شود اگر وفقط اگر

$$z=\pi k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

به‌همین‌ترتیب، از حل معادلهٔ $e^{iz}=-e^{-iz}$ یا $e^{2iz}=-1$ درمی‌یابیم کـه $\cos z$ صفر می‌شود اگر وفقط اگر

$$z=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

۵.۱.۸. توابع هذلولوی. درحسابان، کسینوس‌هذلولوی وسینوس هذلولوی، برای

عدد حقیقی $x=z$ بافرمولهای زیر تعریف می‌شوند،

$$\cosh z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \tag{۱۵}$$

$$\sinh z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \tag{۱۵'}$$

این فرمولها را برای تعریف $\cosh z$ و $\sinh z$ وقتی z عدد مختلط و دلخواه است، به‌کار می‌بریم. سریهای توانی e^{z} و e^{-z} را در (۱۵) و (۱۵′) می‌گذاریم، سریهای

$$\cosh z=1+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}+\cdots+\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\cdots,$$

$$\sinh z=z+\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}+\cdots+\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots,$$

که هردوسری درتمام صفحه همگرای مطلق‌اند، نتیجه می‌شوند. ازمقایسهٔ (۱۵) و، (۱۵′) با (۱۰) و (۱۰′) بآسانی می‌بینیم که:

$$\cosh z=\cos iz,$$

$$\sinh z=-i\sin iz,$$

$$\cos iz=\cosh z,$$

$$\sin iz=i\sinh z.$$

(بویژه، توجه‌کنیدکه کسینوس و سینوس درصفحهٔ مختلط کراندار نیستند، چون وقتی x حقیقی است، $|\sin ix|$ و $|\cos ix|$ برای مقادیر به‌قدرکافی بزرگ x، بدلخواه بزرگ می‌شوند.) از این روابط، می‌توان از هررابطه‌ای که شامل توابع مثلثاتی $\cos z$ و $\sin z$ باشد، رابطه‌ای راکه شامل توابع هذلولوی، $\cosh z$ و $\sinh z$ است، نتیجه گرفت. مثلاً، از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$\cos^{2} iz+\sin^{2} iz=1$$

وبنابراین

$$\cosh^{2} z-\sinh^{2} z=1,$$

همچنین از (۱۲) داریم:

$$\cos i(z_{1}+z_{2})=\cos iz_{1}\cos iz_{2}-\sin iz_{1}\sin iz_{2},$$

$$\sin i(z_{1}+z_{2})=\sin iz_{1}\cos iz_{2}+\cos iz_{1}\sin iz_{2}$$

ولذا

$$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1 \cosh z_2+\sinh z_1 \sinh z_2,$$
$$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1 \cosh z_2+\cosh z_1 \sinh z_2.$$

۶۰۱۰۸. برای محاسبهٔ مشتق توابع e^z، $\cos z$، $\sin z$، $\cosh z$ و $\sinh z$ کافی است به قضیهٔ ۹.۱.۷ در بارهٔ مشتق جمله‌به‌جملهٔ سری تـوانی، استناد کنیم. به‌این‌ترتیب، مانند حالتی که z حقیقی است به فرمولهای زیر می‌رسیم

$$\frac{de^z}{dz}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots=e^z,$$

$$\frac{d\cos z}{dz}=-z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\dots=-\sin z,$$

$$\frac{d\sin z}{dz}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots=\cos z,$$

$$\frac{d\cosh z}{dz}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots=\sinh z,$$

$$\frac{d\sinh z}{dz}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots=\cosh z.$$

۷۰۱۰۸. طبق بخش ۳.۳.۴ نگاشت $w=e^z$ درهـر نقطهٔصفحهٔ متناهـی z همدیس است، زیرا مشتق آن، $w'=e^z$ به‌ازای هـر z مخالف صفر است. فرض مـی‌کنیم که z خط راست

$$z=\alpha+it \qquad (-\infty<t<\infty \text{، حقیقی است} \alpha) \tag{۱۶}$$

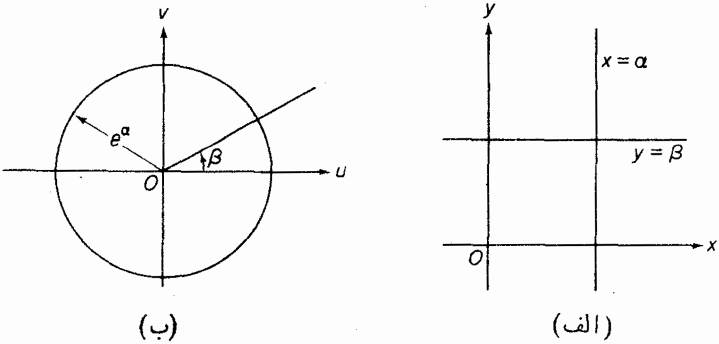
راکه موازی محور مـوهومی است، رسم کند (شکل ۲۱ الف). آنگاه نقطـهٔ $w=e^z$، نگارهٔ z، خم

$$w=e^{\alpha+it}=e^{\alpha}(\cos t+i\sin t) \tag{۱۶'}$$

را رسم می‌کند، یعنی، w دایره‌ای به‌شعاع e^{α} و به مـرکز مبدأ مختصات رسم مـی‌کند (شکل ۲۱ب را ببینید) در واقع، وقتی z خط (۱۶) را درجهت از پایین به‌بالا (درجهت افزایش t) طی می‌کند، w هم‌دایرهٔ (۱۶') را به‌دفعات نامتناهی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت رسم می‌نماید.

به‌طور مشابه فرض می‌کنیم که z خط راست

$$z=t+i\beta \qquad (-\infty<t<\infty \text{، حقیقی است} \beta) \tag{۱۷}$$



شکل ۲۱

موازی با محور حقیقی را رسم کند (دوباره شکل ۲۱ الف را ببینید)، آنگاه نقطهٔ $w=e^z$ خم

$$w=e^{t+i\beta}=e^t(\cos\beta+i\sin\beta), \qquad (۱۷')$$

را رسم می‌کند، یعنی w نیمخط (چرا نیمخط و نه‌تمام خط؟) با شیب $\tan\beta$ راکه از مبدأ خارج می‌شود (ولی شامل مبدأ نیست! درشکل ۲۱ ب نشان داده شده است)، رسم می‌کند. توجه‌کنیدکه چون خطوط (۱۶) و (۱۷) برهم عمود هستند، همدیسی نگاشت، متضمن متعامدبودن دایرهٔ ($۱۶'$)ونیمخط ($۱۷'$) است، امری‌که ازنظرهندسی واضح‌است.

۲۰۸. تبدیلهای خطی کسری

۱۰۲۰۸. تبدیل خطی کسری[1]

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \qquad (۱۸)$$

را قبلاً درفصل چهارم، مسائل ۲۲–۲۸ مطرح کردیم ونشان دادیم که (۱۸) نگاشتی است یك به یك ازصفحهٔ گسترش یافتهٔ Π به‌روی خودش و درهرنقطهٔ Π همدیس است*. حال به مطالعهٔ این نگاشت مهم ادامه می‌دهیم. اول ثابت می‌کنیم که تبدیل خطی‌کسری، حافظ دایره است، یعنی، این تبدیل هر دایره یا خط راست را درصفحهٔ z به دایره یا خط‌راست درصفحهٔ w تبدیل می‌کند**.

---

۱. تبدیل خطی‌کسری را تبدیل همنگاری یا تبدیل موبیوس نیز می‌گویند.ـم.

* اگر $c=0$، (۱۸) یك تبدیل خطی تام می‌شود (فصل ۴، مسائل ۱۶–۲۱).

** خط راست یك حالت حدی دایرهٔ متناظر به‌شعاع بینهایت است.

۲.۲.۸. لم. تبدیل

$$w=\rho z \qquad (\rho>0)$$

حافظ دایره است.

برهان. رابطهٔ

$$Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0 \qquad (\text{حقیقی‌هستند } D \text{ و } A), \qquad (۱۹)$$

صورت کلی معادلهٔ دایره یا خط راست در صفحهٔ z است. (۱۹) دایره است اگر $E\bar{E}-AD>0, A\neq 0$ و خط راست، اگر $A=0$ و $E\neq 0$ (فصل اول، مسئلهٔ ۲۵ را ببینید)در (۱۹) به‌جای z ، w/ρ می گذاریم، رابطهٔ

$$\frac{A}{\rho^2}w\bar{w}+\frac{\bar{E}}{\rho}w+\frac{E}{\rho}\bar{w}+D=0$$

که آشکارا معادلهٔ دایره یا خط راست درصفحهٔ w است، به‌دست می‌آید. □

۳.۲.۸. لم. تبدیل

$$w=\frac{1}{z}$$

حافظ دایره است.

برهان. این‌بار در (۱۹) به‌جای z ، $1/w$ می گذاریم، رابطهٔ

$$\frac{A}{w\bar{w}}+\frac{\bar{E}}{w}+\frac{E}{\bar{w}}+D=0$$

ویا معادل آن

$$Dw\bar{w}+\bar{E}\bar{w}+Ew+A=0$$

حاصل می‌شود، که در صفحهٔ w معادلهٔ دایره (اگر $D\neq 0$) یا معادلهٔ خط (اگر $D=0$) است.* □

۴.۲.۸. قضیه. تبدیل خطی‌کسری (۱۸) حافظ دایره‌است.

برهان. اگر $c=0$ ، (۱۸) تبدیل خطی تام زیر است

$$w=\alpha z+\beta \qquad (\alpha\neq 0) \qquad (۲۰)$$

---

* تحقیق کنید که شرط اضافی $E\bar{E}-AD>0$ اگر $D\neq 0$ وشرط $E\neq 0$ اگر $D=0$، برقرار است.

که درآن $\alpha=a/d$ و $\beta=b/d$. اگر $\alpha=1$ ، (۲۰) یك انتقال وآشکارا حافظ دایره است. اگر $\alpha\neq 1$ ، می‌نویسیم

$$\alpha=\rho e^{i\theta} \qquad (\rho>0)$$

آنگاه می‌بینیم که (۲۰) نتیجهٔ سه تبدیل متوالی زیر است:

$$z^*=ze^{i\theta}, \qquad w^*=\rho z^*, \qquad w=w^*+\beta$$

و هرسه تبدیل، حافظ دایره هستند، زیرا اولی یك دوران و سومی یك انتقال است، و دومی بنا به لم ۲.۲.۸ حافظ دایره است. بنابراین تبدیل (۲۰) که ترکیبی از این سه تبدیل است، حافظ دایره است.

حال فرض می‌کنیم $c\neq 0$. آنگاه (۱۸) را به‌صورت

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)} \qquad (bc-ad\neq 0), \qquad (18')$$

که نتیجهٔ سه تبدیل متوالی زیر است

$$z^*=cz+d, \qquad w^*=\frac{1}{z^*}, \qquad w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w^*$$

می‌نویسیم. اما این سه تبدیل، حافظ دایره هستند، اولی و سومی چون تبدیل خطی تام هستند و دومی بنا به‌لم ۳.۲.۸. بنابراین تبدیل (′۱۸) حافظ دایره است.□

۵.۲.۸ قضیه. یك تبدیل خطی کسری یکتا وجود دارد که سه نقطهٔ مفروض z_1، z_2، z_3 ی صفحهٔ z را به سه نقطهٔ مفروض w_1، w_2، w_3 ی صفحهٔ w تبدیل می‌کند.

برهان. فرض می‌کنیم که شش نقطهٔ مفروض همگی متناهی باشند (درغیراین‌صورت مسئله ۱۴ را ببینید). از رابطهٔ (۱۸) و

$$w_j=\frac{az_j+b}{cz_j+d} \qquad (j=1, 2, 3) \qquad (21)$$

معادله‌های زیر نتیجه می‌شوند

$$w-w_1=\frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)},$$

$$w-w_2=\frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)},$$

$$w_3-w_1=\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)},$$

$$w_3 - w_2 = \frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}.$$

اولی را به دومی و سومی را به‌چهارمی تقسیم می‌کنیم و سپس دومعادله‌ای راکه به‌دست می‌آیند برهم تقسیم کرده، به تبدیل خطی کسری مطلوب

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \qquad (22)$$

که z_1, z_2, z_3 را به w_1, w_2, w_3 تبدیل می‌کند، می‌رسیم. آشکاراست که ایـن‌تبدیل یکتاست، زیراتنها ازاین‌فرض که تبدیل عمومی(۱۸)درشرایط (۲۱)صدق‌می‌کند، نتیجه می‌شود.* □

۶.۲.۸. الف. نتیجه. کمیت

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2},$$

که **نسبت ناهمساز** چهارنقطهٔ z_1, z_2, z, z_3 (با همین ترتیب) نام دارد، در هر تبدیل خطی کسری، پایاست[1].

برهان. کافـی است توجه‌کنیم کـه طرف راست رابطهٔ (۲۲) نسبت ناهمساز نقاط z_1, z_2, z, z_3 است درحالی که طرف چپ رابطـهٔ (۲۲) نسبت ناهمساز نگاره‌هـای آنها به وسیلهٔ تبدیل خطی کسری مفروض است. □

ب. نتیجه. فرض می‌کنیم دایرهٔ C درصفحهٔ z با سه نقطهٔ مفروض z_1, z_2, z_3، و دایرهٔ Γ درصفحهٔ w با سه‌نقطهٔ مفروض w_1, w_2, w_3 مشخص شده‌اند.آنگاه فقط یك تبدیل‌خطی کسری وجود دارد که C را به Γ و نقاط z_1, z_2, z_3 را به نقاط w_1, w_2, w_3 می‌برد.**

برهان. مطابق قضیهٔ ۵.۲.۸ تبدیل‌خطی کسری یکتایی وجود داردکه نقاط z_1, z_2, z_3 را به نقاط w_1, w_2, w_3 می‌برد، درحالی‌که به موجب قضیهٔ ۴.۲.۸ این تبدیل باید دایرهٔ C را به یك دایره ببرد واین دایره بوضوح دایرهٔ Γ است. □

ج. فرض می‌کنیم کـه G داخل C و I و E بترتیب داخل وخارج Γ باشند. آنگاه تبدیل خطی کسری $w=f(z)$ که درنتیجهٔ ۶.۲.۸ ب‌آمده است، G را یا به توی I یا به

---

* صورت کلی تبدیل خطی‌کسری (۱۸) فقط شامل سه‌پارامتر، متشکل ازنسبتهای سه عدد از چهار عدد a, b, c, d بـه عدد چهارم است. این پارامترها را می‌توان به وسیلهٔ (۲۱) تعیین وسپس از(۱۸) حذف‌کرد. ما درواقع این عمل را (به صورت ظریفتر)انجام داده‌ایم؛ از (۱۸) و (۲۱) شروع کرده به (۲۲) رسیده‌ایم.

۱. یعنی ثابت می‌ماند.

** اگر C، (یا Γ) خط راست باشد، یکی از نقاط z_j (یا w_j) درنقطهٔ بینهایت است.

توی E می‌نگارد. زیرا اگر z_1 و z_2 دونقطهٔ دلخواه G و w_1 و w_2 نگاره‌های آنها به‌وسیلهٔ $w=f(z)$ باشند، و γ یك‌خم‌واصل نقاط z_1 و z_2 واقع در G باشد. آنگاه نگارهٔ γ به‌وسیلهٔ‌تبدیل $f(z)=w$، واصل نقاط w_1 و w_2 است ونمی‌تواند دایرهٔ Γ را قطع کند، چون γ دایرهٔ C را قطع نمی‌کند. پس نتیجه می‌شودکه w_1 و w_2 هر دو به حوزهٔ I یا به حوزهٔ E تعلق دارند. این حوزه را D می‌نامیم، با استدلالی مشابه درمورد معکوس تبدیل $w=f(z)$، می‌بینیم که هر نقطهٔ دیگر $w\in D$، نگارهٔ نقطه‌ای در G است. به عبارت دیگر «نگارهٔ G به وسیلهٔ $w=f(z)$» یعنی مجموعهٔ تمام مقادیر $w=f(z)$ که به وسیلهٔ نقاط $z\in G$ به دست می‌آیند، دقیقاً حوزهٔ D است.

د. صرف نظر از اینکه به طور آشکار D حوزهٔ شامل نگارهٔ هرنقطهٔ G است، می‌توانیم ازاستدلال زیرکه مبتنی برهمدیسی تبدیل $w=f(z)$ است، استفاده‌کرده ازرفتار تبدیل روی دایرهٔ Γ تعیین کنیم که آیا $D=I$ یا $D=E$. فرض می‌کنیم z در خلاف جهت‌عقربه‌های‌ساعت C را بپیماید، دراین صورت G درسمت چپ‌ناظری‌که با z حرکت می‌کند، واقع می‌شود، آنگاه نگارهٔ G تحت $w=f(z)$ آن حوزه‌ای‌است که درسمت چپ ناظری‌که با نقطهٔ نگارهٔ $w=f(z)$ حرکت می‌کند واقع است چه این حوزهٔ داخلی I باشد چه حوزهٔ خارجی E (دراین باره فکر کنید). همین‌گفته‌ها برای حالتی که G خارج C باشد به‌کارمی‌رود، با این‌تفاوت که حالا z باید C را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت بپیماید تا خارج C درسمت چپ ناظری‌که با z حرکت می‌کند واقع شود. حالتی‌که C خط مستقیم و G یکی ازنیمصفحه‌های به مرز C است، به طورمشابه بحث می‌شود (بتفصیل توضیح دهید).

۷۰۲۰۸. یادآور می‌شویم که در۲۰۴۰۱ دو نقطهٔ P و P' را نسبت به دایرهٔ مفروض C به شعاع R وبه مرکز O متقارن گفتیم اگر روی نیمخطی‌که ازنقطهٔ O می‌گذرد واقع باشند وحاصلضرب درازاهای OP و OP' برابر با R^2 باشد. حالا یکی ازمشخصات مهم نقاط متقارن را اثبات می‌کنیم.

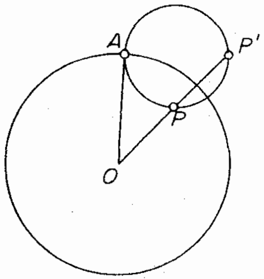
قضیه. دو نقطه P و P' نسبت به دایرهٔ C متقارن هستند اگر وفقط اگر هر دایره یا خط γ که از P و P' می‌گذرد بردایرهٔ C عمود باشد.

برهان. فرض‌می‌کنیم‌که P و P' نسبت به‌دایرهٔ C متقارن هستند و γ دایره‌ای است که ازنقاط P وP' می‌گذرد، وهمچنین فرض کنیم OA خط مماسی است که از O، مرکز دایرهٔ C، بردایرهٔ γ رسم شده است (شکل ۲۲ را ببینید) آنگاه ازهندسهٔ مقدماتی («طول مماس OA واسطهٔ هندسی است بین دوپاره خط OP و OP'») داریم

$$(OA)^2=OP\cdot OP' \qquad (۲۳)$$

ولی $OP\cdot OP'=R^2$ وبنابراین $OA=R$. پس OA شعاع دایرهٔ C وبر C عمود است.

چون OA بر γ مماس است، نتیجه می‌شود که γ بر C عمود است*.



شکل ۲۲

برعکس، فرض می‌کنیم هردایره‌ای که‌از P و P' می‌گذرد بر C عمود باشد. آنگاه خط راست‌مار بر P و P' (حالت خاص‌دایره!) باید بر C عمودباشد، پس بایداز O بگذرد. فرض می‌کنیم که γ دایره‌ای باشد که از P و P' می‌گذرد. از O مماسی بر γ رسم کرده نقطهٔ تماس را A می‌نامیم. چون γ بر C عمود است، OA باید شعاع دایرهٔ C باشد. حال از (۲۳) نتیجه می‌شود که $OP.OP'=R^2$ یعنی، P و P' نسبت‌به‌دایرهٔ C متقارن‌هستند. □

۸.۲.۸ حال ثابت می‌کنیم که تبدیل خطی‌کسری، «تقارن نقاط را حفظ می‌کند[۱]». معنای این جمله در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه. نقاط z_1 و z_2 که نسبت به دایرهٔ C متقارن هستند، مفروض‌اند فرض می‌کنیم درتبدیل خطی‌کسری (۱۸)، w_1 و w_2 و Γ بترتیب نگاره‌های z_1 و z_2 و C باشند. آنگاه w_1 و w_2 نسبت به دایرهٔ Γ متقارن هستند.

برهان. برطبق قضیهٔ ۷.۲.۸ کافی است نشان دهیم که هردایره (یا خط راست) L که از نقاط w_1 و w_2 می‌گذرد بر دایرهٔ Γ عمود است. فرض می‌کنیم که معکوس تبدیل $w=f(z)$، که خود یك تبدیل خطی‌کسری است، $z=\varphi(w)$ باشد (فصل چهارم مسئلهٔ ۲۴ را ببینید)، ونگارهٔ L به وسیلهٔ $\varphi(w)$ را γ می‌نامیم. آنگاه بنابه قضیهٔ ۴.۲.۸، γ دایره یا خط راستی است که از نقاط z_1 و z_2 می‌گذرد. چون بنا به فرض z_1 و z_2 نسبت به دایرهٔ C متقارن هستند، ازقضیهٔ ۷.۲.۸ نتیجه می‌شود که γ بر C عمود است. آنگاه از همدیسی (۱۸) نتیجه می‌شود که L بر Γ عمود است.

---

* اگر γ خط راست باشد، آنگاه بوضوع γ بر C عموداست، زیرا P و P' روی نیمخطی‌که از O خارج می‌شود واقع‌اند.

۱. به‌عبارت دیگر، درتبدیل‌خطی‌کسری دونقطهٔ متقارن به دو نقطهٔ متقارن تبدیل‌می‌شوند. ـم.

۹.۲.۸. چند مثال

الف. فرض می‌کنیم که D نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > 0$ و z_0 نقطه‌ای در D باشد. یك تبدیل خطی کسری به صورت

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{۲۴}$$

بیابید که D را به قرص واحد $|w| < 1$ تبدیل کند و شرایط زیر برقرار باشند*:

$$f(z_0) = 0, \qquad f'(z_0) > 0 \tag{۲۵}$$

حل. تابع (۲۴) باید به ازای $z = z_0$ صفر شود. بعلاوه، بنا به قضیهٔ ۸.۲.۸ نقطهٔ $\bar{z}_0$ قرینهٔ z_0 نسبت به محور حقیقی (مسئله ۱۸ را ببینید)، باید به قرینهٔ نقطهٔ $w=0$ نسبت به دایرهٔ $|w|=1$، یعنی، به نقطـــهٔ در ∞ ، تبدیل شود. از این ملاحظات نتیجه می‌شود که (۲۴) به‌صورت زیر است

$$w = \frac{a}{c}\;\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \tag{۲۶}$$

چون به ازای $z=0$، $|w|=1$، از (۲۶) نتیجه می‌شود که $|a/c|=1$ یا $a/c = e^{i\theta}$، و بنابراین

$$w = f(z) = e^{i\theta}\;\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \tag{۲۷}$$

که دراین رابطه هنوز پارامتر θ مشخص نشده است. برای تعیین $e^{i\theta}$ (نیازی بـه محاسبهٔ خود θ نیست)، از (۲۷) مشتق گرفته از شرط دوم (۲۵) استفاده می کنیم.

$$f'(z_0) = \frac{e^{i\theta}}{z_0 - \bar{z}_0} = \frac{e^{i\theta}}{2i \operatorname{Im} z_0} > 0$$

به‌دست می‌آید. از این رابطه، چون $\operatorname{Im} z_0 > 0$، $e^{i\theta} = i$ نتیجه می‌شود، بنابراین

$$w = i\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

تبدیل مورد نظر ماست.

ب. فرض می کنیم کـه K قرص واحد $|z| < 1$ و z_0 نقطه‌ای در K باشـد. تبدیل

---

* توجه کنید که از $f'(z_0) > 0$ نتیجه می شود $\arg f'(z_0) = 0$ (تعبیر هندسی آن چیست؟).

خطی کسری (۲۴) را طوری بیابید که K را به‌روی قرص $|w|<۱$ تبدیل کند و درشرایط (۲۵) هم صدق کند.

حل. اگر $z_۰=۰$، واضح است که $w=z$ تبدیل مطلوب است. بنابراین فرض می‌کنیم $۰<|z_۰|<۱$. در اینجا نیز تابع (۲۴) باید به ازای $z=z_۰$ صفر شود. ولی این دفعه نقطهٔ $۱/\bar{z}_۰$ که قرینهٔ $z_۰$ نسبت به دایرهٔ $|z|=۱$ است (۱.۴.۱ را ببینید) باید به نقطهٔ بینهایت تبدیل شود. بنابراین (۲۴) باید به صورت زیر

$$w=\frac{a}{c}\quad\frac{z-z_۰}{z-\dfrac{۱}{\bar{z}_۰}},$$

یا معادل آن

$$w=k\frac{z-z_۰}{۱-\bar{z}_۰ z}\tag{۲۸}$$

$(k=-a\bar{z}_۰/c)$ باشد. اما چون اگر $z=۱$، آنگاه $|w|=۱$، از (۲۸) نتیجه می‌شود $|k|=۱$ یا $k=e^{i\theta}$، و بنابراین

$$w=f(z)=e^{i\theta}\,\frac{z-z_۰}{۱-\bar{z}_۰ z}.$$

برای تعیین $e^{i\theta}$، دوباره از شرط $f'(z_۰)>۰$ که دراینجا به صورت

$$f'(z_۰)=\frac{e^{i\theta}}{۱-|z_۰|^۲}>۰$$

در می‌آید، استفاده می‌کنیم. از این شرط با توجه به اینکه $۰<|z_۰|<۱$ نتیجه می‌شود که $e^{i\theta}=۱$، به‌طوری که دراین مسئله

$$w=\frac{z-z_۰}{۱-\bar{z}_۰ z}\tag{۲۹}$$

تبدیل خطی کسری مطلوب است.

ج. فرض می‌کنیم که D یك نیمصفحه و $z_۰$ نقطه‌ای در D است. مطلوب است تعیین تبدیل خطی کسری (۲۴) که D را به‌روی قرص واحد $|w|<۱$ بنگارد و درشرایط (۲۵) صدق کند.

حل. واضح است که می‌توان نخست D را با یك تبدیل خطی تام مناسب مانند

$\varphi(z)=\alpha z+\beta$ به روی نیمصفحهٔ فوقانی $\mathrm{Im}(z)>0$ نگاشت. زیرا اگر $|\alpha|=1$ (و بنابراین $\alpha=e^{i\tau}$، τ ثابت)، آنگاه تبدیل خطی تام با یك دوران و یك انتقال (بدون تجانس) متناظر است. سپس (۲۷) را برای نگاشتن نیمصفحهٔ $\mathrm{Im}z>0$ بــه روی قرص $|w|<1$ به کار می‌بریم. آنگاه از ترکیب این دو تبدیل، تبدیل زیر

$$w=f(z)=e^{i(\theta+\tau)}\frac{z-z_0}{\varphi(z)-\overline{\varphi(z_0)}}=e^{i\tau}\frac{z-z_0}{\varphi(z)-\overline{\varphi(z_0)}} \qquad (۳۰)$$

که D را به‌روی قرص $|w|<1$ می‌نگارد به‌دست می‌آید. واضح است که (۳۰) درشرط $f(z_0)=0$ صدق می‌کند، اما برای تحقق شرط $f'(z_0)=0$ باید داشته باشیم

$$f'(z_0)=\frac{e^{i\lambda}}{\varphi(z_0)-\overline{\varphi(z_0)}}=\frac{e^{i\lambda}}{2i\mathrm{Im}\,\varphi(z_0)}>0.$$

بنابراین $e^{i\lambda}=i$، به‌طوری که (۳۰) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$w=i\frac{z-z_0}{\varphi(z)-\overline{\varphi(z_0)}}$$

۵. فرض می‌کنیم که K قرصی دلخواه و z_0 یك نقطه در K باشد. مطلوب است تعیین تبدیل خطی کسری (۲۴) که K را به‌روی قرص واحد $|w|<1$ بنگارد و درشرایط (۲۵) صدق کند.

حل. آشکار است که می‌تــوان نخست K را بــه وسیلهٔ یك تبدیل خطی تام مناسب مانند $\varphi(z)=\alpha z+\beta$ که در آن $\alpha>0$، به روی قرص واحد $|z|<1$، نگاشت. زیــرا این تبدیل، با یك تجانس و یك انتقال (بدون دوران) متناظر است. اینك (۲۹) را بــه‌کار می‌بریم و تبدیل خطی کسری مطلوب به‌صورت

$$w=\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)}=\alpha\ \frac{z-z_0}{1-\overline{\varphi(z_0)}\varphi(z)}$$

به دست می‌آید.

چند توضیح

۸.۱. اگر در (۸) به‌جای z، π بگذاریم.

$$e^{i\pi}=-1$$

به‌دست می‌آید. به صورتی اغراق‌آمیز، می‌توان گفت کــه این فرمول جالب، رابطهٔ بسیار

نزدیك موجود بین آنالیز (e)، جبر (i)، هندسه (π) وحساب (۱ −) را آشکار می‌کند.

۲۰۸. موضوع تبدیلهای‌خطی کسری، گریزی است از موضوع اصلی‌کتاب (توابع تحلیلی وخواص آنها) ومی‌توان‌آن را دیرتر، اما قبل از بخش ۴.۲.۱۳ مطرح کرد. اما از این بخش به بعد آشنایی با تبدیلهای خطی‌کسری ضروری است.

مسائل

۱. اعداد مختلط ± 1، $\pm i$، $1 \pm i$ و $-1 \pm i$ را به صورت نمایی بیان کنید.

۲. اعداد مختلط زیر را حساب‌کنید:

الف) e^{2+i}؛ ب) $\cos(5-i)$؛ ج) $\sin(1-5i)$.

۳. مستقیماً تحقیق کنید که‌قسمتهای‌موهومی وحقیقی‌توابع $\cos z$، $\sin z$، $\cosh z$ و $\sinh z$ درمعادله‌های‌کوشی– ریمان صدق می‌کنند.

۴. ثابت کنید که رابطهٔ

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|$$

برقرار است، وقتی $0 < |z| < 1$ و رابطهٔ

$$|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z| e^{|z|}$$

به ازای هر z برقرار است.

۵. رفتار حدی e^z را وقتی $z \to \infty$، درطول نیمخط $\arg z = \alpha$ شرح دهید.

۶. ثابت کنید که تابع

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{برای } z \neq 0 \\ 0 & \text{برای } z = 0 \end{cases}$$

در هر نقطهٔ صفحه، درمعادله‌های کوشی ـ ریمان صدق می‌کنند، اما درتمام صفحه تحلیلی نیست.

۷. تمام صفرهای توابع $\cosh z$ و $\sinh z$ را بیابید.

۸. ثابت کنید که

الف) $|\cos z| = \sqrt{\cosh^2 y - \sin^2 x}$؛ ب) $|\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}$؛

ج) $|\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \sin^2 y}$؛ د) $|\sinh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \cos^2 y}$؛

ه) $|\sinh y|\leqslant|\cos z|\leqslant\cosh y$؛ و) $|\sinh y|\leqslant|\sin z|\leqslant\cosh y$.

۹. تمام جوابهای معادلهٔ $\cosh z=۱/۲$ را تعیین کنید.

۱۰. مطلوب است تعیین Γ، نگارهٔ خط راست

$$z=(۱+i\alpha)t+i\beta \qquad (-\infty<t<\infty)$$

به وسیلهٔ نگاشت $w=e^z$. این خط محور موهومی را در نقطهٔ به‌فاصلهٔ β از مرکز قطع می‌کند و α، شیب آن، مخالف صفر فرض شده است.

۱۱. چرا خم Γ، مذکور درمسئلهٔ قبلی، تمام نیمخطهایی راکه ازمبدأ خارج می‌شوند با زاویهٔ $\arc\tan\alpha$ قطع می‌کند؟

۱۲. تانژانت، کتانژانت، تانژانت هذلولوی وکتانژانت هذلولوی هر عدد مختلط دلخواه z، با همان فرمولهای مربوط به حالتی‌که z حقیقی است، تعریف می‌شوند:

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}\,,\ \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}\,,\ \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}\,,\ \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}$$

هریك از این توابع درکجا تحلیلی هستند ومشتق آنها چیست؟

۱۳. مطلوب است تعیین تبدیل خطی‌کسری‌ای‌که نیمصفحهٔ فوقانی را به روی قرص واحد می‌نگارد ونقاط ۱ —، ۰، ۱ ازمحورحقیقی را به‌نقاط ۱، i، ۱ — دایره تبدیل می‌کند.

۱۴. نشان دهیدکه اگر $z_۱=\infty$، عبارت

$$\frac{۱}{z-z_۲}:\frac{۱}{z_۳-z_۲}$$

اگر $z_۲=\infty$، عبارت

$$(z-z_۱):(z_۳-z_۱)$$

و اگر $z_۳=\infty$، عبارت

$$\frac{z-z_۱}{z-z_۲}$$

باید بترتیب جانشین طرف راست فرمول (۲۲) شوند. به‌همین ترتیب نشان دهید که به جای طرف چپ رابطهٔ (۲۲) اگر $w_۱=\infty$، عبارت

$$\frac{۱}{w-w_۲}:\frac{۱}{w_۳-w_۲}$$

اگر $w_۲=\infty$، عبارت

$$(w-w_۱):(w_۳-w_۱),$$

و اگر $w_۳=\infty$، عبارت

$$\frac{w-w_۱}{w-w_۲},$$

باید نوشته شوند.

۱۵. مطلوب است تعیین تبدیل خطی کسری، که نقاط ۱ −، ∞، i را به نقاط

الف) $i+۱$، ۱، i؛ ب) ۱، i، ∞؛ ج) ۱، ∞، ۰

تبدیل کند.

۱۶. ثابت کنید که نسبت ناهمساز

$$\frac{z-z_۱}{z-z_۲}:\frac{z_۳-z_۱}{z_۳-z_۲}$$

حقیقی است، اگر نقاط $z_۱$، $z_۲$، z، $z_۳$ روی یك دایره یا روی یك خط مستقیم واقع باشند.

۱۷. قرینه نقطهٔ $i+۲$ را نسبت به

الف) دایرهٔ $|z|=۱$،

ب) دایرهٔ $|z-i|=۳$ بیابید.

۱۸. طبق معمول، دونقطهٔ P و P' را نسبت به خط راست مفروض L متقارن گویند اگر L عمود منصف پاره خط PP'، باشد (یا به‌طور معادل اگر P و P' نسبت به خط L قرینه باشند). ثابت کنید که دونقطهٔ P و P' نسبت به خط راست L متقارن هستند اگر و فقط اگر هر دایره یا خط راست γ که از P و P' می‌گذرد بر L عمود باشد (قضیهٔ ۷.۲.۸ را ببینید).

۱۹. ثابت کنید که تبدیل (۲۷) با این شرط که نقطهٔ مفروض $z=\xi$ از محور حقیقی را به نقطهٔ $w=۱$ از دایرهٔ واحد بنگارد مشخص می‌شود و یکتاست، این نگاشت را در این حالت تعیین کنید.

۲۰. نیمصفحه‌های $\operatorname{Re} z>۰$ و $\operatorname{Im} z<۱$ را به روی قرص واحد $|w|<۱$ بنگارید. همچنین قرصهای $|z+۱|<۱$ و $|z-i|<۲$ را به روی $|w|<۱$ بنگارید.

۲۱. نگاشت (۲۹) را برای $|z_۰|>۱$ توضیح دهید.

۲۲. مطلوب است نگارهٔ هریك از حوزه‌های زیر به وسیلهٔ تبدیل خطی کسری که در زیر

آمده است.

الف) ربع صفحهٔ $x>0$ و $y>0$ به وسیلهٔ $w=\frac{z-i}{z+i}$؛

ب) قطاع $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$ به وسیلهٔ $w=\frac{z}{z-1}$؛

ج) نوار $0<x<1$ به وسیلهٔ $w=\frac{z-1}{z}$.

۲۳. منظور از نقطهٔ ثابت نگاشت $w=f(z)$، جواب معادلهٔ $z=f(z)$ است، یعنی هر نقطه‌ای که به‌وسیلهٔ این نگاشت به خودش تبدیل شود (فصل ۴ مسئلهٔ ۱۷ را ببینید). ثابت کنیدکه تبدیل خطی‌کسری

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

وقتی $c\neq 0$، $(a-d)^2+4bc\neq 0$، دونقطهٔ ثابت مجزا دارد.
اگر $(a-d)^2+4bc=0$ ویا $c=0$، چه می‌توان گفت؟

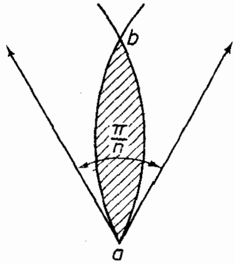
۲۴. فرض می‌کنیم که $w=f(z)$ یك تبدیل خطی‌کسری با دونقطهٔ ثابت متناهی و مجزای z_1وz_2 باشد. ثابت کنیدکه اگر k ثابتی مختلط ومناسب باشدداریم

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}. \qquad (31)$$

۲۵. مطلوب است تعیین تبدیل خطی‌کسری، به‌طوری که
الف) نقاط ۱وi ثابت بمانند ونقطهٔ ۰ به ۱− تبدیل شود؛
ب) نقاط ۱/۲ و ۲ ثابت باشند ونقطهٔ $5/4+(3/4)i$ به ∞ تبدیل شود؛
ج) نقطهٔ $z=i$ تنها نقطهٔ ثابت باشد ونقطهٔ ۱ به ∞ تبدیل شود.

۲۶. هریك از حوزه‌های زیررا به روی نیمصفحهٔ فوقانی بنگارید:
الف) نیم قرص $|z|<1$، $0<\arg z<\pi$؛
ب) قطاع زاویه‌ای $|z|<1$، $0<\arg z<\pi/n\,(n=1,2,\ldots)$؛
ج) حوزهٔ محدود به دوکمان دایره‌که درشکل ۲۳ نشان داده شده است؛
د) نیم نوار $\operatorname{Re} z>0$، $0<\operatorname{Im} z<\pi$.

۲۷. منظور از حاصلضرب (یاترکیب) دو نگاشت یا دو تبدیل $w=f_1(z)$ و $w=f_2(z)$ عمل متوالی این‌دوتبدیل‌است. تبدیل حاصلضرب بستگی دارد به اینکه‌کدام‌یك از دو تبدیل‌اول عمل کند. پس، از این دوتبدیل، دوتبدیل حاصلضرب زیرحاصل می‌شوند.



شکل ۲۳

$$w=f_{1}\circ f_{2}(z)=f_{1}(f_{2}(z))$$

و

$$w=f_{2}\circ f_{1}(z)=f_{2}(f_{1}(z)),$$

ثابت کنید که حاصلضرب تبدیلها شرکت پذیر است، یعنی به ازای هرسه تبدیل f_1 ، f_2 و f_3، داریم *

$$(f_{1}\circ f_{2})\circ f_{3}=f_{1}\circ(f_{2}\circ f_{3})$$

ثابت کنید که درحالت کلی حاصلضرب تبدیلها ناجابه‌جایی است، یعنی درحالت کلی

$$f_{1}\circ f_{2}\neq f_{2}\circ f_{1}.$$

۲۸. مجموعهٔ G، متشکل ازاعضای $a,b,c,\dots$ ومجهز به عمل ضرب (که مثلاً با $\circ$ نشان داده می‌شود) را گروه گویند اگر

الف) G تحت عمل ضرب بسته باشد، یعنی به ازای هر $a,b\in G$ ، $a\circ b\in G$؛

ب) عمل ضرب شرکت پذیر باشد، یعنی به ازای هر $a,b,c\in G$

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$

ج) G یك عضو e (عضو یکه) داشته باشد. به طوری که به ازای هر $a\in G$

$$a\circ e=e\circ a=a\ ;$$

د) به ازای هر $a\in G$، یك عضو $a^{-1}\in G$ (معکوس a) وجود داشته باشد به‌طوری که

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e.$$

ثابت کنید که مجموعهٔ تمام تبدیلهای خطی کسری

---

* برای سادگی به جای $f_j(z)$ می‌نویسیم f_j. در نوشتن عبارت $f_j\circ f_k$ این فرض مستتر است که برد f_k درحوزهٔ تعریف f_j واقع است.

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \qquad (۳۲)$$

مجهز به‌عمل ∘ که درمسئلهٔ قبل تعریف شده، یك گروه است. عضویــکه گروه ومعکوس یك عضو مفروض را تعیین کنید.

۲۹. ثابت کنید که مجموعهٔ شش تبدیل خطی کسری زیر

$$f_1(z)=z, \quad f_2(z)=\frac{1}{z}, \quad f_3(z)=1-z,$$

(۳۳)

$$f_4(z)=\frac{1}{1-z}, \quad f_5(z)=\frac{z-1}{z}, \quad f_6(z)=\frac{z}{z-1}$$

یك گروه تشکیل می‌دهد.

توضیح. به‌طور خلاصه می گویند کــه تبدیلهای (۳۳) یك زیرگروه از گروه تمام تبدیلهای خطی کسری (۳۲) است.

۳۰. ثابت کنید که مجموعهٔ تمام تبدیلهای خطی کسری

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc=1) \qquad (۳۲')$$

یك زیر گروه از گروه تمام تبدیلات خطی کسری (۳۲) است.

۹

توابع چندمقداری

۱.۹. حوزه‌های تك‌ارزی

۱.۱.۹. تابع $f(z)$ را درحوزهٔ G تك‌ارز می‌گویند اگر در G يك‌به‌يك و تحليلی باشد؛ به‌همين‌مناسبت G را يك‌حوزهٔ تك‌ارزی $f(z)$ می‌نامند. كمی بعد نشان خواهيم‌داد (قضيهٔ ۴.۲.۱۲ را ببينيد) كه اگر $f(z)$ در حوزهٔ G تك‌ارز باشد، آنگاه $f'(z)$ در G مخالف صفر است.

۲.۱.۹ قضيه. فرض می‌كنيم

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{۱}$$

در حوزهٔ G تك‌ارز باشد، همچنين فرض‌می‌كنيم E نگارهٔ G تحت‌نگاشت(۱) باشد. دراين صورت E نيز (درصفحهٔ w) يك‌حوزه است.

برهان. بايد ثابت‌كنيم‌كه E هم‌باز وهم‌همبند است (بخش ۳. ۲. ۲ ب را ببينيد). همبندی E تقريباً بديهی است. فرض می‌كنيم w_1 و w_2 دونقطهٔ E و z_1 و z_2 نقاط متناظر آنها در G باشند، به‌قسمی‌كه $w_1=f(z_1)$ ، $w_2=f(z_2)$. فرض می‌كنيم z_1 و z_2 را به‌وسيلهٔ يك‌خم C كه بتمامی‌در G جای‌دارد به‌هم وصل كرده‌ايم. لذاوقتی‌نقطهٔ z روی‌خم C از z_1 به z_2 می‌رود، نقطهٔ$w=f(z)$ يك‌خم Γ رسم‌می‌كند كه w_1 را به w_2 وصل می‌نمايد،

بدون اینکه بنا به‌تعریف E از مجموعهٔ E خارج‌شود. بنا براین E همبند است.

برای اثبات اینکه E باز است، بـاید نشان‌دهیم‌کـه هر نقطهٔ E یك‌نقطهٔ داخلی E است . بدین منظور $w_0=u_0+iv_0$ را نقطه‌ای از E می گیریم ، و فـرض می کنیم $z_0=x_0+iy_0$ نقطهٔ متنـاظر آن در G است، به‌قسمی که $w_0=f(z_0)$. در این‌صورت می‌توانیم قضیهٔ تابع ضمنی* را در مورد دستگاه معادلات زیر به‌کاربریم

$$u-u(x, y)=0, \qquad v-v(x, y)=0, \tag{۲}$$

زیرا طرفهای چپ این معادلات برای $x=x_0$، $y=y_0$، $u=u_0$، $v=v_0$ صفر می‌شوند، نسبت به‌چهارمتغیر پیوسته‌اند، ومشتقات جزئی پیوسته دارند (به‌بخش ۲.۷.۵ رجوع کنید) و دترمینان ژاکوبی آنها، یعنی

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial v}{\partial x} & -\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2$$

مخالف صفر است. (توجه کنید کـه در مرحلهٔ آخر از معادلات‌کوشی ــ ریمان استفاده شده است!) . بنـا براین برای (u, v) که به‌قدرکافی به (u_0, v_0) نزدیك باشد، یك‌زوج تابع یکتای $x=x(u, v)$، $y=y(u, v)$ وجود داردکه پیوسته‌اند ودر دستگاه(۲) مقید بـه شـرایط $x_0=x(u_0, v_0)$ ، $y_0=y(u_0, v_0)$ صدق می‌کنند . بنـــا براین نقطهٔ $(x(u, v), y(u, v))$ درهرهمسایگی مفروض(x_0, y_0) وبویژه در G جای‌خواهدگرفت، فقط با این‌شرط که نقطهٔ (u, v) در یك‌همسایگی به‌قدرکافی کوچك (u_0, v_0) واقع باشد. امـا این بدان معناست که یك‌همسایگی نقطهٔ $w_0=u_0+iv_0$ تماماً ازنقاطی تشکیل شده است که نگاره‌هـای نقـاط G تحت‌نگاشت(۱) هستند، یعنی w_0 یك‌نقطهٔ داخلی مجموعهٔ E است. □

۳۰۱۰۹. قضیه. تابع $w=f(z)$، وحوزه‌های G وEی قضیهٔ قبل‌را در نظرمی‌گیریم، وفرض می‌کنیم $z=\varphi(w)$ معکوس تابع $w=f(z)$ است. در این‌صورت $\varphi(w)$ در E تك‌ارز است، و

$$\varphi'(w)=\frac{1}{f'(z)}$$

مشتق‌آن است.

---

* برای مثال کتاب زیر (ترجمهٔ R. A. Silvermam) را ببینید

V. I. Smirnov, *Linear Algebra and Group Theory*, Dover publications, Inc., New York (1970), sec, 19.

برهان. تابع معکوس $z=\varphi(w)$ همان‌طور که در بخش ۴.۱.۳ تعریف‌شد بوضوح در E یك‌مقداری و یك‌به‌یك است، زیرا $w=f(z)$ در G یك‌به‌یك است. برای اثبات تحلیلی‌بودن $\varphi(w)$، فرض می‌کنیم $w_\circ$ و w دونقطه از E هستند، و $z_\circ$ و z را نقاط متناظر آنها در G می‌گیریم. تابع $\varphi(w)$ در E پیوسته است، زیرا پیوستگی توابع $\operatorname{Re}\varphi(w)=x(u,v)$، $\operatorname{Im}\varphi(w)=y(u,v)$ در اثبات قضیهٔ ۲.۱.۹ نشان داده شده است. بنابراین وقتی $w\to w_\circ$، $z\to z_\circ$ ولذا

$$\varphi'(w_\circ)=\lim_{w\to w_\circ}\frac{z-z_\circ}{w-w_\circ}=\lim_{z\to z_\circ}\frac{1}{\dfrac{w-w_\circ}{z-z_\circ}}=\frac{1}{f'(z_\circ)},$$

یعنی مشتق $\varphi(w)$ درهرنقطهٔ $w_\circ\in E$ وجود دارد وبرابر است با*

$$\varphi'(w_\circ)=\frac{1}{f'(z_\circ)}.\ \square$$

۴.۱.۹. چندمثال

الف. اگر

$$w=z^n,$$

آنگاه برای هر نقطهٔ مفروض

$$w=re^{i\theta}\quad(r>0)$$

در صفحهٔ w، دقیقاً n نقطهٔ متمایز در صفحهٔ z وجود دارند که نگارهٔ آنها w است، این نقاط عبارت‌اند از

$$z=\sqrt[n]{r}\;e^{i(\theta+2k\pi)/n}\qquad(k=0,1,\dots,n-1)$$

(بخش ۶.۳.۱ را به‌خاطر بیاورید). اما این نقاط، رئوس یك n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع $\sqrt[n]{r}$ که مرکز آن مبدأ مختصات است، هستند. بنابراین z^n در هر «گوه‌ای» به‌شکل

$$c<\arg z<c+\frac{2\pi}{n}\qquad(\text{حقیقی } c)\tag{۳}$$

که زاویهٔ رأس آن $2\pi/n$ است، تك‌مقداری‌است. به‌عبارت دیگر هرچنین گوه‌ای یك‌حوزهٔ

* در بخش ۱.۱.۹ نشان دادیم که برای هر $z_\circ\in G$، $f'(z_\circ)\neq 0$.

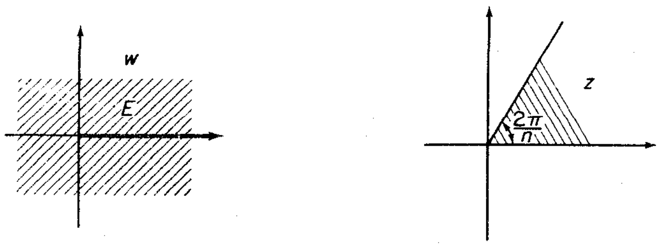
تک‌ارزی برای z^n است ، و این حوزه «ماکسیمال» است به‌این مفهوم که نمی‌توان آن‌را بدون از بین‌بردن تک‌ارزی z^n، به‌حوزهٔ بزرگتری گسترش داد. با انتخاب $c=0$ در (۳) گوهٔ زیر که در شکل ۲۴ الف نشان‌داده‌ایم به‌دست می‌آید

$$0<\arg z<\frac{2\pi}{n} \cdot \qquad (3')$$

تابع $w=z^n$ این گوه را به‌روی حوزهٔ E که در شکل ۲۴ ب نشان‌داده‌ایم ، یعنی صفحهٔ w «که در طول محور حقیقی مثبت بریده شده است» (صفحهٔ w، منهای تمام نقاط متناظر با اعداد حقیقی نامنفی)* می‌نگارد. زیرا از ('۳) نتیجه می‌شود که

$$0<\arg w=n\arg z<2\pi$$

(به‌بخش ۵.۳.۱ رجوع کنید).



(ب) (الف)

شکل ۲۴

معکوس تابع $w=z^n$

$$z=\sqrt[n]{w}, \qquad (4)$$

یعنی ریشه nام w است (به‌بخش ۶.۳.۱ رجوع کنید). از قضیهٔ ۳.۱.۹ نتیجه می‌شود که (۴) در E تک‌مقداری است و مشتق آن برابر است با

---

* برحسب قرارداد «محور حقیقی مثبت» شامل مبدأ o نیز هست، و «محور حقیقی منفی» هم شامل o است . اصطلاحات دقیقتر «محور حقیقی نامنفی» و «محور حقیقی نامثبت» کمی ناهنجارند.

$$\frac{d\sqrt[n]{w}}{dw}=\frac{1}{\frac{dz^n}{dz}}=\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{\sqrt[n]{w}}{nw}.$$

ب. تابع

$$w=e^z$$

را در نظر می‌گیریم . اگر $z_1=x_1+iy_1$ ، $z_2=x_2+iy_2$ ، آنگاه $|e^{z_1}|=e^{x_1}$ ، $|e^{z_2}|=e^{x_2}$، و لذا جز در حالت $x_1=x_2$، e^{z_1} نمی‌تواند با e^{z_2} مساوی باشد . اگر $x_1=x_2=x$، $y_1\neq y_2$، آنگاه

$$e^{z_1}-e^{z_2}=e^x(e^{iy_1}-e^{iy_2})=e^x[(\cos y_1+i\sin y_1)-(\cos y_2+i\sin y_2)]$$

$$=e^x\left[-2\sin\frac{y_1+y_2}{2}\sin\frac{y_1-y_2}{2}+2i\cos\frac{y_1+y_2}{2}\sin\frac{y_1-y_2}{2}\right]$$

$$=2i\sin\frac{y_1-y_2}{2}e^x e^{i(y_1+y_2)/2}.$$

اما عبارت طرف راست برابر صفر است، اگر وفقط اگر

$$\sin\frac{y_1-y_2}{2}=0,$$

یعنی اگر و فقط اگر

$$y_1-y_2=2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

بنابراین e^z در هرنواری به‌شکل

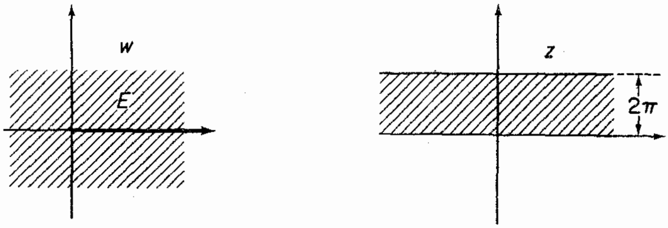
$$c<\operatorname{Im} z<c+2\pi \qquad (\text{حقیقی } c) \qquad (5)$$

با اضلاع موازی محور حقیقی، تك‌ارز است. به‌عبارت دیگر ، هرچنین نواری يك‌حوزهٔ (ماکسیمال) تك‌ارزی برای e^z است . با انتخاب $c=0$ در (۵)، نوار زیر که در شکل ۲۵ الف نشان داده‌ایم به‌دست می‌آید

$$0<\operatorname{Im} z<2\pi. \qquad (5')$$

تابع $w=e^z$ این‌نوار را به‌توی همان میدان Eی مسئلهٔ قبل، یعنی صفحهٔ w که در طول محور حقیقی مثبت بریده شده است، می‌نگارد (شکل ۲۵ ب را ببینید). در واقع، چون

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$$



(ب) (الف)

شکل ۲۵

داریم

$$|w|=e^{x}, \quad \arg w=y=\operatorname{Im} z, \tag{۶}$$

ولذا بازهم از ('۵)، $\circ<\arg w<\text{۲}\pi$ نتیجه می‌شود.

معکوس تابع $w=e^{z}$ با نماد

$$z=\ln w \tag{۷}$$

نشان داده می‌شود و لگاریتم w نام دارد (دقیقاً مانند حالت حقیقی).* از قضیهٔ ۳.۱.۹ نتیجه می‌شود که (۷) در E تك‌ارز است و مشتق آن مساوی است با

$$\frac{d(\ln w)}{dw}=\frac{\text{۱}}{\dfrac{de^{z}}{dz}}=\frac{\text{۱}}{e^{z}}=\frac{\text{۱}}{w}.$$

طبق (۶)

$$x=\ln|w|, \quad y=\arg w$$

و لذا

$$z=\ln w=\ln|w|+i\arg w. \tag{۸}$$

بـا استفاده از فرمول (۸) می‌توان لگاریتم اعداد منفی و اعداد مختلط را حساب کرد. برای مثال،

$$\ln(-\text{۱})=\ln \text{۱}+i\arg(-\text{۱})=(\text{۲}k+\text{۱})\pi i \quad (k=\circ, \pm\text{۱}, \pm\text{۲}, \ldots),$$

* حرف «n» در نماد ln برای یادآوری آن است که با لگاریتم طبیعی (natural)، یعنی لگاریتم به مبنای e سروکارداریم.

درحالی که

$$\ln i = \ln 1 + i \arg i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

۲.۹. شاخه‌ها و نقطه‌های شاخه‌ای

۱.۲.۹. فرض کنیم در رابطهٔ(۳) برای ثابت c، مقادیر

$$0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n} \tag{9}$$

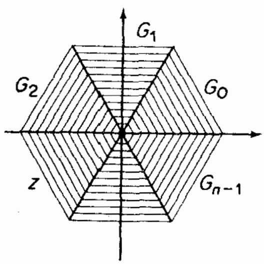
را انتخاب کنیم. بااین انتخاب، n حوزهٔ ناهمپوش[1] تك‌ارزی برای تابع $w = z^n$ به‌دست می‌آید، که هریك گوه‌ای است که زاویه رأسش $2\pi/n$ است و ما آنها را بترتیب با G_0، G_1، G_2،...، G_{n-1} نشان می‌دهیم، G_k حوزهٔ زیر است

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}. \tag{10}$$

این حوزه‌ها، همراه با مرزهایشان، همان‌طور که در شکل ۲۶ نشان داده شده است، تمام صفحهٔ z را می‌پوشانند. بعلاوه نگارهٔ هر یك از n حوزهٔ G_K تحت $w = z^n$ همان حوزهٔ E است که در شکل ۲۴ ب، نشان داده‌ایم، یعنی صفحهٔ w که در طول محور حقیقی مثبت بریده شده است، ویا به‌عبارت دیگر حوزهٔ

$$0 < \arg w < 2\pi. \tag{11}$$

برای روشن‌شدن این مطلب، فقط کافی است توجه کنیم که از (۱۰)، رابطهٔ



شکل ۲۶

---

۱. یعنی هیچ‌حوزه‌ای‌قسمتی‌از حوزهٔ دیگر را نمی‌پوشانند یا به عبارت دیگر هیچ نقطهٔ حوزه در درداخل حوزهٔ دیگر واقع نمی‌شود.ـم.

$$۲k\pi < \arg w = n \arg z < ۲(k+۱)\pi,$$

نتیجه می‌شود، که برای هرمقدار $k = ۰, ۱, \ldots, n-۱$ با (۱۱) هم‌ارز است.

تابع $w = z^n$ با حوزهٔ تعریف G_k و با برد E ، یك‌تابع معکوس یك مقداری (در واقع تك‌ارزی) باحوزهٔ تعریف E و برد G_k دارد. این تابع معکوس را با $z = (\sqrt[n]{w})_k$ نمایش می‌دهیم ، در این صورت تابع موردنظر در مثال ۴.۱.۹ الف، به‌جای $z = \sqrt[n]{w}$ با $z = (\sqrt[n]{w})_۰$ نشان داده می‌شود. لذا n تابع یك‌مقداری

$$(\sqrt[n]{w})_۰, \quad (\sqrt[n]{w})_۱, \ldots, (\sqrt[n]{w})_{n-۱} \tag{۱۲}$$

را می‌توان n «جزء» یك‌تابع «اصلی» چندمقداری $z = \sqrt[n]{w}$ درنظرگرفت . این تابع را ریشهٔ nاُم w (بــه بخش ۶.۳.۱ رجوع کنید) ، یعنی معکوس تابع $w = z^n$ می‌نامند، که تابع $w = z^n$ این بار در تمـام صفحهٔ z تعریف شده است و بردش تمام صفحهٔ w است. توابع جدا ازهم (۱۲)، شاخه‌های (یك‌مقداری) تابع چند مقداری $z = \sqrt[n]{w}$ نـامیده می‌شوند.

۴.۲.۹. همچنین فرض می‌کنیم در رابطهٔ (۵) برای ثابت c بنوبت مقادیر

$$۰, ۲\pi, -۲\pi, ۴\pi, -۴\pi, \ldots.$$

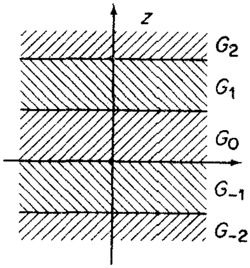
را انتخاب کــرده‌ایم. این انتخاب تعدادی نــامتناهی از حــوزه‌های ناهمپوش تك‌ارزی برای تابع $w = e^z$ به دست می‌دهد، کــه هریك نواری به‌عرض ۲π است و ما آنها را بترتیب با $G_۰$، $G_۱$، $G_{-۱}$، $G_۲$، $G_{-۲}$،... نمایش مــی‌دهیم که در این نمــایش G_k حوزهٔ زیر است

$$۲k\pi < \operatorname{Im} z < ۲(k+۱) < \pi. \tag{۱۳}$$

این حوزه‌ها و مرزهایشان جمعاً همان‌طورکه درشکل ۲۷ نشان‌داده شده است تمام‌صفحهٔ z را می‌پوشانند . بعلاوه نگارهٔ هریك از این بینهایت حوزهٔ G_k تحت نگاشت $w = e^z$ همان حوزهٔ E است‌که در شکل ۲۵ب نشان داده‌ایم، و دوباره همان صفحهٔ w است که‌در طول محور حقیقی مثبت بریده شده است. برای روشن‌شدن این‌مطلب فقط‌کافی است توجه کنیم‌که از (۱۳) رابطهٔ

$$۲k\pi < \arg w < \operatorname{Im} z < ۲(k+۱)\pi,$$

نتیجه می‌شودکه برای هرمقدار $k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ با (۱۱) هم‌ارز است .



شکل ۲۷

تابع $w=e^z$ با حوزهٔ تعریف G_k و برد E یک‌تابع معکوس یک مقداری با حوزهٔ تعریف E وبرد G_k دارد. این تابع معکوس را با $z=(\ln w)_k$ نمایش می‌دهیم ، در این صورت تابع موردنظر در مثال ۹. ۴.۱ ب به‌جای $z=\ln w$ با $z=(\ln w)_\circ$ نشان داده می‌شود. لذا بینهایت تابع یک‌مقداری

$$(\ln w)_\circ, (\ln w)_۱, (\ln w)_{-۱}, (\ln w)_۲, (\ln w)_{-۲},\cdots \qquad (۱۴)$$

را که می‌توان «اجزای» یک‌تـابع چندمقداری $z=\ln w$ درنظر گرفت، لگاریتم w، یعنی معکوس تابع $w=e^z$ می‌نامند، این‌تابع معکوس این‌بار درتمام صفحهٔ z تعریف شده‌است و بردش تمام صفحهٔ w است. توابع یک‌مقداری جدا ازهم (۱۴) را نیز شاخه‌های تابع چندمقداری $z=\ln w$* می گویند.

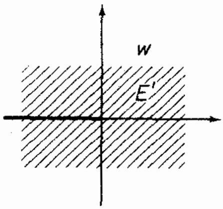
۹.۲.۳. باید به‌خاطر داشت که مفهوم شاخه‌ای از تـابع چندمقداری در ارتباط نزدیک با انتخاب حوزهٔ تک‌ارزی متناظر با آن است، وبنابراین به‌صورتی اجتناب ناپذیر شامل یک‌عنصر دلخواه‌است. به‌عنوان مثال، فرض می کنیم برای تابع $w=z^n$ همان گونه که در شکل ۲۸ نشان‌داده‌ایم ، حوزه‌های تک ارزی $D_\circ$، $D_۱$، $D_۲$،...، $D_{n-۱}$ را انتخاب کرده‌ایم که از تخصیص مقادیر

$$-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \frac{۳\pi}{n},\ldots,\frac{(۲n-۳)\pi}{n}, \qquad (۹')$$

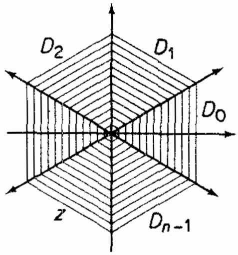
برای ثابت c در رابطهٔ(۳) به‌دست‌آمده‌اند، این‌مقادیر به‌اندازهٔ π/n کوچکتر ازمقادیر (۹) هستند. در این‌صورت D_k حوزهٔ زیر است

---

* از این پس، نمادهای $\sqrt[n]{w}$ و $\ln w$ به‌جای شاخه‌های یک‌مقداری توابع مورد نظر در بخش ۴.۱.۹، همواره توابع چندمقداری را نمایش می‌دهند.



(ب)



(الف)

شکل ۲۸

$$\frac{(۲k-۱)\pi}{n}<\arg z<\frac{(۲k+۱)\pi}{n}, \qquad (۱۰')$$

که از «نیمهٔ بالایی» $G_{k-۱}$ (نیمهٔ بالایی به‌نظر ناظری که حول مبدأ و در جهت خلاف عقربهٔ ساعت حرکت می‌کند) و «نیمهٔ پایینی» G_k ساخته شده است، و در آن بر اساس تعریف $G_{-۱}=G_{n-۱}$. نگارهٔ هریك از حوزه‌های D_k تحت‌نگاشت $w=z^n$ همان حوزهٔ E' است، یعنی صفحهٔ w که در طول محور حقیقی منفی بریده شده است (شکل ۲۸ ب را ببینید)، و یا به‌عبارت دیگر، حوزهٔ

$$-\pi<\arg w<\pi. \qquad (۱۱')$$

برای روشن‌شدن این‌مطلب، فقط کافی است توجه کنیم از $(۱۰')$ رابطهٔ

$$(۲k-۱)\pi<\arg w=n\arg z<(۲k+۱)\pi,$$

نتیجه می‌شود که برای هرمقدار $k=۰,۱,\dots,n-۱$ با $(۱۱')$ هم‌ارز است.

تابع $w=z^n$ با حوزهٔ تعریف D_k و برد E'، یك‌تابع معکوس یك‌مقداری با حوزهٔ تعریف E' وبرد D_k دارد. این تابع را با $z=\{\sqrt[n]{w}\}$ نشان می‌دهیم، که در آن به‌جای پرانتز که در بخش(۱.۲.۹) به‌کاربردیم آکولاد قرار داده‌ایم. در این صورت توابع یك‌مقداری

$$\{\sqrt[n]{w}\}_۰,\ \{\sqrt[n]{w}\}_۱,\dots,\{\sqrt[n]{w}\}_{n-۱} \qquad (۱۲')$$

را می‌توان شاخه‌های‌جدید تابع‌چندمقداری $z=\sqrt[n]{w}$ ، که از شاخه‌های قدیمی (۱۲) متفاوت‌اند، در نظر گرفت.با وجود این، شاخهٔ $\{\sqrt[n]{w}\}_k$ با شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k-۱}$ درنیمصفحهٔ

پایینی $0 < \arg w < \pi$ ـ، وباشاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_k$ درنیمصفحهٔ بالایی $-\pi < \arg w < 0$ منطبق می‌شود، بـا توجه به اینکه براساس تعریف $(\sqrt[n]{w})_{-1} = (\sqrt[n]{w})_{n-1}$. ایـن مطلب خیلی شگفت انگیز نیست، زیرا شاخه‌های مختلف (۱۲) و ('۱۲) همگی از یك تـابع اصلی چندمقداری $z = \sqrt[n]{w}$ «تولید» شده‌اند.

۹.۲.۴. اینك فرض مـی‌کنیم درهر نقطهٔ مفروض $w_0 = |w_0| e^{i\theta_0} \in E$، مقداری از تابع چندمقداری $\sqrt[n]{w}$ راکه متناظر بـا شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_k$است انتخاب کرده‌ایم و بانقطهٔ

$$z_0 = \sqrt[n]{|w_0|}\left(\cos\frac{\theta_0}{n} + i \sin\frac{\theta_0}{n}\right)$$

که متعلق به حوزهٔ G_k از بخش ۹. ۲. ۱ است نمـایش داده‌ایم . فرض کنید نقطهٔ متغیر $w = |w| e^{i\theta}$ یك‌خم بستهٔ ژردان Γ را درصفحهٔ w با نقاط آغازی وپایانی w_0 رسم کند. لذا نقطهٔ متناظر آن، یعنی

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \sin\frac{\theta}{n}\right) \tag{۱۵}$$

یك‌خم C درصفحهٔ z رسم می‌نماید. حال فقط دوامکان وجود دارد:

الف. اگر نقطهٔ $w = 0$ (مبدأ صفحهٔ w) خارج خم Γ باشد، آنگاه، بعد از اینکـه w دوری در جهتی درطول Γ می‌پیماید ، به مقدار اولیه‌اش، θ_0، برمی‌گردد . بنابراین نقطهٔ z یك‌خم ژردان بستهٔ C بانقطهٔ آغازی و پایانی z_0 رسم می‌کند. در جریان رسم Γ ممکن است w نیمخط $\arg w = 0$ راکه در حوزهٔ E نیست قطع کند . در این صورت نقطهٔ z «روی شاخه‌های دیگر» $\sqrt[n]{w}$ حرکت‌می‌کند، قبل‌ازآنکه سرانجام به z_0 برگردد.*

ب. اگر نقطهٔ $w = 0$ داخل Γ جای داشته‌باشد، آنگاه یك‌دور درطول Γ درخلاف

---

* نیمخط $\arg w = 0$ یك بریدگی شاخه‌ای تابع $\sqrt[n]{w}$ نامیده می‌شود ، زیرا این نیمخط ، شاخه‌های $\sqrt[n]{w}$ را به‌این طریق ازهم جدا می‌کند. توجه‌کنیدکـه θ آن شاخـه‌ای از تابـع چندمقداری $\arg w$ (امکاناً همراه‌با بعضی«شاخه‌های مجاور») رانمایش‌می‌دهدکه وقتی $w = w_0$، مساوی θ_0 است . متداول شده است (ولی چندان دقیق نیست) که می‌گویند «$\arg w$ تغییر نمی‌کند» و یا «$\arg w$ به‌اندازه 2π افزایش می‌یابد» و نظایر آن ، در این عبارت $\arg w$ به‌معنای θ است.

جهت‌حرکت عقربهٔ‌ساعت موجب می‌شود که θ از $\theta_{\circ}$ به $\theta_{\circ}+\text{۲}\pi$ افزایش یابد («$\arg w$ به اندازهٔ $\text{۲}\pi$ زیاد می‌شود»). متناظراً، نقطهٔ (۱۵) کمانی را رسم می‌کند که از نقطهٔ $z_{\circ}$ به‌نقطهٔ

$$z_{\text{۱}}=\sqrt[n]{|w_{\circ}|}\left(\cos\frac{\theta_{\circ}+\text{۲}\pi}{n}+i\sin\frac{\theta_{\circ}+\text{۲}\pi}{n}\right)$$

حاصل ازدوران $z_{\circ}$ به‌اندازهٔ زاویهٔ $\text{۲}\pi/n$ درخلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت،می‌رود. اما این همان مقدار $\sqrt[n]{w_{\circ}}$ متناظر با شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k+\text{۱}}$ است. چون نقطهٔ $w_{\circ}$ دلخواه است، ملاحظه می‌کنیم که هردور درطول Γ درخلاف جهت‌حرکت عقربهٔ ساعت، شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k}$ را به‌شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k+\text{۱}}$ می‌برد، بدین‌معنا که هرمقدار $\sqrt[n]{w}$ روی‌شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k}$ به‌طور پیوسته به‌مقدار متناظر $\sqrt[n]{w}$ روی شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k+\text{۱}}$ تغییرمی‌یابد. به‌طور مشابه یك دور درطول Γ درجهت حرکت عقربهٔ ساعت، شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k}$ را به‌شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k-\text{۱}}$ می‌برد. بعلاوه یك تعداد مناسب از دورهای درطول Γ دریك جهت یا درخلاف آن، هرشاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k}$ را به هر شاخهٔ دیگر $(\sqrt[n]{w})_{i}$ می‌برد، فقط به‌شرط آنکه نقطهٔ $w=\circ$ داخل Γ جای داشته باشد. بویژه nدور تمام درطول Γ دریك جهت، نقطه $z_{\circ}$ را به‌خودش تبدیل می‌کند ولذا هرشاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_{k}$ را به‌خودش برمی‌گرداند.

۵۰۲۰۹. اگرنقطهٔ η درداخل‌یك خم‌بستهٔ ژردان C باشد، C را یك «مدار حول η» می‌نامیم. اگر هرمداری‌که حول η پیموده می‌شود موجب گردد که، به‌طریقی که هم‌اینك توضیح دادیم، هرشاخه از تابع چندمقداری مفروض به‌شاخهٔ دیگری برده شود، می‌گویند η یك نقطهٔ شاخه‌ای تابع است. وقتی هرمدار حول η دریك جهت n دور (به‌طور کلی تعداد متناهی‌دور) پیموده‌می‌شود،اگرهرشاخه‌ازتابع به‌خودش تبدیل‌شود، نقطهٔ η رایك‌نقطهٔ شاخه‌ای ازمرتبه $n-\text{۱}$ام (به‌طور کلی ازمرتبهٔ متناهی) می گویند *. بنابراین هم‌اینك‌ثابت کرده‌ایم که $w=\circ$ یك نقطهٔ شاخه‌ای ازمرتبهٔ $(n-\text{۱})$ام تابع $\sqrt[n]{w}$ است. بعلاوه‌چون هرمدارکامل درهرجهت حول $w=\circ$، یك مدارکامل‌حول نقطهٔ $w=\infty$ نیزهست(به‌آنچه دربارهٔ‌کرهٔ ریمان گفته شد بیاندیشید)، نقطهٔ بینهایت نیزیك نقطهٔ شاخه‌ای $\sqrt[n]{w}$، از مرتبهٔ

---

* این‌چنین نقطه شاخه‌ای را جبری هم می‌گویند، مشروط برآنکه تابع موردنظر در η حد داشته باشد (متناهی یا نامتناهی).

$n-1$ است. بوضوح $\sqrt[n]{w}$ نقاط شاخه‌ای دیگری ندارد، زیرا همان‌طور که اشاره شد، اگر نقطهٔ $w=0$ داخل Γ جای نداشته باشد، مقدار $(\sqrt[n]{w})_k$ پس از یك دور درطول Γ تغییر نمی‌کند.

۶.۲.۹. توجه خود را به‌لگاریتم معطوف می‌کنیم، فرض می‌کنیم که در یك نقطهٔ مفروض $w_0=|w_0|e^{i\theta_0}\in E$ یك مقدار از $\ln w$ متناظر با شاخهٔ $(\ln w)_k$ را انتخاب کرده، آن را با نقطهٔ

$$z_0=\ln|w_0|+i\theta_0$$

که متعلق به‌حوزهٔ G_k ازبخش ۲.۲.۹ است نمایش داده‌ایم. همچنین فرض می‌کنیم $w=|w|e^{i\theta}$ یك خم ژردان بستهٔ Γ را درصفحهٔ w با نقطهٔ آغازی و پایانی w_0 رسم می‌کند. دراین صورت نقطهٔ متناظر

$$z=\ln|w|+i\theta$$

یك خم C در صفحهٔ z رسم‌می‌نماید. تحلیل حالتی که نقطهٔ $w=0$ خارج Γ است دقیقاً همان است که برای تابع $\sqrt[n]{w}$ گفته شد. اگر نقطهٔ $w=0$ داخل Γ باشد، آنگاه یك دور حول Γ درخلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت، شاخهٔ $(\ln w)_k$ را به‌شاخهٔ $(\ln w)_{k+1}$ می‌برد، درحالی‌که یك دور حول Γ در جهت حرکت عقربهٔ ساعت، شاخه $(\ln w)_k$ را به‌شاخهٔ $(\ln w)_{k-1}$ می‌برد، به‌قسمی که نقطهٔ $w=0$، یك‌نقطهٔ شاخه‌ای $\ln w$ است. بعلاوه به‌همان دلیلی که برای حالت تابع $\sqrt[n]{w}$ آوردیم نقطهٔ $w=\infty$ تنها نقطهٔ شاخه‌ای دیگر $\ln w$ است. اما برخلاف‌حالت $\sqrt[n]{w}$، هر تعداد دوری که درجهت مفروضی حول Γ بزنیم، شاخهٔ $(\ln w)_k$ هرگز به‌خودش تبدیل نمی‌شود*، ودرعوض «شاخه‌های جدیدی از $\ln w$ تولید می‌شوند» که می‌توان آنها را به‌صورت سری نامتناهی تبدیلهای زیرنمایش داد

$$(\ln w)_k\to(\ln w)_{k+1}\to(\ln w)_{k+2}\to\cdots,$$

یا

$$(\ln w)_k\to(\ln w)_{k-1}\to(\ln w)_{k-2}\to\cdots.$$

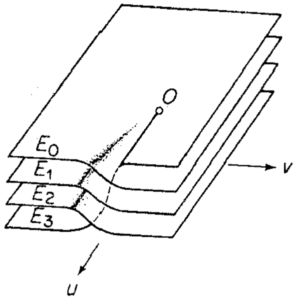
به‌این‌دلیل، نقاط‌شاخه‌ای $w=0$ و $w=\infty$ را ازمرتبهٔ بینهایت (یا لگاریتمی)می‌گویند.

۳.۹. سطوح‌ریمان

۱.۳.۹. الف. همان‌طور که حالا نشان می‌دهیم، یك تابع چند مقداری را می‌توان

* بویژه w هراندازه حول مبدأ دریك‌جهت بچرخد، نقطهٔ z هرگزیك‌خم بسته رسم‌نمی‌کند.

واقعاً مانند یك تابع یك‌مقداری تلقی کرد، به‌شرط آنکه حوزهٔ تعریفش را به‌طور مناسبی تعمیم دهیم. بدواً تابع چند مقداری $z=\sqrt[n]{w}$ را درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم از حوزهٔ E که در شکل ۲۴ب نشان داده شده است (صفحهٔ w که درطول محور حقیقی مثبت بریده شده است) n «نسخهٔ» E_0، E_1، ...، E_{n-1} اختیار می‌کنیم وبرای تمام n نسخه، نقطهٔ $w=0$ را یکی می‌گیریم. محور حقیقی مثبت را به‌عنوان مرز E_k درنظر گرفته، لبه‌های بالایی و پایینی آن را با δ_k^+ و δ_k^- نشان می‌دهیم. حال δ_0^- را به δ_1^+، δ_1^- را به δ_2^+، ...، δ_{n-2}^- را به δ_{n-1}^+ وسرانجام δ_{n-1}^- را به δ_0^+ می‌چسبانیم (هر E_k را یك برگ



شکل ۲۹

بریده شدهٔ کاغذ تصور کنید).* نتیجهٔ این‌عمل آن است که E_0 به E_1، E_1 به E_2، ...، E_{n-2} به E_{n-1}، وبالاخره E_{n-1} به E_0 متصل می‌شوند. به‌این‌ترتیب، یك «ساختار n برگی» (در شکل ۲۹ تصوری ازاین ساختار برای $n=4$ نشان شده است) که سطح ریمان تابع $z=\sqrt[n]{w}$ نامیده می‌شود به‌دست می‌آید. درواقع، اگرسعی برساختن یك الگوی کاغذی ازسطح ریمان داشته باشیم، مشکلی که $n-1$ برگ برای چسباندن نهایی δ_{n-1}^- به δ_0^+ به وجود می‌آورند اهمیتی ندارد، زیرا برگهای موجود کمترین مانعی برای یکی شمردن نقاط متقابل δ_{n-1}^- و δ_0^+ نیست.

ب. فرض می‌کنیم S سطح ریمانی باشد که هم اینك ساخته‌شد. برای تعریف $z=\sqrt[n]{w}$ روی سطح S (به‌جای‌حوزهٔ E) مقدار $\sqrt[n]{w}$ را روی k امین برگ، E_k، انتخاب می‌کنیم، این مقدار متناظر با $(\sqrt[n]{w})_k$، شاخهٔ kام، است که در بخش ۱.۲.۹ معرفی شد، یعنی

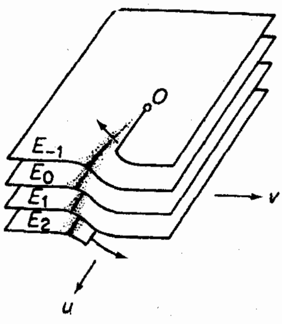
---

* از نظرریاضی «چسباندن» δ_k^- به δ_{k+1}^+ منحصراً مفهوم یکی شمردن نقاط متقابل δ_k^- و δ_{k+1}^+ را دارد. توجه‌کنیدکه نیمخط δ_k^- نیمخط $\arg w=2(k+1)\pi$ است، درحالی‌که δ_k^+ نیمخط $\arg w=2k\pi$ است، پس این عمل یکی شمردن کاملا طبیعی است.

مقدار یکتای $\sqrt[n]{w}$ که درحوزهٔ تك‌ارزی G_k جای دارد *. لذا تابع $z=\sqrt[n]{w}$، روی سطح S یك به‌یك (ویك مقداری) است و S را برروی همهٔ صفحهٔ z می‌نگارد. به‌همین ترتیب، تابع $w=z^n$ یك نگاشت یك به‌یك ازتمام صفحهٔ z برروی S است.

ج. فرض می‌کنیم نقطهٔ z یك‌دورحول $z=0$، مبدأ صفحهٔ z بچرخد. دراین‌صورت نگارهٔ نقطهٔ $w=z^n$ حول مبدأ سطح ریمان یك دور می‌زند، درحالی‌که متوالیاً روی همهٔ n برگ حرکت می‌کند. برعکس، فرض می‌کنیم نقطهٔ w یك دور حول $w=0$، مبدأ S، بچرخد. دراین صورت نگارهٔ $z=\sqrt[n]{w}$ به‌طور پیوسته‌ازیك شاخهٔ $(\sqrt[n]{w})_k$، متناظر با موضع آغازی w، بنوبت به‌هرشاخهٔ دیگر $(\sqrt[n]{w})_l$ حرکت می‌کند.

۲.۳.۹. حال، سطح ریمان لگاریتم $z=\ln w$ را بنا می‌کنیم، این‌بار با تعدادی نامتناهی‌ازبرگهای E_k $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ شروع می‌کنیم که تمام آنها نسخه‌هایی از حوزهٔ Eی شکل ۲۵ب (باز همان صفحهٔ w که درطول محور حقیقی مثبت بریده شده است) هستند. برگها را به‌همان طریق مذکوردربخش ۱.۳.۹الف به‌هم می‌چسبانیم،به‌عبارت دیگرهمهٔ برگها درنقطهٔ $w=0$ به‌هم متصل شده وبرای هرk، لبهٔ پایینی بریدگی برگ E_k به‌لبهٔ بالایی بریدگی برگ E_{k+1} می‌چسبد. اما دیگر «اولین برگ» و«آخرین برگی» نداریم‌که درپایان بنای سطح به‌هم چسبانده شوند. درعوض سطحی ریمانی به‌دست می‌آوریم‌که «بینهایت برگ» دارد ودرشکل ۳۰ تصوری ازآن را نشان داده‌ایم. تابع $z=\ln w$ را می‌توان تابعی یك به‌یك روی این سطح ریمان درنظر گرفت که این سطح



شکل ۳۰

* اگر w روی مرز مشترك E_k و E_{k+1} (که این مرز مشترك بخش قابل قبولی از S است) قرار بگیرد، z را مقدار یکتای $\sqrt[n]{w}$ که روی مرزمشترك G_k وG_{k+1} قرار دارد، انتخاب می‌کنیم.

را برروی تمام صفحهٔ z می‌نگارد. (جزئیات را ارائه دهید).

چند توضیح

۱.۹. می‌توان نشان داد که اگر $f(z)$ یك‌به‌یك و در G فقط پیوسته باشد قضیهٔ ۲.۱.۹ برقرار می‌ماند (قضیهٔ ۱.۶، جلد اول کتاب سابق‌الذکر آ. ای. مارکوشویچ)، یا اگر $f(z)$ تحلیلی بوده، اما الزاماً در G تك‌ارزی نباشد، باز قضیهٔ ۲.۱.۹ صادق است (فصل ۱۲، مسائل ۱۰ و ۱۱).

۲.۹. مسئلهٔ ۱۲ با دلخواه بودن شاخه‌های یك تابع چندمقداری بسیارمربوط‌است.

۳.۹. نباید فکر کرد که مفهوم سطح ریمان یك «نیرنگ ریاضی» بیش نیست. درواقع انتشارات فراوانی به‌موضوع مهم سطوح ریمانی اختصاص یافته‌اند،که مطالعهٔ کتاب پرارزش اسپرینگر * به‌عنوان مقدمه، توصیه می‌شود.

مسائل

۱. ثابت کنید که تابع

$$f(z)=(۱-iz)^{۲}$$

در نیمصفحهٔ بالایی تك‌ارز است ولی درتمام صفحهٔ z چنین نیست.

۲. ثابت کنید که تابع

$$f(z)=(۱-iz)^{۳}$$

درنیمصفحهٔ بالایی تك‌ارز نیست.

۳. ثابت کنید که داخل و خارج دایرهٔ واحد $|z|=۱$ حوزه‌های (ماکسیمال) تك‌ارزی برای تابع زیرند

$$w=\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right). \qquad (۱۶)$$

۴. نگارهٔ حوزهٔ $|z|<۱$ تحت نگاشت (۱۶) چیست؟ دربارهٔ نگارهٔ‌حوزهٔ $|z|>۱$ چه می‌توان گفت؟

---

* G. springer, *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-wesley publishing Company, Inc.Reading, Mass. (1957).

همچنین فصل ۷، ازجلد III آ. ای. مارکوشویچ را ببینید.

۵. همهٔ مقادیر زیر را بیابید

الف) $\ln e$؛ ب) $\ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$؛ ج) $\ln(2-3i)$.

۶. اگر a و b دوعدد مختلط دلخواه باشند، a^b را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a^b = e^{b\ln a}.$$

همهٔ مقادیر زیر را پیدا کنید

الف) $(-2)^{\sqrt{2}}$؛ ب) i^i؛ ج) 1^{-i}.

۷. چه موقع تابع $w=z^\alpha$ چندمقداری است؟ نقاط شاخه‌ای آن کدام‌اند؟

۸. ثابت کنید که

$$\frac{d(\sqrt[n]{w})_k}{dw}=\frac{\sqrt[n]{w}}{nw} \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

$$\frac{d(\ln w)_k}{dw}=\frac{1}{w} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

به‌طور کلیتر ثابت کنید که شاخه‌های یک تابع چند مقداری، همگی دارای یک مشتق هستند (در یک نقطهٔ مشخص).

۹. آیا نقطهٔ بینهایت، یك نقطهٔ شاخه‌ای توابع زیر است؟

الف) $w=\sqrt{z(z-1)}$؛ ب) $w=\sqrt{z^2(z-1)}$؛ ج) $w=\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$

۱۰. فرض می‌کنیم z در خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت دایرهٔ $|z|=2$ را یك دور طی کند، نقطهٔ شروع و ختم $z=2$ است. همچنین فرض می‌کنیم که مقدار اولیهٔ $\arg f(z)$ برابر صفر باشد و $\arg f(z)$ به‌طور پیوسته با z تغییر کند، مقدار پایانی $\arg f(z)$ را بیابید اگر

الف) $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$؛ ب) $f(z)=\sqrt{z^2-1}$؛

ج) $f(z)=\sqrt{z^2+2z-3}$.

۱۱. دوباره فرض می‌کنیم که z درخلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت دایرهٔ $|z|=2$ را یك دور طی کند، نقطهٔ شروع وختم $z=2$ است. فرض می‌کنیم که مقدار $\operatorname{Im} f(z)$

در $z=2$ صفر بوده، و $f(z)$ به‌طور پیوسته با z تغییر می‌کند، مقدار پایانی $\operatorname{Im} f(z)$ را بیابید اگر

الف) $f(z)=\ln\frac{1}{z}$؛ ب) $f(z)=\ln z-\ln(z+1)$؛

ج) $f(z)=\ln z+\ln(z+1)$.

۱۲. فرض می‌کنیم D حوزه‌ای روی سطح ریمان S بخش ۱.۳.۹ باشد، به‌طوری که هیچ نقطهٔ $z_1\in D$ «زیر» نقطهٔ دیگر $z_2\in D$ قرار نگیرد (z_1 و z_2 روی دو برگ متفاوت هستند). فرض کنید G نگارهٔ D تحت نگاشت $z=\sqrt[n]{w}$ باشد. ثابت کنید G یك حوزهٔ تك‌ارزی برای $w=z^n$ است. شاخهٔ یك‌مقداری $z=\sqrt[n]{w}$ متناظر را تعریف نمایید.

۱۳. ثابت کنید که هر نوار به‌شکل

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi<\operatorname{Re} z<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots) \qquad (17)$$

یك حوزهٔ «ماکسیمال» تك‌ارزی برای تابع $w=\sin z$ است. ثابت کنید که همین مطلب برای هر نیم نوار به‌شکل

$$c<\operatorname{Re} z<c+2\pi, \quad \operatorname{Im} z>0$$

یا

$$c<\operatorname{Re} z<c+2\pi, \quad \operatorname{Im} z<0$$

نیز درست است (c حقیقی). چرا نمی‌توان $c<\operatorname{Re} z<c+\pi$ را جانشین (۱۷) کرد؟

۱۴. فرض می‌کنیم G_k همان نوار (۱۷) باشد. ثابت کنید که تابع $w=\sin z$ همهٔ نوارهای G_0، G_1، G_{-1}، G_2، G_{-2}، ... را به‌روی یك حوزهٔ E می‌نگارد، E صفحهٔ w است که درطول دوفاصلهٔ نامتناهی $[-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$ از محور حقیقی بریده شده است. تابع $w=\sin z$ با حوزهٔ تعریف G_k و با برد E، یك‌تابع معکوس یك مقداری با حوزهٔ تعریف E و برد G_k دارد. این تابع را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$z=(\arcsin w)_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (18)$$

ثابت کنید که (۱۸) در E تك‌ارز است ومشتق آن برابراست با

$$\frac{d(\arc\sin w)_k}{dw}=\frac{۱}{\sqrt{۱-w^۲}} \quad (k=۰,\ \pm ۱,\ \pm ۲, \ldots).$$

۱۵. فرض می‌کنیم $z=\arc\sin w$ تابــع چندمقداری را نشان دهد کــه معکوس تابع $w=\sin z$ است، تابع اخیراین‌بار درتمام صفحهٔ z تعریف شده، وتمام صفحهٔ wبرد آن است. نشان دهیدکه

$$\arc\sin w=\frac{۱}{i}\ln i(w+\sqrt{w^۲-۱})=\frac{۱}{i}\ln(iw+\sqrt{۱-w^۲}).$$

نشان دهیدکه $\arc\sin w$ دقیقاً سه‌نقطهٔ شاخه‌ای دارد: یك نقطهٔ شاخه‌ای لگاریتمی در $w=\infty$ ونقاط شاخه‌ای جبری ازمرتبهٔ ۱ در $w=-۱$ و $w=۱$.

۱۶. تمام نقاطی را مشخص کنیدکه به وسیلهٔ تابع $w=\sin z$ برنقطهٔ مفروض $w_۰$نگاشته می‌شوند. ازنتیجهٔ حل مسئلهٔ ۱۳ استفاده نمایید.

۱۷. سطح ریمان تابع $z=\arc\sin w$ را بنا کنید.

۱۸. همان‌طورکه $z=\arc\sin w$ را معکوس تابع $w=\sin z$ تعریف کردیم، تابــع مثلثاتی $\arc\cos w$ وتوابع هذلولی $\text{arc cosh}w$، $\text{arc sinh}w$، $\text{arc tanh}w$ معکوس توابع مثلثاتی وهذلولی متناظرشان تعریف می‌شوند. درستی فرمولهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $\arc\cos w=\frac{۱}{i}\ln(w+\sqrt{w^۲-۱})$؛

ب) $\text{arc tang}\, w=\frac{i}{۲}\ln\frac{i+z}{i-z}=\frac{۱}{۲i}\ln\frac{۱+iz}{۱-iz}$؛

ج) $\text{arc cosh}\, w=\ln(w+\sqrt{w^۲-۱})$؛

د) $\text{arc sinh}\, w=\ln(w+\sqrt{w^۲+۱})$؛

ه) $\text{arc tanh}\, w=\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+w}{۱-w}$.

۱۹. تمام مقادیرکمیتهای زیررا به‌دست آورید:

الف) $\arc\cos\frac{۱}{۲}$؛ ب) $\arc\sin i$؛ ج) $\text{arc cosh}\ ۲i$.

۲۰. نشان دهید تابعی‌که با

$$L(z)=\int_{1}^{z}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

تعریف می‌شود همان لگاریتم، یعنی تابع چندمقداری

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

است. خمی که نقاط ۱ و z را به‌هم وصل می‌کند چه شرطی باید داشته باشد؟

۲۱. فرض براین است که تابع $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی ومخالف صفراست، کدام‌یك از توابع $|f(z)|$، $\arg f(z)$، و $\ln|f(z)|$ در G همسازند؟

۱۰

سری تیلر

۱.۱۰. بسط تیلر یک تابع تحلیلی

۱.۱.۱۰. فرض می‌کنیم

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \qquad (1)$$

یك سری توانی به مجموع $f(z)$ و به‌شعاع همگرایی R باشد. از (۱)، به‌همان‌نحوی که در (۹.۱.۷) دیدیم مشتقهای متوالی می گیریم، سریهای توانی جدید زیر به‌دست می‌آیند:

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-a)+3c_3(z-a)^2+\cdots, \qquad (2)$$

$$f''(z)=2c_2+2\cdot 3c_3(z-a)+\cdots, \qquad (3)$$

$$\cdots$$

$$f^{(n)}(z)=2\cdot 3\cdots nc_n+2\cdot 3\cdots n(n+1)c_{n+1}(z-a)+\cdots, \qquad (4)$$

که شعاع همگرایی همگی R ، همان شعاع همگرایی سری اصلی (۱) ، است. با انتخاب $z=a$ درسریهای (۱) تا (۴) داریم:

$$c_0=f(a),\quad c_1=f'(a),\quad c_2=\frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ \ c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \ldots \qquad (5)$$

سری توانی راکه ضرایب آن طبق (۵) به‌تابع تحلیلی مفروض $f(z)$ بستگی دارد، سری

تیلر می‌نامند (دقیقتر بگوییم سری تیلر $f(z)$ در نقطهٔ a)، و خود مقادیر (۵) را ضرایب سری تیلر تابع $f(z)$ گویند. لذا می‌بینیم که هرسری توانی به‌شعاع همگرایی غیر صفر سری تیلر مجموع خودش است. سری تیلر تابع $f(z)$ را بسط تیلر $f(z)$ نیز می‌گویند.

۲۰۱۰۱۰. فرض می‌کنیم که C دایره‌ای به‌شعاع $\rho<R$ و به مرکز a باشد. آنگاه از فرمول انتگرال کوشی،

$$f(a)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz,$$

و به‌طور کلیتر از قضیهٔ (۱۰۷۰۵)،

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}dz \tag{۶}$$

نتیجه می‌شود. از مقایسهٔ (۵) با (۶) می‌بینیم که

$$c_n=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}dz \qquad (n=۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots). \tag{۷}$$

فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $R>|z|$، $|f(z)|\leqslant M$. آنگاه قضیهٔ (۳۰۲۰۵) را درمورد رابطهٔ (۷) به‌کار می‌بریم، نامساوی زیر که نامساوی کوشی نام دارد و ضرایب سری توان (۱) در آن صادق‌اند، حاصل می‌شود

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{۲\pi}\,\frac{۲\pi\rho}{\rho^{n+۱}}=\frac{M}{\rho^n} \qquad (n=۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots). \tag{۸}$$

از (۸) وقتی $\rho \to R$ حد می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{R^n} \qquad (n=۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots), \tag{۸'}$$

که در آن R شعاع همگرایی سری (۱) است.

۳۰۱۰۱۰. برطبق قضیهٔ(۹۰۱۰۷) سری توانی (۱) به‌شعاع همگرایی R، درقرص $|z-a|<R$، تابعی تحلیلی است. حال عکس این قضیه را ثابت می‌کنیم:

قضیه. اگر K قرص $|z-a|<R$ باشد و تابع $f(z)$ در K تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ یك بسط تیلر در K دارد، یعنی سری توانی

$$f(z)=\sum_{n=۰}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{۹}$$

به ضرایب (۵) درهر نقطهٔ K به‌تابع $f(z)$ همگراست.

برهان. نقطهٔ دلخواه $\zeta\in K$ را درنظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم C، دایرهٔ به‌شعاع $r<R$ و به‌مرکز a شامل ζ باشد. آنگاه، چون $f(z)$ در داخل و روی دایرهٔ C تحلیلی است (زیرا در K تحلیلی است)، بنابر فرمول انتگرال کوشی،

$$f(\zeta)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\zeta}dz \qquad (۱۰)$$

برای اینکه (۱۰) را به سری توانی تبدیل کنیم، ابتدا می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{z-\zeta}=\frac{۱}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{۱}{(z-a)\left(۱-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)},$$

که در آن $z\in C$ و تشخیص می‌دهیم که عبارت

$$\frac{۱}{۱-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}$$

مجموع یک‌سری هندسی همگراست. زیرا

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{|\zeta-a|}{r}<۱,$$

چون $z\in C$ و ζ در داخل C است؛ پس

$$\frac{۱}{۱-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\sum_{n=۰}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^n \qquad (۱۱)$$

(بخش ۳.۱.۶ را ببینید). از رابطهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{z-\zeta}=\frac{۱}{(z-a)\left(۱-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+۱}},$$

درنتیجه

$$\frac{۱}{۲\pi i}\frac{f(z)}{z-\zeta}=\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}(\zeta-a)^n. \qquad (۱۲)$$

اگر $M=\max_{z\in C}|f(z)|$، آنگاه

$$\left|\frac{۱}{۲\pi i}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}(\zeta-a)^n\right|\leqslant\frac{M}{۲\pi r}\left(\frac{|\zeta-a)|}{r}\right)^n,$$

که در آن، طرف راست رابطه، جملهٔ عمومی یک سری هندسی همگراست. از قضیهٔ ۶.۳.۶ نتیجه می‌شود که سری (۱۲) روی C همگرای یکنواخت است، پس بنابه قضیهٔ ۸.۳.۶ می‌توان ازآن درطول C جمله به جمله انتگرال گرفته رابطهٔ زیر را به‌دست آورد

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta-a)^n, \tag{۱۳}$$

که درآن باتوجه به رابطهٔ (۶)

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{۱۴}$$

ولی رابطهٔ (۹) از رابطه‌های (۱۳) و (۱۰) بعداز تبدیل ζ به z نتیجه مـی‌شود و بنا به (۱۴) دیده می‌شود که (۹) سری تیلر $f(z)$ است. □

۴.۱.۱۰. تعریف. اگر $f(z)$ درنقطهٔ z_0 تحلیلی بـاشد، یعنی دریـك همسایگی z_0 تحلیلی باشد، z_0 را یك نقطهٔ منظم $f(z)$ گویند. درغیراین‌صورت z_0 رایك نقطهٔ تکین تـابع $f(z)$ نـامند. بـرای مثال $z=1$ نقطـهٔ تکین و هـر $z\neq 1$ نقطـهٔ منظم تـابع $f(z)=1/(1-z)$ است. بعلاوه طبق قضیهٔ ۹.۱.۷ هرنقطهٔ‌داخل‌دایرهٔ همگرایی‌یك‌سری توانی، یك نقطهٔ منظم مجموع آن سری است.

۵.۱.۱۰. قضیه. فرض می‌کنیم $f(z)$ دارای بسط تیلر

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c^n(z-a)^n+\cdots \tag{۱۵}$$

درنقطهٔ a به شعاع همگرایی R است. آنگاه $f(z)$ حـداقل یك نقطهٔ تکین روی دایرهٔ همگرایی $|z-a|=R$ دارد.*

برهان. فرض می‌کنیم که C دایرهٔ همگرایی $|z-a|=R$ باشد و $f(z)$ روی C نقطهٔ تکین نداشته باشد. پس هر نقطهٔ دایرهٔ C یك نقطهٔ منظم $f(z)$ است یعنی، هـر نقطهٔ $z\in C$ مرکز یـك قرص باز K_z است کـه $f(z)$ در آن تحلیلی است. ولی بنا به قضیهٔ هاینه ـ بورل (به فصل سوم، مسئلهٔ ۱۱ رجوع کنید) دایرهٔ C را می‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی از این قرصها مانند $K_{z_1}, K_{z_2}, \ldots, K_{z_n}$ پوشاند. مجموعهٔ همهٔ نقاطی که حداقل به‌یکی‌از قرصهای $K_{z_1}, K_{z_2}, \ldots, K_{z_n}$ متعلق‌اند بـوضوح باز و همبند و درنتیجه یـك حوزهٔ G است که شامل C مـی‌باشد. فاصلهٔ بین دایرهٔ C و مـرز G را مانند فصل سوم مسئلهٔ (۱۷) ρ می‌گیریم آنگاه $f(z)$ در داخـل دایرهٔ C^* به شعاع $R+\rho$ و هم‌مرکز با دایرهٔ C، تحلیلی است. از قضیهٔ ۳.۱.۱۰ نتیجه مـی‌شود که $f(z)$ در داخل C^* دارای سری تیلر همگراست کـه منطبق برسری(۱۵) است (چرا ؟)، یعنی، شعاع همگرایی سری (۱۵) نمی‌تواند کمتراز $R+\rho>R$ باشد. ایـن تناقض نشان مـی‌دهد که $f(z)$ حداقل دارای یك نقطهٔ تکین روی دایرهٔ C است. □

---

* دراینجا به‌طور ضمنی فرض براین است که حوزهٔ تعریف تابع (تحلیلی) $f(z)$ بزرگتر از قرص $|z-a|<R$ است. بااین حال بخش ۲.۴.۱۳ ج را ببینید.

۶.۱.۱۰. ازقضایای ۳.۱.۱۰ و ۵.۱.۱۰ مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر a نقطهٔ منظم تابع $f(z)$ باشد، آنگاه $f(z)$ دارای بسط سری توانی به‌صورت (۱۵) است، که دایرهٔ همگرایی آن از نزدیکترین نقطهٔ تکین تابع $f(z)$ به a می‌گذرد. پس ارتباطی نزدیک بین شعاع همگرایی یك سری توانی و رفتار مجموع سری وجود دارد. بنابراین نظریهٔ سریهای توانی‌فقط درحالت مختلط به‌طورکامل روشن می‌شود. برای مثال اگرفقط مقادیر حقیقی x را درنظر بگیریم واگرایی سری

$$\frac{۱}{۱+x^{۲}}=۱-x^{۲}+x^{۴}-x^{۶}+\dots \qquad (۱۶)$$

برای $x\leqslant -۱$ و $۱\leqslant x$ ازروی تابع $۱/(۱+x^{۲})$ قابل توجیه نیست چون تابع برای تمام مقادیرحقیقی x تعریف‌شده است و رفتاری استثنائی درنقاط $x=\pm ۱$ نشان نمی‌دهد. دلیل واگرایی مذکور وقتی مشخص می‌شود که به‌جای x متغیر مختلط z بگذاریم، آنگاه سمت‌چپ رابطهٔ (۱۶) به‌صورت $۱/(۱+z^{۲})$ درمی‌آید که نقاط تکین آن $z=\pm i$ هستند به‌طوری‌که شعاع همگرایی سری باید برابر ۱ باشد (فاصلهٔ بین ۰ و $\pm i$).

۷.۱.۱۰. **قضیه (لیوویل).** هر تابع تام کراندار ثابت است، یعنی، اگر $f(z)$ تام باشد و برای تمام مقادیر متناهی z داشته باشیم $|f(z)|\leqslant M$، آنگاه* $f(z)\equiv$ ثابت.

برهان. بنا به قضیهٔ ۳.۱.۱۰، $f(z)$ دارای بسط تیلر زیر است

$$f(z)=c_{۰}+c_{۱}z+c_{۲}z^{۲}+\dots+c_{n}z^{n}+\dots$$

این بسط برای‌هر z متناهی، یعنی، درهرقرص $|z|<R$ معتبراست. اکنون درنامساوی کوشی

$$|c_{n}|\leqslant\frac{M}{R^{n}} \quad (n=۰,\ ۱,\ ۲,\ \dots)$$

(بخش ۲.۱.۱۰) R را به ∞ میل می‌دهیم، $c_{n}=۰$ برای $n\geqslant ۱$ به‌دست می‌آید، و در نتیجه $f(z)\equiv c_{۰}$. □

۲.۱۰. قضایای یکتایی

۱.۲.۱۰. فرض می‌کنیم دوسری توانی

$$a_{۰}+a_{۱}(z-z_{۰})+\dots+a_{n}(z-z_{۰})^{n}+\dots, \qquad (۱۷)$$

---

* طبق بخش ۱.۱.۸ تابع مختلط $f(z)$ را تام گویند اگر در تمام صفحهٔ متناهی، تحلیلی باشد. نماد $\equiv$ به‌معنی «متحد با» می‌باشد.

$$b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots, \qquad (۱۸)$$

به‌شعاعهای همگرایی R_1 و R_2 دریك همسایگی z_0 يك مجموع‌دارند، یعنی فرض‌می‌کنیم برای تمام zهای واقع درقرص

$$|z-z_0|<r\leqslant \min\{R_1, R_2\}$$

داریم:

$$a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$
$$=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots$$

بنابراین طبق (۵) داریم:

$$a_0=b_0=f(z_0),\ \ a_1=b_1=f'(z_0),\ \cdots,\ a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ \cdots,$$

که در آن $f(z)$ مجموع مشترك دوسری است. بویژه از قضیهٔ کوشی‌ـ‌آدامار نتیجه‌می‌شود که $R_1=R_2$. بنابراین نتیجهٔ زیرراکه نمونه‌ای از قضایای معـروف به‌قضایای یکتایی است، ثابت کرده‌ایم. اگـر مجموع دو سری از متغیر $z-z_0$ در یـك همسایگی نقطهٔ z_0 برابر باشند،آنگاه توانهای برابر $z-z_0$ دارای ضرایب مساوی هستند یعنی فقط‌یك‌سری توانی از متغیر $z-z_0$ وجود دارد که دارای مجموع مفروض در يك همسایگی z_0 است.

۰۲۰۳۰۱۰ در زیر نشان می‌دهیم که برای تضمین اینکه سریهای (۱۷) و (۱۸) برهم منطبق باشند، شرط برابری مجمـوع سریهای (۱۷) و (۱۸) در تمام همسایگی نقطـهٔ z_0 درواقع خیلی بیش ازنیاز است.

قضیه (قضیه یکتایی برای سریهای توانی) اگر مجموعهای دو سری توانی از متغیر $z-z_0$ در هرنقطهٔ يك مجموعهٔ E که z_0 نقطهٔ حدی آن است*، برابر باشند، آنگـاه در این دوسری جملاتی‌از $z-z_0$ که توانهای برابر دارند دارای ضرایب مساوی هستند، یعنی فقط یك‌سری توانی از متغیر $z-z_0$ وجود دارد که در نقاط E دارای مجموع مـفروض است.

برهان. فـرض می‌کنیم (۱۷) و (۱۸) سریهـای مفـروض هستند و z_n $(z_n\neq z_0)$ دنباله‌ای از نقاط متمایز E است کـه به z_0 همگراست (چرا z_n وجـود دارد؟). آنگاه، چون برای تمام مقادیر... $n=۱, ۲,$

---

* درفصل دو، مسئلهٔ ۲ آورده شده است که نقطهٔ z_0 را نقطهٔ حدی مجمـوعهٔ E گویند، اگر هـر همسایگی نقطهٔ z_0 شامـل تعدادی نامتناهی از نقاط متمایز مجموعهٔ E باشد. توجه‌کنید که به‌طور ضمنی فرض براین است که تعداد نقاط مجموعهٔ E نامتناهی است.

$$a_0+a_1(z_n-z_0)+a_2(z_n-z_0)^2+\cdots$$
$$=b_0+b_1(z_n-z_0)+b_2(z_n-z_0)^2+\cdots \qquad (۱۹)$$

ومجموع سری درداخل دایرهٔ همگرایی پیوسته است، داریم:

$$a_0=\lim_{n\to\infty}[a_0+a_1(z_n-z_0)+a_2(z_n-z_0)^2+\cdots]$$
$$=\lim_{n\to\infty}[b_0+b_1(z_n-z_0)+b_2(z_n-z_0)^2+\cdots]=b_0,$$

ودر نتیجه $a_0=b_0$. فرض می کنیم می‌دانیم که

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \ldots,\ a_k=b_k.$$

آنگاه از (۱۹) نتیجه می‌شود

$$a_{k+1}(z_n-z_0)^{k+1}+a_{k+2}(z_n-z_0)^{k+2}+\cdots$$
$$=b_{k+1}(z_n-z_0)^{k+1}+b_{k+2}(z_n-z_0)^{k+2}+\cdots. \qquad (۲۰)$$

طرفین رابطهٔ (۲۰) را بر $0\neq(z_n-z_0)^{k+1}$ تقسیم کرده حد دوطرف را وقتی $n\to\infty$، حساب می کنیم، $a_{k+1}=b_{k+1}$ به‌دست می آید. حال اثبات قضیه ازاستقرا نتیجه‌می‌شود. □

۳.۲.۱۰ اینك برای اثبات یکی‌ازمهمترین قضایای آنالیز مختلط آمادگی داریم، این قضیه نشان می‌دهدکه «خاصیت یکتایی» قضیهٔ ۲.۲.۱۰ به‌حالتی که توابع تحلیلی هستند منتقل می‌شود.

قضیه (قضیه‌یکتایی برای توابع تحلیلی). فرض می‌کنیم‌که‌توابع $f(z)$ و $g(z)$ هردو دریك حوزهٔ G تحلیلی‌اند. $f(z)$ و $g(z)$ درتمام نقاط یك زیرمجموعهٔ G مانند E که $z_0\in G$ نقطهٔ حدی آن است، برابر هستند. آنگاه $f(z)$ و $g(z)$ در تمام نقاط حوزهٔ G برابرند.

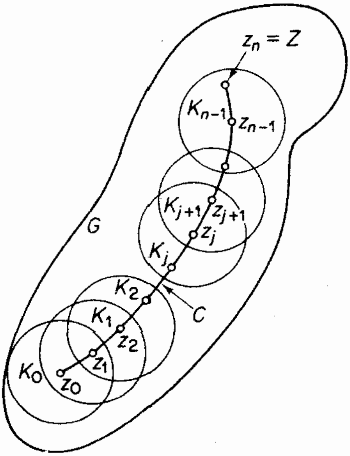
برهان. یك‌نقطهٔ $Z\in G$ ومخالف z_0 رادرنظرمی گیریم‌و z_0 را به‌وسیلهٔ یك‌خم‌پیوستهٔ C واقع در G به‌Z وصل می کنیم. اگر G تمام صفحه باشد، ρ را یك عدد مثبت دلخواه می گیریم، والا فرض می کنیم که ρ فاصلهٔ بین C و مرز G است (فصل ۳، مسئلهٔ ۱۷ را ببینید) و نقاط متوالی $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_j, z_{j+1},\ \ldots, z_{n-1},\ z_n=Z$ را رویِ‌خم C به‌طوری انتخاب‌می کنیم که*

$$|z_{j+1}-z_j|<\rho \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \qquad (۲۱)$$

---

* فرض می کنیم که $a\leqslant t\leqslant b$، $z=z(t)$ معادلهٔ پارامتری C باشد. آنگاه بنا برنظیر «یك بعدی» قضیهٔ ۴.۴.۳ تابع $z(t)$ درفاصلهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ پیوستهٔ یکنواخت است، و وجود z_j ها،که دررابطهٔ (۲۱) صدق می کنند ازاین پیوستگی یکنواخت نتیجه می‌شود.

بعد زنجیر قرصهای $K_0, K_1, \dots, K_j, \dots, K_{j+1}, \dots, K_{n-1}$ راکه در آن K_j قرص $|z-z_j|<\rho$ است، می‌سازیم (شکل ۳۱ را ببینید). واضح است که هرقرص K_j شامل نقطهٔ z_{j+1}، مرکز قرص «بعدی» K_{j+1}، است. طبق قضیهٔ ۳.۱.۱۰ هردوتابع $f(z)$ و $g(z)$ درهر $K_j(j=0, 1, \dots, n-1)$ دارای بسطهای سری توانی‌همگرا هستند. چون توابع $f(z)$ و $g(z)$ درهرنقطهٔ مجموعهٔ $E\cap K_0$ * برابرند و z_0 نقطهٔ حدی این‌مجموعه است‌ازقضیهٔ ۲.۲.۱۰ نتیجه‌می‌شودکه این‌دوتابع درتمام قرص K_0 باهم برابرند. بنابراین



شکل ۳۱

در تمام نقاط مجموعهٔ $K_0\cap K_1$، که z_1 نقطهٔ حدی آن است (چرا؟) با هم برابرند، پس دوباره بنابه‌قضیهٔ ۲.۲.۱۰ این دوتابع در K_1 برهم منطبق هستند. حال پس از تکراراین استدلال $n-2$ دفعهٔ دیگر، سرانجام درمی‌یابیم که $f(z)$ و $g(z)$ در K_{n-1} ودرنتیجه‌در نقطهٔ $z_n=Z$ برابرهستند. اما Z یک‌نقطهٔ دلخواه G است بنابراین $f(z)$ و $g(z)$ در تمام حوزهٔ G برابرند.

۴.۲.۱۰. تبصره. برطبق قضیهٔ ۳.۲.۱۰ اگر دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشند، در G برابرند، هرگاه بدانیم‌که دریک همسایگی بدلخواه‌کوچک نقطه‌ای از G برابرند، یا حتی اگربدانیم‌که روی یک‌کمان بدلخواه‌کوچک خمی واقع در G برابرند. بویژه اگر $f(z)$ دریک همسایگی بدلخواه‌کوچک یک نقطهٔ G یا روی‌کمانی بدلخواه‌کوچک یک خم واقع در G متحد با مقدار ثابت C باشد، آنگاه درتمام نقاط G،

---

* منظوراز اشتراک (مقطع) دو مجموعهٔ مفروض A و B که با $A\cap B$ نشان داده می‌شود، مجموعهٔ تمام نقاطی است‌که به‌هردو مجموعهٔ A و B تعلق دارند.

$f(z)\equiv c$ (زیرا آشکار است که اگر تابع $g(z)$ در تمام حوزهٔ G متحد با c باشد، در G تحلیلی است و درتمام نقاط مجموعه‌های مذکور، با $f(z)$ برابر است) بخصوص اگر c را صفر بگیریم، می‌بینیم که هرگاه $f(z)$ دریك همسایگی بدلخواه کوچك یك نقطهٔ G، یا روی یك کمان بدلخواه کوچك خمی که در G واقع است، صفرشود، آنگاه $f(z)$ درتمام G صفر می‌شود. حقیقتاً قابل ملاحظه است که مشتق‌پذیری در G به‌تنهایی دررفتار توابع مختلطی که در G تعریف‌شده‌اند، چنین محدودیت زیادی را موجب می‌شود.

۱۰.۲.۵. وقتی می‌گوییم صفر تابع $f(z)$، منظور هر ریشهٔ معادلهٔ $f(z)=0$ است. فرض می‌کنیم دریك حوزهٔ G، * $f(z)\not\equiv 0$ تحلیلی باشد ونقطهٔ z_0 یك صفر آن باشد. آنگاه بنا به‌قضیهٔ (۱۰.۱.۳)، دریك همسایگی نقطهٔ z_0، $f(z)$ دارای بسط سری توانی به‌صورت

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\dots+c_n(z-z_0)^n+\dots \qquad (۲۲)$$

است، زیرا $c_0=f(z_0)=0$. حداقل یکی ازضرایب $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ مخالف صفر است، چون‌درغیراین‌صورت $f(z)$ درتمام نقاط همسایگی z_0 صفرمی‌شود ودرنتیجه، بنا به قضیهٔ یکتایی برای توابع تحلیلی، باید $f(z)$ درتمام نقاط G برابرصفر باشد (که‌خلاف فرض است). اینك فرض می‌کنیم دررابطهٔ (۲۲) c_m اولین ضریب مخالف صفرباشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$c_1=c_2=\dots=c_{m-1}=0, \quad c_m\neq 0,$$

آنگاه (۲۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\dots \qquad (c_m\neq 0),$$

ونقطهٔ z_0 را صفرازمرتبهٔ m تابع $f(z)$ گویند. اگر $m=1$، z_0 را صفر ساده واگر $m>1$ آن را صفرچندگانه نامند.

۱۰.۲.۶. قضیه. هر صفر z_0 تابع $f(z)\not\equiv 0$ که در G تحلیلی باشد یك نقطهٔ منفرد است، یعنی یك همسایگی z_0 وجود دارد که درآن غیراز خود z_0 صفر دیگری نیست.

برهان. فرض می‌کنیم هرهمسایگی z_0 مانند K شامل صفرديگری ازتابع $f(z)$ باشد. آنگاه z_0 نقطهٔ حدی صفرهای تابع $f(z)$ است. ازاین نتیجه می‌شود که $f(z)\equiv 0$ (بخش ۱۰.۲.۴ را ببینید) واین مخالف فرض است. پس یك همسایگی z_0 وجود دارد که درآن جز z_0، صفردیگری وجود ندارد. □

۱۰.۲.۷. قضیهٔ زیرکه نشانی ازقضیهٔ یکتایی دارد، دربخش بعدی مورد نیاز

* $f(z)\not\equiv 0$ یعنی تابع $f(z)$ در G متحد با صفر نیست.

خواهد بود.

قضیه. یك تابع تحلیلی که قدرمطلق آن ثابت باشد، تابعی ثابت است. دقیقتر بگوییم،اگر $f(z)$ در حـوزهٔ G تحلیلی و $|f(z)|$ در G ثابت باشد، آنگـاه $f(z)$ در G ثابت است.

برهان. اگر در G، $|f(z)|\equiv \circ$، بوضوح در G، $f(z)\equiv \circ$، پس فـرض‌می‌کنیم در G، $|f(z)|\equiv M > \circ$، بنابراین

$$|f(z)|^{2}=u^{2}+v^{2}\equiv M^{2}, \tag{۲۳}$$

که درآن $f(z)=u+iv$. ازرابطهٔ (۲۳) نسبت به x و y مشتق می‌گیریم به‌دست‌می‌آید

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}&=\circ,\\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=\circ \end{aligned} \tag{۲۴}$$

چون $M\neq \circ$ توابع u و v نمی‌توانند درحوزهٔ G با هـم صفر شوند، بنابراین دترمینان ضرایب دستگاه معادلات خطی (۲۴) نسبت به‌دو مجهول u و v باید صفرباشد. پس داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=\circ, \tag{۲۵}$$

اما چون $f(z)$ در G تحلیلی است، درهر نقطهٔ G، u و v درمعادلات کوشی‌ـ‌ریمان

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

صدق می‌کنند. بنابراین (۲۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}=\circ,$$

درنتیجه درهر نقطهٔ G

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\circ$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=\circ$$

که رابطهٔ اخیر از معادله‌های کوشی‌ـ‌ریمان نتیجه شده است. پس در G داریم:

$$u_1 \equiv c_1,\quad u_2 \equiv c_2,\quad f(z) \equiv c_1 + ic_2$$

که c_1 و c_2 ثابتهای حقیقی هستند. □

۳.۱۰. اصل قدرمطلق ماکزیموم ونتایج آن

۱.۳.۱۰. قضیهٔ زیریك خاصیت کلیدی توابع تحلیلی را بیان می‌کند:

قضیه (اصل قدرمطلق ماکزیموم). اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی باشدوثابت نباشد*، آنگاه $|f(z)|$ در G ماکزیموم ندارد، یعنی نقطه‌ای مثل $z_0 \in G$ وجود ندارد که به ازای هر $z \in G$ رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$$

برهان. فرض می‌کنیم که برخلاف حکم قضیه، یك نقطهٔ z_0 وجود دارد به طوری که‌به‌ازای‌هر $z \in G$، $|f(z_0)| \geqslant |f(z)|$، ومی‌نویسیم $M = |(fz_0)|$. می‌توان فرض کرد که $M > 0$، زیرا اگر $M = 0$، آنگاه $f(z) \equiv 0$. دایرهٔ γ_R به‌شعاع R وبه‌مرکز z_0 را درنظرمی‌گیریم وآن را به‌اندازه‌ای کوچك فرض می‌کنیم که G شامل دایرهٔ γ_R ونقاط داخلی آن باشد. آنگاه، بنابه‌فرمول انتگرال کوشی،

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta, \tag{۲۶}$$

ودرنتیجه

$$|f(z_0)| = M = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\, d\theta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + Re^{i\theta})|\, d\theta, \tag{۲۶'}$$

که آخرین قسمت رابطه نتیجهٔ مستقیم تعریف انتگرال به‌صورت حد یك مجموع است. طبق فرض به‌ازای‌هر θ، $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$، $|f(z_0 + Re^{i\theta})| \leqslant M$، ولی نامساوی اکید $|f(z_0 + Re^{i\theta}| < M$ نمی‌تواند به‌ازای هیچ θای برقرار باشد. زیرا اگر به‌ازای یك θ_0 داشته باشیم $|f(z_0 + Re^{i\theta_0})| < M$، آنگاه چون $|f(z)|$ روی دایرهٔ γ_R پیوسته است، یك زیرفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ مانند I به‌درازای $\delta > 0$ که شامل θ_0 باشد وجود دارد به‌طوری که به‌ازای یك $\epsilon > 0$ و هر $\theta \in I$ داریم $|f(z_0 + Re^{i\theta})| \leqslant M - \epsilon$. فرض

---

* توجه کنید که G بازاست، بنا براین‌نیازی نیست که $f(z)$ درمرز G تعریف شده باشد. حالتی که $f(z)$ در مرز G هم تعریف شده، درنتیجه‌های ۲.۳.۱۰ ب، ج، د بحث خواهد شد.

می‌کنیم I' قسمتی یا قسمتهایی از فاصلهٔ $[\circ, ۲\pi]$ باشد که بعد از حذف I باقی می‌ماند. آنگاه از(′۲۶) نتیجه می‌شود:

$$M \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi} |f(z_\circ + Re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{I'} |f(z_\circ + Re^{i\theta})|\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{I} |f(z_\circ + Re^{i\theta})|\, d\theta$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} M(2\pi - \delta) + \frac{1}{2\pi}(M - \epsilon)\delta < M,$$

که غیرممکن است. پس درنتیجه به‌ازای هر R به‌طوری که G شامل دایرهٔ R و داخل آن باشد، داریم

$$|f(z_\circ + Re^{i\theta})| = M \quad (\circ \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

بنابراین در هرقرص به‌مرکز $z_\circ$، مانند K، کــه در G واقع باشد، $|f(z)| \equiv M$،زیــرا هرنقطه از قرص K روی یك دایرهٔ γ_R واقع است. پس، بنابه‌قضیهٔ ۷.۲.۱۰، $f(z)$ در K ثابت است. اینك از بخش ۴.۲.۱۰ نتیجه می‌شود کــه $f(z)$ درتمــام حوزهٔ G ثابت است، که برخلاف‌فرض است. این‌تناقض نشان می‌دهد که نقطهٔ $z_\circ \in G$ به‌طوری که‌به‌ازای هر $z \in G$، $|f(z)| \geqslant |f(z_\circ)|$، وجود ندارد. □

۲.۳.۱۰. حال تعدادی از نتایج‌جالب «اصل قدرمطلق ماکزیموم» را ثابت‌می‌کنیم:

الف. نتیجه (اصل قدرمطلق مینیموم). اگــر $f(z)$ در حــوزهٔ G تحلیلی باشد و صفروثابت نباشد، آنگــاه $|f(z)|$ در G مینیموم نــدارد، یعنی، نقطه‌ای مثــل $z_\circ \in G$ وجود ندارد که به‌ازای هر $z \in G$ رابطهٔ $|f(z_\circ)| \leqslant |f(z)|$ برقرار باشد.

برهان. از خواصی کــه برای $f(z)$ فــرض شده است نتیجــه می‌شود کــه تابع $\varphi(z) = 1/f(z)$ در G تحلیلی است وثابت نیست. پس بنابه‌اصل قدرمطلــق ماکزیموم، $|\varphi(z)|$ در G ماکزیموم ندارد. اما مینیموم $|f(z)|$، ماکزیمــوم $|\varphi(z)|$ است، درنتیجه $|f(z)|$ در G مینیموم ندارد. □

ب. نتیجه. حوزهٔ کراندار G داده شده است. فــرض می‌کنیم $f(z)$ در G تحلیلی و در $\bar{G}$ پیوسته باشد. آنگاه مرز G شامل نقطه‌ای مانند ζ است به‌طوری که

$$|f(\zeta)| = \max_{z \in \bar{G}} |f(z)| \cdot \qquad (۲۷)$$

برهان. بنابه‌مسئلهٔ ۱۲ ج فصل سوم، حوزهٔ بسته وکراندار $\bar{G}$ شامــل نقطه‌ای مانند

ζ است به‌طوری کـه (۲۷) برقرار باشد. اگـر، ثابت $f(z)\not\equiv$ بنابه «اصـل قدرمطلق ماکزیموم» ζ متعلق به G نیست درنتیجه ζ به‌مــرز G تعلق دارد. اگـر، ثابت $f(z)\equiv$، واضح است که می‌توانیم ζ را درمرز G انتخاب کنیم. □

ج. نتیجه. حوزهٔ کراندار G مفروض است. اگر $f(z)$ در G تحلیلی و مخالف صفر و در $\bar{G}$ پیوسته باشد. آنگاه مرز G شامل نقطه‌ای مانند ζ' است به‌طوری که

$$|f(\zeta')| = \min_{z \in \bar{G}} |f(z)|. \qquad (۲۷')$$

برهان. بازبنا به‌فصل ۳، مسئلهٔ ۱۲ ج، حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{G}$ شامل نقطه‌ای مانند ζ' است که دررابطهٔ (۲۷′) صدق می‌کند. اگرثابت $f(z)\not\equiv$، بنابه «اصل قدرمطلق مینیموم» ζ' متعلق به G نیست، ودرنتیجه به‌مرز G تعلق دارد. اگر، ثابت $f(z)\equiv$ می‌توانیم ζ' را درمرز G انتخاب کنیم. □

د. نتیجه. حوزهٔ کراندار G مفروض است، $f(z)$ در G تحلیلی ومخالف صفر، در $\bar{G}$ پیوسته وروی مرز $\bar{G}$ ثابت فرض شده است. آنگاه $f(z)$ درتمام نقاط $\bar{G}$ ثابت است.

برهان. اگر Γ مرز G باشد، آنگاه بنابه دونتیجهٔ قبلی Γ شامل نقاط ζ و ζ' است که بترتیب درروابط (۲۷) و (۲۷′) صدق‌می‌کنند. ولی بنا به‌فرض $|f(\zeta')| = |f(\zeta)|$، ولذا

$$\max_{z\in\bar{G}}|f(z)| = \min_{z\in\bar{G}}|f(z)|.$$

بنابراین $|f(z)|$ در $\bar{G}$ ثابت است. اینك ازقضیهٔ ۷.۲.۱۰ نتیجه می‌شود که $f(z)$ در G ثابت ودرنتیجه (چون پیوسته است) در $\bar{G}$ ثابت است. □

۳.۳.۱۰. ازاصول قدرمطلق مینیموم و ماکزیموم *نیز* خواص مهمی از توابع همساز نتیجه می‌شود:

الف. قضیه. اگـر $u(x,y)$ در یك حـوزهٔ G همساز باشد و ثابت نباشد، آنـگاه $u(x,y)$ درهیچ نقطهٔ G نه ماکزیموم است‌ونه مینیموم.

برهان. نقطهٔ $(x_0,y_0)\in G$ مفروض است، فرض‌می‌کنیم K یك همسایگی (x_0,y_0) در G باشد. مانند بخش ۵.۸.۵، $f(z)$ را تابعی که در K تحلیلی و $u(x,y)$ قسمت‌حقیقی آن است، فرض می‌کنیم. آنگاه تابع

$$g(z) = e^{f(z)}$$

در K تحلیلی است وثابت نیست (چرا؟). بعلاوه، $g(z)$ در K مخالف صفر است (به بخش ۳.۱.۸هـ رجوع کنید) و

$$|g(z)|=e^{u(x,y)}$$

تابع $u(x,y)$ درنقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ ماکزیموم ندارد، زیرا درغیر این صورت $|g(z)|$ در $z_\circ=x_\circ+iy_\circ\in K$ دارای ماکزیموم می‌شود، که این خلاف اصل قدرمطلق ماکزیموم است. به همین ترتیب $u(x,y)$ در $(x_\circ,y_\circ)$ مینیموم ندارد، چون درغیر این صورت $|g(z)|$ در در $z_\circ$ مینیموم می‌شود، و این مخالف اصل قدرمطلق مینیموم است. □

ب. **نتیجه.** حوزهٔ کراندار G داده شده است، فرض می‌کنیم $u(x,y)$ در G همساز و در $\bar{G}$ پیوسته است. آنگاه مرز G شامل نقاط (ξ,η) و (ξ',η') است به طوری‌که

$$u(\xi,\eta)=\max_{(x,y)\in\bar{G}} u(x,y), \qquad u(\xi',\eta')=\min_{(x,y)\in\bar{G}} u(x,y).$$

برهان. در واقع با همان برهان نتایج ۲.۳.۱۰ ب و ۲.۳.۱۰ ج ثابت می‌شود. □

ج. **نتیجه.** حوزهٔ کراندار G داده شده‌است، فرض می‌کنیم $u(x,y)$ در G همساز و در $\bar{G}$ پیوسته است، و فرض می‌کنیم $u(x,y)$ در مرز G ثابت است. آنگاه $u(x,y)$ در G ثابت است.

برهان. درواقع باهمان برهان نتیجهٔ ۲.۳.۱۰ د ثابت می‌شود. □

د. **نتیجه.** حوزهٔ کراندار G داده شده است، فرض می‌کنیم $u_1(x,y)$ و $u_2(x,y)$ در G دو تابع همساز و در $\bar{G}$ پیوسته هستند و در مرز G، $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$ آنگاه در هر نقطهٔ G داریم:

$$u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$$

برهان. تابع

$$u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$$

درشرایط نتیجهٔ قبلی، که در آن مقدار ثابت صفر است، صدق می‌کند. □

چند توضیح

۱.۱۰. بخش ۱.۱۰ سرشار از نتایج مهم در آنالیز مختلط است، مانند نامساویهای کلیدی کوشی، قضیهٔ ۳.۱.۱۰ که موضوع آن رابطهٔ بین تابع تحلیلی و قابلیت بسط به سریهای توانی است (قبلاً نیز درتوضیح بخش ۱.۷ اهمیت آن تأکید شده است)، قضیهٔ ۵.۱.۱۰ که موضوع آن رابطهٔ بین شعاع همگرایی ومکان نقاط تکین است، و بالاخره قضیهٔ مشهور لیوویل درمورد ناکرانداری ذاتی توابع تام غیر ثابت. لازم است دانشجو براین

موضوعها تسلط کامل داشته باشد.

۲.۱۰. مسئلهٔ (۱۹) و استدلال «زنجیر قرصها» کــه در اثبات قضیهٔ ۳.۲.۱۰ به‌کار رفته است ، هر دو پیش‌بینی نظریهٔ « ادامهٔ تحلیلی »، مورد بحث بخش ۴.۱۳، را موجب می‌شوند.

۳.۱۰. طبق رابطهٔ (۲۶)، اگر تابعی در داخل و روی دایرهٔ γ تحلیلی باشد، مقدار آن درمرکز γ میانگین مقادیر تابع روی γ است. این مطلب برای تابع همساز نیز صحیح است (نتیجهٔ ۶.۱.۱۳). «اصول قدر مطلق مینیموم وماکزیموم» یك بار دیگرساختارمحکم توابع تحلیلی وهمساز راآشکار می‌سازند. چندان جای شگفتی نیست اگر به خاطرآوریم که توابــع تحلیلی در یك دستگاه معادلات دیفرانسیل بــا مشتقات جزئی مرتبهٔ اول، یعنی معادله‌های «کوشی ــ ریمان» صدق می‌کنند (بخش ۲.۲.۴)،حال آنکه توابع همساز دریك معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات‌جزئی مرتبهٔ دوم به نام معادله لاپلاس، مربوط به این معادله‌هـا، صدق می‌کنند (بخش‌۱.۸.۵).

مسائل

۱ . ثابت کنید در قرص $|z-1|<1$،

$$\ln z=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}-\dots$$

درحالی که درقرص $|z|<1$ *

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}-\dots$$

۲ . سری توانی زیر چه تابعی را مشخص می‌کند؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

۳ . عــدد مختلط دلخواه α داده شده است، مانند مسئلهٔ۶ فصل ۹ می‌نویسیم $z^\alpha=e^{\alpha\ln z}$. ثابت کنیدکه درقرص $|z-1|<1$،

$$z^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(z-1)^n$$

---

* درمسائل ۱ و ۳ و جواب مسئلهٔ ۲ ، منظور از $\ln z$ شاخهٔ یك مقداری لگاریتم است بــه طوری‌که $\ln 1=0$، یعنی شاخهٔ $(\ln z)_0$، با نمادی‌که در (۲.۲.۹) به‌کار رفته‌است.

درحالی‌که درقرص $|z|<1$،

$$(1+z)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}\cdot \qquad (28)$$

توضیح. فرمول (۲۸) تعمیم مناسب قضیهٔ دوجمله‌ای است به حالتی که α یك عدد مختلط دلخواه است.

۴. بسط تیلر e^{z} را درنقطهٔ $z=a$ بیابید.

۵. مطلوب است تعیین بسط $\cos z$ در نقطهٔ $z=\pi/4$.

۶. ثابت کنید که

$$\frac{1}{(1-z)^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^{n} \qquad (|z|<1),$$

$$\frac{2}{(1+z)^{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}(n+2)(n+1)z^{n} \qquad (|z|<1).$$

۷. ازمسئلهٔ قبل استفاده کرده، بسط تیلر $1/z^{2}$ را درنقطهٔ $z=-1$ وبسط تیلر تابع $1/z^{3}$ را درنقطهٔ $z=1$ تعیین‌نمایید. همین بسطها را با محاسبهٔ مستقیم ضرایب تیلر بیابید.

۸. بسط تیلر تابع

$$\frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

را درنقطهٔ $z=0$ پیدا کنید.

۹. رابطهٔ

$$\frac{1}{1+z+z^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(z^{3n}-z^{3n+1})$$

را در قرص $|z|<1$ ثابت‌کنید.

۱۰. سری

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_{k}(z), \qquad (29)$$

را که درآن هرتابع $f_{k}(z)$ درقرص باز $|z-z_0|<R$ تحلیلی است، درنظربگیرید. فرض کنید که سری (۲۹) در هر قرص بستهٔ $|z-z_0|\leqslant r<R$ همگرای یکنواخت است. ثابت‌کنید تابع $f(z)$، درقرص $|z-z_0|<R$ دارای بسط تیلر

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{۳۰}$$

است، با ضرایب تیلر

$$c_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(z_0)}{k!} \qquad (n=0,1,2,\dots). \tag{۳۱}$$

توضیح: ازرابطهٔ (۳۱) نتیجه می‌شود که ضریب هرتوان مفروض $(z-z_0)$ درطرف راست رابطهٔ (۳۰) برابراست بامجموع ضرایب همان توان جملهٔ $(z-z_0)$ دربسطهای تیلر توابع $\dots f_1(z), f_2(z)\dots, f_k(z)$.

۱۱. ثابت کنید که سری

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{1-z^k} \tag{۳۲}$$

معرف تابعی تحلیلی در قرص $|z|<1$ است.

۱۲. بسط تیلر تابع (۳۲) را در قرص واحد $|z|<1$ بیابید.

۱۳. فرض کنید که تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی و دارای بسط تیلر

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots+a_k(z-z_0)^k+\dots, \tag{۳۳}$$

است و $\varphi(w)$ در نقطهٔ $w_0=f(z_0)=a_0$ تحلیلی و دارای بسط تیلر

$$\varphi(w)=A_0+A_1(w-w_0)+\dots+A_n(w-w_0)^n+\dots \tag{۳۴}$$

است. فرض کنید دررابطهٔ (۳۴) به‌جای w، $f(z)$ گذاشته و به‌این‌ترتیب بسط صوری تابع مرکب $\varphi(f(z))$ را به‌صورت سری

$$\begin{aligned}\varphi(f(z))=A_0&+A_1[a_1(z-z_0)+\dots+a_k(z-z_0)^k+\dots]+\dots\\&+A_n[a_1(z-z_0)+\dots+a_k(z-z_0)^k+\dots]^n+\dots\end{aligned} \tag{۳۵}$$

به دست آورده‌ایم. همچنین فرض کنید تمام اعمال جبری موردلزوم در(۳۵)را به‌طور صوری انجام داده‌ایم، یعنی، فرض کنیدسری $\dots+a_1(z-z_0)+\dots+a_k(z-z_0)^k$ را به‌توانهای مذکوردر (۳۴) رسانده وسپس ضرایب هرتوان $z-z_0$ را دسته‌بندی کرده وبا هم جمع کرده‌ایم. بدین ترتیب سری جدیدی به‌صورت

$$\varphi(f(z))=b_0+b_1(z-z_0)+\dots+b_n(z-z_0)^n+\dots, \tag{۳۶}$$

حاصل می‌شود که می‌گویند از جایگزین کردن سری (۳۳) در (۳۴) به دست آمده

است. درستی بسط (۳۶) را ثابت کنید، یعنی نشان دهید که $\varphi(f(z))$ در نقطهٔ z تحلیلی است و درواقع طرف راست (۳۶) بسط تیلر تابع $\varphi(f(z))$ در نقطهٔ $z_{\circ}$ است.

۱۴. نخستین چهارجملهٔ اول بسط تیلر هر یك از توابع زیر را درنقطهٔ $z=\circ$ بنویسید:

الف) $e^{1/(1-z)}$؛ ب) $\sin\frac{1}{1-z}$؛ ج) $e^{z\sin z}$؛ د) $\sqrt{\cos z}$ (وقتی $\sqrt{\cos\circ}=1$).

۱۵. از فرمول انتگرال کوشی نتیجه بگیرید که اگر $f(z)$ تابعی تام باشد و $|a|<R$ و $|b|<R$، آنگاه

$$f(a)-f(b)=\frac{a-b}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z-a)(z-b)}\,.$$

این رابطه را به‌کار برده برهان دیگری برای اثبات قضیهٔ لیوویل ارائه دهید.

۱۶. قضیهٔ زیر راکه تعمیم قضیهٔ لیوویل است ثابت کنید:
اگر $f(z)$ تابعی تام باشد وتابع

$$M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|$$

در نامساوی

$$M(R)\leqslant MR^k,$$

صدق کند ودرآن M یك ثابت‌مثبت و k یك عدد صحیح ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ یك چندجمله‌ای است که درجهٔ آن از k بیشتر نیست.

۱۷. آیا تابعی وجود داردکه درنقطهٔ $z=\circ$ تحلیلی باشد ودر نقاط $z=1/n\ (n=1,2,\ldots)$ مقادیر زیر را بپذیرد؟

الف) $\circ,1,\circ,1,\circ,1,\ldots$؛ ب) $\circ,\frac{1}{2},\circ,\frac{1}{4},\circ,\frac{1}{6},\ldots$؛

ج) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\ldots$؛ د) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots$؟

۱۸. آیا تابعی وجود داردکه درنقطهٔ $z=\circ$ تحلیلی باشد و داشته باشیم.

الف) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$؛ ب) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}$.

۱۹. اتحاد مثلثاتی

$$\cos^2 z+\sin^2 z\equiv 1$$

را که در بخش ۴.۱.۸ الف ثابت کردیم ازاین راه دیگر که می‌دانیم اتحاد برای مقادیر حقیقی z برقرار است، به‌دست‌آورید. ازهمین تکنیك به‌دست‌آوردن اتحادهای مقادیر مختلط از اتحادهای نظیر برای مقادیر حقیقی، چندمثال بیاورید.

۲۰. ثابت‌کنید که اگر $f(z)$ و $g(z)$ در نقطهٔ z_0 تحلیلی باشندو در نقطهٔ z_0 صفرهای بترتیب از مرتبه‌های m و n داشته باشند، آنگاه $f(z)\,g(z)$ درنقطهٔ z_0 تحلیلی است و دراین نقطه صفری از مرتبهٔ $m+n$ دارد. در مورد تابع $f(z)+g(z)$ چه می‌توان گفت؟

۲۱. مرتبهٔ صفر تابع

$$۶\sin z^۳+z^۳(z^۶-۶)$$

را درنقطهٔ $z=0$ تعیین کنید.

۲۲. تمام صفرهای تابع

$$\sin\frac{۱}{۱-z}$$

را تعیین کرده نشان دهیدکه نقطهٔ $z=۱$ یك نقطهٔ حدی آنهاست. چرا این مطلب با قضیهٔ یکتایی برای توابع تحلیلی سازگار است؟

۲۳. ثابت کنیدکه اگر، ثابت $\not\equiv f(z)$ درمیدان همبند سادهٔ G تحلیلی باشد، آنگاه هرخم ژردان بستهٔ C واقع در G، بیش از تعدادی متناهی از ریشه‌های معادلهٔ $f(z)=A$ را دربر ندارد[۱]. A عدد مختلط متناهی دلخواهی است.

توضیح. اغلب ریشهٔ معادلهٔ $f(z)=A$ را «A ـ نقطهٔ» تابع $f(z)$ گویند. دقیقتر بگوییم، نقطهٔ z_0 را Aـ نقطهٔ مرتبهٔ mام تابع $f(z)$ گویند اگر z_0 یك صفر مرتبهٔ m ام تابع $f(z)-A$ باشد.

۲۴. فرض‌کنید $f(z)$ در حوزهٔ G تحلیلی و $f'(z)$ دریك نقطهٔ $z_0\in G$ صفر است. ثابت کنیدکه $f(z)$ در z_0 همدیس نیست.

۲۵. ثابت‌کنیدکه یك تابع تحلیلی‌که قسمت حقیقی آن ثابت است، خود نیز تابعی ثابت است. به‌بیان دقیقتر، ثابت کنیدکه اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تحلیلی و $Re\, f(z)$ در G ثابت باشد، آنگاه $f(z)$ در G ثابت است.

۲۶. برهان دیگری برای اثبات قضیهٔ ۷.۲.۱۰ براساس فرمول زیر ارائه دهید.

$$\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z).$$

---

۱. یعنی تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f(z)=A$ واقع درداخل خم C متناهی است. ـ م.

۲۷. حوزهٔ کراندار G مفروض است. فرض‌کنید $f(z)$ در G تحلیلی است، ثابت نیست، در $\bar{G}$ پیوسته است و $|f(z)|$ در مرز G ثابت است. ثابت‌کنید که حداقل یکی از نقاط G، صفر تابع $f(z)$ است.

۲۸. قضیهٔ زیر را که به لم شوارتس معروف است ثابت‌کنید: تابع $f(z)$ که در قرص $|z|<۱$ تحلیلی و در $z=۰$ برابرصفر است، داده شده‌است. فرض‌کنید که برای‌هر $|z|<۱$، $|f(z)|\leqslant ۱$. آنگاه برای هر $|z|<۱$، $|f(z)|\leqslant|z|$ وتساوی دریك نقطهٔ غیر صفر قرص فقط وقتی $f(z)=e^{i\theta}z$، که درآن θ عددی حقیقی است، به دست می‌آید.

۲۹. تعبیر هندسی لم شوارتس را بیان‌کنید.

۳۰. ثابت‌کنید که:

$$\int_{۰}^{۲\pi}\cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta)d\theta=۲\pi.$$

۱۱

سری لوران

۱.۱۱. بسط لوران یک تابع تحلیلی

۱.۱.۱۱. مطلب را بامطالعهٔ سریهایی شروع می‌کنیم که شبیه سریهای توانی هستند، جز آنکه شامل توانهای منفی متغیر z اند.

قضیه. سری زیر داده شده است

$$c_0+\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_n}{(z-a)^n}+\cdots, \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}.$$

دراین‌صورت سه‌حالت وجود دارد:

۱) اگر $l=0$، سری به‌ازای هر z در صفحهٔ گسترش یافته، جز $z=a$، همگرای مطلق است؛

۲) اگر $0<l<\infty$، سری به‌ازای هر z خارج دایرهٔ $|z-a|=l$، همگرای مطلق و برای هر z داخل دایرهٔ $|z-a|=l$، واگراست؛

۳) اگر $l=\infty$، سری به‌ازای هر z متناهی واگراست.

برهان. کافی است قضیهٔ ۴.۲.۷ را به‌کار بریم و توجه کنیم که تبدیل

$$\zeta=\frac{1}{z-a} \tag{۲}$$

سری(۱) را به‌سری زیر

$$c_0+c_1\zeta+c_2\zeta^2+\dots+c_n\zeta^n+\dots \tag{۱'}$$

به‌شعاع همگرایی

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

تبدیل می‌کند و نقاط $z=a$، $z=\infty$ را به‌نقاط $\zeta=\infty$، $\zeta=0$ می‌برد، در حالی‌که نقاط داخل دایرهٔ $|z-a|=l$ را به‌نقاط خارج دایرهٔ $|\zeta|=1/l$ می‌برد و برعکس. □

۲.۱.۱۱. واضح است که تبدیل (۲) هرحوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}$ واقع در خارج دایرهٔ $|z-a|=l$ را به‌توی حوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}'$ واقع در داخل دایرهٔ $|\zeta|=1/l$ می‌نگارد. اما سری (۱') در $\bar{D}'$ همگرای یکنواخت است، زیرا بنا برقضیهٔ ۷.۱.۷ در هر قرص بستهٔ $|\zeta|\leqslant\rho<1/l$ همگرای یکنواخت است. بنابراین سری(۱) در هرحوزهٔ بستهٔ کراندار $\bar{D}$ واقع درخارج دایرهٔ $|z-a|=l$ همگرای یکنواخت است. چون هرجملهٔ (۱) در خارج دایرهٔ $|z-a|=l$ تحلیلی است، از قضیهٔ ۹.۳.۶ نتیجه می‌شود که $f(z)$، مجموع سری (۱)، در هرنقطهٔ (متناهی) خارج دایرهٔ $|z-a|=l$ تحلیلی است. اگر $l=0$، دایرهٔ $|z-a|=l$ به نقطهٔ تکین $z=a$ تبدیل می‌شود، و به‌ازای هر $z\neq a$، $f(z)$ تحلیلی است.

۳.۱.۱۱. حال سری زیر را معرفی می‌کنیم

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{۳}$$

که به‌عنوان مجموع دوسری

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,\quad \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}, \tag{۳'}$$

تعبیر می‌شود. سری(۳) را که شامل توانهای مثبت و منفی $z-a$ است و به سری لوران معروف است همگرا تلقی می‌کنیم، اگر و فقط اگر هردوسری(۳') همگرا باشند. اولین سری(۳')،

که جزء منظم سری لوران(۳) نامیده می‌شود ، یک‌سری توانی معمولی به‌شعاع همگرایی

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

است، در حالی که دومین سری(′۳)که جزء اصلی (۳) خوانده می‌شود ، دارای رفتاری است که در قضیهٔ ۱۰۱۰۱۱ توصیف‌شده و برای آن

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}.$$

بنا براین سری(۳) درهرزیرحوزهٔ حلقهٔ

$$r<|z-a|<R, \tag{۴}$$

که بسته وکراندار باشد، همگرای مطلق و یکنواخت است، البته مشروط براینکه $r<R$*.
از قضیهٔ ۹.۳.۶ نتیجه می‌شود تابعی که به صورت

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{۵}$$

تعریف شده‌است درحلقهٔ(۴) تحلیلی‌است.توجه‌کنیدکه اگر $|z-a|<r$ یا $|z-a|>R$، آنگاه یکی از سریهای (′۳) واگرا، ولذا سری لوران(۳) واگراست.

۰۴۰۱۰۱۱ حال مشابه نتیجه‌ای را که قبلاً برای سری توانی در بخش ۲۰۱۰۱۰ ثابت شد، برای سری لوران ثابت می‌کنیم :

قضیه. اگر C دایرهٔ $|z-a|=\rho$ با فرض $r<\rho<R$ باشد، آنگاه ضرایب‌سری لوران (۵) با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots). \tag{۶}$$

برهان. سری (۵) روی C همگرای یکنواخت است، ولذا این‌مطلب برای‌هریک از سریهای زیرهم درست است

---

* از این به‌بعد وقتی در بارهٔ سری لوران‌گفتگو می‌کنیم همواره فرض خواهیم کرد که شرط $r<R$ برقرار است، به‌قسمی که سری در حلقهٔ $r<|z-a|<R$ همگراست. اگر $r=0$، حلقه به «قرص سوراخ دار»، $0<|z-a|<R$ و اگر $R=\infty$، حلقه بـه خارج دایرهٔ $|z-a|=r$ تبدیل‌می‌شود. اگـر $r=0$، $R=\infty$ ، حلقه به‌تمام صفحهٔ مختلط بجز نقطهٔ $z=a$ تبدیل می‌شود . ما اصطلاح حلقه را برای این حالات «تباهیده» نیز به‌کار خواهیم‌برد.

$$\frac{۱}{۲\pi i}\,\frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}=\frac{۱}{۲\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\frac{(z-a)^k}{(z-a)^{n+۱}}\quad (n=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots),\quad (۷)$$

زیرا به‌ازای هر $z\in C$

$$\left|\frac{۱}{۲\pi i}\,\frac{۱}{(z-a)^{n+۱}}\right|=\frac{۱}{۲\pi\rho^{n+۱}}$$

(به‌فصل ۶، مسئلهٔ ۱۲ رجوع کنید). بنا بر این طبق قضیهٔ ۸.۳.۶ می‌توانیم از (۷) جمله به‌جمله در طول C انتگرال بگیریم و به‌دست آوریم

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+۱}}\,dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\frac{۱}{۲\pi i}\int_C (z-a)^{k-n-۱}dz$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}\rho^{k-n}e^{i(k-n)\theta}d\theta=c_n,$$

که در آن از این واقعیت استفاده می‌کنیم که آخرین انتگرال در طرف راست اگر $k\neq n$، برابر صفر، و اگر $k=n$، برابر ۲π است. □

سری به‌صورت (۵) با ضرایبی که توسط فرمول (۶) به‌تابع مفروض $f(z)$ وابسته‌اند، بسط لوران $f(z)$ در حلقهٔ $r<|z-a|<R$ نامیده می‌شود. لذا می‌بینیم که هر سری لوران، بسط لوران مجموع خودش می‌باشد.

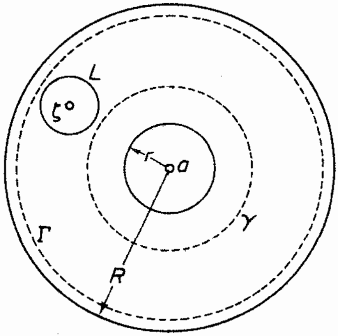
۵.۱.۱۱ طبق بخش ۳.۱.۱۱، سری لوران، معرف یك تابع تحلیلی در ناحیهٔ همگرائیش (یك‌حلقه) است. اینك عکس قضیه (مشابه قضیهٔ ۳.۱.۱۰ برای سری توانی) را ثابت می‌کنیم:

قضیه. اگر K حلقهٔ $r<|z-a|<R$ باشد و فرض کنیم $f(z)$ در K تحلیلی است، آنگاه، $f(z)$ دارای یك بسط لوران در K است، یعنی سری لوران (۵) با ضرایب (۶) درهرنقطهٔ K به $f(z)$ همگراست.

برهان. به‌ازای هر نقطهٔ مفروض $\zeta\in K$، اعداد r' و R' راطوری انتخاب می‌کنیم که

$$۰<r<r'<|\zeta-a|=\rho<R'<R.$$

اگر γ، دایرهٔ $|z-a|=r'$ و Γ دایرهٔ $|z-a|=R'$ باشند، و L، دایرهٔ به‌مرکز ζ، آنقدر کوچك باشد که در حلقهٔ $r'<|z-a|<R'$ جای بگیرد (شکل ۳۲ را ببینید)، آنگاه دوایر نامتقاطع γ و L داخل دایرهٔ Γ قراردارند، و تابع $f(z)/(z-\zeta)$ درحوزهٔ بستهٔ بین دایرهٔ خارجی Γ و دایرهٔ داخلی γ و دایرهٔ L تحلیلی است. از بخش ۳.۴.۵ نتیجه می‌شود که



شکل ۳۲

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz$$

اما بنا به‌فرمول انتگرال کوشی

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=f(\zeta),$$

زیرا $f(z)$ داخل و روی L تحلیلی است، ولذا

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz,$$

یا هم‌ارز آن

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{\zeta-z}dz. \qquad (8)$$

همان‌طور که اینك نشان می‌دهیم ، از اولین انتگرال طرف راست (۸) ، توانهای غیرمنفی $z-a$ درسری لوران(۵) به‌دست می‌آید، درحالی‌که دومین انتگرال به‌توانهای منفی $z-a$ منجر می‌شود. برای این‌منظور توجه می‌کنیم که اگر $z\in\Gamma$، که این شرط در اولین انتگرال صادق است، آنگاه، دقیقاً نظیر برهان قضیهٔ ۳.۱.۱۵،

$$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{(z-a)\left(1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \qquad (9)$$

که درآن از واقعیت

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{\rho}{R'}<1$$

استفاده کرده‌ایم. از طرف دیگر اگر $z\in\gamma$، که این شرط در انتگرال دوم صادق است، آنگاه

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(\zeta-a)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^{-n}}{(z-a)^{-n+1}}, \qquad (10)$$

زیرا این‌بار

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{r'}{\rho}<1.$$

از جانشین کردن (۹) و (۱۰) در (۸) و انتگرال گیری جمله به‌جمله،* به‌دست می‌آوریم

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(\zeta-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(\zeta-a)^{-n}, \qquad (11)$$

که در آن

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad (n=0,1,2,\dots), \qquad (12)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}dz \qquad (n=1,2,\dots). \qquad (12')$$

اما می‌توانیم در (۱۲) و ('۱۲) هردایرهٔ C به‌شعاع ρ و به مرکز ζ را جانشین Γ و γ کنیم، مشروط براینکه $r<\rho<R$ (چرا؟)، به‌قسمی که می‌توان (۱۲) و ('۱۲) را دریك تك‌فرمول(۶) ادغام کرد. برای تکمیل برهان فقط کافی است که(۱۱) را به‌صورت

$$f(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(\zeta-a)^n$$

بنویسیم و آنگاه ζ را با z عوض کنیم. □

---

* با یادی‌گرفتن از همگرایی یکنواخت سریهای حاصل بترتیب روی دوایر Γ و γ، این مطلب را به‌طریق معمول تحقیق کنید.

۶.۱.۱۱. فرض می کنیم به‌ازای هر $R>|z-a|>r$، $|f(z)|\leqslant M$. آنگاه قضیهٔ ۳.۲.۵ را در مورد(۶) به‌کار می‌بریم و نامساویهای کوشی

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{2\pi}\ \frac{2\pi\rho}{\rho^{n+1}}=\frac{M}{\rho^n}\qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\dots), \tag{۱۳}$$

را به‌دست می‌آوریم، که برای تمام مقادیر $r<\rho<R$ معتبرند. قبلاً در بخش ۲.۱.۱۰ برای حالت مقادیر نامنفی $n=0,1,2,\dots$ (و $r=0$)، (۱۳) را ثابت کرده‌ایم.

۷.۱.۱۱. مثال. تابع

$$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$$

در حلقهٔ $1>|z|>0$ دارای بسط لوران

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

و در حلقهٔ $1>|z-1|>0$ دارای بسط لوران

$$f(z)=\frac{1}{1+(z-1)}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$$

است.

۲.۱۱. نقاط تکین منفرد

۱.۲.۱۱. یك نقطهٔ(متناهی) z_0 مفروض است، گیریم $f(z)$ یك تابع تحلیلی یك‌مقداری است که در هر نقطهٔ یك‌همسایگی z_0، بجز خود z_0، تعریف شده است. در این صورت z_0 را یك نقطهٔ تکین منفرد $f(z)$ می‌نامند*. فرض می کنیم $f(z)$ در z_0 دارای یك نقطهٔ تکین منفرد است. لذا طبق قضیهٔ ۵.۱.۱۱، $f(z)$ در یك «همسایگی سفتهٔ» z_0، یعنی در حلقه‌ای به‌شکل** $R>|z-z_0|>0$ دارای بسط لوران زیر است

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n. \tag{۱۴}$$

حال سه‌حالت زیر وجود دارد:

---

* به‌بخش ۴.۱.۱۰ رجوع کنید و اصطلاح «منفرد» را در صورت قضیهٔ ۶.۲.۱۰ ببینید.

** در این‌حالت غالباً (۱۴) را بسط لوران $f(z)$ در نقطهٔ z_0 می‌نامیم.

۱) سری (۱۴) شامل هیچ توان منفی $z-z_0$ نیست، در این حالت z_0 را یک نقطهٔ تکین برداشتنی می‌نامند؛
۲) سری (۱۴) فقط شامل تعدادی متناهی از توانهای منفی $z-z_0$ است ، در این حالت z_0 را یک قطب می‌گویند؛
۳) سری (۱۴) شامل تعدادی بینهایت از توانهای منفی $z-z_0$ است، در این حالت z_0 را یک نقطهٔ تکین اساسی می‌خوانند.

اینک رفتار $f(z)$ را در هریک از این سه نوع نقاط تکین منفرد تجزیه و تحلیل می‌کنیم .

۲.۲.۱۱. نقاط تکین برداشتنی. اگر z_0 یک نقطهٔ تکین برداشتنی $f(z)$ باشد، طرف راست (۱۴) به یک سری توانی معمولی خلاصه می‌شود ، کــه مجموع $\varphi(z)$ آن در یک «همسایگی تمام» $|z-z_0|<R$ تحلیلی است (قضیهٔ ۹.۱.۷ را به‌خاطر آورید). بوضوح $\varphi(z)=f(z)$، اگر $z\neq z_0$ و $\varphi(z_0)=c_0$. بنابراین با تدبیر سادهٔ انتخاب

$$f(z_0)=c_0,$$

z_0 کــه نقطهٔ تکین $f(z)$ است به نقطهٔ منظم $f(z)$ تبدیل و $f(z)$ در z_0 تحلیلی می‌شود (به‌خاطر آورید که $f(z)$ اصلاً در z_0 تعریف نشده است) . بــا این معنا ومفهوم است که نقطهٔ تکین z_0، «برداشتنی» است. واضح است که اگر z_0 یک نقطهٔ تکین برداشتنی $f(z)$ باشد، آنگاه

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=c_0.$$

بویژه ، اعداد مثبت M و δ وجود دارند به‌طوری که اگر $0<|z-z_0|<\delta$ ، آنگاه، $|f(z)|\leqslant M$. به‌عبــارت دیگر ، اگر z_0 یک نقطهٔ تکین برداشتنی $f(z)$ باشد ، آنگاه $f(z)$ در یک همسایگی سفتهٔ z_0 کراندار است (فصل ۳، مسئلهٔ ۱۲ الف را ببینید).

۳.۲.۱۱. قطبها. حال فرض می‌کنیم z_0 یک قطب $f(z)$ است، یعنی فرض می‌کنیم که سری (۱۴) فقط شامل تعدادی متناهی از توانهای منفی $z-z_0$ است. گیریم بالاترین توان $1/(z-z_0)$ که در (۱۴) ظاهر می‌شود m باشد، به‌قسمی که

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}, \quad (14')$$

که در آن $c_{-m}\neq 0$. در این صورت نقطهٔ z_0 یک قطب مرتبهٔ mام $f(z)$ نامیده می‌شود. بویژه اگر $m=1$، z_0 را یک قطب ساده، و اگر $m>1$، آن‌را قطب چندگانه می‌گویند. باضرب دوطرف (′۱۴) در $(z-z_0)^m$، به‌دست می‌آوریم

$$(z-z_0)^m f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m}+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\cdots+c_{-m}, \tag{۱۵}$$

که در آن‌طرف راست(۱۵) یک‌سری توانی معمولی‌است، که جملهٔ ثابت c_{-m} آن‌مخالف صفر است . بنابراین نقطهٔ z_0 ، یک‌نقطهٔ تکین برداشتنی تابع $(z-z_0)^m f(z)$ است . بعلاوه

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}\neq 0,$$

و بنابراین

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}=\infty,$$

یعنی وقتی $z\to z_0$، تابع $f(z)$ به‌بینهایت میل‌می‌کند (به‌فصل ۳، مسئلهٔ۳ رجوع کنید.)

۴.۲.۱۱. قبل از بحث در حالت نقاط تکین اساسی،رابطهٔ بین صفرها و قطبها را بررسی می‌کنیم:

الف. قضیه . فرض می‌کنیم z_0 یک‌صفر مرتبهٔ mام تابع $f(z)$ که در z_0 تحلیلی است باشد. در این‌صورت $1/f(z)$ در یک همسایگی سفتهٔ z_0 تحلیلی است و z_0 یک قطب مرتبهٔ mام‌آن است.

برهان. بنا بر بخش ۵.۲.۱۰، $f(z)$ در z_0 یک‌بسط سری توانی به‌صورت

$$f(z)=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots \qquad (c_m\neq 0)$$

یا هم‌ارزآن ؛

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z) \tag{۱۶}$$

دارد، که درآن $\varphi(z)$ در z_0 تحلیلی ومخالف صفر است. از(۱۶) نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^m}\,\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z_0-z)^m}, \tag{۱۷}$$

که در آن تابع $\psi(z)=1/\varphi(z)$ نیز خود در z_0 تحلیلی و مخالف صفر است (چرا؟). بنابراین $1/f(z)$ در یک‌همسایگی سفتهٔ z_0 تحلیلی است. اگر بنویسیم

$$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots, \tag{۱۸}$$

در یک‌همسایگی سفتهٔ z_0، داریم

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(z_\circ)}{(z-z_\circ)^m}+\frac{\psi'(z_\circ)}{(z-z_\circ)^{m-1}}+\cdots$$

یعنی $z_\circ$ یك‌قطب مرتبهٔ mام $1/f(z)$ است. □

ب. قضیه. فرض می‌کنیم تابع $f(z)$ دریك همسایگی سفتهٔ $z_\circ$ تحلیلی و $z_\circ$ یك قطب مرتبهٔ m ام آن باشد. در این‌صورت $1/f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و $z_\circ$ یك‌صفر مرتبهٔ mام‌آن است، به‌شرط آنکه $1/f(z_\circ)$ را صفر بگیریم.

برهان. باتوجه به بخش ۳.۲.۱۱، $f(z)$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_\circ)^m},\tag{19}$$

که درآن وقتی $z\to z_\circ$، $\varphi(z)$ به‌حدی مخالف صفر مانند α میل می کند وبنابراین اگر $\varphi(z_\circ)$ را برابر α بگیریم، می‌توان گفت $\varphi(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و مخالف صفر است. از (۱۹) رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{f(z)}=(z-z_\circ)^m\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_\circ)^m\psi(z),$$

که درآن $\psi(z)$ نیز در $z_\circ$ تحلیلی ومخالف صفر است. بنابراین $1/f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی است، به‌شرط آنکه قراردهیم $1/f(z_\circ)=0$. با منظورکردن(۱۸)، دریك همسایگی $z_\circ$ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{f(z)}=\psi(z_\circ)(z-z_\circ)^m+\psi'(z_\circ)(z-z_\circ)^{m+1}+\cdots\qquad(\psi(z_\circ)\neq 0)$$

یعنی $z_\circ$ یك‌صفر مرتبهٔ mام $1/f(z)$ است. □

۵.۲.۱۱. نتیجه. اگر $f(z)$ در یك همسایگی سفتهٔ $z_\circ$، مخالف صفر و $z_\circ$ یك نقطهٔ تکین اساسی‌آن باشد، آنگاه $z_\circ$ یك‌نقطهٔ تکین اساسی $1/f(z)$ نیز هست.

برهان. اگر $z_\circ$ یك‌نقطهٔ تکین اساسی

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$$

نباشد، آنگاه $z_\circ$ یایك‌قطب، یایك‌نقطهٔ تکین برداشتنی $\varphi(z)$ است. درحالت‌اول، ازقضیهٔ ۴.۲.۱۱ب نتیجه‌می‌شود که $z_\circ$ یك‌صفر $f(z)$ است، که مخالف‌فرض‌است. درحالت دوم، یا

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z)=0, \qquad (۲۰)$$

یا

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z)\neq 0. \qquad (۲۰')$$

اگر (۲۰) برقرار باشد، آنگاه با توجه به‌قضیهٔ ۴.۲.۱۱ الف، $f(z)$ در z_0 یك‌قطب‌دارد که مخالف بافرض است، اما اگر(′۲۰) برقرار باشد $f(z)$ در z_0 یك‌نقطهٔ‌تکین‌برداشتنی دارد، که باز با فرض مخالف است. □

۶.۲.۱۱. رفتار تابع دریك‌نقطهٔ تکین اساسی درقضیهٔ مشهور زیر توصیف شده‌است.

قضیه (کازوراتی ـ وایرشتراس). اگر z_0 یك نقطهٔ تکین اساسی $f(z)$ باشد، آنگاه به‌ازای هرعدد مختلط مفروض A (متناهی یا نامتناهی)، دنباله‌ای از نقاط z_n وجود دارد که به z_0 همگراست، به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=A. \qquad (۲۱)$$

برهان. ابتدا گیریم $A=\infty$. فرض کنید $f(z)$ دریك همسایگی سفتهٔ z_0 کراندار است، به‌طوری که به‌ازای هر z واقع در حلقهٔ $0<|z-z_0|<R$، $|f(z)|\leqslant M$. در این‌صورت، بنا برنامساوی کوشی (بخش ۶.۱.۱۱)، به‌ازای هر $0<\rho<R$

$$|c_n|\leqslant\frac{M}{\rho^n} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

در حالت $n<0$، ρ را به‌صفر میل می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$c_n=0 \qquad (n=-1,-2,\ldots).$$

بنابراین سری لوران(۱۴) شامل هیچ توان منفی $z-z_0$ نیست، یعنی z_0 به‌جای یك نقطهٔ تکین اساسی، یك‌نقطهٔ تکین برداشتنی $f(z)$ است. این تناقض نشان می‌دهد که $f(z)$ نمی‌تواند در هیچ همسایگی سفتهٔ z_0 کراندار باشد. لذا به‌ازای هرعدد صحیح مثبت مفروض n، یك‌نقطهٔ z_n وجود دارد به‌طوری که

$$0<|z_n-z_0|<\frac{1}{n}, \quad |f(z_n)|>n.$$

اما این مطلوب ماست زیرا دنبالهٔ z_n به z_0 همگراست و

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=\infty.$$

حال فرض می‌کنیم A یك عدد مختلط متناهی است. اگر هرهمسایگی سفتهٔ $z_{\circ}$ شامل یك نقطهٔ z باشد، به قسمی که $f(z)=A$، واضح است که قضیه ثابت شده‌است. لذا فرض می‌کنیم که یك همسایگی سفتهٔ $z_{\circ}$ مانند K هست که در آن $f(z)\neq A$. دراین‌صورت تابع

$$\varphi(z)=\frac{۱}{f(z)-A}$$

بنا بر نتیجهٔ ۵.۲.۱۱ در K تحلیلی است و $z_{\circ}$ یك نقطهٔ تکین اساسی آن است. پس بنا بر قسمت اول برهان، یك دنبالهٔ z_n که به $z_{\circ}$ همگراست وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\infty, \qquad (۲۱')$$

و $(۲۱')$ هم ارز با (۲۱) است.□

اگر $z_{\circ}$ یك نقطهٔ تکین اساسی $f(z)$ باشد، آنگاه

$$\lim_{z\to z_{\circ}}f(z) \qquad (۲۲)$$

وجود ندارد. زیرا، فرض می‌کنیم (۲۲) وجود دارد ومساوی یك عدد $A_{\circ}$ (متناهی یا نامتناهی) است. دراین صورت $f(z)$ بایدبرای هر z به قدرکافی نزدیك به $z_{\circ}$، نزدیك به $A_{\circ}$ باشد که با قضیهٔ ۶.۲.۱۱ در تناقض است.

۷.۲.۱۱ مثال. تابع

$$f(z)=e^{۱/z}=۱+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{۲!}\frac{۱}{z^{۲}}+\frac{۱}{۳!}\frac{۱}{z^{۳}}+\cdots \qquad (۲۳)$$

بوضوح در $z=\circ$ یك نقطهٔ تکین اساسی دارد. اگر $A=\infty$، دنبالهٔ $z_n=۱/n\ (z_n\to\circ)$ درشرط (۲۱) صدق می‌کند، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\lim_{n\to\infty}e^{n}=\infty.$$

اگر $A=\circ$، دنبالهٔ $z_n=-۱/n(z_n\to\circ)$ درشرط (۲۱) صدق می‌کند، زیرا

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\lim_{n\to\infty}e^{-n}=\circ.$$

ازطرف دیگر، اگر $A\neq\infty$، $A\neq\circ$، آنگاه ازحل معادلهٔ

$$e^{۱/z}=A,$$

$$z=\frac{۱}{\ln A}, \qquad (۲۴)$$

به دست می‌آید. فرض می‌کنیم $(\ln z)_\circ$ آن شاخهٔ لگاریتم است که $\circ \leqslant \arg z < ۲\pi$ (به بخش ۲.۲.۹ رجوع کنید). آنگاه (۲۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$z = \frac{۱}{(\ln A)_\circ + ۲k\pi i}, \qquad (۲۴')$$

که درآن k عددی صحیح است. با انتخاب

$$z_n = \frac{۱}{(\ln A)_\circ + ۲n\pi i} \quad (n = ۱, ۲, \cdots),$$

یك دنبالهٔ z_n به دست می‌آید که به صفر همگراست و درشرط (۲۱)، و در واقع درشرط خیلی قویتر

$$f(z_n) = A \qquad (n = ۱, ۲, \cdots) \qquad (۲۵)$$

صدق می‌کند.

۳.۱۱. مانده‌ها

۱.۳.۱۱. تعریف. فرض می‌کنیم $z_\circ$ یك نقطهٔ تکین منفرد تابع $f(z)$ است. در این صورت منظور از ماندهٔ $f(z)$ در $z_\circ$ که با

$$\operatorname*{Res}_{z=z_\circ} f(z),$$

نشان داده می‌شود، ضریب $c_{-۱}$ در بسط لوران زیر است

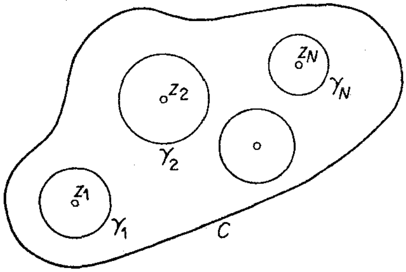
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n.$$

توجه کنید که اگر $z_\circ$ یك قطب یا یك نقطهٔ تکین اساسی باشد ممکن است ماندهٔ $f(z)$ در $z_\circ$ صفر یا مخالف‌صفر باشد، اما اگر $z_\circ$ یك نقطهٔ تکین برداشتنی باشد، مانده خود به‌خود صفر است.

۲.۳.۱۱. قضیه (قضیهٔ مانده) . اگر $f(z)$ داخل و روی یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C، بجز درنقاط تکین منفرد $z_۱, \ldots, z_N$ واقع در داخل C، تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_C f(z)\,dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{N} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad (۲۶)$$

برهان. مانند شکل ۳۳، گیریم $\gamma_۱, \ldots, \gamma_N$ بترتیب دوایری به مراکز $z_۱, \ldots, z_N$، و



شکل ۳۳

آن قدر کوچک‌اند که همگی درداخل C جای گرفته و یکدیگر را قطع نمی‌کنند. بنابراین طبق بخش ۳.۴.۵،

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} f(z)dz, \tag{۲۷}$$

که درآن، خمهای C، $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ همگی درجهت مثبت (خلاف جهت‌حرکت عقربهٔ‌ساعت) طی می‌شوند. فرض می‌کنیم بسط لوران $f(z)$ در z_k به صورت زیر است

$$f(z) = \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n^{(k)}(z-z_k)^n \qquad (k=1,\ldots,N)\cdot \tag{۲۸}$$

از انتگرال‌گیری جمله به جمله از(۲۸) درطول γ_k، که به دلیل همگرایی یکنواخت‌سری روی γ_k مجاز است، به دست می‌آوریم

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\gamma_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)}(z-z_k)^n dz = \sum_{n-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} \int_{\gamma_k} (z-z_k)^n dz$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} \int_0^{2\pi} (r_k e^{i\theta})^n d(r_k e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i r_k^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta, \tag{۲۹}$$

که در آن r_k شعاع γ_k است. اما

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{اگر } n=-1\text{،} \\ 0 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

بنابراین (۲۹) به صورت زیرخلاصه می‌شود

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}^{(k)} \qquad (k=1,\ldots,N)\cdot \tag{۳۰}$$

سرانجام، با جانشین‌کردن (۳۰) در (۲۷) به دست می‌آوریم

$$\int_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{\gamma_k} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N} c_{-1}^{(k)}=2\pi i\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \square$$

۰۳.۳.۱۱ مثال. مقدار انتگرال زیر را به‌دست آورید

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^n}dz.$$

حل. عبارت زیر انتگرال فقط یك نقطهٔ تکین در داخل دایـرهٔ $|z|=2$ ، یعنی یك قطب مرتبهٔ n در $z=1$ دارد. بنابراین مطابق قضیهٔ مانده،

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^n}dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^n}. \tag{۳۱}$$

$e^z/(z-1)^n$ را بـه سری لوران در یك همسایگی سفتهٔ $z=1$ بسط می‌دهیم، بـه دست می‌آوریم

$$\frac{e^z}{(z-1)^n}=e\frac{e^{z-1}}{(z-1)^n}$$

$$=\frac{e}{(z-1)^n}\left[(1+(z-1)+\cdots+\frac{(z-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(z-1)^n}{n!}+\cdots\right]$$

$$=e\left[\frac{1}{(z-1)^n}+\frac{1}{(z-1)^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{n!}+\cdots\right],$$

واز آنجا

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^n}=\frac{e}{(n-1)!}. \tag{۳۲}$$

از (۳۱) نتیجه می‌شود که

$$\int_{|z|=2}\frac{e^z}{(z-1)^n}dz=\frac{2\pi ie}{(n-1)!}.$$

۰۴.۳.۱۱ حال نشان می‌دهیم کـه چگونه مانده‌ها را دریك قطب محاسبه‌کنیم بدون اینکه نظیر مثال بالا از سری لوران به طور صریح استفاده نماییم. ابتدا فـرض می‌کنیم z_0 یك قطب سادهٔ $f(z)$ است، به‌طوری که $f(z)$ دریك همسایگی سفتهٔ z_0، بسط لورانی به‌صورت زیر دارد

$$f(z)=\frac{c_{-۱}}{z-z_۰}+c_۰+c_۱(z-z_۰)+\dots$$

دراین صورت

$$(z-z_۰)f(z)=c_{-۱}+c_۰(z-z_۰)+c_۱(z-z_۰)^۲+\dots,$$

که درآن،طرف راست یك سری توانی معمولی است و لذا در $z_۰$ پیوسته است. بنابراین نتیجه می‌شود که

$$c_{-۱}=\operatorname*{Res}_{z=z_۰} f(z)=\lim_{z\to z_۰}(z-z_۰)f(z). \qquad (۳۳)$$

محاسبه بسیار ساده است، اگر $f(z)$ به شکل

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

باشد، که‌درآن $\varphi(z_۰)\neq ۰$ و $z_۰$ یك صفرسادهٔ $\psi(z)$ است،یعنی $\psi(z_۰)=۰$، $\psi'(z_۰)\neq ۰$. آنگاه $z_۰$ یك قطب سادهٔ $f(z)$ است، وازآنجا بنابه (۳۳)،

$$\operatorname*{Res}_{z=z_۰} f(z)=\operatorname*{Res}_{z\to z_۰}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_۰}\frac{(z-z_۰)\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$=\lim_{z\to z_۰}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_۰)}{z-z_۰}}=\frac{\varphi(z_۰)}{\psi'(z_۰)}. \qquad (۳۴)$$

حال فرض می‌کنیم $z_۰$ یك قطب مرتبهٔ $m>۱$ ام $f(z)$ باشد. در این صورت بسط لوران $f(z)$ در $z_۰$ به صورت زیر است

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_۰)^m}+\dots+\frac{c_{-۱}}{z-z_۰}+c_۰+c_۱(z-z_۰)+\dots,$$

و لذا

$$(z-z_۰)^m f(z)=c_{-m}+\dots+c_{-۱}(z-z_۰)^{m-۱}$$
$$+c_۰(z-z_۰)^m+c_۱(z-z_۰)^{m+۱}+\dots \qquad (۳۵)$$

از (۳۵)، $m-۱$ بار مشتق می گیریم، به‌دست می‌آید

$$\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}[(z-z_۰)^m f(z)]=(m-۱)!c_{-۱}+\frac{m!}{۱!}c_۰(z-z_۰)$$

$$+\frac{(m+1)!}{2!}c_1(z-z_0)^2+\cdots,$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(m-1)!c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)],$$

یا

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \qquad (۳۶)$$

توجه کنید که اگر $m=1$، (۳۶) به (۳۳) تبدیل می‌شود. (۳۶) را درمورد مثال ۳.۳.۱۱ به‌کاربرده پیدا می‌کنیم که

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^z}{(z-1)^n}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(n-1)!}\ \frac{d^{n-1}e^z}{dz^{n-1}}=\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(n-1)!}=\frac{e}{(n-1)!},$$

که با (۳۲) هماهنگ است.

چند توضیح

۱.۱۱. انگیزهٔ ملاحظات بخش ۱.۱۱ اشتیاق به تعمیم نظریهٔ بخش ۱.۱۰ به‌توابعی است که در بعضی از نقاط منفرد، خاصیت تحلیلی بودن را از دست می‌دهند. این موضوع ما را برآن‌می‌دارد حالتی را درنظربگیریم که $f(z)$ به‌جای اینکه دریک‌قرص‌کامل تحلیلی باشد فقط دریك حلقهٔ K تحلیلی‌است. دراین صورت قضیهٔ ۵.۱.۱۱ (نظیرقضیهٔ ۳.۱.۱۰) حکم می‌کند که $f(z)$ مجموع یك سری لوران است (به‌جای یك سری توانی) که در K همگراست، این تبدیل ناحیهٔ تحلیلی بودن $f(z)$ از یك قرص به یك حلقه، به بهای تبدیل سری تیلر $f(z)$ در a به بسطی شامل قوای منفی $z-a$ (که درآن a مرکز K است) تمام شده است. با وجـود این پیچیدگی، قضیهٔ ۵.۱.۱۱ همچنان یکی از نتایج اساسی آنالیز مختلط‌محسوب‌می‌شود، زیرا نقطهٔ‌شروع بررسی‌توابع با نقاط تکین‌منفرد‌است(بخش ۱.۲.۱۱).

۲.۱۱. توجه شما را به صورت دیگر معرفی نقاط تکین منفرد، که درمسئلهٔ ۱۵ آمده است جلب می‌کنیم. دراین مسئله، نقاط تکین منفرد، برحسب رفتارحدی تابع $f(z)$ درنقطهٔ تکین مشخص شده‌اند. طبق قضیهٔ جالب زیر کــه به قضیهٔ پیکار معروف است معادلهٔ (۲۵) اتفاقی‌نیست*: اگر z_0 یك نقطهٔ تکین اساسی $f(z)$ باشد، آنگاه برای‌هرعدد مختلط‌مفروض

---

* این قضیه برای مثال در کتاب سابق الذکر *A.I.Markushevich, volume* III, sec 51 اثبات شده است.

$A\neq\infty$ احتمالاً* به استثنای یك تك مقدار $A=A_{\circ}$، دنباله‌ای از نقاط z_n وجود دارد که به $z_{\circ}$ همگرا ودر (۲۵) صادق است. توجه کنیدکـه درحالت تابع (۲۳)، عدد $A_{\circ}=\circ$ مقدار استثنایی مـورد اشاره در قضیهٔ پیکار است، زیرا $e^{1/z}$ هرگز صفر نمی‌شود (بخش ۳.۱.۸ ه).

۳.۱۱. هرقدر در اهمیت‌تعریف ۱.۳.۱۱ وقضیهٔ ۲.۳.۱۱ (قضیهٔ مانده) تأکید شود زیاده نخواهد بـود. فصل ۱۲ بتمامی وقف بعضی از کاربردهـای متنوع نظریهٔ مانده‌هـا شده است.

مسائل

۱. ثابت‌کنیدکه سری لوران یکتایی ازمتغیر $z-z_{\circ}$، وبه مجموع مفروض روی دایره‌ای به مرکز $z_{\circ}$ وجود دارد.

۲. بسط لوران تابع

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (\circ<|a|<|b|)$$

را

الف) دریك همسایگی سفتهٔ نقطهٔ $z=\circ$؛

ب) دریك همسایگی‌سفتهٔ نقطهٔ $z=a$؛

ج) درحلقهٔ $|a|<|z|<|b|$؛

د) درحوزهٔ $|z|>|b|$

بیابید.

۳. بسط لوران تابع $e^{z+(1/z)}$ را درحوزهٔ $\circ<|z|<\infty$ پیدا کنید.

۴. قسمت اصلی بسط لوران هریك ازتوابع زیر را درنقطهٔ داده شدهٔ $z_{\circ}$ بیابید:

الف) $\frac{z}{(z+2)^2}(z_{\circ}=-2)$؛ ب) $\frac{e^z+1}{e^z-1}(z_{\circ}=2\pi i)$؛ ج) $\frac{z-1}{\sin^2 z}(z_{\circ}=\circ)$؛

د) $\frac{e^{iz}}{z^2+b^2}(z_{\circ}=ib,b>\circ)$؛ ه) $\frac{1}{\sin\pi z}(z_{\circ}=n)$؛ و) $\cot\pi z\ (z_{\circ}=n)$ ·

(n عدد صحیح دلخواهی است).

۵. آیا می‌تـوان تابع $\ln(1/(1-z))$ را درحـوزهٔ $|z|>1$ بـه صورت‌سری لوران بسط داد؟

۶. فرض‌کنید $f(z)$ شاخه‌ای از تابع $\sqrt{1+z^2}$ است‌که درصفحهٔ z که درطول قطعه خط

واصل i و $-i$ بریده شده تعریف شده است، بـه طوری کـه $f(-۳/۴)=۵/۴$. بسط لوران $f(z)$ را در حوزهٔ $|z|>۱$ بیابید.

۰۷ فرض کنید $f(z)$ یك کسر گویا، یعنی نسبت دو چند جمله‌ای به صورت

$$f(z)=\frac{a_۰+a_۱z+\cdots+a_mz^m}{b_۰+b_۱z+\cdots+b_nz^n} \qquad (a_m\neq ۰, b_n\neq ۰) \qquad (۳۷)$$

باشد. نقاط تکین متناهی $f(z)$ را توصیف کنید، فرض کنید که صورت ومخرج،صفرهای مشترك ندارند.

۰۸ فرض کنید $f(z)$ یك قطب مرتبهٔ mام در نقطهٔ $z_۰$ دارد. ثابت کنید کـه $f^{(n)}(z)$،مشتق مرتبهٔ nام در $z_۰$،یك قطب مرتبهٔ $n+m$ ام دارد.

۰۹ فرض کنید $z_۰$ بترتیب قطب مرتبهٔ mام و nام $f(z)$ و $g(z)$ است. رفتار هر یـك از توابع زیر را در $z_۰$ توصیف کنید:

الف) $f(z)+g(z)$؛ ب) $f(z)g(z)$؛ ج) $\frac{f(z)}{g(z)}$.

۰۱۰ تمام نقاط تکین (متناهی) هریك ازتوابع زیر را تعیین کنید:

الف) $\frac{۱}{z-z^۳}$؛ ب) $\frac{z^۴}{۱+z^۴}$؛ ج) $\frac{z^۵}{(۱-z)^۲}$؛ د) $\frac{۱}{z(z^۲+۴)^۲}$؛ ه) $\frac{e^z}{۱+z^۲}$؛

و) $\frac{z^۲+۱}{e^z}$؛ ز) ze^{-z}؛ ح) $\frac{۱}{e^z-۱}-\frac{۱}{z}$.

۰۱۱ خواسته مسئلهٔ قبل را درمورد توابع زیر نیز انجام دهید:

الف) $\frac{z}{\sin z}$؛ ب) $\frac{\cos z}{z^۲}$؛ ج) $\frac{۱}{\sin\frac{۱}{z}}$؛ د) $\tan^۲ z$؛ ه) $\cot z-\frac{۱}{z}$؛

و) $\cot\frac{۱}{z}$؛ ز) $e^{\cot(۱/z)}$؛ ح) $\sin\left(\frac{۱}{\cos\frac{۱}{z}}\right)$.

۰۱۲ ثابت کنید که اگر $z_۰$ یك نقطهٔ تکین اساسی $f(z)$، و K یك همسایگی سفتهٔ $z_۰$ باشد، آنگاه هر نقطهٔ صفحهٔ گسترش یافتهٔ w یك نقطهٔ حدی نگارهٔ K تحت نگاشت $w=f(z)$ است.

۰۱۳ نشان دهید که اگر $z_۰$ یك نقطهٔ حدی قطبها باشد، قضیهٔ ۶.۲.۱۱ معتبر باقی می‌ماند.

۱۴. درستی قضیهٔ پیکار را درمورد $\sin(1/z)$ درنقطهٔ $z=0$ تحقیق‌کنید. آیا نقطه‌ای استثنایی وجود دارد؟

۱۵. عبارت

$$\lim_{z\to z_0} f(z), \qquad (۳۸)$$

را که در آن z_0 یك نقطهٔ تکین منفرد $f(z)$ است درنظر بگیرید. نشان داده‌ایم‌که
الف) (۳۸) وجود دارد ومتناهی است، اگر z_0 یك نقطهٔ تکین برداشتنی باشد؛
ب) (۳۸) وجود دارد ونامتناهی است، اگر z_0 یك قطب باشد؛
ج) (۳۸) وجود ندارد، اگر z_0 یك نقطهٔ تکین اساسی باشد.

ثابت‌کنیدکه برعکس
الف′) z_0 یك نقطهٔ تکین برداشتنی است، اگر (۳۸) وجود داشته ومتناهی باشد؛
ب′) z_0 یك قطب است، اگر (۳۸) وجود داشته ونامتناهی باشد؛
ج′) z_0 یك نقطهٔ تکین اساسی است، اگر (۳۸) وجود نداشته باشد.

۱۶. فرض‌کنید $f(z)$ یك بسط لوران به‌شکل زیر دارد

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-n}}{z^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n+\cdots$$

$$(R<z<\infty), \qquad (۳۹)$$

ودریك همسایگی سفتهٔ بینهایت (به بخش ۴.۴.۲ رجوع‌کنید) تحلیلی است. در این صورت نقطهٔ بینهایت (∞) را یك نقطهٔ تکین منفرد $f(z)$ می‌نامند، دقیقتر بگوییم
الف) یك نقطهٔ تکین برداشتنی گویند، اگرسری (۳۹) شامل هیچ توان مثبت z نباشد؛
ب) یك قطب مرتبه m گویند، اگر (۳۹) فقط شامل تعدادی متناهی از توانهای مثبت z بوده z^m بالاترین توان مثبت z باشد؛
ج) یك نقطهٔ تکین اساسی گویند، اگر (۳۹) شامل بینهایت توان مثبت z باشد.
ثابت‌کنیدکه طبیعت نقطهٔ تکین $f(z)$ در $z=\infty$ دقیقاً همان طبیعت نقطهٔ تکین تابع $\varphi(\zeta)=f(1/\zeta)$ در $\zeta=0$ است. نشان دهیدکه اگر

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \qquad (۳۸')$$

جانشین (۳۸) شود، شش حکم مسئلهٔ ۱۵ برای $z_0=\infty$ معتبر باقی می‌مانند.

۱۷. نشان دهید اگر $z_0=\infty$، قضیهٔ ۶.۲.۱۱ معتبر باقی می‌ماند.

۱۸. ثابت‌کنیدکسر گویای (۳۷) یك نقطهٔ تکین برداشتنی در∞ دارد اگر $m\leqslant n$، ویك قطب از مرتبهٔ $m-n$ در ∞ دارد اگر $m>n$.

۱۹. رفتار هریك از توابع مسئلهٔ ۱۰ را در ∞ بررسی کنید.

۲۰. همین بررسی را برای توابع مسئلهٔ ۱۱ انجام دهید.

۲۱. مانده‌های هریك ازتوابع $f(z)$ زیر را درتمام نقاط (متناهی) تکین منفردشان بیابید.

الف) $\frac{1}{z^3-z^5}$؛ ب) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$؛ ج) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$؛ د) $\frac{e^z}{z^2+9}$؛ ه) $\frac{1}{\sin z}$؛

و) $\sin\frac{z}{z+1}$؛ ز) $\sin z \sin\frac{1}{z}$؛ ح) $z^n \sin\frac{1}{z}$ (n یك عدد صحیح است).

۲۲. مطلوب است

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)g(z)$$

اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد و
الف) $g(z)$ در z_0 یك قطب ساده با ماندهٔ c_{-1} داشته باشد؛
ب) $g(z)$ در z_0 یك قطب مرتبهٔ m ام داشته، قسمت اصلی آن

$$\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\dots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$$

باشد.

۲۳. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz.$$

۲۴. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1},$$

که درآن C دایرهٔ $x^2+y^2=2x$ است.

۲۵. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int_{|z|=1} z^n e^{2/z}\,dz,$$

که درآن n یك عدد صحیح است.

۲۶. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int_C \frac{dz}{(z-۱)(z-۲)^۲},$$

که درآن C دایره $|z-۲| = ۱/۲$ است.

۲۷. مقدار انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int_{|z|=n} \tan \pi z.$$

۲۸. فرض کنید $f(z)$ دریك همسایگی سفتهٔ بینهایت تحلیلی است و بسط لوران آن به شکل زیر است.

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{c_{-۱}}{z} + c_۰ + c_۱ z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

$$(R < |z| < \infty).$$

دراین صورت منظور از ماندهٔ $f(z)$ دربینهایت که با

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)$$

نشان داده می‌شود عدد $-c_{-۱}$ است (به علامت منفی توجه کنید). مطلوب است

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f^۲(z).$$

۲۹. فرض کنید $f(z)$ درهر نقطهٔ صفحهٔ متناهی بجز در نقاط تکین منفرد $z_۱, \ldots, z_n$ تحلیلی است. ثابت کنید که

$$\operatorname*{Res}_{z=z_۱} f(z) + \cdots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = ۰.$$

۳۰. از محاسبات طولانی اجتناب کرده، نشان دهید که

$$\int_{|z|=۲} \frac{dz}{(z-۳)(z^۵-۱)} = -\frac{\pi i}{۱۲۱}.$$

محاسبه سریعی از انتگرال مسئلهٔ ۲۳ را ارائه دهید.

۳۱. از مانده‌ها استفاد کرده، نشان دهید که

$$\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \frac{dx}{\text{۱}-\text{۲}p\cos x+p^{\text{۲}}}=\frac{\text{۲}\pi}{\text{۱}-p^{\text{۲}}} \qquad (\circ<p<\text{۱}).$$

۳۲. ثابت کنید که

$$\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \frac{dx}{(p+q\cos x)^{\text{۲}}}=\frac{\text{۲}\pi p}{(p^{\text{۲}}-q^{\text{۲}})^{\text{۳/۲}}} \qquad (p>q>\circ).$$

۳۳. ثابت کنید که

$$\int_{\circ}^{\pi} \cot(x-a)dx=\begin{cases} \pi i & \text{اگر } \operatorname{Im} a>\circ \\ -\pi i & \text{اگر } \operatorname{Im} a<\circ \end{cases}$$

(اگر $\operatorname{Im} a=\circ$، انتگرال واگراست).

۱۲

کاربردهای مانده‌ها

۱.۱۲. مانده‌های لگاریتمی و اصل آوند

۱۲.۱.۱. منظور از ماندهٔ لگاریتمی تابع $f(z)$ درنقطهٔ a مقدار

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)};$$

یعنی ماندهٔ مشتق لگاریتمی

$$\frac{d \ln f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

در a است*. فرض می‌کنیم a یك صفر مرتبهٔ αام $f(z)$ باشد. آنگاه بسط تیلر $f(z)$ در a به‌شکل زیر است

$$f(z) = c_\alpha (z-a)^\alpha + c_{\alpha+1}(z-a)^{\alpha+1} + \dots \quad (c_\alpha \neq 0),$$

درنتیجه

$$f'(z) = \alpha c_\alpha (z-a)^{\alpha-1} + (\alpha+1) c_{\alpha+1} (z-a)^\alpha + \dots,$$

---

* می‌نویسیم $d \ln f(z)/f(z)$، چون می‌دانیم‌که شاخه‌های $\ln f(z)$ همگی یك مشتق دارند (فصل ۹، مسئلهٔ ۸ را ببینید.)

بنابراین

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\alpha c_\alpha(z-a)^{\alpha-1}+(\alpha+1)c_{\alpha+1}(z-a)^\alpha+\cdots}{c_\alpha(z-a)^\alpha+c_{\alpha+1}(z-a)^{\alpha+1}+\cdots},$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-a}\,\frac{\alpha+(\alpha+1)\frac{c_{\alpha+1}}{c_\alpha}(z-a)+\cdots}{1+\frac{c_{\alpha+1}}{c_\alpha}(z-a)+\cdots}$$

$$=\frac{\alpha}{z-a}+c'_0+c'_1(z-a)+\cdots$$

که درآن c'_0 ، c'_1، ... مقادیرمناسبی هستند. پس ماندهٔ لگاریتمی $f(z)$ در a برابراست با

$$\operatorname*{Res}_{z=a}\frac{f'(z)}{f(z)}=\alpha, \qquad (1)$$

یعنی مرتبهٔ صفر در a.

همچنین اگر b قطب مرتبهٔ βام $f(z)$ باشد، آنگاه بسط لوران $f(z)$ در b به‌صورت زیراست.

$$f(z)=\frac{c_{-\beta}}{(z-b)^\beta}+\frac{c_{-\beta+1}}{(z-b)^{\beta-1}}+\cdots \quad (c_{-\beta}\neq 0),$$

وازآنجا

$$f'(z)=-\frac{\beta c_{-\beta}}{(z-b)^{\beta+1}}-\frac{(\beta-1)c_{-\beta+1}}{(z-b)^\beta}+\cdots.$$

بنابراین به‌ازای مقادیرمناسب ... $c'_0, c'_1,$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z-b}\,\frac{-\beta c_{-\beta}-(\beta-1)c_{-\beta+1}(z-b)+\cdots}{c_{-\beta}+c_{-\beta+1}(z-b)+\cdots}$$

$$=\frac{-\beta}{z-b}+c'_0+c'_1(z-b)+\cdots$$

به‌طوری که ماندهٔ لگاریتمی $f(z)$ در b برابراست با

$$\operatorname*{Res}_{z=b}\frac{f'(z)}{f(z)}=-\beta, \qquad (2)$$

یعنی قرینهٔ مرتبهٔ قطب b.

۲.۱.۱۲. قضیه. خم ژردان بسته و هموار تکه‌ای C داده شده است، فرض می‌کنیم $f(z)$ در داخل و روی C، بجز در قطبهای b_1، b_2، ...، b_n واقع در داخل C، تحلیلی است. بعلاوه فرض می‌کنیم که $f(z)$ در داخل خم C دارای صفرهای a_1، a_2،...، a_m است و روی C صفر ندارد. آنگاه

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{n}\beta_k, \tag{3}$$

که درآن α_k مرتبهٔ a_k و β_k مرتبهٔ b_k است.

برهان. چون تنها نقاط تکین $f'(z)/f(z)$ واقع در داخل C، قطبها وصفرهای $f(z)$ هستند، (۳) نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ مانده وفرمولهای (۱) و (۲) است. □

۳.۱.۱۲. فرض می‌کنیم که در داخل C، N تعداد همهٔ صفرها و P تعداد تمام قطبهای $f(z)$ باشند، که در آنها هرصفروهرقطب به‌تعداد مرتبه‌شان به‌حساب آمده‌اند. آنگاه از (۳) نتیجه می‌شود

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\ln f(z)}{dz}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\ln f(z)=\frac{1}{2\pi i}\Delta_C \ln f(z), \tag{4}$$

که درآن $\Delta_C \ln f(z)$ مقدار تغییر $\ln f(z)$ است وقتی z مدار C را یك دور درجهت مثبت (خلاف جهت عقربهٔ ساعت) می‌پیماید. اما می‌دانیم که

$$\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$$

(بخش ۴.۱.۹ ب را ببینید)، وآشکار است که وقتی z مدار C را یك دور می‌پیماید $|f(z)|$ تغییرنمی‌کند. پس نتیجه می‌شودکه

$$\Delta_C \ln f(z)=i\,\Delta_C \arg f(z), \tag{5}$$

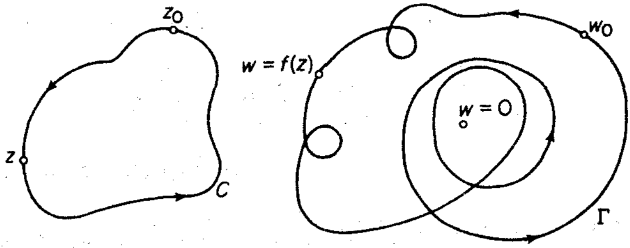
که در آن این‌بار $\Delta_C \arg f(z)$ مقدار تغییر $\arg f(z)$ است وقتی z مدار C را یك دور می‌پیماید. (۵) را در رابطهٔ (۴) می‌گذاریم، به‌دست می‌آید

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z), \tag{6}$$

که نتیجه مهمی است معروف به‌اصل آوند.

۴.۱.۱۲. فرمول (۶) تعبیرهندسی ساده‌ای دارد: وقتی z یك دور C را درجهت مثبت می‌پیماید، نقطهٔ نگاره $w=f(z)$، یك خم بستهٔ Γ درصفحهٔ w می‌پیماید. ممکن

است که Γ یک خم ژردان نباشد (شکل ۳۴ را ببینید). فرض می‌کنیم وقتی z یک دور مدار C را درجهت مثبت می‌پیماید، نقطهٔ $w=f(z)$ حول مبدأ صفحهٔ w، n_+بار درجهت



شکل ۳۴

مثبت و n_-بار درجهت منفی دور بزند، همچنین فرض می‌کنیم

$$\nu = n_+ - n_-$$

ν را تعدادخالص دوردرجهت مثبت‌می‌نامیم. (درشکل $n_+ = ۳$، $n_- = ۰$ و$\nu = ۳$ است). آنگاه‌به‌همان دلیلی که دربخش ۴.۲.۹ ب آمده است

$$\Delta_C \arg f(z) = ۲\nu\pi$$

به‌طوری‌که رابطهٔ (۶) به‌صورت سادهٔ

$$N - P = \nu. \qquad (۶')$$

درمی‌آید. به‌بیان دیگر، تفاضل بین تعداد تمام صفرها وتعداد تمام قطبهای $f(z)$ که در داخل C واقع‌اند، برابراست با تعداد خالصی که نقطهٔ $w = f(z)$ حول مبدأ $w = ۰$ در جهت مثبت دور می‌زند، در زمانی که z، C را یك دور درجهت مثبت می‌پیماید.

۲.۱۲. قضیهٔ روشه و نتایج آن

۱.۲.۱۲. قضیهٔ (روشه) فرض می‌کنیم توابع $f(z)$ و $g(z)$ در داخل و روی خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C تحلیلی هستند و در هرنقطهٔ C

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad (۷)$$

آنگاه تعداد صفرهای $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ در داخل C برابرند.

برهان. چون از (۷) نتیجه می‌شود که $f(z)$ روی C صفر نمی‌شود، داریم

$$\Delta_C \arg [f(z)+g(z)]=\Delta_C \arg \left\{f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\}$$
$$=\Delta_C \arg f(z)+\Delta_C \arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]. \qquad (8)$$

ولی به‌ازای هر $z \in C$

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$$

پس نقطهٔ متغیر

$$w=1+\frac{g(z)}{f(z)},$$

وقتی z خم C را رسم می‌کند در داخل قرص $|w-1|<1$ می‌ماند. بنابراین w حول مبدأ نمی‌چرخد، یعنی

$$\Delta_C \arg \left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0,$$

درنتیجه رابطهٔ (۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Delta_C \arg [f(z)+g(z)]=\Delta_C \arg f(z).$$

حال قضیه مستقیماً از اصل آوند نتیجه می‌شود. □

۲.۲.۱۲. مثال. تابع زیر چند صفر درداخل دایرهٔ واحد $|z|=1$ دارد؟

$$z^8-4z^5+z^2-1 \qquad (9)$$

حل: رابطهٔ (۹) را به‌صورت $f(z)+g(z)$ می نویسیم که در آن

$$f(z)=-4z^5 \quad , \quad g(z)=z^8+z^2-1$$

می‌بینیم که روی دایرهٔ $|z|=1$، $|f(z)|>|g(z)|$، زیرا اگر $|z|=1$

$$|f(z)|=|4z^5|=4, \quad |g(z)|=|z^8+z^2-1|\leqslant|z^8|+|z^2|+1=3$$

بنابراین طبق قضیهٔ روشه، تعداد صفرهای تابع (۹) در داخل دایرهٔ $|z|=1$ با تعداد صفرهای تابع $f(z)=-4z^5$، یعنی ۵، برابر است. زیرا واضح است که مبدأ، صفر مرتبهٔ پنجم $f(z)$ است. پس در داخل $|z|=1$، $f(z)$، ۵ صفردارد.

۳.۲.۱۲. از قضیهٔ روشه یك برهان بسیار زیبای قضیهٔ کلیدی زیر نتیجه می‌شود.

قضیه (قضیهٔ اساسی جبر). هرچندجمله‌ای

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n \quad (a_n\neq 0)$$

از درجهٔ $n\geqslant 1$ دقیقاً n صفر دارد*

برهان. اگر

$$f(z)=a_nz^n,\quad g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1},$$

روی دایرهٔ $|z|=R$ داریم

$$|f(z)|=|a_n|R^n,\quad |g(z)|\leqslant|a_0|+|a_1|R+\cdots+|a_{n-1}|R^{n-1}$$

اما

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|\geqslant\lim_{z\to\infty}\frac{|a_n|R^n}{|a_0|+|a_1|R+\cdots+|a_{n-1}|R^{n-1}}=\infty,$$

بنابراین به‌ازای مقادیر به‌حدکافی بزرگ R، روی دایرهٔ $|z|=R$ داریم

$$|f(z)|>|g(z)|$$

پس بنابه‌قضیهٔ‌روشه، تعداد صفرهای $P(z)$ درداخل دایرهٔ $|z|=R$ با تعداد صفرهای‌تابع $f(z)=a_nz^n$، یعنی n، برابر است ($z=0$ ، صفرمرتبهٔ nام $f(z)$ است). بعلاوه اگر R به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، دایرهٔ $|z|=R$ شامل تمام صفرهای $P(z)$ است، زیرا

$$\lim_{z\to\infty}P(z)=\infty.$$

ازاین نتیجه می‌شود که $P(z)$ (درصفحهٔ متناهی) دقیقاً n صفردارد. □

۴.۲.۱۲. حال قضیهٔ روشه را برای اثبات قضیهٔ مهمی، که دربخش ۱.۱.۹ به‌آن اشاره شده است، به‌کار می‌بریم.

قضیه. اگر $f(z)$ درحوزهٔ G تك‌ارز باشد، آنگاه $f'(z)$، در G صفر نمی‌شود.

برهان. فرض می کنیم درنقطهٔ مفروض $z_0\in G$، $f'(z_0)=0$، آنگاه $f(z)$ دریك قرص بستهٔ $|z-z_0|\leqslant r$ واقع در G، یك بسط تیلر به‌صورت زیردارد

$$f(z)=c_0+c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots \quad (c_k\neq 0,\ k\geqslant 2).$$

شعاع این قرص را می‌توان به‌اندازه‌ای کوچك انتخاب کرد که نه $f'(z)$ در $0<|z-z_0|\leqslant r$ صفرشود ونه $\varphi(z)$، مجموع سری

$$c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\cdots$$

---

* به‌خاطر بیاورید که در بخش ۳.۱.۱۲ گفتیم که هرصفر به‌تعداد مرتبه‌اش به‌حساب‌می‌آید.

در $0 \leqslant |z-z_\circ| \leqslant r$ زیرا بنا به‌قضیهٔ ۶.۲.۱۰، $z_\circ$ صفر منفرد $f'(z)$ است، حال آنکه $\varphi(z)$ در یک همسایگی $z_\circ$ صفر نمی‌شود، چون پیوسته است و $\varphi(z_\circ)=c_k\neq 0$. حال می‌نویسیم*

$$\mu = \min_{|z-z_\circ|=r} |c_k(z-z_\circ)^k + c_{k+1}(z-z_\circ)^{k+1}+\cdots|,$$

وفرض می کنیم $a\neq 0$ — عددی است که قدرمطلق آن از μ کوچکتراست. آنگاه بنا به‌قضیهٔ روشه، در داخل دایرهٔ $|z-z_\circ|=r$، تعداد صفرهای تابع

$$f(z)-(c_\circ+a) = -a + c_k(z-z_\circ)^k + c_{k+1}(z-z_\circ)^{k+1}+\cdots$$

با تعداد صفرهای تابع

$$c_k(z-z_\circ)^k + c_{k+1}(z-z_\circ)^{k+1}+\cdots = (z-z_\circ)^k[c_k + c_{k+1}(z-z_\circ)+\cdots],$$

یعنی k، برابراست. اما هریك از این k صفر $f(z)-(c_\circ+a)$ ساده است،زیرا اگر $0<|z-z_\circ|\leqslant r$، $[f(z)-(c_\circ+a)]'=f'(z)$ صفر نمی‌شود. بنابراین مقدار $f(z)$ در $k\geqslant 2$ نقطهٔ متمایز (واقع در داخل $|z-z_\circ|=r$) با $c_\circ+a$ برابرمی‌شود که این غیرممکن‌است، زیرا $f(z)$ در G بنا به‌فرض تك‌ارز است. این تناقض نشان می‌دهد که به‌ازای هر $z_\circ\in G$، $f'(z_\circ)\neq 0$. □

۵.۲.۱۲. نتیجه. اگر $f(z)$ در میدان G تك‌ارز باشد، آنگاه $f(z)$ در هرنقطهٔ G همدیس است.

برهان. نتیجهٔ مستقیمی است ازقضیهٔ بالا وآخرین حکم بخش ۳.۳.۴. □

۳.۱۲. محاسبهٔ انتگرالهای حقیقی ناسره

مانده‌ها را برای محاسبهٔ انتگرالهای مختلط** متعددی به‌کار برده‌ایم. روش مانده همچنین یکی از ابزارهای پرتوان برای محاسبه انتگرالهای حقیقی ناسره (با حدهای نامتناهی) است، چنانکه اکنون با مثالهای متنوع زیرروشن می‌سازیم.

۱.۳.۱۲. مثال. انتگرال زیررا حساب‌کنید

---

* توجه کنید که $\mu>0$ است (چرا؟).

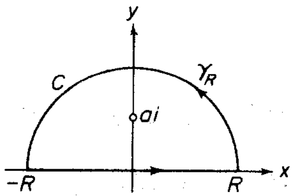
** درفصل ۱۱ مسئله‌های ۲۳ تا ۲۷ و ۳۰ تا ۳۳ و مثال (۳.۳.۱۱.) را ببینید.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+a^{2})^{3}}\quad (a>0).$$

حل. تابع

$$f(z)=\frac{1}{(z^{2}+a^{2})^{3}}$$

ومرز C،که در شکل (۳۵) دیده می‌شود، متشکل از پاره‌خط $-R\leqslant x\leqslant R$، از محور حقیقي و نیمدایرهٔ γ_R به‌شعاع $R>a$ واقع درنیمصفحهٔ فوقانی، را درنظرمی‌گیریم.تابع



شکل ۳۵

$f(z)$، در داخل یا روی C، فقط یك نقطهٔ تکین دارد وآن نقطهٔ $z=ai$ قطب مرتبهٔ سوم است وماندهٔ آن

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\longrightarrow ai}\frac{d^{2}}{dz^{2}}\frac{(z-ai)^{3}}{(z^{2}+a^{2})^{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{d^{2}}{dz^{2}}\frac{1}{(z+ai)^{3}}\right]_{z=ai}=\frac{1}{2}\frac{3\cdot 4}{(2ai)^{5}}=\frac{3}{16a^{5}i},$$

از فرمول (۳۶) صفحهٔ۲۱۴ حساب شده است. پس بنا به‌قضیهٔ مانده

$$\int_{C}f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{\gamma_R}f(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}f(z)=\frac{3\pi}{8a^{5}}.$$

(۱۰)

اما اگر $z\in\gamma_R$

$$\frac{1}{|z^{2}+a^{2}|}=\frac{1}{|z^{2}-(-a^{2})|}\leqslant\frac{1}{||z^{2}|-|a^{2}||}=\frac{1}{R^{2}-a^{2}}$$

(به‌بخش ۸.۳.۱ رجوع کنید). درنتیجه بنابه قضیهٔ ۳.۲.۵

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\pi R}{(R^۲-a^۲)^۳},$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = ۰.$$

اکنون حد (۱۰) را وقتی $R\to\infty$، حساب می‌کنیم، به‌دست می‌آید

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{۳\pi}{۸a^۵},$$

یعنی

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^۲+a^۲)^۳} = \frac{۳\pi}{۸a^۵} \qquad (a>۰).$$

۲۰۳۰۱۲. مثال. انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos x}{x^۲+a^۲}dx \qquad (a>۰).$$

حل. C را مرز مثال قبلی می‌گیریم ولی این بار تابع را

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^۲+a^۲},$$

که قسمت حقیقی آن عبارت زیرعلامت انتگرال روی محورحقیقی است، انتخاب می‌کنیم. روی نیمدایرهٔ γ_R داریم $|e^{iz}| = e^{-y} \leqslant ۱$، زیرا $y = \operatorname{Im} z \geqslant ۰$. بنابراین

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^۲-a^۲}$$

ومانند مسئلهٔ قبل

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = ۰,$$

دراین مسئله هم تابع $f(z)$ در داخل یا روی C فقط یك نقطهٔ تکین دارد وآن قطب سادهٔ $z=ai$ است که بنابه فرمول (۳۴) صفحه ۲۱۳، ماندهٔ آن برابراست با

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = \left[\frac{e^{iz}}{(z^۲+a^۲)'}\right]_{z=ai} = \left[\frac{e^{iz}}{۲z}\right]_{z=ai} = \frac{e^{-a}}{۲ai},$$

بنابراین طبق قضیهٔ مانده

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x^۲+a^۲}\,dx+\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=۲\pi i\frac{e^{-a}}{۲ai}=\frac{\pi e^{-a}}{a},$$

از قسمتهای حقیقی دوطرف رابطه، به‌دست می‌آید

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^۲+a^۲}\,dx+\mathrm{Re}\int_{\gamma_R}f(z)dz=\frac{\pi e^{-a}}{a} \qquad (۱۱)$$

حالا حد (۱۱) را وقتی $R\to\infty$ حساب می‌کنیم

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^۲+a^۲}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^۲+a^۲}\,dx=\frac{\pi e^{-a}}{a},$$

پس به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم.*

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\cos x}{x^۲+a^۲}\,dx=\frac{\pi e^{-a}}{۲a} \quad (a>\circ).$$

۰.۳.۰۱۲ مثال. انتگرال

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

را حساب کنید.

حل. تابع

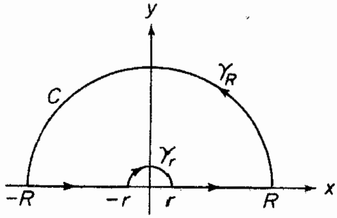
$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z},$$

را که قسمت موهومی آن با عبارت زیر علامت انتگرال روی محور حقیقی برابراست، در نظر می‌گیریم. چون $f(z)$ در مبدأ بینهایت می‌شود، دیگر نمی‌توان از $f(z)$ در طول مرزی که درشکل (۳۵) نشان‌داده شده انتگرال گرفت، به‌جای آن C را مرز تورفته‌ای که درشکل (۳۶) دیده می‌شود انتخاب می‌کنیم. γ_R مانند مرز قبلی نیمدایره‌ای به شعاع R و γ_r نیمدایرهٔ فوقانی به شعاع $r<R$ است. چون $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است، طبق قضیهٔ انتگرال کوشی

---

* اگر $f(x)$ زوج باشد یعنی اگر $f(-x)\equiv f(x)$، آنگاه واضح است که

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=۲\int_{\circ}^{\infty}f(x)dx.$$



شکل۳۶

$$\int_C f(z)dz=\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_r^R\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0, \qquad (۱۲)$$

(توجه کنید که اگر نقطهٔ تکینی در داخل C نباشد، قضیهٔ مانده به‌قضیهٔ انتگرال کوشی تبدیل می‌شود.) از (۱۲)، وقتی $r\to 0$ و $R\to\infty$، حد می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ix}}{x}dx+\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_0^\infty\frac{e^{iz}}{x}dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0. \qquad (۱۳)$$

با روش جزء به جزء انتگرال چهارم طرف چپ به‌صورت زیر درمی‌آید*

$$\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{\gamma_R}\frac{d(e^{iz})}{iz}=\frac{e^{iz}}{iz}\bigg|_{-R}^{R}+\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{iz^2}dz=\frac{e^{iR}+e^{-iR}}{iR}$$

$$+\frac{1}{i}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^2}dz. \qquad (۱۴)$$

از این رابطه، چون روی γ_R، $|e^{iz}|\leqslant 1$، نتیجه می‌شود

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\leqslant\left|\frac{e^{iR}+e^{-iR}}{iR}\right|+\left|\frac{1}{i}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z^2}dz\right|\leqslant\frac{2}{R}+\frac{\pi R}{R^2}\to 0$$

وقتی $R\to\infty$، وبنابراین

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0. \qquad (۱۵)$$

از طرف دیگر برای محاسبهٔ

---

* اگر اول روش انتگرال‌گیری جزء به‌جزء را به‌کار نبریم، تنها می‌توانیم از قضیهٔ ۳.۲.۵ استفاده‌کرده نتیجه بگیریم که قدر مطلق طرف چپ (۱۴) از $\pi R/R=\pi$ کوچکتر است. اما این برآورد دقت لازم برای منظور ما را ندارد.

$$\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz,$$

بسط لوران $\frac{e^{iz}}{z}$ در نقطهٔ $z=\circ$ را به‌صورت

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots}{z}=\frac{1}{z}+P(z),$$

می‌نویسیم که در آن $P(z)$ قسمت منظم بسط بوده و در $z=\circ$ تحلیلی است. بنابراین

$$\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z}+\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}P(z)dz=\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z},$$

زیرا در یک همسایگی $z=\circ$؛ $|P(z)|\leqslant M$ به طوری که، وقتی $r\to \circ$،

$$\left|\int_{\gamma_r}P(z)dz\right|\leqslant M\pi r\to \circ$$

اما

$$\int_{\gamma_r}\frac{dz}{z}=\int_{\pi}^{\circ}\frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=-\pi i,$$

و بنابراین

$$\lim_{r\to \circ}\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i. \qquad (۱۶)$$

(۱۵) و (۱۶) را در (۱۳) گذارده، سپس قسمتهای موهومی دو طرف رابطه را برابر می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{\circ}\frac{\sin x}{x}dx+\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi,$$

یا هم‌ارز آن

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

چون تابع زیر علامت انتگرال زوج است، به‌دست می‌آید.

۴.۳.۱۲. مثال. انتگرالهای زیر موسوم به انتگرالهای فرنل را حساب کنید

$$\int_0^\infty \cos^2 x\,dx, \qquad \int_0^\infty \sin^2 x\,dx.$$

حل. این‌بار تابع را

$$f(z)=e^{iz^2}, \tag{۱۷}$$

انتخاب می‌کنیم، زیرا

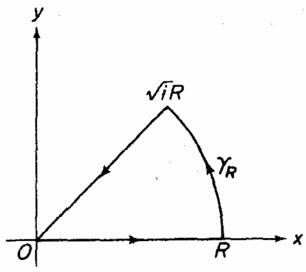
$$\operatorname{Re} f(x)=\cos x^2, \quad \operatorname{Im} f(x)=\sin x^2.$$

روی نیمساز ربع اول صفحهٔ z داریم $z=\sqrt{i}\,r$ $(r\geqslant 0)$ و(۱۷) به‌صورت

$$f(\sqrt{i}\,r)=e^{-r^2},$$

که با انتگرال آن، یعنی

$$\int_0^\infty e^{-r^2}dr=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{۱۸}$$



شکل ۳۷

آشناهستیم، درمی‌آید (تمرین۱۲ را ببینید) برای استفاده‌ازاین‌رابطه، مرزانتگرال گیری را که در شکل (۳۷) می‌بینید به‌کار می‌بریم. چـون $f(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است بنابه قضیهٔ انتگرال کوشی داریم:

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz+\int_R^0 e^{-r^2}\sqrt{i}\,dr=0, \tag{۱۹}$$

(زیرا روی پاره خطی‌که $\sqrt{i}\,R$ را به مبدأ وصل می‌کند داریم $z=\sqrt{i}\,r$، $R\geqslant r\geqslant 0$).
از (۱۹)، وقتی $R\to\infty$، حد می‌گیریم، به‌دست می‌آید،

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{ix^{2}}\,dx+\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^{2}}\,dz-\sqrt{i}\int_{\circ}^{\infty} e^{-r^{2}}\,dr=\circ. \qquad (20)$$

اما ازانتگرال گیری جزء به‌جزء داریم

$$\int_{\gamma_R} e^{iz^{2}}\,dz=\int_{\gamma_R}\frac{d(e^{iz^{2}})}{2iz}=\frac{e^{iz^{2}}}{2iz}\Bigg|_{R}^{\sqrt{i}\,R}+\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz^{2}}}{z^{2}}dz\,.$$

قدرمطلق اولین جملهٔ طرف راست، در نامساوی

$$\left|\frac{e^{-R^{2}}}{2i\sqrt{i}\,R}-\frac{e^{iR^{2}}}{2iR}\right|\leqslant\frac{e^{-R^{2}}}{2R}+\frac{1}{2R},$$

صدق می‌کند و لذا وقتی $R\to\infty$، به صفر می‌گراید. درمورد جملهٔ دوم، قدرمطلق تابع زیر انتگرال برابراست با

$$\left|\frac{e^{iz^{2}}}{z^{2}}\right|=\left|\frac{e^{iR^{2}(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}}{z^{2}}\right|=\frac{e^{-R^{2}\sin 2\theta}}{R^{2}},$$

که درآن روی کمان γ_R نوشته‌ایم $z=R(\cos\theta+i\sin\theta)$. اما روی γ_R داریم

$$\sin 2\theta\geqslant\circ,\quad e^{-R^{2}\sin 2\theta}\leqslant 1$$

و بنابراین

$$\left|\frac{e^{iz^{2}}}{z^{2}}\right|\leqslant\frac{1}{R^{2}},$$

به‌طوری که وقتی $R\to\infty$،

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz^{2}}}{z^{2}}dz\right|\leqslant\frac{1}{R^{2}}\,\frac{\pi R}{4}=\frac{\pi}{4R}\to\circ$$

پس

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^{2}}dz=\circ,$$

و (۲۰) پس از استفاده از (۱۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{ix^{2}}dx=\sqrt{i}\int_{\circ}^{\infty} e^{-r^{2}}dr=\sqrt{i}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (21)$$

بالاخره از قسمتهای حقیقی و موهومی (۲۱) به‌دست می‌آید

$$\int_{\circ}^{\infty}\cos^{۲} x\, dx=\int_{\circ}^{\infty}\sin^{۲} x\, dx=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{۲}}.$$

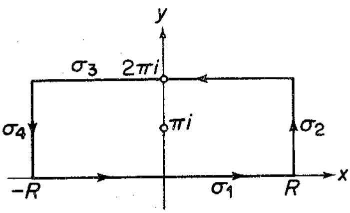
۵.۳.۱۲. مثال. انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx \qquad (\circ<a<۱).$$

حل. تابع

$$f(z)=\frac{e^{az}}{۱+e^{z}}$$

و مرز مستطیل شکل C مرکب از پاره‌خطهای $\sigma_{۱}, \sigma_{۲}, \sigma_{۳}, \sigma_{۴}$ را طبق شکل ۳۸ درنظر می گیریم. بنا به‌قضیهٔ مانده



شکل ۳۸

$$\int_{\sigma_{۱}}f(z)\, dz+\int_{\sigma_{۲}}f(z)dz+\int_{\sigma_{۳}}f(z)dz+\int_{\sigma_{۴}}f(z)dz$$

$$=۲\pi i \operatorname*{Res}_{z=\pi i}\frac{e^{az}}{۱+e^{z}}=۲\pi i\left[\frac{e^{az}}{(۱+e^{z})'}\right]_{z=\pi i}=-۲\pi i e^{a\pi i}. \qquad (۲۲)$$

واضح است که

$$\int_{\sigma_{۱}} f(z)\, dz=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}\, dx,$$

$$\int_{\sigma_{۳}} f(z)\, dz=\int_{R}^{-R}\frac{e^{a(x+۲\pi i)}}{۱+e^{x+۲\pi i}}\, dx=-e^{۲a\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx,$$

در حالی که

$$|f(z)|=\left|\frac{e^{a(R+iy)}}{۱+e^{R+iy)}}\right|\leqslant\frac{e^{aR}}{e^{R}-۱}=\frac{e^{(a-۱)R}}{۱-e^{-R}} \qquad (z\in\sigma_۲),$$

$$|f(z)|=\left|\frac{e^{a(-R+iy)}}{۱+e^{-R+iy}}\right|\leqslant\frac{e^{-aR}}{۱-e^{-R}} \qquad (z\in\sigma_۴).$$

بنابراین وقتی $R\rightarrow\infty$

$$\left|\int_{\sigma_۲}f(z)dz\right|\leqslant ۲\pi\frac{e^{(a-۱)R}}{۱-e^{R}}\rightarrow ۰\ ,\ \left|\int_{\sigma_۴}f(z)dz\right|\leqslant ۲\pi\ \frac{e^{-aR}}{۱-e^{-R}}\rightarrow ۰$$

(یادآوری می‌شود که $۰<a<۱$) لذا از حد رابطهٔ (۲۲) وقتی $R\rightarrow\infty$

$$\lim_{R\rightarrow\infty}\int_{\sigma_۱}f(z)dz+\lim_{R\rightarrow\infty}\int_{\sigma_۳}f(z)dz$$
$$=(۱-e^{۲a\pi i})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=-۲\pi i\, e^{a\pi i},$$

یا هم‌ارز آن

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{۱+e^{x}}dx=-۲\pi i\frac{e^{a\pi i}}{۱-e^{۲a\pi i}}=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (۰<a<۱).$$

نتیجه می‌شود.

۴.۱۲. انتگرالهای در ارتباط با توابع چندمقداری

روش بخش قبل اغلب به‌انتگرالهایی که شامل توابع چندمقداری هستند، منجر می‌شود. در دو مثال زیر خواهیم دید که اگر دقت بیشتری به‌عمل آید، این انتگرالها بآسانی حل می‌شوند.

۱.۴.۱۲. مثال. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\ln x}{(x^{۲}+۱)^{۲}}dx.$$

حل. فرض می‌کنیم که C همان مرز در شکل (۳۶) باشد (با فرض $R>1$)، و تابع را

$$f(z)=\frac{\ln z}{(z^2+1)^2},$$

می‌گیریم که درآن $\ln z$ شاخه‌ای از لگاریتم است که درشرط زیر صدق می‌کند

$$-\pi<\operatorname{Im}\ln z=\arg z\leqslant\pi.$$

تابع $f(z)$ درهر نقطهٔ C وداخل آن، بجز درنقطهٔ $z=i$، که یك‌قطب مرتبهٔ دوم‌است، تحلیلی است. ماندهٔ تابع در $z=i$ برابر است با

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\left\{\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln z}{(z+i)^2}\right]\right\}_{z=i}=\frac{\pi+2i}{8}.$$

پس، بنا به‌قضیهٔ مانده

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\,dz+\int_{\gamma_r} f(z)\,dz+\int_{r}^{R} f(z)\,dz+\int_{\gamma_R} f(z)dz$$

$$=2\pi i\frac{\pi+2i}{8}=\frac{\pi^2 i}{4}-\frac{\pi}{2}. \qquad (۲۳)$$

اگر $z=Re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$، آنگاه برای R به‌قدرکافی بزرگ،

$$|\ln z|=|\ln|z|+i\arg z|=\sqrt{\ln^2 R+\theta^2}\leqslant\sqrt{\ln^2 R+\pi^2}\leqslant 2\ln R$$

در نتیجه وقتی $R\to\infty$،

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|\leqslant\frac{2\ln R}{(R^2-1)^2}\pi R\to 0$$

در صورتی که اگر $z=re^{i\theta}$ $(\pi\geqslant\theta\geqslant 0)$، آنگاه به‌ازای r به‌قدرکافی کوچك

$$|\ln z|\leqslant 2\ln\frac{1}{r}$$

بنابراین وقتی $r\to 0$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)dz\right|\leqslant\frac{2\ln\frac{1}{r}}{(1-r^2)^2}\pi r\to 0$$

(مسئلهٔ ۱۳ را ببینید). حال در (۲۳)، r را به ۰ و R را به بینهایت میل میدهیم، حد

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}dx=\frac{\pi^{2}i}{4}-\frac{\pi}{2} \qquad (۲۴)$$

بهدست‌می‌آید. ولی $\ln(-x)=\ln x+\pi i$، پس

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}\,dx+\pi i\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+1)^{2}}.$$

در نتیجه (۲۴) بهصورت زیر درمی‌آید

$$2\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}dx+\pi i\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+1)^{2}}=\frac{\pi^{2}i}{4}-\frac{\pi}{2}, \qquad (۲۵)$$

که از قسمتهای حقیقی دوطرف رابطه*

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{(x^{2}+1)^{2}}dx=-\frac{\pi}{4}$$

نتیجه می‌شود.

۲.۴.۱۲. مثال. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx \qquad (0<a<1).$$

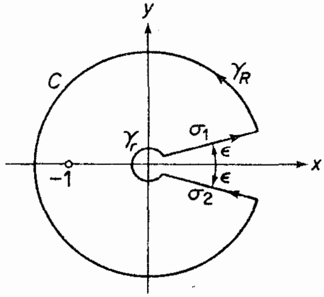
حل. C را مرزی که در شکل(۳۹) نشان داده شده می‌گیریم، متشکل از کمانهای γ_r و γ_R، ازدوایر $|z|=r$ و $|z|=R$ وپاره‌خطهای σ_1 و σ_2 از نیمخطهای $\arg z=\varepsilon$ و $\arg z=2\pi-\varepsilon$. تابع‌را

$$f(z)=\frac{z^{a-1}}{1+z}=\frac{e^{(a-1)\ln z}}{1+z} \qquad (۲۶)$$

---

* از قسمت موهومی (۲۵) به‌انتگرال مقدماتی زیر می‌رسیم:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^{2}+1)^{2}}=\frac{\pi}{4}.$$



شکل ۳۹

فرض می‌کنیم، که در آن $\ln z$ شاخهٔ لگاریتمی است که در شرط

$$\circ \leqslant \operatorname{Im} \ln z = \arg z < ۲\pi \tag{۲۷}$$

صدق می‌کند. تابع $f(z)$ درداخل و روی C، بجز در نقطهٔ $z=-۱$، یک مقداری و تحلیلی است. این نقطه یک‌قطب سادهٔ تابع، و مانده برابر است با

$$\operatorname*{Res}_{z=-۱} f(z) = \left[\frac{e^{(a-۱)\ln z}}{(۱+z)'}\right]_{z=-۱} = e^{(a-۱)\ln(-۱)} = e^{(a-۱)\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

بنابراین، طبق قضیهٔ مانده

$$\int_{\sigma_۱} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\sigma_۲} f(z)\,dz + \int_{\gamma_r} f(z)dz = -۲\pi i e^{a\pi i}$$

یا معادل آن

$$\int_r^R f(\rho e^{i\epsilon})d(\rho e^{i\epsilon}) + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_R^r f(\rho e^{i(۲\pi-\epsilon)} d(\rho e^{i(۲\pi-\epsilon)})$$

$$+\int_{\gamma_r} f(z)dz = -۲\pi i e^{a\pi i}. \tag{۲۸}$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۶)، رابطهٔ (۲۸) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$e^{i\epsilon}\int_r^R \frac{\rho^{a-۱} e^{i(a-۱)\epsilon}}{۱+\rho e^{i\epsilon}} d\rho + \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

$$-e^{i(۲\pi-\varepsilon)}\int_r^R \frac{\rho^{a-۱} e^{i(a-۱)(۲\pi-\epsilon)}}{۱+\rho e^{i(۲\pi-\epsilon)}} d\rho + \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

$$= e^{i\epsilon + i(a-1)\epsilon} \int_r^R \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho e^{i\epsilon}} d\rho + \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

$$- e^{-i\epsilon - i(a-1)\epsilon} e^{2(a-1)\pi i} \int_r^R \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho e^{-i\epsilon}} d\rho + \int_{\gamma_r} f(z)dz = -2\pi i e^{a\pi i}. \quad (29)$$

بعلاوه

$$|f(z)| \leqslant \frac{R^{a-1}}{R-1} \qquad (z \in \gamma_R,\ R > 1),$$

$$|f(z)| \leqslant \frac{r^{a-1}}{1-r} \qquad (z \in \gamma_r,\ r < 1),$$

به‌طوری که

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leqslant \frac{R^{a-1}}{R-1}(2\pi - 2\epsilon)R,$$

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z)dz \right| \leqslant \frac{r^{a-1}}{1-r}(2\pi - 2\epsilon)r,$$

و در نتیجه

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$$

(یادآوری می‌شود که $0 < a < 1$). بنابراین، اگر از(۲۹)، نخست وقتی $\epsilon \to 0$ و سپس موقعی که $r \to 0$ و $R \to \infty$، حد بگیریم به‌دست می‌آید

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho} d\rho - e^{2(a-1)\pi i} \int_0^\infty \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho} d\rho = -2\pi i e^{a\pi i}, \qquad (30)$$

یعنی

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho} d\rho = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1-e^{2(a-1)\pi i}}.$$

اما

$$-۲\pi i\,\frac{e^{a\pi i}}{۱-e^{۲(a-۱)\pi i}}=۲\pi i\,\frac{۱}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

و بالاخره نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{a-۱}}{۱+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi}\qquad(۰<a<۱).\qquad(۳۱)$$

توجه کنید که بـا تعویض متغیر $x=e^t$، انتگرال (۳۱) تبدیل به‌انتگرالی می‌شود که در ۵.۳.۱۲ محاسبه شده است.

چند توضیح

۱.۱۲. استدلالی که در اصل آوند به کاررفته است، نمونه‌ای از نوع استدلالهای در «نظریه تـابع هندسی» است، نظریه‌ای که آنالیز مختلط را به‌هندسه (و توپولوژی) خمها و دیگر مجموعه‌های در صفحهٔ مختلط پیوند می‌دهد. از این‌نوع‌اند مطالب بخشهای ۳.۱۳ و ۵.۱۳.

۲.۱۲. صورت دیگری ازقضیهٔ اساسی جبر وجود دارد که می‌گوید $P(z)$ حداقل دارای یك‌صفر است. بعد با یك‌استدلال مقدماتی نشان می‌دهند. (بتفصیل توضیح دهید) که $P(z)$ دقیقاً دارای n صفر است. مسئلهٔ ۸ را، که برهان دیگری برای اثبات قضیهٔ اساسی جبر پیشنهاد می‌کند، ببینید.

۳.۱۲. یادآوری می‌شود که در حسابان پیشرفته، انتگرالهای ناسرهٔ حقیقی

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx,\int_{-\infty}^{a}f(x)dx,\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$$

بترتیب، حدهای زیر تعریف می‌شوند.

$$\lim_{X\to\infty}\int_{a}^{X}f(x)dx,\ \lim_{X\to-\infty}\int_{X}^{a}f(x)dx,\ \lim_{\substack{X\to-\infty\\X'\to\infty}}\int_{X}^{X'}f(x)dx,$$

که درحالت اخیر X و X' مستقل از یکدیگربه $-\infty$ و ∞ میل‌می‌کنند. دراین خصوص مسئلهٔ ۲۱ را نیز ببینید.

۴.۱۲. در یکی ازمراحلی که به(۳۰) منجر می‌شود، از

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_r^R \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho^{\pm i\epsilon}}d\rho=\int_r^R\frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}d\rho$$

استفاده کرده‌ایم و این رابطه را به‌استناد قضیهٔ زیر از حسابان پیشرفته نوشته‌ایم:
اگر

$$I(y)=\int_a^b f(x,\ y)dx,$$

و $f(x,\ y)$ درمستطیل $a\leqslant x\leqslant b$ و $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ تابعی پیوسته ازدو متغیر x و y باشد، آنگاه $I(y)$ در فاصلهٔ $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ تابع پیوستهٔ y است.

مسائل

۱. رابطهٔ زیر را با این فرض که در آن نمادهای مذکور درقضیهٔ ۲.۱.۱۲ به‌کار رفته‌اند و $\varphi(z)$ در داخل و روی C تحلیلی است، ثابت کنید

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varphi(a_k)-\sum_{k=1}^{n}\beta_k\varphi(b_k).$$

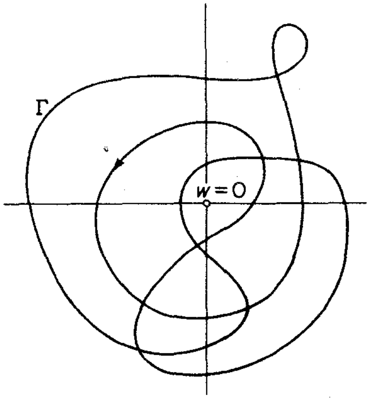
۲. تعریف A- نقطه را که در فصل ۱۰ مسئلهٔ ۲۳ آمده است به‌یاد آورید وقضیهٔ زیررا که تعمیم قضیهٔ ۲.۱.۱۲ است، ثابت کنید: خم‌ژردان بسته و هموار تکه‌ای داده شده است. فرض می‌کنیم $f(z)$ در داخل و روی C، بجز در قطبهای b_1،...،b_n واقع در داخل C، تحلیلی است، بعلاوه فرض می‌کنیم که a_1، a_2،...، a_m، $A-$ نقطه‌های واقع در داخل C ولی نه در روی C هستند. آنگاه

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k-\sum_{k=1}^{n}\beta_k,$$

که درآن α_k مرتبهٔ a_k و β_k مرتبهٔ b_k هستند. تعمیم اصل آوند را که متناظر این تعمیم است، بیان و ثابت کنید.

۳. در خم Γ که در شکل ۴۰ کشیده شده است، n_+، n_- و v، تعداد دور مثبت، تعداد دور منفی وتعداد خالص دور درجهت مثبت را پیدا کنید. (بخش ۴.۱.۱۲ را ببینید)

۴. هریك از توابع زیر در داخل دایرهٔ $|z|=1$ چند صفر دارد؟



شکل ۴۰

الف) $z^{۷}-۵z^{۴}+z^{۲}-۲$؛ ب) $۲z^{۵}-z^{۳}+۳z^{۲}-z+۸$؛

ج) $z^{۹}-۲z^{۶}+z^{۲}-۸z-۲$.

۵. تابع $z^{۴}-۵z+۱$ در حلقهٔ $۱<|z|<۲$ چندصفر دارد؟

۶. اگر $f(z)=z$ در قرص بستهٔ $|z|\leqslant ۱$ تحلیلی و قدرمطلق آن از ۱ کمتر باشد، معادلهٔ $f(z)=z$ در قرص باز $|z|<۱$ چندریشه دارد؟

۷. ثابت کنید که معادلهٔ

$$z+e^{-z}=\lambda \qquad (\lambda>۱)$$

در نیمصفحهٔ سمت راست، یك و فقط یك ریشهٔ $z_{\circ}$ دارد و $z_{\circ}$ حقیقی است.

۸. «قضیهٔ لیوویل» را به‌کار برده اثبات دیگری برای قضیهٔ اساسی جبر ارائه دهید.

۹. نشان دهید که عکس نتیجهٔ ۵.۲.۱۲ درست نیست.

۱۰. فرض می کنیم که $f(z)$ در نقطهٔ $z_{\circ}$ تحلیلی است و $w_{\circ}=f(z_{\circ})$. ثابت کنید که یك همسایگی $z_{\circ}$، مانند K ویك همسایگی $w_{\circ}$ متناظر با K، مانند K^{*} وجود دارند به طوری که برای هر $w\in K^{*}$، $f(z)-w$ حداقل یك صفر در K دارد.

۱۱. مسئلهٔ قبلی را به‌کاربرده قضیهٔ زیر راکه تعمیم قضیهٔ ۲.۱.۹ است. ثابت کنید: اگر،

ثـابت$\not\equiv f(z)$ درحــوزۀ G تحلیلی باشد و E نگارۀ G به‌وسیلۀ نگاشت $w=f(z)$ باشد، آنگاه E نیز (در صفحۀ w) یک‌حوزه است. از این قضیه استفاده کرده اثبات دیگری برای اصل قدرمطلق ماکزیمم ارائه دهید.

۱۲. برای اثبات

$$I=\int_{۰}^{\infty} e^{-x^{۲}}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{۲},$$

از یک انتگرال دوگانه استفاده کنید.

۱۳. ثـابت کنید که وقتی $R\to\infty$، $R^{\alpha}\ln R\to ۰$ اگر $\alpha<۰$. در حـالی که وقتی $r\to ۰$، $r^{\alpha}\ln r\to ۰$ اگر $\alpha>۰$.

۱۴. برای محاسبۀ انتگرالهای زیر از انتگرال‌گیری درطول مرزی که درشکل ۳۵ نشان داده شده است، استفاده کنید.

الف) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^{۲}+۴x+۱۳)^{۲}}dx$؛

ب) $\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{۲}}{(x^{۲}+a^{۲})^{۲}}dx\quad (a>۰)$؛

ج) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^{۲}+a^{۲})(x^{۲}+b^{۲})}(a>۰,\ b>۰)$؛

د) $\int_{۰}^{\infty}\frac{x^{۲}+۱}{x^{۴}+۱}\,dx$.

۱۵. رابطۀ زیر را ثابت کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(۱+x^{۲})^{n+۱}}=\frac{(۲n)!}{(n!)^{۲}۲^{۲n}}\pi\quad (n=۱,۲,\dots).$$

۱۶. برای اثبات

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}dx=\frac{\pi}{۲},$$

از انتگرال‌گیری در طول مسیر نشان‌داده شده درشکل ۳۶ استفاده کنید.

۱۷. درستی فرمول زیر را تحقیق کنید

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{2n}\frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}, \qquad (۳۲)$$

که در آن m و n اعداد مثبت وصحیح هستند و $n>m$.

۱۸. درستی فرمول زیر را تحقیق کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}-x^{2m'}}{1-x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n}\left(\cot\frac{2m+1}{2n}\pi-\cot\frac{2m'+1}{2n}\pi\right), \qquad (۳۳)$$

که درآن m، m' و n اعداد صحیح مثبتی هستند و $n>m'$ و m.

۱۹. نشان دهید که (۳۲) حالت خاصی از (۳۳) است.

۲۰. انتگرالهای زیر را حساب کنید:

الف) $(a>0,\ b>0)$ $\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$؛

ب) $(a>0)$ $\quad \int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}dx$؛

ج) $(a>0,\ b>0)$ $\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx$.

۲۱. فرض کنید که $a<c<b$ و $f(x)$ در نقطهٔ c بینهایت می‌شود . یادآوری می‌شود که انتگرال ناسرهٔ

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx \qquad (۳۴)$$

درحسابان، حد زیر تعریف می‌شود

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \epsilon\to 0}}\left\{\int_{a}^{c-\delta}f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^{b}f(x)\,dx\right\} \quad (\delta,\ \epsilon>0)$$

وقتی δ و ϵ مستقل از یکدیگر به‌صفر میل می‌کنند*. حد

* اگر $a=-\infty$ یا $b=+\infty$، یک عمل حدگیری اضافی ضروری است (بتفصیل شرح دهید).

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left\{\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx\right\},$$

را که متناظر با حالت $\epsilon=\delta$ است، مقدار اصلی (کوشی) انتگرال (۳۴) می‌گویند و آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهند

$$\text{P.V.}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (۳۵)$$

اگر (۳۴) وجود داشته باشد (یعنی همگرا باشد)، آنگاه واضح است که (۳۵) هم وجود دارد و با (۳۴) برابر است، ولی ممکن است (۳۵) وجود داشته باشد درحالی که (۳۴) وجود ندارد (یعنی واگراست). برای مثال، انتگرال

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$$

واگراست، ولی مقدار اصلی آن وجود دارد و برابر صفر است.
مقدار اصلی انتگرال واگرای زیر را حساب کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^{2}+4)(x-1)}dx.$$

۲۴. در مثال ۲.۴.۱۲ دیدیم که

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1).$$

نشان‌دهید که این نتیجه را می‌توان ازراه زیر به‌دست‌آورد: ازآغاز ϵ را در شکل ۳۹ صفر گرفته مرز حاصل را C^* بنامید. به‌این ترتیب شکاف در مرز C بسته می‌شود (شکل بکشید) آنگاه قضیهٔ مانده را به‌طورصوری[1] در مورد مرز C^* به‌کار برید، گرچه C^* دیگرخم ژردان نیست وتابع

$$f(z)=\frac{z^{a-1}}{1+z}$$

هم روی C^* یک‌مقداری نیست (چرا؟).

---

۱. قضیه را به‌طور صوری به‌کاربرید، یعنی صورت قضیه را بدون‌توجه به‌شرایط آن به‌کاربرید. در اینجا C^* و $f(z)$ شرایط قضیهٔ مانده را دارا نیستند، پس درستی نتیجه‌ای که از این راه به‌دست می‌آید نیاز به‌تحقیق دارد، امـا چون این‌نتیجه را قبلاً به‌دست آورده‌ایم، در درستی آن شکی نیست. هروقت درریاضی به‌اعمال صوری (یعنی اعمالی‌که درستی‌آنها ثابت‌نشده‌اند) روی می‌آوریم، لازم است‌که درستی نتیجه تحقیق شود.ـم.

توضیح. استفادهٔ مستقیم ازمرزهـای «تباهیده» مـانند C^* ، اغلب موجب می‌شود مرحله‌هـای اضافی (نظیر محاسبهٔ حد در مثـال ۲.۴.۱۲ وقتی $\epsilon \to 0$) حـذف شده محاسبهٔ انتگرالهای در ارتباط با توابع چندمقداری ساده شود.

۲۳. انتگرالهای زیر را حساب کنید :

الف) $\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$؛

ب) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0)$؛

ج) $\int_0^\infty \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$؛

د) $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx \quad (-1<a<1)$؛

ه) $\text{P.V.} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx \quad (0<a<1)$.

۱۳

نظریهٔ پیشرفته‌تر

۱.۱۳. مطالعه‌ای بیشتر دربارهٔ توابع همساز

۱.۱.۱۳. مطالعهٔ خود را دربارهٔ توابع همساز از سر می‌گیریم، این مطالعه را با یافتن بسطهای سری فوریه برای یك زوج از تابعهای همساز مزدوج آغاز می‌کنیم:

قضیه. فرض می‌کنیم K قرص $|z-z_\circ|<R$، $u=u(z)$ یك تابع همساز در K و $v=v(z)$ مزدوج همساز آن باشد. در این‌صورت u و v بسطهایی به‌شکل

$$u=u(z_\circ+re^{i\varphi})=a_\circ+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi-b_n\sin n\varphi)r^n, \qquad (۱)$$

$$v=v(z_\circ+re^{i\varphi})=b_\circ+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi)r^n, \qquad (۱')$$

دارندکه برای همهٔ مقادیر $\circ\leqslant r<R$، $\circ\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi$ معتبرند و همگرایی آنها درهر قرص بستهٔ $\circ\leqslant r\leqslant R'<R$، $\circ\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi$، یکنواخت است.

برهان. مانند بخش ۵.۸.۵، فرض می‌کنیم $f(z)$ (که با تقریب یك ثابت موهومی محض یکتاست) در K تابعی تحلیلی و u قسمت حقیقی آن است. در این صورت بنابر قضیهٔ ۳.۱.۱۰، $f(z)$ در K یك بسط تیلر به‌صورت

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-z_\circ)^n \qquad (۲)$$

دارد، که همگرایی آن در هر قرص بستهٔ $|z-z_\circ|\leqslant R'<R$ (بنا بر قضیهٔ ۷.۱.۷) یکنواخت است. برای به‌دست آوردن (۱)، مقادیر

$$c_n=a_n+ib_n,\ \ z-z_\circ=re^{i\varphi}$$

را در (۲) می‌گذاریم و آنگاه قسمت حقیقی بسط

$$f(z)=\sum_{n=\circ}^{\infty}(a_n+ib_n)r^n e^{in\varphi} \tag{۲'}$$

را اختیار می‌کنیم. از قسمت موهومی (۲') رابطهٔ (۱') به‌دست می‌آید. □

۲.۱.۱۳. تبصره. ازاین پس عبارات $u(z_\circ+re^{i\varphi})$ و $v(z_\circ+re^{i\varphi})$ که در (۱) و (۱') دیده می‌شوند به‌صورت سادهٔ $u(r,\varphi)$ و $v(r,\varphi)$ نوشته خواهند شد. بعلاوه، نظیر بخش ۸.۵، $u(x,y)$ و $v(x,y)$ همچنان مفاهیم $u=u(z)$ و $v=v(z)$ در نقطهٔ $z=x+iy$ را خواهند داشت. با این تعبیر، اگر $z=x+iy=z_\circ+re^{i\varphi}$، داریم

$$u(z)=u(x,y)=u(r,\varphi),\quad v(z)=v(x,y)=v(r,\varphi)$$

(راحتی کاربرد این نمادگذاری، موجه‌بودن انحراف جزئی در نمادگذاری را بخوبی روشن می‌کند)[1] به طوری‌که (۱) و (۱') را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$u(r,\varphi)=a_\circ+\sum_{n=\backslash}^{\infty}(a_n\cos n\varphi-b_n\sin n\varphi)r^n, \tag{۳}$$

$$v(r,\varphi)=b_\circ+\sum_{n=\backslash}^{\infty}(b_n\cos n\varphi+a_n\sin n\varphi)r^n. \tag{۳'}$$

۳.۱.۱۳. مثال. تابع

$$F(z)=\frac{Re^{i\theta}+(z-z_\circ)}{Re^{i\theta}-(z-z_\circ)}$$

درقرص $|z-z_\circ|<R$ (اما نه در قرص بزرگتر) تحلیلی است. از قضیهٔ ۲.۸.۵ نتیجه می‌شود که قسمتهای حقیقی و موهومی $F(z)$، در همین قرص یك جفت تابع همساز است. می‌نویسیم $z-z_\circ=re^{i\varphi}\,(r<R)$، از یك طرف

$$F(z)=U(r,\varphi)+iV(r,\varphi)=\frac{Re^{i\theta}+re^{i\varphi}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}=\frac{Re^{i\theta}+re^{i\varphi}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}\ \frac{Re^{-i\theta}-re^{-i\varphi}}{Re^{-i\theta}-re^{-i\varphi}}$$

---

۱. انحراف در این است که سه تابع متمایز $u(z)$، $u(x,y)$ و $u(r,\varphi)$ با یك حرف u نمایش داده شده‌اند.-م.

$$=\frac{R^{۲}-r^{۲}+۲iRr\sin(\varphi-\theta)}{R^{۲}+r^{۲}-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}, \qquad (۴)$$

و از طرف دیگر

$$\frac{Re^{i\theta}+re^{i\varphi}}{Re^{i\theta}-re^{i\theta}}=\frac{۱+\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}{۱-\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}=-۱+\frac{۲}{۱-\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\theta)}}, \qquad (۴')$$

که می‌توان بی‌درنگ تشخیص داد که طرف راست $(۴')$ مجموع سری همگرای

$$-۱+۲\left[۱+\frac{r}{R}e^{i(\varphi-\theta)}+\frac{r^{۲}}{R^{۲}}e^{۲i(\varphi-\theta)}+\dots\right] \qquad (۵)$$

است. اگر قسمتهای حقیقی و موهومی (۴) و (۵) را برابر قرار دهیم، بی درنگ به‌دست می‌آوریم

$$U(r,\varphi)=\frac{R^{۲}-r^{۲}}{R^{۲}+r^{۲}-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}$$

$$=۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\cos n(\varphi-\theta), \qquad (۶)$$

$$V(r,\varphi)=\frac{۲Rr\sin(\varphi-\theta)}{R^{۲}+r^{۲}-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}$$

$$=۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\sin n(\varphi-\theta). \qquad (۶')$$

این بسطها شکلهایی از (۳) و $(۳')$ هستند، که در آنها

$$a_{۰}=۱,\ b_{۰}=۰,\ a_n=\frac{۲\cos n\theta}{R^n},\quad b_n=-\frac{۲\sin n\theta}{R^n}\ (n=۱,۲,\dots).$$

لذا، بنا به قضیهٔ ۱۳.۱.۱۰، سریهای (۶) و $(۶')$ در هر قرص بستهٔ $۰\leqslant r\leqslant R'<R$، $۰\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi$ همگرای یکنواخت هستند. رابطه‌های (۶) و $(۶')$ را در تابعی به‌صورت

$$\frac{۱}{۲\pi}u(R,\theta)$$

ضرب می‌کنیم واز سریهای حاصل به‌استناد قضیهٔ ۶.۳.۸ و مسئلهٔ ۱۲ از فصل ۶ جمله به‌جمله

نسبت به θ ازصفر تا ۲π انتگرال می‌گیریم*، به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\frac{R^۲-r^۲}{R^۲+r^۲-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)d\theta+\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(\varphi-\theta)d\theta, \quad (۷)$$

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\frac{۲Rr\sin(\varphi-\theta)}{R^۲+r^۲-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta$$

$$=\frac{۱}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n\sin n(\varphi-\theta)d\theta. \quad (۷')$$

دو فرمول اخیر در قضیهٔ زیر مورد نیاز خواهند بود.

۴۰۱۰۱۳. قضیه. تابع $u=u(r,\varphi)$ را درقرص $\circ\leqslant r<\rho$ ، $\circ\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi$ همساز، و $v=v(r,\varphi)$ را مزدوج آن می‌گیریم. در این صورت u و v هر دو به‌ازای همهٔ مقادیر $\circ\leqslant r<R<\rho$ ، $\circ\leqslant\varphi\leqslant ۲\pi$ در فرمول انتگرال پواسون صدق می‌کنند، یعنی

$$u(r,\varphi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\frac{R^۲-r^۲}{R^۲+r^۲-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta, \quad (۸)$$

$$v(r,\varphi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} v(R,\theta)\frac{R^۲-r^۲}{R^۲+r^۲-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta. \quad (۸')$$

بعلاوه v با فرمول زیر به u بستگی دارد

$$v(r,\varphi)=b_{\circ}+\frac{۱}{۲\pi}\int_{\circ}^{۲\pi} u(R,\theta)\frac{۲Rr\sin(\varphi-\theta)}{R^۲+r^۲-۲Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta, \quad (۹)$$

که درآن $b_{\circ}$ یك ثابت حقیقی دلخواه است.

برهان. در (۳) به جای r، φ و n بترتیب $R(<\rho)$، θ و m می‌گذاریم، به دست می‌آید

$$u(R,\theta)=a_{\circ}+\sum_{m=۱}^{\infty}(a_m\cos m\theta-b_m\sin m\theta)R^m, \quad (۱۰)$$

---

* فرض می‌کنیم برای هرمقدار ثابت R، $u(R,\theta)$ درفاصلهٔ $\circ\leqslant\theta\leqslant ۲\pi$ پیوسته (ودر نتیجه کراندار) است. توجه‌کنیدکه در فاصلهٔ $\circ\leqslant\theta\leqslant ۲\pi$ و برای مقادیر ثابت $r(<R)$ و φ، توابع (۶) و (۶') همگرای یکنواخت هستند.

که سری در هر قرص بستهٔ $0 \leqslant R \leqslant \rho' < \rho$ ، $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ همگرای یکنواخت است. از این رو می‌توانیم (۱۰) را ابتدا در $\cos n\theta \; (n=0, 1, 2, \dots)$ و بعد در $\sin n\theta \; (n=1, 2, \dots)$، ضرب کنیم وسپس از آن‌جمله به‌جمله‌نسبت به θ از ۰ تا 2π انتگرال بگیریم. از این عمل نتیجه می‌شود

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)d\theta, \; a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\cos n\theta \, d\theta \quad (n=1, 2, \dots), \tag{11}$$

$$-b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\sin n\theta \, d\theta \qquad (n=1, 2, \dots), \tag{11'}$$

(مسئلهٔ ۲ را ببینید). اگر (۱۱) و (′۱۱) را در (۳) و(′۳) قرار دهیم، می‌بینیم که

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi-\theta)d\theta, \tag{12}$$

$$v(r,\varphi) = b_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n(\varphi-\theta)d\theta. \tag{12'}$$

ازمقایسهٔ (۱۲) و (′۱۲) با (۷) و (′۷)، بلافاصله (۸) و (۹) به‌دست می‌آید. بعلاوه چون u در (۸) یك تابع همساز دلخواه در قرص مفروض است، می‌توانیم در (۸)، v را به‌جای u قرار دهیم، که (′۸) را به‌دست می‌دهد. □

با قرار دادن $u \equiv 1$ در (۸) فرمول مفید زیر نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}d\theta = 1. \tag{13}$$

۵.۱.۱۳. نتیجه. فرض‌کنیم $f(z)$ یك تابع تحلیلی در قرص $|z-z_0|<\rho$ است و $u(r,\varphi)$ قسمت حقیقی آن است. دراین صورت

$$f(z) = ib_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{Re^{i\theta}+(z-z_0)}{Re^{i\theta}-(z-z_0)}d\theta \tag{14}$$

(b_0 حقیقی، $|z-z_0|<R<\rho$)، این صورت $f(z)$ به **فرمول شوارتس** معروف است.

برهان. (۹) را در i ضرب کنید ونتیجه را به (۸) اضافه نمایید، سپس از مثال ۳.۱.۱۳ استفاده کنید. □

۶.۱.۱۳. نتیجه. فرض می‌کنیم $u = u(z) = u(r,\varphi)$ درقرص $|z-z_0|<\rho$ تابعی همساز است. دراین صورت

$$u(z_\circ)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}u(R,\theta)d\theta$$

$(R<\rho)$، یعنی مقدار تابع u در نقطهٔ $z_\circ$، متوسط مقادیرش روی دایرهٔ $R=|z-z_\circ|$ است.

برهان. در فرمول (۸) قرار دهید $r=\circ$. یا از راه دیگر، قسمت حقیقی فرمول ۲۶، صفحه ۱۸۸ را اختیار کنید. □

۲۰۱۳. مسئلهٔ دیریکله

۱۰۲۰۱۳. تعریف. فرض می‌کنیم G یك حوزهٔ ژردان است، یعنی حوزه‌ای که مرز آن یك خم بستهٔ ژردان C است، و نیز فرض می‌کنیم تابع $h(z)$ که روی C تعریف شده، حقیقی و پیوسته است. مسئلهٔ تعیین تابع همساز $u(z)$ در G، به‌قسمی که برای هر $z_\circ\in C$

$$\lim_{\substack{z\to z_\circ \\ z\in G}}u(z)=h(z_\circ) \qquad (۱۵)$$

مطرح است. این مسئلهٔ دیریکله برای G است، که هم در آنالیز مختلط و هم در فیزیك ریاضی از اهمیت زیادی برخوردار است.

۲۰۲۰۱۳. تبصره. اگر رابطهٔ (۱۵) برقرار باشد، می‌گوییم که «$u(z)$ مقادیر مرزی $h(z)$ را روی C اختیار می‌کند». لذا تابعی که در G مساوی با $u(z)$ و روی C مساوی با $h(z)$ است خود به‌خود در $\bar{G}$ پیوسته و همساز است.

۳۰۲۰۱۳. حال حل مسئلهٔ دیریکله را برای یك قرص، قرص خاص به شعاع واحد و به مرکز مبدأ، آغاز می‌کنیم. لذا فرض می‌کنیم که G قرص $|z|<۱$ و C دایرهٔ $|z|=۱$ باشد. اگر $h(z)$ با مقادیری که تابع $u(z)$ روی C اختیار می‌کند برابر، و $u(z)$ در قرص $|z|<\rho$ با شعاعی بزرگتر از ۱ همساز باشد، آنگاه چون بنابر قضیهٔ ۴۰۱۰۱۳

$$u(re^{i\varphi})=\frac{۱-r^۲}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{u(e^{i\theta})}{۱+r^۲-۲r\cos(\varphi-\theta)}d\theta \qquad (r<۱)$$

عبارت

$$u(re^{i\varphi})=\frac{۱-r^۲}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{h(e^{i\theta})}{۱+r^۲-۲r\cos(\varphi-\theta)}d\theta, \qquad (۱۶)$$

جواب آشکار مسئلهٔ دیریکله است، که در آن جواب (۱۶) طبق نتیجهٔ ۳۰۳۰۱۰ د یکتاست. همان طور که اینك نشان می‌دهیم، حتی وقتی $h(e^{i\theta})$ یك تابع پیوستهٔ دلخواه است، همین عبارت (۱۶) جواب مسئلهٔ دیریکله برای G است.

قضیه. فرض می‌کنیم G قرص واحد $|z|<1$، C دایرهٔ واحد $|z|=1$، و $h(z)=h(e^{i\theta})$ یك تابع حقیقی پیوسته روی C است. در این‌صورت تابع (۱۶) جواب یکتای مسئلهٔ دیریکله‌ای (برای G) است‌که مقادیر مرزی‌اش روی C، $h(e^{i\theta})$ است.

برهان. واضح است‌که (۱۶) قسمت حقیقی تابع

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta,$$

است‌که ازقرار دادن $u(R,\theta)=h(e^{i\theta})$، $R=1$، $z_0=0$، $b_0=0$ در فرمول‌شوارتس (۱۴) به‌دست می‌آید. اما $f(z)$ بنابه فصل ۵، مسئلهٔ ۲۸، در G تحلیلی است، زیرا برای هر θ در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ عبارت زیر علامت انتگرال، بوضوح در G تحلیلی است و به ازای‌تمام مقادیر $z\in G$ ، $\theta\in[0,2\pi]$، نسبت به‌دومتغیر z و θ پیوسته‌است. لذا از قضیهٔ ۲.۸.۵ نتیجه‌می‌شود که $u(z)$ در G همساز است.

جان‌کلام در این برهان این است‌که نشان دهیم وقتی $r\to 1$ و $\varphi\to\varphi_0$ ($0<r<1$، φ_0 ثابت)، $u(re^{i\varphi})\to h(e^{i\varphi_0})$. ابتدامشاهده‌می‌کنیم که‌بنابر (۱۳) و (۱۶)،

$$u(re^{i\varphi})-h(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(\theta)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}d\theta,$$

که درآن برای سادگی $h(\varphi)$ به‌جای $h(e^{i\varphi})$ نوشته شده است.

اما

$$u(re^{i\varphi})-h(\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha,$$

زیرا عبارت زیر علامت انتگرال، تابع متناوب و دورهٔ تناوب آن 2π است (مسئلهٔ ۷ را ببینید). فرض می‌کنیم δ عددی بین صفرو π ($0<\delta<\pi$) باشد، می‌نویسیم

$$M=\max_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}|h(\varphi)|,\quad \omega(\delta,\varphi)=\max_{|\alpha|\leqslant\delta}|h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)|.$$

دراین صورت

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|$$

$$\leqslant\omega(\delta,\varphi)\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}$$

$$<\omega(\delta,\varphi)\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}=\omega(\delta,\varphi),$$

که در آن باز از (۱۳) استفاده کرده‌ایم، درحالی که*

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\delta<|\alpha|<\pi}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|$$

$$\leqslant 2M\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|\alpha|\leqslant\pi}\frac{d\alpha}{1+r^2-2r\cos\alpha}$$

$$\leqslant 2M\frac{2(\pi-\delta)}{2\pi}\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta}$$

$$<2M\frac{\pi-\delta}{\pi}\,\frac{1-r^2}{2r-2r\cos\delta}<\frac{M}{r}\,\frac{1-r^2}{1-\cos\delta}\,.$$

نتیجه می‌شود که

$$|u(re^{i\varphi})-h(\varphi)|=\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|$$

$$+\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|\alpha|\leqslant\pi}\frac{h(\varphi+\alpha)-h(\varphi)}{1+r^2-2r\cos\alpha}d\alpha\right|$$

$$\leqslant\omega(\delta,\varphi)+\frac{M}{r}\,\frac{1-r^2}{1-\cos\delta}\,,$$

و از آنجا

$$|u(re^{i\varphi})-h(\varphi_0)|\leqslant\omega(\delta,\varphi)+\frac{M}{r}\,\frac{1-r^2}{1-\cos\delta}+|h(\varphi)-h(\varphi_0)|, \qquad (۱۷)$$

که در آن، چون $h(z)$ روی C پیوسته است، وقتی $\delta\to 0$ ، $\omega(\delta,\varphi)\to 0$ و وقتی ،

---

* عبارت

$$\int_{\delta\leqslant|\alpha|\leqslant\pi}g(\varphi)d\varphi$$

خلاصهٔ

$$\int_{-\pi}^{-\delta}g(\varphi)\,d\varphi+\int_{\delta}^{\pi}g(\varphi)d\varphi$$

است.

$\varphi \to \varphi_\circ$، $|h(\varphi)-h(\varphi_\circ)| \to \circ$. حال فرض می‌کنیم

$$\delta = \sqrt[۴]{۱-r^۲}.$$

دراین صورت وقتی $r \to ۱$، $\delta \to \circ$، درحالی‌که وقتی $r \to ۱$

$$\frac{M}{r}\frac{۱-r^۲}{۱-\cos\delta} = \frac{۲M}{r}\sqrt{۱-r^۲}\left(۱+\frac{۱}{۱۲}\sqrt{۱-r^۲}+\dots\right) \to \circ.$$

بنابراین وقتی $r \to ۱$، $\varphi \to \varphi_\circ$ یا، هم ارز آن، وقتی $z = re^{i\varphi} \to e^{i\varphi_\circ}$، سمت راست (۱۷) به صفر میل می‌کند، یعنی همان طورکه خواستهٔ ماست

$$\lim_{z \to e^{i\varphi_\circ}} u(z) = h(\varphi_\circ).$$

برای تکمیل اثبات توجه می‌کنیم که یکتایی مانند گذشته از نتیجهٔ ۳.۳.۱۰ د حاصل می‌شود. □

۴.۲.۱۳. اینك‌که قضیهٔ ۳.۲.۱۳ ثابت شد، می‌توانیم بآسانی مسئلهٔ دیریکله را برای یك نیمصفحه حل کنیم:

قضیه. فرض می‌کنیم G نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > \circ$ و C محور حقیقی است و $h(z)=h(x)$ را یك تابع حقیقی پیوسته روی C می‌گیریم. در این صورت تابع

$$u(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{(\xi-x)^۲+y^۲}d\xi \qquad (۱۸)$$

$(z=x+iy)$ جواب یکتای مسئلهٔ دیریکله‌ای (برای G) است‌که مقادیر مرزی‌اش روی C، $h(x)$ است.

برهان. از مثال ۹.۲.۸ الف، دیده می‌شود که تابع

$$w = f(z) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} (\operatorname{Im}\zeta > \circ) \qquad (۱۹)$$

نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > \circ$ را به‌روی قرص $|w| < ۱$ می‌نگارد، درحالی‌که نقطهٔ $z=\zeta$ را به نقطهٔ $w=\circ$ ومحور حقیقی $-\infty < x < \infty$ را به دایرهٔ $|w| = ۱$ می‌برد. فرض می‌کنیم $z=\varphi(w)$ معکوس تبدیل خطی‌کسری (۱۹) باشد. در این صورت تابع $h^*(w) = h(\varphi(w))$ روی دایرهٔ $|w| = ۱$ پیوسته است (چرا؟). جواب یکتای مسئلهٔ دیریکله راکه درقضیهٔ ۳.۲.۱۳ آمده است، برای قرص $|w| < ۱$ و مقادیرمرزی $h^*(w)$،

به $u^*(w)$ نمایش داده، می‌نویسیم $u(z)=u^*(f(z))$. در این صورت $u(z)$ در G همساز است، زیرا تابعی همساز ازیك تابع تحلیلی است (فصل ۵، مسئلهٔ ۲۶ را ببینید)، ومقادیر مرزی مطلوب $h^*(f(x))=h(x)$ را روی C اختیار می کند.

برای به دست آوردن عبارت صریح $u(z)$، در (۱۶)، u و h و r را بترتیب برابر با u^*، h^* و ۰ انتخاب می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$u^*(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^*(e^{i\theta})d\theta. \qquad (16')$$

نقطهٔ روی دایرهٔ $|w|=1$ که با نقطهٔ x روی محورحقیقی C متناظر است،

$$e^{i\theta}=\frac{x-\zeta}{x-\bar{\zeta}} \qquad (\text{حقیقی } x)$$

است، به قسمی که

$$ie^{i\theta}d\theta=\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{(x-\bar{\zeta})^2}dx,$$

و لذا

$$d\theta=\frac{1}{i}\frac{x-\bar{\zeta}}{x-\zeta}\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{(x-\bar{\zeta})^2}dx=\frac{2\eta}{|x-\zeta|^2}dx=\frac{2\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx,$$

که در آن $\zeta=\xi+i\eta$. بنابراین اگر $(16')$ را برحسب متغیرهای ξ، η و x بیان کنیم می بینیم که

$$u(\zeta)=u^*(0)=\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x)}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx.$$

برای به دست آوردن (۱۸)، فقط ξ، x، y و z رابترتیب جانشین x، ξ، η و ζ می‌کنیم. □

۳.۱۳. چند مطلب دیگر دربارهٔ نگاشت همدیس

۱.۳.۱۳. فرض می کنیم $w=f(z)$ یك تابـع تك ارز (یعنی، تحلیلی یك به یك) درحوزهٔ G است و این حوزه را به روی حوزهٔ G^* می‌نگارد (قضیهٔ ۲.۱.۹ را به خاطر آورید).دراین صورت $f(z)$ یك نگاشت همدیس G بـه روی G^* نامیده می‌شود. نتیجهٔ ۵.۲.۱۲ همدیسی $f(z)$ درهرنقطهٔ G راتضمین‌می کند. به‌این مناسبت، G^* رانگارهٔ همدیس G می گویند. توجه‌کنید که با این‌تعریف، تابع تحلیلی در G وهمدیس درهرنقطهٔ G، لازم

نیست که نگاشت همدیس G باشد، زیرا این تابع ممکن است در G یك به یك نباشد (به فصل ۱۲، مسئلهٔ ۹ رجوع کنید). اصطلاح «نگاشت همدیس» به معنای آزادتر «شاخه‌ای از آنالیزمختلط» نیز به‌کاررفته است،شاخه‌ای که در ارتباط با مسائلی است که همدیسی در آنها نقشی کلیدی دارد.

۰.۲.۳.۱۳ قضیه. اگر G^* نگارهٔ همدیس G باشد، آنگاه G نگارهٔ همدیس G^* است بعلاوه اگر G^* نگارهٔ همدیس G، و G^{**} نگارهٔ همدیس G^* باشد،آنگاه G^{**} نگارهٔ همدیس G است*.

برهان. فرض می کنیم $w=f(z)$ یك نگاشت همدیس از G به روی G^* و $z=\varphi(w)$ معکوس آن است، و نیز $\zeta=g(w)$ را یك نگاشت همدیس G^* به روی G^{**} می گیریم. دراین‌صورت $z=\varphi(w)$ یك نگاشت همدیس G^* به روی G است، زیرا $\varphi(w)$ بنابه‌قضیهٔ ۳.۱.۹ در G^* تك ارزاست، درحالی که $\zeta=g(f(z))$ یك‌نگاشت‌همدیس از G به‌روی G^{**} است، زیرا یك تابع تك‌ارزاز یك‌تابع‌تك‌ارز،خود تك‌ارز است (چرا؟). □

۰.۳.۳.۱۳ قضیه. اگر G^* و G^{**} هر دو نگاره‌های همدیس G باشند، آنگاه G^{**} یك نگارهٔ همدیس G^* است وبرعکس.

برهان. فرض می کنیم $w=f(z)$ یك‌نگاشت همدیس از G به روی G^* با معکوس $z=\varphi(w)$ باشد، و $\zeta=g(z)$ را یك نگاشت همدیس از G به روی G^{**} با معکوس $z=\psi(\zeta)$ می گیریم. دراین صورت $\zeta=g(\varphi(w))$ یك نگاشت همدیس از G^* به روی G^{**} است، درحالی که $w=f(\psi(\zeta))$ یك نگاشت همدیس از G^{**} به روی G^* است. □

۰.۴.۳.۱۳ فرض می کنیم G یك قرص یا یك نیمصفحه و z_0 نقطه‌ای از G باشد. در این صورت طبق بخش ۹.۲.۸، G را می‌توان به‌وسیلهٔ یك تبدیل خطی کسری که درشرایط

$$f(z_0)=0, \qquad f'(z_0)>0 \tag{۲۰}$$

صادق است، به طورهمدیس به روی قرص واحد $|w|<1$ نگاشت. این واقعیت ساده را می‌توان به صورت قضیهٔ زیر که نتایج گسترده‌ای دارد، تعمیم داد. این قضیه را اثبات نمی کنیم**.

قضیهٔ (ریمان)، فرض می‌کنیم Gحوزهٔ‌همبندساده‌ای در صفحهٔ گسترش یافته است که

---

* البته در اینجا، G، G^* و G^{**} همگی حوزه هستند.

** برای اثبات وجود $f(z)$ مثلاً کتاب سابق‌الذکر

A.I. Markushevich, volume III, Theorem 1.2

را ببینید. اثبات قسمت یکتایی قضیه مقدماتی است، ودر مسائل ۱۰-۱۱ به آن اشاره شده است.

مرزش بیش ازیك نقطه دارد، و z_0 نقطه‌ای از G است. دراین‌صورت‌تابع تك ارز یکتای $w=f(z)$ وجود دارد کـه G را به‌طور همدیس به روی قرص واحد $|w|<1$ می‌نگارد و در شرایط (۲۰) صدق می‌کند.

دلیل قید این شرط که مرز G بیش از یك نقطه داشته باشد روشن‌است.فرض‌می‌کنیم Π_{z_0}حوزهٔ مساوی با تمام صفحهٔ گسترش یافته منهـای نقطـهٔ z_0 باشد و $w=f(z)$ را یك نگاشت همدیس از Π_{z_0} به‌روی قرص واحد $|w|<1$ می گیریم. دراین صورت‌تابع

$$g(z)=f\left(\frac{1}{z}+z_0\right)$$

یك نگاشت همدیس از تمام صفحهٔ متناهی Π_∞ به روی همان قرص است. اما چنین تابعی نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا اگربرای هرمقدار متناهی z، $|g(z)|<1$، آنگاه $g(z)$ یك تابع تام‌کرانداراست ولذا بنا برقضیهٔ لیوویل، مقداری‌ثابت است، به قسمی‌که‌بوضوح $g(z)$ در Π_∞ خاصیت تك ارزی را از دست می‌دهد!

۵.۳.۱۳. واقعاً، یافتن کلیترین تابع تك ارزی در Π_{z_0} مشکل نیست:

قضیه. اگر $f(z)$ در Π_{z_0} تك ارز باشد، آنگاه $f(z)$ یك تبدیل خطی‌کسری‌است.

برهان. بوضوح z_0 نمی‌تواند یك نقطهٔ تکین برداشتنی $f(z)$ باشد، زیرا اگرباشد $f(z)$ را می‌تـوان درتمام صفحهٔ گسترش یافته تحلیلی‌کـرد (بخش ۲.۲.۱۱ راببینید) و بنابراین درتمام صفحهٔ متناهی کراندار می‌شود. امـا آنگاه $f(z)$ بنابر قضیهٔ لیوویل باید ثابت‌باشد واین غیرممکن است. بنابراین z_0 یا یك نقطهٔ تکین‌اساسی ویا یك قطب $f(z)$ است. فرض می کنیم z_0 نقطهٔ تکین اساسی، $z_1\neq z_0$، $A=f(z_1)$ و K یك همسایگی z_1 واقع‌در Π_{z_0} است، وبنابراین‌شامل z_0 نیست. لذا $f(z)$ همسایگی K را به‌توی یك‌حوزهٔ K^* واقع در صفحهٔ w می‌نگاردکه K^* شامـل A و بنابراین شامل یك همسایگی A مانند $|w-A|<\epsilon$ است (قضیهٔ ۲.۱.۹ را به‌خاطر آورید). اما تابع $w=f(z)$ که تك ارز است نمی‌تواند هیچ مقداری راکه‌فاصله‌اش تا A کمتراز ε است دریك‌همسایگی سفتهٔ z_0 که K را قطع‌نمی‌کند اختیار نماید، و این‌متناقض با قضیهٔ ۶.۲.۱۱ است. بنابرایـن z_0 نمی‌تواند یك‌نقطهٔ تکین اساسی‌باشد. لذا z_0 باید یك‌قطب‌باشد. این‌قطب باید ساده باشد، زیرا درغیراین صورت بنابه قضیهٔ ۴.۲.۱۱ ب، تابع

$$\varphi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)} & z\neq z_0 \text{ اگر } \\ 0 & z=z_0 \text{ اگر }\end{cases}$$

که بوضوح دریك همسایگی z_0 تك ارز است باید یك صفر چندگانه در z_0 داشته باشد،

به‌طوری که $\varphi'(z_\circ)=\circ$، واین متناقض بـا قضیهٔ ۴.۲.۱۲ است. پس قسمت اصلی بسط لوران $f(z)$ در $z_\circ$، اگر $z_\circ$ متناهی باشد به صورت زیر است

$$\frac{a}{z-z_\circ}\cdot$$

بنابراین

$$f(z)-\frac{a}{z-z_\circ}$$

یك تابع تام‌کرانداراست (چرا؟)، و از آنجا باز بنابه قضیهٔ لیوویل برابر با یك مقدار ثابت، مثلاً b است، یعنی، $f(z)$ دقیقاً تبدیل خطی‌کسری زیر است

$$f(z)=\frac{a}{z-z_\circ}+b. \qquad (۲۱)$$

اگر $z_\circ=\infty$، آنگاه قسمت اصلی $f(z)$ در $z_\circ$ به‌صورت az است (فصل ۱۱، مسئلهٔ ۱۶ را ببینید)، و تبدیل خطی تام زیر به جای (۲۱) به‌دست می‌آید

$$f(z)=az+b\,. \qquad (۲۱')$$

توجه کنید که‌درهر حالت، $f(z)$حوزهٔ $\Pi_{z_\circ}$ را به روی‌تمام‌صفحهٔ متناهی Π_∞ می‌نگارد. □

۶.۳.۱۳. قضیهٔ زیر تعمیمی ساده از قضیهٔ ریمان است:

قضیه. فرض می‌کنیم G و G^* دو حوزهٔ همبند ساده در صفحهٔ گسترش یافته، و هر یك دارای مرزی شامل بیش از یك نقطه باشد. $z_\circ$ را نقطه‌ای از G و $w_\circ$ را نقطه‌ای از G^* می‌گیریم. دراین‌صورت تابع تك ارز یکتای $w=f(z)$ وجود داردکه G را به‌طورهمدیس به روی G^* می‌نگارد و در شرایط زیر صدق می‌کند

$$f(z_\circ)=w_\circ, \qquad f'(z_\circ)>\circ. \qquad (۲۰')$$

برهان. فرض می‌کنیم K قرص $|\zeta|<۱$ و$\zeta=g(z)$ نگاشت همدیس ازG به‌روی K با معکوس $z=\varphi(\zeta)$ باشد به قسمی که

$$g(z_\circ)=\circ, \qquad g'(z_\circ)>\circ$$

(وجود این نگاشت بنابه قضیهٔ ریمان تضمین شده است)، و$\zeta=h(w)$ را نگاشت همدیس از G^* به روی K با معکوس $w=\psi(\zeta)$، به طوری که

$$h(w_\circ)=\circ, \qquad h'(w_\circ)>\circ$$

می گیریم. آنگاه

$$w=f(z)=\psi(g(z))$$

نگاشت همدیس از G به روی G^* است به قسمی که

$$f(z_\circ)=\psi(g(z_\circ))=\psi(\circ)=w_\circ,$$

$$f'(z_\circ)=\psi'(g(z_\circ))g'(z_\circ)=\psi'(\circ)g'(z_\circ)=\frac{g'(z_\circ)}{h'(z_\circ)}>\circ$$

(به قضیهٔ ۳.۱.۹ رجوع کنید). □

۷.۳.۱۳ قضیهٔ مهم زیر که آن را بدون اثبات ذکر می کنیم مربوط به «رفتارمرزی» نگاشتهای همدیس حوزه‌های ژردان است:

قضیه. فرض می‌کنیم $w=f(z)$ یك نگاشت همدیس از یك حوزهٔ ژردان G با مرز C به روی حوزهٔ ژردان دیگر G^* با مرز C^* باشد*، و $f(z)$ را روی C برای هر $z_\circ\in C$

$$f(z_\circ)=\lim_{\substack{z\to z_\circ\\ z\in G}} f(z)$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت $f(z)$ در $\bar{G}$ پیوسته است و C را به روی C^* می‌نگارد. این نگاشت C بـه روی C^* یك به‌یك و « حافظ جهت » است، یعنی وقتی نقطهٔ z خم C را طی می‌کند، نقطهٔ نگارهٔ $w=f(z)$ خم C^* را درهمان جهت می‌پیماید.

۸.۳.۱۳ حال آمادهٔ حل مسئلهٔ دیریکله برای یك حوزهٔ دلخواه ژردان هستیم.

قضیه. فرض می کنیم G یك حوزهٔ ژردان با مرز C و $h(z)$ یك تابع حقیقی پیوسته روی C است. دراین صورت تابع همساز یکتا در G وجود دارد که مقادیر مرزی اش روی C، $h(z)$ است.

برهان. فرض می کنیم $w=f(z)$ یك نگاشت همدیس از G بـه روی قرص واحد $|w|<۱$ با معکوس $z=\varphi(w)$ باشد، وبرای تعریف $\varphi(w)$ روی دایـرهٔ $|w|=۱$ قضیهٔ ۷.۳.۱۳ را به‌کار می‌بریم. پس تابع $h^*(w)=h(\varphi(w))$ روی دایـرهٔ $|w|=۱$ پیوسته است(چرا؟).جواب یکتای مسئلهٔ دیریکله‌را که‌در قضیهٔ ۳.۲.۱۳ آمده‌است برای‌قرص $|w|<۱$ ومقادیر مرزی $h^*(w)$، $u^*(w)$ می‌نامیـم و می‌نویسیم $u(z)=u^*(f(z))$. در این صورت $u(z)$ در G همساز است (فصل ۵، مسئلهٔ ۲۶) و مقادیر مرزی مطلوب $h^*(f(z))=h(z)$

---

* وجود چنین نگاشتی از قضیهٔ ۶.۳.۱۳ نتیجه می‌شود.

را روی C اختیار می‌کند. □

۴.۱۳. ادامهٔ تحلیلی

۱.۴.۱۳. حوزهٔ G مفروض است، E را زیر مجموعه‌ای از G که یک نقطهٔ حدی در G دارد می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f(z)$ تابعی است که در E تعریف شده است. همچنین فرض می‌کنیم تابع تحلیلی $\varphi(z)$ وجود داردکه در G تعریف شده است و برای هر $z\in E$، $f(z)=\varphi(z)$. دراین صورت $\varphi(z)$ را ادامهٔ تحلیلی $f(z)$ از E به توی G می‌خوانیم. توجه‌کنید که یکتایی $\varphi(z)$ بنا به قضیهٔ ۳.۲.۱۰ تضمین شده است.

۲.۴.۱۳. چند مثال

الف. فرض می‌کنیم E محور اعداد حقیقی و $f(x)=e^x$. در این صورت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<\infty), \tag{۲۲}$$

به قسمی که تابع

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad(|z|<\infty) \tag{۲۲'}$$

که از قراردادن z به جای x در (۲۲) به دست می‌آید ادامهٔ تحلیلی یکتای $f(x)$ به‌توی تمام صفحهٔ متناهی است. بدیهی است این مطلب‌کاملاً با مطالب بخش ۱.۱.۸ که در آن $\varphi(z)$ را e^z تعریف می‌کنیم، هماهنگ است.

ب. فرض می‌کنیم E قرص واحد $|z|<1$ است، توابع

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n,$$

و

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-z}\qquad(z\neq 1)$$

را درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت برای‌هر $z\in E$، $f(z)=\varphi(z)$، به‌قسمی که $\varphi(z)$ ادامهٔ‌تحلیلی $f(z)$ به توی حوزه‌ای برابر تمام صفحهٔ متناهی منهای نقطهٔ تکین $z=1$ است.

ج. فرض می‌کنیم E قرص واحد $|z|<1$، و

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}=z+z^{2}+z^{6}+z^{24}+\cdots \qquad (۲۳)$$

دراین صورت دایرهٔ واحد ۱ $=|z|$ «مرزطبیعی» سری (۲۳) است، یعنی ادامه‌ای تحلیلی از $f(z)$ به‌توی حوزهٔبزرگتر G که شامل E باشد وجود ندارد. زیرا، اگرچنین ادامه‌ای وجود می‌داشت، آنگاه بوضوح G شامل کمانـــی مانند γ از دایرهٔ واحد می‌شد و درنتیجه می‌بایست حد

$$\lim_{r\to 1-} f(re^{2\pi i\alpha}) \qquad (۲۴)$$

برای هر $e^{2\pi i\alpha}\in\gamma$ به‌طور محقق متناهی باشد. اما این غیرممکن است، زیـــرا γ شـــامل نقاطی مانند$e^{2\pi i\alpha_0}$است که α_0 گویاست وهمان‌طور که‌درمسئلهٔ ۱۷ نشان داده‌ایم، حد(۲۴) برای تمام این نقاط نامتناهی است.

۳.۴.۱۳. اینک نوع دیگری از ادامهٔ تحلیلی راکه شامل حوزه‌های همپوش است بررسی می‌کنیم. مجموعهٔ $\{G\,,\,f(z)\}$ عبارت از حوزهٔ G و تابع تحلیلی (یك مقداری) تعریف شده در G را درنظر می‌گیریم، و این مجموعهٔ $\{G\,,\,f(z)\}$ را یك عنصر با حوزهٔ G می‌نامیم. دوعنصر $\{G_1\,,\,f_1(z)\}$ و $\{G_2,\,f_2(z)\}$ را مساوی می‌گوییم اگر $G_1=G_2$ و $f_1(z)\equiv f_2(z)$. هریك ازدوعنصر $\{G_1,\,f_1(z)\}$ و $\{G_2,\,f_2(z)\}$ را ادامهٔ تحلیلی مستقیم دیگـــری گوینـــد اگـــر $D=G_1\cap G_2$ یك حـــوزه باشد و برای هـــر $z\in D$، $f_1(z)=f_2(z)$ *. توجه کنید که در این حالت تابع

$$\varphi(z)=\begin{cases} f_1(z) & \text{برای هر } z\in G_1 \\ f_2(z) & \text{برای هر } z\in G_2 \end{cases} \qquad (۲۵)$$

طبق تعریف دربخش ۱.۴.۱۳، ادامهٔ تحلیلی هر دو تابع $f_1(z)$ و $f_2(z)$ به تـــوی حوزهٔ $G=G_1\cup G_2$ است.

---

* دو مجموعهٔ A و B مفروض‌اند، منظور از اشتراك A وB، که با $A\cap B$ نشان داده‌می‌شود، مجموعـــهٔ تمام نقاطی است که هم به A و هم به B متعلق هستند (نظیر بخش ۳.۲.۱۰)، در حالی کـــه منظور از اتحاد A و B که با $A\cup B$ نشان داده می‌شود مجموعهٔ تمام نقاطی است کـــه حداقل بـــه یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارند. دو مجموعهٔ A و B را مجزا گویند اگر $A\cap B$، اشتراك آنها، «تهی» باشد، یعنی نقاط مشترکی نداشته باشند.

۴.۴.۱۳ چند مثال

الف. فرض می‌کنیم G_k حوزهٔ زیر باشد*

$$\frac{(k-۱)\pi}{۲}<\arg z<\frac{(k+۱)\pi}{۲} \quad (k=۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots), \qquad (۲۶)$$

$f_k(z)$ را تابع

$$f_k(z)=\ln|z|+i\theta_k,$$

که درآن θ_k مقدار $\arg z$ است و درشرط (۲۶) صدق می‌کند می‌گیریم. در این صورت عناصر $\{G_k , f_k(z)\}$ و $\{G_l , f_l(z)\}$ هر یك ادامهٔ تحلیلی مستقیم دیگری است اگر و فقط اگر l یکی از مقادیر $k-۱$، k، $k+۱$ را اختیار کند.

ب. فرض می‌کنیم $G_۱$ قرص واحد $|z|<۱$، و

$$f_۱(z)=\sum_{n=۰}^{\infty} z^n=\frac{۱}{۱-z}, \qquad (۲۷)$$

همان تابع مثال ۲.۴.۱۳ ب باشد. برای هر نقطهٔ مفروض $z_۰\in G_۱$،

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{f_۱^{(n)}(z_۰)}{n!}(z-z_۰)^n \qquad (۲۸)$$

بسط تیلر $f_۱(z)$ در $z_۰$ را درنظر می‌گیریم. چون

$$f_۱^{(n)}(z_۰)=\frac{n!}{(۱-z_۰)^{n+۱}},$$

شعاع همگرایی سری (۲۸) (بنابر قضیهٔ کوشی ـ آدامار)

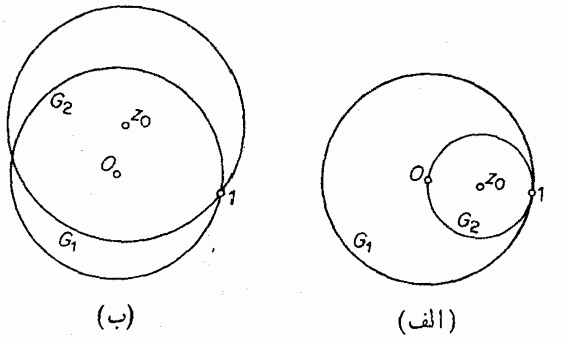
$$R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|۱-z_۰|^{n+۱}}=|۱-z_۰|,$$

است. یعنی فاصلهٔ بین نقاط ۱ و $z_۰$. این طبیعی است (به بخش ۶.۱.۱۰ رجوع کنید)، زیرا $z=۱$ تنها نقطهٔ تکین تابع $۱/(۱-z)$ است. فرض‌می‌کنیم $G_۲$ قرص $|z-z_۰|<R$ باشد و $f_۲(z)$ مجموع سری (۲۸) را نشان دهد. لذا عناصر $\{G_۱ , f_۱(z)\}$ و $\{G_۲ , f_۲(z)\}$ با توجه به‌معنای (۲۸) هریك بوضوح ادامهٔ تحلیلی مستقیم دیگری است.

---

* پس $G_۰$ نیمصفحهٔ دست راست، $G_۱$ نیمصفحهٔ فوقانی، $G_۲$ نیمصفحهٔ دست چپ، $G_۳$ نیمصفحهٔ تحتانی، $G_۴$ دوباره نیمصفحهٔ دست راست و... است.

اگر نقطهٔ $z_0 \in G_1$ روی محور حقیقی مثبت جای داشته باشد، آنگاه $|z_0| - 1 = |1 - z_0|$، به‌طوری که G_1 شامل G_2 است، مطابق شکل ۴۱ الف، و بنابراین $G = G_1 \cup G_2 = G_1$. دراین حالت تابع (۲۵) برای ادامهٔ تابع اصلی $f_1(z)$ از G_1 به توی یك حوزهٔ بزرگتر به‌کار نمی‌رود. از طرف دیگر برای هر نقطهٔ دیگر $z_0 \in G_1$ داریم $|z_0| - 1 < |1 - z_0|$، به‌قسمی که G_2 دایرهٔ همگرایی سری اصلی (۲۷)، یعنی $|z| = 1$ را همان‌گونه که در شکل ۴۱ ب نشان داده‌ایم «قطع می‌کند». دراین حالت تابع (۲۵) ادامهٔ تحلیلی $f_1(z)$ از G_1 به توی حوزهٔ بزرگتر $G = G_1 \cup G_2$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۴۱

۵۰۴۰۱۳. مجموعهٔ عناصر

$$\{G_1, f_1(z)\}\ ,\ \{G_2, f_2(z)\}\ ,\dots,\ \{G_n, f_n(z)\}$$

را به قسمی که $\{G_{k+1}, f_{k+1}(z)\}$ ادامهٔ تحلیلی $\{G_k, f_k(z)\}$ برای هر $k = 1, 2, \dots, n-1$ باشد، یك زنجیرعناصر می خوانند که $\{G_1, f_1(z)\}$ و $\{G_n, f_n(z)\}$ را به یکدیگر وصل می‌کند *. هرزوج از عناصر را که به وسیلهٔ این زنجیر به یکدیگر وصل شده باشد، ادامهٔ تحلیلی دیگری می‌خوانند. واضح است هر دوعنصری که ادامهٔ تحلیلی مستقیم یکدیگرند، خود به خود ادامهٔ تحلیلی یکدیگر نیز هستند، اما دوعنصری که ادامهٔ تحلیلی یکدیگرند درحالت کلی ادامهٔ تحلیلی مستقیم یکدیگر نیستند.

مجموعهٔ متناهی یا نامتناهی ازعناصر F را همبند می‌گویند، اگرهرزوج ازعناصر F را بتوان به وسیلهٔ یك زنجیر از عناصر متعلق به F به هم وصل کرد. بویژه اگر F همبند باشد، آنگاه هرعنصر F آشکارا ادامهٔ تحلیلی هرعنصر دیگر F است. چنین مجموعهٔ همبند F از عناصر را تابع تحلیلی کلی می‌نامند و می‌گویند هرعنصرش آن را «تولید» می‌کند.

---

* در شکل ۳۱ در ارتباط با برهان قضیهٔ ۳۰۲۰۱۰، یك زنجیر از عناصر «دایره‌ای»، یعنی عناصری که هر حوزه‌اش یك قرص است، نشان داده شده است.

اجتماع حوزه‌های همهٔ عناصر یك تابع تحلیلی کلی F، خود یك حوزه است (چرا؟) و حوزهٔ F خوانده می‌شود. تابع تحلیلی کلی F مفروض است، و $z_\circ$ نقطه‌ای از حوزهٔ F است. دراین صورت منظور ما از مقدار F در $z_\circ$، که آن را با $F(z_\circ)$ نشان می‌دهیم هر مقدار $f(z_\circ)$ است به‌طوری که $\{G,f(z)\}\in F$ و $z_\circ\in G$. توجه کنید که F درحالت کلی یك تابع چندمقداری است، زیرا F ممکن است شامل دوعنصر $\{G,f(z)\}$ و $\{G^*,f^*(z)\}$ باشد، به‌قسمی که در نقطهٔ $z_\circ\in G\cap G^*$، $f(z_\circ)\neq f^*(z_\circ)$، البته به‌شرط آنکه $\{G,f(z)\}$ و $\{G^*,f^*(z)\}$ ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر نباشند.

۶.۴.۱۳. چند مثال

الف. فرض می‌کنیم G_k و $f_k(z)$ همان حوزه و تابع مثال ۴.۴.۱۳ الف باشند. دراین صورت مجموعهٔ تمام عناصر

$$\{G_k,f_k(z)\}\qquad (k=\circ,\pm ۱,\pm ۲,\cdots)$$

یك تابع تحلیلی کلی F است، زیرا هرزوج از عناصر $\{G_k,f_k(z)\}$ و $\{G_l,f_l(z)\}$ به‌وسیلهٔ یك زنجیر از عناصر F (کدام یك؟) به هم متصل می‌شوند، و بنابراین ادامه‌های تحلیلی یکدیگرند (همان طور که قبلاً توجه کردیم، ادامه‌های تحلیلی مستقیم‌اند اگر و فقط اگر l یکی از مقادیر $k-۱$، k، $k+۱$ را اختیار کند). حوزهٔ F تمام صفحهٔ متناهی منهای تك نقطهٔ $z=\circ$ است. اگر $z_\circ\in G_{k_\circ}$، آنگاه $z_\circ\in G_{k_\circ+۴k}=G_{k_\circ}$، اما $f_{k_\circ+۴k}(z_\circ)=f_{k_\circ}(z_\circ)+۲\pi ki$. لذا F درهر نقطهٔ $z_\circ\in D$ بینهایت مقدار، که اختلافشان مضارب صحیح $۲\pi i$ است، اختیار می‌کند. بوضوح $F(z)$ باید بر تابع چند مقداری $\ln z$ منطبق شود، زیرا هر G_k یك حوزهٔ تك ارزی $\ln z$ وهر $f_k(z)$ یك شاخهٔ یك مقداری $\ln z$ است.

ب. فرض کنیم $G_۱$ و $f_۱(z)$ همان حوزه و تابع مثال ۴.۴.۱۳ ب باشد. F رامجموعهٔ همهٔ عناصر دایره‌ای (یعنی عناصری که حوزهٔ هرکدام یك قرص است) که ادامه‌های تحلیلی عنصر $\{G_۱,f_۱(z)\}$ هستند می‌گیریم. دراین صورت F یك تابع تحلیلی کلی است که حوزهٔ آن همان حوزهٔ مثال قبلی است، اما این بار $F(z)$ باید بر تابع یك مقداری $۱/(z-۱)$ منطبق شود. بنابراین یك تابع تحلیلی کلیِ F، همان‌طور که دراین دومثال نشان داده شد، اگر حوزه‌اش همبند چندگانه باشد، یك مقداری یا چند مقداری است. اما اگر D همبند ساده‌باشد، می‌توان نشان داد * که F الزاماً یك مقداری‌است، واین نتیجه‌ای است که به قضیهٔ مونودرومی[1] معروف است.

---

* به‌کتاب سابق الذکر زیر رجوع کنید

.A.I. Markushevich, volume III. Theorem 8.5

1. Monodromy Theorem

۵.۱۳. اصل تقارن

۱.۵.۱۳. اینك نوع مهمی از ادامهٔ تحلیلی را که متضمن حوزه‌های «مجاور» است بررسی می‌کنیم:

قضیه. فرض می‌کنیم G_1 و G_2 دوحوزهٔ مجزا از هم هستند کـه مرز مشترکشان یك خم هموارتکه‌ای ژردان γ است. $f_1(z)$ را در G_1 تحلیلی، در $G_1 \cup \gamma$ پیوسته و $f_2(z)$ را در G_2 تحلیلی و در $G_2 \cup \gamma$ پیوسته می‌گیریم، وفـرض می‌کنیم مجموعهٔ $D = G_1 \cup \gamma \cup G_2$ یك حوزه است*. بعلاوه فرض می‌کنیم که $f_1(z)$ و $f_2(z)$ روی γ با هم برابرند. دراین صورت تابع

$$\varphi(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{اگر } z \in G_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{اگر } z \in \gamma \\ f_2(z) & \text{اگر } z \in G_2 \end{cases} \qquad (۲۹)$$

در D تحلیلی است، خلاصهٔ قضیه اینکه می‌گوییم $f_2(z)$ ادامـهٔ تحلیلی $f_1(z)$ از G_1 به توی G_2 از **طریق کمان** γ است.

برهان. فرض می‌کنیم C یك خم ژردان بستهٔ هموارتکه‌ای است که در D واقع است ودرجهت مثبت طی می‌شود. اگر C خم γ را قطع نکند، آنگاه یا C در G_1 و یا C در G_2 است، به قسمی که بنا به قضیهٔ انتگرال کوشی

$$\int_C \varphi(z)\,dz = 0\ , \qquad (۳۰)$$

که در آن $\varphi(z)$ همان تابع (۲۹) است. از طرف دیگر اگر C خم γ را قطع کند، C را به‌دو کمان C_1 و C_2 با نقاط انتهایی $a \in \gamma$ و $b \in \gamma$ مطابق شکل ۴۲ تقسیم می‌کنیم. آنگاه از قضیهٔ انتگرال کوشی تعمیم یافته (بخش ۲.۴.۵ را ببینید) نتیجه می‌شود که

$$\int_{C_1 + \widehat{ab}} f_1(z)\,dz = \int_{C_2 + \widehat{ba}} f_2(z)\,dz = 0,$$

و از آنجا

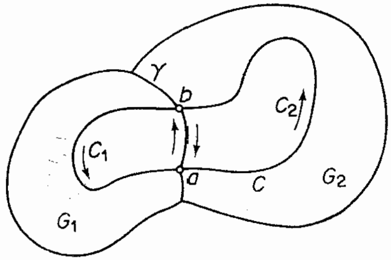
$$0 = \int_{C_1} f_1(z)\,dz + \int_{\widehat{ab}} f_1(z)\,dz + \int_{C_2} f_2(z)\,dz + \int_{\widehat{ba}} f_2(z)\,dz$$

---

* این مطلب خود به‌خود ازمفهوم G_1، γ و G_2 نتیجه نمی‌شود، بلکه برای مثال، اگر G_1 و G_2 حوزه‌های ژردان باشند استوار است.

$$=\int_{C_1} f_1(z)dz+\int_{C_2} f_2(z)dz,$$

زیرا انتگرالهای روی $\widehat{ab}$ و $\widehat{ba}$ به دلیل قضیهٔ ۱.۲.۵ وباتوجه به این واقعیت که $f_1(z)$ و $f_2(z)$ روی γ برابرند یکدیگر را خنثی می‌کنند. اما مجموع طرف راست را می‌توان به صورت زیر نوشت



شکل ۴۲

$$\int_{C_1}\varphi(z)dz+\int_{C_2}\varphi(z)dz=\int_{C}\varphi(z)dz,$$

به قسمی که (۳۰) بازاستوار است. پس انتگرال $\varphi(z)$ درطول هرخم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C کـه در D واقع باشد صفر می‌شود. بنابراین طبق قضیهٔ موررا (قضیهٔ ۳.۷.۵)، $\varphi(z)$ در D تحلیلی است*. □

۲.۵.۱۳. حال برای اثبات یکی ازمفیدترین ابزار آنالیز مختلط آمادگی داریم:

قضیه (اصل تقارن). فرض می‌کنیم G_1 حوزه‌ای است کـه مرزش شامل یك کمان دایره یا قطعه‌خط γ است، و G_2 حوزهٔ قرینهٔ G_1 نسبت به γ است**، مجموعه‌های G_1 و G_2 مجزا هستند ومجموعهٔ $G_1\cup\gamma\cup G_2$ یك حوزه است. همچنین فرض می‌کنیم تابع مفروض $f_1(z)$ در G_1 تك ارز ودر $G_1\cup\gamma$ پیوسته است، $f_1(z)$ حوزهٔ G_1 را به طورهمدیس بـه روی حوزهٔ G_1^* مـی‌نگارد و γ را به توی خم γ^* (قسمتی ازمرز G_1^*)، کـه خود یك کمان دایره ویاقطعه‌خط‌است می‌برد. دراین‌صورت $f_1(z)$ یك‌ادامهٔ‌تحلیلی $f_2(z)$ از G_1 به‌توی G_2 از طریق γ دارد، و این ادامهٔ تحلیلی حوزهٔ G_2 را به طور همدیس به روی حوزهٔ G_2^*، کـه قرینه G_1^* نسبت بـه γ^* است، می‌نگارد. بعلاوه اگر $\varphi(z)$ تابع (۲۹) باشد، آنگاه

---

* توجه کنید که $\varphi(z)$، با تعریف بخش ۱.۴.۱۳، ادامهٔ تحلیلی $f_1(z)$ ازحوزهٔ G_1 (یا، دراینجا، ازکمان γ) به‌توی حوزهٔ D است.

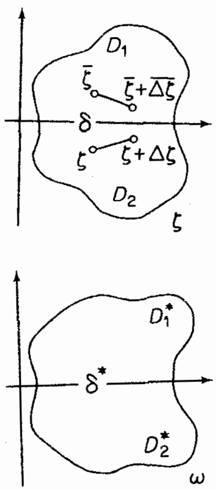
** پس G_2 مجموعهٔ تمام نقاط قرینهٔ نقاط G_1 نسبت به γ است (چرا G_2 یك حوزه‌است؟).

$\varphi(z)$ یك نگاشت همدیس حوزهٔ $G_1 \cup \gamma \cup G_2$ به روی حوزهٔ $G_1^* \cup \gamma^* \cup G_2^*$ است.

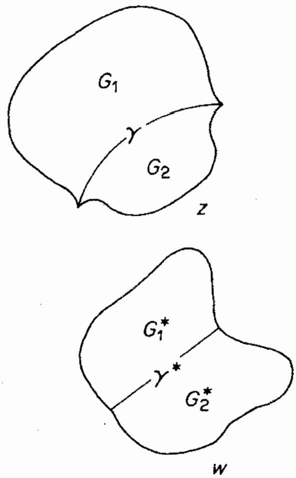
برهان. حوزه‌های مختلف کمانهایی که درصورت قضیه آمده‌اند درشکل ۴۳ نشان داده شده‌اند. فرض می کنیم

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} = l_1(z), \qquad \omega = \frac{\alpha w+\beta}{\gamma w+\delta} = l_2(w) \tag{۳۱}$$

دوتبدیل خطی کسری باشندکه γ و γ^* را به‌توی قطعه خطهای δ و δ^* واقع بر محورهای حقیقی در صفحات ζ و ω می برند. درحالی که این تبدیلها، همان طورکه درشکل ۴۴ نشان‌داده‌ایم، G_1 و G_1^* را بترتیب به‌توی‌حوزه‌های D_1 و D_1^* می برند (نتیجهٔ ۶.۲.۸ب وجود چنین تبدیلهایی را تضمین می کند). اگر $z=\lambda_1(\zeta)$ معکوس $\zeta = l_1(z)$ باشد،



شکل ۴۴



شکل ۴۳

آنگاه تابع $\omega = l_2(f_1(\lambda_1(\zeta))) = g_1(\zeta)$ حوزهٔ D_1 را به طور همدیس به روی D_1^* می‌نگارد. D_2 را حوزهٔ قرینهٔ D_1 نسبت به δ می گیریم، تابع

$$\omega = g_2(\zeta) = \overline{g_1(\bar\zeta)} \tag{۳۲}$$

راکه در D_2 تعریف شده است بنا می‌کنیم. دراین صورت $g_1(\zeta)$ و $g_2(\zeta)$ روی δ با هم برابرند. زیرا اگر $\zeta\in\delta$، آنگاه $\zeta=\bar\zeta$ و $\overline{g_1(\bar\zeta)} = g_1(\zeta)$، زیرا $g_1(\zeta)\in\delta^*$، به‌طوری که برای هر $\zeta\in\delta$

$$g_۲(\zeta)=\overline{g_۱(\bar{\zeta})}=\overline{g_۱(\zeta)}=g_۱(\zeta).$$

بعلاوه $g_۲(\zeta)$ در $D_۲$ تحلیلی است. برای ملاحظهٔ این مطلب، توجه می کنیم که اگر ζ و $\zeta+\Delta\zeta$ دونقطهٔ دلخواه $D_۲$ باشند، آنگاه

$$\frac{g_۲(\zeta+\Delta\zeta)-g_۲(\zeta)}{\Delta\zeta}=\frac{\overline{g_۱(\overline{\zeta}+\overline{\Delta\zeta})}-\overline{g_۱(\bar{\zeta})}}{\Delta\zeta}=\overline{\left(\frac{g_۱(\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta})-g_۱(\bar{\zeta})}{\overline{\Delta\zeta}}\right)},$$

که در آن $\bar{\zeta}$ و $\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta}$ نقاطی از $D_۱$ هستند. نتیجه می‌شود که مشتق

$$g'_۲(\zeta)=\lim_{\Delta\zeta\to ۰}\frac{g_۲(\zeta+\Delta\zeta)-g_۲(\zeta)}{\Delta\zeta}$$

$$=\lim_{\overline{\Delta\zeta}\to ۰}\overline{\left(\frac{g_۱(\bar{\zeta}+\overline{\Delta\zeta})-g_۱(\bar{\zeta})}{\overline{\Delta\zeta}}\right)}=\overline{g'_۱(\bar{\zeta})}$$

وجوددارد، زیرا $g_۱(\zeta)$ در ζ تحلیلی است. حال اینکه $g_۲(\zeta)$ ادامهٔ تحلیلی $g_۱(\zeta)$ از $D_۱$ به توی $D_۲$ از طریق δ است، نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۱.۵.۱۳ است. بعلاوه تابع $g_۲(\zeta)$ با توجه به نحوهٔ ساختمانش بوضوح $D_۲$ را به طور همدیس به روی حوزه $D_۲^*$، که قرینه $D_۱^*$ نسبت به δ^* است، می‌نگارد، وبه همین ترتیب، تابع

$$\psi(\zeta)=\begin{cases}g_۱(\zeta) & \text{اگر } \zeta\in D_۱\\ g_۱(\zeta)=g_۲(\zeta) & \text{اگر } \zeta\in\gamma\\ g_۲(\zeta) & \text{اگر } \zeta\in D_۲\end{cases}$$

حوزهٔ $D_۱\cup\delta\cup D_۲$ را به‌طور همدیس به روی حوزهٔ $D_۱^*\cup\delta^*\cup D_۲^*$ می‌نگارد.

حال با استفاده از تبدیلات خطی کسری $z=\lambda_۱(\zeta)$ و $w=\lambda_۲(\omega)$ که معکوسهای (۳۱) هستند به متغیرهای اصلی z و w برمی گردیم. لذا حوزهٔ $D_۲$ به روی حوزهٔ $G_۲$، که قرینه $G_۱$ نسبت به γ است نگاشته‌می‌شود، درصورتی که $D_۲^*$ به روی حوزهٔ $G_۲^*$، که قرینهٔ $G_۱^*$ نسبت به γ^* است، نگاشته می‌شود (قضیهٔ ۸.۲.۸ را به خاطر آورید). فرض می کنیم $f_۲(z)=\lambda_۲(g_۲(l_۱(z)))$. آنگاه $f_۲(z)$ بوضوح ادامهٔ تحلیلی $f_۱(z)$ از $G_۱$ به توی $G_۲$ از طریق γ است. به همین ترتیب واضح است که $f_۲(z)$ حوزهٔ $G_۲$ را به‌طور همدیس به روی $G_۲^*$ می‌نگارد وتابع (۲۹)، شامل $f_۲(z)$ وتابع اصلی $f_۱(z)$، حوزهٔ $G_۱\cup\gamma\cup G_۲$ را به‌طور همدیس به‌روی $G_۱^*\cup\gamma^*\cup G_۲^*$ می‌نگارد. □

۳.۵.۱۳ سرانجام اصل تقارن را برای اثبات اصل مهم نگاشت همدیس که درزیر آمده‌است به‌کارمی بریم:

قضیه. حوزه‌های ژردان G و G^*، که بترتیب مرزشان C و C^* است مفروض‌اند. فرض می‌کنیم z_1، z_2، z_3 سه نقطهٔ متمایز C و نقاط w_1، w_2، w_3 سه نقطهٔ متمایز C^* باشند که با همان ترتیب z_1، z_2 z_3 مرتب شده‌اند.* در این صورت یك تابع یکتای $w=f(z)$ وجود دارد که G را به‌طور همدیس به‌روی G^* می‌نگارد، به قسمی که

$$f(z_k)=w_k \qquad (k=1,2,3).$$

برهان. بنا به‌قضیهٔ ۷.۳.۱۳، $f(z)$ در $\bar{G}$ پیوسته است و C را به‌روی C^* می‌نگارد، و این نگاشت C به‌روی C^* یك به یك و حافظ جهت است. این حفظ جهت، لزوم قید مربوط به‌ترتیب نقاط مرزی درصورت قضیه را توضیح می‌دهد.

ابتدا فرض می‌کنیم که G و G^* قرصهای واحد $|z|<1$ و $|w|<1$ باشند، فرض کنید بین تعداد نامتناهی توابعی که G را به‌طور همدیس به روی G^* می‌نگارند، دو تابع $f(z)$ و $g(z)$ وجود دارند به قسمی که

$$f(z_k)=w_k, \qquad g(z_k)=w_k \qquad (k=1,2,3).$$

بنا به اصل تقارن، می‌توانیم توابع $f(z)$ و $g(z)$ را از دایرهٔ $|z|=1$ به توی حوزهٔ قرینهٔ $|z|>1$ نسبت به $|z|=1$، یعنی حوزهٔ $|z|>1$ ادامه دهیم. بنابراین $f(z)$ و $g(z)$ درتمام صفحهٔ گسترش یافته، مگردرنقطهٔ z_0، یعنی قرینهٔ نقطه‌ای از قرص $|z|<1$ که به‌توی $w=0$ نگاشته می‌شود، تك ارزی هستند. از قضیهٔ ۵.۳.۱۳ نتیجه می‌شود که $f(z)$ و $g(z)$ تبدیلهای خطی کسری هستند. اما تبدیل خطی کسری که به وسیلهٔ مقادیرش درسه‌نقطهٔ مجزا مشخص می‌شود یکتاست (قضیهٔ ۵.۲.۸ را ببینید)، وازآنجا $f(z)\equiv g(z)$.

اینك به حالت حوزه‌های ژردان دلخواه G و G^* برمی‌گردیم، فرض می‌کنیم $\zeta=\sigma(z)$ و $\omega=\tau(w)$، با معکوسهای $z=\varphi(\zeta)$ و $w=\psi(\omega)$، دو تابعی باشند که G و G^* را به‌طور همدیس به‌روی قرصهای $|\zeta|<1$ و $|\omega|<1$ می‌نگارند و گیریم

$$\sigma(z_k)=\zeta_k, \qquad \tau(w_k)=\omega_k \qquad (k=1,2,3).$$

بعلاوه فرض می‌کنیم $\omega=F(\zeta)$ نگاشت همدیس یکتای از $|\zeta|<1$ به روی $|\omega|<1$ به قسمی که

$$F(\zeta_k)=\omega_k \qquad (k=1,2,3)$$

باشد (یکتایی $F(\zeta)$ کمی قبل ثابت شد). بنابراین بوضوح

$$w=f(z)=\psi(F(\sigma(z)))$$

---

* یعنی وقتی خمهای C و C^* در یك جهت طی می‌شوند، برخورد با w_1، w_2، w_3 به همان ترتیب برخورد با نقاط z_1، z_2، z_3 باشد.

G را بـه طور همدیس به روی G^* می‌نگارد و نقاط z_1، z_2، z_3 را به‌نقاط w_1، w_2، w_3 می‌برد. اگر نگاشت همدیس دیگر $w=g(z)$ از G به‌روی G^* وجود داشته باشد که‌نقاط z_1، z_2، z_3 را به توی w_1، w_2، w_3 ببرد، آنگاه باید تابع دیگر

$$\omega=G(\zeta)=\tau(g(\varphi(\zeta)))$$

وجود داشته‌باشد که $|\zeta|<1$ را به‌طور همدیس به روی $|\omega|<1$ نگاشته، نقاط ζ_1، ζ_2، ζ_3 را به ω_1، ω_2، ω_3 ببرد. اما همانطور که نشان دادیم، این غیر ممکن است، و بنا براین $f(z)\equiv g(z)$. $\square$

چند توضیح

۱۰۱۳۰ در مثال ۳۰۱۰۱۳ حروف بزرگ U، V، F را به‌کار برده‌ایم تا توابع همساز و تحلیلی خاصی که در این مثال آمده‌اند با توابع همساز و تحلیلی کلیتر u، v و f که در قضیهٔ ۴۰۱۰۱۳ و نتیجهٔ ۵۰۱۰۱۳ آمده‌اند، اشتباه نشوند. توجه کنید که u در (۹) فقط v را با تقریب یك عـدد حقیقی ثابت و $f(z)$ را در (۱۴) فقط بـا تقریب یك عدد موهومی محض معین می کند. این مطلب با قضیهٔ ۴۰۸۰۵ و بخش ۵۰۸۰۵ هماهنگ است.

۲۰۱۳۰ می‌پذیریم که C می‌تواند خم ژردان بسته‌ای باشد که از نقطهٔ بینهایت می‌گذرد، یعنی C نگارهٔ گنجنگاری یك خم ژردان بستهٔ Γ روی کرهٔ Σ باشد که از قطب Σ می گذرد (طریقهٔ تعریف Γ روشن است). بنا براین G می‌تواند نیمصفحه (بخش ۴۰۲۰۱۳)، نوار، گوه وغیره باشد. می‌توان نشان داد که قضایای ۳۰۲۰۱۳ و ۴۰۲۰۱۳، حتی اگر $h(z)$ روی C تعدادی متناهی جهش ناپیوستگی داشته باشد، صادق باقی می‌مانند، به‌شرط آنکه فرض کنیم (۱۵) فقط در نقاطی که $h(z)$ پیوسته است برقرار است.

۳۰۱۳۰ درمورد اولین حکم در اثبات ۵۰۳۰۱۳ توجه می کنیم که اگر $f(z)$ در تمام صفحهٔ گسترش یافته تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ در بینهایت نیز تحلیلی است، واز آنجا، در حوزه‌ای مانند $R<|z|$ کراندار است (فصل ۴، مسئلهٔ ۲۹). اما $f(z)$ پیوسته است، ولذا در هـر قرص بستهٔ $|z|\leqslant R$ کرانـدار است (فصل ۳، مسئلهٔ ۱۲ الف). نتیجه می‌شود که $f(z)$ در تمام صفحهٔ گسترش یافته و بنا براین محققاً در تمام صفحهٔ متناهی کراندار است. قضایای ۷۰۳۰۱۳ و ۸۰۳۰۱۳ موجب شده‌اند که در بخش ۱۰۲۰۱۳ مسئلهٔ دیریکله برای یك حوزهٔ دلخواه ژردان مطرح شود. برای اثبات قضیهٔ ۷۰۳۰۱۳، صفحهٔ ۱۱۹ از جلد دوم و نتیجهٔ قضیهٔ ۲۰۴۰۲ از جلد سوم کتاب مارکو شویچ را، کـه قبلاً نام برده‌ایم ببینید. (همچنین توضیح مربوط به اصـل آونـد را در جلد سـوم، صفحـهٔ ۳۱۹ ملاحظه کنید). به‌شباهت کامل اثبات قضیهٔ ۸۰۳۰۱۳ با قسـمت اول اثبـات قضیهٔ ۴۰۲۰۱۳ توجـه کنید.

۱۳-۴. با ساده‌ترین جملات، مسئلهٔ ادامهٔ تحلیلی به‌شرح زیر است: مطلب را با یك تابع‌مفروض $f(z)$ که‌دریك‌مجموعهٔ «آغازی» E تعریف‌شده‌است‌شروع می کنیم. یك‌تابع $\varphi(z)$ را بیابید که دریك حوزهٔ G که شامل E است تعریف شده باشد، و در G تحلیلی و در E بر $f(z)$ منطبق باشد. این فرایند «تمدید» یا «گسترش» $f(z)$، این اثر را دارد که تابع $f(z)$ «اصلی»، «قسمتی» از تابع تحلیلی «وسیعتر» $\varphi(z)$ می‌شود، و بدیهی‌است که‌این فقط وقتی ممکن است که $f(z)$ در E «رفتار مناسب» داشته باشد. برای مثال اگر Eخط حقیقی باشد، $f(z)$ باید، مانند تابع مثال ۱۳-۴-۲ الف، تابعی بینهایت بار مشتق‌پذیر از متغیرحقیقی $x=z$ باشد، درحالی که‌اگر E یك‌حوزه باشد، $f(z)$ بایدازهمان‌آغازطرح مسئله در E تحلیلی باشد. مسئله‌درحالتی که E یك‌حوزه، وحوزهٔوسیعتر G اجتماع‌دوحوزه همپوشای $E=G_1$ و G_2 است، بویژه جالب است. ایـن، اساساً همان است که در بخش ۱۳-۴-۳ آمده‌است. به‌صورتی کلیتر، G می‌تواندنظیر بخش۱۳-۴-۵ اجتماع یك«زنجیر» کل ازحوزه‌های همپوشا باشد، این نه‌تنها برای ساختن وسیعترین Gی ممکن طریقه‌ای مطلوب است (به مسئلهٔ ۱۶ رجوع کنید)، بلکه حتی امکان می‌دهد کـه تابع «کلی» $\varphi(z)$ تابعی چندمقداری باشد (ا)درحالی که‌تابع$f(z)$، مانند مثال ۱۳-۴-۶ الف، فقط یکی‌ازشاخه‌های یك مقداری تحلیلی آن است.

۱۳-۵. جالب توجه است که ادامهٔ تحلیلی اغلب، حتی وقتی حوزه‌های $E=G_1$ و G_2 (مذکور درتوضیح ۱۳-۴) مجزا هستند، به‌شرط‌آنکه مرزهای G_1 و G_2 در یك‌کمان γ مشترك بـاشند نیـز ممکن است. ایـن معنا در قضیهٔ ۱۳-۵-۱ نهفته است. اثبات قضیهٔ ۱۳-۵-۱ بسیار زیباست، درآن هم تعمیم قضیهٔ‌کوشی وهم قضیهٔ موررا به‌کار رفته است. اثبات قضیهٔ ۱۳-۵-۳ متکی بـر نتایجی است کـه بدقت جمع‌آوری شده‌اند، از آن جمله است قضیهٔ ۱۳-۳-۵، که در نظر اول ممکن است یك انحراف از موضوع به حساب‌آید. فرض‌کنید‌که دراصل تقارن، γ و γ^* هر دو،قطعه خطهایی از محورهای حقیقی صفحه‌های z وwهستند به‌قسمی‌که‌نیازی به‌تبدیلهای خطی‌کسری مقدماتی (۳۱) نباشد. دراین‌صورت با همان استدلالی کـه در ارتباط بـا (۳۲) کردیم، تابع $f_2(z)=\overline{f_1(\bar{z})}$، ادامهٔ تحلیلی $f_1(z)$ از G_1 به G_2 از طریق γ است. حال مسئله را به‌صورت دیگری‌که مستقیماً به‌قضیهٔ زیر، معروف به اصل بازتاب، منجر می‌شود مطرح می کنیم: فرض می کنیم $f(z)$ درحوزهٔ G، کـه شامل یك قطعه خط δ از محور حقیقی است ونسبت بـه محور حقیقی قرینه است، تحلیلی باشد. دراین صورت

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)} \qquad (۳۳)$$

اگر وفقط اگر $f(z)$ برای هر $z\in\delta$ (برای تمام zهای حقیقی، اگر δ تمام محور حقیقی باشد) حقیقی باشـد. برای مثال توابع z^2+1، e^z، $\cos z$ در (۳۳) صدق می کند ولی توابع z^2+i، e^{iz}، $i\cos z$ چنین نیستند.

مسائل

۱. ثابت کنید دو سری مفروض به صورتهای (۳) و ('۳) به‌یك زوج تابع همسازمزدوج درقرص $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ، $0 \leqslant r \leqslant R$، ونه درقرص بزرگتری، همگرا هستند، که‌در آن

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n + ib_n|}}$$

۲. فرض می‌کنیم m و n دو عدد صحیح مثبت باشند. ثابت کنید که

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{اگر } m=n، \\ 0 & \text{درحالات دیگر،} \end{cases}$$

درحالی که

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \sin n\theta \, d\theta = 0.$$

۳. ثابت کنید که اگر $f(z)$ درداخل و روی دایرهٔ $|z-z_0| = R$ تحلیلی و مخالف صفر باشد، آنگاه

$$\ln|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(z_0 + Re^{i\theta})| d\theta.$$

۴. ثابت کنید که

$$\int_0^{2\pi} \ln[\cosh^2(\sin\theta) - \sin^2(\cos\theta)] d\theta = 0.$$

۵. ازروی انتگرال کوشی برهان‌دیگری برای اثبات فرمول انتگرال پواسون ارائه‌دهید.

۶. صورت دیگر فرمول شوارتس (۱۴) راکه در زیر آمده است، ثابت کنید

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \overline{f(z_0)}. \qquad (14')$$

۷. تابع حقیقی پیوستهٔ $f(x)$ که برای تمام مقادیرحقیقی x تعریف شده‌است، مفروض است. فرض‌می‌کنیم $f(x)$ متناوب ودوره تناوبش $\omega > 0$ است، یعنی فرض می‌کنیم برای هر مقدار x، $f(x+\omega) = f(x)$. ثابت کنید برای هرمقدار حقیقی دلخواه a

$$\int_a^{a+\omega} f(x)dx = \int_0^{\omega} f(x)dx.$$

۸. مسئلهٔ دیریکله را برای خارج دایرهٔ واحد $|z|=1$ حل کنید. نشان دهید که مقدار جواب در بینهایت، مساوی متوسط مقادیر مرزی روی دایره است.

۹. G را قرص واحد $|z|<1$ و C را دایرهٔ واحد $|z|=1$ بگیرید. برای تعیین تابع یکتای $u(z)$ که در G همساز است و به‌قسمی است که

$$\lim_{z\to e^{i\varphi_0}}\frac{\partial u(z)}{\partial r}=h(e^{i\varphi_0})\qquad(0\leqslant\varphi_0\leqslant 2\pi),$$

فرمول ($14'$) را به‌کار برید. دراین‌رابطه، $\partial u/\partial r$ مشتق‌شعاعی u و $h(x)$ تابع پیوستهٔ مفروضی روی C است، به این وسیله مسئله‌ای را که به اصطلاح، مسئلهٔ نیومن برای G نامیده می‌شود حل کرده‌اید.

۱۰. فرض کنید دو تابع $w=f(z)$ و $w=g(z)$ بترتیب با معکوسهای $z=\varphi(w)$ و $z=\psi(w)$ وجود داشته باشند که‌حوزهٔ همبند سادهٔ G را به‌روی قرص واحد $|w|<1$ بنگارند، درحالی که در شرایط $f(z_0)=0$، $f'(z_0)>0$، $g(z_0)=0$، $g'(z_0)>0$ ($z_0\in G$) صادق‌اند. ثابت کنید که‌توابع $F(w)=f(\psi(w))$ و $G(w)=g(\varphi(w))$ قرص واحد را به‌روی خودش می‌نگارد، در حالی که شرایط $F(0)=0$، $F'(0)>0$ و $G(0)=0$، $G'(0)>0$ برقرارند.

۱۱. مسئلهٔ قبل و لم شوارتس (فصل ۱۰، مسئلهٔ ۲۸) را برای اثبات یکتایی قضیهٔ ریمان به‌کار برید.

۱۲. یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C با ناحیهٔ داخلی I داده شده است. فرض کنید $f(z)$ در $\bar{I}$ تحلیلی و روی C یك به یك باشد، و C^* را نگارهٔ C تحت نگاشت $w=f(z)$ بگیرید. ثابت کنید که $f(z)$ درحوزهٔ I تك‌ارز است و I را به‌طورهمدیس برروی ناحیهٔ داخلی C^* می‌نگارد.

۱۳. تعمیم قضیهٔ لیوویل را که در زیر می‌آید اثبات کنید: اگر $w=f(z)$ یك تابع تام باشد وهیچ یك از مقادیر متعلق به‌یك خم γ در صفحهٔ w را اختیار نکند، آنگاه $f(z)$ مقداری ثابت است.

۱۴. فرض کنید G_1 و G_2 بترتیب قرصهای $|z|<1$ و $|z-2|<1$ هستند و

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\qquad f_2(z)=i\pi+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{n}.$$

ثابت کنید که عناصر $\{G_1,f_1(z)\}$ و $\{G_2,f_2(z)\}$ ادامه‌های تحلیلی یکدیگرند.

۱۵. فرض کنید تابع تحلیلی کلی F از عناصر $\{G_1,f_1(z)\}$، $\{G_2,f_2(z)\}$،... تشکیل شده است، ثابت کنید که مجموعهٔ F'، مرکب از تمام عناصر حاصل از مشتق گیری عناصر F، یعنی مجموعهٔ متشکل ازعناصر $\{G_1,f_1'(z)\}$، $\{G_2,f_2'(z)\}$،...، نیز یك تابع تحلیلی کلی است (که مشتق F نامیده می‌شود).

۱۶. تابع تحلیلی کلی که‌شامل همهٔ‌ادامه‌های تحلیلی تمام عناصرش‌باشد تابع تحلیلی‌کامل نام‌دارد، حــوزهٔ چنین تابعی‌را اغلب حوزهٔ وجودیش می گویند. حــوزهٔ وجودی تابع تحلیلی‌کاملی راکه از عنصر $\{G_1, f_1(z)\}$ تولید می‌شود پیداکنید، که در آن G_1 و $f_1(z)$ همانهایی هستندکه در مسئلهٔ ۱۴ آمده‌اند.

۱۷. نشان دهیدکه اگر α گویا باشد، حد (۲۴) بینهایت است.

۱۸. ثابت کنیدکه دایرهٔ واحد $|z| = 1$ مرز طبیعی سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$$

است.

۱۹. برهان قضیهٔ ۳.۲.۱۰ را از دیدگاه ادامهٔ تحلیلی‌تعبیرکنید.

۲۰. سطوح ریمان را از دیدگاه ادامهٔ تحلیلی و توابع تحلیلی‌کامل مورد بحث قراردهید (مسئلهٔ ۱۶).

۲۱. ثابت کنیدکه‌حلقهٔ $r_1 < |z| < r_2$ رامی‌توان به‌طورهمدیس به‌روی حلقهٔ $\rho_1 < |w| < \rho_2$ نگاشت، اگر و فقط اگر $r_2/r_1 = \rho_2/\rho_1$.

۱۴

نگاشت حوزه‌های چندضلعی

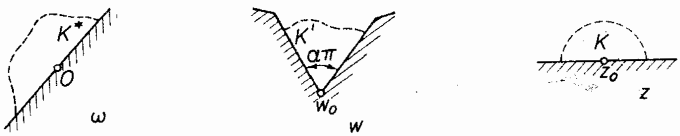
۱.۱۴. تبدیل «شوارتس- کریستوفل»

۱.۱.۱۴. منظور از حوزهٔ چندضلعی Δ، حوزه‌ای است که مرز آن فقط از پاره‌خطها تشکیل شده است؛ ممکن است درازای پاره‌خط نامتناهی باشد یا بیش از یك‌بار پیموده شود. ساده‌ترین حوزهٔ چندضلعی، چندضلعی کراندار است، یعنی، داخل یك خم چندضلعی بستهٔ ژردان (به‌مسئلهٔ ۱ فصل ۳ رجوع کنید). نخست مسئلهٔ تعیین نگاشت همدیس نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > 0$ به‌روی چندضلعی کراندار را مطرح می‌کنیم. نگاشتهای همدیس نیمصفحهٔ فوقانی به‌روی حوزه‌های چندضلعی کلیتر، بعداً خواهند آمد (بخش ۶.۱.۱۴ را ببینید). این نوع نگاشتها، در کاربردهای متنوع فیزیکی، از جمله دینامیك مایعات، الکتروستاتیك وهدایت گرما نقش مهمی دارند.

۲.۱.۱۴. مبحث را با بررسی در رفتار نگاشت همدیس در «گوشه‌های» حوزهٔ چندضلعی Δ شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم که مرز Δ «گوشه‌ای» درنقطهٔ w_0 دارد، یعنی، فرض می‌کنیم دوپاره خط درنقطهٔ w_0 متقاطع‌اند، و زاویهٔ $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ می‌سازند. نگاشت همدیس $w = f(z)$ را از نیمصفحهٔ فوقانی Π_+ به‌روی Δ، درنظرمی گیریم، و فرض می‌کنیم که $f(z)$ نقطهٔ z_0 ازمحور حقیقی را به‌نقطهٔ w_0 می‌برد. آنگاه $f(z)$ «نیم-قرص فوقانی» K را که درشکل ۴۵ الف نشان داده شده است به‌روی حوزهٔ «شبه‌قطاع» K' که درشکل ۴۵ب نشان داده شده، می‌نگارد. بنابراین تابع

$$\omega=\omega(z)=[f(z)-w_\circ]^{1/\alpha} \qquad (1)$$

K را به‌روی «نیم‌قرص تغییرشکل‌یافتهٔ» K^*، که در شکل ۴۵ج نشان داده شده است، می‌نگارد. به‌علاوه، $\omega(z)$ یك پاره‌خط δ از محور حقیقی را که ازنقطهٔ $z=\circ$ می‌گذرد به‌پاره‌خط δ^* که ازنقطهٔ $\omega=\circ$ می‌گذرد تبدیل می‌کند. پس، بنابه‌اصل تقارن، $\omega(z)$ از طریق δ ادامهٔ تحلیلی دارد، به‌طوری‌که، $\omega(z)$ در «تمام» یك‌همسایگی $z_\circ$ تحلیلی است و



(ج) (ب) **شکل ۴۵** (الف)

بسط تیلر آن در $z_\circ$ به‌صورت

$$\omega(z)=c_1(z-z_\circ)+c_2(z-z_\circ)^2+\cdots \qquad (2)$$

است. چون $\omega(z_\circ)=\circ$، در (۲) مقدار ثابت وجود ندارد، ولی چون $\omega(z)$ همدیس است، $c_1=\omega'(z_\circ)\neq\circ$. به‌کمك (۱) برمی‌گردیم به‌تابع $f(z)$

$$f(z)=w_\circ+(z-z_\circ)^\alpha[c_1+c_2(z-z_\circ)+\cdots]^\alpha.$$

یك شاخهٔ یك‌مقداری مشخصی از تابع چندمقداری*

$$[c_1+c_2(z-z_\circ)+\cdots]^\alpha$$

را انتخاب می‌کنیم، و آن را به‌سری تیلر بسط می‌دهیم، سرانجام به‌دست می‌آید

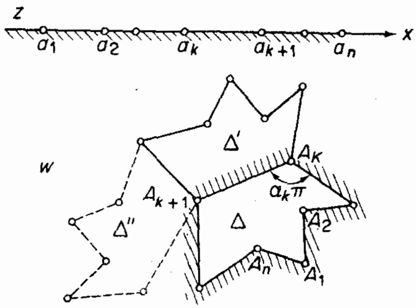
$$f(z)=w_\circ+(z-z_\circ)^\alpha[c_1'+c_2'(z-z_\circ)+\cdots] \quad (c_1'\neq\circ). \qquad (3)$$

۳.۱.۱۴. اینك یك‌چندضلعی کراندار Δ با رأسهای A_1، A_2، ...، A_n و بازاویه‌های داخلی $\alpha_1\pi$، $\alpha_2\pi$، ...، $\alpha_n\pi$ را مطابق شکل ۴۶ درنظرمی‌گیریم. بنا به‌قضیهٔ ۳.۵.۱۳ تابع یکتای $w=f(z)$ وجود دارد که نیمصفحهٔ فوقانی Π_+ را به‌روی Δ می‌نگارد و سه‌نقطهٔ متناهی a_1، a_2، a_3 از محور حقیقی را به‌سه نقطهٔ مفروض مرز Δ می‌برد. فرض کنید که سه‌نقطهٔ اخیر رأسهای A_1، A_2 و A_3 باشند و فرض کنید که a_4،...، a_n (که متناهی فرض می‌شوند) نقاطی ازمحور حقیقی باشند که $f(z)$ آنها را به‌دیگر رأسهای A_4، ...، A_n می‌نگارد. برای تعیین‌کامل $f(z)$ مراحل زیررا درنظرمی‌گیریم:

الف. چون $f(z)$ هرفاصلهٔ $[a_k, a_{k+1}]$ از محور حقیقی را به‌پاره‌خط A_kA_{k+1}

---

* چون در همسایگی $z_\circ$، $c_1+c_2(z-z_\circ)+\cdots$ مخالف صفر است، پس این امکان‌پذیراست.



شکل ۴۶

می‌نگارد (به‌قضیهٔ ۷.۳.۱۳ رجوع کنید)، ازاصل تقارن نتیجه می‌شود که $f(z)$ از طریق فاصلهٔ $[a_k, a_{k+1}]$ یك ادامهٔ تحلیلی به‌توی نیمصفحهٔ تحتانی Π_- داردکه Π_- را به‌طور همدیس به‌روی حوزهٔ چند ضلعی Δ'، قرینهٔ Δ نسبت به‌پاره‌خط $[a_k, a_{k+1}]$، می‌نگارد. این ادامهٔ تحلیلی رامی‌توان ازطریق هرپاره‌خط $[a_l, a_{l+1}]$ به‌توی نیمصفحهٔ فوقانی Π_+ ادامهٔ تحلیلی داد، که این ادامهٔ تحلیلی جدید Π_+ را به‌طور همدیس به‌روی چندضلعی Δ''، قرینهٔ Δ' نسبت به $A_l A_{l+1}$، می‌نگارد، و به‌همین ترتیب می‌توان ادامه داد (شکل را ببینید). اگرتمام ادامه‌های تحلیلی ازاین نوع انجام شود، درحالت‌کلی یك تابع تحلیلی بینهایت مقداری $F(z)$ به‌دست می‌آیدکه تابع اصلی $f(z)$ یکی از شاخه‌های تحلیلی یك‌مقداری آن در Π_+ است.

ب. فرض می‌کنیم $f_1(z)$ و $f_2(z)$ دوشاخه ازاین شاخه‌های یك مقداری $F(z)$ در نیمصفحهٔ فوقانی Π_+ باشند. $f_1(z)$ و $f_2(z)$، Π_+ را به‌طور همدیس به‌روی دو چند-ضلعی Δ_1 و Δ_2 می‌نگارند که فقط اختلافشان در تعدادی زوج بازتاب نسبت به‌پاره-خط‌هاست[1]. ولی هرزوج بازتاب نسبت به‌دو پاره‌خط به‌یك دوران و یك تغییرمکان تبدیل می‌شود (مسئلهٔ ۱ را ببینید)، پس

$$f_2(z)=e^{i\theta} f_1(z)+c, \tag{۴}$$

که‌در آن θ و c ثابت‌اند (θحقیقی است). همین مطلب برای‌هردوشاخهٔ $F(z)$ درنیمصفحهٔ تحتانی Π_- نیزصحیح است. فرض می‌کنیم

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{d\ln f'(z)}{dz}.$$

آنگاه $g(z)$ درنیمصفحهٔ فوقانی تحلیلی است، زیرا $f'(z)$ مشتق تابع تك‌ارز و درنتیجه

۱. بازتاب را انعکاس نیزمی‌گویند. Δ_2 به‌وسیلهٔ تعدادی زوج بازتاب از Δ_1 به‌دست می‌آید.-م.

مخالف صفر است (به‌قضیهٔ ۴.۲.۱۲ رجوع کنید). واضح است که $g(z)$ برای تمام ادامه‌های تحلیلی $f(z)$ هم در Π_- وهم در Π_+ یکی است، زیرا از (۴) نتیجه می‌شود

$$f'_{۲}(z)=e^{i\theta}f'_{۱}(z),\quad f''_{۲}(z)=e^{i\theta}f''_{۱}(z)$$

پس

$$\frac{f''_{۲}(z)}{f'_{۱}(z)}=\frac{f''_{۱}(z)}{f'_{۱}(z)}.$$

بنابراین $g(z)$ در تمام صفحهٔ z بجزدرنقاط a_k، متناظر به‌رأسهای چندضلعی Δ، یك‌مقداری و تحلیلی است. به‌علاوه $f(z)$ و $g(z)$، که فرض می‌کنیم درصفحهٔ گسترش‌یافته بجز در نقاط a_k، ادامه یافته‌اند، دربینهایت تحلیلی هستند، زیرا نقطهٔ $z=\infty$ به‌یك نقطهٔ مرزΔ، که رأس مرز نیست، نگاشته می‌شود. پس $f(z)$ در ∞ بسط لوران

$$f(z)=c_{\circ}+\frac{c_{-m}}{z^m}+\frac{c_{-m-۱}}{z^{m+۱}}+\cdots\quad(c_{-m}\neq\circ)$$

دارد (به‌مسئلهٔ ۱۶، فصل ۱۱ رجوع کنید)، ومتناظراً

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{m(m+۱)\frac{c_{-m}}{z^{m+۲}}+\cdots}{-\frac{mc_{-m}}{z^{m+۱}}+\cdots}$$

$$=\frac{۱}{z}\,\frac{m(m+۱)c_{-m}+\cdots}{-mc_{-m}+\cdots}=-\frac{m+۱}{z}+\cdots,$$

که نتیجه می‌دهد

$$g(\infty)=\circ. \tag{۵}$$

ج. برای بررسی رفتار $g(z)$ در a_k، فرمول (۳) را درنقطهٔ a_k ورأس متناظر آن A_k به‌کار می‌بریم

$$f(z)=A_k+(z-a_k)^{\alpha_k}\,[c'_{۱}+c'_{۲}(z-a_k)+\cdots].$$

بسط لوران تابع $g(z)$ در a_k به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$g(z)=\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{\alpha_k(\alpha_k-۱)c'_{۱}(z-a_k)^{\alpha_k-۲}+\cdots}{\alpha_k c'_{۱}(z-a_k)^{\alpha_k-۱}+\cdots}$$

$$=\frac{۱}{z-a_k}\,\frac{(\alpha_k-۱)\alpha_k c'_{۱}+\cdots}{\alpha_k c'_{۱}+\cdots}$$

$$=\frac{\alpha_k-۱}{z-a_k}+c''_{۱}+c''_{۲}(z-a_k)+\cdots,$$

یعنی، نقطهٔ a_k قطب سادهٔ $g(z)$ با ماندهٔ $\alpha_k-۱$ است، که در آن $\alpha_k\pi$ زاویهٔ داخلی رأس A_k درچندضلعی Δ است. بنابراین $g(z)$ در صفحهٔ گسترش‌یافته دقیقاً n نقطهٔ تکین دارد که عبارت‌اند از قطبهای سادهٔ $a_۱$، $a_۲$،...، a_n. ازاین نتیجه می‌شود که تابع

$$G(z)=g(z)-\frac{\alpha_۱-۱}{z-a_۱}-\frac{\alpha_۲-۱}{z-a_۲}-\ \dots\ -\frac{\alpha_n-۱}{z-a_n}.$$

یك تابع تام کرانداز است، زیرا درتمام نقاط صفحهٔ گسترش‌یافته، تحلیلی است (چند توضیح، بخش ۳.۱۳ را ببینید). پس، بنا به‌قضیهٔ لیوویل، مقدار ثابت $\equiv G(z)$. اما بنا به (۵)، $G(\infty)=g(\infty)=۰$، وبنا براین $G(z)\equiv ۰$ یا معادل آن

$$g(z)=\frac{d\ \ln\ f'(z)}{dz}=\frac{\alpha_۱-۱}{z-a_۱}-\frac{\alpha_۲-۱}{z-a_۲}-\ \dots\ -\frac{\alpha_n-۱}{z-a_n}. \qquad (۶)$$

د. بالاخره، از (۶) در طول یك مسیری که نقطهٔ ثابت $z_۰\in\Pi_+$ را به‌نقطهٔ متغیر $z\in\Pi_+$ وصل می‌کند، دوبار انتگرال می‌گیریم. نخست به‌دست می‌آید

$$\ln\ f'(z)=(\alpha_۱-۱)\ \ln\ (z-a_۱)+(\alpha_۲-۱)\ \ln\ (z-a_۲)$$
$$+\ \dots\ +(\alpha_n-۱)\ \ln\ (z-a_n)+\ \ln C$$

یا معادل آن

$$f'(z)=C(z-a_۱)^{\alpha_۱-۱}(z-a_۲)^{\alpha_۲-۱}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-۱}$$

وسپس

$$f(z)=C\int_{z_۰}^{z}(z-a_۱)^{\alpha_۱-۱}(z-a_۲)^{\alpha_۲-۱}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-۱}\ dz+C_۱, \qquad (۷)$$

که درآن $z_۰$، C و $C_۱$ مقادیری ثابت هستند (برای سادگی نماد z را هم به‌عنوان متغیر انتگرال‌گیری وهم برای‌حد بالای‌انتگرال به‌کاربرده‌ایم.) فرمول (۷) به‌تبدیل شوارتس-کریستوفل مشهور است، که‌نگاشت‌همدیسی راکه‌نیمصفحهٔ فوقانی Π_+ را به‌روی چندضلعی کراندار Δ می‌نگارد، به‌دست می‌دهد. ثابت $z_۰$ را می‌توان به‌طور قطعی انتخاب کرد، مثلاً، $z_۰=۰$، زیرا تغییردادن $z_۰$ به‌معنای تغییر دادن $C_۱$ است. پس $z_۰$ را نمی‌توان به‌عنوان یك پارامترمجهول در (۷) به‌حساب آورد.

۴.۱.۱۴ تبصره. برطبق قضیهٔ ۳.۵.۱۳ تعیین سه‌نقطهٔ $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ از محورحقیقی متناظر با سه‌نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ ازچندضلعی Δ خود به‌خود بقیهٔ نقاط $a_۴$، ...، a_n وثابتهای C و $C_۱$ رامشخص می‌کند. تعیین $a_۴$، ...، a_n، C و $C_۱$ درواقع مشکل اصلی استفاده از

تبدیل شوارتس-کریستوفل است، ولی همیشه با اندکی مهارت، چنانکه درمثالهای ۲.۱۴ دیده‌می‌شود، می‌توان اشکال را برطرف کرد.

۵.۱.۱۴. اینك این محدودیت راکه تمام نقاط a_k متناهی باشند، برمی‌داریم. مثلاً فرض می کنیم که $a_n=\infty$. آنگاه برای تبدیل این حالت به حالتی که قبلاً درنظر گرفتیم تبدیل مقدماتی*

$$\zeta=-\frac{1}{z}+a'_n \tag{۸}$$

را، که درآن a'_n نقطه‌ای‌ازمحور حقیقی متمایز از a_1، a_2، ...، a_n است، درنظرمی گیریم. این تبدیل نیمصفحهٔ فوقانی‌را به‌روی‌خودش می‌نگارد (چرا؟)ونقاط a_1، a_2، ...، $a_n=\infty$ را به‌نقاط متناهی a'_1، a'_2، ...، a'_n تبدیل می کند. (۷) را درصفحهٔ ζ اعمال می کنیم،

$$w=C'\int_{\zeta_0}^{\zeta}(\zeta-a'_1)^{\alpha_1-1}(\zeta-a'_2)^{\alpha_2-1}\dots(\zeta-a'_n)^{\alpha_n-1}d\zeta+C_1$$

$$=C'\int_{z_0}^{z}\left(a'_n-a'_1-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_1-1}\left(a'_n-a'_2-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_2-1}\dots\left(-\frac{1}{z}\right)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+C_1$$

$$=C\int_{z_0}^{z}(z-b_1)^{\alpha_1-1}(z-b_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-b_{n-1})^{\alpha_{n-1}-1}\frac{dz}{z^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-n+2}}+C_1$$

برحسب ثابتهای جدید

$$b_k=\frac{1}{a'_n-a'_k}\qquad(k=1,2,\dots,n-1)$$

به‌دست می آید. (توجه کنیدکه ثابت جدید C، حاصلضرب ثابت C' وتعدادی از عاملهای دیگراست). ولی، چون مجموع زاویه‌های داخلی nضلعی برابر با $(n-2)\pi$ است،داریم

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n-2, \tag{۹}$$

بنابراین

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(z-a_{n-1})^{\alpha_n-1}dz+C_1, \tag{۱۰}$$

که به‌منظور یکنواخت کردن فرمول به‌جای b_k حرف a_kی قبلی را به‌کار برده‌ایم. بنابراین

---

* اگر یکی از نقاط a_k برابرصفر باشد، باید به‌جای (۸) بنویسیم

$$\zeta=-\frac{1}{z-a}+a'_n$$

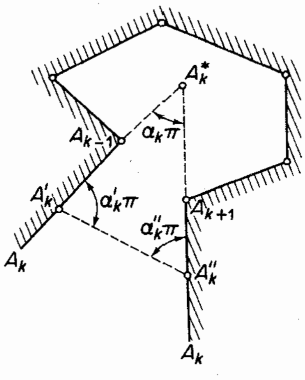
که درآن a عددی حقیقی متمایز از تمام a_nهاست.

اگر یکی از رأسهای چندضلعی Δ متناظر با نقطهٔ $z=\infty$ باشد، عامـل متناظر در تبدیل شوارتس-کریستوفل در (۷) حذف می‌شود.

۶.۱.۱۴. بالاخره محدودیت متناهی بـودن رأسهای چند ضلعی Δ را برمی‌داریم. مثلاً فـرض می‌کنیم $A_k=\infty$ درحالی کـه بقیـهٔ رأسها متناهی هستند، و دونقطه، مانند A'_k و A''_k، یکی روی نیمخط $A_{k-1}A_k$ ودیگری روی نیمخط A_kA_{k+1}، بدلخـواه درنظر گرفته، پاره‌خط $A'_kA''_k$ رارسم‌می‌کنیم، چندضلعی کراندار جدید Δ' که $n+1$ ضلع دارد، حاصل می‌شود (شکل ۴۷ را ببینید). بنا به (۷) تابعی که نیمصفحهٔ فوقانی را به‌روی Δ' می‌نگارد

$$w=\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(z-a'_k)^{\alpha'_k-1}(z-a''_k)^{\alpha''_k-1}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-1}dz+C_1 \tag{11}$$

است که درآن $\alpha'_k\pi$ ، $\alpha''_k\pi$ زوایای داخلی Δ' دررأسهای A'_k، A''_k و a'_k، a''_k نقاطی‌ازمحور



شکل ۴۷

حقیقی‌اندکه متناظراین دو رأس هستند. حال فرض می‌کنیم‌که پاره‌خط $A'_kA''_k$ درحالی که موازی با خودش باقی می‌ماند به‌بینهایت میل کند. آنگاه نقاط a'_k و a''_k در یك نقطهٔ a_k متمرکز می‌شوندکه متناظر رأس A_k است، درحالی که در (۱۱) عاملهای شامل a'_k و a''_k در حد، تبدیل به $(z-a_k)^{\alpha'_k+\alpha''_k-2}$ می‌شوند. منفی زاویهٔ بین شعاعهای $A_{k-1}A_k$ و A_kA_{k+1} راکه در نقطهٔ متناهی A_k^* متقاطع‌اند، بـا $\alpha_k\pi$ نشان می‌دهیم (شکل را ببینید).*

* اگر $A_{k-1}A_k$ و A_kA_{k+1} موازی باشند α_k را ۰ می‌گیریم.

آنگاه، با بررسی مثلث $A'_k A''_k A^*_k$، می‌بینیم که $\alpha'_k + \alpha''_k - \alpha_k = ۱$، یعنی،

$$\alpha'_k + \alpha''_k - ۲ = \alpha_k - ۱$$

بنابراین (۱۱) به صورت استاندارد

$$w = C \int_{z_0}^{z} (z - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \dots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} dz + C_1 \qquad (۱۲)$$

درمی‌آید. همین روش را می‌توان برای حالتی که چندرأس Δ در بینهایت هستند، به‌کار برد. پس تبدیل شوارتس-کریستوفل، برای چندضلعیهایی که یك یا چند رأس آنها در بینهایت هستند، معتبر است، به‌شرطی که زاویهٔ بین دو نیمخط که رأس آن در بینهایت است، منفی زاویهٔ این دو نیمخط درنقطهٔ (متناهی) برخورد آنهـا، تعریف شود[۱]. توجه کنید که با این تعریف زاویه در بینهایت، فرمول (۹) پیوسته درست است. زیرا، درچندضلعی Δ' با $n+1$ ضلع داریم

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha'_k + \alpha''_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n = n - 1 \,. \qquad (۹')$$

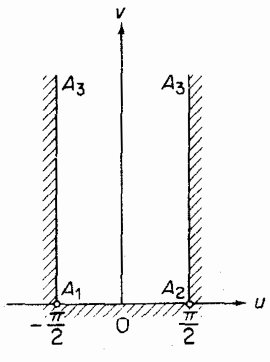
ولی $\alpha'_k + \alpha''_k = \alpha_k + 1$، پس $(۹')$ به

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + 1 = n - 1,$$

تبدیل می‌شود که با (۹) معادل است.

۲.۱۴. چندمثال

۱.۲.۱۴. نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z > 0$ را به روی نیم‌نوار $-\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2$، $\operatorname{Im} w > 0$ بنگارید (شکل ۴۸ را ببینید).



شکل ۴۸

۱. توجه کنید که هرخط درصفحهٔ گسترش‌یافته ازنقطهٔ بینهایت می‌گذرد. پس هردوخط صفحهٔ گسترش‌یافته در بینهایت متقاطع‌اند.ـ م.

حل. نیم‌نوار را به‌عنوان «مثلث تباهیده» با رأس در بینهایت درنظر می‌گیریم، اطلاعات مسئله درجدول زیر آمده است:

k	A_k	α_k	a_k
۱	$-\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	-۱
۲	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۳	∞	۰	∞

که درآن برای اعداد $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$ مقادیر مشخصی انتخاب شده است.* تبدیل شوارتس-کریستوفل را به‌صورت (۱۰) با $z_۰=۰$ به‌کار می‌بریم، به‌دست می‌آید

$$w=C'\int_۰^z(z+۱)^{-۱/۲}(z-۱)^{-۱/۲}\,dz+C_۱$$

$$=C\int_۰^z\frac{dz}{\sqrt{۱-z^۲}}+C_۱=C\arcsin z+C_۱$$

(فصل ۹، مسئلهٔ ۱۴ را ببینید). برای تعیین ثابتهای C و $C_۱$ توجه می‌کنیم که نقاط $a_۱$ و $a_۲$ به‌رأسهای $A_۱$ و $A_۲$ می‌روند، بنابراین

$$-\frac{\pi}{۲}=-C\frac{\pi}{۲}+C_۱,$$

$$\frac{\pi}{۲}=\quad C\frac{\pi}{۲}+C_۱,$$

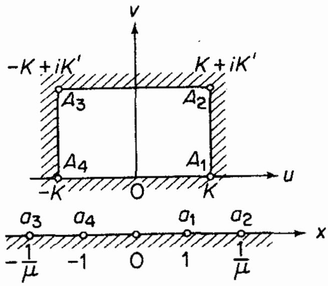
پس $C=۱$ و $C_۱=۰$. بنابراین نگاشت همدیسی که نیمصفحهٔ فوقانی را به‌روی نیم‌نوار

---

* مقادیرخاص انتخاب شده، به‌محاسبات بعدی سادگی خاصی می‌بخشد. اینکه $\alpha_۳$ صفراست از فرمول $\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳=۱$ که برای هرمثلث درست است، یا از اینکه اضلاع نوارموازی هستند، نتیجه می‌شود.

مورد بحث می‌برد، تابع $w=\text{arc sin } z$ با معکوس $z=\sin w$ است. این نگاشت قبلاً درفصل ۹، مسائل ۱۳-۱۷ آمده است.

۲۰۲۰۱۴. نیمصفحهٔ $\text{Im } z>0$ را به‌روی مستطیلی که درشکل ۴۹ نشان داده شده است، بنگارید.



شکل ۴۹

حل. اطلاعات مسئله درجدول زیر آمده است:

k	A_k	α_k	a_k
۱	K	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲	$K+iK'$	$\frac{۱}{۲}$	$\lambda>۱$
۳	$-K+iK'$	$\frac{۱}{۲}$	$a_۳$
۴	$-K$	$\frac{۱}{۲}$	$a_۴$

که درآن ثابتهای λ، $a_۳$ و $a_۴$ باید مشخص شوند. فرض می‌کنیم نقاط $z=0$ و $z=\infty$ به‌نقاط $w=0$ و $w=iK'$ می‌روند. آنگاه نگاشت خواسته شده را می‌توان ادامهٔ تحلیلی

نگاشت ازربع اول صفحهٔ z به روی نیمهٔ راست مستطیل از طریق محـور موهومی (طبق اصل تقارن) درنظر گرفت. ازاین نتیجه می‌شود که $a_3=-\lambda$ و $a_4=-1$. پس بنا به (۷)

$$w=C'\int_0^z(z-1)^{-1/2}(z-\lambda)^{-1/2}(z+\lambda)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}\,dz+C_1$$

$$=C'\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(z^2-\lambda^2)}}+C_1=C\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2z^2)}},\tag{13}$$

که درآن $C_1=0$ زیرا برای $z=0$، $w=0$، و

$$\mu=\frac{1}{\lambda}\quad(0<\mu<1)$$

یك ثابت جدید است. چون A_1 نگارهٔ a_1 است، داریم

$$K=C\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu^2x^2)}},\tag{14}$$

درحالی که

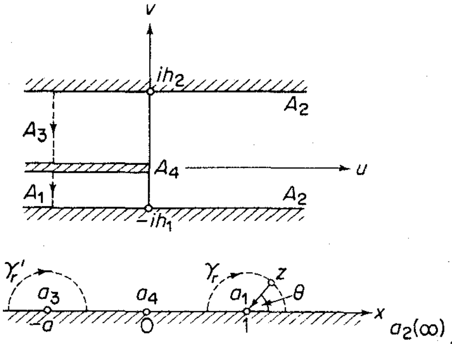
$$K+iK'=C\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu^2x^2)}}+iC\int_1^{1/\mu}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\mu^2x^2)}},\tag{14'}$$

چون A_2 تصویر a_2 است (در اینجا انتگرال از ۰ تا $\lambda=1/\mu$ را به‌دو انتگرال تجزیه کرده‌ایم). ازمقایسهٔ (۱۴) با ('۱۴) دیده می‌شود که

$$K'=C\int_1^{1/\mu}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-\mu^2x^2)}}.\tag{15}$$

(۱۵) را به (۱۴) تقسیم می کنیم، به‌فرمولی می‌رسیم که مقادیر μ و K'/k را به‌هم ربـط می‌دهد (C درتقسیم حذف می‌شود). بنابراین μ فقط به‌نسبت اضلاع مستطیل وابسته است. اما ثابت C به‌اندازهٔ واقعـی مستطیل وابسته است، و می‌تـوان آن را پس از تعیین μ از (۱۴) یا (۱۵) حساب کرد. انتگرالهای فرمولهـای (۱۳)-(۱۵) را انتگرالهای بیضوی گویند، ونمی‌توان آنها را با توابع مقدماتی بیان کرد.

۳۰۲۰۱۴. نیمصفحهٔ $\operatorname{Im} z>0$ را به‌روی حوزهٔ چندضلعی، کـه در شکل ۵۰ دیده می‌شود وعبارت است از نوار $-h_1<\operatorname{Im} w<h_2$ که درطول قسمت منفی محورحقیقی بریده شده است، بنگارید.



شکل ۵۰

حل. این نوار را به‌عنوان «مستطیل تباهیده» که رأس آن در بینهایت است، در نظر می‌گیریم، مقادیر a_k را مطابق جدول زیر انتخاب می‌کنیم.

k	A_k	α_k	a_k
۱	∞	۰	۱
۲	∞	۰	∞
۳	∞	۰	$-a<0$
۴	۰	۲	۰

ازمطالب بخش ۵.۱.۱۴ و ۶.۱.۱۴ نتیجه می‌شود که

$$w=C'\int_{0}^{z}(z-1)^{-1}(z+a)^{-1}z\,dz+C_1$$

$$=C'\int_{0}^{z}\frac{z}{(z-1)(z+a)}dz=C\left[\ln(1-z)+a\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)\right], \tag{16}$$

که در آن $C_1=0$، چون برای $z=0$، $w=0$. برای تعیین ثابتهای C و a به صورت زیر استدلال می‌کنیم: فرض می‌کنیم z یك نیمدایرهٔ کوچك γ_r، واقع در بالای نیمصفحه، به‌شعاع r و به‌مرکز $a_1=1$، که در شکل دیده می‌شود، بپیماید. آنگاه آوند بردار دوار

$z=re^{i\theta}$ - ۱ از ۰ به π - تغییرمی‌کند و همزمان با آن نقطهٔ تصویر w ازنیمخط A_4A_1 به‌نیمخط A_1A_2 می‌رود به‌طوری‌که نمو متناظر با حرکت z روی نیمدایره برابر است با

$$\Delta w = -ih_1 + \epsilon(r), \qquad (۱۷)$$

که در آن وقتی ۰ $\leftarrow r$، ۰ $\leftarrow \epsilon(r)$. زیرا وقتی z، γ_r را می‌پیماید، w مسیری را طی می‌کند که فقط اندکی با یك پاره‌خط عمود به A_4A_1 و A_1A_2 فرق دارد (درستی ایـن مطلب را نشان دهید). ولی وقتی z نیمدایرهٔ γ_r را می‌پیماید، جملهٔ دوم داخل کروشهٔ‌سمت راست (۱۶) فقط کمی تغییر می‌کند زیـرا در ۱ $= z$ پیوسته است، حال‌آنکه جملهٔ اول، یعنی $\ln(1-z)=\ln r+i\theta$ به‌اندازهٔ $-\pi i$ تغییرمی‌کند، به‌طوری‌که

$$\Delta w = -C\pi i + \eta(r), \qquad (۱۸)$$

که درآن وقتی ۰ $\leftarrow r$، ۰ $\leftarrow \eta(r)$. اکنون (۱۷) را با (۱۸) مساوی گرفته γ را به ۰ میل می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$C = \frac{h_1}{\pi}.$$

به‌همین‌ترتیب، فرض می‌کنیم z یك نیمدایرهٔ‌کوچك γ'_r به‌شعاع r و به‌مرکز $a_2=-a$ را بپیماید، به‌جای (۱۷)

$$\Delta w = -ih_2 + \epsilon(r) \qquad (۱۷')$$

و به‌جای (۱۸)

$$\Delta w = -Ca\pi i + \eta(r) \qquad (۱۸')$$

به‌دست می‌آیند، زیرا این‌بار آوند بردار دوار $z+a=re^{i\theta}$ از π بـه ۰ تغییرمی‌کند و موجب می‌شود کـه $\ln(z+a)=\ln r+i\theta$ به‌انـدازهٔ $-\pi i$ تغییرکند. از ('۱۷) و ('۱۸) نتیجه می‌شود که

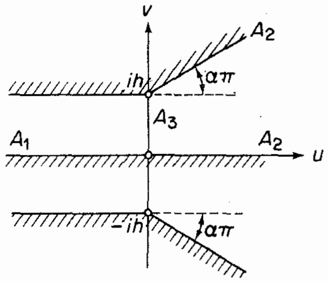
$$a = \frac{h_2}{C\pi} = \frac{h_2}{h_1}.$$

پس، بالاخره، نگاشت همدیس مطلوب که نیمصفحهٔ فوقانی را به‌روی حوزهٔ چندضلعی(که درشکل ۵۰ دیده می‌شود) می‌نگارد، نگاشت

$$w = \frac{h_1}{\pi}\ln(1-z) + \frac{h_2}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_1}{h_2}z\right). \qquad (۱۹)$$

است.

۰۴۰۲۰۱۴ نوار $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ را به‌روی حـوزه‌ای کـه در شکل ۵۱ دیـده



شکل ۵۱

می‌شود، بنگارید.

حل. چون درنظر داریم سرانجام از اصل تقارن استفاده کنیم، نخست نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > ۰$ را به‌روی نیمهٔ فوقانی حوزهٔ مورد بحث، یعنی، به‌روی «مثلث تباهیدهٔ» $A_۱A_۲A_۳$، که دو رأس آن در بینهایت است، می‌نگاریم. مقادیر a_k را مطابق جدول زیر انتخاب می‌کنیم:

k	A_k	α_k	a_k
۱	∞	۰	۰
۲	∞	$-\alpha$	∞
۳	ih	$۱+\alpha$	-۱

نگاشت مطلوب به‌صورت

$$w = C\int_{-۱}^{z} \frac{(z+۱)^{\alpha}}{z}\,dz + ih, \qquad (۲۰)$$

درمی‌آید که درآن از اینکه $A_۳$ تصویر $a_۳ = -۱$ است، استفاده شده است. برای تعیین ثابت C، فرض کنید z یك نیمدایرهٔ کوچك γ_r به‌شعاع r به‌مرکز $z=۰$ بپیماید. آنگاه آوند بردار $z=re^{i\theta}$ از π تا ۰ تغییرمی‌کند، ونمو نظیرتابع (۲۰)

$$\Delta w = C\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \epsilon(r) = -C\pi i + \epsilon(r), \qquad (۲۱)$$

است که درآن وقتی $r \to 0$، $\epsilon(r) \to 0$. (دراینجا از اینکه $(z+1)^\alpha$ روی γ_r فقط کمی با ۱ اختلاف دارد، استفاده شده است.) از طرف دیگر، نقطهٔ w، وقتی z، γ_r را می‌پیماید، از نیمخط A_3A_1 به‌نیمخط A_1A_2 می‌رود، پس

$$\Delta w = -ih + \eta(r), \qquad (۲۲)$$

که درآن وقتی $r \to 0$، $\eta(r) \to 0$. (۲۱) را با (۲۲) مقایسه می‌کنیم، به‌دست‌می‌آید

$$C = \frac{h}{\pi},$$

به‌طوری‌که (۲۰) به‌صورت

$$w = \frac{h}{\pi}\int_{-1}^{z} \frac{(z+1)^\alpha}{z} dz + ih. \qquad (۲۳)$$

درمی‌آید.

حال به‌جای z، e^z می‌گذاریم. آنگاه (۲۳) نگاشت

$$w = \frac{h}{\pi}\left\{\int_{\pi i}^{z} (e^z+1)^\alpha \, dz + \pi i\right\} \qquad (۲۴)$$

می‌شود که نوار $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ را به‌روی «مثلث» $A_1A_2A_3$ می‌نگارد. ولی ضلع پایین نوار $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$ به‌روی خط وسط تمام حوزه‌ای که $A_1A_2A_3$ نیمهٔ فوقانی آن است نگاشته می‌شود، پس، بنا به‌اصل تقارن، (۲۴) «تمام» نوار $-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi$ را به‌روی تمام حوزه می‌نگارد. توجه کنید که اگر $\alpha = 1$، (۲۴) به

$$w = \frac{h}{\pi}\{e^z + z + 1\} \qquad (۲۵)$$

تبدیل می‌شود

چند توضیح

۰۱۰۱۴ دربخش ۱۰۱۴ ازاصل قوی تقارن، در ساختن تابع نگاشت ازنیمصفحهٔ فوقانی به‌روی چندضلعی مفروض استفاده کردیم وتبدیل شوارتس‌ـ‌کریستوفل (۷) را به‌دست آوردیم. برعکس، فرض می‌کنیم فرمول (۷)، اعداد مختلط دلخواه C، C_1 و اعداد حقیقی a_k، $\alpha_k (k = 1, \ldots, n)$ که درشرایط

$$-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty, \quad -2 \leqslant \alpha_k \leqslant 2,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = n - 2$$

صدق می‌کنند، داده شده‌اند. آنگاه می‌توان نشان داد (به‌بخش ۲۰ جلد دوم کتاب آ. ا.

مارکوشویچ رجوع کنید) کـه با (۷) یك نگاشت همدیس تعـریف می‌شود که نیمصفحهٔ فوقانی را به‌روی یك nضلعی می‌نگارد که زوایای داخلی آن $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ هستند(اگر $\alpha_k<0$، رأس نظیر به a_k در بینهایت است). اگرشرط $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n-2$ برقرار نباشد، (۷) نیمصفحهٔ فوقانی را به‌روی یك $n+1$ ضلعی می‌نگارد.

۲۰۱۴. نظریهٔ انتگرالهای بیضوی وتوابع بیضوی (درمسئلهٔ ۱۶ به‌آنها اشاره شده است) فصل مهمی درآنالیزمختلط است، که تحقیقات وسیعی دربارهٔ آن شده است. مبانی این مبحث به‌صورتی بسیار ساده درقسمت دوم، جلـد سوم کتاب آ. ا. مارکوشویچ آمده است.

مسائل

۱. فرض می‌کنیم γ خط‌راستی است که ازنقطهٔ $z=a$ می‌گذرد و بـا قسمت مثبت محور حقیقی زاویهٔ θ می‌سازد. نشان دهید که بازتاب در γ به‌وسیلهٔ تبدیل

$$w=e^{2i\theta}\overline{z-a}+a$$

بیان‌می‌شود. (θ حقیقی‌است.) ایـن تبدیل را بـرای‌نشان دادن اینکـه نتیجهٔ هرزوج بازتاب در دوخط (یا دوپاره‌خط) یك دوران ویك انتقال است، به‌کاربرید.

۲. فرض کنید کـه G تمام صفحهٔ z منهای دوپاره‌خط است، کـه اولی دونقطهٔ -1 و 1 و دومی نقاط $2i$ و 0 را به‌هم متصل می‌کند (پس G حوزهٔ خارج حرف «T»است). اصل تقارن را به‌کاربرده نشان دهید که تابع

$$w=\sqrt{\frac{\sqrt{z^2-1}+\sqrt{5}i}{i-\sqrt{z^2-1}}}$$

G را به‌روی نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} w>0$ می‌نگارد.

۳. نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به‌روی نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} w>0$ منهای‌پاره‌خطی که نقاط 0 و ih را به‌هم وصل می‌کند، بنگارید.

۴. نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به‌روی یك لوزی درصفحهٔ w که درازای ضلع آن l وزاویهٔ منفرجه‌اش $\alpha\pi$ باشد، بنگارید.

۵. نیمصفحهٔ فـوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به‌روی مثلثهای زیرواقـع در صفحهٔ w به‌رأسهـای A_1، A_2 و A_3 که درزیرمشخص شده‌اند، بنگارید. درهرحالت بـرای A_1، A_2 و A_3 مقادیر $a_1=0$، $a_2=1$ و $a_3=\infty$ را انتخاب کنید ($b>0$)

الف) $0, b, b+\frac{ib}{\sqrt{3}}$؛ ب) $0, b, b+ib$؛ ج) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}b$، b، 0.

۶. نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به‌روی حوزهٔ زیر بنگارید: نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} w>0$ که درطول محور حقیقی مثبت و نیمخط

$$\operatorname{Re} w=0, \quad \operatorname{Im} w \geqslant h>0 \qquad (۲۶)$$

بریده شده است.

۷. مسئله قبلی را درحالتی حل کنید که به‌جای نیمخط (۲۶)، نیمخط

$$\operatorname{Re} w \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} w=h>0 \qquad (۲۶')$$

گذاشته شده باشد.

۸. ثابت کنید تبدیل شوارتس-کریستوفل (۷)، قرص واحد $|z|<1$ را به‌روی چندضلعی کراندار Δ با زاویه‌های داخلی $\alpha_1\pi$، $\alpha_2\pi$، ...، $\alpha_n\pi$ می‌نگارد، که درآن a_k نقاطی از دایرهٔ $|z|=1$ هستند که به‌رأسهای Δ نگاشته می‌شوند.

۹. به‌روی چه‌حوزه‌ای تابع

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

قرص واحد $|z|<1$ را می‌نگارد؟ درمورد تابع

$$w=\int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{2/n}}$$

چه می‌توان گفت؟ (n عددی صحیح ومثبت است).

۱۰. فرض کنید Δ چندضلعی کرانداری با رأسهای A_1، A_2، ...، A_n باشد که زاویه‌های خارجی نظیر آنها $\alpha_1\pi$، $\alpha_2\pi$، ...، $\alpha_n\pi$ هستند وفرض کنید Δ' خارج Δ باشد (یعنی، خارج مرز Δ). نشان دهید که تبدیل

$$w=C\int_{z_0}^z (z-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{(z-a)^2(z-\bar{a})^2}+C_1$$

نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z>0$ را به‌طور همدیس به‌روی Δ' می‌نگارد، درحالی که نقاط a_1، a_2،...، a_n از محور حقیقی را به‌رأسهای A_1، A_2، ...، A_n و نقطهٔ a از نیمصفحهٔ فوقانی را به‌نقطهٔ بینهایت می‌برد.

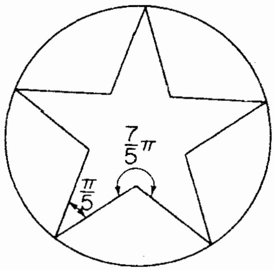
۱۱. نشان دهیدکه تبدیل

$$w=C\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+C_1 \qquad (۲۷)$$

قرص واحد $|z|<1$ را به‌طور همدیس به‌روی حوزهٔ چند ضلعی Δ' مسئلهٔ قبلی می‌نگارد درحالی‌که نقاط a_1، a_2، ...، a_n از دایرهٔ واحد $|z|=1$ را به‌رأسهای A_1، A_2، ...، A_n، ونقطهٔ $z=0$ را به‌نقطهٔ بینهایت می‌برد.

۱۲. قرص واحد $|z|<1$ را به‌روی ستارهٔ پنج‌نقطه‌ای‌که درشکل ۵۲ دیده می‌شود بنگارید.

۱۳. قرص واحد $|z|<1$ را به‌روی حوزهٔ خارجی یك مربع بنگارید.



شکل ۵۲

۱۴. فرض کنید C، دایرهٔ واحد $|z|=1$ باشد. ثابت‌کنیدکه تابع

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

هم خارج وهم داخل C رابه‌روی صفحهٔ w که درطول پاره‌خطی‌که نقاط $w=-1$ و $w=1$ را به‌هم وصل می‌کند بریده شده است، می‌نگارد.

۱۵. قرص واحد $|z|<1$ را به‌روی صفحهٔ w که درطول $2n$ پاره خط‌که مبدأ را به‌نقاط $w=1, e^{\pi i/n}, \dots, e^{(2n-1)\pi i/n}$ وصل می‌کنند بریده شده است، بنگارید.

۱۶. فرض‌کنید $w=\operatorname{sn} z$ معکوس انتگرال بیضوی

$$z=\int_0^w\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-\mu^2w^2)}}$$

باشد. ثابت کنید «تابع بیضوی» $\operatorname{sn} z$ فرد است، یعنی، $\operatorname{sn}(-z)\equiv-\operatorname{sn} z$.

درکجا $\operatorname{sn} z$ تحلیلی نیست؟ اگر $\mu = 0$ چه می‌شود؟ ثابت‌کنید که به‌ازای هر $n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\operatorname{sn}(z + 4nK + 2n'K'i) \equiv \operatorname{sn} z$$

که درآن K و K' با (۱۴) و (۱۵) به‌ازای $C = 1$ داده شده‌اند.

توضیح. بنابراین تابع $\operatorname{sn} z$ «متناوب دوگانه» بـا دوره‌های تناوب $\omega = 4K$ و $\omega' = 2K'i$ است (به فصل ۱۳، مسئلهٔ ۷ رجوع کنید).

۱۵

برخی کاربردهای فیزیکی

۱.۱۵ . دینامیك سیالات

۱.۱.۱۵. حرکت یك‌سیال (یعنی یك‌مایع یا یك گاز) تراکم‌ناپذیر را درسرعتهای بسیار کمتر از سرعت صوت در نظر می‌گیریم . مقصود ما از میدان سرعت یا شارش ، تابعی برداری است که سرعت سیال را درهر نقطه از ناحیهٔ مفروضی و در هر لحظه‌اززمان به‌دست می‌دهد. چنین شارشی را اگر مستقل از زمان باشد مانا می‌گویند و اگر در تمام صفحات موازی با صفحهٔ مفروض π یکسان بوده، مؤلفه‌هایی عمود بر π نداشته باشد صفحه‌موازی می‌نامند. واضح است که در حالت اخیر اگرصفحهٔ π را صفحهٔ xy بگیریم ازکلیت مطلب‌کاسته نمی‌شود. لذا یك‌شارش صفحه موازی مانا با تابعی برداری ازدومتغیر مکانی x و y یا، هم‌ارزآن، به‌وسیلهٔ یك‌تابع مختلط

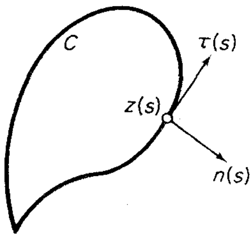
$$w(x, y)=u(x, y)+iv(x, y)$$

مشخص می‌شود، که درآن $u(x,y)$ «مؤلفهٔ x» و $v(x, y)$ «مؤلفهٔ y» شارش است. تمام شارشهایی که ذیلاً بررسی می‌شوند هم‌مانا وهم صفحه موازی فرض شده‌اند.

۲.۱.۱۵. شارش $w=u+iv$ که در حوزهٔ G تعریف شده است مفروض است، فرض می‌کنیم C خم هموار تکه‌ای به‌درازای l واقع در G وبا نمایش پارامتری

$$z = z(s) \qquad (\circ \leqslant s \leqslant l)$$

برحسب درازای کمان متغیر درطول C باشد. دراین‌صورت بنابرمسئلهٔ۶از فصل ۵ ، مشتق $z'(s)$، بجز درتعداد متناهی از نقاط فـاصلهٔ $\circ \leqslant s \leqslant l$، در همهٔ نقاط این‌فـاصله وجود دارد و دارای قـدرمطلق واحد است. فرض می کنیم ، نظیر شکل ۵۳ (که درآن C بسته است)، $\tau(s)$ (بردار) مماس یکهٔ بر C در نقطهٔ $z(s)$ و $n(s)$ قـائم یکهٔ (به‌سوی خارج) بر C در $z(s)$ باشد. در این صورت بنـابرحسابان مقدماتی‌مؤلفه‌های $\tau(s)$، dx/ds و dy/ds هستند، به‌طوری که



شکل ۵۳

$$\tau(s) = z'(s) = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds},$$

$$n(s) = \frac{1}{i} z'(s) = \frac{dy}{ds} - i\,\frac{dx}{ds}.$$

مؤلفهٔ شـارش $w = u + iv$ ممـاس بر C در نقطهٔ $z(s)$ که بـا w_τ نشان داده‌می‌شود حاصلضرب داخلی بردارهای $w = u + iv$ و $\tau(s)$ است، یعنی

$$w_\tau = u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds};$$

درحالی که مؤلفهٔ شارش‌قـائم بر C در $z(s)$ که بـا w_n نشان داده می‌شود حاصلضرب داخلی w و $n(s)$ است :

$$w_n = -v\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds}\,.$$

فرض می کنیم شارش $u + iv$ «مشتق‌پذیر پیوسته» است ؛ یعنی فرض می کنیم هردو تـابع u و v درهرنقطهٔ G مشتقات نسبی‌پیوسته دارند وهمچنین C را یک‌خم ژردان بستهٔهموار تکه‌ای در G می گیریم. بنابراین انتگرال

$$\int_C w_\tau ds=\int_C (u+iv)_\tau ds=\int_C u\,dx+v\,dy \qquad (۱)$$

گردش حول C خوانده می‌شود، درحالی‌که انتگرال

$$\int_C w_n ds=\int_C (u+iv)_n ds=\int_C -v\,dx+u\,dy \qquad (۲)$$

شار مار از C نامیده می‌شود*. اگر(۱) برای‌هرخم C از نوع ذکرشده صفر باشد،آن‌را شارش بیچرخشی در G می‌نامند، در حالی‌که اگر(۲) برای هرچنین خمی صفر باشد آن را شارش لوله‌ای در G می‌گویند. چون

$$\int_C \overline{w}dz=\int_C \overline{(u+iv)}\,(dx+i\,dy)=\int_C u\,dx+v\,dy+i\int_C -v\,dx+u\,dy,$$

(۱) و (۲) را می‌توانیم به‌صورت دیگر زیر بنویسیم

$$\int_C u\,dx+v\,dy=\mathrm{Re}\int_C \overline{w}\,dz, \qquad (۳)$$

$$\int_C -v\,dx+u\,dy=\mathrm{Im}\int_C \overline{w}\,dz. \qquad (۴)$$

۳۰۱۰۱۵. قضیه. یک‌شارش مشتق‌پذیر پیوستهٔ $u+iv$ که در یک‌حوزهٔ همبند سادهٔG تعریف شده است، بیچرخشی ولوله‌ای است، اگر وفقط اگر

$$u+iv=\overline{f'(z)}, \qquad (۵)$$

که درآن $f(z)$ یک‌تابع تحلیلی در G است، وآن را **پتانسیل مختلط** شارش می‌گویند.

برهان. فرض می‌کنیم $u+iv$ لوله‌ای و بیچرخشی باشد ، به‌قسمی‌که انتگرالهای (۳) و (۴) هردوبرای هرخم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای C کـه در G واقع است صفر باشند. در این‌صورت هردوعبارت $u\,dx+v\,dy$ و $-v\,dx+u\,dy$ دیفرانسیل‌کامل‌اند، یعنی دوتابع حقیقی $\varphi=\varphi(x, y)$ و $\psi=\psi(x, y)$ وجود دارند، به‌طوری که

$$u\,dx+v\,dy=d\varphi,$$
$$-v\,dx+u\,dy=d\psi.$$

بنابراین

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (۶)$$

* درارتباط با مفهوم فیزیکی این‌اصطلاحات، مسائل ۱ و ۲ را ببینید.

$$-v=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{۷}$$

و بویژه

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

به قسمی که φ و ψ در G درمعادلات کوشی ــ ریمان صادق‌اند. نتیجه می‌شود که تابع

$$f(z)=\varphi+i\psi$$

در G تحلیلی است (بخش ۳.۲.۴ را ببینید). بـا استفاده از (۶) و (۷) بآسانی به دست می‌آید که

$$f'(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=u-iv,$$

که با (۵) هم‌ارز است.

برعکس فرض می‌کنیم $u+iv$ در (۵) صادق است، و $f(z)$ در G تحلیلی است، و C را یك‌خم‌ژردان بستهٔ هموارتکه‌ای واقع در G می‌گیریم. پس بنا برقضیهٔ انتگرال کوشی

$$\int_C \bar{w}\,dz=\int_C f'(z)dz=0,$$

زیرا مشتق تابع تحلیلی، تابعی تحلیلی است. بنابراین شارش $u+iv$ به‌دلیل (۳) و (۴) بیچرخشی و لوله‌ای است. □

از (۵) نتیجه می‌شود کـه توابع u و $v-$، توابع همساز مزدوج در G هستند. همچنین توجه کنید کـه فرمولهـای (۳) و (۴) برحسب پتانسیل مختلط $f(z)$ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\int_C u\,dx+v\,dy=\mathrm{Re}\int_C f'(z)dz, \tag{$۳'$}$$

$$\int_C -v\,dx+u\,dy=\mathrm{Im}\int_C f'(z)dz. \tag{$۴'$}$$

۴۰۱۰۱۵ توابع φ و ψ را بترتیب‌پتانسیل (سرعت) وتابع جریان شارش مفروض می‌نامند، و به‌همین مناسبت خمهای

$$\varphi(x,\ y)=\text{ثابت}, \qquad \psi(x,\ y)=\text{ثابت}, \tag{۸}$$

را همپتانسیلها و خطوط جریـان می‌گویند. نگاشت $\zeta=\xi+i\eta=f(z)$، که در آن

$f(z)$ پتانسیل مختلط است،درهر نقطهٔ G،به‌استثنای نقاطی که در آنها $f'(z)=0$، همدیس است (به‌مسئلهٔ ۲۴، فصل ۱۰ رجوع کنید)؛ در این نقاط سرعت $u+iv$ صفر می‌شود و به‌نقاط راکد معروف‌اند. واضح است که $\zeta=f(z)$ خمهای (۸) را به‌خمهای

$$\xi = \text{ثابت} \quad , \quad \eta = \text{ثابت} \quad ,$$

می‌نگارد. اما خمهای اخیر آشکارا یک‌دستگاه متعامدهستند،یعنی هرخم،$\xi=$ثابت برهرخم ثابت$=\eta$ عمود است و برعکس. بنابراین خمهای (۸) نیز (بجز در نقاط راکد) یک دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند.

بنابر(۸)، ~~همپتانسیلها~~ باشرط

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=u\,dx+v\,dy=0,$$

وخطوط جریان با شرط

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=-v\,dx+u\,dy=0,$$

مشخص می‌شوند. پس در هرنقطهٔ شارش مانند $(x\,,\,y)$ (باستثنای نقاط راکد)، سرعت برهمپتانسیل مار بر $(x,\,y)$ عمود و برخط جریان مار بر $(x,\,y)$ مماس است. ضمناً این موضوع یک‌بار دیگر نیز ثابت می‌کند که همپتانسیلها و خطوط جریان، یک‌دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. بعلاوه این واقعیت که سرعت برخطوط جریان مماس است نشان می‌دهد که خطوط جریان، مسیرهای واقعی عناصر متحرک سیال‌اند.

۰۵۰۱۰۱۵ هرشارش فیزیکی بایددرشرط زیرصادق باشد: سطح هرجسمی که شارش به‌آن محدود می‌شود، یعنی هرخمی که قسمتی از Γ است (Γ مرز حوزهٔ شارش G)*،باید قسمتی ازخط جریان،ثابت$=\psi(x,\,y)$ باشد، زیرا شارش نمی‌تواند مؤلفهٔ قائم برچنین سطحی داشته‌باشد. به‌همین دلیل اگر $f(z)$ پتانسیل مختلط یک‌شارش باشد، آنگاه $\psi(x,\,y)=\operatorname{Im}f(z)$ باید روی هرخمی که قسمتی از Γ است، ثابت باشد.

۲۰۱۵. چند مثال

۰۱۰۲۰۱۵ تابع خطی تام

---

* در اینجا فرض می‌کنیم که Γ از تعدادی متناهی خم هموار تکه‌ای تشکیل شده است؛ در واقع Γ تصویر مجموعه‌ای از اشیاء استوانه‌ای‌شکل، برروی صفحهٔ xy است که درامتداد محور z خیلی طویل (به‌طور ایده‌آل، بینهایت دراز) فرض می‌شوند.

$$f(z)=\alpha z \tag{۹}$$

را می‌توان به‌عنوان پتانسیل مختلط یك شارش که تمام صفحه را اشغال کرده و در هرنقطه دارای سرعت یکنواخت

$$\overline{f'(z)}=\bar{\alpha}$$

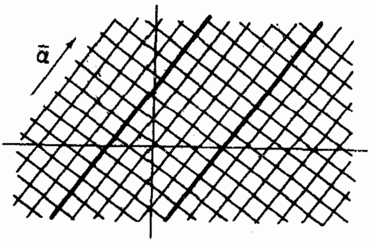
است در نظر گرفت. با نوشتن $\alpha=a+ib$ ، سرعت پتانسیل وتابع جریان را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\varphi(x, y)=ax-by, \quad \psi(x, y)=bx+ay.$$

دستگاه متعامد متناظر همپتانسیلها وخطوط جریان

$$ax-by=\text{ثابت}\,, \quad bx+ay=\text{ثابت}\,,$$

درشکل ۵۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵۴

همین تابع (۹)، پتانسیل مختلط شارش یکنواخت در نواری است‌که مرزهای آن دوخط موازی با بردار $\bar{\alpha}$ هستند (نظیر دوخط پر رنگی که در شکل نشان داده شده‌اند).

۲۰۲۰۱۵. پتانسیل مختلط

$$f(z)=z^{۲} \tag{۱۰}$$

نیز شارشی را توصیف می‌کندکه تمام صفحه‌را اشغال کرده ودارای سرعت غیریکنواخت

$$\overline{f'(z)}=۲\bar{z}$$

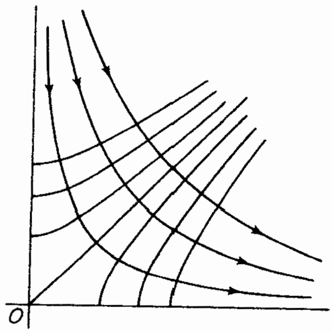
است. این‌بار پتانسیل سرعت وتابع جریان به‌صورت زیرند

$$\varphi(x, y)=x^{۲}-y^{۲}, \quad \psi(x, y)=۲xy,$$

در حالی‌که دستگاه متعامد همپتانسیلها وخطوط جریان متناظر

$$x^۲ - y^۲ = \text{ثابت}, \quad ۲xy = \text{ثابت},$$

عبارت از دوخانواده از هذلولیهای متساوی‌الساقین‌اند. محورهای مختصات، خود خطوط جریان‌اند ($۲xy = ۰$)، ونقطه تقاطع آنها در مبدأ، یك‌نقطهٔ راکد است. همین تابع(۱۰) پتانسیل مختلط یك شارش در هرربع صفحهٔ xy است ، که پهلوهای هرربع به‌عنوان تصاویر دیواره‌های مجرای سیال به‌حساب می‌آیند (برای حالتی‌که شارش در ربع اول است شکل ۵۵ را ببینید‌که مدلی از «شارش پیرامون یك‌گوشه» است).



شکل ۵۵

۳۰۲۰۱۵. فرض می‌کنیم G حوزهٔ $\infty > |z| > ۰$، و C یك‌خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای باشد‌که مبدأ را احاطه‌کرده و درجهت مثبت طی می‌شود . در این صورت شارش با پتانسیل مختلط

$$f(z) = \frac{\kappa}{۲\pi i} \ln z \qquad (\kappa \text{ حقیقی})$$

دارای چرخش κ حول C وشار صفرمار از C است . زیرا، بنابر(′۳) و (′۴)

$$\int_C u\,dx + v\,dy = \operatorname{Re} \frac{\kappa}{۲\pi i} \int_C (\ln z)' dz = \operatorname{Re} \frac{\kappa}{۲\pi i} \int_C \frac{dz}{z} = \operatorname{Re} \frac{\kappa}{۲\pi i} ۲\pi i = \kappa,$$

$$\int_C -v\,dx + u\,dy = \operatorname{Im} \frac{\kappa}{۲\pi i} \int_C \frac{dz}{z} = ۰.$$

ازسوی دیگر،شارش باپتانسیل مختلط

$$f(z)=\frac{\mu}{2\pi}\ln z \qquad (\text{حقیقی } \mu)$$

دارای چرخش صفر حول C وشار μ مار از C است، زیرا اینک

$$\int_C u\,dx+v\,dy=\mathrm{Re}\frac{\mu}{2\pi}\int_C\frac{dz}{z}=\mathrm{Re}\frac{\mu}{2\pi}2\pi i=0,$$

$$\int_C -v\,dx+u\,dy=\mathrm{Im}\frac{\mu}{2\pi}\int_C\frac{dz}{z}=\mathrm{Im}\,i\mu=\mu.$$

خواننده باید به‌عنوان تمرین، همپتانسیلها و خطوط جریان متناظر به‌دو پتانسیل مختلط بالا را بیابد. توجه کنید کــه هردو شارش در هرزیر حوزهٔ همبند سادهٔ G، بیچرخش و لوله‌ای‌اند، زیرا برای هرمسیر C که مبدأ را دربرنگیرد

$$\int_C\frac{dz}{z}=0.$$

۴.۲.۱۵. شارش در خارج یك‌استوانهٔ دوار به‌شعاع R را پیداکنید، به فرض‌آنکه سرعت در بینهایت برابر باشد با $w_\infty=u_\infty+iv_\infty$* وشارش در حوزهٔ شارش G لوله‌ای و در هرزیرحوزهٔ همبند سادهٔ G بیچرخشی باشد.

حل. بنابررابطهٔ (۵)، اگر $f(z)$ پتانسیل مختلط شارش‌باشد، آنگاه $f'(z)$ بایددر حوزهٔ $|z|>R$، تابعی تحلیلی باشد و مقدار $\overline{w}_\infty$ را در بینهایت اختیارکند (چندتوضیح بخش ۱.۱۵را ببینید). نتیجه می‌شود که بسط‌لوران $f'(z)$ دربینهایت به‌صورت زیراست

$$f'(z)=\overline{w}_\infty+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots \qquad (11)$$

(به‌فصل ۱۱، مسئلهٔ ۱۶ رجوع‌کنید)، در نتیجه

$$f(z)=\overline{w}_\infty z+c_1\ln z-\frac{c_2}{z}-\frac{c_3}{2z^2}-\cdots, \qquad (12)$$

که درآن ثابت انتگرال‌گیری منظور نشده است، زیرا در میدان سرعت اثری ندارد.
برای یافتن‌تابع جریان متناظر $\psi(r,\theta)=\mathrm{Im}\,f(z)$ در مختصات قطبی، می‌نویسیم

* این‌شرط‌فیزیکی که سرعت درمسافت زیادی ازاستوانه، برابربامقدار مفروض w_∞ است، بدین وسیله به طور طبیعی ایدآل‌سازی شده است.

$$z=re^{i\theta},\ c_1=a_1+ib_1,\ \ c_2=a_2+ib_2,\ c_3=a_3+ib_3,\dots ,$$

و بسط زیر به‌دست می‌آید

$$\psi(r,\theta)=a_1\theta+b_1\ln r+\frac{a_2+r^2u_\infty}{r}\sin\theta-\frac{b_2+r^2v_\infty}{r}\cos\theta$$

$$+\frac{a_3}{2r^2}\sin 2\theta-\frac{b_3}{2r^2}\cos 2\theta+\cdots. \qquad (۱۳)$$

دایرهٔ $|z|=R$ را Γ می‌نامیم ، دراین‌صورت چون Γ باید یکی ازخطوط جریان شارش باشد ، تابع $\psi(r,\theta)$ باید برای $r=R$ و مقدار دلخواه θ ثـابت باشد (بخش ۵.۱.۱۵ را ببینید). اگر ضرایب در(۱۳) را به‌صورت زیر انتخاب کنیم:

$$a_1=0,\ \ a_2+R^2u_\infty=0,\ \ b_2+R^2v_\infty=0,\ \ a_3=b_3=\dots=0,$$

این‌شرط برآورده خواهدشد. دراین صورت(۱۱) و (۱۲) بترتیب به

$$f'(z)=\overline{w}_\infty+\frac{ib_1}{z}-\frac{R^2w_\infty}{z^2} \qquad (۱۴)$$

و

$$f(z)=ib_1\ln z+\overline{w}_\infty z+\frac{R^2w_\infty}{z}, \qquad (۱۵)$$

خلاصه می‌شوند، که درآنها b_1 یك‌مقدار ثابت‌حقیقی است. برای بیان b_1 برحسب گردش κ پیرامون Γ (بنابرشرط مسئله، مقدار مخالف صفر κ مجاز است)، توجه می‌کنیم که طبق (۳') اگر $r>R$ (چرا؟) ، داریم

$$\kappa=\operatorname{Re}\int_\Gamma f'(z)dz=\operatorname{Re}\int_{|z|=r} f'(z)dz,$$

و لذا

$$\kappa=\operatorname{Re}\int_{|z|=r}\left\{\overline{w}_\infty+\frac{ib_1}{z}-\frac{R^2w_\infty}{z^2}\right\}dz=-2\pi b_1. \qquad (۱۶)$$

بنابراین

$$b_1=-\frac{\kappa}{2\pi},$$

به‌طوری که (۱۴) و (۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$f'(z)=\bar{w}_\infty+\frac{\kappa}{2\pi iz}-\frac{R^2 w_\infty}{z^2} \qquad (۱۷)$$

و

$$f(z)=\frac{\kappa}{2\pi i}\ln z+\bar{w}_\infty z+\frac{R^2 w_\infty}{z}, \qquad (۱۸)$$

که در آن اولین جملهٔ سمت‌راست(۱۸)، مربوط به‌یك«شارش چرخشی محض» است، از نوعی که در مثال ۳.۲.۱۵ بررسی شد. توجه کنید که در بسط (۱۱)، c_1، ضریب جملهٔ‌دوم، مساوی $\kappa/2\pi i$ است. این مطلب، حتی درحالت کلی که Γ به‌جای اینکه دایرهٔ $|z|=R$ * باشد، خم‌ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای دلخواهی است استوار است. زیرا فرض می کنیم κ، گردش پیرامون Γ باشد و $|z|=r$ را دایره‌ای می گیریم که Γ را دربردارد. در این صورت رابطهٔ

$$\kappa=\operatorname{Re}\int_{|z|=r}\left\{\bar{w}_\infty+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots\right\}dz=\operatorname{Re}2\pi ic_1 \qquad (۱۶')$$

به‌جای (۱۶) قرار می‌گیرد، در حالی که از طرف دیگر، شارمار بر Γ که مساوی $\operatorname{Im}2\pi ic_1$ است باید صفرشود، زیرا شارش، در G لوله‌ای است. پس c_1 موهومی محض است، و مقدار آن‌همان

$$c_1=\frac{\kappa}{2\pi i},$$

است، به‌طوری که به‌جای (۱۷)

$$f'(z)=\bar{w}_\infty+\frac{\kappa}{2\pi iz}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots. \qquad (۱۷')$$

برای سهولت فرض می کنیم $w_\infty=u_\infty>0$ (همیشه می‌توان درآغاز با یك‌دوران محورهای مختصات، حالت کلی را به‌این‌حالت تبدیل کرد)، حال نقاط راکد شارش، یعنی نقاطی راکه در آنها سرعت صفر می‌شود جستجو می کنیم. نتیجهٔ (۱۷) را برابر صفر می گیریم. با توجه به $w_\infty=\bar{w}_\infty=u_\infty$ معادلهٔ درجه دوم

$$z^2+\frac{\kappa}{2\pi iu_\infty}z-R^2=0 \quad ,$$

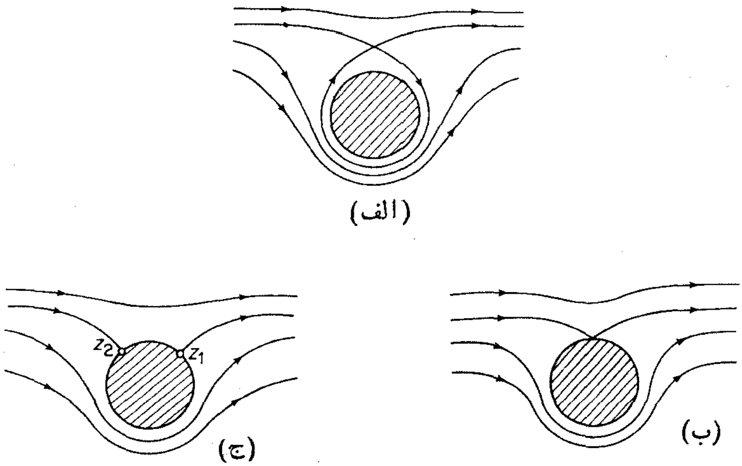
---

* دراین‌صورت می‌گوییم Γ برش عرضی استوانه است، حتی اگر استوانه یك‌جسم جامد باشد.

باجوابهای

$$z_{۱,۲}=\frac{i\kappa}{۴\pi u_\infty}\pm\sqrt{R^۲-\left(\frac{\kappa}{۴\pi u_\infty}\right)^۲}$$

به‌دست می‌آید. اگـر $|\kappa|>۴\pi Ru_\infty$ ، هردونقطهٔ راکد $z_۱$ و $z_۲$ موهومی محض‌اند، اما چون $z_۱z_۲=-R^۲$ ، فقط یکی از این‌نقاط، خارج دایرهٔ $|z|=R$ ، یعنی در حوزهٔ شارش واقع است. خطوط جریان این‌حالت در شکل ۵۶ الف نشان داده شده‌اند. اگر $|\kappa|=۴\pi Ru_\infty$، فقط یك نقطهٔ‌راکد وجود دارد، که در یکی ازنقاط تلاقی محورموهومی با دایرهٔ $|z|=R$ واقع است (شکل ۵۶ ب را ببینید). اگر $|\kappa|<۴\pi Ru_\infty$ ، دو نقطهٔ راکد $z_۱$ و $z_۲$ روی دایرهٔ $|z|=R$ جای دارند ونسبت به‌محور موهومی قرینه‌اند (شکل ۵۶ ج را ببینید). در حـالتی که شارش بدون گردش است ($\kappa=۰$)، بوضوح در نقاط $\pm R$ که محور حقیقی دایرهٔ $|z|=R$ را قطع می‌کند دونقطهٔ راکد وجود دارد.



شکل ۵۶

۵۰۲۰۱۵ درهمان شرایط مثال قبل، شارش درخارج یك‌استوانه‌ای راکه Γ، برش عرضی‌اش، یك‌خم‌ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای دلخواه است پیدا کنید.

حل. فرض می‌کنیم $\zeta=g(z)$ نگاشت همدیس و یکتا ازخارج Γ به‌روی خـارج دایرهٔ واحد $|\zeta|=۱$ است، به‌طوری‌که $g(\infty)=\infty$، و $g'(\infty)$ یك عدد حقیقی مثبت

است*. دراین‌صورت بسط لوران $g(z)$ دربینهایت، به‌شکل زیر است

$$\zeta=g(z)=cz+c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots, \quad (0<c<\infty). \tag{۱۹}$$

بنابر(۱۸)، پتانسیل مختلط برای‌شارش درخارج دایرهٔ ۱ $=|\zeta|$ باسرعت A دربینهایت، و گردش κ پیرامون هردایرهٔ ۱ $\geqslant r=|\zeta|$، چنین است

$$\Phi(\zeta)=\frac{\kappa}{2\pi i}\ln\zeta+\bar{A}\zeta+\frac{A}{\zeta} \tag{۲۰}$$

(کمی‌بعد، A را به‌صورتی مناسب انتخاب می‌کنیم). در رابطهٔ (۲۰)، $g(z)$ را به‌جای ζ قرار می‌دهیم، تابع

$$f(z)=\Phi(g(z))=\frac{\kappa}{2\pi i}\ln g(z)+\bar{A}g(z)+\frac{A}{g(z)}, \tag{۲۱}$$

به‌دست می‌آید که همان‌طورکه لازم داریم قسمت موهومی‌اش روی Γ ثابت است،** و مشتقش در خارج Γ یك مقداری و تحلیلی است. نتیجه می‌شود که (۲۱) پتانسیل مختلط برای شارش در خارج Γ است. برای اینکه سرعت این شارش در بینهایت مساوی با $w_\infty=u_\infty+iv_\infty$ شود، توجه می‌کنیم که

$$\bar{w}_\infty=f'(\infty)=\Phi'(\infty)g'(\infty)=\bar{A}c,$$

به‌طوری‌که

$$A=\frac{w_\infty}{c}=\frac{w_\infty}{g'(\infty)}$$

انتخاب مناسب A است. بنابراین، سرانجام، پتانسیل مختلط برای شارش در خارج Γ با سرعت w_∞ دربینهایت و گردش κ پیرامون Γ به‌صورت زیر درمی‌آید.

---

* در اینجا $g(z)$ در ∞، خاصیت‌تحلیلی‌بودن را ازدست می‌دهد، زیرا شرط $g(\infty)=\infty$ متناظر با حضور جملهٔ cz در (۱۹) است لذا به جای اینکه $g'(\infty)$ را نظیر مسئلهٔ ۳۰ از فصل ۴ مشخص‌کنیم، آن‌را با

$$g'(\infty)=\lim_{z\to\infty}g'(z)$$

تعریف می‌کنیم، به‌طوری‌که $g'(\infty)=c$، توجه‌کنید که $g(z)$ دراین‌صورت در بینهایت همدیس است (چرا؟).

** زیرا قسمت موهومی $\Phi(\zeta)$ روی دایرهٔ ۱ $=|\zeta|$ ثابت است و $\zeta=g(z)$ خم Γ را برروی این دایره می‌نگارد (به‌قضیهٔ ۷.۳.۱۳ رجوع کنید).

$$f(z)=\frac{\kappa}{2\pi i}\ln g(z)+\frac{\overline{w}_\infty}{g'(\infty)}g(z)+\frac{w_\infty}{g'(\infty)g(z)}. \qquad (21')$$

۶.۲.۱۵. نیرویی راکه شارش در خارج استوانهٔ بابرش عرضی Γ براستوانه‌وارد می‌آورد بیابید، وقتی سرعت شارش در بینهایت* $w_\infty=u_\infty+iv_\infty$ است.

حل. اگر $P=P(x,y)$ فشار درنقطهٔ (x,y)ی این‌شارش، و اگر ρ چگالی سیال (ρ ثابت فرض می‌شود) باشد، آنگاه قانون برنولی بیان می‌کند که عبارت

$$P+\frac{1}{2}\rho|w|^2$$

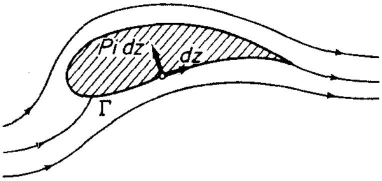
درطول خطوط جریان و بنابراین درطول مرز Γ ثابت است. پس درطول Γ

$$P=A-\frac{1}{2}\rho|w|^2,$$

که در آن A مقدار مثبت ثـابتی است. چون فشار وارد بریك عنصر مرز Γ (که هموار تکه‌ای فرض شده‌است)، مانند $dz=dx+i\,dy$ درجهت نرمال داخلی Γ است، نیروی وارد روی dz که ازاین فشار حاصل می‌شود برابر است با

$$Pi\,dz=Ai\,dz-\frac{1}{2}\rho i|w|^2dz$$

(شکل ۵۷ را ببینید). بنابراین $F=X+iY$، نیروی کل وارد بر Γ برابراست با



شکل ۵۷

$$X+iY=\int_\Gamma Pi\,dz=Ai\int_\Gamma dz-\frac{1}{2}\rho i\int_\Gamma|w|^2dz \qquad (22)$$

یعنی

$$X+iY=-\frac{1}{2}\rho i\int_\Gamma|w|^2dz, \qquad (23)$$

* دقیقتر بگوییم منظور ، نیروی وارد برواحد درازای استوانه‌ای است که درامتداد محور z به‌درازای بینهایت است.

زیرا واضح است که اولین انتگرال طرف راست (۲۲) برابر باصفر است. اما سرعت w باید مماس بر Γ باشد، زیرا Γ یك‌خط‌جریان است، ولذا

$$w=\overline{f'(z)}=|w|e^{i\theta},$$

که درآن $f(z)$ پتانسیل مختلط شارش و $\theta=\arg dz$، به‌طوری که

$$|w|=\overline{f'(z)}e^{-i\theta}. \qquad (۲۴)$$

اگر (۲۴) را در (۲۳) منظور کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$X+iY=-\frac{1}{2}\rho i\int_{\Gamma}[\overline{f'(z)}]^{2}e^{-2i\theta}dz=-\frac{1}{2}\rho i\int_{\Gamma}[\overline{f'(z)}]^{2}\,\overline{dz}, \qquad (۲۵)$$

زیرا

$$e^{-2i\theta}dz=e^{-i\theta}|dz|=\overline{dz}.$$

اگر مزدوج مختلط (۲۵) را اختیار کنیم، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$X-iY=\frac{1}{2}\rho i\int_{\Gamma}[f'(z)]^{2}dz \qquad (۲۶)$$

یا معادل آن

$$X-iY=\frac{1}{2}\rho i\int_{|z|=r}[f'(z)]^{2}dz, \qquad (۲۶')$$

که درآن به‌جای Γ، یك‌دایرهٔ $|z|=r$ که Γ را دربر می‌گیرد قرار داده‌ایم (چرا این‌عمل مجاز است؟).

حال بیان نیروی وارد بر Γ برحسب گردش κ پیرامون Γ موضوع ساده‌ای است. زیرا، با قراردادن (۱۷') در (۲۶')، به دست می‌آوریم

$$X-iY=\frac{1}{2}\rho i\int_{|z|=r}\left\{\overline{w}_{\infty}+\frac{\kappa}{2\pi iz}+\frac{c_1}{z^2}+\dots\right\}^{2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\rho i\frac{2\kappa w_{\infty}}{2\pi i}\int_{c}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\rho i\frac{2\kappa\overline{w}_{\infty}}{2\pi i}2\pi i=\rho\kappa\overline{w}_{\infty}i\ ,$$

ودر نتیجه سرانجام داریم

$$X+iY=-\rho\kappa w_{\infty}i. \qquad (۲۷)$$

که این، قضیهٔ مشهورکوتا ـ ژوکوفسکی است. در زمینهٔ آئرودینامیکی، معادلهٔ (۲۷) بیان می‌کندکه اگر بال هواپیمای در حال سکون در معرض جریان باد یکنواخت بـا سرعت

ثابت w_∞ قرار گیرد و گردش باد پیرامون بال κ باشد، آنگاه بر بال نیروی $\rho|\kappa w_\infty|$ در راستای عمود برجریان بـاد وارد می‌شود که جهت نیرو از دوران w_∞ به‌اندازهٔ ۹۰° در جهت خلاف گردش به‌دست می‌آید.

۳.۱۵. الکتروستاتیك

۱.۳.۱۵. منظور ما از میدان الکتریکی میدانی برداری است کـه نیروی وارد بر واحد بار مثبت برهرنقطهٔ ناحیهٔ مفروضی را درهرلحظهٔ زمان به‌دست می‌دهد. کاملاً نظیر بخش ۱.۱.۱۵، چنین میدانی را مانا می‌گوییم اگر مستقل از زمان باشد وصفحه‌ مـوازی می‌نامیم اگر در تمام صفحات موازی باصفحهٔ مفروض Π یکسان باشد ومؤلفهٔ عمود بر Π نداشته‌باشد؛ در حـالت اخیر بدون اینکه ازکلیت مطلب کاسته شود، می‌توان Π را صفحهٔ xy فرض کرد. پس‌میدان‌الکتریکی‌صفحه‌مـوازی مانا(به‌طور مختصر،میدان‌الکتروستاتیك در صفحه) با یك‌تابع برداری ازدو متغیر مکانی x و y، یا معادل آن، با تابع مختلط

$$E(x,y)=E_x(x,y)+iE_y(x,y),$$

مشخص می‌شود، که در این تابع $E_x(x,y)$ مؤلفهٔ x میدان، و $E_y(x,y)$ مؤلفهٔ y آن است. دومعادلهٔ ماکسول

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=۰, \tag{۲۸}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=۴\pi\rho, \tag{۲۹}$$

برچنین میدانی حاکم‌اند،که درآنها ρ: چگالی بارسطح است.

۲.۳.۱۵. حـال فرض می‌کنیم G یك حوزهٔ همبند ساده است، و در G، $\rho\equiv ۰$ (بنابراین G بدون بار است). بعلاوه C را یك‌خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای واقع در G می‌گیریم. آنگاه قضیهٔ گرین (چند توضیح فصل ۵، بخش ۸.۵ را ببینید) را ابتدا برای (۲۸) وسپس برای (۲۹) به‌کار می‌بریم، رابطه‌های

$$\int_C E_x\,dx+E_y\,dy=۰, \tag{۳۰}$$

$$\int_C -E_y\,dx+E_x\,dy=۰, \tag{۳۱}$$

نتیجه می‌شوند، به‌طوری‌که میدان الکتروستاتیك، در G بیچرخشی و لوله‌ای است. لذا

$-E_y\,dx+E_x\,dy$ و $-E_x\,dx-E_y\,dy$ — هر دو دیفرانسیل کامل‌اند*، یعنی توابع حقیقی $\varphi=\varphi(x,y)$ و $\psi=\psi(x,y)$ وجود دارند، به‌طوری که

$$-E_x\,dx-E_y\,dy=d\varphi,$$
$$-E_y\,dx+E_x\,dy=d\psi.$$

بنابراین

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{۳۲}$$

$$E_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad E_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{۳۳}$$

و بخصوص

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

به‌طوری که ψ و φ در G در معادلات کوشی- ریمان صدق می‌کنند. نتیجه می‌شود که تابع

$$f(z)=\psi+i\varphi$$

در G تحلیلی است. با استفاده از (۳۲) و (۳۳) بلافاصله به‌دست می‌آید

$$f'(z)=\frac{\partial\psi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-E_y-iE_x=-i(E_x-iE_y)$$

یا معادل آن

$$E_x+iE_y=-i\overline{f'(z)}. \tag{۳۴}$$

برعکس درست نظیر اثبات قضیهٔ ۳.۱.۱۵، به‌آسانی می‌توان دید که اگر E_x+iE_y در (۳۴) صدق کند، که درآن $f(z)$ در G تحلیلی است، آنگاه E_x+iE_y در G بیچرخشی و لوله‌ای است. همچنین از (۳۴) نتیجه می‌شود که E_x و $-E_y$ در G توابع همساز مزدوج‌اند.

---

* برای حفظ یك قرارداد تاریخی، جلوی عبارت $E_x dx+E_y dy$ یك علامت منفی منظور می‌کنیم. این‌عمل علاوه برمزایای دیگری که دارد، موجب می‌شود که طرف راست (۳۴) با طرف راست (۵) در ضریب $-i$ اختلاف پیدا کند. این قرارداد ناشی از این است که φ را کاری درمقابل میدان در نظر می‌گیرند، نه‌کاری که میدان انجام داده است.

۳.۳.۱۵. توابع ψ و φ بترتیب تـابع جریان و پتانسیل (الکتروستاتیك) میدان مفروض نامیده می‌شوند ومتناظراً خمهای

$$\psi(x,y)=\text{ثابت},\quad \varphi(x,y)=\text{ثابت},$$

خطوط نیرو وهمپتانسیلها خوانده می‌شوند. این‌خمها، به‌همان دلیلی‌که در بخش۱.۱۵.۴ آمده است، یك دستگاه متعامد تشکیل می‌دهند. بعلاوه میدان الکتریکی در (x, y) برخط نیروی مار بر (x,y) مماس و بر همپتانسیل ماربر (x, y) عمود است. بنابراین خمهای، ثابت $=\psi(x, y)$ ، واقعاً همان خمهـایی هستندکه میدان الکتریکی در طول آنها عمل می‌کند (به‌همین دلیل اصطلاح «خطوط نیرو» برای‌آنها به‌کار می‌رود).

هرسطح رسانای Γ که در یك میدان الکتروستاتیك واقع باشد باید قسمتی از یك همپتانسیل باشد، یعنی میدان الکتریکی نمی‌تواند مؤلفهٔ مماس بر Γ داشته باشد، زیرا در غیر این‌صورت میدان بار را درطول Γ به‌حرکت درمی‌آورد و این متناقض با این فرض است‌که ما بایك مسئلهٔ مانا (یعنی مستقل از زمان) روبه‌رو هستیم*.

۴.۳.۱۵. چند مثال

الف. پتانسیل مختلط

$$f(z)=az \qquad (a>0)$$

در تمام صفحه تعریف شده است ویك‌میدان الکتریکی

$$E_x+iE_y=-i\overline{f'(z)}=-ia$$

یا معادل آن

$$E_x=0,\quad E_y=-a$$

به وجود می آورد. بعلاوه

$$f(z)=a(x+iy)=ax+iay,$$

به‌طوری که

$$\psi=ax,\qquad \varphi=ay.$$

بنا براین، خطوط نیرو، خطوط قـائم،ثابت $=x$ ، و همپتانسیلها ، خطوط افقی،ثابت $=y$ هستند، واقعیتی‌که از قبل نیز از تقارن مسئله واضح بود. برای به‌دست‌آوردن میدان داخل خازنی با جوشنهای موازی بی‌اندازه بزرگ به‌فاصلهٔ $2h$، که جوشن بالایی در پتانسیل

---

* برای مثال صفحهٔ ۱۶۴ کتاب
J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book company, New York (1941)
را ببینید. به‌همین دلیل، خطوط نیرو نمی‌توانند به‌داخل هادی نفوذ‌کنند.

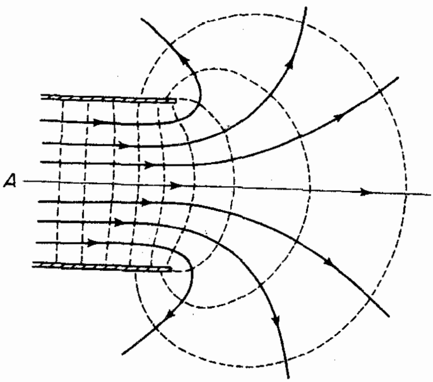
V وجوشن‌پایینی‌در پتانسیل $-V$ است، فقط کافی است a را V/h انتخاب کنیم، به‌طوری که

$$\varphi = \frac{V}{h} y, \qquad E = -i\frac{V}{h} \cdot \tag{۳۵}$$

ب. میدان الکتروستاتیك نزدیك کناره‌های خازنی با جوشنهای موازی و به فاصلهٔ $2h$ راکه جوشن بالایی در پتانسیل V و جوشن پایینی درپتانسیل $-V$ است بیابید.

حل. در اینجا تمـام قدرت روش متغیر مختلط به‌کار گرفته می‌شود. فرض می‌کنیم $w=u+iv=f(z)$، تابعی بـاشد که حوزهٔ واقع در صفحهٔ z راکه در شکل ۵۸ نشان داده‌ایم (قسمت خارجی یك «خازن نیمه متناهی») به روی نوار $-V<v<V$ واقع در صفحهٔ w می‌نگارد. این‌نگاشت را قبلاً (باکمك تبدیل شوارتس ـ کریستوفل) در مثال ۴.۲.۱۴ به‌دست آورده‌ایم و در صفحهٔ۲۹۱به‌وسیلهٔ فرمول (۲۵) داده شده است، بعد از تعویض متغیرهای z و w بـاهم و تغییر عرض نوار از 2π به $2V$ و حذف مقدار ثابت جمعی،که ضرورت ندارد، به‌دست می‌آید

$$z = \frac{h}{\pi}\left(e^{\pi w/V} + \frac{\pi w}{V}\right) \cdot \tag{۳۶}$$



شکل ۵۸

از قسمتهای حقیقی وموهومی (۳۶)، دومعادلهٔ زیر نتیجه می‌شوند

$$x = \frac{h}{\pi}\left(e^{\pi u/V}\cos\frac{\pi v}{V} + \frac{\pi u}{V}\right),$$

$$y = \frac{h}{\pi}\left(e^{\pi u/V}\sin\frac{\pi v}{V} + \frac{\pi v}{V}\right) \cdot$$

خطوط نیرو و همپتانسیلهای متناظر، که با منظور کردن، ثابت $=u$ و بعد، ثابت $=v$ در این معادلات به‌دست می‌آیند ، در شکل نشان داده شده‌اند . میدان الکتریکی E، که با (۳۴) داده شده است به‌صورت زیر است

$$E=-i\overline{\frac{dw}{dz}}=-i\frac{۱}{\overline{\dfrac{dz}{dw}}}=-i\frac{V}{h}\ \frac{۱}{۱+e^{\pi\overline{w}/V}}\ .$$

در عمق داخلی خازن، یعنی برای z نزدیک نقطهٔ A کــه درشکل نشان داده‌ایم، $\overline{w}$ نزدیك $-\infty$ است ولذا E، نزدیك $-iV/h$ است که با(۳۵) هماهنگی دارد. اما نزدیك‌کنارهٔ خازن $\overline{w}\to\pm Vi$، که موجب می‌شود میدان E بینهایت بزرگ شود. البته این‌حالت‌عملاً درآزمایشگاه رخ نمی‌دهد ، زیرا (ضمن چیزهــای دیگر) هیچ خازن فیزیکی نمی‌تواند به‌طورکامل دارای‌کناره‌های تیز باشد.

چند توضیح

۰۱۰۱۵ توابع φ و ψ که در اثبات قضیهٔ ۳۰۱۰۱۵ آمده‌اند، باانتگرالهای

$$\varphi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}u\,dx+v\,dy+\text{const},$$

$$\psi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-v\,dx+u\,dy+\text{const},$$

در طول هرخم هموار تکه‌ای واقع در G با نقطهٔ آغازی $(x_0,\ y_0)\in G$ و نقطهٔ پــایــانی $(x,y)\in G$ مشخص می‌شوند (چندتوضیح بخش ۸۰۵ را ببینید)، ولذا خودشان مشتق‌پذیر پیوسته‌اند. قضیهٔ۳۰۱۰۱۵را می‌توان به‌حالتی تعمیم دادکه حوزهٔ شارش G همبند چندگانه است، پتانسیل مختلط یك‌تابع تحلیلی چند مقــداری است (به‌مفهوم بخش ۵۰۴۰۱۳) و در هرحوزهٔ همبند سادهٔ G، شاخه‌هــای تحلیلی یك مقداری دارد. در این‌صورت هم، شارش در هر زیرحوزهٔ همبند سادهٔ G بیچرخشی و لوله‌ای است ، اما ممکن است در خود G چنین نباشد (مثل مثالهای ۳۰۲۰۱۵ تا ۶۰۲۰۱۵). اما حتی در این حالت‌کلیتر، $f'(z)$ در G یك‌مقداری و تحلیلی است (بخش ۹، مسئلهٔ ۸ را ببینید).

۰۲۰۱۵ برای ملاحظهٔ ایــنکــه هواپیما چگونه کار می‌کند ، توجه کنید کــه اگر $\kappa<0$ و $w_\infty>0$، (۲۷) ازیك نیروی بالا روندهٔ $Y=\rho|\overline{\kappa}|w_\infty>0$ خبرمی‌دهد. درمورد طریقی کــه لبهٔ تیز عقب بال، جریان درحول بال را به وجود می‌آورد، کتاب سابق‌الذکر مارکوشویچ، جلد دوم، صفحه‌های ۱۹۴ به‌بعد را ببینید.

۳.۱۵. خواننده‌ای که با نظریهٔ الکترومغناطیس آشناست، توجه می‌کند که روابط (۲۸) و (۲۹) صورتهای دوبعدی معادلات ماکسول

$$\operatorname{curl}\overrightarrow{E}=0,\qquad \operatorname{div}\overrightarrow{E}=4\pi\rho,$$

هستند. این دو معادله خود حالتهای خاصی از مجموعهٔ عمومیتر چهار معادلهٔ ماکسول‌اند. تعمیم مطالب بخش ۲.۳.۱۵ به حالتی که حوزهٔ G همبند چندگانه است و $f(z)$، پتانسیل مختلط چند مقداری است، همسان است که در توضیح ۱.۱۵ آمده است، جز آنکه به‌دلیل رابطهٔ (۲۸)، برخلاف میدان سرعت، میدان الکتریکی همیشه بیچرخشی است.

مسائل

۱. نشان‌دهید که‌شار یك‌میدان برداری $w=u+iv$ مار از مرز C، برابر بامقدارخالص سیالی است که در واحد زمان از C خارج می‌شود. با توجه به‌این مطلب نشان‌دهید که اگر شارشی درحوزهٔ G لوله‌ای باشد، آنگاه در G، «چشمه» یا «زیرآب»وجود ندارد، به‌عبارت دیگر نقاطی که از آنها سیال به G وارد یا ازآنها خارج شود وجود ندارند.

۲. فرض می‌کنیم یك‌عنصر سیال در یك شارش $w=u+iv$ به‌طور ناگهانی منجمدشود و بعد نسبت به‌بقیهٔ سیال آزادانه حرکت‌کند. ثابت‌کنید که عنصر سیال با سرعت زاویه‌ای

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

می‌چرخد. بنابراین نشان‌دهید که اگر شارشی در حوزهٔ G بیچرخشی باشد، آنگاه حرکت عناصر سیال انتقالی همراه باتاب، ولی بدون چرخش است (کلمهٔ بیچرخشی نیز به‌همین دلیل به‌کار می‌رود).

۳. همپتانسیلها وخطوط جریان شارشی راکه پتانسیل مختلط‌آن

$$f(z)=\frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{z-z_1}{z-z_2}\quad (\text{حقیقی است } \mu) \qquad (37)$$

است‌رسم کنید. ثابت‌کنید که شار ماراز هرمرزی (یعنی‌خم‌ژردان بستهٔ هموارتکه‌ای) پیرامون z_1، ولی نه z_2 برابر μ است، در حالی‌که شار ماراز هرمرزی پیرامون z_2، ولی نه z_1 برابر $-\mu$ است. خلاصه اینکه شارش، چشمه‌ای به قدرت μ در z_1 و چشمه‌ای به‌قدرت $-\mu$ در z_2 دارد. چشمه‌ای که دارای‌قدرت‌منفی m است معمولاً زیرآبی به‌قدرت $|m|$ نامیده می‌شود.

۴. همپتانسیلها وخطوط جریان شارش باپتانسیل مختلط

$$f(z)=\frac{\kappa}{2\pi i}\ln\frac{z-z_1}{z-z_2} \quad (\kappa \text{ حقیقی است}) \qquad (37')$$

را رسم کنید. ثابت کنید که چرخش حول هرمرز پیرامون z_1، ولی نه z_2 برابر κ است، درحالی که چرخش حول هرمرز پیرامون z_2، ولی نه z_1، برابر $-\kappa$ است. خلاصه اینکه شارش، گردابی به‌قدرت κ در z_1 و گردابی به‌قدرت $-\kappa$ در z_2 دارد.

۵. همپتانسیلها وخطوط‌جریان شارشی راکه پتانسیل مختلط آن مجموع پتانسیلهای (۳۷) و $(37')$ است رسم کنید.

توضیح. هریك ازنقاط z_1 و z_2 یك گرداب مارپیچی‌اند، یعنی نقطه‌ای که در آن چشمه و گرداب با هم درآمیخته‌اند.

۶. شارشی را که با هریك از پتانسیلهای مختلط زیر توصیف می‌شود تجزیه و تحلیل کنید، یعنی میدان سرعت، همپتانسیلها وخطوط جریان را رسم نمایید و نقاط راکد، چشمه‌ها، گردابها وغیره را جستجو کنید:

الف) $(a>0)$ $f(z)=\ln(z^2-a^2)$؛

ب) $(a>0)$ $f(z)=\ln\dfrac{z^2-a^2}{z^2+a^2}$؛

ج) $f(z)=\ln\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)$؛

د) $(a>0,\kappa>0)$ $f(z)=az+\dfrac{\kappa}{2\pi i}\ln z$.

۷. در مسئلهٔ شارش در خارج یك استوانهٔ دوار (مثال ۱۵.۲.۴)، فرض می‌کنیم $|\kappa|<4\pi R u_\infty$، به طوری که دونقطهٔ راکد $z_1=Re^{i\varphi_1}$ و $z_2=Re^{i\varphi_2}$ مطابق شکل ۵۶ج روی دایرهٔ $|z|=R$ هستند. ثابت کنید که

$$\varphi_1=\arcsin\frac{\kappa}{4\pi R u_\infty},\quad \varphi_2=\pi-\varphi_1,$$

به‌قسمی که بخصوص $\kappa=4\pi R u_\infty\sin\varphi_1$.

۸. پتانسیل مختلط شارش درخارج استوانه‌ای راکه قاعدهٔ آن بیضی با نیمه‌اقطار a و b است پیدا کنید، به‌فرض آنکه شارش، حول استوانه چرخش داشته و سرعت آن در

بینهایت $w_\infty = u_\infty + iv_\infty$ باشد.

۹. استوانه‌ای به‌مقطع عرضی Γ در شارشی که با پتانسیل مختلط $f(z)$ توصیف شده، فرو رفته است. ثابت‌کنید که به‌این استوانه یك گشتاور نیرو نسبت به مبدأ برابر با

$$T = -\frac{۱}{۲}\rho \operatorname{Re}\int_\Gamma z[f'(z)]^۲ dz$$

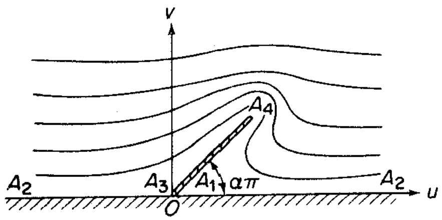
(در واحد طول) وارد می‌شود، که در آن ρ چگالی سیال است. ثابت‌کنید که در مورد یك‌استوانهٔ دوار، T صفر است.

۱۰. استوانه‌ای‌که قاعدهٔ‌آن بیضی بـا نیمه‌قطرهای a و b است درشارشی فرورفته است که چرخش ندارد وسرعت‌آن در بینهایت $|w_\infty|e^{i\alpha}$ است. گشتاور T، وارد براین استوانه را حساب‌کنید.

۱۱. ثابت‌کنید که نگاشت

$$w = (z-۱)^\alpha\left(۱ + \frac{\alpha z}{۱-\alpha}\right)^{۱-\alpha}$$

نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} z > ۰$ را به‌روی نیمصفحهٔ فوقانی $\operatorname{Im} w > ۰$، که با قطعه‌خط واصل نقاط ۰ و $e^{i\alpha\pi}$ بریده شده است، می‌نگارد (شکل ۵۹ را ببینید).



شکل ۵۹

۱۲. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ قبل، شارش یك‌سیال را در حوضی با عمق نامتناهی که در شکل ۵۹ نشان داده شده است بیابید، که در آن این‌بار قطعه‌خطی که مانع را نمایش می‌دهد به‌طول h است.

۱۳. میدان الکتروستاتیك متناظر با پتانسیل مختلط

$$f(z) = ۲qi\ln\frac{۱}{z},$$

را بررسی کنید.

۱۴. نشان‌دهید خط نامحدود بارداری که در مبدأ برصفحهٔ xy عمود است وبار این خط درهر واحد طول برابر q است، میدان مسئلهٔ قبل را به‌وجود می‌آورد.

۱۵. خطوط نیرو، همپتانسیلها ومیدان الکتریکی‌ای راکه ازپتانسیل مختلط $f(z)=1/z^{2}$ نتیجه می‌شود پیدا کنید.

۱۶. خطوط نیرو وپتانسیل مختلط میدان الکتریکی با پتانسیل

$$\varphi=\arctan\ \frac{\tan \pi y}{\tanh \pi x}$$

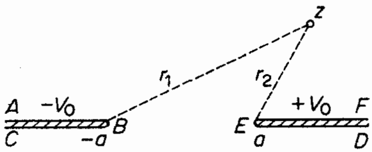
را بیابید.

۱۷. فرض کنید دوایر $x^{2}+y^{2}=2ax$ همپتانسیلهای یك میدان الکتروستاتیك باشند، نسبت بین بزرگی میدان درنقطهٔ $(2a, 0)$ وبزرگیش درنقطهٔ (a, a) را به‌دست‌آورید.

۱۸. در شکل ۶۰، خازنی با جوشنهای هم‌سطح که به‌اندازهٔ $2a$ از یکدیگر فاصله‌دارند نشان داده شده است. پتانسیل یك‌جوشن V وپتانسیل دیگری $-V$ است . نشان‌دهید که پتانسیل مختلط میدان الکتروستاتیکی که این خازن به‌وجود می‌آورد تابع

$$f(z)=\frac{2V}{\pi}\ln(z+\sqrt{z^{2}-a^{2}})$$

است. میدان الکتریکی متناظر را بیابید.



شکل ۶۰

۱۹. فرض می‌کنیم در نقطهٔ $z=x+iy$ ی یك میدان حرارتی صفحه موازی مانا ، میزان دما $T=T(z)$ باشد. دراین‌صورت می‌توان نشان دادکه T درمعادلهٔ لاپلاس

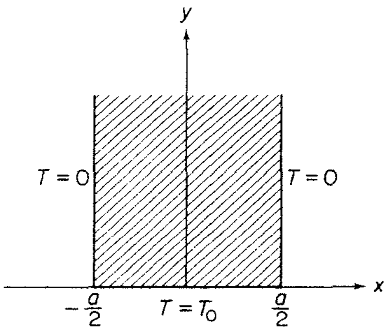
$$\frac{\partial^{2}T}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}T}{\partial y^{2}}=0$$

صدق می‌کند. ثابت کنیدکه توزیع دما در نواری نیمه‌متناهی به‌عرض a که درشکل ۶۱ نشان داده‌ایم و درجهٔ دمای طرفینش برابر صفر ودرجهٔ دمای کنارهٔ پایینی‌آن T_0

است با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$T=\frac{۲T_\circ}{\pi}\arc\tan\frac{\cos\frac{\pi x}{a}}{\sin\mathrm{h}\frac{\pi y}{a}}\cdot$$

$T=\circ$ y $T=\circ$ $T=T_\circ$ x $-\frac{a}{۲}$ $\frac{a}{۲}$



شکل ۶۱

راهنماییها و پاسخها

فصل اول

۲. پاسخ. ب) ۰، ۱، i، ۱−، $-i$.

۴. پاسخ. سهمی $r=1/(1+\cos\theta)$ وداخل آن.

۵. پاسخ. ب) نیمصفحهٔ بالایی به‌استثنای محور حقیقی؛ د) یك‌هذلولی‌که درحالت $a=0$ به‌دوخط راست تبدیل می‌شود؛ و) نیمصفحهٔ راست شامل محور موهومی.

۹. پاسخ. وقتی نسبت $(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ حقیقی است.

۱۰. پاسخ. $z=(\lambda_2 z_1+\lambda_1 z_2)/(\lambda_1+\lambda_2)$.

۱۱. پاسخ. $z_4=z_1-z_2+z_3$.

۱۵. پاسخ. الف) $2^{12}(1+i)$؛ ج) $(2-\sqrt{3})^{12}$.

۱۶. پاسخ.

$$\cos nx=\cos^n x-\binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x-\cdots,$$

$$\sin nx=n\cos^{n-1}x\sin x-\binom{n}{3}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\binom{n}{5}\cos^{n-5}x\sin^5 x-\cdots,$$

که در آنها $\binom{n}{k}$، ضریب دوجمله‌ای؛ یعنی $n!/k!(n-k)!$ است.

۱۷. راهنمایی. ازمسئلهٔ ۱۶ استفاده کنید.

۱۸. پاسخ. $\sqrt{1+i}=\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

۱۹. پاسخ. $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$, $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$.

که در آنها اگر $b>0$، x و y هم‌علامت‌اند و اگر $b<0$، علامتهای مخالف دارند.

۲۲. راهنمایی. در $1-\epsilon$ ضرب کنید.

۲۵. راهنمایی. معادلهٔ هر دایره یا خط راست را در صفحهٔ xy به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0 \quad (A\text{، }B\text{، }C \text{ و } D \text{ حقیقی‌اند})$$

که اگر $A\neq 0$ و $B^2+C^2-AD>0$، معادله معرف دایره است (چرا؟) و اگر $A=0$ وحداقل یکی ازضرایب B و C مخالف صفر باشد نمایش خط راست است. حال فرض کنید $E=B+iC$.

فصل ۲

۱. پاسخ. ب) ۰، ۲، $1\pm i$.

۲. راهنمایی. به‌مثال ۳.۲.۲ الف رجوع کنید.

۳. پاسخ. ب) هر نقطه درصفحهٔ مختلط.

۶. راهنمایی. دنبالهٔ $1, -1, 1, -1, \ldots$ را درنظربگیرید.

۷. راهنمایی. فرض کنید n_0 کوچکترین مقدار n است که برای آن یک همسایگی α وجود دارد که شامل تمام نقاط $z_n, z_{n+1}, \ldots$ بجز مبدأ است. همچنین فرض کنید θ_n، مقدار یکتای $\arg z_n$ است که درنامساوی $|\theta_n-\theta|<\pi/2$ صدق می‌کند، در این‌صورت وقتی $n\to\infty$، آنگاه $\theta_n\to\theta$ (چرا؟).

۸. راهنمایی. دنبالهٔ $z_n=-1+(-1)^n\frac{i}{n}$ را درنظربگیرید.

۱۲. پاسخ. ب) ۱.

۱۳. راهنمایی. اگرفرض کنیم $\alpha=0$، از عمومیت مطلب نمی‌کاهد.

۱۶. راهنمایی. هرعرقچین کروی که شامل N باشد و ازقطع کرهٔ $\sum$ با صفحه‌ای عمود برقطر ON به‌دست آید یك همسایگی N است.

۱۷. راهنمایی. به‌مثال ۳.۲.۲ الف رجوع کنید.

۱۸. راهنمایی. به‌قضیهٔ ۵.۲.۲ رجوع کنید. نقطهٔ حدی در∞ را تعریف کنید. راه تعریف روشن است.

۲۱. پاسخ. دایره‌ای مار برقطب N.

۲۲. پاسخ. خیر.

فصل ۳

۲ • پاسخ. حوزهٔ $0<|z|<1$.

۷ • پاسخ. اگر $m=n$، a_m/b_n. اگر $m<n$، ۰. اگر $m>n$، ∞.

۱۰ • راهنمایی. $\big||f(z)|-|f(z_0)|\big|\leqslant|f(z)-f(z_0)|$، فرمول (۱۷)، صفحهٔ ۱۴

۱۲ • راهنمایی. الف) قضیهٔ هاینهٔ - بورل را به‌کار برید و نشان دهید که $\mathscr{E}$ را می‌توان با تعدادی متناهی از همسایگیها پوشاند وبنابراین کراندار است؛ ب) فرض کنید η یك نقطهٔ حدی $\mathscr{E}$ است، w_n را دنباله‌ای ازنقاط متمایز $\mathscr{E}$ بگیرید که به η همگرا باشد (فصل ۲، مسئلهٔ ۲)، و فرض کنید z_n نقطه‌ای از E است به‌طوری که $\bar{f}(z_n)=w_n$. دنبالهٔ z_n کراندار است، ولذا بنابرقضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس یك نقطهٔ حدی ζ دارد. با استفاده‌ازپیوستگی $f(z)$ نشان‌دهید‌که $f(\zeta)=\eta$، و ازآن‌نتیجه بگیرید‌که $\eta\in\mathscr{E}$، بنابراین $\mathscr{E}$ بسته است (کراندار هم هست)؛ ج) $\mathscr{E}^*$ مجموعهٔ تمام نگاره‌های نقاط $z\in E$، تحت نگاشت $w=|f(z)|$ کراندار وبسته است بنابرقسمت ب) ومسئلهٔ ۸. فرض کنید m بزرگترین کران پایین و M کوچکترین کران بالای $\mathscr{E}^*$ باشد. نشان دهید که m و M به $\mathscr{E}^*$ متعلق است، بنابراین نقاط $z_0\in E$ و $z\in E$ وجود دارند به‌طوری که $|f(z_0)|=m$، $|f(Z)|=M$.

۱۳ • پاسخ. پیوسته، ولی نه‌پیوستهٔ یکنواخت.

۱۴ • راهنمایی. ازمسئلهٔ ۶ استفاده کنید.

۱۶ • پاسخ. فقط $f(z)=\dfrac{z\,Re\,z}{|z|}$، $f(0)=0$.

۱۷ • راهنمایی. ابتدا از اینکه Γ بسته است (به‌مسئلهٔ ۱۱ رجوع کنید) استفاده کرده، ثابت کنید که r_z، فاصلهٔ بین Γ وهرنقطهٔ z که در Γ نیست، مثبت است، r_z بزرگترین کران پایین تمام اعداد $|z-\zeta|$ تعریف شده است که در آن $\zeta\in\Gamma$. برای هرنقطهٔ مفروض $z\in C$، K_z را قرص بازی به‌شعاع $(1/2)r_z$ وبه‌مرکز z فرض کنید. قضیهٔ هاینه-بورل را برای مجموعهٔ بستهٔ کراندار C به‌کار برید (به‌مسئلهٔ ۱۱ رجوع کنید)، سپس C را با تعدادی متناهی از قرصهای K_{z_1}، ...، K_{z_n} بپوشانید. فرض کنید δ کوچکترین شعاع این قرصهاست. اگر z یك نقطهٔ C باشد، آنگاه z به‌یك قرص K_{z_ν} متعلق‌است. اما قرص به‌شعاع r_{z_ν} و به‌مرکز z_ν شامل هیچ نقطه‌ای از Γ نیست، وبنابراین برای هر $\zeta\in\Gamma$ داریم $|z-\zeta|\geqslant(1/2)r_{z_\nu}\geqslant\delta$.

فصل ۴

۲ • راهنمایی. فرمول (۲) را ببینید.

۴ • راهنمایی. درحالت‌اول $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$، درحالت دوم $f'(z)=-i\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}$ (به‌مثال ۳.۱.۴ رجوع کنید).

۱۰. پاسخ. کمانی از سهمی $v^2 = 4(1-u)$ که نقاط $(0, -2)$ و $(0, 2)$ را به‌هم‌وصل می‌کند.

۱۱. پاسخ. الف) $\alpha = \pi/2$، $\mu = 2$؛ ج) $\alpha = \pi/4$، $\mu = 2\sqrt{2}$.

۱۵. پاسخ. $w = (z - z_0)^5$.

۱۹. پاسخ. ب) $\pi/2$، ۱، $2 + 2i$.

۲۰. پاسخ. $w = (2+i)z + 1 - 3i$.

۲۱. پاسخ. $w = (1+i)(1-z)$.

۲۶. راهنمایی. نگاشت $\eta = (cz+d)/(az+b)$ در نقطهٔ $z = \delta$ همدیس است و C و C^* را به خمهای L و L^* واقع درصفحهٔ η که در مبدأ زاویهٔ α رادیان تشکیل می‌دهند می‌برد. اما نگاشت $w = 1/\eta$ که با $(11')$ هم‌ارز است L و L^* را به‌توی خمهای Γ و Γ^* واقع درصفحهٔ w می‌برد که در بینهایت زاویهٔ α رادیان تشکیل می‌دهند.

۲۷. راهنمایی. نگاشت $\zeta = 1/z$ خمهای C و C^* را برخمهای L و L^* که درصفحهٔ ζ قرار دارند و در مبدأ زاویهٔ α رادیان تشکیل می‌دهند می‌برد. اما نگاشت $w = (b\zeta + a)/(d\zeta + c)$ که با $(11')$ هم‌ارز است در $\zeta = 0$ همدیس است و L و L^* را به‌خمهای Γ و Γ^* واقع درصفحهٔ w می‌برد که در رأس $A = a/c$ زاویهٔ α رادیان تشکیل می‌دهند.

فصل ۵

۱. راهنمایی. به‌بخش ۱.۳.۴ رجوع کنید.

۲. راهنمایی. ازقضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x'(\tau_k)]^2 + [y'(\tau_k^*)]^2}\,\Delta t_k \quad (\Delta t_k = t_k - t_{k-1}),$$

که درآن τ_k و τ_k^* نقاطی مناسب درفاصلهٔ $[t_{k-1}, t_k]$ هستند.

۳. راهنمایی. فرض کنید $\widehat{AB}$ اندازه‌پذیرخطی به درازای l باشد. بترتیب دوخم چندضلعی دلخواه به درازای p' و p'' در $\widehat{AP}$ و $\widehat{PB}$ محاط کنید. ازاین دو خم چندضلعی یك خم چندضلعی محاط در C به‌درازای

$$p' + p'' = p \leqslant l \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید. بویژه، $p' \leqslant l$، $p'' \leqslant l$، به‌طوری که p' و p'' ازبالا کراندارند و

در نتیجه بنا به‌اصل کمال دستگاه اعـداد حقیقی دارای‌کوچکترین کران بالای l' و l'' هستند. بنابراین $\widehat{AP}$ و $\widehat{PB}$ اندازه‌پذیرخطی و به‌درازای l' و l'' هستند. بعلاوه اگر کوچکترین‌کران بالای هرعامل‌موجود در (۱) را اختیار کنیم، داریم

$$l'+l''\leqslant l. \tag{۲}$$

برعکس فرض کنید $\widehat{AP}$ و $\widehat{PB}$ اندازه‌پذیر خطی با درازای l' و l'' هستند. یك خم چندضلعی دلخواه به‌درازای p در $\widehat{AB}$ محاط کنید. اگر P یك رأس L باشد، آنگاه L به‌دو خم چند ضلعی تجـزیه می‌شود، اولی به درازای p' و محاط در $\widehat{AP}$ و دومـی به‌درازای p'' ومحاط در $\widehat{PB}$ است. درغیراین صورت به‌جای L یك خم چندضلعی جدید L^* بـه درازای p^* وبا همان رئوس L و یـك رأس اضافی P بگـذاریـد. اضافه‌کـردن ایـن رأس درازای خم چندضلعی محاط در $\widehat{AB}$ راکاهش نمی‌دهد، و درنتیجه $p\leqslant p^*$. پس درهرحال،

$$p\leqslant p'+p''\leqslant l'+l'', \tag{۳}$$

به‌طوری‌که p ازبالاکراندار است ولذاکمترین‌کران‌بالا داردکه آن را l می‌نامیم. بنابراین $\widehat{AB}$ اندازه‌پذیرخطی و به‌درازای l است. بعلاوه از (۳) نتیجه می‌شودکه l کمترین‌کران‌بالای p، در

$$l\leqslant l'+l'', \tag{۴}$$

صدق می‌کند. اینك (۲) را با (۴) مقایسه‌کنید.

۴ . راهنمایی. فرض‌کنید درازای‌کمان متغیر C با نقطهٔ آغازی $z(a)$ ونقطهٔ پایانی $z(t)$ برابربا $s(t)$ باشد. (وجود $s(t)$ ازمسائل ۲ و ۳ نتیجه می‌شود.) اگر

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$$

بنابرمسئلهٔ ۲

$$\sqrt{m_x^2+m_y^2}\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant\sqrt{M_x^2+M_y^2},$$

که در آن مقادیر m_x، m_y، M_x، M_y به‌جای فاصلهٔ $[a, b]$، به‌فاصلهٔ $[t, t+\Delta t]$ مربوط‌اند. امابنابرپیوستگی $x'(t)$ و $y'(t)$ وقتی $\Delta t\to 0$، داریم $m_x, M_x\to|x'(t)|$، درحالی‌که وقتی $\Delta t\to 0$، داریم $m_y, M_y\to|y'(t)|$. بنابراین

$$s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}.$$

برای به‌دست آوردن l، از $s'(t)$ از a تا b انتگرال بگیرید.

۵ . راهنمایی. نشان دهید که قدرمطلق اختلاف بین حاصلجمع

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \quad (\Delta z_k = z_k - z_{k-1})$$

متناظر با z_0، z_1، ...، z_{n-1}، z_n یك افراز دلخواه C، ومجموع متناظر با همین افراز که به‌آن نقاط انتهایی کمانهای C_1، C_2، ...، C_n افزوده شده است بزرگتر از $2M\lambda(n-1)$ نیست، که در آن λ همان است که در بخش ۱.۱.۵ آمده است، و $M = \max_{z \in C} |f(z)|$.

۶ . راهنمایی. بنویسید $z(t(s)) = \tilde{z}(s)$، وتوجه کنید که

$$s = \int_0^{t(s)} |z'(t)|\, dt.$$

۷ . راهنمایی. چون C بسته است، $z(a) = z(b)$.

۸ . راهنمایی. فرض کنید برای هرخم بستهٔ C واقع در G، رابطهٔ (۴۸) برقرارباشد، C، γ، $C_2 = \gamma^-$ را با همان مفهوم مسئلهٔ (۷) درنظربگیرید. لذا بنا برقضیهٔ ۱.۲.۵

$$0 = \int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_\gamma f(z)\, dz$$
$$= \int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

برعکس، فرض کنید برای هردوخم C_1 و C_2 واقع در G با نقاط آغازی وپایانی یکسان، رابطهٔ (۴۷) برقرار است، وخم بستهٔ $C = C_1 + C_2^-$ را تشکیل دهید، بنابراین

$$0 = \int_{C_1} f(z)\, dz - \int_{C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz +$$
$$+ \int_{C_2^-} f(z)\, dz = \int_C f(z)\, dz.$$

۹ . راهنمایی. توجه کنید که

$$\int_{C_1} \operatorname{Re} z\, dz = 2 + i, \quad \int_{C_2} \operatorname{Re} z\, dz = 2 + 2i, \quad \int_C \operatorname{Re} z\, dz = -i.$$

۱۰. پاسخ. الف) ۱؛ ب) ۲؛ ج) ۰.

۱۱. راهنمایی. ابتدا ζ_k را z_k وبعد z_{k-1} انتخاب کنید، به‌دست می‌آید

$$\int_C z\, dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \Delta z_k = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1})$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}(z_k^2-z_{k-1}^2)=\frac{1}{2}(z_n^2-z_0^2)=\frac{1}{2}(Z^2-z_0^2).$$

۱۲. راهنمایی. قضیهٔ ۳.۲.۵ را به‌کاربرید.

۱۴. راهنمایی. اگر $f(z)=u+iv$، آنگاه

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C u\,dx-v\,dy+\int_C v\,dx+u\,dy$$
$$=\int_{\bar I}\Big(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big)dx\,dy+\int_{\bar I}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\Big)dx\,dy,$$

که در آن I، داخل C است. حال معادلات کوشی-ریمان را به‌کاربرید.

۱۵. راهنمایی. $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\Big)$.

۱۶. پاسخ. ب) $-\pi$.

۱۷. پاسخ. خیر.

۱۸. راهنمایی. $\frac{z^4+z^2+1}{z(z^2+1)}=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\Big)$.

۱۹. پاسخ. $\frac{\pi}{4}+k\pi(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots)$، C نباید ازنقاط $\pm i$ عبور کند.

۲۲. پاسخ. خیر؛ $f(u)=a+bu$.

۲۶. راهنمایی. اگر $U=U(w)=U(u+iv)$، آنگاه

$$U_{xx}=(u_x+iv_x)^2U''+(u_{xx}+iv_{xx})U',$$
$$U_{yy}=(u_y+iv_y)^2U''+(u_{yy}+iv_{yy})U',$$

ودرنتیجه $U_{xx}+U_{yy}=0$ (چرا؟). از راه دیگریك تابع تحلیلی $\varphi(w)$ که قسمت حقیقی آن U است بناکنید و آنگاه تابع مرکب $\varphi(f(z))$ را درنظربگیرید.

۲۷. راهنمایی. استدلال درواقع همان است که درقضیهٔ ۱.۷.۵ آمده است.

۲۸. راهنمایی. اگر C یك خم ژردان بستهٔ هموار تکه‌ای واقع در G باشد، آنگاه

$$\int_C F(z)\,dz=\int_C\Big\{\int_\Gamma f(z,\zeta)\,d\zeta\Big\}dz=\int_\Gamma\Big\{\int_C f(z,\zeta)\,dz\Big\}d\zeta$$

(چرا؟). اما برای هر $\zeta\in\Gamma$ بنا به‌انتگرال کوشی داریم

$$\int_C f(z,\zeta)\,dz=0$$

ودرنتیجه

$$\int_C F(z)\,dz=0.$$

حال، تحلیلی بودن $F(z)$ از قضیهٔ موررا نتیجه می‌شود.

فصل ۶

۲ . راهنمایی. به‌فصل ۲، مسئلهٔ ۵ رجوع کنید.

۴ . راهنمایی. مسئلهٔ ۳ را به‌کار برید.

۵ . پاسخ. خیر.

۶ . راهنمایی. اگر $s_n=z_1+\dots+z_n$، آنگاه بوضوح $|s_n|\leqslant|z_1|+\dots+|z_n|$ ودرنتیجه محققاً $|s_n|\leqslant|z_1|+\dots+|z_n|+\dots$. حال حد طرف‌چپ را وقتی $n\to\infty$ حساب کنید.

۷ . راهنمایی. سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

همگراست، اما دوسری

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots,\quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\dots$$

همگرا نیستند.

۹ . پاسخ. الف) همگرای مطلق؛ ب) (به‌طور نوسانی) واگرا؛ ج) همگرای مطلق.

۱۰. راهنمایی. $\frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{n}}=1$.

۱۱. راهنمایی. به‌مثال ۴.۳.۶ رجوع کنید.

۱۶. راهنمایی. ازیك طرف اگر $|z|<1$، $|1+z+\dots+z^{n-1}|<n$. از طرف دیگر $s(z)$، مجموع سری، برابر $1/(1-z)$ است ودرنتیجه $|s_n(z)-s(z)|$ برای مقداری از z که به‌قدرکافی به ۱ نزدیك است بدلخواه بزرگ می‌شود.

۱۹. راهنمایی. سری (حقیقی)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x[n^2e^{-n^2x^2}-(n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}]\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

راکه مجموع جزئی آن

$$s_n(x)=2xn^2e^{-n^2x^2}$$

ومجموع $s(x)$ آن متحد با صفراست، درنظر بگیرید. چون $s_n(1/n)=2n/e$،

همگرایی نمی‌تواند یکنواخت باشد. بوضوح

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n^2})=1\neq 0=\int_0^1 s(x)\,ds.$$

ضمناً، این مثال نشان می‌دهد که ممکن است مجموع سری پیوسته باشد و پیوستهٔ یکنواخت نباشد. (بدون اینکه با قضیهٔ ۵.۳.۶ مغایرت داشته باشد).

۲۱. راهنمایی. سری

$$z+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^n}{n^2}+\cdots$$

درقرص $|z|<1$ همگرای یکنواخت است، امااین‌مطلب درمورد سری مشتق صحت ندارد.

۲۲. راهنمایی. سری

$$\sin x+\left(\frac{\sin 2x}{2}-\sin x\right)+\left(\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+\cdots$$

روی محور حقیقی به طور یکنواخت به‌صفر همگراست (چرا؟). نتیجهٔ مشتقگیری از این سری را جمله به‌جمله بررسی کنید.

۲۴. راهنمایی. ابتداقضیهٔ ۸.۳.۶ رابرای انتگرال گیری جمله به‌جمله سری زیربه‌کاربرید

$$s(z)=f_1(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots.$$

فصل ۷

۱. راهنمایی. برای مثال، شرایط $R<|z|$ و $R>|z|$ درقضیهٔ ۵.۱.۷ به شرایط $R<|z-a|$ و $R>|z-a|$، و دایرهٔ همگرایی به‌دایرهٔ $R=|z-a|$ تبدیل می‌شوندو نظیر اینها.

۲. راهنمایی. قضیهٔ ۶.۳.۶ را به‌کاربرید.

۴. پاسخ. الف) ۱؛ ب) ۰؛ج) ۱؛ د) ۱/۴؛ ه) ۱ اگر $|a|\leqslant 1$، $1/|a|$ اگر $|a|>1$.

۵. راهنمایی. ازبسط

$$e^n=1+\frac{n}{1!}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}\left[1+\frac{n}{n+1}+\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}+\cdots\right]$$

نتیجه می‌شود که

$$e^n<n\frac{n^n}{n!}+\frac{n^n}{n!}\left[1+\frac{n}{n+1}+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\cdots\right]=(2n+1)\frac{n^n}{n!}.$$

ازطرف دیگر واضح است که

$$e^{n}>\frac{n^{n}}{n!}$$

وبنابراین

$$\frac{1}{e^{n}}<\frac{n!}{n^{n}}<\frac{2n+1}{e^{n}}.$$

۶ . پاسخ. ۱.

۷ . پاسخ. الف) R؛ ب) ∞؛ ج) R^{k}؛ د) $\sqrt[k]{R}$.

۸ . پاسخ. الف) $R\geqslant\min\{r, r'\}$؛ ب) $R\geqslant rr'$؛ ج) $R\leqslant r/r'$.

۱۰. راهنمایی.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|(n+1)c_{n+1}|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}[(n+1)^{1/n}(\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|})^{(n+1)/n}]$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{n}|}.$$

۱۱. راهنمایی. ابتدا نشان دهید که فرض $R=z_{0}=1$ و $s(z_{0})=s(1)=0$ ازعمومیت مطلب نمی‌کاهد. قضیهٔ ۷.۲.۶ را به‌کار برید وسری داده شده را درسری هندسی

$$\frac{1}{1-z}=1+z+\dots+z^{n}+\dots,$$

ضرب کنید، به‌دست می‌آید

$$\frac{s(z)}{1-z}=s_{0}+s_{1}z+\dots+s_{n}z^{n}+\dots,$$

که در آن $s_{n}=c_{0}+c_{1}+\dots+c_{n}$ و شعاع همگرایی سری طرف راست برابر ۱ است (چرا؟). $\epsilon>0$ مفروض است، فرض کنید عـدد صحیح مثبت m آن‌چنان باشد که برای تمام مقادیر $n>m$ داشته باشیم $|s_{n}|<\epsilon/2$. دراین صورت اگر $0<z<1$،

$$|s(z)|=\left|(1-z)\sum_{n=0}^{m}s_{n}z^{n}+(1-z)\sum_{n=m+1}^{\infty}s_{n}z^{n}\right|$$
$$<(1-z)M+\frac{\epsilon}{2}(1-z)\sum_{n=m+1}^{\infty}z^{n},$$

که در آن $M=|s_{0}|+|s_{1}|+\dots+|s_{m}|$. اما

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} z^n = \frac{z^{m+1}}{1-z},$$

ودرنتیجه اگر $0<z<1$،

$$|s(z)|<(1-z)M+\frac{\epsilon}{2}z^{m+1}<(1-z)M+\frac{\epsilon}{2}.$$

بنابراین اگر $1-z<\epsilon/2M$، یعنی اگر z به‌قدرکافی به ۱ نزدیك باشد،

$$|s(z)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

لذا همان‌طورکه می‌خواستیم

$$\lim_{z\to 1} s(z)=0 \quad (0<z<1).$$

۱۲. راهنمایی. ازبسط آشنای

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots \quad (-1<x<1),$$

آغازکنید وتوجه کنید که

$$\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x)=\ln 2.$$

۱۳. راهنمایی. شعاع همگرایی هریك از سریهای توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z'_n\zeta^n$$

که از سری عددی (۱۹) به«وجـود می‌آید» بزرگتر و یا مساوی یك است (چرا؟). بنابراین برای تمام مقادیر $|\zeta|<1$،

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta^n \sum_{n=1}^{\infty} z'_n\zeta^n=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n\zeta^n,$$

که در آن $Z_n=z_1z'_n+z_2z'_{n-1}+\dots+z_nz'_1$ ودرنتیجه

$$\lim_{\zeta\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} z_n\zeta^n \lim_{\zeta\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} z'_n\zeta^n=\lim_{\zeta\to 1}\sum_{n=1}^{\infty} Z_n\zeta^n \quad (0<\zeta<1).$$

حال قضیهٔ آبل را درمورد هرسه‌سری به‌کاربرید.

۱۴. راهنمایی. سری زیررا درنظربگیرید

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\dots.$$

۱۵. راهنمایی. توجه کنید که اگر $\circ<z<1$،

$$\sum_{n=\circ}^{m} c_n - s(z) = \sum_{n=\circ}^{m} c_n(1-z^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^n$$
$$\leqslant (1-z)\sum_{n=\circ}^{m} |c_n|(1+z+\cdots+z^{n-1}) + \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n| z^n$$
$$< m(1-z)\frac{1}{m}\sum_{n=\circ}^{m} n|c_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} n|c_n|\frac{z^n}{n}$$

حال مسئلهٔ ۱۳ ازفصل ۲ را به‌خاطر بیاورید.

فصل ۸

۵. پاسخ. اگر $-\pi/2<\alpha<\pi/2$، $e^z\to\infty$؛ اگر $\pi/2<\alpha<3\pi/2$، $e^z\to\circ$، اگر $\alpha=\pm\pi/2$، e^z به‌حدی نمی‌گراید.

۶. راهنمایی. با انتخاب $z=(1+i)x$، نشان دهید که تابع در مبدأ مختصات خاصیت پیوستگی را ازدست می‌دهد.

۹. پاسخ. $z=\pm\frac{\pi i}{3}+2k\pi i \quad (k=\circ, \pm1, \pm2, \ldots)$.

۱۰. پاسخ. مارپیچ لگاریتمی با معادلهٔ قطبی $r=ce^{\theta/\alpha}$، که در آن $c=e^{-\beta/\alpha}$:

۱۳. پاسخ. $w=\frac{z-i}{iz-1}$.

۱۵. پاسخ. ب) $w=\frac{iz+2+i}{z+1}$.

۱۷. پاسخ. ب) $\frac{9}{2}+i$.

۲۲. پاسخ. الف) نیمه قرص $|w|<1$، $\mathrm{Im}\,(w)<\circ$؛ ج) حوزهٔ محدود به‌دایرهٔ $|w-1/2|=1/2$ وخط مماس $\mathrm{Re}\,w=1$.

۲۳. راهنمایی. اگر $c\neq\circ$، $(a-d)^2+4bc=\circ$، یک‌تك نقطهٔ ثابت $z_\circ=(a-d)/2c$ و به‌جای (۳۱) رابطهٔ زیر را داریم

$$\frac{1}{w-z_\circ}=\frac{1}{z-z_\circ}+k \quad (k\neq\circ).$$

اگر $c=\circ$، مسئلهٔ (۱۷) ازفصل ۴ را ببینید.

۲۵. پاسخ. الف) $w=\frac{(3+i)z-(1+i)}{(1-i)z+(1+i)}$؛ ج) $w=\frac{(2i-1)z+1}{z-1}$.

۲۶. پاسخ. الف) $w=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{2}$؛ ب) $w=\left(\frac{z^{n}+1}{z^{n}-1}\right)^{2}$؛

ج) $w=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{n}$؛ د) $w=\left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^{2}$.

۲۷. راهنمایی. اگر $f_1(z)=1/z$، $f_2(z)=1/(1-z)$، آنگاه $f_1\circ f_2(z)=1-z$ درحالی‌که $f_2\circ f_1(z)=z/(z-1)$.

فصل ۹

۱. راهنمایی. $f(z)=f(-2i-z)$.

۲. راهنمایی. $f(2\sqrt{3}+i)=f(-2\sqrt{3}+i)$.

۳. راهنمایی. $\frac{1}{2}\left(z'+\frac{1}{z'}\right)=\frac{1}{2}\left(z''+\frac{1}{z''}\right)$ اگر و فقط اگر $z'=z''$ یا $z'z''=1$.

۴. پاسخ. هردو حوزه برروی صفحهٔ w که در طول فاصلهٔ $[-1, 1]$ واقع برمحور حقیقی بریده شده است نگاشته می‌شوند.

۵. پاسخ. ب) $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$.

۶. پاسخ. ب) $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ $e^{-(2k+1/2)\pi}$.

۷. پاسخ. وقتی α عددصحیح نیست. تابع n مقداری‌است اگر α کسری و به‌صورت m/n باشد، که در آن m و n بزرگتر ازصفر واعداد صحیحی هستندکه نسبت به‌هم‌اول‌اند. تابع بینهایت مقداری است اگر α گنگ باشد ویا $\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0$. نقطه‌های شاخه‌ای $z=0$ و $z=\infty$ هستندکه در حالت اول از مرتبهٔ $n-1$ و در حالت دوم از مرتبهٔ نامتناهی است.

۹. پاسخ. ب) بله.

۱۰. پاسخ. الف) $\frac{2\pi}{3}$؛ ج) π.

۱۱. پاسخ. ب) 0.

۱۳. راهنمایی. نگاشت $w=\sin z$ را می‌توان به‌عنوان چهار نگاشت متوالی زیر درنظر گرفت:

$$z_1=iz,\quad z_2=e^{z_1},\quad z_3=-iz_2=\frac{e^{iz}}{i},\quad w=\frac{1}{2}\left(z_3+\frac{1}{z_3}\right).$$

نگاشتهای اول و سوم در هرحوزه‌ای تک‌ارزند. نگاشت دوم در هرحوزه‌ای که زوج z_1'، z_1'' با شرط $z_1'-z_1''=2k\pi i\ (k=\pm1,\pm2,\ldots)$ را شامل نباشد تک‌ارز است، در حالی که چهارمین نگاشت درهرحوزه‌ای که زوج z_3''، z_3' با شرط

$1 = z_2' z_2''$ را شامل نباشد تك‌ارزاست (به‌مسئلهٔ ۳ رجوع کنید). بنابراین $w = \sin z$ در هرحوزه‌ای که زوج z'، z'' با شرط $z' - z'' = 2k\pi$ یا $e^{i(z'+z'')} = -1$ (یعنی، $z' + z'' = (2k+1)\pi$ ، که در آن $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ را شامل نباشد تك‌ارز است.

۱۴. راهنمایی. نشان‌دهید که $w = \sin z$ خانوادهٔ خطوط قائم موازی $z = x = c$ ، $(-\pi/2 < c < \pi/2)$ را به‌یك خانوادهٔ هذلولی هم‌کانون که E را می‌پوشاند می‌نگارد.

۱۹. پاسخ. ب) $2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$ ، $(2k+1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$ ، که درآنها $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

۲۰. راهنمایی . نشان‌دهید هر بار که خم حول مبدأ دور می‌زند ، مقادیر $L(z)$ به اندازهٔ $2\pi i$ تغییر می کنند (خم نباید از مبدأ عبور کند).

۲۱. پاسخ. $\arg f(z)$ و $\ln|f(z)|$ همسازند، اما $|f(z)|$ همساز نیست.

فصل ۱۰

۲. پاسخ. $-\ln(1 - z)$.

۴. پاسخ. $(|z| < \infty)$ $\quad e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$.

۵. پاسخ. $(|z| < \infty)$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$.

۶. راهنمایی. از سری هندسی

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1)$$

مشتق بگیرید.

۸. راهنمایی . $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z+1}\right)$.

۹. راهنمایی. $\dfrac{1}{1+z+z^2} = \dfrac{1-z}{1-z^3}$.

۱۰. راهنمایی. قضایای ۹.۳.۶ و ۳.۱.۱۰۵ را به‌کار برید، توجه کنید که همگرایی یکنواخت در هر قرص بستهٔ $|z - z_0| \leqslant r < R$ با همگرایی یکنواخت در هرحوزهٔ بستهٔ کرانداری که درقرص باز $|z - z_0| < R$ قرار دارد معادل است.

۱۱. راهنمایی. اگر $|z| \leqslant r < 1$، آنگاه

$$\left|\frac{z^k}{1-z^k}\right| \leqslant \frac{r^k}{1-r^k} \leqslant \frac{r^k}{1-r}.$$

ازقضیهٔ ۶.۳.۶ نتیجه می‌شود که سری (۳۲) درهرقرص بستهٔ $|z| \leqslant r < ۱$ همگرای یکنواخت است.

۱۲. پاسخ. $f(z)=\sum_{n=۱}^{\infty}\tau(n)z^n$، کـه در آن $\tau(n)$ تعداد اعداد صحیحی است که n را می‌شمارند (از جمله ۱ و n).*

۱۳. پاسخ. مسئلهٔ ۱۰ و قضیهٔ ۷.۲.۶ را به‌کاربرید.

۱۴. پاسخ. ب) $\sigma+\tau z+\left(\tau-\frac{۱}{۲}\sigma\right)z^۲+\left(\frac{۵}{۶}\tau-\sigma\right)z^۳+\ldots$، که درآن $\sigma=\sin ۱$، $\tau=\cos ۱$؛ د) $۱-\frac{۱}{۴}z^۲-\frac{۱}{۹۶}z^۴-\frac{۱۹}{۵۷۶۰}z^۶-\ldots$.

۱۶. راهنمایی. نامساویهای کوشی را به‌کاربرید.

۱۷. پاسخ. ب) خیر؛ د) بله، $\frac{۱}{۱+z}$.

۱۸. پاسخ. الف) بله؛ ب) خیر.

۱۹. راهنمایی. به‌بخش ۴.۲.۱۰ رجوع کنید.

۲۱. پاسخ. ۱۵.

۲۴. راهنمایی. بسط تیلر $f(z)$ در $z_۰$ به‌شکل زیر است

$$f(z)=f(z_۰)+\frac{f^{(m)}(z_۰)}{m!}(z-z_۰)^m+\ldots \qquad (m>۱).$$

فرض کنید $\Delta z=z-z_۰$ و $\Delta w=f(z)-f(z_۰)$. درایـن صورت با همان دلیل بخش ۱.۳.۴

$$\lim_{\Delta z\to ۰}\arg\Delta w=m\lim_{\Delta z\to ۰}\arg\Delta z+\arg f^{(m)}(z_۰).$$

بنابراین، نگاشت، افزایش m برابرزوایای بین خمهای مار از $z_۰$ را موجب می‌شود.

۲۵. راهنمایی. معادلات کوشی ــ ریمان را به‌کار برید.

۲۶. راهنمایی. مسئلهٔ ۲۵ را به‌کار برید.

۲۷. راهنمایی. نتیجهٔ ۲.۳.۱۰ د را به‌کار برید.

۲۸. راهنمایی. اصل ماکزیموم قدرمطلق را درمورد تابع $\varphi(z)=f(z)/z$ به‌کار برید.

۳۰. راهنمایی. درفرمول (۲۶) انتخاب کنید $f(z)=\cos z$.

فصل ۱۱

۲. پاسخ. ب) $\frac{۱}{a-b}\left[\frac{۱}{z-a}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+۱}}\right]$؛ د) $\frac{۱}{a-b}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+۱}}$.

---

* بنابراین $\tau(۱)=۱$، $\tau(۲)=۲$، $\tau(۳)=۲$، $\tau(۴)=۳$، $\tau(۵)=۲$، ....

۳. پاسخ. $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$، که در آن $c_n = c_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$.

۴. پاسخ. ب) $\frac{۲}{z-۲\pi i}$؛ د) $\frac{e^{-b}}{۲ib} \frac{۱}{z-ib}$، و) $\frac{۱}{\pi(z-n)}$.

۵. پاسخ. خیر.

۶. پاسخ. $-z-\frac{۱}{۲z}+\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n \frac{۱.۳...(۲n-۳)}{n!۲^n} z^{-۲n+۱}$.

۷. پاسخ. هــر صفر مخرج یك قطب است که مرتبه‌اش همان مرتبهٔ صفر است.

۱۰. پاسخ. ب) قطبهای ساده در $z=\frac{۱\pm i}{\sqrt{۲}}, \frac{-۱\pm i}{\sqrt{۲}}$؛ د) قطب ساده در $z=۰$، قطبهای مــرتبهٔ ۲ در $z=\pm ۲i$؛ ز) نقطهٔ تکین متناهی وجود ندارد؛ ح) قطبهای ساده در $z=۲n\pi i(n=\pm ۱, \pm ۲, ...)$.

۱۱. پاسخ. الف) قطبهای ساده در $z=n\pi(n=\pm ۱, \pm ۲, ...)$، نقطهٔ تکین برداشتنی در $z=۰$؛ ج) قطبهای ساده در $z=۱/n\pi(n=\pm ۱, \pm ۲, ...)$، نقطهٔ حــدی قطبهــا در $z=۰$؛ ه) قطبهای ساده در $z=n\pi(n=\pm ۱, \pm ۲, ...)$؛ ز) نقاط تکین اساسی در $z=۱/n\pi\ (n=\pm ۱, \pm ۲, ...)$، نقطهٔ حدی نقاط منفرد اساسی در $z=۰$.

۱۴. راهنمایی. به مسئلهٔ ۱۵ از فصل ۹ رجوع کنید.

۱۹. پاسخ. ب) نقطهٔ تکین بـرداشتنی در ∞؛ د) نقطهٔ تکین برداشتنی (صفر مرتبهٔ ۵) در ∞؛ و) نقطهٔ تکین اساسی در ∞؛ ح) نقطهٔ حدی قطبها در ∞.

۲۰. پاسخ. الف) نقطهٔ حــدی قطبها در ∞؛ ج) قطب ساده در ∞؛ ه) نقطهٔ حــدی قطبها در ∞؛ ز) نقطهٔ تکین اساسی در ∞.

۲۱. پاسخ. الف) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=۱$، $\operatorname{Res}_{z=\pm ۱} f(z)=-\frac{۱}{۲}$؛ ج) $\operatorname{Res}_{z=-۱} f(z)=۲\sin ۲$؛ ه) $\operatorname{Res}_{z=n\pi} f(z)=(-۱)^n(n=۰, \pm ۱, \pm ۲, ...)$؛ ز) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z)=۰$.

۲۲. پاسخ. الف) $c_{-۱}f(z_۰)$.

۲۳. پاسخ. $۲\pi i$.

۲۴. پاسخ. $-\pi i/\sqrt{۲}$.

۲۶. پاسخ. $-۲\pi i$.

۲۷. پاسخ. $-۴ni$.

۲۸. پاسخ. $-۲c_۰c_۱$.

۳۰. راهنمایی. مسئلهٔ ۲۹ را به‌کار برید.

۳۱. راهنمایی. اگر $z=e^{ix}$، آنگاه

$$dx=\frac{dz}{iz},\quad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{۲}=\frac{۱}{۲}\left(z+\frac{۱}{z}\right),$$

به قسمی که انتگرال به صورت زیر درمی‌آید

$$i\int_{|z|=۱}\frac{dz}{pz^{۲}-(p^{۲}+۱)z+p}$$

$z=p$ و $z=۱/p$ قطبهای سادهٔ عبارت زیر انتگرال هستند، اما فقط $z=۱/p$ در داخل دایرهٔ $|z|=۱$ واقع است. فرمول (۳۴) را برای محاسبهٔ ماندهٔ عبارت زیر انتگرال درنقطهٔ $z=p$، به‌کاربرید.

۳۲. راهنمایی. باهمان جایگذاریهای مسئلهٔ ۳۱، انتگرال را به صورت زیر درآورید

$$-۴i\int_{|z|=۱}\frac{z\,dz}{(qz^{۲}+۲pz+q)^{۲}}.$$

نقاط

$$z_{۱}=\frac{۱}{q}(-p+\sqrt{p^{۲}-q^{۲}}),\qquad z_{۲}=\frac{۱}{q}(-p-\sqrt{p^{۲}-q^{۲}}),$$

قطبهای عبارت زیر انتگرال‌اند، اما فقط $z_{۱}$ درداخل دایرهٔ $|z|=۱$ واقع است. فرمول (۳۶) را برای محاسبه ماندهٔ عبارت زیر انتگرال در $z=z_{۱}$ به‌کار برید.

۳۳. راهنمایی. اگر $z=e^{۲i(x-a)}$، آنگاه

$$dx=\frac{dz}{۲iz},\qquad \cot(x-a)=i\frac{e^{i(x-a)}+e^{-i(x-a)}}{e^{i(x-a)}-e^{-i(x-a)}}=i\frac{z+۱}{z-۱}.$$

فصل ۱۲

۳ . پاسخ. $n_{+}=۲$، $n_{-}=۱$، $v=۱$.

۴ . پاسخ. ب) ۰.

۵ . پاسخ. ۳.

۶ . پاسخ. ۱.

۷ . راهنمایی. مرزی را درنظربگیرید که به وسیلهٔ نیمدایرهٔ $|z|=R$، $\operatorname{Re} z\geqslant ۰$ و قطعه خطی که نقاط $\pm iR$ را به هم وصل می‌کند تشکیل شده است. سپس در قضیهٔ روشه انتخاب کنید $f(z)=z-\lambda$, و $g(z)=e^{-z}$.

۸ . راهنمایی. اگر $P(z)$ صفر نداشته باشد، آنگاه $۱/P(z)$ تابع تام‌کراندار ودرنتیجه ثابت است واین امکان ندارد.

۹ . راهنمایی. فرض کنید $f(z)=e^z$.
۱۰. راهنمایی. به قضیهٔ ۴.۲.۱۲ رجوع کنید.
۱۱. راهنمایی. همبندبودن E تقریباً واضح است (برهان قضیهٔ ۲.۱.۹ را به‌خاطر بیاورید). برای اثبات اینکه E بازاست، فرض کنید w_0 نقطه‌ای از E و z_0 نقطه‌ای از G است به قسمی که $f(z_0)=w_0$. بنابر مسئلهٔ ۱۰، یك همسایگی z_0 مانند K و یك همسایگی متناظر w_0 مانند K^* وجوددارند به‌طوری که برای هر $w \in K^*$ حداقل یك نقطهٔ $z \in K$ می‌توان یافت که برای آن $f(z)=w$. اما K^* در E واقع است، واذا w_0 یك نقطهٔ داخلی E است. برای اثبات اصل ماکزیموم قدرمطلق، فرض کنید z_0 نقطه‌ای از G، و K یك همسایگی z_0 است که در G واقع است. نگارهٔ K تحت نگاشت $w=f(z)$، خود یك حوزه است و بنابراین K شامل نقطه‌ای مانند z است که نگاره‌اش یعنی $w=f(z)$ نسبت به مبدأ صفحه w، دورتر از نقطهٔ $w_0=f(z_0)$ است، به عبارت دیگر K شامل نقطه‌ای مانند z است، به قسمی که $|f(z)|>|f(z_0)|$.
۱۲. راهنمایی. توجه کنید که

$$I^2=\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy,$$

وبنابراین بعد از تبدیل به مختصات قطبی

$$I^2=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr.$$

۱۳. راهنمایی. قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار برید.

۱۴. پاسخ. الف $\frac{\pi}{27}$؛ ج) $\frac{\pi}{ab(a+b)}$.

۱۶. راهنمایی. از تابع $f(z)=\frac{e^{2iz}-1}{z^2}$ انتگرال بگیرید.

۱۹. راهنمایی. به‌جای n مقدار $2n$ بگذارید و بنویسید $m'=m+n\,(m<n)$.

۲۰. پاسخ. ب) $\frac{\pi}{4a}e^{-a}$.

۲۱. پاسخ. $\frac{\pi}{5}\left(\cos 1-\frac{1}{e^2}\right)$.

۲۲. راهنمایی. توجه کنید که حالا σ_1 «لبهٔ بالایی» و σ_2 «لبهٔ پایینی» فاصلهٔ $[r,R]$ ازمحور است. بنابراین روی σ_1، $z=x$، درحالی که روی σ_2، $z=xe^{2\pi i}$، که درآن اینك

به جای (۲۷) داریم، $0 \leqslant \operatorname{Im} \ln z = \arg z \leqslant 2\pi$.

۲۳. پاسخ. الف) $\frac{\pi^3}{8}$؛ ج) $\frac{\pi}{4}$؛ ه) $\pi \cot a\pi$.

فصل ۱۳

۱ . راهنمایی. قضیهٔ ۴.۲.۷ را به کار برید.

۲ . راهنمایی. فرمول اویلر را به‌کار برید (بخش ۳.۱.۸ الف).

۳ . راهنمایی. نتیجه ۶.۱.۱۳ را به‌کار برید.

۴ . راهنمایی. در مسئلهٔ ۳ انتخاب کنید $f(z) = \cos z$، و مسئلهٔ ۸ الف از فصل ۸ را به یاد آورید.

۵ . راهنمایی. فرض کنید C دایرهٔ به شعاع R و به‌مرکز z_0 باشد، z را نقطه‌ای داخل C بگیرید و فرض کنید

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{z - z_0}$$

نقطهٔ وارون z نسبت به C، واقع‌درخارج C، است (به‌بخش ۲.۴.۱ رجوع کنید). در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta,$$

اگر برابری دوم را از برابری اول کم کنید به دست می‌آورید

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*}\right] d\zeta$$

یا

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})\left[\frac{R}{R - re^{i(\varphi-\theta)}} + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{R - er^{i(\theta-\varphi)}}\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} d\theta.$$

۶ . راهنمایی. $\frac{\zeta - z_0 + (z - z_0)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)} = \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}$.

۷ . راهنمایی. اگر n عدد صحیح یکتایی باشد که در $a\leqslant n\omega<a+\omega$ صدق می‌کند، آنگاه

$$\int_a^{a+\omega} f(x)dx=\int_a^{n\omega} f(x)dx+\int_{n\omega}^{a+\omega} f(x)dx$$
$$=\int_a^{n\omega} f(x)dx+\int_{(n-1)\omega}^{a} f(x)dx.$$

۹ . پاسخ. $u(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\ln|e^{i\theta}-z|d\theta+\text{const}$.

۱۱. راهنمایی. بنابر لم شوارتس، $|F(w)|\leqslant|w|$ ،$|G(w)|\leqslant|w|$، و از آنجا $|f(z)|\leqslant|g(z)|$ ،$|g(z)|\leqslant|f(z)|$ یا هم‌ارز آن $|f(z)|=|g(z)|$. اما $|F(w)|=|w|$ ولذا باز بنابر لم شوارتس، $F(w)=e^{i\theta}w$، که در آن $e^{i\theta}=1$ زیرا $F'(0)>0$.

۱۲. راهنمایی. اصل آوند را به‌کاربرید (بخش ۳.۱.۱۲).

۱۳. راهنمایی. تابع $\varphi(f(z))$ را درنظر بگیرید که درآن $\varphi(w)$ تابعی است که حوزهٔ با مرز γ را برروی قرص واحد $|z|<1$ می‌نگارد.

۱۶. پاسخ. صفحهٔ متناهی منهای نقطهٔ $z=1$.

۱۷. راهنمایی. فرض کنید $\alpha=p/q$، که در آن p و $q>0$ اعداد صحیح‌اند وفرض کنید $z_0=e^{2\pi i\alpha}$، $z=\rho z_0$ $(0<\rho<1)$. آنگاه

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}\rho^{n!}$$

اگر $M=2q+N$، که درآن N عدد صحیح مثبت دلخواه است، آنگاه

$$|f(z)|>\sum_{n=q}^{M}\rho^{n!}-\sum_{n=1}^{q-1}|z|^{n!}>(M-q+1)\rho^{M!}-(q-1),$$

که درآن سمت راست وقتی $\rho\to 1$، به $M-2q+2=N+2$ میل می‌کند.

۱۸. راهنمایی. بوضوح یك نقطهٔ تکین در $z=1$ وجود دارد. بعلاوه برای $z^2=1$ نقاط تکین وجود دارند، زیرا $f(z)=z^2+f(z^2)$، همین‌طور نقاط تکین برای $z^4=1$ وجود دارند، زیرا $f(z)=z^2+z^4+f(z^4)$ و الی آخر.

۲۱. راهنمایی. با تکرار کاربرد اصل تقارن، حلقهٔ $r_1<|z|<r_2$ را بزرگ کرده و به تمام صفحهٔ مختلط گسترش یافته بجز نقطهٔ $z=0$ یا نقطهٔ $z=\infty$، گسترش دهید، آنگاه قضیهٔ ۵.۳.۱۳ را به‌کار برید.

فصل ۱۴

۲. راهنمایی. ابتدا با تبدیل $\omega=\sqrt{z^{2}-1}$ نیمهٔ راست G را به روی نیمصفحهٔ بالایی بنگارید. بعد از به‌کاربردن اصل تقارن، تبدیلهای $\omega_{1}=\dfrac{\omega+\sqrt{5}i}{\omega-i}$ ، $w=\sqrt{-\omega_{1}}$ را به کار برید.

۳. پاسخ. $w=h\sqrt{z^{2}-1}$.

۵. پاسخ. ب) $w=C\int_{0}^{z} z^{-3/4}(1-z)^{-1/2}dz$، که در آن

$$C=\frac{b}{\int_{0}^{1} x^{-3/4}(1-x)^{-1/2}dx}.$$

۶. پاسخ. $w=\frac{3h}{16}\sqrt{3z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{2}$ ، که در آن نقاط ۰، ۱، ∞، ۳− با رئوس ∞، ۰، ∞، ih متناظرند.

۱۰. راهنمایی. تابع (۶) شامل جملات اضافی $-\frac{2}{z-\bar{a}}-\frac{2}{z-a}$ است که متناظر با قطبهای سادهٔ a و $\bar{a}$ هستند.

۱۱. راهنمایی. یك تبدیل کسری خطی انجام دهید.

۱۳. پاسخ. $w=C\int_{z_0}^{z}\frac{\sqrt{1-z^{4}}}{z^{2}}dz+C_{1}$.

۱۴. راهنمایی. بنا به (۲۷) با $a_{1}=-1$ ، $a_{2}=1$ ، $\alpha_{1}=\alpha_{2}=2$ ،

$$w=C\int_{z_0}^{z}\frac{(z+1)(z-1)}{z^{2}}dz+C_{1}=C\int_{z_0}^{z}\left(1-\frac{1}{z_{2}}\right)dz+C_{1}$$

$$=C\left(z+\frac{1}{z}\right)+C_{1}'.$$

چون $z=\pm 1$ به نقاط $w=\pm 1$ نگاشته می‌شوند، داریم $\pm 1=\pm 2C+C_{1}'$ و درنتیجه $C=\frac{1}{2}$، $C_{1}'=0$.

۱۵. پاسخ. $w=\left[\frac{1}{2}(z^{n}+z^{-n})\right]^{\frac{1}{n}}$ ، که در آن نقاط $z=1\ ,\ e^{\pi i/2n}\ ,\ e^{\pi i/n}$ به نقاط $w=1\ ,\ 0\ ,\ e^{\pi i/n}$ تبدیل می‌شوند.

۱۶. راهنمایی. اصل تقارن را به‌کار برید.

فصل ۱۵

۱. راهنمایی. تصور کنید که شارش، بین دو صفحهٔ موازی به‌فاصلهٔ واحد رخ دهد، با این فرض که صفحات درمقابل حرکت سیال مقاومتی ندارند، و فرض کنید که dS «عنصر استوانه‌ای» با قاعدهٔ ds باشد، که در آن ds عنصر کمان در طـول C است. در این صورت حجم سیالی که خارج dS در زمان dt جریان دارد برابر $w_n\, ds\, dt$ است.

۸. راهنمایی. تابع

$$\zeta = g(z) = \frac{1}{a+b}(z+\sqrt{z^{2}-c^{2}}) \qquad (c^{2}=a^{2}-b^{2})$$

(ریشهٔ مثبت را انتخاب کنید) خارج بیضی با نیم محورهای a و b را به روی خارج دایرهٔ $|\zeta| = 1$ می‌نگارد.

۹. راهنمایی. سهم T ناشی از نیروهای فشار مؤثر بر عنصر $dz = dx + i\,dy$ از مرز Γ، برابر است با $P(x\,dx + y\,dy) = \mathrm{Re}(Pz\,\overline{dz})$.

۱۰. پاسخ. $T = -1/2\pi\rho c^{2}|w|^{2}\sin 2\alpha$، که درآن $c = \sqrt{a^{2}-b^{2}}$.

۱۱. راهنمایی. حل مسئله را با مثال ۳.۲.۱۴ شروع کنید و برای نگارش حوزه‌ای که در شکل ۵۰ نشان داده‌ایم به روی حوزه‌ای که درشکل ۵۹ نمایش داده‌ایم تبدیل کمکی

$$\omega = e^{\pi(w+ih_{1})/H} \qquad (H = h_{1}+h_{2})$$

را به‌کار برید.

۱۴. راهنمایی. فرض کنید L محور z است. آنگاه بنا بر قانون کولن سهم عنصربار $q\,dz$ درمیدان الکتریکی عبارت است از

$$|\overrightarrow{dE}| = q\frac{dz}{r^{2}+z^{2}},$$

کـه در آن $r^{2} = x^{2}+y^{2}$ (شکل بکشید). اما بردار $\vec{E}$ در صفحهٔ xy واقع است و بنا بـر این

$$|E_x + iE_y| = \cos\theta |\overrightarrow{dE}| = q\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\theta}{r^{2}+z^{2}}dz$$

$$= q\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{r} d\theta = \frac{2q}{r},$$

که درآن θ زاویهٔ بین $\overrightarrow{dE}$ و صفحهٔ xy است.

۱۷. پاسخ. $\frac{1}{2}$.

۱۹. راهنمایی. ابتدا تـابع $w=\sin(\pi z/a)$ را بـرای نگارش نوار به‌روی نیمصفحهٔ $\operatorname{Im}(w)>0$ به‌کار برید (به‌مثال ۱۰۲۰۱۴ رجوع کنید)، توجه کنید که پهلوهای نوار به‌توی فاصله‌های $(-\infty, -1]$ ، $[-1, 1]$ ، $[1, \infty)$ می‌روند. دراین صورت بنا برقضیهٔ ۴۰۲۰۱۳ داریم:

$$T=\frac{T_0}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v}{(\xi-u)^2+v^2}d\xi=\frac{T_0}{\pi}\left(\arctan\frac{1-u}{v}-\arctan\frac{-1-u}{v}\right)$$

$$=\frac{T_0}{\pi}\left(\operatorname{arccot}\frac{u-1}{v}-\operatorname{arccot}\frac{u+1}{v}\right)=\frac{T_0}{\pi}\arg\frac{w-1}{w+1}$$

(توضیح بخش ۲۰۱۳ از چند توضیح فصل ۱۳ را به‌خاطر آورید).

کتابنامه

AHLFORS, L, V., *Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York (1953).

BIEBERBACH, L., *Conformal Mapping* (translated by F. Steinhardt), Chelsea Publishing Company, New York (1953).

CHURCHILL, R. V., *Complex Variables and Applications,* second edition, McGraw-Hill Book Company, New York (1960).

COPSON, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable,* Oxford University Press, Inc., New York (1935).

HILLE, E., *Analytic Function Theory,* in two volumes, Ginn and Company, Boston (1959, 1962).

KNOPP, K., *Theory of Functions* (translated by F. Bagemihl), in two volumes, Dover Publications, Inc., New York (1945, 1947).

LEVINSON, N., and R. M. REDHEFFER, *Complex Variables,* Holden-Day, Inc., San Francisco (1970).

MACROBERT, T. M., *Functions of a Complex Variable,* fourth edition, The Macmillan Company, New York (1958).

MARKUSHEVICH, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable* (translated by R. A. Silverman), in three volumes, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. j. (1965, 1967).

NEHARI, Z., *Conformal Mapping,* McGraw-Hill Book Company, New York (1952).

NEHARI, Z., *Introduction to Complex Analysis,* Allyn and Bacon, Inc., Boston (1962).

PHILLIPS, E. G., *Functions of a Complex Variable with Applications,* Oliver & Boyd Ltd, Edinburgh (1961).

SILVERMAN, R. A., *Introductory Complex Analysis*, Dover Publications, Inc., New York (1972).

TITCHMARSH, E. C., *The Theory of Functions*, second edition, Oxford University Press, Inc., New York (1939).

WHITTAKER, E. T. and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, fourth edition, Cambridge University Press, New York (1963).

واژه نامهٔ انگلیسی به فارسی

absolute convergence	همگرایی مطلق
additive unit	عنصر یکهٔ جمعی
analytic	تحلیلی
– continuation	ادامهٔ تحلیلی
– function	تابع تحلیلی
annulus	حلقه
antiderivative	تابع اولیه
arc	کمان
arcwise	به طور کمانی
argument	آوند
– principle	اصل آوند
associative	شرکتپذیر
boundary point	نقطهٔ مرزی
boundary value	مقدار مرزی
bounded	کراندار
branch cut	بریدگی شاخه‌ای
branch point	نقطهٔ شاخه‌ای
chain of elements	زنجیر عناصر

circle preserving	حافظ دایره
circulatory flow	شارش چرخشی
class	رده
commutative	جابه‌جایی
complete analytic function	تابع تحلیلی کامل
complex	مختلط
_ plane	صفحهٔ مختلط
_ potential	پتانسیل مختلط
_ series	سری مختلط
component	مؤلفه
composite function	تابع مرکب
conditional convergence	همگرایی مشروط
conformal	همدیس
_ image	نگارهٔ همدیس
_ mapping	نگاشت همدیس
conjugate	مزدوج
connected	همبند
continuity	پیوستگی
contour	مرز
convergence	همگرایی
_ region	ناحیهٔ همگرایی
convergent	همگرا
criterion	محک
cross ratio	نسبت ناهمساز
curve	خم

degenerate	تباهیده
deleted	سفته
_ neighbourhood	همسایگی سفته
direction-preserving	حافظ جهت
disk	قرص
distributive	توزیع‌پذیر
divergence	واگرایی

divergent	واگرا
domain	حوزه
_ of existence	حوزهٔ وجود
electrostatic field	میدان الکتروستاتیك
elliptic integral	انتگرال بیضوی
entire	تام
_ linear transformation	تبدیل خطی تام
equipotential	همپتانسیل
essential singular point	نقطهٔ تکین اساسی
expansion(=similitude)	تجانس
exponential function	تابع نمایی
extended complex plane	صفحهٔ مختلط گسترش یافته
exterior point	نقطهٔ خارجی
final	پایانی
flow	شارش
irrotational _	شارش بیچرخشی
solenoidal _	شارش لوله‌ای
flux	شار
general analytic function	تابع تحلیلی کلی
group	گروه
harmonic	همساز
_ series	سری همساز
ideal point	نقطهٔ ایدآل
identity	اتحاد
image	نگاره

imaginary	موهومی
improper	ناسره
infinite series	سری نامتناهی
inscribed	محاط
interior point	نقطهٔ داخلی
into	به‌توی
invariant	پایا
inverse function	تابع معکوس
inversion	انعکاس
isogonal	حافظ زاویه
isolated	منفرد
– singular point	نقطهٔ تکین منفرد
isometric	ایزومتریك
Jordan curve	خم ژردان
lifting force	نیروی بالارونده
limit point	نقطهٔ حدی
locus	مکان هندسی
magnification	انبساط
mapping	نگاشت
modulus	قدرمطلق
monodromy theorem	قضیهٔ مونودرومی
multiple pole	قطب چندگانه
multiple-valued	چندمقداری
multiple zero	صفر چندگانه
multiplicative unit	عنصر یکهٔ ضربی
neighbourhood	همسایگی

onto	به‌روی
oscillatory divergent	واگرای نوسانی

partial	جزئی
path	مسیر
piecewise	تکه‌ای
plan-parallel	صفحه موازی
pointwise	نقطه‌ای
polar	قطبی
pole	قطب
polygonal curve	خم چندضلعی
potential	پتانسیل
power series	سری توانی
principal part	جزء اصلی
projection	تصویر
properly divergent	واگرای سره
purly imaginary	موهومی محض

range	برد
real	حقیقی
rectifiable	درازاپذیر
reflection principle	اصل بازتاب
region	ناحیه
regular part	جزء منظم
regular point	نقطهٔ منظم
removable singular point	نقطهٔ تکین برداشتنی
residue	مانده
root	ریشه
rotation	دوران

sector-like	شبه قطاع
series of functions	سری توابع

shift	انتقال
simple pole	قطب ساده
simple zero	صفرساده
simply connected	همبند ساده
single-valued	يك مقداری
singular point	نقطهٔ تکین
smooth	هموار
spiral vortex	گرداب مارپیچی
stagnation point	نقطهٔ راکد
stationary	مانا
stereographic	گنجنگاری
– projection	تصویر گنجنگاری
stream function	تابع جریان
streamlines	خطوط جریان
subgroup	زیرگروه
unbounded	بیکران
uniform continuity	پیوستگی یکنواخت
uniform convergence	همگرایی یکنواخت
unique	یکتا
univalence	تك‌ارزی
univalent	تك‌ارز
upper limite	حد بالا
velocity field	میدان سرعت
vortex	گرداب
wedge	گوه

واژه نامهٔ فارسی به‌انگلیسی

آوند	argument
اتحاد	identity
ادامهٔ تحلیلی	analytic continuation
اصل آوند	argument principle
اصل بازتاب	reflection principle
انبساط	magnification
انتقال	shift
انتگرال بیضوی	elliptic integral
انعکاس	inversion
ایزومتریک	isometric
برد	range
بریدگی شاخه‌ای	branch cut
به‌توی	into
به‌روی	onto
به طور کمانی	arcwise
بیکران	unbounded
پایا	invariant

final	پایانی
potential	پتانسیل
complex potential	ـ مختلط
continuity	پیوستگی
uniform continuity	ـ یکنواخت

function	تابع
antiderivative	ـ اولیه
analytic function	ـ تحلیلی
complete analytic function	ـ کامل
general analytic function	ـ کلی
stream function	ـ جریان
composite function	ـ مرکب
inverse function	ـ معکوس
exponential function	ـ نمایی
related function	ـ وابسته
entire	تام
degenerate	تباهیده
entire linear transformation	تبدیل خطی تام
expansion (=similitude)	تجانس
analytic	تحلیلی
projection	تصویر
stereographic projection	ـ گنجنگاری
univalent	تك ارز
univalence	تك ارزی
piecewise	تکه‌ای
distributive	توزیعپذیر

commutative	جا به جایی
principal part	جزء اصلی
regular part	جزء منظم
partial	جزئی

چند مقداری	multiple-valued
حافظ جهت	direction-preserving
حافظ دایره	circle preserving
حافظ زاویه	isogonal
حد بالا	upper limite
حقیقی	real
حلقه	annulus
حوزه	domain
ـ وجودی	domain of existence
خطوط جریان	streamlines
خم	curve
ـ چند ضلعی	polygonal curve
ـ ژردان	Jordan curve
درازا پذیر	rectifiable
دوران	rotation
رده	class
ریشه	root
زنجیر عناصر	chain of elements
زیر گروه	subgroup
سری	series
ـ توابع	series of functions
ـ توانی	power series
ـ مختلط	complex series

ـ نامتناهی	infinite series
ـ همساز	harmonic series
سفته	deleted
شار	flux
شارش	flow
ـ بیچرخشی	irrotational flow
ـ چرخشی	circulatory flow
ـ لوله‌ای	solenoidal flow
شبه قطاع	sector-like
شرکتپذیر	associative
صفحهٔ مختلط	complex plane
صفحهٔ مختلط گسترش یافته	extended complex plane
صفحه موازی	plane-parallel
صفرچندگانه	multiple zero
صفرساده	simple zero
عنصر یکهٔ جمعی	additive unit
عنصر یکهٔ ضربی	multiplicative unit
قدرمطلق	modulus
قرص	disk
قضیهٔ مونودرومی	monodromy theorem
قطب	pole
ـ چندگانه	multiple pole
ـ ساده	simple pole
قطبی	polar
کراندار	bounded

کمان	arc
گرداب	vortex
ـ مارپیچی	spiral vortex
گروه	group
گنجنگاری	stereographic
گوه	wedge
مانا	stationary
مانده	residue
محاط	inscribed
محك	criterion
مختلط	complex
مرز	contour
مزدوج	conjugate
مسیر	path
مقدار مرزی	boundary value
مکان هندسی	locus
منفرد	isolated
مؤلفه	component
موهومی	imaginary
ـ محض	purly imaginary
میدان الکتروستاتیك	electrostatic field
میدان سرعت	velocity field
ناحیه	region
ـ همگرایی	convergence region
ناسره	improper
نسبت ناهمساز	cross ratio

point	نقطه
ideal point	ـ ایدآل
singular point	ـ تکین
essential singular point	ـ اساسی
removable singular point	ـ برداشتنی
isolated singular point	ـ منفرد
limit point	ـ حدی
exterior point	ـ خارجی
interior point	ـ داخلی
stagnation point	ـ راکد
branch point	ـ شاخه‌ای
boundary point	ـ مرزی
regular point	ـ منظم
pointwise	نقطه‌ای
image	نگاره
conformal image	ـ همدیس
mapping	نگاشت
conformal mapping	ـ همدیس
lifting force	نیروی بالا رونده
divergent	واگرا
properly divergent	ـ ی سره
oscillatory divergent	ـ ی نوسانی
divergence	واگرایی
connected	همبند
simply connected	ـ ساده
equipotential	همپتانسیل
conformal	همدیس
harmonic	همساز
neighbourhood	همسایگی
deleted neighbourhood	ـ سفته

convergent	همگرا
convergence	همگرایی
conditional convergence	ـ مشروط
absolute convergence	ـ مطلق
uniform convergence	ـ یکنواخت
smooth	هموار
unique	یکتا
single-valued	یك مقداری

فهرست راهنما