وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز نشر دانشگاهی

آشنایی با

منطق ریاضی

هربرت بی. اندرتون

ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی
محمد رجبی طرخورانی

آشنایی با
منطق ریاضی

هربرت بی. اندرتون

ترجمهٔ

غلامرضا برادران خسروشاهی، محمد رجبی طرخورانی

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

پیشگفتار مؤلف ۱
مقدمه ۳

۰- آگاهیهایی مفید دربارهٔ مجموعه‌ها ۷

۱- منطق جمله‌ها
۰.۱ تذکراتی غیرصوری دربارهٔ زبانهای صوری ۱۹
۱.۱ زبان منطق جمله‌ها ۲۲
۲.۱ استقرا و بازگشت ۲۷
۳.۱ ارزشدهی ۳۶
۴.۱ یگانه خوانی ۴۶
۵.۱ رابطهای جمله‌ای ۵۱
۶.۱ مدار راه‌گزین ۶۲
۷.۱ فشردگی و تصمیم‌پذیری ۶۸

۲- منطق مرتبهٔ اول
۰.۲ توضیحات مقدماتی ۷۵
۱.۲ زبانهای مرتبهٔ اول ۷۸
۲.۲ صدق و مدل ۸۹
۳.۲ یگانه خوانی ۱۱۰
۴.۲ یك حساب استنتاجی ۱۱۳
۵.۲ قضایای درستی و تمامیت ۱۳۸
۶.۲ مدلهای نظریه‌ها ۱۵۶
۷.۲ تعبیرات بین نظریه‌ها ۱۷۱

۸.۲ آنالیز غیر استاندارد ۱۸۱

۳- تصمیم ناپذیری
۰.۳ نظریهٔ اعداد ۱۹۳
۱.۳ اعداد طبیعی همراه با تالی ۱۹۷
۲.۳ تحدیدهای دیگری از نظریهٔ اعداد ۲۰۴
۳.۳ زیر نظریه‌ای از نظریهٔ اعداد ۲۱۴
۴.۳ حسابی‌سازی نحو ۲۳۹
۵.۳ ناتمامیت و تصمیم‌ناپذیری ۲۵۰
۶.۳ کاربردها در نظریهٔ مجموعه‌ها ۲۶۴
۷.۳ نمایش تابع‌نمایی ۲۷۰
۸.۳ توابع بازگشتی ۲۷۶

۴- منطق مرتبهٔ دوم
۱.۴ زبانهای مرتبهٔ دوم ۲۹۵
۲.۴ توابع اسکولم ۳۰۱
۳.۴ منطق چندگونه ۳۰۴
۴.۴ ساختهای عام ۳۰۹

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۳۱۹
واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۳۲۷
فهرست راهنما ۳۳۵
فهرست نمادها ۳۴۱

پیشگفتار مؤلف

این کتاب برخوردی ریاضی با افکار وقضایای اساسی منطق را عرضه می‌دارد، و به عنوان کتاب درسی برای یك درس ریاضی مقدماتی درمنطق درسطح سال سوم یا چهارم تدوین شده است. هدف آن ارائهٔ مفاهیم وقضایای منطق و توضیح اهمیت آنها و رابطهٔ آنها با بقیهٔ پژوهشهای ریاضی است.

به عنوان کتابی درسی، این کتاب را می‌توان برای یك درس سه‌ماهه تا یك ساله به‌کار برد. دریك درس سه ماهه، من معمولاً به بخش مدلهای نظریه‌های مرتبهٔ اول می‌رسم (بخش ۲.۶)؛ دریك دورهٔ چهارماه ونیمه، می‌توان نظری به فصل تصمیم ناپذیری انداخت (مانندآنچه در بخش ۳ . ۰ آمده است). در دورهٔ دوم، موضوعات فصل ۳ (دربارهٔ تصمیم‌ناپذیری) را می‌توان با وسعت بیشتری بررسی کرد.

این کتاب برای خواننده‌ای تدوین‌شده است که قبلاً منطق نخوانده‌است اما تجربیات چندی در استدلال ریاضی دارد. جز اشتیاق برای کار در سطح معینی از دقت و تجرید، پیشنیاز خاص دیگری لازم نیست. کاربرد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها اجتناب‌ناپذیر است. در فصل ۰ خلاصه‌ای فشرده از نظریهٔ مجموعه‌ها آمده است؛ و در صورت لزوم می‌توان به آن رجوع کرد. مدرس می‌تواند مقدار نظریهٔ مجموعه‌های به‌کار رفته را تنظیم کند. به‌عنوان مثال، اجتناب از اعداد کاردینال کاملاً امکان‌پذیر است (ولی درآن صورت بعضی از قضایای‌خوب ازدست خواهند رفت). کتاب شامل مثالهایی از جبر محض است. لکن‌اینها فقط مثال هستند و جزء اساسی درس نیستند. در فصلهای آخر (فصلهای ۳ و ۴) توقعات بیشتری از خواننده وجود دارد.

در بارهٔ استقرا وبازگشت بحثی گسترده‌تر از آنچه‌که متداول است انجام گرفته است (در بخش ۲۰۱). من در درسها با این موضوعات برخوردی شهودی داشته‌ام و درکتاب صورت دقیقتر آنها را عرضه‌کرده‌ام و نه برعکس آن را.

تمرینها (که بالغ بر ۱۵۰ است) تقریباً در پایان هربخش آمده است. اگر تمرینی با شمارهٔ سیاه داده شده باشد، این بدان معناست‌که از این تمرینها در متن استفاده شده است. تمرینهایی‌که بیش از حد متعارف دشوارند با ستاره مشخص شده‌اند.

من شادمانه دین خود را به معلمانم ابراز می‌دارم، در این رده از مردم آنهایی که همکاران و شاگردان من بوده‌اند نیز جای دارند. از خوانندگان کتاب، اگر تصحیحات و اظهار نظرهایی دریافت کنم، خوشحال می‌شوم.

مقدمه

منطق نمادی مدلی ریاضی برای تفکر قیاسی است، یا حداقل در آغاز این چنین بود؛ اما همانند شاخه‌های دیگر ریاضی، از محدودهٔ دوران تولد خود فراتر رفته است. همان‌گونه که نظریهٔ جدید احتمال مدلی است برای اتفاق و عدم حتمیت، منطق نمادی هم یك مدل است.

مدلها چگونه ساخته می‌شوند؟ یك جسم واقعی، مثلاً یك هواپیما، را در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم مدلی از شکل آن بسازیم، ویژگیهایی از آن، مثلاً در اینجا شکل آن، را انتخاب می‌کنیم و از ویژگیهای دیگر آن، مثلاً بزرگی آن، صرف نظر می‌کنیم. آنگاه جسمی می‌سازیم که از بعضی جنبه‌ها (که آنها را جنبه‌های اساسی می‌نامیم) به جسم اول شباهت داشته باشد، و از جنبه‌های دیگر (که آنها را جنبه‌های نامربوط می‌نامیم) به آن بی‌شباهت باشد. تطابق یا عدم تطابق این مدل با هدفی که در نظر داشتیم، بستگی به انتخاب خواصی از آن جسم دارد که باید در مدل منعکس شوند.

البته منطق مجردتر از هواپیماست. اجسام واقعی منطق، استنتاجهای «درست منطقی» هستند. مثلاً :

هر انسان فانی است.
سقراط انسان است.
پس، سقراط فانی است.

درستی استنتاج جملهٔ سوم (نتیجه) از دو جملهٔ اول (فرضها) به‌ویژگیهای خاص اخلاق و عادات سقراط وابسته نیست. درستی این استنتاج مرهون شکل جمله‌هاست نه‌حقایق تجربی درباب فناپذیری انسان. در اینجا، واقعاً مهم نیست که «فانی» به‌چه معناست؛ آنچه مهم است، این است که «هر» چگونه معنا شود.

غوژیها وقتی که هوا ابری باشد غشن هستند.
هم‌اکنون هوا ابری است، و این چیز یك غوژی است.
پس، این چیز غشن است.

در اینجا، نیز حتی بدون داشتن کمترین تصوری از اینکه یك غوژی غشن چیست، می‌توان تشخیص داد که جملهٔ سوم از دو جملهٔ اول نتیجه می‌شود.

استنتاجهای درست منطقی خیلی بیش از مثالهای سادهٔ فوق قابل توجه‌اند. در واقع، ریاضیات اصل موضوعی، از ابتدا تا انتها متشکل از انبوهی از چنین استنتاجهاست. بنابراین استنتاجهایی که ریاضی‌دانان حرفه‌ای انجام می‌دهند متشکل از اشیاء دنیای واقعی است، اشیایی که ویژگیهای آنها باید در مدل ما منعکس شود.

درستی منطقی این استنتاجها، مرهون شکل آنها ومستقل از محتوای آنهاست. این ملاك مبهمی است، لکن، درست همین گونه ابهامها هستندکه ما را وادار می‌کنند تا به مدلهای ریاضی روی آوریم. یکی از هدفهای عمدهٔ ما این خواهد بود که در درون یك مدل تقریب دقیقی از این ضابطه ارائه دهیم. سؤالهایی که در آغاز بیش ازهرچیز با آنها سروکار داریم عبارت‌اند از:

۱. این که می‌گوییم یك جمله از جمله‌های دیگر «منطقاً به دست می‌آید» به چه معناست؟

۲. اگر یك جمله منطقاً از جمله‌های دیگر نتیجه می‌شود، چه روشهای برهانی باید داشته باشیم تا این واقعیت را ثابت کند؟

ما درواقع دومدل عرضه خواهیم کرد. اولی(منطق جمله‌ها) مدلی بسیارساده است، ولی‌متأسفانه برای بررسی‌بسیاری از استنتاجهای جالب بسنده نیست. نابسندگی آن، ناشی از این‌امراست که این‌نوع مدلها تنها بعضی ازخواص‌استنتاجهای واقعی‌را دربرمی‌گیرند. مدل دوم (منطق مرتبهٔ اول) بخوبی از عهدهٔ استنتاجهایی که در ریاضیات متداول است برمی‌آید. وقتی یك ریاضی‌دان حرفه‌ای مدعی است که جملهٔ خاصی، از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها منتج می‌شود، منظورش این است که این استنتاج می‌تواند به استنتاجی‌در مدل ما ترجمه شود.

با وجود این که این مدل، برای ریاضیات کاملاً مناسب است، باید دانست که مدلهای دیگری نیز ازتفکر قیاسی به‌منظورهای دیگری پیشنهاد شده‌اند. مثلاً، فلاسفه و ریاضی‌دانان به منطقهایی موسوم به منطق موجه و منطق شهودی پرداخته‌اندکه بیانگر گروه دیگری از خواص استنتاجهای واقعی هستند. علاوه براین، مدلها، فی‌نفسه و همچنین به خاطرهدفهایی که با پیدایش آنها هم ارتباطی ندارد، تعمیم یافته وبررسی شده‌اند. به عنوان مثال، یکی از موضوعهای جالبی که مدتی است دربارهٔ آن مطالعه می‌کنند، منطق جمله‌های با طول بینهایت است.

تا اینجا، از دادن اطلاعات بیشتری در بارهٔ چگونگی مدل ما (منطق مرتبهٔ اول) اجتناب ورزیده‌ایم. حال، به عنوان اشاراتی مختصر، مثالهایی ازگویایی زبان صوری این مدل ارائه می‌دهیم. ابتدا این‌جملهٔ فارسی که شرط تساوی دو مجموعه را بیان می‌کند در نظر می‌گیریم: «هرگاه چیزهایی که عضو یك شیء هستند، همان چیزهایی باشندکه عضو شیء دیگری هستند، درآن صورت آن دو شیء یکی هستند.» این جمله، به صورت زیر

به‌زبان مرتبهٔ اول ما ترجمه می‌شود:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \approx y).$$

به عنوان دومین مثال، می‌توانیم جملهٔ «به ازای هر عـدد مثبت ε، یك عدد مثبت δ وجود دارد به طوری که به ازای هر x ی که فاصله‌اش از a کمتر از δ باشد، فاصلهٔ $f(x)$ و b کمتر از ε است» را به صورت زیر ترجمه کنیم:

$$\forall \varepsilon (\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (dxa < \delta \rightarrow dfxb < \varepsilon))).$$

به آن چه می‌خواهیم در این کتاب بپردازیم اشاراتی کردیم. اکنون با بیان این که چه کارهایی را انجام نخواهیم داد، از بعضی سوء تعبیرهای احتمالی جلوگیری می کنیم. این کتاب قصد ندارد چگونه اندیشیدن را به خواننده بیاموزد. گاهی کلمهٔ «منطق» به «چاره اندیشی» اطلاق می‌شود، اما ما منطق را به این معنی به‌کار نمی‌بریم.

آگاهیهایی مفید دربارهٔ مجموعه‌ها

فرض ما براین است که خواننده با دستگاه نظریهٔ سادهٔ مجموعه‌ها آشنایی مختصری دارد. مع‌هذا، دراینجا فشرده‌ای از مطالبی را که احتیاج خواهیم داشت عرضه می‌کنیم. این‌کار حداقل ما را با علایمی‌که به‌کار خواهیم برد آشنا می‌کند. به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم که به‌جای مطالعهٔ عمیق این فصل، در آغـاز کار فقط هنگامی‌که در فصلهای آینده به‌مطالبی برخوردکه درقالب مجموعه‌ها بیان شده‌اند به‌این فصل مراجعه‌کند.

یك مجموعه، گردآورده‌ای ازچیزهاست،که اعضای آن نامیده می‌شوند. طبق معمول برای بیان‌اینکه t عضوی از A است می‌نویسیم «$t \in A$» وبرای بیان اینکه t عضوی از A نیست می‌نویسیم «$t \notin A$». منظور از «$x = y$» این است که x و y یك چیز هستند. یعنی عبارت «x» درقسمت چپ علامت تساوی، نام همان شیئی است‌که در طرف دیگر به «y» نامیده شده است. اگر $A = B$، آنگاه به ازای هر شیء t، $t \in A$ اگر و تنها اگر $t \in B$. دلیل درستی این مطلب این است‌که A و B یك چیزهستند. عکس این مطلب، اصل گسترش است: اگر A و B دومجموعه باشند و به‌ازای هر شیء t داشته باشیم

$$t \in A \text{ اگر و تنها اگر } t \in B$$

آنگاه $A = B$.

یکی از عملهای مفید در مجموعه‌ها الحاق یك شیء بـه یك مجموعه است. اگر A مجموعه‌ای باشد، فرض کنـیم $A\,;\,t$ مجموعه‌ای باشد کـه عضوهـای آن عبارت‌اند از

(۱) عضوهای A، بعلاوهٔ (۲) عضو (احتمالاً جدید) t. در اینجا ممکن‌است t قبلاً عضو A بوده باشد یا نباشد، و داریم

$$t \in A \text{ اگر و تنها اگر } A\,;\,t = A.$$

یکی از مجموعه‌های ویژه، مجموعهٔ تهی، $\varnothing$، است که دارای هیچ عضو نیست. به ازای هر شیء x، یك مجموعهٔ تك عضوی $\{x\}$ وجود دارد که تنها عضوش x است، به‌طور اعم، به ازای هر تعداد متناهی از اشیاء مانند x_1، ...، x_n مجموعه‌ای وجود دارد که به $\{x_1, \dots, x_n\}$ نشان می‌دهیم و اعضایش دقیقاً این اشیاء هستند. توجه کنید که $\{x, y\} = \{y, x\}$، زیرا عضوهای این دو مجموعه یکی هستند و فقط عبارتهای مختلفی برای نمایش این مجموعه به‌کار رفته است.

این علامت‌گذاری برای نمایش بعضی از مجموعه‌های سادهٔ نامتناهی نیز به‌کاربرده می‌شود. مثلاً، $\{0, 1, 2, \dots\}$ همان مجموعهٔ $\mathbb{N}$، متشکل از اعداد طبیعی، و $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ همان مجموعهٔ $\mathbb{Z}$، متشکل ازهمهٔ اعداد صحیح، است. علامت«$\{x : \_\_x\_\_\}$» به‌عنوان‌مجموعهٔ همهٔ xهایی که $\_\_x\_\_$ به‌کار برده می‌شود. ما این علامت راآزادانه همه‌جا به‌کارخواهیم برد. مثلاً، $\{\langle m, n\rangle : \mathbb{N} \text{ در } m < n\}$، مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتبی از اعداد طبیعی است که در آنها مؤلفهٔ اول از مؤلفهٔ دوم کوچکتر است. و $\{x \in A : \_\_x\_\_\}$ مجموعهٔ همهٔ اعضایی از A است که $\_\_x\_\_$.

اگر A مجموعه‌ای باشد که همهٔ عضوهایش عضو B نیز باشند، آنگاه A را زیرمجموعه‌ای از B می‌نامیم و با «$A \subseteq B$» نشان می‌دهیم. توجه‌کنید‌که هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خود هست. همچنین، $\varnothing$ زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است. («$\varnothing \subseteq A$»، به‌اصطلاح، «با کذب مقدم» صادق است، زیرا دریافتن اینکه هرعضو $\varnothing$ عضوی از A نیز هست، به‌هیچ تحقیقی نیاز ندارد. یا از دیدگاهی دیگر، «$A \subseteq B$» فقط درصورتی‌کاذب است که بعضی از عضوهای A عضو B نباشند. اما اگر $A = \varnothing$، آنگاه چنین حالتی غیرممکن‌است.) از مجموعهٔ A، می‌توان مجموعهٔ جدیدی ساخت موسوم به مجموعهٔ توانی A، که با $\mathcal{P}A$ نمایش می‌دهیم، که عضوهای‌آن همهٔ زیرمجموعه‌های A هستند. بنابراین

$$\mathcal{P}A = \{x : x \subseteq A\}.$$

مثلاً،

$$\mathcal{P}\varnothing = \{\varnothing\},$$

$$\mathcal{P}\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

اجتماع مجموعه‌های A و B، $A \cup B$، مجموعهٔ همهٔ چیزهایی است که یا عضو A یا عضو B (ویا عضوهردو) باشند. مثلاً، $A\,;\,t = A \cup \{t\}$. همچنین، اشتراك مجموعه‌های A و B، $A \cap B$، مجموعهٔ همهٔ چیزهایی است که هم عضو A و هم عضو B باشند. مجموعه‌های A و B مجزا هستند اگر و تنها اگر اشتراك آنها تهی باشد. یك خانواده از مجموعه‌ها دو به دو مجزا هستند اگر و تنها اگر هردو عضو این خانواده مجزا باشند.

به‌طور کلی، مجموعهٔ A را، که هریك ازعضوهای‌آن خود مجموعه‌ای است، درنظر می‌گیریم. اجتماع مجموعهٔ A، $\bigcup A$، مجموعه‌ای است که از گذاشتن همهٔ عضوهای A داخل مجموعه‌ای واحد حاصل می‌شود.

$$\bigcup A=\{x : \text{است } A \text{ متعلق به‌بعضی ازاعضای } x\}.$$

به‌همین ترتیب،

$$\bigcap A=\{x : \text{است } A \text{ متعلق به‌همهٔ عضوهای } x\}.$$

مثلاً، اگر

$$A=\{\{۰,\ ۱,\ ۵\},\ \{۱,\ ۶\},\ \{۱,\ ۵\}\},$$

آنگاه

$$\bigcup A=\{۰,\ ۱,\ ۵,\ ۶\},$$

و

$$\bigcap A=\{۱\}.$$

دومثال دیگر،

$$A\bigcup B=\bigcup\{A,\ B\},$$

$$\bigcup \mathcal{P}A=A.$$

در مواردی‌که به‌ازای هر عدد طبیعی n، مجموعه‌ای مانند A_n داشته باشیم، اجتماع همهٔ این مجموعه‌ها، $\bigcup\{A_n : n\in N\}$، را معمولاً با «$\bigcup_{n\in N}A_n$» و یا فقط «$\bigcup_n A_n$» نمایش می‌دهند.

زوج مرتب $\langle x,\ y\rangle$ متشکل از اشیاء x و y، باید به‌طریقی تعریف شود که:

$$\langle x,\ y\rangle=\langle u,\ v\rangle \text{ اگر و تنها اگر } x=u \text{ و } y=v.$$

هر تعریفی که این خاصیت را بیان کند پذیرفتنی است؛ تعریف متداول عبارت است از

$$\langle x,\ y\rangle=\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}.$$

درمورد سه‌تاییهای مرتب، تعریف می‌کنیم:

$$\langle x,\ y,\ z\rangle=\langle\langle x,\ y\rangle,\ z\rangle$$

به‌طور کلی، nتاییها را به‌ازای $n>۱$، به‌استقرا، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle x_۱,\ \dots,\ x_{n+۱}\rangle=\langle\langle x_۱,\ \dots,\ x_n\rangle,\ x_{n+۱}\rangle.$$

همچنین مناسب است‌که تعریف کنیم $x=\langle x\rangle$؛ دراین صورت معادلهٔ فوق به‌ازای $n=۱$ نیز صادق خواهد بود. گوییم S یك دنبالهٔ متناهی از عضوهای A است اگر و تنها اگر به‌ازای عددصحیح n، داشته باشیم $S=\langle x_۱,\ \dots,\ x_n\rangle$، که در آن هر x_i متعلق به A است.

(دنباله‌های متناهی غالباً به صورت توابع متناهی خاصی تعریف می‌شوند، اما تعریف بالا برای کار ما مناسبتر است.)

یك پاره از دنبالهٔ متناهی $S=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ دنبالهٔ متناهی

$$\langle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m\rangle$$

است که در آن $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. این پاره، یك پارهٔ آغازی است اگر و تنها اگر $k=1$، و پارهٔ سره نامیده می‌شود اگر و تنها اگر با S متفاوت باشد.

اگر $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$، بسادگی می‌توان ثابت کرد که به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، $x_i = y_i$. (در اثبات، از استقرا نسبت به n وهمچنین از خاصیت اساسی زوجهای مرتب استفاده می‌شود.) اما اگر $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$، آنگاه در حالت کلی، نتیجهٔ $m=n$ بـه‌دست نمی‌آید. توجه کنید هر سه‌تایی مرتب یك زوج مرتب است. ولی می‌توان ثابت کرد که فقط درصورتی m و n می‌توانند نابرابر باشند که یکی از x_iها خود دنباله‌ای متناهی از y_jها باشد، یا بعکس.

لم ۰الف. فرض کنیم $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_{m+k}\rangle$. دراین صورت $x_1 = \langle y_1, \ldots, y_{k+1}\rangle$.

اثبات. ازاستقرا نسبت به m استفاده می‌کنیم. اگر $m=1$، نتیجه فوراً به‌دست‌می‌آید. برای مرحلهٔ استقرایی، فرض کنیم $\langle x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k}, y_{m+1+k}\rangle$. در این صورت مؤلفه‌های اول این زوجهای مرتب، باید مساوی باشند: $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_{m+k}\rangle$. حال فرض استقرا را به‌کار می‌بریم. ■

مثلاً، فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد کـه هیچ عضو آن دنباله‌ای متناهی از دیگر اعضا نباشد. حال اگر $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$ و همهٔ x_iها و y_jها نیز عضو A باشند، آنگاه بنا بر لم بالا خواهیم داشت $m=n$، و درنتیجه $x_i = y_i$.

ازمجموعه‌های A و B می‌توانیم مجموعهٔ $A \times B$، متشکل از همهٔ زوجهای $\langle x, y\rangle$ را که در آنها $x \in A$ و $y \in B$، تشکیل دهیم. A^n مجموعهٔ همهٔ n تاییهایی است که از عضوهای مجموعهٔ A تشکیل شده‌اند. مثلاً $A^3 = (A \times A) \times A$.

منظور از رابطه‌ای مانند R مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب. دامنهٔ R، کـه با $\operatorname{dom} R$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ همهٔ xهایی است که به‌ازای دست‌کم یك y، $\langle x, y\rangle \in R$. برد R، که با $\operatorname{ran} R$ نمایش می‌دهیم، مجموعهٔ همهٔ yهایی است که به ازای دست‌کم یك x، $\langle x, y\rangle \in R$. اجتماع $\operatorname{dom} R$ و $\operatorname{ran} R$ را میدان R می‌نامیم و با $\operatorname{fld} R$ نمایش می‌دهیم.

یك رابطهٔ nتایی در A، زیرمجموعه‌ای از A^n است. اگر $n > 1$، آنگاه این زیرمجموعه یك رابطه خواهد بود. ولی یك رابطهٔ یك‌تایی صرفاً زیرمجموعه‌ای از A است. یکی از رابطه‌هـای سادهٔ دوتایی در A، رابطهٔ تساوی در A است: $\{\langle x, x\rangle : x \in A\}$. به ازای

رابطهٔ nتایی R در A و زیرمجموعهٔ B از A، تحدید R به B، اشتراک $R \cap B^n$ است.

تابع رابطه‌ای است مانند F، با این خاصیت که به‌ازای هر x در $\operatorname{dom} F$، تنها یك y وجود داشته باشد که $\langle x, y \rangle \in F$. معمولاً این y منحصر به‌فرد را $F(x)$، مقدار F به‌ازای x، می‌نامیم. می گوییم F مجموعهٔ A را در مجموعهٔ B می‌نگارد و می‌نویسیم

$$F : A \to B$$

هرگاه F یك تابع باشدو $\operatorname{dom} F = A$ و $\operatorname{ran} F \subseteq B$. اگرعلاوه بر این، $\operatorname{ran} F = B$، آنگاه می گوییم F مجموعهٔ A را بروی مجموعهٔ B می‌نگارد. F یك به‌یك است اگر و تنها اگر به‌ازای‌هر y در $\operatorname{ran} F$، فقط یك x وجود داشته باشدکه $\langle x, y \rangle \in F$. اگرزوج $\langle x, y \rangle$ در $\operatorname{dom} F$ باشد، می‌نویسیم $F(x, y) = F(\langle x, y \rangle)$. این علامت گذاری به nتاییها نیز تعمیم می‌یابد؛ $F(x_1, \ldots, x_n) = F(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$.

یك عمل n تایی در A تابعی است که A^n را در A می‌نگارد. مثلاً، جمع یك عمل دوتایی در N است، درحالی که عمل تالی، S (که $S(n) = n + 1$)، یك عمل یك‌تایی در N است، اگر f یك عمل nتایی در A باشد، آنگاه تحدید f به‌یك زیرمجموعهٔ B از A، تابعی است مانند g که دامنهٔ آن B^n است ومقدارآن به‌ازای هریك ازنقاط B^n با مقدار تابع f درآن نقطه برابر است. بنابراین

$$g = f \cap (B^n \times A).$$

g یك عمل nتایی در B خواهد بود اگر و تنها اگر B تحت f بسته باشد. به‌این معنا که $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ و همهٔ b_iها در B باشند. دراین حالت، طبق تعریف تحدید یك رابطه، $g = f \cap B^{n+1}$.

یکی از عملهای یك تایی ساده در A، تابع همانی i در A است که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$i(x) = x \qquad \text{به‌ازای } x \in A$$

برای رابطهٔ R خاصیتهای زیر را تعریف می‌کنیم:

R در A انعکاسی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in A$، $\langle x, x \rangle \in R$.

R متقارن است اگر و تنها اگر هرگاه $\langle x, y \rangle \in R$، آنگاه $\langle y, x \rangle \in R$.

R متعدی است اگر و تنها اگر هرگاه هم $\langle x, y \rangle \in R$ وهم $\langle y, z \rangle \in R$، آنگاه $\langle x, z \rangle \in R$.

R در A تابع اصل تثلیث است اگر و تنها اگر به‌ازای هر x و y در A تنها یکی از سه حالت $\langle x, y \rangle \in R$، $x = y$، یا $\langle y, x \rangle \in R$ برقرار باشد.

R یك رابطهٔ هم ارزی در A است اگر وتنها اگر R یك عمل دوتایی در A باشد و درضمن، در A، انعکاسی، متقارن، و متعدی نیز باشد.

R یك رابطهٔ ترتیبی در A است، اگر و تنها اگر R متعدی و در A تابع اصل

تثلیث باشد.

به ازای رابطهٔ هم ارزی R در A و به ازای هر $x \in A$، ردهٔ هم ارزی x، کــه با $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت $\{y : \langle x, y\rangle \in R\}$ تعریف می‌شود. دراین‌صورت رده‌های هم‌ارزی، مجموعهٔ A را افراز می‌کنند، یعنی رده‌هــای هم ارزی زیرمجموعه‌هایی از A هستندکه هرعضو A تنها به‌یك ردهٔ هم ارزی متعلق است. به‌ازای هر x و y در A،

$$[x]=[y] \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \langle x, y\rangle \in R$$

دراین‌کتاب درموارد‌ی متعدد، اصل انتخاب را به‌کارخواهیم‌گرفت. اما اگر قضایا را به‌زبانهای شمارش‌پذیر محدودکنیم از چنین کاربردهایی بی‌نیاز خواهیم شد. از میان احکام متعدد معادل با اصل انتخاب، لم تسورن[1] بخصوص مفید است.

خانوادهٔ C از مجموعه‌ها را یك زنجیره می‌نامیم اگر و تنها اگر به‌ازای هردوعضو x و y در C، داشته باشیم $x\subseteq y$ یا $y\subseteq x$.

لم تسورن. فرض‌کنیم مجموعهٔ غیرتهی A چنان باشدکه به‌ازای هر زنجیرهٔ C در A، مجموعهٔ $\bigcup C$ در A باشد. دراین صورت عضوی مانند m در A وجود داردکه بیشین است، یعنی زیرمجموعهٔ هیچ عضوی از A نیست.

مجمــوعهٔ اعداد طبیعی N همان مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ...\}$ است. (این مجمــوعه را بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها نیز می‌توان تعریف کرد، ولی در اینجا چنین نخواهیم کرد.) مجموعهٔ A متناهی است اگر و تنها اگر یك تابع یك‌به‌یك f وجود داشته باشدکه به‌ازای عددی طبیعی مانند n مجمــوعهٔ A را بروی $\{۰, ۱, ..., n-۱\}$ بنگارد. (می‌توان f را به‌عنوان «شمارندهٔ» عضوهای مجموعهٔ A تصور کرد.)

مجموعهٔ A شمارش‌پذیر است اگــر و تنها اگــر تابعی وجود داشته باشد که A را یك به‌یك در N بنگارد. مثلاً، هرمجموعهٔ متناهی آشکارا شمارش‌پذیر است. حال مجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر A را درنظرمی‌گیریم. دراین صورت از تابع مفروض f که A را یك به‌یك در N می‌نگارد، می‌توان تابع f' را ساخت که A را یك به‌یك بروی N بنگارد. فرض‌کنیم به‌ازای عضو $a_۰$ در A، $f(a_۰)$ کوچکترین عضو مجموعهٔ $\operatorname{ran} f$ باشد؛ قرار می‌دهیم $f'(a_۰)=۰$. به‌طورکلی (به‌ازای هر n)، عضو منحصر به‌فرد a_n در A وجوددارد که $f(a_n)$ برابر $(n+۱)$مین عضو مجمــوعهٔ $\operatorname{ran} f$ است؛ قرار می‌دهیم $f'(a_n)=n$. توجه کنیدکه $A=\{a_۰, a_۱, a_۲, ...\}$. (همچنین می‌توانیم تابع f' را به‌عنوان «شمارندهٔ» عضــوهای مجمــوعهٔ A تصــور کنیم، فقط با این تفــاوت کــه این بار، روند شمارش نامتناهی است.)

قضیهٔ ۰ب. فرض‌کنیم A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر بــاشد. در این صورت مجموعهٔ

1. Zorn

همهٔ دنباله‌های متناهی از عضوهای A نیز شمارش‌پذیر است.

اثبات. مجموعهٔ S متشکل از همهٔ این دنباله‌های متناهی را می‌توان با معادلهٔ

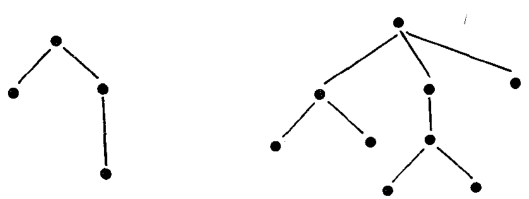
$$S = \bigcup_{n \in N} A^{n+1}$$

مشخص کرد. از آنجا که A شمارش‌پذیر است، یك تابع یك به‌یك f وجود دارد که A را در N می‌نگارد.

ایدهٔ اساسی اثبات آن است کـه S را یك بـه یك بـه طریقی در N بنگاریم که $\langle a_0, a_1, \ldots, a_m \rangle$ بـه عـدد $2^{f(a_0)+1} 3^{f(a_1)+1} \ldots p_m^{f(a_m)+1}$، که در آن p_m همـان $(m+1)$مین عدد اول است، نسبت داده شود. اشکال این کار آن است که این نگاشت ممکن است خوش‌تعریف نباشد. زیرا ممکن است $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_m \rangle$ و a_iها و b_jها همه در A باشند ولی $m \neq n$. ولی این اشکالی جدی نیست؛ کافی است به‌هر عضو S کوچکترین عددی را که به‌طریق فوق می‌توان به‌دست آورد نسبت دهیم. این کار نگاشتی خوش‌تعریف را به‌دست می‌دهد که بررسی یك‌به‌یك بودن آن‌کار ساده‌ای است. ■

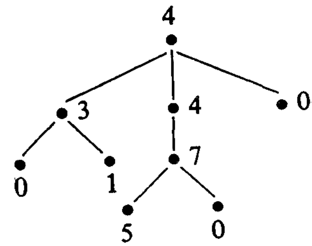
گاهی از درخت‌ها، که می‌توانند درمواردی تصویر روشنی از مطلب دهند، صحبت می‌کنیم. اما، گفتگوهای‌ما دربارهٔ درختها همیشه جنبهٔ غیررسمی دارد، به‌این علت این‌مفهوم را در قضایا و اثبات آنها به‌کار نمی‌بریم. بنابراین در اینجا نیز بحث ما دربارهٔ درختها غیررسمی است.

هر درخت نشان دهندهٔ یك ترتیب جزئی متناهی است. ترتیب جزئی R را می‌توان با شکلی نشان داد؛ اگر $\langle a, b \rangle \in R$، آنگاه a را پایینتر از b قرار می‌دهیم وآنها را با خطی به‌هم وصل می‌کنیم. شکل‌های زیرین دو نمونه از ترتیبهای درختی هستند:



(شاید بهتر باشد کلمهٔ «ریشه» را به‌جای کلمهٔ «درخت» بگذاریم، زیرا شاخه‌ها رو به‌پایین ترسیم شده‌اند نه رو به‌بالا.) همیشه یك بالاترین نقطهٔ درشکل وجود دارد. بعلاوه، اگرچه ترسیم شاخه‌ای در زیر بعضی از رئوس مجاز است، امـا نقاط بالای هر رأس باید روی یك خط قرار گیرند.

یك درخت، علاوه بـراین کـه مبتنی بـر یك ترتیب جزئی متناهی است، یك تابع برچسب‌زن دارد که دامنهٔ آن مجموعهٔ رئوس است. مثلاً، درختی که درآن برچسبها اعداد طبیعی هستند به‌صورت زیر است:



اعداد کاردینال

همهٔ مجموعه‌های نامتناهی بزرگ‌اند، ولی بعضی بزرگتر از بعضی دیگرند. (به‌عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد حقیقی، بزرگتر از مجموعهٔ اعداد صحیح است.) اعداد کاردینال یك راه مناسب، ولی نه اجتناب ناپذیر، برای گفتگو دربارهٔ اندازهٔ مجموعه‌ها به‌دست می‌دهد.

طبیعی است که بگوییم دو مجموعهٔ A و B یك اندازه دارند اگر و تنها اگر تابعی وجود داشته باشد که A را یك به‌یك بروی B بنگارد. اگر A و B متناهی باشند، آنگاه این مفهوم معادل است با مفهوم معمولی هم اندازه بودن: اگر اعضای مجموعهٔ A واعضای مجموعهٔ B را بشمارید، در این صورت در هر بار یك عدد به دست می‌آورید. ولی این مفهوم را حتی درمورد مجموعه‌های نامتناهی A و B، که در آنها شمارش مشکل است، هم می‌توان به‌کار برد. پس به‌طور رسمی می‌گوییم A و B همتوان‌اند (ومی‌نویسیم $A \sim B$) اگر و تنها اگر تابعی یك به‌یك وجود داشته باشد که A را بروی B بنگارد. مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ ومجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، همتوان هستند. ملاحظهٔ اینکه همتوانی رابطه‌ای است انعکاسی، متقارن، و متعدی ساده است.

درموردمجموعه‌های نامتناهی،ازاعداد طبیعی می‌توان به‌عنوان مقیاس اندازه استفاده کرد. به‌دو مجموعهٔ متناهی یك عدد طبیعی (به‌عنوان اندازهٔ آنها) نسبت می‌دهیم اگر وتنها اگر دو مجموعه همتوان باشند. اعداد کاردینال به‌منظور تعمیم این وضعیت به مجموعه‌های نامتناهی معرفی می‌شوند.

به هر مجموعهٔ A می‌توان شیء معینی، عدد کاردینال A (یا $\operatorname{card} A$)، نسبت داد، به‌نحوی که به‌دومجموعه یك عدد کاردینال نسبت داده شود اگر وتنها اگر این دومجموعه همتوان باشند

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad A \sim B. \tag{K}$$

برای این کار راههای مختلفی وجود دارد؛ راهی که اکنون متداول است این است که $\operatorname{card} A$ را کوچکترین اردینالی فرض کنیم که با A همتوان است. (اعتبار این تعریف متکی به‌اصل انتخاب است.) دراینجا دربارهٔ اردینالها بحث نمی‌کنیم، زیرا دربحثهای ما به همان اندازه که دانستن ماهیت عدد ۲ مهم نیست، چندان توفیری نمی‌کند که بدانیم $\operatorname{card} A$ واقعاً چیست. آنچه حائز بیشترین اهمیت است آن است که شرط (K) برقرار

باشد. باوجود این، درمورد یك مجموعهٔ متناهی اگر $\operatorname{card} A$ عددی طبیعی باشدکه تعداد عناصر مجموعهٔ A را معین کند، مفیدتر است. یك شیء عدد کاردینال، یا به طور ساده یك کاردینال، است اگر و تنها اگر به‌ازای یك مجموعهٔ A مساوی $\operatorname{card} A$ باشد.

(گئورگ کانتور[1]، که اولین بار مفهوم عددکاردینال را معرفی‌کرد، درسال ۱۸۹۵ عدد کاردینال مجموعهٔ M را به عنوان «مفهومی کلی که از مجموعهٔ M به کمك اندیشهٔ پویای ما و با عمل تجرید از طبیعت اعضای مختلف M و ترتیب مفروض آنها به دست می‌آید» تعریف کرد.)

می‌گوییم مجموعهٔ A زیرسلطهٔ B است (ومی‌نویسیم $A \leqslant B$) اگر و تنها اگر A با زیرمجموعه‌ای از B همتوان باشد. به‌عبارت دیگر، $A \leqslant B$ اگروتنها اگر تابعی یك‌به‌یك مجموعهٔ A را در مجموعهٔ B بنگارد. ارتباط این مفهوم با کاردینالها با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad A \leqslant B.$$

(ملاحظهٔ خوش‌تعریفی رابطهٔ $\leqslant$ آسان است؛ زیرا صحت‌وسقم $\chi \leqslant \lambda$، فقط به‌کاردینالهای χ و λ بستگی دارد و نه به‌انتخاب مجموعه‌هایی که دارای این کاردینالها هستند.) رابطهٔ زیرسلطگی انعکاسی و متعدی است. مجموعهٔ A زیرسلطهٔ $\mathbb{N}$ است اگر و تنها اگر شمارش‌پذیر باشد. قضیهٔ زیر قضیه‌ای استاندہ دراین مبحث است.

قضیهٔ شرودر-برنشتاین[2]. (الف) به ازای هر دو مجموعهٔ A و B، اگر $A \leqslant B$ و $B \leqslant A$، آنگاه $A \sim B$.

(ب) به‌ازای هردو عدد کاردینال χ و λ، اگر $\chi \leqslant \lambda$ و $\lambda \leqslant \chi$، آنگاه $\chi = \lambda$.

قسمت (ب) بازگویی ساده‌ای از قسمت (الف) برحسب اعداد کاردینال است، قضیهٔ زیر، که اتفاقاً با اصل انتخاب معادل است، با همین شکل دوگانه بیان شده است.

قضیهٔ ۰پ. (الف) به‌ازای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \leqslant B$ و یا $B \leqslant A$.

(ب) به‌ازای هر دو عددکاردینال χ و λ یا $\chi \leqslant \lambda$ و یا $\lambda \leqslant \chi$.

بنابراین، از هر دو عدد کاردینال، یکی کوچکتر از دیگری است. (در واقع، هر مجموعهٔ غیرتهی از اعداد کاردینال دارای کوچکترین عضو است.) کوچکترین کاردینالها همان کاردینالهای مجموعه‌های متناهی‌هستند: ۰، ۱، ۲، ... بعداز اینها کوچکترین‌کاردینال نامتناهی، $\operatorname{card} \mathbb{N}$، که به $\aleph_0$ نشان داده می‌شود، قرار دارد. بنابراین داریم

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \ldots,$$

که در آن $\aleph_1$، کوچکترین کاردینال بزرگتر از $\aleph_0$ است. کاردینال اعداد حقیقی، $\operatorname{card} \mathbb{R}$،

---

1. Georg Cantor
2. Schröder-Bernstein

به $2^{\aleph_0}$ نشان داده می‌شود. از آنجا که شمارش‌ناپذیر است، داریم $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
عملهای عادی جمع و ضرب کاردینالهای متناهی را می‌توان به همهٔ کاردینالها بسط داد. برای محاسبهٔ $\kappa + \lambda$، دو مجموعهٔ مجزای A و B راکه، بترتیب، دارای کاردینالهای κ و λ هستند انتخاب می‌کنیم، و سپس

$$\kappa + \lambda = \operatorname{card}(A \cup B).$$

این تعریف خوش‌تعریف است؛ یعنی $\kappa + \lambda$، فقط به χ و λ بستگی دارد و نه به انتخاب دو مجموعهٔ مجزای A و B. برای ضرب، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\kappa \cdot \lambda = \operatorname{card}(A \times B).$$

آشکارا، این تعاریف در مورد کاردینالهای متناهی درست هستند. حساب کاردینالهای نامتناهی، به طور اعجاب‌انگیزی ساده است. حاصل‌جمع یا حاصل ضرب دو کاردینال نامتناهی، همان بزرگترین آن دو است.

قضیهٔ حساب کاردینالها. به ازای اعداد کاردینال κ و λ، اگر $\kappa \leqslant \lambda$ و λ نامتناهی باشد، آنگاه $\kappa + \lambda = \lambda$. بعلاوه، اگر $\kappa \neq 0$، آنگاه $\kappa \cdot \lambda = \lambda$.

بالأخص، برای کاردینال نامتناهی χ داریم:

$$\aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

قضیهٔ ۰ت. به ازای هر مجموعهٔ نامتناهی A، کاردینال مجموعهٔ $\bigcup_n A^{n+1}$، متشکل از دنباله‌های نامتناهی از عضوهای A برابر با $\operatorname{card} A$ است.

این قضیه را قبلاً در مورد مجموعهٔ شمارش‌پذیر A اثبات کرده‌ایم. (قضیهٔ ۰ب را ببینید.)

اثبات. کاردینال هر A^{n+1}، طبق قضیهٔ حساب کاردینالها، برابر با $\operatorname{card} A$ است. بنابراین در اینجا اجتماع تعداد $\aleph_0$ مجموعه با این اندازه را داریم که $\aleph_0 \cdot \operatorname{card} A$ عضو دارند که تعداد این اعضا همان $\operatorname{card} A$ است. ■

مثال. ازاینجا نتیجه می‌شود که کاردینال مجموعهٔ اعدادجبری برابر $\aleph_0$ است. ابتدا، می‌توانیم هرچند جمله‌ای (با یك متغیر) روی اعداد صحیح را بادنبالهٔ ضرایب آن مشخص کنیم. در این صورت، طبق قضیه، تعداد $\aleph_0$ چندجمله‌ای وجود خواهند داشت. هر چندجمله‌ای دارای تعدادی متناهی ریشه است. برای به‌دست دادن یك کران بالای بیش‌از حد لازم بزرگ، توجه کنید که حتی اگر هر چندجمله‌ای دارای $\aleph_0$ ریشه می‌بود، باز مجموعاً $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$ عدد جبری می‌داشتیم. ازآنجا که ازطرف دیگرتعداد اعداد جبری حداقل $\aleph_0$ است، پس کار تمام است.

از آنجا کــه تعداد شمارش‌ناپذیری (درواقع $2^{\aleph_0}$) عدد حقیقی وجود دارد، نتیجه می‌شود که تعداد شمارش‌ناپذیری (درواقع $2^{\aleph_0}$) عدد متعالی وجود دارد.

در این کتاب، از بعضی از کوتاهنوشتهای متداول ریاضی بهره می‌جوییم. قبلاً از نشانهٔ « ■ » برای نشان دادن پایان اثبات استفاده کردیم. جملهٔ «اگر ...، آنگاه ...» را بعضی اوقات با «... $\Longrightarrow$ ...» خــلاصه می‌کنیم. برای «اگر و تنها اگر» نماد « $\Longleftrightarrow$ » را به‌کار می‌بریم. به‌جای عبارت «بنابراین» از اختصار «$\therefore$» استفاده می‌کنیم.

علامت‌گذاری‌ای که «$x \neq y$» را به‌عنوان نفی «$x = y$» و «$x \notin y$» را به‌عنوان نفی «$x \in y$» معرفی می‌کند، بــه حالتهای دیگر تعمیم خواهیم داد. مثلاً، بعداً «$\Sigma \models \tau$» را تعریف می‌کنیم و نفی آن را با «$\Sigma \not\models \tau$» نشان می‌دهیم.

۱

منطق جمله‌ها

۱.۰ تذکراتی غیرصوری دربارهٔ زبانهای صوری

در قسمت بعد می‌خواهیم زبانی بسازیم که بتوانیم جمله‌های فارسی را به‌آن برگردانیم. برخلاف زبانهای طبیعی (مانند فارسی و چینی)، این زبان، یك زبان صوری است که قواعد دقیق نحوی دارد. اما قبل ازشروع به‌کار دقیق، دربارهٔ پاره‌ای ازویژگیهایی که می‌خواهیم دراین زبان بگنجانیم، به‌گفتگو می‌پردازیم.

به‌عنوان نخستین مثال، می‌توان جملهٔ فارسی «نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده شد» را دراین زبان صوری به‌نماد، مثلاً، **K** ترجمه کنیم. آنگاه می‌توانیم برای جملهٔ «نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده نشد» ــ که رابطهٔ نزدیکی با جملهٔ پیشین دارد ــ نماد $(\neg\mathbf{K})$ را به‌کار ببریم. در اینجا $\neg$، نماد نفی است که «چنین نیست که» خوانده می‌شود. می‌توان جملهٔ «نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده نشد» را به‌یك نماد تازه، مثلاً، **J** ترجمه‌کنیم؛ اما بهتراست تاآنجا که می‌شود چنین جمله‌ای را به‌جزءهای ساده‌تر تجزیه کنیم. برای جمله‌ای مانند «نمونه شامل کلرین بود» که به‌جمله‌های بالا ربطی ندارد ــ می‌توانیم نمادی مانند **C** اختیارکنیم. درآن صورت می‌توان جمله‌های مرکب فارسی زیر را به‌صورت فرمولهایی که در قسمت چپ آنها نشان داده شده است، ترجمه‌کرد:

اگر نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده شود، آنگاه نمونه شامل کلرین نیست.	$(\mathbf{K} \to (\neg\mathbf{C}))$
نمونه شامل کلرین بود، و نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده شد.	$(\mathbf{C} \wedge \mathbf{K})$

در مثـال دوم، برای ترجمهٔ «و» نماد عطفی $\wedge$ را به‌کار بردیم. در مثال اول، نماد آشناتر پیکان، برای ترجمهٔ «اگر. . .، آنگاه. . .» به‌کار برده شده است. در مثال زیرین، برای ترجمهٔ «یا» نماد فصلی $\vee$ مورد استفاده قرار می‌گیرد:

یا هیچ نشانی از پتـاسیم مشاهده نشد، یا نمونه شامل کلرین نبود. $((\neg K) \vee (\neg C))$

نمونه نه شامل کلرین بود و نه آثاری از پتاسیم در آن مشاهده شد. $(\neg(C \vee K))$

یا

$((\neg C) \wedge (\neg K))$

در مثال اخیر، دو ترجمهٔ متفاوت ارائه داده‌ایم. رابطهٔ بین‌آن دو بعداً مورد بحث قرار می‌گیرد.

یکی ازجنبه‌های مهم تجزیه‌هایی‌که ازاین جمله‌های مرکب انجام می‌دهیم،آن است کـه وقتی صدق یا کذب جمله‌های ساده را داشته باشیم، صدق یا کذب جملهٔ مرکب را بیدرنگ می‌توانیم محاسبه کنیم. به‌عنوان مثال، فرض‌کنیم شیمیدانی ازآزمایشگاه بیرون می‌آید واعلام می‌کندکه نشانه‌هایی از پتاسیم مشاهده شد ولی نمونه شامل هیچ اثری از کلرین نبود. دراین صورت می‌دانیم که چهار جملهٔ فوق، بترتیب، صادق،کاذب، صادق، و کاذب هستند. درحقیقت، برای چهارنتیجهٔ ممکن‌آزمایش، می‌توان ازپیش جدولی تهیه‌کرد (جدول یك). دربخش ۳.۱، مجدداً به‌بحث دربارهٔ چنین جدولهایی خواهیم پرداخت.

استفاده از زبانهای صوری، ما را از عدم دقت و ابهاماتی‌کـه در زبانهای طبیعی وجود دارد، می‌رهاند. لکن، این‌کار، بدون هزینه صورت نمی‌گیرد؛ درجهٔ‌گویایی زبانهای صوری بشدت محدود است.

برای توصیف یك زبان صوری، عموماً سه دسته اطلاعات ارائه خواهیم داد:

۱. مجموعهٔ نمادهـا (الفبا) را مشخص می‌کنیم. بعضی از نمادهـای منطق جمله‌ها

جدول یك

K	C	$(\neg(C \vee K))$	$((\neg C) \wedge (\neg K))$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	F	F

عبارت‌اند از:

$$(\,,\,)\,,\ \rightarrow\,,\ \neg\,,\ \mathbf{A}_{۱}\,,\ \mathbf{A}_{۲}\,,\ \ldots\,.$$

۲. قواعد تشکیل دنباله‌هایی متناهی از نمادها را که «از نظر دستوری صحیح» باشند مشخص می‌کنیم. (چنین جملاتی را فرمولهای درست ساخت یا ف.د.س. می‌نامیم.) مثلاً، چنانکه خواهیم دید

$$(\mathbf{A}_{۱} \rightarrow (\neg \mathbf{A}_{۲}))$$

یك ف.د.س. است، درصورتی که

$$))\rightarrow \mathbf{A}_{۳}\,,$$

چنین نیست.

۳. همچنین ترجمه‌های مجاز بین زبان فارسی و زبان صوری را متذکر می‌شویم. نمادهای $\mathbf{A}_{۱}$، $\mathbf{A}_{۲}$، . . . می‌توانند ترجمه‌های جمله‌های خبری فارسی باشند.

فقط درقسمت سوم است که معنایی به ف.د.س. نسبت داده می‌شود. این روند اطلاق معانی، محرك و راهنمای ما در آنچه انجام می‌دهیم است. اما خواهیم دید که از دیدگاه نظری، انجام عملیات گوناگون با ف.د.س.ها[1] فارغ از معانی احتمالی آنها، امکان پذیر است. شخصی کــه تنها از دو دستهٔ اول اطلاعــات بالا آگاهی دارد، می‌تواند بعضی از کارهایی که ما انجام می‌دهیم، انجام دهد، بدون آنکه ازمعنای آنها هیچ اطلاعی داشته باشد.

قبل ازادامهٔ کار، به‌دستهٔ دیگری از زبانهای صوری، که امروزه اهمیت فراوانی پیدا کرده‌اند، نظر کوتاهی می‌افکنیم. اینها زبانهایی هستند که درکامپیوترهای رقمی (یادست کم در رابطه باآنها) به‌کار برده می‌شوند.

انواع فراوانی ازاین‌گونه زبانها وجوددارند. دریکی ازآنها یك ف.د.س. نوعی چنین است:

۰۱۱۰۱۰۱۱۰۱۰۱۰۰۰۱۱۱۱۱۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۰.

درزبانی دیگر، یك ف.د.س. نوعی به‌صورت زیراست:

STEP#ADDIMAX,A·

(در اینجا # معرف یك جای خالی است؛ آن را درشمار الفبا به‌حساب می‌آوریم تا هر ف.د.س. رشته‌ای از نمادها باشد.) زبان معروف فرترن دارای ف.د.س.هایی چون

DO # 3 # 1 = IMIN,IMAX

است.

درهمهٔ این موارد، طریقی برای ترجمهٔ ف.د.س.ها به‌زبان فارسی، و(برای دسته‌ای

---

۱. عبارت «ف.د.س.ها» را به‌صورت «فرمولهای درست ساخت» بخوانید. ــ م.

محدود ازجمله‌های فارسی) راهی برای ترجمه از فارسی به‌آن زبان صوری وجود دارد. اما کامپیوتر با زبان فارسی‌آشنایی ندارد. کامپیوتر، این ماشین خودکار لاشعور، با نمادها ماهرانــه بازی می‌کند و برده‌وار برنامــه‌ای را که برایش نوشته‌اند اجرا می‌کند. ماهم می‌توانیم با زبانهــای صوری چنین برخوردی داشته باشیم، ولی این کار چندان جالب نخواهد بود.

۱.۱ زبان منطق جمله‌ها

فرض می‌کنیم دنباله‌ای نامتناهی از اشیاء متمایز، که‌آنها را نماد می‌نامیم، داده شده باشد، و به‌هریك از آنها نامی می‌دهیم (جدول دو). علاوه براین، فرض می‌کنیم هیچ یك ازاین نمادها دنباله‌ای متناهی از دیگر نمادها نیست.

حال، تذکراتی چند ضروری است:

۱. پنج نماد

جدول دو

نماد	نام مشروح	توضیحات
(	پرانتز چپ	ازعلایم نقطه‌گذاری
)	پرانتز راست	ازعلایم نقطه‌گذاری
$\neg$	نماد نفی	فارسی: چنین نیست که
$\wedge$	نماد عطفی	فارسی: و
$\vee$	نماد فصلی	فارسی: یا
$\rightarrow$	نماد شرطی	فارسی: اگر. . .، آنگاه . . .
$\leftrightarrow$	نماد دو شرطی	فارسی: اگر و تنها اگر
$\mathbf{A}_1$	اولین نماد جمله‌ای	
$\mathbf{A}_2$	دومین نماد جمله‌ای	
$\vdots$	$\vdots$	
$\mathbf{A}_n$	nمین نماد جمله‌ای	
$\vdots$	$\vdots$	

$$\neg\,,\ \wedge\,,\ \vee\,,\ \rightarrow\,,\ \leftrightarrow$$

نمادهای رابط جمله‌ای نامیده می‌شوند. کاربرد آنها، از ترجمه‌های فارسی که در بالا آمده استنباط می‌شود. نمادهای رابط جمله‌ای و پرانتزها را نمادهای منطقی می‌نامیم. این نمادها، در ترجمهٔ فارسی به‌زبان منطق و از زبان منطق به‌فارسی، همیشه نقش واحدی را ایفا می‌کنند. نمادهای جمله‌ای، پارامترها (یا نمادهای غیرمنطقی) می‌باشند. این نمادها ترجمهٔ واحدی ندارند، بلکه، همان‌گونه که قریباً نشان خواهیم داد، تعبیرهای گوناگونی می‌پذیرند.

۲. ما فقط تعداد شمارش‌پذیری نماد جمله‌ای در نظر گرفته‌ایم. اگر مجموعهٔ دلخواهی ازنمادهای جمله‌ای را نیز درنظر می‌گرفتیم، بخش عمده‌ای ازمطالب این فصل، به‌اعتبار خود باقی می‌ماند. (استثناها عمدتاً در قسمت ۷.۱ آمده است.)

۳. بعضی از منطق‌دانان ترجیح می‌دهند که $\mathbf{A}_n$ را nمین نمادگزاره‌ای بنامند (و به‌جای منطق جمله‌ها از منطق گزاره‌ها گفتگو کنند). ریشهٔ این اختلاف از آنجاست که خواسته‌اند «جمله» به سخنی که در وضعیتی خاص ادا می‌شود اطلاق شود و «گزاره» به‌معنای جمله.

۴. ما این اشیا را «نماد» می‌نامیم، اما دربارهٔ اینکه این نمادها به‌چه موجودهایی اشاره می‌کنند موضعی اتخاذ نخواهیم کرد. درستون سمت راست جدول دو، اسامی نمادها نوشته شده است. مثلاً، $\mathbf{A}_{243}$ یك نماد است. یعنی دویست وچهل وسومین نماد جمله‌ای. (از طرف دیگر «$\mathbf{A}_{243}$» اسم آن نماد است. نماد شرطی ممکن است خاصیت هندسی همشکل پیکان بودن را دارا باشد یا نباشد، گرچه اسم آن، یعنی «$\rightarrow$» واجد این خاصیت است.) نمادها می‌توانند مجموعه، عدد، سنگ، یا شیئی از اشیاء متعلق به زبان باشند. در حالت اخیر می‌توان آنها را با اسامی آنها یکی بدانیم. امکان دیگر ــ که در فصل دیگر به‌آن می‌پردازیم ــ آن است که نمادهای جمله‌ای خود فرمولهایی درزبان دیگر باشند.

۵. فرض کرده‌ایم که هیچ نمادی دنباله‌ای متناهی از نمادهای دیگر نیست. منظورمان این است که نه‌تنها نمادها ازیکدیگر متمایزند (مثلاً $\leftrightarrow\ \neq \mathbf{A}_3$)، بلکه هیچ یك از آنها دنباله‌ای متناهی از دو یا بیشتر ازدونماد دیگر نیست. مثلاً، می‌خواهیم $\mathbf{A}_3 \neq \langle \neg, \mathbf{A}_3, (\rangle$ باشد. (در نظریهٔ مجموعه‌ها $\mathbf{A}_3 \neq \langle \neg, \mathbf{A}_3, (\rangle$ امر مسلمی است.) هدف از این فرض آن است که مطمئن باشیم هر دنبالهٔ متناهی از نمادها تنها به‌یك صورت به‌جزءهای ساده‌تر تجزیه شود. اگر

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle,$$

وهر a_i وهر b_j یك نماد باشد، آنگاه $m=n$ و $a_i=b_i$. (به‌فصل ۰، لم ۰ الف وتوضیحات بعدی آن توجه کنید.)

یك عبارت، دنباله‌ای متناهی از نمادهاست. می‌توانیم یك عبارت را با زنجیرهٔ اسمهای نمادهایش مشخص کنیم؛ بنابراین $(\neg\mathbf{A}_1)$ همان دنبالهٔ $\langle (, \neg, \mathbf{A}_1,) \rangle$ است.

این علامت‌گذاری را می‌توان تعمیم داد: اگر α و β دنباله‌هایی از نمادها باشند، آنگاه $\alpha\beta$ دنباله‌ای است که در آن نخست نمادهای دنبالهٔ α و به‌دنبال آن نمادهای دنبالهٔ β نوشته شده‌اند.

مثلاً، اگر α و β عبارتهایی باشند که با معادلات زیر داده شده‌اند:

$$\alpha = (\neg \mathbf{A}_1),$$
$$\beta = \mathbf{A}_2,$$

آنگاه $(\alpha \rightarrow \beta)$ عبارت است از:

$$((\neg \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_2).$$

اکنون به‌عنوان مثال چند نمونه ازجمله‌های فارسی را به‌عبارتهایی درزبان صوری ترجمه می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{Z}$، نخستین بیست وشش نماد جمله‌ای باشند. (مثلاً، $\mathbf{E} = \mathbf{A}_5$.)

۱. فارسی: مظنون باید از بازداشت آزاد شود. ترجمه: $\mathbf{R}$.

فارسی: مدرك به‌دست آمده پذیرفتنی است. ترجمه: $\mathbf{E}$.

فارسی: مدرك به‌دست آمده ناپذیرفتنی است. ترجمه: $(\neg \mathbf{E})$.

فارسی: مدرك به‌دست آمده پذیرفتنی است، و مظنون نباید از بازداشت آزاد شود. ترجمه: $(\mathbf{E} \wedge (\neg \mathbf{R}))$.

فارسی: یا مدرك به‌دست آمده پذیرفتنی است، یا مظنون باید از بازداشت آزاد شود (یا احتمالاً هردو). ترجمه: $(\mathbf{E} \vee \mathbf{R})$.

فارسی: یا مدرك به‌دست آمده پذیرفتنی است، یا مظنون باید از بازداشت آزاد شود، ولی نه هردو. ترجمه: $((\mathbf{E} \vee \mathbf{R}) \wedge (\neg(\mathbf{E} \wedge \mathbf{R})))$. قصد ما براین خواهد بود که همیشه نماد $\vee$ را به‌معنای «یا»ی جامع («و/یا») ترجمه کنیم.

فارسی: مدرك به دست آمده ناپذیرفتنی است، اما مظنون نباید از بازداشت آزاد شود. ترجمه: $((\neg \mathbf{E}) \wedge (\neg \mathbf{R}))$. ازطرف دیگر، عبارت $((\neg \mathbf{E}) \vee (\neg \mathbf{R}))$ ترجمهٔ این جملهٔ فارسی است: یا مدرك به‌دست آمده ناپذیرفتنی است، یا مظنون نباید از بازداشت آزاد شود.

۲. فارسی: اگر آرزوها اسب باشند، آنگاه گدایان اسب سواری خواهند کرد. ترجمه: $(\mathbf{W} \rightarrow \mathbf{B})$.

فارسی: گدایان اسب سواری خواهند کرد اگر و تنها اگر آرزوها اسب باشند. ترجمه: $(\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{W})$.

۳. فارسی: این کالا ثروت محسوب می‌شود اگر و تنها اگر انتقال‌پذیر، با عرضهٔ محدود، ویا مولد شادی یا مانع درد باشد. ترجمه: $(\mathbf{W} \leftrightarrow (\mathbf{T} \wedge (\mathbf{L} \wedge (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}))))$.
دراینجا $\mathbf{W}$ ترجمهٔ «این کالا ثروت محسوب می‌شود» است. البته درمثال قبل، از $\mathbf{W}$ برای ترجمهٔ جملهٔ دیگری استفاده کردیم. ما ملزم به‌این نیستیم که همیشه یك حرف را برای

ترجمهٔ جملهٔ مشخصی به‌کار بریم.

دقت: جملهٔ فارسی «این گل سرخ است» را با ترجمهٔ آن درزبان صوری (یعنی، **R**) اشتباه نکنید. اینها باهم متفاوت‌اند. جملهٔ فارسی می‌تواند، به‌طور قطع، صادق یاکاذب باشد، اما عبارت صوری، فقط دنباله‌ای از نمادهاست و در یك متن ممکن است به‌عنوان یك جملهٔ فارسی صادق (یا کاذب) تعبیر شود، ولی در متون دیگر، می‌تواند تعبیرهای دیگری داشته باشد.

بعضی از عبارتها را نمی‌توان به‌عنوان ترجمهٔ هیچ جملهٔ فارسی دانست ودر واقع، یاوه‌هایی بیش نیستند، مانند

$$\rightarrow ((\mathbf{A}_{۳}.$$

می‌خواهیم فرمولهای درست ساخت (ف.د.س.) عبارتهایی باشند که ساخت دستوری درستی دارند؛ بنابراین باید برای این‌عبارتها تعریفی به‌دست دهیم که عبارتهای‌غیردستوری حذف شوند. این تعریف دارای نتایج زیرخواهد بود:

(الف) هرنماد جمله‌ای یك ف.د.س. است.
(ب) اگر α و β ف.د.س. باشند، آنگاه $(\neg\alpha)$، $(\alpha \wedge \beta)$، $(\alpha \vee \beta)$، $(\alpha \rightarrow \beta)$، $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ نیز ف.د.س. هستند.
(پ) هیچ عبارتی ف.د.س. نخواهد بود، مگراین‌که اجباراً برطبق (الف) و (ب) به‌دست آمده باشد.

دوطریق‌معادل‌جهت دقیق‌کردن خاصیت سوم (اجبار) وجود دارد. طریق اول، مجموعهٔ ف.د.س.ها را «ازبالا به‌پایین» تعریف می‌کند. می‌گوییم مجموعهٔ S از عبارتها استقرایی است اگر و تنها اگر دارای خواص زیر باشد:
(الف S) هر نماد جمله‌ای در S باشد.
(ب S) اگر عبارتهای α و β در S باشند، آنگاه $(\neg\alpha)$، $(\alpha \wedge \beta)$، $(\alpha \vee \beta)$، $(\alpha \rightarrow \beta)$، $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ نیز در S باشند.

یك عبارت فرمول درست ساخت (ف.د.س.) است اگر و تنها اگر عضو هرمجموعهٔ استقرایی باشد. با این تعریف، بآسانی ملاحظه می‌شود که (الف) و (ب) برآورده می‌شوند. دربارهٔ (پ) هم می‌توانیم بگوییم که مجموعهٔ همهٔ ف.د.س.ها کوچکترین مجموعه‌ای است که می‌تواند باشد، یعنی بدان معنا که زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ استقرایی دیگر است.

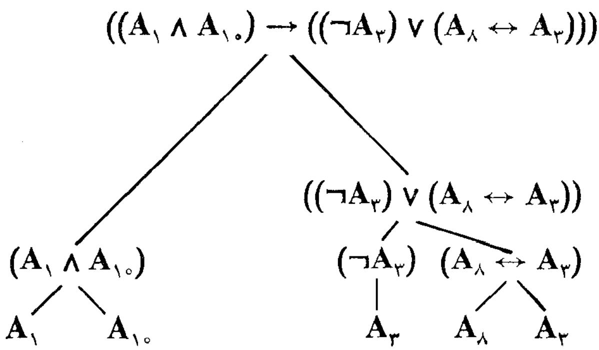
تعریف معادل دوم تعریفی است «از پایین به بالا». یك عبارت ف.د.س. است اگر وتنها اگر بتواند ازنمادهای جمله‌ای با به‌کارگیری تعدادی متناهی از عملهای فرمول ساز (روی عبارتها)، که با معادلات زیر تعریف می‌شوند، به‌دست آید:

$$\mathcal{E}_{\neg}(\alpha)=(\neg\alpha)\,,$$
$$\mathcal{E}_{\wedge}(\alpha\,,\,\beta)=(\alpha\wedge\beta)\,,$$
$$\mathcal{E}_{\vee}(\alpha\,,\,\beta)=(\alpha\vee\beta)\,,$$
$$\mathcal{E}_{\rightarrow}(\alpha\,,\,\beta)=(\alpha\rightarrow\beta)\,,$$
$$\mathcal{E}_{\leftrightarrow}(\alpha\,,\,\beta)=(\alpha\leftrightarrow\beta)\,,$$

مثلاً،

$$((\mathbf{A}_1\wedge\mathbf{A}_{10})\rightarrow((\neg\mathbf{A}_3)\vee(\mathbf{A}_8\leftrightarrow\mathbf{A}_3))),$$

عبارتی است که درست ساخت بودن آن را می‌توان از درخت زیر دریافت:



این درخت، ساخته شدن عبارت فوق را از چهار نماد جمله‌ای با به کاربردن پنج عمل فرمول‌ساز نشان می‌دهد. این دو تعریف از ف.د.س.ها، به‌شیوه‌ای کلیتر، در بخش ۲.۱ مورد بحث قرار گرفته‌اند. در اینجا فقط متذکر می‌شویم که هرمجموعهٔ استقرایی از ف.د.س.ها درواقع مجموعهٔ همهٔ ف.د.س.هاست؛ این مطلب، اصل استقرا نامیده می‌شود. درصفحه‌های بعد، از این اصل استفادهٔ بسیار خواهد شد. درمثال زیر، این اصل را برای نشان دادن این امر که بعضی از عبارتها ف.د.س. نیستند، به‌کار می‌بریم.

مثال. هرعبارتی که تعداد پرانتزهای چپ آن از تعداد پرانتزهای راست آن بیشتر باشد یك ف.د.س. نیست.

اثبات. ابتدا، با نمادهای جمله‌ای (که صفر پرانتزچپ وصفر پرانتز راست دارند) شروع می‌کنیم، وسپس عملهای فرمول‌سازی را که پرانتزها را فقط به‌صورت جفتی اضافه می‌کنند به‌کار می‌بریم. این استدلال را، به‌عبارتی دیگر، می‌توان چنین بیان کرد: مجموعهٔ ف.د.س.هـای «متعادل» (با تعداد پرانتزهای چپ و راست مساوی) شامل همهٔ نمادهای جمله‌ای است وتحت عملهای فرمول‌ساز بسته است. بنابراین مجموعهٔ ف.د.س.های متعادل استقرایی است؛ آنگاه اصل استقرا به‌ما اطمینان می‌دهد که همهٔ ف.د.س.ها متعادل هستند. ■

تمرینها

۱. سه‌جملهٔ فارسی، انتخاب و آنها را به‌زبان صوری ترجمه کنید. جمله‌ها باید چنان انتخاب شوند که دارای ساخت جالبی باشند، و در ترجمهٔ هر کدام ۱۵ نماد یا بیشتر به‌کار رود.

۲. نشان دهید که هیچ ف. د. س. با طول ۲، ۳، یا ۶ وجود ندارد، اما با هرطول دیگر، امکان‌پذیر است. (منظور از «طول» تعداد نمادهاست.)

۳. فرض کنید α یك ف.د.س. باشد و c تعداد موضعهایی باشد که رابطهای دوتایی (۷، ۸، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) در α ظاهر می‌شود؟ فرض کنید تعداد موضعهایی که نمادهای جمله‌ای در α ظاهر می‌شوند برابر s باشد. نشان دهید $s = c + 1$.

۲.۱ استقرا و بازگشت

استقرا

ساختمان ویژه‌ای وجود دارد که اغلب هم درمنطق و هم در سایر شاخه‌های ریاضی ظاهر می‌شود. ممکن‌است بخواهیم زیرمجموعهٔ مشخصی از U را، با به‌کارگیری پی‌درپی عملهای معینی روی بعضی ازاعضای آغازین U، بسازیم. مجموعه‌ای که درپی آن‌هستیم، کوچکترین مجموعه‌ای است که شامل آن اعضای آغازین باشد و تحت آن عملها بسته باشد. اعضای این‌مجموعه اعضایی‌از U هستند که با به‌کاربردن‌آن عملها به‌دفعاتی متناهی به‌دست می‌آیند.

درحالت خاصی که دراینجا مورد توجه است، U برابرمجموعهٔ عبارتهاست، اعضای آغازین‌همان نمادهای جمله‌ای هستند، و عملها $\mathcal{E}_\neg$ ، $\mathcal{E}_\wedge$، وغیره هستند. مجموعه‌ای‌که باید ساخته شود، مجموعهٔ ف. د. س. هاست. ولی چون بعدها با حالات خاص دیگری از این ساختمان مواجه خواهیم شد، لذا بررسی مسئله به‌طورمجرد، دراینجا مفید خواهد بود.

برای ساده‌کردن بحث، یك مجموعهٔ آغازین $B \subseteq U$ ، و یك ردهٔ $\mathcal{F}$ از توابع را که تنها شامل دوتابع f و g است درنظرمی‌گیریم به‌طوری‌که

$$f : U \times U \rightarrow U, \qquad g : U \rightarrow U$$

بنابراین f یك‌عمل دوتایی، و g یك‌عمل یك‌تایی، روی U است. (درواقع‌نیازی به‌متناهی بودن $\mathcal{F}$ نیست؛ خواهیم دید که بحث سادهٔ ما دراینجا، قابل تعمیم به‌حالتی‌کلیتر است. $\mathcal{F}$ می‌تواند هرمجموعه‌ای از رابطه‌ها در U باشد، و درفصل ۲ از این تعمیم‌کلیتر استفاده خواهد شد. ولی دراینجا از حالتی بحث می‌کنیم که هم تجسم آن آسانتر است و هم به‌قدر کافی برای روشن‌کردن مفهوم این ساختمان کلی است. برای بیان خاصتری از این مطلب به‌تمرین ۳ مراجعه کنید.)

اگر B شامل‌نقاط a و b باشد، آنگاه مجموعهٔ C ای که می‌خواهیم بسازیم، به‌عنوان

مثال، شامل

$$b , f(b , b) , g(a) , f(g(a) , f(b , b)) , g(f(g(a) , f(b , b)))$$

خواهد بود. البته ممکن است همهٔ اینها متمایز نباشند. مطلب این است که مقداری آجر داریم و انواع بخصوصی ملاط، و می‌خواهیم C دقیقاً شامل چیزهایی باشد که می‌توانیم بسازیم.

برای تعریف صوری‌تری از C دو تعریف داریم که می‌توانیم یکی از آن دو را برگزینیم. می‌توانیم آن را از «بالا به‌پایین» به‌طریق زیر تعریف کنیم: زیرمجموعهٔ S از U تحت f و g بسته است اگر و تنها اگر هرگاه اعضای x و y متعلق به S باشند آنگاه $f(x , y)$ و $g(x)$ نیز متعلق به S باشند. S استقرایی است اگر و تنها اگر $B \subseteq S$ و S تحت عملهای f و g بسته باشد. فرض کنیم C^* اشتراك همهٔ زیرمجموعه‌های استقرایی U باشد؛ بنابراین $x \in C^*$ اگر و تنها اگر x متعلق به‌هر زیرمجموعهٔ استقرایی U باشد. اثبات این مطلب که C^* استقرایی است مشکل نیست (و خواننده خود باید آن را ثابت کند). علاوه براین، C^* کوچکترین مجموعه با این خاصیت است که زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های استقرایی است.

تعریف دوم (که معادل تعریف اول است) تعریفی است که از «پایین به بالا» کار می‌کند. می‌خواهیم C_* شامل چیزهایی باشد که بتوانند از B، با عملهای f و g به‌دفعاتی متناهی به‌دست آیند. دنبالهٔ متناهی $\langle x_0 , \ldots , x_n \rangle$ از عناصر U را موقتاً یك دنبالهٔ ساختمانی می‌نامیم اگر به‌ازای هر i، $i \leqslant n$، دست‌کم یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$x_i \in B$,

$x_i = f(x_j , x_k)$ به‌ازای j و k که $j < i$ و $k < i$

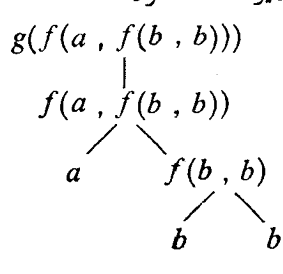
$x_i = g(x_j)$ به‌ازای j که $j < i$

اکنون فرض کنیم C_* مجموعهٔ همهٔ x هایی باشد که دست‌کم یك دنبالهٔ ساختمانی وجود داشته باشد که به x ختم شود.

فرض کنیم C_n مجموعهٔ همهٔ نقاط x ی باشد که دست‌کم یك دنبالهٔ ساختمانی به‌طول n به x ختم شود. دراین صورت $C_1 = B$،

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \cdots ,$$

و $C_* = \bigcup_n C_n$. مثلاً، $g(f(a , f(b , b)))$ در C_5 ودرنتیجه در C_* است؛ این مطلب را می‌توان با دقت در درخت زیر مشاهده کرد:



اگر این درخت را به یك ترتیب خطی تبدیل کنیم، یك دنبالهٔ ساختمانی برای $g(f(a\ ,\ f(b\ ,\ b)))$ به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱. اعداد طبیعی. فرض کنیم U مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باشد و $B=\{\circ\}$. عمل S، که $S(x)=x+1$، را انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت

$$C_{*}=\{\circ\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\}$$

مجموعهٔ C_{*}، ازاعداد طبیعی، دقیقاً شامل اعدادی است که با به‌کاربردن عمل تالی به‌طور پی‌درپی، از $\circ$، به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. اعداد صحیح. فرض کنیم U مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی باشد و $B=\{\circ\}$. این‌بار دوعمل S و P را به‌شرح زیر انتخاب می‌کنیم:

$$S(x)=x+1\ ,\quad P(x)=x-1.$$

اکنون C_{*} تمام اعداد صحیح را دربرمی‌گیرد.

$$C_{*}=\{\cdots\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ \circ\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots\}.$$

توجه‌کنیدکه برای به‌دست‌آوردن ۲ به‌عنوان عضوی از C_{*} بیش ازیك طریق وجود دارد. زیرا ۲، هم برابر $S(S(\circ))$ است و هم برابر $S(P(S(S(\circ))))$.

مثال ۳. توابع جبری. فرض‌کنیم U شامل همهٔ توابعی باشدکه دامنه و برد آنها مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند. فرض‌کنیم B، متشکل از تابع همانی و همهٔ توابع ثابت باشد. فرض‌کنیم $\mathcal{F}$، متشکل‌ازعملهای جمع، ضرب، تقسیم، و ریشه‌یابی (روی توابع) باشد. در آن صورت C^{*} همان ردهٔ توابع جبری است.

مثال ۴. فرمولهای درست‌ساخت. فرض‌کنیم U مجموعهٔ همهٔ عبارتها، و B مجموعهٔ نمادهای جمله‌ای باشد. فرض‌کنیم $\mathcal{F}$، از ۵ عمل‌فرمول‌ساز روی عبارتها تشکیل یافته باشد: $\mathcal{E}_{\neg}$، $\mathcal{E}_{\wedge}$، $\mathcal{E}_{\vee}$، $\mathcal{E}_{\rightarrow}$، و $\mathcal{E}_{\leftrightarrow}$. دراین‌صورت C_{*} مجموعهٔ همهٔ ف.د.س. هاست.

حال وقت‌آن است‌که معادل بودن دوتعریف، یعنی $C^{*}=C_{*}$، را نشان دهیم.

برای‌اثبات $C^{*}\subseteq C_{*}$، کافی‌است نشان‌دهیم‌که C_{*} استقرایی‌است، یعنی $B\subseteq C_{*}$ و C_{*} تحت توابع بسته است. آشکارا $B=C_{1}\subseteq C_{*}$. اگر x و y متعلق به C_{*} باشند، آنگاه می‌توانیم دنباله‌های ساختمانی آنها را زنجیروار به‌هم متصل‌کنیم وبا ضمیمه‌کردن $f(x\ ,\ y)$ به‌این‌زنجیره یك دنبالهٔ ساختمانی که $f(x\ ,\ y)$ را در C_{*} قرارمی‌دهد به‌دست آوریم. به‌همین ترتیب C_{*} تحت g نیز بسته است.

بالاخره، برای نشان دادن $C_{*}\subseteq C^{*}$، یك نقطه در C_{*} و یك دنبالهٔ ساختمانی

$\langle x_0 , \ldots , x_n \rangle$ برای آن در نظر می‌گیریم. با استقرای معمولی روی i، مشاهده می‌شود که به‌ازای $i \leqslant n$، $x_i \in C^*$. ابتدا داریم $x_0 \in B \subseteq C^*$. برای مرحلهٔ استقرایی، از این‌که C^* تحت توابع بسته است، استفاده می‌کنیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\bigcup_n C_n = C_* = C^* = \bigcap \{S : \text{استقرایی است } S\}.$$

(توضیح جنبی: فرض کنیم بحث کنونی ما درداخل نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، که در آن اعداد طبیعی معمولاً از بالا به‌پایین تعریف می‌شوند، انجام می‌گرفت. در آن‌صورت تعریف ما از C_* (که در آن خاصیت متناهی بودن و درنتیجه اعداد طبیعی به‌کار گرفته شده است) با تعریف‌ما از C^*، حقیقتاً اختلافی پیدا نمی‌کرد. ولی بحث‌ما دراینجا درچارچوب نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها نیست، بلکه به‌ریاضیات به‌معنای متعارف آن‌محدود می‌شود. دراین محدوده چنین به‌نظر می‌رسد که مفهوم اعداد طبیعی مفهومی است روشن که بخوبی شناخته شده است.)

از آنجایی که $C^* = C_*$، این‌مجموعه را صرفاً C می‌نامیم، و به‌آن به‌عنوان مجموعهٔ پدید آمده از B، به وسیلهٔ توابع متعلق به $\mathcal{F}$ اشاره می‌کنیم. قضایا را اغلب به‌کمک آنچه در زیر آمده است اثبات خواهیم کرد.

اصل استقرا. فرض کنیم C مجموعهٔ پدیدآمده از B به‌وسیلهٔ توابع‌متعلق به $\mathcal{F}$ باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از C باشد که شامل B و تحت توابع متعلق به $\mathcal{F}$ بسته باشد آنگاه $S = C$.

اثبات. S استقرایی‌است، بنابراین $C = C^* \subseteq S$. طرف دیگرشمول‌هم بنابه‌فرض برقرار است.

البته حالت خاص مورد توجه ما مثال ۴ است. در اینجا C عبارت از ردهٔ ف.د.س.هاست که ازمجموعهٔ نمادهای جمله‌ای به‌وسیلهٔ عملهای فرمول‌ساز پدید آمده است. این حالت خاص ویژگیهای جالب مخصوص به خود دارد. هردوی α و β قسمتهای سره‌ای از $\mathcal{E}_\wedge(\alpha , \beta)$، یعنی $(\alpha \wedge \beta)$، هستند. به‌طور کلی، اگر به‌درخت مربوط به یک ف.د.س. توجه کنیم، مشاهده می‌کنیم که هرساز یک قسمت سره از فرمول اصلی است.

$$(\mathbf{A}_3 \vee (\mathbf{A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_2))$$

$$\mathbf{A}_3 \qquad (\mathbf{A}_8 \leftrightarrow \mathbf{A}_2)$$

$$\mathbf{A}_8 \qquad \mathbf{A}_2$$

مثلاً، یک عبارت را، موقتاً ویژه می‌نامیم اگر نمادهای جمله‌ای آن تنها از بین $\{\mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , \mathbf{A}_5\}$ و رابطهای آن‌تنها از بین $\{\to , \neg\}$ انتخاب‌شده باشند. دراین‌صورت،

هیچ ف.د.س. ویژه درساختمان خود نیازی به $\mathbf{A}_9$ و $\mathcal{E}_8$ ندارد. درحقیقت، هر ف.د.س. ویژه به‌مجموعهٔ C_s که از $\{\mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 , \mathbf{A}_5\}$ به‌وسیلهٔ $\mathcal{E}_\neg$ و $\mathcal{E}_8$ پدید می‌آید متعلق است. (زیرا می‌توانیم اصل استقرا را به‌کار ببریم و نشان دهیم که هر ف.د.س. یا متعلق به C_s است و یا ویژه نیست.)

بازگشت[1]

اکنون به‌مورد مجردتری می‌پردازیم. مجموعهٔ U (مانند مجموعهٔ همهٔ عبارتها) و یك زیرمجموعهٔ B از U (مانند مجموعهٔ نمادهای جمله‌ای)، و دوتابع f و g، به‌طوری که

$$f : U \times U \to U , \quad g : U \to U$$

داده شده‌اند. مجموعهٔ C، مجموعهٔ پدیدآمده از B توسط f و g است.

مسئله‌ای که اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم، تعریف بازگشتی تابعی روی C است. بدین معنی که فرض می‌کنیم قواعد زیرین داده شده‌اند:

۱. قواعدی برای محاسبهٔ $\bar{h}(x)$، به‌ازای هر $x \in B$؛

۲ الف. قواعدی برای محاسبهٔ $\bar{h}(f(x , y))$، بااستفاده از $\bar{h}(x)$ و $\bar{h}(y)$؛

۲ ب. قواعدی برای محاسبهٔ $\bar{h}(g(x))$، با استفاده از $\bar{h}(x)$؛

(مثلاً، این وضعیتی است که در بخش ۳.۱ بحث شده است؛ درآنجا $\bar{h}$ گسترش عمل ارزشدهی به B است.) اثبات این مطلب که حداکثر یك تابع $\bar{h}$ روی C می‌تواند وجود داشته باشد که واجد همهٔ شرایط داده شده باشد، مشکل نیست.

اما ممکن است تابعی مانند $\bar{h}$ وجود نداشته باشد؛ ممکن است قواعد داده شده متناقض باشند. مثلاً، فرض کنیم

$$U = \text{مجموعهٔ اعداد حقیقی}$$

$$B = \{0\}$$

$$f(x , y) = x \cdot y ,$$

$$g(x) = x + 1.$$

دراین صورت، C مجموعهٔ اعداد طبیعی است. اکنون فرض کنیم $\bar{h}$ را با شرایط زیر مشخص کرده باشیم:

۱. $\bar{h}(0) = 0$.

---

۱. به‌خواننده‌ای که قبلا با بازگشت آشنایی ندارد، توصیه می‌شود که خواندن این زیربخش را تا خواندن بخش ۳.۱ که درآنجا با کاربرد مشخصی از آن مواجه می‌شود، به‌تعویق بیندازد.

۲ الف. $\bar{h}(f(x, y)) = f(\bar{h}(x), \bar{h}(y))$.

۲ ب. $\bar{h}(g(x)) = \bar{h}(x) + ۲$.

می‌توان ثابت کرد که چنین تابعی نمی‌تواند وجود داشته باشد. (مثلاً $\bar{h}(۱)$ را محاسبه کنید، با توجه به‌اینکه $g(\circ) = ۱$ و $f(g(\circ), g(\circ)) = ۱$).

وضعیتی مشابه نیز درجبر پیش می‌آید.[۱] فرض‌کنیم گروهی مانند G داشته باشیم که از B به‌وسیلهٔ عمل ضرب گروه و عمل وارون پدیدآمده باشد. دراین صورت، یك نگاشت دلخواه از B به‌گروه H الزاماً گسترش‌پذیر به‌یك همریختی ازتمام‌گروه G به H نخواهد بود. ولی اگر اتفاقاً G یك‌گروه آزاد با مجموعهٔ پدیدآورنده‌های مستقل B باشد، آنگاه، چنین نگاشتی گسترش‌پذیر به‌یك همریختی از تمام‌گروه خواهد بود.

می‌گوییم C از B به‌وسیلهٔ f و g به‌طور آزاد پدیدآمده است اگروتنها اگر، علاوه برشرایط پدیدآمدن، داشته باشیم:

۱. f_C و g_C یك به‌یك باشند، و

۲. برد f_C، برد g_C، و مجموعهٔ B دو به دومجزا باشند. (در اینجا f_C و g_C تحدیدهای f و g به C هستند.)

قضیهٔ بازگشت. فرض‌کنیم زیرمجموعهٔ C از U به‌طور آزاد از B به‌وسیلهٔ f و g پدیدآمده باشد، که در آن

$$f: U \times U \to U, \quad g: U \to U.$$

علاوه براین فرض‌کنیم V یك مجموعه و F، G، و h توابعی باشند به‌طوری‌که

$$h: B \to V,$$

$$F: V \times V \to V,$$

$$G: V \to V.$$

دراین صورت یك تابع منحصر به‌فرد

$$\bar{h}: C \to V$$

وجود دارد به‌طوری‌که

(۱) به‌ازای هر x متعلق به B، $\bar{h}(x) = h(x)$.

(۲) به‌ازای هر x و y متعلق به C،

$$\bar{h}(f(x, y)) = F(\bar{h}(x), \bar{h}(y)),$$

---

۱. امید است که مثالهایی از این‌گونه، برای خواننده‌ای‌که مختصر آشنایی با جبردارد مفید باشد. البته بایدگفت‌که این مثالها صرفاً برای روشن‌کردن مطلب است و دانستن آنها دخالتی در فهم موضوع اصلی‌کتاب ندارد.

$$\overline{h}(g(x)) = G(\overline{h}(x)).$$

از نظر جبری، نتیجهٔ این قضیه می‌گوید که هرنگاشت h از B در V، می‌تواند به‌یك همریختی $\overline{h}$ از C (با عملهای f و g) در V (با عملهای F و G) گسترش یابد.

اگر محتوای قضیهٔ بازگشت را بیدرنگ درنمی‌یابید، به این مثال توجه کنید. می‌خواهیم تابعی مانند $\overline{h}$ داشته باشید که هرعضو C را به‌رنگی، رنگ‌آمیزی کند. آنچه دردسترس داریم عبارت است از:

۱. h، که به‌شما می‌گوید چگونه اعضای آغازین در B را رنگ زنید؛

۲. F، که چگونگی درهم آمیختن رنگهای x و y را برای به‌دست آوردن رنگ $f(x\ ,\ y)$ نشان می‌دهد (یعنی، $\overline{h}(f(x\ ,\ y))$ را برحسب $\overline{h}(x)$ و $\overline{h}(y)$ به‌دست می‌دهد)؛

۳. G، به‌همان ترتیب چگونگی تبدیل رنگ x را به‌رنگ $g(x)$ نشان می‌دهد.

خطری که وجود دارد این است که، مثلاً، درمورد یك نقطهٔ معین (نقطه‌ای که، از بدحادثه، به ازای x و y و z معینی هم نقطهٔ $f(x\ ,\ y)$ و هم نقطهٔ $g(z)$ است) F رنگ «سبز» و G رنگ «سرخ» را پیشنهاد می‌کند. اما اگر C به‌طور آزاد پدید آمده باشد، این خطر برطرف می‌شود.

مثالها. مثالهای زیر از بخش پیشین را دوباره درنظر می‌گیریم.

۱. $B = \{\circ\}$ با یك عمل، عمل تالی S. دراین صورت C مجموعهٔ اعداد طبیعی، N، است. ازآنجا که عمل تالی یك به‌یك است، C به‌طور آزاد از $\{\circ\}$ به‌وسیلهٔ S پدید آمده است. بنابراین، بنابرقضیهٔ بازگشت، به‌ازای هرمجموعهٔ V، هر $a \in V$، و هر $F : V \rightarrow V$، یك تابع منحصر به‌فرد $\overline{h} : N \rightarrow V$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{h}(\circ) = a$ و به‌ازای هر $x \in N$، $\overline{h}(S(x)) = F(\overline{h}(x))$. مثلاً، یك تابع منحصربه‌فرد $\overline{h} : N \rightarrow N$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{h}(\circ) = \circ$ و $\overline{h}(S(x)) = ۱ - \overline{h}(x)$. این تابع به ازای همهٔ اعداد زوج مقدار ۰ و به‌ازای همهٔ اعداد فرد مقدار ۱ اختیار می‌کند.

۲. اعداد صحیح از $\{\circ\}$ به‌وسیلهٔ عملهای S و P پدید آمده‌اند، ولی نه به‌طور آزاد.

۳. توابع جبری نیز به‌همان ترتیبی که گفته شد به‌طور آزاد پدید نمی‌آیند.

۴. ف.د.س. ها از نمادهای جمله‌ای به‌وسیلهٔ پنج عمل فرمول‌ساز به‌طور آزاد پدید می‌آیند. هدف بخش ۴.۱ اثبات این امر است. مثلاً، نتیجه می‌شود که یك تابع منحصر به‌فرد $\overline{h}$، تعریف شده روی مجموعهٔ ف.د.س. ها وجود دارد به‌طوری که

$$\overline{h}(A) = ۱ \qquad \text{به‌ازای هر نماد جمله‌ای } A،$$

$$\overline{h}((\neg\alpha)) = ۳ + \overline{h}(\alpha)$$

$$\overline{h}((\alpha \wedge \beta)) = ۳ + \overline{h}(\alpha) + \overline{h}(\beta)$$

و به‌همین ترتیب، برای $\vee$ ، $\rightarrow$ ، و $\leftrightarrow$. این تابع طول هر ف.د.س. را به‌دست می‌دهد.

اثبات قضیهٔ بازگشت. استدلال براین مبتنی‌است‌که تابع $\overline{h}$ را اجتماع تعداد زیادی ازتوابع‌تقریب‌کننده فرض‌کنیم. موقتاً، یك‌تابع v را (که قسمتی از C را به V می‌نگارد) پذیرفتنی می‌نامیم درصورتی که واجد شرایط (۱) و (۲) روی $\overline{h}$ باشد. به‌طور دقیقتر، v پذیرفتنی‌است اگر و تنها اگر دامنهٔ v زیرمجموعهٔ C و بردآن زیرمجموعهٔ v باشد، و

(′۱) اگر x متعلق به B و متعلق به‌دامنهٔ v باشد، آنگاه $v(x)=h(x)$.

(′۲) اگر $f(x\ ,\ y)$ متعلق به‌دامنهٔ v باشد، آنگاه x و y نیز چنین باشند و داشته باشیم $v(f(x\ ,\ y))=F(v(x)\ ,\ v(y))$. اگر $g(x)$ متعلق به‌دامنهٔ v باشد، آنگاه x نیز چنین باشد و $v(g(x))=G(v(x))$.

فرض‌کنید K گردآوردهٔ همهٔ توابع پذیرفتنی، و $\overline{h}$ اجتماع K باشد. بنابراین

$\langle x\ ,\ y\rangle\in\overline{h}$ اگر و تنها اگر v ای در K باشدکه $v(x)=y$.

ادعا می‌کنیم‌که $\overline{h}$ واجد همهٔ شرایط است. مراحل بررسی این مطلب را به‌طورکلی بیان می‌کنیم و جزئیات آن را به‌خواننده واگذار خواهیم کرد. (درك مشروح این اثبات که مبتنی برنظریهٔ مجموعه‌هاست، گرچه زیباست اما برای ما اساسی نیست، ولی درك نسبی کلیات آن، خود قضیه را قابل‌فهم‌ترمی‌کند.)

۱. نخست ثابت می‌شودکه $\overline{h}$ یك تابع است. فرض‌کنیم

$$S=\{x\in C:\langle x\ ,\ y\rangle\in\overline{h}\ \text{که حداکثریك}\ y\ \text{هست}\}.$$

با استفاده از (′۱) و (′۲)، بررسی استقرایی بودن S آسان است. ازاین‌رو، $S=C$ و $\overline{h}$ یك تابع است.

۲. ثابت می‌شودکه $\overline{h}\in K$ ؛ یعنی $\overline{h}$ یك تابع پذیرفتنی است. این‌کار بسهولت از تعریف $\overline{h}$ و تابع بودن آن نتیجه می‌شود.

۳. ثابت می‌شودکه $\overline{h}$ روی همهٔ C تعریف شده است. کافی است نشان دهیم که دامنهٔ $\overline{h}$ ، استقرایی است. دراینجاست که فرض به‌طور آزاد پدید آمدن به‌کار می‌رود. مثلاً، مورد زیر یکی ازاین حالات است: فرض‌کنیم x در دامنهٔ $\overline{h}$ باشد. دراین صورت $\overline{h}\ ;\ \langle g(x)\ ,\ G(\overline{h}(x))\rangle$ پذیرفتنی است. (به‌طور آزاد پدید آمدن، برای نشان دادن تابع بودن آن ضروری است.) درنتیجه، $g(x)$ در دامنهٔ $\overline{h}$ است.

۴. ثابت می‌شودکه $\overline{h}$ ، منحصر به‌فرد است. زیرا اگر دوتابع چنین باشند، فرض می‌کنیم S مجموعه‌ای باشدکه درآن این دوتابع باهم مطابقت دارند. درآن صورت S استقرایی خواهد بود، و بنابراین برابر C است. ■

جالب است بدانیم که راه دیگری هم برای بیان اثبات قضیهٔ بازگشت وجود دارد، و آن عبارت است ازعرضه‌کردن تابع مطلوب $\bar{h}$ به‌عنوان مجموعه‌ای (از زوجها)، که از یك مجموعه، توسط تعدادی ازعملها پدید می‌آید. برای این‌کار فرض کنیم

$$\hat{U}=U\times V$$

$$\hat{B} \text{ یك زیر مجموعهٔ } \hat{U} \text{ است }, \quad \hat{B}=h ,$$

$$\hat{F}(\langle x , u\rangle , \langle y , v\rangle)=\langle f(x , y) , F(u , v)\rangle ,$$

$$\hat{G}(\langle x , u\rangle)=\langle g(x) , G(u)\rangle.$$

بنابراین $\hat{F}$ یـك عمل دوتایی روی $\hat{U}$ است که از ضرب عملهای f و F به دست می‌آید. اکنون فرض کنیم $\bar{h}$ زیر مجموعه‌ای از $\hat{U}$ باشد که از $\hat{B}$ به‌وسیلهٔ $\hat{F}$ و $\hat{G}$ پدید آمده است. دراین‌صورت می‌توان تحقیق کرد کـه $\bar{h}$ دارای خواص مطلوب است. فرض به‌طور آزاد پدیدآمدن، باید دراثبات این مطلب که $\bar{h}$ یك تابع است، به‌کاررود.

اظهار نظری نهایی دربارهٔ بازگشت و استقرا: اصل استقرایی که بیان شد، تنها اصل استقرایی ممکن‌نیست. کاملاً امکان‌پذیراست که اثباتهایی استقرایی (و تعریفهایی بازگشتی) روی طول عبارتها و تعداد جاهایی کـه رابطها ظاهر می‌شوند، و غیره ارائـه داد. چنین روشهایی چندان اساسی نیستند، اما کاربرد آنها در بعضی مواقع احتمالاً ضروری است.

تمرین

۱. فـرض کنید C از مجموعهٔ $B=\{a , b\}$ بـا عمل دوتایی f و عمل یك‌تایی g پدیدآمده باشد. فهرست همهٔ عضوهای $C_۲$ را بنویسید. $C_۳$ چند عضو می‌تواند داشته‌باشد؟ $C_۴$ چطور؟

۲. روشن است که $(\mathbf{A}_۳ \rightarrow \wedge\ \mathbf{A}_۴)$ یك ف.د.س. نیست. اما ف.د.س. نبودن آن را ثابت کنید.

۳. می‌توانیم بحثی را که دراین بخش آمده با این فرض که $\mathscr{F}$ یك رده از روابط روی U است تعمیم دهیم. C_* مـانند قبل تعریف می‌شود، بـا ایـن تفاوت کـه دراینجا $\langle x_۰ , x_۱ , \ldots , x_n\rangle$ به‌شرطی یك دنبالهٔ ساختمانی‌منظورمی‌شود که به‌ازای‌هر i، $i\leqslant n$، یا $x_i\in B$ ویا آنکه Rی در $\mathscr{F}$ و $j_۱$، ...، j_k، که همگی از i کوچکترند، وجود داشته باشندکـه $\langle x_{j_۱} , \ldots , x_{j_k} , x_i\rangle\in R$. تعریف درست C^* را ارائه دهید و ثابت‌کنید $C^*=C_*$.

۳.۱ ارزشدهی

می‌خواهیم معنای این حکم را که یك ف.د.س. زبان ما به‌طور منطقی از ف.د.س. های دیگرنتیجه می‌شود تعریف کنیم. به‌عنوان مثال، A_1 باید از $(A_1 \wedge A_2)$ نتیجه شود. زیرا صرف‌نظر از این‌که A_1 و A_2 چطور به فارسی ترجمه می‌شوند، اگر ترجمهٔ فارسی $(A_1 \wedge A_2)$ صادق باشد، آنگاه ترجمهٔ فارسی A_1 نیز باید صادق باشد. اما مفهوم همهٔ ترجمه‌های ممکن یك ف.د.س. از زبان صوری به‌فارسی مفهومی‌است که اساساً مبهم‌است. خوشبختانه جان‌کلام این مفهوم را می‌توان به‌طریقی ساده و دقیق بیان‌کرد.

یك‌بار و برای همیشه، مجموعهٔ $\{T , F\}$ از ارزش‌ها که متشکل از دوعضومتمایز

T، که صدق نامیده می‌شود،

F، که کذب نامیده می‌شود،

را تعریف می‌کنیم. (هیچ فرقی نمی‌کندکه خود این عضوها چه هستند، می‌توان اعداد ۱ و ۰ را جایگزین آنها کرد.) دراین‌صورت یك‌ارزشدهی v به‌مجموعهٔ $\mathcal{S}$ ازنمادهای‌جمله‌ای، تابعی است به‌صورت

$$v : \mathcal{S} \rightarrow \{T , F\}$$

که به هرنماد متعلق به $\mathcal{S}$، T یا F را نسبت می‌دهد. این ارزشدهیها به‌جای ترجمه‌های فارسی که دربند پیشین ذکرشد به‌کار می‌روند.

(به این ترتیب منطق ما دوارزشی می‌شود. همچنین می‌توانیم منطق سه ارزشی داشته باشیم، که درآن مجموعه‌ای متشکل از سه ارزش خواهیم داشت. از اینجا تا منطقهای، مثلاً، ۵۱۲ یا $\aleph_0$ ارزشی، یا درنظرگرفتن بازهٔ $[۰ , ۱]$، یا هر فضای مناسب دیگر، به‌عنوان مجموعهٔ ارزشها راهی نیست. یکی از حالتهای جالب، حالتی است که درآن ارزشها یك جبر بولی کامل تشکیل دهند. اما این همان منطق دو ارزشی است‌که همواره از بیشترین اهمیت برخوردار است، و ما خود را به‌این حالت محدود می‌سازیم.)

فرض‌کنیم $\overline{\mathcal{S}}$ مجموعهٔ ف.د.س. های پدید آمده از $\mathcal{S}$ با پنج عمل فرمول‌ساز باشد. (همچنین $\overline{\mathcal{S}}$ را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ ف.د.س. هایی‌که نمادهای جمله‌ای آنها همگی در $\mathcal{S}$ باشد مشخص کرد؛ به توضیحاتی که درپایان زیر بخش استقرا دربخش ۲.۱ آمده، مراجعه‌کنید.) ما خواستار گسترشی مانند $\overline{v}$ از v هستیم که

$$\overline{v} : \overline{\mathcal{S}} \rightarrow \{T , F\}$$

وبه‌هرف.د.س. متعلق به $\overline{\mathcal{S}}$، ارزش صحیح آن را نسبت دهد. برای این منظور، $\overline{v}$ باید شرایط زیر را برآورده سازد:

۰. به ازای هر $\mathcal{S} \ni A$، $\overline{v}(A)=v(A)$. (بنابراین $\overline{v}$ یك گسترش v است.)

به‌ازای هر α و β متعلق به $\overline{\mathcal{S}}$:

۱. $$\overline{v}((\neg\alpha))=\begin{cases} T & \text{اگر } \overline{v}(\alpha)=F \\ F & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

۲. $$\overline{v}((\alpha\wedge\beta))=\begin{cases} T & \text{اگر } \overline{v}(\alpha)=T \text{ و } \overline{v}(\beta)=T \\ F & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

۳. $$\overline{v}((\alpha\vee\beta))=\begin{cases} T & \text{اگر } \overline{v}(\alpha)=T \text{ یا } \overline{v}(\beta)=T \text{ (یاهردو)} \\ F & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

۴. $$\overline{v}((\alpha\rightarrow\beta))=\begin{cases} F & \text{اگر } \overline{v}(\alpha)=T \text{ و } \overline{v}(\beta)=F \\ T & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

۵. $$\overline{v}((\alpha\leftrightarrow\beta))=\begin{cases} T & \text{اگر } \overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta) \\ F & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

(شرایط ۱ـ۵ درجدول سه نشان داده شده‌اند. دراینجاست که معنای رابطها، مثلاً معنای نماد عطفی، در مباحث صوری ما وارد می‌شود. مخصوصاً به معنای $\rightarrow$ توجه کنید. هرگاه به α ارزش F دهیم، دراین‌صورت $(\alpha\rightarrow\beta)$ «به‌انتفای مقدم صادق» گفته می‌شود وبه‌آن ارزش T نسبت داده می‌شود. البته می‌توان سؤال کرد که معنای محاوره‌ای «اگر،... آنگاه»، «یا»، و غیره درمورد این رابطها چقدر مراعات شده است. اما توجه نهایی ما بیشتر معطوف به‌عبارتهای ریاضی است تا به‌کلام شیوا و ظریف محاورات روزمره.)

جدول سه

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha\wedge\beta$	$\alpha\vee\beta$	$\alpha\rightarrow\beta$	$\alpha\leftrightarrow\beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

به عنوان مثالی از محاسبهٔ $\overline{v}$، فرض کنیم α ف.د.س. زیرین باشد:

$$((\mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6)) \leftrightarrow ((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1) \rightarrow \mathbf{A}_6)),$$

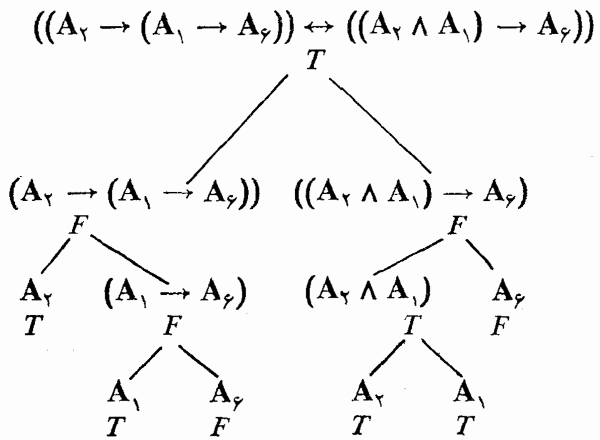
و v یك ارزشدهی برای $\{\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_6\}$ باشد به‌طوری‌که

$$v(\mathbf{A}_1)=T,$$

$$v(\mathbf{A}_2)=T,$$

$$v(\mathbf{A}_6)=F.$$

می‌خواهیم $\overline{v}(\alpha)$ را محاسبه کنیم. می‌توانیم به‌درختی کــه ساختمان α را نمایش می‌دهد بنگریم:

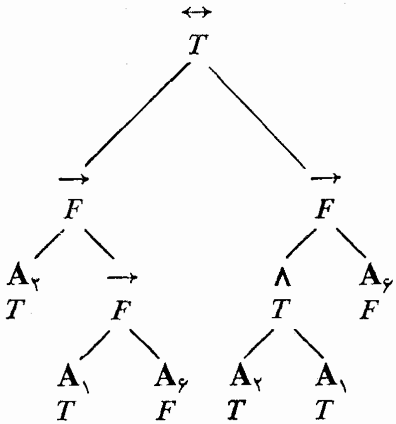


می‌توانیم از پایین به‌بالا به هررأس β از این درخت، ارزش $\overline{v}(\beta)$ را بدهیم. بنابــراین در اولین گام، به‌محاسبهٔ

$$\overline{v}((\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6))=F\,, \quad \overline{v}((\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1))=T,$$

می‌پردازیم. سپس $\overline{v}((\mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_6)))=F$، و بــه‌همین ترتیب بقیه را محاسبه می‌کنیم. سرانجام، دربالای درخت به $\overline{v}(\alpha)=T$ می‌رسیم.

درحقیقت، این محاسبه را می‌توان با صرفه‌جویی بیشتری انجام داد. ابتدا، درخت را به‌صورت ساده‌تر درنظرمی‌گیریم:



و حتی می‌توان آن را به‌طور فشرده دریك سطر عرضه‌کرد (با قراردادن مجدد پرانتزها):

$$\underset{T}{(}(\underset{T}{\mathbf{A}_2} \underset{F}{\rightarrow} (\underset{T}{\mathbf{A}_1} \underset{F}{\rightarrow} \underset{F}{\mathbf{A}_6})) \underset{T}{\leftrightarrow} ((\underset{T}{\mathbf{A}_2} \underset{T}{\wedge} \underset{T}{\mathbf{A}_1}) \underset{F}{\rightarrow} \underset{F}{\mathbf{A}_6})).$$

قضیهٔ ۱۳ الف. به‌ازای هرارزشدهی v بـرای مجموعهٔ $\mathcal{S}$، یك تابع منحصر به‌فرد $\overline{v} : \overline{\mathcal{S}} \rightarrow \{T\ ,\ F\}$ وجود داردکه تمام شرایط ۰ـ۵ را برآورده می‌سازد.

این‌قضیه، ازقضیهٔ بازگشت بخش ۲.۱ وقضیهٔ یگانه‌خوانی بخش ۴.۱ نتیجه می‌شود. ولی صحت ایـن قضیه باید از پیش، بویژه درپرتو مثال قبل، کاملاً روشن به‌نظرآید. در اثبات وجود $\overline{v}$، مطلب تعیین‌کننده، در حقیقت، یگانگی درختهایی خواهد بود کـه درمثال ذکر شدند.

می‌گوییم یك‌ارزشدهی v، فرمول φ را ارضا می‌کند اگروتنها اگر $\overline{v}(\varphi) = T$ باشد. (البته بـرای این امر، لازم است دامنهٔ v شامل همهٔ نمادهای جمله‌ای موجود در φ باشد.) اکنون یـك مجموعهٔ Σ از ف.د.س. هـا (به عنوان فرضها) و یـك ف.د.س. دیگر τ را (به‌عنوان یك نتیجهٔ ممکن) درنظرمی گیریم.

تعریف. می‌گوییم τ نتیجهٔ توتولوژیك Σ است (و می‌نویسیم $\Sigma \vDash \tau$) اگروتنها اگر هرارزشدهی برای‌نمادهای جمله‌ای فرمولهای در Σ و τ که همهٔ اعضای Σ را ارضا کنند، τ را نیز ارضا کند.

این تعریف، منعکس‌کنندهٔ احساس شهودی ما از این است که حکمی از مجموعه‌ای از فرضها نتیجه می‌شود، هرگاه فرض صدق فرضها صدق نتیجه را تضمین کند.

یـادآوری چند حالت ویژه از مفهوم نتیجهٔ توتولوژیك لازم است. نخست، حالت

ویژه‌ای را که در آن Σ، مجموعهٔ تهی $\varnothing$ است درنظرمی‌گیریم. توجه کنید این مطلب که هرارزشدهی همهٔ اعضای $\varnothing$ را ارضا می‌کند، به‌انتفای مقدم، صادق است. (چگونه می‌توان این ادعا را ردکرد؟ تنها درصورتی‌که عضوهایی از $\varnothing$ وجود داشته باشندکه ارضا نشده باشند، و این حرفی پوچ است.) بنابراین آنچه‌که می‌ماند این است‌که: $\varnothing \vDash \tau$ اگر و تنها اگر هرارزشدهی (برای نمادهای جمله‌ای متعلق به τ) τ را ارضا کند. دراین‌صورت می‌گوییم τ یك توتولوژی است (و می‌نویسیم $\vDash \tau$). درمثال اخیرنشان دادیم که ف.د.س. $((A_2 \land A_1) \to A_6) \leftrightarrow ((A_2 \to (A_1 \to A_6))$، با یکی از هشت ارزشدهی ممکن به $\{A_1, A_2, A_6\}$ ارضا می‌شود. در حقیقت، هفت ارزشدهی دیگر *نیز* آن را ارضا می‌کند، و بنابراین یك توتولوژی است.

حالت ویژهٔ دیگر، حالتی است که برای آن هیچ ارزشدهی‌که همهٔ اعضای Σ را ارضا کند وجود نداشته باشد. دراین‌صورت برای هر τ، $\Sigma \vDash \tau$، به‌انتفای مقدم، صادق است، به‌عنوان مثال

$$\{A, (\neg A)\} \vDash B.$$

دراینجا با هیچ مسئلهٔ عمیقی مواجه نیستیم؛ این امر یك نتیجهٔ فرعی تعاریف ماست.

مثال. $\{A, (A \to B)\} \vDash B$. برای $\{A, B\}$، چهار ارزشدهی وجود دارد. بسادگی‌می‌توان بررسی کردکه تنها یکی از این‌چهار ارزشدهی، هردوی A و $(A \to B)$ را ارضا می‌کند، یعنی v که برای‌آن داریم $v(A) = v(B) = T$. این v فرمول B را نیز ارضا می‌کند.

اگر Σ، مجموعه‌ای‌تك عضوی مانند $\{\sigma\}$ باشد، آنگاه به‌جای «$\{\sigma\} \vDash \tau$» می‌نویسیم «$\sigma \vDash \tau$». اگر $\sigma \vDash \tau$ و $\tau \vDash \sigma$، آنگاه σ و τ را معادل توتولوژیکی می‌نامیم (و می‌نویسیم $\sigma \vDash\dashv \tau$). به عنوان مثال، در بخش ۵۰۱، دیدیم که ف.د.س. های $(\neg(C \lor K))$ و $((\neg C) \land (\neg K))$ دو صورت مختلف از ترجمهٔ یك جملهٔ فارسی هستند. اکنون می‌توان ادعا کردکه این دو، معادل توتولوژیکی هستند.

اکنون مطلبی غیر بدیهی را بیان می‌کنیم، که اثبات آن بعداً داده خواهد شد (در بخش ۷۰۱).

قضیهٔ فشردگی. فرض کنیم Σ یك مجموعهٔ نامتناهی از ف.د.س. ها باشد وبه‌ازای هرزیر مجموعهٔ متناهی Σ_0 از Σ، یك ارزشدهی وجود داشته باشدکه همهٔ اعضای Σ_0 را ارضا کند. درآن صورت یك ارزشدهی وجود داردکه همهٔ اعضای Σ را ارضا کند.

این قضیه را به‌گونهٔ ساده‌تری نیز می‌توان بیان‌کرد: اگر هرزیرمجموعهٔ متناهی Σ ارضاشونده باشد، آنگاه خود Σ نیز ارضاشونده است. (خواننده‌ای که با توپولوژی عمومی‌آشنایی‌دارد، باید این‌مطلب را برای خودکشف کندکه‌چرا این‌قضیه «قضیهٔ فشردگی»

نامیده می‌شود. این قضیه مدعی فشردگی فضای توپولوژیك معینی است. سپس باید با به‌کاربردن قضیهٔ تیخونوف[1] روی فضاهای حاصلضرب، این قضیه را برای خود ثابت کند.)

جدولهای ارزش

روشی وجود دارد که می‌توان با کمك آن معلوم کرد که به‌ازای ف.د.س.های مفروض σ_1، . . .، σ_k و τ، آیا

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \models \tau$$

برقرار است یا نه. بویژه (وقتی $k = 0$)، درمورد یك ف.د.س. داده شده، این روش مشخص می‌کند که آیا آن توتولوژی هست یا نه.

به‌عنوان اولین مثال، می‌توانیم نشان دهیم که

$$(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \models ((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B})).$$

برای این کار، کلیهٔ ارزشدهیها برای $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ را درنظر می‌گیریم. در اینجا چهار ارزشدهی وجوددارد؛ درحالت کلی برای مجموعه‌ای از n نمادجمله‌ای 2^n ارزشدهی وجود دارد. چهار ارزشدهی فوق درجدول زیر فهرست شده‌اند:

A	B
T	T
T	F
F	T
F	F

این جدول را می‌توان چنان گسترده کرد که $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ و $((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B}))$ را نیز دربرگیرد. بدین ترتیب که به‌ازای هرفرمول، Tها و Fها را به‌نحوی که قبلاً تشریح شد، محاسبه می‌کنیم، و ارزش هر رابط را درزیرآن می‌نویسیم (جدول چهار). (درواقع، دو ستون سمت چپ جدول چهار لازم نیستند.) حال، به کمك این جدول، می‌توان دید که همهٔ ارزشدهیهایی که $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ را ارضا می‌کنند، و تعداد آنها سدتاست، $((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B}))$ را نیز ارضا می‌کنند. در واقع، عکس این مطلب نیز برقرار است، و بنابراین

$$(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \models\!\!\!= ((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B})).$$

برای نشان دادن $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \not\models ((\neg\mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{B}))$، می‌توان چون قبل، جدولی تنظیم کرد. ولی تنها یك سطر جدول برای اثبات این امر که لااقل یك ارزشدهی وجود

---

1. Tychonoff

جدول چهار

A	B	$(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$	$((\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{B}))$
T	T	**F** TTT	FT **F** FT
T	F	**T** TFF	FT **T** TF
F	T	**T** FFT	TF **T** FT
F	F	**T** FFF	TF **T** TF

دارد که $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ را ارضا کند ولی $((\neg\mathbf{A}) \wedge (\neg\mathbf{B}))$ را ارضا نکند موردنیاز است.

هرچه کاربرد یك روش عامتر باشد، کارآیی آن کمتر است. به‌عنوان مثال برای نشان دادن

$$\vDash ((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))),$$

می‌توانیم روش جدول ارزش را به‌کار بریم. اما این کار مستلزم جدولی با هشت سطر (برای هشت ارزشدهی ممکن برای $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$) است. با اندکی ابتکار می‌توان کار را ساده کرد:

$$((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))).$$

T T   *T*   *T T*   *T T T*

F F   *F F*   *T*   *F F F F F*

F T   *T T T*   *T*   *F T T T F T T*

در سطر اول، تنها فرض کردیم $v(\mathbf{A}) = T$. زیرا جهت به‌دست‌آوردن T برای این ف.د.س.، این مقدار اطلاع کافی است. درهمهٔ سطرهای بعدی فرض می‌کنیم $v(\mathbf{A}) = F$. در سطر دوم فرض می‌کنیم $v(\mathbf{B}) = F$؛ این نیز امکان به‌دست آوردن T را برای این ف.د.س. فراهم می‌سازد. بنابراین می‌توانیم خود را به‌حالت $v(\mathbf{B}) = T$ محدود سازیم، ازآنجاکه این فرمول نسبت به **B** و **C** متقارن است، همچنین فرض می‌کنیم $v(\mathbf{C}) = T$. بدین ترتیب درسطر سوم کاری‌که با هشت سطر می‌خواستیم بکنیم به‌پایان می‌رسد.

به‌عنوان مثالی از عدم استفاده از جدول شانزده سطری، توتولوژی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$((((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{S}) \rightarrow ((\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{S})).$$

                               T   *T T*

F   *T*   *F F T*

$T\ T\ T\ R\ R\ \bar{R}\ F\ T \quad T\ R\ R\ \bar{R}\ F$

دراینجا، درسطر اول، حالت $v(\mathbf{S}) = T$ رابررسی کرده‌ایم. درسطردوم، حالت $v(\mathbf{P}) = F$ یا $v(\mathbf{Q}) = F$ را نشان داده‌ایم. درسطرسوم دوحالت ممکن باقیمانده را توأماً درنظر گرفته‌ایم؛ دراینجا R ارزشی است که به $\mathbf{R}$ داده شده و $\bar{R}$ ارزش مخالف آن است.

درمورد مثال بالا، می‌توان مستقیماً توتولوژی بودن آن را بررسی کرد. هرانداره فرض قویتر باشد، ترکیب شرطی ضعیفتر است. بنابراین

$$(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \vDash \mathbf{P},$$

$$(\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \vDash ((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}),$$

$$(((\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}) \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S}) \vDash ((\mathbf{P} \to \mathbf{R}) \to \mathbf{S}).$$

برای اثبات قضایا با ماشین، مسئلهٔ توسعهٔ روشهایی کارا، که حجم کار را کاهش دهند، اهمیت می‌یابد. دراینجا بعضی از برنامه‌ها ممکن است به‌آزمون ف.د.س. هایی از منطق جمله‌ها که دارای هزاران نمادجمله‌ای هستند نیازمند باشد. روش جدول ارزش برای چنین مواردی بی‌اندازه پرزحمت است. مسئلهٔ یافتن روشهای بسیارکارا یکی از زمینه‌های فعلی پژوهش درعلوم کامپیوتری است.

فهرستی برگزیده از توتولوژیها

۱. قوانین انجمنی و جابه‌جایی برای $\wedge$، $\vee$، $\leftrightarrow$.

۲. قوانین پخشی:

$$((\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}))).$$

$$((\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C}))).$$

۳. نفی:

$$((\neg(\neg \mathbf{A})) \leftrightarrow \mathbf{A}).$$

$$((\neg(\mathbf{A} \to \mathbf{B})) \leftrightarrow (\mathbf{A} \wedge (\neg \mathbf{B}))).$$

$$((\neg(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge (\neg \mathbf{B})) \vee ((\neg \mathbf{A}) \wedge \mathbf{B}))).$$

قوانین دمورگن[1]:

$$((\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\neg \mathbf{A}) \vee (\neg \mathbf{B}))).$$

$$(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \leftrightarrow ((\neg \mathbf{A}) \wedge (\neg \mathbf{B})).$$

---

1. De Morgan

۴. قوانین دیگر

طرد شق ثالث: $(A \vee (\neg A))$

تناقض: $(\neg(A \wedge (\neg A)))$

عکس نقیض: $((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (\neg A)))$

صدور: $(((A \wedge B) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)))$

تمرین

۱. نشان دهید که هیچ یك از دوفرمول زیر نتیجه توتولوژیك دیگری نیست:

$$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)),$$
$$((A \wedge (B \wedge C)) \vee ((\neg A) \wedge ((\neg B) \wedge (\neg C)))).$$

۲. آیا $(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$ یك توتولوژی است؟

۳. نشان دهید که

(الف) $\Sigma ; \alpha \vDash \beta$ اگروتنها اگر $\Sigma \vDash (\alpha \rightarrow \beta)$.

(ب) $\alpha \vDash\dashv \beta$ اگروتنها اگر $\vDash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

(به‌خاطر بیاورید که $\Sigma ; \alpha = \Sigma \cup \{\alpha\}$.)

۴. هریك ازاحکام زیررا اثبات یا ردکنید:

(الف) اگر $\Sigma \vDash \alpha$ یا $\Sigma \vDash \beta$، آنگاه $\Sigma \vDash (\alpha \vee \beta)$.

(ب) اگر $\Sigma \vDash (\alpha \vee \beta)$، آنگاه $\Sigma \vDash \alpha$ یا $\Sigma \vDash \beta$.

۵. (الف) نشان دهید اگر v_1 و v_2 دو ارزشدهی باشند که روی همهٔ نمادهای جمله‌ای ف.د.س. α ارزش مساوی داشته باشند، آنگاه $\overline{v}_1(\alpha) = \overline{v}_2(\alpha)$.

(ب) فرض کنید $\mathcal{S}$ یك مجموعه ازنمادهای جمله‌ای باشدکه شامل نمادهای جمله‌ای در Σ و τ (و امکاناً بیشتر) باشد. نشان دهید $\Sigma \vDash \tau$ اگروتنها اگر هرارزشدهی برای $\mathcal{S}$، که هرعضو Σ را ارضا کند، τ را نیز ارضا کند.

۶. در سرزمینی هستید که هریك از سکنهٔ آن یا همیشه راست می‌گویند یا همیشه دروغ، درجاده‌ای به‌یك‌دوراهی برمی‌خورید و احتیاج دارید که بدانیدکدام‌راه به‌پایتخت منتهی می‌شود. یکی از اهالی درآنجاست، ولی تنها وقت جواب گفتن به‌یك‌سؤال، با پاسخ بلی یا خیر، را دارد. چه سؤالی را باید بکنید تا راه مورد نظرمعلوم شود؟

۷. (جایگزینی) دنبالهٔ α_1، α_2، ... از ف.د.س. ها را درنظر بگیرید. برای ف.د.س. φ، فرض کنید φ^* نتیجهٔ جایگزینی α_n به جای نماد جمله‌ای A_n، به ازای $n = 1, 2, \ldots$، در φ باشد.

(الف) فرض کنید v یك ارزشدهی برای مجموعهٔ همهٔ نمادهای جمله‌ای باشد. ارزشدهی u را چنان تعریف کنید که $u(A_n) = \bar{v}(\alpha_n)$. نشان دهید $\bar{u}(\varphi) = \bar{v}(\varphi^*)$.

(ب) نشان دهید که اگر φ توتولوژی باشد، آنگاه φ^* نیز چنین است.

۸. (اصل دوگانی) فرض کنید α یك ف.د.س. باشد که تنها نمادهای ربطی آن $\wedge$، $\vee$، و $\neg$ باشند. فرض کنید α^* نتیجهٔ تعویض $\wedge$ و $\vee$ و جایگزینی هر نماد جمله‌ای با نفی آن باشد. نشان دهید که α^* معادل توتولوژیکی با $(\neg\alpha)$ است.

۹. می‌گوییم مجموعهٔ Σ_1 از ف.د.س. ها با مجموعهٔ دیگر Σ_2 از ف.د.س. ها هم‌ارز است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ف.د.س. α داشته باشیم:

$$\Sigma_1 \vDash \alpha \text{ اگر و تنها اگر } \Sigma_2 \vDash \alpha$$

مجموعهٔ Σ مستقل است اگر و تنها اگر هیچ عضو Σ نتیجهٔ توتولوژیك بقیهٔ عضوهای Σ نباشد. نشان دهید که

(الف) هرمجموعهٔ متناهی از ف.د.س. ها دارای یك زیرمجموعهٔ هم‌ارز مستقل است.

(ب) هرمجموعهٔ نامتناهی، لزوماً، دارای یك زیرمجموعهٔ هم‌ارز مستقل نیست.

*(پ) فرض کنید $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots\}$؛ نشان‌دهید یك مجموعهٔ هم‌ارز مستقل Σ' وجود دارد.

۱۰. ثابت کنید یك ارزشدهی v ف.د.س.

$$(\ldots(A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow A_n)$$

را ارضا می‌کند اگر و تنها اگر به‌ازای عددی زوج مانند i، که $1 \leqslant i \leqslant n$، $v(A_i) = F$.

۱۱. پرویز، جمشید، وهوشنگ متهم به جنایتی هستند. پرویز می‌گوید: «من مرتکب قتل نشده‌ام. مقتول یکی از آشنایان قدیمی جمشید بود. اما هوشنگ از او نفرت داشت.» جمشید می‌گوید: «من مرتکب قتل نشده‌ام. من حتی او را نمی‌شناختم، بعلاوه من تمام آن هفته خارج از شهر بودم.» هوشنگ می‌گوید: «من مرتکب قتل نشده‌ام. من جمشید وپرویز را درآن روز همراه مقتول درجنوب شهر دیدم؛ یکی ازآن دونفر باید مرتکب این عمل‌شده باشد.» فرض کنید دو نفری که بیگناه‌اند راست می‌گویند، ولی قاتل ممکن است راست نگوید. قاتل کیست؟

۴.۱ یگانه‌خوانی

هدف این بخش، اثبات این مطلب است که در تحلیل ف.د.س. ها، برای رفع هر گونه ابهام، به‌اندازهٔ کافی پرانتز به‌کار برده‌ایم. (وجود گسترش $\overline{v}$، از یك ارزشدهی v، متکی به این عدم ابهام است.[1])

بررسی نتیجهٔ حذف همهٔ پرانتزها آموزنده است. ابهام ناشی ازحذف پرانتزها را در ف.د.س. زیرمی‌توان نشان داد:

$$\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3,$$

که آن را می‌توان به دوصورت $((\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{A}_3)$ و $(\mathbf{A}_1 \vee (\mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3))$ نوشت. اگر $v(\mathbf{A}_1)=T$ و $v(\mathbf{A}_3)=F$ باشد، دراین صورت، درمحاسبهٔ $\overline{v}(\mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_3)$ با اشکالی حل نشدنی روبرو می‌شویم.

باید نشان دهیم که با به‌کاربردن پرانتزها نه تنها چنین ابهاماتی به‌وجود نمی‌آیند، بلکه برعکس، هر ف.د.س. را می‌توان به‌طریقی منحصر به‌فرد نوشت. ازیك نظر این امر حائز اهمیت نیست، زیرا درصورت ابهام، علائم را آن‌قدر تغییر می‌دهیم تا رفع ابهام شود. به‌عنوان مثال، به‌جای به‌کاربردن روش زنجیری در تشکیل فرمولها، می‌توانیم دوتاییها یا سه‌تاییهایی مرتب، مانند $\langle \neg , \alpha \rangle$، $\langle \alpha , \wedge , \beta \rangle$، و غیره را به‌کار بریم. (درحقیقت، این روشی روشن ولی نامتعارف است.) دراین روش، قضیهٔ یگانه‌خوانی، بلادرنگ نتیجه می‌شود. ولی ما مجبور نیستیم تنها به‌این‌روش متوسل شویم و این چیزی است که می‌خواهیم ثابت کنیم.

لم ۱۴الف. درهر ف.د.س. تعداد پرانتزهای چپ و راست باهم برابرند.

اثبات. این لم را درپایان بخش ۱.۱ به‌عنوان مثال ثابت کردیم. ■

لم ۱۴ب. درهرقطعهٔ اولیهٔ سره از یك ف.د.س. تعداد پرانتزهای چپ بیشتر از تعداد پرانتزهای راست است. بنابراین هیچ قطعهٔ اولیهٔ سره از یك ف.د.س. نمی‌تواند یك ف.د.س. باشد.

اثبات. نشان می‌دهیم که مجموعه S از ف.د.س. ها باخاصیت مذکور (اینکه تعداد پرانتزهای چپ قطعات اولیهٔ سره بیشتر است) استقرایی است. ف.د.س.ی که تنها از یك نماد جمله‌ای تشکیل یافته دارای هیچ قطعهٔ اولیهٔ سره نیست، لذا آشکارا متعلق به S است. برای بررسی بسته بودن S تحت $\mathcal{E}_\wedge$، α و β متعلق به S را درنظرمی‌گیریم. قطعات اولیهٔ سره عبارت‌اند از:

---

۱. اگرخواننده قبلاً وجود $\overline{v}$ را پذیرفته باشد، می‌تواند تقریباً تمام این بخش را حذف کند. اما زیربخش نهایی، درمورد حذف پرانتزها، باید مطالعه شود.

۱. $($.
۲. $(\alpha_\circ$، که $\alpha_\circ$ یك قطعهٔ اولیهٔ سره از α است.
۳. $(\alpha$.
۴. $(\alpha \wedge$.
۵. $(\alpha \wedge \beta_\circ$، که $\beta_\circ$ یك قطعهٔ اولیهٔ سره از β است.
۶. $(\alpha \wedge \beta$.

با به‌کاربردن فرض استقرا، مبنی‌براینکه α و β در S هستند (درحالتهای ۲ و ۵)، نتیجهٔ موردنظر حاصل می‌شود. ■

قضیهٔ یگانه‌خوانی. پنج عمل فرمول‌ساز، وقتی که به‌مجموعهٔ ف.د.س. ها محدود شوند،
(الف) بردهایی دارندکه از یکدیگر و ازمجموعهٔ نمادهای جمله‌ای مجزا هستند، و
(ب) یك به‌یك هستند.

به‌زبان بخش ۲.۱، این مطلب بیانگر آن است که مجموعهٔ ف.د.س. ها ازمجموعهٔ نمادهای جمله‌ای با پنج عمل مزبور به‌طور آزاد پدید آمده است.

اثبات. برای نشان دادن این‌که تحدید $\mathcal{E}_\wedge$ یك به‌یك است، فرض می‌کنیم

$$(\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \delta),$$

که در آن α، β، γ، و δ ف.د.س. هستند. از حذف اولین نماد از هر دو طرف نتیجه می‌شود

$$\alpha \wedge \beta) = \gamma \wedge \delta).$$

دراین‌صورت باید داشته باشیم $\alpha = \gamma$، مگر این‌که یکی ازآنها یك قطعهٔ اولیهٔ سره از دیگری باشد (در تناقض با لم قبلی)، و دراین‌صورت بیدرنگ نتیجه می‌شودکه $\beta = \delta$. همین استدلال را در مورد $\mathcal{E}_\vee$، $\mathcal{E}_\rightarrow$، و $\mathcal{E}_\leftrightarrow$ می‌توان به‌کاربرد؛ درمورد $\mathcal{E}_\neg$، استدلال از این‌هم ساده‌تراست.

استدلالی این‌گونه نشان می‌دهدکه این عملها دارای بردهای مجزا هستند. به‌عنوان مثال، اگر

$$(\alpha \wedge \beta) = (\gamma \rightarrow \delta),$$

که در آن α، β، γ، و δ ف.د.س. هستند، دراین‌صورت همانند بند فوق، داریم $\alpha = \gamma$. اما ازاین نتیجه می‌شودکه $\wedge = \rightarrow$، و این با این امرکه نمادهای ما متمایزند درتناقض است. بنابراین‌عملهای $\mathcal{E}_\wedge$ و $\mathcal{E}_\rightarrow$ (وقتی به ف.د.س.ها محدود شوند) دارای بردهای مجزا

هستند. استدلال برای هردو رابط دوتایی دیگرنیزچنین خواهد بود.

بقیهٔ حالتها ساده‌اند. اگر $(\neg\alpha) = (\beta \wedge \gamma)$، آنگاه β با $\neg$ آغازمی‌شود، درصورتی که هیچ ف.د.س.ای چنین نیست. هیچ نماد جمله‌ای نمی‌تواند دنباله‌ای ازنمادها باشدکه با) شروع شده باشد. ■

اکنون به‌سؤال گسترش ارزشدهی v به $\bar{v}$ برمی‌گردیم. نخست، حالت‌خاصی‌رادرنظر می‌گیریم که درآن v یك‌ارزشدهی برای‌مجموعهٔ همهٔ نمادهای‌جمله‌ای‌است. دراین‌صورت با به‌کار بردن قضیهٔ یگانــه‌خوانی و قضیهٔ بازگشت (از بخش ۲۰۱) نتیجه می‌گیریم کــه یك گسترش منحصر بــه‌فرد مانند $\bar{v}$ برای مجموعهٔ همهٔ ف.د.س. هــا بــا خواص مطلوب وجود دارد.

سپس، حالت کلی‌راکه درآن v یك‌ارزشدهی برای مجموعهٔ S ازنمادهای‌جمله‌ای‌است درنظر می‌گیریم. بــه عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ یگانه‌خوانی، نتیجه می‌شودکــه مجموعهٔ $\bar{S}$ پدید آمده از S با پنج عمل فرمول‌ساز، به‌طورآزاد پدید آمده است. بنابراین، طبق قضیهٔ بازگشت یك‌گسترش منحصربه‌فرد v، مانند $\bar{v}$، به‌آن‌مجموعه وجود داردکه دارای خواص مطلوب است.

یك آلگوریتم

اثبات مــا از قضیهٔ یگانــه‌خوانی می‌تــوانــد از اثباتی بــه صورت بــرهــان خلف به‌آلگوریتمی تبدیل شود به‌نحوی که برای هرف.د.س.، درخت منحصربه‌فردآن را تولید کند. این آلگوریتم دارای این‌مزیت اضافی‌است که اگرعبارت داده شده ف.د.س. نباشد، ف.د.س. نبودن آن را نمایان می‌سازد.

فــرض‌کنیم عبارتی داده شده باشد. درابتدا، ایــن عبارت تنها رأس درخت است (و بنابراین‌کوچکترین رأس است)، ولی بــا پیشرفت کار، درخت از ایــن رأس به‌طرف پایین شاخه می‌شود.

۱. اگرهمهٔ رئوس کمین ازنمادهای جمله‌ای تشکیل‌یافته باشند، آنگاه‌کارتمام است، درغیراین‌صورت، یك رأس‌کمین انتخاب کنیدکه عبارت آن نماد جمله‌ای نباشد.

۲. اولین نماد بایدٍ[1] باشد. اگر دومین نماد نماد نفی باشد، به‌مرحلهٔ ۴ بروید.

۳. عبارت مزبور را ازچپ به‌راست بدقت وارسی‌کنید تا برای اولین بار به α) برسید، که درآن α عبارتی است‌که تعداد پرانتزهــای چپ و راست آن مساوی هستند.[2]

---

۱. درغیراین‌صورت، عبارت اولیه ف.د.س. نبوده است.

۲. اگــر قبل از یــافتن چنین αای بــه انتهای عبارت بــرسیم، درآن صورت عبارت اولیه ف.د.س. نیست.

دراین‌صورت α اولین جزء سازنده است. نماد بعدی باید[1] $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، یا $\leftrightarrow$ باشد که رابط اصلی است. باقیماندهٔ عبارت، $(\beta$، باید[1] از یك عبارت β و یك پرانتز راست تشکیل یافته باشد. دومین جزء سازنده β است. دراینجا تجزیهٔ عبارت منتخب پایان می‌یابد؛ اکنون به‌مرحلهٔ اول برگردید.

۴. اگر دومین نماد نماد نفی باشد، آنگاه این نماد رابط اصلی عبارت است. باقیماندهٔ عبارت، $(\beta$، باید[1] متشکل از یك عبارت β و یك پرانتز راست باشد. β جزء سازنده است. دراینجا تجزیهٔ عبارت منتخب پایان می‌یابد؛ اکنون به‌مرحلهٔ اول برگردید.

حال توضیحاتی دربارهٔ این آلگوریتم می‌دهیم. نخست ادعا می‌کنیم که برای هر عبارت، عملیات بعد از تعدادی متناهی مرحله متوقف می‌شود. این بدان جهت است که هر رأس دارای عبارتی کوتاهتر از رأس بالایی خود است. بنابراین عمق درخت محدود به‌طول عبارت داده شده است.

ثانیاً، فرایند توصیف شده منحصر به‌فرد است. برای مثال، درمرحلهٔ ۳ به‌یك عبارت α می‌رسیم. دراینجا نمی‌توان جزء سازنده‌ای کمتر از α را به‌کار برد. زیرا درآن‌صورت تعداد پرانتزهای چپ‌وراست مساوی نخواهد بود. بیشتراز α را نیزنمی‌توانیم به‌کاربریم، زیرا دراین صورت عبارت دارای یك قطعهٔ اولیهٔ سرهٔ α خواهد بود که متعادل است (درتناقض با لم ۱۴ب). بنابراین ناچار ازانتخاب α هستیم، وآنگاه انتخاب رابط اصلی هم اجتناب‌ناپذیر می‌شود.

روشن است که اگر ف.د.س.ای به‌این آلگوریتم داده شود، درآن صورت این آلگوریتم آن را نادرست‌ساخت نخواهد شمرد. برعکس، اگرعبارت داده شده چنان باشد که این آلگوریتم آن را رد نکند، درآن‌صورت با بررسی درخت ازپایین به‌بالا، به‌استقرا، به‌این نتیجه می‌رسیم که هر رأس، و ازجمله رأس نهایی (که عبارت داده شده درآن قرار گرفته است)، یك ف.د.س. دارد.

همچنین می‌توانیم درخت را برای مشاهدهٔ چگونگی به‌دست‌آوردن $\bar{v}(\alpha)$ مورد استفاده قرار دهیم. به‌ازای هر ف.د.س. α، درخت منحصر به‌فردی وجود دارد که آن را می‌سازد. با بررسی این درخت می‌توانیم بدون هیچگونه ابهامی ارزش $\bar{v}(\alpha)$ را بیابیم.

علامت‌گذاری لهستانی

می‌توان بی‌هیچ ابهامی پرانتزها را برداشت. این‌کار می‌تواند با روشی بسیار ساده انجام گیرد. بدین‌ترتیب که، مثلاً، به‌جای $(\alpha \wedge \beta)$ از $\wedge\, \alpha\beta$ استفاده‌کنیم. فرض‌کنیم مجموعهٔ $\mathbf{P}$ ـ ف.د.س.ها مجموعه‌ای باشد که از نمادهای جمله‌ای با ۵ عمل زیرپدید می‌آید:

$$\mathcal{D}_{\neg}(\alpha)=\neg\alpha, \quad \mathcal{D}_{\vee}(\alpha\,,\,\beta)=\vee\,\alpha\beta\,,$$
$$\mathcal{D}_{\wedge}(\alpha\,,\,\beta)=\wedge\,\alpha\beta\,, \quad \mathcal{D}_{\rightarrow}(\alpha\,,\,\beta)=\rightarrow\alpha\beta,$$

۱. درغیراین‌صورت، عبارت اولیه ف.د.س. نبوده است.

$$\mathscr{D}_{\leftrightarrow}(\alpha\ ,\ \beta) = \leftrightarrow \alpha\beta.$$

به‌عنوان مثال،

$$\rightarrow \wedge \mathbf{AD} \vee \neg \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{CB}$$

یك $\mathbf{P}$ ـ ف.د.س. است.

در اینجا کاملاً مشهود است که باید آلگوریتمی برای تحلیل ساخت عبارتها داشته باشیم. حتی درمورد مثال کوتاه بالا، پی بردن به‌چگونگی ساخته شدن آن نیاز به‌تأمل دارد، دربخش ۳.۲، یك قضیهٔ یگانه‌خوانی برای چنین عباراتی، عرضه خواهیم کرد.

این طریقهٔ نگارش فرمولها را لوکاسیویچ[1]، منطق‌دان لهستانی، معرفی کرده است (البته با جایگزینی حروف N، K، A، C، و E، بترتیب به‌جای $\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، و $\leftrightarrow$).

این علامت‌گذاری برای فرایندهای خودکار کاملاً مناسب است. برنامه‌های همگردان کامپیوترها، معمولاً اولین کاری کـه می‌کنند این است که فرمولها را به‌علامت‌گذاری لهستانی برمی‌گردانند.

حذف پرانتزها

ازاین به‌بعـد، در نامیدن ف.د.س.ها، اجباری به ذکر همهٔ پرانتزها نداریم. برای تثبیت علامت‌گذاری‌ای فشرده‌تر، قراردادهای زیر را می‌پذیریم:

۱. پرانتزهـای بیرونی دو طرف فرمول را حذف می‌کنیم. مثلاً، وقتی می‌نویسیم $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$، منظور همان $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$ است.

۲. نماد نفی در کوتاهترین ف.د.س. پس از خود عمل می‌کند. مثلاً، $\neg\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ همان $(\neg\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B}$ است، یعنی همان $((\neg\mathbf{A}) \wedge \mathbf{B})$. ولی با $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}))$ متفاوت است.

۳. نمادهای عطف و فصل درکوتاهترین ف.د.س.های دوطرف خود عمل می‌کنند، مشروط براین‌که قرارداد ۲ مراعات شود. مثلاً،

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{C} \vee \mathbf{D}$ همان $((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \rightarrow ((\neg\mathbf{C}) \vee \mathbf{D}))$ است.

۴. وقتی یك نماد ربطی مکرراً به‌کاررود، دراین‌صورت دسته‌بندی ازطرف راست صورت می‌گیرد:

$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ همان $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ است،

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ همان $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ است.

باید اذعان کرد که این قراردادها عدول از مطالبی است کـه درصفحهٔ ۲۳ دربارهٔ نام‌گذاری عبارتها گفته شد. ازآنجاکه ازاین‌پس با عبارتهایی‌که ف.د.س. نیستند سرکار

---

1. Lukasiewicz

نداریم، این قراردادها نتیجهٔ نامطلوبی به‌بار نخواهند آورد.

تمرین

۱. با استفاده از قراردادهای ایـن بخش، توتولوژیهای «فهرست منتخب» انتهای بخش ۳.۱ را، با حداقل پرانتز، بازنویسی کنید.

۲. مثالی از ف.د.س. هـای α و β و عبارتهای γ و δ ارائـه دهید به‌طوری کـه $(\alpha \wedge \beta) = (\gamma \wedge \delta)$ ولی $\alpha \neq \gamma$.

۳. فرض کنید که با قرارداد حذف همهٔ پرانتزهای راست، تعریف خود را از ف.د.س. ها عوض کنیم. بنابراین به‌جای

$$((A \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \wedge D))$$

می‌نویسیم:

$$((A \wedge (\neg B \rightarrow (C \vee D.$$

نشان دهید که قضیهٔ یگانه‌خوانی هنوز بـرقرار است. راهنمایی: تعداد پرانتزهـای چنین عباراتی با تعداد نمادهای ربطی آنها برابراست.

۴. در زبان فارسی گرایشی به‌استفاده از رابطهای دوجزئی مانند: «هم... و هم...»، «یا... یا...»، «اگر...، آنگاه...» وجود دارد. این مطلب چه تأثیری بریگانه‌خوانی درزبان فارسی دارد؟

۵. آلگوریتمی برای تحلیل یك ف.د.س. با ساختن درخت آن از بالا به‌پایین ارائه کردیم. همچنین روشهایی برای ساختن درخت از پایین به‌بـالا وجود دارد. دراین روش می‌توان کار را با شروع از داخلی‌ترین زوج پرانتزها آغاز کرد. یکی از این روشها را به‌طورکامل شرح دهید.

۵.۱ رابطهای جمله‌ای

تا اینجا پنج رابط جمله‌ای به‌کار گرفته‌ایم. حتی اگر تعریفی کلی برای «رابط» نداشته باشیم، باز روشن است که این پنج رابط تنها رابطهای ممکن نیستند. آیا با اضافه‌کردن رابطهای بیشتری به‌زبان، چیزی به‌دست خواهیم آورد؟ آیا با حذف بعضی از این رابطها چیزی‌را از دست می‌دهیم؟

دراین بخش، این سؤالها را با دقت طرح می‌کنیم وجوابهایی ارائه می‌دهیم. نخست

یك مثال غیرصوری را درنظرمی‌گیریم. فرض کنیم یك رابط جمله‌ای سه موضعی $\#$ ، که نماد اکثریت نامیده می‌شود، به‌زبان افزوده باشیم. اکنون اگـر α ، β و γ سه ف.د.س. باشند، عبارت $(\# \alpha\beta\gamma)$ را به عنوان یك ف.د.س. می‌پذیریم. به‌عبارت دیگر، یك عمل فرمول‌ساز ششم را به‌فهرست خود می‌افزاییم:

$$\mathcal{E}_{\#}(\alpha , \beta , \gamma) = (\# \alpha\beta\gamma).$$

اکنون باید تعبیراین‌نماد را عرضه‌کنیم. یعنی، باید‌مشخص کنیم، درصورتی که $\bar{v}(\alpha)$ و $\bar{v}(\beta)$ و $\bar{v}(\gamma)$ داده شده باشند،چگونه $\bar{v}((\# \alpha\beta\gamma))$ را محاسبه‌کنیم. فرض کنیم آن‌را به‌صورت زیر تعریف کرده باشیم:

$v((\# \alpha\beta\gamma))$ باید هم‌ارزش با اکثریت $\bar{v}(\alpha)$ ، $\bar{v}(\beta)$ و $\bar{v}(\gamma)$ باشد.

اکنون ثابت می‌کنیم که این رابط اضافی زبان ما را غنی‌تر نمی‌کند. بدین‌معنا که به‌ازای هر ف.د.س. دراین زبان توسعه یافته، یك ف.د.س. در زبان اولیه وجود داردکـه معادل توتولوژیك آن است. (البته، ف.د.س. زبان اولیه ممکن است خیلی طویلتر از ف.د.س. زبان تـوسعه یافته باشد.) این را (درحالت‌کلیتری) ذیلاً اثبات خواهیم کـرد؛ در اینجا فقط متذکر می‌شویم که این اثبات متکی براین‌امر است که $(\# \alpha\beta\gamma)$ معادل توتولوژیك است با

$$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma).$$

(متذکرمی‌شویم که اصرارما براین‌که $\bar{v}((\# \alpha\beta\gamma))$ ازروی $\langle \bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta), \bar{v}(\gamma) \rangle$ قابل محاسبه باشد دراینجا نقش‌تعیین‌کننده‌ای دارد. درمحاورات روزمره، عملهای یك‌تایی از قبیل «ممکن است که» یا «من معتقدم که» وجود دارند. می‌تـوانیم یکی از این عملها را روی یك جمله اعمال‌کنیم و جملهٔ جدیدی بـه‌دست آوریم کـه صدق وکذب آن را تنها براساس صدق وکذب جملهٔ اولیه نمی‌توان تعیین‌کرد.)

در تعمیم مثال پیشین، زبان صوری بیشتر دست وپا گیر است تـا کار گشا. می‌توان هرچیز را تنها با استفاده ازتوابع بیان‌کرد. می گوییم یك تابع‌بولی k موضعی تابعی‌است از $\{T , F\}^{k}$ به $\{T , F\}$. (با این‌تعریف یك تابـع بولی، به‌ازای یك مقدار k ، یك‌تابع بولی k موضعی است. این تعریف را با فرض این‌که T و F خود توابع‌بولی ۰ موضعی هستند کلیتر می کنیم.) نمونه‌هـایی از تـوابع بولی با معادله‌های زیرین (کـه درآنها $X \in \{T , F\}$ است) تعریف می‌شوند:

$$I_{i}^{n}(X_{1} , \dots , X_{n}) = X_{i},$$

$$N(T) = F , \; N(F) = T,$$

$$K(T , T) = T , \quad K(F , X) = K(X , F) = F,$$

$$A(F , F) = F , \quad A(T , X) = A(X , T) = T,$$

$$C(T\ ,\ F)=F\ ,\quad C(F\ ,\ X)=C(X\ ,\ T)=T,$$
$$E(X\ ,\ X)=T\ ,\quad E(T\ ,\ F)=E(F\ ,\ T)=F.$$

ازهرف.د.س. α، می‌توان یك تابع بولی‌ساخت. مثلاً، اگر α ف.د.س. $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$ باشد، آنگاه می‌توانیم جدولی مانند جدول پنج بسازیم. 2^2 سطر این جدول، مربوط به 2^2 ارزشدهی بـرای $\{\mathbf{A}_1\ ,\ \mathbf{A}_2\}$ است. به‌ازای هر2^2 زوج $\overrightarrow{X}$، $B_\alpha(\overrightarrow{X})$ را برابر بـا ارزش α وقتی که نمادهای جمله‌ای آن ارزشهای موجود در $\overrightarrow{X}$ را می‌پذیرند، قرارمی‌دهیم.

جدول پنج

$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$	
F	F	F	$B_\alpha(F\ ,\ F)=F$
F	T	F	$B_\alpha(F\ ,\ T)=F$
T	F	F	$B_\alpha(T\ ,\ F)=F$
T	T	T	$B_\alpha(T\ ,\ T)=T$

درحالت کلی، فرض کنیم α ف.د.س.ای است که نمادهای جمله‌ای آن حداکثر $\mathbf{A}_1$، . . . ، $\mathbf{A}_n$ است. یك تابع بولی n موضعی B^n_α (اگر n به‌نظرضروری نرسد، فقط B_α)، که از روی α ساخته شده است، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$B^n_\alpha(X_1\ ,\ \ldots\ ,\ X_n) =$ ارزش داده شده به α وقتی که $\mathbf{A}_1\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbf{A}_n$ (بترتیب) ارزشهای X_1، . . . ، X_n را می‌پذیرند.

یا، به‌عبارت‌دیگر، $B^n_\alpha(X_1\ ,\ \ldots\ ,\ X_n)=\overline{v}(\alpha)$، که درآن v ارزشدهی به $\{\mathbf{A}_1, \ldots , \mathbf{A}_n\}$ است به‌طوری که $v(\mathbf{A}_i) = X_i$. بنابراین B^n_α از $\overline{v}(\alpha)$ به‌عنوان یك تابع از v، به‌ازای αی ثابت، ساخته می‌شود.

مثلاً، توابع بولی‌ای که قبلاً فهرست شدند به‌طریق زیر، ساخته می‌شوند:

$$I^n_i = B^n_{\mathbf{A}_i},$$

$$N = B^1_{\neg\mathbf{A}_1},$$

$$K = B^2_{\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2},$$

$$A = B^{۲}_{\mathbf{A}_۱ \vee \mathbf{A}_۲},$$

$$C = B^{۲}_{\mathbf{A}_۱ \to \mathbf{A}_۲},$$

$$E = B^{۲}_{\mathbf{A}_۱ \leftrightarrow \mathbf{A}_۲}.$$

از این توابع می‌توانیم بقیه را بسازیم. به‌عنوان مثال،

$$B^{۲}_{\neg\mathbf{A}_۱ \vee \neg\mathbf{A}_۲}(X_۱ , X_۲) = A(N(I^{۲}_{۱}(X_۱ , X_۲)) , N(I^{۲}_{۲}(X_۱ , X_۲))).$$

(طرف راست ایــن معادله را می‌توان با ترجمهٔ $\neg\mathbf{A}_۱ \vee \neg\mathbf{A}_۲$ به‌علامت‌گذاری لهستانی، مقایسه‌کرد.) اکنون با این‌سؤال مواجه خواهیم شد که‌آیا هرتابع بولی را می‌توان به‌این طریق به‌دست آورد یا نه.

همان‌گونه‌که قضیهٔ زیربیان می‌دارد، درتغییرتوجه از ف.د.س.ها به‌توابع بولی که از روی آنها ساخته می‌شوند، در واقع ف.د.س.های معادل توتولوژیك به‌دست می‌آیند. رابطهٔ ترتیبی $F < T$ را روی $\{T , F\}$ تعریف می‌کنیم. (اگر $T = ۱$ و $F = ۰$ ، این ترتیب همان ترتیب طبیعی است.)

قضیهٔ ۱۵ الف. فرض‌کنیم α و β ف.د.س.هایی باشند که نمادهای جمله‌ای آنها ازمیان $\mathbf{A}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{A}_n$ انتخاب شده باشند. دراین‌صورت

(الف) $\alpha \vDash \beta$ اگــر و تنهــا اگــر بــه ازای هــر $\vec{X} \in \{T , F\}^n$ داشته بــاشیم $B_\alpha(\vec{X}) \leqslant B_\beta(\vec{X})$.

(ب) $\alpha \vDash\!\dashv \beta$ اگروتنها اگر $B_\alpha = B_\beta$.

(ج) $\vDash \alpha$ اگروتنها اگر $\operatorname{ran} B_\alpha = \{T\}$.

اثبات. (الف) $\alpha \vDash \beta$ اگروتنها اگربه‌ازای‌همهٔ ۲^n ارزشدهی v به $\mathbf{A}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{A}_n$، هرگاه $\bar{v}(\alpha) = T$ ، آنگاه $\bar{v}(\beta) = T$. (این مطلب حتی‌اگرنمادهای جمله‌ای موجود در α و β شامل‌همهٔ $\mathbf{A}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{A}_n$ نباشد، برقراراست؛ به‌تمرین ۵ از بخش ۳.۱ مراجعه‌کنید.) بنابراین وقتی‌که فرض شود $F < T$ ، داریم:

$\alpha \vDash \beta$ اگر وتنها اگربه‌ازای همهٔ ۲^n ارزشدهی v ، $\bar{v}(\alpha) = T \Rightarrow \bar{v}(\beta) = T$ ،

اگروتنها اگربه‌ازای همهٔ ۲^n nتایی $\vec{X}$ ، $B^n_\alpha(\vec{X}) = T \Rightarrow B^n_\beta(\vec{X}) = T$ ،

اگروتنها اگربه‌ازای همهٔ ۲^n nتایی $\vec{X}$ ، $B^n_\alpha(\vec{X}) \leqslant B^n_\beta(\vec{X})$. ■

دراینجاعلاوه برمشخص‌کردن ف.د.س.های معادل توتولوژیك،خود را از قیدزبان صوری نیز رها کرده‌ایم. اکنون این آزادی را داریم‌که هرتابع بولی را، صرف‌نظر از

این‌که توسط یك ف.د.س مشخص می‌شود یا نه، درنظر بگیریم، دلیل این آزادی کاملاً روشن است:

قضیهٔ ۱۵ب. فرض‌کنیم G یك تابع بولی n موضعی، $n \geqslant 1$، باشد. می‌توانیم یك ف.د.س. α به‌دست آوریم به‌طوری‌که $G = B^n_\alpha$، یعنی به‌طوری‌که α تابع G را مشخص می‌سازد.

اثبات. حالت ۱: $\operatorname{ran} G = \{F\}$. دراین‌صورت $\alpha = \mathbf{A}_1 \wedge \neg\mathbf{A}_2$.

حالت ۲: درغیراین‌صورت k نقطه وجود داردکه درآنها G دارای‌ارزش T است ($k > 0$). آنها را می‌نویسیم:

$$\vec{X}_1 = \langle X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n} \rangle,$$
$$\vec{X}_2 = \langle X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n} \rangle,$$
$$\ldots$$
$$\vec{X}_k = \langle X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn} \rangle.$$

اکنون فرض می‌کنیم

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \mathbf{A}_j & \text{اگر } X_{ij} = T \\ (\neg\mathbf{A}_j) & \text{اگر } X_{ij} = F \end{cases}$$

$$\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \cdots \wedge \beta_{in},$$

$$\alpha = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k.$$

حال ثابت می‌کنیم $G = B^n_\alpha$.

نخست، برای روشن شدن مطلب مثالی می‌آوریم. فرض‌کنیم G یك تابع بولی سه‌موضعی به‌صورت زیر باشد:

$$G(F, F, F) = F,$$
$$G(F, F, T) = T,$$
$$G(F, T, F) = T,$$
$$G(F, T, T) = F,$$
$$G(T, F, F) = T,$$
$$G(T, F, T) = F,$$

$$G(T\ ,\ T\ ,\ F) = F,$$
$$G(T\ ,\ T\ ,\ T) = T.$$

دراین‌صورت فهرست سه‌تاییهایی‌که درآنها $G=T$ دارای چهار عضو است:

$$\begin{array}{ll} FFT & \neg \mathbf{A}_۱ \wedge \neg \mathbf{A}_۲ \wedge \mathbf{A}_۳, \\ FTF & \neg \mathbf{A}_۱ \wedge \mathbf{A}_۲ \wedge \neg \mathbf{A}_۳, \\ TFF & \mathbf{A}_۱ \wedge \neg \mathbf{A}_۲ \wedge \neg \mathbf{A}_۳, \\ TTT & \mathbf{A}_۱ \wedge \mathbf{A}_۲ \wedge \mathbf{A}_۳, \end{array}$$

درسمت راست هریك از سه‌تاییهای بالا، ترکیب عطفی متناظر γ_i، نوشته شده است. دراین‌صورت α فرمول زیرخواهد بود

$$(\neg \mathbf{A}_۱ \wedge \neg \mathbf{A}_۲ \wedge \mathbf{A}_۳) \vee (\neg \mathbf{A}_۱ \wedge \mathbf{A}_۲ \wedge \neg \mathbf{A}_۳) \vee (\mathbf{A}_۱ \wedge \neg \mathbf{A}_۲ \wedge \neg \mathbf{A}_۳) \vee (\mathbf{A}_۱ \wedge \mathbf{A}_۲ \wedge \mathbf{A}_۳).$$

توجه‌کنید که چگونه α سه‌تاییهایی‌که درآنها G ارزش T را می‌پذیرد، صریحاً فهرست می‌کند.

به‌اثبات قضیه برمی‌گردیم. نخست‌توجه کنیدکه به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant k$، $B^n_\alpha(\overrightarrow{X_i}) = T$. (زیرا ارزشدهی متناظر با $\overrightarrow{X_i}$، γ_i را و بنابراین α را ارضا می‌کند.) از طرف دیگر، فقط یك ارزشدهی به $\{\mathbf{A}_۱\ ,\ \ldots\ ,\ \mathbf{A}_n\}$ می‌تواند γ_i را ارضا کند، به‌همین ترتیب فقط k ارزشدهی می‌تواند α را ارضا کند. بنابراین به ازای $۲^n - k$ عدد n تایی $\overrightarrow{Y}$ دیگر، $B^n_\alpha(\overrightarrow{Y}) = F$. بنابراین درهمهٔ حالتها $B^n_\alpha(\overrightarrow{Y}) = G(\overrightarrow{Y})$. ■

ازاین قضیه معلوم می‌شود که هرتابع بولی تشخیص‌پذیر است. البته α ای‌که G را مشخص می‌کند منحصربه‌فرد نیست؛ هرف.د.س. که معادل توتولوژیك با α باشد نیزهمان تابع را مشخص می‌کند. گاهی انتخاب کوتاهترین α مورد توجه است. (درمثالی‌که شرح داده شد، ف.د.س.

$$\mathbf{A}_۱ \leftrightarrow \mathbf{A}_۲ \leftrightarrow \mathbf{A}_۳$$

نیز G را مشخص می‌کند.)

از قضیهٔ بالا، می‌توانیم نتیجه بگیریم که به‌مقدارکافی (درواقع، بیشترازکافی) رابط جمله‌ای داریم. زیرا فرض کنیم با افزودن چندین رابط جمله‌ای جدید (هم‌چون رابط اکثریت‌که درابتدای این‌بخش‌مورد بحث‌قرارگرفت) زبان راتوسعه می‌دهیم. هرف.د.س. φ دراین زبان توسعه‌یافته یك تابع بولی B^n_φ را مشخص می‌کند. بنابرقضیهٔ بالا، یك ف.د.س. مانند α در زبان اولیه داریم که $B^n_\varphi = B^n_\alpha$. بنابراین φ و α، براساس قضیهٔ

۱۵ الف، معادل توتولوژیك‌اند.
درحقیقت، اثبات نشان می‌دهدکه α می‌تواند به شکلی خاص باشد. از یك جهت، تنها نمادهای ربطی موجود در α عبارت‌اند از $\wedge$، $\vee$، و $\neg$. بعلاوه، α، بـه‌اصطلاح، به‌صورت فصلی نرمال است. یعنی

$$\alpha = \gamma_1 \vee \cdots \vee \gamma_k ,$$

که درآن

$$\gamma_i = \beta_{i1} \wedge \cdots \wedge \beta_{in_i}.$$

وهر β_{ij} یك‌نمادجمله‌ای یا نفی‌یك نماد جمله‌ای‌است. (مزیت‌نمایش ف.د.س.ها به‌صورت فصلی نرمال این است‌که ارزشدهیهایی راکه این‌فرمول را ارضا می‌کنند بوضوح به‌دست می‌دهند.) بنابراین داریم:

نتیجهٔ ۱۵پ. به‌ازای هـر ف.د.س. φ، می‌تـوان یك ف.د.س. به‌صورت‌فصلی نرمال که معادل توتولوژیك α باشد به‌دست‌آورد.

ازآنجاکه به‌ازای $n \geqslant 1$، هرتابع $G : \{T , F\}^n \to \{T , F\}$ با یك ف.د.س. وفقط با به‌کاربردن نمادهای ربطی متعلق به $\{\neg , \vee , \wedge\}$ می‌تواند مشخص‌شود، می‌گوییم مجموعهٔ $\{\neg , \vee , \wedge\}$ تمام است. (درحقیقت تمامیت بیشتر یك خاصیت توابع بولی K، A، و N است‌که با این‌نمادها متناظراست.) اگریك مجموعهٔ تمام از رابطها داشته باشیم، می‌دانیم که هرف.د.س. معادل توتولوژیك ف.د.س.ای‌است‌که تمامی رابطهای آن درآن مجموعه‌است. (زیرا به‌ازای هرف.د.س. داده شدهٔ φ، می‌توانیم با به‌کاربردن آن رابطها α را ساخته و B_φ را مشخص‌کنیم. درایـن‌صورت $\alpha \vDash\!\!\!\dashv \varphi$). تمامیت $\{\neg , \vee , \wedge\}$ را می‌توان پیراسته‌تر عرضه‌کرد:

قضیهٔ ۱۵ت. هریك از دومجموعهٔ $\{\neg , \wedge\}$ و $\{\neg , \vee\}$ تمام است.

اثبات. باید نشان دهیم‌که هرتابع بولی G را می‌توان با یك ف.د.س. و فقط بـا به‌کاربردن $\{\neg , \wedge\}$ (درحالت اول) مشخص‌کرد. نخست بـا یك ف.د.س. مانند α، بـا رابطهای $\{\neg , \wedge , \vee\}$، که G را مشخص‌می‌سازدشروع‌می‌کنیم. کافی‌است‌که‌یك ف.د.س. مانند α' که معادل توتولوژیك α باشد به‌دست آوریم‌که درآن فقط از $\{\neg , \wedge\}$ استفاده شده باشد. برای این‌کار از قانون دمورگن استفاده می‌کنیم:

$$\beta \vee \gamma \vDash\!\!\!\dashv \neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma).$$

با اعمال مکرر این قانون، می‌توانیم $\vee$ را از α، کاملاً حذف‌کنیم.
(به‌طورصوری‌تری، به‌استقرا نسبت به α می‌توان ثابت‌کردکه یك ف.د.س. که معادل توتولوژیك α' باشد وجود داردکه درآن فقط نمادهای $\wedge$ و $\neg$ به‌کاررفته‌اند. دوحالت در

مرحلهٔ استقرایی عبارت‌انداز:

حالت $\neg$: اگر α برابر $(\neg\beta)$ باشد، دراین صورت α' را مساوی $(\neg\beta')$ قرار می‌دهیم.

حالت $\vee$: اگر α برابر $(\beta \vee \gamma)$ باشد، دراین‌صورت α' رامساوی $\neg(\neg\beta' \wedge \neg\gamma')$ قرار می‌دهیم. ازآنجاکه β' و γ' بترتیب معادل توتولوژیك β و γ هستند،

$$\alpha' = \neg(\neg\beta' \wedge \neg\gamma')$$

$$\models\dashv \neg(\neg\beta \wedge \neg\gamma)$$

$$\models\dashv \beta \vee \gamma$$

$$= \alpha.$$

از این‌پس دراثبات تمامیت مجموعه‌ای از رابطها، این استقرا را حذف می‌کنیم و به‌جای آن، مثلاً، روش همانندسازی $\vee$ با $\neg$ و $\wedge$ عرضه خواهد شد.) ■

نشان دادن این‌که مجموعهٔ مشخصی از رابطها تمام نیست، معمولاً، مشکلتر از اثبات تمامیت یك مجموعه است. روش اساسی آن است که نخست نشان دهیم (معمولاً به‌استقرا) که به‌ازای هر ف.د.س. α که تنها آن رابطها را به‌کارمی‌برد، تابع B^n_α دارای ویژگیهایی است، و سپس نشان دهیم که تابع بولی دیگری فاقد این ویژگیهاست.

مثال. $\{\wedge, \rightarrow\}$ تمام نیست.

اثبات. ایدهٔ اثبات آن است که نشان دهیم با این رابطها، اگر به‌نمادهای جمله‌ای ارزش T بدهیم، آنگاه همهٔ فرمول ارزش T پیدا می‌کند. درنتیجه، بویژه، چیزی که معادل توتولوژیك $\neg\mathbf{A}$ باشد وجود نخواهد داشت.

با ذکرجزئیات بیشتر، می‌توانیم به‌استقرا نشان دهیم که به‌ازای هر ف.د.س. مانند α، که درآن تنها ازاین‌رابطها استفاده شده باشد و $\mathbf{A}$ تنها نماد جمله‌ای آن باشد، داریم $\mathbf{A} \models \alpha$. (به‌زبان توابع، $(X \leqslant B^1_\alpha(X)$.)

به‌ازای هر n، 2^{2^n} تابع n موضعی بولی وجود دارد. بنابراین اگریك رابط را با تابع بولی‌آن یکی بگیریم (مثلاً، $\wedge$ را با تابع K که قبلاً ذکرشد) درآن‌صورت 2^{2^n}، رابط n موضعی خواهیم داشت، که‌آنها را به‌ازای $n \leqslant 2$ رده‌بندی می‌کنیم.

رابطهای ۰ تایی

دوتابع بولی ۰موضعی T و F وجود دارد. به‌عنوان نمادهای‌ربطی متناظر باآنها، $\top$ و $\bot$

را انتخاب می‌کنیم. می‌دانیم که یك نماد ربطی nتایی با n ف.د.س. ترکیب می‌شود تا یك ف. د. س. جدید بـه‌وجود آید. وقتی‌که $n = 0$، $\perp$ به‌خودی خود یك ف.د.س. خواهد بود. اختلاف $\perp$ با نمادهای جمله‌ای در این است کـه به‌ازای هر v، داریم $\bar{v}(\perp) = F$؛ یعنی $\perp$، یك نماد منطقی است که همیشه دارای ارزش F است. به‌همین ترتیب $\top$ نیز یك ف.د.س. است، و به‌ازای هر v، $\bar{v}(\top) = T$. بنابراین، به‌عنوان مثال، $\mathbf{A} \to \perp$ یك ف.د.س. است که با $\neg\mathbf{A}$ معادل توتولوژیك است، همان‌طور که می‌توان از یك جدول ارزش دوسطری این امر را مشاهده‌کرد.

رابطهای یك‌تایی

چهار رابط یك‌تایی وجود دارد که فقط یکی از آنها قابل توجه است. حالت جالب، نفی است. از سه‌تابع بولی یك موضعی دیگر، یکی تابع همانی و دو دیگر توابع ثابت‌اند.

رابطهای دوتایی

شانزده رابط دوتایی وجود داردکـه در جـدول شش فهرست شده‌اند و تنها ده‌تای آنها «واقعاً دوتایی» هستند.

رابطهای سه‌تایی

دویست وپنجـاه وشش رابط سه‌تـایی وجـود دارد؛ دوتـای آنهـا اساساً ۰تایی هستند؛ $(\binom{3}{1}) \times 2 =$)۶تای آنهـا اساساً یك‌تایی، و $(\binom{3}{2}) \times 10 =$)۳۰تای آنها اساساً دوتایی هستند. درنتیجه ۲۱۸ تای بقیه واقعاً سه‌تایی‌اند. تا اینجا فقط رابط اکثریت، $\#$، را ذکر کرده‌ایم. به‌همین‌ترتیب، رابط اقلیت نیز وجود دارد. درتمرین ۷ با $+_3$، که همان جمع سه‌تایی به‌پیمـانه ۳ است، آشنا می‌شویم. ارزش $+_3\alpha\beta\gamma$ برابر T اگر وتنها اگر تعداد فـردی از α، β و γ ارزش T داشته باشـند. این فـرمـول با هـردوی $\alpha + \beta + \gamma$ و $\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma$ معادل است. یك رابط سه‌تایی دیگر، درتمرین ۸ معرفی می‌شود.

مثال. $\{|\}$ و $\{\downarrow\}$ تمام هستند.

اثبات. برای $|$

$$\neg\alpha \vDash\dashv \alpha \mid \alpha$$

$$\alpha \vee \beta \vDash\dashv (\neg\alpha) \mid (\neg\beta).$$

ازآنجاکه $\{\neg, \vee\}$ تمام است و $\neg$ و $\vee$ را می‌توان فقط با بکاربردن $|$ همانند سازی کرد، لذا $\{|\}$ نیز تمام است. ■

جدول شش

نماد	معادل	توضیحات
	$\mathbf{T}$	ثابت دوموضعی، اساساً ۰ تایی
	$\perp$	ثابت دوموضعی، اساساً ۰ تایی
	$\mathbf{A}$	تصویر، اساساً يك‌تایی
	$\mathbf{B}$	تصویر، اساساً يك‌تایی
	$\neg\mathbf{A}$	نفی، اساساً يك‌تایی
	$\neg\mathbf{B}$	نفی، اساساً يك‌تایی
$\wedge$	$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$	و؛ اگر $T=1$ و $F=0$، در این صورت همان ضرب درهیأت $\{1 , 0\}$ را تعریف می‌کند
$\vee$	$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$	یا
$\rightarrow$	$\mathbf{A}\rightarrow\mathbf{B}$	شرطی
$\leftrightarrow$	$\mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$	دوشرطی
$\leftarrow$	$\mathbf{B}\leftarrow\mathbf{A}$	شرطی وارون
$+$	$(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})\wedge\neg(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$	یای مانعة‌الجمع، «**A** یا **B** ونه هردو» اگر $T=1$ و $F=0$ باشد دراین‌صورت، همان جمع‌معمولی (به‌پیمانهٔ ۲) درهیأت $\{1 , 0\}$ تعریف می‌کند
$\downarrow$	$\neg(\mathbf{A}\vee\mathbf{B})$	هیچیك، «نه **A** و نه **B**»
$\mid$	$\neg(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})$	نه هر دو، «نه هردوی **A** و **B**»، این علامت خط شفر[1] نامیده می‌شود
$<$	$(\neg\mathbf{A})\wedge\mathbf{B}$	ترتیب معمولی، وقتی‌که $F<T$
$>$	$\mathbf{A}\wedge(\neg\mathbf{B})$	ترتیب معمولی، وقتی‌که $F<T$

مثال. $\{\rightarrow , \neg\}$ تمام است. درواقع از ده رابطی‌که واقعاً دوتایی هستند، هشت‌تای آنها باافزودن $\neg$ به‌هریك، يك مجموعهٔ تمام به‌دست می‌دهند، دومورد استثنایی، $+$ و $\leftrightarrow$

1. Sheffer

هستند؛ به‌تمرین ۶ توجه کنید.

مثال. $\{\to , \perp\}$ تمام است.

تمرین

۱. فرض‌کنید G تابع بولی سه موضعی زیرین باشد:

$$G(F,F,F)=T,\quad G(T,F,F)=T,$$
$$G(F,F,T)=T,\quad G(T,F,T)=F,$$
$$G(F,T,F)=T,\quad G(T,T,F)=F,$$
$$G(F,T,T)=F,\quad G(T,T,T)=F.$$

حداکثر با به‌کار بردن رابطهای ۷، ۸، $\neg$، ف.د.س.ای به‌دست آوریدکه G را مشخص سازد.سپس چنین ف.د.س.ای را مشروط برآنکه درآن نمادهـای ربطی در بیشتر از پنج محل ظاهرشده باشند، پیداکنید.

۲. نشان دهیدکه $|$، و $\downarrow$ تنها رابطهای دوتایی هستندکه به‌خودی‌خود تمام هستند.

۳. نشان دهیدکه $\{\neg , \#\}$ تمام نیست.

۴. فرض‌کنید M رابط سه‌تایی اقلیت باشد. (بنـابراین $\bar{v}(\mathsf{M}\alpha\beta\gamma)$ همیشه مخالف بااکثریت $\bar{v}(\alpha)$، $\bar{v}(\beta)$، و $\bar{v}(\gamma)$ است.) نشان دهیدکه
(الف) $\{\mathsf{M} , \perp\}$ تمام است.
(ب) $\{\mathsf{M}\}$ تمام نیست.

۵. نشان دهید $\{\top , \perp , \neg , \leftrightarrow , +\}$ تمـام نیست. راهنمایی: نشان دهید که هر ف.د.س. α، متشکل از این رابطهـا و نمادهای جمله‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دارای تعداد زوجی T درمیان چهار ارزش ممکن $\bar{v}(\alpha)$ است.

۶. نشان دهید $\{+ , \leftrightarrow , \wedge\}$ تمام است، اما هیچ زیرمجموعهٔ سرهٔ‌آن تمام نیست.

۷. فـرض کنید $+^3$ یك رابط سه‌تایی باشد به‌طـوری که $+^3\alpha\beta\gamma$ معـادل با $\alpha + \beta + \gamma$ باشد.
(الف) نشان دهید $\{\top , \perp , \wedge , +^3\}$ تمام است.
(ب) نشان دهید هیچ زیرمجموعهٔ سرهٔ‌آن تمام نیست.

۸. فرض‌کنید I یك رابط سه‌تایی باشد به‌طوری‌که به $\mathsf{I}\alpha\beta\gamma$ ارزش T داشته باشد

اگر وتنها اگر دقیقاً یکی ازفرمولهای α، β، γ ارزش T داشته باشد. نشان دهیدکه هیچ رابط دوتایی $\circ$ و $\triangle$ وجود ندارد به‌قسمی که $1\alpha\beta\gamma$ معادل با $(\alpha \circ \beta) \triangle \gamma$ باشد.

۹. به‌زبان‌کتاب رابطهای ۰ موضعی $\top$ و $\bot$ را بیفزایید. به‌ازای‌هر ف.د.ش. φ، ونماد جمله‌ای A، فرض‌کنید $\varphi^A_\top$ ف.د.س. به‌دست‌آمده از φ، با جایگزینی $\top$ به‌جای A باشد. به‌همین ترتیب درمورد $\varphi^A_\bot$. سپس فرض‌کنید $\varphi^A_* = (\varphi^A_\top \vee \varphi^A_\bot)$. نشان دهید

(الف) $\varphi \vDash \varphi^A_*$.

(ب) اگر $\varphi \vDash \psi$ و A در ψ موردی نداشته باشد، آنگاه $\varphi^A_* \vDash \psi$.

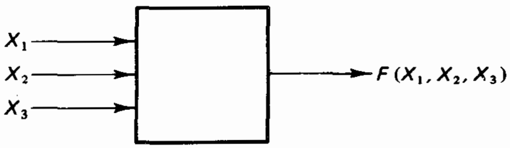
(پ) (قضیهٔ درون‌یابی) اگر $\alpha \vDash \beta$، آنگاه γای وجــود داردکه نمادهای جمله‌ای آن مشترك در α ودر β هستند و $\alpha \vDash \gamma \vDash \beta$.

۶.۱ مدار راه‌گزین[1]

یك دستگاه الکتریکی (که معمولاً «جعبهٔ سیاه» نامیده می‌شود) را درنظرمی‌گیریم‌که دارای n ورودی و یك خروجی است (شکل ۱). فرض‌کنیم به‌هرورودی یك علامت داده می‌شود که دارای یکی از دو ارزش مفروض است، وهمچنین خروجی نیز دارای یکی ازاین دو ارزش است. دو ارزش ممکن را T و F می‌نامیــم. (همچنین می‌توانستیم ارزش F را به‌عنوان پتانسیل ۰ تعریف‌کنیم و واحد پتانسیل را به‌نحوی انتخاب کنیم کـه ارزش T دارای پتانسیل ۱ باشد.) بعلاوه فرض‌کنیم دستگاه دارای هیچ حافظه‌ای نباشد؛ یعنی خروجی درهرلحظه فقط بــه ورودی درهمان لحظه وابسته باشد (و به‌حالات گذشته بستگی نداشته باشد). دراین‌صورت عمل دستگاه الکتریکی به‌وسیلهٔ تابع بولی زیرتوصیف می‌شود:

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \text{خروجی برحسب علامتهای ورودی } X_1 \text{، } \ldots \text{، } X_n$$

دستگاههایی که تمــام این مفروضات را برآورده می‌سازند قسمت اصلی مدارهای کامپیوترهای‌عددی را تشکیل می‌دهند. مثلاً، دروازهٔ دو-ورودی AND، که درآن خروجی کمینهٔ ورودیهاست (وقتی $F < T$). این دستگاه (دروازه) تابع بولی K بخش قبل را مشخص می‌کند. می‌توان ورودیها را با $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ و خروجی را با $\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$ نشان داد.



شکل ۱. دستگاه الکتریکی با سه ورودی.

---

[1]. این بخش راکه درآن کاربردی از بخشهای قبلی مورد بحث قرار می‌گیرد، می‌توان بدون ازدست‌دادن پیوستگی مطلب حذف‌کرد.

دستگاههای مشابهی برای بقیهٔ رابطهای جمله‌ای می‌توان ساخت. برای دروازهٔ دو-ورودی OR (شکل ۲) ولتاژ خروجی بیشینهٔ ولتاژهای ورودی است. برای رابط نفی دستگاه NOT (یا وارونگر) وجوددارد، که ولتاژخروجی آن مخالف ولتاژ ورودی است.

بااستفاده ازچنین دستگاههایی می‌توان مدارهای مختلفی ساخت. این بار نیز طبیعی است که بااستفاده ازف.د.س.های زبان صوری خود ولتاژهای نقاط مختلف رانشانه گذاری کنیم (شکل۳). برعکس، با دردست داشتن ف.د.س.ای که به‌این طریق به‌خروجی مربوط باشد،می‌توانیم مدار را تقریباً بازسازی کنیم، که شباهت زیادی به‌درخت ساختمان ف.د.س.ها دارد.

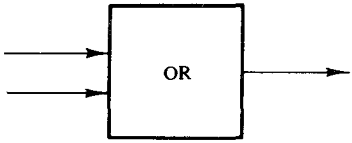
مثلاً*، مدار

$$((A \wedge B) \wedge D) \vee ((A \wedge B) \wedge \neg C)$$

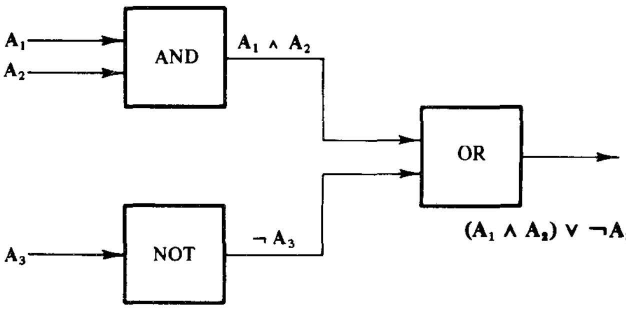
احتمالاً* به‌صورت آن چیزی است که درشکل ۴ آمده است. توجه کنید که چگونه از تکرار مدار $A \wedge B$ اجتناب شده است.

ف.د.س.های معادل توتولوژیك مدارهایی به‌دست می‌دهند که نهایتاً یك کار انجام می‌دهند، اگرچه ممکن است هزینه و (اگر سرعت عمل دستگاهها مختلف باشند) سرعت آنها مختلف باشند. تأخیر یك مدار را به‌عنوان بیشینهٔ تعداد جعبه‌هایی که علامت می‌تواند برای رفتن از یك ورودی به‌خروجی از آنها عبور کند، تعریف می‌کنیم. مفهوم متناظر آن برای فرمولها بآسانی به‌طور بازگشتی تعریف می‌شود.

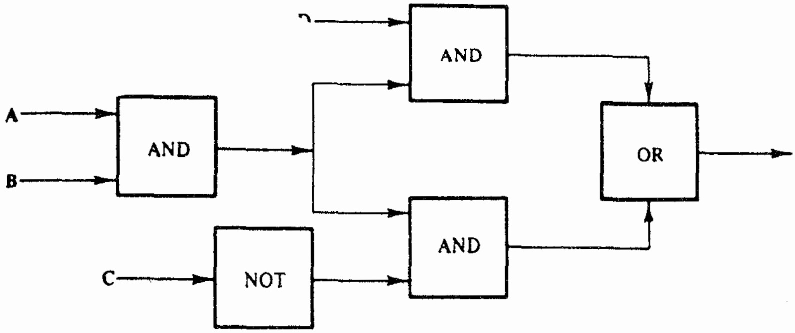
۱. تأخیر هر نماد جمله‌ای صفراست.



شکل ۲. دروازهٔOR.



شکل ۳. مداری که در آن ف.د.س.ها به‌عنوان نشان به‌کاررفته‌اند.



شکل ۴. مدار $((A \wedge B) \wedge D) \vee ((A \wedge B) \wedge \neg C)$.

۲. تأخیر $\neg\alpha$ یك واحد از تأخیر α بیشتر است.
۳. تأخیر $\alpha \wedge \beta$ یك واحد از بیشینهٔ تأخیر α و تأخیر β بیشتراست.
و به‌همین ترتیب برای هررابط دیگر.

به‌عنوان مثـال، در مدار $(A_1 \wedge A_2) \vee \neg A_3$ سه دستگاه به‌کار می‌رود و دارای تأخیر ۲ است. فرمول $\neg(A_3 \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_2))$، که معادل توتولوژیك آن است، مداری را به‌دست می‌دهد که پنـج دستگاه دارد و دارای تأخیر ۴ است. مسئله‌ای که یك مهندس کامپیوتر با آن مکـرراً مواجه می‌شود عبارت است از: اگر یك مدار (یا ف.د.س. آن) داده شده باشد، مدارمعادل (یا ف.د.س. معادل توتولوژیك آن) را به‌دست آورید که هزینهٔ آن کمینه باشد، مشروط برآنکه محدودیتهای مشخصی را نقض نکند، مثلاً تأخیر از حد مجازی بیشتر نباشد. برای چنین مسئله‌ای، فهرستی از دستگاههای موجود دراختیار دارد، به‌عنوان مثال، ممکن است دستگاههای

NOT، AND دو-ورودی، OR سه-ورودی

را در دسترس داشته باشد. (بهتر آن‌است که دستگاههای موجود یك مجموعهٔ تمام از رابطها را درخود داشته باشد.) فهرست دستگاهها یك زبان صوری را مشخص می‌سازد که درآن به‌ازای هردستگاه یك رابط جمله‌ای وجود دارد.

مثال ۱ ورودیها: A، B، C. خروجی: بااکثریت A، B، و C موافق باشد.
دستگاههای موجود: OR دو-ورودی، AND دو-ورودی. یك جواب ممکن عبارت است از

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$$

که درآن پنج دستگاه به‌کاررفته و دارای تأخیر ۳ است. اما جوابی بهتر

$$(A \wedge (B \vee C)) \vee (B \wedge C)$$

است که در آن ۴ دستگاه به‌کار رفته و دارای همان تأخیر است. بعلاوه هیچ جوابی وجود ندارد که در آن فقط سه دستگاه به‌کار رفته باشد؛ به‌تمرین ۱ مراجعه کنید.

مثال ۲ ورودیها: **A** و **B**. خروجی: T درصورت تساوی ورودیها، و F درغیراین صورت؛ یعنی این مدار باید برابری را بیازماید. دستگاه موجود: NOR دو-ورودی. یك جواب ممکن عبارت است از

$$((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow ((B \downarrow B) \downarrow A).$$

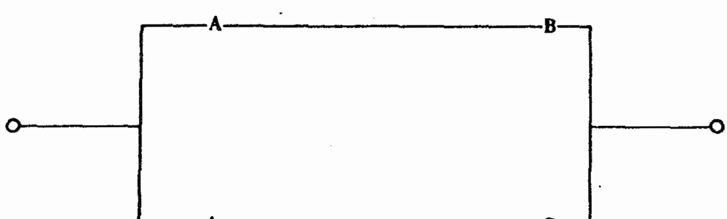
در اینجا ۵ دستگاه به‌کار رفته است؛ آیا جواب بهتری وجود دارد؟ سؤال عمیقتر آن است که: آیا روشی منظم (آلگوریتم) برای به‌دست‌آوردن جواب کمینه وجـود دارد؟ ما تنها می‌توانیم این نوع سؤالهـا را مطرح کنیم، بی‌آنکه در اینجا جوابی به‌آنها بدهیم. در سالهای اخیر کارهای زیادی درتحقیق پیرامون این نوع سؤالات انجام یافته است.

مثال ۳ (مـدار امدادی) ورودیهـا: **A**، **A**¬، **B**، **B**¬، . . . . دستگاهها: OR (باهر تعداد ورودی)، AND (باهر تعداد ورودی). هزینه: دستگاههامجانی‌هستند ولی هزینهٔ استعمال هرورودی یك واحد است. برای آزمودن برابری **A** و **B** می‌توانیم

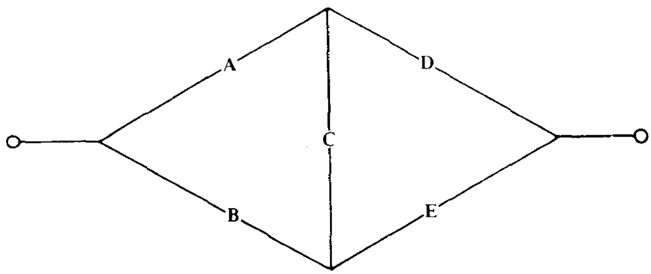
$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

را به‌کاربریم. نمودار سیم‌کشی این مدار درشکل ۵ نشان داده شده است. جریان ازمدار عبورخواهدکرد منوط به‌اینکه **A** و **B** ارزش مساوی داشته باشند. (این فرمول، که معادل با $A \leftrightarrow B$ است، دارای این خاصیت است که ارزش آن،وقتی که ارزش یکی‌ازمؤلفه‌های آن تغییر کند، تغییر می‌کند. به‌همین دلیـل، این مدار، با کلیدهای دوجهته، در سیم‌کشی چراغهای راهروها به‌کار می‌رود.)

اما ازیك جنبه مدارهای امدادی در توصیفی که درابتدای بخش عرضه شد نمی‌گنجند. مدارهای امدادی دستگاههایی دوسویه هستند که جریان را از هردو جهت عبور می‌دهند. ازاین‌رو می‌توان باآنها مدارهای «پلی» را ساخت (شکل ۶). روشهایی که دراینجا شرح می‌دهیم درمورد این نوع مدارها به‌کار نمی‌روند.



شکل ۵. نمودارسیم‌کشی برای $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.



شکل ۶. مدار پلی.

مثال ۴ چهار ورودی وجود دارد، ومدار باید تابع بولی G را مشخص کند، که G به ازای $\langle F, F, F, T\rangle$ ، $\langle F, F, T, F\rangle$ ، $\langle F, F\, T, T\rangle$ ، $\langle F, T, F, F\rangle$ ، $\langle F, T, F, T\rangle$ ،$\langle F, T, T, F\rangle$ ،$\langle F, T, T, T\rangle$ ،$\langle T, F, F, T\rangle$، ارزش T، و در $\langle T, F, F, F\rangle$ ،$\langle T, F, T, F\rangle$ ،$\langle T, T, F, F\rangle$ ،$\langle T, T, T, F\rangle$ ،$\langle T, T, T, T\rangle$ ارزش F دارد. در سه‌نقطهٔ بـــاقیمانـــده، یعنی $\langle F, F, F, F\rangle$ ،$\langle T, F, T, T\rangle$، و $\langle T, T, F, T\rangle$، ارزش G برای ما اهمیتی ندارد. (کاربرد این مدارچنان است که این سه ترکیب هرگز رخ نمی‌دهند.)

می‌دانیم کـــه G را با به‌کار بردن، مثلاً، $\{\neg, \vee, \wedge\}$ می‌توان مشخص کـــرد. اما می‌خواهیم این‌کار را با روشی‌کارامد انجام دهیم. گام اول، عرضهٔ داده‌ها به‌صورتی قابل فهـــمتر است، این کار را می‌توانیـــم بـــه‌کمك شکل ۷ انجـــام دهیـــم. از آنجـــا کـــه $G(F, F, F, T)=T$، این T را درمربعی با مختصات $\langle \neg\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}, \neg\mathbf{C}, \mathbf{D}\rangle$، قرار می‌دهیم، به‌همین ترتیب، یك F درمربعی با مختصات $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \neg\mathbf{C}, \neg\mathbf{D}\rangle$ وجود دارد، زیرا $G(T, T, F, F)=F$. درسه مربعی که برای ما مهم نیستند، چیزی نوشته نشده است.

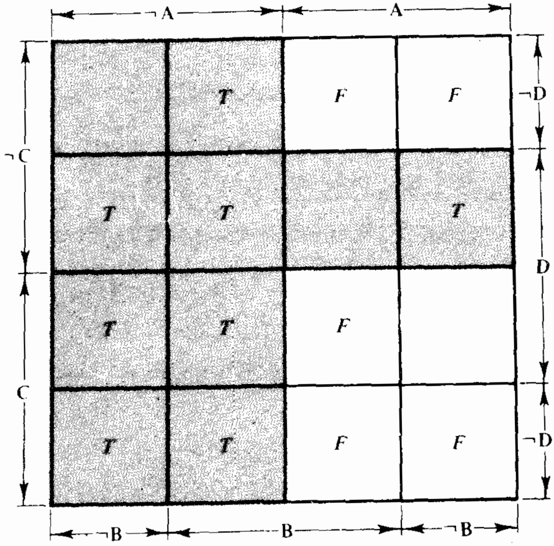
اکنون به‌جستجوی یك طرح هنـــدسی ساده می‌پردازیم. مربعهای سایه‌دار همهٔ Tها را دربردارند و دربرگیرندهٔ هیچ F نیستند و متناظر با فرمول

$$(\neg\mathbf{A}) \vee (\neg\mathbf{C} \wedge \mathbf{D})$$

هستند، کـــه هم شکلی ساده دارد و هم همهٔ شرایط ما را برآورده می‌سازد، توجه کنید که ورودی $\mathbf{B}$ اصلاً مورد نیاز نیست.

تمرین

۱. درمثال ۱ این بخش، تحقیق کنید که هیچ جوابی که درآن تنها سه دستگاه به‌کار رود وجود ندارد.



شکل ۷. نمودار مثال ۴.

۲. یك نماد جمله‌ای یا نفی آن را سازه[1] می‌نامیم. یك ضرب φ ترکیبی عطفی مانند α از سازه‌هاست (با به‌کار بردن نمادهای جمله‌ای متمایز) به‌طوری که $\alpha \vDash \varphi$. در بخش ۵.۱ (به‌نتیجهٔ ۱۵پ مراجعه‌کنید) نشان دادیم‌که هر ف.د.س. ارضا شونده مانند φ با یك ترکیب فصلی $\alpha_n \vee \ldots \vee \alpha_1$، که درآن هر α_i یك ضرب φ است، معادل توتولوژیك است. یك ضرب φ مانند α اول است اگر وتنها اگرحذف هریك از سازه‌های آن ویژگی ضرب بودن را از α بگیرد. واضح است‌که هر ترکیب فصلی‌ازضربهای معادل با φ، اگر بخواهد طول کمینه‌ای داشته باشد، باید فقط ازضربهای اول تشکیل یافته باشد.

(الف) همهٔ ضربهای اول

$$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C)$$

را به‌دست آورید.

(ب) کدام‌یك ازترکیبات فصلی ضربهای اول، ازاین خاصیت برخوردار است که با فرمول قسمت (الف) معادل توتولوژیك باشد.

۳. قسمتهای (الف) و (ب) تمرین ۲ را درمورد فرمول زیر تکرار کنید

$$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee D) \rightarrow B \wedge ((A \wedge C) \vee (\neg C \wedge D)).$$

1. Literal

۷۰۱ فشردگی و تصمیم‌پذیری

فشردگی

اکنون اثباتی برای قضیهٔ فشردگی که قبلاً (بخش ۳۰۱) ذکر شد ارائه می‌دهیم. مجموعهٔ Σ از ف.د.س.ها را ارضا شونده می‌نامیم اگر وتنها اگر یك ارزشدهی وجود داشته باشد که هرعضو Σ را ارضا کند.

قضیهٔ فشردگی. یك مجموعه از ف.د.س.ها ارضا شونده است اگروتنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی آن ارضا شونده باشد.

موقتاً مجموعهٔ Σ را ارضا شوندهٔ متناهی می‌نامیم اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی Σ ارضا شونده باشد. دراین صورت قضیهٔ فشردگی بیان می‌دارد که این مفهوم با مفهوم ارضاشوندگی یکی است. توجه کنید اگر Σ ارضا شونده باشد درآن‌صورت خود به‌خود ارضا شوندهٔ متناهی نیزهست. همچنین اگر Σ متناهی باشد دراین‌صورت اگر ارضاشوندهٔ متناهی باشد، بدیهی است که ارضا شونده نیز خواهد بود. (هرمجموعه زیرمجموعهٔ خود است.) قسمت غیر بدیهی آن است که نشان دهیم اگریك مجموعهٔ نامتناهی ارضاشوندهٔ متناهی باشد،آنگاه ارضاشونده است.

اثبات قضیهٔ فشردگی. اثبات از دو قسمت متمایز تشکیل یافته است. در قسمت اول مجموعهٔ ارضا شوندهٔ متناهی Σ را در نظر می‌گیریم وآن را به یك مجموعهٔ بیشین Δ، از همین‌نوع، گسترش می‌دهیم. درقسمت دوم، بااستفاده از Δ، یك ارزشدهی به‌دست می‌آوریم که Σ را ارضا کند.

برای قسمت اول، فرض‌کنیم α_1، α_2، ... یك شماره‌گذاری ثابت از ف.د.س.ها باشد. این امر ممکن است، زیرا مجموعهٔ نمادهـای جمله‌ای، و درنتیجه مجموعهٔ عبارتها، شمارش‌پذیرند؛ (به قضیهٔ ۰ ب مراجعه‌کنید.) با استفاده از بازگشت (روی اعداد طبیعی)، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\Delta_0 = \Sigma,$$

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n ; \alpha_{n+1} & \text{اگرمجموعهٔ } \Delta_n ; \alpha_{n+1} \text{ ارضاشوندهٔ متناهی باشد} \\ \Delta_n ; \neg\alpha_{n+1} & \text{درغیر این‌صورت} \end{cases}$$

(به‌یادآوریدکه $\Delta_n ; \alpha_{n+1} = \Delta_n \cup \{\alpha_{n+1}\}$.) دراین‌صورت هر Δ_n، ارضاشوندهٔ‌متناهی است؛ به‌تمرین ۱ مراجعه‌کنید. فرض‌کنیم $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$، حد Δ_nها، باشد.

واضح‌است که (۱) $\Sigma \subseteq \Delta$ و (۲) به‌ازای‌هرف.د.س.، یا $\alpha \in \Delta$ و یا $(\neg\alpha) \in \Delta$. بعلاوه، (۳) Δ ارضا شوندهٔ متناهی است. زیرا هر زیرمجموعهٔ متناهی آن، خود یك زیرمجموعهٔ متناهی یکی از Δ_nهاست و بنابراین ارضاشونده است.

بدین‌ترتیب قسمت‌اول پایان می‌پذیرد. حال مجموعهٔ Δ را داریم که دارای خواص

(۱)ـ(۳) است. در حالت کلی چنین مجموعه‌ای منحصر به فرد نیست. لکن حداقل یکی وجود دارد. (اثبات دیگری برای وجود چنین Δای وجود دارد که از لم تسورن استفاده می‌کند ـ اثباتی که حتی در صورت وجود تعداد شمارش‌ناپذیری از نمادهای جمله‌ای می‌تواند به‌کار رود. خواننده‌ای که با موارد استفاده لم تسورن آشنایی دارد باید کاربردپذیری آن را دراینجا خود دریابد.)

برای قسمت‌دوم اثبات، یك ارزشدهی مانند v را برای همهٔ نمادهای جمله‌ای تعریف می‌کنیم: به‌ازای هرنماد جمله‌ای A

$$v(A)=T \text{ اگر وتنها اگر } A\in\Delta.$$

دراین‌صورت به‌ازای هر ف.د.س. φ، ادعا می‌کنیم که

v فرمول φ را ارضا می‌کند اگر وتنها اگر $\varphi\in\Delta$.

این مطلب به‌استقرا نسبت به φ ثابت می‌شود؛ تمرین ۲ را ببینید. از آنجا که $\Sigma\subseteq\Delta$، پس v باید هرعضو Σ را ارضا کند. ■

نتیجه ۱۷ الف. اگر $\Sigma\models\tau$، آنگاه یك زیرمجموعهٔ متناهی Σ، مانند Σ_0، وجوددارد به‌طوری که $\Sigma_0\models\tau$.

اثبات. ازاین حکم اساسی که $\Sigma\models\tau$ اگر و تنها اگر $\Sigma;\neg\tau$ ارضا شونده نباشد استفاده می‌کنیم.

به‌ازای هرزیرمجموعهٔ متناهی Σ_0 از Σ،

$\Sigma_0\not\models\tau$ به ازای هر زیرمجموعهٔ متناهی Σ_0 از Σ،

$\Longleftarrow$ $\Sigma_0;\neg\tau$ برای هرزیرمجموعهٔ متناهی Σ_0 از Σ ارضاشونده‌است

$\Longleftarrow$ $\Sigma;\neg\tau$ ارضا شوندهٔ متناهی است

$\Longleftarrow$ $\Sigma;\neg\tau$ ارضا شونده است

$\Longleftarrow$ $\Sigma\not\models\tau$. ■

درحقیقت، قضیهٔ فوق با قضیهٔ فشردگی معادل است؛ تمرین ۳ را ببینید.

تصمیم‌پذیری

گرچه روش جدولهای ارزش در عمل پرزحمت هستند، ولی وجود چنین روشی، نتایج نظری جالبی به دست می‌دهد. فرض کنیم، درمورد مجموعهٔ Σ از ف.د.س.ها سؤال کنیم آیا یك روش کارامد وجود داردکه به‌ازای هر ف.د.س. دادهٔ شدهٔ τ، معین کند که $\Sigma\models\tau$ درست‌است یاخیر. منظورما ازروش کارامد روشی است که شرایط زیرین را برآورده‌کند:

۱. دستورالعملهای دقیقی، با طول متناهی، مبنی بر چگونگی اجرای روش وجود داشته باشد. این دستورالعملها باید هیچ گونه ذکاوتی را ازشخص (یا ماشین) نطلبند. ایدهٔ اصلی آن است که کسی که هیچ ریاضی نمی‌داند یا ماشین حساب (که اصلاً فکر نمی‌کند) با تعقیب مکانیکی این دستورات، قادر به‌اجرای این روش باشد.
۲. روش نباید تدابیری به‌کار گیرد که نتیجه را بتصادف (مانند پرتاب سکه)، یا، درعمل، فقط به صورت تقریبی به‌دست می‌دهند.
۳. درحالتی که یك روش تصمیم گیری مطرح باشد، مانند مسئله‌ای که درابتدای این بحث عنوان شد، این روش باید درمورد هر ف.د.س. داده شدهٔ τ، بعد از تعدادی متناهی مرحله، جواب «بله» یا «خیر» دهد.

ازطرف دیگر، ماازقبل، هیچ محدودیتی را درتعداد مراحل اعمال نمی‌کنیم. همچنین ازقبل هیچ محدودیتی در مورد مقدار کاغذی که ممکن است لازم باشد، منظور نمی‌داریم. این مطالب، بویژه، بستگی به‌ورودی τ دارند. اما به‌ازای هر τ، این روش باید جواب را در تعدادی متناهی مرحله به دست دهد، و بدین ترتیب مقدار کاغذ مصرفی نیزمتناهی خواهد بود.
ناگفته نماند که به‌زحمت می‌توان توصیف بالا را تعریف دقیقی برای «کارامد» به‌حساب آورد. و در واقع، این کلمه را تنها به‌صورتی شهودی و غیرصوری دراین کتاب به‌کار خواهیم برد. (درفصل ۳، با مفهوم «بازگشتی»، که همزاد صوری این مفهوم است، آشنا خواهیم شد.)اما تا زمانی که خود را با احکامی مبنی براینکه یك روش کارامد ازنوع معینی وجود دارد، محدود سازیم، این برخورد شهودی کفایت خواهد کرد. روش را بسادگی عرضه می‌کنیم و با نشان دادن این که مثمر ثمر است، مردم می‌پذیرند که روش ما کارامد است. (اما این مطلب بر این حقیقت تجربی متکی است که روشهایی که در نظر یك ریاضی‌دان کارامد جلوه می‌کنند در نظر دیگران نیز چنین‌اند.) اگر به‌دنبال قضیه‌ای سلبی مبنی بر اینکه هیچ روشی کارامد از نوعی خاص وجود ندارد باشیم، دراین صورت این بینش شهودی نارسا خواهد بود. (در فصل سوم می‌خواهیم صرفاً چنین قضایای سلبی به‌دست آوریم.) ازآنجایی که مفهوم کارامد بودن شهودی است، تعاریف و قضایای مربوط به‌آن را باستاره نشانه‌گذاری می‌کنیم. مثلاً:

***قضیهٔ ۱۷ب.** روشی کارامد وجود دارد که به‌ازای هر عبارت داده شدهٔ ε دربارهٔ ف.د.س. بودن یا نبودن آن تصمیم می‌گیرد.

اثبات. به‌آلگوریتم بخش ۴.۱، و پانوشتهای مربوط به‌آن مراجعه کنید. ■

***تعریف.** مجموعهٔ $\sum$ از عبارتها تصمیم پذیر است اگر و تنها اگر یك روش کارامد وجود داشته باشد که به‌ازای هرعبارت αی داده شده، تصمیم بگیرد که $\alpha \in \sum$ یا $\alpha \notin \sum$.

مثلاً، هر مجموعهٔ متناهی تصمیم‌پذیر است. بعضی از مجموعه‌های نامتناهی تصمیم‌پذیرند ولی نه همهٔ آنها. زیرا $2^{\aleph_0}$ مجموعه از عبارتها وجود دارد، درصورتی که تعداد روشهای کارامد شمارش‌پذیر است. این بدان جهت است که یك روش کاملاً با دستورالعملهای (متناهی) خود مشخص می‌شود و فقط تعداد $\aleph_0$ دنبالهٔ متناهی از حروف وجود دارد.

***قضیهٔ ۱۷پ.** روشی کارامد وجود دارد که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی و مفروض $\Sigma;\tau$ از ف.د.س.ها دربارهٔ صحت یا سقم $\Sigma \vDash \tau$ تصمیم می‌گیرد.

اثبات. روش جدول ارزش (بخش ۳.۱)، این شرایط را داراست. ■

دراین قضیه متناهی بودن $\Sigma;\tau$ را تأکیدکرده‌ایم، این از آنجا ناشی می‌شود که هیچ راه مستقیم وکارآمدی برای «عرضهٔ» یك شیء نامتناهی وجود ندارد.

***نتیجهٔ ۱۷ت.** به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی Σ، مجموعهٔ نتایج توتولوژیك Σ تصمیم‌پذیر است. بخصوص، مجموعهٔ توتولوژیها تصمیم‌پذیر است.

اگر Σ یك مجموعهٔ تصمیم‌پذیر نامتناهی باشد، دراین صورت ممکن است مجموعهٔ نتایج توتولوژیك آن تصمیم‌پذیر نباشد. (به فصل ۳ مراجعه کنید.) اما می‌توان نتیجهٔ ضعیفتری به‌دست آورد که به‌تعبیری نیمی ازمسئلهٔ توتولوژیها تصمیم‌پذیری است.

می‌گوییم یك مجموعهٔ A از عبارتها شماره‌پذیر کارامد است اگر و تنها اگر روشی کارامد وجود داشته باشد که عضوهای A را به‌ترتیبی فهرست کند. اگر A نامتناهی باشد، آنگاه این روش هرگز نمی‌تواند پایان پذیرد. ولی هر عضو مشخص A، باید بالاخره (یعنی پس‌از زمانی متناهی) درفهرست ظاهر شود.

مقدمتاً و به منظور ارائهٔ درك روشنتری از این مفهوم، دو قضیهٔ مقدماتی دربارهٔ آن بیان می‌کنیم.

***قضیهٔ ۱۷ث.** مجموعهٔ A ازعبارتها شماره‌پذیرکارامد است اگر و تنها اگر یك روش کارامد وجود داشته باشد که به‌ازای هرعبارت داده شدهٔ ε، جواب «بلی» به‌دست دهد اگر و تنها اگر $\varepsilon \in A$.

(اگر $\varepsilon \notin A$، آنگاه این روش ممکن‌است جواب «نه» تولیدکند، همچنین‌ممکن‌است بدون ارائهٔ جواب تاابد ادامه یابد، اما نباید جواب «بلی» تولیدکند.)

اثبات. اگر A شماره‌پذیرکارامد باشد، دراین صورت به‌ازای هر ε، می‌توان فهرست A رادرجستجوی ε بررسی کرد. درصورتی که ε ظاهرشود، وتنها دراین‌حالت، جواب «بلی» می‌دهیم. (بنابراین اگر $\varepsilon \notin A$، هرگز جوابی به‌دست نمی‌آید. همین‌امراست که A را از تصمیم‌پذیر بودن محروم می‌کند. وقتی که ε در بین اولین 10^{10} عضو شماره شدهٔ A ظاهر

نشود، درحالت‌کلی هیچ راهی برای پی‌بردن به‌این‌که‌آیا $\varepsilon \notin A$، (که درچنین حالتی باید فکر جستجو را رها کرد) یا این‌که‌آیا ε درست درگام بعدی ظاهر می‌شود، وجود ندارد.)

برعکس، فرض کنیم که روشی را که در قضیه تشریح شد در اختیار داشته باشیم. می‌خواهیم فهرستی از A به‌دست دهیم. ایده‌آن است کـه همهٔ عبارتها را شماره گذاری کنم، و روش خود را روی هریك از آنهـا به کار بندیم. ولی باید دقت خود را به‌طور معقولی تنظیم‌کنیم. شماره‌گذاری کارامد همهٔ عبارتها به‌قدرکافی‌آسان است:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots .$$

سپس براساس طرح کلی زیرکار را ادامه می‌دهیم:

۱. یك دقیقه صرف آزمـودن عضویت ε_1 در A می‌کنـیم (با به کار بردن روش داده شده).

۲. دو دقیقه صرف‌آزمودن ε_1 می‌کنیم، سپس دودقیقه هم برای‌آزمودن ε_2.

۳. سه دقیقه صرف‌آزمودن ε_1، سه‌دقیقه صرف‌آزمودن ε_2، و سه‌دقیقه برای‌آزمودن ε_3 صرف می‌کنیم.

و به‌همین ترتیب. البته هرگاه روش ما جواب «بلی» به دست دهد، عبارت پذیرفته شده را درفهرست خروجی قرارمی‌دهیم. بنابراین هرعضو A بالاخره در فهرست ما ظاهر خواهد شد. (هریك ازاعضا بینهایت بارظاهرمی‌شوند، مگراینکه با مختصری دستکاری در این روش، ازتکرار اعضا اجتناب کنیم.) ■

•**قضیهٔ ۱۷ ج.** یك مجموعه از عبارتها تصمیم‌پذیر است اگروتنها اگر آن مجموعه و متمم‌آن (نسبت به‌مجموعهٔ همهٔ عبارتها) هردو شماره‌پذیر کارامد باشند.

اثبات. تمرین ۴.

توجه‌کنیدکه اگـر مجموعه‌های A و B شماره‌پذیرکارامد باشند، آنگاه $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز چنان خـواهند بود. ردهٔ مجموعه‌های تصمیم‌پذیر نیز تحت اعمال اجتماع و اشتراك بسته است، وعلاوه برآن تحت عمل متمم‌گیری نیز بسته می‌باشند.

اکنون قضیه‌ای اساسی‌تر:

•**قضیهٔ ۱۷چ.** اگر Σ مجموعه‌ای‌تصمیم‌پذیر از ف.د.س.ها باشد، آنگاه مجموعهٔ نتایج توتولوژیك Σ شماره‌پذیرکارامد خواهد بود.

اثبات. درحقیقت‌کافی است Σ شماره‌پذیرکارامد باشد، یك شماره‌گذاری

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$$

را درنظر می‌گیریم. به‌ازای هر ف.د.س. دادهٔ شدهٔ τ، می‌توانیم (بااستفاده از جدولهای

ارزش) متوالیاً صحت هریك ازاحکام زیرین را بیازماییم:

$$\varnothing \vDash \tau\,,$$
$$\{\sigma_1\} \vDash \tau\,,$$
$$\{\sigma_1, \sigma_2\} \vDash \tau\,,$$
$$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \vDash \tau\,,$$
$$\vdots$$

هرگاه یکی‌ازاین شرایط برقرارباشد، درآن‌صورت جواب «بلی» است. درغیراین‌صورت فرایند را ادامه می‌دهیم.

وقتی $\Sigma \vDash \tau$، این روش بنا برنتیجهٔ قضیهٔ فشردگی، به‌جواب مثبت می‌انجامد. ■

تمرین

۱. فرض کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی Σ ارضا شونده باشد. نشان دهیدکه دست‌کم یکی از مجموعه‌های α ;Σ و$\neg\alpha$;Σ نیزچنین است. (این قسمتی ازاثبات قضیهٔ فشردگی است.)

۲. فرض کنید Δ مجموعه‌ای از ف.د.س.ها باشدکه (یك) هر زیرمجموعهٔ متناهی Δ ارضا شونده است، و (دو) به‌ازای هر ف.د.س.، یا $\alpha \in \Delta$ یا $(\neg\alpha) \in \Delta$. ارزشدهی v را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

برای هر نماد جمله‌ای A،

$$v(A) = \begin{cases} T & A \in \Delta \text{ اگر} \\ F & A \notin \Delta \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که به ازای هر ف.د.س. φ، $\bar{v}(\varphi) = T$ اگر وتنها اگر $\varphi \in \Delta$. (این قسمتی از اثبات قضیهٔ فشردگی است.)

۳. نشان دهیدکه ازنتیجهٔ قضیهٔ فشردگی می‌توان خود قضیهٔ فشردگی را اثبات‌کرد (خیلی ساده‌تر از این‌که از ابتدا شروع‌کنیم).

۴. قضیهٔ ۱۷ج را اثبات کنید.

*۵. مفاهیم تصمیم‌پذیری و شماره‌پذیری کارامد نه تنها در مورد مجموعه‌هایی از عبارتها می‌توانند به‌کاربروند بلکه درمورد مجموعه‌هایی از اعداد صحیح یا مجموعه‌هایی اززوجهایی‌ازعبارتها یا اعداد صحیح نیز به‌کاربرده می‌شوند. نشان دهیدکه مجموعهٔ A از

عبارتها شماره‌پذیر کارامد است اگر و تنها اگر یك مجموعهٔ تصمیم‌پذیر B از زوجهای $\langle \alpha, n \rangle$ (که از عبارت α و عدد صحیح n تشکیل یافته‌اند) وجود داشته باشد به‌طوری که $A = \operatorname{dom} B$.

۶. فرض کنید Σ مجموعه‌ای از ف.د.س.ها باشد که شماره‌پذیر کارامد است. فرض کنید به‌ازای هر ف.د.س. τ، یا $\Sigma \models \tau$ یا $\Sigma \models \neg\tau$. نشان دهید که مجموعهٔ نتایج توتولوژیك Σ تصمیم‌پذیر است.

۲

منطق مرتبهٔ اول

۰.۲ توضیحات مقدماتی

در فصل پیشین اولین مــدل ریاضی از تفکر قیاسی را معرفی کردیم. آن مدل مدلی ساده بود، و در واقع بیش‌ازحد ساده. پیداکردن مثالهایی از استنتاج قیاسی که به‌طورشهودی درست باشند اما نتواننــد در مدل منطق جمله‌ها تعبیر شوند آسان است.

فرض کنیم در زبان فارسی مجموعه‌ای از فرضها ونتیجه‌ای از آنها را داشته باشیم. بـا برگرداندن اینها به‌زبان منطق جمله‌هـا، مجموعه‌ای مانند Σ از فـرضها و یك نتیجهٔ ممکن τ به‌دست می‌آوریم. حال اگر $\Sigma \models \tau$، درمی‌یابیم که استنتاج اولیه در زبان فارسی معتبر بوده است. اما اگر $\Sigma \not\models \tau$، در این صورت مردد خواهیم ماند. چه احتمال دارد کـه مدل منطق جمله‌ها برای انعکاس ریزه‌کاریهای استنتاج اولیه، دقت لازم را نداشته باشد.

دراین فصل، یك دستگاه منطقی با تواناییهای بیشترعرضه می‌کنیم. درحقیقت، وقتی که «ریاضی‌دان» اثباتی راکشف می‌کند، منظورش تقریباً همواره، اثباتی است که می‌تواند در این دستگاه منعکس شود.

نخست، می‌خواهیم توصیفی غیرصوری از ویژگیهایی که زبانهای مرتبهٔ اول ممکن است دارا باشند (یا حداقل ممکن است قادر به‌منعکس‌کردن آنها باشند) عرضه می‌کنیم. بحث خود را با حالت ویژه‌ای (زبان مرتبهٔ اول برای نظریهٔ اعداد) آغاز می‌کنیم. برای این‌زبان راه ویژه‌ای وجود داردکه بتوان عبارتهای آن را به‌فارسی و یا ازفارسی به‌آن ترجمه کرد (جدول هفت).

جدول هفت

عبارت صوری	ترجمه
0	«صفر.» دراینجا 0 یك نماد ثابت است، وبرای نامیدن عدد صفر منظور شده است.
St	«تالی t.» دراینجا S یك نماد تابعی یك موضعی است. t عبارتی است که برای نام‌گذاری عددی مانند a به‌کارمی‌رود. دراین صورت St ، $S(a)$ را که تالی a است نـام‌گذاری می‌کند. مثلاً، $S0$ برای نـامیدن عدد ۱ منظورشده است.
$<v_1v_2$	«v_1 از v_2 کوچکتر است.» در اینجـا $<$ یك نماد محمولی دو موضعی است. درپایان بخش ۱.۲ قراردادی را می‌پذیریم که برمبنای آن این عبارت را به‌روش معمولی $v_1 < v_2$ می‌توان خلاصه‌کرد.
$\forall$	«به‌ازای هرعدد طبیعی.» نماد $\forall$ نماد سورعمومی است. به‌طور کلیتر، با هرترجمه اززبان موردنظر به‌فارسی یك مجموعهٔ معین A مربوط می‌شود (که عالم‌سخن‌نامیده می‌شود)؛ درآن صورت $\forall$، به شکل «به‌ازای هرعضو عالم سخنA» درمی‌آید.
$\forall v_1 < 0v_1$	«به‌ازای هرعدد طبیعی v_1، صفراز v_1 کوچکتراست.» یا به‌عبارت طبیعیتر، «هرعدد طبیعی‌از ۰ بزرگتراست.» این‌جملهٔ صوری در ترجمهٔ موردنظر کاذب‌است، زیرا صفرازخودش بزرگتر نیست.

درجدول‌هفت یکی ازعلامتهای اختصاری ذکرشد. پس ازاین علامتهای اختصاری بیشتری معرفی خواهیم کرد (جدول هشت).

جدول هشت

عبارات مختصرشده	ترجمه
$x \approx y$	«x مساوی y است.» صورت خلاصه نشدهٔ آن $\approx xy$ است.
$\exists v$	«عددی طبیعی مانند v وجود دارد که.» به‌بیان کلیتر، «عضوی از عالم سخن وجود دارد که.»
$\exists v_1 \forall v_2 v_1 \approx v_2$	«تنها یك عدد طبیعی وجود دارد.» این جملهٔ صوری نیز در ترجمهٔ موردنظر کاذب است.
$\forall v_1(0 < v_1 \vee 0 \approx v_1)$	«هرعدد طبیعی بزرگتر از یا مساوی ۰ است.»

در واقع ما، آن‌طورهم که از این جدولها برمی‌آید، دست ودل بازنخواهیم بود. دو ضابطهٔ با صرفه وجود دارد که با اتخاذ آنها، بدون کاهش قدرت گویایی زبان، می‌توانیم عبارتها را ساده کنیم.

اولاً، بــه عنوان نمادهــای ربطی جمله‌ای فقط $\neg$ و $\rightarrow$ را انتخاب می‌کنیم. از بخش ۵.۱ می‌دانیم که این مجموعه تمام است، بنابراین هیچ دلیل واقعی‌برای به‌کاربردن رابط بیشتری وجود ندارد.

ثانیاً، از سور وجودی، $\exists x$، صرف‌نظر می‌کنیم و به‌جای آن $\neg \forall x \neg$ را به‌کار می‌بریم. این‌کار توجیه‌پذیر است، چه می‌دانیم که جملهٔ فارسی

چیزی فاسد در دانمارك وجود دارد،

معادل است با

چنین نیست که به ازای هر x، در دانمارك x فاسدی نیست.

بنابراین، شکل خلاصه نشدهٔ فرمول $\exists v_1 \forall v_2 v_1 \approx v_2$ عبارت است از

$$(\neg \forall v_1(\neg \forall v_2 \approx v_1 v_2)).$$

بــه عنوان مثالی از زبانی دیگــر ، ممکن است جملهٔ «سقراط یك انسان است» را به‌صورت Hs ترجمه کنیم که در آن H یك نماد محمولی یك‌موضعی‌برای ترجمهٔ «انسان است» و s یك نماد ثابت برای نام‌گذاری سقراط‌است. به‌طورمشابه، برای ترجمهٔ «سقراط فانی است»، Ms را انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت عبارت «همهٔ انسانهــا فانی‌اند» را به صورت: $\forall v_1(Hv_1 \rightarrow Mv_1)$ ترجمه می‌کنیم.

خواننده، احتمالاً با نمادهای $\forall$ و $\exists$ درمتنهای ریاضی آشناست. درحقیقت، بعضی از ریاضی‌دانان هنگام تدریس ونوشتن‌مطالب روی تخته سیاه، از یك زبان تقریباً صوری شده که آثارکمی از زبان طبیعی در آن دیده می‌شود ، استفاده می‌کنند. این‌کــه زبانهای

مرتبهٔ اول شباهت زیادی به‌زبانهای آنهـا دارد، تصادفی نیست. می‌خواهیم گامی به‌عقب برداریم و نه‌تنهـا به‌مطالعهٔ مثلاً مجموعه‌ها و گروههـا بپردازیم، بلکـه جمله‌های نظریـهٔ مجموعه‌ها یا گروهها را نیـزمطالعه‌کنیم. (کلمهٔ فراریاضیات بعضی اوقات به‌کار می‌رود؛ خود این‌کلمـه بیانگر عمل گامی به‌عقب برداشتن و آزمودن آنچه‌که ریاضی‌دان انجـام می‌دهد، است.) مقوله‌هایی راکـه شما به‌عنوان منطق‌دان اینك مورد مطالعه قرار می‌دهید جملاتی هستندکه به‌عنوان دانندهٔ مجموعه‌هـا در مطالعهٔ مجموعه‌ها به‌کار می‌برید. لازمهٔ این‌کار صوری‌کردن زبان نظریهٔ مجموعه‌هاست. و ما می‌خواهیم کـه زبانهای صوری ما دربرگیرندهٔ همهٔ ویژگیهایی که، مثلاً، در نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد باشد.

۱۰۲ زبانهای مرتبهٔ اول

از این به‌بعد، فرض می‌کنیم تعدادی نامتناهی از اشیاء متمایز (که آنها را نماد می‌نامیم) در اختیار داریم که به‌ترتیب زیر مرتب شده‌اند:

الف. نمادهای منطقی

۰. پرانتزها (،).
۱. نمادهای ربطی جمله‌ای: $\rightarrow$، $\neg$.
۲. متغیرها (به‌ازای هرعدد درست و مثبت n، یك متغیر):

$$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$$

۳. نماد تساوی (اختیاری): $\approx$.

ب. پارامترها

۰. نماد سور: $\forall$.
۱. نمادهای محمولی: به‌ازای هرعدد درست ومثبت n، مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از نمادها، نمادهای محمولی n موضعی.
۲. نمادهای ثابت: مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از نمادها.
۳. نمادهای تابعی: به‌ازای هرعدد درست ومثبت n، مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از نمادها، به‌نام نمادهای تابعی n موضعی.

در الف.۳ ما امکان وجود نماد تساوی را پذیرفتیم، اما همیشه چنین نیست. بعضی از زبانها آن را دارند و بعضی دیگرفاقـد آن می‌باشند. نماد تساوی، یك نماد محمولی دوموضعی است اما از نمادهای محمولی دوموضعی دیگرمتمایز است، زیرا به‌جای این‌که یك پارامترباشد یك نماد منطقی‌است. (این‌وضع درترجمهٔ این نماد بـه‌فارسی‌مؤثرخواهد بود.) فرض ما این‌است‌که حداقل‌یك نماد محمولی n موضعی، به‌ازای هر n، وجود دارد.

در ب.۲ نمادهای ثابت، نمادهای تابعی ۰ موضعی نیز نامیده می‌شوند. این امر هماهنگی بحث دربارهٔ نمادها در ب.۲ و ب.۳ را امکان‌پذیر می‌سازد.

مانند قبل، فرض می‌کنیم که نمادها متمایز باشند و هیچ نماد دنباله‌ای متناهی از دیگر نمادها نباشد.

برای تشخیص اینکه با چه زبانی مواجه هستیم (به‌عنوان زبانی متمایز از دیگر زبانهای مرتبهٔ اول)، باید (یك) وجود یا عدم وجود نماد تساوی را مشخص سازیم، و (دو) بگوییم که پارامترها، چه‌ها هستند.

اکنون مثالهایی از این زبان ارائه می‌دهیم:

۱. زبان محمولی محض

تساوی: وجود ندارد.
نمادهای محمولی n موضعی: A_1^n ، A_2^n ، ....
نمادهای ثابت: a_1 ، a_2 ، ...
نمادهای تابعی n موضعی ($n > 0$): هیچ.

۲. زبان نظریهٔ مجموعه‌ها

تساوی: وجود دارد (معمولاً[۴]).
پارامترهای محمولی: یك نماد محمولی دو موضعی $\in$.
نمادهای تابعی: هیچ (یا گاهی یك نماد ثابت $\varnothing$).

۳. زبان نظریهٔ مقدماتی اعداد (مطابق با فصل ۳)

تساوی: وجود دارد.
پارامترهای محمولی: یك نماد محمولی دو موضعی $<$.
نمادهای ثابت: نماد 0.
نمادهای تابعی یك موضعی: $\mathbf{S}$ (برای تالی).
نمادهای تابعی دو موضعی: $+$ (برای جمع)، $\cdot$ (برای ضرب)، و $\mathbf{E}$ (برای توان).

درمثالهای ۲ و ۳ ترجمه‌های مشخصی از پارامترها منظور شده است. بزودی مثالهایی از جملاتی که می‌توان به‌این زبانها ترجمه کرد و همچنین چند جمله که نمی‌توان ترجمه کرد خواهیم آورد.

توجه به‌این مسئله که منظورما از زبان، شامل زبان نظریهٔ مجموعه‌ها نیز می‌شود، حائز اهمیت است. زیرا به‌طور کلی پذیرفته شده است که ریاضیات را می‌توان در نظریهٔ مجموعه‌ها گنجانید، منظور از این گفتار آن است که

(الف) عبارات ریاضی (مانند قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) رامی‌توان به‌زبان نظریهٔ مجموعه‌ها بیان کرد؛ و

(ب) قضایای ریاضی به‌طورمنطقی ازاصول موضوع نظریهٔ‌مجموعه‌ها نتیجه می‌شوند. مدل ما برای منطق مرتبهٔ اول برای انعکاس این روش کاملاً مناسب است.

مثالهایی در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها. در اینجا $\forall$، به‌معنای «به‌ازای هرمجموعه» و $\in$، به‌معنای «عضوی از» منظور می‌شوند.

۱. «هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که هرمجموعه عضو آن باشد.» این جمله را در چندین‌مرحله به‌زبان نظریهٔ مجموعه‌ها ترجمه می‌کنیم. جمله‌های میانی نه در زبان فارسی و نه در زبان صوری، بلکه در زبانی مرکب از این دو هستند.

$\neg$ [مجموعه‌ای وجود داردکه هرمجموعه عضوی از آن است]

$\neg\exists v_1$ [هرمجموعه عضوی از v_1 است]

$$\neg\exists v_1 \forall v_2 \quad v_2 \in v_1$$

گرچه ممکن‌است تمایل داشته باشیم دراینجا توقف‌کنیم، ولی باید $\in v_2 v_1$ را جایگزین $v_2 \in v_1$ کرد، زیرا نمادهای محمولی همیشه درطرف چپ چنین عبارتهایی قرار می‌گیرند. بعلاوه، همانطورکه قبلاً ذکرشد، $\exists v_1$ نیز باید به $\neg\forall v_1\neg$ تبدیل‌کرد. وباید پرانتزها را به‌تعداد درستی به‌کار ببریم. نتیجهٔ نهایی چنین است:

$$(\neg(\neg\forall v_1(\neg\forall v_2 \in v_2 v_1))).$$

۲. اصل زوج‌سازی: «به‌ازای هردو مجموعه، مجموعه‌ای وجود داردکه اعضایش دقیقاً همان دو مجموعهٔ داده شده است.» بازهم ترجمه را درچندین مرحله انجام می‌دهیم.

$\forall v_1 \forall v_2$ [مجموعه‌ای وجود داردکه اعضایش دقیقاً v_1, v_2 هستند]

$\forall v_1 \forall v_2 \exists v_3$ [اعضای v_3 دقیقاً v_1 و v_2 هستند]

$$\forall v_1 \forall v_2 \exists v_3 \forall v_4 \left(v_4 \in v_3 \leftrightarrow v_4 \approx v_1 \vee v_4 \approx v_2\right).$$

اکنون $\exists v_3$ را به $\neg\forall v_3\neg$، $v_4 \in v_3$ را به $\in v_4 v_3$، و $v_4 \approx v_1$ را به $\approx v_4 v_1$ تبدیل می‌کنیم. بعلاوه، باید $\leftrightarrow$ و $\vee$ را به‌رابطهای منتخب خود، $\rightarrow$ و $\neg$، تبدیل‌کنیم. بنابراین

$\alpha \vee \beta$ به صورت $\neg\alpha \rightarrow \beta$؛

$\alpha \leftrightarrow \beta$ به‌صورت $\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$،

درمی‌آید. نتیجهٔ نهایی عبارت است از:

$$\forall v_1 \forall v_2 (\neg\forall v_3 (\neg\forall v_4 (\neg((\in v_4 v_3 \rightarrow ((\neg\approx v_4 v_1) \rightarrow$$
$$\approx v_4 v_2)) \rightarrow (\neg(((\neg\approx v_4 v_1) \rightarrow \approx v_4 v_2) \rightarrow \in v_4 v_3))))),$$

این شکل نهایی به‌اندازهٔ شکل قبلی مطبوع نیست. از آنجایی‌که تعمدی برای

نامطبوع کردن زندگی خود نداریم، نهایتاً قراردادهایی را خواهیم پذیرفت که ما را از چنین عبارتهای طولانی بی‌نیاز می‌کنند. ولی در حال حاضر باید آنها به‌عنوان امری نو تلقی کرد، حتی اگر جاذب هم نباشند.

مثالهایی درزبان نظریهٔ مقدماتی‌اعداد. دراینجا معنای $\forall$ «به‌ازای همهٔ اعدادطبیعی» منظور شده است و $<$، $\circ$، S، $+$، ...، و E دارای همان معانی متداول هستند.

۱. به‌عنوان نامی برای عدد طبیعی ۲، ترم $SS\circ$ را داریم، زیرا ۲ تالی‌تالی صفر است. همچنین برای ۴، ترم $SSSS\circ$ را داریم. برای عبارت «۲ + ۲» به‌نظرمی‌رسد که $SS\circ + SS\circ$ را باید به‌کار برد. اما این روش را خواهیم پذیرفت که همیشه‌نماد تابعی را در سمت چپ قرار دهیم (یعنی، علامت‌گذاری لهستانی را برای نمادهای تابعی به‌کار خواهیم برد). بنابراین برای عبارت فارسی «۲ + ۲» ترم $+SS\circ SS\circ$ به‌کار می‌بریم و جملهٔ فارسی «دو بعلاوهٔ دو برابر است با چهار» را به‌صورت

$$\approx + SS\circ\, SS\circ\, SSSS\circ$$

ترجمه می‌کنیم. (فاصله‌ها برای کمک به‌خواننده گذاشته شده‌اند، لکن جزء ویژگیهای رسمی زبان نیستند.)

۲. «هرعدد طبیعی غیرصفرتالی یك عدد است.» ترجمهٔ این جمله را در سه مرحله انجام می‌دهیم.

$\forall v_1$ [اگر v_1 غیرصفرباشد، آنگاه v_1 تالی یك عدد است.]

$$\forall v_1 (v_1 \not\approx \circ \rightarrow \exists v_2\, v_1 \approx S\, v_2).$$

$$\forall v_1 ((\neg \approx v_1 \circ) \rightarrow (\neg \forall v_2 (\neg \approx v_1 S v_2))).$$

۳. «هرمجموعهٔ غیرتهی از اعداد طبیعی دارای یك کوچکترین عضو است.» این جمله در زبان ما ترجمه‌پذیر نیست، زیرا «هرمجموعهٔ ...» را نمی‌توانیم بیان کنیم. لازمهٔ این کار چیزی چون زبان (مرتبهٔ اول) برای نظریهٔ مجموعه‌ها یا زبان مرتبهٔ دوم برای نظریهٔ اعداد است. با وجود این‌می‌توان جملهٔ «مجموعهٔ اعداد اول دارای کوچکترین‌عضو است» را ترجمه کرد. (گام اول تبدیل این‌جمله به‌جملهٔ «کوچکترین‌عدد اول وجود دارد» است. بقیهٔ گامها را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم؛ در بخش بعدی راهنماییهایی در این مورد کرده‌ایم.)

مثالهایی از زبان طبیعی

۱. «تمام سیبها بد هستند.»

$$\forall v_1 (A\, v_1 \rightarrow B\, v_1).$$

۲. «بعضی ازسیبها بد هستند.»

گام میانی: $\exists \mathbf{v}_1 (A\mathbf{v}_1 \land B\mathbf{v}_1)$

نتیجهٔ نهایی: $(\neg \forall \mathbf{v}_1 (\neg (\neg (A\mathbf{v}_1 \to (\neg B\mathbf{v}_1)))))$.

این دومثال ساختهایی را ارائه می‌دهندکه همیشه با آنها سروکار داریم. یك جملهٔ فارسی که می گوید: هرچیز درمقوله‌ای مشخص دارای خاصیتی‌است، به‌صورت زیرترجمه می‌شود:

$$\forall v (\text{——} \to \text{——}).$$

جمله‌ای‌که می گوید چیز یا چیزهایی درمقولـه‌ای معین وجود دارندکـه دارای خاصیت مشخصی هستند، به‌صورت زیر ترجمه می‌شود:

$$\exists v (\text{——} \land \text{——}).$$

به‌خواننده باید توجه دادکه این دو ساخت را با هم اشتباه نگیرد. مثلاً،

$$\forall \mathbf{v}_1 (A\mathbf{v}_1 \land B\mathbf{v}_1)$$

ترجمهٔ جملهٔ «هرچیزی یك سیب است وبد است» می‌باشدکه ادعایی بسیار قویتر از جملهٔ مثال اول است. همچنین $\exists \mathbf{v}_1 (A\mathbf{v}_1 \to B\mathbf{v}_1)$ ترجمهٔ «چیزی وجود داردکـه بد است، به‌شرط‌آنکه یك سیب باشد» است. این ادعایی بسیار ضعیفتر از جملهٔ مثال دوم است، چه باکذب مقدم ادعایی صادق است. مثلاً اگر همهٔ سیبها خوب باشند، امـا در جهان چیزی غیر از سیب وجود داشته باشد، این جمله صادق است.

۳. پدر بابك می‌تواند پدر هربچهٔ دیگر محله را بزند. زبانی می‌سازیم‌که در آن $\forall$ به‌معنای «به‌ازای همهٔ مردم»، Kx به‌معنای «x یکی از بچه‌های محل است»، b به‌معنای «بابك»، Bxy به‌معنـای «x می‌تواند y را بزند»، و fx به‌معنای «پدر x» در نظرگرفته شود. در آن صورت ترجمه‌ای از جملهٔ فوق عبارت است از:

$$\forall \mathbf{v}_1 (K\mathbf{v}_1 \to ((\neg \approx \mathbf{v}_1 b) \to Bfbf\mathbf{v}_1)).$$

فرمول

هرعبارت دنباله‌ای متناهی ازنمادهاست. البته غالب عبارتها بی‌معنی هستند، ولی عبارات با معنای جالبی نیز وجود دارند: ترمها و ف.د.س.ها

بقیهٔ عبارتها	ف.د.س.های دیگر	فرمولهای بسیط	ترمها

ف.د.س.ها

ترمها همان اسمها و ضمایر زبان ما هستند و عبارتهایی هستندکه می‌توان آنها را به‌عنوان نام شیئی تعبیر کرد. فرمولهای بسیط ف.د.س.هایی هستندکه دارای نمادهای ربطی یا سوری نیستند.

بنا به‌تعریف، ترمها عبارتهایی‌هستندکه می‌توانند ازنمادهای ثابت یا متغیرها به‌کمك نمادهای تابعی ساخته شوند. برای بازگویی گفتهٔ بالا برحسب اصطلاحات بخش ۲.۱، به‌ازای هرنماد تابعی n موضعی f، یك عمل ترم‌ساز n موضعی $\mathscr{F}_f$ روی عبارتها تعریف می‌کنیم:

$$\mathscr{F}_f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n .$$

تعریف. مجموعهٔ ترمها، مجموعهٔ عبارتهایی است‌که از نمادهای ثابت و متغیرها با عملهای $\mathscr{F}_f$ تولید می‌شود.

اگر هیچ نماد تابعی در زبان وجود نداشته باشد، آنگاه ترمها فقط نمادهای ثابت و متغیرها هستند. در این حالت نیازی به‌تعریف استقرایی نیست.

توجه‌کنیدکه در مورد ترمها، با قراردادن نماد تابعی درسمت چپ، علامت‌گذاری لهستانی‌را به‌کار می‌بریم. ترمها پرانتزیا ویرگول ندارند. بعداً قضیه‌ای دربارهٔ یگانه‌خوانی ثابت خواهیم‌کردکه نشان می‌دهد مجموعهٔ ترمها آزادانه تولید می‌شود.

در تقابل با ف.د.س.ها،که حکمهایی در بارهٔ اشیاء هستند، ترمها عبارتهایی هستند که به‌عنوان نام اشیاء (عبارات اسمی) ترجمه می‌شوند.

مثالهایی از ترمها در زبان نظریهٔ اعداد:

$$+\, \mathbf{v}_2\, S0 ,$$

$$SSSS0 ,$$

$$+\, E\, \mathbf{v}_1\, SS0\, E\, \mathbf{v}_2\, SS0 .$$

فرمولهای بسیط تقریباً نقشی‌مشابه نقشی‌که نمادهای جمله‌ای درمنطق جمله‌ها داشتند، ایفا می‌کنند. یك فرمول بسیط عبارتی است به‌شکل

$$Pt_1 \cdots t_n ,$$

که در آن P یك نماد محمولی n موضعی و $t_1, \ldots, t_n$ ترم هستند.

مثلاً، $\approx \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ یك فرمول بسیط است، زیرا $\approx$ یك نماد محمولی ۲ موضعی‌وهرمتغیر یك ترم است. در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها، فرمول بسیط $\in \mathbf{v}_5\mathbf{v}_3$ را داریم.

توجه‌کنیدکه فرمولهای بسیط به‌استقرا تعریف نمی‌شوند. بلکه ساده وصریح بیان می‌کنیم که چه عبارتهایی فرمول بسیط هستند.

فرمولهای درست ساخت، عبارتهایی هستندکه ازفرمولهای بسیط، با استفاده از نمادهای ربطی و نماد سوری ساخته می‌شوند. این مطلب را با تعریف عملهای فرمول‌ساز

روی عبارتها، می‌توان برحسب اصطلاحات بخش ۲.۱، بازگو کرد:

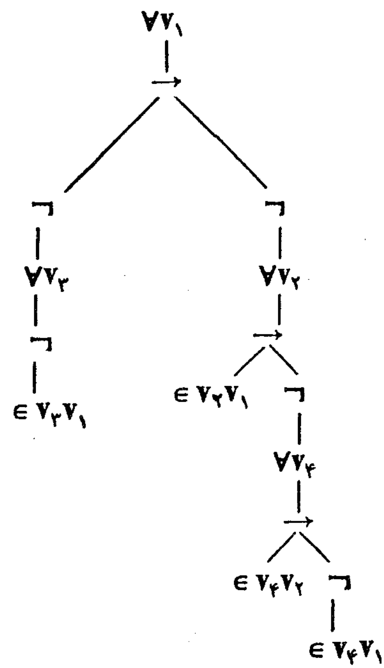
$$\mathcal{E}_{\neg}(\gamma)=(\neg\gamma),$$
$$\mathcal{E}_{\rightarrow}(\gamma,\delta)=(\gamma\rightarrow\delta),$$
$$\mathcal{Q}_i(\gamma)=\forall v_i\,\gamma.$$

تعریف. مجموعهٔ فرمولهای درست ساخت (ف.د.س.ها، یا فقط فرمولها) مجموعهٔ عبارتهای پدیدآمده از فرمولهای بسیط با عملهای $\mathcal{E}_{\neg}$، $\mathcal{E}_{\rightarrow}$، و $\mathcal{Q}_i$ $(i=1,2,\ldots)$ است.

به‌عنوان مثال، $\neg v_3$ یك ف.د.س. نیست. (چرا؟) از طرف دیگر،

$$\forall v_1((\neg\forall v_3(\neg\in v_3v_1))\rightarrow(\neg\forall v_2(\in v_2v_1\rightarrow(\neg\forall v_4(\in v_4v_2\rightarrow(\neg\in v_4v_1))))))$$

یك ف.د.س. است، این امر توسط درخت زیرین نمایش داده شده است:



دریافتن این امر که این ف.د.س. همان اصل موضوع نظم در نظریهٔ مجموعه‌هاست نیاز به‌تأمل دارد.

متغیرهای آزاد

عبارتهای $\forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$ و $((\neg \forall \mathbf{v}_1\ (\neg \forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1))$ دو مثال از ف.د.س.ها هستند. اما تفاوت مهمی بین این دومثال وجود دارد. دومی ممکن‌است ترجمهٔ جملهٔ فارسی زیرباشد:

مجموعه‌ای وجود داردکه هرمجموعه عضو آن است.

ولی مثال اول، تنها می‌تواند ترجمهٔ جملهٔ ناقصی چون

هرمجموعه عضوی است از ــــــ۱،

باشد. این‌جمله را بدون اطلاع ازاین‌که $\mathbf{v}_1$ چیست نمی‌توان کامل کرد. در حالتهایی نظیر این،می‌گوییم $\mathbf{v}_1$ در ف.د.س. $\forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1$ آزاد است یا رخداد آزاد دارد. در مقایسه با آن، در فرمول $((\neg \forall \mathbf{v}_1\ (\neg \forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1))$، هیچ متغیری آزاد نیست. درهرحال به‌تعریف دقیقی نیازمندیم‌که نه به‌ترجمه‌های ممکن فارسی بلکه تنها به‌خود نمادها بستگی‌پیداکند.

متغیر دلخواه x را درنظرمی‌گیریم. به‌ازای هر ف.د.س. α، معنای این‌که x در α آزاد است را تعریف می‌کنیم. این‌کار را با بازگشت‌انجام می‌دهیم:

۱. متغیر x در فرمول بسیط αآزاد است اگر و تنهـا اگر x در α رخ دهـد (x نمادی از α باشد).

۲. متغیر x در $(\neg\alpha)$ آزاد است اگر و تنها اگر x در α آزاد باشد.

۳. متغیر x در $(\alpha \rightarrow \beta)$ آزاد است اگر وتنها اگر x در α یا β آزاد باشد.

۴. متغیر x در $\forall \mathbf{v}_i\,\alpha$ آزاد است اگر و تنها اگر x در α آزاد باشد و $x \neq \mathbf{v}_i$.

در این تعریف، قضیهٔ بازگشت به‌طورضمنی‌مورداستفاده قرارگرفته است. این‌وضع رابرحسب توابع‌نیزمی‌توان بیان‌کرد. با تابعhکه روی فرمولهای بسیط تعریف می‌شود، شروع می‌کنیم:

$$h(\alpha)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \text{ در فرمول بسیط } \alpha \text{ باشد} \\ ۰ & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$$

و می‌خواهیم h را به $\bar{h}$که روی همهٔ ف.د.س.ها تعریف می‌شود به‌نحوی تعمیم دهیم کـه

$$\bar{h}(\mathcal{E}_{\neg}(\alpha))=\bar{h}(\alpha),$$

$$\bar{h}(\mathcal{E}_{\rightarrow}(\alpha\,,\beta))=\max\{\bar{h}(\alpha)\,,\,\bar{h}(\beta)\},$$

$$\bar{h}(\mathcal{Q}_i(\alpha))=\begin{cases} \bar{h}(\alpha) & \text{اگر } x\neq \mathbf{v}_i \\ ۰ & \text{اگر } x=\mathbf{v}_i \end{cases}$$

سپس می‌گوییم x در α آزاد است اگر و تنها اگر$\bar{h}(\alpha)=۱$ باشد. وجود منحصر به‌فرد چنین$\bar{h}$ی (و درنتیجه معنی‌دار بودن تعریف ما) ازقضیهٔ بازگشت و از این امر (اثبات شده

در بخش ۳.۲) که ف.د.س.ها به‌طور آزاد پدید می‌آیند، نتیجه می‌شود.

اگر هیچ متغیری در α آزاد نباشد، در آن صورت α یك جمله است. (به‌طور شهودی جملات ف.د.س.هایی هستند که می‌توانند بدون جای خالی به‌فارسی ترجمه شوند، در صورتی که بدانیم چگونه پارامترها را تعبیر کنیم.)

به‌عنوان مثال، $\forall \mathbf{v}_۲ (A\mathbf{v}_۲ \to B\mathbf{v}_۲)$ ، $\forall \mathbf{v}_۳ (P\mathbf{v}_۳ \to \forall \mathbf{v}_۳ Q\mathbf{v}_۳)$ جمله هستند، اما $\mathbf{v}_۱$ در $(\forall \mathbf{v}_۱ A\mathbf{v}_۱ \to B\mathbf{v}_۱)$ آزاد است. جمله‌ها معمولاً جالبترین ف.د.س.ها هستند. بقیهٔ ف.د.س.ها در درجهٔ دوم از اهمیت هستند؛ وعمدتاً به‌عنوان اجزاء سازندهٔ جمله‌ها به‌کار می‌روند.

در ترجمهٔ یك جمله از فارسی، انتخاب متغیرهای خاص اهمیت ندارد. پیشتر، جملهٔ «همهٔ سیبها بد هستند» را به‌صورت $\forall \mathbf{v}_۱ (A\mathbf{v}_۱ \to B\mathbf{v}_۱)$ ترجمه کردیم. می‌توانستیم آن‌را این چنین نیز ترجمه کنیم:

$$\forall \mathbf{v}_{۲۷} (A\mathbf{v}_{۲۷} \to B\mathbf{v}_{۲۷}).$$

در حقیقت، متغیر به‌عنوان یك ضمیر به‌کار می‌رود، درست همان‌طور که در فارسی می‌توان گفت: «به‌ازای هرچیز، هرچه می‌خواهد باشد، اگر آن چیز سیب باشد، آنگاه آن چیز بد است.» از آنجاکه انتخاب متغیرهای بخصوص مهم نیست، معمولاً حتی انتخاب را هم مشخص نمی‌کنیم. به‌عنوان مثال، به‌جای آن می‌نویسیم، $\forall x (Ax \to Bx)$، که از آن این مفهوم نتیجه می‌شود که x یك متغیر است. (اهمیت نداشتن انتخاب متغیر، سرانجام به‌صورت قضیه‌ای درخواهد آمد.)

استعمال مشابه متغیرها را درقسمتهای دیگر ریاضیات هم می‌بینیم. در

$$\sum_{i=۱}^{۷} a_{ij}$$

i یك متغیر «ظاهری» است ولی j آزاد است.

درباب علامت‌گذاری

یك ف.د.س. (یا در واقع هر عبارتی) را می‌توان در یك سطر با نمایش صریح هر نماد، مشخص کرد. به‌عنوان مثال،

$$\forall \mathbf{v}_۱ ((\neg \approx \mathbf{v}_۱ \mathbf{o}) \to (\neg \forall \mathbf{v}_۲ (\neg \approx \mathbf{v}_۱ \mathbf{S} \mathbf{v}_۲))).$$

نوشتن چیزها به‌این طریق، گرچه کامل است، ولی ممکن است براحتی قابل فهم نباشد. بخشی از این غیرقابل فهم بودن را می‌توان ناشی از ساده‌کردنهایی دانست که برای این زبان خواستاریم (مانند عدم وجود نماد سور وجودی). اما نمی‌شود هم کمترین علامتها را داشت و هم قابل‌فهمترین فرمولها را، بنابراین از هم‌اکنون در مشخص کردن ف.د.س.ها روشهایی را می‌پذیریم که غیرمستقیم‌تر هستند لکن از خوانایی بیشتری برخوردارند. این

قراردادها ما را مجاز می‌دارند که ف.د.س.ای را که در بالا به‌آن صورت نمایش دادیم چنین بنویسیم:

$$\forall v_1 (v_1 \not\approx 0 \rightarrow \exists v_2 \, v_1 \approx S v_2).$$

خوب توجه کنید که دراینجا تعریف خود از ف.د.س. را تغییر نداده‌ایم، بلکه صرفاً دنبال راههای دیگری برای نامیدن ف.د.س.ها مشغولیم. در بعضی ازحالتهای نادر که در آنها نمایش دنبالهٔ دقیق نمادها اهمیت دارد، اجباراً این قراردادها را حذف می‌کنیم و به‌همان علامت‌گذاریهای اولیه بازمی‌گردیم.

بنابراین قراردادها وکوتاهنویسیهای زیرین را می‌پذیریم. دراینجا α و β دوفرمول، x یك متغیر، و u و t دوترم هستند.

$(\alpha \vee \beta)$ کوتاهنوشت $((\neg\alpha) \rightarrow \beta)$ است.

$(\alpha \wedge \beta)$ کوتاهنوشت $(\neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta)))$ است.

$(\alpha \leftrightarrow \beta)$ کوتاهنوشت $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ است؛ یعنی کوتاهنوشت

$$(\neg((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \rightarrow \alpha)))).$$

$\exists x \, \alpha$ کوتاهنوشت $(\neg\forall x(\neg\alpha))$ است.

$u \approx t$ کوتاهنوشت $\approx ut$ است (همچنین برای دیگر نمادهای محمولی دوموضعی).

$u \not\approx t$ کوتاهنوشت $(\neg \approx ut)$ است؛ ایضاً $u \not< t$ کوتاهنوشت $(\neg < ut)$ است.

درمورد پرانتزها نه‌تنها (و)، بلکه [و] و غیره نیز به‌کار می‌بریم. و همچنین از ذکر پرانتزها حتی‌الامکان خودداری خواهیم کرد. برای این منظور، قراردادهای زیر را می‌پذیریم.

۱. بیرونی‌ترین پرانتزها را می‌توان حذف کرد. مثلاً، $\forall x \, \alpha \leftrightarrow \beta$ همان $(\forall x \, \alpha \rightarrow \beta)$ است.

۲. $\neg$، $\forall$، و $\exists$ کمترین برد را دارند. مثلاً،

$\neg\alpha \wedge \beta$ همان $((\neg\alpha) \wedge \beta)$ است و نه $\neg(\alpha \wedge \beta)$؛

$\forall x \;\; \alpha \rightarrow \beta$ همان $(\forall x \, \alpha \rightarrow \beta)$ است، ونه $\forall x(\alpha \rightarrow \beta)$؛

$\exists x \;\; \alpha \wedge \beta$ همان $(\exists x \, \alpha \wedge \beta)$ است، ونه $\exists x(\alpha \wedge \beta)$.

درچنین حالتهایی می‌توان حتی پرانتزهای اضافی نیز به‌کار برد، همچون $(\exists x \, \alpha) \wedge \beta$.

۳. $\wedge$ و $\vee$، با ملحوظ داشتن بند ۲، کمترین برد ممکن را دارند. مثلاً،

$\neg\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ همان $((\neg\alpha) \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ است.

۴. وقتی که یك رابط مکرراً به‌کار برده شود، عبارت را از راست دسته‌بندی می‌کنیم. مثلاً،

$\alpha \to \beta \to \gamma$ همان $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ است.

مثالهایی از چگونگی حذف کوتاهنوشتها و بازنویسی فرمولها به‌شکل غیرمختصر با ذکرصریح هرنماد:

۱. $\exists x(Ax \wedge Bx)$ همان $(\neg\forall x(\neg(\neg(Ax \to (\neg Bx)))))$ است.

اما $(\neg\forall x(Ax \to (\neg Bx)))$ نیزفرمول معادل دیگری‌است (به‌هرمعنای معقولی ازتعادل).

۲. $\exists x\, Ax \to Bx$ همان $((\neg\forall x(\neg Ax)) \to Bx)$ است.

$\exists x(Ax \to Bx)$ همان $(\neg\forall x(\neg(Ax \to Bx)))$ است.

سعی خواهیم کرد تاالفباهای مختلف را به‌طریقی منظم به‌کاربریم. این نظام درپایین آورده شده است، لیکن بعضی اوقات، به‌علل خاصی، استثناهایی وجود دارند.

نمادهای محمولی: الفبای بزرگ ایتالیك. بعلاوه $\in$ و $<$.
متغیرها: v_1، u، v، x، y، z.
نمادهای تابعی: f، g، h. همچنین $\mathbf{S}$، $+$، و غیره.
نمادهای ثابت: a، b، .... همچنین 0.
ترمها: u و t.
فرمولها: الفبای کوچك یونانی.
جمله‌ها: σ، τ.
مجموعه‌های فرمولها: الفبای بزرگ یونانی، بعلاوه بعضی حروف ایتالیك که شبیه به‌یونانی هستند، مانند A (آلفا) و T (تو).
ساختها: الفبای بزرگ آلمانی.

تمرین

۱. فرض کنید زبانی باپارامترهای زیرین‌داریم: $\forall$، به‌معنای «به‌ازای هرشیء»؛ N، به‌معنای «یك عدد است»؛ I، به‌معنای «جالب است»؛ $<$، به‌معنای «کوچکتر است از»؛ و 0، نمادثابتی است که‌نمایش دهندهٔ صفراست. جمله‌های فارسی زیررا به‌این‌زبان برگردانید. اگرجملهٔ فارسی مبهم باشد بیش ازیك ترجمه به‌دست می‌آید.

(الف) صفر از هرعددی کوچکتر است.
(ب) اگرعددی جالب باشد، آنگاه صفر جالب است.
(پ) هیچ عددی ازصفر کوچکتر نیست.
(ت) هرعدد غیر جالب با این خاصیت که همهٔ اعدادکوچکتر ازآن جالب‌اند، قطعاً جالب است.
(ث) هیچ عددی وجود نداردکه همهٔ اعداد ازآن کوچکتر باشند.

(ج) هیچ عددی وجود ندارد که هیچ عددی از آن کوچکتر نباشد.

در تمرینهای ۲ تا ۶ هرجملهٔ فارسی را به‌زبان مرتبهٔ اول مشخص شده برگردانید. از قراردادهای علامتی و کوتاهنویسیها تماماً استفاده کنید تا نتیجهٔ نهایی حتی‌الامکان خوانا باشد.

۲. نه a عضو هرمجموعه است و نه b. ($\forall$، به ازای هرمجموعه؛ $\in$، عضوی است از: a، a؛ b، b.)

۳. اگر اسب حیوان باشد، آنگاه سر اسب سرحیوان است. ($\forall$، به ازای هرشیء؛ E، اسب است، A، حیوان است: hx، سر x یا (اگر x بی‌سر باشد) خود x است.)

۴. (الف) می‌توان بعضی ازمردم را همیشه فریب داد. (ب) می‌توان همهٔ مردم را بعضی اوقات فریب داد. (پ) نمی‌توان همهٔ مردم‌را همیشه فریب داد.($\forall$، به‌ازای هرشیء؛ P، یك فرداست؛ τ، یـك زمان است؛ Fxy، مـی‌توان x را در yفریب داد. یك یا چند جملهٔ فوق ممکن است مبهم باشد، که در آن موارد بیش از یك ترجمه به دست می‌آید.)

۵. (الف) عمادنمی‌تواند هرکاری را درست انجام دهد. (ب) عماد نمی‌تواندهیچ کاری را درست انجام دهد. ($\forall$، به ازای هرشیء؛ J، یك‌کار است؛ a، عمـاد؛ Dxy، x می‌تواند y را درست انجام دهد.)

۶. هیچ‌کس همه را دوست ندارد. ($\forall$، به‌ازای هـر فرد: Lxy، x، y را دوست دارد.)

۷. تعریف دقیقی ازاینکه متغیر x به‌عنوان iمین نماد در ف. د. س. α آزاد است ارائه دهید. اگر x iامین نماد αباشد ولی درآن آزاد نباشد، درآن صورت گفته می‌شود که درآن پایبند است.)

۸. هریك از ف. د. س. های زیرین را به‌طریقی بنویسیدکه هرنماد به طورصریح درمحل واقعی خود ظاهرشود:

(الف) $$\exists v_1\, Pv_1 \wedge Pv_1$$

(ب) $$\forall v_1\, Av_1 \wedge Bv_1 \rightarrow \exists v_2 \neg Cv_2 \vee Dv_2$$

درهرحالت مشخص کنیدکدام متغیر درآن ف. د. س. آزاد است.

۲.۲ صدق ومدل

در منطق جمله‌ها برای تعیین اینکه کدام یك از نمادهای جمله‌ای باید صادق وکدام‌کاذب تعبیر شوند از ارزشدهیها استفاده می‌کـردیم. در منطق مرتبهٔ اول نقش مشابـه را ساختها

ایفا می‌کنند. ازساختها می‌توان به عنوان ترجمه‌کنندگان زبان صوری بـه زبـان فارسی تعبیر کرد. (ساخت را گاهی، تعبیر نیزمی‌نامند، لیکن ما ترجیح می‌دهیم ایـن اصطلاح را برای مفهوم دیگری که دربخش ۷.۲ با آن آشنا می‌شویم نگهداریم.)

یك ساخت برای زبان مرتبهٔ اول معلوم می‌کندکه:

۱. نماد سور عمومی($\forall$) به‌چه دسته ازاشیاء اشاره می‌کند، و
۲. پارامترهای دیگر (نمادهای محمولی وتابعی) بیانگر چه هستند.

به طور صوری، یك ساخت $\mathfrak{U}$، بـرای زبان مرتبهٔ اول، تابعی است‌کـه دامنهٔ آن مجموعهٔ پارامترهاست به‌طوری که

۱. $\mathfrak{U}$ به‌نماد سوری $\forall$ مجموعهٔ غیرتهی $|\mathfrak{U}|$ را،که عالم سخن $\mathfrak{U}$ نامیده‌می‌شود، نسبت می‌دهد.

۲. $\mathfrak{U}$ به‌هر نماد محمولی n موضعی مانند P، رابطه‌ای nتایی مانند $P^{\mathfrak{U}} \subseteq |\mathfrak{U}|^n$ را نسبت می‌دهد؛ یعنی، $P^{\mathfrak{U}}$ مجموعه‌ای از nگانه‌ها ازعضوهای عالم سخن است.

۳. $\mathfrak{U}$ به هرنماد ثابت c، یك عضو $c^{\mathfrak{U}}$ ازعالم سخن $|\mathfrak{U}|$ را نسبت می‌دهد.

۴. $\mathfrak{U}$ به هرنمادتابعی nموضعی مانند f، یك‌عمل n تایی $f^{\mathfrak{U}}$ را روی $|\mathfrak{U}|$ نسبت می‌دهد؛ یعنی، $f^{\mathfrak{U}} : |\mathfrak{U}|^n \to |\mathfrak{U}|$.

غرض آن است‌که $\mathfrak{U}$ به پارامترهای زبان معنا ببخشد. سور $\forall$ معنای «به ازای هـر چیز در $|\mathfrak{U}|$» را دارد. نماد c برای نامیدن نقطهٔ $c^{\mathfrak{U}}$ است. فرمول بسیط $Pt_1 \ldots t_n$ بـه این معناست‌که nگانه‌ای از نقاط‌که با t_1، . . . ، t_n نامیده شده است متعلق بـه رابطهٔ $P^{\mathfrak{U}}$ است. (بزودی این شرایط را با دقت بیشتری بازگو خواهیم‌کرد.)

توجه‌کنیدکه از فرضهای اساسی ما غیر تهی بودن عالم سخن $|\mathfrak{U}|$ است. همچنین توجه‌کنیدکه دامنهٔ $f^{\mathfrak{U}}$ باید همهٔ $|\mathfrak{U}|^n$ باشد؛ هیچ‌گونه تمهیدی برای توابع جزئاً تعریف شده نکرده‌ایم.

مثال. زبان نظریهٔ مجموعه‌ها رادرنظرمی‌گیریم‌که تنها پارامتر آن (علاوه بر $\forall$) $\in$ است. ساخت $\mathfrak{U}$ را با

$$|\mathfrak{U}| = \text{مجموعهٔ اعداد طبیعی،}$$

$$\in^{\mathfrak{U}} = \text{مجموعهٔ زوجهای } \langle m,n \rangle \text{ به طوری که } m < n\text{،}$$

درنظر می‌گیریم.

(بنابراین $\in$ را به‌معنای«کوچکتراز» ترجمه می‌کنیم.) با دردست‌داشتن یك ساخت می‌توان جمله‌ها را از زبان صوری به‌زبان فارسی ترجمه وسعی‌کرد صدق یاکذب ترجمه‌ها را تعیین‌کرد. جملهٔ

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

(یا به‌طور صوری‌تر $(((\neg\forall v_1(\forall v_2(\neg \in v_2 v_1)))$)، ازاین‌زبان مرتبهٔ اول،که تحت‌ترجمهٔ دیگری مبین وجود یك مجموعهٔ تهی است، اکنون تحت $\mathcal{U}$ به جملهٔ زیرین ترجمه‌می‌شود که صادق است:

یك عدد طبیعی وجود دارد به طوری‌که هیچ
عدد طبیعی‌ازآن‌کوچکتر نیست.

به همین دلیل خواهیم‌گفت‌جملهٔ $\exists x \forall y \neg y \in x$ در $\mathcal{U}$ صادق است، یا $\mathcal{U}$ یك مدل برای این جمله است. ازسوی دیگر، $\mathcal{U}$ یك مدل برای اصل زوج سازی مجموعه‌ها، یعنی‌فرمول

$$\forall x \forall y \exists z \forall t(t \in z \leftrightarrow t \approx x \vee t \approx y),$$

نیست، چون ترجمهٔ این جمله در $\mathcal{U}$ جمله‌ای است کاذب، زیرا هیچ عدد طبیعی m وجود ندارد به‌طوری‌که به‌ازای هر n، داشته باشیم:

$n < m$ اگر وتنها اگر $n = 1$.

(خواننده‌ای‌که با نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها آشنایی دارد می‌تواند صحت این‌مطلب راکه $\mathcal{U}$ مدلی است برای اصول موضوع گسترش، اجتماع، و نظم بررسی‌کند.)

درمثال بالا،کاملاً واضح بودکه جمله‌های معینی اززبان صوری صادق وبرخی‌دیگر کاذب هستند. ولی ماخواهان یك تعریف دقیق ریاضی از «σ در $\mathcal{U}$ صادق‌است» می باشیم. این تعریف باید ــ بدون به‌کاربردن ترجمه هایی به‌فارسی یا بدون ضابطهٔ مفروضی بــرای بیان‌اینکه بعضی‌از جمله‌های‌فارسی صادق‌وبعضی دیگرکاذب‌اند ــ به زبان نظریهٔ‌مجموعه‌ها بیان شود. (اگرفکرمی‌کنید چنین ضابطه‌ای‌دراختیار دارید، آن‌را درمورد جملهٔ «این‌جمله کاذب است»آزمایش‌کنید.) به عبارت دیگر، می‌خواهیم مفهوم شهودی خود از «σ در $\mathcal{U}$ صادق است» را به‌صورت مفهومی ریاضی درآوریم.

برای تعریف «σ در $\mathcal{U}$ صادق است»،که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\models_{\mathfrak{U}} \sigma,$$

برای جملهٔ σ و ساخت $\mathcal{U}$، بهتر است ابتدا مفهومی کلیتر راکه دربرگیرندهٔ همهٔ ف.د.س. هاست تعریف‌کنیم. فرض‌کنیم

φ یك ف.د.س. درزبان ما،

$\mathcal{U}$ یك ساخت برای این زبان،

و $s: V \to |\mathcal{U}|$ تابعی‌از V، مجموعهٔ همهٔ متغیرها، به‌عالم سخن $|\mathcal{U}|$ از $\mathcal{U}$ باشد.

در این صورت معنای $\mathcal{U}$ فرمول φ را با s ارضا می‌کند، که به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$\models_{\mathfrak{U}} \varphi[s],$$

را تعریف خواهیم کرد. تعبیر شهودی این مطلب چنین است:

$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ اگر وتنها اگر ترجمهٔ φ در $\mathfrak{A}$ که هرمورد آزاد متغیر x به صورت $s(x)$ ترجمه می‌شود جمله‌ای صادق باشد.

تعریف صوری ارضا به صورت زیر صورت می‌گیرد:

یك. ترمها. تابع s را به تابع

$$\bar{s}: T \rightarrow |\mathfrak{A}|$$

که تابعی از T، مجموعهٔ همهٔ ترمها، به عالم سخن ساخت $\mathfrak{A}$ است گسترش می‌دهیم. غرض آن است که $\bar{s}(t)$ باید عضوی ازعالم سخن $\mathfrak{A}$ باشدکه با ترم t نام‌گذاری شده است. $\bar{s}$، به طریق بازگشتی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. به‌ازای هرمتغیر x، $\bar{s}(x) = s(x)$.
۲. به‌ازای هرنماد ثابت c، $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$.
۳. اگر t_1، ...، t_n ترم باشند و f یك نماد تابعی n موضعی باشد، آنگاه

$$\bar{s}(f t_1 \cdots t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n)).$$

یك نمودار جابجایی، درحالت $n = 1$، به این صورت است:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\bar{s}} & |\mathfrak{A}| \\ \mathcal{F}_f \downarrow & & \downarrow f^{\mathfrak{A}} \\ T & \xrightarrow{\bar{s}} & |\mathfrak{A}| \end{array}$$

وجود این گسترش یکتای $\bar{s}$ از s، از قضیهٔ بازگشت (بخش ۲.۱) با استفاده از این امر که ترمها به‌طور آزاد پدیدآمده‌اند (بخش ۳.۲) نتیجه می‌شود. توجه‌کنیدکه $\bar{s}$ هم به s و هم به $\mathfrak{A}$ وابسته است.

دو. فرمولهای بسیط. فرمولهای بسیط، نه به صورت استقرایی، بلکه به طور صریح تعریف شدند، لذا تعریف ارضای فرمولهای بسیط *نیز* صریح است وبه‌طریق بازگشتی نیست.

۱. $\models_{\mathfrak{A}} \approx t_1 t_2[s]$ اگر و تنها اگر $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$

(بنابراین $\approx$ به معنای $=$ است. توجه‌کنیدکه $\approx$ یك نماد منطقی است ونه یك پارامتر که بتوان آن راآزادانه تعبیر کرد.)

۲. به‌ازای پارامتر محمولی n موضعی P داریم:

$\models_{\mathfrak{A}} P t_1 \ldots t_n[s]$ اگر و تنها اگر $\langle \bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$.

سه. ف.د.س.های دیگر. ف.د.س.ها بـه‌طور استقرایی تعریف شدند، و در نتیجه دراینجا نیز ارضا به‌طور بازگشتی تعریف می‌شود.

۱. در مورد فرمولهای بسیط، همان تعریف فوق را داریم.
۲. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$ اگر و تنها اگر $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$.
۳. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \rightarrow \psi)[s]$ اگر وتنها اگر یا $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ یا $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$ ویا هردو.
(به‌عبارت دیگر، اگر $\mathfrak{A}$ فرمول φ را با s ارضا کند، آنگاه $\mathfrak{A}$ فرمول ψ را بـا s ارضا می‌کند.)
۴. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi[s]$ اگروتنها اگربه‌ازای هر $d \in |\mathfrak{A}|$ ، داشته باشیم $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|d)]$.
در اینجا $s(x|d)$ تابعی است‌کـه دقیقاً شبیه s است بجز در یك مورد: به‌ازای متغیر x ، ارزش d را می‌پذیرد. این مطلب را می‌توان با معادلهٔ زیر بیان‌کرد:

$$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & \text{اگر } y \neq x \\ d & \text{اگر } y = x \end{cases}$$

(بنابراین $\forall$ به‌معنای «به‌ازای همهٔ اشیاء در $|\mathfrak{A}|$» است.)

دراینجا خواننده ممکن است بخواهد توصیف شهودی $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ درابتدای این‌بحث را دوباره درنظر بگیرد و چگونگی صوری‌شدن آن را مشاهده‌کند. همچنین باید یادآور شویم‌کـه تعریف ارضا، کاربرد دیگری ازقضیهٔ بازگشت توأم بـا ایـن مطلب است‌کـه ف.د.س.ها به‌طور آزاد پدید آمده‌اند. این تعریف را می‌توان برحسب توابع نیز بیان کرد تا چگونگی‌کاربرد قضیهٔ بازگشت بخش ۲.۱ روشنتر شود:

(یك) یك $\mathfrak{A}$ ثابت را درنظر می‌گیریم.
(دو) یك تابع $\bar{h}$ (گسترش تـابع h کـه روی فرمولهای بسیط تعریف شده است) تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که به‌ازای هر ف.د.س. φ ، $\bar{h}(\varphi)$ مجموعه‌ای ازتوابعی باشدکه از V در $|\mathfrak{A}|$ تعریف شده‌اند.
(سه) سپس چنین تعریف می‌کنیم:

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \text{ اگر وتنها اگر } s \in \bar{h}(\varphi).$$

نوشتن تعریف صریح h و شروطی‌کـه گسترش $\bar{h}$ را یکتا تعیین می‌کنند، بـه‌عنوان تمرین، به‌خواننده واگذار می‌شود. (بـه‌تمرین ۷ رجوع‌کنید.) یك راه حل ظریف دیگر آن است‌کـه $\bar{h}(\varphi)$ را بـه عنوان یك مجموعه از توابع روی مجموعهٔ متغیرهای آزاد φ درنظر بگیریم.

تعریف. فرض‌کنیم Γ یك مجموعه از ف.د.س.ها و φ یك ف.د.س. باشد. در این

صورت Γ منطقاً مستلزم φ است، و می‌نویسیم $\Gamma \vDash \varphi$، اگر و تنها اگر به‌ازای هرساخت $\mathfrak{U}$ برای زبان موردنظر و هـر تابع $s : V \to |\mathfrak{U}|$ به‌طوری‌که $\mathfrak{U}$ هر عضو Γ را با s ارضا کند، آنگاه $\mathfrak{U}$ فرمول φ را نیز با s ارضا کند.

همین نماد «$\vDash$» راکه درفصل ۱ برای استلزام توتولوژیك به‌کاربردیم، در اینجا نیز به‌کار می‌بریم. اما از این پس‌از ایـن نماد تنها برای استلزام منطقی استفاده خواهیم کرد. همچون قبل به‌جای $\{\gamma\} \vDash \varphi$ می‌نویسیم «$\gamma \vDash \varphi$». گوییم φ و ψ منطقاًمعادل‌اند (ومی‌نویسیم $\varphi \vDash\dashv \psi$) اگر وتنها اگر $\varphi \vDash \psi$ و $\psi \vDash \varphi$.

مشابه توتولوژیها درزبان مرتبهٔ اول فرمولهای معتبر هستند. ف.د.س. φ معتبر است اگر و تنها اگر $\varnothing \vDash \varphi$ (کـه به‌صورت ساده می‌نویسیم «$\vDash \varphi$»). بنا براین φ معتبر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\mathfrak{U}$ وهر $s : V \to |\mathfrak{U}|$، $\mathfrak{U}$، φ را با s ارضاکند.

دراینجا اندکی درنگ می‌کنیم تا نشان دهیم که‌برای پی‌بردن به‌این مطلب که‌ساخت $\mathfrak{U}$ یك ف.د.س. φ را با s ارضا می‌کند یا نه، واقعاً به‌همهٔ (بینهایت) اطلاعاتی‌که s عرضه می‌کند نیاز نداریم. آنچه‌که مهم است ارزش تابع s به‌ازای (تعدادی متناهی) متغیرهایی است‌کـه در s آزاد هستند. به‌ویژه، اگر φ یك جمله باشد، آنگاه s اصلاً نقشی نخواهد داشت.

قضیهٔ ۲۲ الف. فرض‌کنیم s_1 و s_2 توابعی از V در $|\mathfrak{U}|$ باشندکـه بـه‌ازای همهٔ متغیرهایی(درصورت وجود)که درف.د.س. φ آزاد هستندهم‌مقدار هستند. دراین صورت

$$\vDash_{\mathfrak{U}} \varphi[s_1] \text{ اگر وتنها اگر } \vDash_{\mathfrak{U}} \varphi[s_2]$$

اثبات. ازآنجاکه ارضا به‌طور بازگشتی تعریف شد، این اثبات به‌استقرا خواهدبود. ساخت ثابت $\mathfrak{U}$ را درنظر می‌گیریم و به‌استقرا نشان می‌دهیم که هر ف.د.س.مانند φ دارای این خاصیت است که هرگاه دو تابع s_1 و s_2 روی متغیرهای آزاد φ هم‌مقدار باشند،آنگاه $\mathfrak{U}$ فرمول φ را با s_1 ارضامی‌کند اگر وتنها اگر با s_2 ارضاکند.

حالت ۱: فرمول $\varphi = Pt_1 \ldots t_n$ بسیط است. پس هرمتغیر φ آزاد است. بنا براین s_1 و s_2 به‌ازای همهٔ متغیرها درهر t_i هم‌مقدار هستند. ازاینجا نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر i، $\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$؛ اثبات کامل به‌استقرا نسبت به t_i انجام می‌شود. در نتیجه، $\mathfrak{U}$ فرمول $Pt_1 \ldots t_n$ را با s_1 ارضا می‌کند اگر وتنها اگر با s_2 ارضاکند.

حالتهای ۲ و ۳: φ به‌صورت $\neg\alpha$ یا $\alpha \to \beta$ است. این حالتها بیدرنگ از فرض استقرا نتیجه می‌شوند.

حالت ۴: $\varphi = \forall x \psi$. پس متغیرهای آزاد φ همان متغیرهای آزاد ψ هستند به‌استثنای x. بنا براین به‌ازای هر d در $|\mathfrak{U}|$، $s_1(x|d)$ و $s_2(x|d)$ به‌ازای همهٔ متغیرهای آزاد ψ هم‌مقدار هستند. پس، بنا به‌فرض استقرا، $\mathfrak{U}$ فرمول ψ را با $s_1(x|d)$ ارضا می‌کند اگر و تنها اگر با $s_2(x|d)$ ارضاکند. از این مطلب وتعریف ارضا مشاهده می‌کنیم که $\mathfrak{U}$ فرمول

$\forall x \psi$ را با s_1 ارضا می‌کند اگر و تنها اگر با s_2 ارضا کند. ■

عملاً، اثبات فوق دراین خلاصه می‌شود که با دقت به‌تعریف ارضا نظر افکنیم و ببینیم از اطلاعاتی که s می‌دهد واقعاً کدام یك به‌کارمی‌رود. مطلب مشابهی دربارهٔ ساختها وجود دارد: اگر $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$ به‌ازای همهٔ پارامترهایی که در φ ظاهر می‌شوند هم‌مقدار باشند، آنگاه $\models_{\mathfrak{U}} \varphi[s]$ اگر وتنها اگر $\models_{\mathfrak{B}} \varphi[s]$

نتیجهٔ ۲۲ ب. به‌ازای هرجملهٔ σ، یا

(الف) $\mathcal{U}$ فرمول σ را با هرتابع $s: V \to |\mathcal{U}|$ ارضا می‌کند، و یا

(ب) فرمول σ را با هیچ تابع ازاین نوع ارضا نمی‌کند.

اگر شق (الف) برقرار باشد، آنگاه می‌گوییم که σ در $\mathcal{U}$ صادق است (ومی‌نویسیم $\models_{\mathfrak{U}} \sigma$) یا اینکه $\mathcal{U}$ یك مدل برای σ است. و اگر شق (ب) برقرار باشد، آنگاه البته σ در $\mathcal{U}$ کاذب است. (این دو نمی‌توانند تواماً برقرار باشند، زیرا $|\mathcal{U}|$ غیرتهی است.) $\mathcal{U}$ یك مدل برای یك مجموعه Σ از جمله‌هاست اگر وتنها اگر یك مدل برای هرعضو Σ باشد.

نتیجهٔ ۲۲ پ. به‌ازای مجموعهٔ τ ؛ Σ ازجمله‌ها داریم: $\Sigma \models \tau$ اگر وتنها اگرهرمدل برای Σ، مدلی برای τ نیز باشد.

تعریف استلزام منطقی بسیار شبیه استلزام توتولوژیك در فصل ۱ است. اما بین پیچیدگی این‌دوتعریف تفاوت بزرگی وجود دارد. فرض‌کنیم درمنطق جمله‌ها می‌خواهیم بدانیم که ف.د.س. α توتولوژی هست یانه. تعریف ایجاب می‌کندکه تعدادی متناهی ارزشدهی راکه هریك تابعی متناهی است درنظر بگیریم. به‌ازای هر ارزشدهی مانند v، باید $\bar{v}(\alpha)$ را محاسبه کنیم، واین‌کار را می‌توانیم به‌نحوی‌کارامد درزمان محدودی انجام دهیم. (درنتیجه، مجموعهٔ توتولوژیها، همان‌طورکه قبلاً مشاهده‌کردیم، تصمیم‌پذیراست.)

درمقایسه با این روش پایاندار برای توتولوژیها، فرض‌کنیم می‌خواهیم بدانیم آیا ف.د.س. φ (درزبان مرتبهٔ اول ما) معتبراست یاخیر. تعریف ایجاب می‌کندکه هرساخت $\mathcal{U}$ را درنظر بگیریم. (به‌ویژه این امر مستلزم این است‌که هرمجموعهٔ غیرتهی را به‌حساب بیاوریم، که البته این مجموعه‌ها خیلی فراوان‌اند.) برای هرکدام ازاین ساختها باید همهٔ توابع ازمجموعهٔ متغیرها، V، به $|\mathcal{U}|$ را درنظربگیریم. وبرای هر $\mathcal{U}$ و s داده شده، باید تعیین‌کنیم که آیا $\mathcal{U}$ فرمول φ را با s ارضا می‌کند یا خیر. نامتناهی بودن احتمالی $|\mathcal{U}|$ نیز به‌خودی خود به‌پیچیدگی مطلب خواهد افزود.

باتوجه به‌این پیچیدگیها، تعجب‌آور نیست که مجموعهٔ فرمولهای معتبرتصمیم‌پذیر نیست (به‌بخش ۵.۳ مراجعه‌کنید). آنچه که تعجب‌آور است این است‌که مفهوم اعتبار با مفهومی دیگر (استنتاج‌پذیری) معادل است‌که تعریف آن به پایانداری بسیار نزدیك است (به‌بخش ۴.۲ مراجعه‌کنید). با استفاده ازاین‌هم‌ارزی، قادر خواهیم بودکه نشان دهیم که

(تحت بعضی شرایط معقول) مجموعهٔ ف.د.س.های معتبر شماره پذیر کارامد است. این فرایند شماره گذاری کارامد مشخصات ملموستری ازمجموعهٔ فرمولهای معتبر به‌دست می‌دهد.
قراردادهای علامت‌گذاری که قبلاً پذیرفتیم به‌طریقی مناسب تدوین یافته بودند:

۰۱ $\models_{\mathfrak{A}} (\alpha \wedge \beta)[s]$ اگر وتنها اگر $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ و $\models_{\mathfrak{A}} \beta[s]$؛ بـه‌همین ترتیب در مورد $\vee$ و $\leftrightarrow$.

۰۲ $\models_{\mathfrak{A}} \exists x\, \alpha[s]$ اگر و تنها اگر عضوی مـانند d از $|\mathcal{U}|$ وجود داشته باشد کـه $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$. اثبات دومی به‌صورت زیر است:

$\models_{\mathfrak{A}} \exists x\ \alpha[s]$ اگر وتنها اگر $\models_{\mathfrak{A}} \neg\forall x \neg\alpha[s]$

اگر وتنها اگر چنین نباشدکه به ازای هر d در $|\mathcal{U}|$، داشته باشیم:
$\not\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$ اگروتنها اگر dای در $|\mathcal{U}|$ باشد که: $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$. ■

مثال. فرض کنیم زبان ما دارای پارامترهای $\forall$ ، P (یك نماد محمولی دوموضعی)، f (یك نماد تابعی یك موضعی)، و c (یك نماد ثابت) باشد. فرض کنیم $\mathcal{U}$ ساختی بـرای این زبان باشدکه ذیلاً تعریف می‌شود:

$|\mathcal{U}|$ مساوی N ، مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی،
$P^{\mathfrak{A}}$ مساوی مجموعهٔ زوجهای $\langle m, n\rangle$ به‌طوری‌که $m \leqslant n$ ،
$f^{\mathfrak{A}}$ مساوی تابع تالی S ؛ $f^{\mathfrak{A}}(n) = n + ۱$ ،
$c^{\mathfrak{A}}$ مساوی ۰.

با توجه به‌این‌که $\mathcal{U}$ واقعاً یك تابع است و با نوشتن مؤلفه‌های آن، می‌توان مطلب بالا را در یك سطر خلاصه کرد:

$$\mathcal{U} = (N, \leqslant, S, ۰).$$

این علامت‌گذاری فقط درصورتی بی‌ابهام است کـه از متن آشکار شودکه چه مؤلفه‌ای با چه پارامتری متناظر است.
فرض کنیم $s : V \to N$ تابعی باشدکه برای آن $s(\mathrm{v}_i) = i - ۱$ ؛ یعنی $s(\mathrm{v}_۱) = ۰$، $s(\mathrm{v}_۲) = ۱$ ، و الی آخر.

۰۱ $\bar{s}(ff\mathrm{v}_۳) = S(S(۲)) = ۴$.
۰۲ $\bar{s}(ffc) = ۲$ ؛ از s هیچ استفاده‌ای نشده است.
۰۳ $\models_{\mathfrak{A}} Pcf\mathrm{v}_۱[s]$. این مطلب بـه‌طور شهودی آشکار است، زیـرا وقتی آن را به‌فارسی برمی‌گردانیم، جملهٔ صادق «۰ $\leqslant$ ۱» حاصل می‌شود. به‌طور صوری‌تر، دلیل آن این است که

$$\langle \bar{s}(c), \bar{s}(f\mathbf{v}_1)\rangle = \langle 0, 1\rangle \in P^{\mathfrak{A}}.$$

۴. $\models_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{v}_1 Pc\mathbf{v}_1$. ترجمهٔ فارسی این عبارت است از «۰ کوچکتر از یا مساوی هر عدد طبیعی است.» به‌طور صوری باید به‌ازای هر n متعلق به N، نشان دهیم‌که

$$\models_{\mathfrak{A}} Pc\mathbf{v}_1[s(\mathbf{v}_1|n)],$$

که به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\langle 0, n\rangle \in P^{\mathfrak{A}}.$$

۵. $\not\models_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{v}_1 P\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1[s]$، زیرا عددی طبیعی مانند m وجود دارد به‌طوری‌که

$$\not\models_{\mathfrak{A}} P\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1[s(\mathbf{v}_1|m)];$$

یعنی،

$$\langle s(\mathbf{v}_2), m\rangle \notin P^{\mathfrak{A}}.$$

درواقع، چون $s(\mathbf{v}_2) = 1$، باید m را برابر با ۰ بگیریم.

به‌خواننده هشدار داده می‌شود که، مثلاً، نماد تابعی f را با تابع $f^{\mathfrak{A}}$ اشتباه نکنند.

مثالهایی از استلزام منطقی. از خواننده می‌خواهیم که صدق هریك از موارد زیر را بررسی کند:

۱. $\forall \mathbf{v}_1 Q\mathbf{v}_1 \models Q\mathbf{v}_2$

۲. $Q\mathbf{v}_1 \not\models \forall \mathbf{v}_1 Q\mathbf{v}_1$

۳. $\forall \mathbf{v}_1 Q\mathbf{v}_1 \models \exists \mathbf{v}_2 Q\mathbf{v}_2$

۴. $\exists x \forall y Pxy \models \forall y \exists x Pxy$

۵. $\forall y \exists x Pxy \not\models \exists x \forall y Pxy$

۶. $\models \exists x(Qx \rightarrow \forall x Qx)$

مثال. فرض کنیم زبان داده شدهٔ ما تنها دارای دوپارامتر $\forall$ و P باشد، که در آن P یك نماد محمولی دوموضعی است. دراین صورت ساخت $\mathfrak{A}$ با $|\mathfrak{A}|$ و رابطه دوتایی $P^{\mathfrak{A}}$ مشخص می‌شود. با اندکی مسامحه، دوباره می‌نویسیم:

$$\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|, P^{\mathfrak{A}}).$$

حال مسئلهٔ تعیین ردهٔ همهٔ مدلهای جمله‌های زیرین را درنظر می‌گیریم:

۱. $\forall x \forall y\, x \approx y$. ساخت (A, R)، یك مدل برای این‌جمله است اگروتنها اگر A تنها شامل یك عضو باشد. R می‌تواند یا تهی باشد یا مجموعهٔ تك عضوی $A \times A$.

۲. $\forall x \forall y\, Pxy$. ساخت (A, R) یك مدل برای این جمله است اگر و تنها اگر

$R = A\times A$. A می‌تواند هرمجموعهٔ غیرتهی دلخواهی باشد.

۳. $\forall x\forall y\neg Pxy$. ساخت (A, R)، یك مدل برای این‌جمله است اگروتنها اگر $R=\varnothing$.

۴. $\forall x\,\exists y\,Pxy$. شرط اینکه (A, R) یك مدل برای این جمله باشدآن است‌که $\operatorname{dom} R = A$.

تعریف‌پذیری رده‌ای از ساختها

برای مجموعهٔ Σ ازجمله‌ها، فرض کنیم $\operatorname{Mod}\Sigma$ ردهٔ همهٔ مدلهای Σ باشد، یعنی، ردهٔ همهٔ ساختهای مربوط به‌زبان که درآنها هرعضو Σ صادق است. برای تك جملهٔ τ، به‌جای «$\operatorname{Mod}\{\tau\}$» می‌نویسیم «$\operatorname{Mod}\tau$». (خوانندهٔ آشنا با نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها، متوجه خواهد شدکه $\operatorname{Mod}\Sigma$، درصورت غیرتهی‌بودن، یك ردهٔ سره است؛ یعنی، بزرگتر از آن است‌که یك مجموعه باشد.)

یك ردهٔ $\mathscr{K}$ از ساختهای مربوط به‌زبان ما، یك ردهٔ مقدماتی (EC) است اگر وتنها اگر به ازای جمله‌ای مانند τ داشته باشیم $\mathscr{K}=\operatorname{Mod}\tau$. $\mathscr{K}$ یك ردهٔ مقدماتی به معنای وسیع (EC_Δ) است اگر و تنها اگر به‌ازای مجموعه‌ای از جمله‌ها مانند Σ داشته باشیم $\mathscr{K}=\operatorname{Mod}\Sigma$. (صفت «مقدماتی» مترادف با «مرتبهٔ اول» است.)

مثالها

۱. فرض کنیم زبان موردنظر دارای تساوی و پارامترهای $\forall$ و P باشد، که درآن P یك نماد محمولی‌دوموضعی‌است. مانند قبل، ساخت (A, R) برای این زبان، ازمجموعهٔ غیرتهی A همراه با رابطهٔ دوتایی R روی A تشکیل‌یافته‌است. (A, R) یك مجموعهٔ مرتب است اگروتنها اگر R متعدی وتابع شرط تثلیث (یعنی به ازای هر a و b متعلق به A تنها یکی‌از سه شرط $\langle a, b\rangle\in R$، $a=b$، $\langle b, a\rangle\in R$ برقرار است) باشد. از آنجاکه این شرایط را می‌توان به صورت جمله‌ای در زبان صوری ترجمه‌کرد، لذا ردهٔ مجموعه‌های مرتب غیرتهی یك ردهٔ مقدماتی است. در حقیقت، $\operatorname{Mod}\tau$ است که درآن τ، ترکیب عطفی سه جملهٔ زیرین است:

$$\forall x\,\forall y\,\forall z(xPy \to yPz \to xPz);$$

$$\forall x\forall y(xPy \lor x\approx y \lor yPx);$$

$$\forall x\forall y(xPy \to \neg yPx).$$

در دو مثال بعدی، فرض می‌کنیم‌که خواننده با جبر آشنایی دارد.

۲. فرض کنیم زبان مورد نظرما دارای $\approx$ وپارامترهای $\forall$ و 0 است، که درآن 0

یك نماد تابعی دوموضعی است. ردهٔ همهٔ گروهها، یك ردهٔ مقدماتی، یعنی ردهٔ همهٔ مدلهای ترکیب عطفی اصول موضوع گروه است:

$$\forall x \forall y \forall z\, x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z;$$
$$\forall x \forall y \exists z\, x \circ z \approx y;$$
$$\forall x \forall y \exists z\, z \circ x \approx y.$$

ردهٔ همهٔ گروههای نامتناهی EC_Δ است. برای دیدن این امر، فرض کنیم

$$\lambda_۲ = \exists x \exists y\, x \not\approx y,$$
$$\lambda_۳ = \exists x \exists y \exists z\, (x \not\approx y \wedge y \not\approx z \wedge x \not\approx z),$$
$$\cdots\cdot$$

بنابراین λ_n ترجمهٔ جملهٔ «حداقل n شیء وجود دارد» است. بدین ترتیب اصول موضوع گروه همراه با $\{\lambda_۲ , \lambda_۳, \ldots\}$، یك مجموعهٔ Σ را تشکیل می‌دهند که $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ همان ردهٔ همهٔ گروههای نامتناهی است. نهایتاً (در بخش ۶.۲) قادر خواهیم بود که نشان دهیم ردهٔ گروههای نامتناهی EC نیست.

۳. فرض کنیم زبان موردنظر دارای تساوی و پارامترهای $\forall$، 0، 1، $+$ و $\cdot$ باشد. هیأتها را می‌توان به‌عنوان ساختهای این زبان در نظر گرفت. ردهٔ همهٔ هیأتها یك ردهٔ مقدماتی است. ردهٔ هیأتهای بـا مشخصهٔ صفر، EC_Δ است و ازقضیهٔ فشردگی برای منطق مرتبهٔ اول نتیجه می‌شود که EC نیست (مجدداً به‌بخش ۶.۲ مراجعه کنید).

تعریف‌پذیری در داخل یك ساخت

ساخت ثابت $\mathfrak{U}$ را درنظرمی گیریم. فرض کنیم φ فرمولی باشد که همهٔ متغیرهای آزاد آن بین $\mathbf{v}_۱$ ، . . . ، $\mathbf{v}_k$ باشند. در این صورت به‌ازای عضوهای $a_۱$ ، . . . ، a_k از $|\mathfrak{U}|$، معنای

$$\models_{\mathfrak{U}} \varphi[\![a_۱ , \ldots , a_k]\!]$$

آن است که $\mathfrak{U}$ فرمول φ را با تابعی‌چون $s: V \to |\mathfrak{U}|$ که در آن به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant k$ ، $s(\mathbf{v}_i) = a_i$ (وبنابراین با هرتابع با این خاصیت) ارضا می‌کند.

به هر φ و هرساخت $\mathfrak{U}$ به‌این صورت، می‌توانیم رابطهٔ k تایی

$$\{\langle a_۱ , \ldots , a_k\rangle : \models_{\mathfrak{U}} \varphi[\![a_۱ , \ldots , a_k]\!]\}$$

را روی $|\mathfrak{U}|$ وابسته سازیم. این رابطهٔ k تایی را رابطه‌ای که φ روی $\mathfrak{U}$ تعریف می‌کند می‌نامیم. به‌طورکلی، یك رابطهٔ k تایی روی $|\mathfrak{U}|$ ، در $\mathfrak{U}$ تعریف‌پذیر نامیده می‌شود اگر و تنهـا اگر فرمولی (که متغیرهای آزاد آن در بین $\mathbf{v}_۱$، . . . ، $\mathbf{v}_k$ هستند) وجود داشته باشد که آن را در $\mathfrak{U}$ تعریف کند.

مثال. فرض‌کنیم قسمتی از زبان مربوط به‌نظریهٔ اعداد را در اختیار داشته باشیم، مشخصاً، زبان ما دارای پارامترهای ∀، ۰، $\mathbf{S}$، $+$، . است. فرض‌کنیم $\mathfrak{N}$، ساخت زیر باشد:

$|\mathfrak{N}|$ برابر N، مجموعهٔ اعداد طبیعی است.
$۰^{\mathfrak{N}}$ برابر عدد صفر است.
$\mathbf{S}^{\mathfrak{N}}$، $+^{\mathfrak{N}}$، و $.^{\mathfrak{N}}$ بترتیب همان S، $+$، و . هستند که بترتیب توابع تالی، جمع، وضرب می‌باشند.

همهٔ اینها دریك معادله به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\mathfrak{N}=(N,\ ۰,\ S,\ +,\ .).$$

از روابط روی N، برخی در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیرند و برخی دیگر نیستند. می‌دانیم برخی ازاین روابط، تعریف‌پذیرنیستند، زیرا تعداد روابط در N شمارش‌ناپذیر است، درصورتی‌که تعداد فرمولهای تعریف‌کننده فقط $\aleph_0$ است. (با این حال، برای ارائهٔ مثالی مشخص، یك مشکل ذاتی وجود دارد. بالاخره، اگرچیزی تعریف‌ناپذیر باشد، گفتن این‌که آن چیزدقیقاً چیست، مشکل است. بعداً، مثال مشخصی را خواهیم دید: مجموعهٔ اعدادگودل[1] جمله‌ها صادق در $\mathfrak{N}$؛ به‌بخش ۵.۳ مراجعه‌کنید.)

۱. رابطهٔ ترتیبی $\{\langle m, n\rangle : m < n\}$ با فرمول

$$\exists \mathbf{v}_۳\, \mathbf{v}_۱ + \mathbf{S}\mathbf{v}_۳ \approx \mathbf{v}_۲$$

در $\mathfrak{N}$ تعریف می‌شود.

۲. به‌ازای هرعدد طبیعی n، $\{n\}$ تعریف‌پذیر است. به‌عنوان مثال، $\{۲\}$ با

$$\mathbf{v}_۱ \approx \mathbf{SS}۰$$

تعریف می‌شود. بهمین دلیل، می گوییم‌که n یك عضوتعریف‌پذیر در $\mathfrak{N}$ است.

۳. مجموعهٔ اعداد اول در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر است. اگر پارامترهای ۱ و $<$ برای ۱ و $<$ را در اختیار داشتیم، می‌توانستیم فرمول زیر را به‌کارگیریم:

$$۱ < \mathbf{v}_۱ \wedge \forall \mathbf{v}_۲\, \forall \mathbf{v}_۳(\mathbf{v}_۱ \approx \mathbf{v}_۲ \cdot \mathbf{v}_۳ \rightarrow \mathbf{v}_۲ \approx ۱ \vee \mathbf{v}_۳ \approx ۱).$$

ولی از آنجاکه $\{۱\}$ و $<$ خود در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیرند، افزودن پارامترهایی برای آنها کاملاً غیرضروری است؛ در عوض، می‌توانیم صرفاً از تعاریف مربوطه استفاده‌کنیم. بنابراین مجموعهٔ اعداد اول با فرمول زیرتعریف می‌شود:

$$\exists \mathbf{v}_۳\, \mathbf{S}۰ + \mathbf{S}\,\mathbf{v}_۳ \approx \mathbf{v}_۱ \wedge \forall \mathbf{v}_۲ \forall \mathbf{v}_۳(\mathbf{v}_۱ \approx \mathbf{v}_۲ \cdot \mathbf{v}_۳ \rightarrow \mathbf{v}_۲ \approx \mathbf{S}۰ \vee \mathbf{v}_۳ \approx \mathbf{S}۰).$$

۴. عمل نمارسانی، $\{\langle m,n,p\rangle : p = m^n\}$، نیزدر $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر است. این‌مطلب

---
1. Gödel

چندان واضح نیست؛ لذا بعداً با استفاده از قضیهٔ ماندهٔ چینی (در بخش ۷.۳) اثباتی برای آن عرضه خواهیم داشت.

درحقیقت، بعداً نشان خواهیم داد که هر رابطهٔ تصمیم‌پذیر در N، در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر است، همانگونه‌که هر رابطهٔ شماره‌پذیر کارامد و خیلی روابط دیگر. تا اندازه‌ای می‌توان پیچیدگی یك رابطهٔ تعریف‌پذیر را با پیچیدگی ساده‌ترین فرمول تعریف‌کنندهٔ آن اندازه گرفت. این مطلب مجدداً در انتهای بخش ۵.۳، مطرح خواهد شد.

همریختی

فرض کنیم $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دوساخت برای زبان موردنظر باشند. یك همریختی مانند h از $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$، تابع $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ است به‌طوری که

(الف) به‌ازای هر نماد محمولی n موضعی P و هر n گانهٔ $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ازعضوهای $|\mathfrak{A}|$ داشته باشیم:

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ اگر و تنها اگر $\langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$.

(ب) به‌ازای هر نماد تابعی n موضعی f و هر n گانه از عضوهای $|\mathfrak{A}|$، داریم:

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

در مورد نماد ثابت c، فرمول بالا به‌صورت زیر در می‌آید:

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

شرایط (الف) و (ب)، معمولاً این چنین بیان می‌شوند: «h روابط و توابع را حفظ می‌کند.» (بعضی از مؤلفان صورت ضعیفی ازشرط (الف) را به‌کار می‌برند؛ همریختی در نزد ما همان «همریختی قوی» آنهاست.)

اگرعلاوه براین، h یك به‌یك نیز باشد، دراین‌صورت آن‌را یك یکریختی از $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$ می‌نامیم. اگریك یکریختی از $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$ وجود داشته باشد (یعنی، یك یکریختی مانند h که به‌ازای آن $\operatorname{ran} h = |\mathfrak{B}|$)، آنگاه $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ را یکریخت می‌گوییم (ومی‌نویسیم $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$).

به‌احتمال زیاد خواننده قبلاً با این مفهوم درحالتهای ویژه‌ای، نظیر گروه یا هیأت، مواجه شده است.

مثال. فرض‌کنیم زبانی با پارامترهای $\forall$، $+$، و $\cdot$ داشته باشیم. فرض‌کنیم $\mathfrak{A}$ ساخت $(N, +, \cdot)$ باشد. می‌توانیم یك تابع $h : N \to \{e, o\}$ را با

$$h(n) = \begin{cases} e & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ o & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

تعریف کنیم. دراین صورت، h یك همریختی از $\mathcal{U}$ در $\mathcal{B}$ است که دراینجا $|\mathcal{B}| = \{e, o\}$، و $+^{\mathfrak{B}}$، $\cdot^{\mathfrak{B}}$ با جدولهای زیر داده شده‌اند:

$+^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	o
o	o	e

$\cdot^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	e
o	e	o

می‌توان تحقیق کرد کــه شرط (ب) تعریف برآورده می‌شود. مثلاً، اگر a و b هردو فرد باشند، آنگاه $h(a+b) = e$ و $h(a) +^{\mathfrak{B}} h(b) = o +^{\mathfrak{B}} o = e$.

مثال. فرض کنیم $\mathbb{P}$ مجموعهٔ اعداد درست‌مثبت، $<_P$ رابطهٔ ترتیب معمولی در $\mathbb{P}$ و $<_N$ رابطـهٔ ترتیب معمولی در $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت، یـك یکریختی h از ساخت $(\mathbb{P}, <_P)$ روی ساخت $(\mathbb{N}, <_N)$ وجود دارد؛ قرار می‌دهیم $h(n) = n - 1$. همچنین نگاشت همانی $i : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ نیزیك یکریختی از $(\mathbb{P}, <_P)$ در $(\mathbb{N}, <_N)$ است. ازاین‌رو می‌گوییم $(\mathbb{P}, <_P)$ یك زیرساخت $(\mathbb{N}, <_N)$ است.

به طورکلی، دو ساخت $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$ را برای زبـان درنظر می‌گیریم بـه طوری کـه $|\mathcal{U}| \subseteq |\mathcal{B}|$. از تعریف همریختی روشن است کــه نگـاشت همانی از $|\mathcal{U}|$ در $|\mathcal{B}|$ یك یکریختی از $\mathcal{U}$ در $\mathcal{B}$ است اگر و تنها اگر

(الف) به‌ازای هرنماد محمولی P، $P^{\mathfrak{A}}$ تحدید $P^{\mathfrak{B}}$ به $|\mathcal{U}|$ باشد؛

(ب) به‌ازای هر نمـاد تابعی f، $f^{\mathfrak{A}}$ تحدید $f^{\mathfrak{B}}$ به $|\mathcal{U}|$ باشد، و به‌ازای هرنماد ثابت c، داشته باشیم $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

اگراین شرایط برقرارباشند، آنگاه $\mathcal{U}$ یك زیرساخت $\mathcal{B}$، و $\mathcal{B}$ یك‌گسترش $\mathcal{U}$ نامیده می‌شود.

این مطالب، اساساً، مفاهیم‌جبری‌اند، اما قضیهٔ زیرین آنها را به مفاهیم منطقی، چون صدق وارضا، مربوط می سازد.

قضیهٔ همریختی. فرض کنیم h یك‌همریختی از $\mathcal{U}$ در $\mathcal{B}$، و s یك نگاشت ازمجموعهٔ متغیرها در $|\mathcal{U}|$ باشد.

(الف) به‌ازای هرترم t، $h(\bar{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$، که درآن $\bar{s}(t)$ در $\mathcal{U}$ و $\overline{h \circ s}(t)$ در $\mathcal{B}$ محاسبه می‌شوند.

(ب) به ازای هرفرمول بی‌سورمانند α که فاقد نماد تساوی باشد،

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \text{ اگر وتنها اگر } \models_{\mathfrak{B}} \alpha[h \circ s].$$

(پ) اگر h یك به‌یك باشد (یعنی، یك‌یکریختی از $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$ باشد)، دراین صورت می‌توان در (ب)، شرط «فاقد نماد تساوی است» را حذف کرد.
(ت) اگر h، یك همریختی از $\mathfrak{A}$ روی $\mathfrak{B}$ باشد، دراین صورت می‌تـوان در (ب) شرط «بی‌سور» را حذف کرد.

اثبات. درقسمت (الف)، ازاستقرا نسبت به t استفاده می‌شود؛ به تمرین۱۳ مراجعه کنید.
(ب) به‌ازای فرمولی بسیط، مانند Pt، داریم:

$$\begin{aligned} \vDash_{\mathfrak{A}} Pt[s] &\Leftrightarrow \bar{s}(t)\in P^{\mathfrak{A}} \\ &\Leftrightarrow h(\bar{s}(t))\in P^{\mathfrak{B}} \quad (\text{زیرا } h \text{ یك همریختی است}) \\ &\Leftrightarrow \overline{h\circ s}(t)\in P^{\mathfrak{B}} \quad (\text{طبق (الف)}) \\ &\Leftrightarrow \vDash_{\mathfrak{B}} Pt[h\circ s]. \end{aligned}$$

با یك بحث استقرایی ساده قضیه را در موردنمادهای ربطی $\neg$ و $\rightarrow$ می‌توان اثبات کرد.
(پ) درهرحال داریم:

$$\begin{aligned} \vDash_{\mathfrak{A}} u\approx t[s] &\Leftrightarrow \bar{s}(u)=\bar{s}(t) \\ &\Rightarrow h(\bar{s}(u))=h(\bar{s}(t)) \\ &\Leftrightarrow \overline{h\circ s}(u))=\overline{h\circ s}(t) \qquad (\text{طبق (الف)}) \\ &\Leftrightarrow \vDash_{\mathfrak{B}} u\approx t[h\circ s]. \end{aligned}$$

اگر h یك به یك باشد، درقدم دوم، پیکان دوطرفه خواهد بود.
(ت) باید استدلال استقرایی قسمت (ب) را تـوسعه دهیم تا در برگیرنـده مرحلهٔ سوری نیز شود. یعنی، باید نشان دهیم‌که اگر φ دارای این خاصیت باشدکه به ازای هر s داشته باشیم:

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]\Leftrightarrow\vDash_{\mathfrak{B}} \varphi[h\circ s],$$

دراین صورت، $\forall x\,\varphi$ نیز ازاین خاصیت برخوردار است.درهرحال (به‌عنوان نتیجه‌ای‌از فرض استقرا روی φ)، استلزام زیر را داریم:

$$\vDash_{\mathfrak{B}} \forall x\,\varphi[h\circ s]\Rightarrow \vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi[s].$$

این‌نتیجه‌ای قابل قبول است؛ اگر φ، به ازای هرچیزدرمجموعهٔ بزرگ $|\mathfrak{B}|$ صادق باشد، آنگاه، به طریق اولی به ازای هرچیز متعلق به مجموعهٔ‌کوچکتر $|\mathfrak{A}|$ نیز صادق خـواهد بود. جزئیات مطلب، درمورد یك عضو a از $|\mathfrak{A}|$، چنین است :

$$\models_{\mathfrak{B}} \forall x \varphi[h \circ s] \Rightarrow \models_{\mathfrak{B}} \varphi[(h \circ s)(x|h(a))]$$

$$\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \varphi[h \circ (s(x|a))] \qquad \text{(با توجه به تساوی توابع)}$$

$$\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|a)] \qquad \text{(بنابر فرض استقرا)}$$

برای اثبات جهت‌عکس، فرض کنیم $\not\models_{\mathfrak{B}} \forall x\varphi [h \circ s]$، بنابراین، به‌ازای حداقل یك‌عضو b از $|\mathfrak{B}|$، داریم $\models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi[(h \circ s)(x|b)]$. اکنون از استلزام زیرین استفاده می‌کنیم:

(*) اگر به ازای عضوی مانند b از $|\mathfrak{B}|$، داشته باشیم $\models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi[(h \circ s)(x|b)]$
آنگاه به ازای عضوی مانند a از $|\mathfrak{A}|$ داریم $\models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi[(h \circ s)(x|h(a))]$.

زیرا با داشتن (*)، می‌توانیم چنین ادامه دهیم:

$$\models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi[(h \circ s)(x|h(a))] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \neg\varphi [h \circ (s(x|a))] \qquad \text{(باتوجه به‌تساوی توابع)}$$

$$\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi [s(x|a)] \qquad \text{(طبق فرض استقرا)}$$

$$\Rightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} \forall x \varphi [s].$$

اگر h مجموعهٔ $|\mathfrak{A}|$ را بروی $|\mathfrak{B}|$ بنگارد، آنگاه (*) بیدرنگ نتیجه می‌شود؛ a را چنان می‌گیریم که $b = h(a)$. (اما حالتهای مساعد دیگری ممکن است وجود داشته باشند که بتوان (*) را مدعی شد، بدون این‌که برد h برابر $|\mathfrak{B}|$ باشد.) ■

دوساخت $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ برای‌زبان معادل مقدماتی‌هستند ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) اگر وتنها اگر به‌ازای هرجملهٔ σ، داشته باشیم:

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \sigma.$$

به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ بالا داریم: ساختهای یکریخت، معادل مقدماتی‌اند. درحقیقت رابطه‌ای قویتر ازاین برقرار است.ساختهای یکریخت ازهر لحاظ «ساختاری» همانندند؛ آنها نه‌تنها جمله‌های مرتبهٔ اول یکسانی را ارضا می‌کنند، بلکه جمله‌های مرتبهٔ دوم (و مرتبه‌های بالاتر) یکسان را نیزارضا می‌کنند (یعنی،آنها ازمرتبهٔ دوم وبه‌بالانیزمعادل‌اند).

ساختهایی وجود دارندکه معادل مقدماتی هستند ولی‌یکریخت نیستند. به‌عنوان مثال، می‌توان نشان دادکه ساخت $(R, <_R)$ متشکل ازمجموعهٔ اعداد حقیقی همراه با رابطهٔ ترتیب معمولی، باساخت $(Q, <_Q)$ متشکل ازمجموعهٔ اعدادگویا همراه با رابطهٔ ترتیب معمولی آن، معادل مقدماتی‌اند (به بخش ۶.۲ مراجعه‌کنید). اما Q شمارش‌پذیر است درصورتی‌که R شمارش‌پذیر نیست. بنابراین این‌ساختها نمی‌توانند یکریخت باشند. در بخش ۶.۲ خواهیم دیدکه ساختن ساختهای معادل مقدّماتی با اعداد اصلی مختلف، چقدر آسان است.

مثال. تجدید دیدار. یک همریختی h از $(P, <_P)$ بروی $(N, <_N)$ داشتیم. پس، بویژه $(N, <_N) \equiv (P, <_P)$؛ پس این ساختها را نمی‌توان با جمله‌های مرتبهٔ اول از هم تشخیص داد.

علاوه بر این، خاطرنشان کردیم که نگاشت همانی یك یکریختی از $(P, <_P)$ در $(N, <_N)$ است. از این‌رو، برای تابع $s: V \to P$ و یك فرمول φ که بی‌سور باشد، داریم:

$$\models_{(P,<_P)} \varphi[s] \Leftrightarrow \models_{(N,<_N)} \varphi[s].$$

اگر φ دارای سور باشد این هم‌ارزی ممکن است برقرار نباشد. به‌عنوان مثال

$$\models_{(P,<_P)} \forall v_2 (v_1 \not\approx v_2 \to v_1 < v_2) \; [\![1]\!],$$

اما،

$$\not\models_{(N,<_N)} \forall v_2 (v_1 \not\approx v_2 \to v_1 < v_2) \; [\![1]\!].$$

یك خودریختی ساخت $\mathfrak{U}$، یك یکریختی از $\mathfrak{U}$ روی $\mathfrak{U}$ است. واضح است که تابع همانی روی $|\mathfrak{U}|$ یك خودریختی $\mathfrak{U}$ است. ممکن‌است $\mathfrak{U}$ دارای خودریختیهای غیربدیهی باشد یا نباشد. به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ همریختی، می‌توان نشان داد که یك خودریختی باید روابط تعریف‌پذیر را حفظ کند:

نتیجهٔ ۲۲ت. فرض‌کنیم h یك خودریختی‌ازساخت $\mathfrak{U}$ ، و R رابطه‌ای nتایی‌روی $|\mathfrak{U}|$ و تعریف‌پذیر در $\mathfrak{U}$ باشد. دراین‌صورت، به‌ازای هر a_1 ، . . . ، a_n در $|\mathfrak{U}|$، داریم:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R \Leftrightarrow \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in R.$$

اثبات. فرض‌کنیم φ فرمولی باشد که R را در $\mathfrak{U}$ تعریف می‌کند. باید ثابت‌کنیم

$$\models_{\mathfrak{U}} \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{U}} \varphi[\![h(a_1), \ldots, h(a_n)]\!].$$

و این از قضیهٔ همریختی بیدرنگ نتیجه می‌شود. ■

این نتیجه، گاهی، درنشان‌دادن این‌که رابطه‌ای مفروض تعریف‌پذیر نیست مفیداست. به‌عنوان‌مثال، ساخت $(R, <)$ متشکل از اعداد حقیقی همراه با رابطهٔ ترتیب معمولی‌اش رادرنظر می‌گیریم. یك خودریختی ازاین ساخت، چیزی نیست جز یك تابع h از R بروی R است‌که افزایشی سره باشد:

$$a < b \Leftrightarrow h(a) < h(b).$$

تابع h با ضابطهٔ $h(a) = a^3$ ، یك چنین خودریختی است. ازآنجا که این تابع نقاطی خارج از N را در N می‌نگارد، لذا مجموعهٔ N دراین ساخت تعریف‌پذیر نیست.

مثالی دیگر درکتابهای جبرمقدماتی یافت می‌شود که درآنها توضیح می‌دهند که طول یك بردار را درصفحه نمی‌توان برحسب جمع وضرب اسکالری بردارها تعریف کرد. زیرا، نگاشتی‌که هربردار $\mathbf{x}$ را به‌بردار $2\mathbf{x}$ منتقل می‌کند یك خودریختی ازصفحه، نسبت

به‌جمع وضرب اسکالری است، ولی طول بردار را حفظ نمی‌کند. در اصطلاح ما، ساخت مورد نظرعبارت است از:

$$(E\ ,\ +\ ,\ f_r)_{r\in R}\ ,$$

که عالم سخن‌آن صفحهٔ E است و دارای تابع دوتایی $+$ ، که همان جمع برداری است، و (به‌ازای هر r متعلق به مجموعهٔ $\mathbb{R}$) یك تابع یك‌تایی f_r است که همان ضرب اسکالری در r است. (بنابراین، زبان موردنظر، به‌ازای هـرعدد حقیقی، دارای یك نماد تابعی یك موضعی است.) نگاشت دوبرابرکنندهٔ فوق، یك همریختی این ساخت است. امـا مجموعهٔ بردارهای واحد،

$$\{\mathbf{x} : \text{و طول } \mathbf{x} \text{ برابر یك است } x \in E\},$$

راحفظ نمی‌کند. بنابراین این‌مجموعه، دراین‌ساخت، تعریف‌پذیر نیست. (ضمناً، همریختیهای فضاهای برداری را معمولاً تبدیلهای خطی می‌نامند.)

تمرین

۱. نشان دهید که

(الف) $\Gamma\,;\,\alpha \vDash \varphi$ اگروتنها اگر $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$؛ و

(ب) $\varphi \vDash\dashv \psi$ اگروتنها اگر $\vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

۲. نشان دهید که هیچ‌یك ازجمله‌های زیرین، منطقاً، از دوجملهٔ دیگرنتیجه نمی‌شود. (انجام این‌کار، با ارائهٔ ساختی‌که در آن جملهٔ موردنظرکاذب باشد ولی‌دوجملهٔ دیگرصادق باشند، شدنی است.)

(الف) $\forall x\, \forall y\, \forall z\,(Pxy \to Pyz \to Pxz)$. به‌یادآورید که‌برطبق قرارداد ما $\alpha \to \beta \to \gamma$ همان $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ است.

(ب) $\forall x\, \forall y\,(Pxy \to Pyx \to x \approx y)$.

(پ) $\forall x\, \exists y\, Pxy \to \exists y\, \forall x\, Pxy$.

۳. نشان دهید که

$$\{\forall x(\alpha \to \beta)\ ,\ \forall x\, \alpha\} \vDash \forall x\, \beta.$$

۴. نشان دهید که اگر x در α آزاد نباشد، آنگاه $\alpha \vDash \forall x\, \alpha$.

۵. نشان دهید کـه فرمول $x \approx y \to Pzfx \to Pzfy$ (که درآن f یك نماد تابعی یك موضعی و P یك نماد محمولی دوموضعی است) معتبراست.

۶. نشان دهید که فرمول θ معتبر است اگر و تنها اگر $\forall x\, \theta$ معتبر باشد.

۷. تعریف «$\mathfrak{A}$ فرمول φ را با s ارضا می‌کند» را به‌طریقی که در بخش ۲.۲ تشریح شد، مجدداً بیان کنید. یعنی، به طریقهٔ بازگشتی، تابع $\overline{h}$ را چنان تعریف کنید که $\mathfrak{A}$ فرمول φ را با s ارضا کند اگر و تنها اگر $s \in \overline{h}(\varphi)$.

۸. فرض کنید Σ یك مجموعه از جمله‌ها باشد به طوری که به‌ازای هر جملهٔ τ، یا $\Sigma \vDash \tau$ یا $\Sigma \vDash \neg\tau$. فرض کنید که $\mathfrak{A}$ یك مدل برای Σ باشد. نشان دهید که به‌ازای هر جملهٔ τ، $\vDash_{\mathfrak{A}} \tau$ اگر و تنها اگر $\Sigma \vDash \tau$.

۹. فرض کنید زبان مورد نظر دارای تساوی و یك نماد محمولی دوموضعی P باشد. برای هر یك از شرایط زیرین، جملهٔ σای پیدا کنید به‌طوری که ساخت $\mathfrak{A}$ $(=(|\mathfrak{A}|, P^{\mathfrak{A}}))$ مدلی برای σ باشد اگر و تنها اگر آن شرط برقرار باشد.

(الف) $|\mathfrak{A}|$ تنها دو عضو دارد.

(ب) $P^{\mathfrak{A}}$ تابعی از $|\mathfrak{A}|$ در $|\mathfrak{A}|$ است.

(پ) $P^{\mathfrak{A}}$ یك‌جایگشت از $|\mathfrak{A}|$ است؛ یعنی $P^{\mathfrak{A}}$ تابعی یك‌به‌یك با دامنه و برد برابر $|\mathfrak{A}|$ است.

۱۰. نشان دهید که

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_2\, Q v_1 v_2 [\![c^{\mathfrak{A}}]\!] \text{ اگر و تنها اگر } \vDash_{\mathfrak{A}} \forall v_2\, Q c v_2 .$$

در اینجا، Q یك نماد محمولی دوموضعی و c یك نماد ثابت است.

۱۱. برای هر یك از روابط زیرین، فرمولی ارائه دهید که آن را در $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ تعریف کند. (فرض می‌شود که این زبان دارای تساوی و پارامترهای $\forall$، $+$، و $\cdot$ است.)

(الف) $\{0\}$.

(ب) $\{1\}$.

(پ) $\{\langle m, n\rangle : n$ تالی m در $\mathbb{N}$ است$\}$.

(ت) $\{\langle m, n\rangle : m < n$ در $\mathbb{N}$ داشته باشیم$\}$.

۱۲. فرض کنید $\mathfrak{R}$ ساخت $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ باشد. (فرض می‌شود که زبان مورد نظر دارای تساوی، و پارامترهای $\forall$، $+$، $\cdot$ باشد. $\mathfrak{R}$، ساختی است که عالم‌سخن آن مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و $+^{\mathfrak{R}}$ و $\cdot^{\mathfrak{R}}$ همان عملهای جمع و ضرب معمولی هستند.)

(الف) فرمولی ارائه دهید که مجموعهٔ $[0, \infty)$ را در $\mathfrak{R}$ تعریف کند.

(ب) فرمولی ارائه دهید که مجموعهٔ $\{2\}$ را در $\mathfrak{R}$ تعریف کند.

*(پ) نشان دهید که اجتماع هر تعداد متناهی از فواصلی که نقاط انتهایی آنها جبری

است، در $\mathfrak{R}$، تعریف‌پذیر است. (عکس آن نیز صادق است؛ اینها تنها مجموعه‌های تعریف‌پذیر در این ساخت هستند. اما این مطلب را ثابت نخواهیم کرد.)

۱۳. قسمت (الف) قضیهٔ همریختی را ثابت کنید.

۱۴. چه زیرمجموعه‌هایی از خط حقیقی R، در $(R\ ,\ <)$ تعریف‌پذیرند؟ چه زیرمجموعه‌هایی از صفحهٔ $R \times R$، در $(R\ ,\ <)$، تعریف‌پذیرند؟

۱۵. نشان دهید که رابطهٔ جمع، یعنی مجموعهٔ $\{\langle m\ ,\ n\ ,\ p\rangle : p = n + m\}$، در $(N\ ,\ \cdot)$، تعریف‌پذیر نیست. راهنمایی: یك خودریختی $(N\ ,\ \cdot)$ را در نظر بگیرید که جای دو عدد اول را باهم عوض می‌کند.

۱۶. فرض کنید $\mathfrak{U}$ یك ساخت و B مجموعه‌ای باشد که شامل $|\mathfrak{U}|$ است. نشان دهید که یك ساخت $\mathfrak{B}$ وجود دارد که عالم‌سخن آن B است و به‌ازای هر جملهٔ σ که شامل $\approx$ نیست، داریم $\models_{\mathfrak{U}} \sigma$ اگر و تنها اگر $\models_{\mathfrak{B}} \sigma$. راهنمایی: عضو $a_0 \in |\mathfrak{U}|$ را انتخاب کنید. فرض کنید $h : B \to |\mathfrak{U}|$ تابعی باشد که نقاط واقع در $|\mathfrak{U}|$ را به‌خود آن نقاط و نقاط دیگر B را روی a_0 می‌نگارد. $\mathfrak{B}$ را بنحوی تعریف کنید که h یك همریختی از $\mathfrak{B}$ روی $\mathfrak{U}$ باشد.

۱۷. (الف) زبانی شامل تساوی در نظر بگیرید که تنها پارامتر آن (علاوه بر $\forall$) یك نماد محمولی دوموضعی P باشد. نشان دهید اگر $\mathfrak{U}$ متناهی باشد و $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{B}$، آنگاه $\mathfrak{U}$ با $\mathfrak{B}$ یکریخت است.

*(ب) نشان دهید که نتیجهٔ قسمت (الف)، صرف نظر از اینکه زبان دارای چه پارامترهایی است، برقرار است.

۱۸. یك فرمول عمومی ($\forall_1$) فرمولی است به‌صورت $\forall x_1 \ldots \forall x_n \theta$، که در آن θ بی‌سور است. یك فرمول وجود ($\exists_1$) فرمولی است که همزاد فرمولی عمومی است یعنی به صورت $\exists x_1 \ldots \exists x_n \theta$ است. فرض کنید $\mathfrak{U}$ یك زیرساخت $\mathfrak{B}$ باشد و $s : V \to |\mathfrak{U}|$.

(الف) نشان دهید که اگر $\models_{\mathfrak{B}} \varphi[s]$ و φ عمومی باشد، آنگاه $\models_{\mathfrak{U}} \varphi[s]$. و اگر $\models_{\mathfrak{U}} \psi[s]$ و ψ وجودی باشد، آنگاه $\models_{\mathfrak{B}} \psi[s]$.

(ب) نتیجه بگیرید که جملهٔ $\forall x\, Px$، منطقاً، با هیچ جملهٔ وجودی معادل نیست، و همچنین $\exists x\, Px$ نیز با هیچ جملهٔ عمومی معادل نیست.

۱۹. یك فرمول $\exists_2$ فرمولی است به صورت $\exists x_1 \ldots \exists x_n \theta$ که در آن θ عمومی است.

(الف) نشان دهید اگر یك جملهٔ $\exists_2$ که شامل نمادهای تابعی نیست، در $\mathfrak{U}$ صادق

باشد، آنگاه دریك زیرساخت متناهی از $\mathfrak{A}$ نیز صادق است.

(ب) نتیجه بگیرید که $\forall x \exists y Pxy$ منطقاً، معادل هیچ جملهٔ $\exists_2$ نیست.

۲۰. فرض کنید زبان موردنظردارای تساوی ویك نماد محمولی دوموضعی P باشد. دوساخت $(N, <)$ و $(\mathbb{R}, <)$ را برای این زبان درنظر بگیرید.

(الف) جمله‌ای پیداکنید که دریکی ازاین دوساخت صادق و دردیگری کاذب باشد.

*(ب) نشان دهید که هرجملهٔ $\exists_2$ (به‌مفهومی کـه در تمرین قبل تعریف شد) کـه در $(\mathbb{R}, <)$ صادق باشد در $(N, <)$ نیز صادق است.

۲۱. می‌توان زبان را بـا اضافه‌کردن یك سور جدید غنی کـرد. فرمول $\exists! x\, \alpha$ (بخوانید: x منحصر به‌فردی وجود دارد به‌طوری‌که α)، در $\mathfrak{A}$ با s ارضا می‌شود اگر و تنها اگر یك وتنها یك $a \in |\mathfrak{A}|$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|a)]$. فرض کنید زبان دارای نماد تساوی است و نشان دهیدکه این غنی‌کردن ظاهری است، به‌این معناکه می‌توانیم یك فرمول معمولی مانند α' بیابیم که منطقاً با $\exists! x\alpha$ معادل باشد.

۲۲. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یك ساخت و g یك تابع یك به‌یك بـا $\operatorname{dom} g = |\mathfrak{A}|$ باشد. نشان دهید که یك ساخت منحصر به‌فرد $\mathfrak{B}$ وجود دارد به‌طوری‌کـه g یك یکریختی از $\mathfrak{A}$ بروی $\mathfrak{B}$ است.

۲۳. فرض کنید h یك یکریختی‌از $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$ باشد. نشان‌دهید که یك‌ساخت $\mathfrak{C}$، یکریخت با $\mathfrak{B}$، وجود دارد به‌طوری‌کـه $\mathfrak{A}$، یك زیرساخت $\mathfrak{C}$ است. (راهنمایی: فرض کنید g یك تابع یك‌به‌یك‌با $\operatorname{dom} |\mathfrak{B}|$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in |\mathfrak{A}|$، داریم $g(h(a)) = a$. $\mathfrak{C}$ را به‌نحوی تشکیل دهید،که g یك یکریختی از $\mathfrak{B}$ بروی $\mathfrak{C}$ باشد.

۲۴. یك ساخت ثابت $\mathfrak{A}$ را درنظر بگیرید. زبان را، با افزودن یك‌نمادثابت جدید c_a به‌ازای هر $a \in |\mathfrak{A}|$، گسترش دهید. فرض‌کنید $\mathfrak{A}^+$، ساختی برای این زبان گسترش یافته‌باشد که روی پارامترهای اصلی با $\mathfrak{A}$ هم‌مقدار است، وبه c_a نقطهٔ a را نسبت می‌دهد. رابطهٔ R را روی $|\mathfrak{A}|$ برحسب نقاط $\mathfrak{A}$ تعریف‌پذیر می‌نامیم اگـر وتنها اگـر R در $\mathfrak{A}^+$ تعریف‌پذیر باشد. (این تعریف با تعریف معمولی تعریف‌پذیری تنها در این نکته متفاوت است کـه در اینجا بـه‌ازای هـرعضو $|\mathfrak{A}|$ یك پارامتر (در زبـان) داریم.) فرض کنید $\mathcal{R} = (R, <, +, \cdot)$.

(الف) نشان دهید که‌اگر A اجتماعی‌متناهی ازبازه‌های R باشد، آنگاه A، برحسب نقاط $\mathcal{R}$، تعریف‌پذیر است.

(ب) فرض کنید $\mathfrak{A} \equiv \mathcal{R}$. نشان دهیدکه هرزیرمجموعهٔ غیرتهی‌از $|\mathfrak{A}|$ که‌کراندار (نسبت به‌ترتیب $<^{\mathfrak{A}}$) وبرحسب نقاط $\mathfrak{A}$ تعریف‌پذیـر باشد، دارای یك‌کوچکترین کران بالا در $|\mathfrak{A}|$ خواهد بود.

۳.۲ یگانه خوانی[1]

همانند منطق جمله‌ها، برای اینکه بتوانیم قضیهٔ بازگشت را به‌کار بریم، به‌نتایج یگانه‌خوانی نیازمندیم. اگر ازعلامت‌گذاری لهستانی هم برای ترمها وهم برای فرمولها استفاده‌کرده بودیم، آنگاه می‌توانستیم همزمان ثابت کنیم: «ترمها به‌طورآزاد پدید می‌آیند» و«فرمولها به‌طورآزاد پدید می‌آیند.» ولی، در حقیقت، ما علامت‌گذاری مختلطی را به‌کار برده‌ایم. ازاین‌رو، اول یك اثبات یگانه‌خوانی برای ترمها ارائه خواهیم داد؛ درواقع آن اثبات درمورد هرنوع استعمال علامت‌گذاری لهستانی قابل استفاده خواهد بود. وسپس گسترشی ازآن اثبات را عرضه خواهیم کردکه فرمولها را نیز شامل شود.

به‌یادآوریدکه مجموعهٔ ترمها، ازمتغیرهاونمادهای‌ثابت، باعملهای مربوط‌به‌نمادهای تابعی، پدیدآمده‌اند. حال تابع K روی نمادهای مربوطه راچنان تعریف می‌کنیم‌که به‌ازای هرنماد s، داشته باشیم $K(s)=1-n$، که درآن n تعداد ترمهایی است‌که برای به‌دست آوردن یك ترم باید دنبال s بیاید.

$$K(x)=1-0=1 \qquad \text{به‌ازای متغیر } x\text{،}$$

$$K(c)=1-0=1 \qquad \text{به‌ازای نماد ثابت} c\text{،}$$

$$K(f)=1-n \qquad \text{به‌ازای نماد تابعی } n \text{ موضعی } f\text{،}$$

سپس K را با ضابطهٔ

$$K(s_1 s_2 \cdots s_n)=K(s_1)+K(s_2)+\cdots+K(s_n)$$

به‌مجموعهٔ عبارتهایی‌که این نمادها را به‌کار می‌بردگسترش می‌دهیم. ازآنجاکه هیچ نماد دنباله‌ای متناهی از نمادهای دیگر نیست، این تعریف ابهام ندارد.

لم ۲۳الف. به‌ازای هرترم t، $K(t)=1$.

اثبات. استقرا را نسبت به t به‌کار می‌بریم. به ازای نماد تابعی n موضعی f، گام استقرایی عبارت است از:

$$K(ft_1\cdots t_n)=(1-n)+(\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ مرتبه}})=1. \qquad \blacksquare$$

درحقیقت، K به‌نحوی انتخاب شدکه تنها تابع روی این نمادها باشدکه به‌ازای آن لم ۲۳ الف برقراراست. ازاین لم نتیجه می‌شودکه اگر ε زنجیره‌ای از m ترم باشد، آنگاه $K(\varepsilon)=m$.

---

۱. خواننده‌ای‌که مایل باشد تعاریف متعدد مارا به‌عنوان تعاریفی بازگشتی بپذیرد، می‌تواند این بخش را حذف کند.

منظور از یك قطعهٔ پایانی از دنبالهٔ $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ از نمادها، دنباله‌ای به‌صورت $\langle s_k, s_{k+1}, \ldots, s_n \rangle$ است که در آن $1 \leqslant k \leqslant n$.

لم ۲۳ب. هرقطعهٔ پایانی ازیك ترم، زنجیره‌ای متشکل ازیك یاچند ترم است.

اثبات. از استقرا نسبت به‌ترم استفاده می‌کنیم. به‌ازای‌یك ترم‌که ازیك نماد تشکیل شده است (یعنی، یك متغیر یا یك نماد ثابت) نتیجه بوضوح حاصل می‌شود. به‌ازای ترم $ft_1 \ldots t_n$، هرقطعهٔ پایانی (به‌استثنای خود ترم) باید با

$$t'_k t_{k+1} \cdots t_n ,$$

برابر باشد،که در آن $k \leqslant n$ و t'_k یك قطعهٔ پایانی t_k است. براساس فرض استقرا، t'_k یك زنجیره از، مثلاً، m ترم است، که در آن $1 \leqslant m$. بنابراین روی هم $m+(n-k)$ ترم داریم. ■

نتیجهٔ ۲۳پ. هیچ قطعهٔ آغازی سرهٔ یك ترم خود ترم نیست.

اثبات. فرض‌کنیم ترم t به یك قطعهٔ آغازی سرهٔ t_1 ویك قطعهٔ پایانی t_2 تقسیم شده باشد. دراین صورت $K(t_2)+K(t_1)=K(t)=1$، و طبق لم ۲۳ب، $K(t_2)\geqslant 1$. از این‌رو $K(t_1) < 1$، و t_1 نمی‌تواند یك ترم باشد. ■

قضیهٔ یگانه‌خوانی برای ترمها. مجموعهٔ ترمها، به‌طور آزاد، از مجموعهٔ متغیرها و نمادهای ثابت با عملهای $\mathscr{F}_f$ پدید می‌آید.

اثبات. نخست، بدیهی‌است که‌اگر $f \neq g$، آنگاه $\operatorname{ran}\mathscr{F}_f$ از $\operatorname{ran}\mathscr{F}_g$ مجزا است؛ برای اثبات، لازم است‌که تنها نماد اول را بررسی‌کنیم. بعلاوه هردو برد از مجموعهٔ متغیرها ونمادهای ثابت مجزا هستند. تنها چیزی‌که باقی می‌ماند آن است‌که نشان دهیم که $\mathscr{F}_f$، وقتی به‌ترمها محدودمی‌شود یك به‌یك است. برای‌یك تابع دوموضعی f، داریم:

$$ft_1t_2 = ft_3t_4 .$$

با حذف اولین نماد، خواهیم داشت:

$$t_1t_2 = t_3t_4 .$$

اگر $t_1 \neq t_3$، آنگاه یکی ازآنها قطعهٔ‌آغازی سرهٔ دیگری خواهد بود، که این امر براساس نتیجهٔ فوق در مورد ترمها غیر ممکن است. بنابراین، $t_1 = t_3$، و درنتیجه خواهیم داشت: $t_2 = t_4$. ■

برای تعمیم این استدلال درمورد فرمولها، حال، K را روی نمادهای دیگر نیز تعریف می‌کنیم:

$$K(()=-۱;$$
$$K())=۱;$$
$$K(\forall)=-۱;$$
$$K(\neg)=۰;$$
$$K(\rightarrow)=-۱;$$
$$K(P)=۱-n$$ به‌ازای نماد محمولی n موضعی P،

دراینجا هم نکتهٔ اساسی تعریف آن است که $K(s)$ باید $n-۱$ باشدکه درآن n تعداد چیزهایی‌است (پرانتزهای راست، ترمها، یا فرمولها) که باید همراه s باشند. طبق معمول، K را به‌مجموعهٔ همهٔ عبارتها گسترش می‌دهیم:

$$K(s_۱\ldots s_n)=K(s_۱)+\ldots+K(s_n).$$

لم ۲۳ت. به‌ازای هر ف.د.س. α، $K(\alpha)=۱$.

اثبات. یك استقرای سادهٔ دیگر. ■

لم ۲۳ث. به‌ازای هر قطعهٔ آغازی سرهٔ α' از یك ف.د.س. α، $K(\alpha')<۱$.

اثبات. از استقرا نسبت به α استفاده می‌کنیم. جزئیات به‌تمرین ۱ واگذار شده است. ■

نتیجهٔ ۲۳ج. هیچ قطعهٔ آغازی سرهٔ یك فرمول خود فرمول نیست.

قضیهٔ یگانه‌خوانی برای فرمولها. مجموعهٔ ف.د.س.ها ازمجموعهٔ فرمولهای اتمی با عملهای $\mathcal{E}_\neg$، $\mathcal{E}_\rightarrow$، و $\mathcal{Q}_i$ $(i=۱, ۲, \ldots)$ به‌طورآزاد پدید آمده است.

اثبات. عملهای یك‌تایی $\mathcal{E}_\neg$ و $\mathcal{Q}_i$ بوضوح یك به‌یك می‌باشند. همانند بخش ۴.۱، می‌توان نشان دادکه تحدید $\mathcal{E}_\rightarrow$ به ف.د.س.ها یك‌به‌یك است.

آن نیمه از قضیه که دربارهٔ مجزابودن است ازملاحظات ذیل نتیجه می‌شود:

۱. $\operatorname{ran}\mathcal{E}_\neg$، $\operatorname{ran}\mathcal{Q}_i$، $\operatorname{ran}\mathcal{Q}_j$، به‌ازای $i\neq j$، و مجموعهٔ فرمولهای اتمی دوبه‌دو مجزا هستند (کافی است به‌دو نماد اولی توجه کنید.)

۲. همچنین $\operatorname{ran}\mathcal{E}_\rightarrow$، $\operatorname{ran}\mathcal{Q}_i$ و $\operatorname{ran}\mathcal{Q}_j$، به‌ازای $i\neq j$، و مجموعهٔ فرمولهای اتمی نیز دوبه‌دو مجزایند.

۳. به‌ازای ف.د.س. β، $(\neg\alpha)\neq(\beta\rightarrow\gamma)$، زیرا هیچ ف.د.س.ای با $\neg$ شروع نمی‌شود. ازاین‌رو $\operatorname{ran}\mathcal{E}_\neg$ از برد تحدید $\mathcal{E}_\rightarrow$ به‌ف.د.س.ها مجزاست. ■

همانند بخش ۴.۱، می‌توان یك آلگوریتم کارامد برای به‌دست آوردن درخت یگانه‌ای که نمایش‌دهندهٔ درخت یك ترم یا فرمول است، به‌دست آورد. در آنجا، پرانتزهای قطعهٔ آغازی را می‌شمردیم؛ واکنون تابع K را، با نقش مشابهی، به‌کار می‌گیریم.

تمرین

۱. نشان دهید که به‌ازای هر قطعهٔ آغازی سرهٔ α' از یك ف.د.س. α، $K(\alpha') < 1$.

۲. فرض کنید ε عبارتی متشکل از متغیرها، نمادهای ثابت، و نمادهای تابعی باشد. نشان دهید که ε یك ترم است اگر وتنها اگر $K(\varepsilon') = 1$ و به‌ازای هر قطعهٔ نهایی ε' از ε داشته باشیم $K(\varepsilon') > 0$. راهنمایی: نتیجهٔ قویتری را مبنی براین‌که اگر به‌ازای هر قطعهٔ نهایی ε' از ε داشته باشیم $K(\varepsilon') > 0$، آنگاه ε یك زنجیره از $K(\varepsilon)$ ترم خواهد بود، ثابت کنید.

۴.۲ یك حساب استنتاجی

فرض کنیم $\Sigma \vDash \tau$. نشان دادن این مطلب مستلزم چه روشهای اثباتی است؟ آیا، لزوماً، یك اثبات وجود دارد؟

چنین پرسشهایی، بیدرنگ، ما را به‌بررسی این مطلب که یك اثبات از چه اجزایی تشکیل یافته است، رهنمون می‌شوند. هر اثبات استدلالی است که برای نشان دادن صحت مدعای خود (دراین حالت $\Sigma \vDash \tau$) به‌دیگری عرضه می‌کنید و او را کاملاً متقاعد می‌سازد.

بنابراین، طول هراثبات باید متناهی باشد، زیرا نمی‌توان بینهایت شیء را به‌دیگری عرضه کرد. اگر مجموعهٔ Σ از فرضها نامتناهی باشد، نمی‌توان همهٔ آنها را به‌کاربرد، اما قضیهٔ فشردگی برای منطق مرتبهٔ اول (که آن را دربخش ۵.۲ با استفاده ازحساب قیاسی این بخش اثبات خواهیم کرد) وجود یك زیر مجموعهٔ متناهی Σ_0 از Σ ($\Sigma_0 \subseteq \Sigma$) را به‌طوری که $\Sigma_0 \vDash \tau$ تضمین می‌کند.

مشخصهٔ اساسی دیگر یك اثبات (علاوه برمتناهی بودن‌آن) آن است که برای‌شخص دیگری (اگر قرار است با آن اثبات قانع شود) نیز امکان بررسی اثبات واطمینان ازاین که شامل هیچ مغلطه‌ای نیست وجود داشته باشد. این بررسی بایدکارامد باشد؛ باید چنان باشد که بدون نیاز به‌هوش بیش‌از حد بررسی‌کننده، انجام پذیر باشد. بویژه، مجموعهٔ اثباتهای منتج ازمجموعهٔ تهی از فرضها (یعنی اثباتهای $\vDash \tau$) باید تصمیم‌پذیر باشد. این مطلب ایجاب‌می‌کند که مجموعهٔ‌جمله‌های اثبات‌پذیر، که مبتنی برفرضی نیستند، بایدشماره‌پذیر کارامد باشد. زیرا جمله‌های اثبات‌پذیر را می‌توان، علی‌الاصول، با پدیدآوردن همهٔ زنجیره‌های نمادها، و جداکردن اثباتها از غیر اثباتها شماره کرد. هنگامی‌که یك اثبات کشف می‌شود، آخرین سطر آن، درفهرست بروندادها وارد می‌شود. (این مطلب با دقت

بیشتری درانتهای بخش ۵.۲ بررسی خواهد شد.) اما دراینجا نیز قضیه‌ای وجود دارد (قضیهٔ شماره‌پذیری، که در بخش ۵.۲، اثبات می‌شود) که می‌گوید، تحت شرایطی معقول، مجموعهٔ جمله‌های معتبر، درواقع، شماره‌پذیر کارامد است.

بنابراین قضیهٔ فشردگی و قضیهٔ شماره‌پذیری شرایط لازمی هستند برای آنکه اثبات استلزامهای منطقی همیشه وجود داشته باشند. برعکس، ادعا می‌کنیم که این دوقضیه برای وجود اثباتها کافی هستند. زیرا فرض کنیم که داشته باشیم $\Sigma \vDash \tau$. بنا برقضیهٔ فشردگی، یك زیرمجموعهٔ متناهی مانند $\{\sigma_{\circ}, \ldots, \sigma_n\}$ از Σ وجود دارد که منطقاً τ را نتیجه می‌دهد. دراین‌صورت $\sigma_{\circ} \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \tau$، معتبر است (تمرین ۱ بخش ۲.۲). بنابراین برای این‌که به‌طورقطع نشان دهیم $\Sigma \vDash \tau$، کافی است که شخص مراحل معدودی را در شمارش فرمولهای معتبرها طی کند تا $\sigma_{\circ} \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \tau$ ظاهر شود، وآنگاه به‌ازای هر i، صحت $\sigma_i \in \Sigma$ را بررسی کند. (روش فوق را با روش پیچیده‌ای که با تعریف اولیهٔ استلزام منطقی در بخش ۲.۲ پیشنهاد شد، مقایسه کنید.) شرح روش شمارش را، که $\sigma_{\circ} \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \tau$ رابه‌دست می‌دهد، می‌توان به‌عنوان اثبات $\Sigma \vDash \tau$ درنظر گرفت. شرح فوق، به‌عنوان یك اثبات، باید مورد پذیرش هرکس که صحت این روش را برای شمارش فرمولهای معتبرها می‌پذیرد، قرار گیرد.

درمقابل بحث کلی (و نسبتاً مبهم) پیشین، خلاصه این بخش را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: برای اجتناب از اثباتهایی که در زبان طبیعی می‌کنیم، در اینجا، اثباتهای صوری را عرضه می‌کنیم،وآنها را استنتاج یا (قیاس) می‌نامیم. این اثباتها (درمدل ما از تفکر قیاسی) نشان‌دهندهٔ اثباتهایی هستندکه ریاضی‌دانان حرفه‌ای برای قانع کردن همکاران خود درمورد راستی بعضی مطالب عرضه می‌کنند. سپس، در بخش ۵.۲، نشان می‌دهیم که هرگاه $\Sigma \vDash \tau$ برقرار باشد، آنگاه (وفقط درآن صورت) یك استنتاج برای τ از Σ وجود خواهد داشت. همان‌طورکه در بحث پیشین نیز پیشنهاد شد، این امر، اثباتهای قضیهٔ فشردگی و قضیهٔ شماره‌پذیری را پیش می‌کشد؛ و در این فرایند، مشاهده خواهیم کرد که برای نمایش اینکه جمله‌ای منطقاً ازجمله‌های معین دیگری نتیجه می‌شود، چه روشهایی از استنتاج بسنده خواهد بود.

استنتاجهای صوری

بزودی، مجموعه‌ای نامتناهی Λ ازفرمولها را انتخاب خواهیم کرد وآنها را اصول منطقی خواهیم‌نامید. ونیز یك قاعدهٔ استنتاج که به‌کمك آن می‌توانیم فرمولهای‌جدیدی ازفرمولهای معین دیگری بدست آوریم. دراین صورت برای یك مجموعهٔ Γ ازفرمولها، قضایای Γ فرمولهایی‌خواهندبود که با استفاده ازاین‌قاعدهٔ استنتاج (به‌تعداد دفعات متناهی) از $\Gamma \cup \Lambda$ حاصل می‌شوند. اگر φ یك‌قضیهٔ Γ باشد (به‌صورت $\Gamma \vdash \varphi$ نوشته می‌شود)، آنگاه دنباله‌ای از فرمول‌هاکه طریقهٔ حصول φ را از $\Gamma \cup \Lambda$، با قاعدهٔ استنتاج، نشان می‌دهد (همان‌طور که ذیلاً تشریح خواهد شد)، یك استنتاج φ از Γ نامیده خواهد شد.

انتخاب مجموعهٔ Λ و انتخاب قاعده (یا قواعد) استنتاج، به‌هیچ وجه منحصر به‌فرد نیستند. در این بخش، یك حساب قیاسی برای منطق مرتبهٔ اول که از میان حسابهای ممکن انتخاب شده‌است، معرفی خواهیم کرد. (به‌عنوان مثال، با استفاده از قواعد استنتاج متعدد، می‌توان هیچ اصل‌موضوعی به‌کار نبرد، یعنی $\Lambda = \phi$. ما در مقابل این افراط، تفریط نشان می‌دهیم؛ مجموعهٔ Λی مـا مجموعه‌ای نامتناهی است، اما فقط یك قاعدهٔ استنتاج خواهیم داشت.)

قاعدهٔ استنتاج ما بـه قاعدهٔ وضع مقدم (یا قیاس استثنایی) معروف است و معمولاً به‌این‌صورت بیان می‌شود که از فرمولهای α و $\alpha \to \beta$، می‌توانیم β را استنتاج کنیم:

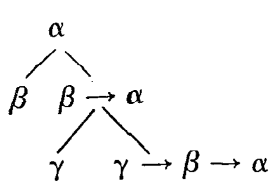
$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}.$$

بنا براین، قضایای مجموعهٔ Γ، فرمولهایی‌هستند که با استفاده ازقاعدهٔ وضع مقدم، به‌دفعات متناهی، از مجموعهٔ $\Gamma \cup \Lambda$ به‌دست می‌آیند.

می‌توان به‌قاعدهٔ وضع مقدم به‌طریق زیرنیز نگریست. مجموعهٔ Δ از فرمولها را تحت قاعدهٔ وضع مقدم بسته می‌نامیم اگر وتنها اگر هرگـاه α و $\alpha \to \beta$ در Δ باشند، آنگاه β نیز در Δ باشد. گوییم مجموعهٔ Γ استقرایی است اگر و تنها اگر $\Gamma \cup \Lambda \subseteq \Delta$ و Δ تحت قاعدهٔ وضع‌مقدم بسته باشد. دراین‌صورت، مجموعهٔ قضایای مربوط به Γ، همان کوچکترین مجموعهٔ استقرایی است. این وضع با وضعیت بخش ۲.۱ تنها در این مورد متفاوت است که در آنجا مجموعهٔ آغازی تحت توابع (همه‌جا تعریف شده) بسته بود، در صورتی کـه دراینجا مجموعهٔ آغازی تحت رابطه‌ای بسته است که فقط یك تابع «جزیی» است. (دامنهٔ این تابع همهٔ زوجهـای فرمولها را دربرندارد بلکـه فقط متشکل از زوجهایی به‌صورت $\langle \alpha, \alpha \to \beta \rangle$ است.) با وجود این ایده‌های بخش ۲.۱ را دراینجا نیز می‌توان به‌کاربرد.

بنا براین، تعریف می‌کنیم: φ یك قضیهٔ Γ است (ومی‌نویسیم $\Gamma \vdash \varphi$) اگر و تنهـا اگر φ متعلق به‌مجموعهٔ پدیدآمده از $\Gamma \cup \Lambda$ با قاعدهٔ وضع مقدم باشد. (ولی‌خواننده باید متوجه باشد که مجموعهٔ قضایای Γ، به‌طور آزاد پدید نمی‌آیند. این مطلب نشان می‌دهد کـه یك قضیه هرگز دارای یك استنتاج منحصربه‌فرد نیست.)

به‌عنوان مثـال، اگر فرمولهای β، γ، و $\gamma \to \beta \to \alpha$ همگی در $\Gamma \cup \Lambda$ باشند، آنگاه $\Gamma \vdash \alpha$؛ درخت زیر این مطلب را نشان می‌دهد:



این درخت نحوهٔ به‌دست آمدن α را نمایش می‌دهد. تعریف یـك استنتاج به‌عنوان چنین درختی، گرچه وسوسه‌انگیز (و از بعضی جهات ظریفتر است)، ولی ساده‌تر آن است کـه

استنتاجات را به‌عنوان دنباله‌هایی خطی‌که از ادغام این نوع درختها و نوشتن آنها روی خطوط مستقیم به‌دست می‌آیند، درنظر گرفت.

تعریف. یك استنتاج α از Γ دنباله‌ای مانند $\langle \alpha_0 , \ldots , \alpha_n \rangle$ از فرمولهاست به‌طوری‌که $\alpha_n = \varphi$ و به‌ازای هر $i \leqslant n$ یا داشته باشیم
(الف) α_i در $\Gamma \cup \Lambda$، و یا
(ب) j و k کوچکتر از i وجود دارند که α_i با قاعدهٔ وضع مقدم از α_j و α_k به‌دست می‌آید (یعنی، $\alpha_k = \alpha_j \to \alpha_i$).

در بخش ۲.۱ ، دنباله‌هایی که هم‌اکنون تشریح شد (یعنی، استنتاجها) دنباله‌های ساختمانی نامیده می‌شدند. در آنجا نشان دادیم که C_* (مجموعهٔ چیزهایی که دارای دنباله‌های ساختمانی هستند) و C^* (اشتراك همهٔ مجموعه‌های استقرایی) مساوی‌اند. حال آن نتیجه را، در مورد $\Gamma \cup \Lambda$ و قاعدهٔ وضع مقدم، تکرار می‌کنیم:

قضیهٔ ۲۴الف. یك استنتاج برای α از Γ وجود دارد اگر وتنها اگر α قضیه‌ای از Γ باشد.

اثبات. اگر یك استنتاج $\langle \alpha_0 , \ldots , \alpha_n \rangle$ وجود داشته باشد، آنگاه (به‌استقرا نسبت به i) هر α_i، به‌مجموعهٔ پدیدآمده از $\Gamma \cup \Lambda$، با قاعدهٔ وضع مقدم، متعلق است. برعکس، مجموعهٔ فرمولهایی‌که برای آنها استنتاجهایی وجود دارد، شامل $\Gamma \cup \Lambda$ (که عضوهای آن استنتاجهای یك سطری دارند) و تحت قاعدهٔ وضع مقدم بسته است. (چرا؟) نتیجتاً، این مجموعه شامل همهٔ قضایای Γ است. ■

این مطلب، تعریف φ از Γ استنتاج‌پذیر است اگر و تنها اگر $\Gamma \vdash \varphi$، را توجیه می‌کند.

حال مجموعهٔ Λ ازاصول موضوع منطقی‌را ارائه می‌دهیم. این اصول موضوع در شش گروه مرتب شده‌اند. می‌گوییم که ف.د.س. φ یك تعمیم ψ است اگر و تنها اگر nی نامنفی و متغیرهای x_1، . . . ، x_n وجود داشته باشند که

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi.$$

حالت $n = 0$ را نیز می‌پذیریم، به‌این معنا که هرف.د.س. تعمیمی از خود است. در این صورت، اصول موضوع منطقی همگی‌تعمیمهایی‌ازف.د.س.هایی به‌صورت زیرین‌می‌باشند که در آنها x و y متغیر و α و β ف.د.س. هستند.

۱. توتولوژیها؛
۲. $\forall x \alpha \to \alpha^x_t$، که در آن t می‌تواند (تحت‌شرایط معینی) جایگزین x در α شود؛
۳. $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$؛

۴. $\alpha \to \forall x\alpha$، که در آن x در α آزاد نیست.

و اگر زبان شامل تساوی نیز باشد، در آن صورت این دو اصل موضوع را نیز به آنها می‌افزاییم:

۵. $x \approx x$؛
۶. $x \approx y \to (\alpha \to \alpha')$، که در آن α بسیط و α' از α با جایگزین کردن y به‌جای x در صفر یا چند جا (ولی الزاماً نه همه جا) حاصل می‌شود.

از بیشتر جنبه‌ها، گروههای ۳ـ۶ به‌خودی خودگویا هستند؛ بعداً مثالهای متنوعی از آنها ارائه خواهد شد. گروههای ۱ و ۲ نیازمند توضیح‌اند. اما ابتدا باید اذعان کرد که فهرست فوق از اصول موضوع منطقی چندان هم طبیعی جلوه نمی‌کند. مشاهدهٔ اینکه این شش گروه از کجا منشأ گرفته‌اند، بعداً امکان‌پذیر خواهد بود.

جایگزینی

در گروه دوم اصول موضوع داریم:

$$\forall x\, \alpha \to \alpha_t^x.$$

دراینجا α_t^x، عبارتی است که از فرمول α با جایگزینی t به‌جای متغیر x، هرجا که متغیر x در α آزاد است، به دست می‌آید. برای این مفهوم می‌توان تعریفی بازگشتی ارائه کرد (وبرای ما رسماً چنین است):

۱. به ازای α بسیط، α_t^x عبارتی است که از α با جایگزینی t به جای متغیر x به دست می‌آید. (در تمرین ۱ به این مسئله بیشتر می‌پردازیم. توجه‌کنید که α_t^x خود یك فرمول است.)

۲. $(\neg\alpha)_t^x = (\neg\alpha_t^x)$.

۳. $(\alpha \to \beta)_t^x = (\alpha_t^x \to \beta_t^x)$.

۴.
$$(\forall y\, \alpha)_t^x = \begin{cases} \forall y\, \alpha & \text{اگر } x = y \\ \forall y(\alpha_t^x) & \text{اگر } x \neq y \end{cases}$$

مثالها

۱. $\varphi_x^x = \varphi$.

۲. $(Qx \to \forall x\, P\, x)_y^x = (Qy \to \forall x\, P\, x)$.

۳. اگر α فرمول $\neg \forall yx \approx y$ باشد، آنگاه $\forall x\alpha \rightarrow \alpha^x_z$ برابر است با

$$\forall x \neg \forall y\, x \approx y \rightarrow \neg \forall y\, z \approx y.$$

۴. برای α درمثال ۳، $\forall x\alpha \rightarrow \alpha^x_y$ عبارت است از

$$\forall x \neg \forall y x \approx y \rightarrow \neg \forall y\, y \approx y.$$

آخرین مثال فوق‌خطری را نشان می‌دهد که باید درمقابل آن محتاط بود. درمجموع، $\forall x\alpha \rightarrow \alpha^x_t$ به قدر کافی شباهت به یك اصل موضوع موجه دارد. («اگر α به ازای هر چیز صادق باشد، لاجرم درمورد t نیز باید صادق باشد.») اما درمثال ۴، جمله‌ای داریم به صورت $\forall x\alpha \rightarrow \alpha^x_t$ که تقریباً همیشه‌کاذب است. مقدم جملهٔ شرطی، $\forall x \neg \forall yx \approx y$، درهرساختی‌که عالم سخن‌آن شامل‌دوعضو یا بیشتر باشد صادق است. اما تالی جملهٔ‌شرطی، $\neg \forall y\, y \approx y$، درهرساختی کاذب است. بنا براین اشتباهی رخ داده است.

مشکل این است که وقتی y به جای x گذاشته شد، بیدرنگ با سور $\forall y$ «بسته‌شد». باید محدودیتی روی گروه دوم اصول موضوع اعمال کنیم که وقوع این نوع وابستگی سوری را مانع شود. به‌طور غیر صوری، می‌توان گفت‌که ترم t به‌جای x در αجایگزین شدنی نیست هرگاه متغیری مانند y در t وجود داشته باشدکه با یك‌سور $\forall y$ در α^x_t بسته شود. تعریف واقعی باباز گشت عرضه می‌شود. (ازآنجاکه این مفهوم بعدها در اثباتهای استقرایی به‌کار خواهد رفت، لذا تعریف بازگشتی‌آن درواقع کارامدترین تعریف برای آن است.)

فرض‌کنیم x یك متغیر و t یك ترم باشد. عبارت «t به‌جای x در α جایگزین‌شدنی است» را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. به ازای α ی بسیط، t همیشه‌به‌جای x در α جایگزین شدنی است. (در α هیچ سوری وجود ندارد، بنابراین هیچ وابستگی رخ نمی‌دهد.)

۲. t به‌جای x در $(\neg\alpha)$ جایگزین شدنی است اگر وتنها اگر t به جای x در α جایگزین شدنی باشد. t به جای x در $(\alpha \rightarrow \beta)$ جایگزین شدنی است اگر وتنها اگر t به‌جای x هم در α و هم β جایگزین شدنی باشد.

۳. t به‌جای x در $\forall y\alpha$ جایگزین شدنی است اگر وتنها اگر یا

(الف) x در $\forall y\alpha$ موردآزاد نداشته باشد، ویا

(ب) t شامل y نباشد و t به جای x در α جایگزین شدنی باشد.

(دراینجا نکته این است‌که مطمئن‌شویم‌که هیچ چیزی در t باپیشوند $\forall y$ بسته‌نشود وقبلاً در داخل α نیز اشتباهی نرفته باشد.)

مثلاً، درهرفرمول، x همیشه به جای خود جایگزین شدنی است. اگر t و α هیچ متغیر مشترکی نداشته باشند، آنگاه t به‌جای x در α جایگزین شدنی است.

خواننده باید درانتخاب‌کلمات احتیاط ورزد تا دچارسردرگمی نشود. حتی اگر

t به‌جای x در α جایگزین شدنی هم نباشد، بازهم می‌توان α_t^x را از α باجایگزین کردن t به‌جای x هرجاکه آزاد باشد، به دست آورد. بنابراین درتشکیل α_t^x، جایگزینی مذکور را انجام می‌دهیم حتی اگر دور از احتیاط باشد.

گروه دوم اصول موضوع متشکل ازهمهٔ تعمیمهای فرمولهایی به‌صورت

$$\forall x\alpha \to \alpha_t^x,$$

است.که درآن ترم t به‌جای متغیر x درفرمول α جایگزین شدنی است. به عنوان مثال،

$$\forall \mathbf{v}_3(\forall \mathbf{v}_1(A\mathbf{v}_1 \to \forall \mathbf{v}_2\, A\mathbf{v}_2) \to (A\mathbf{v}_2 \to \forall \mathbf{v}_2\, A\mathbf{v}_2))$$

جزءگروه دوم اصول موضوع است.دراینجا x مساوی $\mathbf{v}_1$، α مساوی $A\mathbf{v}_1 \to \forall \mathbf{v}_2\, A\mathbf{v}_2$، و t مساوی $\mathbf{v}_2$ است. ازسوی دیگر،

$$\forall \mathbf{v}_1\, \forall \mathbf{v}_2\, B\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \to \forall \mathbf{v}_2\, B\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2$$

جزءگروه دوم اصول موضوع نیست، زیرا $\mathbf{v}_2$ به‌جای $\mathbf{v}_1$ در $\forall \mathbf{v}_2\, B\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$ جایگزین شدنی نیست.

توتولوژیها

گروه اول‌اصول موضوع متشکل‌از تعمیمهای‌فرمولهایی است که توتولوژی نامیده می‌شوند. این فرمولها ف.د.س.هایی‌هستندکه ازتوتولوژیهای منطق جمله‌ها (که‌فقط دارای‌رابطهای $\neg$ و $\to$ است) با جایگزین‌کردن هرنماد جمله‌ای بـا یك ف. د.س. از زبان مرتبهٔ اول به‌دست می‌آیند. به عنوان مثال،

$$\forall x[(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (Px \to \neg \forall y \neg Py)]$$

متعلق به‌گروه اول اصول موضوع است. این فرمول تعمیمی ازفرمول داخل کروشه است، که ازیك توتولوژی عکس نقیضی

$$(\mathbf{A} \to \neg \mathbf{B}) \to (\mathbf{B} \to \neg \mathbf{A})$$

با نهادن $\forall y \neg Py$ به‌جای $\mathbf{A}$ و Px به‌جای $\mathbf{B}$ به‌دست می‌آید.

راه مستقیم‌تر دیگری نیز برای نگریستن به‌گروه اول اصول موضوع وجـود دارد. ف.د.س.ها را به دوگروه تقسیم می‌کنیم:

۱. فرمولهای اول، که فرمولهای بسیط وفرمولهایی به صورت $\forall x\, \alpha$ هستند.

۲. بقیهٔ فرمولها فرمولهای غیراول هستند، یعنی، آنهایی‌که به شکل $\neg\alpha$ یا $\alpha \to \beta$ هستند.

بنابراین هـرفرمول از فرمولهای اول به‌کمك عملهای $\mathcal{E}_\neg$ و $\mathcal{E}_\to$ ساخته مـی‌شود. اکنون به‌منطق جمله‌ها بازمی‌گردیم، منتها نمادهای جمله‌ای را فرمولهای اول زبان مرتبهٔ اول می‌گیریم. درآن صورت هرتوتولوژی منطق جمله‌ها (که در آن فقط رابطهای $\neg$ و

$\rightarrow$ به‌کار رفته است) درشمار گروه اول‌اصول موضوع خواهد بود. نیازی هم وجودندارد که نمادهای جمله‌ای را با ف.د.س.های مرتبهٔ اول جایگزین سازیم؛ زیرا اینها خود ف.د.س.های مرتبهٔ اول هستند. برعکس، هرچیزی در گروه اول اصول موضوع تعمیمی ازیك توتولوژی منطق جمله‌هاست. (دراثبات این مطلب، ازتمرین ۷ بخش ۳.۱ استفاده می‌شود.)

مثال. مجدداً فرمول

$$(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow (Px \rightarrow \neg \forall y \neg Py)$$

را درنظر می گیریم. این فرمول دونماد جمله‌ای (فرمولهای اول)، یعنی $\forall y \neg Py$ و Px است. بنابراین، جدول ارزش آن دارای چهارسطر است:

$$(\forall y\ \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow (Px \rightarrow \neg\forall y\ \neg Py)$$

T	F	F	T	$\mathbf{T}$	T	F	F T
T	T	T	F	$\mathbf{T}$	F	T	F T
F	T	F	T	$\mathbf{T}$	T	T	T F
F	T	T	F	$\mathbf{T}$	F	T	T F.

ازجدول مشاهده می‌شودکه این فرمول واقعاً یك توتولوژی است.

ازسوی‌دیگر، هیچ‌یك‌ازفرمولهای $\forall x(Px \rightarrow Px)$ و $\forall x\, Px \rightarrow Px$ توتولوژی نیستند.

توضیح: دراینجا فرض نکرده‌ایم‌که زبان مرتبهٔ اول ما فقط دارای تعداد شمارش‌پذیری فرمول است. بنابراین، گسترش از فصل اول را دریك مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر از نمادهای جمله‌ای به‌کار می گیریم.

توضیح دیگر: حال‌که فرمولهای مرتبهٔ اول ف.د.س.های منطق جمله‌ها نیز هستند، می‌توانیم مفاهیم هردوفصل ۱ و ۲ را دربارهٔ آنها به‌کاربریم. اگر φ نتیجهٔ توتولوژیك Γ باشد، آنگاه نتیجه‌می‌شودکه Γ به‌طور منطقی‌نیز φ را نتیجه می‌دهد. (تمرین۳ را ببینید.) اما عکس‌آن درست نیست. به عنوان مثال، $\forall x\, Px$ به‌طور منطقی Pc را نتیجه می‌دهد. اما Pc نتیجهٔ توتولوژیك $\forall x\, Px$ نیست، چون $\forall x\, Px$ و Pc دو نماد جمله‌ای متفاوت هستند.

قضیهٔ ۲۴ب. $\Gamma \vdash \varphi$ اگر وتنها اگر φ نتیجهٔ توتولوژیك $\Gamma \cup \Lambda$ باشد.

اثبات. ($\Leftarrow$). این امر براین حقیقت واضح متکی است‌که β یك‌نتیجهٔ توتولوژیك $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\}$ است. فرض‌کنید یك‌ارزشدهی v داریم‌که هرعضو $\Gamma \cup \Lambda$ را ارضا می کند.

با استفاده از استقرا،می‌توان دیدکه v هرقضیه‌ئی Γ را نیز ارضا می‌کند. درگام استقرایی، دقیقاً ازحقیقت واضح مذکور در بالا استفاده می‌شود.

($\Leftarrow$): فرض‌کنیم φ نتیجهٔ توتولــوژیك $\Gamma \cup \Lambda$ باشد. درایــن‌صورت، طبق نتیجهٔ قضیهٔ فشردگی (برای منطق جمله‌ها)، یك‌زیرمجموعهٔ با پایان $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ وجود داردکه φ نتیجهٔ توتولوژیك آن است. بنابراین

$$\gamma_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \gamma_m \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \lambda_n \rightarrow \varphi$$

یك توتولوژی است (به‌تمرین ۳ از بخش ۳.۱ مراجعه‌کنید) و بنابراین متعلق به Λ است. با $m+n$ بــار بــه‌کار بــردن قــاعــدهٔ وضــع مقدم روی ایــن تــوتــولــوژی و روی $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$، فرمول φ به‌دست می‌آید. ■

(دراثبات بالا،ازقضیهٔ فشردگی‌منطق جمله‌ها برای یك زبان احتمالاً شمارش‌ناپذیر استفاده‌کردیم.)

قیاسها و فراقضیه‌ها

تا اینجا توصیف مجموعهٔ اصول منطقی، Λ، را کامل‌کرده‌ایم. مجموعهٔ قضایای مجموعهٔ Γ همان مجموعهٔ پدید آمده از $\Gamma \cup \Lambda$ با قاعدهٔ وضع مقدم است. به‌عنوان مثال

$$\vdash Px \rightarrow \exists y\, Py.$$

(دراینجا $\Gamma = \varnothing$؛ و به جــای «$\varnothing \vdash \alpha$»، می‌نویسیم «$\vdash \alpha$».) فرمول $Px \rightarrow \exists y\, Py$، همان‌گونه‌که با درخت زیر نمایش داده شده است، با به‌کار بــردن (یك بار) قاعدهٔ وضع مقدم روی دوعضو از Λ حاصل می‌شود.

$$Px \rightarrow \neg\forall y \neg Py$$

$$\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px$$
(درگروه دوم اصول موضوع)

$$(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow (Px \rightarrow \neg\forall y \neg Py)$$
(درگروه اول اصول موضوع)

استنتاج $Px \rightarrow \exists y\, Py$، (از $\varnothing$)، بــا ادغام و تبدیل این درخت بــه یــك دنبالهٔ خطی سه‌عضوی به‌دست می‌آید.

به‌عنوان دومین مثال، می‌توان تعمیمی از فرمول مثال قبلی را به‌دست آورد:

$$\vdash \forall x(Px \rightarrow \exists y\, Py).$$

این مطلب به‌کمك درخت زیر، که درآن ساختن $\forall x(Px \rightarrow \exists y\, Py)$ از مجموعهٔ Λ با قاعدهٔ وضع مقدم نمایش داده شده، مشهود است:

$$\forall x(Px \rightarrow \neg\forall y \neg Py)$$

$$\forall x(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px)$$
(درگروه دوم اصول موضوع)

$$\forall x(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow \neg\forall y \neg Py)$$

(یك عضو ازگروه سوم اصول موضوع)

$$\forall x[(\forall y \neg Py \rightarrow \neg Px) \rightarrow (Px \rightarrow \neg\forall y \neg Py)]$$
(درگروه اول اصول موضوع)

دراینجا نیز می‌توان با ادغام درخت آن را به‌یك استنتاج تبدیل کرد.

در این مثالها ممکن است به‌نظر برسد که این درختها چیزی بی‌قاعده و بی‌ریشه‌اند. اما بزودی روشهایی برای ساختن چنین درختهایی، به‌طریقی نسبتاً منظم، عرضه خواهیم کرد. این روشها، برقضیهٔ تعمیم وقضیهٔ استنتاج، که در زیر شرح خواهیم داد مبتنی هستند.

توجه کنید که واژهٔ «قضیه» را دردوسطح مختلف به‌کارمی‌بریم. می‌گوییم α قضیه‌ای از Γ است هرگاه $\Gamma \vdash \alpha$. همچنین، احکام متعددی به زبان فارسی وجود دارند، نظیرحکم زیر، که هرکدام را یك قضیه می‌نامند. بروزهرگونه ابهامی محتمل می‌رسد. به‌منظورتأکید براین نکته که این گونه احکام فارسی در باب استنتاجها و قضایا هستند. و نه خود قضیه، می‌توان آنها را فراقضیه نامید.

قضیهٔ تعمیم، منعکس کنندهٔ احساس غیرصوری ما از این است که اگر بدون هیچ گونه فرض خاصی دربارهٔ x، بتوانیم فرمول $\_\_\_x\_\_\_$ را ثابت کنیم، آنگاه می‌توانیم بگوییم «چون x اختیاری بود، پس داریم $\forall x \_\_\_x\_\_\_$.»

قضیهٔ تعمیم. اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و x درهیچ فرمولی‌در Γ آزاد نباشد،آنگاه $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

اثبات. مجموعهٔ ثابت Γ و متغیر x راکه در (هیچ یك از اعضای) Γ آزاد نیست، درنظرمی‌گیریم. به‌استقرا نشان خواهیم‌دادکه به‌ازای هرقضیهٔ φ از Γ، داریم $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

برای این‌کار (طبق اصل استقرا) کافی‌است‌که نشان دهیم مجموعهٔ

$$\{\varphi : \Gamma \vdash \forall x\, \varphi\},$$

$\Gamma \cup \Lambda$ را دربردارد و تحت قاعدهٔ وضع مقدم بسته است. توجه‌کنید‌که x می‌تواند در φ آزاد باشد.

حالت ۱: φ یك‌اصل‌موضوع منطقی‌است. دراین‌صورت، $\forall x\, \varphi$ نیزیك اصل‌موضوع منطقی خواهد بود. و بنابرین $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$.

حالت ۲: $\varphi \in \Gamma$. دراین‌صورت، x در φ آزاد نیست. و ازاین‌رو

$$\varphi \to \forall x\, \varphi$$

متعلق به‌گروه چهارم‌اصول‌موضوع است. درنتیجه، همان‌گونه‌که در درخت‌زیرمشهود است، داریم $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \forall x\, \varphi \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\varphi & & \varphi \to \forall x\, \varphi
\end{tikzcd}$$

(در Γ) (درگروه چهارم اصول موضوع)

حالت ۳: φ از ψ و $\psi \to \varphi$ باقاعدهٔ وضع مقدم به‌دست‌آمده است. دراین‌صورت، طبق فرض استقرا داریم $\Gamma \vdash \forall x\, \psi$ و $\Gamma \vdash \forall x\, (\psi \to \varphi)$. این درست وضعی است که در آن گروه سوم اصول موضوع به‌کار می‌آید. این امر کـه $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$، در درخت زیر مشهود است:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \forall x\, \varphi \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\forall x\, \psi & & \forall x\, \psi \to \forall x\, \varphi \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& \forall x(\psi \to \varphi) & & \forall x(\psi \to \varphi) \to (\forall x\, \psi \to \forall x\, \varphi)
\end{tikzcd}$$

(درگروه سوم اصول موضوع)

بنابراین، و براساس استقرا، به‌ازای هرقضیهٔ φ از Γ داریم. $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$. ■

(تنها دلیل وجود گروههای سوم و چهارم اصول موضوع در اثبات فوق تعیین شده است.)

این محدودیت که x در Γ آزاد نباشد اساسی است. مثلاً، $Px \nvDash \forall x\, Px$، و بنا بر این براساس قضیهٔ درستی در بخش ۵.۲، $Px \nvdash \forall x\, Px$. ازسوی دیگر، x درفرمول φ عموماً آزاد نیست. مثلاً، درابتدای این زیربخش، نخست نشان دادیم که

$$\vdash (Px \to \exists y\, Py).$$

دومین مثال درآنجا، یعنی

$$\vdash \forall x (Px \to \exists y\, Py),$$

ازمثال اول، مانند حالت ۳ اثبات فوق، به‌دست‌آمد.

مثال. $\forall x \forall y\, \alpha \vdash \forall y \forall x\, \alpha$.

اثبات قضیهٔ تعمیم، درواقع بیش ازآنچه‌که در حکم بیان شده بود ارائه می‌دهد. این اثبات نشان می‌دهد که درصورت داشتن یك استنتاج φ از Γ، چگونه می‌توان آن را به‌طور مؤثر مبدل به‌یك استنتاج $\forall x\, \varphi$ از Γ کرد.

لم ۲۴پ (قاعدهٔ T). اگر $\Gamma \vdash \alpha_1$، . . . ، $\Gamma \vdash \alpha_n$ و β نتیجهٔ توتولوژیك $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ باشد، آنگاه $\Gamma \vdash \beta$.

اثبات. $\alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n \to \beta$ یك توتولوژی است وبنابراین یك اصل‌موضوع منطقی است. حال قاعدهٔ وضع مقدم را n مرتبه به‌کارمی‌بریم. ■

قضیهٔ استنتاج. اگر $\Gamma ; \gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$.

(وارون این قضیه نیز بوضوح برقرار است؛ در حقیقت، وارون این قضیه اساساً همان قاعدهٔ وضع مقدم است.)

اثبات اول.

$\Gamma ; \gamma \vdash \varphi$ اگروتنها اگر φ یك نتیجهٔ توتولوژیك $(\Gamma ; \gamma) \cup \Lambda$ باشد،

اگروتنها اگر $(\gamma \to \varphi)$ یك نتیجهٔ توتولوژیك $\Gamma \cup \Lambda$ باشد،

اگروتنها اگر $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$. ■

اثبات دوم. دراثبات دوم، برخلاف اثبات اول، ازقضیهٔ فشردگی برای منطق‌جمله‌ها، استفاده نمی‌شود، این اثبات، به طریقی مستقیم، چگونگی تبدیل استنتاج φ از $\Gamma ; \gamma$ را برای به‌دست آوردن استنتاج $(\gamma \to \varphi)$ از Γ نشان می‌دهد. به‌استقرا، نشان می‌دهیم که به‌ازای هرقضیهٔ φ از $\Gamma ; \gamma$، فرمول $(\gamma \to \varphi)$ یك قضیهٔ Γ است.

حالت ۱: $\varphi = \gamma$. دراین‌صورت واضح است که $\vdash (\gamma \to \varphi)$.

حالت ۲: φ یك اصل موضوع منطقی یا عضوی از Γ است. دراین‌صورت داریم $\Gamma \vdash \varphi$؛ و $(\gamma \to \varphi)$ یك نتیجهٔ توتولوژیك φ است؛ بنابراین براساس قاعدهٔ T، داریم $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$.

حالت ۳: φ با قاعدهٔ وضع مقدم از ψ و $\psi \to \varphi$ به دست آمده است. بر اساس فرض استقرا، داریم $\Gamma \vdash (\gamma \to \psi)$ ، $\Gamma \vdash (\gamma \to (\psi \to \varphi))$. و مجموعهٔ $\{\gamma \to \psi, \gamma \to (\psi \to \varphi)\}$ نتیجهٔ توتولوژیك $\gamma \to \varphi$ را دارد. بنابراین، طبق قاعدهٔ T، $\Gamma \vdash (\gamma \to \varphi)$.

بنابراین، براساس استقرا، به‌ازای هر φی استنتاج‌پذیر از $\Gamma; \gamma$، نتیجه برقرار است. ■

نتیجهٔ ۲۴ت (عکس‌نقیض). $\Gamma; \varphi \vdash \neg\psi$ اگر و تنها اگر $\Gamma; \psi \vdash \neg\varphi$.

اثبات.

$$\Gamma; \varphi \vdash \neg\psi \Longrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \neg\psi \quad \text{(بنا بر قضیهٔ استنتاج)}$$
$$\Longrightarrow \Gamma \vdash \psi \to \neg\varphi \quad \text{(بنا بر قاعدهٔ T)}$$
$$\Longrightarrow \Gamma; \psi \vdash \neg\varphi \quad \text{(بنا بر قاعدهٔ وضع مقدم)}$$

(درگام دوم ازاین مطلب که $\psi \to \neg\varphi$ نتیجهٔ توتولوژیك $\varphi \to \neg\psi$ است استفاده کردیم.)
بنا بر تقارن، وارون آن نیز برقرار است. ■

می‌گوییم یك مجموعه از فرمولها ناسازگار است اگر و تنها اگر فرمولی مانند β وجود داشته باشد که β و $\neg\beta$ هردو از قضایای مجموعهٔ مزبور باشند. (در چنین حالتی، هرفرمول α یك قضیهٔ این مجموعه است، زیرا $\beta \to \neg\beta \to \alpha$ یك توتولوژی است.)

نتیجهٔ ۲۴ث (برهان خلف). اگر $\Gamma; \varphi$ ناسازگار باشد، آنگاه $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

اثبات. از قضیهٔ استنتاج نتیجه می‌شود که $\Gamma \vdash (\varphi \to \beta)$ و $\Gamma \vdash (\varphi \to \neg\beta)$. و $\{\varphi \to \beta, \varphi \to \neg\beta\}$ نتیجهٔ توتولوژیك $\neg\varphi$ را دارد. ■

مثال. $\vdash \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$.

در اینجا اگر اثبات را از آخر به‌اول شروع کنیم، مسئله آسانترحل می‌شود.
بنا برقضیهٔ استنتاج، کافی است نشان دهیم $\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$.
بنا برقضیهٔ تعمیم، کافی است نشان دهیم $\exists x \forall y \varphi \vdash \exists x \varphi$.
کافی است نشان دهیم $\neg\forall x \neg\forall y \varphi \vdash \neg\forall x \neg\varphi$، زیرا همان فرمول قبلی است.
بنا برقضیهٔ عکس‌نقیض (وقاعدهٔ T)، کافی است نشان دهیم $\forall x \neg\varphi \vdash \forall x \neg\forall y \varphi$.
طبق قضیهٔ تعمیم، کافی است نشان دهیم $\forall x \neg\varphi \vdash \neg\forall y \varphi$.
بنا برقضیهٔ برهان خلف، کافی است نشان دهیم که $\{\forall x \neg\varphi, \forall y \varphi\}$ ناسازگاراست.
و این کار شدنی است:

۱. براساس گروه دوم اصول موضوع و قاعدهٔ وضع مقدم داریم $\forall x \neg\varphi \vdash \neg\varphi$.
۲. به‌همان دلیل، داریم $\forall y \varphi \vdash \varphi$.
سطرهای ۱ و ۲ نشان می‌دهندکه $\{\forall x \neg\varphi, \forall y \varphi\}$ ناسازگار است.

خط مشی

همان‌طورکه ازمثال فوق استنباط می‌شود، قضایای تعمیم واستنتاج (وبه‌نسبت کمتری نتایج آنها) درنشان دادن این امرکـه بعضی از فرمولها استنتاج‌پذیرند بسیار مفید هستند. ولی مسئلهٔ خط مشی هنوز مطرح است: به‌ازای Γ و φ داده شده، برای نشان دادن $\Gamma \vdash \varphi$، از کجا باید آغازکـرد؟ علی‌الاصول، می‌توان شروع به‌شمارش همهٔ دنباله‌هـای متناهی از ف.د.س.ها کرد تا به‌استنتاج φ از Γ رسید. گرچه این روش برای یافتن یك استنتاج، در صورت وجود، (برای زبانهای بخصوصی) روش مؤثری است، لکن بیرون از حوزه‌های نظری، کارایی آن بی‌اندازه اندك است.

یك روش آن است که زبان صوری راکنارگذاریم، و اثباتی به‌زبان فارسی ارائه دهیم که در آن از صدق Γ صدق φ نتیجه شود. سپس می‌توان این اثبات در زبان فارسی را به‌صورت یك استنتاج رسمی در زبان صوری بیان‌کرد. (در صفحات آینده، روشهایی را عرضه خواهیم‌کردکـه در آنهـا این روند صوری‌سازی، به‌طریقی نسبتاً طبیعی انجام می‌پذیرد.)

همچنین، روشهای مفید دیگری نیزوجود دارندکه تنها به‌شکل نحوی φ متکی‌هستند. فرض‌کنیم φ از Γ واقعاً استنتاج‌پذیرباشد، لکن درپی یافتن اثباتی برای این امر هستیم. حالات متعددی وجود دارد:

۱. فرض‌کنیم φ به‌شکل $(\psi \to \theta)$ باشد. در این صورت،کافی است نشان دهیم که $\Gamma; \psi \vdash \theta$ (و این‌کار، همیشه امکان‌پذیر است).

۲. فرض‌کنیم φ به‌شکل $\forall x\ \psi$ باشد. اگر x در Γ آزاد نباشد،دراین‌صورت‌کافی است نشان دهیم $\Gamma \vdash \psi$. (حتی اگر x در Γ آزاد باشد، می‌توان به‌این مشکل فائق آمد. همیشه یك متغیر y وجود خواهد داشت به‌طوری کـه $\Gamma \vdash \forall y\, \psi^x_y$ و $\forall y\, \psi^x_y \vdash \forall x\, \psi$. به‌لم جایگزینی مجدد، تمرین ۹، مراجعه‌کنید.)

۳. بالأخره، فرض‌کنیم φ نقیض فرمولی باشد.

۳الف. اگر φ به‌شکل $\neg(\psi \to \theta)$ بـاشد، دراین صورت‌کافی است نشان دهیم $\Gamma \vdash \psi$ و $\Gamma \vdash \neg\theta$ (بنا برقاعدهٔ T) و این‌کار همیشه امکان‌پذیر است.

۳ب. اگرφ به‌شکل $\neg\neg\psi$ باشد، در این صورت‌کافی است نشان دهیم $\Gamma \vdash \psi$.

۳پ. تنها حالت مانده، حالتی است‌که در آن φ به‌شکل $\neg\forall x\, \psi$ است.کافی‌است نشان دهیم $\Gamma \vdash \neg\psi^x_t$،که در آن t برای x در ψ جایگزین‌شدنی است. (چرا؟) متأسفانه این‌کار همیشه امکان‌پذیر نیست. حالاتی وجود دارندکه در آنها

$$\Gamma \vdash \neg \forall x \psi,$$

مع‌هذا، به ازای هر ترم t، داریم:

$$\Gamma \nvdash \neg \psi_t^x.$$

(یکی از حالات، حالتی است که $\Gamma = \varnothing$، $\psi = \neg (Px \rightarrow \forall y Py)$) عکس نقیض در اینجا به‌کار می آید:

$$\Gamma; \alpha \vdash \neg \forall x \psi$$

اگر وتنها اگر

$$\Gamma; \forall x \psi \vdash \neg \alpha.$$

(شکل دیگری از آن چنین است: $\Gamma; \forall y \alpha \vdash \neg \forall x \psi$، هرگاه $\Gamma; \forall x \psi \vdash \neg \alpha$.) اگر همهٔ راهها به شکست انجامید، می‌توان برهان خلف راآزمود.

مثال (س۲الف). اگر x در α موردآزاد نداشته باشد،آنگاه

$$\vdash (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \leftrightarrow \forall x (\alpha \rightarrow \beta).$$

برای اثبات این مطلب، (طبق قاعدهٔ T) کافی است نشان دهیم

$$\vdash (\alpha \rightarrow \forall x \beta) \rightarrow \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$$

و

$$\vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta).$$

درمورد قسمت اول، (طبق قضایای استنتاج) کافی است نشان دهیم

$$\{(\alpha \rightarrow \forall x \beta), \alpha\} \vdash \beta.$$

که این‌کار بسادگی انجام‌پذیر است؛ زیرا $\forall x \beta \rightarrow \beta$ يك اصل موضوع است.

برای به دست‌آوردن عکس‌آن، یعنی

$$\vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta),$$

کافی است (طبق قضایای استنتاج وتعمیم) نشان دهیم

$$\{\forall x (\alpha \rightarrow \beta), \alpha\} \vdash \beta.$$

که این هم بسادگی انجام‌پذیر است.

در مثال بالا، مـی‌توان α را به $\neg \alpha$ و β را بـه $\neg \beta$ تبدیل کـرد و با استفاده از توتولوژی عکس نقیض، نتیجهٔ زیر را به دست‌آورد:

(س۳ب) اگر x در α آزاد نباشد، آنگاه

$$\vdash (\exists x \beta \rightarrow \alpha) \leftrightarrow \forall x (\beta \rightarrow \alpha).$$

به خواننده توصیه می‌شود که خود را دربارهٔ معتبر بودن فرمول بالامتقاعد سازد.
درنوشتن یك استنتاج غالباً خلاصه‌نویسی مفید است، همانند مثال زیر:

مثال (ت۲). $\vdash \forall x\, \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$

اثبات

۱. $\vdash x \approx y \rightarrow x \approx x \rightarrow y \approx x.$	۱.ص.۶.
۲. $\vdash x \approx x.$	۱.ص.۵.
۳. $\vdash x \approx y \rightarrow y \approx x.$	۱،۲؛T
۴. $\vdash \forall x\, \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x).$	۳؛تع۲ ■

درسطر ۱، «۱.ص.۶.» به‌معنای آن‌است که‌فرمول مزبور به‌گروه ششم اصول‌موضوع متعلق است. درسطر ۳، «T؛۲،۱» به معنای آن است‌که این سطر از سطرهای ۱و۲ براساس قاعدهٔ T به دست می‌آید. درسطر۴، «۳؛ تع۲» به معنای آن است‌که قضیهٔ تعمیم رامی‌توان دوبار روی سطر ۳ به‌کاربرد تاسطر ۴ به‌دست‌آید. به‌همین ترتیب، برای ارجاع به قاعدهٔ وضع مقدم، قضیهٔ استنتاج، وبرهان خلف بترتیب از «و.م.» ، «ق.ا.»، و «ب.خ.»استفاده می‌کنیم.

باید تأکید شود که چهار سطر شماره‌دار بالا، یك استنتاج کامل $\forall x\, \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$ نیستند، بلکه سطوربالا اثباتی است (درفرازبان،که در اینجا زبان فارسی است) برای‌این‌که چنین استنتاجی وجود دارد. کوتاهترین استنتاجی‌که مؤلف برای $\forall x\, \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$ می‌شناسد، دنباله‌ای متشکل ازهفده فرمول است.

مثال. $\vdash x \approx y \rightarrow \forall z\, Pxz \rightarrow \forall z\, Pyz$

اثبات

۱. $\vdash x \approx y \rightarrow Pxz \rightarrow Pyz.$	۱.ص.۶.
۲. $\vdash \forall z\, Pxz \rightarrow Pxz$	۱.ص.۲.
۳. $\vdash x \approx y \rightarrow \forall z\, Pxz \rightarrow Pyz.$	۱،۲؛T
۴. $\{x \approx y,\ \forall z\, Pxz\} \vdash Pyz.$	۳؛و.م.۲
۵. $\{x \approx y,\ \forall z\, Pxz\} \vdash \forall z\, Pyz.$	۴؛تع
۶. $\vdash x \approx y \rightarrow \forall z\, Pxz \rightarrow \forall z\, Pyz$	۵؛ق.ا.۲ ■

مثال(ت۵). فرض‌کنیم f یك نماد تابعی دوموضعی باشد. دراین صورت

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (x_1 \approx y_1 \to x_2 \approx y_2 \to f x_1 x_2 \approx f y_1 y_2).$$

اثبات. دوعضو از گروه ششم اصول موضوع عبارت‌اند از:

$$x_1 \approx y_1 \to f x_1 x_2 \approx f x_1 x_2 \to f x_1 x_2 \approx f y_1 x_2$$
$$x_2 \approx y_2 \to f x_1 x_2 \approx f y_1 x_2 \to f x_1 x_2 \approx f y_1 y_2.$$

از $\forall x\, x \approx x$ (درگروه پنجم اصول موضوع) نتیجه می گیریم که

$$f x_1 x_2 \approx f x_1 x_2.$$

سه فرمول عرضه شده نتیجهٔ توتولوژیك

$$x_1 \approx y_1 \to x_2 \approx y_2 \to f x_1 x_2 \approx f y_1 y_2$$

را دارند. ■

مثال. (الف) $\{\forall x(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash Qc$. نشان‌دادن این‌که چنین استنتاجی وجود دارد، مشکل نیست. استنتاج کامل متشکل از هفت‌فرمول است.

(ب) $\{\forall x(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash Qy$. این درست همانند (الف) است. دراینجا، نکتهٔ جالب توجه آن است که می‌توانیم با گذاشتن y به جای c، از همان استنتاج هفت‌سطری استفاده کنیم.

(پ) $\{\forall x(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash \forall y\, Qy$. این مطلب، بنا برقضیهٔ تعمیم از (ب) نتیجه می‌شود.

(ت) $\{\forall x(Px \to Qx), \forall z\, Pz\} \vdash \forall x\, Qx$ این‌مطلب از (پ) وبا بهره‌گیری از $\forall y\, Qy \vdash \forall x\, Qx$، نتیجه می‌شود.

قسمتهای (الف) و (ب) مثال پیشین، نوعی تعویض‌پذیری نمادهای ثابت را با متغیرهای آزاد نشان می‌دهد. شکل دیگری ازقضیهٔ تعمیم، که درزیر می آید و قسمت (پ) مثالی ازآن است، براساس این تعویض‌پذیری است. قسمت (ت)، ازنتیجه ۲۴ج به‌دست می‌آید. البته φ^c_y نتیجهٔ تعویض c با y در φ است.

قضیهٔ ۲۴ج (تعمیم روی ثابتها). فرض‌کنیم $\Gamma \vdash \varphi$ و c نماد ثابتی باشدکه در Γ وجود ندارد. دراین‌صورت، متغیری مانند y وجود دارد (که‌در φ وجود ندارد) به‌طوری که $\Gamma \vdash \forall y\, \varphi^c_y$. علاوه براین، استنتاجی از $\forall y\, \varphi^c_y$ وجود داردکه درآن c ظاهر نمی‌شود.

اثبات. فرض‌کنیم $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$، یك‌استنتاج φ از Γ باشد. (بنابراین $\alpha_n = \varphi$.)

فرض‌کنیم y اولین متغیری باشد که در هیچ‌یك از α_iها وجود ندارد. ادعا می‌کنیم که

$$\langle(\alpha_\circ)^c_y, \cdots, (\alpha_n)^c_y\rangle \qquad (*)$$

یك استنتاج φ^c_y از Γ است. بنابراین باید بررسی شود کـه هر $(\alpha)^c_k$ در $\Gamma\cup\Lambda$ است و یا از فرمولهای قبلی به‌کمك قاعدهٔ وضع مقدم به‌دست می‌آید.

حالت ۱: $\alpha_k\in\Gamma$. دراین صورت، c در α_k وجود ندارد. بنابراین $(\alpha_k)^c_y=\alpha_k$، که آن هم در Γ است.

حالت ۲: α_k یك اصل موضوع منطقی است. در این صورت، $(\alpha_k)^c_y$ نیز یك اصل موضوع منطقی خواهد بود. (فهرست اصول موضوع منطقی را بخوانید و توجه‌کنید کـه ورودیك متغیرجدید، یك اصل موضوع منطقی را به‌اصل‌موضوع منطقی‌دیگر تبدیل می‌کند.)

حالت ۳: α_k، به‌کمك قاعدهٔ وضع مقدم از α_i و $(\alpha_j\,(=(\alpha_i\rightarrow\alpha_k))$، به‌ازای i و j کوچکتر از k حاصل‌می‌شود. دراین‌صورت $(\alpha_j)^c_y=((\alpha_i)^c_y\rightarrow(\alpha_k)^c_y)$. بنابراین $(\alpha_k)^c_y$، از $(\alpha_i)^c_y$ و $(\alpha_j)^c_y$ به‌کمك قاعدهٔ وضع مقدم به‌دست می‌آید.

بدین‌ترتیب، اثبات این مطلب که $(*)$ استنتاجی‌برای φ^c_y است، کامل می‌شود. فرض کنیم Φ یك‌زیرمجموعهٔ متناهی از Γ باشد که در$(*)$ به‌کار رفته‌است. بنابراین، $(*)$استنتاج φ^c_yاز Φ است و y در Φ وجود ندارد. بنابراین، براساس قضیهٔ تعمیم، داریم $\Phi\vdash\forall y\,\varphi^c_y$. علاوه براین، یك استنتاج $\forall y\,\varphi^c_y$ از Φ وجود داردکـه در آن c ظاهر نمی‌شود. (زیرا اثبات قضیهٔ تعمیم نمـاد جدیدی به استنتاج نمی‌افزاید.) این نیزیك استنتاج $\forall y\,\varphi^c_y$ از Γ است. ■

بعضی اوقات می‌خواهیم این قضیه را درمواردی به‌کاربریم که در آنها هر متغیری نمی‌تواندکارساز باشد. در توصیف زیر متغیر x ازپیش انتخاب شده است.

نتیجهٔ ۲۴چ. فرض‌کنیم $\Gamma\vdash\varphi^x_c$، که در آن نماد ثابت c در Γ یا در φ ظاهرنشده است. دراین صورت، $\Gamma\vdash\forall x\,\varphi$، و یك استنتاج $\forall x\,\varphi$ از Γ وجود داردکـه در آن c ظاهر نمی‌شود.

اثبات. براساس قضیهٔ فوق، یك استنتاج از $\forall y\,((\varphi^x_c)^c_y)$ از Γ (بـدون c) وجود دارد، کـه در آن y در φ^x_c مورد ندارد. ولی از آنجاکه c در φ ظاهرنمی‌شود، خواهیم داشت:

$$(\varphi^x_c)^c_y=\varphi^x_y\,.$$

تنهاچیزی که می‌ماند، نشان دادن $\forall y\,\varphi^x_y\vdash\forall x\,\varphi$ است. این‌کار را بآسانی‌می‌توان انجام داد، به‌شرط آنکه بدانیم

$$(\forall y\,\varphi^x_y)\rightarrow\varphi$$

یك اصل موضوع است. یعنی، x باید بتواند در φ^x_y جایگزین y شود، و $(\varphi^x_y)^y_x$ نیز باید

همان φ باشد. این مطلب به‌حد معقولی روشن است؛ برای جزئیات به لم جایگزینی مجدد مراجعه کنید (تمرین ۹). ■

نتیجهٔ ۲۴ح (قاعدهٔ م.س.). فرض کنیم نماد ثابت c در φ، ψ، و Γ ظاهر نشود، و داشته باشیم:

$$\Gamma; \varphi_c^x \vdash \psi .$$

دراین صورت

$$\Gamma; \exists x \varphi \vdash \psi,$$

ویك استنتاج از ψ در $\Gamma; \exists x \varphi$ وجود داردکه در آن c ظاهر نمی‌شود.

اثبات. براساس توتولوژی عکس نقیض، داریم:

$$\Gamma; \neg\psi \vdash \neg\varphi_c^x .$$

بنابراین، برطبق نتیجهٔ پیشین، به‌دست می‌آوریم:

$$\Gamma; \neg\psi \vdash \forall x \neg\varphi .$$

با به‌کاربردن مجدد عکس نقیض، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ■

«م.س.» کوتاهنوشت «معرفی سوروجودی» است، این هم ازآن اصطلاحهای سنتی است.

ما قاعدهٔ م.س. را درهیچ‌یك از اثباتهای خود به‌کارنمی‌بریم، اما این قاعده ممکن است در بعضی از تمرینها مفید باشد. این قاعـده، المثنـای صوری استدلال زیـر است: «می‌دانیم که x ی وجود دارد به‌طوری‌که ـــxـــ. آن را c می‌نامیم. اکنون از ـــcـــ می‌توانیم ψ را اثبات کنیم.» اما توجه کنید که قاعدهٔ م.س. مجوزی برای $\exists x \varphi \vdash \varphi_c^x$، که معمولاً غلط است، نیست.

مثال. یك باردیگر $\vdash \exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$ را درنظرمی‌گیریم. براساس قضیهٔ استنتاج کافی است نشان دهیم

$$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi .$$

طبق قاعدهٔ م.س.، کافی است که نشان دهیم

$$\forall y \varphi_c^x \vdash \forall y \exists x \varphi,$$

که در آن c، یك ثابت جدید در زبان است. براساس قضیهٔ تعمیم، کافی است نشان دهیم

$$\forall y \varphi_c^x \vdash \exists x \varphi .$$

ولی، از آنجاکه داریم $\forall y \varphi_c^x \vdash \varphi_c^x$، کافی است نشان دهیم که

$$\varphi_c^x \vdash \exists x \varphi .$$

که این هم براساس عکس نقیض معادل است با

$$\forall x \neg\varphi \vdash \neg \varphi^x_c$$

که آن هم واضح است (براساس گروه دوم اصول موضوع و قاعدهٔ وضع مقدم).

حال، اجمالاً می‌توان چگونگی تشکیل فهرست اصول موضوع منطقی خاص خود را شرح دهیم. توتولوژیها بدین‌منظور وارد فهرست شدندکه عهده‌دارنمادهای ربطی جمله‌ای باشند. (در این قسمت، می‌توان با منظور داشتن تنها برخی از توتولوژیها صرفه‌جویی قابل‌توجهی کرد) گروه دوم اصول موضوع منعکس‌کنندهٔ معنای موردنظر نماد سوری است. سپس، برای اینکه بتوانیم قضیهٔ تعمیم را اثبات کنیم، گروههای سوم وچهارم اصول موضوع را اضافه کردیم ومقرر داشتیم که تعمیم هراصل موضوع خود نیز یك‌اصل موضوع باشد.

خواهیم دیدکه گروههای پنجم وششم اصول موضوع برای اثبات خواص اساسی تساوی‌کافی هستند؛ به‌زیربخش مربوط به‌تساوی مراجعه‌کنید.

به‌طوری که در بخش ۵.۲ ثابت خواهیم کرد، هراصل موضوع منطقی یك فرمول معتبر است. شاید به‌نظرساده‌تر بیایدکه مجموعهٔ همهٔ فرمولهای معتبر را به‌عنوان اصول موضوع منطقی به‌کار ببریم. اما براین‌کار دواعتراض وارد است. یکی آنکه مفهوم اعتبار مفهومی است معنایی. یعنی، تعریف آن به‌معانی ممکن (یعنی‌ساختهای) زبان ومفهوم صدق دریك ساخت مربوط می‌شود. برای هدفهای فعلی خود (مثلاً، اثبات این‌امرکه فرمولهای معتبر شماره‌پذیرکارامدند) به‌یك ردهٔ Λ، که توسط یك تعریف نحوی پایانمند تعریف شده است، نیازمندیم. یعنی، تعریف Λ فقط معطوف به‌جنبه‌هایی است‌که به‌ترتیب نمادها در اصول موضوع منطقی مربوط می‌شود، وهیچ اشاره‌ای به‌مفهوم صدق دریك ساخت ندارد. دومین اعتراض، در منظور داشتن تمامی فرمولهای معتبر به‌عنوان اصول موضوع، ازاینجا ناشی می‌شودکه ترجیح می‌دهیم مجموعهٔ Λ تصمیم‌پذیر باشد، درصورتی‌که مجموعهٔ فرمولهای معتبر تصمیم‌پذیر نیست.

گونه‌های الفبایی

غالباً، هنگامی‌که فرمولهایی نظیر

$$\forall x(x \not\approx 0 \rightarrow \exists y\, x \approx \mathbf{S} y)$$

را مورد بحث قرار می‌دهیم، به‌انتخاب خاص متغیرهای x و y توجه نداریم. می‌خواهیم که $\langle x, y\rangle$ زوجی‌ازمتغیرهای متمایز باشد، ولی‌اغلب فرق نمی‌کندکه این زوج، $\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_9\rangle$ باشد یا $\langle \mathbf{v}_8, \mathbf{v}_1\rangle$.

اما هنگامی‌که بخواهیم ترم t رادریك فرمول جایگزین‌کنیم، درآن صورت انتخاب متغیرهای سورها در جایگزین شوندگی t وعدم آن، نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. در این

زیربخش، به‌بحث دربارهٔ چاره‌جویی در مواردی که جایگزین شوندگی با شکست مواجه می‌شود می‌پردازیم. به‌طوری که خواهیم دید با تعویض مناسب متغیرهای سورها، همواره می‌توان به‌این مشکل فائق آمد. مثلاً، فرض کنیم می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall y\, Pyy.$$

مشکلی که وجود دارد آن است که y به‌جای x در $\forall y\, Pxy$، جایگزین شدنی نیست، و بنابراین جملهٔ بالا در زمرهٔ گروه دوم اصول موضوع قرار نمی‌گیرد. این دردسری است که محصول انتخاب ناجور متغیرهاست. به‌عنوان مثال، نشان دادن

$$\vdash \forall x \forall z\, Pxz \to \forall y\, Pyy$$

متضمن هیچ مشکلی نیست. بنابراین می‌توانیم مسئلهٔ اصلی خود را حل کنیم به‌شرط اینکه بدانیم

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall x \forall z\, Pxz$$

که این مطلب نیز، متضمن هیچ مشکلی نیست.

این روش غیرمستقیم (یعنی درج $\forall x \forall z\, Pxz$ بین $\forall x \forall y\, Pxy$ و $\forall y\, Pyy$)، یك نمونه ازدستهٔ معینی ازمسائل است. مثلاً، فرض کنیم می‌خواهیم ترم t را درف.د.س. φ جایگزین x سازیم. اگر t، درواقع، قابل‌چنین جایگزینی نباشد، دراین صورت، $\forall x\, \varphi$ را با $\forall x\, \varphi'$ تعویض می‌کنیم که درآن t در φ' با x جایگزین شدنی است. در مثال بالا، φ همان فرمول $\forall y\, Pxy$، و φ' همان فرمول $\forall z\, Pxz$ است. در حالت کلی، فرق بین φ و φ' تنها در انتخاب متغیرهای سوری است. لکن φ' را باید، به‌طریقی درست چنان ساخت که با φ به‌طور منطقی معادل باشد. برای مثال، تعویض $\forall y\, Pxy$ با $\forall x\, Pxx$، ویا تعویض $\forall y \forall z\, Qxyz$ با $\forall z \forall z\, Qxzz$، درست نخواهد بود.

قضیهٔ ۲۴خ (وجودگونه‌های الفبایی). فرض کنیم φ یك‌فرمول، t یك ترم، و x یك متغیر باشد. دراین صورت، می‌توانیم فرمولی مانند φ' بیابیم (که فقط درانتخاب‌متغیرهای سوری با φ اختلاف دارد) به‌طوری که

(الف) $\varphi \vdash \varphi'$ و $\varphi' \vdash \varphi$؛

(ب) t در φ' با x جایگزین شدنی است.

اثبات. t و x را ثابت درنظر می‌گیریم. و φ' را با بازگشت روی φ می‌سازیم. اولین حالتها ساده‌اند: اگر φ بسیط باشد، قرار می‌دهیم $\varphi'=\varphi$، که در این صورت $(\neg\varphi)'=(\neg\varphi')$، و $(\varphi \to \psi)'=(\varphi' \to \psi')$. امـا اکنون، حالت $(\forall y\, \varphi)'$ را در نظر می‌گیریم. اگر y در t ظاهر نشود، یا $x=y$، دراین صورت، می‌توان بسادگی قرار داد $(\forall y\, \varphi)'=\forall y\, \varphi'$. اما درحالت کلی، باید متغیر را تغییر دهیم.

یك متغیر z انتخاب می‌کنیم که در φ' یا در t یا در x ظاهر نمی‌شود. سپس، قرار

می‌دهیم: $(\forall y\,\varphi)' = \forall z(\varphi')^y_z$. برای بررسی این امر که (ب) برقرار است، توجه می‌کنیم که z در t ظاهر نمی‌شود و t در φ' با x جایگزین شدنی است (براساس فرض استقرا). بنابراین (از آنجا که $x \neq z$) t نیز در $(\varphi')^y_z$ با x جایگزین شدنی است. برای تحقیق این امر که (الف) برقرار است، محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$\varphi \vdash \varphi'$	بنا به فرض استقرا
$\therefore \forall y\,\varphi \vdash \forall y\,\varphi'.$	
$\forall y\,\varphi' \vdash (\varphi')^y_z$	زیرا z در φ' ظاهر نمی‌شود
$\therefore \forall y\,\varphi' \vdash \forall z(\varphi')^y_z$	بنا به تعمیم
$\therefore \forall y\,\varphi \vdash \forall z(\varphi')^y_z.$	

درجهت دیگر

$\forall z(\varphi')^y_z \vdash ((\varphi')^y_z)^z_y,$	بنا به تمرین ۹ همان φ' است
$\varphi' \vdash \varphi$	بنا به فرض استقرا
$\therefore \forall z(\varphi')^y_z \vdash \varphi;$	
$\therefore \forall z(\varphi')^y_z \vdash \forall y\,\varphi$	بنا بر تعمیم

درآخرین مرحله، از این مطلب استفاده شد که y در $(\varphi')^y_z$ آزاد نیست مگر اینکه $y = z$، و بنابراین y، درهرصورت، در $\forall z(\varphi')^y_z$ آزاد نیست. ■

فرمولهایی چون φ' را که در اثبات قضیهٔ فوق ساخته شد گونه‌های الفبایی φ می‌نامیم. نتیجهٔ این قضیه این است که نباید ازعدم موفقیت در جایگزینی هراس داشت؛ گونهٔ الفبایی صحیح مشکل را برطرف می‌سازد.

تساوی

دراینجا (با فرض اینکه زبان ما شامل $\approx$ است)، به‌فهرست‌کردن قضایایی دربارهٔ تساوی می‌پردازیم که دربخش آتی مورد نیاز خواهند بود. اولاً، رابطهٔ تعریف شده با $v_1 \approx v_2$، بازتابی، متقارن، ومتعدی است (یعنی یك رابطهٔ هم‌ارزی است):

ت ۱: $\vdash \forall x\, x \approx x$

اثبات. متعلق به‌گروه پنجم اصول موضوع است. ■

ت ۲: $\vdash \forall x \forall y(x \approx y \to y \approx x)$

اثبات. درصفحهٔ ۱۲۸ آورده شد. ■

ت ۳: $\vdash \forall x \forall y \forall z(x \approx y \rightarrow y \approx z \rightarrow x \approx z)$

اثبات. تمرین ۱۱. ■

علاوه‌براین، لازم است که بدانیم، تساوی بانمادهای تابعی ومحمولی‌ساز گاراست:

ت ۴: (برای نماد محمولی دوموضعی P):

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2(x_1 \approx y_1 \rightarrow x_2 \approx y_2 \rightarrow P x_1 x_2 \rightarrow P y_1 y_2).$$

و به‌همین ترتیب، برای نمادهای محمولی n موضعی.

اثبات. کافی است نشان دهیم

$$\{x_1 \approx y_1 ,\ x_2 \approx y_2 ,\ P x_1 x_2\} \vdash P y_1 y_2 .$$

این‌کار با به‌کاربردن قاعدهٔ وضع مقدم روی ۲ عضو از اعضای گروه ششم اصول موضوع به‌دست می‌آید:

$$x_1 \approx y_1 \rightarrow P x_1 x_2 \rightarrow P y_1 x_2,$$

$$x_2 \approx y_2 \rightarrow P y_1 x_2 \rightarrow P y_1 y_2. \quad ■$$

ت ۵: (یك نماد تابعی دوموضعی f).

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2(x_1 \approx y_1 \rightarrow x_2 \approx y_2 \rightarrow f x_1 x_2 \approx f y_1 y_2).$$

و به‌همین ترتیب، برای نمادهای تابعی n موضعی.

اثبات. درصفحهٔ ۱۲۸ آمده است. ■

اظهارات نهایی

یك کتاب منطق، در روال سنتی، بخوبی می‌تواند باهمین بخش یعنی حساب استنتاجی‌شروع شود. چنین کتابی، ابتدا اصول منطقی وقواعد استنتاج را بیان می‌کند و توضیح می‌دهد‌که چنین اصول وقواعدی، درنظر اشخاصی معقول، پذیرفتنی است. سپس، به‌نشان دادن ایــن امر که می‌توان فرمولهای‌متعددی را استنتاج کرد (یا ازاصولی غیراز اصول موضوع منطق، مانند اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، قابل استنتاج است) می‌پردازد.

دیدگاه ما کاملاً متفاوت است. چه، علاوه برچیزهای دیگر، به‌مطالعهٔ احکامی‌دربارهٔ روشهای توصیف شده دربند قبل می‌پردازیم. ودرانجام این‌کار، از هرنوع استدلال‌صحیح ریاضی،صرف‌نظر ازاینکه چنین استدلالی، نظیری درحساب استنتاجی موردنظر دارد یانه، استفاده می‌کنیم.

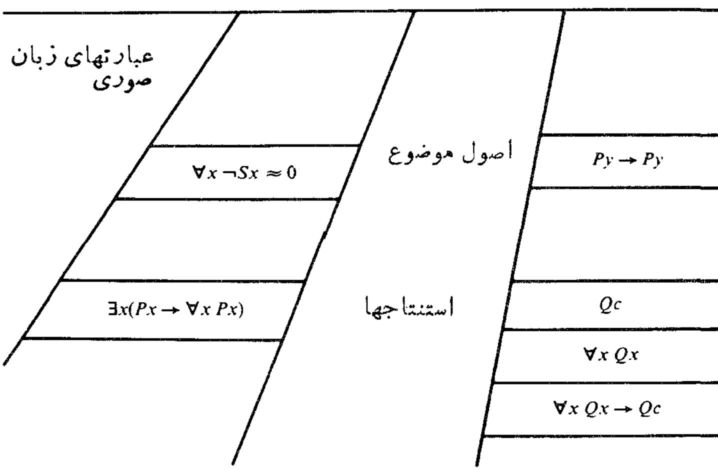
بررسی مطالبی که در پایین آمده در زبان فارسی؛

اگر $\Gamma \vDash \varphi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$.

$$\Gamma; \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$$

$$\vDash_{\mathfrak{N}} \forall x \neg Sx \approx 0$$

$$\vDash \exists x(Px \to \forall x\, Px)$$



شکل ۸. دربالا فرازبان قرار دارد که درآن زبان موضعی را مطالعه می‌کنیم.

تمرین

۱. برای یك ترم u، فرض کنید u_t^x عبارتی باشد که از u در نتیجهٔ تعویض متغیر x با ترم t به‌دست می‌آید. این تعریف را، بدون به‌کار بردن کلمهٔ «تعویض»، یا یکی ازمترادفهای آن، دوباره بیان کنید. (راهنمایی: از بازگشت روی u استفاده کنید. (توجه کنید که براساس تعریف جدید u_t^x، بوضوح، خود یك ترم است.)

۲. فرمولهای زیر به‌کدام یك از گروههای اصول موضوع متعلق‌اند؟ (ممکن است به‌هیچ گروه متعلق نباشند.)

(الف) $[(\forall x\, Px \to \forall y\, Py) \to Pz] \to [\forall x\, Px \to (\forall y\, Py \to Pz)]$

(ب) $\forall_y[\forall_x(Px \to Px) \to (Pc \to Pc)]$

(پ) $\forall x \exists y Pxy \to \exists y Pyy$

۳. (الف) فرض کنید $\mathcal{U}$، یك ساخت باشد و $s: V \to |\mathcal{U}|$. ارزشدهی v را، روی مجموعهٔ فرمولهای اول به‌صورت زیر تعریف کنید:

$v(\alpha) = T$ اگر و تنها اگر $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$.

برای هر فرمول α (اول یا غیراول)، نشان دهید که

$\bar{v}(\alpha) = T$ اگر و تنها اگر $\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$.

(ب) نتیجه بگیرید که اگر φ نتیجهٔ توتولوژیك Γ باشد، آنگاه Γ به‌طور منطقی φ را نتیجه می‌دهد.

۴. استنتاجی برای $\forall x\, \varphi \to \exists x\, \varphi$ (از $\varnothing$) عرضه کنید. (توجه کنید که فقط اثبات وجو- ین استنتاجی کافی نیست. بلکه باید استنتاج را، تماماً، بنویسید.)

۵. تابعی چون f بیابید که اگر فرمول φ دارای استنتاجی به‌طول n از مجموعهٔ Γ باشد، و اگر x در (اعضای) Γ آزاد نباشد، آنگاه $\forall x\, \varphi$ دارای استنتاجی به‌طول $f(n)$ از Γ باشد. رشد این تابع هرچه کمتر باشد بهتر است.

۶. (الف) نشان دهید که اگر $\vdash \alpha \to \beta$، آنگاه $\vdash \forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta$.

(ب) نشان دهید که، درحالت کلی، $\alpha \to \beta \models \forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta$، صادق نیست.

۷. (الف) نشان دهید که $\vdash \exists x(Px \to \forall x\, Px)$.

(ب) نشان دهید که $\{Qx,\ \forall y(Qy \to \forall z\, Pz)\} \vdash \forall x\, Px$.

۸. (س۲ب) فرض کنید x در α آزاد نباشد. نشان دهید که

$$\vdash (\alpha \to \exists x\, \beta) \leftrightarrow \exists x(\alpha \to \beta).$$

نتیجه بگیرید که، تحت همان شرایط، س۳ الف را داریم:

$$\vdash (\forall x\, \beta \to \alpha) \leftrightarrow \exists x(\beta \to \alpha).$$

۹. (لم جایگزینی مجدد) (الف) به‌کمك یك مثال، نشان دهید که $(\varphi^x_y)^y_x$، درحالت کلی، مساوی φ نیست. و نشان دهید که x هم می‌تواند در $(\varphi^x_y)^y_x$، درجایی که در φ ظاهر نشد، ظاهرشود وهم می‌تواند در φ، درجایی که در $(\varphi^x_y)^y_x$ ظاهر نشد، ظاهر شود.

(ب) نشان دهید که اگر y اصلاً در φ ظاهر نشود، آنگاه x در φ^x_y به جای y جایگزین‌شدنی است وهمچنین، $(\varphi^x_y)^y_x = \varphi$. راهنمایی: ازاستقرا نسبت به φ استفاده کنید.

۱۰. نشان دهید که

$$\forall x\, \forall y\, Pxy \vdash \forall y\, \forall x\, Pyx.$$

۱۱. (ت۳) نشان دهید که

$$\vdash \forall x\, \forall y\, \forall z(x \approx y \to y \approx z \to x \approx z).$$

۱۲. نشان دهید که می‌توان هر مجموعهٔ سازگار Γ از فرمولها را به‌یك مجموعهٔ سازگار Δ، با این خاصیت که به‌ازای‌هرفرمول α، یا $\alpha \in \Delta$، یا $(\neg\alpha) \in \Delta$، توسعه‌داد. (فرض کنید که زبان موردنظرشمارش‌پذیر باشد. ازقضیهٔ فشردگی منطق‌جمله‌ها استفاده کنید.)

۱۳. با درنظر گرفتن مجموعهٔ توتولوژیها به‌عنوان اصول منطقی وقاعدهٔ وضع مقدم به‌عنوان قاعدهٔ استنتاج، یك حساب استنتاجی برای منطق جمله‌ها، تشکیل دهید. نشان دهید که‌برای یك مجموعهٔ α ; Γ از ف.د.س.های منطق جمله‌ها، α یك قضیهٔ Γ است اگروفقط اگر Γ توتولوژیك α را نتیجه دهد.

۱۴. نشان دهید که $\vdash Py \leftrightarrow \forall x(x \approx y \to Px)$.

۱۵. نشان دهید که استنتاجهایی برای فرمولهای زیر (از $\varnothing$) وجود دارد:

(الف) $\exists x(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \exists x\, \alpha \vee \exists x\, \beta.$

(ب) $\forall x\, \alpha \vee \forall x\, \beta \to \forall x(\alpha \vee \beta).$

(پ) $\exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\, \alpha \wedge \exists x\, \beta.$

(ت) $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\, \alpha \to \exists x\, \beta).$

(ث) $\exists x(Py \wedge Qx) \leftrightarrow Py \wedge \exists x\, Qx.$

۵.۲ قضایای درستی وتمامیت

در این بخش، به‌تثبیت دو قضیهٔ مهم می‌پردازیم: صحت حساب استنتاجی‌خود $(\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi)$ و تمامیت آن $(\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi)$. پس‌از آن قادر خواهیم بودکه چندین نتیجهٔ جالب (از جمله قضیهٔ فشردگی و قضیهٔ شمارش) را به‌دست‌آوریم. گرچه حساب استنتاجی ما به‌نحوی دلخواه انتخاب شد، ولی حقیقت مهم این است که تنها برخی ازچنین حسابهای استنتاجی درست وتمام است. این مطلب، باید برای «ریاضی‌دانان» که علاقه‌مند به‌وجود اثباتهای متکی به‌اصول هستند، دلگرم‌کننده و مشوق باشد. در این مورد، آخرین زیربخش ۶.۲ را ببینید.

قضیهٔ درستی. اگر $\Gamma \vdash \varphi$، آنگاه $\Gamma \vDash \varphi$.

ایدهٔ این اثبات آن است که اصول موضوع منطقی نتیجهٔ منطقی هر چیزی هستند، و قاعدهٔ وضع مقدم خاصیت نتیجهٔ منطقی بودن را حفظ می‌کند.

لم ۲۵الف. هر اصل موضوع منطقی، معتبر است.

اثبات قضیهٔ درستی، با فرض لم بالا. به‌استقرا، نشان می‌دهیم که هرفرمول φ که از Γ استنتاج‌پذیر باشد، یك نتیجهٔ منطقی Γ است.

حالت ۱: φ یك اصل موضوع منطقی است. دراین‌صورت، طبق لم فوق، $\models \varphi$، پس به‌طریق اولی $\Gamma \models \varphi$.

حالت ۲: $\varphi \in \Gamma$. دراین صورت، واضح است که $\Gamma \models \varphi$.

حالت ۳: φ با استفاده از قاعدهٔ وضع مقدم از ψ و $\psi \to \varphi$ بـه‌دست آمده است، که (برطبق فرض استقرا) داریم $\Gamma \models \psi$ و $\Gamma \models (\psi \to \varphi)$. درایـن صورت، فوراً نتیجه می‌شود که $\Gamma \models \varphi$ (تمرین ۳ بخش قبل را ببینید). ■

البته، اثبات لم فوق باقی می‌ماند. از تمرین ۶ بخش ۲.۲، می‌دانیم کـه تعمیم یك فرمول معتبر فرمولی است معتبر. بنابراین، کافی است که تنها آن اصول منطقی را بررسی کنیم که خود تعمیمی از اصول دیگر نیستند. گروههای مختلف اصول موضوع را، به‌ترتیب پیچیدگی بررسی خواهیم کرد.

گروه سوم اصول: تمرین ۳ از بخش ۲.۲ را ببینید.

گروه چهارم اصول: تمرین ۴ از بخش ۲.۲ را ببینید.

گروه پنجم اصول: واضح است. زیرا، $\mathfrak{A}$ فرمول $x \approx x$ را با s ارضا می‌کند اگر وتنها اگر $s(x)=s(x)$، که همیشه صادق است.

گروه اول اصول: از تمرین ۳ بخش پیشین، می‌دانیم که اگر α نتیجهٔ توتولوژیك φ باشد، آنگاه $\varnothing \models \alpha$. واین، درست همان چیزی است که لازم داریم.

گروه ششم اصول: (درتمرین ۵ بخش ۲.۲ یـك مثال از آنهـا آورده شده است): فرض‌کنیم α بسیط بوده و α'، از α باگذاشتن y بـه‌جای x درچند محل بـه‌دست آمده باشد. کافی است نشان دهیم

$$\{x \approx y,\ \alpha\} \models \alpha'.$$

بنابراین، $\mathfrak{A}$ و s دلخواهی را درنظر می‌گیریم به‌طوری که

$$\models_{\mathfrak{A}} x \approx y[s], \qquad \text{یعنی،}\ s(x)=s(y).$$

در این صورت، هرترم t دارای این خاصیت است که اگر t' از t باگذاشتن y به‌جای x درچند محل به‌دست آمده باشد، آنگاه $\bar{s}(t)=\bar{s}(t')$. این امـر واضح است؛ اثبات کامل به‌استقرا نسبت به t است.

اگر α فرمول $t_1 \approx t_2$ باشد، آنگاه α' باید $t'_1 \approx t'_2$ باشد، که در آن t'_i ، از t_i ، به‌طریقی که توصیف شد به‌دست می‌آید:

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \quad \text{اگر وتنها اگر} \quad \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2) \text{ ،}$$

$$\text{اگر و تنها اگر} \quad \bar{s}(t'_1) = \bar{s}(t'_2) \text{ ،}$$

$$\text{اگر و تنها اگر} \quad \models_{\mathfrak{A}} \alpha'[s] \text{ .}$$

به‌همین ترتیب، اگر α فرمول $Pt_1 \ldots t_n$ باشد، آنگاه α' فرمول $Pt'_1 \ldots t'_n$ است و استدلال مشابهی اعمال می‌شود.

سرانجام، به‌گروه دوم اصول موضوع می‌رسیم. بهتر است که ابتدا مثال ساده‌ای را درنظر بگیریم؛ نشان خواهیم داد که $\forall x\, Px \rightarrow Pt$ معتبر است. فرض کنیم

$$\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px\, [s].$$

دراین صورت، به‌ازای هر d متعلق به $|\mathcal{U}|$ داریم:

$$\models_{\mathfrak{A}} Px\, [s(x|d)] \text{ .}$$

پس، بخصوص، به‌ازای $d = \bar{s}(t)$ داریم:

$$\models_{\mathfrak{A}} Px\, [s(x|\bar{s}(t))] \qquad \text{(الف)}$$

این مطلب (براساس تعریف ارضا برای فرمولهای بسیط) معادل است با

$$\bar{s}(t) \in P^{\mathfrak{A}},$$

که خود معادل است با

$$\models_{\mathfrak{A}} Pt[s]. \qquad \text{(ب)}$$

برای اینکه این استدلال در مورد فرمولهای غیر بسیط نیز کارگر باشد، به‌راهی برای گذر از (الف) به (ب) نیاز داریم. این راه به‌کمك لم جایگزینی زیر به‌دست می‌آید، که بنابرآن درصورتی‌که t به‌جای x در φ گذاشته شده باشد، آنگاه

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|\bar{s}(t))] \quad \text{اگرو تنها اگر} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] \text{ .}$$

$\mathcal{U}$ و s مشخصی را درنظر می‌گیریم. به‌ازای هر ترم u ، فرض کنیم u^x_t ، نتیجهٔ گذاشتن ترم t به‌جای متغیر x در u باشد.

لم ۲۵ب. $\bar{s}(u^x_t) = \overline{s(x|\bar{s}(t))}(u)$.

این لم مدعی است که جایگزینی می‌تواند یا در ترم u و یا در s ، با نتایج معادل، انجام‌پذیرد. نمودار مربوطه، چنین است.

$$\begin{tikzcd} \text{ترمها} \arrow[rr, "\text{گذاشتن } t \text{ به‌جای } x"] \arrow[dr, swap, "\overline{s(x|\bar{s}(t))}"] & & \text{ترمها} \arrow[dl, "\bar{s}"] \\ & |\mathfrak{A}| & \end{tikzcd}$$

اثبات. به استقرا نسبت به‌ترم u. اگر u یك نماد ثابت یا متغیری غیر از x باشد، آنگاه $u^x_t = u$ و معادلهٔ مطلوب، به $\bar{s}(u) = \bar{s}(u)$ تقلیل می‌یابد. اگر $u = x$، آنگاه معادله به $\bar{s}(t) = \bar{s}(t)$ تقلیل می‌یابد. گام استقرایی، اگرچه در نوشتن پرزحمت است، اما ازنظر ریاضی واضح است. ■

لم جایگزینی نیز ازنظرمحتوا با این لم‌مشابه‌است؛ می‌گوید که جایگزینی را می‌توان یا در φ، یا در s، با نتایج معادل، انجام داد. جهت دیدن یك مثال، به‌تمرین ۱۰ بخش ۲.۲ مراجعه‌کنید.

لم جایگزینی. اگر ترم t به‌جای‌متغیر x، در ف.د.س. φ، گذاشته شده باشد، آنگاه

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] \text{ اگروتنها اگر } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|\bar{s}(t))].$$

اثبات. به‌استقرا نسبت به φ نشان می‌دهیم که حکم بالا به‌ازای هر s برقراراست.

حالت ۱: φ بسیط است. دراین‌صورت، نتیجه از لم قبل به‌دست می‌آید. برای مثال، اگر φ، به‌ازای یك ترم u، فرمول Pu باشد، آنگاه

$$\models_{\mathfrak{A}} Pu^x_t[s] \quad \text{اگروتنها اگر} \quad \bar{s}(u^x_t) \in P^{\mathfrak{A}},$$

$$\text{اگروتنها اگر} \quad \overline{s(x|\bar{s}(t))}(u) \in P^{\mathfrak{A}} \qquad \text{طبق لم ۲۵ب}$$

$$\text{اگروتنها اگر} \quad \models_{\mathfrak{A}} Pu[s(x|\bar{s}(t))].$$

حالت ۲: φ، یکی ازدوفرمول $\neg\psi$، $\psi \to \theta$ است. دراین‌صورت، نتیجه درمورد φ، بلادرنگ از فرض استقرا نسبت به ψ و θ حاصل می‌شود.

حالت ۳: φ فرمول $\forall y\,\psi$ است، و x در φ آزاد نیست. دراین‌صورت، s و $s(x|\bar{s}(t))$، به‌ازای همهٔ متغیرهایی که در φ آزادند هم‌مقدار هستند؛ و φ^x_t نیز همان φ است. بنابراین، نتیجه فوراً به‌دست می‌آید.

حالت ۴: φ، عبارت است از $\forall y\,\psi$، و x در φ آزاد است. چون t به‌جای x در φ جایگزین شدنی است، می‌دانیم که y در t رخ نمی‌دهد و t به‌جای x در ψ جایگزین شدنی است (تعریف «جایگزین شدنی» را ببینید). چون y در t رخ نمی‌دهد، پس به‌ازای هر d متعلق به $|\mathfrak{A}|$،

$$\bar{s}(t) = \overline{s(y|d)}(t) \qquad (*)$$

و چون $x \neq y$، پس $\varphi_t^x = \forall y\ \psi_t^x$.

حال، $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_t^x[s]$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر d، $\models_{\mathfrak{A}} \psi_t^x[s(y|d)]$،

اگر و تنها اگر به‌ازای هر d، $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s(y|d)(x|\bar{s}(t))]$ با استفاده از فرض استقرا و $(*)$؛

اگر و تنها اگر $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|\bar{s}(t))]$.

بنابراین، طبق استقرا، این لم، لم جایگزینی، برای همهٔ φها برقرار است. ■

گروه دوم اصول موضوع: فرض کنیم t به‌جای x در φ جایگزین شدنی باشد. همچنین فرض کنیم $\mathcal{U}$، با s، فرمول $\forall x\, \varphi$ را ارضا کنـــد. باید نشان‌دهیم که $\models_{\mathfrak{A}} \varphi_t^x[s]$. می‌دانیم که به‌ازای هر d متعلق به $|\mathcal{U}|$؛

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|d)],$$

پس بخصوص، اگر $d = \bar{s}(t)$، آنگاه

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x|\bar{s}(t))].$$

بنابراین، طبق لم جایگزینی،

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi_t^x[s].$$

نتیجتاً، $\forall x\ \varphi \rightarrow \varphi_t^x$ معتبر است.

ایـــن مطلب، اثبات اینکه تمام اصل‌هـــای موضوع منطقی معتبرنـــد را کامل می‌کند. و بدین‌ترتیب، قضیهٔ درستی اثبات می‌شود.

نتیجهٔ ۲۵پ. اگر $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$، آنگاه φ و ψ به‌طور منطقی معادل‌اند.

نتیجهٔ ۲۵ت. اگر φ' یک گونـــهٔ الفبایی از φ باشد (قضیهٔ ۲۴خ را ببینید)، دراین صورت، φ و φ' به‌طور منطقی معادل‌اند.

به‌خاطر بیاورید که مجموعهٔ Γ سازگار است اگر و تنها اگر فرمولی مـــانند φ وجود نداشته باشد به‌طوری که تواماً داشته باشیم $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \neg\varphi$. بنابه‌تعریف، Γ ارضاشدنی است اگر و تنها اگر $\mathcal{U}$ و sی وجود داشته باشند که $\mathcal{U}$ هرعضو Γ را با s ارضا کند.

نتیجهٔ ۲۵ث. اگر Γ ارضاشدنی باشد، آنگاه Γ سازگار است.

این نتیجه، در واقع بـــا قضیهٔ درستی معادل است. خواننده را به‌بررسی این مطلب

دعوت می‌کنیم.

قضیهٔ تمامیت، عکس قضیهٔ درستی است و عمیقتر از آن است.

قضیهٔ تمامیت (گودل، ۱۹۳۰)

(الف) اگر $\Gamma \models \varphi$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$.

(ب) هرمجموعهٔ سازگار از فرمولها ارضاشدنی است.

درواقع قسمتهای (الف) و (ب) معادل‌اند؛ به تمرین ۲ مراجعه کنید. پس کافی است قسمت (ب) را اثبات کنیم. اثباتی که ارائه می‌دهیم برای یك زبان شمارش‌پذیر است؛ بعداً به‌تغییرات مورد نیاز برای زبانهایی با عدد کاردینال بزرگتر، اشاره خواهیم کرد. (یك زبان شمارش‌پذیر زبانی است با تعداد شمارش‌پذیری نماد، یا به‌طورمعادل (طبق قضیهٔ ۰ب) زبانی است با تعداد شمارش‌پذیری ف.د.س.)

خط‌مشی اثبات، شبیه خط‌مشیی است‌که در اثبات قضیهٔ فشردگی برای منطق جمله‌ها دنبال شد. ابتدا، با یك مجموعهٔ سازگار Γ شروع می‌کنیم. درگامهای اول تا سوم، Γ را به‌یك مجموعهٔ Δ ازفرمولها توسعه می‌دهیم‌که برای آن

(یك) $\Gamma \subseteq \Delta$.

(دو) Δ سازگار است و بیشین (ماکزیمال) است، به‌این معنا‌که به‌ازای هرفرمول α، یا $\alpha \in \Delta$ ویا $(\neg\alpha) \in \Delta$.

(سه) به‌ازای هرفرمول φ و هرمتغیر x، نماد ثابتی‌مانند c وجود دارد به‌طوری‌که

$$(\neg \forall x \varphi \rightarrow \neg \varphi_c^x) \in \Delta.$$

سپس درگام چهارم یك ساخت $\mathfrak{A}$ تشکیل می‌دهیم‌که درآن عضوهایی از Γ که شامل $\approx$ نیستند، می‌توانند ارضا شوند. $|\mathfrak{A}|$، مجموعهٔ ترمهاست، و برای یك نماد محمولی P داریم:

$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \text{ اگروتنها اگر } Pt_1 \ldots t_n \in \Delta.$$

و سرانجام، درگام پنجم، $\mathfrak{A}$ را طوری تغییرمی‌دهیم، تا دربرگیرندهٔ فرمولهای شامل نماد تساوی نیز باشد.

پیشنهاد می‌شودکه درمطالعهٔ اول، جزئیاتی که دراغلب گامها داده شده خوانده نشود. و تنها وقتی که طرح کلی بوضوح در ذهن جای گرفت، تمامی اثبات باید مورد مطالعه قرار گیرد. (قسمتهای اساسی، با خطی درحاشیهٔ راست آنها، مشخص شده است.)

اثبات. فرض کنیم Γ، مجموعه‌ای سازگار از ف.د.س.ها در یک زبان شمارش‌پذیر باشد.

گام ۱: زبان مزبور را، با افزودن مجموعه‌ای نامتناهی و شمارش‌پذیر از نمادهای ثابت جدید، توسعه‌دهید. در این صورت، Γ، به‌عنوان یک مجموعه از ف.د.س.ها درزبان جدید، سازگار می‌ماند.

جزئیات: درغیراینصورت به‌ازای حداقل یک β، یک استنتاج، (درزبان توسعه‌یافته) برای $(\beta \wedge \neg\beta)$ از Γ وجود دارد. این استنتاج فقط شامل تعدادی متناهی از نمادهای جدید خواهد بود. برطبق قضیهٔ تعمیم برای ثابتها، (قضیهٔ ۲۴ج)، هریک ازآنها [نمادهای جدید، م] را می‌توان با یک متغیر تعویض کرد. دراین‌صورت یک استنتاج (درزبان اولیه) برای $(\beta' \wedge \neg\beta')$ از Γ به‌دست می‌آید، و این با فرض سازگاری Γ درتناقض است.

گام ۲: به‌ازای‌هر ف.د.س. φ (در زبان جدید) وهرمتغیر x،می‌خواهیم ف.د.س.

$$\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c$$

را، که درآن c یکی ازنمادهای ثابت جدید است، به Γ بیفزاییم. (غرض آن است که این c داوطلب ارائهٔ یک مثال نقیض برای φ، درصورت وجود، باشد.) این کار را می‌توان به‌نحوی انجام دادکه Γ توأم با مجموعهٔ Θ، متشکل از تمامی ف.د.س.های افزوده شده، همچنان یک مجموعهٔ سازگار بماند.

جزئیات: یک شماره‌گذاری معین از زوجهای $\langle \varphi , x \rangle$ که درآن φ یک ف.د.س. (درزبان توسعه‌یافته) و x یک متغیر است، اتخاذ کنید:

$$\langle \varphi_1 , x_1 \rangle , \langle \varphi_2 , x_2 \rangle , \langle \varphi_3 , x_3 \rangle , \ldots .$$

این کار، امکان‌پذیر است، زیرا که زبان شمارش‌پذیر است. فرض کنیم θ_1 برابرفرمول

$$\neg\forall x_1 \varphi_1 \rightarrow \neg{\varphi_1}^{x_1}_{c_1}$$

باشد، که درآن c_1 اولین نماد ثابت‌جدیدی‌است که در φ_1 ظاهرنمی‌شود. سپس، $\langle \varphi_2 , x_2 \rangle$ را درنظرمی گیریم و θ_2 را تعریف می کنیم. به‌طورکلی، θ_n عبارت است از:

$$\neg\forall x_n \varphi_n \rightarrow \neg{\varphi_n}^{x_n}_{c_n} ,$$

که درآن c_n اولین نماد ثابت جدیدی است که در φ_n، یا به‌ازای هر $k < n$ در θ_k، ظاهرنمی‌شود.

فرض کنیم Θبرابرمجموعهٔ $\{\theta_1 , \theta_2 , \ldots\}$ باشد.ادعا می کنیم که $\Gamma \cup \Theta$ سازگار است. درغیراین‌صورت، (چون استنتاجها متناهی‌هستند) به‌ازای حداقل یک $m \geqslant 0$ مجموعهٔ

$$\Gamma \cup \{\theta_1 , \ldots , \theta_m , \theta_{m+1}\}$$

سازگار نیست. کوچکترین این m ها را درنظر می گیریم. دراین‌صورت، بنابر برهان

خلف، داریم:

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}.$$

اکنون θ_{m+1}، به‌ازای یك x، φ و c، همان فرمول

$$\neg\forall x\varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c$$

است. بنابراین، برطبق قاعدهٔ T، دو رابطهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\varphi,$$

$$(*)$$

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$$

ازآنجاکه c، درهیچ‌یك ازفرمولهای سمت چپ ظاهرنمی‌شود، می‌توانیم نتیجهٔ ۲۴ج را درمورد دومین اینها به‌کارببریم وحاصل زیررا به‌دست‌آوریم:

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\varphi.$$

اما این‌مطلب و $(*)$، بافرض‌کوچکترین‌بودن m (یا باسازگاری Γ درصورتی‌که $m = 0$) در تناقض است.

گام ۳: حال، مجموعهٔ سازگار $\Gamma \cup \Theta$ را به‌مجموعهٔ سازگار Δ، بنحوی توسعه می‌دهیم‌که Δ بیشین‌باشد، به‌این‌معناکه به‌ازای‌هرف.د.س. φ داریم: یا $\varphi \in \Delta$، یا $(\neg\varphi) \in \Delta$.

جزئیات: می‌توان از اثباتی‌که، درمورد مشابه، در اثبات فشردگی (منطق) جمله‌ها در بخش ۱.۷ به‌کار رفت، استفاده‌کرد. و یا می‌توان به‌طریق زیر استدلال‌کرد: فرض‌کنیم Λ، مجموعهٔ اصول موضوع منطقی برای‌زبان توسعه یافته باشد. ازآنجاکه $\Gamma \cup \Theta$ سازگار است، لذا هیچ فرمول β وجود ندارد به‌طوری که β و $\neg\beta$ هردو نتیجهٔ توتولوژیك $\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$ باشند. (این مطلب براساس قضیهٔ ۲۴ ب است؛ قضیهٔ فشردگی منطق جمله‌ها نیز به‌کار رفته است.) ازاین‌رو، یك ارزشدهی v برای مجموعهٔ همهٔ فرمولهای اول وجود داردکه (هرعضو از) $\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$ را ارضا می‌کند. فرض‌کنیم:

$$\Delta = \{\varphi : \bar{v}(\varphi) = T\}.$$

واضح است‌که به‌ازای هر φ، یا $\varphi \in \Delta$ و یا $(\neg\varphi) \in \Delta$، اما هردوی‌آنها توأماً برقرار نیستند. همچنین داریم:

$\Delta \vdash \varphi \Rightarrow$ φ نتیجهٔ توتولوژیك Δ است (چون $\Lambda \subseteq \Delta$)

$\Rightarrow v(\varphi) = T$ (چون v مجموعهٔ Δ را ارضا می‌کند)

$$\Rightarrow \varphi \in \Delta.$$

نتیجتاً، Δ سازگار است، تا چه‌رسد به‌اینکه φ و $(\neg\varphi)$ توأماً متعلق به Δ باشند.

در واقع، مستقل از چگونگی ساختن Δ، این مجموعه باید از لحاظ استنتاجی بسته باشد. زیرا

$$\Delta \vdash \varphi \Rightarrow \Delta \nvdash \neg\varphi \qquad \text{(براساس سازگاری)}$$
$$\Rightarrow (\neg\varphi) \notin \Delta,$$
$$\Rightarrow \varphi \in \Delta \qquad \text{(براساس بیشین بودن)}$$

گام ۴: اکنون از Δ، یك ساخت $\mathfrak{U}$ برای زبان جدید می‌سازیم، منتها به جای نماد تساوی (درصورت وجود) یك نماد محمولی دوجایی جدید E می‌گذاریم. خود $\mathfrak{U}$، ساختی نیست که در آن Γ ارضا شود، بلکه یك ساخت مقدماتی است.

(الف) $|\mathfrak{U}|$ = مجموعهٔ همهٔ ترمهای زبان جدید.

(ب) رابطهٔ دوتایی $E^{\mathfrak{U}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\langle u , t\rangle \in E^{\mathfrak{U}}$ اگروتنها اگر فرمول $\mathfrak{U}\approx t$، متعلق به Δ باشد.

(پ) به‌ازای هر پارامترمحمولی n موضعی P، رابطهٔ n موضعی P را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\langle t_1 , \ldots , t_n\rangle \in P^{\mathfrak{U}} \text{ اگروتنها اگر } Pt_1\ldots t_n \in \Delta$$

(ت) به‌ازای هر نماد تابعی n موضعی f، فرض کنیم $f^{\mathfrak{U}}$ تابعی باشد که به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f^{\mathfrak{U}}(t_1 , \ldots , t_n) = f t_1 \ldots t_n .$$

این تعریف شامل حالت $n=0$ نیز می‌باشد؛ برای یك نماد ثابت c، قرار می‌دهیم $c^{\mathfrak{U}}=c$. همچنین تابع $s : V \to |\mathfrak{U}|$ را، به صورت تابع همانی روی V، تعریف می‌کنیم.

دراین صورت، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر ترم t داریم $\bar{s}(t)=t$. به ازای هر ف.د.س. φ، فرض کنیم φ^*، نتیجهٔ تعویض نماد تساوی در φ با E باشد. در این‌صورت،

$$\models_{\mathfrak{U}} \varphi^*[s] \text{ اگروتنها اگر } \varphi \in \Delta.$$

جزئیات: $\bar{s}(t)=t$ را می‌توان به استقرا نسبت به t ثابت کرد، که اثباتی سرراست است.

حکم دیگر، یعنی

$\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s]$ اگروتنها اگر $\varphi \in \Delta$،

را به‌استقرا نسبت به‌تعداد جاهایی که نمادهای ربطی یا سوری در φ ظاهر می‌شوند اثبات می‌کنیم.

حالت ۱: فرمولهای بسیط. $\mathcal{U}$ را بنحوی تعریف کردیم کـه ایـن حالت بیدرنگ نتیجه شود. به‌عنوان مثال، اگر φ، فرمول Pt باشد، آنگاه

$\models_{\mathfrak{A}} Pt[s]$ اگروتنها اگر $\bar{s}(t) \in P^{\mathfrak{A}}$،

اگروتنها اگر $t \in P^{\mathfrak{A}}$،

اگروتنها اگر $Pt \in \Delta$.

به‌همین ترتیب

$\models_{\mathfrak{A}} uEt[s]$ اگروتنها اگر $\langle \bar{s}(u)\,,\ \bar{s}(t)\rangle \in E^{\mathfrak{A}}$،

اگروتنها اگر $\langle u\,,\ t\rangle \in E^{\mathfrak{A}}$،

اگروتنها اگر $u \approx t \in \Delta$.

حالت ۲: نقیض.

$\models_{\mathfrak{A}} (\neg\varphi)^*[s]$ اگروتنها اگر $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s]$،

اگروتنها اگر $\varphi \notin \Delta$ (طبق فرض استقرا)،

اگروتنها اگر $(\neg\varphi) \in \Delta$ (طبق خواص Δ).

حالت ۳: فرمولهای شرطی.

$\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \rightarrow \psi)^*[s]$ اگروتنها اگر $\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s]$ یا $\models_{\mathfrak{A}} \psi^*[s]$.

اگروتنها اگر $\varphi \notin \Delta$ یا $\psi \in \Delta$ (طبق فرض استقرا)،

اگروتنها اگر $(\neg\varphi) \in \Delta$ یا $\psi \in \Delta$،

$\Leftarrow$ $\Delta \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$، در واقع از قواعد حساب جمله‌ها به‌دست می‌آید،

$\Leftarrow$ $\varphi \notin \Delta$ یا $[\varphi \in \Delta\,,\ \Delta \vdash \psi]$،

$\Leftarrow$ $(\neg\varphi) \in \Delta$ یا $\psi \in \Delta$،

که مطلب اخیر، حلقهٔ استدلال را می‌بندد. و

$\Delta \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ اگروتنها اگر $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Delta$.

(این مطلب باید با تمرین ۲ بخش ۷.۱ مقایسه شود.)

حالت ۴: فرمولهای مسور. باید نشان دهیم که

$\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi^*[s]$ اگروتنها اگر $\forall x\, \varphi \in \Delta$.

(ایـن ابهام درعلامت‌گذاری بی‌خطر است، زیرا $\forall x(\varphi^*)$ همان $((\forall x\, \varphi)^*)$ است.) Δ شامل ف.د.س. θ:

$$\neg\forall x\, \varphi \rightarrow \neg\varphi^x_c$$

می‌باشد. برای نشان دادن اینکه

$$\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi^*[s] \Rightarrow \forall x\, \varphi \in \Delta,$$

می‌توان چنین استدلال کرد: اگر φ^* به‌ازای هرچیزصادق باشد، دراین صورت، به ازای c نیز صادق خواهد بود، که ازاینجا، وبراساس فرض استقرا، داریم $\varphi^x_c \in \Delta$. اما دراین‌صورت، داریم $\forall x\, \varphi \in \Delta$، زیرا c بنحوی انتخاب شدکه یك مثال نقیض برای φ باشد، البته در صورت وجود چنین مثالی. باجزئیات بیشتر:

$$\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi^*[s] \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s(x|c)]$$

$\Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} (\varphi^*)^x_c[s]$ (براساس لم‌جایگزینی)

$\Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} (\varphi^x_c)^*[s]$ (این همان فرمول است)

$\Rightarrow \varphi^x_c \in \Delta$ (براساس فرض استقرا)

$\Rightarrow (\neg\varphi^x_c) \notin \Delta$ (براساس‌سازگاری)

$\Rightarrow (\neg\forall x\, \varphi) \notin \Delta$ (چون $\theta \in \Delta$ وΔازلحاظ استنتاجی بسته است)

$\Rightarrow \forall x\, \varphi \in \Delta$

(این مورد، تنهاکاربرد Θ است. لازم بود بدانیم که اگر $(\neg\forall x\, \varphi) \in \Delta$، آنگـاه به‌ازای c ای مشخص، داریم $(\neg\varphi^x_c) \in \Delta$.)

اکنون به عکس حالت فوق می‌پردازیم. اجمالاً می‌توان چنین استدلال کرد:

$\not\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi^*[s] \Rightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s(x|t)]$ (برای حداقل یك t)

$\approx\!> \not\models_{\mathfrak{A}} (\varphi^x_t)^*[s]$ (براساس لم جایگزینی)

$\Rightarrow \varphi^x_t \notin \Delta$ (براساس فرض استقرا)

$\approx\!> \forall x\, \varphi \notin \Delta$ (چون Δ ازلحاظ استنتاجی بسته است)

نقص‌کار دراینجا این‌است کـه در دو استلزام موجدار ($\approx\!>$) لازم است که t به‌جای x در φ جایگزین شدنی باشد.ممکن است چنین نباشد، ولی می‌توان ازراه حل معمولی بهره‌جست: φ را به یك گونهٔ الفبایی ψ از φ،که درآن t بـه جای x جایگزین شدنـی است، تغییر می‌دهیم. دراین‌صورت،

(برای حداقل یك t، که ازین پس ثابت است) $\nvDash_{\mathfrak{A}} \forall x\varphi^*[s] \Rightarrow \nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s(x|t)]$

(براساس هم‌ارزی معنایی گونه‌های الفبایی (نتیجهٔ ۲۵ت)) $\Rightarrow \nvDash_{\mathfrak{A}} \psi^*[s(x|t)]$

(براساس لم جایگزینی) $\Rightarrow \nvDash_{\mathfrak{A}} (\psi_t^x)^*[s]$

(برطبق فرض استقرا) $\Rightarrow \psi_t^x \notin \Delta$

(زیرا Δ ازلحاظ استنتاجی بسته است) $\Rightarrow \forall x\psi \notin \Delta$

(باهم‌ارزی نحوی گونه‌های الفبایی (قضیهٔ ۲۴خ)). $\Rightarrow \forall x\varphi \notin \Delta$

بدین‌ترتیب فهرست حالتهای ممکن تکمیل می‌شود؛ حال، براساس فرض استقرا، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر φ،

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] \text{ اگر وتنها اگر } \varphi \in \Delta.$$

اگرزبان اولیهٔ مانماد تساوی را در برنداشته باشد،دراین‌صورت، کارتمام است. زیرا فقط باید $\mathcal{U}$ را به زبان اولیه محدود سازیم تا ساختی به‌دست آید که هرعضو از Γ را، با تابع همانی، ارضا سازد. اما، حال فرض می‌کنیم که زبان شامل نماد تساوی نیز باشد. دراین‌صورت، $\mathcal{U}$ دیگر مثمر ثمرنخواهد بود. مثلاً، اگر Γ شامل جملهٔ $c \approx d$ باشد (که‌درآن c و d نمادهای ثابت متمایزی هستند)، آنگاه به یك ساخت $\mathcal{B}$ نیازمند خواهیم بودکه در آن $c^{\mathfrak{B}} = d^{\mathfrak{B}}$. این $\mathcal{B}$ را همان ساخت خارج قسمت $\mathcal{U}/E$ از $\mathcal{U}$ به پیمانهٔ $E^{\mathfrak{A}}$ می‌گیریم.

گام ۵: $E^{\mathfrak{A}}$، یك رابطهٔ هم‌ارزی در $|\mathcal{U}|$ است. بـه ازای هر t متعلق به $|\mathcal{U}|$، فرض کنیم $[t]$ ردهٔ هم‌ارزی t باشد. درواقع، $E^{\mathfrak{A}}$ یك رابطهٔ همنهشتی برای $\mathcal{U}$ است. منظور این است که شرایط زیر برقرارند:

(یك) $E^{\mathfrak{A}}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی در $|\mathcal{U}|$ است.

(دو) برای هرنماد محمولی P، $P^{\mathfrak{A}}$ با $E^{\mathfrak{A}}$ توافق دارد: اگر $\langle t_0, \ldots, t_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ وبه ازای $i \leqslant n$، $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$ آنگاه $\langle t'_0, \ldots, t'_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}}$.

(سه) برای هرنماد تابعی f، $f^{\mathfrak{A}}$، با $E^{\mathfrak{A}}$ توافق دارد: اگربه ازای هر $i \leqslant n$ داشته باشیم $t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i$، آنگاه $f^{\mathfrak{A}}(t_0, \ldots, t_n) E^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(t'_0, \ldots, t'_n)$.

تحت این شرایط، می‌توانیم ساخت خارج قسمت $\mathcal{U}/E$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، تعریف کنیم:

(الف) $|\mathcal{U}/E|$، مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم ارزی عضوهای $|\mathcal{U}|$ است.

(ب) به‌ازای هرنماد محمولی n موضعی داریم:

$\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in P^{\mathfrak{A}/E}$ اگر وتنها اگر $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$.

(پ) به‌ازای هر نماد تابعی n موضعی f داریم:

$$f^{\mathfrak{A}/E}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n)].$$

این شامل حالت $n = 0$ نیزخواهد بود:

$$c^{\mathfrak{A}/E} = [c^{\mathfrak{A}}].$$

فرض‌کنیم $h: |\mathcal{U}| \rightarrow |\mathcal{U}/E|$ نگاشت طبیعی باشد:

$$h(t) = [t].$$

دراین صورت، h یك همریختی از $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}/E$ است. افزون براین، $E^{\mathfrak{A}/E}$ رابطهٔ تساوی در $|\mathcal{U}/E|$ می‌باشد. نتیجتاً، به ازای هرφ:

$$\begin{aligned} \varphi \in \Delta &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi^*[h \circ s] \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi[h \circ s]. \end{aligned}$$

بنابراین، $\mathcal{U}/E$ هرعضو Δ (ودرنتیجه، هرعضو Γ) را با $h \circ s$ ارضا می‌کند.

جزئیات: به‌یادآوریدکه

$tE^{\mathfrak{A}}t'$ اگر و تنها اگر $(t \approx t') \in \Delta$

اگر و تنها اگر $\Delta \vdash t \approx t'$.

(یك) $E^{\mathfrak{A}}$، یك رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathcal{U}$ است، طبق خواص ت۱، ت۲، وت۳برای تساوی.

(دو) بنا برخاصیت ت۴ تساوی، $P^{\mathfrak{A}}$ با $E^{\mathfrak{A}}$ توافق دارد.

(سه) بنا برخاصیت ت۵ تساوی، $f^{\mathfrak{A}}$ با $E^{\mathfrak{A}}$ توافق دارد.

بدین‌ترتیب، ازتوافق $P^{\mathfrak{A}}$ با $E^{\mathfrak{A}}$ نتیجه می‌شودکه $P^{\mathfrak{A}/E}$ خوش‌تعریف‌است. همچنین به خاطر توافق $f^{\mathfrak{A}}$ و $E^{\mathfrak{A}}$، تابع $f^{\mathfrak{A}/E}$ خوش‌تعریف است.

ازساختمان h، بیدرنگ نتیجه می‌شودکه h یك همریختی از $\mathcal{U}$ روی $\mathcal{U}/E$ است.و

$[t]\ E^{\mathfrak{A}/E}[t']$ اگر و تنها اگر $tE^{\mathfrak{A}}t'$،

اگر و تنها اگر $[t] = [t']$.

وسرانجام،

$$\begin{aligned} \varphi \in \Delta &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] && \text{(براساس گام چهارم)} \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi^*[h \circ s] && \text{(طبق قضیهٔ همریختی)} \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi[h \circ s], \end{aligned}$$

توجیه گام نهایی این است که $E^{\mathfrak{A}\,E}$ رابطهٔ تساوی در $|\mathcal{U}/E|$ است.

گام ۶: ساخت $\mathcal{U}/E$ را به زبان اولیه محدود سازید. این تحدید $\mathcal{U}/E$، هرعضو Γ را با $h \circ s$ ارضا می‌کند.■

برای یك زبان شمارش‌ناپذیر، لازم است تغییراتی دراین اثبات قضیهٔ تمامیت‌داده شود. مثلاً فرض کنیم عددکاردینال زبان موردنظر برابر κ باشد. (منظور این است که‌آن زبان، دارای κ نماد، یا معادلاً، κ فرمول باشد.) تغییرات مورد نیاز را با این فرض که خواننده معلوماتی کافی از نظریهٔ مجموعه‌ها دارد، شرح خواهیم داد. درگام اول، κ نماد ثابت جدید اضافه می‌کنیم؛ جزئیات بدون تغییر باقی می‌مانند. درگام دوم، فقط جزئیات تغییر می‌کند. عددکاردینال κ یك اردینال جدی است. (در اینجا تلویحاً، زبان مورد نظر را خوش‌ترتیب کرده‌ایم.) زوجهای

$$\langle \varphi_\alpha, x_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa},$$

را، که با اردینالهای کمتر از κ اندیس‌گذاری شده‌اند، «می‌شماریم». به‌ازای $\alpha<\kappa$؛ θ_α عبارت است از:

$$\neg\forall x_\alpha \varphi_\alpha \rightarrow (\neg\varphi)^{x_\alpha}_{c_\alpha}$$

که در آن c_α، اولین نماد ثابت جدیدی است که، به‌ازای هر $\beta<\alpha$، در φ_α یا در θ_β نیست. (این امرحداکثر $\aleph_0 \cdot \mathrm{card}(\alpha)$ نماد ثابت راکنار می‌گذارد، بنابراین تعدادی باقی می‌مانند.) سرانجام، درگام سوم، می‌توان مجموعهٔ بیشین Δ را با استفاده از لم تسورن به دست آورد. بقیهٔ اثبات، بدون تغییر می‌ماند.

قضیهٔ فشردگی. (الف) اگر $\Gamma \vDash \varphi$، آنگاه زیرمجموعه‌ای متناهی از Γ، مانند Γ_0، وجود دارد که $\Gamma_0 \vDash \varphi$.

(ب) اگر هرزیر مجموعهٔ متناهی Γ_0 از Γ ارضاشدنی باشد، آنگاه Γ نیز ارضا-شدنی است.

بویژه، مجموعهٔ Σ از جمله‌ها، دارای یك مدل است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی آن دارای یك مدل باشد.

برای اثبات قسمت (الف) قضیهٔ فشردگی، بسادگی مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\Gamma \vDash \varphi &\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi\\ &\Rightarrow \Gamma_0 \vdash \varphi \quad \text{(به‌ازای یك زیرمجموعهٔ متناهی } \Gamma_0 \text{ از } \Gamma\text{، زیرا استنتاجها متناهی‌اند)}\\ &\Rightarrow \Gamma_0 \vdash \varphi.\end{aligned}$$

قسمت (ب) نیز، دارای اثبات مشابهی است. اگر هرزیرمجموعهٔ متناهی از Γ، ارضا شدنی باشد، آنگاه، براساس قضیهٔ درستی، هرزیرمجموعهٔ متناهی از Γ، سازگار

خواهد بود. بنابراین، Γ سازگار است، زیرا استنتاجها متناهی‌اند. بنابراین، براساس فشردگی، Γ ارضاشدنی‌است. (درواقع قسمتهای (الف) و(ب) معادل‌اند؛ به‌تمرین ۳ بخش ۷.۱ مراجعه کنید.) ■

وقتی کسی اولین‌بار با قضیهٔ فشردگی آشنا می‌شود، طبیعتاً، تمایل داردکه (با بعضی اعمال جبری یا مجموعه‌ای) ساختهایی راکه در آنها زیرمجموعه‌های متناهی مختلف ارضا می‌شوند، بنحوی ترکیب‌کندکـه در ساخت حاصل تمامی مجموعه ارضا شود. در واقع، چنین اثباتی‌امکان‌پذیراست؛ عملی که به‌کارمی‌رود، ساختمان فراضربی‌است. اما ازپرداختن بیشتر به‌این امکان فریبنده خودداری خواهیم کرد.

توجه‌کنیدکه قضیهٔ فشردگی، فقط مفاهیم معنایی بخش ۳.۲ را دربرمی‌گیرد؛ و بـا استنتاجها، اصلا کاری ندارد : و همچنین، اثباتهایی وجود داردکـه از استنتاجها اجتناب می‌ورزند. این توضیحات برای قضیهٔ زیر نیز به‌کار می‌رود.

•قضیهٔ شمارش‌پذیری. برای یك‌زبان معقول، مجموعهٔ ف.د.س.های معتبررا می‌توان به‌طورکارامد شماره‌گذاری کرد.

منظور از یك زبان معقول، زبانی است‌که بتوان مجموعهٔ پارامترهای‌آن را به‌طور کارامد شماره‌گذاری کرد وهمچنین، در آن دو رابطهٔ

$$\{(P,n): \text{یك نماد محمولی } n \text{ موضعی است } P\}$$

و

$$\{(f,n): \text{یك نماد تابعی } n \text{ موضعی است } f\}$$

تصمیم‌پذیرباشند. به‌عنوان مثال، هرزبانی‌که تنهادارای تعداد با پایانی پارامترباشد محققاً معقول خواهد بود. ازسوی‌دیگر، یك زبان معقول، باید شمارش‌پذیرباشد،زیرا یك‌مجموعهٔ شمارش‌ناپذیر را نمی‌توان به‌طورکارامد شماره‌گذاری کرد.

شکلی دقیق از این قضیه دربخش۴.۳ ارائه خواهد شد. (بویژه، درآنجا به‌بند ۲۵ توجه‌کنید.) جوهر اثباتهای هردوشکل اساساً یکی است.

۱اثبات. نکتهٔ اساسی این است‌که Λ، و بنابراین مجموعهٔ استنتاجها ، تصمیم‌پذیرند.

فرض‌کنیم یك عبارت ε داده شده‌باشد. (فرض‌معقول بودن زبان، درهمین‌جا به‌کار می‌آید. تعـداد چیزهای قابل عرضه‌ای کـه شخصی‌به‌دیگری ارائه می‌دهد، فقط می‌تواند شمارش‌پذیرباشد.) می‌خواهیم روشن‌کنیم کـه آیا ε در Λ هست یـا خیر. ابتدا،بررسی می‌کنیم که‌آیا ε شکل‌نحوی لازم رابرای فرمول بودن دارد یاخیر. (درمورد منطق‌جمله‌ها، دستورالعملهای‌مفصلی برای چنین بررسی‌ارائه شد. به‌بخش۴.۱ مراجعه کنید. دستورالعملهای مشابهی نیزبرای زبانهای‌مرتبهٔ اول نیز، با استفاده از بخش۳.۲، می‌توان عرضه‌کرد.)اگر ε درچنین‌آزمونی قبول شد، آنگاه باید دیدکه‌آیا ε تعمیمی از یك توتولوژی هست یاخیر.

(این‌کار را با ساختن یك جدول ارزش انجام می‌دهیم.) اگر نبود، باید دیدکه آیا ε شکل نحوی لازم برای تعلق به‌گروه دوم اصول موضوع را دارد یا خیر و به‌همین‌ترتیب الی آخر. اگرهنگامی که به‌پایان بررسی گروه ششم اصول موضوع رسیدیم و هنوز ε پذیرفته نشده بود، در آن صورت ε متعلق به Λ نیست.

(منظور از پاراگراف بالا، مطمئن کردن خواننده از این مطلب است که واقعاً می‌توان عضوهای Λ را از غیرعضوهای آن تشخیص داد. خواننده‌ای کـه هنوز درشك خود باقی است می‌تواند منتظر تکرار این مطلب در بخش ۴.۳ باشد.)

از آنجاکه Λ تصمیم‌پذیر است، مجموعهٔ نتایج توتولوژیك Λ شمارش‌پذیر کارامد است؛ قضیهٔ ۱۷ ج را ببینید. اما

$\{\alpha$ یك نتیجهٔ توتولوژیك Λ است: $\alpha\}$

$=\{\alpha : \vdash \alpha\}$ (براساس قضیهٔ ۲۴ ب)

$=\{\alpha :$ معتبر است $\alpha\}$. ■

استدلال زیر، که احتمالاً بیشتر روشنگر است، شکل دیگری از آخرین بخش این اثبات است. نخست، نشان می‌دهیم کـه مجموعهٔ استنتاجها (از $\varnothing$) تصمیم‌پذیر است. زیرا، به‌ازای هـر دنبالهٔ متناهی مفروض α_0، ...، α_n می‌توانیم هر α_i را بنوبت آزمایش کرده وببینیم آیا متعلق به Λ است یا خیر، ویا اینکه آیا از عضوهای قبلی دنباله با قاعدهٔ وضع مقدم به‌دست آمده یـا خیر. سپس برای شمارش کردن فرمولهای معتبر، کار را با شمارش کردن همهٔ دنباله‌های متناهی از ف.د.س.ها آغـاز می‌کنیم. برای این‌کار، به‌هردنبالـه از فرمولها، به‌همان ترتیب که تولید شده، نگاه‌کرده وتصمیم می‌گیریم کـه آیا آن دنباله یك استنتاج است یا خیر. اگریك استنتاج نبود، آن راکنار می‌گذاریم. ولی اگربود، آنگاه آخرین عضو آن را در فهرست فرمولهای معتبر قرار می‌دهیم. بـا ادامهٔ این‌کار، فهرستی به‌دست می‌آیدکه هرفرمول معتبر، بالاخره، در آن ظاهرخواهد شد.

•نتیجهٔ ۲۵ ج. فرض کنیم Γ یك‌مجموعهٔ تصمیم‌پذیر ازفرمولهادریك زبان‌معقول باشد.

(الف) مجموعهٔ قضایای متعلق به Γ شمارش‌پذیر کارامد است.

(ب) مجموعهٔ $\{\varphi : \Gamma \vDash \varphi\}$ متشکل از فرمولهایی کـه به‌طور منطقی از Γ نتیجـه می‌شوند، شمارش‌پذیر کارامد است.

(البته قسمتهای (الف) و (ب)، هردو، مربوط به‌یـك مجموعه‌اند. این نتیجه، خود قضیهٔ شمارش را نیز، که در آن $\Gamma = \varnothing$، دربردارد.)

اثبات ۱. فرمولهای معتبر را شمارش می‌کنیم؛ هرگاه فرمول معتبری به‌صورت

$$\alpha_n \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_0 ,$$

یافتیم، بررسی می‌کنیم که آیا α_1، ...، α_n متعلق به Γ هستند یا خیر. اگرچنین بود، آنگاه

α_0 را درفهرست قضایای Γ قرارمی‌دهیم. بدین‌طریق، هرقضیهٔ Γ بالاًخره دراین فهرست ظاهر خواهد شد. ■

اثبات ۲. مجموعهٔ $\Gamma \cup \Lambda$ تصمیم‌پذیر است، بنا براین، مجموعهٔ نتایج توتولوژیك آن مجموعه شمارش‌پذیر کارامد می‌باشد. و این مجموعه، درست همان مجموعهٔ مطلوب ماست. ■

برای مثال، فرض‌کنیم Γ، مجموعهٔ (تصمیم‌پذیر) اصول موضوع برای هردستگاه معمولی‌ازنظریهٔ مجموعه‌ها باشد. در این صورت، این نتیجه می‌گوید که مجموعهٔ قضایای نظریهٔ مجموعه‌ها شمارش‌پذیر کارامد است.

*نتیجهٔ ۲۵چ. فرض‌کنیم Γ یك‌مجموعهٔ تصمیم‌پذیرازفرمولهادریك زبان‌معقول باشد، و همچنین فرض‌کنیم به‌ازای هرجملهٔ σ یا $\Gamma \vDash \sigma$ یا $\Gamma \vDash \neg\sigma$. در این صورت مجموعهٔ جمله‌های منتج از Γ تصمیم‌پذیر است.

اثبات. اگر Γ ناسازگار باشد، در این‌صورت، مجموعهٔ جمله‌های منتج از Γ همان مجموعه همهٔ جمله‌ها خواهد بود، که تصمیم‌پذیر است. پس فرض می‌کنیم Γ سازگاراست. فرض‌کنیم یك جمله مانند σ داده شده است و ازما خواسته‌اند که معین‌کنیم $\Gamma \vDash \sigma$ برقرار است یا خیر. می‌توانیم قضایای Γ را شمارش‌کرده و در جستجوی σ یا $\neg\sigma$ باشیم. بالاًخره، یکی‌ازآن‌دو ظاهرخواهد شد ودراین‌صورت، جواب به‌دست خواهدآمد. ■

(توجه‌کنید که این اثبات، در واقع دو روش تصمیم‌گیری را تشریح می‌کند. یکی در صورت ناسازگاری Γ صحیح است، و دیگری درصورت سازگاری آن. بنا براین، در هرصورت، یك روش تصمیم‌گیری وجود دارد. منتها، با دردست داشتن‌یك توصیف متناهی از Γ، الزاماً نمی‌توان به‌طورکارامد تعیین‌کرد که‌کدام روش را باید به‌کار گرفت.)

باید خاطرنشان‌کرد که اثباتهای ما در بارهٔ شمارش‌پذیری را، در حالت‌کلی، نمی‌توان به اثباتهای تصمیم‌پذیری تبدیل‌کرد. تقریباً برای همهٔ زبانها، مجموعهٔ فرمولهای معتبر تصمیم‌پذیر نیست. (قضیهٔ چرچ[1] را در بخش ۵.۳ ببینید.)

یادداشتهای تاریخی

تز دکترای‌کورت‌گودل[2]، در ۱۹۳۰، قضیهٔ تمامیت (برای زبانهای شمارش‌پذیر) را دربرداشت (این‌قضیه را نباید با «قضیهٔ تمامیت‌گودل»، که درسال ۱۹۳۱ چاپ شد، اشتباه کرد. قضیهٔ اخیر را در فصل ۳ بررسی خواهیم کرد.) قضیهٔ فشردگی (برای زبانهای شمارش‌پذیر) به‌عنوان یکی از نتایج قضیهٔ تمامیت، ارائه شده بود.

---

1. Church 2. Kurt Gödel

قضیهٔ فشردگی برای زبانهای شمارش‌ناپذیر، در مقاله‌ای از آناتولی مالسف[1] (۱۹۳۶) تلویحاً وجود داشت. در اثبات او، از توابع اسکولم[2] (به بخش ۲.۴ مراجعه کنید) و قضیهٔ فشردگی برای منطق جمله‌ها استفاده شده بود. اولین بیان صریح قضیهٔ فشردگی برای زبانهای شمارش‌ناپذیر، در مقاله‌ای از مالسف، در ۱۹۴۱، عرضه شد.

قضیهٔ شمارش‌پذیری، علاوه براینکه ازکار ۱۹۳۰ گودل نتیجه می‌شد، به‌طورضمنی نیز درنتایج چاپ شدهٔ اسکولم در ۱۹۲۸ وجود داشت.

اثباتی که ما برای قضیهٔ تمامیت عرضه داشتیم، پیرو اثباتی است که لئون هنکین[3] در تزخود، چاپ شده در ۱۹۴۹، عرضه داشته بود. برخلاف اثبات اولیهٔ گودل، اثبات هنکین را بسادگی می‌توان به‌هرزبان باکاردینالهای مختلف تعمیم داد.

تمرین

۱. (شکل معنایی قاعدهٔ م.س.) فرض کنید نماد ثابت c در هیچ یك از φ، ψ، یا (اعضای) Γ رخ ندهد، و فرض کنید $\Gamma; \varphi^x_c \models \psi$. (بدون استفاده از قضایای درستی و تمامیت) نشان دهید $\Gamma; \exists x\, \varphi \models \psi$.

۲. معادل بودن قسمتهای (الف) و (ب) قضیهٔ تمامیت را اثبات کنید.

۳. فرض کنید $\Gamma \vdash \varphi$، و P یك نماد محمولی باشد که نه در (اعضای) Γ ظاهر می‌گردد و نه در φ. آیا استنتاجی برای φ از Γ وجود داردکه در آن P هیچ‌جا ظاهر نگردد.

۴. فرض کنیدکه زبانی تنها دارای تعدادی متناهی پارامتر باشد.

(الف) نشان دهیدکه، برای یك ساخت داده شدهٔ $\mathfrak{U}$ و یك جملهٔ σ، می‌توان به‌طور کارامد تصمیم گرفت که آیا $\models_{\mathfrak{U}} \sigma$، یا خیر.

(ب) نشان دهیدکه مجموعهٔ جمله‌هایی که دارای مدلهای متناهی می‌باشند شمارش‌پذیر کارامد است.

۵. فرض کنید زبان ما، تنها دارای تعدادی متناهی پارامتر باشد.

(الف) فرض کنید Σ مجموعهٔ جمله‌هایی باشدکه به‌ازای هر $\sigma \in \Sigma$، اگر σ دارای یك مثال نقیض باشد (یعنی، $\mathfrak{U}$ ای وجود داشته باشدکه در آن σ غلط باشد)، آنگاه σ دارای چنین مثال نقیضی درساختی مانند $\mathfrak{U}$ باشدکه $|\mathfrak{U}|$ متناهی است. یك روش کارامد بیابیدکه براساس آن، برای هر σی داده شده، بتوانید تصمیم بگیریدکه σ معتبر است یا خیر.

---

1. Anatolii Malćev 2. Skolem 3. Leon Henkin

(ب) نشان دهید که مجموعهٔ جمله‌های $\forall_2$ معتبر بدون نمادهای تابعی تصمیم‌پذیر است. (تمرینهای ۱۸ و ۱۹ بخش ۲.۲ را برای شرح علایم واطلاعـات زمینه‌ای ببینید. یك فرمول $\forall_2$، فرمولی است بـه‌صورت $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$، کـه در آن φ وجودی است [یعنی، $\varphi = \exists x \psi$ ،م].)

۶. فرض کنید $\Gamma = \{\neg\forall v_1 Pv_1, Pv_1, Pv_2, Pv_3, \ldots\}$. آیا Γ سازگار است؟ آیا Γ ارضا شدنی است؟

۶.۲ مدلهای نظریه‌ها

در این بخش استنتاجها و اصول موضوع منطقی را پشت سر می‌گـذاریم. و به‌موضوعات بحث شده دربخش ۲.۲ بازمی‌گردیم. اما اکنون، در پرتوقضایای بخش قبل، قادرخواهیم بود که سؤالات بیشتری را پاسخ گوییم.

اندازهٔ مدلها

در قضیهٔ تمامیت، با یك مجموعـهٔ Γ (دریك زبان باکاردینال κ[1]) آغازکردیم و ساختی مانند $\mathfrak{U}/E$ را تشکیل دادیم که Γ را ارضا می‌کند. ساخت $\mathfrak{U}/E$ از یك ساخت اولیهٔ $\mathfrak{U}$ ساخته شد. عالم سخن مربوط به $\mathfrak{U}$ مجموعهٔ همهٔ ترمهای زبانی بود، که از افزودن κ نماد ثابت جدید به‌زبان اولیـه به‌دست می‌آمد. بنابراین، بوضوح، $|\mathfrak{U}|$ حداقل دارای κ ترم بود. ازسوی دیگر، فقط κ عبارت‌درزبان افزایش یافته وجود دارد (براساس قضیهٔ ٥ت)، بنابراین، $|\mathfrak{U}|$ نمی‌تواند بیش از κ ترم داشته باشد. بدین ترتیب، کاردینال $\mathfrak{U}$ (که منظور از آن کاردینال $|\mathfrak{U}|$ است) برابر κ بود.

عالم سخن $\mathfrak{U}/E$ از رده‌هـای هـم‌ارزی اعضای $\mathfrak{U}$ تشکیل می‌یافت، بنابراین، $\operatorname{card}|\mathfrak{U}/E| \leqslant \operatorname{card}|\mathfrak{U}|$. (اگر به‌هر ردهٔ هم‌ارزی، یك عضومنتخب ازآن رامربوط سازیم، می‌توانیم یك نگاشت یك به‌یك از $|\mathfrak{U}/E|$ در $|\mathfrak{U}|$ تعریف کنیم.) پس از آنکه ابهام برطرف شد، Γ دریك ساخت $\mathfrak{U}/E$ باکاردینال کوچکتر ازیا مساوی κ ارضا شد.

قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم (۱۹۱۵). (الف) فرض کنیم Γ مجموعه‌ای ارضاشدنی از فرمولها دریك زبان شمارش پذیر باشد. در این‌صورت، Γ دریك زبان شمارش‌پذیر ارضا-شدنی است.

(ب) فرض کنیم Γ مجموعه‌ای ارضا شدنی از فرمولها در یك زبان با کاردینال κ باشد. دراین‌صورت Γ دریك ساخت باکاردینال کوچکتر ازیا مساوی κ ارضا شدنی است.

اثبات. (الف) حالت ویژه‌ای از (ب) است، که در آن $\kappa = \aleph_0$. برای اثبات(ب)،

---

۱. به‌خواننده‌ای که می‌خواهد ازکاردینالهای شمارش ناپذیر اجتناب ورزد توصیه می‌کنیم از قسمت (الف) قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم (Löwenheim_ Skolem) به‌قضیهٔ ۲۶ ب برود.

نخست توجه کنید که، براساس قضیهٔ درستی، Γ سازگاراست. پس بنا بر قضیهٔ تمامیت (به‌اضافهٔ توضیحات قبل) Γ می‌تواند درساختی با کاردینال کوچکتر از یا مساوی κ ارضا شود. ■

(اثبات مستقیم‌تر دیگری از این قضیه وجود دارد که در بخش ۲.۴ به‌آن اشاره خواهیم کرد؛ بخصوص، به‌تمرین ۱ درآنجا توجه کنید. در آن اثبات از حساب استنتاجی استفاده نمی‌شود و با یك ساخت اختیاری $\mathcal{U}$، که در آن Γ می‌تواند ارضا شود، شروع می‌کنیم، و سپس با دستکاریهای مختلف از $\mathcal{U}$، یك زیرساخت مناسب باکاردینال κ یا کوچکتر به‌دست می‌آوریم.)

قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم، در سال ۱۹۱۵ توسط لئوپولد لون‌هایم[1]، برای حالتی که Γ یك مجموعهٔ تك عضوی است، به‌چاپ رسید؛ تورالف اسکولم[2]، در سال ۱۹۲۰، این قضیه را برای حالتی‌هم که Γ نامتناهی باشد ثابت کرد. با این‌قضیه، دورهٔ جدیدی درمنطق ریاضی آغاز شد. کارهای قبلی، درجهت صوری‌کردن ریاضیات با زبانهای صوری و حسابهای استنتاجی، انجام شده بود؛ این‌کار راگوتولوب فرگه[3] در ۱۸۷۹ پایه‌گذاری کرده بود. به‌عنوان مثال، درکتاب اصول ریاضیات[4] (۱۹۱۰–۱۹۱۳) تألیف وایتهد[5] و راسل[6]، چنین صوری کردنی با جزئیات زیادی انجام گرفته است. اما مرحلهٔ جدید، زمانی آغاز شد که منطقیون به‌عقب بازگشتند و قضایایی دربارهٔ دستگاههای صوری که ساخته بودند پرداختند. و درهمین راه، کارهای اولیهٔ دیگر توسط کورت گودل (چنانکه قبلاً ذکرشد)، آلفرد تارسکی[7]، و دیگران انجام گرفته بود.

به‌عنوان نمونه‌ای از کار برد قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم، فرض کنیم A_{ST} مجموعهٔ اصول موضوع دلخواهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد؛ اگر این اصول سازگار باشند (که امیدواریم چنین باشد)، مدلی خواهند داشت. بر اساس قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم، این اصول موضوع دارای یك مدل شمارش‌پذیر $\mathfrak{S}$ هستند. البته، $\mathfrak{S}$ یك مدل برای جمله‌هایی که نتیجهٔ منطقی AST هستند نیز هست. یکی از این جمله‌ها (وقتی که براساس ترجمهٔ موردنظر به‌فارسی برگردانده شود) مدعی است که تعداد شمارش‌ناپذیری مجموعه وجود دارد. در اینجا تناقضی وجود ندارد، اما آن‌قدر پیچیده هست که آن را «پارادکس اسکولم» بنامیم. واقع این است که در ساخت $\mathfrak{S}$ عضوی وجود ندارد که در تعریف صوری یك نگاشت یك به‌یك از اعداد طبیعی روی عالم‌سخن $\mathfrak{S}$ صدق کند. اما این به‌هیچ‌وجه امکان وجود یك تابع حقیقی (خارج از $\mathfrak{S}$) را که چنین تناظریك به‌یکی را فراهم سازد از بین نمی‌برد.

برای یك ساخت $\mathcal{U}$، نظریهٔ $\mathcal{U}$، که آن را با $\mathrm{Th}\,\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم، به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ جمله‌ها صادق در $\mathcal{U}$ تعریف می‌شود. فرض کنیم که یك ساخت شمارش‌ناپذیر $\mathcal{U}$، برای یك زبان شمارش‌پذیر، داریم. براساس قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم (در مورد $\mathrm{Th}\,\mathcal{U}$)، یك ساخت شمارش‌پذیر $\mathcal{B}$ وجود دارد که مدلی برای $\mathrm{Th}\,\mathcal{U}$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که

---

1. Leopold Löwenheim 2. Thoralf Skolem
3. Gottlob Frege 4. Principia Mathematica
5. Whitehead 6. Russell 7. Alfred Tarski

$\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{B}$. زیرا

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{U} \Rightarrow \models_{\mathfrak{B}} \sigma$$

و

$$\not\models_{\mathfrak{A}} \sigma \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \neg\sigma \Rightarrow (\neg\sigma) \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{U} \Rightarrow \models_{\mathfrak{B}} \neg\sigma.$$

برعکس، فرض کنیم با یك ساخت شمارش‌پذیر $\mathfrak{B}$ شروع کنیم. آیا یك ساخت شمارش‌ناپذیر $\mathfrak{U}$ وجود دارد به‌طوری که $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{U}$؟ اگر $\mathfrak{B}$ متناهی باشد (و زبان نیز شامل تساوی باشد)، آنگاه این امر غیرممکن است.

اما اگر $\mathfrak{B}$ نامتناهی باشد، آنگاه چنین $\mathfrak{U}$ای، براساس قضیهٔ «افزایشی و کاهشی قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم»، وجود خواهد داشت. قسمت افزایشی این قضیه مربوط به تارسکی است، و «ت» موجود در «ل.ا.ت.» از اسم تارسکی آمده است.

قضیهٔ ل.ا.ت. فرض کنیم Γ مجموعه‌ای از فرمولهای زبانی باکاردینال κ باشد که در یك ساخت نامتناهی ارضاشدنی است. در این صورت برای هرکاردینال λ که $\lambda \geqslant \kappa$ ساختی باکاردینال λ وجود دارد که در آن Γ ارضاشدنی است.

اثبات. فرض کنیم $\mathfrak{U}$ ساختی نامتناهی باشد که در آن Γ ارضاشدنی است. زبان مربوطه را با افزودن یك مجموعهٔ C متشکل از λ نماد ثابت جدید، توسعه می‌دهیم. فرض کنیم

$$\Sigma = \{c_1 \not\approx c_2 : \text{می‌باشند } C \text{ عضوهای متمایز } c_2 \text{ و } c_1\}.$$

دراین‌صورت، هرزیرمجموعهٔ متناهی $\Gamma \cup \Sigma$، درساخت $\mathfrak{U}$، که برای انتساب اعضای متمایز به‌بینهایت نماد ثابت جدید عضو C گسترش یافته، ارضاشدنی است. (چون $\mathfrak{U}$ نامتناهی است، $|\mathfrak{U}|$ می‌تواند هرتعداد متناهی ازاین نمادها را دربرگیرد.) بنابراین، براساس قضیهٔ فشردگی، $\Sigma \cup \Gamma$ ارضاشدنی است، وبراساس قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم، $\Sigma \cup \Gamma$ دریك ساخت $\mathfrak{B}$، باکاردینالی کوچکتر از یا مساوی λ، ارضاشدنی است. (زبان توسعه یافته، دارای کاردینال $\lambda = \lambda + \kappa$ است.) اما، هرمدلی برای Σ، بوضوح دارای کاردینالی بزرگتر از یا مساوی λ است. بنابراین، $\mathfrak{B}$ دارای کاردینال λ است؛ حال، $\mathfrak{B}$ را به‌زبان اولیه محدود می‌کنیم. ■

نتیجهٔ ۲۶ الف. (الف) فرض کنیم Σ مجموعه‌ای از جمله‌ها دریك زبان شمارش‌پذیر باشد. اگر Σ دارای یك مدل نامتناهی باشد، آنگاه Σ دارای مدلهایی با هرکاردینال نامتناهی خواهد بود.

(ب) فرض کنیم $\mathfrak{U}$ یك ساخت نامتناهی برای یك زبان شمارش‌پذیر باشد. در این صورت، برای هرکاردینال نامتناهی λ، یك ساخت $\mathfrak{B}$ باکاردینال λ وجود دارد به‌طوری که $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{U}$.

اثبات. (الف) درقضیهٔ ل.ا.ت قرار می‌دهیم $\Gamma = \Sigma$، $\kappa = \aleph_0$. (ب) در قسمت

(الف)، قرار می‌دهیم $\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathcal{U}$. ■

مجموعهٔ Σ از جمله‌ها راکه اصول موضوع منطق نیستند، به عنوان اصول موضوع درنظرمی گیریم. (به‌عنوان مثال، Σ می‌تواند مجموعه‌ای از اصول موضوع برای نظریهٔ مجموعه‌ها، یا مجموعه‌ای ازاصول موضوع برای نظریهٔ اعداد باشد.) Σ را جازم می‌نامیم اگر و تنها اگر هردومدل Σ یکریخت باشند. نتیجهٔ بالا دال براین است که اگر Σ دارای یك مدل نامتناهی باشد، دراین‌صورت، Σ جازم نیست. به‌عنوان مثال، هیچ مجموعه‌ای از جمله‌ها وجود نداردکه مدلهای آن دقیقاً ساختهای یکریخت با $(N, \circ, S, +, \cdot)$ باشند. این امر حاکی ازمحدودیتی است که درتوان بیانگری زبانهای مرتبهٔ اول وجود دارد. (همان‌طورکه‌در بخش ۴.۱ خواهیم‌دید،جمله‌های مرتبهٔ دوم جازم وجود دارند.اما جمله‌های مرتبهٔ دوم موجودات ویژه‌ای‌هستندکه به‌قیمت ثابت نگهداشتن مفهوم زیرمجموعه، وایمن بودن آن ازتعبیر درساختها، به‌دست می‌آیند.)

جمله‌هایی‌وجود دارندکه تنها مدلهای متناهی دارند. به‌عنوان مثال، هرمدلی از $\forall x\,\forall y\; x \approx y$ دارای‌کاردینال ۱ است. اما اگرهمهٔ مدلهای Σ متناهی باشند، آنگاه، براساس قضیهٔ زیرین، اندازهٔ مدلها، حد مشخصی خواهد داشت.

قضیهٔ ۲۶ب. اگر مجموعهٔ Σ، ازجمله‌ها، دارای مدلهای متناهی‌با هراندازه باشد، آنگاه Σ دارای یك مدل نامتناهی خواهد بود.

اثبات. به‌ازای هرعدد درست $k \geqslant ۲$، می‌توان یك جملهٔ λ_k یافت‌که جملهٔ «حداقل k چیز وجود دارد» را ترجمه می‌کند. مثلاً،

$$\lambda_۲ = \exists v_۱ \exists v_۲\; v_۱ \not\approx v_۲,$$

$$\lambda_۳ = \exists v_۱\, \exists v_۲\, \exists v_۳ (v_۱ \not\approx v_۲ \wedge v_۲ \not\approx v_۳ \wedge v_۱ \not\approx v_۳).$$

مجموعهٔ

$$\Sigma \cup \{\lambda_۲, \lambda_۳, \ldots\}$$

را درنظرمی گیریم. براساس فرض، هرزیرمجموعهٔ متناهی آن، دارای یك مدل است. بنابراین، طبق قضیهٔ فشردگی، تمام مجموعه، دارای مدل است،که بوضوح باید نامتناهی باشد. ■

اثبات این‌قضیه واثبات قضیهٔ پیشین، هردونمایشگرروش‌کارایی برای به‌دست آوردن ساختی‌با خواص‌مفروض‌هستند.ابتدا جمله‌هایی(احتمالاً دریك‌زبان توسعه‌یافته) می‌نویسیم که بیانگرخواص موردنظرباشند. سپس، نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعهٔ متناهی از این جمله‌ها، دارای مدلی است. بقیهٔ‌کار را قضیهٔ فشردگی انجام می‌دهد. درصفحات آینده، مثالهای بیشتری ازکاربرد این روش خواهیم دید.

نتیجهٔ ۲۶پ. ردهٔ همهٔ ساختهای متناهی (برای یك زبان ثابت) $EC_{\triangle}$ نیست. ردهٔ همهٔ ساختهای نامتناهی EC نیست.

اثبات. جملهٔ اول بیدرنگ از قضیهٔ ۲۶ب نتیجه می‌شود. اگر ردهٔ همهٔ ساختهای نامتناهی‌مساوی $\text{Mod}\,\tau$ باشد، آنگاه ردهٔ همهٔ ساختهای متناهی‌مساوی $\text{Mod}\,\neg\tau$ خواهد بود. اما این رده حتی $EC_{\triangle}$ نیست، چه رسد به‌اینکه EC باشد ■

ردهٔ ساختهای نامتناهی $EC_{\triangle}$ است وعبارت است از $\text{Mod}\,\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$.

به‌عنوان مثال، در وهلهٔ اول، وجود معادلهٔ ظریفی در نظریهٔ گروهها، که در هر گروه متناهی صادق و درهر گروه نامتناهی‌کاذب باشد قابل‌تصور است، ولی براساس قضیهٔ بالا، چنین معادله‌ای وجود ندارد.

مثال. ساخت

$$\mathcal{N} = (N, \circ, S, <, +, \cdot)$$

را درنظرمی گیریم. براساس قضیهٔ ل.ا.ت، ساختهای شمارش‌ناپذیری وجود دارند که با ساخت $\mathcal{N}$ معادل مقدماتی است (وبنابراین، با $\mathcal{N}$ یکریخت نیستند). حال ادعا می کنیم که یك ساخت شمارش‌پذیر $\mathfrak{M}_\circ$ نیز وجود داردکه با ساخت $\mathcal{N}$ معادل مقدماتی است ولی با آن یکریخت نیست.

اثبات. با افزودن یك نماد ثابت جدید c، زبان موردنظر را توسعه می‌دهیم. فرض کنیم:

$$\Sigma = \{\circ < c, \mathbf{S}\circ < c, \mathbf{SS}\circ < c, \ldots\}.$$

ادعامی کنیم که $\Sigma \cup \text{Th}\,\mathcal{N}$ دارای یك‌مدل‌است. زیرا، اگریك‌زیرمجموعهٔ متناهی Σ را درنظربگیریم، آن زیرمجموعهٔ متناهی، به‌ازای kای بزرگ ($k = c^{\mathfrak{N}k}$)، در

$$\mathcal{N}_k = \{N, \circ, S, <, +, \cdot, k\}$$

صادق است. بنابراین، براساس قضیهٔ فشردگی، $\Sigma \cup \text{Th}\,\mathcal{N}$ دارای یك مدل است.

براساس قضیهٔ اون‌هایم‌ـاسکولم، $\Sigma \cup \text{Th}\,\mathcal{N}$ دارای یك مدل شمارش‌پذیر

$$\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, \circ^{\mathfrak{M}}, \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}})$$

است. فرض‌کنیم $\mathfrak{M}_\circ$، تحدید $\mathfrak{M}$ به‌زبان اولیه باشد:

$$\mathfrak{M}_\circ = (|\mathfrak{M}|, \circ^{\mathfrak{M}}, \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}, <^{\mathfrak{M}}, +^{\mathfrak{M}}, \cdot^{\mathfrak{M}}).$$

ازآنجاکه $\mathfrak{M}_\circ$ یك مدل برای $\text{Th}\,\mathcal{N}$ است، داریم $\mathfrak{M}_\circ \equiv \mathcal{N}$. نشان دادن این مطلب که $\mathfrak{M}_\circ$ با $\mathcal{N}$ یکریخت نیست را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. ■

نظریه‌ها

چنین تعریف می‌کنیم: یك نظریه مجموعه‌ای از جمله‌ها است که تحت استلزام منطقی بسته باشد، یعنی، T یك نظریه است اگر وتنها اگر T یك مجموعه ازجمله‌ها باشد به‌طوری که به‌ازای هرجملهٔ σ، از زبان موردنظر، داشته باشیم:

$$T \models \sigma \Rightarrow \sigma \in T.$$

(توجه کنید که در رابطهٔ فوق σ جمله است، نه فرمولی با متغیرهای آزاد.) برای مثال، همیشه یك کوچکترین نظریه متشکل ازجمله‌های معتبر زبان مورد نظر وجوددارد. متقابلاً، نظریه‌ای متشکل از همهٔ جمله‌های زبان مزبور موجود است؛که تنها نظریهٔ ارضانشدنی است.

برای یك ردهٔ $\mathcal{K}$ ازساختها (برای زبان مورد نظر)، نظریهٔ $\mathcal{K}$ ($\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$)، با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Th}\,\mathcal{K} = \{\sigma : \text{در هرعضو از } \mathcal{K} \text{ صادق است } \sigma\}.$$

(این مفهوم قبلاً، درحالت خاص $\mathcal{K} = \{\mathcal{U}\}$، نیز ظاهر گردید.)

قضیهٔ ۲۶ت. $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ درواقع یك نظریه است.

اثبات. هریك از اعضای $\mathcal{K}$، یك مدل برای $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ است. بنابراین، اگر σ در هرمدل از $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ صادق باشد، آنگاه‌درهریك ازاعضای $\mathcal{K}$ نیزصادق خواهد بود. بنابراین به $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ متعلق خواهد بود. ■

به عنوان مثال، اگر پارامترهای زبان مورد نظر $\forall$، 0، 1، $+$، و $\cdot$ باشند و $\mathcal{F}$ ردهٔ همهٔ هیأتها باشد، آنگاه $\mathrm{Th}\,\mathcal{F}$، یعنی نظریـهٔ هیأتها، بسادگی مجموعهٔ همهٔ جمله‌های زبان مزبوراست که درهمهٔ هیأتهاصادق هستند. اگر $\mathcal{F}_0$، ردهٔ هیأتهای با مشخصهٔ 0 باشد، آنگاه $\mathrm{Th}\,\mathcal{F}_0$، نظریهٔ هیأتهای با مشخصهٔ 0 است.

به یاد آورید که به ازای هرمجموعهٔ Σ از جمله‌ها، $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ را به‌عنوان ردهٔ همهٔ مدلهای Σ تعریف کردیم. دراین‌صورت، $\mathrm{Th}\,\mathrm{Mod}\,\Sigma$ مجموعهٔ همهٔ جمله‌هایی است که در همهٔ مدلهای Σ صادق هستند. لکن این مجموعه، مساوی مجموعهٔ همهٔ جمله‌هایی است که نتیجهٔ منطقی Σ هستند. این‌مجموعه‌را مجموعهٔ نتایج منطقی Σ می‌نامیم‌وآن را با $\mathrm{Cn}\,\Sigma$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{Cn}\,\Sigma &= \{\sigma : \Sigma \models \sigma\}\\ &= \mathrm{Th}\,\mathrm{Mod}\,\Sigma.\end{aligned}$$

مثلاً، نظریهٔ مجموعه‌ها، مجموعهٔ نتایج منطقی یك مجموعهٔ مشخص از جمله‌هایی است که (البته) به‌اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها معروف‌اند. مجموعهٔ T از جمله‌ها، یك نظریه

است اگر و تنها اگر $T = \mathrm{Cn}\, T$.

نظریهٔ T تمام است اگر و تنها اگر به‌ازای هرجملهٔ σ، یا $T \ni \sigma$ و یا $(\neg\sigma) \in T$.
مثلاً، برای هرساخت $\mathcal{U}$، $\mathrm{Th}\,\{\mathcal{U}\}$ (که همچون گذشته به‌صورت «$\mathrm{Th}\,\mathcal{U}$» نوشته‌می‌شود)، همیشه یك نظریـهٔ تمام است. درواقع، با اندك تأملی می‌توان دریافت که $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$ یك نظریهٔ تمام است اگروتنها اگر هردوعضو $\mathcal{K}$، به‌طورمقدماتی بـا یکدیگر هم‌ارز باشند. ونظریهٔ T تمام است اگروتنها اگر هردومدل T معادل مقدماتی باشند.

مثلاً، نظریهٔ هیأتها تمام نیست، زیرا جمله‌های

$$۱ + ۱ \approx ۰,$$

و

$$\exists x\; x \cdot x \approx ۱ + ۱$$

در بعضی از هیأتها صادق و در بعضی دیگر کاذب هستند نظریهٔ هیأتهای بستهٔ جبری بامشخصهٔ ۰ تمام است، منتها این مطلب به‌هیچ وجه واضح نیست (قضیهٔ ۲۶چ را ببینید.)

***تعریف.** نظریهٔ T اصل‌پذیر است اگروتنها اگریك مجموعهٔ تصمیم‌پذیر Σ ازجمله‌ها وجود داشته باشد که $T = \mathrm{Cn}\,\Sigma$.

تعریف. نظریهٔ T اصل‌پذیرمتناهی است اگروتنها اگرمجموعه‌ای متناهی Σ ازجمله‌ها وجود داشته باشدکه $T = \mathrm{Cn}\,\Sigma$.

درحالت اخیر، داریم $T = \mathrm{Cn}\{\sigma\}$ (که به‌صورت «$T = \mathrm{Cn}\,\sigma$» نوشته می‌شود)، که درآن σ، تـرکیب عطفی تعدادی متناهی ازعضوهـای Σ است. به‌عنوان مثال، نظریهٔ هیأتها، اصل‌پذیر متناهی است. زیرا ردهٔ $\mathcal{F}$، از هیأتها، مساوی $\mathrm{Mod}\,\Phi$ است، که درآن Φ مجموعهٔ‌متناهی‌اصول‌موضوع هیأتهاست. ونظریهٔ‌هیأتها، مساوی با $\mathrm{Th}\,\mathrm{Mod}\,\Phi = \mathrm{Cn}\,\Phi$ است.

نظریهٔ هیأتهای بـا مشخصهٔ ۰، اصل‌پذیـر و همان $\mathrm{Cn}\,\Phi_0$ است، کـه درآن Φ_0، متشکل‌از (تعدادی متناهی) اصول هیأت، باضافه جمله‌های زیر است که تعدادشان نامتناهی است:

$$۱ + ۱ \not\approx ۰,$$

$$۱ + ۱ + ۱ \not\approx ۰,$$

$$\cdots$$

این‌نظریه اصل‌پذیر متناهی نیست. برای اثبات ایـن موضوع، نخست توجه‌کنیدکـه هیچ زیرمجموعهٔ متناهی از Φ_0، تمام نظریه را به‌عنوان مجموعهٔ نتایج منطقی خود دربرندارد. (زیرا آن زیرمجموعهٔ متناهی دریك هیأت با مشخصهٔ بسیار بـزرگ صادق خواهد بود.)

حال قضیهٔ زیر را به‌کار می‌بریم:

قضیهٔ ۲۶ث. اگر $\operatorname{Cn}\Sigma$ اصل‌پذیر متناهی باشد، آنگاه زیرمجموعهٔ متناهی $\Sigma_\circ$ از Σ وجود دارد به‌طوری‌که $\operatorname{Cn}\Sigma_\circ = \operatorname{Cn}\Sigma$.

اثبات. فرض‌کنیم $\operatorname{Cn}\Sigma$ اصل‌پذیر متناهی باشد؛ دراین صورت، جمله‌ای مانند τ، وجود دارد که $\operatorname{Cn}\Sigma = \operatorname{Cn}\tau$. در حالت‌کلی $\tau \notin \Sigma$، اما همیشه $\Sigma \vDash \tau$ (زیرا $\tau \in \operatorname{Cn}\tau = \operatorname{Cn}\Sigma$). براساس قضیهٔ فشردگی، یک زیرمجموعهٔ متناهی $\Sigma_\circ$ از Σ وجود دارد به‌طوری‌که $\Sigma_\circ \vDash \tau$. دراین‌صورت،

$$\operatorname{Cn}\tau \subseteq \operatorname{Cn}\Sigma_\circ \subseteq \operatorname{Cn}\Sigma$$

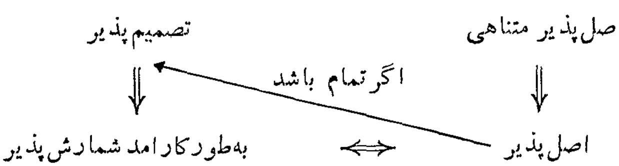
و از اینجا تساوی برقرار می‌شود. ■

اکنون می‌توان نتیجه‌های ۲۵ج و ۲۵چ را باعلامت‌گذاری فعلی دوباره بیان کرد:

***نتیجهٔ ۲۶ج.** (الف) یک نظریهٔ اصل‌پذیر (در یك زبان معقول)، به‌طورکارامد شمارش‌پذیر است.

(ب) یك نظریهٔ اصل‌پذیر تمام (دریك زبان معقول)، تصمیم‌پذیر است.

روابط بین این مفاهیم را می‌توان با یك نمودار (که درآن نتایج تمرین ۵ نیز نهفته است) نشان داد:



به عنوان مثال، نظریه‌ای که در قالب اصل موضوعی داده می‌شود (مانند نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو[1]- فرانکل[2] که برای یك مجموعهٔ مشخص A_{ZF} مساوی با $\operatorname{Cn} A_{ZF}$ است) به‌طورکارامد شمارش‌پذیر است. دربخش ۶.۳، ثابت می‌کنیم که نظریهٔ مجموعه‌ها نه تصمیم‌پذیر است و نه تمام. نظریهٔ اعداد، یعنی نظریهٔ ساخت $(N, \circ, S, <, +, \cdot, E)$، تمام است اما به‌طورکارامد شمارش‌پذیر نیست و بنابراین اصل‌پذیر نیست (بخش ۵.۳).

می‌توان از قسمت (ب) درنتیجهٔ قبل برای تثبیت تصمیم‌پذیری یك نظریهٔ اصل‌پذیر استفاده‌کرد، مشروط براینکه بتوان نشان دادکه نظریهٔ موردنظر تمام است. گاهی این کار با آزمون تمامیت لوش-وات[3]. انجام‌پذیر است.

---

1. Zermelo 2. Fraenkel 3. Łoś-Vaught

برای نظریهٔ T و کاردینال λ، می‌گوییم T یك نظریهٔ λ-جازم است اگر و تنها اگر همهٔ مدلهای T با کاردینال λ یکریخت باشند.

آزمون لوش-وات (۱۹۵۴). فرض کنیم T یك نظریه در زبانی شمارش‌پذیر باشد به‌طوری که

۱. کاردینالی نامتناهی مانند λ وجود داشته باشد که T نظریه‌ای λ-جازم باشد.

۲. همهٔ مدلهای T نامتناهی باشند.

دراین‌صورت T تمام است.

اثبات. کافی است نشان دهیم که به‌ازای هردومدل $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$ از T داریم $\mathcal{U}\equiv\mathcal{B}$. چون $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$ نامتناهی‌هستند، (براساس قضیهٔ ل.ا.ت.) ساختهای $\mathcal{U}'\equiv\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}'\equiv\mathcal{B}$ وجود داردکه دارای‌کاردینال λ می‌باشند. ولی $\mathcal{U}'$ با $\mathcal{B}'$ یکریخت است، بنابراین داریم:

$$\mathcal{U}\equiv\mathcal{U}'\cong\mathcal{B}'\equiv\mathcal{B}.$$

پس $\mathcal{U}\equiv\mathcal{B}$. ■

(اگر T یك نظریه در زبانی با کاردینال κ باشد، دراین صورت باید شرط $\kappa\leqslant\lambda$ را به‌صورت قضیه بیفزاییم.)

عکس آزمون لوش-وات غلط است. یعنی، نظریه‌های تمامی وجود دارندکه به‌ازای هیچ λ، λ-جازم نیستند.

دربخش ۳.۱، برای‌اثبات تصمیم‌پذیری نظریهٔ اعداد طبیعی با صفر و تالی، آزمون لوش-وات را به‌کارخواهیم گرفت. از این آزمون، برای اثبات تصمیم‌پذیری نظریهٔ هیأت اعداد مختلط نیز می‌توان استفاده کرد.

قضیهٔ ۲۶ج. (الف) نظریهٔ هیأتهای بستهٔ جبری با مشخصهٔ صفر تمام است.

*(ب) نظریهٔ هیأت اعداد مختلط

$$\mathcal{C}=(\mathbb{C},\ 0,\ 1,+,\cdot)$$

تصمیم‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{A}$ ردهٔ هیأتهای بستهٔ جبری بامشخصهٔ ۰ باشد. در آن صورت، $\mathcal{A}=\mathrm{Mod}(\Phi_0\cup\Gamma)$، که در آن Φ_0، همانند قبل، متشکل از اصول موضوع هیأتهای با مشخصهٔ صفر، و Γ متشکل از جمله‌های

$$\forall a\ \forall b\ \forall c(a\not\approx 0\rightarrow\exists x\ \ a\cdot x\cdot x+b\cdot x+c\approx 0),$$

$$\forall a\ \forall b\ \forall c\ \forall d(a\not\approx 0\rightarrow\exists x\ \ a\cdot x\cdot x\cdot x+b\cdot x\cdot x+c\cdot x+d\approx 0)$$

$\cdots$

است. مجموعهٔ $\Phi_{\circ} \cup \Gamma$ تصمیم‌پذیر است و داریم $\mathrm{Th}\,\mathscr{A} = \mathrm{Cn}(\Phi_{\circ} \cup \Gamma)$ ، بنابراین این نظریه اصل‌پذیر است. بنابرقسمت (الف) این قضیه، این نظریه تمام نیز هست. پس تصمیم‌پذیر است.

قسمت (ب)، از قسمت (الف) نتیجه می‌شود. زیرا داریم $\mathscr{C} \in \mathscr{A}$ ، و درنتیجه $\mathrm{Th}\,\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Th}\,\mathscr{C}$. از تمامیت $\mathrm{Th}\,\mathscr{A}$ ، نتیجه می‌شود که تساوی برقرار است؛ به‌تمرین ۱ مراجعه کنید.

برای اثبات قسمت (الف)، ازآزمون لوش-وات استفاده می‌کنیم. مدلهای $\mathrm{Th}\,\mathscr{A}$، همان عضوهای $\mathscr{A}$ هستند. این مدلها نامتناهی‌اند. از این گذشته، ثابت می‌کنیم که $\mathrm{Th}\,\mathscr{A}$ به ازای هر کاردینال شمارش‌ناپذیر، جازم است. این مطلب معادل است با این امر که هر دوهیأت بستهٔ جبری بامشخصهٔ صفر با کاردینال شمارش‌ناپذیر مساوی، یکریختند.

حکم اخیر قضیهٔ جبری معروفی است. برای آن دسته از خوانندگان که با مطلب آشنایی دارند، مجملی از اثبات را عرضه می‌کنیم. هر هیأت $\mathfrak{F}$ را می‌توان به طریق زیر به دست آورد: (۱) با زیر هیأت اول آن، که با تقریب یك یکریختی به‌وسیلهٔ مشخصهٔ $\mathfrak{F}$ تعیین می‌شود، شروع می‌کنیم. (۲) یك گسترش متعالی آن را انتخاب می‌کنیم که با تقریب یك یکریختی با کاردینال پایهٔ متعالی تعیین می‌شود، یعنی با درجهٔ تعالی $\mathfrak{F}$ (روی‌زیرهیأت اول). (۳) و بالاٴخره، یك گسترش جبری را می‌گزینیم. بدین ترتیب، یکی از قضایای اشتاینیتز[1] به‌دست می‌آید: دو هیأت بستهٔ جبری یکریخت‌اند اگر و تنها اگر دارای مشخصهٔ مساوی باشند ودرجهٔ تعالی آنها یکی باشد.

اگر درجهٔ تعالی یك هیأت نامتناهی $\mathfrak{F}$ برابر λ باشد، آنگاه کاردینال $\mathfrak{F}$ ، بزرگتر از λ و $\aleph_{\circ}$ می‌باشد. بنابراین، برای یك هیأت شمارش‌ناپذیر، کاردینال با درجهٔ تعالی برابر می‌باشد. پس، از قضیهٔ اشتاینیتز نتیجه می‌گیریم که دو هیأت بستهٔ جبری با مشخصهٔ مساوی وکاردینال شمارش‌ناپذیر مساوی یکریخت هستند. ■

نظریهٔ هیأت اعداد حقیقی

$$(\mathbb{R}\,,\, ۰,\, ۱,\, +\,,\, \cdot),$$

نیز تصمیم‌پذیر است. لکن این قضیه (که ازکارهای تارسکی است) خیلی عمیقتر از قضیهٔ بالاست. نظریهٔ هیأت اعداد حقیقی، بهازای هیچ کاردینال نامتناهی، جازم نیست، بنابراین آزمون لوش-وات را نمی‌توان به‌کار برد.

به‌عنوان آخرین مثال، می‌توان نشان دادکه مرتب‌کردن اعداد گویا با مرتب‌کردن اعداد حقیقی معادل مقدماتی است:

$$(\mathbb{Q}\,,\, <_{Q}) \equiv (\mathbb{R}\,,\, <_{R}),$$

که در آن $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ ، بترتیب، اعداد گویا و اعداد حقیقی هستند، و $<_{Q}$ و $<_{R}$ رابطه‌های

1. Steinitz

ترتیبی مربوط به‌آنهاست. برای نشان دادن این تعادل مقدماتی، نشان می‌دهیم که هر دو، مدلهایی برای یك نظریهٔ کامل هستند(که درآن صورت، باید با نظریهٔ هریك ازاین دوساخت منطبق باشد). نکتهٔ رهگشا را قضیهٔ کانتور[1] به‌دست می‌دهد: هر دو رابطهٔ ترتیب خطی چگال شمارش‌پذیر، یکریخت‌اند.

برای ارائهٔ جزئیات مطلب، باید کمی به‌عقب برگردیم. در اینجا، زبان موردنظر، دارای تساوی وپارامترهای $\forall$ و $<$ است. فرض کنیم δ ترکیب عطفی جمله‌های زیر باشد:

۱. اصول موضوع ترتیب (تثلیث وتعدی)

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \vee x \approx y \vee y < x),$$

$$\forall x \forall y(x < y \rightarrow y \nless x),$$

$$\forall x \forall y \forall z(x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z).$$

۲. چگالی:

$$\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z < y)).$$

۳. نبود نقاط انتهایی:

$$\forall x \exists y \exists z(y < x < z).$$

ترتیبهای چگال خطی بدون نقاط انتهایی، بنا به‌تعریف، ساختهایی برای این زبان هستند که مدلی از δ می‌باشند. واضح است که جملگی آنها نامتناهی‌اند. افزون براین، ثابت می‌کنیم که نظریهٔ این ترتیبها، $\mathrm{Cn}\,\delta$، در کاردینال $\aleph_0$ جازم است. این مطلب را قضیهٔ زیر به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲۶ح (کانتور). هر مدل شمارش‌پذیر δ با $(\mathbb{Q}\,,\,<_Q)$ یکریخت است.

اثبات به‌تمرین ۳ واگذار می‌شود.

حال می‌توان از آزمون لوش-وات جهت نتیجه‌گیری این امر که $\mathrm{Cn}\,\delta$ تمام است استفاده کرد. دراین صورت، هردومدل از δ معادل مقدماتی‌اند. بویژه،

$$(\mathbb{Q}\,,\,<_Q) \equiv (\mathbb{R}\,,\,<_R).$$

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که این ساختها دارای نظریه‌های تصمیم‌پذیرند.

شکل نرمال پیشوندی

بعضی اوقات، بهتراست که همهٔ نمادهای سوری رابه‌سمت چپ بقیهٔ نمادها منتقل کنیم. مثلاً،

$$\forall x(Ax \rightarrow \forall y\, Bxy)$$

---

1. Cantor

معادل است با

$$\forall x \forall y(Ax \to Bxy).$$

و

$$\forall x(Ax \to \exists y Bxy)$$

معادل است با

$$\forall x \exists y(Ax \to Bxy).$$

تعریف می‌کنیم: فرمول پیشوندی فرمولی است که (به‌ازای یك $n \geqslant 0$) به‌صورت زیر است:

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \alpha,$$

که در آن، هر Q_i ، یکی ازسورهای $\forall$ یا $\exists$ و α، فرمولی بی‌سور است.

قضیهٔ شکل نرمال پیشوندی. به‌ازای هر فرمول، یك فرمول پیشوندی منطقاً معادل با آن وجود دارد.

اثبات. برای اثبات قضیه، از خواص سورها که در اینجا فهرست شده‌اند استفاده خواهیم کرد.

س۱ الف. $\neg\forall x\, \alpha \vDash\dashv \exists x \neg\alpha.$

س۱ ب. $\neg\exists x\, \alpha \vDash\dashv \forall x \neg\alpha.$

س۲ الف. $(\alpha \to \forall x\, \beta) \vDash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ (مشروط به‌اینکه x در α آزاد نباشد).

س۲ ب. $(\alpha \to \exists x\, \beta) \vDash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ (مشروط به‌اینکه x در α آزاد نباشد).

س۳ الف. $(\forall x\, \alpha \to \beta) \vDash\dashv \exists x(\alpha \to \beta)$ (مشروط به‌اینکه x در β آزاد نباشد).

س۳ ب. $(\exists x\, \alpha \to \beta) \vDash\dashv \forall x(\alpha \to \beta)$ (مشروط به‌اینکه x در β آزاد نباشد).

س۱ واضح است؛ در مورد بقیه، به صفحهٔ ۱۱۳ کتاب وصفحات بعداز آن و تمرین ۸ در بخش ۴.۲ مراجعه کنید.

حال، به‌استقرا، نشان می‌دهیم که هرفرمولی دارای یك فرمول پیشوندی معادل‌است.

۱. برای فرمولهای بسیط، و همچنین فرمولهای بی‌سور، مطلب بـه‌علت نبود سور واضح است.

۲. اگر α ، با فرمول پیشوندی α' معادل باشد، آنگاه $\forall x\, \alpha$ نیز بافرمول پیشوندی $\forall x\, \alpha'$ معادل است.

۳. اگر α با فرمول پیشوندی α' معادل باشد، آنگاه $\neg\alpha$ با $\neg\alpha'$ معادل است. حال، س ۱ را درمورد $\neg\alpha'$ به‌کار ببرید تا یك فرمول پیشوندی به‌دست آید؛ برای مثال،

$$\neg\forall x \exists y \exists z\, \beta \models\!\dashv \exists x \forall y \forall z\, \neg\beta.$$

۴. بالاخره به‌حالت $\alpha \rightarrow \beta$ می‌رسیم. براساس فرض استقرا، فرمولهای پیشوندی α' و β' رادراختیارداریم که، بترتیب، با α و β معادل‌اند. علاوه براین،طبق قضیهٔ گونه‌های الفبایی، می‌توان فرض کرد که هرمتغیرکه در یکی از فرمولهای α' و β' پایبند سور باشد، در دیگری اصلاً ظاهر نمی‌شود. حال، س۲ و س۳ را به‌کارمی‌بریم تایك فرمول‌پیشوندی معادل با $\alpha' \rightarrow \beta'$ (و بنا براین معادل با $\alpha \rightarrow \beta$) به دست آوریم. توجه کنید که در ترتیبی که قواعد س۲ و س۳ به‌کار برده می‌شوند، تا اندازه‌ای آزادی وجود دارد. به‌عنوان مثال،

$$\forall x \exists y\, \varphi \rightarrow \exists u\, \psi$$

(که در آن x و y در ψ، و u در φ ظاهرنمی‌شود) باهریك ازفرمولهای زیرمعادل است:

$$\exists x \forall y \exists u(\varphi \rightarrow \psi),$$

$$\exists x \exists u \forall y(\varphi \rightarrow \psi),$$

$$\exists u \exists x \forall y(\varphi \rightarrow \psi), \quad \blacksquare$$

بازپس‌نگری

درابتدای این کتاب، گفته شد که منطق نمادی، یك مدل ریاضی برای تفکر قیاسی است. اکنون زمان آن فرارسیده است که، در پرتو مطالبی که تاکنون مورد بررسی قرارگرفته است، روی این مطلب بیندیشیم.

به‌عنوان اولین‌مثال، ریاضی‌دانی رادرنظر بگیرید که روی نظریهٔ مجموعه‌ها کارمی‌کند. وی زبانی را به‌کار می‌برد که دارای یك نماد تساوی، یك نماد $\in$ برای عضویت، و تعداد بی‌شماری نمادهای تعریف شده ($\varnothing$، $\cup$، وغیره) است. اصولاً می‌توان نمادهای تعریف شده را حذف کرد وهرجمله‌ای را بایك جملهٔ معادل، که در آن نمادهای تعریف شده ظاهر نمی‌گردند، عوض کرد. (در این مورد، به‌بخش ۷.۲ که درآنجا این مطلب به‌طور منظمی بررسی شده است، رجوع کنید.) وی دومفهوم مجموعه و عضویت را به عنوان مفاهیم‌اولیه (یاتعریف نشده) درنظرمی‌گیرد ومجموعهٔ A_{ST}، مجموعهٔ اصول موضوعی که در برگیرندهٔ این مفاهیم است، را می‌پذیرد. آنگاه، درمورد بعضی از جمله‌ها (قضایا) چنین حکم می‌کندکه صرف‌نظر ازاینکه مفاهیم تعریف نشدهٔ مجموعه وعضویت واقعاً چه معنایی داشته باشند، این جمله‌ها صادق هستند مشروط براینکه اصول پذیرفته‌شده صادق باشد. در دفاع از این احکام و به‌منظور قانع کردن همکاران خود از صدق آنها، اثباتهایی با طول متناهی عرضه می‌کند.

درزبان منطق مرتبهٔ اول، همهٔ این مطالب را به‌صورت زیر می‌توان شرح داد: زبان موردنظر دراینجا، یك زبان مرتبهٔ اول شامل تساوی ویك نماد محمولی دوموضعی $\in$ است. بنابراین، $\forall$ و $\in$ تنها پارامترهایی‌هستند که قابل‌تعبیرند. یك مجموعهٔ معین A_{ST} ازجمله‌های این زبان وجود دارد که به‌عنوان مجموعهٔ اصول موضوع (غیر منطقی) انتخاب شده است. دراین‌صورت، جمله‌های مشخص دیگری، نتایج منطقی A_{ST} می‌باشند، یعنی،درهرمدل A_{ST} صادق هستند. اگر τ یك نتیجهٔ منطقی A_{ST} باشد (وتنها درآن صورت)، استنتاجی برای τ از A_{ST} وجود دارد.

نمونهٔ بارزتر، حالتی راکه ریاضی دان فرضی ما متخصص جبر یا آنالیز است، را درنظر می‌گیریم. متخصص جبر، از اصول موضوع (مثلاً نظریهٔ گروهها استفاده می‌کند، اما قدری از نظریهٔ مجموعه‌ها را نیز به‌کار می‌گیرد. به‌همین ترتیب، متخصص آنالیز با جمله‌هایی‌سروکار داردکه هم اعداد وهم مجموعه‌هایی ازاعداد را دربردارند. به‌طورکلی درهر دوحالت، علی‌الاصول، ثابت شده است‌که می‌توان احکام جبروآنالیز را به‌احکامی در نظریهٔ مجموعه‌ها برگرداند. و در آن صورت توضیحات پاراگراف پیشین را دوباره به‌کار برد.

اهمیت منطق نمادی برای یك ریاضی‌دان بیشتر به‌خاطر دقتی است‌که در انعکاس استنتاجهای ریاضی دارد. وپس‌ازآنکه مدتی طولانی باآن کارشد، مطمئناً درفهم‌روندهای اساسی ریاضی مفید خواهد بود.

آنچه‌که می‌ماند، میزان دقتی است که منطق مرتبهٔ اول، در انعکاس تفکر قیاسی غیر ریاضی دارد. منطق، نمادی یا غیرنمادی، همیشه یك قسمت سنتی ازمطالعات فلسفی دربارهٔ روندی را تشکیل داده است که انسان با آن به‌ایده‌های مشخصی دست می‌یابد. مثالهای غیر ریاضی‌که منطق مرتبهٔ اول در مورد آنها به‌کار می‌رود، معمولاً شامل مثالهای متعددی ازمسائل ساختگی است. لویس‌کارول[1] ازکسانی‌است‌که چنین مسائلی را وضع کرده است. در یکی از آنها، از سه فرض زیر استنتاج می‌شودکه بچه‌ها ازعهدهٔ تمساحها برنمی‌آیند: (۱) بچه‌ها بی‌منطق هستند. (۲) کسی‌که از عهدهٔ تمساحی برآید، حقیر شمرده نمی‌شود. (۳) اشخاص بی‌منطق حقیر شمرده می‌شوند.

اما دربارهٔ اوضاع غیرساختگی، چه می‌توان گفت؟ دراینجا نیزکاربرد منطق با ابهام همراه است، این ابهام ناشی ازاین است‌که ما معمولاً فرضهایی راکه براساس آنها نتیجه استخراج می‌شود، صریحاً بیان نمی‌کنیم. زمینه‌های خاصی (در حوزه‌های وسیعی، مانند فیزیك، پزشکی، حقوق) وجود داردکه درآنها نه‌تنها می‌توان فرضیات را صریحاً بیان کرد، بلکه صریحاً نیز بیان می‌شوند. در بعضی از موارد، به‌نظر می‌رسدکه برای صوری کردن استنتاجهای زندگی واقعی به‌چیزی‌کمتر ازگسترش‌کامل منطق مرتبهٔ اول نیازداریم. درمورد مکانیك‌کوانتمی، جنبه‌های بیشتری ممکن است لازم باشد.

---

1. Lewis Carrol

تمرین

۱. فرض کنید T_1 و T_2 نظریه‌هایی باشند که (یك) $T_1 \subseteq T_2$، T_1 (دو) تمام است، و (سه) T_2 ارضاشدنی است. نشان دهید $T_1 = T_2$.

۲. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Longrightarrow \operatorname{Mod}\Sigma_2 \subseteq \operatorname{Mod}\Sigma_1$$

$$\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \Longrightarrow \operatorname{Th}\mathcal{K}_2 \subseteq \operatorname{Th}\mathcal{K}_1 \cdot$$

(ب) $$\Sigma \subseteq \operatorname{Th}\operatorname{Mod}\Sigma\,,\ \mathcal{K} \subseteq \operatorname{Mod}\operatorname{Th}\mathcal{K}\cdot$$

(پ) $$\operatorname{Mod}\Sigma = \operatorname{Mod}\operatorname{Th}\operatorname{Mod}\Sigma\,,\ \operatorname{Th}\mathcal{K} = \operatorname{Th}\operatorname{Mod}\operatorname{Th}\mathcal{K}\cdot$$

(قسمت (پ) از قسمتهای (الف) و (ب) به‌دست می‌آید.)

۳. ثابت کنید که هر دو ترتیب شمارش‌پذیر چگال خطی بدون نقاط انتهایی یکریخت‌اند (قضیهٔ ۲۶ ح). راهنمایی: فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ ساختهایی باشند با $|\mathfrak{A}| = \{a_0, a_1, \ldots\}$ و $|\mathfrak{B}| = \{b_0, b_1, \ldots\}$. یك یکریختی در چندین مرحله بسازید؛ در مرحلهٔ $2n$، مطمئن شوید که a_n به یك b_j مناسب نسبت داده شده است، و در مرحلهٔ $2n+1$ مطمئن شوید که b_n به‌یك a_i مناسب نسبت داده شده است.

۴. فرمولهای پیشوندی معادل با

(الف) $$(\exists x\, Ax \wedge \exists x\, Bx) \to Cx,$$

(ب) $$\forall x\, Ax \leftrightarrow \exists x\, Bx,$$

را به‌دست آورید.

*۵. عکس قسمت (الف) نتیجهٔ ۲۶ ج را ثابت کنید: یك نظریه بـه‌طـور کارامد شمارش‌پذیر (دریك زبان معقول) اصل‌پذیر است.

۶. زبانی را بـا یك نماد محمولی دو موضعی $<$ درنظـر بگیرید، و فرض کنید $\mathfrak{N} = (N, <)$ ساخت متشکل از اعداد طبیعی توأم بـا ترتیب معمولی آنها باشد. نشان دهیدکه یك $\mathfrak{A}$ وجود داردکه به‌طورمقدماتی با $\mathfrak{N}$ معادل است و $<^{\mathfrak{A}}$ یك زنجیرهٔ کاهشی دارد. (یعنی اینکه در $|\mathfrak{A}|$ باید دنباله‌ای چون a_0، a_1، ... وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر i داشته باشیم $\langle a_{i+1}, a_i\rangle \in <^{\mathfrak{A}}$.)

۷. نشان دهیدکه یك نقشهٔ نامتناهی را می‌توان با چهاررنگ، رنگ کرد اگر و تنها اگر هر زیرنقشهٔ متناهی آن را بتوان با چهاررنگ، رنگ کرد. راهنمایی: زبانی را درنظر بگیرید که دارای یك نماد ثابت برای هر کشور ودارای چهار نماد محمولی یك موضعی

برای رنگها باشد. از قضیهٔ فشردگی استفاده کنید.

۸. فرض کنید Σ_1 و Σ_2 مجموعه‌هایی از جمله‌ها باشند به‌طوری که هیچ ساخت مدلی برای هردوی Σ_1 و Σ_2 نباشد. نشان دهید که یك جملهٔ τ وجود دارد به‌طوری که $\mathrm{Mod}\,\Sigma_1 \subseteq \mathrm{Mod}\,\tau$ و $\mathrm{Mod}\,\Sigma_2 \subseteq \mathrm{Mod}\,\neg\tau$. (این مطلب را می‌توان چنین بیان کرد: رده‌های مجزای EC_Δ می‌توانند با یك ردهٔ EC جدا شوند.)

۹. فرض کنید σ در همهٔ مدلهای نامتناهی یك نظریهٔ T صادق باشد. نشان دهید که یك عدد متناهی k وجود دارد به‌طوری که σ در همهٔ مدلهای $\mathcal{U}$ از T، که در آنها $|\mathcal{U}|$ دارای k یا بیشتر عنصر است صادق باشد.

۷.۲ تعبیرات بین نظریه‌ها[1]

در بعضی موارد، می‌توان نشان داد که نظریهٔ T_1 جزء به‌جزء با نظریهٔ دیگر T_0 همقدرت است. البته اگر نظریه‌ها در یك زبان باشند و $T_0 \subseteq T_1$ باشد این امری است واضح. اما، حتی اگر نظریه‌ها در زبانهای مختلفی بیان شده باشند، ممکن است طریقی برای ترجمهٔ جمله‌های یکی از این زبانها به‌دیگری وجود داشته باشد که هرعضو T_0 به‌صورت عضوی از T_1 ترجمه شود. این وضع در این بخش بررسی خواهد شد.

این موضوع را با بحث پیرامون نمادهای تعریف شده آغاز می‌کنیم. این مبحث، علاوه براین که به خودی خود دارای اهمیت است، مثالی است از وضعیت مذکور در پاراگراف پیشین، که در آن T_1 از T_0 با افزودن نماد تعریف‌شده جدیدی، ساخته می‌شود. اگر تعریف بدرستی انجام گیرد نظریهٔ اولیه T_1، اصولاً، به‌اندازهٔ T_0 جدید قوی خواهد بود. دراینجا، تنها حالت نمادهای تابعی تعریف شده را درنظر می‌گیریم، زیرا، در مقایسه، حالت نمادهای محمولی تعریف شده، هیچ مشکل واقعی پیش نمی‌آورد.

توابع تعریف‌کننده

غالباً در ریاضیات، به معرفی توابع جدید نیاز پیدا می‌کنیم. به عنوان مثال، در نظریهٔ مجموعه‌ها، عمل مجموعهٔ توانی، $\mathcal{P}$، با جمله‌ای نظیر، «فرض کنید $\mathcal{P}x$ مجموعه‌ای باشد که عضوهای آن زیرمجموعه‌های x می‌باشند» تعریف می‌شود. یا با جمله‌ای در زبان صوری (که دراینجا شامل $\in$، $\subseteq$، و $\mathcal{P}$ است) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall \mathbf{v}_1\, \forall \mathbf{v}_2 [\mathcal{P}\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \forall u(u \in \mathbf{v}_2 \leftrightarrow u \subseteq \mathbf{v}_1)].$$

لکن، تعاریف نه‌شبیه‌قضایا و نه‌شبیه اصول موضوع هستند. برخلاف قضایا، تعاریف

---

۱. نتایج این بخش فقط دربخش ۶.۳ مورد استفاده قرارمی‌گیرد.

چیزهایی نیستند که اثبات می‌کنیم، بلکه آنها را صرفاً می‌پذیریم؛ و برخلاف اصول موضوع انتظار نداریم که تعاریف اطلاعات قابل ملاحظهٔ جدیدی ارائه دهند. بلکه انتظارداریم که یك تعریف بسهولت درکار بیفزاید نه به‌دانش ما از موضوع.

برای اینکه این انتظار تحقق یابد، تعریف باید به‌طریق معقولی ارائه شود. به‌عنوان مثالی از غیر معقولانه‌ترین تعریف در نظریهٔ اعداد، فرض کنیم یك نماد جدید تابعی f را چنین «تعریف» کنیم

$$f(x)=y \quad \text{اگروتنها اگر} \quad x<y$$

(ویا به‌وسیلهٔ جملهٔ $\forall \mathbf{v}_1 \forall \mathbf{v}_2 (f\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_1 < \mathbf{v}_2)$ در زبان صوری). از آنجا که می‌دانیم ۲ < ۱، مشاهده می‌کنیم که $f(۱) = ۲$. امــا ۳ > ۱ نیز بــرقرار است، پس به‌دست می‌آوریم $f(۱) = ۳$. بنا براین به این نتیجه می‌رسیم که ۳ = ۲ (کــه خود شامل نماد f نیست).

واضح است که این تعریف f تعریف نادرستی است که نه تنها سهولتی درکار ایجاد نکرد بلکه، از آن توانستیم نتیجه بگیریم که ۳ = ۲ ،که بدون آن تعریف این نتیجه‌گیری ممکن نبود. مشکل از اینجا ناشی می‌شود که این تعریف، «$f(۱)$» را به‌طور مبهم براساس کمیتهای متعددی (که ۲ و ۳ نیز در بین آنهاست) نام‌گذاری می‌کند. بنا براین $f(۱)$ خوب تعریف نشده بود. اسامی، باید مصداقهای منحصر به‌فردی داشته باشند.

در این زیر بخش، به‌بررسی شرایطی می‌پردازیم که با رعایت آنها می‌توان اطمینان حاصل کرد که یك تعریف رضایت‌بخش خواهد بود. برای ساده‌کردن علامت‌گذاری، تنها، به‌تعریف یك نماد تابعی یك موضعی f می‌پردازیم، ولی این توضیحات درمورد نمادهای تابعی n موضعی هم به‌کار می‌رود.

نظریهٔ T را در زبانی که هنوز نماد تــابعی یك موضعی f را دربــرندارد، درنظر می‌گیریم. (به عنوان مثال، T ممکن است مجموعــهٔ نتایج منطقی به دست آمده از اصول موضوع مطلوب شما برای نظریهٔ مجموعه‌هــا باشد.) می‌خواهیم f را به‌کمك تعریف زیر به‌زبان اضافه کنیم:

$$\forall \mathbf{v}_1 \forall \mathbf{v}_2 [f\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \varphi], \qquad (\delta)$$

که در آن φ، فرمولی است در زبان اولیه (یعنی، فرمولی است که شامل f نیست) که در آن تنها $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ ممکن است مورد آزاد داشته باشند.

قضیهٔ ۲۷الف. در وضع بالا، احکام زیرمعادل‌اند:

(الف) (تعریف غیرخلاق است.) به‌ازای هرجملهٔ σ در زبان اولیه، اگر (در زبان گسترش یافته)

$$T;\delta \models \sigma$$

آنگاه $T \models \sigma$ درنظریهٔ اولیه نیز برقرار است.

(ب) (f خوب تعریف شده است.) جملهٔ

$$\forall v_1 \exists! v_2 \varphi \qquad (\varepsilon)$$

درنظریهٔ T است. (دراینجا، «$\exists! v_2 \varphi$» اختصاری است از یك فرمول طولانیتر؛ به‌تمرین ۲۱ بخش ۲.۲ مراجعه کنید.)

اثبات. برای اثبات (ب) $\Rightarrow$ (الف)، کافی است توجه‌کنیم که $\delta \models \varepsilon$. بنابراین، با قراردادن $\sigma = \varepsilon$ درقسمت (الف)، $T \models \varepsilon$ را به‌دست می‌آوریم.

برعکس، فرض‌کنیم $T \models \varepsilon$. فرض‌کنیم $\mathfrak{U}$ مدلی برای T باشد. ($\mathfrak{U}$، ساختی برای زبان اولیه است.) برای $d \in |\mathfrak{U}|$، فرض‌کنیم $F(d)$ برابر شیء منحصر به‌فردی در $|\mathfrak{U}|$ مانند e باشد به‌طوری‌که $\models_{\mathfrak{U}} \varphi[\![d, e]\!]$. (چنین eی‌منحصر به‌فردی‌وجود دارد، زیرا $\models_{\mathfrak{U}} \varepsilon$.) فرض‌کنیم $(\mathfrak{U}, F)$ ساختی برای زبان گسترش‌یافته باشد که با $\mathfrak{U}$ در پارامترهای اولیه توافق داشته و F را به‌نماد f نسبت دهد. دراین‌صورت، بسادگی‌می‌توان دیدکه $(\mathfrak{U}, F)$ مدلی‌برای δ است. بعلاوه، $\mathfrak{U}$ و $(\mathfrak{U}, F)$ جمله‌های یکسانی را در زبان اولیه ارضامی‌کنند، بویژه $(\mathfrak{U}, F)$ مدلی برای T است. از این‌رو

$$T ; \delta \models \sigma \Rightarrow \models_{(\mathfrak{U}, F)} \sigma$$

$$\Rightarrow \models_{\mathfrak{U}} \sigma. \quad \blacksquare$$

(این استدلال را می‌توان با بهره‌گیری از منطق مرتبهٔ دوم با اختصار بیشتری بیان کرد. ε منطقاً معادل جملهٔ $\exists f \delta$ است.)

تعبیرها

ایدهٔ اصلی‌آن است‌که این امکان وجود دارد که یك نظریه درست همان اندازه قوی باشد (به‌معنایی‌که به‌طور دقیق بیان خواهد شد)که نظریه‌ای دیگر در زبانی دیگر. در بررسی همزمان دو زبان، نیاز نداریم فرض کنیم تعارضی باهم دارند، و مثلاً، نماد نفی یکی از زبانها نماد محمولی در دیگری باشد. می‌توان چنین تعارضاتی را، با این فرض‌که هریك از زبانها از یك زبان سوم با حذف بعضی از پارامترها (و شاید تساوی) به‌دست آمده است برطرف‌کرد.

به‌عنوان مثال، نظریهٔ اصول موضوعی مجموعه‌ها دست‌کم به‌اندازهٔ نظریهٔ اعداد طبیعی‌که شامل صفر و تالی باشد، یعنی‌نظریهٔ $(N, \circ, S)$، قوی‌است. هرجمله‌ای در زبان $(N, \circ, S)$ می‌تواند از طریقی طبیعی به جمله‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها برگردانده شود. (روند این ترجمه در بخش ۶.۳ به‌طور خلاصه عرضه شده است.) اگر جملهٔ اولیه در $(N, \circ, S)$ صادق باشد، آنگاه ترجمهٔ آن، نتیجه‌ای از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها خواهد بود. (این مطلب واضح نیست؛ اثبات آن متکی برمطالبی است که دربخش ۱.۳

گفته خواهند شد.)

مثال دوم را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم. نظریهٔ

$$(\mathbb{N}, 0, S)$$

و نظریهٔ

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$$

را در زبانهای خاص هرکدام درنظرمی‌گیریم. (در اینجا $\mathbb{Z}$ ، مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح، مثبت، منفی، وصفر است.) بزودی درموقعیتی قرارخواهیم گرفت کــه ادعا کنیم نظریهٔ دوم به اندازهٔ نظریهٔ اول قوی است. چگونه می‌توان یك جمله دربارهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ ، همراه با ۰ و S را به‌جمله‌ای دربارهٔ اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$، همراه با جمع وضرب ترجمه‌کرد؟

اولین نکته آن است که یك‌عدد صحیح غیرمنفی است اگروفقط اگرآن عدد مجموع چهار مربع باشد، بنابراین یك سور $\forall x$ در زبان اول (کــه درآن x روی $\mathbb{N}$ تعبیر شده است) می‌تواند با

$$\forall x(\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\, x \approx y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4 \rightarrow$$

درزبان دوم جایگزین شود.

دومین نکته آن است که $\{0\}$ وتابع تالی (که به‌عنوان رابطه درنظرگرفته می‌شود) در $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ قابل تعریف‌اند. مجموعهٔ $\{0\}$ با

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_1$$

و رابطهٔ تالی در $\mathbb{Z}$ با

$$\forall z(z \cdot z \approx z \wedge z + z \not\approx z \rightarrow \mathbf{v}_1 + z \approx \mathbf{v}_2)$$

تعریف می‌شود. بنابراین جملهٔ

$$\forall x\, \mathbf{S}x \not\approx 0$$

در زبان $(\mathbb{N}, 0, S)$، می‌تواند به‌جملهٔ زیر برگردانده شود:

$$\forall x\, [\exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\, x \approx y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4 \rightarrow$$
$$\neg \forall u(u + u \approx u \rightarrow \forall v(\forall z(z \cdot z \approx z \wedge z + z \not\approx z \rightarrow x + z \approx v) \rightarrow$$
$$v \approx u))].$$

درموردمثال، به‌همین‌تعداد بسنده می‌کنیم. برای بحث کلی‌خود، معرفی‌علامت‌گذاری زیرکمك خواهدکرد:

$$\varphi(t) = \varphi_t^{\mathbf{v}_1},$$

$$\varphi(t_1, t_2) = (\varphi^{\mathbf{v}_1}_{t_1})^{\mathbf{v}_2}_{t_2},$$

و به‌همین‌ترتیب برای ترمهای دیگر. بنابراین، $\varphi = \varphi(\mathbf{v}_1) = \varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. اگر «$\varphi(x)$» را به‌کار بریم چندان نگران این مطلب نخواهیم بود که آیا x برای $\mathbf{v}_1$ در φ جایگزین شدنی است یا خیر. اگر نبود، در آن صورت $\varphi(x)$ را برابر $\psi^{\mathbf{v}_1}_x$ انتخاب می‌کنیم که ψ یك گونهٔ الفبایی مناسب از φ است.

حال فرض کنیم وضعیت کلی زیر مطرح باشد.

L_0 یك زبان است. (درعمل، یك زبان می‌تواند مجموعه‌ای از پارامترها باشد که احتمالاً یك نماد تساوی نیز به‌آن افزوده شده است.)

T_1 نظریه‌ای در یك زبان (احتمالاً متفاوت) مانند L_1 است که شامل تساوی نیز هست.

تعریف. یك تعبیر π از L_0 در T_1 تابعی است روی مجموعهٔ پارامترهای L_0 به‌طوری که

۱. π فرمول $\pi_\forall$ را از L_1 به $\forall$ مربوط می‌سازد که در آن حداکثر $\mathbf{v}_1$ مورد آزاد داشته باشد به‌طوری که

$$T_1 \vDash \exists \mathbf{v}_1\, \pi_\forall. \tag{یك}$$

(غرض آن است که درهرمدل T_1، فرمول $\pi_\forall$ باید یك مجموعهٔ غیرتهی را تعریف کند که به‌عنوان عالم سخن یك L_0-ساخت به‌کارخواهد رفت.)

۲. π بـه‌هر نماد محمولی n موضعی P، یك فرمول π_P را در L_1 مربوط می‌سازد که در آن حداکثر متغیرهای $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ آزادند.

۳. π به هر نماد تابعی n موضعی f، یك فرمول π_f را در L_1 مربوط می‌سازد که در آن حداکثر $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ آزادند و همچنین

$$\begin{aligned} T_1 \vDash \forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n (\pi_\forall(\mathbf{v}_1) \to \ldots \to \pi_\forall(\mathbf{v}_n) \\ \to \exists x(\pi_\forall(x) \wedge \forall \mathbf{v}_{n+1}(\pi_f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}) \leftrightarrow \mathbf{v}_{n+1} \approx x))). \end{aligned} \tag{دو}$$

(درفارسی، این فرمول به‌این صورت خوانده می‌شود: «به‌ازای هر $\vec{v}$، در مجموعهٔ تعریف شده با $\pi_\forall$، x منحصر به‌فردی وجود دارد به‌طوری که $\pi_f(\vec{v}, x)$، وعلاوه براین، x در مجموعهٔ تعریف‌شده با $\pi_\forall$ قراردارد.» غرض آن‌است که اطمینان حاصل‌کنیم که درهرمدل T_1، فرمول π_f درعالم سخن تعریف شده با $\pi_\forall$، یك تابع تعریف می‌کند. درمورد یك نماد ثابت c، داریم $n = 0$ و (دو) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$T_1 \vDash \exists x(\pi_\forall(x) \wedge \forall \mathbf{v}_1(\pi_c(\mathbf{v}_1) \leftrightarrow \mathbf{v}_1 \approx x)).$$

به عبارت دیگر، π_c یك مجموعهٔ تك عضوی را تعریف می‌کند، کـه تنها عضو آن نیز در

مجموعهٔ تعریف شده با $\pi_\forall$ است.)

به‌عنوان مثال، اگر $L_\circ$ زبان مربوط بــه $(N, \circ, S)$ و T_1 نظریهٔ $(Z, +, \cdot)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\pi_\forall(x) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\, x \approx y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4\,,$$

$$\pi_\circ(x) = x + x \approx x\,,$$

$$\pi_S(x, y) = \forall y (z \cdot z \approx z \wedge z + z \not\approx z \rightarrow x + z \approx y).$$

(در اینجا، از این‌مطلب که در $(Z, +, \cdot)$ می‌توان ساخت $(N, \circ, S)$ را تعریف کرد، بهره می‌جوییم.)

اگر $L_\circ$ بر L_1 منطبق باشد، درآن‌حال، آشکارا، تعبیرهمانی π وجود داردکه برای آن داریم

$$\pi_\forall = v_1 \approx v_1\,,$$

$$\pi_P = P v_1 \cdots v_n\,,$$

$$\pi_f = f v_1 \cdots v_n \approx v_{n+1}.$$

دراین‌صورت شرایط (یك) و (دو) صرف‌نظر از این‌که T_1 چیست، برقرار خواهند بود.

حال فرض‌کنید π یك تعبیر و $\mathcal{B}$ مدلی‌از T_1 باشد. یك‌طریقهٔ طبیعی‌برای استخراج یك ساخت $^\pi\mathcal{B}$ برای $L_\circ$ از $\mathcal{B}$ این است: فرض‌کنید

$|^\pi\mathcal{B}| =$ مجموعهٔ تعریف شده در $\mathcal{B}$ با $\pi_\forall$،

$P^{^\pi\mathcal{B}} =$ رابطهٔ تعریف شده در $\mathcal{B}$ با π_P، محدود به $|^\pi\mathcal{B}|$،

$b = f^{^\pi\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)$ ی منحصر به‌فردی که $\models_{\mathcal{B}} \pi_f[\![a_1, \ldots, a_n, b]\!]$، که درآن a_1، ...، a_n متعلق به $|^\pi\mathcal{B}|$ می‌باشند.

براساس شرط (یك) درتعریف تعبیر، $|^\pi\mathcal{B}| \neq \varnothing$. و بــراساس شرط (دو)، تعریف $f^{^\pi\mathcal{B}}$ با معنی است؛ یعنی، bی منحصر به‌فردي وجود داردکــه درشرایط بالا صدق‌کند. بنابراین، $^\pi\mathcal{B}$ درحقیقت یك ساخت برای زبان $L_\circ$ است.

اکنون مجموعهٔ $\pi^{-1}[T_1]$ از جمله‌های $L_\circ$ را با معادلهٔ زیرتعریف کنید:

$$\pi^{-1}[T_1] = \mathrm{Th}\,\{^\pi\mathcal{B} : \mathcal{B} \in \mathrm{Mod}\, T_1\}$$

$= \{ \sigma :$ σ یك $L_\circ$-جمله است‌که درهرساخت $^\pi\mathcal{B}$، که از یك مدل $\mathcal{B}$ از T_1 قابل حصول است صادق است. $\}$

این مجموعه، یك نظریه است، چنان‌که $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}$، به‌ازای هــر ردهٔ $\mathcal{K}$، یك نظریه است. و

یك نظریهٔ ارضاشدنی است اگر و تنها اگر T_1 ارضا شدنی است.

مثال. قبلاً در این بخش، یك نظریهٔ T داشتیم که شامل جمله زیر بود:

$$\forall v_1 \, \exists! \, v_2 \, \varphi. \qquad (\varepsilon)$$

زبان را به‌یك زبان بزرگتر L^+ که شامل یك نماد تابعی f بود، گسترش دادیم. «تعریف» f با L^+-جملهٔ

$$\forall v_1 \forall v_2 (f v_1 \approx v_2 \leftrightarrow \varphi) \qquad (\delta)$$

داده شد و نشان دادیم که بـرای یك جملهٔ σ در زبان اولیهٔ T اگر $T ; \delta \models \sigma$، آنگاه $T \models \sigma$.

یك تعبیر π، از L^+ در T، داریم. π، تعبیرهمانی روی همهٔ پارامترها به استثنای f است. فرمول π_f عبارت است از φ. این واقعیت که $T \models \varepsilon$، درست همان چیزی است که برای اثبات تعبیر بودن π، بدان نیاز داریم. برای هرمدل $\mathfrak{A}$ از T، ساخت $\mathfrak{A}^\pi$ ساختی است که قبلاً آن را $(\mathfrak{A}, F)$ نامیدیم؛ این مدلی برای $T ; \delta$ است.

اکنون ثابت می‌کنیم که

$$\pi^{-1}[T] = \mathrm{Cn}(T ; \delta).$$

نخست توجه کنید کـه هرمدل $\mathfrak{B}$ از $T ; \delta$ برابر با $\mathfrak{A}^\pi$ است، کـه در اینجا $\mathfrak{A}$ تحدید $\mathfrak{B}$ به‌زبان مربوط به T است. بنابراین، برای یك L^+-جملهٔ σ، داریم:

$$\sigma \in \pi^{-1}[T] \Leftrightarrow \models \pi_{\mathfrak{A}} \sigma \quad \text{به‌ازای هرمدل } \mathfrak{A} \text{ از } T$$

$$\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \sigma \quad \text{به‌ازای هرمدل } \mathfrak{B} \text{ از } T ; \delta$$

$$\Leftrightarrow T ; \delta \models \sigma .$$

ترجمهٔ نحوی

درزیربخش قبلی، درباب تعبیرات، دربـارهٔ مدلهای اختیاری و غیره صحبت کردیم. لکن خواننده باید متوجه شده باشد که نکته‌ای بسیار ملموستر وجود دارد کـه می‌توان درمورد یك تعبیر π از L_0 در T_1 بیان کرد. باختصار: برای هـرفرمول φ از L_0، می‌تـوان یك فرمول φ^π در L_1 یافت که از بعضی لحاظ دقیقاً متناظربا φ باشد. φ^π را به‌طریقهٔ بازگشتی روی φ تعریف می‌کنیم.

نخست، فرمول بسیط α از L_0 را درنظرمی‌گیریم. مثلاً، اگر α فرمول

$$P f g x$$

باشد، آنگاه α منطقاً معادل است با

$$\forall y(gx \approx y \rightarrow \forall z(fy \approx z \rightarrow Pz)).$$

و به‌جای α^π می‌توانیم L_1-فرمول

$$\forall y(\pi_g(x, y) \rightarrow \forall z(\pi_f(y, z) \rightarrow \pi_P(z)))$$

را منظور بداریم. به‌طور کلی، فرمول بسیط α را از راست به‌چپ مرور می‌کنیم. سمت راست‌ترین محلی که یك نماد تابعی ظاهر می‌شود آغاز یك قطعه به‌صورت $gx_1 \ldots x_n$ است، که در آن g یك n موضعی است. (در این مثال $n = 1$ است.) این را با متغیر جدیدی مانند y، و پیشوند $\forall y(\pi_g(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow$ تعویض می‌کنیم. این کار را تا محل بعدی که در آنجا یك نماد تابعی ظاهر می‌شود، دنبال می‌کنیم. سرانجام، نماد محمولی P (درصورتی که پارامتر باشد) را با π_P (با متغیرهای صحیح) تعویض می‌کنیم.

تعریف α^π را، می‌توان بااستفاده از بازگشت‌روی تعداد مواضعی که در آنها نمادهای تابعی در α ظاهر می‌شوند، با دقت بیشتری بیان کرد. اگر این تعداد صفر باشد، آنگاه α به‌صورت $Px_1 \ldots x_n$ بوده و α^π عبارت‌است از $\pi_P(x_1, \ldots, x_n)$. درغیراین‌صورت، سمت راست‌ترین محلی را که در آن یك نماد تابعی g ظاهر می‌شود درنظر می‌گیریم. اگر g، یك نماد nموضعی باشد، آنگاه ازآن محل یك قطعهٔ $gx_1 \ldots x_n$ آغاز می‌شود. این قطعه را با متغیرجدیدی مانند y عوض‌می‌کنیم، فرمول‌حاصل را می‌توان $\alpha_y^{gx_1 \ldots x_n}$ بنامیم. درآن صورت، α^π عبارت است از:

$$\forall y(\pi_g(x_1, \ldots, x_n, y) \rightarrow (\alpha_y^{gx_1 \ldots x_n})^\pi).$$

به‌عنوان مثال،

$$\begin{aligned}(Pfgx)^\pi &= \forall y(\pi_g(x, y) \rightarrow (Pfy)^\pi) \\ &= \forall y(\pi_g(x, y) \rightarrow \forall z(\pi_f(y, z) \rightarrow (Pz)^\pi)) \\ &= \forall y(\pi_g(x, y) \rightarrow \forall z(\pi_f(y, z) \rightarrow \pi_P(z))).\end{aligned}$$

تعبیر فرمولهای غیربسیط، به‌طریق معمول تعریف می‌شود. $(\neg\varphi)^\pi$ عبارت است از $(\neg\varphi^\pi)$، $(\varphi\rightarrow\psi)^\pi$ عبارت‌است‌از $(\varphi^\pi \rightarrow \psi^\pi)$، و $(\forall x\varphi)^\pi$ همان $\forall x(\pi_\forall(x) \rightarrow \varphi^\pi)$ است. (بنابراین، سورها به $\pi_\forall$ «منسوب می‌شوند».)

معنای این که φ^π «مبین‌همان چیزی است» که φ، درلم اساسی زیر بدقت بیان می‌شود.

لم ۲۷ب. فرض کنیم π یك تعبیراز L_0 در T_1، و $\mathcal{B}$ مدلی برای T_1 باشد. به‌ازای هرفرمول φ از L_0 و هرنگاشت s از مجموعهٔ متغیرها به $|{}^\pi\mathcal{B}|$، داریم:

$$\models_{{}^\pi\mathcal{B}} \varphi[s] \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \models_{\mathcal{B}} \varphi^\pi[s]\,.$$

این مطلب نکتهٔ عمیقی نیست، بلکه صرفاً مبین این‌امر است که φ^π به‌طور صحیح تعریف شده است.

اثبات. ازاستقرا نسبت به φ استفاده می‌کنیم، و تنها حالت فرمولهای بسیط چون α واضح نیست. درمورد α، از استقرا نسبت به تعداد جاهایی که درآنها نمادهای تابعی ظاهر می‌شوند، استفاده می‌کنیم. اگر این تعداد صفر باشد، کارآسان خواهد بود. درغیر این‌صورت، داریم:

$$\alpha^\pi = \forall y(\pi_g(x, y) \rightarrow \beta^\pi)$$

که درآن $\alpha = \beta^y_{gx}$. (دراینجا به‌طور ضمنی فرض کردیم که g یك نماد یك موضعی است؛ علامت‌گذاری ما دراینجا علامت‌گذاری مناسبی نیست.) فرض کنیم

b برابر bی منحصربه‌فردی است که $\models_{\mathfrak{B}} \pi_g[\![s(x), b]\!]$

$$b = g^{\pi_{\mathfrak{B}}}(s(x)).$$

درآن صورت

$$\begin{aligned} \models_{\mathfrak{B}} \alpha^\pi[s] &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \beta^\pi[s(y|b)] \\ &\Leftrightarrow \models_{\pi_{\mathfrak{B}}} \beta[s(y|b)] && (\text{براساس فرض استقرا}) \\ &\Leftrightarrow \models_{\pi_{\mathfrak{B}}} \beta^y_{gx}[s] && (\text{براساس لم جایگزینی}) \\ &\Leftrightarrow \models_{\pi_{\mathfrak{B}}} \alpha[s]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

نتیجهٔ زیر انتخاب علامت $\pi^{-1}[T_1]$ را توجیه می‌کند.

نتیجهٔ ۲۷پ. به‌ازای هرجملهٔ σ از L_0، داریم:

$\sigma \in \pi^{-1}[T_1]$ اگروتنها اگر $\sigma^\pi \in T_1$.

اثبات. به‌یاد آورید که بنا به‌تعریف

$$\begin{aligned} \sigma \in \pi^{-1}[T_1] &\Leftrightarrow \models_{\pi_{\mathfrak{B}}} \sigma \text{ ،} T_1 \text{ از } \mathfrak{B} \text{ به‌ازای هرمدل} \\ &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \sigma^\pi \text{ ،} T_1 \text{ از } \mathfrak{B} \text{ به‌ازای هرمدل} && (\text{براساس لم ۲۷ب}) \\ &\Leftrightarrow T_1 \models \sigma^\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

تعریف. یك تعبیر π ازنظریهٔ T_0 درنظریهٔ T_1، تعبیری است از زبان مربوط به T_0 در T_1، به‌طوری که

$$T_0 \subseteq \pi^{-1}[T_1].$$

به‌عبارت دیگر، برای یك جملهٔ L_0 مانند σ، لازم است که داشته باشیم:

$$\sigma \in T_0 \Leftrightarrow \sigma^\pi \in T_1 .$$

$\pi^{-1}[T_1]$، بزرگترین نظریه‌ای است که π در T_1 تعبیر می‌کند. اگر $T_0 = \pi^{-1}[T_1]$، آنگاه خواهیم داشت:

$$\sigma \in T_0 \Leftrightarrow \sigma^\pi \in T_1 .$$

در این حالت، π را یك تعبیر وفادار از T_0 در T_1 می‌نامند.

برای بازگشت به مثال قبلی، ساختهای $(N, \circ, S)$ و $(Z, +, \cdot)$ را درنظر می‌گیریم. یك تعبیر π در $\mathrm{Th}(Z, +, \cdot)$ داشتیم، که در آن

$$\pi_{\forall}(x) = \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4\, x \approx y_1 \cdot y_1 + y_2 \cdot y_2 + y_3 \cdot y_3 + y_4 \cdot y_4,$$

$$\pi_\circ(x) = x + x \approx x,$$

$$\pi_S(x, y) = \forall z(z \cdot z \approx z \wedge z + z \not\approx z \rightarrow x + z \approx y)$$

بود. حال ثابت می‌کنیم که π یك تعبیر وفادار از $\mathrm{Th}(N, \circ, S)$ به $\mathrm{Th}(Z, +, \cdot)$ است. زیرا، دراین حالت، $(Z, +, \cdot)^\pi$، ساخت $(N, \circ, S)$ است و بنابراین

$$\models_{(N, \circ, S)} \sigma \Leftrightarrow \models_{\pi(Z, +, \cdot)} \sigma \Leftrightarrow \models_{(Z, +, \cdot)} \sigma^\pi .$$

در فصل ۳، می‌توانیم نشان دهیم که هیچ تعبیری از $\mathrm{Th}(Z, +, \cdot)$ در $\mathrm{Th}(N, \circ, S)$ وجود ندارد. بنابراین نظریهٔ اولی [یعنی، $\mathrm{Th}(Z, \circ, S)$. م] مطلقاً قویتر از نظریهٔ اخیر [یعنی، $\mathrm{Th}(N, +, \cdot)$. م] است.

اکنون، به وضعی برمی‌گردیم که با آن این بخش را آغاز کردیم. فرض کنیم T، نظریه‌ای باشد که شامل جملهٔ ε است که در آن

$$\varepsilon = \forall v_1 \exists! v_2\, \varphi;$$

$$\delta = \forall v_1 \forall v_2 (f v_1 \approx v_2 \leftrightarrow \varphi);$$

زبانی که با افزودن یك نماد تابعی جدید f به‌زبان مربوط به T به‌دست می‌آید $= L^+$ تعبیری‌از L^+ در T، که به‌استثنای f که داریم $\pi_f = \varphi$، روی تمام پارامترها تعبیرهمانی است $= \pi$.

درواقع، π یك تعبیر وفادار از $\mathrm{Cn}(T; \delta)$ در T است، زیرا همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم

$$\pi^{-1}[T] = \mathrm{Cn}(T; \delta).$$

اکنون، می‌توانیم به‌یك نتیجهٔ دیگر دست یابیم: تعریف حذف شدنی است.

قضیهٔ ۲۷ ت. فرض کنیم وضع مشروح در بالا را در اختیار داریم. درآن صورت برای هر L^+-جملهٔ σ، می‌توان یك جملهٔ σ^π را در زبان اولیه به‌دست آورد به‌طوری که

(الف) $T; \delta \models (\sigma \leftrightarrow \sigma^\pi)$.

(ب) $T; \delta \models \sigma \Leftrightarrow T \models \sigma^\pi$.

(پ) اگر f در σ ظاهر نشود، آنگاه $\models (\sigma \leftrightarrow \sigma^\pi)$.

اثبات. قسمت (پ)، ازاین مطلب که π، به‌استثنای f، روی همهٔ پارامترها تعبیر همانی است، نتیجه می‌شود. قسمت (ب)، این مطلب را بازگو می‌کند که π یك تعبیروفادار از $\mathrm{Cn}(T; \delta)$ در T است. از آنجاکه π وفادار است، لذا برای قسمت (الف)، کافی است نشان دهیم

$$T \models (\sigma \leftrightarrow \sigma^\pi)^\pi .$$

که‌این مطلب نیزازقسمت (پ) نتیجه می‌شود؛ زیرا $^\pi(\sigma^\pi \leftrightarrow \sigma)$، همان $(\sigma^\pi \leftrightarrow \sigma^{\pi\pi})$ است که آن هم معتبر است. ■

تمرین

۱. فرض کنید L_0 و L_1 دو زبان باشند با پارامترهای یکسان با این تفاوت که L_0 دارای یك نماد تابعی nموضعی f است که در L_1 نیست و L_1 دارای یك نماد محمولی $(n+1)$ موضعی P است که در L_0 نیست. نشان دهید که برای هر L_0-نظریه مانند T، یك تعبیر وفادار از T دریك L_1-نظریه وجود دارد.

۲. فرض کنید L_0 زبانی است که شامل تساوی و نمادهای تابعی دوموضعی $+$ و $\cdot$ است. فرض کنید L_1، همان زبان، ولی با نمادهای محمولی سه موضعی برای جمع و ضرب باشد. فرض کنید $\mathcal{N}_i = (N, +, \cdot)$، ساخت مربوط به L_i، متشکل از اعداد طبیعی همراه با جمع و ضرب، باشد $(i = 0, 1)$. نشان دهید که هر رابطهٔ قابل تعریف با یك L_0-فرمول در $\mathcal{N}_0$، با یك L_1-فرمول در π_1 نیز قابل تعریف است.

۳. نشان دهید که یك تعبیر ازیك نظریهٔ تمام در یك نظریهٔ ارضاشدنی، وفادار است.

۸.۲ آنالیز غیر استاندارد[1]

حساب دیفرانسیل و انتگرال، بدواً در قرن هفدهم توسط لایبنیتز و نیوتن، برحسب کمیاتی که بینهایت کوچك ولی غیرصفر بودند، توصیف شد. نیوتن در محاسبات خود، عدد صفری را به‌کار برد که بینهایت کوچك بود ومی‌توانست در هرعدد متناهی ضرب شود وحاصلضرب

۱. این بخش را می‌توان بدون ازدست دادن پیوستگی مطالب حذف نمود.

همچنان ناچیز بماند. لکن، ازآنجاکه تقسیم براین عدد لازم بود، لذا این عدد می‌بایست غیرصفر باشد. dx لایبنیتز، ازهرکمیت تعیین شدنی کوچکتر و با این حال غیر صفر بود.

این مفاهیم بسهولت قابل درك یا پذیرش نبودند. در طول قرن هیجدهم، کارکردن با بینهایت‌کوچکها، مورد انتقاد (ازجمله، ازطرف برکلی[1])، بدگمانی (ازجمله، ازطرف دالامبر[2])، و همچنین مشتاقانه مورد تجربه قرارگرفت (ازجمله، ازطرف اویلر[3]). درحالی که اویلر سرگرم ابداع ریاضیاتی بودکه‌امروزه دانشجویان درحساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته می‌خوانند، بینهایت‌کوچکها را بنحوی آزاد و انعطاف‌پذیری به‌کار بردکه امروزه برای دانشجویان سال اول نیز پذیرفتنی نمی‌تواند باشد. تنها درقرن نوزدهم بودکه مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال، بنحوی‌که امروزه درکتابهای درسی یافت می‌شود، عرضه شد. ازآن پس، بررسی مسئلهٔ حد به‌شیوهٔ دقیقی انجام‌گرفت، ومشاجره‌ها پایان‌گرفت.

در سال ۱۹۶۱، آبراهام رابینسون[4] روش جدیدی برای بررسی حد معرفی‌کرد، که درآن بینهایت‌کوچکها از بی‌اعتباری روشنفکرانهٔ خود نجات یافتند. این روش، هم مزیتهای کارکردن باکمیتهای بینهایت کوچك را دارد و هم دقت استانداردهای نوین ریاضی را. ایدهٔ اصلی در این روش، بهره‌گرفتن ازیك مدل غیر استاندارد برای نظریهٔ اعداد حقیقی است.

ساختن $\mathcal{R}^*$

ازیك زبان بسیارگستردهٔ مرتبهٔ اول استفاده خواهیم‌کرد. علاوه بر نمادهایی برای $+$، $\cdot$، و $<$، می‌توانیم به‌زبان نمادهایی برای توابع نمایی و قدرمطلق بیفزاییم. و چون هیچ دلیلی برای توقف در این مرحله وجود ندارد، این کار را تا نهایت ادامه داده و برای هرعمل روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، نمادی وضع می‌کنیم. همین‌کار را برای هررابطه روی $\mathbb{R}$ نیزانجام می‌دهیم. بنابراین زبانی داریم با نمادتساوی وپارامترهای زیر:

۰. $\forall$، که به‌معنای «به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی» منظور می‌گردد.

۱. یك نماد محمولی nموضعی $\mathbf{P}_R$، برای هررابطهٔ nتایی R روی $\mathbb{R}$.

۲. یك نماد ثابت $\mathbf{c}_r$، به‌ازای هر $r \in \mathbb{R}$.

۳. یك نماد تابعی nموضعی $\mathbf{f}_F$، به‌ازای هرعمل nتایی F روی $\mathbb{R}$.

برای این‌زبان، یك ساخت استاندارد $\mathcal{R}$، با $|\mathcal{R}| = \mathbb{R}$، $\mathbf{P}_R^{\mathfrak{R}} = R$، $\mathbf{c}_r^{\mathfrak{R}} = r$ و $\mathbf{f}_F^{\mathfrak{R}} = F$ وجود دارد. اکنون، به‌کمك قضیهٔ فشردگی، یك ساخت غیراستانداردبرای این زبان تشکیل می‌دهیم. فرض‌کنیم Γ، مجموعهٔ زیر باشد:

$$\mathrm{Th}\,\mathcal{R} \cup \{\mathbf{c}_r \mathbf{P}_< \mathbf{v}_1 : r \in \mathbb{R}\}.$$

---

1. Berkeley 2. D'Alembert 3. Euler
4. Abraham Robinson

(دراینجا، $\mathbf{c}_r\,\mathbf{P}_<\,\mathbf{v}_1$ عبارت «r کوچکتراست از $\mathbf{v}_1$» راصورتبندی می‌کند.) هرزیرمجموعهٔ متناهی Γ می‌تواند در $\mathcal{R}$، با اسناد یك عدد حقیقی بزرگ بـه $\mathbf{v}_1$، ارضا شود. بنابراین، براساس قضیهٔ فشردگی، یك‌ساخت $\mathcal{U}$ ویك عضو $a \in |\mathcal{U}|$ وجود دارد به‌طوری‌که Γ در $\mathcal{U}$، وقتی‌که a مصداق $\mathbf{v}_1$ باشد ارضا می‌شود. چون $\mathcal{U}$ یك مدل برای $\mathrm{Th}\,\mathcal{R}$ است، داریم $\mathcal{U} \equiv \mathcal{R}$. همچنین، یك یکریختی h از $\mathcal{R}$ در (اما نه بروی) $\mathcal{U}$ وجود داردکه به‌صورت‌زیر تعریف می‌شود:

$$h(r) = \mathbf{c}_r^{\mathfrak{A}}.$$

برای بررسی این‌امرکه این تابع درواقع یك یکریختی است،از $\mathcal{U} \equiv \mathcal{R}$، استفاده می‌کنیم. h یك به‌یك است، زیرا برای $r_1 \neq r_2$، جملهٔ $\mathbf{c}_{r_1} \not\approx \mathbf{c}_{r_2}$ در $\mathcal{R}$، وبنابراین در $\mathcal{U}$ برقرار است. h رابطهٔ دوتایی R (یعنی $\mathbf{P}_R^{\mathfrak{R}}$) را حفظ می‌کند؛ زیـرا برای هـر r و s در $\mathbb{R}$، داریم:

$$\begin{aligned}
\langle r, s\rangle \in \mathbf{P}_R^{\mathfrak{R}} &\Leftrightarrow\ \models_{\mathfrak{R}} \mathbf{P}_R \mathbf{c}_r \mathbf{c}_s \\
&\Leftrightarrow\ \models_{\mathfrak{A}} \mathbf{P}_R \mathbf{c}_r \mathbf{c}_s \\
&\Leftrightarrow \langle \mathbf{c}_r^{\mathfrak{A}}, \mathbf{c}_s^{\mathfrak{A}} \rangle \in \mathbf{P}_R^{\mathfrak{A}} \\
&\Leftrightarrow \langle h(r), h(s)\rangle \in \mathbf{P}_R^{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}$$

درمورد هـر رابطهٔ nموضعی دیگر نیز، محاسبهٔ مشابهی اعمال می‌گردد. اکنون باید نشان دهیم که h، هر تابع F (یعنی $\mathbf{f}_F^{\mathfrak{R}}$) را نیز حفظ می‌کند. مجدداً، برای سهولت در علامت گذاری، فرض کنید F یـك رابطـهٔ دوتایی است. یـك r و s دلخواه را در $\mathbb{R}$، درنظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم $t = F(r, s)$. دراین صورت

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{f}_F^{\mathfrak{R}}(r, s) &= h(F(s, s)) \\
&= h(t) \\
&= \mathbf{c}_t^{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}$$

اکنون، جملهٔ $\mathbf{f}_F \mathbf{c}_s \mathbf{c}_r \approx \mathbf{c}_t$ در $\mathcal{R}$، و بنابراین در $\mathcal{U}$ برقرار است. پس

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_t^{\mathfrak{A}} &= \mathbf{f}_F^{\mathfrak{A}}(\mathbf{c}_r^{\mathfrak{A}}, \mathbf{c}_s^{\mathfrak{A}}) \\
&= \mathbf{f}_F^{\mathfrak{A}}(h(r), h(s)).
\end{aligned}$$

بنابراین h، $\mathbf{f}_F$ را حفظ می‌کند. برای نمادهای ثابت، براساس تعریف h، داریم:

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{c}_r^{\mathfrak{R}}) &= h(r) \\
&= \mathbf{c}_r^{\mathfrak{A}}.
\end{aligned}$$

ازآنجاکه یك نسخهٔ یکریخت با $\mathcal{R}$، درداخل $\mathcal{U}$، دراختیارداریم، می‌توان ساخت

دیگری مانند $\mathcal{R}^*$، یکریخت با $\mathcal{U}$، به‌دست آورد به‌طوری که $\mathcal{R}$ یك زیرساخت $\mathcal{R}^*$ باشد. نکته این است که، در $\mathcal{U}$، نقطهٔ r را جایگزین نقطه $\mathbf{c}_r$ می‌کنیم (مشروط براینکه $R = \varnothing \cap |\mathcal{U}|$، که این امر را همیشه می‌توان ترتیب داد). برای جزئیات، به‌تمرین ۲۳ در بخش ۲.۲، مراجعه کنید. از آنجا که $\mathcal{R}^*$ با $\mathcal{U}$ یکریخت است، لذا یك نقطهٔ $b \in |\mathcal{R}^*|$ وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{R}^*$، Γ را، هرگاه b مصداق $\mathbf{v}_1$ باشد، ارضا کند. بویژه داریم، $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}^*$.

برای ادامهٔ کار، به‌علامت گذاری ساده‌تری نیاز داریم. برای اشاره به‌گذار از $\mathcal{R}$ به $\mathcal{R}^*$، از یك ستاره استفاده می‌کنیم.

۱. به‌ازای هر رابطهٔ n تایی R، در R، فرض کنیم R^* رابطهٔ $\mathbf{P}_R^{\mathcal{R}^*}$ باشد که بوسیله $\mathcal{R}^*$ به‌نماد $\mathbf{P}_R$ نسبت می‌دهد. بویژه R یك رابطهٔ یك‌تایی روی R خواهد بود. تصویر آن، R^*، با عالم مربوط به $\mathcal{R}^*$ برابر می‌باشد، زیرا جملهٔ $\forall x\, \mathbf{P}_R x$ در $\mathcal{R}$ و بنابراین در $\mathcal{R}^*$ صادق است. از آنجا که $\mathcal{R}$ یك زیرساخت $\mathcal{R}^*$ است، لذا هر رابطهٔ R، با تحدید R^* به R برابر می‌باشد.

۲. به ازای هر عمل n تایی F در R، فرض کنید F^* عمل $\mathbf{f}_F^{\mathcal{R}^*}$ اسناد شده به‌نماد $\mathbf{f}_F$ در $\mathcal{R}^*$ باشد. در آن صورت F تحدید F^* به R است.

توجه کنید که $r = \mathbf{c}_r^{\mathcal{R}^*}$، پس به‌علامت مخصوص در این مورد نیازی نیست.

یك روش عمومی (که در این بخش از آن استفادهٔ فراوان خواهیم کرد) برای نمایش خواص یك رابطهٔ R^* یا یك عمل F^* وجود دارد. روال کار چنین است که بررسی کنیم (۱) R یا F دارای این خاصیت هستند، (۲) این خاصیت را می‌توان با یك جمله در زبان مربوط بیان کرد، و (۳) $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}^*$.

به‌عنوان مثال، رابطهٔ دوتایی $<^*$ در R^*، متعدی است. و این بدان دلیل است که $<$ متعدی است، و این خاصیت را می‌توان با جملهٔ زیر بیان کرد:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\big(x\mathbf{P}_{<}y \to y\mathbf{P}_{<}z \to x\mathbf{P}_{<}z\big).$$

با استدلالی مشابه، $<^*$ خاصیت تثلیث در R^* دارد، و بنابراین یك رابطهٔ ترتیبی در $<^*$ است.

به‌عنوان مثالی دیگر، می‌توان ثابت کرد که عمل دوتایی $+^*$ در R^* جابجایی است؛ زیرا $+$ جابجایی است و قانون جابجایی را می‌توان با یك جمله بیان کرد. با به‌کار بردن این استدلال دربارهٔ هریك از اصول موضوع هیأت، مشاهده می‌کنیم که $(R^*, \circ, 1, +^*, \cdot^*)$، یك هیأت است.

این روش عمومی به‌قدری به‌کار می‌رود که از این پس آن را از مفروضات بدیهی تلقی خواهیم کرد. به‌عنوان مثال، اگر حکم کنیم که به‌ازای a و b در R^*، $|a +^* b|^* \leqslant^* |a|^* +^* |b|^*$، از این پس مسلم می‌داریم که خواننده خود می‌پذیرد که

صحت این حکم را می‌توان با کاربرد روش فوق تحقیق کرد.

داریم $R \subseteq {}^*R$، اما $R \neq {}^*R$. زیرا نقطه‌ای مانند b وجود دارد که $\models_{{}^*\mathfrak{R}} \mathbf{C}_r \mathbf{P}_< \mathbf{v}_1 [\![b]\!]$؛ یعنی، $r^* < b$. بنابراین b بینهایت بزرگ است، بزرگتر از هر r استاندارد، یعنی هر $r \in R$ (نسبت به‌رابطهٔ ترتیبی $<^*$). ازاین‌رو وارون آن، $1^*/b$، یك نمونه از بینهایت کوچکها است.

خواصی از $\mathcal{R}$ که درزبان مربوطه قابل بیان نیستند، ممکن‌است که در ${}^*\mathcal{R}$ نیز برقرار نباشند. خاصیت کوچکترین کران بالابودن چنین خاصیتی است. زیرمجموعه‌های غیرتهی کراندار از ${}^*R$ وجود دارند که (نسبت به‌رابطهٔ ترتیبی $<^*$) کوچکترین کران بالا ندارند. مثلاً R چنین زیرمجموعه‌ای از ${}^*R$ است. همان bی بینهایت، درپاراگراف پیشین، یك کران بالای این مجموعه است. اما کوچکترین کران بالا ندارد؛ به‌تمرین ۷ مراجعه کنید.

مجموعه $\mathcal{F}$، از عضوهای متناهی را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F} = \{x \in {}^*R : {}^*|x|^* < y \text{ وجود دارد که } R \text{ در } y \text{ی}\}.$$

به‌همین ترتیب، مجموعهٔ $\mathcal{Y}$، از بینهایت کوچکها، را بامعادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Y} = \{x \in {}^*R : {}^*|x|^* < y \text{ ،} R \text{ های مثبت در } y \text{ به‌ازای همهٔ}\}.$$

اگر $A \subseteq R$، بیکران باشد، آنگاه ${}^*A$ بینهایت نقطه خواهد داشت. زیرا جملهٔ «به‌ازای هر r حقیقی، عضوی مانند $a \in A$ بزرگتراز r وجود دارد» صادق‌است ومی‌تواند دراین زبان بیان شود. یك bی بینهایت ومثبت را درنظر می‌گیریم؛ باید یك عضوبزرگتر (و بنابراین بینهایت) از ${}^*A$ وجود داشته باشد. مثلاً ${}^*N$ شامل بینهایت عدد است.

تنها بینهایت کوچك استاندارد، یعنی تنها عضو $R \cap \mathcal{Y}$، عدد ۰ است. لکن بینهایت کوچکهای دیگری نیز وجود دارند. زیرا، براساس قواعد (صورت‌پذیر) معمولی برای نامساویها، وارون هرعدد بینهایت، یك بینهایت کوچك است.

خواص جبری

در قضیهٔ بعدی، بعضی از خواص جبری $\mathcal{F}$ و $\mathcal{Y}$ راکه بعداً مورد استفاده خواهند بود، جمع آوری می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۸الف. (الف) $\mathcal{F}$ تحت جمع $+^*$، تفریق $-^*$، وضرب $\cdot^*$ بسته است.

(ب) $\mathcal{Y}$ تحت عمل جمع $+^*$، تفریق $-^*$، وضرب دراعضای $\mathcal{F}$:

$$x \in \mathcal{Y} \text{ و } y \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cdot^* y \in \mathcal{Y}$$

بسته است.

برحسب اصطلاحات جبری، قسمت (الف) مبین این است‌که $\mathcal{F}$ یك زیرحلقهٔ هیأت ${}^*R$ است، و قسمت (ب) می‌گوید‌که $\mathcal{Y}$ یك ایدآل درحلقهٔ $\mathcal{F}$ است. بزودی خواهیم دید که حلقهٔ خارج قسمت $\mathcal{F}/\mathcal{Y}$ چیست.

اثبات. (الف) فرض کنیم x و y اعـدادی متناهی باشند، پس a و bی استاندارد در $\mathbb{R}$ وجود دارند که $a > {}^*|x|^*$ و $b > {}^*|y|^*$. بنا براین

$$ {}^*|x {}^*\pm y|^* \leqslant {}^*|x|^* + {}^*|y|^* < a+b \in \mathbb{R}, $$

از این‌رو $x {}^*+ y$ و $x {}^*- y$ متناهی می‌باشند. همچنین

$$ {}^*|x {}^*\cdot y|^* < a\cdot b \in \mathbb{R}, $$

بنا براین $x {}^*\cdot y$ نیز متناهی است.

(ب) فرض کنیم x و y دوعدد بینهایت کوچک باشند. دراین صورت، به‌ازای هر a ی استاندارد مثبت، داریم $a/۲ > {}^*|x|^*$ و $a/۲ > {}^*|y|^*$. بنا براین

$$ {}^*|x {}^*\pm y|^* < a/۲ + a/۲ = a, $$

بدین ترتیب $x {}^*+ y$ و $x {}^*- y$ نیز بینهایت کوچک هستند. اگر z متناهی باشد، آنگاه یك bی استاندارد وجوددارد که $b > {}^*|z|^*$. از آنجا که x بینهایت کوچك است، لذا داریم $a/b > {}^*|x|^*$ ، ازاین‌رو

$$ {}^*|x {}^*\cdot z|^* < (a/b)b = a. $$

و بنا براین، $x {}^*\cdot z$ نیز بینهایت کوچك است. ■

تعریف. x بینهایت نزدیك به y است ($x \simeq y$) اگر وتنهـا اگر $x {}^*- y$ بینهایت کوچك باشد.

قضیهٔ ۲۸ب. (الف) $\simeq$ یك رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathbb{R}^*$ است.

(ب) اگر $u \simeq v$ و $x \simeq y$ ، آنگاه $u {}^*+ x \simeq v {}^*+ y$ و ${}^*- u \simeq {}^*- v$.

(پ) اگر x، y، u ، v متناهی باشندو $u \simeq v$ و $x \simeq y$ ، آنگاه $u {}^*\cdot x \simeq v {}^*\cdot y$.

اثبات. این قضیه، نتیجه‌ای از قسمت (ب) قضیهٔ پیشین می‌باشد ($\mathscr{Y}$ یك ایدآل در $\mathscr{F}$ است).

(الف) $\simeq$ انعکاسی است، چون ۰ یك بینهایت کوچك است. $\simeq$ متقارن است، چون منفی (${}^*-$) یك بینهایت کوچك، خود بینهایت کوچك است. سرانجام، فرض کنیم $x \simeq y$ و $y \simeq z$. دراین صورت،

$$ x {}^*- z = (x {}^*- y) {}^*+ (y {}^*- z) \in \mathscr{Y} $$

زیرا $\mathscr{Y}$ تحت جمع بسته است.

(ب) اگر $u \simeq v$ و $x \simeq y$، آنگاه

$$ (u {}^*+ x) {}^*- (v {}^*+ y) = (u {}^*- v) {}^*+ (x {}^*- y) \in \mathscr{Y} $$

زیرا $\mathscr{Y}$ تحت جمع بسته‌است، همچنین ${}^*- u \simeq {}^*- v$ ، زیرا $\mathscr{Y}$ تحت عمل نفی بسته‌است.

(پ)
$$(u^*\cdot x)^* - (v^*\cdot y) = (u^*\cdot x)^* - (u^*\cdot y)^* + (u^*\cdot y)^* - (v^*\cdot y)$$
$$= u^*\cdot (x^* - y)^* + (u^* - v)^*\cdot y \in \mathscr{Y}$$

زیرا، $\mathscr{Y}$ تحت ضرب از $\mathscr{F}$ بسته است. ■

به‌ازای r و s استاندارد، داریم $r \simeq s$ اگروتنها اگر $r = s$، این‌مطلب از آن‌روست که 0 تنها بینهایت‌کوچك استاندارد است.

لم ۲۸پ. اگر $x \not\simeq y$ ودست‌کم یکی‌ازآن دومتناهی باشد، آنگاه یك q استاندارد وجود داردکه اکیداً بین x و y است.

اثبات. می‌توان فرض کردکه $x^* < y$. در واقع، حتی می‌توان فرض کرد که $0^* \leqslant x^* \leqslant y$؛ حالت $x^* < y^* \leqslant 0$ مشابه حالت قبل و حالت $x^* < 0^* < y$ بدیهی است. از آنجا که $x \not\simeq y$، لذا یك bی‌استاندارد وجود دارد به‌طوری که $0 < b^* < y^* - x$ وازآنجاکه x متناهی است، لذابه‌ازای یك عددصحیح مثبت مانند m، داریم $x^* < mb$؛ کوچکترین m با این خاصیت را اختیارکنید. درآن صورت، $x^* < mb^* < y$. (از کوچکترین بودن m داریم $(m-1)\, b^* \leqslant x$. وبنابراین $mb^* \leqslant x^* + b^* < y$.) ■

قضیهٔ ۲۸ت. هر $x \in \mathscr{F}$ به‌یك r منحصر به‌فرد در $\mathbb{R}$ بینهایت نزدیك است.

اثبات. به‌ازای هر $x \in \mathscr{F}$، مجموعهٔ

$$S = \{y \in \mathbb{R} : y^* \leqslant x\}$$

متشکل از نقاط استاندارد کمتر از x، یك‌کران بالا در $\mathbb{R}$ دارد. فرض‌کنیم r کوچکترین کران بالای این مجموعه باشد؛ مدعی هستیم که $r \simeq x$.

اگر $x \not\simeq r$، آنگاه، براساس لم فوق، یك qی استاندارد بین x و r وجود دارد. اگر $x < q^* < r$، آنگاه r برای S یك‌کران بالا نخواهد بود. اگر $x^* < q < r$، آنگاه q نیز یك‌کران بالای S است، که این امر، کوچکترین بودن r را نقض خواهد کرد. بنابراین $r \simeq x$.

این استدلال، وجود r را ثابت می‌کند. درمورد منحصر به‌فرد بودن، توجه‌کنید که اگر $r \simeq x$ و $s \simeq x$ آنگاه $r \simeq s$. در مورد r و s استاندارد این مطلب ایجاب می‌کند که $r = s$. ■

نتیجهٔ ۲۸ث. هر x متناهی دارای یك تجزیهٔ منحصر به‌فرد $x = s + i$ است که در آن s استاندارد و i بینهایت‌کوچك است.

این s را جزء استاندارد x، $\mathrm{st}(x)$، می‌نامیم. البته برای r استاندارد داریم $\mathrm{st}(r) = r$. در قضیهٔ بعدی بعضی ازخواص تابع st را آورده‌ایم.

قضیهٔ ۲۸ج. (الف) st مجموعهٔ $\mathcal{F}$ را روی R می‌نگارد.
(ب) $\mathrm{st}(x) = \circ$ اگر و تنها اگر x بینهایت کوچك باشد.
(پ) $\mathrm{st}(x +^{*} y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$.
(ت) $\mathrm{st}(x \cdot^{*} y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.

اثبات. (الف) و (ب) واضح‌اند. از آنجاکه $\mathrm{st}(x) \simeq x$ و $\mathrm{st}(y) \simeq y$، لذا براساس قسمت (ب) قضیهٔ ۲۸ ب داریم $\mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y) \simeq x +^{*} y$. بنابراین، طرف چپ برابر با $\mathrm{st}(x +^{*} y)$ است. اثبات قسمت (ت) نیز مشابه (پ) است و در آن از قسمت (پ) قضیهٔ ۲۸ب استفاده می‌شود. ■

(برحسب اصطلاحات جبری، این قضیه بیان می‌داردکه st یك همریختی از حلقهٔ $\mathcal{F}$ درهیأت R باهسته‌های $\mathcal{Y}$، است. نتیجتاً، حلقهٔ خارج قسمت $\mathcal{F}/\mathcal{Y}$ باهیأت اعداد حقیقی R یکریخت است.)

از این پس در این بخش، علامت‌گذاری خود را با حذف ستاره‌ها روی نمادهای عملهای حسابی $+^{*}$، $-^{*}$، $\cdot^{*}$ و $/^{*}$، انعطاف بیشتری می‌بخشیم.

همگرایی

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، با همگرایی از طریق ε-δ ومتغیرهایی‌که به‌مقادیر معینی بسیار نزدیك می‌شوند بیان می‌شود. در اینجا، روشی دیگر برای بیان همگرایی عرضه می‌کنیم، که در آن متغیرها به‌مقادیر حدی بینهایت نزدیك می‌شوند.

تعریف. فرض‌کنیم $F: R \to R$. دراین صورت، F در a به b همگراست اگر و تنها اگر وقتی x بینهایت به a نزدیك می‌شود (ولی مخالف a است)، $F(x)^{*}$ بینهایت به b نزدیك شود.

اثبات معادل بودن این‌تعریف باتعریف معمولی: نخست فرض‌کنیم باتعریف‌معمولی، F در a به b همگرا باشد. یعنی، به‌ازای‌هر $\varepsilon > \circ$، یك $\delta > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{به‌ازای هر } x \quad \circ \neq |x-a| < \delta \Rightarrow |b-F(x)| < \varepsilon$$

جملهٔ‌فوق(که‌مربوط به ε و δی‌استاندارد است) صورت‌پذیراست وبنابراین در $\mathfrak{R}^{*}$ برقرار است. حال اگر xدر R^{*} به a بینهایت نزدیك (ولی غیر آن) باشد، آنگاه قطعاً $\circ \neq^{*} |x-a|^{*} < \delta$. بنابراین $|b -^{*} F(x)|^{*} <^{*} \varepsilon$. و از آنجاکه ε اختیاری است، لذا $b \simeq^{*} F(x)$.

برعکس، فرض‌کنیم شرط بیان شده در تعریف برقرار باشد. درآن صورت برای $\varepsilon > \circ$ استاندارد، جملهٔ:

$$\text{یك } \delta > \circ \text{ وجود داردکه به‌ازای همهٔ } x\text{ها، } \circ \neq |a-x| < \delta \Rightarrow |b-F(x)| < \varepsilon$$

(پس‌از صورتبندی) در $^*\mathcal{R}$ برقرارخواهد بود، زیرا می‌توانیم δ را بینهایت کوچك بگیریم. بنابراین، جملهٔ مزبور در $\mathcal{R}$ نیز برقرار است. ■

توضیح اول: کاملاً امکان‌پذیر است که F در نقطهٔ a به‌هیچ عددی همگرا نباشد. ازسوی دیگر، F در a حداکثر به‌یك b همگراست. زیرا اگر i یك بینهایت کوچك غیر صفر باشد، آنگاه $b=\mathrm{st}(^*F(a+i))$. مرسوم است که این b را با علامت «$\lim_{x\to a}F(x)$» نمایش دهند. بنابراین

$$\lim_{x\to a}F(x)=\mathrm{st}(^*F(a+i)).$$

توضیح دوم: درواقع لازم نیست که داشته باشیم $\mathrm{dom}\,F=R$. کافی است که، a یك نقطهٔ انباشتگی $\mathrm{dom}\,F$ باشد. (a یك نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ S است اگر و تنها اگر a به‌یکی از اعضای $^*S$ بینهایت نزدیك ولی غیر آن باشد.)

نتیجهٔ ۲۸چ. F در نقطهٔ a پیوسته است اگر و تنها اگر هرگاه $x\simeq a$ آنگاه $^*F(x)\simeq F(a)$.

یك تابع $F:R\to R$ و یك عضو استاندارد $a\in R$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت، مشتق $F'(a)$ عبارت است از:

$$\lim_{h\to a}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}.$$

براساس تعریف ما ازحد، تعریف مشتق را بدین‌صورت نیزمی‌توان بیان کرد: $F'(a)=b$ اگر و تنها اگر برای هر بینهایت کوچك غیرصفر dx داشته باشیم $dF/dx\simeq b$، که در آن $dF={}^*F(a+dx)-F(a)$. بنابراین، اگرچنین bای وجود داشته‌باشد (یعنی، اگر $F'(a)$ وجود داشته باشد)، درآن صورت برای هر بینهایت کوچك غیر صفر dx داریم:

$$F'(a)=\mathrm{st}(dF/dx).$$

در اینجا، dF/dx حاصل تقسیم dF بر dx است. این نکته که دراینجا تنها از تقسیم استفاده می‌شود، به‌مقدار زیادی محاسبات را آسان می‌سازد.

مثال. فرض کنیم $F(x)=x^۲$. دراین صورت، $F'(a)=۲a$، زیرا

$$\frac{dF}{dx}=\frac{(a+dx)^۲-a^۲}{dx}=\frac{۲a(dx)+(dx)^۲}{dx}=۲a+dx\simeq ۲a.$$

قضیهٔ ۲۸ح. اگر $F'(a)$ وجود داشته باشد، آنگاه F در a پیوسته است.

اثبات. برای هر بینهایت کوچك غیرصفر dx داریم:

$$\frac{{}^*F(a+dx)-F(a)}{dx} \simeq F'(a).$$

طرف راست عددی است استانـدارد، پس طرف چپ باید دست‌کم حداقل متناهی باشد. نتیجتاً،وقتی طرف چپ را در بینهایت‌کوچك dx ضرب می‌کنیم، به‌این نتیجه می‌رسیم که ${}^*F(a+dx)-F(a) \in \mathcal{Y}$ ؛ یعنی، ${}^*F(a+dx) \simeq F(a)$. ■

خواننده باید متوجه‌باشدکه‌این قضیه نه مشابه غیراستاندارد یك قضیهٔ کلاسیك‌است، ونه حتی تعمیمی از یك قضیهٔ کلاسیك. بلکه قضیه‌ای کلاسیك است کـه فقط اثبات آن غیر استاندارد است. همین توضیحات درمورد قضیهٔ بعدی نیز صادق است. فرض‌کنیم $F\circ G$ ، تابعی باشدکه مقدارآن درنقطهٔ a برابر با $F(G(a))$ است.

قاعدهٔ زنجیری. فرض‌کنیم $G'(a)$ و $F'(G(a))$ وجود داشته باشند. دراین‌صورت $(F\circ G)'(a)$ وجود دارد وبرابر $F'(G(a)) \cdot G'(a)$ است.

اثبات. نخست، توجه‌کنیدکه ${}^*(F\circ G) = {}^*F \circ {}^*G$ ؛ زیراجملهٔ $\forall \mathbf{v}_1 \mathbf{f}_{F\circ G}\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{f}_F\mathbf{f}_G\mathbf{v}_1$ در ساختهای مربوطه برقرار است. حال، یـك بینهایت‌کوچك غیرصفر dx را در نظر می‌گیریم. فرض‌کنیم

$$\begin{aligned} dG &= {}^*G(a+dx)-G(a), \\ dF &= {}^*(F\circ G)(a+dx)-(F\circ G)(a) \\ &= {}^*F({}^*G(a+dx))-F(G(a)) \\ &= {}^*F(G(a)+dG)-F(G(a)). \end{aligned}$$

در آن صورت، $dG \simeq ۰$ ؛ زیـرا G در a پیوسته است. اگر $dG \neq ۰$ ، آنگاه براساس آخرین معادله از معادله‌های فوق داریم $dF/dG \simeq F'(G(a))$ ، لذا

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dG} \cdot \frac{dG}{dx} \simeq F'(G(a)) \cdot G'(a).$$

اگر $dG = ۰$ ، آنگاه $dF = ۰$ و $G'(a) \simeq dG/dx = ۰$، بنابراین مجدداً داریم:

$$\frac{dF}{dx} \simeq F'(G(a)) \cdot G'(a). \quad ■$$

این قضایا، فقط نمونه‌هایی ازبیان همگرایی ازطریق تقریب نامتناهی است و ایـن روش بـه‌هیچ وجه بـه مباحث مقدماتی محدود نیست. مـی‌توان توابع δ را بـا خاصیت $\int_{-\infty}^{\infty}\delta = ۱$ ساخته ودرعین حال به‌ازای $x \not\simeq ۰$ داشته باشیم $\delta(x) \simeq ۰$. نتایج اصیل در

آنالیز (مثلاً، نظریهٔ فضاهای هیلبرت) به‌روش آنالیز غیراستاندارد نیز به‌دست آمده‌است. با آشنایی بیشتر متخصصین آنالیز با این روش در آینده، ممکن است روش مزبور با گسترش بیشتری مورد استفاده قرار گیرد.

تمرین

۱. (Q در R چگال است.) فرض کنید Q مجموعهٔ اعداد گویا باشد. نشان دهید که هر عضو R* به‌عضوی از Q* بینهایت نزدیک است.

۲. (الف) فرض کنید $A \subseteq R$ و $F : A \to R$. دراین‌صورت، F یک رابطهٔ‌دوتایی روی R نیز هست. نشان دهید $^*F : {}^*A \to {}^*R$.

(ب) فرض کنید $S : N \to R$. یادآوری می‌کنیم که S بـه b همگراست اگر و تنها اگر به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند k وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n > k$، داشته باشیم $|S(n) - b| < \varepsilon$. نشان دهید که این مطلب معادل است با اینکه: به‌ازای هر x نامتناهی متعلق به N* داشته باشیم $^*S(x) \simeq b$.

(پ) فرض کنید $S_i : N \to R$ و، به‌ازای $i = ۱, ۲$، تابع S_i بـه b_i همگرا باشد. نشان دهید که $S_۱ + S_۲$ به $b_۱ + b_۲$ و $S_۱ \cdot S_۲$ به $b_۱ \cdot b_۲$ همگرا می‌باشند.

۳. فرض کنید $F : A \to R$، که درآن $A \subseteq R$، یک‌به‌یک باشد. نشان دهید اگـر $x \in {}^*A$ ولی $x \notin A$، آنگاه $^*F(x) \notin R$.

۴. فرض کنید $A \subseteq R$. نشان دهید که $A = {}^*A$ اگر و تنها اگر A متناهی باشد.

۵. (قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس[1]) فرض کنید $A \subseteq R$، کراندار و نامتناهی باشد. نشان دهید که یک نقطهٔ $P \in R$ وجود دارد که به‌یکی از اعضای A* بینهایت نزدیک، و در عین حال مخالف با آن، است. راهنمایی: فرض کنید $S : N \to A$ و S یک بـه‌یک باشد؛ x نامتناهی متعلق به N* را در $^*S(x)$ بیابید.

۶. (الف) نشان دهید کـه کاردینال Q* دست‌کم $۲^{\aleph_۰}$ است، در اینجا، Q مجموعهٔ اعداد گویاست. راهنمایی: از تمرین ۱ استفاده کنید.

(ب) نشان دهید که کاردینال N*، دست‌کم $۲^{\aleph_۰}$ است.

۷. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ R باشد کـه دارای بزرگترین عضو نیست دراین صورت A، به‌عنوان یک زیرمجموعهٔ R*، (نسبت به‌رابطهٔ ترتیب $^*<$) در R* کران بالا خواهد داشت. نشان دهید که A دارای کوچکترین کران بالا نیست.

---

1. Bolzano–Weierstrass

۳

تصمیم‌ناپذیری

۰.۳ نظریهٔ اعداد

دراین فصل، توجه خود را به‌زبان ویژه‌ای ــ زبان نظریهٔ اعداد ــ معطوف خواهیم کرد. این زبان، زبانی است مرتبهٔ اول با تساوی وپارامترهای زیر:

$\forall$ ، به‌معنای «به‌ازای همهٔ اعدادطبیعی.» (به‌خاطر بیاورید که مجموعهٔ اعدادطبیعی همان مجموعهٔ $\{\ldots, ۲, ۱, ۰\}$ است.)

۰ ، یك نماد ثابت که برای نمایش عدد ۰ منظور شده است.

$\mathbf{S}$ ، یك نماد تـابعی یك موضعی برای نمایش تـابع تالی $S: N \to N$ ، یعنی تابعی که برای آن داریم $S(n) = n + ۱$.

$<$ ، یك نماد محمولی دوموضعی که برای نمایش‌رابطهٔ ترتیب (اکید) معمولی‌روی منظور شده است.

نمادهای تابعی دوموضعی $+$ ، $\cdot$ و $\mathbf{E}$ برای نمایش عملهای $+$ ، $\cdot$ و E ، که بترتیب عبارتند ازجمع، ضرب، و نما، وضع گردیده‌اند.

فرض‌خواهیم کرد که $\mathfrak{N}$، ساخت وابسته به‌این‌زبان باشد. بنابراین، به‌طورغیرصوری می‌توان نوشت:

$$\mathfrak{N} = (N, ۰, S, <, +, \cdot, E).$$

(به‌طوردقیقتر، $|\mathfrak{N}| = N$ ، $۰^{\mathfrak{N}} = ۰$ ، وهکذا.)

منظور ما از نظریهٔ اعداد، نظریهٔ این‌ساخت، $\mathrm{Th}\mathscr{N}$، است. به‌عنوان تمرین ابتدایی (دربخشهای ۱.۳ و ۲.۳) به‌مطالعهٔ محدوده‌های معینی از $\mathscr{N}$، یعنی تحدید $\mathscr{N}$ به‌زیرزبانهای این زبان یعنی ساختهای:

$$\mathscr{N}_S=(N\,,\circ\,,S)$$
$$\mathscr{N}_L=(N\,,\circ\,,S,<)$$
$$\mathscr{N}_A=(N\,,\circ\,,S\,,<\,,+).$$

خواهیم پرداخت. وبالاخره، دربخش ۷.۳، ساخت

$$\mathscr{N}_M=(N\,,\circ\,,S\,,<\,,+\,,\cdot)$$

را بررسی خواهیم کرد.

درمورد هریك از این ساختها، سؤالات زیررا مطرح خواهیم کرد:

(الف) آیا نظریهٔ ساخت مورد نظر، تصمیم‌پذیر است؟ اگر چنین است، مجموعهٔ مناسب اصول‌موضوع برای این نظریه کدام است؟ آیا مجموعه‌ای متناهی‌از اصول‌موضوع مناسب وجود دارد؟

(ب) چه‌زیرمجموعه‌هایی از N دراین ساخت قابل تعریف‌اند؟

(پ) مدلهای غیراستاندارد نظریهٔ این ساخت چه شکلی دارند؟ (منظور از «غیر استاندارد»، «غیریکریخت بودن با ساخت مورد نظر» است.)

انتخاب نظریهٔ اعداد جهت مطالعه‌ای ویژه (به‌جای، مثلاً، نظریهٔ گروهها)، بدین دلیل‌است که می‌توان نشان دادکه زیرنظریهٔ معینی‌ازنظریهٔ اعداد، یك‌مجموعهٔ تصمیم‌ناپذیر از جمله‌هاست. همچنین، می‌توان نتیجه‌گرفت که هر نظریهٔ ارضاشدنی، که دست‌کم به‌اندازهٔ این بخش ازنظریهٔ اعداد قوی‌باشد (مثلاً، نظریهٔ مجموعه‌ها)، باید تصمیم‌ناپذیر باشد. بویژه چنین نظریه‌ای نمی‌تواند توأماً تمام و اصل‌پذیر باشد.

برای نشان‌دادن تصمیم‌ناپذیری زیرنظریه‌ای از نظریهٔ اعداد، نشان خواهیم داد که این زیرنظریه، برای نمایاندن (به‌معنایی که بدقت تعریف خواهد شد) حقایقی پیرامون دنباله‌هایی از اعداد، پیرامون عملهای خاصی روی اعداد، و نهایتاً پیرامون روشهای تصمیم‌گیری، به‌اندازهٔ کافی قوی است. این جنبهٔ اخیر ما را مجاز می‌دارد که به‌استدلالی بپردازیم که مبین تصمیم‌ناپذیری است.

می‌توان به‌جای یك زیرنظریه ازنظریهٔ اعداد، نظریهٔ دیگری (مثلاً، بخشی ازنظریهٔ مجموعه‌های متناهی) را به‌کاربرد که درآن با سهولت بتوان حقایقی پیرامون روشهای تصمیم‌گیری ارائه داد.

پیش از ارائهٔ مثالهایی ازقدرت بیانی زبان نظریهٔ اعداد، مناسب است که به معرفی چند قرارداد علامت‌گذاری بپردازیم. برای طبیعیتر کردن این زبان، به جای علائم رسمی

$$<xy\,,+xy\,,\cdot\,,xy\,,\ \mathbf{E}xy$$

خواهیم نوشت:

$$x < y\,,\ x+y\,,\ x\cdot y\,,\ x\mathbf{E}y.$$

به‌ازای هرعدد طبیعی k، یك ترم $\mathbf{S}^k\mathbf{0}$ (شمار k) داریم که آن را نمایش می‌دهد

$$\mathbf{S}^0\mathbf{0} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{S}^1\mathbf{0} = \mathbf{S0}\,,\ \mathbf{S}^2\mathbf{0} = \mathbf{SS0}\,,\ \ldots\,.$$

(مجموعهٔ شمارها، از $\{\mathbf{0}\}$ با کاربرد پیشوند $\mathbf{S}$ تولید می‌شود.) این‌که در این‌زبان می‌توان هرعدد طبیعی را نام‌گذاری کرد، یکی از جنبه‌های سودمند این زبان است.

گرچه تنها تعداد شمارش‌پذیری رابطه روی N در $\mathfrak{N}$ قابل تعریف است، امـا تقریباً تمامی‌روابط آشنا را می‌توان بیان‌کرد. به‌عنوان‌مثال، در $\mathfrak{N}$، مجموعهٔ اعداد اول به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_1 \not\approx \mathbf{S}^1\mathbf{0} \wedge \forall \mathbf{v}_2\, \forall \mathbf{v}_3(\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \rightarrow \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^1\mathbf{0} \vee \mathbf{v}_3 \approx \mathbf{S}^1\mathbf{0}).$$

بعدها به‌اهمیت‌نشان‌دادن این‌امر که بسیاری‌از روابط مشخص‌دیگرهم در $\mathfrak{N}$ قابل تعریف‌اند پی‌خواهیم برد.

طبیعتاً انتظار می‌رودکه با حذف بعضی از پارامترها، قدرت بیانگری زبان به‌طور جدی محدود شود. به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول، چنان‌که خواهیم دید، در $\mathfrak{N}_A$ قابل تعریف نیست. ازطرف دیگر، دربخش ۷.۳ نشان خواهیم داد که هررابطهٔ تعریف‌پذیر در $\mathfrak{N}$، در $\mathfrak{N}_M$ نیز تعریف‌پذیر است.

پیش‌نگری

قضایای اصلی این فصل، دربخش ۵.۳ اثبات خواهند شد. اما می‌توان بعضی‌از ایده‌ها را، دراینجا مطرح ساخت. به هرفرمول α از زبان نظریهٔ اعداد می‌توان یك عدد درست $\#\alpha$، بنام عددگودل α، مربوط ساخت. برای هدفهایی‌که درپیش داریم، هـر راه ساده‌ای کـه اعداد درست متمایز را به‌فرمولهای متمایز مربوط سازد قابل قبول خواهد بـود؛ یك راه ویژه در ابتدای بخش ۴.۳ تشریح شده است. به همین ترتیب، به هـردنبالهٔ متناهی D از فرمولها (مثلاً یك استنتاج)، یك عدد درست $\mathcal{G}(D)$ را مربوط می‌سازیم. اکنون می‌توان نتیجه زیردا بیان‌کرد مبنی براین‌که $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ را نمی‌توان بـا هیچ مجموعهٔ تمام از اصول تعریف‌پذیر (در $\mathfrak{N}$) به‌دست آورد.

قضیهٔ ۳۰الف. فرض‌کنید $A \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$، یك مجموعه ازجمله‌های‌صادق در $\mathfrak{N}$ باشد. و همچنین فرض‌کنید مجموعهٔ $\{\#\alpha : \alpha \in A\}$، از اعدادگودل عضوهـای A، مجموعه‌ای تعریف‌پذیر در $\mathfrak{N}$ باشد. دراین‌صورت، می‌توان جمله‌ای چون σ یـافت به‌طوری‌که σ در $\mathfrak{N}$ صادق باشد اما از A استنتاج شدنی نباشد.

اثبات. σ را بنحوی خواهیم ساخت که (به‌طریقی غیرمستقیم) مبین این مطلب باشد که خود σ قضیه‌ای از A نیست. سپس استدلال اجمالاً به‌صورت زیر دنبال می‌شود: اگر $A \vdash \sigma$ ، آنگاه σ کاذب است، که این مطلب با این فرض که A متشکل از جمله‌های صادق است در تناقض می‌باشد. و بنابراین $A \nvdash \sigma$ و نتیجتاً σ صادق است.

ساختن σ را، با بررسی رابطهٔ سه‌تایی R که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، شروع می‌کنیم:

$\langle a , b , c\rangle \in R$ اگر و تنها اگر a عدد گودل فرمولی مانند α و c مقدار تابع $\mathcal{G}$ به‌ازای یك استنتاج جملهٔ $\alpha(\mathbf{S}^b\mathbf{0})$ از A باشد.

دراین‌صورت، ازآنجاکه $\{\#\alpha : \alpha \in A\}$ در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر است، نتیجه می‌شود که R نیز تعریف‌پذیر است. (برای جزئیات این گام، باید تا بخشهای بعدی صبر کرد.) فرض کنیم ρ فرمولی باشد که R را در $\mathfrak{N}$ تعریف می‌کند. فرض کنید r ، عدد گودل

$$\forall \mathbf{v}_3 \neg \rho(\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_3),$$

باشد. (دراینجا، ازعلامت‌گذاری صفحهٔ ۱۷۴ استفاده می‌کنیم.) حال فرض کنیم σ فرمول زیر باشد:

$$\forall \mathbf{v}_3 \neg \rho(\mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{v}_3).$$

بدین‌سان σ می‌گوید که هیچ عددی مقدار تابع $\mathcal{G}$ به ازای استنتاج فرمولی از A نیست که از فرمولی با عددگودل r جایگزین $\mathbf{v}_1$ شده باشد به‌دست می‌آید؛ یعنی هیچ عددی مقدار $\mathcal{G}$ به‌ازای استنتاجی از σ نیست.

فرض کنیم، برخلاف انتظار ما، استنتاجی از A برای σ وجود داشته باشد. فرض کنیم k مقدار $\mathcal{G}$ به‌ازای این استنتاج باشد. دراین‌صورت $\langle r , r , k\rangle \in R$ ، و نتیجتاً

$$\models_{\mathfrak{N}} \rho(\mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^k\mathbf{0}).$$

واضح است که

$$\sigma \vdash \neg \rho(\mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^k\mathbf{0})$$

و دوسطر فوق می‌گویند که σ در $\mathfrak{N}$ کاذب است. اما داشتیم $A \vdash \sigma$ و عضوهای A در $\mathfrak{N}$ صادق‌اند، بنابراین به‌تناقضی می‌رسیم.

بنابراین هیچ استنتاجی از A برای σ وجود ندارد. و به‌ازای هر k ، داریم $\langle r , r , k\rangle \notin R$. بنابراین به‌ازای هر k داریم:

$$\models_{\mathfrak{N}} \neg \rho(\mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^r\mathbf{0} , \mathbf{S}^k\mathbf{0}) ,$$

که ازآن (به‌کمك لم جایگزینی) نتیجه می‌شود که

$$\models_{\mathfrak{N}} \forall v_3 \neg \varrho(S^{r}0, S^{r}0, v_3);$$

یعنی، σ در $\mathcal{N}$ صادق است. ■

بعداً استدلال خواهیم کرد که هر مجموعهٔ تصمیم‌پذیر از اعداد طبیعی باید در $\mathcal{N}$ تعریف‌پذیر باشد. سپس نتیجه این خواهد بود که $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ اصل‌پذیر نیست.

نتیجهٔ ۳۰ب. مجموعهٔ $\{\#\tau : \models_{\mathfrak{N}} \tau\}$، متشکل از اعداد گودل جمله‌های صادق در $\mathcal{N}$، مجموعه‌ای است که در $\mathcal{N}$ تعریف‌پذیر نیست.

اثبات. اگر این مجموعه تعریف‌پذیر باشد، می‌توان در قضیهٔ پیشین، با قرار دادن $A = \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$، به‌یك تناقض رسید. ■

۱.۳ اعداد طبیعی همراه با تالی

این مبحث را با نظریه‌ای شروع می‌کنیم که به اندازهٔ کافی ساده است و امکان پاسخگویی کامل و معقولانه به‌پرسشهای ما را فراهم می‌سازد. با حذف $<$، $+$، $\cdot$، و $\mathbf{E}$، مجموعهٔ پارامترها را به $\forall$، 0، و $\mathbf{S}$ محدود می‌سازیم. دراین‌حالت تحدید $\mathcal{N}$ عبارت‌خواهد بود از:

$$\mathcal{N}_S = (N, 0, S).$$

دراین زبان تحدید شده نیز، برای نامیدن اعضای N، شمارها را دراختیار داریم. اما جمله‌های قابل بیان دراین زبان، ازدیدگاه حساب، قابل توجه نیستند.

می‌خواهیم پیرامون $\mathcal{N}_S$، همان سؤالاتی را که درمورد $\mathcal{N}$ برایمان جالب بود، مطرح کنیم و به‌میزان پیچیدگی‌مجموعهٔ $\mathrm{Th}\mathcal{N}_S$، پی ببریم؛ همچنین به‌مطالعهٔ تعریف‌پذیری در $\mathcal{N}_S$ بپردازیم و مدلهای غیراستاندارد $\mathcal{N}_S$ را بررسی می‌کنیم.

برای‌مطالعهٔ نظریهٔ اعداد طبیعی‌همراه با تالی ($\mathrm{Th}\mathcal{N}_S$)، مطلب را با فهرست‌کردن چند عضو آن، یعنی چند جملهٔ صادق در $\mathcal{N}_S$، شروع می‌کنیم. (این جمله‌ها، نهایتاً یك دسته اصل موضوع را برای این نظریه فراهم خواهند ساخت.)

S۱. $\forall x\, \mathbf{S}x \not\approx 0$؛ این جمله‌ای که حکم می‌کند که 0 سابق ندارد.

S۲. $\forall x \forall y (\mathbf{S}x \approx \mathbf{S}y \rightarrow x \approx y)$ این جمله حکم می‌کند که تابع تالی یك به‌یك است.

S۳. $\forall y (y \not\approx 0 \rightarrow \exists x\, y \approx \mathbf{S}x)$. این جمله حکم می‌کند که هرعدد غیرصفر تالی عددی دیگر است.

S۴.۱. $\forall x\, \mathbf{S}x \not\approx x$

$\forall x\, \mathrm{SS}x \not\approx x$ .S۴.۲

...

$\forall x\, \mathrm{S}^n x \not\approx x$ .S۴.n، که در آن بالانویس n اشاره به‌این دارد که نماد S، n بار متوالیاً ظاهر می‌شود.

فرض کنیم A_S، مجموعه‌ای متشکل از جمله‌های S۱، S۲، S۳، S۴.n $(n = ۱, ۲, \ldots)$ فوق باشد. واضح است که این جمله‌ها در $\mathscr{N}_S$ صادق هستند؛ یعنی، $\mathscr{N}_S$ مدلی برای A_S است. بنا براین:

$$\mathrm{Cn}\, A_S \subseteq \mathrm{Th}\mathscr{N}_S \cdot$$

(هر مطلبی که درهمهٔ مدلهای A_S صادق باشد دراین مدل نیز صادق خواهد بود.) چیزی که چندان واضح نیست، برقراری تساوی درشمول بالاست. این مطلب را، با بررسی مدلهای دلخواه از A_S ثابت می‌کنیم.

دربارهٔ یك مدل دلخواه

$$\mathfrak{U} = (|\mathfrak{U}|, \mathbf{o}^{\mathfrak{U}}, \mathbf{S}^{\mathfrak{U}})$$

متشکل از اصول موضوع A_S چه می‌توان گفت؟ بنا بر S۱، S۲، و S۳، نگاشت $S^{\mathfrak{U}}$ باید یك نگاشت یك به‌یك از $|\mathfrak{U}|$ در $\{\mathbf{o}^{\mathfrak{U}}\} - |\mathfrak{U}|$ باشد. وبنا بر S۴.n، هیچ طوقه‌ای به‌طول n وجود ندارد. بنا براین $|\mathfrak{U}|$، باید نقاط «استاندارد»

$$\mathbf{o}^{\mathfrak{U}} \to \mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(\mathbf{o}^{\mathfrak{U}}) \to \mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(\mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(\mathbf{o}^{\mathfrak{U}})) \to \ldots,$$

را دربرداشته باشد که همگی متمایزند. دراینجا، پیکان معرف عملکرد $\mathbf{S}^{\mathfrak{U}}$ است. ممکن است نقاط دیگری وجود داشته یا نداشته باشند. اگر نقطهٔ دیگری مانند a در $|\mathfrak{U}|$ وجود داشته باشد، آنگاه تالی a، تالی آن تالی، و غیره وجود خواهند داشت. علاوه براینها (بنا بر S۳)، چون هرعنصرغیرصفر یك مقدم (چیزی که عضو مزبور برای آن یك تالی است) دارد، که (براساس S۲) منحصر به‌فرد است، لذا $|\mathfrak{U}|$ باید دربرگیرندهٔ سابق a، سابق این سابق، وغیره باشد. تمامی این اعضا باید متمایز باشند، زیرا درغیراین‌صورت طوقه‌ای متناهی وجود خواهد داشت. بنا براین، a به‌یك «Z-زنجیره»

$$\ldots * \to * \to a \to \mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(a) \to \mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(\mathbf{S}^{\mathfrak{U}}(a)) \to \ldots .$$

تعلق‌دارد. (به‌این زنجیره‌ها، Z-زنجیره می‌گوییم، زیرا مانند مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ از اعداد صحیح $\{\ldots, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$ مرتب شده‌اند.) هرتعداد از این Z-زنجیره‌ها می‌توان ساخت. اما هردو Z-زنجیرهٔ متمایز باید ازهم مجزا باشند، زیرا S۲ اشتراك آنها را ممنوع ساخته است. به‌همین‌دلیل، هر Z-زنجیره باید ازقسمت استاندارد نیز مجزا باشد.

این‌مطلب را می‌توان به‌طریق‌دیگری نیزبیان کرد. می‌گوییم دونقطهٔ a و b در $|\mathfrak{U}|$، معادل هستند اگر باکاربست تابع $\mathbf{S}^{\mathfrak{U}}$ به‌دفعات متناهی روی یکی، بتوان دیگری را به‌دست

آورد. این رابطه، یك رابطهٔ هم‌ارزی است. (انعکاسی و متقارن بودن آن واضح است؛ تعدی آن ازیك به‌یك بودن $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}}$ نتیجه می‌شود.) قسمت استاندارد $|\mathcal{U}|$، ردهٔ هم‌ارزی شامل $o^{\mathfrak{A}}$ است. برای‌هرنقطهٔ دیگر a از $|\mathcal{U}|$ (درصورت‌وجود)، ردهٔ هم‌ارزی a همان مجموعهٔ پدید آمده از $\{a\}$ به وسیلهٔ $\mathbf{S}^{\mathfrak{A}}$ و وارون آن است. این ردهٔ هم‌ارزی همان Z-زنجیرهٔ تشریح شده در بالاست.

برعکس، هرساخت $\mathcal{B}$ (برای این زبان) که دارای قسمت استاندارد

$$o^{\mathfrak{B}} \to \mathbf{S}^{\mathfrak{B}}(o^{\mathfrak{B}}) \to \mathbf{S}^{\mathfrak{B}}(\mathbf{S}^{\mathfrak{B}}(o^{\mathfrak{B}})) \to \ \ldots$$

ویك قسمت غیراستاندارد متشکل از هرتعداد از Z-زنجیره‌های مجزا باشد، یك مدل برای A_S خواهد بود. (فهرست اصول موضوع A_S را بررسی کنید وتوجه‌کنید که هریك از آنها در $\mathcal{B}$ صادق است.) بدین‌ترتیب، مشخصهٔ کاملی از شکل مدلهای A_S، دراختیار داریم.

اگریك مدل $\mathcal{U}$ از A_S، فقط دارای تعداد شمارش‌پذیری Z-زنجیره باشد، آنگاه $|\mathcal{U}|$ شمارش‌پذیر خواهد بود. به‌طورکلی، اگرمجموعهٔ Z-زنجیره‌ها دارای‌کاردینال λ باشد، آنگاه تعداد نقاط $|\mathcal{U}|$ مجموعاً، $\aleph_0 + \aleph_0 \cdot \lambda$ خواهد بود. براساس قضایای حساب کاردینالها (به‌فصل ۰ مراجعه‌کنید)، این‌عدد بزرگترین $\aleph_0$ و λ است. بنابراین

$$\operatorname{card}|\mathcal{U}| = \begin{cases} \aleph_0 & \text{اگر } \mathcal{U} \text{ تعداد شمارش‌پذیری } Z\text{-زنجیره داشته باشد؛} \\ \lambda & \text{اگر } \mathcal{U} \text{ به‌تعداد } \lambda\text{ی شمارش‌ناپذیر } Z\text{-زنجیره داشته باشد؛} \end{cases}$$

لم ۳۱الف. اگر $\mathcal{U}$ و $\mathcal{U}'$ دو مدل A_S باشندکه دارای تعدادی مساوی Z-زنجیره داشته باشند، آنگاه این دومدل یکریخت خواهند بود.

اثبات. یك یکریختی منحصربه‌فرد بین قسمت استاندارد $\mathcal{U}$ وقسمت استاندارد $\mathcal{U}'$ وجود دارد. براساس فرض، یك متناظر یك به‌یك بین مجموعهٔ Z-زنجیره‌های وابسته به $\mathcal{U}$ و Z-زنجیره‌های وابسته به $\mathcal{U}'$ وجود دارد؛ بنابراین هر زنجیرهٔ $\mathcal{U}$ متناظر با یك زنجیرهٔ $\mathcal{U}'$ است. واضح است‌که هردو Z-زنجیرهٔ یکریخت هستند. از به‌هم‌پیوستن همهٔ این‌قطعات (به‌کمك اصل انتخاب) یك یکریختی از $\mathcal{U}$ روی $\mathcal{U}'$ به‌دست می‌آید. ■

بنابراین یك مدل $\mathcal{U}_S$، با تقریب یك یکریختی، با تعداد Z-زنجیره‌های آن تعیین می‌شود. درمورد $\mathcal{N}_S$، این‌تعداد صفراست،اما تعداد این زنجیره‌ها می‌تواند هرعددی باشد.

خواننده باید توجه داشته باشدکه هیچ جمله‌ای دراین‌زبان وجود نداردکه بگوید: «هیچ Z-زنجیره‌ای وجود ندارد.» درحقیقت، هیچ مجموعهٔ Σ از جمله‌های وجود ندارد به‌طوری‌که یك مدل $\mathcal{U}$ برای A_S جمله‌های Σ را ارضا کند اگروفقط اگر $\mathcal{U}$ دارای هیچ Z-زنجیره‌ای نباشد. زیرا، براساس قضیهٔ ل.ا.ت. یك ساخت شمارش‌ناپذیر $\mathcal{U}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{U} \equiv \mathcal{N}_S$. اما $\mathcal{U}$ دارای‌تعدادشمارش‌ناپذیری Z-زنجیره است درحالی‌که $\mathcal{N}_S$دارای هیچ Z-زنجیره نیست.

قضیهٔ ۳۱ب. فرض کنیم $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{B}$ مدلهای شمارش‌ناپذیری برای A_S با کاردینال برابر باشند. دراین‌صورت، $\mathfrak{U}$ با $\mathfrak{B}$ یکریخت است.

اثبات. براساس بحث بالا، $\mathfrak{U}$ به‌تعداد $\operatorname{card}\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{B}$ به‌تعداد $\operatorname{card}\mathfrak{B}$، Z-زنجیره دارد. از آنجا که $\operatorname{card}\mathfrak{U}=\operatorname{card}\mathfrak{B}$، بنابراین $\mathfrak{U}$ و $\mathfrak{B}$ دارای تعداد مساوی Z-زنجیره هستند و بنابراین یکریخت می‌باشند. ■

قضیهٔ ۳۱پ. $\operatorname{Cn} A_S$ یك نظریهٔ تمام است.

اثبات. قضیهٔ لوش-وات از بخش ۶.۲ را به‌کار می‌بریم. قضیهٔ پیشین مدعی است که نظریهٔ $\operatorname{Cn} A_S$، درهرتوان (کاردینال) شمارش‌ناپذیری جازم‌است. علاوه‌براین، A_S دارای هیچ مدل متناهی نیست. بنابراین، قضیهٔ لوش-وات را می‌توان به‌کار گرفت. ■

نتیجهٔ ۳۱ت. $\operatorname{Cn} A_S=\operatorname{Th}\mathfrak{N}_S$.

اثبات. داریم $\operatorname{Cn} A_S\subseteq\operatorname{Th}\mathfrak{N}_S$، نظریهٔ اول تمام است و دومی ارضاشدنی‌است. ■

***نتیجه ۳۱ث.** $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_S$ تصمیم‌پذیر است.

اثبات. هرنظریهٔ تمام و اصل‌پذیر تصمیم‌پذیراست (براساس نتیجهٔ ۲۵چ). A_S یك مجموعهٔ تصمیم‌پذیر از اصول موضوع برای این نظریه است. ■

حذف سورها

وقتی‌که بدانیم یك نظریه تصمیم‌پذیر است، تمایلی به‌یافتن یك اسلوب واقعی عملی برای تصمیم گیری پیدا خواهیم کرد. ما چنین‌اسلوبی را برای $\operatorname{Th}\mathfrak{N}_S$ براساس «حذف سورها» ارائه خواهیم داد.

تعریف. سورهای نظریهٔ T حذف‌پذیرند اگروفقط اگر به‌ازای هرفرمول φ، یك فرمول بی‌سور ψ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$T\vDash(\varphi\leftrightarrow\psi).$$

درواقع کافی است که فقط فرمولهای ویژهٔ φ را درنظربگیریم:

قضیهٔ ۳۱ج. فرض‌کنیم به‌ازای هرفرمول φ بدصورت

$$\exists x(\alpha_0\wedge\cdots\wedge\alpha_n),$$

که در آن α_i یك فرمول بسیط یا نفی یك فرمول بسیط است، یك فرمول بی‌سور ψ وجود داشته باشد به‌طوری که $T \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. در آن صورت سورهای T حذف‌پذیرند.

اثبات. نخست ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر فرمول به صورت $\exists x\, \theta$ که در آن θ بی‌سور است می‌توان یك فرمول بی‌سور معادل به‌دست آورد. این‌کار را با قراردادن θ به‌صورت ترکیب فصلی نرمال (نتیجهٔ ۱۵پ) آغاز می‌کنیم. فرمول حاصل،

$$\exists x[(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \vee (\beta_0 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \vee \cdots \vee (\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_l)],$$

می‌باشد که منطقاً معادل است با

$$\exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \vee \exists x(\beta_0 \wedge \cdots \wedge \beta_n) \vee \cdots \vee \exists x(\xi_0 \wedge \cdots \wedge \xi_l).$$

بنا بر فرض، هرمؤلفهٔ این فرمول را می‌توان با یك فرمول بی‌سور جایگزین نمود.
نشان دادن این‌امر که با استفاده ازپاراگراف بالا می‌توان برای هرفرمول دلخواه یك فرمول بی‌سور معادل به‌دست‌آورد، (درتمرین ۲) به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

درحالت ویژه‌ای که در آن نظریه، نظریهٔ $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ از یك ساخت $\mathfrak{A}$ است، تعریف را می‌توان بدین‌صورت گفت: سورهای $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ حذف‌پذیرند اگروتنها اگر به‌ازای هرفرمول φ، یك‌فرمول بی‌سور مانند ψ وجود داشته باشد به‌طوری که φ و ψ «در $\mathfrak{A}$ معادل» باشند؛ یعنی، برای هرنگاشت s از مجموعهٔ متغیرها به $|\mathfrak{A}|$، داشته باشیم:

$$\vDash_{\mathfrak{A}} (\varphi \leftrightarrow \psi)\,[s]$$

قضیهٔ ۳۱چ. سورهای $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}_S$ حذف‌پذیرند.

اثبات. براساس قضیهٔ پیشین،کافی است که یك فرمول

$$\exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_q),$$

را که در آن هر α_i بسیط یا نفی یك فرمول بسیط است درنظربگیریم. روند جایگزینی این فرمول را با فرمولی بی‌سور توصیف خواهیم‌کرد. معادل بودن این فرمول جدید با فرمول داده شده، در واقع، نتیجه‌ای از A_S است؛ تمرین ۳ را ببینید.
در زبان وابسته به $\mathfrak{N}_S$ ترمها تنها به‌صورت $\mathbf{S}^k u$ است،که درآن u، ۰ یا یك متغیر است. تنها فرمولهای بسیط نیز، معادلات هستند. می‌توان فرض‌کرد که متغیر x در هر α_i، ظاهرمی‌شود. برای اینکه اگر x در α ظاهرنشود، آنگاه

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \vDash\dashv \alpha \wedge \exists x\, \beta.$$

بنا براین هر α_i، به‌صورت

$$\mathbf{S}^m x \approx \mathbf{S}^n u$$

یا نقیض این معادله می‌باشد که در آن u، ۰ یا یك متغیراست. افزون براین، می‌توان فرض کرد که u با x متفاوت است، زیرا که $\mathbf{S}^m x \approx \mathbf{S}^n x$ رامی‌توان با ۰≈۰ (درصورتی که $m = n$) یا با ۰≉۰ (درصورتی که $m \neq n$) جایگزین نمود.

حالت ۱: هر α_i نقیض یك معادله است. دراین‌صورت، می‌توان فرمول‌را با ۰≈۰ تعویض کرد.

حالت ۲: دست‌کم یك α_i وجود دارد که نقیض یك معادله نیست؛ فرض کنیم α_0 معادلهٔ زیر باشد:

$$\mathbf{S}^m x \approx t,$$

که در آن ترم t شامل x نیست. ازآنجا که جواب معادله برای x باید غیرمنفی باشد، لذا α_0 را با

$$t \not\approx 0 \wedge \ldots \wedge t \not\approx \mathbf{S}^{m-1}0$$

تعویض می‌کنیم (یا با ۰≈۰، درصورتی که $m = 0$). سپس درهر α_jی دیگر، مثلاً، فرمول

$$\mathbf{S}^k x \approx u$$

را نخست با

$$\mathbf{S}^{k+m} x \approx \mathbf{S}^m u$$

تعویض می‌کنیم که آن نیز بەنوبهٔ خود بەصورت

$$\mathbf{S}^k t \approx \mathbf{S}^m u$$

درمی‌آید. اکنون فرمولی‌داریم که در آن‌دیگر x ظاهر نشده ونتیجتاً سور را می‌توان حذف کرد. ■

درفرایند حذف سورها، چندین دستاورد جنبی جالب بەدست می‌آید. مثلاً، یکی اثبات دیگری از تمامیت $\mathrm{Cn}\, A_S$ است. بدین‌ترتیب که فرض کنیم با یك جملهٔ σ شروع کنیم. اسلوب‌حذف سورها، یك جملهٔ بی‌سورمانند τ بەدست می‌دهد که (برطبق تمرین ۳) خواهیم داشت $A_S \vDash (\sigma \leftrightarrow \tau)$. اکنون ثابت می‌کنیم که یا $A_S \vDash \tau$ ویا $A_S \vDash \neg\tau$ زیرا τ از فرمولهای بسیط، بەکمك $\neg$ و $\rightarrow$ ساخته شده است. یك فرمول بسیط باید بەصورت $\mathbf{S}^k 0 = \mathbf{S}^l 0$ باشد و، درصورتی که $k = l$، از A_S استنتاج‌پذیر، و در غیراین‌صورت $(k \neq l)$ از A_S ابطال‌پذیر (یعنی، نقیض آن از A_S استنتاج‌پذیر) باشد. (درحقیقت، تنها $\{S1, S2\}$ برای اثبات این مطلب کافی است.) ازآنجایی که هرجملهٔ بسیط را می‌توان استنتاج یا ابطال کرد، جمله‌های بی‌سور را نیز می‌توان استنتاج یا ابطال کرد. این مطلب، ادعای ما را اثبات می‌کند. و نتیجتاً، یا $A_S \vDash \sigma$ ویا $A_S \vDash \neg\sigma$.

دستاورد جنبی دیگر، در رابطه با تعریف‌پذیری در $\mathcal{N}_S$ است؛ تمرینهای ۴ و ۵ را

ببینید. اکنون برای هر فرمول φ که درآن تنها $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ آزادباشند، می‌توانیم یك ψ بی‌سور (با همان متغیرهای آزاد) به‌دست آوریم به‌طوری که

$$\mathrm{Th}\mathscr{N}_S \vDash \forall \mathbf{v}_1 \forall \mathbf{v}_2(\varphi \leftrightarrow \psi);$$

یعنی،

$$\vDash_{\mathscr{N}_S} \forall \mathbf{v}_1 \forall \mathbf{v}_2(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

بنابراین، رابطهٔ تعریف شدهٔ φ با یك فرمول بی‌سور تعریف‌پذیراست.

تمرین

۱. فرض کنید A_S^*، مجموعهٔ متشکل‌ازجمله‌های S۱ ، S۲ وهمهٔ جمله‌های به‌صورت زیر باشد:

$$\varphi(0) \to \forall \mathbf{v}_1(\varphi(\mathbf{v}_1) \to \varphi(\mathbf{S}\mathbf{v}_1)) \to \forall \mathbf{v}_1\, \varphi(\mathbf{v}_1),$$

که درآن φ ، یك ف.د.س. (درزبان $\mathscr{N}_S$ است که درآن هیچ متغیری به‌استثنای $\mathbf{v}_1$ مورد آزاد ندارد. نشان دهیدکه $A_S \subseteq \mathrm{Cn}\, A_S^*$ ، و ازآن نتیجه بگیریدکه $\mathrm{Cn}\, A_S^* = \mathrm{Th}\mathscr{N}_S$ (دراینجا $\varphi(t)$، بنابه‌تعریف، $\varphi_t^{\mathbf{v}_1}$ است. جمله‌ای‌که دربالا ارائه شد اصل استقرا برای φ نامیده می‌شود.)

۲. اثبات قضیهٔ ۳۱ج را کامل کنید.

۳. اثباتِ حذف سور برای $\mathrm{Th}\mathscr{N}_S$ ، نشان دادکه به ازای هر فرمول φ چگونه می‌توان یك ψی بی‌سور به‌دست آورد. بدون استفاده از تمامیت $\mathrm{Cn}\, A_S$ ، نشان دهیدکه

$$A_S \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

(اثبات دیگری از تمامیت $\mathrm{Cn}\, A_S$ ، بدون کاربرد Z- زنجیره‌ها یا قضیهٔ لوش- وات، به‌دست می‌دهد.)

۴. نشان دهیدکه یك زیرمجموعهٔ N در $\mathscr{N}_S$تعریف‌پذیر است اگر وتنها اگرخود زیرمجموعه یا متمم آن (در N) متناهی باشد.

۵. نشان دهیدکه رابطهٔ ترتیب $\{\langle m , n\rangle : m < n$, در $N\}$ ، در $\mathscr{N}_S$تعریف‌پذیر نیست.

۶. نشان دهیدکه $\mathrm{Th}\mathscr{N}_S$ اصل‌پذیر متناهی نیست، راهنمایی: نشان دهیدکه هیچ

زیرمجموعهٔ متناهی A_S [برای تولید $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ ۰ م] کافی نیست، و سپس از مطالب بخش ۶.۲ استفاده کنید.

۳.۰ تحدیدهای دیگری از نظریهٔ اعداد[1]

نخست نماد ترتیب $<$ را به‌زبان می‌افزاییم. ساخت مورد نظر عبارت است از

$$\mathcal{N}_L = (N, \circ, S, <).$$

می‌خواهیم نشان دهیم که نظریهٔ این ساخت (مانند $\mathrm{Th}\mathcal{N}_S$) تصمیم‌پذیر است و همچنین سورهای آن حذف‌پذیرند. ولی برخلاف $\mathrm{Th}\mathcal{N}_S$، اصل‌پذیر متناهی است و همچنین در هیچ کاردینال نامتناهی جازم نیست.

مجموعهٔ متناهی A_L، متشکل از شش جملهٔ فهرست شده در ذیل، را به‌عنوان اصول موضوع $\mathrm{Th}\mathcal{N}_S$ درنظر می‌گیریم. البته‌در اینجا $x \leqslant y$، کوتاهنوشت $(x < y \vee x \approx y)$، و $x \nleq y$ کوتاهنوشت نقیض این فرمول است.

.S۳ $\quad \forall y \quad (y \not\approx \circ \rightarrow \exists x\, y \approx Sx)$

.L۱ $\quad \forall x\, \forall y \quad (x < Sy \leftrightarrow x \leqslant y)$

.L۲ $\quad \forall x \quad x \not< \circ$

.L۳ $\quad \forall x\, \forall y \quad (x < y \vee x \approx y \vee y < x)$

.L۴ $\quad \forall x\, \forall y \quad (x < y \rightarrow y \not< x)$

.L۵ $\quad \forall x\, \forall y\, \forall z \quad (x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z)$

با فهرست کردن بعضی از نتایج این اصول، کار را شروع می‌کنیم

(۱) $$A_L \vdash \forall x\, x < Sx.$$

اثبات. در L۱، x را به‌جای y قرار می‌دهیم. ■

(۲) $$A_L \vdash \forall x\, x \not< x.$$

اثبات. در L۴، x را به‌جای y قرار می‌دهیم. ■

(۳) $$A_L \vdash \forall x\, \forall y (x \not< y \leftrightarrow y \leqslant x) \text{ (تثلیث)}.$$

---

۱. این بخش را می‌توان بدون تأثیر عمده درفهم بخشهای بعدی حذف کرد.

اثبات. برای اثبات «$\rightarrow$» از L۳، و برای اثبات «$\leftarrow$»، از L۴ و (۲) استفاده کنید. ■

(۴) $$A_L \vdash \forall x \forall y(x < y \leftrightarrow \mathbf{S}x < \mathbf{S}y).$$

اثبات. دوشرطیهای زیررا می‌توان از A_L استنتاج کرد:

$x < y \leftrightarrow y \nless x$ (براساس (۳))؛

$\leftrightarrow y \nless \mathbf{S}x$ (براساس L۱)؛

$\leftrightarrow \mathbf{S}x \leqslant y$ (براساس (۳))؛

$\leftrightarrow \mathbf{S}x < \mathbf{S}y$ (براساس L۱)؛ ■

(۵) $$A_L \vdash \mathrm{S}۱\ ,\ A_L \vdash \mathrm{S}۲.$$

اثبات. S۱ از L۲ و (۱) نتیجه می‌شود. S۲ نیزاز (۴) با استفاده از L۳ و (۲) به‌دست می‌آید. ■

(۶) $$A_L \vdash \mathrm{S}۴\cdot n : n = ۱, ۲, \ldots.$$

اثبات. از (۱) و (۲)، با استفاده از L۵، به‌دست می‌آید. ■

بنابراین، هرمدل $\mathfrak{A}$ از A_L (درصورتی که از $<^{\mathfrak{A}}$ صرف‌نظر کنیم) مدلی برای A_S نیز هست. بنابراین، این مدل باید متشکل از یك قسمت استاندارد، باضافهٔ صفر یا چند Z-زنجیره باشد. علاوه براین، این مدل با $<^{\mathfrak{A}}$ مرتب می‌شود.

قضیهٔ ۳۲الف. درنظریهٔ $\mathrm{Cn}\,A_L$ سورها حذف‌پذیرند.

اثبات. مجدداً فرمول

$$\exists x(\beta_0 \wedge \cdots \wedge \beta_p)$$

را، که درآن‌هر β_i بسیط یا نقیض یك فرمول بسیط است، درنظرمی‌گیریم. ترمها، همانند بخش ۱.۳، به‌صورت $\mathbf{S}^k u$ می‌باشندکه درآنها u، ۰ یایك متغیر است. درمورد فرمولهای بسیط، دو امکان وجود دارد:

$$\mathbf{S}^k u \approx \mathbf{S}^l t\ ,\ \mathbf{S}^k u < \mathbf{S}^l t\,.$$

۰. می‌توانیم نمادنفی راحذف کنیم. کافی‌است $t_1 \nless t_2$ را با $t_1 \approx t_2 \vee t_1 < t_2$؛

و $t_2 \not\approx t_1$ را با $t_1 < t_2 \vee t_2 < t_1$ تعویض کنیم. (این کار، براساس L۳ و L۴ موجه است.) با گروه‌بندی مجدد فرمولهای بسیط وتوجه به‌این نکته‌که

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vDash\dashv \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$$

مجدداً می‌توانیم به‌فرمولهایی به‌صورت

$$\exists x(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_q),$$

که درآن هر α_i بسیط است، دست یابیم.

۲. می‌توان فرض‌کردکه متغیر x درهر α_i رخ می‌دهد. این مطلب ازآنجا ناشی می‌شودکه اگر x در α ظاهر نشود، درآن صورت، داریم:

$$\exists x(\alpha \wedge \beta) \vDash\dashv \alpha \wedge \exists x\, \beta .$$

علاوه براین، می‌توان فرض‌کرد که x، فقط در یك طرف تساوی یا نامساوی α_i ظاهر می‌شود. زیرا با $\mathbf{S}^k x \approx \mathbf{S}^l x$ می‌توان همانند بخش ۱.۳ عمل‌کرد و $\mathbf{S}^k x < \mathbf{S}^l x$ را، درصورتی‌که $k < l$، با $0 \approx 0$، ودرغیراین صورت با $0 \not\approx 0$ تعویض‌کرد. (این‌مطلب، براساس (۴) و L۲، وهمچنین توجه به‌این‌که $A_L \vdash 0 \leqslant x$، توجیه می‌شود.)

حالت ۱: فرض‌کنیم حداقل یکی‌از α_iها یك معادله‌باشد. دراین صورت، می‌توانیم همچون حالت ۲ از اثبات حذف سورها از قضیهٔ ۳۱ ج، عمل‌کنیم.

حالت ۲: درغیراین صورت، هر α_i یك نامساوی است. درآن صورت فرمول‌مزبور را می‌توان به‌صورت:

$$\exists x\Big(\bigwedge_i t_i < \mathbf{S}^{m_i} x \wedge \bigwedge_j \mathbf{S}^{n_j} x < u_j\Big)$$

بازنویسی‌کرد. (دراینجا $\bigwedge_i$، مبین ترکیب عطفی فرمولهای زیرنویس شده با i است، بدین‌ترتیب، $\gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_k$ را می‌توان به‌صورت $\bigwedge_j \gamma_i$ خلاصه‌کرد.) دراولین ترکیب عطفی، $\bigwedge_i t_i < \mathbf{S}^{m_i} x$، کرانهای پایینی x را داریم، و در دومین ترکیب عطفی، $\bigwedge_j \mathbf{S}^{n_j} x < u_j$، کرانهای بالایی x را در دست داریم. اگردومین ترکیب‌عطفی تهی باشد (یعنی، اگر هیچ‌کران بالایی برای x وجود نداشته باشد)، آنگاه این فرمول را می‌توان با $0 \approx 0$ تعویض‌کرد. (چرا؟). واگر اولین ترکیب عطفی تهی‌باشد (یعنی، اگرهیچ‌کران پایینی برای x وجود نداشته باشد)، آنگاه می‌توان فرمول را با

$$\bigwedge_j \mathbf{S}^{n_j} 0 < u_j,$$

که می‌گوید صفر (شرایط) کرانهای بالا را ارضا می‌کند، تعویض‌کرد. در غیراین صورت، فرمول را متوالیاً به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\exists x \bigwedge_{i,j}(t_i < \mathbf{S}^{m_i} x \wedge \mathbf{S}^{n_j} x < u_j). \qquad (۱)$$

$$\exists x \bigwedge_{i,\, j}(\mathbf{S}^{n_j}t_i < \mathbf{S}^{m_i+n_j}x < \mathbf{S}^{m_i}u_j). \qquad (۲)$$

$$\Big(\bigwedge_{i,j}\mathbf{S}^{n_j+1}t_i < \mathbf{S}^{m_i}u_j\Big) \wedge \bigwedge_{j}\mathbf{S}^{n_j}\mathbf{0} < u_j. \qquad (۳)$$

فرمول اخیر می‌گوید: «هر کران پایین باضافهٔ یك، هر کران بالایی را ارضا می‌کند، وافزون براین، صفر هر کران بالایی را ارضا می‌کند.» این امر، دال براین است که بین بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا فاصله‌ای وجود دارد، و نتیجتاً، جوابی برای x وجود دارد. قسمت دوم تضمین می‌کند که جواب برای x الزاماً منفی نیست.

درهر حالت، به‌یك صورت بی‌سور فرمول داده شده، دست می‌یابیم. ■

نتیجهٔ ۳۲ب. (الف) $\mathrm{Cn}\, A_L$ تمام است.

(ب) $\mathrm{Cn}\, A_L = \mathrm{Th}\,\mathcal{N}_L$.

*(پ) $\mathrm{Th}\mathcal{N}_L$ تصمیم‌پذیر است.

اثبات. (الف)، استدلالی راکه دراثبات قضیهٔ ۳۱ چ آوردیم، دراینجا نیزمی‌توان اعمال‌نمود. (ب)، این حکم از(الف) نتیجه می‌شود زیراکه $\mathrm{Cn}\, A_L \subseteq \mathrm{Th}\mathcal{N}_L$ و $\mathrm{Th}\mathcal{N}_L$ ارضاشدنی است. درمورد (پ)، می‌توان از این مطلب استفاده‌کردکه هر نظریهٔ تمام و اصل‌پذیر نظریه‌ای است تصمیم‌پذیر. با این حال، اثبات از طریق حذف سورها روش تصمیم‌گیری مؤثرتری را به‌دست می‌دهد. ■

نتیجهٔ ۳۲پ. یك زیرمجموعهٔ در $\mathcal{N}_L$ تعریف‌پذیراست اگروتنها اگرخود یامتمم آن متناهی باشد.

اثبات. با تمرین ۴ از بخش پیشین مقایسه‌کنید. ■

ازسوی دیگر، $\mathcal{N}_L$، نسبت به $\mathcal{N}_S$، دارای روابط دوتایی تعریف‌پذیر بیشتری است. زیرا رابطهٔ ترتیب $\{\langle m\,,\, n\rangle : m < n\}$ در $\mathcal{N}_S$ تعریف‌پذیر نیست (براساس تمرین ۵ بخش قبلی).

نتیجهٔ ۳۲ت. رابطهٔ جمع،

$$\{\langle m, n,\, p\rangle : m + n = p\},$$

در $\mathcal{N}_L$ تعریف‌پذیر نیست.

اثبات. اگر جمع را می‌توانستیم تعریف‌کنیم، درآن صورت مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج را نیز می‌توانستیم تعریف‌کنیم. لکن این مجموعه، نه خود متناهی است و نه دارای متمم متناهی است. ■

حال فرض‌کنیم، که با افزودن نمادجمع $+$، زبان موردنظررا گسترش دهیم. ساخت

حاصل به‌صورت زیرخواهد بود:

$$\mathcal{N}_A = (N, 0, S, <, +).$$

نظریهٔ این ساخت نیز، چنان‌که بزودی ثابت خواهیم کرد، تصمیم‌پذیر است. اما، برای جلوگیری از پیچیدگی بیشتر، از ارائهٔ فهرست مناسبی از اصول موضوع برای این نظریه خودداری خواهیم کرد.

مدلهای غیراستاندارد برای $\mathrm{Th}\mathcal{N}_A$، باید مدلی برای $\mathrm{Th}\mathcal{N}_L$ نیز باشند. بدین ترتیب، این مدلها دارای یک قسمت استاندارد، باضافهٔ چند Z-زنجیره، می‌باشند اما ترتیب بین Z-زنجیره‌ها، دیگر به‌هیچ‌وجه اختیاری نیست. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مدل غیر-استاندارد برای $\mathrm{Th}\mathcal{N}_A$ باشد. ترتیب $<^{\mathfrak{A}}$، یک ترتیب خوش‌تعریف روی مجموعهٔ Z-زنجیره‌ها القا می‌کند. (تمرین ۳ را ببینید.) ثابت می‌کنیم که هیچ بزرگترین یا کوچکترین Z-زنجیره‌ای وجود ندارد و بین هردو Z-زنجیره یک Z- زنجیره دیگر وجود دارد. دلایل این امر، باختصار و خیلی ساده، چنین است: اگر a به‌یک Z-زنجیره تعلق داشته باشد (یعنی، یک عضو متناهی از $\mathfrak{A}$ باشد)، آنگاه $a +^{\mathfrak{A}} a$، عضو یک Z-زنجیره بزرگتر خواهد بود. دراین صورت، باید یک b وجود داشته باشدکه $b +^{\mathfrak{A}} b$، یاخود a، و یا تالی a باشد؛ این b باید در یک Z-زنجیرهٔ کوچکتری باشد. اگر a_1 و a_2، به Z-زنجیره‌های مختلفی متعلق باشند، در آن صورت، باید یک b وجود داشته باشد به طوری که $b +^{\mathfrak{A}} b$، یا خود $a_1 +^{\mathfrak{A}} a_2$، و یا تالی آن باشد. و این b دریک Z-زنجیره، بین Z-زنجیرهٔ مربوط به a_1 و Z-زنجیرهٔ مربوط به a_2، قرار خواهد گرفت. (این عبارات، باید کاملاً موجه به‌نظر برسند. خواننده‌ای که علاقه‌مند به‌کار کردن با اعداد نامتناهی است، می‌تواند خود به‌جزئیات مطلب بپردازد.)

* **قضیهٔ ۳۲ث. (پرس بورگر[1] ۱۹۲۹)** نظریهٔ ساخت $\mathcal{N}_A = (N, 0, S, <, +)$ تصمیم‌پذیر است.

اثبات. مجدداً از روش حذف سورها استفاده می‌کنیم. در خود نظریهٔ $\mathcal{R}_A$ سورها حذف‌پذیر نیستند. مثلاً، فرمولی که مجموعهٔ اعداد زوج را تعریف می‌کند،

$$\exists y\, v_1 \approx y + y,$$

باهیچ فرمول بی‌سورمعادل نیست. با افزودن یک نماد جدید $\equiv_2$، برای همنهشتی به‌پیمانهٔ ۲، می‌توان براین مشکل فائق آمد. به‌همین ترتیب، نمادهای $\equiv_3$، $\equiv_4$، ... را می‌افزاییم. ساخت موردنظر برای این زبان توسعه یافته، عبارت است از:

$$\mathcal{N}^+ = (N, 0, S, <, +, \equiv_2, \equiv_3, \ldots),$$

---

1. Presburger

کــه در آن $\equiv_k$، رابطهٔ دوتایی همنهشتی بـه‌پیمانهٔ k است. خواهیم دید که درنظریهٔ این ساخت، سورها حذف‌پذیرند.

این امر به‌خودی‌خود، دال براین نیست که (حتی) یکی ازدونظریه تصمیم‌پذیراست. چه می‌توانیم با هر ساختی شروع کنیم، وآن را به‌ساختی بـا روابط اضافی چنان گسترش دهیم تا در ساخت حاصل سورها حذف‌پذیرباشند. برای اثبات تصمیم‌پذیری، بایـد نشان دهیم که می‌توانیم به‌ازای هر جملهٔ داده شدهٔ σ، (۱) به‌روش کارامد یك معادل بی‌سور σ مانند σ' بیابیم، و سپس (۲) دربارهٔ صدق σ'، به‌روش کارامد تصمیم بگیریم.

حال، به‌تشریح فرایند حذف سورها در $\mathcal{N}^+$می‌پردازیم. برای یك ترم t ویك عدد طبیعی n، فرض‌کنیم nt، ترم $t+t+\dots+t$ باشدکــه تعداد جمعوندهای آن n است. $\circ t$ همان $\circ$ است. در این صورت، هرترم را می‌توان به‌یکی از صور زیر بسط داد:

$$\mathbf{S}^{n}\circ+n_1x_1+\dots+n_kx_k,$$

به‌ازای $k\geqslant\circ$، $n_i\geqslant\circ$. به‌عنوان مثال،

$$\mathbf{S}(x+\mathbf{S}\circ)$$

به

$$\mathbf{S}^{2}\circ+x$$

تبدیل می‌شود.

طبق معمول، بایك فرمول $\exists y(\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_n)$، که درآن هر β_i یك فرمول بسیط یا نقیض یك فرمول بسیط است، شروع می‌کنیم.

۰۱ نفی را حذف مــی‌کنیم. $\neg(t_1\approx t_2)$ را بـا $(t_1<t_2\vee t_2<t_1)$ تعویض می‌کنیم. $\neg(t_1<t_2)$ را با $(t_1\approx t_2\vee t_2<t_1)$ تعویض‌می‌کنیم. و $\neg(t_1\approx_m t_2)$ را با

$$t_1\approx_m t_2+\mathbf{S}^1\circ\vee\dots\vee t_1\approx_m t_2+\mathbf{S}^{m-1}\circ,$$

تعویض می‌کنیم. سپس آنها را دریك ترکیب فصلی از فرمولها به‌صورت

$$\exists y(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\dots\wedge\alpha_m),$$

کــه درآن هر α_i بسیط است مجدداً گروه‌بندی می‌کنیم. علاوه براین می‌توان فرض‌کرد که y درهر α_i رخ می‌دهد، و درحقیقت می‌توان فرض‌کردکه هر α_i دارای یکی‌از صور چهارگانهٔ زیر:

$$ny+t\approx u,$$

$$ny+t\approx_m u,$$

$$ny+t<u,$$

$$u<ny+t,$$

که درآنها، u و t ترمهایی هستندکه درآنها y موردی ندارد. از این پس این فرمولها را به‌کمك نماد تفاضل می‌نویسیم:

$$ny \approx u-t,$$

$$ny \approx_m u-t,$$

$$ny < u-t,$$

$$n-t < ny.$$

فرمولهای فوق تنها کوتاهنوشتهایی برای فرمولهای فاقد نماد تفاضل هستندکه‌از جابه‌جا‌کردن ترمها به‌دست آمده‌اند.

به‌عنوان مثال، اکنون، دراین مرحله، ممکن‌است فرمولی به‌صورت زیرداشته باشیم:

$$\exists y(w < ۴y \wedge ۲y < u \wedge ۳y < v \wedge y \approx_{۳} t),$$

که در آن t ، u ، v ، و w ترمهایی هستندکه شامل y نمی‌باشند.

۲. ضرایب y را یکنواخت می‌کنیم. فرض کنیم p ، کوچکترین مضرب مشترك ضرایب y باشد. هرفرمول بسیط را می‌توان از طریق «ضرب‌کردن» دریك عامل مناسب، به‌فرمولی‌که درآن p ضریب y است، تبدیل‌کرد. این کار را بوضوح می‌توان در مورد معادله‌ها ونامساویها انجام داد. درمورد همنهشتی‌ها، باید به‌خاطر سپردکه پیمانه‌ها را نیز باید افزایش داد:

$$a \equiv_m b \text{ اگر } ka \equiv_{km} kb \,.$$

درمثال بالا، p برابر ۱۲ است وبدین ترتیب، فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\exists y(۳w < ۱۲y \wedge ۱۲y < ۶u \wedge ۱۲y < ۴v \wedge ۱۲y \approx_{۳۶} ۱۲t).$$

۳. ضریب y را حذف می‌کنیم. py را با x تعویض می‌کنیم وترکیب عطفی‌جدید $x \approx_p ۰$ را اضافه می‌کنیم. (بـه‌جای $\exists y \ldots ۱۲y \ldots$ می‌توانیم داشته باشیم: «مضرب xی از ۱۲ وجود دارد به‌طوری‌که $\ldots x \ldots$») مثال ما اکنون تبدیل می‌شود به

$$\exists x(۳w < x \wedge x < ۶u \wedge x < ۴v \wedge x \approx_{۳۶} ۱۲t \wedge x \approx_{۱۲} ۰).$$

۴. حالت ویژه. اگـر یکی از فرمولهای بسیط، یـك معادلهٔ $x+t \approx u$ ، باشد، آنگاه می‌توان

$$\exists x\, \theta$$

را با

$$\theta^x_{u-t} \wedge t \leqslant u$$

تعویض‌کرد. دراینجا تعویض x با «$u-t$»، کاری طبیعی است؛ چه با جابه‌جاکردن ترمها

عدم حضور نماد تفاضل را می‌توانیم جبران کنیم. برای مثال،

$(x \approxeq_m v)^x_{u-t}$ ، عبارت است از $u \approxeq_m v+t$.

۵. از اینجا به بعد، می‌توان فرض کرد که نماد $\approxeq$ ظاهر نمی‌شود. بنابراین، فرمولی به‌صورت زیر داریم:

$$\exists x[r_0 - s_0 < x \wedge \cdots \wedge r_{l-1} - s_{l-1} < x$$
$$\wedge x < t_0 - u_0 \wedge \cdots \wedge x < t_{k-1} - u_{k-1}$$
$$\wedge x \approxeq_{m_0} v_0 - w_0 \wedge \cdots \wedge x \approxeq_{m_{n-1}} v_{n-1} - w_{n-1}],$$

که در آن، r_i ، s_i ، t_i ، u_i ، v_i ، و w_i ترمهایی هستند که x را دربرندارند. این فرمول را می‌توان به‌صورت زیر مختصر کرد:

$$\exists x\left[\bigwedge_{j<l} r_j - s_j < x \wedge \bigwedge_{i<k} x < t_i - u_i \wedge \bigwedge_{i<n} x \approxeq_{m_i} v_i - w_i\right].$$

اگر هیچ همنهشتی وجود نداشته باشد (یعنی، $n = 0$)، آنگاه معنای این فرمول آن است که یك فضای غیرمنفی بین کرانهای پایین و بالا وجود دارد. می‌توانیم فرمول مزبور را با فرمول بی‌سور زیر، تعویض کنیم:

$$\bigwedge_{i<k} \bigwedge_{j<l} (r_j - s_j) + \mathbf{S}0 < t_i - u_i \wedge \bigwedge_{i<k} 0 < t_i - u_i .$$

فرض کنیم M کوچکترین مضرب مشترك پیمانه‌های m_0 ، m_1 ، ... ، m_{n-1} باشد. دراین‌صورت، $a + M \equiv_{m_i} a$. نتیجتاً با افزایش a ، الگوی باقیمانده‌های a ، به‌پیمانه‌های m_0 ، m_1 ، ... ، m_{n-1} ، دارای دورهٔ تناوب M خواهد بود. بنابراین، درجستجوی جوابی برای همنهشتیها، کافی است که به‌جستجوی M عدد درست متوالی بپردازیم.

اکنون، فرمولی داریم که مدعی وجود یك عدد طبیعی است که از کرانهای پایین مشخص L_1 ، ... ، L_l کوچکتر نیست و همنهشتیها و کرانهای بالای مشخصی را ارضا می‌کند. اگر چنین جوابی وجود داشته باشد، آنگاه یکی از سطرهای زیر، یك جواب خواهد بود:

$$L_1, L_1 + 1, \ldots, L_1 + M - 1,$$
$$L_2, L_2 + 1, \ldots, L_2 + M - 1,$$
$$\vdots$$
$$L_l, L_l + 1, \ldots, L_l + M - 1,$$
$$0, 1, \ldots, M - 1.$$

(آخرین سطر، برای دربرگرفتن حالتی که درآن هر L_j منفی است، لازم است. برای

اجتناب از به‌حساب‌آوردن سطر آخر به‌عنوان یك حالت ویژه، لازم است که یك کران پایین جدید ۰ اضافه کنیم. یعنی، فرض کنیم $r_l = ۰$ و $s_l = \mathbf{S}۰$ تا

$$r_l - s_l < x$$

فرمول $۰ < x + \mathbf{S}۰$ باشد که مبین غیر منفی بودن x است. اکنون، $l + ۱$ کران پایین داریم.)

فرمول ما (که مبین وجود جوابی برای x است)، اکنون می‌تواند با یك ترکیب فصلی بی‌سور که مبین این است که یکی از اعداد موجود در ماتریس بالا یك جواب غیرمنفی است، تعویض شود:

$$\bigvee_{j\leqslant l}\ \bigvee_{q<M}\Big[\bigwedge_{i\leqslant l} r_i - s_i < (r_j - s_j) + \mathbf{S}^q۰ \wedge \bigwedge_{i<k} (r_j - s_j) + \mathbf{S}^q۰ < t_i - u_i$$
$$\wedge \bigwedge_{i<n} (r_j - s_j) + \mathbf{S}^q۰ \approx_{m_i} v_i - w_i\Big]$$

درمثال جاری، بعداز افزودن کران پایین جدید روی x، خواهیم داشت:

$$\exists x(۳w < x \wedge ۰ < x + \mathbf{S}۰ \wedge x < ۶u \wedge x < ۴v \wedge x \approx_{۳۶} ۱۲t \wedge \approx_{۱۲} ۰).$$

معادل بی‌سور این فرمول، یك ترکیب فصلی مرکب از هفتاد و دو ترکیب عطفی است،هر ترکیب عطفی دارای شش مؤلفه است.

تا اینجا، نصف قضیه اثبات می‌شود. یعنی، اگر یك جملهٔ σ داده شده باشد، می‌دانیم چگونه، به‌روشی کارامد، یك جملهٔ بی‌سور τ را (در زبان $\mathcal{N}^+$) بیابیم که (در ساخت مورد نظر) صادق است اگر و تنها اگر σ صادق باشد. اکنون باید در مورد صدق τ تصمیم بگیریم.

اما این کار آسان است. کافی است به‌جمله‌های بسیط توجه کنیم. هر ترم بی‌متغیر را می‌توان به‌صورت $\mathbf{S}^n۰$ نوشت. دراین صورت، به‌عنوان مثال،

$$\mathbf{S}^n۰ \approx_m \mathbf{S}^p۰$$

صادق است اگروتنها اگر $n \equiv_m p$ ■

مجموعهٔ D از اعداد طبیعی تناوبی است اگر عدد مثبتی مانند p وجود داشته باشد که عدد دلخواه n در D باشد اگروتنها اگر $n + p$ در D باشد. مجموعهٔ D نهایتاً تناوبی است اگروتنها اگر اعداد مثبت M و p وجود داشته باشند به‌طوری‌که به‌ازای همهٔ nهای بزرگتراز M، $n \in D$ اگروتنها اگر $n + p \in D$.

قضیهٔ ۳۲ج. یك مجموعه از اعداد طبیعی در $(N, ۰, S, <, +)$ تعریف‌پذیر است اگروتنها اگر *نهایتاً* تناوبی باشد.

اثبات. تمرین ۱ حکم می‌کند که هر مجموعهٔ نهایتاً تناوبی مجموعه‌ای است تعریف‌پذیر. برعکس؛ فرض کنیم D تعریف‌پذیر باشد. در آن صورت، D در $\mathcal{N}^+$ با یك فرمول بی‌سور (که تنها متغیر آن v_1 است) تعریف‌پذیر است. از آنجا که ردهٔ مجموعه‌های نهایتاً تناوبی تحت عملهای اجتماع، اشتراك، متمم‌گیری بسته است، کافی است نشان دهیم که هرفرمول بسیط درزبان $\mathcal{N}^+$، که تنها متغیر آن v_1 است، یك مجموعهٔ نهایتاً تناوبی را تعریف می‌کند. تنها چهار امکان وجود دارد:

$$n\mathrm{v}_1 + t \approx u,$$
$$n\mathrm{v}_1 + t < u,$$
$$u < n\mathrm{v}_1 + t,$$
$$n\mathrm{v}_1 + t \approx_m u,$$

که درآنها، u و t شماره می‌باشند. دوفرمول اول مجموعه‌های متناهی را (که نهایتاً دارای دورهٔ تناوب ۱ است) تعریف می‌کنند، فرمول سوم، یك مجموعه، با متمم متناهی را تعریف می‌کند، و آخرین فرمول، یك مجموعهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب m را تعریف می‌نماید. ■

نتیجهٔ ۳۲چ. رابطهٔ ضرب،

$$\{\langle m, n, p\rangle : p = m \cdot n, \text{ در } N\}$$

در $(N, 0, S, <, +)$ تعریف‌پذیر نیست.

اثبات. اگر تعریفی از ضرب در اختیار داشتیم، در آن صورت می‌توانستیم با استفاده از آن، مجموعهٔ اعداد مربع را تعریف کنیم. لکن، مجموعهٔ اعداد مربع نهایتاً تناوبی نیست. ■

تمرین

۱. نشان دهید که هر مجموعه‌ای نهایتاً تناوبی از اعداد طبیعی در ساخت $\mathcal{N}_A$، تعریف‌پذیر است

۲. نشان دهید که در ساخت $(N, +)$ روابط زیر تعریف‌پذیر هستند:
(الف) ترتیب، $\{\langle m, n\rangle : m < n\}$.
(ب) صفر، $\{0\}$.
(پ) تالی، $\{\langle m, n\rangle : n = S(m)\}$.

۳. فرض کنید $\mathfrak{U}$، یك مدل برای $\mathrm{Th}\mathcal{N}_L$ (یا، به بیانی معادل، یك مدل برای A_L)

باشد. به‌ازای a و b در $|\mathfrak{U}|$، رابطهٔ هم‌ارزی زیر را تعریف کنید:

$a \sim b$ اگر و تنها اگر $\mathbf{S}$ با اعمال S، بدفعاتی متناهی، به‌یکی از دو عضو a یا b، بتوان به‌دیگری رسید.

فرض کنید $[a]$ نمایشگر ردهٔ هم‌ارزی a باشد. رده‌های هم‌ارزی را با رابطهٔ

$[a] < [b]$ اگر و تنها اگر $a <^{\mathfrak{U}} b$ و $a \not\sim b$

مرتب می‌کنیم. نشان دهید که این رابطه، رابطه‌ای خوش‌تعریف روی مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی است.

۴. نشان دهید که در نظریهٔ اعداد حقیقی همراه با ترتیب معمولی، $\mathrm{Th}(\mathbb{R}, <)$، سورها حذف‌پذیرند. (فرض کنید که زبان وابسته به‌آن شامل تساوی است.)

۳.۳ زیرنظریه‌ای از نظریهٔ اعداد

اکنون به‌زبان کامل نظریهٔ اعداد، به‌صورتی که در بخش ۳.۰ توضیح داده شد، بازمی‌گردیم. پارامترهای زبان، عبارتند از $\forall$، $\mathbf{0}$، $\mathbf{S}$، $<$، $+$، $\cdot$، و $\mathbf{E}$. ساخت موردنظر برای این زبان، عبارت است از

$$\mathfrak{N} = (N, \circ, S, <, +, \cdot, E)،$$

درواقع، می‌توان در $(N, \cdot, E)$، $\{\circ\}$، S، $<$، و $+$ را تعریف نمود. (تمرین ۱ را ببینید.) چنان‌که در بخش ۳.۷ نشان خواهیم داد، در $(N, +, \cdot)$ علاوه‌بر $\circ$، S، و $<$، E را نیز می‌توان تعریف کرد. بنابراین، راههایی برای صرفه‌جویی وجود دارد. مزیت در اختیار داشتن همهٔ این پارامترها (بویژه $\mathbf{E}$)، باعث تسهیل بعضی از اثباتها خواهد شد.

همان‌گونه که خواهیم دید، $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ نظریه‌ای بسیار قوی است که نه تصمیم‌پذیر است و نه اصل‌پذیر. برای اثبات این مطلب (و تعدادی از قضایای مربوطه)، ازنظر خط مشی، بهتر آن است که یک زیرنظریهٔ اصل‌پذیر متناهی از $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ را برای بررسی انتخاب کنیم. همان‌طور که در بخش ۳.۰ اشاره شد، این زیرنظریه باید به اندازهٔ کافی، برای نمایاندن (به‌مفهومی که بعداً دقیق خواهد شد) حقایقی پیرامون مجموعه‌های تصمیم‌پذیر، قوی باشد، زیرنظریه‌ای که انتخاب کرده‌ایم $\mathrm{Cn}\,A_E$ است که در آن A_E، مجموعه‌ای است متشکل از یازده جملهٔ فهرست شده درزیر. (همچون بخش قبل، $x \leqslant y$ کوتاه‌نوشت $x < y \vee x \approx y$ است.)

مجموعهٔ A_E از اصول موضوع

S۱. $\forall x \quad \mathbf{S}x \not\approx \mathbf{0}$

S۲. $\forall x\, \forall y (\mathbf{S}x \approx \mathbf{S}y \rightarrow x \approx y)$

$\forall x \forall y(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leqslant y)$ .L۱

$\forall x \quad x \not< 0$ .L۲

$\forall x \forall y(x < y \vee x \approx y \vee y < x)$ .L۳

$\forall x \quad x + 0 \approx x$ .A۱

$\forall x \forall y x + \mathbf{S}y \approx \mathbf{S}(x+y)$ .A۲

$\forall x \quad x \cdot 0 \approx 0$ .M۱

$\forall x \forall y x \cdot \mathbf{S}y \approx x \cdot y + x$ .M۲

$\forall x \quad x\mathbf{E}0 \approx \mathbf{S}0$ .E۱

$\forall x \forall y x \mathbf{E}\,\mathbf{S}y \approx x\mathbf{E}y \cdot x$ .E۲

از آنجایی که $\mathcal{N}$ مدلی برای A_E است، داریم $\mathrm{Cn}\, A_E \subseteq \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$. (اما به‌طوری که اثبات خواهیم کرد)، در اینجا تساوی برقرار نیست. در حقیقت، می‌توان نشان داد که $A_E \nvdash \mathrm{S}۳$.

نخست نشان می‌دهیم که بعضی از جمله‌های سادهٔ $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$، از A_E استنتاج‌پذیرند.

لم ۳۳ الف. $A_E \vdash \forall x x \not< 0$.

(ب) به‌ازای هرعدد طبیعی k، داریم:

$$A_E \vdash \forall x(x < \mathbf{S}^{k+1}0 \leftrightarrow x \approx \mathbf{S}^0 0 \vee \dots \vee x \approx \mathbf{S}^k 0).$$

توجه کنید که (الف) را می‌توان به‌عنوان حالت $k = -1$ از (ب) دانست، که در آن ترکیب فصلی تهی عبارت است از $\perp$. این لم می‌گوید که نقاط استاندارد به‌طریقی طبیعی مرتب شده‌اند، و (بنابر L ۳) همهٔ نقاط نامتناهی بزرگتر از هر نقطهٔ استاندارد هستند.

اثبات. قسمت (الف)، همان L۲ است. برای (ب) از استقرا نسبت به k (در فارسی) استفاده می‌کنیم. به‌عنوان نتیجه‌ای از L۱، داریم:

$$x < \mathbf{S}0 \leftrightarrow x < 0 \vee x \approx 0,$$

که توأم با L۲، نتیجه می‌دهد:

$$x < \mathbf{S}0 \leftrightarrow x \approx 0,$$

که همان حالت $k = 0$ از (ب) است. در گام استقرایی، مجدداً از $L۱$ استفاده می‌کنیم:

$$x < \mathbf{S}^{k+1}0 \leftrightarrow x < \mathbf{S}^k 0 \vee x \approx \mathbf{S}^k 0.$$

براساس فرض استقرا، $x < \mathbf{S}^k 0$ را می‌توان با

$$x \approx \mathbf{S}^0 0 \vee \dots \vee x \approx \mathbf{S}^{k-1}0,$$

تعویض کرد، که از آن (ب) به‌دست می‌آید. ■

لم ۳۳ب. برای هر ترم آزاد از سور t، یك‌عدد طبیعی منحصربه‌فرد n وجود دارد به‌طوری که:

$$A_E \vdash t \approx \mathbf{S}^n 0.$$

اثبات. منحصربه‌فرد بودن آن واضح است؛ (چرا؟). برای اثبات وجود آن، از استقرا نسبت به t استفاده می‌کنیم. اگر $t = 0$ باشد، قرارمی‌دهیم $n = 0$. اگر t مساوی $\mathbf{S}u$ باشد، آنگاه، براساس فرض استقرا، به‌ازای بعضی m ها خواهیم داشت $A_E \vdash u \approx \mathbf{S}^m 0$. لذا $A_E \vdash t \approx \mathbf{S}^{m+1} 0$.

اکنون فرض کنیم t مساوی $u_1 + u_2$ باشد. طبق‌فرض‌استقرا، به‌ازای‌بعضی m و nها، داریم $A_E \vdash t \approx \mathbf{S}^m 0 + \mathbf{S}^n 0$. اکنون، $A2$ را n بار و A1 را یك بار به‌کارمی‌بریم؛ حاصل می‌شود $A_E \vdash t \approx \mathbf{S}^{m+n} 0$. استدلال درمورد ضرب و نما نیز به همین ترتیب انجام می‌گیرد. ■

به‌عنوان حالت ویژه‌ای از این لم، «۴ = ۲ + ۲» (یعنی، $\mathbf{S}^2 0 + \mathbf{S}^2 0 = \mathbf{S}^4 0$) را به‌عنوان نتیجه‌ای از A_E به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۳۳پ. به ازای هر جملهٔ آزاد از سور τ که در $\mathfrak{N}$ راست باشد، داریم $A_E \vdash \tau$.

اثبات. تمرین ۲.

استفاده از علامت‌گذاری ساده شده‌ای برای جایگزینی (که قبلاً در بخش ۷.۲ به‌کار رفت)، درصفحات آتی، به‌فهم مطالب کمك خواهدکرد:

$$\varphi(t) = \varphi^{v_1}_t,$$

$$\varphi(t_1, t_2) = (\varphi^{v_1}_{t_1})^{v_2}_{t_2},$$

و الی آخر. بدین‌ترتیب $\varphi = \varphi(v_1) = \varphi(v_1, v_2)$. معمولاً ترمی که جایگزین می‌شود یك شمار خواهد بود، به‌عنوان مثال

$$\varphi(\mathbf{S}^b 0, \mathbf{S}^a 0) = (\varphi^{v_1}_{\mathbf{S}^a 0})^{v_2}_{\mathbf{S}^b 0}.$$

اما بعضی اوقات، ترمهای دیگری را نیز جایگزین می‌کنیم، مثلاً، $\varphi(x) = \varphi^{v_1}_x$، که در آن x یك متغیراست. به‌هرحال، اگر x در φ به‌جای v_1 جایگزین شدنی‌نباشد، درآن صورت باید قراردهیم $\varphi(x) = \psi^{v_1}_x$، که در آن ψ یك گونهٔ الفبایی مناسبی برای φ است.

دراثبات بعدی (و درموارد دیگری دراین‌فصل) از این‌نتیجهٔ لم جایگزینی در بخش ۵.۲ استفاده‌خواهیم کرد: به‌ازای هرفرمول φ که درآن‌حداکثر $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ آزاد باشند و به‌ازای اعداد طبیعی $a_1, \ldots, a_n$، داریم:

$$\models_{\mathfrak{N}} \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{N}} \varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_n}\mathbf{0}).$$

یك فرمول وجودی $(\exists_1)$، فرمولی است به‌صورت $\exists x_1 \ldots \exists x_k \theta$، که درآن θ بی‌سور است. نتیجهٔ زیر، قضیهٔ ۳۳پ را کامل می‌کند.

نتیجهٔ ۳۳ت. اگر τ یك جملهٔ وجودی صادق در $\mathcal{N}$ باشد، آنگاه $A_E \vdash \tau$.

اثبات. اگر $\exists \mathbf{v}_1 \exists \mathbf{v}_2 \theta$ در $\mathcal{N}$ صادق باشد، آنگاه اعداد طبیعی m و n وجود دارند که $\theta(\mathbf{S}^m\mathbf{0}, \mathbf{S}^n\mathbf{0})$ در $\mathcal{N}$ صادق است. از آنجاکه این‌جمله، یك‌جملهٔ بی‌سور صادق است، لذا از A_E استنتاج‌پذیر است و به‌نوبهٔ خود جملهٔ $\exists \mathbf{v}_1 \exists \mathbf{v}_2 \theta$ را منطقاً نتیجه می‌دهد. ■

از سوی دیگر، مشخص‌گشته است که جمله‌های عمومی $(\forall_1)$ صادقی وجود دارند (یعنی، جملاتی به‌صورت $\forall x_1 \ldots \forall x_k \theta$، برای θ بی‌سور) که در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نیست.

روابط نمایش‌پذیر

فرض‌کنیم R، یك‌رابطهٔ mتایی روی N باشد؛ یعنی $R \subseteq N^m$. می‌دانیم که یك فرمول ϱ (که درآن فقط $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ آزادند) R را در $\mathcal{N}$ تعریف می‌کند اگروتنها اگر به‌ازای هر $a_1, \ldots, a_m$ در N، داشته باشیم:

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in R \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{N}} \varrho[\![a_1, \ldots, a_m]\!]$$
$$\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{N}} \varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}).$$

(شرط اخیر، براساس لم جایگزینی، با شرط پیشین معادل است.) این شرط را می‌توان به‌صورت دواستلزام بازنویسی کرد:

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in R \Rightarrow \models_{\mathfrak{N}} \varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}),$$
$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \notin R \Rightarrow \models_{\mathfrak{N}} \neg\varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}).$$

همچنین می‌گوییم که ϱ رابطهٔ R را درنظریهٔ $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش می‌دهد اگردراین دواستلزام، مفهوم صدق در $\mathcal{N}$ را بتوان با مفهوم قویتری یعنی استنتاج‌پذیری از A_E تعویض کرد.

به‌طورکلیتر، فرض‌کنیم T نظریه‌ای در زبانی با $\mathbf{0}$ و $\mathbf{S}$ باشد. درآن صورت، ϱ رابطهٔ R را در T می‌نمایاند اگروتنها اگربه‌ازای هر $a_1, \ldots, a_m$ در N داشته باشیم:

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in R \Rightarrow \varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}) \in T,$$

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle \notin R \Rightarrow (\neg \varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0})) \in T.$$

به‌عنوان مثال، ϱ رابطهٔ R را درنظریهٔ $\mathrm{Th}\mathcal{N}$ می‌نمایاند اگروتنها اگر ϱ رابطهٔ R را در $\mathcal{N}$ تعریف کند. اما ϱ رابطهٔ R را در $\mathrm{Cn}\,A_E$ می‌نمایاند اگر وتنها اگر به‌ازای هر $a_1, \ldots, a_m$ داشته باشیم:

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle \in R \Rightarrow A_E \vdash \varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}),$$

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle \notin R \Rightarrow A_E \vdash \neg\varrho(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}).$$

به عنوان مثال، رابطهٔ تساوی روی N، در $\mathrm{Cn}\,A_E$، با فرمول $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$ نمایانده می‌شود. زیرا

$$m = n \Rightarrow \vdash \mathbf{S}^m\mathbf{0} \approx \mathbf{S}^n\mathbf{0},$$

$$m \neq n \Rightarrow \{\mathrm{S}1, \mathrm{S}2\} \vdash \neg\mathbf{S}^m\mathbf{0} \approx \mathbf{S}^n\mathbf{0}.$$

یك رابطه در T نمایش‌پذیر است اگروتنها اگرفرمولی وجود داشته باشدکه آن را در T بنمایاند.

مفهوم نمایش‌پذیری باید با مفهوم تعریف‌پذیری‌مقایسه شود. درهردوحالت، به‌تعبیری روابط روی اعداد طبیعی را با فرمول توصیف می‌کنیم. درمورد تعریف‌پذیری، سؤال پیرامون صدق جمله‌های درتعبیر (ساخت) است. و درمورد نمایش‌پذیری در $\mathrm{Cn}\,A_E$، در عوض، پرسش پیرامون استنتاج‌پذیری جمله‌ها از اصول موضوع است.

گوییم فرمول φ، که درآن هیچ متغیری باستثنای $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ مورد آزاد ندارد، با A_E باشمارها معین می‌شود اگروتنها اگر به‌ازای هر mگانهٔ $a_1, \ldots, a_m$ از اعداد طبیعی، یا

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0})$$

و یا

$$A_E \vdash \neg\varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}).$$

قضیهٔ ۳۳ث. فرمول ϱ رابطهٔ R را در $\mathrm{Cn}\,A_E$ می‌نمایاند اگروتنها اگر

(۱) ϱ با A_E باشمارها معین شود، و

(۲) ϱ در $\mathcal{N}$ رابطهٔ R را تعریف کند.

اثبات. از این مطلب که $\mathcal{N}$ مدلی از A_E است، استفاده می‌کنیم. اگر ϱ در $\mathrm{Cn}\,A_E$ رابطهٔ R رابنمایاند، آنگاه واضح است که (۱) برقرار خواهد بود، (۲) نیز برقراراست، زیرا «$A_E \vdash$»، «$\models_{\mathfrak{N}}$» را نتیجه می‌دهد. برعکس، اگر (۱) و (۲) برقرار باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \in R \Rightarrow \models_{\mathfrak{N}} \varrho(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0) \quad ((\text{بنا بر}\ (2)$$

$$\Rightarrow A_E \nvdash \neg\varrho(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0)$$

(چون $\mathscr{N}$، مدلی از A_E است.)

$$\Rightarrow A_E \vdash \varrho(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0) \quad ((\text{بنا بر}\ (1)$$

و به‌همین ترتیب برای متمم $\mathscr{N}$, $\neg\varrho$ عمل می کنیم. ■

فرضیهٔ چرچ[1]

حال به‌بررسی رابطهٔ بین مفاهیم نمایش‌پذیری و تصمیم‌پذیری می پردازیم.

***قضیهٔ ۳۳ ج.** فرض کنیم R رابطه‌ای نمایش‌پذیر در یك نظریهٔ سازگار و اصول‌پذیر باشد. در آن‌صورت، R تصمیم‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم ϱ رابطهٔ R را درنظریهٔ سازگاراصل‌پذیر T بنمایاند. به‌یادآورید که T شمارش‌پذیرکارامد است (نتیجهٔ ۲۵ ج). اسلوب تصمیم‌گیری به‌شرح زیراست:
فرض کنیم a_1، . . . ، a_m داده‌شده‌اند، عضوهای T رامی‌شماریم. اگردراین‌شمارش، $\varrho(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0)$ یافت‌شد، دراین‌صورت‌کار تمام‌است، و داریم $\langle a_1,\ldots,a_m\rangle \in R$.
اگردراین‌شمارش، $\neg\varrho(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0)$ یافت شود، آنگاه کار تمام است و داریم $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle \notin R$.
براساس نمایش‌پذیری، یکی از این دوجمله، درجایی پدیدارمی‌گردد، وکاربه‌پایان می‌رسد. ازآنجاکه T سازگار است، جواب داده شده با این اسلوب صحیح است. ■

***نتیجهٔ ۳۳ چ.** هررابطهٔ نمایش‌پذیردریك نظریهٔ سازگار واصل‌پذیرمتناهی رابطه‌ای است تصمیم‌پذیر.

دربارهٔ عکس نتیجهٔ بالا چه می‌توان گفت؟ درواقع، براساس مفهوم غیرصوری ما از تصمیم‌پذیری، نمی‌توان به اثبات عکس این نتیجه امیدوار بود. زیرا برخورد غیرصوری ما تنها برای ارائهٔ کرانهای پایین ردهٔ روابط تصمیم‌پذیر قابل استفاده است، و برای به‌دست‌آوردن کرانهای بالا مناسب نیست.

مع‌هذا، امکان‌ارائهٔ استدلالهای‌موجه درپشتیبانی ازعکس‌این‌نتیجه وجود دارد. انجام این‌کار، درپایان بخش ۴.۳ سهلتر خواهد بود. اجمالاً، می‌توان گفت‌که با تعدادی متناهی اصول‌موضوع می‌توان دستورالعمل‌هایی (باطول متناهی) برای اسلوب تصمیم‌گیری‌یافت.

---

1. Church

این ادعا که نتیجهٔ بالا و عکس آن صحیح است عموماً به فرضیهٔ چرچ موسوم است. این‌حکم، در واقع، یك عبارت ریاضی نیست که قابل اثبات یا رد باشد؛ بلکه قضاوتی است مبنی براین که‌صورت بندی صحیح مفهوم شهودی تصمیم‌پذیری (تنها) ازطریق نمایش‌پذیری در نظریه‌های سازگار و اصل‌پذیر متناهی انجام‌پذیر است.

تعریف. رابطهٔ R، روی اعداد طبیعی، بازگشتی است اگر وتنها اگر در یك نظریهٔ سازگار و اصل‌پذیر متناهی (در یك زبان با ۰ و S)، نمایش‌پذیر باشد.

اکنون، فرضیهٔ چرچ را می‌توان مختصر و مفید چنین بیان‌کرد : یك رابطه تصمیم‌پذیر است اگر وتنها اگر بازگشتی باشد. و یا، شاید، دقیقتر: مفهوم بازگشتی بودن همزاد دقیق وصحیح مفهوم شهودی تصمیم‌پذیری‌است. این وضع مشابه وضعی است که درحساب دیفرانسیل و انتگرال پیش می‌آید. یك تابع پیوسته (تعریف شده دریك فاصله)، به‌طوری شهودی، تابعی‌است که نمودار آن را بتوان بدون بلندکردن قلم از روی‌کاغذ ترسیم کرد. اما برای اثبات قضایا، یك همزاد صوری ازاین مفهوم موردنیاز است. ولذا تعریف ε-δی پیوستگی‌عرضه می‌شود: باید بررسی شودکه آیا مفهوم دقیق ε-δی پیوستگی، یك صورت‌بندی دقیق از مفهوم شهودی پیوستگی هست یا خیر. در هرصورت ردهٔ توابع پیوسته با تعریف ε-δ بیش ازحدگسترده است. این رده شامل توابع هیچ جا مشتق‌پذیر نیز هست، که نمودار این توابع را نمی‌توان بدون بلندکردن قلم ترسیم کرد. با این حال، چه تعریف ε-δی پیوستگی دقیق باشد چه نباشد، ردهٔ توابع ε-δ پیوسته به‌عنوان یك ردهٔ مهم و طبیعی در آنالیز ریاضی قلمداد شده است.

در مورد توابع بازگشتی نیز وضع مشابهی پیش می‌آید. باید بررسی شودکه آیا مفهوم دقیق بازگشتی یك صورت‌بندی دقیق از مفهوم شهودی تصمیم‌پذیری هست یا خیر. مجدداً، ردهٔ دقیقاً تعریف شده (از روابط بازگشتی)، بیش ازحدگسترده بنظر می‌رسد. این رده شامل روابطی است که، به‌ازای دروندادهای بزرگ، به اندازه‌ای نیازبه‌زمان محاسبه و فضای حافظه («کاغذهای باطله») دارد که هراسلوب تصمیم‌گیری برای آنها بیهوده خواهد بود. در یك دنیای ایدآل،که در آن طول محاسبه و فضای حافظه مطرح نیست، بازگشت متناظر با تصمیم‌پذیری است. اما به‌هرحال، ردهٔ روابط بازگشتی، یك ردهٔ طبیعی و مهم در منطق ریاضی‌قلمداد می‌شود.

دلایل تجربی مبنی‌براینکه ردهٔ روابط بازگشتی‌چندان هم محدود نیست به‌شرح زیر است:

۱. تاکنون‌هر رابطه‌ای که به‌نظر ریاضی‌دانان تصمیم‌پذیر بوده، بازگشتی‌نیز بوده‌است.

۲. افراد متعددی سعی کرده‌اندکه تعریف دقیقی از وسایل محاسبه‌ای ایدآل ارائه دهند . (از جمله، ماشینهای تورینگ[1]،که در سال ۱۹۳۶ به‌وسیلهٔ تورینگ معرفی شد، یا

---

1. Turing

ماشینهای ثبات که در بخش ۸.۳ تشریح خواهند شد.) غرض، طراحی وسایلی بود که توانایی اجرای هر اسلوب مؤثری را داشته باشند. در همهٔ این موارد، ردهٔ روابطی که دارای اسلوبهای تصمیم گیری قابل‌اجرا با این‌وسایل‌محاسبه بودند، دقیقاً همان ردهٔ روابط بازگشتی بوده است.

موضوع پیدایش‌تعاریف متعدد (اما معادل) برای ردهٔ روابط بازگشتی‌خود نشانه‌ای از طبیعی بودن و اهمیت این مفهوم است.

دراین‌کتاب درقضایای بدون ستاره ازمفهوم شهودی تصمیم‌پذیری استفاده نخواهیم کرد. اما در باقیماندهٔ این بخش‌توصیفی، فرضیهٔ چرچ را خواهیم پذیرفت. مثلاً، در صورت وجود قضیه‌ای مبنی برغیر بازگشتی بودن یك مجموعه،آن را به‌عنوان یك مجموعهٔ تصمیم‌ناپذیر تلقی خواهیم کرد.

واضح است که هر رابطهٔ نمایش‌پذیر در $\mathrm{Cn}\ A_E$ بازگشتی‌است. بعداً ثابت می‌کنیم که عکس آن نیز برقرار است؛ اگر یك رابطه دریك نظریهٔ سازگار و اصل‌پذیرمتناهی نمایش‌پذیر باشد، آنگاه درنظریه‌ای که برای مطالعهٔ ویژهٔ خود انتخاب کرده‌ایم نیزنمایش‌پذیرخواهد بود. (این امر، البته، انگیزه در انتخاب ما بوده است.) درتوابع همتای یك رابطهٔ تصمیم‌پذیر، تابع محاسبه‌پذیر است.

***تعریف.** تابع $f: N^k \to N$ **محاسبه‌پذیر** است اگر وتنها اگر یك اسلوب کارامد وجود داشته باشد به طوری‌که به‌ازای هر kتایی داده شدهٔ $\overrightarrow{a}$ ازاعداد طبیعی $f(\overrightarrow{a})$ را به‌دست دهد.

به‌عنوان مثال، جمع وضرب محاسبه‌پذیرند. اسلوبهای کارامد برای این توابع، در مدارس‌ابتدایی‌تدریس‌می‌شود.ازسوی دیگر، ازتعداد شمارش‌ناپذیر توابع از N^k به N، فقط تعداد شمارش‌پذیری محاسبه پذیرند.

می‌خواهیم یك همتای‌ریاضی برای مفهوم شهودی محاسبه‌پذیری ارائه دهیم،درست همان‌طورکه در مورد روابط تصمیم‌پذیر این‌کار انجام گرفت.کلید این‌کار را قضیهٔ بعد به‌دست می‌دهد. به یادآوریدکه هر تابع $f:N^k \to N$، همچنین‌یك رابطهٔ $(k+1)$تایی روی N است:

$$\langle a_1, \ldots, a_k, b\rangle \in f \Leftrightarrow f(a_1, \ldots, a_k) = b.$$

زمانی تمایز بین تابع و رابطه (که نمودار تابع نامیده می‌شد) مقبولیت عام داشت. در کاربرد جاری نظریهٔ مجموعه‌ها تابع را با نمودار آن یکی می‌گیرند. با این حال، هنوز هم در نگریستن به‌یك تابع دو راه وجود دارد.

***قضیهٔ ۳۳ح.** سه شرط زیر، دربارهٔ یك تابع $f:N^k \to N$ معادل‌اند:

(الف) f محاسبه‌پذیر است.

(ب) f، به‌عنوان یك رابطه، رابطه‌ای تصمیم‌پذیر است.
(پ) f، به‌عنوان یك رابطه، رابطه‌ای شمارش‌پذیر کارامد است.

اثبات. (ب) ⇐ (الف): فرض کنیم f محاسبه‌پذیر باشد؛ اسلوب تصمیم‌گیری را شرح می‌دهیم: به‌ازای $\langle a_1, \ldots, a_k, b\rangle$ داده شده، ابتدا $f(a_1, \ldots, a_k)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس، می‌بینیم آیا نتیجه برابر b است یا خیر. اگر بود، جواب «آری» است، و در غیر این‌صورت، پاسخ «نه» است.

(پ) ⇐ (ب): هر رابطهٔ تصمیم‌پذیر، رابطه‌ای است شمارش‌پذیر کارامد. زیرا می‌توان مجموعهٔ همهٔ $(k+1)$تاییها از اعداد را شمارش کرد، و سپس همهٔ آنهایی را که به‌رابطهٔ مذکور تعلق دارند در فهرست بروندادها جای داد.

(الف) ⇐ (پ): فرض کنیم فرایند کارامدی برای شمارش (نمودار) f داشته باشیم. برای محاسبهٔ $f(a_1, \ldots, a_k)$، ابتدا $(k+1)$تاییهای موجود در فهرست شمارش را بررسی می‌کنیم تا آن $(k+1)$تایی را که با $a_1, \ldots, a_k$ شروع می‌شود بیابیم. آخرین مؤلفهٔ این $(k+1)$تایی، مقدار تابع خواهد بود. ■

به‌این ترتیب، با استفاده از فرضیهٔ چرچ، می‌توانیم بگوییم که f محاسبه‌پذیر است اگر وتنها اگر f (به‌عنوان یك رابطه) بازگشتی باشد. ردهٔ توابع بازگشتی، حتی‌صرف‌نظر از ارتباط آن با قضایای عدم تمامیت در منطق، ردهٔ جالبی است. این رده، یك کران بالا برای ردهٔ توابعی به‌دست می‌دهد که از طریق برنامه‌ریزی کامپیوترهای عددی واقعاً محاسبه‌پذیرند. توابع بازگشتی توابعی هستند که به‌کمك کامپیوترهای عددی محاسبه‌پذیر باشند؛ مشروط براین‌که از محدودیتهای عملی درمورد زبان محاسبه و فضای حافظه چشم‌پوشی کنیم.

حال می‌توانیم به‌تشریح طرح خود برای این بخش و بخش آتی بپردازیم. هدف اساسی ما، تحصیل قضایای بخش ۵.۳ است. اما قبل از این‌که بتوانیم این قضایا را اثبات کنیم، برخی کارهای اساسی باید انجام گیرد، باید تحقیق کنیم که برخی از روابط (به‌طور شهودی تصمیم‌پذیر) و برخی از توابع (به‌طور شهودی محاسبه‌پذیر) در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیرند. و بنابراین بازگشتی‌اند. در فرایند این‌کار، نشان خواهیم داد که بازگشتی بودن با نمایش‌پذیری در $\mathrm{Cn}\, A_E$ معادل است (قضیهٔ ۳۴الف). در بقیهٔ بخش فعلی، به‌اثبات حقایقی عمومی پیرامون نمایش‌پذیری خواهیم پرداخت و، به‌عنوان مثال، نشان خواهیم داد که توابع معینی برای رمز کردن دنباله‌های متناهی از اعداد به‌یك عدد تنها نمایش‌پذیرهستند. سپس، در بخش ۴.۳، این نتایج را در مورد روابط و توابع مشخصی، مرتبط با جنبه‌های نحوی زبان صوری، به‌کار می‌بریم.

مؤلف، آن‌قدر واقع بین هست که بداند بسیاری ازخوانندگان به‌قضایای بخش ۵.۳ بیشتر علاقه‌مند هستند تا به‌کارهای شاق اولیه. اگرخواننده بپذیرد که روابط به‌طورشهودی تصمیم‌پذیر، تماماً در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیر هستند، و توابع به‌طور شهودی محاسبه‌پذیر نیز

همگی توابعی به‌طور تابعی نمایش‌پذیرند (مفهومی که بزودی تعریف خواهیم کرد)، در آن صورت، بیشتر این‌اثباتها، اگر نه همهٔ آنها، در این‌کار شاق غیرضروری خواهد بود. ولی با وجود این، امید است که تعاریف و بیان نتایج مورد توجه قرار گیرد.

فرمولهای باشمارها معین

قضیهٔ ۳۳ث می‌گوید که نمایش‌پذیر بودن یك رابطه را می‌توان با یافتن فرمولی که رابطهٔ مزبور را در $\mathscr{N}$ تعریف کند و باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شود، نشان داد. قضیهٔ بعدی در اثبات باشمارها معین بودن فرمولها مفید خواهد بود.

قضیهٔ ۳۳خ. (الف) هرفرمول بسیط باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شود.

(ب) اگر φ و ψ، باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین شده باشند، آنگاه $\neg\varphi$ و $\varphi \rightarrow \psi$ نیز باشمارها معین می‌شوند.

(پ) اگر φ باشمارها به وسیلهٔ A_E معین شده باشد، آنگاه فرمولهای زیر (به‌دست آمده از φ به‌وسیلهٔ «تسویر کراندار») نیز چنین هستند.

$$\forall x(x < y \rightarrow \varphi),$$
$$\exists x(x < y \wedge \varphi).$$

اثبات. (پ) فرمولی چون

$$\exists x(x < y \wedge \varphi(x, y, z))$$

را که در آن فقط متغیرهای y و z آزادند در نظر می‌گیریم. دو عــدد طبیعی a و b را در نظر می‌گیریم؛ باید نشان دهیم که یا

$$A_E \vdash \exists x(x < \mathbf{S}^a\mathbf{0} \wedge \varphi(x, \mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}))$$

و یا

$$A_E \vdash \neg\exists x(x < \mathbf{S}^a\mathbf{0} \wedge \varphi(x, \mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}))$$

برقرار است.

حالت ۱: عددی مانند c کمتر از a هست که داریم:

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^c\mathbf{0}, \mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}). \tag{۱}$$

(این حالت رخ می‌دهد اگروتنها اگر $\exists x(x < \mathbf{S}^a\mathbf{0} \wedge \varphi(x, \mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}))$ در $\mathscr{N}$ صادق باشد.) همچنین، براساس (الف)، داریم:

$$A_E \vdash \mathbf{S}^c\mathbf{0} < \mathbf{S}^a\mathbf{0}. \tag{۲}$$

و جمله‌های (۱) و (۲)، مستلزم جملهٔ زیر هستند:

$$\exists x(x < S^a \circ \land \varphi(x, S^a \circ, S^b \circ)).$$

حالت ۲: در غیر این صورت، عددی مانند c کمتر از a هست که داریم:

$$A_E \vdash \neg\varphi(S^c \circ, S^a \circ, S^b \circ). \qquad (۳)$$

(این حالت رخ می‌دهد اگر و تنها اگر $\forall x(x < S^a \circ \to \neg\varphi(x, S^a \circ, S^b \circ))$ در $\mathcal{N}$ صادق باشد.) از لم ۳۳ الف، می‌دانیم که

$$A_E \vdash \forall x(x < S^a \circ \to x \approx S^\circ \circ \lor \ldots \lor x \approx S^{a-1} \circ). \qquad (۴)$$

جملهٔ (۴) همراه با جملهٔ (۳) (به‌ازای $c = \circ, \ldots, a-1$)، نتیجه می‌دهند:

$$\forall x(x < S^a \circ \to \neg\varphi(x, S^a \circ, S^b \circ)).$$

و این معادل است با

$$\neg\exists x(x < S^a \circ \land \varphi(x, S^a \circ, S^b \circ)).$$

این فرمول نشان می‌دهد که $\exists x\,(x < y \land \varphi(x, y, z))$ باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شود. باکاربست این نتیجه در مورد $\neg\varphi$، به‌این نتیجه می‌رسیم که همتای فرمول مورد نظر نیز، یعنی $\forall x(x < y \to \varphi(x, y, z))$، به‌وسیلهٔ A_E با شمارها معین‌می‌شود. ■

استدلال در حالت ۲، متکی براین نکته بود که سور x به‌وسیلهٔ $S^a \circ$ کراندار است. خواهیم دید که امکان دارد همهٔ جمله‌های

$$\neg\psi(S^\circ \circ), \neg\psi(S^1 \circ), \ldots,$$

نتایجی از A_E باشند و با وجود این

$$\forall x \neg\psi(x)$$

نتیجه‌ای از آن نباشد.

قضیهٔ پیشین، درنشان دادن نمایش‌پذیری روابط متعددی در $\mathrm{Cn}\, A_E$، وسیلهٔ سودمندی است. مثلاً، مجموعهٔ اعداد اول به‌وسیلهٔ

$$S^1 \circ < v_1 \land \forall x(x < v_1 \to \forall y(y < v_1 \to x \cdot y \not\approx v_1))$$

نمایانده می‌شود. این فرمول اعداد اول را در $\mathcal{N}$ تعریف می‌کند، وبنا برقضیهٔ پیشین، به‌وسیلهٔ A_E باشمارها تعیین می‌شود و بنابراین، مجموعهٔ اعداد اول را در $\mathrm{Cn}\, A_E$ می‌نمایاند.

توابع نمایش‌پذیر

غالباً کار بـا توابع آسانتر ازکار بـا روابط است. فرض‌کنیم $f: N^m \to N$ یك تابع

mموضعی روی اعداد طبیعی باشد. می گوییم فرمول φ، که‌در آن تنها $\mathbf{v}_1$، . . . ، $\mathbf{v}_{m+1}$ آزاد هستند f را به‌طور تابعی (درنظریهٔ $\mathrm{Cn}\ A_E$) نمایش می‌دهد اگر و تنهـا اگر به‌ازای هر a_1، . . . ، a_m در N ، داشته باشیم:

$$A_E \vdash \forall \mathbf{v}_{m+1}[\varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{o}, \mathbf{v}_{m+1}) \leftrightarrow \mathbf{v}_{m+1} \approx \mathbf{S}^{f(a_1, \ldots, a_m)}\mathbf{o}].$$

(توجه کنید که نیمهٔ «$\rightarrow$» ازاین جمله با $\varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{f(a_1, \ldots, a_m)}\mathbf{o})$ معادل است. نیمهٔ «$\leftarrow$» حکم منحصربه‌فرد بودن را می‌افزاید.)

قضیهٔ ۳۳د. اگر φ به‌طور تابعی f را در $\mathrm{Cn}\ A_E$ بنمایاند، آنگاه φ تابع f را (به‌عنوان یك رابطه) در $\mathrm{Cn}\ A_E$ نمایش می‌دهد.

اثبات. برای $m = ۱$، ازآنجاکه φ به‌طورتابعی f را می‌نمایاند، لذا برای هر b، داریم:

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^{a}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{b}\mathbf{o}) \leftrightarrow \mathbf{S}^{b}\mathbf{o} \approx \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{o}.$$

اگر $\langle a, b\rangle \in f$، یعنی اگر $f(a) = b$، آنگاه نیمهٔ سمت راست این دوشرطی معتبراست و خواهیم داشت:

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^{a}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{b}\mathbf{o}).$$

درغیراین صورت نیمهٔ راست A_E ابطال‌پذیر است (یعنی، نقیض آن استنتاج شدنی‌است)، از این‌رو:

$$A_E \vdash \neg\varphi(\mathbf{S}^{a}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{b}\mathbf{o}). \quad \blacksquare$$

عکس این قضیه غلط است. لکن می‌توانیم فرمول را عوض کنیم:

قضیهٔ ۳۳ذ. فرض کنیم f یك تابع روی N باشد که (به‌عنوان یك‌رابطه) در $\mathrm{Cn}\ A_E$ نمایش‌پذیر است. دراین صورت می‌توان فرمولی مانند φ یافت به‌طوری که به‌طورتابعی f را در $\mathrm{Cn}\ A_E$ بنمایاند.

اثبات. برای تسهیل درعلامت گذاری، f را یك تابع یك موضعی روی N درنظر می گیریم. جملهٔ مطلوب،

$$\forall \mathbf{v}_2[\varphi(\mathbf{S}^{a}\mathbf{o}, \mathbf{v}_2) \leftrightarrow \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{o}],$$

با ترکیب عطفی دوجملهٔ

$$\varphi(\mathbf{S}^{a}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{o}) \qquad (۱)$$

و

$$\forall \mathbf{v}_2[\varphi(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) \rightarrow \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0}] \qquad (۲)$$

معادل است. جملهٔ (۱)، درصورتی که φ تابع f را نمایش دهد، قضیه‌ای از A_E است. جملهٔ (۲) حکمی دربارهٔ منحصر به‌فرد بودن است؛ باید φ را بنحوی بسازیم که این جمله نیز قضیه‌ای از A_E باشد.

با یك فرمول θ، که می‌دانیم f را (به‌عنوان یك رابطهٔ دوتایی) می‌نمایاند، شروع می‌کنیم. فرض‌کنیم φ به‌صورت زیر باشد:

$$\theta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \wedge \forall z(z < \mathbf{v}_2 \rightarrow \neg\theta(\mathbf{v}_1, z)).$$

حال می‌توانیم (۲) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\forall \mathbf{v}_2[\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) \wedge \forall z(z < \mathbf{v}_2 \rightarrow \neg\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, z)) \rightarrow \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0}]. \qquad (۲)$$

برای نشان دادن اینکه این جمله یك قضیه از A_E است، بوضوح کافی است نشان دهیم

$$A_E \cup \{\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_2), \forall z(z < \mathbf{v}_2 \rightarrow \neg\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, z))\} \vdash \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0}.$$

این مجموعه از فرضیات (درسمت چپ «$\vdash$») را Γ می‌نامیم. از آنجاکه $\mathrm{L}۳ \in A_E$، کافی است نشان دهیم که

$$\Gamma \vdash \mathbf{v}_2 \not< \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0} \qquad (۳)$$

و

$$\Gamma \vdash \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0} \not< \mathbf{v}_2. \qquad (۴)$$

به‌دست آوردن (۴) آسان است، زیرا از آخرین عضو Γ به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0} < \mathbf{v}_2 \rightarrow \neg\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0})$$

ومی‌دانیم که

$$A_E \vdash \theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0}). \qquad (۵)$$

برای به‌دست آوردن (۳)، نخست یادآور می‌شویم که، به‌عنوان قضایایی از A_E، داریم:

$$\mathbf{v}_2 < \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^0\mathbf{0} \vee \cdots \vee \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}^{f(a)-1}\mathbf{0} \qquad (۶)$$

و

$$\neg\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}) \qquad b = 0, \ldots, f(a)-1 \text{ به‌ازای } \qquad (۷)$$

فرمولهای (۶) و (۷) فرمول زیر را نتیجه می‌دهند:

$$\mathbf{v}_2 < \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0} \rightarrow \neg\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_2). \qquad (۸)$$

از آنجاکه $\theta(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) \in \Gamma$، (۳) برقرار است.

این نشان می‌دهد که (۲) قضیه‌ای از A_E است؛ همچنین (۵) و (۸) نشان می‌دهند که (۱) نیز قضیه‌ای از A_E است. ■

حال می‌خواهیم نشان دهیم که برخی از توابع اساسی (در $\mathrm{Cn}\ A_E$) نمایش‌پذیر هستند، و ردهٔ توابع نمایش‌پذیر نسبت به‌بعضی از عملها بسته است. از این پس تا پایان این بخش، وقتی می‌گوییم یك تابع یا یك رابطهٔ نمایش‌پذیر است، منظور این است که آن تابع در نظریهٔ $\mathrm{Cn}\ A_E$ نمایش‌پذیر است. اما عبارت «در $\mathrm{Cn}\ A_E$» معمولاً حذف خواهد شد.

در حالتهای ساده، یك تابع m موضعی را می‌توان با معادله‌ای مانند

$$\mathbf{v}_{m+1} \approx t$$

نمایش داد. در واقع، هرمعادلهٔ به‌این صورت، وقتی که متغیرهای t جزء $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ باشند، یك تابع m موضعی f در $\mathcal{N}$ را تعریف می‌کند. (مقدار f در $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ عددی است که در $\mathcal{N}$ به t داده می‌شود، وقتی که به $\mathbf{v}_i$ مقدار a_i (به‌ازای $1 \leqslant i \leqslant m$) داده شود.) علاوه براین، می‌دانیم که هرمعادلهٔ باشمارها به وسیلهٔ A_E معین می‌شود، بنابراین معادلهٔ موردنظر f را به‌عنوان یك رابطه می‌نمایاند. در حقیقت، معادلهٔ مزبور f را به‌طور تابعی می‌نمایاند، زیرا جملهٔ

$$\forall \mathbf{v}_{m+1}[\mathbf{v}_{m+1} \approx t\,(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{o}) \leftrightarrow \mathbf{v}_{m+1} \approx \mathbf{S}^{f(a_1 \ldots a_m)}\mathbf{o}]$$

در $\mathcal{N}$ منطقاً با جملهٔ

$$t(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{o}) \approx \mathbf{S}^{f(a_1, \ldots, a_m)}\mathbf{o}.$$

که یك جملهٔ بی‌سور است معادل است. (در اینجا، $t(u_1, \ldots, u_m)$ ترمی است که از تعویض $\mathbf{v}_1$ با u_1، سپس $\mathbf{v}_2$ با u_2، و به‌همین‌ترتیب حاصل شده است.) به‌عنوان مثال:

۱. تابع تالی، با معادلهٔ

$$\mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S}\mathbf{v}_1$$

(به‌طور تابعی) نمایانده می‌شود.

۲. هرتابع ثابت نمایش‌پذیراست. تابع m موضعی که همیشه مقدار b را می‌گیرد، با معادلهٔ

$$\mathbf{v}_{m+1} \approx \mathbf{S}^b\mathbf{o}$$

نمایانده می‌شود.

۳. تابع تصویر

$$I_i^m(a_1, \ldots, a_m) = a_i$$

با معادلهٔ

$$\mathrm{v}_{m+1} \approx \mathrm{v}_i$$

نمایانده می‌شود.

۴. جمع، ضرب، و نما، بترتیب، با معادلات

$$\mathrm{v}_3 \approx \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2,$$
$$\mathrm{v}_3 \approx \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2,$$
$$\mathrm{v}_3 \approx \mathrm{v}_1 \,\mathbf{E}\, \mathrm{v}_2,$$

نمایانده می‌شوند.

این‌مثالهای ساده نباید خواننده را گمراه کند؛ هر تابع نمایش‌پذیر، به‌کمك یك معادله نمایش‌پذیر نیست.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که خانوادهٔ توابع نمایش‌پذیر، تحت عمل ترکیب بسته است. برای تسهیل درعلامت‌گذاری، یك تابع یك موضعی f روی N را درنظرمی‌گیریم، که در آن

$$f(a) = g(h_1(a),\ h_2(a)).$$

فرض‌کنیم g با ψ و h_i با θ_i به‌طور تابعی نمایش‌پذیر باشند. برای نمایاندن f به‌نظر معقول می‌رسد که یکی از دو رابطهٔ

$$\forall y_1 \forall y_2(\theta_1(\mathrm{v}_1,\ y_1) \to \theta_2(\mathrm{v}_1,\ y_2) \to \psi(y_1,\ y_2,\ \mathrm{v}_2))$$

یا

$$\exists y_1 \exists y_2(\theta_1(\mathrm{v}_1,\ y_1) \wedge \theta_2(\mathrm{v}_1,\ y_2) \wedge \psi(y_1,\ y_2,\ \mathrm{v}_2))$$

را بررسی کنیم.

($\psi(y_1, y_2, \mathrm{v}_2)$ را به‌عنوان «$g(y_1, y_2) = \mathrm{v}_2$» و $\theta_i(\mathrm{v}_1, y_i)$ را به‌عنوان «$h_i(\mathrm{v}_1) = y_i$» درنظر می‌گیریم. دراین‌صورت فرمول‌اول چنین ترجمه می‌شود: «به‌ازای‌هر y_1 وهر y_2، اگر $h_1(\mathrm{v}_1) = y_1$ و $h_2(\mathrm{v}_1) = y_2$، آنگاه $g(y_1, y_2) = \mathrm{v}_2$.» فرمول‌دوم نیزچنین‌ترجمه می‌شود: «y_1وy_2ی وجود دارند که $h_1(\mathrm{v}_1) = y_1$ و $h_2(\mathrm{v}_1) = y_2$ و $g(y_1\ ,\ y_2) = \mathrm{v}_2$.» هریك از این دو فرمول طریقی معقول برای بیان «$g(h_1(\mathrm{v}_1)\ ,\ h_2(\mathrm{v}_1)) = \mathrm{v}_2$» است. از آنجا که وقتی‌چیزی منحصربه‌فرد باشد، هریك از دو سور را می‌توان به‌کاربرد، دوگزینش وجود دارد.)

در حقیقت هریك از دو فرمول را می‌توان به کار گرفت؛ فرض‌کنیم φ فرمول

$$\forall y_1 \forall y_2(\theta_1(\mathrm{v}_1,\ y_1) \to \theta_2(\mathrm{v}_1,\ y_2) \to \psi(y_1,\ y_2,\ \mathrm{v}_2))$$

باشد.

عدد طبیعی a را درنظر می‌گیریم؛ فرمولهای زیر را در اختیار داریم:

$$\forall v_2[\psi(S^{h_1(a)}0, S^{h_2(a)}0, v_2) \leftrightarrow v_2 \approx S^{f(a)}0]. \quad (1)$$

$$\forall y_1[\theta_1(S^a 0, y_1) \leftrightarrow y_1 \approx S^{h_1(a)}0]. \quad (2)$$

$$\forall y_2[\theta_2(S^a 0, y_2) \leftrightarrow y_2 \approx S^{h_2(a)}0]. \quad (3)$$

مطلوب ما فرمول:

$$\forall v_2(\varphi(S^a 0, v_2) \leftrightarrow v_2 \approx S^{f(a)}0), \quad (4)$$

یعنی،

$$\forall v_2(\forall y_1 \forall y_2[\theta_1(S^a 0, y_1) \to \theta_2(S^a 0, y_2) \to \psi(y_1, y_2, v_2)] \leftrightarrow v_2 \approx S^{f(a)}0). \quad (4)$$

است. اما فرمولهای (۱) و(۲) و(۳)، فرمول(۴) را نتیجه می‌دهند. ازخواننده می‌خواهیم که در تمرین ۴ این مطلب را بررسی کند.

به‌طور کلی داریم:

قضیهٔ ۳۳ر. فرض کنیم g یك تابع n موضعی، h_1، . . .، h_n توابع m موضعی باشند و f به‌صورت زیر تعریف شود:

$$f(a_1, \ldots, a_m) = g(h_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, h_n(a_1, \ldots, a_m)).$$

از فرمولهایی که g و h_1، . . .، h_n را به‌طور تابعی می‌نمایانند می‌توانیم فرمولی به‌دست آوریم که f را به‌طور تابعی بنمایاند.

در اثبات بالا داشتیم $m = 1$ و $n = 2$. حالت کلی نیز دقیقاً به‌همین طریق اثبات می‌شود.

برای به‌دست آوردن تابعی مانند

$$f(a, b) = g(h(a), b)$$

توجه کنید که:

$$f(a, b) = g(h(I_1^2(a, b)), I_2^2(a, b)).$$

دراین صورت، برای نشان دادن اینکه f نمایش‌پذیراست می‌توان قضیهٔ بالارا (دومرتبه) به‌کار گرفت (مشروط براینکه g و h نیز نمایش‌پذیر باشند).

برای تسهیل‌در بحث پیرامون توابع با تعداد دلخواهی‌متغیر، علامت‌گذاری برداری را به‌کار می‌بریم. مثلاً، معادلهٔ موجود در قضیهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$f(\vec{a})=g(h_1(\vec{a}), \ldots, h_n(\vec{a})).$$

از دیگر خواص مهم بسته بودن توابع نمایش‌پذیر در $\mathrm{Cn}\ A_E$، بسته بودن تحت عملگر «کوچکترین ریشه» می‌باشد.

قضیهٔ ۳۳ز. فرض کنیم تابع $m+1$ موضعی g نمایش‌پذیر باشد و به ازای هر a_1، ...، a_m، عددی مانند b باشد که

$$g(a_1, \ldots, a_m, b)=0 .$$

در این صورت می‌توان فرمولی یافت که تابع m موضعی f را نمایش می‌دهد که در آن $f(a_1, \ldots, a_m)$ برابر کوچکترین bیی است که به ازای آن داریم $g(a_1, \ldots, a_m, b)=0$.

(درعلامت‌گذاری برداری، می‌توان معادلهٔ اخیررا به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$f(\vec{a})$ برابر کوچکترین bیی است که به‌ازای آن داریم $g(\vec{a}, b)=0$.

علامت سنتی برای عملگر کوچکترین ریشه چنین است:

$$f(\vec{a})=\mu b[g(\vec{a}, b)=0].)$$

اثبات. برای ساده‌کردن علامت‌گذاری قرار می‌دهیم $m=1$؛ دراین صورت

$f(a)=b$ اگروتنها اگر $g(a, b)=0$ و

به‌ازای هر $b > c$ داشته باشیم $g(a, c)\neq 0$.

اگر ψ تابع g را بنمایاند، آنگاه با فرموله‌کردن طرف راست این هم‌ارزی بسادگی می‌توانیم فرمولی برای نمایاندن f (به‌عنوان یك رابطه) به‌دست آوریم:

$$\psi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, 0) \wedge \forall y(y < \mathrm{v}_2 \rightarrow \neg\psi(\mathrm{v}_1, y, 0)).$$

این فرمول (نمودار) f را تعریف می‌کند و با A_E باشمارها معین می‌شود. ■

فهرستی از توابع و روابط نمایش‌پذیر

حال به‌ساختن یك مجموعه‌ای (در $\mathrm{Cn}\ A_E$) از توابع و روابط نمایش‌پذیر شامل توابعی جهت دنباله‌های رمزگذار و رمزگشا می‌پردازیم.

۰. به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳۳خ ، هر رابطه‌ای که (در $\mathcal{N}$) دارای یك تعریف بی‌سور باشد نمایش‌پذیراست. و ردهٔ روابط نمایش‌پذیر تحت اجتماع، اشتراك ، و مکمل بسته است. همچنین اگر R نمایش‌پذیر باشد، آنگاه

$$\{\langle a_1, \dots, a_m, b\rangle : \langle a_1, \dots, a_m, c\rangle \in R \text{ و } c \leq b \text{ به‌ازای هر}\}$$

و

$$\{\langle a_1, \dots, a_m, b\rangle : \langle a_1, \dots, a_m, c\rangle \in R \text{ و } c \leq b \text{ ای هست که } c\}$$

نیز نمایش‌پذیرند. مثلاً، هر رابطهٔ متناهی دارای یک تعریف بی‌سور است، همانگونه که رابطهٔ ترتیب نیز چنین است.

۱. رابطهٔ R نمایش‌پذیر است اگر وتنها اگر تابع مشخصهٔ آن، K_R، نمایش‌پذیر باشد. (K_R تابعی است که $K_R(\vec{a}) = 1$ هرگاه $\vec{a} \in R$، و $K_R(\vec{a}) = 0$ در غیر این صورت.)

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم R یک رابطهٔ یک‌تایی (زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$)، و K_R با $\psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ نمایش‌پذیر باشد. ثابت می‌کنیم که $\psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{S0})$ رابطهٔ R را می‌نمایاند. زیرا این رابطه R را تعریف می‌کند و خود به‌وسیلهٔ A_E باشمارها معین می‌شود.

«$\Rightarrow$» فرض کنیم $\varphi(\mathbf{v}_1)$ رابطهٔ R را بنمایاند. در این صورت، فرمول

$$(\varphi(\mathbf{v}_1) \land \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{S0}) \lor (\neg\varphi(\mathbf{v}_1) \land \mathbf{v}_2 \approx \mathbf{0}),$$

به‌دلیلی که در پاراگراف قبل آمد، (نمودار) K_R را می‌نمایاند، (در حقیقت، این فرمول K_R را حتی به‌طور تابعی می‌نمایاند. چنانکه خواننده نیز می‌تواند این امر را تحقیق کند.) ■

۲. اگر R یک رابطهٔ دوتایی نمایش‌پذیر، و f و g دوتابع نمایش‌پذیر باشند، آنگاه

$$\{\vec{a} : \langle f(\vec{a}), g(\vec{a})\rangle \in R\}$$

نمایش‌پذیر است. وبه‌همین ترتیب به ازای هر رابطهٔ mتایی R و توابع f_1، ...، f_m.

اثبات. تابع مشخصهٔ این رابطه به‌ازای $\vec{a}$ دارای مقدار $K_R(f(\vec{a}), g(\vec{a}))$ است و بنابراین از ترکیب توابع نمایش‌پذیر به‌دست می‌آید. ■

مثلاً، فرض کنیم R یک رابطهٔ سه‌تایی نمایش‌پذیر باشد، در این صورت

$$\{\langle x, y\rangle : \langle y, x, x\rangle \in R\}$$

نمایش‌پذیر است و نمایش آن به‌صورت زیر است:

$$\{\langle x, y\rangle : \langle I_2^2(x, y), I_1^2(x, y), I_1^2(x, y)\rangle \in R\}\,.$$

به‌همین طریق، در توصیف یک رابطهٔ نمایش‌پذیر می‌توان متغیرها را مجدداً مرتب و تکرار کرد.

۳. هرگاه R یك رابطهٔ دوتایی نمایش‌پذیر باشد، آنگاه

$$\{\langle a , b \rangle : \langle a, c\rangle \in R \text{ و } c \leqslant b \text{ ای هست که } c\}$$

نیز نمایش‌پذیر است.

اثبات. براساس بند صفر این فهرست، اگر

$$Q = \{\langle a, b\rangle : \langle a, c\rangle \in R \text{ و } c \leq b \text{ ای هست که } c\}$$

آنگاه Q نمایش‌پذیر خواهد بود. و

$$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle a, S(b)\rangle \in Q$$
$$\Leftrightarrow \langle I_1^2(a, b),\ S(I_2^2(a, b))\rangle \in Q.$$

بنابراین، براساس بند ۲ فهرست، R نمایش‌پذیر است. ■

به‌طورکلی، اگر R یك رابطهٔ $(m+1)$تایی نمایش‌پذیر باشد، آنگاه

$$\{\langle a_1, \cdots, a_m, b\rangle : \langle a_1, \ldots, a_m, c\rangle \in R \text{ و } c \leqslant b \text{ ای هست که } c\}$$

نیز نمایش‌پذیر است. در علامت‌گذاری برداری، این رابطه به‌صورت

$$\{\langle \vec{a}, b\rangle : \langle \vec{a}, c\rangle \in R \text{ و } c \leqslant b \text{ یی هست که } c\}$$

درمی‌آید. به‌طور مشابه،

$$\{\langle \vec{a}, b\rangle : \text{به‌ازای هر } c \text{ اگر } c \leqslant b \text{ آنگاه } \langle \vec{a}, c\rangle \in R\}$$

نیز نمایش‌پذیر است.

۴. رابطهٔ بخش‌پذیری

$$\{\langle a, b\rangle : \text{ تقسیم‌پذیر است } N \text{ در } a \text{ بر } b\}$$

نمایش‌پذیر است.

اثبات. b بر a بخش‌پذیر است اگروتنها اگر qیی باشد که $q \leqslant b$ و $a \cdot q = b$. می‌دانیم که $\{\langle a, b, q\rangle : a \cdot q = b\}$ نمایش‌پذیر است، چون دارای یك تعریف بی‌سور است. باکاربست بندهای فوق، رابطهٔ بخش‌پذیری بــه دست می‌آید. (با تفصیل بیشتر، از بند۳ فهرست، نمایش‌پذیری

$$R = \{\langle a, b, c\rangle : a \cdot q = b \text{ و } q \leqslant c \text{ یی هست که } q\}$$

به‌دست می‌آید و b بر a بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر $\langle a, b, c\rangle \in R$.) ■

۵. مجموعهٔ اعداد اول نمایش‌پذیر است.

۶. مجموعهٔ زوجهای مرتب اعداد اول متوالی نمایش‌پذیر است.

اثبات. $\langle a, b\rangle$ یك زوج از اعداد اول متوالی است اگروتنها اگر a و b اعداد اول باشند و $a < b$ و هیچ عدد اول c وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $a < c < b$. طرف راست این‌هم‌ارزی (a و b اعداد اول باشند و $a < b$ و ...) را می‌توان بسهولت به‌کمك فرمولی‌که با شمارها معین شده است، بیان‌کرد. ■

(برای استفادهٔ آتی در بخش ۷.۳) توجه‌کنیدکه هنوز از نمایش‌پذیر بودن نما استفاده نکرده‌ایم.

۷. تابعی‌که مقدار آن در a برابر p_a، $(a+1)$مین عدد اول، است نمایش‌پذیر است. (مثلاً $p_0 = 2$، $p_1 = 3$، $p_2 = 5$، $p_3 = 7$، $p_4 = 11$ و غیره.)

اثبات. $p_a = b$ اگر وتنها اگر b اول باشد و cای وجود داشته باشدکه $c \leqslant b^{a^2}$ و

(یك) c بر ۲ بخش‌پذیر نباشد.

(دو) به ازای هر $q < b$ و هر $r \leqslant b$، اگر $\langle q, r\rangle$ زوجی از اعداد اول متوالی باشد، آنگاه به‌ازای هر $j < c$، داشته باشیم:

$$c \text{ به } q^j \text{ بخش‌پذیر است} \Leftrightarrow c \text{ بر } r^{j+1} \text{ بخش‌پذیر باشد.}$$

(سه) c بر b^a بخش‌پذیر باشد و بر b^{a+1} بخش‌پذیر نباشد.

این‌هم‌ارزی واضح نیست، ولی‌دست‌کم، رابطه‌ای‌که طرف راست هم‌ارزی تعریف می‌کند، نمایش‌پذیر است. برای بررسی هم‌ارزی، ابتدا توجه‌کنیدکه اگر $p_a = b$ آنگاه می‌توانیم c را به‌صورت زیر اختیارکنیم:

$$c = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot p_a^a \cdot$$

بررسی این مطلب‌که این‌مقدار c همهٔ شرایط را برآورده می‌سازد،آسان است. برعکس، فرض‌کنیم c عددی باشدکه شرایط (یك) تا (سه) را برآورده می‌سازد. ثابت می‌کنیم‌که c باید به‌صورت زیر باشد:

$$2^0 \cdot 3^1 \cdot \ldots \cdot b^a \cdot \text{توانهای اعداد اول بزرگتر} \,.$$

بنابر (یك)، قطعاً توان ۲ در c صفر است. می‌توان با استفاده از (دو)، راه را تا عدد اول b طی نمود. ولی بنابر (سه)، توان b برابر a است، بنابراین b باید $(a+1)$مین عدد اول باشد. ■

این‌تابع در رمزگذاری هردنبالهٔ متناهی ازاعداد به‌تنها یك عدد، بسیارمفید خواهد بود. فرض‌کنیم:

$$\langle a_\circ, \ldots, a_m\rangle = p_\circ^{a_\circ+1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m+1}$$
$$= \prod_{i\leqslant m} p_i^{a_i+1}$$

این رابطه به‌ازای $m=-1$ نیز برقرار است؛ تعریف می‌کنیم $1 = \langle\ \rangle$. مثلاً،

$$\langle 2, 1\rangle = 2^3 \cdot 3^2 = 72 \cdot$$

منظور آن است که عدد ۷۲، زوج $\langle 2, 1\rangle$ را رمزگذاری می‌کند.

۸. به‌ازای هر m، تابعی که مقدار آن در $a_\circ$، ...، a_m برابر $\langle a_\circ, \ldots, a_m\rangle$ می‌باشد نمایش‌پذیر است.

۹. تابع نمایش‌پذیری وجود دارد (که مقدار آن به‌ازای $\langle a, b\rangle$ به‌صورت $(a)_b$ نوشته می‌شود.) که به‌ازای $b\leqslant m$، داریم:

$$(\langle a_\circ, \ldots, a_m\rangle)_b = a_b \cdot$$

(این همان تابع «رمزگشا»ی ماست.)

اثبات. فرض کنیم $(a)_b$ کوچکترین n ی باشد که یا $a=\circ$ و یا a بر p_b^{n+2} بخش‌پذیر نباشد. (چنین nی همیشه وجود دارد.) توجه کنید که $(\circ)_b = \circ$، و به‌ازای $a \neq \circ$، $(a)_b$ یك واحد کمتر از توان p_b در تجزیهٔ a به‌عوامل اول است (ولی کوچکتر از $\circ$ نیست). بنابراین برای $b\leqslant m$، داریم:

$$(\langle a_\circ, \ldots, a_m\rangle)_b = a_b \cdot$$

برای اثبات نمایش‌پذیری، از عملگر کوچکترین ریشه استفاده می‌کنیم. فرض کنیم

$$R = \{\langle a, b, n\rangle : \text{بخش‌پذیر نیست } p_b^{n+2} \text{ بر } a \text{ یا } a=\circ\}.$$

دراین‌صورت $(a)_b = \mu n[K_{\bar R}(a, b, n) = \circ]$، که در آن $\bar R$ مکمل مجموعهٔ R است. ■

از آنجا که روش به‌کار رفته، در اثبات بالا در موارد دیگر نیز کارا خواهد بود، ذیلاً آن را جداگانه بیان می‌کنیم:

قضیهٔ ۳۳ ژ. فرض کنیم R رابطهٔ نمایش‌پذیری باشد که به‌ازای هر $\vec{a}$، یك n وجود داشته باشد که $\langle \vec{a}, n\rangle \in R$. در این صورت تابع f که به‌صورت

$$f(\vec{a}) = \text{کوچکترین } n\text{ی که } \langle \vec{a}, n\rangle \in R$$

تعریف می‌شود، نمایش‌پذیر است.

اثبات. $f(\overrightarrow{a})=\mu n[K_{\bar{R}}(\overrightarrow{a}, n)=0]$. ■

در آینده از علامت‌گذاری

$$f(\overrightarrow{a})=\mu n[\langle \overrightarrow{a}, n\rangle \in R]$$

استفاده خواهیم کرد.

۱۰. می‌گوییم b یك عدد دنباله‌ای است اگر و تنها اگر یك m و a_0، ...، a_m وجود داشته باشند که $m \geqslant -1$ و

$$b=\langle a_0, \dots, a_m\rangle.$$

(در حالت $m=-1$، خواهیم داشت $\langle\,\rangle = 1$.) دراین صورت، مجموعهٔ عددهای دنباله‌ای نمایش‌پذیر است.

اثبات. تمرین ۵.

۱۱. یك تابع نمایش‌پذیر lh وجود دارد که

$$\mathrm{lh}\langle a_0, \dots, a_m\rangle=m+1.$$

(«lh» نمایش دهندهٔ «طول» است.)

اثبات. فرض کنیم $\mathrm{lh}\, a$ کوچکترین nی باشد که یا $a=0$ ویا a بر p_n بخش‌پذیر نباشد. این فرض اثبات را به‌نتیجه می‌رساند. ■

۱۲. تابع نمایش‌پذیری (که مقدار آن در نقطهٔ $\langle a, b\rangle$ تحدید a بــه b خوانده شده و به‌صورت $a \restriction b$ نوشته می‌شود) وجود دارد که به‌ازای هر $b \leqslant m+1$، داریم:

$$\langle a_0, \dots, a_m\rangle \restriction b=\langle a_0, \dots, a_{b-1}\rangle.$$

اثبات. فرض کنیم $a \restriction b$ کوچکترین nی باشند که یا $a=0$ ویا آنکه هم $n \neq 0$ و هم به‌ازای هر $j < b$ و هر $k < a$، داشته باشیم

a بر p_j^k بخش‌پذیر است $\Leftarrow$ n بر p_j^k بخش‌پذیر است.

این فرض اثبات را به‌نتیجه می‌رساند. ■

۱۳. (بازگشت ابتدایی) به‌هر تابع $(k+1)$ موضعی مانند f تابع دیگری مانند $\bar{f}$ نسبت می‌دهیم که $\bar{f}(a, b_1, \dots, b_k)$، مقادیر $f(j, b, \dots, b_k)$ را، به‌ازای هر $j < a$،

رمزگذاری می‌کند. مشخصاً، فرض کنیم

$$\bar{f}(a, \vec{b}) = \langle f(0, \vec{b}), \ldots, f(a-1, \vec{b})\rangle .$$

مثلاً، $1 = \langle\ \rangle = \bar{f}(0, \vec{b})$، که اولین ریشه‌های $\langle f(0, \vec{b})\rangle = \bar{f}(1, \vec{b})$ ،f را رمز-گذاری می‌کند. در هرحال، $\bar{f}(a, \vec{b})$ یك عدد دنباله‌ای به‌طول a است که اولین مقادیر a تابع f را رمزگذاری می‌کند.

حال فرض کنیم تابع $(k+2)$ موضعی g داده شده باشد. یك تابع منحصر به‌فرد f وجود دارد که در رابطهٔ

$$f(a, \vec{b}) = g(\bar{f}(a, \vec{b}), a, \vec{b})$$

صدق می‌کند.

مثلاً،

$$f(0, \vec{b}) = g(\langle\ \rangle, 0, \vec{b}),$$

$$f(1, \vec{b}) = g(\langle f(0, \vec{b})\rangle, 1, \vec{b}).$$

(وجود و منحصر به‌فرد بودن این f باید شهوداً واضح باشد. برای اثبات، می‌توان با استفاده از قضیهٔ بازگشت بخش ۲.۱ ابتدا $\bar{f}$ را به‌دست‌آورد و سپس f را از آن استخراج کرد.)

قضیهٔ ۳۳س. فرض کنیم g یك تابع $(k+2)$ موضعی و f تابع منحصر به فرد $(k+1)$ موضعی باشد که به‌ازای همهٔ aها و (kتاییهای) $\vec{b}$:

$$f(a, \vec{b}) = g(\bar{f}(a, \vec{b}), a, \vec{b}).$$

در این‌صورت، اگر g نمایش‌پذیر باشد، f نیز چنین است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\bar{f}$ نمایش‌پذیر است. این مطلب از این مطلب نتیجه می‌شود که

$\bar{f}(a, b)$ برابر کوچکترین s است، که s یك عدد دنباله‌ای به‌طول a است و به‌ازای هر i کمتر از a داریم $(s)_i = g(s \restriction i, a, \vec{b})$.

از این مطلب نتیجه می‌شود که f نمایش‌پذیر است، زیرا

$$f(a, \vec{b}) = g(\bar{f}(a, \vec{b}), a, \vec{b})$$

و توابع سمت راست تساوی نمایش‌پذیرند. ■

در واقع، اصطلاح «بازگشت ابتدایی» بیشتر درموارد ساده‌تری، که در تمرین ۸ آمده است، به‌کار می‌رود.

۱۴. به‌ازای هر تابع نمایش‌پذیر F، تابعی که مقدار آن در a و $\overrightarrow{b}$ عبارت است از:

$$\prod_{i<a} F(i, \overrightarrow{b}),$$

نیز نمایش‌پذیر است. همچنین است اگر Σ را جایگزین Π کنیم.

اثبات. این تابع را G می‌نامیم؛ در این صورت

$$G(0, \overrightarrow{b}) = 1,$$

$$G(a+1, \overrightarrow{b}) = F(a, \overrightarrow{b}) \cdot G(a, \overrightarrow{b}).$$

حال تمرین ۸ را به‌کار می‌بریم. ■

۱۵. پیوند a و b را، که با $a * b$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a * b = a \cdot \prod_{i < \mathrm{lh}\, b} P_{i+\mathrm{lh}\, a}^{(b)_i + 1}.$$

این یک تابع نمایش‌پذیر از a و b است، و

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle * \langle b_1 \ldots, b_n \rangle = \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle.$$

عمل پیوند دارای خاصیت اضافی انجمنی بودن روی اعداد دنباله‌ای است.

۱۶. همچنین به‌یک عمل «ستارهٔ بزرگ» نیز نیاز خواهیم داشت. فرض کنیم

$$*_{i<a} f(i) = f(0) * f(1) * \cdots * f(a-1).$$

به‌ازای هر تابع نمایش‌پذیر F، تابعی که مقدار آن در a و $\overrightarrow{b}$ عبارت است از $*_{i<a} F(i, \overrightarrow{b})$، نمایش‌پذیر است.

اثبات. $*_{i<0} F(i, \overrightarrow{b}) = \langle\, \rangle = 1$

$$*_{i<a+1} F(i, \overrightarrow{b}) = *_{i<a} F(i, \overrightarrow{b}) * F(a, \overrightarrow{b}).$$

بنابراین، این مورد درست همانند بند ۱۴ فهرست است.

تمرین

۱. نشان دهید که در ساخت $(N, \ldots, E)$ می‌توان $\{\circ\}$، $<$، رابطهٔ تالی $\{\langle n, S(n)\rangle : n \in N\}$، و رابطهٔ جمع $\{\langle m, n, m+n\rangle : m, n \in N\}$ را تعریف کرد.

۲. قضیهٔ ۳۳پ را که می‌گوید جمله‌های بی‌سور صادق (در $\mathcal{N}$) قضایایی از A_E هستند، ثابت کنید.

۳. نظریهٔ T (در یک زبان با $\circ$ و $\mathbf{S}$) ω- تمام نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به‌ازای هر فرمول φ و متغیر x، هرگاه به‌ازای هرعدد طبیعی n، فرمول $\varphi^x_{\mathbf{S}^n\circ}$ متعلق به T باشد، آنگاه $\forall x\varphi$ نیز به T متعلق باشد. نشان دهید که T یک نظریهٔ ω-تمام سازگار در زبان $\mathcal{N}$ باشد و اگر $A_E \subseteq T$، آنگاه $T = \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$.

۴. نشان دهید دراثباتی که پیش‌از قضیهٔ ۳۳ر ارائه‌گردید، فرمول (۴) ازمجموعهٔ متشکل از فرمولهای (۱)، (۲)، و (۳) منطقاً نتیجه می‌شود.

۵. نشان دهید که مجموعهٔ اعداد دنباله‌ای نمایش‌پذیر است (بند ۱۰ فهرست).

۶. آیا ۳ یک عدد دنباله‌ای است؟ ۳ lh چیست؟ ۶ * (۳ * ۱) و (۶ * ۳) * ۱ را به‌دست آورید.

۷. مطالب زیر را اثبات کنید:

(الف) $a + ۱ < p_a$.

(ب) $(b)_k \leqslant b$؛ تساوی برقرار خواهد بود اگر و تنها اگر $b = \circ$.

(پ) $\mathrm{lh}\, a \leqslant a$؛ تساوی برقرار خواهد بود اگر و تنها اگر $a = \circ$.

(ت) $a \restriction i \leqslant a$.

(ث) $\mathrm{lh}(a \restriction i)$، کوچکترین دو عدد i و $\mathrm{lh}\, a$ است.

۸. فرض کنید g و h توابعی نمایش‌پذیر باشند، و فرض کنید

$$f(\circ, b) = g(b),$$
$$f(a+۱, b) = h(f(a, b), a, b).$$

نشان دهید که f نمایش‌پذیر است.

۹. نشان دهید که یک تابع نمایش‌پذیر f وجود دارد که به‌ازای هر n و $a_\circ, \ldots, a_n$:

$$f(\langle a_\circ, \ldots, a_n\rangle) = a_n .$$

۱۰. فرض کنید R یک رابطهٔ نمایش‌پذیر و g و h توابعی نمایش‌پذیر باشند. نشان

دهید f که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(\vec{a})=\begin{cases} g(\vec{a}) & \text{اگر } \vec{a} \in R \\ h(\vec{a}) & \text{اگر } \vec{a} \notin R \end{cases}$$

نمایش‌پذیر است.

۱۱. (بازگشت یکنوا) فرض کنید R یك رابطهٔ نمایش‌پذیر دوتایی روی N باشد. فرض کنید C کوچکترین زیرمجموعه‌ای از N باشد که به‌ازای هر n، a_0، . . .، a_{n-1}، b داشته باشیم:

$\langle\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle, b\rangle \in R$ و اگر $a_i \in C$ (به‌ازای هر $i < n$) آنگاه $b \in C$.

(C را اشتراك تمامی چنین زیرمجموعه‌ها در نظر بگیرید). بعلاوه فرض کنید اولاً به‌ازای هر n، a_0، . . .، a_{n-1}، b داریم:

$$\langle\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle, b\rangle \in R \Rightarrow a_i < b \ (\text{به‌ازای هر } i < n)$$

و ثانیاً یك تابع نمایش‌پذیر f وجود دارد که به‌ازای هر n، a_0، . . .، a_{n-1}، b داریم:

$$\langle\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle, b\rangle \in R \Rightarrow n < f(b).$$

نشان دهید که C نمایش‌پذیر است. (C، به‌یك معنا، به‌وسیلهٔ R تولید می‌شود. در حالت کلی $C \neq \varnothing$؛ زیرا اگر $\langle\langle\ \rangle, b\rangle \in R$، آنگاه $b \in C$.)

۴.۳ حسابی‌سازی نحو

در این بخش به‌بسط دو مطلب می‌پردازیم:

۱. بعضی از احکام پیرامون ف.د.س.ها را می‌توان به‌احکامی‌در بارهٔ اعداد طبیعی (از طریق اسناد اعداد به‌عبارات) برگرداند.

۲. این احکام (فارسی) در بارهٔ اعداد طبیعی را می‌توان، در بعضی‌حالات، به‌زبان صوری ترجمه کرد. و نظریهٔ $\mathrm{Cn}\, A_E$، برای اثبات برخی از این ترجمه‌ها، به‌قدر کافی قوی است.

با این‌کار قادر خواهیم بود فرمولهایی بسازیم که از طریق تثبیت حقایقی پیرامون اعداد، به‌طور غیرمستقیم حقایقی‌را پیرامون فرمولها (حتی پیرامون خودشان) بیان دارند. از این توانایی در به‌دست آوردن نتایجی پیرامون تعریف‌ناپذیری و تصمیم‌ناپذیری، در بخش ۵.۳ بهره‌برداری خواهیم کرد.

اعداد گودل

ابتدا می‌خواهیم اعدادی به‌عبارتهای زبان صوری نسبت دهیم. به‌یادآوریدکه نمادهای زبان ما آنهایی هستندکه در جدول نهم فهرست شده‌اند.

جدول نهم

پارامترها		نمادهای منطقی	
۰.	$\forall$	۱.	(
۲.	$\mathbf{0}$	۳.	)
۴.	$\mathbf{S}$	۵.	$\neg$
۶.	$<$	۷.	$\rightarrow$
۸.	$+$	۹.	$\approx$
۱۰.	$\cdot$	۱۱.	$\mathbf{v}_1$
۱۲.	$\mathbf{E}$	۱۳.	$\mathbf{v}_2$ وغیره

تابعی مانند h وجود داردکه به‌هرنماد، از جدول بالا، عـدد صحیح طرف راست آن را نظیرمی‌کند. بدین‌ترتیب $h(\forall)=0$، $h(\mathbf{0})=2$، و $h(\mathbf{v}_i)=9+2i$. برای این‌که مطالب بعدی کاربرد گسترده‌تری داشته باشند، فقط فرض خواهیم کردکه زبانی با $\mathbf{0}$ و $\mathbf{S}$ دراختیار داریم که به‌طوربازگشتی شماره‌گذاری شده است. منظور ما از این مطلب این است که یك تابع یك به‌یك h، از پارامترهای زبان به‌اعداد زوج، داریم که هردو رابطهٔ

$$\{\langle k, m\rangle : \text{مقدار } h \text{ به‌ازای یك نماد محمولی } m \text{ موضعی است } k\}$$

و

$$\{\langle k, m\rangle : \text{مقدار } h \text{ به‌ازای یك نماد تابعی } m \text{ موضعی است } k\}$$

در $\operatorname{Cn} A_E$ نمایش‌پذیرنـد. (البته در مورد زبان وابسته به $\mathcal{N}$، این مجموعه‌هـا متناهی می‌باشند.) h را روی نمادهای منطقی مانندگذشته تعریف می‌کنیم.

به‌ازای عبارت $\varepsilon=s_0 \ldots s_n$ از زبان مورد نظر، عددگودل آن را، که با $\#(\varepsilon)$ نمایش می‌دهیم، به‌صورت

$$\#(s_0, \ldots, s_n)=\langle h(s_0), \ldots, h(s_n)\rangle$$

تعریف می‌کنیم. مثلاً، با استفاده از تابع h برای زبان وابسته به $\mathcal{N}$ داریم:

$$\#(\exists v_2\, v_2 \approx 0)$$
$$= \#((\neg \forall v_2(\neg \approx v_2 0)))$$
$$= 2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^1 \cdot 7^{16} \cdot 11^2 \cdot 13^6 \cdot 17^{10} \cdot 19^{16} \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 31^4.$$

این عدد بزرگی است و ازمرتبهٔ 1.3×10^{75} می‌باشد. به‌مجموعهٔ Φ از عبارتها مجموعهٔ

$$\#\Phi = \{\#(\varepsilon) : \varepsilon \in \Phi\}$$

از اعدادگودل را نسبت می‌دهیم.

به‌دنبالهٔ $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ از عبارتها (مثلاً یك استنتاج قیاسی)، عدد

$$\mathcal{G}(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle) = \langle \# \alpha_0, \ldots, \# \alpha_n \rangle$$

را نسبت می‌دهیم.

حال نشان می‌دهیم که روابط و توابع مختلف مرتبط با اعدادگودل در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیرند (و بنابراین بازگشتی‌اند). همچون بخش پیشین، هرگاه بگوییم یك رابطه یا یك تابع نمایش‌پذیر است (بدون مشخص کردن نظریه)، منظور این است که درنظریهٔ $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیر است.

از بعضی اختصارات زبانی که به‌کار می‌بریم (یعنی فارسی، هرچند از تصورعمومی فارسی زبانها دورمی‌افتیم) استفاده خواهیم کرد. به‌جای عبارت «عدد aیی وجود دارد که» خواهیم نوشت «$\exists a$». و به‌همین‌قرار، «$\exists a, b < c$» به‌معنای «اعداد a و b وجود دارند که هردو از c کمترند که» خواهد بود. همچنین، «$\forall$» را به‌کار خواهیم گرفت. درفصل‌دوم از ترس درهم‌آمیختن زبان صوری و فرازبان (فارسی)، جرأت نکرده‌ایم که از چنین کوتاهنوشتهایی استفاده‌کنیم، ولی اکنون به‌خواننده اعتماد داریم که چنین اشتباهاتی را نخواهدکرد.

۱. مجموعهٔ اعدادگودل مربوط به‌متغیرها نمایش‌پذیر است.

اثبات. این مجموعه عبارت است از $\{a : (\exists b < a)\, a = \langle 11 + 2b \rangle\}$. از نتایج بخش پیشین نتیجه می‌شودکه این مجموعه نمایش‌پذیر است. ■

۲. مجموعهٔ اعدادگودل مربوط به‌ترمها نمایش‌پذیر است.

اثبات. مجموعهٔ ترمها را به‌طوراستقرایی تعریف‌کردیم و ترمها از اجزای سازندهٔ خود، با اعدادگودل کوچکتر ساخته شدند. ما این حالت را با تفصیل بیشتری بررسی می‌کنیم، زیرا نمونهٔ استدلالی است که درمورد روابطی که به‌طوراستقرایی تعریف شده‌اند به‌کار می‌رود.

فرض‌کنیم f تابع مشخصهٔ مجموعهٔ اعدادگودل ترمها باشد. ازتعریف «ترم» داریم:

$$f(a)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } a \text{ عدد گودل یك متغیر باشد} \\ ۱ & \text{اگر } (\exists i, k < a)[i \text{ یك عدد دنباله‌ای است و}} \\ & (\forall j < \mathrm{lh}\, i) f((i)_j)=۱ \text{ وعدد } k \text{ برابر} \\ & \text{مقدار } h \text{ به‌ازای یك نماد تابعی } (\mathrm{lh}\, i) \text{ موضعی} \\ & \text{باشد و } [a=\langle k\rangle **_{j<\mathrm{lh}\, i}(i)_j \\ ۰ & \text{در سایر موارد} \end{cases}$$

اگرچه در طرف راست این معادله به f اشاره می‌شود، لکن این اشاره فقط به $f((i)_j)$ است که در آن $(i)_j < a$. این امر اجازه می‌دهد که از بازگشت ابتدایی استفاده کنیم. $f(a)=g(\bar{f}(a), a)$ که در آن

$$g(s, a)=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } a \text{ عدد گودل یك متغیر باشد} \\ ۱ & \text{اگر } (\exists i, k < a)[i \text{ یك عدد دنباله‌ای است و}} \\ & (\forall j < \mathrm{lh}\, i)(s)_{(i)_j}=۱ \text{ و } k \text{ مقدار } h \text{ به} \\ & \text{ازای یك نماد تابعی } (\mathrm{lh}\, i) \text{ موضعی است و} \\ & [a=\langle k\rangle **_{i<\mathrm{lh}\, i}(i)_j \\ ۰ & \text{درسایر موارد} \end{cases}$$

زیرا اگر در این معادله s را برابر $\bar{f}(a)$ قرار دهیم، آنگاه به‌ازای $(i)_j < a$ خواهیم داشت $(s)_{(i)_j}=f((i)_j)$. بنابراین بر اساس قضیهٔ ۳۳س، f نمایش‌پذیر است مشروط براین که g نیز چنین باشد.

آنچه که می‌ماند نشان دادن نمایش‌پذیری g است که آن هم با استفاده از نتایج بخش پیشین، ساده است. احتمالاً، نمودار g اجتماع سه رابطه‌ای است که با سه عبارت مندرج در معادلهٔ فوق، مرتبط‌اند. هریك از این سه رابطه از تساوی وسایر روابط نمایش‌پذیر، از طریق سورکراندار و جایگزینی توابع نمایش‌پذیر، به‌دست آمده‌اند. ■

۳. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهای بسیط نمایش‌پذیر است.

اثبات. a عددگودل یك فرمول بسیط است اگر و تنها اگر $(\exists i, k < a)[i$ یك عدد دنباله‌ای است و $(\forall j < \mathrm{lh}\, i)(i)_j$ عددگودل یك ترم است و k مقدار h به‌ازای یك نماد محمولی $(\mathrm{lh}\, i)$ موضعی است و $a=\langle k\rangle **_{j<\mathrm{lh}\, i}(i)_j]$. ■

۴. مجموعهٔ اعدادگودل ف.د.س.ها نمایش‌پذیر است.

اثبات. ف.د.س.ها به‌طور استقرایی تعریف شدند. فرض کنیم f تابع مشخصهٔ این مجموعه باشد، در این صورت

$f(a)=$

- ۱ — اگر a عدد گودل یك فرمول بسیط باشد
- ۱ — اگر $(\exists i < a)$ $[a=\langle h((\ ),\ h(\neg)\rangle * i * \langle h(\ )\ )\rangle$ و $f(i)=$ ۱$]$
- ۱ — اگر $(\exists i, j < a)$ $[a=\langle h(\ (\ )\rangle * i * \langle h(\rightarrow)\rangle * j * \langle h(\ )\ )\rangle$ و $f(i)=f(j)=$ ۱$]$
- ۱ — اگر $(\exists i, j < a)$ $[a=\langle h(\forall)\rangle * i * j$ و i عدد گودل یك متغیر باشد و $f(j)=$ ۱$]$
- ۰ — سایر موارد

با همان استدلال که در مورد اعداد گودل ترمها به‌کار رفته، نمایش‌پذیری f به دست می‌آید. ■

۵. یك تابع نمایش‌پذیر Sb وجود دارد که به‌ازای هرترم یا فرمول مانند α، هر متغیر x، و هرترم t، داریم:

$$\mathrm{Sb}(\#\alpha, \#x, \#t)=\#\alpha^x_t.$$

اثبات. Sb را بنحوی تعریف خواهیم کرد که منحصر به فرد باشد و در آن $\mathrm{Sb}(a, b, c)=d$ اگر وتنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(یك) a عدد گودل یك متغیر است و $a=b$ و $d=c$.

(دو) $(\exists i, k < a)$ $[i$ یك عدد دنباله‌ای است و $(\forall j < \mathrm{lh}\, i)(i)_j$ عدد گودل یك ترم است و k مقدار h به‌ازای یك نماد تابعی یا محمولی $(\mathrm{lh}\, i)$ موضعی است و $a=\langle k\rangle * \ast_{j<\mathrm{lh}\, i}(i)_j$ و

$$d=\langle k\rangle * \ast_{j<\mathrm{lh}\, i}\mathrm{Sb}((i)_j, b, c)].$$

(سه) $(\exists i < a)$ $[i$ عدد گودل یك ف.د.س. است و $a=\langle h(\ (\ ),\ h(\neg)\rangle * i * \langle h(\ )\ )\rangle$ و

$$d=\langle h(\ (\ ),\ h(\neg)\rangle * \mathrm{Sb}(i, b, c) * \langle h(\ )\ )\rangle].$$

(چهار) $(\exists i, j < a)$ $[i$ و j اعداد گودل دو ف.د.س. هستند و $a=\langle h((\ )\rangle * i * \langle h(\rightarrow)\rangle * j * \langle h(\ )\ )\rangle$ و

$$d=\langle h(\ (\ )\rangle * \mathrm{Sb}(i, b, c) * \langle h(\rightarrow)\rangle * \mathrm{Sb}(j, b, c) * \langle h(\ )\ )\rangle].$$

(پنج) $(\exists i, j < a)$ [i عددگودل یك متغیر است و $i \neq b$ و j عـددگودل یك ف.د.س. است و $a = \langle h(\forall)\rangle * i * j$ و

$$d = \langle h(\forall)\rangle * i * \mathrm{Sb}(j, b, c)].$$

(شش) هیچ‌یك از شرایط فوق به‌ازای a و b برقرار نیستند (که در اینجا ازمعادلهٔ مربوط به d چشم‌پوشی می‌کنیم) و $d = a$.

توجه کنید که شرایط فوق مقدار $\mathrm{Sb}(a, b, c)$ را به‌طورمنحصربه‌فرد معین می‌کنند. هیچ دو عبارتی را نمی‌توان درمورد یك عدد a به‌کار برد. و اگر، مثلاً، عبارت (دو) در مورد a به‌کار رود، در این‌صورت، براساس بخش ۳.۲، می‌دانیم که اعداد i و k منحصر به‌فرد هستند.

بالاخره، با درنظرگرفتن Sb به‌عنوان یك رابطهٔ چهارتایی، ازاستدلال به‌کار رفته در مورد مجموعهٔ اعدادگودل ترمها استفاده می‌کنیم. ■

۶. تابعی که مقدار آن به‌ازای n برابر $\# (\mathbf{S}^n \mathbf{0})$ است نمایش‌پذیر می‌باشد.

اثبات. این تابع را f می‌نامیم؛ در این‌صورت

$$f(0) = \langle h(0)\rangle$$

$$f(n+1) = \langle h(\mathbf{S})\rangle * f(n).$$

حال از تمرین ۸ بخش پیشین استفاده می‌کنیم. ■

۷. رابطهٔ نمایش‌پذیر Fr وجود داردکه به‌ازای هرترم یا فرمول α و هرمتغیر x، داریم:

$\langle \# \alpha, \# x\rangle \in \mathrm{Fr} \Leftrightarrow$ x در α مورد آزاد دارد

اثبات. $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Fr} \Leftrightarrow \mathrm{Sb}(a, b, \# 0) \neq a$. ■

۸. مجموعهٔ اعدادگودل جمله‌ها نمایش‌پذیر است.

اثبات. a عددگودل یك جمله است اگر و تنها اگر a عددگودل یك فرمول باشد و به‌ازای هر $b < a$، هرگاه b عددگودل یك متغیر باشد، آنگاه $\langle a, b\rangle \notin \mathrm{Fr}$. ■

۹. رابطهٔ نمایش‌پذیر $\mathrm{Sb}1$ وجود داردکه به ازای هرفرمول α، متغیر x، و ترم t داریم $\langle \# \alpha, \# x, \# t\rangle \in \mathrm{Sb}1$ اگر و تنها اگر t را بتوان در α جایگزین x کرد.

اثبات. تمرین ۱. ■

۱۰. رابطهٔ Gen، که $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Gen}$ اگر و تنها اگر a عدد گودل یك فرمول و b عدد گودل تعمیمی از آن فرمول باشد، نمایش‌پذیر است.

اثبات. $\langle a, b\rangle \in \mathrm{Gen}$ اگر و تنها اگر $a=b$ یا $(\exists i, j < b)$ [i عدد گودلی یك متغیر باشد و $\langle a, j\rangle \in \mathrm{Gen}$ و $[b=\langle h(\forall)\rangle * i * j$. حال استدلال متداول را در مورد تابع مشخصهٔ Gen به‌کار بگیرید. ■

۱۱. مجموعهٔ اعداد گودل توتولوژیها نمایش‌پذیر است.

مجموعهٔ توتولوژیها به‌طور شهودی تصمیم‌پذیر است، زیرا می‌توان روش جدولهای ارزش را بـه‌کار گرفت. برای دست یافتن به‌نمایش‌پذیری، جدولهای ارزش را از نـو برحسب اعداد گودل طراحی می‌کنیم. چندین مرحلهٔ مقدماتی وجود دارد:

۱.۱۱ رابطهٔ R که $\langle a, b\rangle \in R$ اگر و تنها اگر a عدد گودل یك فرمول α و b عدد گودل یکی از اجزاء اول مربوط به α باشد، نمایش‌پذیر است.

اثبات. $\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow a$ عدد گودل یك فرمول باشد و یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(یك) $a=b$ و $(a)_0 \neq (\ )$.
(دو) $(\exists i < a)$ $[\langle i, b\rangle \in R$ و $a=\langle h(\ (\ ),\ h(\neg)\rangle * i * \langle h(\ )\ )\rangle]$.
(سه) شبیه به (دو) در مورد $\rightarrow$.

حال استدلال متداول را در مورد تابع مشخصهٔ R به‌کار ببرید. ■

۲.۱۱ تابع نمایش‌پذیر P وجود دارد که به‌ازای فرمول α،

$$P(\#\alpha)=\langle \#\beta_1, \cdots, \#\beta_n\rangle;$$

یعنی فهرست اعداد گودل اجزاء سازندهٔ اول α به‌ترتیب صعودی.

اثبات. ابتدا تابع g را برای مکان‌یابی جزء سازندهٔ اول بعدی در a♮، بعد از y♮ تعریف می‌کنیم (در اینجا α♮ فرمول α است که $a=\#\alpha$).

$g(a, y)$ برابر کوچکترین nی است که $n=a+1$ یا هم $y < n$ و هم $\langle a,n\rangle \in R$.

سپس تابع h را تعریف می‌کنیم که $h(a, n)$ برابر اولین n جزء سازندهٔ اول a♮ را فهرست کند (اگر این اجزاء سازندهٔ اول بدین تعداد باشد):

$$h(a, 0)=\begin{cases} \langle\ \rangle & g(a, 0) > a \text{ اگر} \\ \langle g(a, 0)\rangle & \text{درسایرموارد} \end{cases}$$

$$h(a, n+1)=\begin{cases} h(a, n) & \text{اگر } g(a, t) > a \\ h(a, n) * \langle g(a, t)\rangle & \text{درسایرموارد} \end{cases}$$

در اینجا t آخرین مؤلفهٔ $h(a, n)$ است که به‌کمك تابع نمایش‌پذیر تمرین ۹ بخش قبل، از $h(a, n)$ به‌دست می‌آید. و بالاخره قرار می‌دهیم $P(a)=h(a, a)$. ■

۳.۱۱ می‌گوییم عـدد درست v یك ارزشدهی برای α را رمزگذاری می‌کند اگر و تنها اگر v یك عدد دنباله‌ای باشد و

$\ln v = \ln P(\# \alpha)$ و $(\forall i < \ln v)(\exists e < 2)(v)_i = \langle (P(\# \alpha))_i, e\rangle$.

این شرط یك شرط نمایش‌پذیر روی v و α است.

مثلاً، اگر $P(\alpha)=\langle \# \beta_0, \ldots, \# \beta_n\rangle$، آنگاه

$$v=\langle\langle \# \beta_0, e_0\rangle, \ldots, \langle \# \beta_n, e_n\rangle\rangle,$$

که درآن هر e_i برابر با ۰ یا ۱ است. بعدهــا به‌یك‌کران بالا برحسب $\# \alpha$ برای v نیاز خواهیم داشت. بـزرگترین v وقتی حاصل می‌شودکــه هر e_i برابر بــا ۱ باشد. همچنین $\# \beta_i \leqslant \# \alpha$ ونتیجتاً

$$\begin{aligned} v &\leqslant \langle\langle \# \alpha, 1\rangle, \ldots, \langle \# \alpha, 1\rangle\rangle \\ &= *_{i < \ln P(\# \alpha)} \langle\langle \# \alpha, 1\rangle\rangle. \end{aligned}$$

۴.۱۱ رابطهٔ نمایش‌پذیر Tr وجود داردکــه به‌ازای هرفرمول α و هر vکــه یك ارزشدهی برای α (یا بیشتر) را رمزگذاری‌کنـد $\langle \# \alpha, v\rangle \in \mathrm{Tr}$ اگر و تنهــا اگر آن ارزشدهی α را ارضاکند.

اثبات. تمرین۲. ■

بالاخره، α یك توتولوژی است اگر وتنها اگر α یك فرمول باشد وبرای هر vکه یکی‌از ارزشدهیهای α را رمزگذاری می‌کند،داشته باشیم$\langle \# \alpha, v\rangle \in \mathrm{Tr}$. سور(فارسی) روی v را، همان‌طورکه در ۳.۱۱ تشریح شد، می‌توان با یك تابـع نمایش‌پذیر از $\# \alpha$ کراندار نمود.

۱۲. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی به‌شکل $\forall x\,\varphi \to \varphi^x_t$،کــه در آن t یك ترم جایگزین‌شدنی برای متغیر x در φ می‌باشد نمایش‌پذیر است.

اثبات. α به‌این‌شکل‌است‌اگروتنها اگر $(\exists\, \varphi < \alpha)$ ف. د. س. $(\exists\, x < \alpha)$ متغیر$(\exists\, t < \alpha)$ ترم $[t$ برای x در φ جایگزین شدنی باشد و $\alpha = \forall x\,\varphi \to \varphi^x_t]$. در اینجا «$\varphi < \alpha$» به‌معنای $\# \varphi < \# \alpha$ است. این شرط رامی‌توان بسادگی برحسب اعدادگودل بازنویسی کرد: a به‌این‌مجموعه‌متعلق‌است‌اگر و تنها اگر $(\exists t < a)(\exists x < a)(\exists f < a)[f$

عددگودل یك فرمول باشد و x عددگودل یك متغیر باشد و t عددگودل یك ترم باشد و $\langle f, x, t\rangle \in \mathrm{Sb}_1$ و

$$a = \langle h((\ ),\ h(\forall)\rangle * x * f * \langle h(\rightarrow)\rangle * \mathrm{Sb}(f, x, t) * \langle h(\ ))\ \rangle].$$

۱۳. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی به‌شکل $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x\, \alpha \rightarrow \forall x\, \beta$، نمایش‌پذیر است.

اثبات. γ به‌این‌شکل است اگر و تنها اگر

$$(\exists \text{ متغیر } x < \gamma)(\exists \text{ فرمول } \alpha, \beta < \gamma)[\gamma = \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \forall x\, \alpha \rightarrow \forall x\, \beta].$$

این شرط را نیز، مانند ۱۲، می‌توان برحسب اعدادگودل بازنویسی کرد. ■

۱۴. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی به‌صورت $\alpha \rightarrow \forall x\, \alpha$، که در آن x در α آزاد نیست، نمایش‌پذیر است.

اثبات. مشابه ۱۳. ■

۱۵. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی به‌صورت $x \approx x$ نمایش‌پذیر است.

اثبات. مشابه ۱۳. ■

۱۶. مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی به‌شکل $x \approx y \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$، که در آن α بسیط است و α' از α با تعویض x در صفر یا چندجا با y به‌دست آمده است، نمایش‌پذیر است.

اثبات. این مورد، به‌استثنای رابطهٔ «جایگزینی جزئی» شبیه ۱۳ است. فرض کنید $\langle a, b, x, y\rangle \in \mathrm{Psb}$ اگر و تنها اگر x و y اعدادگودل دو متغیر، a عددگودل یك فرمول بسیط و b یك عدد دنباله‌ای به‌طول $\mathrm{lh}\, a$ باشد، و همچنین به‌ازای هر j کوچکتر از $\mathrm{lh}\, a$ یا داشته باشیم $(a)_j = (b)_j$ و یا $(a)_j = x$ و $(b)_j = y$. این رابطه نمایش‌پذیر است. ■

۱۷. مجموعهٔ اعدادگودل، اصول موضوع منطقی نمایش‌پذیر است.

اثبات. α یك اصل موضوع منطقی است اگر و تنها اگر $\exists \beta \leqslant \alpha$ که α تعمیمی از β باشد و β در یکی از مجموعه‌های مذکور در بندهای ۱۱ـ۱۶ باشد. ■

۱۸. برای یك مجموعهٔ متناهی A متشکل از فرمولها، مجموعهٔ زیر

$$\{\mathcal{G}(D) : D \text{ یك استنتاج از } A \text{ است}\}$$

نمایش‌پذیر است.

اثبات. عدد d متعلق به‌این مجموعه است اگر و تنها اگر d یك عدد دنباله‌ای با طول مثبت باشد و به‌ازای هر iی کمتر از $\operatorname{lh} d$، یکی از روابط

۱. $(d)_i \in \# A$،
۲. $(d)_i$ عدد گودل یك اصل موضوع منطقی است،
۳. $(\exists j, k < i)\,[(d)_j = \langle h(\,(\,)\rangle * (d)_k * \langle h(\rightarrow)\rangle * (d)_i * \langle h(\,)\,)\rangle]$

برقرار باشد. این مجموعه نمایش‌پذیر است هرگاه $\# A$ نمایش‌پذیر باشد، که این امر محققاً برای A متناهی برقرار است. ■

۱۹. هر رابطهٔ بازگشتی در $\operatorname{Cn} A_E$ نمایش‌پذیر است.

اثبات. به‌یاد آورید که رابطهٔ R بازگشتی است اگر و تنها اگر یك مجموعهٔ متناهی و سازگار A از جمله‌ها وجود داشته باشد که فرمولی مانند ϱ رابطهٔ R را در $\operatorname{Cn} A$ بنمایاند. (بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود می‌توان فرض کرد که زبان مربوطه فقط دارای تعدادی متناهی پارامتر است: پارامترهای موجود درمجموعهٔ متناهی A، پارامترهای موجود در ϱ، و $\mathbf{o}$، $\mathbf{S}$، و $\forall$.) در حالتی که R یك رابطهٔ یك‌تایی است، داریم $a \in R$ اگر و تنها اگر کوچکترین Dیی که یك استنتاج از A برای $\varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{o})$ یا $\neg\varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{o})$ است، در واقع، استنتاجی برای اولی نیز باشد.

به‌بیان صوری‌تر، $a \in R$ اگر و تنها اگر $\#\varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{o})$ آخرین مؤلفهٔ $f(a)$ باشد، که در اینجا

$f(a)$ برابر کوچکترین d است که d درمجموعهٔ مذکور در بند ۱۸ است و آخرین مؤلفهٔ d یکی از $\#\varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{o})$ یا $\#\neg\varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{o})$ می‌باشد.

برای این ϱ (ثابت)، همواره چنین dیی وجود دارد. ■

از آنجا که عکس بند ۱۹ نیز بلافاصله حاصل می‌شود، داریم:

قضیهٔ ۳۴الف. یك رابطه بازگشتی است اگر و تنها اگر در نظریهٔ $\operatorname{Cn} A_E$ نمایش‌پذیر باشد.

ازاین به‌بعد، واژهٔ «بازگشتی» را معمولاً بر واژهٔ «نمایش‌پذیری» ترجیح می‌دهیم.

نتیجهٔ ۳۴ب. هر رابطهٔ بازگشتی در $\mathcal{N}$ تعریف‌پذیر است.

۲۰. حال فرض کنیم مجموعه‌ای چون A از جمله‌ها داریم که $\# A$ بازگشتی است. دراین صورت، $\# \operatorname{Cn} A$ لزوماً بازگشتی نیست (همان‌طور که در بخش بعدی نشان خواهیم داد). ولی البته راهی برای تعریف $\operatorname{Cn} A$ از A در اختیار داریم:

$a \in \# \mathrm{Cn}\, A$ اگر وتنها اگر $\underset{=}{\exists} d$ [d عددگودل یك استنتاج از A بـاشد و a آخـرین مؤلفهٔ d،
و a عددگودل یك باشد.]

قسمت داخل کروشه، براساس‌اثبات مربوط به‌بند ۱۸، بازگشتی است. ولی در حالت‌کلی نمی‌توانیم کرانی روی عدد d قراردهیم. حداکثر می‌توان گفت که $\# \mathrm{Cn}\, A$ دامنهٔ یك‌رابطهٔ بازگشتی است (یا، همان‌گونه‌که بعداً خواهیم گفت، شماره‌پذیر بازگشتیا نه است.)

۲۱. اگر $\# A$ بازگشتی و $\mathrm{Cn}\, A$ یك نظریهٔ تمام باشد، در این صورت $\# \mathrm{Cn}\, A$ بازگشتی است.

به‌عبارت دیگر، یك نظریهٔ تمام و به‌طور بازگشتی‌اصل‌پذیر نظریه‌ای است بازگشتی. این مطلب مشابه نتیجهٔ ۲۵ چ است کـه می‌گوید هرنظریهٔ تمام و اصل‌پذیر نظریه‌ای است تصمیم‌پذیر.

اثبات نیز اساساً همان است. فرض‌کنیم

$g(s) =$ کوچکترین d که یا s یك جمله نباشد، و یا d در مجموعهٔ مذکور در بند ۱۸ قرارداشته و آخرین مؤلفهٔ آن یا s و یا $\langle h(\,(\,),\, h(\neg)\rangle * s * \langle h(\,)\,)\rangle$ باشد.

بنابراین $g(\#\,\sigma)$ عبـارت است از عـددگودل کوچکترین استنتاج σ یا $(\neg\sigma)$ از A. و $s \in \# \mathrm{Cn}\, A$ اگر وتنها اگر $s > 0$ و آخرین مؤلفهٔ $g(s)$ برابر s باشد. ■

در اینجا می‌توان موجه بودن فرضیهٔ چرچ را مجدداً بررسی کرد. فرض‌کنیم رابطهٔ R تصمیم‌پذیـر باشد. در این‌صورت، یك فهرست متناهی از دستورالعملهای صریح برای فرایندتصمیم‌گیری وجود دارد. خود فرایند تصمیم‌گیری احتمالاً ازمراحل بسیط مشخصی تشکیل یافته است کـه مکرراً اجرا می‌گردند. (خواننده‌ای کـه بـا برنامه‌نویسی کامپیوتر آشناست می‌داندکه حتی برای اجرای یك برنامهٔ‌کوتاه‌گاهی به‌زمان زیادی نیاز است و در این‌صورت بعضی ازدستورالعملها مکرراً مورد استفاده قرار خواهندگرفت.) هریك از این مراحل بسیط احتمالاً بسیار ساده است.

به‌وسیلهٔ شگردی مشابه به عددگذاری گودل، می‌توان فرایند تصمیم‌گیری را در اعداد صحیح منعکس ساخت، و سپس تابع مشخصهٔ R را به‌صورت زیرنوشت:

$K_R(\overrightarrow{a}) = U[$کوچکترین s به‌طوری که

(یك) $(s)_0$ دروندادِ $\overrightarrow{a}$ را رمزگذاری کند؛

(دو) بـه‌ازای هر s، $i < \mathrm{lh}\, s$، $(s)_i$ از طـریق اجرای یك مرحلهٔ بسیط عملی از $(s)_{i-1}$ به‌دست آید؛
(سه) آخرین‌مؤلفهٔ s یك وضعیت نهایی‌را توصیف کندکه‌در آن محاسبه‌کامل‌شود.]

در اینجا U (تابع برونداد) تابع ساده‌ای است کـه ازآخرین مؤلفهٔ s جواب (مثبت یـا منفی) را استخراج می‌کنـد. بازگشتی بودن R اکنـون به‌بازگشتی بودن U و روابـط مذکور در (یك)، (دو)، و(سه) تقلیل می‌یابد. در حالتهـای خاص، همچون فرایندهـای تصمیم‌گیری فراهم آمده از ماشینهای ثبات در بخش ۸.۳، بازگشتی بودن این مؤلفه‌هـا بآسانی قابل‌بررسی است. بسیار بعید به‌نظر می‌رسدکه هرفرایند تصمیم‌گیری را، که‌شامل مؤلفه‌های غیربازگشتی است، مؤثر بخوانند. مثلاً در (دو)، به نظر می‌رسد که ساده‌نمودن فوق‌العادهٔ هرمرحلهٔ بسیط، و بویژه بازگشتی‌کردن هریك از آنها، باید امکان‌پذیر باشد.

تمرین

۱. بند ۹ در این بخش را ثابت‌کنید.

۲. بند ۱۱.۴ در این بخش را ثابت‌کنید.

۳. با استفاده از تمرین ۱۱ بخش ۳.۳، اثبات جدیدی از این مطلب کـه مجموعهٔ اعدادگودل ترمها نمایش‌پذیر است (بند۲) ارائه دهید.

۴. فرض‌کنید T یك نظریهٔ سازگار و به طور بازگشتی اصل‌پذیر در زبانی باشد که به‌طور بازگشتی شماره شده و شامل $\mathbf{0}$ و $\mathbf{S}$ است. نشان دهیدکه هر رابطهٔ نمایش‌پذیر در T باید بازگشتی باشد.

۵.۳ ناتمامیت وتصمیم‌ناپذیری

در این بخش از دستاوردهـای‌کار خود در بخشهـای ۳.۳ و ۴.۳ بهره می‌گیریم. تـا اینجا، به‌هرعبارت یك عددگودل نسبت داده‌ایم، و نشان داده‌ایم که بعضی‌از روابط به‌طور شهودی تصمیم‌پذیر روی N (مربوط به‌مفاهیم نحوی دربارهٔ عبارتها) در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیرند.

درسراسر این بخش فرض می‌کنیم که زبان مورد نظر وابسته به $\mathscr{N}$ است. (این امر در معنای «Cn» و «نظریه» اثر می‌گذارد.)

لم نقطهٔ ثابت. بـه‌ازای هرفرمول β که درآن فقط $\mathbf{v}_1$ آزاد است می‌توانیم جمله‌ای مانند σ بیابیم که

$$A_E \vdash [\sigma \leftrightarrow \beta(\mathbf{S}^{\sharp\sigma}\mathbf{0})].$$

می‌توانیم σ را چنین تعبیر کنیم به طور غیر مستقیم می‌گوید «من در فرمول β صدق می‌کنم». در واقع σ چیزی را بیان نمی‌کند، وفقط رشته‌ای از نمادهاست. وحتی وقتی که برطبق ساخت موردنظر $\mathfrak{N}$ به‌فارسی برگردانده شود، آنگاه دربارهٔ اعداد وتالیها وحاصل‌ضربهای آنها و غیره گفتگو می‌کند. فقط به‌اتکای متناظر دانستن اعداد با عبارتهاست که می‌توانیم σ را به‌عنوان ارجاع دهندهٔ به‌یك فرمول، و در این حالت به‌خود σ، در نظر بگیریم.

اثبات. فرض کنیم $\theta(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲, \mathbf{v}_۳)$ به‌طور تابعی در $\mathrm{Cn}\, A_E$ تابعی را بنمایاند که مقدار آن در $\langle \# \alpha, n\rangle$ برابر $\#(\alpha(\mathbf{S}^n \mathbf{o}))$ باشد. (به‌بندهای ۵ و ۶ در بخش ۴.۳ رجوع کنید.) ابتدا فرمول

$$\forall \mathbf{v}_۳ \,[\theta(\mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۳) \rightarrow \beta(\mathbf{v}_۳)] \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم. (دراین فرمول فقط $\mathbf{v}_۱$ آزاد است. این فرمول در $\mathfrak{N}$ مجموعه‌ای را تعریف می‌کند که α # به‌آن تعلق دارد اگروتنها اگر $\#(\alpha(\mathbf{S}^{\#\alpha}\mathbf{o}))$ در مجموعه‌ای باشد که β تعریف می‌کند.) فرض کنیم q عددگودل فرمول (۱) باشد. فرض کنیم σ

$$\forall \mathbf{v}_۳ \,[\theta(\mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{v}_۳) \rightarrow \beta(\mathbf{v}_۳)]$$

باشد. بدین‌ترتیب σ از (۱) با جایگزینی $\mathbf{v}_۱$ با $\mathbf{S}^q\mathbf{o}$ به‌دست می‌آید. توجه کنید که σ (تحت $\mathfrak{N}$) می‌گوید که σ متعلق به مجموعه‌ای است که با β تعریف می‌شود. لکن باید این مطلب که

$$\sigma \leftrightarrow \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}) \qquad (۲)$$

نتیجه‌ای از A_E است بررسی شود. با انتخابی که برای θ کردیم، داریم:

$$A_E \vdash \forall \mathbf{v}_۳[\theta(\mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{v}_۳) \leftrightarrow \mathbf{v}_۳ \approx \mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}]. \qquad (۳)$$

(۲) را به‌صورت زیر می‌توانیم به‌دست آوریم:

$(\rightarrow)$: (با نظر به σ) واضح است که

$$\sigma \vdash \theta(\mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}) \rightarrow \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}).$$

و بنابر (۳)، داریم:

$$A_E \vdash \theta(\mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^q \mathbf{o}, \mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}).$$

بنابراین

$$A_E ; \sigma \vdash \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{o}),$$

که نصف (۲) را به‌دست می‌دهد.

(←): جملهٔ (۳) مستلزم آن است که

$$\beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0}) \rightarrow [\forall \mathbf{v}_{3}(\theta(\mathbf{S}^{q}\mathbf{0},\ \mathbf{S}^{q}\mathbf{0},\ \mathbf{v}_{3}) \rightarrow \beta(\mathbf{v}_{3}))].$$

اما قسمتی که در داخل کروشه‌هاست همان σ است. ■

اولین کاربرد ما از این لم در برگیرندهٔ زیرنظریهٔ $\mathrm{Cn}\,A_E$ نیست وفقط مستلزم مطلب ضعیفتر

$$\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \leftrightarrow \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0})]$$

است.

قضیهٔ تعریف‌ناپذیری تارسکی. مجموعهٔ $\#\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ در $\mathcal{N}$ تعریف‌پذیر نیست.

اثبات. فرمولی مانند β را (که احتمال می‌دهید $\#\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ را تعریف کند) در نظر می‌گیریم. براساس لم نقطهٔ ثابت (در مورد $\neg\beta$)، جملهٔ σیی داریم که

$$\models_{\mathfrak{N}} [\sigma \leftrightarrow \neg\beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0})].$$

(اگر β مجموعهٔ $\#\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ را تعریف می‌کرد، آنگاه σ به‌طور غیر مستقیم می‌گفت «من کاذب هستم.») در آن صورت

$$\models_{\mathfrak{N}} \sigma \Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{N}} \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0}).$$

بنابراین یا σ صادق است اما عضو مجموعه‌ای که β تعریف می‌کند نیست، یا کاذب است و عضو آن مجموعه است. درهرصورت σ نشان می‌دهد که β نمی‌تواند $\#\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ را تعریف کند. ■

قضیهٔ بالا بیدرنگ تصمیم‌ناپذیری نظریهٔ وابسته به $\mathcal{N}$ را به‌دست می‌دهد:

نتیجهٔ ۳۵الف. مجموعهٔ $\#\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ بازگشتی نیست.

اثبات. (بنابر نتیجهٔ ۳۴ب) هرمجموعهٔ بازگشتی در $\mathcal{N}$ تعریف‌پذیر است. ■

قضیهٔ ناتمامیت گودل (۱۹۳۱). اگر $A \subseteq \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ و $\#A$ بازگشتی باشد، آنگاه $\mathrm{Cn}\,A$ یك نظریهٔ تمام نیست.

پس هیچ دستگاه اصل موضوعی کامل و بازگشتی برای $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ وجود ندارد.

اثبات. از آنجاکه $A \subseteq \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$، داریم $\mathrm{Cn}\,A \subseteq \mathrm{Th}\,\mathcal{N}$. اگر $\mathrm{Cn}\,A$ یك نظریهٔ تمام باشد، آنگاه برابری برقرار خواهد بود. اما اگر $\mathrm{Cn}\,A$ یك نظریهٔ تمام باشد، آنگاه

$\mathrm{Cn}\,A$ $\underline{\#}$ بازگشتی است (بند ۲۱ در بخش پیشین). و بنابر نتیجهٔ بالا، $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ # بازگشتی نیست. ■

بویژه، $\mathrm{Cn}\,A_E$ یك نظریهٔ تمام نیست و بنابراین با $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ برابر نیست. و این ناتمامیت با افزودن هیچ مجموعه‌ای از اصول موضوع صادق از میان نمی‌رود. (البته منظور ما از یك مجموعهٔ بازگشتی از جمله‌ها، مجموعه‌ای است مانند Σ که مجموعهٔ Σ # بازگشتی است.)

از اثبات قضیهٔ گودل اطلاعات بیشتری می‌توانیم استخراج کنیم. فرض کنیم یك زیر مجموعهٔ بازگشتی مانند A از $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ مشخص شده باشد. آنگاه براساس قضیهٔ ۳۴الف می‌توانیم فرمول βیی بیابیم که $\mathrm{Cn}\,A$ # را در $\mathscr{N}$ تعریف می‌کند. جملهٔ σ از اثبات قضیهٔ تارسکی حاصل شد (همان‌طور که در آنجا یادآور شدیم) جملهٔ صادقی است که عضو $\mathrm{Cn}\,A$ نیست. این جمله می‌گوید که σ # به‌مجموعه‌ای که β تعریف می‌کند تعلق ندارد، یعنی، به‌طور غیرمستقیم می‌گوید. «من یك قضیهٔ A نیستم.» بنابراین $A \nvdash \sigma$، والبته همچنین داریم $A \nvdash \neg\sigma$. این طریقهٔ نگرش به‌اثبات، به‌اثبات اصلی گودل نزدیکتر است، ومحتاج پیچ وخمهای قضیهٔ تارسکی نیست. از این‌نظر بیان گودل از قضیه، دربرگیرندهٔ $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ نیست؛ ما در اینجا برای عنوان دادن به‌قضایا قدری آزادانه عمل کرده‌ایم.

حال به‌لمی نیازمندیم که (اجمالاً) می‌گوید می‌توان یك اصل موضوع جدید (و بنابراین تعدادی متناهی اصول موضوع جدید) به‌یك نظریهٔ بازگشتی بدون از دست دادن خاصیت بازگشتی افزود.

لم ۳۵ب. اگر $\mathrm{Cn}\,\Sigma$ # بازگشتی باشد، آنگاه $\mathrm{Cn}(\Sigma\,;\tau)$ # بازگشتی است.

اثبات. $\alpha \in \mathrm{Cn}\,(\Sigma;\tau) \Leftrightarrow (\tau \to \alpha) \in \mathrm{Cn}\,\Sigma$. بنابراین $a \in \#\,\mathrm{Cn}\,(\Sigma;\tau) \Leftrightarrow a$ عددگودل یك جمله باشد و

$$\langle h(()\rangle * \#\tau * \langle h(\to)\rangle * a * \langle h())\rangle \text{ در } \#\mathrm{Cn}\,\Sigma$$

این مجموعه بنابرنتایج بخش پیشین بازگشتی است. ■

قضیهٔ ۳۵پ (تصمیم‌ناپذیری قوی $\mathrm{CnA_E}$). فرض کنیم T نظریه‌ای باشد که $T \cup A_E$ سازگار است. در آن صورت T # بازگشتی نیست.

(توجه کنید: از آنجا که درسراسر این بخش زبان مورد بحث زبان وابسته به $\mathscr{N}$ است، کلمهٔ «نظریه» در اینجا به‌معنای «نظریه در زبان وابسته به $\mathscr{N}$» است.)

اثبات. فرض کنیم T' نظریهٔ $\mathrm{Cn}\,(T \cup A_E)$ باشد. اگر T # بازگشتی باشد، آنگاه از آنجا که A_E متناهی است، بنابر لم بالا، می‌توانیم نتیجه بگیریم که T' # نیز بازگشتی است.

پس فرض‌کنیم $\# T'$ بازگشتی است، و بنابراین در $\mathrm{Cn}\, A_E$ با فرمولی مانند β نمایانده می‌شود. از لم نقطهٔ ثابت، جملهٔ σ را به‌دست می‌آوریم که

$$A_E \vdash [\sigma \leftrightarrow \neg\beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0})]. \qquad (*)$$

(σ به‌طور غیرمستقیم حکم می‌کند: «من در T' نیستم.»)

$$\begin{aligned}
\sigma \notin T' &\Rightarrow \#\sigma \notin \#T' \\
&\Rightarrow A_E \vdash \neg\beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0}) \\
&\Rightarrow A_E \vdash \sigma \qquad (\text{بنابر}\ (*)) \\
&\Rightarrow \sigma \in T'.
\end{aligned}$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم $\sigma \in T'$. لکن این نیز قابل دفاع *نیست*:

$$\begin{aligned}
\sigma \in T' &\Rightarrow \#\sigma \in \#T' \\
&\Rightarrow A_E \vdash \beta(\mathbf{S}^{\#\sigma}\mathbf{0}) \\
&\Rightarrow A_E \vdash \neg\sigma \qquad (\text{براساس}\ (*)) \\
&\Rightarrow (\neg\sigma) \in T',
\end{aligned}$$

که با سازگاری T' در تناقض است. ■

نتیجهٔ ۳۵ت. فرض‌کنیم $\#\Sigma$ بازگشتی و $\Sigma \cup A_E$ سازگار باشد. آنگاه $\mathrm{Cn}\,\Sigma$ یك نظریهٔ تمام نیست.

اثبات. هرنظریهٔ تمام به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نظریه‌ای است بازگشتی (بند۲۱ از بخش ۴.۳). اما $\#\mathrm{Cn}\,\Sigma$ ، بنابرقضیهٔ فوق، بازگشتی نیست. ■

این نتیجه نیزقضیهٔ ناتمامیت گودل است، با این تفاوت که در آن سازگاری با A_E جایگزین صدق در $\mathfrak{N}$ شده‌است.

قضیهٔ چرچ (۱۹۳۶). مجموعهٔ اعدادگودل جمله‌های معتبر(در زبان وابسته به $\mathfrak{N}$) بازگشتی نیست.

اثبات. در تصمیم ناپذیری قوی $\mathrm{Cn}\, A_E$ ، نظریهٔ T راکوچکترین نظریه در این زبان بگیرید، که همان مجموعهٔ جمله‌های معتبر است. ■

مجموعهٔ اعدادگودل ف.د.س.های معتبر نیز بازگشتی نیست، حتی اگر مجموعهٔ

جمله‌های معتبر بازگشتی باشد.

این اثبات در مورد زبان وابسته به $\mathscr{N}$ به‌کار می‌رود. برای زبانی با پارامترهای بیشتر، مجموعهٔ جمله‌های معتبر نیز بازگشتی نیست (حتی اگر اشتراك آن با زبان وابسته به $\mathscr{N}$ بازگشتی باشد). در واقع کافی است این زبان حداقل یك نماد محمولی دوموضعی داشته باشد. (نتیجهٔ ۳۶ت را ببینید.) از سوی دیگر، برخی محدودیتها روی زبان لازم است. اگرزبان ∀ را به‌عنوان تنها پارامترخود داشته باشد (زبان وابسته به‌تساوی)، آنگاه مجموعهٔ فرمولهای معتبر تصمیم‌پذیر خواهد بود. (به‌تمرین ۶ مراجعه‌کنید.) به‌طور کلی، معلوم شده است که اگر پارامترها تنها ∀ ونمادهای محمولی یك موضعی باشند، آنگاه مجموعهٔ فرمولهای معتبر تصمیم‌پذیر خواهد بود.

شماره‌پذیری بازگشتیانه

یك رابطه روی اعداد طبیعی شماره‌پذیربازگشتیانه نامیده می‌شود اگر وتنها اگر به‌صورت

$$\{\vec{a} : \exists b \ \langle \vec{a}, b\rangle \in Q\}$$

باشدکه در آن Q بازگشتی است. روابط شماره‌پذیر بازگشتیانه نقش مهمی در منطق ایفا می‌کنند. آنها همتاهای صوری روابط شمارش‌پذیر کارامد هستند. (این مطلب را بزودی توضیح می‌دهیم.)

قضیهٔ ۳۵ث. شرایط زیر روی یك رابطهٔ mتایی مانند R معادل‌اند:

۱. R شماره‌پذیر بازگشتیانه است.

۲. R قلمرو یك رابطهٔ بازگشتی Q است.

۳. به‌ازای یك رابطهٔ بازگشتی $(m+۱)$تایی Q، داریم:

$$R = \{\langle a_۱, \ldots, a_m\rangle : \exists b \ \langle a_۱, \ldots, a_m, b\rangle \in Q\}.$$

۴. به‌ازای یك رابطهٔ بازگشتی $(m+n)$تایی مانند Q داریم:

$$R = \{\langle a_۱, \ldots, a_m\rangle : \exists b_۱, \ldots, b_n \ \langle a_۱, \ldots, a_m, b_۱, \ldots, b_n\rangle \in Q\}.$$

اثبات. بنابرتعریف، ۱ و ۳ معادل‌اند. همچنین بنابر تعریف ما (درفصل ۰) برای قلمرو و $(m+۱)$تایی مرتب، ۲ و ۳ معادل‌اند. ۴ نیز بوضوح از ۳ نتیجه‌می‌شود. بنابراین فقط باید نشان دهیم‌که ۳ از ۴ به‌دست می‌آید. این به‌دلیل آن است که

$$\exists b_۱, \ldots, b_n \langle a_۱, \ldots, a_m, b_۱, \ldots, b_n\rangle \in Q$$

اگر وتنها اگر $\exists c \ \langle a_۱, \ldots, a_m, (c)_۰, \ldots, (c)_{n-۱}\rangle \in Q$ ؛

و در صورتی‌که Q بازگشتی باشد، مجموعهٔ

$$\{\langle a_1, \ldots, a_m, c\rangle : \langle a_1, \ldots, a_m, (c)_0, \ldots, (c)_{n-1}\rangle \in Q\},$$

نیز بازگشتی است. (در اینجا از تابع رمزگشای دنباله‌ای خود برای ادغام رشتهٔ سورها دریك سور را به‌کار برده‌ایم.) ■

بنابر قسمت ۴ این قضیه، R شماره‌پذیر بازگشتیانه است اگر وتنها اگر R در $\mathfrak{N}$ با فرمولی مانند $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ تعریف‌پذیر باشد، که در آن φ باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شود. در حقیقت، می‌توانیم بخواهیم کـه φ بی‌سور باشد؛ این نتیجه در ۱۹۶۱ (با در نظرگرفتن تابع‌نمایی) و در ۱۹۷۰ (بدون تابع‌نمایی) ثابت شد؛ در این اثباتها ازنظریهٔ اعداد استفاده می‌شود؛ در اینجا آنها را حذف می‌کنیم.

توجه‌کنیدکه هر رابطهٔ بازگشتی رابطه‌ای شماره‌پذیر بازگشتیانه نیز هست. زیـرا اگر R بازگشتی باشد، آنگاه در $\mathfrak{N}$ با فرمولی مانند $\exists x_1, \ldots, \exists x_n \varphi$ تعریف می‌شودکه در آن φ باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شود و $x_1, \ldots, x_n$ در φ ظاهر نمی‌شود.

قضیهٔ ۳۵ج. یك رابطه بازگشتی است اگر وتنها اگر هم خود آن و هم مکمل آن شماره‌پذیر بازگشتیانه باشند.

این قضیه همتای صوری این حقیقت است که یك رابطه تصمیم‌پذیر است اگروتنها اگر هم خود آن و هـم مکمل آن را بتوان با روشی کارامد شمارش کرد (به‌قضیهٔ ۱۷ ج مراجعه کنید).

اثبات. اگر یك رابطه بازگشتی باشد، آنگاه مکمل آن نیز چنین خواهد بود، پس هردوی آنها شماره‌پذیر بازگشتیانه هستند.

بعکس، فرض کنیم هم P و هم مکمل آن شماره‌پذیر بازگشتیانه باشند ؛ پس روابط بازگشتی Q و R وجود دارندکه به‌ازای هر $\vec{a}$ داریم

$$\vec{a} \in P \Leftrightarrow \exists b\, \langle \vec{a}, b\rangle \in Q,$$

$$\vec{a} \in \neg P \Leftrightarrow \exists b\, \langle \vec{a}, b\rangle \in R.$$

فرض کنیم

$f(\vec{a})$ برابر کوچکترین bیی باشدکه یا $\langle \vec{a}, b\rangle \in Q$ و یا $\langle \vec{a}, b\rangle \in R$.

چنین عدد bیی همیشه وجود دارد، و f بازگشتی است. بالاخره، داریم:

$$\vec{a} \in P \Leftrightarrow \langle \vec{a}, f(\vec{a})\rangle \in Q.$$

بنابراین P بازگشتی است. ■

روابط شماره‌پذیر بازگشتیانه همتای صوری روابط شمارش‌پذیر کارامد هستند. زیرا نتیجهٔ غیررسمی زیر را داریم که همطراز مشخصهٔ مجموعه‌های شماره‌پذیر بازگشتیانه در قضیهٔ ۳۵ث است.

***لم ۳۵ج.** یك رابطه شمارش‌پذیر کارامد است اگر وتنها اگر قلمرو یك رابطهٔ تصمیم‌پذیر باشد.

اثبات. فرض کنیم Q با روشی کارامد شمارش‌پذیر باشد. در آن صورت $\vec{a} \in Q$ اگر وتنها اگر

$$\exists n\,[\text{پس از } n \text{ گام در فهرست شمارش ظاهر می‌شود } \vec{a}].$$

اما رابطهٔ تعریف شده درکروشه تصمیم‌پذیر است و قلمرو آن Q است.

بعکس، برای شمارش $\{\langle a, b\rangle : \exists n\,\langle a, b, n\rangle \in R\}$، که R تصمیم‌پذیر است، باید تحقیق کنیم که آیا به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots$، $\langle (m)_0, (m)_1, (m)_2\rangle \in R$ برقرار است یا نه. هرگاه جواب مثبت باشد، $\langle (m)_0, (m)_1\rangle$ را درفهرست بروندادها قرار می‌دهیم. ■

***نتیجهٔ ۳۵ح (فرضیهٔ چرچ، صورت دوم).** یك رابطه شمارش‌پذیر کارامد است اگر وتنها اگر شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد.

اثبات. با یکی‌گیری ردهٔ روابط تصمیم‌پذیر با ردهٔ روابط بازگشتی، قلمروهای روابط تصمیم‌پذیر خود به‌خود با قلمروهای روابط بازگشتی یکی می‌شوند. ■

صورت دوم فرضیهٔ چرچ، در واقع، با صورت اول آن معادل است. برای اثبات صورت اول از صورت دوم، قضایای ۳۵ج و ۱۷ج را به‌کار می‌بریم.

قبلاً*، باعباراتی‌متفاوت، نشان دادیم که یك نظریهٔ به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نظریه‌ای است شماره‌پذیر بازگشتیانه. نتیجهٔ مزبور را، برای خاطرنشان‌کردن به‌نقش شماره‌پذیری بازگشتیانه در منطق، در اینجا بازگو می‌کنیم.

قضیهٔ ۳۵خ. اگر A مجموعه‌ای از جمله‌ها باشد که $\# A$ بازگشتی است، آنگاه $\# \mathrm{Cn}\, A$ شماره‌پذیر بازگشتیانه است.

اثبات. بند ۲۰ از بخش ۳.۰۴. ■

این قضیه همتای دقیق این واقعیت شهودی است که یك نظریه که مجموعهٔ اصول موضوع آن تصمیم‌پذیر باشد شمارش‌پذیر کارامد است(نتیجه‌های ۲۵ج و ۲۶ج).این قضیه

تفاوت اثبات‌پذیری در یك نظریهٔ اصل موضوعی و صادق بودن در یك ساخت آن نظریه را نشان می‌دهد. با یك مجموعهٔ بازگشتی از اصول موضوع، تمام آنچه که امکان دست‌یابی به‌آن را داریم مجموعه‌ای شماره‌پذیر بازگشتیانه از نتایج است. اما بنابرقضیهٔ تارسکی، $\mathrm{Th}\,\mathfrak{N}$ حتی در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر نیست، چه رسد به‌اینکه شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد.

حتی اگر زبان را توسعه دهیم یا اصول موضوع جدیدی به‌آن بیفزاییم، این پدیده همچنان خواهد ماند. تا هنگامی که بتوانیم استنتاجها را از غیراستنتاجها به‌طور بازگشتی تشخیص دهیم، مجموعهٔ قضایا فقط می‌تواند شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد. مثلاً، مجموعهٔ جمله‌های نظریهٔ حساب، اثبات‌پذیر در هردستگاه اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها، شماره‌پذیر بازگشتیانه است. علاوه براین، این مجموعه در برگیرندهٔ A_E و سازگار است (مگر این‌که دستگاه ما بسیار غریب باشد). نتیجه می‌شود که این نظریهٔ مجموعه‌ها غیر بازگشتی وناتمام است (این موضوع در بخش ۶.۳ با دقت بیشتری مورد بحث قرار گرفته است.)

نمایش‌پذیری ضعیف

به‌ازای رابطهٔ بازگشتی R، مجموعهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانهٔ Q را، که در آن

$$a \in Q \Leftrightarrow \exists b\, \langle a, b\rangle \in R$$

در نظرمی‌گیریم. می‌دانیم که فرمولی مانند ϱ وجود دارد که R را در $\mathrm{Cn}\, A_E$ می‌نمایاند. نتیجتاً، فرمول $\exists \mathsf{v}_2 \varrho$ مجموعهٔ Q را در $\mathfrak{N}$ تعریف می‌کند. این فرمول نمی‌تواند Q را در $\mathrm{Cn}\, A_E$ بنمایاند مگر این‌که Q بازگشتی باشد، اما می‌تواند *نیمی* از راه را بپیماید.

$$\begin{aligned} a \in Q &\Rightarrow \langle a, b\rangle \in R && (\text{به‌ازای دست‌کم یك } b)\\ &\Rightarrow A_E \vdash \varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}) && (\text{به‌ازای دست‌کم یك } b)\\ &\Rightarrow A_E \vdash \exists \mathsf{v}_2 \varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathsf{v}_2).\\ a \notin Q &\Rightarrow \langle a, b\rangle \notin R && (\text{به‌ازای هر } b)\\ &\Rightarrow A_E \vdash \neg \varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^b\mathbf{0}) && (\text{به‌ازای هر } b)\\ &\Rightarrow A_E \nvdash \exists \mathsf{v}_2 \varrho\,(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathsf{v}_2). \end{aligned}$$

گام آخر، به‌کمك این امر توجیه می‌شود که اگر $A_E \vdash \neg\varphi(\mathbf{S}^b\mathbf{0})$ به‌ازای هر b برقرار باشد، آنگاه $A_E \nvdash \exists x\, \varphi(x)$. (اصطلاح ω ـ سازگاری به‌این‌خاصیت اطلاق می‌شود.) زیرا غیرممکن است که همهٔ جمله‌های

$$\exists x\, \varphi(x),\ \neg\varphi(\mathbf{S}^0\mathbf{0}),\ \neg\varphi(\mathbf{S}^1\mathbf{0}),\ \ldots$$

در $\mathfrak{N}$ صادق باشند.

بدین ترتیب داریم:

$$a \in Q \Leftrightarrow A_E \vdash \exists v_2\, \varphi(S^a o,\ v_2).$$

مناسب است که برای این نیمه از نمایش‌پذیری تعریفی را صورتبندی کنیم.

تعریف. فرض کنیم Q یك رابطهٔ nتایی روی N و ψ یك فرمول باشد که در آن فقط v_1، . . .، v_n آزاد هستند. دراین‌صورت ψ مجموعهٔ Q را در T به طور ضعیف می‌نمایاند اگر وتنها اگر به‌ازای هر a_1، . . .، a_n در N، داشته باشیم:

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in Q \Leftrightarrow \psi(S^{a_1}o, \ldots, S^{a_n}o) \in T.$$

توجه کنید که اگر Q دریك نظریهٔ سازگار T نمایش‌پذیر باشد، آنگاه، Q نیز در T به‌طور ضعیف نمایش‌پذیر خواهد بود.

قضیهٔ ۳۵د. یك رابطه در $\mathrm{Cn}\, A_E$ به‌طور ضعیف نمایش‌پذیر است اگر وتنها اگر شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد.

اثبات. هم اکنون نشان دادیم که هر رابطهٔ شمارش‌پذیر بازگشتیانهٔ یك‌تایی Q در $\mathrm{Cn}\, A_E$ به طور ضعیف نمایش‌پذیر است؛ همین اثبات در مورد رابطهٔ nتایی Q فقط با تغییرات علامت‌گذاری به‌کار می‌رود. بعکس، فرض کنیم Q به‌طور ضعیف به وسیلهٔ ψ در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیر باشد، دراین صورت داریم:

$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \exists D$ [D استنتاجی برای $\psi(S^{a_1}o, \ldots, S^{a_n}o)$ از اصول موضوع A_E است]

$\Leftrightarrow \exists d\ \langle d, f(a_1, \ldots, a_n)\rangle \in P$

به‌ازای یك تابع بازگشتی مشخص f و یك رابطهٔ بازگشتی P. ■

سلسله مراتب حسابی

رابطه‌ای را روی اعداد طبیعی حسابی می‌نامیم اگر وتنها اگر در $\mathfrak{N}$ تعریف‌پذیر باشد. اما بعضی از روابط حسابی، بنحوی، تعریف‌پذیرتر از دیگران هستند. می‌توانیم روابط حسابی را براساس کیفیت تعریف‌پذیری آنها به‌صورت سلسله مراتبی سازمان دهیم.

فرض کنیم Δ_1 ردهٔ روابط بازگشتی باشد، و فرض کنیم Σ_1 ردهٔ روابط شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد. حال، به‌استقرا نسبت‌به k، رده‌های Π_k و Σ_k را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم یك رابطه متعلق به Π_k باشد اگر وتنها اگر مکمل‌آن در Σ_k باشد. همچنین فرض کنیم Σ_{k+1} ردهٔ دامنه‌های روابط عضو Π_k باشد. (اگرفرض $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_1$، آنگاه این تعریف برای $k = 0$ نیز برقرارخواهد بود.) مثلا، چند ردهٔ نخستین‌این رده‌ها متشکل از روابطی است که در ستون دوم نمایش داده شده‌اند:

$$\Sigma_1: \quad \{\vec{a} : \exists b \, \langle \vec{a}, b\rangle \in R\},$$ باز گشتی است R

$$\Pi_1: \quad \{\vec{a} : \forall b \, \langle \vec{a}, b\rangle \in R\},$$ باز گشتی است R

$$\Sigma_2: \quad \{\vec{a} : \exists c \, \forall b \, \langle \vec{a}, b, c\rangle \in R\},$$ باز گشتی است R

$$\Pi_2: \quad \{\vec{a} : \forall c \, \exists b \, \langle \vec{a}, b, c\rangle \in R\},$$ باز گشتی است R

در حالت کلی، رابطهٔ Q در Π_k است اگر و تنها اگر رابطه‌ای باز گشتی مانند R وجود داشته باشد که

$$Q = \{\vec{a} : \forall b_1 \, \exists b_2 \cdots \square \, b_k \, \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle \in R\},$$

در اینجا اگر k فرد باشد «$\square$» را باید با «$\forall$» و اگر k زوج باشد آن را با «$\exists$» تعویض کنیم. به‌همین ترتیب، Q در Σ_k است اگر وتنها اگر رابطـه‌ای باز گشتی مانند R وجود داشته باشد که

$$\{\vec{a} : \exists b_1 \, \forall b_2 \cdots \square \, b_k \, \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle \in R\},$$

باشد. در اینجا اگـر k فرد باشد باید «$\square$» با «$\exists$» و اگر k زوج باشد آن را با «$\forall$» تعویض کنیم.

مثال. مجموعهٔ اعداد گودل فرمولهایی که باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین شده‌اند عضو Π_2 است.

اثبات. a متعلق به‌این مجموعه است اگر و تنها اگر [a عـدد گودل یك فرمول α باشد] و $\forall b \, \exists d$ [d، $\mathcal{G}$ی یك استنتاج از A_E برای $(\ldots, \mathbf{S}^{(b)}0, \mathbf{S}^{(b)}0)\alpha$ یا از نقیض این‌جمله باشد]. با تکنیك بخش ۴.۳، می‌توانیم نشان دهیم که عبارات مندرج در کروشه‌ها روابطی باز گشتی را تعریف می‌کنند. بـا استفاده از ترجمـهٔ فارسی عبارتهایی کـه همهٔ سورهایشان در طرف چپ و پیش از محمول قراردارند، صورت مطلوب به‌دست می‌آید:

$$\{a : \forall b \exists d \, \langle a, b, d\rangle \in R\}$$

که R باز گشتی است. ■

نتیجهٔ پیشین‌ما (قضیهٔ ۳۵ج) که می‌گفت یك رابطه باز گشتی است اگرو تنها اگرهم خود آن و هم مکمل‌آن شماره‌پذیر باز گشتیانه باشند حال می‌تواند به‌صورت معادلهٔ

$$\Delta_1 = \Sigma_1 \cap \Pi_1$$

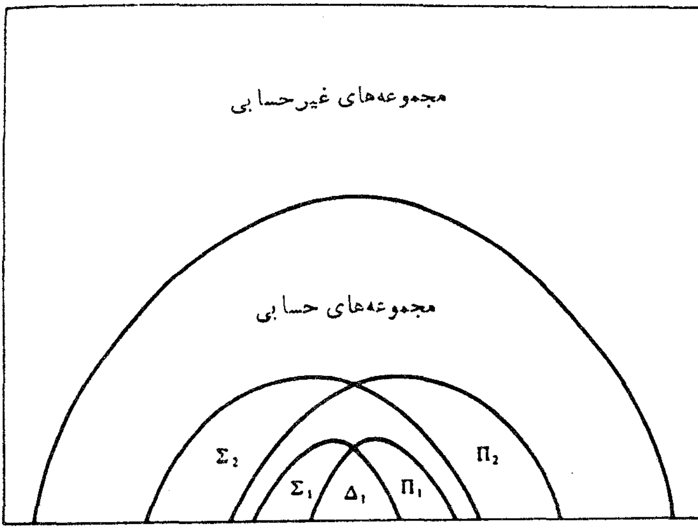
بیان شود. از آنجاکه این معادله برقرار است، تعریف Δ_n را به‌ازای $n > 1$ با معادلات مشابه ارائه می‌دهیم،

$$\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n.$$

روابط شمولی زیر برقرارند:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \Sigma_1 & & & & \Sigma_2 & & & & \Sigma_3 \\
 & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
\Delta_1 & & & & \Delta_2 & & & & \Delta_3 & & \cdots \\
 & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\supseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \\
 & & \Pi_1 & & & & \Pi_2 & & & & \Pi_3
\end{array}$$

حالت $\Delta_1 \subseteq \Sigma_1$ قبلاً ذکر شد (رجوع کنید به قضیهٔ ۳۵ج)؛ اثبات آن متکی بر امکان



شکل ۹. شکل $\wp N$.

تسویرهایی است که هیچ متغیری را پایبند نمی‌کنند. اثباتهای بقیهٔ حالات، علی‌الاصول، نظیر همین اثبات می‌باشند. اگر x در φ ظاهر نشود، آنگاه φ، $\forall x\varphi$، و $\exists x\varphi$ جملگی معادل‌اند. مثلاً، یك رابطه در Σ_1 به‌وسیلهٔ یك فرمول $\exists y\varphi$، که در آن φ باشمارها به وسیلهٔ A_E معین می‌شود، تعریف می‌گردد. ولی همین رابطه به وسیلهٔ $\forall x\exists y\varphi$ و $\exists y\forall x\varphi$ تعریف می‌شود (که در آن x در φ آزاد ظاهر نمی‌شود). بنابراین رابطهٔ مزبور در Σ_2 و Π_2 نیز هست.

علاوه بر این تمامی شمولهای نشان داده شده شمولهای سره‌اند، یعنی، تساوی برقرار نیست. اما این مطلب را در اینجا اثبات نخواهیم کرد. شمولها به‌صورت نمودار در شکل ۹ نشان داده می‌شوند.

ردهٔ روابط حسابی با $\bigcup_k \Sigma_k$، ویا $\bigcup_k \Pi_k$، برابر است. مثلاً، هر رابطه در Σ_2 حسابی است که در $\mathscr{N}$ با فرمولی مانند $\exists x \forall y \varphi$ تعریف می‌شودکه در آن φ باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین‌شده است. برعکس، هررابطهٔ حسابی‌در $\mathscr{N}$ با یك فرمول پیشوندی تعریف می‌شود. قسمت بی‌سور این فرمول پیشوندی یك رابطهٔ بازگشتی را تعریف می‌کند (زیرا فرمولهای بی‌سور باشمارها به‌وسیلهٔ A_E معین می‌شوند). نتیجتاً، رابطهٔ تعریف شده در این سلسله مراتب درجایی قرارمی‌گیرد.

شگردهای خاصی وجود دارندکه در تعیین محل روابط حسابی مشخص دراین‌سلسله مراتب مفید هستند. مثلاً، فرض‌کنیم A مجموعهٔ اعدادگودل فرمولهایی مانند α باشدکه nی وجود داشته باشدکه داشته باشیم:

$$A_E \vdash \alpha(\mathbf{S}^n \mathbf{0}) \text{ و } (\forall i < n)\ A_E \vdash \neg\alpha(\mathbf{S}^i \mathbf{0}).$$

در آن صورت $a \in A$ اگر وتنها اگر

[a عددگودل یك ف.د.س. α است] و

$\exists n\{\exists D[A_E$ از $\alpha(\mathbf{S}^n\mathbf{0})$ استنتاجی است برای $D]$ و

$(\forall i < n)(\exists D_i)\ [A_E$ از $\neg\alpha(\mathbf{S}^i\mathbf{0})$ استنتاجی است برای $D_i]\}$.

قسمتهای موجود درکروشه بازگشتی است، پس سورهای باقیمانده را می‌توانیم بشماریم. سور کراندار «$\forall i < n$» لازم نیست شمارش شود. زیرا داریم:

$$(\forall i < n)(\exists d)\langle d, i\rangle \in P \Leftrightarrow (\exists d)(\forall i < n)\langle (d)_i, i\rangle \in P.$$

این مطلب اجازه می‌دهدکه سورکراندار را آن‌قدر به‌داخل برانیم تا با قسمت بازگشتی مخلوط شود. نتیجتاً، $A \in \Sigma_1$.

قضیهٔ زیرین قضیهٔ ۳۵خ را تعمیم می‌دهد.

قضیهٔ ۳۵ذ. فرض‌کنیم A مجموعه‌ای از جمله‌ها باشدکه $\#A$ در Σ_k است. درآن صورت $\#\operatorname{Cn} A$ نیز در Σ_k خواهد بود.

اثبات. به‌اثباتهای بندهای ۱۸ و ۲۰ از بخش۴.۳ رجوع‌کنید. در آنجا داشتیم:

$a \in \#\operatorname{Cn} A \Leftrightarrow a$ عددگودل یك جمله باشد و $\exists d$ [d یك عدد دنباله‌ای است و مؤلفهٔ آخر d برابر a است و به‌ازای هر i کوچکتراز $\operatorname{lh} d$، یا (۱) $(d)_i \in \#A$. (۲) $(d)_i$ عددگودل یك‌اصل‌موضوع منطقی است ، یا (۳) برای بعضی j و k کمتر از i

$$(d)_j = \langle h(\,(\,)\rangle * (d)_k * \langle h(\rightarrow)\rangle * (d)_i * \langle h(\,)\,)\rangle].$$

ازآنجا‌که $\#A \in \Sigma_k$، در (۱) باید «$(d)_i \in \#A$» با فرمولی به‌صورت

$$\exists b_1 \forall b_2 \cdots \square\, b_k \langle (d)_i, \overrightarrow{b}\rangle \in Q$$

که در آن Q بازگشتی است، تعویض شود. آنچه که می‌ماند برگرداندن نتیجه به‌یك عبارت فارسی پیشوندی در $\sum_k$ می‌باشد. پیشنهاد می کنیم که خواننده درحالت $k=2$ این عبارت را بنویسد؛ تکنیك به‌کار رفته در مثال پیشین کمك خواهد کرد. ■

تمرین

۱. نشان دهید که هیچ مجموعهٔ بازگشتی R وجود ندارد که $\# \operatorname{Cn} A_E \subseteq R$ و $\# \{\sigma : (\neg\sigma) \in \operatorname{Cn} A_E\} \subseteq \bar{R}$. (این نتیجه می‌تواند چنین بیان شود: قضایای A_E را نمی‌توان به‌طور بازگشتی از جمله‌های ابطال‌پذیر جداکرد.)

۲. فرض کنید A یك مجموعهٔ بازگشتی از جمله‌ها در یك زبان به طور بازگشتی شماره‌شده همراه با 0 و $\mathbf{S}$ باشد. فرض کنید که هرمجموعهٔ بازگشتی در نظریهٔ $\operatorname{Cn} A$ نمایش‌پذیر باشد. بعلاوه، فرض کنید که A نظریه‌ای است ω- سازگار؛ یعنی، فرمولی مانند φ وجود ندارد که $A \vdash \exists x\, \varphi(x)$ به‌ازای هر $a \in N$، داریم $A \vdash \neg\varphi(\mathbf{S}^a 0)$. جمله‌ای مانند σ بسازید که به‌طورغیرمستقیم بگوید که یك قضیهٔ A نیست ونشان دهد که نه $A \vdash \sigma$ و نه $A \vdash \neg\sigma$.

۳. فرض کنید T یك نظریه در یك زبان به‌طور بازگشتی شماره شده (همراه با $\mathbf{S}$, 0) باشد. فرض کنید کلیهٔ زیر مجموعه‌های بازگشتی مربوط به N در T به‌طورضعیف نمایش‌پذیرند. نشان دهید که $\# T$ بازگشتی نیست. راهنمایی: یك رابطهٔ دوتایی P بسازید که هرزیرمجموعهٔ به‌طور ضعیف نمایش‌پذیراز N برابر باشد با $\{b : \langle a, b\rangle \in P\}$، به‌ازای بعضی a، و به‌طوری که P بازگشتی باشد اگر $\# T$ چنین باشد. سپس $\{b : \langle b, b\rangle \notin P\}$ را درنظر بگیرید.

۴. نشان دهید که تعداد $2^{\aleph_0}$ مدل غیریکریخت شمارش‌پذیراز $\operatorname{Th} \mathfrak{N}$ وجود دارد: راهنمایی: برای هرمجموعهٔ A از اعداد اول، مدلی بسازید که یك عضو داشته باشد که برهمهٔ اعضای A، و تنها براین اعداد، بخش‌پذیر باشد.

۵. (لیندن‌بام[1]) فرض کنید T نظریه‌ای تصمیم‌پذیر سازگار (دریك زبان معقول) باشد. نشان دهید که T می‌تواند به‌یك نظریهٔ تمام تصمیم‌پذیر سازگار T' توسعه یابد.

۶. زبان مربوط به‌تساوی راکه تنها پارامترآن $\forall$ است درنظربگیرید. فرض کنید λ_n ترجمهٔ «حداقل n چیزوجود دارد» باشد، مراجعه‌کنید به‌اثبات قضیهٔ ۲۶ب. یك فرمول را ساده می‌نامیم اگر و تنها اگر بتوان آن را ازفرمولهای بسیط و λ_nها به‌کمك نمادهای رابط ساخت (ولی بدون استفاده از سورها). نشان دهید که به‌ازای هر فرمول داده شده

1. Lindenbaum

در زبان تساوی، می‌توانیم یك فرمول سادهٔ منطقاً معادل با آن بیابیم. (راهنمایی: این مطلب را به‌عنوان یك نتیجهٔ حذف ـ سورها درنظر بگیرید (که در آن سورهای موجود در λ_n به‌حساب نمی‌آیند). قضیهٔ ۳۱ج را به‌کار ببرید.

۷. (الف) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از N^m متعلق به $\sum_k$ (یا $\prod_k$) باشند. نشان دهید که $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز به $\sum_k$ (یا $\prod_k$، بترتیب) می‌باشند.

(ب) فرض کنید A در $\sum_k$ (یا $\prod_k$) باشد و توابع f_1، ...، f_m بازگشتی‌هستند. نشان دهید که

$$\{\vec{a} : \langle f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\rangle \in A\}$$

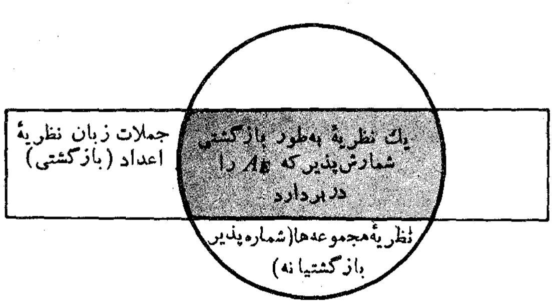
نیز در $\sum_k$ (یا $\prod_k$، بترتیب) است.

۸. فرض کنید T یك نظریه در زبان به‌طور بازگشتی‌شماره شده (همراه با ۰ و S) باشد. n را، $n \geqslant 0$، ثابت فرض کنید. فرض کنید تمامی زیرمجموعه‌های مربوط به N در $\sum_n$ به‌طور ضعیف در T نمایش‌پذیرند. نشان دهید که $\# T$ در $\prod_n$ نیست. (توجه‌کنید که تمرین ۳ حالت خاصی از این است که در آن $n = 0$ است. پیشنهادهای داده شده در آنجا در مورد حالت فعلی نیز قابل‌اجرا هستند.)

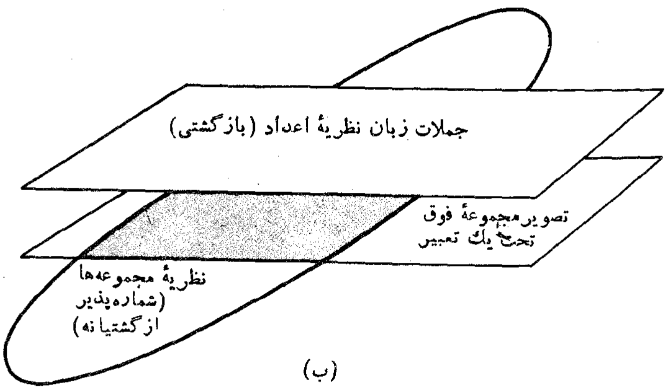
۶.۳ کاربردها در نظریهٔ مجموعه‌ها

می‌دانیم که در زبان نظریهٔ اعداد، $\mathrm{Cn}\, A_E$ ناتمام وغیربازگشتی است؛ همان گونه که هر نظریهٔ سازگار و به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر دریك زبان چنین است.

حال حساب را لحظه‌ای کنار بگذاریم و به‌نظریهٔ مجموعه‌ها نظری بیفکنیم. دراینجا زبانی (همراه با پارامترهای ∀ و ∈) ومجموعه‌ای از اصول موضوع را دراختیار داریم. درکلیهٔ حالات پذیرفته شدهٔ کنونی، مجموعهٔ‌اصول موضوع بازگشتی‌است. یا به‌بیان دقیقتر، مجموعهٔ‌اعداد گودل اصول موضوع بازگشتی‌است. وبنابراین، این‌نظریه (نظریهٔ مجموعه‌ها) شماره‌پذیر بازگشتیانه است. ادعا می‌کنیم که این نظریه، اگر سازگار باشد، بازگشتی نیست‌وبنابراین تمام نخواهد بود. درحال‌حاضراین مطلب‌را اثبات‌خواهیم کرد ولی پیش‌از آن، استدلال را به‌صورت غیردقیق عرضه می‌کنیم. می‌توانیم، به‌معنای دقیق کلمه، زبان نظریهٔ اعداد را در نظریهٔ مجموعه‌ها غوطه‌ور سازیم. سپس بخشی از نظریهٔ مجموعه‌ها را که با اعداد طبیعی و حساب آنها (سطح هاشور خورده درشکل ۱۰) سروکار دارد، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این یك نظریهٔ سازگار با A_E است. و بنابراین غیربازگشتی است. حال اگرنظریهٔ مجموعه‌ها بازگشتی می‌بود، آنگاه بخش حسابی آن نیز می‌بایست بازگشتی باشد، که چنین نیست. از اینجا، به‌عنوان پاداش، به‌قضیهٔ مهمی دربارهٔ دشواری اثبات سازگاری نظریهٔ مجموعه‌ها برمی‌خوریم.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰. نظریهٔ مجموعه‌ها در نظریهٔ اعداد. (الف) یك شکل مسطح. (ب) یك شکل دقیقتر.

ازاین به بعد، منظور ما از نظریهٔ مجموعه‌ها (ST)، نظریه‌ای است (درزبان موردنظر همراه با تساوی و دارای دو پارامتر $\forall$ و $\in$) متشکل از نتایج منطقی اصول موضوع دلخواهی برای نظریهٔ مجموعه‌ها. (اگرخواننده اصول موضوع خاصی را در نظر نداشته باشد، در آن صورت اصول موضوع تسرملو- فرانکل[1] این کار را بخوبی انجام خواهد داد. تنها خواست ما این است که مجموعهٔ اصول موضوع بازگشتی باشد، و به‌اندازهٔ کافی قدرت داشته باشد که بعضی از حقایق معمولی دربارهٔ مجموعه‌ها را به‌دست دهد.) ما به‌یك تعبیر π از $\mathrm{Cn}\,A_E$ در ST نیازمندیم. (تا پایان این بخش، فرض می‌کنیم خواننده با بخش ۷.۲ آشناست.) لکن وجود چنین πیی یك نتیجهٔ استاندارد در نظریهٔ مجموعه‌هاست، اگرچه معمولاً با این کلمات بیان نمی‌شود. همچنین به‌فرمولهایی در زبان ST نیازداریم که مفاهیم یك عدد طبیعی بودن، حاصل‌جمع دو عدد داده شده بودن، و غیره را بخوبی بیان کنند.

1. Zermèlo - Fraenkel

فرمول $\pi_\forall$ نتیجهٔ حذف نماد تعریف شدهٔ ω از فرمول $\mathrm{v}_1 \in \omega$ است. فرمول π_0 نیز به طریقی مشابـه از فرمول نظریه‌ـمجموعـه‌ای $\mathrm{v}_1 \approx \varnothing$ به‌دست می‌آید، و فرمول π_S از $\mathrm{v}_2 \approx \mathrm{v}_1 \cup \{\mathrm{v}_1\}$ حاصل می‌شود. فرمول $\pi_<$ همان $\mathrm{v}_1 \in \mathrm{v}_2$ است. π_+ را درزبان ST چنین ترجمه می‌کنیم:

به‌ازای هر f، اگر $f: \omega \times \omega \to \omega$ و

به‌ازای هر a و b در ω داشته باشیم $f(a, \varnothing)=a$ و

$f(a, b \cup \{b\})=f(a, b) \cup \{f(a, b)\}$،

آنگاه $f(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)=\mathrm{v}_3$.

(در فصل ٥، به نحوهٔ ترجمه تـا اندازه‌ای اشاره شده است.) فرمولهای $\pi_.$ و π_E تا حد زیادی با همان شیوه حاصل می‌شوند.

ادعای این‌که این π تعبیری است از $\mathrm{Cn}\, A_E$ در ST، شرایط چندی (که تعداد آنها هفده است) را روی ST ایجاب می‌کند.

(یك) $\exists \mathrm{v}_1\, \pi_\forall$ باید در ST باشد، که چنین است، زیرا در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توانیم ثابت کنیم که ω غیرتهی است.

(دو) به‌ازای هریك از پنج نمـاد تابعی f در زبان A_E، باید ST شامل جمله‌ای باشد که، تقریباً، بیان‌کنندهٔ این است کـه π_f تابعی را روی مجموعـهٔ تعریف شده با $\pi_\forall$ تعریف می‌کند. (جملهٔ دقیق در تعریف تعبیر دربخش ۷.۲ بیان شده است.) درحالت ٥، در ST قضیه‌ای داریم مبنی براینکه مجموعهٔ تهی منحصربه‌فردی وجود دارد که متعلق به ω نیز می‌باشد. حالت S نیزساده است، زیرا π_S یك عمل یك‌تایی روی عالم همهٔ مجموعه‌ها تعریف می‌کند، و ω تحت این عمل بسته است. در مورد $+$ باید از قضیهٔ بازگشت روی ω استفاده کنیم. یعنی، در ST می‌توانیم اثبات کنیم (همان‌طور که دربخش ۲.۱ طرح شد) که یك تابع منحصربه‌فرد مانند $f: \omega \times \omega \to \omega$ وجود دارد که $f(a, \varnothing)=a$ و به‌ازای هر a و b در ω داریم $f(a, b \cup \{b\})=f(a, b) \cup \{f(a, b)\}$. حال خاصیت مورد‌نیاز در مورد π_+ نتیجه می‌شود. استدلال مشابهی در مورد . و $\mathbf{E}$ به‌کار می‌رود.

(سه) برای هریك از یازده جملهٔ σ در A_E، باید جملهٔ σ^π در ST باشد. به‌عنوان مثـال، در حالت L۳، در ST ایـن مطلب را داریم کـه بـه‌ازای هر m و n در ω یـا $m \in n$، $m=n$، یا $n \in m$.

ازآنجاکه تعداد این‌خواسته‌ها متناهی است، یك زیرمجموعهٔ متناهی Φ از S وجود دارد به‌طوری‌که π نیز تعبیری از $\mathrm{Cn}\, A_E$ در $\mathrm{Cn}\, \Phi$ می‌باشد.

قضیهٔ ۳۶الف (تصمیم‌ناپذیری قوی نظریهٔ مجموعه‌ها). فرض‌کنیم T نظریه‌ای در زبان مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌هـا باشد به‌طوری‌کـه $T \cup ST$ (ویا حداقل $T \cup \Phi$)

سازگار است. در آن صورت T # بازگشتی نیست.

اثبات. فرض کنیم Δ نظریهٔ سازگار $\mathrm{Cn}\,(T \cup \Phi)$ باشد. فرض کنیم $\Delta_\circ$ نظریهٔ متناظر $\pi^{-1}[\Delta]$ در زبان نظریهٔ اعداد باشد. براساس بخش ۷.۲ می‌دانیم که $\Delta_\circ$ یك نظریهٔ سازگار است (زیرا که Δ سازگار است). همچنین $A_E \subseteq \Delta_\circ$، زیرا اگر $\sigma \in A_E$، آنگاه $\sigma^\pi \in \mathrm{Cn}\,\Phi \subseteq \Delta$. بنابراین براساس تصمیم‌ناپذیری قوی‌مربوط به $\mathrm{Cn}\,A_E$ (قضیهٔ ۳۵پ)، $\Delta_\circ$ # بازگشتی نیست.

حال باید غیربازگشتی‌بودن T را ازغیربازگشتی‌بودن $\Delta_\circ$ استخراج کنیم. داریم:

$$\sigma \in \Delta_\circ \text{ اگر و تنها اگر } \sigma^\pi \in \Delta$$

وبراساس لم زیرین، σ^π # به‌طور بازگشتی به σ # وابسته است. بنابراین Δ # نمی‌تواند بازگشتی باشد، چه رسد به $\Delta_\circ$ # . مشابهاً، داریم:

$$\tau \in \Delta \text{ اگر و تنها اگر } (\varphi \to \tau) \in T,$$

که در آن φ ترکیب عطفی عضوهای Φ است. از آنجاکه $(\varphi \to \tau)$ # به‌طور بازگشتی به τ # وابسته است، لذا T # نمی‌تواند بازگشتی باشد چه رسد به این‌که Δ # بازگشتی باشد. ■

لم ۳۶ب. یك تابع بازگشتی p وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هرفرمول α از زبان نظریهٔ اعداد، داریم $p(\#\alpha) = \#(\alpha^\pi)$.

اثبات. در بخش ۷.۲ دستورات صریحی برای ساختن α^π ارائه‌کردیم. دربعضی حالات، برای ساختن‌فرمولهای β^π ازفرمولهای β که ساده‌تراز α هستند استفاده می‌کنیم. روشهای بخشهای ۳.۳ و ۴.۳ را برای نشان دادن بازگشتی بودن p، می‌توان در مورد اعداد گودل این فرمولها به‌کاربرد. لکن جزئیات امر جذابیت خاصی ندارند و ما آنها را در اینجا حذف می‌کنیم. ■

نتیجهٔ ۳۶پ. اگرنظریهٔ مجموعه‌ها سازگار باشد، تمام نیست.

اثبات. نظریهٔ مجموعه‌ها دارای یك مجموعه از اصول موضوع بازگشتی است. اگرتمام باشد، در آن صورت بازگشتی خواهد بود (براساس بند ۲۱ از بخش ۴.۳). بنابرقضیهٔ پیشین، اگر ST سازگار باشد، این امر اتفاق نمی‌افتد. ■

نتیجهٔ ۳۶ت. در زبانی که شامل‌تساوی ویك نماد محمولی‌دوموضعی است، مجموعهٔ (اعدادگودل) جملات معتبر بازگشتی نیست.

اثبات جزئی. در قضیهٔ پیشین قرار می‌دهیم $T = \mathrm{Cn}\,\varnothing$، یعنی مجموعهٔ جمله‌های معتبر. دراین‌صورت قضیه اطمینان می‌دهدکه T # غیربازگشتی خواهد بود، مشروط براین که Φ سازگار باشد. مجموعهٔ با پایان Φ صریحاً تعریف نشده‌است. اما به‌خواننده اطمینان

می‌دهیم که Φ می‌تواند به‌طریقی انتخاب شود که سازگاری آن اثبات‌پذیر باشد. ■

باید توجه داشت که π یك تعبیر $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ در ST نیست (مگر این که ST ناسازگار باشد). زیرا $\pi^{-1}[ST]$، به‌عنوان یك نتیجهٔ لم ۳۶ب، نظریه‌ای شماره‌پذیر بازگشتیانه در زبان وابسته به $\mathscr{N}$ است. بنابراین نمی‌تواند بر $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ منطبق باشد، و تنها درصورتی می‌تواند نظریهٔ تمام $\mathrm{Th}\,\mathscr{N}$ را شامل شود که ناسازگار باشد.

قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل

برای یافتن جملهٔ σ از نظریهٔ اعداد که به طور غیرمستقیم حکم می‌کند که تعبیرش σ^π یك قضیه از نظریهٔ مجموعه‌ها نیست، می‌توانیم شگردهای متداول را به‌کار گیریم. برای این‌کار فرض‌کنیم D یك رابطهٔ سه‌تایی روی N باشد که

$\langle a, b, c\rangle \in D$ اگروتنها اگر a عددگودل یك فرمول α از نظریهٔ اعداد و c عدد گودل یك استنتاج قیاسی از اصول موضوع ST برای $\alpha(\mathbf{S}^b\mathbf{0})^\pi$ باشد.

(به‌کمك استدلالهای معمولی) می‌توان نشان داد که رابطهٔ D بازگشتی است؛ فرض‌کنیم $\delta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ نمایشگر D در $\mathrm{Cn}\,A_E$ باشد. فرض‌کنیم r عددگودل

$$\forall \mathbf{v}_3\, \neg\delta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)$$

و فرض‌کنیم σ فرمول

$$\forall \mathbf{v}_3\, \neg\delta(\mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{v}_3)$$

باشد. توجه‌کنید که σ به‌طور غیرمستقیم حکم می‌کند که $\sigma^\pi \notin ST$. حال ثابت خواهیم کرد که این حکم صحیح است:

لم ۳۶ث. اگر ST سازگار باشد، آنگاه $\sigma^\pi \notin ST$.

اثبات. فرض‌کنیم چنین نباشد، یعنی σ^π از اصول موضوع ST قابل استنتاج باشد؛ فرض‌کنیم k عددگودل این استنتاج باشد. در این صورت $\langle r, r, k\rangle \in D$.

$$\therefore A_E \vdash \delta(\mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{S}^k\mathbf{0});$$

$$\therefore A_E \vdash \exists \mathbf{v}_3\, \delta(\mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{S}^r\mathbf{0}, \mathbf{v}_3);$$

یعنی،

$$A_E \vdash \neg\sigma.$$

با به‌کاربردن تعبیر π، نتیجه می‌گیریم که $\neg\sigma^\pi$ در ST است، و در نتیجه ST ناسازگار

می‌باشد. بنابراین

$$ST \Rightarrow \sigma^\pi \notin ST.$$ سازگار است ■

اثبات بالا نیز، مانند دیگر اثباتهای این کتاب، در داخل ریاضیات شهودی انجام گرفت. لکن تمامی اثباتهای ما دراین کتاب می‌توانست در ST انجام پذیرد. در واقع این امر که اصولاً تمام‌کارها را در ریاضیات می‌توان در ST انجام داد مطلبی است شناخته شده. تصور کنید که حقیقتاً بدین‌گونه کار می کنید. در آن صورت به‌جای اثبات یك جملهٔ فارسی، «$ST \Rightarrow \sigma^\pi \notin ST$ سازگار است»، یك استنتاج از اصول موضوع ST خواهیم داشت برای یك جملهٔ معین در زبان رسمی نظریهٔ مجموعه‌ها:

$$(Cons(ST) \rightarrow \Box).$$

در اینجا $Cons(ST)$ (به‌طریقی زیبا) نتیجهٔ ترجمهٔ «ST سازگار است» به زبان نظریهٔ مجموعه‌هاست. مشابهاً، $\Box$ نتیجهٔ ترجمهٔ «$\sigma^\pi \notin ST$» می‌باشد. ولی قبلاً جمله‌ای در زبان نظریهٔ مجموعه‌ها داشتیم که حکم می کرد $\sigma^\pi \notin ST$. آن جمله همان σ^π بود. این مطلب قویاً پیشنهاد می‌کند که $\Box$ مساوی (یا به‌طور اثبات‌پذیری در ST معادل با) σ^π است، و از اینجا به‌جملهٔ

$$(Cons(ST) \rightarrow \sigma^\pi),$$

به‌عنوان یك قضیهٔ ST می‌رسیم.

اکنون این مطلب می‌تواند به‌طریقی انجام پذیرد که $\Box$ همان σ^π باشد. امیدواریم استدلالی راکه در بالا عرضه‌کرده‌ایم خواننده را قانع کند که این کار دست کم شدنی است. و از آن داریم:

قضیهٔ دوم ناتمامیت گودل. جملهٔ $Cons\ (ST)$ یك قضیهٔ ST نیست، مگراین که ST ناسازگار باشد.

اثبات. براساس استدلال (موجه) بالا،

$$(Cons(ST) \rightarrow \sigma^\pi)$$

قضیه‌ای از ST است. بنابراین اگر $Cons(ST)$ نیز یك قضیهٔ ST باشد، σ^π نیز چنین خواهد بود. لکن براساس لم ۳۶ث، اگر $\sigma^\pi \in ST$، آنگاه ST ناسازگار است. ■

البته اگر ST ناسازگار باشد، آنگاه هرجمله قضیه است، بویژه $Cons(ST)$. به‌این علت، با اثباتی برای $Cons(ST)$ درداخل ST، نمی‌توان کسی‌را قانع کرد که ST سازگار است. (و براساس قضیهٔ دوم گودل، شخص قانع می‌شود که عکس آن صحیح است.) ولی قبل‌ازکار گودل، امید این‌وجود داشت که می‌توان اثبات‌پذیری $Cons(ST)$ را ازفرضهای

ضعیفتری از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها به‌دست آورد، ایدآل آن بود که سازگاری این فرضها را به‌طریقی محقق کنیم. لکن در حال حاضر می‌بینیم کـه $Cons(ST)$ در هیچ زیر نظریهٔ ST نیست. مگر این‌که ST ناسازگار باشد.

تمرین

فرض کنید T نظریه‌ای در یك زبـان به‌طور بازگشتی شماره شده باشد، و فرض کنید کـه تعبیری از $\mathrm{Cn}\, A_E$ در T وجود دارد. نشان دهید کـه T قویاً تصمیم‌ناپـذیر است، یعنی، هر گاه T' یك نظریه درز بانی باشد که در آن $T \cup T'$ سازگاراست، آنگاه $\# T'$ بازگشتی نخواهد بود.

۷.۳ نمایش تابع‌نمایی[1]

در بخش ۱.۳ و ۲.۳ نظریهٔ تحدیدهای معینی از $\mathscr{N}$ را موردمطالعه قراردادیم و یافتیم که همهٔ آنها تصمیم‌پذیرند. سپس در بخش ۳.۳ ضرب و نما را بر آن افزودیم. معلوم شدکه نظریهٔ حاصل تصمیم‌ناپذیر است (بخش ۵.۳) . در واقع کافی بود که فقط ضرب را اضافه کنیم (واز نما صرف‌نظر کنیم)؛ تا تصمیم‌پذیری حاصل‌شود.

فرض کنید $\mathscr{N}_M$ تحدیدی از $\mathscr{N}$ حاصل از حذف نما باشد:

$$\mathscr{N}_M = (N, \circ, S, <, +, \cdot).$$

بنابراین نماد $\mathbf{E}$ در زبان مربوط به $\mathscr{N}_M$ ظاهر نمی‌شود. فرض کنیم A_M مجموعه‌ای باشد از A_E با حذف $\mathrm{E}1$ و $\mathrm{E}2$ به‌دست می‌آید. هدف این بخش نشان دادن این مطلب است که تمامی قضایای بخشهای ۳.۳ تا ۵.۳ همچنان برقرار خواهند بود هرگاه «A_E» و «$\mathscr{N}$» را با «A_M» و«$\mathscr{N}_M$» جایگزین سازیم. مطلب کلیدی برای اثبات این ادعا این‌است که نما در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیر است. یعنی، یك فرمول ε در زبان وابسته بـه $\mathscr{N}_M$ وجود داردکـه به‌ازای هر a و b، داریم:

$$A_M \vdash \forall z[\varepsilon(\mathbf{S}^a\mathbf{o}, \mathbf{S}^b\mathbf{o}, z) \leftrightarrow z \approx \mathbf{S}^{(a^b)}\mathbf{o}].$$

بنابراین ε را می‌توان برای شبیه‌سازی فرمول $z \approx x\mathbf{E}y$، عملاً بدون به‌کاربردن واقعی نماد $\mathbf{E}$ استفاده کرد.

اگر بخواهیم ببینیم کـدام روابط و توابع در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیرند، ابتدا به‌این نتیجه می‌رسیم که هرچیزی (به‌استثنای خود نما) که نمایش‌پذیری آن در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نشان داده شد (با همان اثبات) در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نیز نمایش‌پذیر است. تا این‌که به بند ۷ فهرست بخش ۳.۳ برسیم. برای ادامهٔ کار، باید نشان دهیم که خود نما در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیر است.

---

1. این بخش را می‌توان، بدون از دست دادن پیوستگی مطلب حذف کرد.

می‌دانیم که نما می‌تواند با معادلات

$$a^{\circ}=۱$$

$$a^{b+۱}=a^{b}\cdot a$$

مشخص شود. از آنچه‌که در بارهٔ بازگشت ابتدایی می‌دانیم (بند ۱۳ فهرست بخش ۳۰۳ توأم با تمرین ۸ در آنجا)، ممکن است به‌فکر تعریف توان به‌صورت زیر بیفتیم:

$E^{*}(a,b)$ برابر کوچکترین sی است که $[(s)_{\circ}=۱$ و به‌ازای

هر $i<b$، $(s)_{i+۱}=(s)_i\cdot a]$

زیرا در آن صورت $a^b=(E^{*}(a,b))_b$. ولی این کار، برای به‌دست آوردن یك اثبات نمایش‌پذیری به‌شکست می‌انجامد، زیرا هنوز نمی‌دانیم که تابع تجزیهٔ $(a)_b$ در $\mathrm{Cn}\,A_M$ نمایش‌پذیر است. لکن در واقع به‌چنین تابع تجزیه ویژه‌ای (که متناظر با طریقهٔ ویژهٔ دنباله‌های رمزگذاری است) نیازی نداریم. تنها به‌تابعی مانند δ نیاز داریم که مانند یك تابع تجزیه عمل می‌کند؛ خواصی که نیاز داریم در لم زیرین خلاصه شده است.

لم ۳۷الف. تابعی مانند δ نمایش‌پذیر در $\mathrm{Cn}\,A_M$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر n، $a_{\circ}$، ...، a_n، عددی مانند s وجود دارد که به‌ازای هر $i\leqslant n$، داریم $\delta(s,i)=a_i$.

به‌محض این‌که لم اثبات شد، می‌توانیم تعریف کنیم:

$E^{**}(a,b)$ برابر کوچکترین sی است که $[\delta(s,\circ)=۱$ و

به‌ازای هر $i<b$، $\delta(s,i+۱)=\delta(s,i)\cdot a]$.

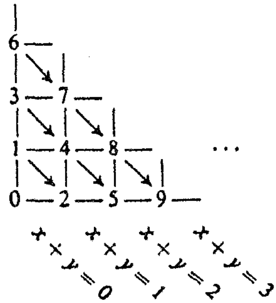
این لم اطمینان می‌دهد که چنین sی وجود دارد. در آن صورت E^{**} نیز مانند نما در $\mathrm{Cn}\,A_M$ نمایش‌پذیر است، زیرا

$$a^b=\delta(E^{**}(a,b),b).$$

تابع δیی که لم را برقرار می‌سازد، از حقایق چندی از نظریهٔ اعداد به‌دست می‌آید.

یك تابع زوج‌ساز

به‌عنوان قدم اول در اثبات لم پیشین، برای رمزگذاری و رمزگشایی زوجهای اعداد، توابعی می‌سازیم. می‌دانیم که توابعی وجود دارند که $N\times N$ را به‌صورت یك به‌یك روی N می‌نگارند. بویژه، تابع J که در نمودار نشان داده شدهٔ $J(a,b)$ در نقطه‌ای با مختصات $\langle a,b\rangle$ نوشته شده است این‌کار را انجام می‌دهد.



برای مثال، $J(2,1)=8$ و $J(0,2)=3$. برای به‌دست آوردن معادله‌ای برای $J(a,b)$، توجه می‌کنیم که در امتداد خط $x+y=n$، $n+1$ یك نقطه (با مختصات در N) وجود دارند. بنابراین

$J(a,b)=$ تعداد نقاطی در صفحه که به آنها J مقادیر کوچکتری را نسبت می‌دهد

$=$ [تعداد نقاط روی خطوط $x+y=n$ به‌ازای $n=0,1,\ldots,(a+b-1)$] + [تعداد نقاط روی خط $x+y=a+b$ که $x<a$]

$$=[1+2+\cdots+(a+b)]+a$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+a$$

$$=\tfrac{1}{2}[(a+b)^2+3a+b]$$

فرض کنیم K و L توابع تصویری مربوطه روی محورها باشند، یعنی، توابع منحصربه‌فردی که

$$K(J(a,b))=a,\quad L(J(a,b))=b.$$

برای مثال، $K(7)=1$، یعنی مختص x نقطهٔ $\langle 1,2\rangle$ در صفحه‌ای که J عدد ۷ را نسبت می‌دهد. به‌همین ترتیب، $L(7)=2$، یعنی مختص y آن نقطه می‌باشد.

ادعا می‌کنیم که J، K، و L در $\mathrm{Cn}\,A_M$ نمایش‌پذیرند. تابع

$H(a)$ برابر کوچکترین bیی است که $a\leqslant 2b$

دارای این خاصیت است که به‌ازای هر aی زوج، $H(a)=\frac{1}{2}a$. در آن صورت می‌توانیم بنویسیم

$$J(a,b)=H((a+b).(a+b+1))+a$$

$K(p)$ برابر کوچکترین aیی است که [برای بعضی $b\leqslant p$، $J(a,b)=p$]،

$L(p)$ برابر کوچکترین bیی است که [برای بعضی $a\leqslant p$، $J(a,b)=p$].

از صورت چهار معادلهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که H، J، K، و L در $\mathrm{Cn}\,A_M$ نمایش‌پذیرند.

تابع βی گودل

فرض کنیم β تابعی باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(c, d, i) = \text{باقیماندهٔ تقسیم } [\text{۱} + (i + \text{۱}) \cdot d] \div c$$

= کوچکترین rی که عددی مانند $q \leqslant c$ هست که، $c = q \cdot [\text{۱} + (i + \text{۱}) \cdot d] + r$.

این تابع به‌ظاهر عجیب تابع تجزیهٔ رضایت‌بخشی برای لم ۳۷الف به‌دست می‌دهد. فرض کنیم

$$\delta(s, i) = \beta(K(s), L(s), i).$$

واضح است که δ در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیر است. آن چیزی که واضح نیست آن است که این تابع از شرایط لم ۳۷الف برخوردار است. می‌خواهیم نشان دهیم:

(*) به‌ازای هر n و به‌ازای هر a_0، . . . ، a_n، اعداد c و d وجود دارند به‌طوری که بـه‌ازای هـر $i \leqslant n$، $\beta(c, d, i) = a_i$.

زیرا در آن صورت است که به‌ازای هر $i \leqslant n$، $\delta(J(c, d), i) = \beta(c, d, i) = a_i$.

ولی (*) عبارتی است در نظریهٔ اعداد نه‌درمنطق. اثبات (*) براساس قضیهٔ باقیماندهٔ چینی است. می‌گوییم اعداد d_0، . . . ، d_n دو به‌دو نسبت به‌هم اول هستند اگر و تنها اگر هیچ عدد اولی هردوی d_i و d_j، $i \neq j$، را تقسیم نکند.

قضیهٔ باقیماندهٔ چینی. فرض کنیم d_0، . . . ، d_n دوبه‌دونسبت به‌هـم اول باشند؛ فرض کنیم a_0، . . . ، a_n اعدادی طبیعی باشند که $a_i < d_i$. در آن صورت می‌توانیم یك عدد c به‌دست آوریم به‌طوری که به‌ازای هر $i \leqslant n$،

a_i برابر است با باقیماندهٔ تقسیم $c \div d_i$.

اثبات. فرض کنیم $p = \prod_{i \leqslant n} d_i$، وبـه‌ازای هر c فرض کنیـم $F(c)$ بـرابـر $(n + \text{۱})$تایی متشکل از باقیمانده‌های تقسیم c بر d_0، . . . ، d_n باشد. توجه‌کنیدکه برای این $(n + \text{۱})$تایی، p مقدار ممکن وجود دارد.

ثابت می‌کنیـم کـه F روی $\{k : \text{۰} \leqslant k < p\}$ یـك به‌یـك است. زیـرا اگـر $F(c_1) = F(c_2)$. در آن صورت هر d_i، $|c_1 - c_2|$ را تقسیم می‌کند. از آنجاکـه d_iها نسبت به‌هم اولند، لذا p باید $|c_1 - c_2|$ راتقسیم‌کند. برای c_1 و c_2 کمتراز p، این‌مطلب ایجاب می‌کندکه $c_1 = c_2$.

بنابراین تحدید F به $\{k : \text{۰} \leqslant k < p\}$ تمامی مقادیـر ممکن p را می‌پـذیرد. بالاخص، (در نقطه‌ای مانند c) مقدار $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ را قبول می‌کند. و این همان cای است که می‌خواهیم. ■

لم ۳۷ب. به‌ازای هر $s \geqslant \text{۰}$، $s + \text{۱}$ عدد

$$۱+۱\cdot s!\ ,\ ۱+۲\cdot s!\ ,\ \ldots\ ,\ ۱+(s+۱)\cdot s!$$

دو به‌دو نسبت به‌هم اولند.

اثبات. تمامی این اعداد دارای این خاصیت‌اند که هیچ عامل اول q نمی‌تواند $s!$ را تقسیم کند، پس $q > s$. اگر عدد اول q هم $۱+j\cdot s!$ وهم $۱+k\cdot s!$ را تقسیم کند، در آن صورت تفاضل آنها، $s!\cdot|j-k|$، را نیز تقسیم می‌کند. از آنجا که q عدد $s!$ را تقسیم نمی‌کند، پس باید $|j-k|$ را تقسیم کند. اما $q > s \geqslant |j-k|$. این تنها در صورتی امکان دارد که $|j-k| = ۰$. ■

اثبات (*) صفحهٔ پیش. مجدداً فرض کنیم $a_۰$، $a_۱$، ...، a_n داده شده باشند، به‌اعدادی مانند c و d نیاز داریم به‌طوری که اگر، به‌ازای $i \leqslant n$، c را بر $۱+(i+۱)\cdot d$ تقسیم کنیم، باقیمانده برابر a_i باشد.

فرض کنیم s بزرگترین عضو مجموعهٔ $\{n, a_۰, \ldots, a_n\}$ باشد و فرض کنیم $d = s!$. در آن صورت برمبنای لم ۳۷ب، اعداد $۱+(i+۱)\cdot d$، به‌ازای $i \leqslant n$، دو به‌دو نسبت به‌هم اولند. بنابراین براساس قضیهٔ باقیماندهٔ چینی cای وجود دارد به‌طوری که در تقسیم $c \div [۱+(i+۱)\cdot d]$، به‌ازای $i \leqslant n$، باقیمانده برابر a_i باشد. ■

و این اثبات لم ۳۷الف را کامل می‌کند. و براساس استدلالی که در پی آن لم آمد، می‌توانیم نتیجه بگیریم:

قضیهٔ ۳۷پ. نما در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیر است.

با مجهزشدن به‌این قضیه، حال می‌توانیم به بند ۷ فهرست بخش ۳.۳ برگردیم. حال اثبات ارائه شده در آنجا نمایش‌پذیری تابع موردنظر را (که مقدار آن در n برابر p_n است) در $\mathrm{Cn}\, A_M$ برقرار می‌سازد. زیرا این تابع با روشهای مجاز، از روابط و توابع (به‌انضمام نما) که می‌دانیم در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیرند، ساخته شده است.

همین پدیده در سراسر بخشهای ۳.۳ و ۴.۳ حاکم است. اثباتهای نمایش‌پذیری ارائه شده در آنجا، اکنون، نمایش‌پذیری در $\mathrm{Cn}\, A_M$ را برقرار می‌سازند. بنابراین هر رابطهٔ بازگشتی در $\mathrm{Cn}\, A_M$ نمایش‌پذیر است، و اگر این رابطه، اتفاقاً، یك تابع باشد، آنگاه آن تابع به‌طور تابعی نمایش‌پذیر خواهد بود. از این‌رو اثباتهای عرضه شده در بخش ۵.۳ هم درمورد $\mathfrak{N}_M$ و A_M و هم در مورد $\mathfrak{N}$ و A_E به‌کار می‌روند. بالاخص، ما تصمیم‌ناپذیری قوی $\mathrm{Cn}\, A_M$ را داریم: هرنظریهٔ T در زبان $\mathfrak{N}_M$ که در آن $T \cup A_M$ سازگار باشد نمی‌تواند بازگشتی باشد.

توجه کنید که هر رابطهٔ تعریف‌پذیر در $\mathfrak{N}$ (یعنی، هر رابطهٔ حسابی) نیز در $\mathfrak{N}_M$ تعریف‌پذیر است. نما که درزیرنظریه‌ای از $\mathrm{Th}\, \mathfrak{N}_M$، به‌طریق اولی در $\mathfrak{N}_M$ تعریف‌پذیر است. با شکل جدید قضیهٔ تارسکی، $\# \mathrm{Th}\, \mathfrak{N}_M$ در $\mathfrak{N}_M$ تعریف‌پذیر نیست، و نتیجتاً

جدول دهم

ساخت	نظریه	مدلهای نظریه	مجموعه‌های تعریف‌پذیر	اظهار نظر
(N)	تصمیم‌پذیر ، اصل‌پذیر متناهی نیست، پذیرای حذف سورها	هرمجموعهٔ متناهی	$\varnothing$ و N. $\{0\}$ تعریف‌پذیر نیست.	
$(N, 0)$	مانند بالا	هرمجموعهٔ نامتناهی با عضوهای متمایز	$\varnothing$، $\{0\}$، $N-\{0\}$. S تعریف‌پذیر نیست.	
$(N, 0, S)$	مانند بالا	قسمتهای استاندارد، بعلاوهٔ هر مقداری از Z-زنجیره‌ها	مجموعه‌های متناهی و مکمل‌های آنها. $<$ تعریف‌پذیر نیست.	$\{0\}$ در $\{N, S\}$ تعریف‌پذیر است.
$(N, 0, S, <)$	تصمیم‌پذیر، اصل‌پذیر متناهی ، پذیرای حذف سورها	مانند بالا، توأم با هر ترتیبی از Z-زنجیره‌ها	مجموعه‌های متناهی و مکمل‌های آنها. $+$ تعریف‌پذیر نیست.	$\{0\}$ و S در $(N, <)$ تعریف‌پذیرند.
$(N, 0, S, <, +)$	تصمیم‌پذیر (پرس بورگر)	Z-زنجیره‌ها بدون نقاط انتهایی مرتب وچگال هستند همچنین یك عمل‌جمع مناسب وجود دارد.	نهایتاً مجموعه‌های تناوب. تعریف‌پذیر نیست.	$\{0\}$، S، و $<$ در $(N, +)$ تعریف‌پذیرند.
$(N, 0, S, <, +, \cdot)$	غیرحسابی ∴ به‌طور بازگشتی اصل‌پذیر نیست.	مانند بالا، لکن‌همراه با یك‌عمل ضرب مناسب.	تمامی روابط حسابی تعریف‌پذیرند.	روابط حسابی در $(N, S, \cdot)$، $(N, +, \cdot)$، و $(N, <, D)$ که در آن $D(x, y) = (x)_y$ ، تعریف‌پذیرند.

$\sharp\mathrm{Th}\,\mathcal{N}_M$ نمی‌تواند حسابی باشد.

به‌زبان بخش۷.۲، می‌توانیم بگوییم که تعبیر وفاداری‌از $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}$ در $\mathrm{Th}\,\mathcal{N}_M$ وجود دارد. این تعبیر به‌استثنای $\mathbf{E}$، همان تعبیرهمانی درمورد همهٔ پارامترهاست وبه $\mathbf{E}$ فرمولی نسبت می‌دهد که تعریف‌کنندهٔ نما در $\mathcal{N}_M$ است.

در جدول دهم، بعضی از نتایج فصل ۳ در مورد نظریهٔ اعداد و تحدیدهای آن را خلاصه می‌کنیم.

تمرین

۱. فرض‌کنید$D(a, b)=(a)_b$. نشان دهید که هر رابطهٔ حسابی در$(N, <, D)$ تعریف‌پذیر است.

۲. نشان دهید کــه رابطهٔ جمع $\{\langle a, b, c\rangle : a+b=c\}$ در ساخت $(N, S, \cdot)$ تعریف‌پذیر است. راهنمایی: درچه شرایطی معادلهٔ $S(ac)\cdot S(ab)=S(c\cdot c\cdot S(ab))$ برقرار است ؟

۳. (الف) نشان دهید که$\mathrm{Th}(N, +, \cdot)$ قویاً تصمیم‌ناپذیراست. (تمرین بخش ۶.۳ را ببینید.)

(ب) (برای این قسمت زمینه‌ای از جبر لازم است.) نشان دهید کــه نظریهٔ حلقه‌ها تصمیم‌ناپذیر است و نظریهٔ حلقه‌های جابه‌جایی نیز تصمیم‌ناپذیر است.

۸.۳ توابع بازگشتی

ما توابع بازگشتی (یعنی، توابعی کــه وقتی به‌عنوان رابطــه تلقی شوند، بازگشتی هستند) را برای بــه‌دست آوردن نظریــه‌های ناتمامیت و تصمیم‌ناپذیری بــه‌کار بردیم. امــا ردهٔ توابع بازگشتی، به‌نوبهٔ خود، ردهٔ جالبی‌است، و در این بخش به‌چند خاصیت آنها اشاره می‌کنیم.

به‌یادآورید‌که بنا برفرضیهٔ چرچ، یك تابع بازگشتی‌است اگروتنها اگر با یك روش کارامد محاسبه‌پذیر باشد (صفحهٔ ۲۲۲). به‌همین‌خاطر است‌که توابع بازگشتی‌جالب هستند. و در عین حال، این امر امکان یك درك شهودی از بازگشتی بودن را مهیا می‌سازد‌که آن نیز تسهیلات زیادی در مطالعهٔ موضوع فراهم می‌آورد. مثلاً، فرض‌کنیم از شما بپرسند که‌آیا وارون یك جایگشت بازگشتی ازN بازگشتی است یا نه. قبل از تلاش برای اثبات این موضوع، ابتدا باید از خود دربارهٔ آنچه همراه آن به‌ذهن متبادر می‌شود سؤال‌کنید: آیا وارون یك جایگشت محاسبه‌پــذیر مانند f محاسبه‌پذیر است؟ آنگاه (به‌احتمال زیاد) درمی‌یابید‌که پاسخ مثبت است. برای محاسبهٔ $f^{-1}(3)$ می‌توانید $f(0)$، $f(1)$، ...، را

تا kای حساب کنید که به $f(k) = ۳$ برسید. در آن صورت $k = (۳)^{-۱}f$. با انجام این کار، دوفایده در بردارد. اول این‌که احساس اطمینان می‌کنید که پاسخ به‌سؤال مربوط به جایگشت بازگشتی نیز باید مثبت باشد. و دوم این‌که یك طرح خوب برای چگونگی اثبات آن به‌دست می‌آورید؛ اثبات مربوطه با دقیقتر کردن اثبات شهودی حاصل می‌شود. این‌استراتژی در برخورد با مسائل‌مربوط به‌بازگشتی بودن، در این بخش، می‌تواند بسیار سودمند باشد.

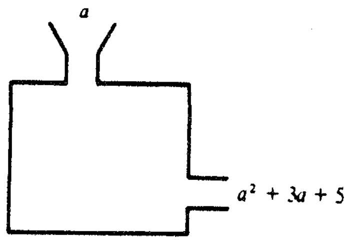
پیش از ادامهٔ بحث، بهتر است که برخی از دانسته‌های خود را دربارهٔ توابع بازگشتی خلاصه کنیم. می‌دانیم که تابع f بازگشتی است اگر وتنها اگر (به‌عنوان یك رابطه) براساس قضیهٔ ۳۴ الف، در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیر باشد. نتیجتاً، هرتابع بازگشتی، به‌طور ضعیف در این نظریه نمایش‌پذیر است.

در بخش ۳.۳ گزارش گونه‌ای از توابع بازگشتی را عرضه نمودیم. افزون برآن، نشان دادیم که ردهٔ توابع بازگشتی تحت اعمال معینی، نظیر ترکیب (قضیهٔ ۳۳ر) و عمل «کوچکترین ریشه» (قضیهٔ ۳۳ز) بسته است. همچنین چندین تابع را می‌شناسیم که بازگشتی نیستند. روی هم تعداد $۲^{\aleph_۰}$ تابع از N^m به N وجود دارد که فقط $\aleph_۰$ تا ازآنها می‌توانند بازگشتی باشند. بدین‌ترتیب، علی‌رغم این امر که اغلب توابع معمولی که با آنها برخورد می‌کنیم (مانند بسجمله‌ها)، و در بخش ۳.۳ نشان داده شد، بازگشتی هستند، تعداد زیادی تابع غیربازگشتی‌وجود دارد. براساس‌بند ۱ فهرست بخش۳.۳، تابع مشخصهٔ یك مجموعهٔ غیربازگشتی، غیربازگشتی است. برای مثال، اگر $f(a) = ۱$ در صورتی که a عددگودل یك عضو $\mathrm{Cn}\, A_E$ باشد، و $f(a) = ۰$ در بقیهٔ موارد، آنگاه f بازگشتی نیست.

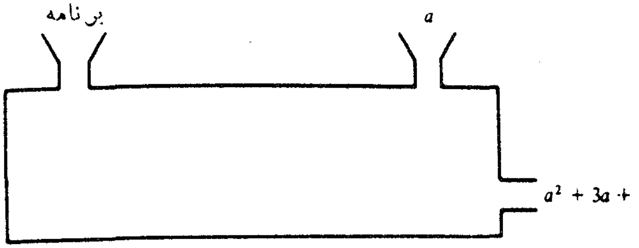
صورت نرمال

به‌ازای هرتابع محاسبه‌پذیر، مانند تابع بسجملهٔ $a^۲ + ۳a + ۵$، می‌توان علی‌الاصول یك کامپیوتر رقمی‌ساخت به‌طوری که اگر a به‌آن داده شود، بروندادآن $a^۲ + ۳a + ۵$ باشد (شکل۱۱). ولی اگر در آن صورت تابع متفاوتی را محاسبه کنید بایدکامپیوتر متفاوتی بسازید. (یا سیم کشی همین‌کامپیوتر راکه دارید عوض کنید.) مدتها پیش‌تشخیص داده شد که معمولاً مطلوبترآن‌است‌که تنها یك‌کامپیوتر که می‌تواند برنامه را ذخیره کند وهمه گونه محاسبه‌ای انجام دهد بسازیم و به‌این‌کامپیوتر، هم a و هم برنامهٔ محاسبهٔ بسجمله را بدهیم (شکل۱۲). این‌کامپیوتر «عمومی» دو ورودی دارد، و هرتابع محاسبه‌پذیر یك موضعی را محاسبه می‌کند (اگرفضای‌حافظهٔ‌کافی دراختیارداشته‌باشد)، مشروط براین که‌برنامهٔ درستی به آن داده شود. البته برنامه‌هایی وجود دارند، همان‌گونه‌که هربرنامه‌نویس‌خود بسیاری ازآنها را در عمل پیداکرده است، که به‌هیچ تابعی در N مربوط نمی‌شوند.

در این زیربخش‌و زیربخش بعدی، آنچه راکه هم‌اکنون گفتیم تکرارخواهیم کرد، اما با توابع بازگشتی‌وهمراه با اثبات‌آنها. برای‌کامپیوترعمومی‌خود، یك رابطهٔ بازگشتی $T_۱$ و یك تابع بازگشتی U دراختیار خواهیم داشت. سپس به‌ازای هرتابع بازگشتی



شکل ۱۱. کامپیوتر یك منظوره.



شکل ۱۲. کامپیوتر همه منظوره.

$f: N \to N$ عددی مانند e (که مشابه یك برنامه است) وجود خواهد داشت به‌طوری که

$$f(a) = U(\text{کوچکترین } k \text{ که } \langle e, a, k\rangle \in T_1)$$
$$= U(\mu k\,\langle e, a, k\rangle \in T_1),$$

معادلهٔ دوم شکل کوتاه‌نوشت معادلهٔ اول است. درواقع e دراینجا عدد گودل فرمول φ است که نمایشگر (یا حداقل نمایشگر به‌طور ضعیف) f در $\mathrm{Cn}\, A_E$ می‌باشد. و اعداد k، که به‌ازای آنها $\langle e, a, k\rangle \in T_1$، هم $f(a)$ وهم عدد گودل استنتاجی برای $\varphi(\mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{0})$ از A_E را رمزگذاری خواهدکرد.

تعریف. به‌ازای هرعدد درست مثبت m، فرض کنیم T_m یك رابطهٔ $(m+2)$ تایی باشدکه به‌آن یك $(m+2)$ گانهٔ $\langle e, a_1, \dots, a_m, k\rangle$ تعلق دارد اگر وتنها اگر

(یك) e عدد گودل یك فرمول φ است که در آن تنها $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}$ آزاد ظاهرمی‌شوند؛

(دو) k یك عدد دنباله‌ای به‌طول ۲ است، و $(k)_0$ عدد گودل یك استنتاج از A_E برای $\varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{0}, \dots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{0}, \mathbf{S}^{(k)_1}\mathbf{0})$ است.

ایدهٔ مطلب آن است که به‌ازای هرتابع یك موضعی f می‌توانیم نخست e را به‌عنوان عدد گودل یك فرمول φ که f را (به‌عنوان یك رابطه) به‌طورضعیف می‌نماید درنظر بگیریم. در آن صورت می‌دانیم که به‌ازای هر a و b،

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^a\mathbf{o}, \mathbf{S}^b\mathbf{o})$$ اگر و تنها اگر $b = f(a)$.

بنابراین، هرعدد k که عبارت (دو)ی تعریف فوق دربارهٔ آن صادق باشد باید با $\langle (k)_\circ, f(a)\rangle$ برابر فرض شود، که در آن $(k)_\circ$ عددگودل یک استنتاج برای $\varphi(\mathbf{S}^a\mathbf{o}, \mathbf{S}^{f(a)}\mathbf{o})$ از A_E است. (در اینجا از تعریف معمولی T_m، با ملزم نساختن این که k حتی‌الامکان کوچک باشد، فاصله می‌گیریم.)

به‌جای تابع «برونداد»، U تابع

$$U(k) = (k)_1$$

را درنظرمی‌گیریم. این U بازگشتی است و در وضعیت توصیف شده درپاراگراف پیشین، داریم $U(k) = f(a)$.

لم ۳۸الف. به‌ازای هر m، رابطهٔ T_m بازگشتی است.

اثبات. به‌ازای $m = 2$ داریم $\langle e, a_1, a_2, k\rangle \in T_2$ اگر و تنها اگر e عددگودل یک فرمول، $e * (\forall v_1\ \forall v_2\ \forall v_3)$ # عددگودل یک جمله، k یک عدد دنباله‌ای به‌طول ۲، $(k)_\circ$ عددگودل یک استنتاج از A_E برای

$$(\mathrm{Sb}(\mathrm{Sb}\,(e, \#\, v_1, g(a_1)), \#\, v_2, g(a_2)), \#\, v_3, g((k)_1)),$$

است که درآن $g(n) = \#\, \mathbf{S}^n\mathbf{o}$. از بخش۴.۳ می‌دانیم که همهٔ اینها بازگشتی‌هستند. ■

قضیهٔ ۳۸ب. (الف) به‌ازای هرتابع بازگشتی $f: N^m \to N$، عددی مانند e وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر a_1، . . . ، a_m داریم:

$$f(a_1, \ldots, a_m) = U(\mu k\, \langle e, a_1, \ldots, a_m, k\rangle \in T_m).$$

(بالاخص، چنین عدد k وجود دارد.)

(ب) برعکس، به‌ازای هر e که $\forall a_1 \cdots a_m \exists k\, \langle e, a_1, \ldots, a_m, k\rangle \in T_m$، تابعی که مقدار آن به‌ازای a_1، . . . ، a_m برابر با $U(\mu k\, \langle e, a_1, \ldots, a_m, k\rangle \in T_m)$ است، بازگشتی می‌باشد.

اثبات. قسمت (ب) بیدرنگ از این امرنتیجه می‌شود که U و T_m بازگشتی‌هستند. در مورد قسمت (الف)، فرض می‌کنیم e عددگودل یک فرمول φ که به‌طور ضعیف f را در $\mathrm{Cn}\, A_E$ می‌نماید، باشد. به‌ازای هر $\vec{a}$ داده شده، می‌دانیم که

$$A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^{a_1}\mathbf{o}, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}\mathbf{o}, \mathbf{S}^{f(\vec{a})}\mathbf{o}).$$

اگرعدد گودل یک استنتاج از A_E برای این جمله را b بگیریم، آنگاه $\langle e, \vec{a}, \langle d, f(\vec{a})\rangle\rangle \in T_m$.

بنابراین یک k وجود دارد که به‌ازای آن داریم $\langle e, \vec{a}, k\rangle \in T_m$. و برای هرچنین k،

می‌دانیم که $(\mathrm{S}^{(k)_1}0$ ،$A_E \vdash \varphi(\mathrm{S}^{a_1}0, \ldots, \mathrm{S}^{a_m}0$ زیرا که $(k)_0$ عبارت است از عدد گودل یك استنتاج. نتیجتاً، براساس انتخاب ما از φ، $U(k)=(k)_1=f(\overrightarrow{a})$. بنابراین داریم $U(\mu k\ \langle e, \overrightarrow{a}, k\rangle \in T_m)=f(\overrightarrow{a})$. ■

این قضیه، که کلینی[1] در ۱۹۳۶ ثابت کرده است، نشان می‌دهد که توابع بازگشتی درصورت نرمال خود

$$f(\overrightarrow{a})=U(\mu k\ \langle e, \overrightarrow{a}, k\rangle \in T_m)$$

نمایش‌پذیر است. بنابراین یك ماشین‌محاسبه‌کننده که قادر به‌محاسبهٔ U و تابع مشخصهٔ T_1 باشد یك‌کامپیوتر «عمومی» برای توابع بازگشتی یك موضعی خواهد بود. درونداد e متناظر با برنامه می‌باشد، و اگرقرار باشد نتیجه‌ای به‌دست آید باید با دقت گزیده شود (یعنی، اگرقرار باشد که kای وجود داشته باشد به‌طوری که $\langle e, a, k\rangle \in T_1$).

توابع بازگشتی جزئی

هرگاه زمینهٔ وسیعتر توابع جزئی را درنظر بگیریم، نظریهٔ توابع بازگشتی طبیعیتر می‌شود.

تعریف. یك تابع جزئی m موضعی تابعی است مانند f که $\mathrm{dom}\ f \subseteq N^m$ و $\mathrm{ran}\ f \subseteq N$ و اگر $\overrightarrow{a} \notin \mathrm{dom} f$، آنگاه می‌گوییم $f(\overrightarrow{a})$ تعریف نشده است. اگر $\mathrm{dom}\ f = N^m$، آنگاه f تام نامیده می‌شود.

به‌خواننده هشدار داده می‌شود که انتخاب واژه‌های «جزئی» و «تام» (یا واژهٔ «تعریف نشده») را جدی نگیرد. یك تابع جزئی f ممکن است تام باشد و ممکن است نباشد؛ واژه‌های «جزئی» و «تام» متضاد نیستند.

کار را با بررسی آن توابع جزئی که به‌طورشهودی محاسبه‌پذیرند، شروع می‌کنیم.

***تعریف.** یك تابع جزئی m موضعی f محاسبه‌پذیر است اگر وتنها اگر یك‌روش کارامد وجود داشته باشد به‌طوری که (الف) به‌ازای‌هر mگانهٔ داده‌شدهٔ $\overrightarrow{a}$ در $\mathrm{dom}\ f$، این روش $f(\overrightarrow{a})$ را به‌دست دهد؛ و (ب) به‌ازای هر mگانهٔ $\overrightarrow{a}$ که در $\mathrm{dom}\ f$ نیست، این روش هیچ بروندادی نداشته باشد.

این تعریف، تعریف پیشین توابع تام را توسعه می‌دهد. درآن موقع نتیجه‌ای را به اثبات رساندیم (قضیهٔ ۳۳ح)، که بخشی از آن در مورد توابع جزئی تعمیم می‌یابد.

---

1. Kleene

•**قضیهٔ ۳۸پ.** تابع جزئی m موضعی f محاسبه‌پذیر است اگر و تنها اگر f (به‌عنوان یك رابطهٔ $(m+1)$تایی) شمارش‌پذیر کارامد باشد.

اثبات. این اثبات یادآور اثبات قضیهٔ ۱۷ث است. نخست فرض کنیم که طریقی برای شمارش کارامد f وجود داشته باشد. اگر یك m گانهٔ $\vec{a}$ داده شده باشد، در آن صورت فهرست رابطه‌ها را که روش ما بیرون می‌دهد، می‌آزماییم. اگر یك $(m+1)$ گانه همراه با $\vec{a}$ ظاهر شود، و تنها در این‌صورت، آخرین مؤلفهٔ آن را با نام $f(\vec{a})$ چاپ می‌کنیم

برعکس، فرض کنیم f محاسبه‌پذیر باشد و نخست فرض کنیم f یك تابع جزئی یك موضعی باشد. می‌توانیم با روش زیرین f را به‌عنوان یك رابطه شمارش کنیم:

۱. یك دقیقه صرف محاسبهٔ $f(0)$ می‌کنیم.
۲. دو دقیقه صرف محاسبهٔ $f(0)$ می‌کنیم، آنگاه دو دقیقه صرف محاسبهٔ $f(1)$.
۳. سه دقیقه صرف محاسبهٔ $f(0)$، سه دقیقه صرف محاسبهٔ $f(1)$، وسه دقیقه صرف محاسبهٔ $f(2)$ می‌کنیم

والی آخر. البته، وقتی که یکی از این محاسبات نتیجه‌ای تولید کرد، در آن صورت زوج مزبور را در فهرست عضوهای رابطهٔ f قرار می‌دهیم
درمورد یك تابع جزئی m موضعی محاسبه‌پذیر، به‌جای محاسبهٔ مقدار تابع f به‌ازای ۰، ۱، ۲، ... مقدار آن را به‌ازای

$$\langle (0)_0, \ldots, (0)_{m-1}\rangle, \langle (1)_0, \ldots, (1)_{m-1}\rangle, \langle (2)_0, \ldots, (2)_{m-1}\rangle,$$

وغیره محاسبه می‌کنیم. ■

درمورد تابع تام محاسبه‌پذیر f نیز توانستیم نتیجه بگیریم که f یك رابطهٔ تصمیم‌پذیر است. اما این حکم ممکن است درمورد fای که تام نباشد نقض شود. برای مثال، فرض کنیم

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } a \in \sharp\,\mathrm{Cn}\,A_E \\ \text{تعریف نشده} & \text{دربقیهٔ موارد} \end{cases}$$

در آن صورت f محاسبه‌پذیر است. (ما $f(a)$ را با شمارش $\sharp\,\mathrm{Cn}\,A_E$ و جستجوی a محاسبه می‌کنیم.) اما f یك رابطهٔ تصمیم‌پذیر نیست، چه در این‌صورت $\sharp\,\mathrm{Cn}\,A_E$ تصمیم‌پذیر خواهد شد. براساس این مثال و قضیهٔ پیشین، تعریفی را برای تابع جزئی محاسبه‌پذیر انتخاب می‌کنیم.

تعریف. تابع جزئی بازگشتی تابعی است جزئی که به‌عنوان یك رابطهٔ شماره‌پذیر

بازگشتیانه باشد.

به‌خواننده باید توجه داده شود که «تابع جزئی بازگشتی» یك اصطلاح تقسیم‌ناپذیر است؛ یك تابع جزئی بازگشتی (به‌عنوان یك رابطه) لزومی ندارد که بازگشتی باشد. لکن درمورد تابع تام، اصطلاحات ما باگذشته سازگار است.

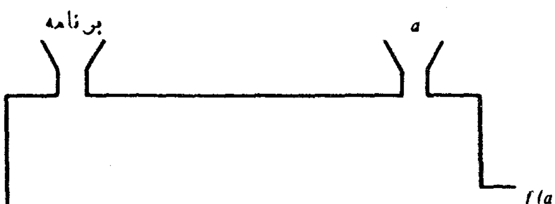
قضیهٔ ۳۸ت. فرض کنیم $f: N^m \to N$ یك تابع‌تام باشد. دراین‌صورت f یك تابع جزئی بازگشتی خواهد بود اگر وتنها اگر f (به‌عنوان یك رابطه) بازگشتی باشد.

اثبات. اگر f (به‌عنوان یك رابطه) بازگشتی باشد، آنگاه به‌طریق اولی f شماره‌پذیر بازگشتیانه خواهد بود. برعکس، فرض کنیم f شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد. ازآنجا که f تام است،

$$f(\vec{a}) \neq b \Leftrightarrow \exists c[f(\vec{a}) = c \, , \, b \neq c].$$

طرف راست نشان می‌دهد که متمم f نیز شماره‌پذیر بازگشتیانه است. بدین‌ترتیب براساس قضیهٔ ۳۵ج، f بازگشتی است. ■

در بحث اول راجع به‌قضایای صورت نرمال، شکل یك دستگاه دو ورودی را ترسیم کردیم (شکل۱۳). در مورد هر تابع جزئی محاسبه‌پذیر، برنامه‌ای وجود دارد که آن را محاسبه می‌کند. ولی در اینجا عکس مسئله صادق است: هر برنامه یك تابع جزئی محاسبه‌پذیر تولید می‌کند. البته تعداد زیادی از برنامه‌ها تابع تهی تولید خواهندکرد، لکن‌تابع تهی نیزیك تابع جزئی محاسبه‌پذیر است.



شکل۱۳. کامپیوتر با برنامه برای f.

در مورد توابع جزئی بازگشتی همان ملاحظات به‌کار می‌رود. به‌ازای هر $e \in N$، تابع جزئی m موضعی $[\![e]\!]_m$ را به‌صورت

$$[\![e]\!]_m(a_1, \ldots, a_m) = U(\mu k \, \langle e, a_1, \ldots, a_m, k \rangle \in T_m)$$

تعریف می‌کنیم. دست راست این‌تساوی،اگرچنین kای وجود نداشته باشد، باید تعریف‌ناشده ملحوظ گردد. به‌عبارت دیگر،

$$\vec{a} \in \operatorname{dom}[\![e]\!]_m \text{ اگروتنها اگر } \exists k\, \langle e, a_1, \ldots, a_m, k\rangle \in T_m،$$

که درآن صورت مقدار $[\![e]\!]_m(\vec{a})$ با معادلهٔ بالا داده می‌شود.

قضیهٔ صورت نرمال (کلینی، ۱۹۴۳). (الف) تابع جزئی $(m+1)$ موضعی‌که مقدار آن به‌ازای $\langle e, a_1, \ldots, a_m\rangle$ عبارت است از $[\![e]\!]_m(a_1, \ldots, a_m)$، یك تابع جزئی بازگشتی است.

(ب) به‌ازای هر $e \geqslant 0$، تابع $[\![e]\!]_m$ یك تابع جزئی بازگشتی m موضعی است.

(پ) به‌ازای هرتابع جزئی بازگشتی m موضعی، عددی مانند e هست‌که این تابع برابر است با $[\![e]\!]_m$.

اثبات. (الف) داریم:

$$[\![e]\!]_m(\vec{a}) = b \Leftrightarrow \exists k[\langle e, \vec{a}, k\rangle \in T_m,\ U(k) = b,\ (\forall k' < k)\ \langle e, \vec{a}, k'\rangle \notin T_m]$$

بخشی‌که داخل کروشه است بازگشتی‌است، پس، این تابع (به‌عنوان یك رابطه) شماره‌پذیر بازگشتیانه است.

(ب) اثبات بالا را می‌توان به‌کاربرد، و در اینجا e ثابت نگهداشته می‌شود.

(پ) فرض‌کنیم f یك تابع جزئی بازگشتی m موضعی باشد، در این‌صورت $\{\langle\vec{a}, b\rangle : f(\vec{a}) = b\}$ شماره‌پذیر بازگشتیانه خواهد بود. بنابراین یك فرمول φ وجود داردکه به‌طورضعیف این‌رابطه را در$\operatorname{Cn} A_E$ می‌نمایاند. ثابت می‌کنیم‌که $f = [\![\#\varphi]\!]_m$.

زیرا اگر$f(\vec{a}) = b$،آنگاه $A_E \vdash \varphi(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0, \mathbf{S}^{b}0)$.بدین‌ترتیب kای‌وجود داردکه $\langle \#\varphi, \vec{a}, k\rangle \in T_m$. به‌ازای‌این k داریم $U(k) = b$،زیرا به‌ازای$c \neq b$ داریم $A_E \nvdash \varphi(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0, \mathbf{S}^{c}0)$. همچنین اگر$f(\vec{a})$ تعریف نشده باشد،آنگاه به‌ازای هر c داریم $A_E \nvdash \varphi(\mathbf{S}^{a_1}0, \ldots, \mathbf{S}^{a_m}0, \mathbf{S}^{c}0)$. پس در اینجا $[\![\#\varphi]\!]_m$ نیزتعریف نشده خواهد بود. ■

تابع $[\![e]\!]_m$ تابع جزئی‌بازگشتی m موضعی‌با اندیس e نامیده می‌شود. قسمت (پ) قضیهٔ صورت نرمال می‌گویدکه هر تابع جزئی بازگشتی دارای اندیس است. این اثبات نشان می‌دهدکه عددگودل فرمولی‌که به‌طور ضعیف یك تابع را نمایش می‌دهد همواره اندیس تابع مزبور است.

حال $[\![0]\!]_1$، $[\![1]\!]_1$، ... یك اندیس‌کنندهٔ مناسبی برای توابـع جزئی بازگشتی یك موضعی است. تابع $[\![e]\!]_1$ با «دستورات» رمزگذاری شده به‌وسیلهٔ e تـولید می‌شود. البته، آن تابع تهی خواهد بود مگر این‌که e عدد گودل یك فرمول باشد وشرایط دیگری نیز برقرار باشند.

همهٔ توابع تام بازگشتی در شمارش توابع جزئی بازگشتی منظور می‌گردند. ولی با نگاه‌کردن بریك عدد e نمی‌توانیم با روشی کارامد بگوییم‌که این یك اندیس یك تابع تام است یا نه.

قضیهٔ ۳۸ث. $\{e : [\![e]\!]_1$تام است$\}$ بازگشتی نیست.

اثبات. این مجموعه را A می‌نامیم. تابعی راکه به‌صورت زیرتعریف می‌گردد در نظرمی‌گیریم:

$$f(a)=\begin{cases}[\![a]\!]_1(a)+1 & \text{اگر } a\in A\\ 0 & \text{اگر } a\notin A\end{cases}$$

در آن صورت f، به‌دلیل ساختمانش، تام است. آیا بازگشتی است؟ داریم:

$$f(a)=b \Leftrightarrow [(a\notin A\,,b=0) \text{ یا } (a\in A\,,\exists k(\langle a,a,k\rangle\in T_1\,,$$
$$b=U(k)+1\,,(\forall j<k)\,\langle a,a,j\rangle\notin T_1))].$$

بنابراین اگـر A بازگشتی باشد، آنگاه f (به‌عنوان یك رابطـه) شماره‌پذیر بازگشتیانه خواهد بود. لکن درآن صورت f یك تابع بازگشتی‌تام است، وبنابراین، به‌ازای عددی مانند $e\in A$، با $[\![e]\!]_1$ برابرخواهد بود. ولی $f(e)=[\![e]\!]_1(e)+1$، بنابراین نمی‌توانیم داشته باشیم $f=[\![e]\!]_1$. این تناقض نشان می‌دهدکه A بازگشتی نیست. ■

نشان دادن این‌که A در Π_2 است، مشکل‌نیست. این‌رده‌بندی بهترین‌رده‌بندی ممکن است، زیرا می‌توان نشان دادکه A در Σ_2 نیست.

قضیهٔ ۳۸ج. مجموعهٔ

$$K=\{a : [\![a]\!]_1(a) \text{ تعریف شده است}\}$$

شماره‌پذیر بازگشتیانه است ولی بازگشتی نیست.

اثبات. K شماره‌پذیر بازگشتیانه است، زیرا $a\in K \Leftrightarrow \exists k\,\langle a,a,k\rangle\in T_1$.
برای اثبات این‌که K نمی‌تواند بازگشتی باشد، تابعی راکه به‌صورت زیرتعریف می‌شود درنظرمی‌گیریم:

$$g(a)=\begin{cases}[\![a]\!]_1(a)+1 & a\in K \text{ اگر } \\ 0 & a\notin K \text{ اگر }\end{cases}$$

این یك تابع تام است. دقیقاً به‌مانند قضیهٔ پیشین، K نمی‌تواند بازگشتی باشد. ■

نتیجهٔ ۳۸چ (حل‌ناپذیری مسئلهٔ توقف). مجموعهٔ

$$\{\langle a,\, b\rangle : \text{تعریف شده است } [\![b]\!]_1(a)\}$$

بازگشتی نیست.

این نتیجه به ما می‌گوید که هرگاه یك برنامهٔ b به‌ازای یك تابع جزئی بازگشتی و یك درونداد a داده شده باشد، هیچ راه مؤثری برای تشخیص این‌که تابع $[\![b]\!]_1$ در a تعریف شده است یا نه وجود ندارد.

می‌توانیم یك اندیس‌کنندهٔ روابط شماره‌پذیر بازگشتیانه را با به‌کاربردن مشخص‌کنندهٔ زیرین به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۳۸ح. یك رابطه روی N شماره‌پذیر بازگشتیانه است اگر و تنها اگر دامنهٔ یك تابع جزئی بازگشتی باشد.

اثبات. دامنهٔ هر رابطهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه خود رابطه‌ای است شماره‌پذیر بازگشتیانه؛ مراجعه کنید به‌قسمت۴ قضیهٔ ۳۵ث. بویژه، دامنهٔ هر تابع جزئی بازگشتی به‌طور بازگشتی شمارش‌پذیر است.

برعکس، فرض کنیم Q یك رابطهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه باشد، که در آن

$$\vec{a}\in Q \Leftrightarrow \exists b\ \langle \vec{a},\, b\rangle\in R,$$

و R بازگشتی است. فرض کنیم

$$f(\vec{a})=\mu b\langle \vec{a},\, b\rangle\in R;$$

یعنی،

$$f(\vec{a})=b \Leftrightarrow \langle \vec{a},\, b\rangle\in R\,,\ (\forall c< b)\ \langle \vec{a},\, c\rangle\notin R.$$

درآن صورت f، به‌عنوان یك رابطه، بازگشتی است. بنابراین f یك تابع جزئی بازگشتی است. که بوضوح، دامنهٔ آن Q است. ■

بنابراین اندیس‌کردن توابع جزئی بازگشتی به‌اندیس‌کردن روابط شماره‌پذیر بازگشتیانه می‌انجامد. تعریف می‌کنیم

$$W_e=\operatorname{dom}[\![e]\!]_1.$$

دراین‌صورت $W_{\circ}$، $W_{\backslash}$، $W_{\text{۲}}$، ... فهرستی است از همهٔ زیرمجموعه‌های شماره‌پذیر بازگشتیانهٔ N. در قضیهٔ ۳۷ث نشان دادیم که $\{e : W_e = N\}$ بازگشتی نیست، به‌طریق مشابه، قضیهٔ ۳۸ج حکم می‌کند که $\{e : e \in W_e\}$ بازگشتی نیست. رابطهٔ Q را به‌صورت

$$Q = \{\langle a, b\rangle : a \in W_b\}$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت Q شماره‌پذیر بازگشتیانه خواهد بود، زیرا

$$\langle a, b\rangle \in Q \Leftrightarrow \exists k \langle b, a, k\rangle \in T_{\backslash}.$$

افزون براین، Q برای مجموعه‌های شماره‌پذیر بازگشتیانه عمومی است، به‌این‌معنا که به‌ازای هرمجموعهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه مانند $A \subseteq N$، عددی مانند b وجود دارد که $A = \{a : \langle a, b\rangle \in Q\}$. حل‌ناپذیری مسئلهٔ توقف می‌تواند چنین بیان شود: Q بازگشتی نیست.

تحویل مسائل تصمیم‌گیری

فرض‌کنیم یك تابع جزئی بازگشتی دوموضعی f داریم. در این صورت ادعا می‌کنیم، که، مثلاً، تابع g که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(a) = f(\text{۳}, a)$$

نیز یك تابع جزئی بازگشتی است. براساس‌محاسبه‌پذیری شهودی، این مطلب واضح است؛ چه می‌توان با قراردادن ۳ به‌جای متغیر اول وسپس با دنبال‌کردن دستورالعملهای مربوط به f، مقدار g را محاسبه‌کرد. با صورتبندی‌کردن این استدلال می‌توان اثباتی به‌دست آورد. فرمولی مانند $\varphi = \varphi(\mathbf{v}_{\backslash}, \mathbf{v}_{\text{۲}}, \mathbf{v}_{\text{۳}})$ وجود دارد‌که به‌طورضعیف f را (به‌عنوان یك رابطه) در$\text{Cn}\, A_E$ می‌نمایاند. درآن صورت g به‌طورضعیف با $\varphi(\mathbf{S}^{\text{۳}}\mathbf{0}, \mathbf{v}_{\backslash}, \mathbf{v}_{\text{۲}})$ نمایش داده می‌شود مشروط براین‌که $\mathbf{v}_{\backslash}$ و $\mathbf{v}_{\text{۲}}$ در φ به‌جای $\mathbf{v}_{\text{۲}}$ و $\mathbf{v}_{\text{۳}}$ جانشین شدنی باشند. (در غیراین‌صورت، همواره می‌توان یك‌گونهٔ الفبایی از φ را به‌کاربرد).

این مطالب معنای خیلی عمیق ندارد. لکن اگر در آنچه‌گفته شد تأمل کنیم، حقیقتی ظریفتر، ادراك می‌شود. ما توانایی آن را داشتیم‌که دستورات مربوط به f را به‌روشی کارامد به‌دستورالعملهای مربوط به g تبدیل‌کنیم. بنابراین باید یك تابع بازگشتی وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای یك اندیس داده شده برای f و عدد ۳، یك اندیس برای g تولیدکند.

قضیهٔ پارامتری‌کردن. بهازای هر $m \geqslant \text{۱}$ وهر $n \geqslant \text{۱}$ یك تابع بازگشتی ϱ وجود دارد به‌طوری‌که بهازای هر e، $\vec{a}$، $\vec{b}$،

$$[\![e]\!]_{m+n}(a_{\backslash}, \ldots, a_m, b_{\backslash}, \ldots, b_n) = [\![\varrho(e, a_{\backslash}, \ldots, a_m)]\!]_n(b_{\backslash}, \ldots, b_n).$$

(البته دراینجا تساوی به‌این معناست که اگریك طرف تعریف شود، آنگاه طرف دیگرنیز تعریف می‌شود، و مقادیر آنها برهم منطبق‌اند.)

درطرف چپ تساوی $\vec{a}$ متشکل ازمتغیرهای مربوط به‌تابع $[\![e]\!]_{m+n}$ است؛ درطرف راست $\vec{a}$ متشکل از پارامترهایی است که تابع $[\![\varrho(e, \vec{a})]\!]_n$ به‌آن بستگی دارد. درمثال قبلی داشتیم $m = n = 1$ و $a_1 = 3$. از آنجاکه ϱ به m و n بستگی دارد، علامت «ϱ^m_n» منطقاً ارجح است، ولی ما فقط «ϱ» را به‌کار می‌بریم.

اثبات، به‌ازای $m = n = 1$. می‌توان اثباتی مشابه اثباتی که در بحث مربوط به قضیهٔ پیشین به‌آن اشاره شد، ارائه‌کرد. لکن برای اجتناب از داشتن گونه‌های الفبایی، یك استراتژی کمی متفاوت را به‌کار می‌بریم.

از قضیهٔ صورت نرمال می‌دانیم که تابع جزئی سه موضعی h که به‌صورت

$$h(e, b, a) = [\![e]\!]_2(a, b)$$

تعریف می‌شود یك تابع جزئی بازگشتی است. بنابراین فرمولی مانند ψ وجود دارد که به‌طور ضعیف h را (به‌عنوان یك رابطه) می‌نمایاند. می‌توان فرض کرد که متغیرهای $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ در ψ مسور نیستند. پس می‌توانیم قراردهیم:

$$\begin{aligned}\varrho(e, a) &= \#\psi(\mathbf{S}^e\mathbf{0}, \mathbf{S}^a\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\\ &= \mathrm{Sb}(\mathrm{Sb}(\mathrm{Sb}(\mathrm{Sb}(\#\psi, \#\mathbf{v}_1, \#\mathbf{S}^e\mathbf{0}), \#\mathbf{v}_2, \#\mathbf{S}^a\mathbf{0}), \#\mathbf{v}_3,\\ &\qquad \#\mathbf{v}_1), \#\mathbf{v}_4, \#\mathbf{v}_2).\end{aligned}$$

در آن صورت $\varrho(e, a)$ عددگودل فرمولی است که به‌طور ضعیف تابع $g(b) = [\![e]\!]_2(a, b)$ را می‌نمایاند. بنابراین یك اندیس برای g می‌باشد. ■

اکنون قضیهٔ پارامتری کردن را برای نشان دادن این‌که بعضی‌ازمجموعه‌ها بازگشتی نیستند مورد استفاده قرار می‌دهیم. می‌دانیم که $K = \{a : [\![a]\!]_1(a)$ تعریف شده است$\}$ بازگشتی‌نیست. گاهی درمورد مجموعهٔ غیربازگشتی A می‌توانیم یك تابع بازگشتی (کلی) g بیابیم به‌طوری که

$$a \in K \Leftrightarrow g(a) \in A$$

یا یك تابع بازگشتی (تام) g' بیابیم به‌طوری که

$$\alpha \in k \Leftrightarrow g'(\alpha) \in A.$$

درهردو حالت بیدرنگ نتیجه می‌شود که A نمی‌تواند بازگشتی باشد. چه اگر بازگشتی باشد، K هم بازگشتی خواهد بود. (در حالت پیشین K چند به‌یك تحویل‌پذیر A گفته

می‌شود؛ در حالت اخیر مکمل K، یعنی $\bar{K}$، چند به‌یك تحویل‌پذیر به A است.) تابع g یا g' را غالباً می‌توان از قضیهٔ پارامتری‌کردن به‌دست آورد.

مثال. $\{a : W_a = \varnothing\}$ بازگشتی نیست.

اثبات. این مجموعه را A می‌نامیم. ابتدا، توجه کنید که $A \in \Pi_1$، زیرا $W_a = \varnothing$ اگر و فقط اگر $\forall b\, \forall k\, \langle a, b, k\rangle \notin T_1$. نتیجتاً، K نمی‌تواند چند به یك تحویل‌پذیر به A باشد، لکن معقول است احتمال دهیم که $\bar{K}$ چنین باشد. یعنی، می‌خواهیم یك تابع بازگشتی تام g داشته باشیم به‌طوری که

$$\llbracket a \rrbracket_1(a) \text{ تعریف نشده است} \Leftrightarrow \operatorname{dom}\llbracket g(a)\rrbracket_1 = \varnothing.$$

این برقرار خواهد بود اگر به‌ازای هر b داشته باشیم $\llbracket g(a)\rrbracket_1(b) = \llbracket a\rrbracket_1(a)$. بنابراین با تابع جزئی بازگشتی

$$f(a, b) = \llbracket a\rrbracket_1(a)$$

شروع می‌کنیم و قرار می‌دهیم $g(a) = \varrho(\hat{f}, a)$، که در آن $\hat{f}$ اندیسی برای f است. در آن صورت

$$\llbracket g(a)\rrbracket_1(b) = \llbracket \varrho(\hat{f}, a)\rrbracket_1(b) = f(a, b) = \llbracket a\rrbracket_1(a).$$

بدین‌ترتیب این g نشان می‌دهد که $\bar{K}$ چند به‌یك تحویل‌پذیر به A است. ■

قضیهٔ ۳۸خ (رایس[1]، ۱۹۵۳). فرض کنیم $\mathscr{C}$ یك مجموعه از توابع جزئی بازگشتی یك موضعی باشد. دراین‌صورت، مجموعهٔ $\{e : \llbracket e\rrbracket_1 \in \mathscr{C}\}$ متشکل از اندیسهای عضوهای $\mathscr{C}$ بازگشتی است اگر و تنها اگر یا $\mathscr{C}$ تهی باشد یا $\mathscr{C}$ شامل همهٔ توابع جزئی بازگشتی یك موضعی باشد.

اثبات. فرض کنیم $I_{\mathscr{C}} = \{e : \llbracket e\rrbracket_1 \in \mathscr{C}\}$ مجموعهٔ اندیسهای اعضای $\mathscr{C}$ باشد.

حالت ۱: فرض کنیم تابع تهی $\varnothing$ در $\mathscr{C}$ نباشد. اگر هیچ چیزی در $\mathscr{C}$ نباشد، کار تمام است، سپس فرض کنیم تابعی مانند ψ در $\mathscr{C}$ است. می‌توانیم نشان دهیم که K چند به‌یك تحویل‌پذیر به I است اگر یك تابع تام بازگشتی مانند g وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\llbracket g(a)\rrbracket_1 = \begin{cases} \psi & a \in K \text{ اگر} \\ \varnothing & a \notin K \text{ اگر} \end{cases}$$

زیرا در این‌صورت $g(a) \in I_{\mathscr{C}} \Leftrightarrow a \in K$.

1. Rice

از قضیهٔ پارامتری کردن، g را می‌توان با تعریف

$$g(a) = \varrho(e, a),$$

که در آن

$$[\![e]\!]_1(a, b) = \begin{cases} \psi(b) & \text{اگر } a \in K \\ \text{تعریف نشده است} & \text{اگر } a \notin K \end{cases}$$

به‌دست آورد. این تابع، یك تابع جزئی بازگشتی است، زیرا

$$[\![e]\!]_1(a, b) = c \Leftrightarrow a \in K \ , \psi(b) = c$$

وطرف راست شماره‌پذیر بازگشتیانه است.

حالت ۲ : $\varnothing \in \mathscr{C}$. در این صورت حالت یك را درمورد مکمل $\mathscr{C}$، یعنی $\bar{\mathscr{C}}$، به‌کار می‌بریم. در این صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که $I_{\bar{\mathscr{C}}}$ بازگشتی نیست. لکن $I_{\bar{\mathscr{C}}}$ مکمل $I_{\mathscr{C}}$ است، بنابراین $I_{\mathscr{C}}$ نمی‌تواند بازگشتی باشد. ■

مثالها. به‌ازای هر e ثابت، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ رایس داریم که مجموعهٔ $\{a : W_a = W_e\}$، چنانکه ثابت کردیم، بازگشتی نیست. به‌عنوان دو موردکاربرد دیگر قضیهٔ رایس، می‌توانیم بگوییم که $\{a : W_a$ نامتناهی است$\}$ و $\{a : W_a$ بازگشتی است$\}$ بازگشتی نیستند.

ماشینهای ثبات

تعاریف فراوان و معادلی برای ردهٔ توابع بازگشتی وجود دارند. بعضی ازاین تعاریف دستگاههای محاسبهٔ ایدآل را به‌کار می‌گیرند. این دستگاههای محاسبه شبیه‌کامپیوترهای رقمی هستند لکن از نظر حافظه از هرگونه محدودیتی آزادند. اولین تعریف از این‌گونه در ۱۹۳۶ توسط آلن تورینگ[1] به‌چاپ رسید؛ امیل‌پست[2] نیزکارمشابهی تقریباً درهمان ایام انجام داد. در اینجا گونه‌ای از این تعاریف راکه شفردسن[3] و استورگیس[4] (۱۹۶۳) ارائه داده‌اند عرضه خواهیم کرد.

یك ماشین ثبات تعدادی متناهی ثبات دارد، که با ۱، ۲، . . . ، K شماره‌گذاری شده‌اند. هرثباتی می‌تواند هرعدد طبیعی از هراندازه‌ای را انبارکند. عمل ماشین با یك برنامه تعیین می‌شود. یك برنامه، یك دنباله‌ای متناهی از دستورالعمل‌هاست که از فهرست زیرین استخراج شده‌اند:

$I\,r$ $(1 \leqslant r \leqslant K)$. «افزودن به‌ثبات شماره r.» اثر این دستورالعمل آن است که

---

1. Alan turing　　2. Emil Post　　3. Shepherdson
4. Sturgis

محتوای ثبات r را به‌اندازهٔ ۱ افزایش دهد. بعد ازاین‌کار، ماشین با دستورالعمل بعدی کار خود را ادامه می‌دهد.

$\mathrm{D}\,r$ $(1 \leqslant r \leqslant K)$. «کاستن از ثبات شماره r.» اثر این دستورالعمل به‌محتوای ثبات r بستگی دارد. اگر آن عدد غیرصفر باشد، در این صورت یك واحد از آن کم می‌کند و بعد ماشین‌کار خود را نه با دستورالعمل بعدی بلکه با دومین دستورالعمل پس‌از این‌ادامه می‌دهد. اما اگرمحتوای ثبات r صفرباشد، در این صورت ماشین به دستورالعمل بعدی می‌رود. به‌طور خلاصه: ماشین سعی می‌کند محتوای ثبات r راکاهش دهد و اگر در این‌کار موفق شود در این صورت دستورالعمل بعدی را انجام نمی‌دهد.

$\mathrm{T}q$ (q یك عدد صحیح است ــ مثبت، منفی، یاصفر). «انتقال q.» تمامی ثباتها بدون تغییر می‌مانند. ماشین به‌عنوان دستورالعمل بعدی، دستورالعمل qام بعد از این دستورالعمل را برمی‌گزیند (اگر $q \geqslant 0$)، یا دستورالعمل $|q|$ام پیش‌از این دستورالعمل را انتخاب می‌کند (اگر $q < 0$). اگرچنین دستورالعملی در برنامه نباشد، آنگاه ماشین توقف می‌کند. دستورالعمل $\mathrm{T}0$ به‌یك طوقه منجر می‌شود، یعنی ماشین این دستورالعمل را الی‌غیرالنهایه تکرار می‌کند.

مثالها ۱. برنامه برای پاك‌کردن ثبات ۷.

D	۷	سعی‌کن ۷ راکاهش دهی.
T	۲	برگرد وتکرارکن.
T	$-$۲	ایست.

۲. برنامه‌ای برای انتقال عددی از ثبات r به‌ثبات s.

ثبات s را پاك‌کن (برنامهٔ مثال اول را به‌کاربرید.)

D	r	از r یکی کم‌کن.
T	۳	توقف‌کن وقتی صفر است.
I	s	۱ به s اضافه‌کن.
T	$-$۳	تکرارکن.

این برنامه مجموعاً دارای هفت دستورالعمل است. و درپایان در ثبات r عدد صفر را برجای می‌نهد.

۳. برنامه‌ای برای افزودن محتوای ثبات ۱ به‌ثباتهای ۲ و ۳.

```
D ۱
T ۴
I ۲
I ۳
T −۴
```

۴. (جمع) فرض کنیم a و b در ثباتهای ۱ و ۲ باشند. می‌خواهیم $a+b$ را در ثبات ۳ داشته باشیم و در ضمن می‌خواهیم در پایان‌کار کماکان a و b در ثباتهای ۱ و ۲ بمانند.

	محتوای ثباتها			
ثبات ۳ را پاك کن.	a	b	۰	
محتوای ثبات ۱ را به‌ثبات ۴ منتقل کن.	۰	b	۰	a
محتوای ثبات ۴ را به‌ثباتهای ۱ و ۳ اضافه کن.	a	b	a	۰
محتوای ثبات ۲ را به‌ثبات ۴ منتقل کن	a	۰	a	b
ثبات ۴ را به‌ثباتهای ۲ و ۳ اضافه کن.	a	b	$a+b$	۰

این برنامه وقتی نوشته شود دارای بیست وهفت دستورالعمل است، اما سه دستورالعمل از میان آنها غیرضروری است. (درسطرچهارم ما با پاك‌کردن ثبات ۴کار را شروع می‌کنیم که قبلاً این‌کار انجام گرفته است.) در پایان عدد a را دوباره در ثبات ۱ داریم. اما در طول اجرای برنامه ثبات ۱ باید پاك شود؛ این تنها راه تعیین عدد a است.

۵. (تفریق) فرض کنیم $a \dot{-} b = \max(a-b, ۰)$. نوشتن این برنامه به‌خواننده محول می‌شود (تمرین ۱۰).

حال فرض کنیم f یك تابع جزئی n موضعی روی N باشد. ممکن است برنامه‌ای مانند P وجود داشته باشد بنحوی‌که اگر ماشین ثباتی را به‌کار اندازیم (درحالی‌که همهٔ ثباتهایی راکه P به‌کار می‌برد دراختیار داشته باشیم) و اعداد a_1، . . . ، a_n درثباتهای ۱، . . . ، n باشند و برنامهٔ P را به‌کاربیریم، آنگاه

(۱) اگر $f(a_1, \ldots, a_n)$ تعریف شده باشد، آنگاه محاسبه نهایتاً متوقف می‌شود در حالی‌که $f(a_1, \ldots, a_n)$ محتوای ثبات $n+۱$ است. افزون براین، محاسبه در جستجوی دستورالعمل $(P+۱)$م متوقف می‌شود که در آن p طول P است.

(۲) اگر $f(a_1, \ldots, a_n)$ تعریف نشده باشد، در آن صورت محاسبه هرگز متوقف نمی‌شود.

اگر چنین برنامه‌ای وجود داشته باشد، می‌گوییم P تابع f را محاسبه می‌کند.

قضیهٔ ۳۸د. فرض کنیم f یك تابـع جزئی باشد. در آن صورت برنامـه‌ای وجود دارد که f را محاسبه می‌کند اگر وتنها اگر f یك تابع جزئی بازگشتی باشد.

بدین‌ترتیب با به‌کار بردن ماشینهای ثبات دقیقاً به‌توابع جزئی بازگشتی دست می‌یابیم، رده‌ای که ابتدا برحسب نمایش‌پذیری درنظریه‌های اصل‌پذیرمتناهی‌ساز‌گار، تعریف شدند. این حقیقت که دو رهیافت کاملاً متفاوت همان ردهٔ توابع جزئی را پدید می‌آورند، ناظر براین است که این رده یك ردهٔ مهم است.

طرح اثبات. برای نشان دادن این‌که توابع محاسبه‌پذیر بـا ماشینهای ثبات همان توابع‌جزئی‌بازگشتی‌هستند، باید «محاسبات را حسابی کرد» به‌همان معنایی که استنتاجهای قیاسی را دربخش۳.۴ حسابی کردیم. یعنی، اعدادگودل را به‌برنامه‌ها ودنباله‌های مربوط به‌پیکربندی حافظه اسناد می‌دهیم. بعد باید بررسی کنیم که مفاهیم مربوطه، بعد از ترجمه شدن به‌روابط عددی با اعدادگودل، تمامـاً بازگشتی هستند. (بعـد از انجام این‌کار، از دیدگاهی کـه به‌اندازهٔ‌کافی عمومیت دارد، درمی‌یابیم کـه استنتاجهای قیاسی و محاسبات واقعاً دربارهٔ موضوع واحدی می‌باشند.)

برعکس، برای نشان دادن این‌که توابع جزئی بازگشتی‌با ماشینهای ثبات محاسبه‌پذیرند، باید مجدداً به‌بخشهای ۳.۳ و ۳.۴ مراجعه‌کرد، اما در آنجا قبلاً نشان داده شد که توابع جزئی بازگشتی در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نمایش‌پذیرند، حال در اینجا باید نشان دادکه این توابع با ماشینهای ثبات نیزمحاسبه‌پذیرهستند. این‌کار، آن‌طور هم‌که به‌نظرمی‌رسد مشکل نیست، زیرا اثباتها بعد ازچند صفحهٔ اول همان اثباتهای پیشین‌اند. برای این‌تشابه دلایلی وجود دارد. می‌توان نشان دادکه ردهٔ همهٔ توابع بازگشتی‌ازتعدادی تابع بازگشتی باعمل ترکیب (به‌معنای قضیهٔ ۳۳ر) وعمل «کوچکترین‌ریشه» (قضیهٔ ۳۳ز) پدید می‌آید. قسمت اعظم‌کار در بخشهای ۳.۳ و ۳.۴ مربـوط به‌بررسی این مطالب است. بنابراین وقتی کـه نشان داده شدکه هرتابع موجود در آن توابع اولیه با ماشین ثبات محاسبه‌پذیـر است و نشان دادکه ردهٔ توابع محاسبه‌پذیربا ماشینهای ثبات تحت ترکیب وعمل کوچکترین‌ریشه بسته است، آنگاه محاسبه‌پذیری همهٔ توابع بازگشتی نتیجه خواهد شد.

تمرین

۱. توابع f و g را به‌صورت

$$f(n)=\begin{cases} \circ & \text{اگر آخرین قضیه فرما صادق باشد} \\ 1 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

$$g(n)=\begin{cases} \circ & \text{اگردرجایی از بسط اعشاری } \pi \text{ دست‌کم} \\ & n \text{ بار رقم ۷ پی‌درپی تکرار شود} \\ 1 & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

تعریف کنید. آیا f بازگشتی است؟ آیا g بازگشتی است؟

۲. (الف) نشان دهیدکه برد هرتابع جزئی‌بازگشتی شماره‌پذیر بازگشتیانه است.
(ب) نشان دهیدکه برد هرتابع بازگشتی‌تام غیرکاهشی‌مجموعه‌ای است بازگشتی.

۳. (الف) فرض‌کنیم A یك زیرمجموعهٔ ناتهی و شماره‌پذیر بازگشتیانه از N باشد. نشان دهیدکه A برد یك تابع بازگشتی تام است.
(ب) نشان دهیدکه هر زیرمجموعهٔ نامتناهی و شماره‌پذیر بازگشتیانه از N شامل یك زیرمجموعهٔ بازگشتی نامتناهی است.

۴. نشان دهیدکه هرتابع جزئی بازگشتی دارای تعدادی نامتناهی اندیس است.

۵. مثالی از تابعی مانند f و یك عدد e عرضه‌کنید به‌طوری‌که به‌ازای هر a داشته باشیم:

$$f(a)=U(\mu k\langle e,\, a,\, k\rangle \in T_1)$$

لکن e عددگودل یك فرمول به‌طور ضعیف نمایشگر f در $\mathrm{Cn}\, A_E$ نباشد.

۶. نشان دهیدکه قضیهٔ پارامتری‌کردن می‌تواند با این شرط‌که ρ یك به‌یك است تقویت شود.

۷. به‌یاد آورید که اجتماع دو مجموعهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه مجموعه‌ای است شماره‌پذیر بازگشتیانه (تمرین ۷ از بخش ۵.۳). نشان دهیدکه یك تابع بازگشتی تام g وجود شماره دارد به‌طوری‌که $W_{g(a,b)}=W_a\cup W_b$.

۸. نشان دهیدکه $\{a: W_a$ دارای دوعضویا بیشتراست$\}$ در Σ_1 است ولی در Π_1 نیست.

۹. نشان دهیدکه‌هیچ مجموعهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه مانند A وجود نداردبه‌طوری که $\{[\![a]\!]_1 : a\in A\}$ برابر با ردهٔ توابع بازگشتی تام روی N باشد.

۱۰. برنامه‌های ماشین‌ثباتی را ارائه دهیدکه توابع زیرین را محاسبه کنند:
(الف) تفریق، $a \dot{-} b = \max(a-b, 0)$.
(ب) ضرب، $a \cdot b$.
(پ) $\max(a, b)$.

۱۱. فرض کنید یك برنامه برای ماشین ثبات وجود داردکه تابع جزئی n موضعی f را محاسبه می‌کند. نشان دهیدکه اعداد درست و مثبت r_1، . . . ، r_n (همه متمایزازهم) و اعداد p و k وجود دارندکه می‌توانیم یك برنامهٔ Q بیابیم به‌طوری‌کــه هرگاه ماشین ثباتی را (با داشتن جمیع ثباتهایی‌که Q به‌کار می‌برد) با اعداد a_1، . . . ، a_n در ثباتهای r_1، . . . ، r_n شروع می کنیم و برنامهٔ Q رابه‌کاربېریم،آنگاه (یك) اگر $f(a_1, \ldots, a_n)$ تعریف شده باشد، آنگاه محاسبه نهایتاً در حالی‌که $f(a_1, \ldots, a_n)$ در ثبات p است و محتوای ثباتهای ۱، ۲، . . . ، k (به‌استثنای ثبات p) همان محتواهای اولیه هستند، متوقف می‌شود. بعلاوه محاسبه در حال جستجوی دستورالعمل $(q+1)$م، کــه در آن q طول Q است، متوقف می‌شود؛ (دو) اگــر $f(a_1, \ldots, a_n)$ تعریف نشده باشد، آنگــاه محاسبه هرگز متوقف نمی‌شود.

۱۲. فرض کنید $g: N^{n+1} \to N$ تابعی(تام) باشدکه با برنامهٔ ماشین‌ثباتی محاسبه می‌شود. فرض کنید $f(a_1, \ldots, a_n) = \mu b[g(a_1, \ldots, a_n, b) = 0]$، کــه اگرچنین bی وجود نداشته باشد، آنگاه طرف راست آن تعریف نشده است. نشان دهیدکه تابع جزئی f را می‌توان با برنامهٔ ماشین ثباتی محاسبه کرد.

۴

منطق مرتبهٔ دوم

۱.۴ زبانهای مرتبهٔ دوم

با تسویر نمادهای محمولی یا تابعی، می‌توان زبانهای غنی‌تر و گویاتری از زبانهای مرتبهٔ اول که تاکنون درنظرگرفته شده است، به‌دست آورد. مثلاً،

$$\exists x(Px \rightarrow \forall x\ Px)$$

با پارامترهای $\forall$ و P یك فرمول معتبر است. زیرا، تعبیر P هرچه باشد، این فرمول صادق است، وبجاست که

$$\forall P\ \exists x(Px \rightarrow \forall x\ Px),$$

معتبر نامیده شود. (ازآنجاکه P به‌عنوان متغیر محمولی درنظرگرفته شده، $\forall$ تنها پارامتر فرمول فوق می‌باشد.)

فرض‌کنیم علاوه برنمادهایی‌که در ابتدای قسمت ۱.۲ معرفی شده‌اند، نمادهای منطقی زیرین را نیز داشته باشیم:

۴. متغیرهای محمولی: به‌ازای هرعدد درست و مثبت n، متغیرهای محمولی n موضعی عبارتند از:

$$\mathbf{X}^n_1, \mathbf{X}^n_2, \ \ldots \ .$$

۵. متغیرهای تابعی: بــه‌ازای هرعدد درست و مثبت n، متغیرهای تابعی n موضعی عبارتند از:

$$\mathbf{F}^n_1, \mathbf{F}^n_2, \ \ldots \ .$$

حال، برای اجتناب از اشتباه، متغیرهــای معمولی $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ... را متغیرهای فردی می‌نامیم. مجموعهٔ ترمها، همان‌طورکه درگذشته تعریف شد، عبارت از مجموعهٔ عبارتهایی است‌که از نمادهای ثابت ومتغیرهای فردی با به‌کاربردن نمادهای تابعی (هم پارامترهای تابعی وهم متغیرهای تابعی) ساخته می‌شوند: فرمولهای بسیط نیــز عبارتهایی بــه‌صورت $Pt_1 \ldots t_n$ می‌باشندکه در آنها t_1، t_2، ...، t_n تــرم و P یك نماد محمولی n موضعی است (پارامتر یا متغیر) . به‌تعریف ف.د.س.ها، این عملهای فرمول‌ساز جدید افزوده می‌گردد: اگر φ یك ف.د.س. باشد، آنگاه $\forall \mathbf{X}^n_i \varphi$ و $\forall \mathbf{F}^n_i \varphi$ ف.د.س. خواهند بود. مفهوم متغیرآزادی که در φ ظاهرمی گردد درست مانند قبل‌تعریف می‌شود. یك جمله، یك ف.د.س. مانند σ است‌که در آن هیچ متغیری (فردی، محمولی، یا تابعی) آزاد نباشد.

باید توضیح داده شودکه نقشی‌که پارامترهای محمولی آزاد ایفامی‌کنند، دراساس همان نقش متغیرهای محمولی‌است. همان رابطهٔ نزدیك هم، بین نمادهای ثابت ومتغیرهای فردی آزاد وجود دار .

همچنین مراد ما از یك ساخت، تابعی است‌که روی مجموعه‌ای از پارامترهاست‌که در شرایط مــذکور در قسمت ۲.۷ صدق‌کنــد. باید تعریف ارضاپذیری را به‌طور طبیعی توسعه دهیم. فرض‌کنیم V مجموعهٔ همهٔ متغیرهای فردی، محمولی، یــا تابعی باشد. فرض کنیــم s تابعی روی V باشد به‌طوری‌کــه به‌هرمتغیر، شیء مناسبی را نسبت دهد. بنابراین $s(\mathbf{v}_1)$ یك عضو عالم سخن، $s(\mathbf{X}^n)$ یك رابطهٔ nتایی روی این عالم، و $s(\mathbf{F}^n)$ یــك عمل nتایی می‌باشد. به‌ازای هرتــرم t، $\bar{s}(t)$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شود. بویژه، اگر $\mathbf{F}$ یك متغیرتابعی باشد،آنگاه $\bar{s}(\mathbf{F}t_1 \ldots t_n)$ مقدارتابع $s(\mathbf{F})$ روی $\bar{s}(t_1)$ ، ...، $\bar{s}(t_n)$ است. ارضاپذیری فرمولهــای بسیط ، اساساً ، مانـنـد سابق تعریف شده است. به‌ازای هر متغیر محمولی $\mathbf{X}$،

$\models_{\mathfrak{A}} \mathbf{X}t_1 \ldots t_n[s]$ اگر و تنها اگر $\langle \bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n) \rangle \in s(\mathbf{X})$.

تنها ویژگیهای جدید درتعریف ارضاپذیری، از سورهای جدید ما ناشی می‌گردد.

۵. $\models_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{X}^n_i \varphi[s]$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر رابطهٔ nتایی R روی $|\mathcal{U}|$، داشته باشیم $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(\mathbf{X}^n_i|\mathbf{R})]$.

۶. $\models_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{F}^n_i \varphi[s]$ اگر و تنها اگر به‌ازای هرتابع $f : |\mathcal{U}|^n \longrightarrow |\mathcal{U}|$، داشته باشیم $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(\mathbf{F}^n_i|f)]$.

بسادگی باز می‌توان دید که تنها، مقادیر s به‌ازای متغیرهایی که در این فرمول آزاد هستند بستگی دارد. بی‌هیچ ابهامی، می‌توان از صادق بودن یا کاذب بودن یك جملهٔ σ در $\mathfrak{U}$ گفتگو کرد. استلزام منطقی (معنایی) دقیقاً مانند گذشته تعریف می‌شود.

مثال ۱. یك رابطهٔ خوش‌ترتیب، رابطه‌ای ترتیبی است که در آن هرمجموعهٔ ناتهی دارای یك کوچکترین عضو (نسبت به آن رابطهٔ ترتیبی) باشد. شرط اخیر را می‌توان، به‌صورت زیر، به‌جملهٔ مرتبهٔ دومی ترجمه کرد:

$$\forall \mathbf{X}(\exists y\, \mathbf{X}y \rightarrow \exists y(\mathbf{X}y \wedge \forall z(\mathbf{X}z \rightarrow y \leqslant z))).$$

در اینجا، مانند جاهای دیگر، زیرنویسهای $\mathbf{X}$ و $\mathbf{F}$ را اگر مهم نباشند حذف می‌کنیم، و در صورتی که در متن ایجاد ابهام نکنند بالانویس را نیز حذف می‌کنیم.

مثال ۲. یکی از اصول پئانو (اصل استقرا) می‌گوید که: هرمجموعه از اعداد طبیعی که شامل ۰ باشد و تحت تابع تالی بسته باشد، مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی است. این اصل را می‌توان در زبان مرتبهٔ دوم برای نظریهٔ اعداد، به‌صورت زیر ترجمه کرد:

$$\forall \mathbf{X}(\mathbf{X}0 \wedge \forall y(\mathbf{X}y \rightarrow \mathbf{X}\mathbf{S}y) \rightarrow \forall y \mathbf{X}y).$$

هرمدل برای S۱، S۲، و اصل استقرای پئانو با $(N, 0, S)$ یکریخت است؛ به تمرین ۱ مراجعه کنید. بنابراین این مجموعه از جمله‌ها جازم است؛ یعنی، تمام مدلهای آن یکریخت‌اند.

مثال ۳. به‌ازای هرفرمول φ که در آن متغیر محمولی $\mathbf{X}^n$ آزاد نباشد، فرمول

$$\exists \mathbf{X}^n \forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n [\mathbf{X}^n \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n \leftrightarrow \varphi]$$

معتبر است. (در اینجا، علاوه بر $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ...، $\mathbf{v}_n$، ممکن است متغیرهای دیگری نیز در φ به‌طور آزاد ظاهر شوند.) فرمولهایی به این صورت را فرمولهای استنباطی رابطه‌ای می‌نامیم. مشابهاً، فرمولهای استنباطی تابع نیز وجود دارند. اگر ψ فرمولی باشد که در آن متغیر $\mathbf{F}^n$ به‌طور آزاد ظاهر نمی‌شود، آنگاه

$$\forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n \exists! \mathbf{v}_{n+1} \psi \rightarrow \exists \mathbf{F}^n \forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n (\mathbf{F}^n \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_{n+1} \leftrightarrow \psi)$$

معتبر است. (در اینجا «$\exists! \mathbf{v}_{n+1} \psi$» کوتاهنوشت فرمولی است که در تمرین ۲۱ از قسمت ۲.۲ به‌دست آمد.)

مثال ۴. در هیأت مرتب اعداد حقیقی، هر مجموعهٔ ناتهی کراندار، دارای یك کوچکترین کران بالاست. می‌توانیم این را به‌جملهٔ مرتبهٔ دوم زیر ترجمه کنیم:

$$\forall \mathbf{X}[\exists y\, \forall z\, (\mathbf{X}z \rightarrow z < y) \wedge \exists z\, \mathbf{X}z \rightarrow \exists y\, \forall y'\, (\forall z(\mathbf{X}z \rightarrow z < y') \leftrightarrow y \leqslant y')].$$

ثابت شده است که هرهیأت مرتبی که این‌جملهٔ مرتبهٔ دوم را برآورده سازد، با هیأت‌اعداد حقیقی یکریخت است.

مثال ۵. به‌ازای هر $n \geqslant 2$، یك جملهٔ مرتبهٔ اول λ_n داریم که جملهٔ «حداقل n شیء وجود دارد» را ترجمه می‌کند. برای مثال، λ_3 عبارت است از:

$$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (x \not\approx y \wedge x \not\approx z \wedge y \not\approx z).$$

ردهٔ مدلهای مجموعهٔ $\{\lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$، ردهٔ EC_Δ است که متشکل از ساختهای نامتناهی است. یك جملهٔ مرتبهٔ دوم وجود داردکه هم‌ارزآن است. یك مجموعه نامتناهی است اگر وتنها اگر یك رابطهٔ ترتیبی روی آن وجود داشته باشدکه دارای آخرین عضو نباشد. یا به‌عبارت ساده‌تر، یك مجموعه نامتناهی‌است اگر وتنها اگر یك رابطهٔ متعدی وغیربازتابی R روی آن وجود داشته باشد به‌طوری‌که قلمروش همهٔ آن مجموعه باشد. این شرط را می‌توان به‌جملهٔ مرتبهٔ دوم λ_∞ ترجمه نمود:

$$\exists \mathbf{X}[\forall u\, \forall v\, \forall w(\mathbf{X}uv \rightarrow \mathbf{X}vw \rightarrow \mathbf{X}uw) \wedge \forall u\, \neg\mathbf{X}uu \wedge \forall u\, \exists v\, \mathbf{X}uv].$$

جملهٔ دیگری که (با استفاده از متغیر تابعی) برای تعریف ردهٔ ساختهای نامتناهی وجود دارد، عبارت است از:

$$\exists \mathbf{F}[\forall x\, \forall y(\mathbf{F}x \approx \mathbf{F}y \rightarrow x \approx y) \wedge \exists z\, \forall x\, \mathbf{F}x \not\approx z].$$

مثال قبل نشان می‌دهد که قضیهٔ فشردگی برای منطق مرتبهٔ دوم صادق نیست.

قضیهٔ ۴۱الف. یك‌مجموعه ازجمله‌های‌مرتبهٔ دوم وجود داردکه ارضا شونده نیست و هر زیرمجموعهٔ متناهی آن ارضاشونده است.

اثبات. با علامت‌گذاری مثال فوق، این مجموعه عبارت است از:

$$\{\neg\lambda_\infty, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}. \quad \blacksquare$$

برای منطق مرتبهٔ دوم قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم نیزصادق نیست. زبان تساوی زبانی است (با $\approx$) که دارای هیچ پارامتری بجز $\forall$، نیست. یك مجموعهٔ ناتهی می‌تواند به‌عنوان یك‌ساخت برای‌این زبان منظور گردد. بویژه، با تقریب یك یکریختی، یك ساخت با عدد اصلی (کاردینال) آن معین می‌گردد. بنا براین، یك جمله در این زبان، با تقریب تعادل منطقی، با مجموعهٔ اعداد اصلی‌مدلهایش‌معین‌می‌گردد (که طیف آن نامیده می‌شود).

قضیهٔ ۴۱ب. درزبان تساوی مرتبهٔ‌دوم جمله‌ای وجود داردکه دریك مجموعه صادق

است اگر وتنها اگر عدد اصلی آن مجموعه $2^{\aleph_0}$ باشد.

اثبات، (با استفاده از مفاهیم جبری). نخست ترکیب عطفی اصول موضوع (مرتبهٔ اول) یك هیأت مرتب را درنظر گرفته، و به‌آن جملهٔ مرتبهٔ دومی که بیانگر خاصیت کوچکترین کران بالاست (به‌مثال ۴ این قسمت مراجعه کنید)، اضافه می کنیم. مدلهای این جمله همگی با هیأت مرتب اعداد حقیقی یکریخت هستند (یعنی، ساختهایی یکریخت با هیأت اعداد حقیقی هستند). حال پارامترهای ۰، ۱، $+$، $\cdot$، $<$ را به‌نحو مقتضی به‌متغیرهایی (فردی، تابعی، یا محمولی) که به‌طور وجودی مسور می‌شوند، تبدیل می کنیم. جملهٔ حاصل دارای خواص مطلوب است. ■

قضیهٔ ۴۱پ. مجموعهٔ اعداد گودل جمله‌های مرتبهٔ دوم معتبر، در $\mathscr{N}$ با هیچ فرمول مرتبهٔ دومی، تعریف‌پذیر نیست.

در اینجا فرض می کنیم که اعداد گودل، به‌روشی مشابه گذشته، به‌عبارتهای مرتبهٔ دوم نسبت داده شده‌اند. گرچه اثبات ما درمورد زبان مرتبهٔ دوم نظریهٔ اعداد به‌کار می‌رود، این قضیه برای هر زبان شماره‌پذیر بازگشتیانه که حداقل دارای یك نماد محمولی دو موضعی باشد صادق است.

اثبات. فرض کنیم T^2 نظریهٔ مرتبهٔ دوم $\mathscr{N}$ باشد، یعنی، مجموعهٔ جمله‌های مرتبهٔ دوم صادق در $\mathscr{N}$. همان استدلالی که در قضیهٔ تارسکی به‌کار رفت، نشان می‌دهد که $\# T^2$ در $\mathscr{N}$ با هیچ فرمول مرتبهٔ دومی تعریف‌پذیر نیست.

حال، فرض کنیم α ترکیب عطفی عضوهای A_E با اصل مرتبهٔ دوم استقرای پئانو (مثال ۲) باشد. هرمدلی برای α با $\mathscr{N}$ یکریخت است؛ به‌تمرین ۱ مراجعه کنید. نتیجتاً، به‌ازای هرجملهٔ σ،

$\sigma \in T^2$ اگر و تنها اگر $(\alpha \to \sigma)$ معتبر باشد.

نتیجتاً، از آنجا که مجموعهٔ (اعداد گودل) جمله‌های معتبر تعریف‌پذیر نیست، $\# T^2$ نیز تعریف‌پذیر نخواهد بود. ■

به‌طریق اولی، مجموعهٔ اعداد گودل جمله‌های معتبر مرتبهٔ دوم نه حسابی است و نه شماره‌پذیر بازگشتیانه. یعنی قضیهٔ شمارش‌پذیری در منطق مرتبهٔ دوم صادق نیست. (از جهت دیگر، می‌توان نشان داد که این مجموعه در نظریهٔ اعداد مرتبهٔ سوم، یا حتی مرتبهٔ ω، تعریف‌پذیر نیست. به‌این بحث در اینجا نمی‌پردازیم.)

جالب است که یك جملهٔ عمومی مرتبهٔ دوم، مانند اصل استقرای پئانو،

$$\forall X(X0 \wedge \forall y(Xy \to XSy) \to \forall y\, Xy),$$

و شمای مرتبهٔ اول متناظر به‌آن، یعنی مجموعهٔ همهٔ جمله‌های زیر را

$$\varphi(\circ) \wedge \forall y(\varphi(y) \to \varphi(\mathrm{S}y)) \to \forall y \varphi(y),$$

که در آن φ یك فرمول مرتبهٔ اول با تنها متغیر آزاد v_1 است، مقایسه کنیم. اگر $\mathfrak{U}$ یك مدل برای اصل استقرای پئانو باشد، آنگاه هر زیرمجموعهٔ $|\mathfrak{U}|$ که شامل $\circ^{\mathfrak{U}}$ و تحت $\mathrm{S}^{\mathfrak{U}}$ بسته باشد، در واقع برابر تمام $|\mathfrak{U}|$ خواهد بود. از طرف دیگر، اگر $\mathfrak{U}$ یك مدل برای شمای اصل موضوعی متناظر به‌آن باشد، فقط می‌توان گفت کـه هرزیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر $|\mathfrak{U}|$ کـه شامل $\circ^{\mathfrak{U}}$ و تحت $\mathrm{S}^{\mathfrak{U}}$ بسته باشد برابر $|\mathfrak{U}|$ است. ممکن است زیرمجموعه‌های تعریف‌ناپذیری وجود داشته باشندکـه این مطلب برای آن صادق نباشد. (به‌عنوان مثال، مدل $\mathfrak{U}$ برای $\mathrm{Th}(N, \circ, S)$ راکه دارای Z-زنجیره‌هـا باشد درنظر می گیریم. در این صورت $\mathfrak{U}$ شمای مرتبـهٔ اول فوق را برآورده می‌سازد، امـا اصل استقرای مرتبهٔ دوم را برآورده نمی‌سازد. مجموعهٔ نقاط استاندارد، بوضوح، در $\mathfrak{U}$ تعریف‌پذیر نیستند.)

تمرین

۱. نشان دهیدکه‌هرساختی برای زبانی که شامل‌پارامترهای $\forall$، $\circ$، وSکه جمله‌های

$$\forall x\, \mathrm{S}x \not\approx \circ, \qquad \mathrm{S1}.$$

$$\forall x\, \forall y(\mathrm{S}x \approx \mathrm{S}y \to x \approx y) \qquad \mathrm{S2}.$$

واصل استقرای پئانو

$$\forall \mathrm{X}(\mathrm{X}\circ \wedge \forall y(\mathrm{X}y \to \mathrm{XS}y) \to \forall y\, \mathrm{X}y).$$

را ارضا می کند با $\mathfrak{N}_S = (N, \circ, S)$ یکریخت است.

۲. جمله‌ای در زبان مرتبهٔ دوم تساوی ارائه دهیدکـه دریك مجموعه صادق باشد اگر وتنها اگرکاردینال آن مجموعه برابر $\aleph_0$ باشد. همین مسئله را برای $\aleph_1$ حل کنید.

۳. فرض‌کنید φ فرمولی باشدکه درآن فقط یك متغیر محمولی n موضعی Xآزاد ظاهر شود. می گوییم که یك رابطهٔ nتایی R روی $|\mathfrak{U}|$ در $\mathfrak{U}$ به‌طور ضمنی با φ تعریف می‌شود اگر وتنها اگر$\mathfrak{U}$ فرمول φ را با اسناد R به X ارضا کند ولی φ را همراه با هیچ ارزشدهی دیگربه X ارضا نکند. نشان دهیدکه$\#\mathrm{Th}\mathfrak{N}$ ، مجموعهٔ اعـدادگودل مربوط به‌جمله‌های مرتبهٔ اول صادق در $\mathfrak{N}$ به‌طور ضمنی در $\mathfrak{N}$ با فرمولی بدون محمول مسور یا متغیرهای تابعی تعریف‌پذیر است.

۴. زبانی(با تساوی)، دارای نمادهای محمولی یك موضعیI وS و نماد محمولی دوموضعی E را درنظر بگیرید. یك جملهٔ مرتبهٔ دوم σ بیابید به طوری کـه (یك) اگر A مجموعه‌ای باشدکه $A \cap \mathcal{P}A = \varnothing$ و اگر $|\mathfrak{U}| = A \cup \mathcal{P}\, A$، $I^{\mathfrak{U}} = A$، $S^{\mathfrak{U}} = \mathcal{P}A$،

$E^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b\rangle : a \in b \subseteq A\}$، آنگاه $\mathcal{U}$ مدلی برای σ است؛ و(دو) هرمدل σ با یکی از اشیائی که در (یك) توضیح داده شد یکریخت می باشد.

۲۰۴ توابع اسکولم

به‌ازای هرفرمول مرتبهٔ اول، می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان یك فرمول مرتبهٔ دوم پیشوندی منطقاً معادل ویژه‌ای یافت:

فرمول بی‌سور	سورهای فردی عمومی	سورهای وجودی

این یك فرمول پیشوندی است که در آن تمامی سورهای عمومی سورهایی فردی هستند که به‌دنبال آنها رشته‌ای از سورهای وجودی فردی و سورهای تابعی می‌آید.

در ساده‌ترین مثال، ملاحظه کنید که

$$\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \vDash\!\!\dashv \exists \mathbf{F}\, \forall x\, \varphi(x, \mathbf{F}x).$$

درجهت «$\dashv$» دیدن این موضوع ساده است. برای جهت «$\vDash$» ساختی مانند $\mathcal{U}$ و تابع ارزشدهی s که $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ را ارضا می‌کند درنظر می گیریم. می‌دانیم که به‌ازای هر $a \in |\mathcal{U}|$ حداقل یك $b \in |\mathcal{U}|$ وجود دارد به‌طوری که

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi(x, y)[s(x|a)(y|b)].$$

با انتخاب چنین bیی به‌ازای هر a و قراردادن $f(a) = b$ یك تابع f روی $|\mathcal{U}|$ به‌دست می‌آوریم. (در اینجا اصل انتخاب به‌کار می‌رود.) در این‌صورت

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi(x, \mathbf{F}x)[s(\mathbf{F}|f)]$$

این تابع f تابع اسکولم برای فرمول $\forall x\, \exists y\, \varphi$ درساخت $\mathcal{U}$ نامیده می‌شود.

همین استدلال به‌طورکلیتری نیز به‌کار می‌رود. به‌عنوان مثال دوم، فرمول

$$\exists y_1\, \forall x_1\, \exists y_2\, \forall x_2\, \forall x_3\, \exists y_3\, \psi(y_1, y_2, y_3)$$

را درنظرمی گیریم. (ما فقط متغیرهای y_1، y_2، و y_3 را نوشته‌ایم، اما ممکن است متغیرهای‌آزاد دیگری در ψ باشند.) دراینجا سور وجودی $\exists y_1$ را در سمت چپ داریم. آنچه که می‌ماند عبارت است از:

$$\forall x_1\, \exists y_2\, \forall x_2\, \forall x_3\, \exists y_3\, \psi(y_1, y_2, y_3).$$

این حالت‌خاصی ازمثال اول است (با $\varphi(x_1, y_2) = \forall x_2\, \forall x_3\, \exists y_3\, \psi(y_1, y_2, y_3)$). مانند قبل این فرمول منطقاً معادل است با

$$\exists F_2 \, \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \exists y_3 \, \psi(y_1, F_2 x_1, y_3).$$

حال سورهای وجودی $\exists y_1 \exists F_2$ را درسمت چپ داریم؛ آنچه‌که می‌ماند عبارت است‌از:

$$\forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \exists y_3 \, \psi(y_1, F_2 x_1, y_3).$$

با همان استدلال قبلی، این فرمول منطقاً معادل است با

$$\exists F_3 \, \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \psi(y_1, F_2 x_1, F_3 x_1 x_2 x_3),$$

که در آن F_3 یك متغیر تابع سه موضعی است. بنابراین فرمول اصلی معادل است با

$$\exists y_1 \, \exists F_2 \, \exists F_3 \, \forall x_1 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \psi(y_1, F_2 x_1, F_3 x_1 x_2 x_3).$$

به‌ازای فرمول بی‌سور ψ، این فرمول به‌صورتی است‌که مطلوب ماست.

قضیهٔ صورت نرمال اسکولم. به‌ازای هرفرمول مرتبهٔ اول می‌توانیم یك فرمول مرتبهٔ دوم منطقاً معادل با آن به‌دست آوریم‌که متشکل باشد از:

(الف) ابتدا یك رشته (امکاناً تهی) از سورهای فردی وجودی و سورهای تابعی، و دنبال آن

(ب) یك رشتهٔ (امکاناً تهی) از متغیرهای فردی جهانی، و به‌دنبال آن

(پ) یك فرمول بی‌سور.

با به‌کاربردن استقرا، می‌توان یك اثبات صوری ارائه‌کرد، لکن مثال قبلی روش عمومی‌را عرضه می‌کند.

به‌خاطر بیاورید‌که یك فرمول عمومی ($\forall_1$) یك فرمول پیشوندی مرتبهٔ اول است‌که سورهای آن عمومی هستند: $\forall x_1 \, \forall x_2 \ldots \forall x_k \, \alpha$ که در آن α بی‌سور است. مشابهاً، یك فرمول وجودی($\exists_1$) یك فرمول پیشوندی مرتبهٔ اول است‌که‌جمیع‌سورهای‌آن وجودی هستند.

نتیجهٔ ۴۲الف. به‌ازای هر φ مرتبهٔ اول، می‌توانیم یك فرمول عمومی θ دریك زبان توسعه یافتهٔ شامل نمادهای تابعی بیابیم به‌طوری‌که φ ارضاشدنی باشد اگر و تنها اگر θ ارضاشدنی باشد.

با به‌کاربردن این نتیجه در مورد $\neg\varphi$، یك فرمول وجودی (با نمادهای تابعی) به‌دست می‌آید‌که معتبر است اگر و تنها اگر φ معتبر باشد.

اثبات. مجدداً وضعیت را با یك مثال روشن می‌کنیم. به‌عنوان مثال، فرض‌کنیم φ عبارت باشد از

$$\exists y_1 \, \forall x_1 \, \exists y_2 \, \forall x_2 \, \forall x_3 \, \exists y_3 \, \psi(y_1, y_2, y_3).$$

نخست فرمول φ را با فرمول منطقاً معادل صورت اسکولمی آن:

$$\exists y_1 \exists \mathbf{F}_2 \exists \mathbf{F}_3 \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \psi(y_1, \mathbf{F}_2 x_1, \mathbf{F}_3 x_1 x_2 x_3)$$

عوض می کنیم. سپس به‌جای θ قرار می‌دهیم:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3\, \psi(c, f x_1, g x_1 x_2 x_3),$$

که در آن c، f، و g نمادهای تابعی جدید، بترتیب، صفر، یك، وسه موضعی می باشند. ■

نتیجهٔ ۲۴ب. در یك زبان به‌طور بازگشتی شماره شده که به‌ازای هر $k \geqslant 0$ دارای تعدادی نامتناهی نماد تابعی k موضعی ویك نماد محمولی دوموضعی است، مجموعهٔ اعداد گودل جمله‌های (مرتبهٔ اول) وجودی معتبر بازگشتی نیست.

اثبات. به‌ازای هرجملهٔ σ، با به‌کاربردن نتیجهٔ ۴۲الف در مورد $\neg\sigma$، می‌توانیم با روشی کارامد یك جملهٔ وجودی به‌دست آوریم که معتبر است اگر و تنها اگر σ معتبر باشد. بنابراین ازهر روش تصمیم گیری درمورد جمله‌های معتبر وجودی یك روش تصمیم‌گیری برای جمله‌های معتبر اختیاری به‌دست می‌آید، و این با قضیهٔ چرچ در تناقض است. ■

می‌توان این نتیجه را با تضعیف مفروضات مربوطه تقویت کرد. پی‌بردن به‌اینکه نماد محمولی دوموضعی ضروری نیست، خیلی مشکل نیست. وکافی است که برای یك kی بزرگ اختیاری، نمادهای تابع k موضعی وجود داشته باشد. (اثبات از تعبیرهای وفادار بهره می‌جوید.)

در این نتایج می‌توانیم به‌جای متغیرهای تابعی متغیرهای محمولی به‌کار بریم، اما برای این کار بهایی هم باید پرداخت. فرض کنیم با یك فرمول مرتبهٔ اول شروع کنیم. این فرمول با یك فرمول ψ که به‌صورت نرمال اسکولم باشد معادل است؛ برای سادگی مطلب، فرض کنیم $\psi = \exists \mathbf{F} \varphi$، که در آن φ فقط دارای سورهای فردی است و $\mathbf{F}$ یك متغیر تابع یك موضعی است. می‌توانیم φ را بنحوی انتخاب کنیم که $\mathbf{F}$ فقط در معادلاتی به صورت $u \approx \mathbf{F}t$ ظاهر شود (به‌ازای ترمهای t و u که شامل $\mathbf{F}$ نباشند). این کار، مثلاً با جایگزین کردن یك فرمول بسیط $\alpha(\mathbf{F}t)$ با $\forall x(x \approx \mathbf{F}t \rightarrow \alpha(x))$ یا $\exists x(x \approx \mathbf{F}t \wedge \alpha(x))$، انجام‌پذیر است.

اکنون مشاهده می‌کنیم که فرمولی به‌صورت

$$\exists \mathbf{F} \_\_\_\_ u \approx \mathbf{F}t \_\_\_\_,$$

که در آن $\mathbf{F}$ تنها به‌صورت نشان داده شده ظاهر می‌شود، با

$$\exists \mathbf{X}(\forall y \exists! z\, \mathbf{X}yz \wedge \_\_\_\_ \mathbf{X}tu \_\_\_\_)$$

معادل است.

اگر این‌کار را دنبال کنیم (که ما دراینجا این‌کار را نمی‌کنیم) می‌باید که هرفرمول مرتبهٔ اول با یك فرمول مرتبهٔ دوم متشکل از

(الف) یك رشته از سورهای محمولی وجودی، و به‌دنبال آن
(ب) یك رشته از سورهای فردی عمومی، و به‌دنبال آن
(پ) یك رشته از سورهای فردی وجودی، وبه‌دنبال آن
(ت) یك فرمول بی‌سور

می‌آید منطقاً معادل باشد.

شکلهای متناظری از نتیجه های ۴۲الف و ۴۲ب وجود دارد (کـه خواننده دعوت می‌شودکه آنها را صورتبندی کند).

تمرین

۱. قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم را به‌صورت اصلاح‌شدهٔ زیر اثبات‌کنید: فرض‌کنید $\mathfrak{U}$ یك ساخت برای یك‌زبان باکاردینال κ باشد. فرض‌کنید S یك زیرمجموعـهٔ $|\mathfrak{U}|$ دارای کاردینال λ باشد. در آن صورت یك زیرساخت $\mathfrak{B}$ مربوط بـه $\mathfrak{U}$ باکاردینال $\kappa+\lambda$ وجود دارد به‌طوری‌که هرتابع sکه متغیرها را به $|\mathfrak{B}|$ می‌نگارد و هر φ (مرتبهٔ اول)،

$$\models_{\mathfrak{U}} \varphi[s] \text{ اگر وتنها اگر } \models_{\mathfrak{B}} \varphi[s].$$

راهنمایی: توابع اسکولم را برای‌جمیع فرمولها برگزینید. S را تحت‌توابع بسته‌بگیرید.

۲. دونتیجهٔ مذکور در آخرین جمله ازبخش ۲.۴ را بیان‌کنید. (نتیجهٔ دوم ازاین نتایج را می‌توان با تمرین ۵(ب) از بخش ۵.۲ مقایسه‌کرد،که در آن نشان داده می‌شود که مجموعهٔ جمله‌های معتبر به‌صورت $\forall_2$ بدون نمادهای تابعی تصمیم‌پذیر است.)

۳.۴ منطق چندگونه

حال برمی‌گردیم به‌زبانهای مرتبهٔ اول، لکن با متغیرهای چندگونه‌که روی عالمهای سخن مختلف تغییر می‌کنند. (دربخش‌آتی این موضوع در حالتی به‌کار خواهد رفت‌که در آن یك نوع از متغیرها برای اعضای یك عالم، دیگری برای زیرمجموعه‌های آن عالم، ودر عین حال دیگری برای روابط دوتایی، والی‌آخر، اختصاص دارد.)

در ریاضیات غیر رسمی گاهـی به‌چنین عبارتهایی برمی‌خوریم «الفبای یونانی را برای اردینالها، حروف بزرگ لاتین‌را برای مجموعه‌هایی از اعداد درست، و. . . به‌کار می‌بریم.» در واقع، بدین‌وسیله چندگونـه متغیر را می‌پذیریم‌که هرگونه عالمی‌مخصوص به‌خود دارد. حال این وضع را به‌طور دقیق بررسی می‌کنیم. همان‌طورکه انتظار می‌رود،

این‌وضع با وضع یك‌گونه معمولی تفاوت زیادی ندارد. هیچ یك از نتایج این بخش‌ابداً عمیق نیست، و اغلب اثباتها حذف شده‌اند.

فرض کنیم یك مجموعهٔ ناتهی I در اختیار داریم، که هرعضو آن یك‌گونه نامیده می‌شود، و نمادها به‌ترتیب زیر مرتب شده‌اند:

الف. نمادهای منطقی

۰. پرانتزها:) و (

۱. رابطهای جمله‌ای: $\neg$ و $\rightarrow$.

۲. متغیرها: به‌ازای هر گونه مانند i، متغیرهای v_1^i، v_2^i، . . . مربوط به‌گونهٔ i.

۳. نمادهای تساوی: به‌ازای بعضی $i \in I$ ممکن است نماد $\approx_i$ وجود داشته باشد، که یك نماد محمولی‌ازگونهٔ $\langle i, i\rangle$ نامیده می‌شود.

ب. پارامترها

۰. سورها: به‌ازای هر گونه مانند i یك نماد سور عمومی $\forall_i$ وجود دارد.

۱. نمادهای محمولی: به‌ازای هر $n > 0$ و هر nتایی $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle$ از گونه‌ها، یك مجموعهٔ (احتمالاً تهی) از نمادهـای محمولی n موضعی وجود داردکـه می‌گوییم هرکدام ازگونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle$ است.

۲. نمادهای ثابت: به‌ازای هرگونه مانند i یك مجموعهٔ(احتمالاً تهی) ازنمادهای ثابت وجود داردکه ازگونهٔ i نامیده می‌شود.

۳. نمادهای‌تابعی: به‌ازای‌هر $n > 0$ وهر$(n+1)$تایی‌مانند $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\rangle$ ازگونه‌ها، مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) ازنمادهای تابع n موضعی وجود دارند که هرکدام ازگونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\rangle$ نامیده می‌شود.

مانند همیشه، باید فرض‌کنیم که مقوله‌های نمادها مجزا هستند، و افزون براین هیچ نماد دنباله‌ای متناهی از سایر نمادها نیست.

به‌هرترم یك‌گونهٔ منحصربه‌فرد متناظر می‌شود. ما مجموعهٔ ترمهای مربوط به‌گونهٔ i را، همزمان برای همهٔ iها، بطور استقرایی تعریف می‌کنیم:

۱. هر متغیر مربوط به‌گونهٔ i یا هر نماد ثابت مربوط به‌گونهٔ i یك ترم مربوط به گونهٔ i است.

۲. اگر t_1، . . .، t_n، بترتیب، ترمهایی از گونه‌های i_1، . . .، i_n باشند، و f یك نماد تابعی مربوط به‌گونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\rangle$ باشد، آنگاه $ft_1 \ldots t_n$ ترمی ازگونهٔ i_{n+1} خواهد بود.

این‌تعریف را می‌توان بـه‌صورت آشناتری درآورد . مجموعهٔ زوجهای $\langle t, i\rangle$ به‌طوری‌که t یك ترم ازگونهٔ i است از مجموعهٔ پایه‌ای

$\{c$ یك نماد ثابت از گونهٔ i است: $\langle c, i\rangle\} \cup \{\langle \forall_n^i, i\rangle : n \geqslant 1, i \in I\}$

به‌وسیلهٔ اعمالی که، برای یك نماد تابع f مربوط به‌گونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\rangle$، زوج $\langle f t_1 \ldots t_n, i_{n+1}\rangle$ را از زوجهای $\langle t_1, i_1\rangle, \ldots, \langle t_n, i_n\rangle$ تولید می‌کنند، پدید می‌آید.

یك فرمول بسیط، یك دنبالهٔ $P t_1 \ldots t_n$ متشکل از یك نماد محمولی از گونهٔ $\langle i_1, \ldots i_n\rangle$ و ترمهای t_1، ...، t_n، بترتیب، از گونهٔ i_1، ...، i_n هستند. فرمولهای غیر-بسیط، با استفاده از رابطهای $\neg$ و $\rightarrow$، و سورهای $\forall_i \forall_n^i$ به‌دست می‌آیند.

یك ساخت چندگونه مانند $\mathcal{U}$ تابعی روی مجموعهٔ پارامترهاست که به‌هریك از آنها شیئی را باگونهٔ درست اسناد می‌دهد:

۱. به‌سور $\forall_i$، تابع $\mathcal{U}$ یك مجموعهٔ ناتهی $|\mathcal{U}|_i$، که عالم $\mathcal{U}$ از گونهٔ i نامیده می‌شود، اسناد می‌دهد.

۲. به‌هرنماد محمولی P ازگونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle$، تابع $\mathcal{U}$ رابطهٔ

$$P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathcal{U}|_{i_1} \times \cdots \times |\mathcal{U}|_{i_n}$$

را اسناد می‌دهد.

۳. به‌هر نماد ثابت مانند c ازگونهٔ i، تابع $\mathcal{U}$ یك نقطهٔ c متعلق به $|\mathcal{U}|_i$ را اسناد می‌دهد.

۴. به‌هرنماد تابعی f ازگونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}\rangle$، تابع $\mathcal{U}$ تابع

$$f^{\mathfrak{A}}: |\mathcal{U}|_{i_1} \times \cdots \times |\mathcal{U}|_{i_n} \rightarrow |\mathcal{U}|_{i_{n+1}}$$

را اسناد می‌دهد.

تعاریف صدق وارضا تعاریف واضحی‌هستند، مشروط براین‌که $\forall_i$ به‌معنای «به‌ازای تمامی عضوهای مربوط به‌عالم $|\mathcal{U}|_i$ ازگونهٔ i» باشد.

در یك ساخت چندگونه، عالمهای ازگونه‌های مختلف ممکن است مجزا باشند و ممکن‌است نباشند. اما ازآنجاکه هیچ نماد تساوی بین‌گونه‌ها وجود ندارد، لذا هرنامجزا بودن باید تصادفی منظور گردد. بویژه، همیشه یك ساخت هم‌ارز مقدماتی وجود داردکه عالمهای آنها مجزا هستند.

تحویل به‌یك منطق یك‌گونه

زبانهای چندگونه گاهی می‌توانند (چنانکه خواهیم دید) تسهیلاتی‌فراهم آورند. اما هرکار اساسی که به‌کمك آنها انجام دهیم، بدون آنها نیزمی‌توان انجام داد. اکنون این حکم را بدقت بیان می‌کنیم.

یك زبان یك‌گونه، همراه با تمامی نمادهای محمولی، ثابت، وتابعی مربوط به‌زبان چندگونهٔ مفروض‌را درنظرخواهیم گرفت. علاوه بر آن، این‌زبان دارای یك نماد محمولی یك موضعی Q_i، به‌ازای هر i متعلق به I، خواهد بود. یك ترجمهٔ نحوی وجود داردکه هرجملهٔ چندگونه مانند σ را به‌یك جملهٔ یك‌گونهٔ σ^* منتقل می‌سازد. درهمهٔ این ترجمه‌ها، نمادهای تساوی به $\approx$ تبدیل می‌شوند. تنها تغییر دیگر در سورهاست (نمادهای سوری و متغیرهای مسور): ما

$$\forall_i \mathrm{v}_n^i \rule{2em}{0.4pt} \mathrm{v}_n^i \rule{2em}{0.4pt}$$

را به

$$\forall v(Q_i v \rightarrow \rule{2em}{0.4pt} v \rule{2em}{0.4pt})$$

تبدیل می‌کنیم که در آن v متغیری است که برای جلوگیری از ایجاد تعارض با متغیرهای دیگر انتخاب می‌شود. بنابراین سورهای مربوط به‌گونهٔ i به Q_i منسوب می‌شوند.

حال برمی‌گردیم به‌معناشناسی؛ می‌توانیم یك ساخت چندگونه مانند $\mathscr{U}$ را به یك ساخت $\mathscr{U}^*$ در زبان یك‌گونهٔ بالا برگردانیم. عالم $|\mathscr{U}^*|$ عبارت است از اجتماع همهٔ عالمهای مربوط به $\mathscr{U}$، یعنی $\bigcup_{i \in I} |\mathscr{U}|_i$. به Q_i مجموعهٔ $|\mathscr{U}|_i$ اسناد می‌شود. درمورد نمادهای محمولی و ثابت، $\mathscr{U}^*$ با $\mathscr{U}$ توافق دارد. در مورد یك نماد تابعی مانند f، تابع $f^{\mathscr{U}^*}$ یك ترسیم اختیاری از $f^{\mathscr{U}}$ است. (البته این جملهٔ آخر، $f^{\mathscr{U}^*}$ راکاملاً مشخص نمی‌کند. نتایج عرضه شده در مورد $\mathscr{U}^*$، درمورد هرساخت به‌دست آمده با روش بالا صادق است.)

لم ۴۳الف. یك جملهٔ چندگونه مانند σ در $\mathscr{U}$ صادق است اگر وتنها اگر σ^* در $\mathscr{U}^*$ صادق باشد.

برای اثبات این‌لم، می‌توان حکم قویتری را درمورد فرمولها بیان‌کرد. حکم‌قویتر به‌استقرا اثبات می‌شود.

حال جهت دیگررا درنظر می گیریم. یك ساخت یك‌گونه را همیشه نمی‌توان به‌یك ساخت چندگونه برگردانید. بنابراین شرایط چندی را منظور می‌داریم. فرض‌کنیم Φ مجموعهٔ متشکل از جمله‌های یك‌گونهٔ زیرین باشد:

۱. به‌ازای هر i در I، $\exists v\, Q_i v$.

۲. به‌ازای هرنماد تابعی f ازگونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$،

$$\forall \mathrm{v}_1 \ldots \forall \mathrm{v}_n (Q_{i_1} \mathrm{v}_1 \rightarrow \ldots \rightarrow Q_{i_n} \mathrm{v}_n \rightarrow Q_{i_{n+1}} f \mathrm{v}_1 \ldots \mathrm{v}_n).$$

در اینجا حالت $n = 0$ را نیز منظور می‌کنیم. در این حالت، فرمول بالا، به‌ازای هرنماد ثابت c ازگونهٔ i، به‌صورت $Q_i c$ درمی‌آید.

توجه کنید که $\mathcal{U}^*$ مدلی برای Φ بود. پس یک مدل یک گونهٔ $\mathcal{B}$ از Φ به یک مدل چندگونهٔ $\mathcal{B}$ تبدیل می‌شود. این تبدیل به‌روشی طبیعی انجام می‌گیرد:

$$|\mathcal{B}^\#|_i = Q_i^{\mathfrak{B}};$$

$$P^{\mathfrak{B}^\#} = P^{\mathfrak{B}} \cap (Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}}),$$

که در آن P یک نماد محمول از گونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ می‌باشد؛

$$c^{\mathfrak{B}^\#} = c^{\mathfrak{B}};$$

$$f^{\mathfrak{B}^\#} = f^{\mathfrak{B}} \cap (Q_{i_1}^{\mathfrak{B}} \times \cdots \times Q_{i_n}^{\mathfrak{B}} \times Q_{i_{n+1}}^{\mathfrak{B}}),$$

f تحدید f به $Q_{i_1} \times \cdots \times Q_{i_n}$ است که در آن f یک نماد تابعی از گونهٔ $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$ است.

لم ۴۳ب. اگر $\mathcal{B}$ یک مدل برای Φ باشد، آنگاه $\mathcal{B}^\#$ یک ساخت چندگونه است. افزون براین، یک جملهٔ چندگونه مانند σ در $\mathcal{B}^\#$ صادق است اگر و تنها اگر σ^* در $\mathcal{B}$ صادق باشد.

اثبات، مشابه اثبات لم ۴۳الف است.

توجه کنید که $\mathcal{B}^{*\#}$، در حالت کلی، با $\mathcal{B}$ برابر نیست. (به‌عنوان مثال، $|\mathcal{B}|$ احتمالاً شامل نقاطی است که در هیچ $Q_i^{\mathfrak{B}}$ نیست.) از سوی دیگر، $\mathcal{U}^{*\#}$ با $\mathcal{U}$ برابر است.

قضیهٔ ۴۳پ. در زبان چندگونه، داریم:

$$\Sigma \models \sigma$$

اگر و تنها اگر در زبان یک گونه داشته باشیم:

$$\Sigma^* \cup \Phi \models \sigma^*.$$

اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک مدل یک گونه برای $\Sigma^* \cup \Phi$ باشد. در این‌صورت $\mathcal{B}$، براساس لم ۴۳ب، مدلی برای Σ خواهد بود. بنابراین $\mathcal{B}^\#$ یک مدل برای σ است. بنابراین باکاربرد مجدد لم ۴۳ب، $\mathcal{B}$ مدلی برای σ^* است.

($\Rightarrow$) براساس لم ۴۳الف، اثبات مشابه است. ■

با بهره‌جویی از قضیهٔ ۴۳پ، حال، می‌توانیم سه قضیهٔ زیر را از نتایج متناظر یک گونه، به‌دست آوریم.

قضیهٔ فشردگی. اگر هر زیر مجموعهٔ متناهی از مجموعهٔ Σ، از جمله‌های چندگونه

دارای یك مدل باشد، آنگاه Σ دارای مدلی خواهد بود.

اثبات. فرض‌کنیم هر زیرمجموعهٔ متناهی $\Sigma_\circ$ از Σ دارای یك مدل چندگونه مانند $\mathscr{U}_\circ$ است. دراین‌صورت یك زیرمجموعهٔ متناهی $\Sigma^*_\circ$ از Σ^* دارای مدل $\mathscr{U}^*_\circ$ است. بنابراین بنابر قضیهٔ فشردگی معمولی، Σ^* دارای یك مدل مانند $\mathscr{B}$ است. پس $\mathscr{B}^\#$ مدلی برای Σ می‌باشد. ■

قضیهٔ شمارش‌پذیری. برای یك زبان چندگونه‌که به‌طور بازگشتی شماره شده، مجموعهٔ اعداد گودل جمله‌های معتبر شماره‌پذیر بازگشتیانه است.

اثبات. برای یك σی چندگونه، براساس قضیهٔ ۴۳پ، داریم:

$$\models \sigma \text{ اگر وتنها اگر } \Phi \models \sigma^*.$$

ازآنجاکه Φ بازگشتی‌است، لذا $\mathrm{Cn}\,\Phi$ شماره‌پذیر بازگشتیانه‌است و σ^* به‌طوربازگشتی به σ بستگی دارد، بنابراین می‌توانیم تمرین ۷(ب) از بخش ۵.۳ را به‌کاربریم. ■

قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم. برای هرساخت چندگونه (برای یك زبان شمارش‌پذیر) یك ساخت شمارش‌پذیر هم‌ارز مقدماتی با آن وجود دارد.

اثبات. فرض‌کنیم‌ساخت $\mathscr{U}$ داده شده‌باشد. دراین‌صورت $\mathscr{U}^*$ یك مدل‌یك‌گونه‌برای $\Phi \cup (\mathrm{Th}\,\mathscr{U})^*$ است. بنابراین، بنابر قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم در حالت معمولی، $\Phi \cup (\mathrm{Th}\,\mathscr{U})^*$ دارای یك مدل شمارش‌پذیر $\mathscr{B}$ است. $\mathscr{B}^\#$ مدلی برای $\mathrm{Th}\,\mathscr{U}$ است و بنابراین به‌طور مقدماتی با $\mathscr{U}$ هم‌ارز است. ■

۴.۴ ساختهای عام

حال به‌بحث دربارهٔ منطق مرتبهٔ دوم‌که درآغاز بخش ۱.۴ شروع کردیم، برمی‌گردیم. در آنجا دربارهٔ (الف) دستور، یعنی‌مجموعهٔ ف.د.س.ها برای زبان مرتبهٔ دوم، و (ب) معناشناسی، یعنی‌مفهوم ساخت (که با معناشناسی مرتبهٔ اول یکسان بود) وتعریف ارضا وصدق، بحث کردیم.

دراین بخش (الف) را دست نخورده می‌گذاریم، اما می‌خواهیم شق دیگری برای (ب) ارائه دهیم.نکتهٔ اصلی رابااختصار می‌توان بیان‌کرد: ما زبان را (که قبلاً مرتبهٔ دوم پنداشتیم) اکنون به‌عنوان یك زبان مقدماتی (یعنی، مرتبهٔ اول) چندگونه تلقی می‌کنیم. نتیجه آن می‌شودکه نه تنها عالمی‌که قلمرو متغیرهای خاص هستند بلکه عالمهایی‌که برای متغیرهای محمولی وتابعی هستند، در معرض تعبیر قرارمی‌گیرند. این رهیافت، مخصوصاً،برای نظریهٔ اعداد مناسب است؛ از این‌حالت درخاتمهٔ این بخش مورد بررسی

قرار می‌گیرد .

زبان چندگونه

علی‌رغم این‌که نهایتاً می‌خواهیم دستور زبان مربوط به‌بخش ۱.۴ را درنظر بگیریم، جا دارد یك زبان چندگونه ساخته شده از زبان مرتبهٔ دوم بخش۱.۴ رابررسی کنیم. $\aleph_0$ گونه را درنظرمی‌گیریم: تنها گونهٔ فردی (با متغیرهای $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، ...)؛ به‌ازای هر $n > 0$، گونهٔ محمولی n موضعی (با متغیرهای $\mathbf{X}_1^n$، $\mathbf{X}_2^n$، ...)؛ به‌ازای‌هر $n > 0$، گونهٔ تابع n موضعی (با متغیرهای $\mathbf{F}_1^n$، $\mathbf{F}_2^n$، ...). تساوی ($\approx$) را فقط بین ترمهای گونهٔ فردی به‌کار خواهیم برد. پارامترهای محمولی و تابعی این‌زبان مرتبهٔ دوم مفروض، همچنین، پارامترهای زبان چندگونهٔ ما خواهند بود. این پارامترهـا جاهای خالی خود را تنها بـا گونهٔ فردی پـر خواهند کرد.

علاوه براین ، اکنون دو ردهٔ جدید از پارامترها را به‌کار خواهیم برد. به‌ازای هر $n > 0$، یك پارامترمحمولی‌عضویت ε_n وجود داردکه یك ترم ازگونهٔ محمولی nموضعی و n ترم ازگونهٔ فردی را به‌عنوان شناسه می‌گیرد. پس، مثلاً،

$$\varepsilon_3 \mathbf{X}^3 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_8$$

یك ف.د.س. است. تعبیر مورد نظر آن است‌که سه‌گانهٔ نمایش داده شده با $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_8)$ باید به‌رابطه‌ای تعلق داشته باشدکه با $\mathbf{X}^3$ نمایش داده می‌شود. این دقیقاً تعبیری است‌که قبلاً به‌فرمول مرتبهٔ دوم

$$\mathbf{X}^3 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_8$$

اسناد داده شده، به‌خواننده توصیه می‌کنیم‌که این دوفرمول را به‌صورت تقریباً یك فرمول به‌خاطر بسپارد.

به‌ازای هر $n > 0$، پارامتـر تابع ارزیابی E_n وجود دارد. E_n، به‌عنوان شناسه، یك ترم از جور تابع n موضعی و n ترم ازگونهٔ فردی را می‌پذیرد. ترم حاصله،

$$E_n \mathbf{F}^n t_1 \ldots t_n,$$

خود ازنوع گونهٔ فردی است. مجدداً به‌خواننده توصیه می‌شودکه ترم $E_n \mathbf{F}^n t_1 \ldots t_n$ را با ترم قبلی $\mathbf{F}^n t_1 \ldots t_n$ تقریباً به‌صورت یك ترم به‌خاطربسپارد.

یك طریق ترجمهٔ بدیهی بین زبان مرتبهٔ دوم مربوط به‌بخش ۱.۴ و زبان چندگونهٔ فعلی وجود دارد. دریك جهت، نمادهای ε_n و E_n را نگه می‌داریم؛ درجهت دیگـر، آنها را برکنار می‌سازیم. منظور ازاین نمادها هماهنگ ساختن این زبان با بخش ۳.۴ است.

ساختهای چندگونه، دارای عالمهایی برای هرگونه می‌باشند وبه‌پارامترهای گوناگون اشیاء متناسبی اسناد می‌کند (همانگونه‌که در بخش قبـل تشریح شد). نخست، بدون خلل درکلیت ، می‌خواهیم نشان دهیم که می‌توانیم ε_n را به عنوان عضویت اصیل و E_n را به

عنوان ارزیابی اصیل تعبیر می‌کنیم.

قضیهٔ ۴۴الف. فرض کنیم $\mathfrak{A}$ ساختی برای زبان چندگونهٔ بالا که عالمهای مختلف مربوط به‌آن مجزا هستند، باشد. درآن صورت یك همریختی h از $\mathfrak{A}$ روی یك ساخت $\mathfrak{B}$ وجود دارد که

(الف) h یك به‌یك، در واقع همانی، روی عالم افراد است (که از آن

$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ اگر وتنها اگر $\models_{\mathfrak{B}} \varphi[h \circ s]$

به‌ازای هرفرمول φ نتیجه می‌شود).

(ب) جهان محمولی n موضعی مربوط به $\mathfrak{B}$ متشکل از روابط nتایی مشخصی روی عالم افراد، و $\langle R, a_1, \ldots, a_n \rangle$ در $\varepsilon_n^{\mathfrak{B}}$ است اگر وتنها اگر $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$.

(پ) عالم تابع n موضعی مربوط به $\mathfrak{B}$ متشکل از توابع n موضعی مشخصی روی عالم افراد است، و $E_n^{\mathfrak{B}}(f, a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$.

اثبات. ازآنجاکه عالمهای مربوط به $\mathfrak{A}$ مجزاهستند، می‌توانیم h راروی هرکدام ازعالمها تعریف کنیم. h، روی‌عالم افراد U، تابع همانی است. روی‌عالم مربوط به‌گونهٔ محمولی n موضعی،

$$h(Q) = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle : \text{هر } a_i \text{ در } U \text{ و } \langle Q, a_1, \ldots, a_n \rangle \text{ در } \varepsilon_n^{\mathfrak{A}} \text{ است}\}.$$

بنابراین

(۱) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in h(Q)$ اگر وتنها اگر $\langle Q, a_1, \ldots, a_n \rangle$ در $\varepsilon_n^{\mathfrak{A}}$ باشد.

به‌همین‌ترتیب، روی عالم مربوط به‌گونهٔ تابع n موضعی،

$h(g)$ تابع n موضعی روی U است به‌طوری‌که مقدار آن در $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ برابر باشد با $E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, \ldots, a_n)$.

بنابراین

$$h(g)(a_1, \ldots, a_n) = E_n^{\mathfrak{A}}(g, a_1, \ldots, a_n). \tag{۲}$$

برای $\varepsilon_n^{\mathfrak{B}}$ بسادگی رابطهٔ عضویت را درنظر می‌گیریم،

(۳) $\langle R, a_1, \ldots, a_n \rangle$ در $\varepsilon_n^{\mathfrak{B}}$ باشداگر و تنها اگر $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$.

برای $E_n^{\mathfrak{B}}$ تابع ارزیابی را درنظر می‌گیریم،

$$E_n^{\mathfrak{B}}(f, a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n). \tag{۴}$$

در مورد بقیهٔ پارامترها (که از زبان مرتبهٔ دوم گرفته شده‌اند) $\mathfrak{B}$ با $\mathfrak{A}$ توافق دارد.

پس بوضوح چنین برمی‌آید که h یك همریختی از $\mathcal{U}$ روی $\mathcal{B}$ است. این موضوع که h، ε_n را حفظ می‌کند از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود، که در (۳) قرار می‌دهیم $R = h(Q)$. به‌همین‌ترتیب، از (۲) و (۴) نتیجه می‌شود که h، E_n را حفظ می‌کند.

آنچه‌می‌ماند توضیح داخل پرانتز قسمت (الف) است. این‌ازکاربرد قضیهٔ همریختی در بخش ۲.۲ درمورد چندگونه‌ها، با استفاده از این امر که تساوی را فقط در گونهٔ افراد، که در آن h یك به‌یك است، دراختیار داریم، نتیجه می‌شود. ■

براساس‌قضیهٔ بالا، می‌توانیم توجه خود را به‌ساختهایی‌مانند $\mathcal{B}$ که در آن ε_n و E_n، با توجه به (ب) و (پ) معین فرض می‌شوند، محدودکنیم. ولی از آنجاکه $\varepsilon_n^{\mathcal{B}}$ و $E_n^{\mathcal{B}}$ بنابر بقیهٔ $\mathcal{B}$ تعیین می‌شوند، در واقع، اصلاً به‌آنها احتیاج نداریم. وقتی‌که آنها راکنار گذاشتیم، یك پیش‌ساخت عام برای دستور زبان مرتبهٔ دوم خود دراختیار داریم.

ساختهای عام برای زبانهای مرتبهٔ دوم

این ساختها، معناشناسی دیگری راکه ذکر آن در آغاز این بخش آمد، فراهم می‌آورد.

تعریف. یك پیش ساخت عام $\mathcal{U}$ برای زبان مرتبهٔ دوم متشکل از ساختی (به معنای اولیه)، همراه با مجموعه‌های اضافی زیر می‌باشد:

(الف) به ازای هر $n > 0$، یك عالم رابطهٔ n موضعی، که یك مجموعة از رابطه‌های nتایی روی $|\mathcal{U}|$ است؛

(ب) به‌ازای هر $n > 0$، یك عالم تابع n موضعی، که یك مجموعه ازتوابع از $|\mathcal{U}|^n$ در $|\mathcal{U}|$ است.

$\mathcal{U}$ یك ساخت عام است اگر، علاوه براینها، همهٔ جمله‌های استنباطی در $\mathcal{U}$ صادق باشند.

جملهٔ آخر تعریف نیاز به‌توضیح دارد. نخست، یك جملهٔ استنباطی جمله‌ای است‌که به‌عنوان تعمیمی ازیك فرمول استنباطی به‌دست می‌آید (مثال ۳ از بخش ۱.۴ را ببینید). بنابراین، جمله‌ای است به‌صورت

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m \, \exists \mathbf{X}^n \forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n (\mathbf{X}^n \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n \leftrightarrow \varphi),$$

که در آن $\mathbf{X}^n$ در φ آزاد ظاهر نمی‌شود، یا

$$\forall y_1 \ldots \forall y_m [\forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_n \, \exists! \mathbf{v}_{n+1} \varphi \rightarrow$$
$$\exists \mathbf{F}^n \forall \mathbf{v}_1 \ldots \forall \mathbf{v}_{n+1} (\mathbf{F}^n \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_{n+1} \leftrightarrow \varphi)],$$

که در آن $\mathbf{F}^n$ در φ آزاد ظاهر نمی‌شود.

حال باید بگوییم که صادق بودن یك جملهٔ استنباطی (یا در این رابطه، هر جملهٔ مرتبهٔ دوم) در $\mathcal{U}$ چه معنا می‌دهد. پس فرض کنیم $\mathcal{U}$ یك پیش ساخت عام باشد. در آن‌صورت یك جملهٔ σ در $\mathcal{U}$ صادق است اگر و تنها اگر نتیجهٔ برگرداندن σ به‌یك جملهٔ چندگونه (با افزودن ε_n و E_n) در $\mathcal{U}$ صادق باشد، درصورتی که ε_n به‌عنوان عضویت و E_n به‌عنوان تابع ارزیابی تعبیر شود.

به‌طور کلی، فرض کنیم φ یك فرمول مرتبهٔ دوم، و s تابعی باشد که به‌هر متغیر خاص، عضوی از $|\mathcal{U}|$، به‌هر متغیر محمولی عضوی از عالم رابطهٔ $\mathcal{U}$، و به‌هر متغیر تابعی عضوی از عالم تابع $\mathcal{U}$ را نسبت می‌دهد. در این صورت گوییم $\mathcal{U}$ فرمول φ را با s ارضا می‌کند، و می‌نویسیم $\models^G \varphi[s]$، اگر و تنها اگر ترجمهٔ چندگونهٔ φ با s در ساخت $\mathcal{U}$ ارضا شود، درصورتی که ε_n را به‌عنوان عضویت و E_n را به‌عنوان تابع ارزیابی تعبیر کنیم.

نتایج اساسی از تعریف ارضا در زیر می‌آیند، که باید با ۵ و ۶ در صفحهٔ ۲۹۶ مقایسه شوند:

$\models^G_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{X}^n \varphi[s]$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر R در عالم رابطهٔ n موضعی مربوط به $\mathcal{U}$، $\models^G_{\mathfrak{A}} \varphi[s(\mathbf{X}^n|R)]$.

$\models^G_{\mathfrak{A}} \forall \mathbf{F}^n \varphi[s]$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر f در عالم تابع n موضعی مربوط به $\mathcal{U}$، $\models^G_{\mathfrak{A}} \varphi[s(\mathbf{F}^n|f)]$.

این همان رهیافت دیگری است که ذکرش در ابتدای این بخش آمد. در این تعبیر، با دستور زبان مرتبهٔ دوم یك دستور زبان چندگونهٔ مرتبهٔ اول در لباس مبدل است. از آنجا که این رهیافت اساساً مرتبهٔ اول است، قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم، قضیهٔ فشردگی، و قضیهٔ شمارش‌پذیری را در اختیار داریم.

قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم. اگر مجموعهٔ Σ از جمله‌ها در یك زبان مرتبهٔ دوم شمارش‌پذیر دارای یك مدل عام باشد، آنگاه دارای یك مدل عام شمارش‌پذیر خواهد بود.

در اینجا، منظور از یك مدل عام شمارش‌پذیر مدلی است که در آن همهٔ عالمها شمارش‌پذیرند (یا به‌بیان معادل، اجتماع همهٔ عالمها شمارش‌پذیر است).

اثبات. فرض کنیم Γ مجموعهٔ جمله‌های استنباطی باشد. در این‌صورت $\Sigma \cup \Gamma$، هنگامی که به‌عنوان مجموعه‌ای از جمله‌های چندگونه تلقی شود، براساس قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم از بخش پیشین، دارای یك مدل چندگونهٔ شمارش‌پذیر می‌باشد. طبق قضیهٔ ۴۴الف، یك سایهٔ همریخت از آن مدل، پیش ساختی عام است که $\Sigma \cup \Gamma$ را ارضا می‌کند، و بنابراین یك مدل عام برای Σ است. ■

قضیهٔ فشردگی. اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از یك مجموعهٔ Σ از جمله‌های مرتبهٔ دوم دارای مدلی عام باشد، آنگاه Σ دارای یك مدل عام خواهد بود.

اثبات. اثبات دقیقاً مانند اثبات فوق است. هرزیرمجموعهٔ متناهی از $\Sigma \cup \Gamma$ دارای یك مدل چندگونه است، بنا براین می‌توانیم قضیهٔ فشردگی از بخش قبل را به‌کار گیریم. ■

قضیهٔ شمارش‌پذیری. فرض کنیم زبان مورد نظر به‌طور بازگشتی شماره شده باشد. دراین صورت، مجموعهٔ اعداد گودل جمله‌های مرتبهٔ دوم که درهرساخت عام صادق هستند، شماره‌پذیر بازگشتی است.

اثبات. جملهٔ σ در هرساخت عام صادق است اگر وتنها اگریك نتیجهٔ منطقی چند‌گونهٔ Γ باشد. و $\#\Gamma$ بازگشتی است. ■

دوقضیهٔ بالا به ما اطمینان می‌دهند که یك حساب قیاسی‌پذیرفتنی وجود دارد به‌طوری که τ از Σ استنتاج‌پذیر است اگر و تنها اگر τ در هرمدل عام برای Σ صادق باشد (توضیحات آغازین بخش ۴.۲ را ببینید). اما، حال‌که می‌دانیم چنین حساب قیاسی تمام وجود دارد، دلیلی برای پرداختن به‌جزئیات یکی از آنها وجود ندارد.

می‌توانیم این دو رهیافت به‌معناشناسی مرتبهٔ دوم را به‌صورت زیر مقایسه‌کنیم: توصیف بخش ۱.۴ (که‌آن را منطق مرتبهٔ دوم مطلق‌خواهیم نامید) مخلوق پیوندی است، که درآن معنای پارامترها را ساختها تعیین می‌کنند، اما مفهوم زیرمجموعه بودن (برای مثال) را تعبیرتعیین نمی‌کند ومعنای ثابتی دارد. توصیف مربوط به‌بخش فعلی (منطق‌مرتبهٔ دوم عام) از توسل به‌یك مفهوم ثابت از زیرمجموعه می‌پرهیزد، و نتیجتاً به‌منطق مرتبهٔ‌اول تحویل‌پذیر است. و از این دیدگاه مانند نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌هاست، که درآن از مجموعه‌ها ومجموعه‌های مجموعه‌ها والی‌آخرصحبت می‌شود، اما این نظریه یك نظریهٔ مرتبهٔ اول است.

با وسعت بخشیدن به‌ردهٔ ساختها، منطق‌مرتبهٔ دوم عام، حالتهایی راکه درآنهااستلزام منطقی برقرار است‌کاهش می‌دهد. یعنی، اگر هرمدل عام برای Σ یك مدل عام برای σ باشد، در آن صورت $\Sigma \models \sigma$ در منطق مرتبهٔ دوم مطلق صادق است. اما عکس آن برقرار نیست. به‌عنوان مثال، $\Sigma = \varnothing$ رادرنظر بگیرید: مجموعهٔ جمله‌های‌صادق درهمهٔ مدلهای عام یك زیرمجموعهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه ازمجموعهٔ غیرحسابی متشکل از جمله‌های‌معتبرمنطق مرتبهٔ دوم مطلق است.

مدلهای آنالیز

می‌توانیم ایدهٔ این‌بخش را با توجه به‌جالبترین‌حالت ویژه، یعنی مدلهای عام نظریهٔ اعداد مرتبهٔ دوم روشن‌کنیم. زبان مرتبهٔ دوم برای نظریهٔ اعداد را، همراه باپارامترهای $\mathbf{0}$، $\mathbf{S}$، $<$، . . .، و $\mathbf{E}$ درنظرمی‌گیریم. مجموعهٔ A_E^2 راکه از A_E با افزودن اصل استقرای

پئانو، به‌عنوان دوازدهمین عضو، بــه آن به‌دست می‌آید به‌عنوان مجموعهٔ اصول موضوع خود درنظرمی گیریم (مثال۲، بخش ۱۰۴). از تمرین۱ بخش۱۰۴، می‌توانیم نتیجه بگیریم که هرمدل (درمعناشناسی همان بخش) از A_E^2 با $\mathcal{U}$ یکریخت است.

اما دربارهٔ مدلهــای عام مربــوط به‌مجموعهٔ اصول موضوع چه می‌توان گفت. این مدلها می‌توانند به‌هریك (یا هردو) طریق بــا $\mathcal{N}$ متفاوت باشند. می‌توانیم قضیهٔ فشردگی را، مانند قبل، برای ساختن‌مدلهای عام (غیراستاندارد) ازاصول موضوع با اعداد بینهایت (یعنی، مدلهای $\mathcal{U}$ با عددی مانند a کــه از هرمصداق $\mathbf{S}^n\mathbf{o}$ درترتیب $<$ بزرگتر است) به‌کارگیریم. همچنین می‌توانیم مدلهام عام (غیرمطلق) را به‌دست آوریم که در آنها، مثلاً، مجموعهٔ عالم (عالم رابطهٔ یك‌تایی) کوچکتر ازکل مجموعهٔ توانی مربوط به‌عالــم افراد است. در حقیقت، هرمدل عام شمارش‌پذیر باید از این نوع باشد.

در میان منطق‌دانان رسم براین است که از نظریهٔ اعداد مرتبهٔ دوم به‌عنوان آنالیز یاد کنند. این‌اسم از این مطلب نشأت می‌گیرد که می‌توان اعــداد حقیقی را با مجموعه‌هــای اعداد طبیعی یکی دانست. در نظریهٔ اعــداد مرتبهٔ دوم قلمرو سورها، مجموعه‌های اعــداد طبیعی است، که می‌توانیم آنها را قلمرو اعداد حقیقی تلقی کنیم. با این حال، مناسب بودن این نام می‌تواند مورد پرسش قرار گیرد، هرچند کــه کاربرد آن کاملاً جا افتــاده است. منظورمــا از یك مدل آنالیز، مدل عام از مجموعــهٔ اصول موضوع A_E^2 مذکور در بالا، خواهد بود.

یك ω- مدل آنالیز، مدلی است از آنالیز که در آن عالم افراد عبارت است از N و مصداقهای $\mathbf{o}$ و $\mathbf{S}$ همان 0 و S اصلی هستند. (نتیجتاً، مصداقهای $<$، $+$، $\cdot$، و $\mathbf{E}$ نیز استاندارد هستند.) محرك ما در مطالعهٔ ω- مدلها را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد: مــا ادراکی روشن ازمجموعهٔ N داریم. اما چیزی شبیه این ادراك دربارهٔ مجموعهٔ توانی آن، $\mathcal{P}N$ وجود ندارد. برای مثال، مطمئن نیستیم که کاردینال آن $\aleph_1$ یا $\aleph_2$ یا بیشتر است. بنابراین معقول است که برآنچه مطمئنیم (یعنی N) پافشاری کنیم و تعبیر آنچه راکــه مطمئن نیستیم به‌عهدهٔ ساختی بگذاریم که در بارهٔ آن اطمینان نداریم (یعنی $\mathcal{P}N$).

در میان ω- مدلهای آنالیز یك مدل مطلق وجود دارد که عالم رابطهٔ n موضعی آن متشکل از رابطه‌هــای nتایی روی N است (و عالمهای تابع آن متشکل از تمامی توابع ممکن می‌باشد). یك جملهٔ مرتبهٔ اول در یك ω- مدل اختیاری از آنالیز صادق است اگر و تنها اگر در $\mathcal{N}$ صادق باشد. اما ω- مدل ممکن است با مدل مطلق درجمله‌های مرتبهٔ دوم موافقت نداشته باشد.

درقضیهٔ بعد نشان می‌دهیم که یك ω- مدل آنالیز کاملاً با عالم مجموعهٔ خود مشخص می‌شود (یعنی، با عالم رابطهٔ یك موضعی).

قضیهٔ ۴۴ب. اگر $\mathcal{U}$ و $\mathcal{B}$، ω- مدلهای آنالیز باشند که، دارای عالم رابطهٔ یك موضعی یکسانی هستند، آنگاه $\mathcal{U}=\mathcal{B}$.

اثبات. فرض کنیم R متعلق به‌عالم رابطهٔ سه موضعی $\mathcal{U}$ باشد. فرض کنیم $\langle R\rangle$ «فشردهٔ» R در یك رابطهٔ یك‌تایی باشد:

$$\langle R\rangle=\{\langle a, b, c\rangle : \langle a, b, c\rangle \in R\}.$$

تابع دنباله- رمزگذار بازگشتی است و بنابراین، با یك فرمول مرتبهٔ اول φ در نظریهٔ اعداد، تعریف‌پذیر است. $\langle R\rangle$، به‌خاطر جملهٔ استنباطی

$$\forall X^3 \exists X^1 \forall u[X^1 u \leftrightarrow \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3(\varphi(v_1, v_2, v_3, u) \wedge X^3 v_1 v_2 v_3)],$$

در عالم مجموعهٔ $\mathcal{U}$ است.

بنابراین، $\langle R\rangle$ در عالم مجموعهٔ $\mathcal{B}$ است؛ این مطلب را با استدلالی مشابه باز می‌کنیم. R، به‌خاطر جملهٔ استنباطی

$$\forall X^1 \exists X^3 \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3[X^3 v_1 v_2 v_3 \leftrightarrow \exists u(\varphi(v_1, v_2, v_3, u) \wedge X^1 u)],$$

در عالم رابطهٔ سه موضعی $\mathcal{B}$ است.

استدلالی مشابه در مورد عالمهای تابع به‌کار می‌رود. ■

نتیجتاً، می‌توانیم یك ω- مدل برای آنالیز را با عالم مجموعهٔ آن (که زیرمجموعهٔ $\mathcal{P}N$ است) یکی بدانیم. پس هر زیر ردهٔ $\mathcal{P}N$، یك ω- مدل برای آنالیز نیست، بلکه تنها آنهایی چنین‌اند که برای آنها جمله‌های استنباطی ارضا شوند.

مثالهایی از ω- مدلها. کافی است که عالم مجموعه را مشخص کنیم.

۱. $\mathcal{P}N$ مدل مطلق است.

۲. فرض کنیم $(A, \in_A)$ مدلی برای اصول موضوع معمولی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد به‌طوری که (یك) رابطهٔ $\in_A$ رابطهٔ حقیقی عضویت، $\{\langle a, b\rangle : a\in A, b\in A, a\in b\}$ درجهان A، و (دو) A متعدی باشد، یعنی اگر $a \in b \in A$، آنگاه $a\in A$. در این صورت گردآوردهٔ کلیهٔ زیرمجموعه‌هایی از N که متعلق به A هستند یك ω- مدل آنالیز است.

۳. برای یك ردهٔ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}N$، $D\mathcal{A}$ را ردهٔ تمامی مجموعه‌های $B \subseteq N$ تعریف می‌کنیم که در پیش‌ساخت ω با عالم مجموعهٔ $\mathcal{A}$ با فرمولی از زبان مرتبهٔ دوم نظریهٔ اعداد که به‌آن پارامترهایی برای هرمجموعه در $\mathcal{A}$ افزوده شده تعریف‌پذیر است. حال با بازگشت ترابا پایان روی اردینالها تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{A}_0 = \varnothing,$$

$$\mathcal{A}_{\alpha+1} = D\mathcal{A}_\alpha,$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\alpha \qquad \text{به‌ازای } \lambda \text{ حدی}$$

با ملاحظاتی در کاردینال، می‌بینیم که رشد این دنباله در اردینالی مانند β که $\mathcal{A}_{\beta+1} = \mathcal{A}_\beta$، متوقف می‌شود. فرض کنیم β_0 کوچکترین چنین βهایی باشد؛ می‌توان نشان داد (براساس قضیهٔ لون‌هایم-اسکولم) که β_0 یك اردینال شمارش‌پذیر است. $\mathcal{A}_{\beta_0}$ با $\bigcup_\alpha \mathcal{A}_\alpha$ (اجتماع روی تمامی اردینالهای α گرفته شده است) منطبق است، و ردهٔ مجموعه‌های تحلیلی منشعب نامیده می‌شود. این ω-مدلی برای آنالیز است؛ صدق جمله‌های استنباطی از این امر نشأت می‌گیرد که $D\,\mathcal{A}_{\beta_0} \subseteq \mathcal{A}_{\beta_0}$.

واژه‌نامهٔ
انگلیسی به فارسی

alphabetic variants	گونه‌های الفبایی
arithmetical hierarchy	سلسله مراتب حسابی
automorphism	خودریختی
biconditional	دوشرطی
cardinal	کاردینال، عدد اصلی
—arithmetic	حساب کاردینال
—number	عدد کاردینال
cardinality of structures	کاردینال ساختها
categorical set	مجموعهٔ جازم
circuit	مدار
compactness theorem	قضیهٔ فشردگی
complete	تمام
—set of connectives	مجموعهٔ تمام از رابطها
—theory	نظریهٔ تمام
conditional	شرطی
conjunction	ترکیب عطفی
connective	رابط
—sentential	رابط جمله‌ای
consequence	نتیجهٔ منطقی
consistent set	مجموعهٔ سازگار
constant symbol	نماد ثابت

contraposition	عکس نقیض
decidable set	مجموعهٔ تصمیم‌پذیر
deduction	استنتاج
deductive calculi	حساب استنتاجی
definable element	عضو تعریف‌پذیر
definability from points	تعریف‌پذیری برحسب نقاط
disjoint set	مجموعهٔ مجزا
disjunction	ترکیب فصلی
duality	اصل دوگانی
effective	کارامد
_enumerability	شماره‌پذیر کارامد
_procedure	روش کارامد
elementary class	ردهٔ مقدماتی
eliminable definition	تعریف حذف‌شدنی
equality symbol	نماد تساوی
equivalence	معادل
_elementary	معادل مقدماتی
_tautological	معادل توتولوژیکی
eventually periodic set	مجموعهٔ نهایتاً تناوبی
exclusive disjunction	یای مانعة‌الجمع
existential instantiation	معرفی سور وجودی
expression	عبارت
field	هیأت [= میدان]
finitely axiomatizable	اصل‌پذیر متناهی
formula	فرمول
atomic_	فرمول بسیط
comprehension_	فرمول استنباطی
deducible_	فرمول استنتاج‌پذیر
existential_	فرمول وجودی
numeralwise determined_	فرمول باشمارها معین
prenex_	فرمول پیشوندی
well-formed _	فرمول درست ساخت

function	تابع
computable_	تابع محاسبه‌پذیر
concatenation_	تابع پیوند
indexiny of recursive partial_	تابع‌اندیس‌کنندهٔ جزئی بازگشتی
recursive _	تابع بازگشتی
partial_	تابع بازگشتی جزئی
_ symbol	نماد تابعی
generalization on constants	تعمیم روی ثابتها
halting problem	مسئلهٔ توقف
homomorphism	همریختی
induction principle	اصل استقرا
inductive set	مجموعهٔ استقرایی
integer	عدد صحیح
interpretation	تعبیر
faithful_	تعبیر وفادار
identity_	تعبیر همانی
isomorphism	یکریختی
language	زبان
countable_	زبان شمارش‌پذیر
formal_	زبان صوری
reasonable_	زبان معقول
logical	منطقی
_axioms	اصول موضوع منطقی
_equivalence	منطقاً معادل
_implication	استلزام منطقی
many-one reducibility	تحویل‌پذیر چند به‌یك
many-valued logic	منطق چند ارزشی
modus ponens	قاعدهٔ وضع مقدم (یا قیاس استثنایی)
negation	نفی

nonlogical symbol	نماد غیر منطقی
normal form	صورت نرمال
disjunctive–	صورت فصلی نرمال
prenex–	شکل نرمال پیوندی
notation	علامت‌گذاری
numeral	شمار
ω-consistency	ω - سازگاری
ω-model of analysis	ω - مدل آنالیز
operation	عمل
n-ary–	عمل n تایی
formula-building–	عمل فرمول‌ساز
term-building–	عمل ترم ساز
operator	عملگر
least-zero–	عملگر کوچکترین ریشه
orderd pair	زوج مرتب
pairwire disjoint	دو به‌دو مجزا
paradox	پارادوکس
parameter	پارامتر
parameterization	پارامتری کردن
power set	مجموعهٔ توانی
predicate symbol	نماد محمولی
prime	اول
–implicants	ضربهای اول
propositional logic	منطق گزاره‌ها
quntifier	سور
bounded–	سور کراندار
–elimination	حذف سورها
existential–	سور وجودی
unique–	سور وجودی یگانه
ramified analytical set	مجموعهٔ تحلیلی منشعب
recursion	بازگشت

monotone—	بازگشت یکنوا
primitive—	بازگشت ابتدایی
reductio ad absurdum	برهان خلف
reflexive	انعکاسی
register	ثبات
relation	رابطه
arithmetical—	رابطهٔ حسابی
congruence—	رابطهٔ همنهشتی
definable—	رابطهٔ تعریف‌پذیر
implicity—	رابطهٔ تعریف‌پذیر ضمنی
ordering—	رابطهٔ ترتیبی
recursive—	رابطهٔ بازگشتی
recursively enumerable—	رابطهٔ شماره‌پذیر بازگشتیانه
representable—	رابطهٔ نمایش‌پذیر
weakly—	رابطهٔ به‌طور ضعیف نمایش‌پذیر
relay circuit	مدار امدادی
restriction	تحدید
rules of inference	قواعد استنتاج
satisfaction of formulas	ارضا کردن فرمولها
second-order logic	منطق مرتبهٔ دوم
segment	پاره
initial—	پارهٔ آغازی
proper—	پارهٔ سره
sentence	جمله
sequence	دنباله
construction—	دنبالهٔ ساختمانی
decoding—	دنبالهٔ رمزگشا
encoding—	دنبالهٔ رمزگذار
—number	عدد دنباله‌ای
strong undecidability	تصمیم‌ناپذیری قوی
structure	ساخت
general—	ساخت عام
isomorphic—	ساخت یکریخت
substitution	جایگزینی

substructures	زیرساختها
switching circuite	مدار راه‌گزین
symbol	نماد
constant_	نماد ثابت
equality_	نماد تساوی
function_	نماد تابعی
logical_	نماد منطقی
nonlogical_	نماد غیر منطقی
predicate_	نماد محمولی
sentence_	نماد جمله‌ای
symmetric	متقارن
syntax and semantics	نحو و معنا
tautological implication	نتیجهٔ توتولوژیك
tautology	توتولوژی
term	ترم
substitutable_	ترم جایگزین شدنی
theorem	قضیه
completeness_	قضیهٔ تمامیت
enumerability_	قضیهٔ شمارش‌پذیری
undefinability_	قضیهٔ تعریف‌ناپذیری
unique readability_	قضیهٔ یگانه‌خوانی
theory	نظریه
axiomatizable_	نظریهٔ اصل‌پذیر
decidable_	نظریهٔ تعمیم‌پذیر
_of structures	نظریهٔ ساختها
thesis	فرضیه
transitive	متعدی
trichotomy	تثلیث
truth assignment	ارزشدهی
truth value	ارزش
ultraproduct	فراضربی
universe	عالم سخن
unsolvability of halting problem	حل‌ناپذیری مسئلهٔ توقف

variable	متغیر
bound—	متغیر پایبند
free—	متغیر آزاد
predicate—	متغیر محمولی
z-chains	z-زنجیره‌ها

واژه‌نامهٔ
فارسی به‌انگلیسی

ارزش	truth value
ارزشدهی	truth assignment
ارضا کردن فرمولها	satisfaction of formulas
استنتاج	deduction
استلزام منطقی	logical implication
اصل	principle
ـ استقرا	induction principle
ـ تثلیث	trichotomy
ـ دوگانی	duality
اصول موضوع منطقی	logical axioms
ω ـ سازگاری	ω-consistency
ω ـ مدل آنالیز	ω-model of analysis
انعکاسی	reflexive
بازگشت	recursion
ـ ابتدایی	primitive recursion
ـ یکنوا	monotone recursion
برهان خلف	reductio ad absurdum
پارادوکس اسکولم	skolem's paradox
پارامتر	parameter
پاره	segment
ـ آغازی	initial segment

ـ سره	proper segment
تابع	function
ـ اندیس‌کنندهٔ جزئی بازگشتی	indexing of recursive partial function
ـ بازگشتی	recursive function
ـ جزئی	recursive partial function
ـ پیوند	concatenation function
ـ محاسبه‌پذیر	computable function
ـ یك به‌یك	one-to-one function
تثلیث	trichotomy
تحدید	restriction
تحویل‌پذیر چند به‌یك	many-one reducibility
ترکیب عطفی	conjunction
ترکیب فصلی	disjunction
ترم	term
ـ های جایگزین شدنی	substitutable terms
تصمیم‌ناپذیری قوی	strong undecidability
تعاریف حذف‌شدنی	eliminable definitions
تعبیر	interpretation
ـ وفادار	faithful interpretation
ـ همانی	identity interpretation
تعریف‌پذیری برحسب نقاط	definability from points
تعمیم روی ثابتها	generalization on constants
توتولوژی	tautology
ثبات	register
جایگزینی	substitution
ـ ترمها	substitution of terms
ـ فرمولها	substitution of formulas
جمله	sentence
حذف سورها	quantifier elimination
حساب	calculi (arithmetic)
ـ استنتاجی	deductive calculi

cardinal arithmetic	ــ کاردینالها
unsolvability of halting problem	حل‌ناپذیری مسئلهٔ توقف
properties of equality	خواص تساوی
automorphism	خودریختی
sequence	دنباله
encoding sequence	ــ رمزگذار
decoding sequence	ــ رمزگشا
construction sequence	ــ ساختمانی
pairwise disjoint	دو به‌دو مجزا
biconditional	دوشرطی
connective	رابط
sentential connective	ــ جمله‌ای
relation	رابطه
recursive relation	ــ بازگشتی
ordering relation	ــ ترتیبی
definable relation	ــ تعریف‌پذیر
implicity definable relation	ــ ضمنی
congruence relation	ــ همنهشتی
effective procedures	روشهای کارآمد
language	زبان
countable language	ــ شمارش‌پذیر
formal language	ــ صوری
reasonable language	ــ معقول
z-chains	z - زنجیره‌ها
ordered pair	زوج مرتب
substructures	زیرساختها
structure	ساخت
general structure	ــ عام
isomorphic structure	ــ یکریخت
arithmetical hierarchy	سلسله مراتب حسابی

سور	quantifier
ــ کراندار	bounded quantifier
ــ وجودی	existential quantifier
ــ یگانه	unique existential quantifier
شرطی	conditional
شکل نرمال پیشوندی	prenex normal form
شمار	numeral
شماره‌پذیرکارامد	effective enumerability
صورت	form
ــ فصلی نرمال	disjunctive normal form
ــ نرمال	normal form
ضربهای اول	prime implicants
عالم سخن	universe
عبارت	expression
عدد	number
ــ اول	prime number
ــ دنباله‌ای	sequence number
ــ صحیح	integer
ــ طبیعی	natural number
ــ کاردینال	cardinal number
عدد اصلی	cardinal
عضو تعریف‌پذیر	definable element
عکس نقیض	contraposition
علامت‌گذاری	notation
عمل	operation
ــ nتایی	n-ary operation
ــ ترم ساز	term-building operation
ــ های فرمول ساز	formula-building operations
عملگر	operator
ــ کوچکترین ریشه	least-zero operator

ultraproduct	فراضربی
thesis	فرضیه
formula	فرمول
comprehension formula	ـ استنباطی
deducible formula	ـ استنتاج‌پذیر
numeralwise determined formula	ـ باشمارها معین
atomic formula	ـ بسیط
prenex formulas	ـ های پیشوندی
well-formed formulas	ـ های درست ساخت
existential formulas	ـ های وجودی
modus ponens	قاعدهٔ وضع مقدم (یا قیاس استثنایی)
theorem	قضیه
parameterization theorem	ـ پارامتری کردن
undefinability theorem	ـ تعریف‌ناپذیری
completeness theorem	ـ تمامیت
enumerability theorem	ـ شمارش‌پذیری
compactness theorem	ـ فشردگی
unique readability theorem	ـ یگانه‌خوانی
rules of inference	قواعد استنتاج
cardinality of structures	کاردینال ساختها
alphabetic variants	گونه‌های الفبایی
lemma	لم
substitution lemma	ـ جایگزینی
re-replacement lemma	ـ مجدد
fixed-point lemma	ـ نقطهٔ ثابت
transitive	متعدی
variable	متغیر
free variable	ـ آزاد
bound variable	ـ پایبند
predicate variable	ـ محمولی

متقارن	symmetric
مجموعه	set
ـ استقرایی	inductive set
ـ تحلیلی منشعب	ramified analytical set
ـ تصمیم‌پذیر	decidable set
ـ تمام از رابطها	complete set of connectives
ـ توانی	power set
ـ جازم	categorical set
ـ سازگار	consistent set
ـ مجزا	disjoint set
ـ نهایتاً تناوبی	eventually periodic set
مدار	circuit
ـ امدادی	relay circuit
ـ راه‌گزین	switching circuit
مسئلهٔ توقف	halting problem
معادل	equivalence
ـ توتولوژیکی	tautological equivalence
ـ مقدماتی	elementary equivalence
منطقاً ـ	logical equivalence
معرفی سور وجودی	existential instantiation
منطق	logic
ـ چندارزشی	many-valued logic
ـ گزاره‌ها	propositional logic
ـ مرتبه دوم	second-order logic
میدان (← هیأت)	field
نتیجهٔ منطقی	consequence
نتیجهٔ توتولوژیك	tautological implication
نحو ومعنا	syntax and semantics
نظریه	theory
ـ اصل‌پذیر	axiomatizable theory
ـ متناهی	finitely axiomatizable theory
ـ تصمیم‌پذیر	decidable theory
ـ تمام	complete theory
ـ ساختها	theory of structures

نفی	negation
نماد	symbol
ـ تابعی	function symbol
ـ تساوی	equality symbol
ـ ثابت	constant symbol
ـ جمله‌ای	sentence symbol
ـ غیرمنطقی	nonlogical symbol
ـ محمولی	predicate symbol
ـ منطقی	logical symbol
همریختی	homomorphism
هیأت (← میدان)	field
یای مانعةالجمع	exclusive disjunction
یکریختی	isomorphism

فهرست راهنما

آزمون لوش-وات ۱۶۴
آنالیز غیر استاندارد ۱۸۱، ۱۹۱

اجتماع ۸، ۹
ارزش ۳۶
ارزشدهی ۳۶
ارضا کردن فرمولها ۳۹، ۹۱، ۹۲
استلزام منطقی ۹۴
استنتاج ۱۱۶
اسکولم، تورالف ۱۵۵، ۱۵۷
اشتراك ۸، ۹
اصل
ـ استقرا ۲۶، ۳۰، ۳۵
ـ ی پئانو ۲۰۳، ۲۹۷، ۳۰۰
ـ تثلیث ۱۱
ـ دوگانی ۴۵
ـ موضوع منطقی ۱۱۶، ۲۴۷
اعتبار ۹۴، ۹۶
اعداد
ـ اول ۱۰۰، ۱۹۵، ۲۲۴
ـ دنبالهای ۲۳۵
ـ صحیح ۸
ـ طبیعی ۸
ـ کاردینال ۱۴
ـ گودل ۱۹۵، ۲۴۱
اعضای تعریفپذیر ۱۰۰
اگر و تنها اگر ۷
ω-تمام ۲۳۸
ω-سازگاری ۲۵۸، ۲۶۳
ω-مدلآنالیز ۳۱۵
انعکاسی ۱۱

بازگشت
ـ ابتدایی ۲۳۵
ـ یکنوا ۲۳۹
برد ۱۰
برهان خلف ۱۲۵

پارادوکس اسکولم ۱۵۷
پارامتر ۲۳، ۷۸
پاره ۱۰
ـ آغازی ۱۰
ـ سره ۱۰
پست، امیل ۲۸۹

تابع ۱۱
ـ بازگشتی ۲۸۰
ـ βی گودل ۲۷۳

ــ پیوند ۲۳۷
ــ تحدید ۲۳۵
ــ های بولی ۵۲-۵۴
ــ یك به‌یك ۱۱
تارسکی، آلفرد ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۶۵
تثلیث ۹۸، ۱۶۶، ۲۰۴
تحدید ۱۱
تحویل‌پذیر چند به‌یك ۲۸۷
ترم ۸۲
ــ جایگزین شدنی ۱۱۸
تساوی ۱۳۴
خواص ــ ۱۳۴، ۱۳۵
تصمیم‌ناپذیری قوی ۲۵۳، ۲۷۰
ــ نظریهٔ مجموعه‌ها ۲۶۶
تعاریف حذف‌شدنی ۱۸۰
تعبیر ۱۵۷، ۱۷۹، ۲۶۶
ــ وفادار ۱۸۰
ــ همانی ۱۷۶
تعریف
ــ با بازگشت ۳۱، ۳۵
ــ پذیری برحسب نقاط ۱۰۹
تعمیم
ــ روی ثابتها ۱۲۹
ــ فرمولها ۱۱۶
توابع
ــ اسکولم ۳۰۱
ــ اندیس‌کنندهٔ جزئی بازگشتی ۲۸۴
ــ بازگشتی ۲۷۵
ــ جزئی ۲۸۰، ۲۸۹، ۲۹۲
ــ جزئی ۲۸۰
ــ محاسبه‌پذیر ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۸۰
ــ نمایش‌پذیر ۲۲۴، ۲۳۰
توتولوژی ۴۰، ۴۳، ۱۱۹، ۲۴۵
تورینگ، آلن ۲۸۹

جایگزینی ۱۳۶
ــ ترمها ۱۱۸، ۱۳۶
ــ فرمولها ۴۵، ۱۱۷، ۱۳۶
جدول ارزش ۴۱
جمله‌ها ۸۶

حذف سورها ۲۰۰
حساب
ــ استنتاجی ۱۱۳، ۱۲۱
ــ پئانو ۲۰۲
حل‌ناپذیری مسئلهٔ توقف ۲۸۵

خط شفر ۶۰
خودریختی ۱۰۵

دامنه ۱۰
درختها ۱۳
دنباله
ــ رمزگذار و رمزگشا ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۷۴
ــ ساختمانی ۲۸
ــ متناهی ۹
دو به‌دو مجزا ۸
دوشرطی ۲۲

رابط ۲۳، ۵۱، ۶۱
ــ جمله‌ای ۲۳، ۵۱، ۶۱
رابطه ۱۰
ــ هم‌ارزی ۱۱
ــ همنهشتی ۱۴۹
رابینسون، آبراهام ۱۸۲
رده
ــ مقدماتی ۹۸، ۱۶۰
ــ هم‌ارزی ۱۲

روابط
ـ بازگشتی ۲۲۵، ۲۴۸، ۲۵۶
ـ به‌طور ضعیف نمایش‌پذیر ۲۵۹
ـ ترتیبی ۱۱، ۹۸، ۱۶۵، ۲۹۷
ـ تعریف‌پذیر ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۵، ۳۰۰
ـ ضمنی ۳۰۰
ـ حسابی ۲۵۹
روشهای‌کارامد ۶۹، ۷۱

زبان
ـ به‌طور بازگشتی شماره‌گذاری شده ۲۴۰
ـ شمارش‌پذیر ۱۴۳
ـ صوری ۲۰
ـ مرتبهٔ اول ۷۸، ۸۲، ۱۷۵
ـ مرتبهٔ دوم ۲۹۵، ۲۹۸
ـ معقول ۱۵۲
ـ نظریهٔ اعداد ۷۵، ۷۹
ـ نظریهٔ مجموعه‌ها ۷۸، ۸۰، ۹۰
z-زنجیره‌ها ۱۹۸
زوج مرتب ۹
زیرساختها ۱۰۲، ۳۰۴
زیرمجموعه ۸

ساخت ۹۰
ـ عام ۳۰۹
ـ یکریخت ۱۰۱، ۱۰۴
سلسله مراتب حسابی ۲۵۹
سور ۷۷، ۷۸
ـ کراندار ۲۲۳، ۲۶۲
ـ وجودی ۷۷
ـ یگانه ۱۰۹

شرطی ۲۲
شکل نرمال پیشوندی ۱۶۶
شمارها ۱۹۵
شماره‌پذیر کارامد ۷۱ـ۷۲

صورت
ـ فصلی نرمال ۵۷

ضربهای اول ۶۷

عالم سخن (ساخت) ۹۰
عبارت ۲۳
عدد اصلی (کاردینال) ساختها ۲۹۸
عطفی ۲۰ـ۲۲
عکس نقیض ۴۴، ۱۲۵
علامت‌گذاری
ـ لوکاسیویچ ۵۰ـ۵۱
ـ لهستانی ۴۹ـ۵۰
عمل n تایی ۱۱
عمل
ـ ترم‌ساز ۸۳
ـ فرمول‌ساز ۲۵
عملگر
ـ کوچکترین ریشه ۲۳۰
ـ μ ۲۳۵

فراضربی ۱۵۲
فرضیهٔ چرچ ۲۲۰، ۲۲۲، ۲۴۹، ۲۵۷
فرگه، گوتولوب ۱۵۷
فرمول
ـ استنباطی ۲۹۷
ـ استنتاج‌پذیر ۱۱۶
ـ اول ۱۱۹

ـ باشمارها معین ۲۱۸، ۲۲۳
ـ بسیط ۸۳
ـ پیشوندی ۱۶۷
ـ درست ساخت ۲۵، ۲۹، ۸۳
ـ عمومی ۱۰۸
ـ وجودی ۱۰۸
فصلی ۲۰، ۲۲

قاعده
ـ استنتاج ۱۱۴
ـ T ۱۲۴
ـ م.س ۱۳۱، ۱۵۵
ـ وضع مقدم (یا قیاس استثنایی) ۱۱۵
قراردادهای مربوط به پرانتزها ۸۷
قضیه ۱۱۴، ۱۱۶
ـ استنتاج ۱۲۴
ـ اشتاینیتز ۱۶۵
ـ بازگشت ۳۲
ـ باقیمانده چینی ۲۷۳
ـ پارامتری کردن ۲۸۶، ۲۹۳
ـ پرس بورگر ۲۰۸
ـ تعریف ناپذیری تارسکی ۱۷۹، ۲۵۲
ـ تعمیم ۱۲۲
ـ تمامیت ۱۳۸، ۱۴۳
ـ چرچ ۲۵۴
ـ حساب کاردینالها ۱۶
ـ درستی ۱۳۸
ـ دوم ناتمامیت گودل ۱۹۵، ۲۵۲، ۲۵۴، ۲۶۸
ـ رایس ۲۸۸
ـ شرودر-برنشتاین ۱۵
ـ شمارش پذیری ۱۱۴، ۱۵۲، ۱۵۵
ـ در منطق چندگونه ۳۰۹
ـ در منطق مرتبهٔ دوم ۲۹۹، ۳۱۴
ـ صورت نرمال ۲۷۹، ۲۸۳
ـ فشردگی ۱۱۴، ۱۵۱، ۱۵۵
ـ در منطق جمله‌ای ۴۰، ۶۸
ـ در منطق چندگونه ۳۰۸
ـ در منطق مرتبهٔ دوم ۲۹۸، ۳۱۳
ـ قوانین دمورگن ۴۳
ـ کانتور ۱۶۶
ـ ل.ا.ت ۱۵۸
ـ لون‌هایم-اسکولم ۳۰۴
ـ در منطق چندگونه ۳۰۹
ـ در منطق مرتبهٔ دوم ۲۹۸، ۳۱۳
ـ لیندن‌بام ۲۶۳
ـ همریختی ۱۰۲
ـ یگانه خوانی ۴۶، ۱۱۱، ۱۱۲
کاردینال ساختها ۱۵۶، ۱۶۰
کارول، لویس ۱۶۹
کانتور، گئورگ ۱۵

گودل، کورت ۱۴۳، ۱۵۴، ۱۵۷
گونه‌های الفبایی ۱۳۲، ۱۳۴

لم
ـ تسورن ۱۲
ـ جایگزینی ۱۴۱
ـ مجدد ۱۳۷
ـ نقطهٔ ثابت ۲۵۰
لون‌هایم، لئوپولد ۱۵۷

ماشینهای
ـ ثبات ۲۸۹، ۲۹۲
ـ شفردسن-استورگیس ۲۸۹، ۲۹۲
مالسف، آناتولی ۱۵۵
متعدی ۱۱
متغیر ۷۸
ـ آزاد ۸۵

ـ پایبند ۸۹
ـ تابعی ۲۹۶
ـ محمولی ۲۹۵
متقارن ۱۱
مجموعه
ـ ارضا شدنی ۶۷، ۱۴۲
ـ استقرایی ۲۵، ۲۸، ۱۱۵
ـ به‌طورآزاد پدیدآمده ۳۲
ـ پدیدآمده ۳۰
ـ تحلیلی منشعب ۳۱۷
ـ تصمیم‌پذیر (همچنین قضیهٔ چرچ را ببینید) ۷۰، ۷۲، ۲۱۹
ـ تمام از رابطها ۵۷
ـ توانی ۸
ـ جازم ۱۵۹، ۲۹۷
ـ سازگار ۱۲۵، ۱۴۳
ـ شمارش‌پذیر ۱۲
ـ مجزا ۸
ـ نهایتاً تناوبی ۲۱۲
مدار ۶۲
ـ امدادی ۶۵
ـ راه‌گزین ۶۲
مدل ۹۱، ۹۵، ۹۷، ۹۸
ـ آنالیز ۳۱۴
ـ غیر استاندارد ۱۹۴، ۳۱۵
ـ نظریه‌ها ۱۵۶
مسئلهٔ توقف ۲۸۵
معادل
ـ توتولوژیکی ۴۰
ـ مقدماتی ۱۰۴
منطقاًـ ۹۴
معرفی سور وجودی ۱۳۱
معنا و نحو ۱۳۲
منطق
ـ چندارزشی ۳۶
ـ چندگونه ۳۰۴، ۳۰۹
ـ گزاره‌ها ۲۳
ـ مرتبه دوم مطلق و عام ۳۱۴
میدان ۱۰

نتایج منطقی ۱۶۱
نتیجهٔ توتولوژیك ۳۹
نحو و معنا ۱۳۲
نظریه ۱۶۱
ـ اصل‌پذیر ۱۶۲، ۱۶۳
ـ اعداد ۱۹۳، ۱۹۴
ـ با تالی ۱۹۷، ۲۰۴، ۲۷۶
ـ با ترتیب ۲۰۴، ۲۰۷، ۲۷۶
ـ با جمع ۲۰۸، ۲۱۳، ۲۷۶
ـ با ضرب ۲۷۵
ـ باضرب ونما ۲۱۴، ۲۵۹، ۲۷۶
ـ اصل‌پذیر متناهی ۱۶۲
ـ تصمیم‌پذیر ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۶۳
ـ تمام ۱۶۲، ۲۴۹
ـ ساختها ۱۶۱
ـ مجموعه‌ها ۱۵۴، ۱۵۷، ۱۶۳، ۱۶۸، ۱۶۹، ۲۵۸، ۲۶۵، ۲۷۵
ـ با ضرب ۲۷۰
نفی ۱۹، ۲۲
نماد
ـ تابعی ۷۸
ـ تعریف شده ۱۷۱، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱
ـ تساوی ۷۸
ـ ثابت ۷۸
ـ جمله‌ای ۲۲
ـ غیر منطقی ۲۳
ـ محمولی ۷۸
ـ منطقی ۲۳، ۷۸

نمودار تابع ۱۲۱

همریختی ۱۰۱
هنکین، لئون ۱۵۵

هیأتها ۹۹، ۱۶۲، ۱۶۴، ۱۶۵، ۲۹۷
یای مانعةالجمع ۶۰
یکریختی ۱۰۱

فهرست نمادها

هر عدد به‌صفحه‌ای اشاره دارد که نماد برای اولین بار در آن ظاهر شده است.

$\in$	۷
$\notin$	۷
$=$	۷
$A\,;\,t$	۸
$\varnothing$	۸
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	۸
$\{x : \_x\_\}$	۸
$\mathbb{N}$	۸
$\mathbb{Z}$	۸
$\subseteq$	۸
$\mathscr{P}$	۸
$\cup$	۹
$\cap$	۹
$\bigcup$	۹
$\bigcap$	۹
$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$	۹
$A \times B$	۱۰
$\operatorname{dom} R$	۱۰
$\operatorname{ran} R$	۱۰
$\operatorname{fld} R$	۱۰
A^n	۱۱
$F : A \to B$	۱۱
$[x]$	۱۲
$A \sim B$	۱۴
$\operatorname{card} A$	۱۴
$\preceq$	۱۵
$\aleph\_$	۱۵
$\mathbb{R}$	۱۵
$\blacksquare$	۱۶
$\Rightarrow$	۱۷
$\Leftarrow$	۱۷
$\Leftrightarrow$	۱۷
$\therefore$	۱۷
$\not\models$	۱۷
$\neg$	۱۹
$\rightarrow$	۱۹
$\wedge$	۱۹
$\vee$	۲۰
$\leftrightarrow$	۲۲
$\mathscr{S}$	۲۶
T	۳۶
F	۳۶
$\bar{v}$	۳۶
$\models$	۳۹
$\models\!\!\!\dashv$	۴۰
$\mathscr{D}$	۴۹
$\#$	۵۲
B^n_α	۵۳
$\top$	۵۸
$\perp$	۵۸
$\downarrow$	۵۹
$\mid$	۵۹
$+$	۵۹
$*$	۷۰

$\forall$	۷۶
$\exists$	۷۷
v_n	۷۷
$\approx$	۷۷
$\mathbf{0}$	۷۹
$\mathbf{S}$	۷۹
$<$	۷۹
$+$	۷۹
$\cdot$	۷۹
$\mathbf{E}$	۷۹
$\mathcal{T}_f$	۸۳
$\mathcal{Q}_i$	۸۴
$\not\approx$	۸۷
$\not<$	۸۷
$\lvert \mathfrak{A} \rvert$	۹۰
$s^{\mathfrak{A}}$	۹۰
$\models_{\mathfrak{A}} \varphi [s]$	۹۱
$\bar{s}$	۹۲
$s(x\|d)$	۹۳
$\models$	۹۴
$\models \dashv$	۹۴
Mod	۹۸
EC	۹۸
EC_{Δ}	۹۸
$\models_{\mathfrak{A}} \varphi [\![a_1, \ldots, a_n]\!]$	۹۹
$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$	۱۰۱
$f \circ g$	۱۰۲
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$	۱۰۴
$\mathcal{Q}$	۱۰۴
$\forall_n$	۱۰۸
$\exists_n$	۱۰۸
$\exists!$	۱۰۹
Λ	۱۱۴
$\vdash$	۱۱۴
α_t^x	۱۱۶
$\nvdash$	۱۲۷
T	۱۲۸
Th	۱۶۱
Cn	۱۶۱
A_{ST}	۱۶۸
$\varphi(t_1, \ldots, t_n)$	۱۷۵
π_s	۱۷۵
${}^{\pi}\mathfrak{B}$	۱۷۶
$\pi^{-1}[T]$	۱۷۶
φ^{π}	۱۷۷
${}^{*}A$	۱۸۴
$\mathcal{T}$	۱۸۵
$\mathcal{J}$	۱۸۵
$\simeq$	۱۸۶
st	۱۸۷
$\mathfrak{N}$	۱۹۳
$\mathbf{S}^k u$	۱۹۵
$\#\varphi$	۱۹۵
$\mathcal{G}$	۱۹۶
Sn	۱۹۷
A_S	۱۹۸
A_L	۲۰۴
$\leq$	۲۰۴
$\not\leq$	۲۰۴
Ln	۲۰۴
$\bigwedge_i$	۲۰۶
$\approxeq_n$	۲۰۸
$\equiv_n$	۲۰۸
$\bigvee_i$	۲۱۲
A_E	۲۱۵
An	۲۱۵
Mn	۲۱۵
En	۲۱۵
I_i^m	۲۲۷
$\mu b\_\_$	۲۳۰
K_R	۲۳۱
p_n	۲۳۳
$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$	۲۳۴
$(a)_b$	۲۳۴
lh	۲۳۵
$a \upharpoonright b$	۲۳۵
$\bar{f}$	۲۳۵
$a * b$	۲۳۷
$*$	۲۳۷
$\exists$	۲۴۱

$\forall$	۲۴۱
Sb	۲۴۳
$\natural$	۲۴۵
Δ_n	۲۵۹
Σ_n	۲۵۹
Π_n	۲۵۹
ST	۲۶۵
A_M	۲۷۰
T_m	۲۷۸
U	۲۷۹
$[\![e]\!]_m$	۲۸۲
K	۲۸۴
W_e	۲۸۵
ϱ	۲۸۵
X_i^n	۲۹۶
F_i^n	۲۹۶
Q_i	۳۰۷
$\mathfrak{A}^*$	۳۰۷
$\mathfrak{B}^\#$	۳۰۸
Φ	۳۰۹
ε_n	۳۱۰
E_n	۳۱۰
$\models^{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{A}} \varphi\, [s]$	۳۱۳
$\langle R \rangle$	۳۱۶
$D\mathscr{A}$	۳۱۶

لطفاً قبل از مطالعه موارد زیر را اصلاح کنید.

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۳۴	۵ پایین	برای نشان دادن تابع	برای نشان دادن پذیرفتنی بودن تابع
۶۰	۱۴	$\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$
۸۲	۱۸	۳. پدر بابک . . . بزند.	۳. «پدر بابک . . . بزند.»
۸۷	۲۰	$\alpha \longleftrightarrow \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$
۹۴	۱۴	است که در s	است که در φ
۱۴۵	۱ پایین	$\Rightarrow v = (\varphi) = T$	$\Rightarrow \bar{v}(\varphi)T$
۱۶۶	۸	$\forall x \forall y \forall z(x$	$\forall x \forall y(x$
۲۰۴	۱۰	موضوع $\mathrm{Th}\mathscr{N}_s$	$\mathrm{Th}\mathscr{N}_L$
۲۰۶	۱۳	بر اساس . . . توجیه می‌شود.)	بر اساس L۱ و L۴ توجیه می‌شود.)
۲۱۲	۹	$\bigvee_{j \leq 1} \bigvee_{q < M}$	$\bigvee_{j \leqslant 1} \bigvee_{1 \leqslant q \leqslant M}$
۲۳۲	۷	$\langle a, b\rangle \in R$	$\langle a, b\rangle \in R^1$
۲۳۲	۹	فهرست، R	فهرست، R'
۲۳۶	۵ پایین	$\bar{f}(a, b)$	$\bar{f}(a, \bar{b})$
۲۳۶	۴ پایین	$i, a, \vec{b}$	i, i, b
۲۴۵	۱۴	$.(a)_\circ \neq ($	$.(a)_\circ \neq h($
۲۴۹	۱۳	s یک جمله نباشد،	s عدد گودل یک جمله نباشد،
۲۵۳	۸	آنگاه بر اساس قضیهٔ ۳۴الف	آنگاه بر اساس بند ۲۰ صفحهٔ ۲۴۸.
۲۵۶	۶ پایین	$\vec{a} \in \neg P$	$\vec{a} \notin P$
۲۵۹	۲	$a \in Q \Leftrightarrow A_E\mid - \exists \mathbf{v}_2 \varphi(\mathbf{S}^a \circ, \mathbf{v}_2).$	$a \in Q \Leftrightarrow A_E\mid - \exists \mathbf{v}_2 \varrho(\mathbf{S}^a \circ, \mathbf{v}_2).$
۲۵۹	۱۶	$\in R$	$\in Q$
۲۶۲	۱۰ پایین	در $\sum_k$ است. در آن	در $\sum_k$، $k > 0$، است. در آن
۲۸۹	۴	$[\![e]\!]_1(a, b)$	$[\![e]\!]_2(a, b)$
۲۸۹	۶	$[\![e]\!]_1(a, b)$	$[\![e]\!]_2(a, b)$