آمار ریاضی

جان فروند

ترجمهٔ علی عمیدی، محمدقاسم وحیدی‌اصل

آمار ریاضی

جان فروند

ترجمهٔ علی عمیدی، محمدقاسم وحیدی‌اصل

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۱۱۹

مرکز نشر دانشگاهی
۹۱۶

Mathematical Statistics
John E. Freund
Fifth Edition
Prentice-Hall, 1992

آمار ریاضی
تألیف جان فروند
ترجمهٔ دکتر علی عمیدی، دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل
نسخه‌پرداز: زهرا دلاوری
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۸
تعداد ۳۰۰۰
حروفچین: نادیا فرهادتوسکی
چاپ: محمد امین

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

فروند، جان Freund, John E.
آمار ریاضی / جان فروند؛ ترجمهٔ علی عمیدی، محمدقاسم وحیدی‌اصل. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۸.
هفت، ۶۵۰ ص.: مصور، نمودار.
ISBN 964-01-0916-9
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
عنوان اصلی: Mathematical statistics 5th ed.
کتابنامه به صورت زیرنویس.
۱. آمار ریاضی. الف. عمیدی، علی، ۱۳۱۲ ـ ، مترجم. ب. وحیدی‌اصل، محمدقاسم، ۱۳۲۶ ـ ، مترجم. ج. مرکز نشر دانشگاهی. د. عنوان.
QA۲۷۶/ف۴آ۸ ۵۱۹/۵
۱۳۷۸
کتابخانهٔ ملی ایران م ۷۷ـ ۱۷۸۲۲

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان | صفحه

عنوان	صفحه

پیشگفتار

ویرایش پنجم آمار ریاضی نظیر چهار ویرایش اول، برای یک درس آمار ریاضی دو ترمی یا سه ترمی که متکی بر حسابان است، طرّاحی شده است. اغلب تفاوتهای بین این ویرایش و ویرایش قبلی بازتاب تغییراتی است که در سالهای آخر در اندیشهٔ آماری و آموزش آمار رخ داده‌اند.

برجسته‌تر از همه، تغییر در نمادگذاری مربوط به متغیرهای تصادفی است. در یک بررسی نظرات مدرسانی که از ویرایش چهارم استفاده کرده‌اند، معلوم شد که اکثریّت قریب به اتفاق آنها استفاده از حروف بزرگ را بر حروف سیاه ترجیح می‌دهند. بنابراین حالا، مثلاً به‌جای $P(\mathbf{x} = x)$ می‌نویسیم $P(X = x)$. با این کار از مشکلاتی که در استفاده از حروف سیاه پیش می‌آیند، اجتناب می‌شود، اما خود آن نیز ممکن است به ابهام منجر شود. برای نمونه، X ممکن است متغیری تصادفی با مقدارهای x، یا متغیری تصادفی با مقدارهای χ (خی)، و A ممکن است متغیری تصادفی با مقدارهای a یا متغیری تصادفی با مقدارهای α (آلفا) باشد. همچنین، اگر به صورت مستمر از حروف بزرگ برای متغیرهای تصادفی استفاده کنیم، به نمادهای ناآشنایی از نوع $\hat{\Sigma}$ برای متغیری تصادفی با مقدارهای $\hat{\sigma}$ یا $\hat{\mathrm{B}}$ برای متغیری تصادفی با مقدارهای $\hat{\beta}$ برمی‌خوریم. در مواردی از این کار دوری جسته‌ایم تا نمادهایی را که به‌طور سنتی در آمار به‌کار می‌روند، حفظ کنیم. مثلاً، در آمار ناپارامتری همچنان از u برای مجموع کل ردیفها و از U در ارتباط با آزمون من‌ـویتنی مبتنی بر مجموعهای رتبه‌ای استفاده می‌کنیم.

به‌علاوه، تغییراتی اساسی در مطالب اصلی مربوط به استنباط آماری به‌عمل آمده است. مطالب مربوط به برآورد با ارائه مثالهای تشریحی بیشتر در متن و نیز ارائه مسائل بیشتر، با تفصیل بیشتر بیان شده‌اند و مطالب مربوط به آزمونهای فرضها با تأکید بر رهیافت دوگانهٔ اتکاء تصمیمات بر Pـمقدارها یا بر مقادیر آماره‌های آزمون و ناحیه‌های بحرانی بسط یافته‌اند.

تغییراتی عمده نیز در مسائل به‌عمل آمده است. در این ویرایش، مسأله‌ها به تمرینها و کاربردها

تقسیم شده‌اند ــ تمرینها عمدتاً جنبه ریاضی دارند و کاربردها بیشتر به محاسبات عددی می‌پردازند. همچنین بیش از ۱۱۰۰ مسأله در ویرایش پنجم موجودند، که مقدار قابل‌توجهی از آنها نو هستند، و تقریباً به‌طور مساوی به دو نوع بالا تفکیک شده‌اند. برای سهولت، مسأله‌ها به‌صورت متوالی در هر فصل شماره‌گذاری شده‌اند.

از سایر جهات، تغییرات و اضافاتی اندک در کل کتاب صورت گرفته است، مثلاً مطالبی جدید دربارهٔ نیرومندی در بخشهای ۶.۱۰ و ۱.۱۶ آمده‌اند؛ مطالبی دربارهٔ استفاده از کامپیوترها را می‌توان در بخشهای ۸.۱۱ و ۹.۱۳ یافت؛ و برخی پیشنهادها دربارهٔ تحلیل جدولهای $r \times c$ با رتبه‌های مرتب درکاربردهای ۵۹.۱۴ و ۱۲.۱۵ آمده‌اند. پیوست مربوط به جبر بولی حذف شده است، امّا برخی از تمرینهای مربوط به مجموعه‌ها در فصل ۲ گنجانده شده‌اند.

مؤلف مایل است قدردانی خود را از تذکرات سازنده‌ای که از دانشجویان و همکاران دریافت کرده است ابراز و از همهٔ افرادی که برای تهیهٔ این ویرایش وی را یاری کرده‌اند سپاسگزاری کند.

جان فروند

اسکاتس‌دیل، آریزونا

درباره مؤلف

جان فروند

استاد ممتاز دانشگاه ایالتی آریزونا

تحصیلکردهٔ دانشگاه لندن، دانشگاه ایالتی کالیفرنیا در لُس‌انجلس، دانشگاه کلمبیا، و دانشگاه پیتسبورگ. علاقهٔ دکتر فروند به ریاضیات، منطق، و فلسفهٔ علم، راهبر او شدند تا آمار را پیشه کند. کتابهای درسی او در آمار، برای سطوح مختلف و برای زمینه‌های کاربردی گوناگون، که براساس نگرش او به آمار به‌عنوان طریقه‌ای برای تفکر، و پیراستن تفکر روزمره، تنظیم شده‌اند، در حدود چهل سال از کتابهای پرفروش بوده‌اند.

۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

رشد آمار در سالهای اخیر موجب شده است که نیاز به آن تقریباً در هر مرحله از فعالیت بشر احساس شود. علم آمار دیگر گردایه‌ای از داده‌ها و ارائه آنها در نمودارها و جدولها نیست؛ بلکه امروزه به‌عنوان علمی تلقی می‌شود که متضمن پایه‌ریزی استنباطها بر داده‌های مشاهده شده و تمامی مسألهٔ تصمیم‌گیریها در رویارویی با عدم حتمیت است. این موضوعِ عدم حتمیت زمینه‌های بسیاری را دربر می‌گیرد، زیرا وقتی سکه‌ای پرتاب می‌شود، وقتی یک متخصص مواد غذایی دربارهٔ موادی که به غذاها افزوده می‌شوند به آزمایش می‌پردازد، وقتی بیمه‌گری حق بیمهٔ عمر را تعیین می‌کند، وقتی یک مهندس کنترل کیفیت، فراورده‌ای را می‌پذیرد یا رد می‌کند، وقتی معلمی تواناییهای دانشجویانش را مورد مقایسه قرار می‌دهد، وقتی اقتصاددانی روندهای اقتصادی را پیش‌بینی می‌نماید، وقتی روزنامه‌ای نتیجهٔ انتخاباتی را پیشگویی می‌کند، و نظایر اینها، رویارویی با عدم حتمیتها وجود دارد.

اگر بگوییم که آمار در وضع پیشرفت فعلی‌اش می‌تواند همهٔ وضعیتهایی را که با عدم حتمیتها

درگیرند رفع و رجوع کند، سخنی گزاف است، اما تکنیکهای جدید دائماً در حال به‌وجود آمدن‌اند و آمار نوین می‌تواند با روش منطقی و اصولی دست‌کم چارچوبی برای نگرش بر این موارد فراهم سازد. به بیان دیگر، آمار، مدلهایی در اختیار می‌گذارد که برای مطالعهٔ وضعیتهایی که با عدم حتمیت درگیرند مورد نیازند، همان‌گونه که حسابان مدلهای مورد نیاز برای بیان مثلاً مفاهیم فیزیک نیوتنی را در اختیار می‌گذارد.

سرآغازهای ریاضیات آماری را در مطالعات اواسط سدهٔ هجدهم که دربارهٔ احتمال، با انگیزهٔ توجه به بازیهای شانسی، انجام گرفته‌اند می‌توان یافت. نظریه‌ای که بدین‌سان برای بازی «شیر یا خط» یا «قرمز یا سیاه» پرورده شد به‌زودی در وضعیتهایی که برآمدها «پسر یا دختر»، «زندگی یا مرگ»، یا «موفقیت یا شکست» بودند کاربرد پیدا کرد، و سرانجام اهل علم، به‌کارگیری نظریهٔ احتمال را دربارهٔ مسائل بیمه و بعضی از زمینه‌های علوم اجتماعی آغاز کردند. بعدها، احتمال و آمار به‌وسیلهٔ بولتسمان[۱]، گیبس[۲]، و ماکسول[۳] در فیزیک وارد شد، و در این سده در تمام مراحل کوششهای بشری که به طریقی درگیر یک عنصر عدم حتمیت یا مخاطره‌اند آمار و احتمال کاربردهایی پیدا کرد. در ارتباط با رشد آمار ریاضی در نیمهٔ اول این سده، برجسته‌ترین شخصیتها فیشر[۴]، نیمن[۵]، پیرسن[۶] و والد[۷] هستند. به‌تازگی کارهای شلیفر[۸]، سویج[۹] و دیگران تحرکی به نظریه‌های آماری داده‌اند که پایهٔ آن اصولاً روشهایی هستند که قدمت آنها به زمان تامس بیز[۱۰] کشیش انگلیسی سدهٔ هجدهم می‌رسد.

رهیافت آماری در این کتاب اساساً همان رهیافت کلاسیک است که در آن روشهای استنباط عمدتاً بر آثار نیمن و پیرسن استوار شده‌اند. اما رهیافت کلیتر نظریهٔ تصمیم در فصل ۹ مطرح، و برخی روشهای بیزی در فصل ۱۰ ارائه شده‌اند. این مطالب را می‌توان بدون لطمه به پیوستگی مطالب نادیده گرفت.

۲.۱ روشهای ترکیبیاتی

در بسیاری از مسائل آمار، در وضعیتی مفروض، باید تمام حالتهای ممکن را فهرست کنیم، یا حداقل تعداد امکانات مختلف موجود را تعیین نماییم. در ارتباط با مطلب اخیر، اغلب قضیهٔ زیر را که گاهی **اصل اساسی شمارش**، **قاعدهٔ شمارش برای پیشامدهای مرکب**، یا **قاعدهٔ ضرب انتخابها** می‌نامند به‌کار می‌بریم.

> **قضیهٔ ۱.۱** اگر عملی شامل دو مرحله باشد، که مرحلهٔ اول بتواند به n_1 راه انجام شود و مرحلهٔ دوم برای هریک از این راهها به n_2 راه صورت گیرد، آنگاه عمل مزبور کلاً می‌تواند به $n_1 n_2$ راه انجام گیرد.

1. L. Boltzmann 2. J. Gibbs 3. J. Maxwell 4. R. A. Fisher
5. J. Neyman 6. E. S. Pearson 7. A. Wald 8. R. Schlaifer
9. L. J. Savage 10. Thomas Bayes

در اینجا «عمل» نمایشگر هر نوع شیوه، فرایند یا روش انتخاب است.

برای توجیه این قضیه، زوج مرتب (x_i, y_i) را برآمدی تعریف می‌کنیم که وقتی مرحلهٔ اول به امکان x_i و مرحله دوم به امکان y_i منتج شود رخ می‌دهد. در این صورت، مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن، مرکب از $n_1 n_2$ زوج زیر است

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2), \cdots, (x_1, y_{n_2})$$

$$(x_2, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_2, y_{n_2})$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$(x_{n_1}, y_1), (x_{n_1}, y_2), \cdots, (x_{n_1}, y_{n_2})$$

مثال ۱.۱

فرض کنید شخصی می‌خواهد در تعطیل آخر هفته با اتوبوس، با ترن یا با هواپیما به یکی از ۵ شهر اصفهان، اهواز، شیراز، مشهد، یا تبریز سفر کند. تعداد راههای مختلفی که می‌تواند این مسافرت را انجام دهد پیدا کنید.

حل. شهر موردنظر را به $n_1 = ۵$ راه، و وسیلهٔ مسافرت را به $n_2 = ۳$ راه می‌توان انتخاب کرد. بنابراین مسافرت را می‌توان به $۵ \cdot ۳ = ۱۵$ راه ممکن انجام داد. اگر مطلوب، فهرستی واقعی از تمام امکانات باشد، **نموداری درختی** نظیر شکل ۱.۱، رهیافتی سیستماتیک فراهم می‌کند. این نمودار نشان می‌دهد که $n_1 = ۵$ شاخه (امکان) برای تعداد شهرها، و برای هر یک از این شاخه‌ها، $n_2 = ۳$ شاخه (امکان) برای وسایل مختلف مسافرت وجود دارند. در شکل به‌وضوح ۱۵ راه ممکن انجام مسافرت، با ۱۵ مسیر متمایز در طول شاخه‌های درخت نشان داده شده‌اند. ▲

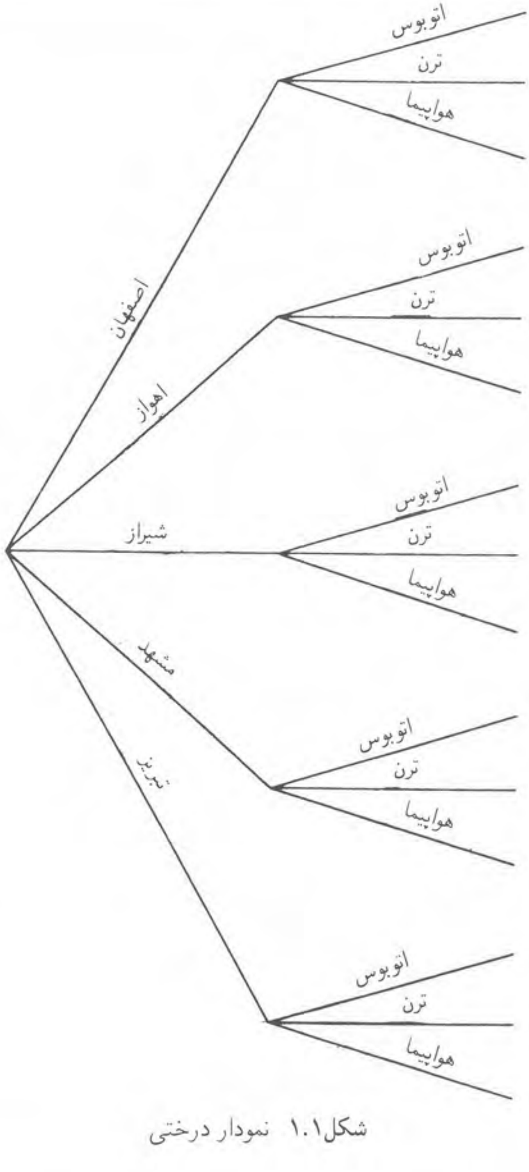
مثال ۲.۱

وقتی یک تاس قرمز و یک تاس سبز ریخته می‌شوند، چند برآمد ممکن وجود دارند؟

حل. تاس قرمز می‌تواند به یکی از شش راه ممکن ظاهر شود، و برای هر یک از این شش راه، تاس سبز می‌تواند به شش راه ظاهر شود. بنابراین، دو تاس می‌توانند به $۶ \cdot ۶ = ۳۶$ راه بنشینند. ▲

قضیهٔ ۱.۱ را می‌توان به وضعیتهایی تعمیم داد که در آنها یک عمل، متشکل از دو یا چند مرحله است. در این حالت

قضیهٔ ۱.۲ اگر عملی مرکب از k مرحله باشد، به‌طوری‌که مرحلهٔ اول بتواند به n_1 راه انجام شود، و برای هریک از این راهها، مرحلهٔ دوم بتواند به n_2 راه صورت گیرد، و برای هریک از راههای این دو مرحلهٔ نخستین، مرحلهٔ سوم بتواند به n_3 راه انجام گیرد، و الی‌آخر، آنگاه کل عمل می‌تواند به $n_1 n_2 \cdots n_k$ راه صورت پذیرد.



شکل ۱.۱ نمودار درختی

مثال ۳.۱
از بین ۴ سوپ مختلف، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع دسر و ۴ نوع نوشابه، چند ناهار مختلف که شامل یک سوپ، یک ساندویچ، یک دسر و یک نوشابه است می‌توان انتخاب کرد؟

حل. تعداد کل ناهارها برابر است با $۲۴۰ = ۴ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۴$. ▲

مثال ۴.۱
به چند راه می‌توان به آزمونی دو جوابی که شامل ۲۰ سؤال است پاسخ داد؟

حل. روی هم، به

$$\underbrace{۲ \cdot ۲ \cdot ۲ \cdot ۲ \cdot \ldots \cdot ۲ \cdot ۲}_{\text{۲۰ عامل}} = ۱۰۴۸۵۷۶$$

راه مختلف می‌توان به همهٔ سؤالها پاسخ داد و فقط یکی از اینها متناظر با حالتی است که تمام پاسخها صحیح‌اند، و تنها یکی از راهها متناظر با حالتی است که همهٔ پاسخها غلط‌اند. ▲

غالباً وضعیتهایی مورد توجه ماست که برای آنها، برآمدها، راههای مختلفی هستند که می‌توان گروهی از اشیاء را مرتب کرد یا آرایش داد. به‌عنوان مثال، ممکن است بخواهیم بدانیم که برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار و منشی از بین ۲۴ عضو یک باشگاه، چند راه مختلف وجود دارد، و یا ممکن است بخواهیم بدانیم که به چند راه مختلف می‌توان شش نفر را دور میزی نشاند. آرایشهای مختلفی نظیر اینها را **جایگشتها** می‌نامند.

مثال ۵.۱
چند جایگشت از سه حرف a، b، و c وجود دارد؟

حل. آرایشهای ممکن عبارت‌اند از: abc، acb، bac، bca، cab، و cba، بنابراین تعداد جایگشتهای متمایز، ۶تاست. می‌توانستیم بدون فهرست کردن جایگشتهای مختلف، با استفاده از قضیهٔ ۲.۱ به این جواب برسیم. چون برای مکان اول، سه انتخاب برای گزینش یک حرف وجود دارد، و سپس دو انتخاب برای مکان دوم موجود است، فقط یک حرف برای مکان سوم باقی می‌ماند، لذا تعداد کل جایگشتها $۶ = ۱ \cdot ۲ \cdot ۳$ است. ▲

با تعمیم استدلالی که در این مثال به‌کار رفت، درمی‌یابیم که n شیء متمایز را می‌توان به $n(n-۱)(n-۲) \cdot \ldots \cdot ۳ \cdot ۲ \cdot ۱$ راه آرایش داد. این حاصلضرب را با نماد $n!$، که «n فاکتوریل» خوانده می‌شود نمایش می‌دهیم. پس $۱ = !۱$، $۲ = ۱ \cdot ۲ = !۲$، $۶ = ۱ \cdot ۲ \cdot ۳ = !۳$، وقس علی‌هذا. بنابر تعریف $۱ = !۰$.

قضیهٔ۱.۳ تعداد جایگشتهای متمایز n شیء متمایز برابر $n!$ است.

مثال ۱.۶
برای معرفی ۵ بازیکن شروع‌کنندهٔ بازی یک تیم بسکتبال به تماشاگران، چند راه مختلف وجود دارد؟

حل. $۵! = ۵ \cdot ۴ \cdot ۳ \cdot ۲ \cdot ۱ = ۱۲۰$ راه برای معرفی بازیکنها وجود دارد. ▲

مثال ۱.۷
تعداد جایگشتهای چهار حرف a، b، c، و d برابر ۲۴ است، اما اگر فقط دو حرف از چهار حرف را اختیار کنیم، یا اگر همان‌طور که معمولاً عنوان می‌شود چهار حرف را دو به‌دو اختیار نماییم، تعداد جایگشتها چندتاست؟

حل. دو مکان داریم تا اولی را با چهار انتخاب و سپس دومی را با سه انتخاب پر کنیم. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۱، تعداد کل جایگشتها $۴ \cdot ۳ = ۱۲$ است. ▲

با تعمیم استدلالی که در مثال قبل به‌کار بردیم، درمی‌یابیم که n شیء متمایز را که r به r اختیار می‌کنیم می‌توان به $n(n-۱)\ldots(n-r+۱)$ راه آرایش داد. این حاصلضرب را با نماد ${}_nP_r$ نمایش می‌دهیم، و بنابر تعریف قرار می‌دهیم ${}_nP_۰ = ۱$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

قضیهٔ۱.۴ تعداد جایگشتهای n شیء متمایز که r به r اختیار می‌شوند برای $r = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$ عبارت است از

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

برهان. فرمول ${}_nP_r = n(n-۱)\cdots(n-r+۱)$ را نمی‌توان برای $r = ۰$ به‌کار برد، اما فرمول زیر را می‌توان به‌کار برد.

$${}_nP_۰ = \frac{n!}{(n-۰)!} = ۱$$

برای $r = ۱, ۲, \cdots, n$، داریم

$$
\begin{aligned}
{}_nP_r &= n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)\\
&= \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)(n-r)!}{(n-r)!}\\
&= \frac{n!}{(n-r)!}
\end{aligned}
$$

■

در مسائل مربوط به جایگشتها معمولاً آسانتر است که مانند مثال ۷.۱ از قضیهٔ ۲.۱ استفاده کنیم، اما فرمول فاکتوریل قضیهٔ ۴.۱ آسانتر به‌خاطر سپرده می‌شود. بسته‌های نرم‌افزاری آماری بسیاری وجود دارند که مقادیر ${}_nP_r$ و دیگر کمیتهای ترکیبیاتی را با دستورهای ساده به‌دست می‌دهند. البته، محاسبهٔ این کمیتها در بسیاری از ماشینهای حساب دستی نیز برنامه‌ریزی شده است.

مثال ۸.۱
از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه، برای انتخاب رئیس، نایب‌رئیس، خزانه‌دار، و منشی ۴ نام استخراج می‌شود. به چند راه مختلف این کار را می‌توان انجام داد؟

حل. تعداد جایگشتهای ۲۴ شیء متمایز که ۴ به ۴ اختیار می‌شوند برابر است با

$$
{}_{۲۴}P_{۴} = \frac{۲۴!}{۲۰!} = ۲۴\cdot ۲۳\cdot ۲۲\cdot ۲۱ = ۲۵۵۰۲۴
$$

▲

مثال ۹.۱
یک شعبهٔ محلی انجمن ریاضی به چند طریق می‌تواند برای سه گردهمایی مختلف، سه سخنران را تعیین کند، به شرطی که همهٔ سخنرانها برای هریک از پنج تاریخ ممکن، حاضر به انجام سخنرانی باشند؟

حل. چون باید سه تا از پنج تاریخ را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب آنها (برای تخصیص به سه سخنران) مهم است، به‌دست می‌آوریم

$$
{}_{۵}P_{۳} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰
$$

▲

جایگشتهای اشیاء، وقتی اشیاء روی دایره‌ای مرتب شده‌اند **جایگشتهای دوری** خوانده می‌شوند. اگر اشیاء متناظر در دو آرایش، اشیاء قبل و بعد یکسانی داشته باشند دو آرایش را مختلف تلقی

نمی‌کنیم (و آنها را یک‌بار به حساب می‌آوریم). مثلاً اگر چهار نفر دور میزی گرد نشسته باشند، وقتی هرکس به صندلی سمت راست خود منتقل شود، جایگشتی مختلف به‌وجود نمی‌آید.

مثال ۱.۱۰

چند جایگشت دوری از ۴ نفر که دور میزی گرد نشسته‌اند وجود دارد؟

حل. اگر به‌دلخواه جای یک نفر از چهار بازیکن را در مکان ثابتی در نظر بگیریم، سه نفر دیگر را می‌توانیم به ۳ راه بنشانیم (مرتب کنیم) به‌عبارت دیگر شش جایگشت دوری مختلف وجود دارند. ▲

با تعمیم استدلالی که در این مثال ارائه شد، نتیجه‌ای را که در قضیهٔ زیر بیان شده است به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۱.۵ تعداد جایگشتهای n شیء متمایز که روی یک دایره مرتب شده‌اند برابر است با $(n-1)!$.

در سراسر بحث فرض شده بود n شیئی که از آنها r شیء انتخاب می‌شوند و جایگشتها را به‌وجود می‌آورند همگی متمایز از هم‌اند. بنابراین، فرمولهای مختلف را نمی‌توان به‌عنوان مثال، برای تعیین تعداد راههایی که می‌توان حروف کلمهٔ «شیمی» را آرایش یا تعداد راههایی که می‌توان سه نسخه از یک کتاب داستان و یک نسخه از هریک از چهار کتاب داستان دیگر را در قفسه‌ای مرتب کرد به‌کار برد.

مثال ۱.۱۱

با حروف کلمهٔ «شیمی» چند جایگشت می‌توان ساخت؟

حل. اگر موقتاً برای تمایز دو حرف «ی» در کلمهٔ شیمی، این دو حرف را با ی$_1$ و ی$_2$ نشان دهیم، آنگاه $۴! = ۲۴$ جایگشت مختلف از حروف ش، ی$_1$، م، و ی$_2$ وجود دارند. اما اگر اندیسها، را حذف کنیم، آنگاه به‌عنوان نمونه، دو جایگشت می$_1$شی$_2$ و می$_2$شی$_1$ هر دو میشی را نتیجه می‌دهند، و بنابراین هر زوج از جایگشتهای با اندیس، فقط یک آرایش بدون اندیس را به‌دست می‌دهند، و تعداد کل آرایشهای حروف کلمهٔ «شیمی» برابر است با $۱۲ = \frac{۲۴}{۲}$. ▲

مثال ۱.۱۲

به چند راه می‌توان سه نسخه از یک کتاب داستان و یک نسخه از هر کدام از چهار کتاب داستان دیگر را در قفسه‌ای مرتب کرد؟

حل. اگر سه نسخه کتاب داستان اول را با a_1، a_2، و a_3 و چهار کتاب داستان دیگر را با b، c، d، و e نشان دهیم، متوجه می‌شویم که با در نظر گرفتن اندیسها، !۷ جایگشت مختلف از a_1، a_2، a_3، b، c، d، و e وجود دارند. امّا، چون !۳ جایگشت از a_1، a_2، و a_3 وجود دارند که به یک جایگشت از a، a، a، b، c، d، و e منجر می‌شوند، درمی‌یابیم که تنها $\frac{۷!}{۳!} = ۷ \cdot ۶ \cdot ۵ \cdot ۴ = ۸۴۰$ راه وجود دارند که می‌توان هفت کتاب را در قفسه مرتب کرد. ▲

با تعمیم استدلالی که در این مثال ارائه شد، نتیجه‌ای را که در قضیهٔ زیر بیان می‌شود، به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۶.۱ تعداد جایگشتهای n شیء که n_1 تای آنها از نوع اول، n_2 تای آنها از نوع دوم، ... و n_k تای آنها از نوع kام است، و $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$، برابر است با

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k}$$

مثال ۱۳.۱

به چند راه می‌توان دو تابلو از مونه[1]، سه تابلو از رنوا[2]، و دو تابلو از دگا[3] را پهلوبه‌پهلو به دیوار موزه‌ای آویخت به شرطی که بین تابلوهای هر یک از هنرمندان تمایزی قائل نباشیم.

حل. با قرار دادن $n = ۷$، $n_1 = ۲$، $n_2 = ۳$، و $n_3 = ۲$ در فرمول قضیه ۶.۱ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۷!}{۲!۳!۲!} = ۲۱۰$$

▲

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها، تعیین تعداد راههای انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز بدون توجه به ترتیب انتخابشان موردنظر ماست. چنین انتخابهایی را (آرایشها) یا **ترکیبها** می‌نامند.

مثال ۱۴.۱

فردی که داده‌هایی برای سازمان بازاریابی جمع‌آوری می‌کند به چند راه می‌تواند با ۳ خانواده از ۲۰ خانوادهٔ ساکن در یک مجتمع مسکونی مصاحبه نماید؟

1. Monet 2. Renoir 3. Degas

حل. اگر به ترتیب انتخاب خانواده‌ها توجه داشته باشیم، جواب عبارت است از

$${}_{۲۰}P_{۳} = ۲۰ \cdot ۱۹ \cdot ۱۸ = ۶۸۴۰$$

اما هر مجموعه‌ای از ۳ خانواده، $۶ = ۳!$ بار به‌حساب می‌آید. اگر ما به ترتیب انتخاب خانواده‌ها توجه نداشته باشیم، در این صورت فقط $۱۱۴۰ = \frac{۶۸۴۰}{۶}$ راه وجود دارد که فردی که داده‌ها را جمع‌آوری می‌کند می‌تواند کار خود را انجام دهد. ▲

در واقع «ترکیب»، همان معنی «زیرمجموعه» را دارد، و وقتی از ما تعداد ترکیبهای r شیء منتخب از مجموعهٔ n شیء متمایز را می‌خواهند، از ما صرفاً تعداد کل زیرمجموعه‌های r شیئی را که می‌توان از مجموعهٔ n شیء متمایز انتخاب کرد می‌خواهند. به‌طور کلی در یک زیرمجموعهٔ r شیئی، $r!$ جایگشت وجود دارد، بنابراین ${}_nP_r$ جایگشت از r شیء منتخب از مجموعهٔ n شیئی، هر زیرمجموعه را $r!$ بار شامل می‌شود. لذا از تقسیم ${}_nP_r$ به $r!$ و نمایش نتیجه با نماد $\binom{n}{r}$، داریم:

قضیهٔ ۷.۱ تعداد ترکیبهای r شیء منتخب از مجموعه‌ای با n شیء متمایز، برای $r = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$ عبارت است از

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱۵.۱

در ۶ پرتاب یک سکه به چند راه ۲ شیر و ۴ خط ظاهر می‌شوند؟

حل. این پرسش هم‌ارز با این است که به چند راه مختلف ۲ پرتاب را که در آن شیر ظاهر می‌شود می‌توان انتخاب کرد؛ اگر قضیهٔ ۷.۱ را به‌کار بریم، جواب را به‌صورت

$$\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$$

به‌دست می‌آوریم. این نتیجه را می‌توانستیم با فرایند پرزحمت‌تر شمارش امکانات مختلف، یعنی HHTTTT، TTHTHT، HTHTTT، ... که در آنها H نمایش شیر و T نمایش خط است به‌دست آوریم. ▲

مثال ۱۶.۱
از چهار شیمیدان و سه فیزیکدان، چند کمیتهٔ مرکب از دو شیمیدان و یک فیزیکدان می‌توان تشکیل داد؟

حل. چون انتخاب دو نفر از ۴ نفر شیمیدان می‌تواند به $۶ = \frac{۴!}{۲!۲!} = \binom{۴}{۲}$ راه، و انتخاب یک نفر از سه فیزیکدان می‌تواند به $۳. = \frac{۳!}{۱!۲!} = \binom{۳}{۱}$ راه صورت گیرد، قضیهٔ ۱.۱ نشان می‌دهد که تعداد کمیته‌ها برابر است با $۱۸ = ۳ \cdot ۶$. ▲

ترکیبی از r شیء منتخب از مجموعه‌ای با n شیء متمایز را می‌توان یک **افراز** از n شیء به دو زیرمجموعه در نظر گرفت، که این دو زیرمجموعه به‌ترتیب شامل r شیء منتخب، و $n - r$ شیء باقیمانده باشد. اغلب با مسألهٔ کلیتر افراز مجموعه‌ای از n شیء متمایز به k زیرمجموعه سروکار داریم، که مستلزم آن است که هریک از n شیء به یک و تنها به یک زیرمجموعه متعلق باشد.* ترتیب اشیاء داخل هر زیرمجموعه اهمیتی ندارد.

مثال ۱۷.۱
مجموعه‌ای از چهار شیء را به چند راه می‌توان به سه زیرمجموعه که به‌ترتیب شامل دو، یک و یک شیء باشند افراز کرد؟

حل. چهار شیء را با a، b، c، و d نمایش می‌دهیم، با شمارش درمی‌یابیم که دوازده امکان به‌شرح زیر وجود دارند:

$$\begin{array}{cccc} ab|c|d & ab|d|c & ac|b|d & ac|d|b \\ ad|b|c & ad|c|b & bc|a|d & bc|d|a \\ bd|a|c & bd|c|a & cd|a|b & cd|b|a \end{array}$$

تعداد افرازها برای این مثال را با نماد

$$\binom{۴}{۲, ۱, ۱} = ۱۲$$

نشان می‌دهند، که در آن عدد بالایی معرف تعداد کل اشیاء و اعداد پایینی معرف تعداد اشیایی است که به‌ترتیب در هر زیرمجموعه قرار می‌گیرند. ▲

اگر نمی‌خواستیم همهٔ امکانات را در مثال قبل بشماریم، می‌توانستیم استدلال کنیم دو شیئی را که در اولین زیرمجموعه قرار می‌گیرند می‌توان به $۶ = \binom{۴}{۲}$ راه انتخاب کرد، شیئی را که در دومین

* به‌صورت نمادی زیرمجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$، ... ، و A_k افرازی از مجموعهٔ A را تشکیل می‌دهند اگر $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_k = A$ و برای هر $i \neq j$، $A_i \cap A_j = \phi$.

زیرمجموعه قرار می‌گیرد می‌توان به $۲ = \binom{۲}{۱}$ راه انتخاب کرد، و شیئی را که در سومین زیرمجموعه قرار می‌گیرد می‌توان به $۱ = \binom{۱}{۱}$ راه برگزید. پس، بنابر قضیهٔ ۲.۱، کلاً $۱۲ = ۱ \cdot ۲ \cdot ۶$ افراز وجود دارند. با تعمیم این استدلال، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۸.۱ تعداد راههای افراز مجموعه‌ای از n شیء متمایز به k زیرمجموعه با $n_۱$ شیء در اولین، $n_۲$ شیء در دومین، ... و n_k شیء در kامین زیرمجموعه، برابر است با

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, \cdots, n_k} = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_k!}$$

برهان. چون $n_۱$ شیئی را که در اولین زیرمجموعه قرار می‌گیرند می‌توان به $\binom{n}{n_۱}$ راه انتخاب کرد، سپس $n_۲$ شیئی را که در دومین زیرمجموعه قرار می‌گیرند می‌توان به $\binom{n-n_۱}{n_۲}$ راه انتخاب کرد، آنگاه $n_۳$ شیئی را که در سومین زیرمجموعه قرار می‌گیرند می‌توان به $\binom{n-n_۱-n_۲}{n_۳}$ راه برگزید و قس‌علی‌هذا، بنابر قضیهٔ ۲.۱ نتیجه می‌شود که تعداد کل افرازها برابر است با

$$\begin{aligned}\binom{n}{n_۱, n_۲, \cdots, n_k} &= \binom{n}{n_۱}\binom{n-n_۱}{n_۲}\cdots\binom{n-n_۱-n_۲-\cdots-n_{k-۱}}{n_k} \\ &= \frac{n!}{n_۱!(n-n_۱)!}\frac{(n-n_۱)!}{n_۲!(n-n_۱-n_۲)!}\cdots \\ &\quad \frac{(n-n_۱-n_۲-\cdots-n_{k-۱})!}{n_k!۰!} \\ &= \frac{n!}{n!n_۲!\cdots n_k!}\end{aligned}$$

■

مثال ۱۸.۱
به چند طریق می‌توان هفت بازرگان را که برای شرکت در جلسه‌ای سفر کرده‌اند در یک اتاق سه‌تخته و دو اتاق دوتختهٔ هتلی جای داد؟

حل. از قرار دادن $n = ۷$، $n_۱ = ۳$، $n_۲ = ۲$ و $n_۳ = ۲$ در فرمول قضیهٔ ۸.۱، نتیجه می‌شود که

$$\binom{۷}{۳, ۲, ۲} = \frac{۷!}{۳!۲!۲!} = ۲۱۰$$

▲

۳.۱ ضرایب دوجمله‌ای

اگر n، عدد صحیح مثبتی باشد و $(x+y)^n$ را جمله به جمله در هم ضرب کنیم، هر جمله حاصلضربی از xها و yهاست، به‌طوری‌که از هریک از n عامل $(x+y)$، یک x یا یک y در این جمله می‌آید. مثلاً بسط

$$\begin{aligned}(x+y)^۳ &= (x+y)(x+y)(x+y)\\ &= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\ &= x^۳+۳x^۲y+۳xy^۲+y^۳\end{aligned}$$

جملاتی به‌شکل $x^۳$، $x^۲y$، $xy^۲$، و $y^۳$ را نتیجه می‌دهد. ضرایب این جملات ۱، ۳، ۳، و ۱ هستند، و ضریب $xy^۲$، برای مثال برابر $۳=\binom{۳}{۲}$، یعنی تعداد راههایی است که می‌توان دو عاملی که yها را می‌دهند انتخاب کرد. همین‌طور ضریب $x^۲y$ برابر $۳=\binom{۳}{۱}$، یعنی تعداد راههایی است که می‌توان یک عامل فراهم‌کنندهٔ y را انتخاب کرد، و ضرایب $x^۳$ و $y^۳$ به‌ترتیب $۱=\binom{۳}{۰}$ و $۱=\binom{۳}{۳}$ هستند.

کلیتر آنکه اگر n عددی صحیح و مثبت باشد و $(x+y)^n$ را جمله به جمله درهم ضرب کنیم، ضریب $x^{n-r}y$ برابر $\binom{n}{r}$، یعنی تعداد راههایی است که می‌توان r عامل فراهم‌کنندهٔ yها را انتخاب کرد. از این‌رو $\binom{n}{r}$ را **ضریب دوجمله‌ای** می‌نامیم. حال می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم:

قضیهٔ ۹.۱ برای هر عدد صحیح مثبت n، $(x+y)^n=\sum_{r=۰}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$

(برای خوانندگانی که با نماد $\sum$ آشنا نیستند، توضیح مختصری در پیوست آخر کتاب داده شده است.)

محاسبهٔ ضرایب دوجمله‌ای را اغلب با استفاده از سه قضیهٔ زیر می‌توان ساده کرد.

قضیهٔ ۱۰.۱ برای تمام اعداد صحیح مثبت n، و $r=۰,۱,۲,\cdots,n$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

برهان. می‌توانیم استدلال کنیم که وقتی زیرمجموعه‌ای از r شیء را از مجموعهٔ n شیء متمایز انتخاب می‌کنیم، زیرمجموعه‌ای با $n-r$ شیء باقی می‌ماند، و بنابراین راههای باقی‌ماندن (یا انتخاب کردن) $n-r$ شیء به تعداد راههای انتخاب r شیء است. برای اینکه قضیه را به‌صورت جبری ثابت کنیم، می‌نویسیم

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

■

از قضیهٔ ۱.۱۰ نتیجه می‌شود که اگر ضرایب دوجمله‌ای را وقتی n زوج است برای $r = ۰, ۱, \cdots, \frac{n}{۲}$، و وقتی n فرد است، برای $r = ۰, ۱, \cdots, \frac{n-۱}{۲}$ محاسبه کنیم، ضرایب دوجمله‌ای باقی‌مانده را می‌توان با استفاده از قضیه به‌دست آورد.

مثال ۱.۱۹

به فرض اینکه $\binom{۴}{۰} = ۱$، $\binom{۴}{۱} = ۴$، و $\binom{۴}{۲} = ۶$ مقادیر $\binom{۴}{۳}$ و $\binom{۴}{۴}$ را بیابید.

حل. $\binom{۴}{۳} = \binom{۴}{۴-۳} = \binom{۴}{۱} = ۴$، و $\binom{۴}{۴} = \binom{۴}{۴-۴} = \binom{۴}{۰} = ۱$. ▲

مثال ۱.۲۰

به فرض اینکه $\binom{۵}{۰} = ۱$، $\binom{۵}{۱} = ۵$، و $\binom{۵}{۲} = ۱۰$، مقادیر $\binom{۵}{۳}$، $\binom{۵}{۴}$ و $\binom{۵}{۵}$ را بیابید.

حل. $\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۵-۳} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$، $\binom{۵}{۴} = \binom{۵}{۵-۴} = \binom{۵}{۱} = ۵$، و $\binom{۵}{۵} = \binom{۵}{۵-۵} = \binom{۵}{۰} = ۱$
▲

دقیقاً به‌همین طریق است که باید قضیهٔ ۱.۱۰ را در ارتباط با جدول VII آخر کتاب به‌کار بریم.

مثال ۱.۲۱

مقادیر $\binom{۲۰}{۱۲}$ و $\binom{۱۷}{۱۰}$ را بیابید.

حل. چون $\binom{۲۰}{۱۲}$ در جدول VII داده نشده است، برای یافتن $\binom{۲۰}{۱۲}$، برابری $\binom{۲۰}{۱۲} = \binom{۲۰}{۸}$ را به‌کار می‌بریم، $\binom{۲۰}{۸}$ را می‌یابیم و به‌دست می‌آوریم $\binom{۲۰}{۱۲} = ۱۲۵۹۷۰$؛ همچنین برای یافتن $\binom{۱۷}{۱۰}$، از برابری $\binom{۱۷}{۱۰} = \binom{۱۷}{۷}$ استفاده می‌کنیم، $\binom{۱۷}{۷}$ را می‌یابیم و به‌دست می‌آوریم $\binom{۱۷}{۱۰} = ۱۹۴۴۸$. ▲

قضیهٔ ۱.۱۱ برای هر عدد صحیح مثبت n و $r = ۱, ۲, \cdots, n-۱$،

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

برهان. در $(x+y)^n$ قرار می‌دهیم $x = ۱$، و می‌نویسیم

$$\begin{aligned}(۱+y)^n &= (۱+y)(۱+y)^{n-۱}\\ &= (۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}\end{aligned}$$

ضریب y^r در $(۱+y)^n$ را با ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}$ برابر می‌گیریم. چون ضریب y^r در $(۱+y)^n$ برابر با $\binom{n}{r}$، و ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱} + y(۱+y)^{n-۱}$ برابر مجموع ضریب y^r در $(۱+y)^{n-۱}$ یعنی $\binom{n-۱}{r}$ و ضریب $y^{r-۱}$ در $(۱+y)^{n-۱}$ یعنی $\binom{n-۱}{r-۱}$ است، به‌دست می‌آوریم

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

که برهان را کامل می‌کند. ■

به روشی دیگر، هریک از n شیء را اختیار می‌کنیم. اگر این شیء را در میان r شیء منظور نکنیم $\binom{n-۱}{r}$ راه برای انتخاب r شیء وجود دارد؛ اگر این شیء را در میان r شیء منظور کنیم، $\binom{n-۱}{r-۱}$ راه برای انتخاب $r - ۱$ شیء دیگر وجود دارد. بنابراین $\binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$ راه برای انتخاب r شیء موجود است؛ یعنی

$$\binom{n}{r} = \binom{n-۱}{r} + \binom{n-۱}{r-۱}$$

قضیهٔ ۱۱.۱ را می‌توان با بیان ضرایب دوجمله‌ای به‌صورت فاکتوریل در هر دو طرف معادله، و سپس انجام اعمال جبری نیز ثابت کرد، ولی ما این اثبات را در تمرین ۱۲.۱، به خواننده واگذار می‌کنیم. کاربردی مهم از قضیهٔ ۱۱.۱، در تمرین ۱۱.۱ داده شده است، که این کاربرد، پایه‌ای برای ساختن آنچه به **مثلث پاسکال** معروف است فراهم می‌کند.

برای بیان سومین قضیه دربارهٔ ضرایب دوجمله‌ای، تعریف می‌کنیم که هرگاه n، یک عدد صحیح مثبت و r، عددی صحیح و مثبت و بزرگتر از n باشد، $\binom{n}{r} = ۰$. (بدیهی است امکان ندارد بتوانیم زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ای انتخاب کنیم که تعداد عناصرش از خود مجموعه بیشتر باشد.)

قضیهٔ ۱۲.۱

$$\sum_{r=۰}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

برهان. از همان تکنیکی که در برهان قضیهٔ ۱۱.۱ به‌کار بردیم استفاده می‌کنیم. این قضیه را با برابر گرفتن ضرایب y^k در عبارتهای دو طرف معادلهٔ

$$(۱+y)^{m+n} = (۱+y)^m(۱+y)^n$$

ثابت می‌کنیم. ضریب y^k در $(۱+y)^{m+n}$ برابر $\binom{m+n}{k}$ است، و ضریب y^k در

$$\begin{aligned}(۱+y)^m(۱+y)^n = &\left[\binom{m}{۰} + \binom{m}{۱}y + \cdots + \binom{m}{m}y^m\right]\\ &\times \left[\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱}y + \cdots + \binom{n}{n}y^n\right]\end{aligned}$$

مجموع حاصلضربهایی است که از ضرب جملهٔ ثابت اولین عامل در ضریب y^kی عامل دوم، ضرب ضریب yی اولین عامل در ضریب $y^{k-۱}$ عامل دوم، ... ، و ضرب ضریب y^kی اولین عامل در جملهٔ ثابت عامل دوم به‌دست می‌آید. بنابراین ضریب y^k در $(۱+y)^m(۱+y)^n$ برابر است با

$$\begin{aligned}\binom{m}{۰} + \binom{n}{k} + \binom{m}{۱}\binom{n}{k-۱} + \binom{m}{۲}\binom{n}{k-۲} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{۰}\\ = \sum_{r=۰}^{k}\binom{m}{r}\binom{n}{k-r}\end{aligned}$$

و برهان کامل می‌شود. ■

مثال ۲۲.۱

درستی قضیهٔ ۱۲.۱ را به‌صورت عددی برای $m=۲$، $n=۳$ و $k=۴$ تحقیق کنید.

حل. با قرار دادن این مقادیر به‌دست می‌آوریم

$$\binom{۲}{۰}\binom{۳}{۴} + \binom{۲}{۱}\binom{۳}{۳} + \binom{۲}{۳}\binom{۳}{۳} + \binom{۲}{۳}\binom{۳}{۱} + \binom{۲}{۴}\binom{۳}{۰} = \binom{۵}{۴}$$

و چون $\binom{۳}{۴}$، $\binom{۲}{۳}$، و $\binom{۲}{۴}$ برحسب تعریف صفحهٔ قبل برابر صفرند، معادله به‌صورت زیر خلاصه می‌شود

$$\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۳} + \binom{۲}{۲}\binom{۳}{۲} = \binom{۵}{۴}$$

که دو طرف باهم برابرند، زیرا $5 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2$. ▲

با استفاده از قضیهٔ ۸.۱ می‌توانیم بحثمان را به **ضرایب چندجمله‌ای**، یعنی به ضرایبی که از بسط $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ حاصل می‌شوند تعمیم دهیم. ضریب چندجمله‌ای جملهٔ $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ در بسط $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ برابر است با

$$\binom{n}{r_1, r_2, \cdots, r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!}$$

مثال ۲۳.۱
در بسط $(x_1 + x_2 + x_3)^6$ ضریب $x_1^3 x_2 x_3^2$ چیست؟

حل. با قرار دادن مقادیر $n = 6$، $r_1 = 3$، $r_2 = 1$، و $r_3 = 2$ در فرمول بالا، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{6!}{3!1!2!} = 60$$

▲

تمرینها

۱.۱ عملی شامل دو مرحله است، که اولین مرحله می‌تواند به n_1 راه انجام شود. اگر اولین مرحله به iامین راه صورت گیرد، مرحلهٔ دوم می‌تواند به n_{2i} راه انجام گیرد.*

(الف) فرمولی برای تعداد کل راههایی که تمام عمل می‌تواند طی آنها انجام شود بیابید.

(ب) دانشجویی می‌تواند در روز معینی، ۰، ۱، ۲، یا ۳ ساعت برای امتحان درس آمار مطالعه کند. با استفاده از فرمولی که در قسمت (الف) به‌دست آمد تحقیق کنید که ۱۳ راه وجود دارد که دانشجو می‌تواند در دو روز متوالی حداکثر ۴ ساعت برای امتحان مطالعه کند.

۲.۱ با رجوع به تمرین قبل، تحقیق کنید که اگر n_{2i} برابر مقدار ثابت n_2 باشد، فرمول حاصل در قسمت (الف) به فرمول ۱.۱ تبدیل می‌شود.

۳.۱ با رجوع به تمرین ۱.۱، فرض کنید که مرحلهٔ سومی وجود دارد، و اگر مرحلهٔ اول به iامین راه صورت گیرد و مرحلهٔ دوم به jامین راه، مرحلهٔ سوم را می‌توان به n_{3ij} راه صورت داد.

(الف) تحقیق کنید که کل عمل را می‌توان به

$$\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_{2i}} n_{3ij}$$

راه مختلف انجام داد.

---

* طرز استفاده از اندیسهای دوگانه در پیوست آخر کتاب توضیح داده شده است.

(ب) با رجوع به قسمت (ب)ی تمرین ۱.۱، فرمول قسمت (الف) را برای تحقیق این واقعیت به‌کار برید که ۳۲ راه وجود دارند که دانشجو می‌تواند حداکثر ۴ ساعت در سه روز متوالی برای امتحان مطالعه کند.

۴.۱ با رجوع به تمرین قبل، تحقیق کنید که اگر $n_{۲i}$ برابر با مقدار ثابت $n_۲$ و $n_{۳ij}$ برابر با مقدار ثابت $n_۳$ باشد، فرمول حاصل در قسمت (الف)، به فرمول مربوط به قضیهٔ ۲.۱ تبدیل می‌شود.

۵.۱ در یک مسابقهٔ بسکتبال حذفی دو تیمی، برندهٔ بازی، اولین تیمی است که m دور برنده می‌شود.

(الف) تعداد بازیهای مستلزم m، $m+۱$، . . . ، $۲m-۱$ دور را جداگانه شمارش کنید و نشان دهید که کل تعداد برآمدهای مختلف (دنباله‌های برد و باخت یک تیم) برابر است با

$$۲\left[\binom{m-۱}{m-۱}+\binom{m}{m-۱}+\cdots+\binom{۲m-۲}{m-۱}\right]$$

(ب) چند برآمد مختلف در «۲ تا از ۳ تا» بازی، «۳ تا از ۵ تا» بازی، و «۴ تا از ۷ تا» بازی وجود دارند؟

۶.۱ وقتی n بزرگ است، $n!$ را می‌توان به‌وسیلهٔ عبارت

$$\sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

که **فرمول استرلینگ**[1] خوانده می‌شود تقریب کرد، در این فرمول، e پایهٔ لگاریتم طبیعی است. (راهی برای استخراج این فرمول را می‌توان در کتاب فلر[2] که در منابع آخر این فصل ذکر شده است، یافت.)

(الف) فرمول استرلینگ را برای تعیین تقریبهایی از !۱۰ و !۱۲ به‌کار برید، و به‌وسیلهٔ مقایسهٔ آنها با مقادیر دقیقشان که در جدول VII داده شده‌اند درصد خطای این تقریبها را بیابید.

(ب) برای به‌دست آوردن تقریبی از تعداد راههایی که می‌توان ۱۳ کارت را از یک دسته کارت* ۵۲تایی بیرون کشید، فرمول استرلینگ را به‌کار برید.

۷.۱ از فرمول استرلینگ (تمرین قبل را ببینید) استفاده کرده نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{۲n}{n}\sqrt{\pi n}}{۲^{۲n}}=۱$$

۸.۱ در بعضی مسائل در **نظریهٔ اشغال** با تعداد راههایی سروکار داریم که می‌توان تعداد معینی از اشیای متمایز را بین تعدادِ مفروضی از افراد، آوندها، جعبه‌ها، یا خانه‌ها توزیع کرد. برای تعداد راههایی که می‌توان r شیء متمایز را در n خانه توزیع کرد عبارتی بیابید، و آن‌را برای یافتن تعداد راههایی که سه کتاب مختلف را می‌توان بین دوازده دانشجوی درس ادبیات انگلیسی توزیع کرد، به‌کار برید.

---
1. Stirling   2. W. Feller

* منظور از یک دسته کارت، مجموعه‌ای از ۵۲ کارت سفید رنگ کاملاً مشابه است که روی سیزده‌تای آنها از ۱ تا ۱۳ به رنگ سیاه، روی سیزده‌تای دوم از ۱ تا ۱۳ به رنگ قرمز، روی سیزده‌تای سوم از ۱ تا ۱۳ به رنگ سبز، و روی سیزده‌تای آخر، از ۱ تا ۱۳ به رنگ آبی شماره‌گذاری شده است. ـ م.

۹.۱ *در بعضی از مسائل نظریهٔ اشغال با تعداد راههایی سروکار داریم که می‌توان تعدادی از اشیای نامتمایز را بین تعدادی افراد، آوندها، جعبه‌ها یا خانه‌ها توزیع کرد. برای تعداد راههایی که r شیء* نامتمایز را می‌توان در n خانه توزیع کرد عبارتی بیابید، و آن را برای یافتن تعداد راههایی که یک نانوا می‌تواند پنج قرص (نامتمایز) نان را به سه مشتری بفروشد به‌کار برید. (راهنمایی: می‌توانیم استدلال کنیم که $\mathrm{L|LLL|L}$ معرّف حالتی است که سه مشتری به‌ترتیب یک قرص، سه قرص، و یک قرص نان می‌خرند، و $\mathrm{LLLL||L}$ معرف حالتی است که سه مشتری ۴ قرص، هیچ قرص، و یک قرص نان می‌خرند. پس، باید تعداد راههایی را جستجو کنیم که می‌توانیم پنج L و دو خط قائم را آرایش دهیم.)

۱۰.۱ در بعضی از مسائل نظریهٔ اشغال، با تعداد راههایی سروکار داریم که می‌توان تعدادی اشیاء نامتمایز را بین افراد، آوندها، جعبه‌ها، یا خانه‌ها، با حداقل یک شیء در هر خانه، توزیع کنیم. عبارتی برای تعداد راههایی که r شیء نامتمایز را می‌توان در n خانه، با حداقل یک شیء در هر خانه، توزیع کرد بیابید، و قسمت عددی تمرین قبل را به شرط اینکه هر مشتری حداقل یک قرص نان دریافت کند، مجدداً حل کنید.

۱۱.۱ وقتی جدولی در دسترس نیست، گاهی بهتر است ضرایب دوجمله‌ای را با آرایش زیر که **مثلث پاسکال** نام دارد تعیین کنیم:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & ۱ & & & & & \\
 & & & & ۱ & & ۱ & & & & \\
 & & & ۱ & & ۲ & & ۱ & & & \\
 & & ۱ & & ۳ & & ۳ & & ۱ & & \\
 & ۱ & & ۴ & & ۶ & & ۴ & & ۱ & \\
۱ & & ۵ & & ۱۰ & & ۱۰ & & ۵ & & ۱ \\
\end{array}
$$

. . . .

که در آن هر سطر با ۱ شروع و به ۱ ختم می‌شود، و هر درایهٔ دیگر، مجموع نزدیکترین دو درایه‌ای است که در سطر بلافاصله بالای آن قرار دارند. در این مثلث، rامین درایه از nامین سطر، برابر ضرایب دوجمله‌ای $\binom{n-۱}{r-۱}$ است. دو سطر بعدی (هفتم و هشتم) مثلث بالا را بنا کنید، و بسط دوجمله‌ایهای $(x+y)^۶$ و $(x+y)^۷$ را بنویسید.

۱۲.۱ با بیان تمام ضرایب دوجمله‌ای برحسب فاکتوریلها و آنگاه ساده کردن آنها به‌صورت جبری، قضیهٔ ۱۱.۱ ثابت کنید.

۱۳.۱ با بیان ضرایب دوجمله‌ای برحسب فاکتوریلها و ساده کردن آنها به‌طور جبری، نشان دهید که

(الف) $\binom{n}{r} = \frac{n-r+۱}{r} \cdot \binom{n}{r-۱}$؛

(ب) $\binom{n}{r} = \frac{n}{n-r} \cdot \binom{n-۱}{r}$؛

(ج) $n\binom{n-۱}{r} = (r+۱)\binom{n}{r+۱}$.

۱۴.۱ در فرمول قضیهٔ ۹.۱، مقادیر مناسبی به‌جای x و y قرار دهید و نشان دهید که

(الف) $\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$؛

(ب) $\sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0$؛

(ج) $\sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(a-1)^r = a^n$.

۱۵.۱ با به‌کار بردن مکرر قضیهٔ ۱۱.۱، نشان دهید که

$$\binom{n}{r} = \sum_{i=1}^{r+1} \binom{n-i}{r-i+1}$$

۱۶.۱ با به‌کار بردن قضیهٔ ۱۲.۱ نشان دهید که

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

۱۷.۱ با قرار دادن $x = 1$ در رابطهٔ قضیهٔ ۹.۱، و سپس مشتقگیری از عبارتهای دو طرف نسبت به y، و بالاخره قرار دادن $y = 1$، نشان دهید که $\sum\limits_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$.

۱۸.۱ با استفاده از قسمت (الف) تمرین ۱۴.۱ و قسمت (ج) تمرین ۱۳.۱، تمرین قبل را مجدداً حل کنید.

۱۹.۱ اگر n، عدد صحیح مثبت یا صفر نباشد، بسط دوجمله‌ای $(1+y)^n$ به‌ازای $-1 < y < 1$، سری نامتناهی

$$1 + \binom{n}{1}y + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \cdots + \binom{n}{r}y^r + \cdots$$

را نتیجه می‌دهد، که در آن به‌ازای $r = 1, 2, 3, \cdots$،

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r-1)}{r!}$$

این تعریف تعمیم یافتهٔ ضرایب دوجمله‌ای را (که با تعریف ضرایب دوجمله‌ای برای مقادیر صحیح و مثبت n، مذکور در صفحهٔ ۱۷، هماهنگی دارد) برای محاسبهٔ موارد زیر به‌کار برید

(الف) $\binom{\frac{1}{2}}{4}$ و $\binom{-3}{3}$؛

(ب) $\sqrt{5}$، با نوشتن $\sqrt{5} = 2(1 + 1/4)^{1/2}$، و با استفاده از چهار جملهٔ اول بسط دوجمله‌ای $(1 + 1/4)^{1/2}$.

۲۰.۱ با رجوع به تعریف تعمیم یافتهٔ ضرایب دوجمله‌ای در تمرین قبل، نشان دهید که

(الف) $\binom{-1}{r} = (-1)^r$؛

(ب) به ازای $n > 0$، $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$.

۲۱.۱ در بسط $(x+y+z)^8$، ضریب $x^2y^3z^3$ را بیابید.

۲۲.۱ در بسط $(2x+3y-4z+w)^9$، ضریب $x^3y^2z^3$ را بیابید.

۲۳.۱ با بیان تمام ضرایب دوجمله‌ای برحسب فاکتوریلها و ساده کردن آنها به‌طور جبری، نشان دهید که

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \ldots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \ldots, n_k} + \cdots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \ldots, n_k-1}$$

کاربردها

۲۴.۱ بین منزل و محل کار شخصی چهار مسیر A، B، C، و D وجود دارند، اما مسیر B یکطرفه است، به‌طوری که وی نمی‌تواند آن را برای رفتن به محل کار انتخاب کند، و مسیر C یکطرفه است به‌قسمی که او نمی‌تواند آن را برای برگشت به منزل برگزیند.

(الف) نموداری درختی رسم کنید که راههای مختلفی را که این شخص می‌تواند به محل کار برود و برگردد، نشان دهد.

(ب) نموداری درختی رسم کنید که راههای مختلفی را که این شخص می‌تواند به محل کار خود برود و برگردد نشان دهد، بدون اینکه راههای رفت و برگشت یکی باشند.

۲۵.۱ شخصی که ۲ تومان دارد روی پرتاب سکه‌ای به میزان یک تومان برای برد یا باخت شرط‌بندی می‌کند، و شرط‌بندی را تا وقتی که پول دارد ادامه می‌دهد. نموداری درختی رسم کنید که حالتهای مختلفی را که در چهار پرتاب اول رخ می‌دهند نشان دهد. بعد از پرتاب چهارم سکه، در چند مورد

(الف) دقیقاً نه می‌برد و نه می‌بازد؛

(ب) دقیقاً ۲ تومان می‌برد؟

۲۶.۱ فرض کنید که در سری بازیهای جهانی بیس‌بال (که در آن برنده، اولین تیمی است که در چهار بازی برنده می‌شود) تیم قهرمان ملی از تیم قهرمان امریکا ۳ به ۲ جلو است. نموداری درختی رسم کنید که تعداد بازیهایی را نشان دهد که این تیمها ممکن است بازنده یا برندهٔ بازی باقی‌مانده یا بازیهای باقی‌مانده شوند.

۲۷.۱ بازیکنی در یک زمین بازی گلف دو چوگان همانند برای خانمها نگهداری می‌کند. در انتهای هر روز، اگر و تنها اگر هر دوی آنها را بفروشد دو چوگان (برای دریافت آنها در صبح روز بعد) سفارش می‌دهد. برای نشان دادن اینکه اگر او از شنبه با دو چوگان شروع کند، روی هم هشت راه مختلف وجود دارند که می‌تواند در دو روز اول هفته چوگانها را بفروشد، نموداری درختی رسم کنید.

۲۸.۱ شمارش تعداد برآمدها در بازیهای شانسی قرنها وسیلهٔ سرگرمی عموم بوده است. این

موضوع نه فقط به دلیل قماربازی، بلکه به دلیل اینکه برآمدهای بازیهای شانسی را اغلب به‌عنوان مشیت الهی تعبیر می‌کردند مورد توجه بوده است. مثلاً حدود هزار سال قبل اسقفی در جایی که بلژیک فعلی است معین کرد که برای ظاهر شدن نتیجهٔ سه تاس، به شرط اینکه نتیجهٔ کلی ریختن سه‌تاس و نه نتیجهٔ ریختن هر تاس مورد توجه باشد، ۵۶ راه مختلف وجود دارند. او به هر یک از مکانها فضیلتی را نسبت داد و هر گناهکاری مجبور بود حواس خود را مدتی دربارهٔ فضیلت متناظر با نتیجهٔ ریختن تاس متمرکز کند.

(الف) تعداد راههایی را بیابید که سه تاس می‌توانند با خالهای همانند ظاهر شوند.

(ب) تعداد راههایی را بیابید که دو تاس می‌توانند با خالهای همانند ظاهر شوند اما تاس سوم خالهای مختلف داشته باشد.

(ج) تعداد راههایی را بیابید که هر سه تاس می‌توانند با خالهای متفاوت ظاهر شوند.

(د) برای تحقیق درستی محاسبات اسقف که جمعاً ۵۶ راه وجود دارد نتایج قسمتهای (الف) و (ب) و (ج) را به‌کار برید.

۲۹.۱ اگر NCAA* برای میزبانی مسابقات قهرمانی بین دانشگاهی تنیس در ۱۹۹۴ و ۱۹۹۵ از ۶ دانشگاه داوطلب داشته باشد، به چند راه می‌تواند میزبانهای این مسابقات را انتخاب کند،

(الف) اگر قرار باشد که هر دو مسابقه در یک دانشگاه برگزار نشوند؛

(ب) اگر امکان داشته باشد که هر دو مسابقه در یک دانشگاه برگزار شوند؟

۳۰.۱ در مسابقهٔ جهانی انتخاب بهترین فیلم، پنج نامزد نهایی از کشورهای A، B، U، J، و N هستند. داوران به چند طریق می‌توانند

(الف) برنده، و نفر دوم؛

(ب) برنده، نفر دوم، و نفر سوم؛

را انتخاب کنند؟

۳۱.۱ در انتخابی مقدماتی، چهار داوطلب برای پست شهرداری، پنج داوطلب برای پست خزانه‌داری، و دو داوطلب برای پست دادستانی وجود دارند.

(الف) یک رأی‌دهنده به چند طریق می‌تواند رأی خود را به سه نفر، یک نفر برای هر پست، از این داوطلبان بدهد؟

(ب) یک نفر به چند طریق می‌تواند رأی دهد، هرگاه از حق رأی ندادن خود به هر یک یا تمام این مقامات استفاده کند؟

۳۲.۱ آزمونی چندجوابی شامل ۱۵ سؤال سه جوابی است. یک دانشجو به چند طریق مختلف می‌تواند به این سؤالها جواب دهد؟

۳۳.۱ در بهای یک تور، بازدید چهار شهر منتخب از ده شهر منظور شده است. به چند طریق مختلف می‌توان برنامهٔ چنین توری را تنظیم کرد، اگر

(الف) ترتیب در بازدیدها مطرح باشد؛

* نماد NCAA مخفف نام National Collegiate Athletic Association است.

(ب) ترتیب در بازدیدها مطرح نباشد؟

۳۴.۱ یک کارگردان تلویزیون به چند طریق می‌تواند شش پیام بازرگانی مختلف را در شش فاصلهٔ زمانی که در طول برنامه‌ای یک ساعته برای پیامها تخصیص داده شده‌اند، برنامه‌ریزی کند؟

۳۵.۱ مدیر تلویزیون در تمرین قبل، به چند طریق می‌تواند شش فاصلهٔ زمانی برای پیامهای بازرگانی برنامه‌ریزی کند، اگر تهیه‌کنندهٔ برنامه سه پیام مختلف بازرگانی داشته باشد، و هر پیام دوبار نشان داده شود؟

۳۶.۱ در تمرین ۳۴.۱، مدیر تلویزیون به چند طریق می‌تواند شش فاصلهٔ زمانی برای پیامهای بازرگانی برنامه‌ریزی کند، اگر تهیه‌کنندهٔ برنامه دو پیام بازرگانی مختلف داشته باشد و هر پیام سه بار نشان داده شود؟

۳۷.۱ به چند طریق پنج نفر برای سوار شدن به اتوبوس می‌توانند صف ببندند؟ اگر دو نفر از پنج نفر از اینکه کنار هم باشند ابا کنند، به چند طریق صف‌بندی میسر است؟

۳۸.۱ هشت نفر، به چند راه می‌توانند دایره‌ای برای یک رقص محلی تشکیل دهند؟

۳۹.۱ حروف کلمهٔ (الف) great؛ (ب) greet، چند جایگشت دارند؟

۴۰.۱ چند جایگشت متمایز از حروف کلمهٔ «ایرانیها» وجود دارد؟ چندتا از این جایگشتها با حرف «ا» شروع و به حرف «ا» ختم می‌شوند؟

۴۱.۱ تیم فوتبال دانشکده‌ای ده بازی در طول یک فصل انجام می‌دهد. به چند طریق این بازیهای فصلی به پنج برد، چهار باخت و یک مساوی می‌انجامند؟

۴۲.۱ اگر هشت نفر شام را با هم صرف کنند، به چند طریق می‌توانند ۳ غذای مرغ، ۴ غذای ششلیک، و یک غذای ماهی سفارش دهند؟

۴۳.۱ در مثال ۴.۱ نشان دادیم که به یک آزمون دو جوابی که شامل ۲۰ سؤال است به ۱۰۴۸۵۷۶ طریق مختلف می‌توان پاسخ داد. به چند طریق می‌توان سؤالها را به یکی از دو حالت درست یا غلط علامت زد، به قسمی که

(الف) ۷ تا درست و ۱۳ تا غلط باشند؛

(ب) ۱۰ تا درست و ۱۰ تا غلط باشند؛

(ج) حداقل ۱۷ تا درست باشند؟

۴۴.۱ بین هفت نامزد دو پست خالی در انجمن شهری سه مرد و چهار زن وجود دارند. به چند طریق این دو پست خالی را می‌توان پر کرد

(الف) با هر دو نفر از هفت نامزد؛

(ب) با هر دو نفر از چهار زن؛

(ج) با یکی از مردان و یکی از زنها؟

۴۵.۱ محموله‌ای از ده دستگاه تلویزیون شامل سه دستگاه معیوب است. به چند طریق هتلی می‌تواند چهار تا از این دستگاهها را بخرد و حداقل دو تا از دستگاههای معیوب را دریافت کند؟

۴۶.۱ خانمی ۴ دامن، ۷ بلوز، و ۳ کفش دارد. به چند طریق می‌تواند دو دامن، سه بلوز، و یک

کفش را برای مسافرتی انتخاب کند؟

۴۷.۱ به چند طریق می‌توان از یک دسته کارت ۵۲ تایی، ۱۳ کارت انتخاب کرد که شامل ۵ کارت سیاه، ۳ کارت قرمز، ۳ کارت سبز، و ۲ کارت آبی باشد؟

۴۸.۱ تعداد راههایی را بیابید که می‌توان یک نمرهٔ الف، سه نمرهٔ ب، دو نمرهٔ ج، و یک نمرهٔ ه را بین هفت دانشجویی که یک درس آمار را اختیار کرده‌اند، توزیع کرد.

۴۹.۱ یک گردآورندهٔ تابلوهای نقاشی که ده تابلو از نقاشان مشهور دارد می‌خواهد وصیتنامه‌ای تهیه کند. به چند راه مختلف می‌تواند این تابلوها را به سه وارث خود واگذار نماید؟

۵۰.۱ یک دوستدار بازی بیس‌بال یک جفت بلیط برای شش بازی مختلف باشگاههای شیکاگو دارد. اگر پنج دوست داشته باشد که بازی بیس‌بال را دوست دارند، به چند راه مختلف می‌تواند یکی از آنها را به هریک از شش بازی ببرد.

۵۱.۱ یک نانوا، در پایان روز هر چه نان فروش نرفته دارد برای کمک به بینوایان به نوانخانه‌ها می‌دهد. اگر در پایان روزی، ۱۲ نان برای او مانده باشد، به چند راه مختلف می‌تواند این ۱۲ نان را بین شش نوانخانه توزیع کند؟

۵۲.۱ با رجوع به تمرین قبل، نانوا به چند راه مختلف می‌تواند ۱۲ نان را توزیع کند تا هر شش نوانخانه حداقل یک نان دریافت کنند؟

۵۳.۱ دریک صبح جمعه فروشگاه یک باشگاه تنیس ۱۴ جعبهٔ همانند توپ تنیس دارد. اگر همهٔ آنها تا شب یکشنبه فروخته شوند و مایل باشیم بدانیم که فروش روزانهٔ آنها به چند راه ممکن بوده است، به چند راه مختلف توپهای تنیس ممکن است در روزهای جمعه، شنبه، یکشنبه به فروش رفته باشند؟

۵۴.۱ تمرین قبل را، به فرض آنکه حداقل دو تا از جعبه‌های توپ تنیس در هریک از سه روز فروخته شده باشند، دوباره حل کنید.

مراجع

بین چند کتاب معدود در زمینهٔ تاریخ آمار، کتابهای

WALKER, H. M., *Studies in the History of Statistical Method*. Baltimore: The Williams & Wilkins Company, 1929,

WESTERGAARD, H., *Contributions to the History of Statistics*. London: P. S. King & Son, 1932,

و انتشارات جدیدتر

KENDALL, M. G., and PLACKETT, R. L., eds., *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. II. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1977,

PEARSON, E. S., and KENDALL, M. G., eds., *Studies in the History of Statistics and Probability*. Darien, Conn.: Hafner Publishing Co., Inc., 1970,

PORTER, T. M., *The Rise of Statistical Thinking, 1820–1900*. Princeton: Princeton University Press, 1986,

STIGLER, S. M., *The History of Statistics*. Cambridge: Harvard University Press, 1986.

وجود دارند. مطالبی زیاد دربارهٔ روشهای ترکیبیاتی را می‌توان درکتابهای

COHEN, D. A., *Basic Techniques of Combinatorial Theory*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1978,

EISEN, M., *Elementary Combinatorial Analysis*. New York: Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1970,

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968,

NIVEN, J., *Mathematics of Choice*. New York: Random House, Inc., 1965,

ROBERTS, F. S., *Applied Combinatorics*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1984,

و درکتاب

WHITWORTH, W. A., *Choice and Chance*, 5th ed. New York: Hafner Publishing Co., Inc., 1959,

که کتابی کلاسیک در این زمینه است یافت. بحثهای پیشرفته را می‌توان در

BECKENBACH, E. F., ed., *Applied Combinatorial Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964,

DAVID, F. N., and BARTON, D. E., *Combinatorial Chance*. New York: Hafner Publishing Co., Inc., 1962,

و

RIORDAN, J., *An Introduction to Combinatorial Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1958.

پیدا کرد.

۲

احتمال

۱.۲ مقدمه

از نظر تاریخی، قدیمیترین راه اندازه‌گیری احتمالها، یعنی **مفهوم احتمال کلاسیک**، وقتی به‌کار می‌رود که نظیر آنچه در اکثر بازیهای شانسی پیش می‌آید، تمام برآمدهای ممکن همشانس باشند. در این صورت می‌توانیم بگوییم که اگر N امکان همشانس وجود داشته باشند که یکی از آنها باید رخ دهد و n تا از این امکانات به‌عنوان مساعد یا به‌عنوان «پیروزی» در نظر گرفته شوند، آنگاه احتمال یک «پیروزی» با نسبت $\frac{n}{N}$ داده می‌شود.

مثال ۱.۲
احتمال کشیدن یک کارت با شمارهٔ ۱ از یک دسته کارت ۵۲تایی چقدر است؟

حل. چون ۴ $= n$ کارت با شمارهٔ ۱ بین ۵۲ $= N$ کارت وجود دارند، بنابراین احتمال کشیدن یک کارت ۱، $\frac{۱}{۱۳} = \frac{۴}{۵۲}$ است. (البته فرض بر این است که شانس انتخاب همهٔ کارتها یکی است.) ▲

گرچه امکانات همشانس اغلب در بازیهای شانسی یافت می‌شوند، ولی در وضعیتهای بسیار گوناگونی که در آنها از وسایل بازی برای تصادفی کردن انتخابها استفاده می‌کنند، مفهوم احتمال کلاسیک به‌کار می‌رود ــ مثل وقتی که دفترهای کار را به دستیاران آموزشی از طریق قرعه‌کشی اختصاص می‌دهند، یا نظیر وقتی‌که بعضی از خانواده‌ها در یک شهرستان به طریقی انتخاب می‌شوند که همهٔ خانواده‌ها برای اینکه در مطالعهٔ نمونه‌ای گنجانیده شوند شانس یکسانی دارند، یا مثل موقعی که اجزای ماشینی را برای بازبینی به‌گونه‌ای برمی‌گزینند که تمام اجزای تولید شده، شانس برابر برای انتخاب شدن دارند و نظایر آن.

عیب عمدهٔ مفهوم احتمال کلاسیک در محدود بودن قابلیت کاربردی آن است، زیرا وضعیتهایی وجود دارند که برای آنها امکاناتی را که رخ می‌دهند نمی‌توان همشانس دانست. برای مثال اگر با این سؤال که آیا در روز معینی باران خواهد بارید یا نه مواجه باشیم، یا اگر علاقه‌مند به برآمد یک انتخابات باشیم، یا اگر دلواپس معالجهٔ بیماری فردی باشیم، با چنین وضعیتهایی سروکار داریم.

از بین مفاهیم مختلف احتمال، پرطرفدارتر از همه مفهوم **تعبیر فراوانی** است که طبق آن احتمال یک پیشامد (برآمد یا وقوع) برابر نسبت دفعاتی است که پیشامدهای از یک نوع در تکرار زیاد رخ خواهند داد. وقتی می‌گوییم احتمال اینکه هواپیمای اصفهان‌ـتهران در زمان مقرر به مقصد برسد ۸۴ر۰ است، منظور آن است که (طبق تعبیر فراوانی) چنین پروازهایی در ۸۴ درصد مواقع در زمان مقرر به مقصد می‌رسند. همین طور اگر ادارهٔ هواشناسی پیش‌بینی کند که ۳۰ درصد شانس بارندگی وجود دارد (یعنی، با احتمال ۳۰ر۰ باران خواهد بارید) منظور این است که تحت همین شرایط جوی ۳۰ درصد مواقع باران خواهد بارید. به‌طور کلیتر می‌گوییم که یک پیشامد، احتمال مثلاً ۹۰ر۰ دارد، با همان مفهومی که می‌گوییم ماشینمان در هوای سرد ۹۰ درصد مواقع روشن می‌شود. نمی‌توانیم تضمین کنیم که در روز معینی چه پیش خواهد آمد ــ ماشین ممکن است روشن شود، شاید هم روشن نشود. اما اگر در طول یک دورهٔ طولانی زمانی تعداد دفعاتی را که ماشین در هوای سرد روشن می‌شود ثبت کنیم، درمی‌یابیم که نسبت «پیروزیها» خیلی نزدیک ۹۰ر۰ است.

دیدگاه دیگری که این روزها طرفداران بیشتری می‌یابد، تعبیر احتمالها به‌عنوان **ارزیابیهای ذهنی یا شخصی** است. چنین احتمالهایی قدرت باور شخص را دربارهٔ عدم حتمیتهایی که متضمن *این احتمالها* هستند بیان می‌کنند، و به‌خصوص وقتی به‌کار می‌روند که شواهد کمی وجود دارند و یا *ابداً* شواهد مستقیمی دردست نیستند، به‌طوری که چاره‌ای جز در نظر گرفتن شواهد جنبی (غیرمستقیم)، «حدسهای حساب شده» و شاید شهود و سایر عوامل ذهنی نیست.

روشی که برای بیان احتمال در این فصل به‌کار خواهیم برد **روش اصل موضوعی** است، که در آن، احتمالها به‌عنوان «موجودات ریاضی» تعریف شده‌اند که مطابق با برخی قواعد خوش‌تعریف، رفتار می‌کنند. بنابراین هریک از مفاهیم احتمال یا تعبیرهای فوق‌الذکر را، مادامی که با این قواعد سازگارند، می‌توان در کاربردها مورد استفاده قرار داد.

۲.۲ فضاهای نمونه‌ای

چون احتمالها همیشه به وقوع یا عدم وقوع پیشامدها مربوط‌اند، بهتر است که ابتدا منظورمان را از پیشامد و اصطلاحات آزمایش، برآمد و فضای نمونه‌ای که در ارتباط با پیشامدند توضیح دهیم.

در آمار متداول است که به هر فرایند مشاهده یا اندازه‌گیری عنوان **آزمایش** را اطلاق می‌کنند. با این مفهوم، یک آزمایش، ممکن است این فرایند ساده باشد که تحقیق کنیم آیا کلید برق باز است یا بسته؛ ممکن است شمارش تعداد معایب یک قواره پارچه باشد؛ یا ممکن است عبارت از فرایند خیلی پیچیدهٔ تعیین جرم یک الکترون باشد. نتایجی که از یک آزمایش به‌دست می‌آیند، خواه خواندن اندازه‌ها یا شمارش پاسخهای «بله» یا «نه» و خواه مقادیر حاصل از محاسباتی گسترده باشند، **برآمدهای** آزمایش نامیده می‌شوند.

مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن آزمایش را **فضای نمونه‌ای** می‌خوانند و معمولاً آن را با حرف S نشان می‌دهند. در فضای نمونه‌ای، هر برآمد را یک **عنصر** فضای نمونه‌ای یا صرفاً یک **نقطهٔ نمونه‌ای** می‌نامند. اگر فضای نمونه‌ای دارای تعدادی متناهی از عناصر باشد، می‌توان این عناصر را با نماد معمولی مجموعه فهرست کرد؛ به‌عنوان مثال، فضای نمونه‌ای برای برآمدهای ممکن پرتاب یک سکه را می‌توان به‌صورت

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}$$

نوشت، که در آن H و T به‌ترتیب نمایش شیر و خط را می‌دهند. فضاهای نمونه‌ای که تعدادی زیاد یا تعدادی نامتناهی عنصر دارند، با یک حکم یا قاعده بهتر توصیف می‌شوند؛ مثلاً، اگر برآمدهای ممکن یک آزمایش، مجموعهٔ اتومبیلهایی باشند که مجهز به رادیویی با موج اف‌ـام‌اند، فضای نمونه‌ای را می‌توان به‌صورت

$$S = \{x | x \text{، اتومبیلی است که رادیویی با موج اف‌ـام دارد}\}$$

نوشت. رابطهٔ بالا چنین خوانده می‌شود «S، مجموعهٔ تمام xهایی است که x، اتومبیلی است که رادیویی با موج اف‌ـام دارد.» همین‌طور اگر S، مجموعهٔ اعداد صحیح فرد و مثبت باشد، می‌نویسیم

$$S = \{۲k + ۱ | k = ۰, ۱, ۲, \cdots\}$$

اینکه یک فضای نمونه‌ای را برای وضعیت مفروضی چگونه فرمولبندی کنیم به‌مسئله‌ای که دردست داریم بستگی خواهد داشت. اگر آزمایش عبارت از ریختن تاسی باشد و توجه ما بر عددی باشد که رو می‌آید، باید فضای نمونه‌ای

$$S_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

را به‌کار بریم. اما، اگر فقط به زوج یا فرد بودن عدد توجه داشته باشیم، باید فضای نمونه‌ای

$$S_۲ = \{\text{فرد، زوج}\}$$

را به‌کار بریم.

مثال بالا، این واقعیت را نشان می‌دهد که برای توصیف یک آزمایش واحد، ممکن است فضاهای نمونه‌ای مختلف مورد استفاده واقع شوند. به‌طور کلی، مطلوب آن است که از فضاهای نمونه‌ایی استفاده کنیم که عناصر آنهارا نتوان به انواع مقدماتیتر یا ابتداییتر برآمدها تجزیه (افراز یا تفکیک) کرد. به‌عبارت دیگر، ارجح آن است یک عنصر فضای نمونه‌ای، نمایندهٔ دو یا چند برآمدی نباشد که به‌نحوی از هم متمایزند. پس، در مثال قبل، $S_۱$ بر $S_۲$ ترجیح دارد.

مثال ۲.۲

فضای نمونه‌ایی را که ممکن است برای آزمایش ریختن یک جفت تاس، یکی قرمز و دیگری سبز، مناسب باشد توصیف کنید.

حل. فضای نمونه‌ایی که بیشترین اطلاع را فراهم می‌کند عبارت است از ۳۶ نقطه که با

$$S_۱ = \{(x, y) | x = ۱, ۲, \cdots, ۶; y = ۱, ۲, \cdots, ۶\}$$

داده می‌شوند، و در آن x، عددی است که روی تاس قرمز ظاهر می‌شود و y عددی است که روی تاس سبز ظاهر می‌شود. فضای نمونه‌ای دومی را که مناسب برخی هدفهاست، (ولی به‌دلیل اینکه اطلاعات کمتری فراهم می‌کند مطلوبیت کمتری دارد)، می‌توان به‌صورت

$$S_۲ = \{۲, ۳, ۴, \cdots, ۱۲\}$$

نوشت، که عناصر آن، حاصلجمعهای عددهای دو تاس را نشان می‌دهند. ▲

فضاهای نمونه‌ای، معمولاً برحسب تعداد عناصری که دارند، رده‌بندی می‌شوند. در مثال قبل، فضاهای نمونه‌ای $S_۱$ و $S_۲$ شامل تعدادی **متناهی** از عناصر بودند، اما اگر سکه‌ای آن‌قدر پرتاب شود تا برای اولین‌بار شیر بیاید، این برآمد می‌تواند در اولین، دومین، سومین، چهارمین، ... پرتاب رخ دهد و بینهایت امکان وجود دارد. برای این آزمایش، فضای نمونه‌ای

$$S = \{\mathrm{H}, \mathrm{TH}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTTH}, \mathrm{TTTTH}, \cdots\}$$

را با دنباله‌ای بی‌پایان از عناصر به‌دست می‌آوریم. اما در این مورد هم تعداد عناصر را می‌توان با همهٔ اعداد صحیح، یک‌به‌یک نظیر کرد، که با این مفهوم، فضای نمونه‌ای را **شمارا** می‌نامند. اگر فضای نمونه‌ای شامل تعدادی متناهی از عناصر یا تعدادی نامتناهی ولی شمارا از عناصر باشد، آن‌را **گسسته** می‌گویند.

برآمدهای برخی از آزمایشها، نه متناهی‌اند و نه نامتناهی شمارا. مثلاً، وقتی فردی برای تعیین مسافتی که ماشین معینی در آزمایشی مشخص با ۵ لیتر بنزین طی خواهد کرد، بررسیی را انجام می‌دهد با چنین وضعیتی سروکار دارد. اگر بپذیریم که مسافت متغیری است که می‌توان آن‌را با هر درجهٔ درستی مورد نظری اندازه‌گیری کرد، تعدادی نامتناهی از مسافتهای ممکن وجود دارند که نمی‌توان آنها را با اعداد صحیح، یک‌به‌یک متناظر کرد. همین‌طور اگر فردی بخواهد مدت زمانی را که لازم است تا دو مادهٔ شیمیایی برهم اثر کنند ثبت کند، مجموعهٔ مدت زمانهای ممکن که فضای نمونه‌ای را می‌سازند، از نظر تعداد نامتناهی است و شمارا نیست. لذا، لازم نیست که فضاهای نمونه‌ای گسسته باشند. اگر یک فضای نمونه‌ای شامل تعدادی نامتناهی از نقاط نمونه‌ای باشد که تشکیل یک پیوستار را دهند، نظیر تمام نقاط واقع بر یک پاره‌خط، یا تمام نقاط یک صفحه، می‌گویند که این فضای نمونه‌ای **پیوسته** است. فضاهای نمونه‌ای پیوسته در عمل وقتی رخ می‌دهند که برآمدهای آزمایشها اندازه‌هایی با ویژگیهای فیزیکی هستند، نظیر دما، سرعت، فشار، درازا، ... که برحسب مقیاسهای پیوسته اندازه‌گیری می‌شوند.

۳.۲ پیشامدها

در بسیاری از مسائل به‌وقوع پیشامدهایی توجه داریم که مستقیماً با عنصری از یک فضای نمونه‌ای مشخص نشده‌اند.

مثال ۳.۲

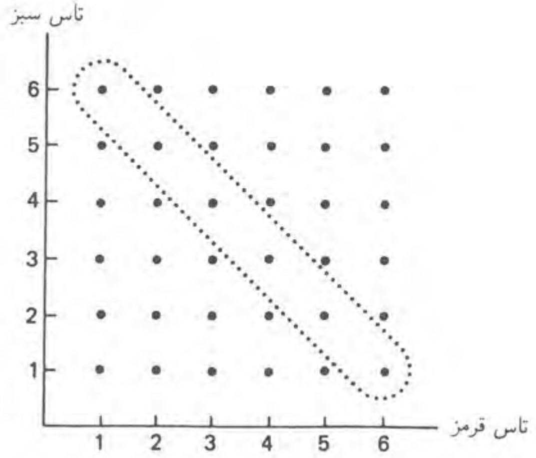
با مراجعه به فضای نمونه‌ای $S_۱$ در صفحهٔ ۳۳، پیشامد A را، که تعداد نقطه‌های ظاهر شده در ریختن یک تاس به ۳ تقسیم‌پذیر باشد، توصیف کنید.

حل. بین ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، تنها ۳ و ۶ بر ۳ تقسیم‌پذیرند. بنابراین، A به‌وسیلهٔ زیرمجموعهٔ $\{۳, ۶\}$ در فضای نمونه‌ای $S_۱$ نمایش داده می‌شود. ▲

مثال ۴.۲

با مراجعه به فضای نمونه‌ای $S_۱$ در مثال ۲.۲، پیشامد B را، که تعداد کل نقطه‌های ظاهر شده در ریختن یک جفت تاس برابر ۷ باشد، توصیف کنید.

حل. بین ۳۶ امکان، تنها (۱, ۶)، (۲, ۵)، (۳, ۴)، (۴, ۳)، (۵, ۲)، و (۶, ۱) مجموعی برابر با ۷ دارند. بنابراین، می‌نویسیم



شکل ۱.۲ پیشامد اینکه مجموع تعداد نقاط دو تاس ۷ باشد

$$B = \{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

توجه کنید که در شکل ۱.۲، پیشامد ظاهر شدن مجموع ۷ برای دو تاس، به‌وسیلهٔ مجموعهٔ نقاط داخل ناحیه‌ای نشان داده می‌شود که با نقطه‌چین محصور شده است. ▲

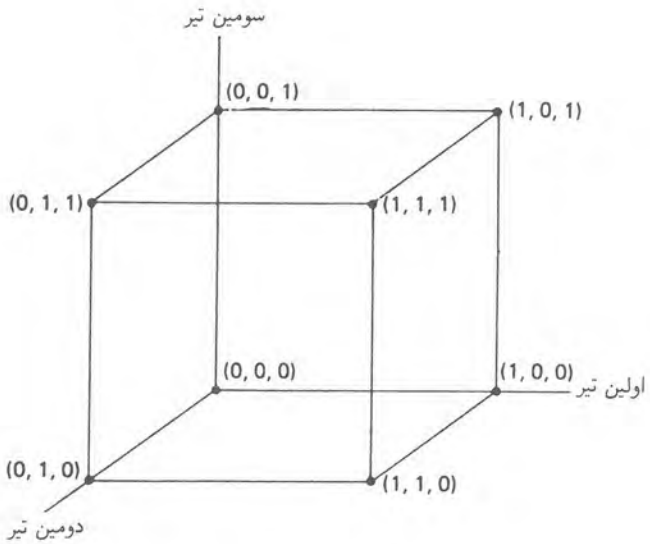
به‌همین طریق، هر پیشامدی (برآمد یا نتیجه) با گردایه‌ای از نقاط نمونه‌ای مشخص می‌شود، که این گردایه زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای مربوط است. این زیرمجموعه متشکل از همهٔ عناصری از فضاهای نمونه‌ای است که پیشامد برای آنها رخ می‌دهد، و در احتمال و آمار این زیرمجموعه را با پیشامد یکی می‌دانیم. لذا بنابه تعریف، **پیشامد**، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است.

مثال ۵.۲

اگر شخصی سه بار به هدفی تیراندازی کند و ما فقط علاقه‌مند باشیم به اینکه آیا در هر نشانه‌گیری تیر به‌هدف می‌خورد یا نه، یک فضای نمونه‌ای مناسب را توصیف کنید. عناصر پیشامد M را که شخص هر سه بار خطا کند و عناصر پیشامد N را که شخص یک بار به هدف بزند و دوبار خطا کند، مشخص کنید.

حل. اگر ۰ و ۱ به‌ترتیب معرف عدم اصابت و اصابت تیر به هدف باشد، هشت امکان (۰، ۰، ۰)، (۱، ۰، ۰)، (۰، ۱، ۰)، (۰، ۰، ۱)، (۱، ۱، ۰)، (۱، ۰، ۱)، (۰، ۱، ۱) و (۱، ۱، ۱) را می‌توان به‌صورت شکل ۲.۲ نشان داد. پس می‌توان دید که

$$M = \{(۰,۰,۰)\}$$



شکل۲.۲ فضای نمونه‌ای برای مثال ۲.۵

و

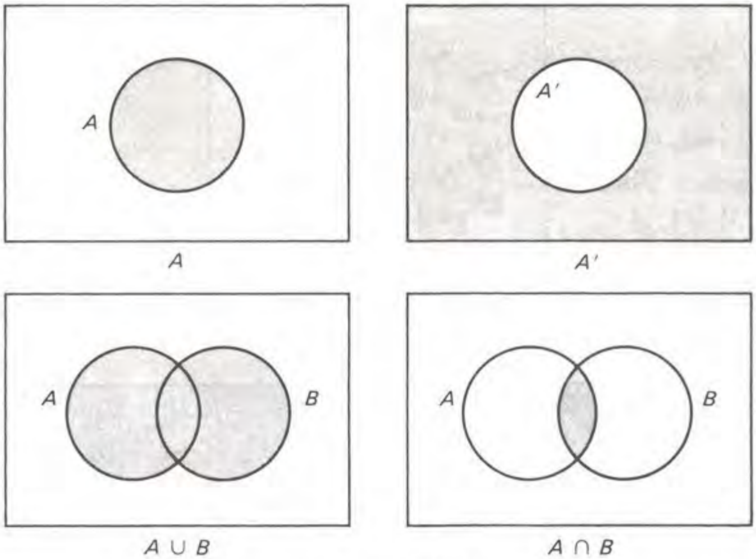
$$N = \{(۱, ۰, ۰), (۰, ۱, ۰), (۰, ۰, ۱)\}$$

▲

مثال ۲.۶
برای طول عمر مفید یک وسیلهٔ الکترونیکی، یک فضای نمونه‌ای بنا کنید و زیرمجموعه‌ای را نشان دهید که نمایش پیشامد F را بدهد. پیشامد F عبارت از این است که وسیلهٔ الکترونیکی قبل از پایان ششمین سال از کار بیفتد.

حل. اگر t طول عمر مفید وسیله برحسب سال باشد، می‌توان فضای نمونه‌ای را به‌صورت $S = \{t | t \geq ۰\}$ نوشت، و زیرمجموعهٔ $F = \{t | ۰ \leq t < ۶\}$ پیشامدی است که وسیلهٔ الکترونیکی قبل از پایان ششمین سال از کار بیفتد. ▲

بنابه تعریف ما، هر پیشامدی زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای مربوط است، اما باید در نظر داشت که عکس این مطلب الزاماً درست نیست. برای فضاهای نمونه‌ای گسسته تمام زیرمجموعه‌ها، پیشامدند، اما در حالت پیوسته، به دلایلی ریاضی، برخی از مجموعه‌های نقطه‌ای پیچیده‌تر را باید مستثنی کرد. این مطلب در برخی از متون درسی پیشرفته‌تر که در بین منابع مذکور در انتهای این

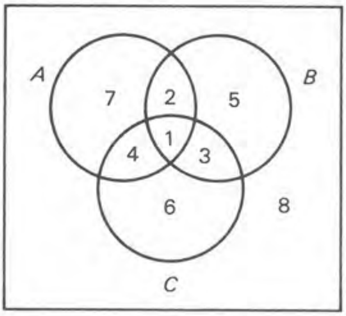


شکل ۳.۲ نمودارهای ون

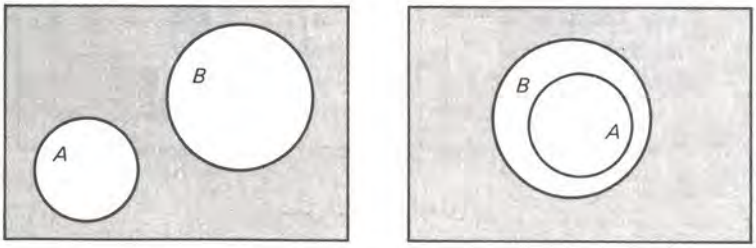
فصل فهرست شده‌اند، بیشتر مورد بحث واقع شده است، اما این موضوع تا جایی که در ارتباط با هدف این کتاب است چندان مهم نیست.

ما در اکثر مسائل احتمال، علاقه‌مند به پیشامدهایی هستیم که در واقع ترکیبی از دو یا چند پیشامدند که با اختیار **اجتماعها**، **اشتراکها**، **متممها** تشکیل می‌شوند. هرچند خواننده مطمئناً با این اصطلاحها آشناست، معهذا به اختصار یادآوری می‌شود که اگر A و B دو زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S باشند، اجتماع آنها، $A \cup B$، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری است که در A، در B، یا در هر دو هستند؛ اشتراک آنها، $A \cap B$، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری است که هم در A و هم در B هستند، و متمم A یعنی A'، زیرمجموعه‌ای از S است که شامل تمام عناصری از S است که در A نیستند. بعضی از قواعدی را که ناظر بر تشکیل اجتماعها، اشتراکها و متممها هستند می‌توان در تمرینهای ۱.۲ تا ۴.۲ یافت.

فضاهای نمونه‌ای و پیشامدها، به‌خصوص روابط بین پیشامدها، اغلب به‌وسیلهٔ **نمودارهای ون** تصویر می‌شوند، که در آنها فضای نمونه‌ای با یک مستطیل، و پیشامدها با ناحیه‌هایی در داخل مستطیل، معمولاً با دایره‌ها یا قسمتهایی از دایره‌ها، نمایش داده می‌شوند. مثلاً ناحیه‌های هاشور خوردهٔ چهار نمودار ون شکل ۳.۲، به‌ترتیب پیشامد A، متمم پیشامد A، اجتماع پیشامدهای A و B، و اشتراک پیشامدهای A و B را نشان می‌دهند. وقتی با سه پیشامد سروکار داریم، معمولاً سه دایره به‌صورت شکل ۴.۲ رسم می‌کنیم. در اینجا برای سهولت مراجعه، ناحیه‌ها را از ۱ تا ۸ شماره داده‌ایم.



شکل۲.۴ نمودار ون



A مشمول در B است

A و B ناسازگارند

شکل۲.۵ نمودارهایی که روابط خاص بین پیشامدها را نشان می‌دهند.

برای نشان دادن رابطهٔ خاص بین پیشامدها، غالباً نمودارها را نظیر نمودارهای شکل ۲.۵ رسم می‌کنیم. در اینجا نمودار سمت چپ، برای نشان دادن اینکه پیشامدهای A و B **ناسازگارند**، یعنی دو مجموعه عنصری مشترک ندارند (یا هر دو پیشامد نمی‌توانند با هم رخ دهند) به‌کار می‌رود. وقتی A و B ناسازگارند، می‌نویسیم $A \cap B = \varnothing$ که در آن $\varnothing$، **مجموعهٔ تهی** را، که شامل هیچ عنصری نیست، نشان می‌دهد. نمودار سمت راست برای نشان دادن اینکه A مشمول در B است به‌کار می‌رود، و به‌صورت نمادی این مطلب را با نوشتن $A \subset B$ بیان می‌کنیم.

تمرینها

۲.۱ برای تحقیق درستی موارد زیر، نمودارهای ون را به‌کار برید.

(الف) پیشامد $(A \cup B) \cup C$، همان پیشامد $A \cup (B \cup C)$ است؛

(ب) پیشامد $A \cap (B \cup C)$، همان پیشامد $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ است؛

(ج) پیشامد $A \cup (B \cap C)$، همان پیشامد $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ است.

۲.۲ از نمودارهای ون استفاده کرده، درستی **دو قانون دمورگن** زیر را تحقیق کنید.

(الف) $(A \cap B)' = A' \cup B'$؛

(ب) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

۳.۲ برای تحقیق درستی اینکه اگر A مشمول در B باشد، آنگاه $A \cap B = A$ و $A \cap B' = \varnothing$، از نمودارهای ون استفاده کنید.

۴.۲ برای تحقیق درستی موارد زیر، نمودارهای ون را به‌کار برید.

(الف) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$؛

(ب) $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$؛

(ج) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$.

کاربردها

۵.۲ اگر $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، $A = \{۱,۳,۵,۷\}$، $B = \{۶,۷,۸,۹\}$، $C = \{۲,۴,۸\}$، و $D = \{۱,۵,۹\}$، عناصر زیرمجموعه‌هایی از S را که متناظر با پیشامدهای زیرند، فهرست کنید:

(الف) $A' \cap B$؛ (ب) $(A' \cap B) \cap C$؛ (ج) $B' \cup C$؛

(د) $(B' \cup C) \cap D$؛ (ه) $A' \cap C$؛ (و) $(A' \cap C) \cap D$.

۶.۲ شرکتی در نظر دارد یک آزمایشگاه تحقیقاتی در خوزستان تأسیس کند. مدیریت شرکت باید یکی از شهرهای اهواز، خرمشهر، آبادان، دزفول، شوشتر، مسجدسلیمان، بهبهان، و آغاجاری را به‌عنوان محل آزمایشگاه انتخاب کند. اگر A پیشامدی را نمایش دهد که خرمشهر یا شوشتر را انتخاب کنند، B پیشامدی را نمایش دهد که خرمشهر یا آبادان را انتخاب نمایند، C پیشامدی را نشان دهد که شوشتر یا مسجدسلیمان را برگزینند، D پیشامدی را نمایش دهد که اهواز یا شوشتر را انتخاب کنند، عناصر هریک از زیرمجموعه‌های زیر را که متعلق به فضای نمونه‌ای هشت انتخاب بالا هستند، فهرست کنید:

(الف) A'؛ (ب) D'؛ (ج) $C \cap D$؛

(د) $B \cap C$؛ (ه) $B \cup C$؛ (و) $A \cup B$؛

(ز) $C \cup D$؛ (ح) $(B \cup C)'$؛ (ط) $B' \cap C'$.

۷.۲ بین هشت اتومبیلی که فروشنده‌ای در نمایشگاه خود دارد، اتومبیل اول نو است، دارای دستگاه تهویه، فرمان هیدرولیک و صندلی متحرک؛ اتومبیل دوم یک سال کار کرده است، دستگاه تهویه دارد، اما فرمان هیدرولیک و صندلی متحرک ندارد؛ اتومبیل سوم دو سال کار کرده است، دستگاه تهویه و فرمان هیدرولیک دارد ولی صندلی متحرک ندارد؛ اتومبیل چهارم سه سال کار کرده است، دستگاه تهویه دارد، اما فرمان هیدرولیک و صندلی متحرک ندارد؛ اتومبیل پنجم نو است، نه دستگاه تهویه دارد، نه فرمان هیدرولیک و نه صندلی متحرک؛ اتومبیل ششم یک سال کار کرده است، فرمان هیدرولیک دارد، اما دستگاه تهویه و صندلی

متحرک ندارد؛ اتومبیل هفتم دو سال کار کرده است، نه دستگاه تهویه دارد، نه فرمان هیدرولیک و نه صندلی متحرک؛ و اتومبیل هشتم سه سال کار کرده است، دستگاه تهویه ندارد، اما فرمان هیدرولیک و صندلی متحرک دارد. اگر یک مشتری یکی از این اتومبیلها را خریداری کند، و به‌عنوان مثال، پیشامد انتخاب یک اتومبیل نو با مجموعهٔ { اتومبیل ۵ ,اتومبیل ۱ } نمایش داده شود، به‌نحوی مشابه، مجموعه‌هایی را که پیشامدهای زیر را نمایش دهند مشخص کنید.

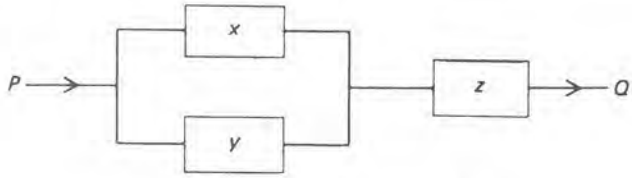
(الف) مشتری اتومبیلی بدون دستگاه تهویه انتخاب کند؛
(ب) مشتری اتومبیلی بدون فرمان هیدرولیک انتخاب نماید؛
(ج) مشتری اتومبیلی با صندلی متحرک انتخاب کند؛
(د) مشتری اتومبیلی را انتخاب کند که دو یا سه سال کار کرده است.

۸.۲ با رجوع به تمرین قبل، با کلماتی بیان کنید که اگر انتخاب مشتری با عبارت
(الف) متمم مجموعهٔ قسمت (الف)؛
(ب) اجتماع مجموعه‌های قسمتهای (ب) و (ج)؛
(ج) اشتراک مجموعه‌های قسمتهای (ج) و (د)؛
(ح) اشتراک مجموعه‌های قسمتهای (ب) و (ج)
معین شود، او چه نوع اتومبیلی را انتخاب خواهد کرد؟

۹.۲ اگر فردی یکی از خانه‌هایی را که برای فروش در روزنامه‌ای آگهی کرده‌اند خریداری کند، T، پیشامدی است که خانه سه اتاق یا بیشتر داشته باشد، U، پیشامدی است که خانه دارای شومینه باشد، V پیشامدی است که خانه بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان بیرزد، و W پیشامدی است که نوساز باشد. هر یک از پیشامدهای زیر را با جملاتی توصیف کنید:

(الف) T'؛ (ب) U'؛ (ج) V'؛
(د) W'؛ (ه) $T \cap U$؛ (و) $T \cap V$؛
(ز) $U' \cap V$؛ (ح) $V \cup W$؛ (ط) $V' \cup W$؛
(ی) $T \cup U$؛ (ک) $T \cup V$؛ (ل) $V \cap W$

۱۰.۲ یک هتل دو اتومبیل مخصوص دارد که برای رفت و آمد میهمانانش به فرودگاه مورد استفاده واقع می‌شوند. اگر بتوان در اتومبیل بزرگتر ۵ مسافر و در اتومبیل کوچکتر ۴ مسافر سوار کرد، نقطهٔ (۳ ,۰) پیشامدی را نمایش می‌دهد که در لحظهٔ مفروضی اتومبیل بزرگتر خالی و اتومبیل کوچکتر ۳ مسافر دارد، نقطهٔ (۲ ,۴) پیشامدی را نشان می‌دهد که در لحظهٔ مفروضی اتومبیل بزرگتر ۴ مسافر و در همان حال اتومبیل کوچکتر ۲ مسافر دارد، ... ، شکلی رسم کنید که ۳۰ نقطهٔ متناظر فضای نمونه‌ای را نشان دهد. همین‌طور اگر E نمایانگر پیشامدی باشد که حداقل یکی از دو اتومبیل خالی است، F نمایانگر پیشامدی باشد که دو اتومبیل روی هم ۲، ۴، یا ۶ مسافر دارند، و G نمایانگر پیشامدی باشد که تعداد مسافرین هر دو اتومبیل یکی است، نقاطی از فضای نمونه‌ای



شکل۲.۶ نمودار تمرین ۱۲.۲

را که متناظر با هریک از پیشامدهای زیر باشند فهرست کنید:

(الف) E؛ (ب) F؛ (ج) G؛
(د) $E \cup F$؛ (هـ) $E \cap F$؛ (و) $F \cup G$؛
(ز) $E \cup F'$؛ (ح) $E \cap G'$؛ (ط) $F' \cap E'$.

۱۱.۲ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. آنگاه اگر شیر بیاید، تاسی را یک بار می‌ریزیم؛ اگر خط بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم. با استفاده از نمادگذاریی که مثلاً در آن، $(\mathrm{H}, ۲)$، پیشامدی را نشان می‌دهد که سکه شیر و سپس تاس ۲ بیاید و $(\mathrm{T}, \mathrm{T}, \mathrm{T})$ پیشامدی را نشان دهد که سه‌بار متوالی خط ظاهر شود، فهرستهای زیر را تهیه کنید:

(الف) ده عنصر فضای نمونه‌ای S را؛

(ب) عناصری از S را که متناظر با پیشامد A است که دقیقاً یک شیر بیاید؛

(ج) عناصری از S را که متناظر با پیشامد B است که حداقل دو خط ظاهر شود یا عددی بزرگتر از ۴ بیاید.

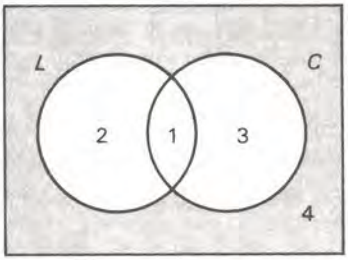
۱۲.۲ یک بازی الکترونیکی شامل سه مؤلفه است که در مدار متوالی ـ موازی شکل ۶.۲ نشان داده شده‌اند. در هر لحظهٔ مفروض، هر مؤلفه ممکن است در حال عمل باشد یا نباشد، و بازی فقط در صورتی که مدار پیوسته‌ای از P تا Q وجود داشته باشد، انجام خواهد شد. فرض کنید A پیشامدی باشد که بازی انجام می‌شود، و B پیشامدی باشد که بازی انجام می‌شود ولو اینکه مؤلفهٔ x در حال عمل نباشد، و C پیشامدی باشد که بازی صورت می‌گیرد ولو اینکه y در حال عمل نباشد. با استفاده از نمادگذاریی که در آن مثلاً $(۰, ۰, ۱)$ نشان می‌دهد که مؤلفهٔ z در حال عمل است ولی مؤلفه‌های x و y در حال عمل نیستند،

(الف) عناصر فضا نمونه‌ای S را و همچنین عناصری از S را که متناظر با پیشامدهای A، B و C هستند فهرست کنید؛

(ب) معین کنید کدام زوج پیشامدهای A و B، A و C، یا B و C دو به‌دو ناسازگارند.

۱۳.۲ آزمایشی عبارت از ریختن متوالی تاسی تا زمانی است که عدد ۳ ظاهر شود. فضای نمونه‌ای را توصیف و معین کنید که

(الف) چند عنصر فضای نمونه‌ای، متناظر با این پیشامد است که عدد ۳ در kامین بار ریختن تاس ظاهر شود.



شکل۷.۲ نمودار ون برای تمرین ۱۶.۲

(ب) چند عنصر فضای نمونه‌ای، متناظر با پیشامدی است که وقوع ۳ بعد از kامین بار ریختن تاس نباشد.

۱۴.۲ اگر $S = \{x | ۰ < x < ۱۰\}$، $M = \{x | ۳ < x \leq ۸\}$، و $N = \{x | ۵ < x < ۱۰\}$، پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

(الف) $M \cup N$؛ (ب) $M \cap N$؛ (ج) $M \cap N'$؛ (د) $M' \cup N$.

۱۵.۲ به‌صورت نمادی، S، فضای نمونه‌ای مرکب از تمام نقاط (x, y)ی واقع بر روی و داخل دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز (۳ـ ,۲) را مشخص کنید.

۱۶.۲ در شکل ۷.۲، L پیشامد آن است که راننده بیمهٔ شخص ثالث دارد و C پیشامد آن است که راننده بیمهٔ بدنه دارد. با جملاتی بیان کنید که چه پیشامدهایی را با نواحی ۱، ۲، ۳، و ۴ نشان داده‌ایم.

۱۷.۲ با رجوع به تمرین ۱۶.۲ و شکل ۷.۲، چه پیشامدهایی به‌وسیلهٔ

(الف) نواحی ۱ و ۲ باهم؛

(ب) نواحی ۲ و ۴ باهم؛

(ج) نواحی ۱، ۲، و ۳ باهم؛

(د) نواحی ۲، ۳، و ۴ باهم

نشان داده می‌شوند.

۱۸.۲ در شکل ۸.۲، E، T، و N این پیشامدها هستند که اتومبیلی که به تعمیرگاهی آورده‌اند نیاز به تعمیر کامل موتور، تعمیر جعبه دنده، یا تایرهای نو دارد. پیشامدهایی را که با

(الف) ناحیهٔ ۱؛

(ب) ناحیهٔ ۳؛

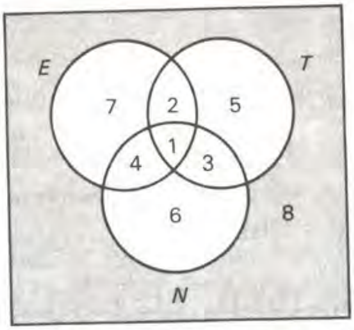
(ج) ناحیهٔ ۷؛

(د) نواحی ۱ و ۴ باهم؛

(ه) نواحی ۲ و ۵ باهم؛

(و) نواحی ۳، ۵، ۶، و ۸ باهم؛

نشان داده می‌شوند در قالب کلمات بیان کنید.



شکل۸.۲ نمودار ون برای تمرین ۱۸.۲

۱۹.۲ با رجوع به تمرین قبل و شکل ۸.۲، ناحیه یا ترکیبی از نواحی را فهرست کنید که معرف پیشامدهایی باشد که اتومبیلی به آنها نیاز دارد:

(الف) تعمیر جعبه دنده، ولی نه تعمیر کامل موتور و نه نیاز به تایر نو؛

(ب) تعمیر کامل موتور و تعمیر جعبه دنده؛

(ج) تعمیر جعبه دنده یا نیاز به تایر نو ولی نه تعمیر کامل موتور؛

(د) نیاز به تایر نو.

۲۰.۲ ازگروه ۲۰۰ نفری دانشجویان یک دانشکده، ۱۳۸ نفر در یک درس روانشناسی، ۱۱۵ نفر در یک درس جامعه‌شناسی، و ۹۱ نفر در هر دو درس ثبت‌نام کرده‌اند. چند نفر از این دانشجویان در هیچ‌یک از این دو درس ثبت‌نام نکرده‌اند؟ (راهنمایی: نمودار ون مناسبی رسم کنید و در نواحی مختلف آن، اعداد مربوط را بنویسید.)

۲۱.۲ یک سازمان بازاریابی اعلام کرده است که بین ۵۰۰ خریداری که مصاحبه شده‌اند، ۳۰۸ نفر مرتباً محصول X، ۲۶۶ نفر مرتباً محصول Y، ۱۰۳ نفر مرتباً هر دو محصول را می‌خرند، و ۵۹ نفر هیچ‌کدام از دو محصول را به‌طور منظم نمی‌خرند. با استفاده از یک نمودار ون و نوشتن تعداد خریداران در نواحی مختلف مربوط، بررسی کنید که آیا نتایج این مطالعه باید مورد سؤال قرار گیرند یا نه.

۲۲.۲ از ۱۲۰ نفری که از یک مرکز تفریحی دیدن کرده‌اند، ۷۴ نفر حداقل سه ساعت را در مرکز تفریحی گذرانده‌اند. ۸۶ نفر حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند، ۶۴ نفر قایق‌سوار شده‌اند، ۶۰ نفر حداقل سه ساعت در مرکز مزبور بوده و حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند، ۵۲ نفر حداقل سه ساعت در این مرکز بوده و قایق‌سواری هم کرده‌اند، ۵۴ نفر حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند و قایق‌سواری هم کرده‌اند، و ۴۸ نفر حداقل سه ساعت در مرکز بوده و حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده و قایق هم سوار شده‌اند. نمودار ون را با سه دایره (مثل شکل ۴.۲) رسم کنید، و در نواحی مختلف، اعداد مربوط را بنویسید، و تعیین کنید.

(الف) چند نفر از بازدیدکنندگان مرکز تفریحی حداقل سه ساعت در مرکز بوده و حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند، ولی قایق سوار نشده‌اند؛

(ب) چند نفر از بازدیدکنندگان قایق‌سواری کرده‌اند، اما کمتر از سه ساعت در مرکز بوده و کمتر

از ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند؛

(ج) چند نفر از بازدیدکنندگان کمتر از سه ساعت در مرکز بوده و حداقل ۸۰۰ ریال خرج کرده‌اند، اما قایق سوار نشده‌اند.

۴.۲ احتمال یک پیشامد

برای فرمولبندی اصول موضوع احتمال از عمل نمایش پیشامدها با حروف بزرگ پیروی می‌کنیم و احتمال پیشامد A را به‌صورت $P(A)$، احتمال پیشامد B را به صورت $P(B)$، و قس‌علی‌هذا می‌نویسیم. مانند قبل، مجموعهٔ تمام برآمدهای ممکن، یعنی فضای نمونه‌ای را، با حرف S نشان می‌دهیم.

احتمالها، مقادیر یک تابع مجموعه‌ای‌اند که **اندازهٔ احتمال** هم خوانده می‌شود، زیرا همان‌طور که خواهیم دید، این تابع، اعداد حقیقی را به زیرمجموعه‌های مختلف فضای نمونه‌ای S نسبت می‌دهد. اصول موضوع احتمال که ما در اینجا فرمولبندی می‌کنیم فقط وقتی به‌کار می‌روند که فضای نمونه‌ای S گسسته باشد.

اصل موضوع ۱. احتمال یک پیشامد، عددی حقیقی نامنفی است؛ یعنی برای هر زیرمجموعهٔ A از S، $P(A) \geq 0$.

اصل موضوع ۲. $P(S) = 1$.

اصل موضوع ۳. اگر A_1، A_2، A_3، ... ، دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار S باشند، آنگاه

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$$

اصول موضوع ذاتاً نیازی به برهان ندارند، اما اگر بخواهیم نظریهٔ حاصل را به‌کار بریم، وقتی به احتمالها یک مفهوم «حقیقی» می‌دهیم باید نشان دهیم که اصول موضوع صادق هستند. ما در اینجا این مطلب را در رابطه با تعبیر فراوانی توضیح می‌دهیم؛ بستگی بین اصول موضوع و مفهوم کلاسیک احتمال در صفحهٔ ۴۸ مورد بحث قرار گرفته است، در حالی‌که بررسی بستگی بین اصول و احتمالهای ذهنی در تمرینهای ۳۴.۲ و ۵۶.۲ به‌عهدهٔ خواننده واگذار شده است.

چون نسبتها همواره مثبت یا صفرند، اولین اصل موضوع با تعبیر فراوانی در هماهنگی کامل است. اصل موضوع دوم به‌طور غیرمستقیم بیان می‌کند که حتمیت با احتمال ۱ یکی است ــ روی‌هم‌رفته همیشه می‌پذیریم که باید یکی از امکانات موجود در S رخ دهد، و به این پیشامد حتمی است که احتمال ۱ را نسبت می‌دهیم. تا آنجاکه به تعبیر فراوانی مربوط است، احتمال ۱ اشاره بر این دارد که پیشامد مورد بحث در ۱۰۰ درصد مواقع رخ خواهد داد، یا به عبارت دیگر، این پیشامد مطمئناً رخ می‌دهد.

با در نظر گرفتن سومین اصل موضوع در ساده‌ترین حالت، یعنی برای دو پیشامد دوبه‌دو ناسازگار $A_۱$ و $A_۲$، می‌توان به‌سادگی دید که این اصل موضوع از نظر تعبیر فراوانی برآورده می‌شود. اگر پیشامدی مثلاً در ۲۸ درصد مواقع، و پیشامد دیگری در ۳۹ درصد مواقع رخ دهد، و هردو پیشامد نتوانند به‌طور همزمان رخ دهند (یعنی، دوبه‌دو ناسازگار باشند)، آنگاه یکی یا دیگری در $۶۷ = ۳۹ + ۲۸$ درصد مواقع رخ خواهد داد. بنابراین سومین اصل موضوع صادق است و وقتی بیش از دو پیشامد دوبه‌دو ناسازگار وجود داشته باشند، همین نوع استدلال به‌کار می‌رود.

قبل از اینکه برخی نتایج فوری اصل موضوع احتمال را مطالعه کنیم، بر این نکته تأکید می‌کنیم که این سه اصل موضوع به ما نمی‌گویند چگونه احتمالها را به پیشامدها تخصیص دهیم، بلکه فقط راههای انجام این کار را محدود می‌کنند.

مثال ۷.۲

یک آزمایش، چهار برآمد ممکن و دوبه‌دو ناسازگار A، B، C، و D را دارد. برای هر یک از موارد زیر، توضیح دهید که چرا راهی مجاز برای تخصیص احتمالها وجود ندارد.

(الف) $P(A) = ۰٫۱۲$، $P(B) = ۰٫۶۳$، $P(C) = ۰٫۴۵$، $P(D) = -۰٫۲۰$؛

(ب) $P(A) = \frac{۹}{۱۲۰}$، $P(B) = \frac{۴۵}{۱۲۰}$، $P(C) = \frac{۲۷}{۱۲۰}$، $P(D) = \frac{۴۶}{۱۲۰}$.

حل. (الف) $P(D) = -۰٫۲۰$ ناقض اصل موضوع ۱ است.

(ب)

$$P(S) = P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{۹}{۱۲۰} + \frac{۴۵}{۱۲۰} + \frac{۲۷}{۱۲۰} + \frac{۴۶}{۱۲۰} = \frac{۱۲۷}{۱۲۰} \neq ۱$$

که ناقض اصل موضوع ۲ است. ▲

البته، درکاربرد واقعی، احتمالها بر مبنای تجارب گذشته، بر مبنای تحلیل محتاطانهٔ تمام شرایط زیربنایی، بر مبنای داوریهای ذهنی، یا بر مبنای مفروضات ــ گاهی با فرض همشانس بودن تمام برآمدهای ممکن ــ نسبت داده می‌شوند.

در تخصیص اندازهٔ احتمال به یک فضای نمونه‌ای، ضروری نیست که احتمال هر زیرمجموعهٔ ممکن را توصیف کنیم، و این جای خوشوقتی است، زیرا یک فضای نمونه‌ای با فقط ۲۰ برآمد ممکن، $۱۰۴۸۵۷۶ = ۲^{۲۰}$ زیرمجموعه دارد [فرمول کلی از قسمت (الف) تمرین ۱۴.۱ مستقیماً نتیجه می‌شود]، و تعداد زیرمجموعه‌ها وقتی ۵۰ برآمد ممکن، ۱۰۰ برآمد ممکن، یا بیشتر موجود باشند، بسیار سریع افزایش می‌یابد. اغلب به‌جای فهرست کردن احتمالهای تمام زیرمجموعه‌های ممکن، احتمالهای برآمدهای فردی، یا نقطه‌های نمونه‌ای S را فهرست می‌کنیم، و آنگاه قضیهٔ زیر را به‌کار می‌بریم:

قضیهٔ ۱.۲ اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای گسستهٔ S باشد، آنگاه $P(A)$ برابر است با مجموع احتمالهای برآمدهای فردی تشکیل‌دهندهٔ A.

برهان. فرض می‌کنیم $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$، ... ، دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از برآمدهایی باشد که پیشامد A را تشکیل می‌دهند. پس

$$A = O_۱ \cup O_۲ \cup O_۳ \cup \cdots$$

و چون برآمدهای فردی، Oها، برحسب تعریف دوبه‌دو ناسازگارند، اصل سوم احتمال نتیجه می‌دهد

$$P(A) = P(O_۱) + P(O_۲) + P(O_۳) + \cdots$$

و این رابطه، برهان را کامل می‌کند. ■

برای استفاده از این قضیه، باید قادر به تخصیص احتمالها به برآمدهای فردی آزمایش باشیم. اینکه چگونه می‌توان این کار را در برخی حالات خاص انجام داد، با مثالهای زیر تشریح می‌شود.

مثال ۸.۲
اگر سکه متعادلی را دوبار پرتاب کنیم، احتمال به‌دست آوردن حداقل یک شیر چقدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای برای این آزمایش عبارت است از

$$S = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$$

که در آن، H و T به‌ترتیب شیر و خط را نشان می‌دهند. چون سکه متعادل است، می‌پذیریم که وقوع این برآمدها همشانس‌اند، و بنابراین به هر نقطهٔ نمونه‌ای احتمال $\frac{۱}{۴}$ را نسبت می‌دهیم، اگر A پیشامدی باشد که حداقل یک شیر به‌دست آید، آنگاه $A = \{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}\}$، و

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\mathrm{HH}) + P(\mathrm{HT}) + P(\mathrm{TH}) \\ &= \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \\ &= \frac{۳}{۴} \end{aligned}$$

▲

مثال ۹.۲
تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک‌بار ریختن این تاس، G پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۳ باشد، $P(G)$ را بیابید.

حل. فضای نمونه‌ای عبارت است از $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$. اگر به هر عدد زوج، احتمال w، و به هر عدد فرد، احتمال $۲w$ را نسبت دهیم، مطابق اصل موضوع ۲ به‌دست می‌آوریم $۲w + w + ۲w + w + ۲w + w = ۹w = ۱$. پس $w = \frac{۱}{۹}$، و

$$P(G) = \frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۹}$$

▲

اگر فضای نمونه‌ای، گسسته ولی نامتناهی باشد، احتمالها را باید به‌وسیلهٔ یک قاعدهٔ ریاضی، ترجیحاً به‌وسیلهٔ فرمول یا معادله‌ای، به برآمدهای فردی نسبت داد.

مثال ۱۰.۲
اگر $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$، . . . ، دنباله‌ای نامتناهی از برآمدهای یک آزمایش مفروض باشد تحقیق کنید که

$$P(O_i) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^i \quad , \quad i = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

واقعاً یک اندازهٔ احتمال است.

حل. چون احتمالها همگی مثبت‌اند، فقط باید نشان دهیم که $P(S) = ۱$. داریم

$$P(S) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots$$

اگر فرمول تعیین مجموع جملات یک تصاعد هندسی نامتناهی را به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$P(S) = \frac{\frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱$$

▲

در رابطه با مثال قبل، کلمهٔ «مجموع» در قضیهٔ ۱.۲، باید به‌قسمی تعبیر شود که شامل مقدار یک سری نامتناهی نیز باشد.

همان‌طور که در فصل ۵ خواهیم دید، اندازهٔ احتمال مثال ۱۰.۲، مثلاً اگر O_i این پیشامد باشد که شخصی در پرتاب سکه‌ای همگن برای اولین‌بار در پرتاب iام سکه، خط بیاورد، اندازهٔ

احتمال مناسبی است. پس، احتمال آنکه اولین خط در سومین، چهارمین، یا پنجمین پرتاب سکه ظاهر شود برابر است با

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$$

و احتمال آنکه اولین خط در تعداد فردی از پرتابها رخ دهد برابر است با

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

که در آن، باز فرمول تعیین مجموع جملات یک تصاعد هندسی نامتناهی را به‌کار برده‌ایم.

اگر مانند مثال ۸.۲، آزمایش چنان باشد که بتوانیم برای نقاط نمونه‌ای S، احتمالهایی برابر فرض کنیم، می‌توانیم از حالت خاص قضیهٔ ۱.۲ که به‌صورت زیر است استفاده کنیم:

قضیهٔ ۲.۲ اگر نتیجهٔ آزمایشی بتواند یکی از N برآمد مختلف همشانس باشد، و اگر nتا از این برآمدها باهم پیشامد A را تشکیل دهند، آنگاه احتمال پیشامد A برابر است با

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

برهان. فرض می‌کنیم O_1، O_2، ... ، O_N، برآمدهای فردی S را نشان دهند که احتمال هر کدام $\frac{1}{N}$ است. اگر پیشامد A، اجتماع nتا از این برآمدهای دوبه‌دو ناسازگار بوده، و مهم نباشد که کدامیک از آنها این پیشامد را تشکیل دهند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A) &= P(O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n) \\ &= P(O_1) + P(O_2) + \cdots + P(O_n) \\ &= \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N}}_{n\text{جمله}} \\ &= \frac{n}{N} \end{aligned}$$

■

مشاهده کنید که فرمول $P(A) = \frac{n}{N}$ در قضیهٔ ۲.۲، با مفهوم احتمال کلاسیک (صفحهٔ ۳۰ را ببینید) یکی است. البته آنچه در اینجا نشان داده‌ایم آن است که مفهوم احتمال کلاسیک با اصول

موضوع احتمال سازگار است ــ این مطلب در مورد خاصی که برآمدهای فردی همشانس‌اند از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شود.

مثال ۱۱.۲

در یک بازی با دسته کارت ۵۲تایی، پنج کارت به تصادف اختیار می‌کنیم، اگر سه کارت دارای یک شماره و دو کارت دیگر هم دارای یک شماره باشند برندهٔ بازی هستیم. احتمال برنده شدن در این بازی چقدر است؟

حل. تعداد راههایی که می‌توان سه کارت با یک شماره و دو کارت با یک شمارهٔ دیگر، مثلاً سه کارت با شمارهٔ ۷ و دو کارت با شمارهٔ ۱ انتخاب کرد برابر است با $\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}$. چون ۱۳ شماره از هر رنگ داریم ۱۳ راه انتخاب سه کارت با یک شماره و سپس ۱۲ راه انتخاب دو کارت با یک شماره وجود دارند. کل راههای ممکن انتخاب چنین پنج کارتی

$$n = ۱۳ \cdot ۱۲ \binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}$$

از طرفی تعداد راههای ممکن انتخاب پنج کارت از ۵۲ کارت

$$N = \binom{۵۲}{۵}$$

و لذا از قضیهٔ ۲.۲ نتیجه می‌شود که احتمال برد بازی عبارت است از

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{۱۳ \cdot ۱۲\binom{۴}{۳}\binom{۴}{۲}}{\binom{۵۲}{۵}} = ۰{,}۰۰۱۴$$

▲

۵.۲ بعضی قاعده‌های احتمال

با استفاده از سه اصل موضوع احتمال، می‌توانیم بسیاری از قاعده‌های دیگر را که کاربردهای مهمی دارند، نتیجه بگیریم. بین پیامدهای فوری اصل موضوع، قضایای زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۲ اگر A و A' پیشامدهای متمم در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

برهان. در دومین و سومین مرحله، در برهانی که ارائه می‌شود از تعریف متمم استفاده می‌کنیم، که طبق آن، A و A' دوبه‌دو ناسازگارند و $A \cup A' = S$؛ پس می‌نویسیم

$$\begin{aligned} ۱ &= P(S) \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۲}) \\ &= P(A \cup A') \\ &= P(A) + P(A') \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۳}) \end{aligned}$$

بنابراین $P(A') = ۱ - P(A)$. ■

در رابطه با تعبیر فراوانی، این نتیجه اشاره بر آن دارد که اگر پیشامدی، مثلاً در ۳۷ درصد مواقع رخ دهد، در ۶۳ درصد مواقع رخ نمی‌دهد.

قضیهٔ ۴.۲ برای هر فضای نمونه‌ای S، $P(\varnothing) = ۰$.

برهان. چون پیشامدهای S و $\varnothing$ ناسازگارند و مطابق تعریف مجموعهٔ تهی $\varnothing$، $S \cup \varnothing = S$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cup \varnothing) \\ &= P(S) + P(\varnothing), \quad (\text{بنابه اصل موضوع ۳}) \end{aligned}$$

و در نتیجه $P(\varnothing) = ۰$. ■

باید به این مطلب مهم توجه کرد که از $P(A) = ۰$ نتیجه نمی‌شود که الزاماً A مجموعه‌ای تهی است. در عمل اغلب به پیشامدهایی که، به زبان محاوره‌ای، در یک میلیون سال هم رخ نمی‌دهند، احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. برای نمونه، مثال کلاسیکی وجود دارد که ما به این پیشامد که میمونی جمهوری افلاطون را کلمه به کلمه بدون خطا با فشار روی دکمه‌ها ماشین کند احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. همان‌طورکه در فصلهای ۳ و ۶ خواهیم دید، این واقعیت شایستهٔ توجه است که $P(A) = ۰$، رابطهٔ $A = \varnothing$ را، به‌ویژه در حالت پیوسته، نتیجه نمی‌دهد.

قضیهٔ ۵.۲ اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subset B$، آنگاه $P(A) \le P(B)$.

برهان. چون $A \subset B$، می‌توانیم بنویسیم

$$B = A \cup (A' \cap B)$$

که درستی آن به‌آسانی به‌وسیلهٔ یک نمودار ون تحقیق می‌شود. در این صورت، چون A و $A' \cap B$ ناسازگارند، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(A' \cap B) \quad \text{(بنابه اصل موضوع ۳)} \\ &\geq P(A) \quad \text{(بنابه اصل موضوع ۱)} \end{aligned}$$

■

با استفاده از کلمات، این قضیه بیان می‌کند که اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ای از پیشامد B باشد، آنگاه $P(A)$ بزرگتر از $P(B)$ نیست. مثلاً، احتمال کشیدن یک کارت سبز از یک دسته کارت ۵۲تایی، بزرگتر از احتمال کشیدن یک کارت سبز یا قرمز نیست. در واقع احتمال $\frac{1}{4}$ با احتمال مقایسه می‌شود.

قضیهٔ ۶.۲ برای هر پیشامد A، $0 \leq P(A) \leq 1$.

برهان. با به‌کار بردن قضیهٔ ۵.۲ و این واقعیت که برای هر پیشامد A در S، $\varnothing \subset A \subset S$، داریم

$$P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(S)$$

آنگاه $P(\varnothing) = 0$ و $P(S) = 1$ به این نتیجه منجر می‌شود که

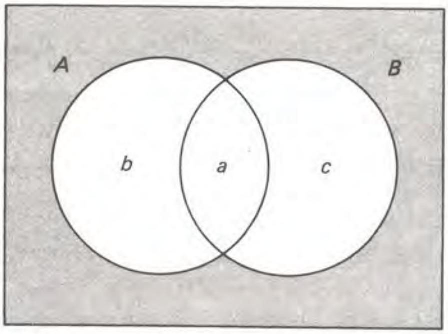
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

■

سومین اصل موضوع احتمال اغلب به یک قاعدهٔ جمع خاص اطلاق می‌شود؛ قاعدهٔ مزبور از این نظر خاص است که پیشامدهای A_1، A_2، A_3، ... ، باید دوبه‌دو ناسازگار باشند. برای هردو پیشامد A و B، قاعدهٔ جمع کلی زیر موجود است:

قضیهٔ ۷.۲ اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



شکل۹.۲ نمودار ون برای اثبات قضیهٔ۷.۲

برهان. همان‌طور که در نمودار ون شکل ۹.۲ دیده می‌شود به پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار $A \cap B$، $A \cap B'$، و $A' \cap B$، احتمالهای a، b و c را نسبت می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= a + b + c \\
&= (a + b) + (c + a) - a \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

■

مثال ۱۲.۲

اگر برای خانواده‌ای (که به‌منظور یک بررسی نمونه‌ای در یک ناحیهٔ بزرگ شهری، به‌تصادف انتخاب شده است) احتمال دارا بودن یک دستگاه تلویزیون رنگی، یک دستگاه تلویزیون سیاه و سفید، یا هر دو نوع رنگی و سیاه و سفید، به‌ترتیب ۸۶ر۰، ۳۵ر۰، و ۲۹ر۰ باشد، احتمال اینکه این خانواده یکی از دو نوع یا هر دو نوع تلویزیون را داشته باشد چقدر است؟

حل. اگر A، این پیشامد باشد که خانوادهٔ مزبور دارای یک دستگاه تلویزیون رنگی است، و B، این پیشامد باشد که دارای یک دستگاه تلویزیون سیاه و سفید است، داریم $P(A) = ۰٫۸۶$، $P(B) = ۰٫۳۵$، $P(A \cap B) = ۰٫۲۹$، و اگر این مقادیر را در فرمول قضیهٔ ۷.۲ قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= ۰٫۸۶ + ۰٫۳۵ - ۰٫۲۹ \\
&= ۰٫۹۲
\end{aligned}
$$

▲

مثال ۱۳.۲
اتومبیلی که در کنار بزرگراهی متوقف شده است با احتمال ۲۳ر۰ ترمزهای معیوب و با احتمال ۲۴ر۰ فرسودگی شدید تایر دارد. همچنین با احتمال ۳۸ر۰ ترمزهای معیوب یا فرسودگی شدید تایر یا هردو را دارد. احتمال اینکه این اتومبیل، ترمزهایش معیوب بوده و فرسودگی شدید تایر داشته باشد چقدر است؟

حل. اگر B این پیشامد باشد که اتومبیل مزبور ترمزهایش معیوب است، و T این پیشامد باشد که تایرهایش فرسودگی شدید دارند، داریم

$$P(B) = ۰٫۲۳,\ P(T) = ۰٫۲۴,\ P(B \cup T) = ۰٫۳۸$$

از قرار دادن این مقادیر در فرمول قضیهٔ ۷.۲ نتیجه می‌شود

$$۰٫۳۸ = ۰٫۲۳ + ۰٫۲۴ - P(B \cap T)$$

با حل این معادله نسبت به $P(B \cap T)$، به‌دست می‌آوریم

$$P(B \cap T) = ۰٫۲۳ + ۰٫۲۴ - ۰٫۳۸ = ۰٫۰۹$$

▲

با به‌کار بردن مکرر قضیهٔ ۷.۲، می‌توان این قاعدهٔ جمع را به‌قسمی تعمیم داد که برای هر تعداد از پیشامدها قابل اجرا باشد. مثلاً برای سه پیشامد به‌دست می‌آوریم

قضیهٔ ۸.۲ اگر A، B، و C، سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

برهان. $A \cup B \cup C$ را به‌صورت $A \cup (B \cup C)$ می‌نویسیم و دوبار قضیهٔ ۷.۲ را به‌کار می‌بریم، یک بار برای $P[A \cup (B \cup C)]$ و یک بار برای $P(B \cup C)$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[A \cup (B \cup C)] \\ &= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[A \cap (B \cup C)] \end{aligned}$$

از اولین قانون توزیع‌پذیری که از خواننده خواسته بودیم در قسمت (ب) تمرین ۱.۲، درستی آن را تحقیق کند، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

و نتیجه آنکه

$$\begin{aligned}P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

■

(در تمرین ۲. ۳۰ از خواننده خواسته شده است که برهان دیگری برای این قضیه ارائه دهد که مبتنی بر روش اثباتی باشد که در متن کتاب برای برهان قضیهٔ ۷.۲ به‌کار رفت.)

مثال ۱۴.۲

فرض می‌کنیم شخصی که به دندانپزشک خود مراجعه می‌کند احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری کند ۴۴ر۰، احتمال اینکه دندانی برای پرکردن داشته باشد، ۲۴ر۰، احتمال آنکه دندانی برای کشیدن داشته باشد، ۲۱ر۰، احتمال آنکه دندانهایش را جرم‌گیری و دندانی را پر کند، ۰۸ر۰، احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری کند و دندانی را بکشد ۱۱ر۰، احتمال اینکه دندانی برای پرکردن و دندانی برای کشیدن داشته باشد، ۰۷ر۰ و احتمال اینکه دندانهایش را جرم‌گیری و دندانی را پر کند و دندانی را بکشد ۰۳ر۰ باشد. احتمال اینکه دندانپزشک حداقل یکی از سه مورد را برای او انجام دهد چقدر است؟

حل. اگر C، این پیشامد باشد که شخص دندانهایش را جرم‌گیری کند، F، این پیشامد باشد که دندانی را پر کند؛ و E، این پیشامد باشد که دندانی را بکشد، داریم $P(C) = ۰٫۴۴$، $P(F) = ۰٫۲۴$، $P(E) = ۰٫۲۱$، $P(C \cap F) = ۰٫۰۸$، $P(C \cap E) = ۰٫۱۱$، $P(F \cap E) = ۰٫۰۷$، و $P(C \cap F \cap E) = ۰٫۰۳$، و با قرار دادن اینها در فرمول، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}P(C \cup F \cup E) &= ۰٫۴۴ + ۰٫۲۴ + ۰٫۲۱ - ۰٫۰۸ - ۰٫۱۱ - ۰٫۰۷ + ۰٫۰۳ \\ &= ۰٫۶۶\end{aligned}$$

▲

تمرینها

۲۳.۲ با استفاده از قسمتهای (الف) و (ب)ی تمرین ۴.۲ نشان دهید که
(الف) $P(A) \geq P(A \cap B)$؛
(ب) $P(A) \leq P(A \cup B)$.

۲۴.۲ با رجوع به شکل ۹.۲، تحقیق کنید که

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

۲۵.۲ با رجوع به شکل ۹.۲، و قرار دادن $P(A' \cap B') = d$، تحقیق کنید که

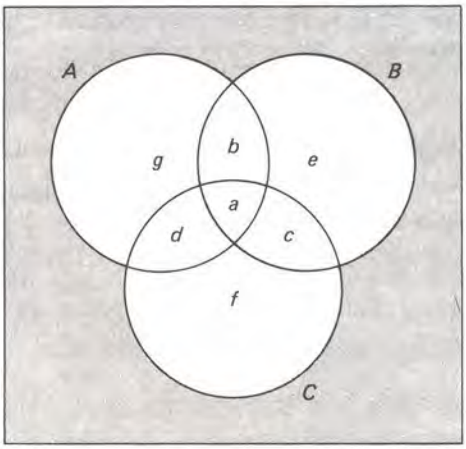
$$P(A' \cap B') = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

۲۶.۲ پیشامد «A یا B و نه هردو با هم» رخ خواهد داد را می‌توان به‌صورت $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ نوشت. احتمال این پیشامد را برحسب $P(A)$، $P(B)$، و $P(A \cap B)$ بیان کنید.

۲۷.۲ از فرمول قضیهٔ ۷.۲ استفاده کرده نشان دهید که
(الف) $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$؛
(ب) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

۲۸.۲ با استفاده از نمودار ون شکل ۱۰.۲ و با تخصیص احتمالهای a، b، c، d، e، f، و g به پیشامدهای $A \cap B \cap C$، $A \cap B \cap C'$، ...، و $A' \cap B' \cap C'$ نشان دهید که اگر $P(A) = P(B) = P(C) = 1$، آنگاه $P(A \cap B \cap C) = 1$. (راهنمایی: کار را با این استدلال شروع کنید که چون $P(A) = 1$، نتیجه می‌شود که $e = c = f = 0$).

۲۹.۲ با استفاده از رابطه‌های $A \cup B = A \cup (A' \cap B)$ و $B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ برهان دیگری برای قضیهٔ ۷.۲ ارائه دهید.



شکل ۱۰.۲ نمودار تمرینهای ۲۸.۲، ۳۰.۲، و ۳۱.۲

۳۰.۲ با استفاده از نمودار ون شکل ۱۰.۲ و روش اثبات قضیهٔ ۷.۲، قضیهٔ ۸.۲ را ثابت کنید.
۳۱.۲ از روش اثبات تمرین قبل تقلید کرده، رابطهٔ

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C\cup D) =& P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(A\cap B)\\ &-P(A\cap C)-P(A\cap D)-P(B\cap C)-P(B\cap D)\\ &-P(C\cap D)+P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)\\ &+P(A\cap C\cap D)+P(B\cap C\cap D)\\ &-P(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

را ثابت کنید. (راهنمایی: هر یک از ۸ ناحیهٔ نمودار ون در شکل ۱۰.۲ را به دو قسمت تقسیم کنید، یکی داخل D، و دیگری خارج D، و به ۱۶ ناحیهٔ حاصل، احتمالهای a، b، c، ... ، n، o، و p را نسبت دهید.)
۳۲.۲ به کمک استقرا ثابت کنید که برای هر دنبالهٔ متناهی از پیشامدهای $E_۱$، $E_۲$، ... ، و E_n

$$P(E_۱\cup E_۲\cup\cdots\cup E_n)\le\sum_{i=۱}^{n}P(E_i)$$

۳۳.۲ **بخت** رخ دادن یک پیشامد برحسب نسبت احتمال وقوع آن به احتمال عدم وقوع آن داده می‌شود، به شرط آنکه هیچ‌یک از دو احتمال صفر نباشد. بخت را معمولاً برحسب دو عدد صحیح مثبت که عامل مشترک ندارند، بیان می‌کنند. اگر بخت اینکه پیشامدی رخ دهد برابر a به b باشد، نشان دهید که احتمال این پیشامد $p=\frac{a}{a+b}$ است.
۳۴.۲ با قرار دادن افراد در وضعیتهای مخاطره‌آمیز و یافتن بختی که به‌نظر آنها شرط بستن روی برآمد عادلانه است، می‌توان احتمالهای ذهنی را تعیین نمود. سپس به‌وسیلهٔ فرمول تمرین قبل، بختها به احتمالها تبدیل می‌شوند. مثلاً، اگر فردی احساس کند که ۲ به ۳ بخت عادلانه‌ای است که یک معاملهٔ تجارتی سودبخش باشد (یا عادلانه است که ۳۰۰ تومان به ۲۰۰ تومان روی سودبخشی این معامله شرط‌بندی کند)، احتمال اینکه این معاملهٔ تجارتی سودبخش باشد $\frac{۳}{۳+۲}=۰٫۶$ است. نشان دهید که اگر احتمالهای ذهنی بدین طریق معین شوند، در

(الف) اصل موضوع ۱، در صفحهٔ ۴۴؛

(ب) اصل موضوع ۲،

صدق می‌کنند. تمرین ۵۶.۲ را نیز ببینید.

کاربردها

۳۵.۲ آزمایشی دارای پنج برآمد A، B، C، D، و E است که دوبه‌دو ناسازگارند. برای هریک از

موارد زیر بررسی کنید که آیا تخصیص احتمال، تخصیصی مجاز است یا نه، و دلیل پاسخ خود را بیان کنید:

(الف) $P(A) =$ ۰٫۲۰، $P(B) =$ ۰٫۲۰، $P(C) =$ ۰٫۲۰، $P(D) =$ ۰٫۲۰ و $P(E) =$ ۰٫۲۰؛

(ب) $P(A) =$ ۰٫۲۱، $P(B) =$ ۰٫۲۶، $P(C) =$ ۰٫۵۸، $P(D) =$ ۰٫۰۱، و $P(E) =$ ۰٫۰۶؛

(ج) $P(A) =$ ۰٫۱۸، $P(B) =$ ۰٫۱۹، $P(C) =$ ۰٫۲۰، $P(D) =$ ۰٫۲۱، و $P(E) =$ ۰٫۲۲؛

(د) $P(A) =$ ۰٫۱۰، $P(B) =$ ۰٫۳۰، $P(C) =$ ۰٫۱۰، $P(D) =$ ۰٫۶۰، و $P(E) =$ $-$۰٫۱۰؛

(ه) $P(A) =$ ۰٫۲۳، $P(B) =$ ۰٫۱۲، $P(C) =$ ۰٫۰۵، $P(D) =$ ۰٫۵۰، و $P(E) =$ ۰٫۰۸.

۳۶.۲ اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A) =$ ۰٫۳۷ و $P(B') =$ ۰٫۴۴، مطلوب است:

(الف) $P(A')$؛ (ب) $P(B')$؛ (ج) $P(A \cup B)$؛
(د) $P(A \cap B)$؛ (ه) $P(A \cap B')$؛ (و) $P(A' \cap B')$.

۳۷.۲ توضیح دهید که چرا در هریک از احکام زیر اشتباهی وجود دارد:

(الف) احتمال اینکه تقی در امتحان وکالت قبول شود ۰٫۶۶ و احتمال اینکه رد شود $-$۰٫۳۴ است.

(ب) احتمال اینکه تیم میزبان در بازی فوتبالی که در پیش دارد برنده شود ۰٫۷۷، احتمال اینکه برابر شود ۰٫۰۸، و احتمال اینکه ببرد یا برابر شود ۰٫۹۵ است.

(ج) احتمال اینکه یک منشی در تایپ گزارشی مرتکب ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا بیش از ۵ اشتباه شود به‌ترتیب ۰٫۱۲، ۰٫۲۵، ۰٫۳۶، ۰٫۱۴، ۰٫۰۹ و ۰٫۰۷ است.

(د) احتمال اینکه بانکی در روزی مفروض ۰، ۱، ۲ یا بیش از ۳ چک بدون محل دریافت کند به‌ترتیب ۰٫۰۸، ۰٫۲۱، ۰٫۲۹، و ۰٫۴۰ است.

۳۸.۲ فرض کنیم به هریک از ۳۰ نقطهٔ فضای نمونه‌ای تمرین ۱۰.۲ احتمال $\frac{1}{30}$ نسبت داده شود، پیدا کنید احتمال اینکه در لحظهٔ معینی

(الف) حداقل یکی از اتومبیلها خالی باشد؛

(ب) هریک از دو اتومبیل تعداد یکسانی مسافر داشته باشد؛

(ج) اتومبیل بزرگتر بیشتر از اتومبیل کوچکتر مسافر داشته باشد؛

(د) دو اتومبیل جمعاً حداقل ۶ مسافر داشته باشند.

۳۹.۲ احتمال اینکه نحوهٔ بهره‌برداری از یک ماشین جدید اشعهٔ X، به خیلی مشکل، مشکل، متوسط، آسان و خیلی آسان درجه‌بندی شود به‌ترتیب ۰٫۱۲، ۰٫۱۷، ۰٫۳۴، ۰٫۲۹ و ۰٫۰۸

است. پیدا کنید احتمال اینکه نحوهٔ بهره‌برداری ماشین به یکی از صورتهای زیر درجه‌بندی شود:
(الف) مشکل یا خیلی مشکل؛
(ب) نه خیلی مشکل و نه خیلی آسان؛
(ج) متوسط یا بدتر؛
(د) متوسط یا بهتر.

۴۰.۲ یک کلانتری برابر با ماشینهای گشت خود تایر جدید نیاز دارد، و به‌ترتیب با احتمالهای ۱۵ر۰، ۲۴ر۰، ۳۰ر۰، ۲۸ر۰، ۲۲ر۰ و ۸۰ر۰ این تایرها را ازکمپانیهای A، B، C، D، E، یا F خواهد خرید. پیدا کنید احتمال اینکه خرید تایر
(الف) از کمپانی B یا E باشد؛
(ب) ازکمپانی A، C یا E باشد؛
(ج) ازکمپانی C یا F؛
(د) ازکمپانی A، C، D یا E باشد.

۴۱.۲ در کلاهی بیست تکهٔ کاغذ سفید که از ۱ تا ۲۰، ده تکهٔ کاغذ قرمز که از ۱ تا ۱۰، چهل تکه کاغذ زرد که از ۱ تا ۴۰، و ده تکه کاغذ آبی که از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند ریخته شده است. اگر این ۸۰ تکه کاغذ را کاملاً قاطی کنیم به‌قسمی که تمام تکه کاغذها در موقع استخراج احتمال برابر داشته باشند، پیدا کنید احتمال استخراج یک تکه کاغذ را که
(الف) آبی یا سفید باشد؛
(ب) به شمارهٔ ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشد؛
(ج) قرمز یا زرد و با شمارهٔ ۱، ۲، ۳، یا ۴ باشد؛
(د) به شمارهٔ ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵ باشد؛
(هـ) سفید و با شماره‌ای بزرگتر از ۱۲ یا زرد و با شمارهٔ بزرگتر از ۲۶ باشد.

۴۲.۲ چهار نفر داوطلب انتخاب شدن به‌عنوان یکی از اعضای انجمن اولیاء و مربیان مدرسه‌ای هستند. اگر احتمال انتخاب A دو برابر احتمال انتخاب B باشد و B و C حدوداً شانس برابر برای انتخاب شدن داشته باشند، در حالی‌که احتمال انتخاب C دو برابر احتمال انتخاب D باشد، احتمال اینکه
(الف) C موفق شود؛
(ب) A موفق نشود؛
چقدر است؟

۴۳.۲ ۲ کارت به‌تصادف از یک دسته کارت ۵۲تایی بیرون کشیده می‌شود. احتمال این را که هر دو کارت بزرگتر از ۳ و کوچکتر از ۸ باشند، تعیین کنید.

۴۴.۲ از یک دسته کارت ۵۲تایی، پنج کارت به تصادف انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال داشتن
(الف) دو جفت
(ب) چهار کارت از یک رنگ.

۴۵.۲ در بازی «یاتزی»[1] که در آن ۵ تاس همزمان ریخته می‌شوند، احتمال به‌دست آوردن
(الف) دو جفت؛
(ب) سه شمارهٔ برابر؛
(ج) سه شمارهٔ برابر و یک جفت؛
(د) چهار شمارهٔ برابر؛
را بیابید.

۴۶.۲ بین ۷۸ پزشکی که در بیمارستانی کار می‌کنند، ۶۴ نفر در مقابل درمان غلط بیمه شده‌اند، ۳۶ نفر جراح‌اند، و ۳۴ نفر از جراحان در مقابل درمان غلط بیمه شده‌اند. اگر یکی از این پزشکان با قرعه به‌عنوان نمایندهٔ بیمارستان در انجمن پزشکان انتخاب شود (یعنی احتمال انتخاب هر پزشک $\frac{1}{78}$ است)، احتمال اینکه کسی که انتخاب می‌شود جراح نبوده و در مقابل معالجات غلط بیمه نشده باشد چقدر است؟

۴۷.۲ بر پایهٔ قاعده‌های مختلف تمرینهای ۲۳.۲ تا ۲۷.۲، توضیح دهید که چرا باید در هر یک از احکام زیر خطایی وجود داشته باشد:

(الف) احتمال اینکه باران ببارد ۶۷ر۰، و احتمال اینکه باران یا برف ببارد ۵۵ر۰ است.

(ب) احتمال اینکه دانشجویی در درس انگلیسی نمرهٔ قبولی بگیرد ۸۲ر۰ و احتمال اینکه در دروس انگلیسی و فرانسه نمرهٔ قبولی بگیرد ۸۶ر۰ است.

(ج) احتمال اینکه شخصی در بازدید از باغ‌وحشی از قسمت زرافه‌ها دیدن کند ۷۲ر۰ و احتمال اینکه از قسمت خرسها دیدن کند ۸۴ر۰، و احتمال اینکه از هر دو قسمت دیدن کند ۵۲ر۰ است.

۴۸.۲ با فرض $P(A) = $ ۵۹ر۰، $P(B) = $ ۳۰ر۰، $P(A \cap B) = $ ۲۱ر۰، پیدا کنید

(الف) $P(A \cup B)$؛ (ب) $P(A \cap B')$؛
(ج) $P(A' \cup B')$؛ (د) $P(A' \cap B')$.

۴۹.۲ برای زوجی که در حومهٔ شهر زندگی می‌کنند، احتمال اینکه شوهر در انتخابات انجمن مدرسه رأی دهد برابر ۲۱ر۰، احتمال اینکه همسرش رأی دهد ۲۸ر۰، و احتمال اینکه هر دو رأی دهند ۱۵ر۰ است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها رأی دهند چقدر است؟

۵۰.۲ یک استاد زیست‌شناسی در کارهای تحقیقاتیش دو دستیار دارد. احتمال اینکه مسن‌تر در روز معینی غیبت کند ۰۸ر۰، و احتمال اینکه دستیار جوانتر در روز معینی غیبت کند ۰۵ر۰، و احتمال اینکه هردو در روز معینی غایب باشند ۰۲ر۰ است. پیدا کنید احتمال اینکه
(الف) یکی یا هردو دستیار در روز معینی غایب باشند؛
(ب) حداقل یکی از دو دستیار در روز معینی غایب نباشد؛
(ج) فقط یکی از دو دستیار در روز معینی غایب باشد.

۵۱.۲ می‌دانیم که در دانشگاهی واقع در استانی، $\frac{1}{3}$ دانشجویان خارج از خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. همچنین می‌دانیم که $\frac{5}{9}$ دانشجویان اهل همین استان‌اند و $\frac{3}{4}$ دانشجویان اهل این

1. Yahtzee

استان نیستند یا در خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. احتمال اینکه دانشجویی که به‌تصادف از این دانشگاه انتخاب می‌شود اهل استان نباشد و در خوابگاه دانشجویی زندگی کند چقدر است؟

۵۲.۲ فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند، احتمال اینکه از عالی‌قاپو بازدید کند ۷۴ر۰، احتمال اینکه از بازار اصفهان بازدید کند ۷۰ر۰، احتمال اینکه از مسجد جامع اصفهان بازدید نماید ۶۲ر۰، احتمال اینکه از عالی‌قاپو و بازار اصفهان بازدید کند ۵۲ر۰، احتمال اینکه از عالی‌قاپو و مسجد جامع بازدید نماید ۴۶ر۰، احتمال اینکه از بازار اصفهان و مسجد جامع بازدید کند ۴۴ر۰، و احتمال اینکه به بازدید هر سه مکان برود ۳۴ر۰ است. احتمال اینکه این شخص حداقل از یکی از این سه مکان دیدن کند چقدر است؟

۵۳.۲ فرض می‌کنیم که اگر شخصی برای اولین‌بار به اروپا مسافرت کند، احتمال اینکه لندن را ببیند ۷۰ر۰، احتمال اینکه پاریس را ببیند ۶۴ر۰، احتمال اینکه رم را ببیند ۵۸ر۰، احتمال اینکه آمستردام را ببیند ۵۸ر۰، احتمال اینکه لندن و پاریس را ببیند ۴۵ر۰، احتمال اینکه لندن و رم را ببیند ۴۲ر۰، احتمال اینکه لندن و آمستردام را ببیند ۴۱ر۰، احتمال اینکه پاریس و رم را ببیند ۳۵ر۰، احتمال اینکه پاریس و آمستردام را ببیند ۳۹ر۰، احتمال اینکه رم و آمستردام را ببیند ۳۲ر۰، احتمال اینکه رم، لندن و پاریس را ببیند ۲۳ر۰، احتمال اینکه لندن، پاریس و آمستردام را ببیند ۲۶ر۰، احتمال اینکه لندن، رم و آمستردام را ببیند ۲۱ر۰، احتمال اینکه پاریس، رم و آمستردام را ببیند ۲۰ر۰ و احتمال اینکه هر چهار شهر را ببیند ۱۲ر۰ است. احتمال اینکه مسافری که برای اولین‌بار به اروپا سفر می‌کند حداقل یکی از این چهار شهر را ببیند چقدر است؟ (راهنمایی: فرمول تمرین ۳۱.۲ را به‌کار برید.)

۵۴.۲ با استفاده از تمرین ۳۳.۲ هر یک از بختهای زیر را به احتمال تبدیل کنید.

(الف) اگر از جعبه‌ای با دوازده تخم‌مرغ که در آن سه تخم‌مرغ ترک‌خورده موجود است، سه تخم‌مرغ به تصادف انتخاب کنیم، بخت ۳۴ به ۲۱ وجود دارد که حداقل یکی از آنها ترک خورده باشد.

(ب) اگر شخصی هشت اسکناس ده تومانی، پنج اسکناس پنجاه تومانی و یک اسکناس صد تومانی داشته باشد و به تصادف ۳تا از آنها را انتخاب کند، بخت ۱۱ به ۲ وجود دارد که هیچ‌کدام ده تومانی نباشند.

(ج) اگر حرفهای واژهٔ «nest» را به دلخواه آرایش دهیم، بخت ۵ به ۱ وجود دارد که واژه‌ای بامعنا در زبان انگلیسی به‌دست نیاید.

۵۵.۲ با استفاده از تعریف «بخت» در تمرین ۳۳.۲، هر یک از احتمالهای زیر را به بخت تبدیل کنید.

(الف) احتمال اینکه آخرین رقم شمارهٔ اتومبیلی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، یا ۷ باشد برابر با $\frac{6}{10}$ است.

(ب) احتمال آمدن حداقل دو شیر در چهار پرتاب یک سکه نااریب برابر با $\frac{11}{16}$ است.

(ج) احتمال ظاهر شدن «۷ یا ۱۱» در ریختن یک جفت تاس همگن برابر با $\frac{2}{9}$ است.

۵۶.۲ اگر احتمالهای ذهنی با روشی تعیین شوند که در تمرین ۳۴.۲ پیشنهاد شد، ممکن است اصل موضوع سوم برقرار نباشد. اما طرفداران مفهوم احتمال ذهنی معمولاً این اصل موضوع را

به‌عنوان یک **ملاک سازگاری** اعمال می‌کنند؛ به‌عبارت دیگر آنها احتمالهای ذهنی را که در اصل موضوع صدق نمی‌کنند به‌عنوان ناسازگار تلقی می‌کنند.

(الف) رئیس یک دبیرستان احساس می‌کند که بخت ۷ به ۵ دارد که افزایش حقوقی برابر ۱۰۰۰ دلار به‌دست آورد و بخت ۱۱ به ۱ دارد که افزایش حقوق او ۲۰۰۰ دلار باشد. به‌علاوه احساس می‌کند به‌دست آوردن هر یک از این افزایش حقوقها بخت ۱ به ۱ دارد. در مورد سازگاری احتمالهای ذهنی متناظر بحث کنید.

(ب) از یک مقام رسمی حزبی وقتی دربارهٔ آیندهٔ سیاسی او سؤال شده است، پاسخ داده است که بخت ۲ به ۱ دارد که برای مجلس نمایندگان انتخاب نشود و بخت ۴ به ۱ دارد که برای نمایندگی سنا انتخاب نشود. به‌علاوه احساس می‌کند که بخت ۷ به ۵ دارد که برای یکی از دو مورد بالا انتخاب شود. آیا احتمالهای متناظر سازگارند؟

۵۷.۲ دو نوع اتومبیل پورشه در مسابقهٔ اتومبیلرانی شرکت می‌کنند. خبرنگار احساس می‌کند که بخت برد آنها به‌ترتیب ۳ به ۱ و ۵ به ۳ است. خبرنگار باید چه بختهایی را به پیشامد برد هر اتومبیل نسبت دهد تا سازگاری وجود داشته باشد (تمرین قبل را ببینید)؟

۶.۲ احتمال شرطی

وقتی بدون توصیف مشخصات فضای نمونه‌ای صحبت از احتمال می‌شود، ممکن است به‌سادگی مشکلاتی پیش بیایند. برای مثال، اگر دربارهٔ احتمال اینکه حقوقدانی بیشتر از ۵۰۰۰۰۰۰ تومان در سال درآمد داشته باشد سؤال کنیم، ممکن است چندین جواب مختلف به ما بدهند، و تمام جوابها درست باشند. یکی از جوابها ممکن است شامل حال تمام فارغ‌التحصیلان رشتهٔ حقوق باشد، دیگری ممکن است شامل حال تمام افرادی باشد که پروانهٔ کار وکالت دارند، سومی ممکن است شامل حال تمام آنهایی باشد که فعالانه به کار وکالت اشتغال دارند، و قس‌علی‌هذا. چون انتخاب فضای نمونه‌ای (یعنی، مجموعهٔ تمام امکانات موردنظر) به هیچ‌وجه همیشه امری بدیهی نیست، اغلب استفاده از نماد $P(A|S)$ برای نمایش **احتمال شرطی** پیشامد A نسبت به فضای S، یا آنچه آن را «احتمال A ، به شرط S» نیز می‌خوانیم سودمند است. نماد $P(A|S)$ تصریح می‌کند که اشارهٔ ما به فضای نمونه‌ای خاص S است، و این نماد به نماد اختصاری $P(A)$ ترجیح دارد، مگر آنکه انتخاب S به‌روشنی از مضمون آشکار باشد. این نماد، وقتی می‌خواهیم در یک مثال به چندین فضای نمونه‌ای اشاره کنیم، نیز نمادی برتر است. اگر A، این پیشامد باشد که درآمد سالیانهٔ شخصی بیش از ۵۰۰۰۰۰۰ تومان است، G این پیشامد باشد که شخصی فارغ‌التحصیل حقوق است، L این پیشامد باشد که شخصی دارای پروانهٔ وکالت است و E این پیشامد باشد که شخصی به‌طور فعال به‌کار وکالت اشتغال دارد، آنگاه $P(A|G)$ احتمال این است که یک فارغ‌التحصیل حقوق درآمد سالیانه‌ای بیش از ۵۰۰۰۰۰۰ تومان داشته باشد، $P(A|L)$ احتمال این است که شخصی که پروانهٔ کار وکالت دارد درآمد سالیانه‌ای بیش از ۵۰۰۰۰۰۰ تومان داشته

باشد، و $P(A|E)$ احتمال این است که شخصی که به‌طور فعال به‌کار وکالت اشتغال دارد درآمد سالیانه‌اش بیش از ۵۰۰۰۰۰۰ تومان باشد.

بعضی از ایده‌هایی که به احتمالهای شرطی مربوط می‌شوند، در مثال زیر تشریح شده‌اند.

مثال ۱۵.۲

یک سازمان تحقیقاتی حمایت از مصرف‌کننده ۵۰ مرکز سرویس مجاز را مطالعه کرده است، و یافته‌های حاصل در جدول زیر خلاصه شده‌اند:

	سرویس مجاز خوب	سرویس مجاز ضعیف
باسابقهٔ شغلی ده یا بیشتر از ده سال	۱۶	۴
با سابقهٔ شغلی کمتر از ده سال	۱۰	۲۰

اگر فردی به‌تصادف یکی از این مراکز سرویس را انتخاب کند، احتمال اینکه مرکز سرویس مجاز خوبی باشد چقدر است؟ همچنین اگر شخصی به‌تصادف یکی از مراکزی را انتخاب کند که ده یا بیشتر از ده سال سابقهٔ شغلی داشته باشد، احتمال اینکه مرکزی انتخاب شود که از مراکز مجاز خوب باشد چقدر است؟

حل. منظور ما از «به‌تصادف» این است که در هر حالت، تمام انتخابهای ممکن همشانس‌اند، و بنابراین می‌توانیم فرمول قضیهٔ ۲.۲ را به‌کار بریم اگر G، انتخاب مرکزی را نشان دهد که سرویس خوب ارائه می‌دهد، و اگر فرض کنیم $n(G)$ تعداد عناصر G را نشان دهد، و $n(S)$ تعداد عناصر تمام فضای نمونه‌ای باشد، به‌دست می‌آوریم

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{۱۶ + ۱۰}{۵۰} = ۰٫۵۲$$

این پاسخ اولین سؤال است.

برای سؤال دوم، ما خود را به‌فضای نمونه‌ای کوچکتری که شامل سطر اول جدول است، یعنی به $۲۰ = ۴ + ۱۶$ مرکزی که ده یا بیش از ده سال سابقهٔ شغلی دارند محدود می‌کنیم. از این ۲۰ مرکز، ۱۶ مرکز سرویس خوب ارائه می‌دهند، و به‌دست می‌آوریم

$$P(G|T) = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰٫۸۰$$

که در آن T، انتخاب مرکزی را نشان می‌دهد که ده یا بیش از ده سال سابقهٔ شغلی دارد. این، پاسخ سؤال دوم است، و همان‌طور که انتظار داشتیم، $P(G|T)$ خیلی از $P(G)$ بزرگتر است.▲

چون صورت $P(G|T)$ برابر ۱۶ $= n(T \cap G)$، یعنی تعداد مراکزی است که ده سال یا بیش از ده سال به‌کار اشتغال دارند و سرویس خوب ارائه می‌دهند، و مخرج برابر $n(T)$، یعنی تعداد

مراکزی است که ده سال یا بیش از ده سال سابقهٔ کار دارند، می‌توانیم به‌صورت نمادی بنویسیم

$$P(G|T) = \frac{n(T \cap G)}{n(T)}$$

پس، اگر صورت و مخرج را به $n(S)$، تعداد کل مراکز در شهر موردنظر، تقسیم کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$P(G|T) = \frac{\frac{n(T\cap G)}{n(S)}}{\frac{n(T)}{n(S)}} = \frac{P(T \cap G)}{P(T)}$$

و لذا احتمال شرطی $P(G|T)$ را برحسب دو احتمالی که برای تمام فضای نمونه‌ای S تعریف شده‌اند بیان کرده‌ایم.

با تعمیم این مثال، اکنون تعریف احتمال شرطی را به‌صورت زیر ارائه می‌دهیم.

تعریف۱.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A) \neq ۰$، **احتمال شرطی** B به شرط A برابر است با

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال ۱۶.۲

با مراجعه به مثال ۱۵.۲، احتمال اینکه یکی از فروشندگانی که کمتر از ده سال به‌کار اشتغال دارد سرویس خوبی ارائه دهد چقدر است؟

حل. چون $P(T' \cap G) = \frac{۱۰}{۵۰} = ۰٫۲۰$ و $P(T') = \frac{۱۰+۲۰}{۵۰} = ۰٫۶۰$، اگر مقادیر را در فرمول قرار دهیم نتیجه می‌دهد که

$$P(G|T') = \frac{P(T' \cap G)}{P(T')} = \frac{۰٫۲۰}{۰٫۶۰} = \frac{۱}{۳}$$

▲

گرچه ما $P(B|A)$ را با مثالی که در آن تمام امکانات همشانس بودند معرفی کردیم، اما این مطلب،.شرطی برای به‌کار بردن تعریف نیست.

مثال ۱۷.۲
با رجوع به تاس ناهمگن مثال ۹.۲، احتمال اینکه شماره‌ای که ظاهر می‌شود مربع کامل باشد چقدر است؟ همچنین به فرض اینکه این شماره بزرگتر از ۳ باشد، احتمال اینکه مربع کامل باشد چقدر است؟

حل. اگر A این پیشامد باشد که شمارهٔ ظاهر شدهٔ بزرگتر از ۳ است، و B این پیشامد باشد که شمارهٔ ظاهر شده مربع کامل است، داریم $A = \{۴, ۵, ۶\}$، $B = \{۱, ۴\}$، و $A \cap B = \{۴\}$. چون احتمالهای ظاهر شدن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، یا ۶ با تاس موردنظر به‌ترتیب $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۲}{۹}$، $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۲}{۹}$ و $\frac{۱}{۹}$ (صفحهٔ ۴۷ را ببینید) هستند، پاسخ اولین سؤال را به‌صورت

$$P(B) = \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳}$$

پیدا می‌کنیم. برای تعیین $P(B|A)$، ابتدا

$$P(A) = \frac{۱}{۹} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۴}{۹} \quad \text{و} \quad P(A \cap B) = \frac{۱}{۹}$$

را محاسبه می‌کنیم. لذا با قرار دادن این دو مقدار در فرمول تعریف ۱.۲، به‌دست می‌آوریم

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۴}{۹}} = \frac{۱}{۴}$$

▲

برای اینکه تحقیق کنیم فرمول ۱.۲ در مثال قبل جوابی «درست» می‌دهد، تنها کافی است که در فضای نمونه‌ای کوچک شدهٔ A، به دو عدد زوج احتمال v و به عدد فرد احتمال $۲v$ را نسبت دهیم، به‌قسمی که مجموع این سه احتمال مساوی ۱ باشد. در این صورت داریم $v + ۲v + v = ۱$ یا $v = \frac{۱}{۴}$، و لذا مثل قبل $P(B|A) = \frac{۱}{۴}$.

مثال ۱۸.۲
یک سازندهٔ قطعات یدکی هواپیما از تجربه‌های گذشته‌اش می‌داند که احتمال اینکه سفارشی به‌موقع برای بارگیری آماده شود برابر ۰٫۸۰ است، و احتمال اینکه سفارشی به‌موقع برای بارگیری آماده شود و همچنین به‌موقع تحویل شود برابر ۰٫۷۲ است. احتمال اینکه چنین سفارشی به‌موقع تحویل شود به‌شرط آنکه به‌موقع برای بارگیری آماده شده باشد چقدر است؟

حل. اگر فرض کنیم که R نمایش پیشامدی باشد که سفارش به‌موقع برای بارگیری آماده، و D نمایش پیشامدی باشد که سفارش به‌موقع تحویل شود، داریم $P(R) = ۰٫۸۰$ و $P(R \cap D) = ۰٫۷۲$، و نتیجه می‌شود که

$$P(D|R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{۰{,}۷۲}{۰{,}۸۰} = ۰{,}۹۰$$

بنابراین، ۹۰ درصد محموله‌ها به‌موقع تحویل می‌شوند به‌شرط آنکه به‌موقع بارگیری شوند. توجه کنید که $P(R|D)$، احتمال اینکه محموله‌ای که به‌موقع تحویل شده است برای بارگیری نیز به‌موقع آماده شده باشد، بدون اطلاعاتی اضافی قابل محاسبه نیست. برای این مقصود باید $P(D)$ را نیز بدانیم.▲

با ضرب طرفین فرمول تعریف ۱.۲ در $P(A)$، **قاعده ضرب** زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۹.۲ اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، و $P(A) \neq ۰$، آنگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

با استفاده از کلمات، احتمال اینکه A و B باهم رخ دهند برابر حاصلضرب احتمال A در احتمال شرطی B به شرط A است. به‌صورتی دیگر، اگر $P(B) \neq ۰$، احتمال آنکه A و B، هردو رخ دهند، برابر با حاصلضرب احتمال B و احتمال شرطی A به شرط B است؛ به‌صورت نمادی

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

برای به‌دست آوردن این قاعدهٔ حاصلضرب، در فرمول قضیهٔ ۹.۲ جای A و B را عوض و از واقعیت $A \cap B = B \cap A$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۹.۲

اگر از محمولهٔ ۲۴۰ لامپ تلویزیون که ۱۵تای آن معیوب است، به‌تصادف و به‌توالی دو لامپ تلویزیون برداریم، چقدر احتمال دارد که هردو معیوب باشند؟

حل. اگر احتمال انتخابها را برابر فرض کنیم (که منظور ما همان انتخاب «به‌تصادف» لامپهاست)، احتمال اینکه اولین لامپ معیوب باشد $\frac{۱۵}{۲۴۰}$، و احتمال اینکه دومین لامپ، به شرط معیوب بودن اولین لامپ، معیوب باشد برابر $\frac{۱۴}{۲۳۹}$ است. لذا احتمال اینکه هردو لامپ معیوب باشند $(\frac{۱۵}{۲۴۰})(\frac{۱۴}{۲۳۹}) = \frac{۷}{۱۹۱۲}$ است. البته فرض بر این است که **نمونه‌گیری بدون جایگذاری** است، یعنی اینکه قبل از انتخاب لامپ دوم، لامپ اول به جای خود گذاشته نمی‌شود. ▲

مثال ۲۰.۲

پیدا کنید احتمال اینکه به‌تصادف، دو یک به‌توالی از یک دسته کارت ۵۲تایی کشیده شوند

(الف) اگر بدون جایگذاری نمونه بگیریم،
(ب) اگر با جایگذاری نمونه بگیریم.

حل. (الف) اگر قبل از کشیدن کارت دوم، کارت اول را به‌جای خود برنگردانیم، احتمال به‌دست آوردن متوالی دو یک برابر است با

$$\frac{۴}{۵۲}\cdot\frac{۳}{۵۱}=\frac{۱}{۲۲۱}$$

(ب) اگر قبل از کشیدن کارت دوم، کارت اول را به‌جای خود برگردانیم، احتمال متناظر برابر است با

$$\frac{۴}{۵۲}\cdot\frac{۴}{۵۲}=\frac{۱}{۱۶۹}$$

▲

در وضعیتهایی که در دو مثال قبل توصیف شدند، بین دو پیشامد A و B، یک ترتیب زمانی قطعی وجود دارد. به‌طورکلی، وقتی می‌نویسم $P(A|B)$ یا $P(B|A)$ نیاز به چنین ترتیبی نیست. برای مثال، می‌توانستیم احتمال آن را بخواهیم که اولین کارت کشیده شده عدد یک باشد به شرط آنکه دومین کارت کشیده شده (بدون جایگذاری) نیز عدد یک باشد ــ پاسخ به این سؤال نیز $\frac{۳}{۵۱}$ خواهد داد.

قضیهٔ ۹.۲ را می‌توان به‌سهولت تعمیم داد، به‌قسمی که بتوان آن را برای بیش از دو پیشامد به‌کار برد. مثلاً برای سه پیشامد داریم:

قضیهٔ ۱۰.۲ اگر A، B و C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه‌ای S باشند، به‌قسمی که $P(A)\neq ۰$ و $P(A\cap B)\neq ۰$، آنگاه

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

برهان. با نوشتن $A\cap B\cap C$ به‌صورت $(A\cap B)\cap C$ و با دوبار استفاده از فرمول ۹.۲، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap C)&=P[(A\cap B)\cap C]\\&=P(A\cap B)\cdot P(C|A\cap B)\\&=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)\end{aligned}$$

■

مثال ۲۱.۲
بسته‌ای فیوز شامل ۲۰ فیوز است که ۵تای آنها معیوب‌اند. اگر به‌تصادف ۳ فیوز متوالیاً و بدون جایگذاری از بستهٔ مزبور انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر ۳ فیوز معیوب باشند چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد معیوب بودن فیوز اول، B پیشامد معیوب بودن فیوز دوم، و C پیشامد معیوب بودن فیوز سوم باشد، آنگاه $P(A)=\frac{۵}{۲۰}$، $P(B|A)=\frac{۴}{۱۹}$، $P(C|A\cap B)=\frac{۳}{۱۸}$، و اگر آنها را در فرمول قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{۵}{۲۰}\cdot\frac{۴}{۱۹}\cdot\frac{۳}{۱۸}$$
$$=\frac{۱}{۱۱۴}.$$

▲

تعمیم بیشتر قضیه‌های ۹.۲ و ۱۰.۲ به k پیشامد سرراست است، و فرمول حاصل را می‌توان با استقرای ریاضی به‌دست آورد.

۷.۲ پیشامدهای مستقل

با بیانی غیرصوری، دو پیشامد A و B را **مستقل** می‌گویند اگر رخ دادن یا رخ ندادن هر یک از آنها در احتمال رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. مثلاً اگر در مثال قبل هر فیوز را قبل از بیرون کشیدن فیوز بعدی به‌جای خود برگردانیم، برآمدهای انتخابهای متوالی همگی مستقل‌اند یعنی احتمال به‌دست آوردن یک فیوز معیوب در هر حالت برابر $\frac{۵}{۲۰}$ باقی می‌ماند.

به‌طور نمادی، دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر

$$P(A|B)=P(A),\ \ P(B|A)=P(B)$$

و موقعی که هردو احتمال شرطی موجود باشند، یعنی وقتی $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند، می‌توان نشان داد که هریک از این برابریها، دیگری را نتیجه می‌دهد (تمرین ۶۲.۲ را ببینید).

حال اگر در فرمول قضیهٔ ۹.۲، $P(B)$ را به‌جای $P(B|A)$ قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$$
$$=P(A)\cdot P(B)$$

و این نتیجه را به‌عنوان تعریف صوری استقلال به‌کار خواهیم برد.

تعریف ۲.۲ دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

با عکس کردن مراحل، می‌توانیم نشان دهیم که تعریف ۲.۲ نیز تعریفی از استقلال را که قبلاً در صفحه ۶۷ ارائه دادیم نتیجه می‌دهد.

اگر دو پیشامد مستقل نباشند، می‌گویند **وابسته‌اند**. در به‌دست آوردن فرمول تعریف ۲.۲، فرض کردیم که $P(B|A)$ وجود دارد و لذا فرض کردیم که $P(A) \neq ۰$. برای سهولت در انجام اعمال ریاضی، فرض می‌کنیم که تعریف بالا وقتی $P(A) = ۰$ و (یا) $P(B) = ۰$، نیز به‌کار می‌رود.

مثال ۲۲.۲

سکه‌ای سه بار پرتاب و فرض می‌شود که ۸ برآمد ممکن HHH، HHT، HTH، THH، HTT، THT، TTH و TTT همشانس باشند. اگر A پیشامد رخ دادن شیر در هریک از دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن خط در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو خط در سه پرتاب باشد، نشان دهید که

(الف) پیشامدهای A و B مستقل‌اند؛

(ب) پیشامدهای B و C وابسته‌اند.

حل. چون

$$\begin{aligned}
A &= \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}\}\\
B &= \{\mathrm{HHT}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTT}\}\\
C &= \{\mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}\}\\
A \cap B &= \{\mathrm{HHT}\}\\
B \cap C &= \{\mathrm{HTT}, \mathrm{THT}\}
\end{aligned}$$

فرض همشانس بودن همهٔ هشت پیشامد نتیجه می‌دهد که $P(A) = \frac{۱}{۴}$، $P(B) = \frac{۱}{۲}$، $P(C) = \frac{۳}{۸}$، $P(A \cap B) = \frac{۱}{۸}$ و $P(B \cap C) = \frac{۱}{۴}$.

(الف) چون $P(A)P(B) = \frac{۱}{۴}\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸} = P(A \cap B)$، پیشامدهای A و B مستقل‌اند.

(ب) چون $P(B)P(C) = \frac{۱}{۲}\frac{۳}{۸} = \frac{۳}{۱۶} \neq P(B \cap C)$، پیشامدهای B و C مستقل نیستند. ▲

در ارتباط با تعریف ۲.۲، می‌توان نشان داد که اگر A و B مستقل باشند، آنگاه A و B'، A' و B، و A' و B' هم-مستقل‌اند. مثلاً

قضیهٔ ۱۱.۲ اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد A و B' نیز مستقل‌اند.

برهان. چون همان‌طور که در قسمت (الف) تمرین ۴.۲ از خواننده خواسته بودیم که اثبات کند $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$، پس $A \cap B$ و $A \cap B'$ ناسازگارند و چون A و B بنابر فرض مستقل‌اند، داریم

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \\ &= P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B') \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) \cdot [۱ - P(B)] \\ &= P(A) \cdot P(B') \end{aligned}$$

و لذا A و B' مستقل‌اند. ■

در تمرینهای ۶۳.۲ و ۶۴.۲ از خواننده خواسته شده است که نشان دهد اگر A و B مستقل باشند. آنگاه A' و B، و A' و B' نیز مستقل‌اند، و اگر A و B وابسته باشند، آنگاه A و B' وابسته‌اند.

برای تعمیم مفهوم استقلال به بیش از دو پیشامد، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ۳.۲ پیشامدهای $A_۱$، $A_۲$، . . . ، و A_k مستقل‌اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر ۲، ۳، . . . ، یا kتا از این پیشامدها مساوی حاصلضرب احتمالهای مربوط به هر پیشامد باشد.

به‌عنوان مثال، برای استقلال سه پیشامد A، B و C لازم است که

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

و

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

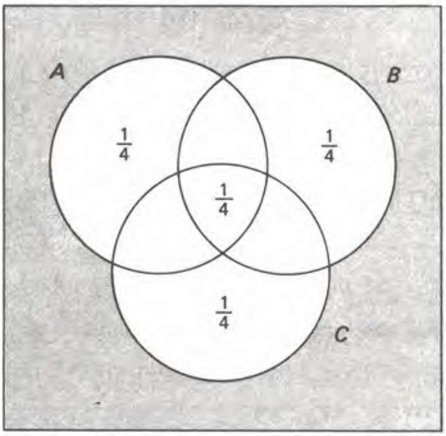
قابل توجه است که سه یا چند پیشامد می‌توانند **دوبه‌دو مستقل** باشند بدون آنکه کلاً مستقل باشند.

مثال ۲.۲۳

شکل ۲.۱۱ نمودار ونی را با احتمالهای منسوب به ناحیه‌های مختلف آن نشان می‌دهد. تحقیق کنید که A و B مستقل‌اند، A و C مستقل‌اند، B و C مستقل‌اند، اما A، B، و C مستقل نیستند.

حل. همان‌طور که از نمودار دیده می‌شود، $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{۱}{۲}$، $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{۱}{۴}$، و $P(A \cap B \cap C) = \frac{۱}{۴}$. پس $P(A) \cdot P(B) = \frac{۱}{۴} = P(A \cap B)$، $P(A) \cdot P(C) = \frac{۱}{۴} = P(A \cap C)$، $P(B) \cdot P(C) = \frac{۱}{۴} = P(B \cap C)$ اما $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{۱}{۸} \neq P(A \cap B \cap C)$.
▲

ضمناً اگر اتاق بزرگی را با سه کلید مجزای کنترل‌کنندهٔ چراغهای سقفی در نظر بگیریم، می‌توان تعبیری «واقعی» از مثال بالا ارائه داد. این چراغها وقتی هر سه کلید «بالا» هستند و بنابراین وقتی



شکل۲.۱۱ نمودار ون برای مثال ۲.۲۳

یکی از آنها «بالا» و دوتای دیگر «پایین»اند روشن‌اند. اگر A پیشامد «بالا» بودن اولین کلید، B پیشامد «بالا» بودن دومین کلید و C پیشامد «بالا» بودن سومین کلید باشد، نمودار ون شکل ۱۱.۲، مجموعه‌ای ممکن از احتمالهای مربوط به «بالا» بودن یا «پایین» بودن کلیدها را، وقتی چراغهای سقف روشن‌اند، نشان می‌دهد.

همین‌طور ممکن است که $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$، بدون آنکه A، B و C دوبه‌دو مستقل باشند ـ از خواننده در تمرین ۶۵.۲ خواسته شده است که درستی این مطلب را تحقیق کند.

البته، اگر پیشامدهای معینی مستقل فرض شوند، احتمال اینکه تمام آنها باهم رخ دهند صرفاً برابر حاصلضرب احتمالهای متناظر آنهاست.

مثال ۲۴.۲

مطلوب است احتمال به‌دست آوردن

(الف) سه شیر در سه پرتاب تصادفی یک سکه همگن؛

(ب) چهار شش و سپس عددی دیگر در پنج ریختن یک تاس ناهمگن.

حل. (الف) از ضرب احتمالهای مربوط، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

(ب) از ضرب احتمالهای مربوط، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۶} \cdot \frac{۱}{۶} \cdot \frac{۱}{۶} \cdot \frac{۱}{۶} \cdot \frac{۵}{۶} = \frac{۵}{۷۷۷۶}$$

▲

۸.۲ قضیهٔ بیز

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها برآمد نهایی یک آزمایش به آنچه در مراحل میانی مختلف رخ می‌دهند بستگی دارد. مثال زیر، مثالی ساده است که در آن، مرحله‌ای میانی وجود دارد که متشکل از دو شق است.

مثال ۲۵.۲

کار تکمیل بنای بزرگراهی ممکن است به‌علت اعتصاب به تأخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ دهد ۶۰ر۰، احتمال اینکه اگر اعتصابی نباشد کار به‌موقع انجام شود ۸۵ر۰، و احتمال اینکه اگر اعتصابی باشد کار به‌موقع انجام شود، ۳۵ر۰ باشد. احتمال اینکه کار به‌موقع انجام شود چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد تکمیل به‌موقع کار، و B پیشامد وقوع اعتصاب باشد، اطلاعات داده شده را می‌توان چنین نوشت:

$$P(B) = ۰٫۶۰, P(A|B) = ۰٫۳۵, P(A|B') = ۰٫۸۵$$

با استفاده از فرمول قسمت (الف) تمرین ۴.۲، و این واقعیت که $A \cap B$ و $A \cap B'$ ناسازگارند، و صورت دیگر قاعدهٔ ضرب، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap B') \\ &= P(B) \cdot P(A|B) + P(B') \cdot P(A|B') \end{aligned}$$

در این صورت، با قرار دادن مقادیر عددی، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} P(A) &= (۰٫۶۰)(۰٫۳۵) + (۱ - ۰٫۶۰)(۰٫۸۵) \\ &= ۰٫۵۵ \end{aligned}$$

▲

تعمیمی فوری از این نوع وضعیت، موردی است که در آن مرحلهٔ میانی دارای k شق مختلف است (که رخ دادن آنها را با $B_۱$، $B_۲$، ... ، B_k نشان می‌دهیم). این تعمیم، به قضیهٔ زیر که گاهی اوقات آن را **قاعدهٔ احتمال کل** یا **قاعدهٔ حذف** می‌نامند نیاز دارد.

قضیهٔ ۱۲.۲ اگر پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$، ... ، و B_k افرازی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، $P(B_i) \neq ۰$، آنگاه برای هر پیشامد A در S

$$P(A) = \sum_{i=۱}^{k} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

همان‌طور که در پانویس صفحهٔ ۱۵ تعریف کردیم، Bها افرازی از فضای نمونه‌ای را تشکیل می‌دهند اگر دوبه‌دو ناسازگار بوده و اجتماع آنها مساوی S باشد. برهانی صوری از قضیهٔ ۱۲.۲، اساساً شامل همان مراحلی است که در مثال ۲۵.۲ به‌کار رفتند، و در تمرین ۷۱.۲ به‌عهدهٔ خواننده واگذار شده‌اند.

مثال ۲.۲۶
اعضای یک شرکت مشاور از سه آژانس، اتومبیل کرایه می‌کنند: از آژانس ۱ به میزان ۶۰ درصد، از آژانس ۲ به میزان ۳۰ درصد، و از آژانس ۳ به میزان ۱۰ درصد. اگر ۹ درصد از اتومبیلهای آژانس ۱، ۲۰ درصد از اتومبیلهای آژانس ۲، و ۶ درصد از اتومبیلهای آژانس ۳ به تنظیم موتور نیاز داشته باشند، احتمال اینکه یک اتومبیل کرایه‌ای که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد چقدر است؟

حل. اگر A پیشامد نیاز داشتن اتومبیلی به تنظیم موتور باشد و اگر $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ به‌ترتیب پیشامدهای تعلق یک اتومبیل کرایه شده به آژانسهای ۱، ۲ یا ۳ باشند، داریم $P(B_۱) = ۰٫۶۰$، $P(B_۲) = ۰٫۳۰$، $P(B_۳) = ۰٫۱۰$، $P(A|B_۱) = ۰٫۰۹$، $P(A|B_۲) = ۰٫۲۰$، و $P(A|B_۳) = ۰٫۰۶$. اگر این مقادیر را در فرمول قضیهٔ ۲.۱۲ قرار دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} P(A) &= (۰٫۶۰)(۰٫۰۹) + (۰٫۳۰)(۰٫۲۰) + (۰٫۱۰)(۰٫۰۶) \\ &= ۰٫۱۲ \end{aligned}$$

پس، ۱۲ درصد از اتومبیلهایی که به شرکت تحویل می‌شوند به تنظیم موتور نیاز دارند. ▲

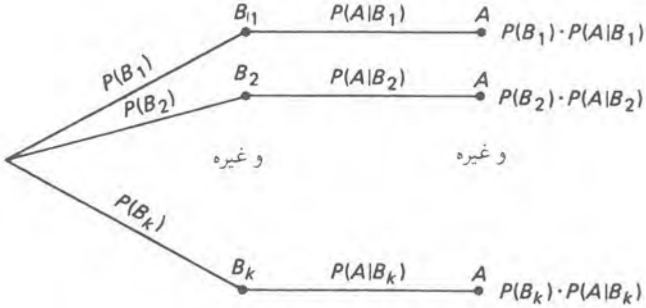
با رجوع به مثال قبلی، فرض کنیم سؤال زیر موردنظر باشد: اگر یک اتومبیل کرایه که به شرکت مشاور تحویل شده است نیاز به تنظیم موتور داشته باشد، چقدر احتمال دارد که متعلق به آژانس ۲ باشد؟ برای پاسخ دادن به این نوع سؤالات، به قضیهٔ زیر که **قضیهٔ بیز** نامیده می‌شود نیاز داریم:

قضیهٔ ۲.۱۳ اگر پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$، ... ، و B_k افرازی از فضای نمونه‌ای S را تشکیل دهند و به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, k$، $P(B_i) \neq ۰$، آنگاه برای هر پیشامد A در S، به قسمی که $P(A) \neq ۰$،

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r) \cdot P(A|B_r)}{\sum_{i=۱}^{k} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad r = ۱, ۲, \cdots, k$$

با استفاده از کلمات، احتمال اینکه از راه شاخهٔ rام نمودار درختی شکل ۲.۱۲ به پیشامد A برسیم، به شرط آنکه از راه یکی از k شاخهٔ نمودار به A رسیده باشیم، برابر نسبت احتمال مربوط به rامین شاخه به مجموع احتمالهای مربوط به کل k شاخهٔ درخت است.

برهان. مطابق تعریف احتمال شرطی، می‌نویسیم $P(B_r|A) = \frac{P(A \cap B_r)}{P(A)}$. لازم است فقط به‌جای $P(A \cap B_r)$ مقدار $P(B_r) \cdot P(A|B_r)$، و به‌جای $P(A)$، عبارت فرمول قضیهٔ ۲.۱۲ را قرار دهیم. ■



شکل۲.۱۲ نمودار درختی برای قضیهٔ بیز

مثال ۲.۲۷

با مراجعه به مثال ۲.۲۶، اگر اتومبیل کرایه‌ایی که به شرکت مشاور تحویل شده است به تنظیم موتور نیاز داشته باشد، احتمال اینکه متعلق به آژانس ۲ باشد چقدر است؟

حل. احتمالهای مذکور در صفحهٔ ۷۳ را در فرمول قضیهٔ ۲.۱۳ قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

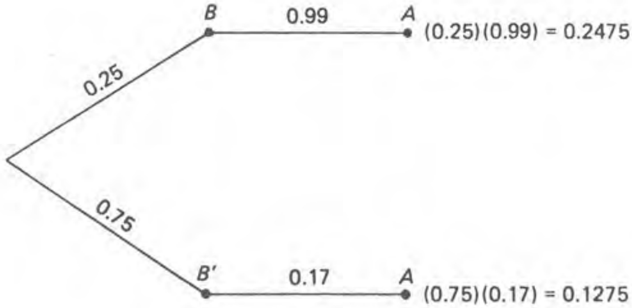
$$\begin{aligned} P(B_۲|A) &= \frac{(۰٫۳۰)(۰٫۲۰)}{(۰٫۶۰)(۰٫۰۹)+(۰٫۳۰)(۰٫۲۰)+(۰٫۱۰)(۰٫۰۶)} \\ &= \frac{۰٫۰۶۰}{۰٫۱۲۰} \\ &= ۰٫۵ \end{aligned}$$

توجه کنید که گرچه فقط ۳۰ درصد اتومبیلهایی که به شرکت تحویل می‌شوند متعلق به آژانس ۲ است، ولی ۵۰ درصد اتومبیلهایی که به تنظیم نیاز دارند متعلق به این آژانس‌اند. ▲

مثال ۲.۲۸

در استان معینی، دودزایی ۲۵ درصد تمام اتومبیلها بیش از حد عادی است. اگر در آزمون دودزایی وسایل نقلیهٔ استان، اتومبیلی که بیش از حد دود تولید می‌کند با احتمالی برابر ۰٫۹۹ مردود شود و اگر اتومبیلی که دودزایی آن بیش از حد عادی نیست با احتمال ۰٫۱۷ در این آزمون رد شود، احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می‌شود واقعاً اتومبیلی باشد که دودزایی آن بیش از حد عادی است چقدر است؟

حل. نمودار این وضعیت را به‌صورت شکل ۲.۱۳ رسم می‌کنیم، درمی‌یابیم که احتمالهای مربوط به دو شاخهٔ نمودار درختی عبارت‌اند از $۰٫۲۴۷۵ = (۰٫۹۹)(۰٫۲۵)$ و $(۱ - ۰٫۲۵)(۰٫۱۷) =$ ۰٫۱۲۷۵. پس احتمال اینکه اتومبیلی که در آزمون رد می‌شود واقعاً اتومبیلی باشد که بیش از حد



شکل۲.۱۳ نمودار درختی مثال ۲.۲۸

دود ایجاد می‌کند برابر است با

$$\frac{0/2475}{0/2475 + 0/1275} = 0/66$$

البته می‌توانستیم این نتیجه را از قرار دادن مستقیم در فرمول قضیهٔ بیز، بدون نمودار درختی نیز به‌دست آوریم. ▲

گرچه قضیهٔ بیز از اصول احتمال و تعریف احتمال شرطی نتیجه می‌شود، ولی این قضیه موضوع مباحثه‌های دامنه‌داری بوده است. دربارهٔ اعتبار قضیهٔ بیز نمی‌توان سؤالی مطرح کرد، اما بحثهای مفصلی دربارهٔ تعبیر **احتمالهای پیشین** $P(B_i)$ مطرح شده‌اند. همچنین مقدار نسبتاً زیادی از هالهٔ اسراری که قضیهٔ بیز را احاطه کرده است، ناشی از این واقعیت است که این قضیهٔ نظیر مثال ۲.۲۸،نوعی استدلال «قهقرایی» یا «معکوس»، یعنی استدلال «از معلول به‌علت» را موجب می‌شود. مثلاً در مثال ۲.۲۸، رد شدن از آزمون، یک معلول، و دودزایی بیش از حد، یک علت ممکن است.

تمرینها

۲.۵۸ نشان دهید که احتمالهای شرطی در سه اصل موضوع احتمال صادق‌اند؛ به عبارت دیگر نشان دهید که اگر $P(B) \neq 0$، آنگاه

(الف) $P(A|B) \geq 0$؛

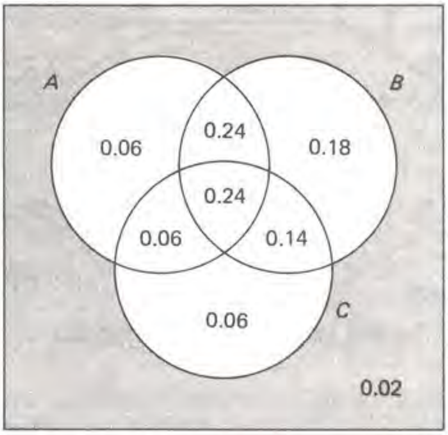
(ب) $P(B|B) = 1$؛

(ج) برای هر دنباله از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار A_1، A_2، ...،

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots |B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \cdots$.

۲.۵۹ به کمک مثالهای عددی نشان دهید که $P(B|A) + P(B|A')$

(الف) ممکن است مساوی ۱ باشد؛



شکل۱۴.۲ نمودار تمرینهای ۶۵.۲، ۶۶.۲، و ۶۷.۲

(ب) لازم نیست مساوی ۱ باشد.

۶۰.۲ نظیر روش اثبات قضیهٔ ۱۰.۲، نشان دهید که به شرط $P(A \cap B \cap C) \neq 0$،

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \cdot P(D|A \cap B \cap C)$$

۶۱.۲ برای سه پیشامد A، B، و C، $P(A \cap B \cap C) \neq 0$، و $P(C|A \cap B) = P(C|B)$. نشان دهید که $P(A|B \cap C) = P(A|B)$.

۶۲.۲ نشان دهید که اگر $P(B|A) = P(B)$ و $P(B) \neq 0$، آنگاه $P(A|B) = P(A)$.

۶۳.۲ نشان دهید که اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه

(الف) دو پیشامد A' و B مستقل‌اند؛

(ب) دو پیشامد A' و B' مستقل‌اند.

۶۴.۲ نشان دهید که اگر پیشامدهای A و B وابسته باشند، آنگاه پیشامدهای A و B' وابسته‌اند.

۶۵.۲ با رجوع به شکل ۱۴.۲ نشان دهید که $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ الزاماً نتیجه نمی‌دهد که پیشامدهای A، B، و C همگی دوبه‌دو مستقل‌اند.

۶۶.۲ با رجوع به شکل ۱۴.۲ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه B الزاماً از C مستقل نیست.

۶۷.۲ با رجوع به شکل ۱۴.۲ نشان دهید که اگر A از B مستقل و A از C مستقل باشد، آنگاه A الزاماً از $B \cup C$ مستقل نیست.

۶۸.۲ اگر سه پیشامد A، B و C مستقل باشند، نشان دهید که

(الف) A و $B \cap C$ مستقل‌اند؛

(ب) A و $B \cup C$ مستقل‌اند؛

۶۹.۲ نشان دهید برای اینکه k پیشامد مستقل باشند باید $2^k - k - 1$ شرط برقرار باشند.

۷۰.۲ برای هر پیشامد A، نشان دهید که A و $\varnothing$ مستقل‌اند.
۷۱.۲ با استفاده از تعمیم زیرین قانون توزیعپذیریی که در قسمت (ب) تمرین ۱.۲ داده شده است، یعنی

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots B_k) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)$$

قضیهٔ ۱۲.۲ را ثابت کنید.

کاربردها

۷۲.۲ برای تصدی شغلی در بخش خبری یک ایستگاه تلویزیون، ۹۰ داوطلب وجود دارند. بعضی از آنها فارغ‌التحصیل دانشگاه‌اند، و بعضی نیستند، برخی از آنها حداقل سه سال تجربه دارند و برخی ندارند. جدولی تفکیکی به‌صورت زیر است:

	فارغ‌التحصیل دانشگاه	دانشگاه نرفته
حداقل با سه سال تجربه	۹	۱۸
کمتر از سه سال تجربه	۲۷	۳۶

اگر ترتیب مصاحبهٔ داوطلبان به‌وسیلهٔ مدیر ایستگاه، تصادفی باشد، G پیشامدی است که اولین داوطلبی که مصاحبه می‌شود فارغ‌التحصیل دانشگاه است، و T پیشامدی است که اولین داوطلبی که مصاحبه می‌شود حداقل سه سال سابقهٔ کار دارد. هریک از احتمالهای زیر را مستقیماً از درایه‌ها و حاصلجمعهای سطری و ستونی جدول تعیین کنید.
(الف) $P(G)$؛ (ب) $P(T')$؛ (ج) $P(G \cap T)$؛
(د) $P(G' \cap T')$؛ (هـ) $P(T|G)$؛ (و) $P(G'|T')$؛
۷۳.۲ نتایج تمرین قبل را برای تحقیق درستی تساویهای زیر به‌کار برید
(الف) $P(T|G) = \frac{P(G \cap T)}{P(G)}$؛
(ب) $P(G'|T') = \frac{P(G' \cap T')}{P(T')}$.
۷۴.۲ با رجوع به تمرین ۴۶.۲، احتمال اینکه پزشکی که به‌عنوان نمایندهٔ پزشکان در انجمن انتخاب می‌شود در مقابل درمان غلط بیمه شده باشد چقدر است، به شرطی که این پزشک جراح باشد؟
۷۵.۲ با مراجعه به تمرین ۴۹.۲، احتمال اینکه در انتخابات انجمن مدرسه، شوهر رأی بدهد به شرط آنکه همسرش رأی داده باشد چقدر است؟
۷۶.۲ با رجوع به تمرین ۵۱.۲، احتمال اینکه یکی از دانشجویان در خوابگاه زندگی کند، به شرط آنکه اهل استان نباشد چقدر است؟
۷۷.۲ به تیمهای بسکتبال دانشگاههای A، B، C، و D به‌ترتیب احتمالهای ۲ر۰، ۴ر۰، ۳ر۰ و ۱ر۰ برای بردن بازی ماقبل نهایی قهرمانی کشور داده شده است. اگر شرکت دانشگاه B در

مسابقات به تعلیق درآید، به‌طوری که مجاز به شرکت در مسابقه نباشد، احتمال اینکه دانشگاه A برندهٔ مقام قهرمانی کشور شود چقدر است؟

۷۸.۲ با رجوع به تمرین ۵۲.۲، احتمال آن را بیابید که شخصی که از اصفهان دیدن می‌کند
(الف) از بازار اصفهان دیدن کند به شرط آنکه به عالی‌قاپو رفته باشد؛
(ب) از مسجد جامع اصفهان دیدن کند به شرط آنکه به عالی‌قاپو برود و از بازار هم دیدن کند؛
(ج) به عالی‌قاپو نرود به شرط آنکه از بازار دیدن کند یا به مسجد جامع و یا به‌هر دو محل برود.
(د) به مسجد جامع و عالی‌قاپو برود به شرط آنکه به بازار نرود.
(راهنمایی: یک نمودار ون رسم کنید و احتمالهای مربوط به نواحی مختلف را بنویسید).

۷۹.۲ احتمال زنده ماندن در یک عمل پیوند معین برابر ۵۵ر۰ است. اگر بیمار زنده از عمل دربیاید، احتمال اینکه بدنش در طول یک ماه پیوند را قبول نکند ۲ر۰ است. احتمال زنده ماندن، پس از طی دو مرحلهٔ بحرانی چقدر است؟

۸۰.۲ جعبه‌های تخم‌مرغ، برای تحقیق در وجود لخته‌های خون با برداشتن تصادفی سه تخم‌مرغ به‌توالی، و آزمایش محتوای آنها، بررسی می‌شوند. اگر هر سه تخم‌مرغ سالم باشند، جعبهٔ بارگیری و در غیر این صورت رد می‌شود. احتمال اینکه جعبه‌ای حاوی ۱۲۰ تخم‌مرغ بارگیری شود، که بین آنها ۱۰ تخم‌مرغ لخته‌های خون دارند، چقدر است؟

۸۱.۲ فرض می‌کنیم که در شهر رشت، احتمال اینکه بعد از یک روز پاییزی بارانی، روزی بارانی باشد ۸۰ر۰، و احتمال اینکه بعد از یک روز پاییزی آفتابی، یک روز بارانی باشد ۶۰ر۰ است. پیدا کنید احتمال آنکه بعد از یک روز بارانی
(الف) روزی بارانی، روزی آفتابی و روز بارانی دیگری باشد؛
(ب) دو روز آفتابی و سپس یک روز بارانی باشد؛
(ج) دو روز بارانی و سپس دو روز آفتابی باشد؛
(د) بعد از دو روز باران ببارد.
(راهنمایی: در قسمت (ج)، فرمول تمرین ۶۰.۲ را به‌کار برید.)

۸۲.۲ با استفاده از فرمول تمرین ۶۰.۲ احتمال انتخاب تصادفی چهار خوکچهٔ هندی سالم (بدون جایگذاری) را از قفسی حاوی ۲۰ خوکچهٔ هندی که ۱۵تای آنها سالم و ۵تای آنها بیمارند بیابید.

۸۳.۲ یک تاس همگن دوبار ریخته می‌شود. اگر A پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در اولین بار ریختن، B پیشامد ظاهر شدن عدد زوج در دومین بار ریختن و C پیشامد یکسان بودن نتیجهٔ هر دوبار ریختن باشد، آیا پیشامدهای A، B و C
(الف) دوبه‌دو مستقل‌اند؟
(ب) مستقل‌اند؟

۸۴.۲ یک تیرانداز هدفی را با احتمال $\frac{3}{4}$ می‌زند، اگر شلیکهای متوالی را مستقل فرض کنیم، پیدا کنید احتمال به‌دست آوردن
(الف) یک اصابت و در پی آن دو عدم اصابت؛

(ب) دو اصابت در سه شلیک.

۸۵.۲ سکه‌ای به‌قسمی دستکاری شده است که احتمال آمدن شیر و خط به‌ترتیب ۵۲ر۰ و ۴۸ر۰ است. اگر این سکه سه‌بار پرتاب شود، پیدا کنید احتمال به‌دست آوردن

(الف) سه شیر؛

(ب) دو خط و یک شیر با همین ترتیب.

۸۶.۲ سوابق طبی نشان می‌دهند که در شهری یک نفر از هر ده نفر دچار بیماری تیروئید است. اگر ۲۰ نفر را در این شهر به‌تصادف انتخاب کنیم و مورد آزمایش قرار دهیم، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها دچار بیماری تیروئید باشد چقدر است؟

۸۷.۲ اگر پنج کامیون از ده کامیون حمل بار شرکتی، استانداردهای مربوط به میزان دود اگزوز را نداشته باشند و سه‌تا از آنها برای بررسی انتخاب شوند، احتمال آنکه هیچ از یک کامیونهای منتخب استانداردهای مذکور را نداشته باشند چقدر است؟

۸۸.۲ اگر شخصی از ۱۵ سکهٔ طلای موجودی یک صراف که ۶تای آنها تقلبی است ۴ سکه به تصادف انتخاب کند، احتمال آنکه سکه‌های منتخب همه تقلبی باشند چقدر است؟

۸۹.۲ یک فروشگاه بزرگ، ماهیانه، صورت حساب بدهی مشتریانی راکه حق نسیه بردن دارند برای آنها می‌فرستند. فروشگاه دریافته است مشتریی که بلافاصله در یک ماه بدهی خود را می‌پردازد با احتمال ۹ر۰ ماه بعد نیز بلافاصله بدهی خود را می‌پردازد؛ امّا اگر در یک ماه بدهی خود را بلافاصله نپردازد احتمال اینکه در ماه بعد بلافاصله بدهیش را بپردازد ۴ر۰ است.

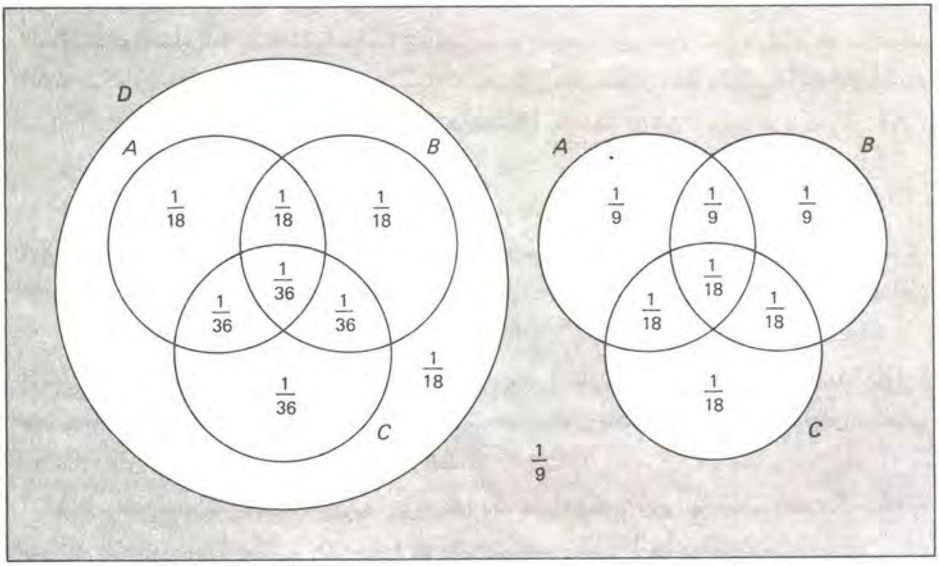
(الف) مطلوب است احتمال آنکه مشتریی که در ماهی بلافاصله بدهی خود را پرداخته است در سه ماه بعد نیز بلافاصله بدهی‌اش را بپردازد؟

(ب) مطلوب است احتمال آنکه مشتریی که در ماهی بلافاصله بدهی خود را نپرداخته است در دو ماه بعد نیز بدهی‌اش را فوراً نپردازد و آنگاه ماه بعد از آن فوراً بدهی خود را بپردازد؟

۹۰.۲ با مراجعه به شکل ۱۵.۲ تحقیق کنید که پیشامدهای A، B، C، و D مستقل‌اند. توجه کنید ناحیه‌ای که پیشامد A را نمایش می‌دهد متشکل از دو دایره است، و ناحیه‌هایی که پیشامدهای B و C را نشان می‌دهند نیز چنین‌اند.

۹۱.۲ در یک کارخانهٔ الکترونیک از روی تجربهٔ گذشته معلوم شده است احتمال اینکه کارگری جدید که در دورهٔ کارآموزی کارخانه شرکت کرده است به سهمیهٔ تولید موظف نائل شود برابر ۸۴ر۰ است، و احتمال متناظر برای کارگری جدید که در دورهٔ کارآموزی کارخانه شرکت نکرده است برابر ۴۹ر۰ است. اگر ۷۰ درصد تمام کارگران جدید در دورهٔ کارآموزی کارخانه شرکت کرده باشند، احتمال اینکه یک کارگر جدید به سهمیهٔ تولید موظف نائل شود چقدر است؟

۹۲.۲ در یک ماز T شکل اگر موشی به چپ برود به آن غذا می‌دهند و اگر به راست برود شوکی الکتریکی دریافت می‌کند. در امتحان اول برای اینکه موش به هر یک از دو سمت برود شانس ۵۰ به ۵۰ وجود دارد؛ آنگاه، اگر موش در اولین امتحان غذا دریافت کند احتمال اینکه در امتحان بعدی به چپ برود برابر ۶۸ر۰ است و اگر در امتحان اول شوک الکتریکی دریافت کند احتمال اینکه در



شکل۲.۱۵ نموداری برای تمرین ۲.۹۰

امتحان بعدی به چپ برود ۸۴ر۰ است احتمال اینکه موش در امتحان دوم به چپ برود چقدر است؟

۲.۹۳ از تجربه‌های گذشته می‌دانیم که در بخشی از صنعت، ۶۰ درصد مسائل مربوط به مدیریت کارگری دربارهٔ دستمزد، ۱۵ درصد مربوط به شرایط کار و ۲۵ درصد مربوط به پاداشهاست. همچنین می‌دانیم ۴۵ درصد مسائل مربوط به دستمزد، ۷۰ درصد مسائل مربوط به شرایط کار، و ۴۰ درصد منسائل مربوط به پاداشها بدون اعتصاب حل می‌شوند. احتمال اینکه یک مسألهٔ مدیریت کارگری در این رشته از صنعت بدون اعتصاب حل شود چقدر است؟

۲.۹۴ با رجوع به تمرین قبل، احتمال اینکه یک مسألهٔ مدیریت کارگری حل شدهٔ بدون اعتصاب، مربوط به دستمزد بوده باشد چقدر است؟

۲.۹۵ احتمال اینکه یک حادثهٔ اتومبیل ناشی از نقص ترمز باشد ۰۴ر۰ و احتمال اینکه آن را به درستی ناشی از نقص ترمز بدانند ۸۲ر۰، و احتمال اینکه آن را به غلط به نقص ترمز نسبت دهند ۰۳ر۰ است. مطلوب است احتمال آنکه

(الف) یک حادثه اتومبیل را به نقص ترمز نسبت دهند؛

(ب) یک حادثهٔ اتومبیل را که به نقص ترمز نسبت داده‌اند واقعاً ناشی از نقص ترمز باشد.

۲.۹۶ در شهری معین، ۸ درصد تمام بالغین بالای ۵۰ سال مرض قند دارند. اگر یک مرکز خدمات بهداشتی در این شهر به‌گونه‌ای صحیح تشخیص دهد که ۹۵ درصد تمام اشخاصی که مرض قند دارند بیمارند، و اشتباهاً تشخیص دهد که ۲ درصد از تمام افرادی که مرض قند ندارند بیمارند، پیدا کنید احتمال اینکه

(الف) مرکز خدمات بهداشتی شهر تشخیص دهد که فردی بالای ۵۰ سال مرض قند دارد؛

(ب) شخصی بالای ۵۰ سال که به تشخیص مرکز بهداشتی مرض قند دارد واقعاً بیمار باشد.

۹۷.۲ با رجوع به مثال ۲۵.۲، فرض کنید بعداً متوجه شویم که کار به موقع تکمیل شده است. احتمال اینکه اعتصابی وجود داشته است چقدر است؟

۹۸.۲ شرکتی که محصولات خود را از طریق پست به مشتریان تحویل می‌دهد ۳ کارمند انبارداری، U، V و W را در استخدام خود دارد که جنسها را از قفسه‌ها درمی‌آورند و آنها را برای رسیدگی بعدی و بسته‌بندی جمع‌آوری می‌کنند. U یک‌بار از صدبار در انجام سفارش اشتباه می‌کند (اشتباه در انتخاب جنس یا اشتباه در مقدار آن)، V پنج‌بار از صدبار و W سه‌بار از صدبار در انجام سفارش اشتباه می‌کند. اگر U، V و W به‌ترتیب ۳۰، ۴۰، و ۳۰ درصد تمام سفارشها را انجام دهند، مطلوب است احتمال آنکه

(الف) سفارشی اشتباه انجام شود.

(ب) اگر سفارشی اشتباه انجام شده باشد، U آن‌را انجام داده باشد.

(ج) اگر سفارشی اشتباه انجام شده باشد، V آن‌را انجام داده باشد.

۹۹.۲ یک انفجار در یک کارگاه ساختمانی می‌تواند در نتیجهٔ الکتریستهٔ ساکن، نقص کار تجهیزات، بی‌احتیاطی یا خرابکاری رخ دهد. مصاحبه با مهندسین ساختمان که مخاطرهٔ موجود در هر مورد را تحلیل کرده‌اند به این برآوردها منجر شده است که چنین انفجاری می‌تواند با احتمال ۲۵ر۰ در نتیجهٔ الکتریستهٔ ساکن، با احتمال ۲۰ر۰ در نتیجهٔ نقص کار تجهیزات، با احتمال ۴۰ر۰ در نتیجه بی‌احتیاطی، و با احتمال ۷۵ر۰ در نتیجهٔ خرابکاری رخ دهد. ضمناً دریافته‌اند که احتمالهای پیشین این چهار علت انفجار به‌ترتیب ۲۰ر۰، ۴۰ر۰، ۲۵ر۰، و ۱۵ر۰ هستند. برمبنای تمام این اطلاعات،

(الف) محتملترین علت انفجار چیست؟

(ب) کم‌احتمالترین علت انفجار چیست؟

۱۰۰.۲ یک فروشندهٔ آثار هنری محموله‌ای شامل پنج تابلوی نقاشی از خارج کشور دریافت می‌کند، و برمبنای تجربهٔ گذشته این احساس را دارد که احتمال اینکه ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا هر ۵ تابلو تقلبی باشند به‌ترتیب ۷۶ر۰، ۰۹ر۰، ۰۲ر۰، ۰۱ر۰، ۰۲ر۰ و ۱۰ر۰ است. چون هزینهٔ تأیید اصالت تابلو خیلی زیاد است، فروشنده تصمیم می‌گیرد یکی از پنج تابلوی نقاشی را به‌تصادف انتخاب کند و برای تأیید اصالت بفرستد. اگر دریابد که این تابلو تقلبی است، احتمالی که او به تقلبی بودن همگی چهار تابلوی دیگر نسبت خواهد داد چقدر است؟

۱۰۱.۲ برای دریافت پاسخ سوالهای حساسیت‌برانگیز غالباً از روشی که به **تکنیک پاسخ تصادفی** شده موسوم است استفاده می‌کنیم. فرض کنید که مثلاً بخواهیم درصد دانشجویان یک دانشگاه بزرگ آمریکایی را که سیگار ماری‌جوانا می‌کشند تعیین کنیم. ۲۰ کارت تهیه می‌کنیم و روی ۱۲ کارت می‌نویسیم «من حداقل هفته‌ای یک‌بار سیگار ماری‌جوانا می‌کشم». عدد ۱۲، عددی اختیاری است. روی بقیهٔ کارتها می‌نویسیم «من حداقل یک‌بار در هفته سیگار ماری‌جوانا نمی‌کشم». آنگاه از هر دانشجوی (مربوط به نمونه) می‌خواهیم یکی از ۲۰ کارت را به تصادف انتخاب کند و بدون افشای پاسخ روی کارت، پاسخ «آری» یا «نه» بدهد.

(الف) بین $P(Y)$، احتمال اینکه دانشجویی پاسخ «آری» بدهد و $P(M)$، احتمال آنکه دانشجویی که به‌تصادف از این دانشگاه انتخاب شده است حداقل هفته‌ای یک‌بار ماری‌جوانا بکشد رابطه‌ای به‌دست آورید.

(ب) اگر ۱۰۶ نفر از ۲۵۰ دانشجو، تحت این شرایط، پاسخ «آری» بدهند، از نتیجهٔ قسمت (الف) و از $\frac{۱۰۶}{۲۵۰}$ به‌عنوان برآورد $P(Y)$ استفاده و $P(M)$ را برآورد کنید.

مراجع

یکی از مشهورترین کتابهای درسی در بین کتابهای متعددی که در زمینهٔ احتمال در سالهای اخیر منتشر شده‌اند کتاب

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968.

است.

بحثهای مقدماتیتر را می‌توان در کتابهای زیر یافت

BARR, D. R., and ZEHNA, P. W., *Probability: Modeling Uncertainty*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1983,

DRAPER, N. R., and LAWRENCE, W. E., *Probability: An Introductory Course*. Chicago: Markam Publishing Company, 1970,

FREUND, J. E., *Introduction to Probability*. Encino, Calif.: Dickenson Publishing Co., Inc., 1973,

GOLDBERG, S., *Probability—An Introduction*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, Inc. (republication of 1960 edition),

HODGES, J. L., and LEHMANN, E. L., *Elements of Finite Probability*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1965,

NOSAL, M., *Basic Probability and Applications*. Philadelphia: W. B. Saunders Company, 1977.

بحثهای پیشرفته‌تر در کتابهای درسی زیادی داده شده‌اند، برای نمونه در

HOEL, P., PORT, S. C., and STONE, C. J., *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1971,

KHAZANIE, R., *Basic Probability Theory and Applications*. Pacific Palisades, Calif.: Goodyear Publishing Company, Inc., 1976,

PARZEN, E., *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1960,

ROSS, S., *A First Course in Probability*, 3rd ed. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.

SOLOMON, F., *Probability and Stochastic Processes*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1987.

۳

توزیعهای احتمال و چگالیهای احتمال

۱.۳ مقدمه

در بیشتر مسأله‌های متضمن احتمالها، ما تنها به جنبه‌ای خاص (یا به‌دو یا چند جنبهٔ خاص) برآمدهای آزمایشها توجه داریم. برای مثال، وقتی یک جفت تاس را می‌ریزیم، معمولاً فقط مجموع دو شماره‌ای که ظاهر می‌شوند مورد توجه است، و نه برآمد هر تاس؛ وقتی با زن و شوهری که به‌تصادف انتخاب شده‌اند مصاحبه می‌کنیم ممکن است تعداد افراد خانواده و درآمد توأم آنها مورد توجه باشند، و نه تعداد سالهایی که با هم ازدواج کرده‌اند یا پس‌انداز کل آنها؛ و بالاخره وقتی از لامپهای روشنایی که در سطح انبوه تولید می‌شوند نمونه می‌گیریم ممکن است دوام یا میزان روشنایی آنها مورد توجه باشند و نه بهای آنها.

در هر یک از مثالهای بالا توجه ما به اعدادی است که با برآمدهای یک آزمایش شانسی همراه‌اند، یعنی توجه ما به مقادیری است که آنچه اصطلاحاً **متغیرهای تصادفی** خوانده می‌شوند اختیار می‌کنند. در زبان احتمال و آمار، مجموع دو عددی که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند یک متغیر تصادفی است، تعداد افراد خانوادهٔ زوجی که به‌تصادف انتخاب شده‌اند و درآمد توأم آنها متغیرهای تصادفی‌اند، و دوام و میزان روشنایی لامپی که به‌تصادف برای بررسی انتخاب می‌شود نیز متغیرهای تصادفی‌اند.

برای تصریح بیشتر، شکل ۱.۳ را در نظر بگیرید که (مثل شکل ۱.۲ در صفحهٔ ۳۵) فضای نمونه‌ای را برای آزمایش پرتاب یک جفت تاس تصویر می‌کند، و فرض کنید که هر یک از ۳۶ برآمد ممکن دارای احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ است. ولی توجه کنید که در شکل ۱.۳ به هر نقطه، عددی وابسته کرده‌ایم: برای مثال، به نقطهٔ (۱ ,۱) عدد ۲، به نقطهٔ (۵ ,۱) عدد ۶، به نقطهٔ (۲ ,۶) عدد ۸، به نقطهٔ (۶ ,۵) عدد ۱۱ و قس‌علی‌هذا. به‌وضوح، مابه هر نقطه مقداری از یک متغیر تصادفی، یعنی مجموع متناظر با دو عددی را که در ریختن دو تاس ظاهر می‌شوند، وابسته می‌کنیم.

چون «وابسته کردن یک عدد به هر نقطهٔ (عنصر) فضای نمونه‌ای» صرفاً راه دیگری برای بیان «تعریف تابعی روی نقاط یک فضای نمونه‌ای» است، لذا تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف۱.۳ اگر S یک فضای نمونه‌ای با یک اندازهٔ احتمال، و X یک تابع حقیقی‌ـ‌مقدار باشد که روی عناصر S تعریف شده است، آنگاه X **متغیر تصادفی*** نامیده می‌شود.

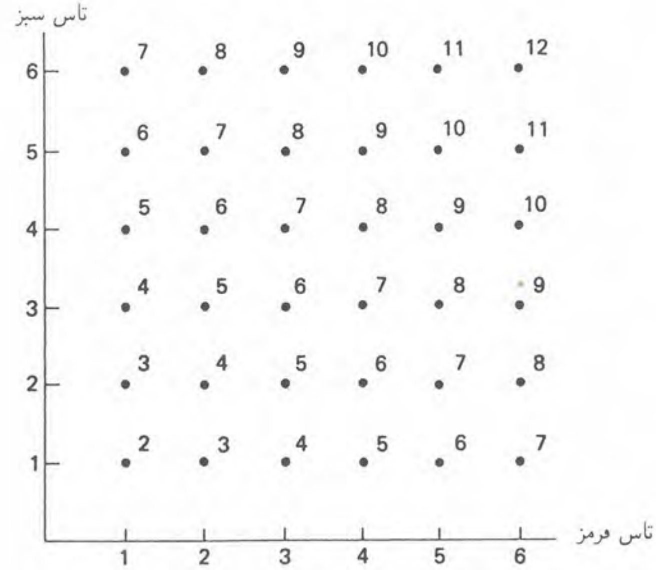
ما در این کتاب، متغیرهای تصادفی را همیشه با حروف بزرگ و مقادیر آنها را با حروف کوچک متناظرشان نشان می‌دهیم. مثلاً برای نشان دادن مقداری از متغیر تصادفی X، می‌نویسیم x. این نمادگذاری با نمادگذاری ویرایشهای قبلی کتاب، که در آن به‌جای X نماد x را به‌کار می‌بردیم مغایر است؛ این روزها، استفاده از نمادهای X و x در آمار بسیار متداول است.

با رجوع به مثال قبل و شکل ۱.۳ مشاهده می‌کنید که متغیرتصادفی X در زیرمجموعهٔ

$$\{(۶,۳),(۵,۴),(۴,۵),(۳,۶)\}$$

از فضای نمونه‌ای S، مقدار ۹ را اختیار می‌کند و می‌نویسیم $X = ۹$. لذا، $X = ۹$ به‌عنوان مجموعه‌ای از عناصر S تعبیر می‌شود که مجموع دو مؤلفهٔ آنها ۹ است، و یا کلیتر، $X = x$ به‌عنوان مجموعه‌ای از عناصر فضای نمونه‌ای تعبیر می‌شود که برای آنها متغیر تصادفی X مقدار x را اختیار می‌کند. این مطلب ممکن است مبهم به‌نظر آید، ولی ریاضیدانی را به‌یاد می‌آورد که به‌جای اینکه بگوید «$f(x)$، مقدار تابع به‌ازای x است» می‌گوید «$f(x)$ تابع x است».

* در برخی ازکتابها به‌جای «متغیر تصادفی»، اصطلاحهای «متغیر شانسی» و «متغیر استوکاستیکی» هم به‌کار رفته است.



شکل۱.۳ مجموع دو عددی که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند

مثال ۱.۳

از کشویی که محتوی پنج جوراب قهوه‌ای و سه جوراب سبز است، به‌تصادف و متوالیاً دو جوراب انتخاب می‌شود. فهرست عناصر فضای نمونه‌ای، احتمالهای متناظر آنها، و مقادیر متناظر، w، از متغیر تصادفی W را که تعداد جورابهای قهوه‌ای انتخاب شده را نشان می‌دهند، تهیه کنید.

حل. اگر B و G برای نشان دادن جوراب قهوه‌ای و سبز به‌کار روند، احتمالهای BB، BG، GB، و GG به‌ترتیب عبارت‌اند از $(\frac{۵}{۸})(\frac{۴}{۷}) = (\frac{۵}{۱۴})$، $(\frac{۵}{۸})(\frac{۳}{۷}) = \frac{۱۵}{۵۶}$، $(\frac{۳}{۸})(\frac{۵}{۷}) = (\frac{۱۵}{۵۶})$، و $(\frac{۳}{۸})(\frac{۲}{۷}) = (\frac{۳}{۲۸})$، و نتایج در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

عناصر فضای نمونه‌ای	احتمال	w
BB	$\frac{۵}{۱۴}$	۲
BG	$\frac{۱۵}{۵۶}$	۱
GB	$\frac{۱۵}{۵۶}$	۱
GG	$\frac{۳}{۲۸}$	۰

همچنین مثلاً، برای احتمال این پیشامد که متغیر تصادفی W مقدار ۲ را اختیار کند می‌توانیم بنویسیم $P(W = ۲) = \frac{۵}{۱۴}$. ▲

مثال ۲.۳

یک سکهٔ همگن ۴ بار پرتاب می‌شود. عناصر فضای نمونه‌ای را که بنابه فرض همشانس‌اند، (منظور از همگن بودن سکه همین است)، و مقادیر متناظر x از متغیر تصادفی X را که تعداد کل شیرهاست فهرست کنید.

حل. اگر H و T برای نمایش دادن شیر و خط به‌کار روند، نتایج در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

x	احتمال	عناصر فضای نمونه‌ای
۴	$\frac{۱}{۱۶}$	HHHH
۳	$\frac{۱}{۱۶}$	HHHT
۳	$\frac{۱}{۱۶}$	HHTH
۳	$\frac{۱}{۱۶}$	HTHH
۳	$\frac{۱}{۱۶}$	THHH
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	HHTT
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	HTHT
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	HTTH
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	THHT
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	THTH
۲	$\frac{۱}{۱۶}$	TTHH
۱	$\frac{۱}{۱۶}$	HTTT
۱	$\frac{۱}{۱۶}$	THTT
۱	$\frac{۱}{۱۶}$	TTHT
۱	$\frac{۱}{۱۶}$	TTTH
۰	$\frac{۱}{۱۶}$	TTTT

مثلاً، برای احتمال این پیشامد که متغیر تصادفی X مقدار ۳ را اختیار کند می‌توانیم بنویسیم $P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$. ▲

این واقعیت که تعریف ۱.۳ به توابع حقیقی‌ـ‌مقدار محدود شده است هیچ محدودیتی را تحمیل نمی‌کند. اگر اعدادی که می‌خواهیم به برآمدهای یک آزمایش نسبت دهیم اعداد مختلط باشند، همیشه می‌توانیم قسمتهای حقیقی و موهومی را جدا از هم به‌عنوان مقادیری که دو متغیر تصادفی اختیار می‌کنند در نظر بگیریم. همچنین، اگر بخواهیم برآمدهای یک آزمایش را به‌صورت کمّی توصیف کنیم، مثلاً برای معین کردن رنگ موی یک شخص می‌توانیم با کدگذاری رنگهای مختلف، شاید با نمایش آنها به‌صورت اعداد ۱، ۲، ۳ و غیره، به‌دلخواه به توصیفهای کیفی، مقادیر حقیقی بدهیم.

در همهٔ مثالهای این بخش، بحث خود را به فضاهای نمونه‌ای گسسته، و در نتیجه به **متغیرهای**

تصادفی گسسته، یعنی متغیرهایی که برد آنها متناهی یا نامتناهی شماراست محدود کرده‌ایم. متغیرهای تصادفی پیوسته که روی فضاهای نمونه‌ای پیوسته تعریف شده‌اند در بخش ۳.۳ مورد بحث قرار می‌گیرند.

۲.۳ توزیعهای احتمال

همان‌طورکه قبلاً در مثالهای ۱.۳ و ۲.۳ دیدیم، اندازهٔ احتمالی که روی یک فضای نمونه‌ای گسسته تعریف می‌شود، خود به خود احتمال هر مقدار مفروضی را که متغیر تصادفی در بردش اختیار می‌کند در اختیار می‌گذارد.

به‌عنوان مثال، با نسبت دادن احتمال $\frac{۱}{۳۶}$ به هر عنصر فضای نمونه‌ای شکل ۱.۳، بی‌درنگ درمی‌یابیم که متغیر تصادفی X، مجموع اعداد حاصل از ریختن دو تاس، مقدار ۹ را با احتمال $\frac{۴}{۳۶}$ اختیار می‌کند. زیرا $X = ۹$ (که در صفحهٔ ۸۴ توصیف شده است) شامل ۴ نقطه از ۳۶ نقطهٔ متساوی‌الاحتمال فضای نمونه‌ای است. احتمالهای مربوط به همهٔ مقادیر ممکن X در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

x	$P(X=x)$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	$\frac{۲}{۳۶}$
۴	$\frac{۳}{۳۶}$
۵	$\frac{۴}{۳۶}$
۶	$\frac{۵}{۳۶}$
۷	$\frac{۶}{۳۶}$
۸	$\frac{۵}{۳۶}$
۹	$\frac{۴}{۳۶}$
۱۰	$\frac{۳}{۳۶}$
۱۱	$\frac{۲}{۳۶}$
۱۲	$\frac{۱}{۳۶}$

به‌جای اینکه احتمالهای وابسته به مقادیر یک متغیر تصادفی را مانند مثال قبل در یک جدول نشان دهیم، معمولاً بهتر آن است که فرمولی ارائه کنیم، یعنی احتمالها را به‌وسیلهٔ تابعی نشان دهیم که مقادیر آن، یعنی $f(x)$، به‌ازای هر xی که در برد متغیر تصادفی است برابر $P(X=x)$ باشد. به‌عنوان مثال، برای مجموع دو عددی که در ریختن دو تاس ظاهر می‌شوند، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x) = \frac{۶-|x-۷|}{۳۶}, \qquad x = ۲, ۳, \cdots, ۱۲$$

که درستی آن را می‌توان به آسانی تحقیق کرد. به‌وضوح

$$f(۲) = \frac{۶ - |۲ - ۷|}{۳۶} = \frac{۶ - ۵}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

$$f(۳) = \frac{۶ - |۳ - ۷|}{۳۶} = \frac{۶ - ۴}{۳۶} = \frac{۲}{۳۶}$$

....

$$f(۱۲) = \frac{۶ - |۱۲ - ۷|}{۳۶} = \frac{۶ - ۵}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

و تمام این مقادیر با آنچه در جدول قبل نشان دادیم مطابقت دارند.

تعریف۲.۳ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x) = P(X = x)$ داده می‌شود، **توزیع احتمال** X نامیده می‌شود.

مبتنی بر اصول موضوع احتمال، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

قضیهٔ۱.۳ تابعی را می‌توان وقتی و فقط وقتی به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی گسستهٔ X به‌کار برد که مقادیر آن، $f(x)$، در شرایط زیر صدق کنند:
۱. برای هر مقدار حوزهٔ تابع، $f(x) \geq ۰$؛
۲. $\sum_x f(x) = ۱$، که در آن مجموعیابی روی تمام مقادیر حوزهٔ تابع صورت می‌گیرد.

مثال ۳.۳

فرمولی برای توزیع احتمال تعداد کل شیرهایی که در ۴ پرتاب یک سکهٔ همگن به دست می‌آیند پیدا کنید.

حل. بر پایهٔ احتمالهای جدول صفحهٔ ۸۶ درمی‌یابیم که $P(X = ۰) = \frac{۱}{۱۶}$، $P(X = ۱) = \frac{۴}{۱۶}$، $P(X = ۲) = \frac{۶}{۱۶}$، $P(X = ۳) = \frac{۴}{۱۶}$، و $P(X = ۴) = \frac{۱}{۱۶}$. از ملاحظهٔ اینکه صورتهای این پنج کسر، یعنی ۱، ۴، ۶، ۴، و ۱ ضرایب دوجمله‌ای $\binom{۴}{۰}$، $\binom{۴}{۱}$، $\binom{۴}{۲}$، $\binom{۴}{۳}$، و $\binom{۴}{۴}$ هستند، متوجه می‌شویم که می‌توان برای توزیع احتمال، فرمولی به‌صورت

$$f(x) = \frac{\binom{۴}{x}}{۱۶}, \qquad x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

نوشت. توجیهی نظری برای این فرمول، و بحثی کلیتر برای n پرتاب سکهٔ همگن، در بخش ۴.۵ داده خواهد شد. ▲

مثال ۴.۳
بررسی کنید که آیا تابعی به‌صورت

$$f(x) = \frac{x+۲}{۲۵}, \qquad x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

می‌تواند به‌عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته به‌کار رود؟

حل. اگر مقادیر مختلف x را در $f(x)$ قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم $f(۱) = \frac{۳}{۲۵}$، $f(۲) = \frac{۴}{۲۵}$، $f(۳) = \frac{۵}{۲۵}$، $f(۴) = \frac{۶}{۲۵}$، و $f(۵) = \frac{۷}{۲۵}$. چون تمام این مقادیر نامنفی‌اند، اولین شرط قضیهٔ ۱.۳ برقرار است، و چون

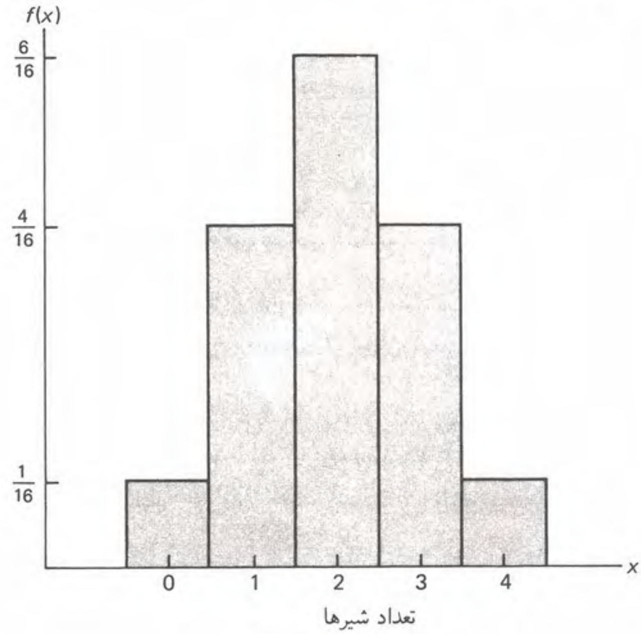
$$f(۱) + f(۲) + f(۳) + f(۴) + f(۵) = \frac{۳}{۲۵} + \frac{۴}{۲۵} + \frac{۵}{۲۵} + \frac{۶}{۲۵} + \frac{۷}{۲۵}$$
$$= ۱$$

شرط دوم قضیهٔ ۱.۳ نیز صادق است. پس تابع داده شده، می‌تواند به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی در برد $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به‌کار رود. البته اینکه آیا متغیر تصادفی مفروضی واقعاً دارای این توزیع احتمال باشد یا نه، کلاً مطلبی دیگر است. ▲

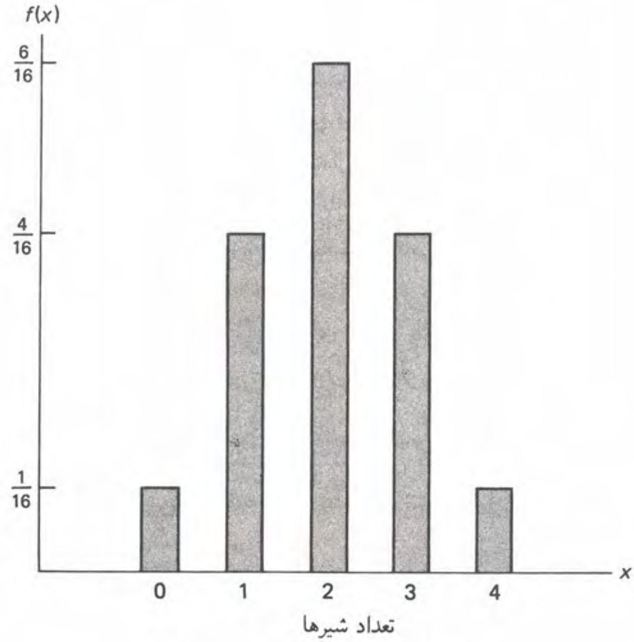
در بعضی از مسائل، ارائهٔ توزیعهای احتمال به‌صورت نموداری موردنظر است. دو نوع نمایش نموداریی که برای این منظور به‌کار می‌روند در شکلهای ۲.۳ و ۳.۳ نشان داده شده‌اند. نمایشی که در شکل ۲.۳ نشان داده شده است و **بافتنمای احتمال** خوانده می‌شود، توزیع احتمال مثال ۳.۳ را نمایش می‌دهد. ارتفاع هر مستطیل برابر احتمال این است که X مقداری متناظر با طول نقطهٔ وسط قاعدهٔ آن مستطیل اختیار کند. با نمایش بازهٔ از ۵ر۰− تا ۵ر۰+ با ۰، بازهٔ از ۵ر۰ تا ۵ر۱ با ۱، . . . ، بازهٔ از ۵ر۳ تا ۵ر۴ با ۴، مقادیر متغیر تصادفی گسسته مفروض را به اصطلاح روی مقیاسی پیوسته «گسترده‌ایم».

چون هر مستطیل بافتنمای شکل ۲.۳ دارای پهنای واحد است، می‌توانیم بگوییم مساحتهای مستطیلها، به‌جای ارتفاعهای آنها، برابر احتمالهای متناظرند. یکی دانستن مساحتهای مستطیلها با احتمالها، مزیتهایی دارد؛ برای مثال، وقتی می‌خواهیم نمودار توزیع احتمال گسسته را با خمی پیوسته تقریب کنیم از این مطلب استفاده می‌کنیم. این کار را، حتّی وقتی مستطیلهای بافتنما پهنایی برابر واحد هم ندارند، می‌توان با تعدیل ارتفاعهای مستطیلها یا با اصلاح مقیاس محور قائم انجام داد.

نمودار شکل ۳.۳، **نمودار میله‌ای** نامیده می‌شود. مانند شکل ۲.۳، ارتفاع هر مستطیل، یا میله، مساوی احتمال مقدار متناظر متغیر تصادفی است، اما وانمود نمی‌شود که مقیاس افقی پیوسته‌ای وجود دارد. گرچه در این کتاب، در مواقعی از چنین نمودارهایی استفاده خواهیم کرد، اما بافتنماها



شکل۲.۳ بافتنمای احتمال



شکل۳.۳ نمودار میله‌ای

و نمودارهای میله‌ای عمدتاً در آمار توصیفی برای ارائهٔ بصری اطلاعاتی که به‌وسیلهٔ توزیع احتمال یا توزیع واقعی داده‌ها فراهم می‌شوند به‌کار می‌روند.

در مسائل زیادی، دانستن احتمال اینکه مقداری از متغیر تصادفی کوچکتر از یک مقدار حقیقی x یا برابر با آن باشد مورد توجه است، لذا، احتمال این را که X مقداری کوچکتر از x یا برابر آن اختیار کند به‌صورت $F(x) = P(X \leq x)$ می‌نویسیم، و این تابع را که برای تمام اعداد حقیقی x تعریف شده است، **تابع توزیع** یا **توزیع تجمعی** متغیر تصادفی X می‌نامیم.

تعریف۳.۳ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد، تابعی که با

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \qquad -\infty < x < +\infty$$

داده می‌شود، و در آن $f(t)$ مقدار احتمال X به‌ازای t است، **تابع توزیع** یا **توزیع تجمعی** X خوانده می‌شود.

بنابر اصول موضوع احتمال و بعضی از پیامدهای فوری آن، نتیجه می‌شود که

قضیهٔ۲.۳ مقادیر $F(x)$، تابع توزیع متغیر تصادفی گسستهٔ X، در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱. $F(-\infty) = ۰$؛ و $F(\infty) = ۱$؛

۲. به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b، اگر $a < b$، آنگاه $F(a) \leq F(b)$.

اگر توزیع احتمال متغیر تصادفی گسستهٔ مفروضی را داشته باشیم، پیدا کردن تابع توزیع متناظر آن عموماً ساده است.

مثال ۵.۳

تابع توزیع تعداد کل شیرهایی که در چهار پرتاب یک سکهٔ همگن به‌دست می‌آیند بیابید.

حل. از مثال ۳.۳، با داشتن $f(۰) = \frac{۱}{۱۶}$، $f(۱) = \frac{۴}{۱۶}$، $f(۲) = \frac{۶}{۱۶}$، $f(۳) = \frac{۴}{۱۶}$ و $f(۴) = \frac{۱}{۱۶}$، نتیجه می‌شود که

$$F(۰) = f(۰) = \frac{۱}{۱۶}$$
$$F(۱) = f(۰) + f(۱) = \frac{۵}{۱۶}$$
$$F(۲) = f(۰) + f(۱) + f(۲) = \frac{۱۱}{۱۶}$$

$$F(۳) = f(۰) + f(۱) + f(۲) + f(۳) = \frac{۱۵}{۱۶}$$
$$F(۴) = f(۰) + f(۱) + f(۲) + f(۳) + f(۴) = ۱$$

بنابراین، تابع توزیع با

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۱۶} & ۰ \leq x < ۱ \\ \frac{۵}{۱۶} & ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۱۱}{۱۶} & ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۱۵}{۱۶} & ۳ \leq x < ۴ \\ ۱ & x \geq ۴ \end{cases}$$

داده می‌شود.

ملاحظه کنید که این تابع توزیع نه‌تنها برای مقادیری که متغیر تصادفی داده شده اختیار می‌کند، بلکه برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است. مثلاً، می‌توانیم بنویسیم $F(۱٫۷) = \frac{۵}{۱۶}$ و $F(۱۰۰) = ۱$، گرچه احتمالهای به‌دست آوردن «حداکثر ۱٫۷ شیر» یا «حداکثر ۱۰۰ شیر» در چهار پرتاب یک سکهٔ همگن ممکن است هیچ معنایی واقعی نداشته باشند. ▲

مثال ۶.۳

تابع توزیع متغیر تصادفی Wی مثال ۱.۳ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

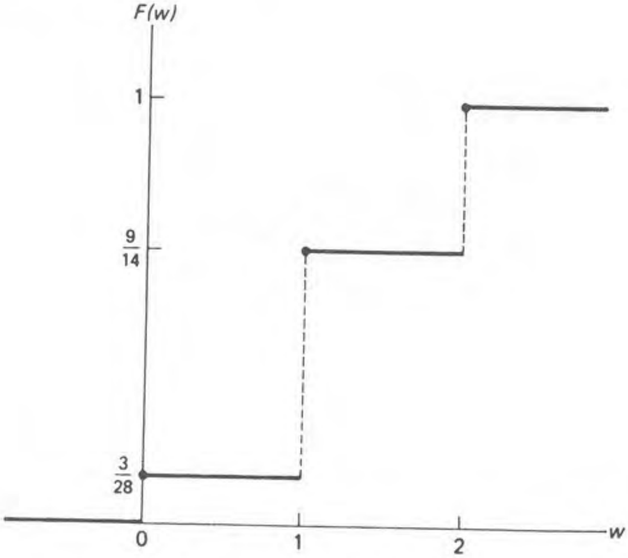
حل. بر مبنای احتمالهایی که در جدول صفحهٔ ۸۵ داده شده‌اند، می‌توانیم بنویسیم $f(۰) = \frac{۳}{۲۸}$، $f(۱) = (\frac{۱۵}{۵۶}) + (\frac{۱۵}{۵۶}) = \frac{۱۵}{۲۸}$، $f(۲) = \frac{۵}{۱۴}$، به‌طوری‌که

$$F(۰) = f(۰) = \frac{۳}{۲۸}$$
$$F(۱) = f(۰) + f(۱) = \frac{۹}{۱۴}$$
$$F(۲) = f(۰) + f(۱) + f(۲) = ۱$$

بنابراین، تابع توزیع W با

$$F(w) = \begin{cases} ۰ & w < ۰ \\ \frac{۳}{۲۸} & ۰ \leq w < ۱ \\ \frac{۹}{۱۴} & ۱ \leq w < ۲ \\ ۱ & w \geq ۲ \end{cases}$$

داده می‌شود.



شکل۴.۳ نمودار تابع توزیع مثال ۶.۳

نمودار این تابع توزیع که در شکل ۴.۳ نشان داده شده است، بدین طریق به‌دست می‌آید که اول نمایش نقاط $(w, F(w))$ را به‌ازای $w = ۰, ۱, ۲$ مشخص می‌کنیم. سپس تابع پله‌ای را همان‌طور که نشان داده‌ایم کامل می‌کنیم. باید توجه داشته باشیم که این تابع در تمام نقاط ناپیوستگی، از دو مقدار، آن را که بزرگتر است اختیار می‌کند. ▲

می‌توانیم فرایندی را که در دو مثال قبل توضیح دادیم در جهت عکس نیز انجام دهیم، یعنی مقادیر توزیع احتمال متغیر تصادفی را از روی تابع توزیع به‌دست آوریم. برای این منظور قضیهٔ زیر را به‌کار می‌بریم:

قضیهٔ۳.۳ اگر برد متغیر تصادفی X، متشکل از مقادیر $x_۱ < x_۲ < x_۳ < \cdots < x_n$ باشد، آنگاه $f(x_۱) = F(x_۱)$، و

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-۱}), i = ۲, ۳, \quad \cdots, n$$

مثال ۷.۳

اگر تابع توزیع X به‌صورت

$$F(x) = \begin{cases} \circ & x < ۲ \\ \frac{۱}{۳۶} & ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۳}{۳۶} & ۳ \leq x < ۴ \\ \frac{۶}{۳۶} & ۴ \leq x < ۵ \\ \frac{۱\circ}{۳۶} & ۵ \leq x < ۶ \\ \frac{۱۵}{۳۶} & ۶ \leq x < ۷ \\ \frac{۲۱}{۳۶} & ۷ \leq x < ۸ \\ \frac{۲۶}{۳۶} & ۸ \leq x < ۹ \\ \frac{۳\circ}{۳۶} & ۹ \leq x < ۱\circ \\ \frac{۳۳}{۳۶} & ۱\circ \leq x < ۱۱ \\ \frac{۳۵}{۳۶} & ۱۱ \leq x < ۱۲ \\ ۱ & x \geq ۱۲ \end{cases}$$

باشد، توزیع احتمال این متغیر تصادفی را بیابید.

حل. با استفاده از قضیهٔ ۳.۳ به‌دست می‌آوریم $f(۲) = \frac{۱}{۳۶}$، $f(۳) = \frac{۳}{۳۶} - \frac{۱}{۳۶} = \frac{۲}{۳۶}$، $f(۴) = \frac{۶}{۳۶} - \frac{۳}{۳۶} = \frac{۳}{۳۶}$، $f(۵) = \frac{۱\circ}{۳۶} - \frac{۶}{۳۶} = \frac{۴}{۳۶}$، ... ، $f(۱۲) = ۱ - \frac{۳۵}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$، و مقایسهٔ اینها با احتمالهای جدول صفحهٔ ۸۷ آشکار می‌کند که متغیر تصادفیی که در اینجا با آن سروکار داریم همان مجموع اعدادی است که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند. ▲

در بقیهٔ این فصل، با متغیرهای تصادفی پیوسته و توزیع آنها، و با مسائل مربوط به وقوع همزمان مقادیر دو یا چند متغیر تصادفی سروکار داریم. در فصل ۵ به توزیعهای احتمال متغیرهای تصادفی گسسته بازمی‌گردیم؛ در واقع تمام آن فصل، وقف توزیعهای احتمال گسسته‌ای خواهد شد که مدلهایی را که به‌ویژه در کاربردها مهم‌اند، در اختیار ما می‌گذارند.

تمرینها

۱.۳ برای هریک از موارد زیر، تعیین کنید که آیا می‌توان مقادیر داده شده را به‌عنوان مقادیر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد $x = ۱, ۲, ۳, ۴$ به‌کار برد یا نه:

(الف) $f(۱) = \circ/۲۵$، $f(۲) = \circ/۷۵$، $f(۳) = \circ/۲۵$، و $f(۴) = -\circ/۲۵$

(ب) $f(۱) = \circ/۱۵$، $f(۲) = \circ/۲۷$، $f(۳) = \circ/۲۹$، و $f(۴) = \circ/۲۹$

(ج) $f(۱) = \frac{۱}{۱۹}$، $f(۲) = \frac{۱\circ}{۱۹}$، $f(۳) = \frac{۲}{۱۹}$، و $f(۴) = \frac{۵}{۱۹}$

۲.۳ برای هریک از موارد زیر تعیین کنید که آیا می‌توان تابع داده شده را به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد داده شده به‌کار برد یا نه.

(الف) $f(x) = \frac{x-2}{5}$ به‌ازای $x = 1, 2, 3, 4, 5$؛
(ب) $f(x) = \frac{x^2}{30}$ به‌ازای $x = 0, 1, 2, 3, 4$؛
(ج) $f(x) = \frac{1}{5}$ به‌ازای $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

۳.۳ تحقیق کنید که $f(x) = \frac{2x}{k(k+1)}$ به‌ازای $x = 1, 2, 3, \cdots, k$ را می‌توان به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد داده شده به‌کار برد.

۴.۳ برای هریک از توابع زیر، c را به‌قسمی تعیین کنید که بتوان آن‌را به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد داده شده به‌کار برد.

(الف) $f(x) = cx$، به‌ازای $x = 1, 2, 3, 4, 5$؛
(ب) $f(x) = c\binom{5}{x}$، به‌ازای $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$؛
(ج) $f(x) = cx^2$، به‌ازای $x = 1, 2, 3, \cdots, k$؛
(د) $f(x) = c\left(\frac{1}{4}\right)^x$، به‌ازای $x = 1, 2, 3, \cdots$.
(راهنمایی: برای قسمت (ج) به پیوست آخر کتاب مراجعه کنید.)

۵.۳ برای چه مقادیری از k، می‌توان

$$f(x) = (1-k)k^x$$

را به‌عنوان توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد نامتناهی شمارای $x = 0, 1, 2, \cdots$ به‌کار برد؟

۶.۳ نشان دهید که برای c نمی‌توان مقادیری یافت که به‌ازای آنها

$$f(x) = \frac{c}{x}$$

را بتوان به‌عنوان مقادیر توزیع احتمال یک متغیر تصادفی با برد نامتناهی شمارای $x = 1, 2, \cdots$ به‌کار برد.

۷.۳ برای هریک از توزیعهای احتمال زیر بافتنمای احتمال را رسم کنید.

(الف) $f(x) = \frac{\binom{2}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{6}{3}}$، به‌ازای $x = 0, 1, 2$؛
(ب) $f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$ به‌ازای $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

۸.۳ قضیهٔ ۲.۳ را ثابت کنید.

۹.۳ برای هریک از موارد زیر تعیین کنید که آیا مقادیر داده شده را می‌توان به‌عنوان مقادیر تابع توزیع یک متغیر تصادفی با برد $x = 1, 2, 3, 4$ به‌کار برد یا نه.

(الف) $F(1) = 0{,}3$، $F(2) = 0{,}5$، $f(3) = 0{,}8$، و $F(4) = 1{,}2$؛
(ب) $F(1) = 0{,}5$، $F(2) = 0{,}4$، $f(3) = 0{,}7$، و $F(4) = 1{,}0$؛
(ج) $F(1) = 0{,}25$، $F(2) = 0{,}61$، $f(3) = 0{,}83$، و $F(4) = 1{,}0$.

۱۰.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی قسمت (الف) تمرین ۷.۳ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۱.۳ تابع توزیع متغیرهای تصادفی را که دارای توزیع احتمال

$$f(x) = \frac{x}{۱۵}, \qquad x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

است بیابید.

۱۲.۳ اگر X دارای تابع توزیع

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ \le x < ۴ \\ \frac{۱}{۲} & ۴ \le x < ۶ \\ \frac{۵}{۶} & ۶ \le x < ۱۰ \\ ۱ & x \ge ۱۰ \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

(الف) $P(۲ < X \le ۶)$؛

(ب) $P(X = ۴)$؛

(ج) توزیع احتمال X.

۱۳.۳ اگر X دارای تابع توزیع

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < -۱ \\ \frac{۱}{۴} & -۱ \le x < ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ \le x < ۳ \\ \frac{۳}{۴} & ۳ \le x < ۵ \\ ۱ & x \ge ۵ \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید

(الف) $P(X \le ۳)$؛ (ب) $P(X = ۳)$؛ (ج) $P(X < ۳)$؛

(د) $P(X \ge ۱)$؛ (ه) $P(-۰٫۴ < X < ۴)$؛ (و) $P(X = ۵)$.

۱۴.۳ با مراجعه به مثال ۴.۳، تحقیق کنید که به‌ازای $x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$، مقادیر تابع توزیع با

$$F(x) = \frac{x^۲ + ۵x}{۵۰}$$

داده می‌شوند.

۱۵.۳ با مراجعه به قضیهٔ ۳.۳، تحقیق کنید که

(الف) $P(X > x_i) = ۱ - F(x_i)$، به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots, n$؛

(ب) $P(X \ge x_i) = ۱ - F(x_{i-۱})$، به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \cdots, n$، و $P(X \ge x_۱) = ۱$.

کاربردها

۱۶.۳ با مراجعه به مثال ۳.۳، توزیع احتمال Y، تفاضل بین تعداد شیرها و تعداد خطهایی را که در چهار پرتاب یک سکهٔ همگن به‌دست می‌آیند پیدا کنید.

۱۷.۳ آوندی محتوی ۴ مهره است که به‌ترتیب با ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری شده‌اند. اگر دو مهره از آوند به تصادف بیرون بکشیم (یعنی اینکه شانس انتخاب برای هر جفت یکسان باشد) و Z مجموع شماره‌های دو مهره‌ای باشد که بیرون کشیده‌ایم،

(الف) توزیع احتمال Z را بیابید و بافتنمای آن را بکشید.

(ب) تابع توزیع Z را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۱۸.۳ سکه‌ای به‌قسمی اریب است که شیر آمدن ۲ بار محتملتر از خط آمدن است. برای سه پرتاب مستقل این سکه، مطلوب است

(الف) توزیع احتمال X، که تعداد کل شیرهاست؛

(ب) احتمال به‌دست آوردن حداکثر دو شیر.

۱۹.۳ با مراجعه به تمرین ۱۸.۳، تابع توزیع متغیر تصادفی X را بیابید و نمودار آن را رسم کنید. با استفاده از این تابع توزیع، پیدا کنید

(الف) $P(۱ < X \leq ۳)$؛ (ب) $P(X > ۲)$.

۲۰.۳ توزیع احتمال V تعداد تصادفهای هفتگی در یک تقاطع معین، با $g(۰) = ۰٫۴۰$، $g(۱) = ۰٫۳۰$، $g(۲) = ۰٫۲۰$ و $g(۳) = ۰٫۱۰$ داده شده است. تابع توزیع V را بنا و نمودار آن را رسم کنید.

۲۱.۳ با رجوع به تمرین ۲۰.۳، و با استفاده از

(الف) احتمالهای اصلی؛

(ب) مقادیر تابع توزیع؛

احتمال آن را بیابید که در هریک از هفته‌ها، حداقل دو تصادف رخ دهد.

۳.۳ متغیرهای تصادفی پیوسته

در بخش ۱.۳ مفهوم متغیر تصادفی را به‌صورت تابعی حقیقی‌ـمقدار معرفی کردیم که روی نقاط فضای نمونه‌ای دارای یک اندازهٔ احتمال تعریف شده بود، و در شکل ۱.۳، با تخصیص مجموع اعدادی که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند به هریک از ۳۶ نقطهٔ متساوی‌الاحتمال فضای نمونه‌ای، این مفهوم را تشریح کردیم. در حالت پیوسته، که متغیرهای تصادفی می‌توانند مقادیری را روی مقیاسی پیوسته اختیار کنند، شیوهٔ کار به میزان زیاد همانند حالت گسسته است. برآمدهای آزمایشها با نقاط روی پاره‌خطها یا خطها نمایش داده می‌شوند، و مقادیر متغیرهای تصادفی اعدادی هستند که به‌گونه‌ای مناسب به‌وسیلهٔ قاعده‌ها یا معادله‌ها به نقاط نسبت داده می‌شوند. وقتی مقدار متغیر تصادفی مستقیماً با یک اندازه یا مشاهده داده می‌شود، عموماً به خود

زحمت نمی‌دهیم که بین مقدار متغیر تصادفی (اندازه‌ای که به‌دست می‌آوریم) و برآمد آزمایش (نقطهٔ متناظر روی محور حقیقی) تمایزی قائل شویم. مثلاً، اگر یک آزمایش عبارت از تعیین محتوای واقعی یک شیشهٔ ۲۳۰ گرمی قهوه باشد، نتیجهٔ حاصل، مثلاً ۲۲۵٫۳ گرم، مقدار متغیر تصادفیی است که مورد نظر ماست، و حقیقتاً نیازی نیست اضافه کنیم که فضای نمونه‌ای عبارت از بازهٔ پیوستهٔ معینی از نقاط روی محور اعداد حقیقی است.

مسئلهٔ تعریف احتمالها در رابطه با فضاهای نمونه‌ای پیوسته و متغیرهای تصادفی پیوسته متضمن پیچیدگیهایی است. برای توضیح مطلب وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۸.۳

فرض کنید به احتمال اینکه تصادفی در بزرگراهی به طول ۲۰۰ کیلومتر رخ دهد علاقه‌مندیم، و احتمال اینکه تصادف در محل مشخصی، یا شاید روی قطعهٔ معینی از جاده رخ دهد، مورد توجه ماست. فضای نمونه‌ای این «آزمایش»، متشکل از پیوستاری از نقاط است، نقاطی که در فاصلهٔ ۰ تا ۲۰۰ کیلومتر قرار دارند، و ما برای ارائهٔ استدلال، فرض می‌کنیم احتمال اینکه تصادفی در هر فاصله‌ای به طول d رخ دهد برابر $\frac{d}{۲۰۰}$ باشد، که در آن d برحسب کیلومتر اندازه گرفته می‌شود. توجه کنید که این تخصیص احتمالها با اصلهای موضوع ۱ و ۲ی صفحهٔ ۴۴ سازگار است، زیرا احتمالهای $\frac{d}{۲۰۰}$، همگی نامنفی‌اند و $P(S) = \frac{۲۰۰}{۲۰۰} = ۱$. تا اینجا این تخصیص احتمالها فقط در مورد فاصله‌های پاره‌خطهای از ۰ تا ۲۰۰ انجام شد، اما اگر اصل موضوع ۳ را به‌کار بریم، می‌توانیم احتمالها را برای اجتماع هر تعداد متناهی یا نامتناهی شمارای دنباله‌ای از بازه‌های جدا از هم نیز به‌کار بریم. به‌عنوان مثال، احتمال اینکه تصادفی روی هر کدام از دو بازهٔ جدا از هم به طولهای $d_۱$ و $d_۲$ رخ دهد برابر

$$\frac{d_۱ + d_۲}{۲۰۰}$$

است، و احتمال اینکه تصادفی روی یکی از بازه‌های متعلق به دنباله‌ای نامتناهی شمارا از بازه‌های جدا از هم به طولهای $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$، ... ، رخ دهد برابر است با

$$\frac{d_۱ + d_۲ + d_۳ + \cdots}{۲۰۰}$$

در این صورت، اگر قضیهٔ ۷.۲ را به‌کار بریم، می‌توانیم تخصیص احتمال را به اجتماع بازه‌هایی که از هم جدا نیستند گسترش دهیم، و چون اشتراک دو بازه، یک بازه، و متمم یک بازه نیز یک بازه، یا اجتماع دو بازه است، می‌توانیم تخصیص احتمال را به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای تعمیم دهیم که بتوان آن زیرمجموعه را از تشکیل اجتماعها یا اشتراکهای تعدادی نامتناهی یا نامتناهی شمارا از بازه‌ها، یا با تشکیل متممها به‌دست آورد. ▲

پس در توسیع مفهوم احتمال به حالت پیوسته، باز اصلهای ۱، ۲، و ۳ را به‌کار برده‌ایم، اما برای انجام این کار در حالت کلی، باید از تعریفی که برای «پیشامد» کردیم، تمام زیرمجموعه‌هایی

از فضای نمونه‌ای را که نمی‌توان با ساختن اجتماعها یا اشتراکهای تعدادی نامتناهی یا نامتناهی شمارای بازه‌ها، یا ساختن متممها به‌دست آورد مستثنی کنیم. از نظر عملی، این استثناء اهمیتی ندارد، زیرا ما صرفاً احتمالهایی به این نوع مجموعه‌های پیچیده نسبت نمی‌دهیم.

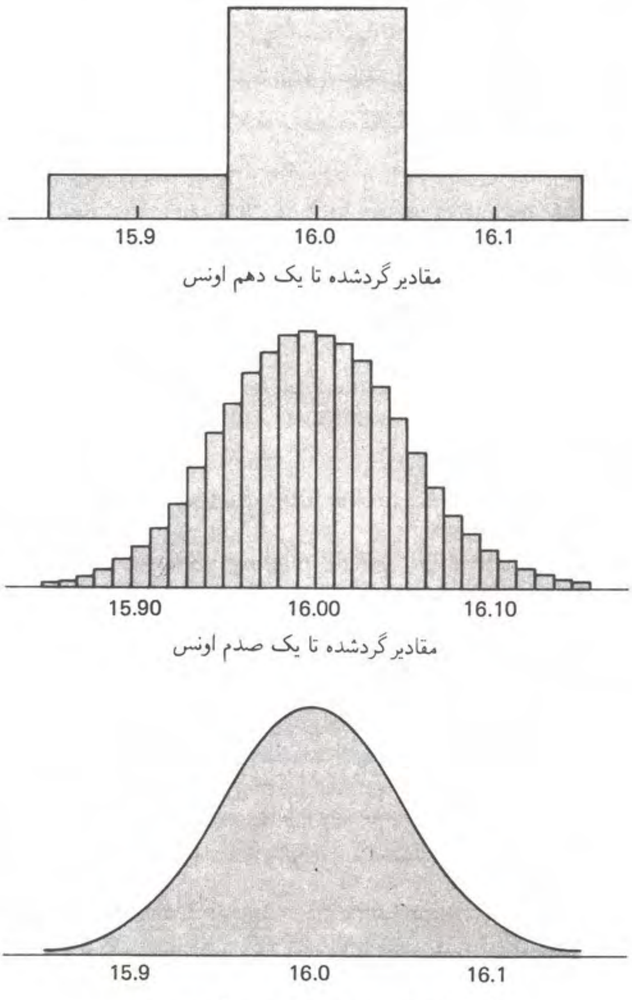
با مراجعه به مثال ۸.۳، همچنین ملاحظه کنید که احتمال وقوع تصادفی در یک فاصلهٔ خیلی کوتاه، مثلاً، فاصله‌ای یک سانتیمتری فقط برابر ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۵ است که خیلی کوچک است. وقتی طول فاصله به صفر می‌گراید، احتمال اینکه تصادفی روی آن رخ دهد نیز به صفر می‌گراید؛ البته در حالت پیوسته، ما به نقطه‌های تنها همیشه احتمال صفر را نسبت می‌دهیم. این بدان معنا نیست که پیشامدهای متناظر نمی‌توانند رخ دهند ــ بالاخره وقتی تصادفی در طول ۲۰۰ کیلومتر جاده رخ می‌دهد، الزاماً این تصادف در نقطه‌ای رخ می‌دهد، ولو اینکه هر نقطه احتمال صفر داشته باشد.

۴.۳ تابعهای چگالی احتمال

راهی که در مثال ۸.۳ برای تخصیص احتمالها به‌کار بردیم حالت بسیار خاصی است، و ذاتاً شبیه راهی است که طی آن، احتمالهای مساوی به شش وجه یک تاس، به شیرها و خطها و به ۵۲ کارت از یک نوع دسته کارت معمولی و غیره نسبت می‌دهیم. برای بحث در مسئلهٔ نسبت دادن احتمالها به متغیرهای تصادفی به‌طورکلیتر، فرض می‌کنیم که برای مسؤول قسمت پرکردن بطریهای یک نوع نوشابه، مقدار واقعی نوشابه‌ای که ماشین بطری پرکن در بطریهای ۱۶ اونسی می‌ریزد مطرح باشد. به‌وضوح مقدار نوشابه از یک بطری به بطری دیگر تغییر می‌کند، و در واقع این مقدار، یک متغیر تصادفی پیوسته است. اما اگر مسؤول قسمت، مقادیر نوشابهٔ بطریها را تا یک دهم اونس گرد کند با یک متغیر تصادفی گسسته سروکار دارد که دارای توزیع احتمال است، و این توزیع احتمال را می‌توان به‌صورت بافتنمایی که در آن احتمالها با مساحتهای مستطیلها داده شده‌اند، مثلاً نظیر نمودار قسمت بالای شکل ۵.۳، نمایش داد. اگر او مقادیر نوشابه را تا یک صدم اونس گرد کند، باز با متغیر تصادفی گسسته‌ای (متفاوت با اولی) که دارای توزیع احتمال است سروکار دارد، و این توزیع احتمال را می‌توان به‌صورت بافتنمایی که در آن احتمالها با مساحتهای مستطیلها داده شده‌اند، مثلاً نظیر نمودار قسمت وسط شکل ۵.۳، نمایش داد.

واضح است که اگر او مقادیر نوشابه را تا یک هزارم اونس یا تا یک ده هزارم اونس گرد کند، بافتنماهای توزیعهای احتمال متغیرهای تصادفی گسستهٔ متناظر، به منحنی پیوسته‌ای که در قسمت پایین شکل ۵.۳ نشان داده‌ایم میل می‌کنند، و مجموع مساحتهای مستطیلهایی که احتمال قرارگرفتن مقادیر نوشابه در هر بازهٔ معینی را نمایش می‌دهند، به مساحت سطح متناظر زیر منحنی میل می‌کند.

در واقع، تعریف احتمال در حالت پیوسته، برای هر متغیر تصادفی، وجود تابعی را که **تابع چگالی احتمال** نامیده می‌شود مفروض می‌گیرد، به‌قسمی که مساحتهای زیر منحنی این تابع، احتمالهای مربوط به بازه‌های متناظر در طول محور افقی را مشخص می‌کند. به بیان دیگر، انتگرال یک تابع چگالی از a تا b $(a \leq b)$ احتمال این را که متغیر تصادفی متناظر، مقداری را در بازهٔ a تا b اختیار کند به‌دست می‌دهد.



شکل۵.۳ تعریف احتمال در حالت پیوسته

تعریف۴.۳ تابعی با مقادیر $f(x)$، که روی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی تعریف شده است **تابع چگالی احتمال** یک متغیر تصادفی پیوستهٔ X خوانده می‌شود اگر و تنها اگر، به‌ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b با $a \leq b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

به توابع چگالی به اختصار **چگالیهای احتمال**، **توابع چگالی**، یا ت. چ. ا. نیز اطلاق می‌شود.

توجه کنید که $f(c)$، مقدار تابع چگالی به‌ازای c، مانند حالت گسسته، $P(X = c)$ را نمی‌دهد. در ارتباط با متغیرهای تصادفی پیوسته، احتمالها همیشه به بازه‌ها نسبت داده می‌شوند و به‌ازای هر مقدار حقیقی ثابت c، $P(X = c) = ۰$. این مطلب با بحث ما در صفحهٔ ۹۹ مطابقت دارد و از تعریف ۴.۳، با $a = b = c$ نیز مستقیماً نتیجه می‌شود.

به دلیل این ویژگی، مقدار تابع چگالی احتمال را می‌توان به‌ازای برخی از مقادیر متغیر تصادفی تغییر داد، بدون اینکه هیچ یک از احتمالها تغییر کنند، و به‌همین دلیل در تعریف ۴.۳ گفتیم که $f(x)$ مقدار یکی از چگالیهای احتمال متغیر تصادفی X به‌ازای x است و نه چگالی احتمال آن به‌معنی مطلق. به‌دلیل همین ویژگی نیز، مهم نیست که نقاط دوسر بازهٔ a تا b را در محاسبهٔ احتمال منظور کنیم یا نکنیم. به‌صورت نمادی

قضیهٔ ۴.۳ اگر X، یک متغیر تصادفی پیوسته و a و b دو عدد حقیقی ثابت با شرط $a \leq b$ باشند، آنگاه

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

مشابه با قضیهٔ ۱.۳، ویژگیهای زیر از توابع چگالی احتمال را که باز هم مستقیماً از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شوند بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۳ تابعی را می‌توان به‌عنوان تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوستهٔ X به‌کاربرد اگر مقادیر آن، $f(x)$، در شرایط *

۱. $f(x) \geq ۰$، به‌ازای $-\infty < x < \infty$؛

۲. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = ۱$،

صدق کند.

مثال ۹.۳

اگر X دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-۳x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

* این شرایط، مثل شرایط قضیهٔ ۱.۳، به‌صورت «اگر و تنها اگر» نیستند، زیرا $f(x)$ می‌تواند به‌ازای برخی مقادیر متغیر تصادفی منفی باشد بدون اینکه اثری بر احتمالها بگذارد. اما، هردو شرط قضیهٔ ۵.۳ برای تقریباً تمام توابع چگالی احتمالی که در عمل به‌کار می‌روند و در این کتاب مطالعه خواهیم کرد صادق خواهند بود.

باشد، k و $P(۰/۵ \leq X \leq ۱)$ را بیابید.

حل. برای اینکه دومین شرط قضیهٔ ۵.۳ صادق باشد باید داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{۰}^{\infty} k \cdot e^{-۳x}dx = k \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-۳x}}{-۳}\Big|_{۰}^{t} = \frac{k}{۳} = ۱$$

و نتیجه می‌شود که $k = ۳$. برای احتمالی که خواسته‌ایم، به‌دست می‌آوریم

$$P(۰/۵ \leq X \leq ۱) = \int_{۰/۵}^{۱} ۳e^{-۳x}dx = -e^{-۳x}\Big|_{۰/۵}^{۱} = -e^{-۳} + e^{-۱/۵} = ۰/۱۷۳$$

▲

گرچه متغیر تصادفی مثال قبل نمی‌تواند مقادیر منفی اختیارکند، ولی ما در حوزهٔ چگالی احتمال آن را به‌گونه‌ای تصنعی بسط دادیم تا تمام اعداد حقیقی را شامل شود. این شیوه‌ای است که در تمام این کتاب از آن پیروی خواهیم کرد.

مثل حالت گسسته، مسائل زیادی وجود دارند که علاقه‌مندیم در آنها احتمال این را که مقدار متغیر تصادفی پیوسته از عدد حقیقی x، کوچکتر یا مساوی با آن باشد بدانیم. لذا تعریف زیر را که مشابه تعریف ۳.۳ است ارائه می‌دهیم:

تعریف ۵.۳ اگر X، متغیر تصادفی پیوسته‌ای باشد، که مقدار چگالی احتمال آن به‌ازای t برابر با $f(t)$ است، آنگاه تابعی که به‌صورت

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

داده می‌شود، **تابع توزیع** یا **توزیع تجمعی** X نامیده می‌شود.

ویژگیهای توابع توزیع که در قضیهٔ ۲.۳ ارائه شدند، برای حالت پیوسته نیز برقرارند؛ یعنی $F(-\infty) = ۰$، $F(\infty) = ۱$، و وقتی $a < b$، $F(a) \leq F(b)$. به‌علاوه، از تعریف ۵.۳ مستقیماً نتیجه می‌شود که

قضیهٔ ۶.۳ اگر $f(x)$ و $F(x)$، به‌ترتیب مقادیر توزیع احتمال و تابع توزیع X به‌ازای x باشند، آنگاه به‌ازای هر دو مقدار حقیقی و ثابت a و b با شرط $a \leq b$،

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

و

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

و این مشتق موجود است.

مثال ۱۰.۳

تابع توزیع متغیر تصادفی X مربوط به مثال ۹.۳ را بیابید. این تابع توزیع را برای محاسبهٔ مجدد $P(۰٫۵ \leq X \leq ۱)$ نیز به‌کار برید.

حل. به‌ازای $x > ۰$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{۰}^{x} ۳e^{-۳t}dt = -e^{-۳t}\Big|_{۰}^{x} = ۱ - e^{-۳x}$$

و چون به‌ازای $x \leq ۰$، $F(x) = ۰$، می‌توانیم بنویسیم

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ ۱ - e^{-۳x} & x > ۰ \end{cases}$$

برای یافتن $P(۰٫۵ \leq X \leq ۱)$ از فرمول قسمت اول قضیهٔ ۶.۳ استفاده می‌کنیم، که به‌دست می‌دهد

$$\begin{aligned} P(۰٫۵ \leq X \leq ۱) &= F(۱) - F(۰٫۵) \\ &= (۱ - e^{-۳}) - (۱ - e^{-۱٫۵}) = ۰٫۱۷۳ \end{aligned}$$

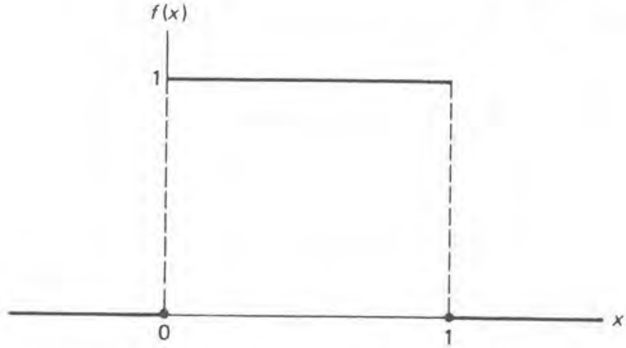
این جواب با نتیجه‌ای که با استفاده از تابع چگالی احتمال در مثال ۹.۳ مستقیماً به‌دست آمد مطابقت دارد. ▲

مثال ۱۱.۳

یک تابع چگالی احتمال، برای متغیر تصادفیی که تابع توزیعش

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x \leq ۰ \\ x & ۰ < x < ۱ \\ ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$

است، پیدا و نمودار آن را رسم کنید.



شکل۶.۳ نمودار تابع چگالی احتمال مثال ۱۱.۳

حل. چون تابع توزیع داده شده همه‌جا جز در $x = ۰$ و $x = ۱$، مشتق‌پذیر است، از تابع توزیع برای $x < ۰$، $۰ < x < ۱$ و $x > ۱$، مشتق می‌گیریم و ۰، ۱، و ۰ را به‌دست می‌آوریم. پس بنابر قسمت دوم از قضیهٔ ۶.۳، می‌توانیم بنویسیم

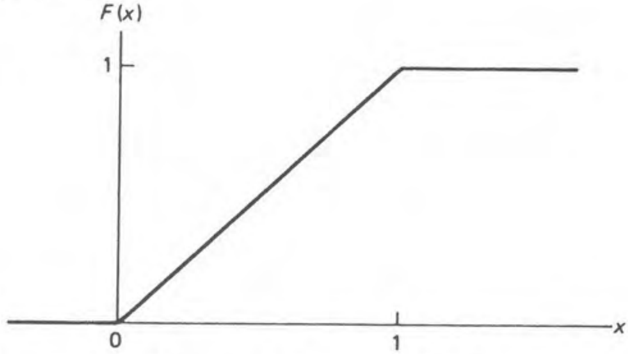
$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases}$$

و برای پر کردن دو رخنه در $x = ۰$ و $x = ۱$، مقادیر $f(۰)$ و $f(۱)$ را برابر صفر می‌گیریم. در واقع مهم نیست که چگالی احتمال در این دو نقطه چگونه تعریف شده است، اما انتخاب مقادیر به این طریق که تابع چگالی احتمال روی یک بازهٔ باز صفر نباشد مزیتهایی دارد (که در صفحهٔ ۲۶۰ توضیح داده خواهد شد). پس می‌توان تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی اصلی را به‌صورت

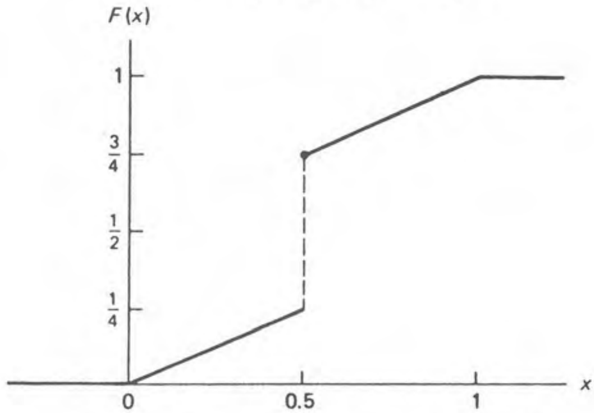
$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نوشت. نمودار این تابع را در شکل ۶.۳ نشان داده‌ایم. ▲

در اکثر کاربردهای عملی، با متغیرهای تصادفیی مواجه هستیم که یا گسسته و یا پیوسته‌اند، به‌قسمی که توابع توزیع متناظر آنها یا مثل شکل ۴.۳ ظاهری شبیه پله دارند، یا مثل شکل ۷.۳، که نمودار تابع توزیع مثال ۱۱.۳ است، خمهایی پیوسته‌اند. توابع توزیع ناپیوسته‌ای نظیر شکل ۸.۳ وقتی پیش می‌آیند که متغیرهای تصادفی **آمیخته** باشند. تابع توزیع چنین متغیر تصادفی در نقطه‌ای که احتمال ناصفر دارد ناپیوسته و در سایر جاها پیوسته است. مانند حالت گسسته، بلندی پله در نقطهٔ ناپیوستگی، احتمال آن است که متغیر تصادفی این مقدار خاص را اختیار کند. با مراجعه به



شکل۷.۳ نمودار تابع توزیع مثال ۱۱.۳



شکل۸.۳ نمودار تابع توزیع یک متغیر تصادفی آمیخته

شکل ۸.۳، $P(X = ۰/۵) = (\frac{۳}{۴}) - (\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}$، اما از سایر جهات، متغیر تصادفی شبیه یک متغیر تصادفی پیوسته است.

در این کتاب ما کار خود را به متغیرهای تصادفیی که یا گسسته یا پیوسته‌اند محدود می‌کنیم، و در حالت پیوسته توابع توزیعی داریم که در همه‌جا جز در مجموعه‌ای متناهی از مقادیر متغیرهای تصادفی مشتق‌پذیرند.

تمرینها

۲۲.۳ چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوستهٔ X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۵} & ۲ < x < ۷ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است.

(الف) نمودار آن را رسم و تحقیق کنید که کل مساحت زیر منحنی (بالای محور x) برابر با ۱ است.

(ب) $P(۳ < X < ۵)$ را بیابید.

۲۳.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را در تمرین ۲۲.۳ بیابید و از آن برای محاسبهٔ مجدد قسمت (ب) استفاده کنید.

۲۴.۳ چگالی احتمال متغیر تصادفی Y به‌صورت

$$f(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۸}(y+۱) & ۲ < y < ۴ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(Y < ۳٫۲)$ و $P(۲٫۹ < Y < ۳٫۲)$.

۲۵.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی Y را در تمرین ۲۴.۳ پیدا کنید و با استفاده از آن، دو احتمالی را که در آن تمرین خواسته شده است تعیین کنید.

۲۶.۳ ت. چ. ا متغیر تصادفی X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & ۰ < x < ۴ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است

(الف) مقدار c؛

(ب) $P(X < \frac{۱}{۴})$ و $P(X > ۱)$.

۲۷.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را در تمرین ۲۶.۳ بیابید و با استفاده از آن، دو احتمالی را که در قسمت (ب)ی آن تمرین خواسته شده است تعیین کنید.

۲۸.۳ چگالی احتمال متغیر تصادفی Z به‌صورت

$$f(z) = \begin{cases} kze^{-z^۲} & z > ۰ \\ ۰ & z \leq ۰ \end{cases}$$

داده شده است. k را بیابید و نمودار این چگالی احتمال را رسم کنید.

۲۹.۳ با رجوع به تمرین ۲۸.۳، تابع توزیع Z را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

۳۰.۳ تابع چگالی متغیر تصادفی X به‌صورت

$$g(x) = \begin{cases} ۶x(۱-x) & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(X < \frac{۱}{۴})$ و $P(X > \frac{۱}{۲})$.

۳۱.۳ با رجوع به تمرین ۳.۳۰، تابع توزیع X را بیابید و با استفاده از آن، دو احتمالی را که در آن تمرین خواسته شده است مجدداً حساب کنید.

۳۲.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & ۰ < x < ۱ \\ \frac{۱}{۴} & ۲ < x < ۴ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است بیابید. نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

۳۳.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} x & ۰ < x < ۱ \\ ۲ - x & ۱ \leq x < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید. نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

۳۴.۳ با رجوع به تمرین ۳۳.۳ و با استفاده از

(الف) چگالی احتمال؛

(ب) تابع توزیع؛

مقدار $P(۰٫۸ < X < ۱٫۲)$ را بیابید.

۳۵.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ < x \leq ۱ \\ \frac{۱}{۲} & ۱ < x \leq ۲ \\ \frac{۳-x}{۲} & ۲ < x < ۳ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، بیابید نمودارهای تابع و چگالی احتمال و تابع توزیع را نیز رسم کنید.

۳۶.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت

$$F(x) = \begin{cases} ۰ & x < -۱ \\ \frac{x+۱}{۲} & -۱ \leq x < ۱ \\ ۱ & x \geq ۱ \end{cases}$$

است. مطلوب است $P(-\frac{۱}{۲} < X < \frac{۱}{۲})$ و $P(۲ < X < ۳)$.

۳۷.۳ با رجوع به تمرین ۳۶.۳، چگالی احتمال را بیابید و با استفاده از آن، دو احتمال را مجدداً حساب کنید.
۳۸.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی Y به‌صورت

$$F(y) = \begin{cases} ۱ - \frac{۹}{y^۲} & y > ۳ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. مطلوب است $P(Y \leq ۵)$ و $P(Y > ۸)$.
۳۹.۳ با رجوع به تمرین ۳۸.۳، چگالی احتمال Y را بیابید و با استفاده از آن، دو احتمال را مجدداً حساب کنید.
۴۰.۳ با رجوع به تمرین ۳۸.۳ و نتیجهٔ تمرین ۳۹.۳، نمودارهای تابع توزیع و چگالی احتمال Y را با قرار دادن $f(۳) = ۰$ رسم کنید.
۴۱.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت

$$F(x) = \begin{cases} ۱ - (۱ + x)e^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & x \leq ۰ \end{cases}$$

است. مطلوب است $P(X \leq ۲)$، $P(۱ < X < ۳)$، و $P(X > ۴)$.
۴۲.۳ با رجوع به تمرین ۴۱.۳، چگالی احتمال X را بیابید.
۴۳.۳ با رجوع به شکل ۸.۳، عباراتی برای مقادیر تابع توزیع متغیر تصادفی آمیختهٔ X به‌ازای
(الف) $x \leq ۰$؛
(ب) $۰ < x < ۰٫۵$؛
(ج) $۰٫۵ \leq x < ۱$؛
(د) $x \geq ۱$؛
بیابید.
۴۴.۳ با استفاده از نتایج تمرین ۴۳.۳، عباراتی برای مقادیر چگالی احتمال متغیر تصادفی آمیختهٔ X به‌ازای
(الف) $x < ۰$؛
(ب) $۰ < x < ۰٫۵$؛
(ج) $۰٫۵ < x < ۱$؛
(د) $x > ۱$
بیابید. همان‌طور که در صفحهٔ ۱۰۵ خاطرنشان کردیم، $P(X = ۰٫۵) = \frac{۱}{۲}$، و $f(۰)$ و $f(۱)$ تعریف نشده هستند.

۴۵.۳ تابع توزیع متغیر تصادفی آمیختهٔ Z به‌صورت

$$F(z)=\begin{cases} ۰ & z<-۲ \\ \frac{z+۴}{۸} & -۲\le z<۲ \\ ۱ & z\ge ۲ \end{cases}$$

داده شده است. مطلوب است $P(Z=-۲)$؛ $P(Z=۲)$؛ $P(-۲<Z<۱)$؛ $P(۰\le Z\le ۲)$.

کاربردها

۴۶.۳ مقدار واقعی قهوه (برحسب گرم) در یک شیشهٔ ۲۳۰ گرمی که به‌وسیلهٔ ماشینی پر می‌شود متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x\le ۲۲۷٫۵ \\ \frac{۱}{۵} & ۲۲۷٫۵<x<۲۳۲٫۵ \\ ۰ & x\ge ۲۳۲٫۵ \end{cases}$$

داده شده است. پیدا کنید احتمال آنکه این شیشهٔ ۲۳۰ گرمی که به‌وسیلهٔ این ماشین پر می‌شود، محتوی

(الف) حداکثر ۲۲۸٫۶۵ گرم قهوه باشد؛

(ب) هر مقداری از ۲۲۹٫۳۴ تا ۲۳۱٫۶۶ گرم قهوه باشد؛

(ج) حداقل ۲۲۹٫۸۵ گرم قهوه باشد.

۴۷.۳ تعداد دقایقی که پروازی از شهر A به شهر B زودتر یا دیرتر انجام می‌شود متغیری تصادفی است که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲۸۸}(۳۶-x^{۲}) & -۶<x<۶ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، که در آن مقادیر منفی، معرف زود انجام شدن پرواز و مقادیر مثبت، معرف تأخیر در پروازند. پیدا کنید احتمال آن را که یکی از این پروازها

(الف) حداقل ۲ دقیقه زودتر؛

(ب) حداقل ۱ دقیقه دیرتر؛

(ج) مدتی از ۱ تا ۳ دقیقه زودتر؛

(د) دقیقاً ۵ دقیقه دیرتر؛

انجام گیرد.

۴۸.۳ مدت زمان سالم ماندن (برحسب ساعت) یک مادهٔ غذایی بسته‌بندی شدهٔ فاسدشدنی،

متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. پیدا کنید احتمال آن را که مدت زمان سالم ماندن یکی از این بسته‌ها

(الف) حداقل ۲۰۰ ساعت؛

(ب) حداکثر ۱۰۰ ساعت؛

(ج) بین ۸۰ تا ۱۲۰ ساعت؛

باشد.

۴۹.۳ میزان فرسودگی تایر (برحسب ۱۰۰۰ کیلومتر) برای دارندگان اتومبیل با نوع خاصی تایر، متغیری تصادفی است که تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

داده شده است. پیدا کنید احتمال اینکه یکی از این لاستیکها

(الف) حداکثر ۱۸۰۰۰ کیلومتر؛

(ب) چیزی از ۲۷۰۰۰ تا ۳۶۰۰۰ کیلومتر؛

(ج) حداقل ۴۸۰۰۰ کیلومتر؛

دوام داشته باشد.

۵۰.۳ در شهری معین، مصرف روزانهٔ آب (برحسب میلیون لیتر)، متغیری تصادفی است که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-\frac{x}{3}} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. احتمال اینکه در روز معینی

(الف) مصرف آب در این شهر بیش از ۶ میلیون لیتر نباشد؛

(ب) ذخیرهٔ آب کافی نباشد، در صورتی که ظرفیت روزانهٔ این شهر ۹ میلیون لیتر باشد؛ چقدر است؟

۵۱.۳ طول عمر (برحسب سال) سگهای پنج سالهٔ نژاد خاصی، متغیری است تصادفی که تابع توزیع آن به‌صورت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 5 \\ 1 - \frac{25}{x^2} & x > 5 \end{cases}$$

است. پیدا کنید احتمال اینکه چنین سگ پنج ساله‌ای

(الف) بیش از ده سال؛
(ب) کمتر از ۸ سال؛
(ج) بین ۱۲ تا ۱۵ سال؛
عمر کند.

۵.۳ توزیعهای چند متغیره

در آغاز این فصل، متغیر تصادفی را به‌صورت تابعی حقیقی-مقدار بر فضایی نمونه‌ای که دارای یک اندازهٔ احتمال است تعریف کردیم، و منطقی است که متغیرهای تصادفی زیادی را بتوان روی فضای نمونه‌ای واحدی تعریف کرد. برای مثال، در ارتباط با فضای نمونه‌ای شکل ۱.۳، ما فقط متغیر تصادفیی را در نظر گرفتیم که مقادیرش مجموع دو عدد بودند که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند، اما می‌توانستیم متغیر تصادفیی را در نظر بگیریم که مقادیرش حاصلضرب دو عددی باشند که در ریختن یک جفت تاس ظاهر می‌شوند، یا متغیر تصادفیی که مقادیرش تفاضل بین اعدادی باشند که در ریختن یک تاس قرمز و یک تاس سبز ظاهر می‌شوند، یا متغیر تصادفیی که مقادیرش ۰، ۱ یا ۲ بوده و بیانگر تعداد تاسهایی باشند که برای آنها عدد ۲ بیاید، و قس علی‌هذا. در ارتباط نزدیکتر با زندگی روزمره، ممکن است آزمایشی عبارت از انتخاب تصادفی تعدادی از ۳۴۵ دانش‌آموزی باشد که به یک مدرسهٔ ابتدایی می‌روند، و رئیس مدرسه به تعیین بهرهٔ هوشی آنها، مراقب بهداشتی مدرسه به وزن آنها، معلمین مدرسه به تعداد روزهایی که غیبت کرده‌اند و . . . علاقه‌مندند.

در این بخش ابتدا به **حالت دومتغیره** می‌پردازیم، یعنی به وضعیتهایی با یک جفت متغیر تصادفی که همزمان روی یک فضای نمونه‌ای توأم تعریف شده‌اند. بعداً، این بحث را به حالت **چندمتغیره**، که هر تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی را شامل می‌شود، تعمیم می‌دهیم.

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند، احتمال این را که X مقدار x و Y مقدار y را اختیار کند به‌صورت $P(X = x, Y = y)$ می‌نویسیم؛ بنابراین $P(X = x, Y = y)$، احتمال اشتراک پیشامدهای $X = x$ و $Y = y$ است. مانند **حالت یک متغیره** که با یک متغیر تصادفی سروکار داشتیم و می‌توانستیم احتمالهای مربوط به همهٔ مقادیر X را به‌وسیلهٔ یک جدول نمایش دهیم، اینک می‌توانیم در حالت دو متغیره نیز احتمالهای مربوط به همهٔ جفتهای مقادیر X و Y را به‌وسیلهٔ یک جدول نمایش دهیم.

مثال ۱۲.۳

دو قرص به‌تصادف از شیشه‌ای که محتوی ۳ قرص آسپرین، ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص ملین است، انتخاب می‌کنیم. اگر X و Y به‌ترتیب تعداد قرصهای آسپیرین و قرصهای خواب‌آور باشند که بین دو قرص منتخب از شیشه وجود دارند، احتمالهای مربوط به همهٔ جفتهای مقادیر ممکن X و Y را بیابید.

حل. جفتهای ممکن عبارت‌اند از: $(0, 0)$، $(0, 1)$، $(1, 0)$، $(1, 1)$، $(0, 2)$ و $(2, 0)$. برای پیدا

کردن احتمال مربوط به $(۰, ۱)$، مشاهده می‌کنیم که با پیشامد به‌دست آوردن یک قرص از سه قرص آسپیرین، ۰ قرص از دو قرص خواب‌آور، و در نتیجه یک قرص از چهار قرص ملین سروکار داریم. تعداد راههایی که می‌توان این کار را انجام داد برابر $۱۲ = \binom{۳}{۱}\binom{۲}{۰}\binom{۴}{۱}$ است، و تعداد کل راههایی که می‌توان ۲ قرص از ۹ قرص را انتخاب کرد برابر $۳۶ = \binom{۹}{۲}$ است. چون این امکانات بنابر فرض تصادفی بودن انتخابها متساوی‌الاحتمال‌اند از قضیهٔ ۲.۲، نتیجه می‌شود که احتمال مربوط به $(۰, ۱)$ برابر $\frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۱}{۳}$ است. همین‌طور، احتمال مربوط به $(۱, ۱)$ برابر

$$\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{۰}}{۳۶} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

است، و با ادامهٔ این راه، مقادیری را که در جدول زیر نشان داده‌ایم به‌دست می‌آوریم:

		x		
		۰	۱	۲
	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$
y	۱	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$	
	۲	$\frac{۱}{۳۶}$		

▲

درواقع مانند حالت یک متغیره، عموماً بهتر است که چنین احتمالهایی را به‌وسیلهٔ فرمولی ارائه کنیم. به‌عبارت دیگر بهتر است که احتمالها را به‌وسیلهٔ تابعی با مقادیر $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$، برای هر جفت از مقادیر (x, y) در برد متغیرهای تصادفی X و Y بیان کنیم. به‌عنوان نمونه، در بخش ۵ خواهیم دید که می‌توانیم برای جفت متغیرهای تصادفی مثال ۱۲.۳ بنویسیم:

$$f(x, y) = \frac{\binom{۳}{x}\binom{۲}{y}\binom{۴}{۲-x-y}}{\binom{۹}{۲}}$$

به‌ازای $x = ۰, ۱, ۲$؛ $y = ۰, ۱, ۲$؛ $۰ \leq x + y \leq ۲$.

تعریف ۶.۳ اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابعی که با $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ برای هر جفت مقدار (x, y) در برد X، Y داده می‌شود، **توزیع احتمال توأم** X و Y خوانده می‌شود.

شبیه قضیهٔ ۱.۳، از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شود که

قضیهٔ ۷.۳ تابعی دو متغیره وقتی و تنها وقتی می‌تواند به‌عنوان توزیع احتمال توأم یک جفت متغیر تصادفی X و Y به‌کار رود، که مقادیر آن، $f(x,y)$، در شرایط زیر صدق کنند:

۱. به‌ازای هر جفت مقدار (x,y) در حوزهٔ مربوط، $f(x,y) \geq ۰$.

۲. $\sum_x \sum_y f(x,y) = ۱$، که در آن مجموعیابی دوگانه به‌ازای تمام جفت (x,y)های ممکن در حوزهٔ مربوط انجام می‌شود.

مثال ۱۳.۳

مقدار k را طوری تعیین کنید که تابع

$$f(x,y) = kxy, \qquad x = ۱, ۲, ۳; \qquad y = ۱, ۲, ۳$$

را بتوان به‌عنوان توزیع احتمال توأم به‌کار برد.

حل. اگر مقادیر مختلف x و y را در تابع قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم $f(۱,۱) = k$، $f(۱,۲) = ۲k$، $f(۱,۳) = ۳k$، $f(۲,۱) = ۲k$، $f(۲,۲) = ۴k$، $f(۲,۳) = ۶k$، $f(۳,۱) = ۳k$، $f(۳,۲) = ۶k$، و $f(۳,۳) = ۹k$. برای برقراری اولین شرط قضیهٔ ۷.۳، ثابت k نباید منفی باشد، و برای برقراری دومین شرط

$$k + ۲k + ۳k + ۲k + ۴k + ۶k + ۳k + ۶k + ۹k = ۱$$

به‌قسمی که $۳۶k = ۱$ و $k = \frac{۱}{۳۶}$. ▲

مانند حالت یک متغیره، در مسائل زیادی دانستن احتمال اینکه مقادیر دو متغیر تصادفی برابر با اعداد حقیقی x و y یا کوچکتر از آنها باشند، مورد توجه است.

تعریف ۷.۳ اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند، تابعی که به‌صورت

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(s,t)$$

به‌ازای $-\infty < x < \infty$، و $-\infty < y < \infty$ داده می‌شود، و در آن $f(s,t)$ مقدار توزیع احتمال توأم X و Y در (s,t) است، **تابع توزیع توأم**، یا **توزیع تجمعی توأم** X و Y خوانده می‌شود.

در تمرین ۵۸.۳، از خواننده خواهیم خواست که ویژگیهای توابع توزیع توأم را، که به آنچه در قضیهٔ ۲.۳ آمده است شبیه‌اند، ثابت کند.

مثال ۱۴.۳
با مراجعه به مثال ۱۲.۳، $F(۱,۱)$ را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned}F(۱,۱) &= P(X \leq ۱, Y \leq ۱)\\ &= f(۰,۰) + f(۰,۱) + f(۱,۰) + f(۱,۱)\\ &= \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}\\ &= \frac{۸}{۹}\end{aligned}$$

▲

مانند حالت یک متغیره، تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی به‌ازای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است؛ به‌عنوان نمونه برای مثال ۱۲.۳، $F(-۲,۱) = P(X \leq -۲, Y \leq ۱) = ۰$ و $F(۳٫۷, ۴٫۵) = P(X \leq ۳٫۷, Y \leq ۴٫۵) = ۱$. حال مفاهیمی را که تاکنون در این بخش معرفی کرده‌ایم به‌حالت پیوسته تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۸.۳ یک تابع دو متغیره با مقادیر $f(x,y)$، که روی صفحهٔ xy تعریف شده است، **تابع چگالی احتمال توأم** متغیرهای تصادفی X و Y خوانده می‌شود، اگر و تنها اگر، برای هر ناحیهٔ A از صفحهٔ xy:

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)dx\,dy$$

شبیه قضیهٔ ۵.۳، از اصول موضوع احتمال نتیجه می‌شود که

قضیهٔ ۸.۳ تابعی دومتغیره را می‌توان به‌عنوان تابع چگالی احتمال توأم یک جفت متغیر تصادفی پیوستهٔ X و Y به‌کار برد که مقادیر آن، $f(x,y)$، در شرایط زیر صدق کنند:

۱. $f(x,y) \geq ۰$، به‌ازای $-\infty < x < \infty$ و $-\infty < y < \infty$؛
۲. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\,dy = ۱$.

مثال ۱۵.۳
اگر تابع چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۳}{۵}x(y+x) & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، $P[(X,Y) \in A]$ را که در آن A، ناحیهٔ $\{(x,y) | ۰ < x < \frac{۱}{۲}, ۱ < y < ۲\}$ است بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} P[(X,Y) \in A] &= P(۰ < X < \frac{۱}{۲}, ۱ < Y < ۲) \\ &= \int_۱^۲ \int_۰^{\frac{۱}{۲}} \frac{۳}{۵}x(y+x)dx\ dy \\ &= \int_۱^۲ \frac{۳x^۲y}{۱۰} + \frac{۳x^۳}{۱۵}\Big|_{x=۰}^{x=\frac{۱}{۲}} dy \\ &= \int_۱^۲ \left(\frac{۳y}{۴۰} + \frac{۱}{۴۰}\right) dy = \frac{۳y^۲}{۸۰} + \frac{y}{۴۰}\Big|_۱^۲ = \frac{۱۱}{۸۰} \end{aligned}$$

▲

مشابه تعریف ۷.۳، تعریف زیر را از نتایج توزیع دو متغیر تصادفی داریم:

تعریف ۹.۳ اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، تابعی که به‌صورت

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s,t)ds\ dt$$

به‌ازای $-\infty < x < \infty$، و $-\infty < y < \infty$ داده شده است و در آن $f(s,t)$، مقدار چگالی احتمال توأم X و Y در (s,t) است، **تابع توزیع توأم** X و Y خوانده می‌شود.

توجه کنید که ویژگیهای توابع توزیع توأم که اثبات آنها برای حالت گسسته در تمرین ۵۸.۳ از خواننده خواسته شده است، برای حالت پیوسته هم برقرارند.

مثل آنچه در بخش ۴.۳ گفتیم، بحث خود را به متغیرهای تصادفیی محدود کنیم که تابع توزیع توأم آنها همه‌جا پیوسته و بجز در مجموعه‌ای متناهی از مقادیر هریک از دو متغیر تصادفی، نسبت به هر متغیر مشتقپذیر باشد.

مشابه رابطهٔ $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ در قضیهٔ ۶.۳، مشتقگیری جزئی در تعریف ۹.۳، هرجا که مشتقهای جزئی وجود داشته باشند به رابطهٔ

$$f(x,y) = \frac{\partial^۲}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

منجر می‌شود. مانند آنچه در بخش ۴.۳ گفتیم، تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی پیوسته، **چگالی توأم** آنها را (که نام کوتاهی برای تابع چگالی احتمال توأم است) در تمام نقاط (x,y)، که به‌ازای آنها چگالی توأم پیوسته است، مشخص می‌کند. مانند بخش ۴.۳، معمولاً مقادیر چگالی احتمال توأم را هرجا که با رابطهٔ بالا تعریف نمی‌شود، برابر صفر می‌گیریم.

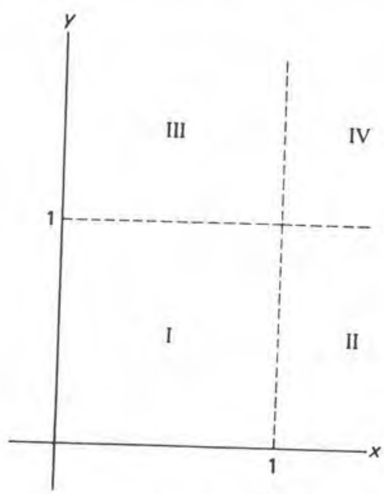
مثال ۱۶.۳

اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، تابع توزیع توأم این دو متغیر تصادفی را پیدا کنید.

حل. اگر $x < ۰$ یا $y < ۰$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $F(x,y) = ۰$. به‌ازای $۰ < x < ۱$ و $۰ < y < ۱$ (ناحیهٔ I شکل ۹.۳) به‌دست می‌آوریم



شکل۹.۳ نمودار مثال ۱۶.۳

$$F(x,y)=\int_{۰}^{y}\int_{۰}^{x}(s+t)ds\ dt=\frac{۱}{۲}xy(x+y)$$

به‌ازای $x>۱$ و $۰<y<۱$ (ناحیهٔ IIای شکل ۹.۳) به‌دست می‌آوریم

$$F(x,y)=\int_{۰}^{y}\int_{۰}^{۱}(s+t)ds\ dt=\frac{۱}{۲}y(y+۱)$$

به‌ازای $۰<x<۱$ و $y>۱$ (ناحیهٔ IIIای شکل ۹.۳) به‌دست می‌آوریم

$$F(x,y)=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{x}(s+t)ds\ dt=\frac{۱}{۲}x(x+۱)$$

و به‌ازای $x>۱$ و $y>۱$ (ناحیهٔ IV شکل ۹.۳) به‌دست می‌آوریم

$$F(x,y)=\int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۱}(s+t)ds\ dt=۱$$

چون تابع توزیع توأم همه‌جا پیوسته است، کرانهای بین هر دو ناحیه از این نواحی را می‌توان در یکی از آنها منظور کرد و می‌توانیم بنویسیم:

$$F(x,y)=\begin{cases} ۰ & x\leq ۰ \text{ یا } y\leq ۰\\ \frac{۱}{۲}xy(x+y) & ۰<x<۱,\ ۰<y<۱\\ \frac{۱}{۲}y(y+۱) & x\geq ۱,\ ۰<y<۱\\ \frac{۱}{۲}x(x+۱) & ۰<x<۱,\ y\geq ۱\\ ۱ & x\geq ۱,\ y\geq ۱\end{cases}$$

▲

مثال ۱۷.۳

اگر تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت

$$F(x,y)=\begin{cases}(۱-e^{-x})(۱-e^{-y}) & x>۰, y>۰\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال توأم آنها را بیابید. با استفاده از این چگالی احتمال توأم مقدار $P(۱<X<۳, ۱<Y<۲)$ را نیز معین کنید.

حل. چون مشتقگیری جزئی نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial^{۲}}{\partial x\partial y}F(x,y)=e^{-(x+y)}$$

به‌ازای $x > \circ$ و $y > \circ$، و ۰ در سایر جاها، چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > \circ \text{ و } y > \circ \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به‌دست می‌آید. پس از انتگرالگیری نتیجه می‌شود که برای $P(۱ < X < ۳,\ ۱ < Y < ۲)$

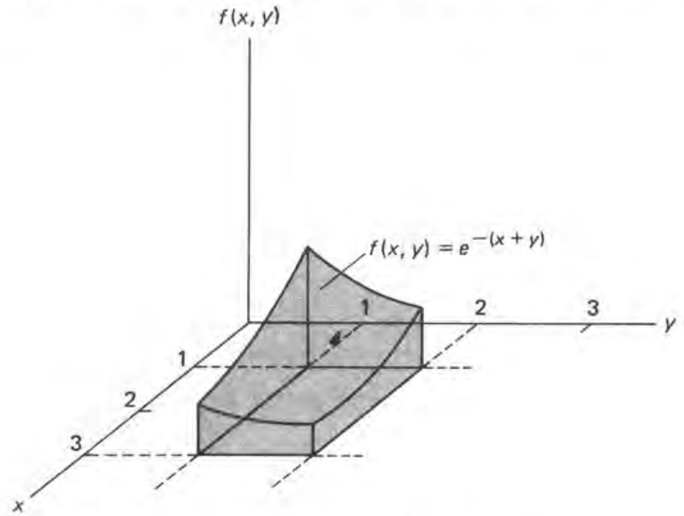
$$\begin{aligned}\int_۱^۲ \int_۱^۳ e^{-(x+y)} dx\, dy &= (e^{-۱} - e^{-۳})(e^{-۱} - e^{-۲}) \\ &= e^{-۲} - e^{-۳} - e^{-۴} + e^{-۵} \\ &= ۰٫۰۷۴\end{aligned}$$

▲

برای دو متغیر تصادفی، چگالی احتمال توأم، از نظر هندسی، یک رویه است، و احتمالی که در مثال قبل محاسبه کرده‌ایم با حجم زیر این رویه داده می‌شود، که در شکل ۳.۱۰ نشان داده‌ایم.

تمام تعریفهای این بخش را می‌توان به حالت چند متغیره، که در آن n متغیر تصادفی وجود دارند، تعمیم داد. بنابر تعریف ۶.۳ مقادیر توزیع احتمال توأم n متغیر تصادفی گسستهٔ $X_۱$، $X_۲$، ... و X_n برای هر nـگانهٔ $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ در برد متغیرهای تصادفی، به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = P(X_۱ = x_۱, X_۲ = x_۲, \cdots, X_n = x_n)$$



شکل۳.۱۰ نمودار مثال ۱۷.۳

داده می‌شود. مقادیر تابع توزیع توأم آنها نیز به‌ازای

$$-\infty < x_۱ < \infty,\ -\infty < x_۲ < \infty, \ldots, -\infty < x_n < +\infty$$

به‌صورت

$$F(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = P(X_۱ \leq x_۱, X_۲ \leq x_۲, \cdots, X_n \leq x_n)$$

داده می‌شود.

مثال ۱۸.۳

اگر توزیع احتمال توأم سه متغیر تصادفی گسسته X، Y، و Z به‌صورت

$$f(x, y, z) = \frac{(x+y)z}{۶۳} \qquad x = ۱, ۲; \qquad y = ۱, ۲, ۳; \qquad z = ۱, ۲$$

باشد، مقدار $P(X = ۲, Y + Z \leq ۳)$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} P(X = ۲, Y + Z \leq ۳) &= f(۲, ۱, ۱) + f(۲, ۱, ۲) + f(۲, ۲, ۱) \\ &= \frac{۳}{۶۳} + \frac{۶}{۶۳} + \frac{۴}{۶۳} = \frac{۱۳}{۶۳} \end{aligned}$$

▲

در حالت پیوسته، احتمالها باز هم با انتگرالگیری از چگالی احتمال توأم به‌دست می‌آیند، و تابع توزیع توأم، مشابه تعریف ۹.۳، به‌صورت

$$F(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_۲} \int_{-\infty}^{x_۱} f(t_۱, t_۲, \cdots, t_n) dt_۱ dt_۲ \cdots dt_n$$

به‌ازای $-\infty < x_۱ < \infty$، $-\infty < x_۲ < \infty$، ...، $-\infty < x_n < \infty$، داده می‌شود. مشتقگیری جزئی نیز هرجا مشتقات جزئی موجود باشند، فرمول

$$f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_۱ \partial x_۲ \cdots \partial x_n} F(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$$

را نتیجه می‌دهد.

مثال ۱۹.۳
اگر چگالی احتمال **سه متغیر تصادفی** X_1، X_2، X_3 به‌صورت

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)e^{-x_3} & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است $P[(X_1,\ X_2,\ X_3) \in A]$، که در آن A، ناحیهٔ

$$\{(x_1, x_2, x_3) | 0 < x_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x_2 < 1, x_3 < 1\}$$

است.

حل.

$$\begin{aligned} P[X_1, X_2, X_3) \in A] &= P(0 < X_1 < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < X_2 < 1, X_3 < 1) \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (x_1 + x_2)e^{-x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{8} + \frac{x_2}{2}\right) e^{-x_3} dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x_3} dx_3 \\ &= \frac{1}{4}(1 - e^{-1}) = 0{,}158 \end{aligned}$$

▲

تمرینها

۵۲.۳ اگر مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورتی باشند که در جدول زیر داده شده‌اند،

		x		
		۰	۱	۲
y	۰	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$
	۲	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	
	۳	$\frac{1}{120}$		

مطلوب است،

(الف) $P(X=1, Y=2)$؛

(ب) $P(X=0, 1 \leq Y < 3)$؛

(ج) $P(X+Y \leq 1)$؛

(د) $P(X > Y)$.

۵۳.۳ با رجوع به تمرین ۵۲.۳، مقادیر زیر از تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی را بیابید:

(الف) $F(1{,}2, 0{,}9)$؛

(ب) $F(-3, 1{,}5)$؛

(ج) $F(2, 0)$؛

(د) $F(4, 2{,}7)$.

۵۴.۳ اگر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = c(x^2+y^2) \qquad x=-1, 0, 1, 3; \quad y=-1, 2, 3$$

داده شده باشد، مقدار c را بیابید.

۵۵.۳ با رجوع به تمرین ۵۴.۳ و مقدار به‌دست آمده برای c، مطلوب است

(الف) $P(X \leq 1,\ Y > 2)$؛

(ب) $P(X = 0,\ Y \leq 2)$؛

(ج) $P(X+Y > 2)$.

۵۶.۳ نشان دهید مقداری برای k موجود نیست که بتوان

$$f(x,y) = ky(2y-x) \qquad x=0,\ 3; \qquad y=0, 1, 2$$

را به‌عنوان توزیع احتمال توأم دو متغیر تصادفی به‌کار برد.

۵۷.۳ اگر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \frac{1}{30}(x+y), \qquad x=0, 1, 2, 3; \qquad y=0, 1, 2$$

باشد، جدولی بنا کنید که مقادیر تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی را در دوازده نقطهٔ $(0, 0)$، $(0, 1)$، ... ، $(3, 2)$ نشان دهد.

۵۸.۳ اگر $F(x,y)$ مقدار تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی گسستهٔ X و Y در نقطهٔ (x,y) باشد، نشان دهید که

(الف) $F(-\infty, -\infty) = 0$؛

(ب) $F(\infty, \infty) = 1$؛

(ج) اگر $a < b$ و $c < d$، آنگاه $F(a,c) \leq F(b,d)$.

۵۹.۳ k را طوری تعیین کنید که

$$f(x,y)=\begin{cases} kx(x-y) & 0<x<1,\ -x<y<x \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

را بتوان به‌عنوان تابع چگالی احتمال توأم به‌کار برد.

۶۰.۳ اگر چگالی احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} 24xy & 0<x<1,\ 0<y<1,\ x+y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است $P(X+Y<\frac{1}{2})$.

۶۱.۳ اگر چگالی احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 & x>0,\ y>0,\ x+y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

(الف) $P(X\le\frac{1}{2}, Y\le\frac{1}{2})$؛

(ب) $P(X+Y>\frac{2}{3})$؛

(ج) $P(X>2Y)$.

۶۲.۳ با رجوع به تمرین ۶۱.۳، عبارتی برای مقادیر تابع توزیع توأم X و Y، وقتی $x>0$، $y>0$، و $x+y<1$ بیابید و با استفاده از آن درستی نتیجهٔ قسمت (الف) را تحقیق کنید.

۶۳.۳ اگر چگالی احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{y} & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، احتمال اینکه مجموع مقادیر X و Y از $\frac{1}{2}$ تجاوز کند چقدر است؟

۶۴.۳ چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y را که تابع توزیع توأم آنها به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2}) & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید.

۶۵.۳ با استفاده از چگالی احتمال حاصل در تمرین ۶۴.۳، مقدار $P(1 < X \leq 2,\ 1 < Y \leq 2)$ را بیابید.

۶۶.۳ چگالی احتمال توأم دو متغیر تصادفی X و Y را که تابع توزیع توأم آنها به‌صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید.

۶۷.۳ با استفاده از تابع چگالی حاصل در تمرین ۶۶.۳، مقدار $P(X + Y > 3)$ را بیابید.

۶۸.۳ اگر $F(x, y)$ مقدار تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی پیوستهٔ X و Y در (x, y) باشد، $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$ را برحسب $F(a, c)$، $F(a, d)$، $F(b, c)$، و $F(b, d)$ بیابید. توجه کنید که نتیجه برای متغیرهای تصادفی گسسته هم برقرار است.

۶۹.۳ با استفاده از فرمول حاصل در تمرین ۶۸.۳، درستی نتیجهٔ ۰٫۰۷۴ مثال ۱۷.۳ را تحقیق کنید.

۷۰.۳ با استفاده از فرمول حاصل در تمرین ۶۸.۳، درستی نتیجهٔ تمرین ۶۵.۳ را تحقیق کنید.

۷۱.۳ با استفاده از فرمول حاصل در تمرین ۶۸.۳، درستی نتیجهٔ تمرین ۶۷.۳ را تحقیق کنید.

۷۲.۳ اگر توزیع احتمال توأم X، Y، و Z به‌صورت

$$f(x, y, z) = kxyz \qquad x = 1, 2; \qquad y = 1, 2, 3; \qquad z = 1, 2$$

باشد، مقدار k را بیابید.

۷۳.۳ با رجوع به تمرین ۷۲.۳، مطلوب است

(الف) $P(X = 1, Y \leq 2, Z = 1)$؛

(ب) $P(X = 2, Y + Z = 4)$.

۷۴.۳ با رجوع به تمرین ۷۲.۳، مقادیر زیر از تابع توزیع توأم سه متغیر تصادفی را بیابید.

(الف) $F(2, 1, 2)$؛

(ب) $F(1, 0, 1)$؛

(ج) $F(4, 4, 4)$.

۷۵.۳ اگر چگالی احتمال توأم X، Y، و Z به‌صورت

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxy(1 - z) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1,\ x + y + z < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار k را بیابید.

۷۶.۳ با رجوع به تمرین ۷۵.۳، مقدار $P(X+Y<\frac{1}{2})$ را بیابید.

۷۷.۳ با استفاده از نتیجهٔ مثال ۱۶.۳، تحقیق کنید که تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی X_1، X_2، و X_3 در مثال ۱۹.۳ به‌صورت

$$F(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} 0 & x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ \text{یا}\ x_3\le 0 \\ \frac{1}{2}x_1x_2(x_1+x_2)(1-e^{-x_3}) & 0<x_1<1,\ 0<x_2<1,\ x_3>0 \\ \frac{1}{2}x_2(x_2+1)(1-e^{-x_3}) & x_1\ge 1,\ 0<x_2<1,\ x_3>0 \\ \frac{1}{2}x_1(x_1+1)(1-e^{-x_3}) & 0<x_1<1,\ x_2\ge 1,\ x_3>0 \\ 1-e^{-x_3} & x_1\ge 1,\ x_2\ge 1,\ x_3>0 \end{cases}$$

است.

۷۸.۳ اگر چگالی احتمال توأم X، Y، و Z به‌صورت

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{1}{3}(2x+3y+z) & 0<x<1,\ 0<y<1,\ 0<z<1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است

(الف) $P(X=\frac{1}{2},Y=\frac{1}{2},Z=\frac{1}{2})$؛

(ب) $P(X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2},Z<\frac{1}{2})$.

کاربردها

۷۹.۳ فرض می‌کنیم یک جفت تاس همگن را بریزیم، X تعداد تاسهایی است که ۱ می‌آیند، و Y تعداد تاسهایی است که ۴، ۵، یا ۶ می‌آیند.

(الف) نموداری نظیر نمودار شکل ۱.۳ رسم کنید، که مقادیر X و Y مربوط به هریک از ۳۶ نقطهٔ متساوی‌الاحتمال فضای نمونه‌ای را نشان دهد.

(ب) جدولی بنا کنید که مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y را نشان دهد.

۸۰.۳ دو کتاب درسی به‌تصادف از قفسه‌ای که محتوی ۳ کتاب آمار، ۲ کتاب ریاضی، و ۳ کتاب فیزیک است انتخاب می‌کنیم. اگر X تعداد کتابهای آمار، و Y تعداد کتابهای ریاضی منتخب باشند، جدولی بنا کنید که مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y را نشان دهد.

۸۱.۳ فرض کنید X، تعداد شیرها، و Y تعداد شیرها منهای تعداد خطهایی را نشان دهد که در سه پرتاب یک سکهٔ همگن به‌دست می‌آیند. مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y را بیابید.

۸۲.۳ یک تیرانداز هدف دایره‌ای شکلی را که به‌شعاع ۱ است نشانه می‌گیرد. اگر دستگاه مختصات قائمی رسم کنیم که مبدأ آن در مرکز هدف باشد، مختصات نقطهٔ اصابت، (X, Y)، متغیرهایی تصادفی‌اند که دارای چگالی احتمال توأم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & 0 < x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

هستند، پیدا کنید.

(الف) $P[(X, Y) \in A]$، که در آن A، قطاعی از دایره در ربع اول و بین شعاعهای واقع بر خطوط $y = 0$ و $y = x$ است.

(ب) $P[(X, Y) \in B]$، که در آن $B = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$.

۸۳.۳ دانشکده‌ای از تمام دانشجویان تازه وارد، امتحانهای قوه‌ای در زمینهٔ علوم و ادبیات به‌عمل می‌آورد. اگر X و Y به‌ترتیب نسبتهای پاسخهای صحیح یک دانشجو در این دو امتحان باشند، توزیع احتمال توأم این متغیرهای تصادفی را می‌توان با چگالی احتمال توأم

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y) & 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تقریب زد، چه نسبتی از دانشجویان

(الف) در هر دو امتحان، کمتر از ۴۰ر۰؛

(ب) در امتحان علوم بیش از ۸۰ر۰ و در امتحان ادبیات کمتر از ۵۰ر۰؛ به‌دست خواهند آورد؟

۸۴.۳ اگر P، بهای یک کالا (برحسب تومان)، و S، فروش کل (برحسب ده‌هزار واحد)، متغیرهای تصادفیی باشند که توزیع احتمال توأم آنها را بتوان با چگالی احتمال توأم

$$f(p, s) = \begin{cases} 5pe^{-ps} & 0{,}20 < p < 0{,}40, \ s > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تقریب کرد، پیدا کنید احتمال آنکه

(الف) بها، کمتر از ۳ تومان باشد و میزان فروش از ۲۰۰۰۰ واحد تجاوز کند؛

(ب) بها، بین ۲ر۵ تومان و ۳ تومان، و میزان فروش از ۱۰۰۰۰ واحد کمتر باشد.

۶.۳ توزیعهای حاشیه‌ای

برای معرفی مفهوم **توزیع حاشیه‌ای**، ابتدا مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۲۰.۳

در مثال ۱۲.۳ توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y، یعنی تعداد قرصهای آسپیرین و تعداد قرصهای خواب‌آور موجود در دو قرصی را که به‌تصادف از شیشهٔ محتوی ۳ قرص آسپیرین، ۲ قرص خواب‌آور، و ۴ قرص ملین بیرون می‌آوریم، به‌دست آوردیم. توزیع احتمال X و توزیع احتمال Y را به‌تنهایی پیدا کنید.

حل. نتایج مثال ۱۲.۳، همراه با **مجموعهای حاشیه‌ای**، یعنی مجموعهای مربوط به هر سطر و هر ستون را در جدول زیر نشان داده‌ایم:

		x			
		۰	۱	۲	
	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$
y	۱	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{7}{18}$
	۲	$\frac{1}{36}$			$\frac{1}{36}$
		$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	

مجموعهای ستونی احتمالهایی هستند که X مقادیر ۰، ۱، و ۲ را اختیار می‌کند. به‌عبارت دیگر این مجموعها، مقادیر

$$g(x) = \sum_{y=0}^{2} f(x, y) \qquad x = 0, 1, 2$$

مربوط به توزیع احتمال X هستند. به‌همین ترتیب، مجموعهای سطری، مقادیر

$$h(y) = \sum_{x=0}^{2} f(x, y) \qquad y = 0, 1, 2$$

مربوط به توزیع احتمال Y هستند. ▲

لذا به تعریف زیر هدایت می‌شویم

تعریف ۱۰.۳ اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته، و $f(x,y)$ مقدار توزیع احتمال توأم آنها در (x,y) باشد، تابعی که برای هر x در برد X به‌صورت

$$g(x) = \sum_y f(x,y)$$

داده می‌شود، **توزیع حاشیه‌ای** X نام دارد. متناظراً تابعی که برای هر y در برد Y به‌صورت

$$h(y) = \sum_x f(x,y)$$

داده می‌شود، **توزیع حاشیه‌ای** Y نام دارد.

وقتی X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته‌اند، چگالیهای احتمال به‌جای توزیعهای احتمال، و انتگرالها به‌جای مجموعها قرار می‌گیرند، و به‌دست می‌آوریم

تعریف ۱۱.۳ اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و $f(x,y)$ مقدار چگالی احتمال توأم آنها در (x,y) باشد، تابعی که به‌صورت

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad -\infty < x < \infty$$

داده می‌شود، **چگالی حاشیه‌ای** X نام دارد. متناظراً، تابعی که به‌صورت

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad -\infty < y < \infty$$

داده می‌شود، **چگالی حاشیه‌ای** Y نام دارد.

مثال ۲۱.۳
چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲}{۳}(x+۲y) & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است، چگالیهای حاشیه‌ای X و Y را بیابید.

حل. با انجام انتگرالگیریهای لازم برای $0 < x < 1$، به‌دست می‌آوریم

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dy = \frac{2}{3}(x+1)$$

و برای سایر مقادیر x داریم $g(x) = 0$. به‌همین طریق برای $0 < y < 1$،

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)dx = \frac{1}{3}(1+4y)$$

و برای سایر مقادیر $h(y) = 0$. ▲

وقتی با بیش از دو متغیر تصادفی سروکار داریم، نه‌تنها می‌توانیم از توزیعهای حاشیه‌ای تک‌تک متغیرهای تصادفی صحبت کنیم، بلکه می‌توانیم از **توزیعهای حاشیه‌ای توأم** چند متغیر تصادفی هم صحبت به میان آوریم. اگر توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسستهٔ X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n دارای مقادیر $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ باشد، توزیع حاشیه‌ای X_1 به‌تنهایی برای تمام مقادیر واقع در برد X_1 به‌صورت

$$g(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

داده می‌شود. توزیع حاشیه‌ای توأم X_1، X_2، و X_3 برای همهٔ مقادیر واقع در برد X_1، X_2، X_3 به‌صورت

$$m(x_1, x_2, x_3) = \sum_{x_4} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

داده می‌شود، و توزیعهای حاشیه‌ای دیگر را نیز می‌توان به‌همین طریق تعریف کرد. برای حالت پیوسته، چگالیهای احتمال به‌جای توزیعهای احتمال و انتگرالها به‌جای مجموعها قرار می‌گیرند، و اگر چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوستهٔ X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n مقدار $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ را داشته باشد، چگالی حاشیه‌ای X_2 به‌تنهایی برای $-\infty < x_2 < \infty$، به‌صورت

$$h(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_3 \cdots, dx_n$$

داده می‌شود، چگالی حاشیه‌ای توأم X_1 و X_n، برای $-\infty < x_1 < \infty$ و $-\infty < x_n < \infty$ به‌صورت

$$\varphi(x_1, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_2 dx_3 \cdots dx_{n-1}$$

داده می‌شود، وقس علی‌هذا.

مثال ۲۲.۳
مجدداً چگالی احتمال سه متغیرهٔ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2)e^{-x_3} & 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1,\ x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مثال ۱۹.۳ را در نظر می‌گیریم، چگالی حاشیه‌ای توأم X_1 و X_3 و چگالی حاشیه‌ای X_1 را بیابید.

حل. با انجام انتگرالگیریهای لازم، چگالی حاشیه‌ای توأم X_1 و X_3 را برای $0 < x_1 < 1$ و $x_3 > 0$ به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$m(x_1, x_3) = \int_0^1 (x_1 + x_2)e^{-x_3} dx_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) e^{-x_3}$$

و برای سایر مقادیر داریم $m(x_1, x_3) = 0$. با استفاده از این نتیجه، متوجه می‌شویم که چگالی حاشیه‌ای X_1 تنها، برای $0 < x_1 < 1$، به‌صورت

$$\begin{aligned} g(x_1) &= \int_0^\infty \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3 = \int_0^\infty m(x_1, x_3) dx_3 \\ &= \int_0^\infty \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) e^{-x_3} dx_3 = x_1 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

داده می‌شود و به‌ازای سایر مقادیر $g(x_1) = 0$. ▲

متناظر با توزیعها و چگالیهای حاشیه‌ای و توزیعها و چگالیهای حاشیه‌ای توأم مختلف که در این بخش معرفی شدند، می‌توانیم **توابع توزیع حاشیه‌ای و توابع توزیع حاشیه‌ای توأم** را نیز تعریف کنیم. مسائلی در ارتباط با چنین توابع توزیعی در تمرینهای ۸۸.۳، ۹۵.۳، و ۹۶.۳ برعهدهٔ خواننده واگذار شده‌اند.

۷.۳ توزیعهای شرطی

در فصل ۲، احتمال شرطی پیشامد A را وقتی که پیشامد B معلوم است، به‌شرط $P(B) \neq 0$ به‌صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

تعریف کردیم. فرض کنید که اکنون A و B پیشامدهای $X = x$ و $Y = y$ هستند، بنابراین می‌توانیم به شرط $P(Y = y) = h(y) \neq 0$ بنویسیم

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

که در آن $f(x, y)$ مقدار توزیع احتمال توأم X و Y در (x, y)، و $h(y)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای Y در y است. احتمال شرطی را به‌صورت $f(x|y)$ می‌نویسیم تا نشان دهیم که x متغیر و y تثبیت شده است. اینک تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱۲.۳ اگر $f(x, y)$ مقدار توزیع احتمال-توأم متغیرهای تصادفی گسستهٔ X و Y در (x, y)، و $h(y)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای Y در y باشد، تابعی که برای هر x در برد X به‌صورت

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \qquad h(y) \neq ۰$$

است، **توزیع شرطی** X به شرط $Y = y$ نامیده می‌شود. متناظراً، اگر $g(x)$، مقدار توزیع حاشیه‌ای X در x باشد، تابعی که برای هر y در برد Y به‌صورت

$$w(y|x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \qquad g(x) \neq ۰$$

است، **توزیع شرطی** Y به‌شرط $X = x$ نامیده می‌شود.

مثال ۲۳.۳

با مراجعه به مثالهای ۱۲.۳ و ۲۰.۳ احتمال شرطی X به‌شرط $Y = ۱$ را بیابید.

حل. با جایگذاری مقادیر مربوطه از جدول صفحهٔ ۱۲۶، به‌دست می‌آوریم

$$f(۰|۱) = \frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۷}{۱۸}} = \frac{۴}{۷}$$

$$f(۱|۱) = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۷}{۱۸}} = \frac{۳}{۷}$$

$$f(۲|۱) = \frac{۰}{\frac{۷}{۱۸}} = ۰$$

▲

وقتی X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته‌اند، چگالیهای احتمال به‌جای توزیعهای احتمال قرار می‌گیرند، و داریم

تعریف ۱۳.۳ اگر $f(x,y)$ مقدار چگالی توأم متغیرهای تصادفی پیوستهٔ X و Y در (x,y)، و $h(y)$ مقدار چگالی حاشیه‌ای Y در y باشد، تابعی که برای $-\infty < x < \infty$ به‌صورت

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}, \qquad h(y) \neq ۰$$

است، **چگالی شرطی** X به‌شرط $Y = y$ نامیده می‌شود. متناظراً، اگر $g(x)$ مقدار چگالی حاشیه‌ای X در x باشد، تابعی که برای $-\infty < y < \infty$ به‌صورت

$$w(x|y) = \frac{f(x,y)}{g(y)}, \qquad g(x) \neq ۰$$

است، **چگالی شرطی** Y به‌شرط $X = x$ نامیده می‌شود.

مثال ۲۴.۳

با مراجعه به مثال ۲۱.۳، چگالی شرطی X به‌شرط $Y = y$ را بیابید، و آن‌را برای محاسبهٔ $P(X \leq \frac{۱}{۲}|Y = \frac{۱}{۲})$ به‌کار برید.

حل. با استفاده از نتایج صفحهٔ ۱۲۸، به‌ازای $۰ < x < ۱$ داریم

$$\begin{aligned} f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{\frac{۲}{۳}(x+۲y)}{\frac{۱}{۳}(۱+۴y)} \\ &= \frac{۲x+۴y}{۱+۴y} \end{aligned}$$

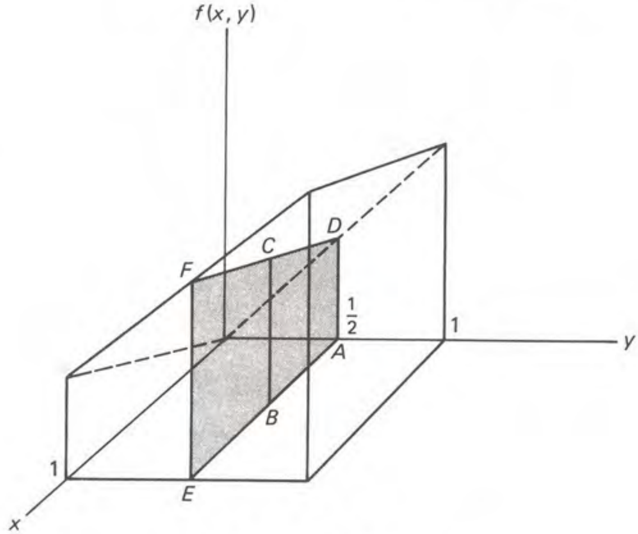
و به‌ازای سایر مقادیر $f(x|y) = ۰$. حال،

$$f\left(x|\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۲x + ۴ \cdot \frac{۱}{۲}}{۱ + ۴ \cdot \frac{۱}{۲}} = \frac{۲x+۲}{۳}$$

و می‌توانیم بنویسیم

$$P\left(X \leq \frac{۱}{۲}|y = \frac{۱}{۲}\right) = \int_۰^{\frac{۱}{۲}} \frac{۲x+۲}{۳} dx = \frac{۵}{۱۲}$$

جالب است توجه کنیم که در شکل ۱۱.۳، این احتمال با نسبت مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ به مساحت ذوزنقهٔ $AEFD$ داده می‌شود. ▲



شکل۱۱.۳ .نمودار مثال ۲۴.۳

مثال ۲۵.۳
چگالی احتمال توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} ۴xy & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مفروض است. چگالیهای حاشیه‌ای X و Y، و چگالی شرطی X به شرط $Y = y$ را پیدا کنید.

حل. با انجام انتگرالگیریهای لازم برای $۰ < x < ۱$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{۰}^{۱} ۴xy\ dy \\ &= ۲xy^{۲}\Big|_{y=۰}^{y=۱} = ۲x \end{aligned}$$

و برای سایر مقادیر $g(x) = ۰$؛ همچنین برای $۰ < y < ۱$،

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{۰}^{۱} ۴xy\ dx \\ &= ۲x^{۲}y\Big|_{x=۰}^{x=۱} = ۲y \end{aligned}$$

و برای سایر مقادیر $h(y) = ۰$. بنابراین با قرار دادن مقادیر در فرمول مربوط به چگالی شرطی،

برای $0 < x < 1$ به‌دست می‌آوریم

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{4xy}{2y} = 2x$$

و برای سایر مقادیر $f(x|y) = 0$. ▲

وقتی با بیش از دو متغیر تصادفی سروکار داریم، خواه پیوسته و خواه گسسته، می‌توانیم انواع بسیار متفاوتی از توزیعها یا چگالیهای شرطی را در نظر بگیریم. به‌عنوات نمونه، اگر $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$، مقدار توزیع توأم متغیرهای تصادفی گسستهٔ X_1، X_2، X_3، و X_4 در (x_1, x_2, x_3, x_4) باشد، می‌توانیم برای مقدار توزیع شرطی X_3 به‌شرط $X_1 = x_1$، $X_2 = x_2$، و $X_4 = x_4$ در x_3، بنویسیم

$$p(x_3|x_1, x_2, x_4) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{g(x_1, x_2, x_4)} \qquad g(x_1, x_2, x_4) \neq 0$$

که در آن $g(x_1, x_2, x_4)$، مقدار توزیع حاشیه‌ای توأم X_1، X_2، و X_4 در (x_1, x_2, x_4) است. همچنین برای مقدار **توزیع شرطی توأم** X_2 و X_4 به شرط $X_1 = x_1$ و $X_3 = x_3$ در (x_2, x_4) می‌توانیم بنویسیم

$$q(x_2, x_4|x_1, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{m(x_1, x_3)} \qquad m(x_1, x_3) \neq 0$$

یا برای مقدار توزیع شرطی توأم X_2، X_3 و X_4 به شرط $X_1 = x_1$ در (x_2, x_3, x_4) می‌توانیم بنویسیم

$$r(x_2, x_3, x_4|x_1) = \frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{b(x_1)} \qquad b(x_1) \neq 0$$

وقتی با دو یا چند متغیر تصادفی سروکار داریم، مسائل **استقلال** معمولاً اهمیت زیادی دارند. در مثال ۲۵.۳ دیدیم که $f(x|y) = 2x$ به مقدار مفروض $Y = y$ بستگی نداشت، اما در مثال ۲۴.۳، که در آن $f(x|y) = \frac{2x+4y}{1+4y}$، به‌وضوح چنین مطلبی صادق نیست. هروقت مقادیر توزیع شرطی X به شرط $Y = y$ بستگی نداشته باشند، نتیجه می‌شود که $f(x|y) = g(x)$، و بنابراین فرمولهای تعریفهای ۱۲.۳ و ۱۳.۳ نتیجه می‌دهند که

$$f(x, y) = f(x|y) \cdot h(y) = g(x) \cdot h(y)$$

یعنی مقادیر توزیع توأم، به‌صورت حاصلضرب مقادیر متناظر دو توزیع حاشیه‌ای داده می‌شوند. با تعمیم این نکته، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف ۱۴.۳ اگر $f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$، مقدار توزیع احتمال توأم n متغیر تصادفی گسستهٔ $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n، در $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ و $f_i(x_i)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای X_i در x_i به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, n$ باشد، این متغیرها **مستقل‌اند** اگر و تنها اگر به‌ازای کلیه $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ها در بردشان

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = f_۱(x_۱) f_۲(x_۲) \cdots f_n(x_n)$$

برای ارائهٔ تعریفی متناظر در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته، تنها کلمهٔ چگالی را به‌جای کلمهٔ توزیع قرار می‌دهیم.

با این تعریف برای استقلال، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که سه متغیر تصادفی مثال ۲۲.۳ مستقل نیستند، اما دو متغیر $X_۱$ و $X_۳$ و همچنین دو متغیر تصادفی $X_۲$ و $X_۳$ **دوبه‌دو مستقل‌اند** (تمرین ۹۷.۳ را ببینید).

مثالهای زیر برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از تعریف ۱۴.۳ دریافتن احتمالهای مربوط به چندین متغیر تصادفی مستقل، به‌کار می‌روند:

مثال ۲۶.۳

n پرتاب مستقل یک سکهٔ همگن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید X_i تعداد (۰ یا ۱) شیر حاصل در iامین پرتاب، $i = ۱, ۲, \cdots, n$ باشد. توزیع احتمال توأم این n متغیر تصادفی را بیابید.

حل. چون هریک از متغیرهای تصادفی X_i، $i = ۱, ۲, \cdots, n$، دارای توزیع احتمال

$$f_i(x_i) = \frac{۱}{۲} \qquad x_i = ۰, ۱$$

است، و n متغیر تصادفی مستقل‌اند، توزیع احتمال توأم آنها با

$$\begin{aligned} f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) &= f_۱(x_۱) f_۲(x_۲) \cdots f_n(x_n) \\ &= \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲} \cdots \frac{۱}{۲} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n \end{aligned}$$

داده می‌شود، که در آن هر x_i، $i = ۱, ۲, \cdots, n$، برابر ۰ یا ۱ است. ▲

مثال ۲۷.۳
متغیرهای تصادفی مستقل X_1، X_2 و X_3 با چگالیهای احتمال

$$f_1(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1} & x_1 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 2e^{-2x_2} & x_2 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 3e^{-3x_3} & x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده‌اند، چگالی احتمال توأم آنها را بیابید، و آن را برای محاسبهٔ $P(X_1+X_2 \leq 1, X_3 > 1)$ به‌کار برید.

حل. برحسب تعریف ۱۴.۳، مقادیر چگالی احتمال توأم به‌ازای $x_1 > 0$، $x_2 > 0$، $x_3 > 0$ به‌صورت

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3) \\ &= e^{-x_1} \cdot 2e^{-2x_2} \cdot 3e^{-3x_3} \\ &= 6e^{-x_1-2x_2-3x_3} \end{aligned}$$

داده می‌شود، و به‌ازای سایر مقادیر $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. پس

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 1, X_3 > 1) &= \int_1^{\infty} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} 6e^{-x_1-2x_2-3x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= (1 - 2e^{-1} + e^{-2})e^{-3} \\ &= 0.020 \end{aligned}$$

▲

تمرینها

۸۵.۳ مقادیر توزیع احتمال توأم X و Y در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

		$x=-1$	$x=1$
y	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{4}$
	1	$\frac{1}{8}$	0

پیدا کنید

(الف) توزیع حاشیه‌ای X؛

(ب) توزیع حاشیه‌ای Y؛

(ج) توزیع شرطی X به شرط $Y = -۱$.

۸۶.۳ با مراجعه به تمرین ۵۲.۳، پیدا کنید

(الف) توزیع حاشیه‌ای X؛

(ب) توزیع حاشیه‌ای Y؛

(ج) توزیع شرطی X به شرط $Y = ۱$؛

(د) توزیع شرطی Y به شرط $X = ۰$.

۸۷.۳ توزیع احتمال توأم

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{۱۰۸} \qquad x = ۱, ۲, ۳;\ \ y = ۱, ۲, ۳;\ \ z = ۱, ۲$$

داده شده است، پیدا کنید

(الف) توزیع حاشیه‌ای توأم X و Y؛

(ب) توزیع حاشیه‌ای توأم X و Z؛

(ج) توزیع حاشیه‌ای X؛

(د) توزیع شرطی Z به‌شرط $X = ۱$ و $Y = ۲$؛

(ه) توزیع شرطی توأم Y و Z به‌شرط $X = ۳$.

۸۸.۳ با مراجعه به مثال ۲۰.۳ پیدا کنید

(الف) **تابع توزیع حاشیه‌ای** X، یعنی تابعی که به‌ازای $-\infty < x < \infty$ به‌صورت $G(x) = P(X \leq x)$ داده می‌شود؛

(ب) **تابع توزیع شرطی** X به شرط $Y = ۱$، یعنی تابعی که به‌ازای $-\infty < x < \infty$ به‌صورت $F(x|۱) = P(X \leq x|Y = ۱)$ داده می‌شود.

۸۹.۳ بررسی کنید که آیا متغیرهای تصادفی X و Y مستقل‌اند یا نه، به شرطی که توزیع احتمال توأم آنها به‌صورت

(الف) $f(x, y) = \frac{۱}{۴}$ به‌ازای $x = -۱$ و $y = -۱$، $x = -۱$ و $y = ۱$، $x = ۱$ و $y = -۱$، $x = ۱$ و $y = ۱$؛

(ب) $f(x, y) = \frac{۱}{۳}$ به‌ازای $x = ۰$ و $y = ۰$، $x = ۰$ و $y = ۱$، $x = ۱$ و $y = ۱$، باشد.

۹۰.۳ اگر تابع چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}(۲x + y) & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید

(الف) چگالی حاشیه‌ای X را.

(ب) چگالی شرطی Y به شرط $X = \frac{۱}{۴}$ را.

۹۱.۳ با رجوع به تمرین ۹۰.۳، پیدا کنید

(الف) چگالی حاشیه‌ای Y را؛

(ب) چگالی شرطی X به شرط $Y = ۱$ را.

۹۲.۳ اگر متغیرهای تصادفی X و Y، تابع چگالی توأمی به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} ۲۴y(۱-x-y) & x > ۰,\ y > ۰,\ x+y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داشته باشند، پیدا کنید

(الف) چگالی حاشیه‌ای X؛

(ب) چگالی حاشیه‌ای Y؛

همچنین تعیین کنید که آیا دو متغیر تصادفی مستقل‌اند یا نه.

۹۳.۳ با مراجعه به تمرین ۶۳.۳، پیدا کنید

(الف) چگالی حاشیه‌ای X؛

(ب) چگالی حاشیه‌ای Y؛

همچنین تعیین کنید که آیا دو متغیر تصادفی مستقل‌اند یا نه.

۹۴.۳ با مراجعه به مثال ۲۲.۳، پیدا کنید

(الف) چگالی شرطی $X_۲$ به شرط $X_۱ = \frac{۱}{۲}$ و $X_۳ = ۲$؛

(ب) چگالی شرطی توأم $X_۲$ و $X_۳$ به شرط $X_۱ = \frac{۱}{۲}$.

۹۵.۳ اگر $F(x,y)$، مقدار تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی X و Y در (x,y) باشد، نشان دهید که **تابع توزیع حاشیه‌ای** X به‌صورت

$$G(x) = F(x,\infty) \qquad -\infty < x < \infty$$

است. از این نتیجه استفاده کنید و تابع توزیع حاشیه‌ای X را برای دو متغیر تصادفی تمرین ۶۴.۳ بیابید.

۹۶.۳ اگر $F(x_۱,x_۲,x_۳)$ مقدار تابع توزیع توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$ در $(x_۱,x_۲,x_۳)$ باشد، نشان دهید که **تابع توزیع حاشیه‌ای توأم** $X_۱$ و $X_۳$ به‌صورت

$$M(x_۱,x_۳) = F(x_۱,\infty,x_۳), \qquad -\infty < x_۱ < \infty,\ -\infty < x_۳ < \infty$$

است، و **تابع توزیع حاشیه‌ای** $X_۱$ به‌صورت

$$G(x_۱) = F(x_۱,\infty,\infty), \qquad -\infty < x_۱ < \infty$$

است. با رجوع به مثال ۱۹.۳، با استفاده از این نتایج پیدا کنید

(الف) تابع توزیع حاشیه‌ای توأم X_1 و X_3؛
(ب) تابع توزیع حاشیه‌ای X_1.

۹۷.۳ با مراجعه به مثال ۲۲.۳، تحقیق کنید که سه متغیر تصادفی X_1، X_2، و X_3، مستقل نیستند، اما دو متغیر تصادفی X_1 و X_3 و همچنین دو متغیر تصادفی X_2 و X_3 **دوبه‌دو مستقل‌اند.**

۹۸.۳ اگر متغیرهای تصادفی مستقل X و Y دارای چگالیهای حاشیه‌ای

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$\pi(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 < y < 3 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشند، پیدا کنید
(الف) چگالی احتمال توأم X و Y؛
(ب) $P(X^2 + Y^2 > 1)$.

کاربردها

۹۹.۳ با رجوع به تمرین ۸۰.۳، پیدا کنید
(الف) توزیع حاشیه‌ای X را؛
(ب) توزیع شرطی Y به شرط $X = 0$ را.

۱۰۰.۳ از یک دسته کارت ۵۲تایی، دو کارت به‌تصادف (بدون جایگذاری) کشیده می‌شود. اگر Z تعداد یکهایی باشد که در کشیدن کارت اول به‌دست می‌آید و W تعداد کل یکهایی باشد که در کشیدن هر دو کارت به دست می‌آیند، پیدا کنید
(الف) توزیع احتمال توأم Z و W؛
(ب) توزیع حاشیه‌ای Z؛
(ج) توزیع شرطی W به شرط $Z = 1$.

۱۰۱.۳ اگر X نسبت اشخاصی باشد که برای خرید یک نوع کالا تقاضای کتبی می‌فرستند، Y نسبت اشخاصی باشد که برای خرید نوع دیگر کالا تقاضای کتبی می‌فرستند و تابع چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x + 4y) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، پیدا کنید
(الف) احتمال اینکه حداقل ۳۰ درصد برای اولین نوع کالا تقاضا ارسال کنند؛

(ب) احتمال اینکه حداکثر ۵۰ درصد برای دومین نوع کالا درخواست کتبی بفرستند، به شرط آنکه ۲۰ درصد برای اولین نوع کالا درخواست کتبی ارسال دارند.

۱۰۲.۳ با مراجعه به تمرین ۸۴.۳، پیدا کنید

(الف) تابع چگالی حاشیه‌ای P؛

(ب) تابع چگالی شرطی S به شرط $P = p$؛

(ج) احتمال اینکه میزان فروش کمتر از ۳۰۰۰۰ واحد باشد وقتی $p = ۲٫۵$.

۱۰۳.۳ اگر X، مبلغ (برحسب تومان) مصرف بنزین یک بازاریاب در طول یک روز باشد و Y مبلغی (برحسب تومان) باشد که بابت بنزین به بازاریاب پرداخت می‌شود، و چگالی توأم این دو متغیر تصادفی به‌وسیلهٔ

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۲۵}\left(\frac{۲۰-x}{x}\right) & ۱۰ < x < ۲۰,\ \frac{x}{۲} < y < x \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شود، پیدا کنید

(الف) چگالی حاشیه‌ای X؛

(ب) چگالی شرطی Y به شرط $X = ۱۲$؛

(ج) احتمال اینکه به بازاریاب حداقل ۸ تومان پرداخت شود وقتی مصرف بنزین او ۱۲ تومان باشد.

۱۰۴.۳ نشان دهید که دو متغیر تصادفی تمرین ۸۳.۳ مستقل نیستند.

۱۰۵.۳ عمر مفید (برحسب ساعت) یک نوع معین لامپ مهتابی متغیری تصادفی است که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۲۰۰۰۰}{(x+۱۰۰)^۳} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. اگر سه‌تا از این لامپهای مهتابی مستقلاً کار کنند، پیدا کنید

(الف) تابع چگالی احتمال توأم $X_۱$، $X_۲$ و $X_۳$ که طول‌عمر مفید آنها را نمایش می‌دهند؛

(ب) $P(X_۱ < ۱۰۰, X_۲ < ۱۰۰, X_۳ \geq ۲۰۰)$.

مراجع

بحثهای پیشرفته‌تر، یا مفصلتر مطالب این فصل را می‌توان در آثار زیر یافت:

BRUNK, H. D., *An Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd ed. Lexington, Mass.: Xerox College Publishing, 1975,

DEGROOT, M. H., *Probability and Statistics*, 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1986, FRASER, D. A. S., *Probability and Statistics: Theory and Applications*. North Scituate, Mass.: Duxbury Press, 1976,

HOGG, R. V., and CRAIG, A. T., *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1978,

KENDALL, M. G., and STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, 4th ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1977,

KHAZANIE, R., *Basic Probability Theory and Applications*. Pacific Palisades, Calif.: Goodyear Publishing Company, Inc., 1976.

۴

امید ریاضی

۱.۴ مقدمه

مفهوم امید ریاضی، در اصل، در ارتباط با بازیهای شانسی به‌وجود آمده است، و در ساده‌ترین صورتش، حاصلضرب مبلغی است که بازیکن امکان برد آن را دارد در احتمال آنکه برنده شود. به‌عنوان نمونه، اگر در بخت‌آزمایی که جایزهٔ بزرگ آن اتومبیلی به ارزش ۴۸۰۰۰۰ تومان است یکی از ۱۰۰۰۰ بلیط را داشته باشیم، امید ریاضی ما برابر $۴۸۰۰۰۰ \cdot \frac{۱}{۱۰۰۰۰} = ۴۸$، تومان است. این رقم به مفهوم یک متوسط تعبیر می‌شود، بدین‌معنا که مقدار جایزهٔ ۱۰۰۰۰ بلیط جمعاً ۴۸۰۰۰۰ تومان، یا به‌طور متوسط مقدار جایزهٔ برابر با $\frac{۴۸۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۴۸$ تومان در هر بلیط است.

اگر جایزهٔ دومی به ارزش ۱۲۰۰۰۰ تومان و جایزهٔ سومی به ارزش ۴۰۰۰۰ تومان نیز وجود داشته باشند، استدلال می‌کنیم که مقدار جایزهٔ ۱۰۰۰۰ بلیط جمعاً،

$$۴۸۰۰۰۰ + ۱۲۰۰۰۰ + ۴۰۰۰۰ = ۶۴۰۰۰۰$$

تومان، یا به‌طور متوسط مقدار جایزهٔ هر بلیط $۶۴ = \frac{۶۴۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰}$ تومان است. اگر به طریق دیگری به مطلب نگاه کنیم، می‌توانیم استدلال نماییم که اگر بخت‌آزمایی به دفعات زیادی تکرار شود، در ۹۹٫۹۷ درصد از دفعات (یا با احتمال ۰٫۹۹۹۷) خواهیم باخت و در ۰٫۰۱ درصد از دفعات (یا با احتمال ۰٫۰۰۰۱) یکی از سه جایزه را می‌بریم. پس به‌طور متوسط

$$\begin{aligned} &۰(۰٫۹۹۹۷) + ۴۸۰۰۰۰(۰٫۰۰۰۱) + ۱۲۰۰۰۰(۰٫۰۰۰۱) + ۴۰۰۰۰(۰٫۰۰۰۱) \\ &= \text{۶۴ تومان} \end{aligned}$$

خواهیم برد که مجموع حاصلضربهای حاصل از ضرب هر مبلغ در احتمال متناظر با آن است.

۲.۴ مقدار مورد انتظار یک متغیر تصادفی

در مثال بخش قبل، مبلغی که امکان برد آن را داشتیم متغیری تصادفی بود، و امید ریاضی این متغیر تصادفی مجموع حاصلضربهای حاصل از ضرب هر مقدار متغیر تصادفی در احتمال متناظر با آن بود. لذا با نامیدن امید ریاضی یک متغیر تصادفی صرفاً با عنوان **مقدار مورد انتظار**، و تعمیم این تعریف به حالت پیوسته، و با قرار دادن عمل انتگرالگیری به‌جای مجموعیابی، داریم

تعریف ۱.۴ اگر X یک متغیر تصادفی گسسته و $f(x)$ مقدار توزیع احتمال آن به‌ازای x باشد، **مقدار مورد انتظار** X برابر است با

$$E(X) = \sum_x x \cdot f(x)\cdot$$

متناظراً، اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ مقدار چگالی احتمال آن به‌ازای x باشد، **مقدار مورد انتظار** X برابر است با

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

البته، در این تعریف فرض شده است که مجموع یا انتگرال موجود است؛ در غیر این صورت، امید ریاضی قابل تعریف نیست.

مثال ۱.۴

محموله‌ای مرکب از ۱۲ دستگاه تلویزیون، شامل دو تلویزیون معیوب است. اگر سه دستگاه تلویزیون برای ارسال به یک هتل به‌تصادف انتخاب کنیم، وجود چند دستگاه معیوب را می‌توان انتظار داشت؟

حل. می‌توانیم xتا از ۲ تلویزیون معیوب و $x - ۳$تا از ۱۰ تلویزیون سالم را به $\binom{۲}{x}\binom{۱۰}{۳-x}$ راه انتخاب کنیم، و می‌توانیم ۳ تلویزیون از ۱۲ تلویزیون را به $\binom{۱۲}{۳}$ راه برگزینیم. با فرض اینکه همهٔ $\binom{۱۲}{۳}$ امکان، همشانس باشند، متوجه می‌شویم که توزیع احتمال X، تعداد تلویزیونهای معیوبی که به هتل فرستاده می‌شود، به‌صورت

$$f(x) = \frac{\binom{۲}{x}\binom{۱۰}{۳-x}}{\binom{۱۲}{۳}} \qquad x = ۰, ۱, ۲$$

یا، به‌صورت جدول

x	۰	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۶}{۱۱}$	$\frac{۹}{۲۲}$	$\frac{۱}{۲۲}$

است. حال

$$E(X) = ۰ \cdot \frac{۶}{۱۱} + ۱ \cdot \frac{۹}{۲۲} + ۲ \cdot \frac{۱}{۲۲} = \frac{۱}{۲}$$

و چون امکان به‌دست آوردن یک نیمه تلویزیون معیوب وجود ندارد، روشن است که اصطلاح «انتظار» به مفهوم محاوره‌ای آن مطرح نیست. در واقع این اصطلاح را باید به‌عنوان یک متوسط مربوط به تکرار ارسال محموله‌ها تحت شرایط داده شده تعبیر کرد. ▲

مثال ۲.۴

اندازه‌گیریهای کدگذاری شدهٔ خاصی از فاصلهٔ بین دو دندانهٔ پیچ در یک بست، دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴}{\pi(۱+x^۲)} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی را پیدا کنید.

حل. با استفاده از تعریف ۱.۴، داریم

$$E(X) = \int_{0}^{1} x \cdot \frac{4}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{\ln 4}{\pi} = 0/4413$$

▲

در بسیاری از مسائل آمار، نه‌تنها مقدار مورد انتظار یک متغیر تصادفی X، بلکه مقادیر مورد انتظار متغیرهای تصادفی وابسته به X نیز مورد توجه‌اند. مثلاً، ممکن است متغیر تصادفی Y مورد توجه ما باشد که مقادیرش با مقادیر X از طریق معادلهٔ $y = g(x)$ در ارتباط‌اند. برای ساده کردن نمادگذاری، این متغیر تصادفی را به‌صورت $g(X)$ نشان می‌دهیم؛ برای مثال، $g(X)$ ممکن است X^3 باشد، به‌قسمی که وقتی X، مقدار ۲ را اختیار می‌کند، $g(X)$، مقدار $8 = 2^3$ را اختیار کند. اگر بخواهیم مقدار مورد انتظار چنین متغیر تصادفی $g(X)$ را پیدا کنیم، می‌توانیم ابتدا توزیع احتمال یا چگالی احتمال آن‌را (با روشهایی که در فصل ۷ مورد بحث قرار می‌گیرند) بیابیم، و آنگاه تعریف ۱.۴ را به‌کار بریم، اما معمولاً به‌کار بردن قضیهٔ زیر آسانتر و سرراست‌تر است:

قضیهٔ ۱.۴ اگر X متغیر تصادفی گسسته، و $f(x)$ مقدار توزیع احتمال آن به‌ازای x باشد، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$،

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x) \cdot f(x)$$

است. متناظراً اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ مقدار چگالی احتمال آن به‌ازای x باشد، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$،

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

است.

برهان. چون ارائهٔ یک برهان کلی خارج از سطح این کتاب است، این قضیه را در اینجا فقط برای حالتی که X گسسته است و برد متناهی دارد اثبات می‌کنیم. چون $y = g(x)$ الزاماً یک تناظر یک به‌یک را تعریف نمی‌کند، فرض می‌کنیم که وقتی x مقادیر x_{i1}، x_{i2}، . . . ، x_{in_i} را اختیار می‌نماید، $g(x)$ مقدار g_i را اختیارکند. در این صورت احتمال اینکه $g(X)$، مقدار g_i را اختیارکند

$$P[g(X) = g_i] = \sum_{j=1}^{n_i} f(x_{ij})$$

و اگر $g(x)$، مقادیر g_1، g_2، ... ، g_m را اختیار کند، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot P[g(X) = g_i] \\ &= \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \sum_{j=1}^{n_i} f(x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} g_i \cdot f(x_{ij}) \\ &= \sum_{x} g(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

که در آن، مجموعیابی روی همهٔ مقادیر X انجام می‌شود. ■

مثال ۳.۴

اگر X عددی باشد که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X) = 2X^2 + 1$ را بیابید.

حل. چون هر برآمد ممکن، دارای احتمال $\frac{1}{6}$ است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{x=1}^{6}((2x^2 + 1) \cdot \frac{1}{6} \\ &= (2 \cdot 1^2 + 1) \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (2 \cdot 6^2 + 1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{94}{3} \end{aligned}$$

▲

مثال ۴.۴

اگر X دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X) = e^{3X/4}$ را پیدا کنید.

حل. بنابر قضیهٔ ۱.۴، داریم

$$E[e^{3X/4}] = \int_0^\infty e^{3x/4} \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x/4} dx = 4$$

▲

تعیین امیدهای ریاضی را اغلب می‌توان با استفاده از قضایای زیر ساده کرد. این قضایا ما را قادر می‌سازند که مقادیر امید را از روی امیدهای دیگری که معلوم‌اند و یا به‌راحتی قابل محاسبه‌اند حساب کنیم. چون مراحل اثبات، چه برای متغیرهای تصادفی پیوسته و چه گسسته یکی هستند، برخی برهانها را یا برای حالت گسسته و یا برای حالت پیوسته خواهیم داد؛ سایر برهانها را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

قضیهٔ۲.۴ اگر a و b مقادیر ثابتی باشند، آنگاه

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۴، با $g(X) = aX + b$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\cdot f(x)dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

■

اگر به‌ترتیب قرار دهیم، $b = 0$، $a = 0$، از قضیهٔ ۲.۴ نتیجه می‌شود که

فرع۱ اگر a مقداری ثابت باشد، آنگاه

$$E(aX) = aE(X)$$

فرع۲ اگر b مقداری ثابت باشد، آنگاه

$$E(b) = b$$

ملاحظه کنید که اگر بنویسیم $E(b)$، ثابت b را می‌توان متغیری تصادفی تلقی کرد که همیشه مقدار b را اختیار می‌کند.

قضیهٔ ۳.۴ اگر $c_۱$، $c_۲$، . . . ، و c_n مقادیری ثابت باشند، آنگاه

$$E\left[\sum_{i=۱}^{n} c_i g_i(X)\right] = \sum_{i=۱}^{n} c_i E[g_i(X)]$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۱.۴، با $g(X) = \sum_{i=۱}^{n} c_i g_i(X)$،

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=۱}^{n} c_i g_i(X)\right] &= \sum_{x}\left[\sum_{i=۱}^{n} c_i g_i(x)\right] f(x) \\ &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{x} c_i g_i(x) f(x) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} c_i \sum_{x} g_i(x) f(x) \\ &= \sum_{i=۱}^{n} c_i E[g_i(X)] \end{aligned}$$

■

مثال ۵.۴
با استفاده از این واقعیت که $E(X^۲) = (۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲) \cdot \frac{۱}{۶} = \frac{۹۱}{۶}$، برای متغیر تصادفی مثال ۳.۴ مثال را مجدداً حل کنید.

حل.

$$E(۲X^۲ + ۱) = ۲E(X^۲) + ۱ = ۲ \cdot \frac{۹۱}{۶} + ۱ = \frac{۹۴}{۳}$$

▲

مثال ۶.۴
اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} ۲(۱ - x) & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که

$$E(X^r) = \frac{۲}{(r+۱)(r+۲)}$$

(ب) و از این نتیجه استفاده کرده،

$$E[(۲X+۱)^۲]$$

را حساب کنید.

حل. (الف)

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_۰^۱ x^r \cdot ۲(۱-x)dx = ۲\int_۰^۱ (x^r - x^{r+۱})dx \\ &= ۲\left(\frac{۱}{r+۱} - \frac{۱}{r+۲}\right) = \frac{۲}{(r+۱)(r+۲)} \end{aligned}$$

(ب) چون $E[(۲X+۱)^۲] = ۴E(X^۲) + ۴E(X) + ۱$، با قرار دادن $r = ۱$ و $r = ۲$ در فرمول بالا، $E(X) = \frac{۲}{۲\cdot۳} = \frac{۱}{۳}$، و $E(X^۲) = \frac{۲}{۳\cdot۴} = \frac{۱}{۶}$، و به‌دست می‌آوریم

$$E[(۲X+۱)^۲] = ۴\cdot\frac{۱}{۶} + ۴\cdot\frac{۱}{۳} + ۱ = ۳$$

▲

مثال ۷.۴
نشان دهید که

$$E[(aX+b)^n] = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i E(X^{n-i})$$

حل. چون بنابر قضیهٔ ۹.۱، داریم

$$(ax+b)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} (ax)^{n-i} b^i$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} E[(aX+b)^n] &= E\left[\sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} (aX)^{n-i} b^i\right] \\ &= \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i E(X^{n-i}) \end{aligned}$$

▲

مفهوم امید ریاضی را به‌آسانی می‌توان به وضعیتهایی که شامل دو یا چند متغیر تصادفی‌اند تعمیم داد. برای نمونه، اگر Z، متغیری تصادفی باشد که مقادیرش به مقادیر دو متغیر تصادفی X و Y به‌وسیلهٔ معادلهٔ $z = g(x, y)$ مربوط است، آنگاه می‌توان نشان داد که

قضیهٔ ۴.۴ اگر X و Y، متغیرهای تصادفی گسسته بوده و $f(x, y)$ مقدار توزیع احتمال توأم آنها در (x, y) باشد، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X, Y)$ با

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot f(x,y)$$

داده می‌شود. متناظراً اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته بوده و $f(x, y)$ مقدار چگالی توأم آنها در (x, y) باشد، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X, Y)$ با

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

داده می‌شود.

تعمیم این قضیه برای توابعی از هر تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی سرراست است.

مثال ۸.۴

با مراجعه به مثال ۱۲.۳، مقدار مورد انتظار $g(X, Y) = X + Y$ را پیدا کنید.

حل.

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{x=۰}^{۲} \sum_{y=۰}^{۲} (x+y) \cdot f(x,y) \\ &= (۰+۰) \cdot \frac{۱}{۶} + (۰+۱) \cdot \frac{۲}{۹} + (۰+۲) \cdot \frac{۱}{۳۶} + (۱+۰) \cdot \frac{۱}{۳} \\ &\quad + (۱+۱) \cdot \frac{۱}{۶} + (۲+۰) \cdot \frac{۱}{۱۲} \\ &= \frac{۱۰}{۹} \end{aligned}$$

▲

مثال ۹.۴

اگر تابع چگالی توأم X و Y

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲}{۷}(x+۲y) & ۰ < x < ۱,\ ۱ < y < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار مورد انتظار $g(X,Y) = X/Y^۳$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} E(X/Y^۳) &= \int_۱^۲ \int_۰^۱ \frac{۲x(x+۲y)}{۷y^۳} dx\, dy \\ &= \frac{۲}{۷} \int_۱^۲ \left(\frac{۱}{۳y^۳} + \frac{۱}{y^۲} \right) dy \\ &= \frac{۱۵}{۸۴} \end{aligned}$$

▲

قضیهٔ زیر، قضیهٔ دیگری است که در مطالب آتی کاربردهایی مفید دارد. این قضیه، تعمیمی از قضیهٔ ۳.۴ است، و برهانش نظیر برهان همان قضیه است.

قضیهٔ ۵.۴ اگر $c_۱$، $c_۲$، ... و c_n مقادیر ثابت باشند، آنگاه

$$E\left[\sum_{i=۱}^{n} c_i g_i(X_۱, X_۲, \cdots, X_k)\right] = \sum_{i=۱}^{n} c_i E[g_i(X_۱, X_۲, \cdots, X_k)]$$

تمرینها

۱.۴ برای تشریح برهان قضیهٔ ۱.۴ با یک مثال، متغیر تصادفی X را که مقادیر ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳ را با احتمالهای متناظر $f(-۲)$، $f(-۱)$، $f(۰)$، $f(۱)$، $f(۲)$ و $f(۳)$ اختیار می‌کند در نظر بگیرید. اگر $g(X) = X^۲$، پیدا کنید

(الف) چهار مقدار ممکن $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$ و $g_۴$ را برای $g(x)$؛

(ب) مقادیر $P[g(X) = g_i]$ را به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$؛

(ج) $E[g(X)] = \sum_{i=۱}^{۴} g_i \cdot P[g(X) = g_i]$، و نشان دهید که این مقدار مساوی $\sum_x g(x) \cdot f(x)$ است.

۲.۴ قضیهٔ ۲.۴ را برای متغیرهای تصادفی گسسته ثابت کنید.

۳.۴ قضیهٔ ۳.۴ را برای متغیرهای تصافی پیوسته ثابت کنید.

۴.۴ قضیهٔ ۵.۴ را برای متغیرهای تصادفی گسسته ثابت کنید.

۵.۴ دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y را داریم، از قضیهٔ ۴.۴ استفاده کرده، $E(X)$ را برحسب

(الف) چگالی توأم X و Y؛

(ب) چگالی حاشیه‌ای X؛

بیان کنید.

۶.۴ مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی گسستهٔ X را که دارای توزیع احتمال

$$f(x) = \frac{|x-2|}{7} \qquad x = -1, 0, 1, 3$$

است بیابید.

۷.۴ مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی Y را که چگالی احتمال آن

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(y+1) & 2 < y < 4 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید.

۸.۴ مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید.

۹.۴ (الف) اگر متغیر تصادفی X، مقادیر ۰، ۱، ۲، و ۳ را به‌ترتیب با احتمالهای $\frac{1}{125}$، $\frac{12}{125}$، $\frac{48}{125}$، و $\frac{64}{125}$ اختیار کند $E(X)$ و $E(X^2)$ را پیدا کنید.

(ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده، $E[(3X+2)^2]$ را بیابید.

۱۰.۴ (الف) اگر تابع چگالی متغیر تصادفی پیوستهٔ X،

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(\ln 3)} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد $E(X)$، $E(X^2)$، و $E(X^3)$ را بیابید.

(ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده، $E(X^3 + 2X^2 - 3X - 1)$ را پیدا کنید.

۱۱.۴ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \le 2 \\ \frac{3-x}{2} & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مقدار مورد انتظار $g(x) = X^2 - 5X + 3$ را بیابید.

۱۲.۴ با مراجعه به تمرین ۵۷.۳، مقدار $E(2X - Y)$ را بیابید.

۱۳.۴ با مراجعه به تمرین ۶۳.۳، مقدار $E(X/Y)$ را پیدا کنید.

۱۴.۴ با مراجعه به تمرین ۷۲.۳، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $U = X + Y + Z$ را بیابید.

۱۵.۴ با رجوع به تمرین ۷۸.۳، مقدار مورد انتظار متغیر $W = X^2 - YZ$ را پیدا کنید.

۱۶.۴ اگر X دارای توزیع احتمال $f(x) = (\frac{1}{2})^x$، به‌ازای $x = 1, 2, 3, \cdots$ باشد، نشان دهید که $E(2^X)$ وجود ندارد. این همان **پارادوکس مشهور پترزبورگ** است که بنابر آن، اگر بازیکنی در یک سری از پرتابهای سکه‌ای همگن وقتی پس از x پرتاب، اولین شیر ظاهر می‌شود 2^x دریافت کند، امید بردش بینهایت است (یعنی، وجود ندارد).

کاربردها

۱۷.۴ احتمال اینکه شخصی، قطعه زمینی را با سود ۳۰۰۰۰ تومان بفروشد $\frac{3}{20}$، و احتمال اینکه آن را با سودی برابر ۱۵۰۰۰ تومان بفروشد $\frac{7}{20}$ و احتمال اینکه در فروش آن سود یا زیانی حاصل نشود $\frac{7}{20}$، و احتمال اینکه ۱۵۰۰۰ تومان ضرر کند $\frac{3}{20}$ است، سود مورد انتظار این مالک چقدر است؟

۱۸.۴ یک بازی شانسی را **منصفانه** یا **عادلانه** می‌نامند اگر امید هر بازیکن مساوی صفر باشد. اگر با ریختن یک تاس همگن هر بار که ۳ یا ۴ می‌آوریم، شخصی به ما ۱۰ تومان بپردازد برای اینکه بازی منصفانه باشد وقتی ۱، ۲، ۵ یا ۶ می‌آوریم چقدر باید به آن شخص بپردازیم؟

۱۹.۴ مدیر یک شیرینی‌پزی می‌داند که تعداد کیکهای شکلاتیی که می‌تواند در روزی معین بفروشد متغیری تصادفی است که دارای توزیع احتمال $f(x) = \frac{1}{6}$ به‌ازای، $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$، است. ضمناً می‌داند که هر کیکی که می‌فروشد ۱۰ تومان سود دارد و هر کیکی که فروش نمی‌رود ضرری (ناشی از فاسد شدن) برابر ۴ تومان خواهد داشت. به فرض اینکه هر کیک را فقط همان روزی که پخته شده است می‌توان فروخت، سود مورد انتظار شیرینی‌پز را برای روزی تعیین کنید که او

(الف) یک کیک بپزد؛

(ب) دو کیک بپزد؛

(ج) سه کیک بپزد؛

(د) چهار کیک بپزد؛

(هـ) پنج کیک بپزد.

چند کیک باید بپزد تا سود مورد انتظار را ماکسیمم کند؟

۲۰.۴ سود مقاطعه‌کاری در یک کار ساختمانی را می‌توان متغیر تصادفی پیوسته‌ای در نظر گرفت که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+1) & -1 < x < 5 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

است، که در آن، واحد x برابر ۱۰۰۰۰ تومان است. سود مورد انتظار مقاطعه‌کار چقدر است؟

۲۱.۴ با مراجعه به تمرین ۴۹.۳ مالک یک اتومبیل انتظار چه مقدار فرسودگی را در مورد یکی از تایرها می‌تواند داشته باشد؟

۲۲.۴ با مراجعه به تمرین ۵۰.۳ برای روزی معین میزان مورد انتظار مصرف آب شهر چقدر است؟

۲۳.۴ با مراجعه به تمرین ۸۴.۳ $E(PS)$، دریافتی مورد انتظار برای کالا را پیدا کنید.

۲۴.۴ دو شخص A و B روی پرتابهای سکه‌ای شرط‌بندی می‌کنند. در شروع بازی، A، a تومان، و B، b تومان دارد، در هر بازی برنده ۱ تومان به بازنده می‌پردازد، و بازی تا وقتی یکی از دو بازیکن «ورشکست» شود ادامه پیدا می‌کند. با استفاده از این واقعیت که در یک بازی منصفانه، امید ریاضی هر بازیکن صفر است، پیدا کنید احتمال اینکه A، b تومان B را ببرد قبل از اینکه a تومانش را ببازد.

۳.۴ گشتاورها

امیدهای ریاضیی که در اینجا و در تعریف ۴.۴ تعریف می‌شوند، و به **گشتاورهای** توزیع متغیر تصادفی یا صرفاً **گشتاورهای** متغیر تصادفی موسوم‌اند در آمار از اهمیتی خاص برخوردارند.

تعریف ۲.۴ rامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X، که با μ'_r نشان داده می‌شود، امید ریاضی X^r است؛ به‌صورت نمادی برای $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$،

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r \cdot f(x)$$

وقتی X گسسته است، و

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x)dx$$

وقتی X پیوسته است.

در خور ذکر است که اصطلاح «گشتاور» مربوط به علم فیزیک است ــ اگر کمیتهای $f(x)$ در حالت گسسته جرمهایی نقطه‌ای باشند که بر نقاط محور x، واقع در فواصل x از مبدأ، به‌طور قائم عمل کنند، μ'_1 مختص x مرکز ثقل است، یعنی اولین گشتاور تقسیم بر $\sum f(x) = 1$، و μ'_2 گشتاور اینرسی است، این مطلب همچنین توضیح می‌دهد که چرا گشتاورهای μ'_r، گشتاورهای حول مبدأ نام دارند ــ در قیاس با فیزیک، طول بازوی اهرم در این حالت، فاصلهٔ تا مبدأست. این قیاس در حالت پیوسته نیز به‌کار می‌آید که در آن μ'_1 و μ'_2 باید مختص x مرکز ثقل و گشتاور

اینرسی یک میله با چگالی متغیر باشد.

وقتی $r = 0$، بنابر فرع ۲ی قضیهٔ ۲.۴، داریم $\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1$، و این نتیجه همان‌طور که انتظار می‌رود با قضیه‌های ۱.۳ و ۵.۳ مطابقت دارد. وقتی $r = 1$، داریم $\mu'_1 = E(X)$، که درست همان مقدار امید خود متغیر تصادفی X است؛ که از نظر اهمیتش در آمار، به آن نماد خاص و اسم خاصی می‌دهیم.

تعریف ۳.۴ μ'_1، **میانگین توزیع** X، یا صرفاً **میانگین** X نامیده می‌شود و آن‌را با μ نشان می‌دهیم.

گشتاورهای خاصی که اینک تعریف می‌کنیم در آمار اهمیت دارند، زیرا در توصیف شکل توزیع متغیر تصادفی، یعنی شکل نمودار توزیع احتمال یا چگالی احتمال به‌کار می‌روند.

تعریف ۴.۴ گشتاور rام **حول میانگین** متغیر تصادفی X، که آن‌را با μ_r نشان می‌دهیم، مقدار امید $(X - \mu)^r$ است؛ به‌صورت نمادی برای $r = 0, 1, 2, 3, \cdots$،

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \sum_x (x - \mu)^r \cdot f(x).$$

وقتی X گسسته است، و

$$\mu_r = E[(X - \mu)^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r \cdot f(x) dx$$

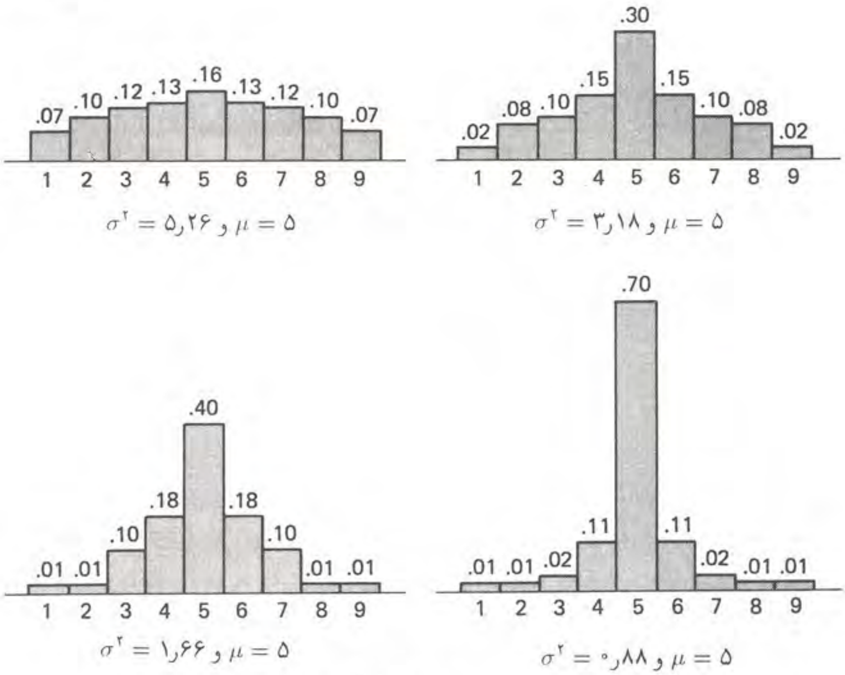
وقتی X پیوسته است.

توجه کنید که برای هر متغیر تصادفیی که μ برای آن وجود دارد، $\mu_0 = 1$، و $\mu_1 = 0$ (تمرین ۲۵.۴ را ببینید).

دومین گشتاور حول میانگین در آمار اهمیت خاصی دارد، زیرا نشان‌دهندهٔ پراکندگی توزیع متغیر تصادفی است؛ لذا به آن نماد خاص و نام خاصی داده شده است.

تعریف ۵.۴ μ_2 را **واریانس توزیع** X، یا صرفاً **واریانس** X می‌نامند، و آن‌را با σ^2، $\text{var}(X)$، یا $V(X)$ نشان می‌دهند؛ σ، ریشهٔ دوم مثبت واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند.

شکل ۱.۴ نشان می‌دهد که چگونه واریانس، منعکس‌کنندهٔ پراکندگی توزیع متغیر تصادفی است. در این شکل ما بافتنماهای توزیعهای احتمال چهار متغیر تصادفی با میانگین یکسان $\mu = 5$،



شکل ۱.۴ توزیعهایی با پراکندگیهای مختلف

ولی با واریانسهایی مساوی ۲۶ر۵، ۱۸ر۳، ۶۶ر۱ و ۸۸ر۰ را نشان داده‌ایم. همان‌طور که دیده می‌شود، یک مقدار کوچک σ^2، این نکته را القا می‌کند که به‌دست آوردن مقداری نزدیک میانگین محتملتر است، و یک مقدار بزرگ σ^2، این نکته را القا می‌کند که به‌دست آوردن مقداری که نزدیک میانگین نیست احتمال زیادی دارد. این مطلب در بخش ۴.۴، بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. بحث مختصری از اینکه چگونه μ_3، سومین گشتاور حول میانگین، **تقارن** یا **چاولگی** (عدم تقارن) یک توزیع را توصیف می‌کند در تمرین ۳۴.۴ ارائه شده است.

در بسیاری از موارد، گشتاورهای حول میانگین، ابتدا با محاسبهٔ گشتاورهای حول مبدأ و سپس با بیان μ_r برحسب μ'_r، به‌دست می‌آیند. برای برآوردن این هدف، از خواننده در تمرین ۳۳.۴ خواسته شده است که یک فرمول کلی را ثابت کند. در اینجا، صرفاً فرمول محاسباتی زیر را برای σ^2 به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ ۶.۴

$$\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2$$

برهان.

$$\begin{aligned}\sigma^{۲} &= E[(X-\mu)^{۲}]\\ &= E(X^{۲} - ۲\mu X + \mu^{۲})\\ &= E(X^{۲}) - ۲\mu E(X) + E(\mu^{۲})\\ &= E(X^{۲}) - ۲\mu\cdot\mu + \mu^{۲}\\ &= \mu'_{۲} - \mu^{۲}\end{aligned}$$

■

مثال ۱۰.۴

با استفاده از قضیه ۶.۴، واریانس X را حساب کنید. متغیر تصادفی X معرف تعداد خالهایی است که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود.

حل. ابتدا میانگین X را حساب می‌کنیم

$$\mu = E(X) = ۱\cdot\frac{۱}{۶} + ۲\cdot\frac{۱}{۶} + ۳\cdot\frac{۱}{۶} + ۴\cdot\frac{۱}{۶} + ۵\cdot\frac{۱}{۶} + ۶\cdot\frac{۱}{۶} = \frac{۷}{۲}$$

حال

$$\mu'_{۲} = E(X^{۲}) = ۱^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} + ۲^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} + ۳^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} + ۴^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} + ۵^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} + ۶^{۲}\cdot\frac{۱}{۶} = \frac{۹۱}{۶}$$

و نتیجه می‌شود که $\sigma^{۲} = \frac{۹۱}{۶} - (\frac{۷}{۲})^{۲} = \frac{۳۵}{۱۲}$. ▲

مثال ۱۱.۴

با رجوع به مثال ۲.۴، انحراف معیار متغیر تصادفی X را تعیین کنید.

حل. در مثال ۲.۴، نشان دادیم که $\mu = E(X) = ۰٫۴۴۱۳$. حال

$$\begin{aligned}\mu'_{۲} = E(X^{۲}) &= \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{۱}\frac{x^{۲}}{۱+x^{۲}}dx\\ &= \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{۱}\left(۱ - \frac{۱}{۱+x^{۲}}\right)dx\cdot\\ &= \frac{۴}{\pi} - ۱ = ۰٫۲۷۳۲\end{aligned}$$

و نتیجه می‌شود که

$$\sigma^{۲} = ۰٫۲۷۳۲ - (۰٫۴۴۱۳)^{۲} = ۰٫۰۷۸۵$$

بنابراین، $\sigma = \sqrt{0.0785} = 0.2802$. ▲

قضیهٔ زیر، قضیهٔ دیگری است که در کارهای مربوط به انحراف معیارها یا واریانسها اهمیت دارد:

قضیهٔ ۷.۴ اگر واریانس X برابر σ^2 باشد، آنگاه

$$\text{var}(aX + b) = a^2\sigma^2$$

اثبات این قضیه به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود، اما به فرعهای زیر اشاره می‌کنیم: برای $a = 1$، متوجه می‌شویم که اضافه کردن مقداری ثابت به متغیر تصادفی، که نتیجهٔ آن انتقال تمام مقادیر به چپ یا به راست است، به هیچ‌وجه اثری بر پراکندگی توزیع آن ندارد؛ برای $b = 0$، متوجه می‌شویم که اگر مقادیر متغیر تصادفی را در ثابتی ضرب کنیم، واریانس در مربع آن ثابت ضرب می‌شود، که موجب تغییر متناظری در پراکندگی توزیع می‌شود.

۴.۴ قضیهٔ چبیشف

برای نشان دادن اینکه چگونه σ یا σ^2 بر پراکندگی توزیع متغیر تصادفی دلالت دارد، قضیهٔ زیر را که به یاد چبیشف[1] ریاضیدان روسی قرن نوزدهم، **قضیهٔ چبیشف** می‌نامند ثابت می‌کنیم. ما آن‌را در اینجا فقط برای حالت پیوسته ثابت می‌کنیم، و اثبات آن‌را برای حالت گسسته به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

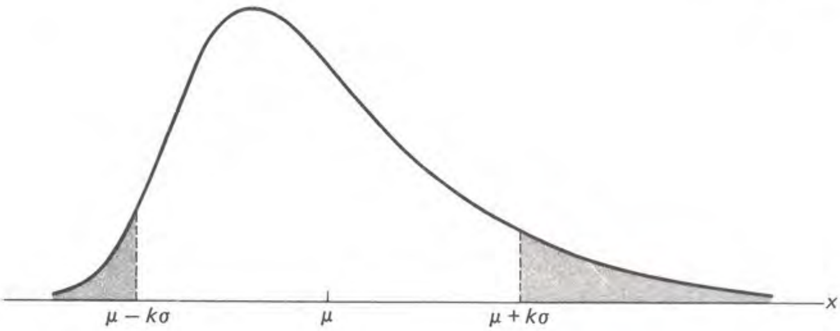
قضیهٔ ۸.۴ (قضیهٔ چبیشف) اگر μ و σ به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی X باشند، آنگاه برای هر ثابت مثبت k، احتمال اینکه X، مقداری با فاصلهٔ کمتر از $k\sigma$ از میانگین اختیار کند حداقل $1 - \frac{1}{k^2}$ است؛ به‌صورت نمادی

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

برهان. با توجه به تعریفهای ۴.۴ و ۵.۴، می‌نویسیم

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx$$

1. P. L. Chebyshev



شکل ۲.۴ نموداری برای اثبات قضیهٔ چبیشف

و با تفکیک انتگرال به سه بخش، همان‌طور که در شکل ۲.۴ نشان داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم

$$\sigma^{2} = \int_{\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^{2} \cdot f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (x-\mu)^{2} \cdot f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^{2} \cdot f(x)dx$$

چون $(x-\mu)^{2} \cdot f(x)$، عبارت زیر انتگرال، نامنفی است، می‌توانیم نابرابری

$$\sigma^{2} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (x-\mu)^{2} \cdot f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} (x-\mu)^{2} \cdot f(x)dx$$

را با حذف انتگرال دوم تشکیل دهیم. حال چون برای $x \leq \mu - k\sigma$ یا $x \geq \mu + k\sigma$، $(x-\mu)^{2} \geq k^{2}\sigma^{2}$، نتیجه می‌شود که

$$\sigma^{2} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^{2}\sigma^{2} \cdot f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} k^{2}\sigma^{2} \cdot f(x)dx$$

و بنابراین به شرط $\sigma^{2} \neq 0$،

$$\frac{1}{k^{2}} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{\infty} f(x)dx$$

چون مجموع دو انتگرال در این نابرابری، احتمال این را نمایش می‌دهد که X مقداری نابیشتر از $\mu - k\sigma$ یا ناکمتر از $\mu + k\sigma$ را اختیار کند، لذا نشان داده‌ایم که

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^{2}}$$

و نتیجه می‌شود که

$$P(|X-\mu|<k\sigma)\geq ۱-\frac{۱}{k^۲}$$

■

برای نمونه، احتمال اینکه X مقداری در فاصلهٔ ۲σ از میانگین اختیارکند حداقل $۱-\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۳}{۴}$، احتمال اینکه X مقداری در فاصلهٔ ۳σ از میانگین اختیار کند حداقل $۱-\frac{۱}{۳^۲}=\frac{۸}{۹}$ و احتمال اینکه X مقداری در فاصلهٔ ۵σ از میانگین اختیار کند حداقل $۱-\frac{۱}{۵^۲}=\frac{۲۴}{۲۵}$ است. با این معناست که σ، پراکندگی توزیع متغیر تصادفی را کنترل می‌کند. به‌وضوح احتمالی که به‌وسیلهٔ قضیهٔ چبیشف داده می‌شود فقط یک کران پایینی است؛ دربارهٔ اینکه وقتی متغیری تصادفی مقداری با فاصلهٔ کمتر از $k\sigma$ از میانگین اختیار می‌کند احتمالش واقعاً بزرگتر از $۱-\frac{۱}{k^۲}$ است یا نه، و اگر بزرگتر باشد به چه اندازه، نمی‌توانیم چیزی بگوییم، اما قضیهٔ چبیشف ما را مطمئن می‌سازد که این احتمال نمی‌تواند کمتر از $۱-\frac{۱}{k^۲}$ باشد. تنها وقتی می‌توانیم احتمال دقیق را محاسبه کنیم که توزیع متغیر تصادفی معلوم باشد.

مثال ۱۲.۴

اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} ۶۳۰x^۴(۱-x)^۴ & ۰<x<۱\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد، احتمال این را که X مقداری در فاصلهٔ ۲σ از میانگین اختیارکند پیدا کنید، و آن‌را با کران پایینی که از روی قضیهٔ چبیشف حاصل می‌شود مقایسه نمایید.

حل. انتگرالگیری مستقیم نشان می‌دهد که $\mu=\frac{۱}{۲}$ و $\sigma^۲=\frac{۱}{۴۴}$، به قسمی که $\sigma=\sqrt{۱/۴۴}$ یا تقریباً ۱۵ر۰. پس، احتمال اینکه X مقداری در فاصلهٔ ۲σ از میانگین اختیارکند برابر احتمال آن است که X مقداری بین ۲۰ر۰ و ۸۰ر۰ اختیارکند، یعنی

$$P(۰{,}۲۰<X<۰{,}۸۰)=\int_{۰{,}۲۰}^{۰{,}۸۰}۶۳۰x^۴(۱-x)^۴dx=۰{,}۹۶$$

ملاحظه کنید که حکم «احتمال برابر ۹۶ر۰ است» خیلی قویتر است از حکم «احتمال حداقل برابر ۷۵ر۰ است» که از قضیهٔ چبیشف به‌دست می‌آید. ▲

۵.۴ توابع مولد گشتاورها

گرچه گشتاورهای بیشتر توزیعها را می‌توان مستقیماً با محاسبهٔ انتگرالها یا مجموعهای لازم معین کرد، ولی شیوهٔ دیگری نیز وجود دارد که اغلب تسهیلات قابل ملاحظه‌ای را در اختیار می‌گذارد.

در این شیوه، از **توابع مولد گشتاورها** استفاده می‌شود.

تعریف ۶.۴ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X، در صورت وجود، عبارت است از

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$$

وقتی که X گسسته باشد، و

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)dx$$

وقتی X پیوسته باشد.

متغیر مستقل، t است، و معمولاً مقادیری از t در همسایگی ۰ موردنظرند.

برای توضیح اینکه چرا به این تابع، عنوان تابع «مولد گشتاورها» را اطلاق می‌کنیم، به‌جای e^{tx}، بسط آن به سری ماکلورن را قرار می‌دهیم، یعنی

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{t^rx^r}{r!} + \cdots$$

بنابراین، برای حالت گسسته به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_x \left[1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{t^rx^r}{r!} + \cdots \right] f(x) \\ &= \sum_x f(x) + t \cdot \sum_x xf(x) + \frac{t^2}{2!} \cdot \sum_x x^2 f(x) \\ &\qquad + \cdots + \frac{t^r}{r!} \cdot \sum_x x^r f(x) + \cdots \\ &= 1 + \mu t + \mu'_2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mu'_r \cdot \frac{t^r}{r!} + \cdots \end{aligned}$$

و می‌توان دید که در سری ماکلورن تابع مولد گشتاورهای X، ضریب $\frac{t^r}{r!}$، همان μ'_r، rامین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X است. در حالت پیوسته، استدلال همین‌گونه است.

مثال ۱۳.۴

تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X را که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است بیابید، و آن‌را برای تعیین μ'_r به‌کار برید.

حل. بنابر تعریف

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{\circ}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx \\ &= \int_{\circ}^{\infty} e^{-x(\text{۱}-t)}\, dx \\ &= \frac{\text{۱}}{\text{۱}-t} \quad \text{به‌ازای } |t| < \text{۱} \end{aligned}$$

همان‌طور که می‌دانید، وقتی $|t| < \text{۱}$ سری ماکلورن برای این تابع مولد گشتاورها به‌صورت

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \text{۱} + t + t^{\text{۲}} + t^{\text{۳}} + \cdots + t^r + \cdots \\ &= \text{۱} + \text{۱}! \cdot \frac{t}{\text{۱}!} + \text{۲}! \cdot \frac{t^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \text{۳}! \cdot \frac{t^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots + r! \cdot \frac{t^r}{r!} + \cdots \end{aligned}$$

است و بنابراین برای $r = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \cdots$، $\mu'_r = r!$ ▲

مشکل اصلی در به‌کار بردن سری ماکلورن تابع مولد گشتاورها برای تعیین گشتاورهای یک متغیر تصادفی، معمولاً پیدا کردن تابع مولد گشتاورها نیست، بلکه مشکل، بسط آن به‌صورت سری ماکلورن است. اگر فقط چند گشتاور اول متغیر تصادفی، مثلاً $\mu'_{\text{۱}}$ و $\mu'_{\text{۲}}$ مورد توجه باشند، عمل تعیین آنها را معمولاً می‌توان با استفاده از قضیهٔ زیر ساده‌تر کرد:

قضیهٔ ۹.۴

$$\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\Big|_{t=\circ} = \mu'_r$$

این قضیه از این واقعیت نتیجه می‌شود که اگر تابعی به‌صورت سری توانی برحسب t بسط داده شود، ضریب $\frac{t^r}{r!}$، مشتق مرتبهٔ rام تابع نسبت به t به‌ازای $t = \circ$ است.

مثال ۱۴.۴

توزیع احتمال X؛ برای $x = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \text{۳}, \cdots$ به‌صورت $f(x) = \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\binom{\text{۳}}{x}$ است، تابع مولد گشتاورهای این متغیر تصادفی را پیدا کنید و آن‌را برای تعیین $\mu'_{\text{۱}}$ و $\mu'_{\text{۲}}$ به‌کار برید.

حل. با جایگذاری توزیع احتمال در تعریف ۶.۴، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \frac{۱}{۸} \cdot \sum_{x=۰}^{۳} e^{tx} \binom{۳}{x} \\ &= \frac{۱}{۸}(۱ + ۳e^t + ۳e^{۲t} + e^{۳t}) \\ &= \frac{۱}{۸}(۱ + e^t)^۳ \end{aligned}$$

پس، بنابر قضیهٔ ۹.۴

$$\mu'_۱ = M'_X(۰) = \frac{۳}{۸}(۱ + e^t)^۲ e^t|_{t=۰} = \frac{۳}{۲}$$

و

$$\mu'_۲ = M''_X(۰) = \frac{۳}{۴}(۱ + e^t)e^{۲t} + \frac{۳}{۸}(۱ + e^t)^۲ e^t|_{t=۰} = ۳$$

▲

اغلب مسائل مربوط به کاربرد توابع مولد گشتاورها را می‌توان با استفاده از قضیهٔ زیر ساده کرد:

قضیهٔ ۱۰.۴ اگر a و b دو مقدار ثابت باشند، آنگاه

۱. $M_{X+a}(t) = E[e^{(X+a)t}] = e^{at} \cdot M_X(t)$؛

۲. $M_{bX}(t) = E(e^{bXt}) = M_X(bt)$؛

۳. $M_{\frac{X+a}{b}}(t) = E[e^{(\frac{X+a}{b})t}] = e^{(\frac{a}{b})t} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$

برهان این قضیه در تمرین ۴۶.۴ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده است. همان‌طور که بعداً خواهیم دید، قسمت اول این قضیه، وقتی $a = -\mu$، اهمیت خاصی دارد، و قسمت سوم وقتی $a = -\mu$ و $b = \sigma$ نیز دارای اهمیت خاصی است، در این حالت

$$M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\frac{\mu t}{\sigma}} \cdot M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

تمرینها

۲۵.۴ با رجوع به تعریف ۴.۴ نشان دهید که در مورد هر متغیر تصادفی که برای آن $E(X)$ وجود دارد، $\mu_۰ = ۱$ و $\mu_۱ = ۰$.

۲۶.۴ برای متغیر تصادفی X که دارای توزیع احتمال $f(x) = \frac{۱}{۲}$، به‌ازای $x = -۲$ و $x = ۲$

است، μ و μ'_2 و σ^2 را بیابید.

۲۷.۴ برای متغیر تصادفی X که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، μ و μ'_2 و σ را پیدا کنید.

۲۸.۴ برای متغیر تصادفی X که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، μ، μ'_2، و σ^2 را بیابید.

۲۹.۴ قضیهٔ ۷.۴ را ثابت کنید.

۳۰.۴ با رجوع به تمرین ۸.۴، واریانس $g(X) = 2X + 3$ را بیابید.

۳۱.۴ اگر متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، نشان دهید که برای متغیر تصادفی Z، که مقادیرش به مقادیر X با معادلهٔ $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ وابسته است، $E(Z) = 0$ و $\text{var}(Z) = 1$. گوییم توزیعی که دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ است، **به‌صورت استاندارد** است، و وقتی **تعویض متغیر** $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ را اعمال می‌کنیم، گوییم توزیع X را **استاندارد کرده‌ایم**.

۳۲.۴ اگر چگالی احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & x > 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، بررسی کنید که آیا میانگین و واریانس آن موجودند؟

۳۳.۴ نشان دهید که به‌ازای، $r = 1, 2, 3, \cdots$

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1} \cdot \mu + \cdots + (-1)^i \binom{r}{i}\mu'_{r-i} \cdot \mu^i + \cdots + (-1)^{r-1}(r-1) \cdot \mu^r$$

و این فرمول را در تعیین عبارتی برای μ_3 و μ_4 برحسب گشتاورهای حول مبدأ به‌کار برید.

۳۴.۴ **تقارن یا چاولگی** (عدم تقارن) یک توزیع، اغلب به‌وسیلهٔ کمیت

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

اندازه‌گیری می‌شود. فرمول μ_3 را که در تمرین ۳۳.۴ به‌دست آمد برای تعیین α_3 در مورد هریک از توزیعهای زیر (که دارای میانگینهای برابر و واریانسهای برابرند) به‌کار برید:

(الف) $f(0)=0{,}05$، $f(1)=0{,}15$، $f(2)=0{,}30$، $f(3)=0{,}30$، $f(4)=0{,}15$، و $f(5)=0{,}05$؛
(ب) $f(0)=0{,}05$، $f(1)=0{,}20$، $f(2)=0{,}15$، $f(3)=0{,}45$، $f(4)=0{,}10$، و $f(5)=0{,}05$.

بافتنماهای دو توزیع را نیز رسم کنید و توجه کنید در حالی‌که اولی متقارن است، دومی «دمی» در طرف چپ دارد و می‌گویند که **منفی چاوله** است.

۳۵.۴ میزان تیزی و هموار بودن یک توزیع را که **کشیدگی** توزیع نیز نامیده می‌شود اغلب به‌وسیلهٔ کمیت

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

اندازه‌گیری می‌کنند. فرمولی را که برای μ_4 در تمرین ۳۳.۴ به‌دست آمد برای پیدا کردن α_4 در مورد هر یک از توزیعهای متقارن زیر که اولی تیزتر (با کوهان باریکتر) از دومی است به‌کار برید:
(الف) $f(-3)=0{,}06$، $f(-2)=0{,}09$، $f(-1)=0{,}10$، $f(0)=0{,}50$، $f(1)=0{,}10$، $f(2)=0{,}09$، و $f(3)=0{,}06$؛
(ب) $f(-3)=0{,}04$، $f(-2)=0{,}11$، $f(-1)=0{,}20$، $f(0)=0{,}30$، $f(1)=0{,}20$، $f(2)=0{,}11$، و $f(3)=0{,}04$.

۳۶.۴ با تکرار مراحلی که در برهان قضیهٔ ۸.۴ به‌کار رفته است، قضیهٔ چبیشف را برای متغیر تصادفی گسستهٔ X ثابت کنید.

۳۷.۴ نشان دهید که اگر X متغیری تصادفی با میانگین μ باشد که برای آن به‌ازای $x<0$، $f(x)=0$ آنگاه برای هر ثابت مثبت a

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}$$

این نابرابری را **نابرابری مارکوف** می‌نامند، و آن‌را در اینجا بیشتر به این دلیل آورده‌ایم که به استدلال نسبتاً ساده‌تر دیگری برای قضیهٔ چبیشف منجر می‌شود.

۳۸.۴ نابرابری تمرین ۳۷.۴ را برای اثبات قضیهٔ چبیشف به‌کار برید. (راهنمایی: به‌جای X مقدار $(X-\mu)^2$ را قرار دهید.)

۳۹.۴ در قضیهٔ چبیشف، وقتی احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری بین $\mu - k\sigma$ و $\mu + k\sigma$ اختیار کند
(الف) حداقل $0{,}95$؛
(ب) حداقل $0{,}99$؛
است، کمترین مقدار k چه خواهد بود؟

۴۰.۴ اگر در قضیهٔ چبیشف، قرار دهیم $k\sigma = c$، این قضیه دربارهٔ احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری بین $\mu - c$ و $\mu + c$ اختیار نماید چه حکمی می‌کند؟

۴۱.۴ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی گسستهٔ X را که دارای توزیع احتمال

$$f(x) = ۲\left(\frac{۱}{۳}\right)^x \qquad x = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

است بیابید، و آن را برای تعیین مقادیر $\mu'_۱$ و $\mu'_۲$ به‌کار برید.

۴۲.۴ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی پیوستهٔ X را که چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شده است پیدا کنید، و آن‌را برای تعیین $\mu'_۱$، $\mu'_۲$ و $\sigma^۲$ به‌کار برید.

۴۳.۴ اگر قرار دهیم $R_x(t) = \ln M_X(t)$، نشان دهید که $R'_X(۰) = \mu$ و $R''_X(۰) = \sigma^۲$. این نتایج را برای تعیین میانگین و واریانس متغیر تصادفی X نیز که دارای تابع مولد گشتاورهای

$$M_X(t) = e^{۴(e^t - ۱)}$$

است به‌کار برید.

۴۴.۴ توضیح دهید چرا نمی‌توان متغیر تصادفیی یافت که برای آن $M_X(t) = \frac{t}{۱-t}$ باشد.

۴۵.۴ نشان دهید که اگر متغیری تصادفی دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{۱}{۲}e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty$$

باشد، تابع مولد گشتاورهایش به‌صورت

$$M_X(t) = \frac{۱}{۱ - t^۲}$$

است.

۴۶.۴ با رجوع به تمرین ۴۵.۴، واریانس متغیر تصادفی را
(الف) با بسط تابع مولد گشتاورها به‌صورت یک سری نامتناهی و در نظر گرفتن ضرایب لازم؛
(ب) با استفاده از قضیهٔ ۹.۴؛
بیابید.

۴۷.۴ هر سه قسمت قضیهٔ ۱۰.۴ را ثابت کنید.

۴۸.۴ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X به‌صورت $M_X(t) = e^{۳t+۸t^۲}$ داده شده است، تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی $Z = \frac{۱}{۴}(X - ۳)$ را پیدا کنید، و برای تعیین میانگین و واریانس Z، به‌کار برید.

کاربردها

۴۹.۴ با مراجعه به مثال ۱.۴ واریانس توزیع تعداد تلویزیونهای معیوب را پیدا کنید.

۵۰.۴ مدت زمان لازم برای تحویل غذا به یک مشتری در کافه‌ای، متغیری است تصادفی با چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۴}e^{-\frac{x}{۴}} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

میانگین و واریانس این متغیر تصادفی را بیابید.

۵۱.۴ با مراجعه به تمرین ۴۷.۳، میانگین و واریانس توزیع متغیر تصادفی تحت بررسی را پیدا کنید.

۵۲.۴ با مراجعه به تمرین۳.۲۰ میانگین و واریانس متغیر تصادفی V را به‌دست آورید.

۵۳.۴ برخی کاربردهای نابرابری مارکوف تمرین ۳۷.۴ به‌شرح زیرند:

(الف) نمره‌هایی را که دانشجویان یک مدرسهٔ عالی در امتحان زبان می‌گیرند می‌توان به‌عنوان متغیری تصادفی با میانگین ۴۱ $= \mu$ در نظر گرفت. کران بالایی برای احتمال آنکه دانشجویی نمره‌ای برابر ۶۵ یا بیشتر بگیرد پیدا کنید.

(ب) وزن یک نوع حیوان را ممکن است به‌صورت متغیری تصادفی با میانگین ۲۱۲ گرم در نظر گرفت. اگر وزن هیچ‌یک از حیوانات از این نوع، کمتر از ۱۶۵ گرم نباشد، کران بالایی را برای احتمال آنکه یک چنین حیوانی وزنی حداقل برابر ۲۵۰ گرم داشته باشد پیدا کنید.

۵۴.۴ تعداد گواهیهای ازدواجی را که در شهری معین در طول ماه معینی صادر شده است می‌توان به‌صورت متغیری تصادفی با ۱۲۴ $= \mu$ و ۷٫۵ $= \sigma$ در نظر گرفت. بنابر قضیهٔ چبیشف، با چه احتمالی می‌توان ادعا کرد که تعدادی بین ۶۴ و ۱۸۴ گواهی ازدواج در طول ماه مزبور در این شهر صادر شده است؟

۵۵.۴ مطالعه‌ای دربارهٔ ارزش غذایی نوع نان نشان می‌دهد که میزان تیامین (ویتامین $B_۱$)، در یک قرص این نوع نان را می‌توان به‌صورت متغیری تصادفی با ۰٫۲۶۰ $= \mu$ میلیگرم و ۰٫۰۰۵ $= \sigma$ میلیگرم در نظر گرفت. بنابر قضیهٔ چبیشف مقدار تیامین موجود در

(الف) حداقل $\frac{۳۵}{۳۶}$ تمام قرصهای این نوع نان؛

(ب) حداقل $\frac{۱۴۳}{۱۴۴}$ تمام قرصهای این نوع نان؛

بین کدام دو مقدار باید باشد؟

۵۶.۴ با مراجعه به تمرین۴.۵۰ اگر قضیهٔ چبیشف را با ۱٫۵ $= k$ به‌کار بریم، دربارهٔ مدت زمانی که برای تحویل غذای یک مشتری در کافه صرف می‌شود چه حکمی می‌توان کرد؟ احتمال متناظر، که تا چهار رقم دهدهی گرد شده است، چقدر است؟

۶.۴ گشتاورهای حاصلضربی

اینک در ادامهٔ بحث بخش ۳.۴، **گشتاورهای حاصلضربی** دو متغیر تصادفی را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۷.۴ rامین و sامین گشتاور حاصلضربی حول مبدأ متغیرهای تصادفی X و Y، که با $\mu'_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار X^rY^s است؛ به‌صورت نمادی، برای $r = 0, 1, 2, \cdots$ و $s = 0, 1, 2, \cdots$

$$\mu'_{r,s} = E(X^rY^s) = \sum_x \sum_y x^r y^s \cdot f(x, y)$$

وقتی X و Y گسسته‌اند، و

$$\mu'_{r,s} = E(X^rY^s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s \cdot f(x, y)dx\, dy$$

وقتی X و Y پیوسته‌اند.

در حالت گسسته، مجموعیابی دوگانه روی تمام برد توأم دو متغیر تصادفی است. توجه کنید که $\mu'_{1,0} = E(X)$، که در اینجا با μ_X نشان داده می‌شود، و $\mu'_{0,1} = E(Y)$، که در اینجا با μ_Y نشان داده می‌شود.

اکنون مشابه تعریف ۴.۴، تعریف زیر را از گشتاورهای حاصلضربی حول میانگینهای مربوطه، ارائه می‌دهیم:

تعریف ۸.۴ rامین و sامین گشتاور حاصلضربی دو متغیر تصادفی X و Y حول میانگینهایشان، که با $\mu_{r,s}$ نشان داده می‌شود، مقدار مورد انتظار $(X - \mu_X)^r(Y - \mu_Y)^s$ است؛ به‌صورت نمادی برای $r = 0, 1, 2, \cdots$ و $s = 0, 1, 2, \cdots$،

$$\mu_{r,s} = E[(X - \mu_X)^r(Y - \mu_Y)^s] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)^r(y - \mu_Y)^s \cdot f(x, y)$$

وقتی X و Y گسسته‌اند، و

$$\begin{aligned}\mu_{r,s} &= E[(X - \mu_X)^r(Y - \mu_Y)^s] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^r(y - \mu_Y)^s \cdot f(x, y)dx\, dy\end{aligned}$$

وقتی X و Y پیوسته‌اند.

در آمار، $\mu_{1,1}$ از اهمیت خاصی برخوردار است، زیرا بر رابطه بین مقادیر X و Y، در

صورت‌وجود، دلالت دارد؛ لذا به آن نماد و نام خاصی داده شده است.

تعریف ۹.۴ $\mu_{1,1}$ را **کوواریانس** X و Y می‌نامند و آن‌را با $\sigma_{X,Y}$، $\text{cov}(X,Y)$، یا $C(X,Y)$ نشان می‌دهند.

ملاحظه کنید که اگر احتمال زیادی وجود داشته باشد که مقادیر بزرگ X با مقادیر بزرگ Y و مقادیر کوچک X با مقادیر کوچک Y همراه باشند، کوواریانس مثبت خواهد بود؛ و اگر احتمال زیادی وجود داشته باشد که مقادیر بزرگ X با مقادیر کوچک Y و برعکس همراه باشند، کوواریانس منفی خواهد بود. با این مفهوم است که کوواریانس، رابطه یا پیوند بین مقادیر X و Y را اندازه می‌گیرد.

حال قضیهٔ زیر را که مشابه قضیهٔ ۶.۴ بوده و برای تعیین مقدار کوواریانس در عمل مفید است ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۱۱.۴

$$\sigma_{XY} = \mu'_{1,1} - \mu_X\mu_Y$$

برهان. با استفاده از قضیه‌های مختلف دربارهٔ مقدار مورد انتظار، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&= E(XY - X\mu_Y - Y\mu_X + \mu_X\mu_Y) \\
&= E(XY) - \mu_Y E(X) - \mu_X E(Y) + \mu_X\mu_Y \\
&= E(XY) - \mu_Y\mu_X - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y \\
&= \mu'_{1,1} - \mu_X\mu_Y
\end{aligned}$$

■

مثال ۱۵.۴

در مثال ۲۰.۳، احتمالهای توأم و حاشیه‌ای X و Y، که به‌ترتیب معرف تعداد قرصهای آسپیرین و تعداد قرصهای خواب‌آور بین دو قرصی بودند که از شیشه محتوی ۳ قرص آسپیرین، دو قرص خواب‌آور، و چهار قرص ملین به تصادف درآوردیم، به‌صورت جدول زیر بودند.

		x ۰	x ۱	x ۲	
y	۰	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
	۱	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$		$\frac{۷}{۱۸}$
	۲	$\frac{۱}{۳۶}$			$\frac{۱}{۳۶}$
		$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	

کوواریانس X و Y را بیابید.

حل. با استفاده از احتمالهای توأمی که داده شده‌اند، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mu'_{۱,۱} &= E(XY)\\ &= ۰\cdot ۰\cdot \frac{۱}{۶} + ۰\cdot ۱\cdot \frac{۲}{۹} + ۰\cdot ۲\cdot \frac{۱}{۳۶} + ۱\cdot ۰\cdot \frac{۱}{۳} + ۱\cdot ۱\cdot \frac{۱}{۶} + ۲\cdot ۰\cdot \frac{۱}{۱۲}\\ &= \frac{۱}{۶}\end{aligned}$$

و با استفاده از احتمالهای حاشیه‌ای، به‌دست می‌آوریم

$$\mu_X = E(X) = ۰\cdot \frac{۵}{۱۲} + ۱\cdot \frac{۱}{۲} + ۲\cdot \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

و

$$\mu_Y = E(Y) = ۰\cdot \frac{۷}{۱۲} + ۱\cdot \frac{۷}{۱۸} + ۲\cdot \frac{۱}{۳۶} = \frac{۴}{۹}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sigma_{XY} = \frac{۱}{۶} - \frac{۲}{۳}\cdot\frac{۴}{۹} = -\frac{۷}{۵۴}$$

نتیجهٔ منفی القا می‌کند که هرچه قرصهای آسپیرینی که به‌دست می‌آوریم بیشتر باشند قرصهای خواب‌آور کمترند و برعکس، و البته که این نکتهٔ معقولی است. ▲

مثال ۱۶.۴

کوواریانس دو متغیر تصادفی را که چگالی توأم آنها به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} ۲ & x > ۰, y > ۰, x + y < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است پیدا کنید.

حل. با محاسبهٔ انتگرالهای لازم، به‌دست می‌آوریم

$$\mu_X = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x \, dy \, dx = \frac{1}{3}$$
$$\mu_Y = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2y \, dy \, dx = \frac{1}{3}$$

و

$$\mu'_{1,1} = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2xy \, dy \, dx = \frac{1}{12}$$

نتیجه می‌شود که

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

▲

تاکنون آنچه گفتیم مربوط به رابطهٔ بین X و Y بود، ملاحظه کنید که اگر X و Y مستقل باشند کوواریانس آنها صفر است؛ به‌صورت نمادی،

قضیهٔ ۱۲.۴ اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$، و $\sigma_{XY} = 0$.

برهان. برای حالت گسسته، بنابر تعریف داریم

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy \cdot f(x,y)$$

چون X و Y مستقل‌اند، می‌توانیم بنویسیم $f(x,y) = g(x)h(y)$، که در آن $g(x)$ و $h(y)$ به‌ترتیب مقادیر توزیعهای حاشیه‌ای X و Y هستند، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xy \cdot g(x)h(y) \\ &= \left[\sum_x x \cdot g(x)\right]\left[\sum_y y \cdot h(y)\right] \\ &= E(X) \cdot E(Y) \end{aligned}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
\sigma_{XY} &= \mu'_{1,1} - \mu_X \mu_Y \\
&= E(X)\cdot E(Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0
\end{aligned}
$$

■

در خور ذکر است که استقلال دو متغیر تصادفی، صفر بودن کوواریانس را ایجاب می‌کند، اما صفر بودن کوواریانس الزاماً استقلال آنها را نتیجه نمی‌دهد. با مثال زیر (تمرینهای ۶۱.۴ و ۶۲.۴ را نیز ببینید) موضوع را تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۷.۴

اگر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت زیر

y \ x	-1	0	1	
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

باشد، نشان دهید با اینکه دو متغیر تصادفی مستقل نیستند، کوواریانس آنها صفر است.

حل. با استفاده از احتمالهایی که در حاشیه‌ها نشان داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0 \\
\mu_Y &= (-1)\cdot\frac{2}{3} + 0\cdot 0 + 1\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

و

$$
\mu'_{1,1} = (-1)(-1)\cdot\frac{1}{6} + 0(-1)\cdot\frac{1}{3} + 1(-1)\cdot\frac{1}{6} + (-1)1\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot 1\cdot\frac{1}{6} = 0
$$

پس، $\sigma_{XY} = 0 - 0(-\frac{1}{3}) = 0$ و کوواریانس صفر است، اما دو متغیر تصادفی مستقل نیستند.
مثلاً برای $x = -1$ و $y = -1$، $f(x,y) \neq g(x)\cdot h(y)$. ▲

گشتاورهای حاصلضربی را می‌توان برای حالتی نیز که بیش از دو متغیر تصادفی وجود دارند تعریف کرد. در اینجا فقط قضیهٔ مهم زیر را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۳.۴ اگر X_1، X_2، ... ، و X_n مستقل باشند، آنگاه

$$E(X_1X_2\cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

این، تعمیمی از قسمت اول قضیهٔ ۱۲.۴ است؛ در واقع، برهان این قضیه، که مبتنی بر تعریف ۱۴.۳ است، اساساً نظیر برهان قسمت اول قضیهٔ ۱۲.۴ است.

۷.۴ گشتاورهای ترکیبهای خطی متغیرهای تصادفی

در این بخش عبارتهایی برای میانگین و واریانس ترکیبی خطی از n متغیر تصادفی و کوواریانس دو ترکیب خطی از n متغیر تصادفی به‌دست می‌آوریم. کاربردهای این نتایج، بعداً در مبحث نظریهٔ نمونه‌گیری و مسائل استنباط آماری مورد بحث قرار خواهند گرفت.

قضیهٔ ۱۴.۴ اگر X_1، X_2، ... ، X_n متغیرهای تصادفی باشند و

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

که در آن a_1، a_2، ... ، a_n مقادیری ثابت هستند، آنگاه

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

و

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \operatorname{cov}(X_i X_j)$$

که در آن مجموعیابی دوگانه روی تمام مقادیر i و j از ۱ تا n با شرط $i < j$ انجام می‌شود.

برهان. از قضیهٔ ۵.۴ با $g_i(X_1, X_2, \cdots, X_k) = X_i$ به‌ازای $i = 0, 1, 2, \cdots, n$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

و این، اولین قسمت قضیه را ثابت می‌کند. در به‌دست آوردن عبارتی برای واریانس، μ_i را به‌جای $E(X_i)$ قرار می‌دهیم، و در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Y) &= E([Y - E(Y)]^2) = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)\right]^2\right\} \\ &= E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i)\right]^2\right\} \end{aligned}$$

آنگاه با بسط این نتیجه برحسب قضیهٔ چندجمله‌ای که بنابر آن مثلاً $(a+b+c+d)^2$ مساوی $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$ است، و مراجعهٔ دوباره به قضیهٔ ۵.۴، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Y) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E[(X_i - \mu_i)^2] + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \operatorname{var}(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

توجه کنید که ما به‌طور ضمنی از واقعیت $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i)$ استفاده کرده‌ایم. ■

چون وقتی X_i, X_j مستقل‌اند، $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

فرع ۳ اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ...، X_n مستقل باشند و $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$، آنگاه

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \operatorname{var}(X_i)$$

مثال ۱۸.۴

اگر متغیرهای تصادفی X، Y، و Z دارای میانگینهای $\mu_X = 2$، $\mu_Y = -3$، $\mu_Z = 4$، واریانسهای $\sigma_X^2 = 1$، $\sigma_Y^2 = 5$، $\sigma_Z^2 = 2$، و کوواریانسهای $\operatorname{cov}(X, Y) = -2$، $\operatorname{cov}(X, Z) = -1$،

$\text{cov}(Y, Z) = ۱$ باشند، میانگین و واریانس

$$W = ۳X - Y + ۲Z$$

را پیدا کنید.

حل. بنابر قضیهٔ ۱۴.۴، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E(W) &= E(۳X - Y + ۲Z) \\ &= ۳E(X) - E(Y) + ۲E(Z) \\ &= ۳ \cdot ۲ - (-۳) + ۲ \cdot ۴ = ۱۷ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \text{var}(W) &= ۹\text{var}(X) + \text{var}(Y) + ۴\text{var}(Z) - ۶\text{cov}(X, Y) \\ &\quad + ۱۲\text{cov}(X, Z) - ۴\text{cov}(Y, Z) \\ &= ۹ \cdot ۱ + ۵ + ۴ \cdot ۲ - ۶(-۲) + ۱۲(-۱) - ۴ \cdot ۱ = ۱۸ \end{aligned}$$

▲

قضیهٔ زیر، قضیهٔ مهم دیگری دربارهٔ ترکیبهای خطی متغیرهای تصادفی است. این قضیه مربوط به کوواریانس دو ترکیب خطی از n متغیر تصادفی است.

قضیهٔ ۱۵.۴ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، X_n متغیرهایی تصادفی باشند و

$$Y_۱ = \sum_{i=۱}^{n} a_i X_i \quad \text{و} \quad Y_۲ = \sum_{i=۱}^{n} b_i X_i$$

که در آنها $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n و $b_۱$، $b_۲$، ... ، b_n مقادیری ثابت‌اند، آنگاه

$$\text{cov}(Y_۱, Y_۲) = \sum_{i=۱}^{n} a_i b_i \cdot \text{var}(X_i) + \sum_{i<j}\sum (a_i b_j + a_j b_i) \cdot \text{cov}(X_i, X_j)$$

برهان این قضیه که خیلی به برهان قضیهٔ ۱۴.۴ شبیه است، در تمرین ۶۷.۴ به‌عهدهٔ خواننده واگذار شده است.

چون وقتی X_i و X_j مستقل‌اند، $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = ۰$، بی‌درنگ نتیجه می‌شود که

فرع۴ اگر متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... ، X_n مستقل باشند، $Y_۱ = \sum\limits_{i=۱}^{n} b_i X_i$ و $Y_۲ = \sum\limits_{i=۱}^{n} b_i X_i$، آنگاه

$$\operatorname{cov}(Y_۱, Y_۲) = \sum_{i=۱}^{n} a_i b_i \cdot \operatorname{var}(X_i)$$

مثال ۱۹.۴

اگر متغیرهای تصادفی X، Y، و Z دارای میانگینهای $\mu_X = ۳$، $\mu_Y = ۵$، $\mu_Z = ۲$، واریانسهای $\sigma_X^۲ = ۸$، $\sigma_Y^۲ = ۱۲$، $\sigma_Z^۲ = ۱۸$، و کوواریانسهای $\operatorname{cov}(X, Y) = ۱$، $\operatorname{cov}(X, Z) = -۳$، $\operatorname{cov}(Y, Z) = ۲$ باشند، مطلوب است کوواریانس

$$U = X + ۴Y + ۲Z \quad \text{و} \quad V = ۳X - Y - Z$$

حل. بنابر قضیهٔ ۱۵.۴

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(U, V) &= \operatorname{cov}(X + ۴Y + ۲Z, ۳X - Y - Z) \\
&= ۳\operatorname{var}(X) - ۴\operatorname{var}(Y) - ۲\operatorname{var}(Z) + ۱۱\operatorname{cov}(X, Y) \\
&\quad + ۵\operatorname{cov}(X, Z) - ۶\operatorname{cov}(Y, Z) \\
&= ۳ \cdot ۸ - ۴ \cdot ۱۲ - ۲ \cdot ۱۸ + ۱۱ \cdot ۱ + ۵(-۳) - ۶ \cdot ۲ = -۷۶
\end{aligned}$$

▲

۸.۴ امیدهای شرطی

در بخش ۷.۳ احتمالهای شرطی را با جمع کردن مقادیر توزیعهای احتمال شرطی، یا انتگرالگیری مقادیر چگالیهای احتمال شرطی به‌دست آوردیم. **امیدهای شرطی** متغیرهای تصادفی هم به‌همین نحو برحسب توزیعهای شرطی آنها تعریف می‌شوند.

تعریف۴.۱۰ اگر X متغیر تصادفی گسسته و $f(x|y)$ مقدار توزیع احتمال شرطی X به شرط $Y = y$ به‌ازای x باشد، **امید شرطی** $u(X)$ به شرط $Y = y$ برابر است با

$$E[u(X)|y] = \sum_x u(x) \cdot f(x|y)$$

متناظراً، اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x|y)$ مقدار چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y = y$ به‌ازای x باشد، **امید شرطی** $u(X)$ به شرط $Y = y$ برابر است با

$$E[u(X)|y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot f(x|y)dx$$

عبارتهایی مشابه، مبتنی بر توزیع یا چگالی احتمال شرطی Y به شرط $X = x$، امید شرطی $u(Y)$ به شرط $X = x$ را تعریف می‌کنند.

اگر در تعریف ۴.۱۰ قرار دهیم $u(X) = X$، **میانگین شرطی** متغیر تصادفی X به شرط $Y = y$ به‌دست می‌آید، که آن‌را به‌صورت

$$\mu_{X|y} = E(X|y)$$

نشان می‌دهیم. **واریانس شرطی** X به شرط $Y = y$ برابر است با

$$\begin{aligned}\sigma^2_{X|y} &= E[(X - \mu_{X|y})^2|y] \\ &= E(X^2|y) - \mu^2_{X|y}\end{aligned}$$

که در آن $E(X^2|y)$ بنابر تعریف ۴.۱۰ با $u(X) = X^2$ داده می‌شود. خواننده نباید در تعمیم تعریف ۴.۱۰ برای امیدهای شرطی شامل بیش از دو متغیر تصادفی دچار مشکل شود.

مثال ۴.۲۰

با رجوع به مثال ۳.۱۲ در صفحهٔ ۱۱۱، امید شرطی X به شرط $Y = ۱$ را بیابید.

حل. با استفاده از نتایج مثال ۳.۲۳ در صفحهٔ ۱۳۰ یعنی $f(۰|۱) = \frac{۴}{۷}$، $f(۱|۱) = \frac{۳}{۷}$، و $f(۲|۱) = ۰$، به‌دست می‌آوریم

$$E(X|۱) = ۰ \cdot \frac{۴}{۷} + ۱ \cdot \frac{۳}{۷} + ۲ \cdot ۰ = \frac{۳}{۷}$$

▲

مثال ۲۱.۴
اگر چگالی احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{۲}{۳}(x+۲y) & ۰<y<۱,\ ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، میانگین شرطی و واریانس شرطی X به شرط $Y=\frac{۱}{۲}$ را بیابید.

حل. در مثال ۲۴.۳ نشان دادیم که برای این متغیرهای تصادفی چگالی شرطی X به شرط $Y=y$ به‌صورت

$$f(x|y)=\begin{cases} \frac{۲x+۴y}{۱+۴y} & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، به‌قسمی‌که

$$f(x|\frac{۱}{۲})=\begin{cases} \frac{۲}{۳}(x+۱) & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

لذا، $\mu_{X|\frac{۱}{۲}}$ به‌صورت

$$E(X|\frac{۱}{۲})=\int_۰^۱ \frac{۲}{۳}x(x+۱)dx=\frac{۵}{۹}$$

است. متعاقباً پیدا می‌کنیم

$$E(X^۲|\frac{۱}{۲})=\int_۰^۱ \frac{۲}{۳}x^۲(x+۱)dx=\frac{۷}{۱۸}$$

و نتیجه می‌شود که

$$\sigma^۲_{X|\frac{۱}{۲}}=\frac{۷}{۱۸}-(\frac{۵}{۹})^۲=\frac{۱۳}{۱۶۲}$$

▲

تمرینها

۵۷.۴ اگر X و Y دارای توزیع احتمال توأم $f(x,y)=\frac{۱}{۴}$ به‌ازای $x=-۳$، $y=-۵$، $x=-۱$، $y=-۱$، $x=۱$، $y=۱$، $x=۳$، $y=۵$ باشند، $\operatorname{cov}(X,Y)$ را پیدا کنید.

۵۸.۴ با مراجعه به تمرین ۵۲.۳، $\operatorname{cov}(X,Y)$ را بیابید.

۵۹.۴ با مراجعه به مثال ۲۲.۳، $\operatorname{cov}(X_۱,X_۳)$ را پیدا کنید.

۶۰.۴ با مراجعه به تمرین ۹۰.۳، $\operatorname{cov}(X,Y)$ را پیدا کنید.

۶۱.۴ اگر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت $f(-۱,۰)=۰$، $f(-۱,۱)=\frac{۱}{۴}$، $f(۰,۰)=\frac{۱}{۶}$، $f(۰,۱)=۰$، $f(۱,۰)=\frac{۱}{۱۲}$ و $f(۱,۱)=\frac{۱}{۲}$ باشد، نشان دهید

(الف) $\operatorname{cov}(X,Y)=۰$

(ب) دو متغیر تصادفی مستقل نیستند.

۶۲.۴ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} ۱+x & -۱<x\le ۰ \\ ۱-x & ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، و $U=X$ و $V=X^۲$، نشان دهید که

(الف) $\operatorname{cov}(U,V)=۰$؛

(ب) U و V وابسته‌اند.

۶۳.۴ برای k متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ...، X_k، مقادیر **تابع مولد گشتاورهای توأم** به‌صورت

$$E(e^{t_۱X_۱+t_۲X_۲+\cdots+t_kX_k})$$

است.

(الف) نشان دهید که چه برای حالت گسسته و چه برای حالت پیوسته، مشتق جزئی تابع مولد گشتاورهای توأم نسبت به t_i در $t_۱=t_۲=\cdots=t_k=۰$ برابر است با $E(X_i)$.

(ب) نشان دهید که چه برای حالت گسسته و چه برای حالت پیوسته، مشتق جزئی مرتبهٔ دوم تابع مولد گشتاورهای توأم نسبت به t_i و t_j، $i\neq j$، در $t_۱=t_۲=\cdots=t_k=۰$ برابر است با $E(X_iX_j)$.

(ج) اگر دو متغیر تصادفی دارای چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-x-y} & x>۰,\ y>۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشند، تابع مولد گشتاورهای توأم آنها را پیدا کنید و آن‌را برای تعیین مقادیر $E(X)$، $E(XY)$، $E(Y)$ و $\mathrm{cov}(X,Y)$ به‌کار برید.

۶۴.۴ اگر متغیرهای تصادفی مستقل $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$ دارای میانگینهای ۴، ۹، ۳ و واریانسهای ۳، ۷، ۵ باشند، میانگین و واریانس

(الف) $Y = ۲X_۱ - ۳X_۲ + ۴X_۳$؛

(ب) $Z = X_۱ + ۲X_۲ - X_۳$؛

را بیابید.

۶۵.۴ هر دو قسمت تمرین ۶۴.۴ را با حذف فرض استقلال و اضافه کردن این اطلاعات که $\mathrm{cov}(X_۱, X_۲) = ۱$، $\mathrm{cov}(X_۲, X_۳) = -۲$، و $\mathrm{cov}(X_۱, X_۳) = -۳$، تکرار کنید.

۶۶.۴ اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}(x+y) & ۰ < x < ۱,\ ۰ < y < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، واریانس $W = ۳X + ۴Y - ۵$ را پیدا کنید.

۶۷.۴ قضیهٔ ۱۵.۴ را ثابت کنید.

۶۸.۴ $\mathrm{var}(X+Y)$، $\mathrm{var}(X-Y)$، و $\mathrm{cov}(X+Y, X-Y)$ را برحسب واریانسها و کوواریانسهای X و Y بیان کنید.

۶۹.۴ اگر $\mathrm{var}(X_۱) = ۵$، $\mathrm{var}(X_۲) = ۴$، $\mathrm{var}(X_۳) = ۷$ و $\mathrm{cov}(X_۱, X_۲) = ۳$، $\mathrm{cov}(X_۱, X_۳) = -۲$، و $X_۲$ و $X_۳$ مستقل باشند، کوواریانس $Y_۱ = X_۱ - ۲X_۲ + ۳X_۳$ و $Y_۲ = -۲X_۱ + ۳X_۲ + ۴X_۳$ را پیدا کنید.

۷۰.۴ با مراجعه به تمرین ۶۴.۴، $\mathrm{cov}(Y,Z)$ را بیابید.

۷۱.۴ با مراجعه به تمرین ۸۵.۳ میانگین شرطی و واریانس شرطی X به شرط $Y = -۱$ را پیدا کنید.

۷۲.۴ با مراجعه به تمرین ۸۷.۳، امید شرطی متغیر تصادفی $U = Z^۲$ را به شرط $X = ۱$ و $Y = ۲$ بیابید.

۷۳.۴ با مراجعه به تمرین ۹۰.۳، میانگین شرطی و واریانس شرطی Y به شرط $X = \frac{۱}{۴}$ را پیدا کنید.

۷۴.۴ با مراجعه به مثال ۲۲.۳، و قسمت (ب) از تمرین ۹۴.۳، مقدار امید $X_۲^۲X_۳$ به شرط $X_۱ = \frac{۱}{۲}$ را بیابید.

۷۵.۴ (الف) نشان دهید که تابع توزیع شرطی متغیر تصادفی پیوستهٔ X به شرط $a < X \le b$ به‌صورت

$$F(x|a < X \leq b) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

است.

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) نسبت به x مشتق بگیرید و چگالی احتمال شرطی X به شرط $a < X \leq b$ را بیابید و نشان دهید که

$$E[u(X)|a < X \leq b] = \frac{\int_a^b u(x)f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

کاربردها

۷۶.۴ سکه‌ای را طوری خم می‌کنیم که احتمال آمدن شیر و خط با آن به‌ترتیب ۰٫۴۰ و ۰٫۶۰ باشد. این سکه را دوبار پرتاب می‌کنیم. کوواریانس Z، تعداد شیرها در اولین پرتاب، و W، تعداد کل شیرهای حاصل در دو پرتاب این سکه را بیابید.

۷۷.۴ قطر داخلی لوله‌ای استوانه‌ای شکل متغیری تصادفی با میانگین ۳ اینچ و انحراف معیار ۰٫۰۲ اینچ است، ضخامت لوله، متغیری تصادفی با میانگین ۰٫۳ اینچ و انحراف معیار ۰٫۰۰۵ اینچ است، و این دو متغیر تصادفی مستقل‌اند. میانگین و انحراف معیار قطر خارجی لوله را پیدا کنید.

۷۸.۴ طول یک نوع آجر متغیری تصادفی با میانگین ۸ اینچ و انحراف معیار ۰٫۱ اینچ، و ضخامت ملاط بین دو آجر متغیری تصادفی با میانگین ۰٫۵ اینچ و انحراف معیار ۰٫۰۳ اینچ است. میانگین و انحراف معیار طول دیواری را که از کنار هم گذاشتن ۵۰ آجر ساخته شده است، به شرط آنکه بتوانیم فرض کنیم تمام متغیرهای تصادفی موجود مستقل‌اند، پیدا کنید.

۷۹.۴ اگر وقتی سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم شیر یک پیروزی باشد، وقتی تاسی را می‌ریزیم آمدن ۶ یک پیروزی باشد، و در کشیدن کارتی از یک دستهٔ ۵۲ کارتی آمدن تک، یک پیروزی باشد، مطلوب است میانگین و انحراف معیار تعداد کل پیروزیها، وقتی

(الف) سکهٔ همگنی را پرتاب کنیم، تاس همگنی را بریزیم، و آنگاه کارتی را از دسته کارتی که خوب بُرخورده است بیرون بکشیم.

(ب) سکهٔ همگنی را سه‌بار پرتاب کنیم، تاس همگنی را دوبار بریزیم، و آنگاه کارتی را از دسته کارتی که خوب بُرخورده است بیرون بکشیم.

۸۰.۴ اگر متناوباً سکه‌ای همگن و سکه‌ای ناهمگن را که احتمال شیر آمدن آن ۰٫۴۵ است پرتاب کنیم، میانگین و واریانس تعداد شیرهایی که در ده پرتاب این سکه‌ها به‌دست می‌آوریم چقدرند؟

۸۱.۴ با مراجعه به تمرین ۳.۸۰ و قسمت (ب) در تمرین ۳.۹۹، امید تعداد کتابهای ریاضی را به شرط آنکه هیچ کتاب آماری انتخاب نشده باشد بیابید.

۸۲.۴ با مراجعه به تمرین ۳.۱۰۳، بازاریابی که ۱۲ تومان برای مصرف بنزین خرج می‌کند، انتظار دارد که چه مبلغی به او پرداخت شود؟

۸۳.۴ مدت زمانی (برحسب دقیقه) که مقام اجرایی یک شرکت با تلفن صحبت می‌کند متغیری تصادفی است که دارای چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} & 0 < x \le 2 \\ \frac{4}{x^3} & x > 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. با رجوع به قسمت (ب)ی تمرین ۴.۷۵، امید مدت زمان یکی از این مکالمات تلفنی را که حداقل ۱ دقیقه به طول می‌انجامد بیابید.

مراجع

اطلاعات دیگری دربارهٔ مطالب این بخش را می‌توان در کتابهای آمار ریاضی پیشرفته‌تری که در انتهای فصل ۳ فهرست شده‌اند یافت.

۵

توزیعهای احتمال خاص

۱.۵ مقدمه

در این فصل بعضی توزیعهای احتمال را که در نظریهٔ آمار و در کاربردها به‌صورتی بسیار چشمگیر ظاهر می‌شوند مطالعه می‌کنیم. همچنین **پارامترهای** این توزیعها، یعنی کمیتهایی را که برای توزیعهای خاص ثابت‌اند، ولی برای اعضای مختلف خانواده‌های توزیعهای همنوع، مقادیر مختلفی دارند مطالعه خواهیم کرد. متداولترین پارامترها، گشتاورهای مراتب پایین، عمدتاً μ و σ^2 هستند، و همان‌طور که در بخش قبل دیدیم اساساً دو راه وجود دارد که به‌وسیلهٔ آنها این گشتاورها به‌دست

می‌آیند: می‌توانیم مجموعهای لازم را مستقیماً محاسبه کنیم، و یا با تابعهای مولد گشتاورها کار کنیم. گرچه به‌نظر منطقی می‌رسد که در هر مورد، روشی را که ساده‌تر است به‌کار بریم، اما اغلب هردو راه را به‌کار خواهیم گرفت. در برخی موارد این کار به‌دلیل آنکه نتایج حاصل بعدتر مورد نیازند انجام خواهد شد؛ و در سایر موارد صرفاً برای دادن تجربه به خواننده درکاربرد تکنیکهای ریاضی مربوط است. همچنین برای اینکه حدود این فصل را در حدّ معقول نگه‌داریم، بسیاری از جزئیات به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار شده‌اند.

۲.۵ توزیع یکنواخت گسسته

اگر یک متغیر تصادفی بتواند k مقدار مختلف را با احتمالهای برابر اختیار کند، گوییم که دارای **توزیع یکنواخت گسسته** است؛ به‌صورت نمادی،

تعریف ۱.۵ متغیر تصادفی X دارای **توزیع یکنواخت گسسته** است، و به آن، عنوان متغیر تصادفی یکنواخت گسسته داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن، برای $x_i \neq x_j$، وقتی $i \neq j$، به‌صورت

$$f(x) = \frac{1}{k} \qquad x = x_1, x_2, \cdots, x_k$$

باشد.

بنابر تعریفهای ۲.۴ و ۴.۴، میانگین و واریانس این توزیع $\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{1}{k}$ و $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k}$ هستند.

در حالت خاصی که $x_i = i$، توزیع یکنواخت گسسته به‌صورت $f(x) = \frac{1}{k}$ به‌ازای $x = 1, 2, \cdots, k$ درمی‌آید، و این شکل توزیع، مثلاً، برای توزیع عددی که در ریختن یک تاس همگن ظاهر می‌شود به‌کار می‌رود. میانگین و واریانس این توزیع یکنواخت گسسته و تابع مولد گشتاورهای آن در تمرینهای ۱.۵ و ۲.۵ مورد بحث واقع می‌شوند.

۳.۵ توزیع برنولی

اگر آزمایشی دو برآمد داشته باشد، «پیروزی» و «شکست»، و احتمال آنها به‌ترتیب θ و $1 - \theta$ باشند، آنگاه تعداد پیروزیها یعنی ۰ یا ۱، **توزیع برنولی** دارد. به‌صورت نمادی

تعریف ۲.۵ متغیر تصادفی X **توزیع برنولی** دارد، و به آن عنوان متغیر تصادفی برنولی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمالش به‌صورت

$$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

باشد.

پس، $f(0;\theta) = 1-\theta$ و $f(1;\theta) = \theta$ در فرمولی واحد ترکیب شده‌اند. ملاحظه کنید که نماد $f(x;\theta)$ را به‌کار برده‌ایم تا صریحاً نشان دهیم که توزیع برنولی دارای یک پارامتر θ است. چون توزیع برنولی حالتی خاص از توزیع بخش ۴.۵ است، در اینجا به‌تفصیل دربارهٔ آن بحث نخواهیم کرد.

در ارتباط با توزیع برنولی، پیروزی می‌تواند به‌دست آوردن شیر در پرتاب یک سکهٔ همگن، ابتلا به ذات‌الریه، قبول شدن (یا رد شدن) در یک امتحان، و باختن در یک مسابقه باشد. این ناسازگاری، یادگار زمانی است که نظریهٔ احتمال فقط در مورد بازیهای شانسی (که شکست یک بازیکن پیروزی بازیکن دیگر بود) به‌کار می‌رفت. همچنین به‌همین دلیل ما به آزمایشی که توزیع برنولی برای آن به‌کار می‌رود، عنوان **امتحان برنولی** یا به‌صورت ساده **امتحان** و به‌دنباله‌هایی از چنین آزمایشهایی، عنوان **امتحانهای تکراری** را می‌دهیم.

۴.۵ توزیع دوجمله‌ای

امتحانهای تکراری، نقش بسیار مهمی در احتمال و آمار بازی می‌کنند، خصوصاً وقتی تعداد امتحانها ثابت، پارامتر θ (احتمال پیروزی) برای تمام امتحانها برابر، و امتحانها همگی مستقل باشند. به‌طوری که خواهیم دید، چندین متغیر تصادفی وجود دارند که در رابطه با امتحانهای تکراری پیش می‌آیند. یکی از آنها که در اینجا مطالعه خواهیم کرد مربوط به تعداد کل پیروزیهاست؛ دیگر متغیرها را در بخش ۵.۵ ارائه می‌دهیم.

نظریه‌ای که در این بخش از آن بحث می‌کنیم کاربردهای زیادی دارد؛ به‌عنوان نمونه، اگر بخواهیم بدانیم که احتمال آوردن ۵ شیر در ۱۲ پرتاب یک سکه، احتمال بهبود ۷ نفر از ۱۰ نفر مبتلا به یک بیماری گرمسیری، یا احتمال اینکه ۳۵ نفر از ۸۰ نفر به آگهی فروش یک قلم کالا پاسخ دهند چقدر است این نظریه به‌کار می‌رود. اما، این مطلب فقط وقتی درست است که هر ۱۰ نفر شانس بهبود یکسانی داشته و بهبود آنها مستقل از یکدیگر باشد. (مثلاً، به‌وسیلهٔ پزشکان مختلف و در بیمارستانهای مختلف درمان شوند)، و به شرطی که احتمال دادن پاسخ به آگهی فروش کالا برای هر یک از ۸۰ نفر یکسان بوده و استقلال نیز وجود داشته باشد (مثلاً هیچ دو نفری از آنها به یک خانوار متعلق نباشند).

به‌منظور تهیهٔ فرمولی برای احتمال به‌دست آوردن «x پیروزی در n امتحان»، تحت شرایطی که بیان شدند، ملاحظه کنید که احتمال به‌دست آوردن x پیروزی و $n-x$ شکست در یک ترتیب مشخص برابر $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ است. برای هر پیروزی یک عامل θ و برای هر شکست یک عامل

$\theta - ۱$ وجود دارد و بنابر فرض استقلال، x عامل θ و $n - x$ عامل $\theta - ۱$ در یکدیگر ضرب می‌شوند. چون این احتمال با هر دنباله‌ای از n امتحان که در آن x پیروزی و $n - x$ شکست وجود دارند همراه است، تنها باید تعداد دنباله‌های از این نوع را بشماریم و سپس $\theta^x(۱ - \theta)^{n-x}$ را در این تعداد ضرب کنیم. روشن است تعداد راههایی که می‌توانیم x امتحان را، که برآمد همهٔ آنها پیروزی است، انتخاب کنیم برابر است با $\binom{n}{x}$، و نتیجه می‌شود که احتمال مطلوب برای «x پیروزی در n امتحان» برابر $\binom{n}{x}\theta^x(۱ - \theta)^{n-x}$ است.

تعریف ۳.۵ متغیر تصادفی X **توزیع دوجمله‌ای** دارد، و به‌آن عنوان متغیر تصادفی دوجمله‌ای داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن به‌صورت

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{k}\theta^x(۱ - \theta)^{n-x} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$$

باشد.

پس، تعداد پیروزیها در n امتحان، متغیری تصادفی است که توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ دارد. نام «توزیع دوجمله‌ای» از این واقعیت نتیجه می‌شود که مقادیر $b(x; n, \theta)$ به‌ازای $x = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$، جملات متوالی بسط دوجمله‌ای $[(۱ - \theta) + \theta]^n$ هستند؛ این مطلب نشان می‌دهد که مجموع احتمالها، همان‌گونه که باید، مساوی ۱ است.

مثال ۱.۵

احتمال به‌دست آوردن ۵ شیر و ۷ خط را در ۱۲ پرتاب یک سکهٔ همگن پیدا کنید.

حل. در فرمول توزیع دوجمله‌ای اگر قرار دهیم $x = ۵$، $n = ۱۲$، و $\theta = \frac{۱}{۲}$، به‌دست می‌آوریم

$$b(۵; ۱۲, \frac{۱}{۲}) = \binom{۱۲}{۵}(\frac{۱}{۲})^۵(۱ - \frac{۱}{۲})^{۱۲-۵}$$

و با پیدا کردن مقدار $\binom{۱۲}{۵}$ در جدول VII، نتیجه می‌گیریم که جواب، $۷۹۲(\frac{۱}{۲})^{۱۲}$ یا تقریباً ۱۹ر۰ است. ▲

مثال ۲.۵

احتمال بهبود ۷ نفر از ۱۰ نفر از یک بیماری گرمسیری را در صورتی که فرض استقلال برقرار و احتمال بهبود هریک از آنها ۸۰ر۰ باشد پیدا کنید.

حل. اگر در فرمول توزیع دوجمله‌ای قرار دهیم $x = ۷$، $n = ۱۰$ و $\theta = ۰٫۸۰$، به‌دست می‌آوریم

$$b(۷; ۱۰, ۰٫۸۰) = \binom{۱۰}{۷}(۰٫۸۰)^{۷}(۱ - ۰٫۸۰)^{۱۰-۷}$$

و با پیدا کردن مقدار $\binom{۱۰}{۷}$ در جدول VII، نتیجه می‌گیریم که جواب، $۱۲۰(۰٫۸۰)^{۷}(۰٫۲۰)^{۳}$ یا تقریباً ۰٫۲۰ است. ▲

اگر سعی کنیم سومین احتمالی را که در صفحهٔ ۱۸۴ مورد سؤال بود، یعنی احتمال مربوط به پاسخ دادن به آگهی فروش یک قلم کالا را، با قرار دادن $x = ۳۵$، $n = ۸۰$، و مثلاً $\theta = ۰٫۱۵$ در فرمول توزیع دوجمله‌ای محاسبه کنیم، متوجه می‌شویم انجام این محاسبه مستلزم کار فوق‌العاده زیادی است. در عمل به‌ندرت احتمالهای دوجمله‌ای مستقیماً محاسبه می‌شوند، زیرا آنها به‌صورتی جامع برای مقادیر مختلف θ و n جدولبندی شده‌اند و نرم‌افزارهای کامپیوتری فراوانی وجود دارند که احتمالهای دوجمله‌ای و همچنین احتمالهای تجمعی متناظر آنها، یعنی

$$B(x; n, \theta) = \sum_{k=۰}^{x} b(k; n, \theta)$$

را با دستورهای ساده به‌دست می‌دهند. مثالی از چنین خروجی کامپیوتری (با اندکی تفاوت در نمادگذاری) را در شکل ۱.۵ نشان داده‌ایم.

درگذشته، استفاده از جدول دفتر ملی استانداردها[1] وکتابی از رومینگ[2] بسیار متداول بود؛ اینها در مراجع انتهای این فصل فهرست شده‌اند. جدول I در انتهای کتاب، مقادیر $b(x; n, \theta)$ را با چهار

```
MTB > BINOMIAL N=10 P=0.63

  BINOMIAL PROBABILITIES FOR N = 10 AND P = .630000

     K               P(X = K)              P(X LESS OR = K)
     0                .0000                     .0000
     1                .0008                     .0009
     2                .0063                     .0071
     3                .0285                     .0356
     4                .0849                     .1205
     5                .1734                     .2939
     6                .2461                     .5400
     7                .2394                     .7794
     8                .1529                     .9323
     9                .0578                     .9902
    10                .0098                    1.0000
```

شکل۱.۵ خروجی کامپیوتری احتمالهای دوجمله‌ای برای $n = ۱۰$ و $\theta = ۰٫۶۳$.

1. National Bureau of Standards 2. H. G. Romig

رقم دهدهی، برای $n = ۱$ تا ۲۰ و n و $\theta = ۰٫۰۵, ۰٫۱۰, ۰٫۱۵, \cdots, ۰٫۴۵, ۰٫۵۰$ به‌دست می‌دهد. وقتی θ بزرگتر از ۰٫۵۰ است، برای استفاده از این جدول، به اتحاد زیر رجوع می‌کنیم،

قضیهٔ۵.۱

$$b(x; n, \theta) = b(n - x;\ n, ۱ - \theta)$$

که اثبات آن در تمرین ۵.۵، قسمت (الف)، از خواننده خواسته شده است. به‌عنوان مثال، برای تعیین $b(۱۱; ۱۸, ۰٫۷۰)$، مقدار $b(۷; ۱۸, ۰٫۳۰)$ را پیدا می‌کنیم که ۰٫۱۳۷۶ می‌شود. وقتی n بزرگ است، چندین راه مختلف وجود دارند که طی آنها می‌توان احتمالهای دوجمله‌ای را تقریب زد. یکی از این راهها را در بخش ۵.۷، و یکی دیگر را در بخش ۶.۶ ذکر خواهیم کرد.

حال برای میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای فرمولهایی پیدا می‌کنیم.

قضیهٔ۵.۲ میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای برابرند با

$$\mu = n\theta \quad \text{و} \quad \sigma^۲ = n\theta(۱ - \theta)$$

برهان. برای تعیین میانگین، مستقیماً مجموع زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{x=۰}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=۱}^{n} \frac{n!}{(x-۱)!(n-x)!} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}\end{aligned}$$

که در آن، جملهٔ متناظر با $x = ۰$ را که برابر صفر است حذف و عامل x را با x موجود در $x! = x(x-۱)!$ که در مخرج $\binom{n}{x}$ است ساده کرده‌ایم. سپس با خارج کردن عامل n که در $n! = n(n-۱)!$ وجود دارد و عامل θ، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = n\theta \cdot \sum_{x=۱}^{n} \binom{n-۱}{x-۱} \theta^{x-۱} (۱ - \theta)^{n-x}$$

که اگر قرار دهیم $y = x - ۱$ و $m = n - ۱$، این عبارت به‌صورت

$$\mu = n\theta \cdot \sum_{y=۰}^{m} \binom{m}{y} \theta^y (۱ - \theta)^{m-y} = n\theta$$

درمی‌آید، زیرا آخرین مجموع، مساوی مجموع تمام مقادیر توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای m و θ است که در نتیجه برابر ۱ است.

در یافتن عبارتی برای μ'_2 و سپس برای σ^2، واقعیت $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$ را به‌کار می‌بریم و ابتدا $E[X(X-1)]$ را محاسبه می‌کنیم. برای تمام مقاصد عملی دقیقاً با تکرار مراحل بالا به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= n(n-1)\theta^2 \cdot \sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}\theta^{x-2}(1-\theta)^{n-x} \end{aligned}$$

که اگر قرار دهیم $y = x-2$ و $m = n-2$، این عبارت به‌صورت

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= n(n-1)\theta^2 \cdot \sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}\theta^y(1-\theta)^{m-y} \\ &= n(n-1)\theta^2 \end{aligned}$$

درمی‌آید. بنابراین

$$\mu'_2 = E[X(X-1)] + E(X) = n(n-1)\theta^2 + n\theta$$

و سرانجام

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mu'_2 - \mu^2 \\ &= n(n-1)\theta^2 + n\theta - n^2\theta^2 \\ &= n\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

■

برهان دیگری از این قضیه که عملیات جبری کمتری دارد در تمرین ۶.۵ پیشنهاد شده است.

اینکه میانگین توزیع دوجمله‌ای برابر $n\theta$ است نباید شگفت‌انگیز باشد. بحثی ندارد که وقتی سکهٔ همگنی ۲۰۰ بار پرتاب شود، انتظار داریم که (به مفهوم امید ریاضی)، $۲۰۰ \cdot \frac{1}{2} = ۱۰۰$ بار شیر و ۱۰۰ بار خط بیاید، به‌همین نحو وقتی تاسی همگن ۲۴۰ بار ریخته شود انتظار $۲۴۰ \cdot \frac{1}{6} = ۴۰$

خال شش را داریم، و وقتی احتمال اینکه شخصی از فروشگاهی خریدی بکند ۰٫۸۰ باشد، انتظار داریم ۳۲۰ $=$ (۰٫۸۰)۴۰۰ نفر از ۴۰۰ نفری که به این فروشگاه مراجعه می‌کنند چیزی خریداری کنند.

فرمول واریانس توزیع دوجمله‌ای، که معیار تغییرات است، کاربردهای خیلی مهمی دارد، اما برای تأکید بر اهمیت آن، متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{n}$ را در نظر بگیرید، که در آن X متغیری تصادفی است که توزیعی دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ دارد. این متغیر تصادفی نسبت پیروزیها در n امتحان است، و در تمرین ۶.۵ از خواننده خواسته شده است که قضیهٔ زیر را ثابت کند.

قضیهٔ ۳.۵ اگر X توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ داشته باشد و $Y = \frac{X}{n}$، آنگاه

$$E(Y) = \theta \quad \text{و} \quad \sigma_Y^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

حال اگر قضیهٔ چبیشف را با $k\sigma = c$ به‌کار بریم (تمرین ۴۰.۴ را ببینید)، می‌توانیم حکم کنیم که برای هر ثابت مثبت c، احتمال اینکه نسبت پیروزیها در n امتحان بین $\theta - c$ و $\theta + c$ قرار گیرد حداقل برابر است با

$$1 - \frac{\theta(1-\theta)}{nc^2}$$

در نتیجه، وقتی $n \to \infty$، احتمال اینکه اختلاف نسبت پیروزیها با θ، کوچکتر از هر عدد ثابت دلخواه c باشد به ۱ میل می‌کند این نتیجه به‌نام **قانون اعداد بزرگ** موسوم است، و باید توجه داشت که این قانون دربارهٔ نسبت پیروزیها به‌کار می‌رود و نه دربارهٔ تعداد واقعی آنها. اگر فرض کنیم که وقتی n بزرگ است تعداد پیروزیها باید الزاماً نزدیک به $n\theta$ باشد، فرضی اشتباه خواهد بود.

چون به‌دست آوردن تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای آسان است، آن‌را پیدا می‌کنیم و برای تحقیق نتایج قضیهٔ ۲.۵ به‌کار می‌بریم.

قضیهٔ ۴.۵ تابع مولد گشتاور توزیع دوجمله‌ای به‌صورت

$$M_X(t) = [1 + \theta(e^t - 1)]^n$$

است.

برهان. بنابر تعریفهای ۶.۴ و ۳.۵، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{x=۰}^{n} e^{xt}\binom{n}{x}\theta^x(۱-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=۰}^{n}\binom{n}{x}(\theta e^t)^x(۱-\theta)^{n-x} \end{aligned}$$

و بنابر قضیهٔ ۹.۱، به‌آسانی قابل تشخیص است که این مجموع، بسط دوجمله‌ای

$$[\theta e^t + (۱-\theta)]^n = [۱+\theta(e^t-۱)]^n$$

است. ■

اگر دوبار از $M_X(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= n\theta e^t[۱+\theta(e^t-۱)]^{n-۱} \\ M_X''(t) &= n\theta e^t[۱+\theta(e^t-۱)]^{n-۱} + n(n-۱)\theta^۲ e^{۲t}[۱+\theta(e^t-۱)]^{n-۲} \\ &= n\theta e^t(۱-\theta+n\theta e^t)[۱+\theta(e^t-۱)]^{n-۲} \end{aligned}$$

و پس از قرار دادن $t=۰$ در آنها، به‌دست می‌آوریم $\mu_۱' = n\theta$ و $\mu_۲' = n\theta(۱-\theta+n\theta)$. لذا، $\mu = n\theta$ و $\sigma^۲ = \mu_۲' - \mu^۲ = n\theta(۱-\theta+n\theta) - (n\theta)^۲ = n\theta(۱-\theta)$ ، که با فرمولهایی که در قضیهٔ ۲.۵ داده شدند یکی هستند.

از آنچه در این بخش گفتیم به‌نظر می‌رسد که پیدا کردن گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای از روی تابع مولد گشتاورها آسانتر از محاسبهٔ آنها از راه مستقیم است، اما اگر بخواهیم، مثلاً $\mu_۳'$ یا $\mu_۴'$ را معین کنیم آشکار است که مشتقگیری نسبتاً مشکلتر می‌شود. در واقع راهی آسانتر برای تعیین گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای وجود دارد؛ راهی که مبتنی بر **تابع مولد گشتاورهای عاملی** است و در تمرین ۱۲.۵ توضیح داده شده است.

تمرینها

۱.۵ اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته $f(x) = \frac{۱}{k}$، به‌ازای $x = ۱, ۲, \cdots, k$ باشد نشان دهید که

(الف) میانگین آن $\mu = \frac{(k+۱)}{۲}$ است؛

(ب) واریانس آن $\sigma^۲ = \frac{(k^۲-۱)}{۱۲}$ است.

(راهنمایی: به پیوست انتهای کتاب رجوع کنید).

۲.۵ اگر X دارای توزیع یکنواخت گسستهٔ $f(x) = \frac{۱}{k}$ به‌ازای، $x = ۱, ۲, \cdots, k$ باشد، نشان

دهید که تابع مولد گشتاورهایش به‌صورت

$$M_X(t) = \frac{e^t(1 - e^{kt})}{k(1 - e^t)}$$

است. همچنین میانگین این توزیع را با محاسبهٔ $\lim_{t \to 0} M'_X(t)$ بیابید، و آن‌را با نتیجه‌ای که در قسمت (الف) تمرین ۱.۵ به‌دست آمد مقایسه کنید.

۳.۵ توزیع برنولی را در بخش ۳.۵ به‌تفصیل بررسی نکردیم، زیرا می‌توان آن‌را توزیعی دوجمله‌ای با $n = 1$ به‌حساب آورد. از دو راه زیر نشان دهید که در مورد توزیع برنولی، برای $r = 1, 2, 3, \cdots$، $\mu'_r = \theta$.

(الف) با محاسبهٔ مجموع $\sum_{x=0}^{1} x^r \cdot f(x; \theta)$؛

(ب) با قرار دادن $n = 1$ در تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای و بررسی سری ماکلورن.

۴.۵ با استفاده از نتیجهٔ تمرین قبل نشان دهید که برای توزیع برنولی

(الف) $\alpha_3 = \frac{(1-2\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$، که در آن α_3 معیار چاولگی است که در تمرین ۳۴.۴ تعریف شد؛

(ب) $\alpha_4 = \frac{[1-3\theta(1-\theta)]}{\theta(1-\theta)}$، که در آن α_4 معیار کشیدگی است که در تمرین ۳۵.۴ تعریف شد.

۵.۵ تحقیق کنید که

(الف) $b(x; n, \theta) = b(n - x, n, 1 - \theta)$

همچنین نشان دهید که اگر برای $x = 0, 1, 2, \cdots, n$، $B(x; n, \theta) = \sum_{k=0}^{x} b(k; n, \theta)$ باشد، آنگاه

(ب) $b(x; n, \theta) = B(x; n, \theta) - B(x - 1; n, \theta)$؛

(ج) $b(x; n, \theta) = B(n - x; n, 1 - \theta) - B(n - x - 1; n, 1 - \theta)$؛

(د) $B(x; n, \theta) = 1 - B(n - x - 1; n, 1 - \theta)$.

۶.۵ برهانی دیگر از قضیه ۲.۵ را می‌توان براساس این واقعیت استوار کرد که اگر X_1، X_2، . . . ، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع و دارای توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، آنگاه $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ متغیری تصادفی است که دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است.

(الف) مستقیماً (یعنی بدون استفاده از این واقعیت که توزیع برنولی حالت خاص توزیع دوجمله‌ای است) تحقیق کنید که میانگین و واریانس توزیع برنولی، $\mu = \theta$ و $\sigma^2 = \theta(1 - \theta)$ هستند.

(ب) مبتنی بر قضیه ۱۴.۴ و فرع آن در صفحات ۱۷۲ و ۱۷۳ نشان دهید که اگر X_1، X_2، . . . ، و X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع آنها برنولی با پارامتر θ است و $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه

$$E(Y) = n\theta \quad \text{و} \quad \operatorname{var}(Y) = n\theta(1 - \theta)$$

۷.۵ قضیهٔ ۳.۵ را ثابت کنید.

۸.۵ هنگام محاسبهٔ تمام مقادیر توزیع دوجمله‌ای، می‌توان معمولاً ابتدا با محاسبهٔ $b(\circ; n, \theta)$ و سپس استفاده از فرمول بازگشتی

$$b(x+\text{۱}; n, \theta) = \frac{\theta(n-x)}{(x+\text{۱})(\text{۱}-\theta)} \cdot b(x; n, \theta)$$

کار را ساده کرد. درستی این فرمول را تحقیق کنید و آن‌را برای محاسبهٔ مقادیر توزیع دوجمله‌ای با $n = \text{۷}$ و $\theta = \circ\text{٫۲۵}$ به‌کار برید.

۹.۵ فرمول بازگشتی تمرین قبل را به‌کار برده نشان دهید که برای $\theta = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، توزیع دوجمله‌ای دارای

(الف) ماکسیممی در $x = \frac{n}{\text{۲}}$ است، وقتی n زوج است.

(ب) ماکسیممهایی در $x = \frac{n-\text{۱}}{\text{۲}}$ و $x = \frac{n+\text{۱}}{\text{۲}}$ است، وقتی n فرد است.

۱۰.۵ اگر X، متغیر تصادفی دوجمله‌ای باشد، به‌ازای چه مقدار θ، احتمال $b(x; n, \theta)$ ماکسیمم است؟

۱۱.۵ در برهان قضیهٔ ۲.۵، کمیت $E[X(X-\text{۱})]$ را که دومین **گشتاور عاملی** نامیده می‌شود تعیین کردیم؛ به‌طور کلی، rامین گشتاور عاملی X به‌صورت

$$\mu'_{(r)} = E[X(X-\text{۱})(X-\text{۲})\cdots(X-r+\text{۱})]$$

است. $\mu'_{\text{۲}}$، $\mu'_{\text{۳}}$ و $\mu'_{\text{۴}}$ را برحسب گشتاورهای عاملی بیان کنید.

۱۲.۵ **تابع مولد گشتاورهای عاملی** متغیر تصادفی گسستهٔ X به‌صورت

$$F_X(t) = E(t^X) = \sum_x t^x \cdot f(x)$$

داده می‌شود. نشان دهید که rامین مشتق $F_X(t)$ نسبت به t به‌ازای $t = \text{۱}$ برابر $\mu'_{(r)}$، همان rامین گشتاور عاملی است که در تمرین ۱۱.۵ تعریف شد.

۱۳.۵ با رجوع به تمرین ۱۲.۵ تابع مولد گشتاورهای عاملی

(الف) توزیع برنولی را بیابید و نشان دهید که $\mu'_{(\text{۱})} = \theta$ و برای $r > \text{۱}$، $\mu'_{(r)} = \circ$.

(ب) توزیع دوجمله‌ای را بیابید و از آن برای تعیین μ و $\sigma^{\text{۲}}$ استفاده کنید.

۱۴.۵ اگر در قسمت اول قضیهٔ ۱۰.۴ قرار دهیم $a = -\mu$، که در آن، μ میانگین X است، به‌دست می‌آوریم

$$M_Y(t) = M_{X-\mu}(t) = e^{-\mu t} \cdot M_X(t)$$

(الف) نشان دهید که مشتق rام $M_{X-\mu}(t)$ نسبت به t به‌ازای $t = \circ$، rامین گشتاور حول میانگین X را به‌دست می‌دهد.

(ب) چنین تابع مولدی را برای گشتاورهای حول میانگین توزیع دوجمله‌ای به‌دست آورید و تحقیق کنید که مشتق دوم آن به‌ازای $t = ۰$ برابر است با $n\theta(۱ - \theta)$.

۱۵.۵ با استفاده از نتیجهٔ قسمت (ب)ی تمرین قبل نشان دهید که برای توزیع دوجمله‌ای

$$\alpha_۳ = \frac{۱ - ۲\theta}{\sqrt{n\theta(۱ - \theta)}}$$

که در آن $\alpha_۳$، معیار چاولگی است که در تمرین ۳۴.۴ تعریف شد. وقتی

(الف) $\theta = \frac{۱}{۲}$؛

(ب) n بزرگ است؛

دربارهٔ چاولگی توزیع دوجمله‌ای چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

کاربردها

۱۶.۵ یک امتحان تست چندگزینه‌ای شامل ۸ سؤال، و هر سؤال شامل سه پاسخ است (که فقط یکی از آنها صحیح است). اگر دانشجویی با ریختن تاسی همگن به هر سؤال پاسخ دهد، به این طریق که اگر ۱ یا ۲ بیاورد جواب اول، اگر ۳ یا ۴ بیاورد جواب دوم و اگر ۵ یا ۶ بیاورد جواب سوم را علامت بزند، احتمال اینکه دقیقاً به ۴ سؤال جواب صحیح بدهد چقدر است؟

۱۷.۵ یک مهندس ایمنی اتومبیل ادعا می‌کند که از هر ده تصادف اتومبیل یکی ناشی از خستگی راننده است. با استفاده از فرمول توزیع دوجمله‌ای و گرد کردن نتیجه تا چهار رقم اعشار، احتمال اینکه حداقل ۳ تا از ۵ تصادف اتومبیل ناشی از خستگی راننده باشد چقدر است؟

۱۸.۵ اگر ۴۰ درصد موشهایی که در یک آزمایش مورد استفاده هستند، در طول یک دقیقه بعد از تزریق داروی آزمایش حالت تهاجمی شدید پیدا کنند، احتمال اینکه دقیقاً شش تا از پانزده موشی که دارو به آنها تزریق شده است در طول یک هفته حالت تهاجمی شدید پیدا کنند با استفاده از

(الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای؛

(ب) جدول I؛

چقدر است؟

۱۹.۵ در شهری، دلیل قانونی ۷۰ درصد از تمام موارد اطلاق عدم توافق اخلاقی اعلام شده است. احتمال اینکه دلیل پنج‌تا از شش مورد طلاق بعدی که در این شهر ثبت می‌شود عدم توافق اخلاقی اعلام شود، با استفاده از

(الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای؛

(ب) جدول I؛

چقدر است؟

۲۰.۵ یک جامعه‌شناس ادعا می‌کند که فقط ۵۰ درصد دانش‌آموزان سال آخر دبیرستان که توانایی ادامهٔ تحصیل در دانشگاه را دارند واقعاً به دانشگاه راه می‌یابند. به فرض اینکه این ادعا درست

باشد، با استفاده از جدول I پیدا کنید، احتمال اینکه از بین ۱۸ دانش‌آموز سال آخر دبیرستان که توانایی ادامهٔ تحصیل دانشگاه را دارند

(الف) دقیقاً ۱۰ نفر به دانشگاه راه یابند؛

(ب) حداقل ۱۰ نفر به دانشگاه راه یابند؛

(ج) حداکثر ۸ نفر به دانشگاه راه یابند.

۲۱.۵ فرض کنید احتمال اینکه اتومبیلی که در شهری دزدیده شده است پیدا شود ۶۳ر۰ است. خروجی کامپیوتری شکل ۱.۵ را به‌کار برید، و احتمال آن را بیابید که حداقل ۸ اتومبیل از ۱۰ اتومبیل دزدیده شده در این شهر پیدا شود؛ با استفاده از

(الف) مقادیر ستونی $\mathrm{P(X = K)}$؛

(ب) مقادیر ستونی $\mathrm{P(X\ LESS\ OR = K)}$.

۲۲.۵ با رجوع به تمرین قبل و خروجی کامپیوتری شکل ۱.۵، احتمال آن‌را بیابید که بین ۱۰ اتومبیل دزدیده شده در شهر، از ۳ تا ۵ اتومبیل پیدا شوند؛ با استفاده از

(الف) مقادیر ستونی $\mathrm{P(X = K)}$؛

(ب) مقادیر ستونی $\mathrm{P(X\ LESS\ OR = K)}$.

۲۳.۵ با رجوع به تمرین ۱۸.۵، فرض کنید که درصد به‌جای ۴۰ برابر با ۴۲ باشد. برای حلّ مجدد هر دو قسمت این تمرین، از جدول مناسب یا خروجی کامپیوتری توزیع دوجمله‌ای با $n =$ ۱۵ و $\theta =$ ۴۲ر۰ استفاده کنید.

۲۴.۵ با رجوع به تمرین ۲۰.۵، فرض کنید که درصد به‌جای ۵۰ برابر با ۵۱ باشد. برای حلّ مجدد سه قسمت این تمرین، از جدول مناسب یا خروجی کامپیوتری توزیع دوجمله‌ای با $n =$ ۱۸ و $\theta =$ ۵۱ر۰ استفاده کنید.

۲۵.۵ در برنامه‌ریزی برای راه انداختن یک مدرسهٔ جدید، یکی از اعضای هیئت امنای مدرسه ادعا می‌کند ۴ نفر از ۵ نفر معلمان پاره‌وقت بیش از یک سال در مدرسه به‌کار خود ادامه می‌دهند، در حالی‌که عضو دیگر هیئت امنا ادعا می‌کند صحیح آن است که بگوییم، ۳ نفر از ۵ نفر به‌کار خود ادامه می‌دهند. پیش‌بینیهای این دو عضو در گذشته تقریباً به یک اندازه اعتبار داشته‌اند؛ به‌قسمی‌که بدون در نظر گرفتن اطلاعات دیگر، می‌توان قضاوتهای این دو نفر را به یک اندازه معتبر دانست. اگر ادعای یکی از این دو درست باشد، در صورتی که دریابیم که ۱۱ نفر از ۱۲ نفر معلمان پاره‌وقت بیش از ۱ سال در مدرسه به‌کار خود ادامه داده‌اند چه احتمالهایی باید به ادعاهای این دو عضو تخصیص دهیم؟

۲۶.۵ با استفاده از قضیهٔ چبیشف و قضیهٔ ۳.۵ تحقیق کنید احتمالی حداقل برابر $\frac{۳۵}{۳۶}$ وجود دارد که

(الف) در ۹۰۰ پرتاب یک سکهٔ همگن، نسبت شیرها بین ۴۰ر۰ و ۶۰ر۰ باشد؛

(ب) در ۱۰۰۰۰ پرتاب یک سکهٔ همگن، نسبت شیرها بین ۴۷ر۰ و ۵۳ر۰ باشد؛

(ج) در ۱۰۰۰۰۰۰ پرتاب یک سکهٔ همگن، نسبت شیرها بین ۴۹۷ر۰ و ۵۰۳ر۰ باشد.

توجه کنید که این تمرین برای توضیح قانون اعداد بزرگ به‌کار می‌رود.

۵.۵ توزیعهای دوجمله‌ای منفی و هندسی

در ارتباط با امتحانهای برنولی مکرر، گاهی به تعداد امتحانهایی که برای آنها k پیروزی رخ می‌دهد توجه داریم. برای نمونه، ممکن است احتمال اینکه دهمین طفلی که در معرض ابتلا به یک بیماری مسری قرارگرفته است سومین طفلی باشد که به آن دچار می‌شود، احتمال اینکه پنجمین فردی که شایعه‌ای را می‌شنود اولین فردی باشد که آن را باور می‌کند، یا احتمال اینکه دزدی برای دومین‌بار در دفعهٔ هشتم ارتکاب به دزدی دستگیر شود مورد توجه باشد.

اگر kامین پیروزی در xامین امتحان رخ دهد، باید $k - ۱$ پیروزی در اولین $x - ۱$ امتحان وجود داشته باشد، و احتمال این پیشامد عبارت است از

$$b(k-۱; x-۱, \theta) = \binom{x-۱}{k-۱}\theta^{k-۱}(۱-\theta)^{x-k}$$

احتمال یک پیروزی در kامین امتحان برابر θ است، و بنابراین احتمال آنکه kامین پیروزی در xامین امتحان رخ دهد برابر است با

$$\theta \cdot b(k-۱; x-۱, \theta) = \binom{x-۱}{k-۱}\theta^{k}(۱-\theta)^{x-k}$$

تعریف ۴.۵ متغیر تصادفی X، توزیع دوجمله‌ای منفی دارد و به‌آن، عنوان متغیر تصادفی دوجمله‌ای منفی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمالش به‌ازای، $x = k, k+۱, k+۲, \cdots$ به‌صورت

$$b^*(x; k, \theta) = \binom{x-۱}{k-۱}\theta^{k}(۱-\theta)^{x-k}$$

باشد.

پس شمارهٔ امتحانی که kامین پیروزی در آن رخ می‌دهد، متغیری تصادفی است که توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای k و θ دارد. نام «توزیع دوجمله‌ای منفی» از این واقعیت نتیجه می‌شود که مقادیر $b^*(x; k, \theta)$ به‌ازای $x = k, k+۱, k+۲, \cdots$، جمله‌های متوالی بسط دوجمله‌ای $\left(\frac{۱}{\theta} - \frac{۱-\theta}{\theta}\right)^{-k}$ است.* در نوشته‌های آماری، به توزیعهای دوجمله‌ای منفی، عنوان **توزیعهای زمان انتظار دوجمله‌ای** یا **توزیعهای پاسکال** نیز داده می‌شود.

* بسطهای دوجمله‌ای با توانهای منفی، درکتاب ویلیام فلرکه در بین مراجع انتهای فصل ۲ آمده است توضیح داده شده است.

مثال ۳.۵
اگر طفلی که در معرض ابتلا به یک بیماری مسری قرار دارد با احتمال ۰٫۴۰ به آن دچار شود، احتمال اینکه دهمین طفل در معرض بیماری، سومین طفلی باشد که به آن دچار می‌شود چقدر است؟

حل. اگر در فرمول توزیع دوجمله‌ای منفی قرار دهیم $x = ۱۰$، $k = ۳$، و $\theta = ۰٫۴۰$، به‌دست می‌آوریم

$$b^*(۱۰; ۳, ۰٫۴۰) = \binom{۹}{۲}(۰٫۴۰)^۳(۰٫۶۰)^۷ = ۰٫۰۶۴۵$$

▲

وقتی جدولی از توزیع دوجمله‌ای در دسترس باشد، تعیین احتمالهای دوجمله‌ای منفی را می‌توان عموماً با استفاده از اتحاد

قضیهٔ ۵.۵

$$b^*(x; k, \theta) = \frac{k}{x} \cdot b(k; x, \theta)$$

به‌سادگی انجام داد. در تمرین ۲۹.۵، از خواننده تحقیق درستی این اتحاد خواسته شده است.

مثال ۴.۵
قضیهٔ ۵.۵ و جدول I را برای حل مجدد مثال ۳.۵ به‌کار برید.

حل. اگر در فرمول قضیهٔ ۵.۵ قرار دهیم $x = ۱۰$، $k = ۳$، و $\theta = ۰٫۴۰$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} b^*(۱۰; ۳, ۰٫۴۰) &= \frac{۳}{۱۰} \cdot b(۳; ۱۰, ۰٫۴۰) \\ &= \frac{۳}{۱۰}(۰٫۲۱۵۰) = ۰٫۰۶۴۵ \end{aligned}$$

▲

گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای منفی را می‌توان با روشی نظیر برهان قضیهٔ ۲.۵ به‌دست آورد. برای میانگین و واریانس به‌دست می‌آوریم:

قضیهٔ۶.۵ میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای منفی عبارت‌اند از

$$\mu = \frac{k}{\theta} \quad \text{و} \quad \sigma^{۲} = \frac{k}{\theta}\left(\frac{۱}{\theta} - ۱\right)$$

تحقیق درستی این نتایج در تمرین ۳۰.۵، از خواننده خواسته شده است.

چون توزیع دوجمله‌ای منفی برای $k = ۱$ کاربردهای بسیار مهمی دارد، به‌آن نام ویژه‌ای داده شده است؛ و آن را **توزیع هندسی** می‌نامند.

تعریف۵.۵ متغیر تصادفی X، **توزیع هندسی** دارد، و به آن، عنوان متغیر تصادفی هندسی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن به‌صورت

$$x = ۱, ۲, ۳, \cdots \quad \text{و} \quad g(x; \theta) = \theta(۱ - \theta)^{x-۱}$$

باشد.

مثال ۵.۵

اگر احتمال قبولی یک متقاضی گواهینامهٔ رانندگی، هر بار که در آزمون شهر شرکت می‌کند ۷۵ر۰ باشد، احتمال اینکه یک متقاضی سرانجام در چهارمین بار قبول شود چقدر است؟

حل. اگر در فرمول توزیع هندسی قرار دهیم $x = ۴$، و $\theta = ۰{,}۷۵$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} g(۴; ۰{,}۷۵) &= ۰{,}۷۵(۱ - ۰{,}۷۵)^{۴-۱} \\ &= ۰{,}۷۵(۰{,}۲۵)^{۳} = ۰{,}۰۱۱۷ \end{aligned}$$

البته، این نتیجه بر این فرض استوار است که تمام امتحانها مستقل باشند، و در اینجا ممکن است اعتبار آن مورد تردید باشد. ▲

۶.۵ توزیع فوق هندسی

در فصل ۲ به‌منظور تشریح قاعده‌های ضرب برای پیشامدهای مستقل و وابسته، نمونه‌گیری با جایگذاری و بدون جایگذاری را به‌کار بردیم. برای به‌دست آوردن فرمولی شبیه فرمول توزیع دوجمله‌ای، که در آن نمونه‌گیری بدون جایگذاری است، و در نتیجه امتحانها مستقل نیستند، مجموعه‌ای از

N عنصر را در نظر می‌گیریم که kتای آنها به‌عنوان پیروزی و $N-k$تای دیگر را شکست تلقی می‌کنیم. مثل حالت توزیع دوجمله‌ای، احتمال به‌دست آوردن x پیروزی در n امتحان مورد توجه است، اما اینک بدون جایگذاری، n عنصر از N عنصر موجود در مجموعه را انتخاب می‌کنیم.

$\binom{k}{x}$ راه برای انتخاب xتا از k پیروزی و $\binom{N-k}{n-x}$ راه برای انتخاب $n-x$تا از $N-k$ شکست وجود دارد، و بنابراین $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ راه برای انتخاب x پیروزی و $n-x$ شکست موجود است. چون $\binom{N}{n}$ راه برای انتخاب n عنصر از N عنصر جامعه وجود دارد و ما فرض می‌کنیم تمام آنها متساوی‌الاحتمال‌اند (که منظور ما از بیان انتخاب تصادفی همین است)، لذا از قضیهٔ ۲.۲ نتیجه می‌شود که احتمال «x پیروزی در n امتحان» برابر $\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ است.

تعریف ۶.۵ متغیر تصادفی X، دارای **توزیع فوق هندسی** است و به آن، عنوان متغیر تصادفی فوق هندسی داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن برای $x = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$، $x \leq k$ و $n-x \leq N-k$ به‌صورت

$$h(x; n, N, k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

باشد.

پس، برای نمونه‌گیری بدون جایگذاری، تعداد پیروزیها در n امتحان، متغیری تصادفی است که توزیع فوق هندسی با پارامترهای n، N، و k دارد.

مثال ۶.۵

به‌عنوان بخشی از بررسی آلودگی هوا، بازرسی تصمیم می‌گیرد مواد آلوده‌کننده‌ای را که از اگزوز ۶تا از ۲۴ ماشین شرکتی خارج می‌شوند امتحان کند. اگر ۴تا از ماشینهای کمپانی به میزان زیادی مادهٔ آلوده‌کنندهٔ هوا منتشر کنند، احتمال اینکه نمونهٔ بررسی‌کننده شامل هیچ‌یک از آنها نباشد چقدر است؟

حل. اگر در فرمول توزیع فوق هندسی قرار دهیم $x = ۰$، $n = ۶$، $N = ۲۴$، و $k = ۴$، به‌دست می‌آوریم

$$h(۰; ۶, ۲۴, ۴) = \frac{\binom{۴}{۰}\binom{۲۰}{۶}}{\binom{۲۴}{۶}} = ۰{,}۲۸۸۰$$

▲

روشی که با آن، میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی را پیدا می‌کنیم شباهت زیاد به روشی دارد که در برهان قضیهٔ ۲.۵ به‌کار رفت.

قضیهٔ ۷.۵ میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی عبارت‌اند از:

$$\mu = \frac{nk}{N} \quad \text{و} \quad \sigma^{2} = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^{2}(N-1)}$$

برهان. برای تعیین میانگین، مجموع زیر را مستقیماً محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \frac{k!}{(x-1)!(k-x)!} \cdot \frac{\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}\end{aligned}$$

که درآن جملهٔ متناظر با $x = 0$ راکه مساوی صفر است حذف، و x را با اولین عامل $x! = x(x-1)!$ که در مخرج $\binom{k}{x}$ است ساده کرده‌ایم. لذا با فاکتور گرفتن از $\frac{k}{\binom{N}{n}}$، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = \frac{k}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{x=1}^{n} \binom{k-1}{x-1}\binom{N-k}{n-x}$$

که با قرار دادن $y = x - 1$ و $m = n - 1$ به‌صورت

$$\mu = \frac{k}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{y=0}^{m} \binom{k-1}{y}\binom{N-k}{m-y}$$

درمی‌آید. سرانجام با استفاده از قضیهٔ ۱۲.۱، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = \frac{k}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-1}{m} = \frac{k}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-1}{n-1} = \frac{nk}{N}$$

برای به‌دست آوردن فرمولی برای σ^{2}، مانند آنچه در برهان قضیهٔ ۲.۵ آمد عمل می‌کنیم، یعنی ابتدا $E[X(X-1)]$ را محاسبه می‌کنیم، و سپس این واقعیت را که $E(X^{2}) = E[X(X-1)] + E(X)$ به‌کار می‌بریم و با واگذاری اثبات

$$E[X(X-1)] = \frac{k(k-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

در تمرین ۳۸.۵ به‌عهدهٔ خواننده، به‌دست می‌آوریم

$$\sigma^{۲} = \frac{k(k-۱)n(n-۱)}{N(N-۱)} + \frac{nk}{N} - \left(\frac{nk}{N}\right)^{۲}$$
$$= \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^{۲}(N-۱)}$$

■

چون تابع مولد گشتاورهای توزیع فوق هندسی نسبتاً پیچیده است، در این کتاب از آن بحث نمی‌کنیم. اما می‌توان آن را به تفصیل در کتاب کندال و استوارت[1] که در فهرست مراجع انتهای فصل ۳ آمده است پیدا کرد.

وقتی N بزرگ و n در مقایسه با N نسبتاً کوچک است (قانون سرانگشتی معمولی آن است که n نباید از ۵ درصد N تجاوز کند)، تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری با جایگذاری و بدون جایگذاری وجود ندارد، و برای تقریب احتمالهای فوق هندسی می‌توان فرمول توزیع دوجمله‌ای را با پارامترهای n و $\theta = \frac{k}{N}$ به‌کار برد.

مثال ۷.۵

بین ۱۲۰ نفر متقاضی شغلی فقط ۸۰ نفرشان واقعاً واجد شرایط‌اند. اگر ۵ نفر از متقاضیان بدون جایگذاری و به‌تصادف برای یک مصاحبهٔ مفصل انتخاب شوند، با استفاده از (الف) توزیع فوق هندسی، و (ب) توزیع دوجمله‌ای با $\theta = \frac{۸۰}{۱۲۰}$ به‌عنوان یک تقریب، پیدا کنید احتمال آن را که تنها ۲ نفر از ۵ نفر برای شغل مزبور واجد شرایط باشند.

حل. (الف) اگر در فرمول توزیع فوق هندسی قرار دهیم $x = ۲$، $n = ۵$، $N = ۱۲۰$، $K = ۸۰$، با گردکردن نتیجه تا سه رقم اعشار به‌دست می‌آوریم

$$h(۲; ۵, ۱۲۰, ۸۰) = \frac{\binom{۸۰}{۲}\binom{۴۰}{۳}}{\binom{۱۲۰}{۵}} = ۰٫۱۶۴$$

(ب) اگر در فرمول توزیع دوجمله‌ای قرار دهیم $x = ۲$، $n = ۵$، و $\theta = \frac{۸۰}{۱۲۰} = \frac{۲}{۳}$، با گرد کردن نتیجه تا سه رقم اعشار، به‌دست می‌آوریم

$$b(۲; ۵, \frac{۲}{۳}) = \binom{۵}{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\left(۱-\frac{۲}{۳}\right)^{۳} = ۰٫۱۶۵$$

همان‌طور که از این نتایج مشهود است، تقریب حاصل خیلی دقیق است. ▲

1. M. G. Kendall and A. Stuart

۷.۵ توزیع پواسون

وقتی n بزرگ است، محاسبهٔ احتمالهای دوجمله‌ای با استفاده از فرمول تعریف ۳.۵ معمولاً مستلزم کار فوق‌العاده زیادی است. به‌عنوان مثال، برای محاسبهٔ احتمال اینکه ۱۸ نفر از ۳۰۰۰ نفری که در یک روز گرم تابستان رژه‌ای را تماشا می‌کنند دچار گرمازدگی شوند، مجبوریم ابتدا $\binom{۳۰۰۰}{۱۸}$ را تعیین کنیم، و اگر احتمال اینکه یکی از ۳۰۰۰ نفری که رژه را تماشا می‌کنند دچار گرمازدگی شوند برابر ۰٫۰۰۵ باشد، مجبوریم مقدار $(۰٫۰۰۵)^{۱۸}(۰٫۹۹۵)^{۲۹۸۲}$ را نیز محاسبه کنیم.

در این بخش توزیع احتمالی را معرفی خواهیم کرد که می‌تواند برای تقریب کردن این نوع توزیع دوجمله‌ای به‌کار رود. خصوصاً صورتی حدی از توزیع دوجمله‌ای را وقتی $n \to \infty$، $\theta \to ۰$ و در عین‌حال $n\theta$ ثابت می‌ماند بررسی خواهیم کرد. اگر این مقدار ثابت را λ فرض کنیم، یعنی $n\theta = \lambda$، و در نتیجه $\theta = \frac{\lambda}{n}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} b(x; n, \theta) &= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-x+۱)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \end{aligned}$$

حال اگر هریک از x عامل n را که در $\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x$ وجود دارد به‌ترتیب، مخرج هریک از عاملهای حاصلضرب $n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-x+۱)$ قرار دهیم و $\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$ را به‌صورت

$$\left[\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

بنویسیم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{x-۱}{n}\right)}{x!}(\lambda)^x\left[\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda}\right]^{-\lambda}\left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

سرانجام اگر فرض کنیم $n \to \infty$، و x و λ را ثابت نگه داریم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{gathered} ۱\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{x-۱}{n}\right) \to ۱ \\ \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to ۱ \\ \left(۱-\frac{\lambda}{n}\right)^{-n/\lambda} \to e \end{gathered}$$

و در نتیجه، توزیع حدی به‌صورت

$$p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , \quad x = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

درمی‌آید.

تعریف۷.۵ متغیر تصادفی X، توزیع پواسون دارد، و به‌آن عنوان متغیر تصادفی پواسون داده می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال آن به‌صورت

$$p(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

باشد.

بنابراین، در حد، وقتی $n \to \infty$، $\theta \to ۰$، و $n\theta = \lambda$ ثابت باقی می‌ماند، تعداد پیروزیها متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با پارامتر λ دارد. این توزیع به افتخار ریاضیدان فرانسوی، سیمون پواسون (۱۷۸۱ـ۱۸۴۰) نامگذاری شده است. به‌طورکلی وقتی $n \geq ۲۰$، و $\theta \leq ۰٫۰۵$، توزیع پواسون تقریبی خوب برای احتمالهای دوجمله‌ای به‌دست می‌دهد. وقتی $n \geq ۱۰۰$ و $n\theta < ۱۰$، عموماً تقریب بسیار عالی است.

برای به‌دست آوردن ایده‌ای دربارهٔ نزدیکی تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، خروجی کامپیوتری شکل ۲.۵ را در نظر بگیرید که توزیع دوجمله‌ای را با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰٫۰۵$ در بالای توزیع پواسون با $\lambda = ۱۵۰(۰٫۰۵) = ۷٫۵$ نشان می‌دهد.

مثال ۸.۵

وقتی توزیع پواسون با $\lambda = ۷٫۵$ را برای تقریب توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰٫۰۵$ به‌کار می‌بریم، با استفاده از شکل ۲.۵، مقدار xی (از ۵ تا ۱۵) را که برای آن میزان خطا بزرگترین قدرمطلق را دارد معین کنید.

حل. با محاسبه تفاضلهای متناظر با $x = ۵$، $x = ۶$، ...، $x = ۱۵$ به‌دست می‌آوریم:

۰٫۰۰۰۶، ۰٫۰۰۱۷، $-$۰٫۰۰۳۴، $-$۰٫۰۰۳۷، $-$۰٫۰۰۲۷، $-$۰٫۰۰۱۱، $-$۰٫۰۰۰۳، ۰٫۰۰۱۱، ۰٫۰۰۱۳، ۰٫۰۰۱۱، ۰٫۰۰۰۸

پس ماکسیمم خطا (از لحاظ عددی) برابر با $-$۰٫۰۰۳۷ است که با $x = ۸$ متناظر است. ▲

مثالهای بعدی، تقریب پواسون را برای توزیع دوجمله‌ای نشان می‌دهند.

```
MTB > BINOMIAL N=150 P=0.05

   BINOMIAL PROBABILITIES FOR N = 150 AND P = .050000

        K            P(X = K)            P(X LESS OR = K)
        0             .0005                  .0005
        1             .0036                  .0041
        2             .0141                  .0182
        3             .0366                  .0548
        4             .0708                  .1256
        5             .1088                  .2344
        6             .1384                  .3729
        7             .1499                  .5228
        8             .1410                  .6638
        9             .1171                  .7809
       10             .0869                  .8678
       11             .0582                  .9260
       12             .0355                  .9615
       13             .0198                  .9813
       14             .0102                  .9915
       15             .0049                  .9964
       16             .0022                  .9986
       17             .0009                  .9995
       18             .0003                  .9998
       19             .0001                  .9999


MTB > POISSON MU=7.5

   POISSON PROBABILITIES FOR MEAN =   7.500

        K            P(X = K)            P(X LESS OR = K)
        0             .0006                  .0006
        1             .0041                  .0047
        2             .0156                  .0203
        3             .0389                  .0591
        4             .0729                  .1321
        5             .1094                  .2414
        6             .1367                  .3782
        7             .1465                  .5246
        8             .1373                  .6620
        9             .1144                  .7764
       10             .0858                  .8622
       11             .0585                  .9208
       12             .0366                  .9573
       13             .0211                  .9784
       14             .0113                  .9897
       15             .0057                  .9954
       16             .0026                  .9980
       17             .0012                  .9992
       18             .0005                  .9997
       19             .0002                  .9999
       20             .0001                 1.0000
```

شکل ۲.۵ خروجی کامپیوتر برای توزیع پواسون با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰٫۰۵$ و توزیع پواسون با $\lambda = ۷٫۵$.

مثال ۹.۵

اگر دو درصد از کتابهایی که در یک صحافی جلد شده‌اند، بد صحافی شده باشند، با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، احتمال آن‌را تعیین کنید که ۵ جلد از ۴۰۰ کتاب جلد شده این صحافی بد صحافی شده باشند.

حل. با قرار دادن $x = ۵$، $\lambda = ۴۰۰(۰٫۰۲) = ۸$، و $e^{-۸} = ۰٫۰۰۰۳۴$ (از جدول VIII آخر کتاب) در فرمول تعریف ۷.۵، به‌دست می‌آوریم

$$p(۵; ۸) = \frac{۸^۵ e^{-۸}}{۵!} = \frac{(۳۲۷۶۸)(۰٫۰۰۰۳۴)}{۱۲۰} = ۰٫۰۹۳$$

▲

در عمل، احتمالهای پواسون به‌ندرت با جانشینی مستقیم در فرمول تعریف ۷.۵ به‌دست می‌آیند. گاهی به جداول احتمالهای پواسون، نظیر جدول IIی آخر کتاب، یا به جداول جامعتر در کتابهای دستی جداول آماری مراجعه می‌کنیم، اما این روزها اغلب به نرم‌افزارهای کامپیوتری مناسب رجوع می‌کنیم. وقتی با احتمالهای مربوط به چندین مقدار x سروکار داریم، استفاده از جدولها یا کامپیوترها اهمیتی خاص پیدا می‌کند.

مثال ۱۰.۵

سوابق نشان می‌دهند که احتمال پنچر شدن اتومبیلی در حال عبور از پلی معین ۰٫۰۰۰۰۵ است. با استفاده از توزیع پواسون برای تقریب احتمالهای دوجمله‌ای، احتمال آن را بیابید که بین ۱۰۰۰۰ اتومبیلی که از این پل عبور می‌کنند

(الف) دقیقاً دو اتومبیل دچار پنچری شوند؛

(ب) حداکثر دو اتومبیل دچار پنچری شوند.

حل. (الف) با رجوع به جدول II، برای $x = ۲$، و $\lambda = ۱۰۰۰۰(۰٫۰۰۰۰۵) = ۰٫۵$، احتمال پواسون ۰٫۰۷۵۸ را به‌دست می‌آوریم.

(ب) با رجوع به جدول II، برای $x = ۰, ۱, ۲$ و $\lambda = ۰٫۵$ احتمالهای پواسون را به‌ترتیب برابر ۰٫۶۰۶۵، ۰٫۳۰۳۳، و ۰٫۰۷۵۸ به‌دست می‌آوریم. پس، احتمال اینکه بین ۱۰۰۰۰ اتومبیلی که از پل عبور می‌کنند حداکثر دو اتومبیل دچار پنچری شوند برابر است با

$$۰٫۶۰۶۵ + ۰٫۳۰۳۳ + ۰٫۰۷۵۸ = ۰٫۹۸۵۶$$

▲

مثال ۱۱.۵

با استفاده از شکل ۳.۵، مثال قبل را مجدداً حل کنید.

```
MTB > POISSON MU=.5

  POISSON PROBABILITIES FOR MEAN =   .500

     K              P(X = K)                   P(X LESS OR = K)
     0               .6065                       .6065
     1               .3033                       .9098
     2               .0758                       .9856
     3               .0126                       .9982
     4               .0016                       .9998
     5               .0002                      1.0000
```

شکل۵.۳ خروجی کامپیوتری توزیع پواسون با $\lambda =$ ۵ر۰

حل. (الف) اگر مقدار متناظر با $K =$ ۲ را در ستون $P(X = K)$ بخواهیم مقدار ۰۷۵۸ر۰ را به‌دست می‌آوریم.

(ب) در اینجا باید مقادیر متناظر با $K =$ ۰، $K =$ ۱، و $K =$ ۲ در ستون $\mathrm{P(X = K)}$ را با هم جمع کنیم، یا باید مقدار متناظر با $K =$ ۲ را در ستون $\mathrm{P(X\ LESS\ OR = K)}$ بخوانیم که در نتیجه ۹۸۵۶ر۰ را به‌دست می‌آوریم. ▲

حال که توزیع پواسون را به‌عنوان صورت حدی توزیع دوجمله‌ای به‌دنست آوردیم، می‌توانیم فرمولهای میانگین و واریانس آن را با به‌کار بردن همان شرایط حدی ($n \to \infty$، $\theta \to$ ۰ و ثابت ماندن $n\theta = \lambda$) از روی میانگین و واریانس توزیع دوجمله‌ای به‌دست آوریم. برای میانگین $\mu = n\theta = \lambda$، و برای واریانس $\sigma^۲ = n\theta(۱-\theta) = \lambda(۱-\theta)$ حاصل می‌شود که وقتی $\theta \to$ ۰، به λ می‌گراید.

قضیهٔ۵.۸ میانگین و واریانس توزیع پواسون عبارت‌اند از

$$\mu = \lambda \quad \text{و} \quad \sigma^۲ = \lambda$$

این نتایج را می‌توان با محاسبهٔ مجموعهای لازم (تمرین ۵.۴۴ را ببینید) یا از طریق تابع مولد گشتاورها نیز به‌دست آورد.

قضیهٔ۵.۹ تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون به‌صورت

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - ۱)}$$

است.

برهان. بنابر تعریفهای ۶.۴ و ۷.۵

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$$

که در آن $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$ همان سری ماکلورن e^z با $z = \lambda e^t$ است، پس

$$M_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

■

در این صورت، اگر از $M_X(t)$ دوبار نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$M'_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}$$
$$M''_X(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t} e^{\lambda(e^t-1)}$$

به‌قسمی که $\mu'_1 = M'_X(0) = \lambda$ و $\mu'_2 = M''_X(0) = \lambda + \lambda^2$. پس، $\mu = \lambda$ و $\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$، که با قضیهٔ ۸.۵، مطابقت دارد.

گرچه توزیع پواسون به‌صورت شکل حدی توزیع دوجمله‌ای حاصل شد، ولی کاربردهای فراوانی دارد که رابطهٔ مستقیم با توزیعهای دوجمله‌ای ندارند. مثلاً، توزیع پواسون را می‌توان به‌عنوان مدلی برای تعداد پیروزیهایی که در طول فاصلهٔ زمانی مفروض یا در ناحیه‌ای مشخص رخ می‌دهند به‌کار برد، به شرطی که (۱) تعداد پیروزیها در فاصله‌های زمانی یا در ناحیه‌های نامتداخل مستقل باشند؛ (۲) احتمال رخداد تنها یک پیروزی در هر فاصلهٔ زمانی کوتاه یا در هر ناحیهٔ کوچک، متناسب با طول فاصلهٔ زمانی یا اندازهٔ ناحیه باشد؛ و (۳) احتمال رخداد بیش از یک پیروزی در چنین فاصلهٔ زمانی کوتاه یا قرار گرفتن در چنین ناحیه‌ای کوچک ناچیز باشد. بنابراین، توزیع پواسون ممکن است تعداد مکالمات تلفنی دریافتی یک اداره را در ساعت، تعداد خطاهای تایپی را در یک صفحه، یا تعداد باکتریهای یک کشت مفروض را، وقتی متوسط تعداد پیروزیها، λ، برای فاصلهٔ زمانی مفروض یا ناحیه‌ای مشخص معلوم باشد توصیف کند.

مثال ۱۲.۵

می‌دانیم متوسط تعداد کامیونهایی که در هر روز به توقفگاه کامیونهای شهری می‌رسند ۱۲ است. احتمال اینکه در روزی معین کمتر از ۹ کامیون به توقفگاه برسند چقدر است؟

حل. فرض کنید X تعداد کامیونهایی باشد که در روزی مفروض وارد توقفگاه می‌شوند. در این

صورت، با استفاده از جدول II، با $\lambda = ۱۲$، به‌دست می‌آوریم

$$P(X < ۹) = \sum_{x=۰}^{۸} p(x; ۱۲) = ۰٫۱۵۵۰$$

▲

اگر در وضعیتی که برای آن شرایط قبلی برقرارند، پیروزیها با میانگین نرخ α در واحد زمان یا در واحد ناحیه رخ دهند، آنگاه تعداد پیروزیها در فاصلهٔ t واحد زمان یا t واحد از ناحیهٔ مشخص، متغیر تصادفی پواسون با میانگین $\lambda = \alpha t$ (تمرین ۴۲.۵ را ببینید) است. بنابراین، تعداد پیروزیها، X در فاصلهٔ زمانی به‌طول t واحد یا ناحیهٔ به‌اندازهٔ t واحد، دارای توزیع پواسون

$$p(x; \alpha t) = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^x}{x!} \qquad x = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

است.

مثال ۱۳.۵

نوع خاصی از یک صفحهٔ فلزی، در هر ۱۰ فوت مربع به‌طور متوسط ۵ عیب دارد. اگر توزیع عیبها را پواسون فرض کنیم، احتمال اینکه در ۱۵ فوت مربع یک صفحه فلزی، حداقل ۶ عیب وجود داشته باشد چقدر است؟

حل. فرض می‌کنیم X، معرف تعداد عیبها در ۱۵ فوت مکعب از صفحهٔ فلز باشد. در این صورت چون واحد مساحت، برابر با ۱۰ فوت است، داریم

$$\lambda = \alpha t = (۵)(۱٫۵) = ۷٫۵$$

و مطابق خروجی کامپیوتری شکل ۲.۵

$$P(X \geq ۶) = ۱ - P(X \leq ۵) = ۱ - ۰٫۲۴۱۴ = ۰٫۷۵۸۶$$

▲

تمرینها

۲۷.۵ توزیع دوجمله‌ای منفی گاهی به‌گونه‌ای متفاوت با آنچه در این کتاب آمد، به‌عنوان تعداد شکستهایی که قبل از kامین پیروزی رخ می‌دهند تعریف می‌شود. اگر kامین پیروزی در xامین امتحان رخ دهد، باید قبل از آن $x - k$ شکست باشد. لذا توزیع $Y = X - k$ را بیابید، که در آن X، توزیع تعریف ۴.۵ را دارد.

۲۸.۵ با رجوع به تمرین قبل، عبارتهایی برای μ_Y و $\sigma_Y^۲$ به‌دست آورید.

۲۹.۵ قضیهٔ ۵.۵ را ثابت کنید.
۳۰.۵ قضیهٔ ۶.۵ را ابتدا با تعیین $E(X)$ و $E[X(X+1)]$، ثابت کنید.
۳۱.۵ نشان دهید که تابع مولد گشتاورهای توزیع هندسی به‌صورت زیر است

$$M_X(t) = \frac{\theta e^t}{1 - e^t(1-\theta)}$$

۳۲.۵ با استفاده از تابع مولد گشتاورهای حاصل در تمرین قبل، نشان دهید که برای توزیع هندسی $\mu = \frac{1}{\theta}$ و $\sigma^2 = \frac{(1-\theta)}{\theta^2}$.
۳۳.۵ با مشتقگیری از عبارات دو طرف معادلهٔ

$$\sum_{x=1}^{\infty} \theta(1-\theta)^{x-1} = 1$$

نسبت به θ، نشان دهید که میانگین توزیع هندسی برابر $\mu = \frac{1}{\theta}$ است. آنگاه با مشتقگیری مجدد نسبت به θ، نشان دهید که $\mu'_2 = \frac{(2-\theta)}{\theta^2}$، و از آنجا $\sigma^2 = \frac{(1-\theta)}{\theta^2}$.
۳۴.۵ اگر X، متغیر تصادفی هندسی باشد، نشان دهید که

$$P(X = x + n | X > n) = P(X = x)$$

۳۵.۵ اگر $f(x)$ احتمال آن باشد که محصولی در xامین بار استفاده از آن، یعنی در xامین امتحان، از کار بیفتد، آنگاه **نرخ از کارافتادگی** در xامین امتحان، احتمال این است که در xامین امتحان از کار بیفتد به‌شرط آنکه در $x - 1$ امتحان قبلی از کار نیفتاده باشد، به‌صورت نمادی این نرخ به‌صورت

$$Z(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x-1)}$$

داده می‌شود که در آن $F(x)$ مقدار تابع توزیع متناظر آن به‌ازای x است. نشان دهید که اگر X متغیر تصادفی هندسی باشد، نرخ از کارافتادگی آن مقداری ثابت و مساوی θ است.
۳۶.۵ صورت دیگری از توزیع دوجمله‌ای وقتی پیش می‌آید که n امتحان مستقل‌اند، اما احتمال پیروزی در iامین امتحان برابر θ_i است و این احتمالها مساوی نیستند. اگر X تعداد پیروزیهای حاصل تحت این شرایط در n امتحان باشد، نشان دهید که

(الف) $\mu_X = n\theta$، که در آن $\theta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \theta_i$

(ب) $\sigma_X^2 = n\theta(1-\theta) - n\sigma_\theta^2$، که در آن θ مثل قسمت (الف) تعریف شده است و $\sigma_\theta^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\theta_i - \theta)^2$.

۳۷.۵ هنگام محاسبهٔ تمام مقادیر توزیع فوق هندسی، اغلب می‌توان ابتدا با محاسبهٔ $h(0\,; n, N, k)$، و سپس با استفاده از فرمول بازگشتی

$$h(x+1; n, N, k) = \frac{(n-x)(k-x)}{(x+1)(N-k-n+x+1)} h(x; n, N, k)$$

انجام کار را تسهیل کرد. درستی این فرمول را تحقیق کنید و آن‌را برای محاسبهٔ مقادیر توزیع فوق هندسی با $n = 4$، $N = 9$، و $k = 5$ به‌کار برید.

۳۸.۵ درستی عبارتی را که برای $E[X(X-1)]$ در اثبات قضیهٔ ۷.۵ داده شد تحقیق کنید.

۳۹.۵ نشان دهید که اگر در قضیهٔ ۷.۵، قرار دهیم $\theta = \frac{k}{N}$، میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی را می‌توان به‌صورت $\mu = n\theta$ و $\sigma^2 = n\theta(1-\theta) \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)}$ نوشت. این نتایج چگونه با بحث صفحهٔ ۲۰۰ ارتباط پیدا می‌کنند؟

۴۰.۵ هنگام محاسبهٔ همهٔ مقادیر توزیع پواسون، غالباً می‌توان ابتدا با محاسبهٔ $p(0\,; \lambda)$ و سپس با استفاده از فرمول بازگشتی

$$p(x+1; \lambda) = \frac{\lambda}{x+1} \cdot p(x; \lambda)$$

انجام کار را تسهیل کرد. درستی این فرمول را تحقیق کنید و آن‌را با توجه به $e^{-2} = 0{,}1353$ برای تحقیق در درستی مقادیری که در جدول II برای $\lambda = 2$ داده شده‌اند به‌کار برید.

۴۱.۵ احتمال دوجمله‌ای $b(3; 100, 0{,}10)$ را با استفاده از

(الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای و لگاریتمها؛

(ب) جدول II،

تقریب کنید.

۴۲.۵ فرض کنید که $f(x,t)$ احتمال به‌دست آوردن x پیروزی در طول فاصلهٔ زمانی t باشد وقتی که (i) احتمال یک پیروزی در طول فاصلهٔ زمانی کوچک t تا $t+\Delta t$ برابر $\alpha \cdot \Delta t$ باشد، (ii) احتمال بیش از یک پیروزی در طول چنین فاصلهٔ زمانی ناچیز باشد، و (iii) احتمال یک پیروزی در طول چنین فاصلهٔ زمانی به آنچه قبل از زمان t رخ می‌دهد بستگی نداشته باشد.

(الف) نشان دهید که تحت این شرایط

$$f(x, t+\Delta t) = f(x,t)[1 - \alpha \cdot \Delta t] + f(x-1, t)\alpha \cdot \Delta t$$

و در نتیجه

$$\frac{d[f(x,t)]}{dt} = \alpha[f(x-1,t) - f(x,t)]$$

(ب) با جایگذاری مستقیم نشان دهید که یک جواب این دستگاه نامتناهی از معادلات دیفرانسیل (به‌ازای هر مقدار x، یکی)، توزیع پواسون با $\lambda = \alpha t$ است.

۴۳.۵ با استفاده از انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان دهید که

$$\sum_{y=0}^{x} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \frac{1}{x!} \cdot \int_{\lambda}^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

این نتیجه به دلیل آنکه می‌توان مقادیر تابع توزیع یک متغیر تصادفی پواسون را با مراجعه به یک جدول توابع گامای ناکامل به‌دست آورد اهمیت دارد.

۴۴.۵ فرمولهایی برای میانگین و واریانس توزیع پواسون ابتدا با محاسبهٔ $E(X)$ و سپس $E[X(X-1)]$ به‌دست آورید.

۴۵.۵ نشان دهید که اگر شرایط حدی $n \to \infty$، $\theta \to 0$ را در حالی‌که $n\theta$ ثابت است در مورد تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای اعمال کنیم، تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون به‌دست می‌آید. [راهنمایی: از این واقعیت که

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

استفاده کنید.]

۴۶.۵ با استفاده از قضیهٔ ۹.۵ نشان دهید که برای توزیع پواسون $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$، که در آن α_3 همان معیار چاولگی است که در تمرین ۳۴.۴ تعریف شده است.

۴۷.۵ با مشتقگیری از عبارات دو طرف معادلهٔ

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^r \cdot \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

نسبت به λ، فرمول بازگشتی

$$\mu_{r+1} = \lambda \left[r\mu_{r-1} + \frac{d\mu_r}{d\lambda} \right]$$

را به‌ازای $r = 1, 2, 3, \cdots$، برای گشتاورهای حول میانگین توزیع پواسون به‌دست آورید. همچنین برای تعیین μ_2، μ_3، و μ_4، و تحقیق درستی فرمولی که برای α_3 در تمرین ۴۶.۵ داده شد، فرمول بازگشتی بالا و واقعیتهای $\mu_0 = 1$ و $\mu_1 = 0$ را به‌کار برید.

۴۸.۵ با استفاده از قضیهٔ ۹.۵، تابع مولد گشتاورهای $Y = X - \lambda$ را بیابید که در آن X متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با پارامتر λ دارد. سپس آن‌را برای تحقیق $\sigma_X^2 = \lambda$ به‌کار برید.

کاربردها

۴۹.۵ اگر احتمال آنکه شخصی شایعه‌ای را دربارهٔ تخلفهای یک سیاستمدار باور کند ۰٫۷۵ باشد، پیدا کنید احتمال آنکه

(الف) هشتمین شخصی که این شایعه را می‌شنود پنجمین فردی باشد که آن‌را باور می‌کند؛
(ب) پانزدهمین شخصی که این شایعه را می‌شنود دهمین فردی باشد که آن‌را باور می‌کند.

۵۰.۵ اگر احتمالهای داشتن یک طفل پسر یا دختر هردو ۵۰ر۰ باشند، پیدا کنید احتمال آنکه
(الف) چهارمین طفل خانواده‌ای اولین پسر آنها باشد؛
(ب) هفتمین طفل خانواده‌ای دومین دختر آنها باشد؛
(ج) دهمین طفل خانواده‌ای چهارمین یا پنجمین پسر آنها باشد.

۵۱.۵ یک تک تیرانداز در ۵ درصد موارد به هدف نمی‌زند. مطلوب است احتمال آنکه این تیرانداز برای دومین‌بار در پانزدهمین هدف‌گیری به هدف نزند؛ با استفاده از
(الف) فرمول توزیع دوجمله‌ای منفی؛
(ب) قضیهٔ ۵.۵ و جدول I.

۵۲.۵ موقع تهیهٔ یک برنامهٔ تبلیغاتی تلویزیون، احتمال اینکه بازیگری نقش خود را در هر دور فیلمبرداری درست بازی کند ۳۰ر۰ است، احتمال اینکه این بازیگر در ششمین دور فیلمبرداری برای اولین‌بار نقش خود را درست بازی کند چقدر است؟

۵۳.۵ در یک «آزمون تاب مقاومت»، کلید لامپی تا زمان از کار افتادن آن وصل و قطع می‌شود. اگر احتمال اینکه کلید لامپ به‌هنگام وصل یا قطع، از کار بیفتد برابر ۰۰۱ر۰ باشد، احتمال اینکه کلید در طول اولین ۸۰۰ بار قطع یا وصل از کار بیفتد چقدر است؟ فرض کنید که شرایط زیربنایی توزیع هندسی برقرار باشند و از لگاریتم هم استفاده کنید.

۵۴.۵ فرمول قضیهٔ ۵.۵ را به‌قسمی هماهنگ کنید که بتوان آن را برای بیان احتمالهای هندسی برحسب احتمالهای دوجمله‌ای به‌کار برد، و از آن فرمول و جدول I برای
(الف) تحقیق درستی نتیجهٔ مثال ۵.۵؛
(ب) حلّ مجدد تمرین ۵۲.۵؛
استفاده کنید.

۵۵.۵ یک مهندس کنترل کیفیت، نمونه‌ای تصادفی مرکب از دو ماشین حساب جیبی را که از هر بستهٔ ۱۸تایی دریافت شده انتخاب شده است بررسی می‌کند، اگر هر دو خوب کار کنند بسته را می‌پذیرد؛ و در غیر این صورت تمام بسته به خرج فروشنده بررسی می‌شود. احتمال اینکه چنین بسته‌ای بدون بررسی بعدی پذیرفته شود چقدر است در صورتی که این بسته شامل
(الف) ۴ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند؛
(ب) ۸ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند؛
(ج) ۱۲ ماشین حساب باشد که خوب کار نکنند؟

۵۶.۵ بین ۱۶ متقاضی شغلی ده نفر تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر سه متقاضی به‌تصادف برای مصاحبه انتخاب شوند، احتمال اینکه
(الف) هیچ‌یک تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؛
(ب) یکی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد؛

(ج) دو نفر تحصیلات دانشگاهی داشته باشند؛
(د) هر سه تحصیلات دانشگاهی داشته باشند؛
چقدر است؟

۵۷.۵ میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی را با $n = ۳$، $N = ۱۶$، و $k = ۱۰$ با استفاده از
(الف) نتایج تمرین قبل؛
(ب) فرمولهای قضیه ۷.۵؛
بیابید.

۵۸.۵ احتمال آنکه یک ممیز مالیاتی، از بین ۵ اظهارنامهٔ مالیاتی فقط ۲ اظهارنامه با بخشودگیهای غیرمجاز بیابد چقدر است، به شرطی که این ۵ اظهارنامه را به‌تصادف از بین ۱۵ اظهارنامه که شامل ۹ اظهارنامه با بخشودگی غیرمجاز است انتخاب کرده باشد؟

۵۹.۵ در هریک از موارد زیر بررسی کنید که آیا شرط به‌کار بردن تقریب دوجمله‌ای برای توزیع فوق هندسی برقرار است یا نه:
(الف) $N = ۲۰۰$ و $n = ۱۲$؛
(ب) $N = ۵۰۰$ و $n = ۲۰$؛
(ج) $N = ۶۴۰$ و $n = ۳۰$.

۶۰.۵ محموله‌ای مرکب از ۸۰ دستگاه دزدگیر شامل ۴ دستگاه معیوب است. اگر سه‌تا از این دستگاهها به‌تصادف انتخاب و برای یک مشتری ارسال شوند، با استفاده از
(الف) فرمول توزیع فوق هندسی؛
(ب) توزیع دوجمله‌ای به‌عنوان یک تقریب؛
احتمال این را پیدا کنید که مشتری یک دستگاه معیوب دریافت کند.

۶۱.۵ از ۳۰۰ نفر کارکنان یک شرکت، ۲۴۰ نفر عضو اتحادیه هستند و بقیه عضو اتحادیه نیستند. اگر برای عضویت در کمیته‌ای که به صندوق بازنشستگی مؤسسه نظارت دارد، ۶ نفر از کارکنان را با قرعه انتخاب کنند با استفاده از
(الف) فرمول توزیع هندسی؛
(ب) توزیع دوجمله‌ای به‌عنوان یک تقریب؛
احتمال این را که ۴ نفر از ۶ نفر عضو اتحادیه باشند بیابید.

۶۲.۵ فهرستی متشکل از ۳۰۰ نفر که برای انجام وظیفه در هیأتهای منصفه انتخاب شده‌اند، شامل ۳۰ نفر زیر ۲۵ سال است. چون یک هیأت منصفه ۱۲ نفره که برای داوری در مورد یک تخلف مربوط به مواد مخدر از این فهرست انتخاب می‌شود شامل هیچ فردی زیر ۲۵ سال نیست، وکیل مدافع که در سنین جوانی است معترض است که این هیأت منصفه، نمایندهٔ واقعی نیست. در واقع، او استدلال می‌کند که اگر انتخاب هیأت، تصادفی باشد، احتمال اینکه در هیأت، یکی از افراد زیر ۲۵ سال موجود باشد، چندین برابر احتمال آن است که هیچ‌کس زیر ۲۵ سال انتخاب نشود. واقعاً نسبت این دو احتمال چقدر است؟

۶۳.۵ وقتی می‌خواهیم توزیع پواسون را برای تقریب کردن احتمالهای دوجمله‌ای به‌کار بریم، در هریک از موارد زیر بررسی کنید که آیا مقادیر n و θ در قاعدهٔ سرانگشتی برای تقریب خوب، تقریب عالی، یا هیچ‌کدام صدق می‌کنند یا نه

(الف) $n = ۱۲۵$ و $\theta = ۰٫۱۰$؛

(ب) $n = ۲۵$ و $\theta = ۰٫۰۴$؛

(ج) $n = ۱۲۰$ و $\theta = ۰٫۰۵$؛

(د) $n = ۴۰$ و $\theta = ۰٫۰۶$.

۶۴.۵ با رجوع به مثال ۸.۵، مقداری از x (از ۵ تا ۱۵) را بیابید که برای آن درصد خطا، وقتی توزیع پواسون را با $\lambda = ۷٫۵$ برای تقریب توزیع دوجمله‌ای با $n = ۱۵۰$ و $\theta = ۰٫۰۵$ به‌کار می‌بریم، بزرگترین مقدار را داشته باشد.

۶۵.۵ تجربه نشان داده است که ۱٫۴ درصد از تلفنهایی که به یک تلفنخانه می‌شود شماره‌های اشتباه‌اند. برای تعیین احتمال آنکه بین ۱۵۰ تلفن دریافتی دو نمرهٔ اشتباه وجود داشته باشد تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای را به‌کار برید.

۶۶.۵ سوابق موجود نشان می‌دهند شخصی که روزی را در یک نمایشگاه ایالتی می‌گذراند با احتمال ۰٫۰۰۱۲ دچار مسمومیت غذایی می‌شود. با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، مطلوب است احتمال اینکه بین ۱۰۰۰ بازدیدکنندهٔ نمایشگاه حداقل دو نفر دچار مسمومیت غذایی شوند.

۶۷.۵ در شهری معین، ۴ درصد همهٔ رانندگان مجاز، در هر سال حداقل درگیر یک تصادف اتومبیل هستند. با استفاده از تقریب پواسون برای توزیع دوجمله‌ای، مطلوب است احتمال آنکه بین ۱۵۰ رانندهٔ مجازی که به تصادف انتخاب شده‌اند

(الف) تنها ۵ نفر در سالی معین، حداقل یک تصادف اتومبیل داشته باشند؛

(ب) حداکثر ۳ نفر در سالی معین، حداقل یک تصادف اتومبیل داشته باشند.

۶۸.۵ با رجوع به مثال ۱۳.۵ و خروجی کامپیوتری شکل ۲.۵، احتمال آن را بیابید که ۱۵ فوت مربع از صفحهٔ فلزی، هر تعدادی بین ۸ تا ۱۲ عیب داشته باشد، با استفاده از

(الف) مقادیر مربوط به ستون $\mathrm{P(X = K)}$؛

(ب) مقادیر مربوط به ستون $\mathrm{P(X\ LESS\ OR = K)}$.

۶۹.۵ تعداد شکایتهایی که روزانه از یک مؤسسهٔ خشکشویی به‌عمل می‌آید، متغیری تصادفی است که دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۳٫۳$ است. با استفاده از فرمول توزیع پواسون، احتمال آن را بیابید که در روزی معین، تنها دو شکایت انجام شود.

۷۰.۵ تعداد ازکارافتادگی ماهیانهٔ کامپیوتری، متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با $\lambda = ۱٫۸$ دارد. با استفاده از فرمول توزیع پواسون، احتمال آن را بیابید که این کامپیوتر در یک ماه

(الف) بدون ازکارافتادگی؛

(ب) تنها با یک ازکارافتادگی؛

کار کند.

۷۱.۵ برای تحقیق در درستی نتایج تمرین ۵.۷۰، جدول II را به‌کار برید.

۷۲.۵ در یک ناحیهٔ کویری تعداد افرادی که هر سال از خوردن یک نوع گیاه سمّی شدیداً بیمار می‌شوند، متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با $\lambda = ۵٫۲$ دارد. با استفاده از جدول II، مطلوب است احتمال آنکه

(الف) در سالی معین ۳ نفر؛

(ب) در سالی معین حداقل ۱۰ نفر؛

(ج) در سالی معین تعدادی از ۴ تا ۶ نفر؛

به این بیماری مبتلا شوند.

۷۳.۵ در بازرسی از پارچه‌ای که به‌صورت توپ تولید می‌شود، تعداد نقصها در هر یارد، متغیری تصادفی است که دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۰٫۲۵$ است. با استفاده از

(الف) جدول II؛

(ب) خروجی کامپیوتری شکل ۳.۵،

احتمال آن را بیابید که دو یارد این پارچه حداکثر یک نقص داشته باشد.

۸.۵ توزیع چندجمله‌ای

تعمیمی فوری از توزیع دوجمله‌ای وقتی صورت می‌گیرد که هر امتحان بیش از دو برآمد ممکن داشته باشد، احتمالهای مربوط به برآمدها برای تمام امتحانها یکی باشند، و تمام امتحانها مستقل باشند. برای مثال، وقتی در یک نظرخواهی، با افرادی مصاحبه کرده و از آنها سؤال می‌شود که آیا با داوطلبی موافق‌اند، مخالف‌اند، یا بی‌تفاوت‌اند، و یا وقتی نمونه‌هایی از فراورده‌های کارخانه‌ای را به عالی، بالای متوسط، متوسط، و یا نامرغوب درجه‌بندی می‌کنند، با چنین حالتی سروکار داریم.

برای بحث از این نوع مسئله در حالت کلی، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن n امتحان مستقل وجود دارند و هر امتحان دارای k برآمد دوبه‌دو مجزا با احتمالهای متناظر θ_1، θ_2، . . . ، θ_k (با $\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1$) است. با نامیدن برآمدها با عنوان اولین نوع، دومین نوع، . . . ، و kامین نوع، احتمال به‌دست آوردن x_1 برآمد نوع اول، x_2 برآمد نوع دوم، . . . ، و x_k برآمد نوع kام را (با $\sum_{i=1}^{k}x_i=n$) می‌خواهیم.

با روشی نظیر آنچه در تعیین فرمول توزیع دوجمله‌ای به‌کار رفت، ابتدا می‌بینیم احتمال اینکه در یک ترتیب مشخص، x_1 برآمد نوع اول، x_2 برآمد نوع دوم، . . . ، x_k برآمد نوع kام را به‌دست آوریم برابر $\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_k^{x_k}$ است. بنابر قضیهٔ ۸.۱ برای به‌دست آوردن احتمال متناظر با این تعداد برآمدهای انواع مختلف در هر ترتیبی، باید احتمال مربوط به ترتیب مشخص بالا را در

$$\binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}$$

که از قضیهٔ ۸.۱ به‌دست می‌آید، ضرب کنیم.

قضیهٔ۵.۱۰ متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ... ، و X_k دارای **توزیع چندجمله‌ای** هستند و آنها را متغیرهای تصادفی چندجمله‌ای می‌نامیم، اگر و تنها اگر توزیع احتمال توأم آنها برای $x_i = 0, 1, \cdots, n$ به‌ازای هر i به‌صورت

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k; n, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = \binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} \theta_1^{x_1} \theta_2^{x_2} \cdots \theta_k^{x_k}$$

باشد، که در آن $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ و $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$.

پس تعداد برآمدهای نوعهای مختلف، متغیرهایی تصادفی‌اند که توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای n، θ_1، θ_2، ... ، و θ_k دارند. نام «چندجمله‌ای» از این واقعیت نتیجه می‌شود که برای مقادیر مختلف x_i، احتمالها مساوی جملات متناظر بسط چندجمله‌ای $(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k)^n$ هستند.

مثال ۱۴.۵

در شهری معین، سه فرستندهٔ تلویزیونی وجود دارد. در ساعات پربیننده شنبه شب، ۵۰ درصد تماشاگران تلویزیون، برنامهٔ کانال ۱۲، ۳۰ درصد تماشاگران برنامهٔ کانال ۱۰ و ۲۰ درصد تماشاگران، برنامهٔ کانال ۳ را می‌بینند. پیدا کنید احتمال آنکه بین ۸ تماشاگری که در این شهر در یک شنبه شب به‌تصادف انتخاب می‌شوند، ۵ نفر برنامهٔ کانال ۱۲، ۲ نفر برنامهٔ کانال ۱۰ و یک نفر برنامهٔ کانال ۳ را تماشا کنند.

حل. اگر در فرمول تعریف ۸.۵ قرار دهیم $x_1 = 5$، $x_2 = 2$، $x_3 = 1$، $\theta_1 = 0{,}50$، $\theta_2 = 0{,}30$، $\theta_3 = 0{,}20$، و $n = 8$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(5, 2, 1; 8, 0{,}50, 0{,}30, 0{,}20) &= \frac{8!}{5!2!1!}(0{,}50)^5(0{,}30)^2(0{,}20) \\ &= 0{,}0945 \end{aligned}$$

▲

۹.۵ توزیع فوق هندسی چندمتغیره

دقیقاً مثل توزیع فوق هندسی که در نمونه‌گیری بدون جایگذاری جای توزیع دوجمله‌ای را می‌گیرد، توزیع چندمتغیره‌ای مشابه با توزیع چندجمله‌ای نیز وجود دارد که در نمونه‌گیری بدون جایگذاری به‌کار می‌رود. برای به‌دست آوردن فرمول آن، مجموعه‌ای از N عنصر که a_1 عنصر آن از نوع اول، a_2 عنصر آن از نوع دوم، ... ، و a_k عنصر آن از نوع kام است در نظر می‌گیریم به‌قسمی که

$N = \sum\limits_{i=۱}^{k} a_i$. مانند توزیع چندجمله‌ای، احتمال به‌دست آوردن $x_۱$ عنصر (برآمد) از نوع اول، $x_۲$ عنصر از نوع دوم، ... ، و x_k عنصر از نوع kام مورد توجه است، اما در اینجا، n عنصر از N عنصر را بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

$\binom{a_۱}{x_۱}$ راه برای انتخاب $x_۱$ عنصر از $a_۱$ عنصر نوع اول، $\binom{a_۲}{x_۲}$ راه برای انتخاب $x_۲$ عنصر از $a_۲$ عنصر نوع دوم، ... ، و $\binom{a_k}{x_k}$ راه برای انتخاب x_k عنصر از a_k عنصر نوع kام وجود دارد، و بنابراین $\binom{a_۱}{x_۱}\binom{a_۲}{x_۲}\cdots\binom{a_k}{x_k}$ راه برای انتخاب $n = \sum\limits_{i=۱}^{k} x_i$ عنصر موردنظر وجود دارد. چون $\binom{N}{n}$ راه برای انتخاب n عنصر از N عنصر جامعه موجود است، و فرض می‌کنیم تمام آنها متساوی‌الاحتمال‌اند (که همان منظور ما از انتخاب تصادفی است) نتیجه می‌شود که احتمال مطلوب، $\binom{a_۱}{x_۱}\binom{a_۲}{x_۲}\cdots\binom{a_k}{x_k}/\binom{N}{n}$ است.

تعریف ۸.۵ متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... ، و X_k دارای **توزیع فوق هندسی چندمتغیره** است و به آنها متغیرهای تصادفی چندمتغیره اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر توزیع احتمال توأم آنها برای $x_i = ۰, ۱, \cdots, n$ و $x_i \leq a_i$ به‌ازای هر i

$$f(x_۱, x_۲, \cdots, x_k; n, a_۱, a_۲, \cdots, a_k) = \frac{\binom{a_۱}{x_۱}\binom{a_۲}{x_۲}\cdots\binom{a_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

باشد، که در آن $\sum\limits_{i=۱}^{k} x_i = n$ و $\sum\limits_{i=۱}^{k} a_i = N$.

پس، توزیع توأم متغیرهای تصادفی تحت بررسی، یعنی توزیع تعداد برآمدهای انواع مختلف، توزیع فوق هندسی چندمتغیره با پارامترهای n، $a_۱$، $a_۲$، ... ، و a_k است.

مثال ۱۵.۵

فهرستی از داوطلبان عضویت در هیئت منصفه، شامل شش مرد متأهل، سه مرد مجرد، هفت زن شوهردار، و ۴ زن مجرد است. اگر انتخاب تصادفی باشد، احتمال اینکه هیئت منصفه مرکب از چهار مرد متأهل، یک مرد مجرد، و پنج زن شوهردار، و دو زن مجرد باشد چقدر است؟

حل. اگر در فرمول تعریف ۹.۵ قرار دهیم $x_۱ = ۴$، $x_۲ = ۱$، $x_۳ = ۵$، $x_۴ = ۲$، $a_۱ = ۶$، $a_۲ = ۳$، $a_۳ = ۷$، $a_۴ = ۴$، $N = ۲۰$، و $n = ۱۲$، به‌دست می‌آوریم

$$f(۴, ۱, ۵, ۲; ۱۲, ۶, ۳, ۷, ۴) = \frac{\binom{۶}{۴}\binom{۳}{۱}\binom{۷}{۵}\binom{۴}{۲}}{\binom{۲۰}{۱۲}} = ۰٫۰۴۵۰$$

▲

تمرینها

۷۴.۵ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، و X_k دارای توزیع چندجمله‌ای تعریف ۸.۵ باشند، نشان دهید که میانگین توزیع حاشیه‌ای X_i به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, k$ برابر با $-n\theta_i$ است.

۷۵.۵ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، و X_k دارای توزیع چندجمله‌ای تعریف ۸.۵ باشند، نشان دهید که کوواریانس X_i و X_j، برای $i = ۱, ۲, \cdots, k$، $j = ۱, ۲, \cdots, k$، و $i \neq j$ برابر با $-n\theta_i\theta_j$ است.

کاربردها

۷۶.۵ احتمالهای اینکه نوعی اتومبیل کم‌مصرف در رانندگی داخل شهر با یک گالن بنزین، به‌طور متوسط کمتر از ۲۲ کیلومتر، از ۲۲ تا ۲۶ کیلومتر، یا بیش از۲۶ کیلومتر را طی کند به‌ترتیب ۴۰ر۰، ۵۰ر۰، و ۱۰ر۰ هستند. پیدا کنید احتمال اینکه بین ده دستگاه از این نوع اتومبیل که آزمون می‌شوند، با یک گالن بنزین، به‌طور متوسط سه‌تا کمتر از ۲۲ کیلومتر، شش‌تا بین ۲۲ تا ۲۶ کیلومتر و یکی بیش از ۲۶ کیلومتر طی کنند.

۷۷.۵ فرض کنید احتمال اینکه یک اظهارنامهٔ مالیاتی، صحیح پر شود، شامل فقط خطاهایی به نفع مالیات‌دهنده، شامل فقط خطاهایی به نفع دولت، یا شامل خطاهایی از هر دو نوع باشد به‌ترتیب ۶۰ر۰، ۲۰ر۰، ۱۰ر۰ و ۱۰ر۰ است. احتمال اینکه بین ۱۲ تا از چنین اظهارنامه‌های مالیاتی که به‌تصادف برای حسابرسی انتخاب می‌شوند، پنج‌تا صحیح پر شده باشند، چهار تا فقط شامل خطاهایی به نفع مالیات‌دهنده، دو تا شامل فقط خطاهایی به نفع دولت و یکی شامل خطاهایی از هر دو نوع باشند چقدر است؟

۷۸.۵ بنابر نظریهٔ توارث مندل، اگر گیاهانی با دانه‌های گِرد زردرنگ را به گیاهانی که دانه‌های چروکیدهٔ سبز دارند پیوند بزنند، احتمال اینکه گیاه حاصل، دانه‌های گِرد زرد، دانه‌های چروکیدهٔ زرد، دانه‌های گِرد سبز، یا دانه‌های چروکیدهٔ سبز داشته باشد به‌ترتیب $\frac{۹}{۱۶}$، $\frac{۳}{۱۶}$، $\frac{۳}{۱۶}$، و $\frac{۱}{۱۶}$ است. احتمال اینکه بین نه گیاهی که بدین طریق به‌دست می‌آیند چهارتا دانه‌های گِرد زرد، دوتا دانه‌های چروکیدهٔ زرد، سه‌تا دانه‌های گِرد سبز داشته باشند و هیچ‌یک دانهٔ چروکیدهٔ سبز نداشته باشند چقدر است؟

۷۹.۵ اگر ۱۸ جام شیشهٔ معیوب شامل ده جام ترک‌دار ولی بدون لک، پنج جام لک‌دار ولی بدون ترک، و سه جام ترک‌دار و لک‌دار باشد، احتمال اینکه بین شش جام (که به‌تصادف برای بازبینی بیشتر انتخاب شده‌اند) سه تا ترک‌دار ولی بدون لک، یکی لک‌دار اما بدون ترک، و دوتا لک‌دار و ترک‌دار باشند چقدر است؟

۸۰.۵ بین ۲۵ دلار نقره‌ای مسکوک سال ۱۹۰۳، ۱۵ تا ضرب فیلادلفیا، ۷ تا ضرب نیواورلئان، و ۳ تا ضرب سانفرانسیسکوست. اگر ۵ تا از این دلارهای نقره‌ای را به‌تصادف انتخاب کنیم، پیدا کنید احتمال به‌دست آوردن

(الف) ۴ سکهٔ ضرب فیلادلفیا و یکی ضرب نیواورلئان؛

(ب) سه سکه ضرب فیلادلفیا و یکی ضرب یکی از دو ایالت دیگر.

مراجع

اطلاعاتی مفید دربارهٔ توزیعهای احتمال خاص گوناگون را می‌توان در

DERMAN, C., GLESER, L., and OLKIN, I., *Probability Models and Applications*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1980,

HASTINGS, N. A. J., and PEACOCK, J. B., *Statistical Distributions*. London: Butterworth & Co. Ltd., 1975,

و

JOHNSON, N. L., and KOTZ, S., *Discrete Distributions*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1969.

یافت. احتمالهای دوجمله‌ای، برای $n = ۲$ تا $n = ۴۹$ را می‌توان در

Tables of the Binomial Probability Distribution, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 6, Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office, 1950,

و برای $n = ۵۰$ تا $n = ۱۰۰$ را می‌توان در

ROMIG, H. G., *50–100 Binomial Tables*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1953.

یافت. متداولترین جدول احتمالهای پواسون عبارت است از

MOLINA, E. C., *Poisson's Exponential Binomial Limit*. Melbourne, Fla.: Robert E. Krieger Publishing Company, 1973 Reprint.

۶

چگالیهای احتمال خاص

۱.۶ مقدمه

در این فصل برخی چگالیهای احتمال را که به‌صورتی چشمگیر در نظریهٔ آمار و در کاربردها پیش می‌آیند، مطالعه می‌کنیم. علاوه‌بر آنهایی که در متن کتاب آمده‌اند، برخی چگالیهای دیگر در تمرینهای بعد از بخش ۴.۶ معرفی شده‌اند، و سه چگالی احتمالی که واجد اهمیت پایه‌ای در نظریهٔ نمونه‌گیری‌اند در فصل ۸ پیگیری شده‌اند. نظیر فصل ۵، پارامترها و تابعهای مولد گشتاورها را به‌دست آورده‌ایم و برخی از جزئیات را نیز به‌عنوان تمرین واگذار کرده‌ایم.

۲.۶ چگالی یکنواخت

چگالیهای احتمال مثالهای ۸.۳ و ۱۱.۳ حالتهایی خاص از **چگالی یکنواخت**‌اند که نمودار آنها را می‌توان مثل شکل ۶.۳ رسم کرد.

تعریف ۱.۶ متغیر تصادفی X دارای **چگالی یکنواخت** است، و به آن متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد.

پارامترهای α و βی این چگالی احتمال، ثابتهای حقیقی‌اند و $\alpha < \beta$. در تمرین ۲.۶ از خواننده خواسته شده است که تحقیق کند که

قضیهٔ ۱.۶ میانگین و واریانس چگالی یکنواخت عبارت‌اند از

$$\mu = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{و} \quad \sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$$

گرچه چگالی یکنواخت برخی کاربردهای مستقیم دارد که یکی از آنها در مثال ۸.۷ مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی ارزش اصلی‌اش آن است که به‌دلیل سادگی به آسانی برای توضیح جنبه‌های مختلف نظریهٔ آماری به‌کار می‌آید.

۳.۶ توزیعهای گاما، نمایی و خی‌دو

بعضی از مثالها و تمرینهای فصل ۳ و ۴ با متغیرهای تصادفیی سروکار داشتند که چگالیهای آنها به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} kx^{\alpha-1}e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، که در آن $\alpha > 0$، $\beta > 0$، و k باید چنان باشد که مساحت کل زیر منحنی مساوی ۱ شود. برای محاسبهٔ k، ابتدا قرار می‌دهیم $y = \frac{x}{\beta}$، که نتیجه می‌دهد

$$\int_0^\infty kx^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = k\beta^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$$

انتگرال حاصل تنها به α بستگی دارد، و تابع معروف به **تابع گاما** را تعریف می‌کند

$$\Gamma(\alpha) = \int_{\circ}^{\infty} y^{\alpha-\text{۱}} e^{-y} dy \qquad \alpha > \circ$$

که به‌تفصیل در اکثر کتابهای درسی پیشرفتهٔ حسابان مورد بحث قرار می‌گیرد. با انتگرالگیری جزءبه‌جزء که در تمرین ۷.۶ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده است درمی‌یابیم که تابع گاما در فرمول بازگشتی

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - \text{۱}) \cdot \Gamma(\alpha - \text{۱})$$

به‌ازای $\alpha > \text{۱}$ صدق می‌کند، و چون

$$\Gamma(\text{۱}) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-y} dy = \text{۱}$$

نتیجه می‌شود که با کاربرد تکراری فرمول بازگشتی، وقتی α عدد صحیح مثبت است $\Gamma(\alpha) = (\alpha - \text{۱})!$. همچنین یک مقدار خاص مهم نیز که در تمرین ۹.۶ تحقیق آن را از خواننده خواسته‌ایم $\Gamma(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}) = \sqrt{\pi}$ است.

حال به مسئلهٔ محاسبهٔ k برمی‌گردیم، اگر انتگرالی را که به‌دست آوردیم مساوی ۱ قرار دهیم، نتیجه می‌شود

$$\int_{\circ}^{\infty} kx^{\alpha-\text{۱}} e^{-x/\beta} dx = k\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha) = \text{۱}$$

و از آنجا

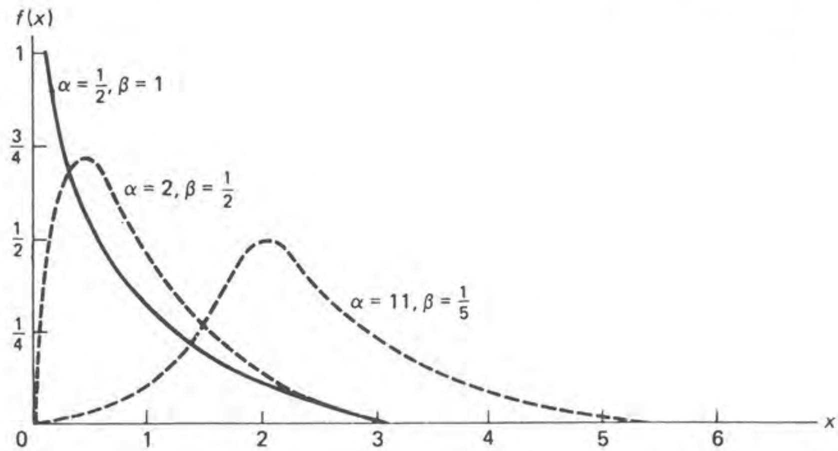
$$k = \frac{\text{۱}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

این، به‌تعریف زیر از **توزیع گاما** منجر می‌شود

تعریف ۲.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع گاما**ست و به آن متغیر تصادفی گاما اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر، چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{۱}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-\text{۱}} e^{-x/\beta} & x > \circ \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، که در آن $\alpha > \circ$، $\beta > \circ$.



شکل۶.۱ نمودار توزیعهای گاما

وقتی α عدد صحیح مثبت نیست، مقدار $\Gamma(\alpha)$ را مجبوریم در جدولی خاص پیدا کنیم. برای اینکه دربارهٔ شکل نمودارهای چگالیهای گاما ایده‌ای به‌خواننده بدهیم، این نمودارها را برای برخی مقادیر خاص α و β در شکل ۶.۱ نشان داده‌ایم.

برخی حالتهای خاص توزیع گاما نقشهای مهمی در آمار بازی می‌کنند؛ به‌عنوان نمونه، برای $\alpha = ۱$ و $\beta = \theta$، به‌دست می‌آوریم

تعریف۶.۳ متغیر تصادفی X دارای **توزیع نمایی** است، و به آن متغیر تصادفی نمایی اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\theta} e^{-x/\theta} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، که در آن $\theta > ۰$.

برای نشان دادن اینکه توزیع نمایی چگونه ممکن است در عمل پیش آید، به وضعیتی که در تمرین ۴۲.۵ توصیف شد اشاره می‌کنیم، که در آن، احتمال به‌دست آوردن x پیروزی در طول فاصلهٔ زمانی t، مورد توجه است وقتی که (i) احتمال یک پیروزی در طول فاصلهٔ زمانی خیلی کوچک t تا $t + \Delta t$ برابر $\alpha \cdot \Delta t$ باشد، (ii) احتمال وقوع بیش از یک پیروزی در طول چنین فاصلهٔ زمانی ناچیز بوده، و (iii) احتمال یک پیروزی در طول چنین فاصلهٔ زمانی به آنچه قبل از زمان t رخ می‌دهد بستگی نداشته باشد. در آن تمرین، نشان دادیم که تعداد پیروزیها مقداری از متغیر

تصادفی گسستهٔ X است که توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = \alpha t$ دارد. اینک چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوستهٔ Y را که **زمان انتظار** تا اولین پیروزی است تعیین می‌کنیم. به‌وضوح برای $y > 0$،

$$\begin{aligned}
F(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) \\
&= 1 - P(\text{۰ پیروزی در یک فاصلهٔ زمانی به طول } y) \\
&= 1 - p(0; \alpha y) \\
&= 1 - \frac{e^{-\alpha y}(\alpha y)^0}{0!} \\
&= 1 - e^{-\alpha y}
\end{aligned}$$

و برای $y \leq 0$، $F(y) = 0$. پس با داشتن تابع توزیع Y، مشتقگیری نسبت به y نتیجه می‌دهد

$$f(y) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y} & y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که همان تابع چگالی نمایی با $\theta = \frac{1}{\alpha}$ است.

توزیع نمایی نه‌تنها در وقوع اولین پیروزی در **فرایند پواسون**، که نام وضعیتی مثل توصیف تمرین ۴۲.۵ است، به‌کار می‌رود، بلکه به واسطهٔ شرط (iii) (تمرین ۱۶.۶ را ببینید) در زمانهای انتظار بین پیروزیها هم کاربرد دارد.

مثال ۱.۶

در مکان معینی از یک بزرگراه، تعداد ماشینهایی که سرعت آنها ۱۰ کیلومتر در ساعت بیش از سرعت مجاز است، در مدت زمان نیم ساعت، متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با $\lambda = 8.4$ دارد. احتمال زمان انتظار کمتر از ۵ دقیقه بین ماشینهایی را که سرعت آنها ۱۰ کیلومتر در ساعت بیش از حد مجاز است بیابید؟

حل. با استفاده از نیم ساعت به‌عنوان واحد زمان، داریم $\alpha = \lambda = 8.4$. بنابراین زمان انتظار متغیری تصادفی است که دارای توزیع نمایی با $\theta = \frac{1}{8.4}$ است، و چون ۵ دقیقه برابر با $\frac{1}{6}$ واحد زمان است، احتمال مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\int_0^{\frac{1}{6}} 8.4 e^{-8.4x}\,dx = -e^{-8.4x}\Big|_0^{\frac{1}{6}} = -e^{-1.4} + 1$$

که تقریباً مساوی ۰٫۷۵ است. ▲

حالت خاص دیگری از توزیع گاما وقتی رخ می‌دهد که $\alpha = \frac{\nu}{2}$ و $\beta = 2$، که در آن ν حرف کوچک "نو"ی یونانی است.

تعریف ۴.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع خی‌دو** است و به آن متغیر تصادفی خی‌دو اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد.

پارامتر ν را **تعداد درجه‌های آزادی** یا صرفاً **درجه‌های آزادی** می‌نامند. توزیع خی‌دو در نظریهٔ نمونه‌گیری نقش بسیار مهمی بازی می‌کند و به‌تفصیل در فصل ۸ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

به‌منظور تعیین فرمولهایی برای میانگین و واریانس توزیع گاما و بنابراین توزیعهای نمایی و خی‌دو ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۶ rامین گشتاور حول مبدأ توزیع گاما به‌صورت

$$\mu'_r = \frac{\beta^r \Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}$$

است.

برهان. بنابر تعریف ۲.۴

$$\mu'_r = \int_0^\infty x^r \cdot \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx = \frac{\beta^r}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^\infty y^{\alpha+r-1} e^{-y} dy$$

که در آن قرار داده‌ایم $y = \frac{x}{\beta}$. چون بنابر تعریف تابع گاما در صفحهٔ ۲۲۴، انتگرال طرف راست برابر $\Gamma(r + \alpha)$ است، برهان کامل می‌شود. ■

حال با استفاده از قضیهٔ ۲.۶، قضیه و فرعهای زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۶ میانگین و واریانس توزیع گاما عبارت‌اند از

$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad \text{و} \quad \mu = \alpha\beta$$

برهان. از قضیهٔ ۲.۶ با $r = 1$ و $r = 2$، به‌دست می‌آوریم

$$\mu'_1 = \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta$$

و

$$\mu'_2 = \frac{\beta^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha+1)\beta^2$$

به‌قسمی که $\mu = \alpha\beta$ و $\sigma^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha\beta^2$. ■

در این فرمولها، برای توزیع نمایی قرار می‌دهیم $\alpha = 1$ و $\beta = \theta$، و برای توزیع خی‌دو قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{\nu}{2}$ و $\beta = 2$ و به‌دست می‌آوریم

فرع ۱ میانگین و واریانس توزیع نمایی عبارت‌اند از

$$\mu = \theta \quad \text{و} \quad \sigma^2 = \theta^2$$

فرع ۲ میانگین و واریانس توزیع خی‌دو عبارت‌اند از

$$\mu = \nu \quad \text{و} \quad \sigma^2 = 2\nu$$

برای مراجعات آینده، در اینجا تابع مولد گشتاورهای توزیع گاما را نیز ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۴.۶ تابع مولد گشتاورهای توزیع گاما عبارت‌اند از

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

از خواننده می‌خواهیم که این قضیه را ثابت کند و آن‌را در تمرینهای ۱۲.۶ و ۱۳.۶ برای پیدا کردن برخی گشتاورهای مراتب پایینتر توزیع گاما به‌کار برد.

۴.۶ توزیع بتا

چگالی یکنواخت $f(x) = 1$ به‌ازای $0 < x < 1$ و $f(x) = 0$ در سایر جاها، حالتی خاص

از **توزیع بتاست** که به‌طریق زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع بتاست**، و به آن متغیر تصادفی بتا اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، که در آن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

در سالهای اخیر توزیع بتا کاربردهای مهمی در **استنباط بیزی** پیدا کرده است، که در آن پارامترها به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند، و برای پارامتر θی توزیع دوجمله‌ای که مقادیر مخالف صفری تنها در بازهٔ ۰ تا ۱ اختیار می‌کند، نیاز به یک چگالی احتمال نسبتاً «انعطاف‌پذیر» وجود دارد. منظور از چگالی «انعطاف‌پذیر» چگالی احتمالی است که می‌تواند شکلهای کاملاً گوناگونی به‌خود بگیرد که تحقیق درستی آن در تمرین ۲۷.۶ از خواننده خواسته شده است. این مورد استفاده از توزیع بتا در فصل ۱۰ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

ما در اینجا ثابت نمی‌کنیم که کل مساحت زیر منحنی توزیع بتا مانند هر تابع چگالی دیگر، برابر یک است، ولی در اثبات قضیه‌ای که به دنبال خواهد آمد از این واقعیت که

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1$$

و در نتیجه

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

استفاده می‌کنیم. این انتگرال، **تابع بتا** را تعریف می‌کند که مقادیرش را با $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ نشان می‌دهند؛ به‌عبارت دیگر $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$. بحث تفصیلی تابع بتا را می‌توان در هر کتاب درسی حسابان پیشرفته یافت.

قضیهٔ ۵.۶ میانگین و واریانس توزیع بتا عبارت‌اند از

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{و} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

برهان. بنابر تعریف

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^1 x\cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

که در آن دیده می‌شود که انتگرال، همان $B(\alpha+1,\beta)$، و از واقعیت $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha)$ و $\Gamma(\alpha+\beta+1)=(\alpha+\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta)$ نیز استفاده شده است. مراحل مشابهی که انجام آنها در تمرین ۲۸.۶ به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده است، نتیجه می‌دهد که

$$\mu'_2=\frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2\\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\end{aligned}$$

■

تمرینها

۱.۶ نشان دهید که اگر متغیری تصادفی دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β باشد، احتمال اینکه مقداری کمتر از $\alpha+p(\beta-\alpha)$ اختیار کند مساوی p است.

۲.۶ قضیهٔ ۱.۶ را ثابت کنید.

۳.۶ اگر متغیر تصادفی X دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β باشد تابع توزیع آن را بیابید.

۴.۶ نشان دهید که اگر متغیر تصادفی دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β باشد، rامین گشتاور حول میانگین آن برابر است با

(الف) ۰، وقتی r فرد است.

(ب) $\frac{1}{r+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^r$، وقتی r زوج است.

۵.۶ با استفاده از نتایج تمرین ۴.۶، α_3 و α_4 را برای چگالی یکنواخت با پارامترهای α و β بیابید.

۶.۶ گوییم متغیری تصادفی دارای **توزیع کوشی** است هرگاه چگالی آن به‌صورت

$$f(x) = \frac{\frac{\beta}{\pi}}{(x-\alpha)^۲ + \beta^۲} \qquad -\infty < x < \infty$$

باشد. نشان دهید که برای این توزیع، $\mu'_۱$ و $\mu'_۲$ وجود ندارند.

۷.۶ با انتگرالگیری جزءبه‌جزء نشان دهید که به‌ازای $\alpha > ۱$،

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - ۱)\cdot\Gamma(\alpha - ۱)$$

۸.۶ با تعویض متغیر مناسبی نشان دهید که می‌توان انتگرالی را که تابع گاما را تعریف می‌کند به‌صورت

$$\Gamma(\alpha) = ۲^{۱-\alpha}\cdot\int_۰^\infty z^{۲\alpha-۱}e^{-\frac{۱}{۲}z^۲}dz \qquad \alpha > ۰$$

نوشت.

۹.۶ با استفاده از صورت تابع گاما در تمرین ۸.۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{۲}\int_۰^\infty e^{-\frac{۱}{۲}z^۲}dz$$

و از آنجا

$$\begin{aligned}[\Gamma(\frac{۱}{۲})]^۲ &= ۲\left\{\int_۰^\infty e^{-\frac{۱}{۲}x^۲}dx\right\}\left\{\int_۰^\infty e^{-\frac{۱}{۲}y^۲}dy\right\}\\ &= ۲\int_۰^\infty\int_۰^\infty e^{-\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)}dxdy\end{aligned}$$

این انتگرال دوگانه را به مختصات قطبی ببرید و در نتیجه ثابت کنید که $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$.

۱۰.۶ احتمال آن را که مقدار یک متغیر تصادفی از ۴ تجاوز کند، به‌شرطی که متغیر دارای توزیع گاما با

(الف) $\alpha = ۲$ و $\beta = ۳$؛

(ب) $\alpha = ۳$ و $\beta = ۴$؛

باشد، پیدا کنید.

۱۱.۶ نشان دهیذ که توزیع گاما با $\alpha > ۱$ دارای ماکسیممی نسبی به‌ازای $x = \beta(\alpha - ۱)$ است. وقتی $۰ < \alpha < ۱$ و وقتی $\alpha = ۱$، چه اتفاقی می‌افتد؟

۱۲.۶ با قرار دادن $y = x(\frac{۱}{\beta} - t)$ در انتگرال تعریف $M_X(t)$، قضیهٔ ۴.۶ را ثابت کنید.

۱۳.۶ تابع مولد گشتاورهای توزیع گاما را به‌صورت سری دوجمله‌ای بسط دهید و مقادیر $\mu'_۱$، $\mu'_۲$، $\mu'_۳$ و $\mu'_۴$ را از روی آن بیابید.

۱۴.۶ نتایج تمرین ۱۳.۶ را به‌کار برید و $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ را برای توزیع گاما بیابید.

۱۵.۶ نشان دهید که اگر متغیری تصادفی چگالی نمایی با پارامتر θ داشته باشد، احتمال اینکه مقداری کمتر از $-\theta \cdot \ln(۱-p)$، به‌ازای $۰ \leq p < ۱$، اختیار کند برابر p است.

۱۶.۶ اگر X دارای توزیع نمایی باشد، نشان دهید که

$$P(X \geq t + T | X \geq T) = P(X \geq t)$$

این ویژگی متغیر تصادفی نمایی متناظر با آن ویژگی متغیر تصادفی هندسی است که در تمرین ۳۴.۵ داده شده است.

۱۷.۶ اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، با استفاده از قضایای ۱۰.۴ و ۴.۶، تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی $Y = X - \theta$ را بیابید.

۱۸.۶ با رجوع به تمرین ۱۷.۶، و با استفاده از این واقعیت که گشتاورهای Y حول مبدأ، گشتاورهای متناظر X حول میانگین‌اند، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ را برای توزیع نمایی با پارامتر θ بیابید.

۱۹.۶ نشان دهید که اگر $\nu > ۲$، توزیع خی‌دو دارای ماکسیمم نسبی در $x = \nu - ۲$ است. وقتی $\nu = ۲$ یا $۰ < \nu < ۲$ چه رخ می‌دهد؟

۲۰.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع ریلی**[1] است اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۲\alpha x e^{-\alpha x^۲} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، که در آن $\alpha > ۰$. نشان دهید که برای این توزیع

(الف) $\mu = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$؛

(ب) $\sigma^۲ = \frac{۱}{\alpha}(۱ - \frac{\pi}{۴})$.

۲۱.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع پارتو**[2] است، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+۱}} & x > ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، نشان دهید که μ'_r تنها وقتی موجود است که $r < \alpha$.

۲۲.۶ با رجوع به تمرین ۲۱.۶، نشان دهید که برای توزیع پارتو، $\mu = \frac{\alpha}{\alpha-۱}$، به شرط اینکه $\alpha > ۱$ باشد.

۲۳.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع وایبول**[3] است، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} kx^{\beta-۱}e^{-\alpha x^{\beta}} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

1. Rayleigh 2. Pareto 3. Weibull

باشد، که در آن $\alpha > 0$ و $\beta > 0$.

(الف) k را برحسب α و β بیان کنید.

(ب) نشان دهید که $\mu = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$.

توجه کنید که توزیعهای وایبول با $\beta = 1$، توزیعهای نمایی هستند.

۲۴.۶ اگر متغیر تصادفی T، زمان ازکارافتادگی فرآورده‌های تجارتی باشد و مقادیر چگالی احتمال و تابع توزیع آن در زمان t به‌ترتیب $f(t)$ و $F(t)$ باشند، در این صورت **نرخ ازکارافتادگی** در زمان t (تمرین ۳۵.۵ را هم ببینید) با $\frac{f(t)}{1-F(t)}$ داده می‌شود. پس نرخ ازکارافتادگی در زمان t، چگالی احتمال ازکارافتادگی به‌ازای t است، به فرض آنکه ازکارافتادگی قبل از زمان t رخ نداده باشد.

(الف) نشان دهید که اگر T توزیع نمایی داشته باشد، نرخ ازکارافتادگی مقداری ثابت است.

(ب) نشان دهید که اگر T توزیع وایبول (تمرین ۲۳.۶ را ببینید) داشته باشد، نرخ ازکارافتادگی برابر $\alpha\beta t^{\beta-1}$ است.

۲۵.۶ تحقیق کنید که انتگرال چگالی بتا از $-\infty$ تا $+\infty$ به‌ازای

(الف) $\alpha = 2$ و $\beta = 4$؛

(ب) $\alpha = 3$ و $\beta = 3$؛

برابر یک است.

۲۶.۶ نشان دهید که اگر $\alpha > 1$ و $\beta > 1$، چگالی بتا به‌ازای $x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ دارای ماکسیممی نسبی است.

۲۷.۶ نمودار چگالیهای بتایی را که دارای پارامترهای زیرند رسم کنید:

(الف) $\alpha = 2$ و $\beta = 2$؛ (ب) $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = 1$؛

(ج) $\alpha = 2$ و $\beta = \frac{1}{2}$؛ (د) $\alpha = 2$ و $\beta = 5$؛

[راهنمایی: برای محاسبهٔ $\Gamma(\frac{3}{2})$ و $\Gamma(\frac{5}{2})$ فرمول بازگشتی $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\cdot\Gamma(\alpha-1)$ و نتیجهٔ تمرین ۹.۶ را به‌کار برید.]

۲۸.۶ در برهان قضیهٔ ۵.۶ درستی عبارتی را که برای μ'_2 داده شده است تحقیق کنید.

۲۹.۶ نشان دهید که پارامترهای توزیع بتا را می‌توان به‌صورت زیر برحسب میانگین و واریانس این توزیع بیان کرد:

(الف) $\alpha = \mu\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right]$؛

(ب) $\beta = (1-\mu)\left[\frac{\mu(1-\mu)}{\sigma^2} - 1\right]$.

۳۰.۶ کارل پیرسن[1]، یکی از بنیانگذاران آمار نوین، نشان داد که اغلب توزیعهای مهم آمار از معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d[f(x)]}{dx} = \frac{d-x}{a+bx+cx^2}$$

1. Karl Pearson

(بەازای مقادیر مناسبی از ثابتهای a، b، c، و d) بەدست می‌آیند. تحقیق کنید که از این معادلهٔ دیفرانسیل

(الف) وقتی $a = c = \circ$، $b > \circ$ و $d > -b$، توزیع گاما؛

(ب) وقتی $a = c = d = \circ$ و $b > \circ$، توزیع نمایی؛

(ج) وقتی $a = \circ$، $b = -c$، $\frac{d-1}{b} < 1$ و $\frac{d}{b} > -1$ توزیع بتا؛

بەدست می‌آید.

کاربردها

۳۱.۶ نقطهٔ D روی پاره‌خط AB که نقطهٔ وسطش C و طولش a است انتخاب شده است. اگر X، فاصلهٔ D از A، متغیری تصادفی باشد که چگالی یکنواخت با $\alpha = \circ$ و $\beta = a$ دارد، احتمال آنکه AD، BD، و AC تشکیل مثلثی بدهند چقدر است؟

۳۲.۶ در برخی از آزمایشها، خطایی که در تعیین وزن مخصوص یک ماده مرتکب می‌شوند متغیری تصادفی است که دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = -\circ/\circ۱۵$ و $\beta = \circ/\circ۱۵$ است. تعیین کنید احتمال اینکه

(الف) چنین خطایی بین $-\circ/\circ\circ۲$ و $\circ/\circ\circ۳$ باشد؛

(ب) قدرمطلق چنین خطایی از $\circ/\circ\circ۵$ تجاوز کند.

۳۳.۶ اگر شرکتی n فروشنده استخدام کند، فروش کل آن برحسب هزار تومان را می‌توان متغیری تصادفی در نظر گرفت که دارای توزیع گاما با $\alpha = ۸\circ\sqrt{n}$ و $\beta = ۲$ است. اگر هزینهٔ فروش برای هر فروشنده ۸۰۰۰ تومان باشد، شرکت باید چند فروشنده را استخدام کند تا سود مورد انتظار ماکسیمم شود؟

۳۴.۶ در شهری معین، مصرف روزانهٔ برق را برحسب میلیون کیلووات ساعت می‌توان بەصورت متغیری تصادفی در نظر گرفت که توزیع گاما با $\alpha = ۳$ و $\beta = ۲$ دارد. اگر کارخانهٔ برق این شهر ظرفیتی برابر ۱۲ میلیون کیلووات ساعت داشته باشد، احتمال آنکه مقدار برق برای روز مفروضی ناکافی باشد چقدر است؟

۳۵.۶ مسافتی (برحسب هزار کیلومتر) که دارندگان اتومبیل با یک نوع تایر طی می‌کنند متغیری تصادفی است که دارای توزیع نمایی با $\theta = ۴\circ$ است. پیدا کنید احتمال اینکه یکی از این تایرها

(الف) حداقل ۲۰۰۰۰ کیلومتر؛

(ب) حداکثر ۳۰۰۰۰ کیلومتر؛

دوام داشته باشد.

۳۶.۶ مدت زمانی که ساعتی بدون نیاز به تنظیم کار می‌کند متغیری تصادفی است که دارای توزیع نمایی با $\theta = ۱۲\circ$ روز است. مطلوب است احتمال آنکه چنین ساعتی

(الف) درکمتر از ۲۴ روز نیاز به تنظیم داشته باشد؛

(ب) در حداقل ۱۸۰ روز نیاز به تنظیم نداشته باشد.

۳۷.۶ تعداد هواپیماهایی که در یک روز به فرودگاهی کوچک وارد می‌شوند متغیری تصادفی است که دارای توزیع پواسون با $\lambda = ۲۸٫۸$ است. احتمال اینکه زمان بین دو ورود حداقل ۱ ساعت باشد چقدر است؟

۳۸.۶ تعداد چکهای بی‌محلّی که بانکی در یک روزکار ۵ ساعته دریافت می‌کند متغیر تصادفی پواسون با $\lambda = ۲$ است. مطلوب است احتمال آنکه این بانک در ۲ ساعت اول یک روز چکی بی‌محل دریافت نکند.

۳۹.۶ یک وسیلهٔ خانگی، به‌طور متوسط یک‌بار در طول ۲ سال نیاز به تعمیر دارد. به فرض آنکه زمانهای بین تعمیرها توزیع نمایی داشته باشند، مطلوب است احتمال آنکه چنین وسیله‌ای حداقل ۳ سال بدون نیاز به تعمیر کار کند.

۴۰.۶ اگر نسبت سالیانهٔ اظهارنامه‌های مالیاتی نادرست که به‌وسیلهٔ مأموران مالیات پر شده‌اند به‌عنوان متغیری تصادفی در نظر گرفته شود که توزیع بتا با $\alpha = ۲$ و $\beta = ۹$ دارد، احتمال اینکه در سال مفروضی کمتر از ده درصد اظهارنامه‌ها نادرست باشند چقدر است؟

۴۱.۶ اگر نسبت سالیانهٔ رستورانهای جدیدی که در شهری ورشکست می‌شوند به‌صورت متغیری تصادفی در نظر گرفته شود که دارای توزیع بتا با $\alpha = ۱$ و $\beta = ۴$ است، پیدا کنید.

(الف) میانگین این توزیع، یعنی نسبت سالیانهٔ رستورانهای جدیدی که در این شهر انتظار ورشکستی آنها می‌رود؛

(ب) احتمال آنکه حداقل ۲۵ درصد رستورانهای جدید این شهر در یک سال ورشکست شوند.

۴۲.۶ فرض کنید که عمر مفید برحسب ساعت یک نیم‌هادی، متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع وایبول (تمرین ۲۳.۶ را ببینید) با $\alpha = ۰٫۰۲۵$ و $\beta = ۰٫۵۰۰$ است.

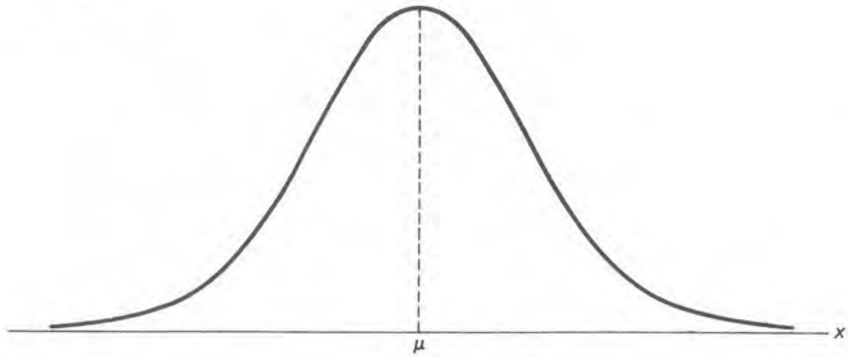
(الف) چه مدت زمانی را می‌توان انتظار داشت که چنین نیم‌هادیی عمر کند؛

(ب) احتمال اینکه چنین نیم‌هادیی بعد از ۴۰۰۰ ساعت، هنوز در حال کار باشد چقدر است؟

۵.۶ توزیع نرمال

توزیع نرمال که در این بخش مطالعه می‌شود از جهات زیادی، شالوده‌ای برای نظریهٔ آماری نوین است. این توزیع ابتدا در سدهٔ هجدهم، وقتی دانشمندان نظمی بسیار شگفت‌انگیز را در خطاهای اندازه‌گیری مشاهده کردند، مورد بررسی قرارگرفت. این دانشمندان دریافتند که الگوها (توزیعها)یی را که مشاهده می‌کنند می‌توان به‌دقت با منحنیهای پیوسته‌ای که آنها را «منحنیهای نرمال خطاها» نامیدند و به قوانین شانس نسبت دادند تقریب کرد. ویژگیهای ریاضی چنین منحنیهای نرمالی بدواً به وسیلهٔ آبراهام دموآور[1] (۱۶۶۷ـ۱۷۴۵)، پیر لاپلاس[2] (۱۷۴۹ـ۱۸۲۷)، و کارل گاوس[3] (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) مطالعه شد.

1. Abraham de Moivre 2. Pierre Laplace 3. Karl Gauss



شکل۶.۲ نمودار توزیع نرمال

تعریف۶.۶ متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال** است، و به آن متغیر تصادفی نرمال اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال آن به‌صورت

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}} \qquad -\infty < x < \infty$$

باشد، که در آن $\sigma > ۰$.

نمودار توزیع نرمال که شکلی شبیه مقطع عرضی یک زنگ دارد در شکل ۶.۲ نشان داده شده است.

نمادگذاریی که در اینجا به‌کار بردیم شبیه همان است که در رابطهٔ با برخی از توزیعهای فصل ۵ به‌کار رفت؛ این نمادگذاری صریحاً نشان می‌دهد که دو پارامتر توزیع نرمال μ و σ هستند. اما آنچه باقی می‌ماند آن است که ببینیم پارامتر μ در واقع همان $E(X)$ و پارامتر σ در واقع همان $\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ است یا نه، که در آنها X، متغیری تصادفی است که دارای توزیع نرمال با این دو پارامتر است.

با این حال ابتدا نشان می‌دهیم که فرمول تعریف ۶.۶ را می‌توان به‌عنوان یک چگالی احتمال به‌کار برد. چون واضح است مقادیر $n(x;\mu,\sigma)$ مادامی‌که $\sigma > ۰$ مثبت‌اند، باید نشان دهیم که کل مساحت زیر منحنی مساوی ۱ است. اگر از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرالگیری کنیم و قرار دهیم $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$، به‌دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{۲}}dx=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}}dz=\frac{۲}{\sqrt{۲\pi}}\int_{۰}^{\infty}e^{-\frac{۱}{۲}z^{۲}}dz$$

پس، چون انتگرال سمت راست مساوی $\frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{۲}}$ است، بنابر تمرین ۹.۶، نتیجه می‌شود که

مساحت کل زیر منحنی، برابر $1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ است.
اینک نشان می‌دهیم که

قضیهٔ ۶.۶ تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال عبارت است از

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

برهان. بنابر تعریف

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2]} dx \end{aligned}$$

و اگر عبارت داخل کروشه را به‌صورت مربع کامل درآوریم، یعنی اتحاد

$$-2xt\sigma^2 + (x-\mu)^2 = [x - (\mu + t\sigma^2)]^2 - 2\mu t\sigma^2 - t^2\sigma^4$$

را به‌کار بریم، به‌دست می‌آوریم

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+t\sigma^2)}{\sigma}\right]^2} dx \right\}$$

چون مقدار داخل دو ابرو، انتگرال از $-\infty$ تا ∞ یک چگالی نرمال با پارامترهای $\mu + t\sigma^2$ و σ است، و لذا مساوی ۱ است، نتیجه می‌شود که

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

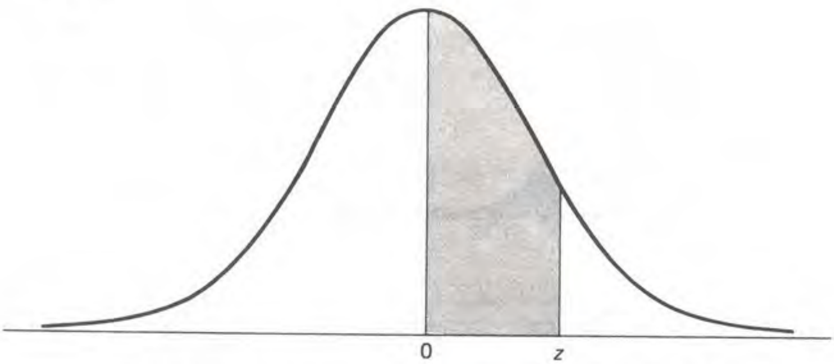
■

حال آماده تحقیق درستی آنیم که در تعریف ۶.۶، پارامترهای μ و σ، در واقع میانگین و انحراف معیار توزیع نرمال‌اند. اگر دوبار از $M_X(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) \cdot M_X(t)$$

و

$$M''_X(t) = [(\mu + \sigma^2 t)^2 + \sigma^2] \cdot M_X(t)$$



شکل۳.۶ مساحتهای جدولبندی شدهٔ زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد

بهقسمی که $M'_X(\circ) = \mu$ و $M''_X(\circ) = \mu^{\text{۲}} + \sigma^{\text{۲}}$. پس $E(X) = \mu$، بنابراین داریم $\mathrm{var}(X) = (\mu^{\text{۲}} + \sigma^{\text{۲}}) - \mu^{\text{۲}} = \sigma^{\text{۲}}$.

چون توزیع نرمال نقشی پایه‌ای در آمار دارد و از چگالی آن نمی‌توان مستقیماً انتگرالگیری کرد، مساحتهایش برای حالتی خاص که در آن $\mu = \circ$ و $\sigma = \text{۱}$، جدولبندی شده‌اند.

تعریف۷.۶ توزیع نرمال با $\mu = \circ$ و $\sigma = \text{۱}$، **توزیع نرمال استاندارد** نامیده می‌شود.

درایه‌های جدول III که با مساحت هاشورخوردهٔ شکل ۳.۶ نمایش داده می‌شوند، مقادیر

$$\int_{\circ}^{z} \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}\pi}} e^{-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}} dx$$

هستند. یعنی احتمالهای اینکه متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد مقداری در بازهٔ از ۰ تا z برای، $z = $ ۰٫۰۰, ۰٫۰۱, ۰٫۰۲, ... , ۳٫۰۸, ۳٫۰۹، و همچنین برای $z = $ ۴٫۰، $z = $ ۵٫۰، و $z = $ ۶٫۰، اختیار کند. به‌دلیل تقارن توزیع نرمال حول میانگینش، توسیع جدول III به مقادیر منفی z ضروری نیست.

مثال ۲.۶

پیدا کنید احتمال آنکه متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد مقداری

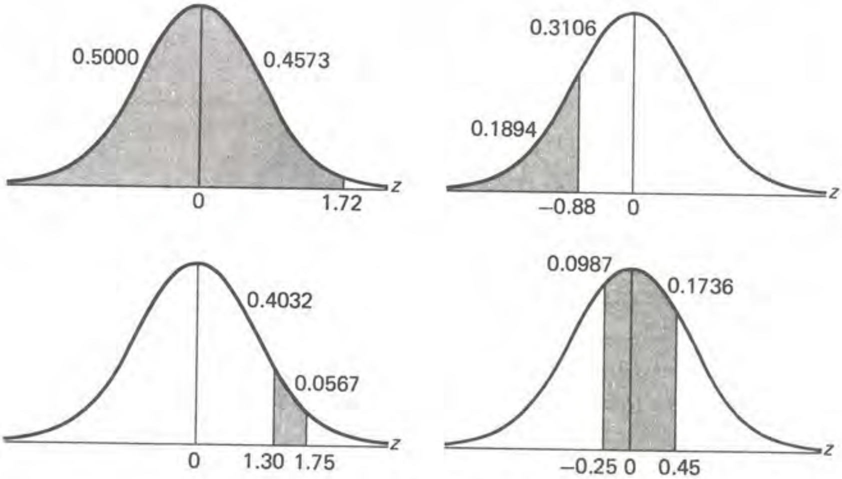
(الف) کمتر از ۱٫۷۲؛

(ب) کمتر از ۰٫۸۸−؛

(ج) بین ۱٫۳۰ و ۱٫۷۵؛ و

(د) بین ۰٫۲۵− و ۰٫۴۵،

اختیار کند.



شکل ۴.۶ نمودارهای مثال ۲.۶

حل. (الف) در جدول III، درایهٔ متناظر با $z =$ ۱٫۷۲ را پیدا می‌کنیم، به آن ۰٫۵۰۰۰ را اضافه می‌کنیم (شکل ۴.۶ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۰٫۹۵۷۳ = ۰٫۵۰۰۰ + ۰٫۴۵۷۳؛

(ب) درایهٔ متناظر با $z =$ ۰٫۸۸ را در جدول III پیدا و آن را از ۰٫۵۰۰۰ کم می‌کنیم (شکل ۴.۶ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۰٫۱۸۹۴ = ۰٫۳۱۰۶ − ۰٫۵۰۰۰.

(ج) در جدول III درایه‌های متناظر با $z =$ ۱٫۷۵ و $z =$ ۱٫۳۰ را پیدا و دومی را از اولی کم می‌کنیم (شکل ۴.۶ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۰٫۰۵۶۷ = ۰٫۴۰۳۲ − ۰٫۴۵۹۹.

(د) در جدول III درایه‌های متناظر با $z =$ ۰٫۲۵ و $z =$ ۰٫۴۵ را پیدا و آنها را با هم جمع می‌کنیم (شکل ۴.۶ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۰٫۲۷۲۳ = ۰٫۱۷۳۶ + ۰٫۰۹۸۷ ▲

گاهی نیاز داریم مقداری از z را بیابیم که متناظر با احتمالی مشخص است که بین دو مقدار فهرست شده در جدول III قرار می‌گیرند. در این موارد، برای راحتی، همیشه مقداری از z را انتخاب می‌کنیم که احتمال متناظر با آن در جدول، نزدیکترین مقدار به احتمال مشخص باشد. اما اگر احتمال داده شده وسط دو احتمال متوالی در جدول باشد، مقدار zی را انتخاب می‌کنیم که وسط مقادیر متناظر z بیفتد.

مثال ۳.۶

با رجوع به جدول II، مقادیر z متناظر با درایه‌های

(الف) ۰٫۳۵۱۲؛

(ب) ۰٫۲۵۳۳؛

را بیابید.

حل. (الف) چون ۳۵۱۲ر۰ بین ۳۵۰۸ر۰ و ۳۵۳۱ر۰ که متناظر با ۰۴ر۱ $= z$ و ۰۵ر۱ $= z$ هستند، می‌افتد، و چون ۳۵۱۲ر۰ به ۳۵۰۸ر۰ نزدیکتر است تا به ۳۵۳۱ر۰، پس مقدار ۰۴ر۱ $= z$ را انتخاب می‌کنیم.

(ب) چون ۲۵۳۳ر۰ وسط دو مقدار ۲۵۱۷ر۰ و ۲۵۴۹ر۰ است که با ۶۸ر۰ $= z$ و ۶۹ر۰ $= z$ متناظرند، پس مقدار ۶۸۵ر۰ $= z$ را انتخاب می‌کنیم. ▲

برای تعیین احتمالهای مربوط به متغیرهای تصادفیی که توزیعی نرمال غیر از توزیع نرمال استاندارد دارند از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قضیهٔ ۷.۶ اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، آنگاه

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

توزیع نرمال استاندارد دارد.

برهان. چون بستگی بین مقادیر X و Z خطی است، وقتی X مقداری بین x_1 و x_2 اختیار می‌کند، Z باید مقداری بین $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$ و $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$ را اختیار نماید. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
P(x_1 < X < x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \int_{z_1}^{z_2} n(z;0,1)dz \\
&= P(z_1 < Z < z_2)
\end{aligned}$$

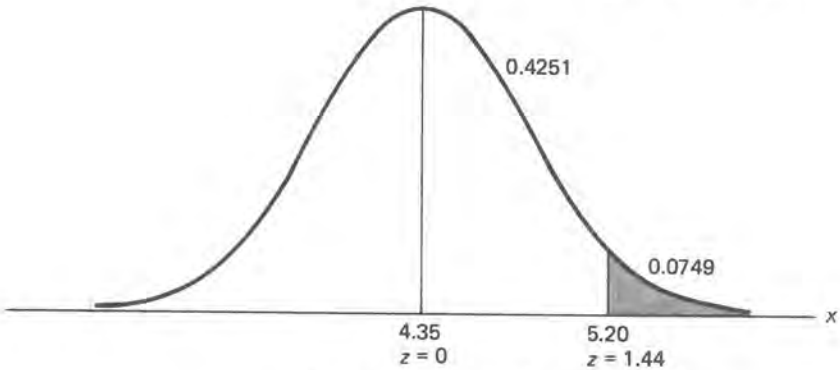
که در آن دیده می‌شود Z متغیری تصادفی است که توزیع نرمال استاندارد دارد. ■

بنابراین در ارتباط با هر متغیر تصادفیی که توزیع نرمال دارد، برای استفاده از جدول III به تعویض مقیاس $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ دست می‌زنیم.

مثال ۴.۶

فرض کنید وقتی فردی با جت بر فراز ایالات متحده پرواز می‌کند میزان تشعشع فضایی که در معرض آن قرار می‌گیرد متغیری تصادفی است که توزیع نرمال با میانگین ۳۵ر۴ میلی‌رم[1] و انحراف

1. rem



شکل۶.۵ نمودار مثال ۶.۴

معیار ۵۹ر۰ میلی‌رم‌دارد. احتمال اینکه شخصی در چنین پروازی در معرض میزانی بیش از ۲۰ر۵ میلی‌رم تشعشع فضایی قرار گیرد چقدر است؟

حل. در جدول III، درایهٔ متناظر با $z = \frac{۵٫۲۰ - ۴٫۳۵}{۰٫۵۹} = ۱٫۴۴$ را پیدا می‌کنیم و آن‌را از ۵۰۰۰ر۰ کم می‌کنیم (شکل ۶.۵ را ببینید)، و به‌دست می‌آوریم ۰۷۴۹ر۰ = ۴۲۵۱ر۰ − ۵۰۰۰ر۰. ▲

۶.۶ تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای

توزیع نرمال گاهی به‌عنوان توزیع پیوسته‌ای معرفی می‌شود که برای توزیع دوجمله‌ای، وقتی n، تعداد امتحانها خیلی بزرگ است، و θ، احتمال پیروزی در یک تک امتحان نزدیک $\frac{۱}{۲}$ است تقریب خوبی فراهم می‌کند. شکل ۶.۶ بافتنماهای توزیعهای دوجمله‌ای با $\theta = \frac{۱}{۲}$ و $n = ۲, ۵, ۱۰, ۲۵$ را نشان می‌دهد، و می‌توان دید که با افزایش n، این توزیعها به الگوی زنگدیسی متقارن توزیع نرمال میل می‌کنند.

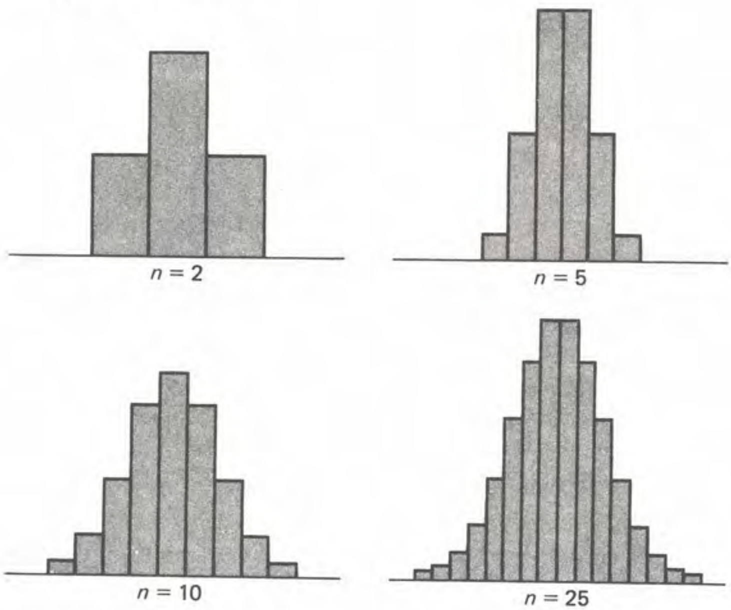
برای فراهم کردن یک پایهٔ نظری برای این بحث، ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ۶.۸ اگر X متغیری تصادفی باشد که توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ دارد، آنگاه تابع مولد گشتاورهای

$$Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$$

وقتی $n \to \infty$، به تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

برهان. با استفاده از قضیه‌های ۴.۱۰ و ۴.۵ می‌توانیم بنویسیم



شکل ۶.۶ توزیعهای دوجمله‌ای با $\theta = \frac{۱}{۲}$.

$$M_Z(t) = M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{-\mu t/\sigma} \cdot [۱ + \theta(e^{t/\sigma} - ۱)]^n$$

که در آن $\mu = n\theta$ و $\sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)}$. حال اگر لگاریتم بگیریم و به‌جای $e^{t/\sigma}$ از سری ماکلورن آن استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) &= -\frac{\mu t}{\sigma} + n \cdot \ln[۱ + \theta(e^{t/\sigma} - ۱)] \\ &= -\frac{\mu t}{\sigma} + n \cdot \ln\left[۱ + \theta\left\{\frac{t}{\sigma} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۲} + \frac{۱}{۶}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۳} + \cdots\right\}\right]\end{aligned}$$

و با استفاده از سری نامتناهی $\ln(۱+x) = x - \frac{۱}{۲}x^{۲} + \frac{۱}{۳}x^{۳} - \cdots$، که به‌ازای $|x| < ۱$ همگراست، برای بسط این لگاریتم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = -\frac{\mu t}{\sigma} &+ n\theta\left[\frac{t}{\sigma} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۲} + \frac{۱}{۶}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۳} + \cdots\right] \\ &- \frac{n\theta^{۲}}{۲}\left[\frac{t}{\sigma} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۲} + \frac{۱}{۶}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۳} + \cdots\right]^{۲} \\ &+ \frac{n\theta^{۳}}{۳}\left[\frac{t}{\sigma} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۲} + \frac{۱}{۶}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^{۳} + \cdots\right]^{۳} - \cdots\end{aligned}$$

با گردآوری توانهای همانند t، به‌دست می‌آوریم

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \left(-\frac{\mu}{\sigma} + \frac{n\theta}{\sigma}\right) t + \left(\frac{n\theta}{۲\sigma^۲} - \frac{n\theta^۲}{۲\sigma^۲}\right) t^۲ + \left(\frac{n\theta}{۶\sigma^۳} - \frac{n\theta^۲}{۲\sigma^۳} + \frac{n\theta^۳}{۳\sigma^۳}\right) t^۳ + \cdots$$
$$= \frac{۱}{\sigma^۲}\left(\frac{n\theta - n\theta^۲}{۲}\right) t^۲ + \frac{n}{\sigma^۳}\left(\frac{\theta - ۳\theta^۲ + ۲\theta^۳}{۶}\right) t^۳ + \cdots$$

زیرا $\mu = n\theta$. در این صورت اگر قرار دهیم $\sigma = \sqrt{n\theta(۱-\theta)}$، پیدا می‌کنیم که

$$\ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{۱}{۲}t^۲ + \frac{n}{\sigma^۳}\left(\frac{\theta - ۳\theta^۲ + ۲\theta^۳}{۶}\right) t^۳ + \cdots$$

که در آن به‌ازای $r > ۲$، ضریب t^r مضرب ثابتی از $\frac{n}{\sigma^r}$ است که وقتی $n \to \infty$، به صفر می‌گراید. نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = \frac{۱}{۲}t^۲$$

و چون حد یک لگاریتم برابر لگاریتم حد است (به‌شرط آنکه هردو حد وجود داشته باشند)، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(t) = e^{\frac{۱}{۲}t^۲}$$

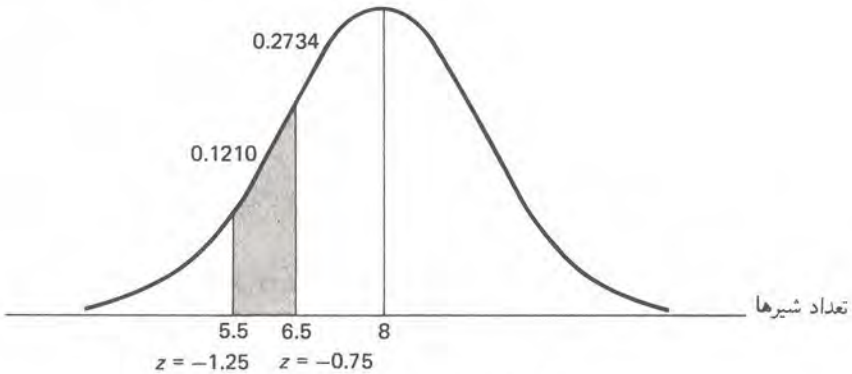
که تابع مولد گشتاورهای قضیه ۶.۶ با $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ است. ■

این، برهان قضیهٔ ۸.۶ را تکمیل می‌کند، اما آیا نشان داده‌ایم که وقتی $n \to \infty$ توزیع Z، متغیر تصادفی دوجمله‌ای **استاندارد شده**، به توزیع نرمال استاندارد می‌گراید؟ نه کاملاً. برای این منظور باید به دو قضیه‌ای که در اینجا بدون اثبات بیان می‌شوند مراجعه کنیم:

۱. بین تابعهای مولد گشتاورها و توزیعهای احتمال (چگالیها) وقتی تابعهای مولد وجود دارند تناظری یک به یک موجود است.

۲. اگر تابع مولد گشتاورهای یک متغیر تصادفی به تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی دیگری میل کند، آنگاه توزیع (چگالی) متغیر تصادفی اول تحت همان شرایط حدی به توزیع (چگالی) متغیر تصادفی دوم میل می‌کند.

اگر دقیقتر صحبت کنیم، این قضایا وقتی صادق‌اند که $n \to \infty$، اما توزیع نرمال اغلب حتی وقتی n نسبتاً کوچک است برای تقریب احتمالهای دوجمله‌ای به‌کار می‌رود. قانون سرانگشتی خوبی آن است که این تقریب را وقتی $n\theta$ و $n(۱-\theta)$ هردو بزرگتر از ۵ هستند به‌کار بریم.



شکل ۷.۶ نمودار مثال ۵.۶

مثال ۵.۶

با استفاده از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای احتمال آن را که در ۱۶ پرتاب یک سکهٔ همگن، ۶ شیر و ۱۰ خط به‌دست آوریم تعیین کنید

حل. برای یافتن این تقریب باید از **تصحیح پیوستگی** استفاده کنیم که بنابر آن، هر عدد صحیح نامنفی k با بازهٔ $k - \frac{۱}{۲}$ تا $k + \frac{۱}{۲}$ نشان داده می‌شود. با رجوع به شکل ۷.۶، باید مساحت زیر منحنی را بین ۵٫۵ و ۶٫۵ تعیین کنیم، و چون $\mu = ۱۶ \cdot \frac{۱}{۲} = ۸$ و $\sigma = \sqrt{۱۶ \cdot \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۱}{۲}} = ۲$، باید مساحت زیر منحنی را بین

$$z = \frac{۵٫۵ - ۸}{۲} = -۱٫۲۵ \quad \text{و} \quad z = \frac{۶٫۵ - ۸}{۲} = -۰٫۷۵$$

تعیین کنیم. چون در جدول III، درایه‌های متناظر با $z = ۱٫۲۵$ و $z = ۰٫۷۵$ به‌ترتیب ۰٫۳۹۴۴ و ۰٫۲۷۳۴ هستند، درمی‌یابیم که تقریب نرمال برای احتمال داشتن «۶ شیر و ۱۰ خط» برابر $۰٫۳۹۴۴ - ۰٫۲۷۳۴ = ۰٫۱۲۱۰$ است. چون مقدار متناظر در جدول I برابر با ۰٫۱۲۲۲ است، درمی‌یابیم که خطای تقریب برابر با ۰٫۰۰۱۲− است، و قدرمطلق خطای درصد برابر با $\frac{۰٫۰۰۱۲}{۰٫۱۲۲۲} \cdot ۱۰۰ = ۰٫۹۸$ درصد است. ▲

تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای، به‌صورت بسیار گسترده، به‌خصوص در تقریب کردن احتمالهای همراه با مجموعه‌های بزرگ مقادیر متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای به‌کار می‌رود. این روزها، اکثر این کارها با کامپیوترها انجام می‌شوند، و ما بستگی بین توزیعهای دوجمله‌ای و نرمال را اساساً به دلیل کاربردهای نظری آن ذکر کردیم. این بستگی پایه‌ای را برای بسیاری از شیوه‌های آماری تشکیل می‌دهد که در فصول ۱۱، ۱۳، و ۱۶ از آنها بحث خواهیم کرد.

تمرینها

۴۳.۶ نشان دهید که توزیع نرمال دارای

(الف) ماکسیممی نسبی در $x = \mu$ است؛

(ب) نقاط عطفی در $x = \mu - \sigma$ و $x = \mu + \sigma$ است.

۴۴.۶ نشان دهید که معادلهٔ دیفرانسیل تمرین ۳۰.۶ با $b = c = 0$ و $a > 0$، توزیع نرمال را نتیجه می‌دهد.

۴۵.۶ در برهان قضیهٔ ۶.۶، دوبار از تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال نسبت به t مشتق گرفتیم تا نشان دهیم که $E(X) = \mu$ و $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$. با دوبار مشتقگیری بیشتر و با استفاده از فرمول تمرین ۳۳.۴، عباراتی برای μ_3 و μ_4 بیابید.

۴۶.۶ اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است، تابع مولد گشتاورهای $Y = X - c$ را که در آن c مقداری ثابت است بیابید و از آن برای حل مجدد تمرین قبل استفاده کنید.

۴۷.۶ با استفاده از نتایج تمرین ۴۵.۶، نشان دهید که برای توزیعهای نرمال، $\alpha_3 = 0$ و $\alpha_4 = 3$. α_3 و α_4 در تمرینهای ۳۴.۴ و ۳۵.۴ تعریف شده‌اند.

۴۸.۶ اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است، با استفاده از قسمت سوم قضیهٔ ۱۰.۴ و قضیهٔ ۶.۶، نشان دهید که تابع مولد گشتاورهای

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد است. توجه کنید که این مطلب همراه با دو قضیهٔ صفحهٔ ۲۴۰، قضیهٔ ۷.۶ را ثابت می‌کند.

۴۹.۶ اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نرمال استاندارد است و $Y = X^2$، نشان دهید که $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ با اینکه X و Y به‌وضوح مستقل نیستند.

۵۰.۶ با استفاده از بسط به سری ماکلورنِ تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد، نشان دهید که

(الف) $\mu_r = 0$، وقتی r فرد است.

(ب) $\mu_r = \frac{r!}{2^{r/2}\left(\frac{r}{2}\right)!}$، وقتی r زوج است.

۵۱.۶ اگر قرار دهیم $K_X(t) = \ln M_{X-\mu}(t)$، ضریب $\frac{t^r}{r!}$ در سری ماکلورن $K_X(t)$، r**امین کومولان** نام دارد، و با κ_r نشان داده می‌شود. ضرایب توانهای برابر را مساوی هم قرار داده، نشان دهید که

(الف) $\kappa_2 = \mu_2$؛ (ب) $\kappa_3 = \mu_3$؛ (ج) $\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$.

۵۲.۶ با رجوع به تمرین قبل، نشان دهید که برای توزیعهای نرمال $\kappa_2 = \sigma^2$ و سایر کومولانها برابر صفرند.

۵۳.۶ نشان دهید که اگر X متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع پواسون با پارامتر λ است و

$\lambda \to \infty$، آنگاه تابع مولد گشتاورهای

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

یعنی تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی پواسون استاندارد شده به تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

۵۴.۶ نشان دهید وقتی $\alpha \to \infty$ و β ثابت می‌ماند، تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی گامای استاندارد شده به تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

کاربردها

۵۵.۶ اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، پیدا کنید احتمال آنکه این متغیر مقداری

(الف) بزرگتر از ۱٫۱۴؛

(ب) بزرگتر از ۰٫۳۶−؛

(ج) بین ۰٫۴۶− و ۰٫۰۹−؛

(د) بین ۰٫۵۸− و ۱٫۱۲.

اختیار کند.

۵۶.۶ اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال باشد، مطلوب است

(الف) $P(Z < ۱٫۳۳)$؛

(ب) $P(Z \leq -۰٫۷۹)$؛

(ج) $P(۰٫۵۵ < Z < ۱٫۲۲)$؛

(د) $P(-۱٫۹۰ \leq Z \leq ۰٫۴۴)$.

۵۷.۶ مقدار z را بیابید اگر مساحت زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد

(الف) بین ۰ و z، برابر ۰٫۴۷۲۶ باشد؛

(ب) در چپ z، برابر ۰٫۹۸۶۸ باشد؛

(ج) در راست z، برابر ۰٫۱۳۱۴ باشد؛

(د) بین $-z$ و z، برابر ۰٫۸۵۰۲ باشد.

۵۸.۶ اگر Z متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، مطلوب است مقادیر $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، و $z_۴$ به قسمی‌که

(الف) $P(۰ < Z < z_۱) = ۰٫۴۳۰۶$؛

(ب) $P(Z \geq z_۲) = ۰٫۷۷۰۴$؛

(ج) $P(Z > z_۳) = ۰٫۲۹۱۲$؛

(د) $P(-z_۴ \leq Z < z_۴) = ۰٫۹۷۰۰$.

۵۹.۶ اگر X متغیری تصادفی با توزیع نرمال باشد، احتمال اینکه مقداری

(الف) به فاصلهٔ یک انحراف معیار از میانگین؛
(ب) به فاصلهٔ دو انحراف معیار از میانگین؛
(ج) به فاصلهٔ سه انحراف معیار از میانگین؛
(د) به فاصلهٔ چهار انحراف معیار از میانگین؛
اختیار کند چقدر است؟

۶۰.۶ اگر z_α به‌صورت

$$\int_{z_\alpha}^{\infty} n(z; ۰, ۱)dz = \alpha$$

تعریف شود مقدار آن را به‌ازای
(الف) $\alpha = ۰٫۰۵$؛ (ب) $\alpha = ۰٫۰۲۵$
(ج) $\alpha = ۰٫۰۱$؛ (د) $\alpha = ۰٫۰۰۵$؛
بیابید.

۶۱.۶ فرض کنید در طول حالت خلسه، کاهش مصرف اکسیژن یک فرد، متغیری تصادفی باشد که توزیع نرمال با میانگین $\mu = ۳۷٫۶$ سانتیمتر مکعب در دقیقه و $\sigma = ۴٫۶$ سانتیمتر مکعب در دقیقه دارد. پیدا کنید احتمال آنکه در طول مدت دورهٔ حالت خلسه، مصرف اکسیژن به
(الف) حداقل ۴۴٫۵ سانتیمتر مکعب در دقیقه؛
(ب) حداکثر ۳۵٫۰ سانتیمتر مکعب در دقیقه؛
(ج) مقداری از ۳۰٫۰ تا ۴۰٫۰ سانتیمتر مکعب در دقیقه؛
کاهش پیدا کند.

۶۲.۶ درکار عکاسی، زمان ظهور عکس را می‌توان متغیری تصادفی گرفت که دارای توزیع نرمال با $\mu = ۱۵٫۴۰$ ثانیه و $\sigma = ۰٫۴۸$ ثانیه است. احتمال آن را بیابید که زمان ظهور یک عکس
(الف) حداقل ۱۶٫۰۰ ثانیه؛
(ب) حداکثر ۱۴٫۲۰ ثانیه؛
(ج) زمانی بین ۱۵٫۰۰ تا ۱۵٫۸۰ ثانیه؛
باشد.

۶۳.۶ فرض کنید که مقدار واقعی نسکافه‌ای که یک ماشین در شیشه‌های «۶ اونسی» می‌ریزد متغیری است تصادفی که توزیع نرمال با $\sigma = ۰٫۰۵$ دارد. اگر فقط ۳ درصد شیشه‌ها محتوی کمتر از ۶ اونس نسکافه باشند میانگین وزن نسکافهٔ این شیشه‌ها چقدر باید باشد؟

۶۴.۶ متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال با $\sigma = ۱۰$ است. اگر احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری کمتر از ۸۲٫۵ اختیار کند برابر با ۰٫۸۲۱۲ باشد، احتمال اینکه مقداری بزرگتر از ۵۸٫۳ اختیار کند چقدر است؟

۶۵.۶ بررسی کنید که برای هریک از موارد زیر می‌توان، مطابق قاعدهٔ سرانگشتی صفحهٔ ۲۴۰، تقریب نرمال را برای توزیع دوجمله‌ای به‌کار برد یا نه.

(الف) $n = ۱۶$ و $\theta = ۰٫۲۰$؛
(ب) $n = ۶۵$ و $\theta = ۰٫۱۰$؛
(ج) $n = ۱۲۰$ و $\theta = ۰٫۹۸$.

۶۶.۶ فرض کنید که می‌خواهیم تقریب نرمال را برای توزیع دوجمله‌ای به‌کار برده، مقدار $b(۱; ۱۵۰, ۰٫۰۵)$ را تعیین کنیم.
(الف) مبتنی بر قاعدهٔ سرانگشتی صفحهٔ ۲۴۰ آیا توجیهی برای استفاده از این تقریب داریم؟
(ب) تقریب را انجام دهید و آن‌را تا چهار رقم گرد کنید.
(ج) اگر خروجی کامپیوتری نشان دهد که $b(۱; ۱۵۰, ۰٫۰۵) = ۰٫۰۰۳۶$ که تا چهار رقم گرد شده است، درصد خطای تقریب حاصل در قسمت (ب) چقدر است؟
این تمرین برای تشریح اینکه قاعدهٔ سرانگشتی تنها یک قاعدهٔ سرانگشتی است و نه بیشتر، به‌کار می‌رود؛ به‌دست آوردن چنین تقریبهایی، مستلزم داشتن مهارت حرفه‌ای است.

۶۷.۶ با رجوع به تمرین ۶۶.۶ نشان دهید که توزیع پواسون تقریب بهتری را نتیجه می‌دهد.

۶۸.۶ برای تعیین (تا چهار رقم دهدهی) احتمال به‌دست آوردن ۷ شیر و ۷ خط در ۱۴ بار پرتاب یک سکهٔ همگن، تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای را به‌کار برید. همچنین با رجوع به جدول I، خطای این تقریب را بیابید.

۶۹.۶ اگر ۲۳ درصد از تمام بیمارانی که فشارخون بالا دارند دچار عوارض جانبی ناشی از نوعی دارو باشند، برای پیدا کردن احتمال آنکه بین ۱۲۰ نفر بیمار با فشار خون بالا که با این دارو معالجه می‌شوند بیش از ۳۲ نفر دچار عوارض جانبی شوند، تقریب نرمال را به‌کار برید.

۷۰.۶ اگر احتمال اینکه بانکی درخواست وامی را رد کند ۰٫۲۰ باشد، برای تعیین (تا سه رقم دهدهی) احتمال آنکه بانک از ۲۲۵ درخواست وام، حداکثر ۴۰ درخواست را رد کند، تقریب نرمال را به‌کار برید.

۷۱.۶ برای تشریح قانون اعداد بزرگ (تمرین ۲۶.۵ را نیز ببینید)، تقریب نرمال را برای توزیع دوجمله‌ای به‌کار برید و احتمال آن را بیابید که وقتی سکه‌ای همگن
(الف) ۱۰۰ بار؛ (ب) ۱۰۰۰ بار؛ (ج) ۱۰۰۰۰ بار؛
پرتاب شود نسبت شیرها عددی بین ۰٫۴۹ و ۰٫۵۱ باشد.

۷.۶ توزیع نرمال دو متغیره

بین چگالیهای چند متغیره، توزیعی که از اهمیت خاصی برخوردار است، **توزیع نرمال چند متغیره** است که تعمیمی از توزیع نرمال یک متغیره است. چون بهتر است (در واقع، عملاً ضروری است) که این توزیع با نمادگذاری ماتریسی نمایش داده شود، ما در اینجا فقط حالت **دو متغیره** را ارائه می‌دهیم؛ بحثهای مربوط به حالت کلی را به مراجعی که در انتهای این فصل فهرست شده‌اند واگذار می‌کنیم.

تعریف ۸.۶ جفت متغیر تصادفی X و Y دارای **توزیع نرمال دو متغیره**اند و به آنها متغیرهای تصادفیی که تواماً به‌صورت نرمال توزیع شده‌اند اطلاق می‌شود، اگر و تنها اگر چگالی احتمال توأمشان برای $-\infty < x < \infty$ و $-\infty < y < \infty$

$$f(x,y)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma^2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

باشد، که در آن $\sigma_1>0$، $\sigma_2>0$ و $-1<\rho<1$.

برای مطالعهٔ این توزیع، ابتدا نشان می‌دهیم که μ_1، μ_2، σ_1 و σ_2 به‌ترتیب، میانگینها و انحراف معیارهای متغیرهای تصادفی X و Y هستند. اگر برای به‌دست آوردن چگالی حاشیه‌ای X، از $f(x,y)$ نسبت به y از $-\infty$ تا ∞ انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma^2}\right)\right]}dy$$

اگر برای ساده کردن نمادگذاری موقتاً قرار دهیم $u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ و با قرار دادن $v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ متغیر انتگرالگیری را تعویض کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u^2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho uv)}dv$$

و با قرار دادن $v^2-2\rho uv=(v-\rho u)^2-\rho^2u^2$ برای اینکه مربع کاملی حاصل شود و با جمع‌آوری جملات، نتیجه می‌شود که

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2}dv\right\}$$

سرانجام، با تشخیص اینکه کمیت داخل پرانتز همان انتگرال چگالی نرمال از $-\infty$ تا ∞، و بنابراین مساوی ۱ است، به‌ازای $-\infty < x < \infty$ به‌دست می‌آوریم

$$g(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}u^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$$

با بررسی نتیجه می‌شود که چگالی حاشیه‌ای X، توزیعی نرمال با میانگین μ_1 و انحراف معیار σ_1 است، و بنابر تقارن، چگالی حاشیه‌ای Y، توزیعی نرمال با میانگین μ_2 و انحراف معیار σ_2 است.

اما ρ، که حرف کوچک یونانی رو[1] است، **ضریب همبستگی** نامیده می‌شود، و انتگرالگیری لازم نشان می‌دهد که $\text{cov}(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$. پس پارامتر ρ چگونگی تغییر توأم X و Y را اندازه‌گیری می‌کند، و اهمیت آن بعداً در فصل ۱۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

وقتی با یک جفت متغیر تصادفی که توزیع نرمال توأم دارند سروکار داریم، چگالیهای شرطی آنها نیز مهم‌اند؛ بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ ۹.۶ اگر X و Y دارای توزیع نرمال دو متغیره باشند، چگالی شرطی Y به شرط $X = x$، توزیعی نرمال با میانگین

$$\mu_{Y|x} = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$$

و واریانس

$$\sigma^2_{Y|x} = \sigma^2_2(1 - \rho^2)$$

و چگالی شرطی X به شرط $Y = y$، توزیع نرمال با میانگین

$$\mu_{X|y} = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$$

و واریانس

$$\sigma^2_{X|y} = \sigma^2_1(1 - \rho^2)$$

است.

برهان. بنابر تعریف ۱۳.۳ می‌نویسیم $w(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}$، و اگر برای ساده کردن نمادگذاری قرار دهیم $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$ و $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
w(y|x) &= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{1}{2}u^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[v^2-2\rho uv+\rho^2u^2]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}
\end{aligned}$$

1. rho

سپس اگر این نتیجه را برحسب متغیرهای اصلی بیان کنیم، نتیجه می‌شود که برای $-\infty < y < \infty$

$$w(y|x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\{\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\}}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2}$$

و می‌توان دید که این، چگالی نرمال با میانگین $\mu_{Y|x} = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$ و واریانس $\sigma^2_{Y|x} = \sigma^2_2(1 - \rho^2)$ است. نتایج متناظر برای چگالی شرطی X به شرط $Y = y$ با استفاده از تقارن به‌دست می‌آید. ■

توزیع نرمال دو متغیره چندین ویژگی مهم دارد که برخی جنبهٔ آماری و برخی جنبهٔ ریاضی محض دارند. بین ویژگیهای آماری، ویژگی زیر را داریم که اثبات آن در تمرین ۷۲.۶ از خواننده خواسته شده است.

قضیهٔ ۱۰.۶ دو متغیر تصادفی که دارای توزیع نرمال دو متغیره‌اند مستقل‌اند اگر و تنها اگر $\rho = 0$.

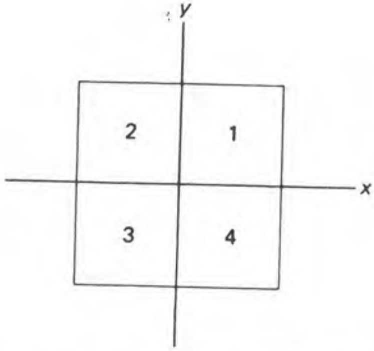
در ارتباط با این مطلب، اگر $\rho = 0$، متغیرهای تصادفی را **ناهمبسته** گویند.

نشان دادیم که برای دو متغیر تصادفی که توزیع نرمال دو متغیره دارند دو چگالی حاشیه‌ای نرمال‌اند، ولی عکس مطلب الزاماً درست نیست. به عبارت دیگر، ممکن است چگالیهای حاشیه‌ای، هردو نرمال باشند بدون اینکه توزیع توأم آنها توزیع نرمال دو متغیره باشد. به‌عنوان نمونه، اگر چگالی دو متغیرهٔ X و Y به‌صورت

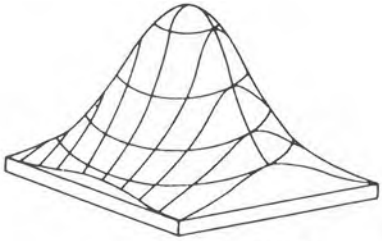
$$f^*(x,y) = \begin{cases} 2f(x,y) & \text{داخل مربعهای ۲ و ۴ شکل ۸.۶} \\ 0 & \text{داخل مربعهای ۱ و ۳ شکل ۸.۶} \\ f(x,y) & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، که در آن، $f(x,y)$ مقدار چگالی نرمال دو متغیره با $\mu_1 = 0$، $\mu_2 = 0$ و $\rho = 0$ در (x,y) است، به آسانی دیده می‌شود که چگالیهای حاشیه‌ای X و Y نرمال‌اند، هرچند چگالی توأمشان توزیع نرمال دو متغیره نیست.

بسیاری از ویژگیهای جالب توجه چگالی دو متغیره با مطالعهٔ **رویهٔ نرمال دو متغیره** به‌دست آمده‌اند که در شکل ۹.۶ رسم شده است و معادله‌اش $z = f(x,y)$ است که در آن $f(x,y)$ مقدار چگالی نرمال دو متغیره در (x,y) است. همان‌طور که تحقیق درستی آنها را در تمرینها از خواننده خواسته‌ایم، رویهٔ نرمال دو متغیره دارای ماکسیممی در (μ_1, μ_2) است، هر صفحهٔ موازی با محور z، رویه را در منحنیی که شکل توزیع نرمال دارد قطع می‌کند، و هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ xy که رویه را قطع می‌کند آن را در بیضیی می‌برد که **مرز چگالی احتمال ثابت** نامیده



شکل۶.۸ فضای نمونه‌ای برای چگالی دو متغیره‌ای که به‌صورت $f^*(x,y)$ داده شده است.



شکل۶.۹ رویهٔ نرمال دو متغیره

می‌شود. وقتی $\rho = ۰$ و $\sigma_۱ = \sigma_۲$، مرزهای چگالی احتمال ثابت دایره‌هایی هستند، و معمولاً به چگالی توأم متناظر آن، **توزیع نرمال مستدیر** اطلاق می‌شود.

تمرینها

۶.۷۲ برای اثبات قضیهٔ ۶.۱۰، نشان دهید که اگر X و Y توزیع نرمال دو متغیره داشته باشند، آنگاه
(الف) استقلال آنها نتیجه می‌دهد که $\rho = ۰$؛
(ب) $\rho = ۰$ نتیجه می‌دهد که آنها مستقل‌اند.

۶.۷۳ نشان دهید که هر صفحهٔ عمود بر صفحهٔ xy، رویهٔ نرمال دو متغیره را در منحنیی که به شکل توزیع نرمال است قطع می‌کند.

۶.۷۴ اگر نمای e در چگالی نرمال دو متغیره به‌صورت

$$\frac{-۱}{۱۰۲}[(x+۲)^۲ - ۲٫۸(x+۲)(y-۱) + ۴(y-۱)^۲]$$

باشد، پیدا کنید
(الف) $\mu_۱$، $\mu_۲$، $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و ρ؛
(ب) $\mu_{Y|x}$ و $\sigma^۲_{Y|x}$.

۷۵.۶ اگر نمای e در چگالی نرمال دو متغیره به‌صورت

$$-\frac{1}{54}(x^2+4y^2+2xy+2x+8y+4)$$

باشد، به‌شرط آنکه $\mu_1=0$ و $\mu_2=-1$، مقادیر σ_1، σ_2 و ρ را بیابید.

۷۶.۶ اگر X و Y دارای توزیع نرمال دو متغیره با $\mu_1=2$، $\mu_2=5$، $\sigma_1=3$، $\sigma_2=6$، و $\rho=\frac{2}{3}$ باشند، $\mu_{Y|1}$ و $\sigma_{Y|1}$ را بیابید.

۷۷.۶ اگر X و Y توزیع نرمال دو متغیره داشته باشند و $U=X+Y$ و $V=X-Y$، برای ضریب همبستگی U و V عبارتی بیابید.

۷۸.۶ اگر X و Y دارای توزیع نرمال دومتغیره باشند، می‌توان نشان داد که تابع مولد گشتاورهای (تمرین ۶۳.۴ را ببینید) این متغیرهای تصادفی به‌صورت

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t_1,t_2) &= E(e^{t_1X+t_2X}) \\ &= e^{t_1\mu_1+t_2\mu_2+\frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2+\sigma_2^2t_2^2)} \end{aligned}$$

است. تحقیق کنید که

(الف) اولین مشتق جزئی این تابع نسبت به t_1 به‌ازای $t_1=0$ و $t_2=0$ برابر μ_1 است؛

(ب) دومین مشتق جزئی نسبت به t_1 به‌ازای $t_1=0$ و $t_2=0$ برابر $\sigma_1^2+\mu_1^2$ است؛

(ج) دومین مشتق جزئی نسبت به t_1 و t_2 به‌ازای $t_1=0$ و $t_2=0$ برابر $\rho\sigma_1\sigma_2+\mu_1\mu_2$ است.

کاربردها

۷۹.۶ مرکز یک هدف، به‌عنوان مبدأ یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌شود و نسبت به این دستگاه، نقطهٔ اصابت یک گلوله دارای مختصات X و Y است. اگر X و Y دارای چگالی نرمال دو متغیره با $\mu_1=0$، $\mu_2=0$، $\sigma_1=120$ پا، $\sigma_2=120$ پا و $\rho=0$ باشد، پیدا کنید احتمال آنکه نقطهٔ اصابت

(الف) درون مربعی به ضلع ۱۸۰ پا باشد که مرکزش در مبدأ بوده و اضلاعش موازی محورهای مختصات‌اند؛

(ب) درون دایره‌ای به شعاع ۷۵ پا و به مرکز مبدأ باشد.

۸۰.۶ اگر X و Y توزیع نرمال مستدیر با $\mu_1=\mu_2=0$ و $\sigma_1=\sigma_2=1.2$ داشته باشند، پیدا کنید

(الف) احتمال به‌دست آوردن نقطهٔ (x,y) در داخل دایرهٔ $x^2+y^2=36$؛

(ب) مقدار c که به‌ازای آن، احتمال به‌دست آوردن نقطهٔ (x,y) در داخل دایرهٔ $x^2+y^2=c^2$ برابر ۰٫۸۰ باشد.

۸۱.۶ فرض کنید X و Y که قد و وزن یک نوع حیوان‌اند، دارای توزیع نرمال دو متغیره با ۱۸ $= \mu_1$ اینچ، ۱۵ $= \mu_2$ پوند، ۳ $= \sigma_1$ اینچ، ۲ $= \sigma_2$ پوند، و ۷۵ر۰ $= \rho$ باشد، پیدا کنید
(الف) امید وزن یکی از این حیوانات که قدش ۱۷ اینچ باشد؛
(ب) امید قد یکی از این حیوانات که وزنش ۲۰ پوند باشد.

مراجع

اطلاعات مفید دربارهٔ چگالیهای احتمال خاص را به‌صورتی خلاصه می‌توان در

DERMAN, C., GLESER, L., and OLKIN, I., *Probability Models and Applications*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1980,

HASTINGS, N. A. J., and PEACOCK, J. B., *Statistical Distributions*. London: Butterworth & Co. Ltd., 1975,

و

JOHNSON, N. L., and KOTZ, S., *Continuous Univariate Distributions*, Vols. 1 and 2. Boston: Houghton Mifflin Company, 1970.

یافت. اثباتی مستقیم از این مطلب که توزیع دوجمله‌ای استاندارد، وقتی $n \to \infty$، به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند در

KEEPING, E. S., *Introduction to Statistical Inference*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1962.

داده شده است. بحثی تفصیلی از ویژگیهای آماری و ریاضی رویهٔ نرمال دومتغیره را می‌توان در

YULE, G. U., and KENDALL, M. G., *An Introduction to the Theory of Statistics*, 14th ed. New York: Hafner Publishing Co., Inc., 1950.

یافت. توزیع نرمال چندمتغیره با نمادگذاری ماتریسی در

BICKEL, P. J., and DOKSUM, K. A., *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1977,

HOGG, R. V., and CRAIG, A. T., *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1978,

LINDGREN, B. W., *Statistical Theory*, 3rd ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1976.

مورد بحث قرار گرفته است.

۷

تابعهای متغیرهای تصادفی

۱.۷ مقدمه

در این فصل به مسألهٔ یافتن توزیعهای احتمال یا چگالیهای **تابعهایی از یک یا چند متغیر تصادفی** می‌پردازیم. بدین معناکه مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، . . . ، X_n و توزیع یا چگالی توأم آنها را داریم و پیدا کردن توزیع احتمال یا چگالی متغیر تصادفی $Y = u(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ مورد توجه است. این رابطه به معنی این است که مقادیر متغیر تصادفی Y به‌وسیلهٔ معادلهٔ $y = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ به مقادیر Xها بستگی دارند.

برای حل این نوع مسأله چندین روش موجود است. روشهایی که در سه بخش آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت، **تکنیک تابع توزیع، تکنیک تبدیل متغیرها، و تکنیک تابع مولد گشتاورها** نامیده می‌شوند. اگرچه در بعضی از وضعیتها هر سه تکنیک را می‌توان به‌کار برد، ولی در اکثر مسائل یکی از تکنیکها بر بقیه ترجیح دارد (استفاده از آن آسانتر از استفاده از سایرین است). این

امر مثلاً، در مواردی که تابع u، تابعی خطی از متغیرهای تصادفی مسستقل $X_۱$، $X_۲$، $\dots$، X_n باشد درست است، و تکنیک تابع مولد گشتاورها ساده‌ترین نتیجه‌گیریها را دارد.

تکنیکهای مختلفی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند در فصل ۸ هم برای به‌دست آوردن چندین توزیعی که در استنباط آماری اهمیت بنیادی دارند به‌کار می‌روند.

۲.۷ تکنیک تابع توزیع

یک روش سرراست به‌دست آوردن چگالی احتمال تابعی از متغیرهای تصادفی پیوسته عبارت است از اینکه ابتدا تابع توزیع آن و سپس با مشتقگیری، چگالی آن را پیدا کنیم. بنابراین، اگر $X_۱$، $X_۲$، $\dots$ ، X_n متغیرهای تصادفی پیوسته با چگالی احتمال مفروضی باشند، چگالی احتمال $Y = u(X_۱, X_۲, \cdots , X_n)$ چنین به‌دست می‌آید که ابتدا عبارت

$$F(y) = P(Y \leq y) = P[u(X_۱, X_۲, \cdots , X_n) \leq y]$$

را برای احتمالها تعیین می‌کنیم و آنگاه بنابر قضیهٔ ۶.۳، با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$$

مثال ۱.۷
اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۶x(۱-x) & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال $Y = X^۳$ را بیابید.

حل. فرض می‌کنیم $G(y)$، مقدار تابع توزیع Y را به‌ازای y نشان دهد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^۳ \leq y) \\ &= P(X \leq y^{۱/۳}) \\ &= \int_۰^{y^{\frac{۱}{۳}}} ۶x(۱-x)dx \\ &= ۳y^{\frac{۲}{۳}} - ۲y \end{aligned}$$

و در نتیجه به‌ازای $\circ < y < ۱$،

$$g(y) = ۲(y^{-\frac{۱}{۲}} - ۱)$$

و سایر جاها، $g(y) = \circ$. در تمرین ۲۰.۷، از خواننده خواسته‌ایم که این نتیجه را با تکنیک دیگری به‌دست آورد. ▲

مثال ۲.۷

اگر $Y = |X|$، نشان دهید که

$$g(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y) & y > \circ \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن $f(x)$، مقدار چگالی احتمال X به‌ازای x و $g(y)$ مقدار چگالی احتمال Y به‌ازای y است. این نتیجه را برای تعیین چگالی احتمال $Y = |X|$ نیز که در آن X، توزیع نرمال استاندارد دارد به‌کار برید.

حل. به‌ازای $y > \circ$، داریم

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F(y) - F(-y) \end{aligned}$$

و بعد از مشتقگیری

$$g(y) = f(y) + f(-y)$$

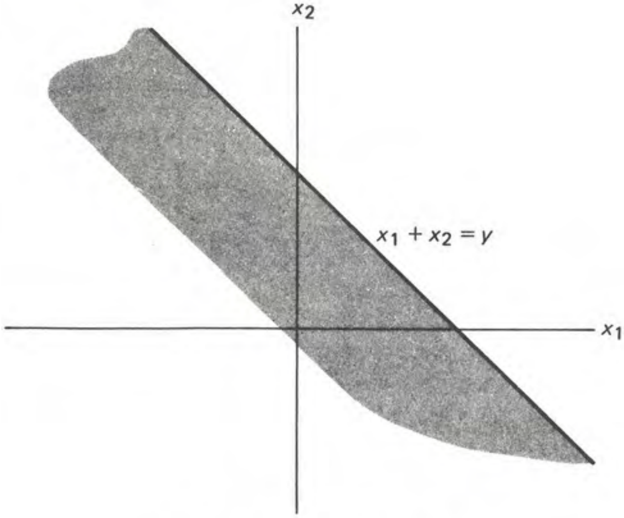
چون $|x|$ نمی‌تواند منفی باشد، به‌ازای $y < \circ$، $g(y) = \circ$؛ مقدار $g(\circ)$ را به دلخواه مساوی $\circ$ قرار می‌دهیم. پس می‌توانیم بنویسیم

$$g(y) = \begin{cases} f(y) + f(-y) & y > \circ \\ \circ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد و $Y = |X|$، نتیجه می‌شود که به‌ازای $y > \circ$

$$\begin{aligned} g(y) &= n(y; \circ, ۱) + n(-y; \circ, ۱) \\ &= ۲n(y; \circ, ۱) \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $g(y) = \circ$. کاربرد مهمی از این نتیجه در مثال ۹.۷ داده شده است. ▲



شکل۱.۷ نمودار مثال ۳.۷

مثال ۳.۷
اگر توزیع توأم $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲) = \begin{cases} ۶e^{-۳x_۱-۲x_۲} & x_۲ > ۰, x_۱ > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، تابع چگالی متغیر تصادفی $Y = X_۱ + X_۲$ را پیدا کنید.

حل. اگر از چگالی توأم روی ناحیهٔ هاشور خوردهٔ شکل ۱.۷ انتگرالگیری کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_۰^y \int_۰^{y-x_۲} ۶e^{-۳x_۱-۲x_۲} dx_۱ dx_۲ \\ &= ۱ + ۲e^{-۳y} - ۳e^{-۲y} \end{aligned}$$

و اگر نسبت به y مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$f(y) = \begin{cases} ۶(e^{-۲y} - e^{-۳y}) & y > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

▲

تمرینها

۱.۷ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases} ۲xe^{-x^۲} & x>۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، و $Y=X^۲$، پیدا کنید
(الف) تابع توزیع Y؛
(ب) چگالی احتمال Y.

۲.۷ اگر X توزیع نمایی با پارامتر θ داشته باشد، برای تعیین چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=\ln X$، تکنیک تابع توزیع را به‌کار برید.

۳.۷ اگر X دارای چگالی یکنواخت با پارامترهای $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ باشد، برای یافتن چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=\sqrt{X}$، تکنیک تابع توزیع را به‌کار برید.

۴.۷ اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y)=\begin{cases} ۴xye^{-(x^۲+y^۲)} & y>۰, x>۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد و $Z=\sqrt{X^۲+Y^۲}$، پیدا کنید
(الف) تابع توزیع Z؛
(ب) چگالی احتمال Z.

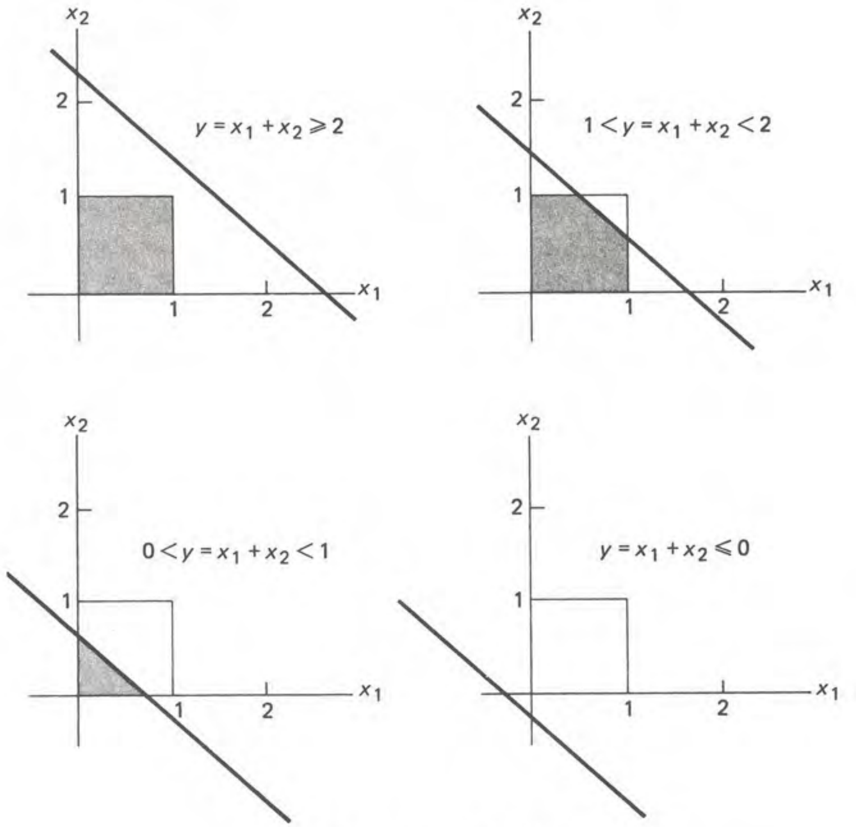
۵.۷ اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که چگالی نمایی با پارامترهای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ دارند، از تکنیک تابع توزیع استفاده کرده، چگالی احتمال $Y=X_۱+X_۲$ را وقتی
(الف) $\theta_۱\neq\theta_۲$
(ب) $\theta_۱=\theta_۲$؛
بیابید. (مثال ۳.۷ حالتی خاص از قسمت (الف) با $\theta_۱=\frac{۱}{۲}$ و $\theta_۲=\frac{۱}{۲}$ است).

۶.۷ با رجوع به دو متغیر تصادفی تمرین ۵.۷، نشان دهید که اگر $\theta_۱=\theta_۲=۱$، متغیر تصادفی

$$Z=\frac{X_۱}{X_۱+X_۲}$$

دارای چگالی یکنواخت با $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ است.

۷.۷ اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که چگالی یکنواخت با $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ دارند، با مراجعه به شکل ۲.۷ برای تابع توزیع $Y=X_۱+X_۲$ عباراتی بیابید وقتی که
(الف) $y\leq ۰$؛ (ب) $۰<y<۱$؛
(ج) $۱<y<۲$؛ (د) $y\geq ۲$.
چگالی احتمال Y را نیز پیدا کنید.



شکل۲.۷ نمودار تمرین ۷.۷

۸.۷ اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & y > ۰, x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد و $Z = \frac{X+Y}{۲}$، چگالی احتمال Z را با تکنیک تابع توزیع بیابید.

کاربردها

۹.۷ در تمرین ۸۴.۳، بهای یک کالای معین (برحسب تومان) برابر P و فروش کل (برحسب ۱۰۰۰۰ واحد) برابر S است. با استفاده از چگالی توأمی که در آن تمرین داده شده است و با تکنیک تابع توزیع، چگالی متغیر تصادفی $V = SP$، یعنی مبلغ کلی که برای این کالاها برحسب ۱۰۰۰۰ واحد خرج شده است، پیدا کنید.

۱۰.۷ با رجوع به تمرین ۴۹.۳، چگالی احتمال متوسط مسافتی را که با چنین دو تایری طی می‌شود بیابید. فرض کنید استقلال وجود دارد.

۱۱.۷ در تمرین ۱۰۳.۳، X مبلغی (برحسب تومان) است که فروشنده‌ای برای بنزین خرج می‌کند و Y مبلغی (برحسب تومان) است که به او پرداخت می‌شود. از توزیع توأمی که در آن تمرین داده شد و از تکنیک تابع توزیع استفاده کنید و چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = X - Y$، یعنی مبلغی را که به او کم پرداخت می‌شود، بیابید.

۱۲.۷ فرض کنید X، مقدار بنزینی (برحسب ۱۰۰۰ گالن) باشد که پمپ بنزینی در آغاز روز در مخازن خود دارد، و Y مقدار بنزینی باشد که پمپ بنزین در طول آن روز می‌فروشد. اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{200} & 0 < y < x < 20 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، با استفاده از تکنیک تابع توزیع، چگالی احتمال مقدار بنزینی را بیابید که پمپ بنزین در انتهای روز در مخازن خود دارد.

۱۳.۷ درصدهای مس و آهن در یک آلیاژ، به‌ترتیب X_1 و X_2 هستند. اگر چگالی توأم این دو متغیر تصادفی به‌صورت

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{3}{11}(5x_1 + x_2) & x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_1 + 2x_2 < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، با استفاده از تکنیک تابع توزیع، چگالی احتمال $Y = X_1 + X_2$ را بیابید. همچنین $E(Y)$، امید کل درصد مس و آهن در آلیاژ، را به‌دست آورید.

۳.۷ تکنیک تبدیل: یک متغیره

حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان بدون به‌دست آوردن تابع توزیع در بدو امر، توزیع احتمال یا چگالی تابعی از یک متغیر تصادفی را تعیین کرد. در حالت گسسته مادامی که رابطهٔ بین مقادیر X و $Y = u(X)$ یک‌به‌یک است واقعاً مشکلی وجود ندارد؛ آنچه باید انجام دهیم جایگذاری مناسب است.

مثال ۴.۷

اگر X تعداد شیرهایی باشد که در چهار پرتاب یک سکهٔ همگن به‌دست می‌آیند، توزیع احتمال $Y = \frac{1}{1+X}$ را پیدا کنید.

حل. اگر فرمول توزیع دوجمله‌ای را با $n = 4$، $\theta = \frac{1}{2}$ به‌کار بریم، درمی‌یابیم که توزیع احتمال X به‌صورت

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

است. در این صورت اگر رابطهٔ $y = \frac{۱}{۱+x}$ را برای گذاشتن مقادیر Y به‌جای X به‌کار بریم، توزیع احتمال Y به‌صورت

y	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$
$g(y)$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

به‌دست می‌آید.

اگر می‌خواستیم که مستقیماً جایگذاری را در فرمول توزیع دوجمله‌ای با $n = ۴$ و $\theta = \frac{۱}{۲}$ انجام دهیم، می‌توانستیم مقدار $x = \frac{۱}{y} - ۱$ را به‌جای x در

$$f(x) = \binom{۴}{x}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}, \quad x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$$

قرار دهیم و نتیجه بگیریم که

$$g(y) = f\left(\frac{۱}{y} - ۱\right) = \binom{۴}{\frac{۱}{y} - ۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} \quad y = ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}$$

▲

توجه کنید که در مثال قبل احتمالها بدون تغییر ماندند؛ تنها اختلاف در آن است که در نتیجهٔ کار، احتمالها به‌جای مقادیر متناظر X، به مقادیر مختلف Y وابسته‌اند. **تکنیک تبدیل متغیر** (یا **تعویض متغیر**) در حالت گسسته و مادامی که رابطه یک‌به‌یک است، کلاً همین است. اگر تبدیل یک‌به‌یک نباشد می‌توانیم نظیر مثال زیر عمل کنیم:

مثال ۵.۷

با مراجعه به مثال ۴.۷، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z = (X - ۲)^۲$ را پیدا کنید.

حل. با محاسبهٔ احتمالهای $h(z)$ متناظر با مقادیر مختلف Z، به‌دست می‌آوریم

$$h(۰) = f(۲) = \frac{۶}{۱۶}$$
$$h(۱) = f(۱) + f(۳) = \frac{۴}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} = \frac{۸}{۱۶}$$
$$h(۴) = f(۰) + f(۴) = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۲}{۱۶}$$

و بنابراین

z	۰	۱	۴
$h(z)$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۴}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

▲

برای اجرای روش تبدیل متغیر در حالت پیوسته، فرض خواهیم کرد تابعی که به‌صورت $y = u(x)$ داده می‌شود مشتق‌پذیر و به‌ازای تمام مقادیر در برد X که برای آنها $f(x) \neq ۰$، صعودی یا نزولی باشد، به‌قسمی‌که تابع وارون که به‌صورت $x = w(y)$ داده می‌شود به‌ازای تمام مقادیر متناظر y موجود و بجز در جاهایی که $u'(x) = ۰$، مشتق‌پذیر باشد.* تحت این شرایط می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

قضیهٔ ۱.۷ فرض می‌کنیم $f(x)$ مقدار چگالی احتمال متغیر تصادفی X، به‌ازای x باشد. اگر تابعی که به‌صورت $y = u(x)$ داده شده است مشتق‌پذیر و به‌ازای تمام مقادیر برد X که برای آنها $f(x) \neq ۰$، صعودی یا نزولی باشد، آنگاه، برای این مقادیر x، معادلهٔ $y = u(x)$ را می‌توان به‌صورتی یکتا برحسب x حل کرد تا $x = w(y)$ به‌دست آید، و چگالی احتمال $Y = u(X)$ برای مقادیر y نظیر، به‌صورت زیر است:

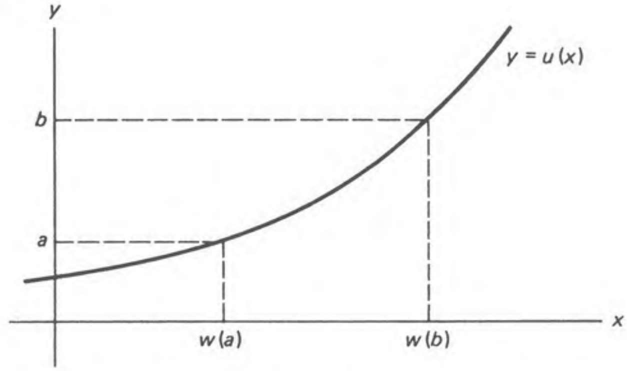
$$g(y) = \begin{cases} f[w(y)] \cdot |w'(y)| & \text{به‌شرط } u'(x) \neq ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

برهان. ابتدا حالتی را ثابت می‌کنیم که تابع مفروض $y = u(x)$ صعودی است. به‌طوری که در شکل ۳.۷ دیده می‌شود، وقتی Y مقداری بین a و b اختیار می‌کند، X باید مقداری بین $w(a)$ و $w(b)$ اختیار نماید. بنابراین

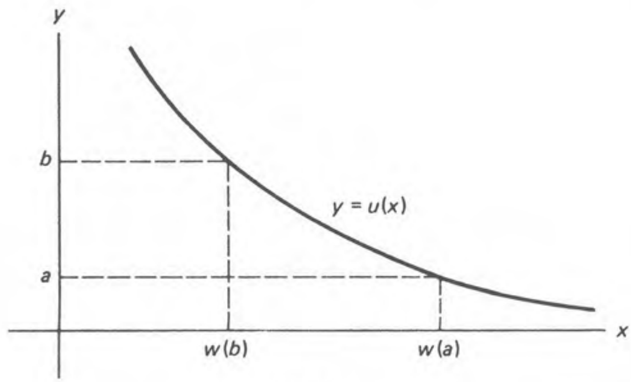
$$\begin{aligned} P(a < Y < b) &= P[w(a) < X < w(b)] \\ &= \int_{w(a)}^{w(b)} f(x)dx \\ &= \int_a^b f[w(y)]w'(y)dy \end{aligned}$$

که در انتگرال، تعویض متغیر $y = u(x)$ یا هم‌ارز آن $x = w(y)$ را اجرا کرده‌ایم. بنابر تعریف ۴.۳، عبارت زیر انتگرال، مادامی‌که $w'(y)$ وجود دارد چگالی احتمال Y را می‌دهد، و می‌توانیم بنویسیم

* توجه کنید برای اجتناب از نقاطی که به‌ازای آنها $u'(x)$ ممکن است صفر باشد، معمولاً نقاط دو سر بازه‌ها را که به‌ازای آنها چگالیهای احتمال صفر نیستند منظور نکرده‌ایم. این شیوه‌ای است که در سراسر این کتاب از آن پیروی خواهیم کرد.



تابع صعودی



تابع نزولی

شکل۳.۷ نمودارهایی برای برهان قضیهٔ ۱.۷

$$g(y) = f[w(y)]w'(y)$$

وقتی تابع مفروض $y = u(x)$ نزولی باشد، در شکل ۳.۷ می‌توان دید که وقتی Y مقداری بین a و b اختیار می‌کند، X باید مقداری بین $w(b)$ و $w(a)$ اختیار نماید. بنابراین

$$\begin{aligned} P(a < Y < b) &= P[w(b) < X < w(a)] \\ &= \int_{w(b)}^{w(a)} f(x)dx \\ &= \int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)dy \\ &= -\int_{a}^{b} f[w(y)]w'(y)dy \end{aligned}$$

که مثل قبل همان تعویض متغیر را اجرا کرده‌ایم، و از آن نتیجه می‌شود که

$$g(y) = -f[w(y)]w'(y)$$

چون وقتی تابع مفروض $y = u(x)$ صعودی است، $w'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}}$ مثبت است، و وقتی تابع مفروض $y = u(x)$ نزولی است $-w'(y)$ مثبت است، دو حالت را می‌توانیم با نوشتن

$$g(y) = f[w(y)] \cdot |w'(y)|$$

یکجا ادغام کنیم. ■

مثال ۶.۷

اگر X دارای توزیعی نمایی به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \sqrt{X}$ را بیابید.

حل. معادلهٔ $y = \sqrt{x}$، که X و Y را به‌هم مربوط می‌کند، دارای وارون یکتای $x = y^۲$ است که نتیجه می‌دهد $w'(y) = \frac{dx}{dy} = ۲y$. بنابراین مطابق قضیهٔ ۱.۷، به‌ازای $y > ۰$

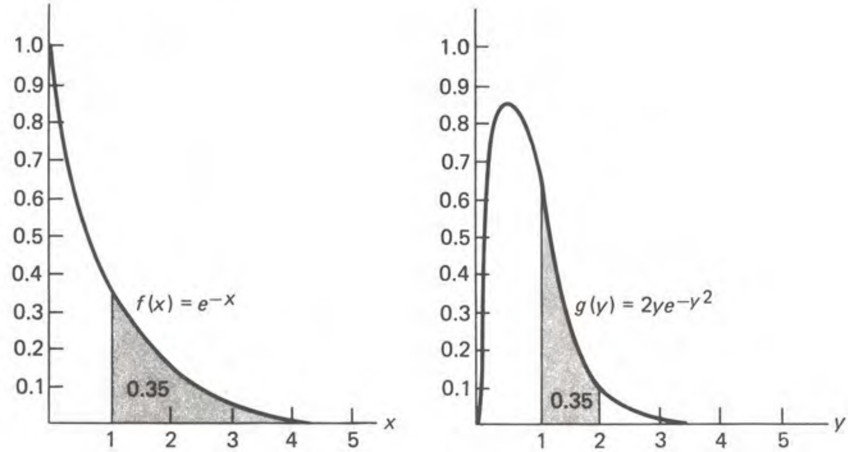
$$g(y) = e^{-y^۲}|۲y| = ۲ye^{-y^۲}$$

چون احتمال به‌دست آوردن یک مقدار Yی مساوی با صفر یا کوچکتر از آن، نظیر احتمال به‌دست آوردن یک مقدار X مساوی با صفر یا کوچکتر از آن، برابر صفر است، نتیجه می‌شود که چگالی احتمال Y به‌صورت

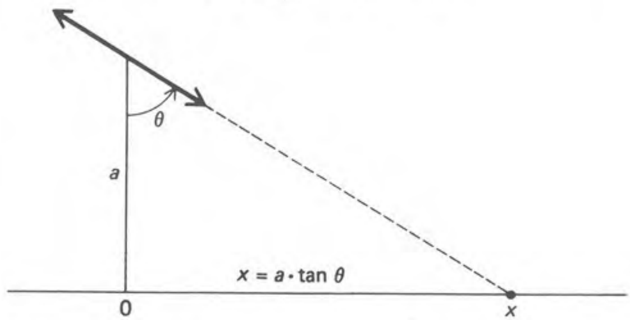
$$g(y) = \begin{cases} ۲ye^{-y^۲} & y > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. توجه کنید که این، توزیع وایبول تمرین ۲۳.۶ با $\alpha = ۱$ و $\beta = ۲$ است. ▲

دو نمودار شکل ۴.۷ نشان می‌دهند که در این مثال وقتی X را به Y تبدیل می‌کنیم چه اتفاقی می‌افتد. مانند حالت گسسته (به‌عنوان نمونه، مثال ۴.۷)، احتمالها تغییر نمی‌کنند، اما این احتمالها به مقادیر مختلف (بازه‌های مقادیر) متغیرهای تصادفی متناظر مربوط می‌شوند. در نمودار سمت چپ، احتمال ۰٫۳۵ به این پیشامد که X مقداری روی بازهٔ از ۱ تا ۴ اختیار کند، مربوط است، و در نمودار سمت راست، احتمال ۰٫۳۵ به این پیشامد که Y مقداری روی بازهٔ از ۱ تا ۲ اختیار نماید، مربوط است.



شکل۴.۷ نمودارهایی برای مثال ۶.۷



شکل۵.۷ نموداری برای مثال ۷.۷

مثال ۷.۷

اگر پیکان دوسویهٔ شکل ۵.۷ حول مرکز خود طوری چرخانده شود که متغیر تصادفی Θ دارای چگالی یکنواخت

$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{۱}{\pi} & -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}\\ ۰ & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال X، طول نقطه‌ای که امتداد پیکان محور x را قطع می‌کند، تعیین کنید.

حل. همان‌طور که از شکل پیداست، بستگی بین x و θ به‌صورت $x = a\cdot\tan\theta$، به‌قسمی که

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{a}{a^{۲}+x^{۲}}$$

و بنابر قضیهٔ ۱.۷، نتیجه می‌شود که

$$g(x) = \frac{۱}{\pi} \cdot \left|\frac{a}{a^۲ + x^۲}\right|$$
$$= \frac{۱}{\pi} \cdot \frac{a}{a^۲ + x^۲} \qquad -\infty < x < \infty$$

توجه کنید که این، حالتی خاص از توزیع کوشی تمرین ۶.۶ است. ▲

مثال ۸.۷

اگر $F(x)$ مقدار تابع توزیع متغیر تصادفی X به‌ازای x باشد، چگالی احتمال $Y = F(X)$ را بیابید.

حل. همان‌طور که در شکل ۶.۷ دیده می‌شود، مقدار Y متناظر با هر مقدار خاص X به‌وسیلهٔ مساحت زیر منحنی، یعنی مساحت زیر نمودار چگالی X واقع در سمت چپ x داده می‌شود. اگر از $y = F(x)$ نسبت به x مشتق بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = f(x)$$

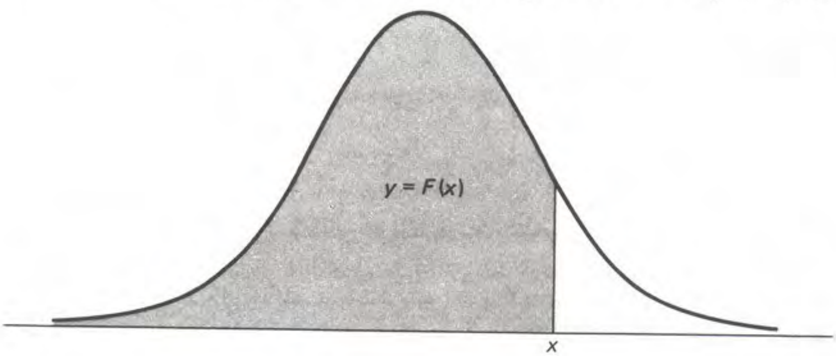
و بنابراین به شرط $f(x) \neq ۰$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}} = \frac{۱}{f(x)}$$

از قضیهٔ ۱.۷ نتیجه می‌شود که به‌ازای $۰ < y < ۱$

$$g(y) = f(x) \cdot \left|\frac{۱}{f(x)}\right| = ۱$$

و می‌توانیم بگوییم که Y دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ است. ▲



شکل۶.۷ نموداری برای مثال ۸.۷

تبدیلی را که در این مثال انجام دادیم **تبدیل انتگرال احتمال** می‌نامند. این نتیجه نه‌تنها اهمیت نظری دارد، بلکه **شبیه‌سازی** مقادیر مشاهده شدهٔ متغیرهای تصادفی را تسهیل می‌کند. مرجعی برای انجام این کار، خصوصاً در رابطه با توزیع نرمال، در صفحهٔ ۲۸۲ داده شده است.

وقتی شرایط زیربنایی قضیهٔ ۱.۷ برقرار نباشند، ممکن است با مشکلات جدی روبه‌رو شویم، و ممکن است مجبور شویم روش بخش ۲.۷ یا تعمیمی از قضیهٔ ۱.۷ را که بین مراجع مذکور در صفحهٔ ۲۸۲ به آن اشاره شده است به‌کار بریم؛ گاهی نظیر مثال زیر راهی ساده برای رفع مشکل وجود دارد.

مثال ۹.۷

اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، چگالی احتمال $Z = X^۲$ را بیابید.

حل. چون تابع داده شدهٔ $z = x^۲$، به‌ازای مقادیر منفی x، نزولی و به‌ازای مقادیر مثبت x صعودی است، شرایط قضیهٔ ۱.۷ برقرار نیستند. اما تبدیل X به Z را می‌توان در دو مرحله انجام داد: ابتدا چگالی احتمال $Y = |X|$ را می‌یابیم و آنگاه چگالی احتمال $Z = Y^۲ (= X^۲)$ را پیدا می‌کنیم.

ما قبلاً تبدیل $Y = |X|$ را که مربوط به مرحلهٔ اول است در مثال ۲.۷ مطالعه کردیم؛ در واقع ما در آنجا نشان دادیم که اگر X توزیع نرمال استاندارد داشته باشد، آنگاه $Y = |X|$ به‌ازای $y > ۰$ دارای چگالی احتمال

$$g(y) = ۲n(y; ۰, ۱) = \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}y^۲}$$

و $g(y) = ۰$، در سایر جاهاست. برای مُرحلهٔ دوم، تابعی که به‌صورت $z = y^۲$ داده شده است به‌ازای $y > ۰$، یعنی برای تمام مقادیر y که به‌ازای آنها $g(y) \neq ۰$، صعودی است. لذا می‌توانیم قضیهٔ ۱.۷ را به‌کار بریم و چون

$$\frac{dy}{dz} = \frac{۱}{۲} z^{-\frac{۱}{۲}}$$

به‌ازای $z > ۰$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{۲}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z} \left|\frac{۱}{۲} z^{-\frac{۱}{۲}}\right| \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} z^{-\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}z} \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $h(z) = ۰$. توجه کنید چون $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$، توزیعی که برای Z به‌دست می‌آید، توزیع خی‌دو (تعریف ۴.۶ را ببینید) با $\nu = ۱$ است. ▲

۴.۷ تکنیک تبدیل: چند متغیره

روش این بخش را می‌توان برای پیدا کردن توزیع متغیری تصادفی نیز که تابعی از دو یا چند متغیر تصادفی است، به‌کار برد. مثلاً، فرض کنید که توزیع توأم دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 را داده باشند و بخواهیم توزیع متغیر تصادفی $Y = u(X_1, X_2)$ را تعیین کنیم. اگر بستگی بین y و x_1 با ثابت ماندن x_2، یا بستگی بین y و x_2 با ثابت ماندن x_1 این امکان را به ما بدهد، می‌توانیم در حالت گسسته‌ـنظیر مثال ۴.۷ عمل کنیم و توزیع توأم Y و X_2، یا X_1 و Y را بیابیم و سپس مجموع این توزیع را روی مقادیر متغیر تصادفی دیگر پیدا کنیم تا توزیع حاشیه‌ای Y به‌دست آید. در حالت پیوسته، ابتدا قضیهٔ ۱.۷ را با نوشتن فرمول تبدیل به‌صورت

$$g(y, x_2) = f(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{\partial x_1}{\partial y} \right|$$

یا به‌صورت

$$g(x_1, y) = f(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{\partial x_2}{\partial y} \right|$$

به‌کار می‌بریم. در این دو رابطه، $f(x_1, x_2)$ و مشتقهای جزئی باید برحسب y و x_2، یا x_1 و y بیان شوند. سپس برحسب متغیر دیگر انتگرال می‌گیریم تا چگالی حاشیه‌ای Y به‌دست آید.

مثال ۱۰.۷

اگر X_1 و X_2 متغیرهای مستقلی باشند که توزیعهای پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 دارند، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2$ را بیابید.

حل. چون X_1 و X_2 مستقل‌اند، توزیع توأم آنها برای $x_1 = 0, 1, 2, \cdots$ و $x_2 = 0, 1, 2, \cdots$، با

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{e^{-\lambda_1}(\lambda_1)^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2}(\lambda_2)^{x_2}}{x_2!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1)^{x_1}(\lambda_2)^{x_2}}{x_1!x_2!} \end{aligned}$$

داده می‌شود. چون $y = x_1 + x_2$ و بنابراین $x_1 = y - x_2$، پس می‌توانیم به‌جای x_1 قرار دهیم $y - x_2$، که برای توزیع توأم Y و X_2، به‌ازای $y = 0, 1, 2, \cdots$ و $x_2 = 0, 1, \cdots, y$، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم

$$g(y, x_2) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}}{x_2!(y-x_2)!}$$

سپس با مجموعیابی روی x_2 از 0 تا y، به‌دست می‌آوریم

$$h(y) = \sum_{x_2=0}^{y} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}}{x_2!(y-x_2)!}$$

که بعد از فاکتورگیری از $e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$ و ضرب عبارت در $y!$ و تقسیم آن بر $y!$ به‌صورت

$$h(y) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \cdot \sum_{x_2=0}^{y} \frac{y!}{x_2!(y-x_2)!}(\lambda_2)^{x_2}(\lambda_1)^{y-x_2}$$

درمی‌آید. با تشخیص اینکه از بسط دوجمله‌ای $(\lambda_1+\lambda_2)^y$ به مجموع بالا می‌رسیم، سرانجام داریم

$$h(y) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^y}{y!} \qquad y = 0, 1, 2, \cdots$$

و بنابراین نشان داده‌ایم که مجموع دو متغیر تصادفی مستقل که دارای توزیع پواسون با پارامترهای λ_1 و λ_2 هستند، توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ دارد. ▲

مثال ۱۱.۷
اگر چگالی توأم X_1 و X_2 به‌صورت

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، تابع چگالی $Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ را بیابید.

حل. چون وقتی x_2 صعود می‌کند و x_1 ثابت می‌ماند، y نزول می‌کند، برای یافتن چگالی توأم X_1 و Y می‌توانیم قضیهٔ ۱.۷ را (به‌صورتی که در صفحهٔ ۲۶۶ اصلاح شده است) به‌کار بریم. چون $y = \frac{x_1}{x_1+x_2}$ نتیجه می‌دهد که $x_2 = x_1 \cdot \frac{1-y}{y}$ و بنابراین

$$\frac{\partial x_2}{\partial y} = -\frac{x_1}{y^2}$$

نتیجه می‌شود که به‌ازای $x_1 > 0$ و $0 < y < 1$

$$g(x_1, y) = e^{-x_1/y}\left|-\frac{x_1}{y^2}\right| = \frac{x_1}{y^2} \cdot e^{-x_1/y}$$

سرانجام با انتگرالگیری برحسب x_1 و تعویض متغیر انتگرال به $u = \frac{x_1}{y}$، به‌ازای $0 < y < 1$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_0^\infty \frac{x_1}{y^2} \cdot e^{-x_1/y} dx_1 \\ &= \int_0^\infty u \cdot e^{-u} du \\ &= \Gamma(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

و در سایر جاها، $h(y) = 0$. پس متغیر تصادفی Y دارای توزیع یکنواخت با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ است. (توجه کنید که در تمرین ۶.۷ از خواننده خواسته‌ایم که این مطلب را با تکنیک تابع توزیع نشان دهد.) ▲

مثال قبل را می‌توان با روش کلی نیز حل کرد. در این روش کار را با توزیع توأم دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 و تعیین توزیع توأم دو متغیر تصادفی جدید $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ شروع می‌کنیم. در این صورت می‌توانیم توزیع حاشیه‌ای Y_1 یا Y_2 را به‌وسیلهٔ مجموعیابی یا انتگرالگیری به‌دست آوریم.

این روش عمدتاً در حالت پیوسته به‌کار می‌رود، که در آن به قضیهٔ زیر که تعمیم مستقیم قضیهٔ ۱.۷ است نیاز داریم.

قضیهٔ ۲.۷ فرض می‌کنیم $f(x_1, x_2)$ مقدار چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی پیوستهٔ X_1 و X_2 در (x_1, x_2) باشد. اگر تابعهای داده شدهٔ $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ و $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ نسبت به x_1 و x_2 دارای مشتق جزئی بوده و به‌ازای همهٔ مقادیر برد X_1 و X_2 که برای آنها $f(x_1, x_2) \neq 0$، تبدیلی یک‌به‌یک را نشان دهد آنگاه برای این مقادیر x_1 و x_2، معادلات $y_1 = u_1(x_1, x_2)$ و $y_2 = u_2(x_1, x_2)$ را می‌توان به‌صورت یکتا برحسب x_1 و x_2 حل کرد تا $x_1 = w_1(y_1, y_2)$ و $x_2 = w_2(y_1, y_2)$ به‌دست آیند، و برای مقادیر متناظر y_1 و y_2، چگالی احتمال توأم $Y_1 = u_1(X_1, X_2)$ و $Y_2 = u_2(X_1, X_2)$ به‌صورت

$$g(y_1, y_2) = f[w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2)] \cdot |J|$$

داده می‌شود. در اینجا، J، موسوم به **ژاکوبی تبدیل**، دترمینان

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

است. در سایر جاها $g(y_1, y_2) = 0$.

این قضیه را ثابت نمی‌کنیم، ولی اطلاعات مربوط به ژاکوبی و کاربردهای آن را می‌توان در اکثر کتابهای حسابان پیشرفته یافت. ژاکوبیها عمدتاً در رابطهٔ با انتگرالهای چندگانه، مثلاً، وقتی می‌خواهیم مختصات قائم را به مختصات قطبی یا به مختصات کروی تغییر دهیم به‌کار می‌روند.

مثال ۱۲.۷

با رجوع به متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 در مثال ۱۱.۷، مطلوب است

(الف) چگالی توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$؛

(ب) چگالی حاشیه‌ای Y_2.

حل. (الف) از حلّ $y_1 = x_1 + x_2$ و $y_2 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$ برحسب x_1 و x_2 به‌دست می‌آوریم $x_1 = y_1 y_2$ و $x_2 = y_1(1 - y_2)$، و نتیجه می‌گیریم که

$$J = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 - y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1$$

چون تبدیل یک‌به‌یک است و ناحیهٔ $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ در صفحهٔ x_1x_2 را، به توی ناحیهٔ $y_1 > 0$ و $0 < y_2 < 1$ در صفحهٔ y_1y_2، می‌نگارد می‌توانیم قضیهٔ ۲.۷ را به‌کار بریم و نتیجه بگیریم که به‌ازای $y_1 > 0$ و $0 < y_2 < 1$

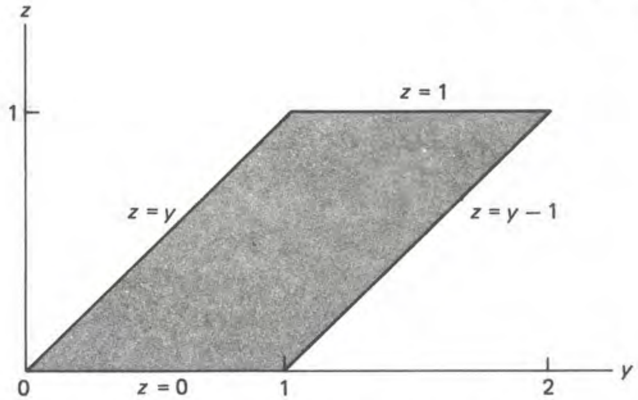
$$g(y_1, y_2) = e^{-y_1}|-y_1| = y_1 e^{-y_1}$$

و در سایر جاها، $g(y_1, y_2) = 0$.

(ب) با استفاده از چگالی توأم حاصل از قسمت (الف) و انتگرالگیری نسبت به y_1، به‌ازای $0 < y_2 < 1$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} h(y_2) &= \int_0^\infty g(y_1, y_2)\,dy_1 \\ &= \int_0^\infty y_1 e^{-y_1}\,dy_1 \\ &= \Gamma(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

و در سایر جاها $h(y_2) = 0$. توجه کنید که این نتیجه با آنچه در صفحهٔ ۲۶۸ به‌دست آمد مطابقت دارد. ▲



شکل۷.۷ فضای نمونه‌ای انتقال یافته برای مثال ۱۳.۷

مثال ۱۳.۷
اگر چگالی توأم $X_۱$ و $X_۲$ به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x_۱ < ۱, ۰ < x_۲ < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است،
(الف) چگالی توأم $Y = X_۱ + X_۲$ و $Z = X_۲$؛
(ب) چگالی حاشیه‌ای Y.
توجه کنید که در تمرین ۷.۷ از خواننده خواستیم که همین مسأله را به‌وسیلهٔ تکنیک تابع توزیع حل کند.

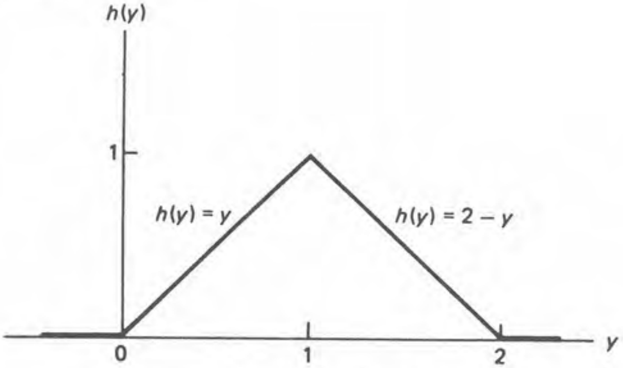
حل. (الف) با حلّ $y = x_۱ + x_۲$ و $z = x_۲$، به‌دست می‌آوریم $x_۱ = y - z$ و $x_۲ = z$، بنابراین

$$J = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

چون، تبدیل یک‌به‌یک است و ناحیهٔ $۰ < x_۱ < ۱$ و $۰ < x_۲ < ۱$ در صفحهٔ $x_۱x_۲$ را به ناحیهٔ $z < y < z + ۱$ و $۰ < z < ۱$ در صفحهٔ yz می‌نگارد (شکل ۷.۷ را ببینید)، می‌توانیم قضیهٔ ۲.۷ را به‌کار بریم و برای $z < y < z + ۱$ و $۰ < z < ۱$ به‌دست آوریم

$$g(y, z) = ۱ \cdot |۱| = ۱$$

و در سایر جاها $g(y, z_۲) = ۰$.
(ب) با انتگرالگیری نسبت به z به‌طور جداگانه، برای $y \leq ۰$، $۰ < y < ۱$، $۱ < y < ۲$ و



شکل۸.۷ چگالی احتمال مثلثی

$y \geq ۲$، به‌دست می‌آوریم

$$h(y) = \begin{cases} ۰ & y \leq ۰ \\ \int_۰^y ۱ dz = y & ۰ < y < ۱ \\ \int_{y-۱}^۱ ۱ dz = ۲ - y & ۱ < y < ۲ \\ ۰ & y \geq ۲ \end{cases}$$

و برای اینکه تابع چگالی را پیوسته کنیم، قرار می‌دهیم، $h(۱) = ۱$. بنابراین نشان داده‌ایم که مجموع متغیرهای تصادفی داده شده، دارای **چگالی احتمال مثلثی** است که نمودارش را در شکل ۸.۷ ارائه داده‌ایم. ▲

تا اینجا، تنها تابعهایی از دو متغیر تصادفی را در نظر گرفتیم، اما روش مبتنی بر قضیهٔ ۲.۷ را می‌توان به آسانی به توابعی از سه یا بیشتر از سه متغیر تصادفی تعمیم داد. مثلاً، اگر چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$ را داده باشند و بخواهیم چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $Y_۱ = u_۱(X_۱, X_۲, X_۳)$، $Y_۲ = u_۲(X_۱, X_۲, X_۳)$، و $Y_۳ = u_۳(X_۱, X_۲, X_۳)$ را بیابیم، روش کلی همان روش بالاست، ولی در این حالت، ژاکوبی دترمینان ۳ × ۳ زیر است

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_۱}{\partial y_۱} & \frac{\partial x_۱}{\partial y_۲} & \frac{\partial x_۱}{\partial y_۳} \\ \frac{\partial x_۲}{\partial y_۱} & \frac{\partial x_۲}{\partial y_۲} & \frac{\partial x_۲}{\partial y_۳} \\ \frac{\partial x_۳}{\partial y_۱} & \frac{\partial x_۳}{\partial y_۲} & \frac{\partial x_۳}{\partial y_۳} \end{vmatrix}$$

به محض اینکه چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی جدید تعیین شد، می‌توانیم چگالی حاشیه‌ای هریک از دو متغیر تصادفی و یا هریک از آنها را با انتگرالگیری بیابیم.

مثال ۱۴.۷
اگر چگالی احتمال توأم $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$ به‌صورت

$$f(x_۱, x_۲, x_۳) = \begin{cases} e^{-(x_۱+x_۲+x_۳)} & x_۱ > ۰, x_۲ > ۰, x_۳ > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، مطلوب است
(الف) چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y_۱ = X_۱ + X_۲ + X_۳$، $Y_۲ = X_۲$، و $Y_۳ = X_۳$؛
(ب) چگالی حاشیه‌ای $Y_۱$.

حل. (الف) از حل دستگاه معادلات $y_۱ = x_۱ + x_۲ + x_۳$، $y_۲ = x_۲$، و $y_۳ = x_۳$ برحسب $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ به‌دست می‌آوریم $x_۱ = y_۱ - y_۲ - y_۳$، $x_۲ = y_۲$، و $x_۳ = y_۳$. لذا نتیجه می‌شود،

$$J = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

و چون تبدیل یک‌به‌یک است، به‌ازای $y_۲ > ۰$، $y_۳ > ۰$، و $y_۱ > y_۲ + y_۳$،

$$\begin{aligned} g(y_۱, y_۲, y_۳) &= e^{-y_۱} \cdot |۱| \\ &= e^{-y_۱} \end{aligned}$$

و در سایر جاها $g(y_۱, y_۲, y_۳) = ۰$.
(ب) از انتگرالگیری نسبت به $y_۲$ و $y_۳$ به‌دست می‌آوریم که به‌ازای $y_۱ > ۰$،

$$\begin{aligned} h(y_۱) &= \int_۰^{y_۱} \int_۰^{y_۱ - y_۳} e^{-y_۱}\, dy_۲ dy_۳ \\ &= \frac{۱}{۲} y_۱^۲ \cdot e^{-y_۱} \end{aligned}$$

و در سایر جاها $h(y_۱) = ۰$. توجه کنید که نشان داده‌ایم مجموع سه متغیر تصادفی که دارای توزیع گاما با $\alpha = ۱$ و $\beta = ۱$ هستند، متغیری تصادفی است که توزیع گاما با $\alpha = ۳$ و $\beta = ۱$ دارد. ▲

همان‌طور که خواننده در تمرین ۴۷.۷ درخواهد یافت، به‌دست آوردن نتیجهٔ قسمت (ب)ی مثال ۱۴.۷، با استفاده از روش مبتنی‌بر قضیهٔ ۱، به‌صورتی که در صفحهٔ ۲۶۶ اصلاح شده است، آسانتر خواهد بود.

تمرینها

۱۴.۷ اگر X دارای توزیع فوق هندسی با $k = ۳$، $N = ۶$، و $n = ۲$ باشد، توزیع احتمال Y، تعداد پیروزیها منهای تعداد شکستها را بیابید.

۱۵.۷ با رجوع به تمرین ۱۴.۷، توزیع احتمال متغیر تصادفی $Z = (X - ۱)^۲$ را بیابید.

۱۶.۷ اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با $n = ۳$ و $\theta = \frac{۱}{۳}$ باشد، توزیع احتمال

(الف) $Y = \frac{X}{۱+X}$؛

(ب) $U = (X - ۱)^۴$

را بیابید.

۱۷.۷ اگر X دارای توزیع هندسی با $\theta = \frac{۱}{۳}$ باشد، فرمولی برای توزیع احتمال متغیر تصادفی $Y = ۴ - ۵X$ به‌دست آورید.

۱۸.۷ اگر X مجموع خالهای حاصل از ریختن یک جفت تاس باشد که توزیع احتمال آن را در صفحهٔ ۸۷ داده‌ایم؛ توزیع احتمال باقیماندهٔ تقسیم مقادیر X بر ۳ را به‌دست آورید.

۱۹.۷ تکنیک تبدیل متغیر را برای اثبات قضیهٔ ۷.۶، به‌کار برید.

۲۰.۷ مثال ۱.۷ را دوباره با تکنیک تبدیل متغیر حل کنید.

۲۱.۷ اگر $X = \ln Y$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، چگالی احتمال Y را که **توزیع لگ‌ـنرمال** می‌نامند بیابید.

۲۲.۷ اگر $F(x)$ مقدار تابع توزیع متغیر پیوسته X در x باشد، آنگاه **میانهٔ** X، که آن را با $\tilde{\mu}$ نشان می‌دهند به‌قسمی است که $F(\tilde{\mu}) = \frac{۱}{۲}$. با رجوع به تمرین قبل، نشان دهید که $\tilde{\mu} = e^{\mu}$.

۲۳.۷ با رجوع به تمرین ۲۱.۷، نشان دهید که توزیع لگ‌ـنرمال دارای ماکسیمم نسبی در $e^{\mu - \sigma^۲}$ است.

۲۴.۷ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ < x < ۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال $Y = X^۳$ را بیابید. نمودارهای چگالیهای احتمال X و Y را نیز رسم کنید و مساحتهای زیر دو منحنی را که به‌ترتیب نمایش $P(\frac{۱}{۲} < X < ۱)$ و $P(\frac{۱}{۸} < Y < ۱)$ هستند مشخص کنید.

۲۵.۷ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx^۳}{(۱+۲x)^۶} & x > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد که در آن k ثابت خاصی است، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = \frac{۲X}{۱+۲X}$ را بیابید. توزیع Y را مشخص کنید، و سپس مقدار k را تعیین کنید.

۲۶.۷ اگر X دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ باشد، نشان دهید که متغیر تصادفی $Y = -۲\ln X$ توزیع گاما دارد. پارامترهای این توزیع چه هستند؟

۲۷.۷ اگر X دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ باشد، نشان دهید که $Y = X^{-۱/\alpha}$، با $\alpha > ۰$، دارای توزیع پارتوی تمرین ۲۱.۶ است.

۲۸.۷ اگر چگالی احتمال X به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۳x^۲}{۲} & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد،

(الف) با استفاده از نتیجهٔ مثال ۲.۷، چگالی احتمال $Y = |X|$ را پیدا کنید.

(ب) چگالی احتمال $Z = X^۲ (= Y^۲)$ را بیابید.

۲۹.۷ اگر X، چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ داشته باشد،

(الف) با استفاده از نتیجهٔ مثال ۲.۷، چگالی احتمال $Y = |X|$ را بیابید.

(ب) چگالی احتمال $Z = X^۴ (= Y^۴)$ را پیدا کنید.

۳۰.۷ اگر توزیع احتمال توأم متغیرهای $X_۱$ و $X_۲$ برای $x_۱ = ۱, ۲, ۳$ و $x_۲ = ۱, ۲, ۳$ به‌صورت $f(x_۱, x_۲) = \frac{x_۱ x_۲}{۳۶}$ باشد، پیدا کنید

(الف) توزیع احتمال $X_۱ X_۲$ را؛

(ب) توزیع احتمال $X_۱/X_۲$ را.

۳۱.۷ با رجوع به تمرین ۳۰.۷ پیدا کنید

(الف) توزیع توأم $Y_۱ = X_۱ + X_۲$ و $Y_۲ = X_۱ - X_۲$؛

(ب) توزیع حاشیه‌ای $Y_۱$.

۳۲.۷ اگر توزیع احتمال توأم X و Y به‌صورت

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^۲}{۷}$$

برای $x = ۱, ۲$ و $y = ۱, ۲, ۳$ باشد، مطلوب است

(الف) توزیع توأم $U = X + Y$ و $V = X - Y$؛

(ب) توزیع حاشیه‌ای U.

۳۳.۷ اگر $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$ دارای توزیع چندجمله‌ای (تعریف ۶.۵ را ببینید) با $n = ۲$، $\theta_۱ = \frac{۱}{۴}$، $\theta_۲ = \frac{۱}{۳}$، و $\theta_۳ = \frac{۵}{۱۲}$ باشند، توزیع احتمال توأم $Y_۱ = X_۱ + X_۲$، $Y_۲ = X_۱ - X_۲$، و $Y_۳ = X_۳$ را بیابید.

۳۴.۷ با رجوع به مثال ۱۲.۳، مطلوب است

(الف) توزیع احتمال $U = X + Y$؛

(ب) توزیع احتمال $V = XY$؛

(ج) توزیع احتمال $W = X - Y$.

۳۵.۷ اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای توزیع دوجمله‌ای، به‌ترتیب با پارامترهای n_1 و θ و n_2 و θ هستند، نشان دهید که $Y = X_1 + X_2$ توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n_1 + n_2$ و θ دارد. (راهنمایی: قضیهٔ ۱۲.۱ را به‌کار برید.)

۳۶.۷ اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع هندسی با پارامتر θ دارند، نشان دهید که $Y = X_1 + X_2$ متغیری تصادفی است که دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای θ و $k = 2$ است.

۳۷.۷ اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع نرمال استاندارد دارند، نشان دهید که $Z = X + Y$ نیز توزیع نرمال دارد. (راهنمایی: مربع کاملی در نما بسازید.) میانگین و واریانس این توزیع نرمال چه هستند؟

۳۸.۷ اگر چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-y) & 0 < y < 1, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = XY^2$ را با استفاده از قضیهٔ ۱.۷ (به‌صورتی که در صفحهٔ ۲۶۶ اصلاح شده است) برای تعیین چگالی احتمال توأم Y و Z، و سپس انتگرالگیری برحسب y، به‌دست آورید.

۳۹.۷ تمرین ۳۸.۷ را با استفاده از قضیهٔ ۲.۷ برای تعیین چگالی احتمال توأم $Z = XY^2$ و $U = Y$ و سپس تعیین چگالی حاشیه‌ای Z، مجدداً حل کنید.

۴۰.۷ دو متغیر تصادفی مستقل X_1 و X_2 را در نظر بگیرید که هردو دارای توزیع کوشی

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

هستند. چگالی احتمال $Y_1 = X_1 + X_2$ را با استفاده از قضیهٔ ۱.۷ (به‌صورت اصلاح شدهٔ آن در صفحهٔ ۲۶۶) برای تعیین چگالی احتمال توأم X_1 و Y_1 و سپس انتگرالگیری برحسب x_1، به‌دست آورید. توزیع Y_1 را نیز مشخص کنید.

۴۱.۷ تمرین ۴۰.۷ را، با استفاده از قضیهٔ ۲.۷ برای تعیین چگالی احتمال توأم $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ و سپس یافتن توزیع حاشیه‌ای Y_1، مجدداً حل کنید.

۴۲.۷ دو متغیر تصادفی X و Y را که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x > 0, y > 0, x + y < 2 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است در نظر بگیرید. با استفاده از قضیهٔ ۱.۷، به‌صورتی که در صفحهٔ ۲۶۶ اصلاح شده است، چگالی احتمال $U = Y - X$ را بیابید.

۴۳.۷ تمرین ۴۲.۷ را با استفاده از قضیهٔ ۲.۷، برای تعیین چگالی توأم $U = Y - X$ و $V = X$ و سپس یافتن چگالی حاشیه‌ای U، مجدداً حل کنید.

۴۴.۷ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته باشند که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. چگالی احتمال توأم $Y_1 = X_1^2$ و $Y_2 = X_1X_2$ را بیابید.

۴۵.۷ فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پیوسته باشند که چگالی احتمال توأم آنها به‌صورت

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است. چگالی احتمال توأم $Z = X + Y$ و $W = X$ را بیابید.

۴۶.۷ فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هردو توزیع گامای همانند دارند.

(الف) چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $U = \frac{X}{X+Y}$ و $V = X + Y$ را بیابید.

(ب) چگالی حاشیه‌ای U را بیابید و آن‌را مشخص کنید.

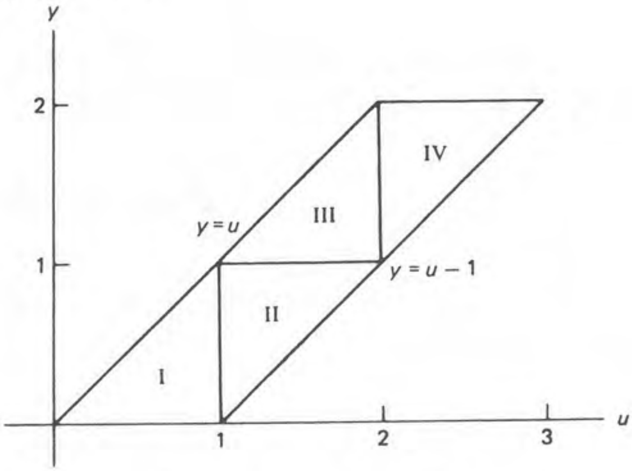
۴۷.۷ در صفحهٔ ۲۶۶، نشان دادیم که روش تبدیل مبتنی بر قضیهٔ ۱.۷ را می‌توان به‌قسمی تعمیم داد که برای متغیرهای تصادفی که تابعی از دو یا چند متغیر تصادفی‌اند قابل کاربرد باشد. تا اینجا، این روش را تنها برای تابعهایی از دو متغیر تصادفی به‌کار بردیم، اما وقتی مثلاً سه متغیر داشته باشیم، متغیر تصادفی جدیدی را به‌جای یکی از متغیرهای اصلی معرفی می‌کنیم و سپس (با مجموعیابی یا انتگرالگیری) دو متغیر تصادفی دیگر اولیه را حذف می‌کنیم. این روش را برای حلّ مجدد مثال ۱۴.۷ به‌کار برید.

۴۸.۷ در مثال ۱۳.۷، چگالی احتمال مجموع دو متغیر تصادفی مستقل را که چگالی یکنواخت با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ داشتند پیدا کردیم. اگر متغیر تصادفی سوم X_3 را که دارای همان چگالی یکنواخت بوده و مستقل از X_1 و X_2 است داشته باشیم، نشان دهید که اگر $U = Y + X_3 = X_1 + X_2 + X_3$، آنگاه

(الف) چگالی توأم X و Y به‌صورت

$$g(u, y) = \begin{cases} y & \text{برای ناحیه‌های I و II شکل ۹.۷} \\ 2 - y & \text{برای ناحیه‌های III و IV شکل ۹.۷} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است.



شکل۹.۷ نموداری برای تمرین ۴۸.۷

(ب) چگالی احتمال U به‌صورت

$$h(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ \frac{1}{2}u^2 & 0 < u < 1 \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}(u-1)^2 & 1 < u < 2 \\ \frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}(u-1)^2 + \frac{3}{2}(u-2)^2 & 2 < u < 3 \\ 0 & u \ge 3 \end{cases}$$

است. توجه کنید که اگر قرار دهیم $h(1) = h(2) = \frac{1}{2}$، چگالی احتمال U پیوسته می‌شود.

کاربردها

۴۹.۷ بنابر قانون ماکسول-بولتسمان در فیزیک نظری، چگالی احتمال V، سرعت یک مولکول گاز، به‌صورت

$$f(v) = \begin{cases} kv^2 e^{-\beta v^2} & v > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، که در آن β به جرم مولکول و دمای مطلق بستگی دارد، و k ثابت خاصی است. نشان دهید که انرژی جنبشی $E = \frac{1}{2}mV^2$ متغیری تصادفی با توزیع گاماست.

۵۰.۷ با رجوع به تمرین ۸۲.۳، چگالی احتمال فاصلهٔ بین نقطهٔ اصابت و مرکز هدف را بیابید.

۵۱.۷ با رجوع به تمرین ۸۳.۳، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Z = \frac{X+Y}{2}$، میانگین نسبت جوابهای صحیح یک دانشجو به دو آزمون قوه را بیابید.

۵۲.۷ با رجوع به تمرین ۸۴.۳، از قضیهٔ ۲.۷ برای یافتن چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $V = SP$ و $W = P$ استفاده کنید و سپس چگالی حاشیه‌ای V را به‌دست آورید.

۵.۷ تکنیک تابع مولد گشتاورها

تابعهای مولد گشتاورها در تعیین توزیع احتمال یا چگالی تابعی از متغیرهای تصادفی، وقتی تابع مزبور ترکیبی خطی از متغیرهای تصادفی مستقل است، می‌تواند نقش مهمی داشته باشد. ما در اینجا، وقتی چنین ترکیب خطی، در واقع، مجموع n متغیر تصادفی مستقل است، این تکنیک را تشریح، و تعمیم آن را در تمرینهای ۵۷.۷ و ۵۸.۷ به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

روش موردنظر مبتنی بر این قضیه است که تابع مولد گشتاورهای مجموع n متغیر مستقل برابر حاصلضرب تابعهای مولد گشتاورهای آنهاست، یعنی،

قضیهٔ ۳.۷ اگر X_1، X_2، ... ، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند و مجموع آنها $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

که در آن $M_{X_i}(t)$ مقدار تابع مولد گشتاورهای X_i به‌ازای t است.

برهان. با استفاده از این واقعیت که متغیرهای تصادفی مستقل‌اند، و لذا بنابر تعریف ۱۴.۳،

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{Yt}) \\
&= E[e^{(X_1+X_2+\cdots+X_n)t}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)t} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_1 t} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_2 t} f_2(x_2) dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{x_n t} f_n(x_n) dx_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)
\end{aligned}$$

که قضیه را برای حالت پیوسته اثبات می‌کند. برای اثبات قضیه در حالت گسسته تنها باید به‌جای همهٔ انتگرالها، مجموعها را قرار دهیم. ■

توجه کنید که اگر بخواهیم برای به‌دست آوردن توزیع احتمال یا چگالی متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ قضیهٔ ۳.۷ را به‌کار بریم، باید به شناسایی توزیع احتمال یا چگالی متناظر با $M_Y(t)$ قادر باشیم و به قضیهٔ اول از دو قضیه‌ای که در صفحهٔ ۲۴۰ ارائه کردیم، یعنی به قضیهٔ یکتایی دربارهٔ تناظر بین تابعهای مولد گشتاورها و توزیعها یا چگالیهای احتمال استناد کنیم.

مثال ۱۵.۷

توزیع احتمال مجموع n متغیر تصادفی X_1، X_2، ... ، و X_n را که به‌ترتیب توزیع پواسون با پارامترهای λ_1، λ_2، ... ، λ_n دارند بیابید.

حل. بنابر قضیهٔ ۹.۵، داریم

$$M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t-1)}$$

و لذا برای $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ به‌دست می‌آوریم

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(e^t-1)}$$

که به‌سهولت می‌توان تشخیص داد که $M_Y(t)$ تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ است. بنابراین توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل که توزیع پواسون با پارامتر λ_i دارند، توزیعی پواسون با پارامتر $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ است. توجه کنید که در مثال ۱۰.۷ این مطلب را برای $n = 2$ ثابت کردیم. ▲

مثال ۱۶.۷

اگر X_1، X_2، ... ، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند که توزیع نمایی با پارامتر θ دارند، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ را بیابید.

حل. چون توزیع نمایی، توزیع گاما با $\alpha = 1$ و $\beta = \theta$ است، بنابر قضیهٔ ۴.۶ داریم

$$M_{X_i}(t) = (1 - \theta t)^{-1}$$

و بنابراین مطابق دومین قاعدهٔ خاص حاصلضربها در پیوست انتهای کتاب

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \theta t)^{-1} = (1 - \theta t)^{-n}$$

با تشخیص اینکه تابع مولد گشتاورهای Y، تابع مولد گشتاورهای گاما با $\alpha = n$ و $\beta = \theta$ است، نتیجه می‌گیریم که توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل که توزیع نمایی با پارامتر θ دارند، توزیع

گاما با پارامتر $\alpha = n$ و $\beta = \theta$ است. توجه کنید که این نتیجه، با نتیجهٔ مثال ۱۴.۷ که در آن نشان دادیم مجموع سه متغیر مستقل که توزیع نمایی با پارامتر $\theta = 1$ دارند توزیع گاما با $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ است، مطابقت دارد. ▲

قضیهٔ ۳.۷ راهی آسان و ظریف برای به‌دست آوردن تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای فراهم می‌کند. فرض کنید که X_1، X_2، ... و X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که همگی توزیع برنولی $f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$، به‌ازای، $x = 0, 1$، دارند. بنابر تعریف ۶.۴

$$M_{X_i}(t) = e^{0 \cdot t}(1-\theta) + e^{1 \cdot t}\theta = 1 + \theta(e^t - 1)$$

لذا قضیهٔ ۳.۷ نتیجه می‌دهد

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n}[1 + \theta(e^t - 1)] = [1 + \theta(e^t - 1)]^n$$

که به‌آسانی تشخیص داده می‌شود که تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است. البته $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، تعداد کل پیروزیها در n امتحان است، زیرا X_1 تعداد پیروزیها در اولین امتحان، X_2 تعداد پیروزیها در دومین امتحان، ... ، و X_n تعداد پیروزیها در nامین امتحان است. همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، این نگرشی سودمند به توزیع دوجمله‌ای است.

تمرینها

۵۳.۷ تکنیک تابع مولد گشتاورها را برای حل دوبارهٔ تمرین ۳۵.۷ به‌کار برید.

۵۴.۷ با استفاده از این واقعیت که اگر k متغیر تصادفی مستقل، توزیع هندسی همانند با پارامتر یکسان θ داشته باشند مجموعشان متغیری تصادفی است که توزیع دوجمله‌ای منفی با پارامترهای θ و k دارند، تابع مولد گشتاورهای توزیع دوجمله‌ای منفی را بیابید. (راهنمایی: نتیجهٔ تمرین ۳۱.۵ را به‌کار برید.)

۵۵.۷ اگر n متغیر تصادفی مستقل، توزیع گامای یکسان با پارامترهای یکسان α و β داشته باشند، تابع مولد گشتاورهای مجموع آنها را بیابید و در صورت امکان توزیع این مجموع را مشخص کنید.

۵۶.۷ اگر n متغیر تصادفی مستقل X_i، توزیعهای نرمال با میانگینهای μ_i و انحراف معیارهای σ_i داشته باشند، تابع مولد گشتاورهای مجموع آنها را بیابید و توزیع متناظر، میانگین و واریانس آن را مشخص کنید.

۵۷.۷ تعمیم زیر از قضیهٔ ۳.۷ را ثابت کنید: *اگر X_1، X_2، ... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و*

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$$

آنگاه

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

که در آن $M_{X_i}(t)$ مقدار تابع مولد گشتاور X_i به‌ازای t است.

۵۸.۷ نتیجهٔ تمرین قبل را به‌کار برید و نشان دهید که اگر n متغیر تصادفی X_i توزیعهای نرمال با میانگینهای μ_i و انحراف معیارهای σ_i داشته باشند، آنگاه

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

توزیع نرمال دارد. میانگین و انحراف معیار این توزیع چه هستند؟

کاربردها

۵۹.۷ حقوقدانی شمارهٔ تلفنی دارد که در کتابچه راهنمای تلفن ثبت نشده و به‌طور متوسط در هر نیم‌ساعت ۲٫۱ تلفن به آن می‌شود، و شمارهٔ تلفن ثبت شده‌ای دارد که به‌طور متوسط در هر نیم‌ساعت ۱۰٫۹ تلفن به آن می‌شود. اگر بتوانیم تعداد تلفنهایی را که دریافت می‌کند متغیرهای تصادفی مستقلی بدانیم که توزیع پواسون دارند، مطلوب است احتمال اینکه این حقوقدان در نیم‌ساعت جمعاً

(الف) ۱۴ تلفن

(ب) حداکثر ۶ تلفن

دریافت کند.

۶۰.۷ در یک آگهی روزنامه، یک دلال اتومبیل، ۳ اتومبیل را برای فروش عرضه کرده است. اگر تعداد موارد کسب اطلاع دربارهٔ این اتومبیلها را بتوان متغیرهای تصادفی مستقلی در نظر گرفت که توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_1 = ۳٫۶$، $\lambda_2 = ۵٫۸$، و $\lambda_3 = ۴٫۶$ دارند، مطلوب است احتمال آنکه جمعاً

(الف) کمتر از ۱۰ مورد کسب اطلاع؛

(ب) رقمی بین ۱۵ تا ۲۰ مورد کسب اطلاع؛

(ج) حداقل ۱۸ مورد کسب اطلاع؛

در مورد این اتومبیلها دریافت کند.

۶۱.۷ با رجوع به تمرین ۶۰.۷، مطلوب است احتمال آنکه فروشنده، ۶ مورد کسب اطلاع برای اتومبیل اول و ۸ مورد کسب اطلاع برای دو اتومبیل دیگر دریافت کند.

۶۲.۷ اگر تعداد شکایتهایی که از یک مؤسسهٔ بزرگ لباسشویی، روزانه به‌عمل می‌آید، متغیری تصادفی باشد که توزیع پواسون با $\lambda = ۳٫۳$ دارد، مطلوب است احتمال آنکه این مؤسسه

(الف) دو شکایت در روزی معین؛
(ب) پنج شکایت جمعاً در هر دو روز معین؛
(ج) حداقل ۱۲ شکایت جمعاً در هر سه روز معین؛
دریافت کند.

۶۳.۷ تعداد ماهیهایی که شخصی در هر ساعت از دریاچه‌ای صید می‌کند متغیر تصادفی پواسون است با $\lambda = ۱٫۶$. مطلوب است احتمال آنکه شخصی
(الف) ۴ ماهی در ۲ ساعت؛
(ب) حداقل دو ماهی در ۳ ساعت؛
(ج) حداکثر ۲ ماهی در ۴ ساعت؛
صید کند.

۶۴.۷ اگر تعداد دقایقی که یک کارگر تعمیرگاه صرف بالانس هر تایر می‌کند متغیری تصادفی باشد که توزیع نمایی با پارامتر $\theta = ۵$ دارد، احتمال اینکه این کارگر
(الف) درکمتر از ۸ دقیقه ۲ تایر را بالانس کند؛
(ب) در حداقل ۱۲ دقیقه ۳ تایر را بالانس کند؛
چقدر است؟

۶۵.۷ اگر تعداد دقایقی که پزشکی صرف معاینهٔ بیماری می‌کند متغیری تصادفی باشد که دارای توزیع نمایی با پارامتر $\theta = ۹$ است، احتمال آنکه پزشک حداقل ۲۰ دقیقه صرف معاینهٔ
(الف) یک بیمار؛
(ب) دو بیمار؛
(ج) سه بیمار؛
کند چقدر است؟

مراجع

استفاده از تبدیل انتگرال احتمال برای مسائل شبیه‌سازی در

FREUND, J. E., MILLER, I., and JOHNSON, R. A., *Probability and Statistics for Engineers*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1990.

مورد بحث قرارگرفته است. تعمیمی از قضیهٔ ۱.۷ وقتی به‌کار می‌رود که بازهٔ برد X را که برای ان $f(x) \neq ۰$، بتوان به k زیربازه افرازکرد به قسمی که برای هر یک از زیر بازه‌ها شرایط قضیهٔ ۱.۷ جداگانه قابل اعمال باشد، این تعمیم را می‌توان در

WALPOLE, R. E., and MYERS, R. H., *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 4th ed. New York: Macmillan Publishing Company, Inc., 1989.

یافت. بحثهای مفصلتر و پیشرفته‌تری از مطالب این بخش در بسیاری از کتابهای درسی آمار ریاضی داده شده‌اند، برای مثال در

HOGG, R. V., and CRAIG, A. T., *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed. New

York: Macmillan Publishing Company, Inc., 1978,
ROUSSAS, G. G., *A First Course in Mathematical Statistics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973,
WILKS, S. S., *Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

۸

توزیعهای نمونه‌گیری

۱.۸ مقدمه

آمار عمدتاً به نتایج و پیشگوییهای حاصل از برآمدهای شانسی می‌پردازد که در آزمایشها و تحقیقاتی که به‌دقت طرحریزی شده‌اند، پیش می‌آیند. در حالت متناهی، این برآمدهای شانسی تشکیل زیرمجموعه، یا **نمونه‌ای** از اندازه‌گیریها یا مشاهداتی از مجموعهٔ بزرگتری به‌نام **جامعه** را می‌دهند. در حالت پیوسته، آنها معمولاً مقادیر متغیرهای تصادفی همتوزیع‌اند که این توزیع را **توزیع جامعه**، یا **جامعهٔ نامتناهی** مورد نمونه‌گیری می‌نامیم. کلمهٔ «نامتناهی» به این معنی است که، از لحاظ منطقی، حدی بر تعداد متغیرهای تصادفیی که مقادیر آنها قابل مشاهده است، متصور نیست.

همهٔ این اصطلاحات در اینجا تاحدی برخلاف عرف و عادت به‌کاررفته‌اند. اگر به‌عنوان بخشی

از یک آزمایش، قرار شود دانشمندی پنج خوکچه را از بین ۴۰ خوکچهٔ آزمایشگاهی انتخاب و سپس آنها را وزن کند، فردی غیراهل فن ممکن است نمونه را متشکل از خوکچه‌هایی بداند که او انتخاب کرده است. در زبان روزمره، اصطلاح «نمونه» به‌همین صورت به‌کار می‌رود. در آمار ترجیح داده می‌شود که به وزن پنج خوکچه به‌عنوان نمونه‌ای از جامعه‌ای نگریسته شود که مرکب از وزن ۴۰ خوکچه است. به این ترتیب، هم جامعه و هم نمونه از اعداد تشکیل شده‌اند. همچنین فرض کنید که برای برآورد کردن متوسط عمر مفید نوعی معین از ترانزیستور، مهندسی ده عدد از این ترانزیستورها را انتخاب می‌کند، برای مدت زمانی آنها را مورد آزمایش قرار می‌دهد، و زمان از کار افتادن هر یک از آنها را یادداشت می‌کند. اگر این زمانهای از کار افتادن، مقادیر متغیرهای تصادفیی باشند که دارای توزیع نمایی با پارامتر θ است، گوییم که این داده‌ها نمونه‌ای از جامعهٔ نمایی را تشکیل می‌دهند.

تصورش آسان است که هر نمونه‌ای به‌طرزی معتبر قابل تعمیم دربارهٔ جامعه‌ای که از آن حاصل شده است، نیست. در واقع، اغلب روشهای استنباط که در این کتاب مورد بحث واقع می‌شوند، مبتنی بر این فرض است که با یک **نمونهٔ تصادفی** سروکار داریم. در عمل اغلب با نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌هایی سروکار داریم که متناهی اما به‌قدر کافی بزرگ‌اند به‌طوری‌که گویی نامتناهی‌اند. در نتیجه، بخش اعظم نظریهٔ آماری و اغلب روشهایی که مورد بحث قرار خواهیم داد، شامل حال نمونه‌هایی از جامعه‌های نامتناهی‌اند، و در اینجا بحث را با تعریفی از نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نامتناهی آغاز می‌کنیم. بعداً در بخش ۳.۸ به نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های متناهی خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۸ اگر X_1، X_2، $\ldots$ ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع باشند، گوییم که تشکیل یک **نمونهٔ تصادفی** از جامعه‌ای نامتناهی را می‌دهند که توسط توزیع مشترک آنها مشخص می‌شود.

اگر $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ مقدار توزیع توأم چنین مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی در $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

که در آن $f(x_i)$ مقدار توزیع جامعه در x_i است. ملاحظه کنید که تعریف ۱.۸ در مورد نمونه‌گیری با جایگذاری از یک جامعهٔ متناهی نیز حکمفرماست، نمونه‌گیری بدون جایگذاری از جامعه‌های متناهی را در صفحه‌های ۲۹۱، ۲۹۲ مورد بحث قرار می‌دهیم.

استنباطهای آماری معمولاً بر آماره‌ها متکی هستند، یعنی، بر متغیرهای تصادفیی که تابعهایی از یک مجموعهٔ متغیرهای تصادفی مانند X_1، X_2، $\ldots$ ، X_nاند، که نمونه‌ای تصادفی تشکیل

می‌دهند. موارد نوعی از آنچه که «آماره» می‌نامیم، **میانگین نمونه‌ای** و **واریانس نمونه‌ای** هستند.

تعریف ۲.۸ اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی تشکیل دهند، آنگاه

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

میانگین نمونه‌ای و

$$S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

واریانس نمونه‌ای نامیده می‌شود.[1]

این تعاریف، به‌صورتی که در اینجا داده شده‌اند، تنها در مورد نمونه‌های تصادفی به‌کار می‌روند، ولی میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای را می‌توان، به‌همین نحو، برای هر مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ... ، X_n تعریف کرد.

معمولاً اصطلاحات «نمونهٔ تصادفی» یا «آماره»، «میانگین نمونه‌ای»، و «واریانس نمونه‌ای» را در مورد مقادیر متغیرهای تصادفی، به‌جای خود متغیرهای تصادفی، نیز به‌کار می‌برند. از لحاظ شهودی، این امر معقولتر است و با کاربرد محاوره‌ای آن مطابقت دارد. مثلاً ممکن است مقادیر

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad , \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

را برای داده‌های نمونه‌ای مشاهده شده محاسبه کنیم و به این آماره‌ها، میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای اطلاق کنیم. در اینجا، x_i، $\overline{x}$، و s^2 مقادیر متغیرهای تصادفی متناظر X_i، $\overline{X}$، و S^2 هستند. در واقع فرمولهای مربوط به $\overline{x}$ و s^2 حتی زمانی که با هر نوع داده و نه لزوماً داده‌های نمونه‌ای سروکار داریم، به‌کار می‌روند که در این صورت $\overline{x}$ و s^2 را صرفاً میانگین و واریانس می‌نامیم.

باید ملتفت بود که در اینجا $\overline{X}$ و S^2 را صرفاً به‌عنوان مثالهایی از آماره‌ها معرفی کرده‌ایم و آماره‌های متعدد دیگری موجودند که بعداً در این فصل و فصلهای آتی معرفی خواهند شد.

---

۱. دلیل تقسیم بر $n-1$ و نه n، که ظاهراً منطقیتر است، در بخش ۳.۱۰ توضیح داده خواهد شد.

۲.۸ توزیع میانگین

چون آماره‌ها، متغیرهای تصادفی هستند، مقادیر آنها از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کند، و مرسوم است که به توزیع آنها، **توزیعهای نمونه‌گیری** اطلاق شود. قسمت اعظم باقیماندهٔ این فصل به توزیعهای نمونه‌ایی که نقش مهمی در کاربردها دارند، اختصاص می‌یابد.

ابتدا در حالتی که تنها برخی فرضهای کاملاً کلی دربارهٔ ماهیت جامعهٔ مورد نمونه‌گیری شده است، به مطالعهٔ قسمتی از نظریهٔ **توزیعهای نمونه‌گیری میانگین** می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱.۸ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهد که میانگین آن μ و واریانس آن $\sigma^۲$ است، آنگاه

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad \mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^۲}{n}$$

برهان. با فرض $Y = \overline{X}$ در قضیهٔ ۱۴.۴ و، بنابراین با قرار دادن $a_i = \frac{۱}{n}$، به‌دست می‌آوریم

$$E(\overline{X}) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n} \cdot \mu = n\left(\frac{۱}{n} \cdot \mu\right) = \mu$$

زیرا $E(X_i) = \mu$. در این صورت بنابر فرع قضیهٔ ۱۴.۴، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathrm{var}(\overline{X}) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n^۲} \cdot \sigma^۲ = n\left(\frac{۱}{n^۲} \cdot \sigma^۲\right) = \frac{\sigma^۲}{n}$$

■

مرسوم است که $E(\overline{X})$ را به‌صورت $\mu_{\overline{X}}$ و $\mathrm{var}(\overline{X})$ را به‌صورت $\sigma^۲_{\overline{X}}$ می‌نویسند، و به σ **خطای معیار میانگین** اطلاق می‌کنند. فرمول خطای معیار میانگین، $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، نشان می‌دهد که انحراف معیار توزیع $\overline{X}$ با افزایش n، **اندازهٔ نمونه**، کاهش می‌یابد. این بدان معنی است که وقتی n بزرگتر می‌شود و ما واقعاً اطلاعات بیشتری (مقادیر متغیرهای تصادفی بیشتری) را به‌دست می‌آوریم، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که مقادیر $\overline{X}$ به μ، کمیتی که قصد برآورد آن را داریم، نزدیکتر می‌شوند. اگر به قضیهٔ چبیشف، به‌صورتی که در تمرین ۴۰.۴ فرمولبندی شده مراجعه کنیم، این مطلب را می‌توانیم به‌طور صوریتر به‌صورت زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۲.۸ به‌ازای هر ثابت مثبت c، احتمال اینکه $\overline{X}$ مقداری بین $\mu - c$ و $\mu + c$ اختیار کند، حداقل

$$1 - \frac{\sigma^2}{nc^2}$$

است. وقتی $n \to \infty$، این احتمال به یک میل می‌کند.

این نتیجه، که **قانون اعداد بزرگ** نامیده می‌شود، اصولاً از لحاظ نظری اهمیت دارد. نتیجه‌ای که از لحاظ عملی بسیار مهمتر است، **قضیهٔ حد مرکزی**، یکی از مهمترین قضایای آمار است، که به توزیع حدی **میانگین استاندارد شدهٔ** n متغیر تصادفی، وقتی $n \to \infty$، می‌پردازد. ما این قضیه را تنها در حالتی ثابت می‌کنیم که n متغیر تصادفی، نمونه‌ای از یک جامعه هستند که تابع مولد گشتاورهای آن موجود است. شرایط کلیتری که قضیه تحت آنها برقرار است در تمرینهای ۷.۸ و ۹.۸ داده شده‌اند، و برای کلیترین شرایطی که قضیه تحت آنها برقرار است، مراجعی در پایان فصل داده شده است.

قضیهٔ ۳.۸ (قضیهٔ حد مرکزی) اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند که دارای میانگین μ، واریانس σ^2، و تابع مولد گشتاورهای $M_X(t)$ است، در این صورت توزیع حدی

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

وقتی $n \to \infty$، توزیع نرمال استاندارد است.

برهان. ابتدا با استفاده از قسمت سوم قضیهٔ ۱۰.۴ و سپس قسمت دوم آن، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} M_Z(t) = M_{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t) &= e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma} \cdot M_{\overline{X}}\left(\frac{\sqrt{n}t}{\sigma}\right) \\ &= e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma} \cdot M_{n\overline{X}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

چون $n\overline{X} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، از قضیهٔ ۳.۷ نتیجه می‌شود که

$$M_Z(t) = e^{-\sqrt{n}\mu t/\sigma} \cdot \left[M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

و بنابراین

$$\ln M_Z(t) = -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n \cdot \ln M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

با بسط $M_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ به‌صورت یک سری توانی برحسب t، به‌دست می‌آوریم

$$\ln M_Z(t) = -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n \cdot \ln\left[1 + \mu'_1\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \mu'_2\frac{t^2}{2\sigma^2 n} + \mu'_3\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots\right]$$

که در آن μ'_1، μ'_2، μ'_3، ... ، گشتاورهای توزیع جامعه، یعنی، گشتاورهای توزیع متغیر تصادفی اصلی X_i هستند.

اگر n به‌حد کافی بزرگ باشد، می‌توانیم از بسط $\ln(1+x)$ به‌عنوان یک سری توانی برحسب x (مانند آنچه در صفحهٔ ۲۳۹ عمل شد)، استفاده کنیم. در نتیجه

$$\begin{aligned}\ln M_Z(t) = &-\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n\left\{\left[\mu'_1\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \mu'_2\frac{t^2}{2\sigma^2 n} + \mu'_3\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots\right]\right.\\ &-\frac{1}{2}\left[\mu'_1\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \mu'_2\frac{t^2}{2\sigma^2 n} + \mu'_3\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots\right]^2\\ &\left.+\frac{1}{3}\left[\mu'_1\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} + \mu'_2\frac{t^2}{2\sigma^2 n} + \mu'_3\frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots\right]^3 - \cdots\right\}\end{aligned}$$

حال، با گردآوری توانهای t، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\ln M_Z(t) = &\left(-\frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}\mu'_1}{\sigma}\right)t + \left(\frac{\mu'_2}{2\sigma^2} - \frac{\mu'^2_1}{2\sigma^2}\right)t^2\\ &+\left(\frac{\mu'_3}{6\sigma^3\sqrt{n}} - \frac{\mu'_1\cdot\mu'_2}{2\sigma^3\sqrt{n}} + \frac{\mu'^3_1}{3\sigma^3\sqrt{n}}\right)t^3 + \cdots\end{aligned}$$

و چون $\mu'_1 = \mu$ و $\mu'_2 - \mu'^2_1 = \sigma^2$، این رابطه به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\ln M_Z(t) = \frac{1}{2}t^2 + \left(\frac{\mu'_3}{6} - \frac{\mu'_1\mu'_2}{2} + \frac{\mu'^3_1}{3}\right)\frac{t^3}{\sigma^3\sqrt{n}} + \cdots$$

سرانجام، با مشاهدهٔ اینکه ضریب t^3 مضربی ثابت از $\frac{1}{\sqrt{n}}$ است و در حالت کلی برای $r \geq 2$، ضریب t^r مضربی ثابت از $\frac{1}{\sqrt{n^{r-2}}}$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_Z(t) = \frac{1}{2}t^2$$

و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

زیرا، حد لگاریتم برابر با لگاریتم حد است (به‌شرط وجود حد). با تشخیص اینکه تابع مولد گشتاورهای حاصل همان تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال استاندارد است، برای تکمیل اثبات قضیهٔ ۳.۸ فقط به دو قضیه‌ای که در صفحهٔ ۲۴۰ بیان شدند، نیاز داریم. ■

گاهی، قضیهٔ حد مرکزی به غلط چنین تعبیر می‌شود که به‌موجب این قضیه وقتی $n \to \infty$، $\overline{X}$ به توزیع نرمال میل می‌کند. چنین تعبیری درست نیست زیرا وقتی $n \to \infty$، $\text{var}(\overline{X}) \to 0$؛ از سوی دیگر بر طبق قضیهٔ حد مرکزی، تقریب توزیع $\overline{X}$ با توزیع نرمالی به میانگین μ و واریانس، $\frac{\sigma^2}{n}$، وقتی n بزرگ باشد، مجاز است. در عمل، وقتی $n \geq 30$، از این تقریب بدون توجه به شکل جامعهٔ مورد نمونه‌گیری استفاده می‌شود. برای مقادیر کوچک n استفاده از این تقریب، سؤال‌برانگیز است. با این حال قضیهٔ ۴.۸ زیر را ببینید.

مثال ۱.۸

یک دستگاه خودکار فروشندهٔ نوشابهٔ لیوانی را طوری تنظیم کرده‌اند که مقدار نوشابه‌ای که [بعد از هر فشار دکمه] از آن خارج می‌شود، متغیری تصادفی با میانگین ۲۰۰ میلی‌لیتر و انحراف معیار ۱۵ میلی‌لیتر است. مطلوب است احتمال اینکه متوسط (میانگین) مقدار نوشابه‌ای که در یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۳۶ از آن خارج می‌شود، حداقل ۲۰۴ میلی‌لیتر باشد.

حل. بنابر قضیهٔ ۱.۸، توزیع $\overline{X}$ دارای میانگین $\mu_{\overline{X}} = 200$ و انحراف معیار $\sigma_{\overline{X}} = \frac{15}{\sqrt{36}} = 2{,}5$ است، و بنابر قضیهٔ حد مرکزی، این توزیع تقریباً نرمال است. چون

$$z = \frac{204 - 200}{2{,}5} = 1{,}6$$

از جدول III نتیجه می‌شود که

$$P(\overline{X} \geq 204) = P(Z \geq 1{,}6) = 0{,}5000 - 0{,}4452 = 0{,}0548$$

▲

جالب توجه است که وقتی جامعهٔ مورد نمونه‌گیری نرمال است، توزیع $\overline{X}$، صرف‌نظر از اندازهٔ n، نرمال است.

قضیهٔ۴.۸ اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، توزیع نمونه‌گیری آن، توزیعی نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ است.

برهان. بنابر قضایای ۴.۱۰ و ۳.۷ می‌توان نوشت که

$$M_{\overline{X}}(t) = \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

و چون تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$، بنابر قضیهٔ ۶.۶ به‌صورت

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ t^۲}$$

است، نتیجه می‌گیریم که

$$M_{\overline{X}}(t) = \left[e^{\mu \cdot \frac{t}{n} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{t}{n}\right)^۲ \sigma^۲}\right]^n$$

$$= e^{\mu t + \frac{۱}{۲} t^۲ \left(\frac{\sigma^۲}{n}\right)}$$

بی‌درنگ دیده می‌شود که این تابع مولد گشتاورها، تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمالی با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^۲}{n}$ است، و برای تکمیل برهان قضیهٔ ۴.۸ تنها مراجعه به دو قضیهٔ صفحهٔ ۲۴۰ کافی است.■

۳.۸ توزیع میانگین: جامعه‌های متناهی

اگر آزمایشی متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه‌ای متناهی از اعداد $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_N\}$ باشد، این مجموعه را **جامعه‌ای متناهی با اندازهٔ** N می‌نامند. در تعریفی که ذیلاً می‌آید، فرض خواهد شد که از جامعه‌ای متناهی با اندازهٔ N بدون جایگذاری نمونه‌گیری می‌کنیم.

تعریف۳.۸ اگر $X_۱$ اولین مقدار استخراج شده از جامعه‌ای متناهی با اندازه N، $X_۲$ دومین مقدار استخراج شده، . . . ، X_n، nامین مقدار استخراج شده باشد و توزیع احتمال توأم این n متغیر تصادفی به‌ازای هر nتایی مرتب از مقادیر این متغیرها با عبارت

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \frac{۱}{N(N-۱)\cdots(N-n+۱)}$$

داده شده باشد، آنگاه گوییم که $X_۱$، $X_۲$، . . . ، و X_n یک **نمونهٔ تصادفی** از جامعهٔ متناهی مفروض تشکیل می‌دهند.

مانند تعریف ۱.۸، نمونهٔ تصادفی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است، امّا در اینجا نیز مرسوم است که اصطلاح «نمونهٔ تصادفی» به مقادیر متغیرهای تصادفی، یعنی اعداد واقعی استخراج شده هم اطلاق شود.

از توزیع احتمال توأم تعریف ۳.۸ نتیجه می‌شود که احتمال مربوط به هر زیرمجموعهٔ n عنصری از N عنصر جامعهٔ متناهی (بدون رعایت ترتیب برای مقادیر استخراج شده) عبارت است از

$$\frac{n!}{N(N-۱)\cdots(N-n+۱)} = \frac{۱}{\binom{N}{n}}$$

این عبارت اغلب به‌عنوان تعریفی دیگر یا به‌عنوان معیاری برای انتخاب نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای متناهی با اندازهٔ N داده می‌شود: هریک از $\binom{N}{n}$ نمونه ممکن باید احتمالهای یکسان داشته باشند.

همچنین از توزیع توأم بالا نتیجه می‌شود که توزیع حاشیه‌ای X، به‌ازای $r = ۱, ۲, \cdots, n$ عبارت است از

$$f(x_r) = \frac{۱}{N}, \qquad x_r = c_۱, c_۲, \cdots, c_N$$

و میانگین و واریانس این توزیع یکنواخت گسسته را میانگین و واریانس جامعهٔ متناهی می‌نامیم. بنابراین

تعریف۴.۸ میانگین و واریانس جامعهٔ متناهی $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_N\}$ عبارت‌اند از

$$\mu = \sum_{i=۱}^{N} c_i \cdot \frac{۱}{N}, \qquad \sigma^۲ = \sum_{i=۱}^{N}(c_i-\mu)^۲ \cdot \frac{۱}{N}$$

سرانجام، از توزیع احتمال توأم تعریف ۳.۸ نتیجه می‌شود که توزیع حاشیه‌ای توأم هر دوتا از متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، ... ، X_n به‌ازای هر جفت عناصر جامعهٔ متناهی با عبارت

$$g(x_r, x_s) = \frac{۱}{N(N-۱)}$$

داده می‌شود. بنابراین می‌توانیم نشان دهیم که

قضیهٔ۵.۸ اگر X_r و X_s، rامین و sامین متغیرهای تصادفی از نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n باشند، که از جامعهٔ متناهی $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_N\}$ استخراج شده‌اند، آنگاه

$$\mathrm{cov}(X_r, X_s) = -\frac{\sigma^۲}{N-۱}$$

برهان. بنابر تعریف ۹.۴،

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_r, X_s) &= \sum_{\substack{i=۱ \\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=۱}^{N}\frac{۱}{N(N-۱)}(c_i-\mu)(c_j-\mu) \\ &= \frac{۱}{N(N-۱)}\cdot\sum_{i=۱}^{N}(c_i-\mu)\left[\sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{N}(c_j-\mu)\right]\end{aligned}$$

و چون

$$\sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{N}(c_j-\mu) = \sum_{j=۱}^{N}(c_j-\mu)-(c_i-\mu) = -(c_i-\mu)$$

لذا

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_r, X_s) &= -\frac{۱}{N(N-۱)}\cdot\sum_{i=۱}^{N}(c_i-\mu)^۲ \\ &= -\frac{۱}{N-۱}\cdot\sigma^۲\end{aligned}$$

■

با استفاده از همهٔ این نتیجه‌ها، اینک قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم که متناظر با قضیهٔ ۱.۸ برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های متناهی است.

قضیهٔ۶.۸ اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای متناهی به‌اندازهٔ N با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد، آنگاه

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad \mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^۲}{n}\cdot\frac{N-n}{N-۱}$$

برهان. با قرار دادن $a_i = \frac{1}{N}$، $\text{var}(X_i) = \sigma^2$، و $\text{cov}(X_i, X_j) = -\frac{\sigma^2}{N-1}$ در قضیهٔ ۱۴.۴، نتیجه می‌گیریم که

$$E(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \mu = \mu$$

و

$$\begin{aligned}\text{var}(\overline{X}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2 + 2 \cdot \sum\sum_{i<j} \frac{1}{n^2} \left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \left(\frac{\sigma^2}{N-1}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}\end{aligned}$$

■

جالب توجه است که تفاوت دو فرمولی که برای $\text{var}(\overline{X})$ در قضیه‌های ۱.۸ و ۶.۸ به‌دست آمده‌اند تنها در **عامل تصحیح جامعهٔ متناهی**، $\frac{N-n}{N-1}$، است.* در وَاقع، وقتی N در مقایسه با n بزرگ باشد، تفاوت بین دو فرمول $\text{var}(\overline{X})$ عموماً ناچیز است، و وقتی از جامعهٔ متناهی بزرگی نمونه استخراج می‌شود، فرمول $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ اغلب به‌عنوان تقریب مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک قاعدهٔ سرانگشتی کلی این است که از این تقریب مادام که نمونه شامل بیش از ۵ درصد جامعه نباشد، استفاده کنند.

تمرینها

۱.۸ با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ ۱۵.۴ نشان دهید که اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه به‌ازای $r = 1, 2, \cdots, n$،

$$\text{cov}(X_r - \overline{X}, \overline{X}) = 0$$

۲.۸ با استفاده از قضیهٔ ۱۴.۴ و فرع آن نشان دهید که اگر X_{11}، X_{12}، ... ، X_{1n_1}، X_{21}، X_{22}، ... ، X_{2n_2} متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری که n_1تای اول نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2، و n_2تای دیگر نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین μ_2 و واریانس σ_2^2 را تشکیل دهند، آنگاه

* چون مسائل متعددی موجودند که توجه ما در آنها به انحراف معیار است و نه خود واریانس، اصطلاح «عامل تصحیح جامعهٔ متناهی» اغلب به‌جای $\frac{N-n}{N-1}$ به $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ اطلاق می‌شود. البته اگر به‌وضوح متوجه باشیم که آن را در کجا به‌کار می‌بریم، مشکلی پیش نمی‌آید.

(الف) $E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$؛
(ب) $\text{var}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$.

۳.۸ با رجوع به تمرین ۲.۸، نشان دهید که اگر دو نمونه از جامعه‌های نرمال استخراج شده باشند، آنگاه $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ متغیری تصادفی است که توزیع نرمال با میانگین $\mu_1 - \mu_2$ و واریانس $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ دارد. (راهنمایی: مانند برهان قضیهٔ ۴.۸ عمل کنید).

۴.۸ اگر X_1، X_2، . . . ، X_n، متغیرهای تصادفی مستقلی باشندکه توزیعهای برنولی یکسان با پارامتر θ دارند آنگاه $\overline{X}$ نسبت موفقیتها در n امتحان است، که آن را با $\hat{\Theta}$ نشان می‌دهیم. تحقیق کنید که
(الف) $E(\hat{\Theta}) = \theta$؛
(ب) $\text{var}(\hat{\Theta}) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$.

۵.۸ اگر اولین n_1 متغیر تصادفی تمرین ۲.۸ دارای توزیعهای برنولی با پارامتر θ_1 و n_2 متغیر تصادفی دیگر دارای توزیعهای برنولی با پارامتر θ_2 باشند، با نمادهای تمرین ۴.۸، نشان دهید که
(الف) $E(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) = \theta_1 - \theta_2$؛
(ب) $\text{var}(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) = \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$.

۶.۸ با نگرش به متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای به‌گونه‌ای که در صفحهٔ ۲۸۰ عمل شده است، یعنی به‌صورت مجموع متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای برنولی یکسان، و با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی، قضیهٔ ۸.۶ را ثابت کنید.

۷.۸ یک شرط کافی برای قضیهٔ حد مرکزی چنین است: اگر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، . . . ، X_n مستقل و به‌طور یکنواخت کراندار باشند (یعنی، عدد ثابت مثبتی مانند k موجود باشد به‌طوری که احتمال اینکه هر یک از X_iها مقداری بزرگتر از k یا کوچکتر از $-k$ اختیار کنند، صفر باشد)، در این صورت اگر واریانس

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

وقتی $n \to \infty$، به بی‌نهایت میل کند، توزیع میانگین استاندارد شدهٔ X_iها به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. نشان دهید که این شرط کافی برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مانند X_i که دارای توزیعهای احتمال زیرند، برقرار است.

$$f_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x_i = 1 - (\frac{1}{2})^i \\ \frac{1}{2} & x_i = (\frac{1}{2})^i - 1 \end{cases}$$

۸.۸ دنبالهٔ متغیرهای تصادفی مستقل X_1، X_2، X_3، . . . با چگالیهای یکنواخت

$$f_i(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2-\frac{1}{i}} & 0 < x_i < 2 - \frac{1}{i} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

را در نظرگیرید. از شرط کافی تمرین قبل استفاده کنید و نشان دهید که قضیهٔ حد مرکزی برقرار است.

۹.۸ شرط زیر، یک شرط کافی، به‌نام شرط لاپلاس ـ لیاپونوف[1]، برای قضیهٔ حد مرکزی است: اگر $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل بوده و هر متغیر دارای گشتاور مطلق مرتبهٔ سوم

$$c_i = E(|X_i - \mu_i|^۳)$$

باشد و اگر

$$\lim_{n\to\infty}[\text{var}(Y_n)]^{-\frac{۳}{۲}} \cdot \sum_{i=۱}^{n} c_i = ۰$$

که در آن $Y_n = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$، آنگاه توزیع میانگین استاندارد شدهٔ X_i، وقتی $n \to \infty$، به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند. از این شرط استفاده کرده نشان دهید که قضیهٔ حد مرکزی برای دنبالهٔ متغیرهای تصادفی تمرین ۷.۸ برقرار است.

۱۰.۸ از شرط تمرین ۹.۸ استفاده کرده نشان دهید که قضیهٔ حد مرکزی برای دنبالهٔ متغیرهای تصادفی تمرین ۸.۸ برقرار است.

۱۱.۸ توضیح دهید که چرا وقتی از یک جامعهٔ متناهی با جایگذاری نمونه‌گیری می‌کنیم، نتایج قضیهٔ ۱.۸ مناسب‌اند و نه نتایج قضیهٔ ۶.۸.

۱۲.۸ با توجه به قضیهٔ ۶.۸، نتایج تمرین ۳۹.۵ را توضیح دهید.

۱۳.۸ اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای متناهی که متشکل از اعداد صحیح ۱، ۲، ...، N است، انتخاب شود، نشان دهید که

(الف) میانگین توزیع $\overline{X}$، $\frac{(N+۱)}{۲}$ است.

(ب) واریانس توزیع $\overline{X}$، $\frac{(N+۱)(N-n)}{۱۲n}$ است.

(ج) میانگین و واریانس توزیع $Y = n \cdot \overline{X}$ عبارت‌اند از

$$E(Y) = \frac{n(N+۱)}{۲}, \qquad \text{var}(Y) = \frac{n(N+۱)(N-n)}{۱۲}$$

(راهنمایی: به پیوست انتهای کتاب یا نتایج تمرین ۱.۵ رجوع کنید).

۱۴.۸ میانگین و واریانس جامعه‌ای متناهی را که مرکب از ۱۰ عدد ۱۵، ۱۳، ۱۸، ۱۰، ۶، ۲۱، ۷، ۱۱، ۲۰، و ۹ است، پیدا کنید.

۱۵.۸ نشان دهید که واریانس جامعهٔ متناهی $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_N\}$ را می‌توان به‌صورت

$$\sigma^۲ = \frac{\sum_{i=۱}^{N} c_i^۲}{N} - \mu^۲$$

نوشت.

۱۶.۸ از فرمول تمرین ۱۵.۸ استفاده کرده واریانس جامعهٔ متناهی تمرین ۱۴.۸ را مجدداً محاسبه کنید.

۱۷.۸ فرمولی شبیه به فرمول تمرین ۱۵.۸ برای واریانس نمونه‌ای بنویسید.

1. Laplace-Liapounoff

کاربردها

۱۸.۸ چند نمونه متفاوت به‌اندازهٔ $n = ۳$ را می‌توان از جامعه‌ای متناهی با هریک از اندازه‌های زیر استخراج کرد؟

(الف) $N = ۱۲$؛

(ب) $N = ۲۰$؛

(ج) $N = ۵۰$.

۱۹.۸ احتمال هر نمونهٔ ممکن چقدر است هرگاه

(الف) نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۴$ از جامعه‌ای متناهی به‌اندازهٔ $N = ۱۲$ استخراج شود؟

(ب) نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۵$ از جامعه‌ای متناهی با اندازهٔ $N = ۲۲$ استخراج شود.

۲۰.۸ اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۳$ از جامعه‌ای متناهی به‌اندازهٔ $N = ۵۰$ استخراج شود، احتمال اینکه عنصر خاصی از جامعه در نمونه منظور شود، چقدر است؟

۲۱.۸ برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی برای خطای معیار میانگین چه وضعی پیش می‌آید در صورتی که اندازهٔ نمونه

(الف) از ۳۰ به ۱۲۰ افزایش یابد؟

(ب) از ۸۰ به ۱۸۰ افزایش یابد؟

(ج) از ۴۵۰ به ۵۰ کاهش یابد؟

(د) از ۲۵۰ به ۴۰ کاهش یابد.

۲۲.۸ مقدار عامل تصحیح $\frac{N-n}{N-۱}$ جامعهٔ متناهی را برای

(الف) $n = ۵$ و $N = ۲۰۰$؛

(ب) $n = ۵۰$ و $N = ۳۰۰$؛

(ج) $n = ۲۰۰$ و $N = ۸۰۰$؛

پیدا کنید.

۲۳.۸ یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۱۰۰$ از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین $\mu = ۷۵$ و واریانس $\sigma^۲ = ۲۵۶$ انتخاب شده است. اگر از قضیهٔ چبیشف استفاده کنیم، با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}$ بین ۶۷ و ۸۳ قرار می‌گیرد؟

۲۴.۸ تمرین ۲۳.۸ را با استفاده از قضیهٔ حد مرکزی به‌جای قضیهٔ چبیشف، مجدداً حل کنید.

۲۵.۸ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۸۱$ از جامعه‌ای نامتناهی با میانگین $\mu = ۱۲۸$ و انحراف معیار $\sigma = ۶٫۳$ اختیار شده است. با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}$ بین ۱۲۶٫۶ و ۱۲۹٫۴ قرار نخواهد گرفت، در صورتی که از

(الف) قضیهٔ چبیشف

(ب) قضیهٔ حد مرکزی

استفاده کنیم.

۲۶.۸ قسمت (ب) تمرین ۲۵.۸ را، با فرض اینکه جامعه نامتناهی نبوده و متناهی با $N = ۴۰۰$

باشد، مجدداً حل کنید.

۲۷.۸ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۶۴ از جامعه‌ای نرمال با $\mu =$ ۵۱٫۴ و $\sigma =$ ۶٫۸ اختیار شده است. مطلوب است احتمال اینکه میانگین نمونه

(الف) بیشتر از ۵۲٫۹؛

(ب) بین ۵۰٫۵ و ۵۲٫۳؛

(ج) کوچکتر از ۵۰٫۶؛

باشد.

۲۸.۸ یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۱۰۰ از جامعهٔ نرمالی با $\sigma =$ ۲۵ اختیار شده است. مطلوب است احتمال آنکه اختلاف بین میانگین نمونه و میانگین جامعه ۳ یا بیشتر باشد.

۲۹.۸ نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازهٔ ۴۰۰ از هریک از دو جامعه با میانگینهای برابر و انحراف معیارهای $\sigma_1 =$ ۲۰ و $\sigma_2 =$ ۳۰ اختیار شده‌اند. با استفاده از قضیهٔ چبیشف و نتایج تمرین ۲.۸، با احتمال حداقل ۰٫۹۹، دربارهٔ مقدار به‌دست آمده برای $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ چه حکمی می‌توانیم بکنیم؟ (منظور ما از «استقلال» آن است که نمونه‌ها در شرایط تمرین ۲.۸ صادق باشند).

۳۰.۸ با فرض اینکه دو جامعهٔ تمرین ۲۹.۸ نرمال باشند، از نتیجهٔ تمرین ۳.۸ استفاده کرده، k را طوری پیدا کنید که

$$P(-k < \overline{X}_1 - \overline{X}_2 < k) = ۰٫۹۹$$

۳۱.۸ نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازهٔ $n_1 =$ ۳۰ و $n_2 =$ ۵۰ از دو جامعهٔ نرمال با میانگینهای $\mu_1 =$ ۷۸ و $\mu_2 =$ ۷۵، و واریانسهای $\sigma_1^2 =$ ۱۵۰ و $\sigma_2^2 =$ ۲۰۰ اختیار شده‌اند. از نتایج تمرین ۳.۸ برای یافتن احتمال اینکه میانگین نمونهٔ اول از میانگین نمونهٔ دوم حداقل به‌قدر ۴٫۸ بیشتر باشد، استفاده کنید.

۳۲.۸ نسبت واقعی خانواده‌ها در شهری معین، که مالک محل سکونت خود هستند، ۰٫۷۰ است. اگر ۸۴ خانواده در این شهر به‌تصادف مورد پرسش قرار گیرند و جوابهای آنها به‌این سؤال که صاحب‌خانه یا مستأجرند، به‌عنوان مقادیر متغیرهای تصادفی مستقلی با توزیعهای برنولی یکسان به پارامتر $\theta =$ ۰٫۷۰ تلقی شوند، با چه احتمالی می‌توانیم حکم کنیم که مقدار به‌دست آمده برای نسبت نمونه‌ای، یعنی $\hat{\Theta}$، بین ۰٫۶۴ و ۰٫۷۶ قرار می‌گیرد، به شرط اینکه از نتیجهٔ تمرین ۴.۸ و

(الف) قضیهٔ چبیشف؛

(ب) قضیهٔ حد مرکزی؛

استفاده شود.

۳۳.۸ نسبت واقعی مردهایی که طرح مالیاتی خاصی را تأیید می‌کنند ۰٫۴۰ و نسبت متناظر برای زنان ۰٫۲۵ است. $n_1 =$ ۵۰۰ مرد و $n_2 =$ ۴۰۰ زن به‌تصادف مصاحبه شده‌اند و جوابهای فردفرد آنها به‌عنوان مقادیر متغیرهای مستقلی با توزیعهای برنولی با پارامترهای مربوطهٔ $\theta_1 =$ ۰٫۴۰

و ۲۵ر۰ $= \theta_2$ تلقی می‌شوند. با استفاده از قضیهٔ چبیشف، با احتمال حداقل ۹۳۷۵ر۰ دربارهٔ $\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2$، اختلاف بین نسبتهای نمونه‌ای جوابهای موافق، چه حکمی می‌توان کرد؟ از نتیجهٔ تمرین ۵.۸ استفاده کنید.

۴.۸ توزیع خی‌دو

در مثال ۹.۷ نشان دادیم که اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه X^2 دارای توزیع گامای خاصی است که آن را **توزیع خی‌دو** نامیدیم، و این دلیلی برای مهم بودن نقشی است که توزیع خی‌دو در مسائل نمونه‌گیری از جامعه‌های نرمال دارد. توزیع خی‌دو اغلب با «توزیع χ^2» نشان داده می‌شود که در آن χ حرف کوچک یونانی خی است. برای نشان دادن مقادیر متغیرهای تصادفی نیز که توزیع خی‌دو دارند از χ^2 استفاده می‌کنیم، اما از نشان دادن متغیرهای تصادفی نظیر به‌صورت X^2 که در آن X حرف بزرگ یونانی خی است، خودداری می‌کنیم. این کار از تکرار این مطلب که در هر حالت آیا X متغیری تصادفی با مقادیر x یا متغیری تصادفی با مقادیر χ است، جلوگیری می‌کند.

با مرور برخی نتایج بخش ۳.۶، متغیری تصادفی مانند X دارای توزیع خی‌دو با ν درجه آزادی است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده شود. میانگین و واریانس توزیع خی‌دو با ν درجهٔ آزادی عبارت‌اند از ν و 2ν، و تابع مولد گشتاورهای آن به‌صورت زیر است

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\nu/2}$$

توزیع خی‌دو خواص ریاضی متعددی دارد که در قضایای ۷.۸ تا ۱۰.۸ داده شده‌اند. ابتدا به‌طور صوری نتیجهٔ مثال ۹.۷ را، که در بالا به آن اشاره کردیم، بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۷.۸ اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه X^2 دارای توزیع خی‌دو با $\nu = 1$ درجهٔ آزادی است.

به‌طور کلی می‌توان نشان داد که

قضیهٔ ۸.۸ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، و X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای نرمال استاندارد باشند، آنگاه

$$Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i^۲$$

دارای توزیع خی‌دو با $\nu = n$ درجهٔ آزادی است.

برهان. با استفاده از تابع مولد گشتاورها که در بالا داده شده، با $\nu = ۱$، و قضیهٔ ۷.۸، نتیجه می‌گیریم که

$$M_{X_i^۲}(t) = (۱ - ۲t)^{-\frac{۱}{۲}}$$

لذا، بنابر قضیهٔ ۳.۷، نتیجه می‌شود که

$$M_Y(t) = \prod_{i=۱}^{n} (۱ - ۲t)^{-\frac{۱}{۲}} = (۱ - ۲t)^{-\frac{n}{۲}}$$

می‌توان تشخیص داد که این تابع مولد، تابع مولد توزیع خی‌دو با $\nu = n$ درجهٔ آزادی است. ■

دو خاصیت دیگر توزیع خی‌دو در قضایای زیر داده می‌شوند که اثبات آنها در تمرینهای ۳۴.۸ و ۳۵.۸ از خواننده خواسته شده است:

قضیهٔ ۹.۸ اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیعهای خی‌دو و با $\nu_۱$، $\nu_۲$، ... ، و ν_n درجهٔ آزادی باشند، آنگاه

$$Y = \sum_{i=۱}^{n} X_i$$

دارای توزیع خی‌دو با $\nu_۱ + \nu_۲ + \cdots + \nu_n$ درجهٔ آزادی است.

قضیهٔ ۱۰.۸ اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند به‌طوری که $X_۱$ دارای توزیع خی‌دو با $\nu_۱$ درجهٔ آزادی، و $X_۱ + X_۲$ دارای توزیع خی‌دو با $\nu > \nu_۱$ درجهٔ آزادی باشد، آنگاه $X_۲$ دارای توزیع خی‌دو با $\nu - \nu_۱$ درجهٔ آزادی است.

توزیع خی‌دو دارای کاربردهای مهمی است که بسیاری از آنها در فصول ۱۰ تا ۱۳ مورد بحث قرار می‌گیرند. مهمترین آنها، خواصی هستند که، مستقیم و غیرمستقیم، مبتنی بر قضیهٔ زیرند:

قضیهٔ ۱۱.۸ اگر $\overline{X}$ و $S^۲$ میانگین و واریانس نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشد،آنگاه

۱. $\overline{X}$ و $S^۲$ مستقل‌اند؛

۲. متغیر تصادفی $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع خی‌دو با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است.

برهان. چون برهان تفصیلی قسمت ۱ از حدود این کتاب فراتر می‌رود، در قسمت دوم برهان، استقلال $\overline{X}$ و $S^۲$ را خواهیم پذیرفت. علاوه‌بر مراجعی که برای برهانهای قسمت اول در پایان این فصل داده شده‌اند، در تمرین ۴۵.۸ مراحل اصلی برهان ساده‌تری را که بر مفهوم یک تابع مولد شرطی استوار است، به‌طور خلاصه شرح داده‌ایم، و در تمرین ۴۴.۸ از خواننده خواسته‌ایم که استقلال $\overline{X}$ و $S^۲$ را برای حالت خاص $n = ۲$ ثابت کند.

برای اثبات قسمت دوم، با اتحاد

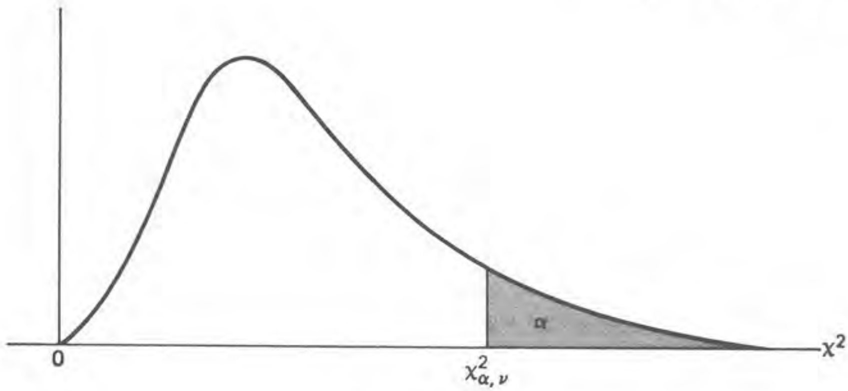
$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲ = \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \overline{X})^۲ + n(\overline{X} - \mu)^۲$$

شروع می‌کنیم که تحقیق آن در تمرین ۳۶.۸ از خواننده خواسته شده است. حال اگر هر جمله را بر $\sigma^۲$ تقسیم کنیم و به‌جای $\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \overline{X})^۲$ قرار دهیم $(n - ۱)S^۲$، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^۲ = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^۲$$

تا آنجاکه به سه جملهٔ این اتحاد مربوط می‌شود، از قضیهٔ ۸.۸ می‌دانیم که جملهٔ واقع در سمت چپ معادله، متغیری تصادفی است که توزیع خی‌دو با n درجهٔ آزادی دارد. همچنین، بنابر قضایای ۴.۸ و ۷.۸ جملهٔ دوم سمت راست معادله متغیری تصادفی است که توزیع خی‌دو با ۱ درجهٔ آزادی دارد. حال چون $\overline{X}$ و $S^۲$ مستقل فرض شده‌اند، نتیجه می‌شود که دو جملهٔ سمت راست معادله مستقل‌اند، و از قضیهٔ ۱۰.۸ نتیجه می‌گیریم که $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ متغیری تصادفی دارای توزیع خی‌دو با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است. ■

چون توزیع خی‌دو در موارد کاربردی مهم بسیاری مطرح می‌شود، جداول مبسوطی برای انتگرال تابع چگالی آن تهیه شده است. جدول V در پایان کتاب حاضر مشتمل بر مقادیر $\chi^۲_{\alpha,\nu}$ به‌ازای



شکل ۱.۸ توزیع خی‌دو

$\alpha = ۰٫۹۹۵, ۰٫۹۹, ۰٫۹۷۵, ۰٫۹۵, ۰٫۰۵, ۰٫۰۲۵, ۰٫۰۱, ۰٫۰۰۵$ و $\nu = ۱, ۲, \cdots, ۳۰$ است، که در آن $\chi^۲_{\alpha,\nu}$ به‌گونه‌ای است که مساحت واقع در طرف راست و در زیر منحنی خی‌دو با ν درجهٔ آزادی (شکل ۱.۸ را ببینید) برابر α است. یعنی، $\chi^۲_{\alpha,\nu}$ چنان است که اگر X متغیری تصادفی دارای توزیع خی‌دو با ν درجه آزادی باشد، آنگاه

$$P(X \geq \chi^۲_{\alpha,\nu}) = \alpha$$

وقتی ν بزرگتر از ۳۰ باشد، از جدول V نمی‌توان استفاده کرد و معمولاً احتمالهای مربوط به توزیع خی‌دو به‌صورتی که در تمرینهای ۳۹.۸ و ۴۲.۸ عمل شده، با استفاده از توزیعهای نرمال تقریب زده می‌شوند.

مثال ۲.۸

فرض کنید که ضخامت قطعه‌ای که در یک نیمه‌هادی به‌کار می‌رود، بعد بحرانی آن باشد، و همچنین فرض کنید که فرایند ساختن این قطعه‌ها در صورتی که تغییرات واقعی بین ضخامتهای قطعه‌ها انحراف معیاری نابیشتر از $\sigma = ۰٫۶۰$ هزارم اینچ داشته باشد، تحت کنترل تلقی شود. برای اینکه فرایند تحت نظارت باشد، نمونه‌هایی تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۲۰$ به‌صورت دوره‌ای انتخاب می‌شوند و فرایند «خارج از کنترل» قلمداد می‌شود اگر احتمال آنکه $S^۲$ مقداری مساوی با مقدار مشاهده شدهٔ نمونه یا بزرگتر از آن اختیار کند، ۰٫۰۱ یا کمتر باشد (با وجود اینکه $\sigma = ۰٫۶۰$). در صورتی که انحراف معیار یک نمونهٔ تصادفی دوره‌ای $s = ۰٫۸۴$ هزارم اینچ باشد، در مورد فرایند تولید چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

حل. فرایند تولید «خارج ازکنترل» اعلام می‌شود در صورتی که $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ با $n = ۲۰$ و $\sigma = ۰٫۶۰$

بیشتر از $\chi^2_{0{,}01,19} = 36{,}191$ باشد. چون

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{19(0{,}84)^2}{(0{,}60)^2} = 37{,}24$$

بزرگتر از ۳۶٫۱۹۱ است، فرایند خارج از کنترل اعلام می‌شود. البته، در این تحلیل فرض می‌شود که نمونه را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ نرمال تلقی کرد. ▲

۵.۸ توزیع t

در قضیهٔ ۴.۸ نشان دادیم که برای نمونه‌های تصادفی استخراج شده از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2، متغیر تصادفی $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است؛ به‌عبارت دیگر

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است. این نتیجه بسیار مهم است، اما مشکل اصلی در کاربرد آن، نامعلوم بودن σ، انحراف معیار جامعه، در اغلب کاربردهای واقعی است. این امر مستلزم آن است که به‌جای σ، برآوردی را، که معمولاً مقدار انحراف معیار نمونه‌ای S است، قرار دهیم. نظریه‌ای که بدین ترتیب حاصل می‌شود، به توزیع دقیق $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ برای نمونه‌های تصادفیی که از یک جامعهٔ نرمال استخراج شده‌اند، منجر می‌شود.

برای به‌دست آوردن این توزیع نمونه‌گیری، ابتدا کلیترین مسأله‌ای را که در قضیهٔ زیر بیان می‌شود، مطالعه می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۲.۸ اگر Y و Z متغیرهای تصادفی مستقلی باشند، Y دارای توزیع خی‌دو با ν درجهٔ آزادی، و Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه توزیع

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

با

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

داده می‌شود و آن را **توزیع t** با ν درجهٔ آزادی می‌نامند.

برهان. چون Y و Z مستقل‌اند، چگالی توأم آنها به‌ازای $y > ۰$ و $-\infty < z < \infty$

$$f(y, z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}z^۲} \cdot \frac{۱}{\Gamma\left(\frac{\nu}{۲}\right) ۲^{\frac{\nu}{۲}}} y^{\frac{\nu}{۲}-۱} e^{-\frac{y}{۲}}$$

است و در سایر جاها $f(y, z) = ۰$. در این صورت برای استفاده از روش تبدیل متغیر بخش ۳.۷، معادلهٔ $t = \frac{z}{\sqrt{y/\nu}}$ را برحسب z حل می‌کنیم و $z = t\sqrt{y/\nu}$ به‌دست می‌آید. بنابراین $\frac{\partial z}{\partial t} = \sqrt{y/\nu}$. در نتیجه، بنابر قضیهٔ ۱.۷، چگالی توأم Y و T

$$g(y, t) = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{۲}\right)۲^{\frac{\nu}{۲}}} y^{\frac{\nu-۱}{۲}} e^{-\frac{y}{۲}\left(۱+\frac{t^۲}{\nu}\right)} & -\infty < t < \infty, \quad y > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، و با انتگرالگیری روی y به کمک تبدیل متغیر $w = \frac{y}{۲}\left(۱ + \frac{t^۲}{\nu}\right)$، سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+۱}{۲}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{۲}\right)} \cdot \left(۱ + \frac{t^۲}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+۱}{۲}}, \quad -\infty < t < \infty$$

■

توزیع t ابتدا به‌وسیله گوست[1] معرفی شد که آثار علمی خود را با نام مستعار «استودنت» چاپ می‌کرد، زیرا شرکتی که او را استخدام کرده بود، به کارکنان خود اجازهٔ چاپ آثارشان را نمی‌داد. بنابراین توزیع t به **توزیع tی استودنت** نیز معروف است.

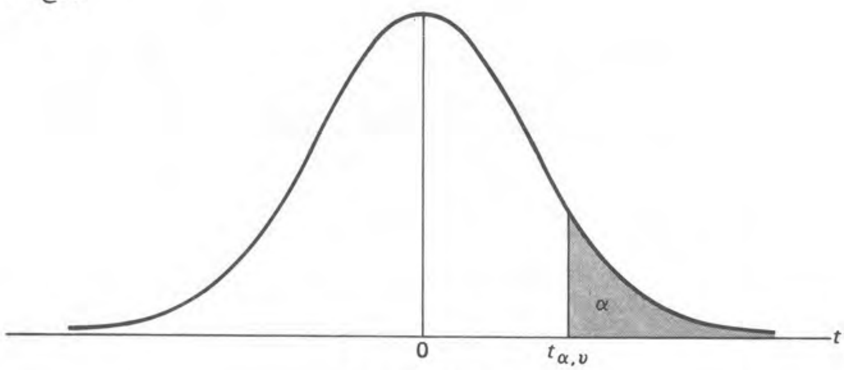
برای توزیع t، به‌خاطر اهمیتی که دارد، جداول جامعی تهیه شده است. مثلاً جدول IV، شامل مقادیر $t_{\alpha,\nu}$ به‌ازای $\alpha =$ ۰٫۱۰، ۰٫۰۵، ۰٫۰۲۵، ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۵ و $\nu = ۱, ۲, \cdots, ۲۹$ است، که در آن $t_{\alpha,\nu}$ چنان است که مساحت واقع در سمت راست آن در زیر منحنی توزیع t با ν درجهٔ آزادی (شکل ۲.۸ را ببینید) برابر α است. یعنی $t_{\alpha,\nu}$ به‌گونه‌ای است که اگر T متغیری تصادفی، دارای توزیع t با ν درجهٔ آزادی باشد، آنگاه

$$P(T \geq t_{\alpha,\nu}) = \alpha$$

این جدول شامل مقادیر $t_{\alpha,\nu}$ به‌ازای $\alpha >$ ۰٫۵۰ نیست، زیرا چگالی حول $t = ۰$ متقارن است، و بنابراین، $t_{۱-\alpha,\nu} = -t_{\alpha,\nu}$. وقتی ν برابر ۳۰ یا بیشتر باشد، احتمالهای مربوط به توزیع t معمولاً با استفاده از توزیعهای نرمال تقریب زده می‌شوند (تمرین ۴۹.۸ را ببینید).

از جملهٔ کاربردهای متعدد توزیع t، که برخی از آنها در فصلهای ۱۱ تا ۱۳ بررسی خواهند شد، کاربرد اصلی آن (که دلیل به‌وجود آمدن آن است) مبتنی بر قضیهٔ زیر است:

1. W.S. Gosset



شکل۲.۸ توزیع t

قضیهٔ۱۳.۸ اگر $\overline{X}$ و $S^۲$ میانگین و واریانس نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ باشند، آنگاه

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

دارای توزیع t با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است.

برهان. بنابر قضیه‌های ۱۱.۸ و ۴.۸، متغیرهای تصادفی

$$Y = \frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \quad , \quad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

به‌ترتیب دارای توزیع خی‌دو با $n - ۱$ درجهٔ آزادی و توزیع نرمال استاندارد‌اند. به‌علاوه چون این توزیعها بنابر قسمت ۱ قضیهٔ ۱۱.۸ مستقل‌اند، با جایگذاری در فرمول T در قضیهٔ ۱۲.۸ نتیجه می‌شود که

$$T = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{S^۲/\sigma^۲}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S\sqrt{n}}$$

و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. ■

مثال ۳.۸

میانگین مصرف بنزین یک موتور، در ۱۶ کارکرد آزمایشی یک ساعته، ۱۶٫۴ گالن و انحراف معیار آن ۲٫۱ گالن بوده است. این ادعا را که میانگین مصرف بنزین این موتور ۱۲٫۰ گالن در ساعت است، آزمون کنید.

حل. با جایگذاری $n = ۱۶$، $\mu = ۱۲{,}۰$، $\overline{x} = ۱۶{,}۴$، و $s = ۲{,}۱$ در فرمول t، در قضیهٔ ۱۳.۸، به‌دست می‌آوریم

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{۱۶{,}۴ - ۱۲{,}۰}{\frac{۲{,}۱}{\sqrt{۱۶}}} = ۸{,}۳۸$$

چون جدول IV نشان می‌دهد که احتمال به‌دست آوردن مقداری بزرگتر از ۲٫۹۴۷ برای t به‌ازای ۱۵ درجهٔ آزادی، ۰٫۰۰۵ است، احتمال به‌دست آوردن مقداری بزرگتر از ۸ باید قابل صرف‌نظر کردن باشد. لذا، این نتیجه‌گیری که میانگین مصرف بنزین این موتور در ساعت از ۱۲٫۰ بیشتر است، معقول به‌نظر می‌رسد. ▲

۶.۸ توزیع F

توزیع دیگری که در رابطه با نمونه‌گیری از جامعه‌های نرمال، نقشی مهم دارد، توزیع F است که به یاد سررانلد فیشر، یکی از برجسته‌ترین آماردانان این سده، نامگذاری شده است. این توزیع بدواً به‌عنوان توزیع نمونه‌گیری نسبت دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع خی‌دو، که هریک بر درجهٔ آزادی مربوط به خود تقسیم شده‌اند، مورد مطالعه قرار گرفت، و ما این توزیع را به همین شیوه ارائه می‌کنیم.

قضیهٔ۱۴.۸ اگر U و V متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیعهای خی‌دو با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجهٔ آزادی دارند، آنگاه

$$F = \frac{U/\nu_۱}{V/\nu_۲}$$

متغیری تصادفی با **توزیع** F است، یعنی متغیری تصادفی که چگالی احتمال آن با

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_۱+\nu_۲}{۲}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_۲}{۲}\right)}\left(\frac{\nu_۱}{\nu_۲}\right)^{\frac{\nu_۱}{۲}} \cdot f^{\frac{\nu_۱}{۲}-۱}\left(۱+\frac{\nu_۱}{\nu_۲}f\right)^{-\frac{۱}{۲}(\nu_۱+\nu_۲)}$$

برای $f > ۰$ و $g(f) = ۰$ در سایر جاها داده می‌شود.

برهان. چگالی توأم U و V به‌ازای $u > ۰$ و $v > ۰$ با

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{۱}{۲^{\nu_۱/۲}\Gamma\left(\frac{\nu_۱}{۲}\right)} \cdot u^{\frac{\nu_۱}{۲}-۱}e^{-\frac{u}{۲}} \cdot \frac{۱}{۲^{\nu_۲/۲}\Gamma\left(\frac{\nu_۲}{۲}\right)} \cdot v^{\frac{\nu_۲}{۲}-۱}e^{-\frac{v}{۲}} \\ &= \frac{۱}{۲^{(\nu_۱+\nu_۲)/۲}\Gamma\left(\frac{\nu_۱}{۲}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_۲}{۲}\right)} \cdot u^{\frac{\nu_۱}{۲}-۱}u^{\frac{\nu_۲}{۲}-۱}e^{-\frac{u+v}{۲}} \end{aligned}$$

و $f(u,\nu)=0$ در سایر جاها داده می‌شود. در این صورت، برای استفاده از روش تبدیل متغیر بخش ۳.۷، معادلهٔ

$$f=\frac{u/\nu_1}{v/\nu_2}$$

را برحسب u حل می‌کنیم و $u=\frac{\nu_1}{\nu_2}\times vf$، و در نتیجه $\frac{\partial u}{\partial f}=\frac{\nu_1}{\nu_2}\cdot v$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، طبق قضیهٔ ۱.۷، چگالی توأم F و V به‌ازای $f>0$ و $v>0$،

$$g(f,v)=\frac{\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2}}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\cdot f^{\frac{\nu_1}{2}-1}v^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}\left(\frac{\nu_1 f}{\nu_2}+1\right)}$$

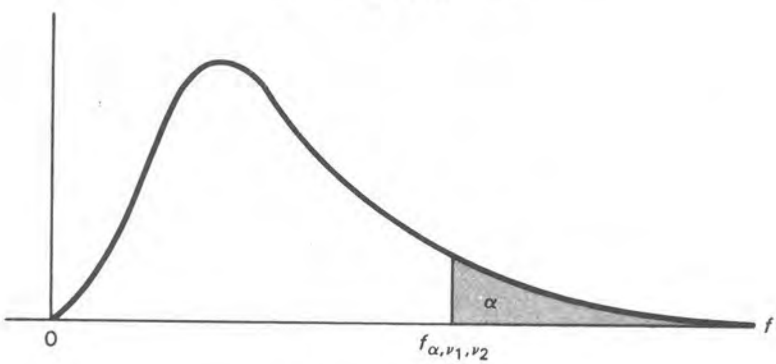
و $g(f,v)=0$ در سایر جاهاست. حال، با انتگرالگیری روی v با جایگذاری $w=\frac{v}{2}\left(\frac{\nu_1 f}{\nu_2}+1\right)$، سرانجام برای $f>0$

$$g(f)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\cdot f^{\frac{\nu_1}{2}-1}\left(1+\frac{\nu_1}{\nu_2}f\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2)}$$

و $g(f)=0$ را در سایر جاها به‌دست می‌آوریم. ■

نظر به اهمیت توزیع F، جداول مبسوطی برای آن تهیه شده است. مثلاً، جدول IV شامل مقادیر f_{α,ν_1,ν_2} به‌ازای $\alpha=0{,}05$ و $\alpha=0{,}01$ و برای مقادیر مختلف ν_1 و ν_2 است، که در آن f_{α,ν_1,ν_2} چنان است که مساحت واقع در طرف راست آن و در زیر منحنی توزیع F با ν_1 و ν_2 درجهٔ آزادی (شکل ۳.۸ را ببینید) برابر α است. یعنی f_{α,ν_1,ν_2} طوری است که

$$P(F\geq f_{\alpha,\nu_1,\nu_2})=\alpha$$



شکل ۳.۸ توزیع F

کاربردهای مهم قضیهٔ ۱۴.۸ در مسائلی پیش می‌آیند که در آنها به مقایسهٔ واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2ی دو جامعهٔ نرمال علاقه‌مند باشیم؛ مثلاً در مسائلی که بخواهیم نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ را برآورد یا فرضاً $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را آزمون کنیم. ما چنین استنباطهایی را برمبنای **نمونه‌های تصادفی مستقل** به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعه و قضیهٔ ۱۱.۸ قرار می‌دهیم که به‌موجب آن

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2} \quad , \quad \chi_2^2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2}$$

متغیرهای تصادفی‌اند که توزیعهای خی‌دو با $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ درجهٔ آزادی دارند. منظور از «نمونه‌های تصادفی مستقل» آن است که $n_1 + n_2$ متغیر تصادفی که دو نمونهٔ تصادفی را تشکیل می‌دهند، مستقل‌اند به‌طوری‌که دو متغیر تصادفی خی‌دو نیز مستقل‌اند و از جایگذاری مقادیر آنها به‌جای U و V در قضیهٔ ۱۴.۸ نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

قضیهٔ ۱۵.۸ اگر S_1^2 و S_2^2 واریانسهای نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازهٔ n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمالی با واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2 باشند، آنگاه

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

متغیری تصادفی است که توزیع F با $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ درجهٔ آزادی دارد.

در فصل ۱۱، این قضیه را در مورد مسألهٔ برآورد نسبت $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$، وقتی این دو واریانس جامعه‌ای نامعلوم باشند، به‌کار خواهیم برد؛ همچنین، در فصل ۱۳ نحوهٔ آزمون کردن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ را شرح خواهیم داد. آزمونهای دیگری مبتنی بر توزیع F در روشهای تحلیل واریانس در فصل ۱۵ عرضه شده‌اند. چون همهٔ این کاربردها مبتنی بر نسبت واریانسهای نمونه‌ای است، توزیع F را **توزیع نسبت واریانس** هم می‌نامند.

تمرینها

۳۴.۸ قضیهٔ ۹.۸ را ثابت کنید.

۳۵.۸ قضیهٔ ۱۰.۸ را ثابت کنید.

۳۶.۸ صحت اتحاد زیر را که در برهان قضیهٔ ۱۱.۸ به‌کار بردیم، ثابت کنید.

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

۳۷.۸ قضیهٔ ۱۱.۸ را به‌کار برده نشان دهید که برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌های

نرمال با واریانس σ^2، توزیع نمونه‌گیری S^2 دارای میانگین σ^2 و واریانس $\frac{2\sigma^4}{(n-1)}$ است. (فرمولی کلی برای واریانس توزیع نمونه‌گیری S^2 در مورد نمونه‌های تصادفی استخراج شده از هر جامعه‌ای را که گشتاورهای دوم و چهارم متناهی دارد، می‌توان در کتاب کرامر[1] که در فهرست مراجع پایان فصل داده شده است، پیدا کرد.)

۳۸.۸ نشان دهید که اگر X_1، X_2، ... ، X_n متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که توزیع خی‌دو با $\nu = 1$ درجهٔ آزادی دارند و $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$، آنگاه توزیع حدی

$$Z = \frac{\frac{Y_n}{n} - 1}{\sqrt{2/n}}$$

وقتی $n \to \infty$، توزیع نرمال استاندارد است.

۳۹.۸ براساس نتیجهٔ تمرین ۳۸.۸، نشان دهید که اگر X متغیر تصادفی خی‌دو با ν درجهٔ آزادی و ν بزرگ باشد، آنگاه توزیع $\frac{X-\nu}{\sqrt{2\nu}}$ را می‌توان با توزیع نرمال استاندارد تقریب زد.

۴۰.۸ از روش تمرین قبل استفاده کرده مقدار تقریبی این احتمال را که متغیری تصادفی، دارای توزیع خی‌دو با $\nu = 50$ درجهٔ آزادی، مقداری بزرگتر از ۶۸٫۰ اختیار کند، پیدا کنید.

۴۱.۸ اگر برد X، مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد، نشان دهید که برای $k > 0$، احتمال اینکه $\sqrt{2X} - \sqrt{2\nu}$ مقداری کمتر از k اختیار کند، برابر با احتمال آن است که $\frac{X-\nu}{\sqrt{2\nu}}$ مقداری کمتر از $k + \frac{k^2}{2\sqrt{2\nu}}$ اختیار کند.

۴۲.۸ از نتایج تمرینهای ۳۹.۸ و ۴۱.۸ استفاده کرده نشان دهید که اگر X دارای توزیع خی‌دو با ν درجهٔ آزادی باشد، آنگاه برای مقادیر بزرگ ν، توزیع $\sqrt{2X} - \sqrt{2\nu}$ را می‌توان با توزیع نرمال استاندارد تقریب زد. همچنین این روش تقریب را برای حل مجدد تمرین ۴۰.۸ به‌کار برید.

۴۳.۸ خطاهای درصد تقریبهای تمرین ۴۰.۸ و ۴۲.۸ با دانستن این حقیقت که مقدار واقعی احتمال (با پنج رقم اعشار) برابر ۰٫۰۴۵۹۶ است، پیدا کنید.

۴۴.۸ (برهان استقلال $\overline{X}$ و S^2 برای $n = 2$.) اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و با توزیع نرمال استاندارد باشند، نشان دهید که

(الف) چگالی توأم X_1 و $\overline{X}$ به‌ازای $-\infty < x_1 < \infty$ و $-\infty < \overline{x} < \infty$،

$$f(x_1, \overline{x}) = \frac{1}{\pi} \cdot e^{-\overline{x}^2} e^{-(x_1 - \overline{x})^2}$$

است.

(ب) چگالی توأم $U = |X_1 - \overline{X}|$ و $\overline{X}$ به‌ازای $u > 0$ و $-\infty < \overline{x} < \infty$ با

$$g(u, \overline{x}) = \frac{2}{\pi} \cdot e^{-(\overline{x}^2 + u^2)}$$

داده می‌شود، زیرا $f(x_1, \overline{x})$ به‌ازای $\overline{x}$ ثابت، حول $\overline{x}$ متقارن است.

---
1. H. Cramér

(ج) $S^۲ = ۲(X_۱ - \overline{X})^۲ = ۲U^۲$.
(د) چگالی توأم $\overline{X}$ و $S^۲$ به‌ازای $s^۲ > ۰$ و $-\infty < \overline{x} < \infty$ با

$$h(s^۲, \overline{x}) = \frac{۱}{\sqrt{\pi}} e^{-\overline{x}^۲} \cdot \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} (s^۲)^{-\frac{۱}{۲}} e^{-\frac{۱}{۲}s^۲}$$

داده می‌شود، و به این ترتیب $\overline{X}$ و $S^۲$ مستقل‌اند.

۴۵.۸ (برهان استقلال $\overline{X}$ و $S^۲$) اگر متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، $\dots$ ، X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمالی با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ را تشکیل دهند،
(الف) چگالی شرطی $X_۱$ را به‌شرط $X_۲ = x_۲$، $X_۳ = x_۳$، $\dots$ ، $X_n = x_n$ پیدا کنید و سپس با قرار دادن $X_۱ = n\overline{X} - X_۲ - \cdots - X_n$ و استفاده از تکنیک تبدیل متغیر، چگالی شرطی $\overline{X}$ به شرط $X_۲ = x_۲$، $X_۳ = x_۳$، $\dots$ ، $X_n = x_n$ را بیابید.
(ب) چگالی توأم $\overline{X}$، $X_۲$، $X_۳$، $\dots$ ، X_n را با ضرب کردن چگالی شرطی $\overline{X}$ قسمت (الف) در چگالی توأم $X_۲$، $X_۳$، $\dots$ ، X_n پیدا کنید و نشان دهید که به‌ازای $-\infty < x_i < \infty$، $i = ۲, ۳, \cdots, n$،

$$g(x_۲, x_۳, \cdots, x_n | \overline{x}) = \sqrt{n} \left(\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \right)^{n-۱} e^{-\frac{(n-۱)s^۲}{۲\sigma^۲}}$$

(ج) نشان دهید که تابع مولد گشتاورهای شرطی $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ به شرط $\overline{X} = \overline{x}$ برابر است با

$$E\left[e^{\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲} \cdot t} | \overline{x} \right] = (۱ - ۲t)^{-\frac{n-۱}{۲}} \quad , \quad t < \frac{۱}{۲}$$

چون نتیجهٔ اخیر شامل $\overline{x}$ نیست، نتیجه می‌شود که $\overline{X}$ و $S^۲$ مستقل‌اند، این نتیجه همچنین نشان می‌دهد که $\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع خی‌دو با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است.
این برهان به شوستر[1] منسوب است و مرجع آن در بین مراجع پایان فصل ذکر شده است.

۴۶.۸ از تکنیک تبدیل متغیر مبتنی بر قضیهٔ ۲.۷ استفاده کرده برهانی مجدد برای قضیهٔ ۱۲.۸ ارائه دهید. (راهنمایی: فرض کنید $t = \frac{z}{\sqrt{y/\nu}}$ و $u = y$).

۴۷.۸ نشان دهید که برای $\nu > ۲$، واریانس توزیع t با ν درجهٔ آزادی $\frac{\nu}{\nu-۲}$ است. (راهنمایی: جایگذاری $\frac{۱}{u} = ۱ + \frac{t^۲}{\nu}$ را انجام دهید).

۴۸.۸ نشان دهید که برای توزیع t با $\nu > ۴$ درجهٔ آزادی
(الف) $\mu_۴ = \frac{۳\nu^۲}{(\nu-۲)(\nu-۴)}$؛
(ب) $\alpha_۴ = ۳ + \frac{۶}{\nu-۴}$.
(راهنمایی: جایگذاری $\frac{۱}{u} = ۱ + \frac{t^۲}{\nu}$ را انجام دهید).

---
1. J. Shuster

۴۹.۸ از تقریب استرلینگ تمرین ۶.۱ استفاده کرده نشان دهید که وقتی $\nu \to \infty$، توزیع t به توزیع نرمال استاندارد میل می‌کند.

۵۰.۸ برای توزیع t با $\nu = ۱$ درجهٔ آزادی از چه عنوانی استفاده می‌کنیم؟

۵۱.۸ از تکنیک تبدیل متغیر مبتنی بر قضیهٔ ۲.۷ استفاده کرده برهانی مجدد برای قضیهٔ ۱۴.۸ ارائه دهید. (راهنمایی: فرض کنید $f = \frac{u/\nu_۱}{v/\nu_۲}$ و $w = v$.)

۵۲.۸ با استفاده از تعریف F در قضیهٔ ۱۴.۸ و این حقیقت که برای متغیری تصادفی مانند V که دارای توزیع خی‌دو با $\nu_۲$ درجهٔ آزادی است $E\left(\frac{۱}{V}\right) = \frac{۱}{\nu_۲ - ۲}$، نشان دهید که برای $\nu_۲ > ۲$، میانگین توزیع F برابر با $\frac{\nu_۲}{\nu_۲ - ۲}$ است.

۵۳.۸ تحقیق کنید که اگر X دارای توزیع F با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجهٔ آزادی باشد و $\nu_۲ \to \infty$، توزیع $Y = \nu_۱ X$ به توزیع خی‌دو با $\nu_۱$ درجهٔ آزادی میل می‌کند.

۵۴.۸ تحقیق کنید که اگر T دارای توزیع t با ν درجهٔ آزادی باشد، آنگاه $X = T^۲$ دارای توزیع F با $\nu_۱ = ۱$ و $\nu_۲ = \nu$ درجهٔ آزادی است.

۵۵.۸ اگر X دارای توزیع F با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجهٔ آزادی باشد، نشان دهید که $Y = \frac{۱}{X}$ دارای توزیع F با $\nu_۲$ و $\nu_۱$ درجه آزادی است.

۵۶.۸ از نتیجهٔ تمرین پیشین استفاده کرده نشان دهید که

$$f_{۱-\alpha,\nu_۱,\nu_۲} = \frac{۱}{f_{\alpha,\nu_۲,\nu_۱}}$$

۵۷.۸ تحقیق کنید که اگر Y دارای توزیع بتا با $\alpha = \frac{\nu_۱}{۲}$ و $\beta = \frac{\nu_۲}{۲}$ باشد، آنگاه

$$X = \frac{\nu_۲ Y}{\nu_۱(۱ - Y)}$$

دارای توزیع F با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجه آزادی است.

۵۸.۸ نشان دهید که توزیع F با ۴ و ۴ درجه آزادی با

$$g(f) = \begin{cases} ۶f(۱+f)^{-۴} & f > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

داده می‌شود و از این چگالی استفاده کرده این احتمال را پیدا کنید که برای نمونهٔ تصادفی مستقلی به‌اندازهٔ $n = ۵$ از جامعه‌های نرمال با واریانس یکسان، $S_۱^۲/S_۲^۲$ مقداری کمتر از $\frac{۱}{۲}$ یا بیشتر از ۲ اختیار کند.

کاربردها

(در تمرینهای ۶۰.۸ الی ۶۵.۸، به جدولهای IV، V، و VI مراجعه کنید.)

۵۹.۸ با انتگرالگیری از چگالی خی‌دوی مناسب، احتمال آن را پیدا کنید که واریانس یک نمونهٔ

تصادفی به‌اندازهٔ ۵ از توزیع نرمالی با $\sigma^2 = ۲۵$ بین ۲۰ و ۳۰ قرار گیرد.

۶۰.۸ این ادعا که واریانس یک توزیع نرمال $\sigma^2 = ۲۵$ است، در صورتی که واریانس نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۱۶ بیشتر از ۵۴٫۶۶۸ یا کمتر از ۱۲٫۱۰۲ باشد، رد خواهد شد. احتمال اینکه این ادعا حتی اگر $\sigma^2 = ۲۵$ رد شود، چقدر است؟

۶۱.۸ این ادعا که واریانس یک توزیع نرمال $\sigma^2 = ۴$ است، در صورتی که واریانس نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۹ بیشتر از ۷٫۷۵۳۵ باشد، رد خواهد شد. احتمال اینکه این ادعا حتی برای $\sigma^2 = ۴$ رد شود، چقدر است؟

۶۲.۸ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲۵ از توزیعی نرمال دارای میانگین $\overline{x} = ۴۷$ و انحراف معیار $s = ۷$ است. اگر مبنای تصمیم خود را بر آمارهٔ قضیهٔ ۱۳.۸ قرار دهیم، آیا می‌توانیم بگوییم که اطلاعات داده شده این حدس را که میانگین جامعه $\mu = ۴۲$ است، تأیید می‌کند؟

۶۳.۸ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۱۲ از توزیعی نرمال دارای میانگین $\overline{x} = ۲۷٫۸$ و واریانس $s^2 = ۳٫۲۴$ است. اگر مبنای تصمیم خود را بر آمارهٔ قضیهٔ ۱۳.۸ قرار دهیم، آیا می‌توانیم بگوییم که اطلاعات داده شده این ادعا را که میانگین جامعه $\mu = ۲۸٫۵$ است، تأیید می‌کند؟

۶۴.۸ اگر S_1 و S_2 انحرافهای معیار نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازهٔ $n_1 = ۶۱$ و $n_2 = ۳۱$ از جامعه‌های نرمالی با $\sigma_1^2 = ۱۲$ و $\sigma_2^2 = ۱۸$ باشند، مقدار $P(S_1^2/S_2^2 > ۱٫۱۶)$ را پیدا کنید.

۶۵.۸ اگر S_1^2 و S_2^2 واریانسهای نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازهٔ $n_1 = ۱۰$ و $n_2 = ۱۵$ از جامعه‌های نرمال با واریانسهای برابر باشند، مقدار $P(S_1^2/S_2^2 < ۴٫۰۳)$ را پیدا کنید.

۷.۸ آماره‌های ترتیبی

نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌های نامتناهی با چگالی پیوسته را در نظر بگیرید. فرض کنید که مقادیر متغیرهای تصادفی X_1، X_2، . . . ، X_n را بسته به بزرگی آنها مرتب کنیم و کوچکترین مقدار xها را به‌عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_1، بزرگترین مقدار بعد از آن را به‌عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_2، بزرگترین مقدار بعد از آن را به‌عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_3، . . . ، و بزرگترین آنها را به‌عنوان مقدار یک متغیر تصادفی Y_n تلقی کنیم. به متغیرهای تصادفی Y_i **آماره‌های ترتیبی** اطلاق می‌شود. به‌ویژه Y_1 اولین آمارهٔ ترتیبی، Y_2 دومین آمارهٔ ترتیبی، Y_3 سومین آمارهٔ ترتیبی‌اند و به‌همین ترتیب الی‌آخر. (ما این بحث را به جامعه‌های نامتناهی با چگالیهای پیوسته محدود می‌کنیم تا احتمال برابر شدن هر دوتا از xها برابر صفر باشد.)

برای تصریح بیشتر، حالتی را در نظر گیرید که در آن $n = ۲$ و رابطهٔ بین مقادیر X_1 و X_2 و Y_1 و Y_2 چنین است:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad x_1 < x_2 \ \text{وقتی}$$

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1, \quad x_2 < x_1 \ \text{وقتی}$$

به‌همین نحو، به‌ازای $n = ۳$ رابطهٔ بین مقادیر متغیرهای تصادفی مربوط چنین است:

$$x_۱ < x_۲ < x_۳ \quad \text{وقتی} \quad y_۳ = x_۳ \text{،} \quad y_۲ = x_۲ \text{،} \quad y_۱ = x_۱,$$
$$x_۱ < x_۳ < x_۲ \quad \text{وقتی} \quad y_۳ = x_۲ \text{،} \quad y_۲ = x_۳ \text{،} \quad y_۱ = x_۱,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_۳ < x_۲ < x_۱ \quad \text{وقتی} \quad y_۱ = x_۳ \text{،} \quad y_۲ = x_۲ \text{،} \quad y_۳ = x_۳,$$

حال فرمول چگالی احتمال rامین آمارهٔ ترتیبی را برای $r = ۱, ۲, \cdots, n$، استخراج می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۶.۸ برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌های نامتناهی که دارای مقدار $f(x)$ در x است، چگالی احتمال rامین آمارهٔ ترتیبی Y_r به‌ازای $-\infty < y_r < \infty$ چنین است:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-۱)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-۱} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-r}$$

برهان. فرض کنید که محور حقیقی به سه بازه تقسیم شده است، یکی از $-\infty$ تا y_r، دومی از y_r تا $y_r + h$ (که در آن h ثابت مثبتی است)، و سومی از $y_r + h$ تا ∞. در این صورت چون جامعه‌ای که از آن نمونه می‌گیریم، دارای مقدار $f(x)$ در x است، احتمال اینکه، $r - ۱$ تا از نمونه‌ها در اولین بازه قرار گیرند، یکی در بازهٔ دوم قرار گیرد، و $n - r$تا در بازهٔ سوم قرار گیرند، طبق فرمول توزیع چندجمله‌ای عبارت است از

$$\frac{n!}{(r-۱)!۱!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-۱}\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right]\left[\int_{y_r+h}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-r}$$

با استفاده از قضیهٔ میانگین در حسابان داریم

$$\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx = f(\xi)\cdot h \quad , \quad y_r \le \xi \le y_r + h$$

و اگر فرض کنیم $h \to ۰$، سرانجام

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-۱)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-۱} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-r}$$

را به‌ازای $-\infty < y_r < \infty$ برای تابع چگالی rامین آمارهٔ ترتیبی y_r به‌دست می‌آوریم. ■

به‌ویژه، توزیع Y_1، کوچکترین مقدار در نمونه‌ای به‌اندازهٔ n، عبارت است از

$$g_1(y_1) = n \cdot f(y_1) \left[\int_{y_1}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1} \quad , \quad -\infty < y_1 < \infty$$

در حالی‌که توزیع Y_n، بزرگترین مقدار در یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n، عبارت است از

$$g_n(y_n) = n \cdot f(y_n) \left[\int_{-\infty}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-1} \quad , \quad -\infty < y_n < \infty$$

همچنین، در نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = 2m + 1$، **میانهٔ نمونه‌ای** $\widetilde{X}$، Y_{m+1} است، به‌طوری که توزیع نمونه‌گیری آن عبارت است از

$$h(\widetilde{x}) = \frac{(2m+1)!}{m!m!} \left[\int_{-\infty}^{\widetilde{x}} f(x)dx\right]^{m} f(\widetilde{x}) \left[\int_{\widetilde{x}}^{\infty} f(x)dx\right]^{m} \quad , \quad -\infty < \widetilde{x} < \infty$$

[برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $n = 2m$، میانه به‌صورت $\frac{1}{2}(Y_m + Y_{m+1})$ تعریف می‌شود.]

در بعضی موارد می‌توان انتگرالهای مورد لزوم را برای به‌دست آوردن چگالیهای آماره‌های ترتیبی گوناگون، محاسبه کرد؛ برای جامعه‌های دیگر ممکن است چاره‌ای جز تقریب زدن این انتگرالها با استفاده از روشهای عددی نباشد.

مثال ۴.۸

برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی با پارامتر θ، نشان دهید که توزیعهای Y_1 و Y_n صورت زیرند.

$$g_1(y_1) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} \cdot e^{-ny_1/\theta} & y_1 > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و

$$g_n(y_n) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} \cdot e^{-y_n/\theta}[1 - e^{-y_n/\theta}]^{n-1} & y_n > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و نشان دهید که، برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $n = 2m + 1$ از این نوع جامعه، توزیع نمونه‌گیری میانه به‌صورت زیر است

$$h(\widetilde{x}) = \begin{cases} \frac{(2m+1)!}{m!m!\theta} \cdot e^{-\widetilde{x}(m+1)/\theta}[1 - e^{-\widetilde{x}/\theta}]^{m} & \widetilde{x} > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

حل. انتگرالهای مورد نیاز برای به‌دست آوردن این نتایج سرراست‌اند، و در تمرین ۶۶.۸ به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ▲

نتیجهٔ زیر، نتیجهٔ جالبی دربارهٔ توزیعهای نمونه‌گیری میانه است که وقتی چگالی جامعه پیوسته و مقدار آن در $\tilde{\mu}$، **میانهٔ جامعه** که برای آن $\int_{-\infty}^{\tilde{\mu}} f(x)dx = \frac{1}{2}$، صفر نیست، برقرار است.

> **قضیهٔ ۱۷.۸** به‌ازای nهای بزرگ، توزیع نمونه‌گیری میانهٔ نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $2n+1$ تقریباً نرمال با میانگین $\tilde{\mu}$ و واریانس $\frac{1}{8[f(\tilde{\mu})]^2 n}$ است.

مرجعی برای برهان این قضیه در صفحهٔ ۳۱۸ داده شده است. توجه کنید که برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $2n+1$ از جامعه‌های نرمال، داریم $\mu = \tilde{\mu}$ به‌طوری که

$$f(\tilde{\mu}) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

و واریانس میانه تقریباً $\frac{\pi\sigma^2}{4n}$ است. اگر این را با واریانس میانه، که برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $2n+1$ از یک جامعهٔ نامتناهی $\frac{\sigma^2}{(2n+1)}$ است، مقایسه کنیم درمی‌یابیم که برای نمونه‌های بزرگ از یک جامعهٔ نرمال، میانگین **قابل اعتمادتر** از میانه است؛ یعنی میانگین در معرض نوسانهای شانسی کمتری در مقایسه با میانه است.

تمرینها

۶۶.۸ درستی نتایجی را که در مثال ۴.۸ برای توزیعهای نمونه‌ای Y_1، Y_n، و $\tilde{X}$ داده شده‌اند، برای نمونه‌های تصادفی از یک جامعهٔ نمایی تحقیق کنید.

۶۷.۸ توزیعهای نمونه‌ای Y_1 و Y_n را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ پیدا کنید.

۶۸.۸ توزیع نمونه‌گیری میانه را برای نمونه‌هایی تصادفی به‌اندازهٔ $2m+1$ از جامعهٔ تمرین ۶۷.۸ پیدا کنید.

۶۹.۸ میانگین و واریانس توزیع نمونه‌گیری Y_1 را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت تمرین ۶۷.۸ پیدا کنید.

۷۰.۸ توزیعهای نمونه‌گیری Y_1 و Y_n را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای که دارای توزیع بتا با $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ است، پیدا کنید.

۷۱.۸ توزیع نمونه‌گیری میانه را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $2m+1$ از جامعهٔ تمرین ۷۰.۸ پیدا کنید.

۷۲.۸ توزیع نمونه‌گیری Y_1 را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $n = 2$ که

(الف) بدون جایگذاری از جامعه‌ای متناهی که متشکل از اولین پنج عدد صحیح مثبت است؛
(ب) با جایگذاری از همان جامعه؛
استخراج شده‌اند، پیدا کنید. (راهنمایی: همهٔ حالتهای ممکن را بشمارید.)
۷۳.۸ روشی را که در برهان قضیهٔ ۱۶.۸ به‌کار رفته است، تکرار کرده‌ نشان دهید که چگالی توأم Y_1 و Y_n به‌صورت زیر است:

$$g(y_1, y_n)=n(n-1)f(y_1)f(y_n)\left[\int_{y_1}^{y_n} f(x)dx\right]^{n-2} \quad , \quad -\infty < y_1 < y_n < \infty$$

و $g(y_1, y_n) = 0$ در سایر جاها.
(الف) این نتیجه را برای پیدا کردن چگالی توأم Y_1 و Y_n برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از یک جامعهٔ نمایی به‌کار برید.
(ب) این نتیجه را برای پیدا کردن چگالی توأم Y_1 و Y_n برای نمونه‌های تصادفی از جامعهٔ تمرین ۶۷.۸ به‌کار برید.
۷۴.۸ با رجوع به قسمت (ب) تمرین ۷۳.۸، کوواریانس Y_1 و Y_n را پیدا کنید.
۷۵.۸ از فرمول چگالی توأم Y_1 و Y_n، که در تمرین ۷۳.۸ داده شده، و با استفاده از روش تبدیل متغیر بخش ۴.۷، عبارتی برای چگالی توأم Y_1 و **برد نمونه‌ای** که با $R=Y_n-Y_1$ داده می‌شود، پیدا کنید.
۷۶.۸ نتیجهٔ تمرین قبل و قسمت (الف) تمرین ۷۳.۸ را به‌کار برده توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی به‌دست آورید.
۷۷.۸ نتیجهٔ تمرین ۷۵.۸ را به‌کار برده توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت پیوستهٔ تمرین ۶۷.۸ را بیابید.
۷۸.۸ نتیجهٔ تمرین ۷۷.۸ را به‌کار برده میانگین و واریانس توزیع نمونه‌گیری R را برای نمونه‌ای به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت تمرین ۶۷.۸ پیدا کنید.
۷۹.۸ مسائل زیادی، به‌خصوص در کاربردهای صنعتی، موجودند که در آنها نسبتی از جامعه که در حدود معینی قرار دارد، مورد توجه است. این حدود را **حدود تحمل** می‌نامند. مراحل زیر به توزیع نمونه‌گیری آمارهٔ P منتهی می‌شود که نسبتی از جامعه (با چگالی پیوسته) است که بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n قرار دارد.
(الف) فرمول چگالی توأم برای Y_1 و Y_n تمرین ۷۳.۸ و روش تبدیل متغیر بخش ۴.۷ را به‌کار برده نشان دهید که چگالی توأم Y_1 و P، که مقادیر آن با $p = \int_{y_1}^{y_n} f(x)dx$ داده می‌شوند عبارت است از $h(y_1, p) = n(n-1)f(y_1)p^{n-2}$.
(ب) نتیجهٔ قسمت (الف) و روش تبدیل متغیر بخش ۴.۷ را به‌کار برده نشان دهید که چگالی توأم P و W که مقادیر آن با

$$w = \int_{-\infty}^{y_1} f(x)dx$$

داده می‌شوند، عبارت است از

$$\varphi(w,p)=\begin{cases} n(n-۱)p^{n-۲}\ , & w+p<۱, p>۰, w>۰ \\ ۰ & ,\quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(ج) نتیجهٔ قسمت (ب) را به‌کار برده نشان دهید که چگالی حاشیه‌ای به‌صورت زیر است

$$g(p)=\begin{cases} n(n-۱)p^{n-۲}(۱-p)\ , & ۰<p<۱ \\ ۰ & ,\quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

این چگالی مطلوب نسبت جامعهٔ است که بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n قرار دارد و جالب توجه است که به شکل توزیع جامعه بستگی ندارد.

۸۰.۸ نتیجهٔ تمرین ۷۹.۸ را به‌کار برده نشان دهید که برای متغیر تصادفی P که در آن تمرین تعریف کردیم،

$$E(P)=\frac{n-۱}{n+۱}\quad ,\quad \operatorname{var}(P)=\frac{۲(n-۱)}{(n+۱)^۲(n+۲)}$$

وقتی که n خیلی بزرگ می‌شود از این فرمولها، چه نتیجه‌ای می‌توان دربارهٔ توزیع گرفت؟

کاربردها

۸۱.۸ این احتمال را پیدا کنید که در نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n=۴$ از جامعهٔ یکنواخت پیوستهٔ تمرین ۶۷.۸، کوچکترین مقدار *حداقل ۲۰ر۰ باشد.*

۸۲.۸ مطلوب است احتمال آنکه در یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ $n=۳$ از توزیع بتای تمرین ۷۰.۸ بزرگترین مقدار کمتر از ۹۰ر۰ باشد.

۸۳.۸ نتیجهٔ تمرین ۷۷.۸ را به‌کار برده احتمال آن را پیدا کنید که برد یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ $n=۵$ از جامعهٔ یکنواخت مفروضی حداقل ۷۵ر۰ باشد.

۸۴.۸ نتیجهٔ قسمت (ج) تمرین ۷۹.۸ را به‌کار برده احتمال آن را پیدا کنید که در یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۱۰، حداقل ۸۰ درصد جامعه بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر قرار بگیرد.

۸۵.۸ نتیجهٔ قسمت (ج) تمرین ۷۹.۸ را به‌کار برده معادله‌ای برحسب n تشکیل دهید که جواب آن اندازهٔ نمونهٔ مورد نیازی را می‌دهد که برای آن می‌توان گفت نسبتی از جامعه که بین کوچکترین و بزرگترین مقادیر نمونه قرار دارد با احتمال $۱-\alpha$، حداقل p است. نشان دهید که برای $p=۰٫۹۰$ و $\alpha=۰٫۰۵$، این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$(۰٫۹۰)^{n-۱}=\frac{۱}{۲n+۱۸}$$

حل این نوع معادلات دشوار است، ولی می‌توان نشان داد که یک جواب تقریبی برای n با

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+p}{1-p}\cdot\chi^2_{\alpha,4}$$

داده می‌شود که در آن $\chi^2_{\alpha,4}$ را باید در جدول V پیدا کرد. این روش را برای یافتن یک جواب تقریبی معادلهٔ مفروض برای $p = 0{,}90$ و $\alpha = 0{,}05$ به‌کار برید.

مراجع

شرایط لازم و کافی برای قویترین صورت قضیهٔ حد مرکزی برای متغیرهای مستقل، یعنی شرایط موسوم به لیندبرگ-فلر، در کتاب زیر و نیز در سایر کتابهای پیشرفتهٔ نظریهٔ احتمال داده شده‌اند.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968,

جداول جامع توزیعهای نرمال، خی‌دو، F، و t را می‌توان در کتاب زیر یافت.

PEARSON, E. S., and HARTLEY, H. O., *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968.

فرمولی کلی برای واریانس توزیع نمونه‌گیری دومین گشتاور نمونه‌ای M_2 (که با S^2، تنها در تقسیم بر n به‌جای $n-1$ تفاوت دارد) در کتاب زیر به‌دست آمده است.

CRAMÉR, H., *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1950,

و برهانی برای قضیهٔ۸.۱۷ در کتاب زیر داده شده است.

WILKS, S. S., *Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

برهانهای استقلال $\overline{X}$ و S^2 برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال در بسیاری ازکتابهای پیشرفته در آمار ریاضی داده شده‌اند. به‌عنوان مثال، برهانی مبتنی بر تابعهای مولد گشتاورها را می‌توان درکتاب فوق‌الذکر تألیف ویلکس یافت و برهان نسبتاً مقدماتیتری را، که در حالت $n = 3$ تشریح شده است، می‌توان درکتاب زیر یافت.

KEEPING, E. S., *Introduction to Statistical Inference*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., Inc., 1962.

برهانی را که خلاصهٔ آن در تمرین۸.۴۵ داده شد می‌توان درکتاب زیر یافت.

SHUSTER, J., "A Simple Method of Teaching the Independence of $\overline{X}$ and S^2." *The American Statistician*, Vol. 27, No. 1, 1973.

۹

نظریهٔ تصمیم

۱.۹ مقدمه

در فصل ۴ مفهوم امید ریاضی را برای مطالعهٔ مقادیر مورد انتظار متغیرهای تصادفی، به‌ویژه گشتاورهای آنها، معرفی کردیم. در وضعیتهای کاربردی، امیدهای ریاضی اغلب به‌عنوان راهنما در انتخاب از بین چند شق، یعنی، در اتخاذ تصمیمها به‌کار می‌روند؛ زیرا از نظر عموم معقول آن است که شقهایی را انتخاب نمایند که «خوش فرجامترین» امید ریاضی را داشته باشند؛ یعنی امیدهایی که سود مورد انتظار را ماکسیمم، زیانهای مورد انتظار را مینیمم، فروشهای مورد انتظار را ماکسیمم، بهاهای مورد انتظار را مینیمم کنند و الخ.

توجه: مطالب این فصل رهیافت یکپارچه‌ای برای استنباط در اختیار می‌گذارد. با این حال، این فصل پیشنیاز رهیافت کلاسیک، که قسمت عمدهٔ باقی این کتاب را به آن اختصاص می‌دهیم، نیست و بنابراین می‌توان آن را، بدون آنکه خللی بر پیوستگی مطالب وارد شود، حذف کرد.

گرچه این رهیافت در تصمیم‌گیری، جاذبه‌ای شهودی دارد، اما خالی از پیچیدگیها نیست، زیرا مسائل متعددی موجودند که در آنها تخصیص مقادیر عددی به پیامدهای اعمال شخصی و به احتمالهای کلیهٔ امکانات، اگر غیرممکن هم نباشد، بسیار مشکل است.

مثال ۱.۹

یک سازندهٔ کالاهای چرمی می‌خواهد تصمیم بگیرد که آیا ظرفیت کارخانه‌اش را همین حالا افزایش دهد یا حداقل یک سال دیگر منتظر بماند. مشاورینش به او می‌گویند که اگر کارخانه را حالا توسعه دهد و شرایط اقتصادی در وضع خوبی بمانند، در طول سال مالی آینده سود او ۱۶۴۰۰۰ دلار خواهد بود؛ اگر وی حالا کارخانه را توسعه دهد و رکود اقتصادی پیش آید، وی ۴۰۰۰۰ دلار ضرر خواهد کرد؛ اگر او حداقل یک سال صبر کند و شرایط اقتصادی خوب بمانند، سود او ۸۰۰۰۰ خواهد بود؛ و اگر حداقل یک سال صبر کند و رکود اقتصادی در پیش باشد، سود کمی معادل ۸۰۰۰ دلار نصیب او خواهد شد. این کارخانه‌دار چه تصمیمی باید بگیرد، در صورتی که بخواهد امید ضرر در طول سال مالی آینده را مینیمم کند و حس کند که با بخت ۲ به ۱ رکود اقتصادی در پیش خواهد بود.

حل. همهٔ این «پرداختها» را می‌توان به‌طور نموداری در جدول زیر نشان داد که درایه‌های آن زیانهایی هستند که متناظر با امکانات مختلف‌اند، و بنابراین سودها با اعداد منفی نشان داده شده‌اند.

	کارخانه را توسعه دهید	توسعه را عقب بیندازید
شرایط اقتصادی خوب می‌مانند	−۱۶۴۰۰۰	−۸۰۰۰۰
رکود اقتصادی پیش می‌آید	۴۰۰۰۰	−۸۰۰۰

در اینجا به‌جای سودها با زیانها کار می‌کنیم تا این مثال را متناسب با طرحی کلی که در بخشهای ۲.۹ و ۳.۹ معرفی می‌کنیم، درآوریم.

چون احتمال خوب ماندن شرایط اقتصادی و احتمال پیش‌آمدن رکود اقتصادی، به‌ترتیب $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$اند، امید زیان سازنده برای سال مالی آینده، در صورتی که ظرفیت کارخانه‌اش را حالا افزایش دهد، عبارت است از

$$-۱۶۴۰۰۰ \cdot \frac{۱}{۳} + ۴۰۰۰۰ \cdot \frac{۲}{۳} = -۲۸۰۰۰$$

و اگر حداقل یک سال دیگر منتظر بماند، عبارت است از

$$-۸۰۰۰۰ \cdot \frac{۱}{۳} + (-۸۰۰۰) \cdot \frac{۲}{۳} = -۳۲۰۰۰$$

چون امید سودی به‌اندازهٔ ۳۲۰۰۰ دلار (منفی امید زیان) بر امید سودی به‌اندازهٔ ۲۸۰۰۰ دلار (منفی امید زیان) برتری دارد، نتیجه می‌شود که کارخانه‌دار باید افزایش ظرفیت کارخانه‌اش را به تأخیر اندازد. ▲

در نتیجه‌ای که در این مثال به آن رسیدیم، فرض می‌شود که مقادیر مندرج در جدول و نیز بخت رکود اقتصادی به‌طور مناسب ارزیابی شده‌اند. همان‌طور که از خواننده در تمرینهای ۲.۹ و ۳.۹ خواسته‌ایم، تغییر در این کمیتها می‌تواند به آسانی منجر به نتایج متفاوتی شود.

مثال ۲.۹

با رجوع به مثال ۱.۹، فرض کنید که کارخانه‌دار هیچ اطلاعی دربارهٔ بخت وجود یک رکود اقتصادی نداشته باشد. اگر او شخص بدبینی باشد، چه تصمیمی باید بگیرد؟

حل. چون او از نوع کسانی است که انتظار وقوع بدترین حالت را دارند، ممکن است چنین استدلال کند که اگر هم‌اکنون به افزایش ظرفیت کارخانه‌اش مبادرت کند، ممکن است ۴۰۰۰۰ دلار ضرر کند. اگر توسعهٔ کارخانه را عقب بیندازد. حداقل سود او ۸۰۰۰ دلار خواهد بود، و بنابراین در صورتی که حداقل یک سال دیگر منتظر بماند ضرر ماکسیمم را مینیمم (یا سود مینیمم را ماکسیمم) خواهد کرد. ▲

ملاکی که در این مثال به‌کار رفت، **ملاک مینیماکس** نامیده می‌شود، و یکی از چند ملاک گوناگونی است که می‌توان در چنین وضعیتی به‌کار برد. به ملاکی از این نوع، که مبتنی بر خوشبینی است و نه بدبینی، در تمرین ۷.۹، و به ملاک دیگری که مبتنی بر بیم از «زیان عمده» است در تمرین ۸.۹ اشاره شده است.

۲.۹ نظریهٔ بازیها

از مثالهای بخش پیشین ممکن است چنین برداشت شود که کارخانه‌دار مزبور در حال انجام یک بازی است، بازیی که بین او و طبیعت (که می‌توان آن را مقدرات یا هر چیز دیگری نامید که وقوع رکود اقتصادی را «کنترل» می‌کند) انجام می‌شود. هریک از «بازیکنها» می‌تواند از بین دو حرکت یکی را انتخاب کند: کارخانه‌دار می‌تواند بین عملهای a_1 و a_2 (که ظرفیت کارخانه‌اش را هم‌اکنون توسعه دهد یا آن را حداقل یک سال به تعویق اندازد) یکی را انتخاب کند و طبیعت می‌تواند بین θ_1 و θ_2 (که شرایط اقتصادی خوب می‌مانند یا رکودی پیش می‌آید) یکی را انتخاب کند. بسته به انتخاب هر حرکت، «پرداختهایی» وجود دارند که در جدول زیر نشان داده شده است:

		بازیکن A (کارخانه‌دار) a_1	a_2
بازیکن B	θ_1	$L(a_1, \theta_1)$	$L(a_2, \theta_1)$
(طبیعت)	θ_2	$L(a_1, \theta_2)$	$L(a_2, \theta_2)$

کمیتهای $L(a_1, \theta_1)$، $L(a_2, \theta_1)$، ... ، را مقادیر **تابع زیان** نامند که «بازی» خاصی را مشخص می‌کنند؛ به‌عبارت دیگر، $L(a_i,\ \theta_j)$ زیان بازیکن A است (مقداری که باید به بازیکن B بپردازد)

وقتی که شق a_i را انتخاب می‌کند و بازیکن B شق θ_i را انتخاب می‌کند. گرچه در واقع فرقی هم نمی‌کند، ما در اینجا فرض خواهیم کرد که این مقادیر برحسب دلار باشند. در عمل می‌توان آنها را برحسب هر نوع کالا یا سرویس، برحسب واحد مطلوبیت (دلپسندی یا رضایتبخشی)، و یا حتی برحسب زندگی و مرگ نیز (مانند آنچه در رولت روسی یا در پیشبرد امور جنگ وجود دارد) بیان کرد.

تشبیهی که در اینجا کرده‌ایم، در واقع دور از ذهن نیست؛ مسألهٔ مثال ۱.۹ یک مسألهٔ نوعی از وضعیتی است که در **نظریهٔ بازیها** مورد بحث قرار می‌گیرند که شاخهٔ نسبتاً جدیدی از ریاضیات است که در سالهای اخیر به‌طور قابل ملاحظه مورد توجه قرارگرفته است. این نظریه، برخلاف آنچه ممکن است از نام آن برآید، محدود به بازیهای بزمی نیست بلکه در هر وضعیت رقابت‌آمیز به‌کار می‌رود، و همان‌طور که خواهیم دید به رهیافت یکپارچه‌ای برای حل مسائل استنباط آماری منجر شده است.

برای معرفی برخی از مفاهیم نظریهٔ بازیها، مطلب را با توضیح اینکه منظور از یک **بازی دو نفری مجموع‌ـصفر** چیست، آغاز می‌کنیم. در این اصطلاح، «دو نفری» به‌معنی آن است که دو بازیکن (یا کلیتر، دو گروه بازیکن با منافع متضاد) وجود دارند، و «مجموع‌ـصفر» به‌معنی آن است که هرچه را که یک بازیکن می‌بازد، بازیکن دیگر می‌برد. بنابراین در یک بازی مجموع‌ـصفر، مانند بازیهای قمار حرفه‌ای، «سهمی برای ترتیب‌دهندهٔ بازی» در نظر گرفته نمی‌شود و در طول بازی نه سرمایه‌ای به وجود می‌آید و نه از بین می‌رود. البته، نظریهٔ بازیها، بازیهایی را هم شامل می‌شود که نه مجموع‌ـصفرند و نه منحصر به دو بازیکن، اما همان‌طور که به آسانی می‌توان تصورش را کرد، این بازیها معمولاً بسیار پیچیده‌ترند. تمرین ۱۹.۹ مثالی از یک بازی است که مجموع‌ـصفر نیست.

بازیها را همچنین مطابق با تعداد **استراتژیها** (حرکتها، انتخابها، یا شقها)یی که هر بازیکن در اختیار دارد، رده‌بندی کرده‌اند. به‌عنوان مثال اگر هر بازیکن بتواند یکی از دو شق را اختیار کند (مانند مثال ۱.۹)، گوییم که آن بازی یک بازی ۲ × ۲ است؛ اگر یک بازیکن ۳ حرکت ممکن و دیگری ۴ حرکت ممکن داشته باشد، بازی بسته به مورد ۴ × ۳ یا ۳ × ۴ است. در این بخش تنها **بازیهای متناهی** را بررسی می‌کنیم یعنی بازیهایی که هر بازیکن فقط تعدادی متناهی یا ثابت از حرکتها را دارد، ولی بعداً بازیهایی را نیز در نظر خواهیم گرفت که هر بازیکن تعدادی نامتناهی حرکت داشته باشد.

در نظریهٔ بازیها رسم بر این است که دو بازیکن را، به‌گونه‌ای که ما در جدول بالا عمل کردیم، بازیکن A و بازیکن B بنامند ولی حرکتها (انتخابها، یا شقها)ی بازیکن A را معمولاً به‌جای a_1، a_2، a_3، . . . ، با برچسب I، II، III، . . . ، و حرکتهای بازیکن B را، به‌جای θ_1، θ_2، θ_3، . . . ، معمولاً با برچسب ۱، ۲، ۳، . . . ، مشخص می‌کنند. **پرداختها**، یعنی مقادیر پولی که وقتی بازیکنها استراتژیهای مربوط را اختیار می‌کنند، دست به‌دست می‌شوند، معمولاً در جدولی نظیر جدول صفحهٔ ۳۲۱ نشان داده می‌شوند که در نظریهٔ بازیها به **ماتریس پرداختها** موسوم است. (مانند قبل، پرداختهای مثبت معرف زیانهای بازیکن A و پرداختهای منفی معرف زیانهای بازیکن B است.)

همچنین اضافه می‌کنیم که در نظریهٔ بازیها همواره فرض می‌شود که هر بازیکن باید استراتژی خود را بدون آگاهی از تصمیمات رقیبش، انتخاب کند و به محض اینکه بازیکنی دست به انتخاب بزند، دیگر نمی‌تواند آن را تغییر دهد.

هدفهای نظریهٔ بازیها تعیین **استراتژیهای اپتیمم** (یعنی استراتژیهایی که برای هر یک از دو بازیکن سودآورترین استراتژی باشد) و پرداخت متناظرند که این پرداخت **ارزش بازی** نامیده می‌شود.

مثال ۳.۹

با مفروض بودن بازی ۲ × ۲ی دو نفری مجموع‌ـصفر

		بازیکن A I	بازیکن A II
بازیکن B	۱	۷	-۴
	۲	۸	۱۰

استراتژیهای اپتیمم بازیکنهای A و B و ارزش بازی را پیدا کنید.

حل. به‌طوری که با امتحان دیده می‌شود، برای بازیکن B غیرعاقلانه خواهد بود که استراتژی ۱ را انتخاب کند؛ زیرا استراتژی ۲، صرف‌نظر از انتخابی که بازیکن A می‌کند بیشتر از استراتژی ۱ عایدی خواهد داشت. در چنین وضعیتی گوییم که استراتژی ۱ **مغلوب** استراتژی ۲ است (یا استراتژی ۲ بر استراتژی ۱ **غالب** است)، و مطمئناً هر استراتژی که مغلوب استراتژی دیگری باشد، باید کنار گذاشته شود. اگر این کار را انجام دهیم، متوجه می‌شویم که استراتژی اپتیمم بازیکن B استراتژی ۲، تنها استراتژی باقی‌مانده، و استراتژی اپتیمم بازیکن A استراتژی I است، زیرا زیانی به‌اندازهٔ ۸ دلار، آشکارا بر زیانی به‌اندازهٔ ۱۰ دلار ترجیح دارد. همچنین، ارزش بازی، پرداخت متناظر با استراتژیهای I و ۲، ۸ دلار است. ▲

مثال ۴.۹

با مفروض بودن بازی ۲ × ۳ی دو نفری مجموع‌ـصفر

		بازیکن A I	بازیکن A II	بازیکن A III
بازیکن B	۱	-۴	۱	۷
	۲	۴	۳	۵

استراتژیهای اپتیمم بازیکنهای A و B و ارزش بازی را پیدا کنید.

حل. در این بازی هیچ‌یک از استراتژیهای بازیکن B بر دیگری غالب نیست، ولی سومین استراتژی بازیکن A مغلوب هریک از دوتای دیگر است ــ زیرا روشن است که سودی به‌اندازهٔ ۴ دلار یا زیانی به‌اندازهٔ ۱ دلار بر زیانی به‌اندازهٔ ۷ دلار ترجیح دارد، و زیانی به‌اندازهٔ ۴ دلار یا زیانی به‌اندازهٔ

۳ دلار بر زیانی به‌اندازهٔ ۵ دلار ترجیح دارد. بنابراین، می‌توانیم ستون سوم ماتریس پرداختها را کنار بگذاریم و بازی ۲ × ۲ی

		بازیکن A I	بازیکن A II
بازیکن B	۱	۴−	۱
	۲	۴	۳

را مطالعه کنیم که اکنون استراتژی ۲ی بازیکن B بر استراتژی ۱ غالب است. بنابراین انتخاب اپتیمم بازیکن B استراتژی ۲، انتخاب اپتیمم بازیکن A استراتژی II است (چون زیانی به‌اندازهٔ ۳ دلار بر زیانی به‌اندازهٔ ۴ دلار ترجیح دارد)، و ارزش بازی ۳ دلار است. ▲

فرایند دور افکندن استراتژیهای مغلوب می‌تواند کمک زیادی در حل یک بازی (یعنی یافتن استراتژیهای اپتیمم و ارزش بازی) باشد، اما برای اینکه فرایند به راه‌حلی منجر شود، این یک استثناست و نه یک قاعده. همان‌طور که در بازی ۳ × ۳ی دو نفری مجموع‌ـصفر زیر دیده می‌شود، ممکن است هیچ غالب و مغلوبی در کار نباشد:

		بازیکن A I	بازیکن A II	بازیکن A III
بازیکن B	۱	۱−	۶	۲−
	۲	۲	۴	۶
	۳	۲−	۶−	۱۲

بنابراین، باید درپی راههای دیگری برای رسیدن به استراتژیهای اپتیمم باشیم. از دیدگاه بازیکن A، ممکن است چنین استدلال کنیم: اگر او استراتژی I را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۲ دلار زیان ببیند؛ اگر وی استراتژی II را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۶ دلار زیان ببیند؛ و اگر استراتژی III را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۱۲ دلار زیان ببیند. بنابراین او می‌تواند ماکسیمم زیان را با انتخاب استراتژی I مینیمم کند.

با به‌کار بردن این نوع استدلال در انتخاب یک استراتژی برای بازیکن B، متوجه می‌شویم که اگر وی استراتژی ۱ را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۲ دلار زیان ببیند؛ اگر وی استراتژی ۲ را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۲ دلار به‌دست آورد؛ و اگر استراتژی ۳ را انتخاب کند، بدترین چیزی که ممکن است رخ دهد آن است که ۶ دلار زیان ببیند. بنابراین، وی می‌تواند با انتخاب استراتژی ۲ ماکسیمم زیان را مینیمم کند (یا مینیمم سود را ماکسیمم کند، که فرقی با قبل ندارد).

انتخاب استراتژیهای I و ۲، که بنا به‌اقتضا استراتژیهای **مینیماکس** (یا استراتژیهای مبتنی بر ملاک **مینیماکس**) نامیده می‌شوند، کاملاً معقول است. با انتخاب استراتژی I، بازیکن A اطمینان

حاصل می‌کند که رقیب او حداکثر می‌تواند ۲ دلار به‌دست آورد، و با انتخاب استراتژی ۲، بازیکن B اطمینان حاصل می‌کند که وی در واقع این مبلغ را خواهد برد. این ۲ دلار ارزش بازی است و به این معنی است که بازی به نفع بازیکن B است، ولی ما می‌توانستیم بازی را با گرفتن ۲ دلار از بازیکن B به‌عنوان امتیاز ورود به بازی و دادن این ۲ دلار به بازیکن A **منصفانه** کنیم.

یک جنبهٔ بسیار مهم استراتژیهای مینیماکس I و ۲ در این مثال، آن است که این استراتژیها «غیرقابل تجسس»اند به این معنی که هیچ بازیکنی از دانستن انتخاب دیگری، سودی نمی‌برد. در مثال ما، حتی اگر بازیکن A آشکارا اعلام کند که استراتژی I را انتخاب خواهد کرد، هنوز هم بهترین انتخاب بازیکن B، استراتژی ۲ خواهد بود، و اگر بازیکن B آشکارا اعلام کند که استراتژی ۲ را انتخاب خواهد کرد، هنوز هم بهترین انتخاب بازیکن A استراتژی I خواهد بود. متأسفانه همهٔ بازیها غیرقابل تجسس نیستند.

مثال ۵.۹

نشان دهید که استراتژیهای مینیماکس بازیکنهای A و B در بازی زیر غیرقابل تجسس نیستند:

		بازیکن A I	بازیکن A II
بازیکن B	۱	۸	۵−
	۲	۲	۶

حل. بازیکن A می‌تواند با انتخاب استراتژی II زیان ماکسیمم خود را مینیمم کند، و بازیکن B می‌تواند زیان ماکسیمم خود را با انتخاب استراتژی ۲ مینیمم کند. معهذا، اگر بازیکن A می‌دانست که بازیکن B قصد دارد که انتخاب خود را بر مبنای ملاک مینیماکس انجام دهد، می‌توانست به استراتژی I رو کند و بنابراین زیان خود را از ۶ دلار به ۲ دلار کاهش دهد. البته اگر بازیکن B متوجه شود که بازیکن A می‌خواهد به این طریق او را از میدان به در کند، می‌تواند به نوبهٔ خود به استراتژی ۱ متوسل شود و سود خود را به ۸ دلار برساند. در هر صورت، استراتژیهای مینیماکس دو بازیکن غیرقابل تجسس نیستند و بنابراین در معرض هر نوع حیله و فریب قرار دارند. ▲

راه ساده‌ای برای تعیین اینکه در بازی مفروضی استراتژیهای مینیماکس غیرقابل تجسس‌اند یا نه، وجود دارد. برای این کار باید در جستجوی نقاط زینی، یعنی زوج استراتژیهایی باشیم که برای آنها درایهٔ متناظر در ماتریس پرداختها کوچکترین مقدار سطر خود و بزرگترین مقدار ستون خود باشد. در مثال ۵.۹ هیچ نقطهٔ زینی موجود نیست زیرا کوچکترین مقدار هر سطر، در عین حال کوچکترین مقدار ستون خود نیز هست. از سوی دیگر در بازی مثال ۳.۹ یک نقطهٔ زینی متناظر با استراژیهای I و ۲ موجود است زیرا ۸، کوچکترین مقدار سطر دوم، بزرگترین مقدار ستون اول است. همچنین، بازی ۲ × ۳ی مثال ۴.۹ یک نقطهٔ زینی متناظر با استراتژیهای II و ۲ دارد، زیرا

۳، کوچکترین مقدار سطر دوم، بزرگترین مقدار ستون دوم است، و بازی ۳×۳ی صفحهٔ ۳۲۴ یک نقطهٔ زینی متناظر با استراتژیهای I و ۲ دارد زیرا ۲، کوچکترین مقدار سطر دوم، بزرگترین مقدار ستون اول است. در حالت کلی، اگر یک بازی دارای یک نقطهٔ زینی باشد آن را اکیداً **معین** می‌نامند، و استراتژیهای متناظر با نقطهٔ زینی، استراتژیهای مینیماکس غیرقابل تجسس (و بنابراین اپتیمم)اند. این واقعیت که در یک بازی می‌توان بیش از یک نقطهٔ زینی داشت، در تمرین ۱.۹ نشان داده شده است؛ همچنین از این تمرین برمی‌آید که در این حالت اهمیتی ندارد که کدام یک از نقاط زینی را برای تعیین استراتژیهای اپتیمم دو بازیکن به‌کار بریم.

اگر یک بازی، نقطهٔ زینی نداشته باشد استراتژیهای مینیماکس، غیرقابل تجسس نیستند، و هر بازیکن می‌تواند با دانستن عکس‌العمل رقیب در وضعیت مفروضی، او را از میدان به در کند. برای اجتناب از این امکان، چنین به ذهن می‌آید که هر بازیکن باید به‌نحوی الگوهای رفتاری خود را عمداً به‌هم درآمیزد، و بهترین راه انجام این کار آن است که وی عنصر شانس را در انتخاب استراتژی خود وارد کند.

مثال ۶.۹

با رجوع به بازی مثال ۵.۹، فرض کنید که بازیکن A از یک ابزار بازیهای شانسی (تاس، کارت، برگه‌های کاغذی شماره‌دار، جدول اعداد تصادفی) استفاده می‌کند که نتیجه به انتخاب استراتژی I با احتمال x، و به انتخاب استراتژی II با احتمال $۱ - x$ منجر می‌شود. مقداری از x را که ماکسیمم امید زیان بازیکن A را مینیمم می‌کند، پیدا کنید.

حل. اگر بازیکن B استراتژی ۱ را انتخاب کند، امید زیان بازیکن A

$$E = ۸x - ۵(۱ - x)$$

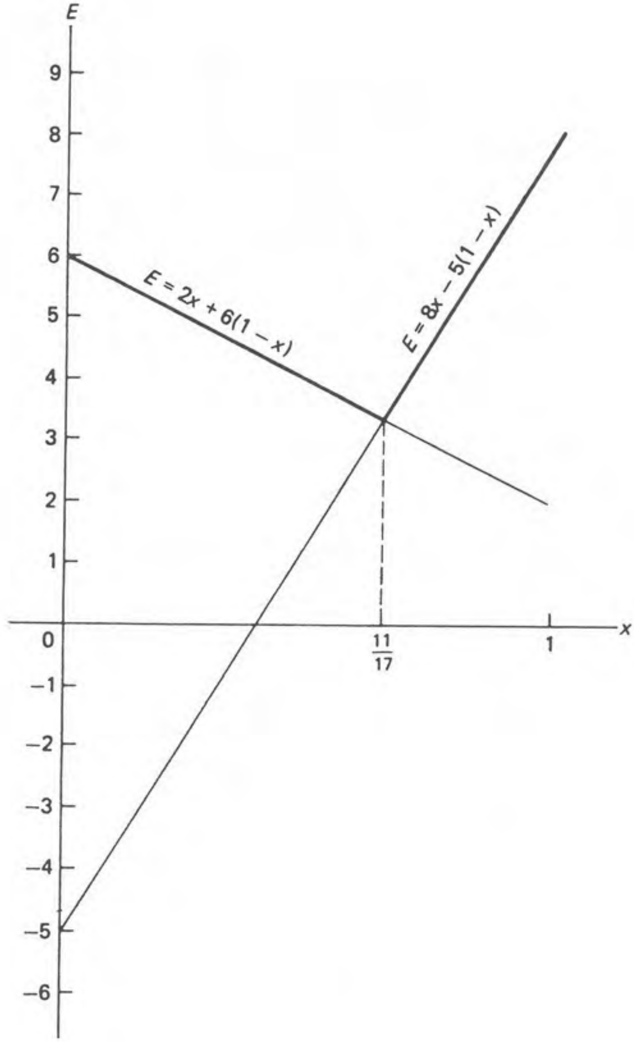
دلار خواهد بود، و اگر بازیکن B استراتژی ۲ را انتخاب کند، امید زیان بازیکن A

$$E = ۲x + ۶(۱ - x)$$

دلار خواهد بود. این وضعیت به‌طور نموداری در شکل ۱.۹ توصیف شده که در آن خطوطی را که معادله‌های آنها $E = ۸x - ۵(۱ - x)$ و $E = ۲x + ۶(۱ - x)$ است به‌ازای مقادیر x بین ۰ و ۱ رسم کرده‌ایم.

با به‌کار بردن ملاک مینیماکس برای امید زیانهای بازیکن A، از شکل ۱.۹ چنین به‌دست می‌آوریم که بزرگترین مقدار بین دو مقدار E به‌ازای هر مقدار مفروض x، کوچکترین مقدار خود را در محل تلاقی دو خط اختیار می‌کند، و برای یافتن مقدار متناظر x تنها لازم است که معادلهٔ

$$۸x - ۵(۱ - x) = ۲x + ۶(۱ - x)$$



شکل۱.۹ نمودار مثال ۶.۹

را حل کنیم که از‌آن مقدار $x = \frac{۱۱}{۱۷}$ به‌دست می‌آید. بنابراین اگر بازیکن A، ۱۱ برگهٔ کاغذ به شمارهٔ I و ۶ برگهٔ کاغذ به شمارهٔ II را به‌کار برد، آنها را کاملاً بر بزند، و سپس نوع عمل خود را بر مبنای شمارهٔ برگه‌ای که به‌تصادف انتخاب شده است استوار گرداند، امید زیان خود را در حد $۸ \cdot \frac{۱۱}{۱۷} - ۵ \cdot \frac{۶}{۱۷} = ۳\frac{۷}{۱۷}$ یا ۳٫۴۱ دلار با تقریب به نزدیکترین سنت نگه خواهد داشت. ▲

در مورد بازیکن B، در تمرین ۱۴.۹ از خواننده خواسته می‌شود که استدلال مشابهی را به‌کار

برده نشان دهد که بازیکن B سود مینیمم خود را با انتخاب از بین دو استراتژی ۱ و ۲ به‌ترتیب با احتمالهای $\frac{۴}{۱۷}$ و $\frac{۱۳}{۱۷}$ ماکسیمم خواهد کرد (که مانند مینیمم کردن زیان ماکسیمم است)، و به این ترتیب وی امید سودی به‌اندازهٔ $۳\frac{۷}{۱۷}$ یا ۳٫۴۱ دلار با تقریب به نزدیکترین سنت را برای خود تضمین خواهد کرد. در ضمن، مقدار ۳٫۴۱ دلاری که بازیکن A می‌تواند امید زیانش را در آن حد نگهدارد و بازیکن B امید سود خود را تا آن حد برساند، ارزش این بازی نامیده می‌شود. همچنین، اگر انتخاب نهایی یک بازیکن بدین ترتیب به‌عهدهٔ شانس گذاشته شود، استراتژی کلی او **تصادفی شده**، یا **آمیخته** نامیده می‌شود در حالی‌که استراتژیهای اصلی I، II، ۱، و ۲ را **خالص** می‌نامند.

مثالهای این بخش همه بدون تعبیر «مادی» داده شدند، زیرا علاقهٔ ما تنها در معرفی برخی از مفاهیم اساسی نظریهٔ بازیها بود. اگر این روشها را در مورد مثال ۱.۹ به‌کار بریم، درمی‌یابیم که «بازی» دارای یک نقطهٔ زینی است و استراتژی مینیماکس کارخانه‌دار به تعویق انداختن افزایش ظرفیت کارخانه است. البته در این کار، به‌طور سؤال‌برانگیزی چنین فرض می‌شود که طبیعت (که در پیش بودن یا نبودن یک رکود اقتصادی را کنترل می‌کند) حریفی بدخواه است. همچنین این‌طور به‌نظر می‌رسد که در چنین وضعیتی مدیر کارخانه باید کم و بیش اطلاعی دربارهٔ احتمال یک رکود اقتصادی داشته باشد، و بنابراین مسأله را باید به روش بخش ۱.۹ حل کرد.

تمرینها

۱.۹ اگر یک بازی دو نفری مجموع‌ـصفر، یک نقطهٔ زینی متناظر با سطر iام و ستون jام ماتریس پرداخت و نقطهٔ زینی دیگری متناظر با سطر kام و ستون lام داشته باشد، نشان دهید که

(الف) نقاط زینی دیگری متناظر با سطر iام و ستون lام ماتریس پرداخت و سطر kام و ستون jام موجودند؛

(ب) پرداخت باید برای هر چهار نقطهٔ زینی یکی باشد.

کاربردها

۲.۹ با رجوع به مثال ۱.۹، چه تصمیمی امید زیان کارخانه‌دار را مینیمم می‌کند در صورتی که وی حس کند که

(الف) بخت رکود اقتصادی ۳ به ۲ است؛

(ب) بخت رکود اقتصادی ۷ به ۴ است.

۳.۹ با رجوع به مثال ۱.۹ در صورتی که

(الف) به‌جای سود ۱۶۴۰۰۰ دلار، سودی به‌اندازهٔ ۲۰۰۰۰۰ دلار قرار داده شود و بخت رکود اقتصادی ۲ به ۱ باشد،

(ب) به‌جای زیان ۴۰۰۰۰ دلار، زیانی به‌اندازهٔ ۶۰۰۰۰ دلار قرار داده شود و بخت رکود اقتصادی ۳ به ۲ باشد،

آیا تصمیم کارخانه‌دار مانند قبل خواهد بود؟

۴.۹ خانم کوپر[1] در تدارک حضور در یک گردهمایی در شهر هونولولو[2] است و باید بی‌درنگ تقاضای رزرو اطاق خود را بفرستد. گردهمایی به قدری بزرگ است که بخشی از فعالیتهای آن در هتل X و بخشی در هتل Y صورت می‌گیرد و خانم کوپر نمی‌داند که جلسهٔ خاصی که وی تصمیم به حضور در آن را دارد، در هتل X برگزار خواهد شد یا در هتل Y. وی تصمیم دارد که فقط یک شب در آنجا اقامت کند که برای وی ۶۶ دلار در هتل X و ۶۲٫۴۰ دلار در هتل Y خرج خواهد داشت و در صورتی که در هتل موردنظر اقامت نکند، ۶٫۰۰ دلار خرج اضافی برای تاکسی نیز خواهد داشت.

(الف) اگر خانم کوپر حس کند که بخت تشکیل جلسه‌ای که او می‌خواهد در آن شرکت کند در هتل X، ۳ به ۱ است، برای آنکه وی امید خرج خود را مینیمم کند، کدام هتل را باید رزرو کند؟

(ب) اگر خانم کوپر حس کند که بخت اینکه جلسه‌ای که او می‌خواهد در آن شرکت کند در هتل Xباشد، ۵ به ۱ است، برای آنکه وی امید خرج خود را مینیمم کند، کدام هتل را باید رزرو کند؟

۵.۹ یک رانندهٔ کامیون باید یک بار الوار به یکی از دو کارگاه ساختمان تحویل دهد که به‌ترتیب ۲۷ و ۳۳ مایل تا کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارند، ولی او بارنامهٔ خود را که محل تحویل الوار را نشان می‌دهد، گم کرده است. دو محل ساختمان ۱۲ مایل از هم فاصله دارند، و موضوعی که باعث پیچیده‌تر شدن کارها شده، این است که تلفن کارخانهٔ چوب‌بری از کار افتاده است. این راننده اگر بخواهد امید فاصله‌ای را که باید رانندگی کند مینیمم نماید ابتدا باید کجا برود، به‌شرطی که

(الف) بخت ۵ به ۱ است که الوار باید به محل ساختمانی تحویل شود که ۳۳ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد؛

(ب) بخت ۲ به ۱ است که الوار باید به محل ساختمانی تحویل شود که ۳۳ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد؛

(ج) بخت ۳ به ۱ است که الوار باید به محل ساختمانی تحویل شود که ۳۳ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد؟

۶.۹ با مبتنی کردن تصمیمهای خود بر بدبینی، مانند تمرین ۲.۹،

(الف) خانم کوپر تمرین ۴.۹، رزرو خود را برای کجا باید انجام دهد؟

(ب) رانندهٔ کامیون تمرین ۵.۹ ابتدا به کجا باید برود؟

۷.۹ اگر تصمیمهای خود را بر خوشبینی (یعنی، ماکسیمم کردن سودهای ماکسیمم یا مینیمم کردن زیانهای مینیمم) استوار کنیم،

(الف) کارخانه‌دار مثال ۱.۹؛

(ب) خانم کوپر تمرین ۴.۹؛

(ج) رانندهٔ کامیون تمرین ۵.۹؛

چه تصمیمهایی باید بگیرند؟

---

1. Cooper 2. Honolulu

۸.۹ فرض کنید که کارخانه‌دار مثال ۱.۹، از آن نوع افرادی است که همواره نگران آن است که زیان عمده‌ای متوجه او شود. به‌عنوان مثال، وی درمی‌یابد که اگر توسعهٔ کارخانه را به عقب اندازد و شرایط اقتصادی در وضعیت خوبی بمانند، ۸۴۰۰۰ دلار از دست خواهد داد. (اختلاف بین ۱۶۴۰۰۰ دلار سودی که ممکن بود در اثر تصمیم به توسعهٔ بلافاصلهٔ کارخانه‌اش به‌دست آورد، و ۸۰۰۰۰ دلار سودی که عملاً به‌دست می‌آورد). با دادن عنوان **زیان فرصت** یا **تأسف** به این کمیت، پیدا کنید

(الف) زیانهای فرصت متناظر با سه امکان دیگر؛

(ب) تصمیمی که ماکسیمم زیان فرصت کارخانه‌دار را مینیمم خواهد کرد.

۹.۹ در رجوع به تعریف ۸.۹، پیدا کنید که چه تصمیمی ماکسیمم زیان فرصت

(الف) خانم کوپر تمرین ۴.۹؛

(ب) رانندهٔ کامیون تمرین ۵.۹؛

را مینیمم می‌کند.

۱۰.۹ در رجوع به مثال ۱.۹، فرض کنید که کارخانه‌دار اختیار استخدام شخص پیشگوی لغزش‌ناپذیری را در مقابل ۱۵۰۰۰ دلار داشته باشد تا به‌طور قطع معلوم کند که آیا یک رکود اقتصادی پیش خواهد آمد یا نه. با بخت ۲ به ۱ اولیه که بر مبنای آن رکودی در پیش خواهد بود، آیا برای کارخانه‌دار ارزش دارد که این ۱۵۰۰۰ دلار را خرج کند؟

۱۱.۹ هریک از ماتریسهای زیر، ماتریس پرداختها (مبالغی که بازیکن A به بازیکن B می‌پردازد) برای یک بازی دو نفری مجموع‌ـصفر است. کلیه استراتژیهای مغلوب را حذف کنید و استراتژی اپتیمم هر بازیکن را همراه با ارزش بازی تعیین کنید.

(الف)

۳	−۲
۵	۷

(ب)

۱۴	۱۱
۱۶	−۲

(ج)

−۵	۰	۳
−۶	−۳	−۳
−۱۲	−۱	۱

(د)

۷	۱۰	۸
۸	۸	۱۱
۷	۵	۹

۱۲.۹ هریک از ماتریسهای زیر، ماتریس پرداخت یک بازی دو نفری مجموع‌ـصفر است. نقطهٔ زینی (یا نقاط زینی) و ارزش هریک از بازیها را پیدا کنید.

(الف)

−۱	۵	−۲
۰	۳	۱
−۲	−۴	۵

(ب)

۳	۲	۴	۹
۴	۴	۴	۳
۵	۶	۵	۶
۵	۷	۵	۹

۱۳.۹ شهر کوچکی دو جایگاه سوختگیری دارد که بازار فروش بنزین شهر بین آنها تقسیم می‌شود.

مالک جایگاه A به بررسی جوانب این امر پرداخته است که به‌عنوان برنامه‌ای برای افزایش فروش به مشتریهایش لیوان مجانی هدیه دهد یا خیر، و مالک جایگاه B به بررسی جوانب این امر پرداخته است که آیا به مشتریانش چاقوی آشپزخانهٔ مجانی هدیه دهد یا خیر. آنها می‌دانند (از موارد مشابهی در سایر جاها) که اگر جایگاه A لیوان مجانی هدیه دهد و جایگاه B چاقوی آشپزخانه هدیه ندهد، سهم جایگاه A از بازار فروش ۶ درصد افزایش خواهد یافت؛ اگر جایگاه B چاقوی آشپزخانهٔ مجانی هدیه دهد و جایگاه A لیوان مجانی هدیه ندهد، سهم جایگاه B از بازار فروش ۸ درصد افزایش خواهد یافت؛ و اگر هردو جایگاه اقلام مربوط را هدیه دهند، سهم پمپ بنزین B از بازار فروش ۳ درصد افزایش خواهد یافت.

(الف) این اطلاعات را به شکل یک جدول پرداخت ارائه دهید که در آن درایه‌ها، زیانهای جایگاه A در سهمش از بازار فروش باشد.

(ب) استراتژیهای اپتیمم را برای مالکان دو جایگاه پیدا کنید.

۱۴.۹ صحت و سقم احتمالهای $\frac{۴}{۱۷}$ و $\frac{۱۳}{۱۷}$ را که در صفحهٔ ۳۲۸ برای استراتژی اپتیمم بازیکن B داده شده، تحقیق کنید.

۱۵.۹ ماتریس زیر، ماتریس پرداخت یک بازی دو نفری مجموع‌ـصفر ۲ × ۲ است:

۳	−۴
−۳	۱

(الف) بازیکن A چه استراتژی تصادفی شده‌ای را به‌کار برد تا ماکسیمم امید زیان خود را مینیمم کند؟

(ب) بازیکن B چه استراتژی تصادفی شده‌ای را به‌کار برد تا مینیمم امید برد خود را ماکسیمم کند؟

(ج) ارزش بازی چیست؟

۱۶.۹ با رجوع به تمرین ۴.۹، چه استراتژی تصادفی شده‌ای ماکسیمم امید خرج خانم کوپر را مینیمم خواهد کرد؟

۱۷.۹ کشوری دو پایگاه هوایی با تأسیساتی به‌ترتیب به ارزشهای ۲۰۰۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰۰ دلار دارد که فقط می‌تواند از یکی از آنها در مقابل حملهٔ دشمن دفاع کند. از سوی دیگر، دشمن می‌تواند فقط به یکی از آنها حمله کند و با موفقیت آن را تصرف کند به‌شرطی که این پایگاه بلادفاع باشد. با فرض اینکه «پرداخت» به کشور، ارزش مجموع تأسیساتی باشد که این کشور بعد از حمله داراست، استراتژی اپتیمم کشور و نیز استراتژی اپتیمم دشمن، و ارزش «بازی» را پیدا کنید.

۱۸.۹ دو نفر موافقت می‌کنند که به انجام بازی زیر بپردازند: اولی عدد ۱ یا عدد ۴ را روی یک تکه کاغذ می‌نویسد و دومی در همان حال عدد ۰ یا ۳ را بر روی تکه کاغذ دیگری می‌نویسد. اگر مجموع این دو عدد، عددی فرد باشد اولین نفر به اندازهٔ این عدد برحسب دلار برنده می‌شود؛ در غیر این صورت دومی ۲ دلار برنده می‌شود.

(الف) ماتریس پرداختها را که در آن پرداختها زیانهای نفر اول باشد، بسازید.

(ب) اولین بازیکن چه شیوهٔ تصمیم تصادفی شده‌ای را به‌کار برد تا ماکسیمم امید زیان خود را مینیمم کند؟

(ج) دومین نفر چه شیوهٔ تصمیم تصادفی شده‌ای را به‌کار برد تا مینیمم امید سود خود را ماکسیمم کند؟

۱۹.۹ در محلهٔ معینی از شهر، دو جایگاه سوختگیری وجود دارد و مالک اولین جایگاه می‌داند که اگر هیچ یک از دو جایگاه قیمتهای خود را کاهش ندهند وی می‌تواند انتظار سود خالصی به‌اندازهٔ ۱۰۰ دلار در هر روز داشته باشد. اگر وی قیمتهای خود را کاهش دهد ولی دیگری این کار را نکند، او می‌تواند سود خالصی به‌اندازهٔ ۱۴۰ دلار در روز داشته باشد؛ اگر او قیمتهایش را کاهش ندهد ولی جایگاه دیگر این کار را بکند، وی می‌تواند انتظار سود خالص ۷۰ دلار را داشته باشد؛ و اگر هر دو جایگاه در این «جنگ قیمتها» شرکت کنند وی می‌تواند انتظار سود خالصی به‌اندازهٔ ۸۰ دلار داشته باشد. مالکین دو جایگاه قیمتهای خود را در هر روز معین، مستقل از یکدیگر تعیین می‌کنند و فرض می‌شود که هیچ‌یک از آنها نمی‌تواند قیمتهای خود را بعد از اطلاع از قیمتهای جایگاه دیگر تغییر دهد.

(الف) آیا مالک جایگاه اول، در صورتی که بخواهد مینیمم سود خالص خود را ماکسیمم کند باید قیمتهای عادی خود را مطالبه کند یا آنها را کاهش دهد؟

(ب) با فرض اینکه ارقام سود بالا در مورد جایگاه دوم هم صادق باشند، مالکین دو جایگاه چگونه ممکن است باهم تبانی کنند به‌طوری که امید سود خالص هریک از آنها ۱۰۵ دلار باشد؟ توجه کنید که این «بازی»، یک بازی مجموع‌ـ‌صفر نیست، به‌طوری که امکان تبانی، راه را بر امکانات کاملاً جدیدی می‌گشاید.

۳.۹ بازیهای آماری

در استنباط آماری، ما مبنای تصمیمهای خود دربارهٔ جامعه‌ها را بر نمونه‌های تصادفی قرار می‌دهیم، تشبیه نابه‌جایی نخواهد بود که به چنین استنباطی به‌صورت یک بازی بین طبیعت، که صفت (یا صفات) مشخصی از جامعه را کنترل می‌کند، و شخص (دانشمند، یا آماردان) که باید تصمیمی دربارهٔ انتخاب طبیعت اتخاذ کند، نگاه کنیم. مثلاً، اگر بخواهیم میانگین μ از یک جامعهٔ نرمال را بر مبنای یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n برآورد کنیم، می‌توانیم بگوییم که طبیعت بر مقدار «واقعی» μ کنترل دارد. از سوی دیگر، می‌توانستیم μ را برحسب مقدار میانگین نمونه‌ای یا مقدار میانهٔ نمونه برآورد کنیم، و قطعاً تاوان یا پاداشی در کار است که به‌اندازهٔ خطای ما بستگی دارد.

علی‌رغم شباهت آشکار بین این مسأله و مسائل بخش قبل، اساساً دو وجه مشخصه وجود دارند که اسباب تمایز **بازیهای آماری** هستند. اولاً، سؤالی که قبلاً هنگام به‌کارگیری نظریهٔ بازیها در مورد مسألهٔ تصمیم مثال ۱.۹ پیش آمد، مطرح است، یعنی این سؤال که آیا کار معقولی است که طبیعت را

به‌عنوان حریفی بدخواه تلقی کنیم یا نه. آشکارا چنین نیست، اما این امر سبب تسهیل کار نمی‌شود؛ اگر می‌توانستیم طبیعت را یک حریف منطقی تلقی کنیم، حداقل می‌دانستیم که چه توقعی داشته باشیم.

وجه تمایز دیگر آن است که در بازیهای بخش ۲.۹ هر بازیکن می‌بایست استراتژی خود را بدون هیچ اطلاعی از آنچه حریفش صورت داده یا در فکر انجام آن بوده است، انتخاب کند در حالی‌که در یک بازی آماری، داده‌هایی نمونه‌ای در اختیار آماردان قرار می‌گیرد که اطلاعی دربارهٔ انتخاب طبیعت در دسترس او قرار می‌دهد. این نیز کارها را پیچیده می‌کند، اما صرفاً هم‌ارز این واقعیت است که ما با انواع پیچیده‌تری از بازیها سروکار داریم. برای توضیح مطلب، مسألهٔ تصمیم زیر را در نظر می‌گیریم: به ما گفته‌اند که یک سکه، یا سکهٔ همگنی است که یک طرف آن شیر و طرف دیگر آن خط است یا سکه‌ای است که هر دو طرف آن شیر است. ما نمی‌توانیم سکه را وارسی کنیم اما می‌توانیم سکه را یک‌بار بیندازیم و ببینیم که شیر می‌آید یا خط. پس از آن باید تصمیم بگیریم که سکه دو شیره است یا خیر و در نظر داشته باشیم که در صورت غلط بودن تصمیم ما یک جریمهٔ ۱ دلاری در بین است، و هیچ جریمه (یا جایزه‌ای) در صورت درست بودن تصمیم در کار نیست. اگر این واقعیت را نادیده می‌گرفتیم که می‌توانیم سکه را یک‌بار پرتاب کنیم، می‌توانستیم این مسأله را به‌صورت زیر مورد بررسی قرار دهیم:

		بازیکن A (آماردان) a_1	a_2
بازیکن B	θ_1	$L(a_1,\theta_1)=0$	$L(a_2,\theta_1)=1$
(طبیعت)	θ_2	$L(a_1,\theta_2)=1$	$L(a_2,\theta_2)=0$

این بازی، طرح صفحهٔ ۳۲۱ را به یاد خواننده می‌آورد. حال، θ_1 «وضعیت طبیعت» است که سکه دو شیره است، θ_2 «وضعیت طبیعت» است که سکه، سکهٔ همگنی است با یک شیر در یک طرف و با یک خط در طرف دیگر آن، a_1 تصمیم آماردان است که سکه دو شیره است و a_2 تصمیم آماردان است که سکه، سکهٔ همگنی است که یک طرف آن شیر و طرف دیگر آن خط است. درایه‌های این جدول، مقادیر متناظر تابع زیان مفروض‌اند.

حال این واقعیت را هم در نظر می‌گیریم که ما (بازیکن A، یا آماردان) می‌دانیم که در پرتاب سکه چه پیشامدی رخ داده است؛ یعنی می‌دانیم که یک متغیر تصادفی مانند X مقدار $x=0$ (شیر) یا $x=1$ (خط) را اختیار کرده است. چون برای ما مطلوب است که از این اطلاع در انتخاب بین a_1 و a_2 استفاده کنیم، تابعی لازم داریم، به‌نام **تابع تصمیم**، که به ما می‌گوید که وقتی $x=0$ چه عملی انجام دهیم و وقتی $x=1$ چه عملی انجام دهیم. یک امکان آن است که وقتی $x=0$، a_1 را انتخاب کنیم، و وقتی $x=1$، a_2 را انتخاب کنیم، و می‌توانیم این عمل را به‌طور نمادی با نوشتن

$$d_1(x)=\begin{cases} a_1 & \text{وقتی } x=0 \\ a_2 & \text{وقتی } x=1 \end{cases}$$

یا به‌طور ساده‌تر با $d_1(0) = a_1$ و $d_1(1) = a_2$ بیان کنیم. منظور از زیرنویس آن است که این تابع تصمیم را از دیگر تابعهای تصمیم، مثلاً از سه تابع زیر متمایز کنیم:

$$d_2(0) = a_1, \quad d_2(1) = a_1$$

که به ما می‌گوید a_1 را صرف‌نظر از برآمد آزمایش انتخاب کنیم و

$$d_3(0) = a_2, \quad d_3(1) = a_2$$

که به ما می‌گوید a_2 را صرف‌نظر از برآمد آزمایش انتخاب کنیم و

$$d_4(0) = a_2, \quad d_4(1) = a_1$$

که به ما می‌گوید که وقتی $x = 0$، a_2، و وقتی $x_1 = 1$، a_1 را انتخاب کنیم.

برای اینکه ارزندگی این تابعهای تصمیم را با هم مقایسه کنیم، ابتدا امیدهای زیانی را که بر اثر استراتژیهای مختلف طبیعت از این تابعها حاصل می‌شوند، یعنی مقادیر تابع مخاطرهٔ زیر را تعیین می‌کنیم

$$R(d_i, \theta_j) = E\{L[d_i(X), \theta_j]\}$$

که در آن امید ریاضی نسبت به متغیر تصادفی X گرفته شده است. چون احتمالهای نظیر $x = 0$ و $x = 1$ به‌ترتیب برای θ_1، ۱ و ۰، و برای θ_2، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ هستند، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
R(d_1, \theta_1) &= 1 \cdot L(a_1, \theta_1) + 0 \cdot L(a_2, \theta_1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\
R(d_1, \theta_2) &= \frac{1}{2} \cdot L(a_1, \theta_2) + \frac{1}{2} \cdot L(a_2, \theta_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \\
R(d_2, \theta_1) &= 1 \cdot L(a_1, \theta_1) + 0 \cdot L(a_1, \theta_1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\
R(d_2, \theta_2) &= \frac{1}{2} \cdot L(a_1, \theta_2) + \frac{1}{2} \cdot L(a_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 \\
R(d_3, \theta_1) &= 1 \cdot L(a_2, \theta_1) + 0 \cdot L(a_2, \theta_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 \\
R(d_3, \theta_2) &= \frac{1}{2} \cdot L(a_2, \theta_2) + \frac{1}{2} \cdot L(a_2, \theta_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\
R(d_4, \theta_1) &= 1 \cdot L(a_2, \theta_1) + 0 \cdot L(a_1, \theta_1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \\
R(d_4, \theta_2) &= \frac{1}{2} \cdot L(a_2, \theta_2) + \frac{1}{2} \cdot L(a_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

که در آن مقادیر تابع زیان از جدول صفحهٔ ۳۳۳ به‌دست آمده‌اند.

بنابراین به بازی دو نفری مجموع‌ـصفر ۲ × ۴ی زیر رسیده‌ایم که در آن پرداختها، متناظر با مقادیر تابع مخاطره‌اند:

		بازیکن A (آماردان)			
		d_1	d_2	d_3	d_4
بازیکن B	θ_1	0	0	1	1
(طبیعت)	θ_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$

به‌طوری که از طریق وارسی دیده می‌شود، d_2 مغلوب d_1 و d_4 مغلوب d_3 است، بنابراین d_2 و d_4 را می‌توان کنار گذاشت. در نظریهٔ تصمیم گوییم که آنها **غیرقابل قبول**اند. در واقع، این امر نباید مایهٔ تعجب باشد زیرا در d_2 و نیز در d_4، ما شق a_1 را (که سکه دو شیره است) می‌پذیریم حتی در صورتی که نتیجهٔ پرتاب سکه، آمدن خط باشد.

در نتیجه یک بازی دو نفری مجموع‌ـصفر 2×2 برای ما باقی می‌ماند که در آن بازیکن A باید بین d_1 و d_3 یکی را انتخاب کند. می‌توان به آسانی تحقیق کرد که اگر به طبیعت به‌عنوان یک حریف بدخواه بنگریم، استراتژی اپتیمم، تصادفی کردن بین d_1 و d_3 به‌ترتیب با احتمالهای $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ است و ارزش بازی (امید مخاطره) $\frac{1}{3}$ دلار است. اگر به طبیعت به‌عنوان یک حریف بدخواه نگاه نکنیم، باید ملاک دیگری برای انتخاب بین d_1 و d_3 به‌کار برد و این موضوع در بخش آتی مورد بحث قرار خواهد گرفت. در ضمن، ما این مسأله را در رابطه با یک سکهٔ دو شیره و یک سکهٔ معمولی فرمولبندی کردیم، ولی می‌توانستیم آن را به‌صورت مسألهٔ تصمیم مجردتری هم فرمولبندی کنیم که در آن باید بر مبنای یک مشاهدهٔ واحد تصمیم بگیریم که آیا متغیری تصادفی دارای توزیع برنولی با پارامتر $\theta = 0$ است یا با پارامتر $\theta = \frac{1}{2}$.

برای توضیح بیشتر مفاهیم تابع زیان و تابع مخاطره، مثال زیر را در نظر می‌گیریم که در آن طبیعت و نیز آماردان استراتژیهای پیوستاری دارند.

مثال ۷.۹

یک متغیر تصادفی دارای چگالی یکنواخت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است و می‌خواهیم پارامتر θ («حرکت» طبیعت) را برمبنای مشاهده‌ای واحد برآورد کنیم. اگر تابع تصمیم را به شکل $d(x) = kx$ بگیریم که در آن $k \geq 1$، و زیانها متناسب با قدرمطلق خطاها باشند، یعنی

$$L(kx, \theta) = c|kx - \theta|$$

که در آن c عدد مثبت ثابتی است، مقداری از k را که تابع مخاطره را مینیمم می‌کند، پیدا کنید.

حل. در مورد تابع مخاطره داریم

$$\begin{aligned} R(d,\theta) &= \int_{\circ}^{\theta/k} c(\theta - kx)\cdot\frac{1}{\theta}dx + \int_{\theta/k}^{\theta} c(kx-\theta)\cdot\frac{1}{\theta}dx \\ &= c\theta\left(\frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

و دربارهٔ عامل θ نمی‌توانیم کاری بکنیم ولی به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $k = \sqrt{۲}$ عبارت $\frac{k}{۲} - ۱ + \frac{۱}{k}$ را مینیمم می‌کند. بنابراین، اگر واقعاً مشاهده‌ای انجام دهیم و مقدار $x = ۵$ را به‌دست آوریم، برآورد θ برابر $۵\sqrt{۲}$ یا تقریباً ۷٫۰۷ خواهد بود. ▲

۴.۹ ملاکهای تصمیم

در مثال ۷.۹ توانستیم تابع تصمیمی پیدا کنیم که مخاطره را صرف‌نظر از وضعیت واقعی طبیعت (یعنی، صرف‌نظر از مقدار واقعی پارامتر θ) مینیمم کند، اما این یک استثناست تا یک قاعده. اگر خود را به تابعهای تصمیم به شکل $d(x) = kx$ محدود نکنیم، در این صورت تابع تصمیم $d(x) = \theta_1$ بهترین تابع تصمیم خواهد بود در صورتی که θ برابر θ_1 باشد، تابع تصمیم $d(x) = \theta_2$ بهترین تابع تصمیم خواهد بود در صورتی که θ برابر θ_2 باشد، ... ، و بدیهی است که نمی‌توان تابع تصمیمی یافت که به‌ازای همهٔ مقادیر θ بهترین تابع تصمیم باشد.

در حالت کلی، باید به تابعهای تصمیمی قناعت کنیم که تنها نسبت به ملاک معینی بهترین باشند، و دو ملاکی که ما در این فصل مورد مطالعه قرار خواهیم داد، عبارت‌اند از: (۱) **ملاک مینیماکس**، که بر طبق آن ما آن تابع تصمیم d را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آن ماکسیمم $R(d,\theta)$ برحسب θ، مینیمم شود؛ و (۲) **ملاک بیزی**، که بر طبق آن ما آن تابع تصمیم d را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آن **مخاطرهٔ بیزی** $E[R(d,\Theta)]$ مینیمم شود. در این مخاطره امید ریاضی نسبت به Θ استخراج شده است. این امر مستلزم آن است که ما Θ را یک متغیر تصادفی با توزیعی مفروض تلقی کنیم.

در خور توجه است که در مثال ۱.۹ هردو ملاک را به‌کار بردیم. وقتی بخت برای یک رکود اقتصادی را ذکر کردیم، احتمالهایی به دو وضعیت طبیعت، θ_1، θ_2، نسبت دادیم و وقتی پیشنهاد کردیم که کارخانه‌دار امید زیان خود را مینیمم کند، در واقع پیشنهاد کردیم که وی ملاک بیزی را به‌کار برد. همچنین وقتی در صفحهٔ ۳۲۱ سؤال کردیم که کارخانه‌دار در صورت بدبین بودن چه باید بکند، پیشنهاد کردیم که وی می‌تواند خود را در مقابل بدترین حالت ممکن با استفاده از ملاک مینیماکس مصون دارد.

۵.۹ ملاک مینیماکس

اگر ما ملاک مینیماکس را در مورد مثال بخش ۳.۹ به‌کار بریم، که دربارهٔ سکه‌ای بحث می‌کند که یا دو شیره و یا سکهٔ همگنی است که یک طرف آن شیر و طرف دیگر آن خط است، از جدول

صفحهٔ ۳۳۵ که $d_۲$ و $d_۴$ از آن حذف شده، درمی‌یابیم که برای $d_۱$ ماکسیمم مخاطره $\frac{۱}{۲}$ است، برای $d_۳$ ماکسیمم مخاطره ۱ است، و بنابراین تابعی که مخاطرهٔ ماکسیمم را مینیمم می‌کند، $d_۱$ است.

مثال ۸.۹

ملاک مینیماکس را برای برآورد پارامتر θ در یک توزیع دوجمله‌ای بر مبنای مقداری از متغیر تصادفی X، یعنی تعداد پیروزیهای مشاهده شده در n آزمایش، به‌کار برید، به شرطی که تابع تصمیم به‌صورت

$$d(x) = \frac{x+a}{n+b}$$

باشد، که در آن a و b مقادیر ثابت‌اند، و تابع زیان به‌صورت

$$L\left(\frac{x+a}{n+b}, \theta\right) = c\left(\frac{x+a}{n+b} - \theta\right)^۲$$

باشد که در آن c ثابت مثبتی است.

حل. مسأله عبارت از یافتن مقادیر a و b است که تابع مخاطرهٔ متناظر را بعد از آنکه نسبت به θ ماکسیمم شده است، مینیمم کنند. گذشته از هر چیز، ما روی انتخاب a و b کنترل داریم، در حالی‌که طبیعت (حریف فرضی ما) روی انتخاب θ کنترل دارد.

چون، به‌طوری که در صفحهٔ ۱۸۸ ملاحظه کردیم،

$$E(X) = n\theta, \qquad E(X^۲) = n\theta(۱ - \theta + n\theta)$$

نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} R(d,\theta) &= E\left[c\left(\frac{X+a}{n+b} - \theta\right)^۲\right] \\ &= \frac{c}{(n+b)^۲}[\theta^۲(b^۲ - n) + \theta(n - ۲ab) + a^۲] \end{aligned}$$

و به‌کمک حسابان، می‌توانیم مقدار θ را که این عبارت را ماکسیمم می‌کند پیدا کنیم، و سپس $R(d,\theta)$ را به‌ازای این مقدار θ، برحسب a و b مینیمم کنیم. این کار دشواری خاصی ندارد، ولی ما آن را به‌عنوان تمرین ۲۳.۹ به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم زیرا متضمن برخی جزئیات جبری کسل‌کننده است. ▲

برای تسهیل کارها در مسأله‌ای از این نوع، می‌توانیم اغلب از **اصل همترازساز** استفاده کنیم، که مطابق آن (تحت شرایط نسبتاً کلی) تابع مخاطرهٔ یک قاعدهٔ تصمیم مینیماکس، مقداری است

ثابت؛ به‌عنوان نمونه این اصل بیان می‌کند که در مثال ۸.۹، تابع مخاطره نباید به مقدار θ بستگی داشته باشد.* برای توجیه این اصل، حداقل به‌طور شهودی، ملاحظه کنید که در مثال ۶.۹، استراتژی مینیماکس بازیکن A منجر به امید زیانی برابر ۳٫۴۱ دلار می‌شود صرف‌نظر از اینکه بازیکن B استراتژی ۱ را انتخاب کند یا استراتژی ۲ را.

برای آنکه تابع مخاطره را در مثال ۸.۹ از θ مستقل کنیم، ضرایب θ و $\theta^۲$ باید در عبارت مربوط $R(d, \theta)$ هردو ۰ باشند. از این کار نتیجه می‌شود که $b^۲ - n = ۰$ و $n - ۲ab = ۰$، و، بنابراین $a = \frac{۱}{۲}\sqrt{n}$ و $b = \sqrt{n}$. بنابراین، تابع تصمیم مینیماکس به‌صورت

$$d(x) = \frac{x + \frac{۱}{۲}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$$

به‌دست می‌آید، و اگر ما واقعاً ۳۹ پیروزی در ۱۰۰ آزمایش می‌داشتیم، برآورد پارامتر این توزیع دوجمله‌ای را برابر با

$$d(۳۹) = \frac{۳۹ + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰۰}}{۱۰۰ + \sqrt{۱۰۰}} = ۰٫۴۰$$

می‌گرفتیم.

۶.۹ ملاک بیزی

برای آنکه ملاک بیزی را در مثال ۳.۹، مثالی که با سکه‌ای دو شیره یا با سکهٔ همگنی با شیر در یک طرف آن و خط در طرف دیگر آن سروکار داشت، به‌کار بریم باید احتمالهایی به دو استراتژی طبیعت، یعنی $\theta_۱$ و $\theta_۲$ نسبت دهیم. اگر به $\theta_۱$ و $\theta_۲$، به‌ترتیب، احتمالهای p و $۱ - p$ نسبت دهیم، می‌توان از جدول صفحهٔ ۳۳۵ ملاحظه کرد که مخاطرهٔ بیزی برای $d_۱$ برابر است با

$$۰ \cdot p + \frac{۱}{۲} \cdot (۱ - p) = \frac{۱}{۲} \cdot (۱ - p)$$

و برای $d_۲$ مخاطرهٔ بیزی برابر است با

$$۱ \cdot p + ۰ \cdot (۱ - p) = p$$

نتیجه می‌شود که مخاطرهٔ بیزی $d_۱$ کمتر از مخاطرهٔ بیزی $d_۲$ است (و باید $d_۱$ را بر $d_۲$ ترجیح داد) هرگاه $p > \frac{۱}{۳}$، و مخاطرهٔ بیزی $d_۲$ کمتر از مخاطرهٔ بیزی $d_۱$ است (و باید $d_۲$ را بر $d_۱$ ترجیح داد) هرگاه $p < \frac{۱}{۳}$. وقتی $p = \frac{۱}{۳}$، دو مخاطرهٔ بیزی باهم برابرند و می‌توانیم هریک از $d_۱$ یا $d_۲$ را به‌کار بریم.

* شرایط دقیقی که اصل همترازساز تحت آنها برقرار است در کتاب فرگوسن که در بین مراجع پایان فصل فهرست شده، داده شده‌اند.

مثال ۹.۹
در رابطه با مثال ۷.۹، فرض کنید که پارامتر چگالی یکنواخت به‌عنوان یک متغیر تصادفی با چگالی احتمال

$$h(\theta) = \begin{cases} \theta \cdot e^{-\theta} & \theta > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تلقی شود. اگر هیچ‌گونه محدودیتی در شکل تابع تصمیم نباشد و تابع زیان از درجهٔ دوم باشد، یعنی مقادیر آن به‌صورت

$$L[d(x), \theta] = c\{d(x) - \theta\}^2$$

داده شود، تابع تصمیمی را پیدا کنید که مخاطرهٔ بیزی را مینیمم کند.

حل. چون Θ اینک یک متغیر تصادفی است، می‌توان به تابع چگالی اولیه به‌عنوان یک تابع چگالی شرطی

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نگریست که با قرار دادن $f(x, \theta) = f(x|\theta) \cdot h(\theta)$، بر طبق تعریف ۱۳.۳، به‌دست می‌آوریم

$$f(x, \theta) = \begin{cases} e^{-\theta} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

به‌طوری که تحقیق آن در تمرین ۲۵.۹ از خواننده خواسته خواهد شد، برای چگالی حاشیه‌ای X

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و برای چگالی شرطی Θ به فرض $X = x$،

$$\varphi(\theta|x) = \begin{cases} e^{x-\theta} & \theta > x \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

را به‌دست می‌آوریم.

حال، مخاطرهٔ بیزی $E[R(d, \Theta)]$ که باید آن را مینیمم کنیم، به کمک انتگرال دوگانهٔ

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\theta c[d(x) - \theta]^2 f(x|\theta)dx \right\} h(\theta)d\theta$$

داده می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از واقعیت $f(x|\theta)\cdot h(\theta)=\varphi(\theta|x)\cdot g(x)$ و تغییر ترتیب انتگرالگیری، به‌صورت

$$\int_{\circ}^{\infty}\left\{\int_{x}^{\infty} c[d(x)-\theta]^{۲}\varphi(\theta|x)d\theta\right\} g(x)dx$$

نوشت. برای مینیمم کردن این انتگرال دوگانه، باید $d(x)$ را به‌ازای هر x طوری انتخاب کنیم که انتگرال

$$\int_{x}^{\infty} c[d(x)-\theta]^{۲}\varphi(\theta|x)d\theta=\int_{x}^{\infty} c[d(x)-\theta]^{۲}e^{x-\theta}d\theta$$

هر اندازه که ممکن است، کوچک باشد. با مشتقگیری نسبت به $d(x)$ و قرار دادن مشتق برابر ۰، به‌دست می‌آوریم

$$۲ce^{x}\int_{x}^{\infty}[d(x)-\theta]e^{-\theta}d\theta=\circ$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$d(x)\cdot\int_{x}^{\infty} e^{-\theta}d\theta-\int_{x}^{\infty}\theta e^{-\theta}d\theta=\circ$$

و سرانجام

$$d(x)=\frac{\int_{x}^{\infty}\theta e^{-\theta}d\theta}{\int_{x}^{\infty}e^{-\theta}d\theta}=\frac{(x+۱)e^{-x}}{e^{-x}}=x+۱$$

بنابراین، اگر مشاهده‌ای که به‌دست می‌آوریم، $x=۵$ باشد (مانند صفحهٔ ۳۳۶)، این تابع تصمیم، برآورد بیزی ۶ = ۱ + ۵ را برای پارامتر چگالی یکنواخت اولیه می‌دهد. ▲

تمرینها

۲۰.۹ با رجوع به مثال صفحهٔ ۳۳۳، نشان دهید که حتی اگر سکه nبار پرتاب شود، تنها دو تابع تصمیم قابل قبول موجود است. همچنین جدولی بسازید که مقادیر تابع مخاطرهٔ متناظر با این دو تابع تصمیم و دو وضعیت طبیعت را نشان دهد.

۲۱.۹ در رجوع به مثال ۷.۹، نشان دهید که اگر زیانها به‌جای قدرمطلقهای خطاها، متناسب با مربعهای آنها باشند، تابع مخاطره به‌صورت

$$R(d,\theta)=\frac{c\theta^{۲}}{۳}(k^{۲}-۳k+۳)$$

درمی‌آید و مینیمم آن در $k = \frac{۳}{۲}$ است.

۲۲.۹ آماردانی باید بر مبنای یک مشاهده تصمیم بگیرد که آیا پارامتر θ در چگالی

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{۲x}{\theta^۲} & ۰ < x < \theta \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

برابر $\theta_۱$ است یا $\theta_۲$، که در آن $\theta_۱ < \theta_۲$. اگر وقتی مقدار مشاهده شده کوچکتر از k باشد، وی $\theta_۱$ را انتخاب کند، وقتی مقدار مشاهده شده بزرگتر از k یا مساوی آن باشد، $\theta_۲$ را انتخاب کند، و به خاطر تصمیم غلط C دلار جریمه شود، چه مقدار k ماکسیمم مخاطره را مینیمم می‌کند؟

۲۳.۹ مقدار θ را که تابع مخاطرهٔ مثال ۸.۹ را مینیمم می‌کند، پیدا کنید و سپس مقادیر a و b را که تابع مخاطره را برای آن مقدار θ مینیمم می‌کند، پیدا کنید. نتایج را با نتایجی که در صفحهٔ ۳۳۸ داده شده است، مقایسه کنید.

۲۴.۹ اگر در مثال ۸.۹ فرض کنیم که Θ متغیری تصادفی است که دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = ۱$ است، نشان دهید که مخاطرهٔ بیزی با عبارت زیر داده می‌شود

$$\frac{c}{(n+b)^۲}\left[\frac{۱}{۳}(b^۲ - n) + \frac{۱}{۲}(n - ۲ab) + a^۲\right]$$

همچنین نشان دهید که این مخاطرهٔ بیزی وقتی $a = ۱$ و $b = ۲$، مقدار مینیممی اختیار می‌کند، به‌طوری که قاعدهٔ تصمیم بیزی اپتیمم با $d(x) = \frac{(x+۱)}{(n+۲)}$ داده می‌شود.

۲۵.۹ صحت نتایجی را که در صفحهٔ ۳۳۹ برای چگالی حاشیه‌ای X و چگالی شرطی Θ به شرط $X = x$ داده شده‌اند تحقیق کنید.

۲۶.۹ فرض کنید که بخواهیم پارامتر θ در توزیع هندسی را بر مبنای یک مشاهده، برآورد کنیم. اگر تابع زیان با

$$L[d(x),\theta] = c\{d(x) - \theta\}^۲$$

داده شود و Θ را یک متغیر تصادفی تلقی کنیم که دارای چگالی یکنواخت $h(\theta) = ۱$ به‌ازای $۰ < \theta < ۱$ و $h(\theta) = ۰$ در سایر جاها باشد، گامهای مثال ۹.۹ را تکرار کرده نشان دهید که

(الف) چگالی شرطی Θ به شرط x عبارت است از

$$\varphi(\theta|x) = \begin{cases} x(x+۱)\theta(۱-\theta)^{x-۱} & ۰ < \theta < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(ب) مخاطرهٔ بیزی به‌وسیلهٔ تابع تصمیم

$$d(x) = \frac{۲}{x+۲}$$

مینیمم می‌شود. (راهنمایی: از این واقعیت استفاده کنید که انتگرال هر چگالی بتا برابر ۱ است.)

کاربردها

۲۷.۹ آماردانی باید بر مبنای مشاهده‌ای تصمیم گیرد که پارامتر θ در یک توزیع برنولی ۰، $\frac{1}{2}$، یا ۱ است؛ زیان او برحسب دلار (جریمه‌ای که از اجرت او کم می‌شود) ۱۰۰ برابر قدرمطلق خطای اوست.

(الف) جدولی بسازید که نه مقدار ممکن تابع زیان را نشان دهد.

(ب) فهرست نه تابع تصمیم ممکن را بنویسید و جدولی بسازید که کلیهٔ مقادیر تابع مخاطرهٔ متناظر را نشان دهد.

(ج) نشان دهید که پنج‌تا از تابعهای تصمیم بالا قابل قبول نیستند، و نشان دهید که مطابق ملاک مینیماکس، تابعهای تصمیم باقی‌مانده همه به یک اندازه خوب‌اند.

(د) چه تابع تصمیمی بر طبق ملاک بیزی بهترین است، در صورتی که سه مقدار ممکن پارامتر θ همشانس تلقی شوند.

۲۸.۹ آماردانی باید بر مبنای دو مشاهده تصمیم بگیرد که آیا پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای $\frac{1}{4}$ است یا $\frac{1}{2}$؛ زیان او (جریمه‌ای که از اجرت او کسر می‌شود) در صورتی که تصمیم او غلط باشد، ۱۶۰ دلار است.

(الف) جدولی بسازید که چهار مقدار ممکن تابع زیان را نشان دهد.

(ب) فهرست هشت تابع تصمیم ممکن را بنویسید و جدولی بسازید که کلیهٔ مقادیر تابع مخاطرهٔ متناظر را نشان دهد.

(ج) نشان دهید که سه‌تا از تابعهای تصمیم بالا قابل قبول نیستند.

(د) تابع تصمیمی را که بر طبق ملاک مینیماکس بهترین است، پیدا کنید.

(هـ) تابع تصمیمی را پیدا کنید که بر طبق ملاک بیزی بهترین باشد، در صورتی که احتمالهای منسوب به $\theta = \frac{1}{4}$ و $\theta = \frac{1}{2}$ به‌ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$ باشند.

۲۹.۹ کارخانه‌داری یک قلم کالا متشکل از دو قطعه تولید می‌کند که برای درست کار کردن این قلم کالا، هر دو قطعه باید کار کنند. هزینهٔ پس فرستادن هر قلم کالا به کارخانه‌دار به‌منظور تعمیر آن، α دلار است، هزینهٔ وارسی یکی از قطعات β دلار است، و هزینهٔ تعمیر یک قطعهٔ معیوب φ دلار است. وی می‌تواند هر قلم کالا را بدون وارسی به بازار بفرستد و تضمین کند که این قلم کالا را در صورت درست کار نکردن، در کارخانهٔ خود کاملاً تعمیر خواهد کرد؛ وی می‌تواند هر دو قطعه را وارسی کند و در صورت لزوم آنها را تعمیر کند؛ یا می‌تواند به تصادف یکی از قطعات را وارسی کند و در صورت کار کردن، آن قلم را با تضمین اولیه به بازار بفرستد، یا آن را تعمیر کند و قطعهٔ دیگر را هم وارسی کند.

(الف) جدولی بسازید که امید زیانهای کارخانه‌دار را، متناظر با سه «استراتژی» او و سه «وضعیت» طبیعت که، ۰، ۱، یا ۲ تا از قطعات کار نکنند، نشان دهد.

(ب) در صورتی که $\alpha = ۲۵$ دلار و $\varphi = ۱۰$ دلار، و کارخانه‌دار بخواهد که ماکسیمم امید زیانهای خود را مینیمم کند، چه کار باید بکند؟

(ج) اگر $\alpha =$ ۱۰ دلار، $\beta =$ ۱۲ دلار، $\varphi =$ ۳۰ دلار، و کارخانه‌دار حس کند که احتمالهای معیوب بودن ۰، ۱، و ۲ قطعه به‌ترتیب برابرند، با ۷ر۰، ۲ر۰، ۱ر۰، برای مینیمم کردن مخاطرهٔ بیزی چه باید بکند؟

مراجع

برخی مطالب نسبتاً مقدماتی دربارهٔ نظریهٔ بازیها و نظریهٔ تصمیم را می‌توان درکتابهای زیر یافت

CHERNOFF, H., and MOSES, L. E., *Elementary Decision Theory*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, Inc. (Republication of 1959 edition),

DRESHER, M., *Games of Strategy: Theory and Applications*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1961,

HAMBURG, M. *Statistical Analysis for Decision Making*, 4th ed. Orlando, Fla.: Harcourt Brace Jovanovich, 1988,

MCKINSEY, J. C. C., *Introduction to the Theory of Games*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952,

OWEN, G., *Game Theory*. Philadelphia: W. B. Saunders Company, 1968,

WILLIAMS, J. D., *The Compleat Strategyst*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954,

و بحثهای پیشرفته‌تر را می‌توان درکتابهای زیر یافت

BICKEL, P. J., and DOKSUM, K. A., *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1977,

FERGUSON, T. S., *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach*. New York: Academic Press, Inc., 1967,

WALD, A., *Statistical Decision Functions*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

۱۰

برآورد: نظریه

۱.۱۰ مقدمه

مسائل استنباط آماری، به‌طور سنتی، به **مسائل برآورد** و **آزمون فرض** تفکیک شده‌اند. گرچه در واقع کلیهٔ این مسائل، اساساً مسائل تصمیم‌اند، و بنابراین می‌توان آنها را به‌کمک رهیافت یکپارچه شده‌ای که در فصل قبل ارائه شد رفع و رجوع کرد. وجه تمایز عمده آن است که در مسائل برآورد، باید مقداری از پارامتر (یا مقدارهای چندین پارامتر) را از بین پیوستار شقهای ممکن تعیین کنیم، در حالی‌که در آزمون فرض باید تصمیم بگیریم که آیا مقداری مشخص

یا مجموعه‌ای از مقادیر یک پارامتر (یا مقدارهای چندین پارامتر) را بپذیریم یا رد کنیم.

اگر مقدار یک آماره را برای برآورد کردن پارامتر یک جامعه به‌کار بریم، این کار را **برآورد نقطه‌ای** می‌نامیم و به مقدار این آماره، برآورد نقطه‌ای پارامتر اطلاق می‌کنیم. مثلاً اگر مقداری از $\overline{X}$ را برای برآورد میانگین جامعه، نسبت نمونه‌ای مشاهده شده را برای برآورد پارامتر θی جامعهٔ دوجمله‌ای، یا مقدار S^2 را برای برآورد واریانس یک جامعه به‌کار بریم، در هر مورد یک برآورد نقطه‌ای پارامتر مورد بحث را به‌کار می‌بریم. این برآوردها برآورد نقطه‌ای نامیده می‌شوند زیرا در هر مورد یک عدد تک، یا تک‌نقطه‌ای بر محور حقیقی را برای برآورد این پارامترها به‌کار می‌بریم.

متناظراً خود آماره‌ها را **برآوردکنندهٔ نقطه‌ای** می‌نامیم. مثلاً می‌توان از $\overline{X}$ به‌عنوان یک برآوردکنندهٔ نقطه‌ای μ استفاده کرد که در این صورت $\overline{x}$ یک برآورد نقطه‌ای پارامتر است. به همین نحو، می‌توان از S^2 به‌عنوان یک برآوردکنندهٔ نقطه‌ای σ^2 استفاده کرد که در این صورت s^2 یک برآورد نقطه‌ای این پارامتر است. در اینجا از کلمهٔ «نقطه» برای ایجاد تمایز بین برآوردکننده‌ها و برآوردها و **برآوردکننده‌های فاصله‌ای** یا **برآوردهای فاصله‌ای** که در فصل ۱۱ ارائه خواهیم کرد، استفاده می‌کنیم.

چون برآوردکننده‌ها متغیرهای تصادفی‌اند، یکی از مسائل اصلی برآورد نقطه‌ای مطالعهٔ توزیعهای نمونه‌گیری آنهاست. به‌عنوان مثال، وقتی واریانس یک جامعه را برمبنای یک نمونهٔ تصادفی برآورد می‌کنیم، به‌ندرت می‌توانیم انتظار داشته باشیم که مقدار S^2 واقعاً برابر σ^2 شود، ولی دست‌کم، دانستن اینکه می‌توانیم انتظار نزدیکی به این مقدار را داشته باشیم، سبب آسودگی خاطر خواهد بود. همچنین، اگر لازم باشد که بین یک میانگین نمونه‌ای و یک میانهٔ نمونه‌ای یکی را برآورد پارامتر یک جامعه انتخاب کنیم، از جمله مهم است بدانیم که آیا نزدیکی مقدار $\overline{X}$ به مقدار واقعی محتملتر است یا مقداری که از $\widetilde{X}$ حاصل می‌شود.

بنابراین خواص گوناگون برآوردکننده‌ها را می‌توان مورد استفاده قرار داد تا تصمیم گرفت که کدام یک از برآوردکننده‌ها در وضعیت مفروضی مناسبتر از همه است، کدام یک ما را در معرض کمترین مخاطره قرار خواهد داد، کدام یک به ما بیشترین اطلاعات را، با کمترین هزینه خواهد داد، و الی‌آخر. آن عده از خواص برآوردکننده‌ها را که در بخشهای ۲.۱۰ تا ۶.۱۰ مورد بحث قرار می‌دهیم، عبارت‌اند از **نااریبی**، **کمترین واریانس**، **کارآیی**، **سازگاری**، **بسندگی**، و **نیرومندی**.

۲.۱۰ برآوردکننده‌های نااریب

همچنان که در صفحهٔ ۳۳۶ ملاحظه کردیم، تابعهای تصمیم بی‌کاست موجود نیستند و این امر در ارتباط با مسائل برآورد بدان معنی است که برآوردکنندهٔ بی‌کاستی موجود نیست که همواره به جواب درست بینجامد. بنابراین منطقی است که از یک برآوردکننده انتظار داشته باشیم که دست‌کم به‌طور متوسط واجد چنین خاصیتی باشد؛ یعنی اینکه امید ریاضی آن برابر با پارامتری باشد که باید برآورد شود. اگر چنین باشد، برآوردکننده را نااریب می‌نامند؛ در غیر این صورت آن را اریب می‌نامند. به‌طور صوری

تعریف ۱.۱۰ برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\Theta}$ را یک **برآوردکنندهٔ ناریب** پارامتر θ نامند اگر و تنها اگر $E(\hat{\Theta}) = \theta$.

در زیر، چند مثال از برآوردکننده‌های ناریب و نیز اریب، داده می‌شود.

مثال ۱.۱۰
اگر X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد، نشان دهید که نسبت نمونه‌ای، $\frac{X}{n}$، برآوردکنندهٔ نااریبی برای پارامتر θ است.

حل. چون $E(X) = n\theta$، نتیجه می‌شود که

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{۱}{n} \cdot E(X) = \frac{۱}{n} \cdot n\theta = \theta$$

▲

مثال ۲.۱۰
نشان دهید که بجز وقتی $\theta = \frac{۱}{۲}$، برآوردکنندهٔ مینیماکس پارامتر θی دوجمله‌ای که در صفحهٔ ۳۳۸ داده شده، اریب است.

حل. چون $E(X) = n\theta$، نتیجه می‌شود که در حالت کلی

$$E\left(\frac{X + \frac{۱}{۲}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right) = \frac{E(X + \frac{۱}{۲}\sqrt{n})}{n+\sqrt{n}} = \frac{n\theta + \frac{۱}{۲}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$$

و به‌سادگی می‌توان دید که این کمیت برابر θ نیست مگر اینکه $\theta = \frac{۱}{۲}$. ▲

مثال ۳.۱۰
اگر $X_۱$، $X_۲$، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با چگالی

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\delta)} & x > \delta \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، نشان دهید که $\overline{X}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای δ است.

حل. چون میانگین جامعه عبارت است از

$$\mu = \int_{\delta}^{\infty} x \cdot e^{-(x-\delta)} dx = ۱ + \delta$$

از قضیهٔ ۶.۸ نتیجه می‌شود که $E(\overline{X}) = 1 + \delta \neq \delta$ و بنابراین $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ اریب δ است. ▲

وقتی $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ اریب θ باشد، ممکن است دانستن میزان اریبی مورد توجه باشد که با عبارت

$$b(\theta) = E(\hat{\Theta}) - \theta$$

داده می‌شود. بنابراین، برای مثال ۲.۱۰، اریبی برابر

$$\frac{n\theta + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} - \theta = \frac{\frac{1}{2} - \theta}{\sqrt{n} + 1}$$

است و می‌توان ملاحظه کرد که وقتی به $\frac{1}{2}$ نزدیک می‌شود و نیز.وقتی n بزرگ است، مقدار آن روبه کاهش دارد، در واقع $\lim\limits_{n\to\infty} b(\theta) = 0$ و گوییم که برآوردکننده، **مجانباً نااریب** است.

در مورد مثال ۳.۱۰، اریبی برابر $(1 + \delta) - \delta = 1$ است، اما در اینجا می‌توانیم کاری در مورد آن صورت دهیم. چون $E(\overline{X}) = 1 + \delta$، نتیجه می‌شود که $E(\overline{X} - 1) = \delta$ و بنابراین $\overline{X} - 1$ یک برآوردکنندهٔ نااریب δ است. مثال زیر، موردی دیگر است که در آن اصلاح جزئی برآوردکننده‌ای، منجر به برآوردکنندهٔ دیگری می‌شود که نااریب است.

مثال ۴.۱۰

اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = 0$ باشد نشان دهید که بزرگترین مقدار نمونه (یعنی nامین آمارهٔ ترتیبی، Y_n) برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر β است. همچنین، این برآوردکننده را اصلاح کنید تا نااریب شود.

حل. با قرار دادن در فرمول مربوط به $g_n(y_n)$ در صفحهٔ ۳۱۴، نتیجه می‌گیریم که توزیع نمونه‌گیری Y_n عبارت از

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= n \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \left(\int_0^{y_n} \frac{1}{\beta} dx \right)^{n-1} \\ &= \frac{n}{\beta^n} \cdot y_n^{n-1} \end{aligned}$$

برای $0 < y_n < \beta$ است و در سایر جاها $g_n(y_n) = 0$، و بنابراین

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{n}{\beta^n} \cdot \int_0^{\beta} y_n^n dy_n \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \beta \end{aligned}$$

در نتیجه، $E(Y_n) \neq \beta$ و nامین آمارهٔ ترتیبی، یک برآوردکنندهٔ اریب پارامتر β است. اما چون

$$E\left(\frac{n+۱}{n}\cdot Y_n\right) = \frac{n+۱}{n}\cdot\frac{n}{n+۱}\cdot\beta$$
$$= \beta$$

نتیجه می‌شود که $\frac{n+۱}{n}$ ضرب‌در مقدار بزرگترین آمارهٔ نمونه‌ای، یک برآوردکنندهٔ نااریب پارامتر β است. ▲

پس از بحث نااریبی به‌عنوان خاصیتی مطلوب برای برآوردکننده‌ها، حال می‌توانیم توضیح دهیم که چرا در تعریف واریانس نمونه‌ای، به‌جای تقسیم بر n بر $n-۱$ تقسیم کرده‌ایم ـ با این کار $S^۲$ یک برآورد نااریب $\sigma^۲$ برای نمونه‌های تصادفی استخراج شده از جامعه‌های نامتناهی می‌شود.

قضیهٔ ۱۰.۱ اگر $S^۲$ واریانس یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی با واریانس متناهی $\sigma^۲$ باشد، در این صورت $E(S^۲) = \sigma^۲$.

برهان. بنابر تعریف ۲.۸

$$\begin{aligned}E(S^۲) &= E\left[\frac{۱}{n-۱}\cdot\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\overline{X})^۲\right]\\ &= \frac{۱}{n-۱}\cdot E\left[\sum_{i=۱}^{n}\{(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\}^۲\right]\\ &= \frac{۱}{n-۱}\cdot\left[\sum_{i=۱}^{n}E\{(X_i-\mu)^۲\}-n\cdot E\{(\overline{X}-\mu)^۲\}\right]\end{aligned}$$

بنابراین، چون $E\{(X_i-\mu)^۲\} = \sigma^۲$ و $E\{(\overline{X}-\mu)^۲\} = \frac{\sigma^۲}{n}$، نتیجه می‌شود که

$$E(S^۲) = \frac{۱}{n-۱}\cdot\left[\sum_{i=۱}^{n}\sigma^۲ - n\cdot\frac{\sigma^۲}{n}\right] = \sigma^۲$$

■

گرچه $S^۲$ برآوردکننده‌ای نااریب برای واریانس یک جامعهٔ نامتناهی است، ولی برآوردکنندهٔ نااریب یک جامعهٔ متناهی نیست و در هیچ حالتی S برآوردکنندهٔ نااریب σ نیست. اریبی S به‌عنوان برآوردکننده‌ای برای σ، از جمله در کتاب کیپینگ[1]، که در بین مراجع پایان فصل فهرست شده، مورد بحث قرار گرفته است.

1. E. S. Keeping

بحث پاراگراف قبل، یکی از مشکلات مرتبط با مفهوم نااریبی را توصیف می‌کند. این خاصیت تحت تبدیلهای تابعی، پایدار نمی‌ماند؛ یعنی، اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکنندهٔ نااریب برای θ باشد، الزاماً نتیجه نمی‌شود که $\omega(\hat{\Theta})$ یک برآوردکنندهٔ نااریب $\omega(\theta)$ است. مشکل دیگری، مرتبط با مفهوم نااریبی آن است که برآوردکننده‌های نااریب لزوماً یکتا نیستند. مثلاً، در مثال ۶.۱۰، خواهیم دید که $\frac{n+1}{n} \cdot Y_n$، تنها برآوردکنندهٔ نااریب پارامتر βی مثال ۴.۱۰ نیست، و در تمرین ۸.۱۰ خواهیم دید که $\overline{X} - 1$ تنها برآوردکنندهٔ نااریب پارامتر δی مثال ۳.۱۰ نیست.

۳.۱۰ کارآیی

اگر قرار باشد که بین چندین برآوردکنندهٔ نااریب یکی را انتخاب کنیم، معمولاً آن برآوردکننده را انتخاب می‌کنیم که توزیع نمونه‌گیری آن دارای کمترین واریانس باشد. ما قبلاً به این مطلب در صفحهٔ ۳۱۵ اشاره کردیم که در آن، با مقایسهٔ میانهٔ نمونه با میانگین نمونه‌ای، گفتیم که برآوردکنندهٔ با واریانس کمتر، «قابل اعتمادتر» است.

برای تحقیق اینکه برآوردکنندهٔ نااریب مفروضی دارای کوچکترین واریانس ممکن است، یعنی اینکه آیا یک **برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس** (بهترین برآوردکنندهٔ نااریب) است یا نه، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب θ باشد، می‌توان نشان داد که تحت شرایط بسیار کلی (که مراجعی برای آنها در صفحهٔ ۳۸۳ داده شده) واریانس $\hat{\Theta}$ باید در نامساوی

$$\operatorname{var}(\hat{\Theta}) \geq \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

صدق کند، که در آن $f(x)$ مقدار چگالی جامعه در x، و n اندازهٔ نمونهٔ تصادفی است. این نامساوی، نامساوی **کرامر-رائو**[1]، به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود.

قضیهٔ ۲.۱۰ اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب θ باشد و

$$\operatorname{var}(\hat{\Theta}) = \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

آنگاه، $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس θ است.

در اینجا، کمیت واقع در مخرج کسر را **اطلاع** دربارهٔ θ نامند که به‌وسیلهٔ نمونه تأمین می‌شود (همچنین تمرین ۹.۱۰ را ببینید). بنابراین، هرچه واریانس کمتر باشد، اطلاع بیشتر است.

1. Cramér-Rao

مثال ۵.۱۰
نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب باکمترین واریانس، برای میانگین μی جامعه‌ای نرمال است.

حل. چون

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

نتیجه می‌شود که

$$\ln f(x) = -\ln\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

به‌طوری که

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

و بنابراین

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \mu}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot 1 = \frac{1}{\sigma^2}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \mu}\right)^2\right]} = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

و چون $\overline{X}$ نااریب است و طبق قضیهٔ ۱.۸، $\text{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$، نتیجه می‌شود که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس برای μ است. ▲

درست نیست اگر از این مثال چنین نتیجه بگیریم که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس برای میانگین μی هر جامعه است. در واقع از خواننده در تمرین ۳۰.۱۰ خواسته خواهد شد تا تحقیق کند که برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $n = 3$ از جامعهٔ یکنواخت پیوسته با $\alpha = \theta - \frac{1}{2}$ و $\beta = \theta + \frac{1}{2}$ چنین حکمی درست نیست.

همان‌طورکه متذکر شده‌ایم، برآوردکننده‌های نااریب معمولاً برحسب واریانسهایشان باهم مقایسه می‌شوند. اگر $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ دو برآوردکنندهٔ نااریب پارامتر θ باشند و واریانس $\hat{\Theta}_1$ کوچکتر از واریانس $\hat{\Theta}_2$ باشد، گوییم که $\hat{\Theta}_1$ **به‌طور نسبی کارآتر** از $\hat{\Theta}_2$ است. همچنین از نسبت

$$\frac{\text{var}(\hat{\Theta}_1)}{\text{var}(\hat{\Theta}_1)}$$

به‌عنوان اندازه‌ای برای کارآیی $\hat{\Theta}_2$ نسبت به $\hat{\Theta}_1$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۶.۱۰

در مثال ۴.۱۰ نشان دادیم که اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = 0$ باشد، آنگاه $\frac{n+1}{n} \cdot Y_n$ یک برآوردکنندهٔ ناریب β است.

(الف) نشان دهید که $2\overline{X}$ نیز یک برآوردکنندهٔ ناریب β است.

(ب) کارآیی این دو برآوردکنندهٔ β را مقایسه کنید.

حل. (الف) چون میانگین جامعه، بنابر قضیهٔ ۱.۶ برابر، $\mu = \frac{\beta}{2}$ است، از قضیهٔ ۱.۸، نتیجه می‌شود که $E(\overline{X}) = \frac{\beta}{2}$ و بنابراین $E(2\overline{X}) = \beta$. در نتیجه $2\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ ناریب β است.

(ب) ابتدا باید واریانس دو برآوردکننده را پیدا کنیم. با استفاده از توزیع نمونه‌گیری Y_n و عبارت مربوط به $E(Y_n)$ که در مثال ۴.۱۰ داده شده است، به‌دست می‌آوریم

$$E(Y_n^2) = \frac{n}{\beta^2} \cdot \int_0^\beta y_n^{n+1} dy_n = \frac{n}{n+2} \cdot \beta^2$$

و

$$\operatorname{var}(Y_n) = \frac{n}{n+2} \cdot \beta^2 - \left(\frac{n}{n+1} \cdot \beta\right)^2$$

با واگذاری جزئیات بر عهدهٔ خواننده در تمرین ۲۷.۱۲، بنابراین می‌توان نشان داد که

$$\operatorname{var}\left(\frac{n+1}{n} \cdot Y_n\right) = \frac{\beta^2}{n(n+2)}$$

چون واریانس جامعه بنابر قضیهٔ ۱.۶ برابر $\sigma^2 = \frac{\beta^2}{12}$ است، از قضیهٔ ۱.۸ نتیجه می‌شود که $\operatorname{var}(\overline{X}) = \frac{\beta^2}{12n}$ و بنابراین

$$\operatorname{var}(2\overline{X}) = 4 \cdot \operatorname{var}(\overline{X}) = \frac{\beta^2}{3n}$$

در نتیجه، کارآیی $2\overline{X}$ نسبت به $\frac{n+1}{n} \cdot Y_n$ با عبارت

$$\frac{\operatorname{var}\left(\frac{n+1}{n} \cdot Y_n\right)}{\operatorname{var}(2\overline{X})} = \frac{\frac{\beta^2}{n(n+2)}}{\frac{\beta^2}{3n}} = \frac{3}{n+2}$$

داده می‌شود و می‌توان ملاحظه کرد که برای $n > 1$، برآوردکنندهٔ مبتنی بر nامین آمارهٔ ترتیبی، بسیار کارآتر از دیگری است. مثلاً برای $n = 10$، کارآیی نسبی تنها ۲۵ درصد و برای $n = 25$، تنها ۱۱ درصد است. ▲

مثال ۷.۱۰
در برآورد میانگین μی یک جامعهٔ نرمال بر مبنای یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ $۲n + ۱$، کارآیی میانه نسبت به میانگین چیست؟

حل. از قضیهٔ ۱.۸ می‌دانیم که $\overline{X}$ نااریب است و

$$\mathrm{var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^۲}{۲n+۱}$$

تا آنجاکه به $\widetilde{X}$ مربوط است، بنابه تقارن توزیع نرمال حول میانگین، نااریب است، و از بحث بعد از قضیهٔ ۱۷.۸ می‌دانیم که برای نمونه‌های بزرگ

$$\mathrm{var}(\widetilde{X}) = \frac{\pi\sigma^۲}{۴n}$$

بنابراین، برای نمونه‌های بزرگ، کارآیی میانه نسبت به میانگین تقریباً برابر

$$\frac{\mathrm{var}(\overline{X})}{\mathrm{var}(\widetilde{X})} = \frac{\frac{\sigma^۲}{۲n+۱}}{\frac{\pi\sigma^۲}{۴n}} = \frac{۴n}{\pi(۲n+۱)}$$

است و **کارآیی مجانبی** میانه نسبت به میانگین عبارت از

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴n}{\pi(۲n+۱)} = \frac{۲}{\pi}$$

یا حدود ۶۴ درصد است. ▲

نتیجهٔ مثال قبل را می‌توان چنین تعبیر کرد: در نمونه‌های بزرگ، برای برآورد μ، میانگین فقط به ۶۴ درصد مشاهداتی نیاز دارد که مورد نیاز میانه است برای اینکه قابلیت اعتماد آنها یکی باشد.

توجه به این نکته اهمیت دارد که ما بحث خود دربارهٔ کارآیی نسبی را به برآوردکننده‌های نااریب محدود کرده‌ایم. اگر برآوردکننده‌های اریب را در نظر می‌گرفتیم، همواره می‌توانستیم وجود برآوردکننده‌ای با واریانس صفر را با برابر گرفتن همهٔ مقادیر آن با عدد ثابتی صرف‌نظر از داده‌های به‌دست آمده، تضمین کنیم. بنابراین اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکنندهٔ نااریب پارامتر θ نباشد، بهتر است که برای قضاوت دربارهٔ محاسن آن و مقایسهٔ کارآییها به‌جای واریانس $\hat{\Theta}$ بر مبنای **میانگین مربع خطا** یعنی $E[(\hat{\Theta}-\theta)^۲]$ به‌جای واریانس $\hat{\Theta}$ عمل کنیم.

تمرینها

۱.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، … ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ باشد، چه شرطی را باید بر ثابتهای $a_۱$، $a_۲$، … ، a_n اعمال کرد به‌طوری که

$$a_۱X_۱ + a_۲X_۲ + \cdots + a_nX_n$$

برآوردکننده‌ای نااریب برای μ باشد؟

۲.۱۰ اگر $\hat{\Theta}_۱$ و $\hat{\Theta}_۲$ برآوردکننده‌های نااریب پارامتر θ باشند، چه شرطی باید بر ثابتهای $k_۱$ و $k_۲$ اعمال کرد به‌طوری که

$$k_۱\hat{\Theta}_۱ + k_۲\hat{\Theta}_۲$$

نیز یک برآوردکنندهٔ نااریب θ باشد؟

۳.۱۰ از فرمول مربوط به توزیع نمونه‌گیری $\tilde{X}$ در صفحهٔ ۳۱۴ استفاده کرده نشان دهید که برای متغیرهای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۳$، میانه، برآوردکننده‌ای نااریب برای پارامتر θی جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = \theta - \frac{۱}{۲}$ و $\beta = \theta + \frac{۱}{۲}$ است.

۴.۱۰ از نتیجهٔ مثال ۴.۸ استفاده کرده نشان دهید که برای نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۳$، میانه، برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر θی جامعهٔ نمایی است.

۵.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای که دارای میانگین معلوم μ و واریانس متناهی $\sigma^۲$ است، نشان دهید که

$$\frac{۱}{n} \cdot \sum_{i=۱}^{n}(X_i - \mu)^۲$$

برآوردکننده‌ای نااریب برای $\sigma^۲$ است.

۶.۱۰ از نتایج تمرین ۱.۸ استفاده کرده نشان دهید که $\overline{X}^۲$ یک برآوردکنندهٔ مجانباً نااریب $\mu^۲$ است.

۷.۱۰ نشان دهید که $\frac{X+۱}{n+۲}$ برآوردکننده‌ای اریب برای پارامتر θی دوجمله‌ای است. آیا این برآوردکننده، مجانباً نااریب است؟

۸.۱۰ با رجوع به مثال ۳.۱۰، یک برآوردکنندهٔ نااریب برای σ بر مبنای کوچکترین مقدار نمونه (یعنی، مبتنی بر اولین آمارهٔ ترتیبی، $Y_۱$) پیدا کنید.

۹.۱۰ با رجوع به مثال ۴.۱۰، یک برآوردکنندهٔ نااریب برای β مبتنی بر کوچکترین مقدار نمونه (یعنی، مبتنی بر اولین آمارهٔ نمونه‌ای، $Y_۱$) پیدا کنید.

۱۰.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، … ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال با $\mu = ۰$ باشد، نشان دهید که

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{X_i^۲}{n}$$

یک برآوردکنندهٔ نااریب $\sigma^۲$ است.

۱۱.۱۰ اگر X متغیری تصادفی دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ باشد، نشان دهید که $n \cdot \frac{X}{n} \cdot \left(1 - \frac{X}{n}\right)$ برآوردکننده‌ای اریب برای واریانس X است.

۱۲.۱۰ اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n، بدون جایگذاری، از جامعهٔ متناهی متشکل از اعداد صحیح مثبت ۱، ۲، . . . ، k اختیار شود، نشان دهید که

(الف) توزیع نمونه‌گیری nامین آمارهٔ ترتیبی، Y_n، با عبارت

$$f(y_n) = \frac{\binom{y_n - 1}{n-1}}{\binom{k}{n}}$$

برای $y_n = n, \ldots, k$ داده می‌شود.

(ب) $\frac{n+1}{n} \cdot Y_n - 1$ یک برآوردکننده نااریب k است. همچنین تمرین ۳۵.۱۰ را ببینید.

۱۳.۱۰ نشان دهید که اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای θ باشد و $\operatorname{var}(\hat{\Theta}) \neq 0$، آنگاه $\hat{\Theta}^2$ یک برآوردکنندهٔ نااریب θ^2 نیست.

۱۴.۱۰ نشان دهید که نسبت نمونه‌ای $\frac{X}{n}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس برای توزیع دوجمله‌ای θ است. (راهنمایی: $\frac{X}{n}$ را به‌عنوان میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای برنولی با پارامتر θ تلقی کنید.)

۱۵.۱۰ نشان دهید که میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n، یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس برای پارامتر λی توزیع پواسون است.

۱۶.۱۰ اگر $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ برآوردکننده‌های نااریب مستقل پارامتر مفروض θ باشند و داشته باشیم $\operatorname{var}(\hat{\Theta}_1) = 3\operatorname{var}(\hat{\Theta}_2)$، مقادیر ثابت a_1 و a_2 را پیدا کنید به‌طوری که $a_1\hat{\Theta}_1 + a_2\hat{\Theta}_2$ برآوردکننده‌ای نااریب با کمترین واریانس برای چنین ترکیب خطی باشد.

۱۷.۱۰ نشان دهید که میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نمایی، یک برآوردکنندهٔ نااریب با کمترین واریانس پارامتر θ است.

۱۸.۱۰ نشان دهید که برای برآوردکنندهٔ نااریب مثال ۴.۱۰، $\frac{n+1}{n} \cdot Y_n$، نامساوی کرامر-رائو برآورده نمی‌شود.

۱۹.۱۰ اطلاع دربارهٔ θ در نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n با عبارت

$$-n \cdot E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X)}{\partial \theta^2}\right]$$

نیز داده می‌شود که در آن $f(x)$ مقدار چگالی جامعه در x است، مشروط بر اینکه کرانهای ناحیه‌ای که برای آن $f(x) \neq 0$، به θ بستگی نداشته باشد. استخراج این فرمول مستلزم مراحل زیر است:

(الف) با مشتقگیری دو طرف

$$\int f(x)dx = 1$$

نسبت به θ، نشان دهید که با تعویض ترتیب انتگرالگیری و مشتقگیری

$$\int \frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta} \cdot f(x) dx = 0$$

(ب) با مشتقگیری دوباره نسبت به θ نشان دهید که

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln f(X)}{\partial \theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X)}{\partial \theta^2}\right]$$

۲۰.۱۰ مثال ۵.۱۰ را با استفاده از فرمول دیگری که در تمرین ۱۹.۱۰ برای اطلاع داده شده است، دوباره حل کنید.

۲۱.۱۰ اگر $\overline{X}_1$ میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ_1^2، و $\overline{X}_2$ میانگین یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس σ_2^2 باشد، و دو نمونه مستقل باشند نشان دهید که

(الف) $\omega \cdot \overline{X}_1 + (1 - \omega) \cdot \overline{X}_2$، که در آن $0 \le \omega \le 1$، یک برآوردکنندهٔ ناااریب μ است؛

(ب) واریانس این برآوردکننده مینیمم است وقتی که

$$\omega = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

۲۲.۱۰ با رجوع به تمرین ۲۱.۱۰، کارآیی برآوردکنندهٔ قسمت (الف) را با $\omega = \frac{1}{2}$ نسبت به این برآوردکننده با

$$\omega = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

پیدا کنید.

۲۳.۱۰ اگر $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ میانگینهای نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، نشان دهید که واریانس برآوردکنندهٔ ناااریب $\omega \cdot \overline{X}_1 + (1-\omega) \cdot \overline{X}_2$ مینیمم است وقتی که $\omega = \frac{n_1}{n_1+n_2}$.

۲۴.۱۰ با رجوع به تمرین ۲۳.۱۰، کارآیی برآوردکنندهٔ با $\omega = \frac{1}{2}$ را نسبت به برآوردکننده‌ای با $\omega = \frac{n_1}{n_1+n_2}$ پیدا کنید.

۲۵.۱۰ اگر X_1، X_2، X_3 یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ $n = 3$ از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، کارآیی نسبی برآوردکنندهٔ $\hat{\mu} = \frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$ نسبت به $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ چیست؟

۲۶.۱۰ اگر X_1 و X_2 نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n = 2$ از جامعه‌ای نمایی باشد، کارآیی $2Y_1$ را نسبت به $\overline{X}$ پیدا کنید. Y_1 اولین آمارهٔ ترتیبی است و $2Y_1$ و $\overline{X}$ هردو برآوردکننده‌های ناااریب پارامتر θ هستند.

۲۷.۱۰ درستی نتیجهٔ داده شده برای $\operatorname{var}\left(\frac{n+1}{n} \cdot Y_n\right)$ در مثال ۶.۱۰ را تحقیق کنید.

۲۸.۱۰ با مراجعه به مثال ۳.۱۰، در صفحهٔ ۳۴۷ نشان دادیم که $\overline{X} - 1$ برآوردکننده‌ای ناااریب برای δ

است، و در تمرین ۸.۱۰ از خواننده خواسته شد که برآوردکننده‌ای نااریب برای δ بر مبنای کوچکترین مقدار نمونه پیدا کند. کارآیی اولین برآوردکننده از این دو برآوردکننده را نسبت به دومی پیدا کنید.

۲۹.۱۰ با مراجعه به تمرین ۱۲.۱۰، نشان دهید که $۱ - ۲\overline{X}$ نیز یک برآوردکنندهٔ نااریب k است، و کارآیی این برآوردکننده را نسبت به برآوردکنندهٔ قسمت (ب) تمرین ۱۲.۱۰ به‌ازای

(الف) $n = ۲$؛

(ب) $n = ۳$

به‌دست آورید.

۳۰.۱۰ چون واریانسهای میانگین و میان‌برد با اضافه کردن مقدار ثابتی به هر یک از مشاهدات، تغییر نمی‌کنند، می‌توانیم این واریانسها را برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ ۳ از جامعهٔ یکنواخت

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \theta - \frac{۱}{۲} < x < \theta + \frac{۱}{۲} \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

با مراجعه به جامعهٔ یکنواخت زیر معین کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که برای این توزیع $E(X) = \frac{۱}{۲}$، $E(X^۲) = \frac{۱}{۳}$، و $\text{var}(X) = \frac{۱}{۱۲}$، به‌طوری که برای نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۳، $\text{var}(\overline{X}) = \frac{۱}{۳۶}$.

(ب) از نتایج تمرین ۶۷.۸ و ۷۳.۸ استفاده کنید (یا چگالیها و چگالی توأم لازم را استخراج کنید) و نشان دهید که برای یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ ۳ از این توزیع برای آماره‌های ترتیبی $Y_۱$ و $Y_۳$ داریم $E(Y_۱) = \frac{۱}{۴}$، $E(Y_۱^۲) = \frac{۱}{۱۰}$، $E(Y_۳) = \frac{۳}{۴}$، $E(Y_۳^۲) = \frac{۳}{۵}$، و $E(Y_۱Y_۳) = \frac{۱}{۵}$، به‌طوری که $\text{var}(Y_۱) = \frac{۳}{۸۰}$، $\text{var}(Y_۳) = \frac{۳}{۸۰}$، و $\text{cov}(Y_۱, Y_۳) = \frac{۱}{۸۰}$.

(ج) با استفاده از نتایج قسمت (ب) و قضیهٔ ۱۴.۴ نشان دهید که $E\left(\frac{Y_۱+Y_۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}$ و $\text{var}\left(\frac{Y_۱+Y_۳}{۲}\right) = \frac{۱}{۴۰}$، و بنابراین برای نمونه‌های تصادفی به‌اندازهٔ $n = ۳$ از جامعهٔ یکنواخت مفروض، میان‌برد نااریب و کارآتر از میانگین است.

۳۱.۱۰ نشان دهید که اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای اریب برای θ باشد، آنگاه

$$E[(\hat{\Theta} - \theta)^۲] = \text{var}(\hat{\Theta}) + [b(\theta)]^۲$$

۳۲.۱۰ اگر $\hat{\Theta}_۱ = \frac{X}{n}$، $\hat{\Theta}_۲ = \frac{X+۱}{n+۲}$، و $\hat{\Theta}_۳ = \frac{۱}{۳}$ برآوردکننده‌های پارامتر θی جامعه‌ای دوجمله‌ای با $\theta = \frac{۱}{۲}$ باشد، برای کدام مقدارهای n،

(الف) میانگین مربع خطای $\hat{\Theta}_۲$ کمتر از $\hat{\Theta}_۱$ است؟

(ب) میانگین مربع خطای $\hat{\Theta}_۳$ کمتر از واریانس $\hat{\Theta}_۱$ است؟

کاربردها

۳۳.۱۰ نمونه‌هایی تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌های نرمالی با میانگین μ و واریانسهای ۴ = σ_1^2 و ۹ = σ_2^2 استخراج شده‌اند. اگر ۲۶٫۰ = $\overline{x}_1$ و ۳۲٫۵ = $\overline{x}_2$، با استفاده از برآوردکننده‌های قسمت (ب) تمرین ۲۱.۱۰، μ را برآورد کنید.

۳۴.۱۰ نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 استخراج شده‌اند. اگر ۲۵ = n_1 و ۵۰ = n_2، ۲۷٫۶ = $\overline{x}_1$ و ۳۸٫۱ = $\overline{x}_2$، با استفاده از تمرین ۲۳.۱۰، μ را برآورد کنید.

۳۵.۱۰ ادارهٔ اطلاعات ارتش کشوری می‌داند که دشمنش، تانکهای جدیدی با شماره‌های سریال از ۱ تا k تولید کرده است. اگر سه دستگاه از این تانکها به غنیمت گرفته شوند و شماره‌های سریال آنها ۲۱۰، ۳۸، و ۱۵۵ باشد، از برآوردکنندهٔ قسمت (ب) تمرین ۱۲.۱۰ استفاده کرده μ را برآورد کنید.

۴.۱۰ سازگاری

در بخش قبل، فرض کردیم که واریانس یک برآوردکننده، یا میانگین مربع خطای آن، نشانهٔ خوبی از نوسانهای شانسی آن است. این واقعیت که این اندازه‌ها شاید حتی نتوانند ملاک خوبی برای این منظور باشند در مثال زیر تشریح می‌شود: فرض کنید که بخواهیم بر مبنای یک مشاهده، پارامتر θی جامعهٔ

$$f(x)=\omega\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2}+(1-\omega)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

به‌ازای $-\infty<x<\infty$ و $0<\omega<1$ را برآورد کنیم. آشکار است که این چگالی، ترکیبی از یک جامعهٔ نرمال با میانگین θ و واریانس σ^2 و یک چگالی کوشی (نگاه کنید به تمرین ۶.۶) با $\alpha=\theta$ و $\beta=1$ است. حال اگر ω خیلی نزدیک ۱ باشد، مثلاً، $\omega=1-10^{-100}$، و σ خیلی کوچک باشد، مثلاً، $\sigma=10^{-100}$، احتمال اینکه یک متغیر تصادفی با این توزیع مقداری اختیار کند که خیلی نزدیک به θ، و بنابراین برآوردکنندهٔ بسیار خوبی برای θ باشد، عملاً ۱ است. با این حال، چون واریانس توزیع کوشی موجود نیست، واریانس این برآوردکننده نیز موجود نخواهد بود.

مثال بالا تا حدودی غیرعادی است، ولی این واقعیت در آن مطرح می‌شود که باید توجه بیشتری به احتمالهای این پیشامدها بکنیم که برآوردکننده‌ها مقادیری نزدیک پارامترهایی که باید برآورد کنند، اختیار کنند. خواننده ممکن است به خاطر داشته باشد که قبلاً بحث مختصری دربارهٔ «نزدیکی» برآوردها در بخش ۴.۵ و ۲.۸ کردیم. با مبتنی کردن استدلال خود بر قضیهٔ چبیشف، در صفحهٔ ۱۸۹ نشان دادیم که وقتی $n\to\infty$، احتمال آنکه نسبت نمونه‌ای $\frac{X}{n}$ مقداری اختیار کند که با پارامتر توزیع دوجمله‌ای θ، اختلافی کمتر از ثابت دلخواه $c>0$ داشته باشد، به ۱ میل می‌کند. همچنین با استفاده از قضیهٔ چبیشف در بخش ۲.۸ نشان دادیم که وقتی $n\to\infty$، احتمال اینکه $\overline{X}$ مقداری اختیار کند که با μ، میانگین جامعهٔ مورد نمونه‌گیری، اختلافی کمتر از هر ثابت دلخواه $c>0$ داشته باشد، به ۱ میل می‌کند.

در هر دو مثال پاراگراف پیشین، عملاً مطمئن شدیم که، حداقل برای n بزرگ، برآوردکننده‌ها مقادیری اختیار می‌کنند که به پارامترهای مربوط خیلی نزدیک‌اند. این مفهوم «نزدیکی» در تعریف زیر از **سازگاری** تعمیم داده می‌شود.

تعریف ۲.۱۰ آمارهٔ $\hat{\Theta}$ یک **برآوردکنندهٔ سازگار** پارامتر θ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ثابت مثبت c

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\Theta} - \theta| < c) = ۱$$

توجه کنید که سازگاری یک **خاصیت مجانبی**، یعنی، خاصیت حدی یک برآوردکننده است؛ به زبان عادی، تعریف ۲.۱۰ می‌گوید که وقتی n به حد کافی بزرگ است، می‌توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکنندهٔ سازگار صورت می‌گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود. نوع همگرایی که با حدگیری در تعریف ۲.۱۰ توصیف می‌شود، عموماً **همگرایی در احتمال** نامیده می‌شود.

بنابراین بر مبنای قضیهٔ چبیشف در بخش ۴.۵ نشان داده‌ایم که $\frac{X}{n}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای پارامتر θی دوجمله‌ای است و در قضیهٔ ۲.۸ نشان داده‌ایم که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ سازگار میانگین جامعه‌ای با واریانس متناهی است. در عمل، اغلب می‌توانیم در مورد سازگار بودن برآوردکننده‌ای با استفاده از شرط بسندهٔ زیر حکم کنیم که در واقع پیامد فوری قضیهٔ چبیشف است.

قضیهٔ ۳.۱۰ اگر $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای نااریب برای پارامتر θ باشد و وقتی $n \to \infty$، $\operatorname{var}(\hat{\Theta}) \to ۰$، آنگاه $\hat{\Theta}$ برآوردکننده‌ای سازگار برای θ است.

مثال ۸.۱۰

نشان دهید که برای نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال، واریانس نمونه‌ای، $S^۲$، برآوردکننده‌ای سازگار برای $\sigma^۲$ است.

حل. چون $S^۲$، بنابر قضیهٔ ۱.۱۰، یک برآوردکنندهٔ نااریب $\sigma^۲$ است، تنها لازم است نشان دهیم که وقتی $n \to \infty$، $\operatorname{var}(S^۲) \to ۰$. با مراجعه به نتیجهٔ تمرین ۳۷.۸ (یا قضیهٔ ۱۱.۸ که این تمرین بر آن متکی است)، ملاحظه می‌کنیم که برای نمونه‌ای از یک جامعهٔ نرمال

$$\operatorname{var}(S^۲) = \frac{۲\sigma^۴}{n - ۱}$$

نتیجه می‌شود که وقتی $n \to \infty$، $\text{var}(S^2) \to 0$، و بنابراین نشان داده‌ایم که S^2 یک برآوردکنندهٔ سازگار واریانس جامعهٔ نرمال است. ▲

خوب است توجه کنیم که اگر در قضیهٔ ۳.۱۰، به‌جای «ناریب»، «مجانباً ناریب» را قرار دهیم، قضیه همچنان برقرار است. این مطلب را در مثال زیر نشان داده‌ایم.

مثال ۹.۱۰

با مراجعه به مثال ۳.۱۰، نشان دهید که کوچکترین مقدار نمونه (یعنی، اولین آمارهٔ ترتیبی Y_1)، یک برآوردکنندهٔ پارامتر δ است.

حل. با جایگذاری در فرمول صفحهٔ ۳۱۴ به‌جای $g_1(y_1)$، درمی‌یابیم که توزیع نمونه‌گیری Y_1 با عبارت

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= n \cdot e^{-(y_1-\delta)} \cdot \left[\int_{y_1}^{\infty} e^{-(x-\delta)}dx\right]^{n-1} \\ &= n \cdot e^{-n(y_1-\delta)} \end{aligned}$$

برای $y_1 > \delta$ و $g_1(y_1) = 0$ در سایر جاها داده می‌شود. بر مبنای این نتیجه، می‌توان به آسانی نشان داد که $E(Y_1) = \delta + \frac{1}{n}$ و بنابراین Y_1 یک برآوردکننده مجانباً ناریب δ است. به‌علاوه

$$\begin{aligned} P(|Y_1 - \delta| < c) &= P(\delta < Y_1 < \delta + c) \\ &= \int_{\delta}^{\delta+c} n \cdot e^{-n(y_1-\delta)}dy_1 \\ &= 1 - e^{-nc} \end{aligned}$$

چون $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-nc}) = 1$، از تعریف ۲.۱۰ نتیجه می‌شود که Y_1 یک برآوردکنندهٔ سازگار δ است. ▲

به‌طوری که در صفحهٔ ۳۶۰ متذکر شده‌ایم، قضیهٔ ۳.۱۰ شرطی بسنده برای سازگاری یک برآوردکننده است. این شرط یک شرط لازم نیست زیرا لزومی ندارد که برآوردکننده‌های سازگار، ناریب، یا حتی مجانباً ناریب باشند. این موضوع در تمرین ۴۴.۱۰ تشریح شده است.

۵.۱۰ بسندگی

برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\Theta}$ را بسنده می‌نامیم در صورتی که از همهٔ اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θی یک جامعه بهره‌برداری کند؛ یعنی، اگر تمام دانشی را که می‌توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه‌ها و ترتیب آنها به‌دست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهدهٔ مقدار آمارهٔ $\hat{\Theta}$ هم به‌دست آوریم.

این را می‌توان، به‌طور صوری، برحسب توزیع احتمال شرطی یا چگالی شرطی مقادیر نمونه به فرض $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می‌شود

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\hat{\theta}) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})} = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g(\hat{\theta})}$$

اگر این عبارت به θ بستگی داشته باشد، در این صورت مقادیر خاص X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n که $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ را به‌دست می‌دهند، برای برخی مقادیر θ محتملتر از سایر مقادیرند، و دانستن این مقادیر نمونه‌ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. از سوی دیگر، اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n که $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ را به‌دست می‌دهند، برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل‌اند، و دانستن این مقادیر نمونه‌ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف ۳.۱۰ آمارهٔ $\hat{\Theta}$ یک **برآوردکنندهٔ بسنده** پارامتر θ است اگر و تنها اگر به‌ازای هر مقدار $\hat{\Theta}$، توزیع احتمال شرطی یا چگالی شرطی نمونهٔ تصادفی X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n، به فرض $\hat{\Theta} = \hat{\theta}$ مستقل از θ باشد.

مثال ۱۰.۱۰

اگر X_1، X_2، $\ldots$ ، و X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ برنولی θ باشد، نشان دهید که

$$\hat{\Theta} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

یک برآوردکنندهٔ بسنده پارامتر θ است.

حل. بنابر تعریف ۲.۵

$$f(x_i; \theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad , \quad x_i = 0, 1$$

به‌طوری که به‌ازای $x_i = 0, 1$، $i = 1, 2, \ldots, n$،

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \\ &= \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i} \\ &= \theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \\ &= \theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \end{aligned}$$

همچنین چون

$$X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$$

یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ است، توزیع آن عبارت است از

$$b(x; n, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (۱ - \theta)^{n-x}$$

و از تکنیک تبدیل متغیر بخش ۳.۷ نتیجه می‌گیریم که

$$g(\hat{\theta}) = \binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (۱ - \theta)^{n - n\hat{\theta}} \qquad , \qquad \hat{\theta} = ۰, \frac{۱}{n}, \ldots, ۱$$

حال، با جایگذاری این تابع در فرمول $f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n | \hat{\theta})$ صفحهٔ ۳۶۰ به‌ازای $x_i = ۰, ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \hat{\theta})}{g(\hat{\theta})} &= \frac{f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)}{g(\hat{\theta})} \\
&= \frac{\theta^{n\hat{\theta}} (۱ - \theta)^{n - n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}} \theta^{n\hat{\theta}} (۱ - \theta)^{n - n\hat{\theta}}} \\
&= \frac{۱}{\binom{n}{n\hat{\theta}}} \\
&= \frac{۱}{\binom{n}{x}} \\
&= \frac{۱}{\binom{n}{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}}
\end{aligned}$$

آشکار است که این عبارت به θ بستگی ندارد و بنابراین نشان داده‌ایم که $\hat{\Theta} = \frac{X}{n}$ یک برآوردکنندهٔ بسنده برای θ است. ▲

مثال ۱۱.۱۰

نشان دهید که آمارهٔ $Y = \frac{۱}{۶}(X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳)$ برآوردکننده‌ای بسنده برای پارامتر θی جامعهٔ برنولی نیست.

حل. باید نشان دهیم که

$$f(x_۱, x_۲, x_۳ | y) = \frac{f(x_۱, x_۲, x_۳, y)}{g(y)}$$

به‌ازای برخی مقادیر X_1، X_2، و X_3 مستقل از θ نیست. بنابراین، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن $x_1 = 1$، $x_2 = 1$، و $x_3 = 0$. بنابراین $y = \frac{1}{6}(1 + 2 \times 1 + 3 \times 0) = \frac{1}{2}$ و

$$f(1, 1, 0|Y = \frac{1}{2}) = \frac{P\left(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, Y = \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y = \frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{f(1, 1, 0)}{f(1, 1, 0) + f(0, 0, 1)}$$

که در آن به‌ازای $x_i = 0, 1$، $i = 1, 2, 3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \theta^{x_1+x_2+x_3}(1 - \theta)^{3-(x_1+x_2+x_3)}$$

چون $f(1, 1, 0) = \theta^2(1 - \theta)$ و $f(0, 0, 1) = \theta(1 - \theta)^2$، نتیجه می‌شود که

$$f\left(1, 1, 0|Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{\theta^2(1 - \theta)}{\theta^2(1 - \theta) + \theta(1 - \theta)^2} = \theta$$

و می‌توان ملاحظه کرد که این احتمال شرطی به θ بستگی دارد. بنابراین نشان داده‌ایم که $Y = \frac{1}{6}(X_1 + 2X_2 + 3X_3)$ یک برآوردکنندهٔ بسنده برای پارامتر θی جامعهٔ برنولی نیست.▲

از آنجا که تحقیق در بسنده بودن یک برآوردکننده برای پارامتری مفروض از روی تعریف ۳.۱۰، کاری کسل‌کننده است، معمولاً آسانتر است که بررسی بسنده بودن آماره‌ای را بر مبنای قضیهٔ **تجزیه به عوامل** زیر قرار دهیم.

قضیهٔ ۴.۱۰ آمارهٔ $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ بسنده برای پارامتر θ است اگر و تنها اگر چگالی یا توزیع احتمال توأم نمونهٔ تصادفی را بتوان تجزیه کرد به‌طوری که

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) \cdot h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta}, \theta)$ تنها به $\hat{\theta}$ و θ بستگی دارد، و $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ به θ بستگی ندارد.

برهانی از این قضیه را می‌توان در اغلب کتابهای درسی پیشرفته‌تر، مثلاً کتاب هاگ و کرگ که در بین مراجع پایان فصل فهرست شده است، یافت. در اینجا نحوهٔ استفاده از قضیهٔ ۴.۱۰ را به‌کمک مثال زیر تشریح می‌کنیم.

مثال ۱۲.۱۰
نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ μ، میانگین جامعهٔ نرمال با واریانس معلوم σ^2 است.

حل. با استفاده از این واقعیت که

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

و اینکه

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})-(\mu-\overline{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-\mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu)^2\end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) = &\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}\right\} \\ &\times\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\right\}\end{aligned}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد $\overline{x}$ و به میانگین جامعه، μ، بستگی دارد، و دومین عامل شامل μ نیست. بنابراین، مطابق قضیهٔ ۴.۱۰، $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ μ، میانگین جامعهٔ نرمالی با واریانس معلوم σ^2 است. ▲

بر پایهٔ تعریف ۳.۱۰ و قضیهٔ ۴.۱۰، دو راه برای تحقیق اینکه آیا آماره‌ای مانند $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ پارامتر مفروضی است یا نه، عرضه کرده‌ایم. همان‌طور که قبلاً گفتیم معمولاً قضیهٔ تجزیه به عوامل به راه‌حل آسانتری منجر می‌شود، ولی برای نشان دادن اینکه $\hat{\Theta}$ بسنده نیست، تقریباً همواره آسانتر است که مطابق تعریف ۳.۱۰، آن‌طور که در مثال ۱۱.۱۰ تشریح شده است، عمل کنیم.

این بخش را با ذکر خاصیتی بسیار مهم از برآوردکننده‌های بسنده به پایان می‌بریم. اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ θ باشد، آنگاه هر تابع تک مقداری مانند $y = u(\hat{\theta})$، که شامل θ نیست، نیز یک برآوردکنندهٔ بسنده از θ، و بنابراین از $u(\theta)$ است مشروط بر اینکه $Y = u(\hat{\Theta})$ را بتوان حل کرد تا معکوس تک مقداری $\hat{\theta} = w(y)$ از آن به‌دست آید. این نتیجه از قضیهٔ ۴.۱۰ حاصل می‌شود زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = g[w(y), \theta]\cdot h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

که در آن $g[w(y), \theta]$ تنها به y و θ بستگی دارد. اگر این نتیجه را در مورد مثال ۱۰.۱۰، که در آن نشان دادیم که $\hat{\Theta} = \frac{X}{n}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ پارامتر θی برنولی است به‌کار بریم، نتیجه می‌شود که برآوردکنندهٔ $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ نیز یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ میانگین دوجمله‌ای $\mu = n\theta$ است.

۶.۱۰ نیرومندی

در سالهای اخیر، توجه خاصی به یک خاصیت آماری به‌نام **نیرومندی** مبذول شده است. این خاصیت، نشانگر میزان تأثیرات نامطلوبی است که با تخلف از فرضهای مبنایی، متوجه روشهای برآورد می‌شود. به‌عبارت دیگر، برآوردکننده‌ای را **نیرومند** می‌نامیم هرگاه توزیع نمونه‌گیری آن به‌طور جدی متأثر از تخلف از فرضها نباشد، چنین تخلّفهایی اغلب ناشی از دورافتاده‌هایی است که بر اثر خطاهای مستقیم انجام شده، مثلاً در رؤیت ابزارهای سنجش یا ثبت داده‌ها روی می‌دهند؛ یا معلول اشتباه در روشهای آزمایش است. این تخلفها ممکن است به طبیعت جامعه‌های نمونه‌گیری شده یا پارامترهای آنها نیز وابسته باشند. مثلاً در برآورد عمر مفید متوسط برخی قطعات الکترونیک، ممکن است گمان کنیم که از یک جامعهٔ نمایی نمونه می‌گیریم، در حالی‌که در واقع نمونه‌گیری از یک جامعهٔ وایبول است، یا هنگام برآورد درآمد متوسط گروه سنی معینی، ممکن است از روشی براساس این فرض استفاده کنیم که نمونه‌گیری از یک جامعهٔ نرمال است در حالی‌که در واقع جامعه (توزیع درآمد) به شدت چاوله است. همچنین در برآورد تفاضل بین وزنهای متوسط دو نوع قورباغه، تفاضل بین میانگینهای IQ [بهرهٔ هوشی] دو گروه نژادی، و به‌طور کلی تفاضل $\mu_2 - \mu_1$ بین میانگینهای دو جامعه، ممکن است فرض کنیم که دو جامعه دارای واریانسهای یکسان σ^2اند، در حالی‌که در واقع $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

آشکار است که پاسخ اغلب پرسشهای مربوط به نیرومندی، دشوار است؛ در واقع بخش عمدهٔ بیان بند قبل تا حدی نادقیق است. علی‌رغم همه بحثها، از «به‌طور جدی متأثر نشدن از» چه منظوری داریم، و وقتی صحبت از تخلف فرضهای مبنایی می‌کنیم، باید آشکار باشد که برخی تخلفها جدّیتر از سایرین‌اند. بنابراین وقتی پرسشهای مربوط به نیرومندی مطرح می‌شوند، با هر نوع دشواری اعم از ریاضی یا غیر آن روبه‌رو می‌شویم، و بخش عمدهٔ آنها را تنها می‌توان به‌کمک شبیه‌سازیهای کامپیوتری حل و فصل کرد. موضوع نیرومندی به اختصار دوباره در بخش ۱.۱۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تمرینها

۳۶.۱۰ از تعریف ۲.۱۰ استفاده کرده نشان دهید که Y_1، اولین آمارهٔ ترتیبی برآوردکننده‌ای سازگار برای پارامتر αی جامعه‌ای یکنواخت با $\beta = \alpha + 1$ است.

۳۷.۱۰ با مراجعه به تمرین ۳۶.۱۰، از قضیهٔ ۳.۱۰ استفاده کرده نشان دهید $Y_1 - \frac{1}{n+1}$ یک برآوردکنندهٔ سازگار پارامتر α است.

۳۸.۱۰ با مراجعه به جامعهٔ یکنواخت مثال ۴.۱۰، از تعریف سازگاری استفاده کرده نشان دهید

که Y_n، nامین آمارهٔ ترتیبی، یک برآوردکنندهٔ سازگار β است.

۳۹.۱۰ اگر X_1، X_2، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی باشد، نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ سازگار پارامتر θ است.

۴۰.۱۰ با مراجعه به تمرین ۳۹.۱۰، آیا X_n یک برآوردکنندهٔ سازگار پارامتر θ است؟

۴۱.۱۰ نشان دهید که برآوردکنندهٔ تمرین ۲۱.۱۰ سازگار است.

۴۲.۱۰ با جانشین کردن «مجانباً نااریب» به‌جای «نااریب» در تمرین ۳.۱۰، نشان دهید که $\frac{X+1}{n+2}$ یک برآوردکنندهٔ سازگار پارامتر دوجمله‌ای θ است.

۴۳.۱۰ با جانشین کردن «مجانباً نااریب» به‌جای «نااریب» در قضیهٔ ۳.۱۰، از این قضیه استفاده کرده تمرین ۳۸.۱۰ را دوباره حل کنید.

۴۴.۱۰ برای نشان دادن اینکه برآوردکننده‌ای می‌تواند سازگار باشد بدون اینکه نااریب یا حتی مجانباً نااریب باشد، شیوهٔ برآورد کردن زیر را در نظر بگیرید: برای برآورد میانگین جامعه‌ای با واریانس متناهی σ^2، ابتدا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n استخراج می‌کنیم. سپس به تصادف یکی از n قطعه کاغذ را که روی آنها شماره‌هایی از ۱ تا n نوشته شده استخراج می‌کنیم، و اگر شماره‌ای که استخراج می‌کنیم ۲، ۳، . . . ، یا n باشد، از آن به‌عنوان برآوردکننده‌ای از میانگین نمونهٔ تصادفی استفاده می‌کنیم؛ در غیر این صورت از برآورد n^2 استفاده می‌کنیم. نشان دهید که این برآوردکننده

(الف) سازگار است؛

(ب) نه نااریب است و نه مجانباً نااریب.

۴۵.۱۰ اگر X_1، X_2، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی باشد نشان دهید که $\overline{X}$ یک برآوردکنندهٔ بسنده برای پارامتر θ است.

۴۶.۱۰ اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که دارای توزیعهای دوجمله‌ای با پارامترهای θ و n_1، و θ و n_2 هستند، نشان دهید که $\frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ θ است.

۴۷.۱۰ در ارتباط با تمرین پیشین، آیا $\frac{X_1+2X_2}{n_1+2n_2}$ یک برآوردکنندهٔ بسنده برای θ است؟

۴۸.۱۰ در ارتباط با مثال ۴.۱۰ آیا nامین آمارهٔ ترتیبی، Y_n، یک برآوردکنندهٔ بسنده برای پارامتر β است؟

۴۹.۱۰ اگر X_1 و X_2 نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n = 2$ از توزیع پواسون باشد، نشان دهید که میانگین نمونه یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ پارامتر λ است.

۵۰.۱۰ اگر X_1، X_2، و X_3 نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = 3$ از جامعهٔ برنولی باشد، نشان دهید که $Y = X_1 + 2X_2 + X_3$ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ θ نیست. (راهنمایی: مقادیر خاص X_1، X_2، و X_3 را در نظر بگیرید.)

۵۱.۱۰ اگر X_1، X_2، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از توزیع هندسی باشد، نشان دهید که $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ یک برآوردکنندهٔ بسنده پارامتر θ است.

۵۲.۱۰ نشان دهید که برآوردکنندهٔ تمرین ۵.۱۰ یک برآوردکنندهٔ بسندهٔ واریانس جامعه‌ای نرمال با میانگین معلوم μ است.

۷.۱۰ روش گشتاورها

به‌طوری که طی این فصل دیده‌ایم، برای پارامتری واحد از جامعه، ممکن است برآوردکننده‌های متعددی وجود داشته باشند. بنابراین مناسب خواهد بود که روش، یا روشهایی کلی، در اختیار داشته باشیم که برآوردکننده‌هایی عاید کنند که تا حد ممکن، خواص متعدد مطلوبی داشته باشند. در این بخش و در بخش ۸.۱۰ دو مورد از چنین روشهایی را ارائه می‌کنیم. این دو روش عبارت‌اند از **روش گشتاورها**، که از لحاظ تاریخی یکی از قدیمیترین روشهاست و **روش درستنمایی ماکسیمم**. به‌علاوه، **برآورد بیزی** به اختصار در بخش ۹.۱۰ و روش دیگری، **روش کمترین مربعات**، در فصل ۱۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

روش گشتاورها متشکل از برابر گرفتن چند گشتاور اول جامعه با گشتاورهای متناظر یک نمونه، و بدین ترتیب به‌دست آوردن هر تعدادی معادلهٔ مورد نیاز است که پارامترهای مجهول جامعه از حل آنها به‌دست آیند.

تعریف ۴.۱۰ kامین گشتاور نمونه‌ای مجموعه‌ای از مشاهده‌ها مانند x_1، x_2، ... ، x_n میانگین توانهای kام آنهاست و آن را با m'_k نشان می‌دهند، به‌طور نمادی

$$m'_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$$

بنابراین، اگر جامعه‌ای دارای r پارامتر باشد، روش گشتاورها عبارت از حل دستگاه معادلات

$$m'_k = \mu'_k \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, r$$

برای r پارامتر جامعه است.

مثال ۱۳.۱۰

با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از یک جامعهٔ گاما، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمولهایی برای برآورد پارامترهای α و β به‌دست آورید.

حل. دستگاه معادلاتی که باید حل کنیم عبارت است از

$$m'_1 = \mu'_1 \quad , \quad m'_2 = \mu'_2$$

چون طبق قضیهٔ ۲.۶، $\mu'_1 = \alpha\beta$ و $\mu'_2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$، معادلات

$$m'_1 = \alpha\beta \quad , \quad m'_2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2$$

را به‌دست می‌آوریم، و با حل این دو معادله برحسب α و β، فرمولهای زیر برای برآورد دو پارامتر توزیع گاما به‌دست می‌آیند

$$\hat{\alpha} = \frac{(m_1')^2}{m_2' - (m_1')^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{m_2' - (m_1')^2}{m_1'}$$

چون $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = m_1'$ و $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = m_2'$، می‌توانیم برحسب مشاهدات اولیه، بنویسیم

$$\hat{\alpha} = \frac{n\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n\overline{x}}$$

▲

در مثال بالا، پارامترهای جامعهٔ خاصی را برآورد کردیم. با این حال توجه به این نکته اهمیت دارد که وقتی پارامترهای مورد برآورد، گشتاورهای جامعه‌اند، روش گشتاورها را می‌توان بدون اطلاع از ماهیت یا دانستن شکل تابعی جامعه به‌کار برد.

۸.۱۰ روش درستنمایی ماکسیمم

فیشر، یکی از برجسته‌ترین آماردانان این سده که قبلاً در صفحهٔ ۳۰۶ از او یاد کردیم، یک روش کلی برآورد به‌نام **روش درستنمایی ماکسیمم** را مطرح ساخت. وی همچنین مزایای این روش را با اثبات این مطلب نشان داد که هر وقت برآوردکننده‌های بسنده موجود باشند، برآوردکننده‌های حاصل از این روش بسنده‌اند، و نیز اینکه این برآوردکننده‌ها، برآوردکننده‌هایی مجانباً نااریب با کمترین واریانس‌اند.

برای کمک به فهم اصلی که روش درستنمایی ماکسیمم بر آن مبتنی است فرض کنید چهار نامه به نشانی شخصی فرستاده شده، اما پیش از تحویل نامه به گیرنده، یکی از آنها گم شده است. اگر، در بین سه پاکت دیگر، دو پاکت محتوی صورتحساب بانکی و دیگری محتوی یک دعوتنامه باشد، برآوردی خوب برای پارامتر k، عدهٔ کل صورتحسابهایی که با چهار نامهٔ دریافتی ارسال شده‌اند، چیست؟ روشن است که این تعداد باید دو یا سه باشد، و با فرض اینکه شانس گم شدن هر نامه با سایر نامه‌ها برابر باشد، درمی‌یابیم احتمال دادهٔ مشاهده شده (که دو نامه از سه نامهٔ باقی‌مانده صورتحساب بانکی‌اند) برای $k = 2$ عبارت است از

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

و برای $k = 3$ عبارت است از

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

بنابراین اگر به‌عنوان برآورد خود از تعداد کل صورتحسابهای بانکی مقداری را انتخاب کنیم که احتمال داده‌های مشاهده شدهٔ به‌دست آمده از سه نامه را ماکسیمم کند، مقدار $k = ۳$ را به‌دست می‌آوریم. این برآورد را یک **برآورد درستنمایی** ماکسیمم، و روشی را که این برآورد از آن حاصل شده است، **روش درستنمایی ماکسیمم** می‌نامیم.

بنابراین، سیمای اصلی روش درستنمایی ماکسیمم آن است که مقادیر یک نمونهٔ تصادفی را در نظرگرفته و سپس به‌عنوان برآورد خود از پارامترهای مجهول جامعه، مقدارهایی را برگزینیم که برای آنها، احتمال یا چگالی احتمال به‌دست آوردن مقادیر نمونه‌ای حاصل شده، ماکسیمم شود. در آنچه در زیر می‌آید، بحث را به حالت یک پارامتری محدود می‌کنیم، اما همان‌طورکه در مثال ۱۷.۱۰ خواهیم دید، ایدهٔ کلی در حالتی نیزکه چندین پارامتر مجهول موجود باشند، قابل استفاده است. در حالت گسسته، اگر داده‌های مشاهده شده، مقادیر $x_۱$، $x_۲$، . . . ، x_n باشند، احتمال به‌دست آوردن آنها عبارت است از

$$P(X_۱ = x_۱, X_۲ = x_۲, \ldots , X_n = x_n) = f(x_۱, x_۲, \ldots , x_n; \theta)$$

که همان مقدار توزیع احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n در نقطهٔ نمونه‌ای $X_۱ = x_۱$، $X_۲ = x_۲$، . . . ، $X_n = x_n$ است. چون مقادیر نمونه‌ای مشاهده شده‌اند، و بنابراین اعداد ثابتی هستند، $f(x_۱, x_۲, \ldots , x_n; \theta)$ را به‌عنوان مقدار تابعی از پارامتر θ تلقی می‌کنیم و آن را **تابع درستنمایی** می‌نامیم. در حالتی که نمونهٔ تصادفی از یک جامعهٔ پیوسته آمده باشد، تعریف مشابهی قابل اعمال است ولی در این حالت $f(x_۱, x_۲, \ldots , x_n; \theta)$ مقدار چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n در $X_۱ = x_۱$، $X_۲ = x_۲$، . . . ، $X_n = x_n$ است.

تعریف ۵.۱۰ اگر $x_۱$، $x_۲$، . . . ، x_n مقادیر یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای با پارامتر θ باشند، **تابع درستنمایی** این نمونه برای مقادیر θ که در حوزهٔ مفروضی قرار دارند عبارت است از

$$L(\theta) = f(x_۱, x_۲, \ldots , x_n; \theta)$$

در اینجا $f(x_۱, x_۲, \ldots , x_n; \theta)$ مقدار توزیع احتمال توأم یا تابع چگالی توأم متغیرهای تصادفی $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n در $X_۱ = x_۱$، $X_۲ = x_۲$، . . . ، $X_n = x_n$ است.

بنابراین، روش درستنمایی ماکسیمم عبارت از ماکسیمم کردن تابع درستنمایی نسبت به θ است و ما آن مقدار θ را که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کند، برآورد درستنمایی ماکسیمم θ می‌نامیم.

مثال ۱۴.۱۰

با مفروض بودن x «پیروزی» در n امتحان، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θ را در توزیع دوجمله‌ای نظیر پیدا کنید.

حل. برای پیدا کردن مقداری از θ که

$$L(\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(۱-\theta)^{n-x}$$

را ماکسیمم می‌کند، بهتر است از این واقعیت استفاده کنیم که مقدار θ که $L(\theta)$ را ماکسیمم می‌کند، تابع

$$\ln L(\theta) = \ln\binom{n}{x} + x\cdot\ln\theta + (n-x)\cdot\ln(۱-\theta)$$

را نیز ماکسیمم می‌کند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{۱-\theta}$$

و با برابر گرفتن این مشتق با ۰ و حل آن نسبت به θ، درمی‌یابیم که تابع درستنمایی دارای ماکسیممی در $\theta = \frac{x}{n}$ است. این مقدار، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای است و $\hat{\Theta} = \frac{X}{n}$ را **برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم** نظیر می‌نامیم. ▲

مثال ۱۵.۱۰

اگر $x_۱$، $x_۲$، . . . ، و x_n مقادیر یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای نمایی باشند، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θی جامعه را پیدا کنید.

حل. چون تابع درستنمایی به‌صورت

$$\begin{aligned}L(\theta) &= f(x_۱, x_۲, \dots, x_n; \theta)\\ &= \prod_{i=۱}^{n} f(x_i;\theta)\\ &= \left(\frac{۱}{\theta}\right)^n\cdot e^{-\frac{۱}{\theta}(\sum_{i=۱}^{n} x_i)}\end{aligned}$$

است، با مشتقگیری از $\ln L(\theta)$ نسبت به θ

$$\frac{d[\ln L(\theta)]}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{۱}{\theta^۲}\cdot\sum_{i=۱}^{n} x_i$$

به‌دست می‌آید. از برابر گرفتن این مشتق با صفر و حل آن نسبت به θ، برآورد درستنمایی ماکسیمم زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\theta} = \frac{۱}{n}\cdot\sum_{i=۱}^{n} x_i = \overline{x}$$

بنابراین، برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم عبارت است از $\hat{\Theta} = \overline{X}$. ▲

حال مثالی را نیز بررسی می‌کنیم که در آن نمی‌توان از روشهای مقدماتی حسابان برای یافتن مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی استفاده کرد.

مثال ۱۶.۱۰

اگر x_1، x_2، ... ، x_n مقادیر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت پیوسته‌ای با $\alpha = 0$ (مانند مثال ۴.۱۰) باشند، برآوردکنندهٔ ماکسیمم درستنمایی را پیدا کنید.

حل. تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \beta) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

برای مقادیر βی بزرگتر از یا برابر با بزرگترین مقدار xها و ۰ در سایر جاهاست. چون مقدار این تابع درستنمایی با کاهش β، افزایش می‌یابد، باید β را هرقدر که ممکن باشد، کوچک بگیریم، و نتیجه می‌شود که برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم β همان Y_n، nامین آمارهٔ ترتیبی است. ▲

از مقایسه نتیجهٔ این مثال با نتیجهٔ مثال ۴.۱۰، درمی‌یابیم که لزومی ندارد که برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم، نااریب باشند. برآوردکننده‌های مثالهای ۱۴.۱۰ و ۱۵.۱۰ نااریب بودند.

همان‌طورکه قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم، روش درستنمایی ماکسیمم را می‌توان برای برآورد همزمان چندین پارامتر جامعه‌ای مفروض نیز به‌کار برد. در این حالت باید مقادیر پارامترهایی را که تابع درستنمایی را ماکسیمم می‌کنند، پیدا کنیم.

مثال ۱۷.۱۰

اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم توأم این دو پارامتر را پیدا کنید.

حل. چون تابع درستنمایی به‌صورت

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} n(x_i; \mu, \sigma) \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \end{aligned}$$

است، با گرفتن مشتق جزئی $\ln L(\mu, \sigma^2)$ نسبت به μ و σ^2 نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial[\ln L(\mu, \sigma^2)]}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

و

$$\frac{\partial[\ln L(\mu,\sigma^2)]}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

از برابر گرفتن اولین مشتق جزئی با صفر و حل آن برحسب μ به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

و با برابر گرفتن دومین مشتق جزئی با صفر و حل آن برحسب σ^2 و بعد از قرار دادن $\mu = \overline{x}$، به‌دست می‌آوریم

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

▲

لازم است توجه شود که ما ثابت نکرده‌ایم که $\hat{\sigma}$ یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ است، بلکه تنها ثابت کرده‌ایم که $\hat{\sigma}^2$ یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ^2 است. با این حال، می‌توان نشان داد (مراجع پایان فصل را ببینید) که برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم دارای این **خاصیت ناوردایی** هستند که اگر $\hat{\Theta}$ یک برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم θ و تابع مفروض $g(\theta)$ پیوسته باشد، آنگاه $g(\hat{\Theta})$ نیز یک برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم $g(\theta)$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$

نیز یک برآورد درستنمایی ماکسیمم σ است، که از s متفاوت است زیرا در آن، $\sum$ را به‌جای $n-1$ بر n تقسیم می‌کنیم.

در مثالهای ۱۴.۱۰، ۱۵.۱۰، و ۱۷.۱۰ ما لگاریتم تابع درستنمایی را به‌جای خود تابع درستنمایی ماکسیمم کرده‌ایم، اما این امر به هیچ عنوان ضروری نیست. در هر حالت تنها به اقتضای سهولت این کار را انجام داده‌ایم.

تمرینها

۵۳.۱۰ اگر X_1، X_2، ... ، X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، از روش گشتاورها استفاده کرده برآوردکننده‌هایی برای μ و σ^2 پیدا کنید.

۵۴.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی، از روش گشتاورها استفاده کرده برآوردکننده‌ای برای پارامتر θ به‌دست آورید.
۵۵.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای یکنواخت با $\alpha = ۰$، برآوردکننده‌ای برای β به کمک روش گشتاورها به‌دست آورید.
۵۶.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ پواسون، از روش گشتاورها استفاده کرده برآوردکننده‌ای برای پارامتر λ به‌دست آورید.
۵۷.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از یک جامعهٔ بتا با $\beta = ۱$، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمولی برای برآورد کردن پارامتر α به‌دست آورید.
۵۸.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای به‌صورت

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{۲(\theta - x)}{\theta^۲} & ۰ < x < \theta \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، برآوردکننده‌ای برای θ به روش گشتاورها به‌دست آورید.
۵۹.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای به‌صورت

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{\theta} \cdot e^{-\frac{x-\delta}{\theta}} & x > \delta \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، برآوردکننده‌هایی برای δ و θ به کمک روش گشتاورها به‌دست آورید. گاهی این توزیع را **توزیع نمایی دوپارامتری** می‌نامند و برای $\theta = ۱$، این توزیع، همان توزیع مثال ۳.۱۰ است.
۶۰.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از یک جامعهٔ یکنواخت پیوسته، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمولهایی برای برآورد کردن پارامترهای α و β پیدا کنید.
۶۱.۱۰ N متغیر تصادفی مستقل دارای توزیعهای دوجمله‌ای همانند با پارامترهای θ و $n = ۳$ را در نظر بگیرید. اگر $n_۰$ تا از آنها مقادیر ۰، $n_۱$ تا مقدار ۱، $n_۲$ تا مقدار ۲، و $n_۳$ تا مقدار ۳ را اختیار کنند، از روش گشتاورها استفاده کرده فرمولی برای برآورد کردن θ به‌دست آورید.
۶۲.۱۰ از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۵۶.۱۰ را دوباره حل کنید.
۶۳.۱۰ از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۵۷.۱۰ را دوباره حل کنید.
۶۴.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n نمونه‌ای به‌اندازهٔ n از جامعهٔ گاما با $\alpha = ۲$ باشد، از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده فرمولی برای برآورد کردن β پیدا کنید.
۶۵.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با میانگین معلوم μ، برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم σ را پیدا کنید.
۶۶.۱۰ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای هندسی باشد، فرمولهایی برای برآورد کردن پارامترهای آن با استفاده از

(الف) روش گشتاورها؛

(ب) روش درستنمایی ماکسیمم؛
پیدا کنید.

۶۷.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای ریلی (تمرین ۲۰.۶ را ببینید)، برآوردکننده‌ای برای پارامتر آن α، به‌کمک روش درستنمایی ماکسیمم پیدا کنید.

۶۸.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای پارتو (تمرین ۲۱.۶ را ببینید)، از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده، فرمولی برای برآورد کردن پارامتر αی آن پیدا کنید.

۶۹.۱۰ از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۵۹.۱۰ را دوباره حل کنید.

۷۰.۱۰ از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۶۰.۱۰ را دوباره حل کنید.

۷۱.۱۰ از روش درستنمایی ماکسیمم استفاده کرده تمرین ۶۱.۱۰ را دوباره حل کنید.

۷۲.۱۰ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای گاما با پارامتر معلوم α، برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم برای

(الف) β؛

(ب) $\tau = (2\beta - 1)^2$؛

را به‌دست آورید.

۷۳.۱۰ اگر V_1، V_2، ...، V_n و W_1، W_2، ...، W_n نمونه‌های تصادفی مستقلی از جامعه‌های نرمال با میانگینهای $\mu_1 = \alpha + \beta$ و $\mu_2 = \alpha - \beta$ و واریانس مشترک $\sigma^2 = 1$ باشند، برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم α و β را پیدا کنید.

۷۴.۱۰ اگر V_1، V_2، ...، V_n و W_1، W_2، ...، W_n نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با میانگینهای μ_1 و μ_2 و واریانس مشترک σ^2 باشند، برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم μ_1، μ_2، و σ^2 را پیدا کنید.

۷۵.۱۰ فرض کنید که X_1، X_2، ...، X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ یکنواخت

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 1 & \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد. نشان دهید که اگر Y_1 و Y_n اولین و nامین آمارهٔ ترتیبی باشند، هر برآوردکنندهٔ Θ به‌طوری که

$$Y_n - \frac{1}{2} \le \hat{\Theta} \le Y_1 + \frac{1}{2}$$

می‌تواند به‌عنوان یک برآوردکنندهٔ درستنمایی θ به‌کار رود. این نتیجه، نشان می‌دهد که لزومی ندارد برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم یکتا باشند.

۷۶.۱۰ با رجوع به تمرین ۷۵.۱۰، بررسی کنید که آیا برآوردکننده‌های زیر برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم θ هستند؟

(الف) $\frac{1}{2}(Y_1 + Y_n)$؛

(ب) $\frac{1}{3}(Y_1 + 2Y_2)$.

کاربردها

۷۷.۱۰ مصرف برق در شهری در ۱۲ روز که به تصادف انتخاب شده بودند، عبارت از ۴٫۶، ۵٫۴، ۸٫۱۰، ۲٫۷، ۸٫۶، ۹٫۴، ۵٫۳، ۳٫۱۶، ۸٫۴، ۰٫۷، ۸٫۸، و ۴٫۵ میلیون کیلووات در ساعت بوده است، با فرض اینکه این داده‌ها را بتوان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای گاما تلقی کرد، از برآوردکننده‌های مثال ۳.۱۰ استفاده کرده پارامترهای α و β را برآورد کنید.

۷۸.۱۰ اندازهٔ جمعیتهای حیوانات را گاهی به‌کمک روش بگیر و بازبگیر برآورد می‌کنند. در این روش، n_1 حیوان در ناحیهٔ مورد مطالعه گرفته می‌شوند، برچسب زده می‌شوند و رها می‌شوند. بعداً n_2 حیوان گرفته می‌شوند، و دیده می‌شود که X تا از آنها برچسب خورده‌اند. از این اطلاع برای برآورد N، تعداد کل حیوانات نوع خاص در ناحیهٔ مورد بررسی استفاده می‌شود. اگر $n_1 = ۳$ جغد کمیاب در بخشی از یک جنگل گرفته شوند، به آنها برچسب زده و رها شوند، و سپس $n_2 = ۴$ تا از چنان جغدهایی گرفته شوند و ملاحظه شود که تنها یکی از آنها برچسب دارند، N را به‌کمک روش درستنمایی ماکسیمم برآورد کنید. (راهنمایی: اعداد $N = ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴$ را امتحان کنید.)

۷۹.۱۰ لاستیکهای رادیال از نوع خاصّی دارای عمر مفید ۳۵۲۰۰، ۴۱۰۰۰، ۴۴۷۰۰، ۳۸۶۰۰، و ۴۱۵۰۰ مایل بوده‌اند. با فرض اینکه این داده‌ها را بتوان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نمایی تلقی کرد، از برآوردکننده‌ای که در تمرین ۵۴.۱۰ به‌دست آمد، استفاده کرده θ را برآورد کنید.

۸۰.۱۰ در شش بار اندازه‌گیری نقطهٔ جوش یک ترکیب سیلیکون، اندازه‌های خطا عبارت از اعداد ۰۷٫۰، ۰۳٫۰، ۱۴٫۰، ۰۴٫۰، ۰۸٫۰، و ۰۳٫۰ درجه سانتیگراد بوده است. با فرض اینکه بتوان این داده‌ها را نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ تمرین ۵۸.۱۰ تلقی کرد، از برآوردکنندهٔ حاصل در آن تمرین به کمک روش گشتاورها استفاده کرده، پارامتر θ را برآورد کنید.

۸۱.۱۰ بدون به حساب آوردن تعداد لامپهایی که بلافاصله از کار افتاده‌اند، تعدادی لامپ از نوعی معین دارای عمرهای مفید ۴۱۵، ۴۳۳، ۴۸۹، ۵۳۱، ۴۶۶، ۴۱۰، ۴۷۹، ۴۰۳، ۵۶۲، ۴۲۲، ۴۷۵، و ۴۳۹ ساعت بوده‌اند. با فرض اینکه بتوان این داده‌ها را نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نمایی دو پارامتری تلقی کرد، از برآوردکننده‌های حاصل در تمرین ۵۹.۱۰ استفاده کرده، پارامترهای δ و θ را برآورد کنید.

۸۲.۱۰ تمرین ۸۱.۱۰ را با استفاده از برآوردکننده‌های به‌دست آمده در تمرین ۶۹.۱۰، به کمک روش درستنمایی ماکسیمم، دوباره حل کنید.

۸۳.۱۰ داده‌هایی که طی چند سال جمع‌آوری شده نشان می‌دهند که هر زمان وکیلی به تصادف شماره تلفن هشت نفر از موکلان خود را می‌گرفته است، این شماره‌ها ۵٫۶، ۶٫۱۰، ۱٫۸، ۱٫۴، ۳٫۹، ۵٫۱۱، ۳٫۷، و ۷٫۵ درصد اوقات اشغال بوده‌اند. با فرض اینکه بتوان این داده‌ها را نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ یکنواخت پیوسته تلقی کرد، از برآوردکننده‌های تمرین ۶۰.۱۰ استفاده کرده پارامترهای α و β را برآورد کنید.

۸۴.۱۰ تمرین ۸۳.۱۰ را با استفاده از برآوردکننده‌های به‌دست آمده در تمرین ۷۰.۱۰ دوباره حل کنید.

۸۵.۱۰ هروقت که آقای جونز به میدان مسابقه می‌رود، در سه مسابقه شرط‌بندی می‌کند. در

نمونه‌ای تصادفی از ۲۰ بار حضور در میدان مسابقه، ۱۱ بار در همهٔ شرط‌بندیها بازنده شده، ۷ بار در یک مسابقه، و دو بار در دو مسابقه برنده شده است. اگر θ عبارت از احتمال این پیشامد باشد که در هر شرط‌بندی برنده شود، از برآوردکنندهٔ درستنمایی ماکسیمم به‌دست آمده در تمرین ۷۱.۱۰ استفاده کرده θ را برآورد کنید.

۸۶.۱۰ در نمونه‌ای تصادفی از معلمان ناحیه‌ای بزرگ، حقوق سالانه آنها ۲۳۹۰۰، ۲۱۵۰۰، ۲۶۴۰۰، ۲۴۸۰۰، ۳۳۶۰۰، ۲۴۵۰۰، ۲۹۲۰۰، ۳۶۲۰۰، ۲۲۴۰۰، ۲۱۵۰۰، ۲۸۳۰۰، ۲۶۸۰۰، ۳۱۴۰۰، ۲۲۷۰۰، و ۲۳۱۰۰ برحسب دلار بوده است. با فرض اینکه بتوان به این داده‌ها به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ پارتو نگریست، از برآوردکننده‌های به‌دست آمده در تمرین ۶۸.۱۰ استفاده کرده پارامتر α را برآورد کنید.

۸۷.۱۰ در ۲۰ روز بسیار سرد، تراکتور یک کشاورز در اولین، سومین، پنجمین، اولین، دومین، اولین، سومین، هفتمین، دومین، چهارمین، چهارمین، هشتمین، اولین، سومین، ششمین، پنجمین، دومین، اولین، ششمین، و دومین بار استارت زدن، روشن شده است. با فرض اینکه بتوان به این داده‌ها به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ هندسی نگریست، پارامتر θی آن را به کمک هر دو روش تمرین ۶۶.۱۰ برآورد کنید.

۸۸.۱۰ بهرهٔ هوشی [IQ] ۱۰ نوجوان وابسته به گروه نژادی خاصی عبارت‌اند از اعداد ۹۸، ۱۱۴، ۱۰۵، ۱۰۱، ۱۲۳، ۱۱۷، ۱۰۶، ۹۲، ۱۱۰، و ۱۰۸، در حالی‌که بهرهٔ هوشی شش نوجوان وابسته به یک گروه نژادی دیگر عبارت‌اند از ۱۲۲، ۱۰۵، ۹۹، ۱۲۶، ۱۱۴، و ۱۰۸. با فرض اینکه بتوان این داده‌ها را نمونه‌های تصادفی مستقلی از جامعه‌هایی نرمال با میانگینهای μ_1 و μ_2 و واریانس مشترک σ^2 تلقی کرد، این پارامترها را به‌کمک برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم به‌دست آمده در تمرین ۷۴.۱۰ برآورد کنید.

۹.۱۰ برآورد بیزی*

در این فصل تاکنون فرض کرده‌ایم که پارامترهایی که می‌خواهیم برآورد کنیم اعداد ثابت مجهولی هستند. در برآورد بیزی پارامترها به‌عنوان متغیرهای تصادفی با **توزیع پیشین** تلقی می‌شوند که معمولاً این توزیعها منعکس‌کنندهٔ میزان باور شخص دربارهٔ مقادیر ممکنی است که این متغیرها می‌گیرند. در بخش ۶.۹، قبلاً به مسأله‌ای از برآورد بیزی برخورد کردیم ــ پارامتر عبارت از پارامتر چگالی یکنواخت و توزیع پیشین آن، توزیع گاما بود.

مسألهٔ عمده در برآورد بیزی عبارت از ترکیب احساسهای قبلی دربارهٔ مقدار یک پارامتر با شواهد مستقیم نمونه‌ای است، و در مثال ۹.۹ این کار را با تعیین $\varphi(\theta|x)$، چگالی شرطی Θ به شرط $X = x$، انجام دادیم. در تقابل با توزیع پیشین Θ، این توزیع شرطی که منعکس‌کنندهٔ شواهد مستقیم نمونه‌ای نیز هست، **توزیع پسین** Θ نامیده می‌شود. در حالت کلی، اگر $h(\theta)$ مقدار توزیع

* برخی از مفاهیم و اصطلاحات مورد استفاده در این بخش در فصل ۹، فصل اختیاری دربارهٔ نظریهٔ تصمیم، معرفی شده‌اند.

پیشین در θ باشد و بخواهیم اطلاعات موجود در آن را با شواهد مستقیم نمونه‌ای دربارهٔ Θ، مثلاً، مقدار آماره‌ای مانند $W = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$، ترکیب کنیم، توزیع پسین Θ را به‌کمک فرمول

$$\varphi(\theta|w) = \frac{f(\theta, w)}{g(w)} = \frac{h(\theta) \cdot f(w|\theta)}{g(w)}$$

معین می‌کنیم. در اینجا $f(w|\theta)$، مقدار توزیع نمونه‌گیری W به فرض $\Theta = \theta$ است، $f(\theta, w)$ مقدار توزیع توأم Θ و W است، و $g(w)$ مقدار توزیع حاشیه‌ای W در w است. توجه کنید که فرمول فوق برای $\varphi(\theta|w)$ در واقع توسیعی از قضیهٔ بیز، قضیهٔ ۱۳.۲، در حالت پیوسته است، بنابراین، اصطلاح «برآورد بیزی» از آنجا می‌آید.

به محض آنکه توزیع پسین یک پارامتر به دست آمد، می‌توان از آن، مانند مثال ۹.۹، برای برآورد کردن استفاده کرد، یا از آن برای بیان عبارتهایی متضمن احتمال دربارهٔ پارامتر، آن‌طور که در مثال ۱۹.۱۰ تشریح خواهد شد، استفاده کرد. گرچه روشی که توصیف کردیم کاربردهای گسترده‌ای دارد، ما در اینجا بحث خود را به استنباطهایی دربارهٔ پارامتر Θی جامعهٔ دوجمله‌ای و میانگین جامعه‌ای نرمال محدود خواهیم کرد؛ از استنباطهایی دربارهٔ پارامتر جامعهٔ پواسون در تمرین ۹۲.۱۰ بحث خواهد شد.

قضیهٔ ۵.۱۰ اگر X یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای، و توزیع پیشین Θ یک توزیع بتا با مقادیر مفروض α و β باشد، آنگاه توزیع پسین Θ به شرط $X = x$ یک توزیع بتا با پارامترهای $x + \alpha$ و $n - x + \beta$ است.

برهان. برای $\Theta = \theta$ داریم

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$h(\theta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} & 0 < \theta < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

و بنابراین به‌ازای $0 < \theta < 1$ و $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} f(\theta, x) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} \times \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \\ &= \binom{n}{x} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1} \end{aligned}$$

و $f(\theta, x) = 0$ در سایر جاها، برای به‌دست آوردن چگالی حاشیه‌ای X از این واقعیت استفاده

می‌کنیم که انتگرال چگالی بتا از ۰ تا ۱ برابر ۱ است، یعنی، اینکه

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

بنابراین به‌ازای $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ به‌دست می‌آوریم

$$g(x) = \binom{n}{x}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+x)\cdot\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}$$

و بنابراین به‌ازای $0 < \theta < 1$

$$\varphi(\theta|x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+x)\cdot\Gamma(n-x+\beta)}\cdot\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n-x+\beta-1}$$

و $\varphi(\theta|x) = 0$ در سایر جاها. همان‌طور که با وارسی دیده می‌شود، این توزیع یک توزیع بتا با پارامترهای $x+\alpha$ و $n-x+\beta$ است. ∎

برای استفاده از این قضیه، به این نتیجه رجوع می‌کنیم که (تحت شرایط بسیار کلی) میانگین توزیع پسین، مخاطرهٔ بیزی را موقعی مینیمم می‌کند که تابع زیان از مرتبهٔ دوم است، یعنی وقتی تابع زیان به‌صورت زیر است

$$L[d(x), \theta] = c[d(x)-\theta]^2$$

که در آن c ثابتی مثبت است. توجه کنید که این تابع زیان از نوعی است که در مثال ۹.۹ مورد استفاده قرار دادیم. چون توزیع پسین Θ یک توزیع بتا با پارامترهای $x+\alpha$ و $n-x+\beta$ است، از قضیهٔ ۵.۶ نتیجه می‌شود که هرگاه تابع زیان از درجهٔ دوم و توزیع پیشین Θ به‌صورتی باشد که در بالا داده شده است

$$E(\Theta|x) = \frac{x+\alpha}{\alpha+\beta+n}$$

مقداری از برآوردکننده‌ای از Θ است که مخاطرهٔ بیزی را مینیمم می‌کند.

مثال ۱۸.۱۰

میانگین توزیع پسین را به‌عنوان یک برآورد نقطه‌ای برای احتمال «واقعی» یک پیروزی پیدا کنید، در صورتی که در ۱۲۰ امتحان دوجمله‌ای ۴۲ پیروزی به‌دست آمده باشد و توزیع پیشین Θ، یک توزیع بتا با $\alpha = \beta = 40$ باشد.

حل. با قرار دادن $x = 42$، $n = 120$، $\alpha = 40$، و $\beta = 40$ در فرمول بالا برای $E(\Theta|x)$،

به‌دست می‌آوریم

$$E(\Theta|۴۲) = \frac{۴۲+۴۰}{۴۰+۴۰+۱۲۰} = ۰٫۴۱$$

توجه کنید که بدون اطلاع از توزیع پیشین Θ، برآورد نااریب با کمترین واریانس θ (تمرین ۱۴.۱۰ را ببینید) نسبت نمونه‌ای

$$\hat{\theta} = \frac{x}{n} = \frac{۴۲}{۱۲۰} = ۰٫۳۵$$

خواهد بود. ▲

قضیهٔ ۶.۱۰ اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با واریانس معلوم $\sigma^۲$، و توزیع پیشین M (حرف بزرگ یونانی میو) توزیع نرمالی با میانگین $\mu_۰$ و واریانس $\sigma_۰^۲$ باشد، آنگاه توزیع پسین M به فرض $\overline{X} = \overline{x}$ توزیع نرمالی با میانگین $\mu_۱$ و واریانس $\sigma_۱^۲$ است، که در آن

$$\mu_۱ = \frac{n\overline{x}\sigma_۰^۲ + \mu_۰\sigma^۲}{n\sigma_۰^۲ + \sigma^۲} \quad , \quad \frac{۱}{\sigma_۱^۲} = \frac{n}{\sigma^۲} + \frac{۱}{\sigma_۰^۲}$$

برهان. برای $\mathrm{M} = \mu$ بنابر قضیهٔ ۴.۸ داریم

$$f(\overline{x}|\mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \cdot e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^۲} \quad , \quad -\infty < \overline{x} < \infty$$

و

$$h(\mu) = \frac{۱}{\sigma_۰\sqrt{۲\pi}} \cdot e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\mu-\mu_۰}{\sigma_۰}\right)^۲} \quad , \quad -\infty < \mu < \infty$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned}\varphi(\mu|\overline{x}) &= \frac{h(\mu)\cdot f(\overline{x}|\mu)}{g(\overline{x})} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{۲\pi\sigma\sigma_۰ g(\overline{x})} \cdot e^{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^۲ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\mu-\mu_۰}{\sigma_۰}\right)^۲} \quad , \quad -\infty < \mu < \infty\end{aligned}$$

حال اگر توانهای μ را در نمای e یکجا گرد آوریم، به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\mu^2+\left(\frac{n\overline{x}}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\mu-\frac{1}{2}\left(\frac{n\overline{x}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}\right)$$

و اگر قرار دهیم

$$\frac{1}{\sigma_1^2}=\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\quad,\quad \mu_1=\frac{n\overline{x}\sigma_0^2+\mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}$$

و از $-\frac{1}{2\sigma_1^2}$ فاکتور بگیریم، و مربع کاملی درست کنیم، نمای e در عبارتی که برای $\varphi(\mu|\overline{x})$ داده شده به‌صورت

$$-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\mu-\mu_1)^2+R$$

درمی‌آید که در آن R شامل n، $\overline{x}$، μ_0، σ، و σ_0 است، ولی حاوی μ نیست. بنابراین، توزیع پسین M به‌صورت

$$\varphi(\mu|\overline{x})=\frac{\sqrt{n}\cdot e^R}{2\pi\sigma\sigma_0 g(\overline{x})}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\mu-\mu_1)^2}\quad,\quad -\infty<\mu<\infty$$

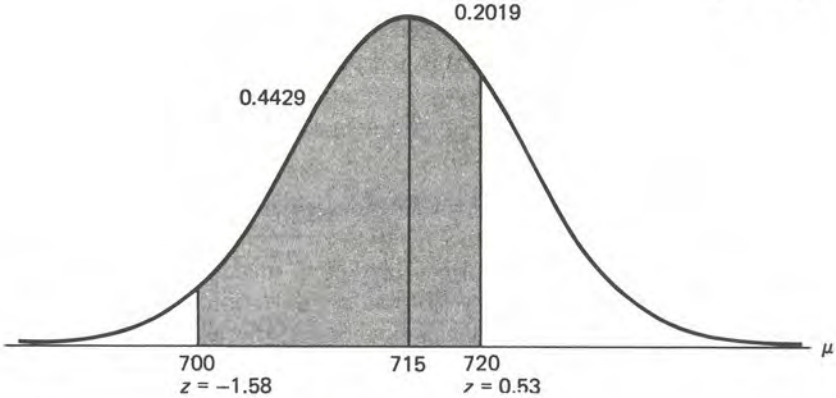
درمی‌آید که به‌سادگی معلوم می‌شود که توزیع نرمالی با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 است. بنابراین می‌توان آن‌را به‌صورت

$$\varphi(\mu|\overline{x})=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}\quad,\quad -\infty<\mu<\infty$$

نوشت که در آن μ_1 و σ_1 در بالا تعریف شده‌اند. توجه کنید که لزومی نداشت که $g(\overline{x})$ را معین کنیم چون در ثابت نتیجهٔ نهایی ادغام شده است. ■

مثال ۱۹.۱۰

یک توزیع‌کنندهٔ ماشینهای فروش اتوماتیک نوشابه حس می‌کند که در فروشگاه بزرگی، یکی از ماشینهای او به‌طور متوسط $\mu_0 = ۷۳۸$ نوشابه در هر هفته به فروش می‌رساند. البته میانگین از فروشگاهی به فروشگاه دیگر تا حدی متغیر است، و توزیع‌کننده حس می‌کند که این تغییر را می‌توان با انحراف معیار $\sigma_0 = ۱۳٫۴$ اندازه گرفت. تا آنجا که توجه ما به ماشینی باشد که در فروشگاه خاصی گذاشته شده است، تعداد نوشابه‌های فروخته شده از هفته‌ای به هفتهٔ دیگر در تغییر خواهد بود و این تغییر با انحراف معیار $\sigma = ۴۲٫۵$ اندازه گرفته می‌شود. اگر یکی از ماشینهای این توزیع‌کننده که در فروشگاه جدیدی قرار داده شده است دارای متوسط فروش $\overline{x} = ۶۹۲$ در عرض ده هفتهٔ اول باشد، احتمال (احتمال شخصی توزیع‌کننده) اینکه برای این فروشگاه مقدار M واقعاً بین ۷۰۰ و ۷۲۰ باشد، چیست؟



شکل ۱.۱۰ نمودار مثال ۱۹.۱۰

حل. با فرض اینکه جامعهٔ مورد نمونه‌گیری تقریباً نرمال باشد و نیز معقول باشد که توزیع پیشین M را توزیع نرمال با میانگین $\mu_\circ = ۷۳۸$ و انحراف معیار $\sigma_\circ = ۱۳٫۴$ گرفت، با جایگذاری در دو فرمول قضیهٔ ۶.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$\mu_۱ = \frac{۱۰ \times ۶۹۲(۱۳٫۴)^۲ + ۷۳۸(۴۲٫۵)^۲}{۱۰(۱۳٫۴)^۲ + (۴۲٫۵)^۲} = ۷۱۵$$

و

$$\frac{۱}{\sigma_۱^۲} = \frac{۱۰}{(۴۲٫۵)^۲} + \frac{۱}{(۱۳٫۴)^۲} = ۰٫۰۱۱۱$$

به‌طوری که $\sigma_۱^۲ = ۹۰$ و $\sigma_۱ = ۹٫۵$. حال جواب سؤال ما مساحت ناحیهٔ سفید در شکل ۱.۱۰، یعنی مساحت زیر منحنی نرمال استاندارد، بین

$$z = \frac{۷۰۰ - ۷۱۵}{۹٫۵} = -۱٫۵۸ \quad \text{و} \quad z = \frac{۷۲۰ - ۷۱۵}{۹٫۵} = ۰٫۵۳$$

است. بنابراین احتمال آنکه M بین ۷۰۰ و ۷۲۰ باشد $۰٫۴۴۲۹ + ۰٫۲۰۱۹ = ۰٫۶۴۴۸$، یا تقریباً ۰٫۶۴۵ است. ▲

تمرینها

۸۹.۱۰ با استفاده از نتایج تمرین ۲۹.۶، نشان دهید که میانگین توزیع پسین Θ را که در صفحهٔ ۳۷۷ تعریف شده است می‌توان به‌صورت

$$E(\Theta|x) = w \cdot \frac{x}{n} + (۱ - w) \cdot \theta.$$

یعنی، به‌صورت میانگین موزون $\frac{x}{n}$ و $\theta_\circ$ نوشت که در آن $\theta_\circ$ و $\sigma_\circ^{\text{۲}}$ میانگین و واریانس توزیع پیشین بتای Θ هستند و

$$w = \frac{n}{n + \frac{\theta_\circ(\text{۱}-\theta_\circ)}{\sigma_\circ^{\text{۲}}} - \text{۱}}$$

۹۰.۱۰ در مثال ۱۸.۱۰، توزیع پیشین پارامتر Θی توزیع دوجمله‌ای، توزیع بتایی با پارامترهای $\alpha = \beta = \text{۴۰}$ بود. از قضیهٔ ۵.۶ استفاده کرده میانگین و واریانس این توزیع پیشین را پیدا کنید و شکل آن را توصیف کنید.

۹۱.۱۰ نشان دهید که میانگین توزیع پسین M را که در قضیهٔ ۶.۱۰ داده شده است، می‌توان به‌صورت

$$\mu_{\text{۱}} = w \cdot \overline{x} + (\text{۱} - w) \cdot \mu_\circ$$

یعنی، به‌عنوان میانگین موزون $\overline{x}$ و $\mu_\circ$ نوشت که در آن

$$w = \frac{n}{n + \frac{\sigma^{\text{۲}}}{\sigma_\circ^{\text{۲}}}}$$

۹۲.۱۰ اگر X دارای توزیع پواسون، و توزیع پیشین پارامتر Λ (حرف بزرگ یونانی لاندا)ی آن، توزیع گامایی با پارامترهای α و β باشد، نشان دهید که

(الف) توزیع پسین Λ به شرط $X = x$، توزیع گامایی با پارامترهای $\alpha + x$ و $\frac{\beta}{\beta+\text{۱}}$ است؛

(ب) میانگین این توزیع پسین Λ عبارت است از

$$\mu_{\text{۱}} = \frac{\beta(\alpha + x)}{\beta + \text{۱}}$$

کاربردها

۹۳.۱۰ بازدهی خط تولید ترانزیستور معینی روزانه با امتحان یک نمونهٔ ۱۰۰ واحدی کنترل می‌شود. طی یک مدت زمان طولانی، محصول این فرایند ۸۰ درصد بوده، یعنی، نسبت اقلام معیوب ۲۰ درصد بوده، و تغییر نسبت اقلام معیوب از روزی به روز دیگر با انحراف معیار ۰٫۰۴ اندازه گرفته شده است. اگر در روز معینی، نمونه شامل ۳۸ قلم معیوب باشد، میانگین توزیع پسین Θ را به‌عنوان برآوردی از نسبت اقلام معیوب آن روز پیدا کنید. فرض کنید که توزیع پیشین Θ، توزیع بتا باشد.

۹۴.۱۰ سوابق موجود در یک دانشگاه (که طی چندین سال جمع‌آوری شده است) نشان می‌دهند که به‌طور متوسط بهرهٔ هوشی ۷۴ درصد کلیهٔ دانشجویان تازه وارد حداقل ۱۱۵ است. البته این درصد از سالی به سال دیگر تا حدی تغییر می‌کند و این تغییر با یک انحراف معیار ۳ درصد اندازه

گرفته می‌شود. اگر در یک نمونهٔ ۳۰تایی از دانشجویان تازه‌وارد که در سال ۱۹۹۱ وارد دانشگاه شده‌اند، ۱۸ نفرشان دارای بهرهٔ هوشی حداقل ۱۱۵ باشند، نسبت واقعی دانشجویانی را که در آن سال وارد دانشگاه شده‌اند و بهرهٔ هوشی آنها حداقل ۱۱۵ است، با استفاده از

(الف) تنها اطلاعات پیشین؛

(ب) تنها اطلاعات مستقیم؛

(ج) نتایج تمرین ۸۹.۱۰ برای ترکیب اطلاعات پیشین با اطلاعات مستقیم؛

برآورد کنید.

۹۵.۱۰ با مراجعه به مثال ۱۹.۱۰، $P(۷۱۲ < \mathrm{M} < ۷۲۵|\overline{x} = ۶۹۲)$ را پیدا کنید.

۹۶.۱۰ یک استاد تاریخ درصدد طرح سؤال امتحانی برای گروه بسیار بزرگی از دانشجویان است. احساس او دربارهٔ نمرهٔ متوسطی که دانشجویان باید بگیرند، به‌طور ذهنی توسط توزیع نرمال با میانگین $\mu_\circ = ۶۵٫۲$ و انحراف معیار $\sigma_\circ = ۱٫۵$ بیان می‌شود.

(الف) این استاد چه احتمال پیشینی به متوسط نمرهٔ واقعی، برای اینکه این نمره عددی در بازهٔ ۶۳٫۰ تا ۶۸٫۰ باشد، نسبت می‌دهد؟

(ب) وی چه احتمال پسینی به پیشامد بالا نسبت خواهد داد در صورتی که امتحان در مورد نمونه‌ای از ۴۰ دانشجو به عمل آید که نمرات آنها دارای میانگین ۷۲٫۹ و انحراف معیار ۷٫۴ باشد؟ از $s = ۷٫۴$ به‌عنوان برآوردی برای σ استفاده کنید.

۹۷.۱۰ یک مدیر اداری می‌داند که تعداد تلفنهای وارده دربارهٔ موضوع معینی، یک متغیر تصادفی با توزیع پواسون است که پارامتر آن دارای توزیع پیشین گاما با $\alpha = ۵۰$ و $\beta = ۲$ است. اگر به او گفته باشند که در روز معینی برای آن موضوع به‌خصوص ۱۱۲ تلفن دریافت شده است، برآورد او از میانگین تلفنهای واردهٔ روزانه برای آن کار به‌خصوص با در نظر گرفتن

(الف) تنها اطلاعات پیشین؛

(ب) تنها اطلاعات مستقیم؛

(ج) هر دو نوع اطلاع و نتایج تمرین ۹۲.۱۰؛

چه خواهد بود؟

مراجع

خواص گوناگون برآوردکننده‌های بسنده در کتاب

LEHMANN, E. L., *Theory of Point Estimation*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983,
WILKS, S. S., *Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962,

مورد بحث قرار گرفته است، و برهانی برای قضیهٔ ۴.۱۰ را می‌توان در کتاب

HOGG, R. V., and CRAIG, A. T., *Introduction to Mathematical Statistics*, 4th ed. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1978.

یافت. خواص مهم برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم در کتاب

KEEPING, E. S., *Introduction to Statistical Inference*. Princeton, N.J.: D. Van Nostrand

Co., Inc., 1962,
مورد بحث واقع شده است، و یک نحوهٔ به‌دست آوردن نامساوی کرامر-رائو و نیز کلیترین شرایطی را که تحت آنها این نامساوی برقرار است، می‌توان در کتاب

RAO, C. R., *Advanced Statistical Methods in Biometric Research*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952.

یافت.

۱۱

برآورد: کاربردها

۱.۱۱ مقدمه

در فصل ۱۰ به برآورد نقطه‌ای پرداختیم. گرچه برآورد نقطه‌ای طریقهٔ متداول توصیف برآوردهاست اما دربارهٔ آن، جا برای پرسشهای زیادی باقی است. مثلاً، برآورد نقطه‌ای به ما نمی‌گوید که برآورد بر چه مقداری از اطلاعات مبتنی است و چیزی دربارهٔ اندازهٔ خطای ممکن بیان نمی‌کند. بنابراین می‌توانیم یک برآورد $\hat{\theta}$ پارامتر θ را با علاوه کردن اندازهٔ نمونه و مقدار $\mathrm{var}(\hat{\Theta})$، یا اطلاعات دیگری دربارهٔ توزیع نمونه‌گیری $\hat{\Theta}$ کامل کنیم. به‌طوری که خواهیم دید، این کار ما را قادر می‌سازد که اندازهٔ ممکن خطا را ارزیابی کنیم.

متقابلاً، می‌توانیم از **برآورد فاصله‌ای** استفاده کنیم. یک برآورد فاصله‌ای θ، فاصله‌ای [بازه‌ای] به شکل $\hat{\theta}_{۱} < \theta < \hat{\theta}_{۲}$ است که در آن $\hat{\theta}_{۱}$ و $\hat{\theta}_{۲}$ مقادیر متغیرهای تصادفی مناسبی مانند $\hat{\Theta}_{۱}$ و $\hat{\Theta}_{۲}$اند. منظور ما از «مناسب» آن است که به‌ازای احتمال مشخصی مانند $۱ - \alpha$

$$P(\hat{\Theta}_{۱} < \theta < \hat{\Theta}_{۲}) = ۱ - \alpha$$

برای مقدار مشخص $۱ - \alpha$، $\hat{\theta}_{۱} < \theta < \hat{\theta}_{۲}$ را یک **فاصلهٔ اطمینان** $(۱ - \alpha)$ ٪۱۰۰ برای θ می‌نامیم. همچنین، $۱ - \alpha$، **درجهٔ اطمینان**، و دو سر فاصله، $\hat{\theta}_{۱}$ و $\hat{\theta}_{۲}$، کرانهای اطمینان پایینی و بالایی نامیده می‌شوند. مثلاً، برای $\alpha = ۰٫۰۵$، درجهٔ اطمینان ۰٫۹۵ است و یک فاصلهٔ اطمینان ٪۹۵ به‌دست می‌آوریم.

درک این نکته ضروری است که، نظیر برآوردهای نقطه‌ای، فاصله‌های اطمینان پارامتری مفروض یکتا نیستند. این مطلب در تمرینهای ۲.۱۱ و ۳.۱۱ و نیز در بخش ۲.۱۱ تشریح شده است که در آنجا، بر مبنای نمونهٔ تصادفی واحدی، نشان می‌دهیم که فاصله‌های اطمینان متعددی برای μ موجود است که همهٔ آنها درجهٔ اطمینان یکسانی دارند. بنابراین مانند مورد برآورد نقطه‌ای، روشهای به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان، باید بنابر خواص آماری مختلف آنها داوری شوند. به‌عنوان مثال، یک خاصیت مطلوب آن است که طول فاصلهٔ اطمینان $(۱ - \alpha)$ ٪۱۰۰ تا سر حد امکان کوچک گرفته شود؛ خاصیت مطلوب دیگر آن است که امید این طول، $E(\hat{\Theta}_{۲} - \hat{\Theta}_{۱})$، تا سر حد امکان کوچک باشد.

۲.۱۱ برآورد میانگینها

برای تشریح این مطلب که چگونه می‌توان اندازهٔ خطاها را در برآورد نقطه‌ای ارزیابی کرد، فرض کنید که بخواهیم از میانگین یک نمونه تصادفی برای برآورد میانگین جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^{۲}$ استفاده کنیم. بنابر قضیهٔ ۴.۸، توزیع نمونه‌گیری $\overline{X}$ برای نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^{۲}$، توزیع نرمالی با $\mu_{\overline{X}} = \mu$ و واریانس $\sigma^{۲}_{\overline{X}} = \frac{\sigma^{۲}}{n}$ است. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$P(|Z| < z_{\alpha/۲}) = ۱ - \alpha$$

که در آن

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

و $z_{\alpha/۲}$ به‌گونه‌ای است که انتگرال از $z_{\alpha/۲}$ تا ∞ برابر $\alpha/۲$ است (همچنین تمرین ۶.۶۰ را ببینید). نتیجه می‌شود که

$$P\left(|\overline{X} - \mu| < z_{\alpha/۲} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = ۱ - \alpha$$

یا، به‌عبارت دیگر، اینکه

> **قضیهٔ ۱.۱۱** اگر از $\overline{X}$، میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم σ^{2} به‌عنوان یک برآوردکنندهٔ میانگین جامعه استفاده شود، احتمال اینکه خطا کمتر از $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ باشد، برابر $1 - \alpha$ است.

مثال ۱.۱۱

یک تیم از کارشناسان کارآیی کارگران، می‌خواهند از میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = 150$ برای برآورد کردن مقدار متوسط استعداد قابلیت کارگران مونتاژکار در یک بخش بزرگ صنعتی (که به‌کمک یک امتحان استاندارد شده معین اندازه گرفته می‌شود) استفاده کنند. اگر، بر مبنای تجربه، کارشناسان کارآیی فرض کنند که برای چنین داده‌ای $\sigma = 6{,}2$، دربارهٔ حداکثر خطای برآورد، با احتمال ۰٫۹۹، چه حکمی می‌توانند بدهند؟

حل. با قرار دادن $n = 150$، $\sigma = 6{,}2$، و $z_{0{,}005} = 2{,}575$ در عبارت مربوط به حداکثر خطا، مقدار

$$2{,}575 \cdot \frac{6{,}2}{\sqrt{150}} = 1{,}30$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، کارشناسان کارآیی می‌توانند با احتمال ۰٫۹۹ حکم کنند که خطای آنها کمتر از ۱٫۳۰ خواهد بود. ▲

حال فرض کنید که این کارشناسان کارآیی، عملاً به گردآوری داده‌ها بپردازند و مقدار $\overline{x} = 69{,}5$ را به‌دست آورند. آیا هنوز هم می‌توانند با احتمال ۰٫۹۹ حکم کنند که خطای برآورد آنها که $\overline{x} = 69{,}5$ است کمتر از ۱٫۳۰ است؟ در واقع اختلاف $\overline{x} = 69{,}5$ از میانگین واقعی (جامعه) یا از ۱٫۳۰ کمتر و یا بیشتر از آن است، و آنها هیچ راهی برای حصول اطمینان از اینکه کدام یک از آنها درست است، ندارند. البته آنها قادر به این کارند اما باید توجه کرد که احتمال ۰٫۹۹ [برای درستی حکمی که می‌دهند] شامل حال روشی است که برای به‌دست آوردن برآوردشان و محاسبهٔ حداکثر خطا (جمع‌آوری داده‌ها، تعیین مقدار $\overline{x}$، و استفاده از فرمول قضیه ۱.۱۱) به‌کار برده‌اند و مستقیماً به پارامتری که درصدد برآورد آن‌اند، مرتبط نمی‌شود.

برای روشن کردن این وجه افتراق، مرسوم شده است که در اینجا به‌جای کلمهٔ «احتمال» از کلمهٔ «اطمینان» استفاده کنند. در حالت کلی، ما از حکمهای احتمالاتی دربارهٔ مقادیر آتی متغیرهای تصادفی (مثلاً، خطای بالقوهٔ یک برآورد) و حکمهای اطمینان به‌محض حصول داده‌ها، استفاده می‌کنیم. بر این اساس، باید در مثال بالا می‌گفتیم که کارشناسان کارآیی می‌توانند ۹۹٪ مطمئن باشند که خطای برآورد آنها، $\overline{x} = 69{,}5$، کمتر از ۱٫۳۰ است.

برای ساختن یک فرمول فاصلهٔ اطمینان برای برآورد میانگین جامعه‌ای نرمال با میانگین معلوم $\sigma^{۲}$، به احتمال

$$P\left(|\overline{X}-\mu|<z_{\alpha/۲}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=۱-\alpha$$

در صفحهٔ ۳۸۵ بازمی‌گردیم که اینک آن‌را به‌صورت

$$P\left(\overline{X}-z_{\alpha/۲}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+z_{\alpha/۲}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=۱-\alpha$$

می‌نویسیم. نتیجه می‌شود که

قضیهٔ۲.۱۱ اگر $\overline{x}$ مقدار میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^{۲}$ باشد، آنگاه

$$\overline{x}-z_{\alpha/۲}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{x}+z_{\alpha/۲}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)$ ۱۰۰٪ برای میانگین جامعه است.

مثال ۲.۱۱

اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n=۲۰$ از یک جامعهٔ نرمال با واریانس $\sigma^{۲}=۲۲۵$ دارای میانگین $\overline{x}=۶۴{,}۳$ باشد، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین، μ، بسازید.

حل. با قرار دادن $n=۲۰$، $\overline{x}=۶۴{,}۳$، $\sigma=۱۵$، و $z_{۰{,}۰۲۵}=۱{,}۹۶$ در فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۲.۱۱، عبارت

$$۶۴{,}۳-۱{,}۹۶\cdot\frac{۱۵}{\sqrt{۲۰}}<\mu<۶۴{,}۳+۱{,}۹۶\cdot\frac{۱۵}{\sqrt{۲۰}}$$

را به‌دست می‌آوریم که به‌صورت

$$۵۷{,}۷<\mu<۷۰{,}۹$$

خلاصه می‌شود. ▲

همچنان که در صفحهٔ ۳۸۵ خاطرنشان کردیم، فرمولهای فاصلهٔ اطمینان یکتا نیستند. این واقعیت را می‌توان به‌آسانی با تغییر دادن فرمول فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)$ ۱۰۰٪ قضیهٔ ۲.۱۱ به‌صورت

$$\overline{x}-z_{۲\alpha/۳}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{x}+z_{\alpha/۳}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا به‌صورت فاصلهٔ اطمینان یکطرفهٔ $(1-\alpha)100\%$

$$\mu < \overline{x} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظه کرد. همچنین می‌توانستیم مبنای فاصلهٔ اطمینان را به‌جای میانگین نمونه‌ای، میانهٔ نمونه‌ای، یا مثلاً، میان‌برد قرار دهیم.

به‌بیان صریح، قضیه‌های ۱.۱۱ و ۲.۱۱ مستلزم آن‌اند که نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال با واریانس معلوم σ^2 در اختیار داشته باشیم. اما، با توجه به قضیهٔ حد مرکزی، می‌توان این نتایج را برای نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌های غیرنرمال نیز به‌کار برد مشروط بر اینکه n به حد کافی بزرگ باشد؛ یعنی $n \geq 30$. در این حالت می‌توانیم به‌جای σ نیز مقدار انحراف معیار نمونه‌ای را قرار دهیم.

مثال ۳.۱۱

یک طراح صنعتی می‌خواهد مقدار متوسط زمانی را که فرد بالغ برای سوار کردن یک اسباب‌بازی «زود جورشونده» صرف می‌کند، تعیین کند. از داده‌های زیر (برحسب دقیقه)، که یک نمونهٔ تصادفی است، استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین جامعه‌ای که نمونه از آن استخراج شده است، بسازید:

۱۷	۱۳	۱۸	۱۹	۱۷	۲۱	۲۹	۲۲	۱۶	۲۸	۲۱	۱۵
۲۶	۲۳	۲۴	۲۰	۸	۱۷	۱۷	۲۱	۳۲	۱۸	۲۵	۲۲
۱۶	۱۰	۲۰	۲۲	۱۹	۱۴	۳۰	۲۲	۱۲	۲۴	۲۸	۱۱

حل. با قرار دادن $n = 36$، $\overline{x} = 19{,}92$، $z_{0{,}025} = 1{,}96$، و $s = 5{,}73$ به‌جای σ در فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۲.۱۱، عبارت

$$19{,}92 - 1{,}96 \cdot \frac{5{,}73}{\sqrt{36}} < \mu < 19{,}92 + 1{,}96 \cdot \frac{5{,}73}{\sqrt{36}}$$

را به‌دست می‌آوریم. بنابراین حدود فاصله‌های اطمینان عبارت از ۱۸٫۰۵ و ۲۱٫۷۹ دقیقه است.
▲

وقتی با نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال سروکار داریم، $n < 30$، و σ مجهول است، قضیه‌های ۱.۱۱ و ۲.۱۱ را نمی‌توان به‌کار برد. در این حالت، از این حقیقت استفاده می‌کنیم که

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است (قضیهٔ ۱۳.۸را ببینید). با قرار دادن $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ به‌جای T در

$$P(-t_{\alpha/۲,n-۱} < T < t_{\alpha/۲,n-۱}) = ۱ - \alpha$$

که در آن $t_{\alpha/۲,n-۱}$ در صفحهٔ ۳۰۴ تعریف شده است، فاصلهٔ اطمینان زیر را برای μ به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ۳.۱۱ اگر $\overline{x}$ و s مقادیر میانگین و انحراف معیار یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ باشند، آنگاه

$$\overline{x} - t_{\alpha/۲,n-۱} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/۲,n-۱} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(۱ - \alpha)$ ۱۰۰٪ برای میانگین جامعه است.

چون این فرمول فاصلهٔ اطمینان، وقتی n کوچکتر از ۳۰ است زیاد به‌کار می‌رود، آن را فاصلهٔ اطمینان کوچک نمونه‌ای μ می‌نامیم.

مثال ۴.۱۱

یک سازندهٔ رنگ می‌خواهد متوسط زمان خشک‌شدن رنگ جدید دیوارهای داخلی ساختمان را معین کند. اگر برای ۱۲ سطح آزمایشی با مساحتهای برابر، وی میانگین زمان خشک شدن را مساوی ۶۶٫۳ دقیقه و انحراف معیار را مساوی ۸٫۴ دقیقه به‌دست آورد، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین واقعی μ به‌دست آورید.

حل. با جایگذاری $\overline{x} = ۶۶٫۳$، $s = ۸٫۴$، و $t_{۰٫۰۲۵,۱۱} = ۲٫۲۰۱$ (از جدول IV)، فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای μ به‌صورت

$$۶۶٫۳ - ۲٫۲۰۱ \cdot \frac{۸٫۴}{\sqrt{۱۲}} < \mu < ۶۶٫۳ + ۲٫۲۰۱ \cdot \frac{۸٫۴}{\sqrt{۱۲}}$$

یا صرفاً

$$۶۱٫۰ < \mu < ۷۱٫۶$$

درمی‌آید. این بدان معنی است که می‌توانیم با اطمینان ۹۵٪ اظهار کنیم که فاصلهٔ از ۶۱٫۰ دقیقه تا ۷۱٫۶ دقیقه، میانگین واقعی زمان خشک شدن رنگ را دربر دارد. ▲

روشی که مطابق آن فاصله‌های اطمینان را در این بخش ساختیم، اساساً مشتمل بر پیدا کردن متغیر تصادفی مناسبی است که مقادیر آن به کمک داده‌های نمونه‌ای و نیز پارامترهای جامعه معین می‌شوند، گرچه توزیع آن متضمن پارامتری نیست که درصدد برآورد آن هستیم. مثلاً، وقتی از متغیر تصادفی

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

استفاده کردیم که مقادیر آن بدون دانستن μ قابل محاسبه نیست ولی توزیع آن برای نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌های نرمال، توزیع نرمال استاندارد است و، متضمن μ نیست، به‌همین نحو عمل کردیم. این روش به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان، که **روش محوری** نامیده می‌شود، به‌گونه‌ای گسترده مورد استفاده است، ولی روشهای کلیتری موجودند که یکی از آنها درکتاب مود[1]، گری‌بیل[2]، و بوز[3] که در بین مراجع انتهای این فصل است، مورد بحث قرار گرفته‌اند.

۳.۱۱ برآورد تفاضل بین میانگینها

با استفاده از تمرینهای ۲.۸ و ۳.۸، درمی‌یابیم که برای نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌های نرمال

$$Z = \frac{(\overline{X}_۱ - \overline{X}_۲) - (\mu_۱ - \mu_۲)}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}$$

دارای توزیع نرمال استاندارد است. با قرار دادن این عبارت به‌جای Z در

$$P(-z_{\alpha/۲} < Z < z_{\alpha/۲}) = ۱ - \alpha$$

از روش محوری، فاصلهٔ اطمینان زیر برای $\mu_۱ - \mu_۲$ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ ۴.۱۱ اگر $\overline{x}_۱$ و $\overline{x}_۲$ مقادیر میانگینهای متغیرهای تصادفی مستقل به‌اندازهٔ $n_۱$ و $n_۲$ از جامعه‌های نرمال با واریانسهای معلوم $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ باشند، آنگاه

$$(\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲) - z_{\alpha/۲} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}} < \mu_۱ - \mu_۲ < (\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲)+z_{\alpha/۲} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(۱ - \alpha)$ ۱۰۰٪ برای تفاضل بین دو میانگین جامعه است.

1. Mood 2. Graybill 3. Bose

می‌توان به‌کمک قضیهٔ حد مرکزی، این نتیجه را برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های غیرنرمال با واریانسهای معلوم σ_1^2 و σ_2^2 نیز به‌کار برد، مشروط بر اینکه n_1 و n_2 به‌قدر کافی بزرگ باشند، یعنی وقتی که $n_1, n_2 \geq 30$ هستند.

مثال ۵.۱۱
یک فاصلهٔ اطمینان ۹۴٪ برای تفاضل واقعی بین طول عمرهای متوسط دو نوع لامپ روشنایی بسازید، با این فرض که نمونه‌ای تصادفی از ۴۰ لامپ روشنایی از یک نوع به‌طور متوسط ۴۱۸ ساعت و ۵۰ لامپ از نوع دوم به‌طور متوسط ۴۰۲ ساعت در استفادهٔ مستمر دوام آورده‌اند. می‌دانیم که انحراف معیارهای جامعه‌ها $\sigma_1 = 26$ و $\sigma_2 = 22$ هستند.

حل. برای $\alpha = 0{,}06$، از جدول III مقدار $z_{0{,}03} = 1{,}88$ را پیدا می‌کنیم. بنابراین، فاصلهٔ اطمینان ۹۴٪ برای $\mu_1 - \mu_2$ عبارت است از

$$(418 - 402) - 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{26^2}{40} + \frac{22^2}{50}} < \mu_1 - \mu_2$$
$$< (418 - 402) + 1{,}88 \cdot \sqrt{\frac{26^2}{40} + \frac{22^2}{50}}$$

که به نامساویهای زیر تبدیل می‌شود

$$6{,}3 < \mu_1 - \mu_2 < 25{,}7$$

بنابراین ۹۴٪ مطمئنیم که بازهٔ ۶٫۳ تا ۲۵٫۷ شامل تفاضل واقعی بین طول عمرهای متوسط دو نوع لامپ روشنایی است. از این واقعیت که هر دو حد اطمینان مثبت‌اند، چنین برمی‌آید که به‌طور متوسط لامپ نوع اول بر لامپ نوع دوم برتری دارد. ▲

در ساختن یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ برای تفاضل دو میانگین موقعی که σ_1 و σ_2 نامعلوم باشند ولی $n_1, n_2 \geq 30$، به‌جای σ_1 و σ_2 مقادیر انحراف معیارهای نمونه‌ای s_1 و s_2 را قرار می‌دهیم و مانند قبل عمل می‌کنیم. روش برآورد تفاضل بین دو میانگین موقعی که σ_1 و σ_2 نامعلوم و اندازه‌های نمونه کوچک باشند، روش سرراستی نیست مگر اینکه انحراف معیارهای نامعلوم دو جامعهٔ نرمال برابر باشند. اگر $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$، آنگاه

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است و σ^2 را می‌توان با ادغام مربع انحرافات از میانگینهای دو نمونه برآورد کرد. در تمرین ۸.۱۱ از خواننده خواسته می‌شود که نشان دهد برآوردکنندهٔ ادغام شدهٔ

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

در واقع، یک برآوردکنندهٔ نااریب σ^2 است. حال، بنابر قضیه‌های ۱۱.۸ و ۹.۸، متغیرهای تصادفی مستقل

$$\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} \quad \text{و} \quad \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیعهای خی‌دو با $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ درجه آزادی هستند، و مجموع آنها

$$Y = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_p^2}{\sigma^2}$$

دارای توزیع خی‌دو با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی است. چون می‌توان نشان داد که متغیرهای تصادفی Y و Z بالا مستقل‌اند (مراجع پایان فصل را ببینید)، از قضیهٔ ۱۲.۸ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n_1+n_2-2}}} \\ &= \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \end{aligned}$$

دارای توزیع t با $n_1 + n_2 - 2$ درجه آزادی است. با قرار دادن این عبارت به‌جای T در

$$P(-t_{\alpha/2,n-1} < T < t_{\alpha/2,n-1}) = 1 - \alpha$$

به‌فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ٪۱۰۰ زیر برای $\mu_1 - \mu_2$ می‌رسیم.

قضیهٔ ۱۱.۵ اگر $\overline{x}_1$ و $\overline{x}_2$، و s_1 و s_2 مقادیر میانگینها و انحراف معیارهای نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با واریانسهای نامعلوم ولی برابر باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} &< \mu_1 - \mu_2 \\ &< (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2,n_1+n_2-2} \cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)$ ٪۱۰۰ برای تفاضل بین دو میانگین جامعه‌هاست.

چون این فرمول فاصلهٔ اطمینان، عمدتاً زمانی به‌کار می‌رود که n_1 یا n_2 یا هردو، کوچک، و کمتر از ۳۰ باشند، آن را یک فاصلهٔ اطمینان کوچک نمونه‌ای برای $\mu_1 - \mu_2$ می‌نامیم.

مثال ۶.۱۱
مطالعه‌ای برای مقایسهٔ محتوای نیکوتین دو نوع سیگار به‌عمل آمده است. متوسط محتوای نیکوتین ۱۰ سیگار نوع (الف) ۱ر۳ میلی‌گرم با انحراف معیار ۵ر۰ میلی‌گرم بوده است، در حالی‌که ۸ سیگار نوع (ب) دارای محتوای نیکوتین متوسط ۷ر۲ میلی‌گرم با انحراف معیار ۷ر۰ میلی‌گرم بوده‌اند. با فرض اینکه دو مجموعهٔ داده‌ها نمونه‌هایی تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانسهای برابر باشند، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای تفاضل واقعی محتوای نیکوتین متوسط دو نوع سیگار بسازید.

حل. ابتدا $n_1 = ۱۰$، $n_2 = ۱۰$، $s_1 = ۰{,}۵$، و $s_2 = ۰{,}۷$ را در فرمول s_p قرار می‌دهیم، و مقدار

$$s_p = \sqrt{\frac{۹(۰{,}۲۵) + ۷(۰{,}۴۹)}{۱۶}} = ۰{,}۵۹۶$$

را به‌دست می‌آوریم. سپس با قرار دادن این مقدار همراه با $n_1 = ۱۰$، $n_2 = ۸$، $\overline{x}_1 = ۳{,}۱$، $\overline{x}_2 = ۲{,}۷$، و $t_{۰{,}۰۲۵,۱۶} = ۲{,}۲۰$ (از جدول IV) در فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۵.۱۱، فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ مطلوب را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$(۳{,}۱ - ۲{,}۷) - ۲{,}۱۲۰(۰{,}۵۹۶)\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۸}} < \mu_1 - \mu_2$$
$$< (۳{,}۱ - ۲{,}۷) + ۲{,}۱۲۰(۰{,}۰۵۹۶)\sqrt{\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۸}}$$

که به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$-۰{,}۲۰ < \mu_1 - \mu_2 < ۱{,}۰۰$$

بنابراین، حدود اطمینان عبارت‌اند از ۲۰ر۰− و ۰۰ر۱ میلی‌گرم، اما توجه کنید که چون این فاصله شامل $\mu_1 - \mu_2 = ۰$ است، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که تفاوتی واقعی بین متوسط محتویات نیکوتین دو نوع سیگار موجود است. در این‌باره در فصل ۱۳ بیشتر بحث خواهیم کرد. ▲

تمرینها

۱.۱۱ اگر x مقداری از یک متغیر تصادفی با توزیع نمایی باشد، k را طوری پیدا کنید که بازهٔ از ۰ تا kx، یک فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)$ ۱۰۰٪ برای پارامتر θ باشد.

۲.۱۱ اگر x_1 و x_2 مقادیر یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۲ از جامعه‌ای دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ و $\beta = \theta$ باشد، k را طوری پیدا کنید که

$$۰ < \theta < k(x_1 + x_2)$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)\ 100\%$ برای θ باشد وقتی

(الف) $\alpha \leq \frac{1}{2}$؛

(ب) $\alpha > \frac{1}{2}$.

۳.۱۱ با استفاده از روشهای بخش ۷.۸، می‌توان نشان داد که برای یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۲ از جامعهٔ تمرین ۲.۱۱، توزیع برد نمونه‌ای عبارت است از

$$f(R) = \begin{cases} \frac{2}{\theta^2}(\theta - R) & 0 < R < \theta \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

از این واقعیت استفاده کرده c را طوری پیدا کنید که

$$R < \theta < cR$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)\ 100\%$ برای θ باشد.

۴.۱۱ نشان دهید که فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)\ 100\%$

$$\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

کوتاهتر از فاصلهٔ اطمینان متناظر زیر است.

$$\overline{x} - z_{2\alpha/3} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\alpha/3} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

۵.۱۱ اگر $\overline{x}$ به‌عنوان برآورد μ مورد استفاده قرار گیرد، نشان دهید که می‌توانیم $(1-\alpha)\ 100\%$ مطمئن باشیم که $|\overline{x} - \mu|$، قدرمطلق خطای ما، کمتر از مقدار مشخص e خواهد بود هرگاه اندازهٔ نمونه

$$n = \left[z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{e}\right]^2$$

باشد. (اگر $n < 30$ درآید، نمی‌توان از این فرمول استفاده کرد مگر اینکه این فرض موجه باشد که از یک جامعهٔ نرمال نمونه‌گیری می‌کنیم.)

۶.۱۱ قضیهٔ ۶.۱۱ را به‌گونه‌ای تغییر دهید که بتوان از آن برای ارزیابی حداکثر خطا، وقتی σ^2 مجهول است، استفاده کرد. (توجه کنید که از این روش تنها می‌توان پس از اینکه داده‌ها به‌دست آمده‌اند، استفاده کرد.)

۷.۱۱ قضیه‌ای مشابه قضیهٔ ۱.۱۱ بیان کنید که ما را قادر به ارزیابی حداکثر خطا در استفاده از $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ به‌عنوان برآوردی از $\mu_1 - \mu_2$ تحت شرایط قضیهٔ ۴.۱۱ نماید.

۸.۱۱ نشان دهید که S_p^2 یک برآوردکنندهٔ ناارایب σ^2 است و واریانس آن را تحت شرایط قضیهٔ ۵.۱۱ پیدا کنید.

۹.۱۱ درستی نتیجهٔ صفحهٔ ۳۹۲ را که T را برحسب $\overline{X}_1$، $\overline{X}_2$، و S_p بیان می‌کند، تحقیق کنید.

کاربردها

۱۰.۱۱ یک مسئول آموزش و پرورش منطقه‌ای میل دارد از میانگین نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۱۵۰ دانش‌آموز کلاس ششم در یکی از مناطق بزرگ آموزشی استفاده کرده میانگین نمره‌ای که کلیهٔ دانش‌آموزان کلاس ششم این منطقه در صورت شرکت در یک امتحان قوهٔ حساب کسب خواهند کرد، برآورد نماید. اگر، بر مبنای تجربه، این مقام آموزشی بداند که برای چنین داده‌هایی $\sigma =$ ۹٫۴، دربارهٔ حداکثر خطا با احتمال ۰٫۹۵ چه حکمی می‌تواند اظهار کند.

۱۱.۱۱ با رجوع به تمرین ۱۰.۱۱، فرض کنید که مسئول منطقه، نمونهٔ خود را استخراج و $\overline{x} =$ ۶۱٫۸ را به‌دست می‌آورد. از کلیهٔ اطلاعات استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای میانگین نمرهٔ همهٔ دانش‌آموزان کلاس ششم منطقه بسازید.

۱۲.۱۱ یک پژوهشگر امور پزشکی می‌خواهد از میانگین یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ $n =$ ۱۲۰ استفاده کرده میانگین فشار خون زنان پنجاه ساله را به‌دست آورد. اگر، بر مبنای تجارب بداند که $\sigma =$ ۱۰٫۵ (برحسب میلیمتر جیوه) است، دربارهٔ حداکثر خطا با احتمال ۰٫۹۹ چه حکمی می‌تواند بدهد؟

۱۳.۱۱ با رجوع به تمرین ۱۲.۱۱، فرض کنید که پژوهشگر، نمونه‌ای استخراج می‌کند و مقدار $\overline{x} =$ ۱۴۱٫۸ را برحسب میلیمتر جیوه به‌دست می‌آورد. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای میانگین فشار خون زنان پنجاه ساله به‌دست آورید.

۱۴.۱۱ مطالعه‌ای از رشد سالانهٔ نوعی کاکتوس نشان می‌دهد که ۶۴ تا از آنها، که به تصادف از یک ناحیهٔ کویری انتخاب شده‌اند، به‌طور متوسط ۵۲٫۸۰ میلیمتر با انحراف استاندارد ۴٫۵ میلیمتر رشد داشته‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای متوسط واقعی رشد سالانهٔ نوع کاکتوس مفروض به‌دست آورید.

۱۵.۱۱ در برآورد متوسط زمان لازم برای انجام کار تعمیر خاصی، یک سازندهٔ خودرو مدت زمان انجام این کار را به‌وسیلهٔ ۴۰ مکانیک، به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی، اندازه‌گیری کرده است. آنها این کار را به‌طور متوسط در ۲۴٫۰۵ دقیقه با انحراف معیار ۲٫۶۸ دقیقه انجام داده‌اند. سازندهٔ خودرو با اطمینان ۹۵٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌تواند بگوید در صورتی که از $\overline{x} =$ ۲۴٫۰۵ دقیقه به‌عنوان برآوردی برای میانگین واقعی زمان لازم انجام تعمیر مورد اشاره استفاده نماید.

۱۶.۱۱ اگر نمونه‌ای متشکل از بخش قابل‌توجهی از جامعه، بیش از ۵ درصد جامعه بر طبق قاعدهٔ سرانگشتی صفحهٔ ۲۹۴ باشد، باید فرمولهای قضیه‌های ۱.۱۱ و ۲.۱۱ را با استفاده از فرمول واریانس قضیهٔ ۶.۸ به‌جای فرمول قضیهٔ ۱.۸ اصلاح کرد. مثلاً، حداکثر خطا در قضیهٔ ۱.۱۱ به‌صورت

$$z_{\alpha/۲} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-۱}}$$

درمی‌آید. از این اصلاحیه استفاده کرده تمرین ۱۱.۱۰ را با فرض اینکه ۹۰۰ دانش‌آموز کلاس ششم در ناحیهٔ آموزشی موجود باشند، دوباره حل کنید.

۱۷.۱۱ از اصلاحیّهٔ پیشنهادی در تمرین ۱۶.۱۱ استفاده کرده تمرین ۱۱.۱۱ را با فرض اینکه ۹۰۰ دانش‌آموز کلاس ششم در ناحیهٔ آموزشی موجود باشند، دوباره حل کنید.

۱۸.۱۱ یک کارشناس کارآیی می‌خواهد متوسط زمان لازم را که خدمهٔ تعمیرات، مجموعه‌ای از چهار لاستیک یک اتومبیل را در مسابقه اتومبیلرانی تعویض می‌کنند، تعیین کند. از فرمول مربوط به n در تمرین ۵.۱۱ استفاده کرده اندازه نمونهٔ لازم را طوری تعیین کنید که کارشناس کارآیی بتواند با احتمال ۹۵ر۰ حکم کند که میانگین نمونه‌ای اختلافی کمتر از ۵ر۲ ثانیه با μ، کمیتی که باید برآورد شود، دارد. از مطالعات قبلی می‌دانیم که $\sigma =$ ۲ر۱۲ برحسب ثانیه است.

۱۹.۱۱ در مطالعه‌ای از عادتهای تماشای تلویزیون، مطلوب آن است که متوسط تعداد ساعتهایی که نوجوانان در هر هفته صرف تماشای تلویزیون کرده‌اند، برآورد شود. اگر فرض $\sigma =$ ۲ر۳ برحسب ساعت را بتوان موجه دانست، نمونه‌ای به چه بزرگی لازم است تا امکان اظهار این حکم با اطمینان ۹۵٪ موجود باشد که میانگین نمونه‌ای کمتر از ۲۰ دقیقه از واقعیت دور است. (راهنمایی: به تمرین ۵.۱۱ رجوع شود.)

۲۰.۱۱ طول جمجمه‌های ۱۰ اسکلت فسیل شدهٔ نوعی از پرندگان که نسل آنها نابود شده است، دارای میانگین ۶۸ر۵ سانتیمتر و انحراف معیار ۲۹ر۰ سانتیمتر است. با فرض اینکه چنین اندازه‌هایی به‌طور نرمال توزیع شده‌اند، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای طول میانگین جمجمه‌های این نوع پرندگان پیدا کنید.

۲۱.۱۱ یک جایگاه بزرگ سوختگیری و توقفگاه کامیونها، سوابق گسترده‌ای دربارهٔ انواع مختلف معاملاتی که با مشتریانش داشته است، نگهداری کرده است. اگر نمونه‌ای تصادفی از ۱۸ مورد از این سوابق نشان دهند که متوسط فروش گازوئیل ۸۴ر۶۳ گالن با انحراف معیار ۷۵ر۲ گالن بوده است، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای میانگین جامعهٔ مورد نمونه‌گیری بسازید.

۲۲.۱۱ یک بازرس مواد غذایی، با امتحان ۱۲ شیشهٔ کرهٔ بادام زمینی مارکی معین، درصدهای زیر را برای ناخالصیها به‌دست آورد: ۳ر۲، ۹ر۱، ۱ر۲، ۸ر۲، ۳ر۲، ۶ر۳، ۴ر۱، ۸ر۱، ۱ر۲، ۲ر۳، ۰ر۲، و ۹ر۱. بر مبنای اصلاحیهٔ قضیهٔ ۱.۱۱ در تمرین ۶.۱۱، وی با اطمینان ۹۵٪ چه حکمی می‌تواند دربارهٔ حداکثر خطا بدهد در صورتی که از میانگین این نمونه به‌عنوان متوسط درصد ناخالصیها در این نوع کرهٔ بادام زمینی استفاده کند.

۲۳.۱۱ نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های $n_1 =$ ۱۶ و $n_2 =$ ۲۵ از جامعه‌های نرمال با $\sigma_1 =$ ۸ر۴ و $\sigma_2 =$ ۵ر۳ دارای میانگینهای $\overline{x}_1 =$ ۲ر۱۸ و $\overline{x}_2 =$ ۴ر۲۳ بوده‌اند، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰٪ برای $\mu_1 - \mu_2$ پیدا کنید.

۲۴.۱۱ مطالعه‌ای از دو نوع دستگاه فتوکپی نشان می‌دهد که زمان تعمیر ۶۱ بار از کارافتادگیهای دستگاه اول به‌طور متوسط ۷ر۸۰ با انحراف معیار ۴ر۱۹ دقیقه بوده و زمان تعمیر ۶۱ بار از کارافتادگیهای دستگاه دوم به‌طور متوسط ۱ر۸۸ دقیقه با انحراف معیار ۸ر۱۸ دقیقه بوده است. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل بین میانگینهای واقعی زمانهای تعمیر از کارافتادگیهای دو نوع دستگاه فتوکپی پیدا کنید.

۲۵.۱۱ دوازده درخت نوع خاصی از مرکبات که به‌تصادف انتخاب شده‌اند، دارای میانگین ارتفاع ۱۳٫۸ پا با انحراف معیار ۱٫۲ پا و پانزده درخت نوع دیگری که به‌تصادف انتخاب شده‌اند، دارای میانگین ارتفاع ۱۲٫۹ پا و انحراف معیار ۱٫۵ پاست. با فرض اینکه نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال با واریانسهای برابر انتخاب شده‌اند، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای تفاضل بین میانگینهای واقعی ارتفاع دو نوع درخت مرکبات پیدا کنید.

۲۶.۱۱ در زیر ظرفیتهای گرمازایی زغال دو معدن (برحسب میلیون کالری در هر تن) داده شده است:

معدن (الف): ۸۵۰۰، ۸۳۳۰، ۸۴۸۰، ۷۹۶۰، ۸۰۳۰
معدن (ب): ۷۷۱۰، ۷۸۹۰، ۷۹۲۰، ۸۲۷۰، ۷۸۶۰

با فرض اینکه این داده‌ها تشکیل نمونه‌های تصادفی مستقل از جامعه‌هایی نرمال با واریانسهای برابر باشند، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل بین ظرفیتهای گرمازایی متوسط زغال این دو معدن بسازید.

۲۷.۱۱ برای مطالعهٔ تأثیر آلیاژی کردن در مقاومت سیمهای برق، یک مهندس برق در نظر دارد مقاومت $n_۱ = ۳۵$ سیم استاندارد و $n_۲ = ۴۵$ سیم آلیاژی را اندازه‌گیری کند. اگر بتوان فرض کرد که برای چنین داده‌هایی $\sigma_۱ = ۰٫۰۰۴$ و $\sigma_۲ = ۰٫۰۰۵$ برحسب اهم باشد، وی دربارهٔ حداکثر خطا با اطمینان ۹۸٪ چه حکمی می‌تواند بدهد در صورتی که از $\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲$ به‌عنوان برآورد $\mu_۱ - \mu_۲$ استفاده کند؟ (راهنمایی: از نتیجهٔ تمرین ۷.۱۱ استفاده کنید.)

۴.۱۱ برآورد نسبتها

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها باید نسبتها، احتمالها، درصدها، یا نرخها، نظیر نسبت اقلام معیوب در محموله‌ای بزرگ از ترانزیستورها، احتمال اینکه اتومبیلی که در قسمتی از جاده توقف کرده چراغهایش عیب داشته باشند، درصد دانش‌آموزانی که بهرهٔ هوشی آنها بالای ۱۱۵ است، یا نرخ مرگ و میر ناشی از یک بیماری، را برآورد کنیم. در بسیاری از این مسائل، می‌توان به‌گونه‌ای معقول فرض کرد که ما از یک جامعهٔ دوجمله‌ای نمونه می‌گیریم، و بنابراین مسألهٔ ما عبارت از برآورد کردن پارامتر دوجمله‌ای θ است. بنابراین می‌توانیم از این واقعیت استفاده کنیم که به‌ازای n بزرگ، توزیع دوجمله‌ای را می‌توان با توزیع نرمال تقریب کرد، یعنی اینکه می‌توان با متغیرهای تصادفی

$$Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$$

به‌گونه‌ای رفتار کرد که گویی دارای توزیع نرمال است. با قرار دادن این عبارت به‌جای Z در

$$P(-z_{\alpha/۲} < Z < z_{\alpha/۲}) = ۱ - \alpha$$

عبارت

$$P\left(-z_{\alpha/۲} < \frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}} < z_{\alpha/۲}\right) = ۱-\alpha$$

دو نامساوی

$$-z_{\alpha/۲} < \frac{x-n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}, \qquad \frac{x-n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}} < z_{\alpha/۲}$$

را به‌دست می‌آوریم که از حل آنها حدود اطمینان $(۱-\alpha)$ ٪۱۰۰ را به‌دست می‌آوریم. با واگذاری جزئیات انجام این کار به خواننده در تمرین ۲۸.۱۱، در اینجا یک تقریب بزرگ نمونه‌ای را با قرار دادن $\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$ به‌جای Z در $P(-z_{\alpha/۲} < Z < z_{\alpha/۲}) = ۱-\alpha$ و بازنویسی آن به‌صورت

$$P\left(\hat{\Theta} - z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\theta(۱-\theta)}{n}} < \theta < \hat{\Theta} + z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\theta(۱-\theta)}{n}}\right) = ۱-\alpha$$

به‌دست می‌آوریم که در آن $\hat{\Theta} = \frac{X}{n}$. در این صورت اگر در زیر رادیکال به‌جای θ مقدار $\hat{\theta}$ را قرار دهیم، که با این کار تقریب بیشتری به‌کار برده می‌شود، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۶.۱۱ اگر X یک متغیر دوجمله‌ای با پارامترهای n و θ با n بزرگ باشد، و $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$ آنگاه

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}{n}} < \theta < \hat{\theta} + z_{\alpha/۲}\cdot\sqrt{\frac{\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}{n}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان تقریبی $(۱-\alpha)$ ٪۱۰۰ برای θ است.

مثال ۷.۱۱

در یک نمونهٔ تصادفی، ۱۳۶ نفر از ۴۰۰ نفری که واکسن آنفلوآنزا زده‌اند، دچار کمی ناراحتی شده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ٪۹۵ برای نسبت واقعی اشخاصی که بر اثر تزریق واکسن دچار ناراحتی خواهند شد، بسازید.

حل. با قرار دادن $n = ۴۰۰$، $\hat{\theta} = \frac{۱۳۶}{۴۰۰} = ۰{,}۳۴$ و $z_{۰{,}۰۲۵} = ۱{,}۹۶$ در فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای θ، به‌دست می‌آوریم

$$۰{,}۳۴ - ۱{,}۹۶\sqrt{\frac{(۰{,}۳۴)(۰{,}۶۶)}{۴۰۰}} < \theta < ۰{,}۳۴ + ۱{,}۹۶\sqrt{\frac{(۰{,}۳۴)(۰{,}۶۶)}{۴۰۰}}$$
$$۰{,}۲۹۴ < \theta < ۰{,}۳۸۶$$

یا، پس از گرد کردن تا دو رقم اعشار، $۰{,}۲۹ < \theta < ۰{,}۳۹$. ▲

با استفاده از همان تقریبی که به قضیهٔ ۶.۱۱ منجر شد، همچنین می‌توانیم بنویسیم

قضیهٔ ۷.۱۱ اگر $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$ به‌عنوان برآوردی برای θ به‌کار رود، می‌توانیم با اطمینان $(\alpha - ۱)$ ۱۰۰٪ حکم کنیم که خطا کمتر است از

$$z_{\alpha/۲} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\theta}(۱-\hat{\theta})}{n}}$$

مثال ۸.۱۱

مطالعه‌ای برای تعیین نسبت رأی‌دهندگانی که در جامعه‌ای بزرگ طرفدار ساختن یک کارخانه برق اتمی‌اند، انجام شده است. اگر ۱۴۰ نفر از ۴۰۰ رأی‌دهنده که به تصادف انتخاب شده‌اند، موافق پروژه باشند و از $\hat{\theta} = \frac{۱۴۰}{۴۰۰} = ۰٫۳۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی همه رأی‌دهندگان جامعه که موافق پروژه‌اند، استفاده کنیم، با اطمینان ۹۹٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم؟

حل. با قرار دادن $n = ۴۰۰$، $\hat{\theta} = ۰٫۳۵$، و $z_{۰٫۰۰۵} = ۲٫۵۷۵$ در فرمول قضیهٔ ۷.۱۱ مقدار

$$۲٫۵۷۵ \cdot \sqrt{\frac{(۰٫۳۵)(۰٫۶۵)}{۴۰۰}} = ۰٫۰۶۱$$

یا ۰٫۰۶ را پس از گرد کردن تا دو رقم اعشار به‌دست می‌آوریم. بنابراین اگر از $\hat{\theta} = ۰٫۳۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی رأی‌دهندگان این جامعه که موافق پروژه‌اند، استفاده کنیم، می‌توانیم با اطمینان ۹۹٪ حکم کنیم که خطا کمتر از ۰٫۰۶ است. ▲

۵.۱۱ برآورد تفاضل بین نسبتها

اغلب، مسائلی پیش می‌آیند که در آنها برآورد تفاضل بین پارامترهای دوجمله‌ای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ بر مبنای نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ از دو جامعهٔ دوجمله‌ای را می‌خواهند. مثلاً، اگر بخواهیم تفاضل بین نسبتهای رأی‌دهندگان مذکر و مؤنث را که موافق کاندیدای معینی در انتخابات مجلس‌اند برآورد کنیم، در چنین وضعیتی هستیم.

اگر تعداد پیروزیهای مربوط، $X_۱$ و $X_۲$، و نسبتهای نمونه‌ای نظیر $\hat{\Theta}_۱ = \frac{X_۱}{n_۱}$ و $\hat{\Theta}_۲ = \frac{X_۲}{n_۲}$ باشند، می‌خواهیم توزیع نمونه‌ای $\hat{\Theta}_۱ - \hat{\Theta}_۲$ را که برآوردکننده‌ای بدیهی برای $\theta_۱ - \theta_۲$ است مورد بررسی قرار دهیم. از تمرین ۵.۸ داریم

$$E(\hat{\Theta}_۱ - \hat{\Theta}_۲) = \theta_۱ - \theta_۲$$

و

$$\text{var}(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) = \frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}$$

و چون برای نمونه‌های بزرگ، X_1 و X_2، و در نتیجه تفاضل آنها را می‌توان با توزیعهای نرمال تقریب زد، نتیجه می‌شود که

$$Z = \frac{(\hat{\Theta}_1 - \hat{\Theta}_2) - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}}$$

متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد تقریبی است. با قرار دادن این عبارت به‌جای Z در $P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$، به نتیجهٔ زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۸.۱۱ اگر X_1 یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n_1 و θ_1، X_2 یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n_2 و θ_2، n_1 و n_2 بزرگ باشند، و $\hat{\theta}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ و $\hat{\theta}_2 = \frac{x_2}{n_2}$، آنگاه

$$(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1} + \frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}} < \theta_1 - \theta_2 < (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)}{n_1} + \frac{\hat{\theta}_2(1-\hat{\theta}_2)}{n_2}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان تقریبی $(1-\alpha)$ ٪۱۰۰ برای $\theta_1 - \theta_2$ است.

مثال ۹.۱۱

اگر ۱۳۲ نفر از ۲۰۰ رأی‌دهنده مذکر و ۹۰ نفر از ۱۵۹ رأی‌دهنده مؤنث موافق کاندیدای خاصی برای انتخاب ریاست جمهوری باشند، یک فاصلهٔ اطمینان ٪۹۹ برای تفاضل بین نسبتهای واقعی رأی‌دهندگان مرد و زن که موافق این کاندیدا هستند، به‌دست آورید.

حل. با قرار دادن $\hat{\theta}_1 = \frac{۱۳۲}{۲۰۰} = ۰٫۶۶$، $\hat{\theta}_2 = \frac{۹۰}{۱۵۰} = ۰٫۶۰$، و $z_{۰٫۰۰۵} = ۲٫۵۷۵$ در فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیهٔ ۸.۱۱، به‌دست می‌آوریم

$$(۰٫۶۶ - ۰٫۶۰) - ۲٫۵۷۵\sqrt{\frac{(۰٫۶۶)(۰٫۳۴)}{۲۰۰} + \frac{(۰٫۶۰)(۰٫۴۰)}{۱۵۰}} < \theta_1 - \theta_2 < (۰٫۶۶ - ۰٫۶۰) + ۲٫۵۷۵\sqrt{\frac{(۰٫۶۶)(۰٫۳۴)}{۲۰۰} + \frac{(۰٫۶۰)(۰٫۴۰)}{۱۵۰}}$$

که به‌صورت

$$-۰٫۰۷۴ < \theta_۱ - \theta_۲ < ۰٫۱۹۴$$

ساده می‌شود. بنابراین ۹۹٪ اطمینان داریم که بازهٔ از ۰٫۰۷۴− تا ۰٫۱۹۴ شامل تفاضل بین نسبتهای واقعی رأی‌دهندگان مرد و زن است که موافق کاندیدای مفروض‌اند. ملاحظه کنید که این فاصله، امکان تفاضل صفر بین دو نسبت را هم دربر دارد. ▲

تمرینها

۲۸.۱۱ با حل

$$\frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}} = z_{\alpha/۲} \quad \text{و} \quad -z_{\alpha/۲} = \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱-\theta)}}$$

برحسب θ، نشان دهید که حدود اطمینان $(۱-\alpha)$ ۱۰۰٪ برای θ عبارت‌اند از

$$\frac{x + \frac{۱}{۲}\cdot z^۲_{\alpha/۲} \pm z_{\alpha/۲}\sqrt{\frac{x(n-x)}{n} + \frac{۱}{۴}\cdot z^۲_{\alpha/۲}}}{n + z^۲_{\alpha/۲}}$$

۲۹.۱۱ از فرمول قضیهٔ ۷.۱۱ استفاده کرده نشان دهید که می‌توانیم حداقل $(۱-\alpha)$ ۱۰۰٪ مطمئن باشیم که قدرمطلق خطا از e کمتر است هرگاه از نسبت نمونه‌ای $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$ به‌عنوان برآوردی برای θ با

$$n = \frac{z^۲_{\alpha/۲}}{۴e^۲}$$

استفاده کنیم.

۳۰.۱۱ فرمولی برای n شبیه به فرمول تمرین پیشین پیدا کنید در صورتی که بدانیم θ باید در بازهٔ از θ' تا θ'' باشد.

۳۱.۱۱ جزئیات اعمالی را کامل کنید که ما را از آمارهٔ Z صفحهٔ ۴۰۰ که در

$$P(-z_{\alpha/۲} < Z < z_{\alpha/۲}) = ۱ - \alpha$$

قرار دادیم، به‌فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۸.۱۱ می‌رساند.

۳۲.۱۱ فرمولی برای حداکثر خطا مشابه با آنچه در قضیهٔ ۷.۱۱ به‌دست آوردیم برای وضعیتی که از $\hat{\theta}_۱ - \hat{\theta}_۲$ به‌عنوان برآوردی برای $\theta_۱ - \theta_۲$ استفاده می‌کنیم، پیدا کنید.

۳۳.۱۱ از نتیجهٔ تمرین ۳۲.۱۱ استفاده کرده نشان دهید که وقتی $n_۱ = n_۲ = n$، می‌توانیم حداقل $(۱ - \alpha)$ ۱۰۰٪ مطمئن باشیم که خطایی که در استفاده از $\hat{\theta}_۱ - \hat{\theta}_۲$ به‌عنوان برآوردی از $\theta_۱ - \theta_۲$ مرتکب می‌شویم کمتر از e است هرگاه

$$n = \frac{z^۲_{\alpha/۲}}{۲e^۲}$$

کاربردها

۳۴.۱۱ یک بررسی نمونه‌ای در سوپرمارکتی نشان داده است که ۲۰۴ خریدکننده از ۳۰۰ خریدکننده به‌طور منظم از کوپنهای تخفیفی که مبالغی برحسب سنت تخفیف می‌دهند، استفاده می‌کنند. از فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیهٔ ۶.۱۱ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای نسبت واقعی متناظر پیدا کنید.

۳۵.۱۱ با رجوع به تمرین ۳۴.۱۱، با اطمینان ۹۹٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم در صورتی که نسبت نمونه‌ای مشاهده شده را به‌عنوان برآوردی از نسبت همهٔ خریدکننده‌هایی در جامعهٔ مورد نمونه‌گیری به‌کار بریم که از کوپنهای تخفیف استفاده کرده‌اند.

۳۶.۱۱ در یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ ۲۵۰ از بینندگان تلویزیون در ناحیه‌ای، ۱۹۰ نفر برنامهٔ بحث‌انگیزی را مشاهده کرده‌اند. با استفاده از هریک از دو راه زیر، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای نسبت واقعی متناظر پیدا کنید.

(الف) فرمول فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیهٔ ۶.۱۱؛

(ب) کرانهای اطمینان تمرین ۲۸.۱۱.

۳۷.۱۱ با رجوع به تمرین ۳۶.۱۱، با اطمینان ۹۵٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم در صورتی که از نسبت نمونه‌ای مشاهده شده به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی متناظر استفاده کنیم.

۳۸.۱۱ از ۱۰۰ ماهی صید شده از دریاچه‌ای، ۱۸ ماهی به‌علت آلودگی شیمیایی محیط غیرقابل خوردن بوده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای نسبت واقعی متناظر بسازید.

۳۹.۱۱ در نمونه‌ای تصادفی از ۱۲۰ خوانندهٔ کُر، ۵۴ نفر دچار گرفتگی مختصر صدا شده‌اند. با اطمینان ۹۰٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم در صورتی که از نسبت نمونه‌ای، $\frac{۵۴}{۱۲۰} = ۰٫۴۵$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی خوانندگانی که به این ترتیب دچار صدمه شده‌اند استفاده کنیم؟

۴۰.۱۱ در نمونه‌ای تصادفی از ۳۰۰ نفر که ناهار را در یک سلف سرویس صرف کرده‌اند، ۱۰۲ نفر دسر خورده‌اند. اگر از $\frac{۱۰۲}{۳۰۰} = ۰٫۳۴$ به‌عنوان برآوردی از نسبت واقعی متناظر استفاده کنیم، با چه اطمینانی می‌توانیم حکم کنیم که خطای ما کمتر از ۰٫۰۵ است؟

۴۱.۱۱ یک مؤسسهٔ نظرسنجی خصوصی از طرف سیاستمداری اجیر شده است تا نسبت واقعی موکلان او را که موافق موضوع اجتماعی خاصی هستند، برآورد کند. از فرمول تمرین ۲۹.۱۱ استفاده کرده تعیین کنید که بزرگی نمونه‌ای که برای نظرسنجی باید انتخاب شود چقدر باشد تا بتوان ۹۵٪

مطمئن شد که نسبت نمونه‌ای کمتر از ۰٫۰۲ از واقعیت دور باشد.
۴۲.۱۱ از نتیجهٔ تمرین ۳۰.۱۱ استفاده کرده تمرین ۴۱.۱۱ را دوباره حل کنید مشروط بر اینکه مؤسسهٔ نظرسنجی دلایلی در دست داشته باشد که نسبت واقعی از ۰٫۳۰ بیشتر نیست.
۴۳.۱۱ فرض کنید می‌خواهیم که نسبت رانندگانی را که در فاصلهٔ بین دو شهر معین از سرعت مجاز تجاوز می‌کنند، برآورد کنیم. از فرمول تمرین ۲۹.۱۱ استفاده کرده تعیین کنید که نمونه‌ای به چه بزرگی لازم است تا ۹۹٪ مطمئن باشیم که برآورد حاصل، یعنی نسبت نمونه‌ای، کمتر از ۰٫۰۴ از واقعیت دور باشد.
۴۴.۱۱ از نتیجهٔ تمرین ۳۰.۱۱ استفاده کرده تمرین ۴۳.۱۱ را دوباره حل کنید مشروط بر اینکه دلایل موجهی در دست داشته باشیم که نسبتی که می‌خواهیم برآورد کنیم حداقل ۰٫۶۵ است.
۴۵.۱۱ در یک نمونهٔ تصادفی از بازدیدکنندگان جاذبهٔ توریستی مشهوری، ۸۴ مرد از ۲۵۰ مرد و ۱۵۶ زن از ۲۵۰ زن کالاهای یادگاری خریداری کرده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای تفاضل بین نسبتهای واقعی زنان و مردانی که در این جاذبهٔ توریستی یادگاری می‌خرند، بسازید.
۴۶.۱۱ در بین ۵۰۰ متقاضی گواهی ازدواج، که به تصادف در سالی معین انتخاب شده‌اند، ۴۸ مورد وجود دارند که در آنها زنان حداقل یک سال مسنتر از مردان بوده‌اند، در بین ۴۰۰ متقاضی گواهی ازدواج، که شش سال بعد به تصادف انتخاب شده‌اند، ۶۸ مورد وجود دارند که زنان حداقل یک سال مسنتر از مردان بوده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای تفاضل بین نسبتهای واقعی متقاضیان گواهی ازدواج که در آنها زنان حداقل یک سال مسنتر از مردان هستند، پیدا کنید.
۴۷.۱۱ با رجوع به تمرین ۴۶.۱۱، با اطمینان ۹۸٪ دربارهٔ حداکثر خطا چه می‌توانیم بگوییم هرگاه از تفاضل بین نسبتهای مشاهده شده نمونه‌ای به‌عنوان برآورد تفاضل بین نسبتهای متناظر واقعی استفاده کنیم؟ (راهنمایی: از نتیجهٔ تمرین ۳۲.۱۱ استفاده کنید.)
۴۸.۱۱ فرض کنید که بخواهیم تفاضل بین نسبتهای مشتریان کالایی که در دو استان معین، کالای فروشگاههای زنجیره‌ای خاصی را بر کالای شرکتهای رقیب ترجیح می‌دهند، تعیین کنیم. از فرمول تمرین ۳۳.۱۱ استفاده کرده اندازه نمونه‌های لازم را تعیین کنید به‌طوری که بتوان حداقل ۹۵٪ مطمئن شد که تفاضل بین دو نسبت نمونه‌ای کمتر از ۰٫۰۵ از واقعیت دور است.

۶.۱۱ برآورد واریانسها

با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌های نرمال، می‌توانیم یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 با استفاده از قضیهٔ ۱۱.۸ پیدا کنیم. مطابق این قضیه

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع خی‌دو با $n-1$ درجهٔ آزادی است. بنابراین

$$P\left[\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right] = 1-\alpha$$
$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right] = 1-\alpha$$

که در آن $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ و $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ در صفحهٔ ۳۰۴ تعریف شده‌اند، و به‌دست می‌آوریم

قضیهٔ ۹.۱۱ اگر s^2 مقدار واریانس یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال باشد، آنگاه

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای σ^2 است.

حدود اطمینان $(1-\alpha)100\%$ متناظر برای σ را می‌توان با گرفتن جذر از حدود اطمینان σ^2 به‌دست آورد.

مثال ۱۰.۱۱

در ۱۶ بار کار آزمایشی یک موتور تحت آزمایش، مصرف بنزین آن دارای انحراف معیار ۲٫۲ گالن بوده است. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای σ^2 بسازید که میزان تغییرپذیری مصرف بنزین این موتور را بسنجد.

حل. با فرض اینکه داده‌های آزمایشی را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌های نرمال تلقی کرد، در فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۹.۱۱، مقادیر $n = 16$ و $s = 2.2$ را همراه با مقادیر $\chi^2_{0.005,15} = 32.801$ و $\chi^2_{0.995,15} = 4.601$، که از جدول V به‌دست می‌آیند، قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{15(2.2)^2}{32.801} < \sigma^2 < \frac{15(2.2)^2}{4.601}$$

یا

$$2.21 < \sigma^2 < 15.78$$

▲

با گرفتن جذر، فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ متناظر برای σ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$1.49 < \sigma < 3.97$$

۷.۱۱ برآورد نسبت دو واریانس

اگر S_1^2 و S_2^2 واریانسهای نمونه‌ای نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال باشند، آنگاه طبق قضیهٔ ۱۵.۸

$$F = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

متغیری تصادفی است که دارای توزیع F با $n_1 - 1$ و $n_2 - 1$ درجهٔ آزادی است. پس می‌توانیم بنویسیم

$$P\left(f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} < \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2} < f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}\right) = 1 - \alpha$$

که در آن $f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ و $f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$ در صفحهٔ ۳۰۷ تعریف شده‌اند. چون

$$f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} = \frac{1}{f_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}}$$

(نگاه کنید به تمرین ۵۶.۸)، نتیجه می‌شود که

قضیهٔ ۱۰.۱۱ اگر s_1^2 و s_2^2 مقادیر واریانسهای نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعهٔ نرمال باشند، آنگاه

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{f_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot f_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ است.

کرانهای اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ی متناظر برای $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ را می‌توان با گرفتن جذرهای کرانهای اطمینان برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ به‌دست آورد.

مثال ۱۱.۱۱

با مراجعه به مثال ۶.۱۱، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ پیدا کنید.

حل. با قرار دادن $n_1 = 10$، $n_2 = 8$، $s_1 = 0{,}5$، و $s_2 = 0{,}7$، و مقادیر $f_{0{,}01, 9, 7} = 6{,}72$ و $f_{0{,}01, 7, 9} = 5{,}61$، از جدول VI به‌دست می‌آوریم

$$\frac{0{,}25}{0{,}49} \cdot \frac{1}{6{,}72} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{0{,}25}{0{,}49} \cdot 5{,}61$$

یا

$$0{,}076 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}862$$

چون این فاصله، امکان برابری نسبت با ۱ را هم شامل می‌شود، شواهدی واقعی علیه فرض برابری واریانسها در مثال ۶.۱۱ در دست نیست. ▲

تمرینها

۴۹.۱۱ جزئیات اعمالی را که از احتمال صفحهٔ ۴۰۵ به فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۱۰.۱۱ منجر شد، کامل کنید.

۵۰.۱۱ برای مقادیر بزرگ n، توزیع نمونه‌ای S گاهی به‌وسیلهٔ توزیعی نرمال با میانگین σ و واریانس $\frac{\sigma^2}{2n}$ تقریب می‌شود (تمرین ۴۲.۸ را ببینید). نشان دهید که این تقریب به فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای $(1-\alpha)$ ۱۰۰٪ زیر برای σ منجر می‌شود.

$$\frac{s}{1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}}$$

کاربردها

۵۱.۱۱ با رجوع به تمرین ۲۰.۱۱ یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای واریانس واقعی طول جمجمهٔ پرندگان نوع مفروض بسازید.

۵۲.۱۱ با رجوع به تمرین ۲۲.۱۱، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰٪ برای انحراف معیار جامعهٔ مورد نمونه‌گیری، یعنی، برای درصد ناخالصیها در کرهٔ بادام‌زمینی نوع مفروض بسازید.

۵۳.۱۱ با رجوع به تمرین ۱۴.۱۱، از فرمول فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای تمرین ۵۰.۱۱ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای انحراف معیار رشد سالانهٔ کاکتوس نوع مفروض بسازید.

۵۴.۱۱ با رجوع به تمرین ۱۵.۱۱، از فرمول فاصلهٔ اطمینان بزرگ نمونه‌ای قضیهٔ ۵۰.۱۱ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای انحراف معیار زمانی که طول می‌کشد مکانیکی کاری معین را انجام دهد، بسازید.

۵۵.۱۱ با رجوع به تمرین ۲۴.۱۱، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای نسبت واریانسهای دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری بسازید.

۵۶.۱۱ با رجوع به تمرین ۲۵.۱۱، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای نسبت واریانسهای دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری بسازید.

۵۷.۱۱ با رجوع به تمرین ۲۶.۱۱ یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰٪ برای نسبت واریانسهای دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری بسازید.

۸.۱۱ استفاده از کامپیوترها

در مثالهای این فصل جزئیات نسبتاً مفصلی دربارهٔ جایگذاری در فرمولهای مختلف و محاسبات بعدی، نشان دادیم. در عمل، هیچ‌یک از این کارها لازم نیست، زیرا نرم‌افزارهای فراوانی موجودند که تنها مستلزم وارد کردن **داده‌های خام** (بدون پردازش) اصلی در کامپیوترها با فرمانهای مناسب است. برای تشریح مطلب، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۲.۱۱

در مطالعهٔ دوام رنگ جدیدی برای استفاده در خطکشی خیابانها، یک ادارهٔ راهنمایی نوارهایی آزمایشی در جاده‌های پررفت‌وآمد را در هشت مکان مختلف، رنگ‌آمیزی کرده و شمارنده‌های الکترونیکی نشان داده‌اند که این خطکشیها پس از عبور (با تقریب به نزدیکترین صد) ۱۴۲۶۰۰، ۱۶۷۸۰۰، ۱۳۶۵۰۰، ۱۰۸۳۰۰، ۱۲۶۴۰۰، ۱۳۳۷۰۰، ۱۶۲۰۰۰، و ۱۴۹۴۰۰ خودرو محو شده‌اند. یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای مقدار متوسط ترافیک (عبور اتومبیلها) که این رنگ قبل از محو شدن، می‌تواند تحمل کند، بسازید.

حل. خروجی چاپی کامپیوتری شکل ۱.۱۱، نشان می‌دهد که فاصلهٔ اطمینان مطلوب، عبارت از

$$۱۲۴۷۵۸ < \mu < ۱۵۶۹۱۷$$

اتومبیل عبوری است. این خروجی همچنین اندازه نمونه، میانگین داده‌ها، انحراف معیار آنها، و انحراف معیار برآورد شدهٔ میانگین، SE MEAN* را نشان می‌دهد که با $\frac{s}{\sqrt{n}}$ داده می‌شود. ▲

به‌طوری که این مثال نشان می‌دهد، کامپیوترها ما را قادر می‌سازند که آنچه را قبلاً به کمک ماشین‌حسابهای رومیزی، ماشین‌حسابهای دستی، یا حتی با دست انجام می‌شد، به‌صورتی کارآتر ــ سریعتر، ارزانتر، و تقریباً به‌طور خودکار ــ انجام دهیم. با این حال، چون این مثال به نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n = ۸$ می‌پردازد، قادر نیست حق مطلب را در مورد قدرت کامپیوترها در امر

```
MTB   > SET C1
DATA > 142600   167800   136500   108300   126400   133700   162000   149400
MTB   > TINT 95 C1

              N        MEAN    STDEV   SE MEAN     95.0  PERCENT C.I.
C1            8      140837    19228      6798     (124758,   156917)
```

شکل ۱.۱۱ خروجی چاپی کامپیوتری مثال ۱۲.۱۱

* SE نمادی برای Square Error است.ــم.

پردازش مجموعهٔ داده‌های هنگفت و انجام محاسباتی که حتی تا همین سالهای اخیر قابل تصور نبود، ادا کند. همچنین، مثال ما نشان نمی‌دهد که چگونه کامپیوترها می‌توانند هم خروجی و هم ورودی و نتایج و خود داده‌های اولیه را در قالب انواع گوناگون نمودارها و جدولها خلاصه نمایند که این کار روشهایی را برای تحلیل در اختیار می‌گذارد که در گذشته در دسترس نبودند.

همهٔ اینها مهم‌اند، اما حق مطلب را دربارهٔ تأثیر شگفت‌انگیز کامپیوترها بیان نمی‌کنند. از جمله می‌توان از کامپیوترها برای جدولبندی یا رسم تابعها (مثلاً توزیعهای t، F، یا χ^2) استفاده کرد و بنابراین درک روشنی از مدلهای پس‌زمینه‌ای در اختیار پژوهشگر قرار داد و امکان مطالعهٔ تأثیرات تخلف از فرضها را فراهم ساخت. شبیه‌سازی مقادیر متغیرهای تصادفی (یعنی نمونه‌گیری از همهٔ انواع جامعه‌ها) نیز زمانی که رهیافت صوریِ ریاضی شدنی نباشد، درخور اهمیت است. این امر، ابزار مهمی در موقع مطالعهٔ مناسب بودن مدلهای آماری در اختیار ما قرار می‌دهد.

مراجع

یک روش کلی برای به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان در کتاب

MOOD, A. M., GRAYBILL, F. A., and BOES, D. C., *Introduction to the Theory of Statistics*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1974,

داده شده است و ملاکهایی دیگر برای قضاوت دربارهٔ محاسن فاصله‌های اطمینان را می‌توان در کتاب

LEHMANN, E. L., *Testing Statistical Hypotheses*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959,

و در کتابهای پیشرفتهٔ دیگر در آمار ریاضی یافت. جداول خاص برای ساختن فاصله‌های اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ برای نسبتها در جداول بیومتریکاکه در صفحهٔ ۳۱۸ جزو مراجع آمده است، داده شده‌اند. برای برهانی از استقلال متغیرهای تصادفی Z و Y در صفحه‌های ۳۹۱ و ۳۹۲، کتاب

BRUNK, H. D., *An Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd ed. Lexington, Mass.: Xerox Publishing Co., 1975.

را ببینید.

۱۲

آزمون فرض: نظریه

۱.۱۲ مقدمه

اگر مهندسی بخواهد بر مبنای داده‌های نمونه‌ای نظر دهد که آیا طول عمر متوسط نوع خاصی لاستیک چرخ ماشین حداقل ۲۲۰۰۰ مایل است یا نه، اگر یک کارشناس کشاورزی بخواهد بر مبنای آزمایشهایی نظر دهد که آیا نوع خاصی کود کشاورزی محصول لوبیای بیشتری نسبت به کود دیگر تولید می‌کند یا نه، و اگر یک سازندهٔ محصولات دارویی بخواهد بر مبنای نمونه‌هایی نظر دهد که آیا ۹۰ درصد کلیهٔ بیمارانی که داروی جدیدی را مصرف می‌کنند از بیماری خاصی بهبود خواهند یافت یا نه، همهٔ این مسائل را می‌توان به زبان **آزمون فرضهای آماری** برگرداند. در مورد اول می‌توانیم بگوییم که این مهندس باید این فرض را آزمون کند که θ، پارامتر یک جامعهٔ نمایی، حداقل ۲۲۰۰۰ است؛ در مورد دوم، می‌توانیم بگوییم که کارشناس کشاورزی باید نظر دهد که

آیا $\mu_2 < \mu_1$، که در آن μ_1 و μ_2 میانگینهای دو جامعهٔ نرمال هستند؛ و در مورد سوم می‌توانیم بگوییم که سازنده باید نظر دهد که آیا θ، پارامتر یک جامعهٔ دوجمله‌ای، برابر با ۰٫۹۰ است یا نه. البته در هر مورد باید فرض شود توزیعی که انتخاب شده است به‌درستی شرایط آزمایشی را توصیف می‌کند، یعنی، این توزیع **مدل آماری** صحیحی در اختیار می‌گذارد.

مانند مثالهای بالا، اغلب آزمونهای آماری به پارامترهای توزیعها می‌پردازند، ولی گاهی آنها به نوع، یا ماهیت خود توزیعها هم می‌پردازند. به‌عنوان مثال، در اولین مثال از سه مثال بالا، آن مهندس ممکن است همچنین بخواهد نظر دهد که آیا واقعاً با نمونه‌ای از توزیع نمایی سروکار دارد، یا اینکه آیا داده‌های او مقادیر متغیرهای تصادفیی هستند که، مثلاً، دارای توزیع وایبول تمرین ۲۳.۶ هستند.

> **تعریف ۱.۱۲** یک **فرض آماری**، حکم یا حدسی دربارهٔ توزیع یک یا چند متغیر تصادفی است. اگر یک فرض آماری توزیع را کاملاً مشخص کند، آن را **فرض ساده** و در غیر این صورت آن را **فرض مرکب** می‌نامند.

بدین ترتیب یک فرض ساده نه‌تنها باید شکل تابعی توزیع مبنا، بلکه باید مقادیر همهٔ پارامترها را نیز مشخص کند. بنابراین در سومین مثال از مثالهای بالا، یعنی مثالی که با کارآیی داروی جدید سروکار دارد، فرض $\theta = 0{,}90$ ساده است، البته با این فرض که اندازهٔ نمونه و دوجمله‌ای بودن توزیع جامعه را بدانیم. اما، در اولین مثال از مثالهای بالا، فرض مرکب است، زیرا $\theta \geq 22000$ مقدار مشخصی به پارامتر θ تخصیص نمی‌دهد.

برای آنکه بتوان ملاکهای مناسبی برای فرضهای آماری به‌وجود آورد، لازم است که **فرضهای مقابل** را هم فرمولبندی کنیم. مثلاً در مثالی که در آن با طول عمر لاستیکها سروکار داشتیم، می‌توانیم این فرض مقابل را فرمولبندی کنیم که پارامتر θ در توزیع نمایی، کمتر از ۲۲۰۰۰ است؛ در مثالی که در آن با دو نوع کود سروکار داشتیم، می‌توانیم فرض مقابل $\mu_2 = \mu_1$ را فرمولبندی کنیم؛ و در مثالی که در آن با داروی جدید سروکار داشتیم می‌توانیم این فرض مقابل را فرمولبندی کنیم که پارامتر θ در توزیع دوجمله‌ای مفروض صرفاً ۰٫۶۰ است، که همان نرخ بهبودی از بیماری بدون داروی جدید است.

مفهوم فرضهای ساده و مرکب در مورد فرضهای مقابل نیز به‌کار می‌رود، و در مثال اول اینک می‌توانیم بگوییم که فرض مرکب $\theta \geq 22000$ را در برابر **فرض مقابل مرکب** $\theta < 22000$ آزمون می‌کنیم که در آن θ پارامتر جامعهٔ نمایی است. به‌همین نحو، در مثال دوم، فرض مرکب $\mu_2 < \mu_1$ را در برابر فرض مقابل مرکب $\mu_2 = \mu_1$ آزمون می‌کنیم، که در آن μ_1 و μ_2 میانگینهای دو جامعهٔ نرمال‌اند، و در مثال سوم فرض ساده $\theta = 0{,}90$ را در برابر **فرض مقابل سادهٔ** $\theta = 0{,}60$ آزمون می‌کنیم که در آن θ پارامتر یک جامعهٔ دوجمله‌ای است که برای آن n معلوم است.

آماردانان اغلب، به‌عنوان فرضهای خود ضد آنچه را که به باور آنها درست است بیان می‌کنند.

مثلاً، اگر بخواهیم نشان دهیم که دانش‌آموزان یک مدرسه بهرهٔ هوشی بالاتری نسبت به مدرسهٔ دیگری دارند، می‌توانیم این فرض را فرمولبندی کنیم که تفاوتی در بین نیست، یعنی اینکه $\mu_1 = \mu_2$. با این فرض، می‌دانیم که چه انتظاری باید داشته باشیم، اما اگر فرض را به‌صورت $\mu_2 > \mu_1$ فرمولبندی می‌کردیم، وضعیت این‌گونه نمی‌بود؛ مگر اینکه حداقل تفاضل واقعی بین μ_1 و μ_2 را مشخص کنیم.

به‌همین نحو، اگر بخواهیم نشان دهیم که نوعی سنگ معدن، محتوی درصد اورانیوم بیشتری نسبت به سنگ معدن دیگری است، می‌توانیم این فرض را فرمولبندی کنیم که درصدها یکی هستند؛ و اگر بخواهیم نشان دهیم که تغییرپذیری بیشتری در کیفیت یک محصول نسبت به کیفیت محصول دیگری وجود دارد، می‌توانیم این فرض را فرمولبندی کنیم که هیچ تفاوتی در بین نیست، یعنی اینکه $\sigma_1 = \sigma_2$. با توجه به فرضهای عدم تفاوت، فرضهایی نظیر اینها به پیدایش اصطلاح **فرض صفر** منجر شدند، گرچه امروزه این اصطلاح به هر فرضی اطلاق می‌شود که می‌خواهیم آن را آزمون کنیم.

با استفاده از نمادها، از نماد H_0 برای فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم و از H_1 یا H_A برای فرض مقابل استفاده خواهیم کرد. مسائلی که شامل بیش از دو فرض باشند، یعنی مسائلی که شامل چندین فرض مقابل‌اند، کاملاً پیچیده از کار درمی‌آیند و ما در این کتاب به مطالعهٔ آنها نمی‌پردازیم.

۲.۱۲ آزمون فرض آماری

آزمون یک فرض آماری عبارت از به‌کار گرفتن مجموعهٔ قواعد صریحی برای آن است که تصمیم بگیریم که آیا فرض صفر را بپذیریم یا آن را به نفع فرض مقابل رد کنیم. مثلاً فرض کنید که آماردانی می‌خواهد فرض صفر $\theta = \theta_0$ را در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_1$ آزمون کند. برای انجام یک انتخاب، وی به تولید داده‌های نمونه‌ای از طریق ترتیب دادن یک آزمایش و سپس محاسبهٔ مقدار یک **آمارهٔ آزمون** دست می‌زند که این آماره به او خواهد گفت که به‌ازای هر برآمد ممکن فضای نمونه‌ای چه اقدامی بکند. بنابراین، روش آزمون، مقادیر ممکن آمارهٔ آزمون را به دو مجموعه افراز می‌کند: یک **ناحیهٔ قبول** برای H_0 و یک **ناحیهٔ رد** برای H_0.

روشی که هم‌اکنون توصیف شد ممکن است به دو نوع خطا منجر شود. مثلاً اگر مقدار واقعی پارامتر θ، θ_0 باشد و آماردان به‌طور نادرست نتیجه بگیرد که $\theta = \theta_1$، وی خطایی مرتکب می‌شود که **خطای نوع I** نامیده می‌شود. از طرف دیگر اگر مقدار واقعی پارامتر θ، θ_1 باشد و آماردان به‌طور نادرست نتیجه بگیرد که $\theta = \theta_0$، وی مرتکب خطایی از نوع دوم می‌شود که به **خطای نوع II** موسوم است.

تعریف ۲.۱۲

۱. رد فرض صفر را وقتی درست باشد **خطای نوع I** نامند؛ احتمال ارتکاب خطای نوع I را با α نشان می‌دهند.

۲. قبول فرض صفر را وقتی نادرست باشد، **خطای نوع II** نامند؛ احتمال ارتکاب خطای نوع II را با β نشان می‌دهند.

رسم بر این است که به ناحیهٔ رد برای $H_\circ$، **ناحیهٔ بحرانی** آزمون، و به احتمال به‌دست آوردن مقداری برای آمارهٔ آزمون در داخل ناحیهٔ بحرانی، وقتی که $H_\circ$ درست باشد، اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی اطلاق می‌کنند. بدین ترتیب، اندازهٔ یک ناحیهٔ بحرانی صرفاً احتمال αی مرتکب شدن یک خطای نوع I است. این احتمال، **سطح معنی‌دار بودن** آزمون هم نامیده می‌شود (بحث صفحهٔ ۴۲۵ را ببینید.)

مثال ۱.۱۲

با رجوع به مورد سوم صفحهٔ ۴۰۹، فرض کنید که سازندهٔ داروی جدید می‌خواهد فرض صفر $\theta = ۰٫۹۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta = ۰٫۶۰$ امتحان کند. آمارهٔ آزمون او X، تعداد پیروزیها (بهبودیها)ی مشاهده شده در ۲۰ امتحان است، و او فرض صفر را می‌پذیرد در صورتی که $x > ۱۴$؛ در غیر این صورت آن را رد خواهد کرد. α و β را حساب کنید.

حل. ناحیهٔ قبول برای $H_\circ$ با مقادیر، $x = ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰$؛ و ناحیهٔ رد (یا ناحیهٔ بحرانی) متناظر با مقادیر $x = ۰, ۱, ۲, \cdots, ۱۴$، داده می‌شود. بنابراین، از جدول I

$$\alpha = P(X \leq ۱۴;\quad \theta = ۰٫۹۰) = ۰٫۰۱۱۴$$

و

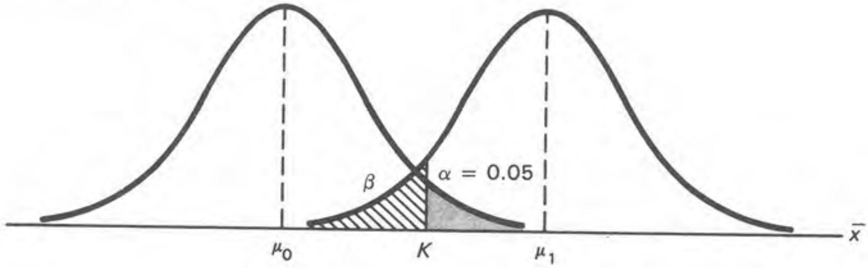
$$\beta = P(X > ۱۴;\quad \theta = ۰٫۶۰) = ۰٫۱۲۵۵$$

▲

یک روش آزمون خوب آن است که در آن α و β هردو کوچک باشند و بنابراین به ما شانس بالایی برای اتخاذ تصمیم درست بدهد. احتمال خطای نوع II در مثال ۱.۱۲ نسبتاً زیاد است، اما می‌توان آن را با تغییر مناسب ناحیهٔ بحرانی کم کرد. مثلاً اگر ناحیهٔ قبول $x > ۱۵$ را در مثال ۱.۱۲ به‌کار بریم، به‌طوری که ناحیهٔ بحرانی $x \leq ۱۵$ باشد، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که با این کار $\alpha = ۰٫۰۴۳۳$ و $\beta = ۰٫۰۵۰۹$ خواهد شد. بنابراین، گرچه احتمال خطای نوع دوم کوچکتر شده است، احتمال خطای نوع I بزرگتر شده است. تنها راهی که می‌توان احتمالهای هر دو نوع خطا را کم کرد افزایش دادن اندازهٔ نمونه است، اما مادام که n ثابت گرفته شود، این رابطهٔ متقابل بین احتمالهای خطاهای نوع I و نوع II از خصوصیّات روشهای تصمیم آماری است. به‌عبارت دیگر، اگر احتمال یک نوع خطا کاهش یابد، احتمال خطای نوع دیگر افزایش می‌یابد.

مثال ۲.۱۲

فرض کنید بخواهیم این فرض صفر را که میانگین یک جامعهٔ نرمال با $\sigma^۲ = ۱$ مساوی $\mu_\circ$ است در برابر این فرض مقابل که این میانگین مساوی $\mu_۱$ است، با $\mu_۱ > \mu_\circ$، مورد آزمون قرار دهیم.



شکل۱.۱۲ نمودار برای مثالهای ۲.۱۲ و ۳.۱۲

مقدار K را طوری پیدا کنید که $\overline{x} > K$ یک ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ $\alpha = ۰٫۰۵$ برای نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n باشد.

حل. با رجوع به شکل ۱.۱۲ و جدول III، معلوم می‌شود که $z = ۱٫۶۴۵$ متناظر با درایهٔ ۰٫۴۵۰۰ است. بنابراین

$$۱٫۶۴۵ = \frac{K - \mu_\circ}{۱/\sqrt{n}}$$

و نتیجه می‌شود که

$$K = \mu_\circ + \frac{۱٫۶۴۵}{\sqrt{n}}$$

▲

مثال ۳.۱۲

با رجوع به مثال ۲.۱۲، حداقل اندازهٔ نمونهٔ مورد نیاز برای آزمون فرض صفر $\mu_\circ = ۱۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_۱ = ۱۱$ با $\beta \leq ۰٫۰۶$، تعیین کنید.

حل. چون β با مساحت ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شکل ۱.۱۲ داده شده است، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\beta &= P\left(\overline{X} < ۱۰ + \frac{۱٫۶۴۵}{\sqrt{n}}; \quad \mu = ۱۱\right) \\ &= P\left[Z < \frac{\left(۱۰ + \frac{۱٫۶۴۵}{\sqrt{n}}\right) - ۱۱}{۱/\sqrt{n}}\right] \\ &= P(Z < -\sqrt{n} + ۱٫۶۴۵)\end{aligned}$$

و چون $z = ۱٫۵۵۵$ متناظر با درایهٔ $۰٫۵۰۰۰ - ۰٫۰۶ = ۰٫۴۴۰۰$ در جدول III است، $-\sqrt{n} + ۱٫۶۴۵$ را برابر $-۱٫۵۵۵$ قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود که $\sqrt{n} = ۱٫۶۴۵ + ۱٫۵۵۵ = ۳٫۲۰۰$ و $n = ۱۰٫۲۴$، یا پس از گرد کردن به نزدیکترین عدد صحیح برابر ۱۱ است. ▲

۳.۱۲ زیانها و مخاطره‌ها

مفاهیم تابعهای زیان و تابعهای مخاطره که در فصل ۹ معرفی شدند در نظریهٔ آزمون فرض هم نقش مهمی دارند. در رهیافت مبتنی بر نظریهٔ تصمیم، برای آزمون این فرض صفر که پارامتر θی جامعه مساوی θ_0 است در برابر این فرض که این پارامتر برابر θ_1 است، آماردان یا به عمل a_0 دست می‌زند و فرض صفر را می‌پذیرد، یا به عمل a_1 دست می‌زند و فرض مقابل را می‌پذیرد. بسته به «وضعیت طبیعت» واقعی، و عملی که او به آن دست می‌زند، زیانهای او در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

آماردان

طبیعت		a_0	a_1
	θ_0	$L(a_0,\theta_0)$	$L(a_1,\theta_0)$
	θ_1	$L(a_0,\theta_1)$	$L(a_1,\theta_1)$

این زیانها می‌توانند مثبت یا منفی باشند (به نشانهٔ جریمه‌ها و جایزه‌ها)، و تنها شرطی که اعمال خواهیم کرد آن است که

$$L(a_0,\theta_0) < L(a_1,\theta_0) \quad , \quad L(a_1,\theta_1) < L(a_0,\theta_1)$$

یعنی اینکه در هر حالت، تصمیم درست سودآورتر از تصمیم غلط است.

مانند بازیهای آماری بخش ۳.۹، انتخاب آماردان به برآمد یک آزمایش و تابع تصمیمی مانند d بستگی خواهد داشت که به او می‌گوید به‌ازای هر برآمدی، به چه عملی دست بزند. اگر فرض صفر درست باشد و آماردان فرض مقابل را بپذیرد، یعنی اگر مقدار پارامتر θ_0 باشد و آماردان عمل a_1 را اختیار کند، وی یک خطای نوع I را مرتکب می‌شود؛ متناظراً، اگر مقدار پارامتر θ_1 باشد و آماردان عمل a_0 را اختیار کند، وی یک خطای نوع II را مرتکب می‌شود. برای تابع تصمیم d، احتمال ارتکاب خطای نوع I را با $\alpha(d)$ و احتمال ارتکاب خطای نوع II را با $\beta(d)$ نشان خواهیم داد. بنابراین مقادیر تابع مخاطره (که در صفحهٔ ۳۳۴ تعریف شدند) عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} R(d,\theta_0) &= [1-\alpha(d)]L(a_0,\theta_0)+\alpha(d)L(a_1,\theta_0) \\ &= L(a_0,\theta_0)+\alpha(d)[L(a_1,\theta_0)-L(a_0,\theta_0)] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} R(d,\theta_1) &= \beta(d)L(a_0,\theta_1)+[1-\beta(d)]L(a_1,\theta_1) \\ &= L(a_1,\theta_1)+\beta(d)[L(a_0,\theta_1)-L(a_1,\theta_1)] \end{aligned}$$

که در آن، بنابه فرض، مقادیر داخل کروشه‌ها هردو مثبت‌اند. از اینجا روشن است (و شاید از اول هم باید بدیهی می‌بود) که برای مینیمم کردن مخاطره‌ها، آماردان باید تابع تصمیمی انتخاب کند که، به‌نحوی، احتمالهای هر دو نوع خطا را حتی‌المقدور کوچک نگهدارد.

اگر می‌توانستیم که احتمالهای پیشینی به $\theta_۰$ و $\theta_۱$ نسبت دهیم و اگر مقادیر دقیق همهٔ زیانهای $L(a_j, \theta_i)$ در جدول صفحهٔ ۴۱۴ را می‌دانستیم، می‌توانستیم مخاطرهٔ بیزی را (که در صفحهٔ ۳۳۶ تعریف شد) حساب کنیم و تابع تصمیمی را جستجو کنیم که این مخاطره را مینیمم کند. به روش دیگر، اگر به طبیعت چون حریف بدخواهی می‌نگریستیم، می‌توانستیم ملاک مینیماکس را به‌کار گیریم و تابع تصمیمی انتخاب کنیم که ماکسیمم مخاطره را مینیمم کند، اما همان‌طور که باید از تمرینهای کاربردی صفحهٔ ۳۴۲ آشکار باشد، این رهیافت چندان واقع‌بینانه‌ای در خیلی از وضعیتهای عملی نیست.

۴.۱۲ لم‌نیمن-پیرسن

در نظریهٔ آزمون فرض که امروزه با عنوان نظریهٔ «کلاسیک» یا «سنتی» یعنی **نظریهٔ نیمن**[1] **- پیرسن**[2] از آن یاد می‌شود، ما مشکل وابستگی بین احتمالهای خطاهای نوع I و II را با محدود کردن خود به آماره‌های آزمونی که برای آنها احتمال خطای نوع I کمتر از α یا مساوی α است، چاره می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، ما خود را به ناحیه‌های بحرانی با اندازه‌های کمتر از α یا مساوی α محدود می‌کنیم. باید اجازه دهیم که ناحیهٔ بحرانی دارای اندازه‌ای کوچکتر از α باشد تا در مورد متغیرهای تصادفی گسسته نیز، که برای آنها شاید تعیین آمارهٔ آزمونی با اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی دقیق α غیرممکن است، کارساز باشد. در این صورت برای کلیهٔ مقاصد عملی، احتمال خطای نوع I را ثابت نگاه می‌داریم و به دنبال آمارهٔ آزمونی می‌گردیم که احتمال خطای نوع II را مینیمم، یا معادل آن، کمیت $۱ - \beta$ را ماکسیمم کند. در موقع آزمون فرض صفر $\theta = \theta_۰$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_۱$، کمیت $۱ - \beta$ **توان آزمون** در $\theta = \theta_۰$ نامیده می‌شود.

یک ناحیهٔ بحرانی آزمون فرض سادهٔ $\theta = \theta_۰$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_۱$ را **بهترین** یا **تواناترین** می‌نامند هرگاه توان آزمون در $\theta = \theta_۱$ ماکسیمم باشد. برای ساختن تواناترین ناحیهٔ بحرانی در چنین وضعیتی، ما به درستنماییهای (صفحهٔ ۳۶۸ را ببینید) یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ تحت بررسی وقتی $\theta = \theta_۰$ و $\theta = \theta_۱$ رجوع می‌کنیم. با نشان دادن این درستناییها با $L_۰$ و $L_۱$ داریم

$$L_۰ = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i; \theta_۰) \quad , \quad L_۱ = \prod_{i=۱}^{n} f(x_i; \theta_۱)$$

به زبان شهودی، می‌توان استدلال کرد که $\frac{L_۰}{L_۱}$ باید برای نقاط نمونه‌ای داخل ناحیهٔ بحرانی، که وقتی $\theta = \theta_۰$ به خطاهای نوع I و وقتی $\theta = \theta_۱$ به تصمیمهای درست منجر می‌شوند، کوچک باشد؛ به‌همین نحو می‌توان استدلال کرد که $\frac{L_۰}{L_۱}$ باید برای نقاط خارج ناحیهٔ بحرانی، که وقتی $\theta = \theta_۰$ به تصمیمهای درست، و وقتی $\theta = \theta_۱$ به خطاهای نوع II منجر می‌شوند، بزرگ

1. Neyman 2. Pearson

باشد. این واقعیت که چنین استدلالی در واقع وجود یک ناحیهٔ بحرانی تواناترین را تضمین می‌کند در قضیهٔ زیر ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱.۱۲ (لم‌نیمن‑پیرسن) اگر C یک ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α و k مقدار ثابتی باشد به‌طوری که

$$\frac{L_0}{L_1} \le k \quad , \quad \text{در داخل } C$$

و

$$\frac{L_0}{L_1} \ge k \quad , \quad \text{در خارج } C$$

آنگاه C تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α برای آزمون $\theta = \theta_0$ در برابر $\theta = \theta_1$ است.

برهان. فرض کنید که C یک ناحیهٔ بحرانی باشد که در شرایط قضیه صدق می‌کند و D ناحیهٔ بحرانی دیگری به‌اندازهٔ α باشد. بنابراین

$$\int_C \cdots \int L_0 dx = \int_D \cdots \int L_0 dx = \alpha$$

که در آن dx معرف $dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ است، و دو انتگرال چندگانه در روی ناحیه‌های n بعدی C و D گرفته شده‌اند. حال، با استفاده از این واقعیت که C اجتماع مجموعه‌های مجزای $C \cap D$ و $C \cap D'$ است و D اجتماع مجموعه‌های مجزای $C \cap D$ و $C' \cap D$ است، می‌توان نوشت

$$\int_{C\cap D} \cdots \int L_0 dx + \int_{C\cap D'} \cdots \int L_0 dx = \int_{C\cap D} \cdots \int L_0 dx + \int_{C'\cap D} \cdots \int L_0 dx = \alpha$$

و بنابراین

$$\int_{C\cap D'} \cdots \int L_0 dx = \int_{C'\cap D} \cdots \int L_0 dx$$

در این صورت، چون در داخل C، $L_1 \ge L_0/k$ و در خارج C، $L_1 \le L_0/k$، نتیجه می‌شود که

$$\int_{C\cap D'} \cdots \int L_1 dx \ge \int_{C\cap D'} \cdots \int \frac{L_0}{k} dx = \int_{C'\cap D} \cdots \int \frac{L_0}{k} dx \ge \int_{C'\cap D} \cdots \int L_1 dx$$

و بنابراین

$$\int_{C\cap D'} \cdots \int L_1 dx \ge \int_{C'\cap D} \cdots \int L_1 dx$$

بالاخره

$$\begin{aligned}\int_C \cdots \int L_1 dx &= \int_{C\cap D} \cdots \int L_1 dx + \int_{C\cap D'} \cdots \int L_1 dx \\ &\geq \int_{C\cap D} \cdots \int L_1 dx + \int_{C'\cap D} \cdots \int L_1 dx \\ &= \int_D \cdots \int L_1 dx\end{aligned}$$

به‌طوری که

$$\int_C \cdots \int L_1 dx \geq \int_D \cdots \int L_1 dx$$

و به‌این ترتیب برهان قضیهٔ ۱.۱۲ کامل می‌شود. آخرین نامساوی بیان می‌کند که برای ناحیهٔ بحرانی C، احتمال عدم ارتکاب یک خطای نوع II بزرگتر از یا مساوی با احتمال متناظر برای هر ناحیهٔ بحرانی دیگر به‌اندازهٔ α است. (برای حالت گسسته، برهان، مشابه همین است و در آن، جای انتگرالگیریها را مجموعیابیها می‌گیرند.) ■

مثال ۴.۱۲

می‌خواهیم از نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با $\sigma^2 = 1$ استفاده کرده فرض صفر $\mu = \mu_0$ را در برابر فرض مقابل $\mu = \mu_1$، با $\mu_1 > \mu_0$، آزمون کنیم. از لم‌نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α را پیدا کنید.

حل. دو درستنمایی عبارت‌اند از

$$L_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu_0)^2} \quad , \quad L_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu_1)^2}$$

که در آن مجموعیابیها از $i = 1$ تا $i = n$ انجام می‌شوند و بعد از مقداری ساده کردن، نسبت آنها به‌صورت

$$\frac{L_0}{L_1} = e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1)\cdot\Sigma x_i}$$

درمی‌آید. بنابراین باید مقداری ثابت مانند k و ناحیه‌ای از فضای نمونه‌ای مانند C را پیدا کنیم به‌طوری که

$$e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1)\cdot\Sigma x_i} \leq k \quad , \quad C \text{ در داخل}$$

$$e^{\frac{n}{2}(\mu_1^2-\mu_0^2)+(\mu_0-\mu_1)\cdot\Sigma x_i} \geq k \quad , \quad C \text{ در خارج}$$

و بعد از گرفتن لگاریتم، کم کردن $\frac{n}{2}(\mu_1^2 - \mu_0^2)$ و تقسیم بر کمیت منفی $n(\mu_0 - \mu_1)$، این دو نامساوی به‌صورت

$$\overline{x} \geq K \quad , \quad C \text{ داخل}$$
$$\overline{x} \leq K \quad , \quad C \text{ خارج}$$

درمی‌آیند که در آنها K عبارتی برحسب k، n، μ_0، و μ_1 است.

در عمل، مقادیر ثابتی چون K با استفاده از اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی و نظریهٔ آماری مناسب معین می‌شوند. در حالت مورد بحث ما (مثال ۲.۱۲ را ببینید) به‌دست می‌آوریم، $K = \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ که در آن z_α به‌صورتی است که در صفحهٔ ۳۸۸ تعریف شده است. بنابراین، تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_0$ در برابر فرض مقابل $\mu = \mu_1$ (با $\mu_1 > \mu_0$) برای جامعهٔ نرمال مفروض عبارت است از

$$\overline{x} > \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

و باید توجه کرد که این ناحیه به μ_1 بستگی ندارد. این خاصیت مهمی است که در بخش ۵.۱۲ دوباره به آن باز خواهیم گشت. ▲

توجه کنید که ما در اینجا، ناحیهٔ بحرانی را بدون آنکه در ابتدا ذکر کنیم که آمارهٔ آزمون $\overline{X}$ است، به‌دست آوردیم. چون بدین ترتیب، مشخص کردن یک ناحیهٔ بحرانی، آمارهٔ آزمون متناظری را تعریف می‌کند و برعکس، این دو اصطلاح در زبان آماری به‌طور مترادف به‌کار گرفته می‌شوند.

تمرینها

۱.۱۲ در هریک از حالات زیر نظر دهید که فرض داده شده ساده است یا مرکب:
(الف) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع گاما با $\alpha = 3$ و $\beta = 2$ است؛
(ب) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع گاما با $\alpha = 3$ و $\beta \neq 2$ است؛
(ج) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای چگالی نمایی است؛
(د) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع بتا با میانگین $\mu = 0{,}50$ است.

۲.۱۲ در هریک از حالتهای زیر نظر دهید که فرض داده شده ساده است یا مرکب:
(الف) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با $\lambda = 1{,}25$ است؛
(ب) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون با $\lambda > 1{,}25$ است؛
(ج) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = 100$ است؛
(د) این فرض که یک متغیر تصادفی دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با $k = 3$ و $\theta < 0{,}60$ است.

۳.۱۲ مشاهده‌ای واحد از متغیری تصادفی دارای توزیع فوق هندسی با $N = 7$ و $n = 2$ برای

آزمون فرض صفر $k = ۲$ در برابر فرض مقابل $k = ۴$ به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و تنها وقتی رد شود که مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی ۲ است، احتمالهای خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۴.۱۲ با رجوع به مثال ۱.۱۲، اگر ناحیهٔ پذیرش $x < ۱۶$ و ناحیهٔ رد نظیر $x \geq ۱۶$ می‌بود، احتمالهای خطاهای نوع I و II چه مقدارهایی می‌داشتند.

۵.۱۲ مشاهده‌ای واحد از متغیری تصادفی با توزیع هندسی برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_۰$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_۱ > \theta_۰$ به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر را وقتی و فقط وقتی رد کنیم که مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی بزرگتر از عدد صحیح k یا مساوی آن باشد، عبارتهایی برای احتمالهای خطاهای نوع I و II پیدا کنید.

۶.۱۲ یک مشاهدهٔ واحد از یک متغیر تصادفی که دارای توزیع نمایی است برای آزمون این فرض به‌کار می‌رود که میانگین توزیع $\theta = ۲$ در برابر فرض مقابل $\theta = ۵$ است. اگر فرض صفر را وقتی و فقط وقتی بپذیریم که مقدار مشاهده شدهٔ متغیر تصادفی کمتر از ۳ است، احتمالهای خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۷.۱۲ فرض کنید که $X_۱$ و $X_۲$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال با $\sigma^۲ = ۱$ باشد. اگر بخواهیم فرض صفر $\mu = \mu_۰$ را به نفع فرض مقابل $\mu = \mu_۱$، که در آن $\mu_۱ > \mu_۰$، وقتی که $\overline{x} > \mu_۰ + ۱$ رد کنیم، اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی چیست؟

۸.۱۲ مشاهده‌ای واحد از متغیری تصادفی دارای چگالی یکنواخت با $\alpha = ۰$ برای آزمون فرض صفر $\beta = \beta_۰$ در برابر فرض مقابل $\beta = \beta_۰ + ۲$ به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و فقط وقتی رد شود که متغیر تصادفی مقداری بزرگتر از $\beta_۰ + ۱$ اختیار کند، احتمالهای خطاهای نوع I و II را پیدا کنید.

۹.۱۲ فرض کنید که $X_۱$ و $X_۲$ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲ از جامعه‌ای باشد که در زیر داده شده است

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-۱} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

اگر ناحیهٔ بحرانی $x_۱ x_۲ \geq \frac{۳}{۴}$ برای آزمون فرض صفر $\theta = ۱$ در برابر فرض مقابل $\theta = ۲$ به‌کار رود، توان این آزمون در $\theta = ۲$ چیست؟

۱۰.۱۲ نشان دهید که اگر در مثال ۴.۱۲، $\mu_۱ < \mu_۰$، لم‌نیمن ـ پیرسن ناحیهٔ بحرانی

$$\overline{x} \leq \mu_۰ - z_\alpha \cdot \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

را نتیجه می‌دهد.

۱۱.۱۲ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نمایی برای آزمون این فرض صفر که پارامتر آن $\theta = \theta_۰$ در برابر این فرض مقابل که $\theta = \theta_۱ > \theta_۰$، به‌کار می‌رود. از لم‌نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α را پیدا کنید، و از نتیجهٔ مثال ۱۶.۷ استفاده کرده نشان دهید که چگونه باید مقدار ثابت را محاسبه کرد.

۱۲.۱۲ از لم‌نیمن-پیرسن استفاده کرده نشان دهید که چگونه باید تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α را برای آزمونی بسازیم که در آن فرض صفر $\theta = \theta_0$ که در آن θ پارامتر یک توزیع دوجمله‌ای با مقدار مفروض n است در برابر این فرض که $\theta = \theta_1 < \theta_0$، آزمون می‌شود.

۱۳.۱۲ با رجوع به تمرین قبل، اگر $n = ۱۰۰$، $\theta_0 = ۰٫۴۰$، $\theta_1 = ۰٫۳۰$، و α تا سرحد امکان بزرگ باشد بدون اینکه از ۰٫۰۵ تجاوز نماید، از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای استفاده کرده احتمال ارتکاب خطای نوع II را پیدا کنید.

۱۴.۱۲ می‌خواهیم از مشاهدهٔ واحدی از یک متغیر تصادفی با توزیع هندسی استفاده کرده این فرض صفر را که پارامتر آن مساوی θ_0 است در برابر این فرض مقابل که $\theta_1 > \theta_0$ است، مورد آزمون قرار دهیم. از لم‌نیمن-پیرسن استفاده کرده بهترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α را پیدا کنید.

۱۵.۱۲ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با $\mu = ۰$، از لم‌نیمن-پیرسن استفاده کرده تواناترین ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α را برای آزمون فرض صفر $\sigma = \sigma_0$ در برابر فرض مقابل $\sigma = \sigma_1 > \sigma_0$ بسازید.

۱۶.۱۲ فرض کنید که در مثال ۱.۱۲ سازندهٔ داروی جدید حس می‌کند که با بخت ۴ به ۱ نرخ بهبودی از این بیماری ۰٫۹۰ است و ۰٫۶۰ نیست. با این بخت، احتمالهای آن را که وی تصمیم غلطی بگیرد پیدا کنید، در صورتی که از تابع تصمیم

(الف)
$$d_1(x) = \begin{cases} a_0 & x > ۱۴ \\ a_1 & x \leq ۱۴ \end{cases}$$

(ب)
$$d_2(x) = \begin{cases} a_0 & x > ۱۵ \\ a_1 & x \leq ۱۵ \end{cases}$$

(ج)
$$d_3(x) = \begin{cases} a_0 & x > ۱۶ \\ a_1 & x \leq ۱۶ \end{cases}$$

استفاده کند.

کاربردها

۱۷.۱۲ یک شرکت هواپیمایی می‌خواهد این فرض صفر را که ۶۰ درصد مسافرین آن مخالف کشیدن سیگار در داخل هواپیما هستند، مورد آزمون قرار دهد. توضیح دهید که در چه شرایطی آنها مرتکب خطای نوع I خواهند شد و تحت چه شرایطی مرتکب خطای نوع II خواهند شد.

۱۸.۱۲ از پزشکی خواسته می‌شود که معاینهٔ کاملی از یک مدیر اجرایی به‌عمل آورد تا این فرض صفر که وی قادر به پذیرش مسؤولیتهای بیشتر است، مورد آزمون قرار گیرد. توضیح دهید که تحت چه شرایطی این پزشک مرتکب خطای نوع I و تحت چه شرایطی مرتکب خطای نوع II خواهد شد.

۱۹.۱۲ متوسط زمان خشک شدن رنگ تولیدی یک سازندهٔ رنگ، ۲۰ دقیقه است. برای تحقیق در مؤثر بودن بهترسازی ترکیب شیمیایی، سازندهٔ رنگ می‌خواهد فرض صفر $\mu = ۲۰$ (برحسب

دقیقه) را در برابر فرض مقابل مناسبی آزمون کند که در آن μ متوسط زمان خشک شدن رنگی است که بهتر ساخته شده است.

(الف) سازندهٔ رنگ باید از کدام فرض مقابل استفاده کند در صورتی که نخواهد بهترسازی در ترکیب شیمیایی رنگ را اجرا نکند مگر اینکه بر اثر آن، زمان خشک شدن کاهش یابد.

(ب) سازندهٔ رنگ از کدام فرض مقابل استفاده کند در صورتی که فرایند تولید جدید واقعاً ارزانتر باشد و وی بخواهد بهترسازی را اجرا کند مگر اینکه موجب افزایش زمان خشک شدن رنگ شود.

۲۰.۱۲ یک زیست‌شناس می‌خواهد این فرض صفر را که میانگین طول از یک سر بال تا سر بال دیگر نوعی حشره ۱۲٫۳ میلیمتر است در برابر این فرض مقابل که ۱۲٫۳ میلیمتر نیست، آزمون کند. اگر وی نمونه‌ای تصادفی استخراج کند و تصمیم بگیرد که فرض صفر را بپذیرد اگر و تنها اگر میانگین نمونه بین ۱۲٫۰ میلیمتر و ۱۲٫۶ میلیمتر باشد، در صورتی که مقدار $\overline{x} =$ ۱۲٫۹ (برحسب میلیمتر) را به‌دست آورد وی چه تصمیمی خواهد گرفت؟ و آیا این تصمیم در صورتی که

(الف) $\mu =$ ۱۲٫۵؛

(ب) $\mu =$ ۱۲٫۳

تصمیمی خطاست؟

۲۱.۱۲ یک کارمند بانک می‌خواهد این فرض صفر را که به‌طور متوسط در روز ۱۰ فقره چک بی‌محل به بانک آورده می‌شود در برابر این فرض مقابل که رقم بسیار کوچکتر از آن است آزمون کند. اگر وی یک نمونهٔ تصادفی استخراج کند و تصمیم بگیرد که فرض صفر را رد کند اگر و تنها اگر میانگین نمونه از ۱۲٫۵ تجاوز کند، در صورتی که $\overline{x} =$ ۱۱٫۲ چه تصمیمی خواهد گرفت؟ و آیا این تصمیم در صورتی که

(الف) $\lambda =$ ۱۱٫۵؛

(ب) $\lambda =$ ۱۰٫۰؛

خطا خواهد بود؟

۲۲.۱۲ مثال ۳.۱۲ را دوباره با

(الف) $\beta =$ ۰٫۰۳؛

(ب) $\beta =$ ۰٫۰۱؛

حل کنید.

۲۳.۱۲ فرض کنید می‌خواهیم این فرض صفر را که دوام نوعی لاستیک به‌طور متوسط ۳۵۰۰۰ مایل است در برابر این فرض مقابل که به‌طور متوسط ۴۵۰۰۰ مایل است، آزمون کنیم. اگر فرض کنیم که با متغیری تصادفی با توزیع نمایی سروکار داریم، اندازهٔ نمونه و احتمال خطای نوع I را مشخص و از لم‌نیمن-پیرسن برای ساختن ناحیهٔ بحرانی استفاده می‌کنیم. آیا در صورتی که فرض مقابل را به

(الف) $\theta_1 =$ ۵۰۰۰۰ مایل؛

(ب) $\theta_1 >$ ۳۵۰۰۰ مایل؛

تغییر دهیم، همان ناحیهٔ بحرانی را به‌دست خواهیم آورد؟

۵.۱۲ تابع توان یک آزمون

در مثال ۱.۱۲، قادر بودیم که مقادیری یکتا برای احتمالهای ارتکاب خطاهای نوع I و II بدهیم زیرا یک فرض ساده را در برابر فرض مقابل ساده‌ای آزمون می‌کردیم. با این حال در عمل به‌ندرت پیش می‌آید که فرضهای ساده در مقابل فرضهای مقابل ساده آزمون شوند: معمولاً یکی از آنها، یا هر دو مرکب‌اند. مثلاً، در مثال ۱.۱۲ ممکن است واقع‌بینانه‌تر باشد که این فرض صفر را که نرخ بهبودی از بیماری $\theta \geq ۰/۹۰$ است در برابر فرض مقابل $\theta < ۰/۹۰$، یعنی در برابر این فرض مقابل که داروی جدید به‌طوری که ادعا شده است مؤثر نیست، آزمون کرد.

وقتی با فرضهای مرکب سروکار داریم، مسألهٔ ارزشیابی مزایای یک ملاک آزمون، یا ناحیهٔ بحرانی، خیلی مشکلتر می‌شود. در این صورت باید احتمالهای $\alpha(\theta)$ی ارتکاب خطای نوع I را برای تمام مقادیر θ در داخل حوزه‌ای که تحت فرض صفر $H_۰$ مشخص شده است، و احتمالهای $\beta(\theta)$ی ارتکاب خطای نوع II را برای تمام مقادیر θ در داخل حوزه‌ای که تحت فرض $H_۱$ مشخص شده است، در نظر گیریم. رسم بر این است که دو مجموعهٔ احتمال را به‌صورت زیر با هم ترکیب کنند.

تعریف ۳.۱۲ تابع توان یک آزمون فرض آماری $H_۰$ در برابر فرض مقابل $H_۱$ به‌صورت زیر است:

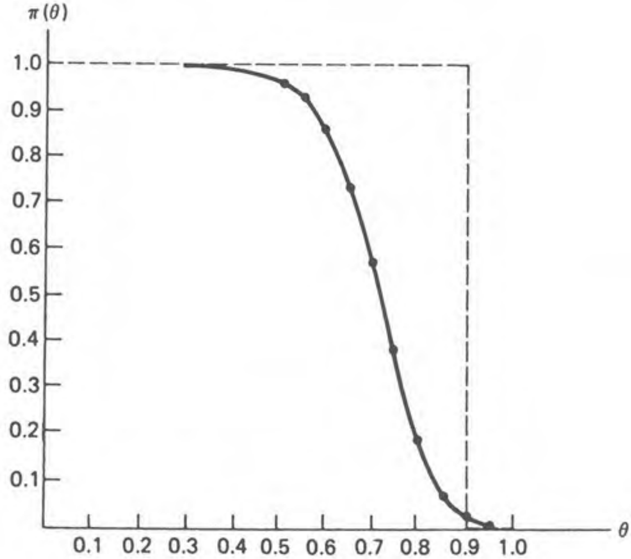
$$\pi(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta) & \text{برای مقادیر } \theta \text{ که تحت } H_۰ \text{ اختیار می‌شوند} \\ ۱ - \beta(\theta) & \text{برای مقادیر } \theta \text{ که تحت } H_۱ \text{ اختیار می‌شوند} \end{cases}$$

بنابراین، مقادیر تابع توان، احتمالهای رد فرض $H_۰$ برای مقادیر مختلف پارامتر θ است. همچنین ملاحظه کنید که تابع توان برای مقادیر θ تحت $H_۰$، احتمال ارتکاب خطای نوع I، و برای مقادیر θ تحت $H_۱$، احتمال مرتکب نشدن خطای نوع II را می‌دهد.

مثال ۵.۱۲

با مراجعه به مثال ۱.۱۲، فرض کنید که می‌خواستیم این فرض صفر را که $\theta \geq ۰/۹۰$ در برابر این فرض مقابل که $\theta < ۰/۹۰$ آزمون کنیم. تابع توان متناظر با همان ملاک آزمون صفحهٔ ۴۱۳ را که در آن فرض صفر را می‌پذیریم هرگاه $x > ۱۴$ و آن را رد می‌کنیم هرگاه $x \leq ۱۴$، بررسی کنید. مانند قبل، x تعداد پیروزیها (بهبودیها) در $n = ۲۰$ امتحان است.

حل. با انتخاب آن مقادیر θ که برای آنها احتمالهای نظیر $\alpha(\theta)$ یا $\beta(\theta)$ در جدول I موجودند، احتمالهای $\alpha(\theta)$ی به‌دست آوردن حداکثر ۱۴ پیروزی را برای $\theta = ۰/۹۰$ یا $\theta = ۰/۹۵$ و احتمالهای $\beta(\theta)$ی به‌دست آوردن ۱۴ پیروزی را برای $\theta = ۰/۸۵, ۰/۸۰, \cdots, ۰/۵۰$ پیدا می‌کنیم. این احتمالها و مقادیر متناظر تابع توان $\pi(\theta)$، در جدول زیر نشان داده شده‌اند:

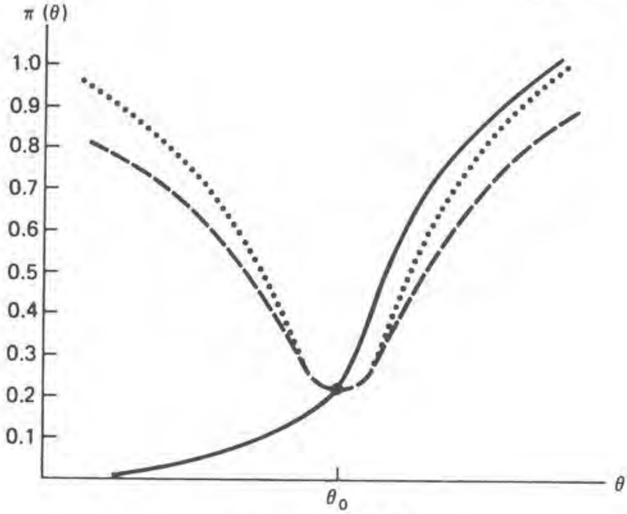


شکل ۲.۱۲ نمودار مثال ۵.۱۲

احتمال ردّ H_0 $\pi(\theta)$	احتمال خطای نوع II $\beta(\theta)$	احتمال خطای نوع I $\alpha(\theta)$	θ
۰٫۰۰۰۳		۰٫۰۰۰۳	۰٫۹۵
۰٫۰۱۱۴		۰٫۰۱۱۴	۰٫۹۰
۰٫۰۶۷۴	۰٫۹۳۲۶		۰٫۸۵
۰٫۱۹۵۸	۰٫۸۰۴۲		۰٫۸۰
۰٫۳۸۲۹	۰٫۶۱۷۱		۰٫۷۵
۰٫۵۸۳۷	۰٫۴۱۶۳		۰٫۷۰
۰٫۷۵۴۵	۰٫۲۴۵۵		۰٫۶۵
۰٫۸۷۴۵	۰٫۱۲۵۵		۰٫۶۰
۰٫۹۴۴۷	۰٫۰۵۵۳		۰٫۵۵
۰٫۹۷۹۳	۰٫۰۲۰۷		۰٫۵۰

نمودار این تابع توان در شکل ۲.۱۲ نشان داده شده است. البته، این نمودار فقط قابل اعمال برای ناحیهٔ بحرانی $x \leq ۱۴$ مثال ۱.۱۲ است، ولی مقایسهٔ آن با تابع توان یک ملاک آزمون آرمانی (بی‌خطا) برای این مسأله، که به‌کمک خط‌چین شکل ۲.۱۲ داده شده، جالب است. ▲

تابعهای توان نقش بسیار مهمی در ارزیابی آزمونهای آماری، به‌ویژه در مقایسهٔ چندین ناحیهٔ بحرانی



شکل۳.۱۲ تابعهای توان

که همه قابل استفاده در یک فرض صفر مفروض در برابر فرض مقابل مفروضی هستند، دارند. ضمناً، اگر در شکل ۲.۱۲ احتمالهای قبول کردن $H_\circ$ را (به‌جای احتمالهای رد کردن $H_\circ$) با نقطه‌یابی رسم می‌کردیم، **منحنی مشخصهٔ عمل**[1] ناحیهٔ بحرانی مفروض را به‌دست می‌آوریم. به‌عبارت دیگر، مقادیر تابع مشخصهٔ عمل، که عمدتاً در کاربردهای صنعتی مورد استفاده است، با $1 - \pi(\theta)$ داده می‌شوند.

در صفحهٔ ۴۱۵ خاطرنشان کردیم که در نظریهٔ نیمن-پیرسن آزمونهای آماری، α، یعنی احتمال خطای نوع I، را ثابت می‌گیریم و این مستلزم آن است که فرض صفر $H_\circ$ فرض ساده‌ای باشد، مثلاً، $\theta = \theta_\circ$. در نتیجه، تابع توان هر آزمون این فرض صفر، از نقطهٔ $(\theta_\circ, \alpha)$، تنها نقطه‌ای که در آن مقدار تابع توان برابر احتمال ارتکاب خطایی است، خواهد گذشت. با این کار، مقایسهٔ تابعهای توان چندین ناحیهٔ بحرانی، که همه برای آزمون فرض صفر سادهٔ $\theta = \theta_\circ$ در برابر یک فرض مرکب، مثلاً فرض مقابل $\theta \neq \theta_\circ$ طرح شده‌اند، تسهیل می‌شود. برای روشن شدن مطلب، شکل ۳.۱۲ را در نظر بگیرید که تابعهای توان سه ناحیهٔ بحرانی مختلف، یا ملاک آزمون را که برای این منظور طرح شده‌اند، می‌دهد. چون به‌ازای هر مقدار θ بجز $\theta_\circ$ مقادیر تابعهای توان، احتمالهای اتخاذ تصمیمهای درست را می‌دهند، مطلوب آن است که آنها را تا سرحد امکان به یک نزدیک کرد. بنابراین از طریق وارسی دیده می‌شود که ناحیهٔ بحرانیی که تابع توان آن با منحنی نقطه‌چین شکل ۳.۱۲ داده شده است بر ناحیهٔ بحرانیی که تابع توان آن با منحنی خط‌چین داده شده است، برتری دارد. احتمال مرتکب نشدن خطای نوع II با اولین ناحیهٔ بحرانی، همواره بیشتر از احتمال مرتکب نشدن این نوع خطا با ناحیهٔ بحرانی دوم است، و گوییم که اولین ناحیهٔ بحرانی **به‌طور یکنواخت تواناتر** از دومی است؛ ناحیهٔ بحرانی دوم را **غیرقابل قبول** نیز می‌نامند.

1. Operating characteristic Curve (Oc-Curve)

قائل شدن تمایزی بدین روشنی به‌هنگام مقایسهٔ ناحیه‌های بحرانیی که تابعهای توان آنها با منحنیهای پررنگ در شکل ۳.۱۲ داده شده‌اند، امکانپذیر نیست. در این حالت ناحیهٔ بحرانی اول برای $\theta < \theta_0$ ارجح است در حالی که دومی برای $\theta > \theta_0$ ارجح است. در چنین وضعیتهایی ما به ملاکهای بیشتری برای مقایسهٔ تابعهای توان نیازمندیم که از آن جمله یکی ملاکی است که در تمرین ۳۴.۱۲ داده شده است. توجه کنید که اگر فرض مقابل، $\theta > \theta_0$ بود، ناحیهٔ بحرانیی که تابع توان آن با منحنی پررنگ داده شده است به‌طور یکنواخت تواناتر از ناحیهٔ بحرانیی می‌بود که تابع توان آن با منحنی نقطه‌چین داده شده است.

در حالت کلی، برای آزمون یک فرض ساده در برابر یک فرض مقابل مرکب، α، احتمال مرتکب شدن خطای نوع I را مشخص می‌کنیم و یک ناحیهٔ بحرانی را به‌طور یکنواخت تواناتر از دیگری می‌نامیم هرگاه مقادیر تابع توان آن همواره بزرگتر یا مساوی با تابع توان دیگری بوده و نامساوی اکید حداقل برای یک مقدار پارامتر موردنظر برقرار باشد. اگر در مسألهٔ مفروضی، یک ناحیهٔ بحرانی با اندازهٔ α به‌طور یکنواخت تواناتر از هر ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α باشد، آن را **به‌طور یکنواخت تواناترین** نامند. متأسفانه، ناحیه‌های بحرانی به‌طور یکنواخت تواناترین در موقعی که یک فرض ساده را در برابر یک فرض مقابل مرکب آزمون می‌کنیم، به‌ندرت موجودند. البته، وقتی یک فرض ساده را در برابر یک فرض مقابل ساده آزمون می‌کنیم، یک ناحیهٔ بحرانی تواناترین به‌اندازهٔ α، به‌صورتی که در صفحهٔ ۴۱۵ تعریف شد، در واقع همواره به‌طور یکنواخت تواناترین است.

تاکنون همواره فرض می‌کردیم که ناحیهٔ قبول H_0 معادل با ناحیهٔ رد H_1 است و برعکس، اما مثلاً در **آزمونهای چندمرحله‌ای یا دنباله‌ای**، که در آن فرضهای مقابل عبارت از پذیرفتن H_0، پذیرفتن H_1، یا موکول کردن اخذ تصمیم به تهیهٔ داده‌های بیشتری است، وضعیت طور دیگری است. همچنین در به اصطلاح **آزمونهای معنی‌دار بودن**، که در آن، بدیل رد کردن H_0 خودداری از داوری است و نه پذیرش H_0، وضعیت به‌گونه‌ای دیگر است. مثلاً اگر بخواهیم این فرض صفر را که سکه‌ای کاملاً همگن است در برابر این فرض که چنین نیست آزمون کنیم، و در ۱۰۰ بار پرتاب سکه، ۵۷ شیر و ۴۳ خط بیاید، این کار ما را قادر به رد فرض صفر وقتی $\alpha = ۰٫۰۵$ است، نخواهد کرد (تمرین ۳۸.۱۲ را ببینید). معهذا چون فقط چند شیر بیشتر از ۵۰، که برای یک سکهٔ همگن انتظار داریم، به‌دست آورده‌ایم، شاید به‌همان اندازه اکراه داشته باشیم که فرض صفر را به‌عنوان درست بپذیریم. برای اجتناب از این کار، می‌توانیم بگوییم که اختلاف بین ۵۰ و ۵۷، یعنی تعداد شیرهای مورد انتظار و شیرهای حاصل را می‌توان به‌نحو موجهی معلول تصادف دانست ـــ یا می‌توان گفت که این اختلاف آن اندازه زیاد نیست که فرض صفر را رد کند. در هر صورت ما خود را ملزم به پذیرش هیچ وضعی نمی‌کنیم و مادام که واقعاً فرض صفر را قبول نکرده باشیم، نمی‌توانیم مرتکب خطای نوع I شویم. عمدتاً در ارتباط با آزمونهایی از این نوع است که ما به احتمال خطای نوع I، **سطح معنی‌دار بودن** اطلاق می‌کنیم.

۶.۱۲ آزمونهای نسبت درستنمایی

لم‌نیمن-پیرسن وسیله‌ای برای ساختن تواناترین ناحیه‌های بحرانی برای آزمون کردن یک فرض صفر ساده در برابر یک فرض مقابل ساده است، ولی در فرضهای مرکب همواره قابل به‌کار بردن نیست. اینک روشی کلی برای ساختن ناحیه‌های بحرانی برای آزمونهای فرضهای مرکب ارائه می‌کنیم که در اغلب حالات، خواص بسیار رضایتبخشی دارند. آزمونهای حاصل، که **آزمونهای نسبت درستنمایی** نامیده می‌شوند، مبتنی بر تعمیمی از روش بخش ۴.۱۲ هستند، ولی لزوماً به‌طور یکنواخت تواناترین نیستند. ما در اینجا این روش را در رابطه با آزمونهای مربوط به یک پارامتر θ و جامعه‌های پیوسته مورد بحث قرار می‌دهیم، اما همهٔ استدلالهایمان را می‌توان به آسانی به حالت چند پارامتری و جامعه‌های گسسته تعمیم داد.

برای توضیح شیوهٔ نسبت درستنمایی، فرض می‌کنیم که X_1، X_2، . . . ، و X_n نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای باشد که چگالی آن در x عبارت از $f(x;\theta)$ است، و فرض می‌کنیم که Ω مجموعهٔ مقادیری است که پارامتر θ اختیار می‌کند. غالباً Ω را **فضای پارامتر** θ می‌نامیم. فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم عبارت است از

$$H_0 : \theta \in \omega$$

و فرض مقابل عبارت است از

$$H_1 : \theta \in \omega'$$

که در آن ω زیرمجموعهٔ Ω و ω' متمم ω نسبت به Ω است. بنابراین، فضای پارامتر θ به مجموعه‌های مجزای ω و ω' افراز می‌شود؛ طبق فرض صفر، θ عضو مجموعهٔ اول است و طبق فرض مقابل عضوی از مجموعهٔ دوم است. در بیشتر مسائل، Ω یا مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی مثبت، بازه‌ای از اعداد حقیقی، یا مجموعه‌ای گسسته از اعداد حقیقی است.

وقتی H_0 و H_1 هردو فرضهای ساده‌ای باشند، ω و ω' هریک فقط یک عضو دارند، و در بخش ۴.۱۲ ما آزمونهایی برای مقایسهٔ درستنماییهای L_0 و L_1 ساختیم. در حالت کلی، که در آن حداقل یکی از دو فرض مرکب است، ما به‌جای این کار $\max L_0$ و $\max L$ را مقایسه می‌کنیم که در آن $\max L_0$ مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی (صفحهٔ ۳۶۸ را ببینید) برای کلیهٔ مقادیر θ در ω است، و $\max L$ مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی برای همهٔ مقادیر θ در Ω است. به‌عبارت دیگر، اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای داشته باشیم که چگالی آن در x برابر $f(x;\theta)$ است، $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ مشروط به این محدودیت است که θ باید عضوی از ω باشد، و $\hat{\hat{\theta}}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ برای کلیهٔ مقادیر θ در Ω است، بنابراین

$$\max L_0 = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\hat{\theta})$$

و

$$\max L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\hat{\theta})$$

این کمیتها هر دو مقادیر متغیرهای تصادفی‌اند زیرا آنها به مقادیر مشاهده شدهٔ x_1، x_2، . . . ، x_n بستگی دارند، و نسبت آنها

$$\lambda = \frac{\max L_0}{\max L}$$

مقداری از آمارهٔ **نسبت درستنمایی** Λ نامیده می‌شود.

چون $\max L_0$ و $\max L$ هر دو مقادیر یک تابع درستنمایی‌اند، و بنابراین هرگز منفی نیستند، نتیجه می‌شود که $\lambda \geq 0$؛ همچنین، چون ω زیرمجموعه‌ای از فضای پارامتر Ω است، نتیجه می‌شود که $\lambda \leq 1$. وقتی فرض صفر نادرست است، انتظار داریم که $\max L_0$ در مقایسه با $\max L$ کوچک باشد، که در این صورت λ نزدیک صفر خواهد بود. از طرف دیگر وقتی که فرض صفر درست است و $\theta \in \omega$، انتظار داریم که $\max L_0$ به $\max L$ نزدیک باشد، که در این صورت λ به ۱ نزدیک خواهد بود. لذا، بنابر آزمون نسبت درستنمایی، فرض صفر H_0 رد می‌شود اگر و تنها اگر λ در ناحیهٔ ردی به شکل $\lambda \leq k$ قرار گیرد که در آن $0 < k < 1$. به‌طور خلاصه،

تعریف ۴.۱۲ اگر ω و ω' زیرمجموعه‌های متمم از فضای پارامتری Ω باشند، و اگر

$$\lambda = \frac{\max L_0}{\max L_1}$$

که در آن $\max L_0$ و $\max L$ به‌ترتیب مقادیر ماکسیمم تابعهای درستنمایی برای کلیهٔ مقادیر θ در ω و Ω هستند، در این صورت ناحیهٔ بحرانی

$$\lambda \leq k$$

که در آن $0 < k < 1$، یک **آزمون نسبت درستنمایی** را برای فرض صفر $\theta \in \omega$ در برابر فرض مقابل $\theta \in \omega'$ تعریف می‌کند.

اگر H_0 فرض ساده‌ای باشد، k طوری انتخاب می‌شود که اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی برابر α باشد؛ اگر H_0 مرکب باشد، k طوری انتخاب می‌شود که احتمال خطای نوع I به‌ازای کلیهٔ مقادیر θ در ω کوچکتر از α یا مساوی با آن، و در صورت امکان، حداقل برای یک مقدار θ در ω برابر α باشد. بنابراین اگر H_0 فرضی ساده و $g(\lambda)$ چگالی Λ در λ باشد وقتی H_0 درست است، در

این صورت k باید طوری باشد که

$$P(\Lambda \leq k) = \int_{\circ}^{k} g(\lambda) d\lambda = \alpha$$

در حالت گسسته به‌جای انتگرال، مجموع قرار داده می‌شود و k بزرگترین مقداری اختیار می‌شود که برای آن، مجموع کوچکتر از α یا مساوی آن است.

مثال ۶.۱۲
ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درستنمایی برای آزمون فرض صفر

$$H_{\circ} : \mu = \mu_{\circ}$$

در برابر فرض مقابل مرکب

$$H_{۱} : \mu \neq \mu_{\circ}$$

را بر مبنای نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^{۲}$ پیدا کنید.

حل. چون ω تنها شامل $\mu_{\circ}$ است، نتیجه می‌شود که $\hat{\mu} = \mu_{\circ}$، و چون Ω مجموعهٔ کلیهٔ اعداد حقیقی است، بنابه روش بخش ۷.۱۰، نتیجه می‌شود که $\hat{\hat{\mu}} = \overline{x}$. بنابراین

$$\max L_{\circ} = \left(\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\right)^{n} \cdot e^{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}} \cdot \Sigma(x_i - \mu_{\circ})^{۲}}$$

و

$$\max L = \left(\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}\right)^{n} \cdot e^{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}} \cdot \Sigma(x_i - \overline{x})^{۲}}$$

که در آن مجموعها از $i = ۱$ تا $i = n$ محاسبه می‌شوند، و مقدار آمارهٔ نسبت درستنمایی پس از ساده کردن، که تحقیق آن در تمرین ۲۶.۲۱ از خواننده خواسته می‌شود به‌صورت

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}} \cdot \Sigma(x_i - \mu_{\circ})^{۲}}}{e^{-\frac{۱}{۲\sigma^{۲}} \cdot \Sigma(x_i - \overline{x})^{۲}}} = e^{-\frac{n}{۲\sigma^{۲}}(\overline{x} - \mu_{\circ})^{۲}}$$

درمی‌آید. بنابراین ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از

$$e^{-\frac{n}{۲\sigma^{۲}}(\overline{x} - \mu_{\circ})^{۲}} \leq k$$

و، بعد از گرفتن لگاریتم و تقسیم بر $-\frac{n}{2\sigma^2}$، به‌صورت

$$(\overline{x}-\mu_0)^2 \geq -\frac{2\sigma^2}{n}\cdot \ln k$$

یا

$$|\overline{x}-\mu_0| \geq K$$

درمی‌آید که در آن K باید طوری معین شود که اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی برابر α شود. توجه کنید که $\ln k$ با توجه به اینکه $0 < k < 1$، منفی است.

چون $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است (قضیهٔ ۴.۸ را ببینید)، معلوم می‌شود که ناحیهٔ بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی عبارت است از

$$|\overline{x}-\mu_0| \geq z_{\alpha/2}\cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا، معادل آن

$$|z| \geq z_{\alpha/2}$$

که در آن

$$z=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

به‌عبارت دیگر، فرض صفر باید در صورتی که Z مقداری بزرگتر از یا مساوی $z_{\alpha/2}$، یا مقداری نابیشتر از $-z_{\alpha/2}$ اختیار کند، رد شود. ▲

در مثال قبل یافتن مقدار ثابتی که اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی را α کند، آسان بود زیرا می‌توانستیم به توزیع معلوم $\overline{X}$ رجوع کنیم و مجبور نبودیم که توزیع خود Λ، آمارهٔ نسبت درستنمایی را به‌دست آوریم. چون توزیع Λ عموماً بسیار پیچیده است و این کار محاسبهٔ k را مشکل می‌کند، اغلب ارجح آن است که تقریب زیر را به‌کار بریم که مرجعی برای برهان آن در پایان فصل داده شده است.

قضیهٔ ۲.۱۲ برای n بزرگ، توزیع $-2\ln\Lambda$، تحت شرایطی بسیار کلی، به توزیع خی‌دو با ۱ درجهٔ آزادی میل می‌کند.

باید اضافه کنیم که این قضیه تنها برای حالت یک پارامتری قابل اعمال است؛ اگر جامعه متضمن بیش از یک پارامتر مجهول باشد که بر فرض صفر، r محدودیت را اعمال می‌کند، تعداد درجه‌های

آزادی در توزیع خی‌دوی تقریبی $-2 \cdot \ln \Lambda$ برابر r است. بنابراین، اگر بخواهیم این فرض صفر را آزمون کنیم که میانگین و واریانس مجهول یک جامعهٔ نرمال، به‌ترتیب، μ_0 و σ_0^2 هستند در برابر این فرض مقابل که $\mu \neq \mu_0$ و $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$، تعداد درجه‌های آزادی در توزیع خی‌دوی تقریبی $-2 \cdot \ln \Lambda$ برابر ۲ خواهد بود دو محدودیت عبارت‌اند از $\mu = \mu_0$ و $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

چون مقادیر کوچک λ متناظر با مقادیر بزرگ $-2 \cdot \ln \lambda$ هستند، می‌توانیم قضیهٔ ۲.۱۲ را برای نوشتن ناحیهٔ بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی تقریبی به‌صورت

$$-2 \cdot \ln \lambda \geq \chi^2_{\alpha,1}$$

مورد استفاده قرار دهیم که در آن $\chi^2_{\alpha,1}$ به‌صورتی است که در صفحهٔ ۳۰۲ تعریف شده است. در رابطه با مثال ۶.۱۲ عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم

$$-2 \cdot \ln \lambda = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{x} - \mu_0)^2 = \left(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2$$

که در واقع مقداری است از یک متغیر تصادفی که توزیع خی‌دو با ۱ درجهٔ آزادی دارد.

همان‌گونه که در صفحهٔ ۴۲۶ خاطرنشان کردیم، روش نسبت درستنمایی عموماً نتایجی رضایتبخش به‌دست می‌دهد. این مطلب که همیشه چنین نیست در مثال زیر، که کمی غیرعادی است، تشریح شده است.

مثال ۷.۱۲

می‌خواهیم تنها برمبنای یک مشاهده، این فرض ساده را که توزیع احتمال X، به‌صورت

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

است در برابر این فرض مقابل مرکب که توزیع X به‌صورت

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$g(x)$	$\frac{a}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{c}{3}$	$\frac{2}{3}$	۰	۰	۰

است آزمون کنیم، که در آن $a + b + c = 1$. نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی حاصل از طریق روش نسبت درستنمایی، غیرقابل قبول است.

حل. فرض مقابل مرکب، شامل کلیهٔ توزیعهای احتمالی است که با تخصیص مقادیر مختلف از ۰ تا ۱ برای a، b، c، تنها با قید این محدودیت که $a + b + c = 1$، به‌دست می‌آیند. برای تعیین λ به‌ازای هر مقدار x، ابتدا قرار می‌دهیم $x = 1$. برای این مقدار، به‌دست می‌آوریم $\max L_0 = \frac{1}{12}$، $\max L = \frac{1}{3}$ (متناظر با $a = 1$)، و بنابراین $\lambda = \frac{1}{4}$. با تعیین λ به‌ازای سایر مقادیر x به‌روشی مشابه، نتایجی را که در جدول زیر نشان داده شده‌اند، به‌دست می‌آوریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
λ	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	۱	۱	۱

اگر اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی $\alpha = ۰٫۲۵$ باشد، نتیجه می‌گیریم که تکنیک نسبت درستنمایی، ناحیهٔ بحرانیی به‌دست می‌دهد که به‌ازای آن فرض صفر رد می‌شود در صورتی که $\lambda = \frac{۱}{۴}$، یعنی، وقتی $x = ۱$، $x = ۲$، یا $x = ۳$؛ روشن است که

$$f(۱) + f(۲) + f(۳) = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۲} = ۰٫۲۵$$

احتمال متناظر خطای نوع II با $g(۴) + g(۵) + g(۶) + g(۷)$ داده می‌شود، و بنابراین برابر $\frac{۲}{۳}$ است.

حال ناحیهٔ بحرانیی را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آن، فرض صفر تنها وقتی رد می‌شود که $x = ۴$. اندازهٔ آن نیز $\alpha = ۰٫۲۵$ است زیرا $f(۴) = \frac{۱}{۴}$، ولی احتمال متناظر برای خطای نوع II عبارت است از

$$\begin{aligned} g(۱) + g(۲) + g(۳) + g(۵) + g(۶) + g(۷) &= \frac{a}{۳} + \frac{b}{۳} + \frac{c}{۳} + ۰ + ۰ + ۰ \\ &= \frac{۱}{۳} \end{aligned}$$

و چون این عدد کمتر از $\frac{۲}{۳}$ است، ناحیهٔ بحرانی حاصل از روش نسبت درستنمایی غیرقابل قبول است. البته همان‌طور که در ابتدا خاطرنشان کردیم، این مثال تاحدی غیرعادی است. ▲

تمرینها

۲۴.۱۲ با رجوع به تمرین ۳.۱۲ فرض کنید که می‌خواستیم فرض صفر $k \leq ۲$ را در برابر فرض مقابل $k > ۲$ آزمون کنیم. احتمالهای

(الف) خطاهای نوع I را برای $k = ۰, ۱, ۲$؛

(ب) خطاهای نوع II را برای $k = ۴, ۵, ۶, ۷$؛

پیدا کنید. همچنین نمودار تابع توان متناظر را رسم کنید.

۲۵.۱۲ با رجوع به مثال ۵.۱۲ فرض کنید که فرض صفر را وقتی $x \leq ۱۵$ رد کنیم و آن را بپذیریم هرگاه $x > ۱۵$. $\pi(\theta)$ را برای همان مقادیر θی جدول صفحهٔ ۴۲۳ محاسبه و نمودار تابع توان ملاک آزمون را رسم کنید.

۲۶.۱۲ در حل مثال ۶.۱۲، درستی گامی را که به

$$\lambda = e^{-\frac{n}{۲\sigma^۲}(\bar{x}-\mu_۰)^۲}$$

منجر شد، تحقیق کنید.

۲۷.۱۲ تعداد پیروزیها در n امتحان برای آزمون این فرض که پارامتر θی یک توزیع دوجمله‌ای مساوی $\frac{۱}{۲}$ است در برابر این فرض مقابل که مساوی $\frac{۱}{۲}$ نیست، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

(الف) عبارتی برای آمارهٔ نسبت درستنمایی پیدا کنید.

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده، نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$x \cdot \ln x + (n-x) \cdot \ln(n-x) \geq K$$

نوشت که در آن x تعداد پیروزیهای مشاهده شده است.

(ج) با بررسی منحنی $f(x) = x \cdot \ln x + (n-x) \cdot \ln(n-x)$، به‌ویژه مینیمم آن، و تقارن آن، نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی این آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$\left| x - \frac{n}{۲} \right| \geq K$$

نوشت که در آن K ثابتی است که به‌اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی بستگی دارد.

۲۸.۱۲ می‌خواهیم از نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n برای آزمون این فرض صفر که پارامتر θی یک جامعهٔ نمایی برابر $\theta_۰$ است در برابر این فرض مقابل که مساوی $\theta_۰$ نیست، استفاده کنیم.

(الف) عبارتی برای آزمون نسبت درستنمایی پیدا کنید.

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده، نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\overline{x} \cdot e^{-\overline{x}/\theta_۰} \leq K$$

۲۹.۱۲ یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با میانگین و واریانس نامعلوم برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_۰$ در برابر فرض مقابل $\mu \neq \mu_۰$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از برآوردهای ماکسیمم درستنمایی همزمان μ و $\sigma^۲$ که در مثال ۱۷.۱۰ به‌دست آمد، نشان دهید که مقادیر آمارهٔ نسبت درستنمایی را می‌توان به‌شکل

$$\lambda = \left(۱ + \frac{t^۲}{n-۱} \right)^{-n/۲}$$

نوشت که در آن $t = \frac{\overline{x}-\mu_۰}{s/\sqrt{n}}$. توجه کنید که بدین ترتیب می‌توان آزمون نسبت درستنمایی را بر توزیع t بنا کرد.

۳۰.۱۲ برای آمارهٔ نسبت درستنمایی تمرین ۲۹.۱۲ نشان دهید که $-۲ \cdot \ln \lambda$، وقتی $n \to \infty$، به $t^۲$ میل می‌کند. (راهنمایی: از بسط سری نامتناهی $\ln(۱+x)$ که در صفحهٔ ۲۳۹ داده شده است استفاده کنید.)

۳۱.۱۲ با مفروض بودن یک نمونهٔ تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با میانگین و واریانس نامعلوم، عبارتی برای آمارهٔ نسبت درستنمایی به‌منظور آزمون کردن فرض صفر $\sigma = \sigma_0$ در برابر فرض مقابل $\sigma \neq \sigma_0$ پیدا کنید. (راهنمایی: مثال ۱۷.۱۰ را ببینید.)

۳۲.۱۲ نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازه‌های n_1، n_2، ...، و n_k از k جامعهٔ نرمال با میانگینها و واریانسهای نامعلوم برای آزمون فرض صفر $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$ در برابر این فرض مقابل که واریانسها برابر نیستند، به‌کار می‌روند.

(الف) نشان دهید که تحت فرض صفر، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی میانگینهای μ_i و واریانسهای σ_i^2 عبارت‌اند از

$$\hat{\mu}_i = \overline{x}_i\,, \qquad \hat{\sigma}_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i-1)s_i^2}{n}$$

که در آنها $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$، در حالی که بدون اعمال محدودیتها، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی میانگینهای μ_i و واریانسهای σ_i^2 عبارت‌اند از

$$\hat{\hat{\mu}}_i = \overline{x}_i\,, \qquad \hat{\hat{\sigma}}_i^2 = \frac{(n_i-1)s_i^2}{n_i}$$

این مطلب مستقیماً از نتایج حاصل در بخش ۸.۱۰ نتیجه می‌شود.

(ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف)، نشان دهید که آمارهٔ نسبت درستنمایی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{(n_i-1)s_i^2}{n_i}\right]^{n_i/2}}{\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-1)s_i^2}{n}\right]^{n/2}}$$

۳۳.۱۲ نشان دهید که به‌ازای $k = 2$ می‌توان آمارهٔ نسبت درستنمایی تمرین ۳۲.۱۲ را برحسب نسبت دو واریانس نمونه‌ای بیان کرد و بنابراین آزمون نسبت درستنمایی را می‌توان بر توزیع F بنا کرد.

۳۴.۱۲ وقتی یک فرض صفر ساده را در برابر یک فرض مقابل مرکب آزمون می‌کنیم، یک ناحیهٔ بحرانی، نااریب نامیده می‌شود در صورتی که تابع توان متناظر، مقدار مینیمم خود را به‌ازای مقداری از پارامتر اختیار می‌کند که تحت فرض صفر قید شده است. به‌عبارت دیگر، یک ناحیهٔ بحرانی نااریب است هرگاه احتمال رد فرض صفر موقعی که فرض صفر درست است، دارای کمترین مقدار باشد. با مفروض بودن تنها یک مشاهده از متغیر تصادفی X با چگالی

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \theta^2(\frac{1}{2} - x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

که در آن $-1 \leq \theta \leq 1$، نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی $x \geq \alpha$، یک ناحیهٔ بحرانی نااریب و به‌طور یکنواخت تواناترین با اندازهٔ α برای آزمون کردن فرض صفر $\theta = 0$ در برابر فرض مقابل $\theta \neq 0$ در اختیار می‌گذارد.

کاربردها

۳۵.۱۲ از مشاهده‌ای واحد برای آزمون این فرض صفر که میانگین زمان انتظار بین لرزه‌ها در یک ایستگاه زلزله‌نگاری (میانگین جامعه‌ای نمایی) برابر $\theta = 10$ (برحسب ساعت) است در برابر این فرض مقابل که $\theta \neq 10$ (برحسب ساعت) است استفاده می‌شود. اگر فرض صفر را وقتی و تنها وقتی رد کنیم که مقدار مشاهده شده کمتر از ۸ یا بزرگتر از ۱۲ است، پیدا کنید

(الف) احتمال خطای نوع I،

(ب) احتمالهای خطای نوع II، وقتی $\theta = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20$.

همچنین تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۳۶.۱۲ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۶۴ در آزمون این فرض صفر که برای گروه سنّی خاص، میانگین نمرات در یک آزمون پیشرفت (میانگین جامعه‌ای نرمال با واریانس $\sigma^2 = 256$) کوچکتر از ۴۰ یا مساوی آن است، در برابر این فرض مقابل که بزرگتر از ۴۰ است، به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر را فقط و فقط در صورتی رد کنیم که میانگین نمونهٔ تصادفی بیشتر از ۴۳٫۵ باشد، پیدا کنید

(الف) احتمالهای خطای نوع I وقتی، $\mu = 37, 38, 39, 40$؛

(ب) احتمالهای خطای نوع II وقتی، $\mu = 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48$؛

همچنین نمودار تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۳۷.۱۲ مجموع مقادیر حاصل در نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۵، برای آزمون این فرض صفر که در تقاطعی به‌طور متوسط بیش از دو تصادف در هر هفته وجود دارد (که برای این جامعهٔ پواسون $\lambda > 2$) در برابر این فرض مقابل که به‌طور متوسط تعداد تصادفها ۲ یا کمتر از ۲ است به‌کار می‌رود. اگر فرض صفر وقتی و تنها وقتی رد شود که مجموع مشاهدات پنج یا کمتر از پنج است، مطلوب است

(الف) احتمالهای خطاهای نوع I، وقتی $\lambda = 2{,}2, 2{,}4, 2{,}6, 2{,}8, 3{,}0$

(ب) احتمالهای خطاهای نوع II، وقتی $\lambda = 2{,}0, 1{,}5, 1{,}0, 0{,}5$

(راهنمایی: نتیجهٔ مثال ۱۵.۷ را به‌کار برید). همچنین نمودار تابع توان این ملاک آزمون را رسم کنید.

۳۸.۱۲ درستی این حکم صفحهٔ ۴۴۲ را تحقیق کنید که ۵۷ شیر و ۴۳ خط در ۱۰۰ پرتاب یک سکه به ما این امکان را نمی‌دهد که این فرض صفر را که سکه کاملاً همگن است (در برابر این فرض مقابل که سکهٔ کاملاً همگن نیست) در سطح معنی‌دار بودن $\alpha = 0{,}05$ رد کنیم. (راهنمایی: از تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای استفاده کنید.)

۳۹.۱۲ برای مقایسهٔ تغییرات در وزن چهار نژاد از سگها، محققان نمونه‌های تصادفی مستقلی به‌اندازه‌های $n_1 = 8$، $n_2 = 10$، $n_3 = 6$، و $n_4 = 8$ استخراج کردند و مقادیر $s_1^2 = 16$،

$s_1^2 = ۲۵$، $s_2^2 = ۱۲$، و $s_3^2 = ۲۴$ را به‌دست آوردند. با فرض اینکه جامعه‌های مورد نمونه‌گیری، نرمال باشند از فرمول قسمت (ب) تمرین ۳۲.۱۲ استفاده کرده $-۲ \cdot \ln \lambda$ را محاسبه و این فرض صفر را که $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید. توضیح دهید که چرا تعداد درجه‌های آزادی برای این آزمون خی‌دوی تقریبی، ۳ است.

۴۰.۱۲ زمانهای از کار افتادن قطعه‌های الکترونیکی خاصی برحسب دقیقه عبارت‌اند از ۱۵، ۲۸، ۳، ۱۲، ۴۲، ۱۹، ۲۰، ۲، ۲۵، ۳۰، ۶۲، ۱۲، ۱۸، ۱۶، ۴۴، ۶۵، ۳۳، ۵۱، ۴، و ۲۸. با تلقی این داده‌ها به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نمایی، از نتایج تمرین ۲۸.۱۲ و قضیهٔ ۲.۱۲ استفاده کرده فرض صفر $\theta = ۱۵$ را در برابر فرض مقابل $\theta \neq ۱۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید. (از $\ln ۱٫۷۶۳ = ۰٫۵۷۰$ استفاده کنید.)

مراجع

بحثهایی دربارهٔ خواص گوناگون آزمونهای نسبت درستنمایی، به‌ویژه خواص بزرگ نمونه‌ای آنها، و برهانی از قضیهٔ ۲.۱۲ را می‌توان در کتابهای درسی کاملاً پیشرفته دربارهٔ نظریهٔ آمار، مثلاً در

LEHMANN, E. L., *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1986.

WILKS, S. S., *Mathematical Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

یافت. قسمت عمدهٔ تحقیقات اولیه‌ای که در این زمینه انجام شده‌اند در کتاب زیر آمده است

Selected Papers in Statistics and Probability by Abraham Wald. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1957.

۱۳

آزمون فرض: کاربردها

۱.۱۳ مقدمه

در فصل ۱۲ قسمتی از نظریه‌ای را که مبنای آزمونهای آماری است، مورد بحث قرار دادیم و در این فصل برخی از آزمونهای استاندارد را که استفادهٔ بسیار وسیعی در کاربردها دارند، ارائه می‌کنیم. اغلب این آزمونها، حداقل آنهایی را که مبتنی بر توزیعهای معلوم جامعه‌اند، می‌توان با تکنیک نسبت درستنمایی به‌دست آورد.

برای توضیح اصطلاحاتی که به‌کار خواهیم برد، وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن می‌خواهیم

فرض صفر $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ را در برابر فرض **مقابل دوطرفهٔ** $H_1 : \theta \neq \theta_\circ$ آزمون کنیم. چون معقول به‌نظر می‌آید که فرض صفر را وقتی برآورد نقطه‌ای $\hat{\theta}$ برای θ به $\theta_\circ$ نزدیک است بپذیریم و وقتی $\hat{\theta}$ بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از $\theta_\circ$ است آن را رد کنیم، منطقی خواهد بود که ناحیهٔ بحرانی را متشکل از هر دو دم توزیع نمونه‌گیری آمارهٔ آزمون $\hat{\Theta}$ بگیریم. چنین آزمونی، **آزمون دودمی** نامیده می‌شود.

از طرف دیگر، اگر بخواهیم فرض صفر $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ را در برابر **فرض مقابل یکطرفهٔ** $H_1 : \theta < \theta_\circ$ آزمون کنیم، به‌نظر معقول می‌رسد که $H_\circ$ را تنها وقتی $\hat{\theta}$ خیلی کوچکتر از $\theta_\circ$ است، رد کنیم. بنابراین، در این حالت منطقی خواهد بود که ناحیهٔ بحرانی را تنها متشکل از دم چپ توزیع نمونه‌ای $\hat{\Theta}$ بگیریم. به همین نحو، در آزمون $H_\circ : \theta = \theta_\circ$ در برابر فرض مقابل یکطرفهٔ $H_1 : \theta > \theta_\circ$، $H_\circ$ را تنها برای مقادیر بزرگ $\hat{\theta}$ رد می‌کنیم و ناحیهٔ بحرانی تنها متشکل از دم راست توزیع نمونه‌گیری $\hat{\Theta}$ است. هر آزمونی که در آن ناحیهٔ بحرانی تنها متشکل از یک دم توزیع نمونه‌ای آمارهٔ آزمون باشد، **آزمون یک دمی** نامیده می‌شود.

مثلاً، برای فرض مقابل دوطرفهٔ $\mu \neq \mu_\circ$، در مثال ۶.۱۲، تکنیک نسبت درستنمایی به یک آزمون دوطرفه با ناحیهٔ بحرانی

$$|\overline{x} - \mu_\circ| \geq z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

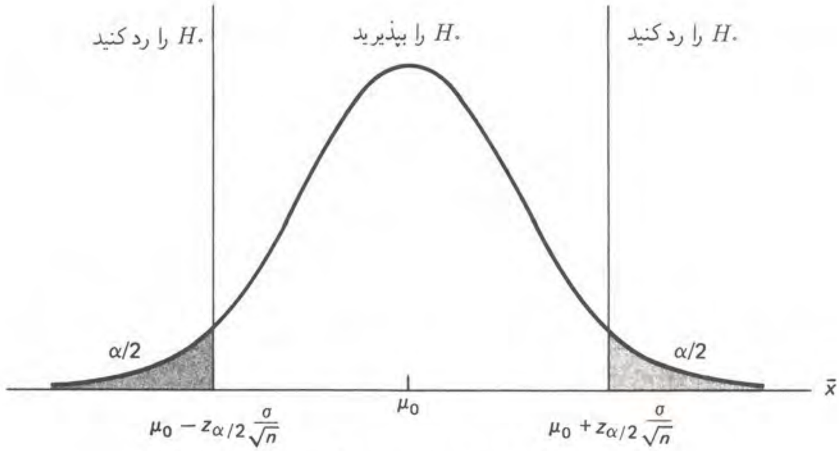
یا

$$\overline{x} \leq \mu_\circ - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad \overline{x} \geq \mu_\circ + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

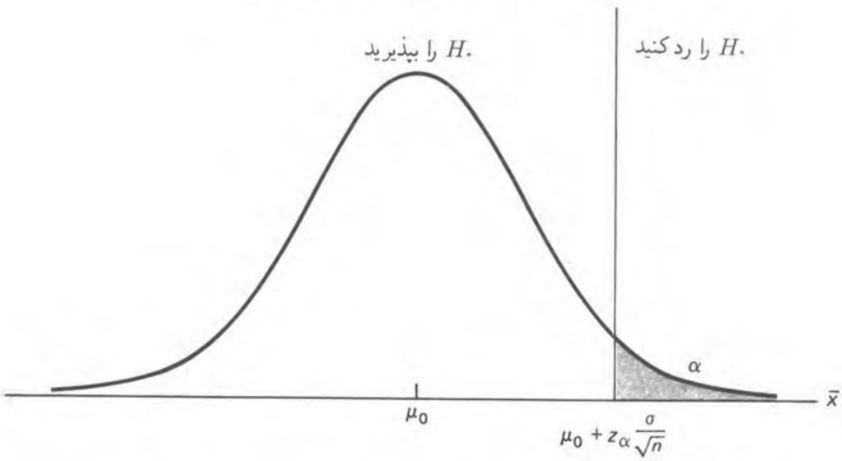
منجر شد. همان‌طور که در شکل ۱.۱۳ نشان داده شده، در صورتی که $\overline{X}$ مقداری اختیار کند که در هر یک از دو دم توزیع نمونه‌گیری آن قرار بگیرد، فرض صفر $\mu = \mu_\circ$ رد می‌شود. به‌طور نمادین، این ناحیهٔ بحرانی را می‌توان به شکل $z \leq -z_{\alpha/2}$ و $z \geq z_{\alpha/2}$ بیان کرد، که در آن

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}$$

اگر از فرض مقابل یکطرفهٔ $\mu > \mu_\circ$ استفاده کرده بودیم، تکنیک نسبت درستنمایی به آزمون یکطرفه‌ای که ناحیهٔ بحرانی آن در شکل ۲.۱۳ نشان داده شده منجر می‌شد، و اگر فرض مقابل یکطرفهٔ $\mu < \mu_\circ$ را به‌کار برده بودیم، روش نسبت درستنمایی به آزمون یکطرفه‌ای منجر می‌شد که ناحیهٔ بحرانی آن در شکل ۳.۱۳ نشان داده شده است. به‌نظر معقول می‌رسد که در حالت اوّل فرض صفر را تنها برای مقادیر $\overline{X}$ که در دم سمت راست توزیع نمونه‌گیری آن قرار می‌گیرند، رد کنیم، و در حالت دوّم فرض صفر را تنها برای مقادیر $\overline{X}$ که در دم سمت چپ توزیع نمونه‌گیری آن قرار می‌گیرند، رد کنیم. به‌صورت نمادی، ناحیه‌های بحرانی متناظر را می‌توان به‌صورت $z \geq z_\alpha$ و $z \leq -z_\alpha$ نوشت که در آن z همان است که قبلاً تعریف شده است. گرچه استثناهایی بر این



شکل۱.۱۳ ناحیهٔ بحرانی برای آزمون دودمی



شکل۲.۱۳ ناحیهٔ بحرانی برای آزمون یک دمی ($H_1 : \mu > \mu_0$)

قاعده هست (تمرین ۱.۱۳ را ببینید)، فرضهای مقابل دوطرفه معمولاً به آزمونهای دو دمی و فرضهای مقابل یکطرفه به آزمونهای یک دمی منجر می‌شوند.

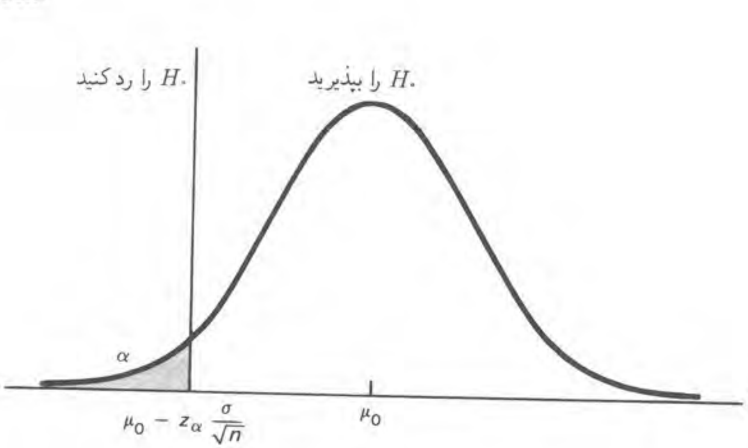
به‌طور سنتی، مرسوم است که نکات اصلی آزمون فرضها را به‌کمک مراحل زیر نشان می‌دهند:

۱. H_0 و H_1 را فرمولبندی و α را مشخص کنید.

۲. با استفاده از توزیع نمونه‌گیری آمارهٔ آزمون مناسبی، ناحیه‌ای بحرانی به‌اندازهٔ α معین کنید.

۳. مقدار آمارهٔ آزمون را از داده‌های نمونه‌ای معین کنید.

۴. بررسی کنید که آیا مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی می‌افتد یا نه و مطابق آن، فرض صفر را رد کنید، یا بپذیرید، یا از داوری خودداری کنید.



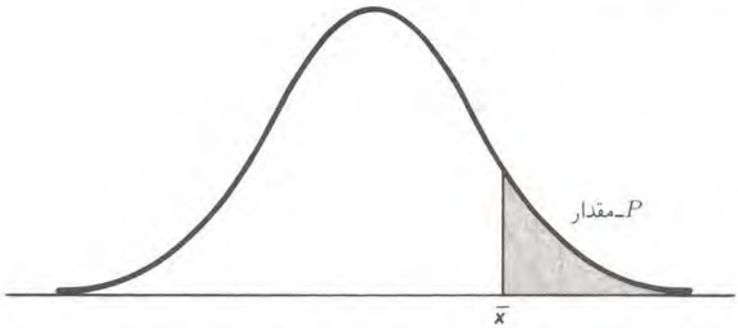
شکل ۳.۱۳ ناحیهٔ بحرانی برای آزمون یک دمی ($H_1 : \mu < \mu_0$)

در شکلهای ۱.۱۳، ۲.۱۳، ۳.۱۳، خطوط مجزاکنندهٔ ملاکهای آزمون (یعنی، **مرزهای ناحیه‌های بحرانی**، یا **مقادیر بحرانی**) نیازمند دانستن z_α یا $z_{\alpha/2}$اند. این مقادیر به سادگی از جدول III (یا جداول مبسوطتر توزیع نرمال استاندارد) برای هر سطح معنی‌دار بودن α در دسترس‌اند، امّا مسأله همواره ساده نیست. مثلاً، اگر توزیع نمونه‌گیری آمارهٔ آزمون، توزیع t، توزیع خی‌دو، یا توزیع F از کار درآیند، جدولهای متداول، مقادیر لازم t_α، $t_{\alpha/2}$، χ^2_α، $\chi^2_{\alpha/2}$، F_α، یا $F_{\alpha/2}$ را در اختیار می‌گذارند امّا این مقادیر تنها برای چند مقدار α در دسترس قرار می‌گیرد. عمدتاً به این دلیل، رسم برآن است که آزمونهای فرضهای آماری را تقریباً به‌صورت انحصاری با سطح معنی‌دار بودن α برابر با ۰٫۰۵ یا ۰٫۰۱ بنا می‌کنند. این کار ممکن است کاملاً دلخواه به‌نظر آید، و البته چنین نیز هست، و به این دلیل است که امروزه استفاده از **Pـمقدارها** (تعریف ۱.۱۳ را ببینید) ارجحیت یافته است. به‌روش دیگر، می‌توانستیم از یک رهیافت نظریهٔ تصمیمی استفاده کنیم و بدین ترتیب پیامدهای همهٔ عملهای ممکن را به‌حساب آوریم. امّا، هم‌چنان که قبلاً در بخش ۱.۹ متذکر شدیم، «. . . مسائل زیادی موجودند که در آنها تخصیص مقادیر عددی به همهٔ پیامدهای عملهای شخص و احتمالهای همهٔ امکانها، اگر غیرممکن هم نباشد، دشوار است.»

با ورود کامپیوتر به صحنه و در دسترس عامه قرارگرفتن نرم‌افزارهای آماری، چهار گامی را که در بالا به‌طور خلاصه بیان شده‌اند، می‌توان جرح و تعدیل کرد تا آزادی عمل بیشتری در انتخاب سطح معنی‌دار بودن α میسر شود. با مراجعه به آزمونی که ناحیهٔ بحرانی آن در شکل ۲.۱۳ نشان داده شده است، به‌جای مقایسه مقدار مشاهده‌شده $\overline{X}$ با مرزهای ناحیهٔ بحرانی یا مقدار

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

با z_α، ناحیهٔ هاشور خوردهٔ شکل ۴.۱۳ را با α مقایسه می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، فرض صفر را



شکل۴.۱۳ نمودار برای تعریف Pـمقدارها.

رد می‌کنیم هرگاه ناحیهٔ بحرانی شکل ۴.۱۳ کوچکتر از α یا مساوی آن باشد. این ناحیه هاشور خورده را Pـمقدار، **پروب‌ـمقدار**، **احتمال دمی**، یا **سطح معنی‌دار بودن مشاهده‌شده** متناظر با $\overline{x}$، که مقدار مشاهده‌شده $\overline{X}$ است می‌نامند. در واقع، این مقدار عبارت از احتمال $P(\overline{X} \geq \overline{x})$ است هنگامی که فرض صفر درست است.

متناظراً، وقتی فرض مقابل به‌صورت $\mu < \mu_{\circ}$ و ناحیهٔ بحرانی، ناحیه بحرانی مربوط به شکل ۳.۱۳ است، Pـمقدار عبارت از احتمال $P(\overline{X} \leq \overline{x})$ است هنگامی که فرض صفر درست است؛ و وقتی فرض مقابل $\mu \neq \mu_{\circ}$ و ناحیهٔ بحرانی، مربوط به شکل ۱.۱۳ است، Pـمقدار عبارت است از $۲P(\overline{X} \geq \overline{x})$ یا $۲P(\overline{X} \leq \overline{x})$ بسته به‌اینکه $\overline{x}$ در دم سمت راست یا دم سمت چپ توزیع نمونه‌گیری $\overline{x}$ بیفتد. در اینجا مجدداً فرض می‌شود که فرض صفر درست است.

در حالت کلی، Pـمقدار چنین است.

> **تعریف۱.۱۳** متناظر با مقداری مشاهده‌شده از یک آمارهٔ آزمون، Pـمقدار عبارت از پایینترین سطح معنی‌دار بودن است که می‌توان فرض صفر را در آن رد کرد.

در رابطه با این رهیافت دیگر برای آزمون فرض، اولین گام از چهارگام در صفحهٔ ۴۳۸ بی‌تغییر باقی می‌ماند، دومین گام به‌صورت زیر در می‌آید:

′۲. آمارهٔ آزمون را مشخص کنید.

سومین گام به‌صورت

′۳. مقدار آمارهٔ آزمون و Pـمقدار متناظر را از داده‌های نمونه‌ای تعیین کنید.

و چهارمین گام به‌صورت زیر در می‌آید:

′۴. بررسی کنید که آیا Pـمقدار کمتر از α یا مساوی آن است و، برطبق آن، فرض صفر را رد کنید، وگرنه آن را بپذیرید یا از داوری خودداری کنید.

همان‌طور که در صفحهٔ ۴۳۹ خاطرنشان کردیم، با این کار آزادی عمل بیشتری در انتخاب

سطح معنی‌دار بودن به وجود می‌آید، امّا تصور وضعیتهایی که در آنها استفاده از مثلاً $\alpha = ۰٫۰۴$ به‌جای $\alpha = ۰٫۰۵$، یا $\alpha = ۰٫۰۱۵$ را به‌جای $\alpha = ۰٫۰۱$ موجه بدانیم، دشوار است. درعمل؛ واقعاً غیرممکن است که به‌طور کامل از دلخواه بودن اجتناب کنیم، و در اغلب حالتها، لااقل تاحدی، به‌طور ذهنی داوری می‌کنیم که کدام یک از $\alpha = ۰٫۰۵$ یا $\alpha = ۰٫۰۱$ منعکس کنندهٔ مخاطره‌های قابل‌قبول است. البته، وقتی مخاطره زیاد است و در صورت عملی بودن، می‌توانیم از سطح معنی‌دار بودن بسیار کوچکتر از $\alpha = ۰٫۰۱$ استفاده کنیم.

در همه حال، باید دریافت که دو روش آزمون فرضها، چهارگامی که در صفحهٔ ۴۳۸ داده شده‌اند و چهار گام توصیف شده در اینجا، معادل‌اند. این بدان معناست که صرف‌نظر از اینکه کدام روش استفاده می‌کنیم، تصمیم نهایی‌ـرد فرض صفر، پذیرش آن، یا خودداری از داوری‌ـیکی است. درعمل، روشی را که راحت‌تر است به کار می‌بریم، و این امر ممکن است به توزیع نمونه‌گیری آمارهٔ آزمون، در دسترس بودن جدولهای آماری یا نرم‌افزارهای کامپیوتری، و ماهیت مسأله بستگی داشته باشد (به‌عنوان مثال، نگاه کنید به مثال ۸.۱۳ و تمرین ۴۸.۱۳).

آمارداناني هستند که ترجیح می‌دهند از همهٔ مشکلات مربوط به انتخاب سطح معنی‌دار بودن احتراز کنند. با محدود کردن نقش خود به تحلیل داده‌ها، آنها α را مشخص نمی‌کنند و گام ′۴ را حذف می‌کنند. البته، همواره پسندیده است که از دیگران (محققان یا مدیریت) در فرمولبندی فرضها و مشخص کردن α یاوری گرفته شود، ولی به زحمت می‌توان معقول دانست که Pـمقدارها را در اختیار اشخاصی قرار دهند که کارورزی آماری مناسب ندارند و تصمیم‌گیری را به عهدهٔ آنان واگذارند. برای عمده کردن مشکلات، وضعیت وسوسه‌آمیزی را در نظر گیرید که شخص می‌خواهد α را پس از ملاحظه Pـمقداری که باید آن را با α مقایسه کند، انتخاب نماید. مثلاً، فرض کنید که در آزمایشی Pـمقدار برابر ۰٫۰۳۶ محاسبه می‌شود. اگر مایل به رد فرض صفر باشیم و به این ترتیب حرف خود را به کرسی بنشانیم، وسوسه می‌شویم که α را برابر ۰٫۰۵ انتخاب کنیم؛ اگر مایل باشیم که فرض صفر را بپذیریم و به این ترتیب حرف خود را پیش بریم، وسوسه خواهیم شد که $\alpha = ۰٫۰۱$ را انتخاب کنیم.

با این حال در **تحلیل اکتشافی داده‌ها**، که در آن حقیقتاً به‌دنبال انجام استنباطی نیستیم، می‌توان از Pـمقدارها به‌عنوان اندازه‌هایی برای قوت شواهد استفاده کرد. مثلاً، فرض کنید که در تحقیقات مربوط به سرطان با دو نوع دارو، دانشمندان Pـمقدارهایی برابر ۰٫۰۷۳۵ و ۰٫۰۰۲۱ برای مؤثر بودن این داروها در کاهش اندازهٔ غده‌ها به‌دست آورند. این نتیجه، اشاره برآن دارد که شواهد قویتری در حمایت از مؤثر بودن داروی دوم موجود است، یا اینکه، داروی دوّم «امیدوارکننده‌تر به نظر می‌رسد».

۲.۱۳ آزمونهای مربوط به میانگینها

در این بخش متداولترین آزمونهای مربوط به میانگین یک جامعه، و در بخش ۳.۱۳ آزمونهای متناظر دربارهٔ میانگینهای دو جامعه را مورد بحث قرار می‌دهیم. آزمونهای مربوط به میانگینهای بیش از دو جامعه در فصل ۱۵ دنبال خواهد شد. کلیهٔ آزمونهای این فصل مبتنی برنظریهٔ توزیع نرمال‌اند،

با این فرض که یا نمونه‌ها از جامعه‌های نرمال گرفته شده‌اند یا به حد کافی بزرگ‌اند تا تقریبهای نرمال موجه باشند، برخی بدیلهای **ناپارامتری** برای این آزمونها، که به داشتن اطلاعی دربارهٔ جامعه یا جامعه‌هایی که نمونه‌ها از آن به‌دست آمده‌اند نیازی ندارند، در فصل ۱۶ دنبال خواهند شد.

فرض کنید بخواهیم که فرض $\mu = \mu_{\circ}$ را در برابر یکی از فرضهای مقابل $\mu \neq \mu_{\circ}$، $\mu > \mu_{\circ}$، یا $\mu < \mu_{\circ}$ برمبنای نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n از جامعه‌ای نرمال با واریانس معلوم $\sigma^{۲}$ آزمون کنیم. البته این آزمونی است که در مثال ۶.۱۲ برای تشریح روش نسبت درستنمایی در نظرگرفتیم و ناحیه‌های بحرانی برای فرضهای مقابل متناظر عبارت‌اند از $|z| \geq z_{\alpha/۲}$، $z \geq z_{\alpha}$، و $z \leq -z_{\alpha}$، که در آنها

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_{\circ}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

همان‌طور که در بخش ۱.۱۳ خاطر نشان کردیم، رایجترین مقدارها برای سطح معنی‌دار بودن عبارت‌اند از ۰٫۰۵ و ۰٫۰۱، و آن‌گونه که خواننده در تمرین ۶.۶۰ نشان داده است مقادیر متناظر z_{α} و $z_{\alpha/۲}$ عبارت‌اند از $z_{۰٫۰۵} = ۱٫۶۴۵$، $z_{۰٫۰۱} = ۲٫۳۳$، $z_{۰٫۰۲۵} = ۱٫۱۹۶$، و $z_{۰٫۰۰۵} = ۲٫۵۷۵$.

مثال ۱.۱۳

فرض کنید که بنابر تجربه می‌دانیم که انحراف معیار وزن بسته‌های ۸ اونسی نان شیرینیهایی که در یک شیرینی‌پزی تهیه می‌شوند ۰٫۱۶ اونس است. برای تحقیق دربارهٔ اینکه تولید آن در روز خاصی تحت کنترل است، یعنی، برای تحقیق دربارهٔ اینکه میانگین واقعی بسته‌ها ۸ اونس است، نمونه‌ای ۲۵تایی از بسته‌ها انتخاب و ملاحظه می‌شود که میانگین وزن آنها $\overline{x} = ۸٫۰۹۱$ اونس است. چون شیرینی‌پزی وقتی $\mu > ۸$ ضرر می‌کند و وقتی $\mu < ۸$ به زیان مشتری است، فرض صفر $\mu = ۸$ را در برابر فرض مقابل $\mu \neq ۸$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_{\circ} : \mu = ۸$$
$$H_{۱} : \mu \neq ۸$$
$$\alpha = ۰٫۰۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲٫۵۷۵$ یا $z \geq ۲٫۵۷۵$، که در آن

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_{\circ}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

۳. با قرار دادن $\overline{x} = ۸٫۰۹۱$، $\mu_{\circ} = ۸$، $\sigma = ۰٫۱۶$، و $n = ۲۵$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{۸٫۰۹۱ - ۸}{۰٫۱۶/\sqrt{۲۵}} = ۲٫۸۴$$

۴. چون $z = ۲٫۸۴$ از ۲٫۵۷۵ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد و لازم است فرایند تولید به نحو مناسبی تنظیم شود. ▲

اگر از رهیافت متفاوتی که در صفحهٔ ۴۴۰ توصیف شد، استفاده کرده بودیم، Pـمقدار ۰٫۰۰۴۶ را به‌دست می‌آوردیم (نگاه کنید به تمرین ۸.۱۳)، و چون ۰٫۰۰۴۶ کوچکتر از ۰٫۰۱ است، نتیجه همان می‌شد که در بالا به‌دست آوردیم.

باید توجه شود که ناحیهٔ بحرانی $z \geq z_\alpha$ را می‌توان برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_\circ$ در برابر فرض مقابل سادهٔ $\mu = \mu_1 > \mu_\circ$، یا آزمون فرض مرکب $\mu \leq \mu_\circ$ در برابر فرض مقابل مرکب $\mu > \mu_\circ$ به کار برد. در حالت اول یک فرض ساده را در برابر فرض مقابل ساده نظیر بخش ۴.۱۲ آزمون می‌کنیم (مثال ۴.۱۲ صفحهٔ ۴۱۷ را ببینید، که در آن این آزمون را به‌ازای $\sigma = 1$ مطالعه کردیم)، و در حالت دوم، α ماکسیمم احتمال ارتکاب خطای نوع I به‌ازای هر مقدار μ است که تحت فرض صفر اختیار می‌شود. البته استدلالهای مشابهی در مورد ناحیهٔ بحرانی $z \leq -z_\alpha$ به‌کار می‌رود.

وقتی که با یک نمونهٔ تصادفی بزرگ به اندازهٔ $n \geq 30$ از جامعه‌ای که لزوماً نرمال نیست ولی واریانس متناهی دارد، سروکار داریم می‌توانیم از قضیهٔ حد مرکزی برای توجیه به کار بردن آزمونی که برای جامعه‌های نرمال به کار رفته است استفاده کنیم، و حتی وقتی σ^2 نامعلوم است می‌توانیم مقدار آن را در موقع محاسبهٔ آمارهٔ آزمون، با s^2 تقریب کنیم. برای تشریح نحوهٔ استفاده از این **آزمونهای بزرگ نمونه‌ای** تقریبی، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۱۳

فرض کنید که ۱۰۰ حلقه لاستیک که به وسیلهٔ کارخانه‌ای معین تولید شده به‌طور متوسط ۲٫۸۱۹ مایل با انحراف معیار ۱۲۹۵ مایل دوام کرده‌اند. فرض صفر $\mu = 22000$ را در برابر فرض مقابل $\mu < 22000$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$H_\circ : \mu = 22000$$
$$H_1 : \mu < 22000$$
$$\alpha = 0{,}05$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -1{,}645$، که در آن

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_\circ}{\sigma/\sqrt{n}}$$

۳. با قرار دادن $\overline{x} = 21819$، $\mu_\circ = 22000$، $s = 1295$ برای σ، و $n = 100$ به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{21819 - 22000}{1295/\sqrt{100}} = -1{,}40$$

۴. چون $z = -1{,}40$ بزرگتر از $-1{,}645$ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ یعنی شواهد واقعی در دست نیست که این لاستیکها به همان خوبی که تحت فرض صفر بیان شده است، نباشند. ▲

اگر از رهیافت متفاوت توصیف شده در صفحهٔ ۴۴۰ استفاده می‌کردیم، Pـمقدار ۰٫۰۸۰۸ را به‌دست می‌آوردیم (نگاه کنید به تمرین ۹.۱۳)، که از ۰٫۰۵ بیشتر است. همان‌طور که می‌توان انتظار داشت، نتیجه همان است که قبلاً به‌دست آمد، یعنی فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

وقتی $n < ۳۰$ و $\sigma^۲$ نامعلوم است، از آزمونی که دربارهٔ آن بحث می‌کردیم، نمی‌توان استفاده کرد. معهذا، در تمرین ۲۹.۱۲ دیدیم که برای نمونه‌های تصادفی از جامعه‌های نرمال، تکنیک نسبت درستنمایی آزمون متناظری را مبتنی بر

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_\circ}{s/\sqrt{n}}$$

به‌دست می‌دهد که، مطابق قضیهٔ ۱۳.۸، مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با $n - ۱$ درجهٔ آزادی است. بنابراین، ناحیه‌های بحرانی به اندازهٔ α برای آزمون کردن فرض صفر $\mu = \mu_\circ$ در برابر فرض مقابل $\mu \neq \mu_\circ$، $\mu > \mu_\circ$ یا $\mu < \mu_\circ$ به ترتیب عبارت‌اند از $|t| \geq t_{\alpha/۲, n-۱}$، و $t \leq -t_{\alpha, n-۱}$. توجه کنید تذکراتی که در صفحهٔ ۴۴۳ در رابطه با فرض $\mu_۱ > \mu_\circ$ و آزمون فرض صفر $\mu \leq \mu_\circ$ در برابر فرض مقابل $\mu > \mu_\circ$ داده شده‌اند، در این مورد نیز قابل اعمال‌اند.

برای تشریح این آزمون، که به آن معمولاً نام **آزمون کوچک نمونه‌ای** t، داده می‌شود، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۱۳

فرض کنید که یکی از مشخصات لازم نوع معینی مفتول، داشتن میانگین قدرت شکنندگی ۱۸۵ پوند باشد، و فرض کنید پنج قطعه مفتولی که به تصادف از حلقه‌های مختلف انتخاب شده‌اند، دارای قدرت شکنندگی ۱۷۱٫۶، ۱۹۱٫۸، ۱۷۸٫۳، ۱۸۴٫۹، و ۱۸۹٫۱ باشند، فرض صفر $\mu = ۱۸۵$ را در برابر فرض مقابل $\mu < ۱۸۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$H_\circ : \mu = ۱۸۵$$
$$H_۱ : \mu < ۱۸۵$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t \leq -۲٫۱۳۲$، که در آن t به کمک فرمول بالا محاسبه می‌شود و ۲٫۱۳۲ مقدار $t_{۰٫۰۵, ۴}$ است.

۳. ابتدا میانگین و انحراف معیار را محاسبه و مقادیر $\overline{x} = ۱۸۳٫۱$ و $s = ۸٫۲$ را به‌دست می‌آوریم. در این صورت با قرار دادن این مقادیر همراه با $\mu_\circ = ۱۸۵$ و $n = ۵$ در فرمول مربوط به t، مقدار

$$t = \frac{۱۸۳٫۱ - ۱۸۵}{۸٫۲/\sqrt{۵}} = -۰٫۴۹$$

را به‌دست می‌آوریم.

۴. چون $t = -0{,}49$ بزرگتر از $-2{,}132$ است، فرض را نمی‌توان رد کرد. اگر از این مرحله فراتر رویم و نتیجه بگیریم که حلقه‌های مفتول که نمونه‌ها از آن استخراج شده‌اند، مشخصات مطلوب را دارند، البته در این صورت در معرض مخاطرهٔ نامعلوم ارتکاب خطای نوع II قرار خواهیم گرفت. ▲

۳.۱۳ آزمونهای مربوط به تفاضل دو میانگین

در تحقیقات کاربردی، مسائل متعددی موجودند که در آنها به فرضهایی دربارهٔ تفاضل بین دو میانگین دو جامعه علاقه‌مندیم. برای مثال، ممکن است بخواهیم که برمبنای نمونه‌هایی مناسب تصمیم بگیریم که آیا مردان می‌توانند کار معینی را به همان سرعت زنان انجام دهند یا نه، یا ممکن است بخواهیم برمبنای نمونهٔ جامع مناسبی تصمیم بگیریم که آیا هزینه‌های خورد و خوراک هفتگی خانواده‌های یک شهر از هزینه‌های مشابه خانواده‌های شهر دیگری حداقل به اندازهٔ ۵۰۰ تومان بیشتر است یا نه.

فرض کنید که با نمونه‌های تصادفی مستقلی به اندازه‌های n_1 و n_2 از دو جامعهٔ نرمال با واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2 سروکار داریم و می‌خواهیم فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = \delta$ را، که در آن δ ثابت مفروضی است، در برابر یکی از فرضهای مقابل $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$، $\mu_1 - \mu_2 > \delta$، یا $\mu_1 - \mu_2 < \delta$ آزمون کنیم. با به‌کار بردن تکنیک نسبت درستنمایی، به آزمون مبتنی بر $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ خواهیم رسید، و با مراجعه به تمرین ۳.۸، نتیجه می‌گیریم که ناحیه‌های بحرانی مربوط را می‌توان به‌صورت $|z| \geq z_{\alpha/2}$، $z \geq z_\alpha$ و $z \leq -z_\alpha$ نوشت، که در آنها

$$z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وقتی با نمونه‌های تصادفی از جامعه‌هایی با واریانسهای نامعلوم سروکار داریم که حتی ممکن است نرمال نباشند، هنوز هم می‌توانیم، مادام که نمونه‌های تصادفی به قدری بزرگ باشند که بتوان به قضیهٔ حد مرکزی توسل جست، از آزمونی که در بالا توصیف کردیم با s_1 به‌جای σ_1، و s_2 به‌جای σ_2 استفاده کنیم.

مثال ۴.۱۳

آزمایشی انجام می‌شود تا تعیین کنند که آیا متوسط محتوای نیکوتین نوعی سیگار از متوسط محتوای نیکوتین سیگار نوع دیگری به اندازهٔ ۰٫۲۰ میلیگرم بیشتر است یا خیر. اگر $n_1 = 50$ سیگار نوع اوّل دارای $\overline{x}_1 = 2{,}61$ میلیگرم و انحراف معیار $s_1 = 0{,}12$ میلیگرم و $n_2 = 40$ سیگار از نوع دوّم دارای $\overline{x}_2 = 2{,}38$ میلیگرم و انحراف معیار $s_2 = 0{,}14$ میلیگرم باشند، فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = 0{,}20$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 \neq 0{,}20$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید. مبنای تصمیم را Pـ‌مقدار متناظر با مقدار آمارهٔ آزمون مناسبی قرار دهید.

حل. ۱.
$$H_\circ : \mu_۱ - \mu_۲ = ۰٫۲۰$$
$$H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ \neq ۰٫۲۰$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲′. از آمارهٔ آزمون Z استفاده کنید که در آن

$$z = \frac{\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲ - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_۱^۲}{n_۱} + \frac{\sigma_۲^۲}{n_۲}}}$$

۳′. با قرار دادن $\overline{x}_۱ = ۲٫۶۱$، $\overline{x}_۲ = ۲٫۳۸$، $\delta = ۰٫۲۰$، $s_۱ = ۰٫۱۲$ به‌جای $\sigma_۱$، $s_۲ = ۰٫۱۴$ به‌جای $\sigma_۲$، $n_۱ = ۵۰$، و $n_۲ = ۵۰$ در این فرمول، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{۲٫۶۱ - ۲٫۳۸ - ۰٫۲۰}{\sqrt{\frac{(۰٫۱۲)^۲}{۵۰} + \frac{(۰٫۱۴)^۲}{۴۰}}} = ۱٫۰۸$$

Pـمقدار نظر عبارت است از $۲(۰٫۵۰۰۰ - ۰٫۳۵۹۹) = ۰٫۲۸۰۲$، که در آن ۰٫۳۵۹۹ درایهٔ جدول III برای $z = ۱٫۰۸$ است.

۴′. چون ۰٫۲۸۰۲ از ۰٫۰۵ بیشتر است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ یا فرض صفر را می‌پذیریم یا می‌گوییم که تفاضل بین $۲٫۶۱ - ۲٫۳۸ = ۰٫۲۳$ و ۰٫۲۰ معنی‌دار نیست. این بدان معنی است که تفاضل را می‌توان به شانس منسوب کرد. ▲

وقتی $n_۱$ و $n_۲$ کوچک و $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نامعلوم باشند، آزمونی که مورد بحث بود، قابل استفاده نیست. با این حال، برای نمونه‌های تصادفی مستقل از دو جامعهٔ نرمال که دارای واریانس مشترک نامعلوم $\sigma^۲$ هستند، تکنیک نسبت درستنمایی، آزمونی مبتنی بر

$$t = \frac{\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲ - \delta}{s_p\sqrt{\frac{۱}{n_۱} + \frac{۱}{n_۲}}}$$

به‌دست می‌دهد که در آن

$$s_p^۲ = \frac{(n_۱ - ۱)s_۱^۲ + (n_۲ - ۱)s_۲^۲}{n_۱ + n_۲ - ۲}$$

از بخش ۳.۱۱ می‌دانیم که تحت مفروضات داده شده و فرض صفر $\mu_۱ - \mu_۲ = \delta$، عبارت بالا برای t، مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با $n_۱ + n_۲ - ۲$ درجهٔ آزادی است. بنابراین ناحیهٔ بحرانی مناسب به‌اندازهٔ α برای آزمون فرض صفر $\mu_۱ - \mu_۲ = \delta$ در برابر فرض مقابل $\mu_۱ - \mu_۲ \neq \delta$، $\mu_۱ - \mu_۲ > \delta$، یا $\mu_۱ - \mu_۲ < \delta$ تحت مفروضاتی که داده شده‌اند به‌ترتیب عبارت‌اند از، $|t| \geq t_{\alpha/۲, n_۱+n_۲-۲}$، $t \geq t_{\alpha, n_۱+n_۲-۲}$، $t \leq -t_{\alpha, n_۱+n_۲-۲}$. برای تشریح این **آزمون tی دو نمونه‌ای**، مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۵.۱۳

در مقایسهٔ دو نوع رنگ، یک مؤسسهٔ حمایت از مصرف‌کننده در می‌یابد که چهار قوطی یک گالنی از یک نوع رنگ به‌طور متوسط ۵۱۲ فوت مربع را با انحراف معیار ۳۱ فوت مربع رنگ‌آمیزی می‌کند، در حالی که چهار قوطی یک گالنی از نوعی دیگر به‌طور متوسط ۴۹۲ فوت مربع را با انحراف معیار ۲۶ فوت مربع رنگ‌آمیزی می‌کند. با فرض اینکه دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری نرمال‌اند و واریانسهای برابر دارند فرض صفر $\mu_۱ - \mu_۲ = ۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_۱ - \mu_۲ > ۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_۰ : \mu_۱ - \mu_۲ = ۰$$
$$H_۱ : \mu_۱ - \mu_۲ > ۰$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t \geq ۱٫۹۴۳$، که در آن t مطابق فرمول داده شده در بالا محاسبه می‌شود و ۱٫۹۴۳ مقدار $t_{۰٫۰۵,۶}$ است.

۳. ابتدا با محاسبهٔ s_p، مقدار

$$s_p = \sqrt{\frac{۳(۳۱)^۲ + ۳(۲۶)^۲}{۴ + ۴ - ۲}} = ۲۸٫۶۰۹$$

را به‌دست می‌آوریم و سپس با جایگذاری مقدار آن همراه با $\overline{x}_۱ = ۵۴۶$، $\overline{x}_۲ = ۴۹۲$، $\delta = ۰$، و $n_۱ = n_۲ = ۴$ در فرمول t، به‌دست می‌آوریم

$$t = \frac{۵۴۶ - ۴۹۲}{۲۸٫۶۰۹\sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}}} = ۲٫۶۷$$

۴. چون ۲٫۶۷ از ۱٫۹۴۳ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط رنگ نوع اوّل مساحت بیشتری را در مقایسه با رنگ دوّم، می‌پوشاند. ▲

توجه کنید که در این مثال، $n_۱ = n_۲$، به‌طوری که فرمول مربوط به $s_p^۲$ به‌صورت

$$s_p^۲ = \frac{۱}{۲}(s_۱^۲ + s_۲^۲)$$

در می‌آید. استفاده از این فرمول، موجب تسهیل در محاسبات می‌شود.

در تمرین ۲۵.۱۳ از خواننده خواسته می‌شود که با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری مناسبی نشان دهد که Pـمقدار در این مثال برابر ۰٫۰۱۸۵ در می‌آید، و نتیجه، البته، همان می‌شود که در بالا به‌دست آمد. اگر فرض برابری واریانسها در مسأله‌ای از این نوع، موجه نباشد، چندین امکان موجود است. یک روش نسبتاً ساده عبارت از زوج کردن تصادفی مقادیر حاصل در دو نمونه و سپس

تلقی تفاضل آنها به‌عنوان یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ $n_۱$ یا $n_۲$، بسته به اینکه کدام کوچکتر باشد، از یک جامعهٔ نرمال است که تحت فرض صفر دارای میانگین $\mu = \delta$ است. در این صورت ما این فرض صفر را در برابر فرض مقابل به کمک روشهای بخش ۲.۱۳ آزمون می‌کنیم. این، دلیل خوبی برای انتخاب $n_۱ = n_۲$ است، ولی روشهای بدیل دیگری برای رفع و رجوع این حالت وقتی $n_۱ \neq n_۲$، موجودند ــ یکی از اینها، آزمون اسمیت‌ـسترتویت[1] است که مرجعی برای آن در مراجع پایان فصل داده شده است.

تا اینجا بحث خود را به نمونه‌های تصادفیی محدود کرده‌ایم که مستقل‌اند، و روشهایی که در این بخش معرفی کرده‌ایم نمی‌توانند مثلاً در اتخاذ تصمیم برمبنای وزنهای «قبل و بعد» دربارهٔ اینکه رژیم غذایی معینی واقعاً مؤثر است، یا اینکه آیا اختلاف مشاهده‌شده بین میانگین بهرهٔ هوشی شوهران و زنان آنها واقعاً معنی‌دار است یا نه، قابل استفاده باشند. در هر دو مثال بالا، نمونه‌ها مستقل نیستند زیرا داده‌ها در واقع زوج شده‌اند. راه معمول رفع و رجوع این نوع مسأله آن است که مانند بند قبل عمل کنیم، یعنی به تفاضلهای بین اندازه‌گیریها یا مشاهدات زوج شده توجه نماییم. اگر n بزرگ باشد، می‌توانیم از آزمونی که در صفحهٔ ۴۴۲ برای آزمون فرض صفر $\mu_۱ - \mu_۲ = \delta$ در برابر فرض مناسبی توصیف شد، استفاده کنیم، مشروط براینکه تفاضلها را بتوان به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال تلقی کرد.

تمرینها

۱.۱۳ با مفروض بودن نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از یک جامعهٔ نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$، نشان دهید که فرض صفر $\mu = \mu_۰$؛ در برابر فرض مقابل $\mu \neq \mu_۰$ را می‌توان با استفاده از ملاک یکطرفه‌ای مبتنی بر توزیع خی‌دو آزمون کرد.

۲.۱۳ فرض کنید که بخواهیم از نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال با واریانس معلوم $\sigma^۲$ برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_۰$ در برابر فرض مقابل $\mu = \mu_۱$، که در آن $\mu_۱ > \mu_۰$، و احتمالهای خطاهای نوع I و نوع II دارای مقادیر از پیش تعیین شدهٔ α و β هستند استفاده کنیم. نشان دهید که اندازهٔ نمونهٔ مورد نیاز با عبارت زیر داده می‌شود.

$$n = \frac{\sigma^۲(z_\alpha + z_\beta)^۲}{(\mu_۱ - \mu_۰)^۲}$$

۳.۱۳ با رجوع به تمرین قبل، اندازهٔ مورد نیاز نمونه را وقتی $\sigma = ۹$، $\mu_۰ = ۱۵$، $\mu_۱ = ۲۰$، $\alpha = ۰٫۰۵$، و $\beta = ۰٫۰۱$، پیدا کنید.

۴.۱۳ فرض کنید که بخواهیم با استفاده از نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازهٔ n از دو جامعهٔ نرمال با واریانسهای معلوم $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$ برای آزمون فرض صفر $\mu_۱ - \mu_۲ = \delta$ در برابر فرض مقابل $\mu_۱ - \mu_۲ = \delta'$ استفاده کنیم. اگر احتمالهای خطاهای نوع I و II دارای مقادیر از پیش تعیین

1. Smith-Satterthwaite

شدهٔ α و β باشند، نشان دهید که اندازهٔ نمونهٔ مورد نیاز با عبارت زیر داده می‌شود.

$$n = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\delta - \delta')^2}$$

۵.۱۳ با رجوع به تمرین قبل، اندازهٔ مورد نیاز نمونه را وقتی $\sigma_1 = 9$، $\sigma_2 = 13$، $\delta = 80$، $\delta' = 86$، $\alpha = 0{,}01$ و $\beta = 0{,}01$ پیدا کنید.

کاربردها

۶.۱۳ برمبنای داده‌هایی معین، باید فرض صفری را در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ رد کرد. آیا این فرض صفر در

(الف) سطح معنی‌دار بودن ۰۱ر۰؛

(ب) سطح معنی‌دار بودن ۱۰ر۰

رد می‌شود؟

۷.۱۳ در آزمون فرضی معین، Pـمقدار متناظر با آمارهٔ آزمون ۰۳۱۶ر۰ است. آیا می‌توان فرض صفر را در

(الف) سطح معنی‌دار بودن ۰۱ر۰؛

(ب) سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰،

(ج) سطح معنی‌دار بودن ۱۰ر۰؛

رد کرد؟

۸.۱۳ با رجوع به مثال ۱.۱۳، تحقیق کنید که Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهدشدهٔ آزمون، ۰۰۴۶ر۰ است.

۹.۱۳ با رجوع به مثال ۲.۱۳، تحقیق کنید که Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون ۰۸۰۸ر۰ است.

۱۰.۱۳ با رجوع به مثال ۳.۱۳، از نرم‌افزار آماری مناسبی استفاده کرده، Pـمقدار متناظر با $t = -0{,}49$ را پیدا کنید. t مقداری از متغیری تصادفی است که دارای توزیع t با ۴ درجه آزادی است. از این Pـمقدار استفاده کرده مسأله را مجدداً حل کنید.

۱۱.۱۳ مطابق قراردادهای متداول در یک امتحان قدرت فهم در خواندن، دانش‌آموزان کلاس هشتم باید به‌طور متوسط نمرهٔ ۸۴٫۳ با انحراف معیار ۸٫۶ بیاورند. اگر ۴۵ دانش‌آموز کلاس هشتم ناحیهٔ معینی که به تصادف انتخاب شده‌اند به‌طور متوسط نمرهٔ ۸۷٫۸ بیاورند، از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ استفاده کرده فرض صفر $\mu = 84{,}3$ را در برابر فرض مقابل $\mu > 84{,}3$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۱ر۰ آزمون کنید.

۱۲.۱۳ تمرین ۱۱.۱۳ را با مبتنی کردن تصمیم بر Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شده آمارهٔ آزمون، دوباره حل کنید.

۱۳.۱۳ بخش حفاظت یک کارخانه می‌خواهد بداند که آیا میانگین واقعی زمان لازم برای اینکه نگهبان شب، گشت معمول خود را انجام دهد، ۳۰ دقیقه است یا نه. اگر در یک نمونهٔ تصادفی از ۳۲ گشت، نگهبان شب هر گشت خود را به‌طور متوسط در ۳۰٫۸ دقیقه با انحراف معیار ۱٫۵ دقیقه انجام داده باشد، معین کنید که آیا شواهد کافی برای رد فرض صفر $\mu = ۳۰$ دقیقه به‌نفع فرض مقابل $\mu \neq ۳۰$ وجود دارد یا نه. از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ و سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کنید.

۱۴.۱۳ تمرین ۱۳.۱۳ را، با مبتنی کردن تصمیم بر Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون دوباره حل کنید.

۱۵.۱۳ یک قایق موتوری جدیداً طراحی شده است. در ۱۲ بار که به صورت آزمایشی در خط سیری خاص رانده شده است، به‌طور متوسط هر دور را در ۳۳٫۶ ثانیه با انحراف معیار ۲٫۳ ثانیه پیموده است. با فرض اینکه تلقی این داده‌ها به‌عنوان یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای نرمال موجه باشد، از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ استفاده کرده فرض صفر $\mu = ۳۵$ در برابر فرض مقابل $\mu < ۳۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۱۶.۱۳ از پنج اندازه‌گیری از محتوای قطران سیگار نوعی خاص، اعداد ۱۴٫۵، ۱۴٫۲، ۱۴٫۴، ۱۴٫۳، و ۱۴٫۶ میلیگرم در هر سیگار حاصل شده است. با فرض اینکه داده‌ها، نمونه‌ای تصادفی از جامعهٔ نرمال باشند، از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ استفاده کرده نشان دهید که در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ باید فرض صفر $\mu = ۱۴٫۰$ را به‌نفع فرض مقابل $\mu \neq ۱۴٫۰$ رد کرد.

۱۷.۱۳ با رجوع به تمرین ۱۶.۱۳، نشان دهید که اگر اولین اندازه‌گیری اشتباهاً به‌جای ۱۴٫۵ به‌صورت ۱۶٫۰ ثبت شود، این امر، نتیجه را معکوس خواهد کرد. این پارادوکس ظاهری را توضیح دهید که با اینکه تفاضل بین میانگین نمونه‌ای و μ_0 افزایش یافته است، تفاضل دیگر معنی‌دار نیست.

۱۸.۱۳ با رجوع به‌تمرین ۱۶.۱۳، از نرم‌افزار آماری مناسبی استفاده کرده، Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون را پیدا کنید. از این Pـمقدار استفاده کرده، تمرین را دوباره حل کنید.

۱۹.۱۳ با رجوع به مثال ۴.۱۳، برای چه مقادیری از $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$، فرض صفر رد می‌شود؟ همچنین، احتمالهای خطاهای نوع II را با ملاک مفروض پیدا کنید، در صورتی که

(الف) $\mu_1 - \mu_2 - ۰٫۱۲$؛

(ب) $\mu_1 - \mu_2 = ۰٫۱۶$؛

(ج) $\mu_1 - \mu_2 = ۰٫۲۴$؛

(د) $\mu_1 - \mu_2 = ۰٫۲۸$.

۲۰.۱۳ مطالعه‌ای از تعداد ضیافتهای ناهار در هر ماه که مدیران اجرایی بیمه‌ها و بانکها مدعی‌اند هزینهٔ آن باید به‌حساب محل کارگذاشته شود، برمبنای نمونه‌هایی تصادفی، انجام شده و نتایج زیر به‌دست آمده است:

$$n_1 = ۴۰ \quad \bar{x}_1 = ۹٫۱ \quad s_1 = ۱٫۹$$
$$n_2 = ۵۰ \quad \bar{x}_2 = ۸٫۰ \quad s_2 = ۲٫۱$$

از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ و سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = ۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 \neq ۰$ آزمون کنید.

۲۱.۱۳ تمرین ۲۰.۱۳ را، با مبتنی قرار دادن تصمیم بر Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون، مجدداً حل کنید.

۲۲.۱۳ نمونه‌گیریهای جامعی که در استانی بزرگ در سالی معین و دوباره ۲۰ سال بعد انجام شده، نشان داده است که در ابتدا قدمتوسط ۴۰۰ پسر دهساله ۵۳٫۲ اینچ با انحراف معیار ۲٫۴ اینچ بوده در حالی که ۲۰ سال بعد قد متوسط ۵۰۰ پسر دهساله ۵۴٫۵ اینچ با انحراف معیار ۲٫۵ اینچ بوده است. از چهار گام صفحهٔ ۴۳۸ استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵، فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = -۰٫۵$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 < -۰٫۵$ آزمون کنید.

۲۳.۱۳ تمرین ۲۲.۱۳را، با مبتنی قرار دادن تصمیم بر Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون، مجدداً حل کنید.

۲۴.۱۳ برای اطلاع از اینکه آیا سکنهٔ دو جزیرهٔ جنوب اقیانوس آرام را می‌توان دارای تبار نژادی یکسانی تلقی کرد، یک انسانشناس شاخصهای جمجمه‌ای شش فرد ذکور بالغ را از هر جزیره تعیین کرده، مقادیر $\bar{x}_1 = ۷۷٫۴$، $\bar{x}_2 = ۷۲٫۲$، و انحراف معیارهای متناظر $s_1 = ۳٫۳$، $s_2 = ۲٫۱$ را به‌دست می‌آورد. از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ و سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده تحقیق کنید که آیا تفاضل بین دو میانگین نمونه‌ای را می‌توان به‌گونه‌ای موجه معلول تصادف دانست؟ فرض کنید که جامعه‌ها نرمال و دارای واریانسهای یکسان‌اند.

۲۵.۱۳ با رجوع به مثال ۵.۱۳، از نرم‌افزار آماری مناسبی استفاده کرده نشان دهید که Pـمقدار متناظر با $t = ۲٫۶۷$ برابر ۰٫۰۱۸۵ است.

۲۶.۱۳ برای مقایسهٔ دو نوع سپر اتومبیل، شش سپر از هر نوع را بر نوع خاصی خودرو کوچک نصب می‌کنند. سپس هر خودرو با سرعت ۵ مایل در ساعت به یک دیوار بتونی کوبیده می‌شود، و اعداد زیر هزینه‌های تعمیر را (برحسب دلار) نشان می‌دهند:

سپر ۱: ۱۲۷ ۱۶۸ ۱۴۳ ۱۶۵ ۱۲۲ ۱۳۹
سپر ۲: ۱۵۴ ۱۳۵ ۱۳۲ ۱۷۱ ۱۵۳ ۱۴۹

از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید که آیا تفاضل بین میانگینهای این نمونه‌ها معنی‌دار است یا خیر.

۲۷.۱۳ با رجوع به تمرین ۲۶.۱۳، از نرم‌افزار آماری مناسبی استفاده کرده، Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون را پیدا کنید. از این Pـمقدار استفاده کرده تمرین را مجدداً حل کنید.

۲۸.۱۳ در مطالعه‌ای برای تحقیق در مؤثر بودن تمرینهای ورزشی معینی در کاهش وزن، گروهی مرکب از ۱۶ نفر به مدت یک ماه مشغول این ورزشها بوده‌اند و نتایج زیر به‌دست آمده است:

وزن بعد از ورزش	وزن قبلی	وزن بعد از ورزش	وزن قبلی
۱۶۶	۱۷۲	۱۹۸	۲۱۱
۱۵۴	۱۵۵	۱۷۳	۱۸۰
۱۸۱	۱۸۵	۱۷۲	۱۷۱
۱۶۴	۱۶۷	۲۰۹	۲۱۴
۲۰۱	۲۰۳	۱۷۹	۱۸۲
۱۷۵	۱۸۱	۱۹۲	۱۹۴
۲۳۳	۲۴۵	۱۶۱	۱۶۰
۱۴۲	۱۴۶	۱۸۲	۱۸۲

از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 - \mu_2 = 0$ را در برابر فرض مقابل $\mu_1 - \mu_2 > 0$ آزمون کنید، و به این ترتیب نظر دهید که آیا تمرینها درکاهش وزن مؤثر بوده‌اند، یا خیر.

۲۹.۱۳ داده‌های زیر در دورهٔ یکساله‌ای از اتلاف وقت هفتگی متوسط نیروی انسانی ناشی از تصادفات کاری در ۱۲ کارخانه، «قبل وبعد» از به مرحلهٔ اجرا گذاشته شدن برنامهٔ ایمنی خاصی گردآوری شده‌اند:

۴۵ و ۳۶، ۷۳ و ۶۰، ۴۶ و ۴۴، ۱۲۴ و ۱۱۹، ۳۳ و ۳۵،
۵۷ و ۵۱، ۸۳ و ۷۷، ۳۴ و ۲۹، ۲۶ و ۲۴، ۱۷ و ۱۱

از چهارگام صفحهٔ ۴۳۸، از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا برنامه ایمنی مؤثر است یا خیر.

۳۰.۱۳ با رجوع به تمرین ۲۹.۱۳، از نرم‌افزار آماری مناسبی استفاده کرده Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آزمون را پیدا کنید. از این Pـمقدار استفاده کرده تمرین را مجدداً حل کنید.

۴.۱۳ آزمونهایی دربارهٔ واریانسها

دلایلی متعدد در اهمیت آزمون فرضهایی مربوط به واریانسهای جامعه‌ها در دست است. تا آنجا که به کاربردهای مستقیم مربوط می‌شود، می‌توان از موارد زیر نام برد؛ تولیدکننده‌ای که محصولاتش باید واجد مشخصات دقیقی باشد لازم است که آزمونهایی دربارهٔ تغییرپذیری محصولاتش انجام دهد، یک معلم ممکن است بخواهد از این امر آگاه شود که آیا حکمهای معینی دربارهٔ تغییرپذیریی که می‌تواند از آمادگی دانش‌آموزان انتظار داشته باشد درست‌اند یا نه، و یک داروساز ممکن است بخواهد بداند که آیا میزان تغییر در تأثیر بخشی یک دارو در حدود قابل قبول است یا نه. تا آنجاکه به کاربردهای غیرمستقیم مربوط می‌شود، می‌توان گفت که آزمونهای مربوط به واریانسها اغلب پیشنیازهایی برای آزمونهای مربوط به سایر پارامترها هستند. مثلاً، آزمون tی دو نمونه‌ای که درصفحهٔ ۴۴۶ توصیف شد، مستلزم آن است که دو جامعه واریانس برابر داشته باشند و در عمل این به‌معنی آن است که ممکن است لازم باشد، معقول بودن این فرض را قبل از انجام آزمونهایی دربارهٔ میانگینها تحقیق کنیم.

آزمونهایی که در این بخش مطالعه خواهیم کرد شامل آزمونی از این فرض صفر است که واریانس یک جامعهٔ نرمال برابر ثابت مفروضی است، و شامل آزمون نسبت درستنمایی برابری واریانسهای دو جامعهٔ نرمال است (که در تمرین ۳۳.۱۲ به آن اشاره شد).

اولین آزمون از دو آزمون بالا اساساً آزمون تمرین ۳۱.۱۲ است. با فرض اینکه نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ n از یک جامعهٔ نرمال استخراج شده است، می‌خواهیم فرض صفر $\sigma^۲ = \sigma_۰^۲$ را در برابر یکی از فرضهای مقابل $\sigma^۲ \neq \sigma_۰^۲$، $\sigma^۲ > \sigma_۰^۲$، یا $\sigma^۲ < \sigma_۰^۲$ آزمون کنیم، و آن‌گونه که خواننده لابد از تمرین ۳۱.۱۲ دریافته است، روش نسبت درستنمایی منجر به آزمونی برمبنای $s^۲$، مقدار واریانس نمونه‌ای، می‌شود. بنابراین برمبنای قضیهٔ ۱۰.۸ می‌توانیم ناحیه‌های بحرانی برای آزمون این فرض صفر در برابر دو فرض مقابل یکطرفه را به‌صورت $\chi^۲ \geq \chi^۲_{\alpha,n-۱}$ و $\chi^۲ \leq \chi^۲_{۱-\alpha,n-۱}$ بنویسیم که در آن

$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲}$$

اما در مورد فرض مقابل دوطرفه، فرض صفر را در صورتی رد می‌کنیم که $\chi^۲ \geq \chi^۲_{\alpha/۲,n-۱}$ یا $\chi^۲ \leq \chi^۲_{۱-\alpha/۲,n-۱}$، و البته اندازهٔ کلیهٔ ناحیه‌های بحرانی برابر α است.

مثال ۶.۱۳

فرض کنید ضخامت قطعه‌ای که در یک نیمه‌هادی به کار رفته بعد بحرانی آن است و اندازه‌گیریهای مربوط به ضخامتهای یک نمونهٔ تصادفی از ۱۸ قطعهٔ فوق‌الذکر دارای واریانس $s^۲ = ۰٫۶۸$ هستند که در آن اندازه‌ها برحسب یک هزارم اینچ است. فرایند را تحت کنترل تلقی می‌کنند در صورتی که تغییرپذیری ضخامتها واریانسی نابیشتر از ۰٫۳۶ داشته باشد. با فرض اینکه اندازه‌گیریها تشکیل یک نمونهٔ تصادفی از جامعهٔ نرمالی را بدهند، فرض صفر $\sigma^۲ = ۰٫۳۶$ را در برابر فرض مقابل $\sigma^۲ > ۰٫۳۶$ در سطح $\alpha = ۰٫۰۵$ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$H_۰ : \sigma^۲ = ۰٫۳۶$$
$$H_۱ : \sigma^۲ > ۰٫۳۶$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^۲ \geq ۲۷٫۵۸۷$، که در آن

$$\chi^۲ = \frac{(n-۱)s^۲}{\sigma_۰^۲}$$

و ۲۷٫۵۸۷ مقدار $\chi^۲_{۰٫۰۵,۱۷}$ است.

۳. با قرار دادن $s^۲ = ۰٫۶۸$، $\sigma_۰^۲ = ۰٫۳۶$، و $n = ۱۸$، به‌دست می‌آوریم

$$\chi^۲ = \frac{۱۷(۰٫۶۸)}{۰٫۳۶} = ۳۲٫۱۱$$

۴. چون $\chi^{۲} = ۳۲٫۱۱$ از $۲۷٫۵۸۷$ بزرگتر است، فرض صفر را باید رد کرد و فرایند به کار رفته در ساختن قطعات را تنظیم کرد. ▲

توجه کنید که اگر α در مثال پیشین برابر ۰٫۰۱ بود، فرض صفر را نمی‌شد رد کرد، زیرا $\chi^{۲} = ۳۲٫۱۱$ از $\chi^{۲}_{۰٫۰۱,۱۷} = ۳۳٫۴۰۹$ بیشتر نیست. این تذکر برای آن است که عمل انتخاب α کاری است که همواره باید پیشاپیش انجام شود، به‌طوری که از وسوسهٔ انتخاب مقداری برای سطح معنی‌دار بودن که منظور ما را برآورد، به دور باشیم (صفحهٔ ۴۳۹ را نیز ببینید).

در تمرین ۳۳.۱۲ از خواننده خواسته شد که نشان دهد آمارهٔ نسبت درستنمایی برای آزمون برابری واریانسهای دو جامعهٔ نرمال را می‌توان برحسب نسبت دو واریانس نمونه‌ای بیان کرد. با مفروض بودن نمونه‌های تصادفی مستقل به‌اندازه‌های $n_۱$ و $n_۲$ از دو جامعهٔ نرمال با واریانسهای $\sigma_۱^۲$ و $\sigma_۲^۲$، از قضیهٔ ۱۵.۸ در می‌یابیم که ناحیه‌های بحرانی متناظر با اندازهٔ α برای آزمون فرض صفر $\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲$ در برابر فرضهای مقابل یکطرفهٔ $\sigma_۱^۲ > \sigma_۲^۲$ یا $\sigma_۱^۲ < \sigma_۲^۲$ به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} \geq f_{\alpha,n_۱-۱,n_۲-۱}, \qquad \frac{s_۲^۲}{s_۱^۲} \geq f_{\alpha,n_۲-۱,n_۱-۱}$$

که در آن $f_{\alpha,n_۱-۱,n_۲-۱}$ و $f_{\alpha,n_۲-۱,n_۱-۱}$ در صفحهٔ ۳۰۷ تعریف شده‌اند. ناحیهٔ بحرانی مناسب برای آزمون این فرض صفر در برابر فرض مقابل دوطرفهٔ $\sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$ عبارت است از

$$\frac{s_۱^۲}{s_۲^۲} \geq f_{\alpha/۲,n_۱-۱,n_۲-۱}, \qquad s_۱^۲ \geq s_۲^۲ \quad \text{اگر}$$

و

$$\frac{s_۲^۲}{s_۱^۲} \geq f_{\alpha/۲,n_۲-۱,n_۱-۱}, \qquad s_۱^۲ < s_۲^۲ \quad \text{اگر}$$

توجه کنید که این آزمون کاملاً مبتنی بر دم سمت راست توزیع F است که بنابر نتیجهٔ تمرین ۵۵.۸ امکانپذیر شده است، یعنی بنابر این واقعیت که اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع F با $\nu_۱$ و $\nu_۲$ درجهٔ آزادی باشد، آنگاه $\frac{۱}{X}$ دارای توزیع F با $\nu_۲$ و $\nu_۱$ درجهٔ آزادی خواهد بود.

مثال ۷.۱۳

در مقایسهٔ تغییرپذیری قوهٔ کشش دو نوع فولاد ساختمانی، نتایج زیر طی یک آزمایش به‌دست آمده‌اند: $n_۱ = ۱۳$، $s_۱^۲ = ۱۹٫۲$، $n_۲ = ۱۶$، و $s_۲^۲ = ۳٫۵$، که در آنها واحد اندازه‌گیری ۱۰۰۰ پوند بر هر اینچ مربع است. با فرض اینکه اندازه‌گیریها تشکیل نمونه‌های تصادفی مستقلی از دو جامعهٔ نرمال را بدهند، فرض صفر $\sigma_۱^۲ = \sigma_۲^۲$ را در برابر فرضهای مقابل $\sigma_۱^۲ \neq \sigma_۲^۲$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۲ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_\circ : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
$$\alpha = ۰٫۰۲$$

۲. چون $s_1^2 \geq s_2^2$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $\frac{s_1^2}{s_2^2} \geq ۳٫۶۷$ که در آن ۳٫۶۷ مقدار $f_{۰٫۰۱,۱۲,۱۵}$ است.

۳. با قرار دادن $s_1^2 = ۱۹٫۲$ و $s_2^2 = ۳٫۵$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{۱۹٫۲}{۳٫۵} = ۵٫۴۹$$

۴. چون $f = ۵٫۴۹$ از ۳٫۶۷ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که تغییرپذیری قوهٔ کشش دو نوع فولاد یکسان نیست. ▲

تمرینها

۳۱.۱۳ با استفاده از این واقعیت که توزیع خی‌دو را می‌توان وقتی ν، عدهٔ درجه‌های آزادی، بزرگ باشد با توزیع نرمال تقریب کرد؛ نشان دهید که برای نمونه‌های بزرگ از جامعه‌های نرمال

$$s^2 \geq \sigma_\circ^2 \left[1 + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]$$

یک ناحیهٔ بحرانی تقریبی به‌اندازهٔ α برای آزمون فرض صفر $\sigma^2 = \sigma_\circ^2$ در برابر فرض مقابل $\sigma^2 > \sigma_\circ^2$ است. همچنین ناحیه‌های بحرانی متناظر را برای آزمون کردن این فرض صفر در برابر فرض مقابل $\sigma^2 < \sigma_\circ^2$ و $\sigma^2 \neq \sigma_\circ^2$ بنا کنید. (تمرین ۳۷.۸ را ببینید.)

۳۲.۱۳ با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۴۲.۸، نشان دهید که برای نمونه‌های تصادفی بزرگ از جامعه‌های نرمال، آزمونهای فرض صفر $\sigma^2 = \sigma_\circ^2$ را می‌توان برمبنای آمارهٔ

$$\left(\frac{s}{\sigma_\circ} - 1\right)\sqrt{2(n-1)}$$

قرار داد که دارای توزیع نرمال استاندارد تقریبی است.

کاربردها

۳۳.۱۳ نه بار اندازه‌گیری دمای ویژهٔ آهن دارای انحراف معیار ۰٫۰۰۸۶ است. با فرض اینکه این اندازه‌ها نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال تشکیل دهند، فرض صفر $\sigma = ۰٫۰۱۰۰$ را در برابر فرض مقابل $\sigma < ۰٫۰۱۰۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۳۴.۱۳ در یک نمونهٔ تصادفی، وزنهای ۲۴ گوسالهٔ نر از نژاد بلک آنگوس[1] در سن معینی دارای انحراف معیار ۲۳۸ پوند بوده است. با فرض اینکه این وزنها تشکیل نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال باشند، فرض صفر $\sigma = ۲۵۰$ پوند را در برابر فرض مقابل دوطرفهٔ $\sigma \neq ۲۵۰$ پوند در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۳۵.۱۳ در یک نمونهٔ تصادفی، برای مدت زمانی که ۳۰ زن برای جواب دادن به سؤالات امتحان آیین‌نامه رانندگی صرف کردند، مقدار $s = ۲٫۵۳$ به‌دست آمد. فرض صفر $\sigma = ۲٫۸۵$ را در برابر فرض مقابل $\sigma < ۲٫۸۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید. (از روش توصیف شده در متن استفاده کنید.)

۳۶.۱۳ از روش تمرین ۳۲.۱۳ استفاده کرده تمرین ۳۵.۱۳ را مجدداً حل کنید.

۳۷.۱۳ داده‌های حاصل از آزمایشهای قبل، نشان می‌دهند که انحراف معیار اندازه‌گیریهایی به‌وسیله بازرسان خبره از اَنگ ورقه‌های فلزی انجام شده، ۰٫۴۱ اینچ مربع است. اگر بازرس جدیدی، ۵۰ اَنگ را با انحراف معیار ۰٫۴۹ اینچ مربع اندازه‌گیری کند، از روش تمرین ۳۲.۱۳ استفاده کرده فرض صفر $\sigma = ۰٫۴۱$ را در برابر فرض مقابل $\sigma > ۰٫۴۱$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۳۸.۱۳ با رجوع به تمرین ۳۷.۱۳، Pـمقدار متناظر با مقدار مشاهده‌شدهٔ آمارهٔ آزمون را پیدا کنید و از آن استفاده کرده تصمیم بگیرید که آیا می‌توان فرض صفر را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ رد کرد یا خیر.

۳۹.۱۳ با رجوع به مثال ۵.۱۳، فرض صفر $\sigma_۱ - \sigma_۲ = ۰$ را در برابر فرض مقابل $\sigma_۱ - \sigma_۲ > ۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۴۰.۱۳ با رجوع به تمرین ۲۴.۱۳، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۱۰ آزمون کنید که آیا فرض تساوی واریانسهای دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری موجه است یا خیر.

۴۱.۱۳ با رجوع به تمرین ۲۶.۱۳، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۲ آزمون کنید که آیا فرض تساوی واریانسهای دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری موجه است یا خیر.

۵.۱۳ آزمونهای مربوط به نسبتها

اگر برآمد آزمایشی تعداد رأیهایی باشد که کاندیدایی در یک رأی‌گیری به‌دست می‌آورد، تعداد عیبهایی باشد که در یک قواره پارچه موجود است، تعداد کودکان غایب از مدرسه در روز مفروضی باشد، . . . ، این داده‌ها را **داده‌های شمارشی** می‌نامیم. مدلهای مناسب برای تحلیل داده‌های شمارشی، توزیع دو جمله‌ای، توزیع پواسون، توزیع چند جمله‌ای، و برخی از توزیعهای گسستهٔ دیگرند که در فصل ۵ مطالعه کردیم. در این بخش ما یکی از معمولترین آزمونهای مبتنی بر داده‌های شمارشی، یعنی، آزمونی دربارهٔ پارامتر θی توزیع دوجمله را ارائه می‌دهیم. به‌عنوان مثال، برمبنای نمونه‌ای تصادفی، ممکن است این فرض را آزمون کنیم که نسبت واقعی بهبود یافتگان از بیماری خاصی ۰٫۹۰ است یا اینکه نسبت واقعی ضایعات حاصل در یک خط تولید ۰٫۰۲ است.

1. Black Angus

در تمرین ۱۲.۱۲ از خواننده خواسته شد تا نشان دهد که تواناترین ناحیهٔ بحرانی برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_{\circ}$ در برابر فرض مقابل $\theta = \theta_{\backslash} < \theta_{\circ}$، که در آن θ پارامتر توزیع دو جمله‌ای است، بر مقدار X، تعداد «پیروزیها» در n آزمایش، مبتنی است. وقتی فرضهای مقابل مرکب‌اند، روش نسبت درستنمایی باز هم آزمونهایی مبتنی بر تعداد مشاهده‌شدهٔ پیروزیها را (همان‌طورکه در تمرین ۲۷.۱۲ برای حالت خاص $\theta_{\circ} = \frac{۱}{۲}$ دیدیم) به‌دست می‌دهد. در واقع اگر بخواهیم فرض صفر $\theta = \theta_{\circ}$ را در برابر فرض مقابل یکطرفهٔ $\theta > \theta_{\circ}$ آزمون کنیم، ناحیهٔ بحرانی به‌اندازهٔ α از ملاک نسبت درستنمایی عبارت است از

$$x \geq k_{\alpha}$$

که در آن k_{α} کوچکترین عدد صحیحی است که برای آن

$$\sum_{y=k_{\alpha}} b(y; n, \theta_{\circ}) \leq \alpha$$

و $b(y; n, \theta_{\circ})$ احتمال به‌دست آوردن y پیروزی در n آزمایش برنولی است وقتی $\theta = \theta_{\circ}$. اندازهٔ این ناحیهٔ بحرانی، و نیز ناحیه‌های بحرانیی که در زیر می‌آیند، تا سرحد امکان به α نزدیک‌اند بدون آنکه از آن بیشتر شوند.

ناحیهٔ بحرانی متناظر برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_{\circ}$ در برابر فرض مقابل یکطرفهٔ $\theta < \theta_{\circ}$ عبارت است از

$$x \leq k'_{\alpha}$$

که در آن k'_{α} بزرگترین عدد صحیحی است که برای آن

$$\sum_{y=\circ}^{k'_{\alpha}} b(y; n, \theta_{\circ}) \leq \alpha$$

و، بالاخره، ناحیهٔ بحرانی برای آزمون فرض صفر $\theta = \theta_{\circ}$ در برابر فرض مقابل دوطرفهٔ $\theta \neq \theta_{\circ}$ عبارت است از

$$x \geq k_{\alpha/۲} \quad \text{یا} \quad x \leq k'_{\alpha/۲}$$

ما به تشریح بیشتر این روش تعیین ناحیه‌های بحرانی برای آزمونهای مربوط به پارامتر θی دو جمله‌ای نخواهیم پرداخت؛ زیرا، در عمل، بنا کردن تصمیمها بر Pـ مقدارها زحمت کمتری دارد.

مثال ۸.۱۳
اگر $x = ۴$ نفر از $n = ۲۰$ بیمار دچار عوارض جانبی شدید براثر استفاده از دارویی جدید شده باشند، فرض صفر $\theta = ۰٫۵۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta \neq ۰٫۵۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید. در اینجا θ نسبت واقعی بیمارانی است که از داروی جدید دچار عوارض جانبی شدید شده‌اند.

حل. ۱.
$$H_۰ : \theta = ۰٫۵۰$$
$$H_۱ : \theta \neq ۰٫۵۰$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

′۲. از آمارهٔ آزمون X، تعداد مشاهده‌شدهٔ پیروزیها، استفاده کنید.

′۳. $x = ۴$، و چون $P(X \leq ۴) = ۰٫۰۰۵۹$، Pـمقدار عبارت است از $۰٫۰۱۱۸ = (۰٫۰۰۵۹)۲$.

′۴. چون Pـمقدار، یعنی ۰٫۰۱۱۸ کمتر از ۰٫۰۵ است، فرض صفر را باید رد کرد. نتیجه می‌گیریم که $\theta \neq ۰٫۵۰$. ▲

آزمونهایی که توصیف کرده‌ایم، صرف‌نظر از اینکه چهارگام صفحهٔ ۴۳۸ یا چهارگام صفحهٔ ۴۴۰ را به کار بریم، مستلزم استفاده از جدول احتمالهای دو جمله‌ای‌اند. برای $n \leq ۲۰$ می‌توانیم جدول I پایان این کتاب را به‌کار بریم و برای مقادیر n تا ۱۰۰ می‌توانیم از جدولهایی که مرجع آنها در پایان فصل ۵ داده شده، استفاده کنیم. به‌روشی بدیل، برای مقادیر بزرگتر n می‌توانیم از تقریب توزیع دوجمله‌ای با نرمال و تلقی

$$z = \frac{x - n\theta_۰}{\sqrt{n\theta_۰(۱ - \theta_۰)}}$$

به‌عنوان مقدار متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد، استفاده کنیم. بنابراین، برای n بزرگ می‌توانیم فرض صفر $\theta = \theta_۰$ را در برابر فرضهای مقابل $\theta \neq \theta_۰$، $\theta > \theta_۰$، یا $\theta < \theta_۰$، به‌ترتیب با استفاده از ناحیه‌های بحرانی $|z| \geq z_{\alpha/۲}$، $z \geq z_\alpha$، و $z \leq -z_\alpha$ آزمون کنیم که در آن

$$z = \frac{x - n\theta_۰}{\sqrt{n\theta_۰(۱ - \theta_۰)}}$$

یا اگر تصحیح پیوستگی را که در مثال ۵.۶ معرفی شد، به‌کار بریم

$$z = \frac{(x \pm \frac{۱}{۲}) - n\theta_۰}{\sqrt{n\theta_۰(۱ - \theta_۰)}}$$

از علامت منها وقتی x بیشتر از $n\theta_۰$ است و از علامت بعلاوه وقتی x کوچکتر از $n\theta_۰$ است، استفاده می‌کنیم.

مثال ۹.۱۳
یک شرکت تولید فراورده‌های نفتی مدعی است که کمتر از ۲۰ درصد کلیهٔ دارندگان اتومبیل، بنزین تولیدی آن شرکت را نمی‌خرند. این ادعا را در صورتی که یک بررسی تصادفی نشان دهد که از صاحبان ۲۰۰ اتومبیل ۲۲ نفر از بنزین تولیدی این شرکت استفاده نکرده‌اند، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱، آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_۰ : \theta = ۰٫۲۰$$
$$H_۱ : \theta < ۰٫۲۰$$
$$\alpha = ۰٫۰۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲٫۳۳$، که در آن (بدون تصحیح پیوستگی)

$$z = \frac{x - n\theta_۰}{\sqrt{n\theta_۰(۱ - \theta_۰)}}$$

۳. با قرار دادن $x = ۲۲$، $n = ۲۰۰$، و $\theta_۰ = ۰٫۲۰$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{۲۲ - ۲۰۰(۰٫۲۰)}{\sqrt{۲۰۰(۰٫۲۰)(۰٫۸۰)}} = -۳٫۱۸$$

۴. چون $z = -۳٫۱۸$ کمتر از $-۲٫۳۳$ است، فرض صفر را باید رد کرد؛ یعنی نتیجه می‌گیریم، همان‌طور که ادعا شده، کمتر از ۲۰ درصد همهٔ صاحبان اتومبیل از بنزین تولیدی این شرکت استفاده نکرده‌اند. ▲

توجه کنید که اگر در مثال قبل از تصحیح پیوستگی استفاده کرده بودیم، مقدار $z = -۳٫۰۹$ را به‌دست می‌آوردیم و نتیجه همانند قبل می‌بود.

۶.۱۳ آزمونهای مربوط به تفاضلهای بین k نسبت

در تحقیقات کاربردی، مسائل متعددی موجودند که در آنها باید تصمیم بگیریم که آیا تفاضلهایی که بین نسبتهای نمونه‌ای، یا درصدها مشاهده می‌شوند، معنی‌دار هستند، یا اینکه آنها را می‌توان معلول تصادف دانست. برای مثال اگر ۶ درصد جوجه‌های منجمد در نمونه‌ای که از موجودی یک توزیع کننده استخراج شده‌اند واجد شرایط استاندارد نباشند و تنها ۴ درصد در نمونه‌ای از موجودی توزیع‌کنندهٔ دیگر واجد شرایط استاندارد نباشند، ممکن است بخواهیم در این مورد حکم کنیم که آیا تفاضل بین درصدها معنی‌دار است یا نه. به همین نحو ممکن است بخواهیم برمبنای داده‌های نمونه‌ای نظر دهیم که آیا نسبت واقعی رأی‌دهندگانی که طرفدار کاندیدای خاصی هستند، در چهار شهر مختلف یکسان‌اند یا خیر.

برای بیان یک روش کلی در حل این نوع مسائل، فرض کنید که x_1، x_2، $\cdots$، و x_k مقادیر مشاهده‌شدهٔ k تصادفی مستقل X_1، X_2، $\cdots$، و X_k باشند که دارای توزیعهای دوجمله‌ای با پارامترهای n_1 و θ_1، n_2 و θ_2، $\cdots$، و n_k و θ_k هستند. اگر nها به قدرکافی بزرگ باشند، می‌توانیم توزیعهای متغیرهای تصادفی مستقل

$$Z_i = \frac{X_i - n_i\theta_i}{\sqrt{n_i\theta_i(1-\theta_i)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

را با توزیعهای نرمال استاندارد تقریب کنیم، و طبق قضیهٔ ۸.۸ می‌توانیم

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_i)^2}{n_i\theta_i(1-\theta_i)}$$

را به‌عنوان مقداری از یک متغیر تصادفی که توزیع خی‌دو با k درجهٔ آزادی دارد، تلقی کنیم. بنابراین برای آزمون فرض $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k = \theta_0$ (در برابر این فرض مقابل که حداقل یکی از θها برابر θ_0 نیست) می‌توانیم از ناحیهٔ بحرانی $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,k}$ استفاده کنیم که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\theta_0)^2}{n_i\theta_0(1-\theta_0)}$$

وقتی θ_0 معین نیست، یعنی وقتی توجه ما تنها به فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k$ است، به‌جای θ، برآورد ادغام شدهٔ

$$\hat{\theta} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

را قرار می‌دهیم و ناحیهٔ بحرانی به صورت $\chi^2 \geq \chi_{\alpha,k-1}$ در می‌آید که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1-\hat{\theta})}$$

از بین رفتن یک درجهٔ آزادی، یعنی، تغییر در ناحیهٔ بحرانی از $\chi^2_{\alpha,k}$ به $\chi^2_{\alpha,k-1}$ ناشی از این واقعیت است که به‌جای پارامتر نامعلوم θ، برآورد آن قرار داده شده است؛ برای بحث صوری این مطلب، مراجعی در صفحهٔ ۴۷۵ داده شده‌اند.

حال شکل دیگری از آمارهٔ خی‌دو را برای این نوع آزمون ارائه می‌دهیم که، مطابق آنچه در بخش ۷.۱۳ خواهیم دید، انعطاف بیشتری برای کاربردهای دیگر دارد. با مرتب‌کردن داده‌ها به‌صورت جدول زیر

	پیروزیها	شکستها
نمونهٔ ۱	x_1	$n_1 - x_1$
نمونهٔ ۲	x_2	$n_2 - x_2$
	$\cdots$	$\cdots$
نمونهٔ k	x_k	$n_k - x_k$

درایه‌های آن را **فراوانیهای خانه‌ای مشاهده‌شدهٔ** f_{ij} می‌نامیم، که در آن اولین اندیس نشانهٔ سطر و دومین اندیس نشانهٔ ستون این جدول $k \times 2$ است.

تحت فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_k = \theta_0$، **امید فراوانیهای خانه‌ای مشاهده‌شده** برای اولین ستون به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$، $n_i\theta_0$ و برای ستون دوم $n_i(1 - \theta_0)$ هستند. وقتی θ_0 معلوم نباشد، مانند قبل به‌جای آن برآورد ادغام شدهٔ $\hat{\theta}$ را قرار می‌دهیم و امید فراوانیهای خانه‌ای را به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$ به‌صورت

$$e_{i1} = n_i\hat{\theta} \quad , \quad e_{i2} = n_i(1 - \hat{\theta})$$

برآورد می‌کنیم. اثبات این مطلب را که مقدار آمارهٔ خی‌دو

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})}$$

را می‌توان به‌صورت

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

نوشت، در تمرین ۴۲.۱۳ به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

مثال ۱۰.۱۳

برمبنای داده‌های نمونه‌ای که در جدول زیر نشان داده شده، تعیین کنید که آیا نسبت واقعی مشتریانی که مادهٔ شویندهٔ A را به مادهٔ شویندهٔ B ترجیح می‌دهند، در هر سه شهر یکسان است یا نه.

	عده‌ای که مادهٔ شویندهٔ A را ترجیح می‌دهند	عده‌ای که مادهٔ شویندهٔ B را ترجیح می‌دهند	
شهر الف	۲۳۲	۱۶۸	$n_1 = 400$
شهر ب	۲۶۰	۲۴۰	$n_2 = 500$
شهر ج	۱۹۷	۲۰۳	$n_3 = 400$

از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کنید.

حل. ۱.
$H_\circ: \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$
H_1: سه θ همه با هم برابر نیستند.
$\alpha = \circ/\circ 5$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^2 \geq 5/991$، که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و ۵٫۹۹۱ مقدار $\chi^2_{\circ/\circ 5, 2}$ است.

۳. چون برآورد ادغام شدهٔ θ عبارت است از

$$\hat{\theta} = \frac{232 + 260 + 197}{400 + 500 + 400} = \frac{689}{1300} = \circ/53$$

بنابراین، امید فراوانیهای خانه‌ای برابرند با

$$\begin{aligned}
e_{11} &= 400(\circ/53) = 212 \quad , \quad e_{12} = 400(\circ/47) = 188 \\
e_{21} &= 500(\circ/53) = 265 \quad , \quad e_{22} = 500(\circ/47) = 235 \\
e_{31} &= 400(\circ/53) = 212 \quad , \quad e_{32} = 400(\circ/47) = 188
\end{aligned}$$

و با قرار دادن آنها در فرمول χ^2، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{(232 - 212)^2}{212} + \frac{(260 - 265)^2}{265} + \frac{(197 - 212)^2}{212} \\
&\quad + \frac{(168 - 188)^2}{188} + \frac{(240 - 235)^2}{235} + \frac{(203 - 188)^2}{188} \\
&= 6/48
\end{aligned}$$

۴. چون $\chi^2 = 6/48$ از $\chi^2_{\circ/\circ 5, 2}$ بیشتر است، فرض صفر باید رد شود، به عبارت دیگر، نسبتهای واقعی مشتریانی که مادهٔ شویندهٔ A را بر مادهٔ شویندهٔ B در سه شهر ترجیح می‌دهند، یکسان نیستند. ▲

تمرینها

۴۲.۱۳ نشان دهید دو فرمولی که برای χ^2 در صفحهٔ ۴۶۱ داده شده‌اند، معادل‌اند.

۴۳.۱۳ ناحیه‌های بحرانی را که در صفحهٔ ۴۵۷ داده شده‌اند اصلاح کنید به‌طوری که از آنها بتوان در آزمون فرض صفر $\lambda = \lambda_\circ$ در برابر فرضهای مقابل $\lambda > \lambda_\circ$، $\lambda < \lambda_\circ$، و

$\lambda \neq \lambda_0$ برمبنای n مشاهده استفاده کرد. در اینجا λ پارامتر توزیع پراسون است (راهنمایی: از نتیجهٔ مثال ۱۵.۷ استفاده کنید.)

۴۴.۱۳ با رجوع به تمرین ۴۳.۱۳، از جدول II استفاده کرده مقادیر متناظر با $k_{0{,}025}$ و $k'_{0{,}025}$ را برای آزمون فرض صفر $\lambda = 3{,}6$ در برابر فرض مقابل $\lambda \neq 3{,}6$ برمبنای پنج مشاهده، پیدا کنید. از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کنید.

۴۵.۱۳ به‌ازای $k = 2$، نشان دهید که فرمول χ^2 در صفحهٔ ۴۶۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\chi^2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_2 x_1 - n_1 x_2)^2}{n_1 n_2 (x_1 + x_2)[(n_1 + n_2) - (x_1 + x_2)]}$$

۴۶.۱۳ با مفروض بودن نمونه‌های تصادفی بزرگی از دو توزیع دو جمله‌ای، نشان دهید که می‌توان فرض صفر $\theta_1 = \theta_2$ را، برمبنای آمارهٔ

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

آزمون کرد که در آن $\hat{\theta} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$. (راهنمایی: تمرین ۵.۸ را ببینید.)

۴۷.۱۳ نشان دهید که مربع عبارتی که در تمرین ۴۶.۱۳ برای z داده شده، برابر است با

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i - n_i\hat{\theta})^2}{n_i\hat{\theta}(1 - \hat{\theta})}$$

به‌طوری که دو آزمون، هنگامی که فرض مقابل به‌صورت $\theta_1 \neq \theta_2$ است، عملاً معادل‌اند. توجه کنید که آزمون توصیف شده در تمرین ۴۶.۱۳، و نه آزمون مبتنی برآماره χ^2، را می‌توان هنگامی که فرض مقابل $\theta_1 < \theta_2$ یا $\theta_1 > \theta_2$ است، به کاربرد.

کاربردها

۴۸.۱۳ با رجوع به مثال ۸.۱۳، نشان دهید که ناحیهٔ بحرانی $x \leq 5$ یا $x \geq 15$ است و متناظر با این ناحیهٔ بحرانی، سطح معنی‌دار بودن در واقع ۰٫۰۴۱۴ است.

۴۹.۱۳ ادعا شده است که بیش از ۴۰ درصد خریدکنندگان، می‌توانند کالایی را که روی آن خیلی تبلیغ شده است، تشخیص دهند. اگر، در نمونه‌ای تصادفی، ۱۰ نفر از ۱۸ نفر خریدکننده قادر باشند که آن کالا را تشخیص دهند، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا فرض صفر $\theta = 0{,}40$ را می‌توان در برابر فرض مقابل $\theta > 0{,}40$ رد کرد؟

۵۰.۱۳ با رجوع به تمرین قبل، ناحیهٔ بحرانی و سطح معنی‌دار بودن واقعی متناظر با این ناحیهٔ بحرانی را پیدا کنید.

۵۱.۱۳ پزشکی مدعی است که کمتر از ۳۰٪ همهٔ اشخاصی که در معرض مقدار معینی پرتوگیری قرار داشته‌اند، دچار تأثیرات نامطلوب خواهند شد. اگر، در نمونه‌ای تصادفی، تنها ۱ از ۱۹ نفر که در معرض چنان پرتوگیری قرار گرفته‌اند، دچار عوارض نامطلوب شوند، فرض صفر $\theta = ۰٫۳۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta < ۰٫۳۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۵۲.۱۳ با رجوع به تمرین قبل، ناحیهٔ بحرانی و سطح معنی‌داری واقعی متناظر با این ناحیهٔ بحرانی را پیدا کنید.

۵۳.۱۳ در نمونه‌ای تصادفی ۱۲ حادثه از ۱۴ حادثهٔ صنعتی، معلول شرایط کاری فاقد ایمنی بوده‌اند. از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده فرض صفر $\theta = ۰٫۴۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta \neq ۰٫۴۰$ آزمون کنید.

۵۴.۱۳ با رجوع به تمرین قبل، ناحیهٔ بحرانی و سطح معنی‌داری واقعی متناظر با این ناحیهٔ بحرانی را پیدا کنید.

۵۵.۱۳ در نمونه‌ای از ۱۲ دانشجوی کارشناسی رشتهٔ مدیریت بازرگانی، شش نفر گفته‌اند که میل دارند در دورهٔ کارشناسی ارشد حسابداری تحصیل کنند. از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده فرض صفر $\theta = ۰٫۲۰$، یعنی این فرض را که ۲۰ درصد دانشجویان کارشناسی رشته مدیریت بازرگانی میل دارند در دورهٔ کارشناسی ارشد حسابداری تحصیل کنند، در برابر $\theta > ۰٫۲۰$ آزمون کنید.

۵۶.۱۳ یک تولیدکنندهٔ موادغذایی می‌خواهد بداند که آیا احتمال اینکه مصرف‌کننده‌ای نوعی جدید از بسته‌بندی را بر بسته‌بندی قبلی ترجیح می‌دهد، واقعا ۰٫۶۰ است یا خیر. اگر در نمونه‌ای تصادفی، هفت مصرف‌کننده از ۱۸ مصرف‌کننده بسته‌بندی جدید را بر بسته‌بندی قبلی ترجیح دهند، فرض صفر $p = ۰٫۶۰$ را در برابر فرض مقابل $p \neq ۰٫۶۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۵۷.۱۳ در یک نمونهٔ تصادفی از ۶۰۰ اتومبیلی که در تقاطع خاصی به سمت راست می‌پیچند، ۱۵۷ اتومبیل وارد خط غلط می‌شوند. از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را که نسبت واقعی راننده‌هایی که مرتکب این اشتباه در تقاطع مفروض می‌شوند $\theta = ۰٫۳۰$ است در برابر این فرض مقابل که $\theta \neq ۰٫۳۰$، آزمون کنید.

۵۸.۱۳ سازندهٔ یک مادهٔ لکه‌گیری مدعی است که محصول او حداقل ۹۰ درصد هرگونه لکه‌ای را برطرف می‌کند. اگر، در نمونه‌ای تصادفی، تنها ۱۷۴ لکه از ۲۰۰ لکه با محصول این سازنده پاک شوند، فرض صفر $\theta = ۰٫۹۰$ را در برابر فرض مقابل $\theta < ۰٫۹۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۵۹.۱۳ در یک نمونهٔ تصادفی، ۷۴ نفر از ۲۵۰ نفری که برنامهٔ تلویزیونی خاصی را با تلویزیونهای سیاه و سفید و ۹۲ نفر از ۲۵۰ نفری که همان برنامه را در تلویزیونهای رنگی دیده‌اند، بعد از دو ساعت

هنوز به خاطر می‌آورند که برای چه محصولاتی در طی برنامه تبلیغ شده است. از آمارهٔ χ^2 استفاده کرده فرض صفر $\theta_1 = \theta_2$ را در برابر فرض مقابل $\theta_1 \neq \theta_2$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۶۰.۱۳ از آمارهٔ تمرین ۴۶.۱۳ استفاده کرده تمرین قبل را مجدداً حل کنید.

۶۱.۱۳ در یک نمونه تصادفی، ۴۶ تا از ۴۰۰ پیاز لاله از یک گلفروشی و ۱۸ تا از ۲۰۰ پیاز لاله از گلفروشی دوم شکوفه نکرده‌اند. از آمارهٔ χ^2 استفاده کرده فرض صفر $\theta_1 = \theta_2$ را در برابر فرض مقابل $\theta_1 \neq \theta_2$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۶۲.۱۳ از آمارهٔ تمرین ۴۶.۱۳ استفاده کرده تمرین ۶۱.۱۳ را مجدداً حل کنید و تحقیق کنید که مربع مقدار حاصل برای z با مقدار حاصل برای χ^2 برابر است.

۶۳.۱۳ در یک نمونهٔ تصادفی از ۲۰۰ نفری که صبحانه نخورده‌اند، ۸۲ نفر گفته‌اند که دچار ضعف نیمروزی شده‌اند، و در یک نمونهٔ تصادفی از ۳۰۰ نفری که صبحانه خورده‌اند ۸۷ نفر گفته‌اند که دچار ضعف نیمروزی شده‌اند. از روش تمرین ۴۶.۱۳ و سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده، این فرض صفر را که فرقی بین نسبتهای جامعه‌های متناظر نیست در برابر این فرض مقابل که ضعف نیمروزی بین کسانی که صبحانه نخورده‌اند شایعتر است، آزمون کنید.

۶۴.۱۳ اگر ۲۶ لاستیک از ۲۰۰ لاستیک نوع A بیشتر از ۳۰۰۰۰ مایل دوام نیاورده باشند، در حالی که رقم متناظر برای ۲۰۰ لاستیک انواع B، C، و D عبارت از ۲۳، ۱۵، و ۳۲ باشند، این فرض صفر را که فرقی در کیفیت چهار نوع لاستیک نیست، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۶۵.۱۳ در نمونه‌هایی تصادفی از ۲۵۰ نفر از اشخاص کم درآمد، ۲۰۰ نفر از اشخاص با درآمد متوسط، و ۱۵۰ نفر از اشخاص پر درآمد، به‌ترتیب ۱۵۵، ۱۱۸، و ۸۷ نفر موافق با تصویب لایحهٔ قانونی خاصی هستند. از سطح معنی‌داری ۰٫۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ را (که نسبت اشخاص موافق تصویب لایحه در سه گروه درآمدهای یکسان است) در برابر این فرض مقابل که هر سه θ برابر نیستند، آزمون کنید.

۷.۱۳ تحلیل یک جدول $r \times c$

روشی که در این بخش توصیف خواهیم کرد در مورد دو نوع مساله قابل اجراست، دو مسأله‌ای که از نظر مفهومی متفاوت‌اند ولی به‌روش یکسانی مورد تحلیل قرار می‌گیرند. در اولین نوع از مسائل، با نمونه‌هایی از r جامعهٔ چند جمله‌ای سروکار داریم که در آن هر امتحان c برآمد ممکن دارد. مثلاً وقتی اشخاصی در پنج حوزهٔ انتخاباتی مختلف مورد پرسش قرار می‌گیرند و از آنها پرسیده می‌شود که آیا موافق کاندیدایی هستند، بر علیه او رأی می‌دهند، یا هنوز تصمیمی نگرفته‌اند، در وضعیتی از این گونه هستیم. در اینجا $r = 5$ و $c = 3$.

در مثال ۱۰.۱۳ نیز در همین وضعیت خواهیم بود در صورتی که از هر خریدکننده سؤال شود که آیا مادهٔ شویندهٔ A، یا مادهٔ شویندهٔ B را ترجیح می‌دهد، یا هیچ کدام از آنها ارجحیّتی برای او ندارد. بنابراین امکان دارد که نتایجی را که در جدول 3×3 زیر نشان داده شده است، به‌دست آورده باشیم:

	تعداد افرادی که مادهٔ شویندهٔ A را ترجیح می‌دهند	تعداد افرادی که مادهٔ شوینده B را ترجیح می‌دهند	تعداد افراد بی‌تفاوت	
شهر الف	۱۷۴	۹۳	۱۳۳	۴۰۰
شهر ب	۱۹۶	۱۲۴	۱۸۰	۵۰۰
شهر ج	۱۴۸	۱۰۵	۱۴۷	۴۰۰

فرض صفری که مایلیم در مسأله‌ای از این نوع آزمون کنیم عبارت از آن است که نمونه‌گیری از r جامعه چند جمله‌ای یکسان انجام می‌شود. به‌صورت نمادی، اگر θ_{ij} احتمال i امین برآمد برای iامین جامعه باشد، می‌خواهیم که فرض صفر

$$\theta_{ij} = \theta_{۲j} = \cdots = \theta_{rj}$$

را به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, c$ آزمون کنیم. فرض مقابل عبارت از این خواهد بود که $\theta_{۱j}$، $\theta_{۲j}$، ...، و θ_{rj} حداقل به‌ازای یک مقدار j برابر نیستند.

در مثال قبل، با سه نمونه سروکار داشتیم که اندازه‌های ثابت آنها از مجموع سطرها، یعنی ۴۰۰، ۵۰۰، و ۴۰۰ به‌دست می‌آمد؛ از سوی دیگر، مجموعهای ستونی به عهدهٔ شانس گذاشته می‌شد. در نوعی دیگر از مسائل که در آن روش این فصل قابل اجراست، تنها با یک نمونه سروکار داریم و مجموع سطرها و در همان حال ستونها به عهده شانس گذاشته می‌شوند.

برای آنکه مثالی ارائه دهیم، جدول زیر را در نظر می‌گیریم که در مطالعهٔ وجود وابستگی بین بهره‌های هوشی اشخاصی است که برنامهٔ آموزش شغلی مؤسسه‌ای بزرگ را گذرانده‌اند و نحوهٔ کار آنها پس از اتمام دوره، به‌دست آمده است:

		نحوهٔ کار			
		ضعیف	متوسط	خوب	
بهرهٔ هوشی	کمتر از متوسط	۶۷	۶۴	۲۵	۱۵۶
	متوسط	۴۲	۷۶	۵۶	۱۷۴
	بالاتر از متوسط	۱۰	۲۳	۳۷	۷۰
		۱۱۹	۱۶۳	۱۱۸	۴۰۰

در اینجا تنها یک نمونه به‌اندازهٔ ۴۰۰ داریم و مجموعهای سطری و ستونی به عهدهٔ شانس واگذار شده‌اند. عمدتاً در ارتباط با چنین مسائلی است که جدولهای $r \times c$ را **جدولهای توافقی** می‌نامند.

فرض صفری که می‌خواهیم به کمک جدول بالا آزمون کنیم، آن است که نحوهٔ کار افرادی که برنامهٔ آموزش شغلی را گذرانده‌اند، مستقل از بهرهٔ هوشی آنهاست. در حالت کلی، اگر θ_{ij} عبارت از احتمال آن باشد که فقره‌ای در خانه‌ای متعلق به سطر iام و ستون jام بیفتد، $\theta_{i.}$ عبارت از

احتمال آن باشد که فقره‌ای در سطر iام بیفتد، و $\theta_{.j}$ عبارت از احتمال آن باشد که فقره‌ای در ستون jام بیفتد، فرض صفری که می‌خواهیم آزمون کنیم عبارت خواهد بود از

$$\theta_{ij} = \theta_{i.} \cdot \theta_{.j}$$

به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, r$ و $j = ۱, ۲, \ldots, c$. متناظراً فرض مقابل عبارت است از $\theta_{ij} \neq \theta_{i.} \cdot \theta_{.j}$ دست کم به‌ازای زوجی از مقادیر i و j.

چون روشی که به کمک آن یک جدول $r \times c$ را تحلیل می‌کنیم، صرف‌نظر از اینکه با r نمونه از جامعه‌های چند جمله‌ای با c برآمد مختلف یا یک نمونه از جامعه‌ای چند جمله‌ای با rc برآمد مختلف سروکار داریم، یکسان است؛ لذا این روش را در ارتباط با موضوع دوّم مورد بحث قرار می‌دهیم. در تمرین ۶۷.۱۳ از خواننده خواسته خواهد شد که این کار را به موازات بحث حاضر، برای مسألهٔ نوع اوّل نیز انجام دهد.

در زیر، فراوانی مشاهده‌شده برای خانهٔ سطر iام و ستون jام را با f_{ij}، مجموعهای سطری را با $f_{i.}$، مجموعهای ستونی را با $f_{.j}$، و مجموع کل، یعنی فراوانیهای همهٔ خانه‌ها را، با f نشان می‌دهیم. با این نمادها، احتمالهای $\theta_{i.}$ و $\theta_{.j}$ را به‌صورت

$$\hat{\theta}_{i.} = \frac{f_{i.}}{f} \qquad , \qquad \hat{\theta}_{.j} = \frac{f_{.j}}{f}$$

برآورد می‌کنیم و تحت فرض صفر استقلال، تساویهای

$$e_{ij} = \hat{\theta}_{i.} \cdot \hat{\theta}_{.j} \cdot f = \frac{f_{i.}}{f} \cdot \frac{f_{.j}}{f} \cdot f = \frac{f_{i.} \cdot f_{.j}}{f}$$

را برای فراوانی مورد انتظار سطر iام و ستون jام به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که به این ترتیب e_{ij} از ضرب کردن مجموع سطری که خانه به آن تعلق دارد در مجموع ستونی که به آن متعلق است، و تقسیم بر مجموع کل، به‌دست آمده است.

پس از محاسبهٔ e_{ij}، تصمیم خود را برمبنای مقدار

$$\chi^{۲} = \sum_{i=۱}^{r} \sum_{j=۱}^{c} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^{۲}}{e_{ij}}$$

قرار می‌دهیم و فرض صفر را رد می‌کنیم هرگاه مقدار آن از $\chi^{۲}_{\alpha,(r-۱)(c-۱)}$ بیشتر باشد.

تعداد درجه‌های آزادی $(r - ۱)(c - ۱)$ است، و در رابطه با آن به نکتهٔ زیر اشاره می‌کنیم: هر موقع که فراوانیهای خانه‌ای مورد انتظار در فرمولهای خی‌دو برمبنای داده‌های شمارشی نمونه‌ای برآورد شوند، تعداد درجه‌های آزادی، $s - t - ۱$ است که در آن s تعداد جملات مجموع و t

تعداد پارامترهای مستقلی است که به‌جای آنها برآوردهایشان گذاشته می‌شوند. در موقع آزمون وجود اختلاف بین k نسبت به کمک آمارهٔ خی‌دوی بخش ۶.۱۳، داشتیم $s = 2k$ و $t = k$، زیرا باید k پارامتر θ_1، θ_2، . . .، θ_k را برآورد می‌کردیم، و تعداد درجه‌های آزادی $2k - k - 1 = k - 1$ بود. در موقع آزمون مستقل بودن به کمک یک جدول توافقی $r \times c$، داریم $s = rc$ و $t = r + c - 2$، زیرا r پارامتر $\theta_{i.}$ و c پارامتر $\theta_{.j}$ مقید به این دو قید هستند که مجموع هر کدام از آنها باید برابر ۱ باشد؛ بنابراین $s - t - 1 = rc - (r + c - 2) - 1 = (r - 1)(c - 1)$.

چون آمارهٔ آزمونی که توصیف کرده‌ایم تنها به‌تقریب دارای توزیع خی‌دو با $(r - 1)(c - 1)$ درجهٔ آزادی است، رسم بر این است که این آزمون را تنها وقتی به کار برند که هیچ یک از e_{ij}ها کمتر از ۵ نباشد؛ این امر گاهی مستلزم آن است که برخی از خانه‌ها را با هم ادغام کنیم که در نتیجه از تعداد درجه‌های آزادی متناظر کاسته می‌شود.

مثال ۱۱.۱۳

برای داده‌هایی که در جدول زیر نشان داده شده‌اند، مستقل بودن استعداد ریاضی شخص و علاقهٔ او به آمار را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

		استعداد ریاضی		
		ضعیف	متوسط	عالی
علاقه به آمار	ضعیف	۶۳	۴۲	۱۵
	متوسط	۵۸	۶۱	۳۱
	عالی	۱۴	۴۷	۲۹

حل. ۱. H_0: استعداد ریاضی و علاقه به آمار مستقل‌اند.

H_1: این دو متغیر مستقل نیستند.

$\alpha = 0{,}01$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^2 \geq 13{,}277$ که در آن

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

و ۱۳٫۲۷۷ مقدار $\chi^2_{0{,}01,4}$ است.

۳. فراوانیهای مورد انتظار برای سطر اول عبارت‌اند از $45 = \frac{120 \cdot 135}{360}$، $50 = \frac{120 \cdot 150}{360}$، و $25 = 120 - 45 - 50$، که در آن از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که برای هر سطر یا هر ستون، مجموع فراوانیهای مورد انتظار خانه‌ها با مجموع فراوانیهای مشاهده‌شده برابر است (تمرین ۶۶.۱۳ را ببینید). به همین نحو، فراوانیهای مورد انتظار برای سطر دوّم عبارت‌اند از ۵۶٫۲۵، ۶۲٫۵، و ۳۱٫۲۵، و فراوانیهای مورد انتظار برای سطر سوم (که همه با عمل تفریق از مجموعهای کل ستونها به‌دست آمده‌اند)

عبارت‌اند از ۳۳٫۷۵، ۳۷٫۵، و ۱۸٫۷۵. در این صورت با جایگذاری در فرمول $\chi^۲$ نتیجه می‌شود

$$\chi^۲ = \frac{(۶۳ - ۴۵)^۲}{۴۵} + \frac{(۴۲ - ۵۰)^۲}{۵۰} + \cdots + \frac{(۲۹ - ۱۸٫۷۵)^۲}{۱۸٫۷۵} = ۳۲٫۱۴$$

۴. چون $\chi^۲ = ۳۲٫۱۴$ از ۱۳٫۲۷۷ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که وابستگی بین استعداد ریاضی افراد و علاقهٔ آنها به آمار موجود است. ▲

یکی از نقیصه‌های تحلیل خی‌دوی یک جدول $r \times c$ آن است که امکان تغییر ترتیب سطرها یا ستونها را به حساب نمی‌آورد. به‌عنوان نمونه، در مثال ۱۱.۱۳، استعداد ریاضی و نیز علاقه به آمار به‌ترتیب از ضعیف به متوسط و تا عالی مرتب شده‌اند، و مقداری که برای $\chi^۲$ به‌دست می‌آوریم، در صورتی که سطرها و ستونها هر کدام بین خود تغییر آرایش داده شوند، یکسان باقی می‌ماند. همچنین، ستونهای جدول صفحهٔ ۴۶۶ ترتیب‌بندی مشخصی را از ارجحیت B (عدم ارجحیت A) گرفته تا بی‌تفاوت بودن و تا ارجحیت A را می‌نمایانند ولی در این حالت ترتیب‌بندی خاصی برای سطرها وجود ندارد. اینکه چگونه می‌توان این ترتیب‌بندیها را به‌حساب آورد، در تمرینهای ۵۹.۱۴ و ۱۲.۱۵ توضیح داده شده‌اند.

۸.۱۳ نیکویی برازش

آزمون نیکویی برازش که در اینجا بررسی می‌کنیم در وضعیتهایی به کار می‌رود که در آنها می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا می‌توان مجموعه‌ای از داده‌ها را به‌عنوان نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با توزیع مفروض تلقی کرد یا نه. نوع دیگری از «نیکویی برازش» که در برازاندن یک منحنی بر مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده به کار می‌رود در فصل ۱۴ مورد بحث قرار می‌گیرد. برای تشریح مطلب، فرض کنید که بخواهیم برمبنای داده‌هایی (فراوانیهای مشاهده‌شده) که در جدول زیر نشان داده شده، تصمیم بگیریم که آیا تعداد اشتباهات یک حروفچین در چیدن یک رانگا، متغیری تصادفی با توزیع پواسون است یا نه.

تعداد خطاها	فراوانیهای مشاهده‌شده f_i	احتمالهای پواسون با $\lambda = ۳$	فراوانیهای مورد انتظار e_i
۰	۱۸	۰٫۰۴۹۸	۲۱٫۹
۱	۵۳	۰٫۱۴۹۴	۶۵٫۷
۲	۱۰۳	۰٫۲۲۴۰	۹۸٫۶
۳	۱۰۷	۰٫۲۲۴۰	۹۸٫۶
۴	۸۲	۰٫۱۶۸۰	۷۳٫۹
۵	۴۶	۰٫۱۰۰۸	۴۴٫۴
۶	۱۸	۰٫۰۵۰۴	۲۲٫۲
۷	۱۰	۰٫۰۲۱۶	۹٫۵
۸	۲ } ۳	۰٫۰۰۸۱	۳٫۶ } ۵٫۳
۹	۱	۰٫۰۰۳۸	۱٫۷

برای تعیین مجموعه‌ای متناظر از فراوانیهای مورد انتظار برای متغیرهای تصادفی از جامعه‌ای پواسون، ابتدا از میانگین توزیع مشاهده‌شده برای برآورد پارامتر λی توزیع پواسون استفاده کرده $\hat{\lambda} = \frac{۱۳۴۱}{۴۴۰} = ۳٫۰۵$ یا تقریباً $\hat{\lambda} = ۳$ را به‌دست می‌آوریم. سپس، با استخراج احتمالهای پواسون برای $\lambda = ۳$ از جدول II (با استفاده از احتمال ۹ یا بیشتر به‌جای احتمال ۹) و ضرب در ۴۴۰، یعنی فراوانی کل، فراوانیهای مورد انتظاری را که در ستون سمت راست جدول نشان داده‌ایم، به‌دست می‌آوریم. برای آزمون این فرض صفر که فراوانیهای مشاهده‌شده تشکیل نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ پواسون را می‌دهند، باید قضاوت کنیم که برازش با چه نیکویی، یا توافق با چه نزدیکی، بین دو مجموعهٔ فراوانیها موجود است. در حالت کلی، برای آزمون این فرض صفر $H_۰$ که مجموعه‌ای از داده‌های مشاهده‌شده، از جامعه‌ای با توزیع مشخص می‌آید در برابر این فرض مقابل که جامعه دارای توزیع دیگری است،

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{m} \frac{(f_i - e_i)^۲}{e_i}$$

را محاسبه می‌کنیم و $H_۰$ را در سطح معنی‌دار بودن α رد می‌کنیم در صورتی که $\chi^۲ \geq \chi^۲_{\alpha, m-t-۱}$، که در آن m تعداد جمله‌ها در مجموع و t تعداد پارامترهای مستقلی است که برمبنای داده‌های نمونه‌ای برآورد شده‌اند (بحث صفحهٔ ۴۶۸ را ببینید). در مثال بالا، $t = ۱$، زیرا تنها یک پارامتر برمبنای داده‌ها برآورد شده و تعداد درجه‌های آزادی $m - ۲$ است.

مثال ۱۲.۱۳

برای داده‌های جدول صفحهٔ ۴۶۹، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید که آیا تعداد اشتباهات حروفچینی که یک رانگا حروف می‌چیند متغیری تصادفی با توزیع پواسون است یا نه.

حل. (چون فراوانیهای مورد انتظار متناظر با تعداد ۸ و ۹ اشتباه چاپی کمتر از ۵ است، دو رده را با هم ترکیب کرده‌ایم.)

۱. $H_۰$: تعداد اشتباهها یک متغیر تصادفی پواسون است.
$H_۱$: تعداد اشتباهها یک متغیر تصادفی پواسون نیست.
$\alpha = ۰٫۰۵$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $\chi^۲ \geq ۱۴٫۰۶۷$، که در آن

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{m} \frac{(f_i - e_i)^۲}{e_i}$$

و ۱۴٫۰۶۷ مقدار $\chi^۲_{۰٫۰۵, ۷}$ است.

۳. با جایگذاری در فرمول مربوط به $\chi^۲$، به‌دست می‌آوریم

$$\chi^۲ = \frac{(۱۸ - ۲۱٫۹)^۲}{۲۱٫۹} + \frac{(۵۳ - ۶۵٫۷)^۲}{۶۵٫۷} + \cdots + \frac{(۳ - ۵٫۳)^۲}{۵٫۳}$$
$$= ۶٫۸۳$$

۴. چون $\chi^۲ = ۶٫۸۳$ کمتر از ۱۴٫۰۶۷ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ در واقع توافق نزدیک بین فراوانیهای مشاهده‌شده و مورد انتظار، این مطلب را القا می‌کند که توزیع پواسون «برازش نیکویی» را در اختیار می‌گذارد. ▲

تمرینها

۶۶.۱۳ درستی این حکم را تحقیق کنید که هرگاه فراوانیهای خانه‌ای مورد انتظار، مطابق با قاعده‌ای که در صفحهٔ ۴۶۷ بیان شد، محاسبه شوند؛ مجموع آنها برای هر سطر و ستون برابر با مجموع فراوانیهای مشاهده‌شده متناظر است.

۶۷.۱۳ نشان دهید قاعده‌ای که در صفحهٔ ۴۶۷ برای محاسبهٔ فراوانیهای خانه‌ای مورد انتظار بیان شد، در حالتی نیز که این فرض صفر را آزمون می‌کنیم که از r جامعه با توزیعهایی چند جمله‌ای یکسان نمونه‌گیری می‌کنیم، قابل اجراست.

۶۸.۱۳ نشان دهید که فرمول محاسباتی زیر برای $\chi^۲$ با فرمول صفحهٔ ۴۶۷ هم ارز است:

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{r}\sum_{j=۱}^{c}\frac{f_{ij}^۲}{e_{ij}} - f$$

۶۹.۱۳ از فرمول تمرین قبل استفاده کرده مقدار $\chi^۲$ را برای مثال ۱۰.۱۳ مجدداً محاسبه کنید.

۷۰.۱۳ اگر تحلیل یک جدول توافقی نشان دهد که بین دو متغیر تحت بررسی وابستگیی وجود دارد، قوت این وابستگی را می‌توان به کمک **ضریب توافقی**

$$C = \sqrt{\frac{\chi^۲}{\chi^۲ + f}}$$

سنجید، که در آن $\chi^۲$ مقداری است که برای آمارهٔ آزمون به‌دست می‌آید و f مجموع کلی است که در صفحهٔ ۴۶۶ تعریف شده است. نشان دهید که

(الف) برای یک جدول توافقی ۲ × ۲ مقدار ماکسیمم C عبارت است از $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$.

(ب) برای یک جدول توافقی ۳ × ۳ مقدار ماکسیمم C عبارت است از $\frac{۱}{۳}\sqrt{۶}$.

کاربردها

۷۱.۱۳ در مطالعهٔ عکس‌العمل والدین نسبت به درسی الزامی که در دبیرستان عرضه می‌شود، یک نمونهٔ تصادفی از ۳۶۰ پدر و مادر، بسته به اینکه تعداد فرزندانشان یک، دو، سه یا بیشتر بوده و

نیز بسته به اینکه به نظر آنها این درس ضعیف، مناسب، یا خوب است، رده‌بندی می‌شود. برمبنای نتایج جدول زیر، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا وابستگی بین عکس‌العمل والدین نسبت به درس و تعداد فرزندانی که در مدرسه دارند، وجود دارد یا نه.

	تعداد فرزندان		
	۱	۲	۳ یا بیشتر
ضعیف	۴۸	۴۰	۱۲
مناسب	۵۵	۵۳	۲۹
خوب	۵۷	۴۶	۲۰

۱۳.۷۲ آزمایشهایی از صافی صدا و درستگیری [عدم اختلاط ایستگاهها با هم] ۱۹۰ رادیو، نتایجی را که در جدول زیر نشان داده شده‌اند، به‌دست داده است.

		صافی صدا		
		ضعیف	متوسط	قوی
درستگیری	ضعیف	۷	۱۲	۳۱
	متوسط	۳۵	۵۹	۱۸
	قوی	۱۵	۱۳	۰

از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده این فرض صفر را که صافی صدا مستقل از درستگیری است. آزمون کنید.

۱۳.۷۳ داده‌های نمونه‌ای زیر به محموله‌هایی مربوط است که یک شرکت بزرگ از سه فروشنده مختلف دریافت کرده است.

	تعداد پذیرفته نشده‌ها	تعداد موارد ناسالم اما قابل پذیرش	تعداد سالمها
فروشندهٔ A	۱۲	۲۳	۸۹
فروشندهٔ B	۸	۶۲	۶۲
فروشندهٔ C	۲۱	۳۰	۱۱۹

درسطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید که آیا کیفیت محصولات سه فروشنده یکی است یا خیر.

۱۳.۷۴ جدول ۳ × ۳ صفحهٔ ۴۶۶ را، که به عکس‌العملهای خریدکنندگان در سه شهر مختلف نسبت به دو مادهٔ شوینده مربوط می‌شود، تحلیل کنید. از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کنید.

۱۳.۷۵ چهار سکه ۱۶۰ بار پرتاب شده‌اند و ۰، ۱، ۲، و ۴ شیر به‌ترتیب ۱۹، ۵۴، ۵۸، ۲۳، و ۶ بار ظاهر شده‌اند. از سطح معنی‌دار بودن $\alpha = ۰٫۰۵$ استفاده کرده آزمون کنید که آیا این فرض موجه است که سکه‌ها منصف بوده و به‌تصادف پرتاب شده‌اند یا نه.

۱۳.۷۶ می‌خواهیم این فرض را آزمون کنیم که آیا تعداد اشعهٔ گامایی که در هر ثانیه از یک مادهٔ رادیواکتیو خارج می‌شود، متغیری پواسون با $\lambda = ۲٫۴$ است یا نه. برای آزمون این فرض صفر

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ از داده‌های زیر که؛ در ۳۰۰ فاصلهٔ زمانی یک ثانیه‌ای به‌دست آمده‌اند، استفاده کنید.

فراوانی	تعداد اشعهٔ گاما
۱۹	۰
۴۸	۱
۶۶	۲
۷۴	۳
۴۴	۴
۳۵	۵
۱۰	۶
۴	۷ یا بیشتر

۷۷.۱۳ نانوایی هر روز، از شنبه تا پنجشنبه، سه کیک شکلاتی بزرگ را طبخ می‌کند و در صورت فروش نرفتن هر یک از آنها، آنها را به یک مؤسسهٔ خیریه می‌بخشد. از داده‌های جدول زیر استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا می‌توان این داده‌ها را به‌عنوان مقادیر یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای تلقی کرد یا خیر.

تعداد روزها	تعداد کیکهای به فروش رفته
۱	۰
۱۶	۱
۵۵	۲
۲۲۸	۳

۷۸.۱۳ داده‌های زیر توزیع ارقامی هستند که در یک کنتور گایگر از تعداد ذره‌های خارج‌شده از یک مادهٔ رادیوآکتیو در ۱۰۰ فاصلهٔ زمانی ۴۰ ثانیه‌ای ثبت شده‌اند.

فراوانی	تعداد ذره‌ها
۱	۵-۹
۱۰	۱۰-۱۴
۳۷	۱۵-۱۹
۳۶	۲۰-۲۴
۱۳	۲۵-۲۹
۲	۳۰-۳۴
۱	۳۵-۳۹

(الف) تحقیق کنید که میانگین و انحراف معیار این توزیع به‌ترتیب عبارت‌اند از $\overline{x} = ۲۰$ و $s = ۵$.

(ب) این احتمالها را پیدا کنید که یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با $\mu = ۲۰$ و $\sigma = ۵$ مقداری کمتر از ۹٫۵، بین ۹٫۵ و ۱۴٫۵، بین ۱۴٫۵ و ۱۹٫۵، بین ۱۹٫۵ و ۲۴٫۵، بین ۲۴٫۵ و

۵ر۲۹، بین ۵ر۲۹ و ۵ر۳۴، و بیشتر از ۵ر۳۴ اختیار کند.

(ج) فراوانیهای مورد انتظار منحنی نرمال برای رده‌های مختلف را با ضرب احتمالهای قسمت (ب) در فراوانی کل پیدا کنید و سپس در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ این فرض صفر را آزمون کنید که داده‌ها تشکیل نمونه‌ای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال را می‌دهند.

۹.۱۳ استفاده از کامپیوترها

مانند فصل ۱۱، نرم‌افزارهای کامپیوتری برای همهٔ آزمونهایی که بحث کرده‌ایم، موجودند. باز هم، تنها لازم است که داده‌های اصلی (خام) را همراه با فرمانهای مناسب در کامپیوتر خود وارد کنیم. برای تشریح مطلب، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۳.۱۳

نمونه‌های تصادفی زیر اندازه‌گیریهایی از ظرفیت گرمازایی (برحسب میلیون کالری در هر تن) نمونه‌هایی از زغال سنگ در معدن‌اند:

معدن ۱: ۸۴۰۰ ۸۲۳۰ ۸۳۸۰ ۷۸۶۰ ۷۹۳۰

معدن ۲: ۷۵۱۰ ۷۶۹۰ ۷۷۲۰ ۸۰۷۰ ۷۶۶۰

از سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ استفاده کرده این فرض را آزمون کنید که آیا تفاضل بین میانگینهای این دو نمونه، معنی‌دار است یا خیر.

حل. خروجی چاپی کامپیوتر در شکل ۵.۱۳ نشان می‌دهد که مقدار آمارهٔ آزمون $t =$ ۹۵ر۲، تعداد درجه‌های آزادی ۸، و Pـمقدار ۰۱۸ر۰ است. چون ۰۱۸ر۰ کمتر از ۰۵ر۰ است، نتیجه می‌گیریم که تفاضل بین میانگینهای دو نمونه، معنی‌دار است. ▲

```
MTB  > SET C1
DATA > 8400  8230  8380  7860  7930
MTB  > SET C2
DATA > 7510  7690  7720  8070  7660
MTB     > POOL C1 C2

TWOSAMPLE T FOR C1 VS C2
    N       MEAN      STDEV    SE MEAN
C1  5       8160        252        113
C2  5       7730        207         92

95 PCT CI FOR MU C1 - MU C2: (94, 766)
TTEST MU C1 = MU C2 (VS NE): T=2.95 P=0.018 DF=8.0
```

شکل ۵.۱۳ خروجی کامپیوتر برای مثال ۱۳.۱۳

همچنان که در بخش ۸.۱۱ متذکر شدیم، تأثیر کامپیوتر بر آمار فراتر از آن است که ما در مورد مثال ۱۲.۱۱ عمل کردیم. این مطلب در مورد مثال ۱۳.۱۳ نیز صادق است، امّا می‌خواستیم این نکته را خاطرنشان کنیم که برای کلیهٔ روشهای استاندارد آزمون که بحث کرده‌ایم، نرم‌افزارهایی موجود است.

مراجع

مسألهٔ تعیین تعداد درجه‌های آزادی مناسب برای استفاده‌های مختلف از توزیع خی‌دو در کتاب زیر مورد بحث واقع شده است

CRAMÉR, H., *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1946.

آزمون اسمیت‌ـسترتویت برای این فرض که دو توزیع نرمال با واریانسهای نابرابر، میانگین برابر دارند در کتاب زیر داده شده است.

MILLER, I., FREUND, J. E., and JOHNSON, R. A., *Probability and Statistics for Engineers*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1990.

تذکرهای بیشتری در رابطه با استفاده از تصحیح پیوستگی برای آزمون فرضهای راجع‌به پارامترهای دوجمله‌ای را می‌توان در کتاب زیر یافت:

BROWNLEE, K. A., *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

جزئیاتی دربارهٔ تحلیل جدولهای توافقی را می‌توان در کتاب زیر یافت:

EVERITT, B. S., *The Analysis of Contingency Tables*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1977.

در سالهای اخیر، تحقیقاتی دربارهٔ جدولهای توافقی $r \times c$ به‌عمل آمده است که در آنها رسته‌هایی که در سطرها یا ستونها یا هر دو نمایش داده شده‌اند، مرتب شده‌اند. این کار، فراتر از سطح این کتاب است، اما می‌توان برخی مطالب مقدماتی را در کتابهای زیر یافت:

AGRESTI, A., *Analysis of Ordinal Categorical Data*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1984.

AGRESTI, A., *Categorical Data Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990.

GOODMAN, L. A., *The Analysis of Cross-Classified Data Having Ordered Categories*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1984.

۱۴

رگرسیون و همبستگی

۱.۱۴ مقدمه

یکی از هدفهای اصلی بسیاری از پژوهشهای آماری ایجاد وابستگیهایی است تا پیش‌بینی یک یا چند متغیر را برحسب سایرین میسر گرداند. مثلاً، مطالعاتی انجام می‌شود تا فروشهای بالقوهٔ یک محصول جدید را برحسب قیمت آن، وزن یک بیمار را برحسب تعداد هفته‌هایی که پرهیز داشته است، مخارج سرگرمیهای خانواده را برحسب درآمد آن، مصرف سرانهٔ برخی مواد غذایی را برحسب ارزش غذایی آنها و مقدار پولی که صرف تبلیغ آنها در تلویزیون می‌شود و مواردی از این قبیل را پیش‌بینی کنند.

البته گرچه مطلوب آن است که بتوان کمیتی را برحسب سایرین دقیقاً پیش‌بینی کرد، ولی این

کار به‌ندرت میسر است، و در اغلب موارد باید به پیش‌بینی متوسطها یا امیدهای ریاضی رضا دهیم. مثلاً، شاید نتوانیم درآمد آقای (ب) را ده سال بعد از فارغ‌التحصیل شدن از دانشگاه به‌طور دقیق پیش‌بینی کنیم ولی، با در دست داشتن داده‌های مناسب، می‌توانیم درآمد متوسط یک فارغ‌التحصیل دانشگاه را برحسب تعداد سالهای بعد از فارغ‌التحصیلی پیش‌بینی کنیم. به همین نحو، حداکثر می‌توانیم متوسط محصول غلهٔ معینی را برحسب داده‌های مربوط به بارش باران در ماه تیر پیش‌بینی کنیم، و می‌توانیم حداکثر، وضع تحصیلی دانشجویان تازه وارد را برحسب بهرهٔ هوشی آنها به‌طور متوسط پیش‌بینی نماییم.

به‌طور صوری، اگر توزیع توأم دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم و بدانیم که X مقدار x را اختیار می‌کند، مسألهٔ اصلی **رگرسیون دو متغیره** عبارت از تعیین میانگین شرطی $\mu_{Y|x}$، یعنی «متوسط» مقدار Y به‌ازای مقدار مفروضی از X است. اصطلاح «رگرسیون»، به صورتی که در این کتاب به کار رفته، به فرانسیس گالتن[1] باز می‌گردد که وی آن را اولین‌بار برای بیان برخی روابط، در نظریهٔ وراثت به کار برد. در مسائلی که متضمن بیش از دو متغیر تصادفی‌اند، یعنی در **رگرسیون چند گانه**، با کمیتهایی مانند $\mu_{Z|x,y}$ میانگین Z به‌ازای مقادیر مفروضی از X و Y، $\mu_{X_4|x_1,x_2,x_3}$ میانگین X_4 به‌ازای مقادیر مفروضی از X_1، X_2، و X_3، و نظایر آنها سروکار داریم.

اگر $f(x,y)$ مقدار چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y در (x,y) باشد، مسألهٔ رگرسیون دو متغیره صرفاً عبارت از تعیین چگالی شرطی X به‌شرط $X = x$ و سپس محاسبهٔ انتگرال

$$\mu_{Y|x} = E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot w \cdot (x|y)dy$$

مطابق بخش ۸.۴ است. معادلهٔ حاصل، **معادلهٔ رگرسیون** Y روی X نامیده می‌شود. متقابلاً، ممکن است که به معادلهٔ رگرسیون

$$\mu_{X|y} = E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)dx$$

علاقه‌مند باشیم.در حالت گسسته، که در آن به‌جای چگالیهای احتمال با توزیعهای احتمال سروکار داریم، به‌جای انتگرال در دو معادلهٔ رگرسیون بالا صرفاً مجموعها را قرار می‌دهیم.

موقعی که توزیع توأم دو متغیر تصادفی یا حداقل همهٔ پارامترهای آن را ندانیم، تعیین $\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ به یک مسألهٔ برآورد برمبنای داده‌های نمونه‌ای تبدیل می‌شود؛ این مسأله، مسأله‌ای کاملاً متفاوت است و ما آن را در بخشهای ۳.۱۴ و ۴.۱۴ مورد بحث قرار می‌دهیم.

1. Francis Galton

مثال ۱.۱۴
با مفروض بودن متغیرهای تصادفی X و Y با چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{-x(1+y)} & x > 0 \quad \text{و} \quad y > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

معادلهٔ رگرسیون Y روی X را بیابید و منحنی رگرسیون را رسم کنید.

حل. با انتگرالگیری نسبت به y، چگالی حاشیه‌ای x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

بنابراین، چگالی شرطی Y به‌شرط $X = x$ با عبارت

$$w(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{x \cdot e^{-x(1+y)}}{e^{-x}} = x \cdot e^{-xy}$$

به‌ازای $y > 0$ و در سایر جاها با $w(y|x) = 0$ داده می‌شود، که تشخیص می‌دهیم یک چگالی نمایی با $\theta = \frac{1}{x}$ است. بنابراین با محاسبهٔ

$$\mu_{Y|x} = \int_0^\infty y \cdot x \cdot e^{-xy} dy$$

یا با مراجعه به فرع ۱ قضیهٔ ۳.۶ در می‌یابیم که معادلهٔ رگرسیون Y روی X عبارت است از

$$\mu_{Y|x} = \frac{1}{x}$$

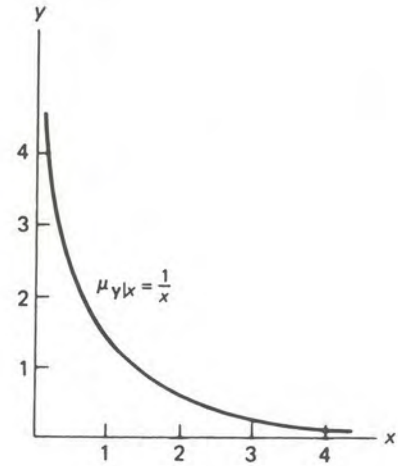
منحنی رگرسیون متناظر در شکل ۱.۱۴ نشان داده شده است. ▲

مثال ۲.۱۴
اگر X و Y دارای توزیع چند جمله‌ای

$$f(x,y) = \binom{n}{x, y, n-x-y} \cdot \theta_1^x \theta_2^y (1 - \theta_1 - \theta_2)^{n-x-y}$$

به‌ازای $x = 0, 1, 2, \cdots n$ و $y = 0, 1, 2, \ldots, n$ مقید به‌شرط $x + y \leq n$ باشند، معادلهٔ رگرسیون Y روی X را پیدا کنید.

حل. توزیع حاشیه‌ای X به‌صورت



شکل۱.۱۴ منحنی رگرسیون مثال ۱.۱۴

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{y=۰}^{n-x} \binom{n}{x, y, n-x-y} \cdot \theta_۱^x \theta_۲^y (۱-\theta_۱-\theta_۲)^{n-x-y} \\ &= \binom{n}{x} \theta_۱^x (۱-\theta_۱)^{n-x} \end{aligned}$$

به‌ازای $x = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$ است، که تشخیص می‌دهیم یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n و $\theta_۱$ است. بنابراین به‌ازای $y = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-x$

$$w(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{\binom{n-x}{y} \theta_۲^y (۱-\theta_۱-\theta_۲)^{n-x-y}}{(۱-\theta_۱)^{n-x}}$$

که با بازنویسی فرمول به صورت

$$w(y|x) = \binom{n-x}{y} \left(\frac{\theta_۲}{۱-\theta_۱}\right)^y \left(\frac{۱-\theta_۱-\theta_۲}{۱-\theta_۱}\right)^{n-x-y}$$

و با امتحان کردن متوجه می‌شویم که توزیع شرطی Y به‌فرض $X = x$ یک توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای $n-x$ و $\frac{\theta_۲}{۱-\theta_۱}$ است، به‌طوری که معادلهٔ رگرسیون Y روی X مطابق قضیهٔ ۲.۵ عبارت است از

$$\mu_{Y|x} = \frac{(n-x)\theta_۲}{۱-\theta_۱}$$

▲

با بازگشت به مثال قبل، اگر X را تعداد دفعاتی بگیریم که در ۳۰ بار پرتاب یک تاس سالم عددی زوج ظاهر می‌شود و Y را تعداد دفعاتی بگیریم که نتیجه پنج است، آنگاه معادلهٔ رگرسیون به‌صورت

$$\mu_{Y|x} = \frac{(۳۰ - x)\frac{۱}{۶}}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}(۳۰ - x)$$

در می‌آید. این نتیجهٔ موجهی است زیرا به‌ازای هر یک از $x - ۳۰$ بر آمدی که زوج نیستند، سه امکان همشانس ۱، ۳، یا ۵ وجود دارد.

مثال ۳.۱۴

اگر چگالی توأم $X_۱$، $X_۲$، و $X_۳$

$$f(x_۱, x_۲, x_۳) = \begin{cases} (x_۱ + x_۲)e^{-x_۳} & ۰ < x_۱ < ۱,\ ۰ < x_۲ < ۱,\ x_۳ > ۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

باشد، معادلهٔ رگرسیون $X_۲$ روی $X_۱$ و $X_۳$ را پیدا کنید.

حل. با مراجعه به مثال ۲۲.۳، در می‌یابیم که چگالی حاشیه‌ای $X_۱$ و $X_۳$

$$m(x_۱, x_۳) = \begin{cases} \left(x_۱ + \frac{۱}{۲}\right) e^{-x_۳} & ۰ < x_۱ < ۱,\ x_۳ > ۰ \\ ۰, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

است، بنابراین

$$\begin{aligned}\mu_{X_۲|x_۱, x_۳} &= \int_{-\infty}^{\infty} x_۲ \frac{f(x_۱, x_۲, x_۳)}{m(x_۱, x_۳)} dx_۲ = \int_۰^۱ \frac{x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱ + \frac{۱}{۲})} dx_۲ \\ &= \frac{x_۱ + \frac{۲}{۳}}{۲x_۱ + ۱}\end{aligned}$$

▲

توجه کنید که امید شرطی که در مثال بالا به‌دست آمد، به $x_۱$ بستگی دارد ولی به $x_۳$ بستگی ندارد که انتظارش را باید می‌داشتیم، زیرا در صفحهٔ ۱۳۴ تذکر دادیم که $X_۲$ و $X_۳$ مستقل‌اند.

۲.۱۴ رگرسیون خطی

یک جنبهٔ مهم مثال ۲.۱۴ آن است که معادلهٔ رگرسیون، خطی است، یعنی به شکل

$$\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$$

که در آن α و β مقادیر ثابت‌اند و **ضریبهای رگرسیون** نامیده می‌شوند. بنابر دلایلی متعدد، معادلات رگرسیون خطی مورد توجه خاصی هستند: اولاً، این معادلات به‌سادگی به سایر اعمال ریاضی تن در می‌دهند؛ ثانیاً، اغلب آنها تقریبهای خوبی برای معادلات رگرسیون پیچیده‌تر هستند؛ و سرانجام، در حالت توزیع نرمال دو متغیره، که در بخش ۷.۶ مطالعه کردیم، معادلات رگرسیون در واقع خطی هستند.

برای آسان کردن مطالعهٔ معادلات رگرسیون خطی، ضریبهای رگرسیون α و β را برحسب بعضی گشتاورهای مرتبهٔ پایینتر توزیع توأم X و Y، یعنی برحسب $E(X) = \mu_۱$، $E(Y) = \mu_۲$، $\mathrm{var}(X) = \sigma_۱^۲$، $\mathrm{var}(Y) = \sigma_۲^۲$، و $\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{۱۲}$ بیان می‌کنیم. سپس، با استفاده از ضریب همبستگی

$$\rho = \frac{\sigma_{۱۲}}{\sigma_۱ \sigma_۲}$$

که در بخش ۷.۶ تعریف شد، نتایج زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۱۴ اگر رگرسیون Y روی X خطی باشد، آنگاه

$$\mu_{Y|x} = \mu_۲ + \rho \frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}(x - \mu_۱)$$

و اگر رگرسیون X روی Y خطی باشد، آنگاه

$$\mu_{X|y} = \mu_۱ + \rho \frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}(y - \mu_۲)$$

برهان. چون $\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$، نتیجه می‌شود که

$$\int y \cdot w(y|x) dy = \alpha + \beta x$$

و اگر عبارتهای دو طرف این معادله را در $g(x)$، مقدار متناظر توزیع حاشیه‌ای X، ضرب کنیم و روی x انتگرال بگیریم به‌دست می‌آوریم

$$\iint y \cdot w(y|x) g(x) dy\, dx = \alpha \int g(x) dx + \beta \int x \cdot g(x) dx$$

یا

$$\mu_۲ = \alpha + \beta \mu_۱$$

زیرا $f(x,y) = w(y|x)g(x)$. اگر دوطرف معادلهٔ مربوط به $\mu_{Y|x}$ را قبل از انتگرالگیری در $x \cdot g(x)$ ضرب کرده بودیم، نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\iint xy \cdot f(x,y)dy\ dx = \alpha \int x \cdot g(x)dx + \beta \int x^۲ \cdot g(x)dx$$

یا

$$E(XY) = \alpha\mu_۱ + \beta E(X^۲)$$

با حل $\mu_۲ = \alpha + \beta\mu_۱$ و $E(XY) = \alpha\mu_۱ + \beta E(X^۲)$ بر حسب α و β و استفاده از این واقعیت که $E(XY) = \sigma_{۱۲} + \mu_۱\mu_۲$ و $E(X^۲) = \sigma_۱^۲ + \mu_۱^۲$، نتیجه می‌گیریم که

$$\alpha = \mu_۲ - \frac{\sigma_{۱۲}}{\sigma_۱^۲}.\mu_۱ = \mu_۲ - \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱} \cdot \mu_۱$$

و

$$\beta = \frac{\sigma_{۱۲}}{\sigma_۱^۲} = \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}$$

که ما را قادر می‌سازد تا معادلهٔ رگرسیون خطی Y روی X را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$\mu_{Y|x} = \mu_۲ + \rho\frac{\sigma_۲}{\sigma_۱}(x - \mu_۱)$$

وقتی رگرسیون X روی Y خطی است، اعمال مشابهی به معادلهٔ زیر منجر می‌شود.

$$\mu_{X|y} = \mu + \rho\frac{\sigma_۱}{\sigma_۲}(y - \mu_۲)$$

■

از قضیهٔ ۱.۱۴ نتیجه می‌شود که اگر معادلهٔ رگرسیون خطی باشد و $\rho = ۰$، آنگاه $\mu_{Y|x}$ به x بستگی ندارد (یا $\mu_{X|y}$ به y بستگی ندارد). وقتی $\rho = ۰$ و در نتیجه، $\sigma_{۱۲} = ۰$، دو متغیر تصادفی X و Y **ناهمبسته‌اند** و می‌توانیم حکمی را که در صفحهٔ ۱۷۱ بیان کردیم با گفتن اینکه اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند، ناهمبسته نیز هستند، اما اگر دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند لزوماً مستقل نیستند، به گونه‌ای دیگر بیان کنیم؛ مطلب اخیر در تمرین ۹.۱۴ تشریح شده است.

ضریب همبستگی و برآوردهای آن در بسیاری از پژوهشهای آماری اهمیت دارند و ما از آنها تا حدی به تفصیل در بخش ۵.۱۴ بحث می‌کنیم. در اینجا، خاطر نشان می‌کنیم، همان‌طور که اثبات آن در تمرین ۱۱.۱۴ از خواننده خواسته خواهد شد، $-۱ \leq \rho \leq +۱$، و علامت ρ مستقیماً به ما می‌گوید که آیا شیب خط همبستگی روبه بالاست یا روبه پایین.

۳.۱۴ روش کمترین مربعات

در بخشهای پیشین، مسألهٔ رگرسیون را تنها در رابطه با متغیرهای تصادفیی که دارای توزیعهای توأم‌اند مورد بحث قرار دادیم. در عمل، مسائل متعددی موجودند که در آنها مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده دلالت بر آن می‌کند که رگرسیون خطی است و در آن توزیع توأم متغیرهای تصادفی تحت بررسی را نمی‌دانیم، اما با این حال می‌خواهیم که ضرایب رگرسیون α و β را برآورد کنیم. مسائلی از این نوع معمولاً با **روش کمترین مربعات** رفع و رجوع می‌شوند که روشی برای برازش دادن یک منحنی است که در اوایل قرن نوزدهم توسط ریاضیدان فرانسوی آدرین لژاندر[1] پیشنهاد شده است.

برای تشریح این روش، داده‌های زیر از تعداد ساعات مطالعهٔ ۱۰ نفر را برای امتحان زبان فرانسه و نمرات آنها در این امتحان را در نظر می‌گیریم:

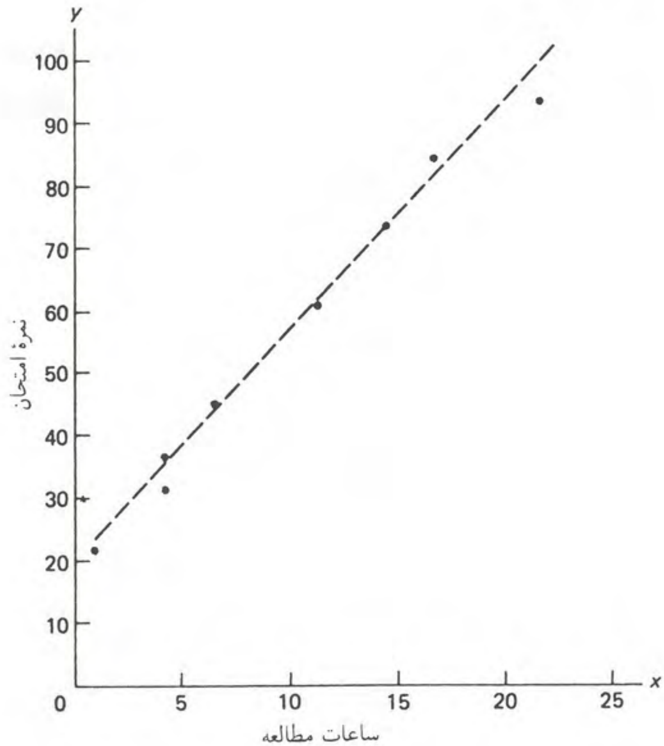
تعداد ساعات مطالعه X	نمرهٔ امتحان y
۴	۳۱
۹	۵۸
۱۰	۶۵
۱۴	۷۳
۴	۳۷
۷	۴۴
۱۲	۶۰
۲۲	۹۱
۱	۲۱
۱۷	۸۴

با رسم نمودار این داده‌ها در شکل ۲.۱۴، این فکر در ما القا می‌شود که یک خط راست برازش نسبتاً خوبی است. گرچه همهٔ نقاط بر یک خط قرار نمی‌گیرند، الگوی کلی، این فکر را القا می‌کند که نمرهٔ متوسط امتحان به‌ازای تعدادی از ساعات مطالعه را می‌توان به‌خوبی به کمک معادله‌ای به شکل $\mu_{Y|x} = \alpha + \beta x$ با تعداد ساعات مطالعه مربوط کرد.

به محض آنکه در مسألهٔ مفروضی بر تقریباً خطی بودن رگرسیون حکم کردیم، با مسألهٔ برآورد کردن ضرایب α و β از روی داده‌های نمونه‌ای مواجه می‌شویم. به عبارت دیگر ما با مسألهٔ به‌دست آوردن برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به‌طوری که خط رگرسیون برآوردشدهٔ $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ به تعبیری بهترین برازش ممکن برای داده‌های مفروض باشد، مواجه هستیم.

اگر انحراف قائم یک نقطه از خط را، به‌طوری که در شکل ۳.۱۴ نشان داده شده، با e_i نشان دهیم؛ ملاک کمترین مربعات که این «نیکویی برازش» را برمبنای آن قرار می‌دهیم، مستلزم آن است که مجموع مربعات این انحرافها را مینیمم کنیم. بنابراین اگر مجموعه‌ای از داده‌های زوج

1. Adrien Legendre



شکل۲.۱۴ داده‌های حاصل از نمرات امتحانی و تعداد ساعات مطالعه

شده مانند $\{(x_i, y_i); i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ داده شده باشد، **برآوردهای کمترین مربعات** ضرایب رگرسیون، مقادیری مانند $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ هستند که به‌ازای آنها کمیت

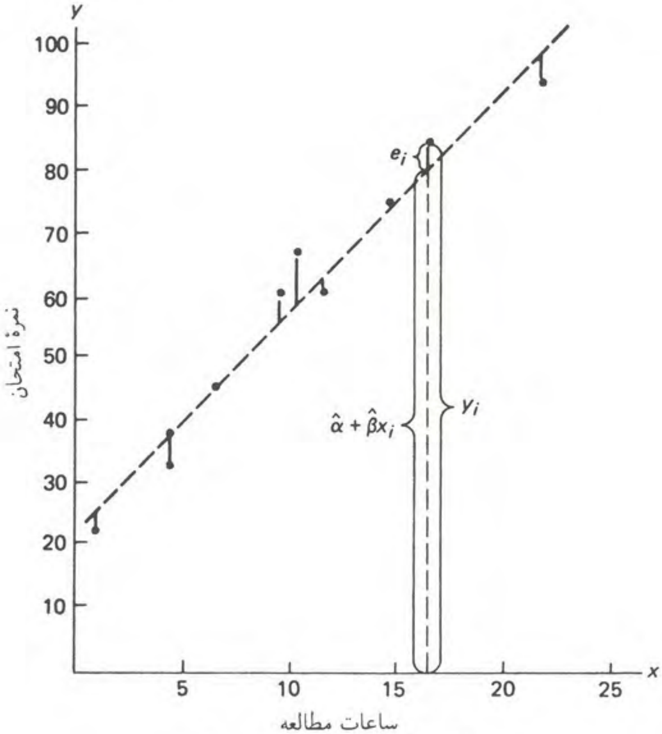
$$q = \sum_{i=۱}^{n} e_i^۲ = \sum_{i=۱}^{n} [Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)]^۲$$

مینیمم است. با گرفتن مشتق جزئی نسبت به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ و برابر صفر قرار دادن این مشتقهای جزئی، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\alpha}} = \sum_{i=۱}^{n} (-۲)[y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)] = ۰$$

و

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}} = \sum_{i=۱}^{n} (-۲) x_i [y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)] = ۰$$



شکل۳.۱۴ ملاک کمترین مربعات

که معادلات موسوم به **معادلات نرمال** را می‌دهند

$$\sum_{i=۱}^{n} y_i = \hat{\alpha} n + \hat{\beta} \cdot \sum_{i=۱}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i = \hat{\alpha} \cdot \sum_{i=۱}^{n} x_i + \hat{\beta} \cdot \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲$$

با حل این دستگاه معادلات نسبت به $\hat{\beta}$، برآورد کمترین مربعات برای β را به صورت

$$\hat{\beta} = \frac{n\left(\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲\right) - \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i\right)^۲}$$

و سپس با استفاده از اولین معادلهٔ نرمال، برآورد کمترین مربعات α را به صورت

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} y_i - \hat{\beta} \cdot \sum_{i=۱}^{n} x_i}{n}$$

به‌دست می‌آوریم. این فرمول برای $\hat{\alpha}$ را به‌صورت

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta} \cdot \overline{x}$$

نیز می‌توان نوشت.

برای آسان کردن فرمول مربوط به $\hat{\beta}$، و نیز برخی فرمولهایی که در بخشهای ۴.۱۴ و۵.۱۴ با آنها روبه‌رو می‌شویم، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2$$

و

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

قضیهٔ ۲.۱۴ با مفروض بودن داده‌های نمونه‌ای $\{(x_i, y_i); i = 1, 2, \ldots, n\}$، ضریبهای خط کمترین مربعات $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ عبارت‌اند از

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

و

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta} \cdot \overline{x}$$

مثال ۴.۱۴

با رجوع به داده‌های صفحهٔ ۴۸۳،

(الف) معادلهٔ خط کمترین مربعات را که تقریبی برای رگرسیون نمرات امتحانی روی تعداد ساعتهای مطالعه است، پیدا کنید.

(ب) نمرهٔ متوسط امتحانی فردی را که ۱۴ ساعت برای امتحان مطالعه کرده است، پیشگویی کنید.

حل. (الف) با به‌دست آوردن $n = ۱۰$، $\sum x = ۱۰۰$، $\sum x^۲ = ۱۳۷۶$، $\sum y = ۵۶۴$، و $\sum xy = ۶۹۴۵$ از داده‌ها، نتیجه می‌گیریم که

$$S_{xx} = ۱۳۷۶ - \frac{۱}{۱۰}(۱۰۰)^۲ = ۳۷۶$$

و

$$S_{xy} = ۶۹۴۵ - \frac{۱}{۱۰}(۱۰۰)(۵۶۴) = ۱۳۰۵$$

بنابراین $\hat{\beta} = \frac{۱۳۰۵}{۳۷۶} = ۳{,}۴۷۱$ و $\hat{\alpha} = \frac{۵۶۴}{۱۰} - ۳{,}۴۷۱ . \frac{۱۰۰}{۱۰} = ۲۱{,}۶۹$، و معادلهٔ خط کمترین مربعات چنین است:

$$\hat{y} = ۲۱{,}۶۹ + ۳{,}۴۷۱x$$

(ب) با قرار دادن $x = ۱۴$ در معادلهٔ حاصل در (الف)، مقدار

$$\hat{y} = ۲۱{,}۶۹ + ۳{,}۴۷۱(۱۴) = ۷۰{,}۲۸۴$$

یا، پس از گرد کردن به نزدیکترین واحد، $\hat{y} = ۷۰$ را به‌دست می‌آوریم. ▲

چون هیچ فرضی دربارهٔ توزیع توأم متغیرهای تصادفی که در مثال قبل با آنها سروکار داشتیم، نکرده‌ایم؛ نمی‌توانیم قضاوتی دربارهٔ «نیکویی» برازش به‌دست آمده در قسمت (ب) داشته باشیم؛ همچنین نمی‌توانیم دربارهٔ «نیکویی» برآوردهای $\hat{\alpha} = ۲۱{,}۶۹$ و $\hat{\beta} = ۳{,}۴۷۱$ که در قسمت (الف) به‌دست آمدند، قضاوت کنیم. مسائلی از این نوع، در بخش ۴.۱۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

ملاک کمترین مربعات، یا به عبارت دیگر روش کمترین مربعات، در بسیاری از مسائل برازش منحنی که کلیتر از مسألهٔ مورد بحث در این بخش‌اند، به‌کار می‌رود. در رأس همهٔ اینها، از این ملاک، در بخشهای ۶.۱۴ و ۷.۱۴، استفاده خواهد شد تا ضرایب **معادله‌های رگرسیون چندگانه** به شکل

$$\mu_{Y|x_۱,\ldots,x_k} = \beta_۰ + \beta_۱ x_۱ + \cdots + \beta_k x_k$$

برآورد شوند.

تمرینها

۱.۱۴ با مراجعه به مثال ۱.۱۴، نشان دهید که معادلهٔ رگرسیون X روی Y

$$\mu_{X|y} = \frac{۲}{۱+y}$$

است و منحنی رگرسیون را رسم کنید.

۲.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲}{۵}(۲x+۳y) & ۰<y<۱\,,\ ۰<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ را پیدا کنید.

۳.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} ۶x & ۰<x<y<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$\mu_{Y|x}$ و $\mu_{X|y}$ را پیدا کنید.

۴.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲x}{(۱+x+xy)^۳} & y>۰\,,\ x>۰ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نشان دهید که $\mu_{Y|x} = ۱ + \frac{۱}{x}$، و $\operatorname{var}(Y|x)$ موجود نیست.

۵.۱۴ با مراجعه به تمرین ۸۶.۳، نتایج قسمتهای (ج) و (د) را به کار برده $\mu_{X|۱}$ و $\mu_{Y|۰}$ را پیدا کنید.

۶.۱۴ با مراجعه به تمرین ۸۷.۳، عبارتی برای $\mu_{Y|x}$ پیدا کنید.

۷.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y) = \begin{cases} ۲ & ۰<y<x<۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

نشان دهید که

(الف) $\mu_{Y|x} = \frac{x}{۲}$ و $\mu_{X|y} = \frac{۱+y}{۲}$؛

(ب) $E(X^mY^n) = \frac{۲}{(n+۱)(m+n+۲)}$.

همچنین

(ج) صحت نتایج قسمت (الف) را با گذاشتن مقادیر μ_1، μ_2، σ_1، σ_2، و ρ، حاصل از فرمول قسمت (ب)، در فرمولهای قضیهٔ ۱.۱۴، تحقیق کنید.

۸.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy & x+y<1،\ x>0،\ y>0\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

نشان دهید که $\mu_{Y|x}=\frac{2}{3}(1-x)$ و صحت این نتیجه را با معین کردن مقادیر μ_1، μ_2، σ_1، σ_2، و ρ، و قرار دادن آنها در فرمول مربوطه در قضیهٔ ۱.۱۴، تحقیق کنید.

۹.۱۴ با مفروض بودن چگالی توأم

$$f(x,y)=1\begin{cases}1 & 0<y<1\ ,-y<x<y\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

نشان دهید که متغیرهای تصادفی X و Y ناهمبسته‌اند ولی مستقل نیستند.

۱۰.۱۴ نشان دهید که اگر $\mu_{Y|x}$ برحسب x خطی و $\text{var}(Y|x)$ ثابت باشد، آنگاه برای $X=x$، $\text{var}(Y|x)=\sigma_2^2(1-\rho^2)$.

۱۱.۱۴ با مفروض بودن زوجی از متغیرهای تصادفی مانند X و Y با واریانسهای σ_1^2 و σ_2^2 و ضریب همبستگی ρ، از قضیهٔ ۱۴.۴ استفاده کرده $\text{var}\left(\frac{X}{\sigma_1}+\frac{Y}{\sigma_2}\right)$ و $\text{var}\left(\frac{X}{\sigma_1}-\frac{Y}{\sigma_2}\right)$ را برحسب σ_1 و σ_2 و ρ بیان کنید. در این صورت، با استفاده از این واقعیت که واریانسها نمی‌توانند منفی باشند، نشان دهید که $-1\le\rho\le+1$.

۱۲.۱۴ با مفروض بودن متغیرهای تصادفی X_1، X_2، و X_3 با چگالی توأم $f(x_1,x_2,x_3)$، نشان دهید که اگر رگرسیون X_3 روی X_1 و X_2 خطی باشد و به صورت

$$\mu_{X_3|x_1,x_2}=\alpha+\beta_1(x_1-\mu_1)+\beta_2(x_2-\mu_2)$$

نوشته شود، آنگاه

$$\alpha=\mu_3$$
$$\beta_1=\frac{\sigma_{13}\sigma_2^2-\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}$$
$$\beta_2=\frac{\sigma_{23}\sigma_1^2-\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}$$

که در آن $\mu_i = E(X_i)$، $\sigma_i^2 = \text{var}(X_i)$، و $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$. [راهنمایی: نظیر صفحهٔ ۴۸۱ عمل کنید تا به ترتیب با ضرب کردن در $(x_1 - \mu_1)$ و $(x_2 - \mu_2)$، معادلات دوم و سوم به‌دست آیند.]

۱۳.۱۴ برآورد کمترین مربعات پارامتر β در معادلهٔ رگرسیون $\mu_{Y|x} = \beta x$ را پیدا کنید.

۱۴.۱۴ با حل همزمان معادلات نرمال صفحات ۴۸۴، ۴۸۵ نشان دهید که

$$\hat{\alpha} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

۱۵.۱۴ وقتی xها همفاصله باشند، محاسبهٔ $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را می‌توان با کدگذاری xها و تخصیص مقادیر ...، ۳−، ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، ۳، ... به آنها وقتی n فرد است، یا مقادیر ...، ۵−، ۳−، ۱−، ۱، ۳، ۵، ...، وقتی n زوج است، آسانتر کرد. نشان دهید که با این روش کدگذاری، فرمولهای مربوط به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به صورت

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

در می‌آیند.

کاربردها

۱۶.۱۴ دُزهای متفاوتی از یک سم به گروههایی از ۲۵ موش داده شده و نتایج زیر به‌دست آمده است.

دُز (میلیگرم) x	تعداد مرگها y
۴	۱
۶	۳
۸	۶
۱۰	۸
۱۲	۱۴
۱۴	۱۶
۱۶	۲۰

(الف) معادلهٔ خط کمترین مربعات را که بر این داده‌ها برازش کند، پیدا کنید.

(ب) تعداد مرگها را در یک گروه از ۲۵ موش که ۷ میلیگرم از این سم دریافت می‌کند، برآورد کنید.

۱۷.۱۴ اعداد زیر نمراتی هستند که ۱۲ دانشجو در امتحان میان ترم و آخر ترم در یک درس آمار، دریافت کرده‌اند:

امتحان میان ترم x	امتحان آخر ترم y
۷۱	۸۳
۴۹	۶۲
۸۰	۷۶
۷۳	۷۷
۹۳	۸۹
۸۵	۷۴
۵۸	۴۸
۸۲	۷۸
۶۴	۷۶
۳۲	۵۱
۸۷	۷۳
۸۰	۸۹

(الف) معادلهٔ خط کمترین مربعات را که بتوانیم از روی آن نمرهٔ نهایی یک دانشجو در این درس را برمبنای نمرهٔ میان ترمش پیش‌بینی کنیم، پیدا کنید.

(ب) نمرهٔ آخر ترم دانشجویی را که در میان ترم ۸۴ گرفته، پیش‌بینی کنید.

۱۸.۱۴ مادهٔ خامی که در تولید یک نوع الیاف مصنوعی به‌کار می‌رود، در جایی انبار شده است که هیچ کنترلی بر رطوبت به‌عمل نمی‌آید. اندازه‌گیریهایی از رطوبت نسبی و میزان نم گرفتگی نمونه‌هایی از مادهٔ خام (هر دو برحسب درصد) در ۱۲ روز، نتایج زیر را به‌دست داده است.

رطوبت	نم گرفتگی
۴۶	۱۲
۵۳	۱۴
۳۷	۱۱
۴۲	۱۳
۳۴	۱۰
۲۹	۸
۶۰	۱۷
۴۴	۱۲
۴۱	۱۰
۴۸	۱۵
۳۳	۹
۴۰	۱۳

(الف) یک خط کمترین مربعات ببرازانید که ما را قادر سازد نم‌گرفتگی را برحسب رطوبت

نسبی، پیشگویی کنیم.

(ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده نم‌گرفتگی را وقتی رطوبت نسبی ۳۸ درصد است، برآورد (پیشگویی) کنید.

۱۹.۱۴ داده‌های زیر به میزان ته‌نشست کلر در یک استخر شنا در زمانهای مختلف، پس از به کار بردن مواد شیمیایی، مربوط می‌شوند.

تعداد ساعتها	ته نشست کلر (برحسب جزء در هر میلیون)
۲	۱٫۸
۴	۱٫۵
۶	۱٫۴
۸	۱٫۱
۱۰	۱٫۱
۱۲	۰٫۹

(الف) یک خط کمترین مربعات ببرازایند که بتوانیم از روی آن ته‌نشست کلر را برحسب تعداد ساعتها پس از به‌کار بردن مواد شیمیایی پیشگویی کنیم.

(ب) معادلهٔ خط کمترین مربعات را به کار برده میزان ته‌نشست کلر در استخر را ۵ ساعت پس از به‌کار بردن مواد شیمیایی برآورد کنید.

۲۰.۱۴ از روش کدگذاری تمرین ۱۵.۱۴ استفاده کرده هر دو قسمت تمرین ۱۶.۱۴ را مجدداً حل کنید.

۲۱.۱۴ از روش کدگذاری تمرین ۱۵.۱۴ استفاده کرده هر دو قسمت تمرین ۱۹.۱۴ را مجدداً حل کنید.

۲۲.۱۴ درآمد ناخالص شرکتی طی پنج سال پس از تأسیس آن عبارت از ۱٫۴، ۱٫۲، ۲٫۶، ۳٫۵، و ۳٫۷ میلیون دلار بوده است. از روش کدگذاری تمرین ۱۵.۱۴ استفاده کرده خط کمترین مربعات را ببرازانید، با فرض اینکه روند به همین ترتیب ادامه یابد، درآمد ناخالص حاصل از فروش را طی سال ششم فعالیت شرکت، پیشگویی کنید.

۲۳.۱۴ اگر مجموعه‌ای از داده‌های زوج شده دلالت بر آن کند که معادلهٔ رگرسیون به شکل $\mu_{Y|x} = \alpha \cdot \beta^x$ است، رسم بر آن است که α و β را با برازاندن خط

$$\log \hat{y} = \log \hat{\alpha} + x \cdot \log \hat{\beta}$$

بر نقاط $\{(x_i, \log y_i); i = ۱, ۲, \ldots, n\}$، بنابر روش کمترین مربعات، برآورد کنند. از این تکنیک استفاده کرده یک منحنی نمایی به شکل $\hat{y} = \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}^x$ بر داده‌های زیر، که مربوط به رشد قلمه‌های کاکتوس تحت شرایط محیطی کنترل شده هستند، برازش دهید.

تعداد هفته‌های بعد از قلمه زدن x	ارتفاع (اینچ) y
۱	۲٫۰
۲	۲٫۴
۴	۵٫۱
۵	۷٫۳
۶	۹٫۴
۸	۱۸٫۳

۲۴.۱۴ اگر مجموعه‌ای از داده‌ها دلالت بر آن کند که معادلهٔ رگرسیون به شکل $\mu_{Y|x} = \alpha \cdot x^{\beta}$ است، رسم بر آن است که α و β را، با برازاندن خط

$$\log \hat{y} = \log \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot \log x$$

بر نقاط $\{(\log x_i, \log y_i); i = ۱, ۲, \ldots, n\}$، به روش کمترین مربعات برآورد کنند.

(الف) از این روش استفاده کرده، یک تابع توانی به شکل $\hat{y} = \hat{\alpha} \cdot x^{\hat{\beta}}$ را بر داده‌های زیر که مربوط به بهای واحد تولید یک قطعهٔ الکترونیکی معین و تعداد واحدهای تولید شده هستند برازش دهید.

تعداد محصولات در هر نوبت تولید x	بهای واحد y
۵۰	۱۰۸ دلار
۱۰۰	۵۳ دلار
۲۵۰	۲۴ دلار
۵۰۰	۹ دلار
۱۰۰۰	۵ دلار

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده بهای واحد را برای یک نوبت تولید متشکل از ۳۰۰ قطعه برآورد کنید.

۴.۱۴ تحلیل رگرسیونی نرمال

وقتی مجموعه‌ای از داده‌های زوج شدهٔ $\{(x_i, y_i); i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ را طبق **تحلیل رگرسیونی**، تحلیل می‌کنیم، فرض می‌کنیم که x_iها ثابت‌اند در حالی که y_iها مقادیر متناظر متغیرهای تصادفی مستقل Y_i هستند. این موضوع به‌وضوح با **تحلیل همبستگی** که در بخش ۵.۱۴ دنبال می‌کنیم و در آن x_i و y_i مقادیر متناظر متغیرهای تصادفی X_i و Y_i هستند، تفاوت دارد. مثلاً اگر

بخواهیم داده‌های مربوط به سال و قیمت اتومبیلهای دست دوم را تحلیل کنیم و سالها را به‌عنوان ثابتهای معلوم و قیمتها را به عنوان مقادیر متغیر تصادفی بگیریم، یک مسألهٔ تحلیل رگرسیونی خواهیم داشت. از طرف دیگر، اگر بخواهیم داده‌های مربوط به قد و وزن حیوانات معینی را تحلیل و قد و وزن را به‌عنوان متغیر تصادفی تلقی کنیم، یک مسألهٔ تحلیل همبستگی خواهیم داشت.

این بخش به برخی از مسائل اساسی **تحلیل رگرسیونی نرمال** اختصاص دارد که در آن فرض می‌شود که به‌ازای هر x_i ثابت، چگالی شرطی متغیرهای تصادفی متناظر Y_i، چگالی نرمال

$$w(y_i|x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\frac{y_i-(\alpha+\beta x_i)}{\sigma}]^2}, \qquad -\infty < y_i < \infty$$

است که در آن α، β، و σ به‌ازای هر i، یکی هستند. با مفروض بودن یک نمونهٔ تصادفی از چنین داده‌های زوج شده، تحلیل رگرسیونی نرمال عمدتاً به برآورد σ، و ضرایب رگرسیون α و β، به آزمون فرضهایی دربارهٔ این سه پارامتر، و به پیشگوییهایی برمبنای معادلهٔ رگرسیون برآورده شدهٔ $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$، که در آن $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ برآوردهای α و β هستند، می‌پردازد.

برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α و β، و σ، از تابع درستنمایی (یا لگاریتم آن، که ساده‌تر است) نسبت به α، β، و σ، مشتق می‌گیریم، عبارتهای حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم، و سپس دستگاه معادلات حاصل را حل می‌کنیم. بنابراین با مشقگیری جزئی از

$$\ln L = -n \cdot \ln\sigma - \frac{n}{2} \cdot \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}[y_i - (\alpha + \beta x_i)]^2$$

نسبت به α، β، و σ، و برابر صفر گذاشتن عبارتهای حاصل، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}[y_i - (\alpha + \beta x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - (\alpha + \beta x_i)] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \cdot \sum_{i=1}^{n}[y_i - (\alpha + \beta x_i)]^2 = 0$$

چون دو معادلهٔ اوّل، با دو معادلهٔ نرمال صفحات ۴۸۴، ۴۸۵ معادل‌اند، برآوردهای درستنمایی ماکسیمم α و β با برآوردهای کمترین مربعات قضیهٔ ۲.۱۴ یکسان‌اند. همچنین اگر این برآوردهای α و β را در معادله‌ای که از صفر گذاشتن $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}$ حاصل می‌شود، قرار دهیم بی‌درنگ نتیجه می‌شود که برآورد درستنمایی ماکسیمم σ عبارت است از

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}[y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)]^2}$$

می‌توان این عبارت را، هم‌چنان که تحقیق درستی آن در تمرین ۲۵.۱۴ از خواننده خواسته شده است، به‌صورت زیر نیز نوشت.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}(S_{yy} - \beta \cdot \hat{S}_{xy})}$$

حال بعد از به‌دست آوردن برآوردکننده‌های درستنمایی ماکسیمم ضرایب رگرسیونی، به‌بررسی موارد استفادهٔ آنها در آزمون فرضهایی دربارهٔ α و β و در ساختن فاصله‌های اطمینان برای این پارامترها می‌پردازیم. چون مسائل راجع به β معمولاً مورد توجه بیشتری هستند تا مسائل راجع به α (β شیب خط رگرسیون است در حالی که α، صرفاً عرض از مبدأست؛ همچنین، فرض صفر $\beta = 0$ معادل است با فرض صفر $\rho = 0$) در اینجا بخشی از نظریه نمونه‌گیری مرتبط با $\hat{\text{B}}$ را، که در آن B حرف بزرگ یونانی بتاست، مورد بحث قرار می‌دهیم. به نظریه متناظر مرتبط با $\hat{\text{A}}$، که در آن A حرف بزرگ یونانی آلفاست، در تمرینهای ۲۸.۱۴ و ۳۰.۱۴ پرداخته خواهد شد.

برای مطالعهٔ نظریهٔ نمونه‌گیری $\hat{\text{B}}$، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\hat{\text{B}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{S_{xx}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\right) Y_i\end{aligned}$$

که می‌بینیم ترکیب خطی n متغیر تصادفی مستقل نرمال Y_i است. از تمرین ۵۸.۷ نتیجه می‌شود که خود $\hat{\text{B}}$ دارای توزیع نرمال با میانگین

$$\begin{aligned}E(\hat{\text{B}}) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\right] \cdot E(Y_i|x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\right](\alpha + \beta x_i) = \beta\end{aligned}$$

و واریانس

$$\begin{aligned}\text{var}(\hat{\text{B}}) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\right]^2 \cdot \text{var}(Y_i|x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x_i - \overline{x}}{S_{xx}}\right]^2 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\end{aligned}$$

است.

برای به کاربردن این نظریه در ساختن فاصله‌های اطمینان برای β یا آزمون فرضهایی دربارهٔ β، از قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۱۴ تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی نرمال، $\frac{n\hat{\sigma}^۲}{\sigma^۲}$ مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع خی‌دو با $n-۲$ درجهٔ آزادی است. به‌علاوه این متغیر تصادفی و $\hat{\mathrm{B}}$ مستقل‌اند.

مرجعی برای برهان این قضیه در پایان فصل داده شده است.

با استفاده از این قضیه و نتیجهٔ ثابت شدهٔ قبلی که $\hat{\mathrm{B}}$ دارای توزیع نرمال با میانگین β و واریانس $\frac{\sigma^۲}{S_{xx}}$ است، تعریف توزیع t، در بخش ۵.۸ به این نتیجه منجر می‌شود که

قضیهٔ ۴.۱۴ تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی نرمال

$$t=\frac{\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}}{\sqrt{\frac{n\hat{\sigma}^۲}{\sigma^۲}/(n-۲)}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}}\sqrt{\frac{(n-۲)S_{xx}}{n}}$$

مقداری از یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع t با $n-۲$ درجه آزادی است.

برمبنای این آماره، اینک فرضی را دربارهٔ ضریب رگرسیون نرمال آزمون می‌کنیم.

مثال ۵.۱۴

با رجوع به داده‌های صفحهٔ ۴۸۳ مربوط به مدت زمانی که ۱۰ نفر برای امتحانی مطالعه کرده و نمراتی که گرفته‌اند، فرض صفر $\beta=۳$ را در برابر فرض مقابل $\beta>۳$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

حل. ۱.

$$H_۰:\beta=۳$$
$$H_۱:\beta>۳$$
$$\alpha=۰٫۰۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t\geq ۲٫۸۹۶$، که در آن t مطابق قضیهٔ ۴.۱۴ تعیین می‌شود و ۲٫۸۹۶ مقدار $t_{۰٫۰۱,۸}$ است که از جدول IV به‌دست آمده است.

۳. با محاسبهٔ $\sum y^۲=۳۶۵۶۲$ از روی داده‌های اصلی و رونویسی سایر مقادیر از صفحهٔ ۴۸۷، مقادیر

$$S_{yy}=۳۶۵۶۲-\frac{۱}{۱۰}(۵۶۴)^۲=۴۷۵۲٫۴$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{۱}{۱۰}[۴۷۵۲٫۴ - (۳٫۴۷۱)(۱۳۰۵)]} = ۴٫۷۲۰$$

را به‌دست می‌آوریم به‌طوری که

$$t = \frac{۳٫۴۷۱ - ۳}{۴٫۷۲۰}\sqrt{\frac{۸٫۳۷۶}{۱۰}} = ۱٫۷۳$$

۴. چون $t = ۱٫۷۳$ کمتر از ۲٫۸۹۶ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ یعنی نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که به‌طور متوسط یک ساعت مطالعهٔ بیشتر، نمرهٔ امتحانی را بیش از ۳ نمره افزایش خواهد داد. ▲

با فرض اینکه $\widehat{\Sigma}$ متغیری تصادفی باشد که مقدار آن با $\hat{\sigma}$ نشان داده می‌شود، بنابر قضیهٔ ۴.۱۴ داریم

$$P\left(-t_{\alpha/۲,n-۲} < \frac{\hat{B}-\beta}{\widehat{\Sigma}}\sqrt{\frac{(n-۲)S_{xx}}{n}} < t_{\alpha/۲,n-۲}\right) = ۱ - \alpha$$

با نوشتن این تساوی به‌صورت

$$P\left[\hat{\mathrm{B}} - t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\widehat{\Sigma}\sqrt{\tfrac{n}{(n-۲)S_{xx}}} < \beta < \hat{\mathrm{B}} + t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\widehat{\Sigma}\sqrt{\tfrac{n}{(n-۲)S_{xx}}}\right] = ۱ - \alpha$$

به فرمول فاصلهٔ اطمینان زیر می‌رسیم.

قضیهٔ ۵.۱۴ تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی نرمال،

$$\hat{\beta} - t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\hat{\sigma}\sqrt{\frac{n}{(n-۲)S_{xx}}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\hat{\sigma}\sqrt{\frac{n}{(n-۲)S_{xx}}}$$

یک فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰\%$ برای پارامتر β است.

مثال ۶.۱۴

با مراجعه به داده‌های نمرات امتحانی و تعداد ساعات مطالعه در مثال ۵.۱۴، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای β بسازید.

حل. با رونویسی مقادیر مختلف از صفحه‌های ۴۸۷ و ۴۹۷ و جایگذاری آنها همراه با $t_{۰٫۰۲۵,۸} = ۲٫۳۰۶$ در فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۵.۱۴، فاصلهٔ

$$۳٫۴۷۱-(۲٫۳۰۶)(۴٫۷۲۰)\sqrt{\frac{۱۰}{۸(۳۷۶)}}<\beta<۳٫۴۷۱+(۲٫۳۰۶)(۴٫۷۲۰)\sqrt{\frac{۱۰}{۸(۳۷۶)}}$$

یا

$$۲٫۸۴ < \beta < ۴٫۱۰$$

را به‌دست می‌آوریم. ▲

چون اغلب مسائل رگرسیونی پیچیدهٔ واقعی، مستلزم محاسبات نسبتاً گسترده‌ای هستند، امروزه این محاسبات عملاً همواره با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری مناسبی انجام می‌شوند. یک خروجی چاپی برای مثال بالا که به این طریق به‌دست آمده است، در شکل ۴.۱۴ نشان داده شده است؛ به‌طوری که دیده می‌شود، این خروجی نه تنها مقادیر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را در ستون با عنوان "COEFFICIENT" در اختیار می‌گذارد، بلکه برآوردهای انحراف معیارهای توزیعهای نمونه‌گیری $\hat{\text{A}}$ و $\hat{\text{B}}$ را در ستون با عنوان "ST.DEV.of COEF" فراهم می‌کند. اگر از این خروجی چاپی در مثال ۵.۱۴ استفاده کرده بودیم، می‌توانستیم مقدار آمارهٔ t را مستقیماً به‌صورت

$$t = \frac{۳٫۴۷۱ - ۳}{۰٫۲۷۲۳} = ۱٫۷۳$$

و در مثال ۶.۱۴ می‌توانستیم حدود اطمینان را به‌صورت $۳٫۴۷۱ \pm (۲٫۳۰۶)(۰٫۲۷۲۳)$ بنویسیم.

```
MTB  > NAME C1 = 'X'
MTB  > NAME C2 = 'Y'
MTB  > SET C1
DATA > 4  9  10  14  4  7  12  22  1  17
MTB  > SET C2
DATA > 31  58  65  73  37  44  60  91  21  84
MTB  > REGR C2 1 C1

 THE REGRESSION EQUATION IS
 Y = 21.7 + 3.47 X

                              ST. DEV.     T-RATIO =
 COLUMN       COEFFICIENT     OF COEF.     COEF/S.D.
                   21.693        3.194          6.79
 X                 3.4707       0.2723         12.74
```

شکل ۴.۱۴ خروجی چاپی برای مثالهای ۴.۱۴، ۵.۱۴، و ۶.۱۴

تمرینها

۲۵.۱۴ با استفاده از این حقیقت که $\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$ و $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$، نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)]^2 = S_{yy} - \hat{\beta}S_{xy}$$

۲۶.۱۴ نشان دهید که

(الف) $\widehat{\sum}^2$، متغیر تصادفی نظیر $\hat{\sigma}^2$، برآورد کنندهٔ نااریب σ^2 نیست؛

(ب) $S_e^2 = \frac{n \cdot \widehat{\sum}^2}{n-2}$ یک برآوردکنندهٔ نااریب σ^2 است.

کمیت s_e را اغلب **خطای معیار برآورد** می‌نامند.

۲۷.۱۴ با استفاده از s_e (تمرین ۲۶.۱۴ را ببینید) به‌جای $\hat{\sigma}$،

(الف) عبارت مربوط به t در قضیهٔ ۴.۱۴؛

(ب) فرمول فاصلهٔ اطمینان قضیهٔ ۵.۱۴؛

را بازنویسی کنید.

۲۸.۱۴ تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی نرمال، نشان دهید که

(الف) برآورد کمترین مربعات α را در قضیهٔ ۲.۱۴ می‌توان به شکل

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{S_{xx} + n\overline{x}^2 - n\overline{x}x_i}{nS_{xx}}\right]y_i$$

نوشت.

(ب) $\hat{A}$ دارای توزیع نرمالی است با

$$E(\hat{A}) = \alpha, \qquad \mathrm{var}(\hat{\mathrm{A}}) = \frac{(S_{xx} + n\overline{x}^2)\sigma^2}{nS_{xx}}$$

۲۹.۱۴ از قضیهٔ ۱۵.۴ استفاده کرده نشان دهید که

$$\mathrm{cov}(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}) = -\frac{\overline{x}}{S_{xx}} \cdot \sigma^2$$

۳۰.۱۴ از نتیجهٔ قسمت (ب) تمرین ۲۸.۱۴ استفاده کرده نشان دهید که

$$z = \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)\sqrt{nS_{xx}}}{\sigma\sqrt{S_{xx} + n\overline{x}^2}}$$

مقدار یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد است. همچنین، با استفاده از قسمت اول قضیهٔ ۳.۱۴ و این واقعیت که $\hat{\mathrm{A}}$ و $\frac{n\widehat{\sum}^2}{\sigma^2}$ مستقل‌اند، نشان دهید که

$$t = \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)\sqrt{(n-2)S_{xx}}}{\hat{\sigma}\sqrt{S_{xx} + n\overline{x}^2}}$$

مقدار یک متغیر تصادفی t با $n - ۲$ درجهٔ آزادی است.

۳۱.۱۴ از نتایج تمرینهای ۲۸.۱۴ و ۲۹.۱۴ و این واقعیت که $E(\hat{\mathrm{B}}) = \beta$ و $\mathrm{var}(\hat{\mathrm{B}}) = \frac{\sigma^۲}{S_{xx}}$ استفاده کرده نشان دهید که $\hat{Y}_۰ = \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}x_۰$ یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین

$$\alpha + \beta x_۰ = \mu_{Y|x_۰}$$

و واریانس

$$\sigma^۲ \left[\frac{۱}{n} + \frac{(x_۰ - \overline{x})^۲}{S_{xx}}\right]$$

است. همچنین با استفاده از قسمت اول قضیهٔ ۳.۱۴ و این واقعیت که $\hat{Y}_۰$ و $\frac{n\widehat{\sum}^۲}{\sigma^۲}$ مستقل‌اند، نشان دهید که

$$t = \frac{(\hat{y}_۰ - \mu_{Y|x_۰})\sqrt{n-۲}}{\hat{\sigma}\sqrt{۱ + \frac{n(x_۰ - \overline{x})^۲}{S_{xx}}}}$$

مقداری از یک متغیر تصادفی t با $n - ۲$ درجهٔ آزادی است.

۳۲.۱۴ با حل نامعادلهٔ دوگانهٔ $-t_{\alpha/۲,n-۲} < t < t_{\alpha/۲,n-۲}$ که در آن t در تمرین ۳۱.۱۴ داده شده است، یک فاصلهٔ اطمینان $(۱-\alpha)۱۰۰٪$ برای $\mu_{Y|x_۰}$، میانگین Y در $x = x_۰$ پیدا کنید.

۳۳.۱۴ از نتایج تمرینهای ۲۸.۱۴ و ۲۹.۱۴ و این واقعیت که $E(\hat{\mathrm{B}}) = \beta$ و $\mathrm{var}(\hat{\mathrm{B}}) = \frac{\sigma^۲}{S_{xx}}$ استفاده کرده نشان دهید که $Y_۰ - (\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}x_۰)$ یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس

$$\sigma^۲ \left[۱ + \frac{۱}{n} + \frac{(x_۰ - \overline{x})^۲}{S_{xx}}\right]$$

است که در آن $Y_۰$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\alpha + \beta x_۰$ و واریانس $\sigma^۲$ است؛ یعنی، $Y_۰$ مشاهده‌ای از Y در یک زمان آتی و متناظر با $x = x_۰$ است. همچنین، از قسمت اول قضیهٔ ۳.۱۴ و نیز از این واقعیت که $Y_۰ - (\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}x_۰)$ و $\frac{n\widehat{\sum}^۲}{\sigma^۲}$ مستقل‌اند، استفاده کرده نشان دهید که

$$t = \frac{[y_۰ - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_۰)]\sqrt{n-۲}}{\hat{\sigma}\sqrt{۱ + n + \frac{n(x_۰ - \overline{x})^۲}{S_{xx}}}}$$

مقداری از یک متغیر تصادفی دارای توزیع t با $n - ۲$ درجهٔ آزادی است.

۳۴.۱۴ نامعادلهٔ دوگانهٔ $-t_{\alpha/۲,n-۲} < t < t_{\alpha/۲,n-۲}$ را که در آن t در تمرین ۳۳.۱۴ داده شده است، حل کنید به‌طوری که جملهٔ وسطی $y_۰$ باشد و دو حد را بتوان بدون اطلاع از $y_۰$ محاسبه

کرد. توجه کنید که گرچه نامعادلهٔ دوگانهٔ حاصل را می‌توان نظیر یک فاصلهٔ اطمینان تعبیر کرد، این نامعادله برای برآورد یک پارامتر طرح نشده است؛ بلکه به کمک آن **حدود پیشگویی** برای مشاهده‌ای از Y در آینده که متناظر با مقدار (مفروض یا مشاهده شدهٔ) $x_\circ$ است، به‌دست می‌آیند.

کاربردها

۳۵.۱۴ با مراجعه به تمرین ۱۶.۱۴، فرض صفر $\beta = ۱٫۲۵$ را در برابر فرض مقابل $\beta > ۱٫۲۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۳۶.۱۴ با رجوع به تمرین ۱۸.۱۴، فرض صفر $\beta = ۰٫۳۵۰$ را در برابر فرض مقابل $\beta < ۰٫۳۵۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۳۷.۱۴ جدول زیر مقادیر ارزیابی شده و قیمتهای فروش هشت خانه را نشان می‌دهد که نمونه‌ای تصادفی از همهٔ خانه‌هایی است که اخیراً در یک ناحیهٔ شهری فروخته شده‌اند.

مقدار ارزیابی شده (برحسب هزار دلار)	قیمت فروش (برحسب هزار دلار)
۷۰٫۳	۱۱۴٫۴
۱۰۲٫۰	۱۶۹٫۳
۶۲٫۵	۱۰۶٫۲
۷۴٫۸	۱۲۵٫۰
۵۷٫۹	۹۹٫۸
۸۱٫۶	۱۳۲٫۱
۱۱۰٫۴	۱۷۴٫۲
۸۸٫۰	۱۴۳٫۵

(الف) یک خط کمترین مربعات برازش کنید که ما را قادر سازد تا قیمت فروش خانه‌ای را در آن ناحیهٔ شهری برحسب مقدار ارزیابی شده آن، پیشگویی کنیم.

(ب) فرض صفر $\beta = ۱٫۳۰$ را در برابر فرض مقابل $\beta < ۱٫۳۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۳۸.۱۴ با مراجعه به تمرین ۱۷.۱۴، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای ضریب رگرسیون β بسازید.

۳۹.۱۴ با مراجعه به تمرین ۱۹.۱۴، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای ضریب رگرسیون β بسازید.

۴۰.۱۴ با رجوع به مثال ۴.۱۴، از نظریهٔ تمرین ۳۰.۱۴ استفاده کرده فرض صفر $\alpha = ۲۱٫۵۰$ را در برابر فرض مقابل $\alpha \neq ۲۱٫۵۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۴۱.۱۴ داده‌های زیر هزینه‌های تبلیغاتی (که برحسب درصدی از کل مخارج بیان می‌شوند) و سودهای خالص عملیاتی (که برحسب درصدی از کل سودها بیان می‌شوند) را در نمونه‌ای تصادفی از شش داروخانه نشان می‌دهند.

هزینه‌های تبلیغاتی	سودهای خالص عملیاتی
۱٫۵	۳٫۶
۱٫۰	۲٫۸
۲٫۸	۵٫۴
۰٫۴	۱٫۹
۱٫۳	۲٫۹
۲٫۰	۴٫۳

(الف) یک خط کمترین مربعات ببرازانید که ما را به پیشگویی سودهای خالص عملیاتی برحسب هزینه‌های تبلیغاتی قادر سازد.

(ب) فرض صفر $\alpha = ۰٫۸$ را در برابر فرض مقابل $\alpha > ۰٫۸$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۴۲.۱۴ با مرجعه به تمرین ۱۶.۱۴، از نظریهٔ تمرین ۳۰.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای α بسازید.

۴۳.۱۴ با مراجعه به تمرین ۱۷.۱۴، از نظریهٔ تمرین ۳۰.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای α بسازید.

۴۴.۱۴ از نظریهٔ تمرینهای ۳۲.۱۴ و ۳۴.۱۴ و نیز کمیتهایی که قبلاً در مثالهای ۴.۱۴ و ۵.۱۴ محاسبه شده استفاده کرده

(الف) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین نمرات امتحانی افرادی که ۱۴ ساعت برای امتحان مطالعه کرده‌اند؛

(ب) حدود پیشگویی ۹۵٪ برای نمرهٔ امتحانی شخصی که ۱۴ ساعت برای امتحان مطالعه کرده است؛

بسازید.

۴۵.۱۴ از نظریهٔ تمرینهای ۳۲.۱۴ و ۳۴.۱۴، و نیز کمیتهایی که قبلاً در تمرین ۳۵.۱۴ برای داده‌های تمرین ۱۶.۱۴ محاسبه شدند، استفاده کرده،

(الف) یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای تعداد متوسط مرگها در گروهی از ۲۵ موش وقتی دُز ۹ میلیگرم است؛

(ب) حدود پیشگویی تعداد مرگها در گروهی از ۲۵ موش، وقتی دُز ۹ میلیگرم است؛

پیدا کنید.

۵.۱۴ تحلیل همبستگی نرمال

در تحلیل همبستگی نرمال، مجموعه‌ای از داده‌های زوج شدهٔ $\{(x_i, y_i); i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ را تحلیل می‌کنیم که در آن x_iها و y_iها مقادیر متغیرهای تصادفی از یک جامعهٔ نرمال دو متغیره

با پارامترهای μ_1، μ_2، σ_1، σ_2، و ρ هستند. برای برآورد کردن این پارامترها به‌روش درستنمایی ماکسیمم باید تابع درستنمایی

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)$$

را که در آن $f(x_i,\ y_i)$ در تعریف ۸.۶ داده شده ماکسیمم کنیم و برای این منظور باید از L یا $\ln L$ نسبت به μ_1، μ_2، σ_1، σ_2، و ρ مشتق جزئی بگیریم، آنها را برابر صفر قرار دهیم، و سپس دستگاه معادلات حاصل را برحسب این پنج پارامتر حل کنیم. با واگذار کردن جزئیات امر به خواننده، تنها متذکر می‌شویم که وقتی $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}$ و $\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}$ برابر صفر گذاشته می‌شوند، به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)}{\sigma_1^2} + \frac{\rho\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = 0$$

و

$$-\frac{\rho\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)}{\sigma_2^2} = 0$$

با حل این دو معادله برحسب μ_1 و μ_2، نتیجه می‌گیریم که برآوردهای درستنمایی ماکسیمم این دو پارامتر

$$\hat{\mu}_1 = \overline{x}, \qquad \hat{\mu}_2 = \overline{y}$$

یعنی میانگینهای نمونه‌ای مربوط‌اند. بعداً با برابر صفر گذاشتن $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1}$، $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2}$ و $\frac{\partial \ln L}{\partial \rho}$ و گذاشتن $\overline{x}$ و $\overline{y}$ به‌جای μ_1 و μ_2، دستگاه معادلاتی به‌دست می‌آوریم که جواب آن چنین است:

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}, \qquad \hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}{n}}$$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

(مرجعی برای نحوهٔ به‌دست آوردن این برآوردهای درستنمایی ماکسیمم در پایان فصل داده شده است.) جالب توجه است که برآوردهای ماکسیمم درستنمایی σ_1 و σ_2 با برآوردهای حاصل در صفحهٔ ۳۷۱ برای انحراف معیار توزیع نرمال یک متغیره یکی هستند؛ اختلاف آنها با انحراف معیارهای نمونه‌ای مربوطهٔ s_1 و s_2 تنها در عامل $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ است.

برآورد $\hat{\rho}$ را، که **ضریب همبستگی نمونه‌ای** نامیده می‌شود، معمولاً با حرف r نشان می‌دهند و محاسبهٔ آن با استفاده از فرمول بدیل ولی معادل زیر ساده‌تر است.

قضیهٔ ۶.۱۴ اگر $\{(x_i, y_i); i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ مقادیر یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای دو متغیره باشند، آنگاه

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

چون ρ شدت بستگی خطی بین X و Y را اندازه می‌گیرد، مسائل متعددی وجود دارند که در آنها برآورد ρ و آزمونهایی دربارهٔ ρ حائز اهمیت خاصی هستند. وقتی $\rho = ۰$، دو متغیر تصادفی ناهمبسته‌اند، و همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، در مورد توزیع نرمال دو متغیره، این بدان معنی است که آنها مستقل از هم نیز هستند. وقتی ρ برابر $+۱$ یا -۱ باشد، از رابطهٔ

$$\sigma^۲_{Y|x} = \sigma^۲ = \sigma^۲_۲(۱ - \rho^۲)$$

که در قضیهٔ ۹.۶ ثابت شد، نتیجه می‌شود که $\sigma = ۰$، و این بدان معنی است که همبستگی خطی کاملی بین X و Y موجود است. با استفاده از خاصیت ناوردایی برآورد کننده‌های درستنمایی ماکسیمم، می‌توانیم بنویسیم

$$\hat{\sigma}^۲ = \hat{\sigma}^۲_۲(۱ - r^۲)$$

که نه تنها روش بدیلی برای پیدا کردن $\hat{\sigma}^۲$ در اختیار ما می‌گذارد، بلکه برای پیوند مفاهیم رگرسیون و همبستگی به‌کار می‌آید. از این فرمول برای $\hat{\sigma}^۲$، روشن است که وقتی $\hat{\sigma}^۲ = ۰$، یعنی، وقتی مجموعهٔ نقاط داده‌های $\{(x_i, y_i); i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ بر روی یک خط مستقیم واقع می‌شوند، آنگاه r، بسته به اینکه شیب خط روبه بالا یا روبه پایین باشد، برابر $+۱$ یا -۱ خواهد شد. برای تفسیر مقادیر r بین ۰ و $+۱$ یا ۰ و -۱، معادلهٔ قبلی را نسبت به $r^۲$ حل کرده نتیجه را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم، و به‌دست می‌آوریم

$$۱۰۰r^۲ = \frac{\hat{\sigma}^۲_۲ - \hat{\sigma}^۲}{\hat{\sigma}^۲_۲} \cdot ۱۰۰$$

که در آن $\hat{\sigma}^۲_۲$ تغییر کل yها و $\hat{\sigma}^۲$ تغییر شرطی yها را به‌ازای مقادیر ثابت x اندازه می‌گیرند، و بنابراین $\hat{\sigma}^۲_۲ - \hat{\sigma}^۲$ آن قسمت از تغییر کل yها را که در اثر بستگی به x قابل توضیح است، اندازه می‌گیرد. بنابراین $۱۰۰r^۲$ درصد تغییر کلی از yهاست که در اثر بستگی به x قابل توضیح است. مثلاً، وقتی $r = ۰٫۵$، در این صورت ۲۵ درصد از تغییر yهاست که در اثر بستگی به x قابل توضیح است، وقتی $r = ۰٫۷$، در این صورت ۴۹ درصد از تغییر yها در اثر بستگی به x قابل

توضیح است و بنابراین می‌توانیم بگوییم که یک همبستگی $r = ۰٫۷$ تقریباً «دو برابر قویتر» از یک همبستگی $r = ۰٫۵$ است. به همین نحو می‌توانیم بگوییم که ضریب همبستگی $r = ۰٫۶$ «نه برابر قویتر» از یک همبستگی $r = ۰٫۲$ است.

مثال ۷.۱۴

فرض کنید که بخواهیم برمبنای داده‌های زیر تعیین کنیم که آیا وابستگیی بین زمان لازم برحسب دقیقه، برای تکمیل یک فرم معین توسط یک منشی در صبح یا عصر وجود دارد یا نه

صبح x	عصر y
۸٫۲	۸٫۷
۹٫۶	۹٫۶
۷٫۰	۶٫۹
۹٫۴	۸٫۵
۱۰٫۹	۱۱٫۳
۷٫۱	۷٫۶
۹٫۰	۹٫۲
۶٫۶	۶٫۳
۸٫۴	۸٫۴
۱۰٫۵	۱۲٫۳

ضریب همبستگی نمونه‌ای را محاسبه و آن را تعبیر کنید.

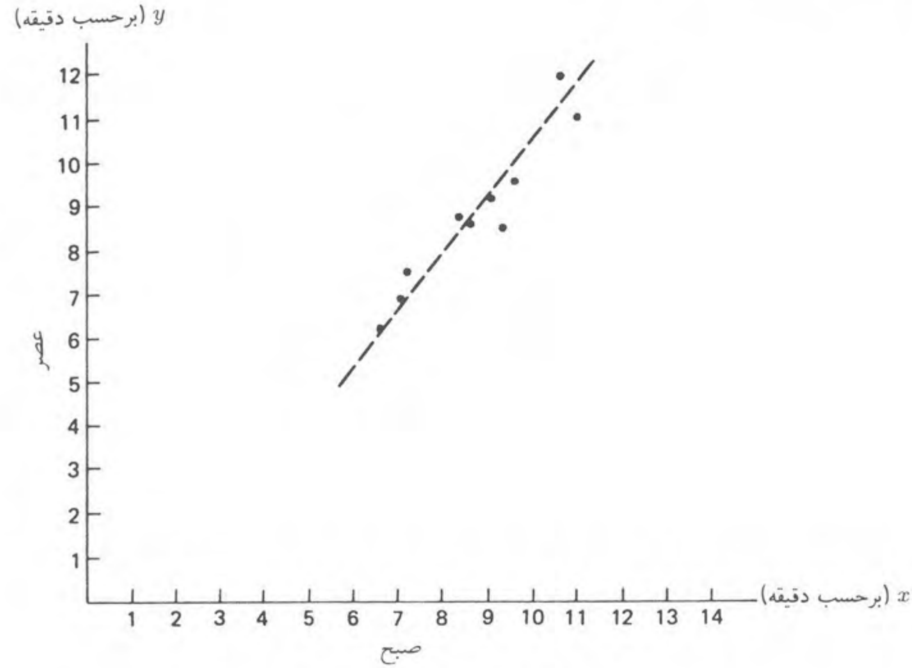
حل. از داده‌ها به‌دست می‌آوریم $n = ۱۰$، $\sum x = ۸۶٫۷$، $\sum x^۲ = ۷۷۱٫۳۵$، $\sum y = ۸۸٫۸$، $\sum y^۲ = ۸۱۹٫۳۴$، و $\sum xy = ۷۹۲٫۹۲$، به‌طوری که

$$S_{xx} = ۷۷۱٫۳۵ - \frac{۱}{۱۰}(۸۶٫۷)^۲ = ۱۹٫۶۶۱$$
$$S_{yy} = ۸۱۹٫۳۴ - \frac{۱}{۱۰}(۸۸٫۸)^۲ = ۳۰٫۷۹۶$$
$$S_{xy} = ۷۹۲٫۹۲ - \frac{۱}{۱۰}(۸۶٫۷)(۸۸٫۸) = ۲۳٫۰۲۴$$

و

$$r = \frac{۲۳٫۰۲۴}{\sqrt{(۱۹٫۶۶۱)(۳۰٫۷۹۶)}} = ۰٫۹۳۶$$

این نتیجه دلالت برآن می‌کند که وابستگی مثبتی بین زمان لازم برای انجام وظیفهٔ معینی توسط یک منشی در صبح و در عصر وجود دارد، و این از **پراکنش‌نگار** شکل ۵.۱۴ نیز آشکار است.



شکل۵.۱۴ پراکنش‌نگار مثال ۷.۱۴

چون $۱۰۰r^{۲} = ۱۰۰(۰{,}۹۳۶)^{۲} = ۸۷{,}۶$، می‌توانیم بگوییم که تقریباً ۸۸٪ از تغییر yها در اثر بستگی به x قابل توضیح است. ▲

چون توزیع نمونه‌گیری R برای نمونه‌های تصادفیی که از جامعه‌های نرمال دو متغیره استخراج می‌شوند نسبتاً پیچیده است، رسم برآن است که فاصله‌های اطمینان برای ρ و آزمونهای مربوط به ρ را برمبنای

$$\frac{۱}{۲} \cdot \ln \frac{۱ + R}{۱ - R}$$

قرار می‌دهند که توزیع آن تقریباً نرمال است با میانگین $\frac{۱}{۲} \cdot \ln \frac{۱+\rho}{۱-\rho}$ و واریانس $\frac{۱}{n-۳}$. بنابراین

$$z = \frac{\frac{۱}{۲} \cdot \ln \frac{۱+r}{۱-r} - \frac{۱}{۲} \cdot \ln \frac{۱+\rho}{۱-\rho}}{\frac{۱}{\sqrt{n-۳}}}$$
$$= \frac{\sqrt{n-۳}}{۲} \cdot \ln \frac{(۱+r)(۱-\rho)}{(۱-r)(۱+\rho)}$$

را می‌توان به‌عنوان مقداری از یک متغیر تصادفی که تقریباً دارای توزیع نرمال استاندارد است، تلقی کرد. با استفاده از این تقریب، می‌توانیم فرض صفر $\rho = \rho_{\circ}$ را در برابر فرض مقابل مناسبی که نمونه‌ای از آن در مثال ۸.۱۴ زیر داده شده است، آزمون کنیم، یا فاصله‌های اطمینانی برای ρ بنابه روشی که در تمرین ۴۹.۱۴ پیشنهاد شده است، محاسبه کنیم.

مثال ۸.۱۴

با مراجعه به مثال ۷.۱۴، فرض صفر $\rho = \circ$ را در برابر فرض مقابل $\rho \neq \circ$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_{\circ} : \rho = \circ$$
$$H_{۱} : \rho \neq \circ$$
$$\alpha = \circ{,}\circ۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲{,}۵۷۵$ یا $z \geq ۲{,}۵۷۵$، که در آن

$$z = \frac{\sqrt{n-۳}}{۲} \cdot \ln \frac{(۱+r)}{(۱-r)}$$

۳. با قرار دادن $n = ۱\circ$ و $r = \circ{,}۹۳۶$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{\sqrt{۷}}{۲} \cdot \ln \frac{۱{,}۹۳۶}{\circ{,}\circ۶۴} = ۴{,}۵$$

۴. چون $z = ۴{,}۵$ بیشتر از ۲٫۵۷۵، فرض صفر را باید رد کرد، نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ای بین زمانی که یک منشی در موقع صبح صرف کامل کردن یک فرم می‌کند با زمانی که عصر صرف این کار می‌کند، وجود دارد. ▲

تمرینها

۴۶.۱۴ تحقیق کنید که فرمول مربوط به t از قضیهٔ ۴.۱۴ را می‌توان به‌صورت

$$t = \left(۱ - \frac{\beta}{\hat{\beta}}\right) \frac{r\sqrt{n-۲}}{\sqrt{۱-r^{۲}}}$$

نوشت.

۴۷.۱۴ از فرمول مربوط به t در تمرین قبل استفاده کرده حدود اطمینان $(۱-\alpha)۱\circ\circ\%$ زیر برای β را به‌دست آورید.

$$\hat{\beta}\left[۱ \pm t_{\alpha/۲, n-۲} \cdot \frac{\sqrt{۱-r^{۲}}}{r\sqrt{n-۲}}\right]$$

۴۸.۱۴ از فرمول مربوط به t در تمرین ۴۶.۱۴ استفاده کرده نشان دهید که اگر فرضهای پس‌زمینه‌ای تحلیل رگرسیونی نرمال، برآورده شوند و $\beta = 0$، آنگاه R^2 دارای توزیع بتایی با میانگین $\frac{1}{n-1}$ است.

۴۹.۱۴ با حل نامعادله‌های دوگانه $-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}$ (که در آن z در فرمول صفحهٔ ۵۰۶ داده شده است) برحسب β، یک فرمول فاصلهٔ اطمینان $(1-\alpha)100\%$ برای ρ استخراج کنید.

۵۰.۱۴ در نمونه‌ای تصادفی از n زوج از مقادیر X و Y، (x_i, y_i) به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, r$ و $j = 1, 2, \ldots, c$، f_{ij} بار رخ می‌دهد. با فرض اینکه $f_{i.}$ تعداد زوجهایی را نشان دهد که در آن X مقدار x_i و $f_{.j}$ تعداد زوجهایی را نشان دهد که در آن Y مقدار y_i را اختیار می‌کند، فرمولی برای ضریب همبستگی بنویسید.

کاربردها

۵۱.۱۴ یک امتحان از وضع پیشرفت تحصیلی را قابل اعتماد خوانند هرگاه دانش‌آموزی که چندبار آن را بگذراند در همهٔ آنها نمره‌های بالا (یا پایین) بگیرد. راهی برای بررسی قابل اعتماد بودن یک امتحان، تقسیم آن به دو بخش، معمولاً تقسیم مسائل به شماره‌های زوج و به شماره‌های فرد، و بررسی همبستگی بین نمراتی است که دانش‌آموزان در هر دو نیمه می‌گیرند. مثلاً، داده‌های زیر معرف نمونه‌های x و yی است که ۲۰ دانش‌آموز در مسائل با شمارهٔ زوج و مسائل با شمارهٔ فرد یک امتحان که به منظور سنجش وضع پیشرفت دانش‌آموزان کلاس هشتم در درس علوم طرح شده، به‌دست آورده‌اند.

x	y	x	y
۲۷	۲۹	۳۳	۴۲
۳۶	۴۴	۳۹	۳۱
۴۴	۴۹	۳۸	۳۸
۳۲	۲۷	۲۴	۲۲
۲۷	۳۵	۳۳	۳۴
۴۱	۳۳	۳۲	۳۷
۳۸	۲۹	۳۷	۳۸
۴۴	۴۰	۳۳	۳۵
۳۰	۲۷	۳۴	۳۲
۲۷	۳۸	۳۹	۴۳

r را برای این داده‌ها محاسبه و معنی‌دار بودن آن را آزمون کنید، یعنی فرض صفر $\rho = 0$ را در برابر فرض مقابل $\rho \neq 0$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۵۲.۱۴ با مراجعه به داده‌های تمرین ۵۱.۱۴، از نتیجهٔ تمرین ۴۹.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای ρ بسازید.

۵۳.۱۴ داده‌های زیر به x، مقدار کودی (برحسب پوند) که یک کشاورز به زمین خود می‌دهد، و به y، محصول غلهٔ او (برحسب تن در هر هکتار) مربوط است

x	y	x	y	x	y
۱۱۲	۳۳	۸۸	۲۴	۳۷	۲۷
۹۲	۲۸	۴۴	۱۷	۲۳	۹
۷۲	۳۸	۱۳۲	۳۶	۷۷	۳۲
۶۶	۱۷	۲۳	۱۴	۱۴۲	۳۸
۱۱۲	۳۵	۵۷	۲۵	۳۷	۱۳
۸۸	۳۱	۱۱۱	۴۰	۱۲۷	۲۳
۴۲	۸	۶۹	۲۹	۸۸	۳۱
۱۲۶	۳۷	۱۹	۱۲	۴۸	۳۷
۷۲	۳۲	۱۰۳	۲۷	۶۱	۲۵
۵۲	۲۰	۱۴۱	۴۰	۷۱	۱۴
۲۸	۱۷	۷۷	۲۶	۱۱۳	۲۶

با فرض اینکه داده‌ها را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای از یک جامعهٔ نرمال دو متغیره تلقی کرد، r را محاسبه و معنی‌دار بودن آن را در سطح $\alpha = ۰٫۰۱$ آزمون کنید. همچنین پراکنش‌نگاری برای این زوج داده‌ها رسم و حکم کنید که آیا فرض معقول به‌نظر می‌رسد؟

۵۴.۱۴ با رجوع به تمرین ۵۳.۱۴ از فرمول به‌دست آمده در تمرین ۴۹.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای ρ بسازید.

۵۵.۱۴ از نتیجه تمرین ۴۶.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای β در مورد تعداد ساعات مطالعه و نمره‌های امتحانی در صفحهٔ ۴۸۳ محاسبه و این فاصله را با فاصلهٔ حاصل در مثال ۶.۱۴ مقایسه کنید.

۵۶.۱۴ محاسبهٔ r را می‌توان اغلب با اضافه کردن مقداری ثابت به هر x، اضافه کردن هر مقدار ثابت به y، یا با ضرب کردن هر x یا هر y در عدد مثبت ثابتی ساده‌تر کرد. ضریب همبستگی r برای داده‌های مثال ۷.۱۴ را ابتدا با ضرب هر x و هر y در ۱۰، و سپس تفریق عدد ۷۰ از هر x و ۶۰ از هر y مجدداً محاسبه کنید.

۵۷.۱۴ جدول زیر نحوهٔ توزیع نمرات تاریخ و اقتصاد ۲۵ دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

نمرات اقتصاد \ نمرات تاریخ	۲۱ − ۲۵	۲۶ − ۳۰	۳۱ − ۳۵	۳۶ − ۴۰	۴۱ − ۴۵
۲۱ − ۲۵	۱				
۲۶ − ۳۰		۳	۱		
۳۱ − ۳۵		۲	۵	۲	
۳۶ − ۴۰			۱	۴	۱
۴۱ − ۴۵			۱	۳	
۴۶ − ۵۰					۱

از روش تمرین ۱۴.۵۰ استفاده کرده، سر سطرها را **نمایندهٔ رده‌ها** (نقاط وسط)ی متناظر ۲۳، ۲۸، ۳۳، ۳۸، ۴۳، و ۴۸ و سر ستونها را نماینده‌های رده‌های متناظر ۲۳، ۲۸، ۳۳، ۳۸، و ۴۳، قرار دهید و مقدار r را تعیین کنید. از این مقدار r استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا رابطه‌ای بین نمرات این دو درس موجود است یا خیر.

۱۴.۵۸ تمرین ۱۴.۵۷ را با کدگذاری نماینده‌های رده‌ها نمرات تاریخ با ۲−، ۱−، ۰، ۱، و ۲، و نماینده‌های رده‌های نمرات اقتصاد با ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲، و ۳، مجدداً حل کنید. (از تمرین ۱۴.۵۶ نتیجه می‌شود که این نوع کدگذاری بر مقدار r تأثیری نمی‌گذارد.)

۱۴.۵۹ اگر رسته‌های سطری و نیز رسته‌های ستونی یک جدول $r \times c$ مرتب شوند، می‌توانیم به جای سرسطرها و نیز سرستونها اعداد صحیح متوالی را قرار دهیم و سپس r را به کمک فرمولی که در تمرین ۱۴.۵۵ به‌دست آمد، محاسبه کنیم. از این روش استفاده کرده مثال ۱۳.۱۱ را ، با قرار دادن اعداد ۱−، ۰، و ۱ به‌جای «ضعیف»، «متوسط»، و «عالی»، مجدداً حل کنید.

۱۴.۶۰ با مراجعه به جدول $r \times c$ در صفحهٔ ۴۶۶؛ از روش پیشنهادی تمرین قبل استفاده کرده، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا رابطه‌ای بین بهرهٔ هوشی و نحوهٔ انجام کار وجود دارد یا خیر. در سرسطرها و سرستونها اعداد ۱−، ۰، و ۱ را قرار دهید.

۶.۱۴ رگرسیون خطی چندگانه

گرچه مسائل متعددی موجودند که در آنها می‌توان متغیری را به‌صورتی کاملاً دقیق برحسب متغیری دیگر پیشگویی کرد، به‌نظر موجه می‌آید که در صورت در نظر گرفتن اطلاعات بیشتری که مرتبط با موضوع باشند، پیشگوییها را بتوان اصلاح کرد. مثلاً، باید قادر باشیم که امکان موفقیت در کار معلّمان تازه استخدام را با در نظر گرفتن تعداد سالهای کار پیش از استخدام و شخصیت آنها، علاوه بر تحصیلاتشان، بهتر پیشگویی کنیم. همچنین، باید بتوانیم پیشگوییهای بهتری دربارهٔ میزان استقبال از یک کتاب درسی، با در نظر گرفتن تقاضای بالقوه و میزان رقابت، علاوه بر کیفیت کتاب، به‌عمل آوریم.

گرچه فرمولهای متعددی موجودند که می‌توان از آنها برای بیان روابط رگرسیونی بین بیش از دو متغیر، استفاده کرد (به‌عنوان نمونه، مثال ۱۴.۳ را ببینید)، رایجترین آنها، معادلاتی خطی به شکل زیرند:

$$\mu_{Y|x_1,x_2,\ldots,x_k} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

علت استفاده از این فرمول تا حدی سهولت ریاضی و تاحدی معلول این حقیقت است که روابط بسیاری واقعاً به این شکل‌اند، یا می‌توان آنها را با دقت زیادی با این معادله‌های خطی تقریب کرد.

در معادلهٔ بالا، Y متغیری تصادفی است که می‌خواهیم مقدارهای آن را برحسب مقدارهای معلوم x_1، x_2، $\cdots$، و x_k پیشگویی کنیم، و β_0، β_1، β_2، $\cdots$، و β_k، **ضرایب رگرسیون چندگانه**، عددهای ثابتی‌اند که باید از روی داده‌های مشاهده شده، تعیین شوند.

برای تشریح مطلب، معادلهٔ زیر را در نظر گیرید که در مطالعه‌ای از تقاضا برای انواع گوشت به‌دست آمده است

$$\hat{y} = ۳٫۴۸۹ - ۰٫۰۹۰x_۱ + ۰٫۰۶۴x_۲ + ۰٫۰۱۹x_۳$$

در اینجا $\hat{y}$ برآورد میزان مصرف برحسب پوند گوشت گاو و گوساله‌ای است که کشتار آنها با نظارت دولت انجام پذیرفته، $x_۱$ معرّف قیمت درهم خرده‌فروشی گوشت گوساله برحسب سنت در پوند، $x_۲$ معرّف قیمت درهم خرده‌فروشی گوسفند برحسب سنت در پوند، و $x_۳$ معرّف درآمد برحسب شاخص دستمزدهای معینی است.

مانند بخش ۳.۱۴، که در آن تنها یک متغیر مستقل موجود بود، ضرایب رگرسیون چندگانه معمولاً به کمک روش کمترین مربعات برآورد می‌شوند. برای n نقطهٔ داده‌ای

$$\{(x_{i۱}, x_{i۲}, \cdots, x_{ik}, y_i); \quad i = ۱, ۲, \cdots, n\}$$

برآوردهای روش کمترین مربعات β عبارت‌اند از مقادیر $\hat{\beta}_۰$، $\hat{\beta}_۱$، $\hat{\beta}_۲$، ...،و $\hat{\beta}_k$ که برای آنها کمیت

$$q = \sum_{i=۱}^{n}[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots \hat{\beta}_k x_{ik})]^۲$$

مینیمم می‌شود. در قالب این نمادها، $x_{i۱}$، عبارت است از iامین مقدار متغیر $x_۱$، $x_{i۲}$ عبارت است از iامین مقدار $x_۲$، و قس‌علی‌هذا.

بنابراین، نسبت به βها مشتق جزئی می‌گیریم و با برابر صفر قرار دادن این مشتقهای جزئی، معادله‌های

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}_۰} = \sum_{i=۱}^{n}(-۲)[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})] = ۰$$

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}_۱} = \sum_{i=۱}^{n}(-۲)x_{i۱}[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})] = ۰$$

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}_۲} = \sum_{i=۱}^{n}(-۲)x_{i۲}[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})] = ۰$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\beta}_k} = \sum_{i=۱}^{n}(-۲)x_{ik}[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})] = ۰$$

و سرانجام $k + ۱$ معادلهٔ نرمال زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{lllll}
\sum y = \hat{\beta}_0 \cdot n & + \hat{\beta}_1 \cdot \sum x_1 & + \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_2 & + \dots & + \hat{\beta}_k \cdot \sum x_k \\
\sum x_1 y = \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_1 & + \hat{\beta}_1 \cdot \sum x_1^2 & + \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_1 x_2 & + \cdots & + \hat{\beta}_k \cdot \sum x_1 x_k \\
\sum x_2 y = \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_2 & + \hat{\beta} 1 \cdot \sum x_2 x_1 & + \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_2^2 & + \cdots & + \hat{\beta}_k \cdot \sum x_2 x_k \\
 & \cdots & & & \\
\sum x_k y = \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_k & + \hat{\beta}_1 \cdot \sum x_k x_1 & + \hat{\beta}_2 \cdot \sum x_k x_2 & + \cdots & + \hat{\beta}_k \cdot \sum x_k^2
\end{array}$$

در اینجا نمادها را با نوشتن $\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$ به‌صورت $\sum x_1$، $\sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2}$ به‌صورت $\sum x_1 x_2$ و مانند آن، خلاصه کرده‌ایم.

مثال ۹.۱۴

داده‌های زیر، تعداد اتاق خوابها، تعداد حمامها، و قیمت فروش نمونه‌ای تصادفی از هشت خانهٔ مخصوص سکونت یک خانواده را که اخیراً در یک طرح بزرگ خانه‌سازی به فروش رفته است، نشان می‌دهد.

تعداد اتاق خوابها x_1	تعداد حمامها x_2	قیمت (به‌دلار) y
۳	۲	۷۸۸۰۰
۲	۱	۷۴۳۰۰
۴	۳	۸۳۸۰۰
۲	۱	۷۴۲۰۰
۳	۲	۷۹۷۰۰
۲	۲	۷۴۹۰۰
۵	۳	۸۸۴۰۰
۴	۲	۸۲۹۰۰

از روش کمترین مربعات استفاده کرده معادله‌ای خطی پیدا کنید که ما را در پیشگویی متوسط قیمت فروش خانه‌های تک خانواده‌ای در طرح خانه‌سازی مذکور، برحسب تعداد اتاق خوابها و حمامها قادر سازد.

حل. کمیتهایی که برای جایگذاری در سه معادلهٔ نرمال لازم داریم عبارت‌اند از $n = ۸$، $\sum x_1 = ۲۵$، $\sum x_2 = ۱۶$، $\sum y = ۶۳۷۰۰۰$، $\sum x_1^2 = ۸۷$، $\sum x_1 x_2 = ۵۵$، $\sum x_2^2 = ۳۶$، $\sum x_1 y = ۲۰۳۱۱۰۰$، و $\sum x_2 y = ۱۲۹۷۷۰۰$، و نتیجه می‌گیریم که

$$۶۳۷۰۰۰ = ۸\hat{\beta}_0 + ۲۵\hat{\beta}_1 + ۱۶\hat{\beta}_2$$
$$۲۰۳۱۱۰۰ = ۲۵\hat{\beta}_0 + ۸۷\hat{\beta}_1 + ۵۵\hat{\beta}_2$$
$$۱۲۹۷۷۰۰ = ۱۶\hat{\beta}_0 + ۵۵\hat{\beta}_1 + ۳۶\hat{\beta}_2$$

```
MTB  > SET C1
DATA > 3  2  4  2  3  2  5  4
MTB  > SET C2
DATA > 2  1  3  1  2  2  3  2
MTB  > SET C3
DATA > 78800  74300  83800  74200  79700  74900  88400  82900
MTB  > REGR C3 2 C1 C2

THE REGRESSION EQUATION IS
C3 = 65192 + 4133 C1 + 758 C2

                                     ST. DEV.    T-RATIO =
COLUMN       COEFFICIENT             OF COEF.    COEF/S.D.
                65191.7               418.0       155.96
C1               4133.3               228.6        18.08
C2                758.3               340.5         2.23

S = 370.4
```

شکل۶.۱۴ خروجی چاپی کامپیوتر برای مثال ۹.۱۴

می‌توانیم این معادلات را به‌روش حذف یا با استفاده از دترمینانها حل کنیم، امّا با توجه به اینکه این محاسبات تا اندازه‌ای پرزحمت‌اند، معمولاً چنین کارهایی به عهدهٔ کامپیوتر گذاشته می‌شود. بنابراین، به خروجی چاپی شکل ۶.۱۴ مراجعه می‌کنیم که در ستونی با عنوان "COEFFICIENT" نشان می‌دهد که $\hat{\beta}_۰ = ۶۵۱۹۱٫۷$، $\hat{\beta}_۱ = ۴۱۳۳٫۳$، و $\hat{\beta}_۲ = ۷۵۸٫۳$. پس از گرد کردن، معادلهٔ کمترین مربعات به‌صورت

$$\hat{y} = ۶۵۱۹۲ + ۴۱۳۳x_۱ + ۷۵۸x_۲$$

در می‌آید و این معادله حاکی از آن است که (در طرح خانه‌سازی مذکور و در زمان انجام مطالعه) هر اتاق خواب اضافی به طور متوسط ۴۱۳۳ دلار و هر حمام ۷۵۸ دلار بر قیمت فروش یک خانه می‌افزاید.▲

مثال ۱۰.۱۴

برمبنای نتیجهٔ به‌دست آمده در مثال ۹.۱۴، قیمت فروش یک خانهٔ سه اتاق‌خوابه با دو حمام را در طرح بزرگ خانه‌سازی مذکور، پیشگویی کنید.

حل. با قرار دادن $x_۱ = ۳$ و $x_۲ = ۲$ در معادله‌ای که در بالا به‌دست آمده است، مقدار

$$\begin{aligned}\hat{y} &= ۶۵۱۹۲ + ۴۱۳۳(۳) + ۷۵۸(۲)\\ &= ۷۹۱۰۷\end{aligned}$$

یا تقریب ۷۹۱۰۰ دلار را به‌دست می‌آوریم. ▲

خروجیهای چاپی از نوع خروجی مثال ۶.۱۴ اطلاعاتی را نیز که برای انجام استنباطها دربارهٔ ضرایب رگرسیون چندگانه و قضاوت دربارهٔ برآوردها یا پیشگوییهای مبتنی بر معادله‌های کمترین مربعات لازم‌اند، در اختیار می‌گذارند. این مطلب، نظیر همان کاری است که در بخش ۴.۱۴ ارائه شد، امّا، ما آن را تا بخش ۷.۱۴، که در آنجا کل مسأله رگرسیون خطی چندگانه را با نمادهایی بسیار فشرده‌تر مطالعه خواهیم کرد، به‌عهدهٔ تعویق می‌اندازیم.

۷.۱۴ رگرسیون خطی چندگانه (نمادگذاری ماتریسی)*

مدلی که در رگرسیون خطی چندگانه به کار می‌بریم، به طرز جالبی به پرداختی یکپارچه با نمادهای ماتریسی تن در می‌دهد.این نمادگذاری، بیان نتایج کلی را در شکلی فشرده و استفادهٔ فراوان از بسیاری نتایج نظریهٔ ماتریس را ممکن می‌سازد. هم‌چنان که مرسوم است، ماتریسها را با حروف بزرگ سیاه نشان می‌دهیم.

می‌توانستیم رهیافت ماتریسی را با بیان مجموع مربعات q (که آنها را در بخش پیشین با گرفتن مشتق جزئی نسبت به $\hat{\beta}$ها مینیمم کردیم) در نماد ماتریسی معرفی کنیم و از همانجا پیش رویم، امّا با واگذاری این کار به عهدهٔ خواننده، در تمرین ۶۱.۱۴، کار را با معادله‌های نرمال صفحهٔ ۵۳۱ آغاز می‌کنیم.

برای بیان معادله‌های نرمال در نماد ماتریسی، سه ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} ۱ & x_{۱۱} & x_{۱۲} & \cdots & x_{۱k} \\ ۱ & x_{۲۱} & x_{۲۲} & \cdots & x_{۲k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ۱ & x_{n۱} & x_{n۲} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{۰} \\ \hat{\beta}_{۱} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} \quad و \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{۱} \\ y_{۲} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

اولین ماتریس، $\mathbf{X}$، یک ماتریس $n \times (k + ۱)$ اساساً مرکب از مقادیر مفروض xها، به انضمام ستون ۱هاست تا جمله‌های ثابت نیز منظور شده باشند. $\mathbf{Y}$ یک ماتریس $n \times ۱$ (یا بردار ستونی) مرکب از مقدارهای مشاهده‌شده yهاست، و $\mathbf{B}$ یک ماتریس $(k + ۱) \times ۱$ (یا بردار ستونی) مرکب از برآوردهای کمترین مربعات ضرایب رگرسیون است.

* در این بخش فرض می‌شود که خواننده با مطالبی که معمولاً در نخستین درس جبر ماتریسی ارائه می‌شود، آشناست. چون نماد ماتریسی در جای دیگری از این کتاب به‌کار نمی‌رود، این بخش را می‌توان بدون آنکه خللی در تسلسل مطالب ایجاد شود، حذف کرد.

با استفاده از این ماتریسها، اینک می‌توانیم جواب نمادین زیر را برای معادله‌های نرمال صفحهٔ ۵۱۲ بنویسیم.

> **قضیهٔ ۷.۱۴** برآوردهای کمترین مربعات ضرایب رگرسیون چندگانه عبارت‌اند از
>
> $$\mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$
>
> که در آن $\mathbf{X}'$ ترانهادهٔ $\mathbf{X}$ و $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ معکوس $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ است.

برهان. ابتدا $\mathbf{X}'\mathbf{X}$، $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B}$، و $\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ را معین می‌کنیم و نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{X}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \cdots \sum x_k \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 & \cdots \sum x_1 x_k \\ \sum x_2 & \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 & \cdots \sum x_2 x_k \\ & & \cdots & \\ \sum x_k & \sum x_k x_1 & \sum x_k x_2 & \cdots \sum x_k^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \cdot n & +\hat{\beta}_1 \cdot \sum x_1 & +\hat{\beta} \cdot \sum x_2 & +\cdots+\hat{\beta}_k \cdot \sum x_k \\ \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_1 & +\hat{\beta}_1 \cdot \sum x_1^2 & +\hat{\beta}_2 \cdot \sum x_1 x_2 & +\cdots+\hat{\beta}_k \cdot \sum x_1 x_k \\ \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_2 & +\hat{\beta}_1 \cdot \sum x_2 x_1 & +\hat{\beta}_2 \cdot \sum x_2^2 & +\cdots+\hat{\beta}_k \cdot \sum x_2 x_k \\ & & \cdots & \\ \hat{\beta}_0 \cdot \sum x_k & +\hat{\beta}_1 \cdot \sum x_k x_1 & +\hat{\beta}_2 \cdot \sum x_k x_2 & +\cdots+\hat{\beta}_k \cdot \sum x_k^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \\ \cdots \\ \sum x_k y \end{pmatrix}$$

با تشخیص اینکه درایه‌های $\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B}$ عبارتهای مربوط به سمت راست معادله‌های نرمال در صفحهٔ ۵۱۲ هستند و درایه‌های $\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ عبارتهای مربوط به سمت چپ‌اند، می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

با ضرب در $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ از سمت چپ، به‌دست می‌آوریم

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

و سرانجام

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X'X})^{-۱}\mathbf{X'Y}$$

زیرا $\mathbf{X'X}^{-۱}(\mathbf{X'X})$ برابر با $\mathbf{I}$، ماتریس یکهٔ $(k+۱)\times(k+۱)$ است و بنابر تعریف $\mathbf{IB}=\mathbf{B}$.
در اینجا فرض کرده‌ایم که $\mathbf{X'X}$ ناتکین است به‌طوری که معکوس آن موجود است. ■

مثال ۱۱.۱۴

با مراجعه به مثال ۹.۱۴، از قضیهٔ ۷.۱۴ استفاده کرده، برآوردهای کمترین مربعات ضرایب رگرسیون چندگانه را تعیین کنید.

حل. با قرار دادن $\sum x_۱ = ۲۵$، $\sum x_۲ = ۱۶$، $\sum x_۱^۲ = ۸۷$، $\sum x_۱x_۲ = ۵۵$، $\sum x_۲^۲ = ۳۶$، و $n=۸$ از صفحهٔ ۵۱۲ در عبارت مربوط به $\mathbf{X'X}$ در صفحهٔ ۵۱۵، به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{X'X} = \begin{pmatrix} ۸ & ۲۵ & ۱۶ \\ ۲۵ & ۸۷ & ۵۵ \\ ۱۶ & ۵۵ & ۳۶ \end{pmatrix}$$

سپس، معکوس این ماتریس را می‌توان به کمک هر یک از روشهای گوناگون به‌دست آورد؛ با استفاده از روش مبتنی بر هم‌عاملها، در می‌یابیم که

$$(\mathbf{X'X})^{-۱} = \frac{۱}{۸۴}\cdot\begin{pmatrix} ۱۰۷ & -۲۰ & -۱۷ \\ -۲۰ & ۳۲ & -۴۰ \\ -۱۷ & -۴۰ & ۷۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ۸۴ عبارت از مقدار $|\mathbf{X'X}|$، دترمینان $\mathbf{X'X}$ است.

با قرار دادن $\sum y = ۶۳۷۰۰۰$، $\sum x_۱y = ۲۰۳۱۱۰۰$، و $\sum x_۲y = ۱۲۹۷۷۰۰$ از صفحهٔ ۵۱۲ در عبارت مربوط به $\mathbf{X'X}$ در صفحهٔ ۵۱۵، نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{X'Y} = \begin{pmatrix} ۶۳۷۰۰۰ \\ ۲۰۳۱۱۰۰ \\ ۱۲۹۷۷۰۰ \end{pmatrix}$$

و سرانجام

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-۱}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \frac{۱}{۸۴}\cdot\begin{pmatrix} ۱۰۷ & -۲۰ & -۱۷ \\ -۲۰ & ۳۲ & -۴۰ \\ -۱۷ & -۴۰ & ۷۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۶۳۷۰۰۰ \\ ۲۰۳۱۱۰۰ \\ ۱۲۹۷۷۰۰ \end{pmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۸۴}\cdot\begin{pmatrix} ۵۴۷۶۱۰۰ \\ ۳۴۷۲۰۰ \\ ۶۳۷۰۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۶۵۱۹۱٫۷ \\ ۴۱۳۳٫۳ \\ ۷۵۸٫۳ \end{pmatrix}$$

که در آن $\hat{\beta}$ها به یک دهم واحد گرد شده‌اند. توجه کنید که نتایج حاصل در اینجا، با نتایجی که در خروجی چاپی کامپیوتری شکل ۶.۱۴ نشان داده شده‌اند، یکی هستند. ▲

اینک، برای تعمیم کاری که در بخش ۴.۱۴ انجام شد، فرضهایی را در نظر می‌گیریم که بسیار شبیه فرضهای صفحهٔ ۴۹۴ هستند؛ یعنی فرض می‌کنیم که به‌ازای، $i = ۱, ۲, \cdots, n$، Y_iها متغیرهای تصادفی مستقلی‌اند که توزیع نرمال با میانگینهای $\beta_۰ + \beta_۱ x_{i۱} + \beta_۲ x_{i۲} + \cdots + \beta_k x_{ik}$ و انحراف معیار مشترک σ دارند. برمبنای n نقطهٔ داده‌ای

$$(x_{i۱}, x_{i۲}, \cdots, x_{ik}, y_i)$$

اینک می‌توانیم هرگونه استنباطی دربارهٔ پارامترهای مدل، βها و σ، انجام دهیم و دربارهٔ محاسن برآوردها و پیشگوییهای مبتنی برمعادلهٔ رگرسیون چندگانهٔ برآوردشده، قضاوت کنیم.

پیدا کردن برآوردهای درستنمایی ماکسیمم βها و σ، مانند آنچه در صفحه‌های ۴۹۴ و ۴۹۵ انجام شد، کاری سرراست است، و در تمرین ۶۱.۱۴ به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. نتایج به‌صورت زیرند: برآوردهای درستنمایی ماکسیمم β ها با برآوردهای کمترین مربعات نظیر برابرند، در نتیجه، این برآوردها، درایه‌های ماتریس ستونی $(k+۱) \times ۱$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-۱}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

هستند. برآورد درستنمایی ماکسیمم σ عبارت است از

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{۱}{n}\cdot\sum_{i=۱}^{n}[y_i - (\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ x_{i۱} + \hat{\beta}_۲ x_{i۲} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ik})]^۲}$$

که در آن $\hat{\beta}$ برآوردهای درستنمایی ماکسیمم βها هستند، و بنابر تمرین ۶۳.۱۴ که تحقیق آن از خواننده خواسته خواهد شد، می‌توان آن را با نماد ماتریسی به صورت

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\mathbf{Y'Y} - \mathbf{B'X'Y}}{n}}$$

نوشت.

مثال ۱۲.۱۴

از نتایج مثال ۱۱.۱۴ استفاده کرده مقدار $\hat{\sigma}$ را برای داده‌های مثال ۹.۱۴ معین کنید.

حل. ابتدا $\mathbf{Y'Y}$ را، که همان $\sum_{i=۱}^{n} y_i^۲$ است، محاسبه می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathbf{Y'Y} &= ۷۸۸۰۰^۲ + ۷۴۳۰۰^۲ + \cdots + ۸۲۹۰۰^۲\\ &= ۵۰۹۰۷۰۸۰۰۰۰\end{aligned}$$

سپس، با رونویسی $\mathbf{B}$ و $\mathbf{X'Y}$ از صفحهٔ ۵۱۶، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathbf{B'X'Y} &= \frac{۱}{۸۴} \cdot (۵۴۷۶۱۰۰ \quad ۳۴۷۲۰۰ \quad ۶۳۷۰۰) \begin{pmatrix} ۶۳۷۰۰۰ \\ ۲۰۳۱۱۰۰ \\ ۱۲۹۷۷۰۰ \end{pmatrix}\\ &= ۵۰۹۰۶۳۹۴۱۶۶\end{aligned}$$

و نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{۵۰۹۰۷۰۸۰۰۰۰ - ۵۰۹۰۶۳۹۴۱۶۶}{۸}}\\ &= ۲۹۲{,}۸\end{aligned}$$

▲

توجه به این نکته حائز اهمیت است که برآوردی که در اینجا به‌دست آوردیم، با آنچه در خروجی چاپی کامپیوتر در شکل ۶.۱۴ نشان داده شده است، یکی نیست. برآورد نشان داده شده در آنجا، $S = ۳۷۰{,}۴$، به گونه‌ای است که $S^۲$ برآورد کننده‌ای نااریب برای $\sigma^۲$ است، شبیه به خطای معیار برآورد که در صفحهٔ ۴۹۹ تعریف کردیم. تفاوت این برآورد با $\hat{\sigma}$ در آن است که به‌جای تقسیم بر n، تقسیم را بر $n - k - ۱$ انجام داده‌ایم، و اگر در مثال خودمان این کار را کرده بودیم، مقدار

$$\begin{aligned}s_e &= \sqrt{\frac{۵۰۹۰۷۰۸۰۰۰۰ - ۵۰۹۰۶۳۹۴۱۶۶}{۸ - ۲ - ۱}}\\ &= ۳۷۰{,}۴\end{aligned}$$

را به‌دست می‌آوریم.

نظیر آنچه در بخش ۴.۱۴ عمل شد، اینک به مطالعهٔ توزیع نمونه‌گیری $\hat{\mathrm{B}}_i$ به‌ازای $i = \circ, \text{١}, \cdots, k$، و $\widehat{\sum}$ می‌پردازیم. با واگذاری جزئیات به‌عهدهٔ خواننده، صرفاً خاطرنشان می‌کنیم که استدلالهایی مشابه با آنچه در صفحه‌های ۴۹۴ و ۴۹۵ انجام شدند، به این نتیجه‌ها منجر می‌شوند که $\hat{\mathrm{B}}_i$ها ترکیبهایی خطی از n متغیر تصادفی مستقل Y_i هستند؛ به‌طوری که خود $\hat{\mathrm{B}}_i$ها دارای توزیع نرمال‌اند. به‌علاوه، آنها برآوردکننده‌هایی نااریب‌اند؛ یعنی

$$E(\hat{\mathrm{B}}_i) = \beta_i \qquad , i = \circ, \text{١}, \cdots, k$$

و واریانسهای آنها عبارت‌اند از

$$\mathrm{var}(\hat{\mathrm{B}}_i) = c_{ii}\sigma^{\text{٢}} \qquad , i = \circ, \text{١}, \cdots, k$$

در اینجا c_{ij} درایهٔ سطر iام و ستون jام ماتریس $(\mathbf{X'X})^{-\text{١}}$ است که در آن i و j مقدارهای ۰، ۱، ...، k را اختیار می‌کنند.

همچنین این نتیجه را بیان می‌کنیم که، نظیر قضیهٔ ۳.۱۴، توزیع نمونه‌گیری $\frac{n\widehat{\sum}^{\text{٢}}}{\sigma^{\text{٢}}}$، متغیر تصادفی متناظر با $\frac{n\hat{\sigma}^{\text{٢}}}{\sigma^{\text{٢}}}$، توزیع خی‌دو با $n - k - \text{١}$ درجه آزادی است، و $\frac{n\widehat{\sum}^{\text{٢}}}{\sigma^{\text{٢}}}$ و $\hat{\mathrm{B}}_i$ها، به‌ازای $i = \circ, \text{١}, \cdots, k$، مستقل‌اند. با ترکیب کردن همهٔ این نتیجه‌ها، نتیجه می‌گیریم که تعریف توزیع t در بخش ۵.۸ منجر می‌شود به

قضیهٔ ۸.۱۴ تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی چندگانهٔ نرمال

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n|c_{ii}|}{n-k-\text{١}}}} \qquad i = \circ, \text{١}, \cdots, k$$

مقدارهای متغیرهای تصادفی دارای توزیعهای t با $n - k - \text{١}$ درجه آزادی‌اند.

برمبنای این قضیه، اینک فرضی را دربارهٔ یکی از ضریبهای رگرسیون چندگانه آزمون می‌کنیم.

مثال ۱۳.۱۴

با مراجعه به مثال ۹.۱۴، فرض صفر $\beta_{\text{١}} = \text{٣٥٠٠}$ را در برابر فرض مقابل $\beta_{\text{١}} > \text{٣٥٠٠}$ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_{\circ} : \beta_{\text{١}} = \text{٣٥٠٠}$$
$$H_{\text{١}} : \beta_{\text{١}} > \text{٣٥٠٠}$$
$$\alpha = \circ{,}\circ\text{٥}$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $t \geq ۲٫۰۱۵$، که در آن t مطابق قضیهٔ ۸.۱۴ تعیین می‌شود و ۲٫۰۱۵ مقدار $t_{۰٫۰۵,۵}$ برطبق جدول IV است.

۳. با قرار دادن $n = ۸$، $\hat{\beta}_۱ = ۴۱۳۳٫۳$، و $c_{۱۱} = \frac{۳۲}{۸۴}$ از مثال۱۱.۱۴، و $\hat{\sigma} = ۲۹۲٫۸$ از مثال ۱۲.۱۴ در فرمول مربوط به t، مقدار

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{۴۱۳۳٫۳ - ۳۵۰۰}{۲۹۲٫۸ \cdot \sqrt{\frac{۸\cdot|\frac{۳۲}{۸۴}|}{۵}}} \\
&= \frac{۴۱۳۳٫۳ - ۳۵۰۰}{۲۲۸٫۶} \\
&= ۲٫۷۷
\end{aligned}
$$

را به‌دست می‌آوریم.

۴. چون $t = ۲٫۷۷$ از ۲٫۰۱۵ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط هر اتاق خواب اضافی بیش از ۳۵۰۰ دلار بر قیمت فروش چنان خانه‌ای می‌افزاید. (توجه کنید که مقدار واقع در مخرج آمارهٔ t، یعنی ۲۲۸٫۶، برابر با مقدار دوّم در ستون با عنوان "ST. DEV. OF COEF" در خروجی چاپی کامپیوتر در مثال ۶.۱۴ است.) ▲

نظیر قضیهٔ ۵.۱۴، می‌توانیم از آمارهٔ tی قضیهٔ ۸.۱۴ در ساختن فاصله‌های اطمینان برای ضرایب رگرسیون نیز استفاده کنیم (تمرین ۶۶.۱۴ را ببینید.)

تمرینها

۶۱.۱۴ اگر $\mathbf{b}$ بردار ستونی βها باشد، با استفاده از نمادهای ماتریسی تحقیق کنید که $\mathbf{q} = (\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})'(\mathbf{Y} - \mathbf{Xb})$ زمانی مینیمم است که $\mathbf{b} = \mathbf{B} = (\mathbf{X'X})^{-۱}\mathbf{X'Y}$.

۶۲.۱۴ تحقیق کنید که تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی چندگانهٔ نرمال،

(الف) برآوردهای درستنمایی ماکسیمم βها با برآوردهای کمترین مربعات نظیر برابرند؛

(ب) برآورد درستنمایی ماکسیمم σ عبارت است از

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{XB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{XB})}{n}}$$

۶۳.۱۴ تحقیق کنید که برآورد قسمت (ب)ی تمرین ۶۲.۱۴ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\mathbf{Y'Y} - \mathbf{B'X'Y}}{n}}$$

۶۴.۱۴ نشان دهید که تحت مفروضات تحلیل رگرسیونی چندگانهٔ نرمال

(الف) به ازای $i = 0, 1, \cdots, k$، $E(\hat{B}_i) = \beta_i$؛

(ب) به ازای $i = 0, 1, \cdots, k$، $\mathrm{var}(\hat{B}_i) = c_{ii}\sigma^2$؛

(ج) به ازای $i \neq j = 0, 1, \cdots, k$، $\mathrm{cov}(\hat{B}_i, \hat{B}_j)$.

۶۵.۱۴ نشان دهید که به‌ازای $k = 1$، فرمولهای تمرین ۶۴.۱۴ با فرمولهای داده شده در صفحهٔ ۴۹۵ و تمرینهای ۲۸.۱۴ و ۲۹.۱۴ معادل‌اند.

۶۶.۱۴ از آمارهٔ tای قضیهٔ ۸.۱۴ استفاده کرده یک فرمول فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ برای β_i، $i = 0, 1, \cdots, k$ بسازید.

۶۷.۱۴ اگر x_{01}، x_{02}، $\cdots$، x_{0k} مقادیر مفروض x_1، x_2، $\cdots$، x_k و $\mathbf{X}_0$ عبارت از ماتریس ستونی

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ x_{01} \\ x_{02} \\ \cdots \\ x_{0k} \end{pmatrix}$$

باشد، می‌توان نشان داد که

$$t = \frac{\mathbf{B}'\mathbf{X}_0 - \mu_{Y|x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0k}}}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n[\mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0]}{n-k-1}}}$$

مقداری از یک متغیر تصادفی دارای توزیع t با $n - k - 1$ درجهٔ آزادی است.

(الف) نشان دهید که برای $k = 1$، این آماره با آمارهٔ تمرین ۳۱.۱۴ معادل است.

(ب) یک فرمول فاصلهٔ اطمینان $(1 - \alpha)100\%$ برای

$$\mu_{Y|x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0k}}$$

استخراج کنید.

۶۸.۱۴ با فرض اینکه x_{01}، x_{02}، $\cdots$، x_{0k} و $\mathbf{X}_0$ به‌صورتی باشند که در تمرین ۶۷.۱۴ تعریف شدند و Y_0 متغیری تصادفی دارای توزیع نرمال با میانگین $\beta_0 + \beta_1 x_{01} + \cdots + \beta_k x_{0k}$ و واریانس σ^2 باشد، می‌توان نشان داد که

$$t = \frac{y_0 - \mathbf{B}'\mathbf{X}_0}{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n[1 + \mathbf{X}_0'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_0]}{n-k-1}}}$$

مقداری از متغیری تصادفی دارای توزیع t با $n - k - 1$ درجه آزادی است.

(الف) نشان دهید که برای $k = 1$، این آماره با آمارهٔ تمرین ۳۳.۱۴ معادل است.

(ب) فرمولی برای حدود پیشگویی $(1 - \alpha)100\%$ مربوط به یک مشاهدهٔ آتی مانند Y_0 استخراج کنید.

کاربردها

۶۹.۱۴ داده‌های زیر نمونه‌ای تصادفی است که یک مؤسسهٔ حمل و نقل از وزن شش محموله، فاصله‌های حمل، و صدمات وارده تدارک دیده است

وزن (۱۰۰۰ پوند) x_1	فاصله (۱۰۰۰ مایل) x_2	صدمات وارده (دلار) y
۴٫۰	۱٫۵	۱۶۰
۳٫۰	۲٫۲	۱۱۲
۱٫۶	۱٫۰	۶۹
۱٫۲	۲٫۰	۹۰
۳٫۴	۰٫۸	۱۲۳
۴٫۸	۱٫۶	۱۸۶

(الف) با فرض اینکه رگرسیون خطی باشد، β_0، β_1، و β_2 را برآورد کنید.

(ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده صدمه را وقتی مجموعه‌ای به وزن ۲۴۰۰ پوند به‌اندازهٔ ۱۲۰۰ مایل حمل می‌شود، برآورد کنید.

۷۰.۱۴ داده‌های زیر متوسط سود هفتگی (برحسب ۱۰۰۰ دلار) پنج رستوران، گنجایش صندلی، و متوسط تعداد اتومبیلهایی (برحسب هزار اتومبیل) است که روزانه، از مقابل رستوران عبور می‌کنند.

گنجایش x_1	تعداد اتومبیلها x_2	سود خالص هفتگی y
۱۲۰	۱۹	۲۳٫۸
۲۰۰	۸	۲۴٫۲
۱۵۰	۱۲	۲۲٫۰
۱۸۰	۱۵	۲۶٫۲
۲۴۰	۱۶	۳۳٫۵

(الف) با فرض اینکه رگرسیون، خطی باشد، β_0، β_1، و β_2 را برآورد کنید.

(ب) از نتایج قسمت (الف) استفاده کرده متوسط سود خالص هفتگی رستورانی با گنجایش ۲۱۰ صندلی را در مکانی که به‌طور متوسط روزانه ۱۴۰۰۰ اتومبیل از مقابل آن عبور می‌کنند، پیشگویی کنید.

۷۱.۱۴ داده‌های زیر مرکب از نمرات ده دانش‌آموز در یک امتحان، بهرهٔ هوشی آنها، و تعداد ساعتهایی است که صرف مطالعه برای امتحان کرده‌اند.

بهرهٔ هوشی x_1	تعداد ساعتهای مطالعه x_2	نمره y
۱۱۲	۵	۷۹
۱۲۶	۱۳	۹۷
۱۰۰	۳	۵۱
۱۱۴	۷	۶۵
۱۱۲	۱۱	۸۲
۱۲۱	۹	۹۳
۱۱۰	۸	۸۱
۱۰۳	۴	۳۸
۱۱۱	۶	۶۰
۱۲۴	۲	۸۶

(الف) با فرض خطی بودن رگرسیون، β_0، β_1، و β_2 را برآورد کنید.

(ب) نمرهٔ دانش‌آموزی با بهرهٔ هوشی ۱۰۸ را که ۶ ساعت برای امتحان درس خوانده است، پیشگویی کنید.

۷۲.۱۴ داده‌های زیر برای تعیین رابطهٔ بین دو متغیر مربوط به فرایند تولید و سختی نوع معینی فولاد جمع‌آوری شده است.

سختی (راکول T–۳۰) y	محتوای مس (درصد) x_1	دمای تابکاری (درجهٔ فارنهایت) x_2
۷۸٫۹	۰٫۰۲	۱۰۰۰
۵۵٫۲	۰٫۰۲	۱۲۰۰
۸۰٫۹	۰٫۱۰	۱۰۰۰
۵۷٫۴	۰٫۱۰	۱۲۰۰
۸۵٫۳	۰٫۱۸	۱۰۰۰
۶۰٫۷	۰٫۱۸	۱۲۰۰

صفحه‌ای را به‌کمک روش کمترین مربعات ببرازانید و از آن استفاده کرده متوسط سختی این نوع فولاد را، وقتی محتوای مس ۰٫۱۴ درصد و دمای تابکاری ۱۱۰۰ درجهٔ فارنهایت باشد، برآورد کنید.

۷۳.۱۴ وقتی x_1ها، x_2ها، $\cdots$ و (یا) x_kها همفاصله باشند، می‌توان محاسبهٔ $\hat{\beta}$ها را با استفاده از کدگذاری پیشنهادی در تمرین ۱۵.۱۴ آسانتر کرد. تمرین ۷۲.۱۴ را با کدگذاری مقادیر x_1 با اعداد ۱−، ۰، و ۱ و مقادیر x_2 با اعداد ۱− و ۱ مجدداً حل کنید. (توجه کنید که برای x_1ها و x_2های کدگذاری شده، که آنها را z_1ها و z_2ها می‌نامیم، نه تنها $\sum z_1 = 0$ و $\sum z_2 = 0$، بلکه همچنین $\sum z_1 z_2 = 0$.)

۷۴.۱۴ داده‌های زیر درصد مؤثر بودن یک مُسکّن و میزان داروی موجود در هر کپسول (برحسب میلیگرم) را نشان می‌دهد.

درصد موثر بودن y	مسکّن C x_3	مسکّن B x_2	مسکّن A x_1
۴۷	۱۰	۲۰	۱۵
۵۴	۲۰	۲۰	۱۵
۵۸	۱۰	۳۰	۱۵
۶۶	۲۰	۳۰	۱۵
۵۹	۱۰	۲۰	۳۰
۶۷	۲۰	۲۰	۳۰
۷۱	۱۰	۳۰	۳۰
۸۳	۲۰	۳۰	۳۰
۷۲	۱۰	۲۰	۴۵
۸۲	۲۰	۲۰	۴۵
۸۵	۱۰	۳۰	۴۵
۹۴	۲۰	۳۰	۴۵

با فرض خطی بودن رگرسیون، ضرایب رگرسیون را پس از کدگذاری مناسب هر یک از xها برآورد، و معادلهٔ رگرسیون برآوردشده را برحسب متغیرهای اصلی، بیان کنید.

۷۵.۱۴ مدلهای رگرسیونی که در بخشهای ۲.۱۴ و ۶.۱۴ معرفی کردیم، نسبت به xها خطی‌اند، امّا مهمتر از آن، نسبت به βها هم خطی‌اند. در واقع می‌توان آنها را در مسائلی به‌کار برد که در آنها رابطهٔ بین xها و yها خطی نیست. به‌عنوان نمونه، وقتی رگرسیون سهموی و به شکل

$$\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

است، صرفاً از معادلهٔ رگرسیون $\mu_{Y|x} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ با $x_1 = x$ و $x_2 = x^2$ استفاده می‌کنیم. از این روش استفاده کرده یک سهمی به داده‌های زیر از زمان خشک شدن یک مادهٔ جلا و مادهٔ شیمیایی معینی که به آن اضافه شده برازانید.

زمان خشک شدن (ساعت) y	میزان مادهٔ اضافه شده (گرم) x
۸٫۵	۱
۸٫۰	۲
۶٫۰	۳
۵٫۰	۴
۶٫۰	۵
۵٫۵	۶
۶٫۵	۷
۷٫۰	۸

همچنین، زمان خشک شدن را وقتی ۵ر۶گرم مادهٔ شیمیایی افزوده شده باشد، پیشگویی کنید.

۷۶.۱۴ داده‌های زیر به میزان تقاضا برای محصولی (برحسب هزار واحد) و بهای آن (برحسب سنت) در پنج بازار متفاوت مربوط‌اند.

تقاضا y	بها x
۲۲	۲۰
۴۱	۱۶
۱۲۰	۱۰
۸۹	۱۱
۵۶	۱۴

به کمک روشی که در تمرین قبل پیشنهاد شد، یک سهمی بر این داده‌ها ببرازانید.

۷۷.۱۴ برای قضاوت دربارهٔ ارزنده بودن برازش یک سهمی در تمرین قبل به جای خطی مستقیم، فرض صفر $\beta_2 = 0$ را در برابر فرض مقابل $\beta_2 \neq 0$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید.

۷۸.۱۴ از نتایج به‌دست آمده برای داده‌های مثال ۹.۱۴ در بخش ۷.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۰٪ برای ضریب رگرسیون β_2 (تمرین ۶۶.۱۴ را ببینید) بسازید.

۷۹.۱۴ با رجوع به تمرین ۶۹.۱۴، فرض صفر $\beta_2 = 0{,}10$ را در برابر فرض مقابل $\beta_2 \neq 0{,}10$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید.

۸۰.۱۴ با رجوع به تمرین ۶۹.۱۴، یک فاصلهٔ اطمینان برای ضریب رگرسیون β_1 بسازید.

۸۱.۱۴ با رجوع به تمرین ۷۰.۱۴ فرض صفر $\beta_1 = 0{,}12$ را در برابر فرض مقابل $\beta_1 < 0{,}12$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید.

۸۲.۱۴ با رجوع به تمرین ۷۰.۱۴، یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای ضریب رگرسیون β_2 بسازید.

۸۳.۱۴ از نتایج به‌دست آمده برای داده‌های مثال ۹.۱۴ در بخش ۷.۱۴ و نتیجهٔ قسمت (ب) در تمرین ۶۷.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۵٪ برای میانگین قیمت فروش یک خانه سه اتاق‌خوابه با دو حمام در طرح خانه‌سازی مذکور بسازید.

۸۴.۱۴ از نتایج به‌دست آمده برای داده‌های مثال ۹.۱۴ در بخش ۷.۱۴ و نتایج قسمت (ب) تمرین ۶۸.۱۴ استفاده کرده حدود پیشگویی ۹۹٪ برای قیمت فروش یک خانهٔ سه اتاق‌خوابه با دوحمام را در طرح خانه‌سازی مذکور بسازید.

۸۵.۱۴ با مراجعه به تمرین ۶۹.۱۴، از نتیجهٔ قسمت (ب)ی تمرین ۶۷.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۸٪ برای متوسط صدمه وارده بر محموله‌های ۲۴۰۰ پوندی که ۱۲۰۰ مایل حمل می‌شوند، بسازید.

۸۶.۱۴ با رجوع به تمرین ۶۹.۱۴، از نتیجهٔ قسمت (ب)ی تمرین ۶۸.۱۴ استفاده کرده حدود پیشگویی ۹۵٪ برای صدمهٔ وارده به محموله‌ای با ۲۴۰۰ پوند وزن که ۱۲۰۰ مایل حمل می‌شود، بسازید.

۸۷.۱۴ با رجوع به تمرین ۷۰.۱۴ از نتیجهٔ قسمت (ب) تمرین ۶۷.۱۴ استفاده کرده یک فاصلهٔ اطمینان ۹۹٪ برای میانگین سود خالص هفتگی رستورانهایی با گنجایش ۲۱۰ صندلی در مکانی که میانگین تعداد اتومبیلهایی که روزانه عبور می‌کنند ۱۴۰۰۰ است، بسازید.

۸۸.۱۴ با رجوع به تمرین ۷۰.۱۴، از نتیجه قسمت (ب) تمرین ۶۸.۱۴ استفاده کرده حدود پیشگویی ۹۸٪ برای متوسط سود خالص هفتگی رستورانی با گنجایش ۲۱۰ صندلی در مکانی با متوسط عبور روزانه ۱۴۰۰۰ اتومبیل، بسازید.

مراجع

برهانی برای قضیهٔ ۳.۱۴ و سایر جزئیات ریاضیی که در متن منظور نشده‌اند می‌توان در کتاب ویلکس که جزو مراجع پایان فصل ۷ است، یافت، و اطلاعاتی دربارهٔ توزیع $\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+R}{1-R}$ را می‌توان در کتاب کندال و استوارت که جزو مراجع پایان فصل ۳ است، پیدا کرد. نحوهٔ به‌دست آوردن برآوردهای درستنمایی ماکسیمم σ_1، σ_2، و ρ در کتاب زیر داده شده است.

HOEL, P., *Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1962.

بررسی مفصلتر تحلیل رگرسیونی را می‌توان در کتابهای متعدد پیشرفته، و از جمله در کتابهای زیر یافت:

MORRISON, D. F., *Applied Linear Statistical Methods*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1983,

WEISBERG, S., *Applied Linear Regression*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1985,

WONNACOTT, T. H., and WONNACOTT, R. J., *Regression: A Second Course in Statistics*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1981.

۱۵

تحلیل واریانس

۱.۱۵ مقدمه

در این فصل، مطالب بخش ۳.۱۳ را تعمیم داده، تصمیم‌گیری دربارهٔ این امر را مورد توجه قرار می‌دهیم که آیا تفاوتهای مشاهده شده بین بیش از دو میانگین نمونه‌ای را می‌توان معلول تصادف دانست و یا اینکه بین میانگینهای جامعه‌های مورد نمونه‌گیری تفاوتهای واقعی وجود دارند. مثلاً، ممکن است بخواهیم بر مبنای داده‌های نمونه‌ای تصمیم بگیریم که آیا واقعاً تفاوتی بین میزان مؤثر بودن سه روش تدریس یک زبان خارجی موجود است یا نه، یا بخواهیم میزان متوسط محصول در هر جریب برای شش نوع مختلف گندم را مقایسه کنیم، و یا بخواهیم ببینیم که آیا واقعاً تفاوتی در متوسط مصرف بنزین در هر کیلومتر برای چهار نوع بنزین وجود دارد یا نه.

چون اختلافهایی که مشاهده می‌شوند می‌توانند همواره معلول عواملی بجز عوامل مشخصی باشند—مثلاً اختلاف در وضع یادگیری دانش‌آموزانی که تحت سه روش مختلف زبان خارجی فرا

می‌گیرند می‌تواند ناشی از اختلاف هوش آنها باشد، و اختلاف در میزان متوسط مصرف بنزین در هر کیلومتر می‌تواند ناشی از اختلاف در شرایط جاده باشد—ما برخی سؤالات مربوط به طرح آزمایشها را نیز مورد بحث قرار خواهیم داد تا، با درجهٔ اطمینان معقولی، نتایج معنی‌دار آماری را بتوان به عللی مشخص نسبت داد.

۲.۱۵ تحلیل واریانس یکطرفه

برای آنکه مثالی از یک وضعیت نوعی ارائه دهیم که در آن تحلیل واریانس یکطرفه را انجام می‌دهیم، فرض کنید که بخواهیم قدرت پاک‌کنندگی سه مادهٔ شوینده را، بر مبنای درجهٔ سفیدی ۱۵ قواره پارچهٔ سفید که ابتدا به مرکب آلوده شده و سپس در یک ماشین لباسشویی با این سه مادهٔ پاک‌کننده شسته شده‌اند، مقایسه کنیم:

مادهٔ شویندهٔ A : ۷۷، ۸۱، ۷۱، ۷۶، ۸۰
مادهٔ شویندهٔ B : ۷۲، ۵۸، ۷۴، ۶۶، ۷۰
مادهٔ شویندهٔ C : ۷۶، ۸۵، ۸۲، ۸۰، ۷۷

میانگین این سه نمونه به‌ترتیب عبارت‌اند از ۷۷، ۶۸، و ۸۰، و می‌خواهیم بدانیم که آیا اختلافهای بین آنها معنی‌دار است یا اینکه می‌توان آنها را معلول تصادف دانست.

در حالت کلی، در چنین مسائلی، k نمونهٔ تصادفی مستقل به‌اندازهٔ n از k جامعه داریم. مقدار jام از جامعهٔ iام با x_{ij} نشان داده می‌شود، یعنی:

جامعهٔ ۱ : x_{11}، x_{12}، . . . ، x_{1n}
جامعهٔ ۲ : x_{21}، x_{22}، . . . ، x_{2n}
. . . .
جامعهٔ k : x_{k1}، x_{k2}، . . . ، x_{kn}

و فرض خواهیم کرد که متغیرهای تصادفی متناظر، یعنی X_{ij}ها، که همه مستقل‌اند، دارای توزیعهای نرمال با میانگینهای مربوط μ_i، و واریانس مشترک σ^2 باشند. با بیان این فرضها به گونه‌ای نسبتاً متفاوت، می‌توانیم بگوییم که مدل مشاهدات با عبارت

$$x_{ij} = \mu_i + e_{ij}$$

به‌ازای k ,$\ldots$,۲ ,۱ = i، و n ,$\ldots$,۲ ,۱ = j داده می‌شود که در آن e_{ij}ها مقادیر nk متغیر تصادفی نرمال با میانگینهای صفر و واریانس مشترک σ^2 هستند. برای آنکه امکان تعمیم این مدل به انواع وضعیتهای پیچیده‌تر موجود باشد (صفحهٔ ۵۳۹ را ببینید)، معمولاً آن را به صورت

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, k$ و $j = 1, 2, \ldots, n$ می‌نویسند. در اینجا به μ **میانگین کل** اطلاق می‌شود، و α_iها که **اثرهای تیماری**، نامیده می‌شوند، چنان‌اند که $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$. توجه کنید که ما صرفاً میانگین جامعهٔ iام را به صورت $\mu_i = \mu + \alpha_i$ نوشته و شرط $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ را اعمال کرده‌ایم به‌طوری که میانگین μ_i برابر میانگین کل μ شود. رسم نامیدن جامعه‌های مختلف با عنوان **تیمارهای** مختلف ناشی از این واقعیت است که بسیاری از تکنیکهای تحلیل واریانس بدواً در رابطه با آزمایشهای کشاورزی پدید آمدند که در آنها، مثلاً، کودهای مختلف به‌عنوان تیمارهای مختلفی تلقی و به خاک اضافه می‌شدند. در نتیجه، ما سه مادهٔ شویندهٔ مثال صفحهٔ ۵۲۸ خود را سه تیمار مختلف خواهیم نامید، و ممکن است در مسائل دیگر چهار ملیت را چهار تیمار مختلف، پنج نوع روش آگهی را پنج تیمار مختلف بنامیم و قس‌علی‌هذا. اصطلاح دیگری که اغلب به‌جای «تیمارها» مورد استفاده قرار می‌گیرد، «سطوح» است.

فرض صفری که آزمون خواهیم کرد عبارت از آن است که میانگینهای جامعه‌ای همه برابرند، یعنی اینکه $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$، یا معادل آن

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

متناظراً، فرض مقابل عبارت از آن است که میانگینهای جامعه‌ای برابر نیستند، یعنی اینکه

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \quad , \quad \text{حداقل به‌ازای یک مقدار } i$$

خود آزمون، مبتنی بر تحلیل تغییرپذیری کل داده‌های تلفیق شده ($nk - 1$ برابر واریانس آنها) است که با

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_{..})^2$$

داده می‌شود، و در آن $\overline{x}_{..} = \frac{1}{nk} \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$.

اگر فرض صفر درست باشد، همهٔ این تغییرپذیری ناشی از شانس است، اما اگر درست نباشد، در این صورت بخشی از مجموع مربعهای بالا ناشی از اختلافهای بین میانگینهای جامعه‌ای خواهد بود. برای تجزیه یا تفکیک سهم هر یک از این دو در تغییرپذیری کل داده‌ها، به قضیهٔ زیر رجوع می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۱۵

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_{..})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{k} (\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \overline{x}_{i.})^2$$

که در آن $\overline{x}_{i.}$ میانگین مشاهدات جامعهٔ iام و $\overline{x}_{..}$ میانگین همهٔ nk مشاهده است.

برهان.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{..})^2 &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}[(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})+(x_{ij}-\overline{x}_{i.})]^2\\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}[(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2+2(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})(x_{ij}-\overline{x}_{i.})+(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2]\\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})(x_{ij}-\overline{x}_{i.})\\ &\qquad +\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2\\ &= n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2\end{aligned}$$

زیرا به‌ازای هر i، $\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})=0$. ■

متداول است که به‌عبارت سمت چپ اتحاد حکم قضیهٔ ۱.۱۵ **مجموع کل مربعات**، به اولین مجموع عبارت در سمت راست، **مجموع مربعات تیمار**، و به جملهٔ دوم،**مجموع مربعات خطا** اطلاق کنند، که در آن منظور از «خطا»،**خطای آزمایشی** یا شانسی است. متناظراً این سه مجموع مربعات را باSST، SS(Tr)، و SSE نشان می‌دهیم[1] و می‌نویسیم

$$\text{SST} = \text{SS(Tr)} + \text{SSE}$$

حال به آنچه عزم کرده بودیم رسیده‌ایم: SST، اندازه‌ای از تغییر کل داده‌های تلفیق شده را به دو جزء افراز کرده‌ایم—جزء دوم، SSE، تغییر شانسی (یعنی تغییر داخل نمونه‌ها) را اندازه می‌گیرد؛ جزء اول، SS(Tr)، نیز تغییر تصادفی را وقتی که فرض صفر درست باشد، اندازه می‌گیرد، اما این جزء همچنین تغییر بین میانگینهای جامعه‌ای را وقتی فرض صفر نادرست است، منعکس می‌کند.

چون، به‌ازای هر i، x_{ij}ها مقادیر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n از جامعهٔ نرمالی با واریانس σ^2 است، از قضیهٔ ۱۱.۸ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i

$$\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{i.})^2$$

یک متغیر تصادفی خی دو با $n-1$ درجهٔ آزادی است. به‌علاوه، چون این k متغیر تصادفی

۱. SST نمادی برای Total Sum of Squares، SS(Tr) نمادی برای Treatment Sum of Squares، و SSE نمادی برای Sum of Squares Error است.م.

مستقل‌اند، از قضیهٔ ۹.۸ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{i.})^2$$

یک متغیر تصادفی خی‌دو با $k(n-1)$ درجهٔ آزادی است. چون میانگین توزیع خی‌دو برابر درجهٔ آزادی آن است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{1}{\sigma^2}\cdot \mathrm{SSE}$ مقدار یک متغیر تصادفی با میانگین $k(n-1)$ است و بنابراین $\frac{\mathrm{SSE}}{k(n-1)}$ را می‌توان به‌عنوان برآورد σ^2 به‌کار برد. این کمیّت $\frac{\mathrm{SSE}}{k(n-1)}$ را **میانگین مربعات خطا** نامیده و با MSE نشان می‌دهند.

همچنین، چون تحت فرض صفر، $\overline{x}_i$ مقادیر متغیرهای تصادفی مستقلی‌اند که دارای توزیع یکسان نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ هستند، از قضیهٔ ۱۱.۸ نتیجه می‌شود که

$$\frac{n}{\sigma^2}\cdot\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i.}-\overline{X}_{..})^2$$

یک متغیر تصادفی خی‌دو با $k-1$ درجهٔ آزادی است. چون میانگین این توزیع $k-1$ است، نتیجه می‌شود که $\frac{\mathrm{SS(Tr)}}{k-1}$ برآورد دومی برای σ^2 است. این کمیت را $\frac{\mathrm{SS(Tr)}}{k-1}$ را **میانگین مربعات تیمار** نامیده با $\mathrm{MS(Tr)}$ نشان می‌دهند.

البته اگر فرض صفر نادرست باشد، آنگاه، طبق تمرین ۱.۱۵، $\mathrm{MS(Tr)}$ برآوردی را برای σ^2 به‌علاوهٔ هر تغییری که ممکن است بین میانگینها وجود داشته باشد، فراهم می‌کند. از این مطلب چنین به‌ذهن می‌رسد که فرض صفر برابری میانگینهای جامعه‌ای را وقتی $\mathrm{MS(Tr)}$به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از MSE باشد، رد کنیم. برای اینکه این تصمیم را بر مبنای دقیقتری استوار کنیم، باید بدون برهان بپذیریم که برآوردکننده‌های متناظر مستقل‌اند، زیرا با این فرض می‌توانیم قضیهٔ ۱۴.۸ را به‌کار بریم که به موجب آن

$$f=\frac{\frac{\mathrm{SS(Tr)}}{(k-1)\sigma^2}}{\frac{\mathrm{SSE}}{k(n-1)\sigma^2}}=\frac{\mathrm{MS(Tr)}}{\mathrm{MSE}}$$

مقدار یک متغیر تصادفی F با $k-1$ و $k(n-1)$ درجهٔ آزادی است.* بنابراین، فرض صفر برابری میانگینهای جامعه‌ای را در صورتی رد می‌کنیم که مقداری که برای f به‌دست می‌آوریم، از مقدار $f_{\alpha,k-1,k(n-1)}$، که در آن α سطح معنی‌دار بودن است، بیشتر شود.

روشی را که در این بخش توصیف کرده‌ایم **تحلیل واریانس یکطرفه** می‌نامند و جزئیات لازم معمولاً در **جدول تحلیل واریانس** از نوع زیر ارائه می‌شود.

---

* برهانی از این استقلال را می‌توان در کتاب H. Scheffé، که جزو مراجع پایان همین فصل ذکر شده است، یافت.

منبع تغییر	درجهٔ آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	f
تیمارها	$k-۱$	$\mathrm{SS(Tr)}$	$\mathrm{MS(Tr)}$	$\frac{\mathrm{MS(Tr)}}{\mathrm{MSE}}$
خطا	$k(n-۱)$	SSE	MSE	
جمع	$kn-۱$	SST		

برای ساده‌ترکردن محاسبهٔ مجموع مربعات مختلف، معمولاً از فرمولهای محاسباتی زیر استفاده می‌کنیم که اثبات آنها در تمرین ۲.۱۵ از خواننده خواسته خواهد شد.

قضیهٔ ۲.۱۵

$$\mathrm{SST} = \sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n} x_{ij}^{۲} - \frac{۱}{kn}\cdot T_{..}^{۲}$$

و

$$\mathrm{SS(Tr)} = \frac{۱}{n}\cdot\sum_{i=۱}^{k} T_{i.}^{۲} - \frac{۱}{kn}\cdot T_{..}^{۲}$$

که در آن $T_{i.}$ مجموع مقادیر حاصل برای تیمار iام و $T_{..}$ مجموع کل nk مشاهده است.

بنابراین مقدار SSE را می‌توان با تفریق $\mathrm{SS(Tr)}$ از SST به‌دست آورد.

مثال ۱.۱۵

با مراجعه به مثال صفحهٔ ۵۲۸ در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید که آیا اختلافهای بین میانگینهای درجهٔ سفیدی معنی‌دار هستند یا خیر.

حل. ۱. $H_{\circ}: \alpha_i = \circ$ به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$،
$H_{۱}: \alpha_i \neq \circ$ حداقل به‌ازای یک i،
$\alpha = \circ٫\circ ۱$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $f \geq ۶٫۹۳$، که در آن f به کمک تحلیل واریانس یکطرفه به‌دست آمده و ۶٫۹۳ مقدار $f_{\circ٫\circ ۱,۲,۱۲}$ است.

۳. مجموعهای مطلوب و مجموع مربعات عبارت‌اند از $T_{۱.} = ۳۸۵$، $T_{۲.} = ۳۴۰$،

$T_{۳.} = ۴۰۰$، $T_{..} = ۱۱۲۵$، و $\sum\sum x^{۲} = ۸۵۰۴۱$، و با قرار دادن این مقادیر همراه با $k = ۳$ و $n = ۵$ در فرمولهای قضیهٔ ۲.۱۵ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathrm{SST} &= ۸۵۰۴۱ - \frac{۱}{۱۵}(۱۱۲۵)^{۲} \\ &= ۶۶۶ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \mathrm{SS(Tr)} &= \frac{۱}{۵}(۳۸۵^{۲} + ۳۴۰^{۲} + ۴۰۰^{۲}) - \frac{۱}{۱۵}(۱۱۲۵)^{۲} \\ &= ۳۹۰ \end{aligned}$$

در این صورت، با تفریق، $\mathrm{SSE} = ۶۶۶ - ۳۹۰ = ۲۷۶$، و بقیهٔ محاسبات در جدول تحلیل واریانس زیر نشان داده شده‌اند.

منبع تغییر	درجهٔ آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربعات	f
تیمارها	۲	۳۹۰	$\frac{۳۹۰}{۲} = ۱۹۵$	$\frac{۱۹۵}{۲۳} = ۸{,}۴۸$
خطا	۱۲	۲۷۶	$\frac{۲۷۶}{۱۲} = ۲۳$	
جمع	۱۴	۶۶۶		

توجه کنید که *میانگین مربعات*، صرفاً مجموعهای مربعات تقسیم بر درجه‌های آزادی متناظرند.

۴. چون $f = ۸{,}۴۸$ از ۶٫۹۳ بیشتر است، فرض صفر را باید رد کرد، و نتیجه می‌گیریم که سه مادهٔ شوینده، همه به یک اندازه مؤثر نیستند. ▲

پارامترهای مدل صفحهٔ ۵۲۸، یعنی μ و α_i، معمولاً به روش کمترین مربعات برآورد می‌شوند. یعنی، برآوردهای آنها مقادیری هستند که عبارت

$$\sum_{i=۱}^{k}\sum_{j=۱}^{n}[x_{ij} - (\mu + \alpha_i)]^{۲}$$

را مقید به این محدودیت که $\sum_{i=۱}^{k}\alpha_i = ۰$، مینیمم می‌کنند؛ همان‌طور که تحقیق آن در تمرین ۶.۱۵ از خواننده خواسته خواهد شد، این برآوردهای کمترین مربعات عبارت‌اند از $\hat{\mu} = \overline{x}_{..}$ و $\hat{\alpha}_i = \overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..}$.

تمرینها

۱.۱۵ برای تحلیل واریانس یکطرفه با k نمونهٔ مستقل به‌اندازهٔ n، نشان دهید که

$$E\left[\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\overline{\mathrm{x}}_{i.}-\overline{\mathrm{x}}_{..})^2}{k-1}\right]=\sigma^2+\frac{n\cdot\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^2}{k-1}$$

۲.۱۵ قضیهٔ ۲.۱۵ را ثابت کنید.

۳.۱۵ اگر در یک تحلیل واریانس یکطرفه، اندازه‌های نمونه نابرابر باشند و برای تیمار iام، n_i مشاهده داشته باشیم، نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{k}n_i(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_{i.})^2$$

مشابه با اتحاد قضیهٔ ۱.۱۵ است. همچنین نشان دهید که درجه‌های آزادی برای SST، SS(Tr)، و SSE عبارت‌اند از، به‌ترتیب، $N-1$، $k-1$، و $N-k$، که برای آنها $N=\sum_{i=1}^{k}n_i$.

۴.۱۵ با مراجعه به تمرین ۳.۱۵ نشان دهید که فرمولهای محاسباتی برای مجموع مربعات عبارت‌اند از

$$\mathrm{SST}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\frac{1}{N}\cdot T_{..}^2$$

$$\mathrm{SS(Tr)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{T_{i.}^2}{n_i}-\frac{1}{N}\cdot T_{..}^2$$

و

$$\mathrm{SSE}=\mathrm{SST}-\mathrm{SS(Tr)}$$

۵.۱۵ نشان دهید که به‌ازای $k=2$ آزمون F تحلیل واریانس یکطرفه، معادل با آزمون tی بخش ۳.۱۳ با $\delta=0$ و فرض مقابل $\mu_1-\mu_2\neq 0$ است.

۶.۱۵ از ضرایب لاگرانژ استفاده کرده نشان دهید که برآوردهای کمترین مربعات پارامترهای مدل صفحهٔ ۵۲۸ عبارت‌اند از $\hat{\mu}=\overline{x}_{..}$ و $\hat{\alpha}_i=\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..}$.

کاربردها

۷.۱۵ برای مقایسهٔ میزان مؤثر بودن سه نوع مختلف از پوشش فسفرسان صفحهٔ ابزارهای هواپیما، هشت صفحه را با هر یک از سه نوع فسفرسان، پوشش می‌دهند. پس از آن به صفحه‌ها نور ماوراء بنفش تابانده می‌شود و اعداد زیر تعداد دقایقی را نشان می‌دهند که هر یک از صفحه‌ها پس از خاموش کردن منبع نور، به درخشش ادامه داده‌اند.

نوع I: ۵۲٫۹، ۶۲٫۱، ۵۷٫۴، ۵۰٫۰، ۵۹٫۳، ۶۱٫۲، ۶۰٫۸، ۵۳٫۱
نوع II: ۵۸٫۴، ۵۵٫۰، ۵۹٫۸، ۶۲٫۵، ۶۴٫۷، ۵۹٫۹، ۵۴٫۷، ۵۸٫۴
نوع III: ۷۱٫۳، ۶۶٫۶، ۶۳٫۴، ۶۴٫۷، ۷۵٫۸، ۶۵٫۶، ۷۲٫۹، ۶۷٫۳

این فرض صفر را آزمون کنید که در میزان مؤثر بودن سه نوع پوشش در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ اختلافی وجود ندارد.

۸.۱۵ اعداد زیر تعداد خطاهایی را نشان می‌دهند که چهار تکنیسین که در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کنند، در پنج هفتهٔ متوالی مرتکب شده‌اند.

تکنیسین I: ۱۳، ۱۶، ۱۲، ۱۴، ۱۵
تکنیسین II: ۱۴، ۱۶، ۱۱، ۱۹، ۱۵
تکنیسین III: ۱۳، ۱۸، ۱۶، ۱۴، ۱۸
تکنیسین IV: ۱۸، ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۱۲

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ این فرض را آزمون کنید که آیا اختلافهای بین میانگینهای نمونه‌ای را می‌توان معلول شانس دانست یا نه؟

۹.۱۵ به سه گروه شش‌تایی از خوکچه‌های آزمایشگاهی به‌ترتیب ۰٫۵ میلیگرم، ۱٫۰ میلیگرم، و ۱٫۵ میلیگرم از آرامبخش جدیدی تزریق شده و اعداد زیر تعداد دقیقه‌های لازم تا خواب رفتن آنها را نشان می‌دهند.

۰٫۵ میلیگرم: ۲۱، ۲۳، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۲۳
۱٫۰ میلیگرم: ۱۹، ۲۱، ۲۰، ۱۸، ۲۲، ۲۰
۱٫۵ میلیگرم: ۱۵، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۱، ۱۵

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا می‌توانیم این فرض صفر را رد کنیم که اختلافهای در دزهای مختلف بی‌تأثیرند؟ همچنین پارامترهای μ، α_1، α_2 و α_3ی مدلی را که در این تحلیل به کار رفته است، برآورد کنید.

۱۰.۱۵ اعداد زیر تعداد کلماتی را که یک منشی در هر دقیقه در زمانهای مختلف با چهار ماشین تحریر مختلف تایپ کرده است، نشان می‌دهند.

ماشین‌تحریر C: ۷۱، ۷۵، ۶۹، ۷۷، ۶۱، ۷۲، ۷۱، ۷۸
ماشین‌تحریر D: ۶۸، ۷۱، ۷۴، ۶۶، ۶۹، ۶۷، ۷۰، ۶۲
ماشین‌تحریر E: ۷۵، ۷۰، ۸۱، ۷۳، ۷۸، ۷۲
ماشین‌تحریر F: ۶۲، ۵۹، ۷۱، ۶۸، ۶۳، ۶۵، ۷۲، ۶۰، ۶۴

با استفاده از فرمولهای محاسباتی تمرین ۴.۱۵ برای محاسبهٔ مجموعهای مربعات، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵، آزمون کنید که آیا اختلاف بین چهار میانگین نمونه‌ای را می‌توان به‌تصادف نسبت داد یا نه؟

۱۱.۱۵ یک سازمان حمایت از مصرف‌کننده که می‌خواهد دقت ترموستات سه نوع اطوی الکتریکی مختلف را آزمون کند، آنها را بر روی درجهٔ ۴۸۰ فارنهایت تنظیم کرده و دماهای واقعی زیر را که بر روی یک ترموکوپل خوانده می‌شوند، به‌دست می‌آورد.

اطوی X: ۴۷۴، ۴۹۶، ۴۶۷، ۴۷۱
اطوی Y: ۴۹۲، ۴۹۸
اطوی Z: ۴۶۰، ۴۹۵، ۴۹۰

با استفاده از فرمولهای محاسباتی تمرین ۴.۱۵ برای محاسبهٔ مجموعهای مربعات، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵، آزمون کنید که آیا اختلافهای بین سه میانگین نمونه‌ای را می‌توان معلول تصادف دانست یا نه؟

۱۲.۱۵ در بخش ۷.۱۳ متذکر شدیم که در تحلیل خی‌دوی یک جدول $r \times c$، ترتیب‌بندی ممکن سطرها و (یا) ستونها را به حساب نمی‌آوریم. وقتی سطرها و ستونها هر دو مرتب شوند، در تمرینهای ۵۹.۱۴ و ۶۰.۱۴، رهیافتی بدیل را در مقابل تحلیل خی‌دو خاطر نشان کردیم. وقتی تنها سطرها یا تنها ستونها مرتب شوند، رسته‌هایی را که مرتب نشده‌اند، تیمار تلقی می‌کنیم، و به جای رسته‌هایی که مرتب شده‌اند، اعداد صحیح متوالی را قرار می‌دهیم. مثلاً، در جدول 3×3ی صفحهٔ ۴۶۶، سه شهر را به‌عنوان سه تیمار مختلف تلقی می‌کنیم، و به جای سر ستونها، اعداد ۱، ۱-، و ۰ را قرار می‌دهیم که نشان‌دهندهٔ یک ترتیب‌بندی با شروع از موافقان B (آنها که A را ترجیح نمی‌دهند) به بی‌تفاوتها و تا موافقان A است. بنابراین، نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n_1 = 400$ از شهر (الف) مرکب از ۱۷۴ یک، ۹۳ منهای یک، و ۱۳۳ صفر است؛ نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n_2 = 500$ از شهر (ب)، مرکب از ۱۹۶ یک، ۱۲۴ منهای یک، و ۱۸۰ صفر است، و قس‌علی‌هذا. با این طرز نگرش به جدول $r \times c$، اینک یک تحلیل واریانس یکطرفه انجام می‌دهیم. از این روش استفاده کرده جدول 3×3ی صفحهٔ ۴۶۶ را تحلیل کرده، این فرض صفر را آزمون کنید که اثرهای تیماری در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ همه برابر صفرند، و نتیجه را با آنچه در تمرین ۷۴.۱۳ به‌دست آمد، مقایسه کنید.

۱۳.۱۵ از روش تمرین ۱۲.۱۵ استفاده کرده جدول 3×3ی تمرین ۷۳.۱۳ را تحلیل و نتیجه را با آنچه در آن تمرین به‌دست آمد، مقایسه کنید.

۳.۱۵ طرح آزمایشها

در مثال ۱.۱۵ شاید معقول به‌نظر می‌رسید که نتیجه بگیریم سه مادهٔ شوینده به یک اندازه مؤثر نیستند؛ با این حال، تأمل نشان می‌دهد که این نتیجه به هیچ‌وجه «معقول» نیست. زیرا ممکن است قواره پارچه‌هایی که با مادهٔ شویندهٔ B شسته شده‌اند آلوده‌تر از سایرین باشند، ممکن است زمان شستشو برای مادهٔ C طولانیتر باشد، ممکن است اختلافی بین میزان املاح یا دمای آب وجود داشته، و یا حتی شاید ابزارهایی که یافته‌های مربوط به شواهد را نشان می‌دهند. بعد از ثبت اعداد مربوط به شوینده‌های A و C از تنظیم خارج شده باشند.

البته کاملاً امکان دارد که اختلافهای بین سه میانگین نمونه‌ای عمدتاً معلول مؤثر بودن ماده‌های شوینده باشند، ولی ما در بالا چندین عامل دیگر را برشمرده‌ایم که ممکن است در این امر دخیل باشند. مهم است به‌خاطر داشته باشیم که یک آزمون معنی‌دار بودن می‌تواند نشان دهد که اختلافهای بین میانگینهای نمونه‌ای، بزرگتر از آن‌اند که بتوان آنها را معلول تصادف دانست، اما نمی‌تواند بگوید که چرا این اختلافها پیش آمده‌اند.

در حالت کلی، اگر بخواهیم نشان دهیم که یک عامل (در بین سایرین) *را* می‌توان علت پدیدهٔ مشاهده شده‌ای دانست، باید تا حدی مطمئن باشیم که هیچ یک از سایر عوامل را نمی‌توان به‌طور معقولی دخیل دانست. راههای گوناگونی برای انجام این کار وجود دارند؛ مثلاً می‌توانیم **یک آزمایش دقیقاً کنترل شده‌ای** انجام دهیم که در آن همهٔ متغیرها بجز یکی از آنها که موردنظر است، ثابت نگه داشته شوند، برای انجام این کار در مثال مربوط به سه مادهٔ شوینده، می‌توانیم قوارهٔ پارچه‌ها را با مقادیر مساوی از مرکب آغشته کنیم، همواره از زمان شستشوی واحد و آبی با یک میزان املاح و دما استفاده کنیم، و ابزارهای اندازه‌گیری را بعد از هر بار استفاده، بازرسی (و در صورت لزوم تنظیم) نماییم. تحت چنین شرایط دقیقاً کنترل شده‌ای، اختلافهای معنی‌دار بین میانگینهای نمونه‌ای نمی‌توانند ناشی از قواره‌های با آغشتگیهای متفاوت، یا اختلاف در زمان شستشو، اختلاف دمای آب، میزان املاح آب، یا ابزارهای اندازه‌گیری باشند. از طرف دیگر، اختلافهای بین میانگینها نشان می‌دهند که ماده‌های شوینده در صورتی که به این نحو شدیداً محدود، به‌کار رفته باشند همه به یک اندازه مؤثر نیستند. البته، نمی‌توانیم بگوییم در صورتی که زمان شستشو کمتر یا بیشتر باشد، اگر آب دمایی دیگر یا میزان املاحی متفاوت داشته باشد و الخ، این اختلافها هنوز هم عیناً وجود دارند یا خیر.

در اغلب حالتها، آزمایشهای «قویاً کنترل شده» ای نظیر آنچه در بالا توصیف شد، نمی‌توانند واقعاً اطلاعی را که مورد نظر ماست در اختیار ما قرار دهند. بنابراین به دنبال راههای دیگری می‌رویم، و به‌عنوان نقطهٔ مقابل روش فوق می‌توانیم به آزمایشهایی دست بزنیم که در آن هیچ یک از عوامل غیر مربوط کنترل نشوند، ولی ما در این آزمایشها خود را در برابر اثرهای آنها با **تصادفی کردن** محافظت کنیم. یعنی آزمایشها را چنان طرح، یا برنامه‌ریزی، می‌کنیم که تغییرات ناشی از عاملهای غیر مربوط را بتوان تحت عنوان کلی «تصادف» با هم تلفیق کرد. مثلاً می‌توانیم در مثال خود با اختصاص تصادفی پنج قوارهٔ پارچهٔ آغشته، به هر یک از این ماده‌های شوینده، و سپس تعیین ترتیب شستشو و سنجش آنها به تصادف، به مقصود خود نایل شویم. وقتی که همهٔ تغییرات ناشی از عاملهای غیر مربوط کنترل نشده را بتوان به این ترتیب تحت عنوان تغییر تصادفی گنجاند، به این طرح آزمایش، **یک طرح کاملاً تصادفی شده** اطلاق می‌کنیم.

با این حال آشکار است که تصادفی کردن، ما را تنها به گونه‌ای احتمالاتی در مقابل عاملهای غیر مربوط محافظت می‌کند. مثلاً در مثال ما، هر چند نامحتمل است ولی امکان دارد که مادهٔ شویندهٔ A به تصادف به پنج قواره‌ای اختصاص داده شود که اتفاقاً کمتر از همه آغشته باشند، یا اینکه آب در موقع شستن پنج قواره پارچه با مادهٔ B سردتر از سایر اوقات باشد. تا حدودی به

این دلیل است که اغلب سعی می‌کنیم برخی از عاملها را کنترل و بقیه را تصادفی کنیم و به این ترتیب طرحهایی را به کار می‌بریم که بینابین این دو حالت قرین باشند که توصیف کردیم.

برای معرفی مفهوم مهم دیگری در طرح آزمایشها، داده‌های زیر را در نظر می‌گیریم که مربوط به‌زمان لازم (برحسب دقیقه) برای شخصی است که با اتومبیل خود از شنبه تا چهارشنبه با استفاده از چهار مسیر مختلف به سر کار خود می‌رسد.

مسیر ۱: ۲۲، ۲۶، ۲۵، ۲۵، ۳۱
مسیر ۲: ۲۵، ۲۷، ۲۸، ۲۶، ۲۹
مسیر ۳: ۲۶، ۲۹، ۳۳، ۳۰، ۳۳
مسیر ۴: ۲۶، ۲۸، ۲۷، ۳۰، ۳۰

میانگینهای این چهار نمونه عبارت‌اند از ۲۵٫۸، ۲۷٫۰، ۳۰٫۲، و ۲۸٫۲، و چون اختلافهای بین آنها نسبتاً بزرگ است، این استنتاج معقول خواهد بود که اختلافی واقعی بین متوسط زمان لازم برای آنکه شخصی با رانندگی از چهار مسیر مختلف به سر کار خود برسد، وجود دارد. معهذا این امر از تحلیل واریانس یکطرفه نتیجه نمی‌شود، ما مقدار $f = ۲٫۸۰$ را به‌دست می‌آوریم، و چون این مقدار از $f_{۰٫۰۵,۳,۱۶} = ۳٫۲۴$ بیشتر نیست، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

البته، فرض صفر ممکن است درست باشد، ولی ملاحظه کنید که نه تنها اختلافهای قابل ملاحظه‌ای بین چهار میانگین موجود است بلکه بین مقادیر خود نمونه‌ها هم اختلافهای بزرگ وجود دارند. در نمونهٔ اول این مقادیر از ۲۲ تا ۳۱، در نمونهٔ دوم از ۲۵ تا ۲۹، در نمونهٔ سوم از ۲۶ تا ۳۳، و در نمونهٔ چهارم از ۲۶ تا ۳۰ تغییر می‌کنند. علاوه بر آن، در هر نمونه مقدار اول کوچکتر از همه و مقدار آخر بزرگتر از همه است. از مطلب اخیر چنین بر می‌آید که تغییر در داخل نمونه‌ها را می‌توان به‌خوبی ناشی از اختلاف شرایط رانندگی در روزهای مختلف هفته دانست. اگر چنین باشد، تغییرات ناشی از شرایط رانندگی در مجموع مربعات خطای تحلیل واریانس یکطرفه منظور و مخرج آمارهٔ f «متورم» شده و این می‌تواند دلیل آن باشد که چرا نتایج معنی‌دار نبوده‌اند.

برای احتراز از چنین وضعی، می‌توانستیم عامل غیر مربوط را ثابت بگیریم ولی با این کار به‌ندرت به اطلاعاتی که لازم داریم، می‌رسیم. ما در مثال خود، می‌توانستیم مطمئن باشیم که نتایج به شرایط رانندگی روز یکشنبه یا هر روز دیگری قابل اعمال باشند. امکان دیگر آن است که عامل غیر مربوط را عمداً در روی بردی به وسعت لازم تغییر دهیم به‌طوری که بتوان تغییر ناشی از آن را اندازه گرفته و بنابراین از مجموع مربعات خطا حذف کرد. این بدان معنی است که باید آزمایش را طوری طرح کنیم که بتوانیم یک **تحلیل واریانس دوطرفه** انجام دهیم که در آن تغییرات کل داده‌ها به سه جزء افراز شود که به‌ترتیب به تیمارها (در مثال ما، چهار مسیر)، عامل غیر مربوط (در مثال ما، شرایط رانندگی در روزهای مختلف هفته)، و خطای آزمایش یا تصادف نسبت داده شوند.

روشی که پیشنهاد کردیم **بلوک‌بندی** نامیده می‌شود و به روزهای مختلف هفته عنوان **بلوک** اطلاق می‌کنند. در حالت کلی، بلوکها سطوحی هستند که عامل غیر مربوط را در آن سطحها ثابت می‌گیریم، به‌طوری که بتوانیم سهم آن را در مجموع کل تغییرات داده‌ها اندازه بگیریم. اگر هر تیمار

در هر بلوک به تعداد دفعات مساوی ظاهر شود (در مثال ما هر مسیر در هر روز هفته یک بار مورد استفاده قرار گرفته است)، گوییم که طرح آزمایش یک **طرح بلوکی کامل** است. به‌علاوه، اگر تیمارها به‌تصادف در هر بلوک توزیع شوند (در مثال خود، ما چهار مسیر را به‌تصادف بین ۴ شنبه، ۴ یکشنبه، و غیره توزیع می‌کنیم)، گوییم که طرح آزمایش یک **طرح بلوکی تصادفی‌شده** است.

۴.۱۵ تحلیل واریانس دوطرفه

اساساً دو راه مختلف در تحلیل آزمایشهای دو متغیره موجود است و این راهها بستگی به این دارند که آیا متغیرها مستقل‌اند یا **تأثیر متقابل** دارند. برای آنکه منظور خود را از «تأثیر متقابل» روشن کنیم، فرض کنید که یک سازندهٔ لاستیک اتومبیل آجهای مختلف را آزمایش می‌کند و به این نتیجه می‌رسد که یک نوع آنها مناسب جادهٔ خاکی و نوع دیگر مناسب جادهٔ آسفالته است. اگر چنین باشد، گوییم که بین شرایط جاده و طرح آج **تأثیر متقابل** وجود دارد. در این کتاب ما تنها حالتی را که اثر متقابل وجود ندارد، مطالعه می‌کنیم.

برای ارائهٔ نظریهٔ تحلیل واریانس دوطرفه، از اصطلاحاتی که در بخش قبل معرفی شده است، استفاده می‌کنیم و دو متغیر را تیمارها و بلوکها می‌نامیم، بنابراین، به‌بیان دیگر، می‌توانستیم آنها را **عامل $\mathbf{A}$** و **عامل $\mathbf{B}$** یا **سطرها** و **ستونها** بنامیم. به‌عنوان مثال، اگر x_{ij}، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, k$، و $j = ۱, ۲, \ldots, n$، مقادیر n متغیر تصادفی مستقل نرمال با میانگینهای مربوط μ_{ij} و واریانس مشترک $\sigma^۲$ باشند، آرایهٔ

	بلوک ۱	بلوک ۲	$\cdots$	بلوک n
تیمار ۱	$x_{۱۱}$	$x_{۱۲}$	$\cdots$	$x_{۱n}$
تیمار ۲	$x_{۲۱}$	$x_{۲۲}$	$\cdots$	$x_{۲n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
تیمار k	$x_{k۱}$	$x_{k۲}$	$\cdots$	x_{kn}

را در نظر گرفته و مدل تحلیل واریانس دوطرفه (بدون تأثیر متقابل) را به‌ازای $i = ۱, ۲, \cdots, k$ و $j = ۱, ۲, \cdots, n$ به صورت

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

می‌نویسیم. در اینجا μ **میانگین کل** است، **اثرهای تیماری** α_i چنان‌اند که $\sum_{i=۱}^{k} \alpha_i = ۰$، **اثرهای بلوکی** β_j چنان‌اند که $\sum_{j=۱}^{n} \beta_j = ۰$، و e_{ij} مقادیر متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگینهای صفر و واریانس مشترک $\sigma^۲$ هستند. توجه کنید که $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$، و همان‌طور

که خواننده در تمرین ۱۵.۱۵ تحقیق خواهد کرد

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}}{nk}=\mu$$

دو فرض صفری که آزمون خواهیم کرد عبارت‌اند از اینکه اثرهای تیماری همه برابر صفرند و اینکه اثرهای بلوکی همه برابر صفرند، یعنی

$$H_0:\alpha_i=0, \qquad i=1,2,\ldots,k \text{ به‌ازای}$$

و

$$H'_0:\beta_j=0, \qquad j=1,2,\ldots,n \text{ به‌ازای}$$

فرض مقابل H_0 آن است که اثرهای تیماری همه برابر صفر نیستند، و فرض مقابل H'_0 آن است که اثرهای بلوکی همه برابر صفر نیستند. به صورت نمادی

$$H_1:\alpha_i\neq 0 \qquad i \text{ به‌ازای حداقل یک مقدار}$$

و

$$H'_1:\beta_j\neq 0 \qquad j \text{ به‌ازای حداقل یک مقدار}$$

تحلیل دوطرفه، خود مبتنی بر تعمیم زیر از قضیهٔ ۱.۱۵ است که اثبات آن در تمرین ۱۴.۱۵ از خواننده خواسته خواهد شد.

قضیهٔ ۳.۱۵

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_{..})^2=n\cdot\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2+k\cdot\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{.j}-\overline{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_{ij}-\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{j.}+\overline{x}_{..})^2$$

که در آن $\overline{x}_{i.}$ میانگین مشاهدات برای تیمار iام، $\overline{x}_{.j}$ میانگین مشاهدات برای بلوک jام، و $\overline{x}_{..}$ میانگین همهٔ nk مشاهده است.

عبارت سمت چپ اتحاد قضیهٔ ۳.۱۵، یعنی SST مجموع مربعات کل، به‌صورتی است که در صفحهٔ ۵۳۰ تعریف شده است و اولین جملهٔ واقع در سمت راست، SS(Tr)، مجموع

مربعات تیماری است. جملهٔ دوم سمت راست که تغییرات بین $\overline{x}_{.j}$ها را اندازه می‌گیرد، SSB، **مجموع مربعات بلوکی** است، و جملهٔ سوم سمت راست، SSE، مجموع مربعات خطای جدید است. بنابراین داریم

$$\mathrm{SST} = \mathrm{SS(Tr)} + \mathrm{SSB} + \mathrm{SSE}$$

و می‌توان نشان داد که اگر $H_\circ$ درست باشد، آنگاه $\frac{\mathrm{SS(Tr)}}{\sigma^۲}$ و $\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^۲}$ مقادیر متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که دارای توزیع خی‌دو با $k-۱$ و $(n-۱)(k-۱)$ درجهٔ آزادی‌اند. اگر $H_\circ$ درست نباشد، آنگاه SS(Tr) نیز تغییرات بین α_iها را نشان خواهد داد و مطابق قضیهٔ ۱۴.۸ فرض $H_\circ$ را در صورتی رد می‌کنیم که $f_{\mathrm{Tr}} \geq f_{a,k-۱,(n-۱)(k-۱)}$، که در آن

$$f_{\mathrm{Tr}} = \frac{\frac{\mathrm{SS(Tr)}}{(k-۱)\sigma^۲}}{\frac{\mathrm{SSE}}{(n-۱)(k-۱)\sigma^۲}} = \frac{\mathrm{MS(Tr)}}{\mathrm{MSE}}$$

در اینجا و در زیر، میانگین مربعات، دوباره حاصل تقسیم مجموع مربعات مربوط بر درجه‌های آزادی آنها هستند.

به همین نحو، اگر $H'_\circ$ درست باشد، آنگاه $\frac{\mathrm{SSB}}{\sigma^۲}$ و $\frac{\mathrm{SSE}}{\sigma^۲}$ مقادیر متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که دارای توزیع خی‌دو با $n-۱$ و $(n-۱)(k-۱)$ درجهٔ آزادی‌اند. اگر $H'_\circ$ درست نباشد، آنگاه SSB نیز تغییرات بین β_jها را منعکس خواهد کرد، و طبق قضیهٔ ۱۴.۸، $H'_\circ$ را در صورتی که $f_B \geq f_{a,n-۱,(n-۱)(k-۱)}$، رد می‌کنیم که در آن

$$f_B = \frac{\frac{\mathrm{SSB}}{(n-۱)\sigma^۲}}{\frac{\mathrm{SSE}}{(n-۱)(k-۱)\sigma^۲}} = \frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSE}}$$

این نوع تحلیل، **تحلیل واریانس دوطرفه** نامیده می‌شود و جزئیات لازم را معمولاً در جدولی از نوع جدول صفحهٔ بعد، که جدول تحلیل واریانس نامیده می‌شود، نشان می‌دهند.

منبع تغییرات	درجهٔ آزادی	مجموع مربعات	میانگین مربع	f
تیمارها	$k-۱$	SS(Tr)	MS(Tr)	$f_{\mathrm{Tr}} = \frac{\mathrm{MS(Tr)}}{\mathrm{MSE}}$
بلوکها	$n-۱$	SSB	MSB	$f_B = \frac{\mathrm{MSB}}{\mathrm{MSE}}$
خطا	$(n-۱)(k-۱)$	SSE	MSE	
مجموع	$nk-۱$	SST		

برای ساده کردن محاسبات، معمولاً SST و SS(Tr) به کمک فرمولهای قضیهٔ ۲.۱۵ معین می‌شوند، و SSB را می‌توان به کمک فرمول زیر معین کرد، که استخراج آن در تمرین ۱۷.۱۵ از خواننده خواسته خواهد شد.

قضیهٔ ۴.۱۵

$$\mathrm{SSB} = \frac{۱}{k} \cdot \sum_{j=۱}^{n} T_{\cdot j}^{۲} - \frac{۱}{kn} \cdot T_{\cdot\cdot}^{۲}$$

که در آن $T_{\cdot j}$ مجموع مقادیر حاصل برای بلوک jام و $T_{\cdot\cdot}$ مجموع کل همهٔ nk مشاهده است.

در این صورت مقدار SSE را می‌توان با تفریق SS(Tr) و SSB از SST به‌دست آورد.

مثال ۲.۱۵

با مراجعه به مثال صفحهٔ ۵۳۸، که در آن داشتیم

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
مسیر ۱	۲۲	۲۶	۲۵	۲۵	۳۱
مسیر ۲	۲۵	۲۷	۲۸	۲۶	۲۹
مسیر ۳	۲۶	۲۹	۳۳	۳۰	۳۳
مسیر ۴	۲۶	۲۸	۲۷	۳۰	۳۰

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای مسیرهای مختلف (تیمارها) معنی‌دار هستند یا نه، و نیز آیا اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای روزهای مختلف هفته (بلوکها) معنی دارند یا نه.

حل. ۱. $H_۰ : \alpha_i = ۰$ به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$،
$H'_۰ : \beta_j = ۰$ به‌ازای $j = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$،
$H_۱ : \alpha_i \neq ۰$ حداقل به‌ازای یک مقدار i
$H'_۱ : \beta_j \neq ۰$ حداقل به‌ازای یک مقدار j
$\alpha = ۰٫۰۵$ برای هر دو آزمون

۲. فرض صفر را برای تیمارها رد کنید هرگاه $f_{\mathrm{Tr}} \geq ۳٫۴۹$ و فرض صفر را برای بلوکها رد کنید هرگاه $f_{\beta} \geq ۳٫۲۶$ که در آن f_{Tr} و f_B به کمک تحلیل واریانس دوطرفه به‌دست آمده‌اند، و ۳٫۴۹ و ۳٫۲۶، به‌ترتیب مقادیر $f_{۰٫۰۵,۳,۱۲}$ و $f_{۰٫۰۵,۴,۱۲}$ اند.

۳. مجموعها و مجموعهای مربعات مطلوب عبارت‌اند از $T_{۱\cdot} = ۱۲۹$، $T_{۲\cdot} = ۱۳۵$، $T_{۳\cdot} = ۱۵۱$، $T_{۴\cdot} = ۱۴۱$، $T_{\cdot ۱} = ۹۹$، $T_{\cdot ۲} = ۱۱۰$، $T_{\cdot ۳} = ۱۱۳$، $T_{\cdot ۴} = ۱۱۱$،

$k = ۴$ با $T_{.۵} = ۱۲۳$، $T_{..} = ۵۵۶$، و $\sum\sum x^۲ = ۱۵۶۱۰$، و از قرار دادن این مقادیر همراه با $k = ۴$ و $n = ۵$ در فرمولهای قضیهٔ ۲.۱۵ و ۴.۱۵ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\mathrm{SST} &= ۱۵۶۱۰ - \frac{۱}{۲۰}(۵۵۶)^۲ \\
&= ۱۵۳٫۲ \\
\mathrm{SS(Tr)} &= \frac{۱}{۵}(۱۲۹^۲ + ۱۳۵^۲ + ۱۵۱^۲ + ۱۴۱^۲) - \frac{۱}{۲۰}(۵۵۶)^۲ \\
&= ۵۲٫۸ \\
\mathrm{SSB} &= \frac{۱}{۴}(۹۹^۲ + ۱۱۰^۲ + ۱۱۳^۲ + ۱۱۱^۲ + ۱۲۳^۲) - \frac{۱}{۲۰}(۵۵۶)^۲ \\
&= ۷۳٫۲
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
\mathrm{SSE} &= ۱۵۳٫۲ - ۵۲٫۸ - ۷۳٫۲ \\
&= ۲۷٫۲
\end{aligned}$$

بقیهٔ محاسبات در جدول تحلیل واریانس زیر نشان داده شده است.

منبع تغییرات	درجهٔ آزادی	مجموع مربعات	میانگین مجموع‌مربعات	f
تیمارها	۳	۵۲٫۸	$\frac{۵۲٫۸}{۳} = ۱۷٫۶$	$\frac{۱۷٫۶}{۲٫۲۷} = ۷٫۷۵$
بلوکها	۴	۷۳٫۲	$\frac{۷۳٫۲}{۴} = ۱۸٫۳$	$\frac{۱۸٫۳}{۲٫۲۷} = ۸٫۰۶$
خطا	۱۲	۲۷٫۲	$\frac{۲۷٫۲}{۱۲} = ۲٫۲۷$	
مجموع	۱۹	۱۵۳٫۲		

۴. چون $f_{\mathrm{Tr}} = ۷٫۷۵$ از ۳٫۴۹ بیشتر است و $f_B = ۸٫۰۶$ از ۳٫۲۶ بیشتر است، هر دو فرض صفر باید رد شوند. به‌عبارت دیگر، اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای چهار مسیر مختلف معنی‌دار است، و اختلافهای بین میانگینهای حاصل برای روزهای مختلف هفته نیز چنین است. با این حال توجه کنید که نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که مسیر ۱ لزوماً سریعترین است و یا شرایط ترافیک در روزهای چهارشنبه همواره بدترین است. تنها چیزی که ما به کمک این تحلیل نشان داده‌ایم آن است که این اختلافها موجودند، و اگر بخواهیم قدمی فراتر رویم و انگشت روی ماهیت اختلافها بگذاریم، باید یکی از آزمونهای **مقایسه‌های چندگانه** را که مرجعی برای آن در صفحهٔ ۵۶۹، داده شده است، به‌کار بریم. ▲

تمرینها

۱۴.۱۵ از اتحاد

$$\overline{x}_{ij} - \overline{x}_{..} = (\overline{x}_{i.} - \overline{x}_{..}) + (\overline{x}_{.j} - \overline{x}_{..}) + (\overline{x}_{ij} - \overline{x}_{i.} - \overline{x}_{.j} + \overline{x}_{..})$$

برای اثبات قضیهٔ ۳.۱۵ استفاده کنید.

۱۵.۱۵ با مراجعه به نمادگذاری صفحهٔ ۵۴۰ نشان دهید که

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}}{nk}\mu = 0$$

۱۶.۱۵ برای تحلیل واریانس دوطرفه با k تیمار و n بلوک نشان دهید که

$$E\left[\frac{k\cdot\sum_{j=1}^{n}(\overline{\mathrm{X}}_{.j} - \overline{\mathrm{X}}_{..})^2}{n-1}\right] = \sigma^2 + -\frac{k\cdot\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}{n-1}$$

۱۷.۱۵ قضیهٔ ۴.۱۵ را ثابت کنید.

۱۸.۱۵ مربع لاتین یک آرایهٔ مربعی است که در آن حروف (یا هر نماد دیگری) تنها یک بار در هر سطر و یک بار در هر ستون ظاهر می‌شوند. مثلاً مربع زیر یک مربع لاتین ۴ × ۴ است. اگر m سطر یک مربع لاتین را به‌عنوان سطوح یک متغیر، m ستون را به‌عنوان سطوح متغیر دوم، و A، B، C، . . .، را به‌عنوان m «تیمار»، یعنی سطوح متغیر سوم تلقی کنیم، می‌توانیم آزمونهایی دربارهٔ این هر سه متغیر را بر مبنای فقط m^2 مشاهده (مشروط براینکه تأثیر متقابلی موجود نباشد) انجام دهیم. با نشان دادن مشاهدهٔ واقع در سطر iام و ستون jام یک مربع لاتین با $x_{ij(k)}$ (به‌طوری که وقتی i و j معلوم باشند، k که معرف تیمار است، معلوم باشد)،

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

معادلهٔ مربوط به مدل را به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$، $j = 1, 2, \ldots, m$ و $k = 1, 2, \ldots, m$ به‌صورت

$$x_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_i + \tau_k + e_{ij}$$

می‌نویسیم که در آن μ میانگین کل است، **اثرهای سطری** α_i چنان‌اند که $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0$، **اثرهای ستونی** β_j چنان‌اند که $\sum_{j=1}^{m}\beta_j = 0$، **اثرهای تیماری** τ_k چنان‌اند که $\sum_{k=1}^{m}\tau_k = 0$، و e_{ij}

مقادیر متغیرهای تصادفی مستقل نرمال با میانگینهای صفر و واریانس σ^2 هستند. فرض صفری که آزمون خواهیم کرد (در برابر فرضهای مقابل مناسب) عبارت از اینها هستند که اثرهای سطری همه صفرند، اثرهای ستونی همه صفرند و اثرهای تیمار همه صفرند.

(الف) نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}(k)-\overline{x}_{..})^2 = m\cdot\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{..})^2 + m.\sum_{j=1}^{m}(\overline{x}_{.j}-\overline{x}_{..})^2$$
$$+ m\cdot\sum_{k=1}^{m}(\overline{x}_{(k)}-\overline{x}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij(k)}-\overline{x}_{i.}-\overline{x}_{.j}-\overline{x}_{(k)}+2\overline{x}_{..})^2$$

که در آن $\overline{x}_{(k)}$ میانگین همهٔ مشاهدات برای تیمار kام است و سایر میانگینها به‌صورتی هستند که در قضیهٔ ۳.۱۵ تعریف شده‌اند. عبارت سمت چپ اتحاد بالا، SST، مجموع مربعات کل است در حالی که عبارت سمت راست به‌ترتیب عبارت‌اند از SSR، **مجموع مربعات سطری**؛ SSC، **مجموع مربعات ستونی**؛ SS(Tr) مجموع مربعات تیماری؛ و SSE مجموع مربعات خطا.

(ب) یک جدول تحلیل واریانس برای این نوع آزمایش بسازید؛ درجه‌های آزادی برای SSE را با تفریق درجه‌های آزادی SSR، SSC، و SS(Tr) از $m^2 - 1$ که درجه‌های آزادی SST است، معین کنید.

کاربردها

۱۹.۱۵ آزمایشی برای قضاوت دربارهٔ اثر چهار نوع مختلف خرج و سه نوع مختلف موشک‌انداز بر روی برد موشک خاصی به‌عمل آمده است. برمبنای بردهای زیر، برحسب کیلومتر، آزمون کنید که آیا اثری معنی دار ناشی از اختلافهای بین خرجها و آیا اثری معنی‌دار ناشی از اختلافهای بین موشک‌اندازها وجود دارد یا نه.

	خرج ۱	خرج ۲	خرج ۳	خرج ۴
موشک‌انداز X	۴۵٫۹	۵۷٫۲	۵۲٫۲	۴۱٫۷
موشک‌انداز Y	۴۶٫۰	۵۱٫۰	۵۰٫۱	۳۸٫۸
موشک‌انداز Z	۴۵٫۷	۵۶٫۹	۵۵٫۳	۴۸٫۱

از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کنید.

۲۰.۱۵ ارقام زیر محتوای کلسترول، برحسب میلیگرم در هر بسته است که چهار آزمایشگاه برای بسته‌های ۶ اونسی سه غذای کاملاً مشابه به‌دست آورده‌اند.

	غذای A	غذای B	غذای C
آزمایشگاه ۱	۳٫۴	۲٫۶	۲٫۸
آزمایشگاه ۲	۳٫۰	۲٫۷	۳٫۱
آزمایشگاه ۳	۳٫۳	۳٫۰	۳٫۴
آزمایشگاه ۴	۳٫۵	۳٫۱	۳٫۷

یک تحلیل واریانس دوطرفه انجام داده، فرضهای صفر مربوط به آزمایشگاهها و غذاها را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۲۱.۱۵ یک تکنیسین آزمایشگاه، قدرت کنش هر یک از پنج نوع نخ کتان را با استفاده از چهار ابزار اندازه‌گیری مختلف $I_۱$، $I_۲$، $I_۳$، و $I_۴$ اندازه می‌گیرد و نتایج زیر را برحسب اونس به‌دست می‌آورد.

	$I_۱$	$I_۲$	$I_۳$	$I_۴$
نخ ۱	۲۰٫۹	۲۰٫۴	۱۹٫۹	۲۱٫۹
نخ ۲	۲۵٫۰	۲۶٫۲	۲۷٫۰	۲۴٫۸
نخ ۳	۲۵٫۵	۲۳٫۱	۲۱٫۵	۲۴٫۴
نخ ۴	۲۴٫۸	۲۱٫۲	۲۳٫۵	۲۵٫۷
نخ ۵	۱۹٫۶	۲۱٫۲	۲۲٫۱	۲۲٫۱

یک تحلیل واریانس دوطرفه انجام دهید و برای هر دو آزمون، از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کنید.

۲۲.۱۵ داده‌های نمونه‌ای در مربع لاتین زیر (تمرین ۱۸.۱۵ را ببینید)، نمرات امتحان تاریخ عمومی نه دانشجوی دانشگاه از کشورهای مختلف با علاقه‌های شغلی مختلف است.

	ملیت		
	مکزیکی	آلمانی	لهستانی
حقوق	A ۷۵	B ۸۶	C ۶۹
پزشکی	B ۹۵	C ۷۹	A ۸۶
مهندسی	C ۷۰	A ۸۳	B ۹۳

در این جدول A، B، و C سه مدرسی هستند که به نُه دانشجوی دانشگاه درس تاریخ داده‌اند. این داده‌ها را به کمک روش تمرین ۱۸.۱۵ تحلیل و فرضهای زیر را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

(الف) متفاوت بودن مدرسین تأثیری در نمرات ندارد؛

(ب) اختلاف در ملیت تأثیری در نمرات ندارد؛

(ج) اختلاف در رشتهٔ تحصیلی دانشگاهی تأثیری در نمرات ندارد.

۲۳.۱۵ در میان نه نفری که در یک نظرخواهی عمومی مصاحبه شده‌اند، سه نفر اهل شرق آمریکا، سه نفر اهل جنوب آمریکا، و سه نفر اهل غرب آمریکا بوده‌اند. از لحاظ شغلی، سه نفر از آنها معلم، سه نفر حقوقدان، و سه نفر پزشک هستند، و هیچ دو نفری که حرفهٔ واحدی دارند، متعلق به یک قسمت ایالات متحدهٔ آمریکا نیستند. همچنین سه نفر از آنها دموکرات، سه نفر جمهوریخواه، و سه نفر مستقل‌اند، و هیچ دونفری که وابستگی سیاسی یکسانی دارند هم‌شغل نیستند یا به ناحیهٔ واحدی در کشور ایالات متحده تعلق ندارند. اگر یکی از معلمان از شرق کشور و یکی مستقل بوده، معلم دیگر اهل جنوب و جمهوریخواه باشد، و یکی از حقوقدانان اهل جنوب و دموکرات باشد، وابستگی سیاسی پزشکی که اهل غرب است، چیست؟ [راهنمایی: یک مربع لاتین با ۳ $= m$ بسازید (تمرین ۱۸.۱۵ را ببینید.)] این تمرین صورت ساده شده‌ای از مسألهٔ مشهوری است که فیشر[1] در اثر کلاسیکش، طرح آزمایشها، مطرح کرده است.

۵.۱۵ بررسیهای بیشتر

در این فصل برخی از روشها و ایده‌های اساسی تحلیل واریانس و طرح آزمایشها را مختصراً معرفی کرده‌ایم. دامنهٔ این موضوعات، که ارتباط نزدیکی با هم دارند، پهناور است و با نیازهایی که در انجام آزمایشها پیدا می‌شوند، روشهای جدیدی دائماً به وجود می‌آیند.

طرحهایی که مورد بحث قرار دادیم، همه دارای این جنبهٔ خاص‌اند که در آنها مشاهداتی متناظر با همهٔ ترکیبهای ممکن مقادیر (سطوح) متغیرهای موردنظر وجود دارند. برای نشان دادن اینکه چنین امری ممکن است کاملاً غیر عملی یا از لحاظ فیزیکی غیر ممکن باشد، تنها کافی است آزمایشی را در نظر گیریم که در آن می‌خواهیم محصول ۲۵ نوع گندم و در همان حال تأثیر ۱۲ کود مختلف را با هم مقایسه کنیم. برای انجام آزمایشی که در آن هر یک از ۲۵ نوع گندم در ارتباط با هر یک از ۱۲ کود به کار می‌رود، باید ۳۰۰ قطعه زمین را بکاریم و می‌توان به آسانی تصورکرد که یافتن این همه قطعه زمین که برای آنها ترکیب خاک، آبیاری، شیب، ... ، ثابت یا قابل کنترل باشد، تا چه اندازه مشکل است. در نتیجه به طرحهایی نیازمندیم که دربارهٔ پارامترهای مربوط به مدل (هر چند نه همهٔ آنها)، آزمون کردن فرضهایی را بر مبنای آزمایشهایی که از نقطه‌نظر عملی قابل انجام‌اند، مقدور سازند. این مطلب به آنچه اصطلاحاً به **طرحهای بلوکی غیر کامل** موسوم است منجر می‌شود که در مراجع عمومی مربوط به طرحهای آزمایشی که در آخر فصل فهرست شده‌اند، مورد بحث قرار می‌گیرند.

پیچیدگیهای بیشتر وقتی پیش می‌آیند که متغیرهای غیر مربوطی موجود باشند که بتوان آنها را اندازه گرفت ولی نتوان آنها را کنترل کرد. مثلاً، در مقایسهٔ انواع گوناگون «ماشینهای تعلیم» می‌توان ازکسانی استفاده کرد که همه بهرهٔ هوشی یکسان داشته باشند ولی دست‌کم بتوان بهرهٔ هوشی آنها را اندازه گرفت. در چنان وضعی می‌توانیم از یک مدل **تحلیل کوواریانس** مانند

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta y_{ij} + e_{ij}$$

1. R. A. Fisher

استفاده کنیم که با مدل تحلیل واریانس یکطرفه از آن جهت تفاوت دارد که ما جملهٔ βy_{ij} را به آن اضافه کرده‌ایم که در آن y_{ij} بهره‌های هوشی هستند که می‌توان آنها را معین کرد. توجه کنید که در این مدل، برآورد β اساساً یک مسألهٔ رگرسیون است.

مشکلاتی دیگر وقتی پیش می‌آیند که پارامترهای α_i و β_j در مدل تحلیل واریانس ثابت نبوده بلکه مقادیر متغیرهای تصادفی باشند. چنین وضعی مثلاً موقعی پیش می‌آید که ۲۵ نوع گندم و ۱۲ نوع کود موجود باشند و ما به تصادف، مثلاً شش نوع گندم و سه نوع کود را برای منظور کردن در آزمایش انتخاب کنیم.

اینها تنها برخی از تعمیمهای روشهایی‌اند که در این فصل ارائه کرده‌ایم؛ جزئیات آنها در کتابهای درسی عمومی دربارهٔ تحلیل واریانس و طرح آزمایشها که در زیر فهرست شده‌اند، مورد بحث قرار گرفته‌اند.

مراجع

برهانی از استقلال متغیرهای خی‌دویی را که مقادیر آنها، مثل SS(Tr)، SSE در تحلیل واریانس یکطرفه، مجموع مربعات مختلف در تحلیل واریانس را تشکیل می‌دهند، می‌توان در کتاب زیر یافت.

SCHEFFÉ, H., *The Analysis of Variance*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1959,

بحثی از آزمونهای مقایسهٔ چندگانهٔ مختلف در کتاب زیر داده شده است

FEDERER, W. T., *Experimental Design, Theory and Application*. New York: Macmillan Publishing Co., Inc., 1955.

کتابهای زیر برخی از کتابهای درسی عمومی دربارهٔ تحلیل واریانس و طرح آزمایشها هستند:

ANDERSON, V. L., and MCLEAN, R. A., *Design of Experiments: A Realistic Approach*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1974,

COCHRAN, W. G., and COX, G. M., *Experimental Design*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1957,

FINNEY, D. J., *An Introduction to the Theory of Experimental Design*. Chicago: University of Chicago Press, 1960,

GUENTHER, W. C., *Analysis of Variance*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964,

HICKS, C. R., *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*, 2nd ed. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973,

MONTGOMERY, D. C., *Design and Analysis of Experiments*, 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991,

SNEDECOR, G. W., and COCHRAN, W. G., *Statistical Methods*, 8th ed. Ames, Iowa: Iowa University Press, 1989.

۱۶

آزمونهای ناپارامتری

۱.۱۶ مقدمه

در فصل ۱۰، مفهوم نیرومندی را در ارتباط با مسائل برآورد، معرفی کردیم. اینک این مفهوم را به آزمون فرضها تعمیم می‌دهیم که نیرومند نامیده می‌شوند هرگاه توزیعهای نمونه‌گیری آمارهٔ آزمون، در صورت تخلف از فرضهای زمینه‌ای، تحت تأثیر قرار نگیرند.

در ارتباط با آزمونهای فرضها، دانستن این امر به‌ویژه اهمیت دارد که آیا تخلف از فرضهای زمینه‌ای بر سطح معنی‌دار بودن تأثیر می‌گذارد یا خیر. هم چنان که در بخش ۵.۱۲ دیدیم، هر نوع مقایسهٔ تابعهای توان دو آزمون یا بیشتر، مستلزم آن است که سطحهای معنی‌دار بودن برابر باشند؛ و اگر چنین نشود، مقایسه اعتباری ندارد. مثلاً آزمون یک نمونه‌ای tی بخش ۳.۱۳ مستلزم آن است

که نمونه از جامعهٔ نرمال استخراج شده باشد. بنابراین، وقتی جامعه«کاملاً نرمال» نیست ـــ فرضاً در صورتی که زنگ شکل باشد اما کاملاً متقارن نباشد ـــ چه اتفاقی می‌افتد؟ شبیه‌سازیهای کامپیوتری نشان داده‌اند که با اینکه جامعه‌ای ممکن است تا حدی از نرمال بودن انحراف داشته باشد، اغلب اوقات سطح معنی‌دار بودن به مقدار از پیش تعیین شدهٔ α نزدیک خواهد بود.

مثالهای زیر نشان می‌دهند که چگونه تخلف از فرضهای زمینه‌ای دربارهٔ یک جامعه، ممکن است بر سطح معنی‌دار بودن تأثیر گذارد. فرض کنید که می‌خواهیم فرض صفر $\mu = \mu_{\circ}$ را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنیم که در آن μ میانگین جامعه‌ای نرمال با انحراف معیار معلوم σ است، امّا احتمال قابل توجهی (مثلاً یک به ۵۰) وجود دارد که یکی از مقادیر، نادرست ثبت شده باشد. بنابراین در ارتباط با این آزمون که در مثال ۱.۱۳ تشریح شده است، از این فرض تخلف می‌کنیم که با نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نرمال سروکار داریم. اگر یکی از مقادیر مثال ۱.۱۳ نادرست ثبت شده بود، مثلاً ۷٫۴۵۲ اونس به‌جای ۷٫۹۵۲ اونس، میانگین وزن ۲۵ بستهٔ شیرینی به‌اندازهٔ

$$\frac{۷٫۹۵۲ - ۷٫۴۵۲}{۲۵} = ۰٫۰۲۰$$

اونس کاهش می‌یافت، و z از ۲٫۴۸ به ۲٫۲۲ کاهش پیدا می‌کرد، و Pـمقدار متناظر از ۰٫۰۰۴۶ به ۰٫۰۲۶۴ افزایش می‌یافت. چون Pـمقدار جدید از ۰٫۰۲۵ بیشتر است، فرض صفر را دیگر نمی‌توان رد کرد؛ این مطلب نشان می‌دهد که چگونه Pـمقدارها، و بنابراین سطح معنی‌دار بودن بر اثر امکان ثبت نادرست داده‌ها، تحت تأثیر قرار می‌گیرند.

حال فرض کنید که در مسأله‌ای از نوع مسألهٔ بالا، σ مجهول باشد به‌طوری که شیوهٔ رایج، آزمون یک نمونه‌ای t باشد که در مثال ۳.۱۳تشریح شد. در این صورت، خطایی در ثبت یک مقدار، علاوه بر میانگین نمونه‌ای، انحراف معیار نمونه‌ای را نیز تحت تأثیر قرار خواهد داد که، به‌ترتیب، در مخرج و صورت آمارهٔ آزمون ظاهر می‌شوند. به‌طوری که در تمرین ۱.۱۶، برای حالتی خاص، تشریح شده است، این کار اغلب مقداری برای t به‌دست خواهد داد که به ۱+ یا ۱− نزدیکتر خواهد بود، و بنابراین، رد فرض صفر را مشکلتر خواهد کرد. به‌عبارت دیگر، با توجه به خطر چنین خطایی، سطح معنی‌دار بودن ممکن است بسیار کمتر از مقدار از پیش در نظر گرفته شدهٔ α باشد. این مطلب در تمرینهای ۱۶.۱۳ و۱۷.۱۳ صفحهٔ ۴۵۰ نیز تشریح شده است.

چون وضعیتهای زیادی موجودند که در آنها با سؤالات جدی دربارهٔ نیرومند بودن آزمونهای فرضها، به‌ویژه در ارتباط با فرض نرمال بودن روبه‌رو می‌شویم، آماردانها روشهای بدیلی به‌وجود آورده‌اند که به فرضهای کمتر نیاز دارند، و گاهی به‌هیچ فرضی، نیاز ندارند. این آزمونها، عموماً آزمونهای **ناپارامتری** نامیده می‌شوند؛ این آزمونها، شامل آزمونهای **آزاد توزیع** (که در آن هیچ فرضی دربارهٔ جامعه، بجز اینکه شاید پیوسته باشند، نمی‌کنیم) و نیز شامل آزمونهایی هستند که تنها به این معنی ناپارامتری‌اند که توجهی به پارامترهای خاص جامعه‌های مفروض نداریم.

صرف‌نظر از این واقعیت که روشهای ناپارامتری را می‌توان تحت شرایطی عامتر از روشهای استانداردی به کاربرد که جانشین آنها می‌شوند، روشهای ناپارامتری گیرایی شهودی هم دارند؛ یعنی آنها را می‌توان به‌آسانی توضیح داد و به‌آسانی فهمید. به‌علاوه، در بسیاری از روشهای ناپارامتری بار محاسباتی چنان سبک است که به آنها عنوان تکنیکهای «تند و آسان» یا «میان‌بر» داده می‌شود. تا حدی به این دلایل است که روشهای ناپارامتری بسیار مقبول واقع شده‌اند و نوشته‌های جامعی به نظریه و کاربرد آنها اختصاص یافته‌اند.

عیب عمدهٔ روشهای ناپارامتری آن است که ممکن است آنها با اتلاف اطلاعات همراه بوده و بنابراین کارآیی کمتری نسبت به تکنیکهای استانداردی داشته باشند که جانشین آنها می‌شوند. مع‌هذا باید توجه شود که در چنین مقایسه‌های کارآیی معمولاً فرض می‌کنند که شرایط زیربنایی روشهای استاندارد برآورده می‌شوند و بنابراین گرایش به آن دارند که ارزش واقعی روشهای ناپارامتری را، وقتی بحث از نیرومندی است، کم قلمداد کنند. به‌طورکلی، کلاً درست است که هرچه کمتر فرض کنیم، کمتر می‌توانیم از مجموعه‌ای از داده‌ها استنباط کنیم، اما این هم درست است که هر چه کمتر فرض کنیم، حوزهٔ کاربرد روش خود را بیشتر گسترش می‌دهیم.

۲.۱۶ آزمون علامت

آزمون علامت اغلب به‌عنوان بدیلی ناپارامتری برای آزمون tی یک نمونه‌ای به‌کار می‌رود که در آن فرض صفر $\mu = \mu_0$ را در برابر فرض مقابل مناسبی آزمون می‌کنیم. برای آزمون علامت، صرفاً فرض می‌کنیم که جامعهٔ مورد نمونه‌گیری پیوسته و متقارن است. فرض می‌کنیم که جامعه پیوسته است به‌طوری که احتمال به‌دست آوردن مقداری برابر μ_0، صفر باشد، و اگر فرض صفر را به $\tilde{\mu} = \mu_0$ تغییر دهیم که در آن $\tilde{\mu}$ میانهٔ جامعه است، حتی به فرض تقارن نیز نیازی نداریم.

در آزمون علامت به‌جای هر مقدار نمونه‌ای بیشتر از μ_0 یک علامت بعلاوه و به‌جای هر مقدار نمونه‌ای کوچکتر از μ_0 یک علامت منها قرار می‌دهیم و سپس این فرض صفر را آزمون می‌کنیم که تعداد علامتهای بعلاوه، مقدار یک متغیر تصادفی است که دارای توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای n (عدهٔ کل علامتهای بعلاوه یا منها) و $\theta = \frac{1}{2}$ است. بنابراین فرض مقابل دوطرفهٔ $\mu \neq \mu_0$ به‌صورت $\theta \neq \frac{1}{2}$، و فرضهای مقابل یکطرفهٔ $\mu < \mu_0$ و $\mu > \mu_0$ به‌ترتیب به‌صورت $\theta < \frac{1}{2}$ و $\theta > \frac{1}{2}$ درمی‌آیند. اگر یک مقدار نمونه‌ای واقعاً برابر μ_0 باشد، که وقتی با داده‌های گرد شده سر و کار داریم، حتی اگر جامعه پیوسته باشد احتمال غیر صفر دارد، صرفاً آن را کنار می‌گذاریم.

برای انجام یک آزمون علامت یک نمونه‌ای وقتی نمونه خیلی کوچک باشد، مستقیماً به یک جدول احتمالهای دو جمله‌ای مانند جدول I مراجعه می‌کنیم؛ وقتی نمونه بزرگ باشد، از تقریب نرمال برای توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌نماییم.

مثال ۱.۱۶

اعداد زیر اندازه‌هایی از قدرت مقاومت نوعی معین از نوارهای کتانی دو اینچی بر حسب پوندند:

۱۶۳	۱۶۵	۱۶۰	۱۸۹	۱۶۱	۱۷۱	۱۵۸	۱۵۱	۱۶۹	۱۶۲
۱۶۳	۱۳۹	۱۷۲	۱۶۵	۱۴۸	۱۶۶	۱۷۲	۱۶۳	۱۸۷	۱۷۳

از آزمون علامت استفاده کرده فرض صفر $\mu = ۱۶۰$ را در برابر فرض مقابل $\mu > ۱۶۰$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید.

حل.
$$H_0 : \mu = ۱۶۰$$
$$H_1 : \mu > ۱۶۰$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

'۲. از آمارۀ آزمون X، تعداد علامتهای بعلاوۀ مشاهده شده، استفاده کنید.

'۳. با گذاشتن یک علامت بعلاوه به‌جای هر مقدار بزرگتر از ۱۶۰ و یک علامت منها به‌جای هر مقدار کوچکتر از ۱۶۰، و کنار گذاشتن هر مقداری که دقیقاً برابر ۱۶۰ است، به‌دست می‌آوریم

$$+ + + + + - - + + + - + + - + + + + +$$

به‌طوری که $n = ۱۹$ و $x = ۱۵$، از جدول I برای $\theta = \frac{۱}{۲}$، مقدار $P(X \geq ۱۵) = ۰٫۰۰۹۶$ را به‌دست می‌آوریم.

'۴. چون Pـمقدار، ۰۰۹۶ر۰، کمتر از ۰۵ر۰ است، فرض صفر را باید رد کرد و نتیجه می‌گیریم که میانگین قدرت مقاومت نوار مفروض از ۱۶۰ پوند بیشتر است. ▲

مثال ۲.۱۶

داده‌های زیر، برحسب تن، مقادیر اکسیدسولفوری است که از یک کارخانۀ صنعتی بزرگ در ۴۰ روز در هوا پخش می‌شود:

۱۷	۱۵	۲۰	۲۹	۱۹	۱۸	۲۲	۲۵	۲۷	۹
۲۴	۲۰	۱۷	۶	۲۴	۱۴	۱۵	۲۳	۲۴	۲۶
۱۹	۲۳	۲۸	۱۹	۱۶	۲۲	۲۴	۱۷	۲۰	۱۳
۱۹	۱۰	۲۳	۱۸	۳۱	۱۳	۲۰	۱۷	۲۴	۱۴

از آزمون علامت استفاده کرده، فرض صفر $\mu = ۲۱٫۵$ را در برابر فرض مقابل $\mu < ۲۱٫۵$ در سطح معنی‌دار بودن ۰۱ر۰ آزمون کنید.

حل. ۱.
$$H_0 : \mu = ۲۱٫۵$$
$$H_1 : \mu < ۲۱٫۵$$
$$\alpha = ۰٫۰۱$$

۲. فرض صفر را رد کنیم هرگاه $z \leq -z_{۰٫۰۱} = -۲٫۳۳$، که در آن

$$z = \frac{x - n\theta}{\sqrt{n\theta(۱ - \theta)}}$$

با $\theta = \frac{۱}{۲}$، و x تعداد علامتهای بعلاوه است (مقادیر بزرگتر از ۲۱٫۵).

۳. چون $n = ۴۰$ و $x = ۱۶$، به‌دست می‌آوریم، $n\theta = ۴۰ \times \frac{۱}{۲} = ۲۰$

$$\sqrt{n\theta(۱-\theta)} = \sqrt{۴۰(۰٫۵)(۰٫۵)} = ۳٫۱۶$$

بنابراین

$$z = \frac{۱۶ - ۲۰}{۳٫۱۶} = -۱٫۲۶$$

۴. چون $z = -۱٫۲۶$ بزرگتر از $-۲٫۳۳$ است، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد. ▲

از آزمون علامت همچنین می‌توان در مواقعی که با داده‌های زوج شده نظیر تمرینهای ۲۸.۱۳ و ۲۹.۱۳ سروکار داریم، استفاده کرد. در چنین مسائلی، به‌جای هر زوج مقادیر نمونه‌ای، یک علامت بعلاوه قرار می‌دهیم در صورتی که تفاضل بین مشاهده‌های زوج شده مثبت باشد (یعنی، اگر مقدار اول بزرگتر از مقدار دوم باشد) و به‌جای آنها یک علامت منها قرار می‌دهیم اگر تفاضل بین مشاهده‌های زوج شده منفی باشد (یعنی، اگر اولین مقدار کوچکتر از مقدار دوم باشد) و اگر تفاضل صفر باشد، آن زوج را کنار می‌گذاریم. برای آزمون این فرض صفر که دو جامعهٔ پیوسته و متقارن مورد نمونه‌گیری، دارای میانگینهای برابرند، می‌توانیم از آزمون علامت استفاده کنیم که، در ارتباط با این نوع مسأله، **آزمون علامت نمونه‌های زوجی** نامیده می‌شود. وقتی از آزمون علامت مانند مثالهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ استفاده شود، آن را **آزمون علامت یک نمونه‌ای** می‌نامند.

مثال ۳.۱۶

برای تعیین میزان کارآیی سیستم کنترل ترافیک جدیدی، تعداد تصادفهایی را که در ۱۲ تقاطع خطرناک در طول چهار هفته قبل و بعد از نصب سیستم جدید رخ داده‌اند مشاهده کرده‌اند و داده‌های زیر را به‌دست آورده‌اند.

۳ و ۱، ۵ و ۲، ۲ و ۰، ۳ و ۲، ۳ و ۲، ۳ و ۰

۰ و ۲، ۴ و ۳، ۱ و ۳، ۶ و ۴، ۴ و ۱، ۱ و ۰

از آزمون علامت نمونه‌های زوجی استفاده کرده، این فرض صفر را آزمون کنید که سیستم کنترل جدید در سطح $\alpha = ۰٫۰۵$ کارآ نیست. (جامعه‌های مورد نمونه‌گیری پیوسته نیستند، ولی این موضوع مهمی نیست چون تفاضلهای صفر را کنار گذاشته‌ایم.)

حل. ۱. $H_۰ : \mu_۱ = \mu_۲$

$H_۱ : \mu_۱ > \mu_۲$

$\alpha = ۰٫۰۵$

۲. از آمارهٔ آزمون X، تعداد علامتهای بعلاوهٔ مشاهده شده، استفاده می‌کنیم.

۳. با قرار دادن یک علامت بعلاوه به‌جای هر تفاضل مثبت و یک علامت منها به‌جای هر تفاضل منفی، به‌دست می‌آوریم

$$++++++--+-+++$$

به‌طوری که $n = ۱۲$، $x = ۱۰$. از جدول I برای $\theta = \frac{۱}{۲}$ مقدار $P(X \geq ۱۰) = ۰٫۰۱۹۲$ را به‌دست می‌آوریم.

۴. چون Pـ‌مقدار، ۰٫۰۱۹۲، کمتر از ۰٫۰۵ است، فرض صفر را باید رد کرد و نتیجه می‌گیریم که سیستم کنترل ترافیک جدید در تقلیل تصادفات در تقاطعهای خطرناک مؤثر است. ▲

۳.۱۶ آزمون رتبهٔ علامت‌دار

به‌طوری که در بخش ۲.۱۶ دیدیم، اجرای آزمون علامت بسیار ساده است، ولی چون در حالت یک نمونه‌ای، تنها از علامتهای تفاضلهای بین مشاهدات و μ_0 و در حالت نمونهٔ زوج شده از علامتهای تفاضلهای بین زوجهای مشاهدات استفاده می‌کنیم، این امر منجر به از بین رفتن اطلاعات می‌شود. آزمون ناپارامتری بدیل، یعنی آزمون **رتبهٔ علامت‌دار ویلکاکسن**[1] کمتر باعث اتلاف اطلاعات می‌شود، زیرا بزرگی تفاضلها را هم به حساب می‌آورد. در این آزمون، تفاضلها را بدون توجه به علامتهای آنها رتبه‌بندی می‌کنیم، به کوچکترین مقدار تفاضل از لحاظ قدر مطلق رتبهٔ ۱، به دومین مقدار تفاضل از لحاظ قدر مطلق رتبهٔ ۲، ... و به بزرگترین مقدار تفاضل از لحاظ قدر مطلق رتبهٔ n را اختصاص می‌دهیم. تفاضلهای صفر را باز هم کنار می‌گذاریم و اگر قدر مطلق دو یا چند تفاضل یکسان باشند به هر یک از آنها میانگین رتبه‌هایی را که توأماً دارند، تخصیص می‌دهیم. در این صورت آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر T^+، مجموع رتبه‌هایی که به تفاضلهای مثبت اختصاص داده‌ایم، T^-، مجموع رتبه‌های تفاضلهای منفی، $T^+ - T^-$، یا $T = \min(T^+,\ T^-)$ مبتنی است. چون

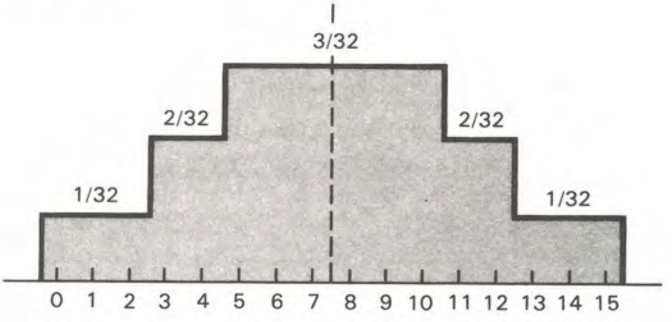
$$T^+ + T^- = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

آزمونهای حاصل همه با هم معادل‌اند. (توجه کنید که از این نماد سنتی، با وجود مغایرت آن با رسم رایج استفاده از حروف بزرگ برای متغیرهای تصادفی و حروف کوچک نظیر برای مقادیر آنها، استفاده می‌کنیم. با این عمل، از مشتبه شدن آماره‌هایی که در اینجا به‌کار برده‌ایم و آماره‌های tی فصل ۱۳ جلوگیری می‌شود.)

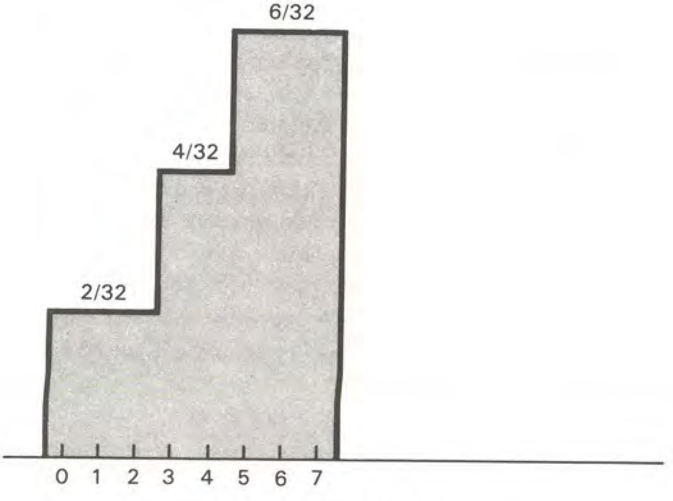
چون مجموع T^+ و T^- همواره $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است و هر دوی آنها مقادیر متغیرهایی‌اند که مقدارهای خود را در بازهٔ از ۰ تا $\frac{n(n+۱)}{۲}$ اختیار می‌کنند و توزیعهایی دارند که حول $\frac{n(n+۱)}{۴}$ متقارن‌اند، می‌توانیم رابطهٔ بین توزیعهای متغیرهای تصادفی متناظر با T^+، T^-، و T را به‌صورت شکل ۱.۱۶ برای $n = ۵$، نمایش دهیم.

بسته به‌فرض مقابل، آزمون رتبهٔ علامت‌دار را بر اساس T، T^+، یا T^- بنا می‌کنیم با این

1. Wilcoxon



توزیع متغیر تصادفی متناظر با T^+ یا T^-



توزیع متغیر تصادفی متناظر با T

شکل۱.۱۶ توزیعهای متغیرهای تصادفی متناظر با T^+، T^- و T برای $n = ۵$

مفروضات که فرضهای صفر، همان فرضهای بخشهای ۱.۱۶ و ۲.۱۶ باشند. با این حال باید مواظب باشیم که از آمارهٔ صحیح و مقدار بحرانی صحیح، به‌صورتی که در جدول زیر خلاصه شده است و در آن سطح معنی‌دار بودن در هر یک از حالتها α است، استفاده کنیم.

فرض صفر را رد کنید هرگاه	فرض مقابل
$T \leq T_\alpha$	$\mu \neq \mu_۰$
$T^- \leq T_{۲\alpha}$	$\mu > \mu_۰$
$T^+ \leq T_{۲\alpha}$	$\mu < \mu_۰$

مقادیر بحرانی ستون سمت راست این جدول، T_α یا $T_{۲\alpha}$، بزرگترین مقدارهایی هستند که برای آنها

Pـمقدار متناظر، به‌ترتیب از α و 2α تجاوز نمی‌کند. می‌توان آنها را از جدول IX، برای مقادیر n نابیشتر از ۲۵ به‌دست آورد. توجه کنید که از همین مقدارهای بحرانی می‌توان برای آزمونهایی در سطح بحرانی مختلف، بسته به اینکه فرض مقابل یک یا دوطرفه باشد، استفاده کرد. مثلاً، می‌توان از $T_{۰٫۰۲}$ به‌عنوان مقدار بحرانی در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۲، زمانی که فرض مقابل دوطرفه است و به‌عنوان مقدار بحرانی در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱، زمانی که فرض مقابل یک‌طرفه است، استفاده کرد. این مطلب ممکن است موجب اشتباه شود، امّا در برخی کتابهای درسی مقدارهای بحرانی به همین صورت جدولبندی شده‌اند.

مثال ۴.۱۶

در زیر اندازه‌های حاصل از ۱۵ بار اندازه‌گیری درجهٔ اوکتان نوع خاصی بنزین آمده است: ۹۷٫۵، ۹۵٫۲، ۹۷٫۳، ۹۶٫۰، ۹۶٫۸، ۱۰۰٫۳، ۹۷٫۴، ۹۵٫۳، ۹۳٫۲، ۹۹٫۱، ۹۶٫۱، ۹۷٫۶، ۹۸٫۲، ۹۸٫۵، و ۹۴٫۹. از آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌داری ۰٫۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا میانگین درجهٔ اوکتان این نوع بنزین ۹۸٫۵ است یا خیر.

حل. ۱.

$$H_0 : \mu = ۹۸٫۵$$
$$H_1 : \mu \neq ۹۸٫۵$$
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲. فرض صفر را رد می‌کنیم هرگاه $T \le T_{۰٫۰۵}$ که در آن باید $T_{۰٫۰۵}$ را برای مقدار مناسب n از جدول IX پیدا کرد.

۳. با تفریق ۹۸٫۵ از هر یک از مقادیر و رتبه‌بندی تفاضلها، بدون توجه به علامت آنها، به‌دست می‌آوریم

اندازه	تفاضل	رتبه
۹۷٫۵	−۱٫۰	۴
۹۵٫۲	−۳٫۳	۱۲
۹۷٫۳	−۱٫۲	۶
۹۶٫۰	−۲٫۵	۱۰
۹۶٫۸	−۱٫۷	۷
۱۰۰٫۳	۱٫۸	۸
۹۷٫۴	−۱٫۱	۵
۹۵٫۳	−۳٫۲	۱۱
۹۳٫۲	−۵٫۳	۱۴
۹۹٫۱	۰٫۶	۲
۹۶٫۱	−۲٫۴	۹
۹۷٫۶	−۰٫۹	۳
۹۸٫۲	−۰٫۳	۱
۹۸٫۵	۰٫۰	
۹۴٫۹	−۳٫۶	۱۳

به‌طوری که $T^- = ۴ + ۱۲ + ۶ + ۱۰ + ۷ + ۵ + ۱۱ + ۱۴ + ۹ + ۳ + ۱ + ۱۳ = ۹۵$، $T^+ = ۸ + ۲ = ۱۰$ و $T = ۱۰$. از جدول IX برای $n = ۱۴$ مقدار $T_{۰٫۰۵} = ۲۱$ را به‌دست می‌آوریم.

۴. چون $T = ۱۰$ کمتر از $T_{۰٫۰۵} = ۲۱$ است، فرض صفر را باید رد کرد. میانگین درجهٔ اوکتان بنزین نوع مفروض، ۹۸٫۵ نیست. ▲

وقتی با داده‌های زوج‌شده سروکار داریم، می‌توان از آزمون رتبهٔ علامت‌دار نیز به‌جای آزمون علامت نمونه‌های زوج شده استفاده کرد. در این حالت، فرض صفر $\mu_۱ = \mu_۲$ را با استفاده از ملاک آزمونی که در جدول صفحهٔ ۵۵۵ داده شده است آزمون می‌کنیم، بجزاینکه فرضهای مقابل حالا عبارت‌اند از $\mu_۱ \neq \mu_۲$، $\mu_۱ > \mu_۲$ یا $\mu_۱ < \mu_۲$ و نه $\mu \neq \mu_۰$، $\mu > \mu_۰$، یا $\mu < \mu_۰$.

برای $n \geq ۱۵$، این فرض موجه است که T^+ مقداری از یک متغیر تصادفی است که تقریباً دارای توزیع نرمال است. برای اجرای آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای این فرض، به نتایج زیر نیاز داریم که صرف‌نظر از اینکه فرض صفر $\mu = \mu_۰$ یا $\mu_۱ = \mu_۲$ باشد، قابل استفاده است.

قضیهٔ ۱.۱۶ تحت مفروضات لازم در آزمون رتبهٔ علامت‌دار، T^+، مقداری از یک متغیر تصادفی است با میانگین

$$\mu = \frac{n(n+۱)}{۴}$$

و واریانس

$$\sigma^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲۴}$$

برهان. فرضهای صفر آزمونهای رتبهٔ علامت‌دار یک نمونه‌ای و نمونهٔ زوج شده را برحسب رتبه‌ها و تفاضلهای علامت‌دار می‌توان چنین بیان کرد: برای هر رتبه، این احتمالها که رتبه‌ها به یک تفاضل مثبت یا یک تفاضل منفی اختصاص داده شوند، برابر $\frac{۱}{۲}$اند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$T^+ = ۱ \cdot x_۱ + ۲ \cdot x_۲ + \cdots + n \cdot x_n$$

که در آن $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n مقادیر متغیرهای تصادفی مستقلی‌اند که دارای توزیع برنولی با $\theta = \frac{۱}{۲}$ هستند. چون طبق قضیهٔ ۲.۵ با $n = ۱$، به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $E(X_i) = \theta = \frac{۱}{۲}$ و $\mathrm{var}(X_i) = \theta(۱-\theta) = \frac{۱}{۴}$، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mu &= ۱\cdot\frac{۱}{۲}+۲\cdot\frac{۱}{۲}+\cdots+n\cdot\frac{۱}{۲}\\ &= \frac{۱+۲+\cdots+n}{۲}\\ &= \frac{n(n+۱)}{۴}\end{aligned}$$

همچنین، بنابر فرع قضیهٔ ۴.۱۴، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\sigma^۲ &= ۱^۲\cdot\frac{۱}{۴}+۲^۲\cdot\frac{۱}{۴}+\cdots+n^۲\cdot\frac{۱}{۴}\\ &= \frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲}{۴}\\ &= \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲۴}\end{aligned}$$

در اینجا از فرمولهای آشنای مجموع و مجموع مربعات n عدد صحیح مثبت استفاده کرده‌ایم که در پیوست پایان کتاب ثابت شده‌اند. ■

توجه کنید که، بنابر تقارن، نتایج قضیهٔ ۱.۱۶، در صورتی که T^- را به‌جای T^+ قرار دهیم، معتبر می‌مانند.

مثال ۵.۱۶

در زیر وزن ۱۶ نفر بر حسب پوند که به مدت چهار هفته تحت رژیم لاغری خاصی قرار داشته‌اند، قبل و بعد از این مدت داده شده است.

قبل	بعد
۱۴۷٫۰	۱۳۷٫۹
۱۸۳٫۵	۱۷۶٫۲
۲۳۲٫۱	۲۱۹٫۰
۱۶۱٫۶	۱۶۳٫۸
۱۹۷٫۵	۱۹۳٫۵
۲۰۶٫۳	۲۰۱٫۴
۱۷۷٫۰	۱۸۰٫۶
۲۱۵٫۴	۲۰۳٫۲
۱۴۷٫۷	۱۴۹٫۰
۲۰۸٫۱	۱۹۵٫۴
۱۶۶٫۸	۱۵۸٫۵
۱۳۱٫۹	۱۳۴٫۴
۱۵۰٫۳	۱۴۹٫۳
۱۹۷٫۲	۱۸۹٫۱
۱۵۹٫۸	۱۵۹٫۱
۱۷۱٫۷	۱۷۳٫۲

از آزمون رتبهٔ علامت‌دار استفاده کرده، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ مؤثر بودن این رژیم لاغری را آزمون کنید.

حل. ۱.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$
$$\alpha = 0.05$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \geq z_{0.05} = 1.645$ که در آن

$$z = \frac{T^+ - \mu}{\sigma}$$

و μ و σ^2 در فرمولهای قضیهٔ ۱.۱۶ داده شده‌اند.

۳. تفاضلهای بین زوجهای نظیر عبارت‌اند از ۹٫۱، ۷٫۳، ۱۳٫۱، −۲٫۲، ۴٫۰، ۴٫۹، −۳٫۶، ۱۲٫۲، −۱٫۳، ۱۲٫۷، ۸٫۳، −۵٫۲، ۱٫۰، ۸٫۱، ۰٫۷، −۱٫۵، و اگر مقدار مطلق آنها را رتبه‌بندی کنیم، معلوم می‌شود که تفاضلهای مثبت، رتبه‌های ۱۳، ۱۰، ۱۶، ۸، ۹، ۱۴، ۱۵، ۱۲، ۲، ۱۱، و ۱ را اشغال می‌کنند. بنابراین

$$\begin{aligned} T^+ &= 13 + 10 + 16 + 8 + 9 + 14 + 15 + 12 + 2 + 11 + 1 \\ &= 111 \end{aligned}$$

چون $\mu = \frac{16 \cdot 17}{2} = 68$ و $\sigma^2 = \frac{16 \cdot 17 \cdot 33}{24} = 374$، به‌دست می‌آوریم

$$z = \frac{111 - 68}{\sqrt{374}} = 2.22$$

۴. چون $z = 2.22$ بیشتر از $z_{0.05} = 1.645$ است، فرض صفر باید رد شود، و نتیجه می‌گیریم که رژیم غذایی واقعاً در کاهش وزن مؤثر بوده است. ▲

تمرینها

۱.۱۶ نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ $n = 2$ برای آزمون اینکه متغیر تصادفی نرمالی دارای میانگین $\mu = 0$ است یا نه، استخراج شده است.

(الف) اگر مقادیر مشاهده شدهٔ نمونه، x_1 و x_2 با $x_1 > x_2 > 0$ باشند، نشان دهید که می‌توان آمارهٔ یک نمونه‌ای t را به‌صورت زیر نوشت.

$$t = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$$

(ب) اگر در موقع ثبت $x_۱$، ممیز اشتباهاً یک رقم به راست منتقل شود، عبارتی برای t'، مقدار نظیر آمارهٔ t پیدا و تحقیق کنید که

$$۱ < t' < t$$

۲.۱۶ نشان دهید که تحت فرض صفر بخش ۳.۱۶، T^+ مقداری از یک متغیر تصادفی است که توزیع آن حول $\frac{n(n+۱)}{۴}$ متقارن است.
۳.۱۶ با رجوع به آزمون رتبهٔ علامت‌دار، میانگین و واریانس متغیری تصادفی را که مقدارهای آن با $T^+ - T^-$ داده می‌شوند، پیدا کنید.
۴.۱۶ توضیح دهید که چرا، مانند چند مورد دیگر، ستون مربوط به $T_{۰٫۰۲}$ در جدول IX برای $n = ۵$ خالی گذاشته شده است.

کاربردها

۵.۱۶ اعداد زیر زمانهای لازم برحسب دقیقه‌اند که نمونه‌ای ۲۰تایی از تکنیسینها که به‌تصادف انتخاب شده‌اند، برای انجام کار معینی صرف کرده‌اند.

۱۸٫۱، ۲۰٫۳، ۱۸٫۳، ۱۵٫۶، ۲۲٫۵، ۱۶٫۸، ۱۷٫۶، ۱۶٫۹، ۱۸٫۲، ۱۷٫۰،
۱۹٫۳، ۱۶٫۵، ۱۹٫۵، ۱۸٫۶، ۲۰٫۰، ۱۸٫۸، ۱۹٫۱، ۱۷٫۵، ۱۸٫۵، ۱۸٫۰

با فرض اینکه این نمونه، از جامعه‌ای پیوسته و متقارن به‌دست آمده باشد، از آزمون علامت‌دار در سطح ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را آزمون کنید که میانگین این جامعه ۱۹٫۴ دقیقه است در برابر این فرض مقابل که ۱۹٫۴ دقیقه نیست. آزمون را با استفاده از

(الف) جدول I

(ب) تقریب توزیع دو جمله‌ای با نرمال

اجرا کنید.
۶.۱۶ تمرین ۵.۱۶ را با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای جدول IX دوباره حل کنید.
۷.۱۶ داده‌های زیر مقدار پولی است که ۱۶ نفر در یک شهربازی (برحسب دلار) خرج کرده‌اند: ۲۰٫۱۵، ۱۹٫۸۵، ۲۳٫۷۵، ۱۸٫۶۳، ۲۱٫۰۹، ۲۵٫۶۳، ۱۶٫۶۵، ۱۹٫۲۷، ۱۸٫۸۰ ، ۲۱٫۴۵، ۲۰٫۲۹، ۱۹٫۵۱، ۲۳٫۸۰، ۲۰٫۰۰، ۱۷٫۴۸، و ۱۹٫۱۱. با فرض اینکه این داده‌ها، نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای متقارن باشند و با این فرض که احتمال اینکه شخصی دقیقاً ۱۹ دلار خرج کند، فوق‌العاده کم است، از آزمون علامت در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را که به‌طور متوسط هر فرد ۱۹ دلار در شهربازی خرج می‌کند در برابر این فرض مقابل که این رقم بسیار پایینتر از آن است، آزمون کنید. آزمون را بر مبنای جدول I قرار دهید.
۸.۱۶ تمرین ۷.۱۶ را با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای جدول IX دوباره حل کنید.

۹.۱۶ اعداد زیر تعداد مایلها برحسب هر گالن مصرف‌اند که با ۴۰ باک پراز نوع معینی بنزین به‌دست آمده‌اند.

۲۴٫۲	۲۴٫۳	۲۴٫۸	۲۵٫۰	۲۴٫۱
۲۴٫۴	۲۴٫۵	۲۳٫۶	۲۴٫۲	۲۵٫۳
۲۳٫۸	۲۳٫۸	۲۴٫۰	۲۳٫۲	۲۴٫۵
۲۵٫۲	۲۴٫۰	۲۴٫۶	۲۴٫۵	۲۵٫۳
۲۴٫۶	۲۴٫۱	۲۴٫۷	۲۴٫۴	۲۵٫۲
۲۴٫۲	۲۴٫۲	۲۵٫۸	۲۴٫۱	۲۴٫۹
۲۵٫۱	۲۴٫۵	۲۵٫۶	۲۴٫۱	۲۴٫۸
۲۳٫۳	۲۴٫۷	۲۵٫۲	۲۴٫۳	۲۴٫۶

با فرض اینکه شرطهای زمینه‌ای برآورده شوند، از آزمون علامت در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده فرض صفر $\tilde{\mu} = ۲۴٫۲$ را برابر فرض مقابل $\tilde{\mu} < ۲۴٫۲$ آزمون کنید.

۱۰.۱۶ تمرین پیشین را با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار دوباره حل کنید.

۱۱.۱۶ اعداد زیر تعداد مسافرهایی هستند که در پروازهای ۱۳۶ و ۱۳۷ بین شیکاگو و فنیکس در ۱۲ روز جابه‌جا شده‌اند.

۲۶۱ و ۲۵۰	۲۳۶ و ۲۴۹	۲۳۰ و ۲۶۵	۱۸۹ و ۲۳۲
۲۵۳ و ۲۴۷	۲۵۸ و ۲۷۰	۲۱۸ و ۲۳۶	۲۴۹ و ۲۵۵
۲۴۹ و ۲۳۹	۲۵۴ و ۲۵۷	۲۳۳ و ۲۴۰	۲۵۱ و ۲۴۹

از آزمون علامت در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 = \mu_2$ را (که دو پرواز به‌طور متوسط به تعداد مساوی مسافر حمل کرده‌اند) در برابر فرض مقابل $\mu_1 < \mu_2$ آزمون کنید. آزمون را بر مبنای جدول I انجام دهید.

۱۲.۱۶ تمرین ۱۱.۱۶ را با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای جدول IX دوباره حل کنید.

۱۳.۱۶ اعداد زیر تعداد کارمندان غایب از دو سازمان بزرگ دولتی در ۲۵ روزند: ۲۴ و ۲۹، ۳۲ و ۴۵، ۳۶ و ۳۶، ۳۳ و ۳۹، ۴۱ و ۴۸، ۴۵ و ۳۶، ۳۳ و ۴۱، ۳۸ و ۳۹، ۴۶ و ۴۰، ۳۲ و ۳۹، ۳۷ و ۳۰، ۳۴ و ۴۵، ۴۱ و ۴۲، ۳۲ و ۴۰، ۳۰ و ۳۳، ۴۶ و ۴۲، ۳۸ و ۵۰، ۳۴و ۳۷، ۴۵ و ۳۹، ۳۲ و ۳۷، ۴۴ و ۳۲، ۲۵ و ۳۳، ۴۵ و ۴۸، ۳۵ و ۳۳، و ۳۰ و ۳۵. از آزمون علامت در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده فرض صفر $\mu_1 = \mu_2$ را (که بیان می‌کند به‌طور متوسط تعداد غایبان دو سازمان مساوی‌اند) در برابر فرض مقابل $\mu_1 > \mu_2$ آزمون کنید.

۱۴.۱۶ تمرین ۱۳.۱۶ را با استفاده از آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای جدول IXدوباره حل کنید.

۱۵.۱۶ در صورتی که نمونه‌ای تصادفی به اندازهٔ $n = ۱۰$ داشته باشیم و از آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ برای آزمون فرض صفر $\mu = \mu_0$ در برابر هر یک از فرضهای مقابل زیر استفاده کنیم، تصمیم خود را بر کدام آماره استوار می‌کنیم و برای چه مقادیری از آماره، فرض صفر را رد می‌کنیم؟

(الف) $\mu \neq \mu_0$

(ب) $\mu > \mu_0$

(ج) $\mu < \mu_0$

۱۶.۱۶ تمرین ۱۵.۱۶ را با تغییر سطح معنی‌دار بودن به ۰٫۰۱ مجدداً حل کنید.

۱۷.۱۶ در نمونه‌ای تصادفی که در یک زمین بازی عمومی استخراج شده است، یک ست بازی تنیس ۳۸، ۴۳، ۳۶، ۲۹، ۴۴، ۲۸، ۴۰، ۵۰، ۳۹، ۴۷، و ۳۳ دقیقه طول کشیده است. از آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا بازی یک ست تنیس در آن زمین بازی به‌طور متوسط ۳۵ دقیقه طول می‌کشد یا خیر.

۱۸.۱۶ نمونه‌ای از ۲۴ چمدان که یک خط هوایی در پروازهای فراز اقیانوسی حمل می‌کند، دارای ۳۲٫۰، ۴۶٫۴، ۴۸٫۱، ۲۷٫۷، ۳۵٫۵، ۵۲٫۶، ۶۶٫۰، ۴۱٫۳، ۴۹٫۹، ۳۶٫۱، ۵۰٫۰، ۴۴٫۷، ۴۸٫۲، ۳۶٫۹، ۴۰٫۸، ۳۵٫۱، ۶۳٫۳، ۴۲٫۵، ۵۲٫۴، ۴۰٫۹، ۳۸٫۶، ۴۳٫۲، ۴۱٫۷، و ۳۵٫۶ پوند وزن بوده‌اند. از آزمون رتبهٔ علامت‌دار در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا میانگین وزن چمدانهای حمل شده با این خط هوایی در چنین پروازهایی ۳۷٫۰ پوند است یا خیر. مبنای آزمون را

(الف) جدول IX

(ب) نتایج قضیهٔ ۱.۱۶ قرار دهید.

۱۹.۱۶ داده‌های زیر نمونه‌ای تصادفی از بهره‌های هوشی زنها و شوهران‌اند: ۱۰۸ و ۱۰۳، ۱۰۴ و ۱۱۶، ۱۰۳ و ۱۰۶، ۱۱۲ و ۱۰۴، ۹۹ و ۹۹، ۱۰۵ و ۹۴، ۱۰۲ و ۱۱۰، ۱۱۲ و ۱۲۸، ۱۱۹ و ۱۰۶، ۱۰۶ و۱۰۳، ۱۲۵ و ۱۲۰، ۹۶ و ۹۸، ۱۰۷ و ۱۱۷، ۱۱۵ و ۱۳۰، ۱۰۱ و ۱۰۰، ۱۱۰ و ۱۰۱، ۱۰۳ و ۹۶، ۱۰۵ و ۹۹، ۱۲۴ و ۱۲۰، و ۱۱۳ و ۱۱۶. در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا زنان و شوهران در جامعهٔ مورد نمونه‌گیری به یک اندازه هوشمندند یا خیر، در حالی که از آزمون رتبهٔ علامت‌دار بر مبنای

(الف) جدول IX؛

(ب) نتایج قضیهٔ ۱.۱۶

استفاده می‌کنید.

۴.۱۶ آزمونهای مجموع رتبه‌ها: آزمون U

در این بخش یک بدیل ناپارامتری برای آزمون دو نمونه‌ای t ارائه می‌کنیم که **آزمون** U، **آزمون ویلکاکسن**، یا **آزمون من–ویتنی**[1] نامیده می‌شود و به افتخار آمارданانی که در به‌وجود آمدن آن سهمی داشته‌اند، نامگذاری شده است. بدون اینکه مجبور باشیم فرض کنیم که دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری دارای توزیع نرمال‌اند، قادر خواهیم بود این فرض صفر را که از جامعه‌های پیوستهٔ یکسانی نمونه می‌گیریم در مقابل این فرض که دو جامعه میانگینهای نابرابر دارند، آزمون کنیم.

1. Mann-Whitney

برای تشریح شیوهٔ عمل، فرض کنید بخواهیم دو نوع گلولهٔ رسام اضطراری را بر مبنای زمانهای سوختن زیر (که به نزدیکترین عشر دقیقه گرد شده‌اند) با هم مقایسه کنیم:

نوع A: ۱۴٫۹، ۱۱٫۳، ۱۳٫۲، ۱۶٫۶، ۱۷٫۰، ۱۴٫۱، ۱۵٫۴، ۱۳٫۰، ۱۶٫۹

نوع B: ۱۵٫۲، ۱۹٫۸، ۱۴٫۷، ۱۸٫۳، ۱۶٫۲، ۲۱٫۲، ۱۸٫۹، ۱۲٫۲، ۱۵٫۳، ۱۹٫۴

با مرتب کردن توأم این مقادیر به‌ترتیب صعودی بزرگی آنها(گویی‌که مقادیر یک نمونه‌اند) و تخصیص رتبه‌های ۱، ۲، . . . ، و ۱۹ در همین ترتیب، معلوم می‌شود که مقادیر نمونهٔ اول (نوع A) رتبه‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۷، ۱۰، ۱۲، ۱۳، و ۱۴ را اشغال می‌کنند، در حالی که مقادیر نمونهٔ دوم (نوع B)، رتبه‌های ۲، ۶، ۸، ۹، ۱۱، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، و ۱۹ را اشغال می‌کنند. اگر مقادیر مساوی وجود می‌داشتند، به هر یک از مشاهده‌های مساوی، میانگین رتبه‌هایی را که توأماً اشغال می‌کردند، اختصاص می‌دادیم.

اگر اختلاف قابل توجهی بین میانگینهای دو جامعه موجود باشند، اغلب رتبه‌های پایین با احتمال زیاد مربوط به مقادیر یک نمونه خواهند بود، در حالی که اغلب رتبه‌های بالا با احتمال زیاد مربوط به مقادیر نمونهٔ دیگر خواهند بود. بنابراین، آن‌گونه که بدواً توسط ویلکاکسن پیشنهاد شد، آزمون، بر مبنای مقدار W_1، مجموع رتبه‌های مقادیر نمونهٔ اول، یا W_2، مجموع رتبه‌های مقادیر نمونهٔ دوم خواهد بود. فرقی نمی‌کند که W_1 را انتخاب کنیم یا W_2 را، زیرا اگر نمونهٔ اول n_1 مقدار و نمونهٔ دوم n_2 مقدار داشته باشد، W_1+W_2 مجموع اولین n_1+n_2 عدد صحیح مثبت خواهد بود؛ یعنی

$$\frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2}$$

در عمل، به‌ندرت آزمونها را بر مبنای آماره‌های W_1یا W_2 قرار می‌دهیم؛ به‌جای آن از آماره‌های وابستهٔ

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

یا

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2}$$

یا کوچکترین آن دو استفاده می‌کنیم که آن را با U نشان می‌دهیم. توجه کنید که دوباره از رسم رایج استفاده از حروف بزرگ برای متغیرهای تصادفی و حروف کوچک نظیر برای مقادیر آنها عدول می‌کنیم. (به‌صورت سنتی، U_1، U_2، و U در رابطه با این آزمون برای مقادیر متغیرهای نظیر مورد استفاده قرار گرفته است و u در رابطه با آزمون ناپارامتری دیگری که در بخش ۶.۱۶ به بحث آن می‌پردازیم، به‌کار رفته است.)

آزمونهای مبتنی بر U_1، U_2، یا U همه با آزمونهای مبتنی بر W_1 یا W_2 معادل‌اند، امّا این مزیت را دارند که در ساختن جدولها برای مقادیر بحرانی، انعطاف‌پذیرترند. بنابرآنچه تحقیق آن در

تمرین ۲۰.۱۶ از خواننده خواسته می‌شود، مجموع $U_۱$ و $U_۲$ همواره برابر $n_۱n_۲$ است و متغیرهای تصادفی نظیر هر دو، مقدارهای از ۰ تا $n_۱n_۲$ را اختیار می‌کنند. در واقع این متغیرهای تصادفی توزیعی یکسان دارند که حول $\frac{n_۱n_۲}{۲}$ متقارن است.

بنابراین صرف‌نظر از فرض مقابل، می‌توانیم همهٔ آزمونهای فرض صفر را بر توزیع متغیر تصادفی نظیر با $U = \min(U_۱, U_۲)$ قرار دهیم، امّا مانند آنچه در صفحهٔ ۵۵۵ دیدیم، باید مواظب باشیم که از آمارهٔ صحیح و مقدار بحرانی صحیح، به‌صورتی که در جدول زیر تلخیص شده است و در آن سطح معنی‌دار بودن در هر حالت α است، استفاده کنیم.

فرض مقابل	فرض صفر را رد کنید هرگاه
$\mu_۱ \neq \mu_۲$	$U \leq U_\alpha$
$\mu_۱ > \mu_۲$	$U_۱ \leq U_{۲\alpha}$
$\mu_۱ < \mu_۲$	$U_۱ \leq U_{۲\alpha}$

در مقدارهای بحرانی ستون سمت راست این جدول، U_α یا $U_{۲\alpha}$، بزرگترین مقادیری هستند که برای آنها Pـمقدار نظیر، به‌ترتیب، از α یا ۲α بیشتر نیست. می‌توان این مقدارها را از جدول X برای مقادیر $n_۱$ و $n_۲$ نابیشتر از ۱۵ به‌دست آورد. توجه کنید که مانند جدول IX، همین مقدارهای بحرانی می‌توانند برای آزمونهایی در سطوح معنی‌دار بودن مختلف، بسته به‌اینکه فرض مقابل یک طرفه یا دوطرفه باشد، به‌کار روند. مثلاً، $U_{۰٫۱۰}$ را می‌توان به‌عنوان مقدار بحرانی در سطح معنی‌داری ۱۰ر۰، موقعی که فرض مقابل دوطرفه است، و در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰، موقعی که فرض مقابل یک طرفه است، به‌کار برد. مانند آنچه در صفحهٔ ۵۵۶ دیدیم، این مطلب را عمدتاً به این دلیل متذکر می‌شویم که مقدارهای بحرانی در برخی کتابها به این صورت جدولبندی شده‌اند.

مثال ۶.۱۶

با مراجعه به داده‌های صفحهٔ ۵۶۳، در سطح معنی‌دار بودن ۰۵ر۰ آزمون کنید که آیا دو نمونه، از جامعه‌های پیوستهٔ یکسانی آمده‌اند یا اینکه زمان سوختن گلوله‌های رسام نوع A کمتر از زمان سوختن گلوله‌های نوع B است.

حل. ۱.

$$\begin{aligned} H_۰ &: \mu_۱ = \mu_۲ \\ H_۱ &: \mu_۱ < \mu_۲ \\ \alpha &= ۰٫۰۵ \end{aligned}$$

۲. چون $n_۱ = ۹$ و $n_۲ = ۱۰$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $U_۱ \leq ۲۴$، که در آن ۲۴ مقدار نظیر $U_{۰٫۱۰}$ است.

۳. با استفاده از رتبه‌های به‌دست آمده در صفحهٔ ۵۶۳، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} W_۱ &= ۱ + ۳ + ۴ + ۵ + ۷ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ \\ &= ۶۹ \end{aligned}$$

به‌طوری که $U_۱ = ۶۹ = \frac{۹\cdot ۱۰}{۲} = ۲۴$.

۴. چون $U_۱ = ۲۴$ برابر $U_{۰٫۱۰} = ۲۴$ است، فرض صفر را باید رد کرد؛ نتیجه می‌گیریم که به‌طور متوسط گلوله‌های نوع A زمان سوختن کوتاهتری در مقایسه با گلوله‌های نوع B دارند. ▲

وقتی $n_۱$ و $n_۲$ هر دو بزرگتر از ۸ باشند، این فرض را که $U_۱$ و $U_۲$ مقادیر متغیرهایی تصادفی‌اند که تقریباً توزیع نرمال دارند، می‌توان موجه دانست. برای اجرای آزمون U بر مبنای این فرض، به نتایج زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۲.۱۶ تحت مفروضات لازم برای آزمون U، $U_۱$ و $U_۲$ مقدارهای متغیرهای تصادفی‌اند که دارای میانگین

$$\mu = \frac{n_۱ n_۲}{۲}$$

و واریانس

$$\sigma^۲ = \frac{n_۱ n_۲ (n_۱ + n_۲ + ۱)}{۱۲}$$

هستند.

برهان. تحت این فرض صفر که دو نمونه از جامعه‌های یکسانی استخراج شده‌اند که پیوسته هم هستند (به‌طوری که احتمال وجود مقادیر برابر، صفر است)، $W_۱$ مجموع $n_۱$ عدد صحیح مثبت است که از بین اولین $n_۱ + n_۲$ عدد صحیح مثبت به‌تصادف انتخاب شده‌اند. با استفاده از نتایج قسمت (ج) تمرین ۱۳.۸ با $n = n_۱$ و $N = n_۱ + n_۲$، نتیجه می‌گیریم که $W_۱$ مقدار متغیری تصادفی است با میانگین

$$\frac{n_۱(n_۱ + n_۲ + ۱)}{۲}$$

و واریانس

$$\frac{n_۱ n_۲ (n_۱ + n_۲ + ۱)}{۱۲}$$

چون $U_۱ = W_۱ - \frac{n_۱(n_۱+۱)}{۲}$، نتیجه می‌شود که میانگین و واریانس متغیر تصادفی متناظر با $U_۱$ عبارت‌اند از

$$\mu = \frac{n_۱(n_۱ + n_۲ + ۱)}{۲} - \frac{n_۱(n_۱ + ۱)}{۲} = \frac{n_۱ n_۲}{۲}$$

و

$$\sigma^{۲} = \frac{n_{۱}n_{۲}(n_{۱} + n_{۲} + ۱)}{۱۲}$$

همچنین، چون $U_{۱} + U_{۲}$ همواره برابر $n_{۱}n_{۲}$ است، میانگین و واریانس متغیر تصادفی نظیر با $U_{۲}$ با میانگین و واریانس متغیر تصادفی نظیر با $U_{۱}$ برابر است [نگاه کنید به بخش (الف) تمرین ۲۰.۱۶]. ■

مثال ۷.۱۶

اعداد زیر مقدارهای افزایش وزن (برحسب پوند) نمونه‌هایی از جوجه بوقلمونهایی است که با دو رژیم غذایی مختلف تغذیه شده‌اند امّا از سایر جهات در شرایط یکسان نگهداری شده‌اند:

رژیم غذایی ۱: ۱۶٫۳، ۱۰٫۱، ۱۰٫۷، ۱۳٫۵، ۱۴٫۹، ۱۱٫۸، ۱۴٫۳، ۱۰٫۲، ۱۲٫۰، ۱۴٫۷، ۲۳٫۶، ۱۵٫۱، ۱۴٫۵، ۱۸٫۴، ۱۳٫۲، ۱۴٫۰

رژیم غذایی ۲: ۲۱٫۳، ۲۳٫۸، ۱۵٫۴، ۱۹٫۶، ۱۲٫۰، ۱۳٫۹، ۱۸٫۸، ۱۹٫۲، ۱۵٫۳، ۲۰٫۱، ۱۴٫۸، ۱۸٫۹، ۲۰٫۷، ۲۱٫۱، ۱۵٫۸، ۱۶٫۲

از آزمون U در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده این فرض صفر را که دو جامعهٔ مورد نمونه‌گیری یکسان‌اند، در برابر این فرض مقابل که رژیم غذایی دوّم موجب افزایش وزن بیشتری می‌شود، آزمون کنید.

حل. (در اینجا مهم نیست که آزمون را بر $U_{۱}$ یا $U_{۲}$ بنا کنیم.)

۱.
$$H_{۰} : \mu_{۱} = \mu_{۲}$$
$$H_{۱} : \mu_{۱} < \mu_{۲}$$
$$\alpha = ۰٫۰۱$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۲٫۳۳$ که در آن

$$z = \frac{U_{۱} - \mu}{\sigma}$$

و μ و $\sigma^{۲}$ به‌وسیلهٔ فرمولهای ۲.۱۶ داده شده‌اند.

۳. با رتبه‌بندی توأم داده‌ها با توجه به بزرگی آنها، نتیجه می‌گیریم که مقدارهای اولین نمونه، رتبه‌های ۲۱، ۱، ۳، ۸، ۱۵، ۴، ۱۱، ۲، ۵٫۵، ۱۳، ۳۱، ۱۶، ۱۲، ۲۲، ۷، و ۱۰ را اشغال می‌کنند. (مقدارهای پنجم و ششم هر دو ۱۲٫۰ هستند، در نتیجه به هر رتبه مقدار ۵٫۵ را اختصاص داده‌ایم.) بنابراین

$$\begin{aligned} W_{۱} =& ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵٫۵ + ۷ + ۸ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ \\ &+ ۱۵ + ۱۶ + ۲۱ + ۲۲ + ۳۱ \\ =& ۱۸۱٫۵ \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} U_1 &= 181{,}5 - \frac{16{,}17}{2} \\ &= 45{,}5 \end{aligned}$$

چون $\mu = \frac{16 \times 16}{2} = 128$ و $\sigma^2 = \frac{16 \times 16 \times 33}{12} = 704$، نتیجه می‌گیریم که

$$z = \frac{45{,}5 - 128}{\sqrt{704}} = -3{,}11$$

۴. چون $z = -3{,}11$ کمتر از $-2{,}33$ است، فرض صفر باید رد شود. نتیجه می‌گیریم که رژیم غذایی دوّم به‌طور متوسط، موجب افزایش وزن بیشتری می‌شود. ▲

۵.۱۶ آزمونهای مجموع رتبه‌ها: آزمون H

آزمون H، یا آزمون **کروسکال-والیس**[1]، تعمیمی از آزمون مجموع رتبه‌های بخش پیشین به موردی است که در آن فرض صفری را آزمون می‌کنیم که k نمونه از جامعه‌های پیوستهٔ یکسانی حاصل شده‌اند. به‌عبارت دیگر، این آزمون بدیل ناپارامتری تحلیل واریانس یکطرفه است.

نظیر آزمون U، داده‌ها تواماً از کم به زیاد رتبه‌بندی می‌شوند، انگار که آنها نمونهٔ واحدی باشند. در این صورت با نشان دادن مجموع رتبه‌های مقادیر نمونهٔ iام با R_i، آزمون را بر آمارهٔ

$$\mathrm{H} = \frac{12}{n(n+1)} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{R}_i^2}{n_i} - 3(n+1)$$

مبتنی می‌کنیم که در آن $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$، و k تعداد جامعه‌های مورد نمونه‌گیری است. چون می‌توان نشان داد (تمرین ۲۴.۱۶ را ببینید) که آمارهٔ H متناسب با میانگین موزون مربع تفاضلهای $\left(\frac{\mathrm{R}_i}{n_i} - \frac{n+1}{2}\right)^2$ است که در آن $\frac{\mathrm{R}_i}{n_i}$ میانگین رتبهٔ مقادیر نمونهٔ iام و $\frac{(n+1)}{2}$ میانگین رتبهٔ همهٔ داده‌هاست، نتیجه می‌شود که فرض باید به‌ازای مقادیر بزرگ H رد شود.

برای مقادیر بسیار کوچک k و n_1، ... ، و n_k آزمون فرض صفر را می‌توان بر جدولهایی خاص مبتنی کرد (مراجع صفحهٔ ۶۰۶ را ببینید)، ولی چون توزیع نمونه‌ای H به مقادیر n_i بستگی دارد، جدولبندی آن به شکل فشرده‌ای غیر ممکن است. بنابراین، معمولاً آزمون را بر این نظریهٔ بزرگ نمونه‌ای مبتنی می‌کنند که توزیع نمونه‌گیری H را می‌توان به‌خوبی با توزیع خی‌دو با $k - 1$ درجهٔ آزادی تقریب کرد. برهانهای این نتیجه را می‌توان در کتب آمار ناپارامتری که جزو مراجع صفحهٔ ۵۸۳ هستند، پیدا کرد، و این برهانها مبتنی بر شکلی از آمارهٔ H هستند که در تمرین ۲۴.۱۶ داده شده‌اند.

[1] Kruskal-Wallis

مثال ۸.۱۶
داده‌های زیر نمره‌های امتحان نهایی نمونه‌هایی از سه گروه دانشجوست که به سه روش مختلف، زبان آلمانی به آنها تدریس شده است (این سه روش عبارت‌اند از آموزش در کلاس و آزمایشگاه زبان، تنها آموزش در کلاس، و تنها مطالعهٔ انفرادی در آزمایشگاه زبان).

روش اول: ۹۴، ۸۸، ۹۱، ۷۴، ۸۷، ۹۷
روش دوم: ۸۵، ۸۲، ۷۹، ۸۴، ۶۱، ۷۲، ۸۰
روش سوم: ۸۹، ۶۷، ۷۲، ۷۶، ۶۹

از آزمون H در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ برای آزمون این فرض که سه روش آموزش به یک اندازه کارآ هستند، استفاده کنید.

حل. ۱.
$$H_\circ : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
H_1: سه میانگین همه با هم برابر نیستند
$$\alpha = ۰٫۰۵$$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $H \geq ۵٫۹۹۱$ که در آن، ۵٫۹۹۱ مقدار $\chi^2_{۰٫۰۵,۲}$ است.
۳. با رتبه‌بندی نمره‌ها از ۱ تا ۱۸ معلوم می‌شود که

$$R_1 = ۶ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ = ۸۴$$
$$R_2 = ۱ + ۴٫۵ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۵۵٫۵$$
$$R_3 = ۲ + ۳ = ۴٫۵ + ۷ + ۱۵ = ۳۱٫۵$$

که در این رتبه‌بندی در یک مورد دو نمرهٔ مساوی وجود دارد و به هر یک از نمره‌های مساوی رتبهٔ ۴٫۵ داده شده است. با قرار دادن مقادیر R_1، R_2، و R_3 همراه با $n_1 = ۶$، $n_2 = ۷$، $n_3 = ۵$، و $n = ۱۸$ در فرمول H، به‌دست می‌آوریم

$$H = \frac{۱۲}{۱۸ \cdot ۱۹}\left(\frac{۸۴^2}{۶} + \frac{۵۵٫۵^2}{۷} + \frac{۳۱٫۵^2}{۵}\right) - ۳ \cdot ۱۹$$
$$= ۶٫۶۷$$

۴. چون $H = ۶٫۶۷$ بیشتر از $\chi^2_{۰٫۰۵,۲} = ۵٫۹۹۱$ است، فرض صفر را باید رد کرد، و نتیجه می‌گیریم که سه روش به یک اندازه کارآیی ندارند. ▲

تمرینها

۲۰.۱۶ نشان دهید که
(الف) برای هر زوج از مقادیر متغیرهای تصادفی نظیر، $U_1 + U_2 = n_1 n_2$؛

(ب) متغیرهای تصادفی نظیر با $U_۱$ و $U_۲$ هر دو مقدارهای از ۰ تا $n_۱n_۲$ را اختیار می‌کنند.

۲۱.۱۶ نشان دهید که توزیع متغیر تصادفی با $W_۱$ حول

$$\frac{n_۱(n_۱ + n_۲ + ۱)}{۲}$$

متقارن است، و بنابراین، توزیع متغیر تصادفی نظیر با $U_۱$ حول $\frac{n_۱n_۲}{۲}$ متقارن است. (راهنمایی: داده‌ها را توأماً هم به‌ترتیب صعودی و هم به‌ترتیب نزولی مقادیر رتبه‌بندی کنید.)

۲۲.۱۶ تحقیق کنید که $U_۱$ و $U_۲$ به‌صورت زیر نیز قابل بیان‌اند.

$$U_۱ = n_۱n_۲ + \frac{n_۲(n_۲ + ۱)}{۲} - W_۲$$

و

$$U_۲ = n_۱n_۲ + \frac{n_۱(n_۱ + ۱)}{۲} - W_۱$$

۲۳.۱۶ اگر $X_۱$، $X_۲$، . . . ، $X_{n_۱}$، و $Y_۱$، $Y_۲$، . . . ، $Y_{n_۲}$ نمونه‌های تصادفی مستقل باشند، می‌توانیم این فرض صفر را که آنها از جامعه‌های پیوستهٔ یکسانی حاصل می‌شوند، بر پایهٔ آمارهٔ Uی من–ویتنی آزمون کنیم که این آماره صرفاً تعداد زوجهایی مانند (x_i, y_i) است که برای آنها $x_i > y_i$. به‌صورت نمادی

$$U = \sum_{i=۱}^{n_۱}\sum_{j=۱}^{n_۲} d_{ij}$$

که در آن به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n_۱$ ، و $j = ۱, ۲, \ldots, n_۲$

$$d_{ij} = \begin{cases} ۱, & x_i > y_j \text{ اگر } \\ ۰, & x_i < y_j \text{ اگر } \end{cases}$$

نشان دهید که این آمارهٔ Uی من–ویتنی همان آمارهٔ $U_۱$ بخش ۴.۱۶ است.

۲۴.۱۶ تحقیق کنید که آمارهٔ والیس–کروسکال صفحهٔ ۵۶۷ معادل است با

$$\mathrm{H} = \frac{۱۲}{n(n+۱)} \cdot \sum_{i=۱}^{k} n_i \left(\frac{\mathrm{R}_i}{n_i} - \frac{n+۱}{۲}\right)^۲$$

۲۵.۱۶ نشان دهید که اگر یک تحلیل واریانس یکطرفه دربارهٔ رتبه‌های مشاهدات، به‌جای خود مشاهدات انجام شود، این آزمون معادل آزمونی بر مبنای آمارهٔ H از کار در می‌آید.

کاربردها

۲۶.۱۶ ارقام زیر تعداد دزدیها از منازل است که در شهری در نمونه‌ای تصادفی از شش روز در بهار و شش روز در پاییز صورت گرفته است.

بهار: ۳۶، ۲۵، ۳۲، ۳۸، ۲۸، ۳۵
پاییز: ۲۷، ۲۰، ۱۵، ۲۹، ۱۸، ۲۲

از آمارهٔ U استفاده کرده در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ این ادعا را آزمون کنید که به‌طور متوسط تعداد دزدیهای روزانه در بهار و پاییز یکسان است در برابر این فرض مقابل که تعداد دزدیهای روزانه در پاییز کمتر است.

۲۷.۱۶ داده‌های زیر درجهٔ سختی حاصل برای شش شمش آلومینیم از مجموعهٔ تولیدات A و هشت شمش از مجموعهٔ تولیدات B بر حسب واحد راکوِل[1] است

مجموعهٔ A: ۷۵، ۵۶، ۶۳، ۷۰، ۵۸، ۷۴
مجموعهٔ B: ۶۳، ۸۵، ۷۷، ۸۰، ۸۶، ۷۶، ۷۲، ۸۲

از آزمون U در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض را آزمون کنید که آیا شمشهای مجموعهٔ B به‌طور متوسط درجهٔ سختی یکسان با مجموعهٔ A دارند یا از آنها سخت‌ترند.

۲۸.۱۶ داده‌های زیر تعداد دقیقه‌های لازم برای این است که نمونه‌ای تصادفی از ۱۵ مرد و ۱۲ زن امتحان کتبی خود را برای تعویض گواهینامهٔ رانندگی به پایان برسانند

مردان: ۹٫۹، ۷٫۴، ۸٫۹، ۹٫۱، ۷٫۷، ۹٫۷، ۱۱٫۸، ۹٫۲، ۱۰٫۰، ۱۰٫۲، ۹٫۵، ۱۰٫۸، ۸٫۰، ۱۱٫۰، ۷٫۵
زنان: ۸٫۶، ۱۰٫۹، ۹٫۸، ۱۰٫۷، ۹٫۴، ۱۰٫۳، ۷٫۳، ۱۱٫۵، ۷٫۶، ۹٫۳، ۸٫۸، ۹٫۶

از آزمون U بر مبنای جدول X در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده تصمیم بگیرید که آیا فرض صفر $\mu_1 = \mu_2$ یا فرض مقابل $\mu_1 \neq \mu_2$ را باید پذیرفت. در اینجا μ_1 و μ_2 مقدارهای متوسط زمان به پایان بردن امتحان است.

۲۹.۱۶ تمرین ۲۸.۱۶ را با استفاده از تقریب نرمال برای توزیع آمارهٔ آزمون، مجدداً حل کنید.

۳۰.۱۶ یک امتحان سنجش آگاهی از تاریخ ملّی برای نمونه‌هایی تصادفی از دانشجویان سال اول دو دانشگاه بزرگ به عمل آمده و نمرات آنها عبارت‌اند از

دانشگاه A: ۷۷، ۷۲، ۵۸، ۹۲، ۸۷، ۹۳، ۹۷، ۹۱، ۷۰، ۹۸، ۷۶، ۹۰، ۶۲، ۶۹، ۹۰، ۷۸، ۹۶، ۸۴، ۷۳، ۸۰
دانشگاه B: ۸۹، ۷۴، ۴۵، ۵۶، ۷۱، ۷۴، ۹۴، ۸۸، ۶۶، ۶۲، ۸۸، ۶۳، ۸۸، ۳۷، ۶۳، ۷۵، ۷۸، ۳۴، ۷۵، ۶۸

از آزمون U در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را آزمون کنید که تفاوتی در آگاهیهای متوسط مربوط به زمینهٔ تاریخ ملی بین دانشجویان سال اوّل دو دانشگاه، وجود ندارد.

۳۱.۱۶ اعداد زیر داده‌های مربوط به مقاومت (برحسب پوند) نمونه‌هایی تصادفی از دو نوع نوار کتانی دو اینچی است

1. Rockwell

نوار نوع I: ۱۴۴، ۱۸۱، ۲۰۰، ۱۸۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۸۶، ۱۹۴، ۱۷۶، ۱۸۲، ۱۳۳، ۱۸۳، ۱۹۷، ۱۶۵، ۱۸۰، ۱۹۸

نوار نوع II: ۱۷۵، ۱۶۴، ۱۷۲، ۱۹۴، ۱۷۶، ۱۹۸، ۱۵۴، ۱۳۴، ۱۶۹، ۱۶۴، ۱۸۵، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۸۹، ۱۷۰، ۱۶۴

از آزمون U در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این ادعا را آزمون کنید که نوار نوع I، به‌طور متوسط، مقاومتر از نوار نوع II است.

۳۲.۱۶ با رجوع به داده‌های صفحهٔ ۵۶۳ و مثال ۶.۱۶، U را به‌صورتی که در تمرین ۲۳.۱۶ تعریف شد، محاسبه و تحقیق کنید که این مقدار برابر با مقدار حاصل برای U_1 است.

۳۳.۱۶ با رجوع به تمرین ۲۶.۱۶، U را به‌صورتی که در تمرین ۲۳.۱۶ تعریف شد، محاسبه و تحقیق کنید که این مقدار با مقدار به‌دست آمده برای U_1 برابر است.

۳۴.۱۶ برای مقایسهٔ چهار توپ بولینگ، یک بولینگ‌باز حرفه‌ای پنج‌بار با هر توپ بازی می‌کند و نتایج زیر را به‌دست می‌آورد.

توپ D: ۲۰۸، ۲۲۰، ۲۴۷، ۱۹۲، ۲۲۹
توپ E: ۲۱۶، ۱۹۶، ۱۸۹، ۲۰۵، ۲۱۰
توپ F: ۲۲۶، ۲۱۸، ۲۵۲، ۲۲۵، ۲۰۲
توپ G: ۲۱۲، ۱۹۸، ۲۰۷، ۲۳۲، ۲۲۱

از آزمون والیس-کروسکال در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را که بازیکن می‌تواند انتظار داشته باشد که با هر چهار توپ نتایج یکسانی به‌دست آورد، آزمون کنید.

۳۵.۱۶ اعداد زیر تعداد کیلومتر بر لیترهایی است که یک رانندهٔ مجری آزمایشی برای ده باک پر از سه نوع بنزین به‌دست آورده است.

بنزین A: ۲۰، ۳۱، ۲۴، ۳۳، ۲۳، ۲۴، ۲۸، ۱۶، ۱۹، ۲۶
بنزین B: ۲۹، ۱۸، ۲۹، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۳۴، ۳۳، ۳۰، ۲۳
بنزین C: ۱۹، ۳۱، ۱۶، ۲۶، ۳۱، ۳۳، ۲۸، ۲۸، ۲۵، ۳۰

از آزمون والیس-کروسکال در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده این فرض صفر را آزمون کنید که اختلافی در مسافت متوسطی که با یک لیتر از این سه نوع بنزین طی می‌شود، نیست.

۳۶.۱۶ به سه گروه از خوکچه‌های آزمایشگاهی، به‌ترتیب، ۰٫۵، ۱٫۰، و ۱٫۵ میلیگرم از آرامبخشی، تزریق شده است، و داده‌های زیر ثانیه‌های لازم برای به خواب رفتن آنهاست.

دُز ۰٫۵ میلیگرم: ۸٫۲، ۱۰٫۰، ۱۰٫۲، ۱۳٫۷، ۱۴٫۰، ۷٫۸، ۱۲٫۷، ۹٫۰، ۱۰٫۹
دُز ۱٫۰ میلیگرم: ۹٫۷، ۱۳٫۱، ۱۱٫۰، ۷٫۵، ۱۳٫۳، ۱۲٫۵، ۸٫۸، ۱۲٫۹، ۷٫۹، ۱۰٫۵
دُز ۱٫۵ میلیگرم: ۱۲٫۰، ۷٫۲، ۸٫۰، ۹٫۴، ۱۱٫۳، ۹٫۰، ۱۱٫۵، ۸٫۵

از آزمون H در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ استفاده کرده این فرض صفر را که تفاوت دُزها هیچ تأثیری بر مدت زمان لازم تا به‌خواب رفتن خوکچه‌ها ندارند، آزمون کنید.

۶.۱۶ آزمونهای مبتنی بر ردیفها

برای آزمون تصادفی بودن داده‌های مشاهده شده، چندین روش ناپارمتری بر مبنای ترتیب آمدن داده‌ها وجود دارند. تکنیکی که ما در اینجا توصیف خواهیم کرد بر پایهٔ **نظریهٔ ردیفهاست** که در آن یک **ردیف** عبارت از پشت سرهم آمدن حروف واحدی (یا هر نوع علامت دیگری) است که قبل و بعد از حروف دیگری ظاهر شده‌اند یا قبل یا بعد آنها حروف دیگری ظاهر نشده‌اند. برای روشن شدن مطلب، آرایشهای زیر از d، قطعات معیوب، و n، قطعات سالم را که به‌ترتیب با ماشین خاصی تولید شده‌اند در نظر بگیرید.

$$\underbrace{nnnnn}\,\underbrace{dddd}\,\underbrace{nnnnnnnnnn}\,\underbrace{dd}\,\underbrace{nn}\,\underbrace{dddd}\,\underbrace{n}\,\underbrace{dd}\,\underbrace{nn}$$

با استفاده از آکولاد برای تلفیق حروفی که یک ردیف را تشکیل می‌دهند، معلوم می‌شود که ابتدا یک ردیف از پنج n، سپس یک ردیف از چهار d، سپس یک ردیف از ده n، . . . ، و سرانجام یک ردیف از دو n موجود است؛ در مجموع؛ نه ردیف با طولهای متفاوت وجود دارند.

عدهٔ کل ردیفهایی که در یک آرایش از این نوع ظاهر می‌شوند اغلب نشانهٔ خوبی از امکان تصادفی نبودن است. اگر تعداد ردیفها خیلی کم باشد، ممکن است به‌وجود گروهبندی یا خوشه‌ای شدن و یا شاید به‌وجود روندی ظنین شویم؛ اگر تعداد ردیفها خیلی زیاد باشد، ممکن است به وجود گونه‌ای الگوی متناوب تکراری ظنین شویم. در مثال ما ظاهراً یک خوشه‌ای شدن قطعی وجود دارد و قطعات معیوب ظاهراً گروه به گروه پدیدار می‌شوند، ولی باید ببینیم که این امر معنی‌دار است یا می‌توان آن را به تصادف نسبت داد.

برای پیدا کردن احتمال اینکه n_1 حرف از یک نوع و n_2 حرف از نوع دیگر تشکیل u ردیف می‌دهند، در صورتی که هر یک از $\binom{n_1+n_2}{n_1}$ آرایش ممکن از این حرفها را همشانس تلقی کنیم، ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که u زوج باشد، یعنی $u = 2k$، که در آن k عدد صحیح مثبتی است. در این حالت باید k ردیف از هر نوع وجود داشته باشد که متناوباً در پی هم قرار گرفته باشند. برای پیدا کردن تعداد راههایی که در آن n_1 حرف می‌توانند تشکیل k ردیف بدهند، ابتدا حالت بسیار ساده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن پنج حرف c را باید به سه ردیف تقسیم کنیم. با استفاده از خطهای عمودی برای جدا کردن پنج حرف به سه ردیف، متوجه می‌شویم که شش امکان

$$c|c|ccc \quad c|cc|cc \quad c|ccc|c$$
$$cc|c|cc \quad cc|cc|c \quad ccc|c|c$$

متناظر با $\binom{4}{2}$ طریقه‌ای است که می‌توانیم دو خط عمودی را در دو جا از چهار جایی که بین پنج حرف c موجود است، قرار دهیم. به همین دلیل، $\binom{n_1-1}{k-1}$ راه وجود دارد که طی آن می‌توان از n_1 حرف نوع اول k ردیف تشکیل داد، $\binom{n_2-1}{k-1}$ راه وجود دارد که طی آن از n_2 حرف از نوع دوم

می‌توان k ردیف تشکیل داد، و نتیجه می‌شود که مجموعاً $\text{۲}\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}$ راه وجود دارد که طی آنها از n_1+n_2 حرف می‌توان $\text{۲}k$ ردیف درست کرد. وجود عامل به ۲ دلیل این واقعیت است که وقتی دو نوع ردیف را با هم تلفیق می‌کنیم به‌طوری که متناوباً از پی هم بیایند، می‌توانیم با یک ردیف از حروف نوع اول یا با یک ردیف از حروف نوع دوم شروع کنیم. بنابراین وقتی $u=\text{۲}k$ (که در آن k عدد صحیح مثبتی است)، احتمال به‌دست آوردن u ردیف عبارت است از

$$f(u)=\frac{\text{۲}\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

و خواننده در تمرین ۳۷.۱۶ نشان خواهد داد که استدلالهای مشابهی به نتیجهٔ

$$f(u)=\frac{\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1}+\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}$$

وقتی که $u=\text{۲}k+\text{۱}$ (که در آن k عدد صحیح مثبتی است) منجر می‌شود.

وقتی n_1 و n_2 کوچک هستند، آزمونهای صفر تصادفی بودن مبتنی بر u، معمولاً با استفاده از جداول خاصی نظیر جدول XI پایان کتاب اجرا می‌شوند. فرض صفر تصادفی بودن را در سطح معنی‌دار بودن α رد می‌کنیم هرگاه

$$u\le u'_{\alpha/\text{۲}},\quad \text{یا},\quad u\ge u_{\alpha/\text{۲}}$$

که در آن $u'_{\alpha/\text{۲}}$ بزرگترین مقداری است که برای آن احتمال به‌دست آوردن مقداری کمتر از آن یا مساوی آن، از $\alpha/\text{۲}$ بیشتر نیست و $u_{\alpha/\text{۲}}$ کوچکترین مقداری است که برای آن احتمال به‌دست آوردن مقداری بزرگتر از آن یا مساوی آن از $\alpha/\text{۲}$ بیشتر نیست.

مثال ۹.۱۶

با بررسی درختان نارون که سالها پیش در امتداد جاده‌ای کاشته شده‌اند، یک مسئول اداری، ترتیب زیر را از درختان سالم، H، و بیمار، D، به‌دست آورده است.

$$HHHHDDDHHHHHHHDDHHDDDD$$

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا می‌توان این آرایش را معلول تصادف دانست؟

حل. ۱. H_0: آرایش تصادفی است.

H_1: آرایش تصادفی نیست.

$\alpha=\text{۰٫۰۵}$

۲. چون ۱۳ $= n_1$ و ۹ $= n_2$، فرض صفر را رد کنید هرگاه ۶ $\leq u$ یا ۱۷ $\geq u$، که در آن ۶ و ۱۷ مقدارهای متناظر $u'_{0.025}$ و $u_{0.025}$اند.

۳. با بررسی داده‌ها معلوم می‌شود که ۶ $= u$.

۴. چون ۶ $= u$ برابر ۶ $= u'_{0.025}$ است، فرض صفر را باید رد کرد؛ آرایش درختان نارون سالم و بیمار تصادفی نیست. ظاهراً درختان بیمار به شکل خوشه‌ای قرار گرفته‌اند. ▲

وقتی n_1 و n_2 هر دو بزرگتر از ۱۰ یا مساوی آن باشند، این فرض که توزیع متغیر تصادفی نظیر با u را می‌توان با دقت زیادی با خم نرمال تقریب زد، موجه به نظر می‌رسد. برای اجرای آزمون ردیفها برمبنای این فرض، به‌نتایج زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۳.۱۶ تحت فرض صفر تصادفی بودن، میانگین و واریانس متغیر تصادفی نظیر با u عبارت‌اند از

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1$$

و

$$\sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$$

این نتایج را می‌توان مستقیماً با استفاده از فرمولهایی که در صفحهٔ ۵۷۳ داده شده‌اند، به‌دست آورد. جزئیات چنین برهانی، و نیز رهیافت دیگری را که آسانتر است، می‌توان در کتاب گیبنز که در فهرست مراجع پایان فصل داده شده است پیدا کرد.

مثال ۱۰.۱۶

در زیر آرایشی از مردان، M، و زنان، W که برای خرید بلیط کنسرت، صف کشیده‌اند، داده شده است.

$$MWMWMMMWMWMMMWWMMMMWWMWM$$
$$MMWMMMWWWMWMMMWMWMMMWWM$$

تصادفی بودن آرایش را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱. H_0: آرایش تصادفی است.
H_1: آرایش تصادفی نیست.
$\alpha = 0.05$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه $z \leq -۱٫۹۶$ یا $z \geq ۱٫۹۶$ که در آن

$$z = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

و μ و $\sigma^۲$ با فرمولهای قضیهٔ ۳.۱۶ داده شده‌اند.

۳. چون $n_۱ = ۳۰$، $n_۲ = ۱۸$، و $u = ۲۷$، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = \frac{۲ \cdot ۳۰ \cdot ۱۸}{۳۰ + ۱۸} + ۱ = ۲۳٫۵$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{۲ \cdot ۳۰ \cdot ۱۸(۲ \cdot ۳۰ \cdot ۱۸ - ۳۰ - ۱۸)}{(۳۰ + ۱۸)^۲(۳۰ + ۱۸ - ۱)}} = ۳٫۲۱$$

و بنابراین

$$z = \frac{۲۷ - ۲۳٫۵}{۳٫۲۱} = ۱٫۰۹$$

۴. چون $z = ۱٫۰۹$ بین $-۱٫۹۶$ و $۱٫۹۶$ قرار می‌گیرد، فرض صفر را نمی‌توان رد کرد؛ به‌عبارت دیگر شواهد واقعی به نشانه اینکه آرایش تصادفی نیست، وجود ندارد. ▲

روشی که در این بخش از آن بحث کرده‌ایم محدود به آزمونهای تصادفی بودن رشته‌ای از نشانها (مانند dها و nهای مثال صفحهٔ ۵۷۲) نیست. هر نمونه‌ای را که متشکل از اندازه‌گیریهای عددی یا مشاهدات باشد، می‌توان به‌همین نحو با استفاده از حروف a و b به‌ترتیب برای نشان دادن مقادیری که در پایین یا بالای میانهٔ نمونه‌ای قرار می‌گیرند، مورد مطالعه قرار داد. (اعدادی که برابر میانه باشند، حذف می‌شوند.) رشتهٔ حاصل از aها و bها را می‌توان از لحاظ تصادفی بودن بر مبنای تعداد کل ردیفهای a و b، یعنی، تعداد کل **ردیفهای بالا و پایین** میانه مورد آزمون قرار داد.

مثال ۱۱.۱۶

اعداد زیر اندازهٔ سرعتهایی را (برحسب مایل در ساعت) نشان می‌دهند که یک ماشین‌سواری از هر پنج ماشین‌سواری در نقطهٔ بازرسی معینی داشته‌اند: ۴۶، ۵۸، ۶۰، ۵۶، ۷۰، ۶۶، ۴۸، ۵۴، ۶۲، ۴۱، ۳۹، ۵۲، ۴۵، ۶۲، ۵۳، ۶۹، ۶۵، ۶۵، ۶۷، ۷۶، ۵۲، ۵۲، ۵۹، ۵۹، ۶۷، ۵۱، ۴۶، ۶۱، ۴۰، ۴۳، ۴۲، ۷۷، ۶۷، ۶۳، ۵۹، ۶۳، ۶۳، ۷۲، ۵۷، ۵۹، ۴۲، ۵۶، ۴۷، ۶۲، ۶۷، ۷۰، ۶۳، ۶۶، ۶۹، ۷۳. فرض صفر تصادفی بودن را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

حل. ۱. $H_۰$: نمونه تصادفی است

$H_۱$: نمونه تصادفی نیست

$\alpha = ۰٫۰۵$

۲. فرض صفر را رد کنید هرگاه

$$z = \frac{u - \mu}{\sigma}$$

u تعداد ردیفها در بالا و پایین میانه است، و μ و $\sigma^۲$ در فرمولهای قضیهٔ ۳.۱۶ داده شده‌اند.

۳. میانهٔ سرعتها ۵۹٫۵ است، لذا آرایش زیر را برای aها و bها به‌دست می‌آوریم.

$$b\ b\ a\ b\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ b\ b\ a\ b\ a\ a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ a$$

$$b\ b\ a\ b\ b\ b\ a\ a\ a\ b\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ b\ a\ a\ a\ a\ a\ a\ a$$

در این صورت، چون $n_۱ = ۲۵$، $n_۲ = ۲۵$، و $u = ۲۰$، به‌دست می‌آوریم

$$\mu = \frac{۲ \cdot ۲۵ \cdot ۲۵}{۲۵ + ۲۵} + ۱ = ۲۶$$
$$\sigma^۲ = \frac{۲ \cdot ۲۵ \cdot ۲۵(۲ \cdot ۲۵ \cdot ۲۵ - ۲۵ - ۲۵)}{(۲۵ + ۲۵)^۲(۲۵ + ۲۵ - ۱)} = ۱۲٫۲$$

و

$$z = \frac{۲۰ - ۲۶}{\sqrt{۱۲٫۲}} = -۱٫۷۲$$

۴. چون $z = -۱٫۷۲$ بین $-۱٫۹۶$ و $۱٫۹۶$ قرار می‌گیرد. فرض صفر تصادفی بودن را نمی‌توان رد کرد. شواهدی در دست نیست که چرا نمونه را نباید تصادفی دانست. ▲

تمرینها

۳۷.۱۶ فرمول داده شده در صفحهٔ ۵۷۳ را برای احتمال به‌دست آوردن u ردیف با $u = ۲k + ۱$، که در آن k عدد صحیح مثبتی است، تحقیق کنید.

۳۸.۱۶ اگر شخصی در ۱۰ بار پرتاب یک سکهٔ همگن ۷ شیر و ۳ خط بیاورد، احتمالهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و ۷ ردیف را به‌دست آورید.

۳۹.۱۶ احتمال آن را پیدا کنید که $n_۱ = ۶$ حرف از یک نوع و $n_۲ = ۵$ حرف از نوع دیگر حداقل ۸ ردیف تشکیل دهند.

۴۰.۱۶ اگر $n_۱ = ۸$ حرف از یک نوع و $n_۲ = ۸$ حرف از نوع دیگر داشته باشیم، به ازای چند ردیف، فرض صفر تصادفی بودن را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ رد خواهیم کرد؟

کاربردها

۴۱.۱۶ در زیر ترتیب سفارشهایی داده شده است که یک کارگزار بازار سهام دستور خرید سهام B، و فروش سهام S، را دریافت کرده است.

$$BBBBBBBBSSBSSSSSSBBBBB$$

تصادفی بودن این ترتیب را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.
۴۲.۱۶ راننده‌ای بنزین مصرفی خود را یا از زنجیرهٔ پمپ‌بنزینهای شرکت T و یا از زنجیرهٔ پمپ‌بنزینهای شرکت M می‌خرد، و آرایش زیر ترتیب پمپ‌بنزینهایی را نشان می‌دهد که او در دوره‌ای از زمان از آنها بنزین خریده است.

$$TTTMTMTMMTTMTMTMTMMTMT$$

تصادفی بودن این ترتیب را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.
۴۳.۱۶ در زیر ترتیب آمدن کارتهای سیاه یا آبی، B، و قرمز یا سبز، R، در کشیدن متوالی کارتی از یک دسته کارت را ثبت کرده‌ایم.

$$BBBRRRRRBBRRR$$

تصادفی بودن این ترتیب را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.
۴۴.۱۶ آرایش زیر نشان می‌دهد که ۶۰ اتومبیل که متوالیاً از کنار باجهٔ اخذ عوارض اتوبان رد شده‌اند، شمارهٔ تهران، T، یا غیر تهران، O، داشته‌اند:

$$TTOTTTTOOTTTTOTOOTTTTOTOOTTTTT$$
$$OTTTOTOTTTTOOTOOOOTTTTOTOOTTTO$$

از سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ استفاده کرده آزمون کنید که آیا این آرایش از Tها و Oها را می‌توان تصادفی تلقی کرد.
۴۵.۱۶ برای آزمون اینکه یک علامت رادیویی شامل پیامی است یا متشکل از سروصدای تصادفی است، یک فاصلهٔ زمانی را به تعدادی زیر فاصله‌های بسیار کوتاه تقسیم کرده به‌ازای هر یک از آنها معین می‌کنند که آیا قدرت علامت از سطح معینی از سروصدا بیشتر است، E، یا نابیشتر است، N. در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید که آیا آرایش زیر را، که به این طریق به‌دست آمده‌است، می‌توان تصادفی تلقی کرد یا نه و بنابراین نتیجه گرفت که علامت شامل پیامی نیست و آن را می‌توان سروصدای تصادفی دانست یا خیر.

$$NNNENENENEEENEEENEENENEE$$
$$NEENNENEEENENNNENNENNNNE$$

۴۶.۱۶ دنباله‌ای از ۱۰۰ تا H و T بنویسید. به‌فرض اینکه این دنباله معرّف دنباله‌ای تصادفی از شیرها و خطها باشد، تصادفی بودن آن را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.
۴۷.۱۶ اعداد زیر تعداد دانش‌آموزان غایب از مدرسه‌ای در ۲۴ روز متوالی است: ۲۹، ۲۵، ۳۱، ۲۸، ۳۰، ۲۸، ۳۳، ۳۱، ۳۵، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۲۸، ۳۶، ۳۰، ۳۳، ۲۶، ۳۰، ۲۸، ۳۲، ۳۱، ۳۸، و ۲۷. در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱، آزمون تصادفی بودن را انجام دهید.

۴۸.۱۶ اعداد زیر تعداد اقلام معیوبی را نشان می‌دهند که یک ماشین در ۵۰ روز متوالی تولید کرده است: ۷، ۱۴، ۱۷، ۱۰، ۱۸، ۱۹، ۲۳، ۱۹، ۱۴، ۱۰، ۱۲، ۱۸، ۱۹، ۱۳، ۲۴، ۲۶، ۹، ۱۶، ۱۹، ۱۴، ۱۹، ۱۰، ۱۵، ۲۲، ۲۵، ۲۴، ۲۰، ۹، ۱۷، ۲۸، ۲۹، ۱۹، ۲۵، ۲۳، ۲۴، ۲۸، ۳۱، ۱۹، ۲۴، ۳۰، ۲۷، ۲۴، ۳۹، ۳۵، ۲۳، ۲۶، ۲۸، ۳۱، ۳۷، و ۴۰. وجود روند را در این آرایش، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۲۵ آزمون کنید.

۴۹.۱۶ اعداد زیر تعداد مهمانیهای ناهاری هستند که یک نمایندگی بیمه به حساب شرکت بیمه در طول ۳۰ ماه متوالی داده است.

۶, ۷, ۵, ۶, ۸, ۶, ۸, ۶, ۶, ۴, ۳, ۲, ۴, ۴, ۳, ۴, ۷,
۵, ۶, ۸, ۶, ۶, ۳, ۴, ۲, ۵, ۴, ۴, ۳, ۷

با استفاده از آزمون ردیف مبتنی بر جدول XI، تصادفی بودن آرایش بالا را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

۵۰.۱۶ تعداد فروشگاههای خرده‌فروشی که در طی یک دورهٔ ۳۳ ساله برای کسب‌وکار افتتاح شده‌اند و در همان سال افتتاح از صحنهٔ فعالیت کنار رفته‌اند به‌صورت زیر است.

۱۰۸, ۱۰۳, ۱۰۹, ۱۰۷, ۱۲۵, ۱۴۲, ۱۴۷, ۱۲۲, ۱۱۶, ۱۵۳, ۱۴۴,
۱۶۲, ۱۴۳, ۱۲۶, ۱۴۵, ۱۲۹, ۱۳۴, ۱۳۷, ۱۴۳, ۱۵۰, ۱۴۸, ۱۵۲,
۱۲۵, ۱۰۶, ۱۱۲, ۱۳۹, ۱۳۲, ۱۲۲, ۱۳۸, ۱۴۸, ۱۵۵, ۱۴۶, ۱۵۸

با استفاده از این واقعیت که میانه برابر با ۱۳۸ است، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ وجود یک روند واقعی را آزمون کنید.

۵۱.۱۶ در زیر فروشهای فصلی شش سال (برحسب میلیون دلار) یک سازنده ماشینهای سنگین داده شده است.

۸۳٫۸, ۱۰۲٫۵, ۱۲۱٫۰, ۹۰٫۵, ۱۰۶٫۶, ۱۰۴٫۸, ۱۱۴٫۷, ۹۳٫۶,
۹۸٫۹, ۹۶٫۹, ۱۲۲٫۶, ۸۵٫۶, ۱۰۳٫۲, ۹۶٫۹, ۱۱۸٫۰, ۹۲٫۱,
۱۰۰٫۵, ۹۲٫۹, ۱۲۵٫۶, ۷۹٫۲, ۱۱۰٫۸, ۹۵٫۱, ۱۲۵٫۶, ۸۶٫۷

در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵، آیا الگوی دوری واقعی وجود دارد؟

۵۲.۱۶ نظریهٔ ردیفها را می‌توان به‌عنوان بدیلی برای آزمون مجموع رتبه‌ای بخش ۴.۱۶، یعنی آزمون این فرض صفر که دو نمونهٔ مستقل از جامعه‌های پیوستهٔ یکسانی حاصل می‌شوند، به‌کار برد. صرفاً داده‌ها را توأماً رتبه‌بندی کنید، یک ۱ زیر هر مقدار متعلق به نمونهٔ اول، یک ۲ زیر هر مقدار متعلق به نمونهٔ دوم بنویسید و سپس تصادفی بودن آرایش حاصل از ۱ها و ۲ها را آزمون کنید، اگرتعداد ردیفها اندک باشد، می‌توان آن را ناشی از این واقعیت دانست که دو نمونه از جامعه‌هایی با میانگینهای نابرابر حاصل می‌شوند. با رجوع به داده‌های صفحهٔ ۵۶۳، این تکنیک را برای آزمون در سطح معنادار بودن ۰٫۰۵ برای‌اینکه آیا دو نمونه از جامعه‌های پیوستهٔ یکسان آمده‌اند یا دو جامعه میانگینهایی متفاوت دارند به‌کار برید.

۷.۱۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای

چون مفروضات زمینه‌ای آزمون معنی‌دار بودن برای ضریب همبستگی بخش ۵.۱۴ تا حدی دست و پاگیرند، گاهی ارجح است که از یک بدیل ناپارامتری استفاده شود. معمولترین اندازهٔ ناپارامتری ارتباط، **ضریب همبستگی رتبه‌ای** r_S است که **ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن**[1] هم نامیده می‌شود. برای مجموعهٔ مفروضی از داده‌های زوج شدهٔ $\{(x_i, y_i); i=۱, ۲, \ldots, n\}$، این ضریب از رتبه‌بندی xها در بین خود، و نیز yها، هر دو از کوچک به بزرگ یا بر عکس و سپس قرار دادن در فرمول زیر به‌دست می‌آید.

تعریف ۱.۱۶ ضریب همبستگی رتبه‌ای به‌صورت

$$r_S = ۱ - \frac{۶ \cdot \sum_{i=۱}^{n} d_i^۲}{n(n^۲ - ۱)}$$

است که در آن d_i تفاضل بین رتبه‌های x_i و y_i است.

وقتی رتبه‌های مساوی موجود باشند، مانند قبل عمل می‌کنیم و به مشاهده‌های همرتبه، میانگین رتبه‌هایی را که توأماً به‌دست آورده‌اند، نسبت می‌دهیم.

وقتی رتبه‌های مساوی موجود نباشند، r_S درواقع برابر با ضریب همبستگی r است که برای رتبه‌ها محاسبه می‌شود. برای تحقیق این مطلب، فرض کنید که r_i و s_i رتبه‌های x_i و y_i باشند. با استفاده از این واقعیت که مجموع و مجموع مربعات اولین n عدد طبیعی به‌ترتیب عبارت‌اند از $\frac{n(n+۱)}{۲}$ و $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{i=۱}^{n} r_i = \sum_{i=۱}^{n} s_i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ = \sum_{i=۱}^{n} s_i^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$
$$\sum_{i=۱}^{n} r_i s_i = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} - \frac{۱}{۲} \cdot \sum_{i=۱}^{n} d_i^۲$$

و اگر این عبارتها را در فرمول r قرار دهیم، فرمول بالا را برای r_S به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱۲.۱۶

اعداد زیر تعداد ساعتهایی است که ده دانشجو برای آمادگی شرکت در یک امتحان مطالعه کرده‌اند و نمره‌هایی است که به‌دست آورده‌اند.

1. Spearman

نمره y	تعداد ساعات مطالعه x
۵۶	۸
۴۴	۵
۷۹	۱۱
۷۲	۱۳
۷۰	۱۰
۵۴	۵
۹۴	۱۸
۸۵	۱۵
۳۳	۲
۶۵	۸

r_S را حساب کنید.

حل. با رتبه‌بندی xها و yها و با عمل بر طبق جدول زیر، به‌دست می‌آوریم

$d^۲$	d	رتبهٔ y	رتبهٔ x
۰٫۲۵	۰٫۵−	۷	۶٫۵
۰٫۲۵	۰٫۵−	۹	۸٫۵
۱٫۰۰	۱٫۰	۳	۴
۱٫۰۰	۱٫۰	۴	۳
۰٫۰۰	۰٫۰	۵	۵
۰٫۲۵	۰٫۵	۸	۸٫۵
۰٫۰۰	۰٫۰	۱	۱
۰٫۰۰	۰٫۰	۲	۲
۰٫۰۰	۰٫۰	۱۰	۱۰
۰٫۲۵	۰٫۵	۶	۶٫۵
۳٫۰۰			

از قرار دادن مقادیر مربوط در فرمول r_S نتیجه می‌شود که

$$r_S = ۱ - \frac{۶ \cdot ۳}{۱۰(۱۰^۲ - ۱)} = ۰٫۹۸$$

▲

آن‌گونه که در این مثال دیده می‌شود، محاسبهٔ r_s بسیار ساده است؛ در واقع گاهی آن را عمدتاً به‌دلیل سهولت محاسباتی به‌جای r به‌کار می‌برند. اگر r را برای داده‌های مثال قبل حساب می‌کردیم، مقدار $r = ۰٫۹۶$ را به‌دست می‌آوریم، و این به مقداری که برای $r_S = ۰٫۹۸$ به‌دست آوردیم، بسیار نزدیک است.

برای مقادیر کوچک n $(n \leq ۱۰)$، می‌توان آزمون صفر عدم همبستگی را، یعنی در واقع آزمون این فرض صفر را که xها و yها به تصادف با هم جور شده‌اند، بر پایهٔ جدولهای خاصی قرار داد که از توزیع دقیق نمونه‌گیری R_S (مراجع صفحهٔ ۵۸۳ را ببینید) تعیین می‌شوند. گرچه، اغلب اوقات،

از این واقعیت استفاده می‌کنیم که توزیع R_S را می‌توان به‌خوبی با توزیع نرمال تقریب کرد، و برای این منظور به‌نتایج زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۴.۱۶ تحت فرض صفر عدم همبستگی، میانگین و واریانس R_S عبارت‌اند از

$$E(R_S) = ۰, \qquad \mathrm{Var}(R_S) = \frac{۱}{n-۱}$$

برهانی از این قضیه را می‌توان در کتاب گیبنز یافت که جزو مراجع انتهای این فصل است. به‌بیان دقیق، قضیه وقتی قابل اعمال است که رتبه‌های مساوی وجود نداشته باشند، اما آن را می‌توان وقتی رتبه‌های مساوی وجود دارند ولی تعدادشان خیلی زیاد نیست، نیز به‌کار برد.

مثال ۱۳.۱۶

با مراجعه به مثال ۱۲.۱۶ معنی‌دار بودن مقداری را که برای $r_S = ۰٫۹۸$ به‌دست آمده است، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۱ آزمون کنید.

حل. ۱. $H_۰$: همبستگی وجود ندارد:

$H_۱$: همبستگی وجود دارد:

$\alpha = ۰٫۰۱$

۲. فرض صفر رد می‌شود اگر $z \geq ۲٫۵۷۵$ یا $z \leq -۲٫۵۷۵$، که در آن

$$z = r_S\sqrt{n-۱}$$

۳. با قرار دادن $n = ۱۰$ و $r_S = ۰٫۹۸$، به‌دست می‌آوریم

$$z = ۰٫۹۸\sqrt{۱۰-۱} = ۲٫۹۴$$

۴. چون $z = ۲٫۹۴$ بیشتر از $z_{۰٫۰۰۵} = ۲٫۵۷۵$ است، فرض صفر را باید رد کرد، و نتیجه می‌گیریم که بستگی واقعی (مثبت) بین ساعات مطالعه و نمره‌ها وجود دارد. ▲

تمرینها

۵۳.۱۶ اگر مجموعه‌ای از k تاییهای $(x_{۱۱}, x_{۱۲}, \ldots, x_{۱k})$ ، $(x_{۲۱}, x_{۲۲}, \ldots, x_{۲k})$، ... ، و $(x_{n۱}, x_{n۲}, \ldots, x_{nk})$ مفروض باشند، میزان ارتباط، یا هماهنگی آنها را می‌توان به‌کمک ضریب هماهنگی

$$W = \frac{۱۲}{k^۲ n(n^۲-۱)} \cdot \sum_{i=۱}^{n}\left[R_i - \frac{k(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

اندازه گرفت که در آن R_i مجموع رتبه‌هایی است که به x_{i1}، x_{i2}، . . . ، x_{ik} اختصاص داده شده‌اند وقتی که xهای با اندیس دوم ۱ بین خودشان رتبه‌بندی شوند، و برای xهای با اندیس دوم ۲ و، . . . ، و xهای با اندیس دوم k نیز همین رتبه‌بندی انجام شود. مینیمم و ماکسیمم مقادیر W چیست، و این مقادیر در رابطه با هماهنگی یا عدم هماهنگی مقادیر k متغیر تصادفی بازتاب چه چیزی هستند؟

کاربردها

۵۴.۱۶ r_S را برای داده‌های زیر که معرف نمره‌های آمار، x، و نمره‌های روانشناسی، y، ۱۸ دانشجو هستند، حساب کنید.

x	y	x	y
۷۸	۸۰	۹۷	۹۰
۸۶	۷۴	۷۴	۸۵
۴۹	۶۳	۵۳	۷۱
۹۴	۸۵	۵۸	۶۷
۵۳	۵۵	۶۲	۶۴
۸۹	۸۶	۷۴	۶۹
۹۴	۹۰	۷۴	۷۱
۷۱	۸۴	۷۰	۶۷
۷۰	۷۱	۷۴	۷۱

۵۵.۱۶ با رجوع به تمرین قبل، در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید که آیا مقدار حاصل برای r_S معنی‌دارست یا نه.

۵۶.۱۶ اعداد زیر نشان می‌دهند که چگونه هیئتی از متخصصان تغذیه و هیئتی از مصرف‌کنندگان، پانزده نوع صبحانه را از لحاظ خوشمزگی رتبه‌بندی کرده‌اند. r_S را به‌عنوان معیاری برای سنجش سازگاری این دو نحوهٔ رتبه‌بندی محاسبه کنید.

غذای صبحانه	متخصصان تغذیه	مصرف‌کنندگان
A	۳	۵
B	۷	۴
C	۱۱	۸
D	۹	۱۴
E	۱	۲
F	۴	۶
G	۱۰	۱۲
H	۸	۷
I	۵	۱
J	۱۳	۱۵
K	۱۲	۹
L	۲	۳
M	۱۵	۱۰
N	۶	۱۱
O	۱۴	۱۳

۵۷.۱۶ r_S را برای داده‌های تمرین ۱۷.۱۴ محاسبه و فرض صفر عدم همبستگی بین دو متغیر را در سطح معنی‌دار بودن ۰٫۰۵ آزمون کنید.

۵۸.۱۶ اعداد زیر رتبه‌هایی هستند که توسط سه داور به کارهای ده هنرمند داده شده‌اند.

داور A	داور B	داور C
۶	۲	۷
۴	۵	۳
۲	۴	۱
۵	۸	۲
۹	۱۰	۱۰
۳	۱	۶
۱	۶	۴
۸	۹	۹
۱۰	۷	۸
۷	۳	۵

مقدار W، ضریب هماهنگی تمرین ۵۳.۱۶ را به‌عنوان معیاری برای سنجش هماهنگی سه مجموعهٔ رتبه‌ها حساب کنید.

۵۹.۱۶ با مراجعه به تمرین ۱۶، با $k = ۳$، ضرایب همبستگی رتبه‌ای دوبه‌دو را محاسبه و تحقیق کنید که بستگی بین میانگین آنها، r_s، و ضریب هماهنگی (تمرین ۵۳.۱۶ را ببینید) عبارت است از

$$r_S = \frac{kW - ۱}{k - ۱}$$

مراجع

جدولهای جامع برای آزمونهای ناپارامتری متداول، از جمله آزمونهایی را که در این فصل از آنها بحث شد می‌توان در کتاب زیر یافت

OWEN, D. B., *Handbook of Statistical Tables*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.

به‌ویژه جدولهای آزمونهای کوچک نمونه‌ای برای معنی‌دار بودن ضریب همبستگی رتبه‌ای در کتاب زیر داده شده‌اند

KENDALL, M. G., *Rank Correlation Methods*. New York: Hafner Publishing Co., Inc., 1962.

ذخیره‌ای غنی از اطلاعات راجع‌به آزمونهای ناپارامتری گوناگون را می‌توان در کتب زیر یافت

GIBBONS, J. D., *Nonparametric Methods for Quantitative Analysis*, 2nd ed. Syracuse, N.Y.: American Sciences Press, 1985.

LEHMANN, E. L., *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1975,

MOSTELLER, F., and ROURKE, R. E. K., *Sturdy Statistics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973,

NOETHER, G. E., *Introduction to Statistics: A Nonparametric Approach*, 2nd ed. Boston: Houghton Mifflin Company, 1976,

SIEGEL, S., *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1956.

پیوست

مجموعها و حاصلضربها

پ. ۱ قواعد مجموعها و حاصلضربها

برای ساده کردن عبارتهای شامل مجموعها و حاصلضربها، از نمادهای $\sum$ و $\prod$ وسیعاً در آمار استفاده می‌شود. در نمادگذاری معمولی به‌ازای اعداد صحیح نامنفی a و b با $a \leq b$ می‌نویسیم $\sum_{i=a}^{b} x_i = x_a + x_{a+۱} + x_{a+۲} + \cdots + x_b$ و $\prod_{i=a}^{b} x_i = x_a x_{a+۱} x_{a+۲} \cdots x_b$.
وقتی با مجموعها یا حاصلضربها کار می‌کنیم، اغلب استفاده از قواعد زیر، که می‌توان درستی آنها را با نوشتن کامل عبارتهای مربوط، یعنی بدون نمادهای $\sum$ یا $\prod$، تحقیق کرد، مفیدند:

قضیهٔپ. ۱. ۱

۱. $$\sum_{i=۱}^{n} kx_i = k \cdot \sum_{i=۱}^{n} x_i$$

۲. $$\sum_{i=۱}^{n} k = nk$$

۳. $$\sum_{i=۱}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=۱}^{n} x_i + \sum_{i=۱}^{n} y_i$$

۴. $$\prod_{i=۱}^{n} kx_i = k^n \cdot \prod_{i=۱}^{n} x_i$$

۵. $$\prod_{i=۱}^{n} k = k^n$$

۶. $$\prod_{i=۱}^{n} x_i y_i = \left(\prod_{i=۱}^{n} x_i\right) \left(\prod_{i=۱}^{n} y_i\right)$$

۷. $$\ln \prod_{i=۱}^{n} x_i = \sum_{i=۱}^{n} \ln x_i$$

از مجموعهای دوگانه، سه‌گانه، ... ، نیز وسیعاً در آمار استفاده می‌شود، و اگر تعریف $\sum$ را که در بالا داده شده مکرراً به‌کار بریم، مثلاً، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{m}(x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in}) \\ &= (x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}) \\ &+ (x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ (x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn})\end{aligned}$$

توجه کنید که وقتی x_{ij} به این ترتیب در یک آرایهٔ مستطیلی مرتب می‌شود، زیرنویس اول معرف سطری است که عنصر خاصی به آن تعلق دارد، و زیرنویس دوم معرف ستون است.

وقتی با مجموعهای دوگانه کار می‌کنیم، قضیهٔ زیر از توجه خاصی برخوردار است؛ این قضیه پیامد فوری بسط چندجمله‌ای $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$ است:

قضیهٔپ. ۱. ۲

$$\sum\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]$$

که در آن

$$\sum\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j$$

پ. ۲ مجموعهای خاص

در نظریهٔ آمار ناپارامتری، به‌ویژه وقتی با مجموعهای رتبه‌ای سروکار داریم، اغلب به عبارتهایی برای مجموع توانهای اولین n عدد صحیح مثبت؛ یعنی به‌ازای $r = 0, 1, 2, \cdots$ به عبارتهایی به‌صورت

$$S(n, r) = 1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r$$

نیاز داریم. قضیهٔ زیر که اثبات آن در تمرین ۱ زیر از خواننده خواسته می‌شود، روش آسانی برای به‌دست آوردن این مجموعها فراهم می‌کند:

قضیهٔپ. ۲. ۱ به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n و k

$$\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}S(n,r)=(n+1)^k-1$$

عیب این قضیه این است که باید مجموعهای $S(n,r)$ را یکی‌یکی، اول به‌ازای $r=0$، سپس به‌ازای $r=1$، سپس به‌ازای $r=2$ و الی‌آخر پیدا کنیم. مثلاً به‌ازای $k=1$ به‌دست می‌آوریم

$$\binom{1}{0}S(n,0)=(n+1)-1=n$$

و بنابراین $S(n,0)=1^0+2^0+\cdots+n^0=n$. به‌همین نحو، به‌ازای $k=2$ به‌دست می‌آوریم

$$\binom{2}{0}S(n,0)+\binom{2}{1}S(n,1)=(n+1)^2-1$$
$$n+2S(n,1)=n^2+2n$$

و بنابراین، $S(n,1)=1^1+2^1+\cdots+n^1=\frac{1}{2}n(n+1)$. از خواننده در تمرین ۲ی زیر خواسته شده است که با استفاده از همین تکنیک نشان دهد که

$$S(n,2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

و

$$S(n,3)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

تمرینها

پ.۱ قضیهٔ پ.۲.۱ را با استفاده از واقعیت

$$(m+1)^k-m^k=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}m^r$$

که از بسط دوجمله‌ای $(m+1)^k$ به‌دست می‌آید، ثابت کنید.

پ.۲ درستی فرمولهای $S(n,2)$ و $S(n,3)$ را که در بالا داده شده‌اند، تحقیق کنید و عبارت مربوط به $S(n,4)$ را پیدا کنید.

پ.۳ با داشتن $x_۱ = ۱$، $x_۲ = ۳$، $x_۳ = -۲$، $x_۴ = ۴$، $x_۵ = -۱$، $x_۶ = ۲$، $x_۷ = ۱$، و $x_۸ = ۲$، مطلوب است
(الف) $\sum_{i=۱}^{۸} x_i$؛ (ب) $\sum_{i=۱}^{۸} x_i^۲$.

پ.۴ با داشتن $x_۱ = ۳$، $x_۲ = ۴$، $x_۳ = ۵$، $x_۴ = ۶$، $x_۵ = ۷$، $f_۱ = ۳$، $f_۲ = ۷$، $f_۳ = ۱۰$، $f_۴ = ۵$ و $f_۵ = ۲$، مطلوب است

(الف) $\sum_{i=۱}^{۵} x_i$ (ب) $\sum_{i=۱}^{۵} f_i$

(ج) $\sum_{i=۱}^{۵} x_i f_i$ (د) $\sum_{i=۱}^{۵} x_i^۲ f_i$

پ.۵ با داشتن $x_۱ = ۲$، $x_۲ = -۳$، $x_۳ = ۴$، $x_۴ = -۲$، $y_۱ = ۵$، $y_۲ = -۳$، $y_۳ = ۲$، و $y_۴ = -۱$، مطلوب است

(الف) $\sum_{i=۱}^{۴} x_i$ (ب) $\sum_{i=۱}^{۴} y_i$

(ج) $\sum_{i=۱}^{۴} x_i^۲$ (د) $\sum_{i=۱}^{۴} y_i^۲$

(هـ) $\sum_{i=۱}^{۴} x_i y_i$

پ.۶ با داشتن $x_{۱۱} = ۳$، $x_{۱۲} = ۱$، $x_{۱۳} = -۲$، $x_{۱۴} = ۲$، $x_{۲۱} = ۱$، $x_{۲۲} = ۴$، $x_{۲۳} = -۲$، $x_{۲۴} = ۵$، $x_{۳۱} = ۳$، $x_{۳۲} = -۱$، $x_{۳۳} = ۲$، و $x_{۳۴} = ۳$، مطلوب است
(الف) $\sum_{i=۱}^{۳} x_{ij}$ جداگانه به‌ازای $j = ۱, ۲, ۳, ۴$؛
(ب) $\sum_{j=۱}^{۴} x_{ij}$ جداگانه به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳$.

پ.۷ با رجوع به تمرین پ.۶، مجموع دوگانهٔ $\sum_{i=۱}^{۳} \sum_{j=۱}^{۴} x_{ij}$ را با استفاده از
(الف) نتایج قسمت (الف) آن تمرین؛
(ب) نتایج قسمت (ب) آن تمرین؛
حساب کنید.

جدولهای آماری

I. احتمالهای دوجمله‌ای
II. احتمالهای پواسون
III. توزیع نرمال استاندارد
IV. مقادیر $t_{\alpha,\nu}$
V. مقادیر $\chi^2_{\alpha,\nu}$
VI. مقادیر $f_{0.05,\nu_1,\nu_2}$ و $f_{0.01,\nu_1,\nu_2}$
VII. فاکتوریلها و ضرایب دوجمله‌ای
VIII. مقادیر e^x و e^{-x}
IX. مقادیر بحرانی برای آزمون رتبهٔ علامت‌دار
X. مقادیر بحرانی برای آزمون U
XI. مقادیر بحرانی برای آزمون ردیف

جدول I
احتمالهای دوجملهای*

n	x	θ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734

* مبتنی بر جداول

The Binomial Probability Distribution, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 6. Washington, D. C.: U. S. Government Printing Office, 1950.

جدول I (ادامه)

n	x	θ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
8	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	[illegible]
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537

جدول I (ادامه)

n	x	θ .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
12	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0349	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

جدول **I** (ادامه)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855

جدول I (ادامه)

		θ									
n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
18	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1669
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

جدول II
احتمالهای پواسون*

x	λ = 0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

* مبتنی بر

E. C. Molina, *Poisson's Exponential Binomial Limit*, 1973 Reprint, Robert E. Krieger Publishing Company, Melbourne, Fla.,

و با اجازهٔ ناشر.

جدول II (ادامه)

λ

x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

λ

x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

λ

x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339

جدول **II** (ادامه)

x	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241

جدول II (ادامه)

	λ									
x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0181	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	λ									
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

	λ									
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189

جدول II (ادامه)

	λ									
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

	λ									
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557

جدول II (ادامه)

x	λ 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

جدول III
توزیع نرمال استاندارد

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

همچنین برای $z =$ ۴٫۰، $z =$ ۵٫۰، $z =$ ۶٫۰، احتمالها به‌ترتیب عبارت‌اند از ۰٫۴۹۹۹۷، ۰٫۴۹۹۹۹۹۷، و ۰٫۴۹۹۹۹۹۹۹۹.

جدول IV
مقادیر $t_{\alpha,\nu}$*

ν	$\alpha = .10$	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$	ν
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

* با اجازهٔ Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. از اثر
Richard A. Johnson, Dean W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, 2nd ed., ©1988, Table 2, p. 592.

اقتباس شده است.

جدول V

مقادیر $\chi^2_{\alpha,\nu}$ *

ν	$\alpha = .995$	$\alpha = .99$	$\alpha = .975$	$\alpha = .95$	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$	ν
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	.676	.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

* این جدول با اجازهٔ هیات امنای بیومتریکا، براساس جدول شمارهٔ ۸
Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, Cambridge University Press, 1954
است.

جدول VI

مقادیر $f_{0.05,\nu_1,\nu_2}$*

درجهٔ آزادی صورت $= \nu_1$

درجهٔ آزادی مخرج $= \nu_2$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

* این جدول، با اجازهٔ هیأت امنای بیومتریکا از

M. Merrington and C. M. Thompson, "Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution," *Biometrika*, Vol. 33 (1943),

اقتباس شده است.

جدول VI (ادامه)

مقادیر $f_{0.01, \nu_1, \nu_2}$ *

درجهٔ آزادی صورت = ν_1

درجهٔ آزادی مخرج = ν_2

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

جدول VII
فاکتوریلها

n	$n!$	$\log n!$
0	1	0.0000
1	1	0.0000
2	2	0.3010
3	6	0.7782
4	24	1.3802
5	120	2.0792
6	720	2.8573
7	5,040	3.7024
8	40,320	4.6055
9	362,880	5.5598
10	3,628,800	6.5598
11	39,916,800	7.6012
12	479,001,600	8.6803
13	6,227,020,800	9.7943
14	87,178,291,200	10.9404
15	1,307,674,368,000	12.1165

ضرایب دوجمله‌ای

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

جدول VIII

مقادیر e^x و e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.0	1.000	1.000	**2.5**	12.18	0.082
0.1	1.105	0.905	**2.6**	13.46	0.074
0.2	1.221	0.819	**2.7**	14.88	0.067
0.3	1.350	0.741	**2.8**	16.44	0.061
0.4	1.492	0.670	**2.9**	18.17	0.055
0.5	1.649	0.607	**3.0**	20.09	0.050
0.6	1.822	0.549	**3.1**	22.20	0.045
0.7	2.014	0.497	**3.2**	24.53	0.041
0.8	2.226	0.449	**3.3**	27.11	0.037
0.9	2.460	0.407	**3.4**	29.96	0.033
1.0	2.718	0.368	**3.5**	33.12	0.030
1.1	3.004	0.333	**3.6**	36.60	0.027
1.2	3.320	0.301	**3.7**	40.45	0.025
1.3	3.669	0.273	**3.8**	44.70	0.022
1.4	4.055	0.247	**3.9**	49.40	0.020
1.5	4.482	0.223	**4.0**	54.60	0.018
1.6	4.953	0.202	**4.1**	60.34	0.017
1.7	5.474	0.183	**4.2**	66.69	0.015
1.8	6.050	0.165	**4.3**	73.70	0.014
1.9	6.686	0.150	**4.4**	81.45	0.012
2.0	7.389	0.135	**4.5**	90.02	0.011
2.1	8.166	0.122	**4.6**	99.48	0.010
2.2	9.025	0.111	**4.7**	109.95	0.009
2.3	9.974	0.100	**4.8**	121.51	0.008
2.4	11.023	0.091	**4.9**	134.29	0.007

جدول VIII (ادامه)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
5.0	148.4	0.0067	**7.5**	1,808.0	0.00055
5.1	164.0	0.0061	**7.6**	1,998.2	0.00050
5.2	181.3	0.0055	**7.7**	2,208.3	0.00045
5.3	200.3	0.0050	**7.8**	2,440.6	0.00041
5.4	221.4	0.0045	**7.9**	2,697.3	0.00037
5.5	244.7	0.0041	**8.0**	2,981.0	0.00034
5.6	270.4	0.0037	**8.1**	3,294.5	0.00030
5.7	298.9	0.0033	**8.2**	3,641.0	0.00027
5.8	330.3	0.0030	**8.3**	4,023.9	0.00025
5.9	365.0	0.0027	**8.4**	4,447.1	0.00022
6.0	403.4	0.0025	**8.5**	4,914.8	0.00020
6.1	445.9	0.0022	**8.6**	5,431.7	0.00018
6.2	492.8	0.0020	**8.7**	6,002.9	0.00017
6.3	544.6	0.0018	**8.8**	6,634.2	0.00015
6.4	601.8	0.0017	**8.9**	7,332.0	0.00014
6.5	665.1	0.0015	**9.0**	8,103.1	0.00012
6.6	735.1	0.0014	**9.1**	8,955.3	0.00011
6.7	812.4	0.0012	**9.2**	9,897.1	0.00010
6.8	897.8	0.0011	**9.3**	10,938	0.00009
6.9	992.3	0.0010	**9.4**	12,088	0.00008
7.0	1,096.6	0.0009	**9.5**	13,360	0.00007
7.1	1,212.0	0.0008	**9.6**	14,765	0.00007
7.2	1,339.4	0.0007	**9.7**	16,318	0.00006
7.3	1,480.3	0.0007	**9.8**	18,034	0.00006
7.4	1,636.0	0.0006	**9.9**	19,930	0.00005

جدول IX

مقادیر بحرانی برای آزمون رتبهٔ علامت‌دار*

n	$T_{.10}$	$T_{.05}$	$T_{.02}$	$T_{.01}$
4				
5	1			
6	2	1		
7	4	2	0	
8	6	4	2	0
9	8	6	3	2
10	11	8	5	3
11	14	11	7	5
12	17	14	10	7
13	21	17	13	10
14	26	21	16	13
15	30	25	20	16
16	36	30	24	19
17	41	35	28	23
18	47	40	33	28
19	54	46	38	32
20	60	52	43	37
21	68	59	49	43
22	75	66	56	49
23	83	73	62	55
24	92	81	69	61
25	101	90	77	68

* با اجازهٔ American Cyanamid Company از F. Wilcoxon and R. A. Wilcox, *Some Rapid Approximate Statistical Procedures*, American Cyanamid Company, Pearl River, N. Y., 1964.

نسخه‌برداری شده است.

جدول X
مقادیر بحرانی برای آزمون U*

مقادیر $U_{۰٫۱۰}$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2				0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3
3		0	0	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7
4		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	0	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18
6	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23
7	0	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28
8	1	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33
9	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72

مقادیر $U_{۰٫۰۵}$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2							0	0	0	0	1	1	1	1
3				0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5
4			0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10
5		0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14
6		1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19
7		1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
8	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29
9	0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	30	36	39
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49
13	1	4	8	12	16	20	24	28	30	37	41	45	50	54
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64

* این جدول با اجازهٔ مؤلف، از اثر

D. Auble, "Extended tables for the Mann-Whitney Statistics," *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, Vol. I, 1953

گرفته شده است.

جدول X (ادامه)

مقادیر $U_{۰٫۰۲}$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2												0	0	0
3						0	0	1	1	1	2	2	2	3
4				0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	7
5			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6			1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	15
7		0	1	3	4	6	7	9	11	12	14	16	17	19
8		0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	20	22	24
9		1	3	5	7	9	11	14	16	18	21	23	26	28
10		1	3	6	8	11	13	16	19	22	24	27	30	33
11		1	4	7	9	12	15	18	22	25	28	31	34	37
12		2	5	8	11	14	17	21	24	28	31	35	38	42
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39	43	47
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47	51
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56

n_1 \ n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3							0	0	0	1	1	1	2
4				0	0	1	1	2	2	3	3	4	5
5			0	1	1	2	3	4	5	6	7	7	8
6		0	1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12
7		0	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16
8		1	2	4	6	7	9	11	13	15	17	18	20
9	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	20	22	24
10	0	2	4	6	9	11	13	16	18	21	24	26	29
11	0	2	5	7	10	13	16	18	21	24	27	30	33
12	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	31	34	37
13	1	3	7	10	13	17	20	24	27	31	34	38	42
14	1	4	7	11	15	18	22	26	30	34	38	42	46
15	2	5	8	12	16	20	24	29	33	37	42	46	51

جدول XI
مقادیر بحرانی برای آزمون ردیف*

مقادیر $u'_{0.025}$

n_1 \ n_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2											2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
14	2	2	3	4	5	5	6	7	7	8	8	9	9	9
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10

مقادیر $u_{0.025}$

n_1 \ n_2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4		9	9									
5	9	10	10	11	11							
6	9	10	11	12	12	13	13	13	13			
7		11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15
8		11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16
9			13	14	14	15	16	16	16	17	17	18
10			13	14	15	16	16	17	17	18	18	18
11			13	14	15	16	17	17	18	19	19	19
12			13	14	16	16	17	18	19	19	20	20
13				15	16	17	18	19	19	20	20	21
14				15	16	17	18	19	20	20	21	22
15				15	16	18	18	19	20	21	22	22

* این جدول با اجازهٔ مؤلفان از اثر

F. S. Swed and C. Eisenhart, "Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14

اقتباس شده است.

جدول XI (ادامه)

مقادیر $u'_{0.005}$

n_1 \ n_2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3										2	2	2	2
4						2	2	2	2	2	2	2	3
5				2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
6			2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4
7			2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4
8		2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5
9		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6
10		2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6
11		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7
12	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7
13	2	2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7
14	2	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8
15	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8

مقادیر $u_{0.005}$

n_1 \ n_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5		11									
6	11	12	13	13							
7		13	13	14	15	15	15				
8		13	14	15	15	16	16	17	17	17	
9			15	15	16	17	17	18	18	18	19
10			15	16	17	17	18	19	19	19	20
11			15	16	17	18	19	19	20	20	21
12				17	18	19	19	20	21	21	22
13				17	18	19	20	21	21	22	22
14				17	18	19	20	21	22	23	23
15					19	20	21	22	22	23	24

پاسخ تمرینهای شمارهٔ فرد

فصل ۱

۱.۱ (الف) $\sum\limits_{i=1}^{n_1} n_{2i}$.

۵.۱ (ب) ۶، ۲۰، و ۷۰.

۹.۱ $\binom{r+n-1}{r}$ و ۲۱.

۱۱.۱ (ب) هفتمین سطر عبارت است از ۱، ۶، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۶، و ۱ و هشتمین سطر عبارت است از ۱، ۷، ۲۱، ۳۵، ۳۵، ۲۱، ۷، و ۱. همچنین

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^5$$

و

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

۱۹.۱ (الف) $-\frac{15}{384}$ و ۱۰−؛ (ب) ۲٫۲۳۰.

۲۱.۱ ۵۶۰.

۲۵.۱ (الف) ۵؛ (ب) ۴.

۲۹.۱ (الف) ۳۰؛ (ب) ۳۶.

۳۱.۱ (الف) ۴۰؛ (ب) ۹۰.

۳۳.۱ (الف) ۵۰۴۰؛ (ب) ۲۱۰.

۳۵.۱ ۹۰.

۳۷.۱ ۱۲۰ و ۷۲.

۳۹.۱ (الف) ۱۲۰؛ (ب) ۶۰.
۴۱.۱ ۱۲۶۰.
۴۳.۱ (الف) ۷۷۵۲۰؛ (ب) ۱۸۴۷۵۶؛ (ج) ۱۳۵۱.
۴۵.۱ ۷۰.
۴۷.۱ ۸۲۱۱۱۷۳۲۵۶.
۴۹.۱ ۵۹۰۴۹.
۵۱.۱ ۶۱۸۸.
۵۳.۱ ۱۲۰.

فصل ۲

۵.۲ (الف) $\{۶, ۸, ۹\}$؛ (ب) $\{۸\}$؛ (ج) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۸\}$؛ (د) $\{۱, ۵\}$؛ (هـ) $\{۲, ۴, ۸\}$؛ (و) $\varnothing$.

۷.۲ (الف) { اتومبیلهای ۵، ۶، ۷، ۸ }؛ (ب) { اتومبیلهای ۲، ۴، ۵، ۷ }؛ (ج) { اتومبیلهای ۱، ۸ }؛ (د) { اتومبیلهای ۳، ۴، ۷، ۸ }.

۹.۲ (الف) خانه‌ای که کمتر از ۳ اتاق دارد. (ب) خانه‌ای که شومینه ندارد. (ج) خانه‌ای که بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان نمی‌ارزد. (د) خانه‌ای که نوساز نیست. (هـ) خانه‌ای که ۳ اتاق یا بیشتر دارد و شومینه هم دارد. (و) خانه‌ای که ۳ اتاق یا بیشتر دارد و بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان نمی‌ارزد. (ز) خانه‌ای که بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان می‌ارزد ولی شومینه ندارد. (ح) خانه‌ای که نوساز است یا بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان می‌ارزد. (ط) خانه‌ای که نوساز است یا حداکثر ۶۰۰۰۰۰۰ تومان می‌ارزد. (ی) خانه‌ای که ۳ اتاق یا بیشتر دارد و/یا شومینه هم دارد. (ک) خانه‌ای که ۳ اتاق یا بیشتر دارد و/یا بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان می‌ارزد. (ل) خانه‌ای که نوساز است و بیش از ۶۰۰۰۰۰۰ تومان می‌ارزد.

۱۱.۲ (الف) (H, ۱)، (H, ۲)، (H, ۳)، (H, ۴)، (H, ۵)، (H, ۶)، (T, H, H)، (T, H, T)، (T, T, H)، و (T, T, T)؛ (ب) (H, ۱)، (H, ۲)، (H, ۳)، (H, ۴)، (H, ۵)، (H, ۶)، (T, H, T)، و (T, T, H)؛ (ج) (H, ۵)، (H, ۶)، (T, H, T)، (T, T, H)، و (T, T, T).

۱۳.۲ (الف) $۵^{k-۱}$؛ (ب) $\frac{۵^k-۱}{۴}$.

۱۵.۲ $\{(x,y)|(x-۲)^۲+(y+۳)^۲\leq ۹\}$.

۱۷.۲ (الف) پیشامد آنکه راننده بیمهٔ مسؤولیت داشته باشد. (ب) پیشامد آنکه راننده بیمهٔ تصادف داشته باشد. (ج) پیشامد آنکه راننده بیمهٔ مسؤولیت و یا بیمهٔ تصادف، و نه هردو را، داشته باشد. (د) پیشامد آنکه راننده هیچیک از دو نوع بیمه را نداشته باشد.

۱۹.۲ (الف) ناحیهٔ ۵؛ (ب) نواحی ۱ و ۲ باهم؛ (ج) نواحی ۳، ۵، و ۶ با هم؛ (د) نواحی ۱، ۳، ۴، و ۶ باهم.

۲۱.۲ ارقام ناسازگارند و نتایج بررسی باید مورد سؤال قرار گیرند.

۳۵.۲ (الف) مجاز؛ (ب) مجاز نیست زیرا مجموع احتمالها از ۱ بیشتر است؛ (ج) مجاز؛ (د) مجاز نیست زیرا $P(E)$ منفی است؛ (هـ) مجاز نیست، زیرا مجموع احتمالها کمتر از ۱ است.

۳۷.۲ (الف) احتمال اینکه رد نشود نمی‌تواند منفی باشد؛ (ب) ۰٫۹۵ $\neq$ ۰٫۸۵ = ۰٫۰۸ + ۰٫۷۷؛
(ج) ۱ < ۱٫۰۳ = ۰٫۰۷ + ۰٫۰۹ + ۰٫۱۴ + ۰٫۳۶ + ۰٫۲۵ + ۰٫۱۲؛
(د) ۱ > ۰٫۹۸ = ۰٫۴۰ + ۰٫۲۹ + ۰٫۲۱ + ۰٫۰۸.

۳۹.۴ (الف) ۰٫۲۹؛ (ب) ۰٫۸۰؛ (ج) ۰٫۶۳؛ (د) ۰٫۷۱.

۴۱.۲ (الف) $\frac{۳}{۸}$؛ (ب) $\frac{۱}{۴}$؛ (ج) $\frac{۱}{۱۰}$؛ (د) $\frac{۱}{۱۰}$؛ (ه) $\frac{۱۱}{۴۰}$.

۴۳.۲ $\frac{۲۰}{۲۲۱}$.

۴۵.۲ (الف) $\frac{۲۵}{۱۰۸}$؛ (ب) $\frac{۲۵}{۱۶۲}$؛ (ج) $\frac{۲۵}{۶۴۸}$؛ (د) $\frac{۲۵}{۱۲۹۶}$.

۴۷.۲ (الف) $P(A \cup B)$ کوچکتر از $P(A)$ است. (ب) $P(A \cap B)$ از $P(A)$ بیشتر است.
(ج) $P(A \cup B)$ از ۱ بیشتر است.

۴۹.۲ ۰٫۳۴.

۵۱.۲ $\frac{۱۳}{۳۶}$.

۵۳.۲ ۰٫۹۴.

۵۵.۲ (الف) ۳ به ۲؛ (ب) ۱۱ به ۵؛ (ج) ۷ به ۲.

۵۷.۲ ۵ به ۳.

۵۹.۲ (الف) مثلاً، فرض کنید $P(A\cap B)= P(A\cap B') =P(A'\cap B)= P(A'\cap B') = \frac{۱}{۴}$؛
(ب) مثلاً، فرض کنید $P(A\cap B) = P(A\cap B') = P(A'\cap B) = \frac{۱}{۵}$ و $P(A'\cap B') = \frac{۲}{۵}$.

۷۵.۲ $\frac{۱۵}{۲۸}$.

۷۷.۲ $\frac{۱}{۳}$.

۷۹.۲ ۰٫۴۴.

۸۱.۲ (الف) ۰٫۰۹۶؛ (ب) ۰٫۰۴۸؛ (ج) ۰٫۰۵۱۲؛ (د) ۰٫۷۶.

۸۳.۲ (الف) پیشامدها دوبه‌دو مستقل‌اند. (ب) پیشامدها مستقل نیستند.

۸۵.۲ (الف) ۰٫۱۴۰۶؛ (ب) ۰٫۱۱۹۸.

۸۷.۲ $\frac{۱}{۱۲}$.

۸۹.۲ ۰٫۷۲۹.

۹۱.۲ ۰٫۷۳۵.

۹۳.۲ ۰٫۴۷۵.

۹۵.۲ (الف) ۰٫۰۶۱۶؛ (ب) ۰٫۵۳۲۵.

۹۷.۲ ۰٫۳۸۱۸.

۹۹.۲ (الف) محتملترین علت، خرابکاری است؛ (ب) نامحتملترین علت، الکتریسیتهٔ ساکن است.

۱۰۱.۲ (الف) $P(M) = ۵P(Y) + ۲$؛ (ب) ۰٫۱۲.

فصل ۳

۱.۳ (الف) نه، زیرا $f(۴)$ منفی است؛ (ب) آری؛ (ج) نه، زیرا مجموع احتمالها کوچکتر از ۱ است.

۵.۳ $\circ < k < ۱$

۹.۳ (الف) نه، زیرا $F(۴)$ بزرگتر از ۱ است؛ (ب) نه، زیرا $F(۲)$ از $F(۱)$ کوچکتر است؛ (ج) آری.

۱۱.۳

$$F(x) = \begin{cases} \circ & x < ۱ \\ \frac{۱}{۱۵} & ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۳}{۱۵} & ۲ \leq x < ۳ \\ \frac{۶}{۱۵} & ۳ \leq x < ۴ \\ \frac{۱\circ}{۱۵} & ۴ \leq x < ۵ \\ ۱ & x \geq ۵ \end{cases}$$

۱۳.۳ (الف) $\frac{۳}{۴}$؛ (ب) $\frac{۱}{۴}$؛ (ج) $\frac{۱}{۲}$؛ (د) $\frac{۳}{۴}$؛ (هـ) $\frac{۱}{۲}$؛ (و) $\frac{۱}{۴}$.

۱۷.۳ (الف) $f(۳) = \frac{۱}{۶}$، $f(۴) = \frac{۱}{۶}$، $f(۵) = \frac{۱}{۳}$، $f(۶) = \frac{۱}{۶}$، و $f(۷) = \frac{۱}{۶}$؛
(ب)

$$F(z) = \begin{cases} \circ & z < ۳ \\ \frac{۱}{۶} & ۳ \leq z < ۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۴ \leq z < ۵ \\ \frac{۲}{۳} & ۵ \leq z < ۶ \\ \frac{۵}{۶} & ۶ \leq z < ۷ \\ ۱ & z \geq ۷ \end{cases}$$

۱۹.۳

$$F(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ \frac{۱}{۲۷} & \circ \leq x < ۱ \\ \frac{۷}{۲۷} & ۱ \leq x < ۲ \\ \frac{۱۹}{۲۷} & ۲ \leq x < ۳ \\ ۱ & x \geq ۳ \end{cases}$$

(الف) $\frac{۲\circ}{۲۷}$؛ (ب) $\frac{۸}{۲۷}$.

۲۱.۳ (الف) ۳۰ر۰؛ (ب) ۳۰ر۰.

۲۳.۳

$$F(x) = \begin{cases} \circ & x \leq ۲ \\ \frac{۱}{۵}(x - ۲) & ۲ < x < ۷;\ \ \frac{۲}{۵} \\ ۱ & x \geq ۷ \end{cases}$$

۲۵.۳

$$F(y)=\begin{cases} 0 & y\le 2 \\ \frac{1}{16}(y^2+2y-8) & 2<y<4 \\ 1 & y\ge 4 \end{cases}$$

(الف) ۰٫۵۴؛ (ب) ۰٫۱۵۱۹.

۲۷.۳

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} & 0<x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

(ب) $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$.

۲۹.۳

$$F(z)=\begin{cases} 0 & z\le 0 \\ 1-e^{-z^2} & z>0 \end{cases}$$

۳۱.۳

$$G(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 3x^2-2x^3 & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

احتمالها $\frac{5}{32}$ و $\frac{1}{2}$ هستند.

۳۳.۳

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0<x<1 \\ 2x-\frac{x^2}{2}-1 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

۳۵.۳

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0<x\le 1 \\ \frac{1}{4}(2x-1) & 1<x\le 2 \\ \frac{1}{4}(6x-x^2-5) & 2<x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

۳۷.۳ $f(x) = \frac{۱}{۲}$ به‌ازای $-۱ < x < ۱$، و $f(x) = ۰$ در سایر جاها.

۳۹.۳ $f(y) = ۱۸/y^{۳}$ به‌ازای $y > ۰$ و $f(y) = ۰$ در سایر جاها؛ دو احتمال عبارت‌اند از $\frac{۱۶}{۲۵}$ و $\frac{۹}{۶۴}$.

۴۱.۳ سه احتمال عبارت‌اند از $۱ - ۳e^{-۲}$، $۲e^{-۱} - ۴e^{-۳}$، و $۵e^{-۵}$.

۴۳.۳ (الف) $F(x) = ۰$؛ (ب) $F(x) = \frac{x}{۲}$؛ (ج) $F(x) = \frac{۱}{۲}(x + ۱)$؛ (د) $F(x) = ۰$.

۴۵.۳ احتمالها عبارت‌اند از $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳}{۸}$، و $\frac{۱}{۲}$.

۴۷.۳ (الف) $\frac{۷}{۲۷}$؛ (ب) $\frac{۳۲۵}{۸۶۴}$؛ (ج) $\frac{۹۵}{۴۳۲}$؛ (د) ۰.

۴۹.۳ (الف) ۰٫۴۵۱۲؛ (ب) ۰٫۱۰۵۴؛ (ج) ۰٫۲۰۱۹.

۵۱.۳ (الف) $\frac{۱}{۴}$؛ (ب) $\frac{۳۹}{۶۴}$؛ (ج) $\frac{۱}{۱۶}$.

۵۳.۳ (الف) $\frac{۱}{۴}$؛ (ب) ۰؛ (ج) $\frac{۷}{۲۴}$؛ (د) $\frac{۱۱۹}{۱۲۰}$.

۵۵.۳ (الف) $\frac{۲۹}{۸۹}$؛ (ب) $\frac{۵}{۸۹}$؛ (ج) $\frac{۵۵}{۸۹}$.

۵۷.۳

x

		۰	۱	۲	۳
	۰	۰	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۵}$
y	۱	$\frac{۱}{۳۰}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۸}{۱۵}$
	۲	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۳}{۵}$	۱

۵۹.۳ $k = ۲$.

۶۱.۳ (الف) $\frac{۱}{۲}$؛ (ب) $\frac{۵}{۹}$؛ (ج) $\frac{۱}{۳}$.

۶۳.۳ $۱ - \frac{۱}{۲} \cdot \ln ۲ = ۰٫۶۵۳۴$.

۶۵.۳ $(e^{-۱} - e^{-۴})^{۲}$.

۶۷.۳ $(e^{-۲} - e^{-۳})^{۲}$.

۷۳.۳ (الف) $\frac{۱}{۱۸}$؛ (ب) $\frac{۷}{۲۷}$.

۷۵.۳ $k = ۱۴۴$.

۷۹.۳ (ب)

x

		۰	۱	۲
	۰	$\frac{۳}{۲۸}$	$\frac{۹}{۲۸}$	$\frac{۳}{۲۸}$
y	۱	$\frac{۶}{۲۸}$	$\frac{۶}{۲۸}$	
	۲	$\frac{۱}{۲۸}$		

۸۱.۳

y \ x	۰	۱	۲	۳
-۳	$\frac{۱}{۸}$			
-۱		$\frac{۳}{۸}$		
۱			$\frac{۳}{۸}$	
۳				$\frac{۱}{۸}$

۸۳.۳ (الف) ۰٫۰۶۴؛ (ب) ۰٫۱۰۲.

۸۵.۳ (الف) $g(-۱) = \frac{۱}{۴}$ و $g(۱) = \frac{۳}{۴}$؛ (ب) $h(-۱) = \frac{۵}{۸}$، $h(۰) = \frac{۱}{۴}$، و $h(۱) = \frac{۱}{۸}$؛ (ج) $f(-۱|-۱) = \frac{۱}{۵}$ و $f(۱|-۱) = \frac{۴}{۵}$.

۸۷.۳ (الف) $m(x,y) = \frac{xy}{۳۶}$ برای $x = ۱,۲,۳$، و $y = ۱,۲,۳$؛ (ب) $n(x,z) = \frac{xz}{۱۸}$ برای $x = ۱,۲,۳$، و $z = ۱,۲$؛ (ج) $g(x) = \frac{x}{۶}$ برای $x = ۱,۲,۳$؛ (د) $\phi(z|۱,۲) = \frac{z}{۳}$ برای $z = ۱,۲$؛ (ه) $\psi(y,z|۳) = \frac{yz}{۱۸}$ برای $y = ۱,۲,۳$، و $z = ۱,۲$.

۸۹.۳ (الف) مستقل؛ (ب) نامستقل.

۹۱.۳ (الف) $h(y) = \frac{۱}{۴}(۱+y)$ برای $۰ < y < ۲$ و $h(y) = ۰$ در سایر جاها؛ (ب) $f(x|۱) = \frac{۱}{۲}(۲x+۱)$ برای $۰ < x < ۱$ و $f(x|۱) = ۰$ سایر جاها.

۹۳.۳ (الف) $g(x) = -\ln x$ برای $۰ < x < ۱$ و $g(x) = ۰$ سایر جاها؛ (ب) $h(y) = ۱$ برای $۰ < y < ۱$ و $h(y) = ۰$ سایر جاها؛ دو متغیر تصادفی مستقل نیستند.

۹۵.۳ $G(x) = ۱ - e^{-x^۲}$ برای $x > ۰$ و $G(x) = ۰$ سایر جاها.

۹۹.۳ (الف) $g(۰) = \frac{۵}{۱۴}$، $g(۱) = \frac{۱۵}{۲۸}$، و $g(۲) = \frac{۳}{۲۸}$؛ (ب) $\phi(۰|۰) = \frac{۳}{۱۰}$، $\phi(۱|۰) = \frac{۶}{۱۰}$، و $\phi(۲|۰) = \frac{۱}{۱۰}$.

۱۰۱.۳ (الف) ۰٫۷۴۲؛ (ب) ۰٫۲۷۳.

۱۰۳.۳ (الف) $g(x) = \frac{۲۰-x}{۵۰}$ برای $۱۰ < x < ۲۰$ و $g(x) = ۰$ سایر جاها؛
(ب) $\phi(y|۱۲) = \frac{۱}{۶}$ برای $۶ < x < ۱۲$ و $\phi(y|۱۲) = ۰$ سایر جاها؛ (ج) $\frac{۱}{۳}$.

۱۰۵.۳ (الف) $f(x_۱,x_۲,x_۳) = \frac{(۲۰۰۰۰)^۳}{(x_۱+۱۰۰)^۳(x_۲+۱۰۰)^۳(x_۳+۱۰۰)^۳}$ برای $x_۱ > ۰$، $x_۲ > ۰$، $x_۳ > ۰$، و $f(x_۱,x_۲,x_۳) = ۰$ سایر جاها؛ (ب) $\frac{۱}{۱۶}$.

فصل ۴

۱.۴ (الف) $g_۱ = ۰$، $g_۲ = ۱$، $g_۳ = ۴$، و $g_۴ = ۹$؛ (ب) $f(۰)$، $f(-۱)+f(۱)$، $f(-۲)+f(۲)$، و $f(۳)$؛

(ج)

$$\begin{aligned}&0 + f(0) + 1\cdot\{f(-1)+f(1)\} + 4\cdot\{f(-2)+f(2)\} + 9\cdot f(3)\\ &=(-2)^2\cdot f(-2)+(-1)^2\cdot f(-1)+0^2\cdot f(0)+1^2\cdot f(1)+2^2\cdot f(2)+3^2\cdot f(3)\\ &=\sum_x g(x)\cdot f(x)\end{aligned}$$

۳.۴ در برهان قضیهٔ ۳.۴، $\sum$ را به‌جای $\int$ قرار دهید.

۵.۴ (الف) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dy\,dx$؛ (ب) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx$

۷.۴ $E(Y) = \frac{37}{12}$.

۹.۴ (الف) ۲٫۴ و ۶٫۲۴؛ (ب) ۸۸٫۹۶.

۱۱.۴ $-\frac{11}{6}$.

۱۳.۴ $\frac{1}{2}$.

۱۵.۴ $\frac{1}{12}$.

۱۷.۴ ۷۵۰ دلار.

۱۹.۴ (الف) ۷۷٫۰ دلار؛ (ب) ۱٫۳۰ دلار؛ (ج) ۱٫۶۰ دلار؛ (د) ۱۵۰ دلار؛ (ه) ۱۵۰ دلار. اگر ۴ کیک بپزد، سود مورد انتظار بیشترین مقدار را دارد.

۲۱.۴ ۳۰۰۰۰ کیلومتر.

۲۳.۴ ۱۰۰۰۰ دلار.

۲۷.۴ $\mu = \frac{4}{3}$، $\mu'_2 = 2$، و $\sigma^2 = \frac{2}{9}$.

۳۳.۴ $\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu\mu'_2 + 2\mu^3$ و $\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu\mu'_3 + 6\mu^2\mu'_2 - 3\mu^4$

۳۵.۴ (الف) ۳٫۲؛ (ب) ۲٫۶.

۳۹.۴ (الف) $k = \sqrt{20}$؛ (ب) $k = 10$.

۴۱.۴ $M_X(t) = \frac{2e^t}{3-e^t}$، $\mu'_1 = \frac{3}{2}$، و $\mu'_2 = 3$.

۴۳.۴ $\mu = 4$ و $\sigma^2 = 4$.

۴۹.۴ $\frac{15}{44}$.

۵۱.۴ $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 7{,}2$

۵۳.۴ (الف) ۰٫۶۳۱؛ (ب) ۰٫۵۵۳.

۵۵.۴ (الف) بین ۰٫۲۳۰ و ۰٫۲۹۰؛ (ب) بین ۰٫۲۰۰ و ۰٫۳۲۰.

۵۷.۴ ۸.

۵۹.۴ ۰.

۶۱.۴ مثلاً، $f(0,0) = \frac{1}{6}$ و $g(0)h(0) = \frac{1}{24}$ به‌قسمی که $f(0,0) \neq g(0)h(0)$.

۶۳.۴ (ج) $E(e^{t_1X+t_2Y}) = \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}$، $E(XY) = 1$، $E(X) = 1$، $E(Y) = 1$، و $\text{cov}(X,Y) = 0$.

۶۵.۴ (الف) ۱۴۳؛ (ب) ۵۴.

۶۹.۴ ۷۵.

۷۱.۴ $\mu_{X|-1} = \frac{3}{5}$ و $\sigma^2_{X|-1} = \frac{16}{25}$.

۷۳.۴ $\mu_{Y|\frac{1}{4}} = \frac{11}{9}$ و $\sigma^2_{Y|\frac{1}{4}} = \frac{23}{81}$.

۷۷.۴ ۰٫۲۲۴.

۷۹.۴ (الف) $\mu = 0.74$ و $\sigma = 0.68$؛ (ب) $\mu = 1.91$ و $\sigma = 1.05$.

۸۱.۴ ۰٫۸.

۸۳.۴ ۲٫۹۵ دقیقه.

فصل ۵

۱۱.۵ $\mu'_2 = \mu'_{(2)} + \mu'_{(1)}$، $\mu'_3 = \mu'_{(3)} + 3\mu'_{(2)} + \mu'_{(1)}$، و $\mu'_4 = \mu'_{(4)} + 6\mu'_{(3)} + 7\mu'_{(2)} + \mu'_{(1)}$.

۱۳.۵ (الف) $F_X(t) = 1 - \theta + \theta t$؛ (ب) $F_X(t) = [1 + \theta(t-1)]^n$.

۱۵.۵ (الف) $\alpha_3 = 0$ وقتی $\theta = \frac{1}{2}$؛ (ب) $\alpha_3 \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

۱۷.۵ ۰٫۰۰۸۶.

۱۹.۵ (الف) ۰٫۳۰۲۵؛ (ب) ۰٫۳۰۲۵.

۲۱.۵ (الف) ۰٫۲۲۰۵؛ (ب) ۰٫۲۲۰۶.

۲۳.۵ ۰٫۲۰۴۱.

۲۵.۵ ۰٫۹۲۲۲.

۲۷.۵ $f(y) = \binom{y+k-1}{k-1}\theta^k(1-\theta)^y$ به‌ازای $y = 0, 1, 2, \cdots$.

۳۷.۵ $h(0; 4, 9, 5) = \frac{1}{126}$، $h(1; 4, 9, 5) = \frac{20}{126}$، $h(2; 4, 9, 5) = \frac{60}{126}$؛ $h(3; 4, 9, 5) = \frac{40}{126}$، و $h(4; 4, 9, 5) = \frac{5}{126}$.

۴۱.۵ (الف) ۰٫۰۰۶۰؛ (ب) ۰٫۰۰۷۶.

۴۷.۵ $\mu_2 = \lambda$، $\mu_3 = \lambda$ و $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$.

۴۹.۵ (الف) ۰٫۱۲۹۸؛ (ب) ۰٫۱۱۰۱.

۵۱.۵ (الف) ۰٫۰۱۸۰؛ (ب) ۰٫۰۱۸۰.

۵۳.۵ ۰٫۴۵۲۹.

۵۵.۵ (الف) ۰٫۵۹۴۸؛ (ب) ۰٫۲۹۴۱؛ (ج) ۰٫۰۵۰۴.

۵۷.۵ (الف) $\mu = \frac{15}{8}$ و $\sigma^2 = \frac{39}{64}$؛ (ب) $\mu = \frac{15}{8}$ و $\sigma^2 = \frac{39}{64}$.

۵۹.۵ (الف) شرط برقرار نیست. (ب) شرط برقرار است. (ج) شرط برقرار است.

۶۱.۵ (الف) ۰٫۲۴۷۸؛ (ب) ۰٫۲۴۵۸.

۶۳.۵ (الف) قاعدهٔ سرانگشتی برقرار نیست؛ (ب) قاعدهٔ سرانگشتی برای تقریب خوب برقرار است؛ (ج) قاعدهٔ سرانگشتی برای تقریب عالی برقرار است؛ (د) قاعدهٔ سرانگشتی برقرار نیست.

۶۵.۵ ۰٫۲۷۰۰.

۶۷.۵ (الف) ۰٫۱۶۰۶؛ (ب) ۰٫۱۵۱۲.

۶۹.۵ ۰٫۲۰۱۵.
۷۱.۵ (الف) ۰٫۱۶۵۳؛ (ب) ۰٫۲۹۷۵.
۷۳.۵ (الف) ۰٫۹۰۹۸؛ (ب) ۰٫۹۱۰۵.
۷۷.۵ ۰٫۰۱۰۳.
۷۹.۵ ۰٫۰۹۷۰.

فصل ۶

۳.۶

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le\alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \alpha<x<\beta \\ 1 & x\ge\beta \end{cases}$$

۵.۶ $\alpha_3=0$ و $\alpha_4=\frac{9}{5}$.
۱۱.۶ برای $0<\alpha<1$، وقتی $x\to 0$، آنگاه تابع به ∞ میل می‌کند؛ برای $\alpha=1$، تابع ماکسیممی مطلق در $x=0$ دارد.
۱۳.۶ $\mu'_1=\alpha\beta$، $\mu'_2=\alpha(\alpha+1)\beta^2$، $\mu'_3=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta^3$، و $\mu'_4=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\beta^4$.
۱۷.۶ $M_Y(t)=\frac{e^{-\theta t}}{1-\theta t}$.
۱۹.۶ برای $0<\nu<2$، وقتی $x\to 0$، آنگاه تابع به ∞ میل می‌کند؛ برای $\nu=2$ تابع ماکسیممی مطلق در $x=0$ دارد.
۲۳.۶ (الف) $k=\alpha\beta$.
۳۱.۶ $\frac{1}{2}$.
۳۳.۶ $n=100$.
۳۵.۶ (الف) ۰٫۶۰۶۵؛ (ب) ۰٫۰۶۲۰.
۳۷.۶ ۰٫۱۸۲۷.
۳۹.۶ ۰٫۲۲۳۱.
۴۱.۶ (الف) $\mu=0.2$؛ (ب) ۰٫۳۱۶۴.
۴۵.۶ $\mu_3=0$ و $\mu_4=3\sigma^4$.
۵۵.۶ (الف) ۰٫۱۲۷۱؛ (ب) ۰٫۶۴۰۶؛ (ج) ۰٫۱۴۱۳؛ (د) ۰٫۵۸۷۶.
۵۷.۶ (الف) $z=1.92$؛ (ب) $z=2.22$؛ (ج) $z=1.12$؛ (د) $z=\pm1.44$.
۵۹.۶ (الف) ۰٫۶۸۲۶؛ (ب) ۰٫۹۵۴۴؛ (ج) ۰٫۹۹۸۴؛ (د) ۰٫۹۹۹۹۴.
۶۱.۶ (الف) ۰٫۰۶۶۸؛ (ب) ۰٫۲۸۶۰؛ (ج) ۰٫۶۴۹۰.
۶۳.۶ ۶٫۰۹۴ اونس.

۶۵.۶ (الف) نه؛ (ب) آری؛ (ج) نه.

۶۹.۶ ۱۴۴۶ر۰.

۷۱.۶ (الف) ۲۴ر۰؛ (ب) ۴۹ر۰؛ (ج) ۹۶ر۰.

۷۵.۶ $\sigma_1 = 6$، $\sigma_2 = 3$، و $\rho = -\frac{1}{2}$.

۷۷.۶ $\rho_{UV} = \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2-4\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}}$.

۷۹.۶ (الف) ۲۹۹۰ر۰؛ (ب) ۱۸ر۰.

۸۱.۶ (الف) ۵ر۱۴ پاوند؛ (ب) ۶۲۵ر۲۳ اینچ.

فصل ۷

۱.۷ (الف) $G(y) = 1 - e^{-y}$ برای $y > 0$ و $G(y) = 0$ در سایر جاها؛
(ب) $g(y) = e^{-y}$ برای $y > 0$ و $g(y) = 0$ در سایر جاها.

۳.۷ $g(y) = 2y$ برای $0 < y < 1$ و $g(y) = 0$ در سایر جاها.

۵.۷ (الف) $f(y) = \frac{1}{\theta_1-\theta_2}\cdot\left(e^{-y/\theta_1} - e^{-y/\theta_2}\right)$ برای $y > 0$ و $f(y) = 0$ در سایر جاها؛
(ب) $f(y) = \frac{1}{\theta^2}\cdot ye^{-y/\theta}$ برای $y > 0$ و $f(y) = 0$ در سایر جاها.

۷.۷ (الف) $F(y) = 0$؛ (ب) $F(y) = \frac{1}{2}y^2$؛ (ج) $F(y) = 1 - \frac{1}{2}(2-y)^2$؛ (د) $F(y) = 1$.
همچنین، $f(y) = 0$ برای $y \leq 0$، $f(y) = y$ برای $0 < y \leq 1$، $f(y) = 2 - y$ برای $1 < y < 2$، و $f(y) = 0$ برای $y \geq 2$.

۹.۷ $g(v) = e^{-v}$ برای $v > 0$ و $g(v) = 0$ در سایر جاها.

۱۱.۷ $g(z) = \frac{1}{25}\cdot(20\cdot\ln 2 - 10)$ برای $0 < z \leq 5$،

$$g(z) = \frac{1}{25}\cdot\left(2z - 20 - 20\cdot\ln\frac{z}{10}\right)$$

برای $5 < z < 10$، و $g(z) = 0$ در سایر جاها.

۱۳.۷ $g(y) = \frac{9}{11}y^2$ برای $0 < y \leq 1$، $g(y) = \frac{3(2-y)(7y-4)}{22}$ برای $1 < y < 2$، و $g(y) = 0$ در سایر جاها.

۱۵.۷ $h(0) = \frac{3}{5}$ و $h(1) = \frac{2}{5}$.

۱۷.۷ $g(y) = \theta(1-\theta)^{-(1+y)/5}$ برای $y = -1, -6, -11, \cdots$.

۲۱.۷ $g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{y}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right)^2}$ برای $y > 0$ و $g(y) = 0$ در سایر جاها.

۲۵.۷ $g(y) = \frac{k}{16}y^3(1-y)$ برای $0 < y < 1$ و $g(y) = 0$ در سایر جاها؛ این، توزیع بتا با $\alpha = 4$، $\beta = 2$؛ $k = 320$.

۲۹.۷ (الف) $g(y) = \frac{1}{2}$ برای $0 < y < 1$ و $g(y) = \frac{1}{4}$ برای $1 < y < 3$؛
(ب) $h(z) = \frac{1}{16}\cdot z^{-\frac{3}{4}}$ برای $1 < z < 81$ و $h(z) = 0$ در سایر جاها.

۳۱.۷ (الف) $f(2, 0) = \frac{1}{36}$، $f(3, -1) = \frac{2}{36}$، $f(3, 1) = \frac{2}{36}$، $f(4, -2) = \frac{3}{36}$،

$f(۴, ۰) = \frac{۴}{۳۶}$، $f(۴, ۲) = \frac{۳}{۳۶}$، $f(۵, -۱) = \frac{۶}{۳۶}$، $f(۵, ۱) = \frac{۶}{۳۶}$، و $f(۶, ۰) = \frac{۹}{۳۶}$؛ (ب) $g(۲) = \frac{۱}{۳۶}$، $g(۳) = \frac{۴}{۳۶}$، $g(۴) = \frac{۱۰}{۳۶}$، $g(۵) = \frac{۱۲}{۳۶}$، و $g(۶) = \frac{۹}{۳۶}$.

۳۳.۷ $g(۰, ۰, ۲) = \frac{۲۵}{۱۴۴}$، $g(۱, -۱, ۱) = \frac{۵}{۱۸}$، $g(۱, ۱, ۱) = \frac{۵}{۲۴}$، $g(۲, -۲, ۰) = \frac{۱}{۹}$، $g(۲, ۰, ۰) = \frac{۱}{۶}$، و $g(۲, ۲, ۰) = \frac{۱}{۱۶}$.

۳۷.۷ $\mu = ۰$ و $\sigma^۲ = ۲$.

۳۹.۷ $g(z, u) = ۱۲z(u^{-۳} - u^{-۲})$ روی ناحیهٔ کراندار شده به‌وسیلهٔ $z = ۰$، $u = ۱$، و $z = u^۲$، و $g(z, u) = ۰$ در سایر جاها؛ $h(z) = ۶z + ۶ - ۱۲\sqrt{z}$ برای $۰ < z < ۱$ و $h(z) = ۰$ در سایر جاها.

۴۱.۷ توزیع حاشیه‌ای، توزیع کوشی $g(y) = \frac{۱}{\pi} \cdot \frac{۲}{۴+y^۲}$ به‌ازای $-\infty < y < \infty$ است.

۴۳.۷ $f(u, v) = \frac{۱}{۲}$ روی ناحیهٔ کراندار شده به‌وسیلهٔ $v = ۰$، $u = -v$، و $۲v + u = ۲$، و $f(u, v) = ۰$ در سایر جاها؛ $g(u) = \frac{۱}{۴}(۲ + u)$ برای $-۲ < u \leq ۰$، $g(u) = \frac{۱}{۴}(۲ - u)$ برای $۰ < y < ۲$، و $g(u) = ۰$ در سایر جاها.

۴۵.۷ $g(w, z) = ۲۴w(z - w)$ روی ناحیهٔ کراندار شده به‌وسیلهٔ $w = ۰$، $z = ۱$، و $z = w$؛ $g(w, z) = ۰$ در سایر جاها.

۵۱.۷ $h(z) = ۸z^۲$ به‌ازای $۰ < z \leq \frac{۱}{۲}$، $h(z) = ۸z(۱ - z)$ به‌ازای $\frac{۱}{۲} < z < ۱$، و $h(z) = ۰$ در سایر جاها؛ $h(\frac{۱}{۲}) = ۲$ برای اینکه تابع پیوسته باشد.

۵۵.۷ این توزیع، توزیع گاما با پارامترهای α و β است.

۵۹.۷ (الف) ۱۰۲۱ر۰؛ (ب) ۲۵۹۰ر۰.

۶۱.۷ ۲۲۲۰ر۰.

۶۳.۷ (الف) ۱۷۸۱ر۰؛ (ب) ۹۵۲۳ر۰؛ (ج) ۱۱۸۹ر۰.

۶۵.۷ (الف) ۱۰۸۶ر۰؛ (ب) ۳۴۹۲ر۰؛ (ج) ۶۱۶۸ر۰.

فصل ۸

۱۱.۸ وقتی از جامعه‌ای متناهی با جایگذاری نمونه می‌گیریم، شرایط نمونه‌گیری تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را برآورده می‌کنیم؛ یعنی، متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع‌اند.

۱۷.۸ $s = \frac{\sum\limits_{i=۱}^{n} x_i^۲}{n-۱} - \frac{n}{n-۱} \cdot \overline{x}^۲$.

۱۹.۸ (الف) $\frac{۱}{۴۹۵}$ (ب) $\frac{۱}{۷۷}$.

۲۱.۸ (الف) بر ۲ تقسیم شده است؛ (ب) بر ۵ر۱ تقسیم شده است؛ (ج) در ۳ ضرب شده است؛ (د) در ۵ر۲ ضرب شده است.

۲۳.۸ احتمال حداقل ۹۶ر۰ است.

۲۵.۸ (الف) احتمال حداکثر ۲۵ر۰ است؛ (ب) ۴۵۶۰ر۰.

۲۷.۸ (الف) ۳۸۸۰ر۰؛ (ب) ۷۱۰۸ر۰؛ (ج) ۱۷۳۶ر۰.

۲۹.۸ مقدار بین ۰۳۰٫ ۱۸– و ۰۳۰٫ ۱۸ قرار می‌گیرد.

۳۱.۸ ۰٫۲۷۴۳

۳۳.۸ مقدار بین ۰٫۲۶۸ و ۰٫۲۷۳۲ قرار می‌گیرد.

۴۳.۸ ۲۱٫۹٪ و ۵۳٫۵٪.

۵۹.۸ ۰٫۲۱۶.

۶۱.۸ ۰٫۰۰۵.

۶۳.۸ $t = -1.347$؛ چون $t = -1.347$ نسبتاً کوچک است (نزدیک به $-t_{0.10,11} = -1.363$)، داده‌ها ادعا را تأیید می‌کنند.

۶۵.۸ ۰٫۹۹.

۶۷.۸ $g_1(y_1) = n(1 - y_1)^{n-1}$ برای $0 < y_1 < 1$ و $g_1(y_1) = 0$ در سایر جاها؛ $g_n(y_n) = ny_n^{n-1}$ برای $0 < y_n < 1$ و $g_n(y_n) = 0$ در سایر جاها.

۶۹.۸ $E(Y_1) = \frac{1}{n+1}$ و $\operatorname{var}(Y_1) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

۷۱.۸ $h(\widetilde{x}) = \frac{12(2m+1)!}{m!m!} \cdot \widetilde{x}^{3m+2}(1 - \widetilde{x})(4 - 3\widetilde{x})^m(1 - 4\widetilde{x}^3 + 3\widetilde{x}^4)^m$ برای $0 < \widetilde{x} < 1$ و $h(\widetilde{x}) = 0$ در سایر جاها.

۷۳.۸ (الف) $g(y_1, y_n) = \frac{n(n-1)}{\theta^2} \cdot e^{-\frac{1}{\theta}(y_1+y_n)} \left[e^{-\frac{y_1}{\theta}} - e^{-\frac{y_n}{\theta}}\right]^{n-2}$ برای $0 < y_1 < y_n < \infty$ و $g(y_1, y_n) = 0$ در سایر جاها.

(ب) $g(y_1, y_2) = n(n-1)(y_n - y_1)^{n-2}$ برای $0 < y_1 < y_n < 1$ و $g(y_1, y_n) = 0$ در سایر جاها.

۷۵.۸ $h(y_1, R) = n(n-1)f(y_1)f(y_1+R)\left[\int_{y_1}^{y_1+R} f(x)dx\right]^{n-1}$ برای $0 < y_1 < 1-R < 1$ و $h(y_1, R) = 0$ در سایر جاها.

۷۷.۸ $g(R) = n(n-1)(1-R)R^{n-2}$ برای $0 < R < 1$ و $g(R) = 0$ در سایر جاها.

۸۱.۸ ۰٫۴۰۹۶.

۸۳.۸ ۰٫۳۶۷۲.

۸۵.۸ $n = 46$.

فصل ۹

۳.۹ (الف) تصمیم برعکس خواهد شد. (ب) تصمیم همان خواهد بود.

۵.۹ (الف) وی باید به کارگاه ساختمانی که ۳۳ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد، برود.
(ب) وی باید به کارگاه ساختمانی که ۲۷ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد، برود.
(ج) فرقی نمی‌کند.

۷.۹ (الف) وی باید ظرفیت کارخانه را حالا توسعه دهد. (ب) وی باید هتل Y را انتخاب کند.
(ج) وی باید به کارگاه ساختمانی که ۲۷ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد، برود.

۹.۹ (الف) وی باید هتل Y را انتخاب کند. (ب) وی باید به کارگاه ساختمانی که ۲۷ مایل از کارخانهٔ چوب‌بری فاصله دارد، برود.
۱۱.۹ (الف) استراتژیهای اپتیمم I و ۲ هستند و ارزش بازی ۵ است. (ب) استراتژیهای اپتیمم II و ۱ هستند و ارزش ۱۱ است. (ج) استراتژیهای اپتیمم I و ۱ هستند و ارزش ۵− است. (د) استراتژیهای اپتیمم I و ۲ هستند و ارزش ۸ است.
۱۳.۹ پرداختها برای اولین سطر جدول ۰ و ۶− هستند و برای دومین سطر جدول ۸ و ۳ هستند. (ب) استراتژیهای اپتیمم برای پمپ بنزین (الف) آن است که لیوان هدیه کند و برای پمپ بنزین دوم آن است که چاقو هدیه کند.
۱۵.۹ (الف) $\frac{5}{11}$ و $\frac{6}{11}$؛ (ب) $\frac{4}{11}$ و $\frac{7}{11}$؛ (ج) $-\frac{9}{11}$.
۱۷.۹ کشور در حال دفاع باید استراتژیهای خود را با احتمالهای $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{6}$ تصادفی‌سازی کند و دشمن باید استراتژیهای خود را با احتمالهای $\frac{5}{6}$ و $\frac{1}{6}$ تصادفی‌سازی کند؛ ارزش، برابر با ۱۰۳۳۳۳۳ دلار است.
۱۹.۹ (الف) باید قیمتها را کاهش دهد. (ب) آنها باید با کاهش دادن قیمتها یکی در یک روز و دیگری در روز دیگر به این مقصود برسند.
۲۳.۹ $\theta = \frac{2ab-n}{2(b^2-n)}$، $a = \frac{1}{2}\sqrt{n}$، و $b = \sqrt{n}$.
۲۷.۹ (الف) مقدارهای سطر اول جدول عبارت‌اند از ۰، ۵۰، و ۱۰۰، مقدارهای سطر دوم عبارت‌اند از ۵۰، ۰، و ۵۰ و مقدارهای سطر سوم عبارت‌اند از ۱۰۰، ۵۰، و ۰. (ب) $d_1(0) = 0$ و $d_1(1) = 0$، $d_2(0) = 0$ و $d_2(1) = \frac{1}{2}$، $d_3(0) = 0$ و $d_3(1) = 1$، $d_4(0) = \frac{1}{2}$ و $d_4(1) = 0$، $d_5(0) = \frac{1}{2}$ و $d_5(1) = \frac{1}{2}$، $d_6(0) = \frac{1}{2}$ و $d_6(1) = 1$، $d_7(0) = 1$ و $d_7(1) = 1$، $d_8(0) = 1$ و $d_8(1) = \frac{1}{2}$، و $d_9(0) = 1$ و $d_9(1) = 1$. (د) تابع تصمیم d_3.
۲۹.۹ (الف) مقدارهای سطر اول عبارت‌اند از ۰، β، و 2β، مقدارهای سطر دوم عبارت‌اند از $\alpha + 2\beta + \phi$، $\frac{1}{2}\alpha + 2\beta + \phi$، و $2\beta + \phi$، و مقدارهای سطر سوم عبارت‌اند از $\alpha + 2\beta + 2\phi$، $2\beta + 2\phi$، و $2\beta + 2\phi$. (ب) وی باید هر دو را بازرسی کند. (ج) وی باید بدون وارسی محموله را ارسال کند.

فصل ۱۰

۱.۱۰ $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.
۹.۱۰ $(n+1)Y_1$.
۲۵.۱۰ $\frac{8}{9}$.
۲۹.۱۰ (الف) $\frac{3}{4}$؛ (ب) $\frac{3}{5}$.
۳۳.۱۰ ۲۸.
۳۵.۱۰ ۲۷۹.
۴۷.۱۰ این آماره یک برآوردکنندهٔ بسنده برای θ نیست.

۵۳.۱۰ $\hat{\mu} = m'_1$ و $\hat{\sigma}^2 = m'_2 - (m'_1)^2$.

۵۵.۱۰ $\hat{\beta} = 2m'_1$.

۵۷.۱۰ $\hat{\alpha} = \frac{m'_1}{1-m'_1}$.

۵۹.۱۰ $\hat{\theta} = \sqrt{m'_2 - (m'_1)^2}$ و $\hat{\delta} = m'_1 - \sqrt{m'_2 - (m'_1)^2}$.

۶۱.۱۰ $\hat{\theta} = \frac{n_1+2n_2+3n_3}{3N}$.

۶۳.۱۰ $\hat{\alpha} = \frac{-n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i}$.

۶۵.۱۰ $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{n}}$.

۶۷.۱۰ $\hat{\alpha} = \frac{n}{\Sigma x^2}$.

۶۹.۱۰ $\hat{\delta} = y_1$ (کوچکترین مقدار نمونه‌ای) و $\hat{\theta} = \overline{x} - y_1$.

۷۱.۱۰ $\hat{\theta} = \frac{n_1+2n_2+3n_3}{3N}$.

۷۳.۱۰ $\hat{\alpha} = \frac{\overline{v}+\overline{w}}{2}$ و $\hat{\beta} = \frac{\overline{v}-\overline{w}}{2}$.

۷۷.۱۰ $\hat{\alpha} = ۴٫۶۲۷$ و $\hat{\beta} = ۱٫۵۵۶$.

۷۹.۱۰ $\hat{\theta} = ۴۰۲۰۰$ مایل.

۸۱.۱۰ $\hat{\theta} = ۴۷٫۶۹$ و $\hat{\delta} = ۴۱۲٫۶۴$.

۸۳.۱۰ $\hat{\alpha} = ۳٫۸۳$ و $\hat{\beta} = ۱۱٫۹۵$.

۸۵.۱۰ $\hat{\theta} = \frac{11}{60}$.

۸۷.۱۰ $\hat{\theta} = ۰٫۳۰$.

۹۳.۱۰ $E(\Theta|38) = ۰٫۲۹$.

۹۵.۱۰ ۰٫۴۷۸۶.

۹۷.۱۰ (الف) $\hat{\mu} = ۱۰۰$؛ (ب) $\hat{\mu} = ۱۱۲$؛ (ج) $\hat{\mu} = ۱۰۸$.

فصل ۱۱

۱.۱۱ $k = \frac{-1}{\ln(1-\alpha)}$.

۳.۱۱ $c = \frac{1\pm\sqrt{1-\alpha}}{\alpha}$.

۷.۱۱ اگر $\overline{X}_1$ و $\overline{X}_2$ میانگینهای نمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه‌های n_1 و n_2 از جامعه‌های نرمال با μ_1، μ_2، σ_1، و σ_2 باشند، و بخواهیم از $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ به‌عنوان برآوردکنندهٔ $\mu_1 - \mu_2$ استفاده کنیم، احتمال اینکه خطا کمتر از $z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ باشد، $1 - \alpha$ است.

۱۱.۱۱ $۵۹٫۸۲ < \mu < ۶۳٫۷۸$.

۱۳.۱۱ $۱۳۹٫۵۷ < \mu < ۱۴۴٫۰۳$.

۱۵.۱۱ با اطمینان ۹۵٪، حداکثر خطا ۰٫۸۳ دقیقه است.

۱۷.۱۱ $۵۹٫۹۹ < \mu < ۶۳٫۶۱$.

۱۹.۱۱ $n = ۳۵۵$.

۲۱.۱۱ $۶۱٫۹۶ < \mu < ۶۵٫۷۲$ گالن.

۲۳.۱۱ $-۷٫۴۸۵ < \mu_۱ - \mu_۲ < -۲٫۹۱۵$.

۲۵.۱۱ $-۰٫۱۹۸ < \mu_۱ - \mu_۲ < ۱٫۹۹۸$ فوت.

۲۷.۱۱ با اطمینان ۹۸٪، حداکثر خطا ۰٫۰۰۲۳ اهم است.

۳۵.۱۱ با اطمینان ۹۹٪، حداکثر خطا ۰٫۰۶۹ است.

۳۷.۱۱ با اطمینان ۹۵٪، حداکثر خطا ۰٫۰۵۳ است.

۳۹.۱۱ با اطمینان ۹۰٪، حداکثر خطا ۰٫۰۷۵ است.

۴۱.۱۱ $n = ۲۴۰۱$.

۴۳.۱۱ $n = ۱۰۳۷$.

۴۵.۱۱ $-۰٫۳۷۲ < \theta_۱ - \theta_۲ < -۰٫۲۰۴$.

۴۷.۱۱ با اطمینان ۹۸٪، حداکثر خطا ۰٫۰۵۳ است.

۵۱.۱۱ $۰٫۰۴ < \sigma^۲ < ۰٫۲۸$.

۵۳.۱۱ $۳٫۶۷ < \sigma < ۵٫۸۳$.

۵۵.۱۱ $۰٫۵۸ < \frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲} < ۱٫۹۶$.

۵۵.۱۱ $۰٫۲۳۳ < \frac{\sigma_۱^۲}{\sigma_۲^۲} < ۹٫۵۰۶$.

فصل ۱۲

۱.۱۲ (الف) ساده؛ (ب) مرکب؛ (ج) مرکب؛ (د) مرکب.

۳.۱۲ $\alpha = \frac{۱}{۲۱}$ و $\beta = \frac{۵}{۷}$.

۵.۱۲ $\alpha = (۱ - \theta_۰)^{k-۱}$ و $\beta = ۱ - (۱ - \theta_۱)^{k-۱}$.

۷.۱۲ $\alpha = ۰٫۰۸$.

۹.۱۲ $۱ - \beta = ۰٫۱۱۴$.

۱۱.۱۲ $\sum_{i=۱}^{n} x_i \geq K$ که در آن K را می‌توان با استفاده از این حقیقت که $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ دارای توزیع گاما با $\alpha = n$ و $\beta = \theta_۰$ است، معین کرد.

۱۳.۱۲ $\beta = ۰٫۳۷$.

۱۵.۱۲ $\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ \geq K$ که در آن K را می‌توان با استفاده از فرمول مربوط به مجموع n جمله یک تصاعد هندسی، تعیین کرد.

۱۷.۱۲ آنها در صورتی که به خطا این فرض صفر را رد کنند که ۶۰ درصد مسافران آنها با کشیدن سیگار در داخل هواپیما مخالف‌اند، مرتکب خطای نوع I می‌شوند. اگر به خطا این فرض صفر را قبول کنند که ۶۰ درصد مسافران آنها مخالف کشیدن سیگار در داخل هواپیما هستند، مرتکب خطای نوع II خواهند شد.

۱۹.۱۲ (الف) سازنده باید از فرض مقابل $\mu > ۲۰$ استفاده کند و تنها در صورتی که بتوان فرض صفر را رد کرد، اصلاحاتی انجام دهد.
(ب) سازنده باید از فرض مقابل $\mu < ۲۰$ استفاده کند و اصلاحات را انجام دهد مگر اینکه بتوان فرض صفر را رد کرد.
۲۱.۱۲ (الف) وی به خطا فرض صفر را خواهد پذیرفت.
(ب) وی به درستی فرض صفر را خواهد پذیرفت.
۲۳.۱۲ (الف) بلی؛ (ب) بلی.
۲۵.۱۲ مقادیر متناظر برای تابع توان عبارت‌اند از ۰٫۰۰۲۵، ۰٫۰۴۳۳، ۰٫۱۷۰۲، ۰٫۳۷۰۴، ۰٫۵۸۵۲، ۰٫۷۶۲۶، ۰٫۸۸۱۷، ۰٫۹۴۹۱، ۰٫۹۸۱۲، و ۰٫۹۹۴۱.
۲۷.۱۲ (الف) $\lambda = \frac{\left(\frac{n}{۲}\right)^n}{x^x(n-x)^{n-x}}$.

۳۱.۱۲
$$\lambda = \left[\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})^۲}{n\sigma_0^۲}\right]^{\frac{n}{۲}} \cdot e^{-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})^۲}{\sigma_0^۲}-n\right]}.$$

۳۵.۱۲ (الف) ۰٫۸۵۲؛ (ب) ۰٫۰۱۶، ۰٫۰۸۶، ۰٫۱۲۹، ۰٫۱۴۵، ۰٫۱۴۴، ۰٫۱۳۴، و ۰٫۱۲۲.

۳۷.۱۲ (الف) ۰٫۳۷۵، ۰٫۲۰۳، ۰٫۱۰۷، ۰٫۰۵۵، و ۰٫۰۲۷؛ (ب) ۰٫۹۳۲۹، ۰٫۷۵۸۵، ۰٫۳۸۴۰، و ۰٫۰۴۲۰.
۳۹.۱۲ $-۲ \cdot \ln \lambda = ۴۴٫۳۷$؛ فرض صفر را باید رد کرد.

فصل ۱۳

۱.۱۳ از ناحیهٔ بحرانی $\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^۲}{\sigma^۲} \geq \chi^۲_{\alpha,۱}$ استفاده کنید.
۳.۱۳ $n = ۵۲$.
۵.۱۳ $n = ۱۵۱$.
۷.۱۳ (الف) خیر؛ (ب) بلی؛ (ج) بلی.
۱۱.۱۳ $z = ۲٫۷۳$؛ فرض صفر باید رد شود.
۱۳.۱۳ $z = ۳٫۰۲$؛ فرض صفر باید رد شود.
۱۵.۱۳ $z = -۲٫۱۱$؛ فرض صفر باید رد شود.
۱۹.۱۳ فرض صفر را رد کنید هرگاه $\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲ \leq ۰٫۱۴۵$ یا $\overline{x}_۱ - \overline{x}_۲ \geq ۰٫۲۵۵$.
(الف) $\beta = ۰٫۱۸$؛ (ب) $\beta = ۰٫۷۱$؛ (ج) $\beta = ۰٫۷۱$؛ (د) $\beta = ۰٫۱۸$.
۲۱.۱۳ Pـمقدار $= ۰٫۰۰۹۴$؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۲۳.۱۳ Pـمقدار $= ۰٫۱۱۱۲$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۲۷.۱۳ Pـمقدار $= ۰٫۶۱۴۴$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

۲۹.۱۳ $t =$ ۴٫۰۳؛ فرض صفر باید رد شود.
۳۱.۱۳ برای $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$، ناحیهٔ بحرانی عبارت است از $s^2 \leq \sigma_0^2 \left[1 - z_\alpha \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]$؛ برای $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$، ناحیهٔ بحرانی عبارت است از $s^2 \leq \sigma_0^2 \left[1 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]$ یا $s^2 \geq \sigma_0^2 \left[1 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right]$.
۳۳.۱۳ $\chi^2 =$ ۵٫۹۲؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۳۵.۱۳ $\chi^2 =$ ۲۲٫۸۵؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۳۷.۱۳ $z =$ ۱٫۹۳؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۳۹.۱۳ $\frac{s_1^2}{s_2^2} =$ ۱٫۴۲؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۴۱.۱۳ $\frac{s_1^2}{s_2^2} =$ ۱٫۸۰؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۴۳.۱۳ برای $H_1 : \lambda > \lambda_0$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_\alpha$، که در آن k_α کوچکترین عدد صحیحی است که برای آن $\sum_{y=k_\alpha}^{\infty} p(y; n\lambda_0) \leq \alpha$. برای $H_1 : \lambda < \lambda_0$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k'_\alpha$، که در آن k'_α بزرگترین عدد صحیحی است که برای آن $\sum_{y=0}^{k'_\alpha} p(y; n\lambda_0) \leq \alpha$. برای $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$، فرض صفر را رد کنید هرگاه $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k'_{\alpha/2}$ یا $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_{\alpha/2}$.
۴۹.۱۳ Pـمقدار = ۰٫۱۳۴۸؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۵۱.۱۳ Pـمقدار = ۰٫۰۱۰۴؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۵۳.۱۳ Pـمقدار = ۰٫۰۰۱۲؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۵۵.۱۳ Pـمقدار = ۰٫۰۱۹۴؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۵۷.۱۳ $z =$ −۲٫۰۵؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۵۹.۱۳ $\chi^2 =$ ۲٫۹۲؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۶۱.۱۳ $\chi^2 =$ ۰٫۸۶؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۶۳.۱۳ $z =$ ۲٫۷۸؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۶۵.۱۳ $\chi^2 =$ ۰٫۷۵؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۷۱.۱۳ $\chi^2 =$ ۴٫۰؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۷۳.۱۳ $\chi^2 =$ ۱٫۳؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۷۵.۱۳ $\chi^2 =$ ۲۱٫۹؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۷۷.۱۳ $\chi^2 =$ ۱۳٫۶؛ فرض صفر را باید رد کرد.

فصل ۱۴

۳.۱۴ $\mu_{Y|x} = \frac{1+x}{2}$ و $\mu_{X|y} = \frac{2y}{3}$.
۵.۱۴ $\mu_{X|1} = \frac{4}{7}$ و $\mu_{Y|0} = \frac{9}{8}$.
۱۳.۱۴ $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

۱۷.۱۴ (الف) $\hat{y} = ۳۱٫۶۰۹ + ۰٫۵۸۱۶x$؛ (ب) $\hat{y} = ۸۰٫۴۶$.

۱۹.۱۴ (الف) $\hat{y} = ۱٫۸۹۹۹ - ۰٫۰۸۵۷x$؛ (ب) $\hat{y} = ۱٫۴۷۱۴$.

۲۱.۱۴ (الف) $\hat{y} = ۱٫۳ - ۰٫۰۸۵۷x$ (کدگذاری شده)؛ (ب) $\hat{y} = ۱٫۴۷۱۴$.

۲۳.۱۴ $\hat{y} = ۱٫۳۷۱(۱٫۳۸۳)^x$.

۲۷.۱۴ (الف) $t = \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_e/\sqrt{S_{xx}}}$؛ (ب) $\hat{\beta} - t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\frac{s_e}{\sqrt{S_{xx}}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/۲,n-۲}\cdot\frac{s_e}{\sqrt{S_{xx}}}$.

۳۵.۱۴ $t = ۳٫۷۲$؛ فرض صفر را باید رد کرد.

۳۷.۱۴ (الف) $\hat{y} = ۱۲٫۲۴۷۱ + ۱٫۴۹۲۷x$؛ (ب) $t = ۳٫۴۱$؛ فرض صفر را باید رد کرد.

۳۹.۱۴ $-۰٫۱۲۱۷ < \beta < -۰٫۰۴۹۷$.

۴۱.۱۴ (الف) $\hat{y} = ۱٫۲۵۹۴ + ۱٫۴۸۲۶x$؛ (ب) $t = ۳٫۱۰$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

۴۳.۱۴ $-۲٫۲۸۴۶ < \beta < ۶۵٫۵۰۲۶$.

۴۵.۱۴ (الف) $۶٫۴۵۲ < \mu_{Y|۹} < ۹٫۷۶۳۴$؛ (ب) ۳٫۴۷۷۷ و ۱۲٫۷۰۰۹.

۴۹.۱۴ $\frac{۱+r-(۱-r)e^{-۲z_{\alpha/۲}/\sqrt{n-۳}}}{۱+r+(۱-r)e^{-۲z_{\alpha/۲}/\sqrt{n-۳}}} < \rho < \frac{۱+r-(۱-r)e^{-۲z_{\alpha/۲}/\sqrt{n-۳}}}{۱+r+(۱-r)e^{-۲z_{\alpha/۲}/\sqrt{n-۳}}}$.

۵۱.۱۴ $r = ۰٫۵۵$؛ $z = ۲٫۵۶۵$ و مقدار r معنی‌دار است.

۵۳.۱۴ $r = ۰٫۷۲۷$؛ $z = ۵٫۰۵$ و مقدار r معنی‌دار است.

۵۵.۱۴ $۲٫۸۴ < \beta < ۴٫۱۰$.

۵۷.۱۴ $r = ۰٫۷۷۲$؛ $z = ۴٫۸۱$ و مقدار r معنی‌دار است.

۵۹.۱۴ $r = ۰٫۲۸۵$؛ $z = ۵٫۵۵$ و مقدار r معنی‌دار است.

۶۷.۱۴ (ب) $B'X_۰ \pm t_{\alpha/۲,n-k-۱}\hat{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{n[X_۰'(X'X)^{-۱}X_۰]}{n-k-۱}}$.

۶۹.۱۴ (الف) $\hat{\beta}_۰ = ۱۴٫۵۶$، $\hat{\beta}_۱ = ۳۰٫۱۰۹$، و $\hat{\beta}_۲ = ۱۲٫۱۶$؛ (ب) $\hat{y} = ۱۰۱٫۴۱$ (دلار).

۷۱.۱۴ (الف) $\hat{\beta}_۰ = -۱۲۴٫۵۷$، $\hat{\beta}_۱ = ۱٫۶۹۵$، و $\hat{\beta}_۲ = ۱٫۴۳۹$؛ (ب) $\hat{y} = ۶۳٫۲۴$.

۷۳.۱۴ $\hat{y} = ۶۹٫۷۳ + ۲٫۹۷۵z_۱ - ۱۱٫۹۷z_۲$ (با کدگذاری)؛ $\hat{y} = ۷۱٫۲$.

۷۵.۱۴ $\hat{y} = ۱۰٫۵ - ۲٫۰x + ۰٫۲x^۲$؛ $\hat{y} = ۵٫۹۵$.

۷۷.۱۴ $t = ۲٫۹۴$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد و شواهد واقعی برای اینکه برازش سهمی به‌جای خط راست ارزشمند باشد، دردست نیست.

۷۹.۱۴ $t = ۰٫۱۶$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.

۸۱.۱۴ $t = -۴٫۱۸$؛ فرض صفر را باید رد کرد.

۸۳.۱۴ $۷۸۵۶۸ < \mu_{Y|۳,۲} < ۷۹۶۴۹$ دلار.

۸۵.۱۴ $۷۴٫۵ < \mu_{Y|۲,۴,۱,۲} < ۱۲۸٫۳$ دلار.

فصل ۱۵

۷.۱۵ $f = ۱۷٫۰$، تفاوت از نظر مؤثر بودن، معنی‌دار است.

۹.۱۵ $f = ۳۹٫۳$ و تفاوتها در دز تأثیری ندارد؛ $\hat{\mu} = ۱۸٫۵$؛ $\hat{\alpha}_۱ = ۴٫۰$، $\hat{\alpha}_۲ = ۱٫۵$، و $\hat{\alpha}_۳ = -۵٫۵$.

۱۱.۱۵ $f = ۱٫۰۲$؛ تفاوتها در میانگینهای نمونه‌ای را می‌توان به تصادف نسبت داد.
۱۳.۱۵ $f = ۳٫۰۰$؛ فرض صفر را (مانند تمرین ۷۴.۱۳) نمی‌توان رد کرد.
۱۹.۱۵ $f_{Tr} = ۴٫۴۳$ و فرض صفر را برای موشک‌اندازها نمی‌توان رد کرد؛ $f_B = ۱۷٫۰۵$ و فرض صفر را برای سوختها باید رد کرد.
۲۱.۱۵ $f_{Tr} = ۷٫۹۹$ و فرض صفر را برای نخها باید رد کرد؛ $f_B = ۰٫۸۱$ و فرض صفر را برای ابزار اندازه‌گیری نمی‌توان رد کرد.
۲۳.۱۵ پزشک ساکن غرب، جمهوری‌خواه است.

فصل ۱۶

۳.۱۶ میانگین ۰ است و واریانس $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ است.
۵.۱۶ (الف) Pـمقدار عبارت است از ۰٫۰۰۵۹؛ فرض صفر را باید رد کرد.
(ب) $z = -۲٫۶۸$؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۷.۱۶ Pـمقدار برابر ۰٫۰۳۸۱ است؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۹.۱۶ با تصحیح پیوستگی $z = ۲٫۱۶$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۱۱.۱۶ Pـمقدار ۰٫۱۹۳۷ است؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۱۳.۱۶ با تصحیح پیوستگی $z = -۱٫۸۴$؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۱۵.۱۶ (الف) فرض صفر را رد کنید هرگاه $T \leq ۳$؛
(ب) فرض صفر را رد کنید هرگاه $T^- \leq ۵$؛
(ج) فرض صفر را رد کنید هرگاه $T^+ \leq ۵$.
۱۷.۱۶ $T = ۱۵$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۱۹.۱۶ (الف) $T = ۹۸٫۵$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
(ب) $z = ۰٫۲۶$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۲۷.۱۶ $U_۱ = ۵٫۵$؛ فرض صفر را باید رد کرد.
۲۹.۱۶ $z = -۰٫۱۰$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۳۱.۱۶ $z = ۱٫۶۲$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۳۳.۱۶ $U = ۳$.
۳۵.۱۶ $H = ۰٫۸۶$؛ فرض صفر را نمی‌توان رد کرد.
۳۹.۱۶ $\frac{۱۱}{۴۲}$.
۴۱.۱۶ $u = ۵$؛ فرض صفر تصادفی بودن را باید رد کرد.
۴۳.۱۶ $u = ۴$؛ فرض صفر تصادفی بودن را نمی‌توان رد کرد.
۴۵.۱۶ $z = ۱٫۳۱$؛ فرض صفر تصادفی بودن را نمی‌توان رد کرد.
۴۷.۱۶ $u = ۱۳$؛ فرض صفر تصادفی بودن را نمی‌توان رد کرد.
۴۹.۱۶ $u = ۵$؛ فرض صفر تصادفی بودن را باید رد کرد.

۵۱.۱۶ $z = $ ۲٫۵۰؛ فرض صفر را باید رد کرد و نتیجه می‌گیریم که یک الگوی دوری موجود است.
۵۳.۱۶ کمترین مقدار، $W = $ ۰ و بازتابی از فقدان پیوند کامل است؛ بزرگترین مقدار، $W = $ ۱ و بازتاب هماهنگی کامل است.
۵۵.۱۶ $z = $ ۳٫۵۵؛ $r_S = $ ۰٫۸۶ معنی‌دار است.
۵۷.۱۶ $z = $ ۱٫۷۹؛ $r_S = $ ۰٫۵۴ معنی‌دار نیست.

پیوست

پ. ۳ (الف) ۱۰؛ (ب) ۴۰.
پ. ۵ (الف) ۱؛ (ب) ۳؛ (ج) ۳۳؛ (د) ۳۹؛ (ه) ۲۹.
پ. ۷ (الف) ۱۹؛ (ب) ۱۹.

واژه‌نامه

آزاد توزیع	distribution-free
آزمایش	experiment
ـ کنترل شده	controlled experiment
آزمون	test
ـ دو دمی	two-tailed test
ـ رتبهٔ علامت‌دار	signed-rank test
ـ علامت یک نمونه‌ای	one-sample sign test
ـ فرض	testing of hypothesis
ـ کوچک نمونه‌ای	small-sample test
ـ های چندمرحله‌ای	multi-stage tests
ـ های دنباله‌ای	sequential tests
ـ های مقایسه‌های چندگانه	multiple comparisons tests
آماره	statistic
ـ نسبت درستنمایی	likelihood ratio statistic
ـ های ترتیبی	order statistics
اثرهای بلوکی	block effects
احتمال پیشین	prior probability
اریب	biased
استراتژی	strategy

ـ آمیخته	mixed strategy
ـ تصادفی شده	randomized strategy
ـ خالص	pure strategy
امتحان برنولی	Bernoulli trial
امید ریاضی	mathematical expectation
انحراف معیار	standard deviation
اندازهٔ ناحیهٔ بحرانی	size of critical region
بازی دو نفری مجموع‌ـصفر	zero-sum two-person game
بازیهای آماری	statistical games
بافتنمای احتمال	probability histogram
برآمد	outcome
برآورد	estimation
ـ بازه‌ای	interval estimate
ـ نقطه‌ای	point estimate
برآوردکنندهٔ ادغام شده	pooled estimator
برآوردکنندهٔ کارآ	efficient estimator
پراکنش‌نگار	scattergram
پیشامد	event
ـ های مستقل	independent events
ـ های وابسته	dependent events
تابع	function
ـ تصمیم	decision function
ـ توان	power function
ـ توزیع	distribution function
ـ چگالی احتمال	probability density function
ـ درستنمایی	likelihood function
ـ مخاطره	risk function
ـ مولد گشتاور	moment genetating function
ـ مولد گشتاور عاملی	factorial moment generating function
تأسف	regret
تحلیل	analysis

- رگرسیونی	regression analysis
- کوواریانس	analysis of covariance
- واریانس دوطرفه	two-way analysis of variance
- واریانس یکطرفه	one-way analysis of variance
- همبستگی	correlation analysis
تصحیح پیوستگی	continuity correction
تصمیم غیرقابل قبول	inadmissible decision
توزیع	distribution
- احتمال	probability distribution
- پسین	posterior distribution
- تجمعی	cumulative distribution
- چندمتغیره	multivatiate distribution
- حاشیه‌ای توأم	joint marginal distribution
- دوجمله‌ای	binomial distribution
- دوجمله‌ای منفی	negative binomial distribution
- دومتغیره	bivariate distribution
- شرطی	conditional distribution
- فوق‌هندسی	hypergeometric distribution
- نرمال مستدیر	circular normal distribution
- نسبت واریانس	variance ratio distribution
- نمایی	exponential distribution
- نمونه‌گیری	sampling distribution
- هندسی	geometric distribution
- یک‌متغیره	univariate distribution
- یکنواخت	uniform distribution
تیمار	treatment
جامعهٔ نامتناهی	infinite population
جایگشت	permutation
- دوری	circular permutation
چاولگی	skewness
چگالی احتمال سه‌متغیره	trivariate probability density
چگالی توأم	joint density

چگالی حاشیه‌ای	marginal density
حدود اطمینان	confidence limits
حدود تحمل	tolerance limits
داده‌های زوج شده	paired data
داده‌های شمارشی	count data
درجهٔ آزادی	degree of freedom
ردیف	run
رگرسیون چندمتغیره	multivariate regression
روش کمترین مربعات	least squares method
روش محوری	pivotal method
روش ناپارامتری	nonparametric method
زمان انتظار	waiting time
زیان فرصت	opportunity loss
سازگاری	consistency
سطح معنی‌دار بودن	level of significance
شبیه‌سازی	simulation
شکست	failure
ضریب	coefficient
ـ اطمینان	confidence coefficient
ـ توافقی	contingency coefficient
ـ رگرسیونی	regression coefficient
ـ هماهنگی	coefficient of concordance
ـ همبستگی رتبه‌ای	rank correlation coefficient
ـ همبستگی نمونه‌ای	sample correlation coefficient
طرح	design
ـ آزمایشها	experimental design
ـ بلوکی تصادفی شده	randomized block design
ـ بلوکی غیرکامل	incomplete block design
ـ بلوکی کامل	complete block design

finite population correction factor	عامل تصحیح جامعهٔ متناهی
confidence interval	بازهٔ اطمینان
marginal frequencies	فراوانیهای حاشیه‌ای
hypothesis	فرض
simple hypothesis	ـ ساده
null hypothesis	ـ صفر
composite hypothesis	ـ مرکب
alternative hypothesis	ـ مقابل
sample space	فضای نمونه‌ای
law of large numbers	قانون اعداد بزرگ
central limit theorem	قضیهٔ حد مرکزی
asymptotic efficiency	کارآیی مجانبی
relative efficiency	کارآیی نسبی
moment	گشتاور
product moment	ـ حاصلضربی
random variable	متغیر تصادفی
discrete random variable	ـ گسسته
uncorrelated variables	متغیرهای ناهمبسته
Bayes risk	مخاطرهٔ بیزی
Latin square	مربع لاتین
Bayes criterion	ملاک بیزی
minimax criterion	ملاک مینیماکس
operation characteristic curve	منحنی مشخصهٔ عمل
mid-range	میان‌برد
grand mean	میانگین کل
population median	میانهٔ جامعه
unbiased	نااریب
critical region	ناحیهٔ بحرانی
more powerful critical region	ـ تواناتر
rejection region	ناحیهٔ رد

ناحیهٔ قبول	acceptance region
نظریهٔ اشغال	occupancy theory
نظریهٔ بازیها	theory of games
نقاط زینی	saddle points
نمودار درختی	tree diagram
نمونه‌گیری	sampling

فهرست راهنما

مرکز نشر دانشگاهی

۳۳۰۰ تومان

شابک: ۹ ـ ۰۹۱۶ ـ ۰۱ ـ ۹۶۴