وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مرکز نشر دانشگاهی

گامهایی در جبر تعویضپذیر

رودنی شارپ

ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی

گامهایی در جبر تعویضپذیر

رودنی شارپ

ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی

مرکز نشر دانشگاهی

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

پیشگفتار

کتابهای خوب متعددی در جبر تعویضپذیر نوشته شده است. بنابراین طبیعی است که بپرسید چرا کتاب مقدماتی دیگری در این زمینه نوشته‌ایم.

این کتاب را به این منظور نوشته‌ایم که جوانان با مطالعهٔ آن بتوانند به مطالعهٔ کتابهای رایج جبر تعویضپذیر بپردازند و بدین‌ترتیب به مطالعهٔ این رشته راغب شوند. برای مطالعهٔ بسیاری از کتب موجود در جبر تعویضپذیر مانند کتاب اتیا و مک‌دانلد [۱] یا کتاب ماتسومورا [۸] به‌کار آزمودگی و پختگی، تا حدی بیش از آنچه امروزه دانشجویان کارشناسی در بسیاری از دانشگاههای انگلستان کسب می‌کنند، نیاز است. این امر تأسف‌آور است، زیرا بعضی از مباحث درس نظریهٔ حلقه‌ها در دورهٔ کارشناسی، مانند مبحث تجزیهٔ یکتا در دامنه‌های اقلیدسی، برای اغلب دانشجویان جالب است ولی میان این درس دورهٔ کارشناسی و کتابهای رایج جبر تعویضپذیر شکافی وجود دارد که باید پر شود تا دانشجویان بتوانند این کتابها را با اعتماد به نفس مطالعه کنند. در این کتاب تلاش کرده‌ام این شکاف را پر کنم.

برای اینکه اساس کار دقیقاً معلوم باشد، فرض کرده‌ام که معلومات خواننده در نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر به مطالب کتاب «حلقه و تجزیه» [۱۵] اثر دیوید شارپ محدود است. لذا هنگام نوشتن این کتاب دانشجویانی از سال آخر کارشناسی یا سال اول کارشناسی ارشد دانشگاههای انگلستان مدنظر بوده‌اند که علاقه‌شان به نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر با درسی در سطح کتاب مذکور [۱۵] برانگیخته شده ولی معلومات و کارآزمودگیشان چندان فراتر از آن (و جبر خطی مقدماتی و نظریهٔ فضاهای برداری) نیست. باید تأکید کنم که خواننده‌ای که بر این پیشنیازها مسلط باشد، برای مطالعهٔ این کتاب تقریباً از کتب دیگر بی‌نیاز است.

احتمالاً سیر مطالب این کتاب از نظر افراد با تجربه در جبر تعویضپذیر کُند است؛ به هر حال این کتاب برای آنها نوشته نشده است! به‌عنوان مثال، چون در کتاب [۱۵] ایدآلها بررسی نشده‌اند، این موضوع را با فرض اینکه خواننده چیزی دربارهٔ آن نمی‌داند به تفصیل شرح می‌دهیم، البته قبل از فصل ۲ به آن نمی‌پردازیم؛ مدولها را نیز تا فصل ۶ مطرح نمی‌کنیم؛ در فصل ۱۰ از موضوع

اصلی منحرف می‌شویم و از مدولهای متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلیْ ایدآل بحث می‌کنیم، با این امید که بدین‌ترتیب خوانندگان در مورد تکنیکهای معرفی شده در فصلهای قبل این کتاب تجربهٔ بیشتری کسب کنند؛ در فصل ۱۱ مفاهیم فصل ۱۰ را در مطالعهٔ صورتهای متعارف ماتریسهای مربعی روی هیأت به‌کار می‌بریم؛ در فصل ۱۲ نظریهٔ درجهٔ تعالی زیرهیأتها را در رابطه با نظریهٔ بعد جبرهای تعویضپذیر متناهی‌مولد روی هیأت بررسی می‌کنیم. جز اینها، مباحث دیگر این کتاب مطالب اصلی جبر تعویضپذیر هستند.

نگارنده امیدوار است که خواننده‌ای که مطالعهٔ این کتاب را به پایان می‌رساند ترغیب شود که به کتاب پیشرفته‌تری مانند کتاب ماتسومورا [۸] رو آورد. باید تأکید کنیم که کتاب حاضر به تنهایی نمی‌تواند خواننده را به‌طور کامل آمادهٔ مطالعهٔ جبر تعویضپذیر کند، زیرا شامل هیچ مطلبی در زمینهٔ جبر مانستگیِ تابعگونهای Ext و Tor نیست، درحالی که درک خوب این مفاهیم برای دانشجوی جدی جبر تعویضپذیر بسیار مفید است. چنین دانشجویی باید برای مطالعهٔ این مطلب و حتی برای مطالعهٔ نظریهٔ ضرب تانسوری به کتابهای دیگر رجوع کند. موضوع اخیر را در این کتاب نیاوردیم، زیرا می‌ترسیدیم زیان ناشی از گیج کردن خوانندگان مبتدی با نکات فنی غیر لازم، بیش از فایده‌ای باشد که از ارائهٔ آنها به‌دست می‌آید (از این گذشته، بدون ضرب تانسوری نیز می‌توان مطالب زیادی را در جبر تعویضپذیر مطالعه کرد).

در بخشهایی که تحت عنوان گامهای بعدی، در اواخر بعضی از فصلهای پایانی کتاب آمده‌اند، توجه خواننده را به موضوعاتی جلب کرده‌ایم که در ادامهٔ مطالب این کتاب می‌توان مطالعه کرد، موضوعاتی مانند ضرب تانسوری، جبر مانستگیی، کاربردهای قضیهٔ صفرهای هیلبرت در هندسهٔ جبری، حتی نظریهٔ گالوا و ترسیم با خط‌کش و پرگار که غالباً در کتابهای نظریهٔ هیأتها یافت می‌شوند (به موضوع اخیر در فصل ۱۲ اشاره کرده‌ایم). تذکرات تاریخی در این کتاب ارائه نشده است و گمان نمی‌کنم که بتوانم چیزی بر تذکراتی از این نوع که در کتابهای مذکور در فهرست مراجع یافت می‌شوند بیفزایم.

یکی از ویژگیهای این کتاب تعداد بسیار زیاد تمرینهای آن است که نه تنها در انتهای فصلها بلکه در سراسر کتاب آورده شده‌اند. این تمرینها از تمرینهای ساده ـ که در آنها صرفاً برقراری ویژگیهای ساده‌ای را باید نشان داد ـ تا تمرینهای مشکل را در برمی‌گیرد؛ گاهی زنجیره‌ای از مسائل «پروژهٔ کوتاهی» را تشکیل می‌دهند که در آن سلسله‌ای از مطالب مرتبط با موضوع آن فصل، ولی غیر اصلی و ثانوی، دنبال می‌شود. برخی از تمرینها بعداً در متن کتاب به‌کار می‌آیند. این تمرینها را با علامت * مشخص کرده‌ایم: در برخی از تمرینهایی که این علامت را دارند و به نظر ما جزء تمرینات مشکل محسوب می‌شوند راهنماییهایی آورده‌ایم. (تمرینهایی که بعداً در کتاب به‌کار می‌روند اما نه در متن بلکه در تمرینهای دیگر، با علامت * علامتگذاری نشده‌اند؛ همچنین تمرینهای علامتگذاری نشده‌ای وجود دارند که آنها نیز چندان ساده نیستند ولی برای حلشان راهنمایی داده نشده است.) نگارنده امیدوار است که با اتخاذ این روش به خواننده کمک کند که در

جریان مطالعهٔ کتاب پیشرفت مداومی داشته باشد و مطالب فرعی که فقط در مطالعات آتی او اهمیت خواهند داشت مانع جدی بر سر راهش ایجاد نکنند. همچنین در اثبات تمام احکام کتاب سعی کرده‌ام برهانهای کامل ارائه کنم، با این امید که به این ترتیب خواننده بتواند تسلط بیشتری بر مطالب بیابد: تمرینهای اساسی فراوانی برای تقویت این تسلط داده شده است.

مطالبی که در اینجا آورده شده‌اند (که هیچ کدام جدید یا از نگارنده نیستند) طوری انتخاب شده‌اند که به موضوعاتی که هنگام تحصیل در دوره‌های پس از کارشناسی برایم جالب بوده‌اند اولویت داده شود. به این مناسبت، لازم است از سه ریاضیدان انگلیسی که تأثیر بسزایی بر آموزش من داشتند سپاسگزاری کنم: این مک‌دانلد که اولین فردی بود که مرا به جبر تعویضپذیر علاقه‌مند کرد (با سلسله دروسی که در یک دوره در دانشگاه آکسفورد ارائه کرد ـ این سلسله دروس بعداً به‌صورت کتاب [۱] در آمد)، داگلس نورثکات که از نوشته‌های او طی سالها بهره‌مند شده‌ام، ودیوید ریس، که چنان شور و شوقی در تدریس نظریهٔ حلقه‌های موضعی داشت که شور و شوقش به دیگران هم سرایت می‌کرد، و من نیز اغلب تحت تأثیر او به شوق آمده‌ام.

مطالب ارائه شده در این کتاب متأثر از تجربیاتم در تدریس به دانشجویان دوره‌های پس از کارشناسی در دانشگاه شفیلد است، تجربیاتی که در درسهای کارشناسی ارشد و همچنین در مطالعهٔ انفرادی دانشجویان سالهای اول دورهٔ دکتری طی ۱۵ سال گذشته کسب کرده‌ام. بیشتر این مطالب حاصل تدریس دروس کارشناسی ارشد است که طی سالها حک و اصلاح شده است. نسخه‌های مقدماتی اکثر فصلهای کتاب در کلاسهای دانشجویان دوره‌های پس از کارشناسی طی سالهای تحصیلی ۸۹ـ۱۹۸۸ و ۹۰ـ۱۹۸۹ میلادی آزموده شده‌اند و از این رو باید از دانشجویانی که به اصطلاح به‌عنوان موش آزمایشگاهی عمل کرده‌اند قدردانی کنم. به‌ویژه باید از این استنی‌فورث و پال تیرنی که با تیزبینی خود اشتباهات چاپی بسیاری را در نسخه‌های مقدماتی یافتند تشکر کنم.

رودنی شارپ
شیفلد
آوریل ۱۹۹۰

۱

حلقهٔ تعویضپذیر و زیرحلقه

این کتاب برای دانشجویانی نوشته شده است که یک درس مقدماتی دورهٔ کارشناسی در نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر در سطح کتاب کوچک دیوید شارپ [۱۵] گذرانده‌اند و مایل‌اند مطالب بیشتری در این زمینه بیاموزند. هدف این کتاب آن است که به خواننده کمک کند تا در مباحث مقدماتی جبر تعویضپذیر به‌قدری مسلط شود که بتواند با اعتماد به‌نفس به مطالعهٔ کتابهای پیشرفته‌تر در این زمینه، چون کتاب ماتسومورا [۸]، بپردازد.

ابتدا برخی از نمادهایی را که در سراسر این کتاب به‌کار می‌روند معرفی می‌کنیم.

۱.۱ نمادگذاری. نماد $\mathbb{Z}$ همواره نشاندهندهٔ مجموعهٔ عددهای صحیح است و نماد $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_{\circ}$) همواره نشاندهندهٔ مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت (نامنفی) است. مجموعهٔ عددهای گویا (حقیقی، مختلط) با نماد $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$،$\mathbb{C}$) نشان داده می‌شود.

نماد $\subseteq$ برای نمایش زیرمجموعه بودن و نماد $\subset$ برای نمایش زیرمجموعهٔ سره‌بودن به‌کار می‌رود. لذا به‌ازای مجموعه‌های A و B عبارت $A \subset B$ یعنی $A \subseteq B$ و $A \neq B$.

نماد "■" برای نمایش پایان اثبات یا عدم ارائهٔ اثبات به‌کار می‌رود.

نمادهای

$$X, Y, X_{1}, \ldots, X_{n}$$

برای نمایش مجهولها در نظر گرفته شده‌اند.

تعداد عضوهای مجموعه‌ای متناهی چون Ω را با $|\Omega|$ نمایش خواهیم داد.

شاید لازم باشد تذکری در مورد تمایز بین دو مفهوم خانواده و مجموعه بدهیم. اغلب پرانتز را برای نمایش خانواده‌ای چون $(a_i)_{i\in I}$ که با عضوهای مجموعهٔ I اندیس‌گذاری شده، به‌کار می‌بریم؛ در اینجا a_i را باید همچون عضوی در نظر گرفت که در "مکانی" که با i مشخص شده واقع است؛ خانوادهٔ $(a_i)_{i\in I}$ را، با $(b_i)_{i\in I}$ برابر می‌دانیم اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in I$، $a_i = b_i$. هر خانوادهٔ $(a_i)_{i\in I}$ را، که a_iهای آن به‌ازای هر $i \in I$ در مجموعهٔ A واقع‌اند، می‌توان به منزلهٔ تابعی از I به A در نظر گرفت: در این تعبیر نگارهٔ i تحت این تابع a_i است.

از طرف دیگر آکولاد چنانکه در مثالهای زیر به‌کار رفته

$$\{d_1, \ldots, d_n\} \text{ یا } \{d \in D : \text{گزارهٔ } P(d) \text{ صادق است}\}$$

اغلب برای نمایش مجموعه به‌کار می‌رود. هر مجموعه توسط عضوهایش کاملاً مشخص می‌شود و وقتی عضوهای مجموعه در آکولاد نشان داده می‌شوند هیچ مفهومی از "مکان" مطرح نیست. تمایز بین دو مفهوم خانواده و مجموعه شبیه به تمایز بین دو مفهوم تابع و نگارهٔ تابع است. برای اینکه این تمایز واضح شود، فرض کنید $d_1 = d_2 = 1$ و $d_3 = 3$. در این‌صورت خانوادهٔ $(d_i)_{i=1}^{3}$ را می‌توان همچون سه‌تایی مرتب $(1, 1, 3)$ در نظر گرفت در حالی‌که $\{d_1, d_2, d_3\}$ چیزی جز مجموعهٔ دو عضوی $\{1, 1, 3\} = \{1, 3\}$ نیست.

از آنجا که می‌خواهیم محتوای کتابِ [۱۵] را پیشنیاز اصلی این کتاب در نظر بگیریم، عمدتاً اصطلاحات [۱۵] را به‌کار خواهیم برد. به‌ویژه تمام حلقه‌هایی که مطالعه می‌کنیم عنصر همانی ضربی خواهند داشت. مشخصتر بگوییم، منظور ما از حلقه مجموعه‌ای چون R با دو قاعدهٔ ترکیب (جمع و ضرب) است که R نسبت به جمع گروه آبلی باشد، ضرب شرکتپذیر و از راست و چپ نسبت به جمع توزیعپذیر باشد، و R شامل همانی ضربی 1_R (یا به‌اختصار 1) باشد، که

$$1_R r = r = r 1_R \quad \text{به‌ازای هر } r \in R$$

اگر علاوه بر این ضرب در R تعویضپذیر باشد، می‌گوییم که R حلقهٔ تعویضپذیر است. اصولاً تمام حلقه‌هایی که در این کتاب مطالعه خواهیم کرد تعویضپذیرند، اگر چه گاه برخی از زیرحلقه‌های تعویضپذیر حلقه‌هایی مورد توجه‌اند که آن حلقه‌ها ممکن است تعویضپذیر نباشند، مانند حلقهٔ درونریختیهای مدولها. لذا گاه مجبوریم به حلقه‌های تعویض‌ناپذیر اشاره کنیم و از این رو همواره کلمهٔ "تعویضپذیر" را در جایی مناسب در فرضهای مربوطه می‌آوریم.

قاعدتاً خواننده از حلقهٔ تعویضپذیر مثالهای زیادی در ذهن دارد. در اینجا برخی از مثالهای آشنا را مرور می‌کنیم. از این فرصت برای معرفی برخی از نمادهای دیگری که در این کتاب به‌کار خواهند رفت استفاده می‌کنیم.

۲.۱ مثال. یک) حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ مثالی از حلقهٔ تعویضپذیر است.

دو) حلقهٔ عددهای صحیح گاوسی با $\mathbb{Z}[i]$ نمایش داده خواهد شد. صفحهٔ ۱۸ از مرجع [۱۵] را ببینید. حلقهٔ $\mathbb{Z}[i]$ متشکل از عددهای مختلط به‌صورت $a+ib$ است که در آن $a, b \in \mathbb{Z}$، و عملهای حلقه همان جمع و ضرب معمولی عددهای مختلط‌اند. روشن است که این حلقه مثالی از حلقهٔ تعویضپذیر است.

سه) فرض کنید n عدد صحیح است و $n > ۱$. حلقهٔ رده‌های مانده‌ای عددهای صحیح به پیمانهٔ n (گاه) با $\mathbb{Z}_n$ نمایش داده خواهد شد. بخش ۷.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید. این حلقه دقیقاً n عضو دارد و لذا مثالی از حلقهٔ تعویضپذیر متناهی است.

چهار) مثال دیگری از حلقهٔ تعویضپذیر از مجموعهٔ $C[۰, ۱]$ متشکل از همهٔ تابعهای حقیقی پیوسته روی بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ به‌دست می‌آید. صفحهٔ ۸ از مرجع [۱۵] را ببینید. در این حلقه عملهای جمع و ضرب را "مولفه‌ای" تعریف می‌کنیم، یعنی به‌ازای f و g از $C[۰, ۱]$، $f+g$ و fg را با قاعده‌های زیر تعریف می‌کنیم

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{به‌ازای هر } x \in [۰, ۱]$$

و

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{به‌ازای هر } x \in [۰, ۱]$$

۳.۱ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در تعریف ما الزامی نیست که همانی ضربی R یعنی ۱_R با عضو صفر یعنی ۰_R (یا ۰) متفاوت باشد. (این یکی از تفاوتهای روش ما با [۱۵] است.) حلقهٔ R که در آن $۰_R = ۱_R$ حلقهٔ صفر نامیده می‌شود؛ چنین حلقه‌ای تنها از یک عضو، که به ناچار صفر است، تشکیل می‌شود.

فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. از این حلقه دو حلقهٔ تعویضپذیر جدید می‌توان ساخت: حلقهٔ $R[X]$ متشکل از چندجمله‌ایهای از مجهول X با ضریبهای متعلق به R و حلقهٔ $R[[X]]$ مرکب از سریهای توانی صوری از X با ضریبهای متعلق به R. از آنجا که در این درس این دو روشِ ساختنِ حلقه‌های تعویضپذیر جدید از حلقه‌های قدیم کاملاً اساسی‌اند، خوب است ایده‌های مربوط به آنها را در اینجا مرور کنیم، اما طبیعی است که عین آنچه را قبلاً دیده‌اید بازگو نکنیم (هر دو حلقهٔ $R[X]$ و $R[[X]]$ در [۱۵] مورد بحث قرار گرفته‌اند)؛ بلکه روش شسته و رفتهٔ بحث را که عبارت است از معرفی $R[[X]]$ قبل از $R[X]$ انتخاب کنیم.

هر عضو $R[[X]]$ یک "سری توانی صوری" همچون

$$a_۰ + a_۱X + \cdots + a_nX^n + \cdots$$

است که ضریبهایش $a_۰$، $a_۱$، ...، a_n، ... متعلق به Rاند. (به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی n، a_n را ضریب nام سری توانی صوری فوق می‌نامیم.) اگر چه نماد "+" به‌کار رفته است، در این

مرحلهٔ مقدماتی، خواننده نباید تصور کند که عمل جمع در کار است: در واقع عبارت فوق صرفاً یک نماد مناسب برای نمایش دنبالهٔ نامتناهی

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

است و از برخی جهات نماد دیگر $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ مناسبتر است.

دو سری توانی صوری $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ و $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ از $R[[X]]$ را برابر در نظر می‌گیریم اگر به‌ازای هر عدد صحیح $i \geq 0$، $a_i = b_i$. جمع و ضرب در $R[[X]]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند: به‌ازای هر $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ و $\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ از $R[[X]]$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$$

و

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$$

که در آن به‌ازای هر عدد صحیح $k \geq 0$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

طبق این تعریفها $R[[X]]$ یک حلقهٔ تعویضپذیر با عنصر صفر $\sum_{i=0}^{\infty} 0 X^i$ (که البته به‌اختصار با 0 نشان داده می‌شود) و همانی

$$1 + 0X + \cdots + 0X^n + \cdots$$

است.

زیرمجموعهٔ $R[[X]]$ متشکل از همهٔ سریهای توانی صوری $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in R[[X]]$ که در آن تنها تعدادی متناهی از a_iها ناصفرند نیز نسبت به عملهای فوق یک حلقهٔ تعویضپذیر، با همان عنصر همانی $R[[X]]$، است. این حلقه را حلقهٔ چندجمله‌ایهای از X با ضریبهای متعلق به R می‌نامیم و با $R[X]$ نمایش می‌دهیم. مرسوم است که وقتی ضریبی چون a_n در یک سری توانی صوری یا در یک چندجمله‌ای صفر است، "جملهٔ" $a_n X^n$ را از عبارت صوری

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_i X^i + \cdots$$

حذف کنیم. لذا با این قرارداد، هر عضو $R[X]$ به صورت

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$$

است که در آن d عددی صحیح و نامنفی است و $a_0, \ldots, a_d \in R$. به‌علاوه اکنون علامت "+" در عبارت فوق را در واقع می‌توان معرف عمل جمع تعبیر کرد. اگر در اینجا $a_d \neq 0$ آن‌گاه d درجهٔ چندجمله‌ای فوق است. درجهٔ چندجمله‌ای صفر را $-\infty$ تعریف می‌کنیم.

با قراردادی که هم‌اکنون کردیم، خود R را می‌توان زیرمجموعه‌ای از $R[X]$ و نیز $R[[X]]$ در نظر گرفت. حال وقت آن رسیده است که مفهوم زیرحلقه را بدانیم.

۴.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ای چون S از حلقهٔ R را زیرحلقهٔ R می‌نامیم اگر S خود نسبت به عملهای R حلقه باشد و $1_R = 1_S$، یعنی همانی ضربی S با همانی ضربی R برابر باشد.

روشن است که اگر R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و X مجهول باشد آن‌گاه R زیرحلقهٔ $R[X]$ و همچنین زیرحلقهٔ $R[[X]]$، و $R[X]$ زیرحلقهٔ $R[[X]]$ است.

معیار ساده‌ای برای دانستن اینکه زیرمجموعه‌ای از حلقهٔ R زیرحلقهٔ R هست یا نه وجود دارد.

۵.۱ معیار زیرحلقه‌ها. (قضیهٔ ۴.۴.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید R حلقه و S زیرمجموعه‌ای از R باشد. در این‌صورت S زیرحلقهٔ R است اگر و تنها اگر شرطهای زیر برقرار باشند:

یک) $1_R \in S$؛

دو) هرگاه $a, b \in S$ آن‌گاه $a + b \in S$؛

سه) هرگاه $a \in S$ آن‌گاه $-a \in S$؛

چهار) هرگاه $a, b \in S$ آن‌گاه $ab \in S$. ■

به‌طور طبیعی از مفهوم زیرحلقه به‌مفهوم همریختی حلقه‌ها می‌رسیم.

۶.۱ تعریف. فرض کنید $f : R \to S$ نگاشتی از حلقهٔ R به حلقهٔ S باشد. در این‌صورت f را همریختی (یا همریختی حلقه‌ها یا همریختی حلقه‌ای) می‌نامیم. اگر

یک) به‌ازای هر $a, b \in R$، $f(a + b) = f(a) + f(b)$؛

دو) به‌ازای هر $a, b \in R$، $f(ab) = f(a)f(b)$؛

سه) $f(1_R) = 1_S$.

هر همریختی دوسویی حلقه‌ها یکریختی (یا یکریختی حلقه‌ها یا یکریختی حلقه‌ای) نامیده می‌شود.

برای مثال اگر R' زیرحلقهٔ R باشد آن‌گاه نگاشت یک به یک طبیعی[۱] $i : R' \to R$ همریختی یک به یک حلقه‌هاست. در واقع در موردهای متعددی از یک همریختی یک به یک حلقه‌ها چون $f : T \to R$ برای معرفی عضوهای T به‌عنوان عضوهایی از R استفاده می‌کنیم.

---

۱. به‌ازای هر $a \in R'$، $i(a) = a$. ـم.

۷.۱* تمرین. فرض کنید R و S حلقه و $f: R \to S$ یکریختی حلقه‌ای باشد. ثابت کنید که وارون نگاشت f یعنی

$$f^{-1}: S \longrightarrow R$$

نیز یکریختی حلقه‌ای است.

با توجه به این نتیجه اگر یک یکریختی حلقه‌ای از R به S وجود داشته باشد، می‌گوییم حلقه‌های R و S یکریخت‌اند و می‌نویسیم $R \cong S$.

۸.۱ لم. (قضیهٔ ۵.۴.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید $f: R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این‌صورت $\operatorname{Im} f$، یعنی نگارهٔ f، زیرحلقهٔ S است. ∎

۹.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. منظور از Rـجبر، حلقه‌ای چون S مجهز به یک همریختی حلقه‌ای چون $f: R \to S$ است. لذا همریختی f را باید قسمتی از ساختار Rـجبر S بدانیم. بنابراین در این حالت S توسط همریختی یک به یک طبیعی، یک جبر روی زیرحلقه‌اش $\operatorname{Im} f$ است.

لازم است بلافاصله به این نکته اشاره کنیم که با مفهوم Rـجبر که در ۹.۱ مطرح شد غالباً در نظریهٔ حلقه‌ها مواجه می‌شویم، صرفاً به این دلیل که هر حلقه $\mathbb{Z}$ـجبر است. این مطلب را در ۱۰.۱ توضیح می‌دهیم.

۱۰.۱ تذکر. فرض کنید R حلقه باشد. در این‌صورت نگاشت $f: \mathbb{Z} \to R$ با تعریفِ

$$f(n) = n(1_R) \quad \text{بەازای هر } n \in \mathbb{Z}$$

همریختی حلقه‌ای است و در واقع تنها همریختی ممکن از حلقهٔ $\mathbb{Z}$ به حلقهٔ R است.

در اینجا داریم

$$n(1_R) = \begin{cases} 1_R + \cdots + 1_R \ \ (\text{تعداد جملات: } n) & \text{بەازای } n > 0 \\ 0_R & \text{بەازای } n = 0 \\ (-1_R) + \cdots + (-1_R) \ \ (\text{تعداد جملات: } -n) & \text{بەازای } n < 0 \end{cases}$$

با توجه به‌معیار ۵.۱ روشن است که اشتراک عضوهای هر خانوادهٔ ناتهی از زیرحلقه‌های حلقهٔ R زیرحلقهٔ R است. از این مطلب لم زیر نتیجه می‌شود. قبل از بیان آن خوب است این قرارداد را متذکر شویم که به‌ازای $a \in R$ نماد a^0 را برابر با 1_R می‌گیریم.

۱۱.۱ لم. فرض کنید S زیرحلقه‌ای از حلقهٔ R و Γ زیرمجموعه‌ای از R باشد. در این‌صورت $S[\Gamma]$ را اشتراک همهٔ زیرحلقه‌هایی از R تعریف می‌کنیم که شامل هر دو مجموعهٔ

S و Γ باشند. (یقیناً دستکم یک چنین زیرحلقه‌ای وجود دارد، که همان R است.) لذا $S[\Gamma]$ زیرحلقه‌ای از R است که هر دو مجموعهٔ S و Γ را شامل می‌شود و کوچکترین زیرحلقهٔ R از این نوع است، به این معنا که در هر زیرحلقهٔ دیگری از R که S و Γ را شامل شود قرار دارد.

در حالت خاصی که Γ مجموعه‌ای متناهی چون $\{\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n\}$ باشد، $S[\Gamma]$ را به‌صورت $S[\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n]$ می‌نویسیم.

در حالت خاصی که S تعویضپذیر، و $\alpha \in R$ چنان باشد که به‌ازای هر $s \in S$، $\alpha s = s\alpha$، داریم

$$S[\alpha] = \left\{ \sum_{i=۰}^{t} s_i \alpha^i : t \in \mathbb{N}_۰, s_۰, \ldots, s_t \in S \right\}.$$

اثبات. تنها حکم آخر به اثبات احتیاج دارد. به این منظور فرض کنید

$$H = \left\{ \sum_{i=۰}^{t} s_i \alpha^i : t \in \mathbb{N}_۰, s_۰, \ldots, s_t \in S \right\}.$$

چون S تعویضپذیر است و به‌ازای هر $s \in S$، $\alpha s = s\alpha$ لذا از معیار زیرحلقه‌ها، یعنی ۵.۱، روشن است که H زیرحلقهٔ R است، و همچنین S و $\alpha = (۱_s)\alpha$ را شامل می‌شود. از این‌رو

$$S[\alpha] \subseteq H.$$

از طرف دیگر روشن است که H باید زیرمجموعهٔ هر زیرحلقه‌ای از R باشد که شامل S و α است. در نتیجه $S[\alpha] = H$. ■

توجه کنید که وقتی R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد، آن‌گاه از ۱۱.۱ نتیجه می‌شود که کاربرد قبلی ما از نماد $R[X]$ برای نمایش حلقهٔ چندجمله‌ایها با این کاربرد جدید $R[X]$ برای نمایش "حلقهٔ حاصل از الحاق" سازگار است. همین موضوع در مورد کاربرد قبلی ما از نماد $\mathbb{Z}[i]$ (در ۲.۱(دو)) برای نمایش حلقهٔ عددهای صحیح گاوسی درست است: روشن است که مجموعهٔ $\mathbb{C}$، مرکب از همهٔ عددهای مختلط نسبت به جمع و ضرب معمولی عددهای مختلط، حلقه است و چون $i^۲ = -۱$، حلقهٔ عددهای صحیح گاوسی کوچکترین زیرحلقهٔ $\mathbb{C}$ است که $\mathbb{Z}$ و i را در بردارد.

۱۲.۱* **تمرین.** فرض کنید S زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر R و Γ و Δ زیرمجموعه‌هایی از R باشند. نشان دهید $S[\Gamma \cup \Delta] = S[\Gamma][\Delta]$، و

$$S[\Gamma] = \bigcup_{\Omega \subseteq \Gamma,\ |\Omega| < \infty} S[\Omega].$$

(راهنمایی: نشان دهید که طرف راست تساوی دوم فوق زیرحلقه‌ای از R است که هر دو مجموعهٔ S و Γ را شامل می‌شود.)

حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X]$ که در آن R حلقه‌ای تعویضپذیر است دارای "ویژگی عام" مذکور در لم زیر است.

۱۳.۱ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد. فرض کنید T مجهز به همریختی ساختاری $f : R \to T$، Rـجبری تعویضپذیر باشد و $\alpha \in T$. در این‌صورت یک همریختی منحصر به فرد $f_1 : R[X] \to T$ وجود دارد که حاصل توسیع f است (یعنی چنان است که $f_1|_R = f$) و در $f_1(X) = \alpha$ صدق می‌کند.

اثبات. اگر $f_1 : R[X] \to T$ همریختی حلقه‌ای حاصل از توسیع f باشد و در $f_1(X) = \alpha$ صدق کند، آن‌گاه باید به‌ازای هر $r \in R$ و $i \in \mathbb{N}_0$ در $f_1(rX^i) = f(r)\alpha^i$ صدق کند و در نتیجه تنها نگاشتی که این ویژگی را دارد نگاشتی با تعریف

$$f_1\left(\sum_{i=0}^{n} r_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(r_i)\alpha^i$$

است که $n \in \mathbb{N}_0$ و $r_0, \ldots, r_n \in R$. اثبات اینکه این نگاشت در واقع دارای تمام ویژگیهای مورد نظر است کاملاً سر راست است. ■

مجدداً $R[X]$، حلقهٔ چندجمله‌ایهای از مجهول X و با ضریبهای متعلق به حلقهٔ تعویضپذیر R، را (که گاه آن‌را "حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی R" می‌نامیم) در نظر بگیرید. اگر حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی $R[X]$ از مجهول دیگری چون Y را تشکیل دهیم، چه حاصل می‌شود؟ این حلقهٔ جدید را می‌توانیم با $R[X][Y]$ و همچنین، با توجه به ۱۲.۱، با $R[X,Y]$ نمایش دهیم. ولی در مورد عضوهای آن چه می‌توانیم بگوییم؟

هرعضو $R[X][Y]$ به‌صورت

$$f_0 + f_1 Y + \cdots + f_n Y^n$$

است که در آن $n \in \mathbb{N}_0$ و $f_0, \ldots, f_n \in R[X]$ و لذا می‌توان آن را به‌صورت یک مجموع متناهی از عبارتهای

$$r_{ij} X^i Y^j$$

نمایش داد که در آن $i, j \in \mathbb{N}_0$ و $r_{ij} \in R$. به‌علاوه به آسانی دیده می‌شود که عبارتی به‌صورت

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} s_{ij} X^i Y^j$$

از $R[X][Y]$ که در آن $n, m \in \mathbb{N}_\circ$ و به‌ازای $i = \circ, \ldots, n$ و $j = \circ, \ldots, m$، s_{ij} متعلق به R است، برابر صفر است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i = \circ, \ldots, n$ و هر $j = \circ, \ldots, m$، $s_{ij} = \circ$. این ویژگی X و Y را با این عبارت بیان می‌کنیم که X و Y روی R "استقلال جبری" دارند.

مطالب فوق را به‌آسانی می‌توان از دو مجهول به هر تعداد متناهی مجهول تعمیم داد.

۱۴.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$؛ فرض کنید $R_\circ$ زیرحلقهٔ R باشد. در این‌صورت می‌گوییم $\alpha_1، \ldots، \alpha_n$ روی $R_\circ$ دارای استقلال جبری‌اند (دقیقتر این است که بگوییم خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ روی $R_\circ$ دارای استقلال جبری است) اگر شرط زیر برقرار باشد: هرگاه Λ زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}_\circ^n$ باشد و عضوهای

$$r_{i_1,\ldots,i_n} \in R_\circ \qquad ((i_1, \ldots, i_n) \in \Lambda)$$

چنان باشند که

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda} r_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_n^{i_n} = \circ$$

آن‌گاه به‌ازای هر $i \in \Lambda$، $r_i = \circ$.

۱۵.۱ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و n عددی صحیح و مثبت باشد. حلقه‌های $R_\circ = R$ و $R_i = R_{i-1}[X_i]$، $i = 1, \ldots, n$، را که در آنها $X_1، \ldots، X_n$ مجهول‌اند متوالیاً تشکیل دهید. در این‌صورت

یک) $R_n = R[X_1, \ldots, X_n]$؛

دو) $X_1، \ldots، X_n$ روی R دارای استقلال جبری‌اند؛

سه) هر عضو R_n به‌صورت

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda} r_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

است که در آن Λ زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}_\circ^n$ است و

$$r_{i_1,\ldots,i_n} \in R \qquad ((i_1, \ldots, i_n) \in \Lambda).$$

اگر عضو مذکور از R_n صفر نباشد، درجهٔ (کلی) آن برابر با ماکسیمم dهایی ($d \in \mathbb{N}_\circ$) تعریف می‌شود که به‌ازای هر یک از آنها عضوی چون $(i_1, \ldots, i_n) \in \Lambda$ با ویژگی

$$i_1 + \cdots + i_n = d \text{ و } r_{i_1,\ldots,i_n} \neq \circ$$

وجود دارد؛

چهار) نظیر حالت یک متغیره، درجهٔ (کلی) عضو صفر R_n برابر با $-\infty$ تعریف می‌شود.

R_n را حلقهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای متعلق به R (یا حلقهٔ چند جمله‌ایهای روی R) از n مجهول X_1، ...، X_n می‌نامیم.

تمرین زیر نشان می‌دهد که حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X_1, \ldots, X_n]$ دارای ویژگیی عام مانند ویژگی مذکور در ۱۳.۱ برای $R[X]$ است.

۱۶.۱* تمرین. فرض کنید R' حلقه‌ای تعویضپذیر و $\xi_1, \ldots, \xi_n \in R'$ روی زیرحلقهٔ R از R' دارای استقلال جبری باشند. فرض کنید T مجهز به همریختی ساختاری $f : R \to T$، Rـجبری تعویضپذیر باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T$. نشان دهید تنها یک همریختی حلقه‌ای چون

$$g : R[\xi_1, \ldots, \xi_n] \to T$$

وجود دارد که حاصل توسیع f است (یعنی چنان است که $g|_R = f$) و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $g(\xi_i) = \alpha_i$.

نتیجه بگیرید که یک یکریختی (منحصر به فرد) چون

$$h : R[\xi_1, \ldots, \xi_n] \to R[X_1, \ldots, X_n],$$

که در آن $R[X_1, \ldots, X_n]$ نشاندهندهٔ حلقهٔ چندجمله‌ایهای ساخته شده در ۱۵.۱ است، وجود دارد که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $h(\xi_i) = X_i$ و $h|_R : R \to R$ نگاشت همانی است.

این تمرین نشان می‌دهد که هرگاه ξ_1، ...، ξ_n عضوهایی از یک حلقهٔ تعویضپذیر چون R' باشند و ξ_1، ...، ξ_n روی زیرحلقه‌ای چون R از R' دارای استقلال جبری باشند آن‌گاه $R[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ "اساساً" همان حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X_1, \ldots, X_n]$ مورد بحث در ۱۵.۱ است. در واقع از این پس هرگاه از چنین حلقهٔ چندجمله‌ایها بحث می‌کنیم خانوادهٔ $(X_i)_{i=1}^n$ را (بدون‌اینکه تصریح کنیم) روی R دارای استقلال جبری در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که در این کتاب نمادهای X، Y، X_1، ...، X_n همواره نشاندهندهٔ مجهول‌اند (۱.۱ را ببینید).

از تمرین فوق به ایدهٔ "مقداریابی" چندجمله‌ایها می‌رسیم.

۱۷.۱ تعریف. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد و $R[X_1, \ldots, X_n]$، حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی R از n مجهول X_1، ...، X_n، را در نظر بگیرید. فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$. بنابر ۱۶.۱ تنها یک همریختی حلقه‌ای چون $g : R[X_1, \ldots, X_n] \to S$ با ویژگیهای

$$g(r) = r \quad \text{به‌ازای هر } r \in R$$

و

$$g(X_i) = \alpha_i \quad \text{به‌ازای هر } i = 1, \ldots, n$$

وجود دارد. این همریختی g را همریختی مقداریاب (یا به‌اختصار مقداریاب) به‌ازای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ می‌نامیم.

روشن است که در حالت ۱.۱۷ اثر g بر عضوی چون $p \in R[X_1, \ldots, X_n]$ صرفاً با قرار دادن α_i به‌جای X_i به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ محاسبه می‌شود. به این دلیل گاه می‌گوییم اثر g "نتیجهٔ قرار دادن $X_i = \alpha_i$، به‌ازای $i = 1, \ldots, n$" است. این کار شاید مطلوب نباشد زیرا اگرچه گاهی نگارهٔ p تحت همریختی مقداریاب g را به‌صورت

$$p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

می‌نویسیم، یقیناً نباید مفهوم چندجمله‌ای را با مفهوم تابع اشتباه بگیریم. تمرین زیر این نکته را روشن می‌سازد.

۱۸.۱ تمرین. فرض کنید $p = X^7 - X \in \mathbb{Z}_7[X]$. نشان دهید که به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{Z}_7$، $p(\alpha) = 0$.

۱۹.۱ تمرین. فرض کنید K هیأتی نامتناهی و Λ زیرمجموعه‌ای متناهی از K باشد. فرض کنید f متعلق به حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X_1, \ldots, X_n]$ روی K از مجهولهای $X_1, \ldots, X_n$ باشد. فرض کنید $f \neq 0$. نشان دهید که تعداد نامتناهی

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (K \backslash \Lambda)^n$$

وجود دارد که $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

مجدداً فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و $X_1, \ldots, X_n$ مجهول باشند. می‌توانیم حلقه‌های سریهای توانی را به‌روش استقرایی زیر متوالیاً بسازیم: R_0 را برابر R بگیرید و به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ و $0 < i \leq n$ قرار دهید

$$R_i = R_{i-1}[[X_i]].$$

این حلقه‌های سریهای توانی در جبر تعویضپذیر بسیار با اهمیت‌اند و لذا خوب است توصیف مناسبی از آنها در دست داشته باشیم. به این منظور مفهوم چندجمله‌ای همگن را در $R[X_1, \ldots, X_n]$ معرفی می‌کنیم: یک چندجمله‌ای را در این حلقه چندجمله‌ای همگن یا فرم می‌گوییم اگر به‌صورت

$$\sum_{i_1 + \cdots + i_n = d} r_{i_1, \ldots, i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$$

باشد که در آن $d \in \mathbb{N}$ و $r_{i_1,\dots,i_n} \in R$. (لذا هر جملهٔ ناصفری که به واقع در چندجمله‌ای ظاهر می‌شود دارای درجهٔ d است.) توجه کنید که چندجمله‌ای صفر همگن در نظر گرفته می‌شود.

می‌توانیم با استفاده از مفهوم چندجمله‌ای همگن عضوهای حلقهٔ $R_1 = R[[X_1]]$ را توصیف کنیم: هر عضو دلخواه R_1 را می‌توان به‌صورت یک مجموع صوری

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

بیان کرد که در آن (به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$) f_i یک چندجمله‌ای همگن در $R[X_1]$ است که برابر با صفر است یا درجهٔ آن i است.

حال با توجه به این مطلب حلقهٔ دیگری را معرفی می‌کنیم که می‌توان آن را از R و مجهولهای $X_1,\dots,X_n$ ساخت. این حلقه حلقهٔ سریهای توانی صوری از $X_1,\dots,X_n$ با ضریبهای متعلق به R است و با

$$R[[X_1,\dots,X_n]]$$

نمایش داده می‌شود. عضوهای این حلقه مجموعهای صوری به‌صورت

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

هستند که در آن به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، f_i یک چندجمله‌ای همگن از $R[X_1,\dots,X_n]$ است که برابر صفر یا دارای درجهٔ i است. دو "سری توانی صوری" $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ و $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ را برابر در نظر می‌گیریم اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $f_i = g_i$. عملهای جمع و ضرب را به‌ازای $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ و $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ از $R[[X_1,\dots,X_n]]$ به‌صورت

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (f_i + g_i)$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} f_j g_{i-j}\right)$$

تعریف می‌کنیم. نشان دادن اینکه $R[[X_1,\dots,X_n]]$ با این تعریفها به‌واقع حلقه‌ای تعویضپذیر است سرراست است.

تمرین بعد دربارهٔ واقعیتی اساسی در مورد حلقه‌های سریهای توانی صوری است، اما حل آن خسته‌کننده است.

۲۰.۱* تمرین. فرض کنید R یک حلقهٔ تعویض‌پذیر و $X_1, \ldots, X_n$ (که $n > 1$) مجهول باشند. نگاشتی چون

$$\psi : R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]\,[[X_n]] \to R[[X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n]]$$

را به‌صورت زیر تعریف کنید. به‌ازای هر

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_{(i)} X_n^i \in R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]\,[[X_n]]$$

که در آن به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$.

$$f_{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{(i)j} \in R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$$

(که لذا هر $f_{(i)j}$ صفر یا یک چندجمله‌ای همگن درجهٔ j از $X_1, \ldots, X_{n-1}$ است) قرار دهید

$$\psi(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} f_{(k-j)j} X_n^{k-j} \right).$$

ثابت کنید که ψ یکریختی حلقه‌ای است.

بی‌تردید دو نوع خاص از حلقه‌های تعویض‌پذیر را که به "دامنهٔ صحیح" و "هیأت" موسوم‌اند در مطالعات قبلی خود در نظریهٔ حلقه‌ها دیده‌اید. خوب است این مفهومها را در این فصل مقدماتی مرور کنیم.

۲۱.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. مقسوم‌علیه صفر R عضوی چون $r \in R$ است که به‌ازای آن عضوی چون $y \in R$ با شرط $y \neq 0_R$ وجود داشته باشد که $ry = 0_R$. هر عضو R که مقسوم‌علیه صفر نباشد نامقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود. مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر R اغلب با $Z(R)$ نمایش داده می‌شود.

اگر R حلقهٔ صفر نباشد آن‌گاه 0_R مقسوم‌علیه صفر است زیرا

$$0_R 1_R = 0_R$$

۲۲.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. در این‌صورت R را دامنهٔ صحیح می‌گوییم اگر

یک) R حلقهٔ صفر نباشد یعنی $1_R \neq 0_R$، و

دو) 0_R تنها مقسوم‌علیه صفر R باشد (بنابر ۲۱.۱، 0_R مقسوم‌علیه صفر هست).

روشن است که حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ و حلقهٔ عددهای صحیح گاوسی $\mathbb{Z}[i]$ مثالهایی از دامنهٔ صحیح‌اند. یقیناً با قضیهٔ کلی زیر نیز که روشی برای ساختن دامنهٔ صحیح جدیدی از هر دامنهٔ صحیح ارائه می‌دهد آشنایید.

۲۳.۱ قضیه. (قضیهٔ ۲.۵.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید R دامنهٔ صحیح و X مجهول باشد. در این‌صورت حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X]$ نیز دامنهٔ صحیح است. ■

این قضیه نشان می‌دهد که حلقهٔ چندجمله‌ایهای

$$\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$$

روی $\mathbb{Z}$ از مجهولهای X_1،...،X_n نیز دامنهٔ صحیح است.

این امر نباید بر خواننده مشتبه شود که هر حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر دامنهٔ صحیح است: حلقهٔ $\mathbb{Z}_6$ متشکل از رده‌های مانده‌ای عددهای صحیح به پیمانهٔ ۶ دامنهٔ صحیح نیست. همچنین حلقهٔ $C[0,1]$ مرکب از تابعهای حقیقی پیوستهٔ روی بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ دامنهٔ صحیح نیست (صفحهٔ ۲۰ از مرجع [۱۵] را ببینید).

۲۴.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. عضو وارونپذیر R عضوی چون $r \in R$ است که به‌ازای آن عضوی مانند $u \in R$ وجود داشته باشد که $ru = 1_R$. اگر $r \in R$ وارونپذیر باشد آن‌گاه دقیقاً یک عضو $u \in R$ با ویژگی $ru = 1_R$ وجود دارد. این عضو را وارون r می‌نامیم و با r^{-1} نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ تمام عضوهای وارونپذیر R نسبت به‌ضرب R گروهی آبلی است.

۲۵.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. می‌گوییم که R هیأت است اگر

یک) R حلقهٔ صفر نباشد (یعنی $1_R \neq 0_R$)، و

دو) هر عضو ناصفر R وارونپذیر باشد.

برخی از رابطه‌های مقدماتی بین مفهومهای هیأت و دامنهٔ صحیح را یادآوری می‌کنیم.

۲۶.۱ تذکر. (قضیهٔ ۳.۶.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) هر هیأت دامنهٔ صحیح است. ولی عکس این گزاره درست نیست: $\mathbb{Z}$ مثالی از دامنه‌ای صحیح است که هیأت نیست.

۲۷.۱ لم. (قضیهٔ ۴.۶.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) هر دامنهٔ صحیح متناهی هیأت است. ■

۲۸.۱ لم. (قضیهٔ ۱.۷.۱ و نتیجهٔ ۲.۷.۱ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$. در این‌صورت گزاره‌های زیر در مورد حلقهٔ $\mathbb{Z}_n$ متشکل از رده‌های مانده‌ای عددهای صحیح به پیمانهٔ n معادل‌اند:

یک) $\mathbb{Z}_n$ هیأت است.
دو) $\mathbb{Z}_n$ دامنهٔ صحیح است.
سه) n عدد اول است. ■

روشن است که $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مثالهایی از هیأت‌اند. همچنین توجه کنید که اگر K هیأت باشد، حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی K از n مجهول $X_1، \ldots، X_n$ دامنهٔ صحیح است.

۲۹.۱ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد. نشان دهید که $R[X]$ هیچ‌گاه هیأت نیست. همچنین نشان دهید اگر R دامنهٔ صحیح باشد، $R[X]$ نیز چنین است.

۳۰.۱ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. نشان دهید که R دامنهٔ صحیح است اگر و تنها اگر حلقهٔ سریهای توانی صوری $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ از n مجهول $X_1، \ldots، X_n$ دامنهٔ صحیح باشد.

رابطهٔ مهم دیگر بین مفهومهای دامنهٔ صحیح و هیأت این است که هر دامنهٔصحیح را می‌توان به‌عنوان زیرحلقه در یک هیأت نشاند: این‌کار را با ساختن هیأتی که "هیأت کسرها"ی آن دامنهٔ صحیح نامیده می‌شود می‌توان انجام داد. نحوهٔ ساختن این هیأت را در زیر می‌آوریم.

۳۱.۱ هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح. (صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. در این صورت هیأتی چون F و یک همریختی یک به یک حلقه‌ای چون $f : R \to F$ وجود دارد به‌طوری که هر عضو F را می‌توان به‌صورت $f(r)f(s)^{-1}$ نوشت که $r, s \in R$، و $s \neq 0_R$.

خلاصهٔ اثبات. فرض کنید $S = R \setminus \{0_R\}$. رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را روی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای (a, b) و (c, d) در $R \times S$ می‌نویسیم

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است: به‌ازای $(a, b) \in R \times S$، ردهٔ هم‌ارزی شامل (a, b) را با a/b یا

$$\frac{a}{b}$$

نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ F متشکل از همهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ همراه با عملهای جمع و ضرب

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

که در آن $a/b, c/d \in F$، هیأت است. عضو صفر این هیأت ۰/۱ و عضو همانی آن ۱/۱ است (که به‌ازای هر $a \in R\backslash\{\circ\}$ برابر با a/a است).
نگاشت

$$f : R \to F$$

با تعریف $f(a) = a/1$، $a \in R$، یک همریختی حلقه‌ای با تمام ویژگیهای مورد نظر است. ■

توجه. هیأت F را که در خلاصهٔ اثبات گزارهٔ ۳۱.۱ از دامنهٔ صحیح R ساخته شد هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح R می‌نامیم.

۳۲.۱ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. عضو $r \in R$ را پوچتوان می‌گوییم اگر عددی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $r^n = \circ$.

۳۳.۱ تمرین. عضوهای پوچتوان و عضوهای وارونپذیر حلقهٔ $\mathbb{Z}_{12}$ را تعیین کنید. به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ که $n > 1$، عضوهای پوچتوان و عضوهای وارونپذیر حلقهٔ $\mathbb{Z}_n$ را تعیین کنید.

۳۴.۱ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر باشد و $x, y \in R$. نشان دهید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=\circ}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i.$$

نتیجه بگیرید که مجموع دو عضو پوچتوان R پوچتوان است.

۳۵.۱ تمرین. فرض کنید a یک عضو پوچتوان از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید که $a + 1$ یک عضو وارونپذیر R است و نتیجه بگیرید که به‌ازای هر عضو وارونپذیر u از R، $u + a$ یک عضو وارونپذیر R است.

۳۶.۱ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر و X مجهول باشد. فرض کنید

$$f = r_\circ + r_1 X + \cdots + r_n X^n \in R[X].$$

یک) ثابت کنید f یک عضو وارونپذیر $R[X]$ است اگر و تنها اگر $r_\circ$ یک عضو وارونپذیر R باشد و $r_1, \ldots, r_n$ همه پوچتوان باشند. (راهنمایی: اگر $n > \circ$ و f یک عضو وارونپذیر $R[X]$ با وارون $a_\circ + a_1 X + \cdots + a_m X^m$ باشد، با استقرا روی i نشان دهید که به‌ازای هر $i = \circ, \ldots, m$، $r_n^{i+1} a_{m-i} = \circ$).
دو) ثابت کنید f پوچتوان است اگر و تنها اگر $r_\circ, \ldots, r_n$ همه پوچتوان باشند.

سه) ثابت کنید f در $R[X]$ مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر عضوی چون $c \in R$ وجود داشته باشد که $c \neq 0$ ولی $cf = 0$. (راهنمایی: اگر f یک مقسوم‌علیه صفر $R[X]$ باشد، از چندجمله‌ایهای $g \neq 0$ با ویژگی $fg = 0$ یک چندجمله‌ای چون

$$0 \neq g = c_0 + c_1 X + \cdots + c_k X^k \in R[X] .$$

با کوچکترین درجهٔ k انتخاب کنید و برای آن با استقرا نشان دهید که به‌ازای هر $i = 0, \ldots, n$، $r_{n-i}\, g = 0$.)

۳۷.۱ تمرین. نتیجهٔ ۳۶.۱ را به‌حلقهٔ چندجمله‌ایهای

$$R[X_1, \ldots, X_n]$$

روی حلقهٔ تعویضپذیر R از n مجهول $X_1، \ldots، X_n$ تعمیم دهید.

همچنین لازم است فرض کنیم که خواننده با برخی از مفهومهای بنیادی نظریهٔ تجزیه در دامنه‌های صحیح از جمله "دامنهٔ اقلیدسی"، "عضو تحویلناپذیر" دامنهٔ صحیح و "دامنهٔ [با] تجزیهٔ یکتا" (به‌اختصار UFD) آشناست برای رعایت اصول کار خود در این کتاب، این فصل را با مرور مختصر برخی از نکته‌های اصلی نظریهٔ مزبور و ذکر مرجعهای مناسب پایان می‌دهیم.

۳۸.۱ تعریف. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. عضو $p \in R$ را عضو تحویلناپذیر R می‌گوییم اگر

یک) $p \neq 0$ و p وارونپذیر نباشد،

دو) هرگاه p به‌صورت $p = ab$ با $a, b \in R$ نوشته شود آن‌گاه یا a یا b یک عضو وارونپذیر R باشد.

۳۹.۱ تعریف. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. می‌گوییم که R دامنهٔ [با] تجزیهٔ یکتا (به‌اختصار UFD یا د.ت.ی) است اگر

یک) هر عضو ناصفر وارون‌ناپذیر R را بتوان به‌صورت $p_1 p_2 \ldots p_s$ نوشت که در آن $p_1، \ldots، p_s$ عضوهایی تحویلناپذیر از Rاند،

دو) هرگاه $s, t \in \mathbb{N}$، و $p_1، \ldots، p_s، q_1، \ldots، q_t$ عضوهایی تحویلناپذیر از R باشند که

$$p_1 p_2 \ldots p_s = q_1 q_2 \ldots q_t$$

آن‌گاه $s = t$ و عضوهای وارونپذیری چون $u_1, \ldots, u_s \in R$ وجود داشته باشند که پس از شماره‌گذاری مجدد مناسب q_jها داشته باشیم که

$$p_i = u_i q_i \quad \text{به‌ازای هر } i = 1, \ldots, s$$

۴۰.۱ تعریف. دامنهٔ صحیح R را دامنهٔ اقلیدسی می‌نامیم اگر تابعی چون $\partial: R\backslash\{0\} \to \mathbb{N}$ به‌نام تابع درجه[1] برای R وجود داشته باشد که

یک) هرگاه $a, b \in R\backslash\{0\}$، و a عامل b در R باشد (یعنی $c \in R$ وجود داشته باشد که $ac = b$) آن‌گاه $\partial(a) \leq \partial(b)$،

دو) هرگاه $a, b \in R$، و $b \neq 0$ آن‌گاه $q, r \in R$ وجود داشته باشد که

$$a = qb + r \text{ و } r = 0 \text{، یا } r \neq 0 \text{ و } \partial(r) < \partial(b)$$

(البته می‌توانستیم همان کاری را که با چندجمله‌ایها کردیم انجام دهیم، یعنی $\partial(0)$ را برابر با $-\infty$ تعریف کنیم. به این ترتیب شرط (دو) شسته و رفته‌تر می‌شد.)

فرض ما آن است که خواننده می‌داند حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$، حلقهٔ عددهای صحیح گاوسی $\mathbb{Z}[i]$ و حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X]$ از مجهول X و با ضریبهای متعلق به هیأت K دامنهٔ اقلیدسی‌اند.

حال دو واقعیت اساسی مربوط به دامنه‌های اقلیدسی و د.ت.ی‌ها را با مرجعهای آنها بیان می‌کنیم.

۴۱.۱ قضیه. (قضیهٔ ۱.۶.۲ از مرجع [۱۵] را ببینید.) هر دامنهٔ اقلیدسی دامنهٔ تجزیهٔ یکتاست. ■

۴۲.۱ قضیه. (قضیهٔ ۱۲.۸.۲ از مرجع [۱۵] را ببینید.) اگر R دامنهٔ تجزیهٔ یکتا باشد آن‌گاه حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X]$، که X مجهول است، نیز چنین است. ■

از دو قضیهٔ اخیر بلافاصله نتیجه می‌شودکه اگر K هیأت باشد آن‌گاه حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی K از n مجهول $X_1, \ldots, X_n$، د.ت.ی است. همچنین حلقهٔ $\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_m]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی $\mathbb{Z}$ از m مجهول $Y_1, \ldots, Y_m$ مثال دیگری از د.ت.ی است.

۴۳.۱ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر باشد و حلقهٔ $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ متشکل از سریهای توانی صوری روی R از مجهولهای $X_1, \ldots, X_n$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \in R[[X_1, \ldots, X_n]]$$

که در آن f_i (به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$) صفر یا فرمی از درجهٔ i در $R[X_1, \ldots, X_n]$ است. ثابت کنید f یک عضو وارونپذیر $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ است اگر و تنها اگر f_0 یک عضو وارونپذیر R باشد.

---

۱. این تابع را ارزه یا ارزیاب اقلیدسی نیز می‌نامند.ــم.

۲

ایدآل

شاید خواننده‌ای که در جبر تعویضپذیر صاحب تجربه است از این موضوع متعجب شده باشد که یک فصل کتاب به پایان رسیده است بدون اینکه صحبتی از مفهوم کاملاً اساسی ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر به میان آمده باشد. ساختار ایدآل مهمترین زیرساختار این حلقه‌هاست. نقش ایدآلها در حلقه‌های تعویضپذیر مانند نقش زیرگروههای نرمال در گروههاست. به علاوه مفهومهای ایدآل اول و ایدآل ماکسیمال درکاربرد نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر در هندسهٔ جبری اساسی‌اند.

ابتدا دربارهٔ این موضوع که ایدآلها برای حلقه‌های تعویضپذیر مانند زیرگروههای نرمال برای گروهها هستند توضیح می‌دهیم: همان‌طورکه برای هرگروه G زیرمجموعهٔ N از G زیرگروه نرمال G است اگر و تنها اگرگروهی چون H و یک همریختی گروهی چون $\theta : G \to H$ وجود داشته باشد که هسته‌اش برابر N باشد، خواهیم دید که برای هر حلقهٔ تعویضپذیر R زیرمجموعهٔ I از R ایدآل R است اگر و تنها اگر یک حلقهٔ تعویضپذیر چون S و یک همریختی حلقه‌ای چون $f : R \to S$ وجود داشته باشد که هسته‌اش برابر I باشد. لذا قدم اول ارائهٔ تعریف و بررسی ویژگیهای هستهٔ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر است.

۱.۲ تعریف و لم. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. دراین صورت هستهٔ f راکه با $\operatorname{Ker} f$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{Ker} f := \{r \in R : f(r) = \circ_S\}$$

توجه کنید که

یک) $0_R \in \mathrm{Ker} f$ و لذا $\mathrm{Ker}\ f \neq \varnothing$؛

دو) هر گاه $a, b \in \mathrm{Ker} f$ آنگاه $a + b \in \mathrm{Ker}\ f$؛

سه) هر گاه $a \in \mathrm{Ker}\ f$ و $r \in R$ آنگاه $ra \in \mathrm{Ker}\ f$. ■

از لم فوق فکر تعریف مفهوم ایدآل در حلقه‌های تعویضپذیر پیش می‌آید، ولی قبل از ارائهٔ این تعریف موضوعی اساسی را در مورد هستهٔ همریختیهای حلقه‌های تعویضپذیر بیان می‌کنیم.

۲.۲ لم. فرض کنید R و S حلقه‌های تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختیی حلقه‌ای باشد. در این صورت $\mathrm{Ker}\ f = \{0_R\}$ اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $r, r' \in R$، و $f(r) = f(r')$. دراین صورت $r - r' \in \mathrm{Ker}\ f = \{0_R\}$.

($\Longrightarrow$) روشن است که بنابر ۱.۲(یک) $0_R \in \mathrm{Ker} f$. فرض کنید $r \in \mathrm{Ker}\ f$. در این صورت $f(0_R) = 0_S = f(r)$ و لذا $r = 0_R$، چون f یک به یک است. ■

۳.۲ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. زیرمجموعهٔ I از R را ایدآل می‌نامیم اگر شرطهای زیر برقرار باشند:

یک) $I \neq \varnothing$؛

دو) هر گاه $a, b \in I$ آنگاه $a + b \in I$؛

سه) هر گاه $a \in I$ و $r \in R$ آنگاه $ra \in I$.

روشن است که هر ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R تحت تفریق بسته است. خواننده‌ای که در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌ناپذیر کار کرده است باید توجه کند که در این کتاب ایدآلهای حلقه‌های تعویض‌ناپذیر را مورد بحث قرار نخواهیم داد و لذا به مفهومهای ایدآل چپ و ایدآل راست نیازی نخواهیم داشت.

۴.۲ تمرین. فرض کنید X مجهول باشد و حلقهٔ $\mathbb{Q}[X]$ را متشکل از چندجمله‌ایهای از X با ضریبهای متعلق به $\mathbb{Q}$ در نظر بگیرید.

یک) زیر حلقه‌ای از $\mathbb{Q}[X]$ مثال بزنید که ایدآل $\mathbb{Q}[X]$ نباشد.

دو) ایدآلی از $\mathbb{Q}[X]$ مثال بزنید که زیرحلقهٔ $\mathbb{Q}[X]$ نباشد.

۵.۲* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد. نشان دهید که مجموعهٔ N متشکل از عضوهای پوچتوان R ایدآل R است. (ایدآل N را اغلب رادیکال پوچ R می‌نامند).
نشان دهید که مجموعهٔ

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ وجود داشته باشد چنانکه } n \in \mathbb{N} \text{عددی چون}\}$$

ایدآل R است. $(\sqrt{I}$ را رادیکال I می‌نامیم. لذا رادیکال پوچ R برابر $\sqrt{\{0_R\}}$، یعنی رادیکال "ایدآل صفر R"، است).

۶.۲ تمرین. فرض کنید $R_1، \ldots، R_n$ حلقه‌هایی تعویضپذیر باشند. نشان دهید که مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی

$$\prod_{i=1}^{n} R_i = R_1 \times \cdots \times R_n$$

تحت عملهای جمع و ضرب مؤلفه‌ای یعنی عملهای زیر:
به ازای هر $r_i, s_i \in R_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$(r_1, \ldots, r_n) + (s_1, \ldots, s_n) = (r_1 + s_1, \ldots, r_n + s_n)$$

و

$$(r_1, \ldots, r_n)(s_1, \ldots, s_n) = (r_1 s_1, \ldots, r_n s_n)$$

حلقهٔ تعویضپذیر است. این حلقهٔ جدید را حاصلضرب مستقیم $R_1، \ldots، R_n$ می‌نامیم.
نشان دهید که اگر به ازای هر $i = 1, \ldots, n$، I_i ایدآل R_i باشد آن‌گاه $I_1 \times \cdots \times I_n$ ایدآل $\prod_{i=1}^{n} R_i$ است. همچنین نشان دهید که هر ایدآل $\prod_{i=1}^{n} R_i$ به همین صورت است.

برای اینکه بتوانیم نشان دهیم که هر ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R هستهٔ یک همریختی حلقه‌ای از R به یک حلقهٔ تعویضپذیر است، نظیر عملیات ساختن گروه خارج قسمتی G/N را، که در آن N زیرگروه نرمال G است، در حلقه‌ها انجام می‌دهیم. از آنجا که این کار برای موضوع مورد بحث ما اهمیت اساسی دارد آن را به تفصیل ارائه می‌کنیم.

۷.۲ یادآوری و نمادگذاری. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $r \in R$. هم‌مجموعهٔ I در R حاصل از r، یا شامل r، مجموعهٔ

$$r + I = \{r + z : z \in I\}$$

است. توجه کنید که به ازای $r, s \in R$، هم‌مجموعه‌های $r + I$ و $s + I$ برابرند اگر و تنها اگر $r - s \in I$. درواقع هم‌مجموعه‌های I در R دقیقاً همان رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی Rاند که

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad a - b \in I \quad (\text{به ازای } a, b \in R)$$

مجموعهٔ همهٔ هم‌مجموعه‌های I در R را با R/I نمایش می‌دهیم.

۸.۲ یادآوری. فرض کنید I و J ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R باشند و $I \subseteq J$. روشن است که R نسبت به جمع یک گروه آبلی است و I و J زیرگروههای Rاند. لذا I زیرگروه J است و گروه خارج قسمتی J/I را می‌توان تشکیل داد. عضوهای این گروه هم‌مجموعه‌های I در Jاند. لذا

$$J/I = \{a + I : a \in J\}$$

و مانند قبل، به ازای $a, b \in J$ داریم $a + I = b + I$ اگر و تنها اگر $a - b \in I$. جمع در گروه J/I به‌صورت

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

است که $a, b \in J$. البته باید نشان دهیم که این فرمول بدون ابهام است. اثبات این مطلب ساده است: اگر $a, a', b, b' \in J$ و

$$a + I = a' + I, \qquad b + I = b' + I$$

آن‌گاه $a - a', b - b' \in I$ و لذا $(a + b) - (a' + b') \in I$ و

$$(a + b) + I = (a' + b') + I.$$

به آسانی ثابت می‌شود که J/I همراه با این عمل جمع یک گروه آبلی است. گروه حاصل اغلب گروه خارج قسمتی J به پیمانهٔ I یا گروه رده‌های مانده‌ای J به پیمانهٔ I نامیده می‌شود.

۹.۲ ساختن حلقهٔ رده‌های مانده‌ای. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. واضح است که R ایدآل خودش است و لذا می‌توانیم روش ۸.۲ را به‌کار ببریم و گروه خارج قسمتی R/I را بسازیم. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان این گروه آبلی را به حلقه تبدیل کرد. فرض کنید $r, r', s, s' \in R$ و

$$r + I = r' + I, \qquad s + I = s' + I$$

در این صورت داریم $r - r', s - s' \in I$ و لذا

$$\begin{aligned} rs - r's' &= rs - rs' + rs' - r's' \\ &= r(s - s') + (r - r')s' \in I \end{aligned}$$

و از اینجا نتیجه می‌گیریم که $rs + I = r's' + I$. بنابراین با تعریف قاعدهٔ

$$(r + I)(s + I) = rs + I$$

که در آن $r, s \in R$، یک عمل ضرب بدون ابهام روی R/I تعریف می‌شود. حال اثبات اینکه گروه R/I تحت این عمل ضرب حلقه است بسیار ساده است. عضو همانی این حلقه $1 + I$ است و عضو صفر آن نیز برابر $0 + I = I$ است. نماد اختصاری متداول برای هم‌مجموعهٔ $r + I$ که $r \in R$ به‌صورت $\overline{r}$ است. این نمادگذاری به ویژه وقتی مفید است که ایدآل I مورد بحث معلوم باشد.

حلقهٔ R/I را حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R به پیمانهٔ I یا حلقهٔ خارج قسمتی R به پیمانهٔ I می‌نامیم.

قبل از ادامهٔ این بحث کلی خوب است یک مثال بسیار آشنا از چنین حلقه‌ای ذکر کنیم.

۱۰.۲ مثال. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n > 1$. در این صورت به آسانی می‌توانید نشان دهید که مجموعهٔ

$$n\mathbb{Z} := \{nr : r \in \mathbb{Z}\}$$

متشکل از همهٔ مضربهای صحیح n، ایدآل حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. بنابراین می‌توانیم روش ۹.۲ را به‌کار ببریم و حلقهٔ رده‌های مانده‌ای $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را تشکیل دهیم. این حلقه چیزی جز حلقهٔ رده‌های مانده‌ایِ عددهای صحیح به پیمانهٔ n مذکور در ۲.۱(سه) نیست.

لذا احتمالاً خواننده حداقل با یک مثال از حلقهٔ رده‌های مانده‌ای کاملاً آشناست!
حال بحث کلی را ادامه می‌دهیم.

۱۱.۲ لم. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این صورت نگاشت $f : R \to R/I$ با تعریف $f(r) = r + I$، به ازای هر $r \in R$، یک همریختیِ پوشای حلقه‌ای با هستهٔ I است. این همریختی f را اغلب همریختی طبیعی یا متعارف از R به R/I می‌نامند.

اثبات. از نحوهٔ ساختن R/I در ۹.۲ روشن است که به ازای هر $r, s \in R$ داریم

$$f(r + s) = f(r) + f(s), \qquad f(rs) = f(r)f(s).$$

همچنین روشن است که $f(1_R) = 1_{R/I}$. لذا f همریختی حلقه‌ای است و روشن است که پوشاست. همچنین به ازای $r \in R$ داریم $f(r) = 0_{R/I}$ اگر و تنها اگر $r + I = I$، یعنی اگر و تنها اگر $r \in I$. ■

۱۲.۲ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I زیرمجموعهٔ R باشد. در این صورت I ایدآل R است اگر و تنها اگر یک حلقهٔ تعویضپذیر چون S و یک همریختی حلقه‌ای مانند $f : R \to S$ وجود داشته باشد که $I = \operatorname{Ker} f$.

اثبات. این مطلب بلاواسطه از ۲.۱.۲، ۳.۲ و ۱۱.۲ نتیجه می‌شود. ■

رابطهٔ بسیار مهم دیگری بین همریختیهای حلقه‌ای و ایدآلها و حلقه‌های رده‌های مانده‌ای وجود دارد: این رابطه همان "قضیهٔ یکریختی" حلقه‌های تعویضپذیر است.

۱۳.۲ قضیهٔ یکریختی حلقه‌های تعویضپذیر. فرض کنید R و S حلقه‌های تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت از f یک یکریختی حلقه‌ای چون $\bar{f} : R/\mathrm{Ker}\ f \to \mathrm{Im}\ f$ به‌دست می‌آید که

$$\bar{f}(r + \mathrm{Ker}\ f) = f(r) \qquad \text{به ازای هر } r \in R$$

اثبات. قرار دهید $K = \mathrm{Ker}\ f$. برای اثبات وجود نگاشتی چون $\bar{f}$ که در فرمول سطر آخر قضیه صدق کند باید نشان دهیم که اگر $r, s \in R$ و $r+K = s+K$ آن‌گاه $f(r) = f(s)$. اثبات این مطلب آسان است: از تساوی $r + K = s + K$ نتیجه می‌شود که $r - s \in K = \mathrm{Ker}\ f$ و لذا

$$f(r) - f(s) = f(r - s) = \circ_S$$

و $f(r) = f(s)$. در نتیجه درواقع

$$\bar{f} : R/K \longrightarrow \mathrm{Im}\ f$$

که در فرمول سطر آخر قضیه صدق می‌کند نگاشت است و روشن است که $\bar{f}$ پوشاست. حال توجه کنید که به ازای هر $r, s \in R$ داریم

$$\begin{aligned}\bar{f}((r + K) + (s + K)) &= \bar{f}((r + s) + K) = f(r + s)\\ &= f(r) + f(s)\\ &= \bar{f}(r + K) + \bar{f}(s + K)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\bar{f}((r + K)(s + K)) &= \bar{f}(rs + K) = f(rs)\\ &= f(r)f(s)\\ &= \bar{f}(r + K)\bar{f}(s + K)\end{aligned}$$

همچنین $\bar{f}(1_{R/K}) = \bar{f}(1_R + K) = f(1_R) = 1_S$ که در آن 1_S عضو همانی زیرحلقهٔ $\mathrm{Im}\ f$ از S است. در پایان اگر $r, s \in R$، و $\bar{f}(r + K) = \bar{f}(s + K)$ آن‌گاه

$f(r-s) = f(r) - f(s) = \circ_S$ و لذا $r - s \in K$ و $r + K = s + K$. در نتیجه $\bar{f}$ یک به یک است و اثبات یکریختی بودن آن کامل است. ■

در این کتاب مثالهای فراوانی از ایدآلها را مطالعه خواهیم کرد، ولی در اینجا لازم است دو مثال نه چندان جالب را ذکر کنیم.

۱۴.۲ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در این صورت خود R ایدآل R است. می‌گوییم که ایدآل I از R سره است اگر $I \neq R$.

توجه کنید که به ازای ایدآل I از R، حلقهٔ R/I صفر است اگر و تنها اگر $\circ + I = ۱ + I$. یعنی اگر و تنها اگر $۱ \in I$ و این حالت تنها وقتی رخ می‌دهد که $I = R$، یعنی I ناسره باشد. (اگر $۱ \in I$ آن‌گاه به ازای هر $r \in R$، $r = r۱ \in I$.)

مثال دیگری از ایدآلِ حلقه‌ای تعویضپذیر چون R مجموعهٔ $\{\circ_R\}$ است: این ایدآل ایدآل صفر R نامیده می‌شود و معمولاً به اختصار با $\circ$ نمایش داده می‌شود.

مثال دیگر ایدآل را در ۱۰.۲ دیدیم: به ازای عدد صحیح و مثبتِ $n > ۱$ مجموعهٔ

$$n\mathbb{Z} = \{nr : r \in \mathbb{Z}\}$$

ایدآل حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ است. این ایدآل مثال خاصی از مفهوم "ایدآل اصلی" در حلقهٔ تعویضپذیر است که در زیر آن را تعریف می‌کنیم.

۱۵.۲ لم و تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $a \in R$. در این صورت مجموعهٔ

$$aR := \{ar : r \in R\}$$

ایدآل R است، و ایدآل اصلی تولید شده توسط a نامیده می‌شود. نمادهای دیگر aR عبارت‌اند از (a) و Ra. ■

لازم به ذکر است که طبق ۱۵.۲ ایدآل اصلی $۱_R R$ از R خود R است و ایدآل اصلی $\circ_R R$ از R ایدآل صفر است.

۱۶.۲* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $r \in R$. نشان دهید که r یک عضو وارونپذیر R است اگر و تنها اگر $(r) = (۱_R)$.

حال وقت آن است که عبارت "تولید شده توسط" را که در تعریف ایدآل اصلی مذکور در ۱۵.۲ به‌کار رفت مورد مطالعهٔ دقیقتر قرار دهیم.

۱۷.۲ تولید ایدآل. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از ایدآلهای R باشد. (یعنی $\Lambda \neq \varnothing$ و به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، I_λ ایدآل R است.) از تعریف ایدآل در ۳.۲ روشن است که

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$$

یعنی اشتراک خانوادهٔ ایدآلهای فوق نیز ایدآل R است. در حالتی که $\Lambda' = \varnothing$، $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$ را برابر R تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $H \subseteq R$. بنا به تعریف، اشتراک خانوادهٔ همهٔ ایدآلهایی از R را که شامل Hاند ایدآل تولید شده توسط H در R می‌نامیم و با (H) یا RH یا HR نشان می‌دهیم. توجه کنید که این خانواده یقیناً ناتهی است، زیرا R خود به وضوح ایدآلی از R است که شامل H است.

لذا نتیجه می‌گیریم که

یک) (H) ایدآل R است و $H \subseteq (H)$.

دو) (H) کوچکترین ایدآل R است که شامل H است. به این معنی که اگر I ایدآلی از R باشد که $H \subseteq I$ آن‌گاه $(H) \subseteq I$، به این دلیل ساده که I یکی از ایدآلهای متعلق به خانوادهٔ مذکور در تعریف (H) است.

(H) به چه صورتی است؟ این مطلبی است که در زیر عنوان می‌کنیم.

۱۸.۲ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $\varnothing \neq H \subseteq R$. در این صورت

$$(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i : n \in \mathbb{N},\ r_1, \ldots, r_n \in R,\ h_1, \ldots, h_n \in H \right\}.$$

همچنین $(\varnothing)$، یعنی ایدآلی که توسط زیرمجموعهٔ تهی در R تولید می‌شود، برابر است با ایدآل صفر R، یعنی $(\varnothing) = 0$.

اثبات. قرار دهید

$$J = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i h_i : n \in \mathbb{N},\ r_1, \ldots, r_n \in R,\ h_1, \ldots, h_n \in H \right\}.$$

روشن است که $H \subseteq J$: هر $h \in H$ را می‌توان به‌صورت $h = 1_R h$ نوشت که طرف راست آن نشان می‌دهد h را می‌توان به صورتی نوشت که معلوم باشد به J متعلق است. چون $H \neq \varnothing$ در نتیجه $J \neq \varnothing$. حال نشان می‌دهیم که J ایدآل R است.

اگر $r_1, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots, r_{n+m} \in R$ و $h_1, \ldots, h_n, h_{n+1}, \ldots, h_{n+m} \in H$ (که در آن n و m اعداد صحیح و مثبت‌اند) آن‌گاه

$$\sum_{i=1}^{n} r_i h_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} r_i h_i = \sum_{i=1}^{n+m} r_i h_i$$

نیز عضو J است و به همین آسانی می‌توان نشان داد که J تحت ضرب اعضای R در اعضای J بسته است. لذا J ایدآلی از R است که شامل H است و بنابراین یکی از ایدآلهای خانوادهٔ مذکور در تعریف (H) است. در نتیجه $(H) \subseteq J$.

از طرف دیگر بنابر ۱۷.۲، (H) ایدآلی از R است که شامل H است. بنابراین باید شامل همهٔ اعضای R باشد که به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} r_i h_i$ هستند، که در آن $n \in \mathbb{N}$، $r_1, \ldots, r_n \in R$ و $h_1, \ldots, h_n \in H$. در نتیجه $J \subseteq (H)$ و لذا همان‌طور که ادعا کرده بودیم $J = (H)$.

برای اثبات حکم آخر قضیه کافی است توجه کنید که 0 ایدآل R است که (البته) $\varnothing$ را شامل می‌شود و لذا $(\varnothing) \subseteq 0$. از طرف دیگر هر ایدآل R باید شامل 0_R باشد و لذا $0 \subseteq (\varnothing)$. ■

۱۹.۲ تذکر. (H) مذکور در ۱۸.۲ را در نظر بگیرید. در حالت خاصی که H متناهی و ناتهی باشد عبارت معرف (H) در ۱۸.۲ ساده‌تر می‌شود.

یک) فرض کنید $H = \{h_1, \ldots, h_t\} \subseteq R$ (که $t > 0$). چون به ازای $r_1, \ldots, r_t, s_1, \ldots, s_t \in R$ داریم

$$\sum_{i=1}^{t} r_i h_i + \sum_{i=1}^{t} s_i h_i = \sum_{i=1}^{t} (r_i + s_i) h_i$$

نتیجه می‌گیریم که در این حالت

$$(H) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i h_i : r_1, \ldots, r_t \in R \right\}$$

در این حالت (H) را معمولاً به‌صورت ساده‌تر $(h_1, \ldots, h_t)$ (به جای $(\{h_1, \ldots, h_t\})$) می‌نویسیم و آن را ایدآل تولید شده توسط $h_1, \ldots, h_t$ می‌نامیم.

دو) به ویژه، به ازای $h \in R$، داریم

$$(\{h\}) = \{rh : r \in R\}$$

که ایدآل اصلی R تولید شده توسط h است که در ۱۵.۲ مورد بحث قرار گرفت. لذا استفاده از نماد (h) برای این ایدآل متناقض با استفاده از این نماد در ۱۵.۲ نیست.

سه) اگر ایدآل I از R برابر (H) باشد که در آن H زیرمجموعه‌ای متناهی از R است می‌گوییم که I ایدآل متناهی‌مولد R است.

۲۰.۲* تمرین. حلقهٔ $R[X_1, \ldots, X_n]$ را متشکل از چندجمله‌ایهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R از مجهولهای X_1، ...، X_n در نظر بگیرید. فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ و

$$f : R[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow R$$

همریختی مقداریاب به ازای α_1، ...، α_n باشد (۱۷.۱ را ببینید). ثابت کنید

$$\operatorname{Ker} f = (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n).$$

این امر نباید بر خواننده مشتبه شود که هر ایدآل یک حلقهٔ تعویضپذیر باید متناهی‌مولد باشد؛ همچنین خواننده نباید چنین تصور کند که هر ایدآل متناهی‌مولد از این حلقه باید اصلی باشد. دو تمرین زیر مؤید این نکته‌هاست.

۲۱.۲* تمرین. فرض کنید K هیأت باشد و $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجهولها که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، X_1، ...، X_n روی K دارای استقلال جبری‌اند. (در این حالت می‌گوییم که خانوادهٔ $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ روی K دارای استقلال جبری است.)

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $R_n = K[X_1, \ldots, X_n]$؛ فرض کنید $R_0 = K$. لذا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، R_n را می‌توانیم به طور طبیعی زیرحلقه‌ای از R_{n+1} بدانیم. نشان دهید که $R_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} R_n$ را می‌توان به قسمی به ساختار حلقه‌های تعویضپذیر مجهز کرد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، R_n زیرحلقهٔ R_∞ گردد. نشان دهید $R_\infty = K[\Gamma]$ که در آن $\Gamma = \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$. در واقع گاهی R_∞ را با $K[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ نمایش می‌دهیم و آن را حلقهٔ چندجمله‌ایهای با ضریبهای متعلق به K از خانوادهٔ شمارا و نامتناهی مجهولهای $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ می‌نامیم.

نشان دهید ایدآلی که توسط Γ در R_∞ تولید می‌شود متناهی‌مولد نیست.

۲۲.۲ تمرین. فرض کنید K هیأت باشد. نشان دهید که ایدآل (X_1, X_2) از حلقهٔ تعویضپذیر $K[X_1, X_2]$ (متشکل از چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X_1 و X_2) اصلی نیست.

مفهوم مجموع خانواده‌ای از ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R با مفهوم تولید ایدآل توسط زیرمجموعه‌ای از R ارتباط زیادی دارد.

۲۳.۲ مجموع ایدآلها. فرض کنید $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. مجموع این خانواده یعنی $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ را برابر با ایدآل تولید شده توسط $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ در R

تعریف می‌کنیم: لذا

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda).$$

بنابراین اگر $\Lambda = \varnothing$ آن‌گاه $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \circ$.

چون هر ایدآل R تحت ضرب اعضای R در اعضای آن و تحت جمع اعضای خود بسته است، از ۱۸.۲ نتیجه می‌گیریم که در حالت $\Lambda \neq \varnothing$ هر عضو $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ را می‌توان به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} c_{\lambda_i}$ نوشت که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ و به ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $c_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$. روش دیگر نمایش این عبارت به‌صورت $\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda$ است که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $c_\lambda \in I_\lambda$ و $c_\lambda = \circ$ مگر به ازای تعدادی متناهی $\lambda \in \Lambda$.

احکام تمرین زیر را زیاد به‌کار می‌بریم ولی اثباتشان بسیار آسان است.

۲۴.۲* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) نشان دهید عمل دوتایی جمع ایدآلها (با تعریف بالا از جمع) روی مجموعهٔ ایدآلهای R تعویضپذیر و شرکتپذیر است.

دو) فرض کنید $I_1، \ldots، I_n$ ایدآلهای R باشند. نشان دهید

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i : r_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

این ایدآل را اغلب با $I_1 + \cdots + I_n$ نمایش می‌دهیم.

سه) فرض کنید $h_1, \ldots, h_n \in R$. نشان دهید که

$$(h_1, \ldots, h_n) = Rh_1 + \cdots + Rh_n$$

(یعنی $(h_1, \ldots, h_n) = (h_1) + \cdots + (h_n)$).

۲۵.۲* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I و J ایدآلهای R باشند. رادیکال I، یعنی $\sqrt{I}$، در ۵.۲ تعریف شد. نشان دهید

یک) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$؛

دو) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$؛

سه) $\sqrt{I} = (1)$ اگر و تنها اگر $I = (1)$؛

چهار) اگر $\sqrt{I} + \sqrt{J} = (1)$ آن‌گاه $I + J = (1)$.

مفهوم دیگری که با مفهوم تولید ایدآل مرتبط است حاصلضرب دو ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر است. این مفهوم را در زیر شرح می‌دهیم.

۲۶.۲ تعریف و لم. فرض کنید I و J ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. حاصلضرب I و J را برابر با ایدآل تولید شده توسط مجموعهٔ $\{ab : a \in I, b \in J\}$ تعریف می‌کنند و به‌صورت $I.J$، و بیشتر به‌صورت IJ، نشان می‌دهند.

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in I,\ b_1, \ldots, b_n \in J \right\}$$

اثبات. این مطلب بلاواسطه از ۱۸.۲ نتیجه می‌شود، به این دلیل ساده که هر عضو R به‌صورت rab را، که در آن $r \in R$، $a \in I$ و $b \in J$، می‌توان به‌صورت $(ra)b$ نوشت که در آن $ra \in I$.■

خواننده باید توجه کند که در حالت کلی، حاصلضرب IJ مذکور در ۲۶.۲ برابر با مجموعهٔ $\{ab : a \in I, b \in J\}$ نیست. تمرین زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

۲۷.۲ تمرین. فرض کنید K هیأت و $R = K[X_1, X_2, X_3, X_4]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X_1،X_2،X_3،X_4 باشد. قرار دهید

$$I = RX_1 + RX_2,\ J = RX_3 + RX_4$$

نشان دهید $IJ \neq \{fg : f \in I, g \in J\}$.

در زیر ویژگیهای مقدماتی ضرب ایدآلها را ارائه می‌کنیم.

۲۸.۲ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I،J،K،I_1،...،I_n ایدآلهایی از R باشند.

یک) روشن است که $IJ = JI \subseteq I \cap J$.

دو) به آسانی ثابت می‌شود که $(IJ)K = I(JK)$ و هر دو برابرند با ایدآل RH از R که توسط مجموعهٔ زیر تولید می‌شود

$$H = \{abc : a \in I,\ b \in J,\ c \in K\}.$$

لذا هر عضو $(IJ)K = I(JK) =: IJK$ به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{t} a_i b_i c_i$$

است که در آن $t \in \mathbb{N}$، $a_1, \ldots, a_t \in I$، $b_1, \ldots, b_t \in J$ و $c_1, \ldots, c_t \in K$.

سه) از (یک) و (دو)ی فوق نتیجه می‌شود که حاصلضرب $\prod_{i=1}^{n} I_i$ از ایدآلهای $I_1, \ldots, I_n$ را می‌توان بدون ابهام تعریف کرد: داریم

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \ldots I_n = RL$$

که در آن

$$L = \{a_1 \ldots a_n : a_1 \in I_1, \ldots, a_n \in I_n\}.$$

بنابراین مشاهده می‌کنیم که هر عضو $I_1 \ldots I_n$ مجموع تعدادی متناهی از عضوهای L است.

چهار) به آسانی می‌توانید ثابت کنید که $I(J+K) = IJ + IK$.

پنج) به ویژه توجه کنید که به ازای $m \in \mathbb{N}$، I^m تعریف شده است؛ I^0 را برابر با R می‌گیریم. توجه کنید که بنابر (سه) هر عضو I^m (به ازای عدد طبیعی m) به‌صورت

$$a_{11}a_{12} \ldots a_{1m} + a_{21}a_{22} \ldots a_{2m} + \cdots + a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nm}$$

است که در آن $n \in \mathbb{N}$ و به ازای هر $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, m$، $a_{ij} \in I$.

۲۹.۲ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $m \in \mathbb{N}$. ایدآل $(X_1, \ldots, X_n)^m$ از حلقهٔ $R[X_1, \ldots, X_n]$، متشکل از چندجمله‌ایهای روی R از مجهولهای $X_1, \ldots, X_n$، را مشخص کنید.

۳۰.۲* تمرین. فرض کنید I و J ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. نشان دهید که

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

به این نحو نوعی "حساب" برای ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R ایجاد کرده‌ایم: از اشتراک و مجموع یک خانوادهٔ دلخواه از ایدآلهای R و همچنین حاصلضرب خانواده‌ای ناتهی از ایدآلهای R بحث کرده‌ایم. عمل دوتایی دیگری نیز روی مجموعهٔ ایدآلهای R تعریف می‌کنیم به نام "تقسیم ایدآلها".

به ازای ایدآل I از R و $a \in R$، نماد aI نشاندهندهٔ مجموعهٔ $\{ac : c \in I\}$ است. این مجموعه نیز ایدآل R است، زیرا همان ایدآل حاصلضرب $(a)I$ است.

۳۱.۲ تعریف. فرض کنید I و J ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. حاصل تقسیم یا خارج قسمت $(I : J)$ به‌صورت

$$(I : J) = \{a \in R : aJ \subseteq I\}$$

تعریف می‌شود. روشن است که این «حاصل تقسیم» ایدآل R است و $I \subseteq (I : J)$.
در حالت خاصِ $I = \circ$، حاصل تقسیم

$$\begin{aligned}(\circ : J) =& \{a \in R : aJ = \circ\} \\ =& \{a \in R : ab = \circ \text{ ،} b \in J \text{ به ازای هر } \}\end{aligned}$$

پوچساز J نامیده می‌شود و با $\operatorname{Ann} J$ یا $\operatorname{Ann}_R J$ نمایش داده می‌شود.

۳۲.۲* تمرین. فرض کنید H زیرمجموعه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآل R باشد. نشان دهید که

$$(I : RH) = \{a \in R : ah \in I \text{ ،} h \in H \text{ به ازای هر } \}$$

ایدآل $(I : RH)$ را گاهی با $(I : H)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $(\circ : H)$ را پوچساز H می‌نامیم. به ازای $d \in R$، به جای $(\circ : \{d\})$ به اختصار می‌نویسیم $(\circ : d)$ و به همین نحو $(I : \{d\})$ را به اختصار با $(I : d)$ نمایش می‌دهیم.

۳۳.۲* تمرین. فرض کنید I، J و K ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R و $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از ایدآلهای R باشد. نشان دهید که
یک) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$؛
دو) $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda : K) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}(I_\lambda : K)$؛
سه) $(J : \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda}(J : I_\lambda)$.

حال وقت آن رسیده است که برخی از اعمال حساب ایدآلها را در چند مثال آشنا از حلقه‌های تعویضپذیر بررسی کنیم. بسیاری از مثالهای مقدماتی حلقه‌های تعویضپذیر که در آغاز مطالعهٔ این موضوع به ذهن می‌رسند دامنهٔ اقلیدسی‌اند. قضیه‌ای وجود دارد که نظریهٔ ایدآلهای دامنه‌های اقلیدسی را بسیار ساده می‌کند.

۳۴.۲ قضیه. هر ایدآل I از دامنهٔ اقلیدسی R اصلی است.

اثبات. ایدآل صفر R اصلی است و لذا می‌توانیم فرض کنیم که $I \neq \circ$. لذا عضوی چون a وجود دارد که $a \in I$ و $a \neq \circ$.
نماد $\partial : R \setminus \{\circ\} \to \mathbb{N}_\circ$ را برای نمایش تابع درجهٔ دامنهٔ اقلیدسی R به‌کار می‌بریم. مجموعهٔ

$$\{\partial(a) : a \in I \setminus \{\circ\}\}$$

مجموعه‌ای ناتهی از عددهای صحیح نامنفی است و لذا دارای کوچکترین عضو است: فرض کنید این عضو $\partial(h)$ باشد، که $h \in I \setminus \{\circ\}$.

چون I ایدآل R است روشن است که $hR \subseteq I$. برای اثبات رابطهٔ $I \subseteq hR$، فرض کنید $b \in I$. بنا به تعریف دامنهٔ اقلیدسی (۴۰.۱ را ببینید) عضوهایی چون $q, r \in R$ وجود دارند که $b = qh + r$ که در آن $r = \circ$ یا $r \neq \circ$ و $\partial(r) < \partial(h)$.

ولی $r = b - qh \in I$ و لذا باید $r = \circ$ زیرا در غیر این صورت تناقضی با تعریف h حاصل می‌شود. در نتیجه $b = qh \in hR$ و لذا ثابت کرده‌ایم که $I \subseteq hR$. ■

۳۵.۲ تمرین. فرض کنید R دامنه‌ای اقلیدسی باشد و $a, b \in R\backslash\{\circ\}$. فرض کنید h بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد.

یک) نشان دهید که $aR + bR = hR$.

دو) هر یک از ایدآلهای $(a) + (b)$،$(a) \bigcap (b)$،$(a)(b)$ و $(aR : b)$ را مشخص کنید: مقصود این است که مولد هر یک از این ایدآلها را (که اصلی هستند) بیابید؛ این مولدها را برحسب عوامل حاصل از تجزیهٔ a و b به عضوهای تحویلناپذیر R بیان کنید.

۳۶.۲ تعریف. دامنهٔ صحیح R را دامنهٔ با ایدآلهای اصلی یا دامنهٔ اصلی‌ایدآل (به اختصار PID یا د.ا.ا) می‌نامیم اگر هر ایدآل R اصلی باشد.

لذا از ۳۴.۲ نتیجه می‌شود که هر دامنهٔ اقلیدسی د.ا.ا است. لذا $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}[i]$ و $K[X]$، که در آن K هیأت است و X مجهولی روی K، مثالهایی از دامنهٔ اصلی‌ایدآل‌اند.

شناخت ایدآلهای حلقهٔ رده‌های مانده‌ای با اهمیت است.

۳۷.۲ ایدآلهای حلقهٔ رده‌های مانده‌ای. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

یک) اگر J ایدآل R باشد و $J \supseteq I$، آنگاه گروه آبلی J/I ایدآل R/I است و به علاوه به ازای هر $r \in R$ داریم $r + I \in J/I$ اگر و تنها اگر $r \in J$.

دو) به ازای هر ایدآل $\mathcal{J}$ از R/I تنها یک ایدآل چون K از R با ویژگی $K \supseteq I$ وجود دارد که K/I برابر $\mathcal{J}$ باشد. درواقع ایدآل منحصر به فرد K از R که در این شرطها صدق کند عبارت است از

$$K = \{a \in R : a + I \in \mathcal{J}\}$$

اثبات. یک) از ۸.۲ روشن است که گروه رده‌های مانده‌ای J/I چنان است که

$$J/I = \{a + I : a \in J\} \subseteq \{r + I : r \in R\} = R/I$$

و لذا J/I زیرگروه گروه جمعی R/I است. به علاوه چون به ازای هر $r \in R$ و $a \in J$ داریم

$$(r + I)(a + I) = ra + I \in J/I$$

نتیجه می‌گیریم که J/I ایدآل R/I است.

برای اثبات مدعای دیگر کافی است توجه کنید که اگر $r \in R$ و $r + I = j + I$ که در آن $j \in J$، آن‌گاه $r = (r - j) + j$ و $r - j \in I \subseteq J$.

دو) فرض کنید $\mathcal{J}$ ایدآل R/I باشد. قرار دهید

$$K = \{a \in R : a + I \in \mathcal{J}\}$$

روشن است که $I \subseteq K$ زیرا به ازای هر $a \in I$، $a + I = I \in \mathcal{J}$. فرض کنید $a, b \in K$، و $r \in R$. در این صورت داریم $a + I, b + I \in \mathcal{J}$ و لذا $(a + b) + I, ra + I \in \mathcal{J}$. در نتیجه $a + b, ra \in K$، و لذا K ایدآل R است. قبلاً نیز دیدیم که $K \supseteq I$. از تعریف K روشن است که $K/I = \mathcal{J}$.

حال فرض کنید L ایدآل دیگری با ویژگیهای $L \supseteq I$ و $L/I = \mathcal{J}$ باشد. فرض کنید $a \in L$. در این صورت

$$a + I \in L/I = \mathcal{J}$$

و لذا بنا به تعریف K، $a \in K$. از طرف دیگر اگر $b \in K$ آن‌گاه $b + I \in \mathcal{J} = L/I$ و لذا بنابر (یک) داریم $b \in L$. در نتیجه $K \subseteq L$. بنابراین ثابت کرده‌ایم که $L = K$. ■

۳۸.۲* تمرین. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و J و K ایدآلهایی از R باشند که شامل Iاند. فرض کنید $a_1, \ldots, a_h \in R$. برای هر یک از ایدآلهای $\mathcal{J}$ از R/I که در زیر داده شده است ایدآل منحصر به فرد L از R را تعیین کنید که دارای ویژگیهای $I \subseteq L$ و $L/I = \mathcal{J}$ باشد.

یک) $\mathcal{J} = J/I + K/I$.

دو) $\mathcal{J} = (J/I)(K/I)$.

سه) $\mathcal{J} = (J/I : K/I)$.

چهار) $\mathcal{J} = (J/I)^n$ که در آن $n \in \mathbb{N}$.

پنج) $\mathcal{J} = (J/I) \bigcap (K/I)$.

شش) $\mathcal{J} = 0$.

هفت) $\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{h} (R/I)(a_i + I)$.

هشت) $\mathcal{J} = R/I$.

۳۹.۲ تذکر. احکام ۳۷.۲ چنان مهم هستند که ارزش دارد قدری بیشتر در مورد آنها تأمل کنیم. لذا بار دیگر فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد. نماد $\mathcal{I}_R$ را برای نشان دادن مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای R به کار می‌بریم و لذا با این نمادگذاری $\mathcal{I}_{R/I}$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ

همهٔ ایدآلهای R/I است. یک راه بیان احکام ۳۷.۲ این است که بگوییم نگاشتی چون

$$\begin{aligned}\theta : \{J \in \mathcal{I}_R : J \supseteq I\} &\longrightarrow \mathcal{I}_{R/I}\\ J &\longmapsto J/I\end{aligned}$$

وجود دارد که دوسویی است. همچنین توجه کنید که هم θ و هم وارونش رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کنند: یعنی به ازای $J_1, J_2 \in \mathcal{I}_R$ و $J_i \supseteq I$، $i = 1, 2$، داریم

$J_1 \subseteq J_2$ اگر و تنها اگر $J_1/I \subseteq J_2/I$.

۴۰.۲* تمرین. فرض کنید I و J ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند و $I \subseteq J$. نشان دهید که یک یکریختی حلقه‌ای چون

$$\xi : (R/I)/(J/I) \longrightarrow R/J$$

وجود دارد که به ازای هر $r \in R$، $\xi((r + I) + J/I) = r + J$. (راهنمایی: قضیهٔ یکریختی حلقه‌های تعویضپذیر را به‌کار ببرید.)

احکام مذکور در ۳۷.۲ و ۳۹.۲ درواقع دربارهٔ اثر همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to R/I$ بر ایدآلها هستند: این احکام نشان می‌دهند که اگر J ایدآلی از R باشد که شامل I است آن‌گاه $f(J)$ درواقع ایدآل R/I است و اگر $\mathcal{J}$ ایدآل R/I باشد، آن‌گاه

$$f^{-1}(\mathcal{J}) = \{r \in R : f(r) \in \mathcal{J}\}$$

ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود.

همچنین قبلاً نگارهٔ معکوس ایدآل خاصی را تحت همریختیهای حلقه‌ای در نظر گرفتیم: اگر R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و $g : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد آن‌گاه $\operatorname{Ker} g$ را می‌توانیم به عنوان نگارهٔ معکوس ایدآل صفر S تحت g در نظر بگیریم. می‌دانیم $\operatorname{Ker} g$ ایدآل R است.

مطالبی که در دو پارگراف فوق ذکر شد به طور طبیعی به بررسی مفاهیمی کلی می‌انجامد، که اغلب با استفاده از اصطلاحات "توسیع" و "تحدید" ایدآلها تحت همریختیهای حلقه‌ای بیان می‌شود.

۴۱.۲ لم و تعریف. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد.

یک) هر گاه J ایدآل S باشد آن‌گاه $f^{-1}(J) := \{r \in R : f(r) \in J\}$ ایدآلی از R است که آن را حاصل تحدید J نسبت به (یا تحت) همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ می‌نامیم.

اگر احتمال این اشتباه نباشد که کدام همریختی حلقه‌ای مورد بحث است، $f^{-1}(J)$ را اغلب با J^c نمایش می‌دهیم.[۱]

دو) به ازای هر ایدآل I از R ایدآل $f(I)S$، یعنی ایدآل تولید شده توسط $f(I)$ در S را حاصل توسیع I نسبت به (یا تحت) همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ می‌نامیم. در اینجا نیز اگر احتمال اشتباه نباشد $f(I)S$ را اغلب با I^e نمایش می‌دهیم.[۲]

اثبات. تنها قسمت (یک) به اثبات نیاز دارد. بدین‌منظور همریختی مرکب حلقه‌ای

$$g : R \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/J$$

را در نظر بگیرید که در آن نگاشت دوم همریختی حلقه‌ای طبیعی پوشاست. روشن است که ترکیب دو همریختی حلقه‌ای یک همریختی حلقه‌ای است و

$$\text{Ker } g = \{r \in R : f(r) \in J\} = f^{-1}(J).$$

لذا از ۱.۲ نتیجه می‌شود که $f^{-1}(J)$ ایدآل R است. ■

۴۲.۲* تمرین. حالت ۴۱.۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید ایدآل I از R توسط مجموعهٔ H تولید شود. نشان دهید که I^e، یعنی حاصل توسیع I تحت همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$، توسط $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$ تولید می‌شود.

۴۳.۲* تمرین. حالت ۴۱.۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید I_1 و I_2 ایدآلهایی از R و J_1 و J_2 ایدآلهایی از Sاند. ثابت کنید که

یک) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$؛

دو) $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$؛

سه) $(J_1 \bigcap J_2)^c = J_1^c \bigcap J_2^c$؛

چهار) $(\sqrt{J_1})^c = \sqrt{(J_1^c)}$.

۴۴.۲ لم. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. فرض کنید I ایدآل R و J ایدآل S باشد. در این صورت با استفاده از نمادهای I^e و J^c مذکور در ۴۱.۲ داریم

یک) $I \subseteq I^{ec}$؛

دو) $J^{ce} \subseteq J$؛

سه) $I^e = I^{ece}$؛

چهار) $J^{cec} = J^c$.

---

۱. c حرف اول کلمهٔ contraction به معنی تحدید است. ـم.

۲. e حرف اول کلمهٔ extension به معنی توسیع است. ـم.

اثبات. یک) فرض کنید $r \in I$. چون $f(r) \in f(I) \subseteq f(I)S = I^e$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم که $r \in I^{ec}$.

دو) بنا به تعریف، J^{ce} ایدآلی از S است که توسط $f(f^{-1}(J))$ تولید می‌شود. چون

$$f(f^{-1}(J)) \subseteq J$$

و J ایدآل S است، پس باید $J^{ce} \subseteq J$.

سه) بنابر (یک) داریم $I \subseteq I^{ec}$. دو طرف را توسیع می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که $I^e \subseteq I^{ece}$. معکوس این رابطه با إعمال (دو) بر ایدآل I^e از S به‌دست می‌آید.

چهار) این مطلب تقریباً مشابه با (سه) اثبات می‌شود. بنابر (دو) داریم $J^{ce} \subseteq J$ و لذا با تحدید دو طرف تحت همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ داریم $J^{cec} \subseteq J^c$. از طرف دیگر با إعمال (یک) بر ایدآل J^c از R نتیجه می‌گیریم که $J^c \subseteq J^{cec}$. ■

۴۵.۲ نتیجه. حالت ۴۴.۲ را در نظر بگیرید و نماد $\mathcal{I}_R$ مذکور در ۳۹.۲ را برای نمایش مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای R به کار ببرید. به علاوه، قرار دهید

$$\mathcal{C}_R = \{J^c : J \in \mathcal{I}_S\}, \qquad \mathcal{E}_S = \{I^e : I \in \mathcal{I}_R\}.$$

(گاه $\mathcal{C}_R$ را مجموعهٔ ایدآلهای R که حاصل تحدید ایدآلهای S تحت f هستند یا به اختصار مجموعهٔ ایدآلهای تحدیدی R می‌نامیم. به همین نحو $\mathcal{E}_S$ را مجموعهٔ ایدآلهای S که حاصل توسیع ایدآلهای R تحت f هستند یا مجموعهٔ ایدآلهای توسیعی S می‌نامیم).

از ۴۴.۲(چهار) نتیجه می‌شود که به ازای هر $I \in \mathcal{C}_R$، $I^{ec} = I$، و از ۴۴.۲(سه) نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $J \in \mathcal{E}_S$، $J^{ce} = J$. در نتیجه از توسیع و تحدید، دو نگاشت دوسویی

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_S & \longrightarrow & \mathcal{C}_R \\ J & \longmapsto & J^c \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_R & \longrightarrow & \mathcal{E}_S \\ I & \longmapsto & I^e \end{array}$$

به‌دست می‌آیند که وارون یکدیگرند. ■

۴۶.۲* تمرین. نمادهای ۴۵.۲ را به کار می‌بریم. فرض کنید که همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ پوشا باشد. نشان دهید

$$\mathcal{C}_R = \{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \operatorname{Ker} f\} \quad \text{و} \quad \mathcal{E}_S = \mathcal{I}_S.$$

نتیجه بگیرید که

$$\begin{array}{ccc} \{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \operatorname{Ker} f\} & \longrightarrow & \mathcal{I}_S \\ I & \longmapsto & f(I) \end{array}$$

نگاشتی دوسویی است که وارونش از تحدید به‌دست می‌آید.

لذا تمرین فوق نشان می‌دهد که به ازای هر همریختی پوشای حلقه‌های تعویضپذیر چون $f : R \to S$ یک نگاشت دوسویی از مجموعهٔ ایدآلهای R که شامل $\operatorname{Ker} f$اند به مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای S وجود دارد (و این نگاشت و وارونش رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کنند). این مطلب غیرمنتظره نیست، زیرا بنابر قضیهٔ یکریختی حلقه‌های تعویضپذیر، یعنی قضیهٔ ۱۳.۲، $R/\operatorname{Ker} f \cong S$ و در ۳۹.۲ نتیجه‌هایی مشابه نتیجه‌های فوق را در مورد ایدآلهای حلقه‌ای از رده‌های مانده‌ای مانند $R/\operatorname{Ker} f$ به‌دست آوردیم.

مفهومهای توسیع و تحدید ایدآلها برخی از ایدآلهای حلقه‌های چندجمله‌ایها را مشخصتر می‌سازند.

۴۷.۲* تمرین. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهولی روی R باشد. فرض می‌کنیم $f : R \to R[X]$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد و اصطلاحات توسیع و تحدید و نمادهای ۴۱.۲ را در مورد f به کار می‌بریم.

فرض می‌کنیم I ایدآل R باشد و به ازای $r \in R$ نگارهٔ طبیعی r در R/I را با $\overline{r}$ نمایش می‌دهیم. بنابر ۱۳.۱ یک همریختی حلقه‌ای چون

$$\eta : R[X] \longrightarrow (R/I)[X]$$

وجود دارد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}_\circ$ و $r_\circ, r_1, \ldots, r_n \in R$ داریم

$$\eta\left(\sum_{i=\circ}^{n} r_i X^i\right) = \sum_{i=\circ}^{n} \overline{r}_i X^i$$

نشان دهید که

یک) $I^e = \operatorname{Ker} \eta$، یعنی

$$I^e = \left\{ \sum_{i=\circ}^{n} r_i X^i \in R[X] : r_i \in I ،i = \circ, \ldots, n \text{ و به ازای هر } n \in \mathbb{N}_\circ \right\};$$

دو) $I^{ec} = I$ و لذا $\mathcal{C}_R = \mathcal{I}_R$؛

سه) $R[X]/I^e = R[X]/IR[X] \cong (R/I)[X]$؛

چهار) اگر $I_1، \ldots، I_n$ ایدآلهایی از R باشند آن‌گاه

$$(I_1 \cap \cdots \cap I_n)R[X] = I_1 R[X] \cap \cdots \cap I_n R[X].$$

۴۸.۲ تمرین. نتیجهٔ تمرین ۴۷.۲ را به حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X_1, \ldots, X_n]$ روی حلقهٔ تعویضپذیر R از مجهولهای $X_1، \ldots، X_n$ تعمیم دهید.

۴۹.۲ تمرین. فرض‌کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و $f : R \to R[[X]]$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد که در آن X مجهول است. چه قسمتی از نتیجه‌های تمرین ۴۷.۲ را می‌توان به این همریختی حلقه‌ای تعمیم داد؟

۵۰.۲ تمرین. ایدآلی از $\mathbb{Z}[X]$ را (که در آن X مجهول است) بیابید که حاصل توسیع هیچ ایدآلی از $\mathbb{Z}$ تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی نباشد.
آیا هر ایدآل $\mathbb{Z}[X]$ اصلی است؟ آیا $\mathbb{Z}[X]$ دامنهٔ اقلیدسی است؟ پاسخهای خود را ثابت کنید.

۳

ایدآل اول و ایدآل ماکسیمال

در ابتدای فصل قبل متذکر شدیم که مفهومهای ایدآل اول و ایدآل ماکسیمال در کاربرد نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر در هندسهٔ جبری اساسی‌اند. در این فصل از نظریهٔ ایدآلهای اول و ماکسیمال بحث می‌کنیم. منطقی است که ایدآلهای اول را مهمترین دستهٔ ایدآلها در نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر بدانیم: یکی از هدفهای ما در این فصل این است که نشان دهیم همواره "به قدر کافی" از این ایدآلها وجود دارد.

اما بحث را باید با ارائهٔ تعریفهای بنیادی آغاز کنیم. بهتر است ابتدا ایدآلهای هیأت را مورد بحث قرار دهیم. فرض کنید K هیأت باشد. چون K حلقه‌ای نا صفر است داریم $K \neq 0$ و لذا K یقیناً دارای دو ایدآل (متمایز)، یعنی خودش و ایدآل صفر، است. ولی اینها تنها ایدآلهای K هستند زیرا اگر I ایدآل K باشد و $I \neq 0$ آن‌گاه I عضو غیر صفری چون r دارد و چون r یک عضو وارونپذیر K است، نتیجه می‌گیریم که

$$K = Kr \subseteq I \subseteq K$$

و لذا $I = K$. پس مشاهده می‌کنیم که هر هیأت دقیقاً دو ایدآل دارد. در واقع، چنانکه لم زیر نشان می‌دهد، این ویژگی برای مشخص کردن هیأتها از حلقه‌های تعویضپذیر به‌کار می‌آید.

۱.۳ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد[1]. در این صورت R هیأت است اگر و

۱. یادآوری می‌کنیم که همهٔ حلقه‌ها در این کتاب همانی ضربی دارند.ـم.

تنها اگر R دقیقاً دو ایدآل داشته باشد.

اثبات. لزوم شرط در پاراگراف قبل از لم اثبات شد.

اثبات کفایت شرط: چون حلقهٔ تعویضپذیری که صفر باشد تنها دارای یک ایدآل (خود حلقه) است لذا R صفر نیست. فرض کنید $r \in R$ و $r \neq 0$. باید نشان دهیم که r یک عضو وارونپذیر R است. ایدآل اصلی Rr از R صفر نیست زیرا $r \in Rr$. چون R و 0 دو ایدآل Rاند و می‌دانیم که این دو متفاوت‌اند پس باید $Rr = R$ و لذا عضوی چون u وجود دارد که $u \in R$ و $u\,r = 1$ لذا r یک عضو وارونپذیر R است و در نتیجه R هیأت است. ■

لذا اگر K هیأت باشد آن‌گاه ایدآل صفر K نسبت به رابطهٔ مشمولیت در مجموعهٔ ایدآلهای سرهٔ K ماکسیمال است. (یادآوری می‌کنیم که طبق تعریف مذکور در ۱۴.۲ ایدآل I از حلقهٔ تعویضپذیر R سره است اگر $I \neq R$.)

۲.۳ تعریف. ایدآل M از حلقهٔ تعویضپذیر R را ماکسیمال می‌گوییم اگر M نسبت به رابطهٔ مشمولیت عضو ماکسیمال مجموعهٔ ایدآلهای سرهٔ R باشد.

به عبارت دیگر ایدآل M از R ماکسیمال است اگر و تنها اگر

یک) $M \subset R$، و

دو) ایدآلی چون I از R وجود نداشته باشد چنانکه $M \subset I \subset R$.

۳.۳ لم. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. آن‌گاه I ماکسیمال است اگر و تنها اگر R/I هیأت باشد.

اثبات. این مطلب بلاواسطه از ۳۷.۲ و ۳۹.۲ نتیجه می‌شود که در آنها ثابت کردیم نگاشتهای دوسویی

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{I}_{R/I} & \longrightarrow & \mathcal{C}_R & \text{و} & \mathcal{C}_R & \longrightarrow & \mathcal{I}_{R/I} \\ J & \longmapsto & J^c & & I' & \longmapsto & I'/I = I'^e \end{array}$$

وجود دارند که رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کنند. در اینجا نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ و ۴۵.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی پوشای $R \to R/I$ به‌کار برده‌ایم: لذا $\mathcal{C}_R$ نشاندهندهٔ

$$\{I' \in \mathcal{I}_R : I' \supseteq I\}$$

یعنی مجموعهٔ ایدآلهای R که I را شامل می‌شوند است.

بنابراین از این نتیجه‌ها نتیجه می‌گیریم که I ایدآل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر 0 ایدآل ماکسیمال R/I باشد و بنابر ۱.۳ این مطلب درست است اگر و تنها اگر R/I هیأت باشد. ■

۴.۳* تمرین. فرض کنید I و M ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند که $M \supseteq I$. نشان دهید که M ایدآل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر M/I ایدآل ماکسیمال R/I باشد.

۵.۳ مثال. ایدآلهای ماکسیمال حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ دقیقاً ایدآلهای به‌صورت $\mathbb{Z}p$اند که $p \in \mathbb{Z}$ عدد اول است.

اثبات. در ۲۸.۱ دیدیم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n > ۱$ حلقهٔ رده‌های مانده‌ای $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ هیأت است اگر و تنها اگر n عدد اول باشد، یعنی (با توجه به ۳.۳) ایدآل $\mathbb{Z}n$ از $\mathbb{Z}$ ماکسیمال است اگر و تنها اگر n عدد اول باشد. اکنون باتوجه به نکات زیر نتیجهٔ مورد نظر حاصل است: بنابر ۳۴.۲ هر ایدآل $\mathbb{Z}$ اصلی است؛ به‌ازای هر $m \in \mathbb{Z}$، $(-m)\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$؛ ایدآلهای $۱\mathbb{Z}$ و $۰\mathbb{Z}$ ماکسیمال نیستند (زیرا $۱\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ و $۰\mathbb{Z} \subset ۲\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$). ■

۶.۳* تمرین. تمام ایدآلهای ماکسیمال حلقهٔ $K[X]$ را که در آن K هیأت و X مجهول است بیابید.

از نتیجه‌های ۵.۳ و ۶.۳ و از اینکه ایدآل صفر هیأت K ایدآل ماکسیمال K است، مثالهایی از ایدآل ماکسیمال به‌دست می‌آید. ولی تا اینجا دلیلی نداریم که هر حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر دلخواه حتماً ایدآل ماکسیمال داشته باشد. (روشن است که حلقهٔ تعویضپذیر صفر ایدآل ماکسیمال ندارد زیرا اصلاً ایدآل سره ندارد.) برای حل و فصل این مسأله در یک حلقهٔ تعویضپذیر دلخواه از لم زورن استفاده خواهیم کرد. بنابراین لازم است اصطلاحات و مفهومهای لازم برای ارائهٔ لم زورن را به اختصار یادآوری کنیم.

۷.۳ یادآوری. فرض کنید V مجموعه‌ای ناتهی باشد. رابطهٔ $\preceq$ را ترتیب جزئی روی V می‌نامیم اگر بازتابی (یعنی به‌ازای هر $u \in V$، $u \preceq u$) ترایا[1] (یعنی به‌ازای $u, v, w \in V$، از $u \preceq v$ و $v \preceq w$ نتیجه شود $u \preceq w$) و پاد متقارن (یعنی به‌ازای هر $u, v \in V$، از $u \preceq v$ و $v \preceq u$ نتیجه شود $u = v$) باشد. اگر $\preceq$ یک ترتیب جزئی روی V باشد می‌گوییم که $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای جزئاًمرتب است.

مجموعهٔ جزئاًمرتب $(V, \preceq)$ را کلاًمرتب می‌گوییم اگر به‌ازای هر $u, v \in V$ دست کم یکی از روابط $u \preceq v$ و $v \preceq u$ برقرار باشد. روشن است که هر زیر مجموعهٔ ناتهی W از مجموعهٔ جزئاًمرتب $(V, \preceq)$ خود با رابطهٔ $\preceq$ جزئاًمرتب است و ممکن است W کلاًمرتب باشد یا نباشد.

فرض کنید W زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعهٔ جزئاًمرتب $(V, \preceq)$ باشد. عضو $u \in V$ را کران بالای W می‌گوییم اگر به‌ازای هر $w \in W$، $w \preceq u$.

اگر $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای جزئاًمرتب باشد آن‌گاه به‌ازای هر $u, v \in V$ می‌نویسیم $u \prec v$ اگر $u \preceq v$ و $u \neq v$. عضو $m \in V$ را عضو ماکسیمال V می‌گوییم اگر عضوی چون $w \in V$

---

۱. اصطلاحات بازتابی و ترایا را انعکاسی و متعدی نیز می‌گویند. ـم.

وجود نداشته باشد که $m \prec w$. لذا $m \in V$ یک عضو ماکسیمال V است اگر و تنها اگر از $m \preceq v$ و $v \in V$ نتیجه شود $m = v$.

حال تمام اصطلاحات لازم برای بیان لم زورن را در دست داریم.

۸.۳ لم زورن. فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعهٔ (ناتهی) جزئاًمرتبی با این ویژگی باشد که هر زیرمجموعهٔ ناتهی کلاًمرتب V کران بالایی در V داشته باشد. در این‌صورت V دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد. ■

در این کتاب لم زورن را به‌عنوان اصل موضوع در نظر می‌گیریم. خواننده‌ای که مایل است مطالب بیشتری در این مورد بیاموزد، مثلاً اینکه این لم با اصل موضوع انتخاب معادل است، می‌تواند به کتاب هالموس [۳] رجوع کند.

در این کتاب اولین استفادهٔ ما از این لم این است که وجود دست‌کم یک ایدآل ماکسیمال در هر حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر و دلخواه را ثابت می‌کنیم. ولی بعداً در این کتاب در موارد دیگری نیز از لم زورن استفاده می‌کنیم.

۹.۳ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر باشد. در این صورت R دست کم یک ایدآل ماکسیمال دارد.

اثبات. چون R صفر نیست پس ایدآل صفر سره است و لذا مجموعهٔ Ω متشکل از تمام ایدآلهای سرهٔ R تهی نیست. روشن است که رابطهٔ مشمولیت $\subseteq$ یک ترتیب جزئی روی Ω است و ایدآلهای ماکسیمال R همان عضوهای ماکسیمال مجموعهٔ جزئاًمرتب $(\Omega, \subseteq)$ هستند. بنابراین لم زورن را در مورد این مجموعهٔ جزئاًمرتب به‌کار می‌بریم.

فرض کنید Δ زیرمجموعه‌ای ناتهی و کلاًمرتب از Ω باشد. قرار دهید

$$J = \bigcup_{I \in \Delta} I$$

روشن است که J زیرمجموعه‌ای ناتهی از R است و به‌ازای هر $a \in J$ و $r \in R$، $ra \in J$. فرض کنید $a, b \in J$. لذا ایدآلهایی چون $I_1, I_2 \in \Delta$ وجود دارند که $a \in I_1$ و $b \in I_2$. چون Δ نسبت به رابطهٔ مشمولیت کلاًمرتب است، پس $I_1 \subseteq I_2$ یا $I_2 \subseteq I_1$ و لذا $a + b$ متعلق به ایدآل بزرگتر است. در نتیجه J ایدآل R است. به علاوه J سره است زیرا به‌ازای هر $I \in \Delta$ داریم $1 \notin I$.

لذا نشان داده‌ایم که $J \in \Omega$. روشن است که J یک کران بالای Δ در Ω است. چون شرطهای لم زورن برقرارند نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ جزئاًمرتب (Ω و $\subseteq$) عضو ماکسیمال دارد و لذا R ایدآل ماکسیمال دارد. ■

قضیهٔ فوق صورت دیگری دارد که بسیار مهم است.

۱۰.۳ نتیجه. فرض کنید I یک ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت ایدآل ماکسیمالی چون M از R وجود دارد که $I \subseteq M$.

اثبات. بنابر ۱۴.۲ حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R/I ناصفر است و لذا بنابر ۹.۳ ایدآل ماکسیمالی دارد که بنابر ۳۷.۲ باید به‌ازای ایدآل منحصر به‌فردی چون M از R که $I \subseteq M$، به‌صورت M/I باشد. حال از ۳۹.۲ نتیجه می‌شود که M ایدآل ماکسیمال R است.

به‌طریق دیگری نیز می‌توان نتیجهٔ ۱۰.۳ را اثبات کرد. برای این منظور می‌توان مانند اثبات قضیهٔ ۹.۳ لم زورن را در مورد مجموعهٔ

$$\Omega' := \{K \in \mathcal{I}_R : R \supset K \supseteq I\}$$

به کاربرد (که در آن مطابق معمول $\mathcal{I}_R$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ ایدآلهای R است). توصیه می‌کنیم که خواننده نتیجهٔ ۱۰.۳ را به این طریق ثابت کند. ■

۱۱.۳ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $a \in R$. در این‌صورت a عضو وارونپذیر R است اگر و تنها اگر به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R داشته باشیم $a \notin M$، یعنی اگر و تنها اگر a بیرون هر ایدآل ماکسیمال R واقع باشد.

اثبات. بنابر ۱۶.۲، a عضو وارونپذیر R است اگر و تنها اگر $aR = R$.

اثبات لزوم شرط ($\Longleftarrow$) اگر به‌ازای ایدآل ماکسیمالی چون M از R داشته باشیم $a \in M$ آن‌گاه داریم $a\,R \subseteq M \subset R$ و لذا a نمی‌تواند عضو وارونپذیر R باشد.

اثبات کفایت شرط ($\Longrightarrow$) اگر a عضو وارونپذیر R نباشد آن‌گاه aR ایدآل سرهٔ R می‌شود و از ۱۰.۳ نتیجه می‌گیریم که ایدآل ماکسیمالی چون M از R وجود دارد که $aR \subseteq M$. ولی این نتیجه متناقض آن است که a بیرون هر ایدآل ماکسیمال R است. ■

هر هیأت مثالی از حلقه‌ای تعویضپذیر است که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال دارد زیرا ایدآل صفر تنها ایدآل سره‌اش است. نام خاصی برای حلقه‌های تعویضپذیری که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال دارند وجود دارد.

۱۲.۳ تعریف. هر حلقهٔ تعویضپذیر R را که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال چون M دارد شبه موضعی می‌گوییم. در این حالت هیأت R/M را هیأت مانده‌ای R می‌نامیم.

۱۳.۳ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در این‌صورت R شبه موضعی است اگر و تنها اگر مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R ایدآل R باشد.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید R شبه موضعی باشد و ایدآل ماکسیمال آن M باشد. بنابر ۱۱.۳، M دقیقاً برابر با مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R است.
($\Longrightarrow$) فرض کنید مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R ایدآلی چون I از R باشد. چون $0 \in I$ پس 0 عضو وارون‌ناپذیر R است و لذا $1 \neq 0$. پس R ناصفر است و لذا بنابر ۹.۳ دست‌کم یک ایدآل ماکسیمال دارد: فرض کنید M چنین ایدآلی باشد. بنابر ۱۱.۳، M متشکل از عضوهای وارون‌ناپذیر R است و لذا $M \subseteq I \subset R$. (باید توجه کنیم که $1 \notin I$ زیرا ۱ عضو وارونپذیر R است.) چون M ایدآل ماکسیمال R است پس $M = I$. لذا نشان داده‌ایم که R دست‌کم یک ایدآل ماکسیمال چون I دارد و هر ایدآل ماکسیمال R باید برابر با I باشد. در نتیجه R شبه موضعی است. ■

۱۴.۳ تذکر. فرض کنید حلقهٔ تعویضپذیر R شبه موضعی باشد. در این صورت از ۱۱.۳ نتیجه می‌شود که ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد R دقیقاً همان مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R است.

۱۵.۳* تمرین. فرض کنید K هیأت باشد و $a_1, \ldots, a_n \in K$. نشان دهید که ایدآل

$$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

از حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_n]$ (متشکل از چندجمله‌ایهای با ضریبهای متعلق به K ازمجهولهای $X_1، \ldots، X_n$) ماکسیمال است.

از مفهوم ایدآل ماکسیمالِ حلقهٔ تعویضپذیر بلاواسطه به مفهوم بسیار مهم رادیکال جیکبسن[1] حلقه می‌رسیم.

۱۶.۳ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. رادیکال جیکبسن R را اشتراک همهٔ ایدآلهای ماکسیمال R تعریف می‌کنند، و گاهی آن را با $\mathrm{Jac}(R)$ نشان می‌دهند.
لذا $\mathrm{Jac}(R)$ ایدآل R است: در حالتی هم که R حلقهٔ صفر باشد طبق قراردادمان دربارهٔ اشتراک خانواده‌ای تهی از ایدآلهای یک حلقهٔ تعویضپذیر داریم $\mathrm{Jac}(R) = R$.
توجه کنید که اگر R شبه موضعی باشد، $\mathrm{Jac}(R)$ ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد R است.

لم زیر رادیکال جیکبسن حلقه‌های تعویضپذیر را مشخص می‌سازد.

۱۷.۳ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $r \in R$. در این صورت $r \in \mathrm{Jac}(R)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارونپذیر R باشد.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $r \in \mathrm{Jac}(R)$. فرض کنید که به‌ازای عضوی چون $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارونپذیر R نباشد. در این صورت بنابر ۱۱.۳ ایدآل ماکسیمال M از R وجود

1. Jacobson

دارد که $1 - ra \in M$. ولی بنابر تعریف $\mathrm{Jac}(R)$، $r \in M$ و لذا

$$1 = (1 - ra) + ra \in M$$

که با ماکسیمال بودن M تناقض دارد.

($\Longleftarrow$) فرض کنید به‌ازای هر $a \in R$، $1 - ra$ عضو وارونپذیر R باشد. فرض کنید M ایدآل ماکسیمال R باشد: نشان می‌دهیم که $r \in M$. اگر چنین نباشد آن‌گاه باید داشته باشیم

$$M \subset M + Rr \subseteq R.$$

در نتیجه بنابر ماکسیمال بودن M نتیجه می‌گیریم که $M + Rr = R$ و لذا عضوهای $b \in M$ و $a \in R$ وجود دارند که $b + ar = 1$. در نتیجه $1 - ra$ متعلق به M است و لذا نمی‌تواند عضو وارونپذیر R باشد. این تناقض نشان می‌دهد همان‌طور که ادعا کرده بودیم $r \in M$. چون این مطلب به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال R درست است، داریم $r \in \mathrm{Jac}(R)$. ■

۱۸.۳ تمرین. حلقهٔ تعویضپذیر $C[0, 1]$ متشکل از همهٔ تابعهای پیوستهٔ حقیقی‌مقدار روی بازهٔبستهٔ $[0, 1]$ را در نظر بگیرید: ۲.۱(چهار) را ببینید. فرض کنید $z \in [0, 1]$. نشان دهید که

$$M_z := \{f \in C[0, 1] : f(z) = 0\}$$

یک ایدآل ماکسیمال $C[0, 1]$ است. همچنین نشان دهید که هر ایدآل ماکسیمال $C[0, 1]$ به همین صورت است. (راهنمایی برای قسمت دوم: فرض کنید M ایدآل ماکسیمال $C[0, 1]$ باشد. با برهان خلف نشان دهید که مجموعهٔ

$$\{a \in [0, 1] : f(a) = 0 \text{، به‌ازای هر } f \in M\}$$

ناتهی است: یادآوری می‌کنیم که $[0, 1]$ زیرمجموعهٔ فشردهٔ $\mathbb{R}$ است.)

۱۹.۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و شبه موضعی با ایدآل ماکسیمال M باشد. نشان دهید که حلقهٔ $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ متشکل از سریهای توانی صوری از مجهولهای $X_1، \ldots، X_n$ با ضریبهای متعلق به R نیز حلقه‌ای شبه موضعی است و ایدآل ماکسیمالش توسط مجموعهٔ $M \cup \{X_1, \ldots, X_n\}$ تولید می‌شود.

حال مفهوم ایدآل اول را در حلقه‌های تعویضپذیر بیان می‌کنیم.

۲۰.۳ تعریف. فرض کنید P ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم P ایدآل اول R است اگر

یک) $P \subset R$، یعنی P ایدآل سرهٔ R باشد، و

دو) هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.

۲۱.۳ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.
یک) توجه کنید که خود R ایدآل اول R در نظر گرفته نمی‌شود.
دو) اگر R دامنهٔ صحیح باشد، ایدآل صفرش ایدآل اول R است.

۲۲.۳ تمرین. یک) تمام ایدآلهای اول حلقهٔ عددهای صحیح $\mathbb{Z}$ راتعیین کنید.
دو) تمام ایدآلهای اول حلقهٔ $K[X]$ را که در آن K هیأت و X مجهول است تعیین کنید.

از تذکر ۲۱.۳(دو) راهی برای مشخص ساختن ایدآلهای اول برحسب حلقهٔ رده‌های مانده‌ای به‌دست می‌آید.

۲۳.۳ لم. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت I اول است اگر و تنها اگر حلقهٔ R/I دامنهٔ صحیح باشد.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید I اول باشد. چون I سره است، R/I صفر نیست. فرض کنید a عضوی از R باشد به‌طوری که $a+I$ در R/I مقسوم‌علیه صفر باشد. لذا $b \in R$ وجود دارد که $b+I \neq 0_{R/I}$ ولی

$$(a+I)(b+I) = 0_{R/I} = 0 + I.$$

در این‌صورت $ab \in I$ ولی $b \notin I$ و لذا چون I اول است باید داشته باشیم $a \in I$. لذا $a + I = 0_{R/I}$ و در نتیجه R/I دامنهٔ صحیح است.
$(\Longrightarrow)$ فرض کنید R/I دامنهٔ صحیح باشد. در این‌صورت $I \neq R$. فرض کنید $a, b \in R$ و $ab \in I$. در این‌صورت در R/I داریم

$$(a+I)(b+I) = ab + I = 0 + I = 0_{R/I}.$$

چون R/I دامنهٔ صحیح است، پس $a+I = 0_{R/I}$ یا $b+I = 0_{R/I}$ و لذا $a \in I$ یا $b \in I$.
در نتیجه I اول است. ■

۲۴.۳ تمرین. نشان دهید که حلقهٔ رده‌های مانده‌ای حلقهٔ چندجمله‌ایهای $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ روی هیأت عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ از مجهولهای X_1، X_2، X_3 با تعریف

$$S = \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]/(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$$

دامنهٔ صحیح است.

۲۵.۳ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) چون هر هیأت دامنهٔ صحیح است، بلاواسطه از ۳.۳ و ۲۳.۳ نتیجه می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال R اول است.

دو) ولی عکس (یک) درست نیست، زیرا مثلاً ایدآل صفر از $\mathbb{Z}$ اول است ولی $\circ \subset ۲\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

۲۶.۳ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. طیف اول R یا به اختصار طیف R را مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای اول R تعریف می‌کنیم. طیف R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نمایش می‌دهیم.

۲۷.۳ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) بلاواسطه از ۹.۳ و تذکر ۲۵.۳ (یک) نتیجه می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال R اول است و R ناصفر است اگر و تنها اگر $\mathrm{Spec}(R) \neq \varnothing$.

دو) فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر باشد و $Q \in \mathrm{Spec}(S)$. در این‌صورت هستهٔ همریختی مرکب حلقه‌ای

$$R \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/Q$$

(که در آن همریختی دوم همریختی پوشای طبیعی است) برابر است با

$$f^{-۱}(Q) = \{r \in R : f(r) \in Q\}.$$

در نتیجه بنابر قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲، $R/f^{-۱}(Q)$ با زیرحلقه‌ای از دامنهٔ صحیح S/Q یکریخت است و لذا خودش باید دامنهٔ صحیح باشد. در نتیجه بنابر ۲۳.۳، $f^{-۱}(Q) \in \mathrm{Spec}(R)$. لذا از همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ نگاشت

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(R) \\ Q & \longmapsto & f^{-۱}(Q) \end{array}$$

به‌دست می‌آید.

سه) ولی اگر در حالت (دو)ی فوق N ایدآل ماکسیمال S باشد آن‌گاه گرچه $f^{-۱}(N) \in \mathrm{Spec}(R)$، لزومی ندارد که $f^{-۱}(N)$ ایدآل ماکسیمال R باشد. برای مشاهدهٔ این مطلب همریختی یک به یک طبیعی $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ و $N = \circ$، ایدآل صفر $\mathbb{Q}$، را در نظر بگیرید. در این‌صورت $f^{-۱}(N) = \circ$، که ایدآل ماکسیمال $\mathbb{Z}$ نیست.

در دست داشتن توصیفی از ایدآلهای اول حلقهٔ رده‌های مانده‌ای بسیار با اهمیت است. این مطلب را در زیر مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲۸.۳ لم. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید J ایدآلی باشد که $J \supseteq I$. در این‌صورت ایدآل J/I از حلقهٔ رده‌های مانده‌های R/I اول است اگر و تنها اگر J ایدآل اول R باشد.

به‌عبارت دیگر $J/I \in \mathrm{Spec}(R/I)$ اگر و تنها اگر $J \in \mathrm{Spec}(R)$.

اثبات. بنابر ۴۰.۲

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J$$

بنابراین یکی از این دو حلقه دامنهٔ صحیح است اگر و تنها اگر دیگری نیز باشد و لذا نتیجه از ۲۳.۳ حاصل می‌شود. ■

۲۹.۳ تمرین. ایدآلهای اول حلقهٔ $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$، متشکل از رده‌های مانده‌ای عددهای صحیح به پیمانهٔ ۶۰، را بیابید.

۳۰.۳* تمرین. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویض‌پذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای پوشا باشد. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ و ۴۵.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم و لذا بنابر ۴۶.۲ داریم $\mathcal{C}_R = \{I \in \mathcal{I}_R \ : \ I \supseteq \mathrm{Ker}\, f\}$ و $\mathcal{E}_S = \mathcal{I}_S$.
فرض کنید $I \in \mathcal{C}_R$. نشان دهید I ایدآل اول R است اگر و تنها اگر I^e ایدآل اول S باشد.
همین حکم را دربارهٔ ایدآل ماکسیمال I ثابت کنید.

مفهوم ایدآل اول وسیلهٔ خوبی برای اثبات یکی از قضایای مقدماتی مهم است. در ۳۶.۲ گفتیم که دامنهٔ صحیح R را دامنهٔ اصلی‌ایدآل (به اختصار د.ا.ا) می‌نامیم اگر هر ایدآل R اصلی باشد. همچنین در ۳۴.۲ دیدیم که هر دامنهٔ اقلیدسی د.ا.ا است. یکی از نتایج اساسی دربارهٔ دامنه‌های اقلیدسی این است که هر دامنهٔ اقلیدسی دامنهٔتجزیهٔ یکتا (به اختصار د.ت.ی) است (۴۱.۱ را ببینید). یک قضیهٔ مهم در این زمینه این است که هر د.ا.ا د.ت.ی است، اکنون هدف ما اثبات این مطلب است.

۳۱.۳ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. یادآوری می‌کنیم (تعریف ۱.۴.۲ از مرجع [۱۵] را ببینید) که به‌ازای $a_1, \ldots, a_n \in R$، که در آن $n \in \mathbb{N}$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (به‌اختصار ب.م.م) $a_1، \ldots، a_n$ عضوی چون $d \in R$ است که

یک) به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $d|a_i$ و

دو) اگر c عضوی از R باشد که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $c|a_i$ آن‌گاه $c|d$.

نشان دهید که هر مجموعهٔ متناهی ناتهی از عضوهای یک د.ا.ا ب.م.م دارد.

۳۲.۳ لم. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد و $a, b \in R\backslash\{0\}$. در این صورت $aR = bR$ اگر و تنها اگر a و b وابسته باشند، یعنی $a = u\, b$ که در آن u عضو وارونپذیر R است (تعریف ۲.۲.۲ از مرجع [۱۵] را ببینید.)

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $aR = bR$. در این‌صورت $a = ub$ و $b = va$ که در آن

$u, v \in R$. نتیجه می‌گیریم که $a = u\,v\,a$ و لذا چون R دامنهٔ صحیح است و $a \neq ۰$، داریم $۱ = u\,v$.

($\Longleftarrow$) فرض کنید $a = ub$ که در آن u عضو وارونپذیر R باشد. در این‌صورت $a \in bR$ و لذا $aR \subseteq bR$. به‌همین نحو چون $b = u^{-۱}a$ داریم $bR \subseteq aR$. ∎

شاید به‌خاطر بیاورید که مفهوم عضو اول ارتباط زیادی با نظریهٔ د.ت.ی‌ها دارد. تعریف این مفهوم را یادآوری می‌کنیم، و حال که ایدآلهای اول را مورد بحث قرار داده‌ایم خوب است رابطهٔ بین عضوهای اول و ایدآلهای اول را ارائه کنیم.

۳۳.۳ تعریف. (تعریف ۱.۵.۲ از مرجع [۱۵] را ببینید.) فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد و $p \in R$. می‌گوییم که p عضو اول R است اگر p عضو ناصفر و وارون‌ناپذیری از R باشد که هرگاه $a, b \in R$ و $p|a\,b$ آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$.

برخی از احکام اساسی در مورد عضوهای اولِ دامنه‌های صحیح در قضیهٔ ۲.۵.۲ از مرجع [۱۵] ثابت شده‌اند: در این قضیه نشان داده شده است که هر عضو اولِ دامنهٔ صحیح تحویلناپذیر است و در هر د.ت.ی (و من‌جمله در هر دامنهٔ اقلیدسی) هر عضو تحویلناپذیر اول است. از تعریف روشن است که اگر R دامنهٔ صحیح باشد و $p \in R$ آن‌گاه pR ایدآل اول ناصفر است اگر و تنها اگر p عضو اول R باشد. اگر R د.ا.ا باشد، مطالب بیشتری در این مورد می‌توان بیان کرد.

۳۴.۳ لم. فرض کنید R د.ا.ا باشد و $p \in R \setminus \{۰\}$. در این‌صورت احکام زیر هم ارزند:
یک) pR ایدآل ماکسیمال R است.
دو) pR ایدآل اول و ناصفر R است.
سه) p عضو اول R است.
چهار) p عضو تحویلناپذیر R است.

اثبات. (دو)$\Longleftarrow$(یک) این گزاره واضح است زیرا $p \neq ۰$ و هر ایدآل ماکسیمال R اول است.

(سه)$\Longleftarrow$(دو) همان‌طور که در بالا تذکر داده شد؛ این حکم به روشنی از تعریف حاصل می‌شود.

(چهار)$\Longleftarrow$(سه) اثبات این حکم ساده است و همان‌طور که در پاراگراف قبل از لم اشاره شد در قضیهٔ ۲.۵.۲ از [۱۵] ثابت شده است.

(یک)$\Longleftarrow$(چهار) چون p عضو وارونپذیر R نیست از ۱۶.۲ نتیجه می‌شود که $pR \subset R$. فرض کنید I ایدآلی از R باشد که $pR \subseteq I \subset R$. چون R د.ا.ا است عضوی چون $a \in R$ وجود دارد که $I = aR$ و a عضو وارون‌ناپذیر R است زیرا I سره است. حال از $p \in I$ نتیجه می‌گیریم که $p = ab$ که $b \in R$. چون p تحویلناپذیر و a وارون‌ناپذیر است نتیجه می‌گیریم که b

عضو وارونپذیر R است و لذا بنابر ۳۲.۳، $pR = aR = I$. لذا pR ماکسیمال است. ■

یکی از نتایج ۳۴.۳ این است که در هر د.ا.ا که هیأت نباشد هر ایدآل ماکسیمال است اگر و تنها اگر ایدآلِ اولِ ناصفر باشد. نباید این موضوع را نادیده بگیرید که هر هیأت خود د.ا.ا است ولی حکم فوق در هیأتها درست نیست!

برای رسیدن به این نتیجه که در دامنهٔ اصلی‌ایدآل R هر عضو ناصفر وارون‌ناپذیر R را می‌توان به‌صورت حاصلضرب تعدادی متناهی عضو تحویلناپذیر R نوشت، خوب است چند مفهوم را در مورد مجموعه‌های جزئاًمرتب معرفی کنیم.

۳۵.۳ تعریف. فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاًمرتب باشد.

یک) می‌گوییم که $(V, \preceq)$ در شرط زنجیرهٔ صعودی صدق می‌کند اگر به‌ازای هر خانواده‌ای از عضوهای V چون $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ با ویژگیِ

$$v_1 \preceq v_2 \preceq \cdots \preceq v_i \preceq v_{i+1} \preceq \cdots$$

عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+i}$،

دو) می‌گوییم $(V, \preceq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند اگر هر زیرمجموعهٔ ناتهی از V شامل عضوی ماکسیمال (نسبت به $\preceq$) باشد.

این حکم که شرط زنجیرهٔ صعودی با شرط ماکسیمال معادل است از حکمهای اساسیِ جبر تعویضپذیر است.

۳۶.۳ لم. فرض کنید $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاًمرتب باشد. در این صورت $(V, \preceq)$ در شرط زنجیرهٔ صعودی صدق می‌کند اگر و تنها اگر در شرط ماکسیمال صدق کند.

اثبات. یادآوری می‌کنیم که طبق ۷.۳، به‌ازای $v, w \in V$، "$v \prec w$" به این معنی است که $w \preceq v$ و $v \neq w$.

($\Longleftarrow$) فرض کنید T زیرمجموعهٔ ناتهی V باشد و عضو ماکسیمال نداشته باشد. عضوی چون $t_1 \in T$ وجود دارد؛ و چون T عضو ماکسیمال ندارد عضوی چون $t_2 \in T$ وجود دارد که $t_1 \prec t_2$. همین موضوع در مورد t_2 و غیره صادق است. t_1 و t_2 و غیره را به این ترتیب درنظر می‌گیریم؛ هرگاه به $t_n \in T$ برسیم آن‌گاه $t_{n+1} \in T$ وجود دارد به‌طوری که $t_n \prec t_{n+1}$. به این نحو یک زنجیرهٔ اکیداً صعودی نامتناهی چون

$$t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_n \prec t_{n+1} \prec \cdots$$

ازعضوهای $T \subseteq V$ به‌دست می‌آوریم.

($\Longrightarrow$) فرض کنید که $(V, \preceq)$ در شرط ماکسیمال صدق کند. فرض کنید

$$v_1 \preceq \cdots \preceq v_n \preceq v_{n+1} \preceq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از عضوهای V باشد. طبق شرط ماکسیمال، مجموعهٔ $T =: \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ متشکل از جمله‌های زنجیرهٔ فوق عضو ماکسیمال دارد، یعنی $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به‌ازای آن v_k یک عضو ماکسیمال T است. در این‌صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+i}$. ■

۳۷.۳ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. مجموعهٔ ایدآلهای R را با $\mathcal{I}_R$ نمایش می‌دهیم. (این نماد را مدام در این کتاب به‌کار می‌بریم.) می‌گوییم که R نوتری است اگر مجموعهٔ جزئاًمرتب $(\mathcal{I}_R, \subseteq)$ در شرطهای ۳۵.۳ (که بنابر ۳۶.۳ هم‌ارزند) صدق کند.

به‌عبارت دیگر R نوتری است اگر و تنها اگر هر زنجیرهٔ صعودی از ایدآلهای R چون

$$I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

"سرانجام ایستا" باشد و این فقط و فقط وقتی ممکن است که هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآلهای R نسبت به رابطهٔ‌مشمولیت، عضو ماکسیمال داشته باشد.

بعداً در این کتاب مطالب بسیاری دربارهٔ حلقه‌های تعویضپذیر نوتری خواهیم گفت. در واقع یافتن ویژگیهای حلقه‌های تعویضپذیر نوتری یکی از هدفهای اصلی جبر تعویضپذیر است. اما در حال حاضر تنها می‌خواهیم به این نکته اشاره کنیم که هر د.ا.ا نوتری است.

۳۸.۳ قضیه. فرض کنید R دامنهٔ اصلی‌ایدآل باشد. در این‌صورت R حلقهٔ نوتری است.

اثبات. فرض کنید

$$I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای R باشد. به‌آسانی دیده می‌شود که

$$J := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

ایدآل R است: J به روشنی ناتهی است وتحت ضرب در عضوهای دلخواه R بسته است و اگر $a \in I_n$ و $b \in I_m$ و مثلاً $n \leqslant m$ آنگاه $a + b \in I_m$. لذا چون R د.ا.ا است، $a \in R$ وجود دارد که $J = aR$. بنابه تعریف J، $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a \in I_k$. ولی در این‌صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم

$$J = aR \subseteq I_k \subseteq I_{k+i} \subseteq J$$

لذا زنجیرهٔ صعودی فوق از ایدآلها باید ایستا باشد. ■

حال می‌توانیم ثابت کنیم که هر د.ا.ا، د.ت.ی است. خواننده از ۳۴.۳ می‌داند که هر عضو تحویلناپذیر د.ا.ا عضو اول است، اگر وی مثلاً با اثبات این مطلب که دامنهٔ اقلیدسی د.ت.ی است از مرجع [۱۵] (قضیهٔ ۱.۶.۲) آشنا باشد، احتمالاً خود می‌تواند دریابد که برهانی را که در آنجا برای اثبات یکتایی به‌کار رفته می‌توان در مورد د.ا.ا نیز به‌کار برد. برای اثبات "وجود" از قضیه‌ای استفاده می‌کنیم که هم‌اکنون در ۳۸.۳ اثبات شد، یعنی اینکه هر دامنهٔ اصلی‌ایدآل R نوتری است و لذا مجموعهٔ جزئاًمرتب $(\mathcal{I}_R, \subseteq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند.

۳۹.۳ قضیه. هر دامنهٔ اصلی‌ایدآل دامنهٔ تجزیهٔ یکتاست.

اثبات. فرض کنید R د.ا.ا باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که هر عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر R را می‌توان به حاصلضرب تعدادی متناهی از عضوهای تحویلناپذیر R تجزیه کرد. فرض کنید چنین نباشد. در این‌صورت مجموعهٔ Ω متشکل از همهٔ ایدآلهای به‌صورت aR از R، که در آن a عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر R است که تجزیه‌ای از نوع فوق ندارد، ناتهی است. در نتیجه بنابر ۳۸.۳ مجموعهٔ Ω نسبت به رابطهٔ مشمولیت عضوی ماکسیمال مثلاً bR دارد که b عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر R است.

اما b ممکن نیست تحویلناپذیر باشد زیرا اگر باشد آن‌گاه $b = b$ تجزیه‌ای از نوع مورد نظر (تنها با یک عامل) است. لذا $b = cd$ که در آن $c, d \in R$ و هیچ کدام وارونپذیر نیستند. به‌آسانی نتیجه می‌شود که

$$bR \subset dR \subset R \quad \text{و} \quad bR \subset cR \subset R$$

(۳۲.۳ را ببینید.) در نتیجه بنابر ماکسیمال بودن bR در Ω، داریم $cR \notin \Omega$ و $dR \notin \Omega$. نه c صفر است نه d؛ هیچ کدام نیز وارونپذیر نیستند. بنابراین هر یک از دو عضو c و d را می‌توان به‌صورت حاصلضرب تعدادی متناهی از عضوهای تحویلناپذیر R نوشت و لذا این مطلب در مورد $b = cd$ نیز صادق است، و با فرض ما تناقض دارد. در نتیجه هر عضو ناصفر و وارون‌ناپذیر R را می‌توان به حاصلضرب تعدادی متناهی از عضوهای تحویلناپذیر R تجزیه کرد.

حال یکتایی این تجزیه را می‌توان با برهانی کاملاً مشابه با برهانی که در قضیهٔ ۱.۶.۲ از مرجع [۱۵] آمده اثبات کرد. این‌کار را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۴۰.۳ تمرین. اثبات قضیهٔ ۳۹.۳ را کامل کنید.

۴۱.۳ تمرین. نشان دهید که زیر حلقهٔ $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ از هیأت $\mathbb{C}$ د.ا.ا نیست. ایدآلی در $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ بیابید که اصلی نباشد.

۴۲.۳* تمرین. نشان دهید ایدآلی که هر عضو تحویلناپذیر در هر دامنهٔ تجزیهٔ یکتا چون R تولید می‌کند ایدآل اول R است.

قبلاً در قسمت ۹.۳ در این فصل یک بار از لم زورن استفاده کردیم، در آنجا نشان دادیم هر حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر دست‌کم یک ایدآل ماکسیمال دارد؛ این مطلب به‌ویژه نشان می‌دهد که هر حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر دست‌کم یک‌ایدآل اول دارد. قصد داریم دو بار دیگر لم زورن را در این فصل به‌کار ببریم که هر دو مورد مربوط به وجود ایدآلهای اول‌اند. اولی را می‌توان حالت کلیتر ۹.۳ دانست، که مربوط به زیرمجموعه‌های ضربی‌بستهٔ حلقه‌های تعویضپذیر است.

۴۳.۳ تعریف. می‌گوییم که زیرمجموعهٔ S از حلقهٔ تعویضپذیر R ضربی‌بسته است اگر

یک) $1 \in S$ و

دو) اگر $s_1, s_2 \in S$ آن‌گاه $s_1 s_2 \in S$.

مفهوم زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R که در ۴۳.۳ معرفی شد در این بحث اهمیتی اساسی دارد. دو مثال مهم این مفهوم عبارت‌اند از $R \backslash P$ که $P \in \operatorname{Spec}(R)$، و $\{f^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ که f عضو (ثابتی) از R است. (یادآوری می‌کنیم که f^0 معرف ۱ است.)

۴۴.۳ قضیه. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R و S زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R باشد و $I \cap S = \varnothing$. در این‌صورت مجموعهٔ زیر از ایدآلهای R

$$\Psi := \{J \in \mathcal{I}_R : J \cap S = \varnothing \quad \text{و} \quad J \supseteq I\}$$

(که با رابطهٔ مشمولیت مجموعه‌ای جزئاًمرتب است) دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد و هر عضو ماکسیمال Ψ ایدآل اول R است.

اثبات. روشن است که $I \in \Psi$ و لذا $\Psi \neq \varnothing$. می‌خواهیم درصورت امکان، لم زورن را برای مجموعهٔ جزئاًمرتب Ψ به‌کار ببریم. لذا فرض کنید Δ زیرمجموعه‌ای کلاًمرتب و ناتهی از Ψ باشد. در این‌صورت مجموعهٔ

$$Q := \bigcup_{J \in \Delta} J$$

ایدآلی از R است که $Q \supseteq I$ و $Q \cap S = \varnothing$. (برای مشاهدهٔ اینکه Q تحت جمع بسته است توجه کنید که به‌ازای $J, J' \in \Delta$ داریم $J \subseteq J'$ یا $J' \subseteq J$.) لذا Q یک کران بالای Δ در Ψ است و لذا از لم زورن نتیجه می‌شود که Ψ دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد.

فرض کنید P یک عضو ماکسیمال دلخواه Ψ باشد. چون $P \cap S = \varnothing$ و $1 \in S$ پس $1 \notin P$ و لذا $P \subset R$. حال فرض کنید $a, a' \in R \backslash P$: باید نشان دهیم که $aa' \notin P$. چون

$a \notin P$، داریم

$$I \subseteq P \subset P + Ra.$$

بنابر ماکسیمال بودن P در Ψ باید داشته باشیم $(P + R\, a) \cap S \neq \varnothing$ و لذا عضوهای $s \in S$، $r \in R$ و $u \in P$ وجود دارند که

$$s = u + ra.$$

به‌همین نحو عضوهای $s' \in S$، $r' \in R$ و $u' \in P$ وجود دارند که

$$s' = u' + r'a'.$$

ولی در این‌صورت داریم

$$ss' = (u + ra)(u' + r'a') = (uu' + rau' + r'a'u) + rr'aa'.$$

چون $ss' \in S$ (زیرا S ضربی‌بسته است) و

$$uu' + rau' + r'a'u \in P$$

باید داشته باشیم $aa' \notin P$ زیرا $P \cap S = \varnothing$. لذا $P \in \mathrm{Spec}(R)$. ■

توجه کنید که با استفاده از ۴۴.۳ می‌توان حکمی را که در ۱۰.۳ اثبات شد، به‌طریق دیگری اثبات کرد، یعنی این حکم را که هر ایدآل سرهٔ I از هر حلقهٔ تعویضپذیر R در ایدآل ماکسیمالی از R قرار دارد: در ۴۴.۳ قرار دهید $S = \{۱\}$، که به‌روشنی زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R است که $I \cap S = \varnothing$، و توجه کنید که هر عضو ماکسیمال مجموعهٔ

$$\{J \in \mathcal{I}_R : J \cap S = \varnothing \quad \text{و} \quad J \supseteq I\}$$

در واقع ایدآل ماکسیمال R است.

۴۵.۳ تذکر. فرض کنید P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. توجه کنید که P ماکسیمال است اگر و تنها اگر P یک عضو ماکسیمال $\mathrm{Spec}(R)$ (نسبت به رابطهٔ مشمولیت) باشد.

کاربرد دیگری از قضیهٔ ۴۴.۳، علاوه بر اثبات دیگری که از یکی از حکمهای قبل ارائه کردیم، ارائه خواهیم کرد؛ به این ترتیب که این قضیه را در مورد رادیکال ایدآل، که در تمرین ۵.۲ معرفی شد، به‌کار خواهیم برد. از آنجا که رادیکال ایدآل در جبر تعویضپذیر اهمیت زیادی دارد، نخست قسمت اصلی تمرین ۵.۲ را حل می‌کنیم.

۴۶.۳ لم و تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد. در این‌صورت

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ وجود داشته باشد که } \mathbb{N} \text{ ای متعلق به } n\}$$

ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود و رادیکال I نام دارد.

نماد $\operatorname{rad}_R I$ نماد دیگری برای $\sqrt{I}$ است، که هرگاه لازم باشد حلقهٔ تحت بررسی را مشخص کنیم به‌کار می‌رود.

اثبات. روشن است که $I \subseteq \sqrt{I}$، و به‌ازای $r \in R$ و $a \in \sqrt{I}$ داریم $ra \in \sqrt{I}$. فرض کنید $a, b \in \sqrt{I}$. لذا $n, m \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $a^n, b^m \in I$. بنابر ۳۴.۱

$$(a+b)^{n+m-1} = \sum_{i=0}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{i} a^{n+m-1-i} b^i.$$

حال به‌ازای هر $i = 0, \ldots, n+m-1$ داریم

$$i \geqslant m \quad \text{یا} \quad n+m-1-i \geqslant n$$

و لذا $a^{n+m-1-i} \in I$ یا $b^i \in I$. در نتیجه $(a+b)^{n+m-1} \in I$ و $a+b \in \sqrt{I}$. لذا $\sqrt{I}$ ایدآل R است. ■

۴۷.۳* تمرین. فرض کنید P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\sqrt{(P^n)} = P$.

حال آماده‌ایم که کاربرد دیگری از ۴۴.۳ ارائه دهیم.

۴۸.۳ نمادگذاری و لم. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. واریتهٔ I که با نماد $\operatorname{Var}(I)$ نشان داده می‌شود، برابر با مجموعهٔ

$$\{P \in \operatorname{Spec}(R) : P \supseteq I\}$$

تعریف می‌شود. در این‌صورت

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \operatorname{Var}(I)} P = \bigcap_{\substack{P \in \operatorname{Spec}(R) \\ P \supseteq I}} P.$$

اثبات. فرض کنید $a \in \sqrt{I}$ و $P \in \operatorname{Var}(I)$. در این‌صورت nای متعلق به $\mathbb{N}$ وجود دارد که $a^n \in I \subseteq P$ و لذا، چون P اول است، $a \in P$. در نتیجه

$$\sqrt{I} \subseteq \bigcap_{P \in \operatorname{Var}(I)} P.$$

برای اثبات عکس رابطهٔ فوق، فرض کنید $b \in \bigcap_{P\in \mathrm{Var}(I)} P$. فرض می‌کنیم که $b \notin \sqrt{I}$ و درپی یافتن تناقض بر می‌آییم. فرض ما به این معناست که $I \cap S = \varnothing$ که در آن $S = \{b^h \ : h \in \mathbb{N}_\circ\}$. توجه کنید که S زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R است. در نتیجه بنابر ۴۴.۳ ایدآل اولی چون P' از R وجود دارد که $I \subseteq P'$ و $P' \cap S = \varnothing$. نتیجه می‌گیریم که $P' \in \mathrm{Var}(I)$ و لذا $b \in P' \cap S$. با یافتن این تناقض اثبات کامل می‌شود. ■

۴۹.۳ نتیجه. رادیکال پوچ حلقهٔ تعویضپذیر R که آن را با نماد $\sqrt{\circ}$ نیز نشان می‌دهند، برابر است با

$$\sqrt{\circ} = \bigcap_{P\in \mathrm{Spec}(R)} P.$$

اثبات. این مطلب بلاواسطه از ۴۸.۳ نتیجه می‌شود زیرا هر ایدآل اول R شامل ایدآل صفر است. ■

۵۰.۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و N رادیکال پوچ R باشد. نشان دهید که رادیکال پوچ R/N صفر است. (حلقهٔ تعویضپذیر را تقلیل یافته گوییم اگر رادیکال پوچش صفر باشد.)

۵۱.۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر باشد. نشان دهید که R دقیقاً یک ایدآل اول دارد اگر و تنها اگر هر عضو R وارونپذیر یا پوچتوان باشد.

حال آماده‌ایم کاربرد دیگری از لم زورن را برای اثبات حکمی دربارهٔ وجود ایدآلهای اول، که در ابتدای این فصل به آن اشاره شد، ارائه دهیم. این حکم در مورد مجموعهٔ $\mathrm{Var}(I)$ متشکل از ایدآلهای اولی از حلقهٔ تعویضپذیر R است که ایدآل I از R را شامل می‌شوند. از ۱۰.۳ می‌دانیم که اگر I سره باشد، $\mathrm{Var}(I) \neq \varnothing$. مطلبی که اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم این است که $\mathrm{Var}(I)$ در واقع شامل عضوهای مینیمال (نسبت به رابطهٔ مشمولیت) است. جنبهٔ زیبای کاربرد لم زورن در اینجا این است که $\mathrm{Var}(I)$ مجموعه‌ای جزئاًمرتب تحت وارون رابطهٔ مشمولیت در نظر گرفته می‌شود (یعنی به‌ازای $P_1, P_2 \in \mathrm{Var}(I)$ می‌نویسیم

$$P_1 \preceq P_2 \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad P_1 \supseteq P_2)$$

و لذا هر عضو ماکسیمال این مجموعهٔ جزئاًمرتب چیزی جز یک عضو مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ نسبت به رابطهٔ مشمولیت نیست.

۵۲.۳ قضیه و تعریف. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این صورت

$$\mathrm{Var}(I) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \supseteq I\}$$

دست‌کم یک عضو مینیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارد. عضوهای مینیمال $\operatorname{Var}(I)$ را ایدآلهای اول مینیمال I یا ایدآلهای اول مینیمال شامل I می‌نامیم. اگر R ناصفر باشد ایدآلهای اول مینیمال ایدآل صفر R را گاه ایدآلهای اول مینیمال R می‌نامیم.

اثبات. بنابر ۳.۱۰ داریم $\operatorname{Var}(I) \neq \varnothing$. مجموعهٔ $\operatorname{Var}(I)$ را با وارون رابطهٔ مشمولیت، به‌طریقی که بلافاصله قبل از بیان قضیه گفته شد، جزئاً مرتب می‌کنیم. لذا می‌خواهیم وجود یک عضو ماکسیمال را در این مجموعهٔ جزئاًمرتب ثابت کنیم و به این منظور لم زورن را به‌کار می‌بریم.

فرض کنید Ω زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\operatorname{Var}(I)$ باشد که نسبت به رابطهٔ ترتیب جزئی فوق کلاًمرتب است. در این‌صورت

$$Q := \bigcap_{P \in \Omega} P$$

ایدآل سرهٔ R است زیرا $\Omega \neq \varnothing$. نشان می‌دهیم که $Q \in \operatorname{Spec}(R)$. فرض کنید $a \in R \setminus Q$، $b \in R$ و $ab \in Q$. باید نشان دهیم که $b \in Q$. فرض کنید P عضو دلخواهی از Ω باشد. می‌دانیم $P_1 \in \Omega$ وجود دارد که $a \notin P_1$.

چون Ω کلاًمرتب است پس $P_1 \subseteq P$ یا $P \subseteq P_1$. در حالت اول از $ab \in P_1$ و $a \notin P_1$ نتیجه می‌گیریم که $b \in P_1 \subseteq P$. در حالت دوم $a \notin P$ و $ab \in P$ و لذا $b \in P$. لذا در هر حال $b \in P$، و چون P یک عضو دلخواه Ω است نتیجه می‌گیریم که $b \in Q$. بنابر این $Q \in \operatorname{Spec}(R)$. چون $Q \supseteq I$، داریم $Q \in \operatorname{Var}(I)$ و لذا Q یک کران بالای Ω در این مجموعهٔ جزئاًمرتب $\operatorname{Var}(I)$ است. حال با استفاده از لم زورن اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

حکم فوق صورت دیگری هم دارد که شاید بیش از خود این حکم مورد نیاز باشد: بسیاری اوقات لازم است بدانیم که اگر P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و ایدآل I از R را شامل شود آن‌گاه یک ایدآل اول مینیمال I چون P' وجود دارد که $P \supseteq P'$. با تغییری جزئی در برهان فوق می‌توان به این مطلب رسید و این کار را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۳.۵۳* تمرین. فرض کنید P و I ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند که P اول است و $P \supseteq I$. نشان دهید که مجموعهٔ ناتهی

$$\Theta := \{P' \in \operatorname{Spec}(R) : P \supseteq P' \supseteq I\}$$

نسبت به رابطهٔ مشمولیت عضو مینیمال دارد (Θ را با وارون رابطهٔ مشمولیت جزئاًمرتب کنید و لم زورن را به‌کار ببرید). توجه کنید که هر عضو مینیمال Θ یک ایدآل اول مینیمال I است و در نتیجه یک ایدآل اول مینیمال I چون P'' وجود دارد که $P'' \subseteq P$.

۵۴.۳ نتیجه. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر R و $\mathrm{Min}(I)$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ ایدآلهای اول مینیمال I باشد. در این‌صورت

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P$$

اثبات. بنابر ۴۸.۳، $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P$ و چون $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Var}(I)$ روشن است که

$$\bigcap_{P \in \mathrm{Var}(I)} P \subseteq \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P.$$

عکس رابطهٔ فوق بلاواسطه از ۵۳.۳، که نشان می‌دهد هر عضو اول $\mathrm{Var}(I)$ شامل یک ایدآل اول مینیمال I است، نتیجه می‌شود. ■

چند حکمی که در پایان این فصل می‌آیند مربوط به ویژگیهای ایدآلهای اول‌اند. احتمالاً مهمترین آنها "قضیهٔ اجتناب از ایدآل اول" است زیرا در نظریهٔ دنباله‌های منظم در جبر تعویضپذیر کاملاً اساسی است، صرف‌نظر از اینکه کاربردهای دیگری هم دارد.

۵۵.۳ لم. فرض کنید P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R و $I_۱, \ldots, I_n$ ایدآلهایی از R باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

یک) به‌ازای jای که $۱ \leq j \leq n$، $P \supseteq I_j$.

دو) $P \supseteq \bigcap_{i=۱}^{n} I_i$.

سه) $P \supseteq \prod_{i=۱}^{n} I_i$.

اثبات. روشن است که (دو) $\Leftarrow$ (یک) $\Leftarrow$ (سه) و (یک) $\Leftarrow$ (دو).

(یک) $\Leftarrow$ (سه) فرض کنید به‌ازای هر jای که $۱ \leq j \leq n$، $P \not\supseteq I_j$. در این‌صورت به‌ازای هر چنین jای، a_jای وجود دارد که $a_j \in I_j \backslash P$ ولی در این‌صورت داریم

$$a_۱ \cdots a_n \in \prod_{i=۱}^{n} I_i \backslash P$$

(زیرا P اول است)، و این‌گزاره نقیض گزارهٔ (سه) است. ■

۵۶.۳ نتیجه. فرض کنید $I_۱, \ldots, I_n$ ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند و فرض کنید P ایدآل اول R باشد و $P = \bigcap_{i=۱}^{n} I_i$. در این‌صورت به‌ازای jای که $۱ \leq j \leq n$ داریم $P = I_j$. ■

در قضیهٔ بعد می‌بینیم که ۵۵.۳ چه نوع کاربردی ممکن است داشته باشد. این قضیه دربارهٔ ایدآلهای "متباین" است.

۵۷.۳ تعریف. فرض کنید I،J،I_1،...،I_n که $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. می‌گوییم که I و J متباین‌اند اگر $I + J = R$. همچنین خانوادهٔ ایدآلهای $(I_i)_{i=1}^{n}$ را دو به‌دو متباین گویند اگر به‌ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ و $i \neq j$، $I_i + I_j = R$.

۵۸.۳ لم. فرض کنید ایدآلهای I و J از R متباین باشند. در این‌صورت $I \cap J = IJ$.

اثبات. روشن است که $IJ \subseteq I \cap J$. بنابه فرض $I + J = R$ در نتیجه بنابر ۲۸.۲(چهار) داریم

$$I \cap J = (I \cap J)R = (I \cap J)(I + J) = (I \cap J)I + (I \cap J)J$$

باتوجه به $(I \cap J)I \subseteq JI$ و $(I \cap J)J \subseteq IJ$ نتیجه می‌گیریم که $I \cap J \subseteq IJ$، و لذا اثبات کامل است. ■

۵۹.۳ قضیه. فرض کنید $(I_i)_{i=1}^{n}$ (که $n \geq 2$) خانواده‌ای از ایدآلهای دو به دو متباین حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت

یک) $I_1 \cap \cdots \cap I_{n-1}$ و I_n متباین‌اند و

دو) $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$.

اثبات. یک) قرار دهید $J := \bigcap_{i=1}^{n-1} I_i$. فرض کنید M یک ایدآل ماکسیمال R باشد که $J + I_n \subseteq M$ در این‌صورت $I_n \subseteq M$ و

$$J = I_1 \cap \cdots \cap I_{n-1} \subseteq M$$

در نتیجه بنابر ۵۵.۳ به‌ازای jای متعلق به $\mathbb{N}$ که $1 \leq j \leq n - 1$ داریم $I_j \subseteq M$ و لذا

$$I_j + I_n \subseteq M$$

بنابراین به تناقض رسیده‌ایم زیرا I_j و I_n متباین‌اند. در نتیجه ایدآل ماکسیمالی از R وجود ندارد که شامل $J + I_n$ باشد و لذا بنابر ۱۰.۳، $J + I_n = R$.

دو) این مطلب را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. حالت $n = 2$ در ۵۸.۳ اثبات شده است. لذا فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای مقادیر کمتر از n که $n = k \geq 3$ اثبات شده است. طبق این فرض استقرا داریم

$$J := \bigcap_{i=1}^{k-1} I_i = \prod_{i=1}^{k-1} I_i$$

بنابر قسمت (یک) فوق، J و I_k متباین‌اند و لذا بنابر ۵۸.۳ داریم $J \cap I_k = JI_k$. بنابراین از تساوی فوق نتیجه می‌شود که

$$\bigcap_{i=1}^{k} I_i = J \cap I_k = JI_k = \prod_{i=1}^{k} I_i$$

به این ترتیب اثبات مرحلهٔ دوم استقرا و لذا اثبات قضیه پایان می‌یابد. ■

۶۰.۳ تمرین. فرض کنید $I_1, \ldots, I_n$، که $n \geq 2$، ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. یادآوری می‌کنیم که حاصلضرب مستقیم حلقه‌های $R/I_1, \ldots, R/I_n$ را با نماد $\prod_{i=1}^{n} R/I_i$ در ۶.۲ معرفی کردیم.

یک) نشان دهید که

$$f : R \longrightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

با تعریف $f(r) = (r + I_1, \ldots, r + I_n)$، به‌ازای هر $r \in R$، همریختی حلقه‌ای است.

دو) نشان دهید f یک به یک است اگر و تنها اگر $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = 0$.

سه) نشان دهید f پوشاست اگر و تنها اگر خانوادهٔ $(I_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از ایدآلهای دو به دو متباین باشد.

۶۱.۳ قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول. فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ که $n \geq 2$ ایدآلهایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند و حداکثر دو تا از آنها اول نباشند. فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است. (مثلاً S ممکن است ایدآل R یا زیر حلقهٔ R باشد.) فرض کنید

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

در این صورت به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $S \subseteq P_j$.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم.

ابتدا حالت $n = 2$ را در نظر بگیرید. در این حالت داریم $S \subseteq P_1 \cup P_2$ و تنها فرض می‌کنیم P_1 و P_2 ایدآل‌اند. فرض می‌کنیم $S \not\subseteq P_1$ و $S \not\subseteq P_2$ و در پی یافتن تناقض برمی‌آییم. لذا به‌ازای هر $j = 1, 2$ عضوی چون $a_j \in S \setminus P_j$ وجود دارد. بنابراین، فرض قضیه ایجاب می‌کند که

$$a_2 \in P_1 \quad \text{و} \quad a_1 \in P_2$$

حال داریم $a_1 + a_2 \in S \subseteq P_1 \cup P_2$ و لذا $a_1 + a_2$ به یکی از دو ایدآل P_1 یا P_2 تعلق دارد. در حالت اول داریم

$$a_1 = (a_1 + a_2) - a_2 \in P_1$$

که با $a_1 \in S \backslash P_1$ تناقض دارد. در حالت دوم نیز به‌طریقی مشابه به تناقض می‌رسیم. لذا باید به‌ازای $j = 1$ یا 2 داشته باشیم $S \subseteq P_j$.

حال به مرحلهٔ دوم استقرا می‌پردازیم. فرض کنید $n = k + 1$ که $k \geq 2$ و فرض کنید حکم در حالت $n = k$ اثبات شده باشد. لذا داریم $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} P_i$ و چون حداکثر ۲ تا از P_iها اول نیستند می‌توانیم فرض کنیم که P_iها چنان اندیسگذاری شده‌اند که P_{k+1} ایدآل اول باشد.

فرض کنید به‌ازای هر $j = 1, \ldots, k + 1$ داریم

$$S \nsubseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} P_i$$

لذا به‌ازای هر $j = 1, \ldots, k + 1$، عضوی چون

$$a_j \in S \backslash \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} P_i$$

وجود دارد. فرض قضیه ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $j = 1, \ldots, k + 1$، $a_j \in P_j$. همچنین چون $P_{k+1} \in \mathrm{Spec}(R)$ داریم $a_1 \cdots a_k \notin P_{k+1}$. لذا

$$a_{k+1} \in P_{k+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} P_i \quad \text{و} \quad a_1 \cdots a_k \in \bigcap_{i=1}^{k} P_i \backslash P_{k+1}$$

حال عضو $b := a_1 \cdots a_k + a_{k+1}$ را در نظر می‌گیریم: ممکن نیست که $b \in P_{k+1}$ زیرا در آن‌صورت

$$a_1 \ldots a_k = b - a_{k+1} \in P_{k+1}$$

که با $a_1 \ldots a_k \notin P_{k+1}$ تناقض دارد. همچنین به‌ازای هیچ jای که $1 \leq j \leq k$ ممکن نیست که $b \in P_j$ زیرا در آن‌صورت

$$a_{k+1} = b - a_1 \cdots a_k \in P_j$$

که با $a_{k+1} \notin \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ تناقض دارد. ولی $b \in S$، زیرا به‌ازای هر $j = 1, \ldots, k + 1$، $a_j \in S$، و لذا به تناقض با فرض $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} P_i$ رسیده‌ایم.

نتیجه می‌گیریم که از jهایی که $1 \leq j \leq k+1$ دست‌کم یک j وجود دارد که

$$S \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{k+1} P_i$$

حال با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که به‌ازای iای که $1 \leq i \leq k+1$، $S \subseteq P_i$.
به این ترتیب اثبات مرحلهٔ دوم استقرا پایان یافته و لذا قضیه به‌روش استقرا اثبات شده‌است. ■

۶۲.۳ تذکر. نمادهای زیر نمادهای ۶۱.۳ هستند.

یک) قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول اغلب در حالتی به‌کار می‌رود که S در واقع ایدآل R است و $P_1, \ldots, P_n$ ایدآلهای اول R هستند. ولی گه‌گاه لازم است در حالتهایی کلیتر از فوق از قضیهٔ ۶۱.۳ استفاده شود.

دو) چرا قضیهٔ ۶۱.۳ قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول نامیده می‌شود؟ وجه تسمیهٔ آن از صورت دیگر قضیه که در زیر بیان می‌کنیم معلوم می‌شود. اگر به‌ازای $n \geq 2$، $P_1, \ldots, P_n$ ایدآلهایی از R باشند و حداکثر دو تا از آنها اول نباشند و اگر به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $S \not\subseteq P_i$، آن‌گاه عضوی چون

$$c \in S \backslash \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

وجود دارد، و لذا c از همهٔ ایدآلهای $P_1, \ldots, P_n$ که "اکثر" آنها اول‌اند "اجتناب" می‌کند.

۶۳.۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد که هیأتی نامتناهی زیرحلقهٔ آن است. فرض کنید I و $J_1, \ldots, J_n$ که $n \geq 2$ ایدآلهایی از R هستند که

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_i$$

ثابت کنید که به‌ازای jای که $1 \leq j \leq n$، $I \subseteq J_j$.

قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول صورت دیگری هم دارد که گاه بسیار مفید است.

۶۴.۳ قضیه. فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ که $n \geq 1$ ایدآلهای اولی ازحلقهٔ تعویضپذیر R باشند. فرض کنید I ایدآل R باشد و $a \in R$ و

$$aR + I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

در این‌صورت $c \in I$ وجود دارد که $a + c \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$

اثبات. ابتدا توجه کنید که اگر به‌ازای i و jای که $1 \leq i, j \leq n$ و $i \neq j$، داشته باشیم $P_i \subseteq P_j$ آن‌گاه P_i را می‌توانیم از ایدآلهای اول داده شده حذف کنیم بدون اینکه مسأله تغییر کند. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای هر $i, j = 1, \ldots, n$ که $i \neq j$ داریم $P_i \not\subseteq P_j$ و $P_j \not\subseteq P_i$.

حال فرض کنید که $P_1, \ldots, P_n$ چنان شماره‌گذاری (یا در صورت لزوم شماره‌گذاری مجدد) شده‌اند که a متعلق به هر یک از ایدآلهای $P_1, \ldots, P_k$ باشد ولی متعلق به هیچ یک از ایدآلهای $P_{k+1}, \ldots, P_n$ نباشد. اگر $k = 0$ آن‌گاه $a = a + 0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ و لذا $a + 0$ عضو مطلوب است. بنابراین از این پس در این اثبات فرض می‌کنیم $k \geq 1$.

حال $I \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ زیرا در غیر این‌صورت بنابر قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول باید به‌ازای jای که $1 \leq j \leq k$، $I \subseteq P_j$ که از آن نتیجه می‌شود

$$a\,R + I \subseteq P_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

اما این‌نتیجه متناقض با فرض است. لذا عضوی چون $d \in I \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$ وجود دارد.

حال توجه کنید که

$$P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n \not\subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_k$$

این رابطه به روشنی به‌ازای $k = n$ درست است، زیرا در این‌صورت مجموعهٔ طرف چپ را باید برابر با R در نظر گرفت[1]، و اگر مدعای فوق در حالت $k < n$ نادرست باشد آن‌گاه از قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول نتیجه می‌شود که به‌ازای jای که $1 \leq j \leq k$

$$P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n \subseteq P_j$$

و در این‌صورت از ۵۵.۳ نتیجه می‌شود که به‌ازای hای که $k + 1 \leq h \leq n$، $P_h \subseteq P_j$ که متناقض فرض ما در حذف ایدآلهایی است که زیرمجموعهٔ ایدآلهای دیگرند. لذا عضوی چون

$$b \in P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$$

وجود دارد. حال تعریف می‌کنیم $c := db$، که $db \in I$. توجه کنید که

$$c \in P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)$$

---

۱. طبق تعریف، اشتراک خانواده‌ای تهی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر با خود مجموعه است.ـم.

زیرا $P_1, \dots, P_k \in \mathrm{Spec}(R)$. چون

$$a \in P_1 \cap \dots \cap P_k \backslash (P_{k+1} \cup \dots \cup P_n)$$

نتیجه می‌گیریم که $a + c \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. ■

۶۵.۳* تمرین. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \longrightarrow R[X]$ به‌کار می‌بریم، و فرض می‌کنیم I ایدآل R باشد.

(یک) نشان دهید $I \in \mathrm{Spec}(R)$ اگر و تنها اگر $I^e \in \mathrm{Spec}(R[X])$.

دو) ثابت کنید که $\sqrt{(I^e)} = (\sqrt{I})^e$

سه) فرض کنید M یک ایدآل ماکسیمال R باشد. تعیین کنید آیا M^e الف) همواره ایدآل ماکسیمال $R[X]$ است یا ب) گاهی هست یا پ) هرگز نیست، و دلیل آن را ذکر کنید.

۶۶.۳* تمرین. فرض کنید K هیأت و $R = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای $X_1، \dots، X_n$ باشد. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. نشان دهید که در R

$$\begin{aligned} 0 \subset (X_1 - \alpha_1) \subset (X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2) \subset \cdots \\ \subset (X_1 - \alpha_1, \dots, X_i - \alpha_i) \subset \cdots \\ \subset (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n) \end{aligned}$$

زنجیره‌ای اکیداً صعودی از ایدآلهای اول است.

۶۷.۳ تمرین. فرض کنیم $p_1، \dots، p_t$، که $t \in \mathbb{N}$، اعداد اول متمایز باشند. نشان دهید که

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Q} : \alpha = m/n,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \forall_i,\ p_i \not| n\}$$

زیرحلقه‌ای از $\mathbb{Q}$ است که دقیقاً t ایدآل ماکسیمال دارد.

۶۸.۳ تمرین. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ متعلق به حلقهٔ $R[[X]]$، متشکل از سریهای توانی صوری روی R از مجهول X، باشد که در آن به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، f_i یک فرم متعلق به $R[X]$ است که یا 0 است یا از درجهٔ i. نماد تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی یک به یک طبیعی از حلقهٔ R به $R[[X]]$ به‌کار می‌بریم.

یک) نشان دهید که $f \in \mathrm{Jac}(R[[X]])$ اگر و تنها اگر $f_0 \in \mathrm{Jac}(R)$.

دو) فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ایدآل ماکسیمال $R[[X]]$ باشد. نشان دهید $\mathcal{M}$ توسط $\mathcal{M}^c \cup \{X\}$ تولید می‌شود و $\mathcal{M}^c$ یک ایدآل ماکسیمال R است.

سه) نشان دهید که هر ایدآل اول R حاصل تحدید یک ایدآل اول $R[[X]]$ است.

۴

تجزیهٔ ابتدایی

یکی از ویژگیهای واقعاً کارساز دامنهٔ اقلیدسی این است که دامنهٔ تجزیهٔ یکتا (د.ت.ی) است. همچنین در ۳۹.۳ دیدیم که هر دامنهٔ اصلی‌ایدآل د.ت.ی است. طبیعی است که بپرسیم تا چه حدی این حکمها را می‌توان تعمیم داد. در واقع نظریهٔ بسیار زیبایی وجود دارد شامل قضیه‌ای که می‌توان آن را تعمیم این قضیه تلقی کرد که هر د.ا.ا د.ت.ی است. این همان نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی ایدآلهای سره در حلقه‌های تعویضپذیر نوتری است. در این فصل می‌خواهیم مقدمات این نظریه را ارائه دهیم.

برای زمینه‌سازی بحث مقدمتاً فرض می‌کنیم R دامنه‌ای اصلی‌ایدآل است که هیأت نیست. نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی بیشتر مربوط به‌ایدآلهاست تا عضوها، و لذا ایدآل ناصفر سره‌ای چون I را از R در نظر می‌گیریم. چون I اصلی است، عضو ناصفر وارون‌ناپذیری چون $a \in R$ وجود دارد که $I = aR$. چون بنابر ۳۹.۳، R د.ت.ی است لذا عضوهای تحویلناپذیری مانند $p_1, \ldots, p_s \in R$، که $s \in \mathbb{N}$، باویژگی ناوابستگی p_i و p_j به‌یکدیگر به‌ازای $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq s)$، و عضو وارونپذیر u در R و عددهایی چون $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{N}$ وجود دارند که

$$a = up_1^{t_1} \cdots p_s^{t_s}.$$

ولی ایدآل $I = aR$ مورد توجه ماست: با استفاده از مفهوم حاصلضربِ تعدادی متناهی از

ایدآلهای R و تذکر ۲۸.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$I = aR = \prod_{i=۱}^{s} Rp_i^{t_i}.$$

حال می‌توانیم با استفاده از برخی از نتیجه‌های فصل ۳ در مورد ایدآلهای متباین، از رابطهٔ فوق عبارت دیگری برای I به‌دست آوریم که به‌صورت اشتراک ایدآلهایی از یک نوع مشخص باشد. فرض کنید $i, j \in \mathbb{N}$ که $۱ \leq i, j \leq s$ و $i \neq j$. بنابر ۳۴.۳، Rp_i و Rp_j ایدآلهای ماکسیمال Rاند و چون p_i و p_j وابسته نیستند از ۳۲.۳ نتیجه می‌گیریم که این دو ایدآل ماکسیمال R متفاوت‌اند. در نتیجه

$$Rp_i \subset Rp_i + Rp_j \subseteq R$$

زیرا اگر $Rp_i = Rp_i + Rp_j$ آن‌گاه $Rp_j \subseteq Rp_i \subset R$ و در نتیجه $Rp_i = Rp_j$. در نتیجه $Rp_i + Rp_j = R$ و لذا Rp_i و Rp_j متباین‌اند. از این‌رو $Rp_i^{t_i}$ و $Rp_j^{t_j}$ نیز متباین‌اند زیرا بنابر ۴۷.۳

$$\sqrt{Rp_i^{t_i}} = Rp_i \qquad \text{و} \qquad \sqrt{Rp_j^{t_j}} = Rp_j$$

و لذا بنابر ۲۵.۲(چهار)، $Rp_i^{t_i} + Rp_j^{t_j} = R$. بنابراین از ۵۹.۳(دو) نتیجه می‌شود که

$$I = Ra = Rp_۱^{t_۱} \cap \cdots \cap Rp_s^{t_s}$$

حال به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, s$ ایدآل $Rp_i^{t_i} = (Rp_i)^{t_i}$ توان مثبت یک ایدآل ماکسیمال R است و از تعریف و احکام زیر نتیجه خواهیم گرفت که توان مثبت یک ایدآل ماکسیمال از یک حلقهٔ تعویضپذیر مثالی از ایدآلی است به‌نام "ایدآل ابتدایی". لذا ایدآل I از R را به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی از ایدآلهای ابتدایی نوشته‌ایم. این عبارت را "تجزیهٔ ابتدایی" I می‌نامیم.

یکی از اهداف اصلی این فصل این است که نشان دهیم هر ایدآل سرهٔ یک حلقهٔ تعویضپذیر نوتری تجزیه‌ای ابتدایی دارد یعنی به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی از ایدآلهای ابتدایی قابل نمایش است. با توجه به‌مطالب پاراگراف فوق این حکم را می‌توان تعمیم این قضیه تلقی کرد که هر د.ا.ا د.ت.ی است.

ولی ابتدا باید مفهومهای بنیادی، مانند مفهوم ایدآل ابتدایی، را تعریف کنیم.

۱.۴ تعریف. فرض کنید Q ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم Q ایدآل ابتدایی R است اگر

یک) $Q \subset R$، یعنی Q ایدآل سرهٔ R باشد، و

دو) هر گاه $a, b \in R$ و $ab \in Q$ ولی $a \notin Q$ آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in Q$.

شرط (دو) در ۱.۴ را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد: از $a, b \in R$ و $ab \in Q$ نتیجه شود که $a \in Q$ یا $b \in \sqrt{Q}$ که در آن $\sqrt{Q}$ نشاندهندهٔ رادیکالِ Q است (۴۶.۳ را ببینید).

۲.۴ تذکر. روشن است که هر ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R ایدآل ابتدایی R است.

در ۲۳.۳ دیدیم که ایدآل I از R اول است اگر و تنها اگر R/I دامنهٔ صحیح باشد. از این مطلب در ۲۷.۳(دو) برای اثبات این حکم استفاده کردیم که اگر $f : R \to S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر باشد و $P' \in \operatorname{Spec}(S)$ آن‌گاه $P'^c := f^{-1}(P') \in \operatorname{Spec}(R)$. در مورد ایدآلهای ابتدایی نیز احکامی مشابه احکام فوق برقرار است.

۳.۴ لم. یک) فرض کنید I ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این صورت I ابتدایی است اگر و تنها اگر حلقهٔ R/I حلقهٔ صفر نباشد و هر مقسوم‌علیه صفر R/I پوچتوان باشد.
دو) فرض کنید $f : R \to S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر و Q ایدآل ابتدایی S باشد. در این صورت $Q^c := f^{-1}(Q)$ ایدآل ابتدایی R است.

اثبات. یک) ($\Longleftarrow$) فرض کنید I ابتدایی باشد. چون $I \neq R$ از ۱۴.۲ نتیجه می‌گیریم که R/I حلقهٔ صفر نیست. فرض کنید $b \in R$ و $b + I$ در R/I مقسوم‌علیه صفر باشد، لذا $a \in R$ وجود دارد که $a + I \neq 0_{R/I}$ ولی $(a+I)(b+I) = 0_{R/I}$. این شرطها به‌این معنی‌اند که $a \notin I$ ولی $ab \in I$، و لذا چون I ابتدایی است $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $b^n \in I$. در نتیجه $(b+I)^n = b^n + I = 0_{R/I}$.
($\Longrightarrow$) اثبات این قسمت نیز ساده است و به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود.
دو) هستهٔ همریختی مرکب حلقه‌ای

$$R \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/Q$$

(که در آن همریختی دوم همریختی پوشای طبیعی است) Q^c است و لذا از قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲ نتیجه می‌شود که R/Q^c با زیرحلقه‌ای از S/Q یکریخت است. حال اگر حلقهٔ تعویضپذیری چون R' ناصفر باشد و هر مقسوم‌علیه صفرش پوچتوان باشد آن‌گاه هر زیرحلقهٔ R' نیز این دو ویژگی را دارد. بنابراین از بند (یک) نتیجه می‌شود که Q^c ایدآل ابتدایی R است. ■

۴.۴* تمرین. اثبات ۳.۴(یک) را کامل کنید.

در زیر نشان می‌دهیم که رادیکال ایدآلهای ابتدایی، ایدآلهای بسیار جالبی هستند.

۵.۴ لم و تعریف. فرض کنید Q یک ایدآل ابتدایی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این صورت $P := \sqrt{Q}$ ایدآل اول R است و می‌گوییم Q Pـابتدایی است.

به‌علاوه P کوچکترین ایدآل اول R است که Q را شامل می‌شود، زیرا هر ایدآل اول R که شامل Q باشد باید P را نیز شامل شود. لذا (۵۲.۳ را ببینید) P ایدآل اول مینیمال منحصر به‌فرد Q است.

اثبات. چون $1 \notin Q$ باید داشته باشیم $1 \notin \sqrt{Q} = P$ و لذا P سره است. فرض کنید $a, b \in R$ و $ab \in \sqrt{Q}$ ولی $a \notin \sqrt{Q}$. لذا $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(ab)^n = a^n b^n \in Q$. ولی هیچ توان مثبت a متعلق به Q نیست و لذا هیچ توان مثبت a^n در Q نیست. چون Q ابتدایی است از تعریف آن نتیجه می‌گیریم که $b^n \in Q$ و لذا $b \in \sqrt{Q}$. در نتیجه ایدآل $P = \sqrt{Q}$ اول است.

برای اثبات حکم پاراگراف آخر قضیه، توجه کنید که اگر $P' \in \operatorname{Spec}(R)$ و $P' \supseteq Q$ آن‌گاه می‌توانیم از طرفین رابطهٔ اخیر رادیکال بگیریم و با استفاده از ۴۷.۳ نتیجه بگیریم که

$$P' = \sqrt{P'} \supseteq \sqrt{Q} = P.$$

در نتیجه P تنها ایدآل اول مینیمال Q است. ■

۶.۴ تذکر. فرض کنید $f : R \to S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر و Q' ایدآل P'ـابتدایی S باشد. در ۳.۴(دو) دیدیم که $Q'^c := f^{-1}(Q')$ ایدآل ابتدایی R است. از ۴۳.۲(چهار) نتیجه می‌شود که $\sqrt{(Q'^c)} = P'^c$ و لذا Q'^c در واقع ایدآل P'^cـابتدایی R است.

۷.۴* تمرین. فرض کنیم $f : R \to S$ همریختی پوشای حلقه‌های تعویضپذیر باشد. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ و ۴۵.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم. توجه کنید که بنابر ۴۶.۲، $\mathcal{C}_R = \{I \in \mathcal{I}_R : I \supseteq \operatorname{Ker} f\}$ و $\mathcal{E}_S = \mathcal{I}_S$.

فرض کنید $I \in \mathcal{C}_R$. نشان دهید که

یک) I ایدآل ابتدایی R است اگر و تنها اگر I^e ایدآل ابتدایی S باشد، و

دو) در این صورت $\sqrt{I} = (\sqrt{(I^e)})^c$ و $\sqrt{(I^e)} = (\sqrt{I})^e$.

۸.۴* تمرین. فرض کنید I ایدآلی سره از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و P و Q ایدآلهایی از R باشند که شامل I هستند. ثابت کنید Q ایدآل Pـابتدایی R است اگر و تنها اگر Q/I ایدآل P/Iـابتدایی R/I باشد.

قبلاً در ۲.۴ متذکر شدیم که هر ایدآل اولِ هر حلقهٔ تعویضپذیر ابتدایی است. اکنون وقت آن رسیده است که مثالهای دیگری از ایدآلهای ابتدایی ارائه دهیم. در مقدمهٔ این فصل اشاره شد که هر توان مثبتِ هر ایدآل ماکسیمالِ حلقه‌ای تعویضپذیر ابتدایی است: این موضوع نتیجهٔ قضیهٔ زیر است.

۹.۴ قضیه. فرض کنید Q ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد به‌طوری که ایدآل $\sqrt{Q} = M$ ایدآل ماکسیمال R باشد. در این صورت Q ایدآل ابتدایی (در واقع Mـابتدایی) Rاست.

در نتیجه تمام توانهای M^n $(n \in \mathbb{N})$ از ایدآل ماکسیمال M، Mـابتدایی‌اند.

اثبات. چون $Q \subseteq \sqrt{Q} = M \subset R$ روشن است که Q سره است. فرض کنید عضوهای $a, b \in R$ طوری باشند که $ab \in Q$ ولی $b \notin \sqrt{Q}$. چون ایدآل $\sqrt{Q} = M$ ماکسیمال است و $b \notin M$ پس باید داشته باشیم $M + Rb = R$ و لذا

$$\sqrt{Q} + \sqrt{Rb} = R.$$

در نتیجه بنابر ۲۵.۲(چهار)، $Q + Rb = R$. لذا عضوهایی چون $d \in Q$ و $c \in R$ وجود دارند که $d + cb = 1$ و

$$a = a1 = a(d + cb) = ad + c(ab) \in Q$$

زیرا $d, ab \in Q$. در نتیجه Q ایدآل Mـابتدایی است.

حال حکم آخر بلافاصله نتیجه می‌شود زیرا بنابر ۴۷.۳ به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $\sqrt{(M^n)} = M$. ■

با استفاده از قضیهٔ ۹.۴ می‌توانیم مثالهای دیگری از ایدآلهای ابتدایی ارائه کنیم.

۱۰.۴ مثال. فرض کنید R د.ا.ا باشد و هیأت نباشد. در این صورت مجموعهٔ ایدآلهای ابتدایی R برابر است با

$$\{0\} \cup \{Rp^n : n \in \mathbb{N} \quad \text{و}\ \text{است}\ R\ \text{عضو تحویلناپذیر}\ p\}$$

اثبات. $0 \in \operatorname{Spec}(R)$، زیرا R دامنهٔ صحیح است. بنابر ۳۴.۳ به‌ازای هر عضو تحویلناپذیر p از R و $n \in \mathbb{N}$ ایدآل Rp^n توانی از یک ایدآل ماکسیمال R است و لذا بنابر ۹.۴ ایدآل ابتدایی R است. بنابراین هر عضو مجموعهٔ فوق در واقع ایدآل ابتدایی R است.

از طرف دیگر هر ایدآل ابتدایی ناصفر R باید به‌صورت Ra باشد که در آن $a \in R$ ناصفر است و a نباید وارونپذیر باشد زیرا ایدآلهای ابتدایی ناسره‌اند. بنابر ۳۹.۳، a را می‌توانیم به‌صورت حاصلضرب عضوهای تحویلناپذیر R بنویسیم. اگر دو عضو تحویلناپذیر و ناوابسته چون p و q از R مقسوم‌علیه a باشند (یعنی a را بشمرند) آن‌گاه بنابر ۳۲.۳ و ۳۴.۳، Rp و Rq ایدآلهای ماکسیمال متمایزند و لذا هر دو ایدآل اول مینیمال Ra هستند که متناقض ۵.۴ است. در نتیجه Ra توسط توان مثبتی از یک عضو تحویلناپذیر R تولید می‌شود. ■

این امر نباید بر خواننده مشتبه شود که اگر M ایدآل ماکسیمال حلقه‌ای تعویضپذیر چون R باشد، هر ایدآل Mـابتدایی R باید توانی از M باشد. مثال بعد این نکته را روشن می‌کند.

۱۱.۴ مثال. فرض کنید K هیأت و R حلقهٔ $K[X,Y]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X و Y باشد. فرض کنید $M = RX + RY$، که بنابر ۱۵.۳، M ایدآل ماکسیمال R است. در این صورت (X, Y^2) ایدآل Mـابتدایی R است و توانِ هیچ ایدآل اول R نیست.

اثبات. داریم

$$M^2 = (X^2, XY, Y^2) \subseteq (X, Y^2) \subseteq (X, Y) = M$$

و لذا با رادیکال‌گیری و با استفاده از ۴۷.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$M = \sqrt{M^2} \subseteq \sqrt{(X, Y^2)} \subseteq \sqrt{M} = M$$

در نتیجه $\sqrt{(X, Y^2)} = M$، که M ایدآل ماکسیمال R است، و لذا از ۹.۴ نتیجه می‌شود که (X, Y^2) ایدآل Mـابتدایی است.

به‌علاوه، (X, Y^2) توان مثبت ایدآل اولی چون P از R نیست زیرا اگر باشد بنابر۴۷.۳ باید داشته باشیم $P = M$ و چون توانهای M زنجیره‌ای نزولی چون

$$M \supseteq M^2 \supseteq \cdots \supseteq M^i \supseteq M^{i+1} \supseteq \cdots$$

تشکیل می‌دهند باید داشته باشیم $M = (X, Y^2)$ یا $M^2 = (X, Y^2)$. هیچ کدام از این دو نتیجه درست نیست زیرا $X \not\in M^2$ (چون درجهٔ کل هر جملهٔ ناصفر که واقعاً در یک چند جمله‌ای متعلق به M^2 ظاهر می‌شود دست‌کم ۲ است) و $Y \not\in (X, Y^2)$ (چون در غیر این صورت $f, g \in R$ وجود خواهند داشت که

$$Y = Xf + Y^2 g$$

و با مقدار یابی‌طرفین رابطهٔ فوق به‌ازای ۰ و Y، یعنی قرار دادن ۰ و Y به‌ترتیب به‌جای X و Y (۱۷.۱ را ببینید) به‌تناقض می‌رسیم. ■

گرچه در ۹.۴ دیدیم که هر توان مثبت هر ایدآل ماکسیمال حلقهٔ تعویضپذیر R ایدآل ابتدایی R است لزومی ندارد که هر توان مثبت هر ایدآل اول R ابتدایی باشد. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

۱۲.۴ مثال. فرض کنید K هیأت باشد و $K[X_1, X_2, X_3]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X_1،X_2،X_3 باشد. حلقهٔ رده‌های مانده‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$$R = K[X_1, X_2, X_3]/(X_1 X_3 - X_2^2)$$

به‌ازای هر $i = ۱,۲,۳$ فرض کنید x_i نشاندهندهٔ نگارهٔ طبیعی X_i در R باشد. در این صورت $P := (x_۱, x_۲)$ ایدآل اول R است ولی $P^۲$ ایدآل ابتدایی نیست.

توجه کنید که $\sqrt{(P^۲)} = P \in \operatorname{Spec}(R)$. لذا این مثال همچنین نشان می‌دهد که هر ایدآل حلقه‌ای تعویضپذیر که رادیکالش اول باشد لزوماً ابتدایی نیست.

اثبات. بنابر ۱۵.۳، ایدآل تولید شده توسط $X_۱$ و $X_۲$ در $K[X_۱, X_۲]$ ماکسیمال است. بنابر ۶۵.۳(یک) حاصل توسیع آن به $K[X_۱, X_۲][X_۳] = K[X_۱, X_۲, X_۳]$ ایدآل اول است و بنابر ۴۲.۲ این ایدآل حاصل نیز توسط $X_۱$ و $X_۲$ تولید می‌شود. حال در $K[X_۱, X_۲, X_۳]$ داریم

$$(X_۱, X_۲) \supseteq (X_۱X_۳ - X_۲^۲)$$

و لذا بنابر ۲۸.۳

$$P = (x_۱, x_۲) = (X_۱, X_۲)/(X_۱X_۳ - X_۲^۲) \in \operatorname{Spec}(R).$$

حال نشان می‌دهیم که $P^۲$ ابتدایی نیست. توجه کنید که بنابر ۴۷.۳، $P = \sqrt{(P^۲)}$؛ به‌علاوه $x_۱x_۳ = x_۲^۲ \in P^۲$. ولی داریم $x_۱ \notin P^۲$ و $x_۳ \notin P = \sqrt{(P^۲)}$ (که دلیل آن در زیر توضیح داده می‌شود) و لذا نتیجه می‌گیریم که $P^۲$ ابتدایی نیست.

مدعای $x_۱ \notin P^۲$ به‌صورت زیر ثابت می‌شود. اگر چنین نباشد آن‌گاه داریم

$$X_۱ = X_۱^۲f + X_۱X_۲g + X_۲^۲h + (X_۱X_۳ - X_۲^۲)d$$

که در آن $f, g, h, d \in K[X_۱, X_۲, X_۳]$. ولی این ممکن نیست زیرا درجهٔ هر جمله‌ای که واقعاً در سمت راست تساوی فوق ظاهر شود دست‌کم ۲ است.

به‌همین نحو اگر $x_۳ \in P$ آن‌گاه داریم

$$X_۳ = X_۱a + X_۲b + (X_۱X_۳ - X_۲^۲)c$$

که در آن $a, b, c \in K[X_۱, X_۲, X_۳]$ و با قرار دادن ۰ و ۰ و $X_۳$ به‌ترتیب به‌جای $X_۱$ و $X_۲$ و $X_۳$ به‌تناقض می‌رسیم. ■

موضوعی که اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم نمایش ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر R به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی از ایدآلهای ابتدایی R است. به‌چند لم مقدماتی نیاز داریم.

۱۳.۴ لم. فرض کنید P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R و $Q_۱, \ldots, Q_n$ (که $n \geq ۱$) ایدآلهای Pـابتدایی R باشند. در این صورت $\bigcap_{i=۱}^{n} Q_i$ نیز Pـابتدایی است.

اثبات. با استفادهٔ مکرر از ۳۰.۲ داریم

$$\sqrt{(Q_1 \cap \cdots \cap Q_n)} = \sqrt{Q_1} \cap \cdots \cap \sqrt{Q_n} = P \subset R.$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ سره است. فرض کنید $a, b \in R$ طوری باشند که $ab \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ ولی $b \notin \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. در این صورت عدد صحیح jای وجود دارد که $1 \leq j \leq n$ و $b \notin Q_j$. چون $ab \in Q_j$ و Q_j ایدآل Pـابتدایی است نتیجه می‌گیریم که

$$a \in P = \sqrt{(Q_1 \cap \cdots \cap Q_n)}.$$

در نتیجه $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ ایدآل Pـابتدایی است. ■

۱۴.۴ لم. فرض کنید Q ایدآلی Pـابتدایی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $a \in R$.
یک) اگر $a \in Q$ آن‌گاه $(Q : a) = R$.
دو) اگر $a \notin Q$ آن‌گاه $(Q : a)$ ایدآل Pـابتدایی است و لذا به‌ویژه

$$\sqrt{(Q : a)} = P.$$

سه) اگر $a \notin P$ آن‌گاه $(Q : a) = Q$.

اثبات. یک) این مطلب بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود: ۳۱.۲ و ۳۲.۲ را ببینید.
دو) فرض کنید $b \in (Q : a)$. در این صورت داریم $ab \in Q$ و $a \notin Q$ و لذا، چون Q ایدآل Pـابتدایی است، $b \in P = \sqrt{Q}$. در نتیجه

$$Q \subseteq (Q : a) \subseteq P$$

و لذا با رادیکال‌گیری می‌بینیم که

$$P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : a)} \subseteq \sqrt{P} = P.$$

در نتیجه $\sqrt{(Q : a)} = P$.
حال فرض کنید $c, d \in R$ طوری باشند که $cd \in (Q : a)$ ولی $d \notin P$. در این صورت از اینکه $cda \in Q$ ولی $d \notin P$ و Q ایدآل Pـابتدایی است نتیجه می‌شود $ca \in Q$ و لذا $c \in (Q : a)$. نتیجه می‌گیریم که $(Q : a)$ ایدآل Pـابتدایی است.
سه) این مطلب بلاواسطه از تعریف ایدآل Pـابتدایی نتیجه می‌شود: روشن است که $Q \subseteq (Q : a)$ و از طرف دیگر اگر $b \in (Q : a)$ آن‌گاه $ab \in Q$. چون $a \notin P$ و Q ایدآل Pـابتدایی است پس $b \in Q$. ■

حال آماده‌ایم که مفهوم تجزیهٔ ابتدایی را رسماً معرفی کنیم.

۱۵.۴ تعریف. فرض کنید I ایدآل سره‌ای از حلقه‌ای تعویضپذیر چون R باشد. تجزیهٔ ابتدایی I عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی از ایدآلهای ابتدایی R که برابر با I باشد:

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n\text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

(هرگاه چنین عبارتی را به‌کار بریم منظور این است که به‌ازای هر i، Q_i ایدآل P_iـابتدایی است)
این تجزیه را تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I می‌گوییم اگر
یک) $P_۱$، ...، P_n، n ایدآل اول متمایز R باشند، و
دو) به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, n$ داشته باشیم

$$Q_j \not\supseteq \bigcap_{\substack{i=۱\\ i\neq j}}^{n} Q_i.$$

می‌گوییم که I ایدآل تجزیه‌پذیر R است اگر تجزیه‌ای ابتدایی داشته باشد.

توجه کنید که شرط ۱۵.۴(دو) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت: به‌ازای $j = ۱, \ldots, n$ داشته باشیم

$$I \neq \bigcap_{\substack{i=۱\\ i\neq j}}^{n} Q_i$$

و لذا Q_j زائد نیست و در واقع وجودش در تجزیهٔ ابتدایی $I = \bigcap_{i=۱}^{n} Q_i$ لازم است.

۱۶.۴ تذکر. فرض کنید I ایدآل سره‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و تجزیهٔ

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n\text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی I باشد.
یک) اگر دو تا از P_iها مثلاً P_j و P_k که $۱ \leq j, k \leq n$ و $j \neq k$ برابر باشند آن‌گاه با استفاده از ۱۳.۴ می‌توانیم با ترکیب جمله‌های Q_j و Q_k در تجزیهٔ ابتدایی فوق [یعنی اینکه $Q_j \cap Q_k$ را مثلاً Q. بنامیم] تجزیهٔ ابتدایی دیگری از I با $n - ۱$ جمله به‌دست آوریم. در واقع می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از ۱۳.۴ به‌روش فوق هر تجزیهٔ ابتدایی I را به‌تجزیه‌ای تبدیل کنیم که در آن رادیکالهای جمله‌های تجزیه متفاوت باشند.
دو) هر تجزیهٔ ابتدایی مفروضی را می‌توانیم به‌صورت زیر به‌تجزیه‌ای تبدیل کنیم که در آن هیچ جمله‌ای زائد نباشد؛ چنین کاری را تظریف می‌نامیم. ابتدا $Q_۱$ را در صورتی که $I = \bigcap_{i=۲}^{n} Q_i$،

حذف می‌کنیم یعنی در صورتی که $\bigcap_{i=2}^{n} Q_i \supseteq Q_1$. سپس $Q_n, \cdots, Q_2$ را به‌نوبت در نظر می‌گیریم: در مرحلهٔ jام، Q_j را در صورتی حذف می‌کنیم که شامل اشتراک Q_iهایی باشد که هنوز حذف نشده‌اند و اندیس iی آنها مخالف j است. توجه داشته باشید که اگر Q_j در مرحلهٔ jام حذف نشود آن‌گاه در انتهای مرحلهٔ nام، Q_j شامل اشتراک Q_iهایی که iی آنها مخالف j است و تا به‌آخر باقی مانده‌اند نخواهد بود. به‌این ترتیب تجزیهٔ ابتدایی مفروض I را می‌توانیم تظریف کرده تجزیه‌ای به‌دست آوریم که هیچ جمله‌اش زائد نیست.

سه) لذا برای هر تجزیهٔ ابتدایی مفروض I می‌توانیم ابتدا روش مذکور در (یک) فوق و سپس روش تظریف مذکور در (دو) را به‌کار بریم و تجزیهٔ ابتدایی مینیمالی از I به‌دست آوریم.

چهار) لذا هر ایدآل تجزیه‌پذیر R در واقع تجزیهٔ ابتدایی مینیمال دارد.

پنج) توجه کنید که اگر I تجزیه‌ای ابتدایی با t جمله داشته باشد که مینیمال نباشد آن‌گاه از (یک) و (دو) و (سه) فوق نتیجه می‌شود که I تجزیهٔ ابتدایی مینیمالی دارد که تعداد جمله‌های آن کمتر از t است.

تجزیه‌های ابتدایی مینیمال از جهاتی یکتا هستند.

۱۷.۴ قضیه. فرض کنید I ایدآلی تجزیه‌پذیر از حلقهٔ تعویضپذیر R و تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. فرض کنید $P \in \operatorname{Spec}(R)$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

یک) به‌ازای iای که $1 \le i \le n$، $P = P_i$.

دو) $a \in R$ وجود دارد به‌طوری که $(I : a)$ ایدآل Pـابتدایی باشد.

سه) $a \in R$ وجود دارد به‌طوری که $\sqrt{(I : a)} = P$.

اثبات. (دو) $\Longleftarrow$ (یک) فرض کنید به‌ازای iای که $1 \le i \le n$، $P = P_i$. چون تجزیهٔ ابتدایی $I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ مینیمال است لذا عضوی چون

$$a_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Q_j \backslash Q_i$$

وجود دارد. بنابر ۳۳.۲(دو)

$$(I : a_i) = \left(\bigcap_{j=1}^{n} Q_j : a_i \right) = \bigcap_{j=1}^{n} (Q_j : a_i).$$

ولی بنابر ۱۴.۴(یک) و (دو) به‌ازای هر $j \neq i$ $(1 \le j \le n)$، $(Q_j : a_i) = R$ و $(Q_i : a_i)$ ایدآل P_iـابتدایی است. چون $P = P_i$ پس $(I : a_i)$ ایدآل Pـابتدایی است.

(سه) $\Longleftarrow$ (دو) این مطلب بلافاصله از ۵.۴ نتیجه می‌شود زیرا رادیکال هر ایدآل Pـابتدایی برابر P است.

(یک) $\Longleftarrow$ (سه) فرض کنید $a \in R$ و $\sqrt{(I : a)} = P$. بنابر ۳۳.۲(دو)

$$(I : a) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i : a\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : a).$$

بنابر ۱۴.۴(یک) و (دو) اگر $a \in Q_i$ آن‌گاه $(Q_i : a) = R$ و اگر $a \notin Q_i$ آن‌گاه $(Q_i : a)$ ایدآل P_iـابتدایی است. در نتیجه با استفاده از ۳۰.۲ می‌بینیم که

$$P = \sqrt{(I : a)} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^{n} \sqrt{(Q_i : a)} = \bigcap_{\substack{i=1 \\ a \notin Q_i}}^{n} P_i$$

چون P ایدآل سرهٔ R است نتیجه می‌گیریم که iهایی $(1 \leq i \leq n)$ وجود دارند که به‌ازای آنها $a \notin Q_i$ (دست‌کم یک چنین iای وجود دارد) و بنابر ۵۶.۳ به‌ازای یکی از این iها، $P = P_i$.

۱۸.۴ نتیجه: اولین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیری از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و تجزیه‌های

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

و

$$I = Q'_1 \cap \cdots \cap Q'_{n'} \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n' \text{، } \sqrt{Q'_i} = P'_i$$

دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشند. در این صورت $n = n'$ و

$$\{P_1, \ldots, P_n\} = \{P'_1, \ldots, P'_n\}.$$

به‌عبارت دیگر تعداد جمله‌های یک تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض I و همچنین مجموعهٔ ایدآلهای اولی که رادیکالهای جمله‌های تجزیه‌اند از آن تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض مستقل‌اند [یعنی در تمام تجزیه‌های ابتدایی مینیمال I یکسان‌اند].

اثبات. اکنون این مطلب بلافاصله از ۱۷.۴ به‌دست می‌آید زیرا آن نتیجه نشان می‌دهد که به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$ داریم که P با یکی از ایدآلهای P_1، $\cdots$، P_n برابر است اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $\sqrt{(I : a)} = P$. چون این گزارهٔ دوم از هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض I مستقل است گزارهٔ اول نیز باید مستقل باشد. ■

قضیهٔ فوق یکی از قضیه‌های اساسی جبر تعویضپذیر است. این قضیه باعث مطرح شدن مفهوم "ایدآل اول وابسته" به‌یک ایدآل تجزیه‌پذیر می‌شود.

۱۹.۴ تعریف. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیری از حلقهٔ تعویضپذیر R و تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n ، \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. در این صورت مجموعهٔ nعضوی زیر را

$$\{P_1, \ldots, P_n\},$$

که بنابر ۱۸.۴ از هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض I مستقل است، مجموعهٔ ایدآلهای اول وابسته به I می‌نامیم و با $\operatorname{ass} I$ یا $\operatorname{ass}_R I$ نشان می‌دهیم. عضوهای $\operatorname{ass} I$ را ایدآلهای اول وابسته به I یا اولهای وابسته به I می‌نامیم.

۲۰.۴ تذکر. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیری از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. از ۱۷.۴ نتیجه می‌شود که $P \in \operatorname{ass} I$ اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a)$ ایدآل Pـابتدایی باشد، و این شرط برقرار است اگر و تنها اگر $b \in R$ وجود داشته باشد که $\sqrt{(I : b)} = P$.

۲۱.۴* تمرین. فرض کنیم $f : R \to S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر باشد. نماد تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم $\mathcal{I}$ ایدآل تجزیه‌پذیری از S باشد.

یک) با فرض اینکه تجزیهٔ

$$\mathcal{I} = \mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n ، \sqrt{\mathcal{Q}_i} = \mathcal{P}_i$$

تجزیهٔ ابتدایی $\mathcal{I}$ باشد، نشان دهید تجزیهٔ

$$\mathcal{I}^c = \mathcal{Q}_1^c \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_n^c \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n ، \sqrt{\mathcal{Q}_i^c} = \mathcal{P}_i^c$$

تجزیهٔ ابتدایی $\mathcal{I}^c$ است. (توجه کنید که بنابر ۴۳.۲ (چهار) به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $\sqrt{\mathcal{Q}_i^c} = (\sqrt{\mathcal{Q}_i})^c$.) نتیجه بگیرید که $\mathcal{I}^c$ ایدآل تجزیه‌پذیر R است و

$$\operatorname{ass}_R(\mathcal{I}^c) \subseteq \{\mathcal{P}^c \cdot \mathcal{P} \in \operatorname{ass}_S \mathcal{I}\}.$$

دو) حال فرض کنید f پوشا باشد. نشان دهید که اگر تجزیهٔ ابتدایی نخست در قسمت (یک) مینیمال باشد آن‌گاه تجزیهٔ دوم نیز چنین است و نتیجه بگیرید که در این حالت

$$\operatorname{ass}_R(\mathcal{I}^c) = \{\mathcal{P}^c : \mathcal{P} \in \operatorname{ass}_S \mathcal{I}\}.$$

۲۲.۴* تمرین. فرض‌کنیم $f : R \to S$ همریختی پوشای حلقه‌های تعویضپذیر باشد. نماد توسیع مذکور در ۴۱.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم I،Q_1،$\cdots$،Q_n،P_1،$\cdots$،P_n ایدآلهایی از R باشند که همگی شامل $\operatorname{Ker} f$اند. نشان دهید تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی I است اگر و تنها اگر تجزیهٔ

$$I^e = Q_1^e \cap \cdots \cap Q_n^e \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{،} \sqrt{(Q_i^e)} = P_i^e$$

تجزیهٔ ابتدایی I^e باشد و در این حالت تجزیهٔ نخست مینیمال است اگر و تنها اگر تجزیهٔ دوم مینیمال باشد.

نتیجه بگیرید که I ایدآل تجزیه‌پذیر R است اگر و تنها اگر I^e ایدآل تجزیه‌پذیر S باشد و در این حالت

$$\operatorname{ass}_S(I^e) = \{P^e : P \in \operatorname{ass}_R I\}.$$

۲۳.۴ تذکر. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. به‌نتایج تمرین ۲۲.۴ در مورد همریختی طبیعی از حلقهٔ R به R/I توجه کنید. از جملهٔ این نتایج این است که اگر J ایدآلی از R باشد که $J \supseteq I$ آن‌گاه J ایدآل تجزیه‌پذیر R است اگر و تنها اگر J/I ایدآل تجزیه‌پذیر R/I باشد و در این حالت

$$\operatorname{ass}_{R/I}(J/I) = \{P/I : P \in \operatorname{ass}_R J\}.$$

روشن است که در شرایط ۲۰.۴ هر ایدآل اول وابسته به I شامل I و لذا متعلق به‌مجموعهٔ $\operatorname{Var}(I)$ مذکور در ۴۸.۳ است. عضوهای مینیمال $\operatorname{Var}(I)$ را در ۵۲.۳ مورد بحث قرار دادیم، اکنون خوب است یک بار دیگر آنها را در مبحث تجزیهٔ ابتدایی بررسی کنیم.

۲۴.۴ قضیه. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیری از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. در این صورت P ایدآل اول مینیمال I است (یعنی P نسبت به‌رابطهٔ مشمولیت عضو مینیمال مجموعهٔ $\operatorname{Var}(I)$ است، که این مجموعه متشکل است از ایدآلهای اول R که I را شامل می‌شوند ـ ۵۲.۳ را ببینید) اگر و تنها اگر P عضوی مینیمال (باز هم نسبت به‌رابطهٔ مشمولیت) از مجموعهٔ $\operatorname{ass} I$ باشد.

در نتیجه تمام ایدآلهای اول مینیمال I متعلق به $\operatorname{ass} I$ هستند و لذا I تنها تعدادی متناهی ایدآل اول مینیمال دارد، و اگر $P_1 \in \operatorname{Spec}(R)$ و $P_1 \supseteq I$ آن‌گاه $P_2 \in \operatorname{ass} I$ وجود دارد که $P_1 \supseteq P_2$.

اثبات. فرض کنید تجزیهٔ

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n \text{ ،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. توجه کنید که $P \supseteq I$ اگر و تنها اگر $P = \sqrt{P} \supseteq \sqrt{I}$ و بنابر ۳۰.۲

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=۱}^{n} \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=۱}^{n} P_i.$$

لذا از ۵۵.۳ نتیجه می‌شود که $P \supseteq I$ اگر و تنها اگر به‌ازای jای که $۱ \leq j \leq n$، $P \supseteq P_j$، یعنی اگر و تنها اگر به‌ازای ایدآلی چون $P' \in \operatorname{ass} I$، $P \supseteq P'$.

($\Longleftarrow$) فرض کنید P ایدآل اول مینیمال I باشد. در این صورت بنابر برهان فوق $P' \in \operatorname{ass} I$ وجود دارد که $P \supseteq P'$. چون $\operatorname{ass} I \subseteq \operatorname{Var}(I)$ پس $P = P'$، و در نتیجه P باید نسبت به‌رابطهٔ مشمولیت عضو مینیمال $\operatorname{ass} I$ باشد.

($\Longrightarrow$) فرض کنید P یک عضو مینیمال $\operatorname{ass} I$ باشد. بنابراین $P \supseteq I$ و لذا بنابر ۵۳.۳ یک ایدآل اول مینیمال I چون P' وجود دارد که $P \supseteq P'$. در نتیجه بنابر پاراگراف اول این اثبات، $P'' \in \operatorname{ass} I$ وجود دارد که $P' \supseteq P''$. بنابراین

$$P \supseteq P' \supseteq P''$$

و چون P عضو مینیمال $\operatorname{ass} I$ است باید داشته باشیم $P = P' = P''$. در نتیجه ایدآل $P = P'$ ایدآل اول مینیمال I است.

احکام مهم انتهای قضیه از ۵۳.۳ و این نکته که مجموعهٔ $\operatorname{ass} I$ متناهی است نتیجه می‌شوند.■

۲۵.۴ اصطلاحات. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. هم‌اکنون در ۲۴.۴ دیدیم که عضوهای مینیمال $\operatorname{ass} I$ دقیقاً همان ایدآلهای اول مینیمال Iاند: این ایدآلهای اول را اولهای مینیمال I یا اولهای منفرد I می‌نامیم. بقیهٔ اولهای وابسته به I یعنی آن اولهای وابسته به I را که مینیمال نیستند اولهای محاطی I می‌نامیم.

توجه کنید که یک ایدآل تجزیه‌پذیر در یک حلقهٔ تعویضپذیر R ممکن است هیچ اول محاطی نداشته باشد: هر ایدآل ابتدایی R چون Q یقیناً تجزیه‌پذیر است زیرا "$Q = Q$" یک تجزیهٔ ابتدایی مینیمال Q است و لذا $\sqrt{Q}$ تنها اول وابسته به Q است.

۲۶.۴ تمرین. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $\sqrt{I} = I$. نشان دهید I هیچ اول محاطی ندارد.

با توجه به‌اولین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی و آنچه برای زمینه‌سازی بحث تجزیهٔ ابتدایی در ابتدای این فصل دربارهٔ نظریهٔ تجزیهٔ یکتا در د.ا.ا گفته شد سؤال دیگری دربارهٔ یکتایی تجزیه‌های

ابتدایی مینیمال مطرح می‌شود: آیا تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ ایدآل تجزیه‌پذیر I در حلقهٔ تعویضپذیر R یکتاست؟ برای اینکه ببینید پاسخ این سؤال همیشه مثبت نیست، به‌مثال زیر توجه کنید.

۲۷.۴ مثال. فرض کنید K هیأت و $R = K[X, Y]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X و Y باشد. فرض کنید در R

$$M = (X, Y), \quad P = (Y), \quad Q = (X, Y^{2}), \quad I = (XY, Y^{2}).$$

توجه کنید که بنابر ۱۵.۳، M یک ایدآل ماکسیمال R است، بنابر ۶۶.۳، P یک ایدآل اول R است و بنابر ۱۱.۴، Q یک ایدآل Mـابتدایی R و متفاوت با M^{2} است. در این صورت تجزیه‌های

$$I = M^{2} \cap P \quad \text{و} \quad I = Q \cap P$$

دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I با جمله‌های Mـابتدایی متمایز هستند.

اثبات. روشن است که $I \subseteq P$ و $I \subseteq M^{2} \subseteq Q$. در نتیجه

$$I \subseteq M^{2} \cap P \subseteq Q \cap P.$$

فرض کنید $f \in Q \cap P$. چون $f \in P$ هر تک‌جمله‌ای که واقعاً در f ظاهر شود شامل Y است. با جمع کردن این تک‌جمله‌ایها که درجه‌شان دست‌کم ۲ است یک چندجمله‌ای چون $g \in I$ تشکیل دهید به‌طوری که $f - g = cY$ و $c \in K$. ادعا می‌کنیم که $c = 0$: اگر چنین نباشد باید داشته باشیم

$$Y = c^{-1}cY \in (Q \cap P) + I = Q \cap P \subseteq Q$$

و لذا $Y = hX + eY^{2}$ و $h, e \in R$ که غیرممکن است. بنابراین $f = g \in I$، و لذا ثابت کرده‌ایم که $I = M^{2} \cap P = Q \cap P$. به‌علاوه این تساویها معرف دو تجزیهٔ ابتدایی از I هستند زیرا $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و بنابر ۹.۴، M^{2} ایدآل Mـابتدایی است. نکتهٔ آخر اینکه هر دو تجزیه مینیمال‌اند زیرا

$$X^{2} \in M^{2} \setminus P, \quad X^{2} \in Q \setminus P, \quad Y \in P \setminus Q, \quad Y \in P \setminus M^{2}.$$

لذا دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال با جمله‌های Mـابتدایی متمایز برای I به‌دست آورده‌ایم. ■

۲۸.۴ تمرین. فرض کنید K هیأت و $R = K[X, Y]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از مجهولهای X و Y باشد. فرض کنید در R، $I = (X^{3}, XY)$.

یک) نشان دهید به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ایدآل (X^{3}, XY, Y^{n}) از R ابتدایی است.

دو) نشان دهید $I = (X) \cap (X^{۲}, Y)$ یک تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I است.
سه) تعداد نامتناهی تجزیهٔ ابتدایی مینیمال متفاوت برای I بیابید.

علی‌رغم مثال و تمرین فوق نتیجهٔ مثبتی در این مورد وجود دارد: ثابت می‌شود که به‌ازای ایدآل تجزیه‌پذیر I در حلقهٔ تعویضپذیر R و به‌ازای هر ایدآل اول مینیمال P وابسته به I، جملهٔ Pـابتدایی در هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ مفروض I به‌طور منحصر به‌فرد توسط I تعیین می‌شود و از آن تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ مفروض مستقل است. (این مطلب متناقض مثال ۲۷.۴ نیست زیرا در آن مثال داریم $\operatorname{ass} I = \{P, M\}$ و چون $P \subset M$ ایدآل I تنها یک اول مینیمال دارد که همان P است و M اول محاطی I است.)

این نتیجهٔ اخیر دربارهٔ یکتایی، موضوع دومین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی است که اکنون به‌آن می‌پردازیم.

۲۹.۴ دومین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $\operatorname{ass} I = \{P_{۱}, \ldots, P_n\}$. فرض کنید تجزیه‌های

$$I = Q_{۱} \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

و

$$I = Q'_{۱} \cap \cdots \cap Q'_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q'_i} = P_i$$

دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشند. (البته در اینجا از محتوای اولین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی (۱۸.۴) و نتایج آن استفاده کرده‌ایم.) در این صورت به‌ازای هر i $(۱ \le i \le n)$ که P_i یک ایدآل اول مینیمال وابسته به I باشد داریم

$$Q_i = Q'_i.$$

به‌عبارت دیگر در هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ مفروض I جملهٔ ابتدایی متناظر با یک ایدآل اول منفرد I به‌طور یکتا توسط I تعیین می‌شود و از آن تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ مفروض مستقل است.

اثبات. اگر $n = ۱$، مطلبی برای اثبات وجود ندارد. بنابراین فرض می‌کنیم $n > ۱$.
فرض کنید P_i یک ایدآل اول مینیمال وابسته به I باشد. حال aای وجود دارد که

$$a \in \bigcap_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} P_j \backslash P_i$$

زیرا در غیر این صورت از ۵۵.۳ نتیجه می‌شود که به‌ازای jای متعلق به $\mathbb{N}$ که $۱ \le j \le n$ و $j \neq i$، $P_j \subset P_i$ که متناقض است با اینکه P_i ایدآل اول مینیمال وابسته به I است.

به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$ که $j \neq i$، $h_j \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a^{h_j} \in Q_j$. فرض کنید $t \in \mathbb{N}$ چنان باشد که

$$t \geq \max\{h_1, \ldots, h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots, h_n\}.$$

در این صورت $a^t \notin P_i$ و لذا نتیجه می‌شود که

$$(I : a^t) = \left(\bigcap_{j=1}^{n} Q_j : a^t\right) = \bigcap_{j=1}^{n}(Q_j : a^t) = Q_i$$

زیرا Q_i ایدآل P_iـابتدایی است. لذا نشان داده‌ایم که اگر عدد صحیح t به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد آن‌گاه $Q_i = (I : a^t)$. به‌همین نحو اگر t به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد آن‌گاه $Q'_i = (I : a^t)$. در نتیجه همان‌طور که ادعا کردیم $Q_i = Q'_i$. ■

در فصل بعد دومین قضیهٔ یکتایی را به‌طریق دیگری اثبات می‌کنیم (۴۲.۵ را ببینید) زیرا یک روش روشنگرانه برای اثبات آن استفاده از نظریهٔ ایدآلهای حلقه‌های کسرهاست که هنوز آنها را در این کتاب مورد بحث قرار نداده‌ایم ولی یکی از مباحث اصلی فصل بعد است.

مبحث مهم دیگری که تاکنون صحبت زیادی در مورد آن نکرده‌ایم مسألهٔ وجود تجزیه‌های ابتدایی ایدآلهای سرهٔ حلقه‌های تعویضپذیر است. اگر خواننده دقت کرده باشد احتمالاً از مطالب ابتدای این فصل می‌داند که هر ایدآل سرهٔ د.ا.ا دارای تجزیهٔ ابتدایی است. خواننده‌ای که انتظار داشته است که هر ایدآل سرهٔ هر حلقهٔ تعویضپذیر تجزیهٔ ابتدایی داشته باشد در تمرین زیر خلاف انتظار خود را خواهد دید.

۳۰.۴ تمرین. نشان دهید که ایدآل صفرِ حلقهٔ $C[0,1]$ متشکل از تمام توابع حقیقی‌مقدار پیوسته روی بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ تجزیه‌پذیر نیست، یعنی تجزیهٔ ابتدایی ندارد.

(راهنمایی: فرض کنید این ایدآل صفر تجزیه‌پذیر باشد و در پی یافتن تناقض باشید. فرض کنید $P \in \operatorname{ass}_{C[0,1]} 0$ و لذا بنابر ۱۷.۴ یک $f \in C[0,1]$ وجود دارد که $\sqrt{(0 : f)} = P$. نشان دهید $P = (0 : f)$ و حداکثر یک عدد حقیقی $a \in [0,1]$ وجود دارد که $f(a) \neq 0$.)

ولی یک قضیهٔ وجودی جالب در مورد تجزیهٔ ابتدایی وجود دارد که نشان می‌دهد هر ایدآل سرهٔ هر حلقهٔ تعویضپذیر نوتری تجزیهٔ ابتدایی دارد. حلقه‌های تعویضپذیر نوتری در ۳۷.۳ معرفی شدند: حلقهٔ تعویضپذیر R نوتری است اگر هر زنجیرهٔ صعودی از ایدآلهای R سرانجام ایستا باشد. این حلقه‌ها را در فصلهای بعدی با تفصیل بیشتری بررسی خواهیم کرد ولی قبل از آن می‌توانیم وجود تجزیه‌های یکتا را در این نوع حلقه‌ها ثابت کنیم.

۳۱.۴ تعریف. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم I تحویلناپذیر است اگر I سره باشد و برابر اشتراک دو ایدآل اکیداً بزرگتر از خودش نباشد.

لذا I تحویلناپذیر است اگر و تنها اگر $I \subset R$، و اگر $I = I_1 \cap I_2$ که در آن I_1 و I_2 ایدآلهای Rاند آن‌گاه $I = I_1$ یا $I = I_2$.

۳۲.۴ تمرین. فرض کنیم $f : R \to S$ همریختی پوشای حلقه‌های تعویضپذیر باشد. نماد توسیع مذکور در ۴۱.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم I ایدآلی از R باشد که $\operatorname{Ker} f$ را شامل شود. نشان دهید I ایدآل تحویلناپذیر R است اگر و تنها اگر I^e ایدآل تحویلناپذیر S باشد.

اثبات وجود تجزیه‌های ابتدایی ایدآلهای سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R از دو قسمت مهم تشکیل می‌شود، نخست اینکه هر ایدآل سرهٔ R برابر با اشتراک تعدادی متناهی ایدآل تحویلناپذیر R است، دوم اینکه هر ایدآل تحویلناپذیر R لزوماً ابتدایی است.

۳۳.۴ قضیه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری باشد. در این صورت هر ایدآل سرهٔ R برابر با اشتراک تعدادی متناهی ایدآل تحویلناپذیر R است.

اثبات. فرض کنید $\sum$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای سره‌ای از R باشد که برابر با اشتراک تعدادی متناهی ایدآل تحویلناپذیر R نیستند. هدف ما این است که نشان دهیم $\sum = \varnothing$. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت چون R نوتری است از ۳۷.۳ نتیجه می‌شود که $\sum$ نسبت به‌رابطهٔ مشمولیت یک عضو ماکسیمال چون I دارد.

I خودش تحویلناپذیر نیست زیرا در غیر این صورت می‌توانیم بنویسیم $I = I \cap I$ و در نتیجه I متعلق به $\sum$ نخواهد بود. چون I سره است پس نتیجه می‌شود که $I = I_1 \cap I_2$ که I_1 و I_2 ایدآلهایی از Rاند که

$$I \subset I_1 \quad \text{و} \quad I \subset I_2$$

توجه کنید که این مطلب مستلزم آن است که هر دو ایدآل I_1 و I_2 سره باشند. چون I عضو ماکسیمال $\sum$ است باید داشته باشیم که به‌ازای $i = 1, 2$، $I_i \notin \sum$. چون I_1 و I_2 هر دو سره‌اند نتیجه می‌شود که هر دو برابر با اشتراک تعداد متناهی ایدآل سرهٔ R هستند. در نتیجه ایدآل $I = I_1 \cap I_2$ نیز دارای همان ویژگی است و این با تعلق I به $\sum$ تناقض دارد.

بنابراین $\sum = \varnothing$ و اثبات کامل است. ■

۳۴.۴ قضیه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری و I ایدآل تحویلناپذیر R باشد. در این صورت I ابتدایی است.

اثبات. بنابر تعریف ایدآل تحویلناپذیر (۳۱.۴)، $I \subset R$. فرض کنید $a, b \in R$ چنان باشند

که $ab \in I$ ولی $b \notin I$. زنجیرهٔ زیر

$$(I : a) \subseteq (I : a^{۲}) \subseteq \cdots \subseteq (I : a^{i}) \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای R است و لذا چون R نوتری است $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $(I : a^n) = (I : a^{n+i})$.

نشان می‌دهیم که $I = (I + Ra^n) \cap (I + Rb)$. روشن است که

$$I \subseteq (I + Ra^n) \cap (I + Rb).$$

فرض کنید $r \in (I + Ra^n) \cap (I + Rb)$. در این صورت می‌توانیم بنویسیم

$$r = g + ca^n = h + db$$

که در آن $g, h \in I$ و $c, d \in R$. لذا $ra = ga + ca^{n+۱} = ha + dab$ و چون $ab, g, h \in I$ داریم

$$ca^{n+۱} = ha + dab - ga \in I.$$

در نتیجه (با توجه به‌ویژگی n)، $c \in (I : a^{n+۱}) = (I : a^n)$ و لذا $r = g + ca^n \in I$. بنابراین چنانکه ادعا کرده بودیم:

$$I = (I + Ra^n) \cap (I + Rb)$$

می‌دانیم I تحویلناپذیر است و $I \subset I + Rb$ زیرا $b \notin I$. در نتیجه $I = I + Ra^n$ و $a^n \in I$. بنابراین ثابت کرده‌ایم که I ایدآل ابتدایی R است. ■

۳۵.۴ نتیجه. فرض کنید I ایدآل سره‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. در این صورت I تجزیهٔ ابتدایی دارد و لذا بنابر ۱۶.۴ تجزیهٔ ابتدایی مینیمال نیز دارد.

اثبات. این مطلب اکنون بلافاصله از دو نتیجهٔ قبل حاصل می‌شود: بنابر ۳۳.۴، I برابر با اشتراک تعدادی متناهی ایدآل تحویلناپذیر R است و بنابر ۳۴.۴ هر ایدآل تحویلناپذیر R ابتدایی است.■

لذا کل نظریهٔ مربوط به اولهای وابسته به‌ایدآلهای تجزیه‌پذیر (۱۹.۴ را ببینید) در مورد ایدآلهای سرهٔ حلقه‌های تعویضپذیر نوتری نیز برقرار است. این نظریه در واقع ابزار بسیار مؤثری برای مطالعهٔ این حلقه‌هاست. ولی چگونگی استفاده از این ابزار را در فصل ۸ که به‌بررسی نظریهٔ بنیادی این حلقه‌ها اختصاص دارد می‌بینیم.

۳۶.۴ تمرین. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد. نمادهای توسیع و تحدید۲.۴۱ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to R[X]$ به‌کار می‌بریم. فرض می‌کنیم Q و I ایدآل Rاند.

یک) نشان دهید Q ایدآل ابتدایی R است اگر و تنها اگر Q^e ایدآل ابتدایی $R[X]$ باشد.

دو) نشان دهید اگر I ایدآل تجزیه‌پذیر R و تجزیهٔ

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n\text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی I باشد آن‌گاه تجزیهٔ

$$I^e = Q_۱^e \cap \cdots \cap Q_n^e \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n\text{،} \sqrt{Q_i^e} = P_i^e$$

تجزیهٔ ابتدایی ایدآل I^e از $R[X]$ است.

سه) نشان دهید اگر I ایدآل تجزیه‌پذیر R باشد آن‌گاه

$$\mathrm{ass}_{R[X]}\, I^e = \{P^e : P \in \mathrm{ass}_R\, I\}.$$

۳۷.۴ تمرین. فرض کنید R یک حلقهٔ تعویضپذیر نوتری و Q ایدآل Pـابتدایی R باشد. بنابر ۳۳.۴، Q برابر با اشتراک تعدادی متناهی ایدآل تحویلناپذیر R است. با تظریف این تجزیه می‌توانیم عبارت

$$Q = \bigcap_{i=۱}^{n} J_i$$

را به‌دست آوریم که در آن (به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$) J_i تحویلناپذیر است و در اشتراک فوق زائد نیست و لذا به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$

$$\bigcap_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{n} J_j \not\subseteq J_i.$$

بنابر ۳۴.۴، ایدآلهای $J_۱, \ldots, J_n$ همه ابتدایی‌اند.

ثابت کنید به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، J_i ایدآل Pـابتدایی است.

۳۸.۴ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X_۱, \ldots, X_n]$ روی هیأت K از مجهولهای $X_۱, \ldots, X_n$ باشد و $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in K$. فرض کنید $r \in \mathbb{N}$ و $۱ \leq r \leq n$. نشان دهید که به‌ازای هر $\{t_۱, \ldots, t_r\}$ که $t_۱, \ldots, t_r \in \mathbb{N}$، ایدآل زیر از R ابتدایی است:

$$((X_۱ - \alpha_۱)^{t_۱}, \ldots, (X_r - \alpha_r)^{t_r})$$

۵

حلقهٔ کسرها

این فصل به تعمیم پرفایدهٔ موضوعی که در ۳۱.۱ دیدیم اختصاص دارد: موضوع ساختن هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح. روش ساختن را یادآوری می‌کنیم: اگر R دامنه‌ای صحیح باشد آن‌گاه $S := R\backslash\{\circ\}$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R (به مفهومی که در ۴۳.۳ گفتیم) است (یعنی $1 \in S$ و S تحت ضرب‌بسته است). رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را روی $R \times S$ به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم

$$(a,s) \sim (b,t) \quad \Longleftrightarrow \quad at - bs = \circ$$

که در آن $(a,s),(b,t) \in R \times S$؛ ردهٔ هم‌ارزی شامل (a,s) (که $(a,s) \in R \times S$) را با a/s نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را می‌توان به‌گونه‌ای به ساختار هیأت مجهز کرد که قواعد جمع و ضرب آن کاملاً شبیه به قواعد آشنای دبستانی جمع و ضرب کسرها باشد.

روش تعمیمی که در این فصل مطرح می‌کنیم برای هر زیرمجموعهٔ ضربی‌بسته چون S از هر حلقهٔ تعویض‌پذیر دلخواه چون R قابل کاربرد است: در اینجا نیز رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ $R \times S$ تعریف می‌کنیم ولی در این حالت تعریف این رابطه پیچیده‌تر باید باشد تا اشکال ناشی از وجود احتمالی مقسوم‌علیه‌های صفر برطرف شود. قطع‌نظر از این پیچیدگی، این روش ساختن بسیار مشابه ساختن هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح است، اگرچه عمل ضرب، آن ویژگیهای خوب عمل ضرب هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح را ندارد: نخست آنکه غالباً هیأت به‌دست نمی‌آوریم و در

واقع از این روش کلی ساختن، حلقه‌ای به‌دست می‌آوریم که حلقهٔ کسرهای R نسبت به زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ S نامیده می‌شود و با $S^{-1}R$ نشان داده می‌شود، دوم آنکه این حلقهٔ کسرها ممکن است مقسوم‌علیه‌های صفری داشته باشد که خود صفر نیستند، دیگر آنکه اگرچه یک همریختی حلقه‌ای طبیعی چون $f : R \to S^{-1}R$ وجود دارد ولی این نگاشت لزوماً یک‌به‌یک نیست.

ولی یکی از مزایای آن که باید در همین آغازکار به آن اشاره کنیم این است که یکی از مثالهای بسیار بنیادی این حلقه مثالی است که در آن زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ S از R متمم یک ایدآل اول چون P از R، یعنی $R\backslash P$، است در این حالت حلقهٔ کسرها یعنی $S^{-1}R$ حلقه‌ای شبه‌موضعی است، که با R_P نشان داده می‌شود؛ به‌علاوه ساختن R_P از R، به‌ازای Pی مناسب، کار پرفایده‌ای در جبر تعویضپذیر است. این کار را موضعی‌سازی R در P می‌نامند.

۱.۵ لم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. رابطهٔ $\sim$ را روی $R \times S$ به‌صورت زیر تعریف کنید: به‌ازای $(a, s), (b, t) \in R \times S$

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in S : u(ta - sb) = 0$$

در این صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

اثبات. روشن است که $\sim$ بازتابی و متقارن است: به یاد بیاورید که $1 \in S$. فرض کنید $(a, s), (b, t), (c, u) \in R \times S$ که $(a, s) \sim (b, t)$ و $(b, t) \sim (c, u)$. لذا $v, w \in S$ وجود دارند که $v(ta - sb) = 0 = w(ub - tc)$. از تساوی اول از این دو تساوی نتیجه می‌شود که $wuvta = wuvsb$ و از تساوی دوم نتیجه می‌شود که $vswub = vswtc$. بنابراین

$$wtv \in S \quad \text{و} \quad wtv(ua - sc) = 0$$

در نتیجه $(a, s) \sim (c, u)$. بنابراین $\sim$ رابطهٔ ترایا و لذا رابطهٔ هم‌ارزی است. ■

۲.۵ قضیه، اصطلاح و نمادگذاری. فرض کنید حالت ۱.۵ برقرار است و لذا S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R است. به‌ازای $(a, s) \in R \times S$، ردهٔ هم‌ارزیِ شامل (a, s) را با a/s یا $\frac{a}{s}$ و مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $S^{-1}R$ تحت عملهای

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \quad \text{و} \quad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

به‌ازای a و bهای متعلق به R، و t و sهای متعلق به S، حلقه‌ای تعویضپذیر است. این حلقهٔ جدید $S^{-1}R$ حلقهٔ کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود. عضو صفر آن $0/1$ و همانی ضربی آن $1/1$ است.

یک همریختی حلقه‌ای چون $f : R \to S^{-1}R$ وجود دارد که به‌ازای $r \in R$، $f(r) = r/1$. این همریختی را همریختی حلقه‌ای طبیعی می‌نامیم.

اثبات. اثبات این قضیه ساده ولی خسته‌کننده است: باید نشان داد که فرمولهای مذکور در قضیه برای تعریف عملهای جمع و ضرب بی‌ابهام‌اند و اصول موضوع حلقهٔ تعویضپذیر صادق‌اند. در آن صورت روشن است که f همریختی حلقه‌ای است.

تنها نشان می‌دهیم که فرمول داده‌شده برای جمع بی‌ابهام است و اثبات بقیهٔ مطالب را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم: قطعاً برای دانشجویان این درس مفید است که دست‌کم یک‌بار چنین کاری را به‌طور کامل انجام دهند! لذا فرض کنید عضوهای $a, a', b, b' \in R$ و $s, s', t, t' \in S$ چنان‌اند که در $S^{-1}R$

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'} \quad \text{و} \quad \frac{b}{t} = \frac{b'}{t'}.$$

لذا $u, v \in S$ وجود دارند که $u(s'a - sa') = 0 = v(t'b - tb')$. از تساوی اول از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم که

$$uv(s't'ta - stt'a') = 0$$

و از تساوی دوم نتیجه می‌گیریم که

$$uv(s't'sb - sts'b') = 0.$$

این دو معادله را جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم که

$$uv(s't'(ta + sb) - st(t'a' + s'b')) = 0$$

و لذا، چون $uv \in S$، سرانجام نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{ta + sb}{st} = \frac{t'a' + s'b'}{s't'}$$

بقیهٔ اثبات به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ■

۳.۵* تمرین. اثبات ۲.۵ را کامل کنید. (شاید تذکر این نکته مفید باشد که وقتی ثابت شد که فرمولهای داده‌شده برای قواعد جمع و ضرب بی‌ابهام‌اند، آن‌گاه با استفاده از آن می‌توان کار اثبات برقراری اصول موضوع حلقهٔ تعویضپذیر را تا حد زیادی ساده کرد. نکته اینجاست که به‌ازای مثلاً $a, b \in R$ و $s, t \in S$، عضو $a/s \in S^{-1}R$ را می‌توان به‌صورت

$$\frac{a}{s} = \frac{ta}{ts}$$

نوشت (زیرا $((ts)a - s(ta))\,1 = 0$) و لذا a/s و b/t را می‌توان دارای "مخرج مشترک" کرد. همچنین توجه کنید که

$$\frac{ta}{ts} + \frac{sb}{ts} = \frac{tsta + tssb}{(ts)^2} = \frac{ta + sb}{ts}.$$

لذا مقدار کاری که در حل این تمرین باید انجام داد به اندازه‌ای که در نظر اول شاید باعث هراس خواننده شده نیست.)

۴.۵ تذکر. فرض کنید حالتهای ۱.۵ و ۲.۵ برقرارند.

یک) توجه کنید که به‌ازای هر $s \in S$، $0/s = 0/1 = 0_{S^{-1}R}$.

دو) فرض کنید $a \in R$ و $s \in S$ در این صورت $a/s = 0_{S^{-1}R}$ اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $t(1a - s0) = 0$، یعنی اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $ta = 0$.

سه) لذا حلقهٔ $S^{-1}R$ صفر است، یعنی $0/1 = 1/1$، اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $t1 = 0$، یعنی اگر و تنها اگر $0 \in S$.

چهار) به‌طور کلی حتی اگر $0 \notin S$ و لذا $S^{-1}R$ صفر نباشد، همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ لزوماً یک‌به‌یک نیست: از بند (دو)ی فوق نتیجه می‌شود که

$$\text{Ker}\ f = \{a \in R : \text{وجود داشته باشد که } t \in S \ \ ta = 0\}.$$

پنج) شاید لازم باشد یکی از نکاتی را که به‌عنوان راهنمایی در تمرین ۳.۵ آوردیم تعمیم دهیم. به‌ازای $a \in R$ و $s, t \in S$ داریم $a/s = ta/ts$ و لذا مخرج a/s را می‌توان با ضرب کردن صورت و مخرج در t تغییر داد. این بدین معناست که هر تعداد متناهی از کسرهای صوری متعلق به $S^{-1}R$ را می‌توان دارای مخرج مشترک کرد.

شش) همچنین توجه کنید که جمع کردن کسرهای صوری متعلق به $S^{-1}R$ که مخرج مشترک دارند آسان است: به‌ازای $b, c \in R$ و $s \in S$، داریم

$$\frac{b}{s} + \frac{c}{s} = \frac{b+c}{s}.$$

چه رابطه‌ای بین این روش جدید ساختن حلقهٔ کسرها و روش قبلی ساختن هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح وجود دارد. احتمالاً برخی از خوانندگان متوجه شده‌اند که روش قبلی حالت خاصی از روش جدید است.

۵.۵ تذکر. فرض کنید R دامنهٔ صحیح و $S := R\setminus\{0\}$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. اگر حلقهٔ کسرهای $S^{-1}R$ را به‌صورتی که در ۲.۵ آمد بسازیم، آن‌گاه دقیقاً همان هیأت کسرهای R را به‌دست می‌آوریم. زیرا S متشکل از همهٔ عضوهایی از R است که مقسوم‌علیه صفر

نیستند و لذا به‌ازای $a, b \in R$ و $s, t \in S$، عضو $u \in S$ با ویژگی $u(ta - sb) = ۰$ وجود دارد اگر و تنها اگر $ta - sb = ۰$. لذا رابطهٔ هم‌ارزی مورد استفاده در ۲.۵ (در این حالت خاص) با رابطهٔ هم‌ارزیِ به‌کار رفته در ۳۱.۱ یکسان است، و به‌علاوه عملهای حلقه‌ای روی مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی در هر دو حالت یکسان‌اند.

توجه کنید که در این حالت همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-۱}R$ یک‌به‌یک است و R را به‌صورت زیرحلقه در هیأت کسرهایش می‌نشاند.

۶.۵ تمرین. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر R و Φ نشاندهندهٔ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ضربی‌بستهٔ R باشد که از I مجزایند. نشان دهید Φ نسبت به رابطهٔ مشمولیت دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد، و S یک عضو ماکسیمال Φ است اگر و تنها اگر $R \backslash S$ یک ایدآل اول مینیمال شامل I باشد (۵۲.۳ را ببینید).

۷.۵ تمرین. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم S اشباع‌شده است اگر شرط زیر برقرار باشد: اگر $a, b \in R$ و $ab \in S$ آن‌گاه a و b هر دو متعلق به S باشند.

یک) نشان دهید که S اشباع‌شده است اگر و تنها اگر متمم S در R، یعنی $R \backslash S$، اجتماع خانواده‌ای از ایدآلهای اول R باشد (چنین خانواده‌ای ممکن است تهی باشد).

دو) فرض کنید T زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ دلخواهی از R باشد. فرض کنید $\overline{T}$ نشاندهندهٔ اشتراک همهٔ زیرمجموعه‌های ضربی‌بستهٔ اشباع‌شدهٔ R باشد که T را شامل می‌شوند. نشان دهید $\overline{T}$ زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ اشباع‌شده‌ای از R است که T را شامل می‌شود و لذا $\overline{T}$ کوچکترین زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ اشباع‌شدهٔ R است که T را شامل می‌شود، به این معنا که $\overline{T}$ در هر زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ اشباع‌شدهٔ R که شامل T باشد قرار دارد.

($\overline{T}$ را حاصل اشباع T می‌نامیم.)

سه) ثابت کنید که، با توجه به نمادهای بند (دو)ی فوق،

$$\overline{T} = R \backslash \bigcup_{\substack{P \in \operatorname{Spec}(R) \\ P \cap T = \varnothing}} P$$

وقت آن رسیده است مثالی بیاوریم و نشان دهیم که لازم نیست همریختی حلقه‌ای طبیعی از حلقه‌ای تعویضپذیر به یکی از حلقه‌های ناصفر کسرهایش یک‌به‌یک باشد.

۸.۵ مثال. فرض کنید $R = \mathbb{Z}/۶\mathbb{Z}$ و $S = \{\overline{۱}, \overline{۳}, \overline{۵}\}$، که در اینجا مقصود از $\overline{n}$ نگارهٔ طبیعی $n \in \mathbb{Z}$ در R است. در این صورت هستهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-۱}R$ برابر $\operatorname{Ker} f = \overline{۲}R$ است.

اثبات. بنابر ۴.۵(چهار)،

$$\mathrm{Ker}\ f = \{\overline{n} \in R : s\overline{n} = \circ \text{ و به‌ازای } n \in \mathbb{Z}\text{ ای} s \in S\}.$$

چون $\overline{۱}$ و $\overline{۵}$ در R وارونپذیرند نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ker}\ f = (\circ : \overline{۳})$ و به‌آسانی دیده می‌شود که این ایدآل برابر $\overline{۲}R$ است. ■

حال می‌خواهیم همریختی حلقه‌ای از حلقه‌ای تعویضپذیر به یکی از حلقه‌های کسرهایش را با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار دهیم.

۹.۵ تذکر. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R و $f : R \to S^{-۱}R$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. توجه کنید که f دارای ویژگیهای زیر است.

یک) به‌ازای هر $s \in S$، $f(s) = s/۱$ در $S^{-۱}R$ وارونپذیر و $۱/s$ وارون آن است.

دو) بنابر ۴.۵(چهار)، اگر $a \in \mathrm{Ker}\ f$ آن‌گاه $s \in S$ وجود دارد که $sa = \circ$.

سه) هر عضو a/s از $S^{-۱}R$ را (که در آن $a \in R$ و $s \in S$) می‌توان به‌صورت $a/s = f(a)(f(s))^{-۱}$ نوشت، زیرا

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{۱}\frac{۱}{s} = \frac{a}{۱}\left(\frac{s}{۱}\right)^{-۱} = f(a)(f(s))^{-۱}.$$

در حالت ۹.۵ حلقهٔ $S^{-۱}R$ مجهز به همریختی طبیعی f را می‌توان به‌عنوان Rـجبر در نظر گرفت: ۹.۱ را ببینید. به‌زودی خواهیم دید که ویژگیهای f مذکور در ۹.۵، $S^{-۱}R$ را، به‌عنوان Rـجبر، اساساً به‌طور یکتا معین می‌کند: البته باید منظورمان را از این عبارت دقیقاً مشخص کنیم.

۱۰.۵ قضیه. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. همچنین فرض کنید $f : R \to S^{-۱}R$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. فرض کنید R' نیز حلقهٔ تعویضپذیر و $g : R \to R'$ یک همریختی حلقه‌ای باشد که به‌ازای هر $s \in S$، $g(s)$ عضوی وارونپذیر از R' است. در این صورت همریختی حلقه‌ای منحصر به‌فردی چون $h : S^{-۱}R \to R'$ وجود دارد که $h \circ f = g$.

در واقع، به‌ازای هر $a \in R$ و $s \in S$

$$h(a/s) = g(a)(g(s))^{-۱}.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که فرمول داده شده در قضیه بی‌ابهام است. فرض کنید $a, a' \in R$ و $s, s' \in S$ و در $S^{-۱}R$: $a/s = a'/s'$. لذا $t \in S$ وجود دارد که $t(s'a - sa') = \circ$. حاصل اثر همریختی g بر طرفین این تساوی عبارت است از

$$g(t)(g(s')g(a) - g(s)g(a')) = g(\circ) = \circ.$$

ولی بنابه فرض $g(t)$، $g(s)$ و $g(s')$ در R' وارونپذیرند. بنابراین تساوی فوق را در حاصلضرب وارونهای این عضوها ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$g(a)(g(s))^{-۱} = g(a')(g(s'))^{-۱}.$$

در نتیجه می‌توانیم نگاشتی چون $h : S^{-۱}R \to R'$ با فرمول داده شده در قضیه تعریف کنیم. حال اثبات اینکه h همریختی حلقه‌ای است تمرین ساده‌ای است: به یاد بیاورید که دوکسر صوری در $S^{-۱}R$ را می‌توان دارای مخرج مشترک کرد. همچنین مشاهده می‌کنیم که $h \circ f = g$ زیرا به‌ازای هر $a \in R$ داریم

$$(h \circ f)(a) = h(a/۱) = g(a)(g(۱))^{-۱} = g(a).$$

حال باید ثابت کنیم که h تنها همریختی با ویژگیهای مذکور است. لذا فرض کنید $h' : S^{-۱}R \to R'$ یک همریختی حلقه‌ای است که $h' \circ f = g$. در این صورت به‌ازای هر $a \in R$ داریم $h'(a/۱) = (h' \circ f)(a) = g(a)$. ازجمله به‌ازای هر $s \in S$ داریم $h'(s/۱) = g(s)$. به یاد بیاورید که $g(s)$ عضو وارونپذیر R' است و لذا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $h'(۱/s) = (g(s))^{-۱}$ زیرا

$$h'\left(\frac{۱}{s}\right) g(s) = h'\left(\frac{۱}{s}\right) h'\left(\frac{s}{۱}\right) = h'\left(\frac{۱}{s}\frac{s}{۱}\right) = h'(۱_{S^{-۱}R}) = ۱_{R'}.$$

در نتیجه به‌ازای هر $a \in R$ و $s \in S$ باید داشته باشیم

$$h'\left(\frac{a}{s}\right) = h'\left(\frac{a}{۱}\frac{۱}{s}\right) = h'\left(\frac{a}{۱}\right) h'\left(\frac{۱}{s}\right) = g(a)(g(s))^{-۱}$$

و لذا دقیقاً یک همریختی حلقه‌ای چون h با ویژگیهای مطلوب وجود دارد. ■

۱۱.۵ تمرین. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌هایی ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند که $S \subseteq T$. نشان دهید که یک همریختی حلقه‌ای چون $h : S^{-۱}R \to T^{-۱}R$ وجود دارد که به‌ازای هر $a \in R$ و $s \in S$، $h(a/s) = a/s \in T^{-۱}R$.

(در این‌صورت h را همریختی حلقه‌ای طبیعی می‌نامیم.)

۱۲.۵ تمرین. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌هایی ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشند که $S \subseteq T$. فرض کنید $h : S^{-۱}R \to T^{-۱}R$ همریختی حلقه‌ای طبیعی مذکور در ۱۱.۵ باشد. نشان دهید گزاره‌های زیر هم‌ارزند.

یک) همریختی h یکریختی است.

دو) به‌ازای هر $t \in T$، عضو $t/۱ \in S^{-۱}R$ در $S^{-۱}R$ وارونپذیر است.

سه) به‌ازای هر $t \in T$، $a \in R$ وجود دارد که $at \in S$.
چهار) داریم $T \subseteq \overline{S}$ که در آن $\overline{S}$ نشاندهندهٔ حاصل اشباع S است (۷.۵ را ببینید.)
پنج) هرگاه $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $P \cap S = \varnothing$ آن‌گاه $P \cap T = \varnothing$.

در حالت ۱۰.۵ همریختی طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ و همریختی حلقه‌ای $g : R \to R'$، حلقه‌های $S^{-1}R$ و R' را به Rـجبر تبدیل می‌کنند. همریختی حلقه‌ای h مذکور در ۱۰.۵ در واقع به مفهوم زیر همریختی Rـجبرها (یا Rـجبری) است.

۱۳.۵ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و R' و R''، Rـجبرهای تعویضپذیر مجهز به همریختیهای ساختاری $f' : R \to R'$ و $f'' : R \to R''$ باشند. همریختی Rـجبری از R' به R'' یک همریختی حلقه‌ای چون $\psi : R' \to R''$ است که $\psi \circ f' = f''$.
می‌گوییم که همریختی Rـجبری ψ یکریختی Rـجبری (یا یکریختی Rـجبرها) است اگر ψ یکریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت $(\psi)^{-1} : R'' \to R'$ نیز یکریختی Rـجبری است زیرا (بنابر ۷.۱ همریختی حلقه‌ای است و)

$$(\psi)^{-1} \circ f'' = (\psi)^{-1} \circ \psi \circ f' = f'.$$

۱۴.۵* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و

$$\psi : R_1 \to R_2 , \qquad \varphi : R_2 \to R_3$$

همریختیهای Rـجبرهای تعویضپذیر باشند. نشان دهید

$$\varphi \circ \psi : R_1 \to R_3$$

همریختی Rـجبری است. نتیجه بگیرید که اگر ψ و φ یکریختیهای Rـجبری باشند آن‌گاه $\varphi \circ \psi$ نیز چنین است.

حال می‌توانیم نشان دهیم که در حالت ۹.۵ ویژگیهای Rـجبر $S^{-1}R$ مذکور در ۹.۵، $S^{-1}R$ را به‌طور یکتا معین می‌کند مشروط بر اینکه Rـجبرهای یکریخت را یکی بگیریم.

۱۵.۵ قضیه. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید R' یک Rـجبر تعویضپذیر مجهز به همریختی ساختاری حلقه‌ای $g : R \to R'$ باشد و فرض کنید
یک) به‌ازای هر $s \in S$، $g(s)$ در R' وارونپذیر باشد،
دو) اگر $a \in \mathrm{Ker}\, g$ آن‌گاه $s \in S$ وجود داشته باشد که $sa = 0$،

سه) هر عضو R' را بتوان به‌صورت $g(a)(g(s))^{-1}$ نوشت که در آن $a \in R$ و $s \in S$.
در این صورت یک یکریختی منحصر به‌فرد Rـجبری از $S^{-1}R$ به R' وجود دارد. به‌عبارت دیگر یک یکریختی منحصر به‌فرد حلقه‌ای چون $h : S^{-1}R \to R'$ وجود دارد که $h \circ f = g$، که در آن $f : R \to S^{-1}R$ همریختی حلقه‌ای طبیعی است.

اثبات. بنابر ۱۰.۵ یک همریختی حلقه‌ای چون $h : S^{-1}R \to R'$ وجود دارد که $h \circ f = g$ و به‌علاوه به‌ازای هر $a \in R$ و $s \in S$

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)(g(s))^{-1}.$$

بنابراین تنها باید نشان دهیم که h دوسویی است.
از شرط (سه) روشن است که h پوشاست. فرض کنید $a \in R$ و $s \in S$ و $a/s \in \operatorname{Ker} h$. در این‌صورت $g(a)(g(s))^{-1} = 0$ و لذا $g(a) = 0$ و $a \in \operatorname{Ker} g$. در اینجا بنابر شرط (دو)، $t \in S$ وجود دارد که $ta = 0$ و لذا عضو a/s از $S^{-1}R$ برابر صفر است. در نتیجه h یک‌به‌یک نیز هست. ■

حال مثالی از کاربرد ویژگی عام مذکور در ۱۰.۵ ارائه می‌کنیم.

۱۶.۵ مثال. فرض کنید R دامنه‌ای صحیح و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد که $0 \notin S$. فرض کنید K نشاندهندهٔ هیأت کسرهای R و $\theta : R \to K$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. حال به‌ازای هر $s \in S$ عضو $s/1$ از K عضو وارونپذیر K است زیرا $1/s$ وارون آن است. بنابراین از ۱۰.۵ نتیجه می‌شود که همریختی منحصر به‌فرد Rـجبریِ $h : S^{-1}R \to K$ وجود دارد (که $S^{-1}R$ و K، R ـجبرهای مجهز به همریختیهای حلقه‌ای طبیعی در نظر گرفته می‌شوند)؛ به‌علاوه به‌ازای هر $a \in R$ و $s \in S$ داریم

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = \theta(a)(\theta(s))^{-1} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} = \frac{a}{s}.$$

(توجه کنید که در اینجا از نماد a/s به دو صورت استفاده می‌شود: یکی برای نمایش عضوی از $S^{-1}R$ و دیگری برای نمایش عضوی از K؛ این اعضا با استفاده از رابطه‌های هم‌ارزی متفاوت تشکیل می‌شوند و نباید آنها را با هم اشتباه کرد.)

روشن است که همریختی h و همریختی طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ یک‌به‌یک هستند: معمولاً با استفاده از f، R را با زیرحلقه‌ای از $S^{-1}R$، و با استفاده از h، $S^{-1}R$ را با زیرحلقه‌ای از K یکی می‌گیریم.

۱۷.۵ مثال. فرض کنید R نشاندهندهٔ حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) به‌ازای عضوی چون $t \in R$ مجموعهٔ $S := \{t^n : n \in \mathbb{N}.\}$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R است: مجموعهٔ مشابهی را در اثبات ۴۸.۳ به‌کار بردیم. در این حالت حلقهٔ کسرهای $S^{-1}R$ را اغلب با R_t نمایش می‌دهیم. توجه کنید که بنابر ۴.۵(سه)، R_t حلقهٔ صفر است اگر و تنها اگر $0 \in S$، یعنی اگر و تنها اگر t پوچتوان باشد.

با نمادگذاری فوق نماد $\mathbb{Z}_t$، $t \in \mathbb{N}$، معنای جدیدی پیدا می‌کند: بنابر ۱۶.۵ این حلقهٔ کسرهای $\mathbb{Z}$ را می‌توان با زیرحلقه‌ای از $\mathbb{Q}$ متشکل از اعداد گویایی که به صورت a/t^n قابل نمایش‌اند، که در آن $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$، یکی گرفت. به این دلیل دیگر نماد ۲.۱(سه) را برای نمایش حلقهٔ رده‌های مانده‌ای اعداد صحیح به پیمانهٔ t به‌کار نمی‌بریم و به‌جای آن از نمادهای $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}t$ یا $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ استفاده می‌کنیم.

دو) فرض کنید J ایدآل R باشد. در این صورت مجموعهٔ $1 + J = \{1 + c : c \in J\}$ (که چیزی جز هم‌مجموعهٔ J در R نیست که ۱ را شامل می‌شود) یک زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R است زیرا $1 = 1 + 0$ و به‌ازای هر $c_1, c_2 \in J$

$$(1 + c_1)(1 + c_2) = 1 + (c_1 + c_2 + c_1c_2).$$

بنابر ۴.۵(سه)، $(1 + J)^{-1}R$ حلقهٔ صفر است اگر و تنها اگر $0 \in 1 + J$، و به‌آسانی دیده می‌شود که این حالت وقتی و فقط وقتی رخ می‌دهد که $J = R$.

۱۸.۵ تمرین. فرض کنید $t \in \mathbb{N}$ و $p_1, \ldots, p_t$ اعداد اول متمایز باشند. نشان دهید که حلقهٔ

$$R = \{\alpha \in \mathbb{Q} :$$
$$\alpha = \frac{m}{n}, \text{به‌ازای اعدادی چون } m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{N} \text{ که } n \text{ بر هیچ یک از اعداد } p_1, \ldots, p_t \text{ تقسیم‌پذیر نباشد} \}$$

مذکور در تمرین ۶۷.۳، با حلقه‌ای از کسرهای $\mathbb{Z}$ یکریخت است.

۱۹.۵ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و X مجهول باشد. بنابر ۱۷.۵(دو) مجموعهٔ $1 + XR[X]$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از $R[X]$ است. توجه کنید که $R[[X]]$ را می‌توان $R[[X]]$ـ‌جبر مجهز به همریختی یک‌به‌یک طبیعی در نظر گرفت. نشان دهید یک همریختی یک‌به‌یک $R[X]$ـ‌جبری از $(1 + XR[X])^{-1}R[X]$ به $R[[X]]$ وجود دارد.

احتمالاً مهمترین مثال از حلقهٔ کسرهای حلقهٔ تعویضپذیر R حلقهٔ کسرهایی است که زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ مربوط به آن مجموعهٔ $R\setminus P$ باشد که P یک ایدآل اول R است. (در واقع به‌ازای ایدآل مفروض I از R شرط $I \in \operatorname{Spec}(R)$ معادل است با این شرط که $R\setminus I$ ضربی‌بسته باشد.) ما لمی را به چنین حلقه‌ای اختصاص می‌دهیم.

۲۰.۵ لم و تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $P \in \mathrm{Spec}(R)$. فرض کنید $S := R \backslash P$، توجه کنید که $R\backslash P$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R است. حلقهٔ کسرهای $S^{-1}R$ را با R_P نمایش می‌دهیم. این حلقه یک حلقهٔ شبه‌موضعی با ایدآل ماکسیمال

$$\left\{\lambda \in R_P : \lambda = \frac{a}{s}, \quad a \in P, s \in S\right\}$$

است. این حلقه را حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی R در P می‌نامند.

اثبات. فرض کنید

$$I = \left\{\lambda \in R_P : \lambda = \frac{a}{s}, \quad a \in P, s \in S\right\}.$$

بنابر ۱۳.۳ و ۱۴.۳ کافی است نشان دهیم که I ایدآل R_P است و I دقیقاً مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R است.

به‌آسانی دیده می‌شود که I ایدآل R_P است: در واقع I حاصل توسیع P تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی از R به R_P است (بعداً در این فصل نسبتاً به تفصیل به این نکته می‌پردازیم). فرض کنید $\lambda \in R_P \backslash I$ و $\lambda = a/s$ که $a \in R$ و $s \in S$. باید داشته باشیم $a \notin P$ و لذا a/s در R_P وارونپذیر است و وارون آن s/a است. از طرف دیگر اگر μ در R_P وارونپذیر باشد و $\mu = b/t$ که $b \in R$ و $t \in S$ آن‌گاه عضوهای $c \in R$ و $v \in S$ وجود دارند که در R_P

$$\frac{b}{t}\frac{c}{v} = \frac{1}{1}$$

بنابراین $w \in S$ وجود دارد که $w(bc - tv) = 0$ و لذا $wbc = wtv \in R\backslash P$. در نتیجه $b \notin P$، و چون این استدلال به‌ازای هر نمایش کسری μ چون $\mu = b/t$ که $b \in R$ و $t \in S$ درست است، نتیجه می‌شود که $\mu \notin I$.

پس اثبات کرده‌ایم که ایدآل I از R_P برابر با مجموعهٔ عضوهای وارون‌ناپذیر R_P است و لذا اثبات کامل است. ■

۲۱.۵ مثال. بنابر ۳۴.۳، $2\mathbb{Z}$ ایدآل اول $\mathbb{Z}$ است و لذا می‌توانیم حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی، یعنی حلقهٔ $\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}}$ را تشکیل دهیم. بنابر ۱۶.۵ این حلقه را می‌توان با زیرحلقه‌ای از $\mathbb{Q}$ متشکل از همهٔ اعداد گویایی که به‌صورت m/n با $m, n \in \mathbb{Z}$ و n فرد قابل نمایش‌اند یکی گرفت.

به همین نحو به‌ازای عدد اول p ایدآل $p\mathbb{Z}$ به $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ متعلق است و حلقهٔ $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$، یعنی حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی، را می‌توان با

$$\{\gamma \in \mathbb{Q} : \gamma = m/n, \quad m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (n, p)_{\text{ب.م.م}} = 1\}$$

یکی گرفت.

۲۲.۵ تمرین. فرض کنید K هیأت باشد و $a_1, \ldots, a_n \in K$. فرض کنید F نشاندهندهٔ هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح $K[X_1, \ldots, X_n]$ (متشکل از چندجمله‌ایهای با ضریبهای متعلق به K از مجهولهای X_1، … ، X_n) باشد.

نشان دهید که

$$R = \{\alpha \in F : \alpha = f/g, \quad f, g \in K[X_1, \ldots, X_n], g(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\}$$

زیرحلقهٔ F است و با حلقه‌ای از حلقه‌های کسرهای $K[X_1, \ldots, X_n]$ یکریخت است. آیا R شبه‌موضعی است؟ اگر هست چه مطلبی در مورد هیأت مانده‌ایش می‌توان گفت؟ دلیل پاسخهای خود را ذکر کنید.

حال که مثالهای فراوانی از حلقهٔ کسرها داریم، وقت آن است که نظریهٔ ایدآلهای چنین حلقه‌ای را بررسی کنیم. در این بحث بسیار مفید است که از نمادهای توسیع و تحدید ۴۱.۲ در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی از حلقه‌ای تعویضپذیر به یکی از حلقه‌های کسرهایش استفاده کنیم. اکنون برای این منظور چند نماد را معرفی می‌کنیم که در احکام چندی به‌کار می‌آیند.

۲۳.۵ نمادگذاری. تا اطلاع ثانوی فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $f : R \to S^{-1}R$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. اصطلاحات و نمادهای توسیع و تحدید ۴۱.۲ و ۴۵.۲ را در مورد f به‌کار می‌بریم. از جمله $\mathcal{I}_R$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ ایدآلهای R است، $\mathcal{C}_R$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ همهٔ ایدآلهایی از R است که حاصل تحدید ایدآلهای $S^{-1}R$ تحت f هستند و $\mathcal{E}_{S^{-1}R}$ نشاندهندهٔ زیرمجموعهٔ $\mathcal{I}_{S^{-1}R}$ متشکل از همهٔ ایدآلهایی از $S^{-1}R$ است که حاصل توسیع ایدآلهای R تحت f هستند.

اولین حکم در مورد ایدآلهای $S^{-1}R$ این است که هر ایدآل این حلقه در واقع حاصل توسیع ایدآلی از R است و لذا با استفاده از نمادهای ۲۳.۵ داریم $\mathcal{E}_{S^{-1}R} = \mathcal{I}_{S^{-1}R}$ که در آن $\mathcal{I}_{S^{-1}R}$ مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای $S^{-1}R$ است.

۲۴.۵ لم. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathcal{J}$ ایدآل $S^{-1}R$ باشد. در این صورت $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{ce}$ و لذا هر ایدآل $S^{-1}R$ حاصل توسیع ایدآلی از R است و

$$\mathcal{E}_{S^{-1}R} = \mathcal{I}_{S^{-1}R}$$

اثبات. فرض کنید $\lambda \in \mathcal{J}$ و نمایشی چون $\lambda = a/s$ را در نظر بگیرید که در آن $a \in R$

و $s \in S$. در این‌صورت

$$f(a) = \frac{a}{1} = \frac{s}{1}\frac{a}{s} \in \mathcal{J}$$

و لذا $a \in \mathcal{J}^c$. در نتیجه $\lambda = a/s = (1/s)f(a) \in \mathcal{J}^{ce}$. لذا

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{ce}$$

برقراری عکس رابطهٔ فوق نیز بنابر ۴۴.۲(دو) روشن است. ■

لذا برای توصیف ایدآل دلخواهی از $S^{-1}R$ تنها کافی است حاصل توسیع ایدآل دلخواهی از R را توصیف کنیم. حال این کار را نسبتاً دقیقتر انجام می‌دهیم.

۲۵.۵ لم. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید I ایدآل R است. در این صورت

$$I^e = \left\{\lambda \in S^{-1}R : \lambda = \frac{a}{s}, \quad a \in I, s \in S\right\}.$$

اثبات. روشن است که به‌ازای هر $a \in I$ و $s \in S$ داریم $a/s = (1/s)f(a) \in I^e$. برای اثبات عکس این رابطه فرض کنید $\lambda \in I^e$. چون I^e ایدآلی است که توسط $f(I)$ در $S^{-1}R$ تولید می‌شود، بنابر ۱۸.۲، عضوهای $n \in \mathbb{N}$، $h_1, \ldots, h_n \in I$، و $\mu_1, \ldots, \mu_n \in S^{-1}R$ وجود دارند به‌طوری که $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i f(h_i)$. به‌علاوه عضوهای $a_1, \ldots, a_n \in R$ و $s_1, \ldots, s_n \in S$ وجود دارند به‌طوری که $\mu_i = a_i/s_i$ $(1 \le i \le n)$ و لذا

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i}\frac{h_i}{1} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i h_i}{s_i}.$$

وقتی کسرهای سمت راست این تساوی را دارای مخرج مشترک کنیم می‌بینیم که λ را می‌توان به‌صورت $\lambda = a/s$ نوشت که $a \in I$ و $s \in S$. ■

۲۶.۵* تمرین. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید. نشان دهید اگر حلقهٔ R نوتری باشد، $S^{-1}R$ نیز نوتری است.

۲۷.۵ تذکر. حکم ۲۵.۵ متضمن نکتهٔ مهمی است: این حکم نمی‌گوید که به‌ازای $\lambda \in I^e$، در هر نمایش λ به‌صورت یک کسر صوری b/t که $b \in R$ و $t \in S$، صورت کسر یعنی b در I است. آنچه در ۲۵.۵ در این مورد گفته شده این است که λ دست‌کم یک نمایش چون a/s دارد که $a \in I$ (و البته $s \in S$).

این نکته را در مثالی نشان می‌دهیم. $\mathbb{Z}_3$، یعنی حلقهٔ کسرهای $\mathbb{Z}$ را نسبت به زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ $\{3^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ از $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید: ۱۷.۵(یک) را ببینید. فرض می‌کنیم $J = 6\mathbb{Z}$

و نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۲۳.۵ را برای این مثال به‌کار می‌بریم. عضو $\mathbb{Z}_{۲} \in ۲/۳$ به‌روشنی نمایشی به‌صورت کسر صوری دارد که در آن صورت کسر متعلق به $J = ۶\mathbb{Z}$ نیست ولی بنابر ۲۵.۵

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۳^{۲}} \in J^e = (۶\mathbb{Z})^e.$$

اما، چنانکه در ۲۹.۵ خواهیم دید، در حالت کلی این وضع در مورد ایدآلهای اول و حتی ایدآلهای ابتدایی R که با S اشتراک ندارند بسیار ساده‌تر است.

۲۸.۵ توجه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید Q ایدآل Pـابتدایی R باشد. در این صورت $Q \cap S = \varnothing$ اگر و تنها اگر $P \cap S = \varnothing$. یک طرف این استلزام دوطرفه روشن است و طرف دیگر آن از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $a \in P \cap S$ آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a^n \in Q$ و $a^n \in S$، زیرا S ضربی‌بسته است.

۲۹.۵ لم. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید Q ایدآل ابتدایی R است و $Q \cap S = \varnothing$. فرض کنید $\lambda \in Q^e$. در این صورت به‌ازای هر نمایش λ به‌صورت کسری صوری چون a/s (با $a \in R$ و $s \in S$) باید $a \in Q$.
به‌علاوه $Q^{ec} = Q$.

اثبات. یک نمایش دلخواه $\lambda = a/s$ را که $a \in R$ و $s \in S$ در نظر بگیرید. چون $\lambda \in Q^e$ پس عضوهای $b \in Q$ و $t \in S$ وجود دارند که $\lambda = b/t = a/s$. بنابراین $u \in S$ وجود دارد که $u(sb - ta) = ۰$. از این‌رو $(ut)a = usb \in Q$. حال $ut \in S$ و چون $Q \cap S = \varnothing$ نتیجه می‌گیریم که هر توان مثبت ut خارج از Q واقع می‌شود. با توجه به آنکه Q ایدآل ابتدایی است، همان‌طور که می‌خواستیم $a \in Q$.
روشن است که $Q \subseteq Q^{ec}$: ۴۴.۲(یک) را ببینید. برای اثبات عکس این رابطه فرض کنید $a \in Q^{ec}$. بنابراین $a/۱ \in Q^e$ و لذا بنابر آنچه هم‌اکنون ثابت کردیم، $a \in Q$. در نتیجه $Q^{ec} \subseteq Q$ و اثبات کامل است. ■

چون هر ایدآل اول R ابتدایی است، ۲۹.۵ برای ایدآلهای اول R نیز که مجزا از Sاند برقرار است. این مطلب به‌اندازه‌ای مهم است که ارزش دارد جداگانه ذکر شود.

۳۰.۵ نتیجه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و $P \cap S = \varnothing$. در این حالت صورت هر نمایش کسریِ هر عضو P^e باید در P باشد و به‌علاوه $P^{ec} = P$. ■

این نتیجه ما را قادر می‌سازد که توصیف کاملی از ایدآلهای اول $S^{-۱}R$ برحسب ایدآلهای اول R ارائه دهیم. ولی قبل از آن خوب است برخی از ویژگیهای عمل توسیع ایدآلهای R تحت

همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ را ذکر کنیم.

۳۱.۵ لم. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید I و J ایدآل R باشند. در این‌صورت

یک) $(I+J)^e = I^e + J^e$.

دو) $(IJ)^e = I^e J^e$.

سه) $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$.

چهار) $(\sqrt{I})^e = \sqrt{(I^e)}$.

پنج) $I^e = S^{-1}R$ اگر و تنها اگر $I \cap S \neq \varnothing$.

اثبات. یک) این تساوی بلافاصله از ۴۳.۲(یک) نتیجه می‌شود.

دو) این تساوی بلافاصله از ۴۳.۲(دو) نتیجه می‌شود.

سه) چون $I \cap J \subseteq I$ روشن است که $(I \cap J)^e \subseteq I^e$. به همین نحو $(I \cap J)^e \subseteq J^e$ و لذا

$$(I \cap J)^e \subseteq I^e \cap J^e.$$

برای اثبات عکس رابطهٔ فوق فرض کنید $\lambda \in I^e \cap J^e$. بنابر ۲۵.۵، λ را می‌توان به‌صورت

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{b}{t}$$

نوشت که در آن $a \in I$، $b \in J$ و $s, t \in S$. (متوجه باشید که در دامی که در ۲۷.۵ توضیح دادیم گرفتار نشوید: مثلاً گمان نکنید که a خودبه‌خود به J نیز متعلق است!) در نتیجه عضو $u \in S$ وجود دارد که $u(ta - sb) = 0$ و لذا $uta = usb \in I \cap J$ زیرا $a \in I$ و $b \in J$. حال می‌توانیم بنویسیم

$$\lambda = \frac{a}{s} = \frac{uta}{uts}$$

و لذا بنابر ۲۵.۵، $\lambda \in (I \cap J)^e$.

چهار) فرض کنید $\lambda \in (\sqrt{I})^e$. بنابر ۲۵.۵، عضوهای $a \in \sqrt{I}$ و $s \in S$ وجود دارند به‌طوری که $\lambda = a/s$. حال $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $a^n \in I$. در نتیجه بنابر ۲۵.۵

$$(\lambda)^n = \frac{a^n}{s^n} \in I^e$$

و لذا $\lambda \in \sqrt{I^e}$. این مطلب نشان می‌دهد که

$$(\sqrt{I})^e \subseteq \sqrt{I^e}.$$

اثبات عکس رابطهٔ فوق به همین سهولت نیست. فرض کنید $\mu \in \sqrt{I^e}$ و نمایشی چون $\mu = a/s$ را با $a \in R$ و $s \in S$ در نظر بگیرید. $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $(\mu)^n = (a/s)^n \in I^e$ و لذا، باز هم بنابر ۲۵.۵، عضوهای $b \in I$ و $t \in S$ وجود دارند به‌طوری که

$$(\mu)^n = \frac{a^n}{s^n} = \frac{b}{t}.$$

بنابراین $v \in S$ وجود دارد به‌طوری که $v(ta^n - s^n b) = ۰$ و لذا $vta^n = vs^n b \in I$. از این رو

$$(vta)^n = (v^{n-۱}t^{n-۱})(vta^n) \in I$$

و $vta \in \sqrt{I}$. لذا $\mu = a/s = vta/vts \in (\sqrt{I})^e$. بنابراین نشان داده‌ایم که

$$(\sqrt{I})^e \supseteq \sqrt{I^e}.$$

پنج) ($\Longleftarrow$) فرض کنید $I^e = S^{-۱}R$ و لذا $۱/۱ \in I^e$. بنابر ۲۵.۵ این مطلب به این معنی است که عضوهای $a \in I$ و $s, t \in S$ وجود دارند به‌طوری که $t(s۱ - ۱a) = ۰$ و لذا $ts = ta \in I \cap S$.

($\Longrightarrow$) فرض کنید $s \in I \cap S$. در این صورت (بنابر ۲۵.۵) در $S^{-۱}R$ داریم $۱/۱ = s/s \in I^e$ و لذا $I^e = s^{-۱}R$.■

حال می‌توانیم توصیف کاملی از ایدآلهای اول $S^{-۱}R$ ارائه دهیم.

۳۲.۵ قضیه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید.

یک) اگر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $P \cap S \neq \varnothing$ آن‌گاه $P^e = S^{-۱}R$.

دو) اگر $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $P \cap S = \varnothing$ آن‌گاه $P^e \in \mathrm{Spec}(S^{-۱}R)$.

سه) اگر $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(S^{-۱}R)$ آن‌گاه $\mathcal{P}^c \in \mathrm{Spec}(R)$ و $\mathcal{P}^c \cap S = \varnothing$. همچنین $\mathcal{P}^{ce} = \mathcal{P}$.

چهار) ایدآلهای اول $S^{-۱}R$ دقیقاً ایدآلهای به‌صورت P^e هستند که P ایدآل اول R است و $P \cap S = \varnothing$. در واقع هر ایدآل اول $S^{-۱}R$ دقیقاً به‌ازای یک $P \in \mathrm{Spec}(R)$ که $P \cap S = \varnothing$ به‌صورت P^e است.

اثبات. یک) ۳۱.۵(پنج) را ببینید.

دو) بنابر ۳۰.۵ به‌ازای $P \in \mathrm{Spec}(R)$ که $P \cap S = \varnothing$ داریم $P^{ec} = P$. در نتیجه $P^e \subset S^{-۱}R$ زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم $P^{ec} = (S^{-۱}R)^c = R \neq P$.

فرض کنید $\lambda = a/s$ و $\mu = b/t \in S^{-۱}R$، که در آن عضوهای $a, b \in R$ و $s, t \in S$ چنان باشند که $\lambda\mu \in P^e$، یعنی $ab/st \in P^e$. بنابر ۳۰.۵، $ab \in P$ و لذا چون P اول است،

$a \in P$ یا $b \in P$. لذا بنابر ۲۵.۵ داریم $\lambda = a/s \in P^e$ یا $\mu = b/t \in P^e$. در نتیجه $P^e \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$.

سه) به‌ازای $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ طبق ۲۷.۳(دو) داریم $\mathcal{P}^c \in \operatorname{Spec}(R)$. همچنین بنابر ۲۴.۵، $\mathcal{P}$ ایدآل توسیعی است و $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{ce}$. در نتیجه باید داشته باشیم $\mathcal{P}^c \cap S = \varnothing$ زیرا در غیر این صورت طبق بند (یک) فوق $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{ce} = S^{-1}R$ که متناقض با فرض است.

چهار) هم‌اکنون در بند (سه) ثابت کردیم که هر ایدآل اول $S^{-1}R$ به‌صورت P^e است که در آن P یک ایدآل اول R و مجزا از S است. همچنین اگر P و P' ایدآلهای اول R باشند که $P \cap S = P' \cap S = \varnothing$ و $P^e = P'^e$ آن‌گاه از ۳۰.۵ نتیجه می‌شود که $P = P^{ec} = P'^{ec} = P'$.■

۳۳.۵ تذکر. یک) قضیهٔ فوق بسیار مهم است و به‌کرات در بقیهٔ این کتاب به‌کار می‌رود. اکثر احکام آن را می‌توان در این گزاره خلاصه کرد که با استفاده از توسیع ایدآلها نگاشتی دوسویی چون

$$\begin{array}{ccc} \{P \in \operatorname{Spec}(R) : P \cap S = \varnothing\} & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(S^{-1}R) \\ P & \longmapsto & P^e \end{array}$$

تعریف می‌شود که رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کند. وارون این نگاشت دوسویی با استفاده از تحدید ایدآلها تعریف می‌شود و آن نیز رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کند.

دو) اکنون ببینیم قضیهٔ ۳۲.۵ مستلزم چه نتایجی برای موضعی‌سازی حلقهٔ تعویضپذیر R در ایدآل اول P از R است. در این حالت زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ مربوطه $R \backslash P$ است و به‌ازای $P' \in \operatorname{Spec}(R)$ داریم $P' \cap (R \backslash P) = \varnothing$ اگر و تنها اگر $P' \subseteq P$. لذا بنابر بند (یک) فوق یک نگاشت دوسویی حافظ رابطهٔ مشمولیت از $\{P' \in \operatorname{Spec}(R) : P' \subseteq P\}$ به $\operatorname{Spec}(R_P)$ وجود دارد که P' را به P'^e می‌برد، و وارونش نیز حافظ رابطهٔ مشمولیت است و از عمل تحدید به‌دست می‌آید. چون P عضو ماکسیمال منحصر به‌فرد $\{P' \in \operatorname{Spec}(R) : P' \subseteq P\}$ نسبت به رابطهٔ مشمولیت است نتیجه می‌شود که P^e عضو ماکسیمال منحصر به‌فرد $\operatorname{Spec}(R_P)$ نسبت به رابطهٔ مشمولیت است. با توجه به ۴۵.۳، اثبات دیگری برای این مطلب که R_P حلقه‌ای شبه‌موضعی است به‌دست آورده‌ایم. البته این مطلب قبلاً در ۲۰.۵ به‌روش سرراست‌تری ثابت شد.

۳۴.۵ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر باشد و به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$ حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی، یعنی R_P عضو پوچتوان ناصفر نداشته باشد. نشان دهید که R عضو پوچتوان ناصفر ندارد.

۳۵.۵ تعریف و تمرین. حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر را شبه‌نیم‌موضعی نامیم اگر تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و P_1، ...، P_n، $n \in \mathbb{N}$، ایدآلهای اولی از R باشند. نشان دهید $S := \cap_{i=1}^{n}(R\backslash P_i)$ زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R است و حلقهٔ $S^{-1}R$ شبه‌نیم‌موضعی است. ایدآلهای ماکسیمال $S^{-1}R$ را بیابید.

۳۶.۵ نمادگذاری. در حالت ۲۳.۵، به‌ازای هر ایدآل I از R ایدآل I^e، یعنی توسیع ایدآل I تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ را اغلب با $IS^{-1}R$ نمایش می‌دهیم به‌جای اینکه با نماد صحیح‌تر ولی طولانیتر $f(I)S^{-1}R$ نمایش دهیم. از این نماد بیشتر در حالت موضعی‌سازی در ایدآل اول P از R استفاده می‌شود: لذا اغلب ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد R_P را با PR_P نمایش می‌دهیم.

در فصل ۴ ذکر شد که نظریهٔ ایدآلهای حلقه‌های کسرها موجب می‌شود که بصیرت بیشتری نسبت به دومین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی پیدا کنیم. بنابراین اکنون ویژگیهای ایدآلهای ابتدایی را در رابطه با حلقهٔ کسرها بررسی می‌کنیم و نتایج را در قضیه‌ای مشابه با ۳۲.۵ ارائه می‌کنیم.

۳۷.۵ قضیه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید.

یک) اگر Q ایدآل ابتدایی R باشد و $Q \cap S \neq \varnothing$ آن‌گاه $Q^e = S^{-1}R$.

دو) اگر Q ایدآل Pـابتدایی R باشد و $Q \cap S = \varnothing$ آن‌گاه Q^e ایدآل P^eـابتدایی $S^{-1}R$ است.

سه) اگر $\mathcal{Q}$ ایدآل $\mathcal{P}$ـابتدایی $S^{-1}R$ باشد آن‌گاه $\mathcal{Q}^c$ ایدآل $\mathcal{P}^c$ـابتدایی R است و $\mathcal{Q}^c \cap S = \varnothing$. همچنین $\mathcal{Q}^{ce} = \mathcal{Q}$.

چهار) ایدآلهای ابتدایی $S^{-1}R$ دقیقاً ایدآلهای به صورت Q^e هستند که Q ایدآل ابتدایی R و مجزا از S است. در واقع هر ایدآل ابتدایی $S^{-1}R$ دقیقاً به‌ازای یک ایدآل ابتدایی Q از R که $Q \cap S = \varnothing$ به‌صورت Q^e است.

اثبات. یک) بلافاصله از ۳۱.۵(پنج) نتیجه می‌شود.

دو) بنابر ۳۱.۵(پنج)، $Q^e \neq S^{-1}R$ و بنابر ۳۱.۵(چهار)، $\sqrt{Q^e} = P^e$. فرض کنید عضوهای λ و μ از $S^{-1}R$ چنان‌اند که $\lambda\mu \in Q^e$ ولی $\mu \notin P^e$. نمایشهای $\lambda = a/s$ و $\mu = b/t$ را که $a, b \in R$ و $s, t \in S$ درنظر بگیرید. توجه کنید که بنابر ۲۸.۵، $P \cap S = \varnothing$. از ۲۹.۵ نتیجه می‌شود که $ab \in Q$ ولی $b \notin P$. چون Q ایدآل Pـابتدایی است پس باید داشته باشیم $a \in Q$ و لذا $\lambda = a/s \in Q^e$. در نتیجه Q^e ایدآل P^eـابتدایی است.

سه) از ۶.۴ بلاواسطه نتیجه می‌شود که $\mathcal{Q}^c$ ایدآل $\mathcal{P}^c$ـابتدایی است. حال بنابر ۲۴.۵، $\mathcal{Q}$ ایدآل توسیعی $S^{-1}R$ است و داریم $\mathcal{Q}^{ce} = \mathcal{Q}$. در نتیجه بنابر ۳۱.۵(پنج)، $\mathcal{Q}^c \cap S = \varnothing$.

چهار) بنابر بند (سه) فوق هر ایدآل ابتدایی $S^{-1}R$ به‌صورت Q^e است که در آن Q ایدآلی ابتدایی از R است که اشتراکش با S تهی است. فرض کنید Q و Q' ایدآلهای ابتدایی R باشند و $Q \cap S = Q' \cap S = \varnothing$ و $Q^e = Q'^{\,e}$. در این صورت از ۲۹.۵ نتیجه می‌شود که

$Q = Q^{\ ec} = Q'^{ec} = Q'$. ■

۳۸.۵ تذکر. در اینجا نیز خوب است زمانی را صرف بررسی احکامی که اثبات کرده‌ایم کنیم، زیرا احکام قضیهٔ۳۷.۵ بسیار مهم‌اند.

یک) اکثر احکام ۳۷.۵ را می‌توان در این گزاره خلاصه کرد که با استفاده از توسیع ایدآلها یک نگاشت دوسویی (حافظ رابطهٔ مشمولیت) از مجموعهٔ ایدآلهای ابتدایی R که مجزا از Sاند به مجموعهٔ ایدآلهای ابتدایی $S^{-1}R$ تعریف می‌شود و به‌علاوه وارون این نگاشت با استفاده از تحدید ایدآلها تعریف می‌شود که آن هم رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کند.

دو) گاه لازم است رادیکالهای ایدآلهای ابتدایی تحت بررسی را مشخص کنیم. توجه کنید که بنابر ۳۲.۵ هر ایدآل اول $S^{-1}R$ دقیقاً به‌ازای یک ایدآل اول P از R که مجزا از S است به‌صورت P^e است. لذا فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $P \cap S = \varnothing$. از ۳۷.۵ نتیجه می‌شود که یک نگاشت دوسویی حافظه رابطهٔ مشمولیت از مجموعهٔ $\{Q \in \mathcal{I}_R :$ ایدآل Q ایدآل Pـابتدایی است$\}$ به مجموعهٔ $\{\mathcal{Q} \in \mathcal{I}_{S^{-1}R} :$ ایدآل $\mathcal{Q}$ ایدآل P^eـابتدایی است$\}$ وجود دارد که با استفاده از توسیع ایدآلها تعریف می‌شود، یعنی Q را به Q^e می‌برد، و وارونش (که آن نیز حافظ رابطهٔ مشمولیت است) با استفاده از تحدید ایدآلها تعریف می‌شود.

۳۹.۵ تمرین. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید.

یک) فرض کنید $\mathcal{I}$ ایدآل تحویلناپذیر $S^{-1}R$ باشد (۳۱.۴ را ببینید). نشان دهید $\mathcal{I}^c$ ایدآل تحویلناپذیر R است.

دو) فرض کنید I ایدآل تحویلناپذیر R باشد و $S \cap I = \varnothing$. فرض کنید R نوتری است. نشان دهید I^e ایدآل تحویلناپذیر $S^{-1}R$ است.

اکنون برای روشنتر شدن احکام نسبتاً تجریدی ۳۷.۵ و ۳۸.۵ آنها را برای تعیینِ ویژگی تجزیه‌های ابتدایی در حلقهٔ کسرها به‌کار می‌بریم.

۴۰.۵ قضیه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر R باشد. فرض کنید تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی I باشد و فرض کنید جمله‌ها چنان اندیسگذاری شده باشند که به‌ازای عددی چون $m \in \mathbb{N}_0$ که $0 \le m \le n$ داشته باشیم

$$\text{به‌ازای } 1 \le i \le m \qquad P_i \cap S = \varnothing$$

ولی

$$P_j \cap S \neq \varnothing \qquad \text{به‌ازای } m < j \leq n$$

(m ممکن است ۰ یا n نیز باشد.) اگر $m = ۰$ آن‌گاه $I^e = S^{-۱}R$ و $I^{ec} = R$. ولی اگر $۱ \leq m \leq n$ آن‌گاه هر دو ایدآل I^e و I^{ec} تجزیه‌پذیرند و تجزیه‌های

$$I^e = Q_۱^e \cap \cdots \cap Q_m^e \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, m \text{،} \sqrt{Q_i^e} = P_i^e$$

و

$$I^{ec} = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_m \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, m \text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیه‌های ابتدایی‌اند. نکتهٔ آخر اینکه اگر تجزیهٔ ابتدایی اولیهٔ I مینیمال باشد (و $۱ \leq m \leq n$) آن‌گاه دو تجزیهٔ ابتدایی I^e و I^{ec} مزبور نیز مینیمال‌اند.

اثبات. از ۳۱.۵(سه) روشن است که $I^e = \cap_{i=۱}^n Q_i^e$. ولی بنابر ۳۷.۵(یک) و (دو) داریم که به‌ازای $m < j \leq n$، $Q_j^e = S^{-۱}R$ و به‌ازای $۱ \leq i \leq m$، Q_i^e ایدآل P_i^eـابتدایی است. در حالت خاص $m = ۰$ داریم $I^e = S^{-۱}R$ و $I^{ec} = R$. بنابراین در باقیماندهٔ اثبات فرض می‌کنیم که $۱ \leq m \leq n$.

لذا اکنون تجزیهٔ

$$I^e = Q_۱^e \cap \cdots \cap Q_m^e \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, m \text{،} \sqrt{Q_i^e} = P_i^e$$

تجزیهٔ ابتدایی I^e است. با تحدید ایدآلهای فوق تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-۱}R$ و با استفاده از ۴۳.۲(سه) می‌بینیم که $I^{ec} = \bigcap_{i=۱}^m Q_i^{ec}$. ولی بنابر ۲۹.۵ داریم که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, m$، $Q_i^{ec} = Q_i$ و لذا تجزیهٔ

$$I^{ec} = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_m \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, m \text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی I^{ec} است.

در پایان فرض کنید تجزیهٔ ابتدایی اولیهٔ I مینیمال باشد. آن‌گاه از ۳۲.۵(چهار) بلافاصله نتیجه می‌شود که $P_۱^e$، . . . ، P_m^e ایدآلهای اول متمایز $S^{-۱}R$اند و لذا $P_۱$، . . . ، P_m نیز ایدآلهای اول متمایز Rاند. به‌علاوه نمی‌توانیم به‌ازای jای که $۱ \leq j \leq m$ داشته باشیم

$$Q_j \supseteq \bigcap_{\substack{i=۱ \\ i \neq j}}^{m} Q_i$$

به این دلیل ساده که این رابطه مستلزم آن است که

$$Q_j \supseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} Q_i$$

که متناقض با مینیمال بودن تجزیهٔ ابتدایی اولیه است. بنابراین نمی‌توانیم به‌ازای jای که $1 \leq j \leq m$ داشته باشیم

$$Q_j^e \supseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} Q_i^e$$

زیرا از آن می‌توانیم با تحدید ایدآلها تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-1}R$ و با استفاده از ۴۳.۲(سه) و ۲۹.۵ نتیجه بگیریم که

$$Q_j \supseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} Q_i$$

که هم‌اکنون دیدیم ناممکن است. ■

۴۱.۵ نتیجه. حالت ۲۳.۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر R باشد. اگر $I^e \neq S^{-1}R$ آن‌گاه هر دو ایدآل I^e و I^{ec} تجزیه‌پذیرند و

$$\operatorname{ass} I^e = \{P^e : P \cap S = \varnothing \text{ ,} P \in \operatorname{ass} I\}$$
$$\operatorname{ass} I^{ec} = \{P : P \cap S = \varnothing \text{ ,} P \in \operatorname{ass} I\}$$

اثبات. این احکام بلافاصله از ۴۰.۵ نتیجه می‌شوند. ■

۴۲.۵ تذکر. حال می‌توانیم با استفاده از نظریهٔ ایدآلهای حلقهٔ کسرها اثباتی برای دومین قضیهٔ یکتایی تجزیهٔ ابتدایی ۲۹.۴ ارائه دهیم.

نمادهای صورت قضیهٔ ۲۹.۴ را به‌کار می‌بریم. قرار دهید $S = R \backslash P_i$ که در آن P_i ایدآل اول مینیمالی وابسته به I است. توجه کنید که به‌ازای هیچ jای از $\mathbb{N}$ که $1 \leq j \leq n$ و $i \neq j$ نمی‌توانیم داشته باشیم $P_j \subseteq P_i$، لذا به‌ازای این jها داریم $P_j \cap S \neq \varnothing$. از طرف دیگر $P_i \cap S = \varnothing$. حال نتایج ۴۰.۵ را در مورد این S به‌کار می‌بریم: به‌دست می‌آوریم

$$Q_i = I^{ec} = Q_i'$$

بنابراین قضیه اثبات شده است. ■

۴۳.۵ تمرین. فرض کنید I ایدآلی تجزیه‌پذیر از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید تجزیهٔ

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. فرض کنید $\mathcal{P}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\operatorname{ass} I$ با این ویژگی باشد که هرگاه ایدآلهای $P \in \mathcal{P}$ و $P' \in \operatorname{ass} I$ چنان باشند که P' زیرمجموعهٔ P باشد، آن‌گاه $P' \in \mathcal{P}$ (چنین زیرمجموعه‌ای از $\operatorname{ass} I$ زیرمجموعهٔ منفرد $\operatorname{ass} I$ نامیده می‌شود). نشان دهید

$$\bigcap_{\substack{i=۱ \\ P_i \in \mathcal{P}}}^{n} Q_i$$

تنها به I بستگی دارد نه به تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض I.

۴۴.۵ تمرین. فرض کنید I ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و (به‌ازای هر $r \in R$) $\overline{r}$ نشاندهندهٔ $r+I$ باشد. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد و $\overline{S} := \{\overline{s} : s \in S\}$ که به روشنی زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R/I است. ثابت کنید

$$(\overline{S})^{-۱}(R/I) \cong S^{-۱}R/IS^{-۱}R.$$

نتیجه بگیرید که اگر $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و $I \subseteq P$، که در این صورت بنابر ۲۸.۳،داریم $P/I \in \operatorname{Spec}(R/I)$، آن‌گاه

یک) $(R/I)_{P/I} \cong R_P/IR_P$، و

دو) هیأت مانده‌ای حلقهٔ شبه‌موضعی R_P با هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح R/P یکریخت است.

۴۵.۵ تمرین. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و $P \cap S = \varnothing$. از این‌رو، بنابر ۳۲.۵(دو) داریم $PS^{-۱}R \in \operatorname{Spec}(S^{-۱}R)$. ثابت کنید

$$(S^{-۱}R)_{PS^{-۱}R} \cong R_P.$$

۴۶.۵ لم و تعریف. فرض کنیم P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $n \in \mathbb{N}$. نمادهای ۲۳.۵ را در حالت خاصی که زیرمجموعهٔ ضربی‌بسته یعنی S برابر $R \setminus P$ است، به‌کار می‌بریم. لذا نمادهای توسیع و تحدید و اصطلاحات ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to R_P$ به‌کار می‌بریم.

با این نمادگذاری، $(P^n)^{ec}$ ایدآل Pـابتدایی R است و توان نمادین nام P نامیده می‌شود و با $p^{(n)}$ نمایش داده می‌شود.

اثبات. بنابر ۳۳.۵(دو)، R_P حلقه‌ای شبه‌موضعی با ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد $PR_P = P^e$ است. حال بنابر ۳۱.۵(دو)، $(P^n)^{ec} = ((P^e)^n)^c$. به‌علاوه بنابر ۹.۴، $(P^e)^n$ ایدآل P^eـابتدایی R_P است. چون بنابر ۳۰.۵، $P^{ec} = P$ لذا از ۶.۴ نتیجه می‌شود که، چنانکه گفتیم، $((P^e)^n)^c$ ایدآل Pـابتدایی R است. ■

۴۷.۵ تمرین. فرض کنید P یک ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. این تمرین مربوط است به توان نمادین $P^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ از P که در ۴۶.۵ معرفی گردید. فرض کنید $m, n \in \mathbb{N}$. نشان دهید

یک) اگر P^n تجزیهٔ ابتدایی داشته باشد آن‌گاه P ایدآل اول منفرد منحصر به‌فرد آن است و $P^{(n)}$ جملهٔ Pـابتدایی (یکتا) در هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمال P^n است؛

دو) اگر $P^{(m)}P^{(n)}$ تجزیهٔ ابتدایی داشته باشد آن‌گاه P ایدآل اول منفرد منحصر به‌فرد آن است و $P^{(m+n)}$ جملهٔ Pـابتدایی هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمال $P^{(m)}P^{(n)}$ است؛

سه) $P^{(n)} = P^n$ اگر و تنها اگر P^n ایدآل Pـابتدایی باشد.

۴۸.۵ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر با این ویژگی است که به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$، R_P دامنهٔ صحیح است. در این صورت آیا R باید لزوماً دامنهٔ صحیح باشد؟ دلیل پاسخ خود را ذکر کنید.

۶

مدول

در ابتدای فصل ۲ متذکر شدیم که خواننده‌ای که در جبر تعویضپذیر صاحب تجربه است شاید از این موضوع متعجب شده باشد که در فصل اول هیچ اشاره‌ای به‌مفهوم ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر نشده است. چنین خواننده‌ای شاید از این موضوع نیز که تاکنون در این کتاب هیچ بحثی از مفهوم مدول روی حلقهٔ تعویضپذیر به‌میان نیامده است متعجب شده باشد. تجربه نشان داده است که از بررسی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R اطلاعات بسیاری دربارهٔ خود R به‌دست می‌آید. شاید یکی از دلایل باارزش بودن مفهوم مدول این باشد که می‌توانیم ایدآل I از R و حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R/I را به‌منزلهٔ یک مفهوم مطالعه کنیم. تاکنون I را به‌عنوان زیرساختار R در نظر گرفته‌ایم، و R/I نیز ساختار "خارج قسمتی" R بوده است، اما هر دو را می‌توان به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفت.

وضع مدولها نسبت به‌حلقه‌های تعویضپذیر مانند وضع فضاهای برداری نسبت به‌هیأتهاست. ولی از آنجا که ساختار حلقهٔ تعویضپذیر ممکن است بسیار پیچیده‌تر و ناهنجارتر از ساختار هیأت باشد، نظریهٔ مدولها بسیار پیچیده‌تر از نظریهٔ فضاهای برداری است: به‌عنوان مثال، این موضوع که ممکن است برخی از عضوهای ناصفر حلقه‌ای تعویضپذیر وارون نداشته باشند به‌این معناست که نمی‌توان انتظار داشت نقش مفهومهای استقلال خطی و وابستگی خطی در نظریهٔ مدولها به‌همان اندازه مهم باشند که در نظریهٔ فضاهای برداری بااهمیت هستند.

حال وقت آن است که تعریف دقیق مدول را ارائه کنیم.

۱.۶ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. مدول روی R یا Rـمدول، گروهی آبلی چون M است (که عمل آن را با $+$ نشان می‌دهیم) و مجهز به "ضرب اسکالرِ" عضوهای R در عضوهای M، یعنی مجهز به نگاشتی چون

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M,$$

است که

یک) به‌ازای هر $r \in R$ و $m, m' \in M$، $r \cdot (m + m') = r \cdot m + r \cdot m'$،
دو) به‌ازای هر $r, r' \in R$ و $m \in M$، $(r + r') \cdot m = r \cdot m + r' \cdot m$،
سه) به‌ازای هر $r, r' \in R$ و $m \in M$، $(rr') \cdot m = r \cdot (r' \cdot m)$ ،
چهار) به‌ازای هر $m \in M$، $1_R \cdot m = m$.

۲.۶ تذکر. یک) در عمل معمولاً نقطهٔ "." که نشاندهندهٔ ضرب اسکالر عضو حلقه در عضو مدول است حذف می‌شود.

دو) اصول موضوع ۱.۶ قاعدتاً برای خوانندگان این کتاب که فضاهای برداری را در دورهٔ کارشناسی مطالعه کرده‌اند آشناست. در واقع هر مدول روی هیأتی چون K چیزی جز یک فضای برداری روی K نیست. در بحث ما از نظریهٔ مدولها برخی از احکام بنیادی در مورد فضاهای برداری نقش اساسی دارند. برای سهولت، به‌جای عبارت طولانی "فضای برداری روی K" عبارت مختصر Kـفضا را به‌کار می‌بریم.

سه) اصول موضوع ۱.۶ نتایج متعدد ساده‌ای برای انجام دادن عملیات مربوط به‌عبارتهای شامل جمع و تفریق و ضرب اسکالر دارند؛ مثلاً اینکه

$$\text{به‌ازای هر } r, r' \in R \text{ و } m \in M\text{،} \quad (r - r')m = rm - r'm$$

وقتمان را صرف شرح این نکات نمی‌کنیم.

۳.۶ مثال. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد.

یک) یک مثال مهم Rـمدول خود R است: بدیهی است که R گروهی آبلی است، از عمل ضرب R نگاشتی چون

$$\cdot : R \times R \longrightarrow R$$

تعریف می‌شود و از اصول موضوع حلقه نتیجه می‌شود که با این "ضرب اسکالر"، R به Rـمدول تبدیل می‌شود.

دو) فرض کنید I ایدآل R باشد. چون I تحت جمع و ضرب در عضوهای دلخواه R بسته است، نتیجه می‌شود که I نیز تحت جمع و ضرب R، Rـمدول است.

سه) حال نشان می‌دهیم که حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R/I را می‌توان به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفت. بدیهی است که R/I خودبه‌خود گروهی آبلی است. بنابراین کافی است آن را به‌عمل ضرب اسکالر در عضوهای R مجهز کنیم. به‌این منظور، فرض کنید $s, s' \in R$ چنان باشند که در R/I، $s + I = s' + I$ و فرض کنید $r \in R$. بنابراین $s - s' \in I$ و لذا $rs - rs' = r(s - s') \in I$؛ از این‌رو $rs + I = rs' + I$. در نتیجه نگاشت زیر

$$\begin{aligned} R \times R/I &\longrightarrow R/I \\ (r, s+I) &\longmapsto rs + I \end{aligned}$$

بدون ابهام تعریف شده است. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که R/I با این "ضرب‌اسکالر" Rـمدول است.

مثال ۳.۶(سه) باعث ذکر هشدار زیر می‌شود. $\mathbb{Z}/۶\mathbb{Z}$ را به‌شیوهٔ مذکور در آن مثال به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید. در این صورت $۳ + ۶\mathbb{Z} \neq ۰_{\mathbb{Z}/۶\mathbb{Z}}$ و روشن است که در $\mathbb{Z}$ داریم $۲ \neq ۰$؛ ولی $۲(۳ + ۶\mathbb{Z}) = ۰_{\mathbb{Z}/۶\mathbb{Z}}$. لذا در این حالت خاص حاصلضرب یک اسکالر ناصفر در یک عضو ناصفر مدول برابر با صفر است. ممکن نیست این وضع در فضای برداری روی هیأت رخ دهد و لذا به‌خواننده هشدار می‌دهیم که متوجهٔ این نکته باشد.

۴.۶* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. فرض کنید S یک Rـجبر با همریختی ساختاری حلقه‌ای $f : R \to S$ باشد. (۹.۱ را ببینید.) نشان دهید که S با عمل جمع خودش و عمل ضرب اسکالر زیر

$$\begin{aligned} R \times S &\longrightarrow S \\ (r, s) &\longmapsto f(r)s \end{aligned}$$

Rـمدول است. همچنین نشان دهید که S را می‌توان با عمل جمع خودش و عمل ضرب اسکالر زیر نیز

$$\begin{aligned} R \times S &\longrightarrow S \\ (r, s) &\longmapsto sf(r) \end{aligned}$$

به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفت. (توجه کنید که وقتی S یک Rـجبر تعویضپذیر باشد این دو ساختار Rـمدول S یکسان‌اند. از این به‌بعد این مدولها را تنها در حالتی در نظر می‌گیریم که S تعویضپذیر باشد.)

۵.۶* تمرین. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد (که عمل آن را با $+$ نشان می‌دهیم). نشان دهید که تنها یک راه برای تبدیل G به $\mathbb{Z}$ـمدول وجود دارد و در این ساختارِ $\mathbb{Z}$ـمدول "ضرب

اسکالر» به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$ng = \begin{cases} g \quad + \cdots + \quad g \quad (n\text{جمله}) & n > 0 \\ 0_G & n = 0 \\ (-g) \quad + \cdots + (-g) \quad (-n \text{ جمله}) & n < 0 \end{cases}$$

که در آن $g \in G$ و $n \in \mathbb{Z}$.
نتیجه بگیرید که مفهوم گروه آبلی دقیقاً همان مفهوم $\mathbb{Z}$ـمدول است.

۶.۶ تذکر. فرض کنید R و S حلقه‌های تعویضپذیر و $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای باشد. فرض کنید G Sـمدول باشد. در این صورت به‌آسانی ثابت می‌شود که G با (همان عمل جمع G و) ضرب اسکالرِ

$$\begin{aligned} R \times G &\longrightarrow G \\ (r, g) &\longmapsto f(r)g \end{aligned}$$

Rـمدول است. در این حالت می‌گوییم که G با استفاده از همریختی حلقه‌ای f به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفته می‌شود، و اگر ابهامی در مورد اینکه کدام همریختی حلقه‌ای را به‌کار می‌بریم در میان نباشد، می‌گوییم G با تحدید اسکالرها به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفته می‌شود.

قبلاً در این فصل به‌دو مورد برخورده‌ایم که می‌توانیم در آنها Rـمدول را با استفاده از تحدید اسکالرها تعریف کنیم. مورد اول ۳.۶(سه) است که توضیح دادیم چگونه می‌توان حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R/I را، که در آن I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر R است، به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفت. روش دیگرِ به‌دست آوردنِ همین ساختار Rـمدولِ R/I این است که R/I را به‌عنوان مدول روی خودش در نظر بگیریم (۳.۶(یک) را ببینید) و سپس آن را با تحدید اسکالرها، با استفاده از همریختی طبیعی پوشای حلقه‌ای از R به R/I، به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم.

مورد دوم ۴.۶ است که در آن R حلقه‌ای تعویضپذیر و S یک Rـجبر با همریختی ساختاری حلقه‌ای $f : R \to S$ است. دیدیم که S را می‌توانیم به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم: در واقع برای به‌دست آوردن این ساختار Rـمدول ابتدا S را طبق معمول به‌عنوان مدول روی خودش در نظر می‌گیریم و سپس با «تحدید اسکالرها» با استفاده از f، S را به‌عنوان Rـمدول در نظر می‌گیریم.

مثالهای ۳.۶ اشارات روشنی دارند که با توجه به‌آنها می‌توان برخی مفاهیم نظریهٔ مدولها را به‌طور طبیعی تعریف کرد. این موضوع که هر ایدآل I از حلقهٔ تعویضپذیر R با عملهای R، Rـمدول است باعث مطرح شدن مفهوم «زیرمدول» می‌شود، و ساختار Rـمدولِ R/I باعث مطرح شدن ساختار «مدول خارج‌قسمتی» می‌شود. این مفاهیم کاملاً اساسی‌اند و ما آنها را طی چند مرحلهٔ زیر ارائه می‌کنیم.

۷.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمجموعه‌ای از M باشد. می‌گوییم G زیرمدول M، یا Rـزیرمدول M، است اگر G خود با عملهای M، Rـمدول باشد.

توجه کنید که طبق تعریف ۷.۶ هر زیرمدول M زیرگروهی آبلی از گروه جمعی M است و لذا عضو صفرش باید همان 0_M از M باشد. به‌علاوه خود M و مجموعهٔ تک‌عضوی $\{0_M\}$ زیر مدولهای Mاند. زیرمدول $\{0_M\}$ را زیرمدول صفر M می‌نامیم و آن را با 0 نمایش می‌دهیم.

قاعدتاً وجود معیاری برای تشخیص زیرمدولها نباید دور از انتظار باشد.

۸.۶ معیار زیرمدولها. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و G زیرمجموعه‌ای از Rـمدول M باشد. در این صورت G زیرمدول M است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

یک) $G \neq \varnothing$؛

دو) هر گاه $g, g' \in G$ و $r, r' \in R$ آن‌گاه $rg + r'g' \in G$.

اثبات. ($\Longleftarrow$) این گزاره واضح است زیرا G باید شامل عضو صفر M باشد، به‌علاوه G باید تحت جمع M و تحت ضرب اسکالر در عضوهای دلخواه R بسته باشد.

($\Longrightarrow$) بنابر معیار زیرگروه‌ها، G زیرگروه جمعی M است؛ همچنین بنابر (دو)، G تحت ضرب اسکالر در عضوهای R بسته است. حال روشن است که G ویژگیهای ۱.۶(یک)، (دو)، (سه) و (چهار) از M را دارد. ■

۹.۶ تذکر. از ۸.۶ نتیجه می‌شود که وقتی حلقه‌ای تعویضپذیر چون R را چنانکه در ۳.۶(یک) آمد، به‌عنوان مدول روی خودش در نظر گیریم، آن‌گاه زیرمدولهایش دقیقاً همان ایدآلهایش هستند.

با استفاده از معیار زیرمدولها در ۸.۶ می‌توانیم نظریهٔ مجموعه‌های مولد مدولها و زیرمدولها را بنا کنیم. بیشتر قسمتهای این نظریه بسیار شبیه به‌نظریهٔ تولید ایدآلها مذکور در ۱۷.۲، ۱۸.۲ و ۱۹.۲ است و لذا آنها را در تمرینها مطرح می‌کنیم.

۱۰.۶ تولید زیرمدولها. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. بنابر ۸.۶ اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از زیرمدولهای M خود زیرمدول است؛ این قرارداد را اتخاذ می‌کنیم که اشتراک خانوادهٔ تهی از زیرمدولهای M را برابر با خود M در نظر گیریم.

فرض کنید $J \subseteq M$. اشتراک اعضای خانوادهٔ همهٔ زیرمدولهایی از M را که شامل Jاند زیرمدول تولیدشده توسط J می‌نامیم (واضح است که چنین خانواده‌ای ناتهی است). توجه کنید که این اشتراک کوچکترین زیرمدول M است که شامل J است، به‌این معنی که این اشتراک (زیرمدولی شامل J هست و) در هر زیرمدول M که شامل J باشد قرار دارد.

۱۱.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $J \subseteq M$. فرض کنید G زیرمدولی از M باشد که توسط J تولید می‌شود.

یک) نشان دهید اگر $J = \varnothing$ آن‌گاه $G = 0$.

دو) نشان دهید اگر $J \neq \varnothing$ آن‌گاه

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i j_i : n \in \mathbb{N},\ r_1, \ldots, r_n \in R,\ j_1, \ldots, j_n \in J \right\}.$$

سه) نشان دهید اگر $\varnothing \neq J = \{l_1, \ldots, l_t\}$ آن‌گاه

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i l_i : r_1, \ldots, r_t \in R \right\}.$$

(در این حالت می‌گوییم G توسط $l_1، \cdots، l_t$ تولید می‌شود.)

۱۲.۶ نمادگذاری و اصطلاحات. اگر در تعریف ۱۱.۶، $J = \{j\}$ آن‌گاه از ۱۱.۶(سه) نتیجه می‌شود که زیرمدول G از M که توسط J تولید می‌شود برابر با $\{rj : r \in R\}$ است: این زیرمدول را غالباً با Rj نمایش می‌دهند.

می‌گوییم زیرمدول N از Rـمدول M (فوق) متناهی‌مولد است (یا مولد متناهی دارد) اگر توسط زیرمجموعه‌ای متناهی از M (در واقع لزوماً از N) تولید شود. Rـمدول را دوری می‌گوییم اگر توسط یک عضو تولید شود.

۱۳.۶ مجموع زیرمدولها. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از زیرمدولهای M باشد. مجموع $\sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ را برابر با زیرمدولی از M تعریف می‌کنیم که توسط $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ تولید می‌شود. در حالت خاص $\Lambda = \varnothing$، این مجموع صفر است.

۱۴.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

یک) نشان دهید عمل دوتایی جمعِ زیرمدولها روی مجموعهٔ همهٔ زیرمدولهای M تعویضپذیر و شرکتپذیر است.

دو) فرض کنید $G_1، \cdots، G_n$ زیرمدولهایی از M باشند. نشان دهید

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i : g_i \in G_i \text{ ،}i = 1, \ldots, n \text{ به‌ازای} \right\}.$$

اغلب $\sum_{i=1}^{n} G_i$ را با $G_1 + \cdots + G_n$ نمایش می‌دهیم.

سه) فرض کنید $j_1, \ldots, j_n \in M$. نشان دهید زیرمدولی از M که توسط $j_1، \ldots، j_n$ تولید می‌شود برابر با $Rj_1 + \cdots + Rj_n$ است.

۱۵.۶ تعریف و تذکر. فرض کنید M مدولی‌روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. فرض کنید I و I' ایدآلهایی از R باشند. زیرمدولی از M راکه توسط $\{rg : r \in I, g \in M\}$ تولید می‌شود با IM نمایش می‌دهیم. لذا

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i g_i : n \in \mathbb{N},\ r_1, \dots, r_n \in I,\ g_1, \dots, g_n \in M \right\}.$$

یک) توجه کنید که $I(I'M) = (II')M$.

دو) به‌ازای $a \in R$ به‌جای $(Ra)M$ می‌نویسیم aM: در واقع

$$(Ra)M = \{am : m \in M\}.$$

۱۶.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. فرض کنید G زیرمدول M باشد و $J \subseteq M$ و $J \neq \varnothing$. ایدآل

$$\{r \in R : rj \in G \text{ ،} j \in J \text{ به‌ازای هر}\}$$

از R را با $(G : J)$ (یا اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $(G :_R J)$) نمایش می‌دهیم. توجه کنید که اگر N زیرمدولی از M باشد که توسط J تولید شود آن‌گاه $(G : N) = (G : J)$. به‌ازای $m \in M$، به‌جای $(G : \{m\})$ می‌نویسیم $(G : m)$.

در حالت خاصی که $G = 0$، ایدآل

$$(0 : J) = \{r \in R : rj = 0 \text{ ،} j \in J \text{ به‌ازای هر}\}$$

را پوچساز J می‌نامیم و آن را با $\mathrm{Ann}(J)$ یا $\mathrm{Ann}_R(J)$ نمایش می‌دهیم. همچنین، به‌ازای $m \in M$، $(0 : m)$ را پوچساز m می‌نامیم.

۱۷.۶* تمرین. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. نشان دهید

$$I = \mathrm{Ann}_R(R/I) = (0 :_R 1 + I).$$

۱۸.۶* تمرین. فرض‌کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R و N و N' و G زیرمدولهایی از M باشند. فرض کنید

$$(N_\theta)_{\theta \in \Theta} \quad \text{و} \quad (G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

دو خانواده از زیرمدولهای M باشند. نشان دهید

یک) $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda : N)$؛
دو) $(G : \sum_{\theta\in\Theta} N_\theta) = \bigcap_{\theta\in\Theta}(G : N_\theta)$.
نتیجه بگیرید که $\mathrm{Ann}(N + N') = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(N')$.

۱۹.۶ تغییرحلقه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید I ایدآل R باشد و $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به‌طور طبیعی ساختاری به M نسبت داد که M به‌صورت مدول روی R/I درآید.

فرض کنید عضوهای $r, r' \in R$ چنان باشند که $r + I = r' + I$ و فرض کنید $m \in M$. در این صورت $r - r' \in I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ و لذا $(r - r')m = 0$ و $rm = r'm$. در نتیجه می‌توانیم بدون ابهام نگاشت

$$\begin{aligned} R/I \times M &\longrightarrow M \\ (r + I, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

را تعریف کنیم و به‌آسانی ثابت کنیم که با این نگاشت گروه آبلی M به R/Iـمدول تبدیل می‌شود. توجه کنید که رابطهٔ ساختارهای Rـمدول و R/Iـمدول روی M به‌صورت زیر است: به‌ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ داریم $(r + I)m = rm$.

باید توجه کرد که هر زیرمجموعه‌ای از M، Rـزیرمدول است اگر و تنها اگر R/Iـزیرمدول باشد.

ساختار دیگری نظیر ساختاری که در ۱۶.۶ دیدیم در نظریهٔ مدولها وجود دارد.

۲۰.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول M باشد. فرض کنید I ایدآل R باشد. در این صورت $(G :_M I)$ نشاندهندهٔ زیرمدول $\{m \in M : rm \in G$ ،$r \in I$ به‌ازای هر$\}$ از M است. توجه کنید که $G \subseteq (G :_M I)$.

حالت خاص این نمادگذاری که در آن $G = 0$ مورد استفادهٔ زیادی دارد: زیرمدول $(0 :_M I) = \{m \in M : rm = 0$ ،$r \in I$ به‌ازای هر$\}$ از M را می‌توان "پوچساز I در M" تلقی کرد.

۲۱.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول M باشد. فرض کنید $(G_\theta)_{\theta\in\Theta}$ خانواده‌ای از زیرمدولهای M باشد. همچنین فرض کنید I و J ایدآلهایی از R و $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از ایدآلهای R باشد. نشان دهید

یک) $((G :_M J) :_M I) = (G :_M JI) = ((G :_M I) :_M J)$؛
دو) $(\bigcap_{\theta\in\Theta} G_\theta :_M I) = \bigcap_{\theta\in\Theta}(G_\theta :_M I)$؛
سه) $(G :_M \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(G :_M I_\lambda)$.

تاکنون بخش نسبتاً جامعی از نظریهٔ مقدماتی مدولها را ارائه داده‌ایم. همچنین وعده داده بودیم که دربارهٔ نظریهٔ مدولهای رده‌های مانده‌ای یا مدولهای خارج‌قسمتی بحث کنیم. اکنون به‌این وعده عمل می‌کنیم.

۲۲.۶ ساختن مدولهای رده‌های مانده‌ای. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول M باشد. بدیهی است که G زیرگروهی از گروه آبلی جمعی M است و لذا می‌توانیم گروه رده‌های مانده‌ای M/G را تشکیل دهیم:

$$M/G = \{m + G : m \in M\}$$

مجموعهٔ فوق از هم‌مجموعه‌های G در M تشکیل شده است؛ دو هم‌مجموعهٔ $m + G$ و $m' + G$ (که $m, m' \in M$) برابرند اگر و تنها اگر $m - m' \in G$؛ و جمع در M/G به‌صورت

$$(m + G) + (x + G) = (m + x) + G \qquad m, x \in M$$

است (با بحث ۸.۲ مقایسه کنید.)

حال فرض کنید $r \in R$ و $m, m' \in M$ و در M/G، $m + G = m' + G$. دراین صورت $m - m' \in G$ و لذا چون G زیرمدول M است، داریم $r(m - m') \in G$ و $rm + G = rm' + G$. در نتیجه می‌توانیم نگاشت

$$\begin{aligned} R \times M/G &\longrightarrow M/G \\ (r, m + G) &\longmapsto rm + G \end{aligned}$$

را بدون ابهام تعریف کنیم و به‌آسانی ثابت کنیم که با این نگاشت گروه آبلی M/G به Rـمدول تبدیل می‌شود. این Rـمدول را مدول رده‌های مانده‌ای M به‌پیمانهٔ G یا مدول خارج‌قسمتی M به‌پیمانهٔ G می‌نامیم.

۲۳.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآل R باشد. نشان دهید $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M/IM)$ و نتیجه بگیرید که M/IM تحت عمل زیر R/Iـمدول است:

$$(r + I)(m + IM) = rm + IM \text{ ،} m \in M \text{ و } r \in R \text{ به‌ازای هر }$$

این نکته مهم است که خواننده شکل زیرمدولهای مدول خارج‌قسمتی را به‌خوبی شناخته باشد: تمرین زیر حاوی احکامی مشابه با احکام ۳۷.۲ است.

۲۴.۶* تمرین. زیرمدولهای مدول خارج‌قسمتی. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول M باشد.

یک) فرض کنید G' زیرمدول M باشد و $G' \supseteq G$. نشان دهید G'/G زیرمدول M/G است.

دو) نشان دهید که به‌ازای هر زیرمدولی چون $\mathcal{J}$ از M/G دقیقاً یک زیرمدول چون G'' از M وجود دارد که $G'' \supseteq G$ و $G''/G = \mathcal{J}$.

سه) بندهای (یک) و (دو) نشان می‌دهند که نگاشتی دوسویی از مجموعهٔ همهٔ زیرمدولهای M که شامل Gاند به‌مجموعهٔ همهٔ زیرمدولهای M/G وجود دارد. فرض کنید G_1 و G_2 زیرمدولهایی از M باشند که G را شامل می‌شوند. نشان دهید $G_1 \subseteq G_2$ اگر و تنها اگر $G_1/G \subseteq G_2/G$ (لذا هم نگاشت دوسویی فوق و هم وارونش رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کنند).

۲۵.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید G، G_1 و G_2 زیرمدولهایی از M باشند که به‌ازای $i = 1, 2$، $G_i \supseteq G$. فرض کنید I ایدآل R باشد. به‌ازای هر زیرمدولی چون $\mathcal{H}$ از M/G که در زیر داده شده است زیرمدول منحصر به‌فردی چون H از M بیابید که $H \supseteq G$ و $H/G = \mathcal{H}$.

یک) $\mathcal{H} = (G_1/G) + (G_2/G)$.

دو) $\mathcal{H} = I(G_1/G)$.

سه) $\mathcal{H} = (G_1/G) \cap (G_2/G)$.

چهار) $\mathcal{H} = 0$.

۲۶.۶ تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید G_1 و G_2 زیرمدولهایی از M باشند. نشان دهید که $\operatorname{Ann}((G_1 + G_2)/G_1) = (G_1 : G_2)$.

حال وقت آن است که مفهوم همریختی مدولها را تعریف کنیم. این مفهوم در نظریهٔ مدولها همتای مفهوم نگاشت خطی در نظریهٔ فضاهای برداری است.

۲۷.۶ تعریف. فرض کنید M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشند. نگاشت $f : M \to N$ را همریختی Rـمدولها یا همریختی Rـمدولی یا به‌اختصار Rـهمریختی می‌گوییم اگر به‌ازای هر $m, m' \in M$ و $r, r' \in R$

$$f(rm + r'm') = rf(m) + r'f(m').$$

همریختی Rـمدولی را تکریختی می‌گوییم اگر یک به‌یک باشد و برویختی می‌گوییم اگر پوشا باشد. یکریختی Rـمدولی نیز همریختی دوسویی Rـمدولی است.

نگاشت $z : M \to N$ با تعریف $z(m) = 0_N$، به‌ازای هر $m \in M$، Rـهمریختی است. این همریختی را همریختی صفر می‌نامند و با 0 نشان می‌دهند. اگر $f_i : M \to N$، به‌ازای $i = 1, 2$، همریختیهای Rـمدولی باشند آن‌گاه نگاشت $f_1 + f_2 : M \to N$ نیز با تعریف

$(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m)$، به‌ازای هر $m \in M$، Rـهمریختی است و آن را مجموع f_1 و f_2 می‌نامند.

۲۸.۶* تمرین. فرض کنید M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و $f : M \to N$ یکریختی باشد. نشان دهید نگاشت وارون $f^{-1} : N \to M$ نیز یکریختی است. در این حالت می‌گوییم که Rـمدولهای M و N یکریخت‌اند و می‌نویسیم $M \cong N$.

توجه کنید که $M \cong M$: نگاشت همانی Id_M از M به M یکریختی است.

نشان دهید که Rـمدولهای یکریخت پوچسازهای برابر دارند.

۲۹.۶ تذکر. روشن است که اگر $f : M \to N$ و $g : N \to G$ همریختیهای مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشند آن‌گاه ترکیب $g \circ f : M \to G$ نیز همریختی Rـمدولهاست. به‌علاوه اگر f و g یکریختی باشند آن‌گاه $g \circ f$ نیز چنین است.

۳۰.۶ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر و R' و R'' Rـجبرهای تعویضپذیر باشند. فرض کنید $\psi : R' \to R''$ همریختی حلقه‌ای باشد. R' و R'' را توسط همریختیهای ساختاریشان به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیرید و نشان دهید ψ همریختی Rـجبری است (۱۳.۵ را ببینید) اگر و تنها اگر ψ همریختی Rـمدولی باشد.

رابطه‌ای بین مفاهیم زیرمدول و همریختی مدولها وجود دارد که یادآور رابطهٔ بین مفاهیم ایدآل و همریختی حلقه‌های تعویضپذیر، مذکور در ۱۲.۲، است.

۳۱.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید G زیرمدول M باشد. در این صورت (به‌آسانی ثابت می‌شود که) نگاشت $f : M \to M/G$ با تعریف $f(m) = m + G$، به‌ازای هر $m \in M$، همریختی Rـمدولی است. این همریختی را همریختی طبیعی یا متعارف می‌نامند. توجه کنید که f در حقیقت پوشا، و لذا بُروریختی است.

۳۲.۶* تمرین و تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

یک) فرض کنید N نیز Rـمدول و $f : M \to N$ همریختی Rـمدولی باشد. هستهٔ f، که آن را با $\mathrm{Ker}\, f$ نشان می‌دهند، مجموعهٔ $\{m \in M : f(m) = 0_N\}$ است. نشان دهید $\mathrm{Ker}\, f$ زیرمدول M است. همچنین نشان دهید $\mathrm{Ker}\, f = 0$ اگر و تنها اگر f تکریختی باشد.

نگارهٔ f، که آن را با $\mathrm{Im}\, f$ نشان می‌دهند، زیرمجموعهٔ $f(M) = \{f(m) : m \in M\}$ از N است. نشان دهید که $\mathrm{Im}\, f$ زیرمدول N است.

دو) فرض کنید G زیرمدول M باشد. نشان دهید که هستهٔ بروریختی طبیعی از M به M/G مذکور در ۳۱.۶ برابر G است. نتیجه بگیرید که بروریختی طبیعی از M به $M/0$ یکریختی است.

سه) نتیجه بگیرید که زیرمجموعه‌ای چون H از M زیرمدول M است اگر و تنها اگر یک همریختی Rـمدولی از Rـمدول M به Rـمدولی چون M' وجود داشته باشد که هسته‌اش برابر

با H باشد.

به‌تشابه احکام ۳۲.۶(سه) و ۱۲.۲ توجه کنید ــ در ۱۲.۲ دیدیم که زیرمجموعه‌ای چون I از حلقهٔ تعویضپذیر R ایدآل R است اگر و تنها اگر I هستهٔ یک همریختی حلقه‌ای از R به‌حلقهٔ تعویضپذیری چون S باشد. تشابهات دیگری نیز وجود دارند، مانند برقراری قضیه‌های یکریختی در مورد مدولها که اکنون به‌آنها می‌پردازیم.

۳۳.۶ اولین قضیهٔ یکریختی مدولها. فرض کنید M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و $f : M \to N$ ،Rـهمریختی باشد. دراین صورت از f یکریختی $\overline{f} : M/\text{Ker } f \to \text{Im } f$ به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $m \in M$، $\overline{f}(m + \text{Ker } f) = f(m)$.

اثبات. اثبات این قضیه به‌اندازه‌ای شبیه به‌اثبات ۱۳.۲ است که به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. ■

۳۴.۶* تمرین. اولین قضیهٔ یکریختی مدولها یعنی ۳۳.۶ را ثابت کنید.

استدلال لازم برای ساختن $\overline{f}$ در اولین قضیهٔ یکریختی مدولها را می‌توان در حالتهای کلیتر نیز به‌کار برد. مثلاً، نتایج تمرین زیر در موارد زیادی به‌کار می‌رود.

۳۵.۶* تمرین. فرض کنید M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و $f : M \to N$ همریختی باشد. فرض کنید G زیرمدول M باشد و $G \subseteq \text{Ker } f$. نشان دهید نگاشت g که در زیر با استفاده از f تعریف شده همریختی است: $g : M/G \to N$ که به‌ازای هر $m \in M$، $g(m + G) = f(m)$.

نتیجه بگیرید که اگر M' زیرمدول M و N' زیرمدول N باشد و $f(M') \subseteq N'$ آن‌گاه $\tilde{f}$ که در زیر با استفاده از f تعریف شده Rـهمریختی است: $\tilde{f} : M/M' \to N/N'$ که به‌ازای هر $m \in M$، $\tilde{f}(m + M') = f(m) + N'$.

۳۶.۶* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و M، Rـمدول باشد. مجموعهٔ همهٔ زیرمدولهای M را با $\mathcal{S}_M$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $f : M \to M'$ بروریختی Rـمدولی باشد. نشان دهید که نگاشت

$$\begin{array}{rcl} \theta : \{G \in \mathcal{S}_M : G \supseteq \text{Ker } f\} & \longrightarrow & \mathcal{S}_{M'} \\ G & \longmapsto & f(G) \end{array}$$

دوسویی است و به‌ازای هر $G' \in \mathcal{S}_{M'}$، $\theta^{-1}(G') = f^{-1}(G')$. همچنین نشان دهید θ و θ^{-1} رابطهٔ مشمولیت را حفظ می‌کنند.

عنوان قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که دست‌کم یک قضیهٔ دیگر در مورد یکریختی مدولها وجود

دارد؛ در واقع دو قضیهٔ دیگر از این نوع وجود دارد.

۳۷.۶ دومین قضیهٔ یکریختی مدولها. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید G و G' زیرمدولهایی از M باشند که $G \subseteq G'$ و لذا بنابر ۲۴.۶، G'/G زیرمدولی از Rـمدول M/G است. در این صورت یک یکریختی چون

$$\eta : (M/G)/(G'/G) \longrightarrow M/G'$$

وجود دارد که به‌ازای هر $m \in M$، $\eta\left((m+G)+G'/G\right) = m+G'$.

اثبات. چون $G \subseteq G'$ می‌توانیم نگاشتی مانند $f : M/G \to M/G'$ تعریف کنیم که به‌ازای هر $m \in M$، $f(m+G) = m+G'$، زیرا اگر $m, m' \in M$ چنان باشند که $m+G = m'+G$ آن‌گاه $m - m' \in G \subseteq G'$ و لذا $m+G' = m'+G'$. به‌آسانی ثابت می‌شود که f بروریختی است. به‌علاوه

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{m+G : m+G' = \circ_{M/G'} \text{ و } m \in M\}\\ &= \{m+G : m \in G'\} = G'/G\end{aligned}$$

و لذا نتیجهٔ مورد نظر بلاواسطه از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۳.۶، حاصل می‌شود. ■

۳۸.۶ سومین قضیهٔ یکریختی مدولها. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید G و H زیرمدولهایی از M باشند. در این صورت یک یکریختی چون

$$\xi : G/(G \cap H) \longrightarrow (G+H)/H$$

وجود دارد که به‌ازای هر $g \in G$، $\xi(g + G \cap H) = g + H$.

اثبات. نگاشت $f : G \to (G+H)/H$ با تعریف $f(g) = g+H$، به‌ازای هر $g \in G$، همریختی Rـمدولی و پوشاست زیرا هر عضو دلخواه $(G+H)/H$ به‌صورت $g'+h'+H$ است که در آن $g' \in G$ و $h' \in H$، لذا $g'+h'+H = g'+H$. به‌علاوه

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{g \in G : g+H = \circ_{(G+H)/H}\}\\ &= \{g \in G : g \in H\} = G \cap H\end{aligned}$$

و لذا نتیجهٔ مطلوب بلاواسطه از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۳.۶، حاصل می‌شود. ■

۳۹.۶ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد، و GوMوN Rـمدول، و $g : G \to M$ و $f : M \to N$ همریختی Rـمدولی باشند. می‌گوییم که دنبالهٔ

$$G \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$$

کامل است اگر $\text{Im } g = \text{Ker } f$.

به‌طور کلی، می‌گوییم دنبالهٔ

$$\dots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^n \xrightarrow{d^n} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M^{n+2} \longrightarrow \dots$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها (که ممکن است متناهی باشد یا از دو طرف نامتناهی باشد یا تنها از یک طرف نامتناهی باشد) در جملهٔ M^r از این دنباله که به‌ازای آن هر دو نگاشت d^{r-1} و d^r تعریف شده‌اند (یعنی نگارهٔ همریختی d^{r-1} زیرمجموعهٔ M^r است و M^r دامنهٔ همریختی d^r است) کامل است اگر دنبالهٔ

$$M^{r-1} \xrightarrow{d^{r-1}} M^r \xrightarrow{d^r} M^{r+1}$$

دنباله‌ای کامل باشد و می‌گوییم تمام دنباله کامل است اگر این دنباله در هر جملهٔ M^rای که هر دو نگاشت d^{r-1} و d^r تعریف شده‌اند کامل باشد.

۴۰.۶ تذکر. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. توجه کنید که دقیقاً یک Rـهمریختی از ۰ به M وجود دارد: نگارهٔ این همریختی ۰ است. همچنین دقیقاً یک Rـهمریختی از M به ۰ وجود دارد: هستهٔ این همریختی M است.

فرض کنید N نیز Rـمدول و $h: M \to N$، Rـهمریختی باشد.

یک) دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{h} N$$

کامل است اگر و تنها اگر $\text{Ker } h = 0$، یعنی اگر و تنها اگر h تکریختی باشد.

دو) به‌همین نحو، دنبالهٔ

$$M \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$$

کامل است اگر و تنها اگر h بروریختی باشد.

سه) فرض کنید G زیرمدول M باشد. در این صورت دنبالهٔ کاملی چون

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/G \longrightarrow 0$$

وجود دارد که در آن i همریختی یک به‌یک طبیعی و π بروریختی متعارف یا طبیعی مذکور در ۳۱.۶ است.

بقیهٔ این فصل عمدتاً به‌روشهای ساختن Rـمدولهای جدید از خانواده‌های مفروض مدولهای روی یک حلقهٔ تعویضپذیر اختصاص دارد: می‌خواهیم مجموع مستقیم و حاصلضرب مستقیم اعضای این خانواده‌ها را مورد بحث قرار دهیم.

۴۱.۶ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدولها باشد. در این صورت مجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ تحت اعمال جمع مؤلفه‌ای و ضرب اسکالر مؤلفه‌ای، Rـمدول است (این اعمال به صورت زیر تعریف می‌شوند: که به‌ازای هر $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ و $(g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ و هر $r \in R$، روابط

$$(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (g_\lambda + g'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

و

$$r(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (rg_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

برقرارند). این Rـمدول حاصلضرب مستقیم اعضای خانوادهٔ $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ نام دارد.

زیرمجموعه‌ای از $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ که متشکل است از همهٔ خانواده‌هایی چون $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (البته به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $g_\lambda \in M_\lambda$) که تنها تعدادی متناهی از مؤلفه‌هایشان (یعنی g_λها) ناصفرند Rـزیرمدول $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ است. این زیرمدول را با $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نمایش می‌دهیم و آن را مجموع مستقیم یا گاهی مجموع مستقیم برونی اعضای خانوادهٔ $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ می‌نامیم.

در حالتی که $\Lambda' = \varnothing$، هر دو مدول $\bigoplus_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ و $\prod_{\lambda'\in\Lambda'} M_{\lambda'}$ را برابر با Rـمدول صفر تعریف می‌کنیم.

توجه کنید که وقتی Λ متناهی است داریم $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

۴۲.۶* تمرین. حالت ۴۱.۶ را در نظر بگیرید. به‌ازای هر $\mu \in \Lambda$ فرض کنید M'_μ نشاندهندهٔ زیرمجموعهٔ $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ با تعریف

$$M'_\mu = \left\{(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : g_\lambda = \circ \text{ ،} \lambda \neq \mu \text{ که } \lambda \in \Lambda \text{ به‌ازای هر}\right\}$$

باشد. نشان دهید که

یک) M'_μ زیرمدول $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ است و به‌ازای هر $\mu \in \Lambda$، $M'_\mu \cong M_\mu$؛

دو) $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} M'_\lambda$ ؛ و

سه) به‌ازای هر $\nu \in \Lambda$ داریم

$$M'_\nu \bigcap \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\nu}} M'_\lambda = \circ.$$

مهم است که بتوانیم تشخیص دهیم چه وقت یک مدول با مجموع مستقیم اعضای خانواده‌ای از زیرمدولهای خودش یکریخت است. مفهوم ”مجموع مستقیم درونی“ در این مورد به‌ما کمک می‌کند.

۴۳.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانوادهای ناتهی از زیرمدولهای M باشد. اگر $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$، آنگاه هر عضو $m \in M$ بهصورت $m = \sum_{i=1}^{n} g_{\lambda_i}$ است که در آن $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ زیرمجموعهای متناهی از Λ است و بهازای هر $i = 1, \ldots, n$، $g_{\lambda_i} \in G_{\lambda_i}$. در واقع میتوانیم m را بهصورت

$$m = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$$

بنویسیم که در آن بهازای هر $\lambda \in \Lambda$، $g_\lambda \in G_\lambda$ ولی تنها تعدادی متناهی از g_λها ناصفرند و لذا این مجموع بامعنی است. البته عبارت "تنها تعدادی متناهی از g_λها ناصفرند" دارای این معنی نیز هست که ممکن است همهٔ g_λها صفر باشند.

میگوییم M مجموع مستقیم یا مجموع مستقیم درونی اعضای خانوادهٔ $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از زیرمدولهایش است اگر هر عضو $m \in M$ را بتوان بهطور یکتا بهصورت

$$m = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$$

نوشت، که در آن بهازای هر $\lambda \in \Lambda$، $g_\lambda \in G_\lambda$ و تنها تعدادی متناهی از g_λها ناصفرند.

روشن است که در این حالت باید داشته باشیم $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$، ولی یکتایی مذکور در تعریف بهاین معناست که شرایط دیگری نیز برقرارند، لذا برای نمایش مستقیم بودن مجموع مینویسیم $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

ابتدا شاید چنین بهنظر آید که کاربرد نماد "$\bigoplus$" در معنی اخیر و نیز در معنی مذکور در ۴۱.۶ ممکن است باعث سردرگمی شود. در تمرین ۴۵.۶ خواهیم دید که در عمل چنین نیست. بهاین دلیل که وقتی در حالت ۴۳.۶ داریم $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$، خودبهخود نتیجه میشود که M با مجموع مستقیم برونی اعضای خانوادهٔ $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، که در ۴۱.۶ تعریف شد، یکریخت است. ابتدا تمرین دیگری ارائه میدهیم که همراه با ۴۲.۶ شباهتهایی را بین مجموعهای مستقیم درونی و برونی نشان میدهد.

۴۴.۶ تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانوادهای ناتهی از زیرمدولهای M باشد. ثابت کنید $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$، یعنی M مجموع مستقیم درونی اعضای خانوادهٔ زیرمدولهای مذکور است، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

یک) $\sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = M$؛ و

دو) بهازای هر $\nu \in \Lambda$ داشته باشیم

$$G_\nu \bigcap \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\nu}} G_\lambda = 0$$

۴۵.۶* تمرین. حالت ۴۴.۶ را در نظر بگیرید و فرض کنید $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$. نشان دهید M با مجموع مستقیم برونی اعضای خانوادهٔ $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$، که در ۴۱.۶ معرفی گردید، یکریخت است.

۴۶.۶ تذکر. حالت ۴۱.۶ و ۴۲.۶ را در نظر بگیرید. در این صورت R حلقه‌ای تعویضپذیر و $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدولهاست. به‌ازای هر $\mu \in \Lambda$، فرض کنید M'_μ نشاندهندهٔ زیرمجموعه‌ای از $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ با تعریف

$$M'_\mu = \left\{(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda : g_\lambda = \circ \text{ ،} \lambda \neq \mu \text{ که } \lambda \in \Lambda \text{ به‌ازای هر}\right\}$$

باشد. از ۴۲.۶ نتیجه می‌شود که M'_μ زیرمدول $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ است و با M_μ یکریخت است.

از تمرینهای ۴۲.۶ و ۴۴.۶ نتیجه می‌شود که $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ مجموع مستقیم درونی اعضای خانوادهٔ $(M'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از زیرمدولهایش است.

در مبحث جمع مستقیم، تکریختیها و یکریختیها و دنباله‌های کاملِ بسیار مهمی وجود دارند که اکنون از آنها بحث می‌کنیم.

۴۷.۶ تعریف. فرض کنید $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد؛ فرض کنید $\mu \in \Lambda$. قرار دهید $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

برای سهولت، به‌جای عبارت "همه بجز تعدادی متناهی" به‌اختصار می‌گوییم تقریباً همه.

نگاشت تصویرگر متعارف از $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ به‌روی M_μ نگاشت $p_\mu : M \to M_\mu$ است‌که

$$p_\mu\left((g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = g_\mu \qquad (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in M \text{ به‌ازای هر}$$

(مطابق معمول فرض بر این است که تقریباً همهٔ g_λها صفرند).

نگاشت یک به‌یک متعارف از M_μ به‌توی $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نگاشت $q_\mu : M_\mu \to M$ است که (به‌ازای هر $z \in M_\mu$)

$$q_\mu(z) = (g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$ که $\lambda \neq \mu$، $g_\lambda = \circ$، و $g_\mu = z$.

هر دو نگاشت p_μ و q_μ Rـهمریختی‌اند؛ در واقع p_μ برویختی و q_μ تکریختی است. همچنین توجه کنید که

یک) $p_\mu \circ q_\mu = \mathrm{Id}_{M_\mu}$؛

دو) به‌ازای هر $\nu \in \Lambda$ که $\nu \neq \mu$، $p_\mu \circ q_\nu = \circ$؛

سه) وقتی Λ متناهی است، $\sum_{\lambda\in\Lambda} q_\lambda \circ p_\lambda = \mathrm{Id}_M$. (مجموع همریختیهای از یک Rـمدول به‌یک Rـمدول در ۲۷.۶ تعریف شد.)

۴۸.۶* تمرین. فرض کنید M،$M_۱$،$\cdots$،M_n (که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۲$) مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشند.

یک) نشان دهید که دنبالهٔ زیر (از Rـمدولها و Rـهمریختیها) کامل است:

$$\circ \longrightarrow M_۱ \xrightarrow{q_۱} \bigoplus_{i=۱}^{n} M_i \xrightarrow{p'_۱} \bigoplus_{i=۲}^{n} M_i \longrightarrow \circ$$

در اینجا $q_۱$ نگاشت یک به‌یک متعارف است و به‌ازای هر $(m_۱, \ldots, m_n) \in \bigoplus_{i=۱}^{n} M_i$

$$p'_۱((m_۱, \ldots, m_n)) = (m_۲, \ldots, m_n)$$

دو) فرض کنید به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$ همریختیهایی چون $\tilde{p_i} : M \to M_i$ و $\tilde{q_i} : M_i \to M$ وجود دارند که به‌ازای $۱ \leq i, j \leq n$

$$\tilde{p_i} \circ \tilde{q_i} = \mathrm{Id}_{M_i} \qquad \text{و} \qquad \text{به‌ازای } i \neq j\text{،}\ \tilde{p_i} \circ \tilde{q_j} = \circ$$

و $\sum_{i=۱}^{n} \tilde{q_i} \circ \tilde{p_i} = \mathrm{Id}_M$. نشان دهید نگاشت $f : M \to \bigoplus_{i=۱}^{n} M_i$ با تعریف

$$f(m) = (\tilde{p_۱}(m), \ldots, \tilde{p_n}(m))$$

(به‌ازای هر $m \in M$) یکریختی است.

۴۹.۶ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. دنبالهٔ کامل از Rـمدولها و Rـهمریختیها به‌صورت

$$\circ \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \circ$$

را دنبالهٔ کامل کوتاه می‌نامیم. می‌گوییم این دنباله شکافته‌شدنی است اگر زیرمدول $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Ker}\ g$ جمعوند مستقیم M باشد، یعنی اگر زیرمدولی چون G از M وجود داشته باشد که $M = \mathrm{Ker}\ g \bigoplus G$.

لذا، من‌باب مثال، دنبالهٔ زیر دنبالهٔ کامل کوتاه است:

$$\circ \longrightarrow H \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/H \longrightarrow \circ$$

که در آن H زیرمدول M، i همریختی یک به‌یک طبیعی و π بروریختی متعارف است.

مثالی از دنبالهٔ کامل شکافته شدنی دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \bigoplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

است که در آن M_1 و M_2 Rـمدول‌اند، q_1 نگاشت یک‌به‌یک متعارف (۴۷.۶ را ببینید) و p_2 تصویرگر متعارف است.

۵۰.۶ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دنبالهٔ کامل کوتاهی از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد. نشان دهید این دنباله شکافته شدنی است اگر و تنها اگر Rـهمریختیهایی چون $h : N \to M$ و $e : M \to L$ وجود داشته باشند که

$$e \circ f = \mathrm{Id}_L, \;\; g \circ h = \mathrm{Id}_N, \;\; e \circ h = 0, \;\; f \circ e + h \circ g = \mathrm{Id}_M.$$

مفهوم مجموع مستقیم رابطهٔ نزدیکی با مفهوم مدول "آزاد" دارد؛ می‌توان گفت مدول آزاد مدولی است که زیرمجموعهٔ خاصی به‌نام «پایه» دارد که در نظریهٔ مدولها همتای «پایه» در نظریهٔ فضاهای برداری است. برای تمهید مقدمه، فرض می‌کنیم M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و فرض می‌کنیم M توسط زیرمجموعه‌اش $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ تولید شود که در آن $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عضوهای M است. در این صورت بنابر ۱۱.۶ هر عضو $m \in M$ را می‌توان به‌صورت $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda g_\lambda$ نوشت که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $r_\lambda \in R$ و تنها تعدادی متناهی از r_λها ناصفرند. (در حالتی که $\Lambda = \varnothing$، مجموع را 0 در نظر می‌گیریم.) ولی ممکن است که نتوان m را به‌طور یکتا به‌صورت فوق نوشت. به‌عنوان مثال، $\mathbb{Z}$ـمدول $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید: این مدول توسط $(1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z})$ و $(0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z})$ تولید می‌شود (ولی با $(1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z})$ به‌تنهایی یا با $(0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z})$ به‌تنهایی تولید نمی‌شود)، ولی

$$\begin{aligned} &3(1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z}) + 6(0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}) \\ &\qquad = 1(1 + 2\mathbb{Z}, 0 + 5\mathbb{Z}) + 1(0 + 2\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

در واقع، اگر در حالت کلی فوق هر $m \in M$ به‌طور یکتا به‌صورت $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda g_\lambda$ قابل نمایش باشد آن‌گاه می‌گوییم $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ "پایهٔ" M است و M Rـمدول "آزاد" است. حال تعریفهای رسمی را ارائه می‌کنیم.

۵۱.۶ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. پایهٔ M خانواده‌ای چون $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عضوهای M است که

یک) $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مدول M را تولید کند؛ و

دو) هر $m \in M$ به‌طور یکتا به‌صورت $m = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ قابل نمایش باشد که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $r_\lambda \in R$ و تنها تعدادیِ متناهی از r_λها ناصفرند.

Rـمدول را آزاد می‌گوییم اگر پایه داشته باشد.

توجه کنید که R خودش Rـمدول آزاد با پایه‌ای متشکل از عضو ۱_R است. Rـمدول صفر Rـمدول آزاد با پایه‌ای تهی است.

۵۲.۶* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عضوهای M باشد. نشان دهید که $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌ای برای $\sum_{\lambda\in\Lambda} Re_\lambda$ است اگر و تنها اگر شرط زیر برقرار باشد: هرگاه $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عضوهای R باشد که تقریباً همهٔ r_λهای آن صفرند و

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda = ۰$$

آن‌گاه به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، r_λ برابر صفر باشد.

قضیهٔ زیر حاوی رابطه‌ای است بین مدولهای آزاد و مجموعهای مستقیم.

۵۳.۶ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) فرض کنید $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از Rـمدولها باشد که به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $R_\lambda = R$. در این صورت $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ یک Rـمدول آزاد با پایهٔ $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (وقتی $\Lambda \neq \varnothing$) است که در آن به‌ازای هر $\mu \in \Lambda$ همهٔ مؤلفه‌های $e_\mu \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ صفر است بجز مؤلفه‌ای که متعلق به R_μ است که برابر ۱ است.

دو) فرض کنید M Rـمدول باشد. مدول M آزاد است اگر و تنها اگر M با Rـمدولی از نوع مذکور در بند (یک) فوق یکریخت باشد. (یعنی، اگر و تنها اگر M با مجموع مستقیمی از Rها یکریخت باشد).

در واقع اگر M پایه‌ای چون $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ داشته باشد آن‌گاه $M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$، که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $R_\lambda = R$.

اثبات. یک) اثبات آن ساده است و به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

دو) ($\Longleftarrow$) فرض کنید M Rـمدول آزاد با پایهٔ $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ باشد. صحت مدعا در حالت $\Lambda = \varnothing$ واضح است؛ لذا فرض می‌کنیم $\Lambda \neq \varnothing$. به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، فرض می‌کنیم $R_\lambda = R$. تابع

$$f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \longrightarrow M$$

را با قاعدهٔ $f\left((r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ ، به‌ازای هر $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ ، تعریف می‌کنیم. (این مجموع بامعنی است زیرا هر عضو $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ تنها تعدادی متناهی مؤلفهٔ ناصفر دارد.) روشن است که f، Rـهمریختی است. چون $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مولد M است، نگاشت f پوشاست؛ چون $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایهٔ M است نتیجه می‌گیریم که f یک‌به‌یک است.

($\Longleftarrow$) هنگامی که برایمان مدلل شود که اگر M' و M'' دو Rـمدول یکریخت باشند آن‌گاه M' آزاد است اگر و تنها اگر M'' آزاد باشد، اثبات این قسمت بلاواسطه از بند (یک) فوق نتیجه می‌شود. ■

۵۴.۶* تمرین. ۵۳.۶(یک) را اثبات کنید.

همان‌طور که در نظریهٔ فضاهای برداری می‌توان با استفاده از پایه‌ها نگاشتهای خطی بین فضاهای برداری را به‌سهولت توصیف کرد، با استفاده از پایهٔ مدول آزاد F روی حلقهٔ تعویضپذیر R نیز می‌توان Rـهمریختیهای از F به Rـمدولها را به‌سهولت توصیف کرد.

۵۵.۶ تذکر. فرض کنید F مدولی آزاد روی حلقهٔ تعویضپذیر R و $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌ای برای F باشد. فرض کنید M، Rـمدول و $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عضوهای M باشد. در این صورت دقیقاً یک Rـهمریختی $f : F \to M$ وجود دارد که به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $f(e_\lambda) = x_\lambda$.

در واقع همریختیی چون f با ویژگی فوق باید به‌ازای هر خانوادهٔ $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از اعضای R که تنها تعدادی متناهی از عضوهایش ناصفرند در فرمول $f(\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda x_\lambda$ صدق کند. به‌علاوه، به‌آسانی می‌توان با استفاده از این موضوع که $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایهٔ F است نشان داد که تعریف فوق برای این Rـهمریختی از F به M بی‌ابهام است.

خوب است بدانیم که چگونه می‌توان با استفاده از خانواده‌ای از نمادها مدول آزادی ساخت که آن خانواده پایه‌اش باشد.

۵۶.۶ تذکر. فرض کنید $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از نمادها باشد که با اعضای مجموعهٔ ناتهی Λ اندیسگذاری شده است، و فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان Rـمدول آزادی چون F ساخت که $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ اساساً پایهٔ آن باشد.

فرض کنید F مجموعهٔ همهٔ عبارتهای صوری $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ باشد که در آن به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $r_\lambda \in R$ و تنها تعدادی متناهی از r_λها ناصفرند. می‌توان به‌صورت زیر یک قاعدهٔ ترکیب روی F، با نماد $+$، و یک ضرب اسکالر تعریف کنیم که به‌ازای هر $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda$ و $\sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda e_\lambda$ از F و هر $r \in R$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda + \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} (r_\lambda + s_\lambda) e_\lambda$$

و

$$r\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(rr_\lambda)e_\lambda.$$

به‌آسانی ثابت می‌شود که F با این اعمال دارای ساختار Rـمدول است. به‌علاوه، اگر به‌ازای هر $\mu \in \Lambda$، e_μ را با عبارت صوری زیر یکی بگیریم: $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda \in F$ که در آن $r_\mu = 1$ و به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$ که $\lambda \neq \mu$، $r_\lambda = 0$، آن‌گاه $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ در واقع پایه‌ای برای F است، که این نیز به‌آسانی ثابت می‌شود.

یکی از کاربردهای ۵۶.۶ اثبات مطلبی است که غالباً مورد نیاز است و آن اینکه هر مدول دلخواه روی حلقهٔ تعویضپذیر R نگارهٔ Rـهمریخت یک Rـمدول آزاد است (یعنی همریختی پوشایی از یک Rـمدول آزاد به‌آن مدول دلخواه وجود دارد). از این مطلب بعداً در این کتاب استفاده می‌کنیم. این مطلب به‌سادگی از ۵۵.۶ و ۵۶.۶ نتیجه می‌شود.

۵۷.۶ قضیه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این صورت Rـمدولی آزاد چون F و همریختی پوشایی از F به M وجود دارد.

همچنین اگر M مولدی متناهی با n عضو داشته باشد آن‌گاه Rـمدولی آزاد چون F با پایه‌ای متناهی و دارای n عضو، و همریختی پوشایی از F به M وجود دارد.

اثبات. اگر $M = 0$ و $n = 0$ تمام احکام فوق واضح‌اند. لذا فرض می‌کنیم که $M \neq 0$. فرض کنید $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای (ناتهی) از عضوهای M و $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مولد M باشد: در بدترین حالت ممکن می‌توانیم از این موضوع استفاده کنیم که M خودش را تولید می‌کند!

حال فرض کنید $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از نمادها باشد که با Λ اندیسگذاری شده است، و با استفاده از ۵۶.۶ یک Rـمدول آزاد چون F بسازید که $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌اش باشد. حال با استفاده از ۵۵.۶ یک Rـهمریختی چون $f : F \to M$ تعریف کنید که به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $f(e_\lambda) = x_\lambda$. به‌آسانی دیده می‌شود که f پوشاست. ■

آخرین قضیهٔ این فصل حاوی مفهوم مهم "رتبهٔ" مدول آزاد با پایهٔ متناهی روی حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر است.

۵۸.۶ قضیه و تعریف. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر و F Rـمدول آزاد با پایه‌ای متناهی باشد. در این صورت هر پایهٔ F متناهی است و تعداد عضوهای هر دو پایهٔ F یکسان‌اند. تعداد عضوهای هر پایهٔ F را رتبهٔ F می‌نامیم و با $\operatorname{rank} F$ نشان می‌دهیم.

اثبات. روشن است که می‌توانیم فرض کنیم $F \neq 0$. فرض کنید $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌ای برای F باشد. چون R صفر نیست بنابر ۹.۳ ایدآل ماکسیمالی چون M دارد. حال بنابر ۲۳.۶،

Rـمدول F/MF توسط M پوچ می‌شود (یعنی $M \subseteq \mathrm{Ann}_R(F/MF)$) و می‌توانیم آن را به R/Mـمدول، یعنی در واقع به‌فضای برداری روی R/M، تبدیل کنیم که در آن به‌ازای هر $r \in R$ و $y \in F$، $(r+M)(y+MF) = ry + MF$. حال نشان می‌دهیم که $(e_\lambda + MF)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌ای برای این R/Mـفضاست.

به‌آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ $\{e_\lambda + MF : \lambda \in \Lambda\}$ مولد R/Mـفضای F/MF است. فرض کنید $(\rho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از عضوهای R/M باشد که تنها تعدادی متناهی از عضوهایش ناصفرند و

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(e_\lambda + MF) = 0_{F/MF}.$$

با توجه به‌اینکه $0_{R/M} = 0_R + M$، خانواده‌ای چون $(r_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عضوهای R وجود دارد که تنها تعدادی متناهی از عضوهایش ناصفرند و به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $\rho_\lambda = r_\lambda + M$. در نتیجه

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda e_\lambda + MF) = 0_{F/MF}$$

و لذا $\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda \in MF$. چون مجموعهٔ $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مولد F است به‌آسانی از ۱۵.۶ نتیجه می‌شود که خانواده‌ای چون $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ از عضوهای M با تنها تعدادی متناهی عضو ناصفر وجود دارد که

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e_\lambda.$$

چون $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ پایهٔ F است، در نتیجه به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $r_\lambda = a_\lambda \in M$. لذا به‌ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $\rho_\lambda = r_\lambda + M = 0_{R/M}$. در نتیجه چنانکه ادعا کرده بودیم $(e_\lambda + MF)_{\lambda\in\Lambda}$ پایه‌ای برای R/Mـفضای F/MF است.

حال احکام قضیه بلاواسطه از احکام متعارف نظریهٔ پایه‌های فضاهای برداری نتیجه می‌شوند.■

در نظریهٔ مدولها در برخی موارد، مانند قضیهٔ فوق، می‌توان با تدابیری از ویژگیهای آشنای فضاهای برداری استفاده کرد. این موضوع در نظریهٔ مدولهای متناهی‌مولد روی حلقه‌های شبه‌موضعی مفید واقع می‌شود: این مطلب را در فصل ۹ مورد بحث قرار می‌دهیم.

۵۹.۶ تمرین. فرض کنید F مدولی آزاد روی حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر R باشد و مولد متناهی داشته باشد. نشان دهید هر پایهٔ F متناهی است.

۶۰.۶ گامهای بعدی. مباحثی نسبتاً اساسی چون ضرب تانسوری، مدولهای همریختیها، و مدولهای تصویری در نظریهٔ مدولها وجود دارند که در این فصل نیامده‌اند زیرا آنها را در این کتاب به‌کار نخواهیم برد. ولی لازم به‌تذکر است که اگر خواننده مایل باشد مطالعهٔ جبر تعویضپذیر

را فراتر از مفاد این کتاب ادامه دهد لازم است به‌این مباحث توجه کند. همهٔ این مفاهیم در جبر هومولوژیک اساسی‌اند و به‌نظر نگارنده مرجع [۱۱]، اثر نورثکات،[1] برای آشنایی با این مفاهیم مفید است. همچنین مطالبی دربارهٔ مفهومهای بنیادی مبحث ضرب تانسوری در پیوست A از مرجع [۸] و فصل ۲ از مرجع [۱] وجود دارند.

در ۲۷.۶ به‌تعریف مدول $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ که در آن M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر Rاند نزدیک شده بودیم: در واقع $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ مجموعهٔ همهٔ Rـهمریختیهای از M به N است که با جمع تعریف شده در ۲۷.۶ و ضرب اسکالرِ $(rf)(m) = rf(m)$، که $r \in R$ و $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ و $m \in M$، به‌صورت Rـمدول درآمده است. همچنین رابطهٔ نزدیکی بین مفاهیم مدول آزاد و مدول تصویری وجود دارد، زیرا یک Rـمدول مدول تصویری است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم یک Rـمدول آزاد باشد. ولی مجبوریم خوانندگان علاقه‌مند را برای مطالعهٔ این مباحث به‌منابع دیگر رجوع دهیم.

۷

شرطهای زنجیره‌ای در مدولها

فصل مقدماتی ۶ در مدولها مربوط به‌اصول بسیار بنیادی نظریهٔ مدولها روی حلقه‌های تعویض‌پذیر است. در واقع می‌توان گفت که فصل ۶ شامل مطالب مهم و اساسی برای کار ماست، اما شامل مطالب چندان جالب توجهی نیست. در این فصل خواهیم دید که از نوعی "شرطهای تناهی" در مدولهای روی حلقه‌های تعویض‌پذیر اطلاعاتی در مورد ساختار مدولها به‌دست می‌آید. البته جالبتر بودن نتایج این فصل از نتایج فصل ۶ به سلیقهٔ خواننده بستگی دارد، ولی از نظر مؤلف به یقین برخی از قضیه‌های این فصل بسیار جالب‌اند.

اولین دسته از"شرطهای تناهی" که در مدولها بررسی خواهیم کرد به‌اصطلاح "شرطهای زنجیره‌ای" نام دارند. مطالب ۳۵.۳، ۳۶.۳، ۳۷.۳ و ۳۸.۳ مربوط به این بحث‌اند. یادآوری می‌کنیم که در ۳۶.۳ دیدیم که اگر $(V, \preceq)$ مجموعه‌ای جزئاًمرتب و ناتهی باشد آن‌گاه $(V, \preceq)$ در شرط زنجیرهٔ صعودی صدق می‌کند اگر و تنها اگر در شرط ماکسیمال صدق کند. (وقتی می‌گوییم $(V, \preceq)$ در شرط زنجیرهٔ صعودی صدق می‌کند منظور این است که هر گاه $(v_i)_{i\in \mathbb{N}}$ خانواده‌ای از عضوهای V باشد که

$$v_1 \preceq v_2 \preceq \cdots \preceq v_i \preceq v_{i+1} \preceq \cdots$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+i}$. همچنین وقتی می‌گوییم $(V, \preceq)$ در شرط ماکسیمال صدق می‌کند منظور این است که هر زیرمجموعهٔ ناتهی V شامل

یک عضو ماکسیمال (نسبت به $\preceq$) است. ۳۵.۳ را ببینید.) حال این مطالب را در مورد مجموعهٔ S_M متشکل از همهٔ زیرمدولهای مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R به‌کار می‌بریم. می‌گوییم M "نوتری" است اگر S_M در شرط زنجیرهٔ صعودی نسبت به رابطهٔ مشمولیت صدق کند، یعنی اگر مجموعهٔ جزئاًمرتب $(S_M, \preceq)$، که در آن $\preceq$ به‌ازای $G_1, G_2 \in S_M$ به‌صورت

$$G_1 \preceq G_2 \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \subseteq G_2$$

تعریف می‌شود، در شرطهای ۳۶.۳، که معادل‌اند، صدق کند. همچنین می‌گوییم M "آرتینی" است اگر S_M در شرط زنجیرهٔ صعودی نسبت به رابطهٔ شمول صدق کند، یعنی اگر مجموعهٔ جزئاًمرتب $(S_M \preceq_1)$، که در آن $\preceq_1$ به‌ازای $G_1, G_2 \in S_M$ به‌صورت

$$G_1 \preceq_1 G_2 \quad \Longleftrightarrow \quad G_1 \supseteq G_2$$

تعریف می‌شود، در شرطهای معادل ۳۶.۳ صدق کند. اصطلاحهای "نوتری" و "آرتینی" منسوب به امی‌نوتر و امیل‌آرتین هستند که هر دو کارهای بنیادی در این زمینه کرده‌اند.

۱.۷ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم M، Rـمدول نوتری است اگر در شرایط زیر (که بنابر ۳۶.۳ معادل‌اند) صدق کند:

یک) هرگاه $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از زیرمدولهای M باشد و

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \cdots$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $G_k = G_{k+i}$.

دو) هر مجموعهٔ ناتهی از زیرمدولهای M شامل عضوی ماکسیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت باشد.

(شرط (یک) فوق شرط زنجیرهٔ صعودی برای زیرمدولهای M و شرط (دو) شرط ماکسیمال برای زیرمدولهای M نامیده می‌شود.)

۲.۷ تمرین. فرض کنید M مدولی نوتری روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $u : M \to M$ یک Rـبروریختی از M به‌خودش باشد. ثابت کنید u یکریختی است. (راهنمایی: $\ker u \subseteq \ker(u \circ u)$.)

۳.۷ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم M، Rـمدول آرتینی است اگر در شرایط زیر (که بنابر ۳۶.۳ معادل‌اند) صدق کند:

یک) هرگاه $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از زیرمدولهای M باشد و

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $G_k = G_{k+i}$.

دو) هر مجموعهٔ ناتهی از زیرمدولهای M شامل عضوی مینیمال نسبت به‌رابطهٔ مشمولیت باشد.

(شرط (یک) فوق شرط زنجیرهٔ نزولی برای زیرمدولهای M و شرط (دو) شرط مینیمال برای زیرمدولهای M نامیده می‌شود.)

۴.۷ تمرین. فرض کنید M مدولی آرتینی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید $v : M \to M$ یک Rـتکریختی از M به‌خودش باشد. ثابت کنید v یکریختی است.

۵.۷ تذکر. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. از ۹.۶ روشن است که اگر R به‌عنوان یک مدول روی خودش در نظر گرفته شود آن‌گاه R یک Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر R مطابق تعریف ۳۷.۳ حلقه‌ای نوتری باشد، زیرا Rـزیر مدولهای R دقیقاً ایدآلهایش هستند. طبعاً مفهومی به‌نام حلقهٔ تعویضپذیر" آرتینی" نیز وجود دارد که در زیر تعریف می‌کنیم.

۶.۷ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. می‌گوییم R حلقهٔ آرتینی است اگر در شرایط زیر (که بنابر ۳۶.۳ معادل‌اند) صدق کند:

یک) هرگاه $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از ایدآلهای R باشد و

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq I_{i+1} \supseteq \cdots$$

آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$.

دو) هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآلهای R شامل عضوی مینیمال نسبت به رابطهٔ مشمولیت باشد.

حال مثالهایی می‌زنیم که نشان می‌دهند مفاهیم مدول نوتری و مدول آرتینی متفاوت‌اند.

۷.۷ مثال. چون $\mathbb{Z}$ دامنهٔ اصلی‌ایدآل است، پس بنابر ۳۸.۳ حلقهٔ نوتری است. ولی حلقهٔ آرتینی نیست زیرا زنجیرهٔ

$$2\mathbb{Z} \supset 2^2\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^i\mathbb{Z} \supset 2^{i+1}\mathbb{Z} \supset \cdots$$

زنجیره‌ای اکیداً نزولی از ایدآلهای $\mathbb{Z}$ است (زیرا به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $2^{i+1} = 2^i 2 \in 2^i\mathbb{Z}$ و همچنین $2^i \notin 2^{i+1}\mathbb{Z}$ زیرا در غیر این‌صورت به‌ازای عضوی چون $r \in \mathbb{Z}$ داریم: $2^i = 2^{i+1}r$ که متناقض با د.ت.ی بودن $\mathbb{Z}$ است.)

توجه کنید که این مثال همچنین مثالی است از مدولی (روی یک حلقهٔ تعویضپذیر) که نوتری است ولی آرتینی نیست.

۸.۷* تمرین. یک) نشان دهید که هر هیأت هم حلقهٔ آرتینی است و هم نوتری.

دو) نشان دهید که هر د.ا.ا آرتینی باید هیأت باشد.

در ۷.۷ مثالی ازحلقهٔ تعویضپذیر نوتری دیدیم که آرتینی نیست، اما چنانکه در فصل ۸ اثبات خواهیم کرد هر حلقهٔ تعویضپذیر آرتینی نوتری است. لذا برای یافتن مثالی از مدول آرتینیِ غیرنوتری روی حلقهٔ تعویضپذیر نباید در میان حلقه‌های تعویضپذیر که به‌عنوان مدول روی خودشان در نظر گرفته شده‌اند جستجو کنیم.

۹.۷ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم که زیرمدول G از M سره است اگر $G \neq M$.

با تعریف فوق مفهوم "سره‌بودن" در ایدآلها به زیرمدول مدولهای روی حلقه‌های تعویضپذیر تعمیم می‌یابد.

۱۰.۷ مثال. فرض کنید p عددی اول باشد. در این‌صورت

$$E(p) := \left\{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

زیرمدولی از $\mathbb{Z}$ـمدول $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است.
به‌ازای هر $t \in \mathbb{N}_0$، قرار دهید

$$G_t := \left\{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}\right\}.$$

در این‌صورت
یک) به‌ازای هر $t \in \mathbb{N}_0$، G_t زیرمدولی از $E(p)$ است که توسط $(\frac{1}{p^t}) + \mathbb{Z}$ تولید می‌شود (لذا $G_0 = 0$)؛
دو) هر زیرمدول سرهٔ $E(p)$ برابر با G_iای است که $i \in \mathbb{N}_0$؛
سه) داریم

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \cdots$$

و $E(p)$ یک $\mathbb{Z}$ـمدول آرتینی غیرنوتری است.

اثبات. به‌آسانی ثابت می‌شود که $E(p)$ زیرمدول $\mathbb{Z}$ـمدول $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ است: اثبات این مطلب را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.
یک) فرض کنید $t \in \mathbb{N}_0$. در این‌صورت

$$G_t = \left\{r\left(\frac{1}{p^t} + \mathbb{Z}\right) : r \in \mathbb{Z}\right\}$$

زیرمدولی از $E(p)$ است که توسط $(1/p^t) + \mathbb{Z}$ تولید می‌شود: ۱۱.۶(سه) را ببینید.

دو) فرض کنید H زیرمدول سرهٔ $E(p)$ باشد. اگر $H = 0$ آن‌گاه $H = G_0$؛ لذا فرض می‌کنیم که $H \neq 0$. فرض کنید $0 \neq \alpha \in H$. حال $r \in \mathbb{Z}$ و $t \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\alpha = (r/p^t) + \mathbb{Z}$؛ به‌علاوه چون $\alpha \neq 0$ باید داشته باشیم $r \notin p^t\mathbb{Z}$ و لذا ($r \neq 0$ و) بزرگترین توانی از p که مقسوم‌علیه r باشد از p^t کوچکتر است. پس از حذف توانهای مشترک p از صورت و مخرج کسر می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha = \frac{r'}{p^{t'}} + \mathbb{Z} \quad \text{که} \quad t' \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 1 = \text{ب.م.م}(r', p)$$

مرحلهٔ بعدی این است که نشان دهیم اگر $0 \neq \alpha_1 \in H$ و

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{p^{t_1}} + \mathbb{Z} \quad \text{که} \quad t_1 \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 1 = \text{ب.م.م}(r_1, p)$$

آن‌گاه $(1/p^{t_1}) + \mathbb{Z} \in H$ و لذا با توجه به بند (یک)، $G_{t_1} \subseteq H$. برای اثبات این مطلب، توجه کنید که $1 = \text{ب.م.م}(r_1, p^{t_1})$ و لذا، بنابر قضیهٔ ۲.۴.۲ از مرجع [۱۵]، $a, b \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به‌طوری که $ar_1 + bp^{t_1} = 1$. در نتیجه، چون $ar_1 - 1 \in p^{t_1}\mathbb{Z}$، همان‌طور که ادعا کرده بودیم، داریم

$$\frac{1}{p^{t_1}} + \mathbb{Z} = \frac{ar_1}{p^{t_1}} + \mathbb{Z} = a\alpha_1 \in H.$$

حال توجه کنید که $E(p) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} G_i$ و

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n \subseteq G_{n+1} \subseteq \cdots$$

(زیرا به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $(1/p^n) + \mathbb{Z} = p((1/p^{n+1}) + \mathbb{Z})$.) چون H زیرمدول سرهٔ $E(p)$ است لذا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ اعداد $i \in \mathbb{N}$ که به‌ازای آنها $G_i \subseteq H$ دارای بزرگترین عضو است: اگر چنین نباشد آن‌گاه به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$ یک $n_j \in \mathbb{N}$ وجود خواهد داشت که $n_j \geq j$ و $G_{n_j} \subseteq H$ و لذا $G_j \subseteq H$ و در نتیجه $H = E(p)$ که متناقض با سره‌بودن H است. فرض کنید m بزرگترین عضو مذکور باشد. ادعا می‌کنیم که $G_m = H$. روشن است که بنا به تعریفِ m داریم $G_m \subseteq H$.

فرض می‌کنیم $G_m \subset H$ و در پی تناقض می‌گردیم. در این‌صورت عضوی چون $\alpha_2 \in H \setminus G_m$ وجود دارد. می‌توانیم بنویسیم

$$\alpha_2 = \frac{r_2}{p^{t_2}} + \mathbb{Z} \quad \text{که} \quad t_2 \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad 1 = \text{ب.م.م}(r_2, p)$$

حال چون $\alpha_2 \notin G_m$ لذا $t_2 > m$. اما از پاراگراف قبل از پاراگراف فوق نتیجه می‌شود که $G_{t_2} \subseteq H$ که متناقض تعریف m است. در نتیجه همان‌طور که ادعا شده بود $H = G_m$.

سه) فرض می‌کنیم $i \in \mathbb{N}$. نشان می‌دهیم که $(1/p^{i+1}) + \mathbb{Z} \notin G_i$. در واقع اگر $(1/p^{i+1}) + \mathbb{Z} \in G_i$ آن‌گاه عضوی چون $r \in \mathbb{Z}$ وجود خواهد داشت که

$$\frac{1}{p^{i+1}} - \frac{r}{p^i} \in \mathbb{Z}$$

و لذا $1 - rp \in p^{i+1}\mathbb{Z}$ که امکان ندارد. در نتیجه

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \cdots$$

بنابراین $E(p)$ $\mathbb{Z}$ـمدول نوتری نیست.

این مطلب که $E(p)$ $\mathbb{Z}$ـمدول آرتینی است از بند (دو) نتیجه می‌شود: جملهٔ دوم هر زنجیرهٔ اکیداً نزولی از زیرمدولهای $E(p)$ برابر با G_iای است که $i \in \mathbb{N}$. و هم اکنون ثابت کردیم که تنها تعدادی متناهی زیرمدول از $E(p)$ وجود دارند که زیرمجموعهٔ G_i هستند. لذا مشاهده می‌کنیم که هیچ زنجیرهٔ اکیداً نزولی نامتناهی از زیرمدولهای $E(p)$ وجود ندارد. ■

چون فضاهای برداری مثالهای خاصی از مدولها هستند طبیعی است که بپرسیم منظور از اینکهٔ یک فضای برداری نوتری است و منظور از اینکه یک فضای برداری مدول آرتینی است چیست. به این سؤالات در قضیهٔ بعد پاسخ می‌دهیم. این قضیه نشان می‌دهد که به‌ازای هیأتی چون K، مفاهیم Kـمدول نوتری و Kـمدول آرتینی یکسان‌اند. با توجه به مثالهای ۷.۷ و ۱۰.۷، این قضیه شاهد دیگری است بر اینکه نظریهٔ Kـفضاها ساده‌تر از نظریهٔ کلی مدولها روی حلقه‌های دلخواه است.

۱۱.۷ نمادگذاری. اگر V فضای برداری متناهی‌بُعد روی هیأت K باشد، بُعد V را با $\operatorname{vdim} V$ (یا، اگر بخواهیم به هیأت مورد بحث اشاره کنیم، با $\operatorname{vdim}_K V$) نمایش می‌دهیم.

۱۲.۷ قضیه. فرض کنید K هیأت و V یک فضای برداری روی K باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) V Kـفضای متناهی‌بُعد است؛

دو) V Kـمدول نوتری است؛

سه) V Kـمدول آرتینی است.

اثبات. این قضیه در حقیقت قضیه‌ای مقدماتی در نظریهٔ فضاهای برداری است ولی با وجود این اثبات آن را به تفصیل ارائه می‌دهیم.

(دو) $\Longleftarrow$ (یک) و (سه) $\Longleftarrow$ (یک). فرض کنید بعد V متناهی و مثلاً n است. یادآوری می‌کنیم که اگر L زیرفضایی از V باشد آن‌گاه بعد L نیز متناهی است و $\text{vdim}\ L \le n$؛ همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر M نیز زیرفضای V باشد و $L \subset M$، آن‌گاه $\text{vdim}\ L < \text{vdim}\ M$. از این مطالب نتیجه می‌شود که به‌ازای هر زنجیرهٔ متناهی چون

$$L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{t-1} \subset L_t$$

از $t+1$ زیرفضای V (در صورتی که این زنجیره اکیداً صعودی یا نزولی باشد) باید $t \le n$. در نتیجه V Kـمدول نوتری و همچنین Kـمدول آرتینی است.

(یک) $\Longleftarrow$ (دو) و (یک) $\Longleftarrow$ (سه). فرض کنید بُعد V متناهی نباشد: می‌خواهیم ثابت کنیم که V Kـمدول نوتری یا Kـمدول آرتینی نیست. دنباله‌ای نامتناهی چون $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ از عضوهای V وجود دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، خانوادهٔ $(w_i)_{i=1}^{n}$ استقلال خطی دارد. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، قرار دهید

$$M_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} Kw_i \quad \text{و} \quad L_n = \sum_{i=1}^{n} Kw_i$$

و لذا بعد L_n متناهی است و $\text{vdim}\ L_n = n$. چون

$$L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \cdots$$

مشاهده می‌کنیم که V Kـمدول نوتری نیست. همچنین چون به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $M_{n+1} \subseteq M_n$ و $w_{n+1} \notin M_{n+1}$، زنجیره‌ای اکیداً نزولی و نامتناهی چون

$$M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \cdots$$

از زیرفضاهای V وجود دارد و لذا V Kـمدول آرتینی نیست. ■

قضیهٔ مهم دیگری در مورد خصوصیات مدولهای نوتری وجود دارد: برای ارائهٔ این قضیه به مفهوم مدول متناهی‌ٔمولد نیاز داریم. بنابر ۱۲.۶ مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R را متناهی‌مولد می‌گوییم اگر توسط زیرمجموعه‌ای متناهی چون J از M تولید شود، و با توجه به ۱۱.۶ اگر $\varnothing \ne J = \{j_1, \ldots, j_t\}$ آن‌گاه هر عضو M را می‌توان به‌صورت "Rـترکیبی خطی" (نه لزوماً یکتا) چون $\sum_{i=1}^{t} r_i j_i$ نوشت که در آن $r_1, \ldots, r_t \in R$. همچنین زیرمدول صفر M متناهی‌مولد است و مجموعهٔ تهی مولد آن است.

۱۳.۷ قضیه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول M متناهی‌مولد باشد.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنیم G زیرمدولی از M باشد. فرض می‌کنیم G متناهی‌مولد نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. فرض کنید Γ مجموعهٔ همهٔ زیرمدولهای G باشد که متناهی‌مولدند. در این‌صورت $\Gamma \neq \varnothing$ زیرا $\circ \in \Gamma$. چون هر زیرمدول G زیرمدول M نیز هست از شرط ماکسیمال نتیجه می‌شود که Γ نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارای عضو ماکسیمالی چون N است؛ همچنین $N \subset G$ زیرا فرض کرده‌ایم که G متناهی‌مولد نیست. فرض کنید $g \in G \backslash N$؛ در این‌صورت $N + Rg$ زیرمدولی متناهی‌مولد از G است و $N \subset N + Rg$ زیرا $g \in (N + Rg) \backslash N$. اما این مطلب با ماکسیمال بودن N در Γ تناقض دارد.

در نتیجه G باید متناهی‌مولد باشد.

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید

$$L_۱ \subseteq L_۲ \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq L_{n+۱} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از زیرمدولهای M باشد. در این‌صورت $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ زیرمدول M است، زیرا واضح است که G تحت ضرب اسکالرها در عضوهای دلخواه R بسته است و اگر $g, h \in G$، آن‌گاه $i, j \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری‌که $g \in L_i$ و $h \in L_j$ و چون $L_i \subseteq L_j$ یا $L_j \subseteq L_i$ نتیجه می‌شود که $g + h \in G$.

بنا به‌فرض، G یک Rـمدول متناهی‌مولد است: فرض کنید G توسط $g_۱, \ldots, g_t$ که $t \in \mathbb{N}$ تولید شود. (واضح است که به هر مجموعهٔ مولد G می‌توان $\circ$ را افزود.) به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, t$ عدد $n_i \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_i \in L_{n_i}$. فرض کنید $k = \max\{n_۱, \ldots, n_t\}$. در این‌صورت به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, t$، $g_i \in L_k$ و لذا

$$G = \sum_{i=۱}^{t} Rg_i \subseteq L_k \subseteq L_{k+۱} \subseteq \cdots \subseteq L_{k+i} \subseteq \cdots \subseteq G.$$

در نتیجه به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $L_k = L_{k+i}$ و زنجیرهٔ صعودیی که کار را با آن شروع کردیم سرانجام ایستاست. در نتیجه M نوتری است. ■

از ۱۳.۷ نتیجه می‌شود که حلقهٔ تعویضپذیر R نوتری است اگر و تنها اگر هر ایدآل آن متناهی‌مولد باشد. این موضوع برایمان بسیار بااهمیت است و در فصل ۸ با مواردی که مؤید اهمیت آن است روبرو می‌شویم.

۱۴.۷ لم. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

یک) اگر M نوتری باشد آن‌گاه هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی آن نیز نوتری است.

دو) اگر M آرتینی باشد آن‌گاه هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی آن نیز آرتینی است.

اثبات. یک) فرض کنید M نوتری و G زیرمدول آن باشد چون هر زیرمدول G زیرمدول M است طبق تعریفِ Rـمدول نوتری در ۱.۷ روشن است که G نوتری است. همچنین از ۲۴.۶

نتیجه می‌شود که هر زنجیرهٔ صعودی از زیرمدولهای M/G باید به‌صورت

$$G_1/G \subseteq G_2/G \subseteq \cdots \subseteq G_n/G \subseteq /G_{n+1}/G \subseteq \cdots$$

باشد که در آن

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n \subseteq G_{n+1} \subseteq \cdots$$

و این زنجیره زنجیره‌ای (صعودی) از زیرمدولهای M است که همهٔ آنها G را شامل می‌شوند. چون زنجیرهٔ دوم باید سرانجام ایستا شود، زنجیرهٔ اول نیز باید چنین شود.

دو) این حکم را می‌توان از راهی بسیار مشابه با اثبات حکم (یک) فوق ثابت کرد و لذا اثبات آن به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

۱۵.۷* تمرین. حکم (دو)ی لم ۱۴.۷ را ثابت کنید.

۱۶.۷ تذکر. روشن است (مثلاً از ۳۶.۶) که اگر دو Rـ مدول M_1 و M_2 یکریخت باشند (و R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد) آن‌گاه M_1 نوتری است اگر و تنها اگر M_2 نوتری باشد، و M_1 آرتینی است اگر و تنها اگر M_2 آرتینی باشد.

مفاهیم مدول نوتری و مدول آرتینی رابطهٔ زیبایی با دنبالهٔ کامل کوتاه مدولها که در ۴۹.۶ معرفی شد دارند. حال این مطلب را بررسی می‌کنیم.

۱۷.۷ قضیه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدولی از M باشد.

یک) Rـمدول M نوتری است اگر و تنها اگر G و M/G نوتری باشند.

دو) Rـ مدول M آرتینی است و اگر تنها اگر G و M/G آرتینی باشند.

اثبات. یک) ($\Longleftarrow$) این حکم در ۱۴.۷ ثابت شد.

($\Longrightarrow$) فرض کنید زنجیرهٔ

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq L_{n+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از زیرمدولهای M باشد. برای استفاده از این فرض که G و M/G نوتری‌اند زنجیره‌ای صعودی از زیر مدولهای G و زنجیره‌ای صعودی از زیرمدولهای M/G را از زنجیرهٔ فوق به‌دست می‌آوریم. زنجیرهٔ

$$G \cap L_1 \subseteq G \cap L_2 \subseteq \cdots \subseteq G \cap L_n \subseteq G \cap L_{n+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای از زیرمدولهای G است و لذا $k_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $G \cap L_{k_1} = G \cap L_{k_1+i}$.

برای به‌دست آوردن زنجیره‌ای صعودی از زیرمدولهای M/G، بنابر ۲۴.۶ به زنجیره‌ای صعودی از زیرمدولهای M نیاز است که همهٔ جمله‌های آن شامل G باشند. نمی‌دانیم که آیا (مثلاً) L_1 شامل G است یا نیست. ولی زنجیرهٔ

$$G + L_1 \subseteq G + L_2 \subseteq \cdots \subseteq G + L_n \subseteq G + L_{n+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای از زیرمدولهای M است که همهٔ جمله‌هایش شامل Gاند و لذا زنجیرهٔ

$$(G + L_1)/G \subseteq (G + L_2)/G \subseteq \cdots \subseteq (G + L_n)/G \subseteq (G + L_{n+1})/G \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای از زیرمدولهای M/G است. لذا $k_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $(G + L_{k_2})/G = (G + L_{k_2+i})/G$ و لذا به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $G + L_{k_2} = G + L_{k_2+i}$.

فرض کنید $k = \max\{k_1, k_2\}$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $L_k = L_{k+i}$. روشن است که $L_k \subseteq L_{k+i}$. فرض کنید $g \in L_{k+i}$. می‌دانیم که

$$G + L_k = G + L_{k+i} \quad \text{و} \quad G \cap L_k = G \cap L_{k+i}$$

چون $g \in L_{k+i} \subseteq G + L_{k+i} = G + L_k$، عضوهای $a \in G$ و $b \in L_k$ وجود دارند به‌طوری‌که $g = a + b$. در نتیجه

$$a = g - b \in G \cap L_{k+i} = G \cap L_k$$

و لذا هر دو عضو a و b به L_k متعلق‌اند و $g = a + b \in L_k$. بنابراین $L_{k+i} \subseteq L_k$ و اثبات کامل است.

دو) اثبات این حکم به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود. ■

۱۸.۷* تمرین. حکم (دو) از ۱۷.۷ را ثابت کنید.

۱۹.۷ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دنبالهٔ کامل کوتاهی از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد. (۴۹.۶ را ببینید.)

یک) Rـمدول M نوتری است اگر و تنها اگر L و N نوتری باشند.

دو) Rـمدول M آرتینی است اگر و تنها اگر L و N آرتینی باشند.

اثبات. این قضیه اساساً نتیجه‌ای است که به‌آسانی از ۱۶.۷ و ۱۷.۷ به‌دست می‌آید. این‌بار جزئیات اثبات حکم (دو) را ارائه می‌دهیم و اثبات حکم (یک) را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

دو) توجه کنید که $L \cong \operatorname{Im} f = \ker g$ و همچنین بنابر اولین قضیهٔ یکریختی مدولها یعنی ۳۳.۶ داریم $M/\ker g \cong N$. بنابر ۱۷.۷، M آرتینی است اگر و تنها اگر $\ker g$ و $M/\ker g$ آرتینی باشند؛ و لذا بنابر ۱۶.۷، M آرتینی است اگر و تنها اگر L و N هر دو آرتینی باشند. ■

۲۰.۷* تمرین. حکم (یک) ۱۹.۷ را ثابت کنید.

۲۱.۷ نتیجه. فرض کنید $M_1, \ldots, M_n$ (که $n \in \mathbb{N}$) مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشند.

یک) مجموع مستقیم $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نوتری است اگر و تنها اگر $M_1, \ldots, M_n$ همگی نوتری باشند.

دو) مجموع مستقیم $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ آرتینی است اگر و تنها اگر $M_1, \ldots, M_n$ همگی آرتینی باشند.

اثبات. این احکام را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. در حالتی که $n = 1$ مطلبی برای اثبات وجود ندارد زیرا $\bigoplus_{i=1}^{1} M_i$ به‌روشنی با M_1 یکریخت است. لذا در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم $n > 1$ و هر دو نتیجه به‌ازای مقادیر کوچکتر از n ثابت شده باشند. بنابر ۴۸.۶ دنبالهٔ کاملی به‌صورت

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=2}^{n} M_i \longrightarrow 0$$

وجود دارد و لذا از ۱۹.۷ نتیجه می‌شود که $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر هر دو مدول M_1 و $\bigoplus_{i=2}^{n} M_i$ نوتری (آرتینی) باشند. ولی بنا به‌فرض استقرا، $\bigoplus_{i=2}^{n} M_i$ نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر مدولهای $M_2, \ldots, M_n$ نوتری (آرتینی) باشند. بنابراین اثبات این مرحلهٔ استقرا و لذا اثبات قضیه به پایان می‌رسد. ■

این حکم نتیجهٔ بسیار مهمی دارد. یک نتیجهٔ واضح آن این است که اگر R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری (آرتینی) باشد آن‌گاه هر Rـمدول آزاد چون F با پایه‌ای متناهی نوتری (آرتینی) است، به این دلیل ساده که بنابر ۵۳.۶، F با مجموع مستقیم تعدادی متناهی از Rها یکریخت است. ولی نتیجه‌ای بهتر از این نیز برقرار است.

۲۲.۷ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد.

یک) اگر R حلقه‌ای نوتری باشد آن‌گاه هر Rـمدول متناهی‌مولد نوتری‌است.

دو) اگر R حلقه‌ای آرتینی باشد آن‌گاه هر Rـمدول متناهی‌مولد آرتینی است.

اثبات. فرض کنید M Rـمدولی متناهی‌مولد باشد. بنابر ۵۷.۶، Rـمدولی آزاد چون F با پایه‌ای متناهی و Rـ بروریختیی چون $f : F \to M$ وجود دارد. اگر R نوتری (آرتینی)

باشد آن‌گاه همان‌طور که در پاراگراف قبل از این نتیجه توضیح داده شد، F Rــمدولی نوتری (آرتینی) است و لذا از اثبات ۱۹.۷ (یا ۳۶.۶) نتیجه می‌شود که M نیز Rــمدولی نوتری (آرتینی) است. ■

۲۳.۷ تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ زیر مدولهایی از M باشند و $M/G_۱$ و $M/G_۲$ هر دو نوتری باشند. نشان دهید $M/(G_۱ \cap G_۲)$ نوتری است.

۲۴.۷ لم. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $m \in M$. در این صورت یک یکریختی Rـ مدولی چون

$$f : R/(\circ : m) \xrightarrow{\cong} Rm$$

وجود دارد که به‌ازای هر $r \in R$، $f(r + (\circ : m)) = rm$.

اثبات. روشن است که نگاشت $g : R \to Rm$ با تعریف $g(r) = rm$، به‌ازای هر $r \in R$، Rــبروریختیی از R به‌روی زیر مدول Rm از M است و چون

$$\ker g = \{r \in R : rm = \circ\} = (\circ : m)$$

حکم قضیه بلاواسطه از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها یعنی ۳۳.۶ نتیجه می‌شود. ■

۲۵.۷* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید که M مدولی دوری است (۱۲.۶ را ببینید) اگر و تنها اگر M با Rــمدولی به‌صورت R/I یکریخت باشد که در آن I ایدآلی از R است.

۲۶.۷ تذکر. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآلی از R باشد که $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$، و لذا همان‌طور که در ۱۹.۶ توضیح داده شد، M را می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان یک R/Iــمدول در نظر گرفت. همچنین یادآوری می‌کنیم که در ۱۹.۶ گفته شد زیرمجموعه‌ای از M، Rــزیرمدول است اگر و تنها اگر R/Iــزیرمدول باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که M به‌عنوان Rــمدول مدولی نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر به‌عنوان R/Iــمدول مدولی نوتری (آرتینی) باشد.

به‌ویژه اگر J ایدآلی از R باشد آن‌گاه از مطالب فوق نتیجه می‌شود که R/J به‌عنوان Rــمدول مدولی نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر R/J حلقه‌ای نوتری (آرتینی) باشد.

۲۷.۷ تمرین. فرض کنید M مدولی نوتری روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید $R/\mathrm{Ann}(M)$ حلقه‌ای نوتری است.

از تمرین فوق نتیجه می‌شود که بررسی مدول نوتری M روی حلقهٔ تعویضپذیر R را می‌توان در بسیاری موارد به‌حالتی منحصر کرد که در آن حلقهٔ مربوطه حلقهٔ تعویضپذیر نوتری باشد، زیرا بنابر ۱۹.۶، M را می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان مدولی روی $R/\mathrm{Ann}(M)$ در نظر گرفت، و در این‌صورت هر زیرمجموعهٔ M یک Rـزیرمدول است اگر و تنها اگر یک $R/\mathrm{Ann}(M)$ـزیرمدول باشد. لذا این نظر غیرمنطقی نیست که اگر بخواهیم مدولهای نوتری روی حلقه‌های تعویضپذیر را مطالعه کنیم، خوب است مدولهای متناهی‌مولد روی حلقه‌های تعویضپذیر نوتری را مطالعه کنیم: توجه کنید که بنابر ۲۲.۷ هر مدول متناهی‌مولد روی یک حلقهٔ تعویضپذیر نوتری چون R یک Rـمدول نوتری است.

۲۸.۷ تمرین. فرض کنید M مدول متناهی‌مولد آرتینی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید که $R/\mathrm{Ann}(M)$ حلقهٔ آرتینی است.

۲۹.۷ تمرین. $\mathbb{Q}$ را به‌عنوان $\mathbb{Z}$ـمدول در نظر بگیرید. آیا $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ـمدول آرتینی است؟ آیا $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ـمدول نوتری است؟ برای پاسخهای خود دلیل بیاورید.

در ۱۲.۷ دیدیم که هر فضای برداری روی هیأتی چون K، یعنی هر Kـمدول، Kـمدول نوتری است اگر و تنها اگر آرتینی باشد. حال می‌توانیم با استفاده از مفهوم "تغییر حلقه" مذکور در ۱۹.۶ و ۲۶.۷ حکمی به‌دست آوریم که از این حکم مربوط به فضاهای برداری تا حد زیادی بهتر باشد.

۳۰.۷ قضیه. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و فرض کنید G توسط حاصلضرب تعدادی متناهی از ایدآلهای ماکسیمال (و نه لزوماً متمایز) R پوچ شود، یعنی عددی چون $n \in \mathbb{N}$ و ایدآلهای ماکسیمالی چون $M_۱, \ldots, M_n$ از R وجود داشته باشند که

$$M_۱ \ldots M_n G = ۰$$

در این‌صورت G Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر G Rـمدول آرتینی باشد.

اثبات. قضیه را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
در حالت $n = ۱$، که G توسط ایدآل ماکسیمال $M_۱$ پوچ می‌شود، توجه کنید که بنابر ۱۹.۶ و ۲۶.۷، G را می‌توانیم به‌طور طبیعی به‌عنوان مدولی روی $R/M_۱$، یعنی $R/M_۱$ـفضا، در نظر بگیریم و در این‌صورت G یک $R/M_۱$ـفضای نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر Rـمدولی نوتری (آرتینی) باشد. ولی بنابر ۱۲.۷، G $R/M_۱$ـفضای نوتری است اگر و تنها اگر $R/M_۱$ـفضای آرتینی باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که G Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر Rـمدول آرتینی باشد.

حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید $n > ۱$ و نتیجه به‌ازای مقادیر کوچکتر از n ثابت شده

باشد. اگر نتیجه ۱۹.۷ را در مورد دنبالهٔ کامل طبیعی

$$0 \longrightarrow M_nG \longrightarrow G \longrightarrow G/M_nG \longrightarrow 0$$

مذکور در ۴۰.۶(سه) به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم که G به‌عنوان Rـمدول مدولی نوتری (آرتینی) است اگر و تنها اگر M_nG و G/M_nG به‌عنوان Rـمدول مدولهایی نوتری (آرتینی) باشند. حال Rـمدول G/M_nG توسط ایدآل ماکسیمال M_n از R پوچ می‌شود و لذا بنابر آنچه در پاراگراف قبل ثابت کردیم، G/M_nG یک Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر Rـمدولی آرتینی باشد. همچنین، Rـمدول M_nG توسط حاصلضرب $n-1$ ایدآل ماکسیمال $M_1, \ldots, M_{n-1}$ پوچ می‌شود و لذا بنا به‌فرض استقرا M_nG یک Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر Rـمدولی آرتینی باشد. در نتیجه G یک Rـمدول نوتری است اگر و تنها اگر Rـمدولی آرتینی باشد، بنابراین مرحلهٔ دوم استقرا و لذا اثبات پایان می‌یابد. ■

قضیهٔ ۳۰.۷ در فصل ۸ در مبحث حلقه‌های تعویضپذیر آرتینی بسیار مفید خواهد بود.

نتایج ۱۲.۷ و ۳۰.۷ نشان می‌دهند که مثالهای بسیاری از مدولهای روی حلقه‌های تعویضپذیر وجود دارند که هم در شرط زنجیرهٔ صعودی و هم در شرط زنجیرهٔ نزولی صدق می‌کنند. در واقع اگر G مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R و $M_1, \ldots, M_n$ ایدآلهای ماکسیمال R باشند آن‌گاه بنابر ۲۲.۷ و ۱۴.۷، G و $G/M_1 \ldots M_nG$ Rـمدولهای نوتری‌اند و چون $G/M_1 \ldots M_nG$ توسط $M_1 \ldots M_n$ پوچ می‌شود، بنابر ۳۰.۷ در هر دو شرط زنجیره‌ای صدق می‌کند.

بحث از مدولهایی که در هر دو شرط زنجیره‌ای صدق می‌کنند به‌طور طبیعی به‌بحث از سریهای ترکیبی و مدولهای با طول متناهی می‌انجامد.

۳۱.۷ تعریف. فرض‌کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم G Rـمدول ساده است اگر $G \neq 0$ باشد و تنها زیرمدولهای G، 0 و خود G باشند.

۳۲.۷ لم. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت G ساده است اگر و تنها اگر با Rـمدولی به‌صورت R/M یکریخت باشد که در آن M یک ایدآل ماکسیمال R است.

اثبات. ($\Longrightarrow$) فرض کنید M ایدآل ماکسیمالی از R باشد. بنابر ۱.۳، هیأت R/M دقیقاً دو ایدآل دارد، یعنی خودش و ایدآل صفر. در نتیجه بنابر ۱۹.۶، Rـمدول R/M دقیقاً دو زیرمدول دارد، یعنی خودش و زیرمدول صفر.

($\Longleftarrow$) فرض کنید G یک Rـمدول ساده باشد. چون $G \neq 0$، عضو ناصفری چون g در G وجود دارد. در نتیجه $0 \neq Rg \subseteq G$ و چون بنابر ۱۲.۶، Rg زیرمدول G است باید داشته

باشیم $Rg = G$. بنابراین G یک Rـمدول دوری است و لذا بنابر ۲۵.۷، $G \cong R/I$ که در آن I ایدآلی از R است. چون G دقیقاً دو زیرمدول دارد، از ۳۶.۶ و ۱۹.۶ نتیجه می‌شود که R/I دقیقاً دو ایدآل دارد؛ در نتیجه بنابر ۱.۳ و ۳.۳، I ایدآل ماکسیمال R است. ■

۳۳.۷ تعریف و تذکر. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد مقصود از زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G زنجیره‌ای متناهی و اکیداً صعودی چون

$$G_{0} \subset G_{1} \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_{n}$$

از زیرمدولهای G است که $G_{0} = 0$ و $G_n = G$. طول این زنجیرهٔ اکید تعداد علامتهای $\subset$ در این زنجیره یعنی یکی کمتر از تعداد جمله‌های آن است (لذا طول زنجیرهٔ اکید فوق برابر n است). زنجیرهٔ

را زنجیرهٔ اکید به‌طول ۰ از زیرمدولهای Rـمدول صفر محسوب می‌کنیم.

هر زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G چون

$$0 = G_{0} \subset G_{1} \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_{n} = G$$

را سری ترکیبی G می‌گوییم اگر به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، G_i/G_{i-1} یک Rـمدول ساده باشد. توجه کنید که بنابر ۲۴.۶ زنجیرهٔ فوق یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر نتوان آن را با وارد کردن یک جملهٔ دیگر در آن گسترش داده زنجیرهٔ اکیدی به‌طول $n + 1$ به‌دست آورد. لذا هر زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G یک‌سری ترکیبی G است اگر و تنها اگر زنجیرهٔ اکید "ماکسیمال" (به‌معنای واضحی که انتظار می‌رود) باشد.

در چند قضیهٔ زیر احکامی کاملاً اساسی را در مورد سریهای ترکیبی ثابت می‌کنیم.

۳۴.۷ قضیه. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و سریی ترکیبی به‌طول n داشته باشد. در این صورت

یک) طول هیچ زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G بزرگتر از n نیست؛

دو) طول هر سری ترکیبی G دقیقاً n است؛ و

سه) هر زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G به‌طول $n' \leq n$ را می‌توان با وارد کردن $n - n'$ جملهٔ دیگر به یک‌سری ترکیبی G تبدیل کرد؛ به‌ویژه

چهار) هر زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G به‌طول n یک‌سری ترکیبی G است.

اثبات. روشن است که می‌توانیم فرض کنیم $n > 0$. فرض کنید به‌ازای هر Rـمدول M که دارای سری ترکیبی باشد، $\ell(M)$ کوچکترین طول سریهای ترکیبی M باشد، و $\ell(M) = \infty$

اگر M سری ترکیبی نداشته باشد. در مرحلهٔ اول اثبات نشان می‌دهیم که اگر H زیرمدول سرهٔ G باشد، آن‌گاه $\ell(H) < \ell(G)$.

فرض کنید $\ell(G) = t$ و سری

$$\circ = G_\circ \subset G_۱ \subset \cdots \subset G_{t-۱} \subset G_t = G$$

سریی ترکیبی برای G به‌طول t باشد. به‌ازای $i = \circ, \ldots, t$، فرض کنید $H_i = H \cap G_i$. حال چون به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, t$، هستهٔ Rـهمریختی مرکب

$$H_i = H \cap G_i \longrightarrow G_i \longrightarrow G_i/G_{i-۱}$$

(که در آن نگاشت اول همریختی یک‌به‌یک طبیعی و دومی برووریختی متعارف است) برابر $H \cap G_i \cap G_{i-۱} = H \cap G_{i-۱} = H_{i-۱}$ است، بنابر اولین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۳.۶، نگاشت ψ_i زیر Rـتکریختی است:

$$\begin{aligned} \psi_i : H_i/H_{i-۱} &\longrightarrow G_i/G_{i-۱} \\ h + H_{i-۱} &\longmapsto h + G_{i-۱} \end{aligned}$$

بنابراین $H_i/H_{i-۱}$ با زیرمدولی از مدول سادهٔ $G_i/G_{i-۱}$ یکریخت است و لذا $H_i/H_{i-۱}$ یا $\circ$ است یا ساده است؛ در واقع $H_i/H_{i-۱}$ ساده است اگر و تنها اگر ψ_i یکریختی باشد. لذا اگر جمله‌های تکراری زنجیرهٔ

$$\circ = H_\circ \subseteq H_۱ \subseteq \cdots \subseteq H_{t-۱} \subseteq H_t = H \cap G_t = H$$

را حذف کنیم یک سری ترکیبی برای H به‌دست می‌آوریم. لذا $\ell(H) \leq \ell(G)$. به‌علاوه باید داشته باشیم $\ell(H) < \ell(G)$ زیرا در غیر این‌صورت از مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که سری

$$H_\circ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{t-۱} \subset H_t$$

سریی ترکیبی برای H است و لذا به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, t$، $H_i/H_i \cap G_{i-۱} = H_i/H_{i-۱} \neq \circ$؛ چون $H_\circ = \circ = G_\circ$، نتایج زیر متوالیاً به‌دست می‌آیند:

$$H_۱ = G_۱, H_۲ = G_۲, \ldots, H_t = G_t.$$

تساوی آخر متناقض با $H \subset G$ است. لذا همان‌طور که ادعا کرده بودیم نشان داده‌ایم $\ell(H) < \ell(G)$. همچنین توجه کنید که نشان داده‌ایم هر زیرمدول G سریی ترکیبی دارد.

یک) حال فرض کنید زنجیرهٔ

$$G'_0 \subset G'_1 \subset \cdots \subset G'_{r-1} \subset G'_r$$

زنجیره‌ای اکید از زیرمدولهای G باشد که $G'_0 = 0$ و $G'_r = G$. چون $\ell(0) = 0$ از پاراگراف قبل نتیجه می‌شود که

$$0 = \ell(G'_0) < \ell(G'_1) < \cdots < \ell(G'_{r-1}) < \ell(G'_r) = \ell(G).$$

در نتیجه $r \leq \ell(G) \leq n$. بنابراین، چون Gسریی ترکیبی به‌طول n دارد و هر سری ترکیبی G زنجیره‌ای اکید از زیرمدولهای G است نتیجه می‌گیریم $n \leq \ell(G)$ و لذا $n = \ell(G)$.

دو) حال فرض کنید G سریی ترکیبی به‌طول n_1 داشته‌باشد. در این‌صورت چون هر سری ترکیبی زنجیره‌ای اکید است، بنابر بند (یک) داریم $n_1 \leq \ell(G) = n$، در حالی که بنابر تعریف $\ell(G)$ داریم $\ell(G) \leq n_1$.

سه) و چهار) حال این گزاره‌ها بلاواسطه از بندهای (یک) و (دو)ی فوق و تذکرات ۳۳.۷ نتیجه می‌شوند: هیچ زنجیرهٔ اکید به‌طول $n' < n = \ell(G)$ ممکن نیست سری ترکیبی G باشد، زیرا بنابر (دو) هر سری ترکیبی G به‌طول n است. لذا می‌توان با وارد کردن جمله‌ای دیگر در این زنجیره، آن را گسترش داده زنجیره‌ای اکید به‌طول $n' + 1$ به‌دست آورد؛ از طرف دیگر هر زنجیرهٔ اکید از زیرمدولهای G به‌طول n خود باید سری ترکیبی G باشد زیرا در غیر این‌صورت می‌توان آن را گسترش داده زنجیره‌ای اکید از زیرمدولهای G به‌طول $n + 1$ به‌دست آورد که این مطلب متناقض با بند (یک) است. ■

۳۵.۷ تعریف. فرض‌کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم G متناهی‌طول است اگر سری ترکیبی داشته باشد. در این حالت طول G رابرابر با طول هر سری ترکیبی G تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\ell(G)$ (یا اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $\ell_R(G)$) نشان می‌دهیم: هم‌اکنون در ۳۴.۷ دیدیم که طول تمام سریهای ترکیبی G برابرند.

گاه برای بیان این مطلب که G متناهی‌طول نیست یعنی سری ترکیبی ندارد می‌نویسیم $\ell(G) = \infty$.

قبلاً متذکر شدیم که رابطه‌ای بین سریهای ترکیبی و دو شرط مربوط به زنجیره‌های صعودی و نزولی زیرمدولهای یک مدول وجود دارد. حکم مربوط به آن را در زیر می‌آوریم.

۳۶.۷ قضیه. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت G متناهی‌طول است اگر و تنها اگر G هم نوتری باشد و هم آرتینی، یعنی اگر و تنها اگر G هم در شرط زنجیرهٔ صعودی برای زیرمدولها صدق کند و هم در شرط زنجیرهٔ نزولی.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید G متناهی‌طول باشد و طول آن $\ell(G)$ باشد. در این‌صورت از ۳۴.۷ نتیجه می‌شود که هیچ زنجیرهٔ صعودی از زیرمدولهای G ممکن نیست بیش از $\ell(G)$ جمله داشته باشد که هر یک زیرمجموعهٔ سرهٔ بعدی باشد و لذا باید سرانجام ایستا باشد. به همین نحو هر زنجیرهٔ نزولی از زیرمدولهای G باید سرانجام ایستا باشد.

($\Longrightarrow$) فرض کنید G هم نوتری باشد و هم آرتینی و لذا بنابر ۱.۷ و ۳.۷ در هر دو شرط ماکسیمال و مینیمال برای زیرمدولها صدق کند. فرض می‌کنیم G سری ترکیبی ندارد و در پی تناقض می‌گردیم. مجموعهٔ

$$\Theta := \{M : \ell(M) = \infty \text{ زیرمدول } G \text{ است و } M\}$$

تهی نیست، زیرا $G \in \Theta$. در نتیجه بنابر شرط مینیمال، Θ عضو مینیمالی چون H دارد. $H \neq 0$ زیرا واضح است که زیرمدول صفر G دارای سری ترکیبی است: ۳۳.۷ را ببینید. لذا بنابر شرط ماکسیمال، مجموعهٔ زیرمدولهای سرهٔ H دست‌کم یک عضو ماکسیمال مثلاً H' دارد. با توجه به مینیمال بودن H و اینکه $H' \subset H$، نتیجه می‌گیریم که H' سری ترکیبی دارد: فرض کنید سری

$$H'_0 \subset H'_1 \subset \cdots \subset H'_{t-1} \subset H'_t$$

سری ترکیبی H' باشد که $H'_0 = 0$، $H'_t = H'$ و $t = \ell(H')$. چون H' زیرمدول سرهٔ ماکسیمال H است از ۲۴.۶ نتیجه می‌شود که H/H' دقیقاً دو زیرمدول دارد و لذا ساده است. در نتیجه سری

$$H'_0 \subset H'_1 \subset \cdots \subset H'_{t-1} \subset H'_t \subset H$$

سری ترکیبی H است. این مطلب متناقض با تعلق H به Θ است!

در نتیجه G باید سری ترکیبی داشته باشد. ■

در ۳۴.۷ دیدیم که طولهای هر دو سری ترکیبیِ مدولی متناهی‌طول روی حلقه‌ای تعویضپذیر برابرند. در واقع چنین سریهایی تشابه اساسیتری دارند که مربوط به "عاملهای ترکیبی" آنهاست (که در زیر تعریف می‌شود). این تشابه در قضیهٔ معروف ژوردان‌ـهلدر که در ۳۹.۷ ارائه می‌شود مشخص می‌گردد.

۳۷.۷ تعریف. فرض کنید G مدولی متناهی‌طول روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنید سری

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n$$

سری ترکیبی G باشد (که $G_0 = 0$، $G_n = G$ و $n = \ell(G)$) در این‌صورت خانوادهٔ Rـمدولهای سادهٔ $(G_i/G_{i-1})_{i=1}^{n}$ را خانوادهٔ عاملهای ترکیبی سری ترکیبی فوق می‌نامیم. (البته اگر $G = 0$

این خانواده تهی است.) حال فرض کنید $G \neq 0$ و سری

$$G'_0 \subset G'_1 \subset \cdots \subset G'_{n-1} \subset G'_n$$

سری ترکیبی دیگری برای G باشد. (در اینجا از این مطلب که هر دو سری ترکیبی G هم‌طول‌اند استفاده کرده‌ایم ــ این مطلب در ۳۴.۷ اثبات شد.) می‌گوییم که دو سری ترکیبی فوق یکریخت‌اند اگر جایگشتی چون ϕ از مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ متشکل از اولین n عدد صحیح مثبت وجود داشته باشد که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$

$$G_i/G_{i-1} \cong G'_{\phi(i)}/G'_{\phi(i)-1}$$

۳۸.۷ لم. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و H و H' زیرمدولهایی از G باشند که $H \neq H'$ و G/H و G/H' هر دو ساده باشند. در این‌صورت

$$G/H' \cong H/(H \cap H') \quad \text{و} \quad G/H \cong H'/(H \cap H')$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $H \subset H + H'$. اگر چنین نباشد، داریم $H = H + H'$ و لذا چون $H \neq H'$، نتیجه می‌شود $H' \subset H \subset G$ که، با توجه به ۲۴.۶، متناقض با ساده‌بودن G/H' است. در نتیجه

$$H \subset H + H' \subseteq G$$

و لذا چون G/H ساده است مجدداً از ۲۴.۶ نتیجه می‌شود که $H + H' = G$. بنابراین، بنابر سومین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۸.۶، داریم

$$G/H = (H + H')/H \cong H'/(H \cap H').$$

یکریختی دیگر نیز با تعویض نقشهای H و H' به‌دست می‌آید. ■

۳۹.۷ قضیهٔ ژوردان‌ـ‌هلدر. فرض کنید G مدولی ناصفر به‌طول متناهی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت سریهای ترکیبی G یکریخت‌اند (مطابق تعریف ۳۷.۷).

اثبات. چون $G \neq 0$ داریم $n := \ell(G) \geq 1$. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. حکم قضیه به‌ازای $n = 1$ روشن است و لذا فرض می‌کنیم $n > 1$ و قضیه به‌ازای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. فرض می‌کنیم سریهای

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n$$

و

$$G'_0 \subset G'_1 \subset \cdots \subset G'_{n-1} \subset G'_n$$

دو سری ترکیبی G باشند (که $G_0 = G'_0 = 0$ و $G_n = G'_n = G$). برهان مرحلهٔ دوم استقرا به‌دو حالت تقسیم می‌شود.

حالت اول حالتی است که $G_{n-1} = G'_{n-1}$. در این‌صورت داریم

$$G_n/G_{n-1} = G'_n/G'_{n-1}$$

و هر دو سری

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1}$$

و

$$G'_0 \subset G'_1 \subset \cdots \subset G'_{n-1}$$

سریهای ترکیبی $G_{n-1} = G'_{n-1}$ هستند. چون $\ell(G_{n-1}) = n - 1$ فرض استقرا را می‌توانیم در مورد این دو سری ترکیبی G_{n-1} به‌کار ببریم و در این حالت نتیجه مطلوب به‌آسانی حاصل می‌شود.

حالت دوم حالتی است که $G_{n-1} \neq G'_{n-1}$. در این‌صورت قرار می‌دهیم $H = G_{n-1} \cap G'_{n-1}$. بنابر لم ۳۸.۷

$$G_n/G_{n-1} \cong G'_{n-1}/H \quad \text{و} \quad G'_n/G'_{n-1} \cong G_{n-1}/H$$

بنابراین مدولهای سمت راستِ روابط فوق ساده‌اند. لذا اگر $H = 0$ (که در این‌صورت هر دو مدول G_{n-1} و G'_{n-1} ساده‌اند و $n = 2$) نتیجهٔ مطلوب حاصل شده است. پس فرض می‌کنیم $H \neq 0$.

در این حالت زنجیرهٔ

$$0 \subset H \subset G_{n-1} \subset G_n$$

زنجیره‌ای اکید از زیر مدولهای $G = G_n$ است و هر دو مدول G_n/G_{n-1} و G_{n-1}/H ساده‌اند. حال بنابر قضیهٔ ۳۴.۷(سه)، با وارد کردن چند زیرمدول دیگر در زنجیرهٔ اکید فوق می‌توان آن را

گسترش داد و سریی ترکیبی برای G به‌دست آورد؛ چون طول هر سری ترکیبی G باید n باشد نتیجه می‌شود که $\ell(H) = n - ۲$. ضمناً یک سری ترکیبی چون

$$H_۰ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{n-۳} \subset H_{n-۲}$$

برای H به‌دست می‌آوریم (که در آن $H_۰ = ۰$ و $H = H_{n-۲}$). حال با توجه به مطالب پاراگراف قبل دو سری ترکیبی G زیر یکریخت‌اند:

$$H_۰ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{n-۳} \subset H_{n-۲} \subset G_{n-۱} \subset G_n$$

و

$$H_۰ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{n-۳} \subset H_{n-۲} \subset G'_{n-۱} \subset G'_n.$$

حال می‌توانیم فرض استقرا را (برای دو سری ترکیبی $G_{n-۱}$) به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم که دو سری ترکیبی زیر، که سری ترکیبی Gاند، یکریخت‌اند:

$$G_۰ \subset G_۱ \subset \cdots \subset G_{n-۱} \subset G_n$$

و

$$H_۰ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{n-۳} \subset H_{n-۲} \subset G_{n-۱} \subset G_n.$$

به‌همین نحو سریهای ترکیبی

$$H_۰ \subset H_۱ \subset \cdots \subset H_{n-۳} \subset H_{n-۲} \subset G'_{n-۱} \subset G'_n$$

و

$$G'_۰ \subset G'_۱ \subset \cdots \subset G'_{n-۱} \subset G'_n$$

یکریخت‌اند و لذا مرحلهٔ دوم استقرا را می‌توانیم کامل کنیم.

بنابراین اثبات قضیه با استقرا به پایان می‌رسد.■

۴۰.۷ تذکر. از ۱۶.۷، ۳۶.۷ و ۳۶.۶ روشن است که اگر $G_۱$ و $G_۲$، Rـمدولهای یکریخت باشند (و R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد) آن‌گاه $G_۱$ متناهی‌طول است اگر و تنها اگر $G_۲$ متناهی‌طول باشد و در این حالت $\ell(G_۱) = \ell(G_۲)$.

۴۱.۷ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و دنبالهٔ

$$۰ \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow ۰$$

دنبالهٔ کامل کوتاهی از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد.

یک) Rـمدول M متناهی‌طول است اگر و تنها اگر L و N هر دو متناهی‌طول باشند.

دو) اگر L و M و N متناهی‌طول باشند آن‌گاه

$$\ell(M) = \ell(L) + \ell(N).$$

اثبات. یک) اثبات این قسمت به‌آسانی از ۱۹.۷ و ۳۶.۷ نتیجه می‌شود: بنابر ۳۶.۷، Rـمدول M متناهی طول است اگر و تنها اگر نوتری و آرتینی باشد؛ بنابر ۱۹.۷، M نوتری و آرتینی است اگر و تنها اگر L و N نوتری و آرتینی باشند؛ و بنابر ۳۶.۷، L و N نوتری و آرتینی‌اند اگر و تنها اگر متناهی‌طول باشند.

دو) توجه کنید که $L \cong \mathrm{Im}\ f = \ker\ g$ و بنابر اولین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۳.۶، داریم $M/\ker\ g \cong N$. لذا بنابر ۴۰.۷، $\ker\ g$ و $M/\ker\ g$ متناهی‌طول هستند و $\ell(L) = \ell(\ker\ g)$ و $\ell(N) = \ell(M/\ker\ g)$. لذا کافی است نشان دهیم که اگر G زیرمدولی از Rـمدول M باشد (و M متناهی‌طول باشد) آن‌گاه $\ell(M) = \ell(G) + \ell(M/G)$. حال این مطلب را ثابت می‌کنیم.

روشن است که حکم به‌ازای $G = \circ$ یا $G = M$ برقرار است و لذا فرض می‌کنیم که

$$\circ \subset G \subset M.$$

بنابر قضیهٔ ۳۴.۷ زنجیرهٔ اکید فوق از زیرمدولهای M را می‌توان با وارد کردن جمله‌هایی در آن گسترش داد و یک سری ترکیبی چون

$$M_\circ \subset M_\backslash \subset \cdots \subset M_{n-\backslash} \subset M_n$$

برای M به‌دست آورد که $M_\circ = \circ$، $M_n = M$ و $n = \ell(M)$. فرض کنید $M_t = G$. در این‌صورت سری

$$M_\circ \subset M_\backslash \subset \cdots \subset M_t$$

سریی ترکیبی برای G است و از ۲۴.۶ نتیجه می‌شود که سری

$$M_t/G \subset M_{t+\backslash}/G \subset \cdots \subset M_n/G$$

سریی ترکیبی برای M/G است. در نتیجه همان‌طور که می‌خواستیم

$$\ell(G) + \ell(M/G) = t + (n-t) = n = \ell(M). \blacksquare$$

فرض کنید K هیأت باشد. در ۱۲.۷ دیدیم که مفاهیم Kـمدول نوتری و Kـمدول آرتینی یکسان‌اند و در واقع اگر V یک فضای برداری روی K باشد آن‌گاه V یک Kـفضای متناهی‌بُعد است اگر و تنها اگر هم Kـمدول نوتری و هم Kـمدول آرتینی باشد. لذا از ۳۶.۷ نتیجه می‌شود که V یک Kـفضای متناهی‌بُعد است اگر و تنها اگر Kـمدول متناهی‌طول باشد. حال ثابت می‌کنیم که در این حالت $\mathrm{vdim}_K\ V = \ell(V)$.

۴۲.۷ قضیه. فرض کنید V فضایی برداری روی هیأت K باشد. در این‌صورت V Kـفضای متناهی‌بُعد است اگر و تنها اگر Kـمدول متناهی‌طول باشد، و در این حالت $\mathrm{vdim}_K\ V = \ell(V)$.

اثبات. حکم اول در پاراگراف قبل از صورت قضیه اثبات شد. حکم دوم را با استقرا روی $n := \mathrm{vdim}_K\ V$ ثابت می‌کنیم. اگر $n = ۰$ داریم $V = ۰$ و حکم واضح است؛ اگر $n = ۱$ آن‌گاه تنها زیر فضاهای V، ۰ و خود Vاند (و این دو متفاوت‌اند)، و لذا سری $V \supset ۰$ سری ترکیبی برای Kـمدول V است و لذا $\ell(V) = ۱$. بنابراین فرض می‌کنیم $n > ۱$ و حکم برای مقادیر کوچکتر از n اثبات شده باشد.
فرض کنید $v \in V$ و $v \neq ۰$؛ قرار دهید $U = Kv$، که Kv زیرفضای یک بُعدی V است. لذا دنباله‌ای کامل چون

$$۰ \longrightarrow U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{f} V/U \to ۰$$

از Kـفضاها و Kـنگاشتهای خطی وجود دارد که در آن i نگاشت یک به یک طبیعی و f بروریختی متعارف است. حال (U و V/U متناهی‌بُعدند و)

$$\mathrm{vdim}_K\ V = \mathrm{vdim}_K(\ker f) + \mathrm{vdim}_K(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{vdim}_K\ U + \mathrm{vdim}_K(V/U)$$

و لذا $\mathrm{vdim}_K(V/U) = n - ۱$. در نتیجه بنا به فرض استقرا داریم $\mathrm{vdim}_K(V/U) = \ell(V/U)$ و بنابر پاراگراف اول اثبات، $\mathrm{vdim}_K\ U = \ell(U)$. در نتیجه بنابر ۴۱.۷،

$$\mathrm{vdim}_K\ V = \mathrm{vdim}_K\ U + \mathrm{vdim}_K(V/U) = \ell(U) + \ell(V/U) = \ell(V)$$

و لذا مرحلهٔ دوم استقرا کامل شده است.
بنابراین قضیه با استقرا ثابت شده است. ■

۴۳.۷ تمرین. فرض کنید دنبالهٔ

$$۰ \longrightarrow G_n \xrightarrow{dn} G_{n-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_i \xrightarrow{di} G_{i-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_۱ \xrightarrow{d_۱} G_. \longrightarrow ۰$$

دنباله‌ای کامل از مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R و Rـهمریختیها باشد (که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n > ۱$) و فرض کنید به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n-۱$، G_i متناهی‌طول باشد. نشان دهید $G_۰$ و G_n متناهی‌طول هستند و

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i \ell(G_i) = ۰.$$

۴۴.۷ تمرین. فرض کنید دنبالهٔ

$$۰ \xrightarrow{d_{n+۱}} G_n \xrightarrow{d_n} G_{n-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_i \xrightarrow{d_i} G_{i-۱} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_۱ \xrightarrow{d_۱} G_۰ \xrightarrow{d_۰} ۰$$

دنباله‌ای از مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R و Rـهمریختیها باشد (که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n > ۱$) و به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n-۱$، $d_i \circ d_{i+۱} = ۰$ و فرض کنید به‌ازای هر $i = ۰, \ldots, n$، G_i متناهی‌طول باشد.

به‌ازای هر $i = ۰, \ldots, n$ قرار دهید $H_i = \ker d_i / \operatorname{Im} d_{i+۱}$. نشان دهید به‌ازای هر $i = ۰, \ldots, n$، H_i متناهی‌طول است و

$$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i \ell(H_i) = \sum_{i=۰}^{n}(-۱)^i \ell(G_i).$$

۴۵.۷ تمرین. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری ناصفر R باشد. نشان دهید G متناهی‌طول است اگر و تنها اگر متناهی‌مولد باشد و $n \in \mathbb{N}$ و ایدآلهای ماکسیمال (و نه لزوماً متمایز) $M_۱, \ldots M_n$ از R وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$M_۱ \cdots M_n G = ۰.$$

۴۶.۷ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ اصلی‌ایدآل باشد ولی هیأت نباشد. فرض کنید G، Rـمدول باشد. نشان دهید G متناهی‌طول است اگر و تنها اگر G متناهی‌مولد باشد و $r \in R$ وجود داشته باشد که $r \neq ۰$ و $rG = ۰$.

۴۷.۷ تمرین. $\ell_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/\mathbb{Z}۲۰) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}۲۷))$ را بیابید. سریی ترکیبی برای $\mathbb{Z}$ـمدول $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}۲۰) \oplus (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}۲۷)$ بیابید.

۸

حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری

قسمت اول این فصل مربوط است به چند مطلب بسیار مهم و بنیادی در نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری. البته می‌دانیم که حلقهٔ تعویض‌پذیر R نوتری است اگر و تنها اگر وقتی به‌طور طبیعی به‌عنوان مدول روی خودش در نظر گرفته می‌شود نوتری باشد. لذا بسیاری از نتایج مربوط به مدولهای نوتری روی حلقه‌های تعویض‌پذیر که در فصل ۷ به‌دست آمدند در این فصل کاربرد دارند. همچنین، قبلاً در این کتاب چند حکم اساسی را دربارهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری ثابت کردیم: یکی از آنها که بیش از بقیه به ذهن خطور می‌کند ۳۵.۴ است که در آن نشان دادیم هر ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری تجزیهٔ ابتدایی دارد. لذا قسمتی از این فصل به یادآوری مطالب قبل اختصاص دارد؛ ولی برخی از احکام مهمی که تاکنون در این کتاب نیامده‌اند مانند قضیهٔ پایهٔ هیلبرت و قضیهٔ اشتراک کرول را در این فصل ارائه می‌کنیم.

در اواخر این فصل چند حکم اساسی را دربارهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر آرتینی ثابت می‌کنیم، از جمله این حکم که هر حلقهٔ تعویض‌پذیر R آرتینی است اگر و تنها اگر نوتری بوده و هر ایدآل اول آن ماکسیمال باشد.

۱.۸ یادآوری. (۳۷.۳، ۵.۷ و ۱۳.۷ را ببینید.) فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. در این صورت R را نوتری می‌گوییم اگر در شرایط زیر، که معادل‌اند، صدق کند:

یک) R در شرط زنجیرهٔ صعودی ایدآلها صدق کند، یعنی هرگاه زنجیرهٔ

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای R باشد آن‌گاه $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$؛

دو) هر مجموعهٔ ناتهی از ایدآلهای R نسبت به رابطهٔ مشمولیت دارای عضو ماکسیمال باشد؛

سه) هر ایدآل R متناهی‌مولد باشد.

حال نشان می‌دهیم که حاصل بسیاری از اعمال مربوط به نظریهٔ حلقه‌ها روی حلقه‌های تعویضپذیر نوتری حلقهٔ تعویضپذیرنوتری است.

۲.۸ لم. فرض کنید R و R' حلقه‌های تعویضپذیر و $f : R \to R'$ همریختی حلقه‌ای پوشا باشد. اگر R نوتری باشد R' نیز چنین است.

همچنین اگر I ایدآل R باشد و R نوتری، آن‌گاه R/I نیز حلقهٔ تعویضپذیرنوتری است.

اثبات. بنابر قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲ برای حلقه‌های تعویضپذیر، داریم $R/\ker\ f \cong R'$. چون روشن است (مثلاً از ۴۶.۲) که اگر دو حلقهٔ تعویضپذیر یکریخت باشند آن‌گاه یکی از آن دو نوتری است اگر و تنها اگر دیگری نوتری باشد، کافی است حکم دوم را ثابت کنیم که R/I نوتری است اگر I ایدآل R و R نوتری باشد. همین کار را می‌کنیم.

بنابر ۳۷.۲ و ۳۹.۲ هر زنجیرهٔ صعودی از ایدآلهای R/I به‌صورت

$$I_1/I \subseteq I_2/I \subseteq \cdots \subseteq I_i/I \subseteq I_{i+1}/I \subseteq \cdots$$

است که در آن زنجیرهٔ

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای R است که هر یک از آنها I را شامل می‌شود. چون R نوتری است $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$ و لذا به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k/I = I_{k+i}/I$. بنابراین R/I نوتری است. ■

حکم لم ۳.۸ زیر در واقع در تمرین ۲۶.۵ داده شد ولی بنابر اهمیت این حکم اکنون تمرین مذکور را حل می‌کنیم.

۳.۸ لم. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیرنوتری و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. در این‌صورت حلقهٔ کسرهای R نسبت به S یعنی $S^{-1}R$ نیز نوتری است.

اثبات. فرض می‌کنیم زنجیرهٔ

$$\mathcal{I}_۱ \subseteq \mathcal{I}_۲ \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{I}_{i+۱} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای $S^{-۱}R$ باشد. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ و ۴۵.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to S^{-۱}R$ به‌کار می‌بریم. در این‌صورت زنجیرهٔ

$$\mathcal{I}_۱^c \subseteq \mathcal{I}_۲^c \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_i^c \subseteq \mathcal{I}_{i+۱}^c \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای R است و لذا $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $\mathcal{I}_k^c = \mathcal{I}_{k+i}^c$. در نتیجه به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $\mathcal{I}_k^{ce} = \mathcal{I}_{k+i}^{ce}$. ولی، بنابر ۲۴.۵ به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داریم $\mathcal{I}_i^{ce} = \mathcal{I}_i$ و لذا به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k+i}$. نتیجه می‌گیریم که $S^{-۱}R$ نوتری است. ■

۴.۸ لم. فرض‌کنید R و R' حلقه‌های تعویض‌پذیر و $f : R \to R'$ همریختی حلقه‌ای باشد. فرض کنید R نوتری باشد و R' وقتی با استفاده از f به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفته شود (۶.۶ را ببینید) متناهی‌مولد باشد. در این‌صورت R' حلقه‌ای نوتری است.

اثبات. بنابر ۲۲.۷، R' یک Rـمدول نوتری است. ولی هر ایدآل R' خودبه‌خود Rـزیرمدول R' است و لذا چون R' در شرط زنجیرهٔ صعودی Rـ زیرمدولها صدق می‌کند به‌روشنی در شرط زنجیرهٔ صعودی ایدآلها نیز صدق می‌کند. ■

۵.۸ تمرین. نشان دهید زیرحلقهٔ $\mathbb{Z}[\sqrt{-۵}]$ از هیأت $\mathbb{C}$ نوتری است.

دو روش اساسی ساختن حلقه‌های تعویض‌پذیر جدید از حلقهٔ تعویض‌پذیر مفروض R، تشکیل حلقه‌های چندجمله‌ایها و حلقه‌های سریهای توانی صوری روی R است: طی چند حکم زیر می‌بینیم که اگر R نوتری باشد آن‌گاه حلقهٔ $R[X_۱, \ldots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی R از n مجهول $X_۱, \ldots, X_n$ و حلقهٔ $R[[X_۱, \ldots, X_n]]$ متشکل از سریهای توانی صوری نیز حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری هستند. ابتدا حلقهٔ چندجمله‌ایها را بررسی می‌کنیم: حکم مربوط به چنین حلقه‌ای در قضیهٔ مشهور هیلبرت به‌نام قضیهٔ پایه اثبات می‌شود. ابتدا لم مقدماتی زیر را می‌آوریم.

۶.۸ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و X مجهول باشد. فرض کنید $\mathcal{I}$ و $\mathcal{J}$ ایدآلهایی از $R[X]$ باشند و $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}_۰$ قرار دهید

$$L_i(\mathcal{I}) := \left\{ a_i \in R : \sum_{j=۰}^{i} a_j X^j \in \mathcal{I} \text{ به‌طوری‌که } \text{وجود داشته باشد} \; a_{i-۱}, \ldots, a_۰ \in R \right\}.$$

یک) به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}_۰$، مجموعهٔ $L_i(\mathcal{I})$ ایدآل R است و $L_i(\mathcal{I}) \subseteq L_i(\mathcal{J})$.

دو) داریم

$$L_{\circ}(\mathcal{I}) \subseteq L_{1}(\mathcal{I}) \subseteq \cdots \subseteq L_n(\mathcal{I}) \subseteq L_{n+1}(\mathcal{I}) \subseteq \cdots.$$

سه) (به‌یاد داشته باشید که $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$.) اگر به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_{\circ}$، $L_n(\mathcal{I}) = L_n(\mathcal{J})$ آن‌گاه $\mathcal{I} = \mathcal{J}$.

اثبات. یک) روشن است.

دو) برای اثبات این حکم کافی است توجه کنید که اگر $a_{\circ}, a_{1}, \ldots, a_i \in R$ و $f = \sum_{j=\circ}^{i} a_j X^j \in \mathcal{I}$ آن‌گاه $Xf \in \mathcal{I}$، و لذا $a_i \in L_{i+1}(\mathcal{I})$.

سه) بنا به‌فرض داریم $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. فرض می‌کنیم $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ و در پی تناقض می‌گردیم. با این فرض دست کم یک چندجمله‌ای ناصفر در $\mathcal{J} \backslash \mathcal{I}$ هست: از بین این چندجمله‌ایها یکی را چون $g = \sum_{j=\circ}^{n} b_j X^j$ که $b_n \neq \circ$ انتخاب می‌کنیم که دارای کوچکترین درجه باشد. در این‌صورت $b_n \in L_n(\mathcal{J}) = L_n(\mathcal{I})$ و لذا چندجمله‌ایی به‌صورت زیر وجود دارد

$$h = b_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \cdots + c_{\circ} \in I$$

ولی در این‌صورت $g - h \in \mathcal{J} \backslash \mathcal{I}$ و چون $\deg(g-h) \leq n-1$ این مطلب متناقض با تعریف n است. در نتیجه $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ ■

۷.۸ قضیهٔ پایهٔ هیلبرت. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری و X مجهول باشد. در این‌صورت حلقهٔ $R[X]$ متشکل از چندجمله‌ایها نیز نوتری است.

اثبات. فرض کنید زنجیرهٔ

$$\mathcal{I}_{\circ} \subseteq \mathcal{I}_{1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_j \subseteq \mathcal{I}_{j+1} \subseteq \cdots$$

زنجیره‌ای صعودی از ایدآلهای $R[X]$ باشد. بنابر ۶.۸(یک) و (دو) به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$ داریم

$$L_i(\mathcal{I}_{\circ}) \subseteq L_i(\mathcal{I}_{1}) \subseteq \cdots \subseteq L_i(\mathcal{I}_j) \subseteq L_i(\mathcal{I}_{j+1}) \subseteq \cdots$$

و به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}_{\circ}$

$$L_{\circ}(\mathcal{I}_j) \subseteq L_{1}(\mathcal{I}_j) \subseteq \cdots \subseteq L_i(\mathcal{I}_j) \subseteq L_{i+1}(\mathcal{I}_j) \subseteq \cdots$$

چون R نوتری است، $p, q \in \mathbb{N}_{\circ}$ وجود دارند به‌طوری‌که $L_p(\mathcal{I}_q)$ عضو ماکسیمالی از $\{L_i(\mathcal{I}_j) : i, j \in \mathbb{N}_{\circ}\}$ باشد. لذا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}_{\circ}$ که $i \geq p$، داریم

$$L_i(\mathcal{I}_j) = L_i(\mathcal{I}_q) (= L_p(\mathcal{I}_q)) \qquad \text{به‌ازای هر } j \geq q$$

همچنین با pبار استفاده از شرط زنجیرهٔ صعودی این نتیجه حاصل می‌شود که $q' \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i = 0, \ldots, p-1$،

$$L_i(\mathcal{I}_j) = L_i(\mathcal{I}_{q'}) \qquad \text{به‌ازای هر } j \geq q'$$

قرار دهید $t = \max\ \{q, q'\}$: به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$ای که $j \geq t$ داریم

$$L_i(\mathcal{I}_j) = L_i(\mathcal{I}_t) \qquad \text{به‌ازای هر } i \in \mathbb{N}$$

بنابراین از ۶.۸(سه) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $j \geq t$، $\mathcal{I}_j = \mathcal{I}_t$ و لذا زنجیرهٔ صعودی نخستین از ایدآلهای $R[X]$ سرانجام ایستاست. در نتیجه $R[X]$ نوتری است.■

۸.۸ **نتیجه.** فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیرنوتری باشد. در این‌صورت حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[X_1, \ldots, X_n]$ روی R از n مجهول $X_1، \ldots، X_n$ نیز نوتری است.

اثبات. این نتیجه بلاواسطه از قضیهٔ پایهٔ هیلبرت (قضیهٔ ۷.۸ فوق) و با استفاده از استقرا ثابت می‌شود، زیرا اگر $n > 1$ آن‌گاه $R[X_1, \ldots, X_n] = R[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$.

نتیجهٔ بعدی در مورد جبرهای متناهی‌مولد (تعویضپذیر) روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری است.

۹.۸ **تذکر و تعریف.** فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و S یک Rـجبر تعویضپذیر با همریختی حلقه‌ای ساختاری $f : R \to S$ باشد؛ قرار دهید $R' = \text{Im}\ f$. منظور از Rـزیرجبر S زیرحلقه‌ای از S است که شامل $R' = \text{Im}\ f$ باشد؛ توجه کنید که چنین زیرحلقه‌ای، مثلاً S'، وقتی مجهز به f شود ساختار Rـجبر را می‌یابد و در این‌صورت نگاشت یک‌به‌یک طبیعی $i : S' \to S$ به‌مفهومی که در ۱۳.۵ گفتیم همریختی Rـجبری است.

از ۵.۱ روشن است که اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از Rـزیرجبرهای S یک Rـزیرجبر S است. به‌ازای زیرمجموعهٔ Γ از S، Rـزیرجبر تولید شده توسط Γ را به‌صورت اشتراک خانوادهٔ (ناتهی) از Rـزیرجبرهای S که شامل Γ هستند تعریف می‌کنیم؛ مطابق با نمادگذاری ۱۱.۱ این زیرجبر چیزی جز $R'[\Gamma]$ نیست. البته $R'[\Gamma]$ کوچکترین Rـزیرجبر S است که Γ را شامل می‌شود، به این معنا که (Rـزیرجبر است و همچنین) زیرمجموعهٔ هر Rـزیرجبر S است که شامل Γ باشد.

می‌گوییم Rـزیرجبر S' از S متناهی‌مولد است اگر به‌ازای زیرمجموعه‌ای متناهی چون Δ از S، $S' = R'[\Delta]$، یعنی اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری که $S' = R'[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

۱۰.۸* **تمرین.** فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و S یک Rـجبر تعویضپذیر با همریختی ساختاری $f : R \to S$ باشد؛ قرار دهید $R' = \text{Im}\ f$. فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$. نشان

دهید $R'[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ برابر است با

$$\left\{\sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda} r'_i\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n} : r'_i\in R' \text{، } i\in\Lambda \text{ و به‌ازای هر } \Lambda \text{ متناهی است، } \Lambda\subseteq\mathbb{N}_0^n\right\}$$

۱۱.۸ نتیجه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیرنوتری باشد. فرض کنید حلقهٔ تعویضپذیر S یک Rـجبر متناهی‌مولد باشد. در این‌صورت S نیز حلقه‌ای نوتری است.

اثبات. فرض کنید $f : R \to S$ همریختی ساختاری S باشد و قرار دهید $R' = \operatorname{Im} \ f$. بنا به‌فرض $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $S = R'[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ بنا به ۱۰.۸

$$S=\left\{\sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda} r'_i\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n} : r'_i\in R' \text{، } i\in\Lambda \text{ و به‌ازای هر } \Lambda \text{ متناهی است، } \Lambda\subseteq\mathbb{N}_0^n\right\}$$

بنابر ۸.۸، حلقهٔ تعویضپذیر $R[X_1,\ldots,X_n]$ متشکل از چند جمله‌ایهای روی R از n مجهول $X_1,\ldots,X_n$ نیزنوتری است. حال‌بنابر ۱۶.۱ همریختیی حلقه‌ای چون $g : R[X_1,\ldots,X_n]\to S$ وجود دارد که حاصل توسیع f است و به‌ازای هر $i=1,\ldots,n$، $g(X_i)=\alpha_i$. تساوی فوق نشان می‌دهد که g پوشاست و لذا از ۲.۸ نتیجه می‌شود که S حلقه‌ای نوتری است. ■

حال به حلقهٔ سریهای توانی صوری روی حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری چون R می‌پردازیم. ماتسومورا برهانی برای اثبات این مطلب که حلقهٔ $R[[X]]$ متشکل از سریهای توانی صوری از مجهول X و با ضرایب متعلق به R نوتری است ارائه کرده است (قضیهٔ ۳.۳ از مرجع [۸]): چون هدف این کتاب آماده کردن شما برای مطالعهٔ کتابهایی چون کتاب ماتسوموراست، آن برهان را در اینجا تکرار نمی‌کنیم. ولی در عوض برهان دیگری در ۱۳.۸ ارائه می‌کنیم که مبتنی بر قضیه‌ای از کوهن[1] (قضیهٔ ۴.۳ از مرجع [۸] را ببینید) است، و احتمالاً برایتان جالب خواهد بود.

۱۲.۸ قضیه (کوهن). فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر با این ویژگی باشد که ایدآلهای اولش متناهی‌مولدند. در این‌صورت R نوتری است.

اثبات. فرض می‌کنیم R نوتری نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. در این‌صورت بنابر ۱.۸ مجموعهٔ

$$\Theta := \{I : \text{ایدآلی از } R \text{ است که متناهی‌مولد نیست } I\}$$

ناتهی است. Θ تحت رابطهٔ مشمولیت جزئاًمرتب است: لم زورن را در مورد این مجموعهٔ جزئاًمرتب به‌کار می‌بریم. فرض کنید Φ زیرمجموعه‌ای کلاًمرتب از Θ باشد. در این‌صورت $J := \cup_{I\in\Phi} I$

1. I. S. Cohen

ایدآل R است (زیرا اگر $I', I'' \in \Phi$ آن‌گاه $I' \subseteq I''$ یا $I' \supseteq I''$): هدف ما این است که نشان دهیم J متناهی‌مولد نیست و لذا متعلق به Θ است و بنابراین J کران بالای Φ در Θ است.

فرض کنید J متناهی‌مولد باشد و مثلاً توسط $a_1, \ldots, a_t$ تولید شود. در این‌صورت به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$، $I_i \in \Phi$ای وجود دارد که $a_i \in I_i$. چون Φ کلاً‌مرتب است، $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $1 \leq h \leq t$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$، $I_i \subseteq I_h$. در این‌صورت داریم

$$J = Ra_1 + \cdots + Ra_t \subseteq I_h \subseteq J$$

و لذا I_h متناهی‌مولد است. این تناقض نشان می‌دهد که J متناهی‌مولد نیست. در نتیجه $J \in \Theta$ و لذا J کران بالای Φ در Θ است. حال با استفاده از لم زورن نتیجه می‌گیریم که Θ عضو ماکسیمال دارد. نشان می‌دهیم که هر عضو ماکسیمالِ Θ، چون P، اول است و از آنجا به تناقض می‌رسیم.

نخست توجه کنید که $P \subset R$ زیرا $R = R1$ متناهی‌مولد است در حالی‌که P چنین‌نیست. فرض‌کنید $a, b \in R \backslash P$ و $ab \in P$. با این فرض به تناقض خواهیم رسید. چون $P \subset P + Ra$، از ماکسیمال بودن P در Θ نتیجه می‌شود که $P + Ra$ متناهی‌مولد است و مثلاً توسط $p_1 + r_1 a, \ldots, p_n + r_n a$ تولید می‌شود که $p_1, \ldots, p_n \in P$ و $r_1, \ldots, r_n \in R$. فرض کنید $K = (P : a)$. چون $K \supseteq P + Rb \supset P$ مجدداً از ماکسیمال بودن P در Θ نتیجه می‌شود که K متناهی‌مولد است؛ بنابراین ایدآل aK نیز متناهی‌مولد است.

حال ادعا می‌کنیم که $P = Rp_1 + \cdots + Rp_n + aK$. روشن است که

$$P \supseteq Rp_1 + \cdots + Rp_n + aK.$$

فرض کنید $r \in P \subset P + aR$. در این‌صورت $c_1, \ldots, c_n \in R$ وجود دارد به‌طوری که

$$r = c_1(p_1 + r_1 a) + \cdots + c_n(p_n + r_n a).$$

حال $(\sum_{i=1}^{n} c_i r_i)a = r - \sum_{i=1}^{n} c_i p_i \in P$ و لذا $\sum_{i=1}^{n} c_i r_i \in (P : a) = K$. در نتیجه

$$r = \sum_{i=1}^{n} c_i p_i + \left(\sum_{i=1}^{n} c_i r_i\right) a \in \sum_{i=1}^{n} Rp_i + aK.$$

بنابراین $P \subseteq Rp_1 + \cdots + Rp_n + aK$ و لذا همان‌طور که ادعا کرده بودیم $P = Rp_1 + \cdots + Rp_n + aK$. لذا P متناهی‌مولد است که متناقض با فرض ماست. بنابراین $ab \notin P$. در نتیجه P اول است.

بنابراین ایدآل اولی از R یافته‌ایم که متناهی‌مولد نیست. این تناقض نشان می‌دهد که R باید نوتری باشد. ■

۱۳.۸ قضیه. فرض کنید R حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری باشد. در این‌صورت حلقهٔ $R[[X]]$ متشکل از سریهای توانی صوری از مجهول X با ضرایب متعلق به R نیز نوتری است.

اثبات. قصد داریم از ۱۲.۸ استفاده کنیم. لذا فرض کنید $\mathcal{P} \in \mathrm{Spec}(R[[X]])$. نگاشت

$$h : R[[X]] \longrightarrow R$$
$$\sum_{j=\cdot}^{\infty} r_j X^j \longmapsto r_\cdot$$

همریختی حلقه‌ای پوشاست و لذا $h(\mathcal{P})$ در واقع ایدآل R است. چون R نوتری است، $h(\mathcal{P})$ متناهی‌مولد است و مثلاً توسط $a_\cdot^{(1)}, \ldots, a_\cdot^{(t)}$ تولید می‌شود. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$، سری توانی

$$f^{(i)} = a_\cdot^{(i)} + a_1^{(i)} X + \cdots + a_n^{(i)} X^n + \cdots \in \mathcal{P}$$

وجود دارد که ضریب صفرم آن $a_\cdot^{(i)}$ است. دو حالت $X \in \mathcal{P}$ و $X \notin \mathcal{P}$ را در نظر می‌گیریم.

ابتدا فرض کنید $X \in \mathcal{P}$. در این‌صورت به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$

$$a_\cdot^{(i)} = f^{(i)} - X \sum_{j=\cdot}^{\infty} a_{j+1}^{(i)} X^j \in \mathcal{P}.$$

همچنین به‌ازای عضو دلخواهی از $\mathcal{P}$ چون $f = \sum_{j=\cdot}^{\infty} b_j X^j \in \mathcal{P}$ داریم $b_\cdot \in h(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{t} R a_\cdot^{(i)}$.

در نتیجه

$$f = b_\cdot + X \sum_{j=\cdot}^{\infty} b_{j+1} X^j \in \sum_{i=1}^{t} R[[X]] a_\cdot^{(i)} + X R[[X]].$$

نتیجه می‌شود که $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{t} R[[X]] a_\cdot^{(i)} + X R[[X]]$ و لذا در این حالت $\mathcal{P}$ متناهی‌مولد است.

حال فرض کنید $X \notin \mathcal{P}$. در این حالت نشان می‌دهیم که

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{t} R[[X]] f^{(i)}$$

البته به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$، $f^{(i)} \in \mathcal{P}$. فرض کنید $f = \sum_{j=\cdot}^{\infty} b_j X^j \in \mathcal{P}$. در نتیجه

$$b_\cdot \in h(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{t} R a_\cdot^{(i)}$$

و لذا $b_\circ^{(1)}, \ldots, b_\circ^{(t)} \in R$ وجود دارد که $b_\circ = b_\circ^{(1)}a_\circ^{(1)} + \cdots + b_\circ^{(t)}a_\circ^{(t)}$. در نتیجه ضریب صفرم سری $f - \sum_{i=1}^{t} b_\circ^{(i)} f^{(i)}$ برابر ۰ است و لذا به‌ازای عضوی چون $g_1 \in R[[X]]$ داریم

$$f - \sum_{i=1}^{t} b_\circ^{(i)} f^{(i)} = X g_1 \,.$$

حال از استقرا استفاده می‌کنیم. فرض کنید به‌ازای عدد طبیعی $v \in \mathbb{N}$ عضوهای

$$b_\circ^{(1)}, \ldots, b_\circ^{(t)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_1^{(t)}, \ldots, b_{v-1}^{(1)}, \ldots, b_{v-1}^{(t)} \in R$$

را یافته‌ایم که به‌ازای عضوی چون $g_v \in R[[X]]$

$$f - \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=\circ}^{v-1} b_j^{(i)} X^j \right) f^{(i)} = X^v g_v$$

یقیناً این مطلب به‌ازای $v = 1$ درست است. چون طرف چپ تساوی فوق متعلق به $\mathcal{P}$ است و $X \notin \mathcal{P}$، داریم $g_v \in \mathcal{P}$ زیرا $\mathcal{P}$ اول است. بنابه پاراگراف قبل، عضوهایی چون $b_v^{(1)}, \ldots, b_v^{(t)} \in R$ وجود دارند که به‌ازای عضوی چون $g_{v+1} \in R[[X]]$، $g_v - \sum_{i=1}^{t} b_v^{(i)} f^{(i)} = X g_{v+1}$. در نتیجه

$$f - \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=\circ}^{v} b_j^{(i)} X^j \right) f^{(i)} = X^v \left(g_v - \sum_{i=1}^{t} b_v^{(i)} f^{(i)} \right) = X^{v+1} g_{v+1}$$

به این ترتیب اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کامل می‌شود. بنابراین با استفاده از استقرا عضوهایی چون $b_j^{(1)}, \ldots, b_j^{(t)} \in R$ $(j \in \mathbb{N}_\circ)$ را می‌یابیم که به‌ازای هر $v \in \mathbb{N}$:

$$f - \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=\circ}^{v-1} b_j^{(i)} X^j \right) f^{(i)} = X^v g_v$$

که در آن $g_v \in R[[X]]$. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$ فرض کنید $e^{(i)} = \sum_{j=\circ}^{\infty} b_j^{(i)} X^j \in R[[X]]$ در این‌صورت $f = \sum_{i=1}^{t} e^{(i)} f^{(i)}$ زیرا به‌ازای هر $v \in \mathbb{N}$ داریم

$$f - \sum_{i=1}^{t} e^{(i)} f^{(i)} = X^v g_v - \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=v}^{\infty} b_j^{(i)} X^j \right) f^{(i)} \in X^v R[[X]]$$

و به آسانی می‌توان نشان داد که $\bigcap_{v \in \mathbb{N}} X^v R[[X]] = \circ$.

بنابراین ثابت کرده‌ایم که در این حالت $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{t} f^{(i)} R[[X]]$ و لذا $\mathcal{P}$ متناهی‌مولد است.

بنابراین هر ایدآل اول $R[[X]]$ متناهی‌مولد است و لذا بنابر ۱۲.۸، $R[[X]]$ حلقه‌ای نوتری است.

۱۴.۸ نتیجه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیرنوتری باشد. در این‌صورت حلقهٔ $R[[X_1, \ldots, X_n]]$ متشکل از سریهای توانی صوری از n مجهول $X_1, \ldots, X_n$ با ضرایب متعلق به R نیز نوتری است.

اثبات. این مطلب به‌آسانی از ۱۳.۸ و ۲۰.۱ نتیجه می‌شود؛ در ۲۰.۱ نشان دادیم که اگر $n > 1$ آن‌گاه $R[[X_1, \ldots, X_n]] \cong R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]]$. بنابراین با استفاده از استقرا حکم به سهولت ثابت می‌شود. ■

۱۵.۸ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعوضپذیر و X مجهول باشد. آیا اگر $R[X]$ نوتری باشد R باید نوتری باشد؟ آیا اگر $R[[X]]$ نوتری باشد R باید نوتری باشد؟ برای پاسخهای خود دلیل بیاورید.

تا اینجا در این فصل دیدیم که وقتی برخی از اعمال نظریهٔ حلقه‌ها، مثلاً تشکیل حلقه‌های رده‌های مانده‌ای، تشکیل حلقه‌های کسرها و تشکیل حلقه‌های چندجمله‌ایها یا حلقه‌های سریهای توانی صوری از تعدادی متناهی مجهول با ضرایب متعلق به R، روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R انجام شوند همواره حلقهٔ تعویضپذیر نوتری به‌دست آید. بدین‌طریق می‌توانیم مجموعهٔ بزرگی از حلقه‌های تعویضپذیر نوتری فراهم آوریم زیرا می‌توانیم حلقهٔ تعویضپذیر نوتری بسیار ساده‌ای، مثلاً یک هیأت یا $\mathbb{Z}$، را انتخاب کنیم و تعدادی متناهی از اعمال فوق را یکی پس از دیگری روی آن انجام دهیم و حلقه‌های تعویضپذیرنوتری به‌دست آوریم.

قبل از اینکه به بررسی ویژگیهای حلقه‌های تعویضپذیر نوتری بپردازیم شاید تذکر این نکته با ارزش باشد که چنین نیست که زیرحلقه‌های حلقهٔ تعویضپذیرنوتری خودبه‌خود نوتری باشند. مثال زیر این نکته را روشن می‌کند.

۱۶.۸ مثال. حلقهٔ $R_\infty = K[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ را که متشکل از چندجمله‌ایهای با ضرایب متعلق به هیأت K از خانوادهٔ شمارا و نامتناهیِ مجهولهای $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ است در نظر بگیرید: ۲۱.۲ را ببینید. به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار دهید $R_n = K[X_1, \ldots, X_n]$. در این‌صورت طبق ۲۱.۲،

$$R_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K[X_1, \ldots, X_n]$$

ساختاری حلقه‌ای (که یکتاست) دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، R_n زیرحلقهٔ R_∞ است. در ۲۱.۲ ایدآلی از R_∞ یافتیم که متناهی‌مولد نیست و لذا از ۱.۸ نتیجه می‌شود که R_∞ نوتری نیست.

ولی R_∞ دامنهٔ صحیح است (زیرا هر R_n چنین است و به‌ازای $n, m \in \mathbb{N}$ یا R_n زیرحلقهٔ R_m است یا R_m زیرحلقهٔ R_n است.) در نتیجه R_∞ هیأت کسرهایی چون L دارد و روشن است که L حلقه‌ای نوتری است. چون R_∞ با زیرحلقه‌ای از L یکریخت است، نتیجه می‌گیریم که هر زیرحلقهٔ حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری لزوماً نوتری نیست.

حال که مجموعهٔ بزرگی از مثالهای حلقهٔ تعویضپذیر نوتری در دست داریم بجاست ویژگیهای دیگری از این حلقه‌ها را ارائه دهیم؛ لذا اکنون موقع مناسبی است که برخی از مطالبی را که تاکنون در این باره به‌دست آورده‌ایم یادآوری کنیم.

۱۷.۸ یادآوری. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری باشد.

هر ایدآل سره‌ای چون I از R تجزیهٔ ابتدایی دارد: ۳۵.۴ را ببینید. لذا نتایج نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی از جمله اولین و دومین قضیهٔ یکتایی را می‌توان در بررسی حلقه‌های تعویضپذیر نوتری به‌کار برد. به‌ویژه $\operatorname{ass} I$ نشاندهندهٔ مجموعهٔ (متناهی) ایدآلهای اول وابسته به I در تجزیهٔ ابتدایی I است و عضوهای مینیمال $\operatorname{ass} I$ دقیقاً همان ایدآلهای اول مینیمال I هستند: ۲۴.۴ را ببینید.

لذا I تنها تعدادی متناهی ایدآل اول مینیمال دارد.

حال برخی از نتایج نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی را به‌صورتی که به‌ویژه در مبحث حلقه‌های تعویضپذیر نوتری کاربرد دارند ارائه می‌کنیم.

۱۸.۸ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. می‌گوییم $r \in R$ مقسوم‌علیه صفر روی M است اگر $m \in M$ای وجود داشته باشد که $m \neq \circ$ ولی $rm = \circ$. عضوی از R را که مقسوم علیه صفر روی M نباشد نامقسوم‌علیه صفر روی M می‌گوییم.

مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر روی M را با $\operatorname{Zdv}(M)$ (یا اگر بخواهیم برحلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $\operatorname{Zdv}_R(M)$) نمایش می‌دهیم.

البته وقتی حلقهٔ تعویضپذیر R به‌طور طبیعی به‌عنوان مدولی روی خودش در نظر گرفته شود آن‌گاه مقسوم‌علیه صفر روی R به‌معنی ۱۸.۸ دقیقاً همان مقسوم‌علیه صفر در R به‌معنی ۲۱.۱ است. توجه کنید که هیچ مقسوم‌علیه صفری روی Rـمدول صفر وجود ندارد، یعنی $\operatorname{Zdv}(\circ) = \varnothing$، به این دلیل ساده که عضو ناصفری در حلقهٔ $\circ$ وجود ندارد. ولی برای Rـمدول ناصفر M داریم $\circ \in \operatorname{Zdv}(M)$.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که ایدآلهای اول وابسته به ایدآل تجزیه‌پذیر I از حلقهٔ تعویضپذیر R چه رابطه‌ای با مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر روی Rـمدول R/I دارند.

۱۹.۸ قضیه. فرض کنید I ایدآل تجزیه‌پذیر (۱۵.۴ را ببینید) از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

در این‌صورت

$$\mathrm{Zdv}_R(R/I) = \bigcup_{P \in \mathrm{ass} I} P$$

اثبات. فرض کنید $a \in \mathrm{Zdv}_R(R/I)$ و لذا $r \in R$ وجود دارد که $r + I \neq \circ_{R/I}$ ولی $a(r+I) = \circ_{R/I}$. لذا $r \notin I$ ولی $ar \in I$. فرض کنید تجزیهٔ

$$I = Q_\text{۱} \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = \text{۱}, \ldots, n \text{ ،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. چون $r \notin I$ لذا $j \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد که $\text{۱} \le j \le n$ و $r \notin Q_j$. چون $ar \in I \subseteq Q_j$ از اینکه Q_j ایدآل P_jـابتدایی است نتیجه می‌شود که $a \in P_j \in \mathrm{ass}\ I$ در نتیجه

$$\mathrm{Zdv}_R(R/I) \subseteq \bigcup_{P \in \mathrm{ass} I} P.$$

حال عکس این رابطه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $P \in \mathrm{ass}\ I$ و لذا بنابر ۱۷.۴ و ۱۹.۴، $a \in R$ وجود دارد که $(I : a)$ ایدآل Pـابتدایی باشد. چون $(I : a) \subseteq P \subset R$ داریم $a \notin I$. فرض کنید $r \in P = \sqrt{(I : a)}$. بنابراین $j \in \mathbb{N}$ ای وجود دارد که $r^j \in (I : a)$ و لذا $r^j a \in I$. فرض کنید t کوچکترین عدد صحیح مثبت از مجموعهٔ jهایی باشد که $r^j a \in I$؛ در این‌صورت $r^{t-\text{۱}} a \notin I$ (حتی اگر $t = \text{۱}$، این نتیجه درست است به این دلیل ساده که $a \notin I$) در حالی‌که $r^t a \in I$. لذا

$$r(r^{t-\text{۱}} a + I) = \circ_{R/I} \quad \text{ولی} \quad r^{t-\text{۱}} a + I \neq \circ_{R/I}$$

بنابراین $r \in \mathrm{Zdv}_R(R/I)$ و لذا نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{Zdv}_R(R/I) \supseteq \bigcup_{P \in \mathrm{ass} I} P.$$

بنابراین $\mathrm{Zdv}_R(R/I) = \bigcup_{p \in \mathrm{ass} I} P$. ■

۲۰.۸ **تذکر.** فرض کنید I ایدآلی سره از حلقهٔ تعویضپذیرنوتری R باشد. دیدیم (۱۷.۸ را ببینید) که I تجزیه‌پذیر است و نتایجی که تاکنون به‌دست آورده‌ایم نشان می‌دهند که مجموعهٔ متناهی $\mathrm{ass}\ I$ از ایدآلهای اول رابطهٔ نزدیکی با هر دو مجموعهٔ رادیکال I و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر روی Rـمدول R/I دارد: بنابر ۵۴.۳ داریم $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathrm{Min}(I)} P$ و چون بنابر ۲۴.۴ هر

عضو I ـ ass شامل عضوی از $\mathrm{Min}(I)$ است و $\mathrm{Min}(I)$ دقیقاً همان مجموعهٔ ایدآلهای اول منفرد وابسته به I است، نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P\in \mathrm{ass} I} P$$

همچنین هم‌اکنون در ۱۹.۸ دیدیم که $\mathrm{Zdv}_R(R/I) = \bigcup_{P\in \mathrm{ass} I} P$

به‌ویژه وقتی R ناصفر باشد در بالا می‌توانیم $I = \circ$ را در نظر بگیریم: در این‌صورت نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ متناهی $\circ$ ass، متشکل از تعدادی ایدآل اول R، مجموعهٔ پوچتوان R و مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر R را مشخص می‌کند، زیرا

$$\mathrm{Zdv}(R) = \bigcup_{P\in \mathrm{ass}\circ} P \quad \text{و} \quad \sqrt{\circ} = \bigcap_{P\in \mathrm{ass}\circ} P$$

در قضیهٔ ۱۷.۴ اگر حلقه نوتری باشد قضیه ساده‌تر می‌شود. اکنون می‌خواهیم این صورت ساده‌تر را به دست آوریم. نخست به لم زیر که به‌خودی خود جالب است نیاز داریم.

۲۱.۸ لم. فرض کنید I ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R و $\sqrt{I}$ متناهی‌مولد باشد. در این‌صورت $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$، یعنی I شامل توانی از رادیکالش است.

در نتیجه هر ایدآل حلقهٔ تعویضپذیرنوتری شامل توانی از رادیکالش است.

اثبات. فرض کنید $\sqrt{I}$ توسط $a_۱, \ldots, a_k$ تولید شود. لذا به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, k$ عددی چون $n_i \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a_i^{n_i} \in I$. قرار دهید $n = ۱ + \Sigma_{i=۱}^{k}(n_i - ۱)$. از ۲۸.۲(سه) نتیجه می‌شود که $(\sqrt{I})^n$ ایدآل R است و توسط مجموعهٔ

$$L := \left\{a_۱^{r_۱} a_۲^{r_۲} \cdots a_k^{r_k} : r_۱, \ldots, r_k \in \mathbb{N}_\circ, \sum_{i=۱}^{k} r_i = n\right\}$$

تولید می‌شود. حال هرگاه $r_۱, \ldots, r_k$ اعداد صحیح نامنفی باشند و مجموعشان n باشد باید دست کم به‌ازای یک عدد صحیح چون j که $۱ \le j \le k$ داشته باشیم $r_j \ge n_j$ (زیرا در غیر این‌صورت $\sum_{i=۱}^{k} r_i \le \sum_{i=۱}^{k}(n_i - ۱) < n$ که متناقض با $\sum_{i=۱}^{k} r_i = n$ است) و لذا

$$a_۱^{r_۱} \cdots a_j^{r_j} \cdots a_k^{r_k} \in I.$$

در نتیجه $L \subseteq I$ و لذا $(\sqrt{I})^n = RL \subseteq I$.

حال مدعای آخر لم بلاواسطه از ۱.۸ نتیجه می‌شود که طبق آن هر ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر نوتری متناهی‌مولد است. ■

۲۲.۸ قضیه. فرض کنید I ایدآلی سره از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. در این‌صورت $P \in \operatorname{ass}\ I$ اگر و تنها اگر $a \in R$ وجود داشته باشد که $(I : a) = P$، یعنی اگر و تنها اگر $\lambda \in R/I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(\circ :_R \lambda) = \operatorname{Ann}_R(\lambda) = P$.

اثبات. $(\Longrightarrow)$ فرض کنید $a \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(I : a) = P$؛ در این‌صورت $(I : a)$ ایدآل Pـابتدایی است و لذا بنابر ۱۷.۴، $P \in \operatorname{ass}\ I$.

$(\Longleftarrow)$ فرض کنید تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. فرض کنید به‌ازای هر $j \in \mathbb{N}$ که $1 \leq j \leq n$

$$I_j = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_i$$

لذا بنابر مینیمال بودن تجزیهٔ ابتدایی فوق، $I \subset I_j \not\subseteq Q_j$. بنابر ۲۱.۸، $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $P_j^t \subseteq Q_j$، در نتیجه

$$P_j^t I_j \subseteq Q_j I_j \subseteq Q_j \cap I_j = I$$

فرض کنید u کوچکترین $t \in \mathbb{N}$ باشد که $P_j^t I_j \subseteq I$. لذا $P_j^u I_j \subseteq I$ و $P_j^{u-1} I_j \not\subseteq I$ (حتی اگر $u = 1$، این نتیجه درست است به این دلیل ساده که $I_j \not\subseteq I$).

عضوی چون $a \in P_j^{u-1} I_j \backslash I$ انتخاب کنید؛ در این‌صورت $a \in I_j \backslash I$. در نتیجه

$$(I : a) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i : a\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : a) = (Q_j : a)$$

و این ایدآل (بنابر ۱۴.۴) ایدآل P_jـابتدایی است. ولی چون $aP_j \subseteq P_j^u I_j \subseteq I$ داریم

$$P_j \subseteq (I : a) \subseteq P_j$$

و لذا $P_j = (I : a)$.

برای کامل کردن اثبات تنها کافی است توجه کنیم که به‌ازای $b \in R$ داریم، $(I : b) = (\circ :_R b + I)$، که پوچساز عضو $b + I$ از Rـمدول R/I است. ■

در فصل ۹، از قضیهٔ ۲۲.۸ برای ورود به مبحث نظریهٔ ایدآلهای اول وابسته به مدولهای روی حلقه‌های تعویضپذیر نوتری استفاده می‌کنیم.

اکنون می‌توانیم یکی از کاربردهای مفهوم تجزیهٔ ابتدایی در حلقه‌های تعویضپذیر نوتری را ارائه کنیم که در یکی از راههای اثبات قضیهٔ اشتراک کرول به‌کار می‌آید.

۲۳.۸ قضیه. فرض کنید I ایدآلی از حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری R باشد و $J = \cap_{n=1}^{\infty} I^n$. در این‌صورت $J = IJ$.

اثبات. اگر $I = R$، حکم واضح است و لذا فرض می‌کنیم I ایدآل سرهٔ R است. چون $I \subseteq J \subseteq IJ$ پس IJ نیز ایدآل سرهٔ R است و لذا بنابر ۱۷.۸ تجزیه‌ای ابتدایی دارد. فرض کنید تجزیهٔ

$$IJ = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{، } \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال IJ باشد. با اثبات اینکه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $J \subseteq Q_i$ نشان می‌دهیم $J \subseteq IJ$.

فرض کنید به‌ازای عددی چون $i \in \mathbb{N}$ که $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $J \not\subseteq Q_i$. لذا عضوی چون $a \in J \backslash Q_i$ وجود دارد. چون

$$aI \subseteq IJ = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \subseteq Q_i$$

و Q_i ایدآل P_iـابتدایی است از اینکه $a \notin Q_i$ نتیجه می‌شود که $I \subseteq P_i$. ولی $P_i = \sqrt{Q_i}$ و لذا بنابر ۲۱.۸ عدد $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $P_i^t \subseteq Q_i$. در نتیجه

$$J = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n \subseteq I^t \subseteq P_i^t \subseteq Q_i$$

که متناقض با فرض $J \not\subseteq Q_i$ است. بنابراین به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $J \subseteq Q_i$ و لذا $J \subseteq IJ$. بنابراین نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ■

لم ناکایاما به ما کمک می‌کند که نتایج جالبی از ۲۳.۸ به‌دست آوریم. شاید تعجب کنید که تا به‌حال به موردی برنخورده‌ایم که لم ناکایاما لازم باشد. اما اکنون دیگر موقع معرفی آن است.

۲۴.۸ لم ناکایاما. فرض کنید M مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R و I ایدآل R باشد و $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$، که $\mathrm{Jac}(R)$ رادیکال جیکبسن R است (۱۶.۳ را ببینید). فرض کنید $M = IM$. در این‌صورت $M = 0$.

اثبات. فرض می‌کنیم $M \neq 0$ و در پی تناقض می‌گردیم. فرض کنید $L = \{g_1, \ldots, g_n\}$ مجموعهٔ مولد مینیمال (n عضوی) برای M باشد، یعنی M توسط L تولید شود ولی توسط هیچ زیرمجموعهٔ سرهٔ L تولید نشود. (در اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که چون M ناصفر است توسط زیرمجموعهٔ تهی تولید نمی‌شود!)

حال $g_1 \in IM$ و لذا $a_1, \ldots, a_n \in I$ وجود دارد که $g_1 = \Sigma_{i=1}^{n} a_i g_i$. در نتیجه

$$(1 - a_1)g_1 = a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n$$

ولی چون $a_۱ \in I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$ از ۱۷.۳ نتیجه می‌شود که $۱ - a_۱$ عضو وارونپذیر R است، و لذا مثلاً u وارون آن است. در نتیجه $g_۱ = \Sigma_{i=۲}^{n} ua_i g_i$. از این مطلب نتیجه می‌شود که M توسط $\{g_۲, \ldots, g_n\}$، که زیرمجموعهٔ سرهٔ L است، تولید می‌شود. این تناقض نشان می‌دهد که $M = ۰$. ■

۲۵.۸ نتیجه. قضیهٔ اشتراک کرول. فرض کنید I ایدآل حلقهٔ تعویضپذیرنوتری R باشد و $I \subseteq \mathrm{Jac}(R)$. در این‌صورت

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} I^n = ۰$$

اثبات. قرار دهید $J = \bigcap_{n=۱}^{\infty} I^n$. بنابر ۲۳.۸، $J = IJ$. ولی چون R نوتری است، ایدآل J از R متناهی‌مولد است و لذا J Rـمدول متناهی‌مولد است. در نتیجه بنابر لم ناکایاما، $J = ۰$. ■

شاید مهمترین کاربرد قضیهٔ اشتراک کرول در مورد حلقه‌های موضعی باشد.

۲۶.۸ تعریف. منظور از حلقهٔ موضعی حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری است که شبه موضعی (۱۲.۳ را ببینید) باشد. منظور از حلقهٔ نیم‌موضعی حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری است که شبه نیم‌موضعی (۳۵.۵ را ببینید) باشد.

لذا همواره در این کتاب عبارت "حلقهٔ موضعی" به معنی "حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری که تنها یک ایدآل ماکسیمال دارد" است. عبارت "(R, M) حلقه‌ای موضعی است" را برای بیان اینکه R حلقه‌ای موضعی و M ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد آن است به‌کار می‌بریم. طبق ۱۲.۳ هیأت مانده‌ای حلقهٔ موضعی (R, M) هیأت R/M است.

روشن است که رادیکال جیکبسن حلقهٔ موضعی (R, M) همان M است و لذا نتیجهٔ زیر از ۲۵.۸ حاصل می‌شود.

۲۷.۸ نتیجه. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد. در این‌صورت $\bigcap_{n=۱}^{\infty} M^n = ۰$.■

۲۸.۸ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و I ایدآل R باشد. نشان دهید $\bigcap_{n=۱}^{\infty}(I + M^n) = I$.

۲۹.۸ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و Q ایدآل Mـابتدایی R باشد. توجه کنید که Rـمدول $(Q : M)/Q$ توسط M پوچ می‌شود و لذا بنابر ۱۹.۶ می‌توان آن را به‌طور طبیعی به‌عنوان فضای برداری روی R/M در نظر گرفت. نشان دهید که احکام زیر معادل‌اند:

یک) Q تحویلناپذیر است (۳۱.۴ را ببینید)؛
دو) $\mathrm{vdim}_{R/M}(Q:M)/Q = ۱$؛
سه) $(Q:M)$ کوچکترین عضو مجموعهٔ ایدآلهایی از R است که Q زیرمجموعهٔ سرهٔ آنهاست.

۳۰.۸ تمرین. فرض کنید Q ایدآل Pـابتدایی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. بنابر ۳۷.۴، Q را می‌توانیم به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی از ایدآلهای تحویلناپذیر R بنویسیم به‌طوری‌که هیچ یک از جمله‌های این اشتراک زاید نباشد. ثابت کنید که تعداد جمله‌های چنین اشتراکی ناورداست، یعنی از هر اشتراک مفروضِ تعدادی متناهی از ایدآلهای تحویلناپذیر R که برابر Q بوده و هیچ یک از جمله‌هایش زاید نباشد مستقل است.
(راهنمایی: حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی R در P را تشکیل دهید و با استفاده از ۳۹.۵(دو) مسأله را به حالتی که (R, M) موضعی است و $P = M$ تبدیل کنید؛ آن‌گاه با استفاده از تمرین ۲۹.۸ فوق نشان دهید که تعداد جمله‌های اشتراک برابر است با $\mathrm{vdim}_{R/M}(Q:M)/Q$.)

پس از قضیهٔ اشتراک کرول می‌توان به بحث از جنبه‌های توپولوژیک حلقه‌های موضعی پرداخت. در این کتاب این موضوع را به‌طور عمیق بررسی نمی‌کنیم، اما برخی از ایده‌های مربوطه را در تمرین زیر می‌آوریم.

۳۱.۸ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد و $\bigcap_{n=۱}^{\infty} I^n = ۰$. (توجه کنید که از قضیهٔ اشتراک کرول مثالهای بسیاری در این مورد به‌دست می‌آید.) تابع

$$\rho : R \times R \longrightarrow \mathbb{R}$$

را به‌صورت زیر تعریف کنید: به‌ازای هر $a \in R$ قرار دهید $\rho(a, a) = ۰$؛ و به‌ازای هر $a, b \in R$ که $a \neq b$ توجه کنید که مجموعهٔ اعداد صحیح $k \in \mathbb{N}$ که به‌ازای آنها $a - b \in I^k$ دارای بزرگترین عضو است (در غیر این‌صورت با توجه به زنجیرهٔ نزولی

$$I \supseteq I^۲ \supseteq \cdots \supseteq I^i \supseteq I^{i+۱} \supseteq \cdots$$

باید داشته باشیم $a - b \in \bigcap_{n=۱}^{\infty} I^n = ۰$ که متناقض با $a \neq b$ است) این عضو را t بنامید و تعریف کنید $\rho(a, b) = ۲^{-t}$.
یک) نشان دهید ρ تابعی متریک روی R است.
دو) فرض کنید $a, b, c \in R$ و $\rho(a, b) \neq \rho(a, c)$. نشان دهید $\rho(b, c)$ برابر است با $\rho(a, b)$ یا $\rho(a, c)$. (این نتیجه را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مثلث در فضای متریک (R, ρ) متساوی‌الساقین است!)
سه) فرض کنید $U \subset R$ و $a \in R$. نشان دهید U زیرمجموعه‌ای باز (در فضای متریک (R, ρ)) شامل a دارد اگر و تنها اگر به‌ازای عددی چون $n \in \mathbb{N}$، $a + I^n \subseteq U$.

نشان دهید زیرمجموعهٔ R باز است اگر و تنها اگر اجتماع هم‌مجموعه‌هایی از توانهای I باشد.

چهار) فرض کنید $(\hat{R}, \hat{\rho})$ نشاندهندهٔ فضای حاصل از تکمیل[1] فضای متریک (R, ρ) باشد: مثلاً صفحهٔ ۵۱ از مرجع [۲] را ببینید (ولی در مورد بحث صفحهٔ ۵۵ از مرجع [۲] دقت کنید). (ثابت کنید $\hat{R}$ مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ روی مجموعهٔ C متشکل از همهٔ دنباله‌های کوشی از عضوهای فضای متریک (R, ρ) است که در آن به‌ازای $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n) = 0$$

همچنین ثابت کنید به‌ازای $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{R}$ که به‌ترتیب نشاندهندهٔ رده‌های دنباله‌های کوشی $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هستند (یا به‌عبارت دقیقتر، $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{a}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{b}$) داریم

$$\hat{\rho}(\hat{a}, \hat{b}) = \lim_{n\to\infty} \rho(a_n, b_n)$$

این قسمت از تمرین برای خوانندگانی است که با مفهوم تکمیل فضای متریک آشنایند!)

نشان دهید که می‌توان با تعریف اعمالی که تحت آنها به‌ازای $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{a} \in \hat{R}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{b} \in \hat{R}$ داریم:

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{a}\hat{b} \quad \text{و} \quad (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{a} + \hat{b}$$

$\hat{R}$ را به‌ساختار حلقهٔ تعویض‌پذیر مجهز کرد و در این‌صورت نگاشت یک به‌یک طبیعی از R به $\hat{R}$ همریختی حلقه‌ای است (و لذا R را می‌توان با زیرحلقه‌ای از $\hat{R}$ یکی گرفت).

۳۲.۸ گامهای بعدی. در این کتاب تنها جایی که جنبه‌های توپولوژیک حلقه‌های تعویض‌پذیر را می‌بینید تمرین ۳۱.۸ است. ولی خواننده باید آگاه باشد که این فقط مشتی از خروار است زیرا نظریهٔ تکمیل حلقه‌های تعویض‌پذیر مبحثی وسیع و مهم است. با استفاده از توپولوژیهای مناسب می‌توان فضای تکمیل شده‌ای از حلقهٔ تعویض‌پذیر R بر مبنای ایدآل دلخواه I از R ساخت، یعنی لزومی ندارد خود را به‌ایدآلهایی چون I با این ویژگی محدود کنیم که $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.

برخی از کتابهایی که در فهرست مراجع ذکر شده‌اند بخشهایی در مورد تکمیل فضاها و موضوعات مربوط به آن دارند: من‌باب مثال نگاه کنید به: فصل ده مرجع [۱] (از اتیا و مک‌دانلد)، فصل نُه مرجع [۷] و بخش هشت مرجع [۸] (از ماتسومورا)، فصل دو مرجع [۹] (از ناگاتا)، فصل پنج مرجع [۱۰] و فصل نُه مرجع [۱۲] (از نورثکات)، فصل هشت مرجع [۱۹] (از زاریسکی و سمیوئل).

باید این مطلب را نیز متذکر شویم که نظریهٔ حدهای معکوس (مثلاً صفحهٔ ۲۷۱ از مرجع [۸] را ببینید) نقش مهمی در نظریهٔ تکمیل فضاها ایفا می‌کند. همچنین با استفاده از فضاهای تکمیل

1. Completion

شده‌ای که از حلقه‌های تعویضپذیر نوتری ساخته می‌شوند مثالهایی از مدولهای "تخت" به‌دست می‌آید: درک کامل این مفاهیم به آگاهی از ضرب تانسوری نیاز دارد و لذا یک بار دیگر با موضوعی مواجه شده‌ایم که می‌تواند انگیزهٔ دانشجویان در آموختن ضرب تانسوری باشد!

کاربرد دیگر قضیهٔ اشتراک کرول در احکام مربوط به یکتایی، یا در واقع عدم یکتاییِ تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ ایدآلهای سره در حلقه‌های تعویضپذیر نوتری است. یادآوری می‌کنیم که اگر I ایدآل سرهٔ R باشد، تعداد جمله‌ها و مجموعهٔ رادیکالهای جمله‌های ابتدایی در هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمال مفروض I مستقل از آن تجزیهٔ مفروض است (بنابر اولین قضیهٔ یکتایی، ۱۸.۴) جمله‌های ابتدایی متناظر با ایدآلهای اول مینیمال I نیز تنها به I بستگی دارند. از قضیهٔ اشتراک کرول می‌توانیم برای اثبات این حکم استفاده کنیم که اگر تجزیهٔ

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = 1, \ldots, n \text{،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I و P_i ایدآل اول محاطی I باشد آن‌گاه تعدادی نامتناهی ایدآل P_iـابتدایی وجود دارند که می‌توانند جانشین Q_i در تجزیهٔ ابتدایی مینیمال فوق شوند و حاصل همچنان تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. این موضوع با حل چند تمرین بعدی ثابت می‌شود.

۳۳.۸ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد.

یک) نشان دهید اگر R ایدآل اول ناماکسیمال داشته باشد آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $M^n \supset M^{n+1}$.

دو) نشان دهید اگر I ایدآل سرهٔ R باشد و $\sqrt{I} \neq M$ آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $I + M^n \supset I + M^{n+1}$.

۳۴.۸ تمرین. فرض کنید P ایدآل اولی از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. قسمتی از این تمرین به توانهای نمادین $P^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ که در ۴۶.۵ معرفی شد مربوط است.

یک) نشان دهید اگر P ایدآل اول مینیمال ایدآل ۰ نباشد آن‌گاه به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $P^{(n)} \supset P^{(n+1)}$.

دو) فرض می‌کنیم I ایدآل R باشد و $I \subset P$ ولی P ایدآل اول مینیمال I نباشد. نمادهای توسیع و تحدید ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to R_P$ به‌کار می‌بریم. نشان دهید که

$$(I + P^n)^{ec} \supset (I + P^{n+1})^{ec} \qquad \text{به‌ازای هر } n \in \mathbb{N}$$

همچنین نشان دهید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(I + P^n)^{ec}$ ایدآل Pـابتدایی است.

۳۵.۸ تمرین. فرض کنید Q ایدآل Pـابتدایی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. نشان دهید $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $P^{(n)} \subseteq Q$.

۳۶.۸ تمرین. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R و تجزیهٔ

$$I = Q_۱ \cap \cdots \cap Q_n \text{ که به‌ازای } i = ۱, \ldots, n \text{ ،} \sqrt{Q_i} = P_i$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد. فرض کنید P_i ایدآل اول محاطی I باشد. ثابت کنید تعدادی نامتناهی ایدآل P_iـابتدایی وجود دارد که می‌توانند جانشین Q_i در تجزیهٔ فوق شوند و حاصل همچنان تجزیهٔ ابتدایی مینیمال I باشد.

لذا تمرین۳۶.۸ نشان می‌دهد که قطعاً جمله‌های متناظر با ایدآلهای اول محاطی در تجزیهٔ ابتدایی مینیمال ایدآل سرهٔ I از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری به‌طور یکتا توسط I تعیین نمی‌شوند.

۳۷.۸ تمرین. فرض کنید P ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. ثابت کنید

$$\bigcap_{n=۱}^{\infty} P^{(n)} = \{r \in R : sr = ۰ \text{ که } \text{ وجود داشته باشد } s \in R\backslash P\}.$$

با استفاده از حکمی که در ۲۱.۸ ثابت شد، حاکی از اینکه هر ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر نوتری شامل توانی از رادیکالش است، می‌توانیم ثابت کنیم چنین حلقه‌ای در صورتی‌که هر ایدآل اولش ماکسیمال باشد آرتینی است. این مطلب را در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم.

۳۸.۸ قضیه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری باشد و هر ایدآل اول آن ماکسیمال باشد. در این‌صورت

یک) اگر R ناصفر باشد، نیم‌موضعی است (۲۶.۸ را ببینید) و لذا تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال دارد؛ و

دو) R آرتینی است.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم که R صفر نیست.

یک) فرض کنید M ایدآل ماکسیمال R باشد. چون هر ایدآل اول R ماکسیمال است، M باید ایدآل اول مینیمال شامل ۰ باشد و لذا بنابر ۲۴.۴ داریم $M \in \mathrm{ass}\, ۰$. در نتیجه $\mathrm{Spec}(R) \subseteq \mathrm{ass}\, ۰ \subseteq \mathrm{Spec}(R)$ و لذا $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{ass}\, ۰$ بنابراین $\mathrm{Spec}(R)$ متناهی است.

دو) فرض کنید $M_۱, \ldots, M_n$ ایدآلهای ماکسیمال R باشند. بنابر ۴۹.۳، $\sqrt{۰} = \bigcap_{i=۱}^{n} M_i$؛ همچنین بنابر ۲۱.۸، $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\sqrt{۰})^t = ۰$. در نتیجه

$$M_۱^t \cdots M_n^t \subseteq \left(\bigcap_{i=۱}^{n} M_i\right)^t = (\sqrt{۰})^t = ۰$$

نتیجه می‌شود که $M_۱^t \cdots M_n^t R = ۰$؛ حال چون R نوتری است از ۳۰.۷ نتیجه می‌گیریم که R یک Rـمدول آرتینی است. لذا R حلقه‌ای آرتینی است و اثبات کامل است. ■

در واقع عکس گزارهٔ ۳۸.۸(دو) نیز درست است، یعنی هر حلقهٔ تعویض‌پذیر آرتینی حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری است که هر ایدآل اول آن ماکسیمال است. اکنون راهی را برای رسیدن به این نتیجه پیش می‌گیریم.

۳۹.۸ لم. فرض کنید R حلقهٔ تعویض‌پذیر آرتینی باشد. در این‌صورت هر ایدآل اول R ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنید $P \in \operatorname{Spec}(R)$ و قرار دهید $R' := R/P$. بنابر ۲۳.۳، ۶.۷، ۱۴.۷ و ۲۶.۷، R' دامنهٔ صحیح آرتینی است. نشان می‌دهیم که R' هیأت است.

فرض کنید $b \in R'$ و $b \neq ۰$. در این‌صورت زنجیرهٔ

$$R'b \supseteq R'b^۲ \supseteq \cdots \supseteq R'b^i \supseteq R'b^{i+۱} \supseteq \cdots$$

زنجیره‌ای نزولی از ایدآلهای R' است و لذا $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $R'b^n = R'b^{n+۱}$. در نتیجه به‌ازای عضوی چون $c \in R'$، $b^n = cb^{n+۱}$ و لذا چون R' دامنهٔ صحیح است، $cb = ۱$، یعنی b وارونپذیر است بنابراین $R' = R/P$ هیأت است و لذا بنابر ۳.۳، P ماکسیمال است. ■

۴۰.۸ لم. فرض کنید R حلقهٔ تعویض‌پذیر آرتینی باشد. در این‌صورت R تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال دارد.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم که R ناصفر است. فرض کنید Φ مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای R باشد که به‌صورت اشتراک تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال R قابل نمایش‌اند. بنابر شرط مینیمال، Φ عضوی مینیمال چون J دارد: ایدآلهای ماکسیمالی چون $M_۱، \ldots، M_n$ از R وجود دارند که $J = M_۱ \cap \cdots \cap M_n$. نشان می‌دهیم که $M_۱، \ldots، M_n$ تنها ایدآلهای ماکسیمال Rاند.

برای این منظور فرض می‌کنیم M ایدآل ماکسیمالی از R باشد. در این‌صورت

$$J = M_۱ \cap \cdots \cap M_n \supseteq M \cap M_۱ \cap \cdots \cap M_n \in \Phi.$$

و چون J در Φ مینیمال است، باید داشته باشیم

$$J = M_۱ \cap \cdots \cap M_n = M \cap M_۱ \cap \cdots \cap M_n.$$

در نتیجه $M_۱ \cap \cdots \cap M_n \subseteq M$ و لذا چون M اول است از ۵۵.۳ نتیجه می‌شود که به‌ازای عددی چون $j \in \mathbb{N}$ که $۱ \leq j \leq n$، $M_j \subseteq M$. چون M_j و M ایدآل ماکسیمال Rاند نتیجه می‌گیریم که $M_j = M$.

در نتیجه $M_۱، \ldots، M_n$ تنها ایدآلهای ماکسیمال R هستند. ■

۴۱.۸ قضیه. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر آرتینی و N رادیکال پوچ R، یعنی $\sqrt{0}$، باشد. در این‌صورت $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $N^t = 0$ یعنی $(\sqrt{0})^t = 0$.

اثبات. زنجیرهٔ نزولی

$$N \supseteq N^2 \supseteq \cdots \supseteq N^i \supseteq N^{i+1} \supseteq \cdots$$

از ایدآلهای R را در نظر می‌گیریم، چون R آرتینی است $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $N^{t+i} = N^t$. می‌خواهیم نشان دهیم که $N^t = 0$: فرض می‌کنیم چنین نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. قرار دهید

$$\Theta = \{I : \text{است و } IN^t \neq 0 \text{ ایدآل } R \text{ } I\}.$$

در این‌صورت به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $N^i \in \Theta$ زیرا $N^iN^t = N^{t+i} = N^t \neq 0$. چون R آرتینی است از شرط مینیمال (۶.۷ را ببینید) نتیجه می‌شود که Θ عضو مینیمال دارد: فرض کنید J چنین عضوی باشد.

چون $JN^t \neq 0$، $a \in J$ وجود دارد که $aN^t \neq 0$. بنابراین $(aR)N^t \neq 0$، به‌علاوه $aR \subseteq J$؛ در نتیجه بنابر مینیمال بودن J در Θ باید داشته باشیم $aR = J$.

حال توجه کنید که ایدآل $aN^t(= (aR)N^t)$ از R در رابطهٔ

$$(aN^t)N^t = (aR)N^{2t} = (aR)N^t = JN^t \neq 0$$

صدق می‌کند. چون $aN^t \subseteq aR = J$، مجدداً از مینیمال بودن J نتیجه می‌شود که $aN^t = aR = J$. بنابراین به‌ازای عضوی چون $b \in N^t \subseteq N$ داریم $a = ab$. لذا $v \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $b^v = 0$ و چون

$$a = ab = (ab)b = ab^2 = \cdots = ab^v = 0$$

نتیجه می‌گیریم $JN^t = (aR)N^t = 0$ که با تعلق J به Θ تناقض دارد. در نتیجه $N^t = 0$ و حکم ثابت شده است. ■

۴۲.۸ تعریف. ایدآل I از حلقهٔ تعویضپذیر R را پوچتوان می‌گوییم اگر $t \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $I^t = 0$.

بی‌مناسبت نیست چند کلمه‌ای در مورد آنچه در ۴۱.۸ ثابت کردیم بگوییم. روشن است که هر عضو رادیکال پوچ حلقهٔ تعویضپذیر R، یعنی N، پوچتوان است. هم‌اکنون دیدیم که اگر R آرتینی باشد آن‌گاه خود N نیز پوچتوان است یعنی $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $N^t = 0$. توجه کنید

که این مطلب به این معناست که نه تنها توان tام هر عضو N برابر صفر است و لذا برای همهٔ عضوهای پوچتوان یک t مشترک وجود دارد به‌طوری که توان tام هر یک از آن عضوها برابر صفر است، بلکه به‌ازای هر $a_1, \ldots, a_t \in N$، $a_1 \cdots a_t = 0$.

بنابر ۲۱.۸ رادیکال پوچ هر حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری پوچتوان است و لذا آنچه در بالا گفتیم در این حالت نیز صادق است.

۴۳.۸ تمرین. فرض کنید $R_\infty = K[X_1, \ldots, X_n, \ldots]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب متعلق به هیأت K از خانوادهٔ شمارا و نامتناهیِ مجهولهای $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ باشد: ۲۱.۲ و ۱۶.۸ را ببینید.

فرض کنید I ایدآلی از R_∞ باشد که توسط $\{X_i^i : i \in \mathbb{N}\}$ تولید می‌شود. نشان دهید رادیکال پوچ حلقهٔ R_∞/I پوچتوان نیست.

۴۴.۸ قضیه. هر حلقهٔ تعویض‌پذیر آرتینی چون R نوتری است.

اثبات. واضح است که می‌توانیم فرض کنیم R صفر نیست. بنابر ۳۹.۸ هر ایدآل اول R ماکسیمال است. بنابر ۴۰.۸، R تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال دارد: فرض کنید $M_1, \ldots, M_n$ ایدآلهای ماکسیمال R باشند. بنابر ۴۹.۳، $\bigcap_{i=1}^n M_i = \sqrt{0}$؛ همچنین بنابر ۴۱.۸، $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(\sqrt{0})^t = 0$. در نتیجه

$$M_1^t \cdots M_n^t \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n M_i\right)^t = (\sqrt{0})^t = 0$$

نتیجه می‌شود که $M_1^t \cdots M_n^t R = 0$؛ چون R آرتینی است از ۳۰.۷ نتیجه می‌گیریم که R نوتری است. ■

حال می‌توانیم از ترکیب ۳۸.۸، ۳۹.۸ و ۴۴.۸ نتیجهٔ زیر را به‌دست آوریم.

۴۵.۸ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. در این‌صورت R آرتینی است اگر و تنها اگر نوتری باشد و هر ایدآل اول آن ماکسیمال باشد. ■

۴۶.۸ تمرین. فرض کنید I ایدآل سرهٔ حلقهٔ تعویض‌پذیرنوتری R باشد. ثابت کنید Rـمدول R/I متناهی‌طول است اگر و تنها اگر $\operatorname{ass} I$ از ایدآلهای ماکسیمال R تشکیل شده باشد.

۴۷.۸ تمرین. فرض کنید Q ایدآل Pـابتدایی حلقهٔ تعویض‌پذیر نوتری R باشد. مقصود از زنجیرهٔ ابتدایی Q به‌طول t زنجیره‌ای صعودی چون

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{t-1} \subset Q_t$$

از ایدآلهای (متمایز) Pـابتدایی R است که در آن $Q_\circ = Q$ و $Q_t = P$.

ثابت کنید که مجموعهٔ طولهای زنجیره‌های ابتدایی Q کراندار است؛ کوچکترین کران بالای این مجموعه را بیابید و آن را u بنامید. نشان دهید که طول هر زنجیرهٔ ابتداییِ ماکسیمال Q (یعنی زنجیره‌ای ابتدایی که نتوان جملهٔ دیگری در آن وارد کرد) دقیقاً u است.

۴۸.۸ تمرین. فرض کنید A مدولی آرتینی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $a \in A$ که $a \neq \circ$. نشان دهید مجموعه‌ای متناهی چون $\{M_\backslash, \ldots, M_n\}$ از ایدآلهای ماکسیمال R و عددی چون $t \in \mathbb{N}$ وجود دارند که

$$(M_\backslash \cdots M_n)^t a = \circ$$

۴۹.۸ تمرین. فرض کنید A مدول آرتینی ناصفری روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد.

یک) نشان دهید که به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R

$$\Gamma_M(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\circ :_A M^n)$$

زیر مدول A است.

دو) فرض کنید $\operatorname{Max}(R)$ مجموعهٔ همهٔ ایدآلهای ماکسیمال R باشد. نشان دهید $\sum_{M \in \operatorname{Max}(R)} \Gamma_M(A)$ که مجموع زیرمدولهایی از A است، مجموع مستقیم آن زیرمدولهاست.

سه) نشان دهید تنها تعدادی متناهی ایدآل ماکسیمال چون M از R وجود دارد که $\Gamma_M(A) \neq \circ$. این ایدآلهای ماکسیمال متمایز را با $M_\backslash, \ldots, M_n$ نمایش دهید و نشان دهید که

$$A = \Gamma_{M_\backslash}(A) \oplus \cdots \oplus \Gamma_{M_n}(A).$$

۵۰.۸ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و آرتینی و ناصفر باشد. ثابت کنید که حلقه‌های موضعی آرتینی $R_\backslash, \ldots, R_n$ وجود دارند به‌طوری که R با حلقهٔ حاصلضرب مستقیم $\prod_{i=\backslash}^n R_i$ (۶.۲ را ببینید) یکریخت است.

به‌علاوه نشان دهید اگر $S_\backslash, \ldots, S_m$ حلقه‌های موضعی آرتینی باشند به‌طوری که $R \cong \prod_{i=\backslash}^m S_i$ آن‌گاه $m = n$ و جایگشتی چون σ از $\{\backslash, \ldots, n\}$ وجود دارد که به‌ازای هر $i = \backslash, \ldots, n$، $R_i \cong S_{\sigma(i)}$.

۹

مطالبی دیگر در نظریهٔ مدولها

در این فصل بیشتر به تکنیکهای مفید می‌پردازیم تا به احکامی که فی‌نفسه جالب هستند. اشتیاق برای رسیدن به قضیه‌های مهیج سبب شد که ارائهٔ برخی از تکنیکهای مهمی که برای گسترش بیشتر و بهتر مطلب لازم بود به بعد موکول شود. مثلاً لم ناکایاما را در ۲۴.۸ دیدیم ولی کاربردهای مفید لم ناکایاما در مورد مدولهای متناهی‌مولد روی حلقه‌های شبه موضعی را در فصل ۸ ارائه ندادیم. همچنین، حلقه‌های کسرها و ایدآلهایشان را در فصل ۵ به تفصیل مورد مطالعه قرار دادیم ولی هنوز از تعمیم طبیعی این نظریه به مدولهای کسرها بحث نکرده‌ایم. همچنین، نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی ایدآلها که در فصل ۴ مورد بحث واقع شد تعمیمی در مورد مدولها دارد که به مفهوم مهم ایدآل اول وابسته به مدول روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری مربوط است.

این مباحث را در این فصل مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه نظریهٔ مدولهای کسرها به ایدهٔ مهم محمل مدول می‌انجامد که‌مبحث دیگر مورد بررسی در این فصل است.

کار را با ارائهٔ چند نتیجه ازلم ناکایاما شروع می‌کنیم.

۱.۹ تذکر. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. منظور از مجموعهٔ مولد مینیمال M زیرمجموعه‌ای چون Δ از M است که Δ مدول M را تولید می‌کند ولی هیچ زیرمجموعهٔ سره‌ای از Δ مدول M را تولید نمی‌کند.

توجه کنید که اگر M متناهی‌مولد باشد، و مثلاً توسط $g_1, \ldots, g_n$ تولید شود، آن‌گاه هر مجموعهٔ مولد مینیمال M چون Δ باید متناهی باشد: زیرا هر g_i $(1 \leq i \leq n)$ را می‌توان به‌صورت

$$g_i = \sum_{\delta \in \Delta} r_{i\delta}\delta$$

نوشت که در آن به‌ازای هر $\delta \in \Delta$، $r_{i\delta} \in R$ و تقریباً همهٔ $r_{i\delta}$ها صفرند و لذا زیرمجموعهٔ متناهی Δ' از Δ نیز که به‌صورت زیر تعریف شده

$$\Delta' = \bigcup_{i=1}^{n}\{\delta \in \Delta : r_{i\delta} \neq 0\}$$

M را تولید می‌کند. (متذکر می‌شویم که عبارت اختصاری "تقریباًهمه" به‌معنی "همه بجز احتمالاً تعدادی متناهی" است.)

ولی حتی Rـمدول متناهی‌مولد نیز ممکن است دو مجموعهٔ مولد مینیمال داشته باشد که اعداد اصلیشان متفاوت باشند؛ یعنی تعداد عضوهای یک مجموعهٔ مولد مینیمال لزومی ندارد با تعداد عضوهای یک مجموعهٔ مولد مینیمال دیگر برابر باشد. برای ارائهٔ مثالی از این حالت، $\mathbb{Z}$ـمدول $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید: به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر دو مجموعهٔ $\{1 + 6\mathbb{Z}\}$ و $\{2 + 6\mathbb{Z}, 3 + 6\mathbb{Z}\}$ مجموعهٔ مولد مینیمال $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ هستند.

البته این حالتِ نامطلوب در نظریهٔ فضاهای برداری رخ نمی‌دهد، زیرا هر مجموعهٔ مولد مینیمالِ یک فضای برداری متناهی مولد روی هیأت تشکیل پایه می‌دهد. حال نشان می‌دهیم که این حالت در مدولهای متناهی‌مولد روی حلقه‌های شبه موضعی نیز رخ نمی‌دهد. از جنبه‌های جالب این بحث این است که با استفاده از لم ناکایاما مسأله را به حالتی تبدیل می‌کنیم که از نظریهٔ فضاهای برداری بتوان استفاده کرد.

۲.۹ نتیجهٔ لم ناکایاما. فرض کنید G مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآل R باشد و $I \subseteq \operatorname{Jac}(R)$. فرض کنید H زیرمدول G باشد و $H + IG = G$. در این صورت $H = G$.

اثبات. فرض کنید G توسط $g_1, \ldots, g_n$ تولید شود. در این‌صورت G/H توسط $g_1 + H, \ldots, g_n + H$ تولید می‌شود و لذا Rـمدولی متناهی‌مولد است. حال چون $H + IG = G$ داریم $I(G/H) = (H + IG)/H = G/H$ و لذا از لم ناکایاما، یعنی ۲۴.۸، نتیجه می‌شود که $G/H = 0$. در نتیجه $H = G$. ■

بسیاری از کاربردهای لم ناکایاما در حالتهایی صورت می‌گیرد که حلقهٔ R مربوطه شبه موضعی باشد: در این‌صورت $\operatorname{Jac}(R)$ همان ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد R است. در کاربرد زیر نیز با همین حالت مواجهیم.

۳.۹ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای شبه موضعی با ایدآل ماکسیمال M و هیأت مانده‌ای $K = R/M$ باشد. فرض کنید G Rـمدولی متناهی‌مولد باشد. چون Rـمدول G/MG توسط M پوچ می‌شود، بنابر ۱۹.۶ ساختاری طبیعی به‌عنوان مدول روی R/M، یعنی به‌عنوان Kـفضا، دارد. فرض کنید $g_1, \ldots, g_n \in G$. در این‌صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) G توسط $g_1, \ldots, g_n$ تولید می‌شود؛

دو) Rـمدول G/MG توسط $g_1 + MG, \ldots, g_n + MG$ تولید می‌شود؛

سه) Kـفضای G/MG توسط $g_1 + MG, \ldots, g_n + MG$ تولید می‌شود.

به‌علاوه، بعد Kـفضای G/MG متناهی است و تعداد عضوهای هر مجموعهٔ مولد مینیمال Rـمدول G برابر $\mathrm{vdim}_K\, G/MG$ است.

اثبات. در ۱۹.۶ دیدیم که ساختارهای Rـمدول و Kـفضای برداری G/MG با قاعدهٔ $r(g + MG) = (r + M)(g + MG)$، به‌ازای هر $r \in R$ و هر $g \in G$، به یکدیگر مربوط می‌شوند؛ بنابراین معادل بودن احکام (دو) و (سه) روشن است. (۲۳.۶ را نیز ببینید.) همچنین روشن است که (دو) از (یک) نتیجه می‌شود.

(یک) $\Longleftarrow$ (دو) فرض کنید Rـمدول G/MG توسط $g_1 + MG, \ldots, g_n + MG$ تولید شود. فرض کنید $H = Rg_1 + \cdots + Rg_n$؛ نشان می‌دهیم که $G = H + MG$. فرض کنید $g \in G$. در این‌صورت $r_1, \ldots, r_n \in R$ وجود دارند که

$$g + MG = r_1(g_1 + MG) + \cdots + r_n(g_n + MG)$$

و لذا $g - \sum_{i=1}^{n} r_i g_i \in MG$. نتیجه می‌شود که $G \subseteq H + MG$. به‌علاوه، واضح است که عکس این رابطه نیز برقرار است، بنابراین $G = H + MG$.

حال چون $M = \mathrm{Jac}(R)$ از ۲.۹ نتیجه می‌شود که $G = H$ و لذا G توسط $g_1, \ldots, g_n$ تولید می‌شود.

لذا معادل بودن احکام (یک)، (دو) و (سه) را ثابت کرده‌ایم. چون G Rـمدولی متناهی‌مولد است، از معادل بودن این احکام نتیجه می‌شود که G/MG Kـفضای متناهی‌مولد یعنی Kـفضای متناهی بعد است. همچنین توجه کنید که بنابر ۱.۹ هر مجموعهٔ مولد مینیمالِ G متناهی است.

فرض کنید مجموعهٔ w عضویِ $\{g'_1, \ldots, g'_w\}$ مجموعهٔ مولد مینیمال G باشد. از معادل بودن احکام (یک) و (سه) نتیجه می‌شود که مجموعهٔ (w عضوی)

$$\{g'_1 + MG, \ldots, g'_w + MG\}$$

مجموعهٔ مولد Kـفضای G/MG است و این ویژگی را دارد که هیچ زیر مجموعهٔ سره‌اش G/MG را تولید نمی‌کند. در نتیجه $(g'_i + MG)_{i=1}^{w}$ پایه‌ای برای Kـفضای G/MG است و لذا $w = \mathrm{vdim}_K\, G/MG$. ■

حال به بررسی مدولهای کسرها می‌پردازیم: این مبحث تعمیم طبیعی مبحث حلقه‌های کسرها از فصل ۵ است. اولین حکم ما در این مبحث یادآور مطالب مذکور در ۱.۵، ۲.۵، ۳.۵ و ۴.۵ است و لذا خواننده حتماً از عهدهٔ اثبات آن برمی‌آید.

۴.۹ قضیه، اصطلاح و نمادگذاری. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R و M ـRـمدول باشد. رابطهٔ $\sim$ روی $M \times S$ با تعریف زیر:
به‌ازای $(m, s), (n, t) \in M \times S$

$$(m, s) \sim (n, t) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in S, u(tm - sn) = \circ$$

رابطه‌ای هم‌ارزی روی $M \times S$ است؛ به‌ازای $(m, s) \in M \times S$، ردهٔ هم‌ارزی شامل (m, s) را با m/s نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ $S^{-\text{۱}}M$ متشکل از رده‌های هم‌ارزی رابطهٔ $\sim$ تحت اعمال

$$\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}, \qquad \frac{r}{s}\frac{n}{t} = \frac{rn}{st}$$

که در آن $m, n \in M$، $s, t \in S$ و $r \in R$، مدولی روی حلقهٔ $S^{-\text{۱}}R$، متشکل از کسرهای R نسبت به S، است. $S^{-\text{۱}}R$ـمدول $S^{-\text{۱}}M$ مدول کسرهای M نسبت به S نامیده می‌شود. عضو صفر این مدول $\circ_M/\text{۱}$ است که به‌ازای هر $s \in S$ با $\circ_M/s$ برابر است.

۵.۹* تمرین. قضیهٔ ۴.۹ را ثابت کنید.

۶.۹ تذکر. فرض کنید ۴.۹ و ۵.۹ برقرار باشند.

یک) توجه کنید که به‌ازای $m \in M$ و $s \in S$ داریم $m/s = \circ_{S^{-\text{۱}}M}$ اگر و تنها اگر $t \in S$ وجود داشته باشد که $t\,m = \circ$.

دو) نگاشت $g : M \longrightarrow S^{-\text{۱}}M$ با تعریف به‌ازای هر $m \in M$، $g(m) = m/\text{۱}$ همریختی Rـمدولهاست اگر $S^{-\text{۱}}M$ با تحدید اسکالرها با استفاده ازهمریختی حلقه‌ای طبیعی $R \longrightarrow S^{-\text{۱}}R$ به‌عنوان Rـمدول در نظر گرفته شود. بنابر (یک)،

$$\text{Ker } g = \{m \in M : sm = \circ \text{ وجود داشته باشد که } s \in S\}$$

سه) اطلاعات تکنیکی که خواننده در فصل ۵ درکار با کسرهای صوری به‌دست آورده درکار با مدولهای کسرها برایش مفید خواهد بود. مثلاً برای جمع‌کردن دو عضو $S^{-\text{۱}}M$ که مخرج مشترک دارند کافی است صورتها را با هم جمع کند و مخرج مشترک را مخرج حاصلجمع قرار دهد.

چهار) از تعمیم بدیهی نمادهای معرفی شده در ۱۷.۵ و ۲۰.۵ استفاده خواهیم کرد، یعنی در حالت خاصی که به‌ازای عضو ثابتی چون $t \in R$، $S = \{t^n : n \in \mathbb{N}_\circ\}$ مدول $S^{-\text{۱}}M$ را گاه

با M_t نمایش می‌دهیم؛ و در حالت خاصی که به‌ازای ایدآل اولی چون P از R، $S = R\backslash P$، مدول $S^{-1}M$ را معمولاً با M_P نمایش می‌دهیم. در حالت اخیر، M_P را مدول حاصل از موضعی سازی M در P می‌نامیم.

در مطالعهٔ مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R، Rـهمریختیهای بین این مدولها را نیز مطالعه کردیم. حال می‌خواهیم ببینیم که چگونه از یک Rـهمریختی بین دو مدول یک $S^{-1}R$ـهمریختی بین $S^{-1}R$ـمدولهای متناظر با آن دو مدول به‌دست می‌آید (البته S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R است).

۷.۹ لم و نمادگذاری. فرض کنید $f : L \longrightarrow M$ همریختی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. در این‌صورت از f یک $S^{-1}R$ـهمریختی چون

$$S^{-1}f : S^{-1}L \longrightarrow S^{-1}M$$

به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $a \in L$ و $s \in S$، $S^{-1}f(a/s) = f(a)/s$.

اثبات. فرض کنید $a, b \in L$ و $s, t \in S$ و در $S^{-1}L$، $a/s = b/t$. در این‌صورت $u \in S$ وجود دارد که $u(ta - sb) = 0$؛ با در نظر گرفتن اثر f بر دو طرف این تساوی نتیجه می‌گیریم که $u(tf(a) - sf(b)) = 0$؛ در نتیجه در $S^{-1}M$، $f(a)/s = f(b)/t$. لذا نتیجه می‌شود که در واقع نگاشتی چون $S^{-1}f : S^{-1}L \longrightarrow S^{-1}M$ با فرمول داده شده در صورت قضیه وجود دارد. حال اثبات اینکه $S^{-1}f$ یک $S^{-1}R$ـهمریختی است آسان است: یادآوری می‌کنیم که همواره می‌توان مخرجهای هر دو عضوی از $S^{-1}L$ را مشترک کرد. ■

۸.۹* تمرین. فرض کنید L، M و N مدولهایی روی حلقهٔ تعویضپذیر R، و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. فرض کنید $f, f' : L \longrightarrow M$ و $g : M \longrightarrow N$، Rـهمریختی باشند. نشان دهید

یک) $S^{-1}(f + f') = S^{-1}f + S^{-1}f'$؛

دو) $S^{-1}z$، که در آن z نمایش همریختی صفر (۲۷.۶ را ببینید) از L به M است، همریختی صفر از $S^{-1}L$ به $S^{-1}M$ است؛

سه) $S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ S^{-1}f$؛

چهار) $S^{-1}(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{S^{-1}M}$؛

پنج) اگر f Rـیکریختی باشد، آنگاه $S^{-1}f$ $S^{-1}R$ـیکریختی است.

خوانندگانی که با مفاهیم بنیادی جبر مانستگیی (همولوژیک) آشنا هستند متوجه می‌شوند که حال که ۸.۹(یک)، (سه) و (چهار) را داریم، نشان داده‌ایم که "S^{-1}" را می‌توان به‌عنوان تابعگون هموردش جمعی از رستهٔ Rـمدولها و Rـهمریختیها به رستهٔ $S^{-1}R$ـمدولها و $S^{-1}R$ـهمریختیها

در نظر گرفت. همچنین نتیجهٔ زیر نشان می‌دهد که‌این تابعگون کامل است. البته انتظار نداریم که خواننده چیزی دربارهٔ جبر مانستگیی بداند بلکه می‌تواند این گونه فکر کند که لم (مهم) زیر نشان می‌دهد که "S^{-1}" کامل بودن دنباله‌های مدولها را حفظ می‌کند.

۹.۹ لم. فرض کنید دنبالهٔ

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

دنباله‌ای کامل از مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R و Rـهمریختیها، و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. در این‌صورت دنبالهٔ

$$S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$$

نیز کامل است.

اثبات. چون $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ داریم $g \circ f = 0$؛ در نتیجه بنابر ۸.۹ (دو) و (سه)

$$S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}(0) = 0$$

و لذا $\operatorname{Im} S^{-1}f \subseteq \operatorname{Ker} S^{-1}g$.

برای اثبات عکس این رابطه فرض کنید $\lambda \in \operatorname{Ker} S^{-1}g$. لذا $m \in M$ و $s \in S$ وجود دارند که $\lambda = m/s$، و بنابراین $g(m)/s = (S^{-1}g)(m/s) = 0$. لذا بنابر ۶.۹(یک)، $t \in S$ وجود دارد که $tg(m) = 0$؛ در نتیجه $tm \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ و لذا $a \in L$ وجود دارد که $tm = f(a)$. لذا

$$\lambda = \frac{m}{s} = \frac{tm}{ts} = \frac{f(a)}{ts} = S^{-1}f\left(\frac{a}{ts}\right) \in \operatorname{Im}\ S^{-1}f$$

و اثبات کامل است. ■

۱۰.۹ قرارداد. فرض کنید L زیرمدولی از مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. فرض کنید $u : L \longrightarrow M$ نشاندهندهٔ Rـهمریختی یک به یک طبیعی باشد. از اثبات ۹.۹ می‌توان نتیجه گرفت که $S^{-1}R$ـهمریختی $S^{-1}u : S^{-1}L \longrightarrow S^{-1}M$ یک به یک است: بسیاری اوقات با استفاده از $S^{-1}u$، $S^{-1}L$ را با $S^{-1}R$ـزیرمدول

$$\left\{\lambda \in S^{-1}M : \lambda = \frac{a}{s} \text{ ،} s \in S \text{ و } a \in L \text{ به‌ازای عضوهایی چون}\right\}$$

از $S^{-1}M$ یکی می‌گیریم.

البته اگر R را به‌طور طبیعی به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم هر ایدآل I از R زیرمدول R خواهد بود، در این‌صورت می‌توانیم قرارداد فوق را دربارهٔ I و R به‌کار ببریم و به این ترتیب می‌توانیم $S^{-1}R$ـمدول $S^{-1}I$ را با ایدآل

$$\left\{\lambda \in S^{-1}R : \lambda = \frac{r}{s} \text{ ،} s \in S \text{ و } r \in I \text{ به‌ازای عضوهایی چون}\right\}$$

از $S^{-1}R$ یکی بگیریم. حال بنابر ۲۵.۵ ایدآل اخیر چیزی جز حاصل توسیع I، یعنی I^e، تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \longrightarrow S^{-1}R$ نیست: لذا طبق قرارداد فوق، $S^{-1}I = I^e$. گاه نماد $S^{-1}I$ را به‌جای $IS^{-1}R$ به‌کار می‌بریم.

تذکر ۲۷.۵ نشان می‌دهد که در حالت کلی به‌ازای هر زیرمدول L از M چنین نیست که اگر عضو λ متعلق به زیرمدول $S^{-1}L$ از مدول $S^{-1}M$ باشد، در هر نمایش λ به‌صورت کسر صوری m/s (که $m \in M$ و $s \in S$) صورت کسر یعنی m در L باشد: آنچه در حالت کلی می‌دانیم این است که دست کم یک کسر صوری نشاندهندهٔ λ وجود دارد که صورتش متعلق به L است. به خواننده هشدار می‌دهیم که متوجه این نکته باشد!

قرارداد فوق در تمرین زیر و لم بعد از آن به‌کار رفته است.

۱۱.۹* تمرین. فرض کنیم L_1 و L_2 زیرمدولهایی از مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R، و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. فرض کنیم I ایدآل R باشد و $r \in R$. نماد توسیع مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \longrightarrow S^{-1}R$ به‌کار می‌بریم. نشان دهید

یک) $S^{-1}(IM) = I^e S^{-1}M$؛

دو) $S^{-1}(rM) = (r/1)S^{-1}M$؛

سه) $S^{-1}(L_1 + L_2) = S^{-1}L_1 + S^{-1}L_2$؛

چهار) $S^{-1}(L_1 \cap L_2) = S^{-1}L_1 \cap S^{-1}L_2$؛

پنج) اگر Ω یک $S^{-1}R$ـزیرمدول $S^{-1}M$ باشد آن‌گاه $G := \{g \in M : g/1 \in \Omega\}$ زیرمدول M است و $S^{-1}G = \Omega$؛

شش) اگر M Rـمدول نوتری باشد آن‌گاه $S^{-1}M$ $S^{-1}R$ـمدول نوتری است؛

هفت) اگر M Rـمدول آرتینی باشد آن‌گاه $S^{-1}M$ $S^{-1}R$ـمدول آرتینی است.

۱۲.۹ لم. فرض کنیم L و N زیرمدولهایی از مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R، و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. نماد توسیع مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \longrightarrow S^{-1}R$ به‌کار می‌بریم. در این‌صورت

یک) نگاشت زیر

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M/S^{-1}L & \longrightarrow & S^{-1}(M/L) \\ (m/s)+S^{-1}L & \longmapsto & (m+L)/s \end{array}$$

یکریختی $S^{-1}R$ـمدولهاست.

دو) اگر N متناهی‌مولد باشد آن‌گاه $(L :_R N)^e = (S^{-1}L :_{S^{-1}R} S^{-1}N)$.

سه) اگر M متناهی‌مولد باشد آن‌گاه $(\mathrm{Ann}_R(M))^e = \mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

اثبات. یک) بنابر ۹.۹، از دنبالهٔ کاما،

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{\pi} M/L \longrightarrow 0$$

که در آن u همریختی یک به یک طبیعی و π بروریختی متعارف است، دنبالهٔ کامل زیر از $S^{-1}R$ـمدولها و $S^{-1}R$ـهمریختیها به‌دست می‌آید:

$$0 \longrightarrow S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}\pi} S^{-1}(M/L) \longrightarrow 0$$

حال با توجه به قرارداد ۱۰.۹، نگاشت $S^{-1}u$ چیزی جز همریختی (یک به یک) طبیعی نیست؛ همچنین به‌ازای هر $m \in M$ و $s \in S$ داریم $S^{-1}\pi(m/s) = \pi(m)/s = (m+L)/s$. بنابراین حکم (یک) از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها، یعنی ۳۳.۶، نتیجه می‌شود.

دو) قرار دهید $I := (L :_R N)$. چون $IN \subseteq L$، از ۱۱.۹(یک) نتیجه می‌شود که $I^e(S^{-1}N) = S^{-1}(IN) \subseteq S^{-1}L$ و لذا

$$(L :_R N)^e \subseteq (S^{-1}L :_{S^{-1}R} S^{-1}N)$$

هنوز از این واقعیت که N متناهی‌مولد است استفاده نکرده‌ایم؛ اما آن را برای اثبات عکس رابطهٔ فوق به‌کار می‌بریم. فرض کنید N توسط $g_1, \ldots, g_t$ تولید شود و $\lambda \in (S^{-1}L :_{S^{-1}R} S^{-1}N)$. عضوهایی چون $r \in R$ و $s \in S$ وجود دارند که $\lambda = r/s$. حال به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t$ داریم $(r/s)(g_i/1) \in S^{-1}L$ و لذا $a_i \in L$ و $s_i \in S$ وجود دارند که

$$\frac{r}{s}\frac{g_i}{1} = \frac{rg_i}{s} = \frac{a_i}{s_i}$$

و $s'_i \in S$ وجود دارد که $s'_i(s_i r g_i - s a_i) = 0$. قرار دهید

$$s'' = s_1 \cdots s_t s'_1 \cdots s'_t \in S$$

در این‌صورت به‌ازای هر t ،$i = ۱, \ldots, t$ ،$s'' r g_i \in L$ و لذا چون $g_۱, \ldots, g_t$، N را تولید می‌کنند داریم $s'' r \in (L :_R N)$. در نتیجه

$$\lambda = \frac{r}{s} = \frac{s'' r}{s'' s} \in (L :_R N)^e$$

بنابراین چنانکه می‌خواستیم $(L :_R N)^e \supseteq (S^{-۱}L :_{S^{-۱}R} S^{-۱}N)$.

سه) این حکم از بند (دو) نتیجه می‌شود. ■

۱۳.۹ تمرین. فرض کنیم L زیرمدولی از مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. فرض کنیم I ایدآلی متناهی‌مولد از R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. نماد توسیع مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \longrightarrow S^{-۱}R$ به‌کار می‌بریم. نشان دهید

$$S^{-۱}(L :_M I) = (S^{-۱}L :_{S^{-۱}M} I^e)$$

و نتیجه بگیرید که $S^{-۱}(\circ :_M I) = (\circ :_{S^{-۱}M} I^e)$.

مطالبی که تاکنون دربارهٔ مدولهای کسرها گفته‌ایم اندکی بیشتر از تعمیم طبیعی مطالب عرضه شده در فصل ۵ به نظریهٔ مدولها بوده است. حال می‌خواهیم با استفاده از مفهوم موضعی‌سازی مفهوم مهم محمل مدول را معرفی کنیم.

۱۴.۹ تعریف. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. مقصود از محمل G مجموعهٔ $\{P \in \operatorname{Spec}(R) : G_P \neq \circ\}$ است؛ این مجموعه را با نماد $\operatorname{Supp}(G)$ (یا اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $\operatorname{Supp}_R(G)$) نشان می‌دهیم. (در اینجا G_P نشاندهندهٔ مدول حاصل از موضعی‌سازی G در P است که مفهوم آن در ۶.۹(چهار) ذکر شد.)

لم زیر دلالت بر اهمیت مفهوم محمل دارد.

۱۵.۹ لم. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) $G = \circ$؛

دو) به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$، $G_P = \circ$، یعنی $\operatorname{Suup}(G) = \varnothing$؛

سه) به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R، $G_M = \circ$.

اثبات. روشن است که (دو) $\Longleftarrow$ (یک) و (سه) $\Longleftarrow$ (دو). لذا فرض می‌کنیم (سه) درست است و درستی (یک) را نتیجه می‌گیریم. فرض می‌کنیم $G \neq \circ$ و در پی تناقض می‌گردیم. در این‌صورت G عضو ناصفری چون g دارد: لذا $(\circ : g)$ ایدآل سرهٔ R است و لذا بنابر ۱۰.۳ ایدآل ماکسیمالی چون M از R وجود دارد که $(\circ : g) \subseteq M$. ولی در این‌صورت از ۶.۹(یک) نتیجه

می‌شود که در G_M، $g/1 \neq 0$. این نتیجه متناقض با صفر بودن G_M است و لذا اثبات کامل است. ■

فرض کنید $f : L \longrightarrow M$ همریختی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R، و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. در حالت خاصی که به‌ازای ایدآل اول P از R، $S = R\backslash P$، به‌جای R_Pـهمریختی $S^{-1}f : S^{-1}L = L_P \longrightarrow S^{-1}M = M_P$ مذکور در ۷.۹ می‌نویسیم f_P. این نماد در نتیجهٔ زیر و تمرین بعد از آن به‌کار رفته است.

۱۶.۹ نتیجه. فرض کنید $f : L \longrightarrow G$ همریختی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) f یک به یک است؛

دو) به‌ازای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$، $f_P : L_P \longrightarrow G_P$ یک به یک است؛

سه) به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R، $f_M : L_M \longrightarrow G_M$ یک به یک است.

اثبات. (دو) $\Longleftarrow$(یک) درستی این گزاره بلاواسطه از ۹.۹ نتیجه می‌شود زیرا دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} G$$

کامل است.

(سه) $\Longleftarrow$(دو) درستی این گزاره روشن است زیرا هر ایدآل ماکسیمال R اول است.

(یک) $\Longleftarrow$(سه) فرض کنید $K := \mathrm{Ker}\ f$. دنبالهٔ کاملی چون

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{f} G$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها وجود دارد که در آن u همریختی (یک به یک) طبیعی است. فرض کنید M ایدآل ماکسیمال R باشد. بنابر ۹.۹ دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow K_M \xrightarrow{u_M} L_M \xrightarrow{f_M} G_M$$

کامل است. ولی بنابه فرض f_M یک به یک است و لذا $\mathrm{Im}\ u_M = \mathrm{Ker}\ f_M = 0$؛ در نتیجه u_M همریختی صفر است و $K_M = \mathrm{Ker}\ u_M = 0$. این مطلب به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال R درست است و لذا از ۱۵.۹ نتیجه می‌شود که $K = \mathrm{Ker}\ f = 0$. در نتیجه f یک به یک است.■

۱۷.۹* تمرین. فرض کنید $f : L \longrightarrow G$ همریختی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید احکام زیر معادل‌اند:

یک) f پوشاست؛

دو) به‌ازای هر $P \in \mathrm{Spec}(R)$، $f_P : L_P \longrightarrow G_P$ پوشاست؛
سه) به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R، $f_M : L_M \longrightarrow G_M$ پوشاست.

۱۸.۹ تمرین. فرض کنید $f : L \longrightarrow G$ همریختی مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. نشان دهید، اگر قرارداد ۱۰.۹ را به‌کار ببریم، $S^{-1}(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}(S^{-1} f)$.

۱۹.۹ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای کامل از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد. ثابت کنید

$$\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(L) \cup \mathrm{Supp}(N).$$

اگر M مدول متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد، $\mathrm{Supp}(M)$ را می‌توانیم برحسب $\mathrm{Ann}(M)$ و $\mathrm{Var}(I)$ که قبلاً دیده‌ایم مشخص کنیم.

۲۰.۹ لم. فرض کنید G مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Supp}(G) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \supseteq (0 : G)\} = \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(G)).$$

(نماد $\mathrm{Var}(I)$ برای ایدآل I از R در ۴۸.۳ معرفی شد.)

اثبات. فرض کنید $P \in \mathrm{Supp}(G)$. با این فرض باید داشته باشیم $(0 : G) \subseteq P$، زیرا در غیر این‌صورت عضوی چون r وجود دارد که $r \in (0 : G)\backslash P$. لذا به‌ازای هر $g \in G$، $rg = 0$. بنابراین طبق ۶.۹(یک)، به‌ازای هر $g \in G$ و $s \in R\backslash P$، عضو g/s از G_P برابر صفر است.

هنوز از اینکه G متناهی‌مولد است استفاده نکرده‌ایم، اما برای اثبات عکس رابطه، یعنی $\mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(G)) \subseteq \mathrm{Supp}(G)$، از آن استفاده می‌کنیم. فرض کنید $P \in \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(G))$. فرض می‌کنیم $P \notin \mathrm{Supp}(G)$ و دربی تناقض می‌گردیم. فرض کنید $g_1, \ldots, g_n$ مدول G را تولید کنند. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، عضو $g_i/1$ از G_P برابر صفر است و لذا $s_i \in R\backslash P$ وجود دارد که $s_i\, g_i = 0$. قرار دهید

$$s = s_1 \cdots s_n \in R\backslash P.$$

در این‌صورت به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $sg_i = 0$ و لذا چون $g_1, \ldots, g_n$ مدول G را تولید می‌کنند، باید به‌ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $sg = 0$. بنابراین $s \in \mathrm{Ann}(G)\backslash P$، یعنی

$P \not\supseteq \mathrm{Ann}(G)$ که با $P \in \mathrm{Var}(\mathrm{Ann}(G))$ تناقض دارد. بنابراین $P \in \mathrm{Supp}(G)$ و اثبات کامل است. ■

۲۱.۹ تمرین. مثالی ارائه دهید که نشان دهد اگر فرض متناهی‌مولد بودن Rـمدول G از لم ۲۰.۹ حذف شود، لزومی ندارد که آن حکم برقرار بماند.

۲۲.۹ تمرین. فرض‌کنید G مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. نشان دهید که

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}R}(S^{-1}G) = \{PS^{-1}R : P \cap S = \varnothing \text{ و } P \in \mathrm{Supp}_R(G)\}.$$

۲۳.۹ تمرین. فرض کنید G مدولی متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآل R باشد. نشان دهید

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(G/IG)} = \sqrt{I + \mathrm{Ann}_R(G)}.$$

(می‌توانید از ۴۸.۳ و لم ناکایاما برای حل این تمرین استفاده کنید.)

۲۴.۹* تمرین. فرض کنید G مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R، S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R و P ایدآل اول R باشد و $P \cap S = \varnothing$. توجه کنید که بنابر ۳۲.۵(دو)، $PS^{-1}R \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$. نشان دهید که اگر $S^{-1}G_{PS^{-1}R}$ با استفاده از یکریختی مناسبی چون $R_P \longrightarrow S^{-1}R_{PS^{-1}R}$ به‌عنوان R_Pـمدول در نظر گرفته شود (۴۵.۵ راببینید)، یکریختیی چون

$$G_P \xrightarrow{\cong} S^{-1}G_{P\,S^{-1}R}$$

از R_Pـمدولها وجود دارد.

ثابت کنید که

$$\mathrm{Supp}_{S^{-1}R}(S^{-1}G) = \{PS^{-1}R : P \cap S = \varnothing \text{ و } P \in \mathrm{Supp}_R(G)\}.$$

تاکنون مطالب بنیادی نسبتاً جامعی از مبانی نظریهٔ مدولهای کسرها را ارائه کرده‌ایم (البته باید متذکر شویم که بررسی کامل این موضوع یقیناً باید شامل ضرب تانسوری نیز باشد) و قسمتهای بسیاری از نظریهٔ حلقه‌های کسرها را که در فصل ۵ ارائه گردید به مدولها تعمیم داده‌ایم. ممکن است بپرسید که آیا نظریهٔ تجزیهٔ ابتدایی ایدآلها که در فصل ۴ ارائه شد همتایی در مدولها دارد: پاسخ مثبت است، و اکنون می‌خواهیم این موضوع را مورد توجه قرار دهیم. مطالب فصل ۴ را

به‌سهولت می‌توان به زیرمدولهای سرهٔ مدولهای نوتری روی حلقهٔ تعویضپذیر R تعمیم داد؛ البته ما صرفاً رئوس مطالب را در یک سلسله تمرین ارائه می‌کنیم.

دو دلیل برای اتخاذ این خط‌مشی وجود دارد. یکی اینکه اگر خواننده خودش جزئیات کار را انجام دهد، درواقع مطالب فصل ۴ را مرورکرده و لذا درکش از آن مطالب تقویت خواهد شد؛ دیگر اینکه مفهوم تجزیهٔ ابتدایی زیرمدولهای سرهٔ مدولهای نوتری (برخلاف تجزیهٔ ابتدایی ایدآلها) امروزه در مقالات تحقیقی در جبر تعویضپذیر چندان دیده نمی‌شود درحالی که به نظر می‌رسد (دست‌کم به نظر این مؤلف چنین است) که مفهوم "ایدآل اول وابسته" به مدول روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری (۳۲.۹ راببینید) بسیار بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲۵.۹ تمرین. فرض کنید Q ایدآلی از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. نشان دهید Q ابتدایی است اگر و تنها اگر $R/Q \neq 0$ و به‌ازای هر $a \in \mathrm{Zdv}_R(R/Q)$ عددی طبیعی چون n وجود داشته باشد که $a^n(R/Q) = 0$. همچنین نشان دهید که $\sqrt{Q} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(R/Q)}$.

تمرین ۲۵.۹ انگیزه‌ای برای تعریف مفهوم زیر است.

۲۶.۹ تعریف و * تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. زیرمدول Q از M را زیرمدول ابتدایی M می‌گوییم اگر $M/Q \neq 0$ و به‌ازای هر $a \in \mathrm{Zdv}_R(M/Q)$ عددی طبیعی چون n وجود داشته باشد که $a^n(M/Q) = 0$.

فرض کنید Q زیرمدول ابتدایی M باشد. نشان دهید که $P := \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/Q)}$ ایدآل اول R است: در این‌صورت می‌گوییم که Q زیرمدول Pـابتدایی M است یا می‌گوییم Q در M، Pـابتدایی است.

نشان دهید اگر $Q_1, \ldots, Q_n$ (که $n \in \mathbb{N}$) زیرمدولهایی Pـابتدایی از M باشند آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ نیز چنین است.

۲۷.۹ تعریف و * تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول سرهٔ M باشد. تجزیهٔ ابتدایی G در M عبارت است از اشتراک تعدادی متناهی زیرمدول ابتدایی M که برابر با G باشد. تجزیه‌ای ابتدایی از G در M چون

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \quad \text{که } Q_i \text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} \ (1 \leq i \leq n)$$

را مینیمال می‌گوییم اگر

یک) ایدآلهای اول $P_1, \ldots, P_n$ متفاوت باشند؛ و

دو) به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$ داشته باشیم

$$Q_j \not\supseteq \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_i$$

می‌گوییم که G زیرمدول تجزیه‌پذیر M است اگر تجزیه‌ای ابتدایی در M داشته باشد. نشان دهید که هر زیرمدول تجزیه‌پذیر M تجزیهٔ ابتدایی مینیمالی در M دارد.

۲۸.۹* تمرین: اولین قضیهٔ یکتایی. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول تجزیه‌پذیر M باشد. فرض کنید تجزیه‌های

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که } Q_i\text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

و

$$G = Q'_1 \cap \cdots \cap Q'_{n'} \text{ که } Q'_i\text{ها در } M\text{، } P'_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n')$$

دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال G در M باشند. ثابت کنید $n = n'$ و

$$\{P_1, \ldots, P_n\} = \{P'_1, \ldots, P'_n\}.$$

۲۹.۹ تمرین: دومین قضیهٔ یکتایی. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول تجزیه‌پذیر M باشد. فرض کنید تجزیه‌های

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که } Q_i\text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

و

$$G = Q'_1 \cap \cdots \cap Q'_n \text{ که } Q'_i\text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

دو تجزیهٔ ابتدایی مینیمال G در M باشند. (در اینجا از اولین قضیهٔ یکتایی یعنی ۲۸.۹ استفاده کرده‌ایم.)

فرض کنید P_j عضو مینیمالی از $\{P_1, \ldots, P_n\}$ نسبت به رابطهٔ مشمولیت باشد. ثابت کنید $Q_j = Q'_j$.

۳۰.۹ تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و G و H زیرمدولهای سرهٔ M باشند و $H \subseteq G$. به‌ازای هر زیرمدول F از M که شامل H باشد، F/H را با $\overline{F}$ نمایش دهید. فرض کنید $Q_1, \ldots, Q_n$ زیرمدولهایی از M باشند که H را شامل می‌شوند. نشان دهید که تجزیهٔ

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که } Q_i\text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

تجزیهٔ ابتدایی G در M است اگر و تنها اگر تجزیهٔ

$$\overline{G} = \overline{Q}_1 \cap \cdots \cap \overline{Q}_n \text{ که } \overline{Q}_i\text{ها در } \overline{M}\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

تجزیهٔ ابتدایی G/H در M/H باشد، به‌علاوه هریک از این تجزیه‌های ابتدایی مینیمال است اگر و تنها اگر دیگری مینیمال باشد.

۳۱.۹* تمرین. فرض کنید M مدولی نوتری روی حلقهٔ تعویضپذیر R و G زیرمدول سرهٔ M باشد. نشان دهید G زیرمدول تجزیه‌پذیر M است و لذا بنابر ۲۷.۹، G دارای تجزیهٔ ابتدایی مینیمال در M است.

فرض کنید تجزیهٔ

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که } Q_i\text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \leq i \leq n)$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال G در M باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. ثابت کنید که P یکی از P_iها $(1 \leq i \leq n)$ است اگر و تنها اگر $\lambda \in M/G$ وجود داشته باشد به‌طوری که $P = \operatorname{Ann}_R(\lambda) = (0 :_R \lambda)$. همچنین ثابت کنید که

$$P_1 \cup \cdots \cup P_n = \operatorname{Zdv}_R(M/G)$$

توجه کنید که بنابر ۲۲.۷(یک)، حکم ۳۱.۹ در مورد هر زیرمدول سره چون G از مدول متناهی‌مولد M روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R برقرار است. همچنین بد نیست ۳۱.۹ را با ۲۲.۸ مقایسه کنید. در واقع این دو نتیجه انگیزه‌ای هستند برای تعریف ایدآل اول وابسته به مدولِ روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R. حال به این مطلب می‌پردازیم.

۳۲.۹ تعریف. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. می‌گوییم که P (ایدآل) اول وابسته به M است اگر $m \in M$ وجود داشته باشد که $P = \operatorname{Ann}(m) = (0 : m)$.

توجه کنید که اگر $m \in M$ و مانند فوق $P = (0 : m)$ آن‌گاه $m \neq 0$. مجموعهٔ ایدآلهای اول وابسته به M را با $\operatorname{Ass}(M)$ (یا اگر بخواهیم برحلقهٔ مربوطه تأکید کنیم، با $\operatorname{Ass}_R(M)$) نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که اگر Rـمدولهای M و M' یکریخت باشند آن‌گاه $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(M')$.

۳۳.۹ تذکر. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد.

یک) فرض کنید I ایدآل سرهٔ R باشد. در این‌صورت بنابر ۳۵.۴، I تجزیه‌پذیر است و می‌توانیم مجموعهٔ متناهی $\operatorname{ass}(I)$ متشکل از ایدآلهای اولِ وابسته به I را که به تجزیهٔ ابتدایی I مربوط‌اند تشکیل دهیم. بنابر ۲۲.۸، به‌ازای هر ایدآل اول P از R داریم

$$P \in \operatorname{ass}(I) \iff P \in \operatorname{Ass}_R(R/I).$$

توجه کنید که در ۳۲.۹ در نماد "$\operatorname{Ass}(M)$" حرف بزرگ "A" را به‌کار برده‌ایم: زیرا می‌خواهیم با مفهوم ایدآل اول وابسته به ایدآل تجزیه‌پذیر که در ۱۹.۴ معرفی شد اشتباه نشود.

دو) فرض کنید M متناهی‌مولد و G زیرمدول سرهٔ M باشد. بنابر ۳۱.۹، G زیرمدول تجزیه‌پذیر M است: فرض کنید تجزیهٔ

$$G = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \text{ که } Q_i \text{ها در } M\text{، } P_i\text{ـابتدایی‌اند} (1 \le i \le n)$$

تجزیهٔ ابتدایی مینیمال G در M باشد. از ۳۱.۹ همچنین نتیجه می‌شود که به‌ازای هر ایدآل اول P از R داریم

$$P \in \{P_1, \ldots, P_n\} \Longleftrightarrow P \in \operatorname{Ass}_R(M/G).$$

به‌ویژه اگر $M \neq 0$، داریم $P \in \operatorname{Ass}(M)$ اگر و تنها اگر P یکی از ایدآلهای اولی باشد که در هر تجزیهٔ ابتدایی مینیمالِ زیرمدول صفر در M، "ظاهر" شود.

سه) توجه کنید که در تعریف ۳۲.۹ صحبتی از لزوم متناهی‌مولد بودن مدول M نیست؛ در واقع چنانکه در چند نتیجهٔ زیر خواهیم دید، نظریهٔ ایدآلهای اولِ وابسته به یک مدول دلخواه روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری نظریه‌ای بسیار وسیع است.

چهار) توجه کنید که بنابر ۲۴.۷، به‌ازای $m \in M$ داریم $Rm \cong R/(0 : m)$ (یکریختی Rـمدولی). همچنین به‌ازای هر ایدآل I از R، $\operatorname{Ann}_R(1 + I) = I$ و روشن است که Rـمدول R/I مدولی دوری است و توسط $1 + I$ تولید می‌شود. نتیجه می‌شود که به‌ازای $P \in \operatorname{Spec}(R)$

$$P \in \operatorname{Ass}(M) \iff M \text{ زیرمدولی چون } G \cong R/P \text{ داشته باشد}.$$

۳۴.۹ لم. فرض کنید M مدولی ناصفر روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. در این صورت هر عضو ماکسیمال مجموعهٔ ناتهی

$$\Theta := \{\operatorname{Ann}(m) : m \in M \text{ و } m \neq 0\}$$

از ایدآلهای R (Θ دست‌کم یک عضو ماکسیمال دارد، زیرا R نوتری است) اول است و لذا متعلق به $\operatorname{Ass}(M)$ است.

اثبات. فرض کنید $P = (0 : m)$، که در آن $m \in M$ و $m \neq 0$، عضو ماکسیمالی در Θ باشد. چون $m \neq 0$ داریم $P \subset R$. فرض کنید $a, b \in R$ و $b \in R \setminus P$ ولی $ab \in P$. لذا $abm = 0$ ولی $bm \neq 0$. لذا $(0 : bm) \in \Theta$. چون $(0 : m) \subseteq (0 : bm)$، بنابر ماکسیمال بودن $P = (0 : m)$ در Θ، باید داشته باشیم

$$P = (0 : m) = (0 : bm).$$

چون $abm = 0$ داریم $a \in P$. در نتیجه چنانکه ادعا شده بود $P \in \operatorname{Spec}(R)$. ■

۳۵.۹ نتیجه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. در این‌صورت $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ اگر و تنها اگر $M \neq \circ$.

اثبات. این حکم بلاواسطه از ۳۲.۹ و ۳۴.۹ نتیجه می‌شود: Rـمدول صفر ایدآل اول وابسته ندارد، به این دلیل ساده که عضو ناصفر ندارد؛ به‌علاوه طبق ۳۴.۹، هر Rـمدول ناصفر حتماً ایدآل اول وابسته دارد. ■

۳۶.۹ نتیجه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Zdv}(M) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(M)} P.$$

توجه. این نتیجه را با ۱۹.۸ و ۳۱.۹ مقایسه کنید.

اثبات. فرض کنید $P \in \mathrm{Ass}(M)$. لذا $m \in M$ وجود دارد که $P = (\circ : m)$. چون $m \neq \circ$، روشن است که هر عضو P مقسوم‌علیه صفر روی M است.

از طرف دیگر فرض کنید $r \in \mathrm{Zdv}(M)$. لذا $m' \in M$ وجود دارد که $m' \neq \circ$ ولی $rm' = \circ$. در نتیجه

$$\Theta' := \{\mathrm{Ann}(m) : r \in \mathrm{Ann}(m) \text{ و } m \neq \circ \text{ و } m \in M\}$$

زیرمجموعه‌ای ناتهی از مجموعهٔ Θ مذکور در ۳۴.۹ است. چون R نوتری است، Θ' دست‌کم یک عضو ماکسیمال چون P دارد و P عضو ماکسیمال Θ نیز هست؛ بنابر ۳۴.۹ باید داشته باشیم $P \in \mathrm{Ass}(M)$ و چون $r \in P$ پس ثابت کرده‌ایم که $\mathrm{Zdv}(M) \subseteq \bigcup_{P' \in \mathrm{Ass}(M)} P'$. ■

۳۷.۹ تذکر. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. فرض‌کنید $m \in M$ و $s \in S$. روشن است‌که $(\circ :_R m) = (\circ :_R Rm)$ و به‌ازای $m/\text{۱}, m/s \in S^{-\text{۱}}M$

$$(\circ :_{S^{-\text{۱}}R} m/\text{۱}) = (\circ :_{S^{-\text{۱}}R} S^{-\text{۱}}R(m/\text{۱})) = (\circ :_{S^{-\text{۱}}R} m/s)$$

زیرا $s/\text{۱}$ عضو وارونپذیر $S^{-\text{۱}}R$ است. حال بنابر قرارداد ۱۰.۹، $S^{-\text{۱}}R$ـزیرمدول $S^{-\text{۱}}(Rm)$ از $S^{-\text{۱}}M$ همان $S^{-\text{۱}}R(m/\text{۱})$ است؛ بنابراین از ۱۲.۹(سه) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}(\circ :_R m)S^{-\text{۱}}R &= (\circ :_R Rm)S^{-\text{۱}}R = (\circ :_{S^{-\text{۱}}R} S^{-\text{۱}}R(m/\text{۱})) \\ &= (\circ :_{S^{-\text{۱}}R} m/\text{۱}) = (\circ :_{S^{-\text{۱}}R} m/s).\end{aligned}$$

۳۸.۹ لم. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R و S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد. در این‌صورت

$$\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{PS^{-1}R : P \cap S = \varnothing \text{ و } P \in \mathrm{Ass}_R(M)\}.$$

اثبات. توجه کنید که بنابر ۳.۸، $S^{-1}R$ حلقهٔ تعویضپذیر نوتری است و لذا $\mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$ با معنی است.

فرض کنید $P \in \mathrm{Ass}_R(M)$ و $P \cap S = \varnothing$. در این‌صورت $m \in M$ وجود دارد که $P = (\circ :_R m)$، به‌علاوه بنابر ۳۲.۵(دو)، $PS^{-1}R \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$. لذا از ۳۷.۹ نتیجه می‌شود که $PS^{-1}R = (\circ :_{S^{-1}R} m/1) \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ و لذا $PS^{-1}R \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

به‌عکس فرض کنید $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$. چون $\mathcal{P}$ ایدآل اول $S^{-1}R$ است، از ۳۲.۵(چهار) نتیجه می‌شود که ایدآل (یکتای) $P \in \mathrm{Spec}(R)$ وجود دارد که $P \cap S = \varnothing$ و $\mathcal{P} = PS^{-1}R$. همچنین $m \in M$ و $s \in S$ وجود دارند که $\mathcal{P} = (\circ :_{S^{-1}R} m/s)$. چون $s/1$ عضو وارونپذیر $S^{-1}R$ است، داریم

$$(\circ :_{S^{-1}R} m/1) = \mathcal{P} = PS^{-1}R.$$

چون R نوتری است، ایدآل P متناهی‌مولد است و لذا مثلاً توسط $p_1, \ldots, p_n$ تولید می‌شود. لذا به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $p_i m/1 = \circ_{S^{-1}M}$. در نتیجه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ عضوی چون $s_i \in S$ وجود دارد که $s_i p_i m = \circ$. قرار می‌دهیم $t := s_1 \cdots s_n \ (\in S)$، در نتیجه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $tp_i m = \circ$، و لذا

$$P \subseteq (\circ :_R tm).$$

حال می‌خواهیم عکس رابطهٔ فوق را ثابت کنیم.

از این‌رو، فرض کنید $r \in (\circ :_R tm)$. بنابراین $rtm = \circ$ و لذا $(rt/1)(m/1) = \circ_{S^{-1}M}$. در نتیجه $(rt/1) \in (\circ :_{S^{-1}R} m/1) = PS^{-1}R$. لذا بنابر ۳۰.۵، $rt \in P$؛ چون P اول است و $t \in S \subseteq R \setminus P$ پس $r \in P$. بنابراین ثابت کرده‌ایم که $P \supseteq (\circ :_R tm)$ و لذا

$$(\circ :_R tm) = P \in \mathrm{Spec}(R).$$

در نتیجه $P \in \mathrm{Ass}(M)$. ■

قضیهٔ بعدی غالباً در کاربرد ایدآلهای اول وابسته مفید است.

۳۹.۹ قضیه. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. در این‌صورت $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$ و هر عضو مینیمال $\mathrm{Supp}(M)$ (نسبت به رابطهٔ مشمولیت) متعلق به $\mathrm{Ass}(M)$ است.

اثبات. فرض کنید $P \in \mathrm{Ass}(M)$. حال بنابر ۳۳.۹(چهار)، زیرمدولی چون G از M وجود دارد که $G \cong R/P$. در نتیجه دنباله‌ای کامل چون

$$\circ \longrightarrow R/P \longrightarrow M$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها وجود دارد؛ بنابر ۹.۹، دنبالهٔ

$$\circ \longrightarrow (R/P)_P \longrightarrow M_P$$

نیز کامل است و چون از ۲۰.۹ نتیجه می‌شود که $(R/P)_P \neq \circ$، پس $M_P \neq \circ$، و لذا $P \in \mathrm{Supp}(M)$.

حال فرض کنید P' عضو مینیمال $\mathrm{Supp}(M)$ باشد. بنابر ۲۴.۹ داریم

$$\mathrm{Supp}_{R_{P'}}(M_{P'}) = \{QR_{P'} : Q \subseteq P' \text{ و } Q \in \mathrm{Supp}_R(M)\}$$

که برابر با $\{P'R_{P'}\}$ است زیرا P' عضو مینیمال $\mathrm{Supp}(M)$ است.

حال $M_{P'}$ مدولی ناصفر روی حلقهٔ نوتری $R_{P'}$ است و لذا از ۳۵.۹ و اثبات قسمت اول این قضیه نتیجه می‌شود که

$$\varnothing \neq \mathrm{Ass}_{R_{P'}}(M_{P'}) \subseteq \mathrm{Supp}_{R_{P'}}(M_{P'}) = \{P'R_{P'}\}.$$

در نتیجه $\mathrm{Ass}_{R_{P'}}(M_{P'}) = \{P'R_{P'}\}$ و لذا بنابر ۳۸.۹ و ۳۳.۵ باید داشته باشیم $P' \in \mathrm{Ass}(M)$. ■

۴۰.۹ تمرین. فرض کنید M مدولی متناهی‌مولد و ناصفر روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. ثابت کنید زنجیره‌ای صعودی چون

$$M_\circ \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n$$

از زیرمدولهای M وجود دارد که $M_\circ = \circ$، $M_n = M$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ ایدآلی چون $P_i \in \mathrm{Spec}(R)$ وجود دارد که $M_i/M_{i-1} \cong R/P_i$.

۴۱.۹ تمرین. فرض کنید P ایدآل اولی از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. نشان دهید که $\mathrm{Ass}_R(R/P) = \{P\}$.

۴۲.۹ تمرین. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری و دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

دنبالهٔ کامل کوتاهی از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد. ثابت کنید که

$$\operatorname{Ass}(L) \subseteq \operatorname{Ass}(M) \subseteq \operatorname{Ass}(L) \cup \operatorname{Ass}(N).$$

۴۳.۹ تمرین. فرض کنید M مدول آرتینی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. نشان دهید که هر عضو $\operatorname{Ass}(M)$ ایدآل ماکسیمال R است.

۴۴.۹ تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد. ثابت کنید که

$$\operatorname{Ass}(M) = \bigcup_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \operatorname{ass}(0 : m).$$

۴۵.۹ گامهای بعدی. قبلاً متذکر شدیم که بررسی کامل مدولهای کسرها باید شامل ضرب تانسوری نیز باشد. یکی از دلایل این ادعا این است که به‌ازای زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته چون S از حلقهٔ تعویضپذیر R و به‌ازای Rـمدول M، $S^{-1}R$ـمدول $S^{-1}M$ را "اساساً" می‌توان از M و حلقهٔ کسرهای $S^{-1}R$ به کمک ضرب تانسوری تولید کرد: مشخصتر بگوییم، ضرب تانسوری $M \otimes_R S^{-1}R$ را، که خود Rـمدول است، می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان $S^{-1}R$ـمدول در نظر گرفت و در این صورت به‌طور طبیعی با $S^{-1}M$ یکریخت است. همچنین اگر $S^{-1}R$ را با استفاده از همریختی طبیعی به‌عنوان Rـمدول در نظر بگیریم مثال دیگری از Rـمدول "تخت" خواهیم داشت: به مدولهای تخت در ۳۲.۸ اشاره کردیم. این نکات مؤید تذکرات ۶۰.۶ و ۳۲.۸ دربارهٔ ضرب تانسوری‌اند.

تذکر بعد از تمرین ۸.۹ مبنی بر اینکه "S^{-1}" را می‌توان به‌عنوان "تابعگون مدولها" در نظر گرفت دلالت به ارتباط بین جبر مانستگیی و موضوع مورد بحث ما نیز دارد؛ در فصل ۱۰ در تأیید این مطلب کمی سخن می‌گوییم.

۱۰

مدول روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل

در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه برخی از روشهای کار با مدولهای روی حلقهٔ تعویضپذیر نوتری را که تاکنون دراین کتاب ارائه داده‌ایم می‌توان برای اثبات برخی از قضیه‌های "کلاسیک" به کاربرد. این قضیه‌ها دربارهٔ مدولهای متناهی‌مولد روی دامنه‌های اصلی‌ایدآل‌اند و "قضیهٔ اصلی گروههای آبلی" و " قضیهٔ فرم متعارف ژوردان" برای ماتریسهای مربعی روی هیأتهای جبری بسته حالتهای خاصی از آنها هستند.

اساساً قضیه‌های اصلی این فصل نشان می‌دهند که هر مدول متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی ایدآل را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری نوشت و اگر شرایطی برای پوچسازهای زیرمدولهای دوری دراین مجموع قائل شویم این تجزیه به مجموع مستقیم مدولهای دوری ازلحاظی یکتاست.

شاید یادآوری برخی از احکام بنیادی دربارهٔ مدولهای دوری مفید باشد. فرض‌کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. در ۱۲.۶ دیدیم که Rـمدول G دوری است اگر توسط یک عضو تولید شود؛ در این‌صورت بنابر ۲۵.۷ به‌ازای ایدآلی چون I از R داریم $G \cong R/I$. چون $\mathrm{Ann}_R(R/I) = I$ و مدولهای یکریخت پوچسازهای یکسان دارند نتیجه می‌شود که هر Rـمدول دوری کاملاً توسط پوچسازش مشخص می‌شود، مشروط به اینکه مدولهای یکریخت را یکی بدانیم.

بعد از تمرین زیر اشاره‌ای داریم بر خط‌مشی کلی اثبات این حکم که هر مدول متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیم Rـمدولهای دوری نوشت. تمرین

زیر نقطهٔ شروع خوبی برای اثبات این حکم است.

۱.۱۰* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر، $n \in \mathbb{N}$ و F یک Rـمدول آزاد با پایهٔ n عضوی $(e_i)_{i=1}^{n}$ باشد. فرض کنید $c_1, \ldots, c_n \in R$. بنابر ۵۵.۶، Rـهمریختیی چون

$$f : F \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/Rc_i$$

وجود دارد که به‌ازای هر $r_1, \ldots, r_n \in R$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) = (r_1 + Rc_1, \ldots, r_n + Rc_n)$$

واضح است که نگاشت فوق پوشاست.

نشان دهید که $\operatorname{Ker} f$ توسط $c_1e_1, \ldots, c_ne_n$ تولید می‌شود. به‌علاوه نشان دهید که اگر R دامنهٔ صحیح باشد آن‌گاه $\operatorname{Ker} f$ آزاد است و در این‌صورت $\operatorname{rank}(\operatorname{Ker} f)$ را تعیین کنید.

حال به مدول متناهی‌مولد G روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R بپردازیم. فرض کنید G مجموعهٔ مولدی با n عضو دارد و $n \in \mathbb{N}$. بنابر ۵۷.۶، G را می‌توان به‌صورت نگارهٔ همریخت Rـمدول آزادی چون F با پایهٔ $(e_i)_{i=1}^{n}$ در نظر گرفت. لذا زیر مدولی چون H از F وجود دارد که $F/H \cong G$. اگر عضوهایی چون $c_1, \ldots, c_n \in R$ وجود داشته باشد که H توسط $c_1e_1, \ldots, c_ne_n$ تولید شود آن‌گاه از ۱.۱۰ فوق نتیجه می‌شود که

$$G \cong F/H \cong R/Rc_1 \oplus \cdots \oplus R/Rc_n$$

یعنی G مجموع مستقیم Rـمدولهای دوری است. در حالت کلی بعید است که به‌ازای هر پایهٔ مفروض F چون $(e_i)_{i=1}^{n}$ عضوهایی چون $c_1, \ldots, c_n \in R$ با این ویژگی وجود داشته باشد که H توسط $c_1e_1, \ldots, c_ne_n$ تولید شود: به‌عنوان مثال $\mathbb{Z}$ـزیرمدولی از $F' := \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ را که با $(1, 3)$ تولید می‌شود و پایهٔ $(\tilde{e}_i)_{i=1}^{2}$ را برای F' در نظر بگیرید که $\tilde{e}_1 = (1, 0)$ و $\tilde{e}_2 = (0, 1)$. البته در این مثال $(1, 3)$ و $(0, 1)$ پایهٔ دیگری برای F' تشکیل می‌دهند که منظور ما با استفاده از آن برآورده می‌شود، و این موضوع در حالت کلی درست است: خواهیم دید که به‌ازای هر زیرمدول مفروض H از مدول آزاد متناهی‌مولد F فوق روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R پایه‌ای چون $(e'_i)_{i=1}^{n}$ برای F و عضوهایی چون $c'_1, \ldots, c'_n \in R$ وجود دارد به‌طوری که H توسط $c'_1e'_1, \ldots, c'_ne'_n$ تولید شود. این مطلب کلید اثبات برخی از احکام اصلی این فصل است؛ در اثباتی که برای این مطلب ارائه می‌کنیم این واقعیت که R د.ا.ا است بسیار مهم است.

۲.۱۰ لم و تعریف. فرض کنید F مدول آزاد ناصفر با پایه‌ای متناهی روی حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر R و $(e_i)_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای F باشد. فرض کنید y متعلق به F است، و لذا y را می‌توان

به‌طور یکتا به‌صورت $y = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ نوشت که در آن $r_1, \ldots, r_n \in R$. در این‌صورت ایدآل $C(y) := \sum_{i=1}^{n} Rr_i$ تنها به y وابسته است و به پایهٔ مفروض F بستگی ندارد؛ $C(y)$ را ایدآل قدر y یا به‌اختصار قدر y می‌نامیم.

اثبات. فرض کنید $(e'_i)_{i=1}^{n}$ پایهٔ دیگری برای F باشد. (در اینجا از ۵۸.۶ استفاده کرده‌ایم.) لذا y را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت $y = \sum_{i=1}^{n} r'_i e'_i$ نوشت که در آن $r'_1, \ldots, r'_n \in R$. حال به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ می‌توانیم بنویسیم

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e'_j \quad \text{و} \quad e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$

که در آن $a_{i1}, \ldots, a_{in}, b_{i1}, \ldots, b_{in} \in R$. در نتیجه

$$y = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_i b_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_{ij} \right) e'_j = \sum_{j=1}^{n} r'_j e'_j$$

حال چون $(e'_i)_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای F است پس به‌ازای هر $j = 1, \ldots, n$ داریم $r'_j = \sum_{i=1}^{n} r_i b_{ij}$. در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} Rr'_i \subseteq \sum_{i=1}^{n} Rr_i.$$

عکس این رابطه با تعویض نقشهای دو پایه اثبات می‌شود. ■

۳.۱۰ لم. فرض کنید F مدولی آزاد و ناصفر با پایه‌ای متناهی روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. فرض کنید $y \in F$ و c_y مولد ایدآل قدر y یعنی $C(y)$ باشد (۲.۱۰ را ببینید) و لذا $C(y) = Rc_y$. در این‌صورت پایه‌ای چون $(e'_i)_{i=1}^{n}$ برای F وجود دارد که $y = c_y e'_1$.

اثبات. فرض کنید $(e_i)_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای F باشد. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. اگر $n = 1$، نتیجه به آسانی ثابت می‌شود: به‌ازای عضوی چون $r \in R$، $y = re_1$ و لذا $C(y) = Rr$ و به‌ازای عضو وارونپذیری چون u از R، $c_y = ur$؛ لذا اگر e'_1 رابرابر با $u^{-1}e_1$ اختیار کنیم، e'_1 پایه‌ای با ویژگی مورد نظر برای F تشکیل می‌دهد.

حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید که $n > 1$ و حکم به‌ازای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. می‌توانیم بنویسیم $y = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ که در آن $r_1, \ldots, r_n \in R$. در این‌صورت با توجه به ۲.۱۰ داریم

$$C(y) = Rr_1 + \cdots + Rr_n = Rc_y$$

توجه کنید که $y = ۰$ اگر و تنها اگر $c_y = ۰$: روشن است که می‌توانیم فرض کنیم $y \neq ۰$. قرار دهید $z = \sum_{i=۲}^{n} r_i e_i$ و لذا $y = r_۱ e_۱ + z$. حال $(e_i)_{i=۲}^{n}$ پایهٔ زیرمدول آزاد متناهی‌مولد $F' = \sum_{i=۲}^{n} Re_i$ از F است.

فرض استقرا را در مورد عضو z از F' به‌کار می‌بریم: پایه‌ای چون $(e''_i)_{i=۲}^{n}$ برای F' به‌دست می‌آید با این خاصیت که $z = c_z e''_۲$ که در آن c_z مولد ایدآل $\sum_{i=۲}^{n} Rr_i$ است. (شاید تذکر این نکته مفید باشد که خواه z را عضوی از F در نظر بگیریم خواه عضوی از F' ایدآل قدر z تفاوت نمی‌کند.) حال

$$Rc_y = \sum_{i=۱}^{n} Rr_i = Rr_۱ + \sum_{i=۲}^{n} Rr_i = Rr_۱ + Rc_z.$$

لذا به‌ازای عضوهایی چون $t \in R$, s داریم $r_۱ = sc_y$ و $c_z = tc_y$؛ همچنین می‌توانیم بنویسیم $c_y = ur_۱ + vc_z$ که در آن $u, v \in R$ و لذا

$$c_y = usc_y + vtc_y$$

و بنابه فرضمان که $c_y \neq ۰$، $۱ = us + vt$.

قرار دهید $e'_۱ = se_۱ + te''_۲$، $e'_۲ = ve_۱ - ue''_۲$ و به‌ازای هر $i = ۳, \ldots, n$، قرار دهید $e'_i = e''_i$. حال چون $us + vt = ۱$، پس

$$ve'_۱ - se'_۲ = e''_۲ \qquad \text{و} \qquad ue'_۱ + te'_۲ = e_۱$$

و لذا $Re_۱ + Re''_۲ = Re'_۱ + Re'_۲$. در نتیجه

$$F = Re_۱ + \sum_{i=۲}^{n} Re_i = Re_۱ + \sum_{i=۲}^{n} Re''_i = \sum_{i=۱}^{n} Re'_i.$$

اکنون نشان می‌دهیم که $(e'_i)_{i=۱}^{n}$ در واقع پایهٔ F است. فرض کنید $r'_۱, \ldots, r'_n \in R$ و $\sum_{i=۱}^{n} r'_i e'_i = ۰$. در این‌صورت

$$r'_۱(se_۱ + te''_۲) + r'_۲(ve_۱ - ue''_۲) + \sum_{i=۳}^{n} r'_i e''_i = ۰.$$

چون $(e''_i)_{i=۲}^{n}$ پایهٔ F' است و $F' \cap Re_۱ = ۰$، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = ۳, \ldots, n$، داریم $r'_i = ۰$ و

$$r'_۱ t - r'_۲ u = ۰ \qquad \text{و} \qquad r'_۱ s + r'_۲ v = ۰$$

حال با استفادهٔ مجدد از معادلهٔ $us + vt = ۱$ به‌آسانی نتیجه می‌گیریم که $r'_۱ = r'_۲ = ۰$. در نتیجه چنانکه ادعا شده بود، $(e'_i)_{i=۱}^n$ پایهٔ F است. سرانجام، توجه کنید که

$$c_y e'_۱ = sc_y e_۱ + tc_y e''_۲ = r_۱ e_۱ + c_z e''_۲ = r_۱ e_۱ + z = y.$$

به این ترتیب مرحلهٔ دوم استقرا و لذا اثبات لم به پایان می‌رسد. ■

۴.۱۰ لم. فرض کنید F مدولی آزاد و ناصفر با پایه‌ای متناهی روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. فرض کنید H زیرمدول F باشد. توجه کنید که R حلقه‌ای نوتری است، لذا عضوی چون $z \in H$ وجود دارد که $C(z)$ (۲.۱۰ را ببینید) عضو ماکسیمال مجموعهٔ $\{C(y) : y \in H\}$، متشکل از ایدآلهای قدر همهٔ عضوهای H، باشد. در این‌صورت

$$C(z) = \sum_{y \in H} C(y)$$

و لذا به‌ازای هر $y \in H$، $C(z) \supseteq C(y)$.

اثبات. فرض کنید c_z مولد $C(z)$ باشد. بنابر ۳.۱۰ پایه‌ای چون $(e'_i)_{i=۱}^n$ برای F وجود دارد که $z = c_z e'_۱$. فرض کنید $y \in H$، در این‌صورت $y = \sum_{i=۱}^n r_i e'_i$ که در آن $r_۱, \ldots, r_n \in R$. روشن است که ایدآل $C(z) + Rr_۱ = Rc_z + Rr_۱$ از R اصلی است: فرض کنید t مولد آن باشد. لذا به‌ازای عضوهایی چون $u, v \in R$، $t = uc_z + vr_۱$. حال

$$uz + vy = uc_z e'_۱ + v\left(\sum_{i=۱}^n r_i e'_i\right) = te'_۱ + \sum_{i=۲}^n vr_i e'_i \in H$$

و چون (با توجه به ۲.۱۰)

$$C(z) = Rc_z \subseteq Rt \subseteq C(uz + vy)$$

بنابر ماکسیمال بودن $C(z)$ در مجموعهٔ ایدآلهای قدر اعضای H باید داشته باشیم $C(z) = Rt$. در نتیجه $Rc_z = C(z) = Rt = C(z) + Rr_۱$ و $r_۱ = wc_z$ که در آن $w \in R$. همچنین توجه کنید که ثابت کرده‌ایم که $Rr_۱ \subseteq C(z)$.

حال عضو

$$(۱ - w)z + y = (۱ - w)c_z e'_۱ + \sum_{i=۱}^n r_i e'_i = c_z e'_۱ + \sum_{i=۲}^n r_i e'_i \in H$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$C(z) = Rc_z \subseteq Rc_z + \sum_{i=۲}^n Rr_i = C\Big((۱ - w)z + y\Big)$$

و لذا از ماکسیمال بودن $C(z)$ در مجموعهٔ ایدآلهای قدر اعضای H نتیجه می‌گیریم که $C(z) = Rc_z + \sum_{i=2}^{n} Rr_i$. بنابراین به‌ازای هر $i = 2, \ldots, n$، $Rr_i \subseteq C(z)$. در نتیجه چنانکه ادعا شده بود

$$C(y) = \sum_{i=1}^{n} Rr_i \subseteq C(z)$$

چون y عضو دلخواه H است، حکم مورد نظر اثبات شده است. ■

لمهای ۳.۱۰ و ۴.۱۰ کلید اثبات اولین حکم اصلی این فصل‌اند:

۵.۱۰ قضیه. فرض کنید F مدولی آزاد و ناصفر با پایه‌ای متناهی روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R و H زیرمدول F باشد. فرض کنید رتبهٔ F برابر با n باشد. در این‌صورت پایه‌ای چون $(e_i)_{i=1}^{n}$ برای F و عضوهایی چون $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

(که معادل با این است که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $(a_i | a_{i+1})$ و H توسط $a_1e_1, \ldots, a_ne_n$ تولید می‌شود.

توجه. البته در قضیهٔ فوق ممکن است برخی از a_iها 0 باشند؛ ولی اگر $a_j = 0$ آن‌گاه $a_{j+1} = \cdots = a_n = 0$.

اثبات. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ حکم اساساً بلاواسطه از اینکه R د.ا.ا است ثابت می‌شود: اگر e_1 پایه‌ای برای F تشکیل دهد آن‌گاه به‌ازای ایدآلی چون I از R، $H = IRe_1$ و باید داشته باشیم $I = Ra_1$ که در آن $a_1 \in R$.

حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید که $n > 1$ و حکم به‌ازای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. بنابر ۴.۱۰، عضوی چون $z \in H$ وجود دارد که به‌ازای هر $y \in H$، $C(z) \supseteq C(y)$، یعنی ایدآل قدر z (۲.۱۰ را ببینید) شامل ایدآل قدر هر عضو H است. فرض کنید c_z مولد $C(z)$ باشد. بنابر ۳.۱۰، پایه‌ای چون $(e'_i)_{i=1}^{n}$ برای F وجود دارد که $z = c_ze'_1$. حال $(e'_i)_{i=2}^{n}$ پایه‌ای برای زیرمدول آزاد متناهی‌مولد $F' = \sum_{i=2}^{n} Re'_i$ از F است. فرض کنید $H' := H \cap F'$.

حال مدول آزاد F' با رتبهٔ $n-1$ و زیرمدول H' از آن را در نظر می‌گیریم. طبق فرض استقرا پایه‌ای چون $(e_i)_{i=2}^{n}$ برای F' و عضوهایی مانند $a_2, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_2 \supseteq Ra_3 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

و H' توسط $a_2e_2, \ldots, a_ne_n$ تولید می‌شود. قرار دهید $e_1 = e'_1$ و $a_1 = c_z$.

چون $a_2e_2 \in H$ و بنابر ۲.۱۰، $C(a_2e_2) = Ra_2$، از ماکسیمال بودن $C(z)$ در مجموعهٔ ایدآلهای قدر اعضای H نتیجه می‌شود که

$$Ra_1 = Rc_z = C(z) \supseteq C(a_2e_2) = Ra_2.$$

حال توجه کنید که $(e_i)_{i=1}^n$ پایهٔ F است: زیرا

$$F = \sum_{i=1}^n Re'_i = Re'_1 + \sum_{i=2}^n Re'_i = Re_1 + F' = Re_1 + \sum_{i=2}^n Re_i$$

و اگر به‌ازای $r_1, \dots, r_n \in R$، $\sum_{i=1}^n r_ie_i = 0$ آنگاه از اینکه $Re_1 \cap F' = 0$ و $(e_i)_{i=2}^n$ پایهٔ F است به‌آسانی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $r_i = 0$.

در پایان نشان می‌دهیم که H توسط a_1e_1، a_2e_2، ...، a_ne_n تولید می‌شود. چون $a_1e_1 = c_ze'_1 = z \in H$ روشن است که به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $a_ie_i \in H$. فرض کنید $y \in H$ و لذا $s_1, \dots, s_n \in R$ وجود دارند که $y = \sum_{i=1}^n s_ie_i$. حال بنابر ماکسیمال بودن $C(z)$ در مجموعهٔ ایدآلهای قدر اعضای H

$$Rs_1 \subseteq C(y) \subseteq C(z) = Rc_z$$

و لذا به‌ازای عضوی چون $t \in R$، $s_1 = tc_z$. بنابراین

$$y - tz = \left(\sum_{i=1}^n s_ie_i\right) - tc_ze_1 = \sum_{i=2}^n s_ie_i \in F' \cap H = H'$$

و لذا $y - tz \in \sum_{i=2}^n Ra_ie_i$. چون $tz = tc_ze'_1 = ta_1e_1$، نتیجه می‌شود که H توسط a_1e_1، a_2e_2، ...، a_ne_n تولید می‌شود.

به‌این ترتیب مرحلهٔ دوم استقرا و اثبات قضیه به پایان می‌رسد. ■

۶.۱۰ نتیجه. فرض کنید F مدولی آزاد با پایه‌ای متناهی روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. در این‌صورت هر زیر مدول H از F آزاد است و $\operatorname{rank} H \le \operatorname{rank} F$.

اثبات. اگر $F = 0$ حکم واضح است و لذا فرض می‌کنیم $F \neq 0$. فرض کنید $n = \operatorname{rank} F$. بنابر ۵.۱۰ پایه‌ای چون $(e_i)_{i=1}^n$ برای F و عضوهایی مانند $a_1, \dots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

و H توسط a_1e_1، ...، a_ne_n تولید می‌شود.

برخی از a_iها، $i = 1, \ldots, n$، ممکن است صفر باشند: اگر چنین باشد، فرض کنید t کوچکترین jای (که $1 \leq j \leq n$) باشد که $a_j = 0$؛ در غیر اینصورت قرار دهید $t = n + 1$. توجه کنید که $a_t = a_{t+1} = \cdots = a_n = 0$ و به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ که $i < t$، $a_i \neq 0$. لذا H توسط $a_1 e_1, \ldots, a_{t-1}e_{t-1}$ تولید می‌شود (که تعبیرش در حالت $t = 1$ واضح است). حال اگر $t = 1$، H مدول آزاد با رتبهٔ ۰ است و لذا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن $t > 1$ و نشان می‌دهیم که در آن حالت $(a_i e_i)_{i=1}^{t-1}$ پایهٔ H است: به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.

فرض کنید به‌ازای $r_1, \ldots, r_{t-1} \in R$، $\sum_{i=1}^{t-1} r_i a_i e_i = 0$. چون $(e_i)_{i=1}^{n}$ پایهٔ F است نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t-1$، $r_i a_i = 0$. چون به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t-1$، $a_i \neq 0$ و R دامنهٔ صحیح است، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, t-1$، $r_i = 0$. در نتیجه چنانکه ادعا شده بود $(a_i e_i)_{i=1}^{t-1}$ پایهٔ H است. ■

در دنبالهٔ بحث کراراً از حکمی که در تمرین زیر آمده بدون اینکه به آن اشاره کنیم استفاده خواهیم کرد.

۷.۱۰* تمرین. فرض کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویضپذیر R باشد و $I_1, \ldots, I_n$ ایدآلهایی از R باشند. نشان دهید که

$$M \cong R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_n$$

اگر و تنها اگر M مجموع مستقیم درونی زیرمدولهای دوری $C_1, \ldots, C_n$، یعنی $C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$، باشد که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\mathrm{Ann}(C_i) = I_i$.

۸.۱۰ قضیه. هر مدول متناهی‌مولد M روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری است.

به‌عبارت مشروحتر، اگر Rـمدول M توسط n عضو تولید شود آن‌گاه عضوهایی چون $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

و

$$M \cong R/Ra_1 \oplus R/Ra_2 \oplus \cdots \oplus R/Ra_n$$

توجه. (یک) این قضیه نشان می‌دهد که اگر M توسط n عضو تولید شود آن‌گاه M با مجموع مستقیم (برونی) n Rـمدول دوری یکریخت است و لذا M مجموع مستقیم (درونی) n زیرمدول دوری است. توجه کنید که برخی از a_iها ممکن است وارونپذیر باشند و لذا برخی از

R/Ra_iها ممکن است صفر باشند، یعنی ممکن است M با مجموع مستقیم تعدادی کمتر از n Rـمدول دوری یکریخت باشد. البته اگر به‌ازای عددی چون $i \in \mathbb{N}$ که $1 < i \leq n$، a_i وارونپذیر باشد آن‌گاه $R\, a_1 = \cdots = R\, a_i = R$.

دو) همچنین ممکن است به‌ازای عددی چون $j \in \mathbb{N}$ که $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_j = a_{j+1} = \cdots = a_n = 0$: در این‌صورت جمعوندهای دوری R/Ra_j، ...، R/Ra_n همه با R یکریخت‌اند و M جمعوند مستقیمی با رتبهٔ $n - j + 1$ دارد.

اثبات. بنابر ۵۷.۶، Rـمدول آزاد F با پایهٔ n عضوی و برویختی Rـمدولی $f : F \longrightarrow M$ وجود دارند. فرض کنید $H := \operatorname{Ker}\ f$ و لذا بنابر اولین قضیهٔ یکریختی مدولها یعنی ۳۳.۶ داریم $M \cong F/H$.

بنابر ۵.۱۰، پایه‌ای چون $(e_i)_{i=1}^n$ برای F و عضوهایی مانند $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \ldots \supseteq Ra_n$$

و H توسط a_1e_1، ...، a_ne_n تولید می‌شود. بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$F/H \cong R/Ra_1 \oplus \cdots \oplus R/Ra_n$$

ولی این مطلب را به‌سهولت می‌توان با استفاده از ایده‌های تمرین ۱.۱۰ ثابت کرد: بنابر ۵۵.۶، یک Rـهمریختی (یکتا) چون $g : F \longrightarrow \oplus_{i=1}^n R/Ra_i$ وجود دارد که به‌ازای هر $r_1, \ldots, r_n \in R$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) = (r_1 + Ra_1, \ldots, r_n + Ra_n)$$

روشن است که g پوشاست و $\operatorname{Ker}\ g = \sum_{i=1}^n Ra_ie_i = H$ و لذا نتیجهٔ مورد نظر با استفادهٔ مجدد از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها حاصل می‌شود. ■

بعداً در این فصل خواهیم دید که تجزیه به مجموع مستقیم مذکور در ۸.۱۰ از چه لحاظی یکتاست، ولی ابتدا می‌خواهیم قضیهٔ دیگری را در مورد تجزیه ثابت کنیم حاکی از اینکه هر مدول متناهی‌مولد چون M روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیم زیرمدولهایی دوری نوشت که پوچساز هر یک از آنها توان ایدآل اولی از R است. بنا به ۳۴.۳ می‌دانیم که چون R د.ا.ا است

$$\operatorname{Spec}(R) = \{0\} \cup \{Rp : \text{است } R \text{ یک عضو تحویلناپذیر } p\}.$$

لذا می‌خواهیم نشان دهیم که M با مجموع مستقیم مدولهای دوری به‌صورت R یا R/Rp^n یکریخت است که در آن p عضو تحویلناپذیر R است و $n \in \mathbb{N}$. برای اثبات این حکم خوب است

احکامی را که برای زمینه‌سازی مبحث تجزیهٔ ابتدایی در ابتدای فصل ۴ دیدیم یادآوری کنیم. این احکام دربارهٔ ایدآلهای R هستند. بعضی از این احکام در قضیهٔ زیر آمده‌اند.

۹.۱۰ قضیه. فرض کنید I ایدآل سرهٔ ناصفری از دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد، لذا عضو وارون‌ناپذیر ناصفری چون $a \in R$ وجود دارد که $I = Ra$. چون بنابر ۳۹.۳، R دامنهٔ تجزیهٔ یکتاست پس عدد طبیعی s، عضوهای تحویلناپذیری چون $p_1, \ldots, p_s \in R$ که هیچ یک از آنها به دیگری وابسته نیست، عضو وارونپذیر u از R و اعداد طبیعی $t_1، \ldots، t_s$ وجود دارند که $a = up_1^{t_1} \cdots p_s^{t_s}$.

چون اعضای خانوادهٔ $(Rp_i^{t_i})_{i=1}^{s}$ از ایدآلهای R دو به دو متباین‌اند (۵۷.۳ را ببینید) از ۵۹.۳(دو) نتیجه می‌شود که

$$I = Ra = Rp_1^{t_1} \cap \cdots \cap Rp_s^{t_s}$$

در این صورت

$$f : R \longrightarrow R/Rp_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus R/Rp_s^{t_s} =: D$$

با تعریف به‌ازای هر $r \in R$، $f(r) = (r + Rp_1^{t_1}, \ldots, r + Rp_s^{t_s})$، Rـهمریختی پوشا و هسته‌اش I است و لذا

$$R/Ra \cong R/Rp_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus R/Rp_s^{t_s}.$$

اثبات. این مطلب که $I = Ra = \bigcap_{i=1}^{s} Rp_i^{t_i}$ در تذکرات مقدماتی ابتدای فصل ۴ توضیح داده شد و از آن به وضوح نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ker}\ f = I$.

برای اثبات پوشا بودن f، بنابر ۱۷.۹ کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال چون M از R، $f_M : R_M \longrightarrow D_M$ پوشاست. چون بنابه مفروضات قضیه ممکن نیست که R هیأت باشد از ۳۴.۳ نتیجه می‌شود که به‌ازای عضو تحویلناپذیری چون $q \in R$ داریم $M = Rq$. عدد $i \in \mathbb{N}$ را که $1 \leq i \leq s$ در نظر بگیرید: اگر q و p_i وابسته نباشند آن‌گاه $Rp_i^{t_i} \not\subseteq Rq = M$ و لذا $R/Rp_i^{t_i}$ توسط عضوی از $R \backslash M$ پوچ می‌شود.

برحسب اینکه ایدآل $M = Rq$ برابر با یکی از Rp_iها، $1 \leq i \leq s$، باشد یا برابر با هیچ یک از آنها نباشد دو حالت رخ می‌دهد. اگر M برابر با هیچ یک از این ایدآلها نباشد بلاواسطه از پاراگراف قبل نتیجه می‌شود که $D_M = 0$ و لذا f_M باید پوشا باشد. از طرف دیگر اگر به‌ازای عددی چون $1 \leq i \leq s$، $M = Rp_i$ آن‌گاه با استفادهٔ مجدد از پاراگراف قبل نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $r_1, \ldots, r_n \in R$ و $u \in R \backslash M$ عضو

$$(r_1 + Rp_1^{t_1}, \ldots, r_s + Rp_s^{t_s}) - f(r_i)$$

توسط عضوی از $R\backslash M$ پوچ می‌شود (زیرا مؤلفهٔ iام آن ۰ است) و لذا در D_M داریم

$$\frac{(r_1 + Rp_1^{t_1}, \ldots, r_s + Rp_s^{t_s})}{u} = \frac{f(r_i)}{u} \in \operatorname{Im}\ f_M.$$

در نتیجه به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M چون M از R، f_M پوشاست، و لذا f پوشاست.

حکم آخر قضیه نیز از اولین قضیهٔ یکریختی مدولها یعنی ۳۳.۶ نتیجه می‌شود. ■

برای اثبات پوشا بودن همریختی مذکور در قضیهٔ فوق می‌توانستیم از تمرین ۶۰.۳ استفاده کنیم. ولی برای نشان دادن نحوهٔ استفاده از موضعی‌سازی راه فوق را انتخاب کردیم.

۱۰.۱۰ *تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $h \in \mathbb{N}$. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, h$، فرض کنید ($n_i \in \mathbb{N}$ و) $G_{i1}, \ldots, G_{i\,n_i}$ Rـمدول باشند. قرار دهید $M_i = \oplus_{j=1}^{n_i} G_{ij}$. نشان دهید که

$$\bigoplus_{i=1}^{h} M_i \cong G_{11} \oplus \cdots \oplus G_{1n_1} \oplus G_{21} \oplus \cdots \oplus G_{h-1\,n_{h-1}} \oplus G_{h1} \oplus \cdots \oplus G_{hn_h}.$$

حال با استفاده از قضیهٔ ۹.۱۰ می‌توانیم نشان دهیم هر مدول متناهی‌مولد روی د.ا.ا مجموع مستقیم زیرمدولهایی دوری است که پوچساز هر یک از آنها توان ایدآل اولی از R است.

۱۱.۱۰ نتیجه. فرض کنید M مدولی متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. در این‌صورت M مجموع مستقیم زیرمدولهایی دوری است که پوچساز هر یک از آنها توان ایدآل اولی از R است. به بیان دقیقتر، عددهای $h, m \in \mathbb{N}$، عضوهای تحویلناپذیر $p_1, \ldots, p_m \in R$، اعداد صحیح مثبت $t_1, \ldots, t_m$ و Rـمدولهای $R_1, \ldots, R_h$ که همه برابر Rاند وجود دارند به‌طوری که

$$M \cong R/Rp_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus R/Rp_m^{t_m} \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_h.$$

توجه. درگزارهٔ فوق این شرط را قائل نشده‌ایم که اگر $i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq m)$ آن‌گاه p_i و p_j وابسته نباشند.

اثبات. بنابر ۸.۱۰ عضوهایی چون $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$M \cong R/Ra_1 \oplus R/Ra_2 \oplus \cdots \oplus R/Ra_n.$$

اگر به‌ازای jای، $a_j = 0$ آن‌گاه $R/Ra_j \cong R$؛ اگر a_kای عضو وارونپذیر R باشد آن‌گاه $R/Ra_k = 0$؛ بنابراین نتیجهٔ مورد نظر بلاواسطه از ۹.۱۰ و ۱۰.۱۰ حاصل می‌شود. ■

هدف اصلی بعدی ما در این فصل بررسی این مسأله است که اگر مدول متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی ایدآل را به نوعی به مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری تجزیه کنیم، تجزیهٔ حاصل از چه لحاظی یکتاست. این مسأله را در مورد برخی از انواع تجزیه به مجموع مستقیم بررسی می‌کنیم، البته تنها آن نوع تجزیه‌هایی را بررسی می‌کنیم که از ۸.۱۰ و ۱۱.۱۰ منتج می‌شوند. یک روش روشنگرانه در بررسی این مسأله استفاده از مفاهیم مربوط به تابعگونها در جبر تعویضپذیر است، و لذا اکنون موقع مناسبی برای ارائهٔ این مفاهیم است.

۱۲.۱۰ تعریف. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر باشند. می‌گوییم T تابعگونِ هموردا از Rـمدولها به S مدولهاست اگر T قاعده‌ای باشد که به هر Rـمدول چون M یک Sـمدول چون $T(M)$ و به هر Rـهمریختی چون $f : M \longrightarrow G$ یک Sـهمریختی چون $T(f) : T(M) \longrightarrow T(G)$ چنان نسبت دهد که اصول موضوع زیر برقرار باشند:

یک) اگر $f : M \longrightarrow G$ و $g : G \longrightarrow H$ همریختیهایی از Rـمدولها باشند آن‌گاه

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f) : T(M) \longrightarrow T(H);$$

دو) به‌ازای هر Rـمدول M

$$T(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{T(M)} : T(M) \longrightarrow T(M).$$

مفهوم تابعگون پادوردا مشابه مفهوم فوق است بجز اینکه این تابعگون "جهت همریختیها را معکوس می‌کند". به بیان دقیق، تابعگون پادوردا از Rـمدولها به Sـمدولها قاعده‌ای چون T' است که به هر Rـمدول چون M یک Sـمدول چون $T'(M)$ و به هر Rـهمریختی چون $f : M \longrightarrow G$ یک Sـهمریختی چون

$$T'(f) : T'(G) \longrightarrow T'(M)$$

چنان نسبت می‌دهد که اصول موضوع زیر برقرار باشند:

یک) اگر $f : M \longrightarrow G$ و $g : G \longrightarrow H$ همریختیهایی از Rـمدولها باشند آن‌گاه

$$T'(g \circ f) = T'(f) \circ T'(g) : T'(H) \longrightarrow T'(M)$$

دو) به‌ازای هر Rـمدول M

$$T'(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{T'(M)} : T'(M) \longrightarrow T'(M).$$

به علاوه تابعگون (هموردا یا پادوردا) T را جمعی می‌گوییم اگر شرط زیر صادق باشد: اگر M و G دو Rـمدول و $f, f' : M \longrightarrow G$ دو Rـهمریختی باشند آن‌گاه $T(f + f') = T(f) + T(f')$. (مجموع دو همریختی چون f و f' در ۲۷.۶ تعریف شد.)

باید به‌آگاهی برسانیم که نظریهٔ تابعگونها بسیار غنی‌تر از آن است که از ۱۲.۱۰ برمی‌آید: برای تعریف جامع تابعگونها لازم است مفهوم "رسته" (مجموعهٔ همهٔ مدولها روی حلقهٔ تعویضپذیر R همراه با مجموعهٔ همهٔ Rـهمریختیهای بین آنها مثالی از رسته است) را ارائه کنیم و همچنین تابعگونهای چند متغیره را مطرح کنیم. ولی کتاب حاضر کتابی مقدماتی در جبر تعویضپذیر است و کتابی در جبر مانستگیی نیست و لذا در اینجا به ارائهٔ چند مفهوم دربارهٔ تابعگونها اکتفا می‌کنیم.

۱۳.۱۰ لم. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و T تابعگون (هموردا یا پادوردا) از Rـمدولها به S مدولها باشد.

یک) اگر $f : M \longrightarrow G$ یکریختی Rـمدولی باشد آنگاه $T(f)$ Sـیکریختی است و $T(f)^{-1} = T(f^{-1})$.

دو) به‌علاوه فرض کنید T جمعی باشد. اگر $z : M \longrightarrow G$ نشاندهندهٔ همریختی صفر باشد آنگاه $T(z)$ نیز صفر است. همچنین $T(0) = 0$ (که 0 طرف چپ این رابطه نشاندهندهٔ Rـمدول صفر است).

اثبات. اثبات را در حالتی که T پادوردا است ارائه می‌دهیم. اثبات حالت دیگر مشابه همین حالت است و به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

یک) داریم $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_M$ و $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_G$. بنابراین از اصول موضوع تابعگون در ۱۲.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$T(f) \circ T(f^{-1}) = T(f^{-1} \circ f) = T(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{T(M)}$$

و به همین نحو $T(f^{-1}) \circ T(f) = \mathrm{Id}_{T(G)}$. در نتیجه $T(f)$ و $T(f^{-1})$ وارون یکدیگرند و لذا هر دو یکریختی‌اند.

دو) چون $z = z+z$ از جمعی بودن T نتیجه می‌شود که $T(z) = T(z+z) = T(z)+T(z)$ و از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $g' \in T(G)$، $T(z)(g') = 0$.

حال مدول صفر را در نظر بگیرید: برای این مدول داریم $\mathrm{Id}_{\circ} = 0$، یعنی همریختی همانی از 0 به خودش با همریختی صفر برابر است. لذا بنابر پاراگراف قبل و اصل موضوع دوم تابعگون، $T(\mathrm{Id}_{\circ}) = \mathrm{Id}_{T(\circ)}$ همریختی از $T(0)$ به خودش است و لذا به‌ازای هر $y \in T(0)$، $y = 0$. ■

۱۴.۱۰* تمرین. اثبات قضیهٔ ۱۳.۱۰ را با اثبات احکام آن در حالتی که تابعگون T هموردا است کامل کنید.

حال هنگام ارائهٔ چند مثال از تابعگون است.

۱۵.۱۰ مثال. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از حلقهٔ تعویضپذیر R باشد. در این‌صورت از ۷.۹ و ۸.۹ نتیجه می‌شود که S^{-1} تابعگونی جمعی از Rـمدولها به $S^{-1}R$ـمدولهاست.

۱۶.۱۰* تمرین. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. نشان دهید که به‌ازای هر Rـمدول چون M

$$\tau(M) := \{m \in M : rm = \circ \text{ وجود داشته باشد که } r \in R\backslash\{\circ\} \text{عضوی چون}\}$$

زیرمدول M است. فرض کنید $f : M \longrightarrow G$ همریختی Rـمدولی باشد. نشان دهید

$$f(\tau(M)) \subseteq \tau(G) \text{ و نگاشت } \tau(f) : \tau(M) \longrightarrow \tau(G) \text{ را به‌ازای هر } m \in \tau(M)$$

با $\tau(f)(m) = f(m)$ تعریف کنید (لذا $\tau(f)$ اساساً تحدید f به $\tau(M)$ است).

نشان دهید با این تعریف، τ تابعگون پادوردا جمعی از Rـمدولها به Rـمدولهاست. τ را تابعگون تاب می‌نامیم.

یک) Rـمدول M را بی‌تاب می‌گوییم اگر $\tau(M) = \circ$. نشان دهید که به‌ازای هر Rـمدول G مدول $G/\tau(G)$ بی‌تاب است.

دو) همچنین نشان دهید که اگر $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدولها باشد آن‌گاه

$$\tau\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \tau(G_\lambda)$$

۱۷.۱۰* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری و I ایدآل R باشد. به‌ازای هر Rـمدول چون M فرض کنید

$$\begin{aligned}\Gamma_I(M) &= \{m \in M : I^n \subseteq (\circ : m) \text{ وجود داشته باشد که } n \in \mathbb{N} \text{ عددی چون}\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\circ :_M I^n).\end{aligned}$$

فرض کنید $f : M \longrightarrow G$ همریختی Rـمدولی باشد. نشان دهید که $f(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(G)$ و $\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \longrightarrow \Gamma_I(G)$ را به‌ازای هر $m \in \Gamma_I(M)$ با $\Gamma_I(f)(m) = f(m)$ تعریف کنید.

نشان دهید که با این تعریف، Γ_I تابعگون هموردا جمعی از R ـمدولها به R ـمدولهاست: این تابعگون را تابعگون Iـتاب می‌نامیم.

یک) نشان دهید که به‌ازای هر Rـمدول M، $\Gamma_I(M/\Gamma_I(M)) = \circ$.

دو) همچنین نشان دهید که اگر $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدولها باشد آن‌گاه

$$\Gamma_I\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \Gamma_I(G_\lambda).$$

۱۸.۱۰* تمرین. فرض کنید p و q عضوهایی تحویلناپذیر از دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشند و به یکدیگر وابسته نباشند. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. نشان دهید که، برحسب نمادهای تمرین ۱۷.۱۰، $\Gamma_{Rp}(R/Rq^n) = 0$.

۱۹.۱۰* تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و I ایدآل R باشد. به‌ازای هر Rـمدول M فرض کنید $T(M) = (0 :_M I)$. نشان دهید که هرگاه $f : M \longrightarrow G$ همریختی Rـمدولی باشد آن‌گاه $f(T(M)) \subseteq T(G)$ و $T(f) : T(M) \longrightarrow T(G)$ را به‌ازای هر $m \in T(M)$ با $T(f)(m) = f(m)$ تعریف کنید.

نشان دهید که T تابعگون هموردا جمعی از Rـمدولها به Rـمدولهاست. همچنین نشان دهید که اگر $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای ناتهی از Rـمدولها باشد آن‌گاه $T(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} T(G_\lambda)$.

۲۰.۱۰* تمرین. یک) فرض کنید a و b عضوهایی ناصفر از دامنهٔ صحیح R باشند. نشان دهید که $Rb/Rab \cong R/Ra$. همچنین نشان دهید که

$$(0 :_{R/Rab} Ra) = Rb/Rab.$$

دو) حال فرض کنید p عضو تحویلناپذیر دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد و $n \in \mathbb{N}$. نشان دهید که $\ell_R(R/Rp^n) = n$.

۲۱.۱۰* تمرین. فرض کنید R دامنهٔ اصلی‌ایدآل، r عضو ناصفر وارون‌ناپذیر R و p عضو تحویلناپذیر R باشد. نشان دهید که

$$(0 :_{R/Rr} Rp) \cong \begin{cases} R/Rp & \text{اگر } Rp \supseteq Rr \\ 0 & \text{اگر } Rp \not\supseteq Rr \end{cases}$$

(می‌توانید از تمرین ۲۰.۱۰ استفاده کنید.)

۲۲.۱۰ تمرین. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و T تابعگون هموردا (پادوردا) جمعی از Rـمدولها به Sـمدولها باشد. می‌گوییم T از چپ کامل است اگر شرط زیر صادق باشد: هرگاه دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

دنباله‌ای کامل از Rـمدولها و Rـهمریختیها باشد آن‌گاه دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

(و درصورتی که تابعگون پادوردا باشد، دنبالهٔ

$$(\circ \longrightarrow T(N)\xrightarrow{T(g)}T(M)\xrightarrow{T(f)}T(L)$$

از Sـمدولها و Sـهمریختیها نیز کامل باشد.

یک) فرض کنید I ایدآل R باشد. نشان دهید که تابعگون مذکور در ۱۹.۱۰ (که می‌توان آن را با $(I\ \ (\bullet):\ \circ) = T$ نمایش داد) از چپ کامل است. نشان دهید که اگر R نوتری باشد، تابعگون مذکور در ۱۷.۱۰ نیز از چپ کامل است.

دو) فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. نشان دهید که تابعگون تاب τ مذکور در ۱۶.۱۰ از چپ کامل است.

۲۳.۱۰ قضیه. فرض کنید R و S حلقه‌هایی تعویضپذیر و T تابعگون (هموردا یا پادوردا) جمعی از Rـمدولها به Sـمدولها باشد. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $G_1, \ldots, G_n$، Rـمدول باشند. در این‌صورت Sـمدولهای $\bigoplus_{i=1}^n T(G_i)$ و $T(\bigoplus_{i=1}^n G_i)$ یکریخت‌اند.

اثبات. این بار حالتی را در نظر می‌گیریم که T هموردا باشد و اثبات حالت پادوردا را به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قرار دهید $G = \bigoplus_{i=1}^n G_i$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ فرض کنید $p_i : G \longrightarrow G_i$ نگاشت تصویرگر متعارف و $q_i : G_i \longrightarrow G$ نگاشت یک به یک متعارف باشد. در این‌صورت بنابر ۴۷.۶، به‌ازای هر $1 \le i, j \le n$ داریم

$$p_i \circ q_j = \begin{cases} \mathrm{Id}_{G_i} & \text{اگر } i = j \\ \circ & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

و $\sum_{i=1}^n q_i \circ p_i = \mathrm{Id}_G$. حال اثر T را براین نگاشتها به‌دست می‌آوریم: از ۱۳.۱۰ و ویژگیهای تابعگون جمعی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $1 \le i, j \le n$

$$T(p_i) \circ T(q_j) = \begin{cases} \mathrm{Id}_{T(G_i)} & \text{اگر } i = j \\ \circ & \text{اگر } i \neq j \end{cases}$$

و

$$\sum_{i=1}^n T(q_i) \circ T(p_i) = T\left(\sum_{i=1}^n q_i \circ p_i\right) = T(\mathrm{Id}_G) = \mathrm{Id}_{T(G)}.$$

بنابراین از ۴۸.۶(دو) نتیجه می‌شود $T(G) = T(\bigoplus_{i=1}^n G_i) \cong \bigoplus_{i=1}^n T(G_i)$ که نتیجهٔ مورد نظر است. ■

۲۴.۱۰ تمرین. اثبات ۲۳.۱۰ را با اثبات حکم آن در حالتی که T پادوردا است کامل کنید.

۲۵.۱۰* تمرین. فرض کنید R و S حلقه‌های تعویض‌پذیر ناصفر و T تابعگون (هموردا یا پادوردا) جمعی از Rـمدولها به Sـمدولها باشد. فرض کنید Sـمدولهای S و $T(R)$ یکریخت باشند. فرض کنید F یک Rـمدول آزاد متناهی‌مولد با رتبهٔ n باشد. نشان دهید که $T(F)$ یک Sـمدول آزاد متناهی‌مولد با رتبهٔ n است.

۲۶.۱۰ تعریف و تذکر. فرض کنید R دامنهٔ صحیح و M یک Rـمدول متناهی‌مولد باشد. زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ $R\setminus\{0\}$ را S بنامید و توجه کنید که، بنابر ۵.۵، $K := S^{-1}R$ هیأت کسرهای R است. حال $S^{-1}M$ مدول متناهی‌مولد روی $S^{-1}R$، یعنی فضای برداری متناهی‌بعد روی K، است. رتبهٔ بی‌تابی یا به اختصار رتبهٔ M را برابر $\operatorname{vdim}_K S^{-1}M$ تعریف می‌کنیم و آن را با $\operatorname{rank} M$ (یا $\operatorname{rank}_R M$) نمایش می‌دهیم.

این مفهوم کلمهٔ "رتبه" بامفهوم قبلی آن در مورد مدول آزاد با پایهٔ متناهی منافات ندارد: اگر F یک Rـمدول آزاد با پایه‌ای n عضوی باشد آن‌گاه بلاواسطه از ۱۵.۱۰ و ۲۵.۱۰ نتیجه می‌شود که $S^{-1}F$ یک Kـمدول آزاد با رتبهٔ n است و لذا رتبهٔ بی‌تابی F به‌معنای پاراگراف قبل نیز n است.

روشن است که اگر M و M' دو Rـمدول متناهی‌مولدِ یکریخت باشند آن‌گاه $\operatorname{rank} M = \operatorname{rank} M'$.

۲۷.۱۰* تمرین. فرض کنید M، G_1، ...، G_n مدولهایی روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشند و $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$. فرض کنید I ایدآل R باشد. نشان دهید که

$$IM \cong I\left(\bigoplus_{i=1}^{n} G_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} IG_i.$$

اکنون می‌توانیم مفاهیم مربوط به تابعگون را برای بحث در یکتایی برخی از انواع تجزیهٔ مدولهای متناهی‌مولد روی د.ا.ا (به مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری) به‌کار ببریم. استفاده از اصطلاح زیر در این بحث مفید خواهد بود.

۲۸.۱۰ تعریف. فرض کنید R دامنهٔ اصلی‌ایدآل باشد. می‌گوییم که $(p_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از عضوهای تحویلناپذیر دو به دو ناوابستهٔ R است اگر p_1، ...، p_n عضوهایی تحویلناپذیر از R باشند و به‌ازای $i \neq j$ $(1 \le i, j \le n)$ p_i و p_j وابسته نباشند.

۲۹.۱۰ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ اصلی‌ایدآل و $(p_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از عضوهای تحویلناپذیر R باشد. نشان دهید $(p_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از عضوهای تحویلناپذیر دو به دو ناوابستهٔ R

است اگر و تنها اگر خانوادهٔ $(Rp_i)_{i=1}^{n}$ از ایدآلهای R، دو به دو متباین باشند (۵۷.۳ راببینید).

حال فرض کنید R د.ا.ا و M Rـمدول متناهی‌مولد ناصفر باشد. در ۸.۱۰ نشان دادیم که عضوهایی چون $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند که

$$Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

و

$$M \cong R/Ra_1 \oplus R/Ra_2 \oplus \cdots \oplus R/Ra_n.$$

همچنین در ۱۱.۱۰ دیدیم که M با مجموع مستقیم تعدادی از Rـمدولهای دوری که پوچساز هر یک از آنها توان ایدآل اولی از R است یکریخت است. (البته باید خاطر نشان کنیم که ایدآل صفر R اول است و چون هر جمعوند دوری آزاد ناصفر با R یکریخت است، لذا پوچسازش توان ایدآلی اول است!) قدم بعدی این است که نشان دهیم تعداد جمعوندهای دوری آزاد ناصفر در هر تجزیهٔ مستقیم مفروض از هر یک از دو نوع فوق به‌طور یکتا توسط M تعیین می‌شود و از آن مجموع مستقیم مفروض مستقل است. در واقع این تعداد برابر با رتبهٔ بی‌تابی M است و لذا یقیناً ناورداست!

۳۰.۱۰ **قضیه.** فرض کنید M مدول ناصفر متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. فرض کنید $h, t \in \mathbb{N}_0$ و $b_1, \ldots, b_h \in R\setminus\{0\}$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$M \cong R/Rb_1 \oplus \cdots \oplus R/Rb_h \oplus R_1 \oplus \cdots \oplus R_t$$

که در آن $R_1 = \cdots = R_t = R$. (اگر $h = 0$ یا $t = 0$، عبارت فوق را چنانکه به‌طور بدیهی انتظار می‌رود تعبیر کنید.) در این‌صورت

یک) $\tau(M) \cong R/Rb_1 \oplus \cdots \oplus R/Rb_h$، و

دو) $t = \operatorname{rank} M$.

اثبات. بنابر ۱۶.۱۰ و ۱۳.۱۰

$$\tau(M) \cong \tau(R/Rb_1) \oplus \cdots \oplus \tau(R/Rb_h) \oplus \tau(R_1) \oplus \cdots \oplus \tau(R_t).$$

چون $b_i(R/Rb_i) = 0$ و $b_i \neq 0$ پس به‌ازای هر $i = 1, \ldots, h$، $\tau(R/Rb_i) = R/Rb_i$.
همچنین $\tau(R) = 0$ و لذا بند (یک) ثابت شده است.

فرض کنید $S := R\setminus\{0\}$ و $K := S^{-1}R$، که $S^{-1}R$ هیأت کسرهای R است. توجه کنید که بنابر ۶.۹(یک) به‌ازای $i = 1, \ldots, h$، $S^{-1}(R/Rb_i) = 0$. در نتیجه بنابر ۱۵.۱۰

و ۲۳.۱۰ دو Kـفضای زیر یکریخت‌اند

$$S^{-1}M \cong S^{-1}R_1 \oplus \cdots \oplus S^{-1}R_t$$

لذا $t = \operatorname{vdim}_K\ S^{-1}M = \operatorname{rank}_R\ M$. ■

روشن است که اگر a مولد ایدآل مفروض I از دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد آن‌گاه هر عضو وابسته به a نیز مولد I است. لذا در حالت کلی ممکن است مولد I منحصر به‌فرد نباشد. مثلاً ایدآل $27\mathbb{Z}$ از $\mathbb{Z}$ هم توسط ۲۷ و هم توسط ۲۷− تولید می‌شود. لذا در بحث از یکتایی تجزیهٔ Rـمدولهای متناهی‌مولد به‌مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری احکام را برحسب ایدآلهای پوچساز جمعوندهای دوری بیان می‌کنیم نه برحسب مولدهای این ایدآلها.

۳۱.۱۰ لم. فرض کنید M مدولی ناصفر و متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. فرض کنید

$$\begin{aligned} M \cong R_1 \oplus \cdots \oplus R_t \oplus R/Rp_1^{u_{11}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_1^{u_{1w(1)}} & \\ \oplus R/Rp_2^{u_{21}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_2^{u_{2w(2)}} \oplus \cdots & \\ \vdots \quad & \\ \cdots \oplus R/Rp_n^{u_{n1}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_n^{u_{nw(n)}}, & \end{aligned}$$

که در آن $t, n \in \mathbb{N}$، و $R_1 = \cdots = R_t = R$، و $(p_i)_{i=1}^n$ خانواده‌ای از عضوهای تحویلناپذیر دو به دو ناوابستهٔ R است، و (به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$) $w(i), u_{i1}, \ldots, u_{iw(i)} \in \mathbb{N}$ که

$$u_{i1} \leq u_{i2} \leq \cdots \leq u_{iw(i)}.$$

در این‌صورت (به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$)، $\Gamma_{Rp_i}(M) \cong R/Rp_i^{u_{i1}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_i^{u_{iw(i)}}$. به‌علاوه اگر p عضو تحویلناپذیر R باشد و به هیچ یک از عضوهای $p_1, \ldots, p_n$ وابسته نباشد آن‌گاه $\Gamma_{Rp}(M) = 0$.

اثبات. توجه کنید که اگر عضو q از R تحویلناپذیر باشد و q و p_i وابسته نباشند آن‌گاه بنابر ۱۸.۱۰ به‌ازای هر $u \in \mathbb{N}$ داریم $\Gamma_{Rq}(R/Rp_i^u) = 0$. همچنین $\Gamma_{Rq}(R) = 0$. حال تمام احکام قضیه بلاواسطه از تمرین ۱۷.۱۰ و لم ۱۳.۱۰ حاصل می‌شوند. ■

وقتی تجزیه‌ای از M به مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری در دست باشد که پوچسازهای این زیرمدولها توان ایدآلهای اول باشند، با استفاده از لم ۳۱.۱۰ می‌توانیم جمعوندهایی از این تجزیه را که پوچسازهایشان توانهای یک ایدآل اول ناصفر چون Rp هستند معین کنیم. این کار

را می‌توانیم صرفاً با کاربرد تابعگون Γ_{R_P} انجام دهیم. نتیجهٔ قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این کار سودمند است. قضیهٔ زیر در واقع یکی از قضیه‌های یکتایی است که قبلاً به آن اشاره شد.

۳۲.۱۰ قضیه. فرض کنید M مدولی ناصفر و متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. بنابر ۸.۱۰، $a_1, \dots, a_n \in R$ وجود دارند به‌طوری که

$$R \supset Ra_1 \supseteq Ra_2 \supseteq \cdots \supseteq Ra_n$$

و

$$M \cong R/Ra_1 \oplus R/Ra_2 \oplus \cdots \oplus R/Ra_n.$$

در این‌صورت عدد صحیح مثبت n و خانوادهٔ $(Ra_i)_{i=1}^n$ از ایدآلهای R در این نوع تجزیه‌های M ناوردا هستند؛ به‌عبارت دیگر اگر $b_1, \dots, b_m \in R$ به‌طوری که

$$R \supset Rb_1 \supseteq Rb_2 \supseteq \cdots \supseteq Rb_m$$

و

$$M \cong R/Rb_1 \oplus R/Rb_2 \oplus \cdots \oplus R/Rb_m$$

آن‌گاه $n = m$ و به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $Ra_i = Rb_i$.

اثبات. اگر به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $Ra_i = 0$ آن‌گاه بنابر ۵۸.۶ و ۵۳.۶، M آزاد است و رتبهٔ آن n است؛ همچنین بنابر ۳۰.۱۰، $\tau(M) = 0$. لذا از همان قضیه نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $i = 1, \dots, m$، $Rb_i = 0$ و لذا $m = \operatorname{rank} \ M = n$. بنابراین قضیه در این حالت اثبات شده است. در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم که $Ra_1 \supset 0$.

در این‌صورت $v \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $1 \le v \le n$ و

$$Ra_1 \supseteq \cdots \supseteq Ra_v \supset 0 = Ra_{v+1} = \cdots = Ra_n.$$

(عبارت فوق را در حالت $v = n$ چنانکه به‌طور بدیهی انتظار می‌رود تعبیر کنید.) برای تجزیهٔ دوم نیز حکم مشابهی برقرار است: $u \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $1 \le u \le m$ و

$$Rb_1 \supseteq \cdots \supseteq Rb_u \supset 0 = Rb_{u+1} = \cdots = Rb_m$$

بنابر ۳۰.۱۰، $n - v = \operatorname{rank} \ M = m - u$ و

$$R/Ra_1 \oplus \cdots \oplus R/Ra_v \cong \tau(M) \cong R/Rb_1 \oplus \cdots \oplus R/Rb_u.$$

بنابراین اگر قضیه را در حالت خاصی که در آن $v = n$ (که در این‌صورت $u = m$) ثابت کنیم، حالت کلی نیز ثابت شده است. لذا فرض می‌کنیم که $Ra_n \supset 0$ و $Rb_m \supset 0$.

در این حالت از ۴۶.۷ روشن است که $\ell_R(M)$ متناهی است. حکم را با استقرا روی این طول ثابت می‌کنیم. اگر $\ell_R(M) = 1$ از ۴۸.۶(یک) و ۴۱.۷ نتیجه می‌شود که $n = m = 1$ و لذا $R/Ra_1 \cong R/Rb_1$ و در نتیجه

$$Ra_1 = \mathrm{Ann}_R(R/Ra_1) = \mathrm{Ann}_R(R/Rb_1) = Rb_1$$

حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم که $\ell_R(M)$ بزرگتر از ۱ باشد و نتیجه برای Rـمدولهای ناصفری که طولشان کمتر از طول M است ثابت شده باشد. می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq m$. چون Ra_1 ایدآل ناصفر، r است عضو تحویلناپذیری از R، چون p، وجود دارد که مقسوم‌علیه a_1 است. بنابر ۲۱.۱۰ رون‌ناپذیر ناصفری چون $r \in R$ وجود دارد که

$$(0 :_{R/Rr} Rp) \cong \begin{cases} R/Rp & \text{اگر} \ldots \ Rp \supseteq \\ 0 & \text{اگر} \ Rp \not\supseteq Rr \end{cases}$$

در نتیجه بنابر ۱۹.۱۰ و ۱۳.۱۰ داریم

$$(0 :_M Rp) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} (0 :_{R/Ra_i} Rp)$$

بنابراین $(0 :_M Rp)$ یکریخت است با مجموع مستقیم n Rـمدول R/Rp و لذا $\ell_R(0 :_M Rp) = n$. همچنین از اینکه

$$(0 :_M Rp) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} (0 :_{R/Rb_i} Rp)$$

نتیجه می‌شود که $\ell_R(0 :_M Rp) = w$ که در آن w تعداد iهای صحیح بین ۱ و m است که به‌ازای آنها p مقسوم‌علیه b_i است. در نتیجه $n = w \leq m \leq n$ ولذا $n = m = w$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n = m$، p مقسوم‌علیه b_i است.

لذا به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ عضوهای $c_i, d_i \in R$ وجود دارند که $a_i = pc_i$ و $b_i = pd_i$، لذا از ۲۰.۱۰ نتیجه می‌شود که

$$Rp(R/Ra_i) = Rp/Ra_i \cong R/Rc_i \quad \text{و} \quad Rp(R/Rb_i) \cong R/Rd_i$$

حال با استفاده از ۲۷.۱۰ نتیجه می‌گیریم

$$pM \cong R/Rc_1 \oplus \cdots \oplus R/Rc_n \cong R/Rd_1 \oplus \cdots \oplus R/Rd_n$$

که

$$Rc_1 \supseteq \cdots \supseteq R\,c_n \supset 0 \qquad \text{و} \qquad Rd_1 \supseteq \cdots \supseteq Rd_n \supset 0$$

همچنین روشن است که طول pM کمتر از طول M است. فرض کنید h بزرگترین عدد از اعداد صحیح i بین ۰ و n باشد که به‌ازای آنها $Rc_i = R$ (و k بزرگترین عدد از اعداد صحیح i بین ۰ و n باشد که به‌ازای آنها $Rd_i = R$) و اگر چنین عدد صحیحی وجود نداشته باشد h (و k) را برابر با صفر اختیار می‌کنیم.

در این‌صورت $h = n$ اگر و تنها اگر $pM = 0$، و این حالت فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $k = n$. در این حالت همهٔ عضوهای $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ از R وارونپذیرند و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $Ra_i = Rb_i = Rp$، و لذا حکم درا ین حالت ثابت شده است. اگر $h < n$ که در این‌صورت $k < n$، می‌توانیم از فرض استقرا در مورد دو تجزیهٔ pM مذکور در پاراگراف قبل استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که

$$n - h = n - k \text{ و به‌ازای } i = h + 1, \ldots, n \text{، } Rc_i = Rd_i.$$

از این مطلب به‌آسانی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $Ra_i = Rb_i$.

به این ترتیب مرحلهٔ دوم استقرا کامل شده و اثبات قضیه پایان یافته است. ■

۳۳.۱۰ تمرین. حالت ۳۲.۱۰ را در نظر بگیرید. $\mathrm{Ann}_R(\tau(M))$ را بیابید.

۳۴.۱۰ نتیجه. فرض کنید p عضو تحویلناپذیر دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. فرض کنید ($m, n \in \mathbb{N}$ و) $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{N}$ و $u_1, \ldots, u_m$ که

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_m \qquad \text{و} \qquad v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_n$$

و

$$R/Rp^{u_1} \oplus \cdots \oplus R/Rp^{u_m} \cong R/Rp^{v_1} \oplus \cdots \oplus R/Rp^{v_n}.$$

در این‌صورت $m = n$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $u_i = v_i$.

اثبات. توجه کنید که از مفروضات فوق نتیجه می‌شود که

$$R \supset Rp^{u_1} \supseteq Rp^{u_2} \supseteq \cdots \supseteq Rp^{u_m} \qquad \text{و} \qquad R \supset Rp^{v_1} \supseteq Rp^{v_2} \supseteq \cdots \supseteq Rp^{v_n}$$

بنابراین حکم بلاواسطه از قضیهٔ ۳۲.۱۰ نتیجه می‌شود. ■

قضیهٔ ۳۲.۱۰ قضیه‌ای یکتایی در مورد تجزیهٔ مدول متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل به مجموع مستقیم زیرمدولهای دوری است. حال می‌توانیم دومین قضیه از این نوع را ثابت کنیم؛ این قضیه در مورد تجزیه‌هایی است که عوامل آنها مدولهایی دوری‌اند که پوچسازهایشان توان ایدآلهای اول هستند.

۳۵.۱۰ قضیه. فرض کنید M مدولی متناهی‌مولد و ناصفر روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. بنابر ۱۱.۱۰، M با مجموع مستقیمی از Rـمدولهای دوری که پوچسازهایشان توان ایدآلهای اول‌اند یکریخت است. فرض کنید

$$\begin{aligned} M \cong R_1 \oplus \cdots \oplus R_t \oplus R/Rp_1^{u_{11}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_1^{u_{1w(1)}} & \\ \oplus R/Rp_2^{u_{21}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_2^{u_{2w(2)}} & \oplus \cdots \\ \vdots \quad & \\ \cdots \oplus R/R\, p_n^{u_{n1}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_n^{u_{nw(n)}} & \end{aligned}$$

که در آن $t, n \in \mathbb{N}$، و $R_1 = \cdots = R_t = R$، و $(p_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای است از عضوهای تحویلناپذیر دو به دو ناوابستهٔ R، و (به‌ازای هر $w(i), u_{i1}, \ldots, u_{iw(i)} \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, n$ که

$$u_{i1} \leq u_{i2} \leq \cdots \leq u_{iw(i)}.$$

همچنین فرض کنید

$$\begin{aligned} M \cong R_1 \oplus \cdots \oplus R_s \oplus R/Rq_1^{v_{11}} \oplus \cdots \oplus R/Rq_1^{v_{1y(1)}} & \\ \oplus R/Rq_2^{v_{21}} \oplus \cdots \oplus R/Rq_2^{v_{2y(2)}} & \oplus \cdots \\ \vdots \quad & \\ \cdots \oplus R/Rq_m^{v_{m1}} \oplus \cdots \oplus R/Rq_m^{v_{my(m)}} & \end{aligned}$$

که $s, m \in \mathbb{N}$، و $R_1 = \cdots = R_s = R$، و $(q_i)_{i=1}^{m}$ خانواده‌ای است از عضوهای تحویلناپذیر دو به دو ناوابستهٔ R، و (به‌ازای هر $y(i), v_{i1}, \ldots, v_{iy(i)} \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, m$ که

$$v_{i1} \leq v_{i2} \leq \cdots \leq v_{iy(i)}.$$

در این صورت $\operatorname{rank}_R M = t = s$ و $n = m$. به‌علاوه پس از تغییر مناسب ترتیب $q_1, \ldots, q_n$، خانواده‌های $(Rp_i)_{i=1}^{n}$ و $(Rq_i)_{i=1}^{n}$ از ایدآلهای اول R برابرند، البته ممکن است هیچ تغییری

لازم نباشد. علاوه بر این پس از این تغییر ترتیب به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $w(i)$ با $y(i)$ برابر است و خانواده‌های $(u_{ij})_{j=1}^{w(i)}$ و $(v_{ij})_{j=1}^{w(i)}$، از اعداد صحیح مثبت، برابرند.

اثبات. بنابر ۳۰.۱۰ داریم $t = \operatorname{rank}_R \ M = s$؛ همچنین با استفاده از ۳۱.۱۰ و ۳۴.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\{Rp_1, \ldots, Rp_n\} = \{P \in \operatorname{Spec}(R) : \Gamma_P(M) \neq 0 \text{ و } P \neq 0\}.$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که $n = m$، به‌علاوه نتیجه می‌شود که می‌توان ترتیب $q_1, \ldots, q_n$ را چنان تغییر داد که $(Rp_i)_{i=1}^n = (Rq_i)_{i=1}^n$، البته ممکن است تغییری لازم نباشد.

حال عددی صحیح چون i را در نظر بگیرید که $1 \leq i \leq n$. بنابر ۱۷.۱۰ و ۱۳.۱۰ و ۳۱.۱۰ داریم

$$R/Rp_i^{u_{i1}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_i^{u_{iw(i)}} \cong \Gamma_{Rp_i}(M) \cong R/Rp_i^{v_{i1}} \oplus \ldots \oplus R/Rp_i^{v_{iy(i)}}$$

(در اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که چون $Rp_i = Rq_i$ به‌ازای هر $h \in \mathbb{N}$ داریم $Rp_i^h = (Rp_i)^h = Rq_i^h$. توجه کنید که ادعا نمی‌کنیم $p_i = q_i$ بلکه تنها می‌گوییم هر دو یک ایدآل را تولید می‌کنند، یعنی وابسته‌اند.) بنابه مفروضات قضیه در مورد u_{ij} و v_{ij} از ۳۴.۱۰ نتیجه می‌شود که $w(i) = y(i)$ و به‌ازای هر $j = 1, \ldots, w(i)$، $u_{ij} = v_{ij}$. ■

۳۶.۱۰ تذکر. چند تذکر دربارهٔ آنچه در قضیهٔ ۳۵.۱۰ حاصل شد مفید است. در اینجا همان نمادهای ۳۵.۱۰ را به‌کار می‌بریم. توجه کنید که $t = \operatorname{rank}_R \ M$، به‌علاوه خانوادهٔ $(Rp_i)_{i=1}^n$، متشکل از n ایدآل ماکسیمال متمایز R، و خانوادهٔ $(u_{ij})_{j=1}^{w(i)}$، متشکل از اعداد صحیح، که $u_{i1} \leq u_{i2} \leq \cdots \leq u_{iw(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$، همه به‌طور یکتا توسط M تعیین می‌شوند، یعنی ناوردا هستند، به‌علاوه اگر این ناورداها معلوم باشند می‌توانیم M را تا حد Rـیکریختی کاملاً مشخص کنیم (یعنی اگر Rـمدولهای یکریخت را یکی بدانیم می‌توان گفت R کاملاً مشخص است).

۳۷.۱۰ تمرین. فرض کنید حالتهای ۳۵.۱۰ و ۳۶.۱۰ مفروض باشند. نشان دهید که اگر $\tau(M) \neq 0$ آن‌گاه

$$\operatorname{Ann}_R(\tau(M)) = Rp_1^{u_{1w(1)}} p_2^{u_{2w(2)}} \cdots p_n^{u_{nw(n)}}.$$

یکی از آشناترین مثالهای د.ا.ا حلقهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است: بنابر ۵.۶، مفهوم $\mathbb{Z}$ـمدول دقیقاً همان مفهوم گروه آبلی است. لذا قضیه‌های ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ نتایجی در نظریهٔ گروههای آبلی متناهی‌مولد دارند. قبل از اینکه صورت این قضیه‌ها را در حالت خاص $R = \mathbb{Z}$ بنویسیم توجه

کنید که تنها عضوهای وارونپذیر $\mathbb{Z}$ عبارت‌اند از ۱ و ۱− و به‌علاوه هر ایدآل $\mathbb{Z}$ مولدی نامنفی و یکتا دارد، همچنین به‌ازای $a \in \mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ـمدول دوری $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ گروهی آبلی با مرتبهٔ a است. بنابراین صورت دو نتیجهٔ بعدی (که به ترتیب نتایج بلافصل ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ هستند) به پیچیدگی صورت قضایای ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ نیست.

۳۸.۱۰ نتیجه. (از ۸.۱۰ و۳۲.۱۰).فرض کنید G گروه آبلی متناهی‌مولد ناصفر باشد. در این‌صورت خانوادهٔ یکتای $(a_i)_{i=1}^{n}$ از اعداد صحیح نامنفی وجود دارد به‌طوری که

$$G \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}a_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}a_n$$

که در آن $a_1 \neq 1$ و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $a_i | a_{i+1}$. ■

۳۹.۱۰ قضیهٔ اصلی گروههای آبلی. فرض کنید G گروه آبلی متناهی‌مولد ناصفر باشد. در این‌صورت G با مجموع مستقیم گروههایی دوری و آزاد و گروههایی دوری که مرتبهٔ هر یک از آنها توان عددی اول است، یکریخت است.

در واقع اعداد صحیح یکتای $t, n \in \mathbb{N}$، و خانوادهٔ یکتای $(p_i)_{i=1}^{n}$ از اعداد اول که $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$، و اعداد یکتای $w(i), u_{i1}, \ldots, u_{iw(i)} \in \mathbb{N}$، که $i = 1, \ldots, n$، و

$$u_{i1} \leq u_{i2} \leq \cdots \leq u_{iw(i)}$$

وجود دارند به‌طوری که

$$\begin{aligned} G \cong \mathbb{Z}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_t \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\, p_1^{u_{11}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_1^{u_{1w(1)}} \\ \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\, p_2^{u_{21}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p_2^{u_{2w(2)}} \oplus \cdots \\ \vdots \\ \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\, p_n^{u_{n1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\, p_n^{u_{nw(n)}} \end{aligned}$$

که در آن $\mathbb{Z}_1 = \cdots = \mathbb{Z}_t = \mathbb{Z}$. ■

۴۰.۱۰* تمرین. تعداد رده‌های یکریختی متمایز گروههای آبلی مرتبهٔ ۶۰ را بیابید، و برای هر یک از این رده‌های یکریختی نماینده‌ای بیابید که مجموع مستقیم گروههای دوریی باشد که مرتبهٔ آنها توان اعداد اول است؛ همچنین نماینده‌ای بیابید که مجموع مستقیم گروههای دوریی باشد که در شرایط نتیجهٔ ۳۸.۱۰ صدق می‌کنند.

۴۱.۱۰ گامهای بعدی. روشهای دیگری برای اثبات احکام اصلی این فصل یعنی ۸.۱۰، ۱۱.۱۰، ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ وجود دارند: خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند روش ماتریسی فصلهای ۷ و

۸ از مرجع [۴] را مطالعه کند. روشی که ما در این کتاب اتخاذ کردیم برای نمایش و ادغام کاربردهای برخی از روشهایی بود که قبلاً در این کتاب ارائه شدند، به علاوه این روش از آن رو اتخاذ شد که فرصتی برای معرفی برخی از ایده‌های سادهٔ استفاده از تابعگونها در جبر تعویضپذیر فراهم می‌کرد.

باید متذکر شویم که مطالب اندک مربوط به تابعگونها که در این فصل به‌کار رفته تنها "مشتی از خروار" است. در ۱۲.۱۰ اساساً تابعگونهای یک متغیره از یک "رسته" از مدولها به "رستهٔ" دیگری از مدولها را در نظر گرفتیم، ولی مفهوم "رسته" را به‌طور دقیق تعریف نکردیم. تعریف جامع تابعگونها نیازمند تعریف مفهوم "رسته" و بررسی تابعگونهای چند متغیره است. (ضرب تانسوری مثال مهمی از تابعگون دو متغیره است؛ مثال دیگر از مدول همریختیها که در ۶.۶۰ ذکر شد حاصل می‌شود.) اگر مایلید مطالب بیشتری دربارهٔ این مباحث بیاموزید به کتابهای جبر مانستگیی رجوع کنید.

فصل ۱۱ عمدتاً به کاربرد قضایای ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ در نظریهٔ ماتریسها مربوط است.

۱۱

صورتهای متعارف ماتریسهای مربعی

در این فصل کوتاه می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از قضیه‌های فصل ۱۰ در مورد تجزیه به مجموع مستقیم نتایجی اساسی دربارهٔ صورتهای متعارف ماتریسهای مربعی روی هیأتها به دست آورد. قصد نداریم بحث جامعی از نظریهٔ صورتهای متعارف ارائه دهیم زیرا این کتاب دربارهٔ جبر خطی نیست، ولی شاید دانستن این موضوع برایتان جالب باشد که چگونه مفاهیم این کتاب و به ویژه مفاهیم فصل ۱۰ را می‌توان به نظریهٔ صورتهای متعارف ارتباط داد. به هیچ مطلبی از این فصل در بقیهٔ این کتاب نیاز نیست و لذا خوانندگانی که به مباحث دیگری از جبر تعویض‌پذیر علاقه‌مندند می‌توانند از مطالعهٔ این فصل صرف‌نظر کنند.

ماتریسهای مربعی با درایه‌های متعلق به هیأت K رابطهٔ نزدیکی با درونریختیهای فضاهای برداری متناهی‌بعد روی K دارند.

۱.۱۱ **تعریف و تذکر.** فرض‌کنید M مدولی روی حلقهٔ تعویض‌پذیر R باشد. Rـدرونریختی M یا به اختصار درونریختی M یک Rـهمریختی از M به خودش است. مجموعهٔ همهٔ Rـدرونریختیهای M را با $\mathrm{End}_R(M)$ نشان می‌دهیم. اثبات اینکه $\mathrm{End}_R(M)$ با تعریف عمل جمع نگاشتها به صورت مذکور در ۲۷.۶ و عمل "ضرب" نگاشتها به صورت ترکیب نگاشتها حلقه است ساده است: عضو همانی این حلقه Id_M، یعنی نگاشت همانی از M به روی خودش است و عضو صفر $\mathrm{End}_R(M)$، همریختی صفر $0 : M \to M$ است که در ۲۷.۶ تعریف شد. خواننده حتماً می‌تواند مثالهای ساده‌ای با استفاده از نظریهٔ فضاهای برداری ارائه کند و نشان

دهد در حالت کلی لازم نیست $\mathrm{End}_R(M)$ تعویضپذیر باشد.

به ازای هر $\psi \in \mathrm{End}_R(M)$ و هر $r \in R$ نگاشت $r\psi : M \to M$ را به ازای هر $m \in M$ با قاعدهٔ $(r\psi)(m) = r\psi(m)$ تعریف می‌کنیم. اثبات اینکه $r\psi$ نیز درونریختی M است ساده است. توجه کنید که اثر $r\mathrm{Id}_M$ (به ازای $r \in R$) بر عضو $m \in M$ چیزی جز ضرب r در m نیست. همچنین توجه کنید که ضرب هر $\psi \in \mathrm{End}_R(M)$ در $r\mathrm{Id}_M$، به ازای هر $r \in R$، خاصیت تعویضپذیری دارد: در واقع اگر $\theta : M \to M$ همریختی گروههای آبلی باشد، این همریختی متعلق به $\mathrm{End}_R(M)$ است اگر و تنها اگر ضرب آن در $r\mathrm{Id}_M$، به ازای هر $r \in R$، خاصیت تعویضپذیری داشته باشد.

مجموعهٔ $\{r\mathrm{Id}_M : r \in R\}$ را با R' نمایش دهید: روشن است که R' زیرحلقهٔ تعویضپذیر $\mathrm{End}_R(M)$ است و $\eta : R \to R'$ با تعریف به ازای هر $r \in R$، $\eta(r) = r\mathrm{Id}_M$ همریختی حلقه‌ای است: اگر ψ عضو مفروضی از $\mathrm{End}_R(M)$ باشد، از ۱۱.۱ نتیجه می‌شود که $R'[\psi]$ زیرحلقهٔ تعویضپذیر $\mathrm{End}_R(M)$ است و در واقع

$$\begin{aligned} R'[\psi] &= \left\{ \sum_{i=0}^{t} (r_i \mathrm{Id}_M) \circ \psi^i : t \in \mathbb{N}_0,\ \ r_0, r_1, \ldots, r_t \in R \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{t} r_i \psi^i : t \in \mathbb{N}_0,\ \ r_0, r_1, \ldots, r_t \in R \right\}. \end{aligned}$$

(البته $\psi^0 = \mathrm{Id}_M$.)

حال به آسانی ثابت می‌شود که M تحت جمعی که مجهز به آن است (با توجه به Rـمدول بودن آن) و ضرب عضوهایش در عضوهای $R'[\psi]$ با تعریف $\phi.m = \phi(m)$ ($\phi(m)$ اثر نگاشت ϕ بر m است)، به ازای هر $\phi \in R'[\psi]$ و هر $m \in M$، $R'[\psi]$ـمدول است.

بنابر ۱۳.۱ همریختی حلقه‌ای یکتایی چون $\zeta : R[X] \to R'[\psi]$ (که در آن X مجهول است) وجود دارد که حاصل توسیع η است و $\zeta(X) = \psi$. (به ازای $f \in R[X]$، $\zeta(f)$ را با $f(\psi)$ نمایش می‌دهیم؛ دلیل آن نیز واضح است: اگر $f = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i$ آن‌گاه $\zeta(f) = \sum_{i=0}^{n} r_i \psi^i$.) حال می‌توانیم مطابق ۶.۶، M را با استفاده از ζ به عنوان $R[X]$ـمدول در نظر بگیریم.

بنابراین نتیجهٔ اصلی این بحث از این قرار است: نشان داده‌ایم که اگر M مدول مفروضی روی حلقهٔ تعویضپذیر R و ψ درونریختیی روی M باشد آن‌گاه می‌توانیم M را به صورت $R[X]$ـمدولی با عمل ضرب زیر در نظر بگیریم: به ازای $m \in M$، $t \in \mathbb{N}_0$ و $r_0, r_1, \ldots, r_t \in R$

$$(r_0 + r_1 X + \cdots + r_t X^t)(m) = r_0 m + r_1 \psi(m) + \cdots + r_t \psi^t(m).$$

حال تعریف ۱.۱۱ را در مورد فضای برداری V روی هیأت K یعنی در مورد Kـمدول V در نظر می‌گیریم. روشن است که Kـدرونریختی روی V چیزی جز Kـنگاشت خطی از V به

خودش نیست: به ازای هر چنین نگاشت خطی ψ با استفاده از ۱.۱۱ می‌توانیم V را به عنوان $K[X]$ـمدول در نظر بگیریم. می‌دانیم $K[X]$ د.ا.ا است، به علاوه در فصل ۱۰ چند قضیهٔ مهم تجزیه برای مدولهای متناهی‌مولد روی د.ا.ا ثابت کردیم؛ اگر V متناهی‌بعد باشد به وضوح $K[X]$ـمدول V متناهی‌مولد خواهد بود (زیرا عضوهای Kـپایهٔ V آن را به عنوان $K[X]$ـمدول تولید می‌کنند) و لذا آن قضیه‌های تجزیه را می‌توان در مورد V به کار برد.

توجه کنید که اگر عضوی از $K[X]$ وارونپذیر باشد، آن عضو عضو ناصفر K است و بالعکس؛ به علاوه هر ایدآل ناصفر $K[X]$ یک مولد تکین منحصر به فرد دارد. (یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای ناصفر از درجهٔ d در $K[X]$ تکین نامیده می‌شود اگر ضریب جملهٔ dام آن 1_K باشد.) اگر در قضایای ۳۲.۱۰ و ۳۵.۱۰ مدول ما $K[X]$ـمدول باشد و این شرط را داشته باشیم که مولد ایدآلهای مورد نظر تکین یا صفر باشد، آن قضایا را می‌توان ساده‌تر بیان کرد.

۲.۱۱ تذکر. فرض کنید V فضای برداری متناهی بعد روی هیأت K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$؛ V را با استفاده از ψ همان‌طور که در ۱.۱۱ توضیح داده شد به عنوان $K[X]$ـمدول، که در آن X مجهول است، در نظر بگیرید، لذا به ازای هر $v \in V$ داریم $Xv = \psi(v)$.

یک) توجه کنید که زیرمجموعهٔ U از V، $K[X]$ـزیرمدول است اگر و تنها اگر Kـزیرفضای V باشد و به ازای هر $u \in U$، $Xu = \psi(u) \in U$، یعنی اگر و تنها اگر U یک Kـزیرفضای V باشد که تحت ψ ناورداست.

دو) توجه کنید که $\mathrm{rank}_{K[X]} V = 0$. همچنین طول $K[X]$ـمدول V باید متناهی باشد (این مطلب را از جمله از ۴۲.۷ می‌توان نتیجه گرفت) و لذا از ۴۶.۷ نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) \neq 0$. لذا چندجمله‌ای تکین منحصر به فردی چون $m_{\psi,V} \in K[X]$ وجود دارد که $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = m_{\psi,V}K[X]$. این چندجمله‌ای $m_{\psi,V}$ را چندجمله‌ای مینیمال ψ روی V می‌نامیم.

توجه کنید که $m_{\psi,V}(\psi) = 0$ و اگر $f \in K[X]$ دارای این ویژگی باشد که $f(\psi) = 0$ آن‌گاه در $K[X]$ داریم $m_{\psi,V}|f$، همچنین $m_{\psi,V}$ در مجموعهٔ

$$\{f \in K[X] : f(\psi) = 0 \text{ و } f \text{ تکین است}\}$$

کوچکترین درجه را دارد و چنین عضوی یکتاست. در واقع

$$m_{\psi,V}K[X] = \mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = \{f \in K[X] : f(\psi) = 0\}$$

فرض را بر این قرار می‌دهیم که خواننده با مفاهیم اساسی جبر خطی که در ۳.۱۱ شرح داده می‌شود آشناست.

۳.۱۱ یادآوری. فرض کنید K هیأت و $h \in \mathbb{N}$. مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $h \times h$ با

درایه‌های متعلق به K را با $M_{h,h}(K)$ نمایش دهید. فرض کنید V فضای برداری h بُعدی روی K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$.

یک) فرض کنید $\mathcal{B} = (x_i)_{i=1}^{h}$ پایهٔ V باشد. ماتریس (نمایشگر) ψ نسبت به $\mathcal{B}$ ماتریس

$$A = A_{\psi,\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in M_{h,h}(K)$$

است که به ازای هر $j = 1, \dots, h$، $\psi(x_j) = \sum_{i=1}^{h} a_{ij}x_i$. گاه $A_{\psi,\mathcal{B}}$ را با $A(\psi, \mathcal{B})$ نمایش می‌دهیم.

نگاشت

$$\begin{aligned} \rho : \mathrm{End}_K(V) &\longrightarrow M_{h,h}(K) \\ \mu &\longmapsto A_{\mu,\mathcal{B}} \end{aligned}$$

هم یکریختی Kـفضاهاست و هم یکریختی حلقه‌ها.

دو) ۱.۱۱ را سرمشق قرار می‌دهیم و به ازای عضو مفروض B از $M_{h,h}(K)$ زیرحلقهٔ تعویضپذیر $K''[B]$ از $M_{h,h}(K)$ را در نظر می‌گیریم که

$$K'' = \{aI_h : a \in K\}$$

در این صورت همریختی حلقه‌ای منحصر به فردی چون $\xi : K[X] \to K''[B]$ وجود دارد که به ازای هر $a \in K$، $\xi(a) = aI_h$ و $\xi(X) = B$. به ازای $f \in K[X]$، $\xi(f)$ را با $f(B)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ (ناتهی) ذیل عضوی با کوچکترین درجه دارد که منحصر به فرد است

$$\{f \in K[X] : f(B) = 0 \text{ و } \text{تکین است } f\}$$

این چندجمله‌ای را با m_B نمایش می‌دهیم و آن را چندجمله‌ای مینیمال B می‌نامیم. این چندجمله‌ای دارای این ویژگی است که اگر $f \in K[X]$ و $f(B) = 0$ آن‌گاه در $K[X]$، $m_B | f$.

سه) فرض کنید $B \in M_{h,h}(K)$. در این صورت B ماتریس نمایشگر ψ نسبت به پایه‌ای از V است اگر و تنها اگر ماتریسی ناتکین چون $P \in M_{h,h}(K)$ وجود داشته باشد که $P^{-1}BP = A_{\psi,\mathcal{B}}$، یعنی اگر و تنها اگر B با ماتریس نمایشگر ψ نسبت به $\mathcal{B}$ روی K متشابه باشد.

چهار) اگر V مجموع مستقیم Kـزیرفضاهای ناصفر $C_1, \dots, C_n$ باشد و $(b_{ij})_{j=1}^{d_i}$ یک Kـپایهٔ C_i باشد (به ازای هر $i = 1, \dots, n$)، آن‌گاه

$$b_{11}, \dots, b_{1d_1}, b_{21}, \dots, b_{n-1,d_{n-1}}, b_{n1}, \dots, b_{nd_n}$$

Kـپایه‌ای چون B' برای V تشکیل می‌دهد. فرض کنید $A' = A_{\psi,B'}$ ماتریس نمایشگر ψ نسبت به B' باشد. در این صورت A' به صورت

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

است که در آن $A_i \in M_{d_i,d_i}(K)$ $(1 \leq i \leq n)$ اگر و تنها اگر $C_1, \ldots, C_n$ همگی تحت ψ ناوردا باشند، و در این صورت به ازای هر $i = 1, \ldots, n$ داریم

$$A_i = A(\psi|_{C_i}, (b_{ij})_{j=1}^{d_i})$$

یعنی A_i ماتریس نمایشگر تحدید ψ به C_i نسبت به پایهٔ $(b_{ij})_{j=1}^{d_i}$ است.

پنج) فرض کنید $B \in M_{h,h}(K)$. می‌توانیم $XI_h - B$ را به عنوان ماتریسی $h \times h$ روی هیأت کسرهای $K[X]$ در نظر بگیریم. دترمینان این ماتریس، یعنی $\det(XI_h - B)$، را چندجمله‌ای مشخصهٔ B می‌نامند؛ این چندجمله‌ای چندجمله‌ای تکین از درجهٔ h در $K[X]$ است.

۴.۱۱ تمرین. فرض کنید $h \in \mathbb{N}$ و K هیأت باشد. فرض کنید $B \in M_{h,h}(K)$. نشان دهید $\{f \in K[X] : f(B) = 0\}$ ایدآل $K[X]$ است و مولد تکین منحصر به فردش، m_B، یعنی چندجمله‌ای مینیمال B، است.

۵.۱۱ تذکر. حالت ۳.۱۱(یک) را در نظر بگیرید. توجه کنید که از یکریختی ۳.۱۱(یک) نتیجه می‌شود که $m_{\psi,V} = m_{A_{\psi,B}}$، یعنی چندجمله‌ای مینیمال ψ روی V برابر است با چندجمله‌ای مینیمال ماتریس نمایشگر ψ نسبت به پایهٔ B.

در اینجا بی‌مناسبت نیست چند کلمه‌ای دربارهٔ خط‌مشی اصلی این فصل بگوییم. به ازای هر درونریختی ψ روی فضای برداری V با بُعد $h > 0$ روی هیأت K، V را می‌توانیم با استفاده از ψ به گونه‌ای که در ۱.۱۱ آمد به عنوان $K[X]$ـمدول در نظر بگیریم و لذا به ازای هر $v \in V$ داریم $Xv = \psi(v)$. بنابر ۸.۱۰ یا ۱۱.۱۰، V را می‌توانیم به صورت مجموع مستقیم $K[X]$ـزیرمدولهایی دوری چون $C_1, \ldots, C_n$ بنویسیم که در شرایط مشخصی صدق می‌کنند. بنابر ۲.۱۱(یک) C_iها Kـزیرفضای V هستند و تحت ψ ناوردا هستند. بنابراین V مجموع مستقیم درونی زیرفضاهای $C_1, \ldots, C_n$ است. از ۳.۱۱(چهار) نتیجه می‌شود که اگر با روی هم گذاشتن پایه‌های C_iها پایه‌ای برای V تشکیل دهیم آن‌گاه ماتریس نمایشگر ψ روی V نسبت به این پایه به صورت "بلوکی قطری" خواهد بود. با توجه به این مطلب خوب است

$K[X]$ـزیرمدولی دوری چون U از V را در نظر بگیریم و ببینیم آیا پایه‌هایی برای U وجود دارند که ماتریسهای نمایشگر تحدید ψ به U نسبت به آن پایه‌ها ماتریسهای جالبی باشند. حال به این موضوع می‌پردازیم.

۶.۱۱ تعریف. فرض‌کنید K هیأت و X مجهول باشد. فرض‌کنید $f \in K[X]$ چندجمله‌ای تکین ناثابتی از درجهٔ d چون

$$f = a_۰ + a_۱X + \cdots + a_{d-۱}X^{d-۱} + X^d$$

باشد. در این صورت مقصود از ماتریس همراه f که آن را با $C(f)$ نشان می‌دهند، ماتریس زیر است

$$C(f) := \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ & -a_۲ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & -a_{d-۱} \end{pmatrix} \in M_{d,d}(K).$$

توجه کنید که به ازای $a \in K$ ماتریس همراه $X - a \in K[X]$ یعنی $C(X-a)$ چیزی جز ماتریس یک‌دریک (a) نیست.

۷.۱۱ تمرین. حالت ۶.۱۱ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال ماتریس همراه $C(f)$ را بیابید.

۸.۱۱ قضیه. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌بُعد ناصفر روی هیأت K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$؛ V را با استفاده از ψ به گونه‌ای که در ۱.۱۱ توضیح داده شد به عنوان $K[X]$ـمدول در نظر بگیرید که در آن X مجهول است و لذا به ازای هر $v \in V$، $Xv = \psi(v)$.

در این صورت $K[X]$ـمدول V دوری است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای تکین ناثابتی چون $f \in K[X]$ و پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V وجود داشته باشد که ماتریس ψ نسبت به $\mathcal{B}$ ماتریس همراه f (مذکور در ۶.۱۱) باشد.

وقتی این شرایط صادق باشند، $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = K[X]f$ و لذا چندجمله‌ای f تحت شرایط مذکور به طور یکتا تعیین می‌شود زیرا این چندجمله‌ای همان $m_{\psi,V}$، یعنی چندجمله‌ای مینیمال ψ روی V است.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $v \in V$ مولد $K[X]$ـمدول V باشد. چون V ناصفر و متناهی‌بُعد است بنابر ۲.۱۱(دو) باید داشته باشیم

$$۰ \subset \mathrm{Ann}_{K[X]}(V) \subset K[X]$$

و لذا چندجمله‌ای تکین (ناثابت) یکتایی چون

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in K[X]$$

وجود دارد که $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = K[X]f$. (البته $f = m_{\psi,V}$.) نشان می‌دهیم که $\mathcal{B} := (X^{i-1}v)_{i=1}^{d} = (\psi^{i-1}(v))_{i=1}^{d}$ پایهٔ V است.

چون V به عنوان $K[X]$ـمدول توسط v تولید می‌شود، هر عضو V به صورت gv است که در آن $g \in K[X]$؛ بنابر الگوریتم تقسیم برای چندجمله‌ایها، $q, r \in K[X]$ وجود دارند که r از درجهٔ کمتر از d (یا صفر) است و $g = qf + r$ و چون $fv = 0$ داریم $gv = rv$؛ به آسانی نتیجه می‌شود که V به عنوان Kـفضا توسط عضوهای $\mathcal{B}$ تولید می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که خانوادهٔ $\mathcal{B}$ دارای استقلال خطی است. فرض‌کنید $b_0, b_1, \ldots, b_{d-1} \in K$ و $\sum_{i=0}^{d-1} b_i X^i v = 0$. در این صورت چون V به عنوان $K[X]$ـمدول توسط v تولید می‌شود نتیجه می‌گیریم که

$$h := b_0 + b_1 X + \cdots + b_{d-1} X^{d-1} \in \mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = K[X]f.$$

چون درجهٔ f برابر d است نتیجه می‌شود که $h = 0$، و لذا به ازای هر $i = 0, \ldots, d-1$، $b_i = 0$. از این رو $\mathcal{B}$ پایهٔ V است و چون

$$\psi(X^{d-1}v) = X^d v = -a_0 v - a_1 X v - \cdots - a_{d-1} X^{d-1} v$$

به آسانی دیده می‌شود که ماتریس ψ نسبت به $\mathcal{B}$ برابر $C(f)$ است.

($\Longleftarrow$) فرض کنید که چندجمله‌ای تکین ناثابتی چون

$$f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d \in K[X]$$

و پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V وجود دارد که ماتریس ψ نسبت به $\mathcal{B}$ ماتریس همراه $C(f)$ باشد. در این صورت $\mathcal{B}$ باید d عضو داشته باشد: فرض کنید $\mathcal{B} = (y_i)_{i=1}^{d}$. شکل $C(f)$ نشان می‌دهد که به ازای هر $i = 2, \ldots, d$، $y_i = \psi^{i-1}(y_1) = X^{i-1}y_1$ و لذا V به عنوان $K[X]$ـمدول توسط y_1 تولید می‌شود و بنابراین دوری است. همچنین چون

$$\psi(y_d) = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \cdots - a_{d-1} y_d$$

نتیجه می‌شود که $fy_1 = 0$؛ به علاوه هیچ چندجمله‌ای ناصفری در $K[X]$ از درجهٔ کمتر از d نمی‌تواند y_1 را پوچ سازد زیرا $(X^{i-1}y_1)_{i=1}^{d}$ روی K دارای استقلال خطی است. از این رو $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = (0 :_{K[X]} y_1) = K[X]f$ و لذا $f = m_{\psi,V}$؛ بنابراین اثبات کامل است. ■

۹.۱۱ تعریف. فرض کنید K هیأت باشد و $h \in \mathbb{N}$. می‌گوییم ماتریس $A \in M_{h,h}(K)$ به صورت متعارف گویاست اگر (عدد $n \in \mathbb{N}$ و) چندجمله‌ایهای تکین ناثابت $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$ وجود داشته باشند که به ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $f_i | f_{i+1}$ یعنی

$$K[X]f_1 \supseteq K[X]f_2 \supseteq \cdots \supseteq K[X]f_n$$

و A به صورت "بلوکیِ قطری"

$$A = \begin{pmatrix} C(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(f_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(f_n) \end{pmatrix}$$

باشد.

حال می‌توانیم قضیهٔ صورت متعارف گویا برای درونریختیهای فضای برداری متناهی‌بُعد روی هیأت K را ثابت کنیم.

۱۰.۱۱ قضیهٔ صورت متعارف گویا. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌بُعد و ناصفری روی هیأت K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$. در این صورت پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V وجود دارد که ماتریس ψ نسبت به آن به صورت متعارف گویاست. به علاوه ماتریس نمایشگر ψ که به‌صورت متعارف گویا باشد یکی بیش نیست؛ چنین ماتریسی را ماتریس متعارف گویای ψ می‌نامیم.

به عبارت دیگر (عدد $n \in \mathbb{N}$ و) چندجمله‌ایهای تکین ناثابت $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $f_i | f_{i+1}$ داریم و به ازای پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V داریم

$$A_{\psi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(f_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(f_n) \end{pmatrix}$$

به علاوه چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_n$ که در این شرایط صدق می‌کنند به طور یکتا توسط ψ تعیین می‌شوند.

اثبات. با استفاده از ψ به گونه‌ای که در ۱.۱۱ شرح داده شد V را به عنوان $K[X]$ـمدول در نظر می‌گیریم، که در آن X مجهول است. در این صورت V یک $K[X]$ـمدول متناهی‌مولد

ناصفر با رتبهٔ بی‌تابی‌صفر می‌شود. حال قضیهٔ ۳۲.۱۰ را برای این مدول به کار می‌بریم. در واقع بر اساس ۱.۱۱، ۲.۱۱، ۳.۱۱ و ۸.۱۱ قضیهٔ صورت متعارف گویا به سهولت از قضیهٔ ۳۲.۱۰ نتیجه می‌شود. جزئیات این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۱۱.۱۱* تمرین. جزئیات اثبات ۱۰.۱۱ را ارائه دهید.

۱۲.۱۱ تمرین. حالت ۱۰.۱۱ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال ψ روی V را بر حسب چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_n$ که ماتریس متعارف گویای ψ را تعیین می‌کنند بیابید.

برای ماتریسها نیز قضیه‌ای نظیر قضیهٔ صورت متعارف گویا برقرار است که با استفاده از مفاهیم اساسی جبر خطی مذکور در ۳.۱۱(یک) و (سه) از ۱۰.۱۱ نتیجه می‌شود.

۱۳.۱۱ نتیجه: صورت متعارف گویای ماتریسها. فرض کنید K هیأت باشد و $h \in \mathbb{N}$؛ فرض کنید $A \in M_{h,h}(K)$. در این صورت A دقیقاً با یک ماتریس به صورت متعارف گویا (روی K) متشابه است و این ماتریس را صورت متعارف گویای A می‌نامیم.

به‌عبارت‌دیگر عددی چون $n \in \mathbb{N}$ و چندجمله‌ایهای تکین ناثابتی چون $f_1, \ldots, f_n \in K[X]$ وجود دارند که به ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $f_i | f_{i+1}$ و به ازای ماتریس وارونپذیری چون $P \in M_{h,h}(K)$،

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} C(f_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C(f_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & C(f_n) \end{pmatrix}.$$

همچنین چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_n$ که در این شرایط صدق می‌کنند به گونهٔ یکتا توسط A تعیین می‌شوند. ■

۱۴.۱۱ تمرین. حالت ۱۳.۱۱ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال A را بر حسب چندجمله‌ایهای $f_1, \ldots, f_n$ که صورت متعارف گویای A را تعیین می‌کنند، بیابید.

نتیجه بگیرید که قضیهٔ کیلی‌ـهمیلتن[1] برقرار است یعنی اینکه چندجمله‌ای مینیمال A مقسوم‌علیه چندجمله‌ای مشخصهٔ A در $K[X]$ است.

فرض کنید p چندجمله‌ای تحویلناپذیری در $K[X]$ باشد. ثابت کنید p مقسوم‌علیه چندجمله‌ای

1. Cayley-Hamilton

مشخصهٔ A در $K[X]$ است اگر و تنها اگر p مقسوم‌علیه چندجمله‌ای مینیمال A در $K[X]$ باشد.

در اینجا بی‌مناسبت نیست چندکلمه‌ای دربارهٔ فلسفهٔ کلی صورتهای متعارف بگوییم. حالت ۱۳.۱۱ را در نظر بگیرید. روشن است که رابطهٔ تشابه یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $M_{h,h}(K)$ است؛ نتیجهٔ ۱۳.۱۱ نشان می‌دهد که هر رده از ماتریسهای متشابه $h \times h$ روی K دقیقاً شامل یک ماتریس به صورت متعارف است و لذا دو ماتریس $h \times h$ روی K متشابه‌اند اگر و تنها اگر یک صورت متعارف گویا داشته باشند.

قضیهٔ صورت متعارف گویا یعنی قضیهٔ ۱۰.۱۱ اساساً نتیجهٔ قضیهٔ ۳۲.۱۰ است. شاید به یاد بیاورید که قبلاً در مورد تجزیهٔ مدولهای متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R به مجموع مستقیم Rـمدولهای دوری قضیهٔ مشابهی ثابت کردیم که در آن قضیه پوچسازهای Rـمدولهای دوریِ مورد بحث توان ایدآلهای اول بودند (قضیهٔ ۳۵.۱۰). طبعاً این سؤال مطرح می‌شود که آیا ۳۵.۱۰ نتایج جالبی برای صورت متعارف ماتریسها دارد یا ندارد. در این فصل می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم ولی این کار را تنها در حالتی انجام می‌دهیم که هیأت مربوطه جبری‌بسته باشد: برای اثبات قضیهٔ صورت متعارف ژوردان از ۳۵.۱۰ استفاده می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که هیأت K را جبری‌بسته می‌گوییم اگر هر چندجمله‌ای ناثابتِ $K[X]$ ریشه‌ای در K داشته باشد. قضیهٔ اصلی جبر بیان می‌کند که هیأت مختلط $\mathbb{C}$ جبری‌بسته است: مثلاً فصل ۱۸ از مرجع [۱۶] یا قضیهٔ ۷.۱۰ از [۱۷] را ببینید. وقتی K جبری‌بسته است چندجمله‌ایهای تحویلناپذیر تکین در $K[X]$ دقیقاً چندجمله‌ایهای به صورت $X - a$ هستند که در آن $a \in K$. بنابراین $K[X]$ـمدولهای دوریی را بررسی می‌کنیم که پوچسازهایشان توان چنین چندجمله‌ایهایی هستند.

۱۵.۱۱ تعریف. فرض کنید K هیأت باشد، $a \in K$ و $u \in \mathbb{N}$. در این صورت مقصود از aـماتریس ژوردان مقدماتی $u \times u$، که آن را با $J(a,u)$ نشان می‌دهند، ماتریس زیر است

$$J(a,u) := \begin{pmatrix} a & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۱ & a & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & a & \cdots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ & a \end{pmatrix} \in M_{u,u}(K)$$

که هر درایهٔ قطری آن برابر با a، درایه‌های "زیرقطری" آن ۱ و درایه‌های دیگرش صفرند.

توجه کنید که $J(a,۱)$ ماتریس یک‌دریک (a) است.

۱۶.۱۱ تمرین. حالت ۱۵.۱۱ را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال aـماتریس ژوردان مقدماتی $J(a, u)$ را بیابید.

حال می‌توانیم نتیجه‌ای مشابه با ۸.۱۱ ثابت کنیم.

۱۷.۱۱ قضیه. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌بعد ناصفر روی هیأت K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$؛ با استفاده از ψ به گونه‌ای که در ۱.۱۱ توضیح داده شد V را به عنوان $K[X]$ـمدول در نظر بگیرید، که طبق معمول X مجهول است، و لذا به ازای هر $v \in V$، $Xv = \psi(v)$. فرض کنید $a \in K$ و $u \in \mathbb{N}$.

در این صورت $K[X]$ـمدول V دوری است و $\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = (X-a)^u K[X]$ اگر و تنها اگر پایه‌ای چون $\mathcal{B}$ برای V وجود داشته باشد که ماتریس ψ نسبت به $\mathcal{B}$ همان aـماتریس ژوردان مقدماتی $J(a, u)$ (مذکور در ۱۵.۱۱) باشد.

اثبات. $(\Longleftarrow)$ فرض کنید $v \in V$ مولد $K[X]$ـمدول V باشد و

$$\mathrm{Ann}_{K[X]}(V) = (X-a)^u K[X]$$

نشان می‌دهیم که $\mathcal{B} := ((X-a)^{i-۱}v)_{i=۱}^{u}$ پایه‌ای برای V است.

چون V به عنوان $K[X]$ـمدول توسط v تولید می‌شود، هر عضو V به صورت gv است که در آن $g \in K[X]$؛ ولی زیرحلقهٔ $K[X-a]$ از $K[X]$ (۱۱.۱ را ببینید) شامل K و $X = (X-a)+a$ است و لذا از ۱۱.۱ نتیجه می‌شود که هر $g \in K[X]$ را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای از $(X-a)$ با ضرایب متعلق به K نوشت؛ چون $(X-a)^u v = ۰$ نتیجه می‌شود که V به عنوان Kـفضا توسط $\{(X-a)^{i-۱}v : ۱ \le i \le u\}$ تولید می‌شود.

حال نشان می‌دهیم که خانوادهٔ $\mathcal{B}$ دارای استقلال خطی است. فرض می‌کنیم $b_۰, b_۱, \ldots, b_{u-۱} \in K$ و $\sum_{i=۰}^{u-۱} b_i (X-a)^i v = ۰$. فرض می‌کنیم دست کم یکی از b_iها ناصفر باشد و در پی تناقض می‌گردیم. فرض می‌کنیم $j \in \mathbb{N}_۰$ کوچکترین عدد از اعداد صحیحی چون i باشد که $b_i \neq ۰$؛ دو طرف تساوی آخر را در $(X-a)^{(u-۱)-j}$ ضرب می‌کنیم، نتیجهٔ حاصل با این واقعیت که $(X-a)^{u-۱}v \neq ۰$ تناقض دارد.

در نتیجه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای V است؛ به آسانی دیده می‌شود که ماتریس ψ نسبت به $\mathcal{B}$ برابر $J(a, u)$ است.

$(\Longrightarrow)$ اثبات این قسمت به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

۱۸.۱۱* تمرین. اثبات ۱۷.۱۱ را کامل کنید.

۱۹.۱۱ تعریف. فرض کنید K هیأت باشد و $h \in \mathbb{N}$. می‌گوییم ماتریس $A \in M_{h,h}(K)$ به صورت متعارف ژوردان است اگر $a_۱, \ldots, a_n \in K$ و $u_۱, \ldots, u_n \in \mathbb{N}$ (و $n \in \mathbb{N}$) وجود

داشته باشند که A به صورت "بلوکیِ قطری"

$$A = \begin{pmatrix} J(a_1, u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(a_2, u_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(a_n, u_n) \end{pmatrix}$$

باشد، که در آن ماتریسهای روی "قطر" ماتریسهای ژوردان مقدماتی‌اند.

توجه کنید که در تعریف فوق لازم نیست a_1، ...، a_n متمایز باشند؛ لذا مثلاً ماتریس

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

به صورت متعارف ژوردان است. همچنین هر ماتریس قطری به صورت متعارف ژوردان است.

۲۰.۱۱ **تمرین.** چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال ماتریس دلخواهی (روی هیأت K) به صورت متعارف ژوردان را بیابید. بهتر است از نمادگذاری مفصلی مشابه با صورت قضیهٔ ۳۵.۱۰ استفاده کنید.

حال می‌توان از قضیهٔ ۳۵.۱۰ احکامی نظیر ۱۰.۱۱ و ۱۳.۱۱ به دست آورد. این بار جزئیات اثباتها را کاملاً به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲۱.۱۱ **قضیهٔ صورت متعارف ژوردان.** فرض کنید K هیأت جبری‌بسته باشد. فرض کنید V فضای برداری متناهی‌بعد ناصفر روی K باشد و $\psi \in \mathrm{End}_K(V)$. در این صورت پایه‌ای چون B برای V وجود دارد که ماتریس ψ نسبت به آن به صورت متعارف ژوردان است. به علاوه ماتریس ستعارف ژوردانی که نمایشگر ψ است به طور یکتا توسط ψ تعیین می‌شود مگر از لحاظ ترتیب قرار گرفتن ماتریسهای ژوردان مقدماتی روی " قطر". ■

۲۲.۱۱ **نتیجه: صورت متعارف ژوردان ماتریسها.** فرض کنید K هیأتی جبری‌بسته باشد و $h \in \mathbb{N}$؛ فرض کنید $A \in M_{h,h}(K)$. در این صورت A با ماتریسی به صورت متعارف ژوردان (روی K) متشابه است و این ماتریسِ به صورت متعارف ژوردان توسط A به طور یکتا تعیین می‌شود مگر از لحاظ ترتیب قرار گرفتن ماتریسهای ژوردان مقدماتی روی " قطر". ■

۲۳.۱۱* **تمرین.** احکام ۲۱.۱۱ و ۲۲.۱۱ را با استفاده از ۳۵.۱۰ و سایر مطالب این

فصل اثبات کنید.

۲۴.۱۱ تمرین. فرض کنید K هیأت جبری‌بسته و a، b و c سه عضو متمایز K باشند. برای هر یک از چندجمله‌ایهای $\chi \in K[X]$ داده شده در زیر تعداد رده‌های ماتریسهای 3×3ی متشابه روی K راکه چندجمله‌ای مشخصه‌شان برابر χ باشد تعیین کنید؛ برای هر یک از این رده‌ها ماتریسی به صورت متعارف ژوردان و ماتریس یکتای به صورت متعارف گویا، متعلق به آن رده، را بیابید.

یک) $\chi = (X-a)(X-b)(X-c)$؛

دو) $\chi = (X-a)^2(X-b)$؛

سه) $\chi = (X-a)^3$.

۲۵.۱۱ تمرین. فرض کنید K هیأتی جبری‌بسته باشد و $A \in M_{3,3}(K)$. فرض کنید چندجمله‌ای مشخصه و چندجمله‌ای مینیمال A معلوم باشند (و به عوامل خطی تجزیه شده باشند). ثابت کنید که صورت متعارف گویا و صورت متعارف ژوردان را می‌توان با استفاده از این معلومات به دست آورد.

۲۶.۱۱ تمرین. فرض کنید K هیأت جبری‌بسته باشد و $A \in M_{h,h}(K)$ که $h \in \mathbb{N}$. نشان دهید که A با ترانهاده‌اش A^T (روی K) متشابه است.

آیا هر ماتریس مربعی B روی هیأت دلخواه L با ترانهاده‌اش B^T (روی L) متشابه است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۷.۱۱ تمرین. فرض کنید K هیأت باشد و $A \in M_{h,h}(K)$ که $h \in \mathbb{N}$. فرض کنید که چندجمله‌ای مشخصهٔ A را می‌توان به صورت حاصلضرب عوامل خطی از $K[X]$ نوشت. نشان دهید که A با ماتریسی به صورت متعارف ژوردان (روی K) متشابه است و این ماتریسِ به صورت متعارف ژوردان به طور یکتا توسط A تعیین می‌شود مگر از لحاظ ترتیب قرارگرفتن ماتریسهای ژوردان مقدماتی روی "قطر".

۲۸.۱۱ گامهای بعدی. در این فصل سعی کردیم ارتباط بین قضیه‌های مهم تجزیهٔ مدولهای متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل که در فصل ۱۰ ثابت شدند و نظریهٔ صورتهای متعارف ماتریسها را ارائه دهیم. از آنجا که کتاب حاضر دربارهٔ جبر خطی نیست این موضوع را که چگونه می‌توان صورت متعارف ژوردان ماتریسهای مشخص را عملاً به دست آورد بررسی نکردیم. خوانندگان علاقه‌مند به این موضوعات می‌توانند فصل ۱۲ از مرجع [۴] را مطالعه کنند.

۱۲

چند کاربرد در نظریهٔ هیأتها

از اینجا به بعد بیشتر مطالب در مورد نظریهٔ بُعد حلقه‌های تعویضپذیر نوتری است. این نظریه شاخصی از "اندازهٔ" این حلقه‌ها به‌دست می‌دهد: به‌طور شهودی به‌نظر می‌آید که "اندازهٔ" حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ایهای روی هیأت K از n مجهول X_1، ...، X_n را می‌توان به معنایی برابر با n دانست. این نظرِ شهودی به‌خوبی با نظریهٔ بُعد سازگار است. ولی برای بررسی جامع نظریهٔ بُعدِ دامنهٔ صحیحی چون R که جبر متناهی‌مولد روی هیأت K است (۹.۸ را ببینید) لازم است مفهوم "درجهٔ تعالی" هیأت کسرهای R روی K را بدانیم: به تسامح می‌توان گفت این درجهٔ تعالی بزرگترین عدد از اعدادی چون $i \in \mathbb{N}$ است که به‌ازای هر یک از آن iها i عضو از هیأت کسرهای R وجود دارند که روی K استقلال جبری دارند؛ و خواهیم دید که این عدد شاخص مناسبی برای بُعد R است. از این‌رو در این فصل، مقدماتی را که برای درک مفهوم درجهٔ تعالی زبرهیأتها لازم‌اند ارائه می‌کنیم.

لذا قسمتی از این فصل به معرفی مفاهیمی از نظریهٔ هیأتها اختصاص دارد که بعداً در این کتاب به‌کار خواهند رفت. ولی این فصل جنبهٔ دیگری نیز دارد که شاید از عنوان فصل مستفاد شود: در واقع برخی از مفاهیم فصل ۳ دربارهٔ ایدآلهای اول و ایدآلهای ماکسیمال همراه با احکامی چون ۱۰.۵ و ۱۵.۵ در مورد وجود همریختیهای جبرها در حالتهایی که حلقه‌های مربوطه حلقهٔ کسرها هستند، ابزارهای خوبی برای دستیابی به قسمتی از مبانی نظریهٔ توسیع هیأتها هستند و ما در قسمت اول این فصل از این ابزارها برای دستیابی به آن مبانی استفاده خواهیم کرد. لذا در

ابتدای این فصل مباحثی چون زیرهیأت اولِ هیأت، مشخصهٔ هیأت، تولید زبَرهیأت، عضوهای جبری و متعالی و توسیع جبری را به‌سرعت مرور می‌کنیم. خواهیم دید که با استفاده از مطالبی از فصول قبل که در بالا به آنها اشاره کردیم می‌توان پیشرفتی سریع در این مباحث داشت. ولی ما توجه خود را به مباحثی معطوف می‌کنیم که یا بتوان مفاهیم جبر تعویضپذیر را در آنها به کار برد یا آن مباحث بعداً در این کتاب لازم باشند، و لذا متذکر می‌شویم که این فصل فصل جامعی در نظریهٔ مقدماتی هیأتها نیست.

۱.۱۲ تعریف. زیرمجموعهٔ F از هیأت K را زیرهیأت K می‌گوییم اگر F با اعمال K هیأت باشد. در این صورت می‌گوییم "K هیأت حاصل از توسیع F یا زبرهیأت F است" یا می‌گوییم "F به K توسیع یافته است" و وقتی می‌نویسیم "توسیع $K \supseteq F$" مقصود "توسیع F به K" است.

در این حالت $1_K = 1_F$ و لذا F به‌معنی ۴.۱ زیرحلقهٔ K است زیرا در K داریم $1_F^2 = 1_F = 1_F 1_K$.

می‌گوییم که K هیأت میانی بین F و L است اگر K زبرهیأت F و L زبرهیأت K باشد.

نگاشت $f : K_1 \to K_2$ که در آن K_1 و K_2 هیأت‌اند همریختی یا همریختی هیأتها یا همریختی هیأتی نامیده می‌شود اگر همریختی حلقه‌ای باشد. در این حالت $\text{Ker } f = \{0_{K_1}\}$ (زیرا هستهٔ f باید ایدآل سرهٔ K_1 باشد) و لذا بنابر ۲.۲، f یک‌به‌یک است.

۲.۱۲ مثال. فرض کنید K هیأت و X مجهول باشد.

یک) هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح $K[X]$ را با $K(X)$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از همریختی مرکب $K \to K[X] \to K(X)$ که ترکیب همریختیهای حلقه‌ای یک‌به‌یک طبیعی است می‌توانیم $K(X)$ را به‌عنوان زبرهیأت K در نظر بگیریم. $K(X)$ را هیأت توابع گویا از X با ضرایب متعلق به K می‌نامیم. هر عضو دلخواه $K(X)$ را می‌توانیم به‌صورت f/g بنویسیم که در آن f و g چندجمله‌ایهایی از X با ضرایب متعلق به K هستند و $g \neq 0$.

دو) فرض کنید $m \in K[X]$ چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکین از X با ضرایب متعلق به K باشد. بنابر ۳۴.۳، حلقهٔ $L := K[X]/mK[X]$ هیأت است و همریختی مرکب

$$K \longrightarrow K[X] \longrightarrow K[X]/mK[X] = L$$

حاصل از ترکیب همریختیهای حلقه‌ای طبیعی باید (بنابر ۱.۱۲) یک‌به‌یک باشد گرچه همریختی حلقه‌ای دوم یک‌به‌یک نیست. با استفاده از این همریختی مرکب می‌توانیم L را به‌عنوان زبرهیأت K در نظر بگیریم. همچنین توجه کنید که اگر نگارهٔ طبیعی X (یعنی نگارهٔ X تحت همریختی طبیعی) در L یعنی $X + mK[X]$ را با α نمایش دهیم آن‌گاه $m(\alpha) = 0$: برای اثبات این

مطلب فرض کنید $m = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ (که $a_n = 1$) و توجه کنید که

$$m(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i (X + mK[X])^i = m + mK[X] = 0_L$$

(زیرا هر $a \in K$ را با نگارهٔ طبیعیش $a + mK[X] \in L$ یکی می‌گیریم).

لذا به‌ازای K و چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکین مفروض $m \in K[X]$ زیرهیأتی چون L از K ساخته‌ایم که m در آن ریشه دارد.

۳.۱۲* تمرین. مطابق ۲.۱۲(دو) فرض کنید m چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکین در $K[X]$ و از درجهٔ n است و $\alpha = X + mK[X] \in L := K[X]/mK[X]$ و هیأت L را چنانکه در ۲.۱۲(دو) توضیح داده شد به‌عنوان زبرهیأت K در نظر بگیرید. فرض کنید $\lambda \in L$. نشان دهید که عضوهای منحصر به‌فردی چون $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$ وجود دارند که

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^i;$$

نتیجه بگیرید که وقتی L را با تحدید اسکالرها به‌عنوان فضایی برداری روی K در نظر می‌گیریم، داریم $\operatorname{vdim}_K L = n$.

۴.۱۲ تمرین. چه مطالبی دربارهٔ هیأت $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)\mathbb{R}[X]$ می‌توان گفت؟

۵.۱۲* تمرین. فرض کنید K هیأت و X مجهول باشد. فرض کنید $g \in K[X]$ چندجمله‌ای ناثابتی باشد. ثابت کنید که زبرهیأتی چون K' از K وجود دارد که g در $K'[X]$ به حاصلضرب عوامل خطی تجزیه می‌شود.

۶.۱۲* تمرین. معیار زیرهیأتها. فرض کنید F زیرمجموعهٔ هیأت K باشد. نشان دهید F زیرهیأت K است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

یک) $1_K \in F$؛

دو) هرگاه $a, b \in F$ آن‌گاه $a - b \in F$؛

سه) هرگاه $a, b \in F$ و $b \neq 0_K$ آن‌گاه $ab^{-1} \in F$.

نتیجه بگیرید که اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از زیرهیأتهای K زیرهیأت K است. همچنین نتیجه بگیرید که اگر F زیرهیأت K باشد آن‌گاه اشتراک هر خانوادهٔ ناتهی از هیأتهای میانی بین F و K هیأتی میانی بین F و K است.

۷.۱۲ تذکر. فرض کنید R دامنهٔ صحیح و $Q(R)$ هیأت کسرهای R باشد. فرض کنید L هیأت و $f : R \to L$ همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک باشد.

یک) چون $f(R\backslash\{\circ_R\}) \subseteq L\backslash\{\circ_L\}$ بلاواسطه از ۱۰.۵ و ۵.۵ نتیجه می‌شود که همریختی $f' : Q(R) \to L$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $r \in R$ و $\circ \neq r' \in R$، $f'(r/r') = f(r)f(r')^{-1}$. به‌آسانی دیده می‌شود که $\operatorname{Im} f'$ کوچکترین زیرهیأت L است که $f(R)$ را شامل می‌شود.

دو) توجه کنید که $Q(R)$ تنها زیرهیأت $Q(R)$ است که R را شامل می‌شود.

۸.۱۲ تذکر. یک) فرض کنید R و S دامنهٔ صحیح و $Q(R)$ و $Q(S)$ به‌ترتیب هیأت کسرهای R و S باشند. فرض کنید $f : R \to S$ یکریختی حلقه‌ای باشد.

اگر ۷.۱۲(یک) را در مورد همریختی مرکب

$$R \xrightarrow{f} S \longrightarrow Q(S)$$

(که در آن همریختی دوم همریختی طبیعی است) بکار بریم، به‌آسانی نتیجه می‌شود که از f یکریختی $f' : Q(R) \to Q(S)$ به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $r \in R$ و $\circ \neq r' \in R$، $f'(r/r') = f(r)/f(r')$.

دو) فرض کنید K و L هیأت و $g : K \to L$ یکریختی باشد؛ فرض کنید X و Y مجهول باشند. به‌آسانی از ۱۶.۱ استنتاج می‌شود که از g یکریختی حلقه‌ای $\tilde{g} : K[X] \to L[Y]$ به‌دست می‌آید که توسیع g است و $\tilde{g}(X) = Y$. با استفاده از بند (یک) فوق در مورد این یکریختی یکریختی $\overline{g} : K(X) \to L(Y)$ از هیأتهای توابع گویا به‌دست می‌آید که توسیع g است و $\overline{g}(X) = Y$.

۹.۱۲ زیرهیأت اول هیأت. می‌گوییم هیأت F هیأت اول است اگر F زیرهیأتی نداشته باشد که زیرمجموعهٔ سره‌اش باشد (یعنی F "زیرهیأت سره" نداشته باشد).

فرض کنید K هیأت باشد. بنابر معیار زیرهیأتها، یعنی ۶.۱۲، اشتراک همهٔ زیرهیأتهای K زیرهیأتی از K است که زیرمجموعهٔ هر زیرهیأت دیگر K است و لذا "کوچکترین" زیرهیأت K است؛ بنابراین زیرهیأت اول منحصر به‌فرد K است.

۱۰.۱۲ مشخصهٔ هیأت. فرض کنید K هیأت و $\prod$ زیرهیأت اولش باشد. از معیار زیرهیأتها یعنی ۶.۱۲ روشن است که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $n1_K \in \prod$. لذا همریختی حلقه‌ای $f : \mathbb{Z} \to \prod$ وجود دارد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $f(n) = n1_K$ (۱۰.۱ را ببینید). بنابر قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲ داریم $\mathbb{Z}/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. چون $\operatorname{Im} f$ زیرحلقهٔ هیأت $\prod$ است، پس دامنهٔ صحیح است و لذا بنابر ۲۳.۳، $\operatorname{Ker} f$ ایدآل اول $\mathbb{Z}$ است. می‌دانیم هر ایدآل $\mathbb{Z}$ اصلی است و همهٔ ایدآلهای اول $\mathbb{Z}$ را می‌شناسیم (۳۴.۳ را ببینید): یا $\operatorname{Ker} f = p\mathbb{Z}$ که p عددی اول است یا $\operatorname{Ker} f = \circ\mathbb{Z}$، لذا دو حالت مطرح می‌شود:

یک) اگر به‌ازای عددی اول چون p، $\operatorname{Ker} f = \{n \in \mathbb{Z} : n1_K = \circ_K\} = p\mathbb{Z}$

می‌گوییم مشخصهٔ K برابر p است. در این حالت p کوچکترین عدد از اعداد صحیح مثبتی چون n است که $n1_K = 0_K$، و $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ هیأت است، لذا $\operatorname{Im} f \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ نیز هیأت است و لذا چون $\operatorname{Im} f$ زیرهیأتی از زیرهیأت اول $\prod$ از K است باید داشته باشیم

$$\prod = \operatorname{Im} f \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

دو) اگر $\operatorname{Ker} f = \{n \in \mathbb{Z} : n1_K = 0_K\} = 0\mathbb{Z}$، می‌گوییم مشخصهٔ K برابر ۰ است. در این حالت ۰ تنها عدد صحیحی چون n است که $n1_K = 0_K$، و $f : \mathbb{Z} \to \prod$ همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک است و لذا بنابر ۷.۱۲ (یک) یکریختیی چون $f' : \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \prod$ از f به دست می‌آید.

۱۱.۱۲ تذکر. فرض کنید L زیرهیأت K باشد.

یک) مشخصهٔ K را با $\operatorname{char} K$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که این عدد مولد نامنفی منحصر به‌فرد ایدآل $\{n \in \mathbb{Z} : n1_K = 0_K\}$ از $\mathbb{Z}$ است.

دو) همچنین توجه کنید که $\operatorname{char} K = \operatorname{char} L$.

۱۲.۱۲ تمرین. فرض کنید K هیأتی با مشخصهٔ مثبت p باشد. نشان دهید که نگاشت $f : K \to K$ با تعریف $f(a) = a^p$، به‌ازای هر $a \in K$، همریختی است. (این نگاشت همریختی فروبنیوس[1] K نامیده می‌شود.)

همان‌گونه که از معیار زیرحلقه‌ها، یعنی ۵.۱، مفهوم "الحاق حلقه‌ای" مذکور در ۱۱.۱ حاصل شد و از معیار زیرمدولها، یعنی ۸.۶، مفهوم تولید زیرمدولها به‌دست آمد، از معیار زیرهیأتها، یعنی ۶.۱۲، نیز مفهوم "الحاق هیأتی" یا تولید هیأتهای میانی حاصل می‌شود.

۱۳.۱۲ الحاق هیأتی (تولید هیأتهای میانی). فرض کنید K زیرهیأت F باشد و $\Gamma \subseteq K$. در این صورت $F(\Gamma)$ را اشتراک همهٔ زیرهیأتهای K که شامل هر دو مجموعهٔ F و Γ هستند تعریف می‌کنیم؛ یعنی اشتراک همهٔ هیأتهای میانی بین F و K که شامل Γ هستند. لذا بنابر معیار زیرهیأتها، یعنی ۶.۱۲، $F(\Gamma)$ کوچکترین هیأت میانی بین F و K است که Γ را شامل می‌شود.

گوییم $F(\Gamma)$ هیأت حاصل از الحاق Γ به F است یا، به بیان دیگر، هیأت میانی بین F و K است که توسط Γ تولید می‌شود.

در حالت خاصی که Γ مجموعه‌ای متناهی چون $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ باشد $F(\Gamma)$ را به‌صورت $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ می‌نویسیم. در واقع می‌گوییم زیرهیأت L روی F متناهی‌مولد است اگر ($h \in \mathbb{N}$ و) $\beta_1, \ldots, \beta_h \in L$ وجود داشته باشند که $L = F(\beta_1, \ldots, \beta_h)$. (واضح است که F روی F متناهی‌مولد است، به این دلیل ساده که به‌ازای هر $a \in F$، $F = F(a)$.)

1. Frobenius

توجه کنید که به‌ازای مجهول X، نمادگذاری مذکور در ۲.۱۲(یک)، یعنی به‌کار بردن نماد $F(X)$ برای هیأت توابع گویای از X با ضرایب متعلق به F با نمادگذاری پاراگراف قبل سازگار است زیرا $F(X)$ کوچکترین زیرهیأت $F(X)$ است که F و X را شامل می‌شود.

۱۴.۱۲* تمرین. فرض کنید K زبرهیأت F و Γ و Δ زیرمجموعه‌هایی از K باشند. نشان دهید که $F(\Gamma \cup \Delta) = F(\Gamma)(\Delta)$ و

$$F(\Gamma) = \bigcup_{\Omega \subseteq \Gamma, |\Omega| < \infty} F(\Omega).$$

۱۵.۱۲ تذکر فرض کنید K زبرهیأت F باشد و $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in K$. فرض کنید $\sigma \in S_n$، که S_n گروه جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ است. از ۱۴.۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} F(\alpha_۱)(\alpha_۲)\ldots(\alpha_n) &= F(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) = F(\alpha_{\sigma(۱)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) \\ &= F(\alpha_{\sigma(۱)})(\alpha_{\sigma(۲)})\ldots(\alpha_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

لذا برای الحاق مجموعه‌ای متناهی چون Γ (از عضوهای K) به F می‌توان عضوهای Γ را یکی پس از دیگری به هر ترتیب دلخواه به F الحاق کرد.

با توجه به این نتیجهٔ آخر، یعنی ۱۵.۱۲، هیأتهای میانی بین F و K به‌صورت $F(\alpha)$ که از الحاق یک تک‌عضو K (یعنی α) به F به‌دست می‌آیند اهمیت بیشتری می‌یابند. اصطلاح خاصی در مورد این توسیعها وجود دارد.

۱۶.۱۲ تعریف. می‌گوییم که توسیع $F \subseteq K$ ساده است (یا K روی F ساده است) اگر $\alpha \in K$ وجود داشته باشد که $K = F(\alpha)$؛ یعنی K را بتوان با الحاق یکی از عضوهایش به F به‌دست آورد.

۱۷.۱۲ تذکر. فرض‌کنید K هیأت و X مجهول باشد و فرض‌کنید m چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکین در $K[X]$ باشد. توجه کنید که هر دو توسیع $K \subseteq K(X)$ و $K \subseteq K[X]/mK[X]$ مذکور در تمرینهای ۲.۱۲ و ۳.۱۲ ساده‌اند.

۱۸.۱۲ تذکر. فرض کنید L زبرهیأت K باشد و $\theta \in L$. حال می‌خواهیم ساختار هیأت میانی $K(\theta)$ بین K و L را بررسی کنیم. زیرحلقهٔ $K[\theta]$ از L به بحث ما مربوط می‌شود: ۱۱.۱ را ببینید. یادآوری می‌کنیم که $K[\theta]$ کوچکترین زیرحلقهٔ L است که K و θ را شامل می‌شود. چون هر زیرهیأت زیرحلقه نیز است، باید داشته باشیم $K[\theta] \subseteq K(\theta)$ و این مطلب به ما کمک می‌کند که ساختار $K(\theta)$ را بشناسیم. البته خواننده باید تفاوت بین $K(\theta)$ و $K[\theta]$ را درک کند:

اولی "هیأت حاصل از الحاق" θ به K است در حالی‌که دومی "حلقهٔ حاصل از الحاق" θ به K است.

توجه کنید که بنابر ۱.۱۱،

$$K[\theta] = \left\{ \sum_{i=0}^{t} a_i\theta^i : t \in \mathbb{N}_0,\ \ a_0, \ldots, a_t \in K \right\}$$

و لذا می‌توان آن را مجموعهٔ "چندجمله‌ایهای" از θ با ضرایب متعلق به K دانست. فرض کنید X مجهول باشد. از ۱۳.۱ نتیجه می‌شود که همریختی حلقه‌ای پوشایی چون $g : K[X] \to K[\theta]$ وجود دارد که $g|_K = \mathrm{Id}_K$ و $g(X) = \theta$ ؛ در واقع به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$: و $a_0, \ldots, a_n \in K$ داریم

$$g\left(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i\theta^i.$$

۱۹.۱۲* تمرین. فرض کنید L زیرهیأت K باشد و عضوهای $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ با هیأت کسرهای $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ یکریخت است و هر عضو β از $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ را می‌توان به‌صورت

$$\beta = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{-1}$$

نوشت که در آن $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ و $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

۲۰.۱۲ عضوهای جبری و متعالی. حالت ۱۸.۱۲ را در نظر بگیرید که در آن L زیرهیأت K است و $\theta \in L$. همریختی حلقه‌ای $g : K[X] \to K[\theta] \subseteq K(\theta)$ را در نظر بگیرید که به‌ازای هر $a \in K$، $g(a) = a$ و $g(X) = \theta$. حال بنابر قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲ از g یکریختی حلقه‌ای

$$\overline{g} : K[X]/\mathrm{Ker}\ g \to \mathrm{Im}\ g = K[\theta]$$

به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $h \in K[X]$، $\overline{g}(h + \mathrm{Ker}\ g) = g(h)$. چون $K[\theta]$ زیرحلقهٔ یک هیأت و لذا دامنهٔ صحیح است از ۲۳.۳ نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ker}\ g$ ایدآل اول $K[X]$ است: لذا بنابر ۳۴.۳ داریم $\mathrm{Ker}\ g = mK[X]$، که در آن $m \in K[X]$ چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکین است، یا $\mathrm{Ker}\ g = 0$. وجود این دو امکان بدین معنی است که باید دو حالت را در نظر بگیریم:

یک) اگر به‌ازای چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکینی چون $m \in K[X]$،

$$\mathrm{Ker}\ g = \{h \in K[X] : h(\theta) = 0\} = mK[X]$$

می‌گوییم θ روی K (یا نسبت به K) جبری است. در این حالت چندجمله‌ایهای ناصفری در $K[X]$ وجود دارند که θ ریشهٔ آنهاست و m در $K[X]$ مقسوم‌علیه هر چندجمله‌ای با این ویژگی است، به‌علاوه m چندجمله‌ای تکینی است که از میان چندجمله‌ایهای متعلق به $K[X]$ با ریشهٔ θ کوچکترین درجه را دارد (و این شرط m را به‌طور یکتا تعیین می‌کند)؛ همچنین m را می‌توان به‌عنوان چندجمله‌ای تحویلناپذیر تکینی از $K[X]$ که ریشهٔ θ دارد مشخص ساخت، زیرا چنین چندجمله‌ای منحصر به‌فرد است.

این چندجمله‌ایِ تحویلناپذیر تکینِ $m \in K[X]$ را چندجمله‌ای مینیمال θ نسبت به K یا روی K می‌نامیم.

در این حالت بنابر ۳۴.۳، $\mathrm{Ker}\ g$ در واقع ایدآل ماکسیمال $K[X]$ است و چون نگاشتِ

$$\overline{g} : K[X]/mK[X] = K[X]/\mathrm{Ker}\ g \xrightarrow{\cong} K[\theta]$$

یکریختی است، بنابر ۳.۳، $K[\theta]$ هیأت است. چون $K[\theta] \subseteq K(\theta)$ و $K(\theta)$ کوچکترین زیرهیأت L است که K و θ را شامل می‌شود در این حالت باید داشته باشیم $K[\theta] = K(\theta)$. لذا گاه ممکن است هیأت الحاقی و حلقهٔ الحاقی یکی شوند!

با استفاده از یکریختی $\overline{g}$ می‌توانیم ساختار $K[\theta]$ را مشخص کنیم زیرا قبلاً در ۲.۱۲ ساختار $K[X]/mK[X]$ را به‌عنوان زبرهیأت K تا حدی بررسی کردیم. قرار دهید $\alpha = X + mK[X] \in K[X]/mK[X]$؛ توجه کنید که به‌ازای هر $a \in K$، $\overline{g}(a) = a$ و $\overline{g}(\alpha) = \theta$. لذا، به تسامح می‌توان گفت اعمال جمع و ضرب در $K[\theta]$ را مانند اعمال جمع و ضرب در هیأت رده‌های مانده‌ای $K[X]/mK[X]$ انجام می‌دهیم که در آن θ نقش $X + mK[X]$ را ایفا می‌کند.

درجهٔ m را با n نمایش دهید. بنابر الگوریتم تقسیم چندجمله‌ایها، هر $h \in K[X]$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت $h = qm + r$ نوشت که $q, r \in K[X]$ و r (یا صفر یا) از درجهٔ کمتر از n است. از این مطلب به‌آسانی نتیجه می‌شود (تمرین ۳.۱۲ را ببینید) که هر $\lambda \in K[X]/mK[X]$ را می‌توان به‌گونهٔ یکتا به‌صورت

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \alpha^i$$

نوشت که در آن $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$؛ از این‌رو هر $\mu \in K[\theta]$ را می‌توان به‌گونهٔ یکتا به‌صورت

$$\mu = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \theta^i$$

نوشت که در آن $b_0, \ldots, b_{n-1} \in K$. لذا اگر $K(\theta)$ را با تحدید اسکالرها به‌عنوان فضای برداری

روی K در نظر بگیریم، داریم

$$\mathrm{vdim}_K K(\theta) = n = \deg m.$$

دو) اگر $\mathrm{Ker}\, g = \{h \in K[X] : h(\theta) = \circ\} = \circ$، می‌گوییم θ روی (یا نسبت به) K متعالی است. در این حالت تنها چندجمله‌ای در $K[X]$ که θ ریشهٔ آن است چندجمله‌ای صفر است و g یک‌به‌یک است. بنابر ۷.۱۲، از g یکریختی هیأتی $g' : K(X) \to K(\theta)$ به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $a \in K$، $g'(a) = a$ و $g'(X) = \theta$. لذا اگر θ روی K متعالی باشد $K(\theta)$ مانند هیأت توابع گویای $K(X)$ است که در آن θ نقش X را دارد.

همچنین توجه کنید که در این حالت داریم $K[\theta] \neq K(\theta)$ زیرا $K[\theta] \cong K[X]$ و $K[X]$ هیأت نیست.

تذکر دیگری که باید در حالتی که θ روی K متعالی است بدهیم این است که وقتی $K(\theta)$ را با تحدید اسکالرها به‌عنوان فضای برداری در نظر می‌گیریم داریم

$$\mathrm{vdim}_K K(\theta) = \mathrm{vdim}_K K(X) = \infty$$

زیرا به‌ازای هر $r \in \mathbb{N}$ خانوادهٔ $(X^i)_{i=\circ}^{r}$ روی K دارای استقلال خطی است.

۲۱.۱۲ تذکر. فرض کنید L زیرهیأت K باشد و $\theta \in L$.

یک) بنابه ۲۰.۱۲ روشن است که θ نسبت به K جبری است اگر و تنها اگر عضو ناصفر $h \in K[X]$ وجود داشته باشد که $h(\theta) = \circ$.

واضح است که هر $a \in K$ روی K جبری است، به این دلیل ساده که a ریشهٔ چندجمله‌ای $X - a \in K[X]$ است.

دو) همچنین از ۲۰.۱۲ نتیجه می‌شود که θ نسبت به K جبری است اگر و تنها اگر وقتی با تحدید اسکالرها $K(\theta)$ را به‌عنوان فضای برداری روی K در نظر می‌گیریم، $\mathrm{vdim}_K K(\theta)$ متناهی باشد.

۲۲.۱۲ تمرین. (این تمرین تنها برای خوانندگانی است که فصل ۱۱ را مطالعه کرده‌اند.) فرض کنید L زیرهیأت K باشد و $\theta \in L$ روی K جبری و چندجمله‌ای مینیمال آن m باشد. Kـدرونریختی ψ_θ روی Kـ فضای متناهی‌بُعد $K(\theta)$ را در نظر بگیرید که به‌ازای هر $b \in K(\theta)$، $\psi_\theta(b) = \theta b$. نشان دهید که m به‌معنی ۲.۱۱(دو) چندجمله‌ای مینیمال ψ_θ روی $K(\theta)$ است.

از تذکر ۲۱.۱۲(دو) دربارهٔ بُعد فضاهای برداری به‌طور طبیعی به مفهوم مهمی از نظریهٔ توسیع هیأتها یعنی مفهوم توسیع متناهی هیأتها می‌رسیم. حال این مفهوم را تعریف می‌کنیم.

۲۳.۱۲ تعریف. فرض کنید K زیرهیأت F باشد. در این صورت K را می‌توان با تحدید

اسکالرها به‌عنوان فضای برداری روی F در نظر گرفت: بُعد این فضای برداری را با $[K:F]$ نمایش می‌دهیم و آن را درجهٔ K روی F می‌نامیم. لذا $[K:F] = \mathrm{vdim}_F K$.
می‌گوییم توسیع $F \subseteq K$ متناهی است (یا K روی F متناهی است) اگر $[K:F]$ متناهی باشد.

از ۲۱.۱۲(دو) نتیجه می‌شود که اگر L زیرهیأت K باشد و $\theta \in L$ آن‌گاه عضو θ روی K جبری است اگر و تنها اگر توسیع $K \subseteq K(\theta)$ متناهی باشد.

۲۴.۱۲ تمرین. فرض کنید F هیأتی متناهی یعنی هیأتی با تعدادی متناهی عضو باشد. نشان دهید تعداد عضوهای F برابر p^n است که در آن p عددی اول و n عددی صحیح و مثبت است.

۲۵.۱۲ تمرین. (این تمرین برای خوانندگانی است که با قضیهٔ اصلی گروههای آبلی در فصل ۱۰ یا در مطالعات دیگر آشنا شده‌اند.) ثابت کنید که گروه ضربیِ همهٔ عضوهای ناصفر هر هیأت متناهی دوری است. (این نتیجه بسیار مهم است و لذا راهنمایی می‌کنیم که قضیهٔ اصلی گروههای آبلی، یعنی ۳۹.۱۰، را با توجه به این موضوع به‌کار ببرید که به‌ازای $n \in \mathbb{N}$ حداکثر n عضو در هیأت مفروض F وجود دارند که ریشهٔ چندجمله‌ای $X^n - 1 \in F[X]$اند؛ همچنین می‌توانید ۹.۱۰ را به‌کار ببرید.)

۲۶.۱۲ قضیهٔ درجه‌ها. فرض کنید L زیرهیأت K و K زیرهیأت F باشد. در این صورت L روی F متناهی است اگر و تنها اگر L روی K و K روی F متناهی باشند؛ به‌علاوه، در این حالت

$$[L:F] = [L:K][K:F].$$

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید L روی F متناهی باشد. در این صورت چون K Fـزیرفضای L است نتیجه می‌شود که K روی F متناهی است. همچنین هر پایهٔ L به‌عنوان Fـفضا خودبه‌خود مجموعهٔ مولد L به‌عنوان Kـفضاست و لذا L روی K متناهی است.
($\Longrightarrow$) فرض کنید L روی K و K روی F متناهی باشند. می‌نویسیم $[L:K] = n$ و $[K:F] = m$؛ فرض کنید $(\phi_i)_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای Kـفضای L و $(\psi_j)_{j=1}^{m}$ پایه‌ای برای Fـفضای K باشد. نشان می‌دهیم که خانوادهٔ

$$\mathcal{B} := (\phi_i \psi_j)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$$

پایه‌ای برای L به‌عنوان Fـفضاست. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود زیرا فرمول آخر قضیه نیز ثابت می‌شود.

فرض کنید $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ خانواده‌ای از عضوهای F باشد که

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\phi_i\psi_j = 0$$

به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ فرض کنید $b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\psi_j (\in K)$. در این صورت

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\phi_i = 0$$

و لذا چون $(\phi_i)_{i=1}^{n}$ روی K دارای استقلال خطی است، داریم

$$0 = b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\psi_j \qquad \text{به‌ازای هر} \; i = 1, \ldots, n$$

از این‌رو چون $(\psi_j)_{j=1}^{m}$ روی F استقلال خطی دارد، به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ و $j = 1, \ldots, m$ داریم $a_{ij} = 0$. لذا خانوادهٔ $\mathcal{B}$ روی F دارای استقلال خطی است.

حال فرض کنید $c \in L$. در این صورت $d_1, \ldots, d_n \in K$ وجود دارند که

$$c = \sum_{i=1}^{n} d_i\phi_i.$$

همچنین به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ عضوهایی چون $b_{i1}, \ldots, b_{im} \in F$ وجود دارند که

$$d_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\psi_j.$$

از این‌رو $c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\phi_i\psi_j$. لذا $\mathcal{B}$، L را به‌عنوان Fـفضا تولید می‌کند و لذا اثبات کامل است. ■

قبلاً در ۲۱.۱۲(دو) دیدیم که هر توسیع ساده چون توسیع $F \subseteq F(\theta)$ که در آن θ روی F جبری است، متناهی است. ولی رابطهٔ قویتری بین توسیعهای متناهی و عضوهای جبری وجود دارد.

۲۷.۱۲ تعریف. فرض کنید K زیرهیأت F باشد. می‌گوییم K روی F جبری است (یا توسیع $F \subseteq K$ جبری است) اگر هر عضو K روی F جبری باشد.

۲۸.۱۲ لم. هر توسیع متناهی توسیع جبری است.

اثبات. فرض کنید توسیع $F \subseteq K$ متناهی باشد و بنویسید $[K : F] = n$؛ فرض کنید $\theta \in K$. در این صورت $(\theta^i)_{i=0}^{n}$ روی F دارای وابستگی خطی است و لذا چندجمله‌ای ناصفری در $F[X]$ وجود دارد که θ ریشهٔ آن است. ■

۲۹.۱۲ نتیجه. فرض کنید K زبرهیأت F باشد. در این صورت K روی F متناهی است اگر و تنها اگر K را بتوان با الحاق تعدادی متناهی عضو به F که همه نسبت به F جبری‌اند به‌دست آورد.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید $(\phi_i)_{i=1}^{n}$ پایه‌ای برای Fـفضای K باشد. در این صورت بنابر ۲۸.۱۲، هر ϕ_i روی F جبری است و چون

$$F\phi_1 + \cdots + F\phi_n \subseteq F(\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

(زیرا $F(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ تحت جمع و ضرب بسته است) باید داشته باشیم $K = F(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

($\Longrightarrow$) فرض کنید $K = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ که در آن $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ همگی روی F جبری‌اند. با استقرا روی i نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ هیأت $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ روی F متناهی است. درستی این مطلب به‌ازای $i = 1$ بلاواسطه از ۲۱.۱۲(دو) نتیجه می‌شود. لذا در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید به‌ازای $2 \leq i \leq n$ ثابت کرده‌ایم که $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ روی F متناهی است. چون

$$F \subseteq F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \subseteq K$$

بلاواسطه از ۲۱.۱۲(یک) نتیجه می‌شود که α_i روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ جبری است (زیرا α_i ریشهٔ چندجمله‌ای ناصفری از $F[X]$ است). از این‌رو (باز هم بنابر ۲۱.۱۲(دو))

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})(\alpha_i)$$

روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ متناهی است و لذا از قضیهٔ درجه‌ها یعنی ۲۶.۱۲ نتیجه می‌شود که $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ روی F متناهی است. با این مطلب اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کامل می‌شود. ■

۳۰.۱۲ تذکر. فرض کنید توسیع $K \subseteq L$ توسیع ساده باشد و $L = K(\theta)$ که در آن عضو $\theta \in L$ روی K جبری است. فرض کنید عضو $\mu \in L$ نیز به‌گونه‌ای باشد که $L = K(\mu)$. بنابر ۲۱.۱۲(دو) توسیع $K \subseteq L$ متناهی است و لذا بنابر ۲۸.۱۲، μ روی K جبری است. لذا می‌توان گفت، یعنی تناقضی ندارد که بگوییم توسیع $K \subseteq L$ توسیع جبری ساده است.

۳۱.۱۲ تعریف و تمرین. فرض کنید F هیأت و $f \in F[X]$ (که در آن X مجهول است) چندجمله‌ای ناثابتی از درجهٔ n باشد. فرض کنید K زیرهیأت F باشد. K را هیأت تجزیهٔ f روی F می‌گوییم اگر

یک) f در $K[X]$ به حاصلضرب عوامل خطی تجزیه شود و لذا $\alpha, \theta_1, \ldots, \theta_n \in K$ وجود داشته باشند که در $K[X]$

$$f = \alpha(X - \theta_1)\ldots(X - \theta_n)$$

و

دو) K را بتوان با الحاق همهٔ ریشه‌هایی که f در K دارد به هیأت F به‌دست آورد یعنی

$$K = F(\theta_1, \ldots, \theta_n).$$

ثابت کنید که هر $f \in F[X]$ هیأت تجزیه‌ای روی F دارد و هر هیأت تجزیه روی F چون K_1 در شرط $[K_1 : F] \leq n!$ صدق می‌کند.

۳۲.۱۲ تمرین. فرض کنید توسیعهای $F \subseteq K$ و $K \subseteq L$ جبری باشند. نشان دهید که توسیع $F \subseteq L$ نیز جبری است. (می‌توانید از ۲۹.۱۲ استفاده کنید.)

۳۳.۱۲ تمرین. درجه‌های زیر را (که درجهٔ هیأتهای میانی بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ روی $\mathbb{Q}$ هستند) بیابید.

یک) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}) : \mathbb{Q}]$؛

دو) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}]$؛

سه) $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$.

(معیار تحویلناپذیری آیزنشتین (قضیهٔ ۱۴.۸.۲ از مرجع [۱۵]) را در نظر داشته باشید!)

۳۴.۱۲ قضیه و تعریف. فرض کنید L زیرهیأت F باشد. در این صورت

$$K := \{a \in L : \text{جبری است } F \text{ روی } a\}$$

هیأتی میانی بین F و L است و بستار جبری F در L نامیده می‌شود.

اثبات. روشن است که $F \subseteq K$ زیرا هر عضو F روی F جبری است.

فرض کنید $\alpha, \beta \in K$. بنابر ۲۹.۱۲ توسیع $F \subseteq F(\alpha, \beta)$ متناهی است. چون $\alpha - \beta \in F(\alpha, \beta)$، از ۲۸.۱۲ نتیجه می‌شود که $\alpha - \beta$ روی F جبری و لذا متعلق به K است. برهان مشابهی نشان می‌دهد که اگر $\beta \neq 0$ آن‌گاه $\alpha\beta^{-1} \in K$. بنابراین از معیار زیرهیأتها یعنی ۶.۱۲ نتیجه می‌شود که K هیأت میانی بین F و L است. ■

۳۵.۱۲* تمرین. فرض کنید L زبرهیأت K و L' زبرهیأت K' باشد و $\xi : L \to L'$ و $\eta : K \to K'$ یکریختی باشند و $\xi|_K = \eta : K \xrightarrow{\cong} K'$. فرض کنید $\theta \in L$ و قرار دهید $\xi(\theta) = \theta'$.

یک) فرض کنید X و Y مجهول باشند. نشان دهید نگاشت حاصل از η با تعریف زیر یکریختی حلقه‌ای است: $\tilde{\eta} : K[X] \to K'[Y]$ که به‌ازای هر $a \in K$، $\tilde{\eta}(a) = \eta(a)$ و $\tilde{\eta}(X) = Y$.

دو) نشان دهید θ روی K جبری است اگر و تنها اگر θ' روی K' جبری باشد و در این حالت اگر m چندجمله‌ای مینیمال θ نسبت به K باشد آن‌گاه $\tilde{\eta}(m)$ چندجمله‌ای مینیمال θ' نسبت به K' است.

۳۶.۱۲* تمرین. فرض کنید L زبرهیأت K و L' زبرهیأت K' و $\eta : K \to K'$ یکریختی باشد. فرض کنید X و Y مجهول و $\tilde{\eta} : K[X] \to K'[Y]$ یکریختی حاصل از η باشد. (۳۵.۱۲(یک) را ببینید).

یک) فرض کنید $\theta \in L$ روی K متعالی و $\theta' \in L'$ روی K' متعالی باشد. ثابت کنید که یکریختی منحصر به‌فردی چون $\check{\eta} : K(\theta) \to K'(\theta')$ وجود دارد که حاصلِ توسیع η است (یعنی به‌ازای هر $a \in K$، $\check{\eta}(a) = \eta(a)$) و در $\check{\eta}(\theta) = \theta'$ صدق می‌کند.

دو) فرض کنید $\mu \in L$ روی K جبری و چندجمله‌ای مینیمال آن m باشد و $\mu' \in L'$ روی K' جبری و چندجمله‌ای مینیمال آن m' باشد. فرض کنید $\tilde{\eta}(m) = m'$. ثابت کنید که یکریختی منحصر به‌فردی چون $\hat{\eta} : K(\mu) \to K'(\mu')$ وجود دارد که حاصلِ توسیع η است و در $\hat{\eta}(\mu) = \mu'$ صدق می‌کند.

۳۷.۱۲ تمرین. فرض کنید F هیأت و $f \in F[X]$ (که در آن X مجهول است) چندجمله‌ای ناثابتی باشد. فرض کنید زبرهیأتهای K و K' از F هیأتهای تجزیهٔ f روی F باشند (۳۱.۱۲ را ببینید).

ثابت کنید یکریختیی چون $\eta : K \to K'$ وجود دارد که $\eta|_F = \mathrm{Id}_F$ (Id_F نگاشت همانی F به روی خودش است).

این تمرین همراه با ۳۱.۱۲ نشان می‌دهد که اگر زبرهیأتهای یکریخت F را یکی بگیریم، f یک هیأت تجزیهٔ منحصر به‌فرد روی F دارد.

۳۸.۱۲ تمرین. فرض کنید F هیأتی متناهی با p^n عضو باشند که $p, n \in \mathbb{N}$ و p اول است (۲۴.۱۲ را ببینید). ثابت کنید

$$\text{به‌ازای هر } a \in F \qquad a^{p^n} = a$$

(قضیهٔ لاگرانژ را از نظریهٔ مقدماتی گروهها در نظر داشته باشید!)

۳۹.۱۲ تمرین. فرض کنید $p, n \in \mathbb{N}$ و p اول باشد. ثابت کنید که دو هیأت متناهی که هر یک p^n عضو دارند باید یکریخت باشند. (راهنمایی: تمرینهای ۳۱.۱۲، ۳۷.۱۲ و ۳۸.۱۲ را می‌توانید به‌کار ببرید.)

۴۰.۱۲ تمرین. فرض‌کنید K هیأت‌و X مجهول‌باشد. به‌ازای $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ مشتق صوری f را با نماد f' نشان می‌دهیم و با

$$f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \in K[X]$$

تعریف می‌کنیم. (البته به‌ازای $m \in \mathbb{N}$ و $h \in K[X]$، mh را به‌صورت ۵.۶ تعریف می‌کنیم.)

یک) نشان دهید که به‌ازای هر $f, g \in K[X]$

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{و} \quad (fg)' = fg' + f'g.$$

دو) فرض کنید $a \in K$ و f یک چندجمله‌ای ناثابت از $K[X]$ باشد. می‌گوییم a ریشهٔ چندگانه یا مکرر f است اگر $(X-a)^2$ مقسوم‌علیه f در $K[X]$ باشد. نشان دهید که f در زبرهیأتی از K ریشهٔ چندگانه دارد اگر و تنها اگر درجهٔ ب.م.م(f, f') بزرگتر از ۰ باشد.

۴۱.۱۲ تمرین. فرض کنید $p, n \in \mathbb{N}$ و p اول باشد. ثابت کنید هیأتی متناهی دقیقاً با p^n عضو وجود دارد. (راهنمایی: هیأت تجزیهٔ $X^{p^n} - X$ روی $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید و از تمرین ۴۰.۱۲ استفاده کنید.)

این تمرین همراه با ۳۹.۱۲ نشان می‌دهد که اگر هیأتهای یکریخت را یکی بگیریم دقیقاً یک هیأت متناهی با p^n عضو وجود دارد.

۴۲.۱۲ گامهای بعدی. مطالبی را که تا اینجا گفتیم می‌توان ادامه داد تا به نظریهٔ گالوا، ترسیم با خط‌کش و پرگار، حل معادلات با رادیکال و نظریهٔ هیأتهای متناهی رسید اما ما این کار را نمی‌کنیم: خوانندهٔ علاقه‌مندی را که این مطالب را در مطالعات دیگر خود نیاموخته است به کتابهای دیگری چون مرجع [۱۶] رجوع می‌دهیم. ولی شاید این نکته شایان ذکر باشد که ساختن یکریختیهایی چون آن که در ۳۶.۱۲(دو) ارائه گردید رابطهٔ نزدیکی با نظریهٔ گالوا دارد و نتیجهٔ مربوط به مشتقهای صوری در ۴۰.۱۲(دو) نقش مهمی در نظریهٔ توسیعهای جبری تفکیکپذیر هیأتها ایفا می‌کند: مثلاً فصل ۸ از مرجع [۱۶] را ببینید.

مطلب دیگری که در این کتاب اثبات نشد این است که هر هیأت زبرهیأتی دارد که جبری‌بسته است: برای مطالعهٔ این مطلب به تمرین ۱۳ در فصل ۱ از مرجع [۱] و قضیهٔ ۳۲ در فصل II از مرجع [۱۸] رجوع کنید.

حال برنامهٔ خود را با هدف مطالعهٔ درجهٔ تعالی ادامه می‌دهیم. می‌خواهیم به هر زیرهیأت متناهی‌مولد K روی F عددی صحیح و نامنفی که آن را با نماد $\mathrm{tr.deg}_F\, K$ نشان می‌دهیم، به‌نام "درجهٔ تعالی K روی F" نسبت دهیم، به‌گونه‌ای که $\mathrm{tr.deg}_F\, K = ۰$ اگر K روی F جبری باشد و $\mathrm{tr.deg}_F\, F(X) = ۱$ اگر X مجهول باشد. چنانکه در ابتدای این فصل بیان شد به تسامح می‌توان گفت این درجهٔ تعالی برابر با بزرگترین عدد از اعدادی چون $i \in \mathbb{N}$ است که به‌ازای هر یک از آن iها i عضو از K وجود دارند که روی F استقلال جبری دارند. ولی همچنین خواهیم دید که نظریهٔ درجهٔ تعالی زیرهیأتهای متناهی‌مولد شباهتهایی با نظریهٔ بُعد فضاهای برداری متناهی‌بُعد دارد.

به این منظور به مفهوم استقلال خطی خانواده‌ای از اعضای K روی F نیاز داریم: یادآوری می‌کنیم که بنابه تعریف ۱۴.۱ خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ از عضوهای K روی F استقلال خطی دارد اگر تنها چندجمله‌ای $\Theta \in F[X_۱, \ldots, X_n]$ با ویژگی $\Theta(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) = ۰$ چندجمله‌ای صفر $F[X_۱, \ldots, X_n]$ باشد.

توجه کنید که اگر $n = ۱$ آن‌گاه $(\alpha_i)_{i=۱}^۱$ روی F دارای استقلال خطی است اگر و تنها اگر $\alpha_۱$ روی F متعالی باشد. قرار می‌گذاریم که خانوادهٔ تهی از عضوهای K را روی F دارای استقلال خطی بدانیم.

۴۳.۱۲ تذکر. فرض کنید K زیرهیأت F و خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ از عضوهای K روی F استقلال خطی داشته باشد. فرض کنید $X_۱$، ...، X_n مجهول و $F(X_۱, \ldots, X_n)$ نشاندهندهٔ هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح $F[X_۱, \ldots, X_n]$ باشد. (از ۷.۱۲(دو) نتیجه می‌شود که این نماد با نماد مذکور در ۱۳.۱۲ سازگار است.) بنابر ۱۶.۱ یک یکریختی یکتای حلقه‌ای چون

$$h : F[\alpha_۱, \ldots, \alpha_n] \longrightarrow F[X_۱, \ldots, X_n]$$

وجود دارد که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، $h(\alpha_i) = X_i$ و $h|_F : F \to F$ نگاشت همانی است. بنابر ۷.۱۲(یک) و ۸.۱۲(یک) یکریختی حلقه‌ای h را می‌توان توسیع داده یکریختیی هیأتی چون

$$h' : F(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \longrightarrow F(X_۱, \ldots, X_n)$$

به‌دست آورد که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، $h'(\alpha_i) = X_i$ و $h'|_F : F \to F$ نگاشت همانی باشد.

۴۴.۱۲ تعریف. فرض کنید K زیرهیأت F باشد و

$$\lambda, \alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in K.$$

می‌گوییم که λ به $\alpha_۱$،...،α_n روی (یا نسبت به) F وابستگی جبری دارد اگر λ روی $F(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ جبری باشد.

گاه لازم است اصطلاح فوق را در حالتی که n برابر صفر است به‌کار ببریم: در این صورت منظور این است که λ روی F جبری است.

۴۵.۱۲ لم. فرض کنید K زیرهیأت F باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. در این صورت خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=1}^n$، متشکل از عضوهای K، روی F استقلال جبری دارد اگر و تنها اگر هیچ‌یک از α_iها روی F به $n-1$ عضو دیگر وابستگی جبری نداشته باشد، یعنی اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ عضو α_i روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ متعالی باشد.

توجه. بدیهی است که اگر $n = 1$، منظور از $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ همان F است.

اثبات. حکم در حالت $n = 1$ روشن است و لذا فرض می‌کنیم $n > 1$.
$(\Longleftarrow)$ فرض کنید $(\alpha_i)_{i=1}^n$ روی F استقلال جبری داشته باشد ولی به‌ازای عددی چون $i \in \mathbb{N}$ که $1 \le i \le n$ عضو α_i روی $E := F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ جبری باشد. لذا $h \in \mathbb{N}$ و $e_0, \ldots, e_{h-1} \in E$ وجود دارند به‌طوری که

$$\alpha_i^h + e_{h-1}\alpha_i^{h-1} + \cdots + e_1\alpha_i + e_0 = 0.$$

حال اگر با استفاده از ۱۹.۱۲ (به‌اصطلاح) "مخرجها را حذف کنیم" نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ایهای $g_0, g_1, \ldots, g_h \in F[X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n]$ وجود دارند به‌طوری که

$$\sum_{j=0}^{h} g_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\alpha_i^j = 0$$

و $g_h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq 0$. این مطلب استقلال جبری داشتن $(\alpha_i)_{i=1}^n$ روی F را نقض می‌کند.

$(\Longrightarrow)$ فرض کنید به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، α_i روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ متعالی باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم $(\alpha_i)_{i=1}^n$ روی F استقلال جبری دارد. فرض کنید که $(\alpha_i)_{i=1}^n$ روی F استقلال جبری نداشته باشد. لذا $\Theta \in F[X_1, \ldots, X_n]$ وجود دارد که $\Theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ ولی $\Theta \neq 0$. روشن است که امکان ندارد چنین Θای یک چندجمله‌ای ثابت باشد. فرض کنید r کوچکترین عدد از اعدادی چون r' باشد با این ویژگی که $1 \le r' \le n$ و $\Phi \in F[X_1, \ldots, X_{r'}]$ وجود دارد که $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r'}) = 0$ ولی $\Phi \neq 0$. چون بنابه فرض α_1 باید روی F متعالی باشد پس $r \ge 2$.

بنابر نحوهٔ انتخاب r دست‌کم یکی از جمله‌های چندجمله‌ای $\Phi \in F[X_1, \ldots, X_r]$ با ویژگی $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$ و $\Phi \neq 0$ باید شامل X_r باشد. لذا $h \in \mathbb{N}$ و

$\Psi_0, \ldots, \Psi_h \in F[X_1, \ldots, X_{r-1}]$ وجود دارند که

$$\Phi = \sum_{j=0}^{h} \Psi_j X_r^j$$

و $\Psi_h \neq 0$. در این صورت

$$\sum_{j=0}^{h} \Psi_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})\alpha_r^j = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0.$$

بنابر نحوهٔ انتخاب r باید داشته باشیم $\beta := \Psi_h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \neq 0$ و اگر دو طرف تساوی فوق را بر β تقسیم کنیم تناقضی با این فرض که α_r روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ متعالی است به‌دست می‌آوریم.

با یافتن این تناقض اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

۴۶.۱۲ قضیه. فرض کنید K زیرهیأت F باشد و

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m, \gamma \in K.$$

فرض کنید به‌ازای هر $j = 1, \ldots, m$ عضو β_j روی F به α_1، ...، α_n وابستگی جبری داشته باشد و همچنین γ روی F به β_1، ...، β_m دارای وابستگی جبری باشد. در این صورت γ روی F به α_1، ...، α_n دارای وابستگی جبری است.

اثبات. چون (به‌ازای هر $j = 1, \ldots, m$) β_j روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ جبری است از ۲۹.۱۲ نتیجه می‌شود که $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ متناهی است. همچنین چون γ روی $F(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ جبری است و لذا باید روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ نیز جبری باشد نتیجه می‌گیریم که

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m)(\gamma)$$

روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ متناهی است. حال با استفاده از قضیهٔ درجه‌ها، یعنی ۲۶.۱۲، نتیجه می‌گیریم که $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m)(\gamma)$ روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ متناهی است و لذا بنابر همان قضیه $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\gamma)$ روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ متناهی است. از این‌رو بنابر ۲۱.۱۲(دو)، γ روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ جبری است یعنی γ روی F به α_1، ...، α_n وابستگی جبری دارد. ■

۴۷.۱۲ لم. فرض کنید K زبرهیأت F باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in K$. فرض کنید β روی F به $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ وابستگی جبری داشته باشد ولی به $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ وابستگی جبری نداشته باشد. در این صورت α_n روی F به $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ وابستگی جبری دارد.

توجه. این لم را در حالت $n = 1$ چنانکه به‌طور بدیهی انتظار می‌رود تعبیر کنید.

اثبات. فرض کنید $E := F(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ با این تعبیر که اگر $n = 1$، $E = F$. بنابه فرض β روی $E(\alpha_n)$ جبری است و لذا $h \in \mathbb{N}$ و $c_0, \ldots, c_{h-1} \in E(\alpha_n)$ وجود دارند که

$$\beta^h + c_{h-1}\beta^{h-1} + \cdots + c_1\beta + c_0 = 0.$$

حال با استفاده از ۱۹.۱۲ نتیجه می‌گیریم که $g_0, g_1, \ldots, g_h \in E[X_1]$ وجود دارند که $g_h(\alpha_n) \neq 0$ و

$$g_h(\alpha_n)\beta^h + g_{h-1}(\alpha_n)\beta^{h-1} + \cdots + g_1(\alpha_n)\beta + g_0(\alpha_n) = 0$$

نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای

$$f := g_h X_2^h + g_{h-1} X_2^{h-1} + \cdots + g_1 X_2 + g_0 \in E[X_1, X_2]$$

ناصفر است، اگرچه $f(\alpha_n, \beta) = 0$. حال می‌توانیم f را به‌صورت

$$f := g'_{h'} X_1^{h'} + g'_{h'-1} X_1^{h'-1} + \cdots + g'_1 X_1 + g'_0$$

بنویسیم که در آن $h' \in \mathbb{N}$ و $g'_0, g'_1, \ldots, g'_{h'} \in E[X_2]$ و همهٔ g'_iها با هم صفر نیستند. چون β روی F به $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ وابستگی جبری ندارد نتیجه می‌شود که همهٔ $g'_i(\beta)$ها با هم صفر نیستند. ولی

$$0 = f(\alpha_n, \beta) = g'_{h'}(\beta)\alpha_n^{h'} + g'_{h'-1}(\beta)\alpha_n^{h'-1} + \cdots + g'_1(\beta)\alpha_n + g'_0(\beta)$$

و لذا می‌بینیم که α_n روی $E(\beta)$ جبری است، یعنی α_n روی F به $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ وابستگی جبری دارد. ■

۴۸.۱۲ نتیجه. فرض کنید K زبرهیأت F باشد و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. فرض کنید خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=1}^{n-1}$ روی F استقلال جبری داشته باشد ولی $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ چنین نباشد. در این صورت α_n روی F به $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ وابستگی جبری دارد.

اثبات. بنابر ۴۵.۱۲، یکی از α_iها روی F به $n-۱$ عضو دیگر این خانواده وابستگی جبری دارد. لذا یا α_n روی F به $\alpha_۱، \ldots، \alpha_{n-۱}$ وابستگی جبری دارد که حکم ثابت شده است، یا عددی چون $j \in \mathbb{N}$ که $۱ \leq j \leq n-۱$ وجود دارد به‌طوری که α_j روی F به

$$\alpha_۱, \ldots, \alpha_{j-۱}, \alpha_{j+۱}, \ldots, \alpha_n$$

وابستگی جبری دارد؛ در حالت دوم چون بنابر ۴۵.۱۲، α_j روی F به $\alpha_۱، \ldots، \alpha_{j-۱}، \alpha_{j+۱}، \ldots، \alpha_{n-۱}$ وابستگی جبری ندارد، از لم ۴۷.۱۲ نتیجه می‌شود که α_n روی F به $\alpha_۱، \ldots، \alpha_{n-۱}$ دارای وابستگی جبری است. ■

۴۹.۱۲ تعریف. فرض کنید K زبرهیأت F باشد و

$$\alpha_۱, \ldots, \alpha_n, \beta_۱, \ldots, \beta_m \in K.$$

می‌گوییم که خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ با خانوادهٔ $(\beta_i)_{i=۱}^m$ نسبت به F جبری‌هم‌ارز است یا خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ با خانوادهٔ $(\beta_i)_{i=۱}^m$ روی F هم‌ارزی جبری دارد اگر به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, m$، β_j روی F به $\alpha_۱، \ldots، \alpha_n$ وابستگی جبری داشته باشد و به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، α_i روی F به $\beta_۱، \ldots، \beta_m$ وابستگی جبری داشته باشد.

۵۰.۱۲* تمرین. فرض کنید K زبرهیأت F باشد. نشان دهید رابطهٔ "روی F هم‌ارزی جبری داشتن" رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعهٔ همهٔ خانواده‌های متناهی از عضوهای K است.

۵۱.۱۲ نتیجه. فرض کنید K زبرهیأت F و $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ خانواده‌ای از عضوهای K باشد. در این صورت عدد $s \in \mathbb{N}$. که $s \leq n$ و sعدد صحیح متفاوت $i_۱، \ldots، i_s$ بین ۱ و n وجود دارند به‌طوری که خانوادهٔ $(\alpha_{i_j})_{j=۱}^s$ روی F استقلال جبری دارد و با $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ هم‌ارزی جبری دارد (خانوادهٔ $(\alpha_{i_j})_{j=۱}^s$ ممکن است تهی باشد).

اثبات. $t \in \mathbb{N}$. را با شرط $t \leq n$ چنان انتخاب کنید که به‌ازای آن، tعدد صحیح متفاوت $i_۱، \ldots، i_t$ بین ۱ و n وجود داشته باشند که به‌ازای آنها خانوادهٔ $(\alpha_{i_j})_{j=۱}^t$ روی F وابستگی جبری داشته باشد. بزرگترین tی ممکن با این شرایط را s بنامید. در این صورت از ۴۸.۱۲ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، خواه برابر با یکی از i_jها باشد یا نباشد، عضو α_i روی F به $\alpha_{i_۱}، \ldots، \alpha_{i_s}$ وابستگی جبری دارد. ■

۵۲.۱۲ قضیهٔ تبادل. فرض کنید K زبرهیأت F و $(\alpha_i)_{i=۱}^n$ و $(\beta_j)_{j=۱}^m$ خانواده‌هایی از عضوهای K باشند. فرض کنید $(\beta_j)_{j=۱}^m$ روی F دارای استقلال جبری باشد و به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, m$ عضو β_j روی F به $\alpha_۱، \ldots، \alpha_n$ وابستگی جبری داشته باشد.

در این صورت عدد $m \leq n$ و mعدد صحیح متفاوت $i_1، \ldots، i_m$ بین ۱ و n وجود دارند به‌طوری که خانوادهٔ $(\gamma_i)_{i=1}^{n}$ که در آن (به‌ازای $1 \leq i \leq n$)

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_j & \text{اگر به‌ازای } j \text{ ای که } 1 \leq j \leq m \text{، } i = i_j \\ \alpha_i & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

روی F با $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ هم‌ارزی جبری دارد.

اثبات. قضیه را با استقرا روی m ثابت می‌کنیم. حکم در حالت $m = 0$ روشن است. در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید $m > 0$ و حکم به‌ازای مقادیر کوچکتر از m درست باشد.

با استفاده از فرض استقرا در مورد خانوادهٔ $(\beta_j)_{j=1}^{m-1}$ نتیجه می‌گیریم که عدد $m - 1 \leq n$ و $m - 1$ عدد صحیح متفاوت $i_1، \ldots، i_{m-1}$ بین ۱ و n وجود دارند به‌طوری که خانوادهٔ $(\delta_i)_{i=1}^{n}$ که در آن (به‌ازای $1 \leq i \leq n$)

$$\delta_i = \begin{cases} \beta_j & \text{اگر به‌ازای } j \text{ ای که } 1 \leq j \leq m-1 \text{، } i = i_j \\ \alpha_i & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

روی F با $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ هم‌ارزی جبری دارد.

توجه کنید که بنابر ۴۶.۱۲، β_m روی F به $\delta_1، \ldots، \delta_n$ وابستگی جبری دارد. $s \in \mathbb{N}$ را چنان انتخاب کنید که β_m روی F به $\delta_{k_1}، \ldots، \delta_{k_s}$ (که در آن $k_1، \ldots، k_s$، sعدد صحیح متفاوت بین ۱ و nاند) دارای وابستگی جبری باشد؛ چنین sای را تا جایی که ممکن است کوچک اختیار کنید. بنابر ۴۵.۱۲، می‌توانیم فرض کنیم که

$$k_s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_{m-1}\}.$$

از این‌رو $m \leq n$. قرار دهید $i_m = k_s$؛ توجه کنید که $\delta_{k_s} = \alpha_{i_m}$.

حال (به‌ازای $i = 1, \ldots, n$) قرار دهید

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_m & \text{به‌ازای } i = i_m \\ \delta_i & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و لذا

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_j & \text{اگر به‌ازای } j \text{ ای که } 1 \leq j \leq m \text{، } i = i_j \\ \alpha_i & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

حال $(\gamma_i)_{i=1}^n$ روی F با $(\delta_i)_{i=1}^n$ هم‌ارزی جبری دارد، زیرا β_m روی F به $\delta_1,\ldots,\delta_n$ وابستگی جبری دارد و همچنین بنابر ۴۷.۱۲ و تعریف s، α_{i_m} روی F به $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ دارای وابستگی جبری است.

حال طبق ۵۰.۱۲، $(\gamma_i)_{i=1}^n$ روی F با $(\alpha_i)_{i=1}^n$ هم‌ارزی جبری دارد. با این مطلب مرحلهٔ دوم استقرا و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

۵۳.۱۲ نتیجه. فرض کنید K زبرهیأت F باشد؛ فرض کنید

$$(\alpha_i)_{i=1}^n, \quad (\beta_j)_{j=1}^m$$

خانواده‌هایی از عضوهای K باشند که روی F با یکدیگر هم‌ارزی جبری دارند و هر دو روی F استقلال جبری دارند. در این صورت $n = m$.

اثبات. این مطلب بلاواسطه از قضیهٔ تبادل، یعنی ۵۲.۱۲، نتیجه می‌شود زیرا طبق آن قضیه $n \le m$ و $m \le n$. ■

۵۴.۱۲ تعریف. فرض کنید K زبرهیأت F باشد. مقصود از پایهٔ تعالی (متناهی) K روی F خانواده‌ای چون $(\alpha_i)_{i=1}^n$ از عضوهای K است که روی F دارای استقلال جبری باشد و هر عضو K روی F به اعضای آن خانواده، یعنی $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$، وابستگی جبری داشته باشد (این خانواده ممکن است تهی باشد).

از ۵۳.۱۲ نتیجه می‌شود که اگر K روی F دارای پایهٔ تعالی متناهی باشد آن‌گاه تعداد عضوهای پایه‌های تعالی متفاوت یکسان است. تعداد عضوهای هر پایهٔ تعالی K روی F را درجهٔ تعالی K روی F می‌نامیم و آن را با $\mathrm{tr.deg}_F\, K$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت می‌گوییم که درجهٔ تعالی K روی F متناهی است؛ گاه این مطلب را به‌صورت اختصاریِ "$\mathrm{tr.deg}_F\, K < \infty$" نشان می‌دهیم.

۵۵.۱۲ تذکر. فرض کنید K زبرهیأت F باشد.

یک) توجه کنید که $\mathrm{tr.deg}_F\ K = 0$ اگر و تنها اگر K روی F جبری باشد.

دو) فرض کنید زبرهیأت K روی F متناهی‌مولد باشد و لذا $\beta_1,\ldots,\beta_m \in K$ وجود داشته باشند که $K = F(\beta_1,\ldots,\beta_m)$. در این صورت از ۵۱.۱۲ و ۴۶.۱۲ نتیجه می‌شود که یک پایهٔ تعالی برای K روی F وجود دارد که از عضوهای مجموعهٔ $\{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ تشکیل می‌شود. لذا درجهٔ تعالی هر زبرهیأت متناهی‌مولد چون K روی هیأتی چون F متناهی است.

سه) اگر درجهٔ تعالی K روی F متناهی و برابر با n باشد و $n > 0$ آن‌گاه K را می‌توان از F به‌دست آورد. برای این منظور ابتدا عضوهای خانواده‌ای چون $(\alpha_i)_{i=1}^n$ را که روی F استقلال جبری دارند به آن الحاق می‌کنیم و سپس توسیع جبری آن را به‌دست می‌آوریم: کافی است

$(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ را پایهٔ تعالی K روی F انتخاب کنیم. اطلاعات مربوط به هیأت میانی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ در ۴۳.۱۲ آمده است.

چهار) فرض کنید درجهٔ تعالی K روی F متناهی باشد. می‌گوییم توسیع $F \subseteq K$ توسیع متعالی محض است اگر با الحاق عضوهای یک پایهٔ تعالی K روی F (که امکان دارد تهی باشد) به F خود K به‌دست آید. توجه کنید که توسیع $F \subseteq F$ را توسیع متعالی محض تلقی می‌کنیم.

پنج) اگر K توسیع جبری یک هیأت میانی متناهی‌مولد بین F و K چون $F(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ باشد آن‌گاه از ۴۶.۱۲ و بند (دو)ی فوق نتیجه می‌شود که یک پایهٔ تعالی متشکل از عضوهایی از $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ برای K روی F وجود دارد.

شش) فرض کنید درجهٔ تعالی K روی F متناهی و برابر با n باشد و فرض کنید $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ چنان باشند که K روی $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ جبری باشد. در این صورت از بند (پنج) فوق و اینکه تعداد عضوهای پایه‌های تعالی K روی F یکسان‌اند (۵۴.۱۲) نتیجه می‌شود که خانوادهٔ $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ باید روی F استقلال جبری داشته باشد و لذا خود پایه‌ای متعالی برای K روی F است.

هفت) فرض کنید درجهٔ تعالی K روی F متناهی و برابر با n و $\mathcal{A} := (\alpha_i)_{i=1}^{n}$ پایهٔ تعالی K روی F باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{B} := (\beta_j)_{j=1}^{m}$ خانواده‌ای از عضوهای K باشد که روی F استقلال جبری دارند.

در این صورت از ۴۶.۱۲ و قضیهٔ تبادل و بند (شش) فوق نتیجه می‌شود که $m \leq n$ و $\mathcal{B}$ را می‌توان با افزودن $n - m$ عضو از $\mathcal{A}$ توسعه داد و یک پایهٔ تعالی برای K روی F به‌دست آورد.

بنابراین هر خانواده از n عضو K $(n = \text{tr.deg}_F\ K)$ که روی F استقلال جبری داشته باشد خود باید پایهٔ تعالی K روی F باشد.

محتملاً خواننده به شباهتهایی که بسیاری از نکات مطروحه در ۵۵.۱۲ با احکام بنیادین مبحث استقلال خطی در فضاهای برداری دارد توجه کرده است. اما قضیهٔ بعد، از مقولهٔ دیگری است.

۵۶.۱۲ قضیه. فرض کنید L زیرهیأت K و K زیرهیأت F و $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از عضوهای K باشد که روی F استقلال جبری دارد و فرض کنید $(\beta_j)_{j=1}^{m}$ خانواده‌ای از عضوهای L باشد که روی K دارای استقلال جبری است.

در این صورت $(\gamma_r)_{r=1}^{n+m}$ که در آن

$$\gamma_r = \begin{cases} \alpha_r & 1 \leq r \leq n \quad \text{به‌ازای} \\ \beta_{r-n} & n < r \leq n+m \quad \text{به‌ازای} \end{cases}$$

روی F استقلال جبری دارد.

به‌علاوه اگر درجهٔ تعالی K روی F متناهی و درجهٔ تعالی L روی K متناهی باشد آن‌گاه درجهٔ تعالی L روی F متناهی است و

$$\mathrm{tr.deg}_F\, L = \mathrm{tr.deg}_F\, K + \mathrm{tr.deg}_K\, L.$$

اثبات. فرض می‌کنیم $0 \neq \Theta \in F[X_1, \ldots, X_{n+m}]$ و

$$\Theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$$

و در پی تناقض می‌گردیم. چون $\Theta \neq 0$، زیرمجموعه‌ای ناتهی چون Λ از $\mathbb{N}_0^m$ و چندجمله‌ایهایی چون

$$\Phi_{j_1,\ldots,j_m} \in F[X_1, \ldots, X_n]\backslash\{0\} \qquad ((j_1, \ldots, j_m) \in \Lambda)$$

وجود دارند که

$$\Theta = \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in\Lambda} \Phi_{j_1,\ldots,j_m} X_{n+1}^{j_1} \ldots X_{n+m}^{j_m}$$

چون $(\alpha_i)_{i=1}^n$ روی F استقلال جبری دارد باید داشته باشیم

$$\Phi_{j_1,\ldots,j_m}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \qquad \text{به‌ازای هر } (j_1, \ldots, j_m) \in \Lambda$$

لذا

$$\Psi := \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in\Lambda} \Phi_{j_1,\ldots,j_m}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) X_{n+1}^{j_1} \ldots X_{n+m}^{j_m}$$

یک چندجمله‌ای ناصفر در $K[X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}]$ است. ولی

$$\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \Theta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$$

که متناقض با استقلال جبری داشتن $(\beta_j)_{j=1}^m$ روی K است. به این ترتیب قسمت اول قضیه ثابت شده است.

برای اثبات قسمت دوم فرض کنید $(\alpha_i)_{i=1}^n$ پایهٔ تعالی K روی F و $(\beta_j)_{j=1}^m$ پایهٔ تعالی L روی K باشد. خانوادهٔ $(\gamma_r)_{r=1}^{n+m}$ را به‌صورت مذکور در قضیه تعریف کنید: قسمت اول اثبات نشان می‌دهد که این خانواده از عضوهای L روی F دارای استقلال جبری است؛ اگر نشان دهیم که این خانواده در واقع پایهٔ تعالی L روی F است قسمت دوم اثبات شده است.

فرض کنید $\nu \in L$. لذا ν روی $K(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ جبری است. پس $h \in \mathbb{N}$ و $e_0, \ldots, e_{h-1} \in K(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ وجود دارند که

$$\nu^h + e_{h-1}\nu^{h-1} + \cdots + e_1\nu + e_0 = 0.$$

حال اگر با استفاده از ۱۹.۱۲ "مخرجها را حذف کنیم" نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ایهای $g_0, g_1, \ldots, g_h \in K[X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}]$ وجود دارند که

$$\sum_{j=0}^{h} g_j(\beta_1, \ldots, \beta_m)\nu^j = 0$$

و $g_h(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$.

فرض کنید Δ نشاندهندهٔ زیرمجموعه‌ای (متناهی) از K متشکل از همهٔ ضرایب ناصفر چندجمله‌ایهای g_0، ...، g_h باشد. در این صورت

$$g_0, g_1, \ldots, g_h \in F(\Delta)[X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}]$$

و ν روی $F(\Delta)(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ جبری است. چون هر عضو Δ روی F به α_1، ...، α_n وابستگی جبری دارد از ۴۶.۱۲ نتیجه می‌شود که ν روی F به α_1، ...، α_n، β_1، ...، β_m دارای وابستگی جبری است. به این ترتیب قسمت دوم قضیه اثبات شده است. ■

۵۷.۱۲ تمرین. فرض کنید L زیرهیأت F و درجهٔ تعالی L روی F متناهی باشد. فرض کنید K هیأت میانی بین F و L باشد. نشان دهید که $\operatorname{tr.deg}_F\ K < \infty$ و $\operatorname{tr.deg}_K\ L < \infty$.

۵۸.۱۲ تمرین. فرض کنید S حلقهٔ چندجمله‌ایهای $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ روی هیأت اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ از n مجهول X_1، ...، X_n باشد و $n > 1$. نشان دهید که $f := X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ در S تحویلناپذیر است و لذا بنابر ۴۲.۳، ایدآلی که f در S تولید می‌کند ایدآل اول است. فرض کنید F نشاندهندهٔ هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح

$$\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]/(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$$

باشد؛ توجه کنید که F را می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان زیرهیأت $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{R}}\ F$ را بیابید.

۱۳

وابستگی صحیح به زیرحلقه

قبل از اینکه مطالب فصل ۱۲ در مورد درجهٔ تعالی زبرهیأت متناهی‌مولد روی یک هیأت را در نظریهٔ بُعد به‌کار ببریم کاملاً لازم است نظریهٔ وابستگی صحیح را در حلقه‌های تعویضپذیر مطالعه کنیم. این مبحث را می‌توان تعمیم مبحث دیگری، که در فصل ۱۲ مطالعه کردیم، دانست؛ یعنی تعمیم مبحث توسیع جبری هیأتها به نظریهٔ حلقه‌های تعویضپذیر.

فرض کنید K زبرهیأت F باشد (۱.۱۲ را ببینید). یادآوری می‌کنیم که عضو $\lambda \in K$ روی F جبری است اگر چندجمله‌ای تکینی چون $g \in F[X]$ وجود داشته باشد که $g(\lambda) = 0$ (۲۱.۱۲ را ببینید). فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد. می‌گوییم که عضو $s \in S$ "روی R صحیح" است اگر چندجمله‌ای تکین $f \in R[X]$ وجود داشته باشد که $f(s) = 0$. کار اصلی ما در این فصل ارائهٔ این مفهوم و مفاهیم مربوط به آن است. برخی از احکام مانند ۲۲.۱۳، که طبق آن $\{s \in S : s$روی R صحیح است$\}$ زیرحلقه‌ای از S است که R را شامل می‌شود، تعمیم احکام فصل ۱۲ در مورد زبرهیأتها به حلقه‌های تعویضپذیرند ولی اثبات این تعمیمها مشکلتر است. (برهانهای مربوط به زبرهیأتها را که ساده‌ترند در فصلی مستقل (فصل ۱۲) آوردیم زیرا فکر می‌کردیم که شاید برخی از خوانندگان تنها به این حالت علاقه‌مند باشند.)

در واقع در همان اوایل بررسی نظریهٔ وابستگی صحیح به موردی برمی‌خوریم که لازم است شگردی را به‌کار ببریم که از نوع شگردی است که ماتسومورا آن را" شگرد دترمینانی" می‌نامد (قضیهٔ ۱.۲ از مرجع [۸] را ببینید). اثبات این مطلب در این فصل مبتنی بر احکامی از نظریهٔ

دترمینان ماتریسهای مربعی روی حلقهٔ تعویضپذیر R است، از جمله این حکم که اگر A ماتریس $n \times n$ با درایه‌های متعلق به R باشد آن‌گاه

$$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = (\det A)I_n.$$

قاعدتاً خوانندگان با این حکم در حالت خاصی که R هیأت باشد کاملاً آشنا هستند ولی چه بسا که برخی از خوانندگان با ماتریسهایی که درایه‌هایشان به حلقهٔ تعویضپذیری متعلق‌اند که حتی دامنهٔ صحیح هم نیست اصلاً آشنایی نداشته باشند. (البته در حالت خاصی که R دامنهٔ صحیح باشد می‌توان با استفاده از این موضوع که R را می‌توان در هیأت کسرهایش نشاند نتیجهٔ فوق را به‌دست آورد.) قاعدتاً چنین خواننده‌ای دست‌کم باید لحظه‌ای تأمل کند و از خود بپرسد که چرا تساویهای فوق در حالت کلیتر نیز درست باقی می‌مانند. در واقع برای اینکه از چهارچوب این کتاب خارج نشویم خواننده را خیلی به اختصار و عمدتاً از طریق تمرینها با نظریهٔ دترمینان ماتریسهای مربعی با درایه‌های متعلق به حلقهٔ R آشنا می‌کنیم تا جایی که به اثبات تساویها برسیم. این فصل را با این مطلب آغاز می‌کنیم.

۱.۱۳ نمادگذاری و تعریف. در سراسر بحث از ماتریسهای با درایه‌های متعلق به حلقه‌های تعویضپذیر فرض می‌کنیم $n \in \mathbb{N}$ و R حلقه‌ای تعویضپذیر است؛ همچنین $M_{m,n}(R)$ که در آن $m \in \mathbb{N}$، نشاندهندهٔ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌های متعلق به R است (گاه به‌جای «با درایه‌های متعلق به R» می‌گوییم «روی R»). نماد $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ به این معنی است که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, m$ و $j = ۱, \ldots, n$ درایهٔ (i,j)ی A یعنی درایهٔ واقع در محل تلاقی سطر iام و ستون jام برابر با a_{ij} است. در حالتهایی که اشتباه برانگیز باشد به‌جای a_{ij} می‌نویسیم $a_{i,j}$.

ضرب ماتریسهای روی R دقیقاً به صورت ضرب ماتریسها در حالتی که R هیأت باشد انجام می‌شود. ترانهادهٔ $A \in M_{m,n}(R)$ را با A^T نمایش می‌دهیم.

نماد S_n را برای نمایش گروه متقارن با مرتبهٔ $n!$، یعنی گروه تمام جایگشتهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ تحت ترکیب جایگشتها، به‌کار می‌بریم.

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$. منظور از دترمینان A، که آن را با $\det A$ نشان می‌دهیم، عضوی از R با تعریف

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) a_{۱,\sigma(۱)} a_{۲,\sigma(۲)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

است که در آن به‌ازای $\sigma \in S_n$، $\text{sgn } \sigma$ نشاندهندهٔ علامت σ است.

۲.۱۳* تمرین. فرض کنید $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$.

یک) نشان دهید $\det A^T = \det A$.

دو) نشان دهید که به‌ازای $r \in R$ و عدد صحیح i بین ۱ و n اگر ماتریس $B \in M_{n,n}(R)$ از ماتریس A با ضرب همهٔ درایه‌های سطر iام A در r به‌دست آمده باشد آن‌گاه $\det B = r \det A$. نتیجه بگیرید که $\det(rA) = r^n \det A$.

نظیر این احکام را در مورد ستونها به‌دست آورید.

سه) نشان دهید که به‌ازای هر ماتریس سطری $v \in M_{1,n}(R)$ و عدد صحیح i بین ۱ و n اگر C ماتریس حاصل از A با جانشین‌کردن v به‌جای سطر iام A باشد و D از A با جمع‌کردن v با سطر iام A به‌دست آمده باشد آن‌گاه

$$\det D = \det A + \det C.$$

نظیر این حکم را برای ستونها به‌دست آورید.

چهار) نشان دهید که اگر A بالامثلثی یا پایین‌مثلثی باشد آن‌گاه $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$، یعنی دترمینان A برابر با حاصلضرب درایه‌های قطری A است.

۳.۱۳ لم. فرض کنید به‌ازای $1 \le k < l \le n$ سطرهای kام و lام $B = (b_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ برابر باشند. در این‌صورت $\det B = 0$.

نظیر همین حکم درمورد ستونها برقرار است.

اثبات. (از دی. ای. جردن[1] تشکر می‌کنم که اثبات زیر را خاطرنشان کرد.) فرض کنید A_n گروه متناوب از مرتبهٔ $n!/2$ باشد. چون نگاشت $\phi : A_n \to S_n \backslash A_n$ با تعریف $\phi(\sigma) = \sigma \circ (kl)$، به‌ازای هر $\sigma \in A_n$، دوسویی است داریم

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{1,\sigma(1)} \dots b_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in A_n} b_{1,\sigma(1)} \dots b_{n,\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} b_{1,(\sigma\circ(kl))(1)} \dots b_{n,(\sigma\circ(kl))(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in A_n} b_{1,\sigma(1)} \dots b_{k,\sigma(k)} \dots b_{l,\sigma(l)} \dots b_{n,\sigma(n)} \\
&\quad - \sum_{\sigma \in A_n} b_{1,\sigma(1)} \dots b_{k,\sigma(l)} \dots b_{l,\sigma(k)} \dots b_{n,\sigma(n)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

زیرا سطرهای kام و lام B برابرند.

اثبات حکم را در مورد ستونها به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

1. D. A. Jordan

۴.۱۳* تمرین. حکم لم ۳.۱۳ را در مورد ستونها ثابت کنید.

۵.۱۳* تمرین. فرض کنید $n > ۱$ و $A \in M_{n,n}(R)$. فرض کنید $k, l \in \mathbb{N}$ که $۱ \leq k, l \leq n$ و $k \neq l$. فرض کنید $r \in R$. نشان دهید که اگر ماتریس $B \in M_{n,n}(R)$ از ماتریس A با جمع‌کردن r برابر سطر kام A با سطر lام آن به‌دست آید آن‌گاه $\det B = \det A$.

نظیر همین حکم را در مورد ستونها ثابت کنید.

۶.۱۳ نتیجه. فرض کنید $n > ۱$ و $A \in M_{n,n}(R)$، و فرض کنید ماتریس $B \in M_{n,n}(R)$ از ماتریس A با تعویض سطر iام A با سطر jام آن به‌دست آمده باشد که $۱ \leq i < j \leq n$. در این صورت $\det B = -\det A$.

نظیر همین حکم برای ستونها برقرار است.

اثبات. سطرهای iام و jام A را می‌توانیم با چهار عمل متوالی از نوع مذکور در ۲.۱۳(دو) و ۵.۱۳ تعویض کنیم: ابتدا به‌جای سطر iام حاصل جمع سطرهای iام و jام را قرار می‌دهیم؛ آن‌گاه در ماتریس به‌دست آمده به‌جای سطر jام حاصل تفریق سطر iام (جدید) را از سطر jام قرار می‌دهیم؛ سپس در ماتریس به‌دست آمده به جای سطر iام حاصل جمع سطر jام (جدید) را با سطر iام قرار می‌دهیم و در پایان به‌جای سطر jام حاصل‌ضرب آن را در -۱ قرار می‌دهیم. بنابراین نتیجهٔ موردنظر از تمرینهای ۲.۱۳(دو) و ۵.۱۳ حاصل می‌شود.

اثبات حکم در مورد ستونها به همین نحو است. ■

۷.۱۳ تعریف. فرض کنید $n > ۱$ و $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$. فرض کنید $l \in \mathbb{N}$ و k که $۱ \leq k, l \leq n$. ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ حاصل از حذف سطر kام و ستون lام A را با $\tilde{A}_{kl}$ نمایش می‌دهیم؛ $\det \tilde{A}_{kl}$ را کهاد (k, l) ماتریس A و

$$\mathrm{cof}_{kl}(A) := (-۱)^{k+l} \det \tilde{A}_{kl}$$

را همعامل (k, l)ماتریس A می‌نامیم.

ماتریس $\mathrm{Adj}\ A := (d_{ij}) \in M_{n,n}(R)$ را که در آن به‌ازای هر $i, j = ۱, \ldots, n$، $d_{ij} = \mathrm{cof}_{ji}(A)$ ماتریس الحاقی یا مزدوج A می‌نامیم. لذا، به‌عبارت دیگر، $\mathrm{Adj}\ A$ ترانهادهٔ ماتریس همعاملهای A است.

مزدوج هر ماتریس ۱×۱ روی R را برابر $I_۱$، یعنی ماتریس همانی ۱×۱ روی R، تعریف می‌کنیم.

۸.۱۳ لم. حالت ۷.۱۳ را درنظر بگیرید. در این صورت اگر

$$B := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

آن‌گاه $\det B = \mathrm{cof}_{kl}(A)$.

اثبات. نمادهای ۷.۱۳ را به‌کار می‌بریم. با استفاده از ۵.۱۳ نتیجه می‌گیریم که $\det B = \det C$ که در آن C ماتریس حاصل از B با تعویض ستون lام B با ستون kام ماتریس همانی $n \times n$ از $M_{n,n}(R)$ است.

حال (اگر $k < n$) با تعویض سطرهای kام و $(k+1)$ام از ماتریس C با یکدیگر و به دنبالش تعویض سطرهای $(k+1)$ام و $(k+2)$ام و به همین نحو تا تعویض سطرهای $(n-1)$ام و nام و سپس با انجام $n-l$ تعویض مشابه ستونها از ۶.۱۳ نتیجه می‌گیریم که $\det C = (-1)^{n-k+n-l} \det D$ که در آن

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{A}_{kl} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

قرار دهید $D = (d_{ij})$. در این صورت

$$\det D = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) d_{1,\sigma(1)} \cdots d_{n-1,\sigma(n-1)} d_{n,\sigma(n)}.$$

ولی $d_{n1} = \cdots = d_{n,n-1} = 0$ و $d_{nn} = 1$ و لذا تنها آن σهایی $(\sigma \in S_n)$ در مجموع فوق امکان تأثیر دارند که به‌ازای آنها داریم $\sigma(n) = n$، به‌ازای این σها، از تحدید σ به $\{1, \ldots, n-1\}$ جایگشتی چون $\sigma' \in S_{n-1}$ به‌دست می‌آید که همعلامت با σ است. در واقع هر $\phi \in S_{n-1}$

دقیقاً از یک $\sigma \in S_n$ به‌صورت σ' حاصل می‌شود. از این رو

$$\begin{aligned}\det D &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} (\operatorname{sgn} \sigma) d_{1,\sigma(1)} \dots d_{n-1,\sigma(n-1)} d_{n,n} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} (\operatorname{sgn} \sigma') d_{1,\sigma'(1)} \dots d_{n-1,\sigma'(n-1)} \\ &= \det \widetilde{A}_{kl}\end{aligned}$$

و لذا $\det B = (-1)^{k+l} \det \widetilde{A}_{kl} = \operatorname{cof}_{kl}(A)$. ■

۹.۱۳ قضیهٔ بسط. فرض کنید $n > 1$ و $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ که $1 \leq k \leq n$. در این صورت

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof}_{kj}(A) && \text{(بسط نسبت به سطر } k\text{ام)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \operatorname{cof}_{ik}(A) && \text{(بسط نسبت به ستون } k\text{ام)}\end{aligned}$$

اثبات. می‌توانیم بنویسیم

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + 0 & 0 + a_{k2} & \dots & 0 + a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

و با استفاده از ۲.۱۳(سه) $\det A$ را به صورت مجموع دو دترمینان بیان کنیم. حال می‌توانیم این کار را $n - 2$ بار دیگر انجام دهیم و نتیجه بگیریم که

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l-1} & a_{1,l} & a_{1,l+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{k,l} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,l-1} & a_{n,l} & a_{n,l+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(تفاوت ماتریسهای سمت راست تساوی فوق با ماتریس A (حداکثر) در سطر kام آنهاست.)
حال فرمول بسط $\det A$ نسبت به سطر kام از ۲.۱۳(دو) و ۸.۱۳ نتیجه می‌شود.
اثبات فرمول بسط $\det A$ را نسبت به ستون kام به شما واگذار می‌کنیم. ■

۱۰.۱۳ تمرین. اثبات ۹.۱۳ را کامل کنید.

۱۱.۱۳ قاعدهٔ همعاملهای نادرست. فرض کنید $n > 1$ و $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(R)$.
فرض کنید $k, l \in \mathbb{N}$ که $1 \leq k, l \leq n$. در این صورت

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mathrm{cof}_{lj}(A) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } k \neq l \\ \det A & \text{اگر } k = l \end{cases}$$

همچنین

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathrm{cof}_{il}(A) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } k \neq l \\ \det A & \text{اگر } k = l \end{cases}$$

اثبات. این دو حکم در حالت $k = l$ بلاواسطه از قضیهٔ بسط یعنی ۹.۱۳ نتیجه می‌شوند؛ لذا فرض می‌کنیم $k \neq l$. در این صورت $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\mathrm{cof}_{lj}(A)$ چیزی جز بسط نسبت به سطر lام ماتریس $B \in M_{n,n}(R)$ که از ماتریس A با قراردادن سطر kام A به‌جای سطر lام آن به‌دست می‌آید نیست. چون B دو سطر برابر دارد، از ۳.۱۳ نتیجه می‌شود که $\det B = 0$.
فرمول دیگر به همین نحو اثبات می‌شود. ■

۱۲.۱۳ نتیجه. فرض کنید $A \in M_{n,n}(R)$. در این صورت

$$A(\mathrm{Adj}\ A) = (\mathrm{Adj}\ A)A = (\det A)I_n.$$

اثبات. این مطلب در حالت $n = 1$ از تعاریف، و در حالت $n > 1$ بلاواسطه از قاعدهٔ همعاملهای نادرست یعنی ۱۱.۱۳ نتیجه می‌شود. ■

۱۳.۱۳ تمرین. فرض کنید $A \in M_{n,n}(R)$. می‌گوییم که A وارونپذیر است اگر $B \in M_{n,n}(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $AB = BA = I_n$. ثابت کنید A وارونپذیر است اگر و تنها اگر $\det A$ عضو وارونپذیر R باشد. (۱۱.۳ را درنظر داشته باشید.)

۱۴.۱۳ گامهای بعدی. کمی از مسیر اصلی خارج شدیم و به بررسی درنظریهٔ ماتریسهای روی حلقهٔ تعویضپذیر پرداختیم. اکنون که به هدف سابق‌الذکر رسیده‌ایم به دلیل کمبود جا از

ادامه‌دادن این مسیر اجتناب می‌کنیم: خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند ویژگیهای ماتریسهای روی د.ا.ا را در فصل ۷ از مرجع [۴] و ارتباط آنها را با مطالب فصل ۱۰ کتاب حاضر در فصل ۸ آن کتاب مطالعه کند.

همچنین شاید تذکر این نکته لازم باشد که بررسی کامل دترمینان ماتریسهای روی حلقهٔ تعویضپذیر متضمن مطرح‌کردن مفهوم جبر برونی [جبر گراسمان] است ولی این مبحث مانند جبر مانستگیی خارج از چارچوب این کتاب است.

حال رابطهٔ حکم ۱۲.۱۳ را با جبر تعویضپذیر توضیح می‌دهیم.

۱۵.۱۳ قضیه. فرض‌کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و M یک Sـمدول باشد که وقتی آن را با تحدید اسکالرها به عنوان Rـمدول درنظر می‌گیریم (۶.۶ را ببینید) مدولی متناهی‌مولد باشد و با n عضو (که $n \geq ۱$) تولید شود. فرض کنید $s \in S$ و I ایدآل R باشد و $sM \subseteq IM$. در این صورت $a_۱, \ldots, a_n$، که $a_i \in I^i$، به‌ازای $i = ۱, \ldots, n$، وجود دارند به‌طوری که

$$s^n + a_۱ s^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱} s + a_n \in (۰ :_S M).$$

اثبات. فرض کنید M به‌عنوان Rـمدول توسط $g_۱, \ldots, g_n$ تولید شود. در این صورت به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$ عضوهایی چون $b_{i۱}, \ldots, b_{in} \in I$ وجود دارند که

$$sg_i = \sum_{j=۱}^{n} b_{ij} g_j.$$

فرض کنید $C = (c_{ij})$ ماتریس $n \times n$ای روی S باشد که

$$c_{ij} = s\delta_{ij} - b_{ij} \quad (i, j = ۱, \ldots, n \text{ به‌ازای})$$

که در آن برحسب اینکه i و j برابر باشند یا نباشند δ_{ij} به‌ترتیب برابر با ۱_S یا ۰_S است. در این صورت

$$\sum_{j=۱}^{n} c_{ij} g_j = ۰ \qquad i = ۱, \ldots, n \text{ به‌ازای هر}$$

حال با استفاده از ۱۲.۱۳ داریم $(\mathrm{Adj}\ C)C = (\det C) I_n$، درنتیجه

$$(\det C) g_i = ۰ \qquad i = ۱, \ldots, n \text{ به‌ازای هر}$$

و لذا $\det C \in (\circ :_S M)$. در پایان از تعریف دترمینان نتیجه می‌شود که

$$\det C = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

که در آن به‌ازای $i = 1, \ldots, n$، $a_i \in I^i$. ■

لم ناکایاما یعنی ۲۴.۸ را می‌توان با استفاده از ۱۵.۱۳ ثابت کرد: اگر M مدول متناهی‌مولد روی حلقهٔ تعویضپذیر R و I ایدآل R باشد و $M = IM$ آن‌گاه از ۱۵.۱۳ با اتخاذ $S = R$ و $s = 1$، نتیجه می‌شود که M توسط عضوی به‌صورت $1 + a$ که $a \in I$ پوچ می‌شود و اگر $I \subseteq \operatorname{Jac}(R)$ آن‌گاه بنابر ۱۷.۳، $1 + a$ عضو وارونپذیر R است.

حال می‌توانیم مطالعهٔ نظریهٔ وابستگی صحیح را آغاز کنیم.

۱۶.۱۳ تعریف. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد و $s \in S$. می‌گوییم s روی R صحیح است اگر $h \in \mathbb{N}$ و $r_\circ, \ldots, r_{h-1} \in R$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1} + \cdots + r_1 s + r_\circ = \circ$$

یعنی s ریشهٔ یک چندجمله‌ای تکین متعلق به $R[X]$ باشد.

لذا در حالتی که R و S هیأت‌اند s روی R صحیح است اگر و تنها اگر روی R جبری باشد. بنابراین با توسیع جبری هیأتها مثالهایی از عضوهای صحیح به‌دست می‌آوریم. شاید تذکر این نکته لازم باشد که در این حالت کلیتر یعنی در حالت وابستگی صحیح به زیرحلقه تأکید ما بر تکین‌بودن چندجمله‌ای اهمیت بیشتری پیدا می‌کند.

روشن است که هر عضو R روی R صحیح است. می‌گوییم که S روی R صحیح است اگر هر عضو S روی R صحیح باشد.

فرض کنید R و R' حلقهٔ تعویضپذیر باشند، می‌گوییم که همریختی حلقه‌ای $f : R \to R'$ صحیح است اگر R' روی زیرحلقه‌اش $\operatorname{Im} f$ صحیح باشد.

۱۷.۱۳ لم. فرض کنید R دامنهٔ تجزیهٔ یکتا و K هیأت کسرهای R باشد. فرض کنید عضو $u \in K$ روی R صحیح باشد. در این صورت $u \in R$.

اثبات. روشن است که می‌توانیم فرض کنیم $u \neq \circ$. می‌توانیم بنویسیم $u = s/t$ که $s, t \in R$ و $t \neq \circ$، و چون R د.ت.ی است می‌توانیم فرض کنیم که هیچ عضو تحویلناپذیری از R وجود ندارد که عامل هر دو عضو s و t در R باشد. حال $h \in \mathbb{N}$ و $r_\circ, \ldots, r_{h-1} \in R$ وجود دارند که

$$\frac{s^h}{t^h} + r_{h-1}\frac{s^{h-1}}{t^{h-1}} + \cdots + r_1 \frac{s}{t} + r_\circ = \circ$$

و لذا

$$s^h + r_{h-1}s^{h-1}t + \cdots + r_1 st^{h-1} + r_0 t^h = 0.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که هر عامل تحویلناپذیر t (یعنی عضو تحویلناپذیری که مقسوم‌علیه t باشد) باید عامل s^h و لذا عامل s باشد. از این‌رو t هیچ عامل تحویلناپذیر ندارد و لذا t عضو وارونپذیر R است و بنابراین $u \in R$. ■

۱۸.۱۳ تعریف. می‌گوییم که مدول M روی حلقهٔ تعویضپذیر R صادق است اگر $(0 : M) = 0$ یعنی اگر پوچساز M صفر باشد.

۱۹.۱۳ تذکر. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد.

یک) از این به بعد وقتی بدون قید و شرطی می‌گوییم که S Rـمدول است منظور این است که S با تحدید اسکالرها (۶.۶ را ببینید) با استفاده از همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک طبیعی به‌عنوان Rـمدول درنظر گرفته می‌شود.

دو) حال به‌علاوه فرض کنید که R و S هر دو زیرحلقهٔ حلقهٔ تعویضپذیر T باشند؛ لذا $R \subseteq S \subseteq T$. اگر T به‌عنوان Sـمدول توسط $\{t_1, \ldots, t_n\}$ تولید شود و S به‌عنوان Rـمدول توسط $\{s_1, \ldots, s_m\}$ تولید شود آن‌گاه به‌آسانی می‌بینیم که T به‌عنوان Rـمدول توسط $\{s_i t_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ تولید می‌شود. در این فصل این مطلب ساده را بسیار به‌کار می‌بریم.

۲۰.۱۳ قضیه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد و $u \in S$. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) u روی R صحیح است؛

دو) زیرحلقهٔ $R[u]$ از S به‌عنوان Rـمدول، متناهی‌مولد است؛

سه) زیرحلقه‌ای چون R' از S وجود دارد که $R[u] \subseteq R'$ و R' به‌عنوان Rـمدول، متناهی‌مولد است؛

چهار) $R[u]$ـمدول صادقی وجود دارد که وقتی با تحدید اسکالرها به‌عنوان Rـمدول درنظر گرفته شود متناهی‌مولد است.

اثبات. (یک) $\Longrightarrow$ (دو) توجه کنید که $R[u]$ به‌عنوان Rـمدول توسط $\{u^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ تولید می‌شود. اما $h \in \mathbb{N}$ و $r_0, \ldots, r_{h-1} \in R$ وجود دارند که

$$u^h + r_{h-1}u^{h-1} + \cdots + r_1 u + r_0 = 0.$$

بنابراین کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}_0$، $u^{h+n} \in R1 + Ru + \cdots + Ru^{h-1}$

و این به‌آسانی با استقرا روی n اثبات می‌شود زیرا رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$u^{h+n} = -r_{h-1}u^{h+n-1} - \cdots - r_1 u^{n+1} - r_0 u^n.$$

(سه) $\Longleftarrow$ (دو) کافی است فرض کنید که $R' = R[u]$.

(چهار) $\Longleftarrow$ (سه) کافی است فرض کنید $M = R'$ که R' $R[u]$ـمدول صادق است زیرا از $a \in (0 :_{R[u]} R')$ نتیجه می‌شود که $a1_R = 0$.

(یک) $\Longleftarrow$ (چهار) فرض کنید M یک $R[u]$ـمدول صادق باشد که به عنوان Rـمدول متناهی‌مولد است. چون $uM \subseteq RM$ می‌توانیم ۱۵.۱۳ را به‌ازای $S = R[u]$ و $I = R$ به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم که عدد $n \in \mathbb{N}$ و عضوهای $a_1, \ldots, a_n \in R$ وجود دارند به‌طوری که

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_{n-1}u + a_n \in (0 :_{R[u]} M) = 0$$

از این‌رو u روی R صحیح است. ■

۲۱.۱۳ نتیجه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد و عضوهای $u_1, \ldots, u_n \in S$ روی R صحیح باشند. در این صورت زیرحلقهٔ $R[u_1, \ldots, u_n]$ از S یک Rـمدول متناهی‌مولد است.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم؛ وقتی $n = 1$ حکم از ۲۰.۱۳ حاصل می‌شود. لذا فرض کنید $n > 1$ و حکم به‌ازای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. بنا به فرض استقرا، $R[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ یک Rـمدول متناهی‌مولد است و چون u_n به طریق اولی روی $R[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ صحیح است از ۲۰.۱۳ نتیجه می‌گیریم که $R[u_1, \ldots, u_n] = R[u_1, \ldots, u_{n-1}][u_n]$ یک $R[u_1, \ldots, u_{n-1}]$ـمدول متناهی‌مولد است. از این‌رو بنابر ۱۹.۱۳(دو)، $R[u_1, \ldots, u_n]$ یک Rـمدول متناهی‌مولد است و لذا اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کامل است. ■

از ۲۱.۱۳ نتیجه می‌شود که اگر حلقهٔ تعویضپذیر S به‌عنوان جبر روی زیرحلقه‌اش R متناهی‌مولد باشد (۹.۸ را ببینید) و S روی R صحیح باشد آن‌گاه S در واقع به‌عنوان Rـمدول متناهی‌مولد است. این رابطهٔ متقابل بین دو مفهوم متفاوت" متناهی‌مولد "ممکن است به وحدت یافتن این مفاهیم درنظر خواننده کمک کند!

۲۲.۱۳ نتیجه و تعریف. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد. در این صورت

$$R' := \{s \in S : \text{روی } R \text{ صحیح است } s\}$$

یک زیرحلقهٔ S است که R را شامل می‌شود و بستار صحیح R در S نام دارد. می‌گوییم که R در S صحیحاً بسته است اگر $R' = R$، یعنی اگر هر عضو S که روی R صحیح باشد متعلق به R باشد.

اثبات. قبلاً در ۱۶.۱۳ متذکر شدیم که هر عضو R روی R صحیح است و لذا $R \subseteq R'$. از این رو $1_R \in R'$. حال فرض کنید $a, b \in R'$؛ در این صورت بنابر۲۱.۱۳، حلقهٔ $R[a, b]$ یک Rـمدول متناهی‌مولد است؛ از این‌رو بنابر ۲۰.۱۳، $a + b, -a, ab \in R'$. بنابراین از معیار زیرحلقه‌ها یعنی ۵.۱ نتیجه می‌شود که R' زیرحلقهٔ S است. ■

۲۳.۱۳ نتیجه. فرض کنید $R \subseteq S \subseteq T$ که R و S زیرحلقه‌هایی از حلقهٔ تعویضپذیر Tاند. فرض کنید S روی R و T روی S صحیح باشند. در این‌صورت T روی R صحیح است.

اثبات. فرض کنید $t \in T$. در این صورت t روی S صحیح است و عضوهای $h \in \mathbb{N}$ و $s_0, \ldots, s_{h-1} \in S$ وجود دارند که

$$t^h + s_{h-1}t^{h-1} + \cdots + s_1t + s_0 = 0.$$

از این‌رو t روی $C := R[s_0, \ldots, s_{h-1}]$ صحیح است و لذا بنابر ۲۰.۱۳، $C[t]$ به‌عنوان Cـمدول، متناهی‌مولد است. به‌علاوه بنابر ۲۱.۱۳، C به‌عنوان Rـمدول، متناهی‌مولد است و لذا بنابر ۱۹.۱۳(دو)، $C[t]$ به عنوان Rـمدول، متناهی‌مولد است. حال با استفاده از ۲۰.۱۳ نتیجه می‌گیریم که t روی R صحیح است. لذا T روی R صحیح است. ■

۲۴.۱۳ نتیجه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و R' بستار صحیح R در S باشد. در این صورت R' در S صحیحاًبسته است.

اثبات. فرض کنید R'' نشاندهندهٔ بستار صحیح R' در S باشد. در این صورت بنابر۲۳.۱۳، R'' روی R صحیح است و لذا $R' = R''$. ■

۲۵.۱۳ تمرین. فرض کنید R، $S_1, \ldots, S_n$ $(n \geq 1)$ حلقه‌هایی تعویضپذیر و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $f_i : R \to S_i$ همریختی حلقه‌ای صحیح باشد (۱۶.۱۳ را ببینید). نشان دهید که همریختی حلقه‌ای $f : R \to \Pi_{i=1}^n S_i$ از R به حلقهٔ حاصلضرب مستقیم (۶.۲ را ببینید) که در آن به‌ازای هر $r \in R$، $f(r) = (f_1(r), \ldots, f_n(r))$، نیز صحیح است.

حال اثر برخی از اعمال معمول روی حلقه‌ها را بر وابستگی صحیح بررسی می‌کنیم.

۲۶.۱۳ لم. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد.

یک) فرض کنید J ایدآل S و J^c نشاندهندهٔ ایدآل $R \cap J$ از R باشد (در اینجا نماد تحدید مذکور در ۴۱.۲ را به‌کار برده‌ایم). لذا J^c هستهٔ همریختی حلقه‌ای مرکب

$$g : R \xrightarrow{\subseteq} S \longrightarrow S/J$$

است (که در آن همریختی دوم همریختی طبیعی است) و لذا بنابر ۱۳.۲، همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک $\overline{g} : R/J^c \to S/J$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $r \in R$، $\overline{g}(r + J^c) = r + J$ و از این‌رو می‌توانیم قرار بگذرایم که R/J^c را به عنوان زیرحلقهٔ S/J درنظر بگیریم.

با این قرار داد، S/J روی R/J^c صحیح است.

دو) فرض کنید U زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R باشد. دراین صورت همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک $h : U^{-1}R \to U^{-1}S$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $r \in R$ و $u \in U$، $h(r/u) = r/u$. با استفاده از این مطلب می‌توانیم قرار بگذاریم که $U^{-1}R$ را به عنوان زیرحلقهٔ $U^{-1}S$ درنظر بگیریم.

با این قرارداد، $U^{-1}S$ روی $U^{-1}R$ صحیح است.

اثبات. فرض کنید $s \in S$. در این‌صورت عضوهای $n \in \mathbb{N}$ و $r_0, \ldots, r_{n-1} \in R$ وجود دارند به‌طوری که

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_0 = 0.$$

یک) همریختی طبیعی از S به S/J را بر طرفین این تساوی اثر می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم که $s + J$ روی R/J^c صحیح است.

دو) فرض کنید $u \in U$. از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{s^n}{u^n} + \frac{r_{n-1}}{u}\frac{s^{n-1}}{u^{n-1}} + \cdots + \frac{r_1}{u^{n-1}}\frac{s}{u} + \frac{r_0}{u^n} = 0$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که s/u روی $U^{-1}R$ صحیح است. ■

۲۷.۱۳ نتیجه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و R' بستار صحیح R در S باشد. فرض کنید U زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R باشد. در این صورت $U^{-1}R'$ بستار صحیح $U^{-1}R$ در $U^{-1}S$ است.

اثبات. بنابر ۲۶.۱۳(دو)، $U^{-1}R'$ روی $U^{-1}R$ صحیح است. فرض کنید $s \in S$ و $u \in U$ به‌طوری که عضو s/u از $U^{-1}S$ روی $U^{-1}R$ صحیح باشد. در این صورت $(n \in \mathbb{N}$ و$)$ $r_0, \ldots, r_{n-1} \in R$ و $u_0, \ldots, u_{n-1} \in U$ وجود دارند به‌طوری که

$$\frac{s^n}{u^n} + \frac{r_{n-1}}{u_{n-1}}\frac{s^{n-1}}{u^{n-1}} + \cdots + \frac{r_1}{u_1}\frac{s}{u} + \frac{r_0}{u_0} = 0.$$

فرض کنید $v := u_{n-1}\dots u_0 (\in U)$. با ضرب‌کردن دو طرف تساوی فوق در $v^n u^n/1$ نتیجه می‌گیریم که $r'_0, \dots, r'_{n-1} \in R$ وجود دارند به‌طوری که

$$\frac{v^n s^n}{1} + \frac{r'_{n-1}}{1}\frac{v^{n-1}s^{n-1}}{1} + \cdots + \frac{r'_1}{1}\frac{vs}{1} + \frac{r'_0}{1} = 0.$$

از این‌رو $v' \in U$ وجود دارد که

$$v'(v^n s^n + r'_{n-1}v^{n-1}s^{n-1} + \cdots + r'_1 vs + r'_0) = 0.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $v'vs$ روی R صحیح است؛ بنابراین $v'vs \in R'$ و $s/u = v'vs/v'vu \in U^{-1}R'$. به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.■

۲۸.۱۳ تعریف. وقتی می‌گوییم بستار صحیح دامنهٔ صحیح R، بدون اینکه قید کنیم در کدام حلقه، مقصودمان بستار صحیح R در هیأت کسرهایش است. همچنین وقتی می‌گوییم دامنهٔ صحیح R صحیحاًبسته است، بدون اینکه قید کنیم در کدام حلقه، مقصودمان این است که R در هیأت کسرهایش صحیحاًبسته است (به معنای ۲۲.۱۳).

به طورکلی فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر باشد. مجموعهٔ

$$V := \{r \in R : \text{مقسوم‌علیه صفر } R \text{ نیست } r\}$$

زیرمجموعهٔ ضربی‌بستهٔ R است و همریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \to V^{-1}R$ یک‌به‌یک است (زیرا بنابر ۴.۵(چهار)، هر عضو $\operatorname{Ker} f$ توسط عضوی از V پوچ می‌شود) و لذا با استفاده از f می‌توانیم R را به عنوان زیرحلقهٔ $V^{-1}R$ درنظر بگیریم. وقتی می‌گوییم که R صحیحاًبسته است و نمی‌گوییم در کدام حلقه، مقصودمان این است که در $V^{-1}R$ صحیحاًبسته است.

۲۹.۱۳ قضیه. فرض کنید R دامنهٔ صحیح باشد. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

یک) R صحیحاًبسته است؛

دو) به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$، R_P صحیحاًبسته است؛

سه) به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از R، R_M صحیحاًبسته است.

اثبات. فرض کنید K هیأت کسرهای R و $\overline{R}$ بستار صحیح R باشد (۲۸.۱۳ را ببینید). فرض کنید $f : R \to \overline{R}$ نگاشت یک‌به‌یک طبیعی باشد، در این صورت R صحیحاًبسته است اگر و تنها اگر f پوشا باشد. فرض کنید $P \in \operatorname{Spec}(R)$. بنابر ۲۷.۱۳، $\overline{R}_P$ بستار صحیح R_P در K_P است.

ولی طبق ۱۶.۵، حلقهٔ K_P را می‌توان با K یکی دانست و K را نیز می‌توان با هیأت کسرهای R_P یکی دانست. لذا می‌بینیم که $f_P : R_P \to \overline{R}_P$ پوشاست اگر و تنها اگر R_P صحیحاً‌بسته باشد. بنابراین نتیجهٔ موردنظر از ۱۷.۹ حاصل می‌شود. ■

وقتی در فصل ۱۴ نظریهٔ بعد جبر تعویضپذیر متناهی‌مولد (ناصفر) A روی هیأت K را مطالعه می‌کنیم نه تنها با درجهٔ تعالی زبرهیأت مواجه می‌شویم بلکه با "زنجیرهٔ ایدآلهای اول A" نیز مواجه می‌شویم: چنین زنجیره‌ای دنباله‌ای اکیداً صعودی چون

$$P_\circ \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1} \subset P_n$$

از ایدآلهای اول A است. طول این زنجیره تعداد علامتهای $\subset$ یعنی یکی کمتر از تعداد ایدآلهای اول است؛ لذا طول زنجیرهٔ فوق برابر n است. در فصل ۱۴ خواهیم دید که بعد A در واقع برابر با بزرگترین طول زنجیره‌های ایدآلهای اول A تعریف می‌شود.

برای ارتباط دادن این مفهوم به‌مفهوم درجهٔ تعالی زبرهیأت سعی می‌کنیم A را با زیرحلقه‌ای چون B "تقریب بزنیم" که B اساساً حلقه‌ای از چندجمله‌ایهای روی K از تعدادی متناهی مجهول است که A روی آن صحیح است. به این دلیل مقایسهٔ زنجیره‌های ایدآلهای اول A و زنجیره‌های مشابهی از B مهم و مفید است. از اینجا معلوم می‌شود که چرا در قسمت بعدی کارمان در این فصل ایدآلهای اول R و S را، که R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح است، با هم مقایسه می‌کنیم.

۱۳.۳۰ قضیه. فرض کنید R زیرحلقهٔ دامنهٔ صحیح S و S روی R صحیح باشد. در این صورت S هیأت است اگر و تنها اگر R هیأت باشد.

اثبات. ($\Longleftarrow$) فرض کنید R هیأت باشد. فرض کنید $s \in S$ و $s \neq \circ$. در این صورت چندجمله‌ای تکینی متعلق به $R[X]$ وجود دارد که s ریشهٔ آن است: فرض کنید n کوچکترین درجهٔ ممکن این چندجمله‌ایهای تکین باشد. در این‌صورت عضوهایی چون $n \in \mathbb{N}$ و $r_\circ, \ldots, r_{n-1} \in R$ وجود دارند که

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \cdots + r_1 s + r_\circ = \circ$$

لذا

$$s(-s^{n-1} - r_{n-1}s^{n-2} - \cdots - r_1) = r_\circ.$$

چون S دامنهٔ صحیح است و $s \neq \circ$ از تعریف n نتیجه می‌شود که $r_\circ \neq \circ$؛ از این‌رو $r_\circ$ در R وارون دارد و از رابطهٔ دوم فوق نتیجه می‌شود که

$$-r_\circ^{-1}(s^{n-1} + r_{n-1}s^{n-2} + \cdots + r_1)$$

وارون s در S است. درنتیجه S هیأت است.

($\Longleftarrow$) فرض کنید S هیأت باشد. فرض کنید $r \in R$ و $r \neq \circ$. چون S هیأت است، r وارونی چون $r^{-\backslash}$ در S دارد: نشان می‌دهیم که $r^{-\backslash} \in R$.

چون $r^{-\backslash}$ روی R صحیح است، عضوهایی چون $h \in \mathbb{N}$ و $u_\circ, \ldots, u_{h-\backslash} \in R$ وجود دارندکه

$$(r^{-\backslash})^h + u_{h-\backslash}(r^{-\backslash})^{h-\backslash} + \cdots + u_\backslash r^{-\backslash} + u_\circ = \circ.$$

دوطرف این رابطه را در $r^{h-\backslash}$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$r^{-\backslash} = -(u_{h-\backslash} + \cdots + u_\backslash r^{h-\text{۲}} + u_\circ r^{h-\backslash}) \in R.$$

بدین ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد. ■

۳۱.۱۳ نتیجه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S باشد و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $Q \in \operatorname{Spec}(S)$ و ایدآل $P := Q \cap R = Q^c$ حاصل تحدید Q به R باشد و لذا بنابر ۲۷.۳(دو)، $P \in \operatorname{Spec}(R)$. در این‌صورت Q ایدآل ماکسیمال S است اگر و تنها اگر P ایدآل ماکسیمال R باشد.

اثبات. چنانکه در ۲۶.۱۳(یک) شرح داده شد، می‌توان $R/P = R/Q^c$ را به عنوان زیرحلقهٔ S/Q درنظر گرفت و در این صورت S/Q روی R/P صحیح است. بنابراین از ۳۰.۱۳ نتیجه می‌شود که S/Q هیأت است اگر و تنها اگر R/P هیأت باشد و لذا بنابر ۳.۳، Q ایدآل ماکسیمال S است اگر و تنها اگر P ایدآل ماکسیمال R باشد. ■

اگر چه تذکر زیر ساده است ولی بیش از حدِ انتظار مفید واقع می‌شود.

۳۲.۱۳ تذکر. فرض کنید $f : R \to S$ و $g : S \to T$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر و J ایدآل T باشد. در این‌صورت

$$f^{-\backslash}(g^{-\backslash}(J)) = (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})^{-\backslash}(J).$$

۳۳.۱۳ قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $Q, Q' \in \operatorname{Spec}(S)$ که $Q \subseteq Q'$ و $Q' \cap R = Q \cap R =: P$. در این‌صورت $Q = Q'$.

توجه. این قضیه را به صورت دیگری نیز، که نام قضیه از آن گرفته شده، بیان کرده‌اند: اگر $Q_\backslash$ و $Q_\text{۲}$ دو ایدآل اول متفاوت S باشند که حاصل تحدیدشان به R یکی باشد آن‌گاه $Q_\backslash$ و $Q_\text{۲}$ "مقایسه‌ناپذیرند" به این معنی که هیچکدام زیرمجموعهٔ دیگری نیست.

اثبات. فرض کنید $U := R\backslash P$، و $\tau : R \to S$ همریختی یک‌به‌یک طبیعی و $\sigma : U^{-1}R = R_P \to U^{-1}S$ همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک به‌دست آمده از τ باشد (۲۶.۱۳(دو) را ببینید). فرض کنید $\theta : R \to R_P$ و $\phi : S \to U^{-1}S$ همریختیهای متعارف باشند. توجه کنید که $\phi \circ \tau = \sigma \circ \theta$.

$QU^{-1}S$ و $Q'U^{-1}S$ را درنظر بگیرید. بنابر ۳۲.۵(دو)، این دو ایدآل ایدآل اول $U^{-1}S$اند. به‌علاوه $QU^{-1}S \subseteq Q'U^{-1}S$. همچنین بنابر ۳۰.۵

$$\tau^{-1}(\phi^{-1}(QU^{-1}S)) = \tau^{-1}(Q) = Q \cap R = P = \tau^{-1}(\phi^{-1}(Q'U^{-1}S)).$$

لذا بنابر ۳۲.۱۳ و ۲۷.۳(دو)، ایدآلهای $\sigma^{-1}(QU^{-1}S)$ و $\sigma^{-1}(Q'U^{-1}S)$ از R_P اول‌اند و

$$\theta^{-1}(\sigma^{-1}(QU^{-1}S)) = P = \theta^{-1}(\sigma^{-1}(Q'U^{-1}S)).$$

درنتیجه بنابر ۳۳.۵، $\sigma^{-1}(QU^{-1}S) = PR_P = \sigma^{-1}(Q'U^{-1}S)$. چون (بنابر ۲۶.۱۳) σ همریختی حلقه‌ای صحیح و PR_P ایدآل ماکسیمال حلقهٔ شبه موضعی R_P است از ۳۱.۱۳ نتیجه می‌شود که $QU^{-1}S$ و $Q'U^{-1}S$ هر دو ایدآلهای ماکسیمال $U^{-1}S$اند. ولی $QU^{-1}S \subseteq Q'U^{-1}S$ و لذا $QU^{-1}S = Q'U^{-1}S$؛ درنتیجه باز هم بنابر ۳۳.۵، $Q = Q'$.■

۳۴.۱۳ قضیهٔ وقوع. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویض‌پذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$. در این‌صورت $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ وجود دارد که $Q \cap R = P$ یعنی"Q روی P واقع است".

اثبات. از نمادهایی مشابه با آنچه در اثبات ۳۳.۱۳ به‌کار رفت استفاده می‌کنیم. لذا فرض کنید $U := R\backslash P$ و $\tau : R \to S$ همریختی یک‌به‌یک طبیعی و $\sigma : U^{-1}R = R_P \to U^{-1}S$ همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک به‌دست آمده از τ باشد و فرض کنید $\theta : R \to R_P$ و $\phi : S \to U^{-1}S$ همریختیهای متعارف باشند.

توجه کنید که $U^{-1}S$ حلقهٔ صفر نیست (از جمله به این دلیل که σ یک‌به‌یک است) و لذا بنابر ۹.۳، $U^{-1}S$ ایدآل ماکسیمالی چون N دارد. چون بنابر ۲۶.۱۳(دو)، σ همریختی حلقه‌ای صحیح است از ۳۱.۱۳ نتیجه می‌شود که $\sigma^{-1}(N) = PR_P$. از این‌رو چون $\phi \circ \tau = \sigma \circ \theta$ از ۳۲.۱۳ و ۳۳.۵ نتیجه می‌گیریم که $Q := \phi^{-1}(N) \in \mathrm{Spec}(S)$ و

$$Q \cap R = \tau^{-1}(\phi^{-1}(N)) = \theta^{-1}(\sigma^{-1}(N)) = \theta^{-1}(PR_P) = P.$$

۳۵.۱۳ تمرین. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویض‌پذیر S و S روی R صحیح باشد.

یک) نشان دهید که اگر عضو $r \in R$ در S وارونپذیر باشد در R نیز وارونپذیر است.
دو) نشان دهید که $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{Jac}(S) \cap R$.

۳۶.۱۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر باشد. مقصود از خودریختی R یکریختی حلقه‌ای از R به روی خودش است. به آسانی دیده می‌شود که مجموعهٔ همهٔ خودریختیهای R تحت ترکیب نگاشتها گروه است. فرض کنید G زیرگروهی متناهی از این گروه خودریختیهای R باشد. نشان دهید که

$$R^G := \{r \in R : \sigma(r) = r \text{ ،} \sigma \in G \text{ به‌ازای هر}\}$$

زیرحلقهٔ R است و R روی R^G صحیح است. (راهنمایی: چندجمله‌ای

$$\Pi_{\sigma \in G}(X - \sigma(r)) \in R[X]$$

را به‌ازای $r \in R$ درنظر بگیرید).
حال فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R^G)$ و

$$\mathcal{P} := \{Q \in \mathrm{Spec}(R) : Q \cap R^G = P\}.$$

فرض کنید $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}$. حال $\Pi_{\sigma \in G}\sigma(r)$ را به‌ازای $r \in Q_1$ درنظر بگیرید و نشان دهید که

$$Q_1 \subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma(Q_2)$$

و نتیجه بگیرید که به‌ازای عضوی چون $\tau \in G$، $Q_1 = \tau(Q_2)$.
نتیجه بگیرید که $\mathcal{P}$ متناهی است.

۳۷.۱۳ تمرین. فرض می‌کنیم $f : R \to S$ همریختی حلقه‌های تعویضپذیر باشد و نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ را به‌کار می‌بریم. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$. نشان دهید که $Q \in \mathrm{Spec}(S)$ وجود دارد که $Q^c = P$ اگر و تنها اگر $P^{ec} = P$. (راهنمایی: نشان دهید که اگر $P^{ec} = P$ آن‌گاه $P^e \cap f(R \backslash P) = \varnothing$ و به ۴۴.۳ توجه کنید).

۳۸.۱۳ قضیهٔ صعود. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $m \in \mathbb{N}_0$ و $n \in \mathbb{N}$ و $m < n$. فرض کنید زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1} \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R و زنجیرهٔ

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_{m-1} \subset Q_m$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول S باشد و به‌ازای هر $i = \circ, \ldots, m$، $Q_i \cap R = P_i$. در این صورت زنجیرهٔ دوم را می‌توانیم با ایدآلهای اولی چون $Q_{m+\text{۱}}, \ldots, Q_n$ از S گسترش دهیم و زنجیرهٔ زیر را به دست آوریم

$$Q_\circ \subset Q_\text{۱} \subset \ldots \subset Q_{n-\text{۱}} \subset Q_n$$

به‌طوری که به‌ازای هر $i = \circ, \ldots, n$، $Q_i \cap R = P_i$.

اثبات. اگر قضیه را در حالت خاص $m = \circ$ و $n = \text{۱}$ اثبات کنیم، آن‌گاه قضیه با استفاده از استقرا به سهولت اثبات می‌شود. از آنجا که در پی ایدآل اولی از S هستیم که شامل $Q_\circ$ باشد، با توجه به تناظر دوسویی بین مجموعهٔ ایدآلهای اولی از S که شامل $Q_\circ$اند و $\operatorname{Spec}(S/Q_\circ)$ (۲۸.۳ را ببینید) طبیعی است که حلقهٔ رده‌های مانده‌ای $S/Q_\circ$ را درنظر بگیریم.

فرض کنید $\tau : R \to S$ همریختی یک‌به‌یک طبیعی و $\rho : R/P_\circ \to S/Q_\circ$ همریختی حلقه‌ای یک‌به‌یک به‌دست آمده از τ باشد (۲۶.۱۳(یک) را ببینید). فرض کنید

$$\psi : S \to S/Q_\circ \quad \text{و} \quad \xi : R \to R/P_\circ$$

همریختیهای متعارف باشند. توجه کنید که $\psi \circ \tau = \rho \circ \xi$.

حال بنابر ۳۷.۲ و ۲۸.۳ داریم $P_\text{۱}/P_\circ \in \operatorname{Spec}(R/P_\circ)$. با توجه به ویژگیی که همریختی حلقه‌ای ρ طبق ۲۶.۱۳(یک) دارد، از قضیهٔ "وقوع" یعنی ۳۴.۱۳ نتیجه می‌شود که ایدآل اولی چون $\mathcal{Q} \in \operatorname{Spec}(S/Q_\circ)$ وجود دارد که $\rho^{-\text{۱}}(\mathcal{Q}) = P_\text{۱}/P_\circ$. به‌علاوه، مجدداً بنابر ۳۷.۲ و ۲۸.۳، $Q_\text{۱} \in \operatorname{Spec}(S)$ وجود دارد که $Q_\text{۱} \supseteq Q_\circ$ و $\mathcal{Q} = Q_\text{۱}/Q_\circ$. در این‌صورت داریم

$$Q_\text{۱} \cap R = \tau^{-\text{۱}}(\psi^{-\text{۱}}(\mathcal{Q})) = \xi^{-\text{۱}}(\rho^{-\text{۱}}(\mathcal{Q})) = \xi^{-\text{۱}}(P_\text{۱}/P_\circ) = P_\text{۱}.$$

با این مطلب اثبات کامل می‌شود زیرا روشن است که $Q_\circ \subset Q_\text{۱}$. ■

وقتی می‌خواهیم بعد یک جبر تعویضپذیر متناهی‌مولد روی یک هیأت را با بعد یکی از زیرحلقه‌هایش که جبر روی آن صحیح است مقایسه کنیم قضیهٔ صعود یعنی ۳۸.۱۳ مفید واقع می‌شود. همچنین در مقایسه‌های مشابهی قضیهٔ به اصطلاح" نزول" مفید واقع می‌شود که قضیه‌ای تقریباً مشابه با قضیهٔ صعود است بجز اینکه در این قضیه روابط مشمولیت در زنجیرهٔ ایدآلهای اول به‌عکس قضیهٔ صعود است و به‌علاوه برای R و S نیز مفروضات بیشتری قائل می‌شویم: نه‌تنها فرض می‌کنیم که حلقهٔ تعویضپذیر S روی زیرحلقه‌اش R صحیح است بلکه همچنین فرض می‌کنیم که هر دو حلقهٔ R و S دامنهٔ صحیح‌اند و R در واقع صحیحاًبسته است (۲۸.۱۳ را ببینید). با استفاده از این فرضهای اضافه می‌توانیم قسمتی از نظریهٔ توسیع جبری هیأتها را که در فصل ۱۲ دیدیم به‌کار ببریم.

حال دو حکم مقدماتی را برای اثبات قضیهٔ نزول در ۴۱.۱۳، ارائه می‌کنیم.

۳۹.۱۳ لم. فرض کنید R زیرحلقهٔ حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید I ایدآل R باشد. آن‌گاه

$$\sqrt{IS}=\{s\in S: s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0 \text{ ،} a_0,\ldots,a_{n-1}\in I \text{ و } n\in\mathbb{N} \text{ به‌ازای}\}$$

اثبات. فرض کنید $s\in\sqrt{IS}$ در این صورت (عددهای $h,n\in\mathbb{N}$ و) عضوهای $a_1,\ldots,a_n\in I$ و $s_1,\ldots,s_n\in S$ وجود دارند که $s^h=\sum_{i=1}^n a_is_i$. بنابر ۲۱.۱۳، حلقهٔ $T:=R[s,s_1,\ldots,s_n]$ یک Rـمدول متناهی‌مولد است. به‌علاوه $s^hT\subseteq IT$. حال با توجه به اینکه T یک Tـمدول صادق است از ۱۵.۱۳ نتیجه می‌شود که عدد $m\in\mathbb{N}$ و عضوهای $b_0,\ldots,b_{m-1}\in I$ وجود دارند به‌طوری که

$$(s^h)^m+b_{m-1}(s^h)^{m-1}+\cdots+b_1s^h+b_0=0$$

و لذا

$$s^{hm}+b_{m-1}s^{h(m-1)}+\cdots+b_1s^h+b_0=0.$$

به‌عکس فرض کنید $s\in S$، و عدد $n\in\mathbb{N}$ و عضوهای $a_0,\ldots,a_{n-1}\in I$ وجود داشته باشند به‌طوری که

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0=0.$$

در این صورت $s^n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_is^i\in IS$. ■

۴۰.۱۳ قضیه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از دامنهٔ صحیح S و S روی R صحیح و R صحیحاًبسته باشد. فرض کنید K هیأت کسرهای R و I ایدآل R باشد و $s\in IS$. در این صورت s روی K جبری است و چندجمله‌ای مینیمالش به‌صورت

$$X^h+a_{h-1}X^{h-1}+\cdots+a_1X+a_0$$

است که در آن $a_0,\ldots,a_{h-1}\in\sqrt{I}$.

اثبات. چون s روی R صحیح است یقیناً روی K جبری است. فرض کنید چندجمله‌ای مینیمالش روی K عبارت باشد از

$$f=X^h+a_{h-1}X^{h-1}+\cdots+a_1X+a_0\in K[X].$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in \sqrt{I}$.

بنابر ۵.۱۲، زبرهیأتی چون L از هیأت کسرهای S وجود دارد به‌طوری که f در $L[X]$ به حاصلضرب عاملهای خطی تجزیه می‌شود: فرض کنید عضوهای $s = s_1, \dots, s_h \in L$ چنان باشند که

$$f = (X - s_1)(X - s_2)\dots(X - s_h) \in L[X].$$

از مقایسهٔ ضرایب دوطرف نتیجه می‌شود که هریک از عضوهای $a_\circ, \dots, a_{h-1}$ را می‌توان به‌صورت "چندجمله‌ای همگن" (در واقع به‌صورت "تابع متقارن") از $s_1, \dots, s_h$ با ضرایب ± 1 نوشت و لذا $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in R[s_1, \dots, s_h]$.

بنابر ۳۹.۱۳، عددی چون $m \in \mathbb{N}$ و عضوهایی چون $b_\circ, \dots, b_{m-1} \in I$ وجود دارند که

$$s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_\circ = \circ.$$

از طرف دیگر هر s_i $(i = 1, \dots, h)$ روی K جبری با چندجمله‌ای مینیمال f است و لذا از ۳۶.۱۲(دو) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 2, \dots, h$ یکریختی هیأتی $\sigma_i : K(s) \to K(s_i)$ وجود دارد که $\sigma_i(s) = s_i$ و به‌ازای هر $a \in K$، $\sigma_i(a) = a$. درنتیجه به‌ازای هر $i = 1, \dots, h$ داریم

$$s_i^m + b_{m-1}s_i^{m-1} + \dots + b_1 s_i + b_\circ = \circ$$

(یادآوری می‌کنیم که $s = s_1$.) از این مطلب نتیجه می‌گیریم که هر s_i $(i = 1, \dots, m)$ روی R صحیح است و لذا بنابر ۲۱.۱۳ حلقهٔ $R[s_1, \dots, s_h]$ یک Rـمدول متناهی‌مولد است؛ بنابراین از ۲۰.۱۳ نتیجه می‌شود که همهٔ عضوهای $a_\circ, \dots, a_{h-1}$ روی R صحیح‌اند زیرا متعلق‌اند به $R[s_1, \dots, s_h]$. حال از آنجا که $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in K$ و R صحیحاً‌بسته است نتیجه می‌گیریم که $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in R$.

قرار دهید $T := R[s_1, \dots, s_h]$. بنابر ۳۹.۱۳ داریم $s_1, \dots, s_h \in \sqrt{IT}$. با توجه به اینکه هر a_i، $i = \circ, \dots, h-1$، یک چندجمله‌ای از s_iهاست مجدداً از ۳۹.۱۳ نتیجه می‌شود که هر a_i ریشهٔ یک چندجمله‌ای تکین متعلق به $R[X]$ است که همهٔ ضریبهایش (بجز ضریبی که برابر ۱ است) متعلق به I است. درنتیجه مجدداً بنابر ۳۹.۱۳ و این واقعیت که $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in R$ نتیجه می‌گیریم که $a_\circ, \dots, a_{h-1} \in \sqrt{I}$. ■

حال می‌توانیم به وعدهٔ خود برای اثبات قضیهٔ نزول عمل کنیم.

۴۱.۱۳ قضیهٔ نزول. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از دامنهٔ صحیح S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید که R صحیحاً‌بسته باشد. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}$ و $m < n$. فرض

کنید زنجیرهٔ

$$P_{\circ} \supset P_{1} \supset \dots \supset P_{n-1} \supset P_{n}$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R و زنجیرهٔ

$$Q_{\circ} \supset Q_{1} \supset \dots \supset Q_{m-1} \supset Q_{m}$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول S باشد که به‌ازای هر $i = \circ, \dots, m$، $Q_i \cap R = P_i$. در این صورت زنجیرهٔ دوم را می‌توان با ایدآلهای اولی چون $Q_{m+1}, \dots, Q_n$ از S گسترش داد و زنجیرهٔ زیر را به‌دست آورد

$$Q_{\circ} \supset Q_{1} \supset \dots \supset Q_{n-1} \supset Q_{n}$$

به‌طوری که به‌ازای هر $i = \circ, \dots, n$، $Q_i \cap R = P_i$.

اثبات. مانند اثبات قضیهٔ صعود یعنی ۳۸.۱۳ کافی است قضیه را در حالت خاص $m = \circ$ و $n = 1$ ثابت کنیم. این‌بار درپی ایدآل اولی از S هستیم که زیرمجموعهٔ $Q_{\circ}$ باشد و خواهیم دید که قضیهٔ ۴۴.۳ وسیلهٔ مناسبی برای این‌کار است.

قرار دهید $U := S \backslash Q_{\circ}$ که زیرمجموعهٔ ضربی‌بسته‌ای از S است، و قرار دهید $V := R \backslash P_{1}$ که زیرمجموعهٔ ضربی‌بسته‌ای از R است. در این صورت

$$W := UV = \{uv : u \in U, v \in V\}$$

زیرمجموعهٔ ضربی‌بسته‌ای از S است. ابتدا می‌خواهیم ثابت کنیم که $P_{1}S \cap W = \varnothing$. فرض می‌کنیم چنین نباشد و لذا عضوی چون $s \in P_{1}S \cap W$ وجود داشته باشد. با این فرض درپی تناقض می‌گردیم.

فرض کنید K هیأت کسرهای R باشد؛ روشن است که می‌توانیم K را به‌عنوان زیرهیأتی از هیأت کسرهای S درنظر بگیریم. بنابر ۴۰.۱۳، s روی K جبری و چندجمله‌ای مینیمالش به‌صورت

$$f = X^{h} + a_{h-1}X^{h-1} + \dots + a_{1}X + a_{\circ}$$

است که $(h \in \mathbb{N})$ و $a_{\circ}, \dots, a_{h-1} \in \sqrt{P_{1}} = P_{1}$. همچنین چون $s \in W$ می‌توانیم بنویسیم $s = uv$ که در آن $u \in U$ و $v \in V$. حال چون $v \neq \circ$ و

$$u^{h}v^{h} + a_{h-1}u^{h-1}v^{h-1} + \dots + a_{1}uv + a_{\circ} = \circ$$

نتیجه می‌گیریم که $u = s/v$ ریشهٔ چندجمله‌ای

$$g = X^h + \frac{a_{h-1}}{v}X^{h-1} + \cdots + \frac{a_1}{v^{h-1}}X + \frac{a_0}{v^h} \in K[X]$$

است؛ به‌علاوه g روی K تحویلناپذیر است زیرا در غیر این صورت از تجزیهٔ

$$g = \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{l} \beta_j X^j\right)$$

در $K[X]$ تجزیهٔ

$$f = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha_i}{v^i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{l} \beta_j v^{h-j} X^j\right)$$

به‌دست می‌آید. بنابراین u روی K جبری و g چندجمله‌ای مینیمال آن است.

حال از ۴۰.۱۳ (به‌ازای $I = R$) نتیجه می‌شود که در واقع همهٔ ضریبهای g متعلق به R هستند. لذا به‌ازای هر $i = 0, \ldots, h-1$ عضوی چون $\rho_i \in R$ وجود دارد که $a_i = v^{h-i}\rho_i$.

چون $a_0, \ldots, a_{h-1} \in P_1$ و $v \in R \backslash P_1$. پس به‌ازای هر $i = 0, \ldots, h-1$، $\rho_i \in P_1$. توجه کنید که چندجمله‌ای

$$g = X^h + \rho_{h-1}X^{h-1} + \cdots + \rho_1 X + \rho_0$$

چندجمله‌ای مینیمال u روی K است. بنابراین با استفاده از ۳۹.۱۳ نتیجه می‌گیریم که $u \in \sqrt{P_1 S} \subseteq \sqrt{P_0 S} \subseteq Q_0$ که متناقض با این واقعیت است که $u \in U$. این تناقض نشان می‌دهد که $P_1 S \cap W = \varnothing$.

حال با استفاده از ۴۴.۳ نتیجه می‌گیریم که ایدآل $Q_1 \in \operatorname{Spec}(S)$ وجود دارد به‌طوری که $Q_1 \cap W = \varnothing$ و $P_1 S \subseteq Q_1$. درنتیجه $P_1 \subseteq P_1 S \cap R \subseteq Q_1 \cap R$ و چون $Q_1 \cap W = \varnothing$ و $V = R \backslash P_1 \subseteq W$ باید داشته باشیم $P_1 = Q_1 \cap R$. به‌همین نحو چون $U = S \backslash Q_0 \subseteq W$ باید داشته باشیم $Q_1 \subseteq Q_0$. لذا اثبات کامل شده است. ■

۴۲.۱۳ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و f چندجمله‌ای تکین ناثابتی متعلق به $R[X]$ باشد. نشان دهید که حلقهٔ تعویضپذیری چون R' وجود دارد که R زیرحلقهٔ آن است و f را می‌توان به‌صورت حاصلضرب عاملهای خطی تکین متعلق به حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R'[X]$ نوشت. (از استقرا روی $\deg f$ استفاده کنید؛ $R[X]/fR[X]$ را درنظر بگیرید.)

۴۳.۱۳ تمرین. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و f و g چندجمله‌ایهایی تکین متعلق به $S[X]$ باشند. فرض کنید همهٔ ضریبهای fg روی R صحیح باشند. نشان دهید

که همهٔ ضریبهای f و همهٔ ضریبهای g روی R صحیح هستند. (راهنمایی: با استفاده از تمرین ۴۲.۱۳ حلقه‌ای تعویضپذیر چون S' بیابید که S زیرحلقهٔ آن باشد و هر دو چندجمله‌ای f و g را بتوان به‌صورت حاصلضرب عاملهای خطی تکین متعلق به $S'[X]$ نوشت. بستار صحیح R را در S' درنظر بگیرید و نتیجهٔ ۲۴.۱۳ را به‌کار ببرید.)

۴۴.۱۳ تمرین. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و f متعلق به حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی S از n مجهول $X_1, \ldots, X_n$ یعنی $S[X_1, \ldots, X_n]$ باشد. نشان دهید که f روی $R[X_1, \ldots, X_n]$ صحیح است اگر و تنها اگر همهٔ ضریبهای f روی R صحیح باشند.

(در اینجا نیز شاید راهناییهای زیر مفید باشند. قسمت مشکل تمرین اثبات لزوم شرط است و لذا این قسمت را توضیح می‌دهیم. اگر حکم را در حالت $n = 1$ ثابت کنیم آنگاه اثبات حکم با استفاده از استقرا به سهولت انجام می‌شود: می‌نویسیم $X = X_1$. می‌توانیم فرض کنیم که $f \neq 0$. فرض کنید

$$q = Y^m + F_{m-1}Y^{m-1} + \cdots + F_1 Y + F_0 \in R[X][Y]$$

چندجمله‌ای تکینی از مجهول Y و با ضرایب متعلق به $R[X]$ باشد که f ریشهٔ آن است. عدد $h \in \mathbb{N}$ را چنان انتخاب کنید که

$$h > \max\{\deg f, \deg F_{m-1}, \ldots, \deg F_0\}$$

و فرض کنید $g := f - X^h (\in S[X])$ که در این صورت g- چندجمله‌ای تکین از درجهٔ h است. توجه کنید که $q(Y + X^h) \in R[X][Y]$ به‌صورت

$$Y^m + G_{m-1}Y^{m-1} + \cdots + G_1 Y + G_0$$

است که در آن $G_0, \ldots, G_{m-1} \in R[X]$ و $q(g + X^h) = 0$. با استفاده از این تساوی G_0 را برحسب $G_1, \ldots, G_{m-1}$ بنویسید و تمرین ۴۳.۱۳ را به‌کار ببرید.)

۴۵.۱۳ گامهای بعدی. جنبهٔ مهمی از نظریهٔ بستار صحیح که در این کتاب جای کافی برای ارائهٔ آن نیست، ارتباط این نظریه با مفهوم "حلقهٔ مقداری" است: علاقه‌مندان می‌توانند برای مطالعهٔ این موضوع به برخی از کتابهای مذکور در فهرست مراجع از جمله مرجع [۸] (فصل ۴) و مرجع [۱] (فصل ۵) رجوع کنند.

۱۴

جبر آفین روی هیأت

به‌طور ساده می‌توان گفت که جبر آفین روی هیأتی چون K، Kـ جبرتعویضپذیر متناهی‌مولد است. علاقهٔ ما به این جبرها تنها به این دلیل نیست که با استفاده از آنها به‌سهولت می‌توان مثالهایی از حلقه‌های تعویضپذیر نوتری ساخت (۱۱.۸ را ببینید) بلکه به این دلیل هم هست که این جبرها در هندسهٔ جبری اهمیت اساسی دارند. در این کتاب قصد نداریم دلایل این مطلب را بررسی کنیم: علاقه‌مندان می‌توانند مطالبی را در این‌باره در کتاب مایلز رید [۱۳] مطالعه کنند.

کاری که قصد داریم در این فصل انجام دهیم، علاوه بر بررسی نظریهٔ بُعد جبرهای آفین روی هیأت و ارتباط آن با درجهٔ تعالی، اثبات چند قضیهٔ اساسی و مشهور دربارهٔ این جبرها از جمله قضیهٔ صفرهای هیلبرت و قضیهٔ نرمالسازی نوتر است که ابزار مهمی در هندسهٔ جبری هستند. دربارهٔ اهمیت این قضیه‌ها از لحاظ هندسهٔ جبری در اینجا به‌طور کامل بحث نخواهیم کرد، اما آنها را از لحاظ جبری مورد توجه قرار می‌دهیم و خواهیم دید که قضیهٔ نرمالسازی نوتر ابزار پرقدرتی در نظریهٔ بُعد است.

اولین قضیهٔ شاخص این فصل قضیهٔ صفرهای هیلبرت است. کارمان را با معرفی اصطلاح مفیدی شروع و سپس چند حکم مقدماتی را ثابت می‌کنیم.

۱.۱۴ تعریف. فرض کنید K هیأت باشد. مقصود از Kـ جبر آفین، Kـ جبر تعویضپذیر متناهی‌مولد یعنی Kـ جبر تعویضپذیری است که به‌عنوان Kـ جبر، متناهی‌مولد باشد (۹.۸ را ببینید).

توجه کنید که هر Kـجبر آفین با تعریف ۱.۱۴ نگارهٔ همریخت حلقهٔ $K[X_1,\dots,X_n]$ متشکل از چندجملهایهای روی K از n مجهول X_1،$\cdots$،X_n است که $n\in\mathbb{N}$ و لذا به‌روشنی حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری است: ۱۱.۸ را ببینید.

۲.۱۴ قضیه. فرض کنید R و S زیرحلقه‌هایی از حلقهٔ تعویضپذیر T باشند و $R\subseteq S\subseteq T$. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و T هم به‌عنوان Rـجبر و هم به‌عنوان Sـمدول، متناهی‌مولد باشد. در این‌صورت S به‌عنوان Rـجبر، متناهی‌مولد است.

اثبات. فرض کنید T به‌عنوان Rـجبر توسط $\{c_1,\dots,c_m\}$ و به‌عنوان Sـمدول توسط $\{b_1,\dots,b_n\}$ تولید شود. لذا عضوهایی چون $s_{ij},s_{ijk}\in S$ ($1\le i\le m$، $1\le j,k\le n$) وجود دارند که

$$c_i=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}b_j \qquad \text{به‌ازای هر } i=1,\dots,m$$

و

$$c_ib_j=\sum_{k=1}^{n}s_{ijk}b_k \qquad \text{به‌ازای هر } i=1,\dots,m \text{ و } j=1,\dots,n$$

فرض کنید $S_\circ=R[\Gamma\cup\Delta]$ که در آن

$$\begin{aligned}\Gamma=&\{s_{ij}:1\le i\le m,1\le j\le n\}\\ \Delta=&\{s_{ijk}:1\le i\le m,1\le j,k\le n\}.\end{aligned}$$

لذا $S_\circ$ برابر با Rـزیرجبری از S است که توسط مجموعهٔ (متناهی) متشکل از همهٔ s_{ij}ها و s_{ijk}ها تولید می‌شود و لذا بنابر ۱۱.۸ نوتری است.

فرض کنید $t\in T$. در این‌صورت t را می‌توان به‌صورت یک چند جمله‌ای از c_1،$\cdots$،c_m با ضرایب متعلق به R نوشت. با استفاده از عبارتهای فوق برای c_iهاو c_ib_jها می‌بینیم که t را می‌توان به‌صورت

$$t=u_1b_1+\cdots+u_nb_n+u_{n+1}1_R$$

نوشت که در آن $u_1,\dots,u_{n+1}\in S_\circ$. بنابراین T یک $S_\circ$ـمدول متناهی‌مولد و لذا بنابر ۲۲.۷(یک)، $S_\circ$ـمدول نوتری است. حال توجه کنید که S یک $S_\circ$ـزیرمدول T و لذا بنابر ۱۳.۷، یک $S_\circ$ـمدول متناهی‌مولد است. در نتیجه اگر S به‌عنوان $S_\circ$ـمدول توسط مجموعهٔ متناهی Φ تولید شود آن‌گاه S به‌عنوان Rـجبر توسط مجموعهٔ متناهی $\Gamma\cup\Delta\cup\Phi$ تولید می‌شود. ■

۳.۱۴ نتیجه. فرض کنید R و S زیرحلقه‌هایی از حلقهٔ تعویضپذیر T باشند و $R \subseteq S \subseteq T$. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و T به‌عنوان Rـجبر، متناهی‌مولد و T روی S صحیح باشد. در این صورت S به‌عنوان Rـجبر، متناهی‌مولد است.

اثبات. فرض کنید T به‌عنوان Rـجبر توسط $\{c_1, \ldots, c_m\}$ تولید شود. دراین‌صورت $T = S[c_1, \ldots, c_m]$ و بنابر ۲۱.۱۳، $S[c_1, \ldots, c_m]$ یک Sـمدول متناهی‌مولد است. بنابراین نتیجهٔ مورد نظر از ۲.۱۴ حاصل می‌شود. ■

۴.۱۴ قضیه. فرض کنید K هیأت و R یک Kـ جبر آفین باشد. فرض کنید R هیأت باشد. در این صورت R روی K جبری و متناهی است.

اثبات. عضوهایی چون $r_1, \ldots, r_n \in R$ وجود دارند که $R = K[r_1, \ldots, r_n]$. البته در اینجا کروشه نشاندهندهٔ "الحاق حلقه‌ای" است ولی چون R هیأت است داریم $R = K(r_1, \ldots, r_n)$ که در اینجا پرانتز نشاندهندهٔ الحاق هیأتیِ مذکور در ۱۳.۱۲ است. بنابر ۵۱.۱۲، عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}_0$ و عددهای صحیح متمایز $i_1، \cdots، i_m$ بین ۱ و n وجود دارند به‌طوری‌که خانوادهٔ $(r_{i_j})_{j=1}^{m}$ روی K استقلال جبری دارد و با خانوادهٔ $(r_i)_{i=1}^{n}$ روی K هم‌ارزی جبری دارد. این مطلب به این معنی است که پس از تغییر احتمالی ترتیب r_iها می‌توانیم فرض کنیم که $(r_i)_{i=1}^{m}$ روی K دارای استقلال جبری است و هیأت R روی $K(r_1, \ldots, r_m)$ جبری است. از ۲۹.۱۲ نتیجه می‌شود که R در واقع روی $K(r_1, \ldots, r_m)$ متناهی است و لذا برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که $m = 0$.

فرض می‌کنیم $m > 0$ و درپی تناقض می‌گردیم. از ۲.۱۴ نتیجه می‌شود که $K(r_1, \ldots, r_m)$ یک Kـجبر متناهی‌مولد است و لذا از فرض فوق با استفاده از ۴۳.۱۲ نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود: عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که هیأت کسرهای حلقهٔ $S := K[X_1, \ldots, X_m]$ متشکل از چندجمله‌ایهای از m مجهول $X_1، \cdots، X_m$ یعنی هیأت $K(X_1, \ldots, X_m)$ یک Kـجبر متناهی‌مولد است. نشان می‌دهیم که این مطلب به تناقض می‌انجامد.

فرض کنید $K(X_1, \ldots, X_m)$ به‌عنوان Kـجبر توسط $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$ تولید شود و توجه کنید که (بنابر ۴۲.۱) S د.ت.ی است. می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, h$ داریم $\alpha_i \neq 0$ و $\alpha_i = f_i/g_i$ که $f_i, g_i \in S$ و $1 =$ ب.م.م (f_i, g_i). روشن است که دست کم یکی از g_iها ناثابت است زیرا S هیأت نیست.

عضو $1/(g_1 \cdots g_h + 1) \in K(X_1, \ldots, X_m)$ را درنظربگیرید. چون $K(X_1, \ldots, X_m)$ توسط α_iها تولید می‌شود عضو Φ متعلق به حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از h مجهول $Y_1، \cdots، Y_h$ (یعنی $\Phi \in K[Y_1, \ldots, Y_h]$) وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{1}{(g_1 \cdots g_h + 1)} = \Phi\left(\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_h}{g_h}\right).$$

دو طرف این تساوی را در $(g_1\cdots g_h+1)(g_1\cdots g_h)^d$ ضرب کنید، که در آن d درجهٔ (کل) Φ است، تساوی

$$(g_1\cdots g_h)^d=(g_1\cdots g_h+1)f$$

به‌دست می‌آید که در آن $f\in S$. این تساوی متناقض با این واقعیت است که S د.ت.ی است، زیرا ممکن نیست عامل تحویلناپذیر $(g_1\cdots g_h+1)$ عامل طرف چپ تساوی فوق باشد.

این تناقض نشان می‌دهد که $m=0$ و لذا اثبات کامل می‌شود. ■

۵.۱۴ تمرین. فرض کنید K هیأت و $f:R\to S$ همریختی Kـجبرهای آفین باشد. فرض کنید M ایدآل ماکسیمالی از S باشد. ثابت کنید که $f^{-1}(M)$ ایدآل ماکسیمال R است.

این تمرین را با ۲۷.۳(سه) مقایسه کنید.

۶.۱۴ قضیهٔ صفرهای هیلبرت. فرض کنید K هیأتی جبری‌بسته و $R=K[X_1,\ldots,X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از $n(>0)$ مجهول X_1،$\cdots$،X_n باشد. فرض کنید M و J ایدآل R باشند.

یک) ایدآل M ایدآل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر عضوهایی چون $a_1,\ldots,a_n\in K$ وجود داشته باشند که

$$M=(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n).$$

دو) فرض کنید J سره باشد. در این‌صورت عضوهایی چون $b_1,\ldots,b_n\in K$ وجود دارند که به‌ازای هر $f\in J$، $f(b_1,\ldots,b_n)=0$؛ یعنی "صفر مشترکی" برای همهٔ چندجمله‌ایهای متعلق به J وجود دارد.

سه) فرض کنید

$$V(J)=\{(c_1,\ldots,c_n)\in K^n: f(c_1,\ldots,c_n)=0 \text{ ،}f\in J \text{ به‌ازای هر }\}$$

یعنی $V(J)$ مجموعهٔ همهٔ "صفرهای مشترک" چندجمله‌ایهای متعلق به J باشد. در این‌صورت

$$\{g\in R: g(c_1,\ldots,c_n)=0 \text{ ،}(c_1,\ldots,c_n)\in V(J) \text{ به‌ازای هر }\}=\sqrt{J}.$$

اثبات. یک) $(\Leftarrow)$ از ۱۵.۳ نتیجه می‌شود که ایدآلی به‌صورت $(X_1-a_1,\ldots,X_n-a_n)$ از R ایدآل ماکسیمال R است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید M ایدآل ماکسیمال R باشد. همریختی حلقه‌ای مرکب $\phi: K\to R\to R/M$،که نگاشت‌اول آن همریختی یک‌به‌یک طبیعی و نگاشت‌دوم آن همریختی

حلقه‌ای (پوشای) طبیعی است، همریختی هیأتی (ولزوماً یک‌به‌یک) است. چون R یک Kـ جبرآفین است لذا R/M نیز چنین است. بنابراین از ۴.۱۴ نتیجه می‌شود که اگر هیأت R/M را با استفاده از ϕ به‌عنوان زیرهیأت K در نظر بگیریم، R/M روی K متناهی و جبری است. لذا با توجه به اینکه K جبری‌بسته است نتیجه می‌گیریم که ϕ یکریختی است. در نتیجه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ عضوی چون $a_i \in K$ وجود دارد که $X_i - a_i \in M$. لذا

$$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \subseteq M$$

و چون هر دو ایدآل رابطهٔ فوق ماکسیمال هستند نتیجه می‌شود که $M = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$.

دو) چون $J \subset R$ بنابر ۱۰.۳ ایدآل ماکسیمالی چون M از R وجود دارد که $J \subseteq M$. بنابر بند (یک) فوق عضوهایی چون $b_1, \ldots, b_n \in K$ وجود دارند که

$$M = (X_1 - b_1, \ldots, X_n - b_n).$$

لذا هر $f \in J$ را می‌توان به‌صورت

$$f = (X_1 - b_1)f_1 + \cdots + (X_n - b_n)f_n$$

نوشت که در آن $f_1, \ldots, f_n \in R$ و لذا با مقداریابی طرفین رابطهٔ فوق به‌ازای $b_1, \cdots, b_n$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(b_1, \ldots, b_n) = 0.$$

سه) فرض کنید $f \in \sqrt{J}$ و لذا عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $f^m \in J$. بنابر تعریف $V(J)$ داریم که به‌ازای هر $(c_1, \ldots, c_n) \in V(J)$، $(f^m)(c_1, \ldots, c_n) = 0$. بنابراین به‌ازای هر $(c_1, \ldots, c_n) \in V(J)$ داریم $(f(c_1, \ldots, c_n))^m = 0$ و لذا چون هیأت دارای عضو پوچتوان ناصفر نیست پس به‌ازای هر $(c_1, \ldots, c_n) \in V(J)$ داریم $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$.

حال به اثبات عکس این مطلب می‌پردازیم که قسمت غیرواضح حکم است. فرض کنید $f \in R$ و به‌ازای هر $(c_1, \ldots, c_n) \in V(J)$ داشته باشیم $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$. برای اثبات اینکه $f \in \sqrt{J}$ می‌توانیم فرض کنیم که $f \neq 0$. ایدآل $J' := JS + (X_{n+1}f - 1)S$ را در حلقهٔ چندجمله‌ایهای $S := R[X_{n+1}] = K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ در نظر می‌گیریم. اگر J' ایدآل سرهٔ S باشد آن‌گاه بنابر بند (دو)ی فوق عضوهایی چون $b_1, \ldots, b_{n+1} \in K$ وجود دارند که به‌ازای هر $g \in J'$، $g(b_1, \ldots, b_{n+1}) = 0$؛ از این رو به‌ازای هر $\tilde{g} \in J$، $\tilde{g}(b_1, \ldots, b_n) = 0$ و لذا $(b_1, \ldots, b_n) \in V(J)$؛ و لذا داریم

$$0 = b_{n+1}f(b_1, \ldots, b_n) - 1 = 0 - 1$$

که ممکن نیست! لذا $J' = S$.

در نتیجه عضوهای $h \in \mathbb{N}$، $q_۱, \ldots, q_h, p \in S$ و $f_۱, \ldots, f_h \in J$ وجود دارند به‌طوری که

$$۱ = \sum_{i=۱}^{h} q_i f_i + (X_{n+۱} f - ۱)p.$$

بنابر ۱.۱۶ همریختی حلقه‌ای

$$\phi : K[X_۱, \ldots, X_{n+۱}] \to K(X_۱, \ldots, X_n)$$

وجود دارد که به‌ازای هر $a \in K$، $\phi(a) = a$ و به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $\phi(X_i) = X_i$، و $\phi(X_{n+۱}) = ۱/f$. از اثر ϕ بر دو طرف تساوی فوق نتیجه می‌شود که

$$۱ = \sum_{i=۱}^{h} q_i \left(X_۱, \ldots, X_n, \frac{۱}{f} \right) f_i$$

فرض کنید $d \in \mathbb{N}$ دست کم به‌بزرگی ماکسیمم درجه‌های $q_۱، \cdots، q_h$ به‌عنوان چندجمله‌ایهایی از $X_{n+۱}$ با ضرایب متعلق به R باشد. دو طرف تساوی آخر را در f^d ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$f^d \in \sum_{i=۱}^{h} R f_i \subseteq J.$$

در نتیجه $f \in \sqrt{J}$ و اثبات کامل است. ■

۷.۱۴ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و ناصفر باشد. می‌گوییم که R حلقهٔ هیلبرت یا حلقهٔ جیکبسن است اگر هر ایدآل اول R برابر با اشتراک همهٔ ایدآلهای ماکسیمال R باشد که آن ایدآل اول را شامل می‌شوند.

یک) نشان دهید که $\mathbb{Z}$ حلقهٔ هیلبرت است.

دو) آیا هر د.ا.ا حلقهٔ هیلبرت است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

سه) نشان دهید که اگر R حلقهٔ هیلبرت و I ایدآل R باشد آن‌گاه $\sqrt{I}$ اشتراک همهٔ ایدآلهای ماکسیمالی از R است که شامل I هستند.

چهار) نشان دهید که هر نگارهٔ همریخت ناصفر یک حلقهٔ هیلبرت حلقهٔ هیلبرت است.

پنج) نشان دهید که هر جبر آفین ناصفر روی هیأتی جبری‌بسته حلقهٔ هیلبرت است.

شش) فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویض‌پذیر S و S روی R صحیح باشد. ثابت کنید که S حلقهٔ هیلبرت است اگر و تنها اگر R حلقهٔ هیلبرت باشد.

هفت) ثابت کنید که اگر R حلقهٔ هیلبرت باشد و R دارای ایدآل اول ناماکسیمال باشد آن‌گاه R تعدادی نامتناهی ایدآل ماکسیمال دارد.

۸.۱۴ گامهای بعدی. در این کتاب قصد نداریم اهمیت هندسی قضیهٔ صفرهای هیلبرت را توضیح دهیم. ولی باید بگوییم که این قضیه اساس کار در هندسهٔ جبری‌آفین روی هیأت جبری‌بسته است: دو کتاب (از کتابهای متعدد) در این زمینه کتابهای کونز [۶] و رید [۱۳] هستند.

همچنین نظریهٔ حلقه‌های هیلبرت بسیار گسترده‌تر از مطالب مختصری است که در تمرین ۷.۱۴ آمد: علاقه‌مندان می‌توانند مطالب بیشتری را دربارهٔ این حلقه‌ها در فصل ۶ از مرجع [۱۲] و بخش ۱ـ۳ از مرجع [۵] مطالعه کنند. شاید تذکر این نکته خالی از فایده نباشد که با استفاده از نظریهٔ حلقه‌های هیلبرت می‌توان ثابت کرد که اگر K هیأتی دلخواه و $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از n مجهول X_1، $\ldots$، X_n باشد آن‌گاه هر ایدآل ماکسیمال R توسط n عضو تولید می‌شود: در حالتی که K هیأتی جبری‌بسته باشد این مطلب از قضیهٔ صفرهای هیلبرت نتیجه می‌شود. قضیهٔ ۳ از بخش ۲.۶ از مرجع [۱۲] را ببینید.

موضوع بعدی مورد مطالعه در این فصل نظریهٔ نرمالسازی نوتری است. فرض کنید K هیأت است. اگر Kـجبر آفین ناصفری چون A مفروض باشد می‌توانیم K را با نگاره‌اش در A تحت همریختی حلقه‌ای ساختاری Kـجبر A یکی بگیریم؛ در این‌صورت نتیجه می‌شود که زیرحلقه‌ای چون $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ از A وجود دارد که به‌ازای آن خانوادهٔ $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد و A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است، یا به‌عبارت دیگر در این شرایط (۲۰.۱۳ و ۲۱.۱۳ را ببینید) A یک $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ـمدول متناهی‌مولد است. این مطلب نتیجهٔ قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی قضیهٔ۱۴.۱۴ است که ذیلاً خواهد آمد. در واقع به‌ازای ایدآل سره‌ای چون I از A، Y_iهایی چون Y_iهای فوق با این ویژگی وجود دارند که

$$I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n] Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$$

که در آن $d \in \mathbb{N}$ و $d \leq n$. اثبات این مطلب پس از اثبات حکمهایی که به‌تدریج پیچیده می‌شوند ارائه می‌شود. لم زیر برای انجام دادن برخی کارهای تکنیکی مفید است.

۹.۱۴ لم. فرض کنید K هیأت و A و B دو Kـجبر آفین ناصفر باشند. فرض کنید $\phi : A \to B$ همریختی پوشای Kـجبری باشد و $I := \operatorname{Ker} \phi$. فرض کنید $(Y_i)_{i=1}^{n}$ خانواده‌ای از عضوهای A باشد که روی K استقلال جبری دارد و A یک $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ـمدول متناهی‌مولد باشد. فرض کنید

$$I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n] Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$$

که در آن $d \in \mathbb{N}$ و $d \leq n$. در این‌صورت $(\phi(Y_i))_{i=1}^{d}$ روی K استقلال جبری دارد و B یک $K[\phi(Y_1), \ldots, \phi(Y_d)]$ـمدول متناهی‌مولد است.

اثبات. هستهٔ همریختی Kـجبریِ مرکب

$$\psi : K[Y_1, \ldots, Y_n] \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B$$

(که نگاشت اول آن همریختی یک‌به‌یک طبیعی است) برابر

$$I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$$

است و لذا بنابر قضیهٔ یکریختی ۱۳.۲ همریختی Kـجبری یک‌به‌یک

$$\bar{\psi} : K[Y_1, \ldots, Y_n]/(Y_{d+1}, \ldots, Y_n) \longrightarrow B$$

به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, d$، $\bar{\psi}(\tilde{Y}_i) = \phi(Y_i)$ ولی به‌ازای هر $i = d+1, \ldots, n$، $\bar{\psi}(\tilde{Y}_i) = 0$ (از $\tilde{}$ برای نشان دادن نگارهٔ طبیعی در

$$K[Y_1, \ldots, Y_n]/(Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$$

استفاده کرده‌ایم). به‌آسانی نتیجه می‌شود که B یک $K[\phi(Y_1), \ldots, \phi(Y_d)]$ـمدول متناهی‌مولد است. از طرف دیگر از همریختی مقداریاب $\theta : K[Y_1, \ldots, Y_n] \to K[Y_1, \ldots, Y_d]$ به‌ازای $Y_1, \cdots, Y_d, 0, \cdots, 0$ یکریختی Kـجبری

$$\mu : K[Y_1, \ldots, Y_d] \longrightarrow K[Y_1, \ldots, Y_n]/(Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$$

به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, d$، $\mu(Y_i) = \tilde{Y}_i$. چون $(Y_i)_{i=1}^{d}$ روی K استقلال جبری دارد و همریختی Kـجبری $\bar{\psi} \circ \mu$ یک‌به‌یک است نتیجه می‌شود که $(\phi(Y_i))_{i=1}^{d}$ روی K دارای استقلال جبری است. ■

لم تکنیکی بعد در مورد تغییر "مجهولهای" حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X_1, \ldots, X_n]$ روی هیأت K است که دارای استقلال جبری هستند و بر اثر این تغییر، عضو ناثابت مفروض $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ به‌صورت خاصی در می‌آید. این لم را برای هر هیأت دلخواه K ثابت می‌کنیم؛ البته اثبات این لم در حالتی که K نامتناهی باشد ساده‌تر است و تمرین ۱۱.۱۴ نیز در این باره است.

۱۰.۱۴ لم. فرض کنید K هیأت باشد و $n \in \mathbb{N}$؛ فرض کنید $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ناثابت باشد. در این‌صورت $Y_1, \ldots, Y_{n-1} \in K[X_1, \ldots, X_n]$ وجود دارند به‌طوری‌که

$K[Y_1,\ldots,Y_{n-1},X_n]=K[X_1,\ldots,X_n]$ و

$$f=cX_n^m+\sum_{i=0}^{m-1}g_iX_n^i$$

که $m\in\mathbb{N}$ و $g_i\in K[Y_1,\ldots,Y_{n-1}]$ و $c\in K\backslash\{0\}$.

توجه. با استفاده از ۷.۱۲(دو) و به‌کار بردن ۵۵.۱۲(شش) در مورد هیأت کسرهای $K[X_1,\ldots,X_n]$ یعنی $K(X_1,\ldots,X_n)$ نتیجه می‌شود که خانوادهٔ $(Y_i)_{i=1}^n$ که در آن $Y_n=X_n$ روی K استقلال جبری دارد.

اثبات. زیرمجموعه‌ای متناهی چون Λ از $\mathbb{N}_0^{\,n}$ و عضوهایی چون

$$a_{i_1,\ldots,i_n}\in K\backslash\{0\}\qquad((i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda)$$

وجود دارند به‌طوری‌که

$$f=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda}a_{i_1,\ldots,i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$$

فرض کنید $h-1$ بزرگترین عضو از مجموعهٔ مؤلفه‌های اعضای Λ باشد؛ لذا $h\geq 2$. مشاهده می‌کنیم که به‌ازای هر دو عضو متفاوت $(i_1,\ldots,i_n)$ و $(j_1,\ldots,j_n)$ از Λ باید داشته باشیم

$$i_n+i_1h+\cdots+i_{n-1}h^{n-1}\neq j_n+j_1h+\cdots+j_{n-1}h^{n-1}$$

فرض کنید به ازای هر $i=1,\ldots,n-1$، $Y_i=X_i-X_n^{h^i}$. چون به ازای هر $i=1,\ldots,n-1$، $X_i=Y_i+X_n^{h^i}$ روشن است که $K[Y_1,\ldots,Y_{n-1},X_n]=K[X_1,\ldots,X_n]$. همچنین اگر f را برحسب Y_iها و X_n بنویسیم، داریم

$$f=\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda}a_{i_1,\ldots,i_n}(X_n^{h^1}+Y_1)^{i_1}\cdots(X_n^{h^{n-1}}+Y_{n-1})^{i_{n-1}}X_n^{i_n}$$

حال اگر قرار دهیم

$$m=\max_{(i_1,\ldots,i_n)\in\Lambda}\{i_n+i_1h+\cdots+i_{n-1}h^{n-1}\}$$

آن‌گاه f به‌صورت مطلوب در می‌آید. ■

۱۱.۱۴ تمرین. حالت ۱۰.۱۴ را در نظر بگیرید و به‌علاوه فرض کنید که هیأت K نامتناهی باشد. نشان دهید که عضوهایی چون $a_1,\ldots,a_{n-1}\in K$ وجود دارند به‌طوری‌که

به‌ازای $i = 1, \dots, n-1$، عضوهای $Y_i = X_i - a_i X_n$ از $K[X_1, \dots, X_n]$ در حکم لم فوق صدق می‌کنند. (f را به‌صورت مجموع چندجمله‌ایهای همگن بنویسید و تمرین ۱۹.۱ را به‌کار ببرید. اگر باز هم این تمرین برایتان مشکل بود به صفحات ۵۹ و ۶۰ از مرجع [۱۳] رجوع کنید.)

دو قضیهٔ بعدی مقدمهٔ اثبات قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ هستند.

۱۲.۱۴ قضیه. فرض کنید $A = K[X_1, \dots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای از n مجهول $X_1, \dots, X_n$ روی هیأت K و $I = fA$ ایدآل اصلی A باشد که توسط عضو ناثابت $f \in A$ تولید شده است. در این‌صورت عضوهایی چون $Y_1, \dots, Y_n \in A$ وجود دارند که $Y_n = f$ و
یک) $(Y_i)_{i=1}^n$ روی K استقلال جبری دارد؛
دو) A روی $K[Y_1, \dots, Y_n]$ صحیح است؛
سه) $I \cap K[Y_1, \dots, Y_n] = K[Y_1, \dots, Y_n]Y_n = (Y_n)$.

اثبات. بنابر ۱۰.۱۴ عضوهایی چون $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ متعلق به $K[X_1, \dots, X_n]$ وجود دارند به‌طوری‌که $K[Y_1, \dots, Y_{n-1}, X_n] = K[X_1, \dots, X_n]$ و

$$f = cX_n^m + \sum_{i=0}^{m-1} g_i X_n^i$$

که $m \in \mathbb{N}$ و $g_i \in K[Y_1, \dots, Y_{n-1}]$ و $c \in K \setminus \{0\}$. قرار دهید $Y_n = f$، در این‌صورت تساوی فوق نشان می‌دهد که X_n روی $K[Y_1, \dots, Y_n]$ صحیح است و لذا از ۲۲.۱۳ نتیجه می‌شود که $K[X_1, \dots, X_n]$ روی $K[Y_1, \dots, Y_n]$ صحیح است. در نتیجه هر X_i $(i = 1, \dots, n)$ روی زیرهیأت $K(Y_1, \dots, Y_n)$ از هیأت $K(X_1, \dots, X_n)$ جبری است. بنابراین از ۵۵.۱۲(شش) نتیجه می‌شود که $(Y_i)_{i=1}^n$ روی K استقلال جبری دارد.
در پایان نشان می‌دهیم که $I \cap K[Y_1, \dots, Y_n] = K[Y_1, \dots, Y_n]Y_n$. روشن است که

$$I \cap K[Y_1, \dots, Y_n] \supseteq K[Y_1, \dots, Y_n]Y_n$$

زیرا $Y_n = f$. فرض کنید $p \in I \cap K[Y_1, \dots, Y_n]$ و لذا به‌ازای عضوی چون $g \in A$ داریم $p = gf$. چون A روی $K[Y_1, \dots, Y_n]$ صحیح است عضوهای $h \in \mathbb{N}$ و $q_0, \dots, q_{h-1} \in K[Y_1, \dots, Y_n]$ وجود دارند که

$$g^h + q_{h-1}g^{h-1} + \cdots + q_1 g + q_0 = 0;$$

حال اگر دو طرف را در $f^h = Y_n^h$ ضرب کنیم داریم

$$p^h + q_{h-1}Y_n p^{h-1} + \cdots + q_1 Y_n^{h-1} p + q_0 Y_n^h = 0.$$

حال توجه کنید که $p, q_0, \ldots, q_{h-1}, Y_n \in K[Y_1, \ldots, Y_n]$ و بنابر ۴۲.۱ این حلقه د.ت.ی است زیرا $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد. از این مطالب نتیجه می‌شود که در حلقهٔ $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ داریم $Y_n | p$ و لذا $p \in K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_n$. در نتیجه

$$I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] \subseteq K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_n$$

و اثبات کامل است. ■

۱۳.۱۴ قضیه. فرض کنید $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای n از مجهول $X_1، \cdots، X_n$ روی هیأت K و I ایدآل سرهٔ A باشد. در این‌صورت عضوهایی چون $Y_1, \ldots, Y_n \in A$ و عدد طبیعی $d \in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $0 \leq d \leq n$ و

یک) $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد؛

دو) A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است؛

سه) $I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$.

اثبات. این احکام در حالت $I = 0$ واضح‌اند: کافی است به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ قرار دهید $X_i = Y_i$ و d را برابر با n اختیار کنید. لذا در بقیهٔ اثبات فرض می‌کنیم که $I \neq 0$.

قضیه را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. در حالتی که $n = 1$ ایدآل سرهٔ ناصفر I از دامنهٔ اصلی‌ایدآل $A = K[X_1]$ توسط یک چندجمله‌ای ناثابت تولید می‌شود و لذا در این حالت حکم از ۱۲.۱۴ نتیجه می‌شود. حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید $n > 1$ و حکم برای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. چون I سره و ناصفر است چندجمله‌ای ثابت f از A وجود دارد که $f \in I$. بنابر ۱۲.۱۴ عضوهایی چون $Z_1, \ldots, Z_n \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که $Z_n = f$ و $(Z_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد و حلقهٔ A روی $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ صحیح است و

$$fA \bigcap K[Z_1, \ldots, Z_n] = K[Z_1, \ldots, Z_n]Z_n = (Z_n) = (f).$$

حال ایدآل $I \cap K[Z_1, \ldots, Z_{n-1}]$ از حلقهٔ $K[Z_1, \ldots, Z_{n-1}]$ را (که لزوماً سره است) در نظر بگیرید. با توجه به ۱۶.۱، از پاراگراف اولِ اثبات یا از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که عضوهایی چون $Y_1, \ldots, Y_{n-1} \in K[Z_1, \ldots, Z_{n-1}]$ و $d \in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $0 \leq d < n$ و $(Y_i)_{i=1}^{n-1}$ روی K استقلال جبری دارد و حلقهٔ $K[Z_1, \ldots, Z_{n-1}]$ روی $K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$ صحیح است و

$$I \bigcap K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}] = \sum_{i=d+1}^{n-1} K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_{n-1}).$$

قرار دهید $Y_n = Z_n = f$. نشان خواهیم داد که $Y_1، \cdots، Y_n$ در شرایط مذکور در قضیه صدق می‌کنند.

ابتدا توجه کنید که $Z_1, \cdots, Z_{n-1}$ روی

$$K[Y_1, \ldots, Y_n] = K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}][Y_n]$$

صحیح هستند و واضح است که $Z_n = Y_n$ نیز چنین است. لذا از ۲۲.۱۳ نتیجه می‌گیریم که حلقهٔ $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است و لذا با توجه به ۲۳.۱۳ حلقهٔ A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است. در نتیجه به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، X_i روی زیرهیأت $K(Y_1, \ldots, Y_n)$ از هیأت $K(X_1, \ldots, X_n)$ جبری است و لذا از ۵۵.۱۲(شش) نتیجه می‌شود که $(Y_i)_{i=1}^n$ روی K استقلال جبری دارد. تنها کاری که مانده نشان دادن درستی شرط (سه) است: می‌خواهیم نشان دهیم که

$$I \bigcap K[Y_1, \ldots, Y_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n).$$

ابتدا توجه کنید که $Y_{d+1}, \ldots, Y_{n-1}, Y_n = f \in I$ و لذا

$$I \bigcap K[Y_1, \ldots, Y_n] \supseteq \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i.$$

برای اثبات عکس رابطهٔ فوق فرض کنید $g \in I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n]$. عضو g را به‌صورت یک چندجمله‌ای از $Y_1, \cdots, Y_n$ با ضرایب متعلق به K بنویسید. مجموع جمله‌هایی از g را که شامل Y_n هستند می‌توان به‌صورت $Y_n g_2$ نوشت که در آن $g_2 \in K[Y_1, \ldots, Y_n]$ و لذا $g = g_1 + Y_n g_2$ که در آن $g_1 \in K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$. چون $Y_n = f \in I$ پس

$$g_1 \in I \bigcap K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}] = \sum_{i=d+1}^{n-1} K[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]Y_i$$

در نتیجه

$$g = g_1 + Y_n g_2 \in \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i.$$

بنابراین $I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] \subseteq \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i$ و درستی شرط (سه) اثبات شده است. با این مطلب مرحلهٔ دوم استقرا و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود. ■

حال می‌توانیم صورت کلی قضیهٔ نرمالسازی نوتر را ثابت کنیم.

۱۴.۱۴ قضیهٔ نرمالسازی نوتر. فرض کنید A جبر آفین ناصفر روی هیأت K و I ایدآل سرهٔ A باشد. در این‌صورت عددهای $n, d \in \mathbb{N}$ که $0 \le d \le n$ و عضوهای $Y_1, \ldots, Y_n \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که

یک) $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد؛
دو) A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است؛
سه) $I \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Y_1, \ldots, Y_n]Y_i = (Y_{d+1}, \ldots, Y_n)$

اثبات. فرض کنید A به‌عنوان Kـجبر توسط h عضو تولید شود. با استفاده از ۱۰.۸ و ۱۶.۱ نتیجه می‌گیریم که همریختی Kـجبریِ پوشایی چون $\phi : K[X_1, \ldots, X_h] \to A$ وجود دارد. فرض کنید $J := \operatorname{Ker} \phi$ و $I' := \phi^{-1}(I)$ که $\phi^{-1}(I)$ ایدآل سرهٔ $K[X_1, \ldots, X_h]$ و شامل J است.

بنابر ۱۳.۱۴ عضوهایی چون $Z_1, \ldots, Z_h \in K[X_1, \ldots, X_h]$ و $n \in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $0 \leq n \leq h$ و $(Z_i)_{i=1}^{h}$ روی K استقلال جبری دارد و حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_h]$ روی $K[Z_1, \ldots, Z_h]$ صحیح است و

$$J \bigcap K[Z_1, \ldots, Z_h] = \sum_{i=n+1}^{h} K[Z_1, \ldots, Z_h]Z_i = (Z_{n+1}, \ldots, Z_h).$$

توجه کنید که بنابر ۹.۱۴ (و ۲۰.۱۳ و ۲۱.۱۳) خانوادهٔ $(\phi(Z_i))_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد و A روی زیرحلقه‌اش $K[(\phi(Z_1), \ldots, \phi(Z_n)]$ صحیح است.

چون $(Z_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد از ۱۶.۱ نتیجه می‌شود که $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ اساساً همان حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از n مجهول $Z_1، \cdots، Z_n$ است. بنابراین می‌توانیم ۱۳.۱۴ را در مورد این حلقه و ایدآل سره‌اش $I' \cap K[Z_1, \ldots, Z_n]$ به‌کار ببریم، در این‌صورت نتیجه می‌گیریم که عضوهایی چون $W_1, \ldots, W_n \in K[Z_1, \ldots, Z_n]$ و $d \in \mathbb{N}_0$ وجود دارند که $0 \leq d \leq n$ و $(W_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد و حلقهٔ $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ روی $K[W_1, \ldots, W_n]$ صحیح است و

$$I' \bigcap K[W_1, \ldots, W_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[W_1, \ldots, W_n]W_i = (W_{d+1}, \ldots, W_n).$$

به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ قرار دهید $Y_i := \phi(W_i)$. نشان می‌دهیم که $Y_1، \cdots، Y_n$ در شرایط قضیه صدق می‌کنند.

چون حلقهٔ $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ روی $K[W_1, \ldots, W_n]$ صحیح است از ۲۰.۱۳ و ۲۱.۱۳ (یا مستقیماً) نتیجه می‌گیریم که $K[\phi(Z_1), \ldots, \phi(Z_n)]$ روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است؛ در نتیجه بنابر ۲۳.۱۳، A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است. همچنین چون $(\phi(Z_i))_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد نتیجه می‌شود که حلقهٔ $K[\phi(Z_1), \ldots, \phi(Z_n)]$ دامنهٔ صحیح است؛ بنابر ۲۹.۱۲ هیأت کسرهای این حلقه یعنی $K(\phi(Z_1), \ldots, \phi(Z_n))$ روی $K(Y_1, \ldots, Y_n)$ جبری است و بنابراین از ۵۵.۱۲(شش) نتیجه می‌شود که $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری دارد.

اکنون تنها کافی است نشان دهیم که

$$I\bigcap K[Y_1,\ldots,Y_n]=\sum_{i=d+1}^{n}K[Y_1,\ldots,Y_n]Y_i=(Y_{d+1},\ldots,Y_n)$$

و این رابطه به‌سهولت از آنجا نتیجه می‌شود که $I'=\phi^{-1}(I)$ و

$$I'\bigcap K[W_1,\ldots,W_n]=\sum_{i=d+1}^{n}K[W_1,\ldots,W_n]W_i=(W_{d+1},\ldots,W_n)$$

و به‌ازای هر $i=1,\ldots,n$، $\phi(W_i)=Y_i$. ■

۱۵.۱۴ تمرین. نشان دهید که در قضیهٔ ۱۴.۱۴ در حالت خاصی که K نامتناهی باشد و Kـجبر آفین A (به‌عنوان Kـجبر) توسط $a_1,\ldots,a_h$ تولید شود می‌توان با استفاده از تمرین ۱۱.۱۴ عضوهای $Y_1,\ldots,Y_d$ مذکور در قضیهٔ نرمالسازی نوتر را چنان انتخاب کرد که همه ترکیب خطی $a_1,\ldots,a_h$ با ضرایب متعلق به K باشند. (در کتاب حاضر به این حکم نیاز نداریم ولی این حکم در هندسهٔ جبری با اهمیت است.)

برنامهٔ کارمان در دنبالهٔ این فصل این است که با استفاده از قضیهٔ نرمالسازی نوتر نتایج مهمی دربارهٔ بعد جبرهای آفین روی هیأتها به‌دست آوریم. بنابراین ابتدا باید تعریفهای اساسی مربوط به بعد حلقه‌های تعویضپذیر را ارائه دهیم ولی قبل از اینکه زنجیره‌های ایدآلهای اول حلقه‌های تعویضپذیر را به تفصیل مورد بحث قرار دهیم اصطلاحاتی را معرفی می‌کنیم که بعداً در این فصل به‌کار می‌روند.

۱۶.۱۴ تعریف. فرض کنید A جبر آفین ناصفری روی هیأت K باشد. خانواده‌ای چون $(Y_i)_{i=1}^{n}$ از عضوهای A خانوادهٔ نرمالساز نوتری A است اگر

یک) $(Y_i)_{i=1}^{n}$ روی K استقلال جبری داشته باشد، و

دو) A روی $K[Y_1,\ldots,Y_n]$ صحیح باشد (یا به‌عبارت دیگر (با توجه به ۲۰.۱۳ و ۲۱.۱۳) A یک $K[Y_1,\ldots,Y_n]$ـمدول متناهی‌مولد باشد.)

لذا طبق قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ جبرهای آفین ناصفر خانواده‌های نرمالساز نوتری دارند.

۱۷.۱۴ تعریف. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و ناصفر باشد.

یک) عبارتی چون

$$P_0\subset P_1\subset\cdots\subset P_n$$

(به‌سره بودن زیرمجموعه‌های فوق توجه کنید) که در آن $P_0, \cdots, P_n$ ایدآلهای اول R هستند زنجیرهٔ ایدآلهای اول R نامیده می‌شود؛ طول این زنجیره تعداد علامات $\subset$ یعنی یکی کمتر از تعداد ایدآلهای اول موجود در آن است. لذا طول زنجیرهٔ فوق n است.

توجه کنید که اگر $P \in \mathrm{Spec}(R)$،

$$P$$

را زنجیره‌ای از ایدآلهای اول به‌طول صفر در نظر می‌گیریم. چون R ناصفر است یقیناً دست کم یک زنجیرهٔ به‌طول صفر از ایدآلهای اول R وجود دارد.

دو) زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R را اشباع شده می‌گوییم اگر به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ که $1 \leq i \leq n$ ایدآل اولی چون $Q \in \mathrm{Spec}(R)$ وجود نداشته باشد که $P_{i-1} \subset Q \subset P_i$، یعنی اگر نتوانیم با وارد کردن ایدآل اول دیگری بین دو جملهٔ مجاور در زنجیرهٔ داده شده، به‌طوری‌که هر یک از جمله‌ها زیرمجموعهٔ سرهٔ جملهٔ بعد باشد، زنجیره‌ای به‌طول $n+1$ بسازیم.

سه) زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R را ماکسیمال می‌گوییم اگر اشباع شده باشد و P_n ایدآل ماکسیمال R و P_0 ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر R باشد (۵۲.۳ را ببینید)، یعنی اگر نتوانیم با قرار دادن ایدآل اول دیگری در ابتدا یا انتها یا بین دو جملهٔ مجاور زنجیرهٔ داده شده، به‌طوری‌که جمله‌های زنجیره همچنان سره باشند، زنجیره‌ای به‌طول $n+1$ بسازیم.

چهار) بُعد R را برابر با

$$\sup \{n \in \mathbb{N}_0 : \text{زنجیره‌ای به‌طول } n \text{ از ایدآلهای اول } R \text{ وجود داشته باشد}\}$$

تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه مجموعهٔ فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این‌صورت آن را ∞ می‌گوییم. بعد R را با $\dim R$ نشان می‌دهیم.

پنج) فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$. در این‌صورت ارتفاع P را برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طولهای زنجیره‌های

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R که در آنها $P_n = P$ تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این‌صورت آن را ∞ می‌گوییم. ارتفاع P را با $\mathrm{ht}\ P$ (و اگر بخواهیم بر حلقهٔ مربوطه تأکید کنیم با $\mathrm{ht}_R\ P$) نشان می‌دهیم.

۱۸.۱۴ تذکر فرض کنید R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و ناصفر باشد.

یک) توجه کنید که $\dim R$ یا عددی صحیح و نامنفی یا ∞ است؛ تعریفی برای بعد حلقهٔ تعویض‌پذیر ارائه نمی‌دهیم.

دو) بنابر ۱۰.۳ هر ایدآل اول R زیرمجموعهٔ ایدآل ماکسیمالی از R است (و البته هر ایدآل ماکسیمال اول است)؛ همچنین بنابر ۵۳.۳ هر ایدآل اول R شامل ایدآل اول مینیمالی از ایدآل صفر است. نتیجه می‌شود که $\dim R$ برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طولهای زنجیره‌های

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R است که در آنها P_n ماکسیمال و P_0 ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر است. زیرا به‌ازای هر زنجیرهٔ دلخواه

$$P'_0 \subset P'_1 \subset \cdots \subset P'_h$$

از ایدآلهای اول R زنجیره‌ای از نوع خاص بالا وجود دارد که طول آن بزرگتر یا مساوی طول این زنجیرهٔ دلخواه باشد: اگر P'_0 ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر نباشد آن‌گاه می‌توانیم ایدآل اولی "پایین" آن قرار دهیم؛ اگر P'_h ایدآل ماکسیمال R نباشد آن‌گاه می‌توانیم ایدآل اولی "بالای" آن قرار دهیم.

سه) لذا اگر $\dim R$ متناهی باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}\dim R &= \sup\,\{\mathrm{ht}\ M : \text{ایدآل ماکسیمال } R \text{ باشد } M\}\\ &= \sup\,\{\mathrm{ht}\ P : P \in \mathrm{Spec}(R)\}.\end{aligned}$$

چهار) از بند (دو)ی فوق این مطلب نیز نتیجه می‌شود که اگر R شبه‌موضعی باشد و ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد آن M باشد (۱۲.۳ را ببینید) آن‌گاه $\dim R = \mathrm{ht}\ M$.

پنج) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد و $P \in \mathrm{Spec}(R)$ چنان باشد که $P \cap S = \varnothing$؛ لذا بنابر ۳۲.۵، $S^{-1}P \in \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$. به‌آسانی از تناظر دو سویی حافظ رابطهٔ مشمولیت بین $\{P \in \mathrm{Spec}(R) : P \cap S = \varnothing\}$ و $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ مذکور در ۳۳.۵ نتیجه می‌شود که $\mathrm{ht}_{S^{-1}R}\ S^{-1}P = \mathrm{ht}_R\ P$. برای نشان دادن این مطلب فرض کنیم زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای R باشد و $P_n = P$. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to S^{-1}R$ به‌کار می‌بریم. بنابر ۳۳.۵ زنجیرهٔ

$$P_\circ^e \subset P_1^e \subset \cdots \subset P_n^e$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $S^{-1}R$ است و $P_n^e = P^e = S^{-1}P$، و لذا $\mathrm{ht}_R\, P \leq \mathrm{ht}_{S^{-1}R}\, S^{-1}P$. از طرف دیگر اگر زنجیرهٔ

$$\mathcal{P}_\circ \subset \mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $S^{-1}R$ باشد و $\mathcal{P}_n = P^e$ آن‌گاه زنجیرهٔ

$$\mathcal{P}_\circ^c \subset \mathcal{P}_1^c \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n^c$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R است (باز هم بنابر ۳۳.۵) و $\mathcal{P}_n^c = P^{ec} = P$ و لذا نابرابری $\mathrm{ht}_R\, P \geq \mathrm{ht}_{S^{-1}R} S^{-1}\, P$ نیز برقرار است.

شش) از قسمتهای (چهار) و (پنج) فوق نتیجه می‌شود که به‌ازای $P \in \mathrm{Spec}(R)$ داریم

$$\mathrm{ht}\ P = \mathrm{ht}_{R_P}\ PR_P = \dim R_P.$$

هفت) در قسمت (پنج) فوق برای ارتباط دادن زنجیره‌های ایدآلهای اول حلقهٔ کسرهای R به زنجیره‌های ایدآلهای اول R استفادهٔ قابل ملاحظه‌ای از ۳۳.۵ کردیم. به‌همین نحو با استفاده از ۳۹.۲ و ۲۸.۳ می‌توانیم زنجیره‌های ایدآلهای اول حلقهٔ رده‌های مانده‌ای R/I را که در آن I ایدآل سرهٔ R است به‌زنجیره‌های ایدآلهای اول R که شامل I باشند ارتباط دهیم. به‌عنوان مثال از ۳۹.۲ و ۲۸.۳ نتیجه می‌شود که هر زنجیره از ایدآلهای اول R/I به‌صورت

$$P_\circ/I \subset P_1/I \subset \cdots \subset P_n/I$$

است که P_iهای آن، $i = \circ, \ldots, n$، تشکیل زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R به‌صورت زیر می‌دهند

$$P_\circ \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

که در آن $I \supseteq P_\circ$. با استفاده از این نکات می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\dim R/I$ برابر با کوچکترین کران بالای مجموعهٔ طولهای زنجیره‌های

$$P_\circ \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R است که همه شامل I هستند، مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این‌صورت ∞ است.

هشت) فرض کنید $P \in \operatorname{Spec}(R)$. در این‌صورت، با استفاده از قراردادهای طبیعی $\infty = \infty + \infty$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $n + \infty = \infty$ و $\infty \leq \infty$ داریم

$$\operatorname{ht} P + \dim R/P \leq \dim R.$$

این نابرابری از قسمت (هفت) فوق و این واقعیت نتیجه می‌شود که اگر زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R باشد که در آن $P_n = P$ و زنجیرهٔ

$$P'_0 \subset P'_1 \subset \cdots \subset P'_h$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R باشد که در آن $P'_0 = P$ آن‌گاه زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n \subset P'_1 \subset \cdots \subset P'_h$$

زنجیره‌ای به‌طول $n + h$ از ایدآلهای اول R است.

وقت آن رسیده است که دست کم چند مثال سادهٔ ارائه دهیم!

۱۹.۱۴ مثال. یک) بنابر ۳۹.۸ بعد هر حلقهٔ تعویضپذیر آرتینی ناصفر برابر صفر است، زیرا در این حلقه‌ها هر ایدآل اول ماکسیمال است.

دو) لذا بعد هر هیأت صفر است.

سه) در $\mathbb{Z}$ داریم $0 \subset 2\mathbb{Z}$ که زنجیره‌ای به‌طول یک از ایدآلهای اول است؛ بنابر ۳۴.۳ هر ایدآل اول ناصفر $\mathbb{Z}$ ماکسیمال است و لذا نتیجه می‌شود که زنجیره‌ای به‌طول ۲ از ایدآلهای اول $\mathbb{Z}$ وجود ندارد زیرا جملهٔ میانی چنین زنجیره‌ای باید ماکسیمال باشد. در نتیجه $\dim \mathbb{Z} = 1$.

۲۰.۱۴ تمرین. فرض کنید R د.ا.ا باشد و هیأت نباشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. شرطی لازم و کافی برای اینکه طول P برابر یک باشد بیان و آن را ثابت کنید.

۲۱.۱۴ تمرین. فرض کنید R د.ت.ی باشد و $P \in \operatorname{Spec}(R)$. نشان دهید که $\operatorname{ht} P = 1$ اگر و تنها اگر $P = Rp$ که در آن p عضو تحویلناپذیری از R است.

پس از استفاده از قضیهٔ نرمالسازی نوتر و ارائهٔ چند حکم، مثالهای دیگری در مورد بُعد و ارتفاع (ضمن تمرینها) می‌آوریم که به‌سادگیِ مثالهای فوق نیستند. ولی ابتدا نشان می‌دهیم در مواردی که حلقه‌ای صحیح روی زیرحلقه‌اش داریم، می‌توانیم با استفاده از برخی از قضیه‌های فصل ۱۳ به‌ویژه قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳، قضیهٔ صعود یعنی ۳۸.۱۳ و قضیهٔ نزول یعنی ۴۱.۱۳

رابطه‌های مفیدی بین طولها و نیز بین بُعدها به‌دست آوریم. سه‌گزارهٔ بعدی از این نوع هستند؛ با توجه به قضیهٔ نرمالسازی نوتر این گزاره‌ها ابزار مفیدی در نظریهٔ بُعد جبرهای آفین نیز هستند.

۲۲.۱۴ قضیه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر ناصفر S و S روی R صحیح باشد. در این‌صورت $\dim R = \dim S$.

اثبات. نماد تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی یک‌به‌یک طبیعی $R \to S$ به‌کار می‌بریم. فرض کنید زنجیرهٔ

$$Q_۰ \subset Q_۱ \subset \cdots \subset Q_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول S باشد. در این‌صورت از قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳ و تذکر ۲۷.۳(دو) نتیجه می‌شود که

$$Q_۰^c \subset Q_۱^c \subset \cdots \subset Q_n^c$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R است. در نتیجه $\dim S \leq \dim R$.

حال فرض کنید که زنجیرهٔ

$$P_۰ \subset P_۱ \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R باشد. بنابر قضیهٔ وقوع یعنی ۳۴.۱۳ ایدآل اولی چون $Q_۰ \in \operatorname{Spec}(S)$ وجود دارد که $Q_۰^c = P_۰$. حال از قضیهٔ صعود یعنی ۳۸.۱۳ نتیجه می‌شود که زنجیره‌ای چون

$$Q_۰ \subset Q_۱ \subset \cdots \subset Q_n$$

از ایدآلهای اول S وجود دارد و لذا $\dim R \leq \dim S$. ■

۲۳.۱۴ نتیجه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید I ایدآل سرهٔ S باشد. در این‌صورت $\dim R/(I \cap R) = \dim S/I$.

اثبات. این حکم بلاواسطه از ۲۲.۱۴ و ۲۶.۱۳(یک) نتیجه می‌شود، زیرا چنانکه در ۲۶.۱۳(یک) دیدیم حلقهٔ $R/(I \cap R)$ را می‌توانیم به‌گونهٔ طبیعی به‌عنوان زیرحلقهٔ S/I تلقی کنیم و در این‌صورت بنابر همان حکم S/I روی $R/(I \cap R)$ صحیح است. ■

۲۴.۱۴* تمرین. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر S و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $Q \in \operatorname{Spec}(S)$. نشان دهید که $\operatorname{ht}_S Q \leq \operatorname{ht}_R(Q \cap R)$. (قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳ را به‌کار ببرید.)

در واقع در مواردی که قضیهٔ نزول یعنی ۴۱.۱۳ قابل استفاده باشد نتیجه‌ای بهتر از ۲۴.۱۴ می‌توان به‌دست آورد.

۲۵.۱۴ قضیه. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از دامنهٔ صحیح S، R صحیحاًبسته و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $Q \in \operatorname{Spec}(S)$. در این‌صورت $\operatorname{ht}_S Q = \operatorname{ht}_R(Q \cap R)$.

اثبات. بنابر ۲۴.۱۴ داریم $\operatorname{ht}_S Q \leq \operatorname{ht}_R(Q \cap R)$. فرض کنید زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R باشد که $P_n = Q \cap R$. در این‌صورت بنابر قضیهٔ نزول یعنی ۴۱.۱۳ زنجیره‌ای چون

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_n$$

از ایدآلهای اول S وجود دارد که در آن $Q_n = Q$. نتیجه می‌شود که $\operatorname{ht}_S Q \geq \operatorname{ht}_R(Q \cap R)$ و لذا اثبات قضیه کامل است. ■

۲۶.۱۴ تمرین. فرض کنید R زیرحلقه‌ای از دامنهٔ صحیح S و R صحیحاًبسته و S روی R صحیح باشد. فرض کنید $Q \in \operatorname{Spec}(S)$. ثابت کنید که $\operatorname{ht}_S Q + \dim S/Q = \dim S$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{ht}_R(Q \cap R) + \dim R/(Q \cap R) = \dim R$$

۲۷.۱۴ تذکر. فرض کنید $A := K[X_1, \ldots, X_n]$.
یک) فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in K$. از تمرین ۶۶.۳ نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{ht}_A(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \geq n.$$

دو) بنابراین از ۶.۱۴(یک) نتیجه می‌گیریم که در حالت خاصی که K جبری‌بسته است، طول هر ایدآل ماکسیمال $K[X_1, \ldots, X_n]$ دست کم برابر n است. طی چند گزارهٔ زیر می‌خواهیم با استفاده از قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ نتیجه‌ای به‌دست آوریم که تا حد زیادی بهتر از این نتیجه باشد.

۲۸.۱۴ قضیه. فرض کنید A جبر آفین ناصفری روی هیأت K باشد. در این‌صورت تعداد عضوهای همهٔ خانواده‌های نرمالساز نوتری A یکسان و برابر با $n = \dim A$ است.

اثبات. بنابر قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ خانواده‌ای چون $(Y_i)_{i=1}^n$ وجود دارد که خانوادهٔ نرمالساز نوتری A است؛ لذا این خانواده روی K استقلال جبری دارد و A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است. کافی است ثابت کنیم که $n = \dim A$. این مطلب را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. وقتی $n = 0$، از ۲۲.۱۴ و ۱۹.۱۴(دو) نتیجه می‌گیریم که بعد A صفر است.

بنابراین فرض می‌کنیم که $n > 0$ و حکم برای Kـجبرهای آفین (ناصفری) که خانواده‌های نرمالساز نوتری آنها کمتر از n عضو دارد درست باشد. بنابر ۲۲.۱۴ و ۲۷.۱۴(یک) داریم

$$\dim A = \dim K[Y_1, \ldots, Y_n] \geq n.$$

فرض کنید زنجیرهٔ

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_m$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول A باشد: باید نشان دهیم که $m \leq n$. فرض کنید به‌ازای $i = 0, \ldots, m$، $P_i = Q_i \cap K[Y_1, \ldots, Y_n]$. بنابر قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳ داریم

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است. بنابر ۱۳.۱۴، $d \in \mathbb{N}$ که $0 \leq d \leq n$ و خانواده‌ای چون $(Z_i)_{i=1}^n$ وجود دارد که خانوادهٔ نرمالساز نوتری $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است و

$$P_1 \cap K[Z_1, \ldots, Z_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Z_1, \ldots, Z_n] Z_i = (Z_{d+1}, \ldots, Z_n).$$

چون $P_0 \subset P_1$ و $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ روی $K[Z_1, \ldots, Z_n]$ صحیح است از قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳ نتیجه می‌شود که $P_1 \cap K[Z_1, \ldots, Z_n] \neq 0$ و $d < n$.

فرض کنید $^- : K[Y_1, \ldots, Y_n] \to K[Y_1, \ldots, Y_n]/P_1$ همریختی حلقه‌ای پوشای طبیعی باشد. حال از ۹.۱۴ نتیجه می‌شود که $(\bar{Z}_i)_{i=1}^d$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری $K[Y_1, \ldots, Y_n]/P_1$ است و از ۳۹.۲ و ۲۸.۳ نتیجه می‌شود که

$$P_1/P_1 \subset P_2/P_1 \subset \cdots \subset P_m/P_1$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]/P_1$ است. لذا با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که $m - 1 \leq d < n$ و لذا $m \leq n$. بنابراین نتیجه می‌شود که $\dim A = n$ و لذا مرحلهٔ دوم استقرا کامل است.

بنابراین قضیه اثبات شده است. ■

لذا نشان داده‌ایم که بُعد هر جبر آفین (ناصفر) روی هیأت K متناهی است. همچنین نشان داده‌ایم که بُعد حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X_1, \ldots, X_n]$ برابر با n است زیرا $(X_i)_{i=1}^{n}$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری $K[X_1, \ldots, X_n]$ است. به این مطلب در بحث مربوط به درجهٔ تعالی زیرهیأتها در فصل ۱۲ اشاره کردیم. اکنون می‌توانیم مفاهیم درجهٔ تعالی و بُعد Kـجبرهای آفینی را که دامنه هستند به یکدیگر ارتباط دهیم.

۲۹.۱۴ نتیجه. فرض کنید که دامنهٔ صحیح A جبری آفین روی هیأت K و L هیأت کسرهای A باشد (و لذا L را می‌توان به‌گونه‌ای واضح و طبیعی به‌عنوان زیرهیأت K در نظر گرفت). در این‌صورت $\dim A = \mathrm{tr.deg}_K\, L$.

اثبات. مجدداً بنابر قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ خانواده‌ای چون $(Y_i)_{i=1}^{n}$ وجود دارد که خانوادهٔ نرمالساز نوتری A است؛ لذا این خانواده روی K استقلال جبری دارد و A روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح است. فرض کنید $b_1, \ldots, b_h \in A$ و $A = K[b_1, \ldots, b_h]$. در این‌صورت بنابر ۱۹.۱۲ و ۷.۱۲(دو)، $L = K(b_1, \ldots, b_h)$ و چون $b_1, \cdots, b_h$ روی $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ صحیح هستند از ۲۹.۱۲ و ۲۸.۱۲ نتیجه می‌شود که L روی زیرهیأتش $K(Y_1, \ldots, Y_n)$ جبری است؛ در نتیجه $(Y_i)_{i=1}^{n}$ پایهٔ تعالی L روی K است. با توجه به اینکه بنابر ۲۸.۱۴، $n = \dim A$ نتیجه می‌شود که $\dim A = \mathrm{tr.deg}_K\, L$. ■

حال که می‌دانیم که به‌ازای هر هیأت K، $\dim K[X_1, \ldots, X_n] = n$ از ۲۷.۱۴(دو) نتیجه می‌شود که در حالت خاصی که K جبری‌بسته باشد ارتفاع هر ایدآل ماکسیمال $K[X_1, \ldots, X_n]$ دقیقاً برابر با n است. حال می‌خواهیم نشان دهیم که بدون فرض جبری‌بسته بودن K نیز این حکم درست است. در واقع مطلبی بهتر از این را ثابت می‌کنیم زیرا نشان می‌دهیم که اگر K هیأت باشد طول هر زنجیرهٔ ماکسیمال از ایدآلهای اول $K[X_1, \ldots, X_n]$ (۱۷.۱۴(سه) را ببینید) دقیقاً برابر با n است: این واقعیت نتیجهٔ قضیهٔ بعد است که لم زیر برای اثبات آن مفید است.

۳۰.۱۴ لم. فرض کنید A جبر آفین ناصفری روی هیأت K و $(Y_i)_{i=1}^{n}$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری A باشد. فرض کنید $Q_0 \subset Q_1$ زنجیره‌ای اشباع‌شده از ایدآلهای اول A باشد. در این‌صورت

$$Q_0 \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] \subset Q_1 \cap K[Y_1, \cdots, Y_n]$$

زنجیره‌ای اشباع‌شده از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است.

اثبات. به‌ازای $i = 0, 1$ قرار دهید $Q_i \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] =: P_i$. بنابر قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری یعنی ۳۳.۱۳، $P_0 \subset P_1$ زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است. فرض می‌کنیم این زنجیره اشباع‌شده نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. در این‌صورت $P \in \mathrm{Spec}(K[Y_1, \ldots, Y_n])$ وجود دارد که $P_0 \subset P \subset P_1$.

حال مجدداً با استفاده از ۱۴.۱۴ نتیجه می‌گیریم که خانوادهٔ نرمالساز نوتری $(Z_i)_{i=1}^{n}$ برای $K[Y_1,\ldots,Y_n]$ و $d \in \mathbb{N}$ وجود دارند که $0 \leq d \leq n$ و

$$P_\circ \cap K[Z_1,\ldots,Z_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Z_1,\ldots,Z_n]Z_i = (Z_{d+1},\ldots,Z_n).$$

به‌ازای $i = 0, 1$ قرار می‌دهیم $P_i' =: P_i \cap K[Z_1,\ldots,Z_n]$ و $P' =: P \cap K[Z_1,\ldots,Z_n]$. در این‌صورت

$$P_\circ' \subset P' \subset P_1'$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $K[Z_1,\ldots,Z_n]$ است. بنابر ۲۳.۱۳ خانوادهٔ $(Z_i)_{i=1}^{n}$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری A است. فرض کنید $\phi : A \to A/Q_\circ$ همریختی حلقه‌ای پوشای طبیعی باشد. بنابر ۹.۱۴ خانوادهٔ $(\phi(Z_i))_{i=1}^{d}$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری $A/Q_\circ$ است و به‌آسانی می‌توان از

$$P_\circ' = Q_\circ \bigcap K[Z_1,\ldots,Z_n] = \sum_{i=d+1}^{n} K[Z_1,\ldots,Z_n]Z_i = (Z_{d+1},\ldots,Z_n)$$

نتیجه گرفت که ($\phi(P_\circ') = 0$ و)

$$\phi(P_\circ') \subset \phi(P') \subset \phi(P_1')$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول $K[\phi(Z_1),\ldots,\phi(Z_d)]$ است. توجه کنید که (بنابر ۴۳.۱۲ و ۱۷.۱۳) دامنهٔ صحیح اخیر صحیحاًبسته و $A/Q_\circ$ روی آن صحیح است. همچنین بنابر ۲۸.۳، $Q_1/Q_\circ \in \operatorname{Spec}(A/Q_\circ)$ و به‌آسانی نتیجه می‌شود که

$$(Q_1/Q_\circ) \bigcap K[\phi(Z_1),\ldots,\phi(Z_d)] = \phi(P_1').$$

بنابراین می‌توانیم از قضیهٔ نزول یعنی ۴۱.۱۳ نتیجه بگیریم که ایدآل $Q \in \operatorname{Spec}(A)$ وجود دارد که $Q_\circ \subset Q \subset Q_1$ و این با فرض قضیه مبنی بر اینکه زنجیرهٔ $Q_\circ \subset Q_1$ اشباع‌شده است تناقض دارد. بنابراین لم اثبات شده است. ■

۳۱.۱۴ قضیه. فرض کنید که دامنهٔ صحیح A جبری آفین روی هیأت K است و $\dim A = n$. در این‌صورت طول هر زنجیرهٔ ماکسیمال از ایدآلهای اول A دقیقاً n است.

اثبات. روشن است که طول زنجیره‌ای ماکسیمال از ایدآلهای اول A ممکن نیست از n بیشتر باشد: هدف ما این است که نشان دهیم این طول ممکن نیست اکیداً کمتر از n باشد.

این مطلب را با استقرا ثابت می‌کنیم. وقتی $n = 0$ حکم واضح است زیرا دامنهٔ صحیح با بُعد صفر باید هیأت باشد. لذا در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم که $n > 0$ و حکم برای دامنه‌های صحیحی که Kـجبرهای آفین با بُعد کمتر از n هستند درست باشد.

بنابر ۲۸.۱۴ و قضیهٔ نرمالسازی نوتر یعنی ۱۴.۱۴ خانواده‌ای n عضوی چون $(Y_i)_{i=1}^n$ وجود دارد که خانوادهٔ نرمالساز نوتری A است. فرض کنید زنجیرهٔ

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_m$$

زنجیرهٔ ماکسیمالی از ایدآلهای اول A باشد و به‌ازای هر $i = 0, \ldots, m$ قرار دهید $P_i = Q_i \cap K[Y_1, \ldots, Y_n]$. توجه کنید که چون A دامنهٔ صحیح است، $Q_0 = 0$؛ همچنین Q_m ایدآل ماکسیمال A است.

بنابر قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری ۳۳.۱۳ و لم ۳۰.۱۴

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m$$

زنجیرهٔ اشباع‌شده‌ای از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است. توجه کنید که $P_0 = 0 \cap K[Y_1, \ldots, Y_n] = 0$ و بنابر ۳۱.۱۳، P_m ایدآل ماکسیمال $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است. لذا زنجیرهٔ

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m$$

زنجیرهٔ ماکسیمالی از ایدآلهای اول $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ است.

نتیجه می‌شود که $\mathrm{ht}\ P_1 = 1$. توجه کنید که با توجه به ۱۶.۱ و ۴۲.۱ حلقهٔ $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ د.ت.ی است. فرض کنید $0 \neq f \in P_1$: چون P_1 اول است یکی از عاملهای تحویلناپذیر f، مثلاً p، باید متعلق به P_1 باشد. بنابر ۴۲.۳ ایدآل اصلی (p) از $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ اول است؛ در نتیجه $P_1 = (p)$، زیرا $0 \subset (p) \subseteq P_1$ و $\mathrm{ht}\ P_1 = 1$.

حال با استفاده از ۱۲.۱۴ نتیجه می‌گیریم که خانوادهٔ نرمالساز نوتری $(Z_i)_{i=1}^n$ برای $K[Y_1, \ldots, Y_n]$ وجود دارد که $Z_n = p$ و

$$P_1 \bigcap K[Z_1, \ldots, Z_n] = K[Z_1, \ldots, Z_n]Z_n = K[Z_1, \ldots, Z_n]p = (p)$$

- فرض کنید $\bar{\ } : K[Y_1, \ldots, Y_n] \to K[Y_1, \ldots, Y_n]/P_1$ نمایش همریختی حلقه‌ای پوشای طبیعی باشد. از ۹.۱۴ نتیجه می‌شود که $(\bar{Z}_i)_{i=1}^{n-1}$ خانوادهٔ نرمالساز نوتری $K[Y_1, \ldots, Y_n]/P_1$ است و از ۳۹.۲ و ۲۸.۳ نتیجه می‌شود که

$$P_1/P_1 \subset P_2/P_1 \subset \cdots \subset P_m/P_1$$

زنجیرهٔ ماکسیمالی از ایدآلهای اول دامنهٔ صحیح $K[Y_1,\ldots,Y_n]/P_1$ است. بنابر ۲۸.۱۴، $\dim(K[Y_1,\ldots,Y_n]/P_1) = n-1$ و لذا بنابر فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که $m-1=n-1$. با این مطلب مرحلهٔ دوم استقرا کامل می‌شود. ■

۳۲.۱۴ نتیجه. فرض کنید که دامنهٔ صحیح A جبری آفین روی هیأت K باشد. در این‌صورت

$$\text{ht } P + \dim A/P = \dim A \qquad P \in \operatorname{Spec}(A) \text{ به‌ازای هر}$$

اثبات. فرض کنید $\dim A/P = h$ و $\text{ht } P = m$. لذا زنجیرهٔ اشباع‌شده‌ای چون

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m$$

از ایدآلهای اول A وجود دارد که $P_m = P$ و $P_0 = 0$. همچنین با توجه به ۳۹.۲ و ۲۸.۳ زنجیرهٔ اشباع‌شده‌ای چون

$$Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_h$$

از ایدآلهای اول A وجود دارد به‌طوری‌که $Q_0 = P$ و Q_h ماکسیمال است. حال زنجیرهٔ

$$P_0 \subset \cdots \subset P_{m-1} \subset P \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_h$$

از ایدآلهای اول A باید ماکسیمال باشد و لذا بنابر ۳۱.۱۴، $m + h = \dim A$. ■

۳۳.۱۴ نتیجه. فرض کنید که دامنهٔ صحیح A جبری آفین روی هیأت K باشد. در این‌صورت به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال M از A داریم $\text{ht } M = \dim A$.
لذا طول هر ایدآل ماکسیمال حلقهٔ چندجمله‌ایهای $K[X_1,\ldots,X_n]$ دقیقاً برابر n است. ■

حکم اخیر همان است که قبل از لم ۳۰.۱۴ وعدهٔ اثبات آن را داده بودیم.

۳۴.۱۴ تمرین. یک) مثالی از دامنهٔ صحیح نوتری بیاورید که ایدآلهایی ماکسیمال با ارتفاعهای متفاوت داشته باشد.
دو) مثالی از جبری آفین چون A (روی هیأت) بیاورید که ایدآل اولی چون P داشته باشد که $\text{ht } P + \dim A/P < \dim A$.

۳۵.۱۴ نتیجه. فرض کنید A جبر آفین ناصفری روی هیأت K باشد و $P, Q \in \operatorname{Spec}(A)$ و $P \subset Q$. در این‌صورت طول همهٔ زنجیره‌های اشباع‌شده از ایدآلهای اول از P تا Q (یعنی

زنجیره‌های اشباع‌شده از ایدآلهای A که P کوچکترین و Q بزرگترین جملهٔ آنها باشد) یکسان و برابر با $\dim A/P - \dim A/Q$ است.

اثبات. با توجه به ۳۹.۲ و ۲۸.۳ کافی است نشان دهیم که طول همهٔ زنجیره‌های اشباع‌شده از ایدآلهای اول A/P از $(P/P =) \circ$ تا Q/P برابر با $\dim A/P - \dim A/Q$ است. بنابر ۴۰.۲، $A/Q \cong (A/P)/(Q/P)$ و لذا کافی است حکم را در حالت خاصی که A دامنهٔ صحیح است و $P = \circ$ ثابت کنیم. ولی چنانکه ذیلاً خواهیم دید در این حالت حکم به‌آسانی از احکام ۳۱.۱۴، ۳۹.۲ و ۲۸.۳ نتیجه می‌شود. فرض کنید زنجیرهٔ

$$\circ \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{h-1} \subset Q$$

زنجیرهٔ اشباع‌شده‌ای از ایدآلهای اول A باشد و توجه کنید که بنابر احکام مذکور در فوق طول هر زنجیرهٔ اشباع‌شده از ایدآلهای اول A از Q تا یک ایدآل ماکسیمال برابر $\dim A/Q$ است. چنین زنجیره‌ای را بر "سر" زنجیرهٔ فوق بگذارید. در این‌صورت زنجیره‌ای (لزوماً ماکسیمال) از ایدآلهای اول به‌طول $h + \dim A/Q$ به‌دست می‌آید؛ حال از ۳۱.۱۴ نتیجه می‌شود که $h + \dim A/Q = \dim A$. ■

۳۶.۱۴ تمرین. فرض کنید A جبر آفین ناصفری روی هیأت K باشد. چون A نوتری است، از ۱۷.۸ نتیجه می‌شود که ایدآل صفر A تنها تعدادی متناهی ایدآل اول مینیمال دارد: فرض کنید این ایدآلها عبارت از $P_1، \cdots، P_n$ باشند. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ فرض کنید L_i نشاندهندهٔ هیأت کسرهای دامنهٔ صحیح A/P_i باشد؛ لذا L_i به‌گونه‌ای واضح و طبیعی زیرهیأت K است. ثابت کنید که

یک) $\dim A = \max \{\text{tr.deg}_K\, L_i : 1 \leq i \leq n\}$؛

دو) اگر به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\dim A = \text{tr.deg}_K\, L_i$ آن‌گاه

$$\text{به‌ازای هر } P \in \text{Spec}(A) \qquad \text{ht}\, P + \dim A/P = \dim A$$

۳۷.۱۴ تمرین. فرض کنید A و B جبرهای آفین ناصفر روی هیأت K و B یک K-زیرجبر A باشد (۹.۸ را ببینید). ثابت کنید که $\dim B \leq \dim A$. (راهنمایی: مانند ۳۶.۱۴ فرض کنید $P_1، \cdots، P_n$ ایدآلهای اول مینیمال ایدآل صفر A باشند؛ ۲۰.۸ را به‌خاطر بیاورید؛ و توجه کنید که اگر $(Z_i)_{i=1}^{m}$ خانواده‌ای از عضوهای A باشد که دارای استقلال جبری است آن‌گاه $K[Z_1, \ldots, Z_m]$ دامنهٔ صحیح است.)

۳۸.۱۴ گامهای بعدی. یک بار دیگر به‌خوانندگان علاقه‌مند توصیه می‌کنیم کاربردهای هندسی، قضیهٔ نرمالسازی نوتر را در کتابهایی چون [۶] اثر کونز و [۱۳] اثر رید مطالعه کنند.

در این فصل دیدیم که ردهٔ جبرهای آفین (ناصفر) روی هیأت K ردهٔ خاصی از حلقه‌های تعویضپذیر نوتری است که نظریهٔ بُعد بسیار مطلوبی برای آن وجود دارد. در فصل بعد نشان می‌دهیم که نظریهٔ بُعد مطلوبی برای حلقه‌های تعویضپذیر نوتری (ناصفر) در حالت کلی وجود دارد، ولی باید بگوییم که برخی از ویژگیهای مطلوب ایدآلهای اول در Kـجبرهای آفین که در این فصل اثبات شدند، از جمله در ۳۱.۱۴، ۳۲.۱۴، ۳۳.۱۴ و ۳۵.۱۴، در همهٔ حلقه‌های تعویضپذیر نوتری برقرار نیستند. بحث مفصل در این‌باره خارج از چارچوب این کتاب است؛ ولی برای دیدن مثالهایی از حلقه‌های تعویضپذیر نوتری که ویژگیهای "نامطلوبی" دارند می‌توانید به پیوست مرجع [۹] رجوع کنید.

۱۵

نظریهٔ بُعد

در فصل ۱۴ نظریهٔ بُعدِ بسیار مطلوبی را برای جبرهای تعویض‌پذیر متناهی‌مولد روی هیأتها مطالعه کردیم. البته ردهٔ جبرهای تعویض‌پذیر متناهی‌مولد روی هیأتها زیررده‌ای از ردهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری است: در این فصل می‌خواهیم طول ایدآلهای اول حلقه‌های تعویض‌پذیر نوتری دلخواه و نظریهٔ بُعد آنها را مطالعه کنیم.

کارمان را با قضیهٔ ایدآل اصلی کرول شروع می‌کنیم: این قضیه می‌گوید که اگر عضو $a \in R$ عضو وارون‌ناپذیر R و ایدآل $P \in \operatorname{Spec}(R)$ ایدآل اول مینیمال ایدآل اصلی aR باشد (۱۷.۸ را ببینید) آن‌گاه $\operatorname{ht} P \leq 1$. پس از آن می‌توانیم تعمیم این قضیهٔ ایدآل اصلی را ثابت کنیم که طبق آن اگر I ایدآل سره‌ای از R باشد که توسط n عضو تولید شود آن‌گاه به‌ازای هر ایدآل اول مینیمال I چون P، $\operatorname{ht} P \leq n$. یکی از نتایج این قضیه این است که ارتفاع هر $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ متناهی است، زیرا روشن است که Q ایدآل اول مینیمال خودش است و هر ایدآل R متناهی‌مولد است!

این قضیه نتایجی در مورد حلقه‌های موضعی نیز دارد: اگر (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد (یادآوری می‌کنیم که بنابه تعریفی که در ۲۶.۸ آوردیم حلقهٔ موضعی حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری است که دقیقاً یک ایدآل ماکسیمال دارد) آن‌گاه بنابر ۱۸.۱۴(چهار) $\dim R = \operatorname{ht} M$ و لذا بُعد R متناهی است. در واقع خواهیم دید که $\dim R$ کوچکترین عدد از مجموعهٔ اعدادی چون $i \in \mathbb{N}_0$ است که به‌ازای هر یک از آنها ایدآلی Mـابتدایی وجود دارد که با i عضو تولید می‌شود.

این فصل را که فصل آخر کتاب است با ارائهٔ برخی از ویژگیهای حلقه‌های موضعی منظم

به‌پایان می‌بریم؛ ردهٔ این حلقه‌ها ردهٔ بسیار مطلوبی از حلقه‌های موضعی است.

۱.۱۵ لم. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری و P ایدآل اول مینیمال ایدآل سرهٔ I از R باشد. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ضربی‌بسته از R باشد که $P \cap S = \varnothing$. در این صورت $S^{-1}P$ ایدآل اول مینیمال ایدآل $S^{-1}I$ از حلقهٔ $S^{-1}R$ است.

اثبات. نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to S^{-1}R$ به‌کار می‌بریم. بنابر ۳۳.۵ داریم $P^e \in \operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ و روشن است که $I^e \subseteq P^e$. فرض می‌کنیم P^e ایدآل اول مینیمال I^e نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. در این صورت بنابر ۵۳.۳ ایدآل اولی چون Q از حلقهٔ $S^{-1}R$ وجود دارد که $I^e \subseteq Q \subset P^e$. بنابر ۳۳.۵ ایدآلی چون $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ وجود دارد که $Q \cap S = \varnothing$ و $Q^e = Q$. حال با تحدید ایدآلها تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to S^{-1}R$ و استفاده از ۴۴.۲(یک) و ۳۳.۵ می‌بینیم که

$$I \subseteq I^{ec} \subseteq Q^c = Q^{ec} = Q \subset P^{ec} = P$$

که متناقض با این واقعیت است که P ایدآل اول مینیمال ایدآل I است. ■

مفهوم ارتفاع ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر در ۱۷.۱۴(پنج) تعریف شد.

۲.۱۵ قضیهٔ ایدآل اصلی کرول. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری و عضو $a \in R$ وارون‌ناپذیر باشد. فرض کنید P ایدآل اول مینیمال ایدآل اصلی aR از R باشد. در این صورت $\operatorname{ht} P \leq 1$.

اثبات. بنابر ۱.۱۵ در حلقهٔ موضعی R_P ایدآل ماکسیمال PR_P ایدآل اول مینیمال ایدآل $(aR)R_P = (a/1)R_P$ است و همچنین بنابر ۱۸.۱۴(شش)، $\operatorname{ht}_{R_P} PR_P = \operatorname{ht}_R P$. بنابراین کافی است این قضیه را با این مفروضات اضافی ثابت کنیم که (R, M) حلقه‌ای موضعی است و $P = M$. بنابراین در بقیهٔ اثبات فرض می‌کنیم که این شرایط نیز برقرار باشند.

فرض می‌کنیم $\operatorname{ht} M > 1$ و در پی تناقض می‌گردیم. در این صورت زنجیره‌ای چون

$$Q' \subset Q \subset M$$

از ایدآلهای اول R به‌طول ۲ وجود دارد. توجه کنید که چون M ایدآل اول مینیمال aR و تنها ایدآل ماکسیمال R است از ۲۸.۳ نتیجه می‌شود که $\operatorname{Spec}(R/aR) = \{M/aR\}$. در نتیجه بنابر ۴۵.۸ حلقهٔ R/aR حلقهٔ موضعی آرتینی است.

حال می‌خواهیم از مفهوم توان اول نمادین که در ۴۶.۵ معرفی شد استفاده کنیم: نمادهای توسیع و تحدید مذکور در ۴۱.۲ را در مورد همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to R_Q$ به‌کار می‌بریم و یادآوری می‌کنیم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ توان نمادین nام Q یعنی $Q^{(n)}$ برابر است با $Q^{(n)} = (Q^n)^{ec}$ که

ایدآل Qـابتدایی R است. توجه کنید که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $Q^{(n)} \supseteq Q^{(n+1)}$. در نتیجه

$$(Q^{(1)} + aR)/aR \supseteq (Q^{(2)} + aR)/aR \supseteq \cdots \supseteq (Q^{(n)} + aR)/aR \supseteq \cdots$$

زنجیره‌ای نزولی از ایدآلهای حلقهٔ آرتینی R/aR است و لذا $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $Q^{(m)} + aR = Q^{(m+1)} + aR$.

حال فرض کنید $r \in Q^{(m)}$. در این صورت $r = s + ac$ که در آن $s \in Q^{(m+1)}$ و $c \in R$. لذا $ac = r - s$ متعلق به‌ایدآل Qـابتدایی $Q^{(m)}$ از R است، از طرفی $a \notin Q$ زیرا M ایدآل اول مینیمال ایدآل اصلی aR است، در نتیجه $c \in Q^{(m)}$. بنابراین

$$Q^{(m)} = Q^{(m+1)} + aQ^{(m)}.$$

چون $a \in M$ پس

$$Q^{(m)}/Q^{(m+1)} = M(Q^{(m)}/Q^{(m+1)}).$$

در نتیجه بنابر لم ناکایاما یعنی ۲۴.۸ داریم $Q^{(m)} = Q^{(m+1)}$. حال این دو ایدآل را تحت همریختی حلقه‌ای طبیعی $R \to R_Q$ توسیع می‌دهیم و ۴۳.۲(دو) و ۴۴.۲(سه) را به‌کار می‌بریم: به‌دست می‌آوریم

$$(Q^e)^m = (Q^m)^e = (Q^m)^{ece} = (Q^{(m)})^e = (Q^{(m+1)})^e = (Q^e)^{m+1}.$$

با استفاده از لم ناکایاما در مورد R_Qـمدول متناهی‌مولد $(Q^e)^m$ نتیجه می‌گیریم که $(Q^e)^m = 0$.

لذا در حلقهٔ موضعی R_Q، ایدآل ماکسیمال Q^e پوچتوان است و لذا با استفاده از ۴۷.۳ نتیجه می‌گیریم که Q^e زیرمجموعهٔ هر ایدآل اول R_Q است. ولی این مطلب متناقض با این است که زنجیرهٔ $Q'^e \subset Q^e$ زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R_Q است. بنابراین اثبات کامل شده است. ■

۳.۱۵ تمرین. فرض کنید P و Q ایدآل اول حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشند و $P \subset Q$. نشان دهید که اگر ایدآل اولی از R اکیداً بین P و Q قرار داشته باشد (یعنی اگر زنجیرهٔ $P \subset Q$ اشباع‌شده نباشد) آنگاه تعدادی نامتناهی از این ایدآلهای اول وجود دارند که اکیداً بین P و Q قرار دارند. (اگر حل این تمرین برایتان مشکل است، سعی کنید مسأله را به‌مسأله‌ای در حالت R/P تبدیل کنید و قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول یعنی ۶۱.۳ را به‌کار ببرید.)

قضیهٔ ایدآل اصلی را به‌صورت کلی زیر می‌توان تعمیم داد.

۴.۱۵ تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی کرول. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری و I ایدآل سرهٔ R باشد که توسط n عضو تولید شود. در این صورت به‌ازای هر ایدآل اول مینیمال I چون P، $\text{ht}\, P \le n$.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. در حالتی که $n = ۰$ داریم $I = ۰$، و لذا P ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر R است و بنابراین $\text{ht } P = ۰$. در حالتی که $n = ۱$ حکم از قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۲.۱۵ نتیجه می‌شود. بنابراین در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم n بزرگتر از ۱ باشد و قضیه به‌ازای مقادیر کوچکتر از n درست باشد.

با توجه به ۱.۱۵، چون IR_P ایدآلی از R_P است که توسط n عضو تولید می‌شود، برای اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کافی است نشان دهیم که تحت این شرایط اضافی که (R, M) حلقه‌ای موضعی است و $P = M$، $\text{ht } P \leq n$ و لذا فرض می‌کنیم که این شرایط برقرار باشند.

بنا به‌شرط ماکسیمال، به‌ازای هر ایدآل اول ناماکسیمال چون P' از R ایدآل ناماکسیمالی چون $P'' \in \text{Spec}(R)$ وجود دارد که $P' \subseteq P''$ و زنجیرهٔ $P'' \subset M$ زنجیره‌ای اشباع‌شده از ایدآلهای اول است. بنابراین کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر ایدآل ناماکسیمال $Q \in \text{Spec}(R)$ در صورتی که زنجیرهٔ $Q \subset M$ زنجیره‌ای اشباع‌شده از ایدآلهای اول باشد آن‌گاه $\text{ht } Q \leq n - ۱$.

داریم $I \not\subseteq Q$ و لذا عضوهایی چون $c_۱, \cdots, c_n \in I$ وجود دارند که $c_n \notin Q$ و $I = \sum_{i=۱}^{n} c_i R$. حال M تنها ایدآل اول R است که شامل $Q + c_n R$ است و لذا بنابر ۴۵.۸ حلقهٔ $R/(Q + c_n R)$ حلقهٔ موضعی آرتینی است. بنابر ۴۱.۸، ۳۹.۸ و ۴۹.۳ ایدآل ماکسیمالِ حلقهٔ موضعی آرتینی پوچتوان است و لذا $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد که به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n - ۱$، $c_i^h \in Q + c_n R$. در نتیجه عضوهایی چون $d_۱, \cdots, d_{n-۱} \in Q$ و $r_۱, \cdots, r_{n-۱} \in R$ وجود دارند که

$$(*) \qquad \text{به‌ازای هر } i = ۱, \cdots, n - ۱ \qquad c_i^h = d_i + r_i c_n$$

توجه کنید که $\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R \subseteq Q$: هدف ما این است که نشان دهیم Q ایدآل اول مینیمال $\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R$ است و سپس فرض استقرا را به‌کار ببریم.

فرض کنید $\overline{R} = R/\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R$ و $\overline{} : R \to \overline{R}$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. رابطهٔ $(*)$ نشان می‌دهد که هر ایدآل اول R چون P' که شامل همهٔ عضوهای $d_۱، \cdots، d_{n-۱}، c_n$ باشد شامل $c_۱، \cdots، c_n$ نیز هست، در نتیجه M تنها ایدآل اول R است که شامل همهٔ عضوهای $d_۱، \cdots، d_{n-۱}، c_n$ است. بنابراین، با توجه به ۲۸.۳ ایدآل ماکسیمال $M/\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R$ از حلقهٔ $\overline{R}$ ایدآل اول مینیمال ایدآل اصلی $\overline{c_n}\overline{R}$ است. حال می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۲.۱۵ نتیجه بگیریم که

$$\text{ht}_{\overline{R}} \left(M/\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R \right) \leq ۱;$$

در نتیجه Q باید ایدآل مینیمال $\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R$ باشد زیرا در غیر این صورت زنجیرهٔ

$$Q/\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R \subset M/\sum_{i=۱}^{n-۱} d_i R$$

از ایدآلهای اول $\overline{R}$ را می‌توان از"طرف پایین" گسترش داد. بنابراین از فرض استقرا نتیجه می‌شود که $\text{ht } Q \leq n - ۱$ و لذا اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کامل است.

بنابراین قضیه اثبات شده است. ■

۵.۱۵ نتیجه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری باشد.

یک) ارتفاع هر ایدآل اول R متناهی است. لذا بُعد هر حلقهٔ موضعی متناهی است.

دو) فرض کنید $P, Q \in \text{Spec}(R)$ و $P \subseteq Q$. در این صورت $\text{ht } P \leq \text{ht } Q$، و $\text{ht } P = \text{ht } Q$ اگر و تنها اگر $P = Q$.

سه) حلقهٔ R در شرط زنجیرهٔ نزولیِ ایدآلهای اول صدق می‌کند.

اثبات. یک) فرض کنید $P \in \text{Spec}(R)$. چون R نوتری است، P متناهی‌مولد است و مثلاً توسط n عضو تولید می‌شود. همچنین P تنها ایدآل اول مینیمال خودش است و لذا از تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۴.۱۵ نتیجه می‌شود که $\text{ht } P \leq n$.

حکم دوم بند (یک) از حکم اول نتیجه می‌شود زیرا بُعد هر حلقهٔ موضعی برابر با ارتفاع ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فردش است: ۱۸.۱۴(چهار) را ببینید.

دو) فرض کنید $\text{ht } P = n$ و زنجیرهٔ

$$P_۰ \subset P_۱ \subset \cdots \subset P_n$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R باشد که $P_n = P$. در این صورت اگر $P \neq Q$، چون

$$P_۰ \subset P_۱ \subset \cdots \subset P_n \subset Q$$

زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R است پس $\text{ht } Q \geq n + ۱$. حال همهٔ حکمهای این بند بلاواسطه از این مطلب نتیجه می‌شوند.

سه) برای اثبات این مطلب کافی است توجه کنیم که هر زنجیرهٔ اکیداً نزولی چون

$$P_۱ \supset P_۲ \supset \cdots \supset P_n$$

از ایدآلهای اول R باید در $n \leq \text{ht } P_۱ + ۱$ صدق کند. ■

هدف اصلی بعدی ما اثبات نوعی عکس تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی ۴.۱۵ است. برای سهولت کار نخست مفهوم ارتفاع را چنان تعمیم می‌دهیم که برای همهٔ ایدآلهای حلقهٔ تعویضپذیر نوتری بامعنی باشد.

۶.۱۵ تعریف و تذکر. فرض کنید R حلقهٔ تعویضپذیر نوتری و I ایدآل سرهٔ آن باشد. روشن است که ایدآلهای اولی از R وجود دارند که شامل I هستند: ارتفاع I را که با $\text{ht } I$ نشان

می‌دهیم به‌صورت

$$\text{ht } I = \min \{\text{ht } P : P \supseteq I \text{ و } P \in \text{Spec}(R)\}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که وقتی I اول است این معنی جدید "$\text{ht } I$" بر معنی قبلی منطبق است. چون بنابر ۵۳.۳ هر ایدآل اول متعلق به $\text{Var}(I)$ (۴۸.۳ را ببینید) شامل ایدآل اول مینیمالی از I است و چون بنابر ۱۷.۸ هر ایدآل اول متعلق به $\text{ass } I$ شامل ایدآل اول مینیمالی از I است، از ۵.۱۵(دو) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\text{ht } I &= \min \{\text{ht } P : \text{ایدآل مینیمال } I \text{ است } P\} \\ &= \min \{\text{ht } P : P \in \text{ass } I\}.\end{aligned}$$

همچنین توجه کنید که اگر J نیز ایدآل سرهٔ R باشد و $I \subseteq J$ آن‌گاه $\text{ht } I \le \text{ht } J$.

این قرارداد که ارتفاع ایدآل ناسرهٔ R از R را ∞ در نظر بگیریم گاهی مفید است.

۷.۱۵ تذکر. اگر I ایدآل سره‌ای از حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشد و توسط n عضو تولید شود آن‌گاه از تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۴.۱۵ نتیجه می‌شود که $\text{ht } I \le n$.

۸.۱۵ تمرین. فرض کنید I و J ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشند و $I \subset J$. آیا همیشه باید $\text{ht } I < \text{ht } J$؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۹.۱۵ تمرین. ارتفاع ایدآلهای سرهٔ $\mathbb{Z}$ را تعیین کنید. ارتفاع ایدآلهای سرهٔ دامنهٔ اصلی‌ایدآل R را تعیین کنید.

۱۰.۱۵ تمرین. فرض کنید K هیأت و $R := K[X,Y]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از دو مجهول X و Y باشد. فرض کنید $I := (X^2, XY)$. $\text{ht}_R\, I$ را بیابید. آیا تولید I توسط یک عضو امکانپذیر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۱.۱۵ تمرین. فرض کنید K هیأت و $R := K[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از پنج مجهول X_1، $\cdots$، X_5 باشد. ارتفاع هر یک از ایدآلهای R را که در زیر داده شده‌اند تعیین کنید:

یک) (X_1, X_2, X_3, X_4)؛

دو) $(X_1X_5, X_2X_5, X_3X_5, X_4X_5)$؛

سه) $(X_1, X_2) \cap (X_3, X_4)$؛

چهار) $(X_1X_3, X_2X_3, X_1X_4, X_2X_4)$؛

پنج) $(X_1, X_2) \cap (X_3X_5, X_4X_5)$

۱۲.۱۵ لم. فرض کنید I و P ایدآل حلقهٔ تعویضپذیر نوتری R باشند و $I \subseteq P$ و P اول باشد و $\text{ht } I = \text{ht } P$. در این صورت P ایدآل اول مینیمال ایدال I است.

اثبات. فرض کنید P ایدآل اول مینیمال I نباشد. در این صورت بنابر ۵۳.۳ ایدآل اول مینیمالی چون Q از I وجود دارد که $I \subseteq Q \subsetneq P$. در این صورت با توجه به ۵.۱۵(دو) و ۶.۱۵ داریم

$$\text{ht } I \leq \text{ht } Q < \text{ht } P$$

که متناقض با فرض است. ■

وعده کرده بودیم که عکس تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی را ثابت کنیم. اکنون می‌توانیم به‌وعدهٔ خود عمل کنیم.

۱۳.۱۵ قضیه. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری باشد و $P \in \text{Spec}(R)$؛ فرض کنید که $\text{ht } P = n$. در این صورت ایدآلی چون I از R وجود دارد که توسط n عضو تولید می‌شود و $\text{ht } I = n$ و $I \subseteq P$.

توجه. از ۱۲.۱۵ نتیجه می‌شود که P ایدآل اول مینیمال Iیی است که قضیه می‌گوید وجود دارد.

اثبات. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. وقتی $n = 0$ آن‌گاه $I = 0$ ایدآلی با ویژگیهای مذکور است.

لذا در مرحلهٔ دوم استقرا فرض کنید $n > 0$ و حکم برای مقادیر کوچکتر از n درست باشد. حال زنجیره‌ای چون

$$P_0 \subset \cdots \subset P_{n-1} \subset P_n$$

از ایدآلهای اول R وجود دارد که $P_n = P$. توجه کنید که $\text{ht } P_{n-1} = n - 1$: زیرا بنابر ۵.۱۵(دو) $\text{ht } P_{n-1} < \text{ht } P$ و با توجه به زنجیرهٔ فوق $\text{ht } P_{n-1} \geq n - 1$. بنابراین می‌توانیم فرض استقرا را در مورد P_{n-1} به‌کار ببریم: نتیجه این است که ایدآل سره‌ای چون J از R وجود دارد که توسط $n - 1$ عضو چون $a_1, \ldots, a_{n-1}$ تولید می‌شود و $J \subseteq P_{n-1}$ و $\text{ht } J = n - 1$.

توجه کنید که بنابر ۱۲.۱۵، P_{n-1} در واقع ایدآل اول مینیمال J است. یادآوری می‌کنیم که طبق ۱۷.۸، J تنها تعدادی متناهی ایدآل اول مینیمال دارد؛ همچنین توجه کنید که بنابر تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۴.۱۵ و این واقعیت که $\text{ht } J = n - 1$، ارتفاع همهٔ ایدآلهای اول مینیمال J دقیقاً $n - 1$ است. فرض کنید ایدآلهای اول مینیمال J، علاوه بر P_{n-1}، عبارت باشند از $Q_1, \ldots, Q_t$ (در واقع t ممکن است صفر باشد ولی این مطلب اثر مهمی در اثبات ندارد.)

حال با استفاده از قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول یعنی ۶۱.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$P \nsubseteq P_{n-1} \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_t$$

زیرا اگر چنین نباشد از ۶۱.۳ نتیجه می‌شود که یا $P \subseteq P_{n-1}$ یا به‌ازای iای که $1 \leq i \leq t$، $P \subseteq Q_i$ ولی هیچ یک از این دو حالت ممکن نیست زیرا $\text{ht } P = n$ ولی

$$\text{ht } P_{n-1} = \text{ht } Q_1 = \cdots = \text{ht } Q_t = n - 1.$$

بنابراین عضوی چون

$$a_n \in P \backslash (P_{n-1} \cup Q_1 \cup \cdots \cup Q_t)$$

وجود دارد. حال ایدآل I را به‌صورت $I := \sum_{i=1}^{n} Ra_i = J + Ra_n$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که I دارای همهٔ ویژگیهای مورد نظر است. از تعریف I واضح است که I توسط n عضو تولید می‌شود و $I = J + Ra_n \subseteq P_{n-1} + P = P$. لذا برای کامل کردن اثباتِ مرحلهٔ دوم استقرا کافی است نشان دهیم که $\text{ht } I = n$.

چون $J \subseteq I \subseteq P$ و $\text{ht } J = n - 1$ و $\text{ht } P = n$ لذا باید داشته باشیم $\text{ht } I = n - 1$ یا $\text{ht } I = n$. حال فرض می‌کنیم $\text{ht } I = n - 1$ و در پی تناقض می‌گردیم. در این صورت ایدآل اول مینیمالی چون P' از I وجود دارد که $\text{ht } P' = n - 1$. حال $J \subseteq I \subseteq P'$ و $\text{ht } J = \text{ht } P' = n - 1$. بنابراین از ۱۲.۱۵ نتیجه می‌شود که P' یکی از ایدآلهای اول مینیمال J است، یعنی P' یکی از ایدآلهای P_{n-1}،Q_1،$\cdots$،Q_t است. ولی این ممکن نیست زیرا $a_n \in I \subseteq P'$ در حالی که a_n متعلق به‌هیچ یک از ایدآلهای P_{n-1}،Q_1،$\cdots$،Q_t نیست. این تناقض نشان می‌دهد که $\text{ht } I = n$؛ لذا اثبات مرحلهٔ دوم استقرا کامل شده است. ■

۱۴.۱۵ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری باشد و $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in R$ (که $n \in \mathbb{N}$) و

$$\text{ht}\left(\sum_{j=1}^{i} Ra_j\right) = \text{ht}\left(\sum_{j=1}^{i} Rb_j\right) = i \qquad \text{به‌ازای هر } i = 1, \ldots, n$$

نشان دهید که عضوهایی چون $c_1, \cdots, c_n \in R$ وجود دارند که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ داریم

$$\text{ht}\left(\sum_{j=1}^{i} Rc_j\right) = i \quad \text{و} \quad c_i \in \left(\sum_{j=1}^{i} Ra_j\right) \bigcap \left(\sum_{j=1}^{i} Rb_j\right)$$

۱۵.۱۵ نتیجه. (از ۱۳.۱۵). فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری و I ایدآل سره‌ای از R باشد که توسط n عضو تولید شود. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $I \subseteq P$. در این صورت

$$\mathrm{ht}_{R/I}\, P/I \leq \mathrm{ht}_R\, P \leq \mathrm{ht}_{R/I}\, P/I + n.$$

توجه. البته، بنابر ۲۸.۳، ایدآل P/I از حلقهٔ R/I اول است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که رابطهٔ

$$\mathrm{ht}_{R/I}\, P/I \leq \mathrm{ht}_R\, P$$

به‌سادگی از ۱۸.۱۴(هفت) نتیجه می‌شود.

فرض کنید $b_1, \ldots, b_n$ ایدآل I را تولید کنند. قرار دهید $\overline{R} = R/I$ و فرض کنید $\overline{} : R \to \overline{R}$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. فرض کنید $\mathrm{ht}_{\overline{R}}\, P/I = t$. بنابر ۱۲.۱۵ و ۱۳.۱۵ عضوهایی چون $a_1, \ldots, a_t \in R$ وجود دارند به‌طوری که در حلقهٔ $\overline{R}$ ایدآل اول P/I ایدآل اول مینیمال $\sum_{i=1}^{t} \overline{R}\overline{a_i}$ است. داریم

$$\sum_{i=1}^{t} \overline{R}\overline{a_i} = \left(\sum_{i=1}^{t} Ra_i + I \right) /I$$

و بنابراین از ۱۸.۱۴(هفت)، ۳۹.۲ و ۲۸.۳ نتیجه می‌شود که P باید ایدآل اول مینیمال ایدآل

$$\sum_{i=1}^{t} Ra_i + I = \sum_{i=1}^{t} Ra_i + \sum_{i=1}^{n} Rb_i$$

باشد که ایدآل سره‌ای از R است و توسط $t+n$ عضو تولید می‌شود. بنابراین می‌توانیم از تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۴.۱۵ به‌نتیجهٔ مورد نظر یعنی $\mathrm{ht}\, P \leq t + n$ برسیم. ■

نتیجهٔ فوق یعنی ۱۵.۱۵ بعداً در این فصل در بحث حلقه‌های موضعی منظم به‌کار می‌آید.

۱۶.۱۵ تمرین. فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری باشد و عضو $a \in R$ وارون‌ناپذیر باشد و مقسوم‌علیه صفر نباشد. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$ ایدآلی باشد که $a \in P$. ثابت کنید

$$\mathrm{ht}_{R/Ra}\, P/Ra = \mathrm{ht}_R\, P - 1.$$

حال می‌خواهیم عکس تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی، یعنی ۱۳.۱۵، را در مورد حلقه‌های موضعی به‌کار ببریم و توصیف دیگری از بُعد این حلقه‌ها به‌دست آوریم که بسیار مهم است. تمرین زیر در

واقع مروری بر مطالب گذشته است: هدف این تمرین یادآوری واقعیتهای مهمی دربارهٔ حلقه‌های موضعی است که قبلاً در این کتاب دربارهٔ آنها بحث شده است.

۱۷.۱۵* تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و Q ایدآل سرهٔ R باشد. ثابت کنید که گزاره‌های زیر معادل‌اند:

یک) طول Rـمدول R/Q متناهی است؛

دو) $\mathrm{Var}(Q) = \{M\}$؛

سه) $\mathrm{ass}(Q) = \{M\}$؛

چهار) Q ایدآلی Mـابتدایی است؛

پنج) عددی چون $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $Q \supseteq M^h$؛

شش) $\sqrt{Q} = M$.

۱۸.۱۵ نتیجه. (از ۱۳.۱۵). فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد. در این صورت $\dim R$ برابر است با کمترین تعداد عضوهای R که برای تولید ایدآلی Mـابتدایی لازم‌اند؛ به‌عبارت دیگر

$$\dim R = \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 : \text{عضوهایی چون } a_1, \ldots, a_i \in R \text{ وجود دارند به‌طوری که } \sum_{j=1}^{i} Ra_j \text{ ایدآلی } M \text{ ـابتدایی است} \right\}.$$

اثبات. قرار دهید

$$d = \min\left\{ i \in \mathbb{N}_0 : \text{عضوهایی چون } a_1, \ldots, a_i \in R \text{ وجود دارند به‌طوری که } \sum_{j=1}^{i} Ra_j \text{ ایدآلی } M\text{ـابتدایی است} \right\}.$$

ابتدا توجه کنید که از ۱۸.۱۴(چهار) و تعمیم قضیهٔ ایدآل اصلی یعنی ۴.۱۵ نتیجه می‌شود که $\dim R = \mathrm{ht}\ M \leq d$، به‌این دلیل ساده که M تنها ایدآل اول مینیمال هر ایدآل Mـابتدایی است. از طرف دیگر با استفاده از ۱۲.۱۵ و ۱۳.۱۵ نتیجه می‌گیریم که ایدآلی چون Q از R وجود دارد که M ایدآل اول مینیمال آن است و توسط عضوهایی به‌تعداد $\dim R = \mathrm{ht}\ M$ تولید می‌شود. به‌علاوه هر ایدآل R زیرمجموعهٔ M است و لذا M تنها ایدآل اول وابستهٔ Q است و در نتیجه Q ایدآلی Mـابتدایی است. بنابراین ایدآلی Mـابتدایی از R وجود دارد که توسط عضوهایی به‌تعداد $\dim R$ تولید می‌شود و لذا $d \leqslant \dim R$. به‌این ترتیب اثبات پایان می‌یابد. ■

از این توصیفِ بُعد حلقهٔ موضعی بلاواسطه به‌مفهوم مهم دستگاه پارامترها می‌رسیم.

۱۹.۱۵ تعریف. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی با بُعد d باشد. منظور از دستگاه پارامترهای R مجموعه‌ای از d عضو R است که ایدآلی Mـابتدایی تولید می‌کنند. از ۱۸.۱۵ نتیجه می‌شود که هر حلقهٔ موضعی یقیناً دارای دستگاهی از پارامترهاست. می‌گوییم که $a_1, \ldots, a_d \in R$ دستگاهی از پارامترها برای R تشکیل می‌دهند اگر $\{a_1, \ldots, a_d\}$ دستگاهی از پارامترهای R باشد.

۲۰.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی با بُعد d باشد و $a_1، \ldots، a_d$ دستگاهی از پارامترها برای R تشکیل دهند. فرض کنید $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$. ثابت کنید که $a_1^{n_1}، \ldots، a_d^{n_d}$ دستگاهی از پارامترها برای R تشکیل می‌دهند.

۲۱.۱۵ گامهای بعدی. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد. از ۱۷.۱۵ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ طول Rـمدول R/M^n متناهی است. می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای (منحصر به‌فرد) $f \in \mathbb{Q}[X]$ وجود دارد که به‌ازای هر عدد صحیحی چون n که به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد $\ell(R/M^n) = f(n)$، و می‌توان ثابت کرد که $\deg f$ دقیقاً برابر با $\dim R$ است. در این کتاب دربارهٔ این حکم بحث نمی‌کنیم زیرا بحث کامل دربارهٔ آن منوط به بحث از نظریهٔ حلقه‌های مدرج و مدولهای مدرج است که مجال کافی برای ادای حق مطلب در این‌باره وجود ندارد. به‌هر حال این حکم توصیف مهم و مفید دیگری از بُعد حلقه‌های موضعی به‌دست می‌دهد و هر دانشجوی جدی جبر تعویضپذیر باید از آن آگاه باشد. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند شرح آن را در چند کتاب از فهرست مراجع از جمله مرجع [۱] (فصل ۱۱)، مرجع [۷] (فصل ۵) و مرجع [۸] (فصل ۵) مطالعه کند.

۲۲.۱۵ قضیه. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای تعویضپذیر باشد و $a_1, \ldots, a_t \in M$. در این صورت

$$\dim R - t \leq \dim R/(a_1, \ldots, a_t) \leq \dim R.$$

به‌علاوه $\dim R/(a_1, \ldots, a_t) = \dim R - t$ اگر و تنها اگر $a_1، \ldots، a_t$ همه متفاوت باشند و زیرمجموعه‌ای از دستگاه پارامترهای R تشکیل دهند.

اثبات. بنابر ۱۸.۱۴(چهار)، $\dim R = \operatorname{ht} M$ و

$$\dim R/(a_1, \ldots, a_t) = \operatorname{ht}_{R/(a_1,\ldots,a_t)} M/(a_1, \ldots, a_t).$$

بنابراین بلاواسطه از ۱۵.۱۵ نتیجه می‌شود که

$$\dim R - t \leq \dim R/(a_1, \ldots, a_t) \leq \dim R.$$

حال قرار دهید $\overline{R} := R/(a_1, \ldots, a_t)$ و فرض کنید $R \to \overline{R}$: $\overline{}$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد و $\overline{M} := M/(a_1, \ldots, a_t)$ و $d = \dim R$.
($\Longleftarrow$) فرض کنید که $\dim \overline{R} = d - t$. در این صورت $t \leq d$ و بنابر ۱۸.۱۵ عضوهایی چون $a_{t+1}, \ldots, a_d \in M$ وجود دارند که $\{\overline{a_{t+1}}, \ldots, \overline{a_d}\}$ دستگاهی از پارامترهای $\overline{R}$ است، یعنی $(a_1, \ldots, a_t, a_{t+1}, \ldots, a_d)/(a_1, \ldots, a_t)$ ایدآلی $\overline{M}$ـابتدایی از $\overline{R}$ است. در نتیجه بنابر ۲۲.۴ و ۲۳.۴ ایدآل $(a_1, \cdots, a_d)$ ایدآلی Mـابتدایی از R است. از ۱۸.۱۵ نتیجه می‌شود که ($a_1، \ldots، a_t$ همه متفاوت هستند و) $\{a_1, \ldots, a_d\}$ دستگاهی از پارامترهای R است.
($\Longrightarrow$) حال فرض کنید $t \leq d$ و عضوهایی چون $a_{t+1}, \ldots, a_d \in M$ وجود داشته باشند که $a_1، \ldots، a_t، a_{t+1}، \ldots، a_d$ تشکیل دستگاهی از پارامترها برای R بدهند، یعنی $(a_1، \ldots، a_d)$ ایدآل Mـابتدایی R باشد. لذا بنابر ۲۲.۴ و ۲۳.۴ ایدآل $(\overline{a_{t+1}}, \ldots, \overline{a_d})$ ایدآلی $\overline{M}$ـابتدایی از $\overline{R}$ است. در نتیجه بنابر ۱۸.۱۵ داریم $d - t \geq \dim \overline{R}$. ولی از قسمت اول نتیجه می‌شود که $d - t \leq \dim \overline{R}$ و لذا اثبات کامل است. ■

۲۳.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی با بُعد $d \geqslant 1$ و $\{a_1, \ldots, a_d\}$ و $\{b_1, \ldots, b_d\}$ دو دستگاه از پارامترها برای R باشند. نشان دهید که دستگاهی از پارامترها چون $\{c_1, \ldots, c_d\}$ برای R وجود دارد که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$

$$c_i \in \left(\sum_{j=1}^{i} Ra_j\right) \bigcap \left(\sum_{j=1}^{i} Rb_j\right)$$

۲۴.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و G یک Rـمدول متناهی‌مولد ناصفر باشد. بُعد G را برابر با بُعد حلقهٔ $R/\operatorname{Ann}(G)$ تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\dim G$ (یا $\dim_R G$) نشان می‌دهیم.
ثابت کنید که $\dim G$ برابر با کوچکترین عدد از اعدادی چون $i \in \mathbb{N}$ است که به‌ازای هر یک از آن iها i عضو چون $a_1, \ldots, a_i \in M$ وجود دارند به‌طوری که طول $G/(a_1, \ldots, a_i)G$ متناهی است.

۲۵.۱۵ نتیجه. (از ۱۸.۱۵). فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد. در این صورت $\dim R \leq \operatorname{vdim}_{R/M} M/M^2$.

توجه. Rـمدول M/M^2 توسط M پوچ می‌شود و لذا بنابر ۱۹.۶ فضایی برداری با ساختاری طبیعی روی هیأت مانده‌ای R/M از R است. بنابر ۳.۹ بُعد فضای برداری M/M^2 یعنی $\operatorname{vdim}_{R/M} M/M^2$ برابر است با تعداد عضوهای هر مجموعهٔ مولد مینیمال M.

اثبات. روشن است که M خودش ایدآل Mـابتدایی R است و لذا با توجه به‌تذکرهای

فوق حکم نتیجه بلاواسطه از ۱۸.۱۵ حاصل می‌شود که طبق آن $\dim R$ برابر با کمترین تعداد عضوهای لازم برای تولید ایدآلی Mـابتدایی از R است. ■

از نتیجهٔ فوق بلاواسطه به‌مفهوم حلقهٔ موضعی منظم می‌رسیم.

۲۶.۱۵ تعریف. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای تعویضپذیر باشد، در این صورت R را منظم می‌گوییم اگر $\dim R = \mathrm{vdim}_{R/M}\ M/M^{۲}$.

۲۷.۱۵ تذکر. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی با بُعد d باشد.

یک) با توجه به‌تذکرِ بعد از صورت نتیجهٔ ۲۵.۱۵، از ۳.۹ نتیجه می‌شود که $\mathrm{vdim}_{R/M}\ M/M^{۲}$ برابر است با تعداد عضوهای هر مجموعهٔ مولد مینیمال M. در حالت کلی، بنابر ۱۸.۱۵، دست‌کم $d = \dim R$ عضو (و شاید بیشتر) برای تولید M نیاز است و R دقیقاً وقتی منظم است که M توسط $d = \dim R$ عضو تولید شود.

دو) فرض کنید R منظم باشد و $a_۱, \ldots, a_d \in M$. این مطلب نیز از ۳.۹ نتیجه می‌شود که $a_۱، \ldots، a_d$ ایدآل M را تولید می‌کنند اگر و تنها اگر نگارهٔ طبیعی آنها در $M/M^{۲}$ یعنی عضوهای $a_۱ + M^{۲}، \ldots، a_d + M^{۲}$ پایه‌ای برای این R/Mـفضا تشکیل دهند و این عضوها چنین پایه‌ای تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر خانوادهٔ $a_۱ + M^{۲}، \ldots، a_d + M^{۲}$ (روی R/M) دارای استقلال خطی باشد.

قبل از شرح و بسط نظریهٔ حلقه‌های موضعی منظم نشان می‌دهیم که این حلقه‌ها وجود دارند!

۲۸.۱۵ مثال. یک) فرض کنید R حلقه‌ای تعویضپذیر و نوتری باشد و ایدآلی چون $P \in \mathrm{Spec}(R)$ وجود داشته باشد که ارتفاعش برابر n باشد و توسط $n = \mathrm{ht}\ P$ عضو چون $a_۱، \ldots، a_n$ تولید شود. در این صورت حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی R در P، یعنی R_P، حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد n است، زیرا این حلقه (بنابر ۳.۸ و ۲۰.۵) حلقه‌ای موضعی است و بُعد آن (بنابر ۱۸.۱۴(شش)) n است و ایدآل ماکسیمال آن یعنی

$$PR_P = \left(\sum_{i=۱}^{n} Ra_i\right) R_P = \sum_{i=۱}^{n} R_P \frac{a_i}{۱}$$

توسط n عضو تولید می‌شود. از این مطلب مثالهای بسیاری برای حلقهٔ موضعی منظم به‌دست می‌آید.

دو) فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت بنابر ۱۹.۱۴، در حلقهٔ $\mathbb{Z}$ داریم $\mathrm{ht}\ p\mathbb{Z} = ۱$ و چون $p\mathbb{Z}$ ایدآل اول $\mathbb{Z}$ است و توسط یک عضو تولید می‌شود از بند (یک) فوق نتیجه می‌شود که $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد یک است.

سه) به‌طور کلی، فرض کنید R یک د.ا.ا باشد که هیأت نیست، و M ایدآل ماکسیمالی از R باشد. در این صورت از ۳۴.۳ نتیجه می‌شود که M ایدآل اول و اصلی R با ارتفاع ۱ است و

لذا از بند (یک) فوق نتیجه می‌شود که R_M حلقه‌ای موضعی و منظم با بعد ۱ است. این نوع حلقه‌های موضعی منظم نقش مهمی در نظریهٔ جبریِ اعداد دارند.

چهار) فرض کنید K هیأت و $R := K[X_1, \ldots, X_n]$ حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی K از n مجهول X_1، …، X_n باشد. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in K$. در این صورت از ۱۵.۳، ۶۶.۳ و ۴.۱۵ نتیجه می‌شود که ایدآل $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ از R ایدآلی اول با ارتفاع n است و روشن است که توسط n عضو تولید می‌شود و لذا از بند (یک) فوق نتیجه می‌شود که

$$K[X_1, \cdots, X_n]_{(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)}$$

حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد n است. این نوع حلقه‌های موضعی منظم نقش مهمی در هندسهٔ جبری دارند. (تذکرهای داده شده در ۸.۱۴ (و ۳۳.۱۴) را نیز ببینید.)

پنج) از بند (چهار) فوق و قضیهٔ صفرهای هیلبرت یعنی ۶.۱۴ نتیجه می‌شود که وقتی هیأت K جبری‌بسته است، به‌ازای هر ایدآل ماکسیمال R چون M حلقهٔ $K[X_1, \ldots, X_n]_M$ حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد n است.

شش) ناگفته نماند که هر هیأت K حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد صفر است، زیرا ایدآل ماکسیمال منحصر به‌فرد K یعنی صفر توسط صفر تولید می‌شود و واضح است که بُعد K نیز برابر صفر است.

۲۹.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد. نشان دهید که $R[[X]]$، یعنی حلقهٔ سریهای توانی صوری روی R از مجهول X، نیز حلقه‌ای موضعی است و $\dim R[[X]] = \dim R + 1$.

۳۰.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم باشد. نشان دهید که $R[[X]]$، یعنی حلقهٔ سریهای توانی صوری روی R از مجهول X، نیز حلقه‌ای موضعی و منظم است.

نتیجه بگیرید که اگر K هیأت باشد آن‌گاه حلقهٔ $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ متشکل از سریهای توانی صوری روی K از n مجهول X_1، …، X_n حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد n است.

نظریهٔ حلقه‌های موضعی منظم بسیار زیباست ولی متأسفانه قسمتهایی از آن، به‌ویژه قسمتی که به‌جبر مانستگیی مربوط می‌شود، خارج از چارچوب این کتاب است. ولی قسمتی از این نظریه را می‌توانیم در اینجا ارائه دهیم: نخست این قضیه را اثبات می‌کنیم که هر حلقهٔ موضعی منظم دامنهٔ صحیح است. برای این منظور ابتدا چند حکم مقدماتی را ثابت می‌کنیم. نکتهٔ جالب اثبات قضیه این است که قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول ۶۱.۳ را در حالتی به‌کار می‌بریم که یکی از ایدآلهایی که (به‌اصطلاح) "از آن اجتناب می‌شود" اول نیست.

۳۱.۱۵ لم. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد و $c \in M \setminus M^2$. فرض کنید

$\overline{R} := R/Rc$، و $\overline{M} := M/Rc$ که ایدآل ماکسیمال حلقهٔ موضعی $\overline{R}$ است. همچنین فرض کنید $\overline{} : R \to \overline{R}$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای پوشای طبیعی باشد. در این صورت

$$\operatorname{vdim}_{R/M} M/M^{۲} = \operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲} + ۱.$$

اثبات. فرض کنید $n := \operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲}$ ، و عضوهای $a_۱, \ldots, a_n \in M$ عضوهایی باشند که نگاره‌های طبیعی آنها در $\overline{M}/\overline{M}^{۲}$ پایه‌ای برای این $\overline{R}/\overline{M}$ـفضای برداری تشکیل دهند. لذا بنابر ۳.۹، $\overline{a_۱}, \ldots, \overline{a_n}$ ایدآل $\overline{M}$ از $\overline{R}$ را تولید می‌کنند. در نتیجه

$$M/Rc = \overline{M} = \sum_{i=۱}^{n} \overline{R}\overline{a_i} = \left(\sum_{i=۱}^{n} Ra_i + Rc\right)/Rc$$

و لذا از ۳۷.۲ نتیجه می‌شود که $M = \sum_{i=۱}^{n} Ra_i + Rc$. در نتیجه R/Mـفضای $M/M^{۲}$ توسط $a_۱ + M^{۲}, \ldots, a_n + M^{۲}, c + M^{۲}$ تولید می‌شود. حال برای کامل شدن اثبات کافی است نشان دهیم که خانوادهٔ این $n+۱$ عضو روی R/M دارای استقلال خطی است. این کار را ذیلاً انجام می‌دهیم.

فرض کنید عضوهای $r_۱, \ldots, r_n, s \in R$ چنان باشند که در $M/M^{۲}$ داشته باشیم

$$\sum_{i=۱}^{n}(r_i + M)(a_i + M^{۲}) + (s+M)(c+M^{۲}) = ۰.$$

در این صورت $\sum_{i=۱}^{n} r_ia_i + sc \in M^{۲}$ و لذا در $\overline{R}$ داریم $\sum_{i=۱}^{n} \overline{r_i}\overline{a_i} \in \overline{M}^{۲}$. در نتیجه در $\overline{R}/\overline{M}$ـفضای $\overline{M}/\overline{M}^{۲}$ داریم

$$\sum_{i=۱}^{n}(\overline{r_i} + \overline{M})(\overline{a_i} + \overline{M}^{۲}) = ۰.$$

چون $\overline{a_۱}+\overline{M}^{۲}, \ldots, \overline{a_n}+\overline{M}^{۲}$ روی $\overline{R}/\overline{M}$ دارای استقلال خطی هستند پس $\overline{r_۱}, \ldots, \overline{r_n} \in \overline{M}$. از ۳۷.۲ (یک) نتیجه می‌شود که $r_۱, \ldots, r_n \in M$.

بنابراین از رابطهٔ $\sum_{i=۱}^{n} r_ia_i + sc \in M^{۲}$ نتیجه می‌گیریم که $sc \in M^{۲}$. اگر $s \notin M$ آن‌گاه از ۱۴.۳ نتیجه می‌شود که s عضو وارونپذیر R است و لذا $c = s^{-۱}sc \in M^{۲}$ که ممکن نیست. در نتیجه s نیز متعلق به M است و لذا همان‌طور که می‌خواستیم $a_۱+M^{۲}, \ldots, a_n+M^{۲}, c+M^{۲}$ روی R/M دارای استقلال خطی هستند. ■

۳۲.۱۵ نتیجه. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم باشد و $c \in M \backslash M^{۲}$. در این صورت R/Rc حلقه‌ای موضعی و منظم است و

$$\dim R/Rc = \dim R - ۱.$$

اثبات. توجه کنید که مفروضات فوق مستلزم آن است که

$$\dim R = \operatorname{vdim}_{R/M} M/M^{۲} \geq ۱.$$

فرض‌کنید $\overline{R} := R/Rc$ و $\overline{M} := M/Rc$ که ایدآل ماکسیمال حلقهٔ موضعی $\overline{R}$ است. بنابر ۱۵.۱۵ داریم $\operatorname{ht}_{\overline{R}} \overline{M} \geq \operatorname{ht}_R M - ۱$. در نتیجه با توجه به ۱۸.۱۴(چهار) و ۲۵.۱۵ داریم

$$\operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲} \geq \dim \overline{R} = \operatorname{ht}_{\overline{R}} \overline{M} \geq \operatorname{ht}_R M - ۱ = \dim R - ۱.$$

به‌علاوه با توجه به ۳۱.۱۵ و این واقعیت که R منظم است داریم

$$\dim R - ۱ = \operatorname{vdim}_{R/M} M/M^{۲} - ۱ = \operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲}.$$

لذا نشان داده‌ایم که

$$\operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲} \geq \dim \overline{R} \geq \dim R - ۱ = \operatorname{vdim}_{\overline{R}/\overline{M}} \overline{M}/\overline{M}^{۲}$$

که از آن بلاواسطه نتیجه می‌شود که $\overline{R}$ حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعدِ برابر با $\dim R - ۱$ است.■

۳۳.۱۵ لم. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی باشد که دامنهٔ صحیح نیست. فرض کنید P ایدآل اول R و اصلی باشد. در این صورت $\operatorname{ht} P = ۰$، یعنی P ایدآل اول مینیمال صفر است.

اثبات. فرض می‌کنیم $\operatorname{ht} P > ۰$ و در پی یافتن تناقض برمی‌آییم. طبق این فرض ایدآلی چون $Q \in \operatorname{Spec}(R)$ وجود دارد که $Q \subset P$. حال چون P اصلی است عضوی چون $p \in P$ وجود دارد که $P = Rp$. توجه کنید که $p \notin Q$ زیرا در غیر این صورت $P = Rp \subseteq Q$ که ممکن نیست. خط مشی ما در این اثبات این است که نشان دهیم به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $Q \subseteq P^n$ و سپس از قضیه اشتراک کرول یعنی ۲۵.۸ استفاده کنیم.

برای اثبات $Q \subset P^n$ از استقرا استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a \in Q$؛ روشن است که $a \in P$. در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم $n \in \mathbb{N}$ و فرض می‌کنیم $a \in Q$ نتیجه دهد $a \in P^n$. چون $P^n = Rp^n$ پس $b \in R$ وجود دارد که $a = bp^n$. با توجه به‌اینکه $a \in Q$ و Q ایدآل اول R است و $p \notin Q$، نتیجه می‌گیریم که $b \in Q \subset P$ و لذا $a = bp^n \in P^{n+۱}$. با این مطلب مرحلهٔ دوم استقرا کامل می‌شود؛ لذا ثابت کرده‌ایم که $Q \subseteq \bigcap_{n=۱}^{\infty} P^n$. ولی بنابر قضیهٔ اشتراک کرول یعنی ۲۵.۸، این اشتراک صفر است و لذا $Q = ۰$. این مطلب متناقض با این واقعیت است که R دامنهٔ صحیح نیست. ■

۳۴.۱۵ قضیه. هر حلقهٔ موضعی منظم دامنهٔ صحیح است.

اثبات. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد d باشد. می‌خواهیم حکم را با استقرا ثابت کنیم.

در حالتی که $d = ۰$ طبق ۲۷.۱۵(یک)، M با ۰ عضو تولید می‌شود و لذا $M = ۰$. بنابراین R هیأت و لذا یقیناً دامنهٔ صحیح است.

حال در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم که $d > ۰$ و قضیه برای حلقه‌های موضعی منظم با بُعد کمتر از d درست باشد. فرض می‌کنیم R دامنهٔ صحیح نباشد و در پی تناقض می‌گردیم. چون

$$\mathrm{vdim}_{R/M}\ M/M^{۲} = \dim R = d > ۰$$

داریم $M \supset M^{۲}$. فرض کنید $c \in M \backslash M^{۲}$. توجه کنید که بنابر ۳۲.۱۵ حلقهٔ موضعی R/Rc منظم و با بُعد $d - ۱$ است. در نتیجه بنابه فرض استقرا، $Rc \in \mathrm{Spec}(R)$. حال چون فرض کرده‌ایم که R دامنهٔ صحیح نیست از ۳۳.۱۵ نتیجه می‌شود که $\mathrm{ht}\ Rc = ۰$، یعنی Rc ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر است.

بنابر ۱۷.۸ تنها تعدادی متناهی ایدآل اول مینیمال ایدآل صفر وجود دارد: فرض کنید این ایدآلهای اول $P_۱$، ...، P_s باشند. پس نشان داده‌ایم که $M \backslash M^{۲} \subseteq \bigcup_{i=۱}^{s} P_i$ و لذا

$$M \subseteq M^{۲} \cup P_۱ \cup P_۲ \cup \cdots \cup P_s.$$

حال با استفاده از قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول یعنی ۶۱.۳ نتیجه می‌گیریم که $M \subseteq M^{۲}$ یا به‌ازای iای که $۱ \leqslant i \leqslant s$، $M \subseteq P_i$. ولی هیچکدام از این دو حالت ممکن نیست: زیرا رابطهٔ $M \subseteq M^{۲}$ متناقض با رابطهٔ $M^{۲} \subset M$ است که در بالا دیدیم، و از $M \subseteq P_i$ که i عددی صحیح بین ۱ و s است نتیجه می‌شود که

$$d = \dim R = \mathrm{ht}\ M \leq \mathrm{ht}\ P_i = ۰$$

که این نیز متناقض با فرض $d > ۰$ است.

لذا R دامنهٔ صحیح است و مرحلهٔ دوم استقرا کامل شده است. ■

۳۵.۱۵ تمرین. فرض کنید $A = \mathbb{R}[X_۱, \ldots, X_{n+۱}]$ (که $n \in \mathbb{N}$) حلقهٔ چندجمله‌ایهای روی هیأت عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ از $n+۱$ مجهول $X_۱$، ...، $X_{n+۱}$ باشد. فرض کنید $P := (X_۱, \ldots, X_{n+۱})$، که بنابر ۱۵.۳ ایدآل اول A است. فرض کنید $Q := (X_n^{۲} + X_{n+۱}^{۲})$. نشان دهید که A_P/QA_P دامنهٔ صحیح موضعی با بُعد n است و منظم نیست.

۳۶.۱۵ تمرین. مثالی از حلقهٔ موضعی منظم بزنید که مشخصهٔ هیأت کسرهای آن با مشخصهٔ هیأت مانده‌ای آن تفاوت داشته باشد.

در ۱۹.۱۵ دیدیم که دستگاه پارامترهای حلقهٔ موضعی dبُعدی (R, M) مجموعه‌ای از d عضو R است که ایدآلی Mـابتدایی تولید می‌کنند. در حالتی که R منظم باشد خود M توسط d عضو تولید می‌شود و لذا دست‌کم یک دستگاه پارامترها برای R وجود دارد که M را تولید می‌کند. از این‌رو تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

۳۷.۱۵ تعریف. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد d باشد. دستگاه منظم پارامترهای R مجموعه‌ای از d عضو R است که M را تولید می‌کند، یعنی دستگاهی از پارامترهای R است که در واقع M را تولید می‌کند.

۳۸.۱۵ قضیه. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد $d > ۰$ و $\{u_۱, \ldots, u_d\}$ دستگاهی منظم از پارامترهای R باشد در این صورت به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, d$ حلقهٔ موضعی $R/(u_۱, \ldots, u_i)$ منظم و با بُعد $d - i$ است. به‌علاوه

$$۰ \subset (u_۱) \subset (u_۱, u_۲) \subset \ldots \subset (u_۱, \ldots, u_i) \subset \ldots \subset (u_۱, \ldots, u_d)$$

زنجیره‌ای اشباع‌شده (به‌طول d) از ایدآلهای اول R است.

اثبات. فرض کنید $i \in \mathbb{N}$ و $۱ \leq i \leq d$. بنابر ۲۲.۱۵ بُعد حلقهٔ موضعی $\overline{R} := R/(u_۱, \ldots, u_i)$ برابر با $d - i$ است؛ به‌علاوه اگر $\overline{} : R \to \overline{R}$ نشاندهندهٔ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد آن‌گاه ایدآل ماکسیمال $M/(u_۱, \cdots, u_i)$ از $\overline{R}$ توسط $d - i$ عضو $\overline{u_{i+۱}}, \cdots, \overline{u_d}$ تولید می‌شود (که تعبیرش در حالت $i = d$ واضح است). از این‌رو $\overline{R}$ حلقهٔ موضعی منظم است، و لذا بنابر ۳۴.۱۵ دامنهٔ صحیح است. بنابراین، با توجه به ۲۳.۳، ایدآل $(u_۱, \cdots, u_i)$ از R اول است.

حال توجه کنید که همهٔ رابطه‌های مشمولیت در

$$۰ \subseteq (u_۱) \subseteq (u_۱, u_۲) \subseteq \ldots \subseteq (u_۱, \ldots, u_i) \subseteq \ldots \subseteq (u_۱, \ldots, u_d)$$

باید اکید باشند، زیرا به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, d$، $\dim R/(u_۱, \ldots, u_i) = d - i$. لذا ایدآلهای فوق زنجیره‌ای از ایدآلهای اول R تشکیل می‌دهند که باید به‌این دلیل ساده که طول آن برابر است با $d = \dim R$ اشباع‌شده باشد. ■

۳۹.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد $d > ۰$ و $\{u_۱, \ldots, u_d\}$ دستگاهی منظم از پارامترهای R باشد. نشان دهید که

$$((u_۱, \ldots, u_{i-۱}) : u_i) = (u_۱, \ldots, u_{i-۱}) \qquad \text{به‌ازای هر } i = ۱, \ldots, d$$

(روشن است که در حالت $i = ۱$ شرط فوق به‌معنی $(۰ : u_۱) = ۰$ است.)

۴۰.۱۵ گامهای بعدی. تمرین فوق در واقع نشان می‌دهد که $(u_i)_{i=1}^{d}$ مثال خاصی از مفهومی به‌نام "R ـدنباله" یا "دنبالهٔ منظم روی R" است. در نظریهٔ این دنباله‌ها، که خارج از چارچوب این کتاب است، مفهومهای مهم "درجه" و "حلقهٔ کوهن‌ـمکالی[1]" مطرح می‌شود و خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای مطالعهٔ بیشتر این مباحث به‌مراجعی از فهرست مراجع از جمله مرجع [۸] (فصل ۶) رجوع کنند. به‌علاوه "حلقه‌های گورنستاین[2]" زیرردهٔ مهمی از ردهٔ حلقه‌های کوهن‌ـمکالی تشکیل می‌دهند: حلقه‌های گورنستاین رابطه‌های جالبی با ایدآلهای تحویلناپذیر دارند.

لم زیر را در بحث مربوط به‌حلقه‌های موضعی منظم با بُعد ۱ به‌کار می‌بریم.

۴۱.۱۵ لم. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و آرتینی و M اصلی باشد. در این صورت هر ایدآل R توانی از M و لذا اصلی است.

اثبات. اگر $M = 0$ آن‌گاه R هیأت است و درستی حکم در این حالت واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم که $M \neq 0$: فرض کنید b مولد M باشد. فرض کنید I ایدآل سرهٔ ناصفر R باشد. بنابر ۳۹.۸ و ۴۱.۸ عدد $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $M^t = 0$. در نتیجه عدد $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که I زیرمجموعهٔ $M^h = Rb^h$ باشد ولی زیرمجموعهٔ $M^{h+1} = Rb^{h+1}$ نباشد. از این‌رو عضوی چون $a \in I \backslash M^{h+1}$ وجود دارد و لذا به‌ازای عضوی چون $r \in \mathbb{R}$، $a = rb^h$ و به‌علاوه $r \notin M$. حال از ۱۱.۳ نتیجه می‌شود که r عضو وارونپذیر R است و لذا $b^h = r^{-1}a \in I$. در نتیجه $M^h = Rb^h = I$. نتیجه می‌شود که هر ایدآل R (از جمله ایدآل صفر!) توانی از M است. ■

۴۲.۱۵ قضیه. فرض کنید (R, M) دامنهٔ صحیح موضعی با بعد ۱ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

یک) R منظم است؛

دو) هر ایدآل ناصفر R توانی از M است؛

سه) عضوی چون $a \in R$ وجود دارد به‌طوری که هر ایدآل ناصفر R به‌صورت Ra^h است که $h \in \mathbb{N}$؛

چهار) R د.ا.ا است؛

پنج) R صحیحاًبسته است.

اثبات. (یک) $\Longleftarrow$ (دو) بنا به‌تعریف، M اصلی است. فرض کنید I ایدآل R باشد و $0 \subset I \subset R$. تنها ایدآلهای اول R ایدآلهای M و صفر هستند؛ در نتیجه (بنابر ۱۷.۱۵) I ایدآل Mـابتدایی است و $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $M^t \subseteq I$. بنابر ۴۵.۸ حلقهٔ R/M^t حلقه‌ای موضعی و آرتینی است، و از آنجا که ایدآل ماکسیمال آن اصلی است، بنابر ۴۱.۱۵، I/M^t توانی

1. Cohen-Macaulay 2. Gorenstein

از M/M^t و لذا I توانی از M است.

(سه) $\Longleftarrow$ (دو) چون بنابر ۲۵.۱۵، $\operatorname{vdim}_{R/M} M/M^{۲} \geq ۱$ داریم $M \supset M^{۲}$: فرض کنید $a \in M\backslash M^{۲}$. بنابه فرض به‌ازای عددی چون $n \in \mathbb{N}$، $Ra = M^n$. چون $a \notin M^{۲}$ باید داشته باشیم $n = ۱$ و لذا $M = Ra$. حال چون هر ایدآل ناصفر R توانی از M است، نتیجه می‌شود که هر ایدآل ناصفر R به‌صورت Ra^h است که $h \in \mathbb{N}$.

(چهار) $\Longleftarrow$ (سه) واضح است.

(پنج) $\Longleftarrow$ (چهار) لم ۱۷.۱۳ را همراه با ۳۹.۳ که طبق آن هر د.ا.ا د.ت.ی است به‌کار ببرید.

(یک) $\Longleftarrow$ (پنج) فرض کنید $a \in M\backslash\{۰\}$. مجدداً بنابر ۱۷.۱۵، Ra ایدآل Mـابتدایی و شامل توانی از M است: فرض کنید t کوچکترین عدد طبیعی $i \in \mathbb{N}$ باشد که $M^i \subseteq Ra$. در این صورت $M^{t-۱} \not\subseteq Ra$: فرض کنید $b \in M^{t-۱}\backslash Ra$.

فرض کنید K هیأت کسرهای R باشد. قرار دهید $c := \frac{a}{b} \in K$، و توجه کنید که $c^{-۱} = b/a \in K\backslash R$ (زیرا $b \notin Ra$). لذا، طبق فرض، $c^{-۱}$ روی R صحیح نیست. توجه کنید که

$$c^{-۱}M := \{c^{-۱}r : r \in M\}$$

Rـزیرمدولِ K است و چون $bM \subseteq M^t \subseteq Ra$ پس $c^{-۱}M$ زیرمجموعهٔ R است و لذا در واقع ایدآل R است. هدف ما این است که نشان دهیم این ایدآل برابر خودِ R است.

فرض کنید چنین نباشد. در این صورت $c^{-۱}M \subseteq M$، یعنی Rـمدول متناهی‌مولد M تحت ضرب عضوهایش در عضوهای زیرحلقهٔ $R[c^{-۱}]$ از K بسته است و لذا به‌گونه‌ای طبیعی $R[c^{-۱}]$ـمدول است. چون R دامنهٔ صحیح است، M یک $R[c^{-۱}]$ـمدول صادق است و لذا از ۲۰.۱۳ نتیجه می‌شود که $c^{-۱}$ روی R صحیح است. این تناقض نشان می‌دهد که $c^{-۱}M = R$. نتیجه می‌شود که $M = Rc$، یعنی M ایدآل اصلی است و لذا R منظم است. ■

۴۳.۱۵ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ صحیح نوتری با بُعد ۱ باشد. ثابت کنید که گزاره‌های زیر معادل‌اند:

یک) R صحیحاًبسته است؛

دو) هر ایدآل سرهٔ ناصفر R به‌طور یکتا (مگر از لحاظ ترتیب عاملها) به‌صورت حاصلضرب ایدآلهای اول R نوشته می‌شود؛

سه) به‌ازای هر $P \in \operatorname{Spec}(R)$، حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی R در P، یعنی R_P، حلقهٔ موضعی منظم است.

دامنهٔ صحیح نوتری با بُعد ۱ را که در شرطهای معادل فوق صدق کند دامنهٔ ددکیند می‌نامیم.

۴۴.۱۵ تمرین. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد ۱ باشد. توجه کنید که بنابر لم ناکایاما یعنی ۲۴.۸، به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم $M^n \supset M^{n+1}$. بنابر ۴۲.۱۵ به‌ازای هر $a \in R\backslash\{0\}$ عدد صحیح منحصر به‌فرد $t \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که $Ra = M^t$؛ $v(a)$ را برابر این t تعریف کنید. همچنین قرار دهید $v(0) = \infty$.

فرض کنید K هیأت کسرهای R باشد. نشان دهید که v را می‌توان به‌طور یکتا به‌تابعی چون $\tilde{v} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ توسیع داد به‌طوری که

یک) به‌ازای هر $b, c \in K$، $\tilde{v}(bc) = \tilde{v}(b) + \tilde{v}(c)$، و

دو) به‌ازای هر $b, c \in K$، $\tilde{v}(b+c) \geq \min\{\tilde{v}(b), \tilde{v}(c)\}$.

(در اینجا باید قراردادهای طبیعی $\infty = \infty + \infty$، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\infty + n = \infty$، و به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\infty > n$، و $\infty \geq \infty$ را به‌کار ببرید:)

همچنین نشان دهید که $\{b \in K : \tilde{v}(b) \geq 0\} = R$.

۴۵.۱۵ گامهای بعدی. در ۴۴.۱۵ نگاشت $\tilde{v} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ مثالی از مفهوم "مقداریاب گسسته "(روی K) است؛ در واقع نام دیگر حلقهٔ موضعی منظم با بُعد یک "حلقهٔ مقداریِ گسسته" است. این حلقه‌ها زیررده‌ای از ردهٔ حلقه‌های مقداری تشکیل می‌دهند که در ۴۵.۱۳ به‌آنها اشاره شد. یک بار دیگر باید خوانندگان علاقه‌مند را به‌کتابهای دیگر مانند مرجع [۸] (فصل ۴) یا مرجع [۱] (فصل ۹) رجوع دهیم.

آخرین قضیهٔ ما در این کتاب قضیهٔ مرابطهٔ هیلبرت است که به‌منظور نمایش گوشه‌ای از ارزش جبر مانستگیی برای جبر تعویضپذیر ارائه می‌شود. ابتدا لمی مقدماتی را ثابت می‌کنیم.

۴۶.۱۵ لم. فرض کنید G مدولی متناهی‌مولد و ناصفر روی حلقهٔ موضعی (R, M) باشد و $s := \operatorname{vdim}_{R/M} G/MG$. بنابر ۳.۹، G توسط s عضو تولید می‌شود: فرض کنید G توسط $g_1, \ldots, g_s$ تولید شود. فرض کنید F یک Rـمدول آزاد با رتبهٔ s به‌صورت $F = \bigoplus_{i=1}^{s} R_i$ باشد که به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$، $R_i = R$.

فرض کنید $\psi : F \to G$، Rـهمریختی پوشایی باشد که

$$\psi((r_1, \ldots, r_s)) = \sum_{i=1}^{s} r_i g_i \qquad \text{به‌ازای هر } (r_1, \ldots, r_s) \in F$$

در این صورت $\operatorname{Ker}\psi$ متناهی‌مولد است و $\operatorname{Ker}\psi \subseteq MF$.

اثبات. بنابر ۲۱.۷، Rـمدول F نوتری است و لذا بنابر ۱۳.۷، $\operatorname{Ker}\psi$ متناهی‌مولد است. فرض کنید $(r_1, \ldots, r_s) \in \operatorname{Ker}\psi$، لذا $\sum_{i=1}^{s} r_i g_i = 0$. بنابر ۳.۹، R/Mـفضای G/MG توسط $g_1 + MG, \ldots, g_s + MG$ تولید می‌شود و لذا خانوادهٔ این s عضو روی R/M

دارای استقلال خطی است. نتیجه می‌شود که به‌ازای هر s ,... ,۱ = i، $r_i \in M$. در نتیجه

$$(r_1, \dots, r_s) = r_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + r_s(0, \dots, 0, 1) \in MF.$$

لذا قضیه اثبات شده است. ■

۴۷.۱۵ قضیهٔ مرابطهٔ هیلبرت. فرض کنید (R, M) حلقه‌ای موضعی و منظم با بُعد d و G یک Rـمدول متناهی‌مولد باشد. در این صورت دنبالهٔ کاملی چون

$$0 \longrightarrow F_d \xrightarrow{f_d} F_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{f_i} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} G \longrightarrow 0$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها وجود دارد که در آن F_0،F_1، ...،F_d، Rـمدولهای آزاد متناهی‌مولد هستند.

توجه. دنبالهٔ

$$0 \longrightarrow F_d \xrightarrow{f_d} F_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{f_i} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} G \longrightarrow 0$$

را تجزیهٔ آزاد متناهی G به‌طول d می‌نامیم. قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که "بُعد مانستگیی G متناهی است". توجه کنید که ادعا نکرده‌ایم که همهٔ F_iها ناصفرند، و در واقع اگر $d > 0$ برخی از Rـمدولهای متناهی‌مولد دارای تجزیهٔ آزاد متناهی به‌طول کمتر از d هستند.

اثبات. ابتدا توجه کنید که وقتی $d = 0$ حلقهٔ موضعی منظم R هیأت است و حکم به‌سادگی از نظریهٔ متعارف فضاهای برداری متناهی‌بُعد نتیجه می‌شود. در نتیجه فرض می‌کنیم که $d > 0$.

فرض کنیم $s_0 := \operatorname{vdim}_{R/M} G/MG$. با استفاده از ۴۶.۱۵، Rـمدول آزادی چون F_0 با رتبهٔ s_0 و Rـهمریختی پوشایی چون $f_0 : F_0 \to G$ می‌سازیم که $K_0 := \operatorname{Ker} f_0 \subseteq MF_0$. اگر $K_0 = 0$، F_1 را برابر صفر و همریختی $f_1 : F_1 \to F_0$ را همریختی صفر اختیار می‌کنیم. اگر $K_0 \neq 0$ آن‌گاه ۴۶.۱۵ را در مورد Rـمدول (متناهی‌مولد) K_0 به‌کار می‌بریم و Rـمدول آزادی با رتبهٔ متناهی چون F_1 و Rـهمریختی پوشایی چون $\psi : F_1 \to K_0$ به‌دست می‌آوریم به‌طوری که $\operatorname{Ker} \psi \subseteq MF_1$؛ در این حالت همریختی $f_1 : F_1 \to F_0$ را ترکیب همریختی ψ و همریختی یک به‌یک طبیعی از K_0 به F_0 اختیار می‌کنیم. توجه کنید که $K_1 := \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} \psi \subseteq MF_1$.

این کار را ادامه می‌دهیم: پس از $d + 1$ مرحله دنبالهٔ کامل

$$F_d \xrightarrow{f_d} F_{d-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{f_i} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} G \longrightarrow 0$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها به‌دست می‌آید که در آن $F_\circ$، F_1، ...، F_d همه Rـمدولهای آزاد متناهی‌مولد هستند و به‌ازای هر $i = \circ, \dots, d$، $K_i := \text{Ker } f_i \subseteq MF_i$. توجه کنید که بنابر نحوهٔ ساختن F_iها در ۴۶.۱۵، هر F_i در واقع مجموع مستقیم تعدادی متناهی از Rهاست.

کافی است ثابت کنیم که $K_d = \circ$. این کار را ذیلاً انجام می‌دهیم.

فرض‌کنید $\{u_1, \dots, u_d\}$ دستگاهی منظم از پارامترهای R باشد و قرار دهید $P_\circ = \circ$ و به‌ازای هر $i = 1, \dots, d$، $P_i = (u_1, \dots, u_i)$. بنابر ۳۸.۱۵، به‌ازای هر $i = \circ, \dots, d$، $P_i \in \text{Spec}(R)$. حال می‌خواهیم نشان دهیم که به‌ازای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $\circ \le j \le i \le d$

$$K_i \cap P_j F_i = P_j K_i.$$

روشن است که به‌ازای این i و jها داریم $K_i \cap P_j F_i \supseteq P_j K_i$. ولی اثبات عکس این رابطه نیاز به‌کار بیشتری دارد. این مطلب را با استقرا روی j ثابت می‌کنیم: حالت $j = \circ$ به‌اثبات نیاز ندارد.

لذا در مرحلهٔ دوم استقرا فرض می‌کنیم $\circ < j \le d$ و به‌ازای هر $i \in \mathbb{N}$ که $j - 1 \le i \le d$، $K_i \cap P_{j-1} F_i \subseteq P_{j-1} K_i$. حال عددی چون i را در نظر بگیرید که $j \le i \le d$، و فرض کنید $g \in K_i \cap P_j F_i$. اگر $F_i = \circ$ آن‌گاه $g \in P_j K_i$؛ لذا فرض می‌کنیم $F_i \neq \circ$. بنابراین عضوهایی چون $m_1, \cdots, m_j \in F_i$ وجود دارند به‌طوری که $g = \sum_{k=1}^{j} u_k m_k$ و $f_i(g) = \circ$. در نتیجه $\circ = f_i(g) = \sum_{k=1}^{i} u_k f_i(m_k)$ و لذا در F_{i-1} داریم

$$u_j f_i(m_j) = -\sum_{k=1}^{j-1} u_k f_i(m_k).$$

چون F_{i-1} مجموع مستقیم تعدادی متناهی از Rهاست، پس همهٔ مؤلفه‌های $u_j f_i(m_j)$ متعلق به P_{j-1} هستند. از آنجا که P_{j-1} اول است و بنابر ۳۸.۱۵، $u_j \notin P_{j-1}$، لذا همهٔ مؤلفه‌های $f_i(m_j)$ متعلق به P_{j-1} هستند. در نتیجه بنابه فرض استقرا و این واقعیت که $K_{i-1} = \text{Im } f_i$ نتیجه می‌گیریم که

$$f_i(m_j) \in P_{j-1} F_{i-1} \cap K_{i-1} \subseteq P_{j-1} K_{i-1} = P_{j-1} \text{Im } f_i.$$

لذا عضوهایی چون $z_1, \cdots, z_{j-1} \in F_i$ وجود دارند به‌طوری که

$$f_i(m_j) = \sum_{k=1}^{j-1} u_k f_i(z_k).$$

حال فرض‌کنید $z_j = m_j - \sum_{k=1}^{j-1} u_k z_k (\in F_i)$. دراین صورت $f_i(z_j) = \circ$ و لذا $z_j \in K_i$.

بنابراین $g - u_j z_j \in K_i$. با توجه به فرض استقرا

$$g - u_j z_j = \sum_{k=1}^{j} u_k m_k - u_j \left(m_j - \sum_{k=1}^{j-1} u_k z_k \right) = \sum_{k=1}^{j-1} u_k (m_k + u_j z_k)$$
$$\in K_i \cap P_{j-1} F_i \subseteq P_{j-1} K_i$$

در نتیجه همان‌طور که می‌خواستیم، $g \in P_j K_i$. بنابراین نشان داده‌ایم که $K_i \cap P_j F_i \subseteq P_j K_i$ و لذا مرحلهٔ دوم استقرا کامل شده است.

بنابراین ثابت کرده‌ایم که به‌ازای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $0 \leq j \leq i \leq d$.

$$K_i \cap P_j F_i = P_j K_i$$

از جمله، $K_d \cap P_d F_d = P_d K_d$. ولی $P_d = M$ و $K_d \subseteq M F_d$. در نتیجه $K_d = M K_d$ و لذا بنابر لم ناکایاما یعنی ۲۴.۸، $K_d = 0$. لذا اثبات قضیه کامل است. ■

۴۸.۱۵ تمرین. فرض کنید M مدول متناهی‌مولد روی دامنهٔ اصلی‌ایدآل R باشد. نشان دهید که دنبالهٔ کاملی چون

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

از Rـمدولها و Rـهمریختیها وجود دارد که در آن F_1 و F_0 مدولهای آزاد متناهی‌مولدند، یعنی M، تجزیهٔ آزاد متناهی به‌طول یک دارد.

۴۹.۱۵ تمرین. فرض کنید p و q عضوهایی تحویلناپذیر در دامنهٔ تجزیهٔ یکتای R باشند و p و q وابسته نباشند. نشان دهید دنبالهٔ زیر کامل است:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{f_2} R \oplus R \xrightarrow{f_1} R \xrightarrow{f_0} R/(p, q) \longrightarrow 0$$

در این دنباله f_0 همریختی پوشای طبیعی است و همریختیهای f_1 و f_2 چنین تعریف شده‌اند: به‌ازای هر $r, s \in R$، $f_1((r, s)) = rp + sq$ و به‌ازای هر $r \in R$، $f_2(r) = (-rq, rp)$.

۵۰.۱۵ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ ددکیند و I و J و K ایدآل R باشند. نشان دهید که

یک) $I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$؛

دو) $I + (J \cap K) = (I + J) \cap (I + K)$.

۵۱.۱۵ تمرین. فرض کنید ($n \in \mathbb{N}$ و) $R_1, \ldots, R_n$ حلقه‌های موضعی آرتینی باشند و R نشاندهندهٔ $R_1 \times \cdots \times R_n$ یعنی حاصلضرب مستقیم حلقه‌های $R_1, \ldots, R_n$ باشد. نشان دهید که

یک) به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، حلقهٔ R_i با حلقه‌ای حاصل از موضعی‌سازی R یکریخت است؛

دو) اگر به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$ هر ایدآل R_i اصلی باشد آن‌گاه هر ایدآل R اصلی است.

۵۲.۱۵ تمرین. فرض کنید R دامنهٔ ددکیند باشد.

یک) فرض کنید R ایدآل سرهٔ ناصفر R باشد. نشان دهید که هر ایدآل R/I اصلی است. (می‌توانید از ۴۲.۱۵ و ۵۱.۱۵ استفاده کنید.)

دو) نشان دهید که هر ایدآل R توسط دو (یا کمتر از دو) عضو تولید می‌شود.

۵۳.۱۵ گامهای بعدی. تا به‌حال چند بار توصیه کرده‌ایم که جبر مانستگیی را مطالعه کنید تا بتوانید از آن در جبر تعویضپذیر استفاده کنید. امیدواریم قضیهٔ مرابطهٔ هیلبرت باعث قبول این توصیه شده باشد. در واقع می‌توان نشان داد که عکس قضیهٔ ۴۷.۱۵ نیز درست است (یعنی اگر (R, M) حلقه‌ای موضعی با این ویژگی باشد که هر Rـمدول متناهی‌مولد ناصفر تجزیهٔ آزاد متناهی داشته باشد آن‌گاه R منظم است) و این، توصیف "مانستگیی" حلقه‌های موضعی منظم است. با استفاده از این مطلب می‌توان این موضوع را که حلقهٔ حاصل از موضعی‌سازی هر حلقهٔ موضعی منظم نیز منظم است به‌زیبایی اثبات کرد و این دستاورد بسیار بزرگی در جبر مانستگیی محسوب می‌شود. خواننده می‌تواند شرح این مطالب را در مراجعی چون مرجع [۸] (فصل ۷) و مرجع [۱۱] (فصل ۹) مطالعه کند. (ولی برای درک اثباتها باید مطالبی از جبر مانستگیی بداند!)

اکنون به آخر راهی که می‌خواستیم در این کتاب طی کنیم رسیده‌ایم اما امیدواریم تذکرهایی که تحت عنوان "گامهای بعدی" در فصلهایی از این کتاب ارائه کرده‌ایم خواننده را به ادامهٔ مطالعهٔ جبر تعویضپذیر ترغیب کرده باشد: راههای متعددی برای ادامهٔ کار وجود دارد، مطالب بسیاری وجود دارند که مطالعهٔ آنها لذت‌بخش است، و چندین کتاب برای ادامهٔ مطالعهٔ لذت‌بخش این موضوع موجود است. امیدواریم از این کار محظوظ شوید!

مراجع

[1] M. F. ATIYAH and I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969).

[2] E. T. COPSON, *Metric spaces,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 57 (Cambridge University Press, 1968).

[3] P. R. HALMOS, *Naive set theory* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1960).

[4] B. HARTLEY and T. O. HAWKES, *Rings, modules and linear algebra* (Chapman and Hall, London, 1970).

[5] I. KAPLANSKY, *Commutative rings* (Allyn and Bacon, Boston, 1970).

[6] E. KUNZ, *Introduction to commutative algebra and algebraic geometry* (Birkhäuser, Basel, 1985).

[7] H. MATSUMURA, *Commutative algebra* (Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1980).

[8] H. MATSUMURA, *Commutative ring theory* (Cambridge University Press, 1986).

[9] M. NAGATA, *Local rings* (Interscience, New York, 1962).

[10] D. G. NORTHCOTT, *Ideal theory,* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 42 (Cambridge University Press, 1953).

[11] D. G. NORTHCOTT, *An introduction to homological algebra* (Cambridge University Press, 1960).

[12] D. G. NORTHCOTT, *Lessons on rings, modules and multiplicities* (Cambridge University Press, 1968).

[13] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, London Mathematical Society Student Texts 12 (Cambridge University Press, 1988).

[14] J. J. Rotman, *Notes on homological algebra* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1970).

[15] D. Sharpe, *Rings and factorization* (Cambridge University Press, 1987).

[16] I. Stewart, *Galois theory* (Chapman and Hall, London, 1973).

[17] I. Stewart and D. Tall, *Complex analysis* (Cambridge University Press, 1983).

[18] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. I, Graduate Texts in Mathematics 28 (Springer, Berlin, 1975).

[19] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Vol. II, Graduate Texts in Mathematics 29 (Springer, Berlin, 1975).

واژه‌نامهٔ فارسی-انگلیسی*

ایدآل اول محاطی	embeded prime ideal
ایدآل تحدیدی	contracted ideal
ایدآل توسیعی	extended ideal
ایدآل خارج‌قسمت	ideal quotient
مت: ایدآل حاصل تقسیم	
ایدآل قدر	content ideal
ایدآلهای متباین	comaximal ideals
	syn: coprime ideals
تابعگون از چپ کامل	left exact functor
تابعگون پادوردا	contravariant functor
بابعگون هموردا	covariant functor
تابعگون I-تاب	I-torsion functor
تابع متریک	metric
تجزیهٔ ابتدایی مینیمال	minimal primary decomposition
ترانهادهٔ ماتریس	transpose of a matrix
تصویرگر متعارف	canonical projection
تعالی	transcendence
توان نمادین	symbolic power

* در این واژه‌نامه «مت» مخفف «مترادف» و «syn» مخفف «synonym» است.

جبری‌بسته	algebraically closed
جبری‌هم‌ارز	algebraically equivalent
حاصل اشباع	saturation
حاصل تحدید ایدآل	contraction of an ideal
حلقهٔ تقلیل‌یافته	reduced ring
حلقهٔ حاصل از الحاق	ring adjunction
حلقهٔ خارج‌قسمتی	factor ring
حلقهٔ شبه‌موضعی	quasi-local ring
حلقهٔ شبه‌نیم‌موضعی	quasi-semi-local ring
حلقهٔ صفر	trivial ring
حلقهٔ مقداریِ گسسته	discrete valuation ring
حلقهٔ نیم‌موضعی	semi-local ring
دامنهٔ اصلی‌ایدآل	principal ideal domain
دامنهٔ تجزیهٔ یکتا	unique factorization domain
دنبالهٔ کامل کوتاه شکافته‌شدنی	split short exact sequence
رادیکال پوچ	nilradical
رتبهٔ بی‌تابی	torsion free rank
ردهٔ مانده‌ای	residue class
زبرهیأت	extension field
	syn: field extension
سری ترکیبی	composition series
شرط زنجیرهٔ صعودی	ascending chain condition
شرط زنجیرهٔ نزولی	descending chain condition
صحیحاً بسته	integrally closed
ضربی‌بسته	multiplicatively closed

طیف	spectrum
فضای حاصل از تکمیل فضای متریک	completion of a metric space
قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول	Prime Avoidance Theorem
قضیهٔ تبادل	Exchange Theorem
قضیهٔ صعود	Going-up Theorem
قضیهٔ صفرها	Nullstellensatz
	syn: Zeros Theorem
قضیهٔ مرابطه	Syzygy Theorem
قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری	Incomparability Theorem
قضیهٔ نزول	Going-down Theorem
قضیهٔ وقوع	Lying-over Theorem
گروه خارج‌قسمتی	factor group
ماتریس الحاقی	adjugate matrix
ماتریس همراه	companion matrix
متناهی‌مولد	finitely generated
محمل	support
مدول خارج‌قسمتی	factor module
مدول دوری	cyclic module
مدول ساده	simple module
مدول صادق	faithful module
مشخصه	characteristic
مقداریاب گسسته	discrete valuation
منفرد	isolated
موضعی‌سازی	localization
واریته	variety
همریختی جبری	algebra homomorphism
مت: همریختی جبرها	syn: homomorphism of algebras

ring homomorphism	همریختی حلقه‌ای
syn: homomorphism of rings	مت: همریختی حلقه‌ها
module homomorphism	همریختی مدولی
syn: homomorphism of modules	مت: همریختی مدولها
evaluation homomorphism	همریختی مقداریاب
field homomorphism	همریختی هیأتی
syn: homomorphism of fields	مت: همریختی هیأتها
splitting field	هیأت تجزیه
field adjunction	هیأت حاصل از الحاق
residue field	هیأت مانده‌ای

واژه‌نامهٔ انگلیسی-فارسی*

adjugate matrix	ماتریس الحاقی
algebra homomorphism	همریختی جبری
syn: homomorphism of algebras	مت: همریختی جبرها
algebraically closed	جبری‌بسته
algebraically equivalent	جبری‌هم‌ارز
ascending chain condition	شرط زنجیرهٔ صعودی
canonical projection	تصویرگر متعارف
characteristic	مشخصه
comaximal ideals	ایدآلهای متباین
syn: coprime ideals	
companion matrix	ماتریس همراه
completion of a metric space	فضای حاصل از تکمیل فضای متریک
composition series	سری ترکیبی
content ideal	ایدآل قدر
contracted ideal	ایدآل تحدیدی
contraction of an ideal	حاصل تحدید ایدآل
contravariant functor	تابعگون پادوردا
covariant functor	تابعگون هموردا
cyclic module	مدول دوری

* در این واژه‌نامه «مت» مخفف مترادف و «syn» مخفف «synonym» است.

descending chain condition	شرط زنجیرهٔ نزولی
discrete valuation	مقدارياب گسسته
discrete valuation ring	حلقهٔ مقدارِیِ گسسته
embeded prime ideal	ایدآل اول محاطی
evaluation homomorphism	همریختی مقدارياب
Exchange Theorem	قضیهٔ تبادل
extended ideal	ایدآل توسیعی
extension field	زبرهیأت
syn: field extension	
factor group	گروه خارج‌قسمتی
factor module	مدول خارج‌قسمتی
factor ring	حلقهٔ خارج‌قسمتی
faithful module	مدول صادق
field adjunction	هیأت حاصل از الحاق
field homomorphism	همریختی هیأتی
syn: homomorphism of fields	مت: همریختی هیأتها
finitely generated	متناهی‌مولد
Going-down Theorem	قضیهٔ نزول
Going-up Theorem	قضیهٔ صعود
ideal quotient	ایدآل خارج‌قسمت
	مت: ایدآل حاصل تقسیم
Incomparability Theorem	قضیهٔ مقایسه‌ناپذیری
integrally closed	صحیحاً بسته
isolated	منفرد
I-torsion functor	تابعگون I_تاب
left exact functor	تابعگون از چپ کامل
localization	موضعی‌سازی
Lying-over Theorem	قضیهٔ وقوع

metric	تابع متریک
minimal primary decomposition	تجزیهٔ ابتدایی مینیمال
module homomorphism	همریختی مدولی
syn: homomorphism of modules	مت: همریختی مدولها
multiplicatively closed	ضربی‌بسته
nilradical	رادیکال پوچ
Nullstellensatz	قضیهٔ صفرها
syn: Zeros Theorem	
principal ideal domain	دامنهٔ اصلی‌ایدآل
Prime Avoidance Theorem	قضیهٔ اجتناب از ایدآلهای اول
quasi-local ring	حلقهٔ شبه‌موضعی
quasi-semi-local ring	حلقهٔ شبه نیم‌موضعی
reduced ring	حلقهٔ تقلیل‌یافته
residue class	ردهٔ مانده‌ای
residue field	هیأت مانده‌ای
ring adjunction	حلقهٔ حاصل از الحاق
ring homomorphism	همریختی حلقه‌ای
syn: homomorphism of rings	مت: همریختی حلقه‌ها
saturation	حاصل اشباع
semi-local ring	حلقهٔ نیم‌موضعی
simple module	مدول ساده
spectrum	طیف
split short exact sequence	دنبالهٔ کامل کوتاه شکافته‌شدنی
splitting field	هیأت تجزیه
support	محمل
symbolic power	توان نمادین
Syzygy Theorem	قضیهٔ مرابطه

torsion free rank	رتبهٔ بی‌تابی
transcendence	تعالی
transpose of a matrix	ترانهادهٔ ماتریس
trivial ring	حلقهٔ صفر
unique factorization domain	دامنهٔ تجزیهٔ یکتا
variety	واریته

فهرست راهنما