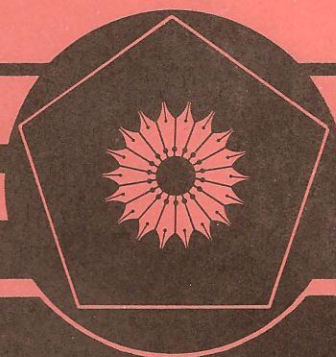


اروین کرویت سیگ



ریاضیات مہندسی پیشرفتنہ

جلد اوّل

ترجمہ عبداللہ شیدفر حسین فرمان



ریاضیات مہندسی

پیشرفتنہ

جلد اول

اروین کرویت سیگ

ترجمہ عبداللہ شیدفر حسین فرمان



Advanced Engineering Mathematics

Erwin Kreyszig

Fourth Edition

Printed in the United States of America, 1979

ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلد اول

تألیف اروین کرویت سیگ

ترجمه عبدالله شیدفر، حسین فرمان

ویراسته اکبر آقا ابراهیمیان، علی راکعی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۶۳

چاپ چهارم ۱۳۷۶

تعداد ۶۰۰۰

شابک : ۹۶۴-۰۱-۰۱۲۰-۶

شابک : ۹۶۴-۰۱-۸۰۵۲-۱ (سری)

ISBN 964-01-0120-6

ISBN 964-01-8052-1(set)

چاپ و صحافی : محمد

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست

صفحه	عنوان
یازده	مقدمه مترجمان
سیزده	مقدمه مؤلف
	فصل ۱
	معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول
۲	۱.۱ مفاهیم و ایده‌های اساسی
۱۲	۲.۱ ملاحظات هندسی، منحنیهای همشیب
۱۷	۳.۱ معادلات تفکیک پذیر
۳۴	۴.۱ معادلات قابل تحویل به صورت تفکیک پذیر
۳۷	۵.۱ معادلات دیفرانسیل کامل
۴۲	۶.۱ عوامل انتگرال ساز
۴۵	۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی
۵۳	۸.۱ تغییر پارامترها
۵۶	۹.۱ مدارهای الکتریکی
۶۴	۱۰.۱ خانواده منحنیها، مسیرهای متعامد
۷۲	۱۱.۱ روش تکرار پیکار
۷۵	۱۲.۱ وجود و یکتایی جوابها

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی

۸۴	۱۰۲	معادلات خطی همگن مرتبه دوم
۸۹	۲۰۲	معادلات مرتبه دوم همگن یا ضرایب ثابت
۹۲	۳۰۲	جواب عمومی پایه ، مسائل با مقدار اولیه
۹۸	۴۰۲	ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مختلط، ریشه مضاعف معادله مشخصه
۱۰۶	۵۰۲	عملگرهای دیفرانسیل
۱۰۹	۶۰۲	نوسانات آزاد
۱۲۱	۷۰۲	معادله کشی
۱۲۴	۸۰۲	وجود و یکتایی جوابها
۱۳۲	۹۰۲	معادلات دیفرانسیل همگن از مرتبه دلخواه
۱۳۶	۱۰۰۲	معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه با ضرایب ثابت
۱۴۰	۱۱۰۲	معادلات خطی غیرهمگن
۱۴۲	۱۲۰۲	روشی برای حل معادلات خطی غیرهمگن
۱۴۹	۱۳۰۲	نوسانات واداشته . تشدید
۱۵۷	۱۴۰۲	مدارهای الکتریکی
۱۶۴	۱۵۰۲	روش مختلط برای به دست آوردن جوابهای خصوصی
۱۶۸	۱۶۰۲	روش عمومی حل معادلات غیرهمگن

فصل ۳

دستگاههای معادلات دیفرانسیل ، صفحه فاز ، پایداری

۱۷۳	۱۰۳	دستگاههای معادلات دیفرانسیل
۱۸۱	۲۰۳	صفحه فاز
۱۸۶	۳۰۳	نقاط بحرانی - پایداری

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

توابع متعامد

۱۹۸	۱۰۴	روش سری توانی

صفحه	عنوان
۲۰۳	۲.۴ مبنای نظری روش سری توانی
۲۱۱	۳.۴ معادله لژاندر ، چندجمله‌ایهای لژاندر
۲۱۷	۴.۴ روش توسعه یافته سری توانی ، معادله شاخصی
۲۳۴	۵.۴ معادله بسل ، توابع بسل نوع اول
۲۴۱	۶.۴ توابع بسل نوع دوم
۲۴۷	۷.۴ مجموعه‌های متعامد توابع
۲۵۲	۸.۴ مسئله استورم - لیوویل
۲۵۸	۹.۴ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل

فصل ۵

تبدیل لاپلاس

۲۶۸	۱.۵ تبدیل لاپلاس ، تبدیل معکوس ، خطی بودن
۲۷۵	۲.۵ تبدیلات لاپلاس مشتق و انتگرال
۲۸۲	۳.۵ انتقال بر محوری ها . انتقال بر محور t ها ، تابع پله‌ای واحد
۲۹۵	۴.۵ مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات
۲۹۹	۵.۵ پیچش
۳۰۵	۶.۵ کسرهاى جزئى
۳۱۷	۷.۵ توابع دوره‌ای . کاربردهای بیشتر
۳۳۱	۸.۵ جدول برخی از تبدیلات لاپلاس

فصل ۶

جبر خطی ، قسمت اول : بردارها

۳۳۶	۱.۶ اسکالر و بردار
۳۳۹	۲.۶ مؤلفه‌های يك بردار
۳۴۲	۳.۶ جمع بردارها ، ضرب بردار در اسکالر
۳۴۷	۴.۶ فضاهاى بردارى ، وابستگی و استقلال خطی
۳۵۲	۵.۶ ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای)
۳۶۰	۶.۶ فضاهاى ضرب داخلی

صفحه	عنوان
۳۶۲	ضرب برداری (ضرب خارجی)
۳۶۴	حاصل ضرب برداری بر حسب مؤلفه‌ها
۳۷۲	حاصل ضرب سه گانه اسکالر ، سایر ضربهای مکرر

فصل ۷

جبر خطی ، قسمت دوم : ماتریس و دترمینان

۳۸۰	۱.۷ مفاهیم اساسی
۳۸۳	۲.۷ جمع ماتریسها ، ضرب ماتریس در يك عدد
۳۸۵	۳.۷ ترانهاد يك ماتریس . ماتریسهای مخصوص
۳۹۱	۴.۷ ضرب ماتریسی
۴۰۳	۵.۷ دستگاههای معادلات خطی . روش حذفی گاوس
۴۱۴	۶.۷ مرتبه ماتریس
۴۱۹	۷.۷ دستگاههای معادلات خطی : وجود وخواص عمومی جوابها
۴۲۳	۸.۷ معکوس ماتریس
۴۳۰	۹.۷ دترمینانهای مرتبه دوم و سوم
۴۳۸	۱۰.۷ دترمینانهای با مرتبه دلخواه
۴۵۲	۱۱.۷ ارتباط رتبه با دترمینانها . قاعده کرامر
۴۶۱	۱۲.۷ صور دوخطی : درجه دوم . هرمیتی و هرمیتی کج
۴۶۷	۱۳.۷ مقادیر ویژه ، بردارهای ویژه
۴۷۴	۱۴.۷ مقادیر ویژه ماتریسهای هرمیتی ، هرمیتی کج ویکانی
۴۸۱	۱۵.۷ دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی

فصل ۸

حساب دیفرانسیل برداری ، میدانهای برداری

۴۹۳	۱.۸ میدانهای اسکالر و میدانهای برداری
۴۹۸	۲.۸ حساب برداری
۵۰۲	۳.۸ منحنیها
۵۰۶	۴.۸ طول قوس

صفحه	عنوان
۵۰۹	۵۰۸ مماس . انحنا و تاب
۵۱۴	۶۰۸ سرعت و شتاب
۵۲۰	۷۰۸ قاعده زنجیری و قضیه مقدار میانگین در توابع چند متغیره
۵۲۵	۸۰۸ مشتق جهتی . گرادین میدان اسکالر
۵۳۴	۹۰۸ تبدیل دستگاههای مختصات و مؤلفه‌های بردار
۵۳۹	۱۰۰۸ دیورژانس يك میدان برداری
۵۴۵	۱۱۰۸ تاو میدان برداری

فصل ۹

انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح . قضایای انتگرال

۵۵۰	۱۰۹ انتگرال روی خط
۵۵۳	۲۰۹ محاسبه انتگرال روی خط
۵۶۰	۳۰۹ انتگرالهای دو گانه
۵۶۹	۴۰۹ تبدیل انتگرال دو گانه به انتگرال روی خط
۵۷۷	۵۰۹ سطوحها
۵۸۱	۶۰۹ صفحه مماس . صورت بنیادی اول . مساحت
۵۸۹	۷۰۹ انتگرال روی سطح
۵۹۶	۸۰۹ انتگرالهای سه گانه ، قضیه دیورژانس گاوس
۶۰۱	۹۰۹ نتایج و کاربردهای قضیه دیورژانس
۶۱۰	۱۰۰۹ قضیه استوکس
۶۱۴	۱۱۰۹ نتایج و کاربردهای قضیه استوکس
۶۱۷	۱۲۰۹ انتگرالهای روی خط مستقل از مسیر

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمه مترجمان

کتاب حاضر برای دانشجویانی که مایلند مفاهیم اساسی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات با مشتقات جزئی، جبر خطی، آنالیز برداری، توابع مختلط، آنالیز عددی، آمار و احتمال و کاربرد همه آنها را در مهندسی و فیزیک بدانند بسیار سودمند است. با آنکه کتاب به حد خود کفا از مطالب نظری لازم برخوردار است در تألیف آن، همچنانکه از مثالها و مسائل ارائه شده در آن به خوبی مشهود است، بیشتر زمینه های کاربردی مورد نظر بوده است. تلفیق این دو جنبه و نیز سادگی و روانی بیان مطالب، که شیوه مؤلف است، کتاب را به صورت مرجعی معقول برای بسیاری از مراکز علمی در نقاط مختلف جهان در آورده است.

ترجمه این کتاب در سال ۱۳۵۸ از روی چاپ سوم آن که آخرین چاپ کتاب (در آن زمان) بود به وسیله مترجمین آغاز شد. بعد از آنکه ترجمه بیش از نلث کتاب به اتمام رسیده بود چاپ چهارم آن در نخستین روزهای انتشارش به دست ما رسید. مقایسه چاپ سوم و چهارم تغییرات زیادی را (که در مقدمه مؤلف آمده است) نشان می داد. از این رو ترجمه چاپ چهارم کتاب از آغاز شروع گردید. ادامه ترجمه کتاب توسط مترجمین مورد تأیید مرکز نشر دانشگاهی که از سال ۱۳۵۹ فعالیت خود را آغاز نمود قرار گرفت و این مرکز ویراستاری، چاپ و انتشار آن را و جهت همت خود قرار داد.

در نظر بود که ترجمه کل کتاب همانند اصل آن در یک جلد منتشر شود ولی حجم زیاد کتاب انتشار آن را در دو جلد موجه تر نمود. از این رو ۹ فصل اول کتاب در جلد اول و ۱۱ فصل بقیه در جلد دوم انتشار یافت.

ویراستاری جلد اول در دو قسمت به ترتیب توسط آقایان اکبر آقا ابراهیمیان و علی راکعی صورت گرفت و ویرایش جلد دوم توسط آقای علی راکعی انجام پذیرفت که دقت و حوصله آنان در خور تقدیر است. از آقای همایون معین که دستنویسهای جلد اول کتاب را مطالعه کردند و پیشنهادهای ارائه دادند قدردانی می شود.

از آقای دکتر نصرالله پورجوادی سرپرست محترم مرکز نشر دانشگاهی به خاطر همکاریهای مؤثرشان در رفع مشکلات و تسهیل انتشار کتاب سپاسگزاریم. راهنمایی و مشاورت آقای دکتر علی اکبر جعفریان مسئول محترم گروه ریاضی مرکز نشر که ناشی از علاقه و اعتقاد ایشان به ترویج و نشر کتابهای علمی است کمک بزرگی برای ما بوده است؛ با تشکر فراوان، توفیق بیشتری برای ایشان آرزو می کنیم. از کارکنان گروه ریاضی مرکز

نشر و همچنین از کارکنان تولید فنی مرکز نشر دانشگاهی کمال تشکر را داریم.
در خاتمه از همه دانش‌پژوهان و همکارانی که بابت کرات و راهنمایی‌های خود ایرادات
مترجمین را گوشزد و آنها را در رفع اشکالات برای چاپ‌های بعدی کمک می‌نمایند قبلاً
تشکر می‌شود.

عبدالله شیدفر

حسین فرمان
گروه فیزیک دانشگاه علم و صنعت ایران

گروه ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران

مقدمه مؤلف

هدف کتاب • منظور این کتاب ارائه قسمتهایی از ریاضیات به دانشجویان مهندسی و فیزیک است که ازدیدگاه نوین در رابطه با مسائل عملی از اهمیت بیشتری برخوردارند. مطالب این کتاب به تناسب فراوانی کاربردشان انتخاب شده‌اند. ایده‌های جدید آموزش نوین ریاضی، که در سمپوزیومهای اخیر آموزش مهندسی بر آنها تأکید شده در این کتاب مد نظر قرار گرفته است. این کتاب هم برای، مؤسسه‌هایی که سابقه‌ای طولانی در آموزش ریاضیات در سطحی گسترده دارند مناسب است و هم برای آنهایی که هدف کلی خود را توسعه برنامه آموزش ریاضیات قرار داده‌اند مفید است.

تنها پیشنیاز لازم برای این کتاب یک دوره مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

مباحث این کتاب پایه دوره‌های درسی دانشجویان لیسانس و فوق لیسانس مهندسی، فیزیک و ریاضیات را در آمریکا، کانادا و اروپا تشکیل می‌دهد.

تغییرات چاپ چهارم

چاپ جدید با چاپهای اول، دوم و سوم تفاوت‌های اساسی زیر را دارد :

مجموعه مسائل . مسائل عوض شده‌اند و به آنها جنبه‌های کاربردی بیشتری داده شده است.

مدلسازی . با ارائه کاربردهای تازه در بخشهای مختلف تأکید بیشتری بر مدلسازی کرده‌ایم .

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی . بخش جدیدی درباره عملگرهای دیفرانسیلی به فصل ۲ اضافه شده است. روشهای صفحه فاز، پایداری و معادله مشهور واندربول در فصل جدیدی (فصل ۳) بررسی شده‌اند.

دستگاههای معادلات دیفرانسیل . یک رهیافت مقدماتی (بدون استفاده از ماتریس)

افزوده شده است. رهیافت ماتریسی گسترش یافته و بخش جدیدی به آن اختصاص یافته است. **تبدیل لاپلاس**. پیچش اضافه شده است. تمامی این فصل بازنویسی شده است تا از حجم آن کاسته شود. در نوشته جدید دو قضیه انتقال در یک بخش آمده است، معادلات دیفرانسیل را جلو تر بررسی کرده ایم، پیچش تعریف شده و مورد استفاده قرار گرفته است؛ کسرهای جزئی بعد از پیچش و با تأکید کمتری تشریح شده اند. **معادلات دیفرانسیل جزئی**. به این فصل بخش جدیدی درباره کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات دیفرانسیل جزئی اضافه شده است.

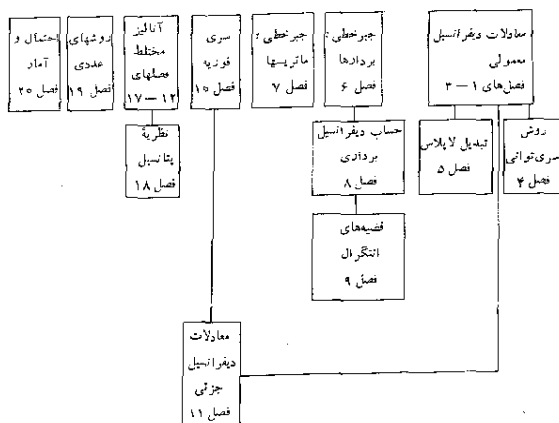
ماتریس. بعضی از مباحث این فصل با توجه بدجبر نوین خطی بازنویسی شده است. تعداد کاربردهای ماتریس نیز در چاپ جدید افزایش یافته است.

آنالیز مختلط. به ترتیب زیر ارائه شده است. در سه بخش کوتاه (به جای یک بخش طولانی در چاپهای قبل) آنالیز مختلط را به سادگی معرفی کرده ایم. به دلایل مشابه در آغاز فصل مربوط به نگاشت همدمی که راجع به اعداد مختلط بحث می کند مثالهای بیشتری آورده ایم. فصل مربوط به دنباله ها و سریها بازنویسی شده به طوری که در کلاسهای آنالیز مختلط فقط تدریس دو بخش اول فصل کافی است و بدین ترتیب بدون آنکه پیوستگی مطالب از دست برود صرفه جویی زیادی در وقت می شود. سری توانی، سری تیلور و سری لوران در این چاپ در یک فصل قرار دارند، یعنی نسبت به چاپهای قبلی آنها را به هم نزدیکتر کرده ایم.

آنالیز عددی. در این چاپ بخش جدیدی درباره اسمبلاین که برای مهندسين اهمیت روزافزونی دارد اضافه شده است.

احتمال و آمار. مجموعه های مسائل را با افزودن کاربردهای بیشتر توسعه داده ایم. **مراجع**. که در ضمیمه ۱ آمده اند با توجه به انتشارات و مقالات روز تدوین شده اند.

محتویات و ترتیب. ترتیب موضوعها به طور عمد در نمودار زیر نشان داده شده است:



صفحات زیادی به سه موضوع معادلات دیفرانسیل معمولی، جبر خطی و آنالیز برداری، و آنالیز مختلط که احتمالاً برای مهندسين در درجه اول اهميت قرار دارند اختصاص یافته است. درعين حال فصلهای مربوط به سری فوریه، معادلات دیفرانسیل جزئی، روشهای عددی و غیره، آنقدر مفصل هستند که بتوان از آنها برای تدریس در دوره‌های معمولی استفاده کرد.

برای آنکه استفاده از قسمتهای مختلف آسان باشد فصلها را تا جایی که ممکن بوده است مستقل از یکدیگر نوشته‌ایم.

فصلهای کتاب به بخشهای نسبتاً کوتاه تقسیم شده‌اند. هر بخش شامل مثالهای نوعی و مسائلی است که مفاهیم، روشها و نتایج و کاربرد مهندسی آنها را روشن می‌کنند.

کتاب شامل یادداشت‌های تاریخی، ارجاع به مقاله‌های اصلی، و حدود ۴۰۰ شکل نیز هست.

مراجع. در آخر کتاب فهرستی از کتابهای مرجع و منابعی برای مطالعه بیشتر آورده شده است؛ این فهرست از صفحه ض - ۱ شروع می‌شود. چند فرمول در مورد توابع خاص در ضمیمه ۳ که از صفحه ض - ۵۴ شروع می‌شود آمده است.

مسائل و جوابها. در این کتاب بیش از ۳۵۰۰ مسئله وجود دارد که در انتخاب آنها دقت شده است؛ این مسائل از تمرینهای ساده تا کاربردهای عملی نسبتاً پیچیده را در بر می‌گیرند. جواب مسائلی که شماره آنها فرد است در آخر کتاب (صفحه ض - ۶ به بعد) آمده است.

جدولهای توابع. در ضمیمه ۴ چاپ شده است؛ این ضمیمه از صفحه ض - ۶۱ شروع می‌شود.

توصیه‌هایی در مورد درسهای چند ترمی. مندرجات این کتاب را می‌توان در ۴ ترم متوالی و با هفته‌ای ۳ - ۵ ساعت تدریس کرد:

ترم اول معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱ - ۵).

ترم دوم جبر خطی و آنالیز برداری (فصلهای ۶ - ۹).

ترم سوم سری فوریه و معادلات دیفرانسیل جزئی (فصلهای ۱۰ و ۱۱).
روشهای عددی (فصل ۱۹).

ترم چهارم آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲ - ۱۸).

آمار مهندسی. (۳ - ۵ ساعت در هفته؛ فصل ۲۰). را می‌توان در خلال هر يك از این چهار ترم فوق یا بعد از آنها تدریس کرد.

دوره‌های يك ترمی مستقل. این کتاب برای دوره‌های يك ترمی مستقل مختلف باشد ساعت تدریس در هفته مناسب است؛ مثلاً:

مختصری درباره معادلات دیفرانسیل معمولی (فصلهای ۱ و ۲).
تبدیل لاپلاس (فصل ۵).

- جبر برداری و حساب دیفرانسیل و انتگرال (فصلهای ۶ و ۸).
 ماتریسها و دستگاههای معادلات خطی (فصل ۷).
 سری فوریه و معادلات دیفرانسیل جزئی (فصلهای ۱۵ و ۱۱).
 آنالیز مختلط (فصلهای ۱۲ و ۱۷).
 آنالیز عددی (فصل ۱۹).

دوره‌های کوتاه‌تر. بخشهایی که در دوره‌های کوتاه‌تر قابل حذف در آغاز هر فصل مشخص شده‌اند.

اصولی که در انتخاب موضوعها مورد نظر قرار گرفته‌اند. کتابی نظیر این کتاب چه موضوعهایی را باید دربر داشته باشد و ترتیب و ارائه آنها چگونه باید باشد؟
 برای یافتن جواب این سؤالات اساسی می‌توان نگاهی به سیر تحول تاریخ ریاضیات مهندسی انداخت، این فرایند تحول دو مشخصه جالب دارد:

۱. اهمیت ریاضیات در علوم مهندسی روز به روز بیشتر شده و قابل پیش بینی است که در آینده نیز این اهمیت افزایش یابد. واقعیت آن است که امروزه مسائل مهندسی به اندازه‌ای پیچیده‌اند که بیشتر آنها را نمی‌توان صرفاً با استفاده از شهود فیزیکی و تجارب گذشته حل کرد. رهیافت تجربی در حل بسیاری از مسائل در گذشته موفق بوده است، اما به محض اینکه سرعت‌های بالا، نیروهای بزرگ، دماهای بالا یا سایر شرایط غیرعادی وارد مسئله می‌شوند با شکست روبرو می‌شود؛ این وضعیت به این دلیل که مواد جدید (نظیر پلاستیکها، آلیاژها و غیره) خواص فیزیکی غیر عادی دارند حادث می‌شود. امروزه کارهای آزمایشی پیچیده، وقت گیر و پرهزینه شده‌اند. در این زمینه ریاضیات در برنامه‌ریزی آزمایشها، بررسی داده‌های آزمایشی، و تقلیل کار و هزینه یافتن جواب کمک می‌کند.

۲. آن دسته از روشهای ریاضی که به دلایل نظری محض توسعه یافته بودند ناگهان از اهمیت زیادی در ریاضیات مهندسی برخوردار شدند. برای مثال می‌توان از نظریه ماتریسها، نگاشت همدیسی و نظریه معادلات دیفرانسیلی که جوابهای تناوبی دارند نام برد.

بازتاب این وضعیت در آموزش ریاضیات مهندسی چیست؟ آیا چون مقدار ریاضیات مورد نیاز مهندسين روز به روز بیشتر می‌شود باید در دوره‌های آموزش ریاضی تعداد مطالب بیشتر و بیشتری بگنجانیم ولی به هر مطلب دقت کمتر و کمتری اختصاص دهیم؟ یا باید توجه خود را روی چند ایده اساسی که از اهمیت کاربردی عمومی برخوردارند و با دقت زیاد طوری انتخاب شده‌اند که به خصوص برای آموزش تفکر ریاضی به دانشجو و پرورش قدرت ابتکار وی مناسب باشند متمرکز کنیم؟

شصت یا هشتاد سال پیش هیچکس نمی‌توانست پیش‌بینی کند که روزی نگاشت همدیسی یا ماتریس در قسمت ریاضی کار مهندسين اهمیتی پیدا خواهد کرد. امروز هم پیش‌بینی نظریه‌های جدید ریاضی که بیست یا سی سال بعد کاربردهایی در مهندسی خواهند داشت

دشوار است، اما این مسئله مهمی نیست. اگر دانشجویان ریاضی را به خوبی آموخته باشند پاسخگوی احتیاجات آتی نیز خواهند بود چرا که می‌توانند با مطالعه بیشتر از روشهای جدید نیز آگاهی یابند.

بنابراین به نظر می‌رسد که مهمترین هدف ریاضیات مهندسی آشنا کردن دانشجویان با تفکر ریاضی است. دانشجویان باید اصول راهنما و ایده‌هایی را که افق دید را گسترش می‌دهد و مهمتر از عملیات دستوری هستند بشناسند. او باید معتقد شود که ریاضیات مجموعه‌ای از دستورالعملها و فنون حل مسئله نیست بلکه علمی سیستماتیک و دارای اهمیت کاربردی است که بر تعداد نسبتاً کمی مفهوم بنیادی استوار است و از روشهای وحدت بخش قدرتمندی بهره می‌گیرد. دانشجوی مهندسی باید خود را به لزوم اعمال رویه ریاضی در مسائل مهندسی متقاعد سازد و دریابد که نظریه و کاربردش همان ارتباطی را دارند که درخت و میوه اش.

دانشجو درخواهد یافت که کاربرد ریاضیات در یک مسئله مهندسی سه مرحله دارد:

۱. ترجمه اطلاعات فیزیکی به صورت ریاضی (مدلسازی). به این ترتیب مدلی ریاضی از وضعیت فیزیکی مورد نظر به دست می‌آید. این مدل ممکن است یک معادله دیفرانسیل، دستگاهی از معادلات خطی یا برخی دیگر از عبارات ریاضی باشد.

۲. بحث درباره مدل به دست آمده به کمک روشهای ریاضی. این کار باعث می‌شود که جواب مسئله داده شده به صورت ریاضی تعیین شود.

۳. تبیین نتیجه ریاضی حاصل با عبارات فیزیکی.

به نظر می‌رسد که هر سه این مراحل از اهمیت یکسانی برخوردارند، و روش این کتاب طوری است که به دانشجویان کمک می‌کند تا مهارت لازم برای طی هر سه مرحله را کسب کنند. از این رو به کاربردهایی که جنبه عمومیتری دارند اولویت داده شده است.

در برخی موارد پذیرش بدون اثبات قضایایی که اثبات آنها در سطح کتابی از این نوع نیست غیر قابل اجتناب است. این موارد را مشخص کرده‌ایم، زیرا معتقدیم که پنهان کردن دشواریها و بیش از حد آسان جلوه دادن مطلب هیچ کمکی به آمادگی دانشجویان به منظور تصدی کار حرفه‌ایش نمی‌کند.

آنچه ذکر شد بعضی از اصولی است که من در انتخاب و عرضه مباحث این کتاب از آنها پیروی کرده‌ام. در انتخاب مطالب با استفاده از تجربیات آموزشی و تحقیقاتی قدیم و جدید نهایت دقت را مبذول داشته‌ام و در مقابل این وسوسه که «هرآنچه را که در ریاضیات مهندسی اهمیت دارد» در کتاب خود بیاورم مقاومت کرده‌ام.

کوشش خاصی به عمل آمده است تا مطالب حتی الامکان ساده، روشن و دقیق بیان شود، چنین تلاشی در امر انتخاب نمادها هم صورت گرفته است. در هر فصل سطح درس به تدریج بالا می‌رود و از جهشهای ناگهانی و نیز انباشتن مطالب نظری مشکل احتراز شده است.

آخر هر اثبات با علامت $\blacksquare$ مشخص شده است. این علامت در آخر بعضی تعاریف و در آخر مجموعه مثالهایی که متن دیگری به دنبال دارند هم به کار رفته است.

سیاسگزاری. من به بسیاری از استادان پیشین، همکاران و دانشجویانم به خاطر راهنمایی و کمک آنها در امر آماده کردن این کتاب مدیونم. بسیاری از قسمتهای کتاب قبل از چاپ در کلاسهای درسی من توزیع شده است و دانشجویان با توصیههایی که به نظرشان می رسید آن را به من بازگردانده اند. بحثهایی که با مهندسین و ریاضیدانها داشته ام (همچنین نظرهای کتبی آنها) کمک شایانی بدمن کرده است؛ مایلم بدویزه از اساتید:

P. L. Chambré , J. T. Cargo , S. L. Campbell , S. Bergman
R. G. Helsel , J. W. Dettman , J. Delany , A. Cronheim
H. Kuhn , V. Komkow , E. C. Klipple , W. N. Huff
H. - W. Pu , W. D. Munroe , I. Marx , H. B. Mann , G. Lamb
H. A. Smith , J. T. Scheick , P. V. Reichelderfer , T. Rado
A. Wilansky , H. J. Weiss , J. Todd , J. P. Spencer
که همگی در آمریکا هستند، استاد H. S. M. Coxeler از تورونتو و اساتید
K. Klotter , F. Hohenberg , H. Graf , H. Florian , H. Behnke
A. Walther , H. Unger , C. Schmieden , F. Reutter , M. Pinl
H. Wielandt که در اروپا هستند نام ببرم. در اینجا فقط می توانم تشکرو سپاس خود را
تقدیم حضورشان کنم.

سرانجام از جان وایلی و پسران به خاطر همکاری مؤثرشان و نیز دقت فراوانی که در چاپ این کتاب مبذول داشته اند سیاسگزاری می کنم.
پیشنهادهای بسیاری از خوانندگان در این چاپ اعمال شده است. از نظرهای
اصلاحی و هرگونه توصیه با تشکر فراوان استقبال خواهم کرد.

اروین کرویت سیگ

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل در ریاضیات مهندسی از اهمیتی بنیادی برخوردار است زیرا بسیاری از قوانین و روابط فیزیکی به صورت ریاضی به شکل چنین معادلاتی ظاهر می‌شوند. ما مسائل مختلف فیزیکی و هندسی را که منجر به معادلات دیفرانسیل می‌شوند و مهم‌ترین روشهای متعارف برای حل چنین معادلاتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در حالت کلی چنین معادلاتی منجر به انتگرالگیری خواهند شد.

همچنین در مورد به دست آوردن معادلات دیفرانسیل وضعیتهای فیزیکی داده شده را به دقت بررسی می‌کنیم. این انتقال از مسئله فیزیکی به يك «مدل ریاضی» متناظر با آن مدلسازی نام دارد که برای مهندسين و فیزیکدانان از اهمیت عملی فراوانی برخوردار است و با مثالهای نوعی مجسم خواهد شد.

پنج فصل اول کتاب اختصاصی به معادلات دیفرانسیل معمولی دارد. در فصل حاضر با ساده‌ترین معادلات از این نوع، یعنی معادلات دیفرانسیل با اصطلاح مرتبه اول آغاز می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل بویژه برای حسابگرهای نوین مناسب‌اند. روشهای عددی متناظر برای یافتن جوابهای تقریبی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول «بخش ۷.۱۹» که مستقل از سایر بخشهای فصل ۱۹ است، گنجانده شده است. روشهای عددی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در بخش ۸.۱۹

پیشینیاذ این فصل: حساب انتگرال.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۸.۱ الی ۱۲.۱

مراجع: ضمیمه ۱ قسمت ب.

جواب مسائل : ضمیمه ۲.

۱.۱ مفاهیم و ایده‌های اساسی

در این بخش مفاهیم اساسی مربوط به معادلات دیفرانسیل را تعریف و تشریح کرده آنها را با مثالهایی روشن می‌سازیم. سپس دو مسئله عملی ساده را که از فیزیک و هندسه اتخاذ شده‌اند بررسی می‌کنیم. این بررسی، نخستین ایده از ماهیت و هدف معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها را به ما نشان خواهد داد.

منظور از يك معادله دیفرانسیل معمولی رابطه‌ای است که شامل يك یا چند مشتق تابع غیر مشخص y از x باشد؛ این رابطه ممکن است شامل خود y ، توابع معلومی از x و مقادیر ثابت نیز باشد.

مثلا،

$$(۱) \quad y' = \cos x,$$

$$(۲) \quad y'' + 4y = 0,$$

$$(۳) \quad x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2)y^2$$

معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند.

اصطلاح معمولی برای تمیز دادن این نوع معادله از معادله با مشتق جزئی است که شامل مشتقات جزئی يك تابع غیر مشخص از دو یا چند متغیر مستقل است. مثلا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

يك معادله با مشتق جزئی است. در فصل حاضر ما فقط به بررسی معادلات دیفرانسیل معمولی خواهیم پرداخت.

يك معادله دیفرانسیل معمولی را از مرتبه n نامند هر گاه مشتق n ام y نسبت به x بالاترین مشتق y موجود در آن معادله باشد.

مفهوم مرتبه يك معادله دیفرانسیل منجر به رده‌بندی مفیدی از آنها به معادلات مرتبه اول، دوم، و غیره می‌شود. بنابراین (۱)، يك معادله مرتبه اول است، (۲) از مرتبه دوم است، و (۳) از مرتبه سوم.

در این فصل به بررسی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می‌پردازیم. معادلات مرتبه دوم و بالاتر در فصول ۲ تا ۵ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

تابع

$$(۴) \quad y = g(x)$$

را يك جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول داده شده در فاصله‌ای مثل $a < x < b$ (احتمالا نامتناهی) نامند در صورتیکه g در سراسر این فاصله تعریف شده و مشتق پذیر باشد

و با جایگزینی g و g' بجای y و y' ، معادله به يك اتحاد تبدیل گردد.
مثلا تابع:

$$y = g(x) = e^{2x}$$

به ازای هر x يك جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y' = 2y$$

است زیرا با مشتقگیری به دست می آوریم

$$g' = 2e^{2x}$$

و با جایگزینی g و g' ملاحظه می کنیم که معادله به اتحاد

$$2e^{2x} = 2e^{2x}$$

تبدیل می شود.

گاهی اوقات جواب معادله دیفرانسیل به صورت تابعی ضمنی ظاهر می شود، یعنی به طور ضمنی به شکل

$$G(x, y) = 0$$

معین می شود. چنین جوابی را، در مقابل جواب هریح (۴)، جواب ضمنی می نامند.
مثلا،

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0)$$

جواب ضمنی معادله دیفرانسیل

$$yy' = -x$$

در فاصله $-1 < x < 1$ است، که دانشجو می تواند صحت آن را تحقیق کند.

کار عمده نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی یافتن کلیه جوابهای يك معادله دیفرانسیل مفروض و تحقیق در خواص آنها است. ما روشهای متعارف مختلفی را که بدین منظور ارائه شده اند، مورد بحث قرار خواهیم داد.

يك معادله دیفرانسیل ممکن است دارای چند جواب باشد. این مطلب را با مثالهای زیر روشن می کنیم.

مثال ۱

هر يك از توابع

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + 3, \quad y = \sin x - \frac{4}{5}$$

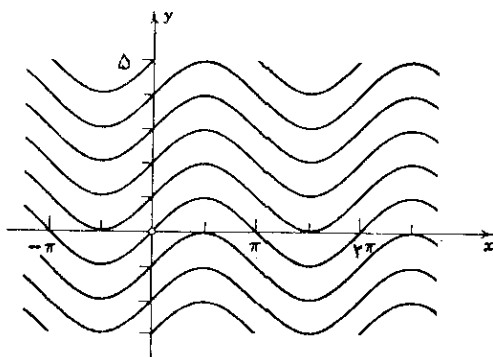
جواب معادله دیفرانسیل (۱) یعنی

$$y' = \cos x$$

است، و از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که هر جواب معادله بشکل

$$(5) \quad y = \sin x + c$$

است که در آن c عددی ثابت است. هر گاه c را دلخواه بگیریم در آن صورت (۵) کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل را نمایش خواهد داد. (به شکل ۱ رجوع کنید).



شکل ۱. جوابهای $y' = \cos x$

مثال ۲

دانشجو می‌تواند تحقیق کند که هر يك از توابع

$$(6) \quad y = e^x, \quad y = 2e^x, \quad y = -\frac{6}{5}e^x$$

به‌ازای هر x جواب معادله دیفرانسیل،

$$y' = y$$

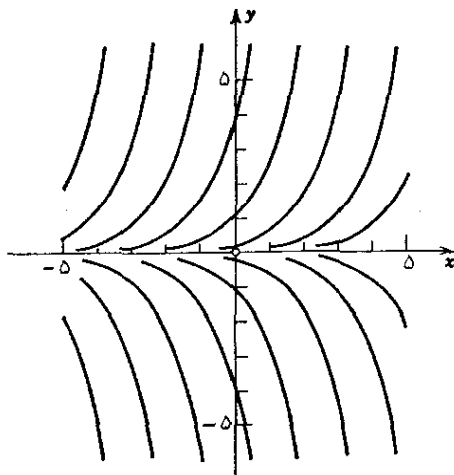
است. بعداً خواهیم دید که هر جواب این معادله به‌شکل

$$(7) \quad y = ce^x$$

است که در آن c عددی است ثابت. بنابراین، دستور (۷) با c دلخواه، کلیه جوابهای معادله دیفرانسیل را نمایش می‌دهد. (به شکل ۲ رجوع کنید).

این مثالها معلوم می‌کنند که يك معادله دیفرانسیل ممکن است (در حالت کلی حتماً) بیش از يك، حتی بینهایت، جواب داشته باشد که می‌توان آنها را با يك فرمول که متضمن

ثابت دلخواه c است نمایش داد. معمول است که چنین تابعی را که شامل ثابت دلخواهی^۱ است **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل مرتبه اول متناظر بنامند. هرگاه مقدار معینی به این ثابت دلخواه بدهیم آنگاه جواب حاصل را يك **جواب خصوصی** می خوانند.



شکل ۰۲. جوابهای $y' = y$

مثلا (۷) يك جواب عمومی و (۶) جوابهای خصوصی معادله $y' = y$ هستند. در بخشهای زیر روشهای مختلف یافتن جوابهای عمومی معادلات مرتبه اول را نشان می دهیم. جواب عمومی يك معادله مفروض که از چنین روشی به دست می آید، صرف نظر از نماد گذاری، منحصر بفرد است و در نتیجه این جواب را جواب عمومی آن معادله می نامند. یادآور می شویم که در بعضی موارد ممکن است جوابهای دیگری از يك معادله مفروض موجود باشند که نتوان آنها را با دادن مقدار معینی به ثابت دلخواه c در جواب عمومی به دست آورد؛ چنین جوابی را **جواب منفرد** معادله می خوانند. مثلا، معادله

$$(۸) \quad y'^2 - xy' + y = 0$$

دارای جواب عمومی

$$y = cx - c^2$$

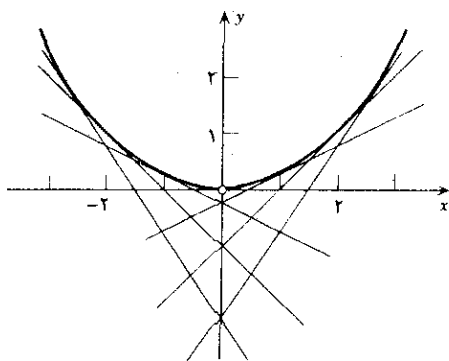
است. این جواب مبین خانواده ای از خطوط راست است که هر خط، متناظر مقدار معینی

۱. ممکن است در برخی حالات برای احتراز از عبارات موهومی یا عبارات نامناسب دیگر مجبور شویم برد عدد ثابت را محدود کنیم.

از c است. جواب دیگر

$$y = \frac{x^2}{4}$$

است که خواننده می تواند با گذاردن آن در معادله، درستی آن را تحقیق کند. این يك جواب منفرد (۸) است زیرا نمی توانیم با تخصیص مقدار معینی به c در جواب عمومی آن را به دست آوریم. واضح است که هر جواب خصوصی، يك خط مماس بر سهمی، که توسط جواب منفرد مشخص می شود، را نمایش می دهد (شکل ۳).



شکل ۳. جواب منفرد (نمایش سهمی) و جوابهای خصوصی معادله (۸)

جوابهای منفرد بندرت در مسائل مهندسی ظاهر می شوند.

لازم است یادآور شویم که در برخی از کتابها مفهوم جواب عمومی به جوابی اطلاق می شود که کلیه جوابهای يك معادله، یعنی هم خصوصی و هم منفرد، را دربر داشته باشد. ما این تعریف را به دلیلی نمی پذیریم. نخست آنکه اغلب اثبات اینکه دستوری شامل همه جوابهاست واقعاً مشکل است؛ لذا این تعریف جواب عمومی در عمل تسا حدودی بلا استفاده است. بعلاوه خواهیم دید که رده ای بزرگ و بسیار مهم از معادلات (معادلات دیفرانسیل باصطلاح خطی) جواب منفرد ندارند و تعریف ما از جواب عمومی را می توان به آسانی برای معادلات مراتب بالاتر چنان تعمیم داد که مفهوم حاصل، شامل همه جوابهای يك معادله دیفرانسیل خطی باشد.

خواهیم دید که شرایطی که تحت آنها يك معادله دیفرانسیل مفروض دارای جواب باشد تقریباً عمومی است. اما باید یادآور شویم که معادلات ساده ای موجود اند که اصلاً جواب ندارند، و معادلات دیگری یافت می شوند که فاقد جواب عمومی هستند. مثلاً معادله $y'^2 = -y$ دارای جوابی حقیقی نسبت به y نیست. (چرا؟) معادله $|y'| + |y| = 0$ جواب عمومی ندارد چون تنها جواب آن $y \equiv 0$ است.

معادلات دیفرانسیل از اهمیت زیادی در مهندسی برخوردارند زیرا بسیاری از قوانین و روابط فیزیکی به طور ریاضی به شکل معادلات دیفرانسیل ظاهر می شوند.

حال يك مثال ساده فیزیکی را در نظر می گیریم که مراحل کلی **مدلسازی** را شرح می دهد، یعنی، مراحلی که ما را از وضعیت فیزیکی (دستگاه فیزیکی) به يك فرمولبندی ریاضی (مدل ریاضی) و تعیین جواب، و تعبیر فیزیکی ماحصل، می رساند. این کار شاید ساده ترین راه بدست آوردن يك ایده مقدماتی درباره ماهیت و هدف معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آنها باشد.

مثال ۳. رادیو اکتیویته، تلاشی نمایی

تجربه نشان می دهد که میزان تجزیه يك ماده رادیو اکتیو متناسب با مقدار ماده موجود است. اگر در لحظه معینی مثلاً $t = 0$ فرضاً جرم ماده رادیو اکتیو ۲ گرم باشد مقدار این ماده رادیو اکتیو در مدت زمانی بعد از آن چه اندازه است؟

مرحله اول (بیان ریاضی فرایند فیزیکی به وسیله معادله دیفرانسیل). اگر مقدار

ماده رادیو اکتیو موجود در لحظه t را با $y(t)$ نمایش دهیم میزان تغییر برابر dy/dt خواهد بود. بنابه قوانین تابش dy/dt با y متناسب است. بنابراین

$$(۹) \quad \frac{dy}{dt} = -ky.$$

در اینجا k يك ثابت فیزیکی معین است که مقدار عددی آن برای مواد رادیو اکتیو مختلف معلوم شده است. (مثلاً در مورد رادیوم، $k = -1.4 \times 10^{-11} \text{ S}^{-1}$) بدیهی است که چون مقدار ماده مثبت است و نسبت به زمان کاهش می یابد dy/dt منفی است و از اینرو k منفی است. می بینیم که فرایند فیزیکی مورد بحث از نقطه نظر ریاضی با يك معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول بیان شده است. از اینرو این معادله، مدل ریاضی آن فرایند فیزیکی است. هر قانون فیزیکی که شامل میزان تغییر تابعی مانند سرعت، شتاب و غیره باشد منجر به يك معادله دیفرانسیل خواهد شد. بدین جهت معادلات دیفرانسیل بکرات در مسائل فیزیکی و مهندسی ظاهر می شوند.

مرحله دوم (حل معادله دیفرانسیل). در این مرحله ابتدایی از بحثمان، هیچ روشی

سیستماتیک برای حل (۹) نمی شناسیم. معهذ می دانیم که اگر (۹) جوابی بصورت $y(t)$ داشته باشد آنگاه لازم است که مشتق آن با y متناسب باشد. از حساب دیفرانسیل و انتگرال بیاد داریم که توابع نمایی دارای این خاصیت اند. در واقع، تابع e^{kt} یا به طور کلی تر

$$(۱۰) \quad y(t) = ce^{kt}$$

که در آن c ثابت دلخواهی است، به ازای هر t جوابی برای (۹) به شمار می رود و

درستی این گفته را با جایگزینی (۱۰) در (۹) می توان تحقیق نمود. چون (۱۰) متضمن يك ثابت دلخواه است، پس يك جواب عمومی معادله مرتبه اول (۹) است. [بعدها (در بخش ۱۰.۳) خواهیم دید که (۱۰) همه جوابهای (۹) را شامل می شود یعنی (۹) جواب منفرد ندارد.]

مرحله سوم (تعیین جواب خصوصی). واضح است که فرآیندهای فیزیکی رفتاری منحصر بفرد دارند. بنابراین با استفاده از اطلاعات داده شده بیشتری قادر خواهیم بود که مقدار عددی معینی را برای c در (۱۰) انتخاب کنیم به طوری که جواب خصوصی حاصل فرآیند فیزیکی مزبور را به طور کامل چنانکه باید و شاید توصیف کند. مقدار ماده موجود در لحظه t یعنی $y(t)$ به مقدار اولیه ماده بستگی دارد. این مقدار در لحظه $t=0$ برابر ۲ گرم است. از اینرو باید مقدار c را طوری انتخاب کنیم که در لحظه $t=0$ مقدار y برابر ۲ گرم شود. این شرط را شرط اولیه نامند زیرا به حالت اولیه دستگاه فیزیکی مربوط می شود. با گذاشتن شرط

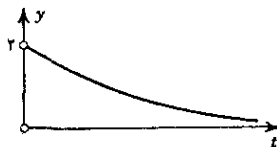
$$(11) \quad y(0) = 2 \quad \text{در (۱۰) به دست می آوریم}$$

$$c = 2 \quad \text{یا} \quad y(0) = ce^0 = 2$$

هر گاه این مقدار c را به کار ببریم آنگاه (۱۰) چنین می شود

$$(12) \quad y(t) = 2e^{kt}$$

این جواب خصوصی (۹)، مقدار ماده موجود در هر لحظه $t \geq 0$ را مشخص می کند. ثابت فیزیکی k منفی است و $y(t)$ ، همچنانکه در شکل ۴ نشان داده شده است، نزول می کند.



شکل ۴. رادیواکتیویته (تلاشی نمایی)

مرحله چهارم (بازبینی). از (۱۲) داریم

$$y(0) = 2e^0 = 2 \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = 2ke^{kt} = ky$$

تابع (۱۲) در معادله (۹) و نیز شرط اولیه (۱۱) صدق می کند.

دانشجو مرحله مهم آخر را که در آن درستی حل مسئله معلوم می گردد هرگز نباید فراموش کند.

حال نشان می دهیم که مسائل هندسی هم به معادلات دیفرانسیل منجر می شوند.

مثال ۴. يك کاربرد هندسی

منحنی ای را بیابید که از نقطه $(1, 1)$ واقع در صفحه xy گذشته و در هریک از نقاطش دارای شیب $-y/x$ باشد. واضح است که تابع نمایش منحنی مطلوب باید جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد

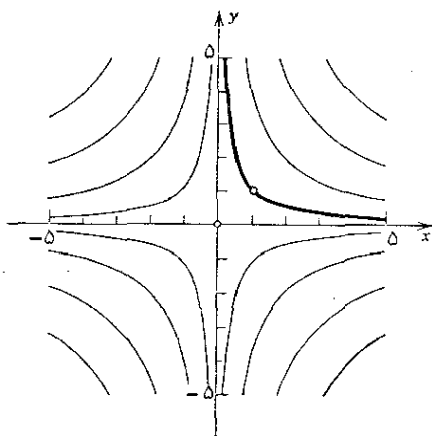
$$y' = -\frac{y}{x} \quad (13)$$

چگونگی حل چنین معادلاتی را بزودی یاد خواهیم گرفت. در این مقطع دانشجو می تواند تحقیق کند که

$$y = \frac{c}{x}$$

به ازای هر مقدار ثابت c جوابی برای (۱۳) می باشد. بعضی از منحنیهای مربوطه در شکل (۵) نشان داده شده است. از آنجایی که منحنی مطلوب از $(1, 1)$ می گذرد باید به ازای $x=1$ داشته باشیم $y=1$ و بنابراین $c=1$ می شود. از اینرو جواب مسئله ما عبارت است از

$$y = \frac{1}{x}$$



شکل ۵. جوابهای $y' = -y/x$

مسائل بخش ۱.۱

در هر يك از موارد زیر، مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل را بیان نمایید و تحقیق کنید که تابع مفروض جواب معادله است.

$$y = ce^{-3x} \quad , \quad y' + 3y = 0 \quad .1$$

$$y = e^x + ax + b \quad , \quad y'' = e^x \quad .2$$

$$y = A \cos 3x + B \sin 3x \quad , \quad y'' + 9y = 0 \quad .3$$

$$y = c \cos x \quad , \quad y' + y \tan x = 0 \quad .4$$

$$y = (c - \cos x)/x \quad , \quad xy' + y = \sin x \quad .5$$

$$y = e^{-x}(A \cos x + B \sin x) \quad , \quad y'' + 4y' + 5y = 0 \quad .6$$

در هر يك از موارد زیر تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادلهٔ متناظرش است و نمودار منحنیهای متناظر را برای برخی مقادیر ثابت c رسم کنید.

$$y = ce^{-5x} \quad , \quad 2y' + y = 0 \quad .7$$

$$y = ce^{-x^2} \quad , \quad y' + 2xy = 0 \quad .8$$

$$x^2 + y^2 = c \quad , \quad y' = -x/y \quad .9$$

$$y = 0, y = (x+c)^2 \quad , \quad y'^2 = 4y \quad .10$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$3y'' = \cos 2x \quad .13 \quad y''' = 1 \quad .12 \quad y' = e^{-x} \quad .11$$

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی را بیابید که متضمن y و y' هر دو بوده و تابع داده شده يك جواب آن باشد.

$$y = 5x^2 \quad .16 \quad y = xe^{-x} \quad .15 \quad y = \cos x \quad .14$$

در هر يك از موارد زیر $y = \int f(x) dx$ را بیابید و ثابت انتگرالگیری c را طوری تعیین کنید که y در شرط داده شده صدق کند.

$$x = 2 \quad y = -5 \quad \text{وقتی که} \quad f = x^2 \quad .17$$

$$x = 0 \quad y = 1 \quad \text{وقتی که} \quad f = xe^{-x^2} \quad .18$$

$$x = \pi/2 \quad y = \pi/2 \quad \text{وقتی که} \quad f = \cos^2 x \quad .19$$

در هر مورد تحقیق کنید که تابع داده شده جواب معادلهٔ دیفرانسیل مربوطه است و c را طوری تعیین کنید که جواب خصوصی حاصل در شرط داده شده، صدق کند. نمودار این

جواب را رسم کنید.

$$x=0 \quad y=3 \text{ وقتی که } y=1+ce^{-x}, \quad y'+y=1 \quad ۲۰$$

$$x=-2 \quad y=1 \text{ وقتی که } y=cx^3, \quad xy'=3y \quad ۲۱$$

$$x=0 \quad y=3 \text{ وقتی که } y=ce^{-x^2}, \quad y'=-2xy \quad ۲۲$$

۲۳. (حرکت سقوطی) تجربه نشان می‌دهد که هر گاه جسمی در خلأ تحت تأثیر جاذبه سقوط کند شتابش ثابت است. این شتاب برابر است با

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

و آن را شتاب ثقل نامند. این قانون را بصورت يك معادله دیفرانسیل نسبت به $s(t)$ ، فاصله سقوط که تابعی از t است، بیان کنید. نشان دهید که با حل این معادله می‌توان قانون معروف

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

را به دست آورد. (عملاً این قانون در مورد سقوط آزاد در هوا هم صادق است در صورتی که بتوان از مقاومت هوا صرف‌نظر نمود، مثلاً، اگر يك سنگ و یا گلوله آهنی را از فاصله‌ای که از سطح زمین خیلی دور نباشد رها نماییم.)

۲۴. اگر در مسئله ۲۳ جسم در $t=0$ از وضعیت اولیه $s=s_0$ و با سرعت اولیه $v=v_0$ رها شود نشان دهید که در آن صورت جواب عبارت است از

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + s_0$$

۲۵. کارخانه سازنده نوع معینی از اتومبیل تبلیغ می‌کند که شتاب این اتومبیل به اندازه‌ای است که در مدت ۳۰ ثانیه آن را از سرعت صفر به ۱۶۰ کیلومتر در ساعت می‌رساند. در صورتی که شتاب ثابت باشد اتومبیل در این مدت چه مسافتی را طی می‌کند؟

۲۶. هواپیمایی تا هنگام بلند شدن دو کیلومتر روی زمین حرکت می‌کند. هر گاه این هواپیما با سرعت 10 m/s شروع به حرکت نماید و با شتابی ثابت در مدت ۵۰ ثانیه مسافت مزبور را طی کند با چه سرعتی از زمین بلند می‌شود؟

۲۷. موشکی به طور مستقیم به طرف بالا پرتاب می‌شود. در مراحل اولیه پرواز شتابش برابر $7t \text{ m/s}^2$ است. پس از ۱۰ ثانیه موتور از آن جدا می‌شود. موشک تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید.)

۲۸. شتاب‌دهنده‌های خطی در فیزیک برای شتاب دادن به ذرات باردار به کار می‌روند. فرض کنید يك ذره آلفا به شتاب دهنده‌ای وارد شود و تحت تأثیر شتاب ثابتی قرار گیرد

که سرعت آن را در مدت 10^{-3} s از 10^3 m/s به 10^4 m/s افزایش دهد. شتاب ذره، a ، و مسافتی را که در این مدت 10^{-3} s پیموده است پیدا کنید.

۲۹. (کاستی نمایی؛ فشار آتمسفریک) مشاهدات نشان می‌دهند که میزان تغییر فشار آتمسفریک p نسبت به ارتفاع h با فشار متناسب است. با فرض آنکه فشار در ارتفاع ۶۰۰۰ متری به اندازه نصف مقدار آن در سطح دریا، p_0 ، باشد، فرمولی برای اندازه فشار در هر ارتفاع پیدا کنید. راهنمایی: از حساب انتگرال به یاد بیاورید که اگر $y = e^{kx}$ در آن صورت $y' = ke^{kx} = ky$.

۳۰. (رشد نمایی؛ مدلی برای جمعیت) هر گاه در جمعیت‌های نسبتاً کوچک (از انسانها، حیوانات، باکتریها و غیره) دگرگونیهای ناگهانی اتفاق نیفتد اغلب طبق قانون مالتوس* که می‌گوید: میزان زمانی رشد با جمعیت موجود متناسب است، رشد صورت می‌گیرد. این قانون را به صورت معادله دیفرانسیلی فرموله کنید. نشان دهید که جواب معادله عبارت است از $y(t) = y_0 e^{kt}$. در مورد ایالات متحده مقادیر مشاهده شده بر حسب میلیون عبارت‌اند از

t	۰	۳۰	۶۰	۹۰	۱۲۰
سال	۱۸۰۰	۱۸۳۰	۱۸۶۰	۱۸۹۰	۱۹۲۰
جمعیت	۵۷۳	۱۲۷۹	۳۱۷۴	۶۲۷۹	۱۰۶۷۵

با استفاده از دو ستون اول، y_0 و k را تعیین کنید. سپس مقادیر مربوط به سالهای ۱۸۶۰، ۱۸۹۰ و ۱۹۲۰ را محاسبه و آنها را با مقادیر مشاهده شده مقایسه کنید. تفسیر کنید.

۲.۱ ملاحظات هندسی. منحنیهای همشیب

بحث را با رفتار سیستماتیک معادلات دیفرانسیل مرتبه اول آغاز می‌کنیم. هر معادله‌ای از این نوع را می‌توان به صورت ضمنی زیر نوشت

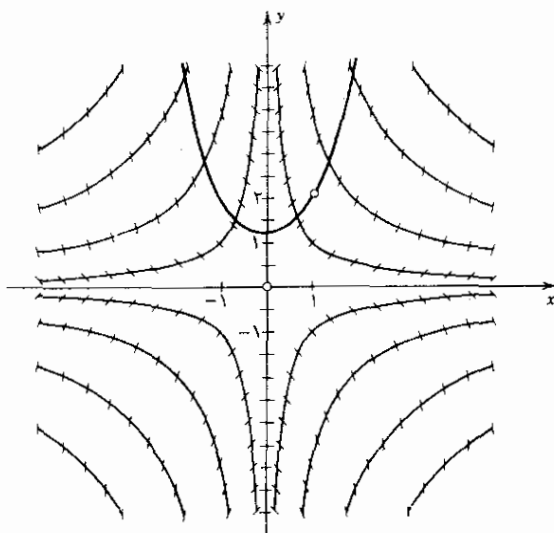
$$(۱) \quad F(x, y, y') = 0$$

در بسیاری از موارد، ولی نه همیشه، قادر خواهیم بود که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول

را به صورت صریح

$$(۲) \quad y' = f(x, y)$$

بنویسیم. قبل از بحث درباره روشهای متعارف مختلف برای حل معادلاتی به صورت (۲) با مثالی نشان خواهیم داد که معادله (۲) یک تعبیر هندسی بسیار ساده دارد. این کار منجر به یک روش نموداری مفید برای به دست آوردن تصویری تقریبی از جوابهای خصوصی (۲) می شود بدون آنکه عملاً معادله را حل کنیم.



شکل ۶. میدان راستای معادله دیفرانسیل (۳)

فرض می کنیم که تابع f در ناحیه ای از صفحه xy تعریف شده باشد به طوری که به هر نقطه در آن ناحیه یک (و فقط یک) مقدار نسبت دهد. جوابهای (۲) را می توان به صورت منحنیهایی در داخل صفحه xy رسم نمود. ما جوابها را نمی دانیم اما با توجه به (۲) می بینیم که جوابی که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد در این نقطه باید شیبی برابر $f(x_0, y_0)$ داشته باشد. با توجه به این نکته می توان روش زیر را به کار بسرد. نخست نمودار بعضی منحنیهایی را که در طول آنها $f(x, y)$ ثابت است در صفحه xy رسم

می‌کنیم. این منحنیها را منحنیهای با شیب ثابت، یا همشیب (۲) می‌نامند. بنابراین هر منحنی همشیب (۲) از رابطه

$$f(x, y) = k = \text{ثابت}$$

به دست می‌آید (که ثابت k در همشیب‌های مختلف متفاوت است). در امتداد منحنیهای همشیب $f(x, y) = k$ تعدادی پاره‌خط کوتاه موازی (اجزای خطی) با شیب k رسم می‌کنیم که شیب منحنیهای جواب (۲) در هر نقطه از منحنی همشیب هستند. این کار را برای همه منحنیهای همشیبی که قبلاً نمودار آنها را رسم کرده‌ایم انجام می‌دهیم. بدین طریق میدانی از اجزای خطی به دست می‌آوریم که آن را میدان راستا (۲) می‌نامند. با کمک اجزای خطی، حال بسادگی می‌توانیم نمودار منحنیهای تقریبی برای منحنیهای جواب (مجهول) معادله داده شده (۲) را رسم کنیم بنابراین تصویر نسبتاً درستی از این منحنیهای جواب را به دست می‌آوریم. با یک مثال ساده این روش را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. همشیبها، میدان راستا

نمودار میدان جهت‌دار معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(3) \quad y' = xy$$

و تقریبی برای منحنی جواب را که از نقطه (۱, ۲) می‌گذرد رسم کنید. منحنیهای همشیب عبارت از هذلولیهای متساوی‌المساquin $xy = k$ در مختصات دوبعدی هستند. نمودار بعضی از آنها را رسم می‌کنیم. سپس با لغزاندن یک مثلث در طول خط کشی ثابت، اجزای خطی را رسم می‌کنیم. حاصل این کار در شکل (۶) نشان داده شده است که تقریبی برای منحنی جواب را نیز که از نقطه (۱, ۲) می‌گذرد نشان می‌دهد.

در بخش بعد خواهیم دید که (۳) با سانی قابل حل است، از اینرو مثال فوق صرفاً جزئیات تکنیکی روش میدان راستا را نشان می‌دهد. این روش مخصوصاً در مسائل مهندسی شامل معادله دیفرانسیل مرتبه اول، که جواب آن را نمی‌توان بر حسب توابع معلوم بیان داشت و یا عبارت پیچیده‌ای دارد، مفید است.

مسائل بخش ۲.۱

برای هر حالت یک میدان راستای مناسب رسم کنید. چند منحنی جواب تقریبی را بکشید. سپس معادله را به طریق تحلیلی حل نمایید و با روش ترسیمی مقایسه کنید تا به مقدار دقت این روش پی ببرید.

$$1. \quad y' = x \quad 2. \quad y' = x^2 \quad 3. \quad y' = y$$

میدانهای راستای مناسبی برای معادلات دیفرانسیل زیر رسم کنید و چند منحنی جواب تقریبی

را بکشید.

$$y' = -xy \quad ۴. \quad y' = -x/y \quad ۵. \quad y' = x^2 + y^2 \quad ۶.$$

$$y' = x + y \quad ۷. \quad 2yy' + x = 0 \quad ۸. \quad y' = \sin y \quad ۹.$$

با استفاده از میدانهای راستا برای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر يك منحنی جواب تقریبی چنان پیدا کنید که در شرط داده شده صدق کند.

$$y(2) = 4, \quad y' = 2x \quad ۱۱. \quad y(1) = 3, \quad y'y' + 9y = 0 \quad ۱۰.$$

$$y(4) = 1, \quad y' + 2y^2 = 0 \quad ۱۳. \quad y(0) = 5, \quad y' + 4x^2y = 0 \quad ۱۲.$$

۱۴. (انتگرالگیری تقویمی) با استفاده از میدانهای راستا مقادیر تقریبی انتگرالهای زیر را پیدا کنید (دو انتگرال آخری جزو انتگرالهای مقدماتی نیستند).

$$\int_0^1 x^2 dx, \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

۱۵. (پرش کننده با چتر بسته) میدان راستای معادله دیفرانسیل

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 0.4v^2$$

را رسم کنید و با استفاده از آن، این نتایج را به دست آورید: همشیبها خطوط مستقیم افقی هستند. همشیب $v = 5$ در عین حال يك منحنی جواب است. وقتی که $t \rightarrow \infty$ تمام منحنیهای جواب واقع در نیمصفحه بالایی ($v > 0$) ظاهراً به خط $v = 5$ میل می کنند؛ اگر $5 < v(0) < 10$ این منحنیها صعودی یکنوا هستند و اگر $v(0) > 10$ نزولی یکنوا خواهند بود. تحقیق کنید که

$$v(t) = 5 \frac{1 + ce^{-4t}}{1 - ce^{-4t}}$$

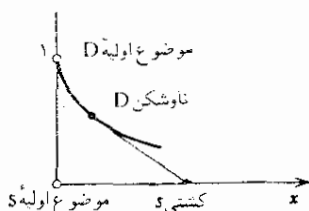
که در آن c دلخواه است، در معادله صدق می کند. (در بخش بعد خواهیم دید که حرکت يك چتر باز، با فرض آنکه مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت $v(t)$ باشد از این معادله تبعیت می کند. از اینرو نتیجه نشان می دهد که سرعت حد حرکت $v = 5$ است که، عملاً، پس از زمانی نسبتاً طولانی به دست می آید.)

۱۶. (مسئله تعقیب، کساننده) در يك مسئله مربوط به تعقیب، جسم یا هدفی در طول منحنی مفروضی حرکت می کند و جسم دوم و یا تعقیب کننده ای آن را دنبال یا تعقیب می نماید یعنی، همیشه در جهت هدف حرکت می کند. فرض کنید که هدف کشتی S باشد که در طول خط مستقیمی حرکت می کند و تعقیب کننده ناوشکن D است و به قسمی حرکت

می‌کند که فاصله آن، a ، از S مقداری است ثابت مثلاً، $a=1$ (مایل دریایی)*. نشان دهید که (شکل ۷)

$$y' = -\frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

یک میدان راستا رسم کنید ($a=1$ بگیرید) و یک منحنی جواب تقریبی متناظر با $y(0)=a=1$ را رسم نمایید؛ شکل ۷ را ببینید. (چنین منحنیهایی را کشاننده می‌نامند.)



شکل ۷. کشاننده و نمادگذاری مسئله ۱۶

۱۷. (حلزونی) نشان دهید که منحنیهای همشیب

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

خطوط مستقیمی هستند که از مبدأ می‌گذرند و از میدان راستا چنین برداشت می‌شود که منحنیهای جواب حلزونی هستند.

۱۸. میدان راستای $y' = y - x$ را رسم کنید. توجه کنید که میدان راستا نشان‌دهنده نتایج زیر است. همشیب $y - x = 1$ در عین حال یک منحنی جواب است و به نظر می‌رسد وقتی که $x \rightarrow -\infty$ سایر منحنیهای جواب به آن میل می‌کنند. این مطلب را با تحقیق اینکه $y = x + 1 + ce^x$ یک جواب معادله است مسجل نمایید.

۱۹. نمودار میدان راستای

$$y' = ay - by^2$$

را به ازای $a=3$ و $b=1$ رسم کنید و با توجه به آن نتایج زیر را به دست آورید. همشیبهای $y=0$ و $y=3$ نیز منحنیهای جواب هستند. تمام منحنیهای جواب واقع در نوار افقی مابین $y=0$ و $y=3$ به شکل S و صعودی یکنوا هستند. همچنین

* هر مایل برابر ۱۸۵۳٫۲۵ متر است.

برای هر منحنی از این گونه وقتی که $x \rightarrow \infty$ آنگاه $y(x) \rightarrow 3$ و هنگامی که $x \rightarrow -\infty$ آنگاه $y(x) \rightarrow 0$. درباره منحنیهای جواب واقع در بالای خط $y=3$ و در نیم صفحه پایینی، $y < 0$ ، چه می توان گفت؟

۳۰. (یک مدل جمعیت) طبق قانون مالتوس میزان زمانی رشد جمعیت $p(t)$ متناسب با جمعیت موجود $p(t)$ است. این قانون درباره جمعیتهایی که خیلی زیاد نباشند صادق است. مدل دقیقتر قانون لودجستکی است که عبارت است از

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

در سال ۱۸۴۵ ورهالست* پیش بینی کرد که برای ایالات متحده $a = 0.03$ و $b = 1.6 \times 10^{-4}$ است که $P(t)$ بر حسب میلیون اندازه گیری می شود. نمودار یک میدان راستا برای $1950 \leq t \leq 1850$ و $0 < p \leq 200$ را رسم کنید. منحنی جوابی را که از نقطه $(1900, 76)$ می گذرد بکشید و دقت آن را با مقادیر واقعی زیر مقایسه کنید

۱۸۵۰	۱۸۷۰	۱۸۹۰	۱۹۱۰	۱۹۳۰
۲۳	۳۹	۶۳	۹۲	۱۲۳

نشان دهید وقتی که $t \rightarrow \infty$ از میدان راستا نتیجه می گیریم که $p(t) \rightarrow a/b$

۳.۱ معادلات تفکیک پذیر

بسیاری از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را می توان با عملیات جبری به صورت

$$(1) \quad g(y)y' = f(x)$$

درآورد. چون $y' = dy/dx$ بهتر است که بنویسیم

$$(2) \quad g(y)dy = f(x)dx$$

اما توجه داریم که این صرفاً طریق نوشتن دیگری برای (۱) است. چنین معادلاتی را معادلات با متغیرهای تفکیک پذیر یا معادله تفکیک پذیر می نامند زیرا در (۲) متغیرهای x و y طوری تفکیک شده اند که در سمت راست فقط x و در سمت چپ فقط y وجود دارد. با انتگرال گیری از دو طرف (۲) به دست می آوریم

$$(3) \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

هر گاه فرض کنیم f و g توابع پیوسته ای هستند در آن صورت انتگرالهای (۳) موجودند و با محاسبه این انتگرالها جواب عمومی (۱) را به دست می آوریم.

مثال ۱

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$9yy' + 4x = 0$$

با تفکیک متغیرها داریم

$$9y dy = -4x dx$$

با انتگرالگیری از دو طرف این رابطه، جواب عمومی زیر را به دست می آوریم

$$\left(c = \frac{\bar{c}}{18}\right) \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = c \quad \text{یا} \quad \frac{9}{4}y^2 = -2x^2 + \bar{c}$$

این جواب يك خانواده از بیضیها را نمایش می دهد.

مثال ۲

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y' = -2xy$$

با تفکیک متغیرها داریم

$$\frac{dy}{y} = -2x dx \quad (y \neq 0)$$

با انتگرالگیری نتیجه می شود

$$(4) \quad \ln|y| = -x^2 + \bar{c}$$

در واقع، درستی نتیجه سمت چپ را می توان با مشتقگیری به صورت زیر تحقیق نمود.
 هرگاه $y > 0$ ، آنگاه $(\ln y)' = y'/y$. هنگامی که $y < 0$ در آن صورت
 $y > 0$ و $-y < 0$ و $(\ln(-y))' = -y'/(-y) = y'/y$ و $y = |y|$ وقتی $y > 0$ و
 $-y = |y|$ وقتی $y < 0$. از اینرو می توانیم با ترکیب هر دو دستور به
 $(\ln|y|)' = y'/y$ برسیم.

این نکته بسیار مهم است که بلافاصله پس از انتگرالگیری ثابت انتگرال را
 داخل کنیم. از (۴) به دست می آوریم

$$|y| = e^{-x^2 + \bar{c}}$$

یا با توجه به اینکه $e^{a+b} = e^a e^b$ ، وقتی که $y > 0$ قرار می دهیم $e^{\bar{c}} = c$ و زمانی
 که $y < 0$ می نویسیم $e^{\bar{c}} = -c$ در نتیجه

$$y = ce^{-x^2}$$

این جواب يك خانواده با اصطلاح **منحنیهای رنگی شکل** را نمایش می دهد (شکل ۸).

$c=0$ ، که از آن جواب $y \equiv 0$ به دست می آید، را نیز می توان پذیرفت.

مثال ۳

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

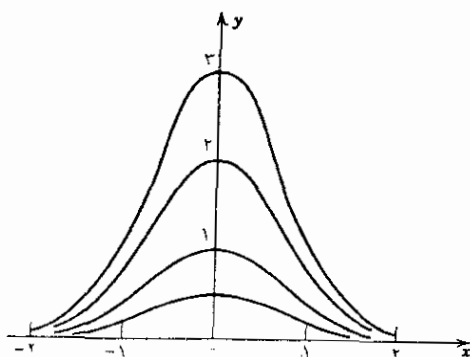
$$y' = 1 + y^2.$$

با تفکیک متغیرها و انتگرال گیری به دست می آوریم

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx, \quad \arctan y = x + c, \quad y = \tan(x+c).$$

در بسیاری از کاربردهای مهندسی ما علاقه ای به جواب عمومی يك معادله دیفرانسیل مفروض نداریم بلکه فقط جواب خصوصی ای را می خواهیم که در شرط اولیه مفروضی صدق کند، مثلاً، این شرط که در نقطه x جواب $y(x)$ دارای مقدار مشخص y باشد، یا باختصار

$$(5) \quad y(x_0) = y_0.$$



شکل ۸. جوابهای $y' = -2xy$ (منحنیهای زنکی شکل) در نیم صفحه بالایی ($y > 0$).

يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول توأم با يك شرط اولیه را مسئله با مقدار اولیه می نامند. برای حل چنین مسئله ای باید جواب خصوصی معادله را طوری بیابیم که شرط اولیه در آن صدق کند.

اصطلاح «مسئله با مقدار اولیه» را به این دلیل به کار می بریم که متغیر مستقل معمولاً زمان است، بنابراین (۵) وضعیت اولیه را در يك لحظه تعیین می کند و جواب مسئله نشان

می‌دهد که از آن پس چه روی خواهد داد.

مثال ۴

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$(x^2 + 1)y' + y^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1.$$

مرحله اول. با تفکیک متغیرها پیدا می‌کنیم

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\arctan y = -\arctan x + c$$

یا

$$\arctan y + \arctan x = c$$

با گرفتن تانژانت از هر دو طرف داریم

$$(۶) \quad \tan(\arctan y + \arctan x) = \tan c$$

حال دستور تانژانت مجموع عبارت است از

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

و به ازای $a = \arctan y$ و $b = \arctan x$ این دستور چنین می‌شود

$$\tan(\arctan y + \arctan x) = \frac{y+x}{1-xy}$$

در نتیجه، (۶) را می‌توان اینطور نوشت

$$(۷) \quad \frac{y+x}{1-xy} = \tan c$$

مرحله دوم. از روی شرط اولیه c را معین می‌کنیم. با قرار دادن $x=0$ و $y=1$

در (۷)، داریم $\tan c = 1$ ، بنابراین

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad \text{یا} \quad \frac{y+x}{1-xy} = 1$$

مرحله سوم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۵. (قانون تبرید نیوتن)^۱

یک گوی مسی را تا دمای 100°C گرم کرده ایم، سپس در لحظه $t=0$ آن را در آبی گذاشته ایم که دمای آن 30°C نگاهداشته شده است. پس از ۳ دقیقه دمای گوی به 70°C تقلیل یافته است. زمانی را که دمای گوی به 31°C می رسد بیابید.

اطلاعات فیزیکی. تجربه نشان می دهد که میزان تغییر دمای گوی، T ، در واحد زمان با تفاضل دمای جسم و محیط اطراف آن متناسب است (قانون تبرید نیوتن). تجربه همچنین نشان می دهد که جریان گرمایی در مس آنقدر سریع است که در هر لحظه دمای همه نقاط گوی عملاً یکسان است.

مرحله اول. دستور ریاضی قانون تبرید نیوتن در این مورد عبارت است از

$$(A) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

که در آن ثابت تناسب را با k — نشان داده ایم به طوری که $k > 0$.

مرحله دوم. با تفکیک متغیرها جواب عمومی (A) چنین به دست می آید

$$T(t) = e^{-kt} + 30$$

مرحله سوم. شرط اولیه داده شده اینست که $T(0) = 100$. جواب خصوصی که این شرط در آن صادق باشد عبارت است از

$$T(t) = 70e^{-kt} + 30$$

مرحله چهارم. k را می توان از اطلاع داده شده $T(3) = 70$ معلوم نمود. به دست می آوریم.

$$k = \frac{1}{3} \ln \frac{7}{4} = 0.1865 \quad \text{یا} \quad T(3) = 70e^{-3k} + 30 = 70$$

با استفاده از این مقدار k می بینیم که دمای گوی، $T(t)$ ، برابر است با

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30$$

و برای رسیدن به دمای 31°C باید

$$t = \frac{\ln 70}{0.1865} = 22.78 \quad \text{یا} \quad 0.1865t = \ln 70, \quad 70e^{-0.1865t} = 1$$

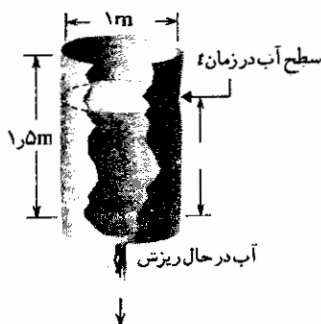
۱. آیزک نیوتن (Isaac Newton)، ۱۶۴۲-۱۷۲۷، فیزیکدان و ریاضیدان انگلیسی. نیوتن و ریاضیدان و فیلسوف آلمانی گوتفرید ویلهلم لایبنیتز (Gottfried Wilhelm Leibniz)، ۱۶۴۶-۱۷۱۶، حساب دیفرانسیل و انتگرال را (به طور مستقل) ابداع کردند. نیوتن بسیاری از قوانین فیزیکی پایه را کشف کرد و روش بررسی مسائل فیزیکی را به وسیله حساب دیفرانسیل و انتگرال ارائه داد. کارهای او هم در ریاضی و هم در فیزیک از پیشترین اهمیت برخوردار است.

باشد، یعنی تقریباً پس از ۲۳ دقیقه.

مرحله پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۶. جریان آب از سوراخهای ظرف (قانون تورسیلی^۱)

مخزن بی به شکل استوانه به ارتفاع ۱٫۵ متر که پر از آب است روی قاعده خود به قطر ۱ متر قرار دارد. در انتهای مخزن سوراخی به قطر ۱ سانتیمتر وجود دارد که در لحظه معینی باز می شود به طوری که آب تحت تأثیر جاذبه شروع به ریختن می کند (شکل ۹). ارتفاع آب مخزن، $h(t)$ ، را در زمان t بیابید. زمانهای لازم را برای آنکه $۱/۲$ ، $۳/۴$ و یاتمام مخزن خالی شود پیدا کنید.



شکل ۹. مخزن مثال ۶

مرحله اول. مدل ریاضی (معادله دیفرانسیل) مسئله را طرح می کنیم. حجم آبی که در فاصله زمانی کوچک Δt از ظرف بیرون می ریزد عبارت است از

$$\Delta V = A v \Delta t$$

که در آن $A = ۰٫۰۲۵\pi \text{ cm}^2$ سطح مقطع سوراخ و v سرعت آب در حال ریزش است. طبق قانون تورسیلی سرعت آب در حال ریزش از يك سوراخ عبارت است از

$$v = ۰٫۶ \sqrt{2gh}$$

که $g = ۹۸۰ \text{ cm/s}^2$ شتاب ثقل در سطح زمین و h ارتفاع لحظه ای آب از سطح سوراخ است. این دستور منطقی به نظر می رسد. در واقع، عبارت از سرعت جسمی

۱. ابوانگلیستا تورسیلی (Evangelista Torricelli)، ۱۸۰۶-۱۸۴۷، فیزیکدان ایتالیایی. (ضریب انقباض) ۰٫۶ در ۱۷۶۶ توسط ژ. ش. بوردا J. C. Borda به کار برده شد و علت این امر آن بود که سطح مقطع جریان مایع در حال ریزش تا حدی کوچکتر از دهانه سوراخ است.

است که از ارتفاع h سقوط می کند اگر مقاومت هوا آنقدر کوچک باشد که بتوان از آن صرف نظر نمود. ضریب ϵ در این نظر به کار می رود که سطح مقطع جریان آب در حال ریزش تا حدی کوچکتر از سطح مقطع دهانه سوراخ است. ΔV باید با تغییرات حجم آب در مخزن، ΔV^* ، برابر باشد، یعنی:

$$\Delta V^* = -B \Delta h$$

که در آن $B(h)$ سطح مقطع مخزن در ارتفاع $h(t)$ و Δh عبارت از کاهش ارتفاع آب. $h(t)$ ، است. علامت منفی به دلیل کم شدن حجم آب در مخزن است. چون $\Delta V = \Delta V^*$ داریم

$$A v \Delta t = \epsilon A \sqrt{2gh} = -B \Delta h$$

با تقسیم این رابطه بر Δt نتیجه می شود

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = - \frac{\epsilon A \sqrt{2gh}}{B}$$

با فرض $\Delta t \rightarrow 0$ معادله دیفرانسیل زیر را به دست می آوریم

$$\frac{dh}{dt} = - \epsilon A \sqrt{2g} \frac{\sqrt{h}}{B(h)}$$

در این مورد $A = 0.25\pi \text{ cm}^2$ و سطح مقطع مخزن ثابت است و با ارتفاع تغییر نمی کند، یعنی $B = 2500\pi \text{ cm}^2$. چون $A/B = 1 \times 10^{-4}$ و

$$\sqrt{2g} = \sqrt{2 \times 980} = 44.3 [\text{cm/s}^2]^{1/2}$$

بنابراین به دست می آوریم

$$\frac{dh}{dt} = -0.6 \frac{A}{B} \sqrt{2gh} = -0.00266 h^{1/2}$$

شرط اولیه اینست که

$$h(0) = 150 \text{ cm}$$

که در آن $t = 0$ لحظه ای است که دهانه سوراخ باز می شود.

مرحله دوم. معادله دیفرانسیل را حل می کنیم. با تفکیک متغیرها نتیجه می شود که

$$h^{-1/2} dh = -0.00266 dt$$

با انتگرال گیری داریم

$$2h^{1/2} = -0.00266t + \bar{c}$$

و با تقسیم طرفین این رابطه بر ۲ و قرار دادن $\bar{c}/2 = c$ و مجذور نمودن دو طرف نتیجه

می شود که

$$h(t) = (c - 0.00133t)^2$$

بنابیه شرط اولیه $h(0) = c^2 = 150$ است از اینرو جواب خصوصی این مسئله عبارت است از

$$h(t) = (12.225 - 0.00133t)^2$$

مرحله سوم. برای اینکه به بقیه سؤالات جواب دهیم t را بر حسب h می نویسیم

$$t = \frac{12.225 - \sqrt{h}}{0.00133} \quad \text{بنابراین} \quad 12.225 - 0.00133t = \sqrt{h}$$

این رابطه نشان می دهد که زمان نصف شدن مخزن عبارت است از

$$t = \frac{12.225 - \sqrt{0}}{0.00133} = 2.7 \times 10^3 \text{ s} = 45 \text{ min}$$

وزمان لازم برای رسیدن به $1/4$ حجم 76.8 دقیقه و برای تخلیه کامل 154 دقیقه است. مرحله چهارم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۷. سرعت گریز از زمین

کمترین سرعت اولیه جسمی را بیابید که در راستای شعاعی زمین پرتاب شده و از زمین فرار نماید. از مقاومت هوا و جاذبه ثقلی سایر اجرام آسمانی صرف نظر کنید.

مرحله اول. بر طبق قانون جاذبه نیوتن، نیروی ثقلی و بنابراین شتاب a یک پرتابه متناسب با $1/r^2$ که در آن r فاصله بین جسم و مرکز زمین است. بنابراین

$$a(r) = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2}$$

که در آن v سرعت و t زمان است. از آنجایی که سرعت نزولی است $a < 0$ و $k < 0$. فرض می کنیم شعاع زمین برابر R باشد. وقتی $r = R$ آنگاه $a = -g$ می شود که شتاب ثقل در سطح زمین است. توجه داشته باشید که علامت منفی به خاطر این ظاهر می شود که g مثبت است و جاذبه در جهت خلاف حرکت (به طرف مرکز زمین) عمل می کند. بنا براین

$$a(r) = -\frac{gR^2}{r^2} \quad \text{و} \quad -g = a(R) = \frac{k}{R^2}$$

حال $v = dr/dt$ ، و مشتق گیری منجر به

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr} v$$

می شود. بنا براین معادله دیفرانسیل سرعت عبارت است از

$$\frac{dv}{dr} v = -\frac{gR^2}{r^2}$$

مرحله دوم. با تفکیک متغیرها و انتگرال گیری به دست می آوریم

$$(10) \quad \frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + c \quad \text{و} \quad v dv = -gR^2 \frac{dr}{r^2}$$

مرحله سوم. در سطح زمین $r = R$ و $v = v_0$ است. به ازای این مقادیر r و v دستور (۱۰) چنین می شود

$$c = \frac{v_0^2}{2} - gR \quad \text{و} \quad \frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + c$$

با قرار دادن این مقدار c در (۱۰) داریم

$$(11) \quad v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR$$

مرحله چهارم. اگر $v^2 = 0$ ، آنگاه $v = 0$ ، جسم می ایستد و از وضعیت فیزیکی پیداست که سرعت از مثبت به منفی تغییر می کند و جسم به زمین باز می گردد. در نتیجه، باید v_0 را آنقدر بزرگ اختیار کنیم که چنین اتفاقی نیفتد. اگر v_0 را برابر

$$(12) \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

بگیریم در این صورت عبارت $v^2 - 2gR$ در (۱۱) صفر است و v^2 به ازای هیچ مقداری از r صفر نمی شود. معیناً، هرگاه مقدار کوچکتری برای سرعت اولیه v_0 انتخاب کنیم آنگاه به ازای مقدار مشخصی از r داریم $v = 0$. عبارت (۱۲) سرعت فراد از زمین نامیده می شود. نظر به اینکه $R = 6372 \text{ km}$ و $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ داریم

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

مرحله پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مثال ۸. پرش کننده با چتر بسته

فرض کنید یک پرش کننده با چتر بسته از حالت سکون به طرف زمین سقوط کند و چتر او در یک لحظه، که $t = 0$ می نامیم، باز شود و در این حال سرعت او برابر $v(0) = v_0 = 10 \text{ m/s}$ باشد. سرعت $v(t)$ پرش کننده را در هر لحظه بعدی t حساب کنید، آیا $v(t)$ به طور نامحدودی افزایش می یابد؟

فرضیات و قوانین فیزیکی. فرض کنید وزن شخص و وسایل او، $W = 712 \text{ N}$ و مقاومت هوا، U ، با v^2 متناسب باشد. مثلاً $U = bv^2 \text{ N}$ که در آن ثابت تناسب b عمده

به چتر بستگی دارد و ما فرض می‌کنیم که $b = 30 \text{ N} \times (\text{s})^2 / \text{m}^2 = 30 \text{ kg/m}$.
 مرحله اول. مدل ریاضی (معادله دیفرانسیل) مسئله را بنا می‌نهم. قانون دوم نیوتن عبارت است از

$$\text{نیرو} = \text{شتاب} \times \text{جرم}$$

که در آن «نیرو» به معنی برآیند نیروهای وارد بر پرش کننده در هر لحظه است. این نیروها عبارت‌اند از وزن، W و مقاومت هوا، U . وزن برابر است با $W = mg$ که در آن شتاب ثقل در سطح زمین، $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ است. بنابراین جرم شخص و وسایل او $m = W/g = 72.7 \text{ kg}$ است. مقاومت هوا، U ، به طرف بالا عمل می‌کند (برخلاف جهت حرکت)، بنا براین برآیند عبارت است از

$$W - U = mg - bv^2$$

شتاب، a ، مشتق سرعت نسبت به زمان است. یعنی $a = dv/dt$. از اینرو بنا به قانون دوم نیوتن داریم

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2$$

این معادله دیفرانسیل مسئله مورد بحث ماست. بنا به فرض در لحظه $t = 0$ سرعت $v = v_0 = 10 \text{ m/s}$ است. از اینرو جواب $v(t)$ را باید طوری پیدا کنیم که در شرط اولیه زیر صدق کند

$$v(0) = v_0 = 10$$

مرحله دوم. معادله دیفرانسیل را حل می‌کنیم. با تقسیم بر m نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-b}{m}(v^2 - k^2) \quad k^2 = \frac{mg}{b}$$

با تفکیک متغیرها داریم

$$(13) \quad \frac{dv}{v^2 - k^2} = -\frac{b}{m} dt$$

درست چپ داریم

$$\frac{1}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{v-k} - \frac{1}{v+k} \right)$$

که درستی آن بسادگی قابل تحقیق است. این کار عبارت است از نمایش یک کسر بر حسب کسرهای جزئی که برای انتگرالگیری مناسب است:

$$\int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k} [\ln(v-k) - \ln(v+k)] = \frac{1}{2k} \ln \frac{v-k}{v+k}.$$

بنابراین با توجه به (۱۳) به دست می آوریم

$$\frac{1}{2k} \ln \frac{v-k}{v+k} = -\frac{b}{m}t + \tilde{c}$$

با ضرب طرفین در $2k$ و به صورت نمایی درآوردن آن نتیجه می گیریم

$$(14^*) \quad \frac{v-k}{v+k} = ce^{-pt} \quad p = \frac{2kb}{m}.$$

که در آن $c = e^{2-k\tilde{c}}$. با حل معادله نسبت به v داریم

$$(14) \quad v(t) = k \frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}}$$

می بینیم که $v(t) \rightarrow k$ هر گاه $t \rightarrow \infty$ ؛ یعنی، $v(t)$ بطور نامحدود افزایش نمی یابد بلکه به سمت حدی مانند k میل می کند. توجه به این مطلب جالب است که این حد مستقل از شرط اولیه $v(0) = v_0$ است.

مرحله سوم. c را در (۱۴) طوری معین می کنیم که یک جواب خصوصی به دست آوریم تا در شرط اولیه $v(0) = v_0$ صدق کند. از (۱۴*) با قرار دادن $t = 0$ داریم

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k}$$

با این c دستور (۱۴) جواب مطلوب را نمایش می دهد.

مرحله چهارم. توجه کنید که تا بحال مقادیر عددی داده شده را به کار نبرده ایم. بیشتر اوقات مناسب است که ابتدا دستور کلی را به دست آوریم و بعداً داده های عددی را در آن قرار دهیم. با این روش بهتر می توان به چگونگی امر پی برد، علاوه بر این، اگر جوابهای مختلف متناظر با داده های متفاوتی مورد نظر باشند کار ساده می شود. حال با توجه به داده های مذکور در بالا به محاسبه مقادیر عددی می پردازیم

$$k^2 = \frac{mg}{b} = \frac{W}{b} = \frac{712}{30} = 23.73 [\text{m}^2/\text{s}^2]$$

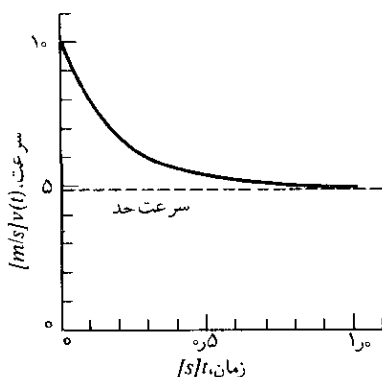
از اینرو $k = 48.7 \text{ m/s}$. این سرعت حد است. عملاً می توان گفت که پرش کننده پس از زمانی نسبتاً طولانی به این سرعت می رسد.

مقدار c متناظر با $v(0) = v_0 = 10 \text{ m/s}$ برابر است با

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k} = 0.345$$

و سرانجام

$$p = \frac{2kb}{m} = \frac{2 \times 4287 \times 30}{7227} = 4202 \text{ s}^{-1}$$



شکل ۱۰. سرعت، $v(t)$ پُرش کننده مثال ۸

نتیجه کلی عبارت است از (شکل ۱۰)

$$(15) \quad v(t) = 4287 \frac{1 + 0.345e^{-4202t}}{1 - 0.345e^{-4202t}}$$

مرحله پنجم. نتیجه را امتحان کنید.

مسائل بخش ۳.۱

۱. با استفاده از (۳) نشان دهید که جواب (۱) که در (۵) صدق کند از

$$(16) \quad \int_{y_0}^y g(y^*) dy^* = \int_{x_0}^x f(x^*) dx^*$$

به دست می آید. از این دستور برای تأیید نتیجه مثال ۴ استفاده کنید.

۲. گاهی دانشجو می پرسد که آیا نتیجه گیری (۳) از (۲) صحیح است زیرا به نظر می رسد که انتگرالگیری در دو طرف نسبت به دو متغیر متفاوت انجام می گیرد. شما چه جواب می دهید؟

۳. چرا اضافه نمودن ثابت انتگرالگیری بلافاصله بعد از انجام انتگرالگیری مهم است؟

جواب عمومی هریک از معادلات زیر را پیدا کنید (a, b, n مقادیر ثابت اند).

$$yy' + x = 0 \quad .۵ \quad y' = -xy \quad .۴$$

$$y' = \frac{y}{x \ln x} \quad .۷ \quad y' = -\frac{x-a}{y-b} \quad .۶$$

$$y' + ay + b = 0 \quad (a \neq 0) \quad .۹ \quad y' = ny/x \quad .۸$$

$$xy' = \sqrt[2]{y-1} \quad .۱۱ \quad yy' = 2x \exp(y^2) \quad .۱۰$$

$$y' + 2y \tanh x = 0 \quad .۱۳ \quad y' \sin 2x = y \cos 2x \quad .۱۲$$

مسائل با مقادیر اولیه زیر را حل کنید (α, R, L) ثابت اند و نقطه بالای حروف معرف مشتگیری نسبت به زمان است.)

$$LI' + RI = 0, \quad I(0) = I_0 \quad .۱۵ \quad y' = 3y/x, \quad y(1) = 2 \quad .۱۴$$

$$y' = \sec y, \quad y(0) = 0 \quad .۱۷ \quad (x+1)y' = 2y, \quad y(0) = 1 \quad .۱۶$$

$$v dv/dx = g = \text{ثابت} \quad v(x_0) = v_0 \quad .۱۸$$

$$y' = -2xy, \quad y(0) = y_0 \quad .۱۹$$

$$2yy' = \sin^2 \alpha x, \quad y(0) = 0 \quad .۲۰$$

$$(x \ln x) dy = y dx, \quad y(3) = 4 \quad .۲۱$$

$$y' = -6y \tan 2x, \quad y(0) = -2 \quad .۲۲$$

$$dr \sin \theta = 2r \cos \theta d\theta, \quad r(\pi/2) = 2 \quad .۲۳$$

کاربردهای فیزیکی

۲۴. گلوله ای بطور قائم با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا پرتاب می شود. نشان دهید که زمان لازم برای رسیدن گلوله به زمین دو برابر زمانی است که گلوله به بالاترین نقطه می رسد. (مقاومت هوا ناچیز فرض می شود.)

۲۵. (سرعت فرار) در سطح زمین سرعت فرار 11.2 km/s است؛ ر. ک. مثال ۷. هرگاه پرتابه ای که به موشکی سوار شده در ارتفاع 1000 کیلومتری سطح زمین از موشک جدا شود حداقل سرعت لازم در آن نقطه، برای فرار جسم از زمین، چقدر است؟

۲۶. در مثال ۷ هرگاه سرعت اولیه نصف سرعت فرار باشد جسم تا چه ارتفاعی از زمین بالا می رود؟ این ارتفاع را اول حدس بزنید سپس محاسبه کنید.

۲۷. (قانون بویل - ماریوت برای گازهای ایده آل) ۱ تجربه نشان می دهد که برای یک

۱. رابرت بویل (Robert Boyle), ۱۶۲۷-۱۶۹۱, فیزیکدان انگلیسی؛ ۲. ادمه ماریوت (Edme Mariotte), ۱۶۲۰-۱۶۸۴, فیزیکدان فرانسوی.

گاز در فشار پائین p (و دمای ثابت) میزان تغییر حجم، $V(p)$ ، برابر V/p — است معادله دیفرانسیل متناظر با آن را حل کنید.

۳۸. (رشد نمایی) هر گاه در کشت باکتریها میزان رشد با جمعیت، $p(t)$ ، موجود در زمان t متناسب باشد و در مدت ۱ روز جمعیت دو برابر شود پس از یک هفته، با همان میزان رشد، چه رشدی را می توان انتظار داشت؟

۳۹. (تحلیل رفتن به صورت نمایی) طبق قانون جذب لامبر، جذب نور در یک لایه بسیار نازک متناسب است با ضخامت لایه و مقدار نوری که به لایه وارد می شود. این قانون را به صورت یک معادله دیفرانسیل بنویسید و آن را حل نمایید.

۳۰. (قلاشی نمایی، نیم عمر) تجربه نشان می دهد که میزان تجزیه در بیشتر اجسام رادیواکتیو با مقدار ماده موجود در هر لحظه متناسب است. زمان لازم برای آنکه ۵۰٪ از ماده مفروضی تجزیه شود را نیم عمر آن ماده گویند. نیم عمر رادیوم ^{226}Ra ، سال $H = 1600$ است. * در مدت یک سال چند درصد این ماده نابود می شود؟ در ده سال چند درصد؟

۳۱. نشان دهید که نیم عمر، H ، یک ماده رادیواکتیو را می توان بر طبق دو اندازه گیری $y_1 = y(t_1)$ و $y_2 = y(t_2)$ از مقادیر موجود در لحظات t_1 و t_2 بوسیله دستور زیر معین نمود

$$H = \frac{(t_2 - t_1) \ln 2}{\ln(y_1/y_2)}$$

۳۲. تجربه نشان می دهد که میزان و آرونگی نیشکر در محلول رقیق با غلظت شکر تبدیل شده $y(t)$ ، متناسب است. فرض کنید این غلظت در $t = 0$ برابر $1/100$ و در ساعت $t = 4$ برابر $1/300$ باشد. $y(t)$ را پیدا کنید.

۳۳. (چرخ طیار) چرخ طیار به گشتاور لختی I با سرعت زاویه ای نسبتاً کم ω (رادیان بر ثانیه) می چرخد. در لحظه $t = 0$ قدرت محرکه چرخ قطع می گردد و بر اثر اصطکاک سرعت چرخ رو به کاهش می گذارد. با فرض آنکه گشتاور نیروی اصطکاک با $\sqrt{\omega}$ ، که در آن ω سرعت زاویه ای لحظه ای است، متناسب باشد و با استفاده از صورت پیچشی قانون دوم نیوتن یعنی

$$\text{گشتاور نیرو} = \text{شتاب زاویه ای} \times I$$

سرعت زاویه ای، $\omega(t)$ ، و زمان لازم برای نصف شدن سرعت چرخ، t_1 ، و نیز زمان

۱. جوهان هنریش لامبر (Johann Heinrich Lambert)، ۱۷۲۸-۱۷۷۷، فیزیکدان و ریاضیدان آلمانی.

* صفحه ۵۰۴-B کتاب زیر را ملاحظه کنید.

لازم برای توقف چرخ، t_p را پیدا کنید.

۳۴. (تبخیر) تجربه نشان می‌دهد رطوبتی را که يك جسم متخلخل و تر در هوای آزاد از دست می‌دهد با میزان رطوبت موجود در آن متناسب است. اگر صفحه‌آویخته‌ای که در معرض باد قرار دارد در یک ساعت اول نصف رطوبت خود را از دست بدهد عملاً کی خشک می‌شود، مثلاً، پس از چه زمانی ۹۹٫۹٪ رطوبت خود را از دست می‌دهد در صورتی که شرایط جوی تغییر نکند؟

۳۵. (گلوله نفتالین) فرض کنید میزان کاهش حجم يك گلوله نفتالین بر اثر تبخیر در هر لحظه با سطح آن متناسب باشد. هرگاه قطر گلوله در ظرف ۳ ماه از ۲ سانتیمتر به ۱ سانتیمتر تقلیل یابد، چه مدتی طول می‌کشد تا گلوله عملاً محو شود، مثلاً، قطر آن ۱ میلیمتر گردد؟

۳۶. در ظرفی دوز نوع مایع در حال جوشیدن است. معلوم شده است که نسبت مقادیر بخار دومایع در هر لحظه با نسبت مقادیر x و y موجود از دومایع در ظرف متناسب است. نشان دهید که

$$\frac{dy}{dx} = k \frac{y}{x}$$

و این معادله را حل کنید.

۳۷. (قانون تبرید نیوتن) دماسنجی که 15°C را نشان می‌دهد در داخل اتاقی به دمای 23°C قرار می‌دهیم. بعد از يك دقیقه دماسنج 19°C را نشان می‌دهد. پس از چه مدت دماسنج عملاً به 23°C می‌رسد، یعنی، 22.9°C را نشان می‌دهد؟

۳۸. زمان لازم برای خالی شدن مخزن مثال ۶ بیش از ۲ برابر زمانی است که نصف مخزن پر می‌شود. آیا از نظر فیزیکی این مطلب قابل فهم است؟



شکل ۱۱. مخزن قیفی شکل مسئله ۳۹.

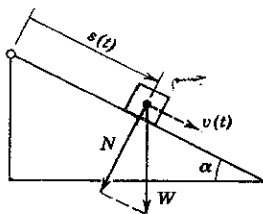
۳۹. قسمت خروجی مخزن قیفی شکلی (شکل ۱۱) به مقطع دایره و به زاویه رأس 60°

دارای سطح مقطعی برابر ۵ سانتیمتر مربع است. این مخزن محتوی آب است. در لحظه $t = 0$ قسمت خروجی آن باز می شود و آب به خارج جریان می یابد. زمان لازم برای خالصی شدن مخزن را حساب کنید در صورتیکه ارتفاع اولیه آب $h(0) = 1 \text{ m}$ باشد.

راهنمایی: می توانید از (۹) استفاده کنید. چرا؟

۴۰. مخزن مسئله ۳۹ را نیمکره ای به شعاع R فرض کنید که در ابتدا پر از آب است و قسمت خروجی آب واقع در ته ظرف دارای سطح مقطع ۵ سانتیمتر مربع باشد. در يك لحظه قسمت خروجی باز می شود. زمان لازم جهت تخلیه شدن مخزن را (الف) برای هر R مفروض؛ (ب) برای $R = 1 \text{ m}$ پیدا کنید.

۴۱. (پوش کننده با چتر بسته) (الف) در مثال ۸ ارتفاع سقوط آزاد متناظر با سرعت حد 48.7 m/s چه اندازه است؟ (ب) در مثال ۸ هر گاه مقاومت هوا را متناسب با v بجای v^2 در نظر بگیریم، یعنی، $U = bv$ که در آن $b = 73 \text{ kg/s}$ ، چه تغییراتی در معادله و جواب آن پدید می آید؟ آیا این مدل هنوز مناسب است؟



شکل ۱۲. مسئله ۴۲

۴۲. (اصطكاك) هر گاه جسمی روی سطحی حرکت کند (بلغزد) نیرویی در خلاف جهت حرکت بر جسم اثر می کند. این نیرو را اصطكاك نامند. قانون کولن^۱ درباره اصطكاك جنبشی خشك چنین است

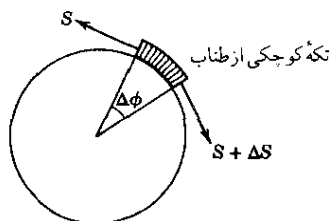
$$|F| = \mu |N|$$

که در آن F اصطكاك، N نیروی قائم (نیرویی که جسم را روی سطح نگه می دارد؛ شکل ۱۲ را ببینید) و ثابت تناسب μ را ضریب اصطكاك جنبشی نامند. با استفاده از قانون دوم نیوتن (نیرو = جرم $\times$ شتاب) معادله دیفرانسیل مربوط به شکل ۱۲ را تشکیل دهید. سرعت جسم را وقتی به انتهای سطح شیب دار می رسد پیدا کنید؛ فرض براین است که وزن جسم ۴۵ نیوتن و $\mu = 0.1$ و $\alpha = 30^\circ$ و طول سطح ۱۰ متر

۱. شارل آگوستین دوکولن (Charles Augustin de Coulomb)، ۱۷۳۶-۱۸۰۶، فیزیکدان فرانسوی.

باشد. سرعت اولیه صفر است و از مقاومت هوا صرف نظر می شود

۴۳. فرض کنید جسم مورد بحث مسئله ۴۲ طوری باشد که از مقاومت هوا نتوان صرف نظر نمود بلکه نیرویی برابر با $5v$ را موجب شود. مطلوب است محاسبه $v(t)$ ، فاصله $s(t)$ و $s(2.22)$ که در آن $t = 2.22$ s زمانی است که در صورت صرف نظر نمودن از مقاومت هوا برای پیمودن طول کل مسیر، یعنی ۱۰ متر، لازم است.



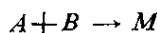
شکل ۱۳. مسئله ۴۴

۴۴. (طناب) هر گاه طنابی را دور استوانه ای که سطح آن زبر است و روی زمین ثابت شده است ببندیم با نیروی کمی که به یک انتها وارد می کنیم می توانیم نیروی زیادی را که بر طرف دیگر وارد می شود تحمل کنیم. فرض کنید S نیروی وارد بر طناب باشد. تجربه نشان می دهد که تغییر ΔS نیروی S در یک قسمت کوچک طناب متناسب با S و زاویه کوچک $\Delta\phi$ در شکل ۱۳ است. نشان دهید که معادله دیفرانسیل برای S عبارت است از

$$\frac{dS}{d\phi} = \mu S$$

هر گاه $\mu = 0.2 \text{ rad}^{-1}$ باشد چند دفعه باید طناب را دور استوانه پیچید تا مردی که یک طرف طناب را نگه داشته است بتواند در برابر نیرویی که ۱۰۰۰ برابر توانش هست مقاومت کند؟

۴۵. (قانون اثر جرم) طبق قانون اثر جرم سرعت واکنشهای شیمیایی در دمای ثابت با حاصلضرب غلظت موادی که در واکنش شرکت دارند متناسب است. در واکنشهای دو ملکولی



a مل در لیتر از ماده A با b مل در لیتر از ماده B ترکیب می شود. هر گاه پس از زمان t تعداد ملهای ترکیبی برابر y باشد میزان واکنش از فرمول زیر به دست می آید

$$\frac{dy}{dt} = k(a - y)(b - y)$$

این معادله را با فرض $a \neq b$ حل کنید.

کاربردهای هندسی

۴۶. (منحنی پروانه) مسئله با مقدار اولیه

$$\frac{dr}{d\theta} + \frac{a^2}{r} \sin 2\theta = 0, \quad r^2(0) = a^2,$$

را که در آن a ثابت و r و θ مختصات قطبی است، حل کنید. منحنی جواب را منحنی پروانه نامند.

برای هر یک از موارد زیر تمام منحنیهای واقع در صفحه xy را طوری پیدا کنید که خاصیت مورد نظر را دارا باشند.

۴۷. شیب مماس بر منحنی با x/y متناسب و ثابت تناسب مثبت باشد.

۴۸. به ازای هر مماس، قطعه‌ای از مماس محصور بین محورهای مختصات به وسیله نقطه تماس به دو قسمت مساوی تقسیم شده باشد.

۴۹. قائمها همگی از مبدأ بگذرند.

۵۰. قائم در هر نقطه (x, y) محور x ها را در $(x + 1/2, 0)$ قطع کند.

۵۱. مماسها همگی از مبدأ بگذرند.

۵۲. شیب مماس در هر نقطه (x, y) نصف شیب خطی باشد که از این نقطه و مبدأ می‌گذرد.

۵۳. فاصله نقطه (x, y) تا مبدأ برابر با فاصله همان نقطه تا محل تقاطع قائم بر منحنی با محور x ها باشد.

۵۴. قطعه‌ای از قائم در (x, y) که دو سر آن را (x, y) و نقطه تلاقی قائم با محور x ها تشکیل می‌دهند به وسیله محور y ها به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۵۵. فواصل نقطه (x, y) از نقاط تقاطع مماس و قائم از این نقطه با محور x ها برابر باشد.

۲.۱ معادلات قابل تحویل به صورت تفکیک پذیر

بعضی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تفکیک ناپذیرند اما با یک تغییر متغیر ساده تفکیک پذیر می‌شوند. معادلاتی به صورت

$$(1) \quad y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

از این قبیل اند که در آن g تابع داده شده‌ای از x/y نظیر $(y/x)^3$ ، $\sin(y/x)$ و غیره است. از شکل معادله می‌توان توجیه نمود که بهتر است بنویسیم

$$\frac{y}{x} = u$$

که y و u توابعی از x هستند. از اینرو $y = ux$ است و با مشتگیری داریم

$$(2) \quad y' = u + u'x$$

با قرار دادن این مقدار در (۱) و با توجه به اینکه $g(y/x) = g(u)$ داریم

$$u + u'x = g(u)$$

حال می‌توانیم متغیرهای u و x را تفکیک کنیم و به دست بیاوریم

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

هرگاه انتگرالگیری کنیم و بجای u مقدار y/x را بگذاریم جواب عمومی (۱) به دست می‌آید.

مثال ۱

معادله زیر را حل کنید.

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

با تقسیم بر x^2 داریم

$$\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0$$

اگر بگذاریم $u = y/x$ و از (۲) استفاده کنیم معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$2xuu' + u^2 + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 2u(u + u'x) - u^2 + 1 = 0$$

با جدا کردن متغیرها پیدا می‌کنیم

$$\frac{2u du}{1 + u^2} = -\frac{dx}{x}$$

و با انتگرالگیری نتیجه می‌شود

$$1 + u^2 = \left(\frac{c}{x}\right) \quad \text{یا} \quad \ln(1 + u^2) = -\ln|x| + c^*$$

۱. بعضی مواقع این معادلات را **معادلات همگن** نامند. ما این نامگذاری را به کار نخواهیم برد بلکه اصطلاح «همگن» را برای منظور بس مهمتری نگاه می‌داریم (ر.ک. بخش ۷.۱).

با جانشین نمودن y به وسیله y/x سرانجام به دست می آوریم

$$\left(x - \frac{c}{y}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{y^2} \quad \text{یا} \quad x^2 + y^2 = cx$$

بعضی مواقع شکل يك معادلهٔ دیفرانسیل داده شده ایجاب می کند که جایگزینیهای ساده دیگری را؛ نظیر مثال زیر، به کار ببریم.

مثال ۲

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر را حل کنید

$$(2x - 4y + 5)y' + x - 2y + 3 = 0$$

می گذاریم $v = x - 2y$. از آنجا $y' = (1 - v')/2$ و معادله به صورت زیر درمی آید.

$$(2v + 5)v' = 4v + 11$$

با تفکیک متغیرها و انتگرال گیری پیدا می کنیم

$$v - \frac{1}{4} \ln|4v + 11| = 2x + c^* \quad \text{و} \quad \left(1 - \frac{1}{4v + 11}\right)dv = 2dx$$

چون $v = x - 2y$ می توان نوشت

$$4x + 8y + \ln|4x - 8y + 11| = c$$

جایگزینی ساده بیشتری در معادلات مربوط به مسائل ۱۱ - ۱۵ توضیح داده شده اند.

مسائل بخش ۴.۱

در هر يك از حالات زیر جواب عمومی را بیابید

$$xy' - 2y = 3x \quad ۲. \quad xy' = x + y \quad ۱.$$

$$(x^2 + 1)y(x y' - y) = x^3 \quad ۴. \quad x^2 y' = x^2 - x y + y^2 \quad ۳.$$

$$x y' - y - x^2 \tan(y/x) = 0 \quad ۶. \quad x y' = y + x^2 \sec(y/x) \quad ۵.$$

مسائل با مقدار اولیهٔ زیر را حل کنید.

$$y(0) = 2, \quad y' = \frac{y+x}{y-x} \quad ۸. \quad y(1) = 1, \quad y' = \frac{y-x}{y+x} \quad ۷.$$

$$y(1) = 1.5, \quad x y' = y + (y-x)^2 \quad ۹.$$

$$10. \quad y(2) = 4, \quad xy y' = 2y^2 + 4x^2$$

با استفاده از تبدیلات داده شده جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

$$11. \quad (y - x = v), \quad y' = (y - x)^2$$

$$12. \quad (y + x = v), \quad y' = \cot(y + x) - 1$$

$$13. \quad (xy = v), \quad xy' = e^{-xy} - y$$

$$14. \quad (x + e^y = v), \quad e^y y' = k(x + e^y) - 1$$

$$15. \quad (y - x = v), \quad y' = \frac{y - x}{y - x - 1}$$

16. $y' = f(ax + by + k)$ را در نظر بگیرید که در آن f پیوسته است. اگر $b = 0$ جواب آنرا پیدا می‌شود. (چرا؟) در صورتیکه $b \neq 0$ باشد نشان دهید که با انتخاب $u(x) = ax + by + k$ به عنوان متغیر وابسته جدید معادله تفکیک پذیری به دست می‌آید.

17. نشان دهید که خط مستقیمی که از مبدأ می‌گذرد تمام منحنیهای جواب معادله دیفرانسیل داده شده $y' = g(y/x)$ را با يك زاویه قطع می‌کند.

18. منحنی‌ای را پیدا کنید که از نقطه $(\sqrt{e}, \sqrt{e})$ و $(\sqrt{e}, -\sqrt{e})$ $(x, y) = (\sqrt{e}, \sqrt{e})$ بگذرد و دارای شیب $x/y + y/x$ باشد.

19. منحنی $y(x)$ را طوری پیدا کنید که از نقطه $(1/2, 1)$ بگذرد و طول مماس بر منحنی از هر نقطه (x, y) تا محل تقاطع این مماس با محور y ها برابر $2xy^2$ باشد.

20. موقعیت چهار رزمناء در اقیانوس به گونه‌ای است که رئوس مربعی به ضلع l را تشکیل می‌دهند. در يك لحظه هر رزمناء گلوله‌ای شلیک می‌کند که حرکت آن به طور یکنواخت و در امتداد گلوله دست راستی آن انجام می‌گیرد. با فرض آنکه هر چهار گلوله افقی حرکت کنند و سرعتهای برابری داشته باشند مسیر هر کدام را پیدا کنید.

۵.۱ معادلات دیفرانسیل کامل

يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت

$$(1) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

را کامل نامند در صورتی که سمت چپ رابطه فوق دیفرانسیل کلی یا دیفرانسیل کامل

$$(۲) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

يك تابع $u(x, y)$ باشد. در این صورت معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$du = 0.$$

با انتگرالگیری جواب عمومی (۱) به شکل زیر به دست می‌آید

$$(۳) \quad u(x, y) = c.$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌بینیم که (۱) وقتی کامل است که تابعی مانند $u(x, y)$ موجود باشد به طوری که

$$(۴) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N \quad (\text{ب}) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M \quad (\text{الف})$$

فرض کنید M و N در ناحیه‌ای از صفحهٔ xy ، که مرز آن منحنی بسته‌ای است که خود را قطع نمی‌کند، تعریف شده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. آنگاه از (۴) داریم

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

و با توجه به فرض پیوستگی مشتقات مرتبهٔ دوم مساوی‌اند. بنابراین

$$(۵) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

این شرط نه تنها لازم است تا اینکه $Mdx + Ndy$ دیفرانسیل کامل باشد بلکه يك شرط کافی نیز هست.^۱

هر گاه (۱) کامل باشد تابع $u(x, y)$ را می‌توان با حدس و یا با روش سیستماتیک زیر پیدا کرد. از (۴ الف) داریم

$$(۶) \quad u = \int M dx + k(y)$$

در این انتگرالگیری y ، مانند يك ثابت در نظر گرفته می‌شود و $k(y)$ نقش يك «ثابت» انتگرالگیری را ایفا می‌کند. برای تعیین $k(y)$ از (۶)، $\partial u / \partial y$ را حساب می‌کنیم و از

۱. این مطلب را در جای دیگری اثبات خواهیم کرد (در بخش ۱۲.۹)؛ همچنین می‌توان اثبات آن را در بعضی کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی یافت؛ به مرجع [A۱۴] در ضمیمهٔ ۱ رجوع کنید.

(۴ ب) مقدار dk/dy را می یابیم و انتگرالگیری می کنیم.
 دستور (۶) از (۴ الف) نتیجه شد. بجای (۴ الف) می توان از (۴ ب) استفاده کرد.
 در این صورت بجای (۶) نخست داریم

$$u = \int N dy + l(x) \quad (۶*)$$

برای تعیین $l(x)$ از (۶*)، مقدار $\partial u / \partial x$ را پیدا می کنیم و برای تعیین dl/dx رابطه (۴ الف) را به کار می بریم و انتگرال می گیریم.

مثال ۱

معادله زیر را حل کنید

$$xy' + y + 4 = 0.$$

معادله را به صورت (۱) می نویسیم، یعنی،

$$(y+4) dx + x dy = 0.$$

حال می بینیم که $M = y+4$ و $N = x$. از اینرو (۵) برقرار است و بنابراین معادله کامل می باشد. از (۶*) داریم

$$u = \int N dy + l(x) = \int x dy + l(x) = xy + l(x).$$

برای تعیین $l(x)$ از این فرمول نسبت به x مشتق می گیریم و با استفاده از (۴.الف) پیدا می کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{dl}{dx} = M = y + 4.$$

بنابراین $dl/dx = 4$ و $l = 4x + c^*$. از اینرو جواب عمومی معادله را به صورت

$$u = xy + l(x) = xy + 4x + c^* = \text{ثابت}$$

به دست می آوریم که با تقسیم بر x شکل صریح

$$y = \frac{c}{x} - 4$$

حاصل می شود. دانشجویان با هوش، که می دانند تفکر در ریاضیات مهم است، معادله داده شده را به صورت

$$y dx + x dy = -4 dx$$

می نویسند که سمت چپ آن دیفرانسیل کامل xy است و با انتگرالگیری از آن

$xy = -4x + c$ حاصل می‌شود، که با نتیجه قبلی معادل است.

مثال ۲

معادله زیر را حل کنید

$$2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy = 0.$$

این معادله کامل است و با توجه به (۶) به دست می‌آوریم

$$u = \int 2x \sin 3y dx + k(y) = x^2 \sin 3y + k(y).$$

بنابراین $\partial u / \partial y = 3x^2 \cos 3y + dk/dy$ ، و $dk/dy = 0$ یا ثابت $k = c^*$.
جواب عمومی عبارت است از ثابت $u = c$ یا $x^2 \sin 3y = c$.

مسائل بخش ۵.۱

برای هر حالت بعضی منحنیهای تراز ثابت $u(x, y) = c$ را رسم نمایید و دیفرانسیل کلی u را پیدا کنید.

$$u = y/x \quad .2 \quad u = 4x^2 + 9y^2 \quad .1$$

$$u = \sin(y^2 - x) \quad .4 \quad u = e^{xy} \quad .3$$

معادلات دیفرانسیل کاملی را پیدا کنید که دارای جوابهای عمومی زیر باشند

$$e^x \sin y = c \quad .6 \quad x^2 y + \cos 2x = c \quad .5$$

$$\tan x = c \tan y \quad .8 \quad x e^{-2xy} = c \quad .7$$

نشان دهید که معادلات دیفرانسیل زیر کامل هستند و آنها را حل کنید.

$$\cos x dx + y dy = 0 \quad .10 \quad y^2 dx + 2xy dy = 0 \quad .9$$

$$3re^{r\theta} d\theta + e^{r\theta} dr = 0 \quad .12 \quad x^{-1} dy - x^{-2} y dx = 0 \quad .11$$

$$2x \ln y dx + y^{-1} x^2 dy = 0 \quad .13$$

$$(\cot y + x^2) dx = x \operatorname{cosec}^2 y dy \quad .14$$

۱۵. هرگاه معادله دیفرانسیلی کامل باشد می‌توانیم $u(x, y) = c$ را با روشی که در متن کتاب بیان شد از (۶) به دست آوریم. اما اگر معادله کامل نباشد این روش عملی نیست. برای روشن شدن موضوع معادله $x dy - y dx = 0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که این معادله کامل نیست. u را از (۶) به دست آورید و $\partial u / \partial y$ را محاسبه کنید و نشان دهید که با (۴ ب) تناقض دارد. معادله را با روشهای دیگری که قبلا

بحث شده اند حل کنید. آیا معادلات زیر کامل اند؟ جواب عمومی را پیدا کنید.

$$ye^{xy}dx + (1 + xe^{xy})dy = 0 \quad .۱۶$$

$$xdy + 3y^2dx = 0 \quad .۱۷$$

$$xy(dx + dy) = 0 \quad .۱۸$$

$$\cos hx \sin y dy = \sin hx \cos y dx \quad .۱۹$$

$$(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0 \quad .۲۰$$

$$x^{-1} \cos 2y dx = 2 \ln x \sin 2y dy \quad .۲۱$$

۲۲. نشان دهید که هر معادله تفکیک پذیر، کامل نیز هست. آیا عکس این مطلب درست است؟ بعضی اوقات ممکن است يك معادله دیفرانسیل را با روشهای مختلفی حل کرد. برای روشن نمودن این مطلب معادلات زیر را (الف) با روش فعلی؛ (ب) با تفکیک متغیرها؛ (پ) با حدس و بررسی، حل کنید.

$$b^2x dx + a^2y dy = 0 \quad .۲۳$$

$$4x^{-5}y dx = x^{-4}dy \quad .۲۴$$

$$2x dx + x^{-2}(x dy - y dx) = 0 \quad .۲۵$$

$$\cos x \cos y dx = \sin x \sin y dy \quad .۲۶$$

۲۷. هر گاه $F(x, y)dx + G(x, y)dy = 0$ کامل باشد نشان دهید که معادله زیر نیز کامل است.

$$[F(x, y) + f(x)]dx + [G(x, y) + g(y)]dy = 0$$

۲۸. تحت چه شرایطی $(ax + by)dx + (kx + ly)dy = 0$ کامل است؟ (در اینجا a, b, l و k ثابت هستند.) معادله کامل را حل کنید.

۲۹. تحت چه شرایطی $[f(x) + g(y)]dx + [h(x) + p(y)]dy = 0$ کامل است؟

۳۰. تحت چه شرایطی $f(x, y)dx + g(x)h(y)dy = 0$ کامل است؟ مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$3x^2y^2dx + 4x^3y^2dy = 0, \quad y(1) = 2 \quad .۳۱$$

$$4x dx + 9y dy = 0, \quad y(3) = 0 \quad .۳۲$$

$$(y - 1)dx + (x - 3)dy = 0, \quad y(0) = \frac{2}{3} \quad .۳۳$$

$$\cos \pi x \cos 2\pi y dx = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y dy, \quad y(3/2) = 1/2 \quad .34$$

$$[e^x \cos y + 2(x-y)] dx = [e^x \sin y + 2(x-y)] dy, \quad y(0) = \pi \quad .35$$

$$\cos 2x \cosh 2y dx + \sin 2x \sinh 2y dy = 0, \quad y(\pi/4) = 0 \quad .36$$

منحنی ای به شیب y' را که از نقطه داده شده (x, y) بگذرد پیدا کنید و نمودار آن را رسم نماید

$$y' = -\frac{y-2}{x-2}, \quad (0, 0) \quad .38 \quad y' = \frac{x+2}{y+1}, \quad (-3, -1) \quad .37$$

$$y' = \frac{x}{4-4y}, \quad (0, 2) \quad .40 \quad y' = \frac{1-x}{1+y}, \quad (1, 0) \quad .39$$

۶.۱ عوامل انتگرال ساز

بعضی اوقات معادله دیفرانسیل

$$(1) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

کامل نیست اما می توان با ضرب آن در يك تابع مناسب $(\neq 0)$ $F(x, y)$ آن را به صورت کامل در آورد. در این صورت این تابع را عامل انتگرال ساز (۱) نامند. با کمی تجربه می توان عامل انتگرال ساز را با حدس و بررسی پیدا کرد. بدین منظور دانشجوی باید دیفرانسیلهایی را که در مثال ۲ زیر آورده شده اند به خاطر بسپارد. در برخی از حالات خاص مهم عوامل انتگرال ساز را می توان با روشی سیستماتیک، که در بخش بعد توضیح داده می شود، معین نمود.

مثال ۱

معادله زیر را حل کنید.

$$x dy - y dx = 0.$$

این معادله دیفرانسیل کامل نیست. يك عامل انتگرال ساز $F = 1/x^2$ است، و به دست می آوریم

$$F(x)(x dy - y dx) = \frac{x dy - y dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad y = cx.$$

قضیه ۱

هرگاه (۱) کامل نبوده و جوابی عمومی به صورت $u(x, y) = c$ داشته باشد آنگاه يك

عامل انتگرال‌ساز برای (۱) موجود است (و حتی تعداد بی‌شماری از این عوامل).

اثبات. با مشتق‌گیری از $u(x, y) = c$ داریم

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0.$$

با مقایسه این رابطه با (۱) می‌بینیم که

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} = P : Q$$

باید يك اتحاد باشد. از اینرو تابعی مانند $F(x, y)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = FP, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = FQ.$$

با استفاده از این عبارات برای $\partial u / \partial x$ و $\partial u / \partial y$ داریم

$$du = FPdx + FQdy = F(Pdx + Qdy).$$

این نشان می‌دهد که F يك عامل انتگرال‌ساز برای (۱) است. بعلاوه، ضرب (۲) در يك تابع $H(u)$ منجر به عبارت کامل زیر می‌شود

$$H(u)F(pdx + Qdy) = H(u)du$$

بدین ترتیب $H(u)F(x, y)$ عامل انتگرال‌ساز دیگری است، و چون H دلخواه است تعداد بیشماری عوامل انتگرال‌ساز برای (۱) وجود دارد.

مثال ۲

عوامل انتگرال‌ساز $xdy - ydx = 0$ را پیدا کنید؛ به‌مثال ۱ رجوع کنید. نظر به این‌که

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d\left(\ln \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy},$$

$$d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

توابع $1/y^2$ ، $1/xy$ و $1/(x^2 + y^2)$ چنین عواملی هستند. جوابهای متناظر

$$\frac{x}{y} = c, \quad \ln \frac{y}{x} = c, \quad \arctan \frac{y}{x} = c$$

الزاماً یکی هستند زیرا هر کدام نمایش دهنده خانواده‌ای از خطوط مستقیم ماربمب‌ه‌هستند.

مسائل بخش ۶.۱

در هر يك از موارد زیر نشان دهید كه تابع داده شده يك عامل انتگرال ساز است و معادله را حل کنید

$$2 \cos \pi y dx = \pi \sin \pi y dy, \quad e^{yx} \quad ۱.$$

$$y \cos x dx + 2 \sin x dy = 0, \quad y^2 \quad ۲.$$

$$2(y+1)dx = 2x dy, \quad (y+1)/x^2 \quad ۳.$$

$$2 \sinh x dx + \cosh x dy = 0, \quad e^x \cosh x \quad ۴.$$

$$(\sin xy \cos xy + xy) dx + x^2 dy = 0, \quad \sec^2 xy \quad ۵.$$

$$(a+1)y dx + (b+1)x dy = 0, \quad x^a y^b \quad ۶.$$

در هر مورد يك عامل انتگرال ساز F پیدا کنید و معادله را حل نمایید.

$$2y dx + 2x dy = 0 \quad ۷.$$

$$2dx - e^{y-x} dy = 0 \quad ۸.$$

$$\sin y dx + \cos y dy = 0 \quad ۹.$$

$$x \cosh y dy - \sinh y dx = 0 \quad ۱۰.$$

$$2 \cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0 \quad ۱۱.$$

$$(y+1)dx - (x+1)dy = 0 \quad ۱۲.$$

عوامل انتگرال ساز را پیدا کنید و مسائل با مقدار اولیه زیر را حل نمایید

$$2y dx + x dy = 0, \quad y(2) = -1 \quad ۱۳.$$

$$2y dx - x dy = 0, \quad y(1) = 2 \quad ۱۴.$$

$$(2y + xy) dx + 2x dy = 0, \quad y(3) = \sqrt{2} \quad ۱۵.$$

$$dx + \frac{1}{y} \sec x \cos y dy = 0, \quad y(0) = 0 \quad ۱۶.$$

در هر حالت نشان دهید كه تابع داده شده يك عامل انتگرال ساز است و عوامل انتگرال ساز بیشتری را پیدا کنید.

$$y dx + 2x dy = 0, \quad F = y \quad ۱۷.$$

$$2y \sinh x dx + \cosh x dy = 0, \quad F = \cosh x \quad ۱۸.$$

برای هر حالت شرایطی را که تحت آن F يك عامل انتگرال ساز (۱) باشد پیدا کنید. دانهمایی: فرض کنید $F(Pdx + Qdy) = 0$ کامل است و رابطه (۵) بخش ۵.۱ را به کار برید.

$$F = x^a y^b \quad ۲۲ \quad F = e^y \quad ۲۱ \quad F = y^b \quad ۲۰ \quad F = x^a \quad ۱۹.$$

۲۳. با استفاده از نتیجه مسئله ۱۹، مسائل ۱۰، ۱۳ و ۱۴ را حل کنید.

۲۴. امتحان کردن جوابها همیشه حائز اهمیت است. در ارتباط با روش حاضر این کار مخصوصاً

ضروری است زیرا گاهی لازم می آید که تابع $y(x)$ حاصل از $F(x, y) = 0$ کنار گذاشته شود. برای روشن شدن مطلب معادله $(xy)^{-1} dy - x^{-2} dx = 0$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که يك عامل انتگرال ساز عبارت از $F = y$ است و این منجر به $d(y/x) = 0$ می شود و از این رو $y = cx$ ، که در آن c دلخواه است، اما $F = y = 0$ جواب معادله اصلی نیست.

۲۵. این نکته جالب توجه است که هر گاه $F(x, y)$ يك عامل انتگرال ساز باشد

$1/F(x, y) = 0$ ممکن است گاهی منجر به جوابی اضافی برای معادله متناظر گردد. برای روشن شدن مطلب $xdy - ydx = 0$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که يك عامل انتگرال ساز $1/x^2$ است که منجر به $y = cx$ می شود. نشان دهید که $1/F = x^2 = 0$ منجر به جواب اضافی $x = 0$ برای معادله مفروض می شود که در $y = cx$ وجود ندارد.

۷.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول را خطی نامند هر گاه بتوان آن را به صورت

$$(۱) \quad y' + f(x)y = r(x)$$

نوشت. خصوصیت این معادله آن است که بر حسب y و y' خطی است در حالی که f و r می توانند هر تابع مفروضی از x باشند.

هر گاه $r(x) \equiv 0$ ، معادله را همگن؛ در غیر این صورت، آن را غیر همگن نامند. در اینجا منظور از $r \equiv 0$ این است که $r = 0$ به ازای تمام مقادیر x در قلمرو r . حال دستوری برای جواب عمومی (۱) در يك فاصله I پیدا می کنیم. با این فرض که f و g در I پیوسته باشند، برای معادله همگن

$$(۲) \quad y' + f(x)y = 0$$

این کار بسیار ساده است. با تفکيك متغیرها داریم

$$\ln|y| = -\int f(x)dx + c^* \quad \text{و از این رو} \quad \frac{dy}{y} = -f(x)dx$$

یا

$$(۳) \quad y(x) = ce^{-\int f(x)dx} \quad (y \geq 0 \text{ که } c = \pm e^*)$$

در اینجا همچنین می‌توانیم c را برابر صفر بگیریم و جواب بدیهی $y \equiv 0$ را به دست آوریم.

حال برای حل معادله غیر همگن (۱) آن را به صورت

$$(fy - r)dx + dy = 0$$

می‌نویسیم و نشان می‌دهیم که می‌توانیم که يك عامل انتگرال‌ساز $F(x)$ بیابیم که فقط به x بستگی داشته باشد. هر گاه چنین عاملی وجود داشته باشد معادله

$$F(x)(fy - r)dx + F(x)dy = 0$$

باید کامل باشد. حال در مورد این معادله شرط (۵) بخش ۵.۱ به صورت زیر درمی‌آید

$$Ff = \frac{dF}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial}{\partial y}[F(fy - r)] = \frac{dF}{dx}$$

با تفکیک متغیرها داریم $f dx = dF/F$ که با انتگرال‌گیری از آن نتیجه می‌شود

$$\ln |F| = \int f(x)dx$$

از اینرو

$$h(x) = \int f(x)dx \quad \text{که در آن} \quad F(x) = e^{h(x)}$$

این بدان معنی است که $F(x)$ يك عامل انتگرال‌ساز (۱) است. حال با ضرب کردن (۱) در این عامل، پیدا می‌کنیم

$$e^h(y' + fy) = e^h r$$

چون $h' = f$ ، این را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d}{dx}(ye^h) = e^h r$$

حال می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم و به دست بیاوریم

$$ye^h = \int e^h r dx + c$$

با تقسیم طرفین بر e^h فرمول مطلوب را پیدا می‌کنیم

$$(۴) \quad y(x) = e^{-h} \left[\int e^h r dx + c \right], \quad h = \int f(x)dx$$

که جواب عمومی (۱) را به صورت يك انتگرال نشان می دهد. انتخاب مقدار ثابتهای انتگرال گیری مهم نیست؛ به مسئله ۲ همین بخش رجوع کنید.

مثال ۱

معادله دیفرانسیل خطی زیر را حل کنید

$$y' - y = e^{2x}$$

در این جا داریم

$$f = -1, \quad r = e^{2x}, \quad h = \int f dx = -x$$

و بنابر (۴) جواب عمومی زیر را به دست می آوریم

$$y(x) = e^x \left[\int e^{-x} e^{2x} dx + c \right] = e^x [e^x + c] = ce^x + e^{2x}$$

یا اینکه، می توانیم معادله مفروض را در e^{-x} ضرب کنیم

$$(y' - y)e^{-x} = (ye^{-x})' = e^{2x}e^{-x} = e^x$$

و با انتگرال گیری از طرفین معادله همان نتیجه قبلی را به دست می آوریم

$$y = e^{2x} + ce^x \quad \text{یعنی} \quad ye^{-x} = e^x + c$$

مثال ۲

معادله زیر را حل کنید

$$xy' + y + 4 = 0$$

معادله را به صورت (۱) می نویسیم، یعنی

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{4}{x}$$

از اینرو $f = 1/x$ ، $r = -4/x$ و بنابراین

$$h = \int dx = \ln|x|, \quad e^h = x \quad e^{-h} = \frac{1}{x}$$

از این رابطه و (۴) جواب عمومی به دست می آید

$$y(x) = \frac{1}{x} \left[\int x \left(-\frac{4}{x} \right) dx + c \right] = \frac{c}{x} - 4$$

و این همان جواب مثال ۱ بخش ۵.۱ است.

البته در حالات ساده ای نظیر مثال ۲ و مثالهای ۳ و ۵ (در زیر) می توان معادله را بدون استفاده از (۴) حل کرد. به عنوان نمونه در مثال ۲ دانشجو ممکن است معادله داده شده را به صورت $4 + (xy') = 0$ بنویسد و آنگاه جواب را با انتگرال گیری به دست بیاورد.

مثال ۳

معادله زیر را حل کنید

$$xy' + y = \sin x$$

می‌توانیم معادله را به صورت

$$dx(xy) = \sin dx$$

بنویسیم و با انتگرالگیری از طرفین آن پیدا کنیم

$$y = \frac{1}{x}(c - \cos x) \quad \text{یا} \quad xy = -\cos x + c$$

حال چگونگی حل مسئله با مقدار اولیه را شرح می‌دهیم

مثال ۴

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y' + y \tan x = \sin 2x, \quad y(0) = 1$$

در اینجا $r = \sin 2x + 2 \sin x \cos x$ ، $f = \tan x$ و

$$\int f dx = \int \tan x dx = \ln |\sec x|$$

با توجه به این می‌بینیم که در (۴)

$$e^h r = 2 \sin x, \quad e^{-h} = \cos x, \quad e^h = \sec x$$

و جواب عمومی معادله مفروض عبارت است از

$$y(x) = \cos x \left[2 \int \sin x dx + c \right] = c \cos x - 2 \cos^2 x$$

بنا به شرط اولیه به‌ازای $x = 0$ داریم $y = 1$ ، یعنی

$$c = 3 \quad \text{یا} \quad 1 = c - 2$$

و جواب مسئله با مقدار اولیه داده شده عبارت است از

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$$

مثال ۵

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0, \quad y(1) = 0$$

معادله را می‌توان به صورت $d(x^2 y) = (x - 1) dx$ نوشت. با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} \quad \text{یا} \quad x^2 y = \frac{1}{4} x^2 - x + c$$

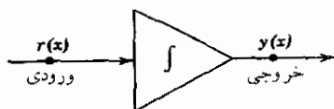
از این رابطه و شرط اولیه داریم $y(1) = 1 + c/2 = 0$ یا $c = -2$. از اینرو

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$$

در بیشتر مواقع جوابهای معادلات دیفرانسیل در کاربردهای مهندسی، توابع مقدماتی نیستند. مثلاً در رابطه (۴) ممکن است انتگرال مقدماتی نباشد. هرگاه این انتگرال یک تابع موجود در جدول انتگرال نباشد می‌توانیم انتگرال را بر حسب یک سری توانی بسط دهیم و جمله به جمله انتگرال بگیریم یا اینکه می‌توانیم از روش انتگرالگیری عددی (رجوع کنید به بخش ۶.۱۹) و یا روش عددی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (رجوع کنید به بخش ۷.۱۹) استفاده کنیم.

متغیر مستقل x در بسیاری از کاربردها معمولاً زمان است؛ تابع $r(x)$ در سمت راست (۱) ممکن است نمایش دهنده یک نیرو باشد و جواب $y(x)$ نمایش دهنده یک جابجایی، یک جریان یا کمیت فیزیکی دیگری. در ریاضیات مهندسی $r(x)$ را در بیشتر مواقع ورودی و $y(x)$ را خروجی یا پاسخ به ورودی (و شرط اولیه) می‌نامند. مثلاً، در مهندسی برق معادله دیفرانسیل می‌تواند ناظر بر رفتار یک مدار الکتریکی باشد و خروجی $y(x)$ به عنوان حل آن معادله متناظر با ورودی $r(x)$ به دست می‌آید. در زمینه کامپیوترهای قیاسی، دستگاه فیزیکی ممکن است یک عنصر انتگرالگیر باشد؛ در آن صورت معادله دیفرانسیل متناظر با آن $y' = r(x)$ است و خروجی $y(x)$ متناظر با یک ورودی $r(x)$ و یک شرط اولیه مشخص، مثلاً $y(x_0) = 0$ ، عبارت از انتگرال $r(x)$ است:

$$y(x) = \int_{x_0}^x r(x^*) dx^*$$



شکل ۱۴. دیاگرام جعبه‌ای ساده یک انتگرالگیر

دستگاه را می‌توان با یک «دیاگرام جعبه‌ای» نظیر شکل ۱۴ نشان داد. چنین دیاگرامی به جای آنکه جزئیات فیزیکی دستگاه را نشان دهد نمایانگر روابط تابعی است. دیاگرامهای

۱. جداولی که توابع مشخصی در آن محاسبه شده‌اند را می‌توان در کتاب بسیار مفید مرجع [A۶] ضمیمه ۱ یافت.

جعبه‌ای پیچیده‌تر شامل دو جعبه یا بیشتر و روابط فی‌ما بین آنهاست. در ملاحظات بعدی، نمونه‌های مختلفی از این دیاگرامها پیش خواهد آمد.

مسائل بخش ۲.۱

۱. نشان دهید که $e^{-\ln x} = 1/x$ (ولی نه مساوی $-x$) و $e^{-\ln(\operatorname{cosec} x)} = \sin x$.
۲. نشان دهید که انتخاب مقدار ثابت انتگرالگیری در $\int f dx$ [ر.ک. (۴)] مهم نیست (بنابراین می‌شود آن را صفر انتخاب کرد).

جوابهای عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۳. $y' - y = 1 - x$	۴. $y' + y = 1$
۵. $xy' + y = 2x$	۶. $y' + xy = 2x$
۷. $y' - 4y = 2x - 4x^2$	۸. $y' + 2y = \cos x$
۹. $y' + 3y = e^{2x} + 6$	۱۰. $y' \tan x = y - 1$
۱۱. $y' = 2y/x + x^2 e^x$	۱۲. $(x^2 - 1)y' = xy - x$
۱۳. $xy' + 2y = e^{x^2}$	۱۴. $x^2 y' + 2xy = \sinh 2x$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

۱۵. $y' - y = e^x, y(1) = 0$
۱۶. $y' - y \cot x = 2x - x^2 \cot x, y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{4}\pi^2 + 1$
۱۷. $y' - (1 + 3x^{-1})y = x + 2, y(1) = e - 1$
۱۸. $y' - x^2 y = -4x^2, y(0) = 6$

ثابت کنید که معادلات دیفرانسیل خطی (۱) و (۲) دارای خواص مهم زیراند و با مثالهایی آنها را تشریح کنید. [در فصل بعد (بخشهای ۳.۲ و ۳.۲) خواهیم دید که معادلات دیفرانسیل خطی از مرتبه‌های بالاتر دارای خواص مشابهی هستند. این مطلب بسیار حائز اهمیت است زیرا ما را قادر می‌سازد که از جوابهای داده شده جوابهای جدیدی را به دست بیاوریم.]

۱۹. معادله همگن (۲) دارای «جواب بدیهی» $y \equiv 0$ است.

۲۰. هرگاه y_1 جوابی برای (۲) باشد آنگاه $y = cy_1$ (c ثابت دلخواه) جوابی برای (۲) است.

۲۱. هرگاه y_1 و y_2 جوابهایی برای (۲) باشند آنگاه مجموع آنها $y = y_1 + y_2$ جوابی برای (۲) است.

۲۲. هرگاه y_1 جوابی برای (۱) باشد آنگاه $y = cy_1$ جوابی برای $y' + fy = cr$ است.

۲۳. هرگاه y_1 جوابی برای (۱) و y_2 جوابی برای (۲) باشد آنگاه $y = y_1 + y_2$ جوابی برای (۱) است.

۲۴. تفاضل دو جواب (۱)، $y = y_1 - y_2$ ، جوابی برای (۲) است.

۲۵. هرگاه $f(x) = f_0$ و $r(x) = r_0$ ثابت باشند، مثلاً، $f(x) = f_0$ و $r(x) = r_0$ نشان دهید روش تفکیک متغیرها از روش بیان شده در متن درس آسانتر است و به همان نتیجه، یعنی (۴)، منجر می شود.

۲۶. قانون نیوتن درباره سرد شدن به معادله دیفرانسیل زیر منجر می شود (ر. ک. بخش ۳.۱)

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$$

کس در آن $T(t)$ دمای جسمی است که در محیطی با دمای ثابت T_1 قرار داده شده است. این معادله را با روشی که در این بخش بحث شد، با فرض آنکه دمای اولیه جسم $T(0) = T_0$ باشد، حل کنید.

۲۷. (حرکت یک قایق) دو مرد رانندگی یک قایق موتوری را به عهده دارند. مجموع وزن آنها با قایق ۴۹۰۰ نیوتن است. فرض کنید نیروی ثابت موتور برابر ۲۰۰ نیوتن و مقاومت آب، R ، با سرعت v متناسب باشد یعنی $R = kv$ که در آن $k = ۱۰$ N.s/m. با استفاده از قانون دوم نیوتن (جرم $\times$ شتاب = نیرو) معادله دیفرانسیلی برای $v(t)$ بنویسید. $v(t)$ را طوری پیدا کنید که در شرط اولیه $v(0) = 0$ صدق کند. ماکزیمم سرعت v_∞ را که قایق حرکت خواهد کرد پیدا کنید (عمل پس از زمانی به قدر کافی طولانی). هرگاه این قایق با سرعت صفر به حرکت درآید چه مدت طول می کشد تا به v_∞ برسد و در این زمان چه مسافتی را می پیماید؟

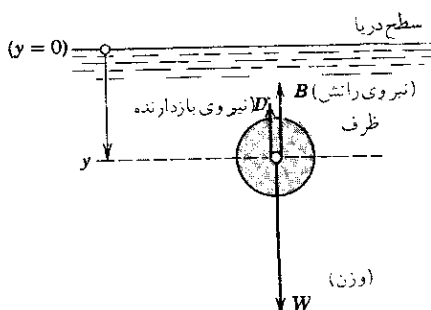
۲۸. (مقاومت هوا) وقتی جسم بزرگی به طرف پایین رها می شود نیروی مقاومتی از هوا (نیروی بازدارنده) به آن اثر می کند. فرض می کنیم که مقدار این نیرو با تندی v متناسب باشد. با استفاده از قانون دوم نیوتن نشان دهید که

$$mv = -kv - mg$$

که در آن $v = dv/dt$ و $g = ۹.۸ \text{ m/s}^2$ شتاب ثقل در سطح زمین است. این معادله

را حل کنید (الف) با روش حاضر، (ب) با تفکیک متغیرها، با فرض آنکه $v(0) = v_0$.
 (پ) با انتگرالگیری از نتیجه، فاصله لحظه t را از نقطه آغازی $y(0) = y_0$ ، $y(t)$ ،
 را پیدا کنید.

۲۹. (دفع زباله‌های اتمی) کمیته انرژی اتمی، زباله‌های اتمی را در داخل ظرفهای سر بسته‌ای قرار می‌دهد و آنها را به داخل اقیانوس می‌اندازد. مهم این است که وقتی ظرفها به ته اقیانوس می‌رسند شکسته نشوند. فرض کنید تا زمانی که این سرعت کمتر از 12 m/s باشد چنین اتفاقی نیفتد. نشان دهید که قانون دوم نیوتن به معادله حرکت زیر منجر می‌شود (شکل ۱۵)



شکل ۱۵. سیستم و نیروهای مسئله ۲۹

$$m \frac{dv}{dt} = W - B - kv, \quad v(0) = 0$$

که در آن فرض شده است نیروی بازدارنده $D = -kv$ با سرعت متناسب است. (تجربه این فرض را برای سرعت‌هایی که خیلی زیاد نباشند تأیید می‌کند.) با حل معادله، $v(t)$ را به دست بیاورید. با انتگرالگیری از آن $y(t)$ را چنان پیدا کنید که $y(0) = 0$. زمانی بحرانی، t_c ، که ظرف به سرعت بحرانی $v_c = 12 \text{ m/s}$ می‌رسد را با فرض $W = 2254 \text{ N}$ ، $B = 2090 \text{ N}$ و $k = 0.637 \text{ kg/s}$ حساب کنید. نشان دهید که اگر بستدای را از نقطه‌ای که فاصله آن تا ته اقیانوس تقریباً بیش از ۱۰۵ متر باشد رها کنیم خواهد شکست.

۳۰. در مسئله ۲۹ وقتی که $t \rightarrow \infty$ سرعت $v(t)$ به يك مقدار حدى ميل می‌کند. چگونه می‌توان این حد را از روی معادله دیفرانسیل به دست آورد بدون آنکه عملاً آن را حل کرد؟ اگر نیروی بازدارنده وجود نداشته باشد چه اتفاقی می‌افتد؟

۸.۱ تغییر پارامترها

راه حل جالب دیگری برای به دست آوردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی

$$(۱) \quad y' + f(x)y = r(x)$$

وجود دارد. دیده ایم که يك جواب معادله همگن متناظر با آن عبارت است از

$$(۲) \quad v(x) = e^{-\int f(x)dx}$$

حال با استفاده از این تابع $v(x)$ تابعی مانند $u(x)$ را طوری تعیین می کنیم که

$$(۳) \quad y(x) = u(x)v(x)$$

جواب عمومی (۱) باشد. این فکر از شکل جواب عمومی معادله همگن، $cv(x)$ ، القاء شده و چیزی نیست جز تعویض پارامتر c با متغیر $u(x)$. این روش را، که لاگرانژ^۱ بکار برد روش تغییر پارامترها می نامند. روش مزبور قابل تعمیم به معادلات از مرتبه های بالاتر بوده و از اهمیت زیادی برخوردار است. مورد ساده حاضر نمونه خوبی برای درک این روش است.

با جایگزینی (۳) در (۱) به دست می آوریم

$$u'v + u(v' + fv) = r$$

چون v جواب معادله همگن است این معادله به

$$u' = \frac{r}{v} \quad \text{یا} \quad u'v = r$$

تحویل می یابد. با انتگرال گیری داریم

$$u = \int \frac{r}{v} dx + c$$

بنابراین نتیجه

$$(۴) \quad y = uv = v \left(\int \frac{r}{v} dx + c \right)$$

حاصل می شود و با توجه به (۲) می بینیم که این رابطه همانند (۴) بخش قبل است.

۱. ژوزف لوئی لاگرانژ (Joseph Louis Lagrange)، ۱۷۳۶-۱۸۱۳، ریاضیدان بزرگ فرانسوی، به مدت ۲۵ سال در آلمان زندگی کرد و سپس به پاریس عزیمت نمود. کار مهم اصلی او در زمینه حساب تغییرها، مکانیک عمومی و سماوی، معادلات دیفرانسیل و جبر بود.

مثال ۱

با حل معادله زیر روش تغییر پارامترها را تشریح کنید

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos 3x$$

معادله همگن عبارت است از $y' - 2y/x = 0$. يك جواب x^2 است. از این رو باید $y = ux^2$ و $y' = u'x^2 + 2ux$ را در معادله داده شده قرار دهیم. به دست می آوریم:

$$u'x^2 + 2ux - 2ux = x^2 \cos 3x, \quad u' = \cos 3x, \quad u = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

که بنا بر این داریم

$$y = ux^2 = \left(\frac{1}{3} \sin 3x + c \right) x^2$$

خواننده ممکن است معادله را با استفاده از رابطه (۴) بخش ۷.۱ حل نماید.

مسائل بخش ۸.۱

معادلات زیر را با روش تغییر پارامترها حل کنید.

$$y' + 2y = x^2 \quad .2 \quad y' + y = 2 \quad .1$$

$$(x+4)y' + 3y = 3 \quad .4 \quad y' - y = 3e^x \quad .3$$

معادلات زیر را با در نظر گرفتن x به عنوان متغیر وابسته حل کنید.

$$y' = \frac{1}{\cos y - 2x} \quad .6 \quad (2x + y^4)y' = y \quad .5$$

تحویل معادلات غیرخطی به صورت خطی. مسائل زیر روشن می نمایند که بعضی

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی را می توان با تغییر متغیر وابسته مناسبی به صورت خطی درآورد.

۷. (معادله برنولی) معادله دیفرانسیل

$$y' + f(x)y = g(x)y^a \quad (a \text{ عددی حقیقی است})$$

را **معادله برنولی**^۱ نامند. به ازای $a = 0$ و $a = 1$ معادله خطی و در غیر این صورت

۱. یاکوب برنولی (Jacob Bernoulli)، ۱۶۵۴-۱۷۰۵، ریاضیدان سوئسی، در نظریه الاستیسته و نظریه احتمال منشأ اثر بود. روش حل معادله برنولی به وسیله لایبنیتز (Leibniz) در سال ۱۶۹۶ ارائه شد.

غیر خطی است. بگذارید $u(x) = [y(x)]^{1-a}$ و نشان دهید که معادله به صورت خطی زیر در می آید.

$$u' + (1-a)f(x)u = (1-a)g(x).$$

معادلات برنولی زیر را حل کنید.

$$y' + y = y^2 \quad .9 \qquad y' + x^{-1}y = xy^2 \quad .8$$

$$y' = x^2 y^2 + xy \quad .11 \qquad 3y' + y = (1-2x)y^4 \quad .10$$

با جایگزینی مناسب، معادلات زیر را به صورت خطی در آورید و آنها را حل کنید.

$$y' - 1 = e^{-y} \sin x \quad .12$$

$$(y^2 = xz \text{ دهید } 2xyy' + (x-1)y^2 = x^2 e^x \quad .13$$

۱۴. نشان دهید که تبدیل $x = \varphi(t)$ (که در آن φ دارای مشتقی پیوسته است) معادله (۱) را به يك معادله دیفرانسیل خطی شامل y و dy/dt تبدیل می نماید.

۱۵. نشان دهید که تبدیل $y = a(x)u + b(x)$ که در آن $a \neq 0$ و b مشتق پذیرند (۱) را به معادله دیفرانسیل خطی ای شامل u و du/dx تبدیل می نماید.

۱۶. نشان دهید که يك جمله از رابطه (۴) از تابع سمت راست (۱) مستقل است و جمله دیگر از يك شرط اولیه مفروض.

۱۷. فرض کنید معادله f و r در (۱) پیوسته هستند. چرا می توان از (۴) نتیجه گرفت که يك مسئله با مقدار اولیه شامل (۱) و يك شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ دارای جوابی یکتاست؟

۱۸. هر گاه به ازای تمام مقادیر $x \geq 0$ و رودی r در $|r(x)| \leq M$ صدق کند، نشان دهید که جواب (خروجی) مسئله با مقدار اولیه

$$y' + y = r(x), \quad y(0) = 0$$

به ازای تمام مقادیر $x > 0$ در $|y(x)| < M$ صدق می کند.

۱۹. (میدان راستا) نشان دهید که میدان راستای (۱) دارای خاصیت جالب زیر است. اجزاء خطی واقع بر هر خط قائم $x = x_0$ تماماً از نقطه زیر می گذرند

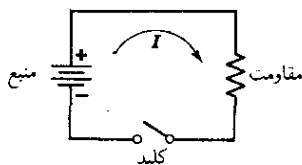
$$\xi = x_0 + \frac{1}{f(x_0)}, \quad \eta = \frac{r(x_0)}{f(x_0)}$$

۲۰. با به کار بردن نتیجه مسئله ۱۹ يك منحنی جواب تقریبی برای مسئله با مقدار اولیه $y' = 2xy + 1, y(1) = 1$ پیدا کنید.

۹.۱ مدارهای الکتریکی

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی کاربردهای متعددی در فیزیک و مهندسی دارند. برای تشریح این مطلب، چند مثال استاندارد مربوط به مدارهای الکتریکی را ذکر می‌کنیم. اینها نمونه‌های مشابه حائز اهمیت بسیاریند زیرا به همه دانشجویان کمک می‌کنند تا چگونگی ایجاد مدل را بیاموزند یعنی وضعیت فیزیکی را در قالب ریاضی بیان کنند. گذر از سیستم فیزیکی به مدل ریاضی متناظرش در ریاضیات مهندسی همیشه اولین مرحله است و این مرحله مهم نیاز به تجربه و ممارست دارد که آن را هم با بررسی مثالهای نوعی در زمینه‌های مختلف می‌توان به دست آورد.

ساده‌ترین مدار الکتریکی یک مدار سری است که در آن یک منبع انرژی الکتریکی (نیروی محرکه الکتریکی) مانند یک مولد یا باتری و یک مقاومت، که مصرف‌کننده انرژی است، مانند یک لامپ قرار دارد (شکل ۱۶). اگر کلید را ببندیم جریان I از مقاومت



شکل ۱۶. مدار

عبور می‌کند و سبب افت ولتاژ می‌شود، یعنی، پتانسیل الکتریکی در دو انتهای مقاومت تفاوت خواهد کرد. این اختلاف پتانسیل یا افت ولتاژ را می‌توان با ولتمتر اندازه گرفت. تجربه نشان می‌دهد که قانون زیر برقرار است.

افت ولتاژ E_R در طول یک مقاومت با شدت جریان لحظه‌ای متناسب است، یعنی

$$(۱) \quad E_R = RI \quad \text{(قانون اهم)}$$

که در آن ثابت متناسب، R ، مقاومت مصرف‌کننده نامیده می‌شود. شدت جریان، I ، بر حسب آمپر، مقاومت R ، بر حسب اهم و ولتاژ E_R بر حسب ولت اندازه‌گیری می‌شوند.

- این واحدها و واحدهای بعدی از روی این اسامی نامگذاری شده: آنتره ماری آمپر (André Marie Empere), ۱۷۷۵-۱۸۳۶، فیزیکدان فرانسوی؛ ژرژ سیمون اهم (Georg Simon Ohm), ۱۷۸۹-۱۸۵۴، فیزیکدان آلمانی؛ آلکساندر ولتا (Alessandro Volta), ۱۷۴۵-۱۸۲۷، فیزیکدان ایتالیایی؛ جوزف هانری (Joseph Henry), ۱۷۹۷-۱۸۷۸، فیزیکدان آمریکایی؛ مایکل فارادی (Michael Faraday), ۱۷۹۱-۱۸۶۷، فیزیکدان انگلیسی و چارلز آگوستین دوکولن (Charles Augustin de Coulomb), ۱۷۳۶-۱۸۰۶، فیزیکدان فرانسوی.

دو عنصر مهم دیگر در مدارهای پیچیده تر عبارت است از القاء کننده و خازن. القاء کننده با تغییر شدت جریان مخالفت نموده و دارای يك اثر لختی در الكتریسته شبیه لختی جرم در مکانیک است؛ این شباهت را بعداً بررسی خواهیم کرد (بخش ۱۴.۲). آزمایش قانون زیر را نتیجه می دهد.

افت ولتاژ E_L در طول يك القاء کننده با میزان تغییرات شدت جریان لحظه ای I نسبت به زمان متناسب است، یعنی

$$(۲) \quad E_L = L \frac{dI}{dt}$$

که در آن ثابت تناسب L را ضریب القایی القاء کننده می نامند و بر حسب هانری اندازه گیری می شود؛ زمان t بر حسب ثانیه است. خازن عنصری است که انرژی ذخیره می کند. نتیجه آزمایش در این باره قانون زیر است:

افت ولتاژ در یک خازن، E_c ، با بار الکتریکی لحظه ای در آن، Q ، متناسب است، یعنی

$$(۳^*) \quad E_c = \frac{1}{c} Q$$

که در آن c ظرفیت نام دارد و بر حسب فاراد اندازه گیری می شود؛ بار Q با کولن اندازه گیری می شود. چون

$$(۳') \quad I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

می توان نوشت

$$(۳) \quad E_c = \frac{1}{c} \int_{t_0}^t I(t^*) dt^*$$

شدت جریان $I(t)$ يك مدار را می توان با حل معادله (یا معادلات) منتج از کاربرد قانون فیزیکی زیر معین نمود.

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL)^۱

مجموع جبری افت ولتاژهای لحظه ای در طول يك مدار بسته صفر است، یا ولتاژ مؤثر در یک مدار بسته با مجموع افت ولتاژهای تمام مدار برابر است.

۱. گوستاو روبرت کیرشهف (Gustav Robert Kirchhoff)، ۱۸۲۴-۱۸۸۷، فیزیکدان آلمانی. بعدها به قانون جریان کیرشهف KCL نیز احتیاج پیدا خواهیم کرد؛ در هر نقطه از یک مدار، مجموع جریان هایی که به آن نقطه می رسند برابر با مجموع جریان هایی است که از آن نقطه خارج می شوند.

مثال ۱. مدار RL

برای «مدار RL» شکل ۱۷ بنا به قانون ولتاژ کیرشهف و روابط (۱) و (۲) به دست می آوریم

$$(۴) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

حالت الف (نیروی محرکه الکتریکی ثابت). هر گاه ثابت $E = E_0$ ، آنگاه رابطه (۴) بخش ۷.۱ جواب عمومی زیر را نتیجه می دهد.

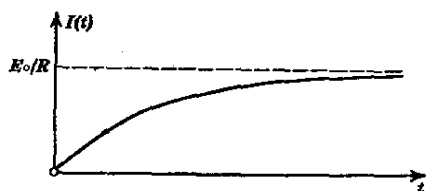
$$(۵) \quad I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{E_0}{L} \int e^{\alpha t} dt + c \right] \quad (\alpha = R/L)$$

$$= \frac{E_0}{R} + c e^{-(R/L)t}$$

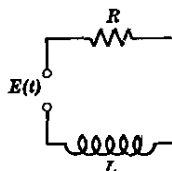
چنانچه t به سمت بینهایت میل کند جمله آخر به سمت صفر میل می کند و بنا براین $I(t)$ به سمت E_0/R میل می کند؛ پس از زمان به قدر کافی طولانی جریان I عملاً مقداری ثابت خواهد بود و مقدار آن مستقل از C و از اینرو مستقل از شرط اولیه ای است که ممکن است بخواهیم اعمال نماییم. جواب خصوصی متناظر با شرط اولیه $I(0) = 0$ عبارت است از (شکل ۱۸)

$$(۵^*) \quad I(t) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-(R/L)t}) = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

که در آن $\tau_L = L/R$ ثابت زمانی القایی مدار نامیده می شود (به مسائل ۵ و ۷ رجوع کنید)



شکل ۱۸. جریان حاصل از يك نیروی محرکه الکتریکی ثابت در يك مدار RL



شکل ۱۷. مدار RL

حالت ب (نیروی محرکه الکتریکی دوره ای). هر گاه $E(t) = E_0 \sin \omega t$ ، آنگاه بنا بر رابطه (۴) بخش ۷.۱ جواب عمومی (۴) در اینجا عبارت است از

$$I(t) = e^{-\alpha t} \left[\frac{E_0}{L} \int e^{\alpha t} \sin \omega t dt + c \right] \quad (\alpha = R/L)$$

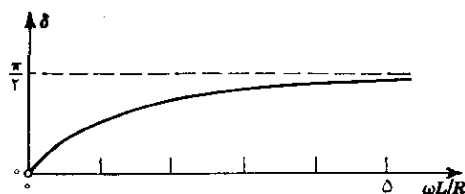
با انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می شود

$$I(t) = ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت [به (۱۴) ضمیمه ۳ مراجعه کنید]

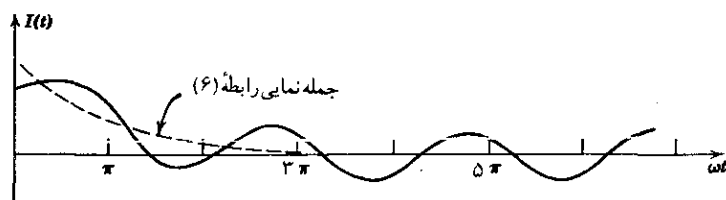
$$(۶) \quad I(t) = ce^{-(R/L)t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \delta), \quad \delta = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

وقتی t به سمت بینهایت میل کند $e^{-(R/L)t}$ به سمت صفر میل می کند. این بدان معنی است که پس از زمان به قدر کافی طولانی شدت جریان $I(t)$ عملاً به صورت نوسان همساز است (به شکل ۲۰ مراجعه شود). شکل ۱۹ زاویه فاز δ را به صورت تابعی از $\omega L/R$ نشان می دهد. هرگاه $L=0$ آنگاه $\delta=0$ و نوسان $I(t)$ با $E(t)$ همفاز است.



شکل ۱۹. زاویه فاز δ در رابطه (۶) به صورت تابعی از $\omega L/R$

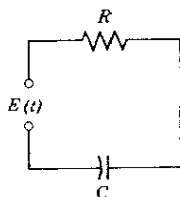
يك سیستم الکتریکی (یا دینامیکی) وقتی در حالت مانا گفته می شود که متغیرهای بیان کننده رفتارشان توابعی دوره ای نسبت به زمان و یا ثابت باشند و در صورتی که در حالت



شکل ۲۰. شدت جریان حاصل از يك نیروی محرکه الکتریکی نظیر (۶)
در يك مدار RL ($\delta = \pi/4$)

مانا نباشد آن را در **حالت گذرا** (یا حالت غیرمانا) می‌نامند. متغیرهای متناظر آنها به ترتیب توابع حالت مانا و توابع حالت گذرا نامیده می‌شوند.

در مثال ۱، حالت الف، تابع E/R تابع حالت مانا یا **جواب حالت مانای** (۴) در حالت ب جواب حالت مانا به وسیله جمله آخر رابطه (۶) نموده شده است. قبل از اینکه مدار (عملاً) به حالت مانا برسد در حالت گذراست. واضح است که یک چنین دوره موقت یا دوره عدم تعادل به علت ذخیره انرژی در القاء کننده‌ها و خازن‌ها ظاهر می‌شود و جریانهای متناظر در القاء کننده و ولتاژهای خازن نمی‌توانند آنرا تغییر نمایند. وضعیتهای مشابهی برای سیستمهای متنوع فیزیکی پیش می‌آید. مثلاً، هر گاه یک گیرنده رادیویی که دارای لامپ خلأ حرارتی است روشن شود، برای آنکه لامپ از وضعیت «سرد» به «گرم» تبدیل شود یک فاصله زمانی لازم است. عملاً، حالت گذرای سیستم حاضر فقط برای زمان کوتاهی طول خواهد کشید.



شکل ۲۱. مدار RC

مثال ۲. مدار RC

با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف و روابط (۱) و (۳) در مورد مدار RC شکل ۲۱ معادله

$$(۷) \quad RI + \frac{1}{C} \int I dt = E(t)$$

را به دست می‌آوریم. برای رهایی از انتگرال از رابطه فوق نسبت به t مشتق می‌گیریم و پیدا می‌کنیم

$$(۸) \quad R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}$$

بنابر (۴) بخش ۷.۱ این معادله دیفرانسیل دارای جواب عمومی زیر است

$$(۹) \quad I(t) = e^{-t/RC} \left(-\frac{1}{R} \int e^{t/RC} \frac{dE}{dt} dt + C \right)$$

حالت الف (نیروی محرکه الکتریکی ثابت). هرگاه E ثابت باشد آنگاه

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad (۹) \text{ به شکل ساده زیر درمی آید (شکل ۲۲).}$$

(۱۰)

$$I(t) = ce^{-t/RC} = ce^{-t/\tau_c}$$

که در آن $\tau_c = RC$ ثابت خازنی مدار نامیده می شود.

حالت ب (نیروی محرکه الکتریکی سینوسی). هرگاه $E(t) = E_0 \sin \omega t$ آنگاه

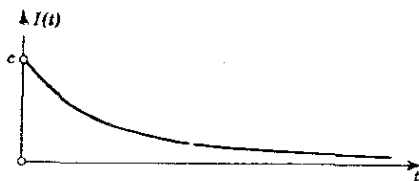
$$\frac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos \omega t.$$

با قرار دادن این مقدار در (۹) و انتگرالگیری جزء به جزء پیدا می کنیم

(۱۱)

$$\begin{aligned} I(t) &= ce^{-t/RC} + \frac{\omega E_0 C}{1 + (\omega RC)^2} (\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t) \\ &= ce^{-t/RC} + \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t - \delta) \end{aligned}$$

که در آن $\tan \delta = -\frac{1}{\omega RC}$. با افزایش t جمله اول به طور دائم کاهش می یابد و آخرین جمله جریان حالت مانا را، که سینوسی است، نشان می دهد. نمودار منحنی $I(t)$ شبیه نمودار شکل ۲۰ است.



شکل ۲۲. شدت جریان حاصل از یک نیروی محرکه الکتریکی ثابت در یک مدار RC

مدارهای مفصلتر و قیاس بین نوسانات مکانیکی و الکتریکی در بحث معادلات دیفرانسیل

مرتبه دوم در بخش ۱۴.۲ بررسی خواهد شد.

این مدارهای پیچیده تر را، به دلیل داشتن مقاومت، القاء کننده و خازن، مدارهای

RLC خواهیم نامید. مدل ریاضی این مدارها معادله دیفرانسیل مرتبه دومی است که از

قانون کیرشهف به دست می آید.

شبکه های الکتریکی در بخش های ۱۰.۳، ۷.۵، ۵.۷ و ۱۱.۷ بررسی خواهند شد.

مسائل بخش ۹.۱

۱. رابطه (۵) را به دست بیاورید و آن را امتحان کنید.
۲. در رابطه (۵) وقتی $t \rightarrow \infty$ جواب به سمت E_0/R میل می کند. آیا می توان این را از (۴)، بدون حل کردن آن و با فرض $E(t) = E_0$ ، نتیجه گرفت؟
۳. رابطه (۶) را به دست بیاورید و آن را امتحان کنید.
۴. جواب حالت مانای (۶) را با قرار دادن $I_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ در (۴) و با فرض $E(t) = E_0 \sin \omega t$ استنتاج کنید و با مساوی قرار دادن جملات سینوسی و کسینوسی در معادله حاصل مقادیر A و B را معین کنید. (توجه کنید که در این شیوه به انگار الکتری جزء به جزء نیازی نیست).
۵. نشان دهید که ثابت زمانی القائی $\tau_L = L/R$ عبارت از زمان t لازم برای رسیدن شدت جریان (i^*) به حدود ۶۳٪ مقادرنهائیش می باشد. زمانی را که شدت جریان به حدود ۹۹٪ مقدار نهائیش می رسد پیدا کنید، فرض کنید هانری $L = 1$ و اهم $R = 500$ باشد.
۶. در مثال ۱، حالت الف، فرض کنید اهم $R = 20$ ، میلی هاری $L = 0.03$ و $I(0) = 0$. زمانی را پیدا کنید که شدت جریان به ۹۹٪ مقادرنهائیش می رسد.
۷. در مثال ۱، حالت الف، فرض کنید اهم $R = 100$ ، هانری $L = 2.5$ ، ولت $E_0 = 110$ و $I(0) = 0$. ثابت زمانی و زمان لازم برای آنکه شدت جریان از صفر به ۶۰ آمپر برسد را پیدا کنید.
۸. هرگاه هانری $L = 10$ باشد چه مقاومتی لازم است تا (i^*) در مدت ۱ ثانیه به ۹۹٪ مقدار نهائیش برسد؟
۹. تحت چه شرط اولیه ای (۶) منجر به جواب حالت مانا می شود؟
۱۰. جواب خصوصی (۶) را طوری به دست بیاورید که در شرط اولیه $I(0) = 0$ صدق کند.
۱۱. تحقیق کنید که با فرض $E = E_0 \sin \omega t$ رابطه (۱۱) جوابی برای (۸) است.
۱۲. (خالی شدن خازن). نشان دهید که (۷) را به صورت زیر نیز می تواند نوشت

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

این معادله را با فرض $E(t) = 0$ و $Q(0) = Q_0$ حل کنید. زمانی را پیدا کنید که ۹۹٪ بار اولیه خازن تخلیه می شود.

۱۳. جواب عمومی معادله

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t)$$

را به صورت يك انتگرال بنویسید و بامشتفایی از آن و سپس انتگرالگیری جزء به جزء دستور (۹) را اشباع کنید.

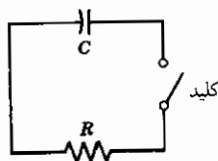
۱۴. در مسئله ۱۳ فرض کنید اهم $R=20$ ، فاراد $C=0.001$ و $E(t)$ به صورت تلاشی نمایی، ولت $E(t)=60e^{-2t}$ باشد. با فرض $Q(0)=0$ معادله $Q(t)$ را پیدا کنید و نمودار آن را رسم نمایید. همچنین زمانی را که $Q(t)$ ماکزیمم می شود و این مقدار ماکزیمم را معین کنید.

۱۵. يك خازن (فاراد $C=0.01$) با يك مقاومت (اهم $R=200$) به طور متوالی وصل شده و با ولتاژ (ولت $E_0=12$) پر شده است؛ شکل ۲۱ را با فرض $E(t)=E_0$ ببینید. اگر در لحظه $t=0$ خازن کاملاً خالی باشد ولتاژ $V(t)$ خازن را پیدا کنید.

۱۶. جریان $I(t)$ در مدار RC شکل ۲۱ را با داده های زیر حساب کنید. ولت $E=100$ ، فاراد $C=0.025$ ، مقاومت R متغیری است که به ازای $0 \leq t \leq 100$ ثانیه بر حسب اهم به صورت $R=(100-t)$ و به ازای $t > 100$ ثانیه برابر $R=0$ است و آمپر $I(0)=1$.

۱۷. جواب خصوصی (۱۱) را طوری پیدا کنید که در شرط اولیه $I(0)=0$ صدق کند.

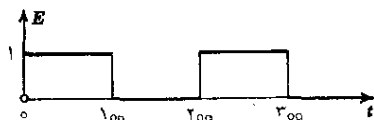
۱۸. در شکل ۲۳ فرض کنید فاراد $C=0.01$ ، اهم $R=100$ و بار اولیه خازن ۲ کولن باشد. در لحظه $t=0$ کلید را می بندیم و خازن شروع به تخلیه شدن می نماید. جریان $I(t)$ ، بار $Q(t)$ و ولتاژ $V(t)$ خازن را پیدا کنید.



شکل ۲۳. مسئله ۱۸

۱۹. در کاربردها با نیروهای محرکه ای که صرفاً به صورت سینوسی یا کسینوسی نیستند بکرات برخورد می کنیم. نمونه ای در شکل ۲۴ نشان داده شده است که در آن ناپیوستگیها (جهشها) معرف تقریبهای ریاضی مناسبی برای تغییرات ناگهانی $E(t)$ از صفر به ۱ و بالعکس هستند. فرض کنید این $E(t)$ به يك مدار RL که در آن

اهم $R=1$ و هانری $L=100$ است اعمال شود. با فرض $I(0)=0$ ، جریان $I(t)$ را پیدا کنید.



شکل ۲۴. مسئله ۱۹

۲۵. این نکته قابل توجه است که متناوب بودن ورودی موجب تناوبی شدن خروجی نمی شود زیرا در حالت کلی يك حالت گذرا خواهد بود. اما استثنای آشکاری وجود دارد. برای تشریح این مطلب نشان دهید که به ازای تمام مقادیر $t \geq 0$ جریان $I(t)$ مسئله ۱۹ در رابطه $I(t+200)=I(t)$ صدق می کند اگر و تنها اگر شرط اولیه $I(0)=(e-1)/(e^2-1)$ را انتخاب کنیم.

۱۰.۱ خانواده منحنیها. مسیرهای متعامد

هر گاه به ازای هر مقدار حقیقی مشخص c معادله

$$(1) \quad F(x, y, c) = 0$$

منحنی ای را در صفحه xy نشان دهد و اگر برای متغیر c بینهایت منحنی را نمایش دهد در این صورت کل این منحنیها را خانواده حنیهای يك پارامتری و c را پارامتر خانواده می نامند.

مثال ۱

معادله

$$(2) \quad F(x, y, c) = x + y + c = 0$$

يك گروه از خطوط راست موازی را نمایش می دهد؛ هر خط فقط با يك مقدار c متناظر است. معادله

$$(3) \quad F(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2 = 0$$

نمایش دهنده يك خانواده از دواير متحدالمرکز به شعاع c است که مرکز آن در مبدأ مختصات واقع است.

جواب عمومی يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول شامل يك پارامتر c است و از این رو

يك خانواده منحنی را نمایش می‌دهد. این موضوع امکان نمایش دادن تعداد زیادی از خانواده منحنیهای يك پارامتر را به وسیلهٔ چنین معادلات دیفرانسیل نشان می‌دهد. استفادهٔ عملی از چنین نمایشهایی در بررسیهای بعدی روشن خواهد شد.

مثال ۲

با مشتقگیری از (۲) می‌بینیم که

$$y' + 1 = 0$$

يك معادلهٔ دیفرانسیل از آن خانواده خطوط مستقیم است. به همین ترتیب معادلهٔ دیفرانسیل خانواده (۳) عبارت است از

$$y' = -x/y$$

هر گاه معادلهٔ حاصل از مشتقگیری (۱) نیز شامل c باشد مجبوریم c را با استفاده از رابطه (۱) حذف کنیم

مثال ۳

معادلهٔ دیفرانسیل خانواده سهمیهای

$$(۴) \quad y = cx^2$$

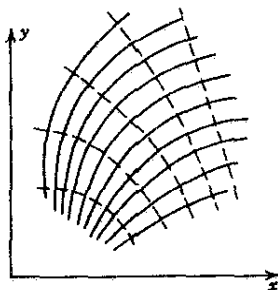
با مشتقگیری از (۴)،

$$(۵) \quad y' = 2cx,$$

و با حذف c از (۵) به دست می‌آید. از (۴) داریم $c = \frac{y}{x^2}$ و با قرار دادن این مقدار در

(۵) نتیجهٔ مطلوب را پیدا می‌کنیم

$$y' = \frac{2y}{x}$$



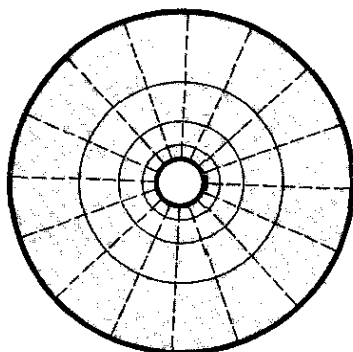
شکل ۲۵. چند منحنی و مسیرهای متعامد آنها

توجه کنید که به طریق زیر نیز می توان عمل نمود. با حل (۴) نسبت به c داریم $c = y/x^2$ و با مشتقگیری از این معادله نسبت به x مقدار y' همانند سابق به دست می آید

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = 0 \quad \text{بنابراین} \quad y' = \frac{2y}{x}$$

در بسیاری از کاربردهای مهندسی يك خانواده از منحنیها داده می شود و خانواده دیگری خواسته می شود که منحنیهای هر يك از منحنیهای داده شده را با زاویه قائمه قطع کنند. در این صورت منحنیهای دو خانواده را دودو متعامد نامند، این دو خانواده تشکیل يك شبکه متعامد می دهند؛ و منحنیهای خانواده ای که باید به دست بیایند را **مسیرهای متعامد** منحنیهای داده شده (و بالعکس) می گویند؛ ر. ک. شکل ۲۵.

حال به ذکر چند مثال ملموس می پردازیم. نصف النهارها در سطح زمین مسیرهای متعامد مدارها هستند. روی يك نقشه جغرافیا منحنیهای تندترین شیب عبارت اند از مسیرهای متعامد خطوط مرزی. در الکترو استاتیک خطوط همپتانسیل و خطوط قوای الکتریکی مسیرهای متعامد یکدیگر را می گیرند. يك مثال مصور در شکل ۲۶ نشان داده شده است. بعداً خواهیم دید که مسیرهای متعامد نقش مهمی را در زمینه های مختلف فیزیک نظیر دینامیک سیالات و هدایت گرمائی ایفا می کنند.



شکل ۲۶. خطوط همپتانسیل و خطوط قوای الکتریکی (خط چین) مابین دو استوانه متحدالمرکز

برای خانواده مفروض $F(x, y, c) = 0$ که می توان آن را به صورت معادله

دیفرانسیل

$$(۷) \quad y' = f(x, y)$$

۱. یادآور می شویم که زاویه تقاطع دو منحنی طبق تعریف، زاویه بین مماسهای وارد بر منحنیها در نقطه تقاطع است.

نمایش داد، مسیرهای متعامد متناظر را به طریق زیر پیدا می‌کنیم. از (۷) می‌بینیم که منحنی‌ای از خانواده مفروض که از نقطه (x_0, y_0) بگذرد دارای شیبی برابر $f(x_0, y_0)$ در آن نقطه است. شیب مسیر متعامد مار بر (x_0, y_0) در این نقطه باید منهای عکس $f(x_0, y_0)$ ، یعنی $-1/f(x_0, y_0)$ ، باشد زیرا این شرط عمود بودن مماسهای دو منحنی در نقطه (x_0, y_0) است. در نتیجه معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$(۸) \quad y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

و با حل این معادله مسیرها به دست می‌آیند.

می‌توان نشان داد که تحت شرایطی نسبتاً کلی خانواده منحنیهای مسیرهای متعامد دارد اما این موضوع را در اینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم.

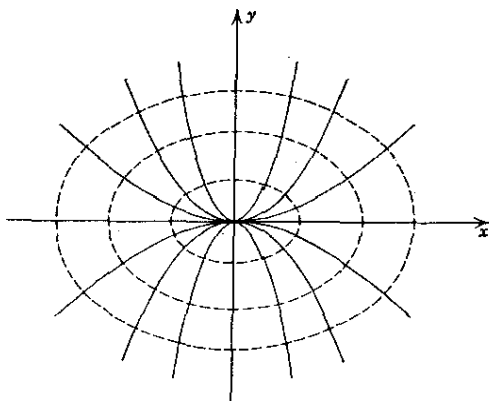
مثال ۴. مسیرهای متعامد

مسیرهای متعامد سهمیهایی مثال ۳ را پیدا کنید. از (۶) می‌بینیم که معادله دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$y' = -\frac{1}{2y/x} = -\frac{x}{2y}$$

با تفکیک متغیرها درمی‌یابیم که مسیرهای متعامد بیضیهایی زیر هستند (شکل ۲۷)

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = c^*$$



شکل ۲۷. چند سهمی و مسیرهای متعامد آنها در مثال ۴

مثال ۵. مسیرهای متعامد

مسیرهای متعامد دوائر زیر را پیدا کنید

$$(9) \quad x^2 + (y - c)^2 = c^2$$

نخست معادلهٔ دیفرانسیل خانوادهٔ داده شده را مشخص می‌کنیم. با مشتق‌گیری نسبت به x از (۹) به دست می‌آوریم

$$(10) \quad 2x + 2(y - c)y' = 0$$

c را باید حذف کنیم. از رابطه (۹) داریم

$$c = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

با قرار دادن این مقدار در (۱۰) و ساده نمودن نتیجه می‌گیریم که

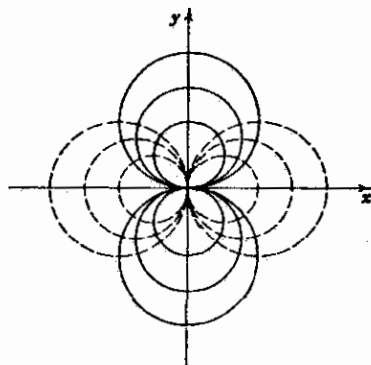
$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \text{یا} \quad x + \frac{y^2 - x^2}{2y} y' = 0$$

با توجه به این رابطه و رابطه (۸) می‌بینیم که معادلهٔ دیفرانسیل مسیرهای متعامد عبارت است از

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0 \quad \text{یا} \quad y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

مسیرهای متعامدی که از حل این معادله به دست می‌آیند (به مثال ۱ بخش ۴.۱ رجوع کنید) دوائر زیر هستند (شکل ۲۸).

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2$$



شکل ۲۸. چند دایره و مسیرهای متعامد آنها (خط چین) در مثال ۵

مسائل بخش ۱۰.۱

معادلات زیر معرف چه خانواده منحنیهایی هستند؟ بعضی از این منحنیها را به طور ساده رسم کنید

$$1. \quad 3y - x + c = 0 \quad 2. \quad (x - c)^2 + y^2 = 1$$

$$3. \quad xy = c \quad 4. \quad cx^2 + y^2 = 1$$

$$5. \quad y + 2(x - c)^2 = 0 \quad 6. \quad y^2 - (x - c)^3 = 0$$

خانواده منحنیهای زیر را به صورت (۱) نمایش دهید. بعضی از این منحنیها را به طور ساده رسم کنید.

۷. تمام خطوط راست غیر متعامدی که از نقطه $(-1, 4)$ می گذرند.

۸. زنجیریهای که از انتقال زنجیری $y = \cosh x$ در امتداد خط مستقیم $y = -x$ به دست می آیند.

۹. تمام بیضیهای با کانونهای $+1$ و -1 واقع بر محور y ها.

خانواده منحنیهای زیر را با معادلات دیفرانسیل نشان دهید.

$$10. \quad xy = c \quad 11. \quad y = cx^3 \quad 12. \quad y = e^{cx}$$

$$13. \quad y = ce^x \quad 14. \quad y = \sin cx \quad 15. \quad c^2 x^2 + y^2 = c^2$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل مسیرهای متعامد منحنیهای زیر را پیدا کنید. نمودار بعضی از منحنیها و مسیرهای مربوطه را رسم کنید.

$$16. \quad y = 2x + c \quad 17. \quad y = -\frac{1}{y}x^2 + c \quad 18. \quad y = \ln|x| + c$$

$$19. \quad y = cx^3 \quad 20. \quad xy = c \quad 21. \quad y = ce^x$$

$$22. \quad x^2 + 2y^2 = c \quad 23. \quad y^2 - x^2 = c \quad 24. \quad y = c\sqrt{x}$$

$$25. \quad y = ce^{x^2} \quad 26. \quad y = ce^{-x^2} \quad 27. \quad y = cx^{2/3}$$

مسیرهای متعامد منحنیهای زیر را پیدا کنید. (در اینجا n يك عدد صحيح مثبت است.)

$$x^2 + y^2 = cx \quad ۳۰ \quad e^x \sin y = c \quad ۲۹ \quad x^2 + ny^2 = c \quad ۲۸$$

۳۱. نشان دهید که (۸) را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dx}{dy} = -f(x, y)$$

با استفاده از این نتیجه، مسیرهای متعامد منحنیهای $y = \sqrt{x+c}$ را پیدا کنید.

۳۲. نشان دهید که مسیرهای متعامد خانوادهٔ مفروض $g(x, y) = c$ را می‌توان از معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست آورد

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial x}$$

با استفاده از این معادله، مسیرهای متعامد منحنیهای $ye^{x^2} = c$ را پیدا کنید.

۳۳. نشان دهید که هر گاه، ثابت $u(x, y) = c$ معرف یک خانواده منحنی باشد آنگاه نمایشی از مسیرهای متعامد آن، به شکل ثابت $v(x, y) = c^*$ را می‌توان از روابط زیر به‌دست آورد

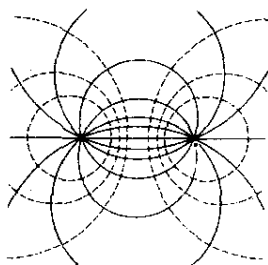
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(این معادلات که اصطلاحاً معادلات کشی-دیمان* نامیده می‌شوند در آنالیز مختلط جنبهٔ اساسی دارند و در فصل ۱۲ بررسی خواهند شد.)

۳۴. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۳۳، مسیرهای متعامد منحنیهای $e^x \cos y = c$ را پیدا کنید.

۳۵. (میدان الکتریکی) هر گاه از سیمی که در امتداد محور z ها قرار دارد جریان الکتریکی بگذرد خطوط نیروی الکتریکی حاصل در صفحهٔ xy خطوط مستقیم $y = cx$ هستند و خطوط همپتانسیل مسیرهای متعامدند. معادلهٔ دیفرانسیل این مسیرها را پیدا کنید و آن را حل نمایید.

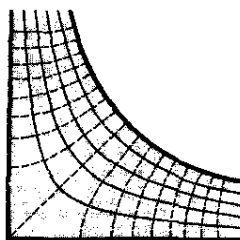
۳۶. تجربه نشان می‌دهد که خطوط نیروی الکتریکی دوبار مساوی و مخالف واقع در نقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ دوایری هستند که از نقاط $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ می‌گذرند. نشان دهید که این دوایر را می‌توان به صورت $x^2 + (y-c)^2 = 1+c^2$ نمایش داد. نشان دهید که خطوط همپتانسیل (مسیرهای متعامد) عبارت از دوایر $x^2 + y^2 = c^2 - 1$ هستند که در شکل ۲۹ به صورت خط‌چین نشان داده شده‌اند.



شکل ۲۹. میدان الکتریکی، مسئله ۳۶

۳۷. از نقاط همپتانسیل مسئله ۳۶ شروع نموده و با استفاده از روشی که در این بخش بحث شد خطوط نیروی الکتریکی را دوباره به دست بیاورید.

۳۸. (میدان دما) منحنیهای دمای ثابت، $T(x, y) = \text{ثابت}$ ، در میدان دما را همدمای می نامند. مسیرهای متعامد آنها منحنیهایی هستند که در طول آنها گرما جریان می یابد (در نواحی ای که فاقد چشمه یا چاهک گرمایی هستند و از محیطی همگن تشکیل شده باشند). هر گاه منحنیهای همدمای به صورت $y^2 + 2xy - x^2 = c$ فرض شوند منحنیهای جریان گرمایی چه هستند؟



شکل ۳۰. جریان اطراف گوشه در مسئله ۳۹

۳۹. (جریان سیالی) زمینه دیگری که در آن مسیرهای متعامد نقشی ایفا می کنند جریان سیالی است. در اینجا مسیر یک ذره از سیال را خط جریان و مسیرهای متعامد خطوط جریان را خطوط همپتانسیل نامند (به دلایلی که در زمینه دیگری در بخش ۲۰۱۸ بحث شده اند). فرض کنید که خطوط جریان $xy = c$ باشند. نشان دهید که دیوارهای کانال شکل ۳۰ خطوط جریان هستند بگونه ای که جریان را می شود همانند جریان

در اطراف گوشه در نظر گرفت. خطوط همپتانسیل را پیدا کنید و نمودار آنها را رسم نمایید.

۴۰. **مسیرهای همزاویه** خانواده مفروضی از منحنیها عبارت از منحنیهایی هستند که منحنیهای مفروض را با زاویه ثابت θ قطع کنند. نشان دهید که در هر نقطه ضریب زاویه‌های m_1 و m_2 مماسهای وارد بر منحنیهای متناظر در رابطه

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \tan \theta = \text{ثابت}$$

صدق می‌کنند. با استفاده از این دستور منحنیهایی را معین کنید که دایره $x^2 + y^2 = c^2$ را با زاویه 45° قطع می‌کنند.

۱۱.۱ روش تکرار پیکار

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول متعددی وجود دارند که برای به دست آوردن جوابهای کامل نمی‌توان آنها را با یکی از روشهای متعارف بحث شده در پیش یا با روش مقدماتی دیگری حل کرد. چنین معادلاتی بکرات در مسائل مهندسی ظاهر می‌شوند. در این صورت می‌توان یک روش تقریب برای به دست آوردن جواب تقریبی به کار برد مانند روش عددی‌ای که در بخش ۷.۱۹ بحث شده است. غالباً در مورد مسائل عملی جوابهای تقریبی کافی‌اند. در این بخش یک روش تقریب را مد نظر قرار می‌دهیم که **روش تکرار پیکار** نامیده می‌شود و جوابهای تقریبی مسئله با مقدار اولیه به صورت

$$(۱) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

را به دست می‌دهد و فرض می‌شود که این مسئله دارای جوابی یکتا در فاصله‌ای شامل x_0 باشد. روش پیکار، همان طور که در بخش بعد خواهیم دید، از ارزش نظری زیادی برخوردار است. ارزش عملی آن محدود است زیرا گاهی ممکن است به انتگرالگیرهای پیچیده‌ای منجر شود.

ایده اساسی روش پیکار بسیار ساده است. می‌بینیم که (۱) را با انتگرالگیری می‌شود به صورت

$$(۲) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt$$

۱. مرجع [B۱۲] در ضمیمه ۱ حاوی بیش از ۱۵۰۰ معادله دیفرانسیل مهم به انضمام جوابهای آنهاست که به طور سیستماتیک و با ذکر مراجع متعددی مربوط به زمینه اصلی مرتب شده‌اند.

۲. امیل پیکار (Emile Picard)، ۱۸۵۶-۱۹۴۱، ریاضیدان فرانسوی که کارهای مهمی در زمینه نظریه توابع تحلیلی مختلط و معادلات دیفرانسیل انجام داد.

نوشت که در آن t معرف متغیر انتگرالگیری است. در واقع وقتی $x = x_0$ باشد انتگرال صفر است و $y = y_0$ ؛ بنابراین (۲) در شرط اولیه (۱) صدق می‌کند؛ بعلاوه، با مشتقگیری از (۲) معادله دیفرانسیل (۱) را به دست می‌آوریم.

برای یافتن تقریبهای جواب $y(x)$ در (۲) به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. در سمت راست رابطه تقریب خام، ثابت $y = y_0$ را قرار می‌دهیم؛ نتیجه این عمل محتملاً تقریب بهتری است.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt$$

سپس به همین طریق $y_1(x)$ را جایگزین می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_1(t)] dt$$

الی آخر. نتیجه برای n امین تکرار عبارت است از

$$(3) \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt$$

بدین طریق يك دنباله تقریبهای

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

را به دست می‌آوریم و در بخش بعد خواهیم دید که شرایطی که تحت آن این دنباله به جواب (۱)، یعنی $y(x)$ ، همگراست شرایطی نسبتاً کلی‌اند.

روش تکرار روشی است که منتهی به يك دنباله تقریبها برای تابعی (مجهول) می‌شود مانند $y_1, y_2, \dots$ ، که n امین تقریب یعنی y_n در مرحله n ام با به کار بردن يك (یا چند) تقریب قبلی به دست می‌آید و نحوه عمل برای تمام مراحل یکی است. در ساده‌ترین حالت y_n از روی y_{n-1} به دست می‌آید؛ اگر عملگر را با T نشان دهیم می‌توان نوشت

$$y_n = T(y_{n-1})$$

روش پیکار از این نوع است زیرا (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y_n(x) = T(y_{n-1}(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt.$$

برای تشریح این روش آن را درباره معادله‌ای به کار ببریم که جواب آن را می‌دانیم و بدین ترتیب جواب کامل و تقریبی را می‌توانیم با هم مقایسه نماییم.

مثال ۱. روش تکرار پیکار

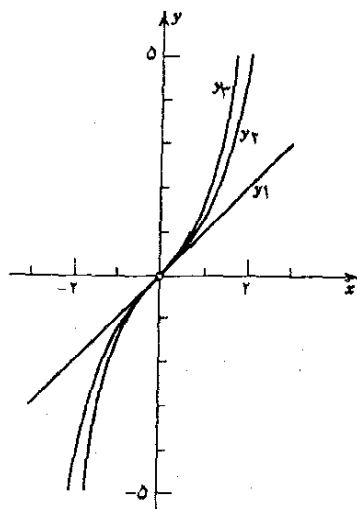
جوابهای تقریبی مسئله با مقدار اولیه زیر را پیدا کنید.

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

در این حالت $f(x, y) = 1 + y^2$ ، $y_0 = 0$ ، $x_0 = 0$ و (۳) چنین می شود

$$y_n(x) = \int_0^x [1 + y_{n-1}^2(t)] dt = x + \int_0^x y_{n-1}^2(t) dt$$

با $y_0 = 0$ شروع می کنیم و از آنجا به دست می آوریم (به شکل ۳۱ رجوع کنید)



شکل ۳۱. جوابهای تقریبی مثال ۱

$$y_1(x) = x + \int_0^x 0 \, dt = x$$

$$y_2(x) = x + \int_0^x t^2 \, dt = x + \frac{1}{3} x^3$$

$$y_3(x) = x + \int_0^x \left(t + \frac{1}{3} t^3 \right)^2 dt = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{1}{63} x^7$$

آخر. البته در این مسئله می توانیم جواب کامل را با تفکیک متغیرها به دست آوریم (مثال بخش ۳.۱) و دریابیم که

$$(۴) \quad y(x) = \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{315}x^7 + \dots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

سه جمله اول $y_3(x)$ با سه جمله اول سری (۴) یکی است. سری (۴) به ازای $|x| < \pi/2$ همگراست و تمام آنچه که می توان انتظار داشت این است که دنباله $y_1, y_2, y_3, \dots$ به تابعی همگرا باشد که جواب مسئله ما به ازای $|x| < \pi/2$ است. این موضوع نشان می دهد که مسئله همگرایی از اهمیت عملی زیادی برخوردار است.

مسائل بخش ۱۱.۱

روش پیکار را درباره مسائل با مقدار اولیه زیر به کار ببرید. همچنین جواب کامل را معین نمایید. جوابها را مقایسه کنید.

$$۱. \quad y' = 2y, \quad y(0) = 1 \quad ۲. \quad y' = xy, \quad y(0) = 1$$

$$۳. \quad y' = y^2 + 4, \quad y(0) = 0 \quad ۴. \quad y' = x + y, \quad y(0) = -1$$

$$۵. \quad y' = x + y, \quad y(0) = 1 \quad ۶. \quad y' = xy + 2x - x^2, \quad y(0) = 0$$

۷. روش پیکار را در مورد $y' = y, y(0) = 1$ به کار ببرید و نشان دهید که تقریبهای متوالی به جواب کامل $y = e^x$ منجر می شود.

۸. روش پیکار را درباره $y' = 2xy, y(0) = 1$ به کار ببرید. نمودارهای y_1, y_2, y_3 و جواب کامل را به ازای $0 \leq x \leq 2$ رسم کنید.

۹. در مسئله ۸ مقادیر $y_1(1), y_2(1), y_3(1)$ را محاسبه کنید و آنها را با مقدار دقیق $y(1) = e = 2.718 \dots$ مقایسه نمایید.

۱۰. نشان دهید که هرگاه در (۱)، f به y بستگی نداشته باشد، آنگاه تقریبهای به دست آمده با روش پیکار با جواب دقیق همانندند. چرا؟

۱۲.۱ وجود و یکتایی جوابها

مسئله با مقدار اولیه

$$|y'| + |y| = 0, \quad y(0) = 1$$

جوابی ندارد زیرا $y \equiv 0$ تنها جواب معادله دیفرانسیل است. (چرا؟) مسئله با مقدار اولیه

$$y' = x, \quad y(0) = 1$$

دقیقاً يك جواب دارد، یعنی، $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$. مسئله با مقدار اولیه

$$xy' = y - 1, \quad y(0) = 1$$

پس نهایت جواب به صورت $y = 1 + cx$ دارد که در آن c دلخواه است. از این مثالها درمی یابیم که يك مسئله با مقدار اولیه

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

ممکن است يك یا بیش از يك جواب داشته باشد و یا اینکه اصلاً جوابی نداشته باشد. با توجه به این مطلب دو سؤال اساسی زیر مطرح می شود.

مسئله وجود. تحت چه شرایطی يك مسئله با مقدار اولیه به صورت (۱) حداقل يك جواب دارد؟

مسئله یکتایی. تحت چه شرایطی آن مسئله جوابی یکتا، یعنی فقط يك جواب، دارد؟ قضایائی که چنین شرایطی را بیان می کنند به ترتیب **قضایای وجود و قضایای یکتایی** نامیده می شوند.

البته سه مثال مذکور آنقدر ساده اند که می توانیم این دو سؤال را از راه حدس و بررسی، بدون استفاده از هیچ قضیه ای، پاسخ دهیم. معذک، واضح است که در حالات پیچیده تر - مثلاً در مواقعی که نتوان معادله را با روشهای مقدماتی حل نمود، قضایای وجود و یکتایی از اهمیت زیادی برخوردارند. حقیقت این است که يك درس پیشرفته تر در معادلات دیفرانسیل عمده تاً شامل ملاحظات دربارۀ وجود یکتایی و رفتار عمومی جوابهای انواع مختلف معادلات دیفرانسیل است و بسیاری از این ملاحظات کاربردهای عملی فراوانی دارند. مثلاً، نتایج وجود و یکتایی جوابهای تناوبی بعضی معادلات دیفرانسیل که در حدود ۹۰ سال پیش توسط پوانکاره به دلایل کاملاً نظری به دست آمد امروزه پایۀ تحقیقات عملی متعددی در مکانیک غیرخطی است.

یکتایی حائز اهمیت است، مثلاً، چنانچه بخواهیم رفتار آینده يك سیستم فیزیکی که توسط يك مسئله با مقدار اولیه مشخص می شود را پیش بینی کنیم، مدل ما ممکن است چنان پیچیده باشد که مجبور شویم از یک روش عددی برای به دست آوردن جواب تقریبی استفاده کنیم. اما قبل از انجام چنین کاری باید اطمینان حاصل کنیم که این مدل به جوابی یکتا منجر خواهد شد.

یادآور می شویم که در بسیاری از شاخه های ریاضی قضیه وجود و قضیه یکتایی از اهمیت مشابهی برخوردارند. این موضوع را با مثال ملموسی از جبر خطی تشریح می کنیم. از سه دستگاه معادلات خطی

$$\begin{array}{lll} x+y=1 & (ب) & x+y=1 \\ 2x+2y=2 & & x-y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (الف) \\ x+y=1 \\ x+y=0 \end{array}$$

به ترتیب اولی هیچ جوابی ندارد، دومی يك جواب دارد و سومی دارای بینهایت جواب است. این کاملاً واضح است و به قضیه‌ای احتیاج نیست. معذک هرگاه دستگاهی شامل چند معادله و چند مجهول باشد برای این سؤال که آیا اصولاً دستگاه جوابی دارد و اگر دارد چند جواب دارد پاسخی فوری نداریم. از اینجاست که نیاز به قضایای وجود یکتایی آشکار می‌شود.

در رابطه با معادلات دیفرانسیل، دانشجویی که منحصرأ به کاربردهای این معادلات علاقه‌مند است و نه مسائل نظری مربوط به آن (طرز تلقی‌ای که او را از موفقیت در زمینه‌های عملی باز می‌دارد) ممکن است برای خود این طور دلیل بیاورد که يك مسئله فیزیکی متناظر با يك معادله دیفرانسیل مشخص جوابی یکتا دارد و همین موضوع باید در مورد يك معادله دیفرانسیل نیز صادق باشد. در موارد ساده‌تر شاید حق با او باشد اما باید به خاطر داشته باشد که يك معادله دیفرانسیل صرفأ حالت مجردي از يك حقیقت است که با صرف نظر کردن از بعضی واقعیات فیزیکی که از اهمیت کمتری برخوردارند به دست می‌آید و در وضعیتهای فیزیکی پیچیده‌تر ممکن است نتوان از پارامترها و عوامل مختلف نیز صرف نظر نمود. در این صورت در چنین حالتی از قبل تضمینی برای اینکه معادله دیفرانسیل مدلی صحیح است یعنی به تصویری درست از حقیقت منجر می‌شود وجود ندارد. این بخشی از فن مدل‌سازی را تشکیل می‌دهد: نشان دادن اهمیت نسبی عوامل مختلف دخیل در يك سیستم فیزیکی، شیمیایی، بیولوژیکی و غیره. در مورد يك مسئله با مقدار اولیه به صورت

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

شرایط ساده‌ای برای وجود و یکتایی جواب وجود دارد. هرگاه f در ناحیه‌ای از صفحه xy که شامل x_0 و y_0 است پیوسته باشد آنگاه مسئله (۱) حداقل يك جواب دارد. اگر، علاوه بر این، مشتق جزئی $\partial f / \partial y$ وجود داشته و در آن ناحیه پیوسته باشد آن وقت مسئله (۱) دقیقاً يك جواب دارد. این جواب را می‌توان با روش تکرار پیکار به دست آورد. حال این سه وضعیت را با روشی دقیق به شکل فرمول بیان می‌کنیم.

قضیه وجود

هرگاه $f(x, y)$ در تمام نقاط (x, y) مستطیل (شکل ۳۲)

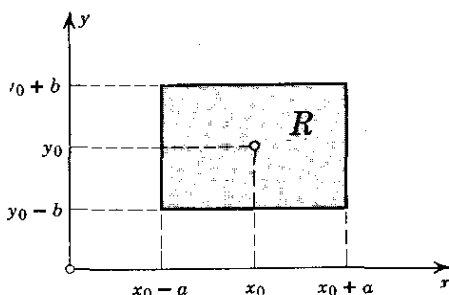
$$R: \quad |x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$

پیوسته و در R کراندار باشد یعنی به ازای هر $(x, y) \in R$

۱. يك تابع $f(x, y)$ را وقتی (x, y) در ناحیه‌ای از صفحه xy متغیر است کراندار گویند هرگاه عددی مانند k وجود داشته باشد به طوری که وقتی (x, y) در آن ناحیه است $|f| \leq k$. مثلاً $f = x^2 + y^2$ با $K = 2$ وقتی $|x| < 1$ و $|y| < 1$ باشد کراندار است. تابع $f = \tan(x + y)$ به ازای $|x + y| < \pi/2$ کراندار نیست.

$$(۲) \quad |f(x, y)| \leq K$$

آنگاه مسئله با مقدار اولیه (۱) حداقل يك جواب $y(x)$ دارد که اقلاً به ازای هر x در فاصله $|x - x_0| < \alpha$ ، که در آن α از دو عدد a و b/K کوچکتر است، تعریف شده است.



شکل ۳۲. مستطیل R در قضایای وجود و یکتایی

قضیه یکتایی

هرگاه $f(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ به ازای هر (x, y) در آن مستطیل R پیوسته و کراندار باشد یعنی به ازای هر (x, y) در R

$$(۳) \quad \text{(الف)} \quad |f| \leq K \quad \text{(ب)} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M$$

آنگاه مسئله با مقدار اولیه (۱) فقط يك جواب $y(x)$ دارد که حداقل به ازای هر x در فاصله $|x - x_0| < \alpha$ تعریف شده است. در آن صورت این جواب را می توان با روش تکرار پیکاد به دست آورد یعنی دنباله $y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ که در آن

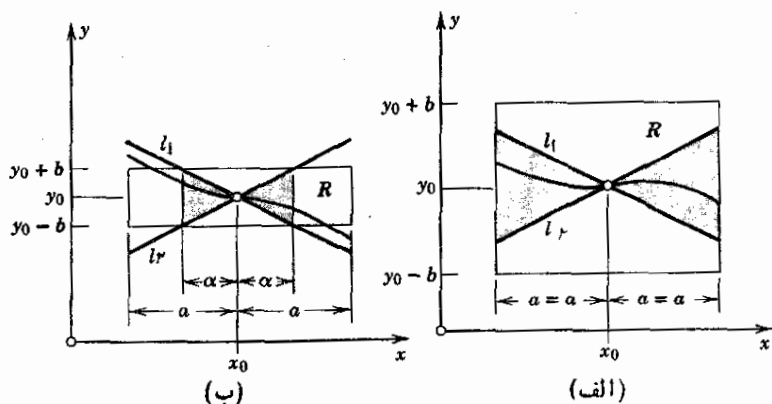
$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt, \quad n = 1, 2, \dots,$$

به $y(x)$ همگراست.

از آنجا که اثبات این قضایا متضمن آشنایی با سریهای همگرا و مفاهیم دیگری است که بعداً در این کتاب بررسی شده اند فعلاً این اثباتها را ارائه نمی کنیم اما توجه دانشجو را به مرجع [B۱۱] ضمیمه ۱ معطوف می کنیم. معهداً نیاز به این داریم که مثالهاو یادآورهای را که برای فهم بهتر این دو قضیه مفیداند ارائه دهیم.

چون $y' = f(x, y)$ ، شرط (۲) ایجاب می کند که $|y'| \leq K$ ، یعنی، شیب هر منحنی جواب $y(x)$ در R حداقل $-K$ و حداکثر $+K$ است. بنابراین يك منحنی جواب که از نقطه (x_0, y_0) می گذرد باید در ناحیه سایه خورده شکل ۳۳ قرار گیرد

توسط خطوط l_1 و l_2 که شیب آنها به ترتیب K و $-K$ است محدود شده باشد. بسته به شکل R دو حالت مختلف ممکن است پیش بیاید. در حالت نخست که در شکل ۳۳ الف نشان داده شده است داریم $b/K \geq a$ است و بنابراین در قضیه وجود $\alpha = a$ که در آن صورت جواب به ازای هر x بین $x_0 - a$ و $x_0 + a$ وجود دارد. در حالت دوم که در شکل ۳۳ ب نشان داده شده است داریم $b/K < a$. بنابراین $\alpha = b/K$ ، و آنچه می توانیم از قضایا نتیجه بگیریم این است که جواب به ازای هر x بین $x_0 - b/K$ و $x_0 + b/K$ وجود دارد؛ برای x هایی بزرگتر یا کوچکتر منحنی جواب ممکن است از مستطیل R خارج شود و چون درباره f خارج از R چیز خاصی فرض نکرده ایم بنابراین درباره جواب آن مقادیر متناظر x نمی توان چیزی نتیجه گرفت.



شکل ۳۳. شرط (۲) قضیه وجود. (الف) حالت اول، (ب) حالت دوم

مثال ۱

مسئله

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

را در نظر بگیرید (به مثال ۱ بخش ۱۱.۱ رجوع کنید) و فرض کنید

$$R: |x| < 5 \text{ و } |y| < 3$$

در این صورت

$$a = 5, \quad b = 3, \quad |f| = |1 + y^2| \leq K = 10,$$

$$|\partial f / \partial y| = 2|y| \leq M = 6, \quad \alpha = b/K = 0.3 < a$$

در واقع، جواب $y = \tan x$ این مسئله در $x = \pm \pi/2$ گسسته است و جواب پیوسته ای در تمام فاصله $|x| < 5$ ، که از آن شروع کردیم، وجود ندارد.

در این دو قضیه به جای آنکه شرایط لازم باشند کافی اند و می توان آنها را ناچیز

شمرده. مثلاً با توجه به قضیه مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل داریم

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=\bar{y}}$$

که در آن فرض می‌شود (x, y_1) و (x, y_2) در R اند و $\bar{y}$ مقدار مناسبی بین y_1 و y_2 است. از این و (۳) نتیجه می‌شود که

$$(۴) \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|$$

و می‌توان نشان داد که به جای (۳) می‌توان شرط ضعیفتر (۴) را که به شرط لیپشیتز معروف است به کار برد. با وجود این پیوستگی $f(x, y)$ برای تضمین یکتایی جواب کافی نیست. این مطلب را می‌توان با مثال زیر روشن نمود.

مثال ۲. غیر یکتایی

مسئله با مقدار اولیه

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

دارای دو جواب زیر است

$$y \equiv 0 \quad \text{و} \quad y^* = \begin{cases} x^2/4 & x \geq 0 \\ -x^2/4 & x \leq 0 \end{cases}$$

گرچه $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ به ازای هر y پیوسته است. شرط لیپشیتز (۴) در هر ناحیه‌ای که شامل خط $y = 0$ باشد نقض می‌شود زیرا به ازای $y_1 = 0$ و مقدار مثبت y_2 داریم

$$(۵) \quad \frac{|f(x, y_2) - f(x, y_1)|}{|y_2 - y_1|} = \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{y_2}}, \quad (\sqrt{y_2} > 0)$$

و این را می‌توان هر چقدر که بخواهیم با کوچک نمودن y_2 بزرگ کنیم در حالیکه (۴) ایجاب می‌کند که مقدار سمت چپ (۵) از مقدار ثابت M تجاوز نکند.

روشهای عددی در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که در بخش ۷.۱۹ ارائه شده‌اند از سایر بخشهای فصل ۱۹ مستقل است و هم‌اکنون می‌توانند مورد مطالعه قرار گیرند.

۱. ردلف لیپشیتز (Rudolf Lipschitz)، ۱۸۳۱-۱۹۰۳، ریاضیدان آلمانی که در جبر و هندسه و دیفرانسیل نیز کار کرد.

مسائل بخش ۱۲.۱

۱. نشان دهید که معادله دیفرانسیل $|y'| + |y| = -1$ جوابی ندارد.
۲. بزرگترین مجموعه M در صفحه xy را طوری پیدا کنید که از هر نقطه M يك و فقط يك منحنی جواب $x dy = y dx$ بگذرد.
۳. تمام جوابهای مسئله با مقدار اولیه $xy' = 4y$ ، $y(0) = 0$ را پیدا کنید. نمودار بعضی از آنها را رسم کنید.
۴. معادله دیفرانسیل $xy' = 2y$ را در نظر بگیرید و تمام شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ را طوری پیدا کنید که مسئله با مقدار اولیه حاصل (الف) جوابی نداشته باشد، (ب) بیش از يك جواب داشته باشد، (ب) دقیقاً يك جواب داشته باشد.
۵. مسئله با مقدار اولیه $xy' = 3y$ ، $y(0) = 1$ چند جواب دارد؟ توضیح دهید.
۶. مسئله (۴) را در مورد معادله دیفرانسیل $y'(2x-1) = (x^2-x)y$ حل کنید.
۷. نشان دهید هر گاه $y' = f(x, y)$ در فرضیات قضایای موجود، در مستطیل R صدق کند و y_1 و y_2 دو جواب معادله ای باشند که منحنيهایش در R قرار دارند، آنگاه این منحنیها نمی توانند نقطه مشترکی داشته باشند (مگر اینکه همانند باشند).
۸. هر گاه فرضیات قضایای این بخش نه صرفاً در يك مستطیل R بلکه در يك نوار قائم مفروض $|x - x_0| \leq a$ نیز صدق کنند، نشان دهید که آنگاه به ازای تمام مقادیر x در فاصله $|x - x_0| \leq a$ جواب (۱) وجود دارد.
۹. یادآوری این موضوع با ارزش است که جواب يك مسئله با مقدار اولیه ممکن است در فاصله ای بزرگتر از آنچه در قضیه ذکر شده است یعنی $|x - x_0| < a$ که α هم در قضیه تعریف شده، وجود داشته باشد. مثال ۱ این مطلب را روشن می نماید. آن با توجه به مثال فوق، α را بر حسب a و b پیدا کنید. بیشترین α ممکنه را که با انتخاب مناسب a و b می توانیم داشته باشیم چیست؟
- بزرگترین α ای را پیدا کنید که به ازای آن قضایای موجود وجود جواب را تضمین نمایند.
۱۰. $y' = y^2$ ، $y(1) = 1$ ۱۱. $y' - y^2 = 4$ ، $y(0) = 0$
۱۲. نشان دهید که $f(x, y) = |\sin y| + x$ در شرط لیپشیتز (۴) به ازای $M = 1$ و در تمام صفحه xy صدق می کند اما $\partial f / \partial y$ به ازای $y = 0$ وجود ندارد.
۱۳. آیا $f(x, y) = |x| + |y|$ در شرط لیپشیتز در صفحه xy صدق می کند؟ آیا $\partial f / \partial y$ وجود دارد؟
۱۴. معادله دیفرانسیل خطی $y' + g(x)y = r(x)$ را به صورت (۱) بنویسید. هر گاه

g و r به ازای تمام مقادیر x طوری پیوسته باشند که $|x - x_0| \leq a$ ، نشان دهید که $f(x, y)$ در این معادله در شرط لیپشیتز صدق می‌کند. [بنابه قضایای حاضر، این مطلب یکتایی جواب را ایجاب می‌کند که البته از رابطه (۴) بخش ۷.۱ نیز نتیجه می‌شود].

۱۵. تمام جوابهای مسئله با مقدار اولیه $y(1) = 0$ ، $y' = 2\sqrt{y}$ را پیدا کنید. کدام يك از آنها را می‌توان با شروع از $y = 0$ با روش پیکارد به دست آورد؟ آیا $2\sqrt{y}$ در شرط لیپشیتز صدق می‌کند؟

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی

معادلات دیفرانسیل معمولی را می‌توان به دو دستهٔ بزرگ به اصطلاح معادلات خطی و معادلات غیرخطی تقسیم کرد. در حالی که معادلات غیرخطی (مرتبه دوم یا بالاتر) نسبتاً دشوارند معادلات خطی از بسیاری جهات ساده‌ترند زیرا خواص مختلف حل آنها را می‌توان به روشی کلی مشخص نمود و برای بسیاری از این معادلات راه‌های متعارف وجود دارد. در این فصل معادلات دیفرانسیل خطی و کاربردهای آنها را بررسی خواهیم کرد. این معادلات نقش مهمی را در ریاضیات مهندسی مانند ارتعاشات مکانیکی و مدارها و شبکه‌های الکتریکی ایفا می‌کنند.

به معادلات خطی مرتبه دوم جای بیشتری اختصاص یافته است. به نظر می‌رسد این کار بی‌مورد نبوده باشد زیرا اهمیت معادلات مرتبه دوم از نقطه نظر عملی از سایر معادلات بیشتر است. علاوه بر گاه ابتدا به معادلات مرتبه دوم بپردازیم ملاحظات نظری لازم آسانتر خواهند شد. همینکه دانشجوی روش بررسی معادلات مرتبه دوم را فراگرفت بسادگی با تعمیم این مفاهیم، روشها و نتایج به معادلات دیفرانسیل مرتبه سوم و بالاتر آشنا خواهد شد. کاربردهای مهندسی مهم مربوط به نوسانات الکتریکی و مکانیکی در بخشهای ۶.۲ و ۱۳.۲ تا ۱۵.۲ بررسی می‌شوند.

روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در بخشهای ۸.۱۹، که مستقل از سایر بخشهای فصل ۱۹ است، گنجانده شده‌اند.

(معادلات لژاندر، بسل و فوق هندسی در فصل ۴ بررسی خواهند شد.)

پیشنیاد این فصل: فصل ۱ به ویژه بخشهای ۷.۱ و ۸.۱.
 بخشهایی را که برای دوره فشرده‌تر می‌توان حذف کرد: ۸.۲ تا ۱۰.۲، ۱۵.۲، ۱۶.۲.
 مراجع: ضمیمه ۱، قسمت ب.
 جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۲ معادلات خطی همگن مرتبه دوم

تأیید با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول آشنا شده‌ایم (بخشهای ۷.۱ تا ۹.۱) و حالا به تعریف و بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم می‌پردازیم.
 يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را در صورتی خطی نامند که بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$(۱) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

صفت مشخصه این معادله آن است که معادله نسبت به تابع مجهول y و مشتقات آن خطی است در حالی که f و g و r می‌توانند هر تابع مفروضی از x باشند. خواهیم دید که معادله (۱) در صورتی که $r(x)$ همواره برابر صفر باشد تا حدی خواص ساده‌تری دارد. در این صورت (۱) چنین می‌شود

$$(۲) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

و این معادله را همگن می‌نامند. هرگاه $r(x) \neq 0$ ، آنگاه (۱) غیر همگن نامیده می‌شود. مثلاً

$$y'' + 4y = e^{-x} \sin x$$

يك معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن است در حالی که

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

يك معادله دیفرانسیل خطی همگن است.

هر معادله دیفرانسیل مرتبه دومی را که بتوان به صورت (۱) نوشت غیر خطی نامند. مثلاً معادلات زیر غیر خطی هستند

$$y'' y + y' = 0$$

و

$$y'' = \sqrt{y'^2 + 1}$$

معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم در بسیاری از مسائل مهندسی نقشی اساسی ایفا

می‌کنند. خواهیم دید که بعضی از این معادلات، بدلیل این که جواب‌هایی به صورت توابع مقدماتی دارند، بسیار ساده هستند. سایر معادلات، که جوابهایشان توابع عالی و مهمتری نظیر توابع بسل و فوق هندسی است، پیچیده‌تر اند.

توابع f و g در معادلات (۱) و (۲) را ضرایب این معادلات می‌نامند. در تمام بررسیهایمان فرض می‌کنیم که x در یک ناحیه مشخص دلخواه، مانند یک فاصله محدود و یا روی محور x ها تغییر می‌کند. در تمام فرضها و حکمها چنین ناحیه مشخصی منظور است و لزومی ندارد که در هر مورد روی آن تأکید شود.

تابع

$$y = \varphi(x)$$

را جواب (خطی یا غیر خطی) معادله دیفرانسیل مرتبه دوم روی فاصله‌ای (شاید بینهایت) نامند هرگاه $\varphi(x)$ تعریف شده و در آن فاصله دوبار مشتق‌پذیر بوده و بگونه‌ای باشد که وقتی بجای تابع مجهول y و مشتقات آن φ و مشتقات نظیرش را قرار دهیم معادله به یک اتحاد تبدیل شود.

این تعریف شبیه تعریف در حالت مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بخش ۱۰.۱ است.

مثال ۱

توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ به ازای جمیع مقادیر x جوابهای معادله دیفرانسیل خطی همگن

$$y'' + y = 0$$

هستند زیرا

$$(\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$$

و به همان طریق برای $y = \sin x$. حتی می‌توان قدم فراتر نهاد. هرگاه اولین جواب را در مقدار ثابتی، مثلاً ۳، ضرب کنیم تابع حاصل یعنی $y = 3 \cos x$ نیز یک جواب معادله است زیرا

$$(3 \cos x)'' + 3 \cos x = 3[(\cos x)'' + \cos x] = 0$$

واضح است که بجای ۳ می‌توان هر ثابت دیگری مانند ۵- یا $2/9$ را به کار برد. حتی می‌توانیم $\sin x$ و $\cos x$ را بدترتیب در دو مقدار ثابت متفاوت، مثلاً ۲ و ۸-، ضرب کنیم و توابع حاصل را باهم جمع نماییم یعنی

$$y = 2 \cos x - 8 \sin x$$

و این تابع نیز به ازای جمیع مقادیر x جوابی برای معادله همگن مفروض است زیرا

$$\begin{aligned} & (\lambda \cos x - \lambda \sin x)'' + \lambda \cos x - \lambda \sin x \\ & = \lambda[(\cos x)'' + \cos x] - \lambda[(\sin x)'' + \sin x] = 0 \end{aligned}$$

مثال فوق نمایانگر این واقعیت مهم است که با ضرب کردن جوابهای معلوم در اعداد ثابت و جمع نمودن آنها می‌توان جوابهای جدیدی برای معادله خطی همگن (۲) به دست آورد. البته این موضوع فواید عملی و نظری زیادی دارد زیرا چنین خاصیتی ما را قادر می‌سازد که، به کمک جوابهای ساده، جوابهای بیشتری به دست بیاوریم. این خاصیت را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

قضیه بنیادی ۱

هرگاه جوابی از معادله دیفرانسیل خطی همگن (۲) در فاصله‌ای مانند J را در مقدار ثابتی ضرب کنیم تسایع حاصل نیز جوابی از (۲) در فاصله J است. همچنین مجموع دو جواب (۲) در فاصله J جوابی از (۲) در آن فاصله خواهد بود.

اثبات. فرض می‌کنیم $\varphi(x)$ جوابی از (۲) در فاصله J باشد و نشان می‌دهیم $y = c\varphi(x)$ نیز جوابی از (۲) در این فاصله است. اگر $y = c\varphi(x)$ را در (۲) قرار دهیم سمت چپ (۲) چنین می‌شود

$$(c\varphi)'' + f(c\varphi)' + g c\varphi = c[\varphi'' + f\varphi' + g\varphi].$$

از آنجائی که φ در (۲) صدق می‌کند مقدار داخل پرانتز برابر صفر و قسمت اول قضیه ثابت می‌شود. اثبات حکم دوم کاملاً ساده است و آن را بعده خواننده می‌گذاریم.

دانشجو باید با این قضیه بسیار مهم خوب آشنا باشد و آن را کاملاً به ذهن بسپارد اما نباید فراموش نماید که این قضیه در مورد معادلات خطی غیر همگن یا معادلات غیر خطی صادق نیست و این را می‌توان با دو مثال زیر روشن نمود.

مثال ۲. يك معادله خطی غیر همگن

با جایگزینی می‌توان نشان داد که توابع

$$y = 1 + \sin x \quad \text{و} \quad y = 1 + \cos x$$

جوابهای معادله خطی غیر همگن

$$y'' + y = 1$$

۱. این قضیه را بعضی مواقع اصل برهم نهی یا اصل خطی بودن می‌نامند.

هستند اما توابع

$$(1 + \cos x) + (1 + \sin x) \quad \text{و} \quad 2(1 + \cos x)$$

جوابهای آن معادله نیستند.

مثال ۳. يك معادله دیفرانسیل غیرخطی

با جایگزینی می توان نشان داد که توابع

$$y = 1 \quad \text{و} \quad y = x^2$$

جوابهای معادله دیفرانسیل غیرخطی

$$y''y - xy' = 0$$

هستند اما توابع

$$x^2 + 1 \quad \text{و} \quad -x^2$$

جوابهای آن معادله نیستند.

مسائل بخش ۱.۲

خواص عمومی مهم معادلات دیفرانسیل خطی همگن و غیرهمگن. گزاره های زیر را برای يك فاصله مشخص J ثابت نموده و با ذکر مثالهایی آنها را توضیح دهید. در اینجا فرض می کنیم که در (۱) داشته باشیم $r(x) \not\equiv 0$.

۱. $y \equiv 0$ جوابی برای (۲) است (که آن را «جواب بدیهی» نامند) اما جوابی برای (۱) نیست.

۲. مجموع دو جواب (۲) جوابی برای (۲) است.

۳. هر «ترکیب خطی» از جوابهای y_1 و y_2 از (۲) یعنی $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جوابی برای (۲) است.

۴. به ازای هر جواب y_1 از (۱) حاصلضربی به صورت $y = c y_1$ ، بجز به ازای $c = 1$ ، جوابی برای (۱) نیست.

۵. مجموع دو جواب (۱) جوابی برای (۱) نیست.

۶. تفاضل $y = y_1 - y_2$ دو جواب (۱) جوابی برای (۲) است.

۷. مجموع دو جواب y_1 از (۱) و y_2 از (۲) جوابی برای (۱) است.

۸. (معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم تحویل پذیر به مرتبه اول) بعضی معادلات مرتبه دوم را می‌توان به مرتبه اول تحویل نمود. این مطلب در مورد معادلاتی به صورت $F(x, y', y'') = 0$ ، که بطور صریح شامل y نیستند، نیز صدق می‌کند. نشان دهید که با قراردادن $y' = z$ معادله مرتبه اولی بر حسب z به دست می‌آید و به کمک جواب z می‌توانیم با انتگرالگیری جوابی برای y از معادله مفروض به دست بیاوریم.

معادلات زیر را به مرتبه اول تحویل و حل کنید.

$$y'' + y' = x + 1 \quad ۹. \quad ۲xy'' = ۳y' \quad ۱۰.$$

$$y'' = y' \tanh x \quad ۱۱. \quad y'' = 1 + y'^2 \quad ۱۲.$$

$$xy'' + y' = y'^2 \quad ۱۴. \quad xy'' + ۲y' = 0 \quad ۱۳.$$

۱۵. يك ذره مادی روی خط مستقیم طوری حرکت می‌کند که شتاب و سرعتش برابرند. در لحظه $t = 0$ فاصله نقطه از مبدأ ۱ متر و سرعت آن ۲ متر بر ثانیه است. موقعیت و سرعت ذره را در $t = 5$ s به دست بیاورید.

۱۶. يك ذره مادی بر مسیر مستقیم طوری حرکت می‌کند که حاصلضرب سرعت در شتابش ثابت است، مثلاً $1 \text{ m}^2/\text{s}^3$. هر گاه در لحظه $t = 0$ فاصله ذره از مبدأ ۲ متر و سرعت آن ۲ متر بر ثانیه باشد فاصله و سرعت آن در $t = 6$ s چقدر است؟

۱۷. منحنی $y(x)$ را که از مبدأ می‌گذرد طوری بیابید که $y'' = y'$ بوده و مماس بر منحنی در مبدأ $y = x$ باشد.

۱۸. (کابل آویخته) می‌توان نشان داد که منحنی $y(x)$ يك کابل همگن قابل انعطاف و غیر قابل کشش که بین دو نقطه ثابت آویخته شده است با حل معادله $y'' = k\sqrt{1 + y'^2}$ به دست می‌آید که در آن k مقدار ثابتی است که به وزن بستگی دارد. این منحنی را منحنی ذنجیری می‌نامند. نمودار $y(x)$ را با $k = 1$ و این فرض که نقاط ثابت اتصال در صفحه قائم xy عبارت باشند از $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ پیدا کنید.

۱۹. (تحویل به مرتبه اول) نوع دیگری از معادلات تحویل پذیر به مرتبه اول به صورت $F(y, y', y'') = 0$ است که در آن متغیر مستقل x بطور صریح دیده نمی‌شود. با استفاده از قانون زنجیری نشان دهید $y'' = (dz/dy)z$ که در آن $y' = z$ و بدین ترتیب معادله مرتبه اولی به دست می‌آید که در آن y متغیر مستقل است.

معادلات زیر را به مرتبه اول تحویل و آنها را حل کنید.

$$yy'' + ۳y'^2 = 0 \quad ۲۰. \quad y'' + e^{2y}y'^3 = 0 \quad ۲۱.$$

$$22. \quad yy'' + (y+1)y' = 0$$

23. منحنی ماربر مبدأ، $y(x)$ ، را چنان پیدا کنید که $y' = 1/\sqrt{y}$ و مماس بر آن در مبدأ، محور x ها باشد.

24. منحنی $y(x)$ را چنان پیدا کنید که از $(0, 0)$ و $(1, 1)$ بگذرد و $y''y = y'^2$.

25. $\ddot{y} + ay^2 + f(y) = 0$ را چنان $u = z^2$ و $\dot{y} = z$ با قرارداد $u = z^2$ به معادله مرتبه اول زیر می‌رسم

$$\frac{du}{dy} + 2au + 2f(y) = 0$$

۲.۲ معادلات مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

حال به بررسی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می‌پردازیم. چنانکه در بخشهای ۶.۲، ۱۳.۲ و ۱۴.۲ خواهیم دید این معادلات کاربردهای مهندسی مهمی به‌ویژه در ارتباط با ارتعاشات مکانیکی و الکتریکی دارند. مطلب را با معادلات همگن یعنی معادلاتی به‌صورت

$$(1) \quad y'' + ay' + by = 0$$

آغاز می‌کنیم که در آن a و b ثابت‌اند. فرض می‌کنیم a و b حقیقی‌اند و مجموعه مقادیر x شامل تمام محور x ها باشد.

معادله (۱) را چگونه حل کنیم؟ بخاطر داریم که جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت

$$y' + ky = 0$$

یک تابع نمایی است یعنی

$$y = ce^{-kx}$$

می‌توان حدس زد که تابع

$$(2) \quad y = e^{\lambda x}$$

نیز با انتخاب مناسب λ می‌تواند جوابی برای (۱) باشد. با قرارداد (۲) و مشتقات آن،

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \text{و} \quad y' = \lambda e^{\lambda x}$$

در معادله (۱) داریم

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

بنابراین (۲) نیز جوابی برای (۱) است. هرگاه λ جواب معادله درجه دوم

$$(۳) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

باشد این معادله معادله مشخصه (یا معادله کمکی) (۱) نامیده می شود. ریشه های این معادله عبارت اند از

$$(۴) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b})$$

می توان نتیجه گرفت که توابع

$$(۵) \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} \quad \text{و} \quad y_1 = e^{\lambda_1 x}$$

جوابهای (۱) هستند. صحت این جواب با قراردادن (۵) در (۱) تأیید می شود. از جبر مقدماتی می دانیم که وقتی a و b حقیقی هستند معادله مشخصه ممکن است

(حالت ۱) دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد؛

(حالت ۲) دو ریشه مختلط مزدوج داشته باشد؛

(حالت ۳) یک ریشه حقیقی مضاعف داشته باشد.

این حالات بطور جداگانه بررسی خواهند شد. درحال حاضر هر حالت را با ذکر مثالی توضیح می دهیم.

مثال ۱. ریشه های حقیقی متمایز

جوابهای معادله زیر را پیدا کنید

$$y'' + y' - 2y = 0$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ریشه های این معادله ۱ و ۲ - هستند و بنابراین دو جواب زیر به دست می آید

$$y_2 = e^{-2x} \quad \text{و} \quad y_1 = e^x$$

مثال ۲. ریشه های مختلط مزدوج

جوابهای معادله زیر را پیدا کنید

$$y'' + y = 0$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

و ریشه‌های این معادله مقادیر $i = (\sqrt{-1})$ و $-i$ هستند و دو جواب معادله عبارت‌اند از

$$y_1 = e^{ix} \quad \text{و} \quad y_2 = e^{-ix}$$

در بخش ۴.۲ خواهیم دید که جوابهای حقیقی را می‌توان به کمک جوابهای مختلط به دست آورد.

مثال ۳. ریشه حقیقی مضاعف

جوابهای معادله زیر را پیدا کنید

$$y'' - 2y' + y = 0$$

معادله مشخصه یعنی

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

دارای جواب حقیقی مضاعف ۱ است و بنابراین معادله یک جواب زیر را دارد

$$y_1 = e^x$$

حالت جواب حقیقی مضاعف نیز در بخش ۴.۲ بحث خواهد شد.

مسائل بخش ۲.۲

جوابهای معادلات زیر را پیدا کنید

$$1. \quad y'' - y = 0 \quad 2. \quad y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$3. \quad y'' + y' - 2y = 0 \quad 4. \quad y'' + 2y' = 0$$

$$5. \quad y'' - y' = 0 \quad 6. \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$7. \quad y'' - 9y = 0 \quad 8. \quad y'' + 6y' + 8y = 0$$

$$9. \quad y'' + 4y' + 5y = 0$$

۱۰. نشان دهید که حالت ۱ فقط در صورتی اتفاق می‌افتد که $a^2 > 4b$ ؛ حالت ۲ فقط در صورتی حادث می‌شود که $a^2 < 4b$ ، و حالت ۳ تنها در صورتی رخ می‌دهد که $a^2 = 4b$ باشد.

۱۱. نشان دهید که $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ جوابهای $y'' - y = 0$ هستند.

اینها را چگونه می توان با استفاده از جواب مسئله ۱ به دست آورد؟

۱۲. نشان دهید که $y = \cosh 3x$ و $y = \sinh 3x$ جوابهای $y'' - 9y = 0$ هستند. اینها را چگونه می توان به کمک جواب مسئله ۷ به دست آورد؟

۱۳. جوابهای $y'' + 4y' = 0$ را (الف) بسا روش فعلی؛ (ب) بسا تحویل به مرتبه اول بیابید.

۱۴. نشان دهید که a و b در (۱) را می توان بر حسب λ_1 و λ_2 به وسیله دستورهایی $b = \lambda_1 \lambda_2$ و $a = -\lambda_1 - \lambda_2$ بیان کرد.

معادله دیفرانسیلی به صورت (۱) را چنان پیدا کنید که توابع زیر جوابهای آن باشد

$$e^{-2ix}, e^{2ix} \quad ۱۵ \quad e^{-2x}, e^x \quad ۱۶$$

$$e^{ix}, e^{kx} \quad ۱۷ \quad e^{2x}, 1 \quad ۱۸$$

$$e^{-(\alpha-i\omega)x}, e^{-(\alpha+i\omega)x} \quad ۱۹ \quad e^{(-1-2i)x}, e^{(-1+2i)x} \quad ۲۰$$

۳.۲ جواب عمومی. پایه. مسائل با مقدار اولیه

برای بحث بیشتر درباره معادلات خطی با ضرایب ثابت دانستن بعضی از خواص عمومی مهم جوابهای معادلات دیفرانسیل خطی لازم خواهد بود. برای این منظور مقدماً دو مفهوم زیر را بیان می کنیم.

جواب يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (خطی یا غیرخطی) را در صورتی **جواب عمومی** نامند که شامل دو ثابت مستقل دلخواه باشد. در اینجا منظور از استقلال آن است که جواب را نتوان به صورتی تبدیل نمود که فقط شامل يك ثابت دلخواه باشد و یا اینکه هیچ ثابتی نداشته باشد. هرگاه مقادیر معینی را به این دو ثابت نسبت دهیم آنگاه جواب حاصله را **جواب خصوصی** می نامند.

این مفاهیم تعمیم بسدیهای مربوط به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند (بخش ۱۰.۱).

بعداً نشان داده خواهد شد (در بخشهای ۸.۲ و ۱۱.۲) که هرگاه يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی (همگن یا غیرهمگن) باشد آنگاه جواب عمومی شامل تمام جوابهای معادله است؛ هر جوابی که در آن ثابت دلخواه وجود نداشته باشد را می توان با جایگزینی مقادیر معین به جای ثابتهای دلخواه به دست آورد. (به بحث کلی صفحه ۱۰۱ بخش ۱۰.۱ نیز رجوع کنید).

۱. مجموعه مقادیر ثابتها را می توان درباره ای از موارد، برای اختصار از عبارات موهومی یا سایر تباهیدگیها، محدود در نظر گرفت.

در بخش حاضر معادله خطی همگن

$$(۱) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

را در نظر می گیریم و می خواهیم نشان دهیم که یک جواب عمومی این معادله را می توان با دانستن دو جواب مناسب y_1 و y_2 ، بسادگی به دست آورد.

بدیهی است که هر گاه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای (۱) در فاصله I باشند، آنگاه بنابه قضیه بنیادی ۱ در بخش ۱۰۲ عبارت

$$(۲) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جوابی از (۱) در فاصله I است؛ در اینجا c_1 و c_2 ثابتهای دلخواهی هستند. از اینرو، بنابه تعریف، y یک جواب عمومی (۱) در فاصله I می باشد مشروط بر آنکه y را نتوان به عبارتی که کمتر از دو ثابت دلخواه دارد تبدیل نمود.

چنین تبدیلی تحت چه شرایطی ممکن خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال اکنون نخست به معرفی مفاهیم پایه ای، که در سایر بررسیها نیز مهم هستند، می پردازیم.

دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را در فاصله I ، که در آن هر دو تابع تعریف شده هستند، وابسته خطی نامند هر گاه این دو تابع در آن فاصله باهم متناسب باشند یعنی هر گاه

$$(۳) \quad y_1 = k y_2 \quad (\text{الف}) \quad \text{یا} \quad y_2 = l y_1 \quad (\text{ب})$$

برای هر x در I صادق باشد؛ در اینجا k و l اعدادی هستند که می توانند صفر باشند یا مخالف صفر. هر گاه این توابع در I متناسب نباشند آنها را مستقل خطی در I نامند.

توجه کنید که این مفاهیم وابستگی خطی و استقلال خطی توابع مربوط به یک مجموعه بینهایت (نقاط I) می شود و نه صرفاً مربوط به یک نقطه.

هرگاه حداقل یکی از توابع y_1 و y_2 در I متحد با صفر باشد آنگاه این توابع در I وابسته خطی هستند. در هر حالت دیگری این توابع در I وابسته خطی هستند اگر و تنها اگر خارج قسمت y_1/y_2 در I ثابت باشد. از اینرو اگر y_1/y_2 در I به x بستگی داشته باشد آن وقت y_1 و y_2 در I مستقل خطی هستند.

در واقع، اگر $y_1 \equiv 0$ ، آنگاه (۳ الف) برای $k = 0$ صادق است؛ و اگر $y_2 \equiv 0$ در آن صورت (۳ ب) برای $l = 0$ صادق است. بدین ترتیب حکم اول ثابت

۱. توجه کنید که هر گاه به ازای $k \neq 0$ رابطه (۳ الف) صادق باشد می توانیم آن را به k تقسیم نمائیم و $y_2 = y_1/k$ را بیابیم در نتیجه در این حالت (۳ الف) متضمن (۳ ب) می شود (با $l = 1/k$). معذک، اگر $y_1 \equiv 0$ ، آنگاه (۳ الف) به ازای $k = 0$ صادق است اما متضمن (۳ ب) نیست؛ در واقع، در این حالت رابطه (۳ ب) نیز صادق نیست مگر اینکه $y_2 \equiv 0$ (فاصله I را باز نامند اگر دو نقطه انتهائی آن متعلق به I نباشد و آن را در صورتی بسته گویند اگر دو نقطه انتهائی متعلق به I فرض شوند).

می شود و سایر حکمها نیز بلافاصله از (۳) نتیجه می شود. البته در بیان حکم آخری قبول می کنیم که y_1/y_2 ممکن است بینهایت شود یعنی به ازای مقداری از x که $y_2 = 0$ (یا حتی، در نقطه ای که y_1 و y_2 مشترکاً صفر باشند، تعریف نشده باشد).

مثال ۱

توابع

$$y_1 = 3x \quad \text{و} \quad y_2 = x$$

برای هر فاصله ای وابسته خطی هستند زیرا ثابت $y_1/y_2 = 3$. توابع

$$y_1 = x^2 \quad \text{و} \quad y_2 = x$$

برای هر فاصله ای مستقل خطی هستند زیرا ثابت $y_1/y_2 = x \neq$ ثابت و همچنین است در مورد توابع

$$y_1 = x \quad \text{و} \quad y_2 = x + 1$$

هرگاه جوابهای y_1 و y_2 در (۲) در فاصله I وابسته خطی باشند آنگاه (۳الف) یا (۳ب) صادق است و ملاحظه می شود که می توان (۲) را به یکی از صور

$$y = Ay_2 \quad (A = c_1k + c_2)$$

و

$$y = By_1 \quad (B = c_1 + lc_2)$$

تبدیل نمود که فقط شامل یک ثابت دلخواه است. از اینرو در این حالت (۲) مسلماً یک جواب عمومی (۱) در فاصله I نیست.

از طرف دیگر اگر y_1 و y_2 در فاصله I مستقل خطی باشند در آن صورت متناسب نیستند و چنین تبدیلی را نمی توان انجام داد. از اینرو در این حالت (۲) جواب عمومی (۱) در فاصله I است.

دو جواب مستقل خطی (۱) در I را یک پایه^۱ یا یک دستگاه بنیادی جوابهای (۱) در I نامند. با به کار بردن این مفهوم می توانیم نتایج را به ترتیب زیر فرموله کنیم.

قضیه ۱ (جواب عمومی، پایه)

جواب

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (c_1 \text{ و } c_2 \text{ دلخواه هستند})$$

۱. خوانندگانی که با مفهوم برداری (بخش ۴.۶) آشنا باشند توجه خواهند کرد که بنا به قضیه بنیادی ۱ بخش ۱۰.۲ جوابهای (۱) در فاصله I تشکیل یک فضای برداری را می دهند و از دیدگاه جبر خطی یک پایه^۱ y_1 ، y_2 پایه ای از آن فضای برداری است.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) در فاصله I از محور x هاست اگر و تنها اگر توابع y_1 و y_2 يك پایه جوابهای (۱) در فاصله I را تشکیل بدهند.
 y_1 و y_2 چنین پایه‌ای را تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر خارج قسمت آنها، y_1/y_2 در فاصله I ثابت نبوده بلکه به x بستگی داشته باشد.

مثال ۲

توابع

$$y_1 = e^x \quad \text{و} \quad y_2 = e^{-x}$$

که در مثال ۱ بخش ۲.۲ بررسی شدند جوابهای

$$y'' + y' - 2y = 0$$

هستند. چون y_1/y_2 ثابت نیست این جوابها تشکیل يك پایه را می‌دهند. و جواب عمومی نظیرشان به ازای هر x عبارت است از

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

مثال ۳

توابع

$$y_1 = e^x \quad \text{و} \quad y_2 = 3e^x$$

جوابهای معادله مثال ۲ بخش ۲.۲ هستند اما از آنجائی که خارج قسمت آنها ثابت است مستقل خطی نیستند و پایه‌ای را تشکیل نمی‌دهند.

در مورد معادله مرتبه اول جواب عمومی شامل يك ثابت دلخواه بود و برای به دست آوردن جواب خصوصی به يك شرط احتیاج داشتیم. در حالت فعلی دو ثابت دلخواه داریم و به دو شرط نیاز داریم. در بیشتر کاربردها این شرایط به صورت

$$(۴) \quad y(x_0) = K, \quad y'(x_0) = L$$

هستند که در آنها $x = x_0$ يك نقطه داده شده و K و L اعداد مفروضی هستند. از اینرو در جستجوی جواب خصوصی ای از (۱) هستیم که در x_0 مقدار آن K و مقدار مشتق آن L باشد. شرایط (۴) را شرایط اولیه نامند. معادله (۱) و شرایط (۴) جمعاً مسئله با مقدار اولیه را تشکیل می‌دهند.

۱. البته در اینجا حالت بدیهی $y_2 \equiv 0$ را که در آن y_1 و y_2 تشکیل پایه‌ای نمی‌دهند در نظر نگرفته‌ایم و همچنین می‌پذیریم که y_1/y_2 ممکن است بینهایت شود (یعنی به ازای مقادیری از x که $y_2 = 0$ شود) و یا حتی نامعین باشد و این در صورتی است که y_1 و y_2 هر دو به ازای بعضی مقادیر x صفر شوند.

مطلب را با مثالی نوعی توضیح می‌دهیم.

مثال ۴. مسئله با مقدار اولیه

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$$

يك جواب عمومی معادله عبارت است از (به مثال ۲ رجوع کنید)

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

از اینرو بنا به شرط اولیه نخست داریم $y(0) = c_1 + c_2 = 4$. مشتگیری نتیجه می‌دهد

$$y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}$$

و از آنجا با توجه به دومین شرط اولیه خواهیم داشت $y'(0) = c_1 - 2c_2 = 1$. رویهم‌رفته به دست می‌آید $c_1 = 3$ و $c_2 = 1$ و جواب عبارت است از

$$y(x) = 3e^x + e^{-2x}$$

یادآور می‌شویم که بعضی کاربردها نوع دیگری از شرایط را ایجاب می‌نمایند یعنی

$$(5) \quad y(A) = k_1, \quad y(B) = k_2$$

این شرایط را شرایط مرزی نامند زیرا به دو انتهای A و B (نقاط مرزی A و B) از يك فاصله I مربوط می‌شوند. جواب (۱) در فاصله I را باید طوری معین نمود که در (۵) صدق کند. معادله (۱) و شرایط (۵) تشکیل به اصطلاح يك مسئله با مقدار مرزی را می‌دهند. به عنوان نمونه يك مسئله با مقدار مرزی عبارت است از

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = -3$$

يك جواب چنین است

$$y = 3 \cos x + c_2 \sin x$$

در اینجا c_2 هنوز دلخواه است. این تعجب‌آور است. البته دلیلش آنست که $\sin x$ در صفر و π برابر صفر است. خواننده ممکن است نتیجه بگیرد و ثابت کند (مسئله ۳۳) که جواب مسئله با مقدار مرزی (۱) و (۵) فقط در صورتی یکتاست که هیچ جواب $y \not\equiv 0$ از (۱) در $y(A) = y(B) = 0$ صدق نکند.

ما حالا برای ادامه بحث درباره معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت آماده شده‌ایم و بررسیهای نظری بیشتر را تا بخش ۸.۲ به تعویق می‌اندازیم.

مسائل بخش ۳.۲

آیا توابع زیر درفاصله داده شده وابسته خطی یا مستقل خطی هستند؟

۱. درهرفاصله e^x , e^{-x}

۲. درهرفاصله $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

۳. x , x^2 $(-1 < x < 1)$

۴. x , $x+1$ $(0 < x < 1)$

۵. x^2-2 , $4-2x^2$ $(0 < x < 1)$

۶. $2 \sin x$, $\sin 2x$ $(0 < x < 2\pi)$

۷. $\sin 2x$, $\cos 2x$ $(0 < x < \pi)$

۸. $\sin 2x$, $\cos(2x+\pi/2)$ $(x > 0)$

۹. $|x|x$, x^2 $(0 < x < 1)$

۱۰. $|x|x$, x^2 $(-1 < x < 1)$

۱۱. $\ln x$, $\ln x^2$ $(x > 1)$

۱۲. $\ln 2x$, $2 \ln x$ $(x > 1)$

۱۳. درهرفاصله $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$

۱۴. درهرفاصله $\sin 2x$, $\sin x \cos x$

ثابت کنید و با ذکر مثالهای ساده، و رسم نمودار توضیح دهید که :

۱۵. هرگاه y و w درفاصله I مستقل خطی باشند، آنگاه y و w درهر فاصله شامل I ، که در آن فاصله تعریف شده باشند، مستقل خطی اند.

۱۶. y و w درمسئله ۱۵ می توانند دريك زیرفاصله I وابسته خطی باشند.

۱۷. اگر y و w دريك فاصله I وابسته خطی باشند درهر زیرفاصله I وابسته خطی اند.

۱۸. y و w درمسئله ۱۷ می توانند درفاصله ای شامل I مستقل خطی باشند.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱۹. $y'' - 25y = 0$ ۲۰. $y'' - 3y' + 2y = 0$

۲۱. $y'' - 3y' = 0$ ۲۲. $4y'' + y = 0$

۲۳. $y'' + 2y' - 15y = 0$ ۲۴. $y'' + y' - 6y = 0$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \quad ۲۵$$

$$y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad ۲۶$$

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \quad ۲۷$$

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -8 \quad ۲۸$$

مسائل با مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y = 0, \quad y(-2) = y(2) = \cosh 4 \quad ۲۹$$

$$y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1/2) = e - 1 \quad ۳۰$$

$$3y'' - 8y' - 3y = 0, \quad y(-3) = e, \quad y(3) = 1/e \quad ۳۱$$

$$y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(1) = 2e^2 + 1/e \quad ۳۲$$

۳۳. نشان دهید که جواب مسئله با مقدار مرزی (۱) و (۵) یکتاست اگر و تنها اگر هیچ جواب $y \not\equiv 0$ از (۱) در $y(A) = y(B) = 0$ صلق نکند.

۳۴. به تفصیل ثابت کنید که هر گاه y_1 و y_2 درفاصله‌ای مانند I مستقل خطی باشند آنگاه $c_1y_1 + c_2y_2$ با c_1 و c_2 دلخواه را نمی‌توان به صورتی تبدیل نمود که شامل کمتر از دو ثابت دلخواه باشد.

۳۵. هر گاه y_1 و y_2 پایه‌ای برای (۱) درفاصله I باشند نشان دهید که $y_3 = y_1 + y_2$ و $y_4 = y_1 - y_2$ پایه‌ای برای (۱) درفاصله I هستند. چند مثال بیاورید.

۳۶. هر گاه y_1 و y_2 پایه‌ای برای (۱) در فاصله‌ای مانند I باشند نشان دهید که $y_3 = \alpha y_1 + \beta y_2$ و $y_4 = \gamma y_1 + \delta y_2$ پایه‌ای برای (۱) درفاصله I هستند اگر و تنها اگر $\alpha\delta \neq \beta\gamma$.

معادله دیفرانسیلی به صورت $y'' + ay' + by = 0$ را بیابید که در آن توابع داده شده در زیر يك پایه باشند. با استفاده از قضیه ۱ استقلال خطی را بیازمایید.

$$1, e^{-ix} \quad ۳۸ \quad e^{i\omega x}, e^{-i\omega x} \quad (\omega \neq 0) \quad ۳۷$$

$$e^{(2+i)x}, e^{(2-i)x} \quad ۴۰ \quad e^{(-3+i)x}, e^{(-3-i)x} \quad ۳۹$$

۴.۲ ریشه‌های حقیقی، ریشه‌های مختلط،

ریشه مضاعف معادله مشخصه

از بخش ۲.۲ متذکر می‌شویم که يك معادله مرتبه دوم همگن با ضرایب حقیقی a و b

به صورت زیر است

$$(۱) \quad y'' + ay' + by = 0$$

تابع

$$(۲) \quad y = ce^{\lambda x}$$

جوابی برای (۱) است در صورتیکه λ يك ریشه مضاعف معادله مشخصه زیر باشد

$$(۳) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

این ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$(۴) \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b})$$

چون a و b حقیقی هستند معادله مشخصه ممکن است

(حالت ۱) دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد،

(حالت ۲) دو ریشه مختلط مزدوج داشته باشد،

(حالت ۳) يك ریشه حقیقی مضاعف داشته باشد.

این نکته‌ای است که در بخش ۲.۲ به آن رسیدیم. حال می‌توانیم این حالات را بطور جداگانه بحث کنیم.

حالت ۱. دو ریشه حقیقی متمایز. يك پایه در هر فاصله عبارت است از

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

درواقع، استقلال خطی از این امرناشی می‌شود که y_1/y_2 در هیچ فاصله‌ای ثابت نیست. جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$(۵) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

مثال ۱. جواب عمومی در حالتی که ریشه‌ها حقیقی و متمایز اند

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + y' - 2y = 0$$

معادله مشخصه $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ دو ریشه ۱ و -۲ دارد بنابراین جواب عمومی عبارت است از

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$$

حالت ۲. ریشه‌های مختلط. ریشه‌های مختلط باید مزدوج باشند یعنی،

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq$$

که در آن p و q حقیقی اند و $q \neq 0$. این مطلب، چنانچه از جبر می‌دانیم، از فرض حقیقی بودن a و b نتیجه می‌شود. از اینرو نخست پایه

$$y_1 = e^{(p+iq)x}, \quad y_2 = e^{(p-iq)x}$$

شامل دو تابع مختلط را به دست می‌آوریم. از نقطه نظر عملی به دست آوردن جوابهای حقیقی از این جوابهای موهومی بسیار مورد توجه است. این عمل را با به کار بردن فرمول اولر^۱

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

که در آنها $\theta = qx$ است می‌توانیم، یک بار و برای همیشه، انجام دهیم. درواقع از اولین فرمول اولر به دست می‌آوریم

$$y_1 = e^{(p+iq)x} = e^{px} e^{iqx} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

و از دومین فرمول نتیجه می‌شود

$$y_2 = e^{(p-iq)x} = e^{px} e^{-iqx} = e^{px} (\cos qx - i \sin qx)$$

با جمع و تفریق این دو عبارت نسبت به y_1 و y_2 نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px} \cos qx$$

$$\frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{px} \sin qx$$

دو تابع سمت راست مقادیر حقیقی دارند و بنا به قضیه بنیادی ۱ بخش ۱۰.۲ نتیجه می‌گیریم که این دو تابع جوابهای معادله دیفرانسیل (۱) هستند. از آنجا که خارج قسمت آنها در هیچ فاصله‌ای ثابت نیست در هر فاصله‌ای مستقل خطی هستند. از اینرو یک پایه برای هر فاصله در حالتی که ریشه‌ها موهومی اند عبارت است از

$$e^{px} \cos qx, \quad e^{px} \sin qx$$

جواب عمومی متناظر عبارت است از

۱. دانشجویانی که با این دستورهای مهم از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آشنا هستند اثباتی در بخش ۷.۱۲ خواهند یافت، یک دفعه که (۶) را به دست آوردیم می‌توانیم مستقیماً تحقیق کنیم که حالت فعلی در (۱) صدق می‌کند.

$$(۶) \quad y(x) = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$$

که در آن A و B ثابتهای دلخواه هستند.

مثال ۲. جواب عمومی در حالتی که ریشه‌ها مختلط مزدوج‌اند.

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

معادله مشخصه

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

دارای ریشه‌های

$$\lambda_1 = p - iq = 1 - 3i \quad \text{و} \quad \lambda_2 = p + iq = 1 + 3i$$

است. بنابراین $p = 1$ و $q = 3$. نتیجه اینکه پایه عبارت است از

$$e^x \cos 3x, \quad e^x \sin 3x$$

جواب عمومی متناظر چنین است

$$y = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x)$$

مثال ۳. يك مسئله با مقدار اولیه

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$$

این معادله نظیر مثال قبلی است. از اینرو می‌توانیم جواب عمومی و مشتق آن را که هم‌اکنون به‌دست آورده‌ایم در نظر بگیریم

$$y'(x) = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x - 3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$$

از y و y' و شرایط اولیه نتیجه می‌شود

$$y(0) = A = 4$$

$$y'(0) = A + 3B = 1$$

پس $A = 4$ و $B = -1$ و جواب عبارت است از

$$y = e^x (4 \cos 3x - \sin 3x)$$

مثال ۴

جواب عمومی معادله

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \text{ ثابت و مخالف صفر است})$$

عبارت است از

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$$

حالت ۳. ریشه‌های مضاعف. بعضی اوقات این حالت را حالت بحرانی می‌نامند. از (۴) می‌بینیم که این حالت وقتی و تنها وقتی پیش می‌آید که مبین معادله مشخصه (۳) صفر باشد، یعنی

$$b = \frac{1}{4} a^2 \quad \text{و از آنجا} \quad a^2 - 4b = 0$$

بدین ترتیب (۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(7) \quad y'' + ay' + \frac{1}{4} a^2 y = 0$$

ریشه مضاعف عبارت است از $\lambda = -a/2$ و دروهله اول فقط يك جواب داریم

$$y_1 = e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2} \right)$$

برای یافتن جواب دیگر، y_2 ، می‌توانیم روش تغییر پارامترها را به ترتیب زیر به کار ببریم (به بخش ۸.۱ رجوع کنید)

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \quad \text{که در آن} \quad y_1(x) = e^{-ax/2}$$

باید u را معین کنیم. با قرار دادن y_2 و مشتقات آن در (۷) و مرتب کردن عبارات به دست می‌آوریم

$$u \left(y_1'' + ay_1' + \frac{1}{4} a^2 y_1 \right) + u' (2y_1' + ay_1) + u'' y_1 = 0$$

چون y_1 يك جواب است عبارت داخل اولین پرانتز صفر می‌شود و از آنجائی که

$$2y_1' = 2 \left(-\frac{a}{2} \right) e^{-ax/2} = -ay_1$$

عبارت داخل پرانتز دوم نیز صفر است و معادله به $u'' y_1 = 0$ تحویل می‌یابد. از این رو داریم $u'' = 0$. يك جواب عبارت از $u = x$ است. در نتیجه

$$y_2(x) = x e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2} \right)$$

y_1 و y_2 در هر فاصله‌ای مستقل خطی اند زیرا خارج قسمت آنها، $y_2/y_1 = x$ ، ثابت نیست از اینرو در حالت ریشه مضاعف پایه جواب (۱) در هر فاصله عبارت است از

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{2} \right)$$

جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$(۸) \quad y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} \quad \left(\lambda = -\frac{a}{\gamma} \right)$$

توجه کنید که هرگاه λ یک ریشه ساده (۳) باشد آنگاه (۸) جوابی برای (۱) نیست.

مثال ۵. جواب عمومی در حالت ریشه مضاعف

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + \lambda y' + 16y = 0$$

معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda = -4$ است. از اینرو یک پایه عبارت است از

$$e^{-4x}, \quad x e^{-4x}$$

و جواب عمومی متناظر با آن چنین می شود

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-4x}$$

مثال ۶. یک مسئله با مقدار اولیه

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

با مشتقگیری به دست می آوریم

$$y'(x) = c_2 e^{2x} + 2(c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

حالت	ریشه های (۳)	پایه (۱)	جواب عمومی (۱)
۱	حقیقی متمایز λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
۲	مختلط مزدوج $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq$	$e^{px} \cos qx$ $e^{px} \sin qx$	$y = e^{px} (A \cos qx + B \sin qx)$
۳	ریشه حقیقی مضاعف $\lambda (= -a/\gamma)$	$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}$	$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$

از این رابطه و شرایط اولیه نتیجه می‌شود که

$$y(0) = c_1 = 3, \quad y'(0) = c_1 + 2c_2 = 1$$

از این دو $c_1 = 3$ و $c_2 = -5$ و جواب عبارت است از

$$y = (3 - 5x)e^{2x}$$

بدین ترتیب بحث دربارهٔ هر سه حالت کامل می‌شود و می‌توانیم نتایج را به صورت جدول صفحه قبل جمع‌بندی کنیم.

مسائل بخش ۴.۲

تحقیق کنید که معادلات زیر جوابهای معادلات دیفرانسیل داده شده هستند و به کمک آنها يك جواب عمومی با مقدار حقیقی، به صورت (۶)، به دست بیاورید.

$$y = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}, \quad y'' + \omega^2 y = 0 \quad ۱.$$

$$y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \quad y'' + 16y = 0 \quad ۲.$$

$$y = c_1 e^{-(2+2i)x} + c_2 e^{-(2-2i)x}, \quad y'' + 4y' + 8y = 0 \quad ۳.$$

$$y = c_1 e^{-(\alpha-i)x} + c_2 e^{-(\alpha+i)x}, \quad y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + 1)y = 0 \quad ۴.$$

$$y = c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x}, \quad y'' - 2y' + 10y = 0 \quad ۵.$$

بیان کنید که آیا معادله داده شده متناظر با حالات ۱، ۲ یا ۳ است و جوابی عمومی شامل توابع با مقدار حقیقی را پیدا کنید.

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad ۷. \quad y'' - 2y' - 3y = 0 \quad ۶.$$

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \quad ۹. \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad ۸.$$

$$2y'' + 3y' - 2y = 0 \quad ۱۱. \quad y'' - 6y' + 25y = 0 \quad ۱۰.$$

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad ۱۳. \quad y'' + 2y' + (\pi^2 + 1)y = 0 \quad ۱۲.$$

$$8y'' - 2y' - y = 0 \quad ۱۵. \quad y'' + 2ky' + k^2 y = 0 \quad ۱۴.$$

۱۶. با فرض آنکه (۶) جوابی از (۱) باشد a و b را برحسب p و q بیان کنید.

معادله دیفرانسیلی به صورت (۱) طوری پیدا کنید که y يك جواب عمومی باشد

$$y = e^{-x} (A \cos x + B \sin x) \quad ۱۷.$$

$$y = e^{-2x} (A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) \quad ۱۸.$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{4x} \quad .19$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-x/2} \quad .20$$

$$y = A \cosh 3x + B \sinh 3x \quad .21$$

$$y = e^{-x/2} (A \cos 2x + B \sin 2x) \quad .22$$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} \quad .23$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{kx} \quad .24$$

۲۵. روش تغییر پارامترها را در مورد $y'' - 2y' + y = 0$ ، با استفاده از $y_1 = e^x$ ، به کار برید.

۲۶. روش تغییر پارامترها را در مورد $y'' + 10y' + 25y = 0$ ، با استفاده از $y_1 = e^{-5x}$ ، به کار برید.

۲۷. مستقیماً تحقیق کنید در حالت ریشه مضاعف، $x e^{\lambda x}$ که در آن $\lambda = -a/2$ ، جوابی از (۱) است.

۲۸. تحقیق کنید که هرگاه (۱) ریشه مضاعف نداشته باشد آنگاه $x e^{\lambda x}$ جواب (۱) نیست. معادله دیفرانسیلی به صورت (۱) چنان پیدا کنید که در آن y داده شده یک جواب عمومی باشد و ثابتها را طوری معین نمایید که شرایط اولیه داده شده صادق باشند.

$$y = e^{-2x} (A \cos x + B \sin x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3 \quad .29$$

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}, \quad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 1/e^2 \quad .30$$

$$y = e^x (A \cos \pi x + B \sin \pi x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 - \pi \quad .31$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-\pi x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 - \pi \quad .32$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4 \quad .33$$

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6 \quad .34$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 8 \quad .35$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \quad .36$$

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3 \quad .37$$

$$4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1 \quad .38$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0. \quad ۳۹$$

۴۰. مثال ۳ را در نظر بگیرید و با جواب عمومی دیگری شروع کنید، مثلاً

$$y(x) = c_1 e^{(1+3i)x} + c_2 e^{(1-3i)x}$$

نشان دهید که از شرایط اولیه به دست می آوریم $c_1 = 2 - i/2$ و $c_2 = 2 + i/2$ و جواب خصوصی حاصل را می توان طوری ساده نمود که با مثال ۳ همانند شود. این کار روشن می نماید که انتخاب يك جواب عمومی ضروری نیست.

۵.۲ عملگرهای دیفرانسیل

منظور از يك عملگر تبدیلی است که تابعی را به تابع دیگر تبدیل نماید. عملگرها و تکنیکهای مربوطه («دشهای عملیاتی») نقش روزافزونی را در ریاضیات مهندسی بازی می کنند.

مشتقگیری اشاره بر عملگری به شکل زیر دارد. فرض کنید D معرف مشتقگیری نسبت به x باشد یعنی

$$Dy = y'$$

D يك عملگر است که y را (که مشتق پذیر فرض می شود) به مشتق خود y' تبدیل می نماید. مثلاً

$$D(x^2) = 2x, \quad D(\sin x) = \cos x$$

با دوبار به کار بردن D مشتق دوم $D(Dy) = Dy' = y''$ را به دست می آوریم. بسادگی می نویسیم $D(Dy) = D^2 y$ ، بنا بر این

$$Dy = y', \quad D^2 y = y'', \quad D^3 y = y''', \quad \dots$$

بطور کلیتر

$$(۱) \quad L = P(D) = D^2 + aD + b$$

را عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم نامند. در اینجا a و b ثابت هستند. p مبین «چند جمله ای» و L بمعنی «خطی» است (که در زیر تشریح شده است). در صورتی که L روی يك تابع y (که دوبار مشتق پذیر فرض می شود) اعمال گردد نتیجه می شود

$$(۲) \quad L[y] = (D^2 + aD + b)y = y'' + ay' + by$$

L يك عملگر خطی است. بنا به تعریف این بدان مفهوم است که به ازای هر دو عدد ثابت α و β و هر دو تابع y و w که L روی آنها قابل اعمال باشد داریم

$$L[\alpha y + \beta w] = \alpha L[y] + \beta L[w]$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن $y''' + ay' + by = 0$ را حالا می توان به سادگی چنین نوشت

$$(3) \quad L[y] = P(D)[y] = 0$$

به عنوان مثال

$$(4) \quad L[y] = (D^2 + D - 6)y = y'' + y' - 6y = 0$$

نظر به اینکه

$$D[e^{\lambda x}] = \lambda e^{\lambda x}, \quad D^2[e^{\lambda x}] = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

از (۲) و (۳) داریم

$$(5) \quad P(D)[e^{\lambda x}] = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x} = 0$$

و این مؤید نتیجه بخش قبل است که گفتیم $e^{\lambda x}$ وقتی و تنها وقتی جوابی از (۳) است که λ جوابی از معادله مشخصه $P(\lambda) = 0$ باشد. هرگاه $P(\lambda)$ دو ریشه مختلف داشته باشد يك پایه به دست می آوریم. هرگاه $P(\lambda)$ ریشه مضاعف داشته باشد ما به جواب مستقل دیگری نیاز داریم. با مشتقگیری از (۵) نسبت به λ و تعویض مشتق نسبت به λ و x به دست می آوریم

$$P(D)[xe^{\lambda x}] = P'(\lambda)e^{\lambda x} + P(\lambda)xe^{\lambda x} = 0$$

که در آن $P' = dP/d\lambda$. برای ریشه مضاعف، $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$. این نشان می دهد که جواب مطلوب دوم $xe^{\lambda x}$ است که با جایگزینی قابل تأیید است.

$P(\lambda)$ در عرف عام جبر يك چندجمله ای برحسب λ است. گذاشتن D به جای λ «چندجمله ای عملگر» $P(D)$ را داریم. نکته این «حساب عملیاتی» این است که با $P(D)$ می توان درست مانند يك کمیت جبری رفتار کرد. بخصوص می توانیم روی آن اعمال فاکتورگیری انجام دهیم. برای روشن شدن مطلب

$$(D+3)(D-2) = D^2 + D - 6$$

را که در (۴) آمده است در نظر بگیرد. بنابه تعریف $(D-2)y = y' - 2y$. از اینرو

$$\begin{aligned} (D+3)(D-2)y &= (D+3)[y' - 2y] \\ &= y'' - 2y' + 3y' - 6y \\ &= y'' + y' - 6y \end{aligned}$$

که نشان می دهد فاکتورگیری بالا «مجاز» است یعنی، به همان نتیجه منجر می شود. يك جواب $y = e^{-2x}$ عبارت از $y = e^{-2x}$ است. $y = e^{2x}$ جوابی برای $(D-2)y = 0$ است. این کار پایه به دست آمده قبلی را می دهد. نتیجه غیرمنتظره نیست

زیرا همان شیوه فاکتورگیری $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$ را برای عملگر چندجمله‌ای $P(D)$ به کار بردیم.

اکنون بدون آنکه وارد جزئیات شویم می‌خواهیم یادآور شویم که روشهای عملگری را برای عملگرهای $M = D^2 + fD + g$ با ضرایب متغیر $f(x)$ و $g(x)$ نیز می‌توان به کار برد اما این کار بسیار دشوارتر است و به دقت بیشتری نیاز دارد. مثلاً $x D \neq D x$ ، زیرا

$$x D y = (x y)' = y + x y' \quad \text{اما} \quad x D y = x y'$$

اگر حساب عملیاتی به وضعیتهای ساده‌ای محدود شده بود که در این بخش نشان داده شده‌اند شاید ارزش یادآوری نمی‌داشتند. در واقع، چنانچه در فصل ۵ خواهیم دید توانایی روش عملگر خطی در مسائل مهندسی پیچیده‌تری نمودار می‌شود.

مسائل بخش ۵.۲

در هر مورد عملگر داده شده را روی هر يك از توابع مقروض اعمال کنید.

$$D - 4; \quad 4x^2 - 3x, \quad 6e^{4x}, \quad \cos x - \sin x \quad .1$$

$$D^2 + 3D; \quad \cosh 3x, \quad e^{-x} + e^{4x}, \quad 10 - e^{-2x} \quad .2$$

$$(D - 2)(D + 1); \quad e^{4x}, \quad xe^{4x}, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x} \quad .3$$

$$(D + 3)^2; \quad x^3 + \sin \pi x, \quad e^{-2x}, \quad xe^{-2x} \quad .4$$

۵. ثابت کنید که عملگر دیفرانسیل D خطی است.

۶. با انتخاب $\alpha = 3$ ، $\beta = -2$ ، $y = e^{-2x}$ و $w = \sin x$ خطی بودن L را در (۲) روشن نمایید.

۷. ثابت کنید که عملگر L در (۲) خطی است.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

$$(D^2 - D - 2)y = 0 \quad .9 \quad (D^2 + 4D + 4)y = 0 \quad .8$$

$$(D^2 + 2D + 4\pi^2 - 1)y = 0 \quad .11 \quad (4D^2 + 12D + 13)y = 0 \quad .10$$

$$(6D^2 - D - 1)y = 0 \quad .13 \quad (4D^2 + 20D + 25)y = 0 \quad .12$$

۱۴. با محاسبه مستقیم تحقیق کنید که $D^2[e^{-kx}f(x)] = e^{-kx}(D - k)^2f(x)$ با انتخاب $e^{-kx}f(x) = c_1 + c_2x$ نشان دهید که $f(x)$ يك جواب عمومی (۳) در حالت ریشه مضاعف است.

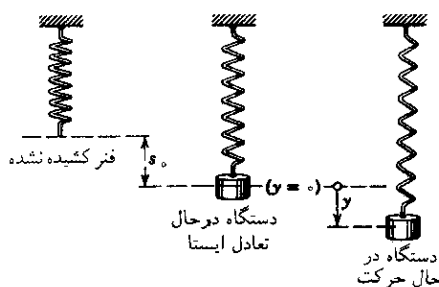
۱۵. هرگاه $y = 0$ $(D^2 + \alpha D + \epsilon)$ طوری باشد که معادله مشخصه دارای ریشه‌های متمایز λ و μ باشد نشان دهید که يك جواب خصوصی عبارت است از

$$y = \frac{1}{\mu - \lambda} (e^{\mu x} - e^{\lambda x})$$

از این رابطه با فرض $\lambda \rightarrow \mu$ و به کاربردن قانون لوبیتال* نسبت به y که تابعی از μ در نظر گرفته می‌شود جوابی به صورت $x e^{\lambda x}$ به دست بیاورید.

۶.۲ نوسانات آزاد

معادلات دیفرانسیل همگن خطی با ضرایب ثابت کاربردهای مهندسی مهمی دارند. در این بخش به بررسی یکی از این کاربردها، که بنیادی است، خواهیم پرداخت. این کاربرد از مکانیک گرفته شده است اما بعداً می‌بینیم که با مدارهای الکتریکی شباهت کاملی دارد. در بحثمان تجربه بیشتری دربارهٔ مدل‌سازی یعنی، ساختن مدل‌های ریاضی دستگاه‌های فیزیکی، کسب خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که تمایز ریاضی بین سه حالت (۱، ۲، ۳) بخش ۴.۲ از نظر فیزیکی قابل توجه است زیرا این حالات متناظر با سه نوع حرکت مختلف اند.



شکل ۳۴. دستگاه مکانیکی مورد بحث

فرض معمولی را در نظر می‌گیریم که در مقابل فشردگی و کشیدگی مقاوم است و بطور قائم از نقطه ثابتی آویزان شده است (شکل ۳۴). به انتهای فنر وزنه‌ای به جرم m وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم جرم فنر در مقابل m ناچیز باشد. هرگاه وزنه را تا فاصلهٔ معینی پائین آورده و رها کنیم حرکتی انجام می‌شود. فرض می‌کنیم حرکت وزنه صرفاً عمودی است.

می‌خواهیم حرکت این دستگاه مکانیکی را معلوم کنیم. برای این منظور نیروهای^۱ را که بر جسم در حال حرکت اثر می‌کنند در نظر می‌گیریم. این کار منجر به يك معادلهٔ دیفرانسیل می‌شود و با حل این معادله می‌توانیم جابجایی را به صورت تابعی از زمان به دست بیاوریم.

می‌توانیم جهت به سمت پائین را جهت مثبت و نیروهای^۱ را که جهت آنها بطرف پایین است مثبت و نیروهای^۱ را که جهتشان بطرف بالاست منفی بگیریم.
بارزترین نیروی وارد بر جسم نیروی جاذبهٔ ثقلی

$$(۱) \quad F_1 = mg$$

است که در آن m جرم جسم و g (۹۸۰ cm/s^۲) شتاب ثقل است.
نیروی دیگر مؤثر بر جسم نیروی فنر است و وقتی ظاهر می‌شود که فنر کشیده شود. تجربه نشان می‌دهد که این نیرو با تغییر طول فنر متناسب است یعنی

$$F = ks \quad \text{(قانون هوک)^۲}$$

۱. مهمترین دستگاههای واحدها در جدول زیر نشان داده شده‌اند. دستگاه مهندسی در حال منسوخ شدن است. از سال ۱۹۶۰ دستگاه Mks را به نام دستگاه بین‌المللی آحاد (با علامت اختصاری دستگاه SI)، و صورتهای مختصر s را برای ثانیه و N را (بجای nt) برای نیوتن به کار می‌برند.

دستگاه واحدها	طول	جرم	زمان	نیرو
دستگاه Cgs	سانتیمتر (cm)	گرم (gm)	ثانیه (sec)	دین (dyne)
دستگاه Mks	متر (m)	کیلوگرم (kg)	ثانیه (sec)	نیوتن (N)
دستگاه مهندسی	فوت (ft)	اسلک (slug)	ثانیه (sec)	پوند (lb)

$$1 \text{ ft} = ۳۰.۴۸۰۰ \text{ cm} = ۰.۳۰۴۸۰۰ \text{ m}, \quad 1 \text{ slug} = ۱۴۵۹۴ \text{ g} = ۱۴.۵۹۴ \text{ kg}$$

$$1 \text{ lb} = ۴.۴۴۸۲۲ \text{ dyne} = ۴.۴۴۸۲۲ \text{ N}$$

برای جزئیات بیشتر، به عنوان نمونه، مراجعه کنید به:

D. Halliday and R. Resnick, *Physics* New York: Wiley, 1966.

AN American National Standard. ASTM/IEEE Standard Metric Practice, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 345 East 47th Street, New York, N.Y. 10017.

۲. رابرت هوک Robert Hook (۱۶۳۵-۱۷۰۳)، فیزیکدان انگلیسی.

که در آن s عبارت است از افزایش طول و ضریب ثابت تناسب یعنی k مدول (ثابت) فنر نامیده می‌شود.

هرگاه $s = 1$ ، آنگاه $F = k$. هر اندازه فنر سخت‌تر باشد k بیشتر است.

وقتی که جسم در حال تعادل است وضعیت آن را حالت تعادل استاتیکی می‌نامیم. واضح است که در این وضعیت فنر به اندازه s کشیده شده است به‌طوری‌که برآیند نیروی مربوط به فنر و نیروی وزن در (۱) صفر است. بنابراین نیروی فنر رو به بالا اثر می‌کند و اندازه آن برابر وزن جسم است یعنی،

$$(2) \quad ks_0 = mg$$

فرض کنید $y = y(t)$ معرف جابجایی جسم از حالت تعادل استاتیکی باشد که جهت مثبت را به‌طرف پایین فرض نموده‌ایم (شکل ۳۴).

بنابراین قانون هوک نیروی فنر متناظر با جابجایی y چنین است

$$(3) \quad F_y = -ks_0 - ky$$

که این عبارت از برآیند نیروی فنر $-ks_0$ است وقتی که جسم در حالت تعادل استاتیکی است، نیروی اضافی فنر $-ky$ ، که به علت جابجایی ایجاد شده است. توجه داشته باشید که علامت آخرین جمله (۳) درست انتخاب شده باشد زیرا وقتی y مثبت است $-ky$ منفی است و بنا بر بحثی که انجام شد نشان دهنده نیرویی به سمت بالاست، در حالیکه برای y منفی $-ky$ نمایانگر نیرویی به سمت پایین است.

برآیند نیروهای F_1 و F_y که از (۱) و (۳) نتیجه می‌شوند عبارت است از

$$F_1 + F_y = mg - ks_0 - ky$$

که با توجه به (۲) چنین می‌شود

$$(4) \quad F_1 + F_y = -ky$$

دستگاه غیر میرا. هرگاه میرایی دستگاه به اندازه‌ای کوچک باشد که بتوان از آن صرف‌نظر نمود آنگاه (۴) برآیند تمام نیروهای مؤثر بر جسم است. اکنون معادله دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از **قانون دوم نیوتن**

$$\text{نیرو} = \text{شتاب} \times \text{جرم}$$

به دست آورد که در آن نیرو عبارت است از برآیند نیروهای مؤثر بر جسم در هر لحظه است. در این حالت شتاب عبارت است از $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ و برآیند نیروها از (۴) به دست می‌آید. از اینرو

$$m\ddot{y} = -ky$$

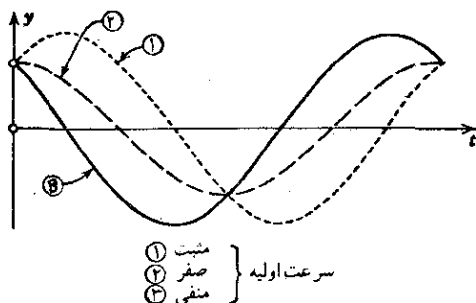
بنابراین حرکت دستگاه مورد نظرمان از معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر به دست می‌آید

$$(۵) \quad m\ddot{y} + ky = 0$$

جواب عمومی عبارت است از

$$(۶) \quad y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (\omega_0 = \sqrt{k/m})$$

حرکت مربوطه را نوسان همساز نامند. شکل ۳۵ صورتهای نوعی منحنی (۶) مربوط به شرایط اولیه متفاوت را نشان می‌دهد.



شکل ۳۵. نوسانات همساز

با به کار بردن دستور جمع کسینوسها دانشجویی تواند تحقیق کند که (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت [همچنین (۱۳) را در ضمیمه ۳ ببینید]

$$(۶*) \quad y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = B/A)$$

چون دوره تناوب توابع مثلثاتی (۶) برابر $\omega_0 / 2\pi$ است جسم در هر ثانیه $\omega_0 / 2\pi$ نوسان دارد. کمیت $\omega_0 / 2\pi$ را بسامد نوسان نامیده و بر حسب دور بر ثانیه اندازه گیری می‌شود. نام جدیدی برای دور بر ثانیه هرتز^۱ (Hz) است.

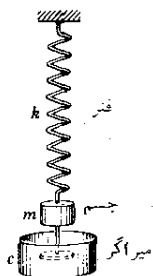
دستگاه میرا. هر گاه جسمی را به یک میراگر وصل کنیم (شکل ۳۶) آنگاه بایدد میرایی ناشی از چسبندگی را به حساب بیاوریم. نیروی میرایی در جهت خلاف حرکت لحظه‌ای جسم است و فرض می‌کنیم که این نیرو با سرعت جسم $dy/dt = \dot{y}$ متناسب است. به طور کلی این فرض حداقل برای سرعتهای کم تقریب خوبی است. بنابراین نیروی

۱. ه. هرتز (H. Hertz)، ۱۸۵۷-۱۸۹۴، فیزیکدان آلمانی.

میرایی به شکل زیر است

$$F_v = -c\dot{y}$$

حال نشان می‌دهیم که ثابت میرایی c مثبت است. هرگاه $\dot{y}$ مثبت باشد جسم بطرف پایین حرکت می‌کند (جهت مثبت محور y ها) و $-c\dot{y}$ باید نیرویی بسمت بالا باشد یعنی، بنا بر قرارداد، $-c\dot{y} < 0$ که ایجاب می‌کند $c > 0$. وقتی $\dot{y}$ منفی است جسم به سمت بالا حرکت می‌کند و $-c\dot{y}$ باید نمایانگر نیرویی به سمت پایین باشد یعنی $-c\dot{y} > 0$ یا $c > 0$.



شکل ۳۶. دستگاه میرا

حال برآیند نیروهای وارد بر جسم عبارت‌اند از [به (۴) رجوع کنید]

$$F_s + F_v + F_g = -ky - c\dot{y}$$

از اینرو بنا به قانون دوم نیوتن،

$$m\ddot{y} = -ky - c\dot{y}$$

و می‌بینیم که حرکت دستگاه مکانیکی میرا با معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$(۷) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

بیان می‌شود. معادله مشخصه نظیر آن عبارت است از

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

ریشه‌های این معادله چنین‌اند

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk}$$

با استفاده از علامتگذاریهایی اختصاری

$$(۸) \quad \beta = \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{c}{2m}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\lambda_1 = -\alpha - \beta \quad \text{و} \quad \lambda_2 = -\alpha + \beta$$

شکل جواب (۷) به مقدار میرایی بستگی خواهد داشت و همانند بخش ۲.۲ می‌توانیم سه حالت متمایز زیر را مشخص کنیم:

حالت ۱. $c^2 > 4mk$ ریشه‌های حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 (میرایی شدید)

حالت ۲. $c^2 < 4mk$ ریشه‌های مختلط مزدوج (میرایی خفیف)

حالت ۳. $c^2 = 4mk$ یک ریشه حقیقی مضاعف (میرایی بحرانی)

این سه حالت را به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم

حالت ۱. میرایی شدید. وقتی ثابت میرایی c به اندازه‌ای بزرگ باشد که

$c^2 > 4mk$ ، در آن صورت λ_1 و λ_2 ریشه‌های حقیقی متمایزند. جواب عمومی (۷) عبارت است از

$$(۹) \quad y(t) = c_1 e^{-(\alpha - \beta)t} + c_2 e^{-(\alpha + \beta)t}$$

و می‌بینیم که در این حالت جسم نوسان نمی‌کند. به ازای $t > 0$ در (۹) نماها هر دو منفی‌اند زیرا $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ و $\alpha^2 - k/m < \alpha^2$. بنابراین وقتی t به سمت بینهایت میل می‌کند هر دو عبارت در (۹) به سمت صفر میل می‌کنند. عملاً، پس از زمان نسبتاً طولانی وزنه به حالت تعادل استاتیکی ($y = 0$) می‌رسد. این مطلب از نظر فیزیکی قابل فهم است زیرا میرایی از دستگاه انرژی می‌گیرد و نیروی خارجی‌ای برای ادامه حرکت وجود ندارد. شکل ۳۷ رابطه (۹) را به ازای بعضی شرایط اولیه تنوعی نشان می‌دهد.

حالت ۲. میرایی خفیف. این جالبترین حالت است. هرگاه ثابت میرایی c

به اندازه‌ای کوچک باشد که $c^2 < 4mk$ آنگاه β در (۸) موهومی محض است یعنی

$$(۱۰) \quad \omega^* = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} \quad \text{که در آن} \quad \beta = i\omega^*$$

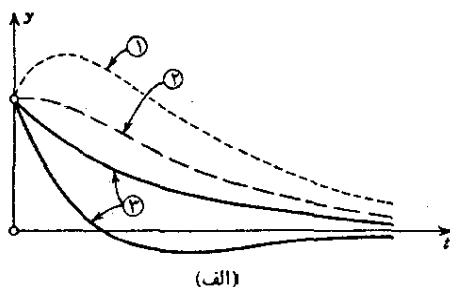
(می‌نویسیم ω^* تا با ω که در بخش ۱۳.۲ به کار می‌بریم اشتباه نشود.) ریشه‌های معادله مشخصه مزدوج یکدیگرند، یعنی

$$\lambda_1 = -\alpha + i\omega^* \quad , \quad \lambda_2 = -\alpha - i\omega^*$$

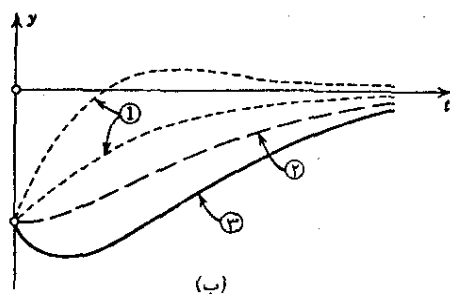
و جواب عمومی عبارت است از

$$(۱۱) \quad y(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega^* t + B \sin \omega^* t) = C e^{-\alpha t} \cos(\omega^* t - \delta)$$

که در آن $\tan \delta = B/A$ و $C^2 = A^2 + B^2$ [مانند (۶*)].



سرعت اولیه $\left\{ \begin{array}{l} ۱ \text{ مثبت} \\ ۲ \text{ صفر} \\ ۳ \text{ منفی} \end{array} \right.$



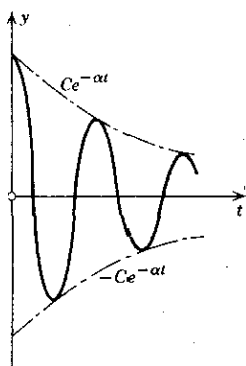
شکل ۳۷. حرکات نوعی در حالت میرایی شدید

(الف) جابجایی اولیه مثبت

(ب) جابجایی اولیه منفی

این جواب نمایانگر نوسانات میراست. چون $\cos(\omega^* t - \delta)$ بین -۱ و $+۱$ تغییر می کند منحنی جواب، در شکل ۳۸، بین منحنیهای $y = Ce^{-\alpha t}$ و $y = -Ce^{-\alpha t}$ قرار دارد و با این منحنیها وقتی تماس حاصل می کند که $\omega^* t - \delta = \pi$ مضرب صحیحی از π باشد.

بسامد نوسان $\omega^* / 2\pi$ دور بر ثانیه است. از (۱۰) می بینیم که هر چقدر $c (> 0)$ کوچکتر باشد ω^* بزرگتر است و نوسان سریعتر انجام می گیرد. وقتی c به سمت صفر میل کند ω^* به سمت $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ میل می کند که متناظر با نوسانات همساز (۶) است.

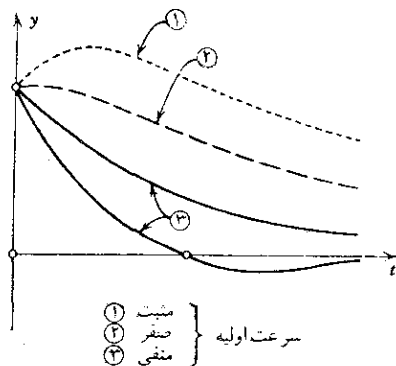


شکل ۳۸. نوسان میرا در حالت ۲

حالت ۳. میرایی بحرانی. اگر $c^2 = 4mk$ آن وقت $\beta = 0$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$ جواب عمومی عبارت است از

$$(۱۲) \quad y(t) = (c_1 t + c_2) e^{-\alpha t}$$

چون تابع نمایی هیچگاه صفر نمی شود و $c_1 t + c_2$ می تواند حداکثر یک صفر مثبت داشته باشد نتیجه می شود که حرکت حداکثر یک عبور از حالت تعادل ($y=0$) دارد.



شکل ۳۹. میرایی بحرانی

هرگاه شرایط اولیه طوری باشد که c_1 و c_2 همعلامت باشند به هیچ وجه چنین وضعی پیش نمی آید. این شبیه حالت ۱ است. شکل ۳۹ اشکال نوعی (۱۲) را نشان می دهد.

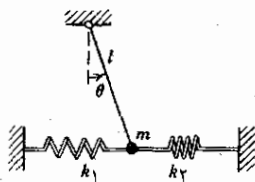
مسائل بخش ۶.۲

نوسانات همساز (حرکت غیر میرا)

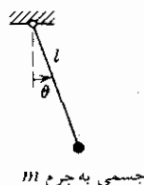
۱. چگونه بسامد يك نوسان همساز به شرایط اولیه بستگی دارد؟ هرگاه يك جسم ۲۰ نیوتنی با يك جسم ۴۰ نیوتنی تعویض شود و فنر همان فنر قبلی باشد فرکانس چگونه تغییر می یابد؟
۲. رابطه (۶) را با فرض $m = ۱۰ \text{ kg}$ و $k = ۱۰ \text{ N/m}$ در نظر بگیرید. A و B را طوری پیدا کنید که جابجایی اولیه ۵۱ متر و سرعت اولیه برابر با (الف) ۵۱- متر بر ثانیه؛ (ب) صفر؛ (پ) ۵۱ متر بر ثانیه باشد. این توابع را به شکل $(*)$ نمایش دهید و نمودار منحنیهای آنها را رسم کنید.
۳. نمودار نوسان همساز (۶) را به ازای مقادیر مختلف مدول فنر، مثلاً، ۱، ۴، ۹، ۱۶، $k = ۱$ رسم کنید، فرض بر این است که جرم برابر ۱ باشد و حرکت از حالت $y = ۱$ و سرعت اولیه صفر شروع شود. فرکانسها چه هستند؟
۴. يك فنر طوری است که وزنه ۲۰ نیوتنی آن را ۸ سانتیمتر می کشد. انتهای پایینی فنر در حالیکه وزنه ۲۰ نیوتنی به آن وصل است به اندازه ۵ سانتیمتر پایین کشیده شده و سرعتی برابر ۳۰ cm/s به طرف بالا به آن داده می شود. موقعیت وزنه را در تمام زمانهای بعدی به فرض آنکه میرایی صفر باشد پیدا کنید.
۵. نوسان همساز (۶) را که در آن جابجایی اولیه y و سرعت اولیه v است معین نمایید و آن را به شکل $(*)$ نمایش دهید.
۶. اگر يك فنر طوری باشد که وزنه ۲۰ N آن را به اندازه ۲ سانتیمتر بکشد بسامد نوسان همساز آن چه اندازه است؟ دوره تناوب چقدر است؟
۷. نشان دهید که بسامد يك نوسان همساز يك جسم متصل به فنر عبارت است از $\frac{1}{2\pi} \sqrt{g/s_0}$ و بنا بر این دوره تناوب آن $\frac{2\pi}{\sqrt{g/s_0}}$ است که در آن s_0 افزایش طول نشان داده شده در شکل ۳۴ است.
۸. هرگاه جسمی به فنری به مدول $k_1 = ۱۰$ آویزان باشد و این فنر خود به فنری به مدول $k_2 = ۲۰$ آویخته شده باشد مدول k این ترکیب فنرها چیست؟
۹. (آونگ) بسامد نوسان آونگ به طول l شکل ۴۰ را تعیین کنید. از مقاومت هوا و وزن میله صرف نظر کنید. فرض کنید A به اندازه کافی کوچک باشد که $\sin \theta \approx \theta$.
۱۰. ساعتی دارای پاندولی به طول ۱ متر است. هر دفعه که حرکت آونگ در يك جهت

تمام می شود درموقع رسیدن به حالت اولیه اش يك ضربه می زند. درهر دقیقه ساعت چند ضربه می نوازد؟

۱۱. فرض کنید که دستگاه شکل ۴۱ شامل آونگی نظیر مسئله ۹ و دو فنر با ثابتهای k_1 و k_2 باشد که به جسم مرتعش متصل و دو دیوار قائم است به طوری که $\theta = 0$ حالت تعادل استاتیکی است و $\theta(t)$ درحین حرکت کوچک باقی می ماند. دوره تناوب T را پیدا کنید.

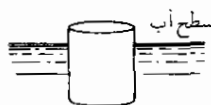


شکل ۴۱. دستگاه مسئله ۱۱



شکل ۴۰. آونگ مسئله ۹

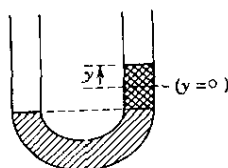
۱۲. يك شناور استوانه ای به قطر ۶۰ سانتیمتر با محور قائم در آب قرار گرفته است (شکل ۴۲). در صورتی که کمی آن را فشار بدهیم و رها نماییم ارتعاشی با دوره تناوب ۲ ثانیه پیدا می کند. وزن جسم شناور را پیدا کنید. راهنمایی: بنا به اصل ارشمیدس* نیروی رانش برابر وزن آب جابه جا شده توسط جسم است (که فرض می شود قسمتی از آن یا تمام آن در آب فرو رفته باشد).



شکل ۴۲. شناور مسئله ۱۲

۱۳. اگر ۱ لیتر آب بتواند دريك لوله U شکل به قطر ۲ سانتیمتر (شکل ۴۳) به طرف بالا و پائین ارتعاش داشته باشد بسامد چقدر است؟ از اصطکاک صاف نظر کنید.

۱۴. (میرایی) حرکت $y(t)$ دستگاه مکانیکی که با معادله (۷) توصیف شد برای میرایی درحال افزایش مثلا $c = 0, 1, 2, 10$ را معین کنید و نمودار آن را رسم نمایید. فرض کنید $m = 1$, $k = 1$, جابه جایی اولیه ۱ و سرعت اولیه صفر باشد.



شکل ۴۳. لوله مسئله ۱۳

حرکت میرایی شدید

۱۵. نشان دهید برای آنکه (۹) در شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $v(0) = v_0$ صدق کند باید داشته باشیم

$$c_1 = \frac{[(1 + \alpha/\beta)y_0 + v_0/\beta]}{2} \quad \text{و} \quad c_2 = \frac{[(1 - \alpha/\beta)y_0 - v_0/\beta]}{2}$$

۱۶. نشان دهید که در حالت میرایی شدید، جسم حداکثر یک مرتبه می تواند از $y=0$ بگذرد (شکل ۳۷).

۱۷. در مسئله ۱۶ شرایطی برای c_1 و c_2 پیدا کنید به طوری که جسم به هیچ وجه از $y=0$ عبور نکند.

۱۸. نشان دهید که یک حرکت میرایی شدید با جابجایی اولیه صفر نمی تواند از $y=0$ بگذرد.

حرکت میرایی خفیف (نوسان میرا)

۱۹. نشان دهید که نوسان میرایی که در شرایط اولیه $y(0) = y_0$ و $v(0) = v_0$ صدق کند عبارت است از

$$y = e^{-\alpha t} (y_0 \cos \omega^* t + \omega^{*-1} (v_0 + \alpha y_0) \sin \omega^* t)$$

۲۰. سه نوسان میرا به صورت

$$y = e^{-t} (A \cos t + B \sin t) = C e^{-t} \cos(t - \delta)$$

پیدا کنید که از $y=1$ شروع شوند و سرعت اولیه آنها به ترتیب $-1, 0, 1$ باشد. نمودارهای مربوطه را رسم کنید.

۲۱. نشان دهید که بسامد $\omega^*/2\pi$ در حرکت میرای خفیف با افزایش میرایی کاهش می یابد.

۲۲. نشان دهید که برای میرایی کوچک داریم

$$\omega^* \approx \omega_0 \left(1 - \frac{c^2}{\lambda m k}\right)$$

۲۳. مقادیر t نظیر ما گزیم و می نیمم نوسان $y(t) = e^{-t} \sin t$ را معین کنید. با رسم نمودار $y(t)$ نتیجه حاصل را امتحان کنید.

۲۴. نشان دهید که ما گزیم و می نیمم مقادیر یک حرکت میرای خفیف در فواصل زمانی مساوی رخ می دهد و فاصله بین دو ما گزیم متوالی $2\pi/\omega^*$ است.

۲۵. (تئول لگاریتمی) ثابت کنید که نسبت دو دامنه ما گزیم متوالی در یک نوسان میرا (۱۱) ثابت است، لگاریتم طبیعی این نسبت $\Delta = 2\pi\alpha/\omega^*$ است. Δ را نزول لگاریتمی نوسان نامند. Δ را در مورد $y = e^{-t} \cos t$ پیدا کنید و مقادیر t متناظر به ما گزیم و می نیمم را معین نمایید.

۲۶. حرکت میرایی خفیف جسمی به جرم $m = 0.5 \text{ kg}$ را در نظر بگیرید. هر گاه زمان بین دو ما گزیم متوالی ۱ ثانیه باشد و دامنه ما گزیم بعد از ۱۰ دور به $1/2$ مقدار اولیه کاهش یابد ثابت میرایی دستگاه چیست؟

میرایی بحرانی

۲۷. حرکت بحرانی (۱۲) را که از y با سرعت اولیه v شروع می شود پیدا کنید.

۲۸. تحت چه شرایطی (۱۲) در یک لحظه $t > 0$ دارای یک ما گزیم یا می نیمم است؟

۲۹. دامنه ما گزیم یا می نیمم را در مسئله ۲۸ بر حسب مقادیر اولیه y و v نمایش دهید.

۳۰. (کمانش یک میله) معادله $y'' + \gamma^2 y = 0$ همچنین کاربردهایی دارد که در آنها متغیر مستقل یک متغیر فضایی است (بجای زمان t). شکل ۴۴ مثال مشهوری را نشان می دهد که عبارت است از کمانه کردن یک میله تحت تأثیر یک نیروی قائم ثابت F که به قسمت بالایی میله اعمال شده است. در مکانیک نشان داده شده است که منحنی $y(x)$ مربوط به میله تحت تأثیر بار، یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر است

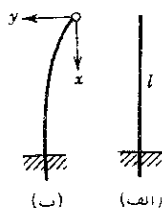
$$EIy'' = -Fy$$

E مدول کشسانی مربوط به جنس میله است. I گشتاور لختی سطح مقطع (که دایره ای فرض می شود) نسبت به محوری است که از مرکز دایره می گذرد. فرض می کنیم E و I ثابت باشند، قسمت پائینی میله در گیر و انتهای بالایی آن آزاد است. نشان دهید که نسبت به مختصات نشان داده شده در شکل ۴۴ ب این فرضها به شرایط

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0$$

منجر می شود که در آن l طول میله است و فرض می شود y کوچک باشد. یک جواب به ازای هر F عبارت از $y = 0$ است. (شکل ۴۴ الف) اما می دانیم که اگر F از یک مقدار بحرانی تجاوز کند تعادل شکل ۴۴ الف دیگر پایدار نیست یعنی هر گاه جزئی جابجایی حادث شود میله به وضع اول بر نمی گردد بلکه به صورت منحنی

درمی آید. نشان دهید که این نیروی بحرانی عبارت است از $F = (\pi/2l)^2 EI$ بحرانی و $y(x)$ متناظر با این نیرو در شکل ۴۴ ب قسمتی از يك منحنی سینوسی است.



شکل ۴۴. کماش يك میله نازك

۷.۲ معادله کشی

معادله کشی یا معادله اویلر^۱

$$(۱) \quad x^2 y'' + ax y' + by = 0 \quad (a \text{ و } b \text{ ثابت اند})$$

را می توان با عملیات كاملاً جبری نیز حل كرد. با جایگزینی

$$(۲) \quad y = x^m$$

و مشتقات آن در معادله (۱) در می یابیم

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + ax m x^{m-1} + bx^m = 0$$

با حذف جمله مشترك x^m ، كه وقتی $x \neq 0$ باشد صفر نیست، معادله كمکی

$$(۳) \quad m^2 + (a-1)m + b = 0$$

را به دست می آوریم. هر گاه ریشه های m_1 و m_2 این معادله متفاوت باشند آنگاه دو تابع

$$y_1(x) = x^{m_1} \quad \text{و} \quad y_2(x) = x^{m_2}$$

به ازای همه x هایی كه برای آنها این دو تابع تعریف شده اند، تشكيل يك پایه برای

۱. **لئونارد اویلر** (Leonard Euler) ۱۷۰۷-۱۷۸۳، ریاضیدان خلاق سوئیسی؛ او تقریباً در تمام رشته های ریاضی و کاربردهایش در مسائل فیزیکی منشأ اثر بود. کتابهای مهم او در جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال شامل نتایج متعدد کارهای تحقیقی شخص اوست. ریاضیدان بزرگ فرانسوی **آگوستین لویی کشی** (Augustin Louis Cauchy)، ۱۷۸۹-۱۸۵۷، پدر آنالیز مدرن است. او تجربه زیادی درباره نظریه سریهای نامتناهی، آنالیز مختلط و معادلات دیفرانسیل داشت.

جوابهای (۱) می‌دهند. جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$(۲) \quad y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad (c_1 \text{ و } c_2 \text{ دلخواه‌اند})$$

مثال ۱

معادله زیر را حل کنید

$$x^2 y'' - 1.5 x y' - 1.5 y = 0$$

معادله کمکی عبارت است از

$$m^2 - 1.5m - 1.5 = 0$$

که دو ریشه $m_1 = -0.5$ و $m_2 = 3$ دارد. از اینرو پایه‌ای از جوابهای حقیقی به‌ازای تمام مقادیر مثبت x عبارت است از

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y_2 = x^3$$

و جواب عمومی متناظر برای تمام آن‌ها عبارت است از

$$y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + c_2 x^3$$

معادله کمکی (۳) تنها در صورتی دارای ریشه مضاعف $m_1 = m_2$ است که

$$m_1 = m_2 = \frac{1-a}{p} \quad \text{در آن صورت} \quad b = \frac{1}{p}(1-a)^2$$

در این حالت بحرانی می‌توانیم با به‌کار بردن روش تغییر پارامترها جواب دومی به‌دست بیاوریم. چگونگی عمل شبیه به‌بخش ۴.۲ است و به‌نتیجه زیر منجر می‌شود (به مسئله ۱ رجوع شود)

$$y_2 = u y_1 = (\ln x) y_1$$

از اینرو با نوشتن m به‌جای m_1 می‌بینیم که

$$(۵) \quad y_2 = x^m \ln x \quad \text{و} \quad y_1 = x^m \quad \left(m = \frac{1-a}{p} \right)$$

جوابهای (۱) درحالتی هستند که (۳) ریشه مضاعف داشته باشد. از آنجائیکه این جوابها مستقل خطی‌اند تشکیل پایه‌ای از جوابهای حقیقی (۱) برای تمام مقادیر مثبت x می‌دهند و جواب عمومی متناظر عبارت است از

$$(۶) \quad y = (c_1 + c_2 \ln x) x^m \quad (c_1 \text{ و } c_2 \text{ دلخواه‌اند})$$

مثال ۲ جواب عمومی در حالت ریشه مضاعف

معادله زیر را حل کنید

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$

معادله کمکی دارای ریشه مضاعف $m = 2$ است. از اینرو یک پایه جوابهای حقیقی برای تمام مقادیر مثبت x عبارت است از x^2 ، $x^2 \ln x$ و جواب عمومی متناظر چنین است

$$y = (c_1 + c_2 \ln x) x^2$$

مسائل بخش ۷.۲

۱. y_4 در (۵) را با روش تغییر پارامترها به دست بیاورید.

۲. مستقیماً تحقیق کنید که در حالتی که (۳) ریشه مضاعف داشته باشد تابع y_4 در (۵) جوابی از (۱) است.

۳. نشان دهید که اگر (۳) دو ریشه مختلف m_1 و m_2 داشته باشد توابع $x^{m_1} \ln x$ و $x^{m_2} \ln x$ جوابهای (۱) نیستند.

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \quad ۵. \quad x^2 y'' + xy' - y = 0 \quad ۴.$$

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \quad ۷. \quad x^2 y'' + xy' - 4y = 0 \quad ۶.$$

$$(xD^2 - 3D)y = 0 \quad ۹. \quad (xD^2 - xD + 0.975)y = 0 \quad ۸.$$

$$(xD^2 + D)y = 0 \quad ۱۱. \quad (xD^2 + 0.925)y = 0 \quad ۱۰.$$

معادلات زیر را به صورت (۱) تحویل و حل کنید

$$(z+1)^2 y'' + 5(z+1)y' + 3y = 0 \quad ۱۲.$$

$$(2z-3)^2 y'' + 7(2z-3)y' + 4y = 0 \quad ۱۳.$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$x^2 y'' + yy' - 0.925y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1 \quad ۱۴.$$

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1 \quad ۱۵.$$

$$(x_1 D^2 + xD - 2.925)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0 \quad ۱۶.$$

$$(x^2 D^2 - 3x D + 3)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = -2. \quad ۱۷$$

۱۸. نشان دهید که با قرار دادن $x = e^t$ ($x > 0$) معادله کشی (۱) را می توان به معادله $(a-1)y' + by = 0$ ، که ضرایب آن ثابت اند، تبدیل نمود.

۱۹. معادله مسئله (۱۸) را به صورت (۱) برگردانید.

۲۰. نشان دهید که هر گاه تبدیل مسئله ۱۸ را به کار ببریم آنگاه از (۲) عبارتی به صورت (2) ، بخش ۲.۲، نتیجه می شود و از (۶)، با صرف نظر کردن از نماد گذاری، به عبارتی به صورت (۸) بخش ۴.۲ می رسیم.

۸.۲ وجود و یکتایی جوابها

يك مسئله با مقدار اولیه برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شامل معادله و دو شرط اولیه است، یکی برای جواب $y(x)$ و دیگری برای مشتق آن $y'(x)$. حال به بررسی مسائل با مقدار اولیه به صورت

$$(۱) \quad y'' = f(x)y' + g(x)y = 0, \quad y(x_0) = K_1, \quad y'(x_0) = K_2$$

می پردازیم که شامل يك معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم است؛ K_1 و K_2 ثابتهای مفروضی هستند. مهم این خواهد بود که پیوستگی ضرایب f و g برای وجود و یکتایی جواب مسئله (۱۱) کافی است.

قضیه وجود و یکتایی

هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ در يك فاصله باز I توابعی پیوسته باشند x_0 در I باشد آنگاه مسئله با مقدار اولیه (۱) در فاصله I دارای جواب یکتای $y(x)$ است.

برای اثبات وجود همان ملزومات قضیه وجود در بخش ۱۲.۱ بکار می رود و در اینجا بیان نمی شود. این را می توان در مرجع [B۱۱] ضمیمه ۱ پیدا کرد.

اثبات یکتایی^۱. بسا فرض آنکه (۱) در فاصله I دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ داشته باشد نشان می دهیم که تفاضل آنها یعنی

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

در فاصله I متحد بسا صفر است در آن صورت در فاصله I ، $y_1 \equiv y_2$ که یکتایی را ایجاب می کند.

از آنجائی که معادله (۱) همگن و خطی است y يك جواب آن معادله در فاصله I

۱. این اثبات به وسیله همکارم پرفسور ا. د. تسبیر (A. D. Ziebur) توصیه شد.

است و چون y_1 و y_2 در شرایط اولیه یکسانی صدق می کنند y در شرایط زیر صدق می کند

$$(2) \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

تابع

$$z(x) = y(x)^2 + y'(x)^2$$

و مشتق آن

$$z' = 2yy' + 2y'y''$$

را در نظر می گیریم. از معادله دیفرانسیل داریم

$$y'' = -fy' - gy$$

با قرار دادن این مقدار در عبارت z' به دست می آوریم

$$(3) \quad z' = 2yy' - 2fy'y' - 2gyy'$$

حال چون y و y' حقیقی هستند داریم

$$(y \pm y')^2 = y^2 \pm 2yy' + y'^2 \geq 0$$

و از روی این فوراً دو نامساوی زیر را به دست می آوریم

$$(4) \quad -2yy' \leq y^2 + y'^2 = z \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad 2yy' \leq y^2 + y'^2 = z \quad (\text{الف})$$

حال برای آخرین جمله در (۳) داریم

$$-2gyy' \leq |-2gyy'| = |g||2yy'| \leq |g|z$$

با استفاده از نتایج و اعمال (۴ الف) در عبارت $2yy'$ در (۳) پیدا می کنیم

$$z' \leq z + 2|f|y'^2 + |g|z$$

یا با نمایش تابع داخل پرانتز با h به ازای تمام مقادیر x در I داریم

$$(5 \text{ الف}) \quad z' \leq hz$$

به همین ترتیب از (۳) و (۴) نتیجه می شود

$$(5 \text{ ب}) \quad -z' = -2yy' + 2fy'y' + 2gyy'$$

$$\leq z + 2|f|z + |g|z = hz$$

نامساویهای (۵ الف) و (۵ ب) با نامساویهای زیر معادند

$$(6) \quad z' - hz \leq 0, \quad z' + hz \geq 0$$

عوامل انتگرال کننده برای دو عبارت سمت چپ عبارت اند از

$$F_y = e^{\int h(x) dx} \quad \text{و} \quad F_x = e^{-\int h(x) dx}$$

چون h پیوسته است انتگرالهای واقع در توان تابع نمایی وجود دارند. نظر به اینکه F_y و F_x مثبت هستند از (۶) به دست می آوریم

$$F_y(z' + hz) = (F_y z)' \geq 0 \quad \text{و} \quad F_x(z' - hz) = (F_x z)' \leq 0$$

که این بدان معنی است که در فاصله I ، $F_x z$ غیر صعودی و $F_y z$ غیر نزولی است. چون $z(x_0) = 0$ بنا به (۲)، از اینرو در صورتی که $x \leq x_0$ ، به دست می آوریم

$$F_x z \geq (F_x z)_{x_0} = 0, \quad F_y z \leq (F_y z)_{x_0} = 0$$

به همین ترتیب در صورتی که $x \geq x_0$ داریم

$$F_x z \leq 0, \quad F_y z \geq 0$$

با تقسیم بر F_y و F_x و با توجه به اینکه این توابع مثبت هستند روی هم رفته داریم

$$z \leq 0, \quad z \geq 0 \quad I \text{ در } x$$

و این ایجاب می کند که در فاصله I داشته باشیم $z = y'^2 + y''^2 = 0$. از این رو برای فاصله I داریم $y \equiv 0$ و یا $y_1 \equiv y_2$ است و اثبات به اتمام می رسد.

بقیه این بخش به برخی از نتایج مهم این قضیه اختصاص داده خواهد شد.

برای آمادگی در بررسی این قسمت به مفاهیم وابستگی و استقلال خطی توابع که در بخش ۳.۲ گفته شد برمی گردیم. فرض کنید $y_1(x)$ و $y_2(x)$ توابع مفروضی هستند که در فاصله I باز تعریف شده اند و رابطه

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$$

را در I در نظر بگیرید که در آن k_1 و k_2 اعداد ثابتی هستند که باید تعیین گردند. مسلماً این رابطه به ازای $k_1 = 0$ و $k_2 = 0$ برقرار است. ممکن است بتوانیم یک مقدار $k_1 \neq 0$ را طوری پیدا کنیم که رابطه فوق در I برقرار باشد. در آن صورت آن را بر k_1 تقسیم می کنیم و y_1 را پیدا می نمائیم:

$$y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2$$

به همین ترتیب اگر رابطه بالا به ازای یک $k_2 \neq 0$ در I برقرار باشد می توانیم y_2 را پیدا کنیم:

$$y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1$$

می بینیم که در هر دو حالت y_1 و y_2 در فاصله I وابسته خطی هستند. معیناً اگر $k_1 = 0$ و $k_2 = 0$ تنها دو عددی باشند که به ازای آنها رابطه مذکور در فاصله I برقرار است نمی توان y_1 یا y_2 را پیدا کرد و این توابع در فاصله I مستقل خطی اند.

نتیجه آنکه دو تابع $y_1(x)$ و $y_2(x)$ در فاصله I ، که هر دو تابع در آن تعریف شده اند، وقتی و تنها وقتی وابسته خطی هستند که بتوان ثابتهای k_1 و k_2 را، که هر دو صفر نباشند، طوری پیدا کرد که به ازای تمام مقادیر در فاصله I داشته باشیم

$$(7) \quad k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$$

از این نتیجه در اثبات بعدی استفاده خواهیم کرد.

در بررسیهای بعدی به معیار دیگری برای آزمون وابستگی و استقلال خطی دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ يك معادله دیفرانسیل به صورت زیر احتیاج داریم

$$(8) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

در این معیار درمیان

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

که درمیان دانسکی^۱ و یا به طور اختصار دانسکین y_1 و y_2 نامیده می شود به کار می رود. این را می توان به طریق زیر شرح داد.

قضیه ۲ (وابستگی و استقلال خطی جوابها)

فرض کنید که ضرایب $f(x)$ و $g(x)$ معادله دیفرانسیل (۸) در يك فاصله باز I پیوسته اند. در آن صورت هر دو جوابی از (۸) در فاصله I وابسته خطی اند اگر و تنها اگر دانسکین W آنها به ازای مقداری از x در I ، مثلاً $x = x_0$ ، برابر صفر باشد. (هرگاه به ازای $x = x_0$ داشته باشیم $W = 0$ آنگاه در I داریم $W \equiv 0$).

اثبات. (الف) فرض می کنیم $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب (۸) در I باشند که وابسته خطی اند. در آن صورت دو ثابت k_1 و k_2 که هر دو با هم صفر نیستند وجود دارد به طوری که

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

۱. به وسیله هون، (Hone)، ۱۷۷۸-۱۸۵۳، که بعداً نام خود را به دانسکی (wronski) تغییر داد، ارائه شد. خواننده با درمیان مرتبه دوم از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی باید آشنا باشد؛ در غیر این صورت می تواند به بخش ۹.۷ که مستقل از سایر بخشهای فصل ۷ است رجوع کند.

در فاصله I برقرار باشد. با مشتقگیری به دست می آوریم

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' = 0$$

فرض کنید $k_1 \neq 0$. در آن صورت با ضرب کردن معادله اول در y_2'/k_1 و معادله دوم در $-y_2/k_1$ و جمع کردن روابط حاصل به دست می آوریم

$$W(y_1, y_2) = 0 \quad \text{یعنی} \quad y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0$$

هرگاه $k_1 = 0$ آنگاه $k_2 \neq 0$ و استدلال شبیه فوق است.

(ب) بعکس، فرض کنید به ازای $x = x_0$ در I داشته باشیم $W(y_1, y_2) = 0$. دستگاه معادلات خطی

$$k_1 y_1(x_0) + k_2 y_2(x_0) = 0$$

(۹)

$$k_1 y_1'(x_0) + k_2 y_2'(x_0) = 0$$

که در آن k_1 و k_2 مجهولند را در نظر بگیرید. چون دستگاه همگن و دترمینان دستگاه درست برابر رانسکین $W[y_1(x_0), y_2(x_0)]$ است و $W = 0$ ، دستگاه دارای جواب k_1 و k_2 است که هردو باهم صفر نیستند (به بخش ۹.۷ رجوع شود). با استفاده از این دو عدد k_1 و k_2 تابع زیر را در نظر می گیریم

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

بنا به قضیه بنیادی ۱ بخش ۱۰.۲ تابع $y(x)$ در فاصله I يك جواب (۸) است. از (۹) می بینیم که شرایط اولیه $y(x_0) = 0$ و $y'(x_0) = 0$ در آن صادقند. جواب دیگری برای (۸) که همان شرایط اولیه در آن صدق کند عبارت است از $y^* \equiv 0$. چون f و g پیوسته اند قضیه یکتائی قابل اعمال است و نتیجه می گیریم که $y^* \equiv y$ یعنی در فاصله I

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 \equiv 0$$

و چون k_1 و k_2 هردو صفر نیستند y_1 و y_2 در فاصله I وابسته خطی هستند. از این گذشته، بنا به این مطلب، و اولین قسمت اثبات، نتیجه می شود که در فاصله I

$$W(y_1, y_2) \equiv 0$$

مثال ۱

توابع $y_1 = \cos \omega x$ و $y_2 = \sin \omega x$ جوابهای معادله زیر هستند

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (\omega \neq 0)$$

يك محاسبه ساده نشان می دهد که رانسکین آنها دارای مقدار ω است. پس این توابع پایه ای از جوابها را به ازای تمام مقادیر x تشکیل می دهند.

مثالهای بیشتری در بخشهای ۳.۲ و ۴.۲ گنجانده شده است. مثال زیر این امر را روشن می کند که فرض پیوستگی ضرایب را در قضیه ۲ نمی توان حذف نمود.

مثال ۲

توابع

$$y_2 = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad y_1 = x^3$$

جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(10) \quad y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 0$$

به ازای تمام مقادیر x هستند و درستی این مطلب را می توان به سادگی با قراردادن هریک از توابع و مشتقات آنها در (۱۰) تحقیق کرد. خواننده می تواند نشان دهد که این توابع روی محور x ها مستقل خطی اند اگرچه رانسکین آنها متحد با صفر است. این با قضیه ۲ تناقضی ندارد زیرا ضرایب (۱۰) در $x = 0$ پیوسته نیستند.

البته مثال ۲ این مطلب را نیز روشن می کند که اگر u_1 و u_2 توابع مشتق پذیری از x باشند شرط $W(u_1, u_2) = 0$ فقط شرط لازم برای وابستگی خطی u_1 و u_2 است [چنانچه از قسمت (الف) اثبات قضیه ۲ نتیجه می شود] اما این شرط کافی نیست.

حال نشان می دهیم معادله ای به شکل (۸) که ضرایب آن در یک فاصله بساز I پیوسته اند پایه ای برای جوابها در I و در واقع بینهایت از چنین پایه ها، دارند.

اثبات. بر طبق قضیه وجود نتیجه می شود که (۸) دارای جوابی به صورت $y_1(x)$ است که در شرایط اولیه

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0$$

صدق می کند و نیز جوابی به صورت $y_2(x)$ دارد که شرایط اولیه

$$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

در مورد آن صادق است و x_0 هر نقطه مشخصی در I است. در x_0 داریم $W(y_1, y_2) = 1$ از این رو، بنا بر قضیه ۲، دو جواب در فاصله I مستقل خطی هستند و پایه ای برای (۸) در فاصله I تشکیل می دهند. پایه دیگر عبارت است از ay_1 و by_2 که $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ثابتهای دلخواه اند، بنا بر این بینهایت از چنین پایه هایی وجود دارد. بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

حالا این مطلب مهم را ثابت خواهیم کرد که جواب عمومی معادله ای به صورت

(۸) با ضرایب پیوسته شامل کلیه جوابهای (۸) است.

قضیه ۳ (جواب عمومی)

فرض کنید

$$(11) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۸) در يك فاصله باز I باشد که در آن ضرایب f و g پیوسته اند. فرض کنید $Y(x)$ جوابی برای (۸) در I باشد که شامل ثابتهای دلخواهی نیست. در آن صورت $Y(x)$ ، با نسبت دادن مقادیر مناسبی به ثابتهای c_1 و c_2 ، از (۱۱) به دست می آید.

اثبات. فرض کنید $Y(x)$ جوابی برای (۸) در فاصله I باشد که شامل ثابتهای دلخواهی نیست و فرض کنید $x = x_0$ نقطه ثابتی در I باشد. نخست نشان می دهیم که می توانیم مقادیری برای c_1 و c_2 در (۱۱) پیدا کنیم به طوری که

$$y(x_0) = Y(x_0) \quad , \quad y'(x_0) = Y'(x_0)$$

و یا اینکه

$$(12) \quad \begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= Y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= Y'(x_0) \end{aligned}$$

در واقع، این يك دستگاه معادلات خطی بر حسب مجهولات c_1 و c_2 است. دترمینان آن رانسکین y_1 و y_2 در $x = x_0$ است. از آنجایی که (۱۱) جواب عمومی است y_1 و y_2 در فاصله I مستقل خطی هستند و از قضیه ۲ نتیجه می شود که رانسکین آنها صفر نیست. از این رو دستگاه دارای جواب یکتای $c_1 = c_1^*$ ، $c_2 = c_2^*$ است که می توان آن را با دستور کرامر (بخش ۹.۷) به دست آورد. با استفاده از این ثابتها از (۱۱) جواب خصوصی

$$y^*(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x)$$

را به دست می آوریم. از (۱۲) درمی یابیم که

$$(13) \quad y^*(x_0) = Y(x_0) \quad , \quad y^{*'}(x_0) = Y'(x_0)$$

به کمک این رابطه و نیز قضیه یکتایی نتیجه می گیریم که y^* و Y در فاصله I همانند هستند و بدین ترتیب اثبات کامل می شود.

مسائل بخش ۸.۲

با استفاده از رانسکین و قضیه ۲ استقلال خطی جفت توابع زیر را که به صورت پایه‌هایی در بخشهای ۴.۲ و ۷.۲ ظاهر شدند نشان دهید.

۱. $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ ۲. $e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x}$
۳. $e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx$ ۴. $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$
۵. $x^m, x^m \ln x$ ۶. $x^m, x^m \ln x$

در هر حالت معادله دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دومی پیدا کنید که توابع داده شده جوابهای آنها باشند. استقلال خطی را با استفاده از قضیه ۲ نشان دهید.

۷. $\cos \omega x, \sin \omega x$ ۸. e^x, xe^x
۹. $x^2, x^{1/2}$ ۱۰. $1, e^{-x}$
۱۱. $1, x^2$ ۱۲. $x^2, x^2 \ln x$
۱۳. $e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x$ ۱۴. $\cosh x, \sinh x$
۱۵. $e^{i\beta x}, e^{-i\beta x}$

با استفاده از (۷) وابستگی یا استقلال خطی توابع زیر را معلوم کنید.

۱۶. x, x^3 ۱۷. $\ln x, \ln x^3 \ (x > 0)$
۱۸. $e^x, 1$ ۱۹. $x+1, x-1$
۲۰. $\sqrt{x}, x^{3/2} \ (x > 0)$ ۲۱. $|x|x^2, x^3 \ (x < 0)$

۲۲. نشان دهید که y_1, y_2 در مثال ۲ تشکیل يك پایه برای جوابهای (۱۰) می‌دهند اما $W(y_1, y_2) \equiv 0$.

۲۳. نشان دهید که $W(x^2, x|x|) = 0$ است اما توابع x^2 و $x|x|$ در فاصله $-1 < x < 1$ مستقل خطی‌اند. آیا این با قضیه ۲ تناقض دارد؟

۲۴. فرض کنید y_1 و y_2 يك پایه جوابهای معادله دیفرانسیلی را تشکیل دهند که مفروضات قضیه ۲ در آن صادق است. نشان دهید $z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$ ، $z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$ وقتی و تنها وقتی يك پایه آن معادله است که دترمینان ضرایب a_{jk} صفر نباشد.

۲۵. فرض کنید که (۸) در فاصله I دارای ضرایبی پیوسته باشد. نشان دهید دو جواب (۸) در فاصله I که در یک نقطه از I صفرند نمی‌توانند تشکیل یک پایه جواب (۸) را در I بدهند. چند مثال بیاورید.

۹.۲ معادلات دیفرانسیل همگن از مرتبه دلخواه

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را در صورتی خطی نامند که بتوان آن را به صورت

$$(۱) \quad y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = r(x)$$

نوشت که در آن تابع r در سمت راست و ضرایب $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ توابع مفروضی هستند و $y^{(n)}$ عبارت از n امین مشتق y نسبت به x است. هر معادله دیفرانسیل مرتبه n را که نتوان به صورت (۱) نوشت غیرخطی نامند.

هر گاه $r(x) \equiv 0$ ، معادله (۱) چنین می‌شود

$$(۲) \quad y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + f_1(x)y' + f_0(x)y = 0$$

و آن را همگن نامند. اگر $r(x)$ متحد با صفر نباشد معادله را غیرهمگن می‌نامند. با استفاده از نماد عملگر (بخش ۵.۲) می‌توانیم (۱) را به صورت

$$(۱۰) \quad \begin{aligned} L[y] &= P(D)[y] \\ &= [D^n + f_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + f_1(x)D + f_0(x)]y = r(x) \end{aligned}$$

بنویسیم و به طریقی مشابه در مورد (۲) عمل کنیم.

تابع $y = \varphi(x)$ را در صورتی جواب معادله دیفرانسیل (خطی یا غیرخطی) مرتبه n ام در فاصله I می‌نامند که $\varphi(x)$ تعریف شده و در این فاصله n مرتبه مشتق‌پذیر باشد و به قسمی باشد که با جایگزینی φ و مشتقات آن به جای تابع نامشخص y و مشتقات آن در معادله اتحاد برقرار شود.

حال خواهیم دید که ملاحظات بخشهای ۳.۲ و ۸.۲ قابل گسترش به معادلات دیفرانسیل همگن از مرتبه دلخواه n است.

قضیه وجود و یکتایی

هرگاه $f_0(x), \dots, f_{n-1}(x)$ در فاصله باز I توابعی پیوسته باشند، آنگاه مسئله با مقدار اولیه متشکل از معادله (۲) و n شرط اولیه

$$y(x_0) = K_1, \quad y'(x_0) = K_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = K_n$$

در فاصله I دارای جواب یکتای $y(x)$ است؛ در اینجا x_0 هر نقطه مشخصی در I است

و $K_1, \dots, K_n$ اعداد داده شده‌ای هستند.

اثبات وجود را می‌توان در مرجع [B۱۱] ضمیمه ۱ یافت و یکنایی را با تعمیم جزئی اثباتی که در بخش ۸.۲ گفته شد ثابت نمود.

برای بسط ملاحظات بخش ۳.۲ به مفاهیم وابستگی و عدم استقلال خطی ($n \geq 2$) تابع مانند $y_1(x), \dots, y_n(x)$ نیاز داریم. این توابع را در يك فاصله I ، که در آن تعریف شده‌اند، وابسته خطی نامند هر گاه (دست کم) یکی از آنها را در فاصله I بتوان به صورت «توکیب خطی» $n-1$ تابع دیگر نمایش داد، یعنی، به صورت مجموعی از آن توابع که هر کدام در يك مقدار ثابت (صفر یا غیر صفر) ضرب شده‌اند. هرگاه هیچیک از توابع را نتوان بدین صورت نوشت، آنها را در فاصله I مستقل خطی می‌نامند. این تعریف آنچه را که در بخش ۳.۲ در مورد دو تابع به عنوان يك حالت خاص بیان کردیم شامل می‌شود. n تابع وابسته خطی در I را يك مجموعه وابسته خطی از توابع در I نیز می‌نامند. توابع مستقل خطی را نیز می‌توان به طریقی مشابه تعریف کرد.

مثلاً، توابع $y_1 = x$ ، $y_2 = x^2$ ، $y_3 = x^3$ در هر فاصله‌ای مستقل خطی‌اند. توابع $y_1 = x$ ، $y_2 = 3x$ و $y_3 = x^2$ در هر فاصله‌ای وابسته خطی‌اند زیرا $y_3 = 3y_1 + 0y_2$. n تابع $y_1(x), \dots, y_n(x)$ را که در فاصله I تعریف شده‌اند وابسته خطی نامند اگر و تنها اگر بتوانیم ثابتهای $K_1, \dots, K_n$ را که تمام آنها صفر نباشند طوری پیدا کنیم که به ازای تمام مقادیر x در فاصله I رابطه

$$(۳) \quad K_1 y_1(x) + \dots + K_n y_n(x) = 0$$

صادق باشد.

در واقع اگر (۳) به ازای يك مقدار $K_1 \neq 0$ صادق باشد می‌توان آن را بر K_1 تقسیم نموده و y_1 را به صورت ترکیب خطی $y_2, \dots, y_n$:

$$y_1 = -\frac{1}{K_1} (K_2 y_2 + \dots + K_n y_n)$$

بیان کنیم که وابستگی خطی را ثابت می‌کند. به همین ترتیب، اگر (۳) به ازای يك $K_i \neq 0$ صادق باشد می‌توانیم y_i را به صورت ترکیب خطی سایر توابع بیان نماییم. از طرف دیگر اگر $K_1 = 0, \dots, K_n = 0$ تنها مجموعه ثابتیهایی باشد که به ازای آن در فاصله I (۳) صادق است در آن صورت نمی‌توانیم هیچیک از توابع را بر حسب سایر توابع بیابیم و توابع مستقل خطی‌اند.

جواب يك معادله دیفرانسیل مرتبه n (خطی یا غیر خطی) را در صورتی جواب عمومی می‌نامند که شامل n عدد ثابت مستقل دلخواه باشد.^۱ در اینجا منظور از استقلال

۱. به پانوشت بخش ۳.۲ رجوع کنید.

آن است که جواب را نتوان به صورتی تحویل نمود که شامل کمتر از n ثابت دلخواه باشد. هرگاه مقادیر معینی را به n عدد ثابت نسبت دهیم آنگاه جواب حاصله را **جواب خصوصی** آن معادله می نامند.

یک مجموعه از n جواب مستقل خطی $y_1(x), \dots, y_n(x)$ از معادله همگن خطی (۲) در فاصله I را یک پایه یا یک دستگاه بنیادی جوابهای (۲) در I نامند. هرگاه $y_1, \dots, y_n$ چنین پایه ای باشد آنگاه

$$(۴) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (c_1, \dots, c_n \text{ دلخواهند})$$

جواب عمومی (۲) در I است. در واقع، از آنجا که (۲) خطی و همگن است، جوابی از (۲) است و چون $y_1, \dots, y_n$ در فاصله I توابع مستقل خطی هستند هیچک از آنها را نمی توان به شکل ترکیب خطی بقیه بیان کرد یعنی، (۴) را نمی توان به صورتی شامل کمتر از n ثابت دلخواه تحویل نمود.

آزمون وابستگی و استقلال خطی جوابها (قضیه ۲ بخش ۸.۲) را می توان به معادلات مرتبه n ام به صورت زیر تعمیم داد.

قضیه ۲ (وابستگی و استقلال خطی جوابها)

فرض کنید ضرایب $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ رابطه (۲) در یک فاصله بساز I پیوسته باشند. در آن صورت n جواب $y_1, \dots, y_n$ معادله (۲) در فاصله I وقتی و فقط وقتی در I وابسته خطی هستند که رانسکین آنها

$$(۵) \quad W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

به ازای مقداری مانند $x = x^0$ در I صفر باشد. اگر در $x = x^0$ داشته باشیم $W = 0$ در آن صورت در I داریم $W \equiv 0$.

ایده این اثبات شبیه اثبات قضیه ۲ بخش ۸.۲ است.

جواب عمومی معادله ای به شکل ۲ با ضرایب پیوسته شامل کلیه جوابهای (۲) است. درواقع، تعمیم قضیه ۳ بخش ۸.۲ به طریق زیر صادق است.

قضیه ۳ (جواب عمومی)

فرض کنید (۴) جواب عمومی (۲) در یک فاصله باز I باشد که در آن $f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ پیوسته اند و $Y(x)$ را جوابی برای (۲) در فاصله I بگیریم که شامل ثابتهای دلخواه نباشد.

در این صورت $Y(x)$ با نسبت دادن مقادیر مناسبی به ثابتهای دلخواه $c_1, \dots, c_n$ از (۴) به دست می آید.

ایده اثبات شبیه اثبات قضیه ۳ بخش ۸.۲ است.

مثال ۱

توابع $y_1 = e^{-x}$ ، $y_2 = e^x$ ، و $y_3 = e^{2x}$ جوابهای معادله زیرند

$$(6) \quad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

رانسکین عبارت است از

$$W(e^{-x}, e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & e^{2x} \\ -e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \\ e^{-x} & e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 6e^{2x} \neq 0$$

که نشان می دهد این توابع به ازای تمام مقادیر x پایه ای برای جوابهای (۶) می دهند و جواب عمومی متناظر با آن عبارت است از

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

مسائل بخش ۹.۲

ثابت کنید:

۱. هرگاه $y \equiv 0$ تابعی از يك مجموعه توابع در فاصله I باشد این مجموعه در I وابسته خطی است.
۲. هرگاه تابعی از يك مجموعه توابع در I مضرب ثابتی از توابع دیگری از این مجموعه در I باشد، این مجموعه در I وابسته خطی است.
۳. هرگاه مجموعه ای از p تابع در I وابسته خطی باشد مجموعه ای از n ($n \geq p$) تابع در I که شامل آن مجموعه باشد در I وابسته خطی است.
۴. هرگاه مجموعه ای از توابع در I وابسته خطی باشد، این مجموعه برای هر زیر-فاصله I وابسته خطی است.
۵. هرگاه مجموعه ای از توابع در I مستقل خطی باشد، این مجموعه در هر فاصله J شامل I که در آن فاصله همه توابع تعریف شده اند، مستقل خطی است.

کدامیک از توابع زیر روی محور x های مثبت وابسته خطی اند یا مستقل خطی؟

۶. $\cosh^2 x$, $\sinh^2 x$, ۱ , x , x^2 .۷

۸. $\cos x$, $\sin x$, ۱ , $\ln x$, $\ln x^2$, $\ln x^3$.۹

۱۰. e^x , xe^x , $x^2 e^x$, ۱ , x , $2x$.۱۱

۱۲. x , $x-1$, $x+1$, ۱ , x^2 , x^4 , x^6 .۱۳

۱۴. e^{2x} , e^{-2x} , ۰ .۱۴

با استفاده از قضیه ۲ نشان دهید که توابع داده شده پایه ای برای جوابهای معادله دیفرانسیل متناظرشان تشکیل می دهند.

۱۵. e^{-x} , e^x , xe^x , $y''' - y'' - y' + y = 0$.۱۵

۱۶. e^{-x} , xe^{-x} , $x^2 e^{-x}$, $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.۱۶

۱۷. x , x^2 , x^3 , $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$.۱۷

۱۸. $x^{1/2}$, $x^{-1/2}$, ۱ , $x^2 y''' + 3xy'' + 5y' = 0$.۱۸

۱۹. e^x , xe^x , $x^2 e^x$, $x^3 e^x$, $y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$.۱۹

۲۰. e^x , e^{-x} , $\cos x$, $\sin x$, $y'''' - y = 0$.۲۰

۱۰.۲ معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه با ضرایب ثابت

روش بخش ۲.۲ را می توان به آسانی به معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت

(۱) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$

تعمیم داد. با جایگزینی $y = e^{\lambda x}$ و مشتقات آن در (۱) معادله مشخصه

(۲) $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

را به دست می آوریم. اگر این معادله دارای n ریشه متمایز $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد آنگاه n جواب

(۳) $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$

به ازای تمام مقادیر x تشکیل یک پایه می دهد و جواب عمومی متناظر با (۱) عبارت است از

(۴) $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$

در صورت وجود یک ریشه مضاعف $\lambda_1 = \lambda_p$ در (۳) داریم $y_1 = y_p$ و نظیر بخش ۴.۲، $y_1 = x y_p$ را به عنوان دو جواب مستقل خطی متناظر با آن ریشه می گیریم.

هر گاه يك ریشه سه گانه به صورت $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ وجود داشته باشد آنگاه در (۳) داریم $y_1 = y_2 = y_3$ و سه جواب مستقل خطی متناظر با آن ریشه عبارت اند از

$$(5) \quad y_1, \quad x y_1, \quad x^2 y_1$$

این جوابها را با روش تغییر پارامترها می توان به دست آورد. بطور کلیتر اگر λ يك ریشه مرتبه m باشد در آن صورت m جواب مستقل خطی متناظر با آن عبارت اند از

$$(6) \quad e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{m-1} e^{\lambda x}$$

درواقع، استقلال خطی تقریباً آشکار است. جایگزینی نشان می دهد که اینها جواب اند. هر گاه نماد عملگر (بخش ۵.۲) را بکار ببریم فرمولهای متناظر کمی ساده تر خواهند شد برای این کار (۱) را به صورت زیر می نویسیم

$$L[y] = P(D)[y] = [D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0]y = 0$$

بنا به فرض داریم

$$(7) \quad P(D) = Q(D)(D - \lambda)^m$$

که در آن $Q(D)$ يك عملگر دیفرانسیل مرتبه $n - m$ است و متناظر با سایر ریشه های است که معادله مشخصه (۱) می تواند داشته باشد. حال برای توابع $x^k e^{\lambda x}$ ($k = 0, \dots, m-1$) در (۶) به دست می آوریم

$$(D - \lambda)(x^k e^{\lambda x}) = k x^{k-1} e^{\lambda x} + \lambda x^k e^{\lambda x} - \lambda x^k e^{\lambda x} = k x^{k-1} e^{\lambda x}$$

از اینرو با اعمال $D - \lambda$ روی این رابطه داریم

$$(D - \lambda)^2 (x^k e^{\lambda x}) = k(k-1) x^{k-2} e^{\lambda x}$$

و به همین ترتیب. سرانجام

$$(D - \lambda)^k (x^k e^{\lambda x}) = k! e^{\lambda x}$$

بطوری که

$$(D - \lambda)^{k+1} (x^k e^{\lambda x}) = k! (D - \lambda) e^{\lambda x} = 0$$

از آنجا که در (۶)، $k+1 \leq m$ نتیجه مطلوب حاصل می شود:

$$(D - \lambda)^m (x^k e^{\lambda x}) = 0 \quad k = 0, \dots, m-1$$

به دلیل (۷) این رابطه نشان می دهد که توابع (۶) جوابهای (۱) در حالت يك ریشه مرتبه m هستند.

کل کار نسبتاً ساده است و می توان آن را با دو مثال توضیح داد.

مثال ۱

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

عبارت‌اند از ۱، -۱ و ۲ وجواب عمومی متناظر با (۴) عبارت است از

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

مثال ۲

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y^{(5)} - 3y'''' + 3y''' - y'' = 0$$

معادله مشخصه

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

دارای ریشه‌های $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ و $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$ می‌باشد وجواب عبارت است از

$$(A) \quad y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^x$$

مسائل بخش ۱۰.۲

۱. نشان دهید که (۸) را همچنین می‌توان با قرار دادن $y'' = z$ ؛ پیدا کردن جواب عمومی z از معادله مرتبه سوم جدید و دو بار انتگرالگیری از z به دست آورد.

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید

$$y'''' + 3y'' - 4y = 0 \quad ۳. \quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad ۲.$$

$$y''' + y' = 0 \quad ۵. \quad y''' - y = 0 \quad ۴.$$

$$y'''' - 5y'' + 4y = 0 \quad ۷. \quad y'''' + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0 \quad ۶.$$

معادله‌ای پیدا کنید که برای آن توابع داده شده تشکیل یک پایه بدهند

$$\cosh x, \sinh x, \cos 2x, \sin 2x \quad ۸.$$

$$e^x, xe^x, x^2 e^x \quad ۹.$$

$$e^{-x}, xe^{-x}, e^x, xe^x \quad .10$$

$$1, x, e^{rx}, xe^{rx} \quad .11$$

$$\sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x \quad .12$$

$$e^{-rx}, e^{-x}, e^x, e^{rx}, 1 \quad .13$$

تقلیل مرتبه. بعضی اوقات ممکن است یافتن يك جواب معادله دیفرانسیل مفروضی نسبتاً آسان باشد. دراین صورت مرتبه معادله را می توان تقلیل داد، یعنی، سایر جوابهای معادله داده شده را می توان از معادله دیفرانسیل مرتبه پایینتری به دست آورد.

۱۴. هرگاه $y_1(x)$ يك جواب $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ باشد نشان دهید جواب دیگر $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ است که در آن $u(x)$ با حل معادله مرتبه اول زیر بر حسب $z = u'$ به دست می آید:

$$y_1 u'' + (2y_1' + f y_1) u' = 0$$

۱۵. هرگاه $y_1(x)$ يك جواب $y''' + f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$ باشد نشان دهید جواب دیگر $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ است که در آن $u(x)$ با حل معادله مرتبه دوم زیر بر حسب $z = u'$ به دست می آید:

$$y_1 u''' + (3y_1' + f y_1) u'' + (3y_1'' + 2f y_1' + g y_1) u' = 0$$

با استفاده از روش تقلیل مرتبه معادلات زیر را حل کنید

$$y''' - 3y'' - y' + 3y = 0, \quad y_1 = e^x \quad .16$$

$$x^2 y''' - 3x y' + 3y = 0, \quad y_1 = 1/x \quad .17$$

$$y'' - 4x y' + (4x^2 - 2)y = 0, \quad y_1 = e^{x^2} \quad .18$$

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + (6 - x^2) x y' - (6 - x^2) y = 0, \quad y_1 = x \quad .19$$

۲۰. (معادله کشی) معادله کشی یا معادله ادیلر مرتبه سوم عبارت است از

$$x^3 y''' + a x^2 y'' + b x y' + c y = 0$$

با تعمیم روش بخش ۷.۲ نشان دهید که $y = x^m$ وقتی و تنها وقتی جواب معادله است که m ریشه $m^3 + (a-3)m^2 + (b-a+2)m + c = 0$ کی زیر باشد

$$m^3 + (a-3)m^2 + (b-a+2)m + c = 0$$

معادله $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$ را حل کنید.

۱۱.۲ معادلات خطی غیرهمگن

تا اینجا معادلات خطی همگن را بررسی کرده ایم حال درباره معادلات خطی غیر همگن بحث می کنیم. برای سادگی توجهمان را به معادلات مرتبه دوم

$$(۱) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

معطوف می کنیم، اما آشکار است که نتایج این بخش را می توان به آسانی به معادلات خطی از هر مرتبه ای تعمیم داد.

ابتدا نشان خواهیم داد که جواب عمومی $y(x)$ معادله (۱) را می توان به دست آورد در صورتی که جواب عمومی $y_h(x)$ معادله همگن متناظر با آن

$$(۲) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

معلوم باشد. ادعا می کنیم که در آن صورت $y(x)$ را با اضافه نمودن هر جواب $\bar{y}$ از (۱) که شامل ثابتهای دلخواه نباشد به y_h به دست می آوریم یعنی

$$(۳) \quad y(x) = y_h(x) + \bar{y}(x)$$

در واقع، چون y_h شامل دو مقدار ثابت دلخواه است y هم شامل دو ثابت دلخواه خواهد بود و همان طور که در بخش ۳.۲ تعریف شد، y وقتی جواب عمومی (۱) است که اساساً جوابی از آن بوده باشد. برای نشان دادن این مطلب (۳) را در (۱) قرار می دهیم. در این صورت سمت چپ (۱) چنین می شود

$$(y_h + \bar{y})'' + f(y_h + \bar{y})' + g(y_h + \bar{y})$$

این را می توان به صورت زیر نوشت

$$(y_h' + f y_h' + g y_h) + \bar{y}'' + f \bar{y}' + g \bar{y}$$

از آنجا که $\bar{y}$ جواب (۲) است عبارت داخل پرانتز صفر می شود. چون $\bar{y}$ در (۱) صدق می کند مجموع بقیه جملات برابر $r(x)$ است و حکم ثابت می شود.

سوالی که عملاً باقی می ماند این است که چگونه جواب $\bar{y}$ را از (۱) به دست بیاوریم. روشهای مربوطه در بخش بعد و در بخشهای ۱۵.۲ و ۱۶.۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت.

فعلاً ثابت می کنیم که جواب عمومی معادله (۱) با توابع پیوسته f ، g و r کلیه جوابهای (۱) را نمایش می دهد.

قضیه ۱ (جواب عمومی)

فرض کنید $f(x)$ ، $g(x)$ و $r(x)$ در (۱) در فاصله باز I توابعی پیوسته باشند.

۱. چنان که می دانیم این شرط برای وجود y_h در I و همچنین برای وجود $\bar{y}$ در I کافی است همانگونه که در بخش ۱۶.۲ آشکار خواهد شد.

را جوابی برای معادله (۱) در فاصله I بگیریید که شامل ثابت دلخواهی نباشد. در این صورت $Y(x)$ به نسبت دادن مقادیر مناسبی به دو ثابت دلخواه، که در حل عمومی $y_h(x)$ از معادله (۲) وجود داشتند، از (۳) به دست می‌آید. در (۳) تابع $y(x)$ هر جوابی در فاصله I برای (۱) می‌باشد که شامل ثابت دلخواه نباشد.

اثبات. قرار می‌دهیم $Y - y = y^*$. از آنجا

$$y^{*''} + f y^{*'} + g y^* = (Y'' + f Y' + g Y) - (y'' + f y' + g y) = r - r = 0$$

یعنی، y^* جواب معادله (۲) است. حال y^* شامل ثابتهای دلخواه نیست. پس، بنا به قضیه ۳ بخش ۸.۲ (که بجای Y مقدار y^* را به کار برده‌ایم) می‌توان آن را با نسبت دادن مقادیر مناسبی به ثابتهای دلخواه در y_h به دست آورد. باین کار، چون $Y = y^* + \bar{y}$ حکم نتیجه می‌شود.

این قضیه نشان می‌دهد که هر جوابی از (۱) که شامل ثابتهای دلخواه نباشد، بنا به تعریفی که در بخش ۳.۲ داشتیم، یک جواب خصوصی معادله (۱) است و حالا می‌توانیم نتایج را به ترتیب زیر فرموله کنیم.

قضیه ۲ (جواب عمومی)

جواب عمومی $y(x)$ معادله دیفرانسیل غیر همگن خطی (۱) برابر است با مجموع جواب عمومی $y_h(x)$ مربوط به معادله همگن (۲) متناظر با آن و جواب خصوصی دلخواه $y_p(x)$ مربوط به (۱):

$$(۴) \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

مسائل بخش ۱۱.۲

۱. نشان دهید که $y_{p1} = \sin 2x$ و $y_{p2} = \sin 2x - \sin x$ جوابهای خصوصی $y'' + y = -3 \sin 2x$ هستند. جوابهای عمومی (۴) متناظر با آن را پیدا کنید و نشان دهید که یکی از آنها را می‌توان به دیگری تبدیل نمود به طوری که انتخاب y_p مهم نباشد.

۲. نشان دهید که هر یک از دو جواب عمومی (۴) متناظر با y_p متفاوت را می‌توان به دیگری تبدیل نمود.

۳. نشان دهید که هر گاه y_1 یک جواب (۱) به ازای $r = r_1$ و y_2 یک جواب (۱) به ازای $r = r_2$ باشد در آن صورت $y = y_1 + y_2$ یک جواب (۱) به ازای $r = r_1 + r_2$ است.

۴. نشان دهید که $y_1 = e^x$ يك جواب $y'' + y = 2e^x$ و $y_2 = x \sin x$ يك جواب $y'' + y = 2 \cos x$ است. با استفاده از مسئله ۳ جواب عمومی معادله $y'' + y = 2e^x + 2 \cos x$ را پیدا کنید.

۵. قضایای ۱ و ۲ را به معادله‌ای از هر مرتبه n بسط دهید.

در هر يك از حالات زیر تحقیق کنید که $y_p(x)$ يك جواب معادله دیفرانسیل داده شده بوده و جواب عمومی را پیدا کنید.

$$y'' + y = 2e^x, \quad y_p = e^x \quad .6$$

$$y'' - y = 2e^x, \quad y_p = xe^x \quad .7$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 2, \quad y_p = x^2 \quad .8$$

$$y'' + 4y = -12 \sin 2x, \quad y_p = 3x \cos 2x \quad .9$$

$$y'' + 9y = 18x, \quad y_p = -2x \quad .10$$

$$(D^2 - 1)y = 2 \cos x, \quad y_p = -x \cos x \quad .11$$

$$(D^2 + D)y = 2 \sin x, \quad y_p = -x \cos x \quad .12$$

$$(4x^2 D^2 + 1)y = (1 - x^2) \cos 0.5x, \quad y_p = \cos 0.5x \quad .13$$

$$(x^2 D^2 - 3xD + 3)y = 3 \ln x - 2, \quad y_p = \ln x \quad .14$$

$$(D^2 + 6D + 9)y = \frac{e^{-2x}}{x^2 + 1}, \quad y_p = (x \arctan x - 0.5 \ln(x^2 + 1))e^{-2x} \quad .15$$

۱۲.۲ روشی برای حل معادلات خطی غیرهمگن

برای به دست آوردن جواب عمومی يك معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن به جواب خصوصی $y_p(x)$ آن معادله نیاز داریم. این مطلب در بخش قبل نشان داده شد. چگونه می توانیم این تابع y_p را پیدا کنیم؟

در بخش ۱۶.۲ به بررسی روشی کلی برای یافتن y_p خواهیم پرداخت. در بخش حاضر روش مخصوص بسیار ساده تری را مورد بحث قرار می دهیم که به اصطلاح روش ضرایب نامعین نامیده می شود و در مسائل مهندسی نظیر ارتعاشات مکانیکی واداشته و ارتعاشات الکتریکی پایه ای است. این روش برای معادلات

$$(۱) \quad y'' + ay' + by = r(x)$$

قابل اعمال است که در آن $r(x)$ طوری است که شکل جواب خصوصی $y_p(x)$ معادله (۱) قابل حدس باشد؛ مثلاً ممکن است r توان ساده‌ای از x ، یک چند جمله‌ای، یک تابع نمایی، یک تابع سینوسی یا کسینوسی و یا مجموعی از این نوع توابع باشد. روش بدین ترتیب است که برای y_p عبارتی شبیه $r(x)$ که شامل ضرایب مجهول است فرض می‌شود و با قرار دادن y_p و مشتقات آن در (۱) این ضرایب معلوم می‌شوند. انتخاب چنین نامی برای این روش از اینجا ناشی شده است.

حال برای تفهیم مطلب به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱

معادله غیرهمگن زیر را حل کنید

$$(۲) \quad y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$$

مشتقات e^{-2x} عبارتند از حاصلضرب e^{-2x} در اعدادی ثابت، بنابراین فرض می‌کنیم

$$y_p = k e^{-2x}$$

جایگزینی y_p ، y_p' ، y_p'' در (۲) نتیجه می‌دهد

$$4k e^{-2x} - 4(-2k e^{-2x}) + 3k e^{-2x} = 10 e^{-2x}$$

واز آنجا $4k + 8k + 3k = 10$ ، و $k = 2/3$. پایه‌ای برای معادله همگن عبارت است از e^x ، e^{2x} . پس بنابر قضیه ۲ بخش قبل جواب زیر حاصل می‌شود

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$$

مثال ۲

معادله غیرهمگن زیر را حل کنید

$$(۳) \quad y'' + 4y = 8x^2$$

$y_p = Kx^2$ را امتحان می‌کنیم ولی این کار مؤثر نمی‌افتد زیرا داریم $y_p'' = 2K$ و با قرار دادن این مقدار در (۳) نتیجه می‌گیریم

$$2K + 4Kx^2 = 8x^2$$

و برای برقراری این رابطه به ازای هر x باید ضرایب هر توانی از x در هر طرف (x^2, x) همانند باشند:

$$2K = 0, \quad 2K = 8$$

که جوابی ندارد. حال تابع زیر را امتحان می‌کنیم

$$y_p'' = 2K \quad \text{در آن صورت} \quad y_p = Kx^2 + Lx + M$$

با جایگزینی در (۳) نتیجه می‌شود

$$2K + 4(Kx^2 + Lx + M) = 8x^2$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x^2 و x و x^0 در طرفین داریم

$$2K = 8, \quad 4L = 0, \quad 2K + 4M = 0$$

بنابراین $K = 2$ ، $L = 0$ ، $M = -1$ و از اینرو $y_p = 2x^2 - 1$ و جواب عمومی معادله (۳) عبارت است از

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x^2 - 1$$

آیا دلیل به جواب نرسیدن آنچه را که ابتدا فرض کردیم می‌دانید؟

مثال ۳

این معادله غیر همگن را حل کنید

$$(4) \quad y'' - y' - 2y = 10 \cos x$$

دانشجو ممکن است $y_p = K \cos x$ را بیازماید و دریابد که با این کار به جواب نمی‌رسد. چون مشتقات کسینوس توابع سینوس و کسینوس هستند بدین ترتیب عمل می‌کنیم

$$y_p = K \cos x + M \sin x$$

از آنجا

$$y_p' = -K \sin x + M \cos x$$

$$y_p'' = -K \cos x - M \sin x$$

با قرار دادن این مقادیر در (۴) به دست می‌آوریم

$$(-3K - M) \cos x + (K - 3M) \sin x = 10 \cos x$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\cos x$ و $\sin x$ در دو طرف داریم

$$-3K - M = 10, \quad K - 3M = 0$$

بنابراین $K = -3$ ، $M = -1$ و $y_p = -3 \cos x - \sin x$. یک جواب عمومی

معادله همگن متناظر با آن عبارت است از

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}.$$

و نتیجه کلی چنین است

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 3 \cos x - \sin x.$$

این مثالها قاعده زیر را به ذهن می آورد.

قاعده

هرگاه $r(x)$ در (۱) یکی از توابع واقع در ستون ۱ جدول ۱-۲ باشد برای y_p يك تركيب خطی با ضرایب نامعین $r(x)$ و مشتقات آن که مستقل خطی اند (به ستون ۲ رجوع شود) انتخاب کنید و ضرایب را با جایگزینی معین نمایید.

هرگاه $r(x)$ مجموعی از توابع ستون ۱ باشد برای y_p مجموع توابع واقع در ستون متناظرش را انتخاب کنید.

هرگاه جمله ای در $r(x)$ يك جواب معادله همگن متناظر با (۱) باشد انتخاب خود را به ترتیب زیر تکمیل کنید.

قاعده تکمیلی

عبارت واقع در سطر مناسب ستون ۲ را در x یا x^2 ضرب کنید بسته به اینکه عدد واقع در ستون ۳ يك ریشه ساده یا مضاعف معادله مشخصه معادله همگن متناظر با (۱) باشد. اثبات در زیر آمده است.

حال به بررسی دو مثال اضافی می پردازیم یکی برای حالتی که به قاعده تکمیلی نیازی نیست و دیگری برای وقتی که لازم است.

مثال ۴

جواب خصوصی معادله زیر را پیدا کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = 4x + e^{2x}$$

به ترتیب زیر شروع می کنیم

$$y_p = K_1 x + K_0 + C e^{2x}$$

با جایگزینی پیدا می کنیم $K_1 = 2$ ، $K_0 = 3$ ، $C = 1/2$ و بنابراین

$$y_p = 2x + 3 + \frac{1}{2} e^{2x}$$

جدول ۱۰۲
روش ضرایب نامعین

انتخاب y_p		جمله $r(x)$
p	Ce^{px}	ke^{px}
۰	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \dots + K_1 x + K_0$	$kx^n (n=0, 1, \dots)$
iq iq	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} K \cos qx + M \sin qx \left\{ \right.$	$k \cos qx$ $k \sin qx$

مثال ۵

این معادله غیر همگن را حل کنید

$$(5) \quad y'' - 2y' + y = (D-1)^2 y = e^x + x.$$

بنا به جدول ۱۰۲ جمله x دلالت بر انتخاب جواب خصوصی زیر دارد

$$K_1 x + K_0.$$

نظر به اینکه ۱ ریشه مضاعف معادله مشخصه $(\lambda-1)^2=0$ است، بنا به قاعده تکمیلی جمله e^x مستلزم جواب خصوصی

$$Cx^2 e^x \quad (\text{بجای } Ce_x)$$

است. روی هم رفته داریم

$$y_p = K_1 x + K_0 + Cx^2 e^x.$$

با قرار دادن این عبارت در (۵) به دست می آوریم

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = 2Ce^x + K_1 x - 2K_1 + K_0 = e^x + x.$$

از این رو $C=1/2$ ، $K_1=1$ ، $K_0=2$ ، و جواب عمومی (۵) عبارت است از

$$y = y_h + y_p = (c_1 x + c_2) e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x + x + 2.$$

قواعدی که ما به کار می بریم ساده اند. باید توجه کرد که این قواعد فقط در حالات

مندرج در جدول ۱.۲ مفیدند. اثبات این قواعد از اهمیت کمتری برخوردار است و ما آن را برای تکمیل کردن بحث می آوریم و به عنوان يك وسیله مناسب از عملگرها (بخش ۵.۲) استفاده می کنیم. خواننده می تواند از این برهان بگذرد یا به عنوان یکی از کاربردهای روشهای عملگری آن را بخواند.

برای سطر ۱ جدول ۱.۲ معادله (۱) به صورت زیر است

$$(6) \quad (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = ke^{px}$$

با ضرب دو طرف در $D - p$ به دست می آوریم

$$(7) \quad (D - p)(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = k(D - p)[e^{px}] = 0$$

از روی شکل (۶) و (۷) مستقیماً می بینیم که هر جواب (۶) در (۷) صدق می کند. از این رو هر جواب (۶) را می توان از جواب عمومی (۷) به دست آورد. معادله (۷) يك معادله همگن مرتبه سوم است. شکل جواب عمومی آن بستگی به این دارد که ریشه های آن متفاوت یا مساوی باشند. جوابهای عمومی (۷) عبارت اند از

$$\begin{aligned} & y = (c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}) + C e^{px} \quad p \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq p \quad \text{هر گاه (الف)} \\ & y = (c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}) + C e^{px} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq p \quad \text{هر گاه} \\ (8) \quad & y = (c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{px}) + C x e^{px} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 = p \quad \text{هر گاه (ب)} \\ & y = (c_1 e^{px} + c_2 x e^{px}) + C x^2 e^{px} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = p \quad \text{هر گاه (پ)} \end{aligned}$$

توابع واقع در پرانتزها جوابهای عمومی معادله همگن متناظر با (۶) هستند. از این رو آخرین جمله، با مقدار مناسب C ، جواب خصوصی y_p از (۶) است. این امر نشان می دهد که (۸ الف) اثبات کننده قاعده است، (۸ ب) قاعده تکمیلی در مورد يك ریشه ساده را ثابت می کند و (۸ پ) در مورد يك ریشه مضاعف را، وقتی که $r(x) = k e^{px}$ برای سطر ۲ و ۳ جدول ۱.۲ ایده اثبات همانند بالاست؛ بجای $D - p$ در آن صورت باید D^{n+1} رادر سطر ۲ به کار گیریم که نتیجه می شود $D^n + q[x^n] = 0$ و $D^n + q[x^n] = 0$ در سطر ۳ نتیجه می دهد $(D^n + q^x)[\cos qx] = 0$ و $(D^n + q^x)[\sin qx] = 0$.

مسائل بخش ۱۲.۲

۱. قاعده تکمیلی در حالت مربوط به سطر ۲ جدول ۱.۲ را به تفصیل اثبات کنید.

۲. مسئله ۱ را نسبت به سطر ۳ جدول ۱.۲ حل کنید.

جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' + 2y' + y = 2x^2 \quad .۴ \quad y'' + y = x^2 + x \quad .۳$$

$$y'' - y' - 2y = \sin x \quad .۶ \quad y'' + 5y' + 6y = 9x^2 - x \quad .۵$$

$$y'' + y' - 2y = 3e^x \quad .۸ \quad y'' + y' - 6y = 52 \cos 2x \quad .۷$$

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x \quad .۱۰ \quad y'' + y = 2 \sin x \quad .۹$$

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 1 - 2x^2 \quad .۱۱$$

$$y'''' - 5y'' + 4y = 10 \cos x \quad .۱۲$$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' - y = e^x \quad .۱۴ \quad y'' + y = -x - x^2 \quad .۱۳$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin x \quad .۱۶ \quad y'' + 4y = e^{-x} \quad .۱۵$$

$$y'' + y' - 2y = e^x \quad .۱۸ \quad y'' + y = \sin x \quad .۱۷$$

$$y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \quad .۱۹$$

$$y'' - 4y' + 9y = 10e^{2x} - 12 \cos 3x \quad .۲۰$$

روش ضرایب نامعین درمورد بعضی از معادلات مرتبه اول نیز به کار می رود و از روش معمولی (بخش ۷.۱) ساده تر است. با استفاده از هر دو روش معادلات زیر را حل کنید.

$$y' - 2y = \sin 2x \quad .۲۲ \quad y' + y = x^2 \quad .۲۱$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 25y = 5x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -4.8 \quad .۲۳$$

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad .۲۴$$

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 - 8x + 4, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3 \quad .۲۵$$

$$y'' - y' - 2y = 10 \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3 \quad .۲۶$$

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2 \quad .۲۷$$

$$y'' + 2y' + 2y = -2 \cos 2x - 4 \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad .۲۸$$

$$y'' + 4y' + 8y = 4 \cos x + 7 \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad .۲۹$$

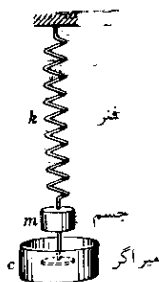
$$y'' + 2y' + 10y = 4\Delta \cos x - \sin x, \quad y(0) = 0\Delta, \quad y'(0) = 3.30$$

۱۳.۲ نوسانات واداشته. تشدید

دربخش ۶.۲ نوسانات آزاد يك جسم متصل به يك فنر را كه درشكل ۴۵ نشان داده شده است بررسی كردیم. این حرکت به وسیله معادله همگن

$$(1) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$$

بیان می شود كه در آن m جرم جسم و c ثابت میرایی و k مدول فنر است. حالا با فرض اینکه يك نیروی متغیر $r(t)$ بردستگاه اثر كند بررسی خود را گسترش می دهیم. ازاین راه با موضوعات جالب دیگری آشنا می شویم كه در ریاضیات مهندسی، بویژه در ارتباط با تشدید، بنیادی هستند.



شكل ۴۵. وزنه متصل به فنر

به خاطر داریم كه معادله (۱) با در نظر گرفتن نیروهای مؤثر بر جسم و با استفاده از قانون دوم نیوتن به دست آمد. ازاین رو واضح است كه معادله دیفرانسیل مربوط به وضعیت فعلی با افزودن $r(t)$ به (۱) به دست می آید؛ یعنی

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = r(t)$$

$r(t)$ را ورودی یا نیروی محرك و جواب متناظر با آن را خروجی یا پاسخ دستگاه به نیروی محرك می ناسند. (بخش ۷.۱ را نیز ببینید.) حرکت حاصل را يك حركت واداشته می نامند و این مقابل حركت آزاد است كه متناظر با معادله (۱) درغیاب نیروی خارجی $r(t)$ است.

به ورودیهای متناوب توجه خاصی مبذول می داریم. يك ورودی سینوسی را در نظر

می گیریم، مثلاً

$$r(t) = F_0 \cos \omega t \quad (F_0 > 0, \omega > 0)$$

ورودیهای متناوب پیچیده تر بعداً در بخش ۷.۱۰ بررسی خواهند شد.

حال معادلهٔ دیفرانسیل مورد بحث چنین می شود

$$(۲) \quad m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \cos \omega t.$$

می خواهیم جواب عمومی این معادله را که نمایشگر خروجی دستگاه مرتعش است تعیین نمائیم و دربارهٔ آن بحث کنیم. چون جواب عمومی متناظر با معادلهٔ همگن (۱) بنا بر بخش ۶.۲ معلوم است حال باید جواب خصوصی $y_p(t)$ معادلهٔ (۲) را معین کنیم.

این کار را می توان با روش ضرایب نامعین (بخش ۱۲.۲) انجام داد بدین ترتیب که

$$(۳) \quad y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t.$$

با مشتقگیری از این تابع داریم

$$\dot{y}_p = -\omega a \sin \omega t + \omega b \cos \omega t, \quad \ddot{y}_p = -\omega^2 a \cos \omega t - \omega^2 b \sin \omega t.$$

با قراردادن این عبارات در (۲) و مرتب کردن ضرایب سینوس و کسینوس به دست می آوریم

$$[(k - m\omega^2)a + \omega cb] \cos \omega t + [-\omega ca + (k - m\omega^2)b] \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$

با مساوی قراردادن ضرایب سینوس و کسینوس در طرفین داریم

$$(۴) \quad \begin{aligned} (k - m\omega^2)a + \omega cb &= F_0 \\ -\omega ca + (k - m\omega^2)b &= 0 \end{aligned}$$

این دستگاه متشکل از دو معادلهٔ جبری خطی با مجهولات a و b است. جواب دستگاه به طریق معمولی حذفی یا قاعدهٔ کرامر (در صورت لزوم بخش ۹.۷ را ببینید) به دست می آید. پیدا می کنیم

$$a = F_0 \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

مشروط بر آنکه مخارج صفر نباشد. هر گاه نظیر بخش ۶.۲ قرار دهیم $\sqrt{k/m} = \omega_0 (> 0)$ داریم

$$(۵) \quad a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}$$

بنابراین جواب عمومی به دست می آید

$$(۶) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

که در آن y_h جواب عمومی (۱) بوده و y_p از رابطه (۳) معین می شود که ضرایب آن از (۵) به دست می آید.

حالا رفتار دستگاه مکانیکی را مورد بحث قرار می دهیم و بین دو حالت $c = 0$ (بدون میرایی) و $c > 0$ (بامیرایی) تفاوت قایل می شویم. این حالات بادونوع خروجی مختلف متناظرند.

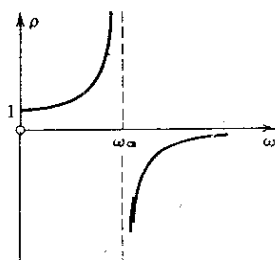
حالت ۱. نوسانات واداشته غیرمیرا. هرگاه میرایی وجود نداشته باشد آنگاه $c = 0$. فرض می کنیم $\omega_0^2 \neq \omega^2$. این فرض لازم است. بدین ترتیب از (۳) نخست و (۵) به دست می آوریم

$$(۷) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t$$

ازاین رابطه و رابطه (۶*) بخش ۶.۲ جواب عمومی زیر را داریم

$$(۸) \quad y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

این خروجی نمایشگر جمع اثرهای دو نوسان همساز است؛ بسامدهای آنها عبارت اند از «بسامد طبیعی» دستگاه $\omega_0/2\pi$ [دور پرفانیه] (یعنی بسامد حرکت غیر میرای آزاد) و بسامد دودی $\omega/2\pi$.



شکل ۴۶. عامل تشدید $\rho(\omega)$

از رابطه (۷) دامنهٔ ماکزیمم y_p ، عبارت است از

$$(۹) \quad \rho = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad \text{که در آن} \quad a_0 = \frac{F_0}{k} \rho$$

این دامنه به ω و ω_0 بستگی دارد. وقتی $\omega \rightarrow \omega_0$ مقادیر ρ و a_0 به سمت بینهایت میل می کنند. این پدیده تحریک نوسانات بزرگ که با تساوی بسامدهای طبیعی و ورودی حاصل می شود ($\omega = \omega_0$) را تشدید می نامند و در مطالعه دستگاههای ارتعاشی از اهمیت زیادی برخوردار است (به دنباله مطلب رجوع کنید). کمیت ρ را عامل تشدید می نامند (شکل ۴۶). از (۹) می بینیم که ρ/k برابر با نسبت دامنه های تابع y_p و ورودی است. در حالت تشدید معادله (۲) چنین می شود

$$(10) \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

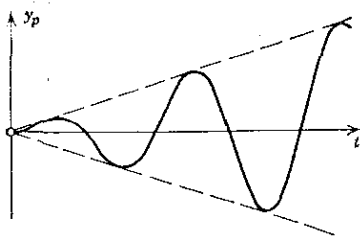
بنا به قاعده تکمیلی بخش قبل نتیجه می گیریم که جواب خصوصی (۱۰) دارای شکل زیر است

$$y_p(t) = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

با قرار دادن این رابطه در (۱۰) درمی یابیم که $a = 0$ ، $b = F_0 / 2m\omega_0$ (شکل ۴۷)

$$(11) \quad y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

می بینیم که y_p بزرگتر و بزرگتر می شود. در عمل، این بدان معنی است که به دستگاههای با میرایی کم ممکن است نوسانات بزرگی اثر نماید که بتواند دستگاه را معیوب نماید؛ بعداً در همین بخش به این جنبه عملی تشدید می پردازیم.



شکل ۴۷. جواب خصوصی در حالت تشدید

نوسان دیگری که نوعاً جالب و بسیار مهم است نوسانی است که در آن ω به ω_0 نزدیک شود. مثلاً جواب خصوصی [به (۸) رجوع شود] متناظر با شرایط اولیه $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ یعنی

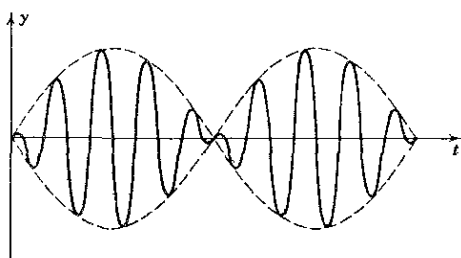
$$(12) \quad y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad (\omega \neq \omega_0)$$

را در نظر بگیرید. این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت [به رابطه ۱۲ ضمیمه ۳

رجوع شود]

$$y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t$$

چون ω نزدیک به ω_0 است تفاضل $\omega_0 - \omega$ کوچک می باشد و بنابراین دوره تناوب تابع سینوسی آخری بزرگ بوده و نوسانی مطابق شکل ۴۸ خواهیم داشت



شکل ۴۸. نوسان غیر میرای واداشته وقتی که اختلاف بسامد طبیعی ورودی و خروجی کوچک است («ضربان»)

حالت ۲. نوسانات واداشته میرا. در صورت وجود میرایی $c > 0$ بوده و بنابر بخش ۶.۲ می دانیم که جواب عمومی y_h رابطه (۱) با ازدیاد t به سمت صفر میل می نماید (عملاً پس از زمانی به اندازه کافی طولانی) یعنی جواب عمومی (۶) معادله (۲) حالا نشان دهنده جواب گذرا می باشد و به سمت جواب حالت مانا یعنی y_p میل می نماید. بنابراین پس از زمانی به اندازه کافی طولانی خروجی متناظر با ورودی صرفاً سینوسی عملیات نوسان همساز است که بسامد آن برابر با بسامد ورودی است. این چیزی است که در عمل اتفاق می افتد زیرا هیچ دستگاه فیزیکی ای کاملاً غیر میرا نیست.

در حالی که برای حالت غیر میرا با نزدیک شدن ω به ω_0 دامنه y_p به بینهایت میل می کند ولی برای حالت مورد بحث چنین اتفاقی نمی افتد. دامنه همیشه محدود خواهد ماند اما به ازای مقداری از ω ممکن است ماکزیممی داشته باشد و این به مقدار c بستگی دارد. این مقدار را می توان تشدید عملی نامید. این موضوع اهمیت زیادی دارد زیرا نشان می دهد که بعضی از مقادیر ورودی ممکن است نوسانی را با چنین دامنه بزرگی تحریک کند به طوری که باعث خرابی دستگاه شود. چنین مواردی در عمل اتفاق افتاده است مخصوصاً پیشترها که تشدید به خوبی شناخته نشده بود. ماشین آلات، اتومبیلها، کشتیها، هواپیماها و پلها دستگاههای مکانیکی ارتعاشی هستند و گاهی به دشواری می توان بناهایی را پیدا کرد که از اثرات تخریبی تشدید کاملاً مصون مانده باشند.

برای پیدا کردن دامنه y_p به صورت تابعی از ω ، (۳) را به شکل

$$(۱۳) \quad y_p(t) = C^* \cos(\omega t - \eta)$$

می‌نویسیم که در آن، بنابه (۵)،

$$C^*(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}$$

(۱۴)

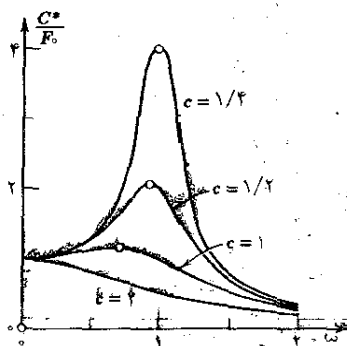
$$\tan \eta = \frac{b}{a} = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

حالا ما کزیمم $C^*(\omega)$ را تعیین می‌کنیم. با صفر قرار دادن $dC^*/d\omega$ پیدا می‌کنیم

$$[-2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) + c^2]\omega = 0$$

داخل کروشه به ازای مقدار زیر برابر صفر است

$$(۱۵) \quad c^2 = 2m^2(\omega_0^2 - \omega^2).$$



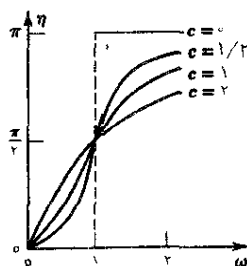
شکل ۴۹. میزان تقویت C^*/F_0 به صورت تابعی از ω به ازای $m=1$ ، $k=1$ و مقادیر مختلف ثابت میرایی c

برای میرایی بقدر کافی زیاد ($c^2 > 2m^2\omega_0^2 = 2mk$) معادله (۱۵) جواب حقیقی ندارد و C^* با افزایش ω بطوریکه نواخت کاهش می‌یابد (شکل ۴۹). اگر $c^2 \leq 2mk$ ، معادله (۱۵) یک جواب حقیقی $\omega = \omega_{\max}$ دارد که یا کاهش c افزایش می‌یابد و در صورتی که c به سمت صفر میل کند مقدار آن به ω میل می‌کند. دامنه $C^*(\omega)$ به ازای $\omega = \omega_{\max}$ ماکزیمم است و با قرار دادن $\omega = \omega_{\max}$ در (۱۴) پیدا می‌کنیم که

$$(۱۶) \quad C^*(\omega_{\max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

می بینیم که $C^*(\omega_{\max})$ محدود است هرگاه $c > 0$ ، چون وقتی $c^2 < 2mk$ باشد $dC^*(\omega_{\max})/dc < 0$ است، مقدار $C^*(\omega_{\max})$ با کاهش c ($c \leq \sqrt{2mk}$) افزایش می یابد و وقتی c به سمت صفر میل کند مقدار آن به بینهایت میل می نماید و این با نتیجه ای که در حالت ۱ به دست آمد موافقت دارد. شکل ۴۹ میزان تقویت C^*/F_0 (نسبت دامنه های خروجی و ورودی) را به صورت تابعی از ω به ازای $m=1$ ، $k=1$ و مقادیر مختلف ثابت میرایی c نشان می دهد.

زاویه η در (۱۴) را زاویه فاز یا تأخیر فاز می نامند (شکل ۵۰) زیرا تأخیر خروجی را نسبت به ورودی تعیین می کند. هرگاه $\omega < \omega_0$ ، آنگاه $\eta < \pi/2$ ؛ هر وقت $\omega = \omega_0$ آن وقت $\eta = \pi/2$ بوده و در صورتی که $\omega > \omega_0$ در آن صورت $\eta > \pi/2$.



شکل ۵۰. اختلاف فاز η به صورت تابعی از ω به ازای $m=1$ ، $k=1$ و مقادیر مختلف ثابت میرایی c

مسائل بخش ۱۳.۲

در هر مورد نوسانات حالت مانا را پیدا کنید.

$$۱. \quad \ddot{y} + y = 3 \cos 2t$$

$$۲. \quad \ddot{y} + 4y = \sin t$$

$$۳. \quad (D^2 + 16)y = \cos t - \sin t$$

$$۴. \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 10 \sin t$$

$$۵. \quad (2D^2 + 2D + 3)y = 87 \cos 3t - 5 \sin t$$

$$(D^2 + D + 1)y = 2\cos t + 26\cos 2t \quad ۶$$

در هر مورد جواب حالت گذرا را پیدا کنید.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 65\cos 2t \quad ۸ \quad \ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 10\sin t \quad ۷$$

$$4\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 37.75\sin 4t \quad ۱۰ \quad \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 85\cos 3t \quad ۹$$

$$(D^2 + 2D + 1)y = 50\sin 3t \quad ۱۲ \quad (D^2 + 2D + 5)y = -\sin t \quad ۱۱$$

مسائل یا مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\ddot{y} + 25y = 24\sin t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1 \quad ۱۳$$

$$\ddot{y} + y = -9\sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ۱۴$$

$$\ddot{y} + y = \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad \omega^2 \neq 1 \quad ۱۵$$

$$\ddot{y} + \omega_1^2 y = \cos \omega t, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad \omega_1^2 \neq \omega^2 \quad ۱۶$$

۱۷. به ازای چه شرایط اولیه‌ای جواب مسئله ۱۵ نمایشگر نوسانی است که بسامد آن برابر با بسامد ورودی است؟ آیا می‌توانیم شرایط اولیه را چنان پیدا کنیم که جواب مسئله ۱۶ نمایشگر نوسانی باشد که بسامد آن با بسامد طبیعی دستگاه برابر است؟

۱۸. مسئله با مقدار اولیه $\ddot{y} + y = \cos \omega t$ ، $\omega^2 \neq 1$ ، $y(0) = 0$ ، $\dot{y}(0) = 0$ را حل کنید. نمودار دامنه ماکزیمم را به صورت تابعی از ω رسم کنید. نشان دهید که جواب را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y(t) = \frac{2}{1 - \omega^2} \sin\left[\frac{1}{2}(1 + \omega)t\right] \sin\left[\frac{1}{2}(1 - \omega)t\right]$$

نمودارهای مناسبی برای $y(t)$ به ازای ۲، ۱.۱، ۰.۹، ۰.۵ و $\omega = 0$ رسم کنید.

۱۹. غرض کنید در (۱۲)، ω به ω_0 میل کند. نشان دهید که این کار به جوابی به صورت (۱۱) منجر می‌شود.

۲۰. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_0 \sin \omega t \quad (c \neq 0)$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 29y = 10\cos t + 28\sin t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -4 \quad ۲۱$$

$$0.5\ddot{y} + 2\dot{y} + 2.5y = \cos 5t + \sin 5t, \quad y(0) = -0.1, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ۲۲$$

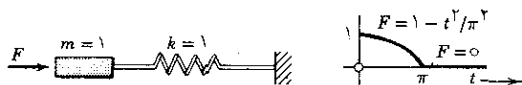
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin 2t - 2 \cos 2t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad ۲۳$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 20y = 23 \sin t - 15 \cos t, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1. \quad ۲۴$$

۲۵. (لوله توپ) معادله زیر را حل کنید

$$\ddot{y} + y = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases} \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

این معادله را می‌توان به دستگاه غیرمیرایی تعبیر نمود که بر آن يك نیروی F در طول يك فاصله زمانی اثر می‌کند (شکل را ببینید)، به عنوان مثال، در يك لوله توپ وقتی گلوله‌ای شلیک می‌شود لوله به وسیله فنرهای قوی ترمز می‌شود (و در آن صورت به وسیله يك میراگر که برای سهولت از آن صرف نظر می‌کنیم، میرا می‌شود). دهنمایی. در لحظه $t = \pi$ هم y و هم $\dot{y}$ باید پیوسته باشند.



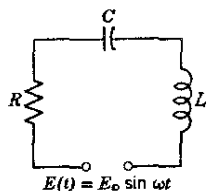
مسئله ۲۵

۱۴.۲ مدارهای الکتریکی

بخش قبل به مطالعه دستگاهی مکانیکی که از نظر عملی بسیار مورد توجه است اختصاص داده شده بود. حال به بررسی يك دستگاه الکتریکی با اهمیتی مشابه می‌پردازیم که می‌توان آن را جزء اساسی شبکه‌های الکتریکی دانست. این بررسی همچنین می‌تواند نشان‌دهنده مثال برجسته‌ای از این مطلب مهم باشد که دستگاه‌های فیزیکی کاملاً متفاوت را می‌توان با يك معادله دیفرانسیل متناظر دانست و بدین ترتیب این بررسی، نقش ریاضیات را در متحد کردن پدیده‌های متفاوتی که ماهیتهای فیزیکی کاملاً گوناگونی دارند نشان می‌دهد. ما تناظری بین دستگاه‌های الکتریکی و مکانیکی پیدا خواهیم کرد که صرفاً کیفی نبوده بلکه کمی نیز هستند بدین معنی که به ازای يك دستگاه مکانیکی مفروض می‌توان مدار الکتریکی بنا نهاد که شدت جریان آن درست همان مقادیر جابجایی در دستگاه مکانیکی خواهد بود مشروط بر آنکه عوامل سنجش مناسبی به کار گرفته شوند. اهمیت عملی چنین قیاسی بین دستگاه‌های مکانیکی و الکتریکی تقریباً واضح است. از این قیاس می‌توان برای ساختن «مدل الکتریکی» يك دستگاه مکانیکی مفروض استفاده کرد و در بسیاری از موارد این کار لازم است. زیرا طرح مدارهای الکتریکی و اندازه‌گیری جریان و ولتاژ آسان است.

درحالی که ساختن يك مدل مکانیکی شاید دشوار و پرهزینه باشد و اندازه گیری جابجاییها در این دستگاه وقت گیر و غیر دقیق*.

مدار «RLC» شکل ۵۱ را بررسی خواهیم کرد. مدارهای ساده تر در بخش ۹.۱ بررسی شدند و فرض بر این است که دانشجو با آن موارد ساده تر آشنایی دارد زیرا این آشنایی مبنای به دست آوردن معادله دیفرانسیل مدار حاضر است. به یاد داریم که معادلات دیفرانسیل آن مدارها از مساوی قرار دادن مجموع افت ولتاژ عناصر مدارها با نیروی محرکه الکتریکی مدار به دست می آمدند. این عمل با استفاده از قانون ولتاژ کیرشهف انجام می شد که نقش آن در مدارها مانند نقش قانون دوم نیوتن (بخش ۶.۲) در دستگاههای مکانیکی است.



شکل ۵۱. مدار RLC

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل مدار شکل ۵۱ می توانیم از معادله مربوط به يك مدار RC [به رابطه (۷) بخش ۹.۱ رجوع شود] استفاده نمائیم و به آن افت پتانسیل LI در طول القاء کننده مدار را اضافه کنیم. نتیجه چنین می شود

$$(۱') \quad LI + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E(t) = E_0 \sin \omega t$$

از بخش ۹.۱ به خاطر داریم که $I = Q = dQ/dt$ ، یعنی شدت جریان برابر با میزان تغییرات بار الکتریکی نسبت به زمان است. از این رو $\dot{I} = \ddot{Q}$ و در (۱') داریم $\int I dt = Q$ بنابراین (۱') را می توان این طور نوشت

$$(۱'') \quad L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = E_0 \sin \omega t.$$

این معادله دیفرانسیل بار Q در خازن مدار RLC است. امروزه در بسیاری از مسائل عملی

* برای ایده های مشابه در زمینه کامپیوترهای قیاسی کتاب ساده تروت Truitt و راجرز Rogers [G18] مندرج در ضمیمه ۱ را ببینید.

به جای بار $Q(t)$ شدت جریان $I(t)$ ، کمیت فیزیکی مورد نظر است. در نتیجه معادله دیفرانسیل شدت جریان $I(t)$ در مدار RLC مهمتراز (۱") است. این معادله را با مشتقگیری از (۱') نسبت به t به دست می آوریم. نتیجه عبارت است از

$$(1) \quad L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E_0\omega \cos \omega t$$

این همان شکل معادله (۲) بخش ۱۳.۲ را دارد. از اینرو این مدار RLC مشابه الکتریکی دستگاه مکانیکی بخش ۱۳.۲ است. مقایسه مقادیر الکتریکی متناظر با مقادیر مکانیکی در جدول ۲.۲ نشان داده شده است.

جدول ۲.۲

مقایسه کمیت‌های مکانیکی و الکتریکی در معادله (۱) این بخش

و معادله (۲) بخش ۱۳.۲

دستگاه الکتریکی	دستگاه مکانیکی
القاء L	جرم m
مقاومت R	ثابت میرایی c
وارونه ظرفیت $1/C$	مدول فنر k
مشتق نیروی محرکه الکتریکی $E_0\omega \cos \omega t$	نیروی محرك $F_0 \cos \omega t$
شدت جریان $I(t)$	جابه‌جایی $y(t)$

برای پیدا کردن جواب خصوصی (۱) می‌توانیم نظیر بخش ۱۳.۲ عمل کنیم. با جایگزینی

$$(2) \quad I_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

در (۱) به دست می آوریم

$$(3) \quad a = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2}, \quad b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2}$$

که در آن S به اصطلاح **واکناس** نامیده می‌شود و با عبارت زیر تعین می‌شود:

$$(۴) \quad S = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

در هر حالت عملی $R \neq 0$ ، لذا مخرج کسر (۳) صفر نیست. بنابراین رابطه (۲) که a و b آن با (۳) داده شده‌اند، جواب خصوصی (۱) است. با استفاده از (۳) می‌توانیم I_p را به صورت

$$(۵) \quad I_p(t) = I_0 \sin(\omega t - \theta)$$

بنویسیم که در آن [به رابطه (۱۴) ضمیمه ۳ رجوع شود]

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + S^2}}, \quad \tan \theta = -\frac{a}{b} = \frac{S}{R}.$$

کمیت $\sqrt{R^2 + S^2}$ را **امپدانس** می‌نامند. فرمول بالا نشان می‌دهد که امپدانس برابر نسبت E_0/I_0 است که تقریباً شبیه $E/I = R$ است (قانون اهم). معادله مشخصه معادله دیفرانسیل همگن متناظر با (۱) عبارت است از

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0.$$

و دارای ریشه‌های $\lambda_1 = -\alpha + \beta$ و $\lambda_2 = -\alpha - \beta$ است که در آن

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}$$

مانند بخش ۱۳.۲ استنباط می‌کنیم هر گاه $R > 0$ (که البته در هر حالت عملی چنین است) جواب عمومی $I_h(t)$ معادله همگن وقتی t به سمت بینهایت میل کند به سمت صفر میل می‌کند (عملاً پس از زمانی به اندازه کافی طولانی). بنابراین جریان گذرای $I = I_h + I_p$ به سمت جریان حالت ماندای I_p میل می‌نماید و پس از زمانی به اندازه کافی طولانی خروجی عملاً یک نوسان همساز به شکل (۵) است و بسامد آن با بسامد ورودی برابر خواهد بود.

مثال ۱. مدار RLC

شدت جریان $I(t)$ را در یک مدار RLC پیدا کنید هر گاه، اهم $R = 100$ و هانری $L = 0.1$ و فاراد $C = 10^{-3}$ و به منبع ولتاژ $E(t) = 155 \sin 377t$ (بنابراین بسامد عبارت است از، هر تریز $60 =$ دور بر ثانیه 60) متصل است پیدا کنید. فرض بر این است که در لحظه $t = 0$ شدت جریان و بار الکتریکی صفر باشند. معادله (۱) چنین است

$$0.1 \ddot{I} + 100 \dot{I} + 10000 I = 155 \times 377 \cos 377t$$

راکتانس $S = ۳۷۷۷ - ۱/۰۳۷۷$ و شدت جریان حالت مانا

$$I_p(t) = a \cos ۳۷۷t + b \sin ۳۷۷t$$

است که در آن

$$a = \frac{-۱۵۵ \times ۳۵}{۱۰۰۲ + ۳۵^۲} = -۰.۴۸۳, \quad b = \frac{۱۵۵ \times ۱۰۰}{۱۰۰۲ + ۳۵^۲} = ۱.۳۸۱$$

سپس معادله مشخصه را حل می‌کنیم

$$۰.۱\lambda^2 + ۱۰۰\lambda + ۱۰۰۰ = ۰$$

ریشه‌ها عبارتند از $\lambda_1 = -۱۰$ و $\lambda_2 = -۹۹۰$. بنابراین جواب عمومی عبارت است از

$$(۶) \quad I(t) = c_1 e^{-۱۰t} + c_2 e^{-۹۹۰t} - ۰.۴۸۳ \cos ۳۷۷t + ۱.۳۸۱ \sin ۳۷۷t$$

c_1 و c_2 را از شرایط اولیه $I(0) = 0$ و $Q(0) = 0$ معین می‌کنیم بنا به شرط دوم

$$(۷) \quad I(0) = c_1 + c_2 - ۰.۴۸۳ = 0$$

اما چگونه از $Q(0) = 0$ استفاده کنیم؟ با حل جبری (۱') نسبت به $\dot{I}$ و با توجه به

$$\int I dt = Q$$

$$(۸) \quad \dot{I}(t) = \frac{1}{L} \left[E(t) - RI(t) - \frac{1}{C} Q(t) \right]$$

در اینجا $E(0) = 0$ و $I(0) = 0$ و $Q(0) = 0$ ، بنابراین $\dot{I}(0) = 0$. از این رو با مشتق‌گیری از (۶) به دست می‌آوریم

$$(۹) \quad \dot{I}(0) = -۱۰c_1 - ۹۹۰c_2 + ۱.۳۸۱ \times ۳۷۷ = 0$$

از حل (۷) و (۹) نتیجه می‌شود $c_1 = -۰.۰۵۴۳$ و $c_2 = ۰.۵۲۶$. بنابراین از (۶) جواب زیر را داریم

$$I(t) = -۰.۰۵۴۳ e^{-۱۰t} + ۰.۵۲۶ e^{-۹۹۰t} - ۰.۴۸۳ \cos ۳۷۷t + ۱.۳۸۱ \sin ۳۷۷t$$

دو جمله اول به سرعت از بین می‌روند و بعد از زمانی بسیار کوتاه شدت جریان عملانوسانی همسان با بسامد ۶۰ هرتز را، که بسامد ولتاژ داده شده است، به وجود می‌آورد. توجه کنید که بنابر (۵)، شدت جریان حالت مانا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$I_p(t) = ۱.۴۶۳ \sin(۳۷۷t - ۰.۳۴)$$

مسائل بخش ۱۴.۲

۱. رابطه (۳) را از دو طریق به دست آورید: (الف) مستقیماً با جایگزینی (۲) در (۱)؛ (ب) از رابطه (۵) بخش ۱۳.۲ بسا استفاده از جدول ۲.۲ و اتخاذ $E_0\omega$ به جای F_0 .

۲. بسامد طبیعی (= بسامد نوسانات آزاد) يك مدار LC را (الف) بطور مستقیم، (ب) از بخش ۶.۲ به وسیله جدول ۲.۲، به دست بیاورید.

۳. شرایط يك مدار RLC برای میرایی شدید (حالت ۱)، میرایی خفیف (حالت ۲) و میرایی بحرانی (حالت ۳) چیست؟ در حالت خاص مقاومت بحرانی، بحرانی R (مشابه ثابت میرایی بحرانی $\sqrt{mk} = 2\sqrt{mk}$ بحرانی C) چیست؟

۴. در درس ادعا شد که هر گاه $R > 0$ ، آنگاه وقتی $t \rightarrow \infty$ جریان گذرا به سمت $I_p(t)$ میل می کند. این مطلب را چگونه می توان ثابت نمود؟

۵. (تنظیم) در تنظیم رادیو روی يك ایستگاه، دکمه ای را می چرخانیم که c را (یا شاید L را) در يك مدار RLC طوری تغییر دهد (شکل ۵۱) تا دامنه شدت جریان حالت مانا ماکزیمم شود. به ازای چه مقدار C این امر اتفاق می افتد؟

شدت جریان حالت مانای مدار RLC شکل ۵۲ را در حالت زیر پیدا کنید.

۶.

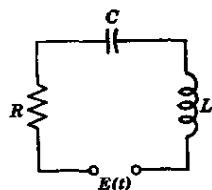
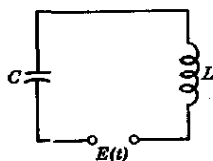
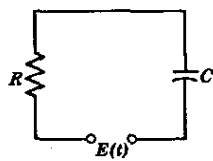
اهم $R = 200$ ، هانری $L = 10$ ، فاراد $C = 0.005$ ، ولت $E = 50 \sin t$

۷.

اهم $R = 240$ ، هانری $L = 40$ ، فاراد $C = 10^{-3}$ ، ولت $E = 369 \sin 10t$

۸.

اهم $R = 40$ ، هانری $L = 10$ ، فاراد $C = 0.002$ ، ولت $E = 800 \cos 5t$

شکل ۵۴. مدار RC شکل ۵۳. مدار LC شکل ۵۲. مدار RLC

جریان گذرای مدار RLC شکل ۵۲ را در حالت زیر پیدا کنید

۹. $E = 2500 \sin t$ ولت ، $C = 5 \times 10^{-3}$ فاراد ، $L = 100$ هانری ، $R = 200$ اهم

۱۰. $E = 850 \sin 2t$ ولت ، $C = 0.01$ فاراد ، $L = 5$ هانری ، $R = 20$ اهم

۱۱. $E = 300 \cos 2t$ ولت ، $C = 0.0125$ فاراد ، $L = 8$ هانری ، $R = 16$ اهم

شدت جریان $I(t)$ مدار LC شکل ۵۳ را با فرض صفر بودن شدت جریان و بار اولیه در حالات زیر پیدا کنید.

۱۲. $E = 250$ ولت ، $C = 4 \times 10^{-3}$ فاراد ، $L = 10$ هانری

۱۳. $E = 90 \cos t$ ولت ، $C = 0.025$ فاراد ، $L = 1$ هانری

۱۴. $E = 210 \sin 2t$ ولت ، $C = 5 \times 10^{-3}$ فاراد ، $L = 2$ هانری

شدت جریان $I(t)$ در مدار RLC شکل ۵۲ را با فرض صفر بودن جریان و بار اولیه در حالات زیر پیدا کنید.

۱۵. $E = 100$ ولت ، $C = 0.01$ فاراد ، $L = 20$ هانری ، $R = 80$ اهم

۱۶. $E = 481 \sin 10t$ ولت ، $C = 2 \times 10^{-3}$ فاراد ، $L = 20$ هانری

$R = 160$ اهم

۱۷. $E = 24 \cos 5t$ ولت ، $C = 0.04$ فاراد ، $L = 1$ هانری ، $R = 6$ اهم

۱۸. نشان دهید که هرگاه $E(t)$ در شکل ۵۳ در لحظه $t = a$ جهشی به اندازه J داشته

باشد آنگاه $\dot{I}(t)$ در لحظه $t = a$ جهشی برابر J/L دارد در حالی که $I(t)$ در $t = a$ پیوسته است.

بسیار استفاده از نتیجه مسئله ۱۸ شدت جریان $I(t)$ مدار LC شکل ۵۳ را با فرض هانری $L = 1$ ، فاراد $C = 1$ و صفر بودن شدت جریان و بار اولیه ، در حالات زیر پیدا کنید.

۱۹. به ازای $0 < t < a$ داشته باشیم $E = t$ و به ازای $t > a$ داشته باشیم $E = 0$.

۲۰. به ازای $0 < t < a$ داشته باشیم $E = 1$ و به ازای $t > a$ داشته باشیم $E = 0$.

۲۱. به ازای $0 < t < \pi$ داشته باشیم $E = 1 - e^{-t}$ و به ازای $t > \pi$ داشته باشیم $E = 0$.

۲۲. نشان دهید که هرگاه بار اولیه خازن شکل ۵۴ برابر $Q(0)$ باشد، شدت جریان اولیه مدار RC برابر است با

$$I(0) = \frac{E(0)}{R} - \frac{Q(0)}{RC}.$$

۲۳. نشان دهید که هرگاه $E(t)$ در شکل ۵۴ در لحظه $t=a$ جهشی به اندازه J داشته باشد آنگاه شدت جریان $I(t)$ مدار در لحظه $t=a$ جهشی برابر J/R دارد.

با استفاده از نتیجه مسئله ۲۳ شدت جریان $I(t)$ در مدار RC شکل ۵۴ را با فرض $E=1$ ، $C=1$ و $R=1$ و صفر بودن بار اولیه خازن برای حالات زیر پیدا کنید.

۲۴. به ازای $0 < t < a$ داشته باشیم $E=t$ و به ازای $t > a$ داشته باشیم $E=a$.

۲۵. به ازای $0 < t < a$ داشته باشیم $E=t$ و به ازای $t > a$ داشته باشیم $E=0$.

۱۵.۲ روش مختلط برای به دست آوردن جوابهای خصوصی

برای معادله‌ای به صورت (۱) بخش ۱۴.۲، مثلاً

$$(1) \quad \ddot{I} + \dot{I} + 2I = 6 \cos t,$$

می‌دانیم که جواب خصوصی $I_p(t)$ را می‌توانیم با روش ضرایب نامعین با جایگزینی

$$I_p(t) = a \cos t + b \sin t$$

در (۱) و تعیین a و b به دست بیاوریم. نتیجه عبارت خواهد بود از

$$I_p(t) = 3 \cos t + 3 \sin t$$

مهندسين اغلب يك روش مختلط ساده و آراسته را برای به دست آوردن $I_p(t)$ ترجیح می‌دهند. در این روش با توجه به اینکه $6 \cos t$ در (۱) قسمت حقیقی

$$6e^{it} = 6(\cos t + i \sin t)$$

است (به دستور اوایلر در بخش ۴.۲ رجوع شود) به جای (۱) معادله دیفرانسیل زیر را بررسی می‌کنیم

$$(2) \quad \ddot{I} + \dot{I} + 2I = 6e^{it} \quad (i = \sqrt{-1})$$

حال جواب خصوصی مختلطی به صورت

$$(3) \quad I_p^*(t) = Ke^{it}$$

را معین می‌کنیم. با جایگزینی این تابع و مشتقات آن

$$I_p^* = iKe^{it}, \quad \ddot{I}_p^* = -Ke^{it}$$

در معادله (۲) داریم

$$(-1+i+2)Ke^{it} = 6e^{it}.$$

که با حل آن نسبت به K به دست می‌آوریم

$$K = \frac{6}{1+i} = \frac{6(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3-3i.$$

بنابراین

$$I_p^*(t) = (3-3i)e^{it} = (3-3i)(\cos t + i \sin t)$$

یك جواب (۲) است. قسمت حقیقی I_p^* عبارت است از

$$I_p(t) = 3 \cos t + 3 \sin t$$

و این تابع جواب قسمت حقیقی معادله دیفرانسیل (۲) یعنی جواب معادله دیفرانسیل مفروض (۱) است. در واقع، این تابع با آنچه در بالا به دست آمد همانند است. بدین ترتیب طرز کار عملی روش مختلط روشن می‌شود.

معادله (۱) حالت خاصی از معادله [ر. ک. (۱) بخش ۱۴.۲]

$$(۴) \quad L\ddot{I} + RI + \frac{1}{C}I = E_0 \omega \cos \omega t$$

است که حالا آن را با فرض $R \neq 0$ بررسی می‌کنیم. معادله مختلط متناظر با آن عبارت است از

$$(۵) \quad L\ddot{I} + RI + \frac{1}{C}I = E_0 \omega e^{i\omega t}$$

از تابع سمت راست چنین برمی‌آید که معادله جوابی خصوصی به صورت زیر دارد

$$(۶) \quad I_p^*(t) = Ke^{i\omega t} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

با جایگزینی این تابع و مشتقات آن

$$\dot{I}_p^* = i\omega Ke^{i\omega t}, \quad \ddot{I}_p^* = -\omega^2 Ke^{i\omega t}$$

در (۵) داریم

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) K e^{i\omega t} = E_0 \omega e^{i\omega t}.$$

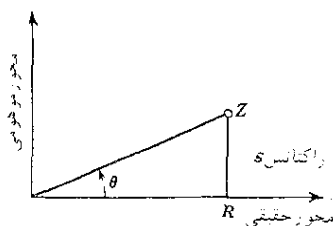
با حل این معادله نسبت به K به دست می‌آوریم

$$(۷) \quad K = \frac{E_0 \omega}{\frac{1}{C} - \omega^2 L + i\omega R} = \frac{E_0}{iZ}$$

که در آن Z به اصطلاح امپدانس مختلط نامیده می‌شود و برابر است با

$$(۸) \quad Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

نتیجه این می‌شود که رابطه (۶) با K داده شده در (۷) جواب (۵) است.



شکل ۵۵. امپدانس مختلط Z

می‌بینیم که قسمت موهومی Z عبارت از راکتانس S است که با رابطه (۴) بخش ۱۴.۲ تعریف شده و $|Z|$ عبارت است از امپدانس که در ارتباط با رابطه (۵) بخش ۱۴.۲ تعریف شده است بنابراین داریم (ر.ک. به شکل ۵۵)

$$\tan \theta = \frac{S}{R} \quad \text{که در آن} \quad Z = |Z| e^{i\theta}$$

در نتیجه فرمول (۶) را، با K ای که در (۷) داده شده، می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I_p^*(t) = \frac{E_0}{iZ} e^{i\omega t} = -i \frac{E_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)}$$

که قسمت حقیقی آن عبارت است از

$$(۹) \quad I_p(t) = \frac{E_0}{|Z|} \sin(\omega t - \theta) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + S^2}} \sin(\omega t - \theta),$$

و این جواب قسمت حقیقی معادله دیفرانسیل (۵) است یعنی $I_p(t)$ جواب (۴) است. می بینیم که این تابع همانند (۵) بخش قبل است، چون

$$\sin(\omega t - \theta) = \sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta$$

و بعلاوه

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + S^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|} = \frac{S}{\sqrt{R^2 + S^2}}$$

جواب مزبور را می توان به صورت زیر نوشت

$$(۱۰) \quad I_p(t) = \frac{E_0}{R^2 + S^2} [R \sin \omega t - S \cos \omega t].$$

این همانند (۲) بخش قبل است که در آن a و b در (۳) همان بخش داده شده اند.

مسائل بخش ۱۵.۲

با استفاده از روش مختلط، شدت جریان حالت مانای $I_p(t)$ را در مدارهای که در آن رابطه (۴) صادق باشد برای حالات زیر پیدا کنید

$$۱. \quad \omega = ۲, E_0 = ۵, C = ۰.۰۰۵, L = ۱۰, R = ۲۰$$

$$۲. \quad \omega = ۴, E_0 = ۳, C = ۱۰^{-۳}, L = ۱۰۰, R = ۱۰۰$$

$$۳. \quad \omega = ۳, E_0 = ۵۰۰, C = ۰.۰۰۱, L = ۲۵, R = ۵۰$$

$$۴. \quad \omega = ۲, E_0 = ۴, C = ۰.۰۱, L = ۲۰, R = ۱۰$$

$$۵. \quad \omega = ۴, E_0 = ۱۰۰, C = ۰.۰۰۵, L = ۱۵, R = ۲۵$$

۶. امپدانس مختلط Z و راکتانس S مسئله ۵ را پیدا کنید.

با استفاده از روش مختلط خروجی حالت مانای معادلات زیر را پیدا کنید.

$$۷. \quad \ddot{y} + ۳\dot{y} + ۱۶y = ۲۴ \cos ۴t$$

$$۸. \quad \ddot{y} + \dot{y} + ۴y = ۸ \sin ۲t$$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + \frac{1}{\lambda}y = 25 \cos 10t \quad ۰۹$$

$$\ddot{y} + \dot{y} + 9y = -3 \sin 3t \quad ۰۱۰$$

۱۶.۲ روش عمومی حل معادلات غیر همگن

روش ضرایب نامعین در بخش ۱۲.۲ رویه ساده‌ای برای به دست آوردن جوابهای يك معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن است و در بخشهای ۱۳.۲-۱۵.۲ دیده‌ایم که این روش کاربردهای مهمی در ارتباط با ارتعاشات دارد. معذک این روش به نمونه‌های ساده‌تری از معادلات دیفرانسیل محدود می‌شود. روشی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد کاملاً عمومی اما پیچیده‌تر از آن روش خواهد بود.

معادله دیفرانسیل خطی به صورت

$$(۱) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

را در نظر می‌گیریم با این فرض که f ، g و r در فاصله باز I پیوسته باشند. جواب خصوصی (۱) را با استفاده از روش تغییر پارامترها^۱ به ترتیب زیر به دست می‌آوریم.

می‌دانیم که معادله دیفرانسیل همگن متناظر با آن، یعنی

$$(۲) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

در فاصله I يك جواب عمومی $y_h(x)$ به صورت زیر دارد

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

این روش عبارت از آن است که بجای c_1 و c_2 توابع $u(x)$ و $v(x)$ را که باید تعیین شوند قرار دهیم به طوری که تابع حاصل، یعنی

$$(۳) \quad y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

جواب خصوصی (۱) در I باشد. با مشتگیری از (۳) به دست می‌آوریم

$$y_p' = u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2'.$$

خواهیم دید که u و v را می‌توانیم طوری تعیین کنیم که

$$(۴) \quad u'y_1 + v'y_2 = 0.$$

این عبارت را به صورت

$$(۵) \quad y_p' = uy_1' + vy_2'.$$

۱. دانشجوی می‌تواند برای کاربرد ساده‌تری از این روش، بخش ۸.۱ را مرور کند.

تحويل می نماید. با مشتقگیری از این تابع داریم

$$(۶) \quad y_p'' = u' y_1' + u y_1'' + v' y_2' + v y_2''$$

با جایگزینی (۳)، (۵) و (۶) در (۱) و مرتب کردن جملاتی که شامل u و v هستند به دست می آوریم

$$u(y_1'' + f y_1' + g y_1) + v(y_2'' + f y_2' + g y_2) + u' y_1' + v' y_2' = r.$$

چون y_1 و y_2 جوابهای معادله همگن (۲) هستند این رابطه به صورت زیر درمی آید

$$u' y_1' + v' y_2' = r.$$

$$u' y_1 + v' y_2 = 0. \quad \text{معادله (۴) عبارت است از}$$

این يك دستگاه دو معادله جبری خطی با توابع مجهول u' و v' است. جواب با قاعده کرامر (ر. ک. به بخش ۹.۷) به دست می آید. پیدا می کنیم

$$(۷) \quad u' = -\frac{y_2 r}{W}, \quad v' = \frac{y_1 r}{W},$$

که در آنها

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

رانسکین y_1 و y_2 است (ر. ک. به بخش ۸.۲). واضح است که $W \neq 0$ زیرا y_1, y_2 پایه ای برای جوابها تشکیل می دهند. با انتگرالگیری از (۷) داریم

$$u = -\int \frac{y_2 r}{W} dx, \quad v = \int \frac{y_1 r}{W} dx.$$

این انتگرالها به دلیل پیوسته بودن $r(x)$ وجود دارند. با جایگزینی این عبارات بر حسب u و v در (۳) جواب مطلوب (۱) را به دست می آوریم

$$(۸) \quad y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx.$$

توجه کنید که هر گاه ثابت انتگرالگیری (۸) دلخواه باشد آنگاه (۸) جواب عمومی (۱) را نمایش می دهد.

مثال ۱

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(۹) \quad y'' + y = \sec x.$$

روش ضرایب نامعین (بخش ۱۲.۲) را نمی‌توان به‌کار برد. توابع

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$$

تشکیل یک پایه جواب معادله همگن را می‌دهند. رانسکین آنها عبارت است از

$$W(y_1, y_2) = \cos x \cos x - (-\sin x) \sin x = 1.$$

بنابراین جواب خصوصی (۹) را از (۸) به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_p &= -\cos x \int \sin x \sec x \, dx + \sin x \int \cos x \sec x \, dx \\ &= \cos x \ln |\cos x| + x \sin x. \end{aligned}$$

جواب عمومی متناظر به معادله دیفرانسیل (۹) عبارت است از:

$$y = y_h + y_p = [c_1 + \ln |\cos x|] \cos x + (c_2 + x) \sin x$$

مسائل بخش ۱۶.۲

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

$$y'' + y = \csc x + x \quad .۱$$

$$y'' + 9y = \sec 3x \quad .۲$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{x^2}/x \quad .۳$$

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-x^2}/(x^2 + 1) \quad .۴$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x \quad .۵$$

$$y'' - y' + y = e^{-x} \ln x \quad .۶$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = x^{3/2}e^x \quad .۷$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = e^x/x^2 \quad .۸$$

$$(D^2 + 2D + 2)y = e^{-x}/\cos^2 x \quad .۹$$

$$(x^2 D^2 - 4D + 5)y = e^{x^2}/\sin x \quad .۱۰$$

$$(D^2 + xD - 1)y = 4 \quad .۱۱$$

$$(x^2 D^2 - 2)y = 3x^2 \quad .۱۲$$

$$(x^5 D^5 - 2xD + 2)y = x^6 \quad .13$$

$$(x^5 D^5 + xD - 0.25)y = 1/x \quad .14$$

$$(x^5 D^5 - 2xD + 2)y = 1/x^2 \quad .15$$

$$(x^5 D^5 - 2xD + 2)y = x^r \cos x \quad .16$$

$$x^5 y'' - 4xy' + 6y = 1/x^5 \quad .17$$

$$x^5 y'' - 4xy' + 6y = x^r \sin x \quad .18$$

$$xy'' - y' = 2x^5 e^x \quad .19$$

$$x^5 y'' + xy' - y = x^r e^x \quad .20$$

دستگاههای معادلات دیفرانسیل، صفحه فاز، پایداری

بخش ۱.۳ به دستگاههای معادلات دیفرانسیل اختصاص داده شده است. این قسمت به صورت مقدماتی و بدون استفاده از ماتریسها بیان می شود. (روش ماتریسی بررسی دستگاهها در بخش ۵.۷ ارائه خواهد شد.)

در بخش ۲.۳ به بررسی معادلات دیفرانسیل در صفحه فاز می پردازیم. پایداری مفهومی است در ریاضیات مهندسی جدید، مثلاً در رابطه با مدارهای فیدبک و دستگاههای کنترل، که اهمیتی فزاینده دارد. این يك مفهوم فیزیکی است و تقریباً بدین معنی است که تغییرات کوچکی در دستگاه فیزیکی در يك لحظه فقط باعث تغییراتی جزئی در رفتار دستگاه در تمام لحظات بعدی شود. ما پایداری را در بخش ۳.۳، در ارتباط با معادلات دیفرانسیل با استفاده از صفحه فاز بررسی می کنیم.

پیش از این فصل: فصلهای ۱ و ۲.

مراجع: ضمیمه ۱ قسمت ب.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۳ دستگاههای معادلات دیفرانسیل

دستگاههای معادلات دیفرانسیل کاربردهای مهمی دارد. مثلاً، این دستگاهها به عنوان مدلهایی برای دستگاههای مکانیکی یا الکتریکی، که ترکیباتی از دستگاههای ساده بحث شده در

بخشهای ۶، ۲، ۱۳، ۲ و ۱۴، ۲ هستند، به کرات مطرح می‌شوند.
بخش حاضر مشتمل بر روش حل مقدماتی^۱ دستگاههای معادلات دیفرانسیل است و ما روش حذفی را بررسی می‌کنیم. در این روش توابع مجهول و مشتقات آنها را پی‌درپی حذف می‌کنیم تا به معادله دیفرانسیل مرتبه بالاتری برسیم که تنها شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن است. با حل این معادله سایر توابع مجهول به نوبت معلوم می‌شوند. حال با ذکر یک مثال نوعی به بیان جزئیات امر می‌پردازیم.

مثال ۱

دستگاه

$$\dot{x} = 4x - 2y \quad (\text{الف})$$

$$\dot{y} = x + y \quad (\text{ب})$$

را که شامل دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است در نظر بگیرید. x و y توابع مجهول نسبت به t هستند. منظور از جواب (۱) زوجی از توابع x و y است که وقتی آنها را در (۱) قرار دهیم این معادلات به یک اتحاد تبدیل شوند. دستگاه را با روش حذفی به ترتیب زیر حل می‌کنیم. از (۱ الف) داریم

$$(2) \quad y = -\frac{1}{2}\dot{x} + 2x.$$

از (۱ الف) مشتق می‌گیریم. در معادله حاصل نخست $\dot{y}$ را از (۱ ب) و سپس y را از (۲) جایگزین می‌کنیم. این کار منجر به

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 2\dot{y}$$

$$= 4\dot{x} - 2(x + y)$$

$$= 4\dot{x} - 2x - 2\left(-\frac{1}{2}\dot{x} + 2x\right).$$

می‌شود. پس از مرتب نمودن و ساده کردن جملات داریم

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0.$$

جواب عمومی عبارت است از

$$(3 \text{ الف}) \quad x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}.$$

۱. یعنی، بدون استفاده از بردارها و ماتریسها. روش برداری در فصل مربوط به ماتریسها (در بخش ۱۵.۷) آمده است. البته کسانی که با بردارها و ماتریسها آشنا هستند می‌توانند مستقیماً بخش ۱۵.۷ را مطالعه کنند.

با مشتقگیری نتیجه می شود

$$\dot{x} = 3c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{2t}.$$

بنابراین از (۲) داریم

$$(3) \quad y = \frac{1}{4} c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}.$$

به طور کلی، روش حذفی در مورد دستگاههایی به صورت

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x + b_1 y + f_1(t) & (\text{الف}) \\ \dot{y} &= a_2 x + b_2 y + f_2(t) & (\text{ب}) \end{aligned}$$

اعمال می شود که در آنها f_1 و f_2 توابعی داده شده و a_1, b_1, a_2, b_2 اعدادی ثابت هستند. اگر $b_1 = a_2 = 0$ ، دستگاه به دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول مجزا تبدیل می شود که هر یک را می توان با روش بخش ۷.۱ حل نمود. هرگاه یکی از این دو ثابت، مثلاً b_1 ، صفر نباشد می توانیم از روشی مشابه آنچه در مثال ۱ گفتیم استفاده کنیم. یعنی، اول از (۴ الف) به دست می آوریم

$$(5) \quad b_1 y = \dot{x} - a_1 x - f_1$$

حال از (۴ الف) مشتق می گیریم. در معادله حاصل y را از (۴ ب) و سپس $b_1 y$ را از (۵) قرار می دهیم. نتیجه فر عبارت است از

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_1 \dot{x} + b_1 \dot{y} + \dot{f}_1 \\ &= a_1 \dot{x} + b_1 (a_2 x + b_2 y + f_2) + \dot{f}_1 \\ &= a_1 \dot{x} + b_1 a_2 x + b_2 (\dot{x} - a_1 x - f_1) + b_1 f_2 + \dot{f}_1. \end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات داریم

$$\ddot{x} - (a_1 + b_1) \dot{x} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) x = r(t)$$

که در آن

$$r(t) = b_1 f_2(t) - b_2 f_1(t) + \dot{f}_1(t).$$

با حل این معادله x را پیدا می کنیم. سپس y از (۵) به دست می آید.

آیا می توان روش حذفی را در مورد دستگاههای عمومیتری که جنبه های عملی آنها مورد توجه است توسعه داد؟ جواب مثبت است و ما با ارائه دو مثال نوعی در این باره بحث می کنیم.

مثال ۴. دستگاه مکانیکی

شکل ۵۶ يك دستگاه مکانیکی را نشان می‌دهد که متشکل از دو وزنه و دو فنر است. مدلی ریاضی برای این دستگاه درست کنید و آن را حل نمایید؛ یعنی، جابجاییهای $y_1(t)$ و $y_2(t)$ وزنه‌ها را از وضعیت تعادل ایستاتیکی ($y_1 = 0$ و $y_2 = 0$) بسا در نظر گرفتن مفروضات بخش ۶.۲ پیدا کنید (حرکت در امتداد قائم است، میرایی وجود ندارد و از وزن وزنه‌ها صرف‌نظر می‌شود).

حلی. مانند بخش ۶.۲ معادلات دیفرانسیل مربوط به این دستگاه مکانیکی از قانون دوم نیوتن چنین به دست می‌آید:

$$\ddot{y}_1 = -3y_1 + 2(y_1 - y_2)$$

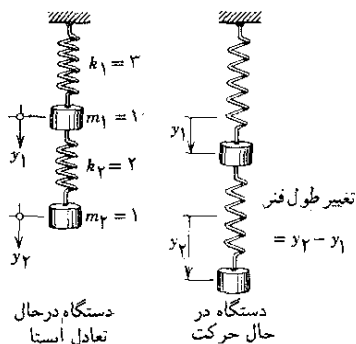
$$\ddot{y}_2 = -2(y_2 - y_1).$$

این روابط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ddot{y}_1 = -5y_1 + 2y_2 \quad (\text{الف})$$

(۶)

$$\ddot{y}_2 = 2y_1 - 2y_2. \quad (\text{ب})$$



شکل ۵۶. مثال ۲

از (۶ الف) داریم

$$(۷) \quad y_2 = \frac{1}{2}\ddot{y}_1 + \frac{5}{2}y_1$$

در مثال ۱ يك مرتبه مشتق گرفتیم. در اینجا از (۶ الف) دو مرتبه مشتق می‌گیریم. در معادله حاصل $\ddot{y}_2$ را از (۶ ب) و y_2 را از (۷) قرار می‌دهیم. نتیجه چنین است

$$\begin{aligned}
 y_1''' &= -5y_1 + 2y_2 \\
 &= -5y_1 + 2(2y_1 - 2y_2) \\
 &= -5y_1 + 4y_1 - 4\left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{5}{4}y_1\right).
 \end{aligned}$$

با مرتب نمودن جملات داریم

$$(۸) \quad y_1''' + 7y_1 + 6y_1 = 0.$$

معادله مشخصه $\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6 = 0$ نسبت به $p = \lambda^2$ درجه دوم است. ریشه‌ها عبارت‌اند از $p_1 = -1$ و $p_2 = -6$. از این رو λ دارای چهار مقدار i ، $-i$ ، $\sqrt{6}i$ ، $-\sqrt{6}i$ می‌باشد. بنابراین جواب عمومی (۸) را چنین به دست می‌آوریم

$$(۹ \text{ الف}) \quad y_1 = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 \sin \sqrt{6}t.$$

با دوبار مشتقگیری داریم

$$y_1' = -a_1 \sin t - b_1 \cos t - 6a_2 \sin \sqrt{6}t - 6b_2 \cos \sqrt{6}t$$

با استفاده از این روابط و (۹ الف) از (۷) به دست می‌آوریم

$$(۹ \text{ ب}) \quad y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{4}a_2 \cos \sqrt{6}t - \frac{1}{4}b_2 \sin \sqrt{6}t.$$

این جواب (۹) برای (۶) نشان‌دهنده نوسانات همساز دو وزنه در دستگاه مکانیکی مفروض است.

مثال ۳. شبکه الکتریکی

شدت جریانهای $I_1(t)$ و $I_2(t)$ شبکه نشان داده شده در شکل ۵۷ را پیدا کنید با این فرض که در لحظه $t = 0$ که کلید بسته است تمام بارها و جریانها صفر باشند. حل. مدل ریاضی شبکه از قانون ولتاژ کیرشهف، مانند بخش ۱۴.۲، به دست می‌آید. از حلقه سمت چپ نتیجه می‌شود

$$I_1' + 4(I_1 - I_2) = 12.$$

برای حلقه سمت راست داریم

$$6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4 \int I_2 dt = 0.$$

با دوباره نویسی معادله اول و مشتقگیری از معادله دوم درمی‌یابیم که جریانهای I_1 و I_2 شبکه در دستگاه زیر صادق‌اند

$$\dot{I}_1 + 4I_1 - 4\dot{I}_2 = 12 \quad (\text{الف})$$

(۱۰)

$$-4\dot{I}_1 + 10\dot{I}_2 + 4I_2 = 0. \quad (\text{ب})$$

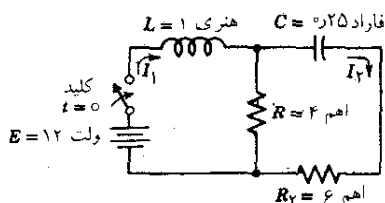
توجه داشته باشید که معادله دوم شامل مشتقات هر دو تابع مجهول است. دستگاه (۱۰) را حل می‌کنیم. از (الف) داریم

(۱۱)

$$I_2 = \frac{1}{4}\dot{I}_1 + I_1 - 3$$

با مشتق‌گیری داریم

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{4}\ddot{I}_1 + \dot{I}_1.$$



شکل ۵۷. مثال ۳

با جایگزینی این مقدار و نیز (۱۱) در (۱۰) ب) به دست می‌آوریم

$$-4\dot{I}_1 + 10\left(\frac{1}{4}\ddot{I}_1 + \dot{I}_1\right) + 4\left(\frac{1}{4}\dot{I}_1 + I_1 - 3\right) = 0.$$

پس از ساده نمودن نتیجه می‌شود

$$\ddot{I}_1 = \frac{14}{5}\dot{I}_1 + \frac{8}{5}I_1 = \frac{24}{5}$$

جواب عمومی این معادله عبارت است از

(الف ۱۲)

$$I_1 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-0.8t} + 3.$$

و مشتق آن چنین است

$$\dot{I}_1 = -2c_1 e^{-2t} - 0.8c_2 e^{-0.8t}.$$

از این رابطه و (۱۱) اکنون می‌توانیم I_2 را محاسبه کنیم:

$$(۱۲) \quad I_2 = \frac{1}{4} c_1 e^{-2t} + \frac{4}{5} c_2 e^{-0.8t}.$$

شرایط اولیه عبارتند از $I_1(0) = 0$ و $I_2(0) = 0$. از این رو بنا به (۱۲):

$$I_1(0) = c_1 + c_2 + 3 = 0,$$

$$I_2(0) = \frac{1}{4} c_1 + \frac{4}{5} c_2 = 0.$$

و نتیجه می‌شود $c_1 = -8$ و $c_2 = 5$. بنا بر این جواب مسئله چنین است

$$I_1 = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3$$

$$I_2 = -4e^{-2t} + 4e^{-0.8t}.$$

می‌بینیم وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، I_1 به مقدار ۳ آمپر میل می‌کند درحالی که I_2 به سمت صفر میل می‌کند. این امر قابل انتظار بود. چرا؟

مسائل بخش ۱.۳

دستگاههای معادلات دیفرانسیل زیر را (که در آنها $D = d/dt$) حل کنید.

$$1. \quad \dot{x} = y \quad 2. \quad Dx = x + y$$

$$\dot{y} = x \quad Dy = 4x + y$$

$$3. \quad \dot{x} + \dot{y} = \cos t \quad 4. \quad (D+4)x + 6y = 0$$

$$\dot{x} - \dot{y} = \sin t \quad (D-1)y - x = 0$$

$$5. \quad \ddot{x} = y + 1 \quad 6. \quad (D-2)x + 2Dy = 2 - 4e^{2t}$$

$$\dot{y} = x + t \quad (2D-3)x + (3D-1)y = 0$$

جوابهای معادلات زیر را طوری پیدا کنید که شرایط داده شده در آنها صدق کند

$$7. \quad \begin{aligned} Dx &= 3x + 4y \\ \dot{y} &= -8x + 11y \end{aligned} \quad 8. \quad \begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y \\ Dy &= 4x - 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \quad y(0) = 1 & x(0) &= 1, \quad y(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\dot{x} = 5x + 4y - 5t^2 + 6t + 25 \quad ۱۰ \quad (D-2)x - 3y = 2e^{2t} \quad ۹$$

$$\dot{y} = x + 2y - t^2 + 2t + 4 \quad -x + (D-4)y = 3e^{2t}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad x(0) = -2/3, \quad y(0) = 1/3$$

۱۱. جواب (۹) در مثال ۲ عبارت از جمع اثرهای دو نوسان همساز است. نشان دهید که حالات خاص عبارتند از

$$y_2 = 2 \sin t, \quad y_1 = \sin t, \quad (\text{الف})$$

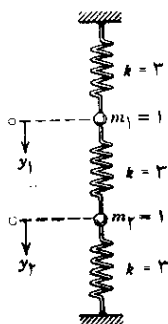
$$y_2 = -\frac{1}{4} \sin \sqrt{6}t, \quad y_1 = \sin \sqrt{6}t, \quad (\text{ب})$$

نشان دهید که در (الف) در هر لحظه، وزنه‌ها هردو با هم بالا یا هردو با هم پایین می‌روند بنابراین، در هر زمان مفروض، هردو فنر کشیده یا هر دو فنر فشرده می‌شوند. نمودار (الف) را رسم کنید؛ دستگاههای مختصات جداگانه را بدین ترتیب انتخاب کنید که محورهای آنها موازی بوده و مبدأ دستگاه y_1 به اندازه ۲ در حدود امتداد قائم‌زیر مبدأ دستگاه y_2 قرار گیرد. به طریقی مشابه (ب) را مورد بحث قرار داده و نمودار آن را رسم کنید. مقایسه کنید، آیا قابل توجه است که (ب) بسامد بالاتری از (الف) داشته باشد؟

۱۲. مدلی برای دستگاه مکانیکی شکل زیر بسازید و آن را با مفروضات فیزیکی ای که در مثال ۲ داشتیم حل کنید. در حالت خاص جوابهای متناظر با سرعتهای اولیه صفر و جابجاییهای اولیه صفر را پیدا کنید، نمودار آنها را رسم نموده با هم مقایسه کنید.

$$y_2(0) = 1, \quad y_1(0) = 1 \quad (\text{الف})$$

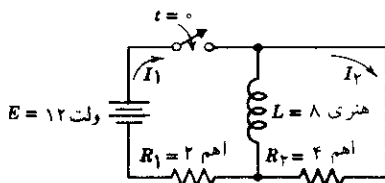
$$y_2(0) = 1, \quad y_1(0) = -1 \quad (\text{ب})$$



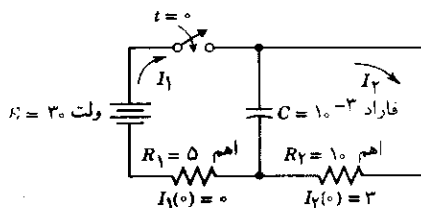
مسئله ۱۲. (دستگاه در حال تعادل استاتیکی)

۰۱۳. مدل شبکه شکل ۵۷ را حل کنید. فرض بر این است که ولت $E = 100$ ، و سایر داده‌ها مانند حالت قبل باشد. این مسئله را با مثال ۳ مقایسه کنید و نظر بدهید. برای شبکه‌های زیر مدلی (دستگاه معادلات دیفرانسیل) بسازید و آن را حل کنید. همچنین شدت جریانهای حالت مانا را تعیین نمایید.

۰۱۴



۰۱۵



۲.۳ صفحه فاز

يك دستگاه مکانیکی را در صورتی خودگردان نامند که معادله دیفرانسیل آن به‌طور صریح شامل متغیر مستقل (مثلاً زمان t) نباشد. بدین ترتیب اگر معادله دیفرانسیل مرتبه دوم باشد شکل آن به‌صورت زیر است

$$(۱) \quad F(y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0.$$

در این جا $\dot{y} = dy/dt = v$ سرعت است. بنابه قاعده زنجیری داریم

$$(۲) \quad \ddot{y} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v.$$

بنابراین يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای v به‌صورت تابعی از متغیر y که حالاً متغیر مستقل می‌شود به‌دست می‌آوریم. (همچنین مسائل بخش ۱۰.۲ را ببینید.) جوابهای این معادله دیفرانسیل جدید منحنی‌هایی را در صفحه yv نمایش می‌دهند. صفحه yv را صفحه فاز نامند.

این اصطلاح از مکانیک گرفته شده است که در آنجا منظور از «صفحه فاز» صفحه yp است، $p = mv$ اندازه حرکت و m جرم نقطه مادی در حال حرکت است.

مثال ۱. نوسانات همساز

دستگاه مرتعش خود گردان به معادلات (ر. ک. بخش ۶.۲)

$$\ddot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

دارای جواب زیر است (شکل ۵۸ الف)

$$y = \sin t.$$

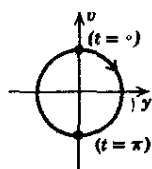
با استفاده از (۲) به دست می آوریم

$$\frac{dv}{dy} v + y = 0, \quad v(0) = 1.$$

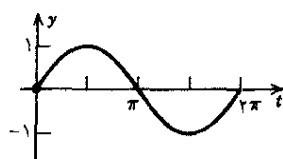
از این رو

$$v^2 + y^2 = 1 \quad \text{و} \quad v dv + y dy = 0$$

و این نشان می دهد که در صفحه فاز یک نوسان همساز به شکل دایره ظاهر می شود (شکل ۵۸ ب). توجه کنید که متناظر با هر مقدار t نقطه ای روی دایره با مختصات $y(t)$ و $v(t)$ وجود دارد. در صورت تمایل می توانیم نقاط را مطابق شکل ۵۸ ب، به ازای $t = 0$ و $t = \pi$ مشخص نموده و جهت ازدیاد t را با فلش نشان دهیم.



(ب)



(الف)

شکل ۵۸. نمودار یک نوسان همساز
(الف) در صفحه xy ، (ب) در صفحه فاز

معادله جدیدی که با استفاده از (۲) به دست آمده از مرتبه اول است. از این رو می توانیم یک میدان راستا (بخش ۲.۱) در صفحه فاز به کار ببریم تا رفتار عمومی جوابهای $v(y)$ را، بدون آنکه عملاً آن معادله را حل کرده باشیم، مورد بحث قرار دهیم. مهندسين بکرات از این امکان بهره می گیرند، مخصوصاً در مورد معادلات دیفرانسیل غیر خطی این

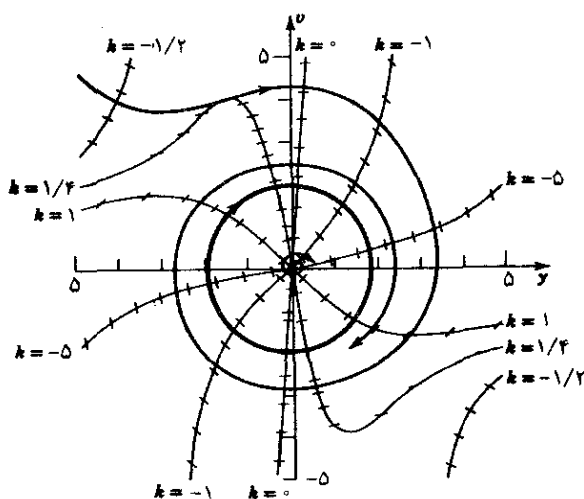
موضوع را با ذکر يك مثال خیلی مهم روشن می کنیم.

مثال ۲. نوسانات خود تقویتی، معادله واندرپل *

سیستمهای فیزیکی ای وجود دارند که در نوسانات کوچک به سیستم انرژی داده می شود، در حالی که در نوسانات بزرگ انرژی از سیستم گرفته می شود. به عبارت دیگر نوسانات بزرگ ممکن است میرا باشند در حالی که برای نوسانات کوچک «میرایی منفی» وجود دارد (دادن انرژی به سیستم). به دلایل فیزیکی انتظار داریم که چنین دستگاهی به رفتار دوره ای متمایل گردد که به صورت يك منحنی بسته که آن را چرخه حدی می نامند در صفحه فضا ظاهر شود. معادله دیفرانسیل مشهوری که چنین ارتعاشاتی را بیان می کند معادله واندرپل است

$$\ddot{y} + y = \mu(1 - y^2)\dot{y} \quad (\mu > 0) \quad (3)$$

این معادله در مطالعه مدارهای الکتریکی شامل لامپهای خلا^۱ به کار می رود. به ازای $\mu = 0$ داریم $\ddot{y} + y = 0$ و نوسانات همساز را به دست می آوریم. فرض کنیم $\mu > 0$ جمله مربوط به میرایی دارای ضریب $-\mu(1 - y^2)$ است. این مقدار در نوسانات کوچک



شکل ۵۹. نمودار تکه - خطی برای معادله واندرپل به ازای $\mu = 0.1$ در صفحه فاز که همچنین چرخه حدی و دو منحنی جواب را نشان می دهد.

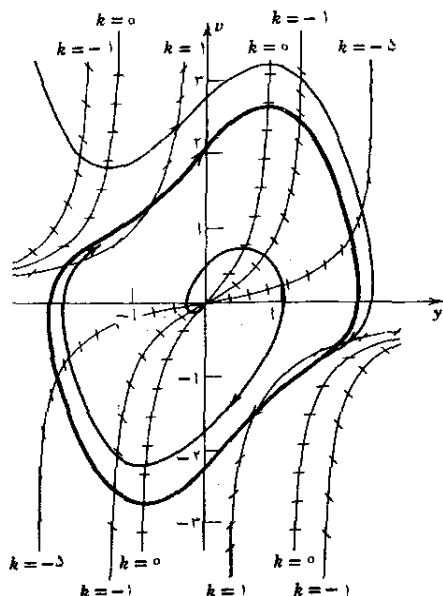
یعنی وقتی که $y^2 < 1$ ، منفی است بنابراین «میرایی منفی» به ازای $y^2 = 1$ برابر صفر است (بدون میرایی) و این مقدار مثبت است هر گاه $y^2 > 1$ (میرایی مثبت، اتلاف انرژی). اگر μ کوچک باشد ما انتظار یک چرخه حدی را داریم که تقریباً یک دایره است زیرا در این صورت معادله اصلی اختلاف کمی با $y + \dot{y} = 0$ دارد. اگر μ بزرگ باشد چرخه حدی احتمالاً به گونه‌ای متفاوت خواهد بود.

با استفاده از $\dot{y} = v$ و $\dot{v} = dv/dy$ از (۳) داریم

$$\frac{dv}{dy} v - \mu(1 - y^2)v + y = 0.$$

منحنیهای همشیب عبارت‌اند از ثابت $dv/dy = k$ ، یعنی

$$(۴) \quad \frac{dv}{dy} = \mu(1 - y^2) - \frac{y}{v} = k.$$



شکل ۶۰. نمودار تکه - خطی برای معادله واندربیل به ازای $\mu = 1$ در صفحه فاز که همچنین چرخه حدی و دو منحنی جواب را نشان می‌دهد.

این رابطه منجر می شود به

$$v = \frac{y}{\mu(1-y^2) - k}$$

این منحنیها کمی پیچیده هستند. شکل ۵۹ برخی از این منحنیها را به ازای مقدار کوچک $\mu = 0.1$ نشان می دهد؛ این شکل همچنین چرخه حدی (تقریباً یک دایره) و دو منحنی جواب را، که یکی از خارج و دیگری از داخل به چرخه حدی می رسد، نشان می دهد. منحنی دوم به صورت یک حلزونی باریک است و فقط قسمت اصلی آن در شکل نشان داده شده است. برای مقادیر بزرگ μ وضعیت تغییر می کند و چرخه حدی دیگر شبیه به دایره نمی ماند. شکل ۶۰ این مطلب را به ازای $\mu = 1$ روشن می نماید. توجه کنید که نزدیک شدن منحنی جواب $v(y)$ به چرخه حدی به مراتب سریعتر است تا در مورد $\mu = 0.1$.

مسائل بخش ۲.۳

۱. جواب عمومی مثال ۱ عبارت است از $y = A \cos t + B \sin t$. شعاع دایره متناظر با آن در صفحه فاز چقدر اندازه است؟

۲. نوسانات میرای $y(t) = e^{-t} \sin t$ را در نظر بگیرید. بعضی از نقاط منحنی متناظر را در صفحه فاز رسم کنید تا دریابید که این باید یک حلزونی باشد.

معادلات زیر را حل کنید و نوع منحنیهای متناظر با آن را در صفحه فاز نمایش دهید.

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad ۴ \quad \ddot{y} + y = 0 \quad ۳$$

$$\ddot{y} - k^2 y = 0 \quad ۶ \quad \ddot{y} - y = 0 \quad ۵$$

معادلات زیر را به مرتبه اول تحویل نموده و جواب آنها را پیدا کنید و برخی از منحنیهای جواب را در صفحه فاز رسم کنید

$$\ddot{y} = y \quad ۷ \quad \ddot{y} + 3\dot{y} = 0 \quad ۸ \quad \ddot{y} + \dot{y} = 0 \quad ۹ \quad \ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \quad ۱۰ \quad \ddot{y} + y^2 = 0$$

۱۱. (آونگ) نشان دهید که حرکت یک آونگ غیر میرا به طول l (شکل ۴۰ بخش ۶.۲) به صورت معادله غیر خطی زیر نشان داده می شود.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

که در آن $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ شتاب ثقل در سطح زمین است. نمودار صفحه فاز را با فرض $l = 2 \text{ m}$ و منحنی متناظر با جواب $\theta(t)$ که در آن $\theta(0) = 0$ و $\dot{\theta}(0) = 1 \text{ m/s}$ را رسم کنید.

۳.۳ نقاط بحرانی-پایداری

می‌توانیم بدون آنکه معادلات را حل کنیم از صفحه فاز درباره رفتار عمومی جوابهای معادلات دیفرانسیل اطلاعاتی به دست آوریم. هرچقدر معادلات پیچیده‌تر باشند این امر مهم‌تر خواهد بود.

در این بخش خواهیم دید که دستگاههای معادلات دیفرانسیل را از طریق صفحه فاز نیز می‌توان مطالعه کرد. این کار به شیوه‌ای نسبتاً طبیعی منجر به بررسی پایداری می‌گردد. مفاهیم پایداری در فیزیک عنوان می‌شود که در آنجا معنی پایداری به تقریب این است که تغییر کوچکی (اغتشاش کوچکی) در یک دستگاه فیزیکی در یک لحظه فقط تغییراتی جزئی در رفتار دستگاه را برای تمام زمانهای بعدی باعث شود.

اول یادآوری می‌کنیم که یک معادله دیفرانسیل

$$\dot{y} = G(y, y)$$

را می‌توان به صورت دستگاه

$$\dot{y} = v$$

$$\dot{v} = G(y, v)$$

نوشت و یک جواب $y(t)$ ، $v(t)$ این دستگاه منحنی‌ای را در صفحه yv ، صفحه فاز، نمایش می‌دهد (بخش ۲.۳).

در حال حاضر برای بحث کلیتر مناسب این است که نماد گذاری را تغییر دهیم. بجای y می‌گذاریم x و بجای v می‌گذاریم y . در این صورت صفحه فاز عبارت از صفحه xy است و دستگاه ما عبارت است از $\dot{x} = y$ ، $\dot{y} = G(x, y)$. به صورت کلیتر دستگاههایی به صورت

$$\dot{x} = F(x, y)$$

(۱)

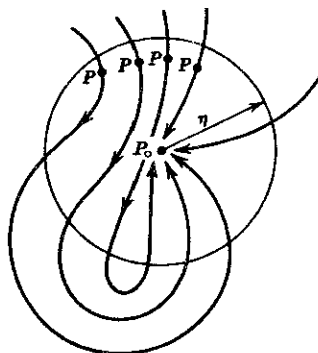
$$\dot{y} = G(x, y)$$

که در آن y هر متغیری است، و نه لزوماً $\dot{x}$ ، را در نظر می‌گیریم. یک جواب $x(t)$ ، $y(t)$ برای (۱) نمایش دهنده یک منحنی c در صفحه xy (و یا در حالت تبهگون به صورت یک نقطه) است. این منحنی را منحنی جواب یا راه (بعضی اوقات مسیر) (۱) می‌نامند. جهتی را که t زیاد می‌شود جهت مثبت در c نامیده و با علامت سهم نشان می‌دهند. این سهم جهت‌گیری c را تعریف می‌کند. هر گاه t زمان و c مسیر یک جسم متحرک باشد جهت مثبت جهتی است که با گذشت زمان جسم در طول c حرکت می‌کند.

از (۱) می‌بینیم که شیب یک مسیر مار بر نقطه $P: (x, y)$ عبارت است از

$$(۲) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

توجه کنید که (۲) هیچ اطلاعاتی درباره جهت گیری يك مسیر نمی دهد. همچنین توجه داشته باشید که در P باید داشته باشیم $F(x, y) \neq 0$. هر گاه در P ، $F(x, y) = 0$ ، اما $G(x, y) \neq 0$ ، می توانیم بجای (۲) از $dx/dy = F(x, y)/G(x, y)$ استفاده نموده و از $dx/dy = 0$ نتیجه بگیریم که مماس بر C در P قائم است. لکن هر گاه هم F و هم G در نقطه ای صفر باشند چه می توان کرد؟ این مسئله مبحث اصلی این بخش است و به نتایج جالبی منجر می شود که از نظر عملی حائز اهمیت است.



شکل ۶۱. نقطه بحرانی جاذب P_0 از (۱)

نقطه ای مانند $P_0: (x_0, y_0)$ را که در آن هم F و هم G صفرند نقطه بحرانی (۱) نامند.

نقاط بحرانی P_0 ، بسته به رفتار مسیرهای نزدیک این نقاط، انواع گوناگونی دارند. در این بحث فرض می کنیم که P_0 منفرد باشد، یعنی، تنها نقطه بحرانی (۱) در قرص مدوری حول P_0 باشد. مفاهیم زیر برای منظور ما بنیادی هستند.

يك نقطه بحرانی P_0 از (۱) را جاذب نامند هر گاه، بطور تقریب، P_0 مآلا تمام مسیرهای (۱) را که در يك لحظه به قدر کافی به P_0 نزدیک اند جذب کند؛ به طور دقیق: هر گاه قرص D به شعاع $\eta > 0$ حول P_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری از (۱) که نقطه ای در D دارد (این نقطه در شکل ۶۱ با P نشان داده شده است) وقتی $t \rightarrow \infty$ ، به سمت P_0 میل کند.

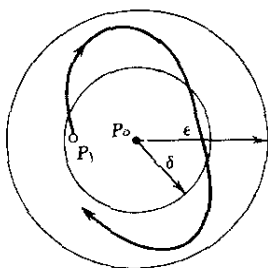
يك نقطه بحرانی P_0 از (۱) را پایدار نامند هر گاه، به طور تقریب، تمام مسیرهای (۱) که در يك لحظه به قدر کافی نزدیک P_0 هستند در تمام زمانهای بعدی نیز نزدیک P_0

۱. به طور دقیقتر، پایدار به تعبیر لیاپانوف (Liapunov). تعاریف دیگری از پایداری وجود دارند اما تعریف لیاپانوف، که ما فقط آن را در نظر می گیریم، شاید مفیدترین آنها باشد.

باقی بمانند؛ به طور دقیق: هر گاه به ازای هر قرص D_ϵ به شعاع $\epsilon > 0$ حول P_0 قرصی مانند D_δ به شعاع $\delta > 0$ حول P_0 وجود داشته باشد به طوری که هر مسیری از (۱) که نقطه‌ای مانند P_1 (مثلاً متناظر با $t = t_1$) در D_δ را در تمام نقاط متناظر با $t \geq t_1$ را در D_ϵ داشته باشد. شکل ۶۲ را ببینید.

نقطه بحرانی P_0 از (۱) را پایدار مجانبی نامند هر گاه P_0 هم پایدار و هم جاذب باشد.

نقطه بحرانی P_0 از (۱) را که پایدار نباشد ناپایدار نامند.



شکل ۶۲. نقطه بحرانی پایدار P_0 از (۱).
(مسیر شروع شده از P_1 در قرص به شعاع ϵ متوقف می‌گردد.)

واضح است که يك نقطه بحرانی پایدار P_0 ضرورتی ندارد که پایدار مجانبی باشد زیرا P_0 ممکن است جاذب نباشد. در واقع پایداری ایجاب نمی‌کند که مسیرهای (۱) در همسایگی P_0 باید به P_0 میل کنند. از طرف دیگر يك نقطه بحرانی جاذب P_0 لازم نیست که پایدار باشد. این مطلب کمتر واضح است حتی شاید تعجب‌آور باشد. اما این درست است زیرا مسیرها ممکن است به صورتی باشند که ابتدا به طور دلخواهی به P_0 نزدیک شوند و سپس قبل از آن که در حد به P_0 برسند از آن دور شوند. (به طور رسمی، به ازای هر $\delta > 0$ و هر M در زمانی مانند t_1 مسیری با فاصله کمتر از δ از P_0 وجود دارد که به فاصله‌ای بزرگتر از M از P_0 در زمان $t_1 > t_1$ می‌رسد و وقتی $t \rightarrow \infty$ به سمت P_0 میل می‌کند.) به نظر می‌رسد که مسیرهای سمت چپ P_0 در شکل ۶۱ وضعیت را روشن نمایند. مثالهایی از معادلات دیفرانسیل مربوطه پیچیده بوده و در عمل به ندرت با آنها مواجه می‌شویم (چنین مثالهایی در [B۱] و [B۹] متدرج در ضمیمه ۱ آورده شده‌اند).

تاکنون با پایداری یا ناپایداری نقاط بحرانی سروکار داشتیم. اکنون به رده‌بندی بیشتری می‌پردازیم. خواهیم دید که انواع گوناگونی از نقاط بحرانی بسته به شکل مسیرها در همسایگی چنین نقطه‌ای وجود دارند.

گره سره يك نقطه بحرانی مانند P است به قسمی که وقتی $t \rightarrow \infty$ یا $t \rightarrow -\infty$ هر مسیر در يك جهت معین به P میل کند و برای هر امتداد مفروضی مسیری که در این امتداد به P برسد وجود داشته باشد.
به عنوان مثال، دستگاه

$$(۳) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$$

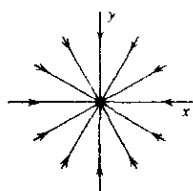
در $(0, 0)$ دارای يك گره سره ناپایدار است زیرا يك جواب عمومی عبارت است از (شکل ۶۳)

$$x = Ae^t, \quad y = Be^t,$$

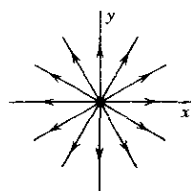
به قسمی که مسیرها اشعه‌ای هستند که از $(0, 0)$ به سمت بیرون امتداد دارند. توجه کنید که وقتی $A \neq 0$ و $y = (B/A)x$ و وقتی $B \neq 0$ و $x = (A/B)y$ به همین ترتیب دستگاه

$$(۴) \quad \dot{x} = -x, \quad \dot{y} = -y$$

دارای يك گره سره پایدار و جاذب در مبدأ است (شکل ۶۴).



شکل ۶۴. گره سره پایدار و جاذب



شکل ۶۳. گره سره ناپایدار

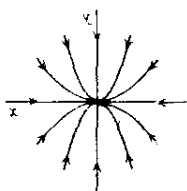
يك گره ناسره نقطه‌ای بحرانی مانند P است به طوری که هر مسیری، احتمالاً به استثنای يك جفت مسیر، همان امتداد حدی در P را داشته باشد.
به عنوان مثال دستگاه

$$(۵) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y$$

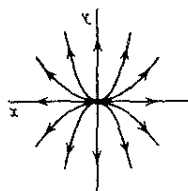
دارای يك گره ناسره ناپایدار در مبدأ است (شکل ۶۵). دستگاه

$$(۶) \quad \dot{x} = -x, \quad \dot{y} = 2y$$

دارای يك گره ناسره پایدار و جاذب در مبدأ است (شکل ۶۶).



شکل ۶۶. گره ناسره پایدار و جاذب



شکل ۶۵. گره ناسره ناپایدار

دستگاه زیر:

$$(۷) \quad \dot{x} = x, \quad \dot{y} = x + y$$

دارای يك گره ناسره ناپایدار در $(0, 0)$ است به طوری که وقتی $t \rightarrow -\infty$ تمام مسیرها دارای يك امتداد حدی باشند (شکل ۶۷). در واقع، خواننده می تواند نشان دهد که يك جواب عمومی چنین است

$$x = Ae^t, \quad y = (At + B)e^t.$$

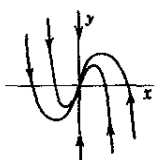
به ازای $A = 0$ نتیجه عبارت از اشعه قائم $(x = 0)$ است و به ازای $A \neq 0$ به دست می آوریم

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(At + B + A)e^t}{Ae^t} \rightarrow -\infty \quad t \rightarrow -\infty$$

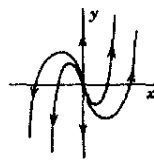
یعنی وقتی $t \rightarrow -\infty$ مسیرها در امتداد قائم به سمت مبدأ میل می نمایند. به طریقی مشابه، دستگاه

$$(۸) \quad \dot{x} = -x, \quad \dot{y} = x - y$$

دارای يك گره ناسره پایدار جاذب در $(0, 0)$ است به طوری که وقتی $t \rightarrow \infty$ تمام مسیرها دارای يك امتداد حدی شوند (شکل ۶۸).



شکل ۶۸. گره ناسره پایدار و جاذب



شکل ۶۷. گره ناسره ناپایدار

يك نقطه زینی نقطه ای بحرانی مانند P است به طوری که تعداد زیاد ولی محدودی

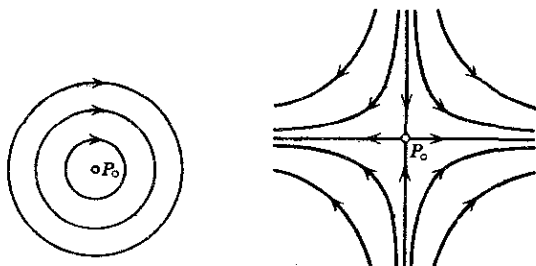
از مسیرها وقتی $t \rightarrow \infty$ به سمت p_0 میل نمایند و وقتی $t \rightarrow -\infty$ تعداد زیاد ولی محدودی از مسیرها به P_0 برسند يك نقطهٔ زینتی ناپایدار است.
به عنوان مثال دستگاه

$$(9) \quad \dot{x} = \bar{x} \quad , \quad \dot{y} = -y$$

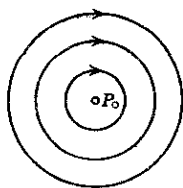
دارای يك نقطهٔ زینتی در مبدأ است (شکل ۶۹). وقتی $t \rightarrow \infty$ دو مسیر به مبدأ میل می کنند و وقتی $t \rightarrow -\infty$ دو مسیر به آن میل می کنند. مسیرها شاخههایی از هذلولی هستند. مرکز نقطه‌ای بحرانی مانند P_0 است به قسمی که مسیرها تشکیل منحنیهای بسته‌ای را بدهند که شامل P_0 ، واقع در ناحیه‌ای که به وسیلهٔ منحنی محصور شده است، باشد. مثلاً، دستگاه

$$(10) \quad \dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -x$$

مرکزی در مبدأ دارد (شکل ۷۰).



شکل ۶۹. نقطهٔ زینتی



شکل ۷۰. مرکز

نقطهٔ حلزونی و یا نقطهٔ گردایی يك نقطهٔ بحرانی مانند P_0 است به قسمی که مسیرها تشکیل حلزونی حول P_0 داده و P_0 به صورت نقطهٔ مجانبی باشد. مثلاً، دستگاه

$$(11) \quad \dot{x} = -x + y \quad , \quad \dot{y} = -x - y$$

يك نقطهٔ حلزونی پایدار در مبدأ دارد (شکل ۷۱). درواقع، خواننده می تواند تحقیق کند که جواب عمومی عبارت است از

$$x = e^{-t}(A \cos t + B \sin t) \quad , \quad y = e^{-t}(B \cos t - A \sin t).$$

با قراردادن $C^2 = A^2 + B^2$ ، $\cos \alpha = A/C$ و $\sin \alpha = B/C$ می توانیم معادلات بالا را به صورت زیر بنویسیم.

$$x = Ce^{-t} \cos(t - \alpha) \quad , \quad y = -Ce^{-t} \sin(t - \alpha).$$

با به کار بردن مختصات قطبی تعریف شده یا r و θ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

با مقایسه داریم $r = Ce^{-t}$ و $\theta = \alpha - t$. از این دو $t = \alpha - \theta$ و

$$r(\theta) = C_0 e^{\theta} \quad (C_0 = Ce^{-\alpha})$$

که یک حلزونی را نمایش می دهد.

دستگاههایی را که به عنوان مثال ذکر کردیم به صورت

$$\dot{x} = ax + by \quad (\text{الف})$$

(۱۲)

$$\dot{y} = cx + dy \quad (\text{ب})$$

هستند که در آنها $ad - bc \neq 0$. جوابها باید به صورت توابع نمایی باشند (و شاید ضرب شده در t). برای مشاهده این مطلب می توان یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از (۱۲) نسبت به x به دست آورد بدین ترتیب که از (الف) مشتق می گیریم و y را از (۱۲ ب) و by را از (۱۲ الف) جایگزین می کنیم. نتیجه عبارت است از

$$\ddot{x} - (a+b)\dot{x} + (ad-bc)x = 0. \quad (۱۳)$$



شکل ۷۱. نقطه حلزونی پایدار و جاذب

حال می توان در مورد شکل جوابها بر حسب ریشه های معادله مشخصه زیر :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0,$$

بحث نمود که از (۱۳) و y از x و (۱۲) به دست می آید. چنین بحثی نشان خواهد داد که شکلهای نشان داده شده انواع ممکنه نقاط بحرانی (۱۲) را توضیح می دهند. (خواننده ای که علاقه مند است مطلب را بیشتر دنبال کنند می تواند آن را به تفصیل در [B۴] ضمیمه ۱ ببینند.)

بی مناسبت نیست که یک نوسان کننده میرای خطی را (وزنه متصل به فنربخش ۶.۲ را ببینید) با توجه به اصطلاحات جدید بررسی کنیم. معادله دیفرانسیل مربوطه عبارت است از

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{و یا}$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

که در آن $m > 0$ ، $c \geq 0$ و $k > 0$. این معادله به صورت (۱۳) است و می توان آن را به شکل دستگاه زیر نوشت

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\frac{c}{m} v - \frac{k}{m} x.$$

اگر $c = 0$ (بدون میرایی)، مسیرها دوایری در حول مبدأ هستند که نقطه بحرانی مرکز است. اگر $c > 0$ (با میرایی)، مسیرها حلزونیهای حول مبدأ هستند که نقطه بحرانی حلزونی پایدار مجانبی است.

بحث ما درباره دستگاه خطی (۱۲) است اما متذکر می شویم که در حالت کلی دستگاه غیر خطی (۱) در نزدیکی نقطه بحرانی همان رفتار را نشان می دهد. به طور دقیقتر موضوع را می توان به ترتیب زیر بیان نمود. فرض کنید $(0, 0)$ نقطه بحرانی P_0 از (۱) باشد، یعنی

$$F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 0.$$

فرض کنید که F و G پیوسته بوده و در همسایگی P_0 دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند. با نوشتن جملات خطی مربوط به F و G به طور صریح بنابر (۱) داریم

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + F_1(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G_1(x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

می توان نشان داد که اگر $ad - bc \neq 0$ و P_0 منفرد باشد یعنی قرصی حول P_0 باشد که نقاط بحرانی بیشتری از (۱) در آن نباشد در آن صورت مسیرهای دستگاه خطی (۱۲)، بجز در چند حالت خیلی لازم نیستند، در نزدیکی P_0 تقریبهای مناسبی برای مسیرهای دستگاه غیر خطی (۱) هستند. با مثال زیر مطلب را روشن می کنیم.

مثال ۱. آونک

شکل ۴۰ بخش ۲.۶ آونگی به جرم m و به طول l را نشان می دهد. مقدار جابجایی از حالت تعادل چنین است $s = l\theta$. بنابراین شتاب $\ddot{\theta}$ می شود. نیروی برگشت دهنده عبارت است از مؤلفه مماسی $mg \sin \theta$ از وزن mg . در این جا از وزن میله و همچنین از میرایی صرف نظر می کنیم. بدین ترتیب بنابر قانون دوم نیوتن داریم

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0.$$

با تقسیم این رابطه بر ml و قرار دادن $x = \theta$ و $\dot{\theta} = y$ (برای رعایت نماد گذاری قبلی) به دست می آوریم

$$(۱۵) \quad \ddot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x.$$

این يك دستگاه غیر خطی است که نقطه بحرانی آن در $(0, 0)$ است. جواب کامل يك تابع مقدماتی نیست. دستگاه را به صورت (۱۴) می نویسیم:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} x + \frac{g}{l} (y - \sin x).$$

از این رو در (۱۴) $a=0$, $b=1$, $c=-g/l$, $d=0$ بوده و بنابراین $ad-bc \neq 0$. همچنین شرط مشتق پذیری بالا صادق است. پس نقطه بحرانی (۱۵) به همان صورتی است که دستگاه خطی متناظر به آن می باشد:

$$(۱۶) \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{g}{l} x.$$

یعنی آن نقطه يك مرکز است. این امر قابل فهم است زیرا به ازای مقادیر کوچک $|x|$ داریم $\sin x \approx x$ بنابراین در مورد ارتعاشات کوچک (۱۶) تقریب خوبی برای (۱۵) است. اینها تقریباً همساز هستند زیرا (۱۶) ایجاب می کند $\omega^2 y + \omega^2 x = 0$ که در آن $\omega = \sqrt{g/l}$. یادآور می شویم که این امر در مورد ارتعاشات بزرگ صحیح نیست. د آن مورد، چنانچه می توان نشان داد، دوره تناوب بستگی به جابه جایی اولیه دارد.

مسائل بخش ۳.۳

۱. نشان دهید که در (۳) به ازای هر مقدار انتخابی برای A و B يك شعاع پیدامی شود که به سمت بیرون مبدأ امیداد دارد (بنابراین این يك نقطه بحرانی ناپایدار است).
۲. (۴) را حل کنید و تحقیق کنید که $(0, 0)$ يك گره سره پایدار است.
۳. (۵) را حل کنید. مسیرها چه منحنیهایی هستند؟ امتداد مسیرها در مبدأ کدامند؟
۴. (۶) را حل کنید. مسیرها چه منحنیهایی هستند؟
۵. فرض کنید t در (۶) معرف زمان باشد. $\tau = -t$ را به عنوان متغیر مستقل جدیدی به کار ببرید و دستگاه را حل نمایید و با جواب (۵) مقایسه کنید. این تبدیل در مکانیک چه مفهومی دارد؟

۶. جواب (۷) را استنتاج کنید.

۷. (۸) را حل کنید.

۸. (۹) را حل کنید و نشان دهید که مسیرهای منحنی شاخه‌هایی از هذلولی هستند.

۹. (۱۰) را حل کنید.

۱۰. (۱۳) را از (۱۲) به دست بیاورید.

حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی.

توابع متعامد

در فصل ۲ دیدیم که معادلات دیفرانسیل همگن بسا ضرایب ثابت را می‌توان با روشهای جبری حل نمود و جوابها توابعی مقدماتی هستند که با آنها در حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شده‌ایم. لکن هرگاه ضرایب چنین معادلاتی ثابت نبوده و به x بستگی داشته باشند آنگاه وضع پیچیده‌تری می‌شود و جوابها ممکن است توابعی غیرمقدماتی باشند. معادلهٔ بسل، معادلهٔ لژاندر و معادلهٔ فوق هندسی از این نوع می‌باشند. چون این معادلات و معادلات دیگر و جوابهای آنها نقش مهمی در ریاضیات مهندسی ایفا می‌کنند، هم‌اکنون به بررسی روشی برای حل چنین معادلاتی می‌پردازیم. جوابهای حاصل از این روش به صورت سری توانی خواهند بود. بدینجهت این روش را «روش سری توانی» می‌نامند. همچنین بررسی خواص اساسی جوابها را بررسی خواهیم کرد. این موضوع به دانشجو کمک می‌کند که با «توابع فوق‌متعالی» و برخی رویه‌های متعارف که در ارتباط با توابع خاص به کار می‌روند، خصوصاً برای برقراری خواص توابع و روابط بینشان که برخی از آنها در محاسبات عددی اساسی‌اند، آشنا شود.

سه بخش آخر (بخشهای ۷.۴ تا ۹.۴) اختصاص دارد به تعامد چند جمله‌ایهای لژاندر، توابع بسل و دیگر مجموعه جوابهای مسائل با مقدار مرزی که به مسائل استودم - لیوویل معروف‌اند.

پیشنیاز این فصل: فصل ۲.

بخشهایی را که برای دورهٔ فشرده‌تری می‌توان حذف کرد: ۲.۴، ۶.۴، ۹.۴.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت B.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰۲ روش سری توانی

حال به بررسی حل معادلات دیفرانسیل با روشی موسوم به روش سری توانی که جوابهای آن به صورت سری توانی است می پردازیم. روش مزبور رویه متعارف کارآمدی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر است.

نخست یادآور می شویم که سری توانی^۱ (بر حسب توانهای $(x-a)$) عبارت است از یک سری نامتناهی به صورت

$$(۱) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots,$$

که در آن ثابتهای $c_0, c_1, \dots$ را ضرایب سری و ثابت a را مرکز نامند و x یک متغیر است.

خصوصاً اگر $a=0$ ، یک سری توانی بر حسب توانهای x به دست می آید:

$$(۲) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

در این بخش تمام متغیرها و ثابتها حقیقی فرض می شوند.

مثالهای مشهور سریهای توانی سریهای مک لورن هستند:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots \quad (|x| < 1, \text{ سری هندسی})$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

۱. اصطلاح «سری توانی» به تنهایی معمولاً به سری ای به صورت (۱) اطلاق می شود و شامل سریهایی با توانهای منفی به صورت $c_0 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \dots$ یا سری ای شامل توانهای کسری x نیست. توجه کنید که در (۱) می نویسیم $(x-a)^0 = 1$ ، حتی در صورتی که $x=a$.

ایدهٔ اساسی روش سری توانی برای حل معادلات دیفرانسیل بسیار ساده و طبیعی است. ما می‌خواهیم روش عملی در این مورد را شرح دهیم و با ارائهٔ مثالهای ساده آن را روشن کنیم، توجه ریاضی این روش را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

در مورد یک معادلهٔ دیفرانسیل معروض، نخست همهٔ توابع موجود در معادله را به صورت سریهای توانی بر حسب توانهای x (یا بر حسب توانهای $x - a$ ، هرگاه جوابها به صورت سری توانی بر حسب توانهای $x - a$ خواسته شوند) نمایش می‌دهیم. در بسیاری از موارد عملی توابع مزبور چند جمله‌ای هستند و در چنین حالتی لازم نیست در مرحلهٔ نخست کاری انجام دهیم. پس از آن جوابی به صورت سری توانی، مثلاً

$$(۳) \quad y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

فرض می‌کنیم، و این سری و سریهایی که از مشتقگیری جمله به جمله آن به دست می‌آیند یعنی

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} \quad (\text{الف})$$

$$(۴) \quad y'' = 2c_2 + 3 \times 2c_3 x + 4 \times 3c_4 x^2 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} \quad (\text{ب})$$

و غیره را در معادله جایگزین می‌نماییم. آنگاه جملات هم‌توان x را گردآوری می‌کنیم و مجموع ضرایب هر یک از توانهای موجود x ، یعنی، جملات ثابت، جملات شامل x ، جملات شامل x^2 و غیره، را به ترتیب مساوی صفر قرار می‌دهیم. از این عملیات روابطی به دست می‌آید که با توجه به آنها می‌توانیم ضرایب مجهول در (۳) را متوالیاً معین کنیم.

حال روش مزبور را با ارائهٔ چند معادلهٔ ساده، که آنها را می‌توان به روشهای مقدماتی نیز حل نمود، روشن می‌سازیم.

مثال ۱

معادلهٔ زیر را حل کنید

$$y' - y = 0.$$

در مرحلهٔ اول سریهای (۳) و (۴ الف) را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots) - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = 0$$

آنگاه با گردآوری جملات هم‌توان x به دست می‌آوریم:

$$(c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1)x + (3c_3 - c_2)x^2 + \dots = 0.$$

بامساوی صفر قراردادن ضریب هریک از توانهای x داریم

$$c_1 - c_0 = 0, \quad 2c_2 - c_1 = 0, \quad 3c_3 - c_2 = 0, \dots$$

با حل این معادلات می‌توان c_1 ، c_2 ، ... را بر حسب c_0 که دلخواه است، بیان نمود:

$$c_1 = c_0, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2!}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}, \dots$$

با قراردادن این مقادیر در سری (۳) نتیجه می‌شود:

$$y = c_0 + c_0 x + \frac{c_0}{2!} x^2 + \frac{c_0}{3!} x^3 + \dots,$$

و بدین طریق ملاحظه می‌کنیم که جواب عمومی آشنای زیر را به دست آورده‌ایم

$$y = c_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = c_0 e^x.$$

البته، هرگاه معادله داده شده را به صورت $y' = y$ بنویسیم و مانند قبل سریهای (۳) و (۴ الف) را در آن قرار دهیم بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots \\ = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots \end{aligned}$$

در این صورت لازم است که داشته باشیم

$$c_1 = c_0, \quad 2c_2 = c_1, \quad 3c_3 = c_2, \dots$$

و غیره که همان است که قبلاً به دست آوردیم.

مثال ۲

معادله زیر را حل کنید

$$y'' + y = 0.$$

باجایگزینی سریهای (۳) و (۴ ب) در معادله به دست می‌آوریم:

$$(2c_2 + 3 \times 2c_2x + 4 \times 3c_3x^2 + \dots) + (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) = 0.$$

با گردآوری هم‌توانهای x در می‌یابیم که

$$(2c_7 + c_0) + (3 \times 2c_7 + c_1)x + (4 \times 3c_7 + c_2)x^2 + \dots = 0.$$

با برابر صفر قرار دادن ضریب هر توان x داریم

$$2c_7 + c_0 = 0 \quad \text{ضریب } x^0$$

$$3 \times 2c_7 + c_1 = 0 \quad \text{ضریب } x^1$$

$$4 \times 3c_7 + c_2 = 0 \quad \text{ضریب } x^2$$

و غیره. با حل این معادلات مشاهده می کنیم که $c_7, c_6, \dots$ را بر حسب $c_0, c_1, \dots$ می توان بر حسب c_1 بیان نمود

$$c_7 = -\frac{c_0}{2!}, \quad c_6 = -\frac{c_1}{3!}, \quad c_5 = -\frac{c_2}{4 \times 3} = -\frac{c_2}{4!}, \dots;$$

c_1, c_0 دلخواه هستند. با این مقادیر سری (۳) چنین می شود

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!} x^2 - \frac{c_1}{3!} x^3 + \frac{c_0}{4!} x^4 + \frac{c_1}{5!} x^5 + \dots$$

این سری را می توان به صورت زیر نوشت :

$$y = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + c_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)$$

و در نتیجه جواب عمومی آشنای زیر نمایان می شود

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$

مثال ۳

معادله زیر را حل کنید

$$(x+1)y' - (x+2)y = 0.$$

با قرار دادن سریهای (۳) و (۴) الف) در معادله، به دست می آوریم

$$(x+1)(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots) - (x+2)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots) = 0.$$

از ضرب کردن جملات معادله در هم نتیجه می گیریم که

$$c_1x + 2c_2x^2 + 3c_3x^3 + 4c_4x^4 + \dots + sc_sx^s + \dots$$

$$+ c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots + (s+1)c_{s+1}x^s + \dots$$

$$- c_0x - c_1x^2 - c_2x^3 - c_3x^4 - \dots - c_{s-1}x^s - \dots$$

$$- 2c_0 - 2c_1x - 2c_2x^2 - 2c_3x^3 - 2c_4x^4 - \dots - 2c_sx^s - \dots = 0.$$

چون این تساوی باید نسبت به x يك اتحاد باشد بنابراین لازم است كه مجموع ضرایب هرتوان x صفر باشد؛ بنابراین داریم

$$(الف) \quad c_1 - 2c_0 = 0 \quad (ب) \quad c_1 - c_0 - c_0 = 0 \quad \text{و همین طور} \quad (۵)$$

و در حالت کلی

$$(۶) \quad sc_s + (s+1)c_{s+1} - c_{s-1} - 2c_s = 0.$$

با حل (۵ الف) نسبت به c_1 و حل (۶) نسبت به c_{s+1} داریم

$$c_1 = 2c_0. \quad (الف)$$

$$(۷) \quad c_{s+1} = \frac{1}{s+1} [c_{s-1} + (2-s)c_s] \quad s=1, 2, \dots \quad (ب)$$

فرمول (۷ ب) را يك رابطه بازگشتی یا يك فرمول بازگشتی می نامند. حال بسا توجه به این روابط می توان c_1 ، c_2 ، ... را متوالیاً معین کرد. اگر مایل باشیم می توانیم محاسبات مربوط به (۷ ب) را به صورت جدولی به شرح زیر تنظیم کنیم:

c_{s+1} بر حسب c_s	$c_{s+1} = \frac{\text{مجموع}}{s+1}$	$s+1$	مجموع	$(2-s)c_s$	c_{s-1}	s
$c_1 = 2c_0$						
$c_2 = \frac{3}{2}c_0$	$\frac{c_0 + c_1}{2}$	۲	$c_0 + c_1$	c_1	c_0	۱
$c_3 = \frac{2}{3}c_0$	$\frac{c_1}{3}$	۳	c_1	۰	c_1	۲
$c_4 = \frac{5}{24}c_0$	$\frac{c_2 - c_3}{4}$	۴	$c_2 - c_3$	$-c_3$	c_2	۳
...	...	..	...	..	..	..

با توجه به این مقادیر، سری (۳) چنین می شود:

$$y = c_0 \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \dots \right)$$

خواننده می تواند تحقیق کند جملاتی که به طور صریح در سری فوق نوشته شده چند جمله اول بسط مک لورن سری

$$y = c_0(1+x)e^x,$$

است و این همان جواب عمومی معادله داده شده است که با تفکیک متغیرها حاصل می شود.

مسائل بخش ۱۰.۳

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش سری توانی حل کنید.

$$y' = 3y \quad ۱. \quad y' + 2y = 0 \quad ۲. \quad y' = ky \quad ۳.$$

$$y' = 2xy \quad ۴. \quad (1-x)y' = y \quad ۵. \quad y' = xy \quad ۶.$$

$$(1-x)y' = y \quad ۷. \quad (1-x^2)y' = y \quad ۸. \quad y'' = y \quad ۹.$$

$$y'' + 9y = 0 \quad ۱۰. \quad y'' = 4y \quad ۱۱. \quad y'' = y' \quad ۱۲.$$

(مسائل بیشتری از این نوع در انتهای بخش بعد آمده است.)

۲.۴ مبنای نظری روش سری توانی

دیدیم که روش سری توانی، جوابهای معادلات دیفرانسیل را به صورت سری توانی به دست می دهد. فرض می کنیم y ، جواب يك معادله مفروض، به صورت يك سری توانی با ضرایب مجهول باشد، و با قرار دادن این سری و سریهای مربوط به مشتقات y در معادله مزبور ضرایب مجهول را متوالیاً معین می کنیم.

فایده عملی این روش وقتی آشکار می شود که به خاطر داشته باشیم سری توانی را برای محاسبه مقادیر عددی جوابها می توان به کار برد. به علاوه، چنانچه در بحث آینده خواهیم دید بسیاری از خواص کلی جوابها را می توان از سری توانی آنها به دست آورد. روش سری توانی شامل اعمال گوناگونی روی سریها، از قبیل مشتقگیری از سریها، جمع، و ضرب سریها است. بنابراین برای توجیه این روش لازم است که به بررسی مبنای نظری این اعمال بپردازیم. بخش حاضر اختصاص به این بررسی دارد. بحث مربوطه متضمن مفاهیم و مطالبی است که دانشجو ممکن است با برخی از آنها قبلاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آشنا شده باشد و همین طور مطالب دیگری که در دوره های مقدماتی مورد بررسی قرار نگرفته اند. [اثباتهای مربوطه و جزئیات بیشتر را (که در این

فصل نیامده است) در بخشهای ۱۰۱۶ و ۲۰۱۶ می توان یافت.]
سری توانی سری نامتناهی به صورت

$$(۱) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots,$$

است و مانند بخش قبل فرض می کنیم که متغیر x ، مرکز a و ضرایب $c_0, c_1, \dots$ حقیقی اند.
 عبارت

$$(۲) \quad s_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n$$

(n عدد صحیح و مثبت) مجموع جزئی n ام سری (۱) نماینده می شود. واضح است که اگر جملات s_n را از (۱) حذف کنیم، عبارت باقیمانده چنین است:

$$(۳) \quad R_n(x) = c_{n+1}(x-a)^{n+1} + c_{n+2}(x-a)^{n+2} + \dots$$

این عبارت را باقیمانده (۱) بعد از جمله $c_n(x-a)^n$ می نامند.
 مثلاً، در مورد سری هندسی

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

داریم

$$s_1 = 1 + x, \quad R_1 = x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

$$s_2 = 1 + x + x^2, \quad R_2 = x^3 + x^4 + x^5 + \dots,$$

والی آخر.

بدین طریق دنباله مجموعهای جزئی $s_1(x), s_2(x), \dots$ را به (۱) مربوط کرده ایم. ممکن است به ازای مقداری از x مانند x_0 این دنباله همگرا باشد، مثلاً

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = s(x_0).$$

در این صورت می گویند سری (۱) در $x = x_0$ همگراست؛ عدد $s(x_0)$ را مقدار یا مجموع (۱) در x_0 می نامند و می نویسند

$$s(x_0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x_0 - a)^m.$$

هر گاه دنباله مزبور در $x = x_0$ واگرا باشد آنگاه گویند سری (۱) در $x = x_0$ واگراست.
 یادآوری می کنیم که می گویند دنباله $s_1, s_2, \dots$ به عدد s می گراید یا

همگراست باحد s ، هرگاه به ازای هر عدد مثبت مقروض ϵ (هر قدر کوچک باشد مهم نیست فقط کافی است که صفر نباشد) عددی مانند N بتوان یافت به طوری که

$$(۴) \quad |s_n - s| < \epsilon \quad n > N \quad \text{به ازای هر}$$

مفهوم هندسی (۴) این است که s_n به ازای $n > N$ بین عدد $s - \epsilon$ و $s + \epsilon$ قرار دارد (شکل ۷۲). البته در حالت کلی N بستگی به انتخاب ϵ دارد.

در مورد آنچه که مربوط به بحث ماست، $s = s_n + R_n$ یا $R_n = s - s_n$.

پس در (۴)

$$|s_n - s| = |R_n|$$

و همگرایی در $x = x_0$ به این مفهوم است که با انتخاب n به قدر کافی بزرگ می توانیم هر قدر بخواهیم $|R_n(x_0)|$ را کوچک کنیم. به عبارت دیگر وقتی دنباله همگرا باشد، $s_n(x_0)$ تقریبی برای $s(x_0)$ است و با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، $|R_n(x_0)|$ ، یعنی خطای تقریب را می توان از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده ϵ کوچکتر ساخت.

هرگاه در (۱)، $x = x_0 = a$ ، انتخاب شود، سری به تئ جمله c تبدیل می شود زیرا سایر جملات صفر می شوند. این امر نشان می دهد که سری (۱) در $x = a$ همگراست. در بعضی حالات ممکن است این تنها مقدار x باشد که به ازای آن (۱) همگراست. هرگاه مقادیر دیگری از x باشند که به ازای آنها این سری همگرا باشد، این مقادیر تشکیل یک فاصله، فاصله همگرایی، می دهند که نقطه $x = a$ وسط آن است. این فاصله می تواند یک فاصله متناهی باشد (شکل ۷۳). در این صورت سری به ازای همه x های واقع در داخل فاصله، یعنی به ازای همه x هایی که در شرط

$$(۵) \quad |x - a| < R$$

صدق می کنند همگرا و به ازای تمام x هایی که در $|x - a| > R$ صدق می کنند واگرا است. این فاصله همچنین می تواند نامتناهی باشد یعنی سری ممکن است به ازای جمیع مقادیر x همگرا باشد.

کمیت R را در شکل ۷۳ شعاع همگرایی (۱) می نامند؛ این عدد عبارت است از فاصله هر نقطه انتهایی فاصله همگرایی از مرکز a . هرگاه سری به ازای هر x همگرا باشد آنگاه $R = \infty$ و (۱) (۵/۱).

با استفاده از ضرایب سری، شعاع همگرایی را می توان با هر یک از فرمولهای زیر

معین کرد

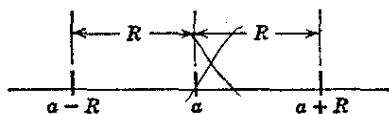
$$(۶) \quad \frac{1}{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{m+1}}{c_m} \right| \quad (\text{ب}) \quad \frac{1}{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} \quad (\text{الف})$$

مشروط بر آنکه این حدها موجود باشند. (اثبات این مطلب در بخش ۱۰۱۶ آمده است.)

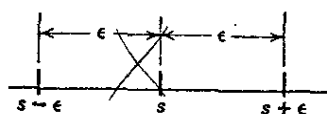
به ازای x هایی که (۱) را همگرا می کنند، سری دارای مقدار معینی مانند $s(x)$ است که به x بستگی دارد؛ هرگاه R ، شعاع همگرایی (۱)، صفر نباشد می نویسیم

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m \quad (|x-a| < R)$$

و گوئیم سری (۱) تابع $s(x)$ را در فاصله همگرایی نهایش می دهد.



شکل ۷۳. فاصله همگرایی (۵) مربوط به سری توانی با مرکز a



شکل ۷۴. همگرایی دنباله

حال به بررسی سه مثال نوعی می پردازیم؛ این مثالها سه حالت ممکن، یعنی حالتی را که در آنها شعاع همگرایی R ، مثبت و متناهی، نامتناهی، و یا صفر است تشریح می کنند.

مثال ۱. سری هندسی

در مورد سری هندسی داریم

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \dots \quad (|x| < 1).$$

درواقع، به ازای هر m ، $c_m = 1$ ، و از (۶) به دست می آوریم $R = 1$ ، یعنی این سری هندسی در صورتی که $|x| < 1$ همگراست و نمایش دهنده $1/(1-x)$ است.

مثال ۲

در مورد سری

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

داریم $c_m = 1/m!$ از این رو بنا بر (۶ ب)،

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{m!}} = \frac{1}{m+1} \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty \quad \text{هر گاه}$$

یعنی $R = \infty$ ؛ سری به ازای هر x همگراست.

مثال ۳

در مورد سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \dots$$

داریم $c_m = m!$ و بنابر (۶ ب)،

$$\frac{c_{m+1}}{c_m} = \frac{(m+1)!}{m!} = m+1 \rightarrow \infty \quad m \rightarrow \infty \quad \text{هر گاه}$$

بنابراین $R = 0$ و سری فقط در مرکز $x = 0$ همگراست. چنین سریهایی بی فایده اند.

اعمال روی سریهای توانی

حال به بررسی اعمال روی سریهای توانی، که در ارتباط با روش سری توانی به کار می روند، می پردازیم. سه عمل زیر با توجه در هر حالت تشریح شده اند: مال مجازی هستند. همچنین شرطی برای صفر شدن تمام ضرایب می آوریم؛ این شرط از ابزارهای اساسی روش سری توانی است.

مشتقگیری جمله به جمله

اذا يك سری توانی می توان جمله به جمله مشتق گرفت. به بیان دقیقتر: هر گاه

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m$$

به ازای $|x-a| < R$ ، که در آن $R > 0$ ، همگرا باشد، آنگاه سری حاصل از مشتقگیری جمله به جمله این سری نیز به ازای همان x ها همگراست و مشتق y ، یعنی y' ، را نمایش می دهد بنابراین

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (x-a)^{m-1}.$$

(اثبات در بخش ۲.۱۶ قضایای ۳ و ۵.)

جمع جمله به جمله

در سری توانی را می‌توان جمله به جمله جمع کرد. به بیان دقیقتر: هر گاه سریهای

$$(۷) \quad \sum_{m=0}^{\infty} c_m (x-a)^m \quad \text{و} \quad \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-a)^m$$

دارای شعاعهای همگرایی مثبت باشند و مجموع آنها $f(x)$ و $g(x)$ باشد آنگاه سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} (b_m + c_m) (x-a)^m$$

به ازای هر x که متعلق به داخل فاصله همگرایی هر دو سری مزبور باشد همگراست و $f(x) + g(x)$ را نمایش می‌دهد (اثبات در بخش ۱۰.۱۶).

ضرب جمله به جمله

دوسری توانی را می‌توان جمله به جمله در هم ضرب کرد. به بیان دقیقتر: فرض می‌کنیم کسبه سریهای (۷) دارای شعاعهای همگرایی مثبت باشند و $f(x)$ و $g(x)$ مجموع آنها باشد. آنگاه سری حاصل از ضرب هر جمله سری اول در هر جمله از سری دوم و فاکتورگیری از توانهای یکسان $(x-a)$ ، یعنی

$$b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0) (x-a) + \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0) (x-a)^n$$

به ازای هر x متعلق به داخل فاصله همگرایی هر دوسری مزبور همگراست و $f(x)g(x)$ را نمایش می‌دهد. (اثبات در بخش ۱۰.۱۶ قضیه ۰.۳)

صفر شدن تمام ضرایب

هرگاه يك سری توانی دارای شعاع همگرایی مثبت باشد و مجموع آن در سراسر فاصله همگراییش متحد با صفر باشد آنگاه همه ضرایب سری برابر صفرند. (اثبات در بخش ۲.۱۶ قضیه ۰.۲)

این خواص سریهای توانی مبنای نظری روش سری توانی را تشکیل می‌دهند. سؤالی که باقی می‌ماند این است که آیا يك معادله دیفرانسیل مفروض اصلا دارای جوابهایی

هست که قابل نمایش به صورت سری توانی باشند. با استفاده از مفهوم زیر می توانیم به این سؤال پاسخ دهیم.

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ تحلیلی گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت یک سری توانی برحسب توانهای $x-a$ و شعاع همگرایی $R > 0$ نمایش داد. با استفاده از این مفهوم می توان معیاری اساسی را از آنچه مورد نظر است به شرح زیر فرموله کرد.

قضیه ۱ (وجود جوابهایی که به صورت سری توانی هستند)

هرگاه توابع f ، g و r در معادله دیفرانسیل

$$(۸) \quad y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x)$$

در $x=a$ تحلیلی باشند آنگاه هر جواب $y(x)$ از (۸) در $x=a$ تحلیلی است و بنابراین آن را می توان به صورت یک سری توانی برحسب توانهای $x-a$ و شعاع همگرایی $R > 0$ نمایش داد.

اثبات این قضیه نیاز به روشهای پیشرفته آنالیز مختلط دارد و علاقمندان می توانند به مرجع [۱۱] ضمیمه ۱ مراجعه کنند. هنگام به کار بردن این قضیه، مهم، این است که معادله خطی را به صورت (۸) بنویسیم طوری که ضریب y'' برابر ۱ باشد.

مسائل بخش ۲.۴

شعاع همگرایی سریهای زیر را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll} ۱. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{3^m} & ۲. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^m}{m!} & ۳. \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} \\ ۴. \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} & ۵. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} & ۶. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ ۷. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} & ۸. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} & ۹. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)m!} \end{array}$$

۱. R لاقبل برابر فاصله $x=a$ از نزدیکترین نقطه ای (نقاطی) به $x=a$ است که در آن نقطه (نقاط) یکی از توابع f ، g ، r به مثابه توابعی از متغیر مختلط، در آن نقطه تحلیلی نباشند. (توجه کنید که آن نقطه ممکن است روی محور x ها نباشد بلکه نقطه ای در صفحه مختلط باشد).

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m(m-1)}{3^m} x^m \quad .11$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)!}{(m!)^4} x^m \quad .10$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n \quad .13$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^n} x^{2n} \quad .12$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{3^m} (x-2)^m \quad .15$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} (x-3)^{2m} \quad .14$$

۱۶. (انتقال شاخص جمع‌بندی) گاهی اوقات در روش سری توانی انتقال‌های ساده‌شخصهای جمع‌بندی مفید واقع می‌شوند. برای تأیید این موضوع نشان دهید که

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} &= \sum_{p=1}^{\infty} (p+1) p c_{p+1} x^{p-1} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (s+2)(s+1) c_{s+2} x^s \end{aligned}$$

چه رابطه‌ای بین m ، p و s برقرار است؟

معادلات دیفرانسیل زیر را با روش سری توانی حل کنید.

$$xy' = (x+1)y \quad .18 \quad xy' - (x+2)y = -2x^2 - 2x \quad .17$$

$$xy' - 3y = x \quad .20 \quad x(x+1)y' - (2x+1)y = 0 \quad .19$$

$$y'' - y = x \quad .22 \quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad .21$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad .23$$

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0 \quad .24$$

$$y'' - xy' + y = 0 \quad .25$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad .26$$

۲۷. نشان دهید که معادله $y' = (y/x) + 1$ را نمی‌توان نسبت به y به صورت سری توانی‌ای برحسب x حل کرد. این معادله را نسبت به y به صورت سری توانی‌ای برحسب $1-x$ حل کنید.

(دانه‌یابی. $t = x - 1$ را به عنوان يك متغیر مستقل جدید انتخاب کنید و معادله حاصل را نسبت به y به صورت سری توانی‌ای برحسب t حل کنید.) نتیجه را با جواب حاصل از روش مقدماتی متناسبی با این مسئله مقایسه کنید.

در هر يك از معادلات زیر y را به صورت سری توانی ای بر حسب $x-1$ به دست آورید :

$$۲۸. \quad y' = 2y \quad ۲۹. \quad y'' - y = 0 \quad ۳۰. \quad xy' + y = 0$$

۳.۴ معادله ژاندر. چند جمله ایهای ژاندر

معادله دیفرانسیل ژاندر^۱

$$(۱) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

در بسیاری مسائل فیزیکی، به ویژه در مسائل با مقدار مرزی مربوط به کره مطرح می شود. پارامتر n در (۱) عدد حقیقی مفروضی است. هر جواب (۱) را يك تابع ژاندر می نامند. با تقسیم (۱) بر $1-x^2$ ، صورت استاندارد (۸)، بخش ۲.۴، به دست می آید و چنانچه می بینیم ضرایب معادله حاصل در $x=0$ تحلیلی هستند؛ بنابراین می توانیم روش سری توانی را به کار بندیم. با قرار دادن

$$(۲) \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

و مشتقات آن در (۱) و نشان دادن ثابت $n(n+1)$ با k به دست می آوریم

$$(1-x^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - 2x \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + k \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0.$$

با نوشتن عبارت اول به صورت دو سری مجزا داریم

$$(۱^*) \quad \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m \\ - 2 \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + k \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = 0,$$

این تساوی را چنین می نویسیم :

$$\begin{aligned} & 2 \times 1 c_2 + 3 \times 2 c_3 x + 4 \times 3 c_4 x^2 + \dots + (s+2)(s+1)c_{s+2}x^s + \dots \\ & \quad - 2 \times 1 c_2 x^2 - \dots \quad - s(s-1)c_s x^s - \dots \\ & \quad - 2 \times 1 c_1 x - 2 \times 2 c_2 x^2 - \dots \quad - 2s c_s x^s - \dots \\ & + k c_0 + k c_1 x + k c_2 x^2 + \dots + k c_s x^s + \dots = 0. \end{aligned}$$

۱. آدرین ماری ژاندر (Adrien Marie Legendre)، ۱۷۵۲-۱۸۳۳، ریاضیدان فرانسوی که سهم به سزایی در پیشبرد نظریه اعداد و توابع بیضوی داشته است.

هر گاه (۲) جواب (۱) باشد آنگاه تساوی فوق باید يك اتحاد نسبت به x باشد و از اینجا لازم می آید که مجموع ضرایب هر توانی از x برابر صفر باشد؛ بدین ترتیب با یادآوری اینکه $k = n(n+1)$ ، داریم

$$2c_2 + n(n+1)c_0 = 0, \quad \text{ضریب } x^0 \quad (۳ \text{ الف})$$

$$6c_3 + [-2 + n(n+1)]c_1 = 0, \quad \text{ضریب } x^1$$

و در حالت کلی به ازای $s = 2, 3, \dots$ داریم

$$(۳ \text{ ب}) \quad (s+2)(s+1)c_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]c_s = 0.$$

عبارت داخل کروشه [...] را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(n-s)(n+s+1) \dots$$

بنابراین از (۳) به دست می آوریم

$$(۴) \quad c_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} c_s \quad (s=0, 1, \dots).$$

این فرمول را رابطه بازگشتی یا فرمول بازگشتی می نامند. این رابطه هر يك از ضرایب سری (۲) را بر حسب دومین ضریب قبل از آن به دست می دهد، جز ضرایب c_0 و c_1 که ثابتهای دلخواهی هستند. متوالیاً به ترتیب پیدا می کنیم

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= -\frac{(n-1)(n+2)}{3!} c_0 \\ c_4 &= -\frac{(n-3)(n+4)}{5 \times 4} c_2 \\ &= \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} c_0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} c_2 &= -\frac{n(n+1)}{2!} c_0 \\ c_4 &= -\frac{(n-2)(n+3)}{4 \times 3} c_2 \\ &= \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} c_0 \end{aligned}$$

و غیره. با جایگزین کردن این مقادیر به جای ضرایب (۲) به دست می آوریم

$$(۵) \quad y(x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x)$$

که در آن

$$(۶) \quad y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \dots$$

$$(۷) \quad y_7(x) =$$

$$x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - + \dots$$

این سریها به ازای $|x| < 1$ همگرا هستند. y_7 و y_8 جوابهای مستقل خطی هستند چرا که (۶) فقط شامل توانهای زوج x است در حالی که (۷) فقط شامل توانهای فرد x است و بنابراین نسبت y_8/y_7 یک عدد ثابت نیست. از این رو (۵) در فاصله $-1 < x < 1$ جواب عمومی معادله (۱) است.

چند جمله‌ایهای ژاندر

در بسیاری کاربردها در معادله ژاندر پارامتر n یک عدد صحیح غیر منفی است. در این صورت هنگامی که $s = n$ ، یعنی s یک عدد صحیح غیر منفی باشد، طرف راست (۴) برابر صفر است و بنا بر این $c_{n+2} = 0$ ، $c_{n+4} = 0$ ، $c_{n+6} = 0$ ، ... از این رو هرگاه n زوج باشد، $y_8(x)$ به یک چند جمله‌ای درجه n تبدیل می‌شود. هرگاه n فرد باشد، همین مطلب در مورد $y_7(x)$ صادق است. این چند جمله‌ایها، که در اعدادی ثابت ضرب شده‌اند، چند جمله‌ایهای ژاندر نام دارند. چون در عمل این چند جمله‌ایها ازا اهمیت بسیاری برخوردارند، با تفصیل بیشتری به بررسی آنها می‌پردازیم. بدین منظور (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(۸) \quad c_s = - \frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} c_{s+2} \quad (s \leq n-2)$$

حال می‌توان تمام ضرایب غیر صفر را بر حسب c_n ، ضریب بزرگترین توان x در چند جمله‌ای، نوشت. آن وقت ضریب c_n دلخواه خواهد بود. وقتی $n=0$ ، مرسوم است که $c_n = 1$ انتخاب شود و

$$(۹) \quad c_n = \frac{(2n!)}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{n!}, \quad n=1, 2, \dots,$$

دلیل انتخاب چنین c_n ‌ای آن است که با این انتخاب تمام چند جمله‌ایها به ازای $x=1$ دارای مقدار ۱ خواهند شد؛ این موضوع از فرمول (۱۴) مسئله ۸ نتیجه می‌شود. آنگاه از (۸) و (۹) به دست می‌آوریم

$$(۹^*) \quad \begin{aligned} c_{n-1} &= - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} c_n = - \frac{n(n-1)(2n!)}{2(2n-1)2^n (n!)^2} \\ &= - \frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!} \end{aligned}$$

یعنی

$$c_{n-2} = -\frac{(2n-2)!}{2^n(n-1)!(n-2)!}.$$

به همین ترتیب

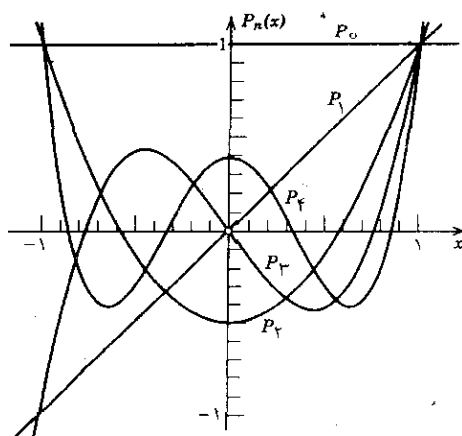
$$c_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{2(2n-3)} c_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2! (n-2)! (n-4)!}.$$

و غیره، در حالت کلی وقتی که $n-2m \geq 0$ ، داریم

$$(10) \quad c_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!}.$$

جواب حاصل از معادلهٔ لژاندر را چند جمله‌ای لژاندر درجهٔ n می‌نامند و آن را با $P_n(x)$ نمایش می‌دهند؛ از (۱۰) به دست می‌آوریم

$$(11) \quad \begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n \times 1! (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots, \end{aligned}$$



شکل ۷۴. چند جمله‌ایهای لژاندر

که در آن M برابر $\frac{n}{2}$ یا $\frac{n-1}{2}$ است، بسته به اینکه کدام یک عدد صحیح باشد. خصوصاً (شکل ۷۴)،

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$(11') \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

و غیره.

اصطلاح «تعامد» چند جمله‌ایهای لژاندر در بخش ۹.۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مسائل بخش ۳.۲

۱. $(11')$ را از (11) نتیجه بگیرید. $P_6(x)$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.
۲. چند جمله‌ایهای $P_0, \dots, P_6$ را که در $(11')$ داده شده‌اند در معادله لژاندر قرار دهید و ثابت کنید که این چند جمله‌ایها در معادله (1) صدق می‌کنند.
۳. نشان دهید که هر گاه در اولین جمع‌بندی (1^*) فرض کنیم $s = m - 2$ و در جمع‌بندیهای دیگر (1^*) قرار دهیم $m = s$ ، تا اینکه به دست آید

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{ (s+2)(s+1)c_{s+2} - [s(s-1) - 2s + k]c_s \} x^s = 0.$$

- در آن صورت می‌توانیم با سرعت بیشتری (۳) را از (1^*) نتیجه بگیریم.
۴. نشان دهید به ازای هر n که به ازای آن سریهای (6) یا (7) تبدیل به چند جمله‌ای نمی‌شوند، شعاع همگرایی این سریها ۱ خواهد بود.
۵. نشان دهید معادله‌ای که در مسئله ۲۳، بخش ۲.۴ آمده است، معادله لژاندر خاصی است و جواب عمومی آن را با توجه به (5) این بخش به دست بیاورید.
۶. با به کار بردن قضیه دو جمله‌ای در مورد $(1-x^2)^n$ ، و n بار مشتق‌گیری جمله به جمله از نتیجه و مقایسه با (11) ثابت کنید

$$(۱۲) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (\text{فرمول ددریکس}^*)$$

۷. با استفاده از (۱۲) و با n بار انتگرالگیری جزء به جزء نشان دهید که

$$(۱۳) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

۸. (تابع مولد) نشان دهید که

$$(۱۴) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n.$$

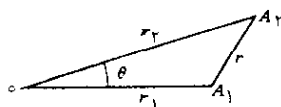
داهنمایی. از بسط دوجمله‌ای $\frac{1}{\sqrt{1-v}}$ آغاز کنید، قرار دهید $v = 2xu - u^2$.

هر يك از عواملی را که شامل $2xu - u^2$ هستند به توان رسانید، از u^n فاکتور بگیرید، و ثابت کنید که مجموع این جملات برابر $P_n(x) u^n$ است. تابع سمت چپ (۱۴) را تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر نامند.

۹. فرض کنید A_1 و A_2 دو نقطه در فضا باشند (شکل ۷۵، $r_2 > 0$). با استفاده از (۱۴) نشان دهید که

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \left[P_0 + P_1(\cos \theta) \frac{r_1}{r_2} + P_2(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + \dots \right].$$

این فرمول در نظریهٔ پتانسیل کاربردهایی دارد.



شکل ۷۵. مسئلهٔ ۹

۱۰. (توابع وابستهٔ لژاندر) معادلهٔ

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

را در نظر بگیرید. با قراردادن $y(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x)$ نشان دهید که u در معادله زیر صدق می‌کند.

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [n(n+1) - m(m+1)]u = 0.$$

با m بار مشتق‌گیری از (۱) شروع کنید و نشان دهید که جوابی از معادله بالا عبارت است از

$$u = \frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

$y(x)$ نظیر این جواب با $P_n^m(x)$ نشان داده می‌شود و تابع وابسته لژاندر نام دارد. بنابراین

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

این تابع در فیزیک به‌ویژه در فیزیک کوانتومی نقش مهمی ایفا می‌کند.

۴.۴ روش توسعه یافته سری توانی. معادله شاخصی

تعدادی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، که در بسیاری از کاربردها اهمیت زیادی دارند، دارای ضرایبی هستند که در نقطه $x=0$ تحلیلی نیستند (تعریف در بخش ۲.۴) ولی در عین حال طوری هستند که قضیه زیر را می‌توان در موردشان به کار برد.

قضیه ۱

هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$(1) \quad y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0,$$

که در آن توابع $a(x)$ و $b(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند حداقل دارای یک جواب است که می‌توان آن را به صورت زیر نمایش داد:

$$(2) \quad y(x) = x' \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m = x' (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad (c_0 \neq 0)$$

در اینجا نمای r می‌تواند هر عددی (حقیقی یا مختلط) باشد (این عدد طوری انتخاب می‌شود که $c_0 \neq 0$).

۱. در این قضیه به جای متغیر x می‌توان $x-a$ را، که در آن a عددی دلخواه است، قرارداد.

نکته اینجاست که در (۲) يك سری توانی داریم که در توانی از x ، که نمای r آن به اعداد صحیح غیر منفی محدود نشده، ضرب می‌شود. (اگر چنین محدودیتی قائل می‌شدیم کل عبارت (۲)، طبق تعریف، يك سری توانی می‌شد؛ پانوش ۱ بخش ۱۰۴ را ببینید.)

اثبات این قضیه نیاز به روشهای پیشرفته آنالیز مختلط دارد، چنین اثباتی در مرجع [B۱۱]، ضمیمه ۱، یافت می‌شود. روش زیر برای حل (۱) را روش فروبنیوس^۱ می‌نامند. برای حل (۱)، آن را به شکل مناسب تری می‌نویسیم:

$$(۱') \quad x^2 y'' + x a(x) y' + b(x) y = 0.$$

نخست $a(x)$ و $b(x)$ را به سری توانی بسط می‌دهیم:

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

سپس با مشتقگیری جمله به جمله از (۲) پیدا می‌کنیم

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [r c_0 + (r+1) c_1 x + \dots]$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-2} \\ &= x^{r-2} [r(r-1) c_0 + (r+1) r c_1 x + \dots]. \end{aligned}$$

با قرار دادن همه این سریها در (۱') به آسانی به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x^r [r(r-1) c_0 + \dots] + (a_0 + a_1 x + \dots) x^r (r c_0 + \dots) \\ + (b_0 + b_1 x + \dots) x^r (c_0 + c_1 x + \dots) = 0. \end{aligned}$$

حال، مانند قبل، مجموع ضرایب هر يك از توانهای x را مساوی صفر می‌گیریم. بدین ترتیب، دستگاه معادلاتی برحسب ضرایب مجهول c_m حاصل می‌شود. کوچکترین توان عبارت است از x^r و معادله نظیر آن چنین است:

$$[r(r-1) + a_0 r + b_0] c_0 = 0.$$

چون بنا به فرض $c_0 \neq 0$ ، به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0.$$

۱. گئورگ فروبنیوس (Georg Frobenius)، ۱۸۴۹ - ۱۹۱۷، ریاضیدان آلمانی است که در نظریه ماتریسها و گروهها نیز سهم بسزایی دارد.

این معادله درجه دوم مهم را معادله شاخصی معادله دیفرانسیل (۱) می نامند. چنانکه خواهیم دید این روش پایه ای برای جوابها به دست می دهد؛ یکی از جوابها همواره به شکل (۲) است، ولی برای شکل سایر جوابها، بسته به ریشه های معادله شاخصی، سه حالت ممکن است:

حالت ۱. ریشه ها متمایزند و تفاضل آنها عددی صحیح (۱، ۲، ۳، ...) نیست.

حالت ۲. ریشه مضاعف داریم.

حالت ۳. ریشه ها متمایزند و تفاضل آنها عددی صحیح است.

هریک از این حالات را به طور جداگانه مورد بحث قرار می دهیم.

حالت ۱. تفاضل ریشه های متمایز معادله شاخصی عددی صحیح نیست. این ساده ترین حالت است. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه های (۳) باشند، هرگاه در دستگاه معادلات مذکور $r = r_1$ قرار دهیم و مانند قبل متوالیاً ضرایب $c_1, c_2, \dots$ را معین کنیم آنگاه جواب زیر را به دست می آوریم:

$$(4) \quad y_1(x) = x^{r_1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots).$$

می توان نشان داد (ر. ک. مرجع [B ۱۱]) که در این حالت معادله دیفرانسیل جواب مستقل دیگری، مانند $y_2(x)$ ، دارد که به همان شکل است:

$$(5) \quad y_2(x) = x^{r_2} (c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2 + \dots),$$

این جواب را می توان با قراردادن $r = r_2$ در دستگاه معادلات و تعیین بی درپی ضرایب $c_0^*, c_1^*, \dots$ به دست آورد. استقلال خطی y_1 و y_2 از آنجا نتیجه می شود که نسبت y_1/y_2 ثابت نیست چرا که $r_2 - r_1$ عدد صحیحی نیست. از این رو y_1 و y_2 در فاصله همگرایی دوسری پایه ای برای (۱) تشکیل می دهند.

مثال ۱. نمونه ای برای حالت ۱

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{5}{36}\right) y = 0.$$

با جایگزین کردن (۲) در این معادله به دست می آوریم

۱. توجه کنید که این حالت ریشه های مزدوج مختلط $r_1 = r_2$ را شامل می شود، زیرا

$$r_1 - r_2 = r_1 - r_1 = \gamma i \operatorname{Im} r_1 \neq \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(۶) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} + \frac{\Delta}{36} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0.$$

از مساوی صفر قراردادن ضرایب x^r معادله شاخصی به دست می آید،

$$r(r-1) + \frac{\Delta}{36} = 0.$$

ریشه های این معادله عبارتند از $r_1 = 5/6$ و $r_2 = 1/6$. با مساوی قرار دادن مجموع ضرایب x^{s+r} در (۶) داریم .

$$\left((r+1)r + \frac{\Delta}{36} \right) c_1 = 0 \quad (s=1), \quad (\text{الف})$$

(۷)

$$(s+r)(s+r-1)c_s + c_{s-2} + \frac{\Delta}{36} c_s = 0 \quad (s=2, 3, \dots), \quad (\text{ب})$$

نخست جواب $y_1(x)$ را که با $r_1 = 5/6$ متناظر است تعیین می کنیم. به ازای این مقدار r ، معادله (۷الف) نتیجه می دهد $c_1 = 0$. معادله (۷ب) را می توان چنین نوشت:

$$(۸) \quad s \left(s + \frac{2}{3} \right) c_s + c_{s-2} = 0.$$

از $c_1 = 0$ متوالیاً نتیجه می شود که $c_2 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، $c_4 = 0$ ، ...، هرگاه در (۸) بگذاریم $s = 2p$ ، به دست می آوریم

$$c_{2p} = -\frac{2}{3} \times \frac{c_{2p-2}}{p(2p+1)} \quad (p=1, 2, \dots).$$

به کمک این دستور، ضرایب را به دست می آوریم:

$$c_2 = -\frac{2}{3} \times \frac{c_0}{2}$$

$$c_4 = -\frac{2}{3} \times \frac{c_2}{2 \times 3} = -\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{c_0}{2! \times 3 \times 4}$$

$$c_6 = -\frac{2}{3} \times \frac{c_4}{3 \times 4} = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{c_0}{3! \times 4 \times 5 \times 6}$$

بدین ترتیب جواب زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+5/6}}{p! \times 1 \times 2 \times \dots \times (2p+1)} \\ (9) \quad &= c_0 x^{5/6} \left(1 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{9}{896} x^4 - + \dots\right). \end{aligned}$$

جواب دیگر متناظر با ریشه $r_2 = 1/6$ یعنی $y_2(x)$ را می توان با روشی مشابه به دست آورد. اگر ضرایب این جواب را با $c_0^*, c_1^*, \dots$ ، نشان دهیم به جای (۷) خواهیم داشت

$$\left((r_2+1)r_2 \pm \frac{\delta}{36}\right)c_1^* = 0 \quad (\text{الف})$$

(۱۰)

$$(s+r_2)(s+r_2-1)c_s^* + c_{s-1}^* + \frac{\delta}{36}c_s^* = 0 \quad (s=2, 3, \dots). \quad (\text{ب})$$

با توجه به (۱۰ الف) می بینیم که $c_1^* = 0$ و (۱۰ ب) را می توان چنین نوشت:

$$s\left(s - \frac{2}{3}\right)c_s^* + c_{s-1}^* = 0 \quad (s=2, 3, \dots). \quad (11)$$

نظر به اینکه $c_1^* = 0$ متوالیاً نتیجه می شود که $c_2^* = 0, c_3^* = 0, \dots$ هرگاه در (۱۱) قرار دهیم $s=2p$ ، به دست می آوریم

$$c_{2p}^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_{2p-2}^*}{p(2p-1)} \quad (p=1, 2, \dots).$$

از این فرمول داریم

$$c_2^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_0^*}{2}$$

$$c_4^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_2^*}{2 \times 3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{c_0^*}{2! \times 2 \times 3}$$

و جواب متناظر عبارت است از

$$\begin{aligned} y_2(x) &= c_0^* + c_0^* \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+1/6}}{p! \times 2 \times 3 \times \dots \times (2p-1)} \\ (12) \quad &= c_0^* x^{1/6} \left(1 - \frac{3}{8} x^2 + - \dots\right). \end{aligned}$$

سریهای (۹) و (۱۲) به ازای تمام مقادیر x همگرا و y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. در نتیجه این توابع به ازای تمام مقادیر x پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند. (در بخش بعدی خواهیم دید که این معادله رابطه نزدیکی با معادله بسل با پارامتر $\nu = 1/3$ دارد.)

حالت ۲. معادله شاخصی ریشه مضاعف دارد. معادله شاخصی (۳) دارای ریشه مضاعف r است اگر و تنها اگر $(a_0 - 1)^2 - 4b = 0$ ، و در نتیجه $r = (1 - a_0)/2$. اولین جواب معادله را می‌توان مانند قبل، به صورت زیر تعیین کرد:

$$(13) \quad y_1(x) = x^r (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \quad \left(r = \frac{1 - a_0}{2}\right)$$

برای یافتن جواب دیگر، از روش تغییر پارامترها استفاده می‌کنیم، یعنی ثابت c در جواب $c y_1$ را با تابعی مانند $u(x)$ ، که باید تعیین شود، عوض می‌کنیم به طوری که

$$(14) \quad y_2(x) = u(x) y_1(x)$$

جواب معادله (۱) باشد. با قراردادن (۱۴) و مشتقات

$$y_2' = u' y_1 + u y_1', \quad y_2'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$$

در معادله دیفرانسیل (۱') به دست می‌آوریم

$$x^2(u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'') + x a(u' y_1 + u y_1') + b u y_1 = 0.$$

چون y_1 جوابی از معادله (۱') است، مجموع جملاتی که شامل u هستند برابر صفر است، و معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 y_1 u'' + 2 x^2 y_1' u' + x a y_1 u' = 0.$$

با تقسیم این معادله بر $x^2 y_1$ و قراردادن سری توانی به جای a به دست می‌آوریم

$$u'' + \left(2 \frac{y_1'}{y_1} + \frac{a_0}{x} + \dots\right) u' = 0.$$

در اینجا و در زیر نقطه‌ها نشان دهنده جملاتی است که یا ثابتند و یا شامل توانهای مثبت x اند. حال از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{y_1'}{y_1} &= \frac{x^{r-1} [rc_0 + (r+1)c_1 x + \dots]}{x^r [c_0 + c_1 x + \dots]} \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{rc_0 + (r+1)c_1 x + \dots}{c_0 + c_1 x + \dots} \right) = \frac{r}{x} + \dots \end{aligned}$$

از این رو معادله آخر را می‌توان چنین نوشت:

$$(۱۵) \quad u'' + \left(\frac{2r+a_0}{x} + \dots \right) u' = 0.$$

چون $r = (1-a_0)/2$ ، بنابراین جمله $(2r+a_0)/x$ برابر $1/x$ است و بدین ترتیب با تقسیم (۱۵) بر a' داریم

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} + \dots$$

با انتگرالگیری به دست می آوریم

$$u' = \frac{1}{x} e^{(\dots)} \quad \text{یا} \quad \ln u' = -\ln x + \dots$$

با بسط تابع نمایی بر حسب توانهای x و انتگرالگیری مجدد می بینیم که عبارتی که برای u به دست می آید به صورت زیر است:

$$u = \ln x + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

با قرار دادن این u در (۱۴) نتیجه زیر حاصل می شود.

شکل جوابها درحالتی که معادله شاخصی ریشه مضاعف دارد، هرگاه معادله شاخصی (۳) دارای ریشه مضاعف r باشد، آنگاه جوابهای مستقل خطی معادله دیفرانسیل (۱) به شکل (۱۳) هستند و

$$(۱۶) \quad y_r(x) = y_1(x) \ln x + x^r \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m.$$

ساده ترین مثال این حالت معادله کُشی (بخش ۷.۲) در حالت بحرانی است (مثال ۵ همین بخش را نیز ملاحظه کنید).

مثال ۲. نمونه ای برای حالت ۲

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$(۱۷) \quad x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0.$$

با نوشتن این معادله به صورت استاندارد (۱) می بینیم که این معادله درمفروضات قضیه ۱ صدق می کند. با قرار دادن (۲) و مشتقات آن در (۱۷) به دست می آوریم

$$(۱۸) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r-1} + 3 \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0.$$

کوچکترین توان موجود در این معادله برابر x^{-1} است؛ باصفر گرفتن مجموع ضرایب این توان داریم

$$r^2 = 0 \quad \text{یا} \quad [-r(r-1)-r]c_0 = 0$$

پس معادلهٔ شاخصی دارای ریشهٔ مضاعف $r=0$ است. این مقدار را در (۱۸) قرار می‌دهیم و مجموع ضرایب x^0 را برابر صفر می‌گیریم، و می‌یابیم

$$s(s-1)c_0 - (s+1)sc_{s+1} + 3sc_s - (s+1)c_{s+1} + c_s = 0$$

یا $c_{s+1} = c_s$. از این رو $c_0 = c_1 = c_2 = \dots$ و با انتخاب $c_0 = 1$ جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

برای یافتن جواب دوم، $y_2 = uy_1$ و مشتقات آن را در معادلهٔ (۱۷) قرار می‌دهیم، در نتیجه خواهیم داشت

$$x(x-1)(u''y_1 + 2u'y_1' + u''y_1) + (3x-1)(u'y_1 + uy_1') + uy_1 = 0$$

چون y_1 جوابی از (۱۷) است، معادلهٔ بالا چنین می‌شود:

$$x(x-1)(u''y_1 + 2u'y_1') + (3x-1)u'y_1 = 0$$

با قراردادن عبارات مربوط به y_1 و y_1' در این معادله و ساده کردن آن، معادلهٔ دیفرانسیل زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x} \quad \text{یا} \quad xu'' + u' = 0$$

با دوبار انتگرال‌گیری، سرانجام به‌دست می‌آوریم $u = \ln x$ و جواب دوم به‌ادای همهٔ مقادیر مثبت x عبارت است از

$$\Delta \quad y_2 = uy_1 = \frac{\ln x}{1-x}$$

حالت ۳. تفاضل ریشه‌های معادلهٔ شاخصی عددی صحیح است. هرگاه تفاضل ریشه‌های r_1 و r_2 معادلهٔ شاخصی عددی صحیح باشد، مثلاً $r_1 = r$ و $r_2 = r-p$ و r_p عددی صحیح و مثبت باشد، آنگاه همواره می‌توان یکی از جوابها را، یعنی جواب زیر را که متناظر با ریشهٔ r_1 است، مانند قبل تعیین کرد:

$$y_1(x) = x^{r_1}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$$

ولی برای ریشه دوم ممکن است اشکالاتی بروز کند و امکان تعیین جواب y_p با روشی که در حالت ۱ به کار برده ایم نباشد (ر. ک. مثال ۳ همین بخش). برای تعیین y_p می توانیم مانند حالت ۲ عمل کنیم. مراحل اول تا رسیدن به معادله (۱۵) عیناً همان است. $2r + a_0$ را در (۱۵) تعیین می کنیم. از جبر مقدماتی می دانیم که ضریب $-1 - a_0$ در (۳) برابر $-(r_1 + r_2)$ است. در مورد حاضر، $r_1 = r$ ، $r_2 = r - p$ و بنابراین $-1 - a_0 = p - 2r$ پس در (۱۵) داریم $2r + a_0 = p + 1$. بنابراین به دست می آوریم

$$\frac{u''}{u'} = -\left(\frac{p+1}{x} + \dots\right).$$

مراحل بعدی مانند حالت ۲ است. با انتگرالگیری درمی یابیم که

$$u' = x^{-(p+1)} e^{(\dots)} \quad \text{یا} \quad \ln u' = -(p+1) \ln x + \dots$$

که نقطه ها به جای سربهای از توانهای نامنقی x نشسته اند. مانند گذشته با بسط تابع نمایی سری به صورت زیر به دست می آوریم

$$u' = \frac{1}{x^{p+1}} + \frac{k_1}{x^p} + \dots + \frac{k_p}{x} + k_{p+1} + k_{p+2}x + \dots.$$

با انتگرالگیری مجدد داریم

$$u = -\frac{1}{px^p} - \dots + k_p \ln x + k_{p+1}x + \dots$$

با ضرب این عبارت در سری

$$y_1 = x^r (c_0 + c_1 x + \dots)$$

و با توجه به اینکه $r_1 - p = r_2$ ، ملاحظه می کنیم $y_p = u y_1$ به شکل زیر است

$$(19) \quad y_p(x) = k_p y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad (x > 0).$$

نتیجه را می توان به صورت زیر خلاصه کرد.

شکل جوابها وقتی که تفاضل ریشه های معادله شاخصی عددی صحیح باشد. هرگاه تفاضل ریشه های معادله شاخصی (۳) عددی صحیح باشد، آنگاه متناظر با ریشه ای که قسمت حقیقی آن بزرگتر است (مثلاً r_1) جوابی از (۱) به شکل (۴) وجود دارد و متناظر با ریشه دیگر (r_2) جوابی به شکل (۱۹). این جوابها پایه ای برای (۱) تشکیل می دهند.

در حالی که وقتی معادله (۳) دارای ریشه مضاعف باشد جواب دوم همواره شامل يك جمله لگاریتمی است، در حالت حاضر ممکن است ضریب k_p در (۱۹) صفر باشد و جواب جمله لگاریتمی نداشته باشد (ر. ک. مثال ۴)¹.

مثال ۳. نمونه‌ای برای حالت ۳

معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x^2 - 1)x^2 y'' - (x^2 + 1)xy' + (x^2 + 1)y = 0.$$

با قرار دادن (۲) و مشتقات آن در این معادله دیفرانسیل ابتدا داریم

$$(x^2 - 1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r} - (x^2 + 1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)c_m x^{m+r} + (x^2 + 1) \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0.$$

پس از انجام دادن ضربها و ساده کردن عبارات به دست می‌آوریم

$$(20) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (m+r-1)^2 c_m x^{m+r+2} - \sum_{m=0}^{\infty} (m+r+1)(m+r-1)c_m x^{m+r} = 0$$

با صفر گرفتن ضریب x^r ملاحظه می‌کنیم که معادله شاخصی چنین است:

$$(r+1)(r-1) = 0.$$

تفاضل ریشه‌های $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$ عددی صحیح است. با صفر گرفتن ضریب x^{r+1} در (۲۰) داریم

$$-(r+2)rc_1 = 0.$$

به ازای $r = r_1$ و همین‌طور $r = r_2$ از این معادله $c_1 = 0$ حاصل می‌شود. با صفر گرفتن مجموع ضرایب x^{s+r+2} در (۲۰) داریم

$$(21) \quad (s+r-1)^2 c_s = (s+r+3)(s+r+1)c_{s+2} \quad (s=0, 1, \dots).$$

با قرار دادن $r = r_1 = 1$ در این معادله و حل آن نسبت به c_{s+2} مشاهده می‌کنیم که

۱. نظریه عمومی همگرایی چنین سریهایی در اینجا ارائه نخواهد شد ولی در هر مورد خاص می‌توان همگرایی را به طریق معمول آزمود.

$$c_{s+2} = \frac{s^2}{(s+4)(s+2)} c_s \quad (s=0, 1, \dots).$$

از آنجا که $c_1 = 0$ ، نتیجه می‌شود $c_3 = 0$ ، $c_5 = 0$ والی آخر. به ازای $s=0$ به دست می‌آوریم $c_2 = 0$ و از اینجا و با فرض $s=2, 4, \dots$ داریم $c_4 = 0$ ، $c_6 = 0$ و غیره. پس جواب متناظر با ریشهٔ بزرگتر r_1 عبارت است از

$$y_1 = c_0 x.$$

حال جواب دیگر را تعیین می‌کنیم. هرگاه ریشهٔ کوچکتر $r = r_2 = -1$ را در (۲۱) قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم

$$(s-2)^2 c_s = (s+2) s c_{s+2} \quad (s=0, 1, \dots).$$

به ازای $s=0$ این معادله به صورت $4c_0 = 0$ درمی‌آید که $c_0 = 0$ را نتیجه می‌دهد. این نتیجه با فرض اولیهٔ $c_0 \neq 0$ متناقض است. بدین ترتیب معلوم می‌شود که معادلهٔ مزبور جواب مستقل دوم $y_2(x)$ به شکل (۲)، که متناظر با ریشهٔ کوچکتر r_2 باشد، ندارد. با توجه به (۱۹) می‌بینیم که $y_2(x)$ باید به شکل زیر باشد:

$$y_2(x) = kx \ln x + \frac{1}{x} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

با قرار دادن این تابع و مشتقاتش در معادلهٔ دیفرانسیل به دست می‌آوریم

$$(x^2 - 1)x^2 \left(\frac{k}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m x^{m-2} \right) - (x^2 + 1)x \left(k \ln x + k + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m x^{m-2} \right) + (x^2 + 1) \left(kx \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m-1} \right) = 0.$$

جملات لگاریتمی حذف می‌شوند و بعد از ساده کردن نتیجه می‌گیریم

$$-2kx + \sum_{m=0}^{\infty} (m-2)^2 c_m x^{m+1} - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-2)c_m x^{m-1} = 0.$$

با صفر گرفتن مجموع ضرایب x^0 به دست می‌آوریم

$$-2k + 4c_0 = 0 \quad (s=1), \quad c_1 = 0 \quad (s=0)$$

$$(s-3)^2 C_{s-1} - (s^2 - 1)C_{s+1} = 0 \quad (s=2, 3, \dots).$$

با حل این معادله نسبت به C_{s+1} داریم

$$y_2(x) = xu(x) = x \ln x + \frac{1}{2x}.$$

مثال ۴. حالت ۳، جواب دوم بدون جمله لگاریتمی

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

با قراردادن (۲) و مشتقاتش در این معادله به دست می آوریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+r)(m+r-1) + (m+r) - \frac{1}{4} \right] c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} = 0.$$

با صفر گرفتن ضریب x^r ، معادله شاخصی زیر حاصل می شود

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad r(r-1) + r - \frac{1}{4} = 0$$

تفاضل ریشه های $r_1 = 1/2$ و $r_2 = -1/2$ عددی صحیح است. با صفر گرفتن مجموع ضرایب x^{s+r} به دست می آوریم

$$\left[(r+1)r + (r+1) - \frac{1}{4} \right] c_1 = 0 \quad (s=1) \quad (\text{الف})$$

(۲۲)

$$\left[(s+r)(s+r-1) + s+r - \frac{1}{4} \right] c_s + c_{s-2} = 0 \quad (s=2, 3, \dots) \quad (\text{ب})$$

به ازای $r = r_1 = 1/2$ معادله (۲۲ الف) نتیجه می دهد $c_1 = 0$ ، و (۲۲ ب) چنین می شود:

$$(s+1) s c_s + c_{s-2} = 0. \quad (23)$$

از این تساوی و $c_1 = 0$ به دست می آوریم $c_3 = 0$ ، و غیره. با حل (۲۳) نسبت به c_s و قراردادن $s = 2p$ نتیجه می گیریم

$$c_{2p} = -\frac{c_{2p-2}}{2p(2p+1)} \quad (p=1, 2, \dots)$$

از این رو ضرایب غیر صفر عبارتند از

$$\text{و غیره،} \quad c_6 = -\frac{c_5}{7!}, \quad c_7 = -\frac{c_6}{7 \times 8} = \frac{c_5}{8!}, \quad c_8 = -\frac{c_7}{9!}$$

و در نتیجه جواب زیر را به دست می آوریم:

(۲۴)

$$y_1(x) = c_0 x^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} = c_0 x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = c_0 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

با توجه به (۱۹) مشاهده می کنیم که جواب مستقل دوم به صورت زیر است:

$$y_2(x) = k y_1(x) \ln x + x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

هرگاه این جواب و مشتقاتش را در معادله دیفرانسیل قرار دهیم، ملاحظه می کنیم سه عبارتی که شامل $\ln x$ و $k y_1$ و $-k y_1$ هستند حذف می شوند. سپس با ساده کردن معادله باقی مانده به دست می آوریم

$$2k x y_1' + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-1/2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+2/2} = 0.$$

با توجه به (۲۴) درمی یابیم $2k x y_1' = -k c_0 x^{1/2} + \dots$ چون جمله دیگری که شامل $x^{1/2}$ باشد وجود ندارد و $c_0 \neq 0$ باید داشته باشیم $k = 0$. مجموع ضرایب $x^{s-1/2}$ عبارت است از

$$s(s-1)C_s + C_{s-2} \quad (s = 2, 3, \dots).$$

با صفر گرفتن این عبارت و حل آن نسبت به C_s داریم

$$C_s = -\frac{C_{s-2}}{s(s-1)} \quad (s = 2, 3, \dots).$$

بنابراین به دست می آوریم

$$\text{و غیره،} \quad C_6 = -\frac{C_5}{6!}, \quad C_7 = -\frac{C_6}{7 \times 8} = \frac{C_5}{8!}, \quad C_8 = -\frac{C_7}{9!}$$

$$\text{و غیره،} \quad C_9 = -\frac{C_8}{9!}, \quad C_{10} = -\frac{C_9}{10 \times 11} = \frac{C_8}{11!}, \quad C_{11} = -\frac{C_{10}}{12!}$$

می توانیم C_1 را برابر صفر بگیریم، زیرا توانهای فرد را به بار می آورند، در این صورت

$$(۲۵) \quad y_2(x) = C_0 x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = C_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

$y_1(x)$ و $y_2(x)$ به ازای هر $x \neq 0$ پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند.

مثال ۵. معادله کشی

در بخش ۷.۲ دیده‌ایم که معادله کشی

$$(۲۶) \quad x^2 y'' + a_0 x y' + b_0 y = 0 \quad (b_0, a_0 \text{ ثابت})$$

را می‌توان با قرار دادن $y = x^r$ در (۲۶) حل کرد. با این کار، معادله کمکی زیر حاصل می‌شود:

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0.$$

بدیهی است که این معادله شاخصی است. هرگاه $r_1 \neq r_2$ ، آنگاه $y_1 = x^{r_1}$ و $y_2 = x^{r_2}$ پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند؛ این نظیر حالت‌های ۱ و ۳ است. هرگاه $r_1 = r_2 = r$ آنگاه جوابهای

$$y_1 = x^r, \quad y_2 = y_1 \ln x = x^r \ln x$$

که از قرار دادن (۱۶) در (۲۶) به دست می‌آیند، و با نتیجه حاصل از بخش ۷.۲ موافقت دارند، به ازای هر x مثبت پایه‌ای برای جوابها تشکیل می‌دهند.

مسائل بخش ۴.۴

پایه‌ای برای جوابهای هر يك از معادلات دیفرانسیل زیر بیابید. سعی کنید سریهای را که با به کار بردن روش فروبنیوس به دست می‌آورید بر حسب توابع شناخته شده بنویسید.

$$x^2 y'' + 4x y' + (x^2 + 2)y = 0 \quad ۱.$$

$$2x(1-x)y'' + (1+x)y' - y = 0 \quad ۲.$$

$$y'' + xy' + (1 - 2x^{-2})y = 0 \quad ۳.$$

$$xy'' + 2y' + 4xy = 0 \quad ۴.$$

$$xy'' + 3y' + 4x^3 y = 0 \quad ۵.$$

$$xy'' - y = 0 \quad ۶.$$

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad ۷.$$

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad ۸.$$

$$xy'' + y' - xy = 0 \quad .9$$

$$(x-1)xy'' + (4x-2)y' + 2y = 0 \quad .10$$

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0 \quad .11$$

$$2x^2y'' - xy' - 2y = 0 \quad .12$$

$$x^2y'' + 6xy' + (6-4x^2)y = 0 \quad .13$$

$$x^2y'' - 2y = 0 \quad .14$$

$$xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0 \quad .15$$

$$xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = 0 \quad .16$$

۱۷. (معادله فوق هندسی گاوس^۱) معادله دیفرانسیل

$$(27) \quad x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

(که در آن a, b, c ثابتند) به معادله فوق هندسی گاوس معروف است. نشان دهید که معادله شاخصی متناظر با این معادله دارای ریشه‌های $r_1 = 0$ و $r_2 = 1-c$ است. ثابت کنید که روش فروبنیوس به ازای $r_1 = 0$ نتیجه می‌دهد

$$(28) \quad y_1(x) = 1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \dots + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

$$(c \neq 0, -1, -2, \dots).$$

این سری را سری فوق هندسی می‌نامند. معمولاً $y_1(x)$ ، مجموع این سری را با $F(a, b, c; x)$ نشان می‌دهند و آن را تابع فوق هندسی می‌نامند.

۱۸. ثابت کنید که سری (۲۸) به ازای $|x| < 1$ همگراست.

۱۹. نشان دهید وقتی که $a=b=c=1$ ، سری (۲۸) به سری هندسی تبدیل می‌شود.

۲۰. به ازای چه مقادیری از a و b ، (۲۸) یک چند جمله‌ای تبدیل می‌شود؟

۲۱. نشان دهید که جواب زیر متناظر با $r_2 = 1-c$ در مسئله ۱۷ است:

۱. کارل فریدریش گاوس (Carl Friedrich Gauss)، ۱۷۷۷-۱۸۵۵، ریاضیدان بزرگ آلمانی است که کارهای او در جبر، نظریه اعداد، معادلات دیفرانسیل، هندسه دیفرانسیل، هندسه نااقلیدسی، آنالیز مختلط، آنالیز عددی و مکانیک نظری از اهمیت اساسی برخوردار است. او همچنین راه را برای استفاده عمومی و سیستماتیک اعداد مختلط هموار کرد.

$$y_r(x) = x^{1-c} \left(1 + \frac{(a-c+1)(b-c+1)}{1!(-c+2)} x + \right. \\ (29) \quad \left. + \frac{(a-c+1)(a-c+2)(b-c+1)(b-c+2)}{2!(-c+2)(-c+3)} x^2 + \dots \right) \\ (c \neq 2, 3, 4, \dots).$$

۲۲. نشان دهید که در مسئله ۲۱ داریم

$$y_r(x) = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x).$$

۲۳. نشان دهید که هرگاه $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ، آنگاه توابع (۲۸) و (۲۹) پایه‌ای برای جوابهای (۲۷) تشکیل می‌دهند.

۲۴. نشان دهید که

$$\frac{dF(a, b, c; x)}{dx} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; x),$$

$$\frac{d^2 F(a, b, c; x)}{dx^2} = \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} F(a+2, b+2, c+2; x),$$

و غیره.

بسیاری از توابع مقدماتی حالت خاصی از $F(a, b, c; x)$ هستند. ثابت کنید

$$\frac{1}{1-x} = F(1, 1, 1; x) = F(1, b, b; x) = F(a, 1, a; x) \quad (25)$$

$$(1+x)^n = F(-n, b, b; -x), \quad (1-x)^n = 1 - nx F(1-n, 1, 2; x) \quad (26)$$

$$\arctan x = x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad \arcsin x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right) \quad (27)$$

$$\ln(1+x) = x F(1, 1, 2; -x), \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2x F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right) \quad (28)$$

۲۹. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$(30) \quad (t^2 + At + B) \ddot{y} + (Ct + D) \dot{y} + Ky = 0$$

که در آن A, B, C, D, K ثابت‌اند و $t^2 + At + B$ دارای دو صفر متمایز

t_1 و t_2 است. نشان دهید که با معرفی متغیر مستقل جدید $x = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ ، معادله (۳۰)

به معادله فوق هندسی تبدیل می شود که در آن $Ct_1 + D = -c(t_2 - t_1)$ ،
 $K = ab$ ، $C = a + b + 1$.

معادلات زیر را بر حسب توابع فوق هندسی حل کنید.

$$2x(1-x)y'' + (1-5x)y' - y = 0 \quad .30$$

$$2x(1-x)y'' - (1+5x)y' - y = 0 \quad .31$$

$$5x(1-x)y'' + (4-x)y' + y = 0 \quad .32$$

$$4(t^2 - 3t + 2)y - 2\dot{y} + y = 0 \quad .33$$

$$3t(1+t)\ddot{y} + t\dot{y} - y = 0 \quad .34$$

$$2(t^2 - 5t + 6)\ddot{y} + (2t - 3)\dot{y} - 8y = 0 \quad .35$$

۵.۴ معادله بسل. توابع بسل نوع اول

یکی از معادلات دیفرانسیل بسیار مهم در ریاضیات کاربردی معادله دیفرانسیل بسل^۱ است.

$$(1) \quad x^2 y''' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

که در آن پارامتر ν عددی مفروض است. فرض می کنیم که ν حقیقی و غیر منفی باشد. این معادله از نوعی است که در قضیه ۱ بخش ۴.۴ مشخص شد و بنا بر این جوابی به صورت زیر دارد:

$$(2) \quad y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} \quad (c_0 \neq 0).$$

با قرار دادن این عبارت و مشتقات آن در معادله بسل داریم

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) c_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) c_m x^{m+r} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0. \end{aligned}$$

با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب x^{s+r} پیدا می کنیم

۱. فریدریش ویلهلم بسل (Friedrich Wilhelm Bessel)، ۱۷۸۴-۱۸۴۶، منجم و ریاضیدان آلمانی.

$$r(r-1)c_0 + rc_0 - \nu^2 c_0 = 0 \quad (s=0) \quad (\text{الف})$$

$$(3) \quad (r+1)rc_1 + (r+1)c_1 - \nu^2 c_1 = 0 \quad (s=1) \quad (\text{ب})$$

$$(s+r)(s+r-1)c_s + (s+r)c_s + C_{s-1} - \nu^2 c_s = 0 \quad (\text{پ})$$

$$(s=2, 3, \dots)$$

از (۳ الف) معادله شاخصی زیر به دست می آید:

$$(4) \quad (r+\nu)(r-\nu) = 0.$$

ریشه های این معادله عبارتند از $r_1 = \nu (\geq 0)$ و $r_2 = -\nu$.

ابتدا جواب متناظر با ریشه r_1 را تعیین می کنیم. به ازای این مقدار r معادله (۳ ب) نتیجه می دهد $c_1 = 0$. معادله (۳ پ) را می توان چنین نوشت:

$$(s+r+\nu)(s+r-\nu)c_s + c_{s-1} = 0,$$

و به ازای $r = \nu$ این معادله به صورت زیر در می آید:

$$(5) \quad (s+2\nu)sc_s + c_{s-1} = 0.$$

چون $c_1 = 0$ و $\nu \geq 0$ متوالیاً نتیجه می شود $c_2 = 0, c_3 = 0, \dots$ هرگاه در (۵) بگذاریم $s = 2m$ ، به دست می آوریم

$$(6) \quad c_{2m} = -\frac{1}{2^m m(\nu+m)} c_{2m-2}, \quad m=1, 2, \dots$$

و ضرایب $c_2, c_4, \dots$ را می توان متوالیاً تعیین کرد. c_0 دلخواه است. مرسوم است که فرض کنند

$$(7) \quad c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

که $\Gamma(\nu+1)$ تابع گاما است. بعضی از فرمولهای اساسی مربوط به این تابع مهم در ضمیمه ۳ گنجانده شده است. برای آنچه که فعلاً مورد نظر ما است کافی است بدانیم که تابع $\Gamma(\alpha)$ با انتگرال

$$(8) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\alpha > 0).$$

تعریف می شود. با انتگرالگیری جزء به جزء به دست می آوریم

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt = -e^{-t} t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

عبادت اول سمت راست صفر است و انتگرال سمت راست برابر $\Gamma(\alpha)$ است. بدین ترتیب رابطه اساسی زیر نتیجه می‌شود:

$$(9) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha).$$

نظر به اینکه

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

از (۹) نتیجه می‌گیریم که

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \dots$$

و در حالت کلی

$$(10) \quad \Gamma(k+1) = k! \quad (k = 0, 1, \dots).$$

این دستور نشان می‌دهد که تابع گاما را می‌توان تعمیمی از تابع فاکتوریل که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با آن آشنا شده‌ایم دانست. به مسئله خودمان برمی‌گردیم و با توجه به (۶)، (۷) و (۹) می‌نویسیم

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2(\nu+1)} = -\frac{1}{2^{\nu+2} \times 1! \Gamma(\nu+2)}$$

$$c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \times 2(\nu+2)} = -\frac{1}{2^{\nu+4} \times 2! \Gamma(\nu+3)}$$

والی آخر؛ در حالت کلی

$$(11) \quad c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)}.$$

با قرار دادن این ضرایب در (۲) و به یاد آوردن اینکه $c_1 = 0$ ، $c_3 = 0$ ، ... جوابی خصوصی از معادله بسل را که با $J_\nu(x)$ نشان داده می‌شود به دست می‌آوریم:

$$(12) \quad J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)}.$$

این جواب (۱) به تابع بسل نوع اول مرتبه ν معروف است. آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری (۱۲) به ازای هر x همگراست.

مقادیر صحیح ν را اغلب با n نمایش می‌دهند. بنابراین به ازای $n \geq 0$ داریم

$$(13) \quad J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{\nu+2m} m! (n+m)!}.$$

با قرار دادن $v -$ به جای v در (۱۲) داریم

$$(۱۴) \quad J_{-v}(x) = x^{-v} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{vm}}{v^{vm-v} m! \Gamma(m-v+1)}.$$

چون معادلهٔ بسل شامل v^2 است، توابع J_v و J_{-v} ، جوابهای معادله به ازای يك v هستند. هر گاه v عددی صحیح نباشد، این جوابها مستقل خطی هستند، زیرا اولین جمله (۱۲) و اولین جمله (۱۴) به ترتیب مضارب غیر صفر و متناهی x^v و x^{-v} هستند. از اینجا قضیهٔ زیر به دست می آید.

قضیهٔ ۱ (جواب عمومی)

هرگاه v عددی صحیح نباشد، جواب عمومی معادلهٔ بسل به ازای $x \neq 0$ عبارت است از

$$(۱۵) \quad y(x) = a_1 J_v(x) + a_2 J_{-v}(x).$$

ولی اگر v عددی صحیح باشد، آنوقت (۱۵) جواب عمومی نیست. این موضوع از قضیهٔ زیر نتیجه می شود.

قضیهٔ ۲ (وابستگی خطی)

به ازای عدد صحیح $v = n$ توابع بسل $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابستهٔ خطی هستند، زیرا

$$(۱۶) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

اثبات. از (۱۴) استفاده می کنیم و فرض کنیم که v به سمت عدد صحیح مثبتی مانند n میل کند در این صورت توابع گامایی که درضرایب n جملهٔ اول وجود دارند نامتناهی می شوند (ر.ک. شکل ۴۰۵ ضمیمهٔ ۳)، ضرایب صفر می شوند، و جمع بندی از $m = n$ شروع می شود. چون در این حالت $\Gamma(m-n+1) = (m-n)!$ [ر.ک. (۱۰)]، به دست می آوریم

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{vm-n}}{v^{vm-n} m! (m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{vs+n}}{v^{vs+n} (n+s)! s!}$$

که در آن $s = m - n$ و $m = n + s$. با توجه به (۱۳) ملاحظه می کنیم که سری آخر نمایش $(-1)^n J_n(x)$ است، و به این ترتیب اثبات قضیه به انجام می رسد. ▲

جواب عمومی معادلهٔ بسل به ازای عدد صحیح $v = n$ را در بخش بعدی به دست می آوریم. مقادیر عددی J_0 و J_1 در ضمیمهٔ ۴ آمده اند.

مسائل بخش ۵.۴

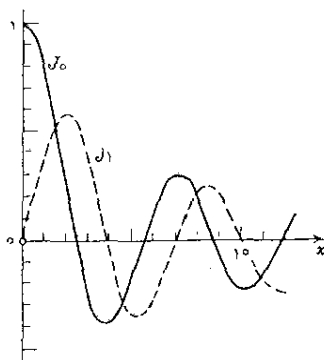
۱. نشان دهید که سری موجود در (۱۲) به ازای هر x همگراست.

۲. نشان دهید که $J_n(x)$ به ازای مقادیر زوج n تابعی زوج است و به ازای مقادیر فرد n تابعی فرد.

۳. نشان دهید که (ر. ک. شکل ۷۶)

$$(۱۷) \quad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots$$

$$(۱۸) \quad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \times 1! \times 2!} + \frac{x^5}{2^5 \times 2! \times 3!} - \frac{x^7}{2^7 \times 3! \times 4!} + \dots$$



شکل ۷۶. توابع بسل نوع اول

۴. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک $|x|$ داریم $J_0(x) \approx 1 - 0.۲۵x^2$. با استفاده از این فرمول مقدار $J_0(x)$ را به ازای ۱، ۰.۲، ۰.۱، ۰.۰۵، ۰.۰۲، ۰.۰۱ محاسبه کنید و از طریق مقایسه آن با جدول A۲ از ضمیمه ۴ خطای نسبی را تعیین کنید.

۵. چند جمله از (۱۷) برای محاسبه $J_0(۱)$ ، با خطایی کمتر از یک واحد در رقم پنجم اعشار، لازم است؟ برای محاسبه $\ln 2$ با همین دقت چند جمله از سری مکلاورن $\ln(1+x)$ لازم است؟

۶. به ازای x های بزرگ می توان نشان داد که

$$(۱۹) \quad J_{\nu n}(x) \approx (-1)^n (\pi x)^{-1/2} (\cos x + \sin x)$$

$$J_{\nu n+1}(x) \approx (-1)^{n+1} (\pi x)^{-1/2} (\cos x - \sin x).$$

با استفاده از (۱۹)، نمودار $J_0(x)$ را به ازای x های بزرگ رسم کنید، مقادیر تقریبی اولین پنج صفر مثبت $J_0(x)$ را محاسبه کنید و آنها را با مقادیر دقیقتر ۲۰۴۰۵، ۵۰۵۲۰، ۸۶۵۴، ۱۱۷۹۲، ۱۴۹۳۱ مقایسه کنید.

روابط بین توابع بسل. توابع بسل در کاربردهای مهندسی اهمیت دارند. مثالی در بخش ۱۰.۱۱ ارائه خواهد شد. هنگام به کار بردن این توابع لازم است بدانیم که این توابع در روابط مختلفی صدق می کنند. مرجع [B۱۸] کتابی استاندارد در مورد توابع بسل است و مرجع [A۵] از ضمیمه ۱ فرمولهای بسیار زیادی را شامل می شود. بعضی روابط مهم در مسائل زیر آمده اند. فرمولهای (۲۲) و (۲۳) برای محاسبه جداول مفیدند.

۷. با استفاده از (۱۲) و (۹) نشان دهید که

$$(۲۰) \quad [x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

با استفاده از (۱۲) نشان دهید که

$$(۲۱) \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

۸. از (۲۰) و (۲۱) رابطه بازگشتی

$$(۲۲) \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

را به دست آورید.

۹. از (۲۰) و (۲۱) رابطه بازگشتی زیر را نتیجه بگیرید:

$$(۲۳) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

۱۰. از (۲۰) و (۲۱) معادله بسل (۱) را به دست آورید.

۱۱. با استفاده از (۲۰) و (۲۱) و قضیه دل، نشان دهید که بین دو صفر متوالی $J_0(x)$ درست یک صفر $J_1(x)$ قرار دارد.

۱۲. نشان دهید که بین هر دو صفر مثبت متوالی $J_n(x)$ درست یک صفر $J_{n+1}(x)$ قرار دارد.

۱۳. با استفاده از جدول A۲ از ضمیمه ۴ و رابطه بازگشتی (۲۲)، مقدار $J_\nu(x)$ را به ازای مقادیر ۱، ۰٫۲، ۰٫۵، ۰٫۸، ۱، ۱٫۵، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ محاسبه کنید.

انتگرالهایی را که شامل توابع بسل هستند اغلب می توان با استفاده از روابط (۲۰) تا

(۲۳) محاسبه و یا حداقل ساده کرد. نشان دهید که

$$\int x^{\nu} J_{\nu-1}(x) dx = x^{\nu} J_{\nu}(x) + c \quad .14$$

$$\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_{\nu}(x) + c \quad .15$$

$$\int J_{\nu+1}(x) dx = \int J_{\nu-1}(x) dx - 2J_{\nu}(x) \quad .16$$

با استفاده از فرمولهای مسائل ۱۴ تا ۱۶، در صورت لزوم با انتگرالگیری جزء به جزء، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int J_5(x) dx \quad .18 \qquad \int J_7(x) dx \quad .17$$

$$\int x^3 J_0(x) dx \quad .20 \qquad \int x^{-2} J_7(x) dx \quad .19$$

(در سایر موارد ممکن است محاسبات به انتگرال $J_0(x)$ منجر شوند، که به صورت متناهی قابل محاسبه نیست، اما به صورت جدول درآمده است: ر. ک. [مرجع B۱۸] ضمیمه ۰۱)

توابع مقدماتی. به ازای مقادیر معینی از ν می توان تابع بسل J_{ν} را بر حسب کسینوس و سینوس بیان کرد:

$$.21 \text{ با استفاده از (۱۲) و رابطه } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \text{، نشان دهید که}$$

$$(24) \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

$$.22 \text{ با استفاده از (۲۲) و (۲۴)، نشان دهید که}$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right).$$

$$.23 \text{ از (۲۲) و (۲۴) نتیجه بگیرید که توابع بسل } J_{\nu}(x) \text{ از مرتبه } \pm 1/2, \pm 3/2, \dots, \pm 5/2, \dots \text{ توابع مقدماتی هستند.}$$

$$.24 \text{ (حذف مشتق اول) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:}$$

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0.$$

با قرار دادن $y(x) = u(x)v(x)$ مقدار v را طوری تعیین کنید که معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاصل شامل u' نباشد.

۲۵. نشان دهید که در مورد معادله بسل، در مسئله ۲۴ باید قرار دهیم $y = ux^{-1/2}$ و در این صورت نتیجه خواهیم گرفت

$$(25) \quad x^2 u'' + \left(x^2 + \frac{1}{4} - \nu^2 \right) u = 0.$$

با استفاده از این نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) را به ازای $\nu = 1/2$ بیابید.

۶.۴ توابع بسل نوع دوم

به ازای عدد صحیح n توابع بسل $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ وابسته خطی هستند (بخش ۵.۴)، پس پایه‌ای برای جوابها تشکیل نمی‌دهند. حال جواب مستقل دومی به دست می‌آوریم؛ از حالت $n=0$ آغاز می‌کنیم. در این حالت معادله بسل را می‌توان چنین نوشت:

$$(1) \quad xy'' + y' + xy = 0,$$

معادله شاخصی دارای ریشه مضاعف $r=0$ است و با توجه به (۱۶) بخش ۴.۴ ملاحظه می‌کنیم که جواب مطلوب باید به شکل زیر باشد:

$$(2) \quad y_\nu(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m.$$

y_ν و مشتقات آن یعنی

$$y_\nu' = J_0' \ln x + \frac{J_0}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m A_m x^{m-1}$$

$$y_\nu'' = J_0'' \ln x + \frac{2J_0'}{x} - \frac{J_0}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1) A_m x^{m-2}$$

را در (۱) قرار می‌دهیم. بدین ترتیب جملات لگاریتمی حذف می‌شوند چرا که J_0 جوابی از معادله (۱) است، همین‌طور دو جمله دیگری که شامل J_0 هستند حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم

$$2J_0' + \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mA_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

از (۱۲) بخش ۵.۴ سری توانی J_0' به صورت زیر حاصل می شود:

$$J_0'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2m x^{2m-1}}{2^{2m} (m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m! (m-1)!}.$$

با جایگزین کردن این سری داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m! (m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^{m+1} = 0.$$

نخست نشان می دهیم که A_m های با اندیس فرد صفرند. ضریب x^0 برابر A_1 است و بنابراین $A_1 = 0$. با مساوی صفر قرار دادن مجموع ضرایب x^{2s} داریم

$$(2s+1)^2 A_{2s+1} + A_{2s-1} = 0, \quad s=1, 2, \dots$$

بنابراین چون $A_1 = 0$ ، متوالیاً به دست می آوریم $A_3 = 0$ ، $A_5 = 0$ ، ... حال مجموع ضرایب x^{2s+1} را مساوی صفر قرار می دهیم. به ازای $s=0$ نتیجه می شود

$$A_2 = 1/2 \quad \text{یا} \quad -1 + 4A_2 = 0$$

به ازای سایر مقادیر s به دست می آوریم

$$\frac{(-1)^{s+1}}{2^{2s} (s+1)! s!} + (2s+2)^2 A_{2s+2} + A_{2s} = 0 \quad (s=1, 2, \dots).$$

از این رابطه به ازای $s=1$ نتیجه می شود

$$A_4 = -\frac{3}{128} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{8} + 16A_4 + A_2 = 0$$

و در حالت کلی

$$(3) \quad A_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m} (m!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \right), \quad m=1, 2, \dots$$

با استفاده از نماد خلاصه

$$(4) \quad h_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$$

و با قرار دادن (۳) و $A_1 = A_2 = \dots = 0$ در (۲)، نتیجه زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \\ (5) \quad &= J_0(x) \ln x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{128} x^4 + \dots \end{aligned}$$

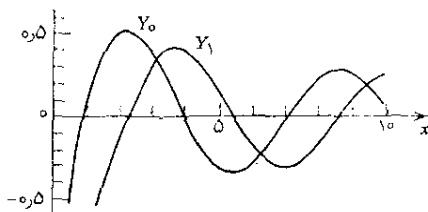
چون توابع J_0 و y_2 مستقل خطی هستند، پایه ای برای (۱) تشکیل می دهند. البته هرگاه به جای y_2 جواب خصوصی مستقلی به صورت $a(y_2 + bJ_0)$ که در آن $a, b (\neq 0)$ ثابتند، را قرار دهیم پایه دیگری به دست می آید. مرسوم است که $a = 2/\pi$ و $b = \gamma - \ln 2$ انتخاب کنند که $\gamma = 0.57721566490 \dots$ به ثابت اولر معروف است و به صورت حد

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s$$

وقتی که s به سمت بینهایت میل کند تعریف می شود. جواب خصوصی استاندارد که به این ترتیب حاصل می شود به تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر (شکل ۷۷) یا تابع نویمان مرتبه صفر معروف است و آن را با $Y_0(x)$ نمایش می دهند. بنابراین

$$(6) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right],$$

که در آن h_m توسط (۴) تعریف شده است.



شکل ۷۷. توابع بسل نوع دوم

(جدول کوچکی متناظر با این شکل در ضمیمه ۴ گنجانده شده است.)

هرگاه $\nu = n = 1, 2, \dots$ ، جواب دوم را می توان با عملیات مشابهی،

با شروع از تابع (۱۹) بخش ۴.۴ به دست آورد. در این موارد نیز جوابها شامل يك جمله لگاریتمی هستند.

وضع هنوز کاملاً رضایت بخش نیست، زیرا جواب دوم، بسته به اینکه مرتبه ν عددی صحیح باشد یا نه، به صورتهای متفاوتی تعریف شده است. برای یکنواخت کردن شکل روابط و جداول عددی بهتر است شکلی از جواب دوم را بپذیریم که به ازای تمام مقادیر مرتبه برقرار باشد. بدین جهت جواب دوم استاندارد $Y_\nu(x)$ را معرفی می کنیم که به ازای جمیع مقادیر ν با فرمول زیر تعریف می شود:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)] \quad (\text{الف})$$

(۷)

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) \quad (\text{ب})$$

این تابع معروف به تابع بسل نوع دوم مرتبه ν یا تابع نویمان^۱ مرتبه ν است.

به ازای مرتبه غیر صحیح ν ، بدیهی است که تابع $Y_\nu(x)$ جوابی از معادله بسل است زیرا $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ جوابهای معادله هستند. از طرفی چون به ازای ν های J_ν و $J_{-\nu}$ استقلال خطی دارند و Y_ν شامل $J_{-\nu}$ است، توابع J_ν و Y_ν نیز مستقل خطی هستند. به علاوه می توان نشان داد که حد (۷ ب) موجود است و Y_n جوابی از معادله بسل به ازای مرتبه صحیح است؛ به مرجع [B۱۸] ضمیمه ۱ مراجعه شود. خواهیم دید که بسط سری $Y_n(x)$ شامل يك جمله لگاریتمی است. از این رو $J_n(x)$ و $Y_n(x)$ جوابهای مستقل خطی معادله بسل هستند. بسط سری $Y_n(x)$ را می توان با قرار دادن سریهای (۱۲) و (۱۴)، بخش ۵.۴، به جای $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ در (۷ الف) و میل دادن ν به سمت n ، به دست آورد؛ جزئیات را می توانید در مرجع [B۱۸] ملاحظه کنید؛ نتیجه عبارت است از

$$Y_n(x) = \frac{\gamma}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{\gamma} + \gamma \right) = \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{\gamma^{m+n} m! (m+n)!} x^{m+n} - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(n-m-1)!}{\gamma^{m-n} m!} x^m$$

(۸)

که در آن $x > 0$ ، و $n = 0, 1, \dots$ و

۱. کارل نویمان (Carl Neumann)، ۱۸۳۲-۱۹۲۵، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی، گاهی جوابهای $Y_\nu(x)$ را با $N_\nu(x)$ نمایش می دهند؛ در مرجع [B۱۸] از این توابع با عنوان توابع وب (Weber) نام برده شده است. ثابت اوپلر در (۶) را اغلب با C یا $\ln \gamma$ (به جای γ) نمایش می دهند.

$$h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s} \quad (s = 1, 2, \dots),$$

هنگامی که $n = 0$ دومین جمع‌بندی در (۸) برابر صفر می‌شود. به ازای $n = 0$ ، نمایش (۸) به شکل (۶) در می‌آید. به علاوه می‌توان نشان داد که

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

نتیجه فوق را می‌توان به شرح زیر فرمول‌بندی کرد.

قضیه ۱ (جواب عمومی)

جواب عمومی معادله بسل به ازای هر مقدار ν عبارت است از

$$(9) \quad y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

در پایان متذکر می‌شویم که جواب‌هایی از معادله بسل، که به ازای مقادیر حقیقی x مختلط هستند، در عمل مورد احتیاج هستند. بدین جهت جواب‌های

$$(10) \quad \begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + i Y_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - i Y_\nu(x) \end{aligned}$$

مکرر به کار می‌روند و برای آنها جداگانه نیز تنظیم شده است (ر.ک. مرجع [A۶] ضمیمه ۱). این توابع مستقل خطی توابع بسل نوع سوم مرتبه ν یا توابع هانکل^۱ اول و دوم مرتبه ν نامیده می‌شوند.

مسائل بخش ۴.۶

۱. نشان دهید که به ازای مقادیر کوچک $x > 0$ داریم $Y_0(x) \approx 2\pi^{-1}(\ln x/2 + \gamma)$ با استفاده از این فرمول، مقدار تقریبی کوچکترین صفر مثبت $Y_0(x)$ را محاسبه و آن را با مقدار دقیقتر ۰٫۹ مقایسه کنید.

۲. می‌توان نشان داد که به ازای x های بزرگ،

$$(11) \quad Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{4}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right).$$

با استفاده از (۱۱) و جدول A۲ ضمیمه ۴ نمودارهای $Y_0(x)$ و $Y_1(x)$ را

۱. هرمان هانکل (Hermann Hankel)، ۱۸۳۹-۱۸۷۳، ریاضیدان آلمانی.

به ازای $15 \leq x < \infty$ رسم کنید. با استفاده از (۱۱)، مقادیر تقریبی اولین سه صفر مثبت $Y_0(x)$ را محاسبه کنید و این مقادیر را با مقادیر دقیقتر ۳۷۹۶، ۵۰۸۹ و ۷۰۹ مقایسه کنید.

معادلات دیفرانسیل قابل تحویل به معادله بسل. معادلات دیفرانسیل مختلفی وجود دارند که می توان آنها را به معادله بسل تبدیل کرد. برای روشن شدن این مطلب، با استفاده از جایگزاریهای ذکر شده، جواب عمومی معادلات داده شده را بر حسب توابع بسل بیابید.

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 4) y = 0 \quad .3$$

$$x y'' + y' + x y = 0 \quad .4$$

$$x y'' + y' + \frac{1}{4} y = 0 \quad (\sqrt{x} = z) \quad .5$$

$$4 x^2 y'' + 4 x y' + (x - n^2) y = 0 \quad (\sqrt{x} = z) \quad .6$$

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (\lambda x = z) \quad .7$$

$$x^2 y'' + x y' + 4(x^2 - n^2) y = 0 \quad (x^2 = z) \quad .8$$

$$x y'' - y' + x y = 0 \quad (y = x u) \quad .9$$

$$x y'' + (1 + 2n) y' + x y = 0 \quad (y = x^{-n} u) \quad .10$$

$$x^2 y'' + (1 - 2n) x y' + n^2 (x^{2n} + 1 - n^2) y = 0 \quad (y = x^n u, x^n = z) \quad .11$$

$$x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) y = 0 \quad (y = u \sqrt{x}) \quad .12$$

$$y'' + x y = 0 \quad (y = u \sqrt{x}, \frac{2}{3} x^{3/2} = z) \quad .13$$

نشان دهید که توابع داده شده جوابهای معادلات دیفرانسیل متناظر هستند.

$$y'' + k^2 x y = 0, \quad y = \sqrt{x} J_{1/3} \left(\frac{2 k x^{3/2}}{3} \right), \quad y = \sqrt{x} Y_{1/3} \left(\frac{2 k x^{3/2}}{3} \right) \quad .14$$

$$y'' + k^2 x^2 y = 0, \quad y = \sqrt{x} J_{1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right), \quad y = \sqrt{x} Y_{1/4} \left(\frac{k x^2}{2} \right) \quad .15$$

$$y'' + k^2 x^2 y = 0, \quad y = \sqrt{x} J_{1/6} \left(\frac{k x^3}{3} \right), \quad y = \sqrt{x} Y_{1/6} \left(\frac{k x^3}{3} \right) \quad .16$$

۱۷. (توابع بسل پیراسته) تابع $i = \sqrt{-1}$, $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ را تابع بسل پیراسته نوع اول مرتبه ν می‌خوانند. نشان دهید که $I_\nu(x)$ جواب معادله دیفرانسیل

$$(12) \quad x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$$

است و نمایشی به صورت زیر دارد:

$$(13) \quad I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)}.$$

۱۸. نشان دهید که $I_\nu(x)$ به ازای هر مقدار حقیقی x (و هر مقدار حقیقی ν) حقیقی است و به ازای هر مقدار حقیقی x که مخالف صفر باشد داریم $I_\nu(x) \neq 0$ و $I_{-\nu}(x) = I_\nu(x)$ که n عددی صحیح است.

۱۹. (توابع بسل پیراسته) نشان دهید که جواب دیگری از معادله دیفرانسیل (۱۲) که اصطلاحاً تابع بسل پیراسته نوع سوم و گاهی (نوع دوم) نامیده می‌شود به شکل زیر است:

$$(14) \quad k_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)].$$

۲۰. نشان دهید که توابع هانکل (۱۰) به ازای هر ν پایه‌ای برای جوابهای معادله بسل تشکیل می‌دهند.

۷.۴ مجموعه‌های متعامد توابع

چند جمله‌ایهای لژاندر (بخش ۳.۴) و توابع بسل از خاصیتی موسوم به تعامد برخوردارند که این خاصیت در ریاضیات مهندسی اهمیتی عمومی دارد. در بخش حاضر مفاهیم و نمادهای مربوط به این خاصیت را معرفی می‌کنیم. در بخش ۸.۴ به بررسی مسائل بامقدار مرزی («مسائل استورم-لیوویل») که جوابهای آنها مجموعه‌های متعامدی از توابع را تشکیل می‌دهند می‌پردازیم و در بخش ۹.۴ نتایج بخش ۸.۴ را در مورد چند جمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل به کار خواهیم برد. این برنامه کار ما در بقیه این فصل است.

بنابراین نخست تعامد توابع را تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g_m(x)$ و $g_n(x)$ دو تابع با مقادیر حقیقی باشند که بر فاصله‌ای مانند $a \leq x \leq b$ تعریف شده‌اند و طوری هستند که انتگرال حاصل ضرب $g_m(x) g_n(x)$ در این فاصله موجود است. این انتگرال را با $(g_m$ و $g_n)$ نمایش می‌دهیم. این نمادی است متعارف و ساده که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین

$$(1) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx.$$

توابع g_m و g_n را در فاصله $a \leq x \leq b$ متعامد گویند هرگاه انتگرال (۱) برابر صفر باشند، یعنی

$$(2) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

مجموعه‌ای از توابع با مقدار حقیقی $g_1(x)$ ، $g_2(x)$ ، $g_3(x)$ ، ... را مجموعه‌ای متعامد از توابع بر فاصله $a \leq x \leq b$ نامند هرگاه این توابع بر فاصله مزبور تعریف شده و همه انتگرالهای (g_m, g_n) به‌ازای هر زوج متمایز از این مجموعه توابع، موجود و برابر صفر باشد.

ریشه دوم نامنفی (g_m, g_m) را نرم $g_m(x)$ می‌نامند و عموماً با $\|g_m\|$ نشان می‌دهند؛ بنابراین

$$(3) \quad \|g_m\| = \sqrt{(g_m, g_m)} = \sqrt{\int_a^b g_m^2(x) dx}.$$

در آنچه مطرح می‌شود همواره فرض بر این است که

فرض کلی

همه توابع مورد بحث کراندارند و طوری هستند که همه انتگرالها موجودند و نرمی مخالف صفر دارند.

بدیهی است که مجموعه متعامدی مانند g_1 ، g_2 ، ... که بر فاصله‌ای مانند $a \leq x \leq b$ تعریف شده است و اعضای آن نرمی برابر ۱ دارند در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(4) \quad (g_m, g_n) = \int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad \begin{pmatrix} m=1, 2, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

چنین مجموعه‌ای را يك مجموعه متعامد يکيه از توابع در فاصله $a \leq x \leq b$ می‌نامند. واضح است که در يك مجموعه از توابع متعامد می‌توان از تقسیم هر تابع بر نرمش به يك مجموعه متعامد يکيه در فاصله مورد نظر رسید.

مثال ۱

توابع $g_m(x) = \sin mx$ که در آن $m=1, 2, \dots$ بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند، زیرا [ر. ک. (۱۱) ضمیمه ۳]

$$(g_m, g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m \neq n).$$

$$(5) \quad = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = 0$$

نرم $\|g_m\|$ برابر $\sqrt{\pi}$ است، زیرا

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi \quad (m = 1, 2, \dots).$$

از این رو مجموعه متعامدیکه متناظر با توابع متعامد فوق عبارت است از

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

مثال ۲

توابع

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots$$

برفاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. این مطلب از رابطه‌ای مشابه با (۵) در مورد توابع کسینوسی، و رابطه

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx = 0$$

به‌ازای جميع مقادیر $n, m = 0, 1, \dots$ نتیجه می‌شود. مجموعه متعامد یک‌ه متناظر عبارت است از

$$\Delta \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots$$

به‌کمک مجموعه‌های متعامد می‌توان انواع مهمی از بسط سریها را با روشی نسبتاً ساده به‌دست آورد. درواقع، فرض می‌کنیم $g_1(x), g_2(x), \dots$ مجموعه‌ای متعامد از توابع برفاصله‌ای مانند $a \leq x \leq b$ باشد و فرض می‌کنیم که $f(x)$ تابع مفروضی باشد که بتوان آن را برحسب g_i ها به‌صورت سری همگرای

$$(۶) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots$$

نمایش داد. این سری را سری فوریه تعمیم یافته $f(x)$ می نامند و ضرایب آن، یعنی $c_1, c_2, \dots$ را ثابتهای فوریه $f(x)$ نسبت به مجموعه متعامد مزبور از توابع می گویند. با توجه به خاصیت تعامد، این ثابتها را می توان با روشی بسیار ساده تعیین کرد. در حقیقت با ضرب طرفین (۶) در $g_m(x)$ (با m مشخص) و انتگرالگیری روی فاصله $a \leq x \leq b$ و با فرض اینکه انتگرالگیری جمله به جمله مجاز باشد^۱، داریم

$$(f, g_m) = \int_a^b f g_m dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b g_n g_m dx.$$

انتگرالی که در آن $n=m$ ، برابر با $\|g_m\|^2$ است، حال آنکه سایر انتگرالهای سمت راست تساوی، به دلیل تعامد توابع، برابر صفرند. از این رو

$$(۷') \quad (f, g_m) = c_m \|g_m\|^2,$$

و فرمول مطلوب برای ثابتهای فوریه عبارت است از

$$(۷) \quad c_m = \frac{(f, g_m)}{\|g_m\|^2} = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x) g_m(x) dx \quad (m=1, 2, \dots).$$

مثال ۳. سری فوریه

درمورد مجموعه متعامد مثال ۲، نمایش (۶) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(۸) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و (۷) چنین می شود:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$(۹) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

۱. این عمل، مثلاً درمورد همگرایی یکنواخت (ر.ک. قضیه ۳ بخش ۶.۱۶) قابل توجیه است.

اگر سری مذکور در (۸) همگرا و نمایش دهنده $f(x)$ باشد آن را سری فوریه $f(x)$ نامند. ضرایب این سری را ضرایب فوریه $f(x)$ و فرمولهای (۹) را فرمولهای اویلر مربوط به این ضرایب می نامند. نظر به اینکه سریهای فوریه در ریاضیات مهندسی اهمیت ویژه ای دارند، تمامی يك فصل (فصل ۱۰) را به این سریها اختصاص داده ایم و برخی کاربردهای اساسی آنها را در ارتباط با معادلات با مشتقی جزئی در فصل ۱۱ آورده ایم. برخی مجموعه های مهم از توابع حقیقی $g_1, g_2, \dots$ که درکاربردها ظاهر می شوند متعامد نیستند ولی دارای این خاصیت هستند که به ازای بعضی از توابع نامنفی $p(x)$ ،

$$(10) \quad \int_a^b p(x) g_m(x) g_n(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

چنین مجموعه ای را بر فاصله $a \leq x \leq b$ نسبت به تابع وزن $p(x)$ متعامد گویند. حال نرم g_m را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(11) \quad \|g_m\| = \sqrt{\int_a^b p(x) g_m^2(x) dx}$$

و چنانچه نرم هر يك از توابع g_m برابر ۱ باشد، مجموعه را بر آن فاصله نسبت به $p(x)$ متعامد بگوئیم.

اگر فرض کنیم $h_m = \sqrt{p} g_m$ ، آنگاه (۱۰) چنین می شود:

$$\int_a^b h_m(x) h_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n),$$

یعنی، توابع h_m به مفهوم عادی کلمه، مجموعه ای متعامد تشکیل می دهند. چند مثال مهم در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می گیرند.

هرگاه $g_1(x), g_2(x), \dots$ در فاصله ای مانند $a \leq x \leq b$ نسبت به تابع وزن p مجموعه ای متعامد باشد و اگر تابع مقروض $f(x)$ را بتوان با سری فوریه تعمیم یافته [ر.ك. (۶)]

$$(12) \quad f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots,$$

نمایش داد، آنگاه می توان ثابتهای فوریه $c_1, c_2, \dots$ تابع $f(x)$ نسبت به مجموعه متعامد مزبور را، مانند قبل، تعیین کرد؛ تنها با این تفاوت که قبل از انتگرالگیری سری باید در pg_m (به جای g_m) ضرب شود. سایر مراحل مانند قبل است و در نتیجه

$$(13) \quad c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b p(x) f(x) g_m(x) dx \quad (m=1, 2, \dots),$$

که در آن، نرم با (۱۱) تعریف شده است.

مسائل بخش ۷.۴

در هر يك از تمرینهای زیر نشان دهید که مجموعه داده شده در فاصله مفروض I متعامد است و مجموعه متعامد یکله متناظر با هر مجموعه را تعیین کنید.

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \quad I: 0 \leq x \leq 2\pi \quad ۰.۱$$

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \quad I: 0 \leq x \leq \pi \quad ۰.۲$$

$$\sin \pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \dots, \quad I: -1 \leq x \leq 1 \quad ۰.۳$$

$$1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, \dots, \quad I: 0 \leq x \leq \pi \quad ۰.۴$$

$$1, \cos \frac{2n\pi}{T} x \quad (n=1, 2, \dots), \quad I: 0 \leq x \leq T \quad ۰.۵$$

$$\sin \frac{2n\pi}{T} x \quad (n=1, 2, \dots), \quad I: -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \quad ۰.۶$$

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), \quad I: -1 \leq x \leq 1 \quad (۳.۴ \text{ بخش } ۰.۷)$$

۰.۸ ثابتهای $a_0, b_0, \dots, c_0$ را طوری معین کنید که توابع $g_1 = a_0$ ، $g_2 = b_0 + b_1 x$ ، $g_3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ بر فاصله $-1 \leq x \leq 1$ مجموعه متعامد یکله ای را تشکیل دهند. نتیجه را با نتیجه مسئله ۷ مقایسه کنید.

۰.۹ نشان دهید که هرگاه توابع $g_1(x), g_2(x), \dots$ بر فاصله $a \leq x \leq b$ مجموعه ای متعامد تشکیل دهند، آنگاه توابع $g_1(ct+k), g_2(ct+k), \dots$ بر فاصله $(a-k)/c \leq t \leq (b-k)/c$ متعامد تشکیل می دهند.

۰.۱۰ با استفاده از نتیجه مسئله ۹ و با استناد به مسئله ۱، نشان دهید که مجموعه مذکور در مسئله ۵ دارای خاصیت تعامد است.

۸.۴ مسئله استورم-لیوویل

در ریاضیات مهندسی، مجموعه های مختلف و با اهمیتی از توابع متعامد مطرح می شوند که در فاصله مفروض $a \leq x \leq b$ جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$(۱) \quad [r(x)y']' + [a(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

هستند و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} \text{(الف)} \quad & k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0 \quad (k_1 \text{ و } k_2 \text{ هر دو با هم صفر نیستند}) \\ \text{(ب)} \quad & l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0 \quad (l_1 \text{ و } l_2 \text{ هر دو با هم صفر نیستند}) \end{aligned} \quad (۲)$$

در اینجا λ يك پارامتر است و k_1, k_2, l_1, l_2 ثابتهای حقیقی داده شده‌ای هستند. در ارتباط با (۱) و (۲) اصطلاحات زیر را به کار می‌برند: معادله (۱) را **معادله استورم-لیوویل**^۱ می‌نامند. چنانچه خواهیم دید معادلات بسل، لژاندر و چند معادله دیگر را می‌توان به شکل (۱) نوشت. شرایط (۲) را **شرایط مرزی** می‌نامند چرا که این شرایط به نقاط انتهایی فاصله (نقاط مرزی) $x=a$ و $x=b$ مربوط می‌شوند. يك معادله دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی را **مسئله با مقدار مرزی** می‌نامند. مسئله با مقدار مرزی (۱) و (۲)، مذکور در بالا، به **مسئله استورم-لیوویل** موسوم است.

از (۱) و (۲) مستقیماً نتیجه می‌گیریم که به ازای هر عدد λ ، مسئله دارای جواب بدیهی $y \equiv 0$ است، یعنی به ازای هر x در فاصله مزبور $y(x) = 0$. جوابهای $y \equiv 0$ در صورت وجود توابع مشخصه یا توابع ویژه مسئله نامیده می‌شوند، و مقادیری از λ که به ازای آنها چنین جوابهایی وجود دارند مقادیر مشخصه یا مقادیر ویژه مسئله نامیده می‌شوند.

مثال ۱

مقادیر ویژه توابع ویژه مسئله استورم-لیوویل زیر را بیابید:

$$\text{(الف)} \quad y'' + \lambda y = 0 \quad \text{(ب)} \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (۳)$$

به ازای مقدار منفی $\lambda = -\nu^2$ جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = c_1 e^{\nu x} + c_2 e^{-\nu x}.$$

از (۳ ب) به دست می‌آوریم $c_1 = c_2 = 0$ و $y \equiv 0$ که تابع ویژه نیست. به ازای $\lambda = 0$ وضعیت به همین منوال است. به ازای مقدار مثبت $\lambda = \nu^2$ جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x.$$

با توجه به اولین شرط مرزی به دست می‌آوریم $y(0) = A = 0$. دومین شرط مرزی نتیجه می‌دهد

۱. ژاکشارل فرانسوا استورم (Jacques Charles Francois Sturm)، ۱۸۵۵-۱۷۰۳، ریاضیدان سوئیس. ژوزف لیوویل (Joseph Liouville)، ۱۸۸۲-۱۸۰۹، ریاضیدان فرانسوی، که به خاطر کارهای تحقیقاتی مهمش در آنالیز مختلط مشهور است.

$y(\pi) = B \sin \nu \pi = 0$ یا $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به ازای $\nu = 0$ داریم $y \equiv 0$. به ازای $\lambda = \nu^2 = 1, 4, 16, \dots$ با فرض $B = 1$ ، به دست می آوریم

$$y(x) = \sin \nu x \quad \nu = 1, 2, \dots$$

از این دو مقادیر ویژه مسئله عبارتند از $\lambda = \nu^2$ که در آن $\nu = 1, 2, \dots$ ، توابع ویژه متناظر عبارتند از $y(x) = \sin \nu x$ که در آن $\nu = 1, 2, \dots$. ▲

می توان نشان داد که اگر شرایط کلیتری روی توابع p, q, r در (۱) گذاشته شود معادله استورم-لیوویل (۱) و (۲) دارای تعدادی نامتناهی مقدار ویژه خواهد شد؛ نظریه نسبتاً پیچیده مربوطه را در مرجع [B۱۱] ضمیمه ۱ می توان یافت. به علاوه توابع مسئله استورم-لیوویل دارای خاصیت تعامد زیر است.

قضیه ۱ (تعامد توابع ویژه)

فرض می کنیم توابع p, q, r و r' که در معادله استورم-لیوویل (۱) وارد شده اند، برفاصله $a \leq x \leq b$ پیوسته و دارای مقدار حقیقی باشند. فرض می کنیم $y_m(x)$ و $y_n(x)$ توابع ویژه ای از مسئله استورم-لیوویل (۱) و (۲) باشند که به ترتیب با مقادیر ویژه متمایز λ_m و λ_n متناظر هستند. در این صورت y_m و y_n درفاصله مزبور نسبت به تابع وزن p متعامدند. هر گاه $r(a) = 0$ ، آنگاه (۲ الف) را می توان از صورت مسئله حذف کرد. هر گاه $r(b) = 0$ ، آنگاه (۲ ب) را می توان حذف کرد. هر گاه $r(a) = r(b)$ ، آنگاه به جای شرط (۲) می توان شرط زیر را گذاشت:

$$(4) \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

اثبات. بنا به فرض، y_m در معادله

$$(ry_m')' + (q + \lambda_m p)y_m = 0,$$

صدق می کند و y_n در

$$(ry_n')' + (q + \lambda_n p)y_n = 0.$$

با ضرب معادله اول در y_n و ضرب معادله دوم در $-y_m$ و جمع کردن حاصل ضربها به دست می آید.

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) P y_m y_n &= y_m (ry_n')' - y_n (ry_m')' \\ &= [(ry_n') y_m - (ry_m') y_n]' \end{aligned}$$

درستی تساوی آخر را به سادگی می توان با مشتگیری از آخرین عبارت تحقیق کرد. این عبارت پیوسته است، چرا که بنا به فرض r و r' پیوسته اند و y_m و y_n جوابهای معادله (۱) هستند. بنابراین با انتگرالگیری نسبت به x از a تا b به دست می آوریم

$$(۵) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p y_m y_n dx = \left[r (y_n' y_m - y_m' y_n) \right]_a^b.$$

عبارت طرف راست برابر است با

$$(۶) \quad r(b) [y_n'(b) y_m(b) - y_m'(b) y_n(b)] - r(a) [y_n'(a) y_m(a) - y_m'(a) y_n(a)].$$

حالت ۱. هر گاه $r(a) = 0$ و $r(b) = 0$ ، آنگاه عبارت (۶) برابر صفر است. از این رو عبارت طرف چپ نیز باید برابر صفر باشد و چون λ_n و λ_m متمایز هستند، بدون استفاده از شرایط مرزی (۲)، تعامد مطلوب را نشان می‌دهیم:

$$(۷) \quad \int_a^b p(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

حالت ۲. فرض کنیم $r(b) = 0$ ولی $r(a) \neq 0$ آنگاه سطر اول (۶) صفر است. عبارت باقیمانده (۶) را در نظر می‌گیریم. با توجه به (۲ الف) داریم

$$k_1 y_n(a) + k_2 y_n'(a) = 0,$$

$$k_1 y_m(a) + k_2 y_m'(a) = 0.$$

فرض کنیم $k_2 \neq 0$. آنگاه با ضرب معادله اول در $y_m(a)$ و ضرب معادله دوم در $-y_n(a)$ و جمع کردن حاصل ضربها داریم

$$k_2 [y_n'(a) y_m(a) - y_m'(a) y_n(a)] = 0.$$

چون $k_2 \neq 0$ ، عبارت داخل کروشه باید صفر باشد. این عبارت با دومین سطر (۶) متحد است. از این رو (۶) برابر صفر است و از (۵) تساوی (۷) را به دست می‌آوریم. هر گاه $k_2 = 0$ ، آنگاه بنا به فرض $k_1 \neq 0$ ، و بیان اثبات مثل بالا است.

حالت ۳. هر گاه $r(a) = 0$ ولی $r(b) \neq 0$ ، اثبات شبیه حالت ۲ است با این تفاوت که در اینجا به جای شرط (۲ الف) شرط (۲ ب) را داریم.

حالت ۴. هر گاه $r(a) \neq 0$ و $r(b) \neq 0$ آنگاه باید هر دو شرط مرزی (۲) را به کار ببریم و مانند حالت‌های ۲ و ۳ عمل کنیم.

حالت ۵. هر گاه $r(a) = r(b)$. آنگاه (۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$r(b) [y_n'(b) y_m(b) - y_m'(b) y_n(b) - y_n'(a) y_m(a) + y_m'(a) y_n(a)].$$

مانند قبل می‌توانیم از (۲) استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که عبارت داخل کروشه برابر صفر است. مع‌هذا، به آسانی دیده می‌شود که می‌توان این نتیجه را از (۴) نیز به دست

آورد، بنابراین، می‌توان (۲) را با (۴) تعویض کرد. پس، مانند قبل، (۷) از (۵) نتیجه می‌شود. در اینجا اثبات قضیه ۱ به اتمام می‌رسد.

مثال ۲

معادله دیفرانسیل مثال ۱ به صورت (۱) است که در آن $r=1$ ، $q=0$ و $p=1$. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که بر فاصله $0 \leq x \leq \pi$ توابع ویژه متعامد هستند.

مثال ۳. سری فوریه

می‌توان نشان داد که توابع

$$1, \cos x, \sin x, \cos^2 x, \sin^2 x, \dots$$

که در سری فوریه مثال ۳، بخش ۷.۴، آمده‌اند، توابع ویژه مسئله استورم-لیوویل زیر هستند:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi).$$

از این رو با توجه به قضیه ۱ نتیجه می‌شود که این توابع بر فاصله $-\pi \leq x \leq \pi$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. توجه کنید که شرایط مرزی این مسئله به صورت (۴) هستند. در بخش بعد مثالهای بیشتری ارائه خواهد شد.

سری فوریه تعمیم یافته‌ای (ر. ک. بخش ۷.۴) را که در آن مجموعه متعامد مجموعه‌ای از توابع ویژه است، بسط تابع ویژه‌ای می‌نامند. مقادیر ویژه مسائل استورم-لیوویل دارای خاصیت جالب زیر هستند.

قضیه ۲ (مقادیر ویژه حقیقی)

چنانچه مسئله استورم-لیوویل (۱)، (۲) در شرایطی که در قضیه ۱ بیان شد صدق کند و p در تمام فاصله $a \leq x \leq b$ مثبت باشد (یا همه‌جای آن فاصله منفی باشد) آنگاه مقادیر ویژه مسئله همگی حقیقی هستند.

اثبات. فرض می‌کنیم $\lambda = \alpha + i\beta$ یکی از مقادیر ویژه مسئله باشد و فرض می‌کنیم

$$y(x) = u(x) + iv(x)$$

تابع ویژه متناظر با λ باشد؛ در اینجا α ، β ، u و v حقیقی هستند. با قرار دادن این مقدار در معادله (۱) داریم

$$(ru' + irv)' + (q + \alpha p + i\beta p)(u + iv) = 0.$$

این معادله مختلط با دو معادله زیر که مربوط به قسمت‌های حقیقی و موهومی معادله فوق هستند، معادل است:

$$(ru')' + (q + \alpha p)u - \beta pv = 0,$$

$$(rv')' + (q + \alpha p)v + \beta pu = 0.$$

با ضرب معادله اول در v و معادله دوم در $-u$ و جمع کردن آنها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} -\beta(u'' + v'')p &= u(rv')' - v(ru')' \\ &= [(rv')u - (ru')v]'. \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از a تا b به دست می‌آید

$$-\beta \int_a^b (u'' + v'')p dx = \left[r(uv' - u'v) \right]_a^b.$$

از شرایط مرزی نتیجه می‌شود که عبارت سمت راست صفر است؛ این موضوع را با روشی شبیه به آنچه در اثبات قضیه ۱ مورد استفاده قرار گرفت می‌توان نشان داد. چون p یکی از توابع ویژه است؛ $u'' + v'' \equiv 0$. چون p و y پیوسته هستند و به‌ازای همه x ها بین a و b داریم $p > 0$ (یا $p < 0$)، بنابراین انتگرال سمت چپ صفر نیست. پس $\beta = 0$ ، یعنی $\lambda = \alpha$ حقیقی است و اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

قضیه ۲. با مثال‌های ۲ و ۳ تشریح شده مثال‌های بیشتر در بخش بعد و در مجموعه مسائل مربوطه آمده است.

مسائل بخش ۸.۴

۱. قضیه ۱ را برای مسئله خاص استورم-لیوویل مثال ۱ ثابت کنید.
۲. اثبات قضیه ۱ را در حالات ۳ و ۴ به تفصیل ارائه کنید.
۳. نشان دهید که هر گاه $y = y_1$ تابع ویژه‌ای از (۱)، (۲) که متناظر با مقدار ویژه‌ای مانند $\lambda = \lambda_0$ است باشد، آنگاه $y = \alpha y_1$ (دلخواه $\alpha \neq 0$) تابع ویژه‌ای از (۱)، (۲) که متناظر با λ_0 است می‌باشد. (توجه کنید که این خاصیت را می‌توان برای به‌دست آوردن توابع ویژه‌ای که نرمشان ۱ است به کار برد).

مقادیر ویژه و توابع ویژه هر یک از مسائل استورم-لیوویل زیر را پیدا کنید.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad ۴.$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad ۰.۵$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad ۰.۶$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad ۰.۷$$

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \quad ۰.۸$$

$$(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0. \quad ۰.۹$$

$$(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(e) = 0. \quad ۰.۱۰$$

$$(e^{ix}y')' + e^{ix}(\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad ۰.۱۱$$

$$(x^{-1}y')' + (\lambda + 1)x^{-3}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0. \quad ۰.۱۲$$

۱۳. نشان دهید که مقادیر ویژه مسئله استورم-لیوویل $y'' + \lambda y = 0$ ، $y(0) = 0$ ، $y(1) + y'(1) = 0$ جوابهای معادله $\sin k + k \cos k = 0$ هستند که در آن $k = \sqrt{\lambda}$. این معادله چند جواب مثبت دارد؟

مسئله استورم-لیوویلی بیابید که مقادیر ویژه آن عبارت باشند از

$$1, \cos \frac{2n\pi}{T}x, \sin \frac{2n\pi}{T}x, (n=1, 2, \dots). \quad ۰.۱۴$$

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \quad ۰.۱۵$$

۹.۴ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع بسل

مثال ۱. چندجمله‌ایهای لژاندر

معادله لژاندر (۱) بخش ۳.۴ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1).$$

بنابراین معادله لژاندر يك معادله استورم-لیوویل (۱) است که در آن $x^2 = 1-r$ ، $q=0$ و $p=1$. از آنجا که وقتی $x = \pm 1$ داریم $r=0$ ، برای تشکیل مسئله استورم-لیوویل بر فاصله $-1 \leq x \leq 1$ به هیچ شرط مرزی احتیاج نداریم. می‌دانیم که به ازای $n=0, 1, \dots$ ، چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$ جواب مسئله هستند. پس چندجمله‌ایهای لژاندر توابع ویژه مسئله هستند، و از قضیه ۱ بخش ۸.۴ نتیجه می‌شود که این توابع بر آن فاصله متعامدند، یعنی

$$(۱) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

نرم عبارت است از (ر. ک. مسئله ۷ بخش ۳.۴)

$$(۲) \quad \|P_m\| = \sqrt{\int_{-1}^1 P_m^2(x) dx} = \sqrt{\frac{2}{2m+1}} \quad m = 0, 1, \dots$$

مثال ۲. توابع بسل -

تعامد توابع بسل J_n در کاربردهای مهندسی، مثلاً در ارتباط با ارتعاشات غشاهای مستدیر (که در بخش ۱۰.۱۱ بررسی می‌شوند)، بسیار مهم است. $J_n(s)$ در معادله بسل (بخش ۵.۴)

$$s^2 J'' + s J' + (s^2 - n^2) J_n = 0$$

صدق می‌کند؛ در این معادله نقطه‌های روی حروف مشتق نسبت به s را نشان می‌دهند. فرض می‌کنیم که n عددی صحیح و غیر منفی است. با قرار دادن $x = \lambda s$ که در آن λ عددی ثابت و مخالف صفر است، داریم $dx/ds = 1/\lambda$ و با توجه به قاعده زنجیری داریم

$$J_n = J'_n / \lambda, \quad \ddot{J}_n = J''_n / \lambda^2,$$

که پریمها مشتق نسبت به x را نشان می‌دهند. با جایگذاری به دست می‌آوریم

$$x^2 J''_n(\lambda x) + x J'_n(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda x) = 0.$$

پس از تقسیم کردن بر x ، این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$(۳) \quad [x J'_n(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0.$$

مشاهده می‌کنیم که به ازای هر n مشخص، این معادله يك معادله استورم-لیوویل (۱)، بخش ۸.۴، است که در آن به جای λ پارامتر λ^2 گذاشته شده است و

$$p(x) = x, \quad q(x) = -n^2/x, \quad r(x) = x.$$

چون در $x=0$ داریم $r(x)=0$ ، از قضیه ۱ بخش قبل نتیجه می‌شود که آن دسته از جوابهای معادله (۳) بر فاصله مفروض $0 \leq x \leq R$ که در شرط مرزی

$$(۴) \quad J_n(\lambda R) = 0$$

صدق می‌کنند، بر فاصله مزبور نسبت به تابع وزن $p(x) = x$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند. (توجه کنید که به ازای $n \neq 0$ تابع q در $x=0$ ناپیوسته است، ولی این امر

اثری در اثبات قضیه ندارد.) می توان نشان داد (ر. ک. [B۱۸]) که $J_n(s)$ دارای تعدادی نامتناهی صفر حقیقی است؛ فرض کنیم $\alpha_{1n} < \alpha_{2n} < \alpha_{3n} \dots$ نشان دهنده صفرهای مثبت $J_n(s)$ هستند. آنگاه (۴) به ازای

$$(۵) \quad \lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R} \quad \text{یا} \quad \lambda R = \alpha_{mn} \quad (m=1, 2, \dots)$$

برقرار است و از اینجا، نتیجه زیر حاصل می شود.

قضیه ۱ (تعامل توابع بسل)

به ازای هر مقدار مشخص $n=0, 1, \dots$ توابع بسل $J_n(\lambda_{1n}x), J_n(\lambda_{2n}x), J_n(\lambda_{3n}x), \dots$ با λ_{mn} داده شده در (۵) پفاصله $0 \leq x \leq R$ نسبت به تابع وزنی $p(x)=x$ مجموعه ای متعامد تشکیل می دهند، یعنی

$$(۶) \quad \int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) dx = 0, \quad (k \neq m).$$

بدین ترتیب تعدادی نامتناهی مجموعه متعامد به دست آورده ایم که هر يك از آنها متناظر با یکی از مقادیر مشخص n است.

چون $p(x) = x$ ، با توجه بدفرمولهای (۱۱) تا (۱۳) بخش ۷.۴ ملاحظه می کنیم که اگر تابع مفروض $f(x)$ دارای يك بسط تابع ویژه ای بر حسب یکی از مجموعه های متعامد مزبور باشد، این بسط عبارت است از

$$(۷) \quad f(x) = c_1 J_n(\lambda_{1n}x) + c_2 J_n(\lambda_{2n}x) + \dots$$

که سری فوریه-بسل نامیده می شود. ثابت خواهیم کرد

$$(۸) \quad \|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x) dx = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R),$$

که در آن $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/R$. بنا به (۱۳) بخش ۷.۴، از این فرمول نتیجه می شود که ثابتهای فوریه c_m در بسط (۷) عبارتند از

$$(۹) \quad c_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x) J_n(\lambda_{mn}x) dx, \quad m=1, 2, \dots$$

اکنون به اثبات (۸) می پردازیم. با ضرب کردن (۳) در $x J_n'(\lambda x)$ به معادله ای می رسیم که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\{[x J_n'(\lambda x)]^2\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n^2(\lambda x)\}' = 0.$$

با انتگرالگیری نسبت به x از ۰ تا R داریم

$$(۱۰) \quad [x J_n'(\lambda x)]^2 \Big|_0^R = - \int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2) \{ J_n^2(\lambda x) \}' dx.$$

با توجه به (۲۱) در مسئله ۷ بخش ۵.۴ و با نوشتن s و n به جای x و ν و استفاده از نقطه، برای نشان دادن مشتق نسبت به s ، داریم

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s).$$

با ضرب طرفین در s^{n+1} و قرار دادن $s = \lambda x$ ، به دست می آوریم

$$\lambda x J_n'(\lambda x) \frac{1}{\lambda} = n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x),$$

که در آن پریم نمایش مشتق نسبت به x است. بنابراین سمت چپ (۱۰) برابر است با

$$\left[[n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)]^2 \right]_{x=0}^R.$$

هر گاه $\lambda = \lambda_{mn}$ ، آنگاه $J_n(\lambda R) = 0$ و چون $J_n(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$) عبارت فوق چنین می شود:

$$(۱۱) \quad \lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn} R).$$

با انتگرالگیری به روش جزء به جزء، طرف راست (۱۰) چنین می شود

$$- \left[(\lambda^2 x^2 - n^2) J_n^2(\lambda x) \right]_0^R + 2\lambda^2 \int_0^R x J_n^2(\lambda x) dx.$$

وقتی $\lambda = \lambda_{mn}$ ، عبارت اول در $x = R$ برابر صفر است. این عبارت در $x = 0$ نیز صفر است، زیرا وقتی $n = x = 0$ ، داریم $\lambda^2 x^2 - n^2 = 0$ و وقتی $x = 0$ و $n = 1, 2, \dots$ ، داریم $J_n(\lambda x) = 0$. با توجه به این مطلب عبارت (۱۱)، به راحتی (۸) را به دست می آوریم و بدین ترتیب اثبات به اتمام می رسد.

مسائل بخش ۹.۴

چند جمله ایهای ژاندر

چند جمله ایهای زیر را بر حسب چند جمله ایهای ژاندر نمایش دهید.

۱. $x^4, x^3, x^2, x, 1$ ۲. $3x^2 + x$
۳. $5x^3 - 3x^2 - x - 1$ ۴. $35x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 15x + 3$

در هر يك از مسائل زیر، چند جمله‌ اول بسط $f(x)$ را بر حسب چند جمله‌ایهای لژاندر به دست بیاورید و نمودار سه مجموع جزئی اول را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad ۶. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases} \quad ۵.$$

$$f(x) = |x| \quad -1 < x < 1 \quad ۷.$$

۸. نشان دهید که توابع $P_n(\cos \theta)$ ، $n = 0, 1, \dots$ ، بر فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ نسبت به تابع وزن $\sin \theta$ مجموعه‌ای متعامد تشکیل می‌دهند.

چند جمله‌ایهای هرمیت^۱

توابع

$$He_0 = 1, \quad He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2/2}), \quad n = 1, 2, \dots$$

را چند جمله‌ایهای هرمیت می‌نامند.

تصوره. برای نشان دادن توابع خاص نمادهای گوناگونی به کار می‌رود، چند-جمله‌ایهای هرمیت را نیز گاهی به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$H_0^* = 1, \quad H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

این تعریف با تعریف ما، که در کار بردها بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، تفاوت دارد.

۹. نشان دهید که

$$He_1(x) = x, \quad He_2(x) = x^2 - 1, \quad He_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$He_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

۱۰. نشان دهید که چند جمله‌ایهای هرمیت با ضرایب سری مکلورن

$$e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) t^n$$

با فرمول $He_n(x) = n! a_n(x)$ رابطه دارند. راهنمایی. توجه کنید که

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite)، ۱۸۲۲-۱۹۰۱، ریاضیدان فرانسوی که به خاطر کارهایش در جبر و نظریه اعداد مشهور است.

$$x - x^2/2 = x^2/2 - (x - x)^2/2 \quad (\text{تابع نمایی سمت چپ را تابع مولد } He_n \text{ می نامند}).$$

۱۱. نشان دهید که چندجمله‌ای‌های هرمیت در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - He_n'(x).$$

۱۲. با مشتقگیری نسبت به x از تابع مولدی که در مسئله ۱۰ آمد نشان دهید که

$$He_n'(x) = nHe_{n-1}(x).$$

با استفاده از این فرمول و فرمولی که در مسئله ۱۱ داشتیم (با گذاشتن $n-1$ به جای n)، ثابت کنید که $He_n(x)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$y'' - xy' + ny = 0.$$

۱۳. با استفاده از معادله‌ای که در مسئله ۱۲ داشتیم، نشان دهید که $w = e^{-x^2/2} He_n(x)$ جواب معادله وبر^۱

$$w'' + \left(n + \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x^2\right)w = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

است.

۱۴. نشان دهید که چندجمله‌ای‌های هرمیت، نسبت به تابع وزن $p(x) = e^{-x^2/2}$ بر محور x ها، $-\infty < x < \infty$ ، متعامدند. دهنمایی: از فرمولی که در مسئله ۱۲ داشتیم و از انتگرالگیری به روش جزء به جزء استفاده کنید.

چندجمله‌ای‌های لاگر^۲

توابع

$$L_0 = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

را چندجمله‌ای‌های لاگر می‌نامند.

۱. هاینریش وبر (Heinrich Weber)، ۱۸۴۲-۱۹۱۳، ریاضیدان آلمانی.

۲. ادموند لاگر (Edmond Laguerre)، ۱۸۳۴-۱۸۸۶، ریاضیدان فرانسوی که تحقیقات او در هندسه و نظریهٔ سریهای نامتناهی است.

۱۵. نشان دهید که

$$L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + x^2/2,$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + 3x^2/2 - x^3/6.$$

۱۶. نشان دهید که

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n}{m} x^m$$

$$= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n$$

۱۷. $L_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل لا گر $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ صدق می‌کند درستی این ادعا را به ازای $n = 0, 1, 2, 3$ تحقیق کنید.

۱۸. با انتگرالگیری مستقیم تحقیق کنید که $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ روی محور x های مثبت، $0 \leq x < \infty$ نسبت به تابع وزن $p(x) = e^{-x}$ متعامدند.

۱۹. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ چند جمله‌ایهای لا گر روی $0 \leq x < \infty$ نسبت به تابع وزن $P(x) = e^{-x}$ متعامدند. راهنمایی. انتگرال $e^{-x} L_m(x) L_n(x)$ از صفر تا ∞ را با $n < m$ در نظر بگیرید؛ چون بزرگترین توان در L_m برابر x^m است، بنابراین کافی است نشان دهید که انتگرال $e^{-x} x^k L_n(x)$ ($k < n$) از صفر تا ∞ برابر صفر است. با چندبار انتگرالگیری با روش جزء به جزء، این موضوع را ثابت کنید.

چند جمله‌ایهای چیشف^۱

توابع

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$n = 0, 1, \dots$$

را به ترتیب چند جمله‌ایهای چیشف نوع اول و دوم می‌نامند.

۲۰. نشان دهید که

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

۱. پافنوتی چیشف (Pafnuti chebichee)، ۱۸۹۴-۱۸۲۱، ریاضیدان روس که خاطر کارهایش در نظریهٔ تقریب و نظریهٔ اعداد معروف است. نام او را به صورت (Chebyshev) نیز می‌نویسند.

$$U_0 = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

۲۱. نشان دهید که $T_n(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0.$$

۲۲. نشان دهید که چندجمله‌ایهای چیشف $T_n(x)$ روی فاصله $1 \leq x \leq -1$ نسبت

به تابع وزن $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ متعامدند. دهنمایی. برای محاسبه انتگرال فرض کنید $\theta = \arccos x$.

توابع بسل

۲۳. نمودار $J_0(\lambda_1 x)$, $J_0(\lambda_2 x)$, $J_0(\lambda_3 x)$ و $J_0(\lambda_4 x)$ را به ازای $R=1$ در فاصله $0 \leq x \leq 1$ رسم کنید (از جدول A۲ ضمیمه ۴ استفاده کنید).

۲۴. نمودار $J_1(\alpha_1 x)$, $J_1(\alpha_2 x)$, $J_1(\alpha_3 x)$ و $J_1(\alpha_4 x)$ را در فاصله $0 \leq x \leq 1$ رسم کنید. (از جدول A۲ ضمیمه ۴ استفاده کنید).

هر يك از توابع $f(x)$ ($0 < x < R$) زیر را بر حسب سری فوریه-بسل

$$f(x) = c_1 J_0(\lambda_1 x) + c_2 J_0(\lambda_2 x) + c_3 J_0(\lambda_3 x) + \dots$$

بسط دهید و نمودار چند مجموع جزئی اولی را رسم کنید.

۲۵. $f(x) = 1$ ، دهنمایی. از فرمول (۲۰) بخش ۵.۴ استفاده کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{R}{2} \\ 0 & \frac{R}{2} < x < R \end{cases} \quad .26$$

$$f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < a \\ 0 & a < x < R \end{cases} \quad .27$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{R}{2} \\ k & \frac{R}{2} < x < R \end{cases} \quad .28$$

۲۹. $f(x) = 1 - x^2$ ($R=1$). دهنمایی. از فرمول (۲۰) بخش ۵.۴ و انتگرالگیری جزء به جزء استفاده کنید.

$$f(x) = x^2 \quad \text{۳۱} \quad f(x) = x^2 \quad \text{۳۲} \quad f(x) = x^2 \quad \text{۳۰}$$

۳۳. نشان دهید که $f(x) = x^n$ ($0 < x < 1$ و $n = 0, 1, \dots$) را می‌توان با سری فوریه-بسل زیر نمایش داد:

$$x^n = \frac{J_n(\alpha_{1n}x)}{\alpha_{1n}J_{n+1}(\alpha_{1n})} + \frac{J_n(\alpha_{2n}x)}{\alpha_{2n}J_{n+1}(\alpha_{2n})} + \dots$$

۳۴. مانند مسئله ۳۳ نمایشی برای تابع $f(x) = x^n$ ($0 < x < R$ و $n = 0, 1, \dots$) بیابید.

۳۵. $f(x) = x^3$ ($0 < x < 2$) را با سری فوریه-بسمی که شامل J_3 باشد نمایش دهید.

تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس روشی برای حل معادلات دیفرانسیل و مسائل با مقدار مرزی و مقدار اولیه متناظر با آنها است. فرایند حل متشکل از سه مرحله اصلی است:

مرحله اول. مسئله داده شده «مشکل» را به معادله ای «ساده» تبدیل می کنیم (معادله کمکی).

مرحله دوم. معادله کمکی را با روشهای جبری صرف حل می کنیم.

مرحله سوم. از روی جواب معادله کمکی، با تبدیل معکوس، جواب مسئله داده شده را به دست می آوریم.

بدین ترتیب تبدیل لاپلاس مسئله مربوط به حل معادله دیفرانسیل را به مسئله ای جبری تبدیل می کند. جداول تبدیل لاپلاس مرحله سوم را آسانتر می کنند، نقش این جداول شبیه نقش جداول انتگرال در انتگرالگیری است. (این جداول در مرحله اول نیز مفید واقع می شوند.) یکی از این جداول در انتهای همین فصل آمده است.

از روش تبدیل لاپلاس در ریاضیات مهندسی، جایی که این روش کاربردهای متعددی دارد، به طور وسیعی استفاده می شود. این روش به ویژه در مسائلی که در آنها نیروی راننده (مکانیکی یا الکتریکی) دارای ناپیوستگیهایی است، مفید واقع می شود؛ نمونه این نیروها نیروهایی هستند که تنها مدت کوتاهی عمل می کنند یا آنکه دوره ای هستند ولی صرفاً تابع سینوسی یا کسینوسی نیستند. مزیت دیگر این روش آن است که جواب مسائل را مستقیماً به دست می دهد؛ در واقع، مسائل با مقدار اولیه، بدون اینکه لازم باشد ابتدا جواب عمومی آنها را به دست آوریم حل می شوند. به همین نحو می توان معادلات غیر همگن را بدون آنکه لازم باشد نخست معادله همگن مربوطه حل شود، حل کرد.

در این فصل تبدیل لاپلاس را از نقطه نظر عملی بررسی می‌کنیم و موارد استفاده آن را به کمک مسائل مهم مهندسی نشان می‌دهیم. در همین فصل، کاربرد تبدیل لاپلاس در معادلات دیفرانسیل معمولی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

معادلات با مشتق جزئی را نیز می‌توان با تبدیل لاپلاس مورد بحث و بررسی قرار داد. مقدمه‌ای در این زمینه در بخش ۱۳.۱۱، انتهای فصل مربوط به معادلات با مشتق جزئی ارائه شده است.

پیشنیاد این فصل: فصل ۲.

مراجع: ضمیمه ۱ قسمت B.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱.۵ تبدیل لاپلاس. تبدیل معکوس. خطی بودن

فرض می‌کنیم $f(t)$ تابع مفروضی باشد که به ازای همه مقادیر $t \geq 0$ تعریف شده است. تابع $f(t)$ را در e^{-st} ضرب می‌کنیم و از آن نسبت به t ، از صفر تا بینهایت، انتگرال می‌گیریم. آنگاه، اگر انتگرال مزبور وجود داشته باشد تابعی از s خواهد بود، مثلاً $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

تابع $F(s)$ تبدیل لاپلاس^۱ تابع اصلی $f(t)$ نامیده می‌شود و آن را با $\mathcal{L}(f)$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$(۱) \quad F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

عمل فوق‌الذکر، که از $f(t)$ مفروضی $F(s)$ را به دست می‌دهد، عمل تبدیل لاپلاس نام دارد.

به علاوه، تابع اصلی $f(t)$ که در (۱) دیده می‌شود تبدیل معکوس یا معکوس $F(s)$ نام دارد و آن را با $\mathcal{L}^{-1}(F)$ نشان می‌دهند؛ یعنی می‌توان نوشت

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

۱- پیر سیمون لاپلاس (Pierre Simon de Laplace)، ۱۷۴۹-۱۸۲۷، ریاضیدان بزرگ فرانسوی است که اساس نظریهٔ پتانسیل را توسعه داده، سهم به سزایی در پیشبرد مکانیک سماوی و نظریهٔ احتمال دارد.

نمادگذاری

توابع اصلی با حروف کوچک و تبدیلات آنها با حروف بزرگ متناظر نشان داده می‌شوند، مثلاً $F(s)$ نشان دهنده تبدیل $f(t)$ و $Y(s)$ نشان دهنده تبدیل $y(t)$ است.

مثال ۱

فرض می‌کنیم $f(t) = 1$ وقتی که $t \geq 0$ ، $F(s)$ را پیدا می‌کنیم. از (۱)، با انتگرالگیری به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty};$$

پس در صورتی که $s > 0$ ، داریم

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}.$$

نمادگذاری سمت راست رابطه اول برای سادگی است، با این حال لازم است چند کلمه‌ای درباره آن صحبت کنیم. فاصله انتگرالگیری در (۱) نامتناهی است. چنین انتگرالی را انتگرال ناسره می‌نامند؛ بنابراین تعریف، این انتگرال باید طبق قاعده زیر محاسبه شود:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

پس، معنی نمادگذاری ما چنین است:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

سرتاسر این فصل، از این نمادگذاری استفاده خواهیم کرد.

مثال ۲

فرض می‌کنیم $f(t) = e^{at}$ وقتی که $t \geq 0$ ، در اینجا a عددی ثابت است. $\mathcal{L}(f)$ را به دست می‌آوریم. مجدداً با توجه به (۱) داریم

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty};$$

از این رو در صورتی که $s - a > 0$ ، داریم

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}.$$

آیا باید به همین ترتیب جلو برویم و تبدیل لاپلاس توابع را یکی پس از دیگری مستقیماً از روی تعریف به دست آوریم؟ جواب این سؤال منفی است، به این دلیل که تبدیل لاپلاس خواص کلی بسیاری دارد که برای این منظور مفیدند. يك خاصیت بسیار مهم این است که تبدیل لاپلاس، درست مانند اعمال مشتقگیری و انتگرالگیری، عملی خطی است. بدین ترتیب قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱ (خطی بودن تبدیل لاپلاس)

تبدیل لاپلاس عملی خطی است، یعنی به ازای هر تابع $f(t)$ و $g(t)$ که تبدیل لاپلاس آنها موجود باشد و به ازای ثابتهای دلخواه a و b داریم

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

اثبات بنا به تعریف داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t)+bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

مثال ۳

با فرض $f(t) = \cosh at = (e^{at} + e^{-at})/2$ ، $\mathcal{L}(f)$ را بیابید. از قضیه ۱ و مثال ۲ به دست می آوریم

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{at}) + \frac{1}{2} \mathcal{L}(e^{-at}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right);$$

یعنی در صورتی که $s > a$ (≥ 0)، داریم

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

از برخی توابع مقدماتی و تبدیلات لاپلاس آنها فهرست کوچکی در جدول ۱۰.۵ آمده و فهرستی جامعتر در بخش ۸.۵ ارائه شده است. همچنین مراجع موجود در ضمیمه ۱، قسمت B، را ببینید.

بادانستن تبدیلات جدول ۱۰۵، تقریباً همه تبدیلهای مورد نیاز را می توان با استفاده از قضایای کلی ساده ای که در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار می گیرند، به دست آورد. فرمولهای ۱، ۲ و ۳ از جدول ۱۰۵ حالات خاصی از فرمول ۴ هستند. فرمول ۴ از فرمول ۵ و اینکه $\Gamma(n+1) = n!$ ، نتیجه می شود؛ در اینجا n عددی صحیح و نامنفی است [ر. ک. (۱۰) بخش ۵.۴]. می توان از تعریف زیر شروع کرده، فرمول ۵ را ثابت کرد

$$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt,$$

جدول ۱۰۵

برخی توابع مقدماتی $f(t)$ ، و تبدیل لاپلاس آنها $\mathcal{L}(f)$

$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$		$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$	
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	۶	$1/s$	۱	۱
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	۷	$1/s^2$	t	۲
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	۸	$2!/s^3$	t^2	۳
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	۹	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n ($n=1, 2, \dots$)	۴
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	۱۰	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	t^a (a مثبت)	۵

با قرار دادن $st = x$ و با استفاده از فرمول (۸) بخش ۵.۴ داریم

$$\mathcal{L}(t^a) = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^a dx = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad s > 0.$$

فرمول ۶ در مثال ۲ ثابت شد. برای اثبات فرمولهای ۷ و ۸، در فرمول ۶ قرار می دهیم $\alpha = i\omega$ ؛ در نتیجه

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s + i\omega}{(s - i\omega)(s + i\omega)} = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیه ۱ داریم

$$\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = \mathcal{L}(\cos \omega t + i \sin \omega t) = \mathcal{L}(\cos \omega t) + i \mathcal{L}(\sin \omega t).$$

از مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی این دو معادله، فرمولهای ۷ و ۸ به دست می‌آیند. فرمول ۹ در مثال ۳ ثابت شد و فرمول ۱۰ به همان طریق اثبات می‌شود. $\blacktriangle$

به عنوان نتیجه این مقدمه مطلبی درباره وجود تبدیل لاپلاس بیان می‌کنیم. این مطلب، تقریباً به‌طور شهودی، به شرح زیر است. انتگرال (۱) به‌ازای مقدار مشخصی از s در صورتی موجود است که کل انتگرال $e^{-st} f(t)$ وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، با سرعت کافی به صفر میل کند، مثلاً حداقل مانند تابعی نمایی با نمای منفی. منشأ نامساوی (۲) که در قضیه زیر آمده همین موضوع است. لازم نیست $f(t)$ پیوسته باشد و این در عمل اهمیت دارد، چرا که ورودیهای ناپیوسته (نیروهای راننده) درست همان چیزهایی هستند که تبدیل لاپلاس، به‌خصوص در مورد آنها مفید واقع می‌شود. کافی است فرض کنیم که $f(t)$ در هر فاصله متناهی از مجموعه مقادیر $t \geq 0$ پیوسته تکه‌ای است.

بنابراین، تابع $f(t)$ بر فاصله متناهی $a \leq t \leq b$ پیوسته تکه‌ای است هر گاه $f(t)$ بر آن فاصله تعریف شده و چنان باشد که بتوان فاصله مزبور را به تعدادی متناهی فاصله‌های جزء تقسیم کرد، به‌طوری که در هر یک از این فواصل جزء $f(t)$ پیوسته بوده و وقتی که t از داخل به سمت نقاط انتهایی هر یک از فواصل جزء میل می‌کند دارای حدی متناهی باشد.

از این تعریف نتیجه می‌شود که جهشهای متناهی تنها ناپیوستگیهایی هستند که یک تابع پیوسته تکه‌ای می‌تواند داشته باشد؛ این ناپیوستگیها را ناپیوستگیهای عادی می‌نامند. شکل ۷۸ مثالی را نشان می‌دهد. به‌علاوه، واضح است که توابع پیوسته تکه‌ای شامل همه توابع پیوسته نیز هستند.

مسئله ۲ (قضیه وجود تبدیلات لاپلاس)

فرض کنیم $f(t)$ تابعی باشد که در هر فاصله متناهی از مجموعه مقادیر $t \geq 0$ پیوسته تکه‌ای است و به‌ازای اعداد ثابتی مانند γ و M در نامساوی

$$(2) \quad |f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad t \geq 0$$

صدق کند. آنگاه به‌ازای هر $s > \gamma$ ، تبدیل لاپلاس $f(t)$ موجود است.

اثبات. چون $f(t)$ پیوسته تکه‌ای است، $e^{-st} f(t)$ بر هر فاصله متناهی از محور t ها انتگرالپذیر است و با توجه به (۲) داریم

$$|\mathcal{L}(f)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt$$

$$= M \int_0^{\infty} e^{-(s-\gamma)t} dt = \frac{M}{s-\gamma} \quad (s > \gamma).$$

▲ بدین ترتیب اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

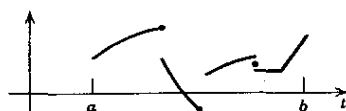
شرطهائی که در قضیه ۲ داشتیم برای اکثر کاربردها کافی هستند و پی بردن به این که تابع مفروضی در نامساوی (۲) صدق می‌کند یا نه، ساده است. مثلاً

$$(۳) \quad \cosh t < e^t, \quad t^n < n! e^t \quad (n = 0, 1, \dots) \quad t > 0$$

و هر تابعی که به ازای همه مقادیر $t \geq 0$ قدرمطلقش کراندار است، مثلاً توابع سینوسی یا کسینوسی با متغیر حقیقی، در شرط قضیه صدق می‌کند. مثال تابعی که در رابطه (۲) صدق نمی‌کند، تابع نمایی e^{t^2} است، چرا که هر قدر اعداد M و γ در (۲) بزرگ انتخاب شوند، داریم

$$e^{t^2} > M e^{\gamma t} \quad t > t_0$$

در اینجا t_0 عددی است که به قدر کافی بزرگ است و به M و γ بستگی دارد.



شکل ۷۸. مثال تابع پیوسته تکه‌ای $f(t)$.

(نقطه‌ها مقادیر تابع را در نقاط جهش مشخص می‌کند.)

باید توجه داشت که شرایط قضیه ۲ کافی هستند، نه لازم. مثلاً تابع $1/\sqrt{t}$ ، در $t=0$ ، نامتناهی است، ولی تبدیل لاپلاس آن موجود است؛ در واقع، از تعریف $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [ر.ک. (۳۰) ضمیمه ۳] به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(t^{-1/2}) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

هر گاه تبدیل لاپلاس تابع مفروضی موجود باشد، این تبدیل به‌طور یکتا تعیین می‌شود. برعکس، می‌توان نشان داد که هر گاه دو تابع (که هر دو بر محور حقیقی مثبت تعریف شده‌اند) دارای تبدیلی یکسان باشند، این توابع، بر فاصله‌ای با طول مثبت، یکسان هستند و تنها ممکن است در بعضی نقاط منفرد با هم اختلاف داشته باشند (ر.ک. مرجع

[B۱۹] ضمیمه ۱). چون این مورد در کاربردها اهمیتی ندارد، می‌توانیم بگوئیم که معکوس يك تبدیل مفروض اساساً يكتاست. به‌ویژه، اگر دو تابع پیوسته دارای يك تبدیل باشند، این توابع كاملاً يکسانند. البته، این موضوع در عمل اهمیت دارد. چرا؟ (مقدمه این فصل را به‌خاطر بیاورید.)

مسائل بخش ۱۰.۵

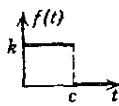
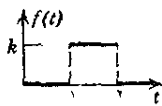
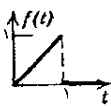
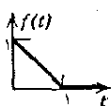
تبدیل‌های لاپلاس توابع زیر را که در آنها k, a, b, c, θ مقادیر ثابتی هستند، بیابید.

۴.

۳.

۲.

۱.



۵. $t + 2$ ۶. $at + b$ ۷. $a + bt + ct^2$ ۸. $4t^3 + t^2$

۹. $a \cos 2t$ ۱۰. e^{-at+b} ۱۱. $\sin(\omega t + \theta)$ ۱۲. $\cosh^2 3t$

هر گاه $F(s) = \mathcal{L}(f)$ یکی از مقادیر زیر باشد $f(t)$ را بیابید. (در مسئله ۱۹، T مقدار ثابتی است.)

۱۳. $\frac{1}{s^2 + 9}$ ۱۴. $\frac{3}{s + \pi}$ ۱۵. $\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}$

۱۶. $\frac{2s + 1}{s^2 + 4}$ ۱۷. $\frac{2(s + 1)}{s^2 - 16}$ ۱۸. $\frac{2}{s} + \frac{1}{s + 2}$

۱۹. $\frac{2n\pi T}{T^2 s^2 + (2n\pi)^2}$ ۲۰. $\frac{s}{s^2 + n^2 \pi^2}$ ۲۱. $\frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$

۲۲. $\frac{3}{s^2 + 3s}$ ۲۳. $\frac{3}{4} s^{-5/2}$ ۲۴. $s^{-2/3}$

۲۵. جواب مسئله ۴ را به کمک مسائل ۱ و ۳ به دست آورید.

۲۶. نامساویهای (۳) را ثابت کنید.

۲۷. فرمول ۱۰.۵ را از فرمول ۶ به دست آورید.

۲۸. فرمول ۶ جدول ۱۰.۵ را از فرمولهای ۹ و ۱۰ به دست آورید.

۲۹. با انتگرالگیری جزء به جزء فرمولهای ۷ و ۸ جدول ۱۰۵ را به دست آورید.

۳۰. با استفاده از $\cosh x = \cos ix$ و $\sinh x = -i \sin ix$ ، $i = \sqrt{-1}$ ، فرمولهای ۹ و ۱۰ جدول ۱۰۵ را از فرمولهای ۷ و ۸ به دست آورید.

۲.۵ تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال

شاید مهمترین خاصیت تبدیل لاپلاس خطی بودن آن باشد (قضیه ۱ بخش قبل). آنچه در درجه دوم اهمیت قرار دارد، صرف نظر از جزئیات، این است که مشتقگیری از تابعی مانند $f(t)$ با ضرب کردن تبدیل $F(s)$ در s متناظر است. بدین ترتیب، به جای انجام دادن اعمال حساب دیفرانسیل و انتگرال روی توابع، می توانیم اعمال جبری ساده روی تبدیلات آنها انجام دهیم.

به علاوه، چون انتگرالگیری عکس مشتقگیری است، انتظار داریم که این عمل با تقسیم تبدیل توابع بر s متناظر باشد؛ و در واقع همین طور هم است. بدین ترتیب، آنچه در این بخش مورد بررسی قرار می گیرد به شرح زیر است: قضیه ۱ در رابطه با مشتقگیری از $f(t)$ ، قضیه ۲، گسترش قضیه ۱ به مشتقات مراتب بالاتر، و قضیه ۳ درباره انتگرالگیری از $f(t)$ در این بخش، مثالها و همچنین کاربردهای تبدیلات لاپلاس در معادلات دیفرانسیل را گنجانده ایم.

قضیه ۱ [مشتقگیری از $f(t)$]

فرض کنید $f(t)$ به ازای هر $t \geq 0$ پیوسته باشد؛ به ازای γ و M در نامساوی ۲ بخش قبل صدق کند؛ و مشتقی مانند $f'(t)$ داشته باشد که بر هر فاصله متناهی از مجموعه مقادیر $t \geq 0$ پیوسته تکه ای است. آنگاه تبدیل لاپلاس $f'(t)$ در صورتی که $s > \gamma$ موجود است و

$$(1) \quad \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) \quad (s > \gamma).$$

اثبات. نخست حالتی را که $f'(t)$ به ازای هر $t \geq 0$ پیوسته است بررسی می کنیم. در این حالت بنا به تعریف و با انتگرالگیری جزء به جزء داریم

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

چون f در نامساوی (۲)، بخش ۱۰۵، صدق می کند، حاصل اولین جمله عبارت فوق به ازای حد بالایی، وقتی که $s > \gamma$ ، صفر می شود و به ازای حد پایینی $f(0) -$ انتگرال سمت راست $\mathcal{L}(f)$ است و وجود آن به ازای $s > \gamma$ نتیجه ای از قضیه ۲ بخش ۱۰۵ است. بدین ترتیب ثابت می شود که عبارت طرف راست، وقتی $s > \gamma$ ، وجود دارد و برابر با $-f(0) + s\mathcal{L}(f)$ است. در نتیجه، وقتی $s > \gamma$ ، $\mathcal{L}(f')$ وجود دارد و (۱)

برقرار است.

هرگاه $f'(t)$ صرفاً پیوسته تکه‌ای باشد، اثبات به همین نحو است؛ جز آنکه در این حالت، قلمرو انتگرالگیری در انتگرال اصلی را باید به چند قسمت تقسیم کرد به طوری که در هر قسمت، f' پیوسته باشد.

تبصره. این قضیه را می‌توان به توابع تکه‌ای پیوسته $f(t)$ تعمیم داد، اما در چنین حالتی به جای (۱) به فرمول (۱*) را که در مسئله ۱۲ انتهای همین بخش، آمده است می‌سیم. اگر (۱) را در مورد مشتق مرتبه دوم $f''(t)$ به کار ببریم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= s\mathcal{L}(f') - f'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0); \end{aligned}$$

یعنی

$$(2) \quad \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).$$

و به همین نحو،

$$(3) \quad \mathcal{L}(f''') = s^3\mathcal{L}(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0),$$

الی آخر. بدین ترتیب با استقرا، قضیه ۱ را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

قضیه ۲. (مشتق مرتبه n)

فرض کنید $f(t)$ و مشتقاتش $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ به ازای هر $t \geq 0$ پیوسته باشد و به ازای γ و M در نامساوی (۲)، بخش ۱.۵، صدق کند و فرض کنید $f^{(n)}(t)$ بر هر فاصله محدود از مجموعه مقادیر $t \geq 0$ پیوسته تکه‌ای باشد. آنگاه تبدیل لاپلاس $f^{(n)}(t)$ وقتی که $s > \gamma$ ، موجود است و از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$(4) \quad \mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

مثال ۱

بافرض $f(t) = t^2$ ، $\mathcal{L}(f)$ را پیدا کنید. چون $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 0$ ، $f''(t) = 2$ ، و $s\mathcal{L}(1) = 2\mathcal{L}(1) = 2/s$ از (۲) به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}, \quad \mathcal{L}(f'') = \mathcal{L}(2) = \frac{2}{s} = s^2\mathcal{L}(f)$$

و از آنجا

که با جدول ۱.۵ مطابقت دارد. این مثال، نوعی است و بیابانگر آن است که در حالت کلی، راههای مختلفی برای یافتن تبدیلات توابع مفروض وجود دارد.

مثال ۲

با فرض $f(t) = \sin^2 t$ ، $\mathcal{L}(f)$ را بیابید. داریم $f(0) = 0$.

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$$

و از (۱) داریم

$$\mathcal{L}(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \quad \text{یا} \quad \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2 + 4} = s \mathcal{L}(f)$$

مثال ۳

با فرض $f(t) = t \sin \omega t$ ، $\mathcal{L}(f)$ را پیدا کنید. داریم $f(0) = 0$ و

$$f'(t) = \sin \omega t + \omega t \cos \omega t, \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(t) = 2\omega \cos \omega t - \omega^2 t \sin \omega t$$

$$= 2\omega \cos \omega t - \omega^2 f(t),$$

بنابراین با توجه به (۲)،

$$\mathcal{L}(f'') = 2\omega \mathcal{L}(\cos \omega t) - \omega^2 \mathcal{L}(f) = 2\omega \mathcal{L}(f).$$

و از اینجا با استفاده از فرمول تبدیل لاپلاس $\cos \omega t$ ، به دست می آوریم

$$(s^2 + \omega^2) \mathcal{L}(f) = 2\omega \mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{2\omega s}{s^2 + \omega^2}.$$

و نتیجه عبارت است از

$$\mathcal{L}(t \sin \omega t) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

مثال ۴. يك معادله دیفرانسیل

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

فرض می کنیم $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ تبدیل لاپلاس $y(t)$ ، جواب (مجهول) مسئله، باشد. در این صورت بنابه قضایای ۱ و ۲ و شرایط اولیه، داریم

$$\mathcal{L}(y') = sY - y(0) = sY - 3,$$

$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 3s - 1.$$

اینها را در معادله دیفرانسیل داده شده قرار می دهیم، و می یابیم

$$s^2Y + 4sY + 3Y = 3s + 1 + 4 \times 3.$$

معادله ای را که تبدیل $Y(s)$ مربوط به تابع مجهول $y(t)$ در آن صدق می کند معادله کمکی معادله دیفرانسیل مورد نظر می نامند. در مثال اخیر، معادله کمکی را می توان چنین نوشت:

$$(s+3)(s+1)Y = 3s + 13.$$

با حل این معادله نسبت به Y و با استفاده از کسرهای جزئی، به دست می آوریم

$$Y = \frac{3s+13}{(s+3)(s+1)} = \frac{-2}{s+3} + \frac{5}{s+1}$$

حال با توجه به جدول ۱۰۵ مشاهده می کنیم که

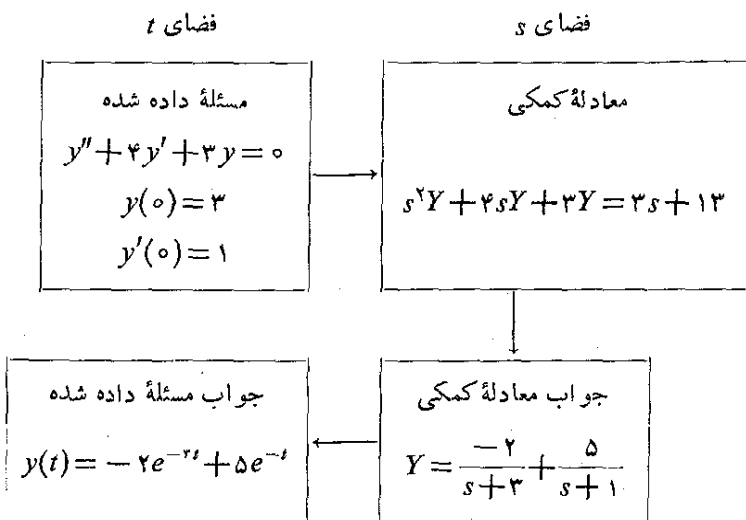
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

با توجه به خطی بودن تبدیل لاپلاس (قضیه ۱ بخش ۱۰۵) جواب مسئله به صورت زیر در می آید

$$y(t) = -2e^{-3t} + 5e^{-t}.$$

در این روش، فرض بر این است که جواب مجهول $y(t)$ دارای تبدیلی مانند $Y(s)$ است و قضایای ۱ و ۲ را می توان به کار برد. همین که جواب پیدا می شود، نشان می دهد که این فرضها درست هستند. از نظر عملی، ساده تر و طبیعی تر آن است که $y(t)$ و مشتقات آن را در معادله داده شده و شرایط اولیه مفروض قرار دهیم و ببینیم که این جواب در آنها صدق می کند یا نه.

روش فوق را می توان به این صورت خلاصه کرد:



آیا این روش در مقایسه با روشی که در بخشهای ۲.۲ تا ۴.۲ دیدیم، کارآیی بیشتری دارد؟ در اینجا شرایط اولیه خود به خود به حساب آمده اند. در مثال بالا کارآیی این روش چندان واضح نیست چرا که مثال خیلی ساده است. مع هذا این مثال، مراحل مختلف روش جدید را نشان می دهد. کاربردهایی را که نشان دهنده فواید عمده این روش هستند پس از آموختن خواص و تکنیکهای دیگری، که باعث قدرتمندی و انعطاف پذیری تبدیلات لاپلاس می گردند، مورد بررسی قرار می دهیم. این مبحث را در بخش بعدی تحت عنوان فرایندهای انتقال و تابع پله ای واحد آغاز می کنیم. ▲

بخش حاضر را با انتگرالگیری از $f(t)$ ، عکس عمل مشتقگیری، به پایان می بریم؛ انتظار داریم که انتگرالگیری، متناظر با تقسیم تبدیل بر s باشد چرا که تقسیم عکس عمل ضرب است.

قضیه ۳ [انتگرالگیری از $f(t)$]

هرگاه $f(t)$ پیوسته تکه ای باشد و در نامساوی به شکل (۲)، بخش ۱.۵ صدق کند، آنگاه

$$(5) \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (s > 0, s > \gamma).$$

اثبات. فرض می کنیم که $f(t)$ پیوسته تکه ای باشد و به ازای γ و M در نامساوی (۲) بخش ۱.۵ صدق کند. واضح است که اگر (۲) به ازای يك γ منفی برقرار باشد، به ازای مقادیر مثبت γ نیز برقرار است و از این رو می توانیم فرض کنیم که γ مثبت است در این صورت انتگرال

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

پیوسته است و با استفاده از (۲)، بخش ۱.۵ به دست می آوریم

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{\gamma\tau} d\tau = \frac{M}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) \quad (\gamma > 0).$$

به علاوه، $g'(t) = f(t)$ ، جز در نقاطی که $f(t)$ در آنها ناپیوسته است. پس $g'(t)$ بر هر فاصله متناهی پیوسته تکه ای است و بنابر قضیه ۱،

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \quad (s > \gamma).$$

بدیهی است که $g(0) = 0$ ، و بنابراین

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f).$$

بدین ترتیب، اثبات قضیه به اتمام می‌رسد.

فرمول (۵) همزاد مفیدی دارد که با نوشتن $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ، تعویض طرفین، و گرفتن تبدیل معکوس از دو طرف، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (۶)$$

مثال ۵

با فرض $\mathcal{L}(f) = 1/s^2(s^2 + \omega^2)$ ، $f(t)$ را پیدا کنید. از جدول ۱۰.۵، بخش ۱۰.۵ داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t.$$

از این رابطه و قضیه ۳ نتیجه می‌شود که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right)\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

چنانچه یکبار دیگر از قضیه ۳ استفاده کنیم، جواب مطلوب به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right)\right\} = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t (1 - \cos \omega \tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right).$$

مسائل بخش ۲.۵

با استفاده از قضیه ۱ به دست بیاورید:

$$1. \quad \mathcal{L}(\sin t) \text{ را از } \mathcal{L}(\cos t) \quad 2. \quad \mathcal{L}(\sinh 2t) \text{ را از } \mathcal{L}(\cosh 2t)$$

با استفاده از قضایای ۱ و ۲، نشان دهید که

$$3. \quad \mathcal{L}(t \cos \omega t) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad 4. \quad \mathcal{L}(t \cosh at) = \frac{s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^2}$$

$$5. \quad \mathcal{L}(t \sinh at) = \frac{2as}{(s^2 - a^2)^2} \quad 6. \quad \mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

با استفاده از مثال ۳ و مسئله ۳، نشان دهید که

$$7. \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right) = \frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t) \quad ۰.۸$$

۰.۹. با توجه به فرمول زیر، درستی نتیجه مثال ۵ را تحقیق کنید

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right).$$

۰.۱۰. $\mathcal{L}(\cos^2 t)$ را پیدا کنید.

(الف) با استفاده از نتیجه مثال ۲؛ (ب) با استفاده از روش به کار رفته در مثال ۲؛

(ج) با نوشتن $\cos^2 t$ بر حسب $\cos 2t$.

۰.۱۱. قضیه ۱ را با ذکر جزئیات اثبات کنید. برای این کار، فرض کنید که $f'(t)$ دارای

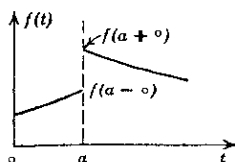
تعدادی جهش متناهی در $t_1, t_2, \dots, t_m$ است، و $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$

۰.۱۲. (تعمیم قضیه ۱) تعمیم زیر از قضیه ۱، از نظر عملی درکاربردها مفید است. نشان

دهید که هرگاه $f(t)$ جز در $t = a (> 0)$ که در آن دارای یک ناپیوستگی معمولی

(جهش متناهی) است، پیوسته باشد و سایر شرایط، همان شرایط قضیه ۱ باشد، آنگاه

$$(۱^*) \quad \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-as}.$$



مسئله ۱۲

نمودار توابع زیر را رسم کنید، و با استفاده از (۱^*) ، تبدیل لاپلاس هر یک از آنها را بیابید.

$$۰.۱۳. \quad f(t) = 1 \text{ وقتی } 1 < t < 2 \text{ و در غیر این صورت } f(t) = 0$$

$$۰.۱۴. \quad f(t) = t \text{ وقتی } 0 < t < 1 \text{ و در غیر این صورت } f(t) = 0$$

$$۰.۱۵. \quad f(t) = t \text{ وقتی } 0 < t < 1 \text{ و } f(t) = 1 \text{ وقتی } 1 < t < 2 \text{ و در غیر این صورت } f(t) = 0$$

$$۰.۱۶. \quad f(t) = t - 1 \text{ وقتی } 1 < t < 2 \text{ و در غیر این صورت } f(t) = 0$$

با استفاده از قضیه ۳، $f(t)$ را بیابید هر گاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

$$.۱۷ \quad \frac{1}{s(s-2)} \quad .۱۸ \quad \frac{1}{s(s^2+9)} \quad .۱۹ \quad \frac{1}{s(s^2-1)}$$

$$.۲۰ \quad \frac{1}{s^2(s+1)} \quad .۲۱ \quad \frac{1}{s^2} \left(\frac{s-1}{s+1} \right) \quad .۲۲ \quad \frac{1}{s^2} \left(\frac{s-2}{s^2+4} \right)$$

$$.۲۳ \quad \frac{54}{s^3(s-3)} \quad .۲۴ \quad \frac{2s-\pi}{s^2(s-\pi)}$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$.۲۵ \quad y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$.۲۶ \quad y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$.۲۷ \quad y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 7$$

$$.۲۸ \quad 4y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$$

$$.۲۹ \quad y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$$

۳۰. (معادله کمکی) نشان دهید که معادله کمکی معادله دیفرانسیل

$$y'' + \omega^2 y = r(t) \quad (\omega \text{ ثابت})$$

دارای جواب

$$Y(s) = \frac{sy(0) + y'(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{R(s)}{s^2 + \omega^2}$$

است که در آن $R(s)$ تبدیل لاپلاس $r(t)$ است. توجه کنید که جمله اول طرف راست توسط شرایط اولیه داده شده، مثلاً $y(0) = k_1$ ، $y'(0) = k_2$ ، کاملاً معین می‌شود و جمله دوم مستقل از شرایط اولیه است.

۳.۵ انتقال بر محور s ها، انتقال بر محور t ها، تابع پله‌ای واحد

به کجا رسیده‌ایم و هدف بعدیمان چیست؟ می‌دانیم که تبدیل لاپلاس خطی است (قضیه ۱، بخش ۱.۵)، می‌دانیم که مشتق $f'(t)$ ، به تعبیری با ضرب $\mathcal{L}(f)$ در s متناظر است (قضایای ۱ و ۲ بخش ۲.۵)؛ و می‌دانیم که این خاصیت نقش عمده‌ای در حل معادلات دیفرانسیل دارد. نمونه‌ای از این روش حل در مثال ۴ بخش ۲.۵ ارائه شد، ولی در آنجا می‌توانستیم جواب را به آسانی با روشهای معمولی نیز بیابیم.

برای ارائه کاربردهایی که در آنها تبدیل لاپلاس بتواند قدرت واقعی خود را نشان دهد، ابتدا باید خواص دیگری از این تبدیل را به دست بیاوریم. دو خاصیت بسیار مهم، به انتقال برمحوری ها و انتقال برمحور t ها مربوط می شوند که تحت عنوان دو قضیه انتقال بیان شده اند (قضایای ۱ و ۲ همین بخش).

قضیه ۱ (قضیه اول انتقال؛ انتقال برمحور s ها)

هرگاه $f(t)$ دارای تبدیل $F(s)$ باشد که در آن $s > \gamma$ ، آنگاه $e^{at}f(t)$ دارای تبدیل $F(s-a)$ است که در آن $s-a > \gamma$ ؛ بنابراین هرگاه

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \quad \text{آنگاه} \quad \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

یعنی، اگر در تبدیل $s-a$ را به جای s قرار دهیم («انتقال برمحور s ها» شکل ۷۹)، این کار متناظر با ضرب تابع اصلی در e^{at} خواهد بود.

اثبات. بنابر تعریف داریم

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

و بنابراین

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} [e^{at} f(t)] dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

مثال ۱

با اعمال قضیه ۱ روی فرمولهای ۴، ۷ و ۷ جدول ۱۰۵ نتایج زیر را به دست می آوریم:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

مثال ۲. ارتعاشات آزاد میرا

جسم کوچکی با جرم $m=2$ به انتهای فنر کشسانی که از سقف آویزان شده، وصل شده است. ثابت فنر $k=10$ فرض می‌شود. فرض کنید $y(t)$ تغییر مکان جسم از وضعیت تعادل ایستا باشد. ارتعاشات آزاد جسم را تعیین کنید، اگر موقعیت اولیه آن $y(0)=2$ و سرعت اولیه اش $y'(0)=-4$ باشد، با این فرض که میرایی دستگاه متناسب با سرعت آن، و ثابت میرایی $c=4$ است.

بنابر معادله (۷) بخش ۶.۲ حرکت جسم توسط معادله $y(t)$ ، جواب مسئله با مقدار اولیه زیر، توصیف می‌شود:

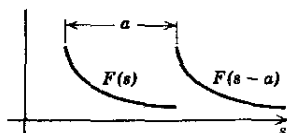
$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4,$$

با استفاده از (۱) و (۲)، بخش ۲.۵، معادله کمکی زیر را به دست می‌آوریم:

$$s^2 Y - 2s + 4 + 2(sY - 2) + 5Y = 0,$$

با حل این معادله نسبت به Y داریم

$$Y(s) = \frac{2s}{(s+1)^2 + 2^2} = 2 \times \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}.$$



شکل ۷۹. قضیه اول، انتقال بر محور s ها

از طرفی

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 2^2}\right) = \cos 2t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 2^2}\right) = \sin 2t.$$

از اینجا و قضیه ۱، جواب زیر که از همان نوعی است که انتظارش می‌رفت، حاصل می‌شود:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t).$$

قضیه اول انتقال (قضیه ۱) به انتقال بر محور s ها مربوط می‌شود: تعویض s با $s-a$ ، در $F(s)$ متناظر است با ضرب تابع اصلی $f(t)$ در e^{at} . حال قضیه دوم انتقال (قضیه ۲) را که به انتقال بر محور t ها مربوط می‌شود، بیان می‌کنیم: با اندکی مسامحه می‌توان گفت که تعویض t با $t-a$ در $f(t)$ متناظر است با ضرب تبدیل

$F(s)$ در e^{-as} ؛ بیان دقیق این مطلب به شرح زیر است.

قضیه ۲ (قضیه دوم انتقال؛ انتقال برمحور t ها)

هرگاه $F(s)$ تبدیل $f(t)$ باشد، آنگاه $e^{-as}F(s)$ (دلخواه a مثبت) تبدیل تابع زیر است:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases}$$

تبصره. فرمول دوم را می‌توان به طریق دیگری به شرح زیر نوشت. بنا به تعریف، تابع پله‌ای واحد $u_a(t)$ عبارت است از (شکل ۸۰ را ببینید)

$$(۱) \quad u_a(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \quad (a \geq 0).$$

ملاحظه می‌کنیم که اکنون $f(t)$ را می‌توان به صورت $f(t-a)u_a(t)$ نوشت. شکل ۸۱ مثالی از این تابع را نشان می‌دهد. بنا به قضیه ۲،

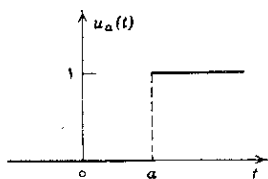
$$(۲) \quad e^{-as}F(s) = \mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}.$$

همچنین، با گرفتن تبدیل معکوس از طرفین، داریم

$$(۲^*) \quad \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u_a(t).$$

اثبات قضیه ۲. بنا به تعریف داریم

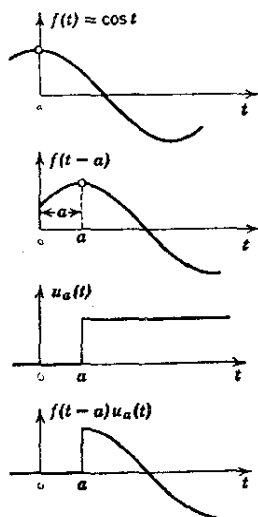
$$e^{-as}F(s) = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau.$$



شکل ۸۰. تابع پله‌ای واحد $u_a(t)$

با قرار دادن $\tau + a = t$ رانتهگرال، به دست می‌آوریم

$$e^{-as}F(s) = \int_a^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt.$$



شکل ۸۱. مثالی از $f(t-a)u_a(t)$ وقتی که $f(t) = \cos t$

چنانچه محقق سازیم که انتگرال بالا به ازای هر t درفاصله 0 تا a برابر صفر است، آنگاه می‌توانیم قلمرو انتگرالگیری فوق‌را 0 تا ∞ بگیریم. این کار را می‌توان به سادگی با ضرب انتگرال در تابع پله‌ای $u_a(t)$ انجام داد:

$$e^{-as}F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)u_a(t) dt = \mathcal{L}\{f(t-a)u_a(t)\}.$$

این همان (۲) است و اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

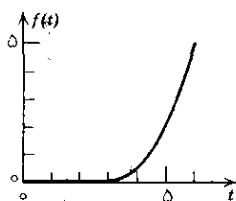
قبل از آنکه به کاربردهای این قضیه بپردازیم، متذکر می‌شویم که تابع پله‌ای واحد $u_a(t)$ بسیار مهم است. درواقع، خواهیم دید که این تابع سنگ بنای توابعی است که دانستن آنها تا حد زیادی بر سودمندی تبدیل لاپلاس می‌افزاید. برای استفاده‌های بعدی خاطرنشان می‌کنیم که تبدیل $u_a(t)$ عبارت است از

$$(۳) \quad \mathcal{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$$

این فرمول مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود، زیرا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_a(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) dt \\ &= \int_0^a e^{-st} \times (0) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \times (1) dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_a^{\infty}.\end{aligned}$$

اکنون به جرات می‌توان گفت به مرحله‌ای رسیده‌ایم که می‌توانیم به مسائلی حمله کنیم که در مورد آنها استفاده از تبدیل لاپلاس بر روشهای کلاسیک معمول برتری دارد؛ مثالهای ۵ تا ۷ این مطلب را شرح می‌دهند.

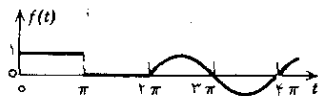


شکل ۸۲. مثال ۳

مثال ۳

تبدیل معکوس e^{-2s}/s^2 را بیابید. از آنجا که $\mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t$ (ر.ک. جدول ۱۰۵ بخش ۱۰۵)، قضیه ۲ نتیجه می‌دهد (شکل ۸۲).

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-2s}/s^2) = \frac{1}{2}(t-2)^2 u_2(t).$$



شکل ۸۳. مثال ۴

مثال ۴

تبدیل تابع

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

را بیابید (شکل ۸۳). $f(t)$ را می‌توان برحسب توابع پله‌ای واحد نمایش داد:

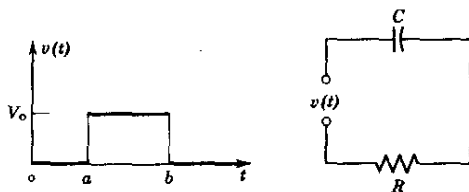
$$f(t) = u_0(t) - u_\pi(t) + u_{2\pi}(t) \sin t.$$

در اینجا به دلیل دوره‌ای بودن سینوس، داریم $\sin t = \sin(t - 2\pi)$. بدین ترتیب با توجه به (۳) و (۲) و جدول ۱۰.۵ (بخش ۱۰.۵) به دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}.$$

مثال ۵. پاسخ مدار RC به تک‌موج مربعی

شدت جریان $i(t)$ در مدار شکل ۸۴ را بیابید که یک تک‌موج مربعی با ولتاژ V_0 در مدار فرستاده شود. فرض بر این است که قبل از اعمال این ولتاژ، جریانی از مدار نمی‌گذرد. معادله مدار عبارت است از (ر.ک. بخش ۹.۱)



شکل ۸۴. مثال ۵

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

که در آن $v(t)$ را می‌توان برحسب دو تابع پله‌ای واحد نمایش داد:

$$v(t) = V_0 [u_a(t) - u_b(t)].$$

با استفاده از قضیه ۳ بخش ۲.۵ و فرمول (۳)، معادله کمکی چنین به دست می‌آید:

$$RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = \frac{V_0}{s} [e^{-as} - e^{-bs}].$$

جواب این معادله عبارت است از

$$I(s) = F(s)(e^{-as} - e^{-bs}) \quad \text{که در آن} \quad F(s) = \frac{V_0/R}{s + 1/RC}$$

با توجه به جدول ۱۰.۵ از بخش ۱۰.۵، داریم

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

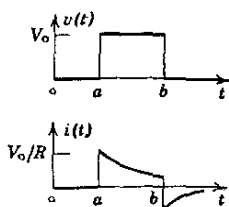
از این رو بنا بر قضیه ۲ جواب معادله به صورت زیر به دست می آید: (شکل ۸۵)

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{L}^{-1}(I) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} - \mathcal{L}^{-1}\{e^{-bs}F(s)\} \\ &= \frac{V_0}{R} [e^{-(t-a)/RC} u_a(t) - e^{-(t-b)/RC} u_b(t)]; \end{aligned}$$

یعنی $i = 0$ هرگاه $t < a$ ، و

$$i(t) = \begin{cases} K_1 e^{-t/RC} & a < t < b \\ (K_1 - K_2) e^{-t/RC} & t > b \end{cases}$$

که در آن $K_2 = V_0 e^{b/RC} / R$ و $K_1 = V_0 e^{a/RC} / R$



شکل ۸۵. ولتاژ و شدت جریان در مثال ۵

مثال ۶. پاسخ دستگاه نامیرا به تک موج مربعی

مسئله با مقدار اولیه

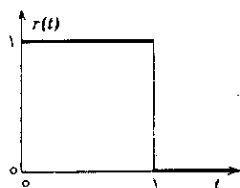
$$y'' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را حل کنید، با این فرض که $r(t) = 1$ اگر $0 < t < 1$ ، و در غیر این صورت $r(t) = 0$. (شکل ۸۶).

بنا بر قضیه ۲، بخش ۲.۵، و با توجه به شرایط اولیه و فرمول (۳)، معادله کمکی

$$s^2 Y + 2Y = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}.$$

را به دست می‌آوریم.



شکل ۸۶. ورودی در مثالهای ۶ و ۷

جواب این معادله عبارت است از

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 2)}.$$

در مورد سمت راست معادله از کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 2} \right).$$

بدین ترتیب با توجه به جدول ۱۰.۵ (بخش ۱۰.۵) و قضیه ۲،

$$y(t) = \frac{1}{2} [1 - \cos \sqrt{2}t] - \frac{1}{2} [1 - \cos \sqrt{2}(t-1)] u_1(t),$$

یعنی

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}t & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}(t-1) - \frac{1}{2} \cos \sqrt{2}t & t > 1 \end{cases}$$

می‌بینیم که $y(t)$ ترکیبی از نوسانهای هماهنگ را نمایش می‌دهد.

مثال ۷. پاسخ دستگاه مرتعش میرا به تک‌موج مربعی

پاسخ دستگاه مرتعش میرای متناظر با

$$y'' + 2y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

را که در آن $r(t)$ همان است که در مثال ۶ بود تعیین کنید (شکل ۸۶).

باهمان روش قبلی. معادله کمکی

$$s^2 Y + 3sY + 2Y = \frac{1}{s} (1 - e^{-s}).$$

به دست می آید که با حل آن نسبت به Y داریم

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \quad Y(s) = F(s)(1 - e^{-s}) \quad \text{که در آن}$$

بر حسب کسره های جزئی داریم

$$F(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}.$$

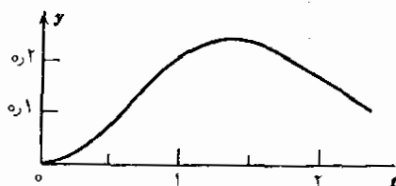
از این دو بنا به جدول ۱۰.۵ (بخش ۱۰.۵):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

بنابراین با توجه به قضیه ۲، داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s}F(s)\} = F(t-1)u_1(t)$$

$$= \begin{cases} 0 & (0 \leq t < 1) \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & (t > 1) \end{cases}$$



شکل ۸۷. خروجی در مثال ۷

در نتیجه جواب زیر حاصل می شود: (د.ك. شكل ۸۷)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = f(t) - f(t-1)u_1(t)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-1t} & (0 \leq t < 1) \\ K_1 e^{-t} - K_2 e^{-1t} & (t > 1) \end{cases}$$

که در آن $K_1 = e - 1$ و $K_2 = (e^2 - 1)/2$

مسائل بخش ۳.۵

$\mathcal{L}(f)$ را بیابید، اگر $f(t)$ برابر باشد با

$$e^{-t} \sin(\omega t + \theta) \quad .2 \quad e^{-\alpha t} \sin n\pi t \quad .1$$

$$e^{\alpha t}(a_1 t + a_2 t^2) \quad .4 \quad e^{-\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t) \quad .3$$

با نمایش توابع هذلولی گون بر حسب توابع نمایی و به کار بردن قضیه اول انتقال نشان دهید که

$$\mathcal{L}(\cosh at \cos at) = \frac{s^2}{s^4 + 4a^4} \quad .5$$

$$\mathcal{L}(\cosh at \sin at) = \frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4} \quad .6$$

$$\mathcal{L}(\sinh at \cos at) = \frac{a(s^2 - 2a^2)}{s^4 + 4a^4} \quad .7$$

$$\mathcal{L}(\sinh at \sin at) = \frac{2a^3 s}{s^4 + 4a^4} \quad .8$$

$f(t)$ را بیابید هرگاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+13} \quad .10 \quad \frac{s+3}{(s+1)^2+1} \quad .9$$

$$\frac{bs+c}{(s-a)^2+\omega^2} \quad .12 \quad \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s-2)^5} \quad .11$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

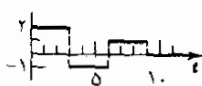
۱۳. $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$

۱۴. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

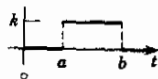
۱۵. $y'' + 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

۱۶. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$

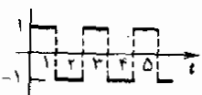
توابع زیر را بر حسب توابع پایه‌ای واحد نمایش دهید و تبدیل لاپلاس هر یک را بیابید.



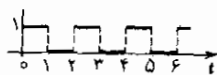
۱۸.



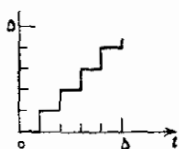
۱۷.



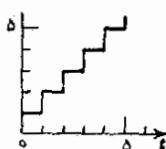
۲۰.



۱۹.



۲۲.

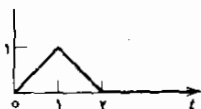


۲۱.

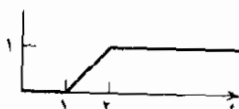
(تابع پلکانی)

(تابع پلکانی)

با استفاده از قضیه ۳ بخش ۲.۵، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.



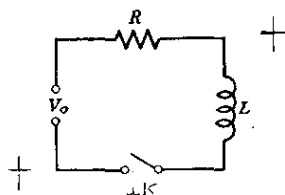
۲۴.



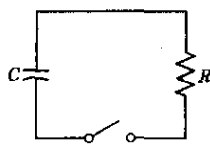
۲۳.

۲۵. خازنی به ظرفیت C طوری پر شده که پتانسیل آن V است. کلیدی را که در شکل دیده می‌شود، در لحظه $t = 0$ می‌بندیم و خازن شروع به تخلیه شدن در مقاومتی مانند R می‌کند. با استفاده از تبدیل لاپلاس بار $q(t)$ خازن را بیابید.

۲۶. شدت جریان $i(t)$ در مدار شکل زیر را پیدا کنید، با این فرض که در زمان $t \leq 0$ جریانی از مدار نمی‌گذرد و کلید در لحظه $t = 0$ بسته می‌شود.



مسئله ۲۶



مسئله ۲۵

$f(t)$ را بیایید و نمودار آن را رسم کنید، هر گاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

$$e^{-s}/s^2 \quad .28 \quad (e^{-2s} - e^{-s})/s \quad .27$$

$$(2e^{-as} - 1)/s \quad .30 \quad (e^{-s} + e^{-2s} - 2e^{-3s} + e^{-4s})/s^2 \quad .29$$

نمودار توابع زیر را رسم کنید و تبدیل لاپلاس آنها را بیایید.

$$tu_1(t) \quad .32 \quad (t-1)u_1(t) \quad .31$$

$$u_{\pi t \omega}(t) \sin \omega t \quad .34 \quad u_{\pi}(t) \cos t \quad .33$$

$$t^2 u_1(t) \quad .36 \quad e^{at} u_a(t) \quad .35$$

نمودار توابع زیر را که فرض می‌کنیم در خارج فاصله داده شده صفر هستند، رسم کنید و تبدیل لاپلاس آنها را بیایید.

$$K \sin t \quad (2\pi < t < 4\pi) \quad .38 \quad K \sin \omega t \quad (0 < t < \pi/\omega) \quad .37$$

$$K \cos \omega t \quad (0 < t < \pi/\omega) \quad .40 \quad 1 - e^{-t} \quad (0 < t < \pi) \quad .39$$

$$t^2 \quad (0 < t < 3) \quad .42 \quad t^2 \quad (0 < t < 1) \quad .41$$

$f(t)$ را بیایید و نمودار آن را رسم کنید، هر گاه $F(s) = \mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

$$e^{-s}/s^2 \quad .44 \quad e^{-2s}/s \quad .43$$

$$e^{-s}/(s^2 + \pi^2) \quad .46 \quad e^{-2s}/(s-2) \quad .45$$

$$(1 - e^{-\pi s})/(s^2 + 4) \quad .48 \quad e^{-s}/(s-3) \quad .47$$

$$s(1 + e^{-\pi s})/(s^2 + 1) \quad .50 \quad e^{-\pi s}/(s^2 + 2s + 2) \quad .49$$

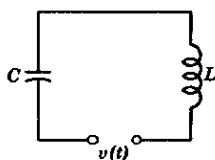
شدت جریان $i(t)$ در مدار LC را که در شکل نشان داده شده است بیایید. فرض کنید

هانری $L=1$ ، فاراد $C=1$ ؛ همچنین شدت جریان اولیه و بار اولیه خازن را صفر بگیرد و $v(t)$ را یکی از مقادیر زیر انتخاب کنید.

۵۱. $v=t$ هر گاه $0 < t < a$ و در غیر این صورت $v=0$

۵۲. $v=t$ هر گاه $0 < t < a$ ، و $v=a$ هر گاه $t > a$

۵۳. $v=1-e^{-t}$ هر گاه $0 < t < \pi$ ، و در غیر این صورت $v=0$



مسائل ۵۱ تا ۵۳. مدار LC

۵۴. هر گاه $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ ، نشان دهید که $\mathcal{L}\{f(at)\}=F(s/a)/a$ با استفاده از این فرمول، تبدیل $\sin \omega t$ را از روی تبدیل $\sin t$ به دست آورید.

۵۵. نشان دهید که (۲) نتیجه می دهد

$$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\} = \mathcal{L}\{f(t)u_a(t)\}, \quad (2^{**})$$

بعضی وقتها استفاده از این فرمول در کارها سبب سادگی کار می شود.

۴.۵ مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات

تبدیل لاپلاس خواص کلی بسیار زیادی دارد که برای به دست آوردن تبدیلات یا تبدیلات معکوس می توان از آنها استفاده کرد. روشهای مربوط به این خواص عبارتند از انتگرالگیری مستقیم (بخش ۱۰۵)، استفاده از خطی بودن (بخش ۱۰۵)، انتقال (بخش ۳۰۵) و مشتقگیری یا انتگرالگیری از تابع اصلی $f(t)$ (بخش ۲۰۵). اما این تمام مطلب نیست: در این بخش مشتقگیری و انتگرالگیری از تبدیلات $F(s)$ را مورد بررسی قرار می دهیم و اعمال متناظر را برای توابع اصلی $f(t)$ می یابیم. در بخش بعدی ضرب تبدیلات را بررسی می کنیم و عمل متناظر را برای توابع اصلی پیدا می کنیم. می توان نشان داد که هر گاه $f(t)$ در شرایط قضیه وجود بخش ۱۰۵ صدق کند، آنگاه مشتق تبدیل آن

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

نسبت به s می‌توان با مشتقگیری از تابع زیر علامت انتگرال نسبت به s به‌دست آورد (اثبات در مرجع $[A^3]$)؛ بنابراین

$$F'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} [t f(t)] dt.$$

در نتیجه، هرگاه $\mathcal{L}(f) = F(s)$ ، آنگاه

$$(1) \quad \mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s);$$

مشتقگیری از تبدیل یک تابع با ضرب آن تابع در t - متناظر است. این خاصیت تبدیل لاپلاس ما را قادر می‌سازد که از تبدیلهای مفروض، تبدیلهای جدیدی به‌دست آوریم.

مثال ۱

سه فرمول زیر را به‌دست می‌آوریم:

	$\mathcal{L}(f)$	$f(t)$
(۲)	$\frac{1}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta^3} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$
(۳)	$\frac{s}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta} \sin \beta t$
(۴)	$\frac{s^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$\frac{1}{2\beta} (\sin \beta t + \beta t \cos \beta t)$

از (۱) و فرمول ۸ (با $\omega = \beta$) جدول ۱۰.۵ بخش ۱۰.۵ به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}(t \sin \beta t) = \frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}.$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر 2β فرمول (۳) حاصل می‌شود. از (۱) و فرمول ۹ (با $\omega = \beta$) جدول ۱۰.۵ بخش ۱۰.۵ می‌یابیم

$$(5) \quad \mathcal{L}(t \cos \beta t) = \frac{(s^2 + \beta^2) - 2s^2}{(s^2 + \beta^2)^2} = \frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} = \frac{1}{s^2 + \beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

که درستی تساوی آخر را می توان با محاسبه مستقیم به سادگی تحقیق کرد. از این رو

$$t \cos \beta t = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \beta^2} - \frac{2\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} \right\} \\ = \frac{1}{\beta} \sin \beta t - 2\beta^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \beta^2)^2} \right\}.$$

و مشاهده می کنیم که $\mathcal{L}^{-1} \{ \dots \}$ در طرف راست برابر $f(t)$ در (۲) است. سرانجام با اضافه و کم کردن β^2 در صورت کسر داریم

$$\frac{s^2}{(s^2 + \beta^2)^2} = \frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}.$$

با توجه به (۵) و (۲) ملاحظه می کنیم که دو جمله طرف راست، به ترتیب، تبدیلات معکوس $t \cos \beta t$ و $(\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) / 2\beta$ هستند و (۴) حاصل می شود. همین طور هر گاه $f(t)$ در شرایط قضیه وجود بخش ۱.۵ صدق کند و حد $f(t)/t$ وقتی که t از راست به صفر میل می کند، موجود باشد آنگاه

$$(۶) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} = \int_s^\infty F(s) ds \quad (s > \gamma);$$

بدین طریق، انتگرالگیری از تبدیل تابع $f(t)$ با تقسیم $f(t)$ بر t متناظر است

در واقع، بنابر تعریف نتیجه می شود که

$$\int_s^\infty F(\bar{s}) d\bar{s} = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-\bar{s}t} f(t) dt \right] d\bar{s}$$

و می توان نشان داد که (ر. ک. مرجع [A۳]) با فرضهای فوق می شود ترتیب انتگرالگیری را عوض کرد، یعنی

$$\int_s^\infty F(\bar{s}) d\bar{s} = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-\bar{s}t} f(t) d\bar{s} \right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\bar{s}t} d\bar{s} \right] dt.$$

در طرف راست، انتگرال نسبت به $\bar{s}$ ، وقتی که $s > \gamma$ ، برابر e^{-st}/t است و بنابراین

$$\int_s^\infty F(\bar{s}) d\bar{s} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L} \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} \quad (\bar{s} > \gamma).$$

مثال ۲

تبدیل معکوس تابع $\ln(1 + \omega^2/s^2)$ را بیابید. با مشتقگیری به دست می آوریم

$$-\frac{d}{ds} \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \frac{2}{s} - 2 \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

درستی تساوی دوم را می‌توان به سادگی با محاسبه مستقیم تحقیق کرد. این $F(s)$ ما است. با توجه به جدول ۱۰.۵، بخش ۱۰.۵، به دست می‌آوریم

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - 2 \frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = 2 - 2 \cos \omega t.$$

این تابع در شرایطی صدق می‌کند که تحت آن‌ها (۶) برقرار است. بنابراین

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\} = \int_0^\infty F(\bar{s}) d\bar{s} = \frac{f(t)}{t},$$

و نتیجه چنین است

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\right\} = \frac{2}{t}(1 - \cos \omega t).$$

مسائل بخش ۲.۵

با استفاده از (۱)، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

۱. $t e^t$	۲. $t^2 e^{2t}$	۳. $t \sin 3t$
۴. $t^2 e^{-t}$	۵. $t^2 \cos t$	۶. $t e^{-t} \cos t$
۷. $t e^{-t} \cosh 2t$	۸. $t^2 \sinh 2t$	۹. $t e^{-t} \sin t$

با استفاده از (۶)، $f(t)$ را بیابید هرگاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

۱۰. $\frac{1}{(s-2)^2}$	۱۱. $\frac{2s}{(s^2+1)^2}$	۱۲. $\frac{2}{(s-a)^2}$
۱۳. $\operatorname{arccot}(s+1)$	۱۴. $\operatorname{arccot} \frac{s}{\omega}$	۱۵. $\ln \frac{s}{s-1}$
۱۶. $\ln \frac{s+a}{s-a}$	۱۷. $\ln \frac{s+a}{s+b}$	۱۸. $\ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$

۱۹. (چندجمله‌ایهای لاگرانژ) چندجمله‌ای لاگرانژ مرتبه n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_0(t) = 1, \quad I_n(t) = \frac{e^t}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad n = 1, 2, \dots$$

(این چند جمله‌ای را معمولاً با نماد L_n نشان می‌دهند) ولی، نظر به اینکه ما توابع را با حروف کوچک و تبدیلات را با حروف بزرگ نمایش داده‌ایم، نماد I_n را به کار می‌بریم.) نشان دهید که $I_n(t)$ نسبت به t یک چندجمله‌ای مرتبه n است. با استفاده از یکی از قضایای انتقال (بخش ۳.۵) و فرمول مربوط به تبدیل مشتق n ام (بخش ۲.۵)، نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{I_n(t)\} = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}.$$

۳.۵. معادله دیفرانسیل لاگرانژ عبارت است از

$$ty'' + (1-t)y' + ny = 0.$$

با استفاده از (۱) و مسئله ۱۹ جوابی برای این معادله بیابید. (در اینجا دو نکته جلب توجه می‌کند. الف) به ازای $Y = \mathcal{L}\{y\}$ باز هم یک معادله دیفرانسیل به دست می‌آید، اما معادله‌ای که به سادگی می‌توان آن را حل کرد. ب) جواب عمومی y به دست نمی‌آید. می‌توان نشان داد که معادله جواب مستقل دیگری دارد که تبدیل لاپلاس آن وجود ندارد.)

۵.۵ پیچش

خاصیت کلی مهم دیگر تبدیل لاپلاس در مورد حاصل ضرب تبدیلات است. در واقع، هرگاه $f(t)$ و $g(t)$ ، تبدیلات معکوس $F(s)$ و $G(s)$ ، معلوم باشند، آنگاه با استفاده از $f(t)$ و $g(t)$ می‌توان $h(t)$ ، تبدیل معکوس حاصل ضرب $H(s) = F(s)G(s)$ ، را محاسبه کرد. تابع $h(t)$ به صورت $(f * g)(t)$ نوشته می‌شود، که نمادی است متعارف و پیچش f و g نامیده می‌شود. شکل پیچش در قضیه زیر بیان شده است؛ اهمیت عملی این قضیه آشکار است زیرا موقعیتی که در بالا مورد بحث قرار گرفت اغلب در کار بردها پیش می‌آید.

قضیه ۱ (قضیه پیچش)

هرگاه $f(t)$ و $g(t)$ به ترتیب تبدیلات معکوس $F(s)$ و $G(s)$ باشند و در مفروضات قضیه وجود (بخش ۱.۵) صدق کنند آنگاه $h(t)$ ، تبدیل معکوس حاصل ضرب $H(s) = F(s)G(s)$ ، پیچش $f(t)$ و $g(t)$ است که به صورت $(f * g)(t)$ نوشته می‌شود و چنین تعریف می‌گردد:

$$(۱) \quad h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

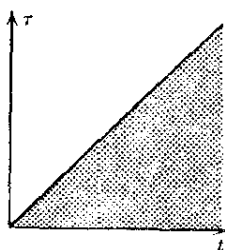
اثبات. با توجه به تعریف $G(s)$ و قضیه اول انتقال، به ازای هر $\tau \geq 0$ می داریم

$$e^{-s\tau} G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau) u_\tau(t) dt = \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau) dt$$

که در آن $s > \gamma$. از این رو با توجه به تعریف $F(s)$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} F(s) G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) G(s) d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau) dt d\tau \end{aligned}$$

با فرض $s > \gamma$. ابتدا نسبت به t از τ تا ∞ انتگرال می گیریم و سپس نسبت به τ از 0 تا ∞ ؛ این ناحیه، مطابق شکل ۸۸، متناظر با قسمت هاشور خورده گویای شکل در صفحه $t\tau$ است که تا بینهایت ادامه دارد. فرضهای ما در مورد f و g طوری است که می توانیم ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم. (اثباتی که مستلزم اطلاع از همگرایی



شکل ۸۸. ناحیه انتگرالگیری در صفحه $t\tau$ - اثبات قضیه ۱

یکنواخت است، در مرجع [B۳] ضمیمه ۱ آمده است). سپس نخست نسبت به τ از 0 تا t (ر. ک. شکل ۸۸) و بعد نسبت به t از 0 تا ∞ انتگرال می گیریم؛ بنابراین

$$\begin{aligned} F(s) G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \mathcal{L}(h) \end{aligned}$$

که در آن h از فرمول (۱) تعیین می شود. بدین ترتیب اثبات به انجام می رسد. ▲

خواننده می تواند با استفاده از تعریف نشان دهد که پیچش $f * g$ دارای خواص زیر است:

$$f * g = g * f \quad (\text{قانون جابه جایی})$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{قانون پخش پذیری})$$

$$(f * g) * v = f * (g * v) \quad (\text{قانون انجمنی})$$

$$f * 0 = 0 * f = 0.$$

این خواص شبیه خواص ضرب اعداد است. اما در حالت کلی $g \neq g$. ۱. مثلاً هرگاه $t = g(t)$ ، آنگاه

$$(1 * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}.$$

خاصیت غیر عادی دیگر اینکه ممکن است $(f * f)(t) \geq 0$ برقرار نباشد. اکنون خواهیم دید که پیچش برای یافتن تبدیلات معکوس و حل معادلات دیفرانسیل مفید است.

مثال ۱

با فرض $H(s) = (1/s^2)(s-a)$ ، $h(t)$ را پیدا کنید. با توجه به جدول ۱۰.۵ (بخش ۱۰.۵) داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

با استفاده از قضیه ۱ و انتگرال گیری جزء به جزء به دست می آوریم

$$\begin{aligned} h(t) &= t * e^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{at} \int_0^t \tau e^{-a\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1). \end{aligned}$$

مثال ۲. نوسانات واداشته، تشدید

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$my'' + ky = F_0 \sin pt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

از بخش ۱۳.۲ می‌دانیم که این معادله به نوسانات واداشته جسمی به جرم m که به انتهای فنر کشسانی بسته شده است مربوط می‌شود (انتهای بالایی فنر ثابت است، شکل ۸۹). k مدول فنر و $F_0 \sin pt$ نیروی راننده یا ورودی است. با قراردادن $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ، معادله مزبور را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin pt \quad \left(K = \frac{F_0}{m} \right).$$

معادله کمکی عبارت است از

$$(۲) \quad s^2 Y + \omega_0^2 Y = K \frac{P}{s^2 + p^2}.$$

که جواب آن چنین است

$$(۳) \quad Y(s) = \frac{Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)}.$$

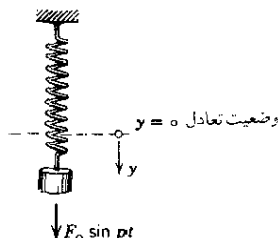
حال

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \right\} = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + p^2} \right\} = \frac{1}{p} \sin pt.$$

از این رو بنا بر قضیه پیچش

$$(۴) \quad y(t) = \frac{Kp}{\omega_0 p} \sin \omega_0 t * \sin pt = \frac{K}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 \tau \sin (pt - p\tau) d\tau.$$



شکل ۸۹. دستگاه مرتعش. نوسانات واداشته

انتگرال مساوی است با [ر.ک. (۱۱) ضمیمه ۳]

$$(۵) \quad \frac{1}{2} [-\cos(pt + (\omega_0 - p)\tau) + \cos(pt - (\omega_0 + p)\tau)] .$$

وقتی تشدید روی نمی‌دهد. اگر $p^2 \neq \omega_0^2$ ، با انتگرالگیری نسبت به τ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0} \left[-\frac{\sin(pt + (\omega_0 - p)\tau)}{\omega_0 - p} + \frac{\sin(pt - (\omega_0 + p)\tau)}{-\omega_0 - p} \right]_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0} \left[\frac{\sin pt - \sin \omega_0 t}{\omega_0 - p} + \frac{\sin pt + \sin \omega_0 t}{\omega_0 + p} \right] . \end{aligned}$$

پس از مخرج مشترك گرفتن و خلاصه کردن، نتیجه می‌گیریم

$$y(t) = \frac{K}{p^2 - \omega_0^2} \left[\frac{p}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin pt \right] .$$

این معادله برهم‌نهی از دو نوسان همساز را نمایش می‌دهد که بسامدهایشان عبارتند از بسامد طبیعی دستگاه، درحالتی که به صورت آزاد ارتعاش می‌کند، و بسامد نیروی راننده. وقتی تشدید روی می‌دهد. هرگاه $p = \omega_0$ ، آنگاه به سادگی، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{2} [-\cos \omega_0 t + \cos(\omega_0 t - 2\omega_0 \tau)] .$$

انتگرالگیری نسبت به τ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{2\omega_0} \left[-\tau \cos \omega_0 t - \frac{1}{2\omega_0} \sin(\omega_0 - 2\omega_0 \tau) \right]_0^t \\ &= \frac{K}{2\omega_0^2} [\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t] . \end{aligned}$$

این معادله نشان می‌دهد، همان‌طور که در بخش ۱۳.۲ دیدیم، دستگاه در حال تشدید است.

مسائل بخش ۱۰.۳

پیچشهای زیر را بیابید. [داهنمایی. درمسائل ۶ تا ۹ از فرمول (۱۱) ضمیمه ۳ استفاده کنید]

$$e^t * e^t \quad .۳ \quad 1 * \sin t \quad .۲ \quad 1 * 1 \quad .۱$$

$$e^{at} * e^{bt} \quad (a \neq b) \quad .۴ \quad t * e^{at} \quad .۵ \quad \sin t * \sin t \quad .۶$$

$$\sin t * \cos t \quad .۹ \quad \cos t * \cos t \quad .۸ \quad \sin t * \sin 2t \quad .۷$$

به کمک قضیه پیچش $h(t)$ را بیابید هر گاه $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ برابر باشد با

$$\frac{1}{(s-a)^2} \quad .۱۱ \quad \frac{1}{(s-a)^2} \quad .۱۰$$

$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} \quad .۱۳ \quad \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b) \quad .۱۲$$

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} \quad .۱۵ \quad \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} \quad .۱۴$$

$$\frac{s^2}{(s^2+1)^2} \quad .۱۷ \quad \frac{s^3}{(s^2+\omega^2)^2} \quad .۱۶$$

$$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (a^2 \neq b^2) \quad .۱۸$$

۱۹. قانون جابه‌جایی $f * g = g * f$ را ثابت کنید.

۲۰. قانون انجمنی $(f * g) * v = f * (g * v)$ را ثابت کنید.

۲۱. قانون پخشپذیری $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ را ثابت کنید.

۲۲. با استفاده از قضیه پیچش، به کمک استقرا ثابت کنید که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}.$$

۲۳. چگونه می‌توانیم قضیه ۳، بخش ۲.۵، را از قضیه پیچش به دست آوریم؟

۲۴. مثالی بیاورید که امکان عدم برقراری $(f * f)(t) \geq 0$ را نشان دهد. (فرض کنید

$$f(t) = \cos t$$

با به کار بردن پیچش، مسائل یا مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \sin 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .۲۵$$

$$y'' + y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad .۲۶$$

$$r(t) = 0 \text{ و } 0 < t < 1 \text{ هر گاه } r(t) = 1 \text{ که در آن } y'' + 2y = r(t) \quad .۲۷$$

هرگاه $t > 1$ و $y(0) = 0$ ، $y'(0) = 0$.

معادلات انتگرالی. يك معادله انتگرالی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول، مثلاً $y(t)$ ، زیر علامت انتگرال است. مسائل زیر بعضی از انواع معادلات انتگرالی را که می‌توان با توجه به قضیهٔ پیچش حلشان کرد نشان می‌دهند.

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau \quad ۲۸$$

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau \quad ۲۹$$

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau \quad ۳۰$$

۶.۵ کسره‌های جزئی

بیشتر مسائلی که تاکنون در این فصل بررسی شدند به معادله‌ای کمکی منجر گردیدند که جواب آن $y(s)$ به صورت

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

بود که $F(s)$ و $G(s)$ چندجمله‌ایهایی از s بودند. در چنین موردی برای تعیین جواب مسئله، $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$ ، می‌توان ابتدا $Y(s)$ را بر حسب کسره‌های جزئی نوشت. درواقع، این همان کاری است که در برخی حالات ساده‌تر، به صورتی خاص و بدون اشکال، انجام دادیم. در بخش حاضر با در نظر گرفتن فرض زیر، به طور منظم‌تر و اصولی‌تر وارد بحث کسره‌های جزئی می‌شویم.

فرض

$F(s)$ و $G(s)$ دارای ضرایبی حقیقی هستند و عامل مشترکی ندارند. درجهٔ $F(s)$ کمتر از درجهٔ $G(s)$ است.

شکل کسره‌های جزئی به نوع عوامل $G(s)$ بستگی دارد. نخست یادآوری می‌کنیم که با تبدیلات معکوس متناظر که در ذیل آمده‌اند قبلاً آشنا شده‌ایم. به عامل غیر مکرر $s-a$ از $G(s)$ کسر جزئی $A/(s-a)$ مربوط می‌شود و (ر. ک. جدول ۱۰.۵ بخش ۱۰.۵)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-a}\right\} = A e^{at}$$

به عامل مکرر $(s-a)^m$ مجموع زیر مربوط می شود:

$$\frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{s-a}$$

و (ر.ك. مثال ۱، بخش ۳.۵)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A_k}{(s-a)^k} \right\} = A_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}$$

که در آن $m, \dots, 1, k$ در حالتی که $G(s) = 0$ دارای ریشه مختلط $a = \alpha + i\beta$ باشد، با توجه به اینکه عدد مختلط $\bar{a} = \alpha - i\beta$ نیز ریشه $G(s) = 0$ است، و از آنجا که ضرایب $G(s)$ حقیقی هستند، می توان از نوشتن کسرهای جزئی مختلط اجتناب کرد، در نتیجه، با استفاده از رابطه $(s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2$ می توانیم کسرهایی به شکل

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

تشکیل دهیم هرگاه $s-a$ و $s-\bar{a}$ عوامل غیر مکرر $G(s)$ باشند و کسرهایی به شکل

$$\frac{As+B}{[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^2} + \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

تشکیل دهیم هرگاه $s-a$ و $s-\bar{a}$ عوامل مکرر $G(s)$ باشند. در این صورت لازم است (ر.ك. مثال ۱، بخش ۳.۵)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As+B}{(s-a)(s-\bar{a})} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A(s-\alpha) + \alpha A + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \right\} \\ &= e^{at} \left[A \cos \beta t + \frac{\alpha A + B}{\beta} \sin \beta t \right] \end{aligned}$$

و (ر.ك. مثال ۱، بخش ۴.۵)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A(s-\alpha) + \alpha A + B}{[(s-a)^2 + \beta^2]^2} \right\} \\ = e^{at} \left[\frac{At}{2\beta} \sin \beta t + \frac{\alpha A + B}{2\beta^2} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t) \right] \end{aligned}$$

[عوامل مختلط $(s-a)^2, (s-\bar{a})^2, \dots$ ، را که در عمل از اهمیت کمتری برخوردارند بررسی نمی کنیم.] آنچه می ماند تعیین ثابتهای A و B و غیره است که برای این کار هم روشهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ارائه شده است؟ حال دانشجو می تواند

بیدرنک مثالهای ۱ تا ۴ (همین بخش) را بررسی کند و درستی نتایج فوق را به هر روشی که می داند؛ یعنی با به کار بردن روش دلخواه خود برای تعیین این ضرایب، تحقیق کند. برای آنکه مطلب را کامل کنیم، روشی مبتنی بر نظام ارائه می دهیم که چگونگی به دست آوردن این ثابتها را از کمیتهایی که مستقیماً به $Y(s) = F(s)/G(s)$ مربوط می شوند، نشان می دهد.

نمادگذاری

روابط (۱ الف)، (۲ الف)، ...، (۵ الف) (که در زیر می آیند) نمایشهای $Y(s) = F(s)/G(s)$ هستند و در هر حالت، $W(s)$ نشان دهنده حاصل جمع کسرهای جزئی است که با عوامل خطی (غیر مکرر یا مکرر) از $G(s)$ که مورد نظرمان نیستند متناظرند.

حالت ۱. عوامل غیر مکرر $s-a$. در این حالت،

$$(۱ الف) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A}{s-a} + W(s).$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$(۱ ب) \quad \mathcal{L}^{-1}(Y) = Ae^{at} + \mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن A یا یکی از دو عبارت زیر داده می شود

$$(۱ پ) \quad A = \frac{F(a)}{G'(a)} \quad \text{یا} \quad A = Q_a(a)$$

و $Q_a(s)$ تابعی است که از $Y(s)$ پس از حذف عامل $s-a$ از $G(s)$ باقی می ماند؛ یعنی

$$(۱ ت) \quad Q_a(s) = \frac{(s-a)F(s)}{G(s)}.$$

شاخص a در Q_a برای تأکید بر این امر مهم است که Q_a به a بستگی دارد و مقدار آن وقتی از يك عامل خطی به سراغ عامل خطی دیگر می رویم، تغییر می کند.

حالت ۲. عامل مکرر $(s-a)^m$ در این حالت

$$(۲ الف) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{s-a} + W(s).$$

تبدیل معکوس این عبارت برابر است با

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{at} \left(A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_2 \frac{t}{1!} + A_1 \right) + \mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن ثابتهای $A_m, \dots, A_1$ از فرمولهای زیر به دست می آیند:

$$(پ ۲) \quad A_m = Q_a(a), \quad A_k = \frac{1}{(m-k)!} \left. \frac{d^{m-k} Q_a(s)}{ds^{m-k}} \right|_{s=a} \quad (k=1, \dots, m-1);$$

در اینجا

$$Q_a(s) = \frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}.$$

عوامل مختلط. در حالات پیشین عدد a می توانست حقیقی و یا مختلط باشد، ولی هرگاه a مختلط باشد، استفاده از بعضی فرمولهای دیگر از نقطه نظر عملی ترجیح دارد، فرض کنید

$$\bar{a} = \alpha - i\beta \quad \text{و} \quad a = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0, \alpha, \beta \text{ حقیقی}).$$

هرگاه $s = a$ ریشه ای از $G(s) \approx 0$ باشد، آنگاه، چون ضرایب $G(s)$ حقیقی هستند، $s = \bar{a}$ نیز ریشه ای از $G(s) = 0$ خواهد بود.

حالت ۳. عوامل مختلط مکرر یا غیر مکرر $s - a$ ، با نوشتن کسر جزئی متناظر با $s - a$ و $s - \bar{a}$ به طور مشروح و با توجه به اینکه

$$(s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2,$$

داریم

$$(الف ۳) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{As+B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} + W(s) \quad (A \text{ و } B \text{ حقیقی}).$$

تبدیل معکوس عبارت است از

$$(ب ۳) \quad \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{\beta} e^{at} (T_a \cos \beta t + S_a \sin \beta t) + \mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن T_a و S_a قسمتهای حقیقی و موهومی

$$(پ ۳) \quad R_a(a) = S_a + iT_a$$

هستند، در اینجا

$$(ت ۳) \quad R_a(s) = [(s-\alpha)^2 + \beta^2] \frac{F(s)}{G(s)}$$

حالت ۴. عامل مختلط مکرر $(s-a)^2$. با نوشتن کسرهای جزئی متناظر با $(s-a)^2$ و $(s-\bar{a})^2$ به طود مشروح، داریم

$$(۴ الف) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{As+B}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} + \frac{Cs+D}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + W(s)$$

که در آن A, B, C, D حقیقی هستند. تبدیل معکوس عبارت است از

$$(۴ ب) \quad \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{1}{2\beta^2} e^{\alpha t} [(T_a - \beta S_a^* - \beta S_a t) \cos \beta t + (S_a + \beta T_a^* + \beta T_a t) \sin \beta t] + \mathcal{L}^{-1}(W)$$

که در آن

$$(۴ ب) \quad R_a(a) = S_a + iT_a, \quad R'_a(a) = S_a^* + iT_a^*$$

$$(۴ ت) \quad R_a(s) = [(s-\alpha)^2 + \beta^2] \frac{F(s)}{G(s)}.$$

اثبات فرمولها

اثبات در حالت ۱. با ضرب (۱ الف) در $s-a$ و با استفاده از (۱ ت)، داریم

$$Q_a(s) = A + (s-a)W(s).$$

با فرض $s \rightarrow a$ و با توجه به اینکه $W(s)$ شامل عامل $s-a$ نیست به فرمول اول ذکر شده در (۱ ب)، $A = Q_a(a)$ ، می‌رسیم. هر گاه (۱ ت) را به صورت زیر بنویسیم:

$$Q_a(s) = \frac{F(s)}{G(s)/(s-a)}$$

و فرض کنیم $s \rightarrow a$ آنگاه $F(s) \rightarrow F(a)$ ، و مخرج به صورت نامعین $0/0$ درمی‌آید که بارفع ابهام از آن به روش معمول، به دست می‌آوریم

$$\lim_{s \rightarrow a} \frac{G(s)}{s-a} = \lim_{a \rightarrow s} \frac{G'(s)}{(s-a)'} = G'(a).$$

بدین ترتیب فرمول دوم ذکر شده در (۱ ب) اثبات می‌شود. تبدیل معکوس $A/(s-a)$ عبارت است از Ae^{at} ، و بنابراین اثبات به اتمام می‌رسد.

اثبات در حالت ۲. با ضرب (۲ الف) در $(s-a)^m$ و با استفاده از (۲ ت) داریم

$$Q_a(s) = A_m + (s-a)A_{m-1} + (s-a)^2 A_{m-2} + \dots + (s-a)^m W(s).$$

از این رو $Q_a(a) = A_m$ با مشتقگیری نتیجه می گیریم

$$Q_a'(s) = A_{m-1} + (\text{جملات دیگری که شامل عاملهای } s-a \text{ هستند})$$

پس $Q_a'(a) = A_{m-1}$ زیرا داخل پرانتز به ازای $s=a$ صفر می شود. با مشتقگیری مجدد می یابیم $Q_a''(a) = 2! A_{m-2}$ و غیره؛ بدین ترتیب (۲) ثابت می شود. تبدیل معکوس $A_k/(s-a)^k$ عبارت است از $A_k e^{at} t^{k-1}/(k-1)!$ و بدین ترتیب (۲) نتیجه می شود. ▲

اثبات در حالت ۳. با ضرب (۳ الف) در $(s-\alpha)^2 + \beta^2$ ، با استفاده از (۳ ت)، و با فرض $s \rightarrow a$ به دست می آوریم

$$R_a(a) = aA + B = (\alpha + i\beta)A + B.$$

قسمتهای حقیقی و موهومی دو طرف باید برابر باشند. بنابراین با استفاده از (۳پ) داریم

$$S_a = \alpha A + B, \quad T_a = \beta A.$$

از این رو در (۳ الف)،

$$\frac{As+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A(s-\alpha)+\alpha A+B}{(s-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \frac{T_a(s-\alpha)+\beta S_a}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

با توجه به این تساوی و مثال ۱ بخش ۳.۵ رابطه (۳ ب) را به دست می آوریم. ▲

اثبات در حالت ۴. با معرفی نماد

$$p(s) = (s-a)(s-\bar{a}) = (s-\alpha)^2 + \beta^2,$$

با ضرب (۴ الف) در p^2 ، و با استفاده از (۴ ت) داریم

$$R_a(s) = As + B + (Cs + D)p(s) + p^2(s)W(s).$$

حال فرض می کنیم $s \rightarrow a$. نظر به اینکه $p(a) = 0$ ، به سادگی به دست می آوریم

$$(۵) \quad R_a(a) = aA + B = (\alpha + i\beta)A + B.$$

با مشتقگیری از $R_a(s)$ نسبت به s نتیجه می گیریم

$$R_a'(s) = A + (Cs + D)p'(s) + (p(s) \text{ عامل شامل عامل})$$

چون $p(a) = 0$ و $p'(a) = 2(a-\alpha) = 2i\beta$ نتیجه می شود که

$$(۶) \quad R_a'(a) = A + 2i\beta[C(\alpha + i\beta) + D].$$

در (۵) و (۶) قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین معادله‌ها باید برابر باشند. بنابراین با استفاده از (۴ پ) به دست می‌آوریم

$$(۷) \quad S_a = \alpha A + B, \quad T_a = \beta A$$

و به علاوه

$$S_a^* = A - 2\beta^2 C, \quad T_a^* = 2\alpha\beta C + 2\beta D,$$

که نتیجه می‌دهد

$$(۸) \quad C = (T_a - \beta S_a^*) / 2\beta^2, \quad \alpha C + D = T_a^* / 2\beta.$$

با توجه به مثال ۱، بخش ۳.۵، مشاهده می‌کنیم که کسر جزئی

$$\frac{Cs + D}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{C(s - \alpha) + \alpha C + D}{(s - \alpha)^2 + \beta^2}$$

در (۴ الف) دارای تبدیل معکوس زیر است:

$$e^{\alpha t} [\beta C \cos \beta t + (D + \alpha C) \sin \beta t] / \beta.$$

کسر جزئی دیگر، یعنی

$$\frac{As + B}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2} = \frac{A(s - \alpha)^2 + \alpha A + B}{[(s - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$$

دارای تبدیل معکوس

$$e^{\alpha t} [(A\beta^2 t + \alpha A + B) \sin \beta t - (\alpha A + B) \beta t \cos \beta t] / 2\beta^2$$

است که از مثال ۱ بخش ۴.۵ نتیجه می‌شود. با قراردادن (۷) و (۸) در عبارت بالا و خلاصه کردن آن، (۴ ب) حاصل می‌شود و اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

مثال ۱

تبدیل معکوس

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{s+1}{s^2+s^2+6s}$$

را بیابید. مخرج دارای سه عامل خطی متمایز s ، $s-2$ و $s+3$ است که متناظرند با ریشه‌های $a_1=0$ ، $a_2=2$ و $a_3=-3$. از این رو

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s+3},$$

و $F(s) = s + 1$ ، $G'(s) = 3s^2 + 2s - 6$. بنابراین با استفاده از (۱) به دست می‌آوریم

$$A_1 = \frac{F(0)}{G'(0)} = -\frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{F(2)}{G'(2)} = \frac{3}{10}, \quad A_3 = \frac{F(-3)}{G'(-3)} = -\frac{2}{15}.$$

با توجه به این مقادیر و (۱) تبدیل معکوس عبارت است از

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}.$$

مثال ۲

مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$y'' - 3y' + 2y = 4t + e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

با توجه به جدول ۱۰.۵، بخش ۱۰.۵، و روابط (۱) و (۲) بخش ۲.۵، معادله کمکی چنین است:

$$s^2Y - s + 1 - 3(sY - 1) + 2Y = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}.$$

با حل این معادله نسبت به Y و با نمایش Y بر حسب کسرهای جزئی، داریم

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{s^2 - 7s^2 + 13s^2 + 4s - 12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)} \\ &= \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1}. \end{aligned}$$

نخست ثابتهای A_1 و A_2 را در کسرهای جزئی متناظر با ریشه $a=0$ تعیین می‌کنیم. در (۲) (ت) و (۲) (ب)،

$$Q_0(s) = \frac{F(s)}{(s-3)(s^2-3s+2)}, \quad A_2 = Q_0(0) = 2, \quad A_1 = Q'_0(0) = 3.$$

با استفاده از (۱) سایر ضرایب را به دست می‌آوریم:

$$B = \frac{F(s)}{s^2(s^2-3s+2)} \Big|_{s=3} = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{F(s)}{s^2(s-3)(s-1)} \Big|_{s=2} = -2,$$

$$D = \frac{F(s)}{s^2(s-3)(s-2)} \Big|_{s=1} = -\frac{1}{2}.$$

با توجه به (۱ ب) و (۲ ب) ملاحظه می‌کنیم که جواب عبارت است از

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 2t + 3 + \frac{1}{4}e^{2t} - 2e^{3t} - \frac{1}{4}e^t.$$

دانشجو می‌تواند مسئله را به روش کلاسیک حل کند و به این ترتیب خود را متقاعد سازد که روش حاضر بسیار ساده‌تر است و سریع‌تر به نتیجه می‌رسد.

مثال ۳. نوسانات واداشته، تشدید

مسئله با مقدار اولیه طرح شده در مثال ۲ بخش ۵.۵ را با روش کسرهای جزئی حل کنید. وقتی تشدید روی نمی‌دهد. هر گاه $p^2 \neq \omega_0^2$ ، $Y(s)$ جواب معادله کمکی (۲) بخش ۵.۵ و نمایش آن بر حسب کسرهای جزئی عبارت است از

$$(9) \quad Y(s) = \frac{Kp}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + p^2)} = \frac{As + B}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{Ms + N}{s^2 + p^2}.$$

نخست A و B را در کسر متناظر با $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1 = i\omega_0$ تعیین می‌کنیم. در (۳ ب)،

$$R_{a_1}(a_1) = S_{a_1} + iT_{a_1} = \left. \frac{Kp}{s^2 + p^2} \right|_{s=a_1} = \frac{Kp}{p^2 - \omega_0^2}$$

بنابراین $T_{a_1} = 0$. با توجه به این رابطه و (۳ ب)، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل معکوس اولین کسر سمت راست (۹) عبارت است از

$$\frac{Kp}{\omega_0(p^2 - \omega_0^2)} \sin \omega_0 t.$$

حال M و N را در کسر دوم که متناظر است با $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2 = ip$ تعیین می‌کنیم. در (۳ ب) داریم

$$R_{a_2}(a_2) = S_{a_2} + iT_{a_2} = \left. \frac{Kp}{s^2 + \omega_0^2} \right|_{s=a_2} = \frac{Kp}{\omega_0^2 - p^2}.$$

از این رو $T_{a_2} = 0$. با توجه به (۳ ب) نتیجه می‌گیریم که تبدیل معکوس این کسر عبارت است از

$$-\frac{K}{p^2 - \omega_0^2} \sin pt.$$

با جمع کردن این دو تبدیل جواب مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{K}{p^2 - \omega_0^2} \left(\frac{p}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin pt \right).$$

وقتی تشدید روی می‌دهد. هر گاه $p = \omega_0$ ، جواب معادله کمکی عبارت است از

$$Y(s) = \frac{K\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}.$$

مخرج دارای ریشه مضاعف $a = \alpha + i\beta = i\omega_0$ و $\bar{a} = -i\omega_0$ است یعنی $\alpha = 0$ و $\beta = \omega_0$. در (۴ پ) و (۴ ت)،

$$R_0(s) = K\omega_0, \quad S_0 = K\omega_0, \quad T_0 = 0, \quad R_0'(s) = 0,$$

و از (۴ ب) جواب زیر حاصل می‌شود:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{K}{2\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t).$$

نتایج اخیر با نتایج مثال ۲ بخش ۵.۵ مطابقت دارد. ▲

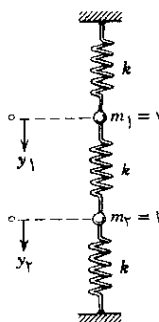
دستگاه معادلات دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس را می‌توان برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل نیز به کار برد. این روش را با ارائه یک مثال نوعی توضیح می‌دهیم.

مثال ۴. ارتعاش دو جرم

دستگاه مکانیکی شکل ۹۰ متشکل از دو جرم و سه فنر است و از معادلات دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند.

$$\begin{aligned} y_1'' &= -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' &= -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{aligned} \quad (10)$$



شکل ۹۰. مثال ۴

در این معادلات k مدول هر کدام از فنرها و y_1 و y_2 فاصله جرمها از وضعیت تعادل ایستایشان است؛ از جرم فنرها و از میرایی صرف نظر می شود. برای به دست آوردن معادلات (۱۵) همان کاری را می کنیم که در مورد معادله دیفرانسیل ذکر شده در بخش ۲.۴ انجام دادیم؛ بخش ۱.۳ را نیز ببینید.

می خواهیم جواب متناظر با شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 1$ ، $y_1'(0) = -\sqrt{3k}$ ، $y_2'(0) = \sqrt{3k}$ را تعیین کنیم. فرض کنید $Y_1 = \mathcal{L}(y_1)$ و همچنین $Y_2 = \mathcal{L}(y_2)$. در این صورت با توجه به رابطه (۲) بخش ۲.۵ و شرایط اولیه، معادلات کمکی زیر را به دست می آوریم:

$$s^2 Y_1 - s - \sqrt{3k} = -k Y_1 + k(Y_2 - Y_1)$$

$$s^2 Y_2 - s + \sqrt{3k} = -k(Y_2 - Y_1) - k Y_2.$$

این دستگاه معادلات جبری خطی، بر حسب مجهولات Y_1 و Y_2 را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(s^2 + 2k)Y_1 - kY_2 = s + \sqrt{3k}$$

$$-kY_1 + (s^2 + 2k)Y_2 = s - \sqrt{3k}.$$

از قاعده کرامر* (بخش ۹.۷) یا به کمک روش حذفی، جواب زیر را نتیجه می گیریم

$$Y_1 = \frac{(s + \sqrt{3k})(s^2 + 2k) + k(s - \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2}$$

$$Y_2 = \frac{(s^2 + 2k)(s - \sqrt{3k}) + k(s + \sqrt{3k})}{(s^2 + 2k)^2 - k^2}.$$

نمایش این دو کسر بر حسب کسره های جزئی چنین است:

$$Y_1 = \frac{s}{s^2 + k} + \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}, \quad Y_2 = \frac{s}{s^2 + k} - \frac{\sqrt{3k}}{s^2 + 3k}.$$

از این رو جواب مسئله با مقدار اولیه داده شده عبارت است از

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_1) = \cos \sqrt{k}t + \sin \sqrt{3k}t$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_2) = \cos \sqrt{k}t - \sin \sqrt{3k}t.$$

مسائل بخش ۶.۵

۱. معادلات (۱۰) از مثال ۴ را به دست آورید.

با استفاده از کسرهای جزئی $f(t)$ را بیابید، هر گاه $\mathcal{L}(f)$ برابر باشد با

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad .3 \quad \frac{3s-2}{s^2-s} \quad .2$$

$$\frac{4s+4}{s^2+16} \quad .5 \quad \frac{s^2+9s-9}{s^2-9s} \quad .4$$

$$\frac{s}{(s+1)^2} \quad .7 \quad \frac{s}{s^2+2s+2} \quad .6$$

$$\frac{2s^2-3s}{(s-2)(s-1)^2} \quad .9 \quad \frac{s^2+6s^2+14s}{(s+2)^4} \quad .8$$

$$\frac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2} \quad .11 \quad \frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2} \quad .10$$

$$\frac{s^2-3s^2+6s-4}{(s^2-2s+2)^2} \quad .13 \quad \frac{3s^2-6s+7}{(s^2-2s+5)^2} \quad .12$$

۱۴. مسائل ۳ و ۱۰ را با استفاده از فرمولهای پیچش حل کنید.

نشان دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4+4a^4}\right\} = \cosh at \cos at \quad .15$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2a^3} \sinh at \sin at \quad .16$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2a} (\cosh at \sin at + \sinh at \cos at) \quad .17$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{4a^3} (\cosh at \sin at - \sinh at \cos at) \quad .18$$

مسائل با مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3 \quad .19$$

$$y'' + 2y' - 3y = 10 \sinh 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4 \quad .20$$

$$y'' - 4y = 8t^2 - 4, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10 \quad .21$$

$$y'' - 2y' + 5y = 8 \sin t - 4 \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \quad .22$$

$$y'' + 2y' + y = 2 \cos t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0 \quad .23$$

$$y'' + y = -2 \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad .24$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل. مسائل با مقدار اولیه زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0 \quad .25$$

$$y_1' + y_2 = 2 \cos t, \quad y_1 + y_2' = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1 \quad .26$$

$$y_1'' = y_1 + 3y_2, \quad y_2'' = 4y_1 - 4e^t, \quad y_1(0) = 2 \quad .27$$

$$y_1'(0) = 2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2'(0) = 3$$

$$y_1'' + y_2 = -5 \cos 2t, \quad y_2'' + y_1 = 5 \cos 2t \quad .28$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_2'(0) = 1$$

$$y_1' + y_2' = 2 \sinh t, \quad y_2' + y_3' = e^t, \quad y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t}, \quad .29$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 0$$

$$-2y_1' + y_2' + y_3' = 0, \quad y_1' + y_2' = 4t + 2, \quad y_2' + y_3 = t^2 + 2, \quad .30$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$$

۷۰۵ توابع دوره‌ای. چند کاربرد دیگر

توابع دوره‌ای در بسیاری از مسائل عملی ظاهر می‌شوند، این توابع در اکثر موارد پیچیده‌تر از توابع صرفاً کسینوسی یا سینوسی هستند. این امر عنوان بخش حاضر را که با روشی منظم به تبدیل توابع دوره‌ای می‌پردازد، توجیه می‌کند. در متن درس و مسائل انتهای بخش نیز کاربردهای بیشتری را گنجانده‌ایم.

فرض کنید $f(t)$ تابعی باشد که به ازای هر مقدار مثبت t تعریف شده و دارای

دوره $p (> 0)$ است، یعنی

$$f(t+p) = f(t) \quad \text{به ازای هر } t > 0$$

هرگاه $f(t)$ بر فاصله‌ای به طول p پیوسته تکه‌ای باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن موجود است و می‌توان انتگرال از صفر تا بینهایت آن را به صورت یک سری از انتگرال‌های روی دوره‌های متوالی نوشت:

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \int_{2p}^{3p} e^{-st} f(t) dt + \dots$$

هرگاه در انتگرال دوم قرار دهیم $t = \tau + p$ ، در انتگرال سوم $t = \tau + 2p$ ، ...، و در انتگرال n ام $t = \tau + (n-1)p$ ، ...، آنگاه حدود جدید همگی از صفر تا p خواهند بود. چون

$$f(\tau + p) = f(\tau), \quad f(\tau + 2p) = f(\tau),$$

و غیره، بنابراین به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \int_0^p e^{-s(\tau+p)} f(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^p e^{-s(\tau+2p)} f(\tau) d\tau + \dots \end{aligned}$$

عواملی را که به τ بستگی ندارند می‌توان از زیر علامت انتگرال خارج کرد؛ در نتیجه

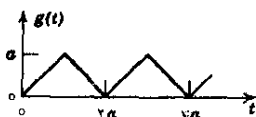
$$\mathcal{L}(f) = [1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots] \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau.$$

سری داخل کروشه سری هندسی است که مجموع آن برابر $1/(1 - e^{-ps})$ است. با توجه به این مطالب، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

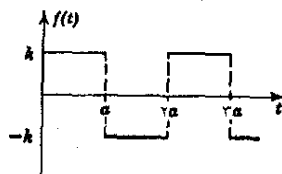
قضیه ۱ (تبدیل توابع دوره‌ای)

تبدیل لاپلاس تابع پیوسته تکه‌ای $f(t)$ که دوره آن p است عبارت است از

$$(1) \quad \mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt \quad (s > 0).$$



شکل ۹۲. مثال ۲



شکل ۹۱. مثال ۱

مثال ۱. موج مربعی دوره‌ای

تبدیل موج مربعی نشان داده شده در شکل ۹۱ را بیابید. در اینجا $p = 2a$ ، و با توجه به (۱) ما با انتگرالگیری مستقیم و ساده کردن نتیجه به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \frac{1}{1 - e^{-2as}} \left(\int_0^a k e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-k) e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{k}{s} \frac{1 - 2e^{-as} + e^{-2as}}{(1 + e^{-as})(1 - e^{-as})} = \frac{k}{s} \left(\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right) \\ &= \frac{k}{s} \frac{e^{-as/2} (e^{as/2} - e^{-as/2})}{e^{-as/2} (e^{as/2} + e^{-as/2})}\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{s} \tanh \frac{as}{2}.$$

می‌توانیم این فرمول را به شکل دیگری نیز بنویسیم که گرچه به زیبایی فرمول بالا نیست ولی اکثر اوقات مفیدتر از آن واقع می‌شود:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{s} \left(\frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right) = \frac{k}{s} \left(1 - \frac{2e^{-as}}{1 + e^{-as}} \right) = \frac{k}{s} \left(1 - \frac{2}{e^{as} + 1} \right).$$

مثال ۲. موج مثلثی دوره‌ای

تبدیل تابع دوره‌ای نشان داده شده در شکل ۹۲ را پیدا کنید. ملاحظه می‌کنیم که $g(t)$ انتگرال تابع $f(t)$ ، با $k=1$ ، در مثال ۱ است. پس، بنا بر قضیه ۳ از بخش ۲.۵ داریم

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{as}{2}.$$

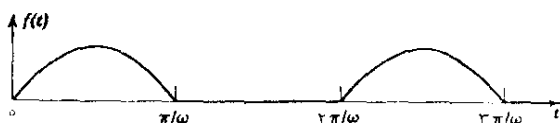
مثال ۳. یکسوکنده نیم‌موجی

تبدیل تابع $f(t)$ زیر را که دوره آن $p = 2\pi/\omega$ است پیدا کنید:

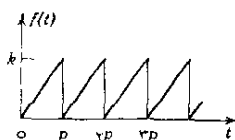
$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}.$$

توجه کنید که این تابع یکسو شده نیم موجی $\sin \omega t$ است (شکل ۹۳). بنابراین (۱) داریم

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt.$$



شکل ۹۳. یکسو شده نیم موجی $\sin \omega t$



شکل ۹۴. موج دندانه اره‌ای

با انتگرال‌گیری جزء به جزء یا با توجه به اینکه انتگرال فوق قسمت موهومی انتگرال

$$\int_0^{\pi/\omega} e^{(-s+i\omega)t} dt = \frac{1}{-s+i\omega} e^{(-s+i\omega)t} \Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{-s-i\omega}{s^2+\omega^2} (-e^{-s\pi/\omega} - 1)$$

است، نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega(1 + e^{-\pi s/\omega})}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-2\pi s/\omega})} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-s\pi/\omega})}.$$

مثال ۴. موج دندانه اره‌ای

تبدیل لاپلاس تابع (شکل ۹۴) $f(t) = \frac{k}{p} t$ را در صورتی که $0 < t < p$ و $f(t+p) = f(t)$ بیابید. با انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} \int_0^p e^{-st} t dt &= -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^p + \frac{1}{s} \int_0^p e^{-st} dt \\ &= -\frac{p}{s} e^{-sp} - \frac{1}{s^2} (e^{-sp} - 1), \end{aligned}$$

و بنابراین از (۱) نتیجه زیر حاصل می شود :

$$\mathcal{L}(f) = \frac{k}{ps^2} = \frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})} \quad (s > 0).$$

مثال ۵. تابع پلکانی

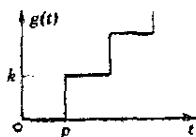
تبدیل لاپلاس تابع پلکانی زیر را بیابید (شکل ۹۵) :

$$g(t) = kn \quad [np < t < (n+1)p, \quad n=0, 1, 2, \dots].$$

چون $g(t)$ برابر تفاضل توابع $h(t) = kt/p$ (که تبدیل آن k/ps^2 است) و $f(t)$ ذکر شده در مثال ۴ است، داریم

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(h) - \mathcal{L}(f) = \frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})} \quad (s > 0).$$

مثال بعدی کاربرد تبدیل لاپلاس را در مورد یک معادله دیفرانسیل غیر همگن خطی که در طرف راست آن یک تابع دوره ای وجود دارد، نشان می دهد.



شکل ۹۵. تابع پلکانی

مثال ۶. نوسانات واداشته

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$(۲) \quad y'' + 2y' + 10y = r(t)$$

در این معادله (شکل ۹۶)

$$r(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases} \quad r(t+2\pi) = r(t).$$

معادله کمکی (۲) عبارت است از

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 2[sY - y(0)] + 10Y = R(s),$$

که در آن $R(s)$ نشان دهنده تبدیل $r(t)$ است. با حل این معادله نسبت به Y داریم

$$(۳) \quad Y(s) = \frac{(s+۲)y(۰) + y'(۰)}{s^2 + ۲s + ۱۰} + \frac{R(s)}{s^2 + ۲s + ۱۰}.$$

ریشه‌های مخرج عبارتند از

$$\bar{a} = -۱ - ۳i \quad \text{و} \quad a = -۱ + ۳i$$

تبدیل معکوس جمله اول (۳) چنین است:

$$\begin{aligned} (۴) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+۲)y(۰) + y'(۰)}{s^2 + ۲s + ۱۰} \right\} \\ = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+۱)y(۰)}{(s+۱)^2 + ۹} + \frac{y(۰) + y'(۰)}{(s+۱)^2 + ۹} \right\} \\ = e^{-t} \left(y(۰) \cos ۳t + \frac{y(۰) + y'(۰)}{۳} \sin ۳t \right). \end{aligned}$$

این جواب معادله همگن متناظر با معادله (۲) است. جمله دوم (۳) را در نظر می‌گیریم و $R(s)$ را تعیین می‌کنیم. $r(t)$ را می‌توان بر حسب توابع پله‌ای نمایش داد (بخش ۳.۵):

$$r(t) = u_0(t) - ۲u_{\pi}(t) + ۲u_{۲\pi}(t) - ۲u_{۳\pi}(t) + \dots$$

از رابطه (۳) بخش ۳.۵، تبدیل زیر را به دست می‌آوریم:

$$R(s) = \mathcal{L}(r) = \frac{1}{s} [1 - ۲e^{-\pi s} + ۲e^{-۲\pi s} - ۲e^{-۳\pi s} + \dots].$$

بنابراین

$$\frac{R(s)}{s^2 + ۲s + ۱۰} = \frac{1}{s[(s+۱)^2 + ۹]} \{1 - ۲e^{-\pi s} + \dots\}.$$

حال می‌دانیم که

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+۱)^2 + ۹} \right\} = \frac{1}{۳} e^{-t} \sin ۳t.$$

بنابراین، طبق قضیه ۳ بخش ۲.۵ داریم

$$(۵) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \left(\frac{1}{(s+۱)^2 + ۹} \right) \right\} = \frac{1}{۳} \int_0^t e^{-\tau} \sin ۳\tau d\tau = \frac{1}{۱۰} [1 - h(t)]$$

شکل ۹۶. ورودی $r(t)$ در مثال ۶

که در آن

$$(۶) \quad h(t) = e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right)$$

اگر تابع واقع در طرف راست (۵) را با $f(t)$ نشان دهیم،

$$f(t) = \frac{1}{10} - \frac{h(t)}{10},$$

و قضیه دوم انتقال (بخش ۳.۵) را به کار ببریم بدست می آوریم

$$(۷) \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R(s)}{s^2 + 2s + 10} \right\} \\ = f(t) - 2f(t - \pi)u_{\pi}(t) + 2f(t - 2\pi)u_{2\pi}(t) - + \dots$$

حال در مورد جملات طرف راست داریم

$$h(t - \pi) = e^{-(t-\pi)} \left[\cos 3(t - \pi) + \frac{1}{3} \sin 3(t - \pi) \right] = -h(t) e^{\pi},$$

و همین طور،

$$h(t - 2\pi) = h(t) e^{2\pi}, \quad h(t - 3\pi) = -h(t) e^{3\pi},$$

و غیره. نتیجه می گیریم که در (۷)،

$$f(t - \pi) = \frac{1}{10} - \frac{h(t - \pi)}{10} = \frac{1}{10} + \frac{h(t)}{10} e^{\pi}$$

$$f(t - 2\pi) = \frac{1}{10} - \frac{h(t - 2\pi)}{10} = \frac{1}{10} - \frac{h(t)}{10} e^{2\pi}$$

و غیره. طرف راست (۷) مساوی می شود با

$$\frac{1}{10} - \frac{h(t)}{10} \quad 0 < t < \pi,$$

$$-\frac{1}{10} - \frac{h(t)}{10} - \frac{h(t)}{\Delta} e^{\pi} \quad \pi < t < 2\pi,$$

$$\frac{1}{10} - \frac{h(t)}{10} - \frac{h(t)}{\Delta} (e^{\pi} + e^{2\pi}) \quad 2\pi < t < 3\pi.$$

$$\left(\frac{-1}{10} + \frac{h(t)}{10} - \frac{h(t)}{\Delta} (1 + e^{\pi} + \dots + e^{n\pi}) \right) \quad n\pi < t < (n+1)\pi.$$

با محاسبه مجموع جملات تصاعد هندسی متناهی داخل پرانتز، عبارت سطر آخر را می‌توان چنین نوشت:

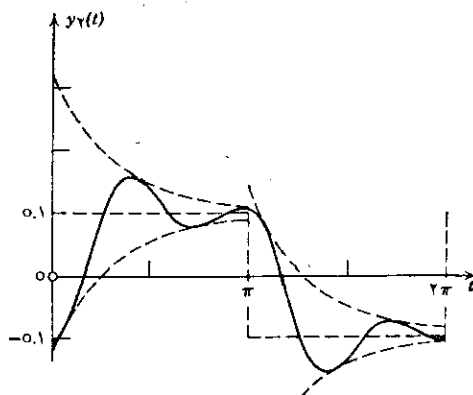
$$\left(\frac{-1}{10} + \frac{h(t)}{10} - \frac{h(t)}{\Delta} \left(\frac{e^{(n+1)\pi} - 1}{e^{\pi} - 1} \right) \right).$$

با توجه به فرمول (۶)، عبارت بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۸) \quad \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{\Delta(e^{\pi} - 1)} \right] e^{-t} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) + \frac{(-1)^n}{10} - \frac{1}{\Delta(e^{\pi} - 1)} e^{-[t - (n+1)\pi]} \left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right).$$

و جواب (۲) در فاصله $n\pi < t < (n+1)\pi$ برابر با حاصل جمع عبارت (۸) و عبارت سمت راست (۴) است.

واضح است که وقتی t به سمت بینهایت میل می‌کند، تابع ذکر شده در (۴) و تابع موجود در سطر اول (۸) هر دو به سمت صفر میل می‌کنند. تابع ذکر شده در سطر دوم (۸) تابعی است دوره‌ای از t با دوره 2π و بنابراین



شکل ۹۷. خروجی حالت پایداری (۹) در مثال ۶

جواب حالت پایرجای مسئله را نمایش می‌دهد. برای اینکه مطلب بیشتر روشن شود، این تابع را با $y_2(t)$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $t - n\pi = \tau$. آنگاه $t = \tau + n\pi$ و هنگامی که t از $n\pi$ تا $(n+1)\pi$ تغییر کند، τ از ۰ تا π تغییر می‌کند. به علاوه،

$$\cos 3t = \cos(3\tau + 3n\pi) = \cos 3\tau \cos 3n\pi = (-1)^n \cos 3\tau,$$

$$\sin 3t = \sin(3\tau + 3n\pi) = \sin 3\tau \cos 3n\pi = (-1)^n \sin 3\tau,$$

و خواهیم داشت:

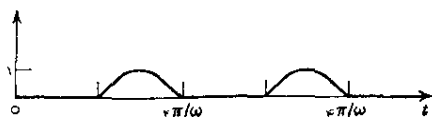
$$(9) \quad y_2 = (-1)^n \left[\frac{1}{10} - \frac{e^{-\tau+\pi}}{5(e^\pi - 1)} (\cos 3\tau + \frac{1}{3} \sin 3\tau) \right] \\ \approx (-1)^n [0.1 - 0.22e^{-\tau} \cos(3\tau - 0.322)]$$

که در آن $0 < \tau < \pi$ و $t = \tau + n\pi$ ، $n = 0, 1, \dots$. شکل ۹۷ این تابع را نشان می‌دهد؛ نموداری که در این شکل دیده می‌شود به ازای $0 < t < \pi$ از (۹) با $n = 0$ و $t = \tau$ ، و به ازای $\pi < t < 2\pi$ از (۹) با $n = 1$ و $t = \tau + \pi$ به دست آمده است.

شاید این نتیجه عجیب باشد که خروجی y_2 با سرعتی بیش از ورودی $r(t)$ تمایل به نوسان دارد. دلیل این رفتار غیرمنتظره در ملاحظات بعدی، در مبحث سری فوریه، بخش ۷.۱۰، روشن خواهد شد.

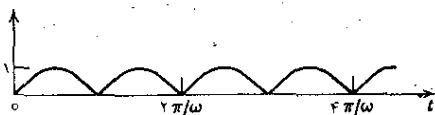
مسائل بخش ۷.۵

۱. قضیهٔ ۱ را در مورد تابع $f(t) = 1$ ، که با هر دوره p يك تابع دوره‌ای است، به کار ببرید.
۲. نشان دهید که جواب y در مثال ۶، در ۰ و π پیوسته است.
۳. تبدیل لاپلاس یکسوشدهٔ نیم موجی $-\sin \omega t$ را بیابید (شکل ۹۸).



شکل ۹۸. مسئله ۳

۴. مسئله ۳ را با به کار بردن قضیهٔ ۲ بخش ۳.۵ در مورد نتیجهٔ مثال ۳، حل کنید.
۵. تبدیل لاپلاس یکسوشدهٔ تمام موجی $\sin \omega t$ را بیابید (شکل ۹۹).



شکل ۹۹. مسئله ۵

۶. جواب مسئله ۵ را با استفاده از نتایج مثال ۳ و مسئله ۳ کنترل کنید.

۷. تبدیل لاپلاس $|\cos \omega t|$ را بیابید.

نمودار توابع زیر را، که دوره آنها 2π فرض می شود، رسم کنید و تبدیل هریک را بیابید.

۸. $f(t) = 2\pi - t \quad (0 < t < 2\pi)$

۹. $f(t) = e^t \quad (0 < t < 2\pi)$

۱۰. $f(t) = t^2 \quad (0 < t < 2\pi)$

۱۱. $f(t) = K \sin(t/2) \quad (0 < t < 2\pi)$

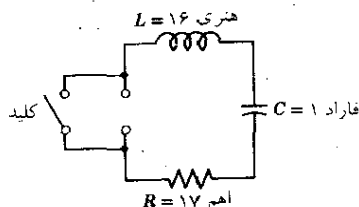
۱۲. $f(t) = 1 \quad (0 < t < \pi), f(t) = -1 \quad (\pi < t < 2\pi)$

۱۳. $f(t) = t \quad (0 < t < \pi), f(t) = \pi - t \quad (\pi < t < 2\pi)$

۱۴. $f(t) = 0 \quad (0 < t < \pi), f(t) = t - \pi \quad (\pi < t < 2\pi)$

۱۵. $f(t) = t \quad (0 < t < \pi), f(t) = 0 \quad (\pi < t < 2\pi)$

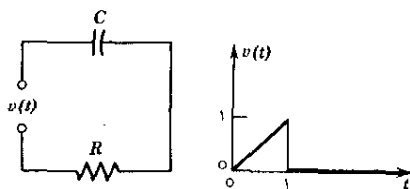
۱۶. خازنی ($C = 1$ فاراد) تا پتانسیل ولت $V_0 = 100$ پر شده است. در لحظه $t = 0$ کلید بسته می شود و خازن شروع به تخلیه شدن می کند (شکل ۱۰۰). شدت جریان مدار و بار خازن را بیابید.



شکل ۱۰۰. مسئله ۱۶

۱۷. پاسخ مدار RC شکل ۱۰۱ (شدت جریان $i(t)$ مدار) را به موج شبیهی پیدا کنید.

فرض براین است که در لحظه $t = 0$ جریانی از مدار نمی‌گذرد.

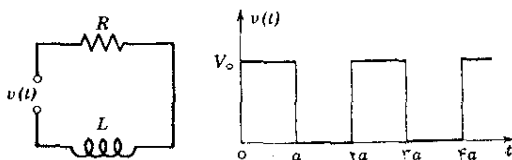


شکل ۱۰۱. مسئله ۱۷

۱۸. مسئله ۱۷ را بدون استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید. دلیل جهش $i(t)$ در $t = 1$ را بیان کنید.

۱۹. شدت جریان $i(t)$ در مدار RC شکل ۱۰۱ را بیابید در صورتی که

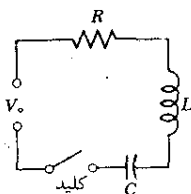
$$i(0) = 0 \text{ و } v(t) = 0 \left(t > \frac{\pi}{\omega} \right), \quad v(t) = \sin \omega t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{\omega} \right)$$



شکل ۱۰۲. مسئله ۲۰

۲۰. شدت جریان حالت پایا برجا را در مدار شکل ۱۰۲ بیابید.

۲۱. با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که شدت جریان $i(t)$ در مدار RLC شکل



شکل ۱۰۳. مسئله ۲۱

۱۰۳، با نیروی محرکه الکتریکی ثابت V_0 و شدت جریان و بار اولیه صفر، عبارت است از

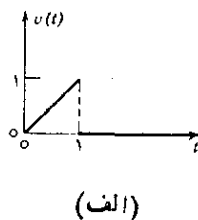
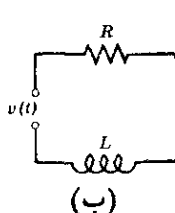
$$i(t) = \begin{cases} (K/\omega^*) e^{-\alpha t} \sin \omega^* t & \omega^{*2} > 0 \\ K t e^{-\alpha t} & \omega^{*2} = 0 \\ (K/\beta) e^{-\alpha t} \sinh \beta t & \omega^{*2} = -\beta^2 < 0 \end{cases}$$

که در آن $\omega^{*2} = (1/LC) - \alpha^2$ ، $\alpha = R/2L$ ، $K = V_0/L$

۲۲. شدت جریان در مدار مسئله ۲۱ را بیابید، بسا این فرض که نیروی محرکه الکتریکی اعمال شده در $t=0$ برابر $V_0 \sin pt$ و شدت جریان و بار در $t=0$ برابر صفر باشند.

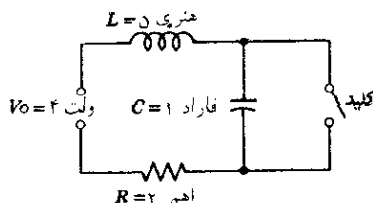
۲۳. شدت جریان در مدار RLC شکل ۱۰۳ را بیابید در صورتی که یک باتری با نیروی محرکه الکتریکی V_0 در $t=0$ به مدار وصل و در $t=a$ اتصال کوتاه شود. فرض کنید که شدت جریان و بار اولیه صفر است، و ω^{*2} ، همان طور که در مسئله ۲۱ تعریف شد، مثبت است.

۲۴. شدت جریان $i(t)$ در مدار شکل ۱۰۴ را، با فرض $i(0)=0$ ، بیابید.

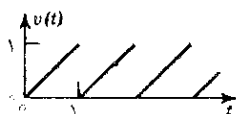


شکل ۱۰۴. مسئله ۲۴

۲۵. در شکل ۱۰۵ کلید بسته است و جریان پایرجا از مدار عبور می کند. در $t=0$ کلید باز می شود. شدت جریان $i(t)$ را بیابید.



۲۶. شدت جریان پابرجا در مدار شکل ۱۰۴ ب را بیابید در صورتی که $v(t) = t$ و وقتی $0 < t < 1$ و $v(t+1) = v(t)$ ؛ شکل ۱۰۶.



شکل ۱۰۶. مسئله ۲۶

۲۷. مدارهای شکل ۱۰۷ توسط القای متقابل M جفت شده‌اند، در $t = 0$ شدت جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ برابر صفرند. با به کار بردن قانون ولتاژ کیرشهف (بخش ۹.۱) نشان دهید که معادلات دیفرانسیل مربوط به شدت جریانهای دو مدار به صورت زیرند:

$$L_1 i_1' + R_1 i_1 = M i_2' + V_0 u_0(t)$$

$$L_2 i_2' + R_2 i_2 = M i_1'$$

در اینجا $u_0(t)$ تابع پله‌ای واحد است. با قرار دادن $\mathcal{L}(i_1) = I_1(s)$ و $\mathcal{L}(i_2) = I_2(s)$ ، نشان دهید که معادلات کمکی عبارتند از

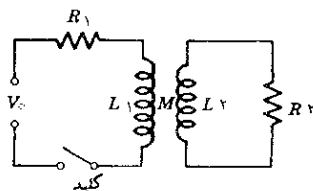
$$L_1 s I_1 + R_1 I_1 = M s I_2 + \frac{V_0}{s}$$

$$L_2 s I_2 + R_2 I_2 = M s I_1$$

با فرض $A \equiv L_1 L_2 - M^2 > 0$ ، نشان دهید I_2 را، که از حل معادلات فوق حاصل می‌شود، می‌توان به صورت

$$I_2 = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

نوشت که در آن $K = A^{-1} V_0 M$ ، $\alpha = (2A)^{-1} (R_1 L_2 + R_2 L_1)$ ،



شکل ۱۰۷. مسئله ۲۷

۲۶. $\omega^2 = A^{-1} R_1 R_2 - \alpha^2$. نشان دهید که $i_p(t) = \mathcal{L}^{-1}(I_p)$ به همان صورت $i(t)$ در مسئله ۲۱ است، با این تفاوت که ثابتهای K ، α و ω^2 در این مسئله طور دیگری تعریف شده اند.

۲۸. در مسئله ۲۷ عبارت $i_1(t)$ را، با فرض $\omega^2 > 0$ ، بیابید.

۲۹. نشان دهید که هرگاه در مسئله ۲۷ داشته باشیم $A = 0$ ، آنگاه $i_p(t) = K_0 e^{-at}$ در آن $B = (R_1 L_2 + R_2 L_1)^{-1}$ ، $a = B R_1 R_2$ ، $K_0 = B V_0 M$.

۳۰. فرض کنید که در اولین مدار شکل ۱۰۷ مدار بسته است و جریان پایرجایی برابر V_0/R_1 از مدار می گذرد. در $t = 0$ کلید باز می شود. جریان ثانویه $i_p(t)$ را بیابید. راهنمایی. توجه کنید که $i_1(0) = V_0/R_1$ ، و وقتی $t > 0$ ، $i_1 = 0$.

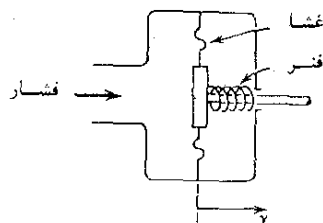
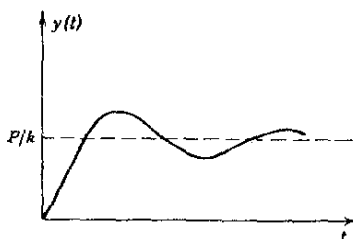
۳۱. شکل ۱۰۸ یک دستگاه کنترل فشار اتوماتیک را نشان می دهد. $y(t)$ تغییر مکان است و $y = 0$ متناظر با وضعیت تعادل در یک فشار ثابت مفروض است. فرض می کنیم که میرایی دستگاه متناسب با سرعت y' باشد، و فرض می کنیم در $t < 0$ دستگاه در حال سکون باشد و در $t = 0$ فشار به طور ناگهانی به صورت یک تابع پله ای واحد افزایش یابد. نشان دهید که معادله دیفرانسیل مربوطه عبارت است از

$$m y'' + c y' + k y = P u_0(t)$$

(m = جرم مؤثر اجزای در حال حرکت، c = ثابت میرایی، k = مدول فنرو P = نیروی ناشی از افزایش فشار در $t = 0$). با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان دهید که هرگاه $c^2 < 4mk$ ، آنگاه (شکل ۱۰۹)

$$y(t) = \frac{P}{k} [1 - e^{-\alpha t} \sqrt{1 + (\alpha/\omega^*)^2} \cos(\omega^* t + \theta)]$$

که در آن $\tan \theta = -\alpha/\omega^*$ ، $\omega^* = \sqrt{(k/m) - \alpha^2}$ (> 0)، $\alpha = c/2m$.



شکل ۱۰۹. تغییر مکان $y(t)$ در مسئله ۳۱

شکل ۱۰۸. مسئله ۳۱

۳۳. مسئله ۳۱ را در صورتی که $c^2 > 4mk$ حل کنید.

۳۳. مسئله ۳۱ را در صورتی که $c^2 = 4mk$ حل کنید.

۳۴. دو چرخ طیار (با گشتاورهای لختی M_1 و M_2) به میله کشسانی (که از گشتاور لختی آن صرف نظر می شود) وصل شده اند و با سرعت زاویه ای ثابت ω دوران می کنند. در $t = 0$ جفت نیروی ترمز کننده P به یکی از چرخها وارد می شود. سرعت زاویه ای $v(t)$ چرخ دیگر را بیابید.

۳۵. مسئله ۳۴ را در نظر بگیرید؛ با این تفاوت که این بار جفت نیروی ترمز کننده فقط در فاصله زمانی $0 < t < 1$ اعمال می شود. $v(t)$ را بیابید.

۸.۵ جدول برخی از تبدیلات لاپلاس

تصوره. فهرست جامعتری از تبدیلات لاپلاس و تبدیلات معکوس آنها در مرجع [BY] ضمیمه ۱ آمده است.

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
۱	$1/s$	۱
۲	$1/s^2$	t
۳	$1/s^n \quad (n=1, 2, \dots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
۴	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
۵	$1/s^{3/2}$	$\sqrt{t/\pi}$
۶	$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
۷	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
۸	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
۹	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
۱۰	$\frac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{(a-b)} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{(a-b)} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
14	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh at$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
19	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$
21	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
22	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos at - \cos bt)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
۲۵ $\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a^2} (\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$
۲۶ $\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a^2} \sin at \sinh at$
۲۷ $\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a^2} (\sinh at - \sin at)$
۲۸ $\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a^2} (\cosh at - \cos at)$
۲۹ $\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
۳۰ $\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{-(a+b)t/2} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$ (ر.ك. بخش ۶.۴)
۳۱ $\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$ (ر.ك. بخش ۵.۴)
۳۲ $\frac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
۳۳ $\frac{1}{(s^2 - a^2)^k} \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-1/2} I_{k-1/2}(at)$ (ر.ك. بخش ۶.۴)
۳۴ $\frac{1}{s} e^{-k/s}$	$J_0(2\sqrt{kt})$ (ر.ك. بخش ۵.۴)
۳۵ $\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{kt}$
۳۶ $\frac{1}{s^{3/2}} e^{k/s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \sinh 2\sqrt{kt}$
۳۷ $e^{-k\sqrt{s}} \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-k^2/4t}$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
٢٨	$\frac{1}{s} \ln s$	$-\ln t - \gamma$ ($\gamma \approx 0.5772$; ٤.٤ بخش ر.ك.)
٢٩	$\ln \frac{s-a}{s-b}$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
٣٠	$\ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos \omega t)$
٣١	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh at)$
٣٢	$\arctan \frac{\omega}{s}$	$\frac{1}{t} \sin \omega t$
٣٣	$\frac{1}{s} \operatorname{arccot} s$	$\operatorname{Si}(t)$ (ر.ك. ضمیمه ٣)

جبر خطی

قسمت اول: بردارها

دو عامل اصلی بر توسعهٔ ریاضیات مهندسی در دو دههٔ گذشته تأثیر گذاشته‌اند. این عوامل عبارتند از کاربرد بسیار گستردهٔ حسابگرهای خودکار در مسائل مهندسی و استفادهٔ فزاینده از جبر خطی و آنالیز خطی، مثلاً در حل مسائل طولانی تحلیل سیستمها.

چهار فصل بعدی (۶-۹) به جبر خطی (فصول ۷ و ۸) و آنالیز خطی (فصول ۸ و ۹) اختصاص داده شده‌اند. دو فصل اول مشتمل است بر اصول نظری و کاربرد بردارها و فضاها (بخشهای ۱۰.۶ تا ۴.۶)، ضرب نقطه‌ای و فضای ضرب داخلی (بخشهای ۵.۶ و ۶.۶)، ضرب برداری و ضرب سه‌گانهٔ اسکالر (بخشهای ۷.۶ تا ۹.۶)، ماتریسها و معادلات خطی (بخشهای ۱۰.۷ تا ۸.۷)، دترمینان و قاعدهٔ کرامر (بخشهای ۹.۷ تا ۱۱.۷)، صورت‌های درجه دوم و هرمیتی (بخش ۱۲.۷) و مقدار ویژه و بردار ویژه (بخشهای ۱۳.۷ و ۱۴.۷). بخش ۱۵.۷ به کاربرد ماتریسها در حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل اختصاص داده شده است. فصل ۸ شامل حساب دیفرانسیل برداری (میدانهای اسکالر و برداری، منحنیها، سرعت، مشتق جهت، گرادیان، دیورژانس، تاور) است و فصل ۹ اختصاص دارد به حساب انتگرال برداری (انتگرال روی خط، انتگرال روی سطح، انتگرال سه‌گانه و تبدیلات آنها وسیلهٔ قضایای انتگرالی گرین، گاوس و استوکس).

در فصل حاضر مفاهیم اساسی و روشهای جبر برداری و کاربردهای آن در مسائل فیزیکی و هندسی را بررسی می‌کنیم. فایدهٔ بردارها در ریاضیات مهندسی از این امر ناشی می‌شود که از یک طرف بسیاری از کمیت‌های فیزیکی - مثلاً نیرو و سرعت - را می‌توان با بردار نمایش داد و از طرف دیگر در بعضی موارد قواعد محاسبات برداری به سادگی قواعد حاکم بر دستگاه اعداد حقیقی است.

این درست است که هر مسئله‌ای که با استفاده از بردارها حل شود با روشهای غیر برداری نیز قابل حل است، اما آنالیز برداری کوتاه‌نواشی است که بسیاری از محاسبات را به مقدار قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. از این گذشته آنالیز برداری راهی است برای تجسم کمیت‌های فیزیکی و هندسی و روابط بین آنها به‌خاطر تمام این دلایل است که نماد - گذاری برداری استفاده گسترده‌ای در متون جدید مهندسی دارد.

پیشنیاز این فصل: در دو بخش آخر، دترمینانهای مرتبه دوم و سوم مورد نیازند.

بخشی که برای دردهای فشرده‌تر قابل حذف است: بخش ۶.۶

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت C

جواب مسائل: ضمیمه ۲

۱.۶ اسکالر و بردار

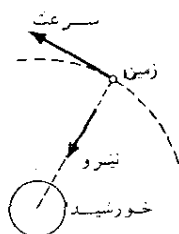
در فیزیک و هندسه کمیت‌هایی وجود دارند که هر يك از آنها هنگامی کاملاً مشخص می‌شود که مقدارش - یعنی اندازه یا تعداد واحدهای آن بر حسب يك مقیاس - معلوم باشد؛ از این قبیلند جرم جسم، بار الکتریک، گرمای ویژه آب، اندازه مقاومت، قطر دایره، مساحت مثلث و حجم مکعب. هر يك از این کمیتها تنها با يك عدد (پس از انتخاب واحد اندازه گیری مناسب) توصیف می‌شود. چنین کمیت‌هایی را اسکالرها می‌نامند.

کمیت‌های فیزیکی و هندسی دیگری وجود دارند که نمی‌توان تنها با يك عدد توصیفشان کرد، چه برای آنکه این کمیتها کاملاً مشخص شوند باید علاوه بر مقدار، جهتشان نیز معلوم باشد.

مثلاً، در مکانیک نیرو چنین کمیتی است. می‌دانیم که نیرو را می‌توان با رسم يك پیکان یا پاره خط جهت‌دار، که جهت آن جهت نیرو را مشخص می‌کند و طول آن برابر بزرگی نیرو بر حسب يك مقیاس مناسب اندازه گیری است نشان داد. شکل ۱۱۰ نیروی جاذبه را در حرکت زمین به دور خورشید نشان می‌دهد. سرعت لحظه‌ای زمین را نیز می‌توان توسط پیکانی با جهت و اندازه مناسب نمایش داد و این مثال نشان می‌دهد که سرعت نیز کمیتی است که با اندازه و جهت مشخص می‌شود.

شکل ۱۱۱ انتقالی (جابه‌جایی بدون دوران) از يك مثلث در صفحه را نشان می‌دهد. این حرکت را می‌توان با اندازه (فاصله‌ای که هر نقطه از مثلث طی کرده است) و امتداد آن مشخص کرد. این انتقال را می‌توانیم با رسم پاره خط جهت داری که نقطه آغاز آن P ، موضع اولیه

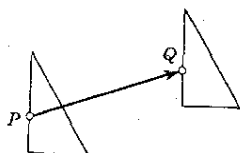
۱. واضح است که هر گاه عددی مشخص‌کننده اسکالری باشد که مفهومی فیزیکی یا هندسی دارد، این عدد باید مستقل از انتخاب مختصات باشد؛ چون این نکته در این فصل اهمیتی ندارد، بعداً در بخش ۱.۸ درباره آن بحث می‌کنیم.



شکل ۱۱۰. نیرو و سرعت

يك نقطه از مثلث، و نقطه انتهایی آن، موضع جدید همان نقطه بعد از انتقال، باشد نمایش دهیم. اگر این کار را در مورد هر نقطه از مثلث انجام دهیم دسته‌ای از پاره خطهای جهت‌دار با طولهای مساوی و امتدادهای یکسان (یعنی موازی و هم‌جهت) خواهیم داشت. می‌توان گفت که هر يك از این پاره خطهای جهت‌دار یکی از نقاط مثلث را از موضع اولیه به موضع جدید «حمل» می‌کند.

با این اوصاف، بردار را به شرح زیر تعریف می‌کنیم.



شکل ۱۱۱. انتقال

تعریف بردار

هر پاره خط جهت‌دار را يك بردار نامند. طول پاره خط طول بردار و جهت آن جهت بردار نامیده می‌شود. دو بردار برابرند اگر و تنها اگر طول آنها با هم و جهت آنها با هم یکی باشد.

طول يك بردار را همچنین اندازه یا نرم اقلیدسی آن بردار می‌نامند. ▲

بردارها را با حروف کوچک سیاه، مانند $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{v}$ ، و طول برداری مانند a را با $|a|$ نشان می‌دهند.

البته در صورت تمایل می‌توانیم دو قسمت تعریف مزبور را ترکیب کرده بردار را

۱. این شیوه درکارهای چاپی رایج است؛ درکارهای غیرچاپی می‌توان بردار را با گذاشتن پیکانی

بر روی آن نشان داد، مثلاً $\vec{a}$ (به جای $\mathbf{a}$)، $\vec{b}$ و غیره.

به عنوان گرد آورده تمام پاره خطهای جهت داری که دارای طول و جهت معینی هستند تعریف کنیم.

از این تعریف می بینیم که يك بردار را می توان به دلخواه انتقال داد (یعنی بدون دوران دادن جابه جا کرد) یا به عبارت دیگر مبدأ آن را به دلخواه انتخاب کرد. واضح است هر گاه نقطه معینی را به عنوان مبدأ يك بردار اختیار کنیم انتهای بردار به طور یکتا مشخص می شود.

هر گاه دو بردار **a** و **b** مساوی باشند، می نویسیم

$$a = b$$

و اگر متفاوت باشند

$$a \neq b$$

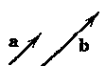
از نظر ترسیمی هر بردار را می توان مانند شکل ۱۱۲ با پیکانی با طول و جهت مناسب نمایش داد.

برداری که طول آن ۱ باشد بردار یکه نامیده می شود.

برای کامل شدن بحث یاد آور می شویم که در فیزیک و هندسه مواردی پیش می آید که می خواهیم روی موضع مبدأ يك بردار محدودیتهایی اعمال کنیم. مثلاً در مکانیک ممکن است نیروی وارد بر يك جسم صلب روی خط اثر خود بر تمام نقاط جسم به طور یکسان اثر کند. این موضوع تعریف بردار لغزان را ایجاب می کند، بردار لغزان برداری است که نقطه اثر آن می تواند هر نقطه از خط مستقیمی که موازی بردار است باشد. نیرویی که بر يك جسم کشسان اثر می کند برداری است که مبدأ آن را به هیچ وجه نمی توان تغییر داد. در واقع اگر نقطه اثر دیگری برای نیرو در نظر بگیریم در حالت کلی تأثیر آن متفاوت خواهد بود. از اینجا به تعریف بردار مقید می رسیم؛ بردار مقید برداری است که دارای مبدأ (نقطه اثر) ثابت و معینی باشد. از آنجا که این مفاهیم در نوشته های مربوط به بردارها وجود دارند، دانشجویان باید آنها را بدانند، لیکن این مفاهیم در بحثهای بعدی ما اهمیت چندانی ندارند.



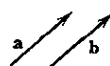
بردارهای با طولهای
مختلف و جهت های مختلف



بردارهای هم جهت
با طول های مختلف



بردارهای هم طول
با جهت های مختلف



بردارهای مساوی
 $a = b$

۲.۶ مؤلفه‌های يك بردار

يك نقطه در فضای سه بعدی يك شیء هندسی است، اما اگر دستگاه مختصاتی در نظر بگیریم، می‌توانیم آن نقطه را با سه تایی مرتبی از اعداد (که مختصات نقطه نامیده می‌شود) بیان کنیم. در مورد بردارها نیز همین‌طور است؛ در بخش قبل بردار را از نظر هندسی تعریف کردیم (بسیار استفاده از مفهوم پاره‌خط جهت‌دار) اما اگر از دستگاه مختصات استفاده کنیم می‌توانیم بردار را با عبارات جبری توصیف کنیم.

حال در فضا دستگاه مختصاتی بنا می‌کنیم که محورهاى آن سه‌خط راست دو به دو متعامد باشند. مقیاس سنجش را روی سه محور یکسان می‌گیریم. بدین ترتیب سه نقطه یکه روی محورها که مختصات آنها $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$ است به فاصله‌های مساوی از مبدأ مختصات، محل تقاطع محورها، قرار می‌گیرند. دستگاه مختصات قائمی را که بدین ترتیب به دست می‌آید دستگاه مختصات دکارتی در فضا می‌نامند (ر.ک. شکل ۱۱۳).

حال برداری مانند $\mathbf{a}$ را در امتداد پاره‌خط جهت‌دار PQ طوری در نظر می‌گیریم که P ابتدا و Q انتهای آن باشد (شکل ۱۱۴). مختصات P و Q را به ترتیب (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) فرض می‌کنیم. در این صورت اعداد

$$(1) \quad a_1 = x_2 - x_1, \quad a_2 = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1$$

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ نسبت به دستگاه مختصات دکارتی نامیده می‌شوند.

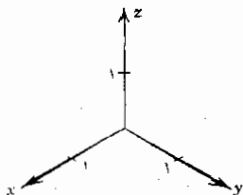
بنابراین تعریف $|\mathbf{a}|$ طول بردار $\mathbf{a}$ ، برابر فاصله PQ است و از (۱) قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود که

$$(2) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

مثال ۱. مؤلفه‌ها و طول يك بردار

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{a}$ که ابتدای آن $P: (3, 1, 4)$ و انتهای آن $Q: (1, -2, 4)$ است عبارتند از

$$a_1 = 1 - 3 = -2, \quad a_2 = -2 - 1 = -3, \quad a_3 = 4 - 4 = 0$$



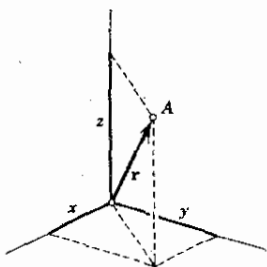
شکل ۱۱۳. دستگاه مختصات دکارتی

و طول آن برابر است با

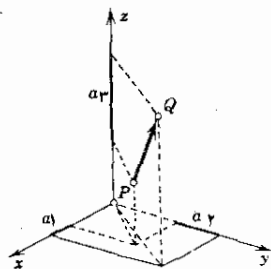
$$|a| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{13}.$$

هر گاه مختصات ابتدای a را $(-1, 5, 8)$ اختیار کنیم، آنگاه مختصات انتهای آن برابر است با $(-3, 2, 8)$.

از روابط (۱) پیداست که هر گاه ابتدای بردار را مبدأ مختصات انتخاب کنیم، آنگاه مؤلفه‌های بردار با مؤلفه‌های نقطه انتهای برابری می‌شوند، این بردار را بردار مکان نقطه انتهای (نسبت به دستگاه مختصات مورد نظر) می‌نامند و معمولاً با r نشان می‌دهند. به شکل ۱۱۵ رجوع شود.



شکل ۱۱۵. بردار مکان r نقطه A که مختصات آن x, y, z است



شکل ۱۱۴. مؤلفه‌های یک بردار

همچنین از (۱) پیداست که مؤلفه‌های a_x, a_y, a_z بردار a مستقل از نحوه انتخاب نقطه ابتدایی a هستند، زیرا با انتقال a مختصات متناظر P و Q به یک اندازه تغییر می‌کنند. بنابراین در یک دستگاه مختصات دکارتی مفروض هر بردار با سه تایی مرتب از مؤلفه‌هایش به طور منحصر به فرد تعیین می‌شود.

حال بردار پوچ یا بردار صفر 0 را برداری با مؤلفه‌های $0, 0, 0$ تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب هر سه تایی مرتب از اعداد حقیقی، من جمله سه تایی $0, 0, 0$ را می‌توان به عنوان یک بردار انتخاب کرد.

در صورت مشخص بودن دستگاه مختصات، بین سه تاییهای مرتب از اعداد حقیقی و بردارها در فضا تناظر یک به یک وجود دارد؛ یعنی متناظر با هر سه تایی، برداری در فضا وجود دارد که آن سه عدد، نسبت به دستگاه مختصات مزبور، مؤلفه‌های آن بردارند و بالعکس.

نتیجه می‌شود که دو بردار a و b برابرند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های متناظر آنها برابر باشند. بنابراین یک رابطه برداری مانند

$$a = b$$

با سه رابطه زیر معادل است :

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

که a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 مؤلفه‌های دو بردار نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی هستند.

از تناظر یک به یک بین همه سه تاییهای مرتب اعداد حقیقی و همه بردارهایی که در بخش ۱.۶ به روشی هندسی تعریف شدند، نتیجه دیگری هم می‌توان گرفت. این تناظر نشان می‌دهد که می‌توان بردار را به عنوان سه تایی مرتبی از اعداد حقیقی (که مؤلفه‌های بردار نامیده می‌شود) به خوبی تعریف کرد. با شروع از این تعریف می‌توانیم تعبیر هندسی بردار را که از آن در بخش ۱.۶ به عنوان تعریف استفاده کردیم، به دست آوریم.

واضح است که هر گاه یک بردار شیئی فیزیکی یا هندسی باشد طول و جهت آن باید مستقل از انتخاب دستگاه مختصات خاص باشد و این ایجاب می‌کند که مؤلفه‌ها در اثر تبدیل دستگاه مختصات رفتار تبدیلی معینی داشته باشند. این مسئله را بعداً (در بخش ۹.۸) مورد بحث قرار خواهیم داد.

در فصل بعد همچنین مفهوم بردار را به n تاییهای مرتب از اعداد، که n هر عدد صحیح مثبت مشخص است، تعمیم خواهیم داد.

مسائل بخش ۲.۶

مؤلفه‌های بردار $\mathbf{v}$ ، با ابتدای $P: (x_1, y_1, z_1)$ و انتهای $Q: (x_2, y_2, z_2)$ را پیدا کنید. $|\mathbf{v}|$ را به دست آورید. نمودار $\mathbf{v}$ را رسم کنید.

۱. $Q: (3, 2, 1), P: (1, 2, 0)$

۲. $Q: (0, 4, 2), P: (0, 1, -1)$

۳. $Q: (0, 3, -1), P: (-1, 2, -2)$

۴. $Q: (3, 3, 3), P: (1, 1, 1)$

۵. $Q: (0, 0, 0), P: (-2, -3, -1)$

۶. $Q: (1, 2, 3), P: (2, 4, 6)$

۷. $Q: (0, 1, 0), P: (0, 2, 0)$

۸. $Q: (-1, 2, 0), P: (0, 0, 0)$

۹. $Q: (3, 8, 2), P: (3, 8, 2)$

$$Q: (3, 9, 4), P: (3, 8, 4) \quad .10$$

در هریک از موارد زیر مؤلفه‌های v_1, v_2, v_3 از بردار v و یک ابتدای خاص P داده شده‌اند. نقطه انتهایی متناظر را پیدا کنید.

$$P: (8, 2, 0); -1, 2, 5 \quad .11$$

$$P: (-4, 1, 2); 3, 8, 0 \quad .12$$

$$P: \left(-2, \frac{1}{2}, 0\right); \frac{1}{2}, 2, -1 \quad .13$$

$$P: (0, 0, 0); 1, 0, 0 \quad .14$$

$$P: (-4, 1, -6); 4, -1, 6 \quad .15$$

$$P: (1, 4, 7); 0, 0, 0 \quad .16$$

$$P: (0, 0, 0); 3, 8, -9 \quad .17$$

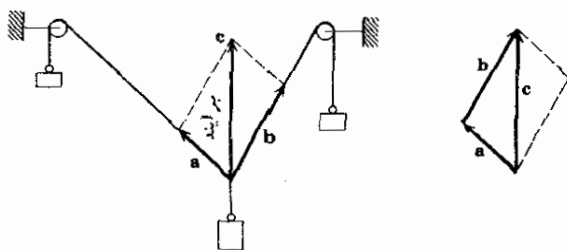
$$P: (1, 2, 3); 1, 2, 3 \quad .18$$

$$P: (-2, 0, -3); -1, -2, 1 \quad .19$$

$$P: (-8, 0, 4); 8, -6, -1 \quad .20$$

۳.۶ جمع بردارها، ضرب دراسکالر

برای انجام محاسبات برداری، اعمال جبری روی بردارها را معرفی می‌کنیم. دو عمل را که به جمع بردارها و ضرب بردار دراسکالر موسوم هستند تعریف خواهیم کرد.



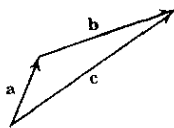
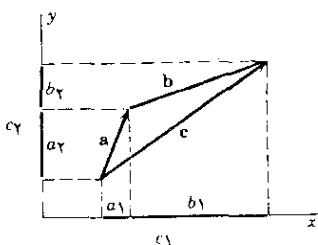
شکل ۱۱۶. برآیند دو نیرو (قانون متوازی الاضلاع)

تجربه نشان می‌دهد که برآیند دو نیرو را می‌توان با قانون مشهور متوازی الاضلاع تعیین کرد (شکل ۱۱۶). این امرانگیزه‌ای برای تعریف زیر است.

تعریف جمع برداری

دو بردار a و b مفروضند. هرگاه ابتدای بردار b را بر انتهای بردار a منطبق کنیم. آنگاه بردار c مجموع a و b ، از وصل کردن ابتدای a به انتهای b حاصل می‌شود. (شکل ۱۱۷) و می‌نویسیم

$$c = a + b$$



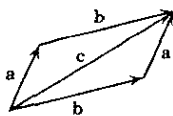
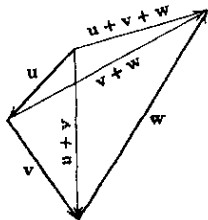
شکل ۱۱۸. جمع برداری بر حسب مؤلفه‌ها

شکل ۱۱۷. جمع برداری

نتیجه زیر از تعریف بالا به دست می‌آید. اگر مؤلفه‌های a و b نسبت به دستگاه مختصات ثابتی به ترتیب $a_1, a_2, a_3, \dots$ و $b_1, b_2, b_3, \dots$ باشند، در آن صورت مؤلفه‌های $c_1, c_2, c_3, \dots$ بردار $c = a + b$ با جمع کردن مؤلفه‌های متناظر a و b به دست می‌آیند، بنابراین

$$(1) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3$$

شکل ۱۱۸ این مطلب را در نتیجه نشان می‌دهد و در فرض وضعیت مشابه است.



شکل ۱۲۰. انجمنی بودن جمع برداری

شکل ۱۱۹. جابه‌جایی بودن جمع برداری

از تعریف و یا از (۱) نتیجه می شود که جمع برداری دارای خواص زیر است.
به ازای هر بردار (ر. ک. شکلهای ۱۱۹ و ۱۲۰)

$$a+b=b+a \quad (\text{الف}) \quad (\text{جابجایی بودن})$$

$$(u+v)+w=u+(v+w) \quad (\text{ب}) \quad (\text{انجمنی بودن})$$

$$a+0=0+a=a \quad (\text{پ})$$

$$a+(-a)=0 \quad (\text{ت})$$

در اینجا $-a$ معرف برداری است به طول $|a|$ و در جهت مخالف a .
از (۲) نتیجه می گیریم که می توان نوشت $u+v+w$ و همین طور در مجموعه ای که شامل بیش از سه بردار هستند می توان پرانتزها را حذف کرد. همچنین به جای $a+a$ می نویسیم $2a$ و به همین ترتیب. تعریف این نماد (و نماد $-a$ که پیشتر تعریف شد) زمینه را برای تعریف دومین عمل جبری مربوط به بردارها آماده می کند.

ضرب بردار در اسکالر (عدد)

بردار a و عدد حقیقی q را در نظر بگیرید. بردار qa به طریق زیر تعریف می شود.

طول qa عبارت است از $|q||a|$.

هر گاه $a \neq 0$ و $q > 0$ ، آنگاه qa هم جهت با a است.

هر گاه $a \neq 0$ و $q < 0$ ، آنگاه qa در جهت مخالف a است.

هر گاه $a = 0$ یا $q = 0$ (یا هر دو)، آنگاه $qa = 0$.

چند مثال ساده در شکل ۱۲۱ نشان داده شده است.

بدیهی است که هر گاه a دارای مؤلفه های a_1, a_2, a_3 باشد آنگاه qa دارای

مؤلفه های qa_1, qa_2, qa_3 (نسبت به همان دستگاه مختصات) خواهد بود. به علاوه، بنا بر تعاریف داریم، به ازای هر بردار و هر عدد حقیقی

$$q(a+b)=qa+qb \quad (\text{الف})$$

$$(c+k)a=ca+ka \quad (\text{ب})$$

$$c(ka)=(ck)a \quad (\text{پ}) \quad (\text{که نوشته می شود } cka)$$

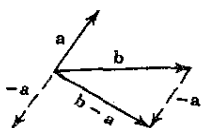
$$1a=a \quad (\text{ت})$$

خواننده می تواند ثابت کند که (۲) و (۳) نتیجه می دهند به ازای هر a ،

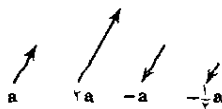
$$0a=0$$

$$(-1)a=-a$$

به جای $b + (-a)$ فقط می نویسیم $b - a$ (شکل ۱۲۲)



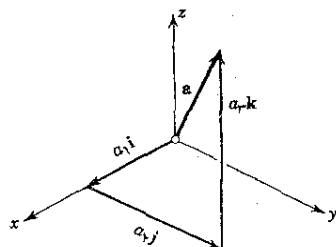
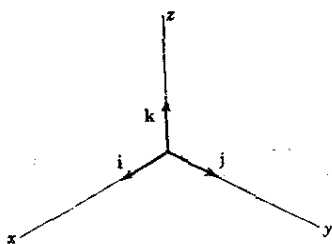
شکل ۱۲۲. تفاضل بردارها



شکل ۱۲۱. ضرب بردار در عدد

در يك دستگاه مختصات دکارتی مفروض می توانیم بردار a با مؤلفه های a_1, a_2, a_3 را به صورت مجموع سه بردار موازی با محورهای مختصات نمایش دهیم. بدین منظور روی محورها سه بردار یکه i, j, k را، که در جهت مثبت محورها قرار دارند، در نظر می گیریم. در این صورت داریم (شکل ۱۲۳)

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad (5)$$



شکل ۱۲۳. بردارهای یکه i, j, k و نمایش (۵)

شکل ۱۲۳ بردارهای i, j, k را، که مبدأ مشترک آنها مبدأ مختصات انتخاب شده است، نشان می دهد. این بردارها دوبه دو برهم عمودند. به جای عمود اصطلاح متعامد نیز به کار می رود. می گوییم که i, j, k یک سه تایی از بردارهای یکه متعامد تشکیل می دهند. این سه تایی را سه تایی متعامد بنیادی مربوط به دستگاه مختصات مزبور نیز می نامند.

مثال ۱

فرض کنید، نسبت به يك دستگاه مختصات داده شده ،

$$b = 2i - 2j + 3k, \quad a = 2i + k$$

در آن صورت

$$2b = 4i - 4j + 6k, \quad -b = -2i + 2j - 3k,$$

$$15a - b = 9i + 2j - 14k.$$

مسائل بخش ۳.۶

فرض کنید $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{c} = -\Delta\mathbf{j}$. مطلوب است محاسبه

$$1. \quad -2\mathbf{a}, \frac{1}{4}\mathbf{a}, 2\mathbf{a} \quad 2. \quad \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$3. \quad \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad 4. \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|, |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

$$5. \quad |\mathbf{a} - \mathbf{c}|, |\mathbf{a}| - |\mathbf{c}| \quad 6. \quad \mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \mathbf{b}/|\mathbf{b}|, \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$$

$$7. \quad 2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}, 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad 8. \quad |-\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 2\mathbf{c}|$$

$$9. \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}, \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

۱۰. مسائل ۲، ۷ و ۹ مبین چه قوانینی هستند؟

برآیند نیروهای زیر را پیدا کنید..

$$11. \quad \mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{q} = \Delta\mathbf{i} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$12. \quad \mathbf{p} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{q} = -2\mathbf{i} - \Delta\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = \mathbf{k}$$

۱۳. نیرویی مانند $\mathbf{p}$ پیدا کنید طوری که نیروهای $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ در حال تعادل باشند.

۱۴. فرض کنید بردارهای $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، $\mathbf{c}$ بردارهای متناظر با اضلاع يك متوازی السطوح باشند. بردارهای متناظر چهار قطر را پیدا کنید.

با استفاده از بردارها احکام زیر را ثابت کنید.

۱۵. اقطار متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند.

۱۶. چهار قطر مکعب هم طولند.

۱۷. خطی که یکی از رئوس متوازی الاضلاع را به وسط یکی از اضلاع مقابلش وصل می کند قطرها به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می کند.

۱۸. مجموع بردارهایی که از مرکز چندضلعی منتظم به رئوس آن کشیده می شوند مساوی بردار صفر است.

۱۹. نقطه تلاقی میانه های مثلث هر میانه را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می کند.

۲۰. چهار قطر يك متوازی السطوح همدیگر را قطع می کنند و منصف یکدیگرند.

۴.۶ فضاهای برداری. وابستگی و استقلال خطی

مجموعه V از بردارها که دو عمل جبری جمع برداری و ضرب در اسکالر روی آن تعریف شده است یک ساختمان جبری به وجود می آورد که آن را فضای برداری (یا فضای خطی) می نامند. اهمیت این ساختمان از آنجا ناشی می شود که بسیاری از مجموعه های (مجموعه بردارها، ماتریسها، توابع، عملگرها و غیره) که در ریاضیات و کاربرد آن خیلی زیاد مورد استفاده قرار می گیرند چنین ساختمانی دارند. در واقع، مفهوم فضای برداری در آنالیز تابعی (آنالیز مدرن مجرد) که در معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی و سایر رشته هایی که برای مهندسين از نقطه نظر عملی جالب است، کاربرد دارد مفهومی است اساسی. (ر.ك. مرجع [A10] ضمیمه ۱.) حال به بیان تعریف می پردازیم:

تعریف فضای برداری حقیقی

مجموعه غیر تهی V که از عناصر $a, b, \dots$ تشکیل شده است یک فضای برداری حقیقی (یا فضای خطی حقیقی) نامیده می شود هر گاه در V دو عمل جبری (جمع برداری و ضرب در اسکالر) به شکل زیر تعریف شده باشند.

الف. جمع برداری به هر جفت عنصر a و b از V عنصری یکتا از V مربوط می کند که آن را مجموع a و b نامیده با $a+b$ نشان می دهند، به طوری که اصول زیر درباره آن صادق است.

الف. ۱. جابجایی بودن. به ازای هر دو عنصر a و b از V ,

$$a+b=b+a$$

الف. ۲. انجمنی بودن. به ازای هر سه عنصر u و v و w از V ,

$$(u+v)+w=u+(v+w) \quad (u+v+w \text{ نوشته می شود})$$

الف. ۳. عنصری یکتا در V هست که عنصر صفر نامیده شده با 0 نشان داده می شود، به طوری که به ازای هر a در V ,

$$a+0=a.$$

الف. ۴. به ازای هر a از V عنصری یکتا در V وجود دارد که با $-a$ نشان داده می شود و به گونه ای است که

$$a+(-a)=0$$

ب. ضرب در اسکالر. اعداد حقیقی را اسکالر می نامند. ضرب در اسکالر به هر a از V و هر اسکالر q عنصری یکتا از V نسبت می دهد که آن را حاصل ضرب q و a نامیده با qa (و یا aq) نشان می دهند. اصول زیر در مورد ضرب در اسکالر صادقند.

ب. ۱. پخش پذیری. به ازای هر اسکالر q و عناصر a و b از V ,

$$q(a+b)=qa+qb.$$

ب. ۲. پخشپذیری. به ازای هر دو اسکالر c و k و هر a در V ،

$$(c+k)a = ca + ka.$$

ب. ۳. انجمنی بودن. به ازای هر دو اسکالر c و k و هر a در V ،

$$c(ka) = (ck)a \quad (\text{که نوشته می شود } cka)$$

ب. ۴. به ازای هر a در V

$$1a = a$$

▲ عناصر V را **بودار** می نامند.

هر گاه به جای اعداد حقیقی، اعداد مختلط را به عنوان اسکالرها در نظر بگیریم فضای برداری مختلط به دست می آید.

چون نمی خواهیم از هدف اصلی خود که مطالعه جبر برداری است دور شویم، با ذکر چند مسئله نوعی که در مجموعه مسائل زیر آورده شده اند تنها کلی بودن مفهوم فضای برداری را روشن می کنیم و در فصل بعد با آوردن مثالهای بیشتری در ارتباط با ماتریسها بحث را ادامه می دهیم، توجه کنید که مفهوم مجرد فضای برداری را به کمک اصل تعریف مفهوم مجرد بر حسب برخی از مهمترین خواص مدل واقعی که در این مورد مجموعه تمام بردارهای فضای سه بعدی بود به دست آوردیم. این اصلی است که به کمک آن بسیاری از مفاهیم ریاضی مجرد را از مدلهای واقعی استخراج می کنیم. البته در هر حالت، انتخاب خواصی که باید به صورت اصول موضوع بیان شوند به تجربه نیاز دارد.

حال بعضی مفاهیم مهم مربوط به فضای برداری را مورد بحث قرار می دهیم. فرض کنید $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ بردارهای دلخواهی در V باشند. در این صورت عبارت ی به شکل

$$q_1 a_{(1)} + \dots + q_m a_{(m)} \quad (q_1, \dots, q_m \text{ اسکالرهای دلخواهند})$$

را ترکیب خطی بردارهای مزبور می نامند. واضح است که این عبارت، بنا به اصول موضوعه فضای برداری، برداری در V است. مجموعه S که تمام این ترکیبات خطی را در بردارد مجموعه پدید آمده توسط $q_{(1)}, \dots, q_{(m)}$ نامیده می شود و آن را با $\text{span}(a_{(1)}, \dots, a_{(m)})$ نشان می دهند و می گویند که S پدید آمده یا تولید شده به وسیله m بردار ذکر شده است. اثبات اینکه مجموعه پدید آمده توسط مجموعه ای از بردارها خود یک فضای برداری است، دشوار نیست (اثبات؟)

حال با استفاده از مفهوم ترکیب خطی می توانیم مفاهیم اساسی وابستگی و استقلال خطی بردارها را معرفی می کنیم.

۱. صرف نظر از اینکه این عناصر واقعا چه هستند آنها را بردار می نامیم، این قرارداد باعث اشتباه نمی شود زیرا در هر حالت خاص، ماهیت آن عناصر از فحوای مطلب روشن است.

مجموعه‌ای از m بردار $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ را يك مجموعه وابسته خطی نامند هر گاه اقلاً یکی از این بردارها را بتوان به صورت ترکیبی خطی از بقیه (با اسکالرهایی که الزاماً همه آنها صفر نیستند) نمایش داد. مجموعه‌ای از بردارها را يك مجموعه مستقل خطی نامند هر گاه هیچک از بردارها را نتوان به صورت ترکیبی خطی از بقیه نمایش داد. در این تعریف $m \geq 2$. هر گاه $m = 1$ ، مجموعه تنها شامل يك بردار a است و در این حال مجموعه را وابسته خطی گوئیم اگر $a = 0$ ؛ و مستقل خطی گوئیم اگر $a \neq 0$.

مثال ۱. مجموعه بردارهای وابسته خطی و مستقل خطی

بردارهای $a = i + 2j + k$ ، $b = 3k$ ، $c = 2i + 4j$ ، يك مجموعه وابسته خطی را تشکیل می‌دهند زیرا $6a - 2b - 3c = 0$ ؛ و در نتیجه $a = (1/3)b + (1/2)c$. بردارهای i, j, k که در بخش قبل تعریف شدند، يك مجموعه مستقل خطی را تشکیل می‌دهند.

هر گاه فضای برداری V چنان باشد که شامل مجموعه مستقل خطی B از n بردار باشد، در حالی که هر مجموعه از $n+1$ بردار یا بیشتر در V وابسته خطی است، آنگاه گفته می‌شود که V دارای بعد n است (یا n بعدی است) و B را پایه‌ای برای V می‌نامند. بدین ترتیب هر بردار v از V را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از n بردار پایه به طور یکتا نمایش داد.

به عنوان مثال مجموعه تمام بردارهای فضا، که در بخش ۱.۶ تعریف شد، تشکیل يك فضای برداری می‌دهد. این مجموعه سه بعدی است چون i, j, k پایه‌ای برای آن است (ر. ک. بخش ۳.۶).

به طور کلی اگر مجموعه M از بردارهای $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ در V را در نظر بگیریم و هر گاه مجموعه پدید آمده توسط آنها دارای بعد r باشد، نتیجه می‌گیریم که M دارای زیرمجموعه‌ای با r بردار مستقل خطی است. در این صورت بردارهای مفروض ترکیبات خطی آن r بردار هستند که پایه‌ای برای بردارهای پدید آمده توسط M تشکیل می‌دهند.

معیار مهمی برای تشخیص وابستگی و استقلال خطی وجود دارد. برای به دست آوردن این معیار، معادله برداری

$$(۱) \quad k_1 a_{(1)} + k_2 a_{(2)} + \dots + k_m a_{(m)} = 0$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ بردارهایی مفروض و $k_m, \dots, k_1$ اسکالرنده و نخست فرض می‌کنیم که $m \geq 2$. این معادله مسلماً به ازای

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$$

برقرار است. هر گاه بتوانیم اسکالرهایی $k_1, \dots, k_m$ را، که همه صفر نیستند، پیدا کنیم به طوری که (۱) برقرار باشد، آنگاه می‌توانیم (۱) را بر اسکالری مانند $k_i \neq 0$ تقسیم

کرده بردار متناظر $a_{(i)}$ را به صورت ترکیبی خطی از بقیه بردارها نمایش دهیم. (مثلا، اگر در رابطه (۱) راداشته باشیم $k_1 \neq 0$ ، از (۱) به دست می آوریم

$$(l_i = -k_i/k_1 a_{(1)} = l_1 a_{(2)} + \dots + l_m a_{(m)})$$

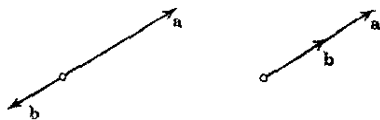
پس در این حالت بردارها تشکیل يك مجموعه وابسته خطی می دهند. ولی، اگر تنها به ازای مجموعه اسکالرهای $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ رابطه (۱) برقرار باشد، نمی توانیم (۱) را نسبت به هیچیک از آن بردارها حل کنیم و بردارها تشکیل يك مجموعه مستقل خطی می دهند. هرگاه $m=1$ ، آنگاه (۱) به صورت $k_1 a_{(1)} = 0$ درمی آید. این رابطه به ازای $k_1 \neq 0$ وقتی و تنها وقتی برقرار است که $a_{(1)} = 0$ و این، بنا به تعریف، به معنی وابستگی خطی است. از این بحث، معیار زیر را نتیجه می گیریم.

قضیه ۱ (وابستگی خطی)

مجموعه ای از بردارهای $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ وابسته خطی است اگر و تنها اگر (۱) به ازای مجموعه ای از اسکالرهای $k_1, \dots, k_m$ ، که همه صفر نیستند، برقرار باشد. این شرط لازم و کافی برای وابستگی خطی اغلب به عنوان تعریف وابستگی خطی به کار می رود.

اگر یکی از بردارهای مجموعه بردار مورد نظر بردار صفر باشد مجموعه وابسته خطی است، زیرا هرگاه، مثلا $a_{(1)} = 0$ ، آنگاه (۱) به ازای هر k_1 و $k_2 = \dots = k_m = 0$ برقرار است.

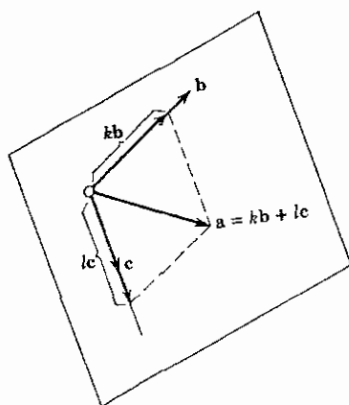
درفضای سه بعدی دو بردار که تشکیل يك مجموعه وابسته خطی می دهند هم خط هستند؛ یعنی اگر مبدأ آنها را برهم منطبق کنیم بردارها روی يك خط قرار می گیرند (شکل ۱۱۴). هرگاه سه بردار a و b و c از این فضا تشکیل يك مجموعه وابسته خطی بدهند هم خط یا هم صفحه اند؛ یعنی هرگاه مبدأ آنها را برهم منطبق بگیریم در يك صفحه قرار می گیرند (شکل ۱۲۵).



شکل ۱۲۴. بردارهای هم خط

در حقیقت وابستگی خطی ایجاب می کند که یکی از بردارها ترکیبی خطی از دو بردار دیگر باشد، مثلا $a = kb + lc$ ، و بنا بر این در صفحه b و c قرار گیرد (و یا برخط مستقیمی که b و c روی آن قرار دارند، اگر b و c هم خط باشند). مجموعه ای که از چهار بردار یا بیشتر تشکیل شده است در فضای سه بعدی وابسته خطی است، زیرا تمام

بردارهای این فضا يك فضای برداری سه بعدی تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۲۵. بردارهای هم‌صفحه

مسائل بخش ۴.۶

نشان دهید که هر يك از مجموعه‌های زیر فضایی برداری تشکیل می‌دهند. در هر مورد بعد فضا را تعیین کنید و پایه‌ای برای آن بیابید.

۱. مجموعه تمام بردارهای فضا که مؤلفه اولشان صفر است.
۲. مجموعه تمام بردارهای به صورت $c(i+j+2k)$ ، در اینجا c اسکالری دلخواه است.
۳. مجموعه تمام بردارهای به صورت $bi+c(j+k)$ ، در اینجا b و c اسکالرهایی دلخواه‌اند.

۴. مجموعه تمام زوجهای مرتب از اعداد، با جمع معمولی تعریف شده با

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

و ضرب در اسکالر تعریف شده با $c(a_1, a_2) = (ca_1, ca_2)$.

۵. مجموعه تمام n تاییهای مرتب از اعداد $(a_1, \dots, a_n)$ با جمع تعریف شده با $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ و ضرب در اسکالر تعریف شده با $c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n)$.

۶. تمام توابع به صورت $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ (در اینجا c_1 و c_2 دلخواه‌اند) با جمع معمولی

و ضرب معمولی در اعداد.

۷. تمام توابع به صورت $y(x) = a \cos x + b \sin x$ (a و b دلخواهند) با جمع معمولی و ضرب معمولی در اعداد.

۸. تمام چند جمله‌ای‌های بر حسب x با درجه نایبتر از ۲ با جمع معمولی و ضرب معمولی در اعداد.

مجموعه بردارهای تولید شده توسط $\{u$ و $v\}$ را در هر يك از حالات زیر توصیف کنید.

۹. $v = (1, 2, 0)$, $u = (1, 0, 0)$ ۱۰. $v = (0, 0, 2)$, $u = (1, 1, 1)$

۱۱. نشان دهید که نمایش برداری مانند a در فضای برداری V به صورت ترکیب خطی بردارهای پایه $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ یکتاست.

۱۲. هرگاه مجموعه $\{a_{(1)}, \dots, a_{(n)}\}$ مستقل خطی باشد، نشان دهید که هر زیرمجموعه (غیر تهی) آن مجموعه، مستقل خطی است.

۱۳. (زیرفضا) W زیرمجموعه غیر تهی فضای برداری V را زیر فضای V نامند در صورتی که خود W نسبت به عملهای جبری تعریف شده در V يك فضای برداری باشد. مثالهایی از زیر فضاهای يك و دوبعدی فضای تمام بردارهایی که در فضای سه بعدی هستند ارائه کنید.

۱۴. کداميك از مجموعه‌های زیر يك زیر فضای برداری تمام بردارهایی که به شکل $v = (v_1, v_2, v_3)$ هستند تشکیل می‌دهند؟

(الف) تمام v های با $v_1 = v_2$ و $v_3 = 0$. (ب) تمام v های با $v_1 = v_2 + 1$.

(پ) تمام v های با v_1, v_2, v_3 ی مثبت. (ت) تمام v های با

$$v_1 - v_2 + v_3 = k = \text{ثابت}$$

۱۵. نشان دهید که زیرمجموعه W از فضای برداری V زیر فضایی از V است اگر و تنها اگر به ازای هر a و b در W و هر اسکالر c و q ، بردار $ca + qb$ در W باشد.

۵.۶ ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای)

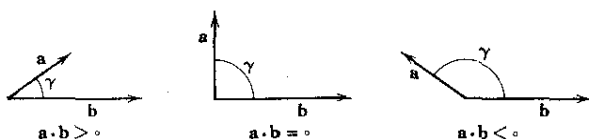
ضرب داخلی، ضرب نقطه‌ای، یا ضرب اسکالر دو بردار a و b در فضای سه بعدی به صورت $a \cdot b$ نوشته می‌شود و چنین تعریف می‌شود:

$$a \cdot b = |a||b|\cos\gamma \quad (a \neq 0 \text{ و } b \neq 0) \quad \text{وقتی که}$$

(۱)

$$a \cdot b = 0 \quad (a = 0 \text{ یا } b = 0) \quad \text{وقتی که}$$

در اینجا γ ($0 \leq \gamma \leq \pi$) زاویه بین a و b است (وقتی که مبدأ بردارها برهم منطبق باشند). (ر. ک. شکل ۱۲۶)



شکل ۱۲۶. زاویه بین بردارها

اندازه حاصل ضرب داخلی يك اسکالر (عدد حقیقی) است و این امر موجب می شود که اصطلاح «حاصل ضرب اسکالر» را به کار ببریم. چون در (۱) کسینوس می تواند مثبت، صفر، یا منفی باشد حاصل ضرب داخلی نیز می تواند چنین باشد (ر. ک. شکل ۱۲۶). چون وقتی γ بین صفر و π تغییر می کند، آنگاه کسینوس صفر می شود اگر و تنها اگر $\gamma = \pi/2$ ، بنابراین قضیه مهم زیر را داریم.

قضیه ۱ (تعامد)

دو بردار غیر صفر متعامدند اگر و تنها اگر حاصل ضرب داخلی (حاصل ضرب اسکالر) آنها صفر باشد.

اگر در (۱) قرار دهیم $b = a$ ، خواهیم داشت $a \cdot a = |a|^2$ ، و این نشان می دهد که طول (نرم اقلیدسی) بردار را می توان بر حسب ضرب اسکالر نوشت،

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} \quad (\geq 0). \quad (2)$$

از این رابطه و (۱) فرمول مفید زیر را به دست می آوریم:

$$\cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot a} \sqrt{b \cdot b}}. \quad (3)$$

از تعریف نتیجه می گیریم که حاصل ضرب داخلی دارای خواص زیر است:

$$\begin{aligned} (4) \quad & (f) \quad [q_1 a + q_2 b] \cdot c = q_1 a \cdot c + q_2 b \cdot c \quad (\text{خطی بودن}) \\ & (b) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{تقارن}) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & a \cdot a \geq 0 \\ & a \cdot a = 0 \text{ اگر و تنها اگر } a = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b) \quad (\text{مثبت و معین بودن})$$

بنابراین ضرب نقطه ای جا به جایی است [ر. ک. (ب۴)] و نسبت به جمع برداری پخشپذیر

است؛ درواقع، با فرض $q_1 = 1$ و $q_2 = 1$ از (۴ الف) نتیجه می گیریم

$$(۴ الف^*) \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{پخشپذیری})$$

علاوه بر این از (۱) و $|\cos \gamma| \leq 1$ به دست می آوریم

$$(۵) \quad |a \cdot b| \leq |a| |b| \quad (\text{نابرابری شوارتز})$$

با استفاده از این نابرابری و (۲)، خواننده می تواند ثابت کند که

$$(۶) \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{نابرابری مثلثی})$$

با يك محاسبه ساده سرراست به كمك ضرب داخلی، می توان نشان داد که

$$(۷) \quad |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \quad (\text{تساوی متوازی الاضلاعی})$$

هر گاه بردارهای a و b بر حسب مؤلفه هایشان نشان داده شوند؛ یعنی اگر بنویسیم

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \quad \text{و} \quad a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

حاصل ضرب داخلی آنها با فرمول اساسی و ساده زیر تعیین می شود:

$$(۸) \quad a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

حال (۸) را ثابت می کنیم. چون i و j و k بردارهای یکه هستند، از (۱) داریم

$$i \cdot i = 1, \quad j \cdot j = 1, \quad k \cdot k = 1,$$

و چون این سه بردار متعامدند، از قضیه ۱ نتیجه می شود که

$$i \cdot j = 0, \quad j \cdot k = 0, \quad k \cdot i = 0.$$

بنابراین اگر مقادیر a و b ی فوق را در $a \cdot b$ قرار دهیم و از (۴ الف*) و (۴ ب) استفاده کنیم، ابتدا مجموع ۹ حاصل ضرب داخلی به دست می آید:

$$a \cdot b = a_1 b_1 i \cdot i + a_1 b_2 i \cdot j + \dots + a_3 b_3 k \cdot k$$

چون ۶ تا از این حاصل ضربها صفرند، (۸) را به دست می آوریم.

قبل از آنکه کار بردهایی از ضرب داخلی را بررسی کنیم، مفهوم دیگری را معرفی می کنیم. فرض کنید a و b بردارهایی مفروض و γ زاویه بین آنها باشد. در این صورت عدد حقیقی

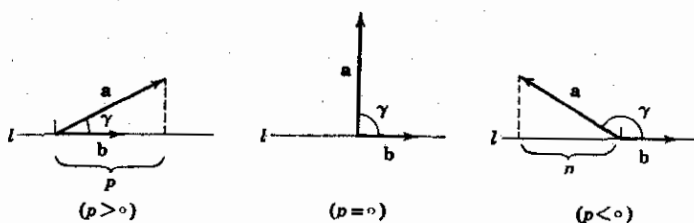
$$p = |a| \cos \gamma$$

۱. هرمان آماندوس شوارتز (Hermann Amandus Schwarz)، ۱۸۴۳-۱۹۲۱، ریاضیدان آلمانی، که در زمینه آنالیز مختلط و هندسه دیفرانسیل کار کرده است.

را مؤلفه a در امتداد b یا تصویر a در امتداد b می نامند. هرگاه $a = 0$ ، آنگاه $p = 0$ تعریف نشده است، و قرار می دهیم $p = 0$.

نتیجه می شود که $|p|$ طول تصویر قائم a روی خطی مستقیم مانند l در امتداد b است. p ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد (شکل ۱۲۷).

بنابراین تعریف، می بینیم که در حالت خاص مؤلفه های بردار a در امتداد بردارهای یکه i, j, k از يك دستگاه مختصات دکارتی طبق مؤلفه های a_x, a_y, a_z بردار a هستند که در بخش ۲.۶ تعریف شده اند. این موضوع نشان می دهد که استفاده فعلی ما از اصطلاح «مؤلفه» صرفاً تعمیمی ملایم از تعریف قبلی است.



شکل ۱۲۷. مؤلفه بردار a در امتداد بردار b

از (۳) به دست می آوریم

$$(9) \quad p = |a| \cos \gamma = \frac{a \cdot b}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

و در حالت خاصی که b بردار یکه باشد، به سادگی به دست می آوریم

$$(10) \quad p = a \cdot b.$$

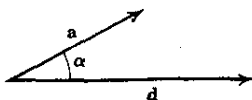
مثالهای زیر سودمندی ضرب داخلی را روشن می کنند. بعداً کاربردهای متعدد دیگری را بررسی خواهیم کرد.

مثال ۱. کاری که يك نیرو انجام می دهد

ذره ای را در نظر بگیرید که نیروی ثابت a بر آن اثر می کند. فرض کنید ذره به اندازه d تغییر مکان پیدا کند. در آن صورت W با کاری که نیروی a در این تغییر مکان انجام می دهد به صورت حاصل ضرب $|d|$ و مؤلفه a در امتداد d تعریف می شود؛ یعنی

$$(11) \quad W = |a| |d| \cos \alpha = a \cdot d$$

در اینجا α زاویه بین a و d است (شکل ۱۲۸).



شکل ۱۲۸. کاری که یک نیرو انجام می‌دهد

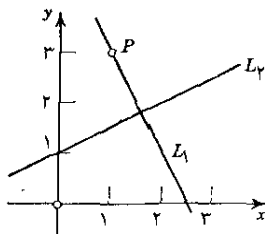
مثال ۲. خطوط مستقیم متعامد در صفحه

معادله خط مستقیم L_1 را طوری بیابید که از نقطه $P: (1, 3)$ در صفحه xy بگذرد و بر خط L_2 به معادله $x - 2y + 2 = 0$ عمود باشد.

هر خط مستقیم V_1 در صفحه xy را می‌توان به صورت $a_1x + a_2y = c$ نمایش داد. هرگاه $c = 0$ ، آنگاه L_1 از مبدأ می‌گذرد. هرگاه $c \neq 0$ ، آنگاه $a_1x + a_2y = 0$ خطی مانند L_1^* را نمایش می‌دهد که از مبدأ می‌گذرد و با L_1 موازی است. بردار مکان هر نقطه از خط L_1^* عبارت است از $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. با در نظر گرفتن برداری مانند $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ، از (۸) می‌بینیم که L_1^* را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = 0$$

مسلماً $\mathbf{a} \neq 0$ ، و بنا به قضیه ۱، بردار $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{r}$ و بنابراین بر L_1^* عمود است. این بردار را بردار قائم بر L_1^* می‌نامند. چون L_1 و L_1^* موازیند، $\mathbf{a}$ بردار قائم بر L_1 نیز هست. بنابراین دو خط L_1 و $L_2: b_1x + b_2y = d$ برهم عمودند یا متعامدند اگر و تنها اگر بردارهای قائم آنها یعنی $\mathbf{a} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ متعامد باشند؛ یعنی $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. توجه کنید که این امر مستلزم آن است که شیب خطوط قرینه معکوس یکدیگر باشند.



شکل ۱۲۹. مثال ۲

در این حالت، $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ، و یکی از بردارهای $\mathbf{b}$ در $\mathbf{b}$ عبارت است از $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. از این دو L_1 باید به صورت $2x + y = c$ باشد و با قرار دادن مختصات P در آن، به دست می‌آوریم $c = 5$ ، و بالاخره جواب زیر حاصل می‌شود (د.ک. شکل ۱۲۹):

$$y = -2x + 5.$$

مثال ۳. بردار قائم بر صفحه

بردار یکه‌ای پیدا کنید که بر صفحه $4x + 2y + 4z = -7$ عمود باشد. هر صفحه را در فضا می‌توان به صورت

$$(12) \quad a_1x + a_2y + a_3z = c$$

نمایش داد. بردار مکان هر نقطه از این صفحه عبارت است از $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. با در نظر گرفتن بردار $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و با استفاده از (۸) می‌توانیم (۱۲) را به صورت

$$(13) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = c$$

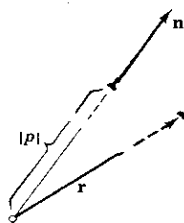
بنویسیم. مسلماً $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ، و بردار یکه در امتداد $\mathbf{a}$ عبارت است از

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

با تقسیم کردن (۱۳) بر $|\mathbf{a}|$ ، به دست می‌آوریم

$$(14) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = p \quad \text{که در آن } p = \frac{c}{|\mathbf{a}|}$$

از (۱۰) می‌بینیم که p تصویر $\mathbf{r}$ در امتداد $\mathbf{n}$ است، و این تصویر به ازای بردار مکان $\mathbf{r}$ هر نقطه از صفحه دارای همان مقدار ثابت $c/|\mathbf{a}|$ است. مسلماً این مطلب صحیح است اگر تنها اگر $\mathbf{n}$ بر صفحه عمود باشد. $\mathbf{n}$ را بردار یکه قائم بر صفحه می‌نامند (بردار یکه قائم دیگر $-\mathbf{n}$ است). به علاوه، از این مطالب و از تعریف تصویر نتیجه می‌شود که $|p|$ فاصله صفحه از مبدأ است. نمایش (۱۴) را صورت نرمال صفحه می‌نامند (شکل ۱۳۰).



شکل ۱۳۰. بردار قائم بر یک صفحه

۱. لودویگ اتو هسه (Ludwig Otto Hesse)، ۱۸۱۱-۱۸۷۴، ریاضیدان آلمانی که در زمینه نظریه منحنیها و رویه‌ها کار کرده‌است.

در این مثال،

$$a = 4i + 2j + 2k, \quad c = -7, \quad |a| = 6, \quad n = \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k,$$

وفاصله صفحه از مبدأ برابر $7/6$ است.

مسائل بخش ۵.۶

فرض کنید $a = i + 2j + 2k$ ، $b = -j + 2k$ ، و $c = 2i - 2j - k$. مطلوب است

۱. $a \cdot b$ ، $b \cdot a$ ۲. $|a|$ ، $|b|$ ، $|c|$
۳. $(a+b) \cdot c$ ، $a \cdot c + b \cdot c$ ۴. $a \cdot (b-c)$ ، $a \cdot (c-b)$
۵. $|a+b|$ ، $|b+c|$ ۶. $2a \cdot 2b$ ، $6a \cdot b$
۷. $|a+c|$ ، $|a|+|c|$ ۸. $2a \cdot (a-2b)$
۹. $-a \cdot (2c-b)$

۱۰. مسائل ۱ و ۳ چه قوانینی را تشریح می کنند؟

۱۱. $a \cdot b$ را پیدا کنید در صورتی که $a = 2i$ و $b = i + j$ ، $b = j$ ، $b = -i + j$ ، و شکلی شبیه شکل ۱۲۶ ترسیم کنید.۱۲. هرگاه a داده شده باشد و $a \cdot b = a \cdot c$ ، آیا می توانیم نتیجه بگیریم که $b = c$ ؟در هر یک از حالات زیر، کار انجام شده توسط نیروی p را که بر یک ذره اثر می کند بیابید در صورتی که ذره در طول پاره خط AB از نقطه A به نقطه B تغییر مکان یافته باشد.

۱۳. $A: (0, 0, 0)$ ، $B: (0, 3, 0)$ ، $p = i + j + k$

۱۴. $A: (0, -1, 2)$ ، $B: (0, 0, 0)$ ، $p = k$

۱۵. $A: (8, -2, -3)$ ، $B: (-2, 0, 6)$ ، $p = 2i - 2j + 2k$

۱۶. $A: (2, 2, 2)$ ، $B: (4, 4, 4)$ ، $p = -2j + 2k$

۱۷. $A: (2, 1, 3)$ ، $B: (5, 2, 5)$ ، $p = i + j - k$

۱۸. چرا در مسئله ۱۷ کار برابر صفر است؟

۱۹. به ازای چه مقادیری از a_1 بردارهای $a = a_1 i + j$ و $b = i + j - k$ متعامدند؟

۲۰. بردار $i k + a_2 j$ را چنان بیابید که بر بردار $j - 5 i$ عمود باشد.

۲۱. فرض کنید که ذره‌ای در طول پاره خط مستقیم AB از نقطه A به نقطه B جابه‌جا شده باشد، نشان دهید که کار انجام شده توسط دو نیرویی که بر ذره اثر می‌کنند با کار انجام شده توسط برآیند نیروها برابر است.

۲۲. با استفاده از بردارها نشان دهید که هر گاه اقطار يك مستطیل بر هم عمود باشند، آن مستطیل باید مربع باشد.

۲۳. تحت چه شرایطی اقطار يك متوازی الاضلاع متعامدند؟

۲۴. آیا ۴ قطر يك مکعب متعامدند؟

۲۵. نشان دهید که صفحات $x + y + z = 1$ و $3x - 4y + z = 2$ متعامدند.

۲۶. زاویه بین صفحات $x + 2y + z = 2$ و $2x - y + 3z = -4$ را بیابید.

۲۷. زوایای مثلثی با رئوس $A: (1, 1, 0)$ ، $B: (3, 1, 0)$ ، $C: (1, 3, 0)$ را پیدا کنید.

فرض کنید $a = i + j + 2k$ ، $b = i - j$ ، $c = i + 5k$. کسینوس زاویه بین بردارهای زیر را پیدا کنید.

۲۸. a, c ۲۹. $-a, c$ ۳۰. $a, b + c$ ۳۱. $a + b, a - b$

در هر حالت مؤلفه a در امتداد b را پیدا کنید.

۳۲. $a = i + j - k$ ، $b = i + 7k$

۳۳. $a = 4j + 3k$ ، $b = -4j - 3k$

۳۴. $a = i + j$ ، $b = -i + 4j + 3k$

۳۵. $a = i + j + 2k$ ، $b = 6k$

۳۶. نشان دهید که هر گاه a, b, c بردارهای يک متعامد باشند، آنگاه $a + b + c$ با این بردارها زوایای مساوی می‌سازد.

۳۷. قانون کسینوسها را با استفاده از بردارهای a, b و $a - b$ به دست آورید.

۳۸. فرض کنید $a = \cos \alpha i + \sin \alpha j$ و $b = \cos \beta i + \sin \beta j$ ، که در آن

$0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$. نشان دهید که a و b بردارهای یک‌هستند. با استفاده از (۸) اتحاد مثلثاتی مربوط به $\cos(\beta - \alpha)$ را به‌دست آورید.

۳۹. نابرابری مثلثی (۶) را ثابت کنید.

۴۰. تساوی متوازی‌الاضلاعی (۷) را ثابت کنید.

۶.۶ فضاهای ضرب داخلی

دربخش ۴.۶ تعریف فضای برداری را با استفاده از خواص اساسی جمع برداری و ضرب در اسکالر، در فضای سه بعدی، به‌دست آوردیم. جالب است که ضرب نقطه‌ای نیز می‌تواند به طریقی مشابه مورد استفاده قرار گیرد (بخش ۵.۶) و انگیزه ایجاد مفهوم فضای ضرب داخلی حقیقی شود. بنابه تعریف، این فضا عبارت از يك فضای برداری حقیقی است که در آن ضربی داخلی، که در (۴) بخش ۵.۶ صدق می‌کند، تعریف شده است؛ به‌طور مبسوط:

تعریف فضای ضرب داخلی حقیقی

فضای برداری حقیقی V را فضای ضرب داخلی حقیقی (یا پیش‌فضای حقیقی هیلبرت)^۱ می‌نامند در صورتی که دارای خاصیت زیر باشد. به‌هر جفت بردار a و b در V عددی حقیقی مربوط است که با (a, b) نشان داده می‌شود و ضرب داخلی (یا ضرب اسکالر) a و b نامیده می‌شود، درمورد این ضرب باید اصول موضوعی زیر صادق باشند.

اصل ۱. به‌ازای تمام اسکالرها q_1 و q_2 و تمام بردارهای a, b, c در V ,

$$(q_1 a + q_2 b, c) = q_1 (a, c) + q_2 (b, c) \quad (\text{خطی بودن}).$$

اصل ۲. به‌ازای تمام بردارهای a و b در V ,

$$(a, b) = (b, a) \quad (\text{تقارن}).$$

اصل ۳. به‌ازای هر a در V ,

$$(a, a) \geq 0$$

(مثبت و معین بودن).

$$a = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad (a, a) = 0$$

۱. دیوید هیلبرت (David Hilbert)، ۱۸۶۲-۱۹۴۳، ریاضیدان بزرگ آلمانی که کارهای او در جبر عالی و نظریه اعداد، معادلات انتگرالی، حساب و ردشها، آنالیز تابعی و منطق ریاضی از اهمیت اساسی برخوردارند. کتاب «بنیادهای هندسه» او به‌روش اصل موضوعی در به‌دست آوردن شناخت و پذیرش عمومی کمک کرد. ۲۳ مسئله مشهور هیلبرت (که در يك سخنرانی در سال ۱۹۰۰ عرضه شد) تأثیر قابل ملاحظه‌ای در توسعه ریاضیات جدید داشت.

تعریف تعامد

بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ در یک فضای ضرب داخلی V را متعامد نامند هرگاه

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

توجه کنید که این تعریف ملهم از قضیه ۱ بخش ۵.۶ است. با استفاده از ضرب داخلی، به هر عنصر $\mathbf{a}$ از V می توان عددی مربوط ساخت که با $\|\mathbf{a}\|$ نشان داده شده چنین تعریف می شود

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \quad (\geq 0),$$

این عدد را نرم $\mathbf{a}$ می نامند. از (۲) بخش ۵.۶ می بینیم که این تعمیم مفهوم طول است. درواقع، با توجه به تعریفی که برای ضرب داخلی کردیم، ضرب نقطه ای یک ضرب داخلی است،

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

نمادهای جدید، فرمول (۲) بخش ۵.۶ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\|\mathbf{a}\| = |\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

بنا به اصول موضوع ضرب داخلی و تعریف نرم، می توان نتیجه گرفت [ر. ک. (۵) تا (۷) بخش ۵.۶]

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$$

(ناپرابری شوارتز)،

و از اینجا

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

(ناپرابری مثلثی)،

و با یک محاسبه مستقیم ساده

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2).$$

ما وارد جزئیات نخواهیم شد، زیرا اینها به درسهای پیشرفته تری (در آنالیز تابعی، به خصوص فضاهای هیلبرت، نظریه تقریب و غیره؛ ر. ک. [A10] ضمیمه ۱) مربوط می شوند. مع ذلك، ما یلیم با ذکر دو مثال مهم عمومیت مفهوم فضای ضرب داخلی را توضیح دهیم. اولین مثال فضای اقلیدسی n بعدی است که عبارت است از فضای ضرب داخلی مربوط به تمام n تاییهای مرتب حقیقی $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ، $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ ، و غیره، با ضرب داخلی

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(که در (۸) بخش ۵.۶ به آن اشاره شد). مثال دوم عبارت از فضای ضرب داخلی تمام توابع

پیوسته $f(x)$ ، $g(x)$ ، ... تعریف شده در فاصله‌ای مانند $\alpha \leq x \leq \beta$ است، با ضرب داخلی تعریف شده با

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx.$$

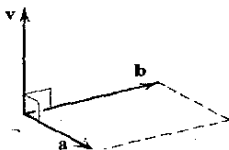
توجه کنید که تعامد در این حالت با آنچه در بخش ۷.۴ تعریف شد یکسان است.

۷.۶ ضرب برداری (ضرب خارجی)

کاربردهای مختلف موجب معرفی نوع دیگری ضرب برداری می‌شود که در آن حاصل ضرب دو بردار بردار دیگری است. این ضرب که اصطلاحاً ضرب برداری یا ضرب خارجی دو بردار a و b نامیده می‌شود، به صورت

$$a \times b$$

نوشته می‌شود و برداری مانند v است که به طریق زیر تعریف می‌شود.



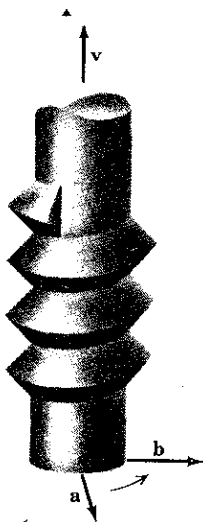
شکل ۱۳۱. حاصل ضرب برداری

تعریف حاصل ضرب برداری

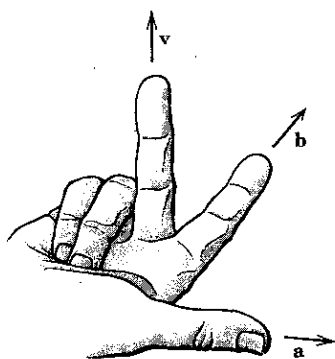
هر گاه a و b هم جهت یا هم امتداد و غیرهم سو باشند و یا یکی از دو بردار، بردار صفر باشد، آنگاه $v = a \times b = 0$.

در هر حالت دیگر، $v = a \times b$ برداری است که طول آن با سطح متوازی الاضلاعی که اضلاع مجاور آن a و b هستند برابر و امتدادش عمود بر a و b باشد. سوی این بردار باید چنان باشد که a ، b ، v ، با همین ترتیب، تشکیل یک سه تایی راستگرد، نظیر شکل ۱۳۱، بدهند.

منشأ اصطلاح راستگرد آن است که بردارهای a و b و v را، با همین ترتیب، می‌توان در امتداد انگشت‌های شست، اشاره و میانی دست راست، همانند شکل ۱۳۲، فرض کرد. همچنین می‌توان گفت هر گاه a را تحت زاویه α ($\alpha < \pi$) دوران دهیم تا در امتداد b قرار گیرد، آنگاه جهت v در جهت پیشروی پیچ راستگردی خواهد بود که به همان طریق جرخانده می‌شود (شکل ۱۳۳).



شکل ۱۳۳. پیچ راستگرد

شکل ۱۳۲. سه تایی راستگرد بردارهای v, b, a

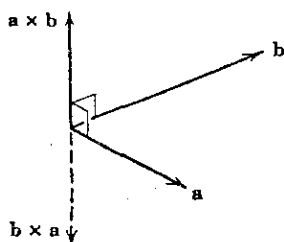
مساحت متوازی الاضلاعی که ضلعهای آن a و b باشند برابر است با $|a||b| \sin \gamma$ ، که γ زاویه بین a و b است، (ر. ک. شکل ۱۳۱). بنابراین به دست می آوریم

$$(۱) \quad |v| = |a||b| \sin \gamma.$$

فرض کنید $a \times b = v$ و $b \times a = w$. در آن صورت بنا به تعریف $|v| = |w|$ ، و برای اینکه a, b, w تشکیل یک سه تایی راستگرد بدهند باید داشته باشیم $w = -v$ (شکل ۱۳۴). بنابراین باید داشته باشیم

$$(۲) \quad b \times a = -(a \times b);$$

یعنی ضرب خارجی بردارها جابه جایی نیست بلکه پادجابه جایی است. از این رو ترتیب عوامل در ضرب برداری اهمیت زیادی دارد و باید به دقت رعایت شود.



شکل ۱۳۴. پادجابه جایی بودن ضرب خارجی

از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود که به ازای هر ثابت k ،

$$(۳) \quad (k \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k \mathbf{b}).$$

به علاوه، ضرب برداری نسبت به جمع برداری بخشپذیر است، یعنی

$$(۴) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

اثبات این مطلب در بخش بعد ارائه خواهد شد. بعداً ضربهای برداری را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم اما لازم است در همین جا یادآور شویم که ضرب برداری انجمنی نیست، یعنی، در حالت کلی

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

از (۱) همین بخش و (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می‌شود که

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \gamma = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \gamma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

با گرفتن جذر از طرفین، دستور مفیدی برای تعیین طول حاصل ضرب برداری به دست می‌آوریم

$$(۵) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}.$$

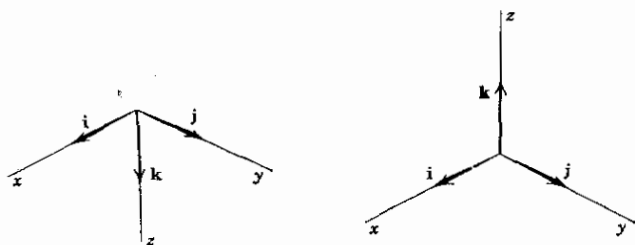
۸.۶ حاصل ضرب برداری بر حسب مؤلفه‌ها

اینک حاصل ضرب برداری را بر حسب مؤلفه‌های عامل آن در یک دستگاه مختصات دکارتی نشان می‌دهیم. در ارتباط با این موضوع، توجه به این نکته مهم است که بسته به جهتی که برای محورها انتخاب کنیم، دستگاههای دکارتی به دو نوع راستگرد و چپگرد تقسیم می‌شوند. این دو نوع دستگاه را در زیر تعریف می‌کنیم.

یک دستگاه مختصات دکارتی را راستگرد نامند هرگاه بردارهای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ متناظر با جهت مثبت محورها تشکیل یک سه‌تایی راستگرد بدهند (شکل ۱۳۵ الف). هرگاه این بردارها یک سه‌تایی چپگرد تشکیل دهند دستگاه مختصات چپگرد نامیده می‌شود. بردارهای $\mathbf{i}$ که مربوط به این دستگاه نسبت به هم همان وضعی را دارند که انگشتان شست، اشاره و میانی دست چپ نسبت به هم دارا هستند (شکل ۱۳۵ ب).

در کاربردها، ترجیح می‌دهیم که از دستگاههای راستگرد استفاده کنیم.

فرض کنید $\mathbf{a}_1$ ، $\mathbf{a}_2$ ، $\mathbf{a}_3$ و $\mathbf{b}_1$ ، $\mathbf{b}_2$ ، $\mathbf{b}_3$ به ترتیب مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد یا چپگرد باشند. می‌خواهیم مؤلفه‌های $\mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2$ ،



(الف) راستگرد

(ب) چپگرد

شکل ۱۳۵. دو نوع دستگاه مختصات دکارتی

v حاصل ضرب برداری

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

را برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بیان کنیم. کافی است تنها حالتی را بررسی کنیم که در آن $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. چون $\mathbf{v}$ هم بر $\mathbf{a}$ عمود است و هم بر $\mathbf{b}$ ، بنا به قضیه ۱ بخش ۵.۶، نتیجه می‌شود که $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ و $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، یا بنا به (۸) بخش ۵.۶،

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0, \\ & b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 = 0. \end{aligned}$$

با ضرب معادله اول در b_3 ، معادله دوم در a_3 و تفریق آنها از یکدیگر، به دست می‌آوریم

$$(a_3 b_1 - a_1 b_3) v_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) v_2.$$

با ضرب معادله اول (۱) در b_1 ، معادله دوم در a_1 و تفریق آنها از یکدیگر، به دست می‌آوریم

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) v_2 = (a_3 b_1 - a_1 b_3) v_3.$$

می‌توان به سهولت نشان داد

$$(2) \quad v_1 = c(a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad v_2 = c(a_3 b_1 - a_1 b_3), \quad v_3 = c(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

که در آنها c مقداری ثابت است. است در دو معادله بالا صدق می‌کنند. خواننده به راحتی می‌تواند تحقیق کند که (۲) در (۱) نیز صادق است. هر يك از معادلات مذکور در (۱) صفحه‌ای مار بمرملاً در فضای $v_1 v_2 v_3$ را نمایش می‌دهند. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای قائم این صفحات هستند (ر. ک. مثال ۳ بخش ۵.۶). از آنجا که $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ، این بردارها موازی نیستند و دو صفحه برهم منطبق نخواهند بود. لذا، فصل مشترك آنها خط راستی مانند L

است که از مبدأ می‌گذرد. چون (۲) جوابی برای (۱) است و وقتی c تغییر کند خط مستقیمی را نمایش می‌دهد، نتیجه می‌گیریم که (۲) نمایشگر L است، و هر جوابی از (۱) باید به شکل (۲) باشد. به خصوص مؤلفه‌های v نیز باید بدین شکل باشند، که در این مورد c باید تعیین شود. از (۲) به دست می‌آوریم

$$|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ = c^2 [(a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)] ,$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$|v|^2 = c^2 [(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2] ,$$

که خواننده به سادگی می‌تواند درستی آن را تحقیق کند ، بنابراین با استفاده از (۸) بخش ۵.۶ داریم

$$|v|^2 = c^2 [(a \cdot a)(b \cdot b) - (a \cdot b)^2] .$$

از مقایسه این رابطه با (۵) بخش قبل، نتیجه می‌گیریم که $c = \pm 1$.
از اینجا به بعد لازم است که راستگرد یا چپگرد بودن دستگاه مختصات مشخص باشد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که دستگاه راستگرد است و نشان می‌دهیم که $c = \pm 1$.
این کار را می‌توان به طریق زیر انجام داد.

هرگاه طولها و جهت‌های a و b را به‌طور پیوسته تغییر دهیم طوری که در نهایت $a = i$ و $b = j$ ، (شکل ۱۳۵ الف) آنگاه اندازه جهت v به‌طور پیوسته تغییر خواهد کرد و در نهایت ، $v = i \times j = k$ ، بدیهی است که می‌توانیم تغییرات را طوری انجام دهیم که هم a و هم b مخالف بردار صفر باقی بمانند و هیچگاه موازی هم نشوند. بدین ترتیب v هیچگاه مسای بردار صفر نخواهد شد، و از آنجا که تغییرات پیوسته است و c فقط می‌تواند مقادیر $+1$ و -1 را احراز کند، نتیجه می‌شود که عاقبت c باید همان مقدار قبلی را داشته باشد. اما در نهایت $a = i$ ، $b = j$ ، $v = k$ ، و بنابراین $a_1 = 1$ ، $a_2 = 0$ ، $a_3 = 0$ ، $b_1 = 0$ ، $b_2 = 1$ ، $b_3 = 0$ ، $v_1 = 0$ ، $v_2 = 0$ ، $v_3 = 1$ ، و سایر مؤلفه‌های ذکر شده در (۲) برابر صفرند. بنابراین از (۲) معلوم می‌شود که $+1 = c = v_3$. توجه کنید که عبارتهای داخل پرانتز در (۲) را می‌توان به صورت دترمینانهای مرتبه دوم نوشت، می‌توانیم نتیجه را به صورت زیر جمع‌بندی کنیم.

نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$$

یا برحسب دترمینانهای مرتبه دوم

۱. دترمینانهای مرتبه دوم و سوم معمولاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بررسی می‌شوند. خوانندگانی که با این دترمینانها آشنا نیستند می‌توانند بخش ۷ و ۹ را مطالعه کنند.

$$(۳) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

که a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 به ترتیب مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هستند.

برای به‌خاطر سپردن فرمول، توجه می‌کنیم که (۳) را می‌توان به صورت بسط دترمینان

$$(۴) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نسبت به سطر اول، نمایش داد؛ اما باید متوجه باشیم که این یک دترمینان معمولی نیست زیرا عناصر سطر اول آن بردارند.

در یک دستگاه مختصات دکارتی چپگرد، $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$ (شکل ۱۳۵ ب) و از استدلال بالا نتیجه می‌شود که باید در (۲) داشته باشیم $c = -1$. بنابراین نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی چپگرد داریم

$$(۵) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال ۱

نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، فرض کنید که $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ در این صورت

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

حال می‌توانیم قانون بخشپذیری (۴) را که در بخش قبل ذکر شد ثابت کنیم. از رابطه (۳) نتیجه می‌شود که مؤلفه اول $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ عبارت است از

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1) \\ = (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1c_2 - a_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

عبارت سمت راست مؤلفه اول $a \times b + a \times c$ است. برای دومؤلفه دیگر بردار مذکور نیز وضع به همین منوال است. بدین ترتیب اولین رابطه از روابط (۴) بخش قبل ثابت می‌شود و رابطه دوم را با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد. ▲

خواننده می‌تواند معیار زیرین برای تشخیص وابستگی و استقلال خطی دو بردار را ثابت کند.

قضیه ۱

دو بردار تشکیل یک مجموعه وابسته خطی می‌دهند اگر و تنها اگر حاصل ضرب برداری آنها بردار صفر باشد.

لزوم تعریف ضرب برداری در مسائل متعددی احساس می‌شود که ما دو نمونه از آنها را در زیر می‌آوریم. دیگر کاربردهای فیزیکی و هندسی ضرب برداری را به بعد موکول می‌کنیم.

مثال ۲. گشتاور نیرو

در مکانیک گشتاور m نیروی p نسبت به نقطه‌ای مانند Q بنا به تعریف عبارت از حاصل ضرب $m = |p|d$ است که در آن d فاصله (عمودی) نقطه Q از خط L ، خط اثر نیروی p ، است (شکل ۱۳۶). هرگاه r برداری باشد که ابتدایش نقطه Q است و انتهایش هر نقطه A از خط L ، آنگاه $d = |r| \sin \gamma$ (شکل ۱۳۶) و

$$m = |r| |p| \sin \gamma.$$

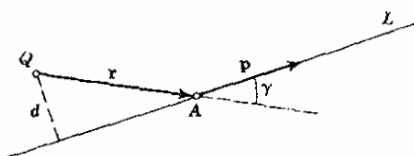
چون γ زاویه بین p و r است، از رابطه (۱) بخش قبل نتیجه می‌شود که

$$m = |r \times p|.$$

بردار

$$m = r \times p$$

را بردار گشتاور یا گشتاور برداری p نسبت به Q می‌نامند. اندازه این بردار m جهت آن جهت محور دوران p نسبت به Q است، اگر این دوران هم‌سو با p انجام گیرد.



شکل ۱۳۶. گشتاور نیرو

مثال ۳. سرعت جسم دوار

دوران جسم صلب B در فضا را می توان به سادگی و به طور یکتا به ترتیب زیر با بردار $\mathbf{w}$ توصیف کرد. جهت $\mathbf{w}$ همان جهت محور دوران است که، برای ناظری که از مبدأ $\mathbf{w}$ به انتهای آن نگاه می کند، دوران در جهت حرکت عقربه های ساعت صورت می گیرد. طول $\mathbf{w}$ برابر با **تندی زاویه ای** ($\omega > 0$) دوران، یعنی خارج قسمت تندی خطی (یا مماسی) نقطه ای از B بر فاصله آن از محور دوران است.

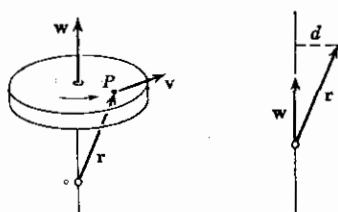
فرض کنید P نقطه ای از B و d فاصله آن از محور باشد. در این صورت تندی P برابر ωd است. فرض کنید $\mathbf{r}$ بردار مکان P نسبت به دستگاه مختصاتی با مبدأ O روی محور دوران باشد. در این صورت $d = |\mathbf{r}| \sin \gamma$ است که در آن γ زاویه بین $\mathbf{w}$ و $\mathbf{r}$ است. بنابراین،

$$\omega d = |\mathbf{w}| |\mathbf{r}| \sin \gamma = |\mathbf{w} \times \mathbf{r}|.$$

با استفاده از این رابطه و تعریف ضرب برداری می بینیم که $\mathbf{v}$ ، بردار سرعت نقطه P ، را می توان به صورت زیر نمایش داد (شکل ۱۳۷):

$$(v) \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

از این فرمول ساده می توان برای تعیین $\mathbf{v}$ در هر نقطه از B استفاده کرد.



شکل ۱۳۷. دوران جسم صلب

مسائل بخش ۸.۶

نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، فرض کنید $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، و $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. مطلوب است محاسبه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad .1$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c}, |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|, |\mathbf{c} \times \mathbf{b}| \quad .2$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{c}, |\mathbf{a} \times \mathbf{c}|, \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad .3$$

$$(a+rb) \times c, \left(\frac{1}{r}a+b\right) \times rc \quad .۴$$

$$(c-a) \times rb, (a-c) \times rb \quad .۵$$

$$a \times (b+c), a \times b + a \times c \quad .۶$$

$$a \times (rb+rc), ra \times b + ra \times c \quad .۷$$

$$(a+b) \times c, a \times c - c \times b \quad .۸$$

$$a \times (b-c), b \times a + a \times c \quad .۹$$

$$c \times c, a \times c + c \times a \quad .۱۰$$

$$(a+rb) \times b, a \times (ra+b) \quad .۱۱$$

$$(a \times b) \times c, a \times (b \times c) \quad .۱۲$$

۱۳. مسائل ۱، ۴ و ۶ نشان دهنده کدام خواص ضرب خارجی هستند؟

۱۴. با در نظر گرفتن مختصات راستگرد، نشان دهید که $k \times i = j$ ، $i \times j = k$ ، $j \times k = i$ ، همچنین $i \times (j \times k)$ و $(i \times j) \times k$ را پیدا کنید.

مساحت متوازی الاضلاعی را که بردارهای داده شده اضلاع مجاور آن هستند پیدا کنید.

$$i+2j, j+k \quad .۱۶ \quad i+j, i-j \quad .۱۵$$

$$i-j+k, i+j-k \quad .۱۸ \quad 2i-j-k, i+2j \quad .۱۷$$

مطلوب است مساحت متوازی الاضلاعی که رئوس آن، در صفحه xy ، عبارتند از

$$(0, 0, 0), (2, 2), (-1, 1), (1-3) \quad .۱۹$$

$$(1, 2), (0, 0), (2, 6), (1, 4) \quad .۲۰$$

$$(-4, 2), (-6, 5), (-3, 6), (-5, 9) \quad .۲۱$$

$$(8, -3), (10, 1), (9, 0), (11, 4) \quad .۲۲$$

مطلوب است مساحت مثلثی که رئوس آن عبارتند از

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) \quad .۲۳$$

$$(3, 2, 0), (1, -1, 0), (2, 3, 0) \quad .۲۴$$

$$(0, 4, 0), (1, 1, 1), (-2, 1, -3) \quad .۲۵$$

$$۲۶. (4, -2, 6), (6, -1, 7), (5, 0, 5)$$

در هر يك از حالات زیر $|a \times b|$ را با استفاده از (۵) بخش ۷.۶ پیدا کنید.

$$۲۷. a = i + j - k, b = 3k \quad ۲۸. a = 2i + 2k, b = 5j - k$$

$$۲۹. a = 3i - 4j, b = i - j - k \quad ۳۰. a = 5i + 2j + k, b = 2j - k$$

آیا بردارهای زیر موازی هستند؟ متعامد چگونه؟

$$۳۱. -2i + 4j, 3k \quad ۳۲. 2i + 2j + k, 6i + 4j + 2k$$

$$۳۳. i + j, i - j \quad ۳۴. i - 2j + 3k, 2i + 5j$$

$$۳۵. -i + j - 2k, 4i - 4j + 12k \quad ۳۶. i + j - 2k, -2i - 2j + 6k$$

در هر مسئله دو بردار یک‌پیدا کنید که بر هر دو بردار داده شده عمود باشد.

$$۳۷. i, j \quad ۳۸. i - j + 2k, 2i + 3k$$

$$۳۹. 2j - 3k, 2i \quad ۴۰. 2i + 2j + 5k, 2j - k$$

مطلوب است بردار یک‌پایه قائم بر صفحه‌ای که از نقاط زیر می‌گذرد.

$$۴۱. (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

$$۴۲. (-1, 2, 3), (1, 1, 1), (2, -1, 3)$$

$$۴۳. (0, -1, 0), (2, 2, 1), (1, 0, 1)$$

$$۴۴. (3, 2, 8), (1, 3, 3), (0, 2, 1)$$

۴۵. برداری مانند v پیدا کنید که با فصل مشترك صفحات $2x + 3y + 4z = 0$ و $x - y + z = 2$ موازی باشد.

۴۶. برداری مانند v پیدا کنید که با صفحه $x + y + z = 1$ موازی و بر خط $y = x$ و $z = 0$ عمود باشد.

نیروی مانند p در امتداد خطی که از نقطه A می‌گذرد، اثر می‌کند. بردار گشتاور m نیروی p را نسبت به نقطه‌ای مانند Q پیدا کنید در صورتی که نیرو، نقطه A و نقطه Q عبارت باشند از

$$۴۷. i + j, (0, 0, 0), (0, 1, 0)$$

$$۴۸. 2i + j, (1, 1, 1), (2, 2, 2)$$

$$\mathbf{i}, (1, 1, 0), (-5, 1, 0) \quad .49$$

$$3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, (0, -1, 2), (3, 0, 2) \quad .50$$

۹.۶ ضرب سه گانه اسکالر. سایر ضربهای مکرر

ضربهای مکرر بردارها یعنی ضربهایی که دارای سه عامل یا بیشتر هستند، کاربردهای زیادی دارند. مهمترین این ضربها ضرب سه گانه اسکالر یا ضرب سه گانه مختلط $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ می سه بردار است. فرض کنید نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد،

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

در این صورت بنابه (۴) بخش ۸.۶، نتیجه می شود که

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

از اینجا واز (۸) بخش ۵.۶ می بینیم که ضرب سه گانه اسکالر به صورت زیر درمی آید

$$(1) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ضرب سه گانه اسکالر $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ را به صورت $(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c})$ نمایش می دهیم. چون عوض کردن جای دو سطر در مینان باعث عوض شدن علامت آن می شود، داریم

$$(2) \quad (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c}) \quad , \quad \text{و غیره.}$$

اگر دو مرتبه جای سطرها را عوض کنیم به دست می آوریم

$$(3) \quad (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \mathbf{c} \mathbf{a}) = (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b}).$$

حال، بنابه تعریف

$$(\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (\mathbf{c} \mathbf{a} \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

و چون ضرب نقطه ای جابه جایی است، عبارت آخر برابر است با $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. بنابراین

$$(4) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

علاوه بر این، به ازای هر ثابت k ،

$$(5) \quad (kabc) = k(abc).$$

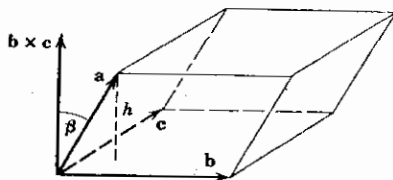
قدر مطلق حاصل ضرب سه گانه اسکالر (abc) يك تعبیر هندسی ساده دارد. این حاصل ضرب برابر است با حجم متوازی السطوحی مانند P که a و b و c اضلاع مجاور آن هستند.

در واقع، از (۱) بخش ۵۰۶ به دست می آوریم

$$(abc) = a \cdot (b \times c) = |a| |b \times c| \cos \beta$$

که در آن β زاویه بین a و بردار حاصل ضرب $b \times c$ است. حال $|b \times c|$ مساحت قاعده P است و ارتفاع P که آن را h می نامیم برابر با قدر مطلق $|a| \cos \beta$ است (شکل ۱۳۸). بدین ترتیب حکم فوق اثبات می شود.

از این بررسی هندسی نتیجه می شود که مقدار ضرب سه گانه اسکالر عددی حقیقی است که مستقل از نحوه انتخاب مختصات دکارتی راستگرد در فضا است. اما باید به خاطر داشته باشیم که در مورد دستگاه مختصات چپگرد، به جای (۴) بخش ۸۰۶ باید رابطه (۵) آن بخش را به کار ببریم و در نتیجه يك علامت منفی جلوی دترمینان (۱) خواهیم داشت. همچنین می توان گفت که مقدار دترمینان تحت تبدیل از يك دستگاه دکارتی راستگرد به دستگاه راستگرد دیگر، و یا تغییر از يك دستگاه چپگرد به دستگاه چپگرد دیگر، ناورد است، اما تبدیل از يك دستگاه راستگرد به چپگرد (یا به عکس) باعث می شود که دترمینان در ۱ - ضرب شود.



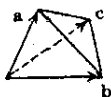
شکل ۱۳۸. تعبیر هندسی ضرب سه گانه اسکالر

مثال ۱. چهاروجهی

حجم يك چهاروجهی را که a ، b ، c یا لهای مجاور آن نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد، مقادیر زیر را دارند پیدا کنید.

$$a = i + 2k, \quad b = 2i + 6j + 2k, \quad c = 3i + 3j - 6k.$$

حجم V متوازی السطوحی با اضلاع مجاور a و b و c از ضرب سه گانه اسکالر زیر به دست می آید:



شکل ۱۳۹. هرم

$$(abc) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -54$$

واز آنجا $V = 54$ ؛ علامت منفی نشان می‌دهد که a و b و c ، با این ترتیب، تشکیل یک سه‌تایی چپگرد می‌دهند. حجم چهاروجهی $1/6$ حجم متوازی‌السطوح، یعنی ۹، است. ▲

با توجه به تعبیر هندسی ضرب سه‌گانه اسکالر، معیار مفیدی برای تشخیص وابستگی خطی و استقلال خطی سه بردار به دست می‌آوریم. سه بردار تشکیل یک مجموعه وابسته خطی می‌دهند اگر و تنها اگر هم‌صفحه (و از جمله در حالت خاص هم‌خط؛ ر. ک. بخش ۴.۶) باشند. بنا براین داریم

قضیه ۱ (وابستگی خطی)

سه بردار تشکیل یک مجموعه وابسته خطی می‌دهند اگر و تنها اگر حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر آنها صفر باشد.

ضربهای مکرردیگری را که در کاربردها پیش می‌آیند می‌توان برحسب ضرب نقطه‌ای، ضرب برداری یا ضرب سه‌گانه اسکالر، بیان کرد. یک فرمول مهم (که ذیلاً آن را ثابت می‌کنیم) عبارت است از

$$(۶) \quad b \times (c \times d) = (b \cdot d)c - (b \cdot c)d$$

از این فرمول، اتحاد لاگرانژ نتیجه می‌شود

$$(۷) \quad (a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

اثبات این اتحاد به خواننده واگذار می‌شود؛ (ر. ک. مسئله ۳۹ همین بخش) و همچنین (ر. ک. مسئله ۴۰)

$$(۸) \quad (a \times b) \times (c \times d) = (abd)c - (abc)d.$$

قبل از اثبات (۶) متذکر می‌شویم که (۶) همچنین ایجاب می‌کند که

$$(b \times c) \times d = -d \times (b \times c) = (d \cdot b)c - (d \cdot c)b.$$

این نشان می‌دهد که در حالت کلی $b \times (c \times d)$ و $(b \times c) \times d$ بردارهای مختلفی

هستند یعنی ضرب خارجی انجمنی نیست و برانته‌ها در (۶) اهمیت دارند و نمی‌توان آنها را حذف کرد. به عنوان مثال، نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

$$i \times (j \times j) = 0 \quad \text{ولی} \quad (i \times j) \times j = k \times j = -i$$

اثبات (۶). دستگاه مختصات دکارتی راستگردی انتخاب می‌کنیم به قسمی که محور x ها در امتداد d بوده، صفحه xy شامل c باشد. در این صورت بردارهایی که در (۶) آمده‌اند به شکل زیر نمایش داده می‌شوند:

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k, \quad c = c_1 i + c_2 j, \quad d = d_1 i.$$

بنابراین $c \times d = -c_2 d_1 k$ ، و به علاوه،

$$b \times (c \times d) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -c_2 d_1 \end{vmatrix} = -b_2 c_2 d_1 i + b_1 c_2 d_1 j.$$

از طرف دیگر، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (b \cdot d)c - (b \cdot c)d &= b_1 d_1 (c_1 i + c_2 j) - (b_1 c_1 + b_2 c_2) d_1 i \\ &= b_1 c_2 d_1 j - b_2 c_2 d_1 i. \end{aligned}$$

و بدین ترتیب (۶) در دستگاه خاص مورد بحث، اثبات می‌شود. اما طول و جهت يك بردار و حاصل ضرب برداری، و نیز مقدار حاصل ضرب داخلی مستقل از چگونگی انتخاب محورهای مختصات است. علاوه بر این، نمایش $b \times (c \times d)$ بر حسب i ، j ، k نسبت به دستگاه راستگرد و چپگرد، به دلیل وجود دو ضرب برداری، همانند است. بنابراین، (۶) در هر دستگاه مختصات دکارتی صادق است. ▲

مسائل بخش ۹.۶

مقدار حاصل ضرب سه گانه اسکالر بردارهای زیر (به ترتیب مفروض) را، که مؤلفه‌هایشان نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داده شده‌اند، پیدا کنید.

$$i, j, k \quad .1$$

$$j, k, i \quad .2$$

$$i, k, j \quad .3$$

$$2i, 3j+k, 4i-k \quad .4$$

$$j, j+k, \quad \mathbf{r}i - \mathbf{r}j \quad .5$$

$$\mathbf{r}i - j + k, j + k, \quad -\mathbf{i} + \mathbf{r}j - \mathbf{r}k \quad .6$$

$$\mathbf{r}j + \mathbf{r}k, \mathbf{i} + \mathbf{r}j, \quad \mathbf{r}k \quad .7$$

$$\mathbf{r}i + \mathbf{r}j + k, \mathbf{i} - j - k, \quad \mathbf{r}i + \mathbf{r}j + \mathbf{r}k \quad .8$$

$$\mathbf{r}i - \mathbf{r}k, -\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}i - j + \delta k \quad .9$$

$$\mathbf{i} + j + k, \mathbf{r}i, \quad \mathbf{r}j + \delta k \quad .10$$

آیا بردارهای زیر به طور خطی مستقل هستند یا وابسته؟

$$\mathbf{r}i, -j \quad .11$$

$$\mathbf{i} - \mathbf{r}j + \mathbf{r}k, \mathbf{r}j + \mathbf{r}k, \quad -\mathbf{r}i + \mathbf{r}j - \mathbf{r}k \quad .12$$

$$\mathbf{i} + j, \mathbf{i} - j \quad .13$$

$$\mathbf{i}, \mathbf{o}, j \quad .14$$

$$\mathbf{i}, j, k, \quad \mathbf{r}i + \mathbf{r}j - k \quad .15$$

$$\mathbf{r}i + \delta j, \mathbf{i} + \mathbf{r}j, \quad -\mathbf{i} + \mathbf{r}j \quad .16$$

$$\mathbf{i} + j, j + k, \quad k + \mathbf{i} \quad .17$$

$$\mathbf{i} + k, \mathbf{r}i - \delta k, \quad \mathbf{r}k \quad .18$$

۱۹. λ را طوری تعیین کنید که $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \lambda \mathbf{j} + \mathbf{r}k$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}i - \mathbf{r}k$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + j + k$ هم صفحه باشند.

۲۰. آیا نقاط $(4, -2, 1)$, $(5, 1, 6)$, $(2, 2, -5)$ و $(3, 5, 0)$ در يك صفحه قرار دارند؟

۲۱. λ و μ را طوری تعیین کنید که نقاط $(-1, 3, 2)$, $(-4, 2, -2)$ و $(5, \lambda, \mu)$ بر خطی مستقیم قرار گیرند.

۲۲. دستگاه متشکل از سه معادله خطی همگن با سه مجهول يك جواب غیر بديهی دارد اگر و تنها اگر دترمینان ضرایب دستگاه صفر باشد. با استفاده از این قضیه آشنا، قضیه ۱ را ثابت کنید.

حجم متوازی السطوحی را پیدا کنید که بردارهای داده شده اضلاع مجاور آن باشند.

$$2j+k, i-j, -j+rk \quad .23 \quad i, -j, rk$$

$$i, 2i+2j-k, -i+j+rk \quad .25 \quad i+j, i-j, -k$$

$$j+k, i+j, i-rk \quad .27 \quad 2i+rk, -2j, i+j-k$$

حجم چهاروجهی با رئوس زیر را پیدا کنید.

$$(0, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 3), (-1, 0, 4) \quad .29$$

$$(2, 1, 8), (3, 2, 9), (2, 1, 4), (3, 3, 10) \quad .30$$

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \quad .31$$

$$(-1, 0, 1), (4, 4, 5), (0, 1, 0), (2, 2, 0) \quad .32$$

فرض کنید، نسبت به يك دستگاه مختصات دکارتی راستگرد $b=2i-4k, a=i+2j-k$ و $c=-i+j$ و $d=2i-j+rk$. مطلوب است محاسبه

$$(a \times b) \times c, (a \times b) \cdot c \quad .33$$

$$(b \times c) \times d, d \times (b \times c) \quad .34$$

$$(a \times c) \times d, (a \times d) \times c \quad .35$$

$$(b \times b) \times c, b \times (b \times c) \quad .36$$

$$(a \times b) \times (c \times d) \quad .37$$

$$(a \times c) \cdot (b \times d), (c \times a) \cdot (d \times b) \quad .38$$

۳۹. (۷) را ثابت کنید. راهنمایی. حاصل ضرب نقطه‌ای a و (۶) را پیدا کنید.

۴۰. (۸) را از (۶) نتیجه بگیرید.



جبر خطی

قسمت دوم: ماتریس و دترمینان

ماتریس آرایه‌ای مستطیلی از اعداد است. چنین آرایه‌هایی در شاخه‌های مختلف ریاضیات کاربردی ظاهر می‌شوند. در بسیاری موارد ماتریسها ضرایب تبدیلات خطی (مثالهای بخش ۱.۷) یا دستگاههای معادلات خطی (معادلات خطی همزمان) هستند که مثلا در شبکه‌های الکتریکی، چارچوبها در مکانیک، برآوردن منحنی در آمار و مسائل حمل و نقل پیش می‌آیند. ماتریسها سودمندند زیرا ما را قادر می‌سازند که آرایه‌ای از تعداد زیادی عدد را همچون یک شیء منفرد در نظر بگیریم، آن را با یک علامت نشان دهیم و با این علامتها محاسبات را به شکل بسیار خلاصه‌ای انجام دهیم. این «خلاصه‌نویسی ریاضی» بسیار دقیق و پر قدرت بوده، برای بسیاری از مسائل عملی مناسب است. بیش از ۵۰ سال است که ماتریس در ریاضیات مهندسی وارد شده است و امروزه در شاخه‌های مختلف آن اهمیت روزافزونی دارد.

در این فصل نخست ماتریسها و مفاهیم مربوط به آنها را بیان کرده (بخش ۱.۷)، سپس اعمال جبری روی ماتریسها را تعریف می‌کنیم (بخشهای ۲.۷ تا ۴.۷)، و سرانجام دستگاههای معادلات خطی (حل با روش حذفی در بخش ۵.۷، وجود در بخش ۷.۷، حل با قاعده کرامر در بخش ۱۱.۷)، دترمینانها (بخشهای ۹.۷ و ۱۰.۷)، صورتهای دوخطی و دیگر صورتهای (بخش ۱۲.۷)، مسائل مقدار ویژه ماتریسها (بخشهای ۱۳.۷ و ۱۴.۷)، دستگاههای معادلات دیفرانسیل (بخش ۱۵.۷)، رتبه ماتریس (بخشهای ۶.۷ و ۱۱.۷) و معکوس ماتریس (بخش ۸.۷) را بررسی می‌کنیم.

روشهای عددی در بخشهای ۹.۱۹ تا ۱۴.۱۹ که از دیگر بخشهای فصل ۱۹ مستقل هستند ارائه شده‌اند، بنابراین می‌توان به محض آشنایی با مطالب این فصل به مطالعه آنها پرداخت.

پیشنیاز این فصل: فصل ۶.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذف است: ۱۲.۷ - ۱۵.۷.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت پ.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰.۷ مفاهیم اساسی

ماتریس آرایه‌ای مستطیلی از اعداد محصور شده بین دو پرانتز است؛ مانند

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, (a_1 \ a_2 \ a_3).$$

تعریف ماتریس در زیر ارائه می‌شود و قواعد محاسبات ماتریسی در بخشهای بعد تعریف و تشریح خواهند شد.

ماتریسها در ارتباط با تبدیلات خطی یا دستگاه معادلات خطی ظاهر می‌شوند. به عنوان مثال معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} 20x_1 - 3x_2 &= y_1 \\ 0.5x_1 + 7x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

هر گاه y_1 و y_2 اعداد داده شده‌ای باشند، معادلات بالا دستگاهی از دو معادله خطی با مجهولات x_1 و x_2 تشکیل می‌دهند. ضرایب این دستگاه عبارتند از ۲۰، -۳، ۰.۵، ۷ و برای تشخیص موقعیت آنها می‌توان آنها را به ترتیبی که در معادلات آمده‌اند، یعنی به صورت یک ماتریس، مرتب کرد:

$$\begin{pmatrix} 20 & -3 \\ 0.5 & 7 \end{pmatrix} \quad (2)$$

هر گاه x_1 ، x_2 و y_1 ، y_2 کمیت‌های متغیری باشند (مثلاً، مختصات مربوط به دودستگاه مختصات متفاوت در صفحه)، آنگاه جفت فرمول (۱) یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهد. این تبدیل با چهار ضریب خود، یعنی با ماتریس (۲)، کاملاً معین می‌شود. می‌توانیم این

ماتریس را تنها با يك حرف، مثلاً A ، نشان دهیم و آن را به صورت

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

بنویسیم که در آن $a_{11} = 20$ ، $a_{12} = -3$ ، $a_{21} = 5$ و $a_{22} = 7$. امتیاز این نماد گذاری آن است که فوراً می توانیم موقعیت هر ضریب a_{jk} را در یابیم زیرا اولین شاخص زیر، شماره سطر (خط افقی) و دومین شاخص، شماره ستون (خط عمودی) a_{jk} می باشد. حال تعریفی کلی از ماتریس ارائه می دهیم (قواعد محاسبات ماتریسی در بخشهای بعدی تعریف و تبیین خواهند شد).

آرایه ای مستطیلی از اعداد (حقیقی یا مختلط) به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

را ماتریس نامند. (اعداد a_{11} ، a_{12} ، $\dots$ ، a_{mn} عناصر ماتریس نامیده می شوند. خطهای افقی را سطرها یا بردارهای سطری و خطهای عمودی را ستونها یا بردارهای ستونی ماتریس می نامند. ماتریسی را که m سطر و n ستون دارد ماتریس $(m \times n)$ می نامند. (خوانده می شود «ماتریس m در n »).

ماتریسها را با حروف بزرگ سیاه نظیر A و B و غیره، یا به وسیله (a_{jk}) و (b_{ik}) و غیره، یعنی با نوشتن عنصر عمومی ماتریس در داخل پرانتز نشان می دهند. در نماد گذاری شاخص زیر دوگانه برای عناصر، اولین شاخص زیر همیشه معرف سطر و دومین شاخص زیر معرف ستون عنصر داده شده است.

ماتریس

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

را که تنها يك سطر دارد ماتریس سطری یا بردار سطری می نامند. ماتریس

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

را که تنها يك ستون دارد ماتریس ستونی یا بردار ستونی می نامند. ماتریسهای سطری و ستونی با حروف کوچک سیاه نشان داده می شوند. این کار با نماد گذاری ما در مورد بردارها (فصل ۶) موافقت دارد بدین معنی که مؤلفه های بردار را می توان به صورت

ماتریسی سطری یا ستونی نوشت.

عناصر يك ماتریس می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند. هر گاه تمام عناصر يك ماتریس حقیقی باشند آن ماتریس را **ماتریس حقیقی** می‌نامند.

ماتریسی را که تعداد سطرها و ستونهایش با هم برابر باشند **ماتریس مربعی** نامند و تعداد سطرها را مرتبه آن گویند. ماتریس مربعی مرتبه n را ماتریس $(n \times n)$ نیز می‌نامند (که خوانده می‌شود «ماتریس n در n »). در ماتریس مربعی قطری که شامل عناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ می‌شود **قطر اصلی** نام دارد. ماتریسهای مربعی از اهمیت خاصی برخوردارند.

تساوی ماتریسها را با الهام از تعریفی که در فصل ۶ (به انتهای بخش ۲۰۶ رجوع شود) از تساوی بردارها داشتیم تعریف می‌کنیم. دو ماتریس $A = (a_{ik})$ و $B = (b_{ik})$ مساوند اگر و تنها اگر A و B دارای تعداد سطرها و ستونهای مساوی بوده و عناصر متناظر آنها برابر باشند، یعنی

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{به‌ازای تمام مقادیر } k \text{ و } i$$

در این صورت می‌نویسیم

$$A = B.$$

هر ماتریسی که با حذف بعضی از سطرها و ستونهای ماتریس مفروض $(m \times n)$ به دست آید **زیر ماتریس A** نامیده می‌شود.

بنابراین قرارداد، و برای سهولت امر، مفهوم «زیر ماتریس» شامل خود A (یعنی ماتریس حاصل از A بدون حذف سطر و ستون) نیز می‌شود.

مثال ۱. زیرماتریسهای يك ماتریس

ماتریس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

سه زیرماتریس (2×2) به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

دو زیر ماتریس (1×3) ، یعنی دو بردار سطری، سه زیرماتریس (2×1) ، یعنی سه بردار ستونی؛ شش زیرماتریس (1×2) به صورت

$$\begin{aligned} &(a_{11} \ a_{12}), (a_{11} \ a_{13}), (a_{12} \ a_{13}), \\ &(a_{21} \ a_{22}), (a_{21} \ a_{23}), (a_{22} \ a_{23}), \end{aligned}$$

و شش زیرماتریس (1×1) به صورت $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}$ را شامل می‌شود.

۲۰۷ جمع ماتریسها. ضرب ماتریس در عدد

چون می‌خواهیم به کمک ماتریسها محاسبه کنیم اینک به معرفی اعمال جبری روی ماتریسها می‌پردازیم. دو نمونه از این اعمال را که عبارتند از جمع ماتریسها و ضرب ماتریس در عدد تعریف می‌کنیم. این تعاریف از کاربردهای مختلف (که بعداً در همین فصل مورد بحث قرار خواهند گرفت و نیز از تعاریف متناظر در مورد بردارها که در بخش ۳.۶ گفته شد، و انتظار می‌رود که حالت‌های خاصی از تعاریف ماتریسی باشند، نشأت می‌گیرند.

جمع ماتریسها فقط در مورد ماتریسهایی تعریف می‌شود که تعداد سطرهاشان با هم و تعداد ستونهاشان با هم برابر باشند، این جمع به طریق زیر تعریف می‌شود. مجموع ماتریس $A = (a_{jk})$ و $B = (b_{jk})$ که هر دو $m \times n$ هستند عبارت است از ماتریس $C = (c_{jk})$ که $(m \times n)$ است و عناصر آن عبارتند از

$$(1) \quad c_{jk} = a_{jk} + b_{jk} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{matrix}$$

ومی‌نویسیم

$$C = A + B.$$

می‌بینیم که عناصر $A + B$ از جمع کردن عناصر متناظر A و B به دست می‌آیند.

مثال ۱. جمع ماتریسها

هر گاه داشته باشیم

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{آنگاه داریم}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ماتریس $(m \times n)$ صفر، 0 را ماتریسی تعریف می‌کنیم که تمام عناصر آن صفر هستند. ملاحظه می‌کنیم که بنابراین تعریف ماتریسها دارای همان خواص جمع اعداد حقیقی است.

$$A+B=B+A \quad (\text{الف})$$

$$(U+V)+W=U+(V+W) \quad (U+V+W \text{ می شود}) \quad (\text{ب})$$

$$A+0=A \quad (\text{پ})$$

$$A+(-A)=0 \quad (\text{ت})$$

در اینجا $-A=(-a_{jk})$ ماتریس $(m \times n)$ ی است که از ضرب کردن تمام عناصر A در -1 به دست می آید و منفی A نامیده می شود.

به جای $A+(-B)$ می نویسیم $A-B$ و این ماتریس را تفاضل A و B می نامیم بدیهی است که عناصر این ماتریس از تفریق عناصر متناظر دو ماتریس A و B به دست می آیند.

ضرب ماتریس در عدد به ترتیب زیر تعریف می شود. حاصل ضرب ماتریس A که $(m \times n)$ است در عدد q با qA یا Aq نشان داده می شود و ماتریسی است $(m \times n)$ که از ضرب هر عنصر A در q حاصل می شود یعنی

$$(3) \quad qA = Aq = \begin{pmatrix} qa_{11} & qa_{12} & \dots & qa_{1n} \\ qa_{21} & qa_{22} & \dots & qa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ qa_{m1} & qa_{m2} & \dots & qa_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال ۲. ضرب ماتریس در عدد

هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -18 \\ 59 & 36 \end{pmatrix}, \text{ آنگاه } A+A=2A = \begin{pmatrix} 54 & -36 \\ 118 & 72 \end{pmatrix} \text{ و}$$

$$\frac{10}{9}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

از تعاریف فوق می بینیم که به ازای هر ماتریس $(m \times n)$ (با m و n مشخص) و هر عدد داریم

$$q(A+B)=qA+qB \quad (\text{الف})$$

$$(c+k)A=cA+kA \quad (\text{ب})$$

$$(4) \quad c(kA)=(ck)A \quad (\text{پ}) \quad (\text{که نوشته می شود } ckA)$$

$$1A=A \quad (\text{ت})$$

توجه کنید که $(-1)A=-A$ منفی A است.

فرمولهای (۲) و (۴) خواصی را بیان می کنند که مشخصه فضای برداریند. (ر. ک. بخش ۴.۶). لذا داریم:

قضیه ۱ (فضای برداری ماتریسها)

تمام ماتریسهای $(m \times n)$ حقیقی (یا مختلط) (با m و n مشخص) تشکیل يك فضای برداری حقیقی (یا مختلط) به بعد mn می دهند. ماتریسهای E_{rs} ($r=1, \dots, m$)؛ $s=1, \dots, n$) است که تعداد آنها mn است پایه ای برای این فضا تشکیل می دهند، ماتریس E_{rs} ماتریسی $(m \times n)$ است که در آن $e_{rs}=1$ (یعنی عنصر سطر r ام و ستون s ام برابر ۱ است) و تمام عناصر دیگر صفر هستند.

مسائل مربوط به جمع ماتریسها و ضرب ماتریس در عدد در آخر بخش بعد آورده شده است.

۳.۷ ترانهاید ماتریس. ماتریسهای مخصوص

در این بخش کوتاه می خواهیم عمل ساده دیگری روی ماتریس تعریف کرده بعضی از انواع بخصوص ماتریسهای را که از نظر عملی اهمیت دارند معرفی کنیم.

ترانهایك ماتریس به طریق زیر تعریف می شود. ترانهاید A^T ماتریس $(m \times n)$ ، $A = (a_{jk})$ ماتریس $(n \times m)$ ی است که از تعویض سطرها ی A با ستونهای آن به دست می آید، یعنی سطر j ام A ستون j ام A^T می شود:

$$(1) \quad A^T = (a_{kj}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

خواننده می تواند ثابت کند که

$$(2) \quad (A+B)^T = A^T + B^T.$$

مثال ۱. ترانهایك ماتریس

هر گاه داشته باشیم

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{آنگاه داریم} \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال ۲. ترانزیشن يك ماتریس سطری

ترانزیشن يك ماتریس سطری ماتریسی ستونی است و بالعکس. مثلاً، اگر

$$b^T = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ در آن صورت } b = (7 \quad 5 \quad -2)$$

ماتریس مربعی حقیقی $A = (a_{jk})$ را متقارن نامند هر گاه با ترانزیشن خودش برابر باشد،

$$(3) \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad a_{kj} = a_{jk} \text{ یعنی } A^T = A$$

ماتریس مربعی حقیقی $A = (a_{jk})$ را ضد متقارن نامند هر گاه

$$(4) \quad (j, k = 1, \dots, n) \quad a_{kj} = -a_{jk} \text{ یعنی } A^T = -A$$

(مفاهیم مشابه در مورد ماتریسهای مختلط بعداً در بخش ۱۲.۷ تعریف می شود.) توجه کنید که به ازای $k = j$ در (۴) داریم $a_{jj} = -a_{jj}$ ، این نشان می دهد که عناصر قطری اصلی يك ماتریس ضد متقارن همگی، صفرند.

هر ماتریس مربعی حقیقی A را می توان به صورت مجموع يك ماتریس متقارن R و يك ماتریس ضد متقارن S نوشت به طوری که

$$S = \frac{1}{2}(A - A^T) \text{ و } R = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

مثال ۳. ماتریسهای متقارن و ضد متقارن

ماتریسهای

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

به ترتیب متقارن و ضد متقارن هستند. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

تەمقارن است و نه ضد متقارن. A را می توان به صورت $A = R + S$ نوشت که در آن R و S به ترتیب ماتریسهای متقارن و ضد متقارن زیر هستند:

$$S = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad R = \frac{1}{4}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

▲
ماتریس مربعی $A = (a_{jk})$ کسه عناصر واقع در بالای (یا پایین) قطر اصلی آن همگی صفر باشند ماتریس مثلثی نامیده می شود. مثلا،

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ماتریسهایی مثلثی هستند

ماتریس مربعی $A = (a_{jk})$ که تمام عناصر واقع در بالا و پایین قطر اصلی آن همگی صفر هستند، یعنی $a_{jk} = 0$ ، به ازای تمام مقادیر $j \neq k$ ، ماتریس قطری نامیده می شود. مثلا،

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ماتریسهایی قطری بند.

ماتریس قطری n سطری که تمام عناصر روی قطر اصلی آن ۱ باشند، ماتریس یکبه یک نامیده می شود (به دلایلی که در بخش ۸.۷ بیان می شود) و آن را با I_n یا به اختصار با I نمایش می دهند. مثلا ماتریس یکبه یک (3×3) عبارت است از

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مسائل بخش های ۱.۷ تا ۳.۷

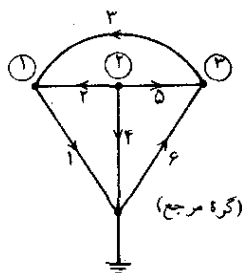
بافرض $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ و $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ مطلوب است محاسبه:

۱. $A+B$ ، $B+A$ ۲. $A-B$ ، $R-A$

۳. $2(2A-B)$ ، $4A-2B$ ۴. $(B^T)^T$ ، C^T ، B^T ، A^T
۵. A^T+B^T ، $(A+B)^T$ ۶. $A-A^T$ ، $A+A^T$
۷. آیا $C+C^T$ تعریف شده است؟ ۸. آیا $A+C$ تعریف شده است؟
۹. آیا A و B متقارنند؟
۱۰. B را به صورت مجموع يك ماتریس متقارن و يك ماتریس ضد متقارن نمایش دهید.
۱۱. با فرض $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ، $N = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ و $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ، مطلوب است محاسبه
۱۲. $P-M$ ، $M-P$ ۱۳. $P+M$ ، $M+P$
۱۴. $M-M^T$ ، $M+M^T$ ۱۵. $3M+2P$
۱۶. $3P^T$ ، $(3P)^T$ ۱۷. M^T-P^T ، $(M-P)^T$
۱۸. آیا $N+C^T$ ، $M+P^T$ ، $M+N^T$ ، $M+N$ (در بالا داده شده است) تعریف شده اند؟
۱۹. روابط (۲) و (۴) بخش ۲۰۷ را ثابت کنید و هر يك از این روابط را با ذکر مثالی تشریح کنید.
۲۰. ثابت کنید $(A+B)^T = A^T+B^T$ و برای آن دو مثال بیاورید.
۲۱. ثابت کنید $(A^T)^T = A$ ، $(aA)^T = aA^T$ و برای هر فرمول مثالی بیاورید.
۲۲. ثابت کنید که ماتریسهای مربعی دوسطری متقارن تشکیل يك فضای برداری می دهند. بعد این فضا چیست؟ (ر. ک. بخش ۴۰۶)
۲۳. آیا ماتریسهای مربعی دوسطری ضد متقارن تشکیل فضای برداری می دهند؟ ماتریسهای مربعی دوسطری با عناصر حقیقی غیر منفی چگونه؟
۲۴. پایه ای برای فضای برداری تمام ماتریسهای مربعی دو سطری پیدا کنید. همین کار را برای فضای برداری تمام ماتریسهای مربعی دوسطری متقارن حقیقی انجام دهید.
۲۵. تمام ماتریسهای n سطری مربعی را پیدا کنید که هم متقارن باشند و هم ضد متقارن.

۲۵. نشان دهید که تمام ماتریسهای مربعی n سطری متقارن حقیقی تشکیل يك فضای برداری می دهند، بعد این فضا را تعیین کنید و پایه ای برای آن بیابید.

۲۶. (ماتریس تلافی گرهی) چنانچه بعداً می بینیم ماتریسها کار بردهای مهندسی زیادی دارند. بدعنوان مثال می توان برای مشخص کردن اتصالات (در شبکه های الکتریکی، شبکه راههای ارتباطی بین شهرها و غیره) از ماتریس استفاده کرد. شکل زیر يك شبکه الکتریکی را نشان می دهد که دارای شش شاخه (اتصال) و چهار گره (نقطه ای که در آن دو یا



شاخه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
گره (۱) ○	۱	-۱	-۱	۰	۰	۰
گره (۲) ○	۰	۱	۰	۱	۱	۰
گره (۳) ○	۰	۰	۱	۰	-۱	-۱

مسئله ۲۶. شبکه و ماتریس تلافی گرهی

پیش از دو شاخه تلافی می کنند) است. یکی از گره ها گره مرجع است (گره ای که به دلیل اتصال با زمین ولتاژش صفر است). سایر گره ها را شماره گذاری می کنیم؛ شاخه ها را نیز جهت گذاری و شماره گذاری می کنیم. نحوه انجام دادن این کار اختیاری است. حال می توان شبکه را با ماتریسی مانند $A = (a_{jk})$ نمایش داد به طوری که

$$a_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ از گره } j \text{ خارج شود} \\ -1 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ به گره } j \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ با گره } j \text{ ارتباطی نداشته باشد} \end{cases}$$

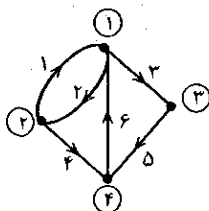
A را ماتریس تلافی گرهی شبکه می نامند. نشان دهید که در مورد شبکه شکل بالا، A به صورتی است که در کنار شکل نوشته ایم.

۲۷. ماتریس تلافی گرهی شبکه ای را که در شکل صفحه بعد نشان داده شده است پیدا کنید.

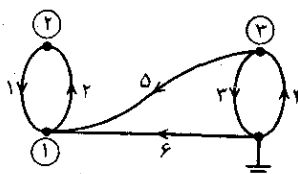
۲۸. طرح شبکه ای را بکشید که ماتریس تلافی گرهی آن به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

۲۹. روشهای تحلیل شبکه الکتریکی در سایر زمینهها هم کاربرد دارد. مشابه ماتریس تلافی گری را برای شبکه‌ای از خیابانهای یکطرفه که در شکل نشان داده شده است پیدا کنید (جهتها با پیکان مشخص شده‌اند).



مسئله ۲۹. شبکه خیابانهای یکطرفه



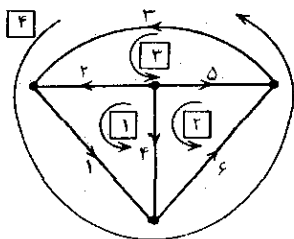
مسئله ۲۷. شبکه الکتریکی

۳۰. (ماتریس تلافی خانه‌ای) یک شبکه را به وسیله ماتریس تلافی خانه‌ای $M = (m_{jk})$ نیز می‌توان مشخص کرد به‌طوری‌که

$$m_{jk} = \begin{cases} +1 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ درخانه } j \text{ باشد و همان جهت را داشته باشد} \\ -1 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ درخانه } j \text{ باشد ولی جهت مخالف آن را داشته باشد} \\ 0 & \text{هر گاه شاخه } k \text{ درخانه } j \text{ نباشد} \end{cases}$$

در اینجا منظور از خانه حلقه‌ای است که شاخه‌ای در داخل (یا بیرون) آن نباشد. در اینجا شماره گذاری و جهت گذاری (جهت گیری) حلقه‌ها به‌طور دلخواه انجام گرفته است. نشان دهید که درمورد شبکه شکل زیر داریم

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



مسئله ۳۰. شبکه

۴.۷ ضرب ماتریسی

حال به تعریف ضرب ماتریس در ماتریس می پردازیم. این تعریف را می توان با استفاده ای که از ماتریس در ارتباط با تبدیلات خطی می شود توجیه کرد. برای روشن کردن مطلب، با ذکر حالت ساده ای شروع می کنیم.

سه دستگاه محورهای مختصات در صفحه در نظر می گیریم و آنها را دستگاه w_1, w_2 ، دستگاه x_1, x_2 ، و دستگاه y_1, y_2 می نامیم و فرض می کنیم که این دستگاهها با تبدیلات

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

و

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}w_1 + b_{12}w_2 \\ x_2 &= b_{21}w_1 + b_{22}w_2 \end{aligned}$$

که تبدیلات خطی نامیده می شوند به هم مربوط باشند. واضح است که مختصات y_1, y_2 را می توان مستقیماً بر حسب مختصات w_1, w_2 با تبدیل خطی یکنای زیر به دست آورد:

$$(3) \quad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 \\ y_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 \end{aligned}$$

ضرایب $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ این تبدیل را می توان با قرار دادن (۲) در (۱)

$$y_1 = a_{11}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{12}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)$$

$$y_2 = a_{21}(b_{11}w_1 + b_{12}w_2) + a_{22}(b_{21}w_1 + b_{22}w_2)$$

و مقایسه نتیجه با (۳) به دست آورد. خواهیم داشت

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

یا به اختصار

$$(4) \quad c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} = \sum_{i=1}^2 a_{ji}b_{ik} \quad j, k = 1, 2.$$

ماتریسهای ضرایب تبدیلات (۱) و (۲) عبارتند از

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

و حاصل ضرب AB ی ماتریسهای A و B (با همین ترتیب) را ماتریس ضرایب

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

مربوط به «تبدیل مرکب» (۳) تعریف می‌کنیم، یعنی

$$C = AB$$

که عناصر C از (۴) به دست می‌آیند.

تذکر این مطلب مفید است که هرگاه A را بر حسب بردارهای سطری بنویسیم:

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11} \quad a_{12}) \\ a_2 &= (a_{21} \quad a_{22}) \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{که در آن}$$

و B را بر حسب بردارهای ستونی بنویسیم:

$$b_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} \quad B = (b_1 \quad b_2)$$

در آن صورت عناصر C را می‌توان به سادگی به صورت حاصل ضرب نقطه‌ای نوشت:

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_1 \cdot b_1, & c_{12} &= a_1 \cdot b_2, \\ c_{21} &= a_2 \cdot b_1, & c_{22} &= a_2 \cdot b_2. \end{aligned}$$

مثال ۱. ضرب ماتریسها

فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

بنا به (۴) داریم

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 5 & 2 \times (-2) + 1 \times 3 \\ 3 \times 1 + 4 \times 5 & 3 \times (-2) + 4 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 23 & 6 \end{pmatrix}.$$

برای رسیدن به تعریف ضرب دو ماتریس در حالت کلی مطالب فوق به صورت کلی

درمورد تبدیل

اول A ، و k امین بردار ستونی ماتریس دوم، B است؛ به عبارت دیگر هرگاه بنویسیم

$$B = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_p) \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

به طوری که $a_1, \dots, a_m$ بردارهای سطری A و $b_1, \dots, b_p$ بردارهای ستونی B باشند خواهیم داشت

$$(9) \quad C = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \dots & a_1 \cdot b_p \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \dots & a_2 \cdot b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m \cdot b_1 & a_m \cdot b_2 & \dots & a_m \cdot b_p \end{pmatrix}$$

بنابراین، فرآیند ضرب ماتریسی به صورت ضرب سطرها در ستونها بیان می شود. شکل ۱۴۰ را ببینید.

مثال ۲. ضرب ماتریسها

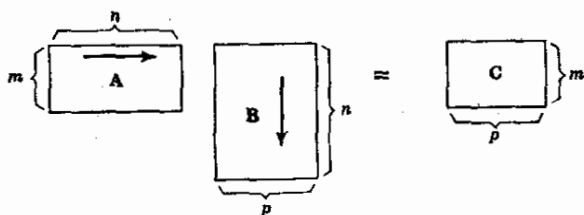
فرض کنید

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

در آن صورت بنا به (۸) حاصل ضرب AB عبارت است از

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}.$$

درحالی که حاصل ضرب BA تعریف شده نیست.



شکل ۱۴۰. ضرب ماتریسی $AB = C$

ضرب ماتریس در بردار و ضرب ماتریسی بردارها را می توان با مثالهای زیر توضیح داد.

مثال ۳

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

مثال ۴

$$(3 \ 6 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (19), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (3 \ 6 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 2 \\ 12 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

توجه کنید که ضرب سمت چپ متناظر است با ضرب نقطه ایی که در بخش ۵.۶ تعریف شد. ▲

درستی محاسبات دستی را می توان با استفاده از مجموع عناصر ستونها امتحان کرد.

در مثال ۲ داشتیم

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{pmatrix}$$

.....
مجموع ۳ ۶ ۵

.....
۶۳ ۳۸ ۲۲

امتحان:

$$3 \times 1 + 6 \times 5 + 5 \times 6 = 63$$

$$3 \times 0 + 6 \times 3 + 5 \times 4 = 38$$

$$3 \times 2 + 6 \times 1 + 5 \times 2 = 22$$

شکل ۱۴۱ آرایشی از ماتریسهای **A** و **B** مثال ۲ و حاصل ضرب **AB** ی آنها را نشان می دهد که برای محاسبات دستی مناسب است. توضیح آنکه هر عنصر c_{jk} از ماتریس حاصل ضرب در محل تقاطع آن سطر از ماتریس اولی و آن ستون از ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

اما

درستی (پ) را می توان با مثال زیر اثبات کرد:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

خواص (ب) و (پ) کاملاً غیر معمولیند زیرا در ضرب معمولی اعداد چنین خواصی وجود ندارند و بنابراین باید در مورد آنها دقت بیشتری کرد. خاصیت (پ) به تفصیل در بخش ۸.۷ بررسی می شود. خواننده می تواند با استفاده از مثال فوق نشان دهد که $AB=0$ نتیجه نمی دهد $BA=0$.

خاصیت (ب) ایجاب می کند که ترتیب عوامل در ضرب ماتریسی به دقت مراعات شود؛ بنا به این خاصیت فقط در بعضی موارد معین رابطه $AB=BA$ صادق است. برای رعایت دقت می گوئیم در ضرب AB ماتریس A پیش ضرب ماتریس B است و یا ماتریس B پس ضرب ماتریس A است.

هر ماتریس قطری که تمام عناصر روی قطر آن برابر باشند ماتریس اسکالر نامیده می شود. بنا بر این يك ماتریس اسکالر به صورت

$$S = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

است که در آن k هر عددی می تواند باشد. هرگاه S ماتریسی n سطری و A يك ماتریس $(n \times n)$ باشد آنگاه

$$(11) \quad AS=SA=kA;$$

یعنی، ضرب ماتریس مربعی n سطری A در يك ماتریس اسکالر n سطری همانند ضرب ماتریس A در يك عدد است و S با هر ماتریس $(n \times n)$ جابه جا شونده است. اثبات این مطلب به خواننده واگذار می شود. به خصوص در مورد ماتریس n سطری يکة I (ر. ل. بخش ۳.۷) داریم

$$AI=IA=A.$$

توانش حاصل ضرب. توانها حاصل ضرب چند عامل برابر با حاصل ضرب توانهای

آن عوامل با ترتیب معکوس است یعنی

$$(12) \quad (AB)^T = B^T A^T$$

اثبات این مطلب را که از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می‌شود، به خواننده واگذار می‌کنیم.

بردارهای ستونی حاصل ضرب. هرگاه $b_1, \dots, b_p$ بردارهای ستونی ماتریس B باشند و حاصل ضرب AB تعریف شده باشد، آنگاه از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می‌شود که ماتریس حاصل ضرب AB دارای بردارهای ستونی $Ab_1, \dots, Ab_p$ است یعنی

$$(13) \quad AB = (Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p)$$

تبدیلات خطی. می‌توان با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی تبدیل خطی (۵) را به صورت ساده زیر نوشت:

$$(5') \quad y = Ax$$

که در آن $A = (a_{jk})$ و

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

به همین ترتیب، (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(6') \quad x = Bw$$

که در آن w ماتریسی ستونی با عناصر $w_1, \dots, w_p$ است. با قراردادن (۶') در (۵') و با استفاده از خاصیت انجمنی ضرب ماتریسی (ر. ک. قضیه ۱) به دست می‌آوریم

$$(7') \quad y = A(Bw) = ABw = Cw$$

و این با (۷) تطبیق می‌کند.

یادآور می‌شویم که می‌توان این ملاحظات را تعمیم داد و از این موقعیت برای تعریف مفاهیمی که از اهمیت عمومی برخوردارند استفاده کرد. فرض کنید X و Y فضاهای برداری باشند (ر. ک. بخش ۴.۶). بهر بردار $\bar{x}$ در X بردار یکتای y در Y را نسبت می‌دهیم در این صورت می‌گوییم که یک نگاشت (یا تبدیل یا عملگر) از X به Y داده شده است. چنین نگاشتی را بایک حرف بزرگ، مثلاً F ، نشان می‌دهند. بردار y در Y که به بردار x در X نسبت داده می‌شود، نقش x نام دارد و با $F(x)$ یا Fx ، بدون پرانتز [نشان داده می‌شود. به‌طور کلی هرگاه S زیرمجموعه‌ای از X باشد مجموعه نقشهای همه

عناصر S را نقش S می نامند و با $F(S)$ نشان می دهند.

F را یک به یک نامند اگر بردارهای متفاوت در X دارای نقشهای متفاوتی در Y باشند. نگاشت F را پوششی یا نگاشت X بر روی Y نامند هرگاه هر بردار y در Y نقش حداقل یک بردار از X باشد. نگاشت F را دوسویی نامند اگر F هم یک به یک و هم پوششی باشد.

F را نگاشت خطی و یا تبدیل خطی نامند هرگاه به ازای هر بردار x و z در X و به ازای هر اسکالر α داشته باشیم

$$(۱۴) \quad F(x+z) = F(x) + F(z)$$

$$F(\alpha x) = \alpha F(x)$$

مثلا طبق این تعریف عموماً (۵) و (۶) تبدیل خطی هستند.

تا اینجا X و Y هر فضای برداری دلخواهی می توانستند باشند. از این به بعد فرض می کنیم $X = R^n$ ، فضای برداری تمام n تاییهی مرتب از اعداد حقیقی و $Y = R^m$ ، فضای برداری تمام m تاییهی مرتب از اعداد حقیقی باشند.

فرض کنید که $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ پایه ای برای $X = R^n$ باشد. در این صورت هر بردار a در X نمایشی یکتا به صورت زیر دارد:

$$x = x_1 e_{(1)} + \dots + x_n e_{(n)},$$

که می توانیم آن را به شکل $x = (x_1 \dots x_n)^T$ بنویسیم. هرگاه F تبدیلی خطی از X به Y باشد در آن صورت

$$F(x) = F(x_1 e_{(1)} + \dots + x_n e_{(n)}) = x_1 F(e_{(1)}) + \dots + x_n F(e_{(n)}).$$

بنابراین هر تبدیل خطی از $X = R^n$ به $Y = R^m$ به طور یکتا با نقشهای عناصر پایه X معین می شود.

روابط (۵) و $(۵')$ نشان می دهند که هر ماتریس یک تبدیل خطی را مشخص می کند. بالعکس، فرض کنید $e_{(1)}, \dots, e_{(n)}$ پایه ای باشد از $X = R^n$ به طوری که تمام مؤلفه های هر e_k صفر باشند، غیر از k امین مؤلفه آن که ۱ است، یعنی

$$e_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

همین طور برای $Y = R^m$ پایه ای مانند $g_{(1)}, \dots, g_{(m)}$ انتخاب می کنیم به طوری که تمام مؤلفه های $g_{(j)}$ غیر از j امین مؤلفه آن برابر صفر باشند، و j امین مؤلفه برابر ۱

باشد، یعنی

$$g_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad g_{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

بدین ترتیب اگر F تبدیلی خطی از X به Y باشد، ماتریسی $(m \times n)$ مانند A پیدا می‌شود به طوری که به ازای هر x در X و نقش آن $y = F(x)$ را می‌توان نوشت

$$y = Ax.$$

در واقع F با نقشهای $y_1 = F(e_{(1)}), \dots, y_n = F(e_{(n)})$ معین می‌شود؛ اگر بنویسیم $y_{(i)} = (\eta_1^{(i)}, \dots, \eta_m^{(i)})^T$ و اگر قرار دهیم $y_{(1)} = Ae_{(1)}$ ، یعنی

$$\begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_m^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

خواهیم توانست عناصر اولین ستون A ، یعنی $a_{11} = \eta_1^{(1)}$ و $a_{21} = \eta_2^{(1)}$ و غیره را تعیین کنیم. از $y_{(2)} = Ae_{(2)}$ عناصر دومین ستون A را معین می‌کنیم و به همین ترتیب در مورد بقیه ستونها. گوییم که ماتریس A تبدیل خطی F را نسبت به پایه‌هایی که در بالا ذکر شد نمایش می‌دهد. منظور از چنین نمایشی این است که موضوع مورد مطالعه را با موضوع دیگری که خواص آن برای ما آشکارتر است عوض کنیم.

مثال ۵. تبدیلات خطی

ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر به تبدیل مختصات دکارتی در صفحه تعبیر شوند به ترتیب انعکاسی نسبت به $x_2 = x_1$ ، انعکاس نسبت به محور x_1 ، انعکاس نسبت به مبدأ و کشیدگی (در صورتی که $a > 1$) یا فشردگی (در صورتی که $0 < a < 1$) در امتداد x_1 را نمایش می‌دهند.

مثال ۶. تبدیلات خطی

مبحث انتهایی این بخش ساده تراز آن است که در اولین نگاه به نظر می‌رسد. برای مشاهده

این موضوع ماتریس A را که نمایش دهنده تبدیل خطی است که (x_1, x_2) را بر $(2x_1 - 5x_2, 3x_1 + 4x_2)$ می نگارد پیدا کنید.
چون

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ به ترتیب بر } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

نگاشته می شوند، با توجه به آنچه گفته شد به دست می آوریم

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

برای امتحان نتیجه می نویسیم

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 5x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

خواننده می تواند A را مستقیماً نیز، با نوشتن تبدیل داده شده به صورت زیر، به دست آورد:

$$y_1 = 2x_1 - 5x_2$$

$$y_2 = 3x_1 + 4x_2$$

مسائل بخش ۴.۷

فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

از عبارات زیر آشنایی را که تعریف شده هستند پیدا کنید.

$C^T B$ ، CB ، $B^T C$ ، BC	۲	$B^T A$ ، BA ، $A^T B$ ، AB	۱
$A^T A$ ، AA^T	۴	C^2 ، B^2 ، A^2	۳
$C^T C$ ، CC^T	۶	$B^T B$ ، BB^T	۵
$B^T CA$ ، BCA	۸	$C^2 - 3C^2 + 2I$ ، C^4 ، C^2	۷

$$A^T C A$$

.۹

۱۰. ماتریسهای مربعی دوسطری حقیقی را بیابید (هر چند تا که می توانید) که مجذور آنها برابر I ، ماتریس یکه، باشد.

۱۱. (ماتریس خود توان). ماتریس A را خود توان نامند اگر $A^2 = A$. مثالهایی، غیر از ماتریس صفر یا یکه، برای ماتریس خود توان ارائه دهید.

۱۲. فرض کنید $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ AB و BA را پیدا کنید.

۱۳. (دوران). نشان دهید که تبدیل خطی $y = Ax$ با ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

عبارت است از دوران دستگاه مختصات دکارتی x_1, x_2 در صفحه و حول مبدأ در جهت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۱۴. A را به قسمی بیابید که $y = Ax$ نمایش دهنده دورانی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در صفحه با زاویه 45° باشد.

۱۵. نشان دهید که در مسئله ۱۳،

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

مفهوم هندسی این نتیجه چیست؟

۱۶. تعبیری هندسی (نظیر مثال ۵) برای تبدیل خطی با هر یک از ماتریسهای زیر ارائه دهید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (a > 1).$$

۱۷. هر یک از تبدیلات زیر را با استفاده از ماتریس نمایش دهید و تبدیل مرکبی را بیابید که y_1 و y_2 را بر حسب w_1 و w_2 بیان می‌کند.

جواب (۱) مجموعه‌ای از اعداد $x_1, \dots, x_n$ است که در تمام m معادله صادق باشد. **بردار جواب (۱)** برداری مانند $\mathbf{x}$ است که مؤلفه‌هایش تشکیل جوابی برای (۱) بدهند. هر گاه دستگاه (۱) همگن باشد، حداقل دارای جواب بدیهی $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ است.

از تعریف ضرب ماتریسی ... می‌گیریم که m معادله (۱) را می‌توان به صورت معادله برداری

$$(2) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

نوشت که در آن ماتریس ضرایب $\mathbf{A} = (a_{ik})$ عبارت است از ماتریس $(m \times n)$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ و } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

بردارهای ستونی هستند. فرض می‌کنیم که ضرایب a_{ik} همگی صفر نباشند، بنابراین $\mathbf{A}$ ماتریس صفر نیست. توجه داشته باشید که $\mathbf{x}$ دارای n مؤلفه است درحالی که $\mathbf{b}$ دارای m مؤلفه است. ماتریس

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

را ماتریس افزوده دستگاه (۱) می‌نامند. می‌بینیم که $\mathbf{B}$ از اضافه کردن ستون $\mathbf{b}$ به $\mathbf{A}$ به دست می‌آید. ماتریس $\mathbf{B}$ دستگاه (۱) را کاملاً مشخص می‌کند زیرا تمام اعدادی را که در (۱) وجود دارند شامل می‌شود.

مثال ۱. تعبیر هندسی. وجود جوابها

اگر $m = n = 2$ باشد دو معادله با دو مجهول x_1 و x_2 داریم:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

هر گاه x_1 و x_2 را به مختصات در صفحه x_1x_2 تعبیر کنیم آنگاه هر یک از این دو معادله یک خط راست را نمایش می‌دهد و (x_1, x_2) جواب دستگاه است اگر و تنها اگر نقطه P با مختصات x_1 و x_2 روی هر دو خط قرار گیرد. بنابراین سه حالت زیر ممکن است:

(الف) هر گاه خطوط مرآزی باشند جوابی وجود ندارد؛

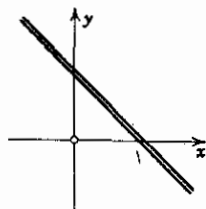
(ب) هر گاه دوخط متقاطع باشند دقیقاً يك جواب وجود دارد؛
(پ) هر گاه دوخط برهم منطبق باشند بینهایت جواب وجود دارد.

به عنوان مثال

$$x + y = 1$$

$$2x + 2y = 2$$

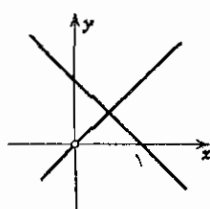
حالت (پ)



$$x + y = 1$$

$$x - y = 0$$

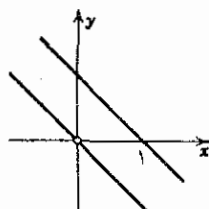
حالت (ب)



$$x + y = 1$$

$$x + y = 0$$

حالت (الف)



هر گاه دستگاه همگن باشد حالت (الف) نمی تواند اتفاق افتد زیرا در آن صورت دو خط راست از مبدأ، که مختصات $(0, 0)$ آن جواب بسدیهي دستگاه است، می گذرند. خواننده می تواند سه معادله با سه مجهول را نمایش دهنده سه صفحه در فضا در نظر بگیرد و با روشی مشابه حالات مختلفی را که ممکن است پیش آیند مورد بحث قرار دهد. ▲

مثال ساده بالا نشان می دهد که دستگاه (۱) ممکن است همیشه جواب نداشته باشد و مسائلی که در رابطه با این موضوع مطرح می شوند به شرح زیرند. آیا دستگاه مفروض (۱) جوابی دارد؟ تحت چه شرایطی این دستگاه دقیقاً يك جواب دارد؟ در صورتی که این دستگاه بیش از يك جواب داشته باشد مجموعه تمام جوابها را چگونه می توان مشخص کرد؟ جوابها را چگونه می توان به دست آورد؟

در این بخش به بحث درباره روشی می پردازیم که با فرآیند حذف منظمی جوابها را به دست می دهد، این روش را روش حذفی گاوس (یا الگوریتم گاوس) می نامند. ابتدا این فرآیند را با مثالهایی نوعی شرح می دهیم. چون هر دستگاه معادلات خطی به وسیله ماتریس افزوده اش کاملاً مشخص می شود، فرآیند حذف را می توان صرفاً با در نظر گرفتن ماتریسها شرح داد. برای مشخص کردن این تناظر، دستگاه معادلات و ماتریس افزوده را در کنار هم خواهیم نوشت.

مثال ۲. روش حذفی گاوس

دستگاه سه معادله خطی ذیل را که شامل چهار مجهول است حل کنید

$$۳۰۰x_1 + ۲۰۰x_2 + ۲۰۰x_3 - ۵۰۰x_4 = ۸۰۰$$

$$(۳) \quad ۰۰۶x_1 + ۱۰۵x_2 + ۱۰۵x_3 - ۵۰۴x_4 = ۲۰۷$$

$$۱۰۲x_1 - ۰۰۳x_2 - ۰۰۳x_3 + ۲۰۴x_4 = ۲۰۱$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} ۳۰۰ & ۲۰۰ & ۲۰۰ & -۵۰۰ & ۸۰۰ \\ ۰۰۶ & ۱۰۵ & ۱۰۵ & -۵۰۴ & ۲۰۷ \\ ۱۰۲ & -۰۰۳ & -۰۰۳ & ۲۰۴ & ۲۰۱ \end{array} \right)$$

مرحله اول. حذف x_1 از معادلات دوم و سوم با کم کردن

$$۰۰۶/۳ = ۰۰۲ \text{ برابری معادله اول از معادله دوم،}$$

$$۰۰۳/۳ = ۰۰۱ \text{ برابری معادله اول از معادله سوم.}$$

با این کار دستگاه معادلات جدیدی به دست می آید:

$$۳۰۰x_1 + ۲۰۰x_2 + ۲۰۰x_3 - ۵۰۰x_4 = ۸۰۰$$

$$(۴) \quad ۱۰۱x_2 + ۱۰۱x_3 - ۴۰۴x_4 = ۱۰۱$$

$$-۱۰۱x_2 - ۱۰۱x_3 + ۴۰۴x_4 = -۱۰۱$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} ۳۰۰ & ۲۰۰ & ۲۰۰ & -۵۰۰ & ۸۰۰ \\ ۰ & ۱۰۱ & ۱۰۱ & -۴۰۴ & ۱۰۱ \\ ۰ & -۱۰۱ & -۱۰۱ & ۴۰۴ & -۱۰۱ \end{array} \right)$$

مرحله دوم. حذف x_2 از سومین معادله (۴) با تفریق کردن

$$۱۰۱/۱۰۱ = ۱ \text{ برابری معادله دوم از معادله سوم}$$

که نتیجه می دهد

$$۳۰۰x_1 + ۲۰۰x_2 + ۲۰۰x_3 - ۵۰۰x_4 = ۸۰۰$$

$$۱۰۱x_2 + ۱۰۱x_3 - ۴۰۴x_4 = ۱۰۱$$

$$۰ = ۰$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} ۳۰۰ & ۲۰۰ & ۲۰۰ & -۵۰۰ & ۸۰۰ \\ ۰ & ۱۰۱ & ۱۰۱ & -۴۰۴ & ۱۰۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{array} \right)$$

از معادله دوم داریم $x_2 = ۱ - x_3 + ۴x_4$. از اینجا و از معادله اول نتیجه می شود:
 $x_1 = ۲ - x_3$. چون x_3 و x_4 دلخواه هستند، بینهایت جواب داریم؛ هرگاه مقداری
 برای x_3 و مقداری برای x_4 انتخاب کنیم، آنگاه مقادیر متناظر یکنایی برای x_1 و x_2
 تعیین می شود.

مثال ۳. روش حذفی گاوس در حالتی که جوابی وجود ندارد

اگر روش حذفی گاوس را، که در مثال ۲ توضیح داده شد، در مورد دستگاه معادلاتی که جواب ندارد به کار ببریم چه اتفاقی می افتد؟ جواب آن است که در این حالت روش مزبور به تناقضی منجر می شود و به این ترتیب نشان می دهد که دستگاه جواب ندارد. مثلاً فرض کنید

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right)$$

مرحله اول. حذف x_1 از دومین و سومین معادله با تفریق کردن

$$2/3 \text{ برابر معادله اول از معادله دوم،}$$

$$2 = 6/3 \text{ برابر معادله اول از معادله سوم.}$$

نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

مرحله دوم. حذف x_2 از معادله سوم نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

این نشان می دهد که دستگاه جوابی ندارد.

مثال ۴. روش حذفی گاوس در حالتی که جوابی یکتا وجود دارد.

دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

مرحله اول. حذف x_1 از معادلات ۲ و ۳ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

مرحله دوم. حذف x_2 از معادله ۳ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 7x_3 &= 12 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right)$$

از معادله آخر شروع کرده به ترتیب به دست می‌آوریم $x_3 = 2$ ، $x_2 = -1$ ، $x_1 = 1$.
می‌بینیم که دستگاه جوابی یکتا دارد. ▲

شکل دستگاه و ماتریسی را که در آخرین مرحله روش حذفی گاوس پدید می‌آیند صورت پلکانی می‌نامند. بنابراین در مثال ۴ صورتهای پلکانی ماتریس ضریب و ماتریس افزوده عبارتند از

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right) \quad \text{و} \quad \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right)$$

روشی را که در این مثالها توضیح داده شد روش حذفی گاوس یا الگوریتم گاوس می‌نامند. این روش را می‌توان به منظور حل دستگاه عمومی (۱) به صورت کلی زیر فرمولبندی کرد.

مرحله اول. حذف x_1 از معادلات دوم، سوم، ...، m . می‌توانیم فرض کنیم که ترتیب معادلات و ترتیب مجهولات در هر معادله به گونه‌ای است که $a_{11} \neq 0$. بنابراین می‌توانیم متغیر x_1 را از معادلات دوم، ...، m حذف کنیم به این ترتیب که

$$a_{21}/a_{11} \text{ برابر معادله اول را از معادله دوم کم کنیم،}$$

$$a_{31}/a_{11} \text{ برابر معادله اول را از معادله سوم کم کنیم،}$$

۱. ما روش حذفی گاوس را به صورت کلاسیک آن عرضه کرده‌ایم؛ با روش بناحیه ویچ (Banachiewicz) و چلسکی (Cholesky) می‌توان حجم کارهای محاسباتی را بازهم کاهش داد؛ این روش وسایر روشها در مرجع [C۲] تشریح شده‌اند. همچنین بخش ۹.۱۹ را ببینید.

و غیره. بدین ترتیب دستگاه معادلات جدیدی به شکل زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= b_2^* \\ &\vdots \\ c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n &= b_m^*. \end{aligned} \quad (5)$$

هر جواب (۱) جوابی از (۵) است و بالعکس، زیرا هر معادله دستگاه (۵) از دو معادله دستگاه (۱) نتیجه شده است، و بالعکس کردن فرایند، می توان (۱) را از (۵) به دست آورد.

مرحله دوم. حذف x_2 از معادلات سوم، ...، m در (۵). هرگاه ضرایب $c_{22}, \dots, c_{m2}$ همگی صفر نباشند، می توانیم معادلات و مجهولات را طوری مرتب کنیم که داشته باشیم $c_{22} \neq 0$. در این صورت می توانیم x_2 را از معادله های سوم، چهارم، ...، m حذف کنیم به این ترتیب که

$$c_{22}/c_{22} \text{ برابر معادله دوم را از معادله سوم کم کنیم،}$$

$$c_{42}/c_{22} \text{ برابر معادله دوم را از معادله چهارم کم کنیم، و غیره.}$$

اکنون روشن است که در مراحل بعدی چه باید کرد. در مرحله سوم x_3 را حذف می کنیم، در مرحله چهارم x_4 را، و به همین ترتیب پیش می رویم.

این فرایند تنها وقتی خاتمه می پذیرد که یا هیچ معادله ای باقی نماند و یا ضرایب تمام مجهولات معادلات باقیمانده صفر باشند. در آن صورت دستگاهی به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= b_2^* \\ &\vdots \\ k_{rr}x_r + \dots + k_{rn}x_n &= \bar{b}_r \\ &\vdots \\ &= \bar{b}_m \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $r \leq m$ (و $a_{11} \neq 0, \dots, c_{22} \neq 0, \dots, k_{rr} \neq 0$) می بینیم که سه حالت زیر ممکن است:

(الف) جوابی نخواهیم داشت هرگاه $r < m$ و یکی از اعداد $b_m, \dots, b_{r+1}$ صفر نباشد. این حالت در مثال ۳ که در آن $m=3, r=2$ و $b_{r+1}=b_3=12$ بود تشریح شد.

(ب) دقیقاً يك جواب وجود دارد هر گاه $r = n$ و $b_{r+1}, \dots, b_m$ ، اگر وجود داشته باشند، صفر باشند. این جواب، از حل معادله m (۶) نسبت به x_n و سپس حل معادله $(n-1)$ نسبت به x_{n-1} و الی آخر، به دست می آید. مثال ۴ را نیز که در آن $r = n = 3$ و $m = 3$ ببینید.

(پ) بینهایت جواب وجود دارد هر گاه $r < n$ و $b_{r+1}, \dots, b_m$ ، اگر وجود داشته باشند، صفر باشند. در این صورت هر يك از این جوابها با انتخاب مقادیر دلخواهی برای مجهولات $x_{r+1}, \dots, x_n$ ؛ با حل معادله $m-r$ نسبت به x_r و سپس حل معادله $(r-1)$ نسبت به x_{r-1} و الی آخر، به دست می آید. مثال ۲ این حالت را روشن می کند. اعمالی را که در روش حذفی گاوس انجام می دهیم اعمال مقدماتی می نامند. اعمال مقدماتی که روی معادلات انجام می دهیم عبارتند از.

تعویض دو معادله.

ضرب يك معادله در يك ثابت غیر صفر.

افزودن مضرب ثابتی از يك معادله به معادله دیگر.

افزودن مضرب ثابتی از يك سطر به سطر دیگر.

به جای معادلات می توان ماتریسهای افزوده را در نظر گرفت (ر.ك. مثال ۲). در این صورت اعمال سطری مقدماتی ماتریسی متناظر زیر را داریم:

تعویض دو سطر.

افزودن مضرب ثابتی از يك سطر به سطر دیگر.

ضرب يك سطر در يك ثابت غیر صفر.

دستگاه معادلات خطی S_1 را معادل دستگاه معادلات خطی S_2 نامند هر گاه S_1 را بتوان با تعدادی عمل سطری از A_2 به دست آورد. بنابراین، ماتریسهای افزوده (۱) و (۶) معادل سطری هستند.

قضیه ۱ (دستگاههای معادل)

دستگاههای معادلات خطی معادل، مجموعه جوابهای یکسانی دارند

ماتریس A_1 را معادل سطری ماتریس A_2 نامند، هر گاه A_1 را بتوان با تعدادی متناهی عمل سطری از A_2 به دست آورد. بنابراین، ماتریسهای افزوده (۱) و (۶) معادل سطری هستند.

این بحثها و مفاهیم در بخش ۷.۷، که در آن به تفصیل درباره مجموعه جواب معادلات خطی چند مجهولی بحث می کنیم، مفید خواهند بود.

مسائل بخش ۵.۷

دستگاههای معادلات خطی زیر را با روش حذفی گاوس حل کنید.

۱. $2x + y = 4$ ۲. $3x + y = 11$
 $5x - 2y = 1$ $x - y = 5$
۳. $x + y = 0$ ۴. $4x - y + z = 0$
 $3x - 4y = 1$ $x + 2y - z = 0$
۵. $-x + y + 2z = 0$ ۶. $2x + y + z = 7$
 $3x + 4y + z = 0$ $x - y + z = 0$
 $2x + 5y + 3z = 0$ $4x + 2y - 3z = 4$
۷. $4x + 6y + z = 2$ ۸. $3x - 7y + z = 4$
 $2x + y - 4z = 3$ $x + 5y + z = 0$
 $3x - 2y + 5z = 8$ $2x - y + 3z = -2$
۹. $3x + y - 2z = -3$ ۱۰. $x - 2y + z = 3$
 $x - y + 2z = -1$ $x + 3z = 11$
 $-4x + 3y - 6z = 4$ $-2y + z = 1$
۱۱. $-3x + y - z = 2$ ۱۲. $9x + 4y + 3z = -1$
 $2x + 3y + z = 0$ $5x + y + 2z = 1$
 $x + 5y + 2z = 6$ $7x + 3y + 4z = 1$
۱۳. $3x - 3y - 7z = -4$ ۱۴. $7x - 4y - 2z = -6$
 $x - y + 2z = 3$ $16x + 2y + z = 3$
۱۵. $x - 3y + 2z = 2$ ۱۶. $7w + 2x - 2y - 6z = 6$
 $5x - 15y + 7z = 10$ $w + 3x - 3y - 9z = -10$

$$3w - 15x - 3y - 11z = -27 \quad .17$$

$$5w - 25x - 5y - 7z = -45$$

$$4w + 3x - 9y + z = 1 \quad .18$$

$$-w + 2x - 13y + 3z = 3$$

$$3w - x + 8y - 2z = -2$$

$$3w - 6x - y - z = 0 \quad .19$$

$$w - 2x + 5y - 3z = 0$$

$$2w - 4x + 3y - z = 3$$

$$w + x + y = 3 \quad .20$$

$$-3w - 17x + y + 2z = 1$$

$$4w + 8y - 5z = 1$$

$$-5x - 2y + z = 1$$

$$w - x + 3y - 3z = 3 \quad .21$$

$$-5w + 2x - 5y + 4z = -5$$

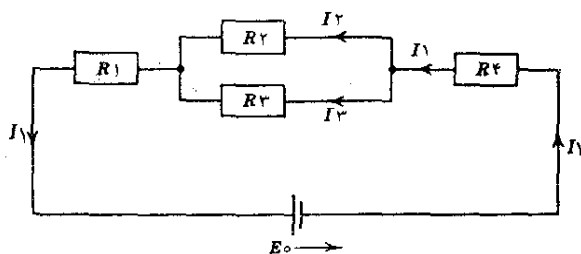
$$-3w - 4x + 7y - 2z = 7$$

$$2w + 3x + y - 11z = 1$$

۲۲. با استفاده از قوانین کیرشهف نشان دهید که معادلات جریانهای I_1 ، I_2 ، I_3 در شکل زیر عبارتند از

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0, (R_1 + R_4) I_1 + R_2 I_2 = E_0.$$

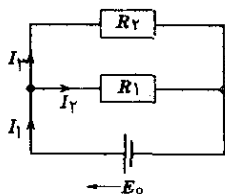
و سپس این جریانها را برحسب R_1 ، R_2 ، R_3 ، R_4 و E_0 تعیین کنید.



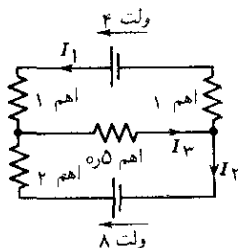
مسئله ۲۲. شبکه

با استفاده از قوانین کیرشهف جریان را در شبکه‌های زیر پیدا کنید.

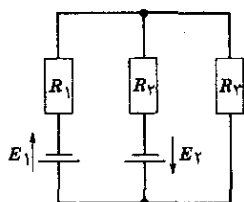
۲۴.



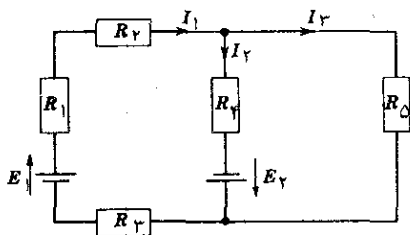
۲۳.



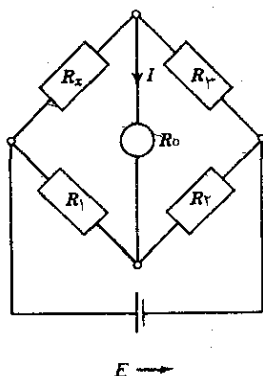
۲۶.



۲۵.

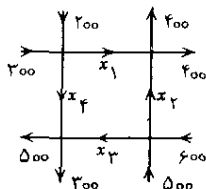


۲۷. (پل ویستون*) نشان دهید که هرگاه در شکل زیر $R_x/R_3 = R_1/R_2$ ، آنگاه $I = 0$. (R_0 مقاومت دستگاهی است که I با آن اندازه گیری می‌شود.)



مسئله ۲۷. پل ویستون

۲۸. (جریان ترافیک) روشهای تحلیل مدار الکتریکی در زمینه‌های دیگر نیز کاربرد دارند. به عنوان مثال، با استفاده از مشابه قانون کیرشهف، جریان ترافیک (تعداد اتومبیل‌ها در ساعت) را در شبکه خیابانهای یکطرفه شکل زیر (در جهت‌های مشخص شده) پیدا کنید. آیا جواب یکتاست؟



مسئله ۲۸. شبکه خیابانهای یکطرفه

۲۹. (عرضه و تقاضا) جواب تعادل ($D=S$) يك بازار تك محصولی را كه با مدل خطی زیر مشخص شده است پیدا کنید

$$D = 13 - 2P$$

$$S = 3P - 7$$

در این روابط D ، S و P به ترتیب تقاضا، عرضه و قیمت کالا هستند.

۳۰. جواب تعادل ($D_1=S_1$ و $D_2=S_2$) يك بازار دو محصولی را كه مدل خطی آن به صورت زیر است پیدا کنید.

$$D_1 = 20 - 2P_1 - P_2$$

$$D_2 = 5P_1 - 2P_2 + 8$$

$$S_1 = 4P_1 - P_2 + 2$$

$$S_2 = 3P_2 - 2$$

كه D ، S و P به ترتیب معرف تقاضا، عرضه و قیمت هستند و زیرنویسهای ۱ و ۲ به ترتیب مشخص کننده کالای اول و دومند.

۶.۷ مرتبه ماتریس

در بخش قبل چگونگی حل يك دستگاه معادلات خطی را دیدیم، همچنین می‌دانیم كه ممكن است دستگاه جوابی نداشته باشد یا فقط يك جواب و یا بیش از يك جواب داشته باشد. این سؤال مطرح می‌شود كه آیا می‌توان درباره مسئله وجود و یکتایی حکم کلی داد. جواب مثبت است و ابزار اصلی برای این كار مفهوم رتبه ماتریس است كه در اینجا معرفی می‌شود و احكام یاد شده در بخش بعد ارائه خواهد شد.

تعداد بیشینه بردارهای سطری مستقل خطی ماتریس $A = (a_{jk})$ را رتبه ماتریس A می‌نامند و با

$$\text{rank } A$$

نشان می‌دهند. بنا بر تعریف، رتبه ماتریس صفر برابر صفر است (استقلال خطی بردارها در بخش ۴.۰۶ تعریف شده است).
مثلاً رتبه

$$(۱) \quad A = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۲ & ۲ \\ -۱ & ۷ & ۴ & ۹ \\ ۷ & -۷ & ۰ & -۵ \end{pmatrix}$$

برابر ۲ است زیرا آخرین سطر ترکیبی خطی از دو سطر دیگر (دو برابر سطر اول منهای سطر دوم)، که مستقل خطی نیست، است.

بعلاوه توجه کنید که $\text{rank } A = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$ و این مطلب مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شود.

در بحث مربوط به وجود و یکتایی جوابهای دستگاههای معادلات خطی به قضیه زیر احتیاج خواهیم داشت.

قضیه ۱. (رتبه برحسب بردارهای ستونی)

رتبه ماتریسی مانند $A = (a_{jk})$ برابر با تعداد بیشینه بردارهای ستونی مستقل خطی A است. اثبات. فرض کنید $\text{rank } A = r$. در این صورت، بنا به تعریف، A مجموعه‌ای از r بردار سطری مستقل خطی دارد؛ این بردارها را $v_{(1)}, \dots, v_{(r)}$ می‌نامیم؛ تمام بردارهای سطری A که آنها را با $a_{(1)}, \dots, a_{(m)}$ نمایش می‌دهیم ترکیبهای خطی مستقل می‌باشند، یعنی

$$a_{(1)} = c_{11}v_{(1)} + c_{12}v_{(2)} + \dots + c_{1r}v_{(r)}$$

$$a_{(2)} = c_{21}v_{(1)} + c_{22}v_{(2)} + \dots + c_{2r}v_{(r)}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{(m)} = c_{m1}v_{(1)} + c_{m2}v_{(2)} + \dots + c_{mr}v_{(r)}$$

اینها معادلات برداری هستند که هر یک از آنها، اگر برحسب مؤلفه‌های بردار نوشته شود، معادل با n معادله است. هرگاه مؤلفه‌های $v_{(1)}$ را با $v_{11}, \dots, v_{1n}$ و مؤلفه‌های $v_{(r)}$ را با $v_{r1}, \dots, v_{rn}$ و غیره، نشان دهیم و اگر همین کار را در مورد بردارهای سمت چپ انجام دهیم، خواهیم داشت

$$a_{1k} = c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \dots + c_{1r}v_{rk}$$

$$a_{2k} = c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \dots + c_{2r}v_{rk}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{mk} = c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \dots + c_{mr}v_{rk}$$

که $k = 1, \dots, n$. این روابط را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = v_{1k} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} + v_{2k} \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} + \dots + v_{rk} \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix}$$

که $k = 1, \dots, n$. بردار سمت چپ، k امین بردار ستونی A است. بدین ترتیب، معادله بالا نشان می دهد که هر بردار ستونی A ترکیبی خطی از r بردار سمت راست است. پس، تعداد بیشینه بردارهای ستونی مستقل خطی A نمی تواند بیش از r ، که بنا به تعریف رتبه، تعداد بیشینه بردارهای سطری مستقل خطی A است باشد.

حال همین نتیجه را می توان برای A^T ، ترانژاد A ، بدست آورد. از آنجا که بردارهای سطری A^T بردارهای ستونی A و بردارهای ستونی A^T بردارهای سطری A هستند، نتیجه فوق بدین معنی است که تعداد بیشینه بردارهای سطری مستقل خطی A (یعنی r) نمی تواند از تعداد بیشینه بردارهای ستونی مستقل خطی A تجاوز کند. پس، این تعداد باید برابر با r باشد و بدین ترتیب اثبات به اتمام می رسد. ▲

حال بینیم این قضیه درباره ماتریس A ، (۱)، چسه می گوید. از آنجا که داریم $\text{rank } A = 2$ ، دوتا از بردارهای ستونی مستقل خطی اند و دوتای دیگر ترکیبهای خطی از آنها هستند. درواقع، دو بردار ستونی اول مستقل خطی هستند و

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{29}{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

این موضوع را می توان به سادگی تحقیق کرد اگرچه مشاهده مستقیم آن میسر نیست. به فرض اینکه A^T داده شده باشد، ملاحظه می کنیم که تعیین رتبه، با استفاده مستقیم از تعریف آن، به جز در مورد ماتریسی که به اندازه کافی ساده باشد، راه مناسبی نیست. اکنون این سؤال پیش می آید که آیا بدون تغییر دادن رتبه يك ماتریس می توانیم آن را «ساده کنیم» (تبدیل کنیم). ادعای کنیم که اعمال سطری مقدماتی (بخش ۵.۷) رتبه ماتریس را تغییر نمی دهند. در مورد اولین عمل (تعویض جای دو بردار سطری) این امر واضح است. دومین عمل (ضرب يك بردار سطری در يك ثابت غیر صفر) نیز رتبه را تغییر نمی دهد، زیرا تعداد بیشینه بردارهای سطری مستقل خطی را تغییر نمی دهد. سرانجام، سومین عمل عبارت است

از جمع c برابر يك بردار سطری، مثل $a_{(j)}$ ، با بردار سطری دیگری، مثل $a_{(i)}$ ، این عمل از ماتریس A ماتریسی مانند $\bar{A}$ به وجود می آورد که همان بردارهای سطری را دارد، به استثنای بردار i ام که به صورت $\bar{a}_{(i)} = a_{(i)} + ca_{(j)}$ است. بدین ترتیب ملاحظه می شود که فضاهای پدیدآمده (بخش ۴.۶) از بردارهای سطری A و $\bar{A}$ یکسانند. پس هر دوی این فضاها بعدی برابر با r ، رتبه A ، دارند. از این رو بنا به تعریف، $\text{rank } \bar{A} = \text{rank } A$. از بخش قبل یادآوری می کنیم که ماتریسهای معادل سطری ماتریسهای هستند که می توان آنها را با تعدادی متناهی اعمال سطری مقدماتی از یکدیگر به دست آورد، نتیجه اینکه

قضیه ۲. ماتریسهای معادل سطری، رتبه های مساوی دارند.

این قضیه به ما می گوید که برای تعیین رتبه ماتریسی مانند A چه باید بکنیم. در واقع باید A را با استفاده از روش حذفی گاوس به صورت پلکانی (بخش ۵.۷) در آوریم، زیرا این عمل، بنا به قضیه ۲، رتبه را تغییر نمی دهد و از صورت پلکانی می توانیم مستقیماً رتبه را تشخیص دهیم. به عنوان نمونه، ماتریس (۱) را در نظر می گیریم، به ترتیب به دست می آوریم

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 2 & 9 \\ 7 & -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (\text{ماتریس داده شده})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & \frac{14}{3} & \frac{29}{3} \\ 0 & -7 & -\frac{14}{3} & -\frac{29}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{سطر ۲ به علاوه } \frac{1}{3} \text{ سطر ۱} \\ \text{سطر ۳ منهای } \frac{7}{3} \text{ سطر ۱} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & \frac{14}{3} & \frac{29}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{سطر ۳ به علاوه سطر ۲}$$

آخرین ماتریس به صورت پلکانی است. با توجه به بردارهای سطری و بنا به قضیه ۲ نتیجه می گیریم که $\text{rank } A \leq 2$ ، و بنا به بر قضیه ۱ داریم $\text{rank } A = 2$ ، زیرا دو بردار ستونی اول محققاً مستقل خطی هستند.

اهمیت عملی این روش تعیین رتبه از کاربردهایی که در ارتباط با تعیین وابستگی و استقلال خطی بردارها دارد ناشی می شود. کلید این کاربرد قضیه زیر است که مستقیماً

از تعریف رتبه نتیجه می‌شود.

قضیه ۳ (وابستگی و استقلال خطی)

p بردار $x_{(1)}, \dots, x_{(p)}$ در فضای برداری R^n (د.ك. بخش ۴.۷) در صورتی مستقل خطی هستند که ماتریس با بردارهای سطری $x_{(p)}, \dots, x_{(1)}$ دارای رتبه p باشند، در صورتی که رتبه کوچکتر از p باشد، این بردارها وابسته خطی هستند. چون هر يك از این p بردار، n مؤلفه دارد، ماتریس مذکور، که آن را A می‌نامیم، p سطر و n ستون دارد؛ و هرگاه $n < p$ ، بنا بر قضیه ۱ داریم $\text{rank } A \leq n < p$ ، بنابراین قضیه ۳ به قضیه قابل توجه زیر منجر می‌شود.

قضیه ۴

p بردار با n مؤلفه که $n < p$ ، همیشه وابسته خطی هستند. به عنوان مثال، سه بردار و یا بیشتر در صفحه وابسته خطیند و همین طورند چهار بردار یا بیشتر در فضا.

مسائل بخش ۶.۷

رتبه ماتریسهای زیر را تعیین کنید.

$$0.1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad 0.2 \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$0.3 \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -14 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad 0.4 \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$0.5 \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 0.6 \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0.7 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 0.8 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$0.9 \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

۱۰. قضیه ۱ را با ذکر مثالی توضیح دهید.

۱۱. نشان دهید که $\text{rank } A^T = \text{rank } A$

۱۳. نشان دهید که در قضیه ۳ می توان به جای عبارت «بردار سطری» عبارت «بردار ستونی» را قرار داد.

۱۴. اینکه ماتریسی (2×2) دارای رتبه ۱ است، از نظر هندسی چه مفهومی دارد؟ در مورد ماتریسی (3×3) با رتبه ۲ چه می گوئید؟

۱۵. با ذکر مثالی نشان دهید که $\text{rank } A = \text{rank } B$ نتیجه نمی دهد که $\text{rank } A^2 = \text{rank } B^2$.

در هر يك از حالات زیر مشخص کنید که بردارهای داده شده وابسته خطی هستند یا مستقل خطی.

۱۵. $(2, 1), (1, 2)$

۱۶. $(3, 4), (-9, -12)$

۱۷. $(0, 0), (2, -2)$

۱۸. $(-3, 7, 8), (0, 2, 1)$

۱۹. $(2, 0, 4), (3, 0, 2), (8, 0, -1)$

۲۰. $(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0)$

۲۱. $(3, 2, 7), (2, 4, 1), (1, -2, 6)$

۲۲. $(1, 2, 3), (4, -1, 6), (5, 1, 9)$

به ازای چه مقادیری از k بردارهای زیر وابسته خطیند؟

۲۳. $(1, 2), (3, k)$

۲۴. $(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, k)$

۲۵. $(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (9, 10, 11, 12),$

$(13, 14, 15, k)$

۷.۷ دستگاههای معادلات خطی: وجود و خواص عمومی جوابها

حال با استفاده از مفهوم رتبه که در بخش قبل تعریف شد، می توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه بنیادی مربوط به دستگاههای معادلات خطی

(الف) دستگاهی از m معادله خطی

[illegible]

n مجهول، $x_1, \dots, x_n$ وقتی و تنها وقتی جواب دارد که ماتریس ضرایب، A ، و ماتریس افزوده، B ، (همچنین ر.ک. بخش ۵.۷) یعنی

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

دارای رتبه‌های مساوی باشند.

(ب) هرگاه این، n باشد، دقیقاً یک جواب وجود دارد.

(ب) هرگاه $r < n$ ، بینهایت جواب وجود دارد که همه آنها با تعیین r مجهول مناسب (که رتبه زیر ماتریس ضرایب آنها باید برابر r باشد) برحسب $n-r$ مجهول باقیمانده، که به آنها می‌توان مقادیری دلخواه نسبت داد، به دست می‌آیند.

(ت) اگر جوابهایی موجود باشند، تمامی آنها را می‌توان با روش حذفی گادوس به دست آورد (د.ک. بخش ۵.۷). (این روش را می‌توان بدون توجه به رتبه‌های A و B به کار برد).

اثبات. (الف) می‌توانیم دستگاه (۱) را به صورت $Ax = b$ ، یا بر حسب بردارهای ستونی A یعنی $c_{(1)}, \dots, c_{(n)}$ بنویسیم:

$$(2) \quad \mathbf{c}_{(1)X_1} + \mathbf{c}_{(2)X_2} + \dots + \mathbf{c}_{(n)X_n} = \mathbf{b}.$$

نظر به اینکه **B** از افزودن ستون اضافی **b** به **A** بسط دست می آید، قضیه ۱ بخش ۶.۲ ایجاب می کند که رتبه **B** برابر با $\text{rank } A + 1$ باشد. حال اگر (۱) دارای جوابی مانند **x** باشد، آنگاه (۲) نشان می دهد که **b** باید ترکیبی خطی از بردارهای ستونی $c_{(1)} \dots c_{(n)}$ باشد. از این رو رتبه **B** نمی تواند از رتبه **A** بیشتر باشد، بنابراین $\text{rank } B = \text{rank } A$.

بالمعکس، هر گاه $\text{rank } \mathbf{B} = \text{rank } \mathbf{A}$ ، آنگاه $\mathbf{b}$ باید ترکیبی خطی از بردارهای

ستونی A باشد، مثلاً

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{c}_{(1)} + \dots + \alpha_n \mathbf{c}_{(n)}$$

زیرا در غیر این صورت $\text{rank } \mathbf{B} = \text{rank } \mathbf{A} + 1$ اما این بدان مفهوم است که (۱) جوابی مانند $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$ دارد.

(ب) هرگاه $\text{rank } \mathbf{A} = r = n$ ، آنگاه مجموعه $\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_{(1)}, \dots, \mathbf{c}_{(n)}\}$ ، بنا به قضیه ۱ از بخش قبل، مستقل خطی است، در نتیجه نمایش $\mathbf{b}$ به صورت (۲) یکتا است زیرا

$$\mathbf{c}_{(1)}x_1 + \dots + \mathbf{c}_{(n)}x_n = \mathbf{c}_{(1)}\bar{x}_1 + \dots + \mathbf{c}_{(n)}\bar{x}_n$$

ایجاب می کند که

$$(x_1 - \bar{x}_1)\mathbf{c}_{(1)} + \dots + (x_n - \bar{x}_n)\mathbf{c}_{(n)} = \mathbf{0}$$

و بنابر استقلال خطی، $x_1 - \bar{x}_1 = 0, \dots, x_n - \bar{x}_n = 0$ ، بدین ترتیب اسکالرهای $x_1, \dots, x_n$ در (۲) به طور یکتا تعیین می شوند، یعنی جواب (۱) یکتا است.

(پ) هرگاه $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B} = r < n$ ، بنابر قضیه ۱، بخش ۶.۷، یک مجموعه مستقل خطی K متشکل از r بردار ستونی $\mathbf{A}$ وجود دارد به طوری که بقیه $n - r$ بردار ستونی $\mathbf{A}$ ، ترکیبات خطی این بردارها هستند. ستونها و مجهولات را با ۸ علامت گذاری می کنیم به قسمی که $\{\hat{\mathbf{C}}_{(1)}, \dots, \hat{\mathbf{C}}_{(r)}\}$ مجموعه مستقل خطی K باشد، در این صورت (۲) چنین می شود:

$$\mathbf{c}_{(1)}\hat{x} + \dots + \hat{\mathbf{c}}_{(n)}\hat{x}_n = \mathbf{b},$$

$\hat{\mathbf{c}}_{(n)}, \dots, \hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}$ ترکیبات خطی بردارهای K هستند و بردارهای $\mathbf{c}_{(r+1)}, \dots, \mathbf{c}_{(n)}$ نیز چنینند. اگر این بردارها را بر حسب بردارهای K بنویسیم و عملیات لازم را انجام دهیم، می توانیم دستگاه را به صورت زیر درآوریم:

$$(۳) \quad \hat{\mathbf{c}}_{(1)}y_1 + \dots + \hat{\mathbf{c}}_r y_{(r)} = \mathbf{b}$$

که در آن $y_j = \hat{x}_j + \beta_j$ و β_j از جملات $\hat{\mathbf{c}}_{(r+1)}, \dots, \hat{\mathbf{c}}_{(n)}$ نتیجه می شود؛ در اینجا $j = 1, \dots, r$. از آنجا که دستگاه جواب دارد، $y_1, y_2, \dots, y_r$ وجود دارند که در (۳) صدق می کنند. چون K مستقل خطی است این اسکالرهای یکتا هستند. با انتخاب $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{r+1}$ مقدار β_j و مقدار متناظر آن $\hat{x}_j = y_j - \beta_j$ ($j = 1, \dots, r$) مشخص می شود.

(ت) در بخش ۶.۷ نشان داده شده است و در اینجا برای یادآوری دوباره بیان گردید. بدین ترتیب اثبات به اتمام می رسد.

این قضیه را می توان با استفاده از مثالهای بخش ۵.۷ شرح داد: در مثال ۲ داریم $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B} = 2 < n = 4$ و می توانیم x_3 و x_4 را به دلخواه انتخاب کنیم؛ در مثال ۳، از آنجا که $\text{rank } \mathbf{A} = 2 < \text{rank } \mathbf{B} = 3$ ، جوابی وجود ندارد و در مثال ۴ که $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{B} = n = 3$ ، جوابی یکتا وجود دارد.

دستگاه (۱) را ممکن است اگر تمام β_j های سمت راست برابر صفر باشند. در غیر

قضیه ۲ (دستگاه همگن)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$(4) \quad a_{y1}x_1 + a_{yy}x_y + \dots + a_{yn}x_n = 0$$

$$a_{-1}x_1 + a_{-r}x_r + \dots + a_{-m}x_m = 0$$

اثبات. اولین گزاره واضح است و با این امر که در یک دستگاه همگن ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده رتبه‌های یکسانی دارند، وفق می‌دهد. بردارهای جواب تشکیل یک فضای برداری می‌دهند زیرا هرگاه $\mathbf{x}_{(1)}$ و $\mathbf{x}_{(r)}$ دو جواب دلخواه از این جوابها باشند آنگاه $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{A}\mathbf{x}_{(r)} = \mathbf{0}$ و این ایجاب می‌کند که $\mathbf{A}(\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{x}_{(r)}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} + \mathbf{A}\mathbf{x}_{(r)} = \mathbf{0}$ و نیز $\mathbf{A}(c\mathbf{x}_{(1)}) = c\mathbf{A}\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{0}$ ، که در آن c مقداری دلخواه است. هرگاه $\text{rank } \mathbf{A} = r < n$ ، بنا به قضیه بنیادی می‌توانیم $n - r$ مجهول مناسب را، که آنها را $x_{r+1}, \dots, x_n$ ، می‌نامیم، به‌طور دلخواه انتخاب کنیم، و از این طریق تمام جوابهای معادله را به دست آوریم. نتیجه می‌شود که پایه‌ای برای جوابها عبارت است از $\mathbf{y}_{(1)}, \dots, \mathbf{y}_{(n-r)}$ ، که در آن بردار جواب $\mathbf{y}_{(j)}$ ، $j = 1, \dots, n - r$ ، با انتخاب $x_{r+j} = 1$ و $x_r, \dots, x_1$ مساوی صفر گرفتن بقیه $x_{r+1}, \dots, x_n$ به دست می‌آید؛ بدین ترتیب $x_1, \dots, x_r$ متناظر تعیین می‌شوند. پس ثابت می‌شود که فضای برداری تمام جوابها، بعدی برابر $n - r$ دارد، و اثبات به اتمام می‌رسد. $\blacktriangle$

$$\text{rank } A + (\text{A پوچی}) = n$$

در رابطه بالا، n تعداد مجهولات (تعداد ستونهای A) است. هرگاه $\text{rank } A = n$

آنگاه $0 = (\text{پوچی } A)$ ، و بنابراین دستگاه فقط جواب بدیهی دارد . هرگاه $\text{rank } A = r < n$ ، آنگاه $0 < n - r = (\text{پوچی } A)$ ، و از این رو دستگاه جوابهایی غیر بدیهی دارد که به همراه جواب بدیهی فضایی برداری با بعد $n - r > 0$ تشکیل می دهند . توجه کنید که در (۴) ، بنا به تعریف داریم $\text{rank } A \leq m$ ، بنابراین در صورتی که $m < n$ ، داریم $\text{rank } A < n$. پس بنا به قضیه ۲ ، قضیه زیر که از اهمیت عملی قابل ملاحظه ای برخوردار است ثابت می شود .

قضیه ۳ (وقتی که تعداد معادلات دستگاه کمتر از تعداد مجهولات آن است)

یک دستگاه معادلات خطی همگنی که تعداد معادلات آن کمتر از تعداد مجهولاتش باشد همواره دارای جوابهای غیر بدیهی است .
هرگاه دستگاه ناهمگنی از معادلات خطی جواب داشته باشد ، تمامی آن جوابها را می توان به ترتیب زیر مشخص کرد .

قضیه ۴ (دستگاه ناهمگن)

هرگاه دستگاه معادلات خطی ناهمگنی که به صورت (۱) است دارای جوابهایی باشد آنگاه تمامی این جوابها به صورت

$$x = x_0 + x_h$$

هستند که در آن x_0 جواب مشخصی از (۱) است و x_h می تواند هر یک از جوابهای دستگاه همگن متناظر ، (۴) ، باشد .

اثبات . فرض کنید x جواب مفروضی برای (۱) و x_0 جواب دلخواهی برای (۱) باشد .
در این صورت $Ax = b$ ، $Ax_0 = b$ ، و بنابراین

$$A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = 0.$$

این رابطه نشان می دهد که $x - x_0$ ، یعنی تفاضل هر جواب (۱) از هر جواب مشخص آن جوابی برای (۴) است ، این تفاضل را x_h می نامیم . بنابراین وقتی x_h تک تک جوابهای دستگاه همگن (۴) را اختیار کند تمام جوابهای معادله (۱) به دست می آیند ، و اثبات به اتمام می رسد .

۸.۲ معکوس ماتریس

در این بخش منحصرأ ماتریسهای مربعی را در نظر می گیریم .

معکوس ماتریسی $(n \times n)$ مانند $A = (a_{ij})$ با A^{-1} نشان داده می شود و ماتریسی است $(n \times n)$ به طوری که

$$(1) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

در اینجا I ماتریس واحد n سطری است.

هرگاه A معکوس داشته باشد، آنگاه A را ماتریس ناکتین می نامند. اگر A معکوس نداشته باشد، آن را ماتریس تکین نامند.

هرگاه A معکوس داشته باشد، این معکوس یکتاست.

در واقع، اگر B و C هر دو معکوس A باشند آنگاه

$$AB=I, \quad CA=I,$$

و به دست می آوریم

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=CI=C,$$

بدین ترتیب یکتایی ثابت می شود.

توجه کنید که، به عنوان نتیجه ای از اثبات فوق، تنها با اثبات یکی از تساویهای

$AB=I$ یا $BA=I$ می توانیم ادعا کنیم که B معکوس ماتریس مفروض A است.

حال به مفهوم يك ماتریس می پردازیم و شرایط وجود معکوس ماتریس را پیدایمی کنیم. بدین منظور از A شروع می کنیم و تبدیل خطی متناظر با آن را در نظر می گیریم (بخش ۴.۷):

$$(۲) \quad y = Ax$$

در اینجا بردارهای x و y بردارهایی ستونی با n مؤلفه که به ترتیب عبارتند از $x_1, \dots, x_n$ و $y_1, \dots, y_n$. هرگاه A^{-1} موجود باشد با پیش ضرب کردن آن خواهیم داشت $A^{-1}y = A^{-1}Ax = Ix = x$ ، یعنی تبدیل معکوس

$$(۳) \quad x = A^{-1}y,$$

x را بر حسب y و ماتریس معکوس A ، یعنی A^{-1} ، نشان می دهد.

به ازای y مفروض، معادله (۲) را می توان دستگاهی از n معادله خطی با n مجهول $x_1, \dots, x_n$ تلقی کرد، و بنا بر قضیه بنیادی که در بخش قبل ذکر شد، می دانیم این معادله جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر $\text{rank } A$ برابر با n ، یعنی بزرگترین رتبه ممکن برای يك ماتریس $(n \times n)$ ، باشد.

قضیه ۱ (وجود معکوس)

ماتریس A^{-1} معکوس ماتریس $(n \times n)$ A ، وجود دارد اگر و تنها اگر $\text{rank } A = n$.

بنابراین، A ناکتین است هرگاه $\text{rank } A = n$ ، و A تکین است هرگاه $\text{rank } A < n$.

می خواهیم نشان دهیم که در عمل، تعیین A^{-1} ، معکوس A ، به حل دستگاه خطی $y = Ax$

بازمی گردد. يك روش متناسب، روش حذفی گاوس است (بخش ۵.۷). می دانیم که با این

روش، از ماتریس مربعی مفروض A ، يك ماتریس مثلثی (صورت پلکانی) تولید می شود.

از ماتریس اخیر به سادگی می‌توانیم با چند عمل مقدماتی دیگر يك صورت قطری به دست آوریم؛ یعنی، می‌توانیم

$$Ix = x = A^{-1}y \quad \text{را به صورت} \quad Ax = y = Iy$$

در آوریم؛ در واقع ما کار را از ماتریسهای A و I شروع کرده به I و A^{-1} ختم کردیم. این تعمیم ضعیف روش حذفی گاوس را گاهی روش حذفی گاوس - ژردان* می‌نامند. در اینجا کافی است که ترتیب مناسب انجام محاسبات را با مثالی نوعی توضیح دهیم. (نمایش معکوس بر حسب دترمینان در بخش ۱۱.۷ ارائه خواهد شد.)

مثال ۱. معکوس ماتریس

معکوس ماتریس زیر، A^{-1} ، را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

به ترتیب زیر عمل می‌کنیم،

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

زوج ماتریسهای بعدی را با انجام اعمال سطری مشخص شده روی جفت ماتریس قبل به دست می‌آوریم

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{(سطر ۱)} + 3 \text{(سطر ۲)} \\ \text{(سطر ۱)} - \text{(سطر ۲)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{(سطر ۲)} - \text{(سطر ۳)}$$

تا اینجا کار همان حذف گاوسی است و با مثال ۴ بخش ۵.۷ سازگار است. در مراحل بعد، روش حذفی گاوس به طریقی که گفتیم تعمیم داده می‌شود.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -(\text{سطر } 1) - \frac{2}{5} (\text{سطر } 2) \\ \frac{1}{2} (\text{سطر } 2) + \frac{7}{10} (\text{سطر } 3) \\ -\frac{1}{5} (\text{سطر } 3) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{13}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad (\text{سطر } 2) + (\text{سطر } 1)$$

ماتریس سمت راست معکوس A است زیرا، بر حسب دستگاههای معادلات خطی،
 $Ax = y = Iy$ را به $x = Ix = A^{-1}y$ تحویل کرده‌ایم امتحان جواب:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بنابراین $AA^{-1} = I$. همان‌طور که در اوایل همین بخش، پس از اثبات یکتایی معکوس،
 متذکر شدیم احتیاجی به امتحان $A^{-1}A = I$ نیست. ▲

در انتهای این بخش، چند فرمول مفید دربارهٔ معکوس ماتریسها ارائه می‌دهیم.
 در مورد ماتریس (2×2) ی ناتکین داریم

$$(۴) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

که در آن $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ؛ در بخش بعد $\det A$ مورد بحث قرار خواهد گرفت. در واقع، درستی (۱) را به سادگی می توان تحقیق کرد. همین طور، در مورد يك ماتریس قطری ناکتبین داریم

$$(5) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{pmatrix}$$

عناصر قطر اصلی A^{-1} عکس عناصر A هستند.

مثال ۲. معکوس ماتریس مربعی دوسطری

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

مثال ۳: معکوس ماتریس قطری

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

معکوس معکوس يك ماتریس خود آن ماتریس است، یعنی

$$(6) \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

اثبات این مطلب ساده است و به خواننده واگذار می شود (مسئله ۳).

معکوس حاصل ضرب AC از ضرب کردن معکوسهای عوامل آن به ترتیب عکس به دست می آید:

$$(7) \quad (AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$$

برای اثبات (۷)، از (۱) شروع کرده به جای A می گذاریم AC ، یعنی

$$AC(AC)^{-1} = I.$$

با پیش ضرب کردن این رابطه در A^{-1} و قرار دادن $A^{-1}A = I$ ، به دست می آوریم

$$A(AC)^{-1} = A^{-1}$$

چنانچه رابطه بالا را در C^{-1} پیش ضرب کنیم، نتیجه مطلوب به دست می آید.
 بدیهی است که (۷) را می توان به حاصل ضرب بیش از ۲ ماتریس نیز تعمیم داد؛
 با استقرای به دست می آوریم

$$(۸) \quad (AC \dots PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1} \dots C^{-1} A^{-1}$$

علاوه بر اینها، اکنون می توانیم اطلاعات بیشتری را درباره این واقعیت عجیب، که در حالت کلی در ضرب ماتریسها قانون حذف صادق نیست، به دست آوریم؛ می دانیم

$$AB = 0 \quad \text{ایجاب نمی کند که الزاماً} \quad A = 0 \quad \text{و یا} \quad B = 0.$$

این گزاره را در بخش ۴.۷ (قضیه ۱) بیان کردیم و آن را با مثال زیر روشن ساختیم:

$$(۹) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

رتبه هریک از این دو ماتریس کوچکتر از $n = 2$ است با توجه به این مثال می توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۲

هرگاه $A \neq 0$ و $B \neq 0$ ماتریسهای $(n \times n)$ باشند به نحوی که $AB = 0$ ، آنگاه رتبه A و رتبه B هر دو از n کوچکترند.

اثبات. فرض کنید $AB = 0$ و $\text{rank } A = n$. در آن صورت بنا به قضیه ۱، A^{-1} وجود دارد و با پیش ضرب کردن $AB = 0$ در A^{-1} داریم $A^{-1}AB = B = 0$ ، که با $B \neq 0$ تناقض دارد. $\blacktriangle$

توجه کنید که با پس و پیش کردن عوامل ضرب در (۹)، به دست می آوریم

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

بنابراین هرگاه رتبه A و رتبه B هر دو از n کوچکتر باشند و $AB = 0$ ، آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $BA = 0$.

از اثبات قضیه ۲ همچنین داریم:

قضیه ۳

هرگاه A و B ماتریسهای $(n \times n)$ باشند به قسمی که $AB = 0$ ، و هرگاه رتبه A برابر n باشد، آنگاه $B = 0$.

به علاوه، هرگاه داشته باشیم $AB = 0$ و فرض کنیم $B = S - T$ ، آنگاه

$$AS = AT \quad \text{و یا} \quad AB = A(S - T) = 0$$

با توجه به این مطلب و قضیه ۳، به دست می آوریم

قضیه ۴

هرگاه A ، S و T ماتریسهای $(n \times n)$ باشند و $\text{rank } A = n$ ، آنگاه

$$AS = AT \quad \text{نتیجه می دهد} \quad S = T$$

مسائل بخش ۸.۲

۱. درستی (۴) را، با نشان دادن اینکه $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ، تحقیق کنید.

۲. درستی (۵) را تحقیق کنید.

۳. (۶) را ثابت کنید.

معکوس ماتریسهای زیر را پیدا کنید و نتیجه را امتحان کنید.

$$.۴ \quad \begin{pmatrix} -۳ & ۵ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} \quad .۵ \quad \begin{pmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{pmatrix}$$

$$.۶ \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad .۷ \quad \begin{pmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ -۲ & -۴ & ۴ \\ -۴ & ۲ & ۸ \end{pmatrix}$$

$$.۸ \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \quad .۹ \quad \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$.۱۰ \quad \begin{pmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ -۱۵ & ۶ & -۵ \\ ۵ & -۲ & ۲ \end{pmatrix} \quad .۱۱ \quad \begin{pmatrix} ۵ & -۱ & ۵ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۵ & ۳ & -۱۵ \end{pmatrix}$$

$$.۱۲ \quad \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{pmatrix}$$

معکوس تبدیلهای خطی زیر را پیدا کنید.

$$x^* = -2x - 2y + 7z \quad .14 \quad x^* = 19x + 2y - 9z \quad .13$$

$$y^* = 4x + 3y - 12z \quad y^* = -4x - y + 2z$$

$$z^* = -x + 2z \quad z^* = -2x + z$$

$$x^* = 2x + 4y + z \quad .16 \quad x^* = x + 2y + 5z \quad .15$$

$$y^* = x + 2y + z \quad y^* = -y + 2z$$

$$z^* = 3x + 4y + 2z \quad z^* = 2x + 4x + 11z$$

$$.17 \text{ نشان دهید که } (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

.18 معکوس مربع ماتریسهایی را که در مسائل ۷ و ۱۰ آمده‌اند پیدا کنید.

$$.19 \text{ نشان دهید که } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

.۲۰ نشان دهید که معکوس يك ماتریس متقارن نانکین ماتریسی متقارن است.

۹.۷ دترمینانهای مرتبه دوم و سوم

بخش حاضر از سایر بخشهای این فصل مستقل است. این بخش مرجعی است برای فصول دیگر و همچنین پیشگفتاری است برای بخش بعد، که دترمینانهای کلی و موارد استفاده آنها را مورد بحث قرار می‌دهد.

دترمینان مرتبه دوم را می‌توان در ارتباط با دستگاه دو معادله خطی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

که در آن x_1 و x_2 دو مجهول دستگاه هستند، به ترتیب زیر معرفی و از آن استفاده کرد. برای حل دستگاه، معادله اول را در a_{22} و معادله دوم را در a_{12} ضرب کرده حاصل ضربها را با هم جمع می‌کنیم، خواهیم داشت

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

سپس اولین معادله (۱) را در a_{21} - و دومین معادله آن را در a_{11} ضرب می‌کنیم و مجدداً حاصل ضربها را با هم جمع می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

هرگاه $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ صفر نباشد، به کمک تقسیم می توان x_1 و x_2 را به دست آورد:

$$(۲) \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

مخرج کسرها را به صورت

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

نوشته آن را دترمینان مرتبه دوم می نامند؛ پس

$$(۳) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

چهار عدد a_{11} ، a_{12} ، a_{21} ، a_{22} را عناصر دترمینان گویند. گفته می شود که عناصر واقع بر یک خط افقی یک سطر و عناصر واقع بر یک خط قائم یک ستون دترمینان را تشکیل می دهند.

حال می توان جواب (۲)ی دستگاه (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$(۴) \quad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (D \neq 0)$$

که در آن

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

این فرمول را قاعده کرامر^۱ نامند. توجه کنید که D_1 از قرار دادن ستونی که عناصرش b_1 و b_2 هستند به جای اولین ستون D ، و D_2 از قرار دادن همین ستون به جای دومین ستون D به دست آمده اند.

هرگاه b_1 و b_2 هر دو صفر باشند، دستگاه همگن نامیده می شود. در این حالت، دستگاه حداقل «جواب بدیهی» $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ را داراست. دستگاه جوابهای دیگری دارد اگر و تنها اگر $D = 0$.

هرگاه حداقل یکی از دو مقدار b_1 یا b_2 صفر نباشد دستگاه را ناهمگن نامند. در این صورت اگر $D \neq 0$ ، دستگاه دقیقاً یک جواب دارد که از (۴) به دست می آید.

دترمینان مرتبه سوم در رابطه با دستگاه سه معادله خطی

۱. گابریل کرامر (Gabriel Cramer)، ۱۷۵۲-۱۷۰۴، ریاضیدان سوئیس؛ که به خاطر تألیف کتابی درباره نظریه منحنیها، که در ۱۷۵۰ در ژنو منتشر شد، نیز مشهور است.

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
 (5) \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
 \end{aligned}$$

که در آن x_1 ، x_2 و x_3 مجهولات دستگاه هستند، پدیدار می‌شود. برای به‌دست آوردن معادله‌ای که فقط شامل x_1 باشد معادلات دستگاه را به‌ترتیب در مقادیر

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad -(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{13}), \quad a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13},$$

ضرب می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان این عبارتها را به‌صورت دترمینانهای مرتبه دوم نوشت:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & -M_{21} &= - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \\
 M_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

باجمع معادلات حاصله به‌دست می‌آوریم

$$(6) \quad (a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31})x_1 = b_1M_{11} - b_2M_{21} + b_3M_{31}.$$

به‌طریقی مشابه می‌توان معادلاتی به‌دست آورد که فقط شامل x_2 و یا x_3 باشند. اینک، برای ساده‌تر کردن نمادگذاری، دترمینان موقه سوم را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم

$$D = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31},$$

همان ضریب x_1 در (۶) است و اگر در (۷) دترمینانهای مرتبه دوم را بسط دهیم، به‌دست می‌آوریم

$$(۸) \quad D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{33}a_{12} \\ - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

بدیهی است دترمینان سمت راست (۷) که در a_{ii} ، $(i = 1, 2, 3)$ ضرب شده از D با حذف اولین ستون و i امین سطر آن به دست آمده است. می بینیم که (۶) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{که } Dx_1 = D_1$$

به طریق مشابه، معادله ای را که فقط شامل x_2 است می توان به صورت

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{نوشت که } Dx_2 = D_2$$

و معادله ای را که تنها شامل x_3 است می توان به صورت زیر نوشت:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{که } Dx_3 = D_3$$

توجه کنید که عناصر D با همان ترتیبی که در معادلات (۵) ظاهر می شوند، مرتب شده اند و D_j ، $(j = 1, 2, 3)$ از قراردادن ستونی که عناصر آن b_1 ، b_2 و b_3 ، جملات سمت راست معادلات (۵) هستند به جای j امین ستون D به دست می آید. در نتیجه هرگاه $D \neq 0$ ، آنگاه دستگاه (۵) دارای جواب یکتای زیر است

$$(۹) \quad x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (\text{قاعده کرامر})$$

اگر (۵) همگن باشد، یعنی $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ، دستگاه حداقل دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ است و جوابهای غیر بدیهی وقتی و تنها وقتی وجود دارند که $D = 0$.

اگر (۵) غیر همگن باشد و $D \neq 0$ ، دستگاه دقیقاً دارای یک جواب است که آن هم از (۹) به دست می آید.

مثال ۱. قاعده کرامر

دستگاه زیر را با قاعده کرامر حل کنید:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1x_3 &= 2 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

دترمینان دستگاه عبارت است از

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 46.$$

دترمینانهای که در مخرج فرمولهای (۹) ظاهر می شوند عبارتند از

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 92, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -46.$$

بنابراین $x_1 = 2$ ، $x_2 = 0$ و $x_3 = -1$.

حال مهمترین خواص دترمینانها را بیان می کنیم. اثباتها، بامحاسبه مستقیم از (۷) نتیجه می شوند. (دربخش بعد خواهیم دید که دترمینانهای با مرتبه دلخواه n ، خواصی کاملاً مشابه دارند.)

(الف) هرگاه جای سطرها و ستونهای يك دترمینان را با هم عوض کنیم، بدون آنکه ترتیبشان عوض شود، مقدار دترمینان تغییر نمی کند. مثال:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

(ب) هرگاه جای دو سطر (یا دو ستون) يك دترمینان را با هم تعویض کنیم مقدار دترمینان در ۱- ضرب می شود. مثال:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

دترمینان مرتبه دومی که از حذف يك سطر و يك ستون D [د.ك. (۷)] به دست می آید کهاد عنصری که متعلق به آن سطر و ستون است، نامیده می شود. مثلاً در D کهادهای a_{22} و a_{21} به ترتیب عبارتند از

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

همسازه عنصری از D ، که در سطر i ام و ستون k ام واقع است، به عنوان $(-1)^{i+k}$ برابر کهاد آن عنصر تعریف می شود. مثلاً، همسازه های a_{22} و a_{21} به ترتیب عبارتند از

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

علامتهای $(-1)^{i+k}$ آرایشی به شکل زیر دارند:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

به علاوه، ملاحظه می کنیم که اکنون می توان (۷) را به صورت

$$D = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31},$$

نوشت که در آن C_{i1} همسازه عنصر a_{i1} است. از اینجا و از خواص (الف) و (ب) خاصیت زیر را نتیجه می گیریم.

(پ) دترمینان D را می توان نسبت به هر يك از سطرها یا ستونهايش بسط داد؛ یعنی می توان آن را به صورت مجموع سه عنصر از هر سطر (یا ستون)، که هر يك در همسازه مربوطه ضرب شده، نوشت. به عنوان مثال بسط D نسبت به سطر دومش عبارت است از

$$D = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

از (پ) به دست می آوریم

(ت) عاملی از عناصر هر سطر (یا ستون) را می توان جلوی دترمینان قرارداد، مثال:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -1 & 12 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \times 2 & 1 \\ 3 & 3(-3) & 2 \\ -1 & 3 \times 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

از خواص (ب) و (ت) می‌توانیم نتایج زیر را به‌دست آوریم
(ث) هرگاه عناصر متناظر دو سطر (یا ستون) دترمینانی متناسب باشند، مقدار آن دترمینان صفر است.

خاصیت زیر در امر ساده‌تر کردن محاسبه دترمینانها نقشی بنیادی دارد.
(ج) هرگاه عناصر يك سطر (یا ستون) دترمینان را با مضرب ثابتی از عناصر متناظر يك سطر (یا ستون) دیگر جمع‌کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند. مثال:

$$\begin{vmatrix} -6 & 21 & -30 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6+1 \times 7 & 21-3 \times 7 & -30+5 \times 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 42$$

(ج) هرگاه هر يك از عناصر يك سطر (یا ستون دترمینان) به‌صورت يك دو جمله‌ای بیان شده باشد، دترمینان را می‌توان به‌صورت مجموع دو دترمینان نوشت. مثال:

$$(12) \begin{vmatrix} 4x+3 & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 2 & 1 \\ x & 3 & 4 \\ 2x & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

با به‌کار بردن قاعده مشتق حاصل ضرب، خاصیت زیر را به‌دست می‌آوریم.
(ح) هرگاه عناصر يك دترمینان توابع مشتق‌پذیری از يك متغیر باشند، مشتق دترمینان را می‌توان به‌صورت مجموع سه دترمینان نوشت،

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f' & g' & h' \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p' & q' & r' \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & g & h \\ p & q & r \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$$

که در آن نشانه پریم مشتق نسبت به x را نشان می‌دهد.

مسائل بخش ۹.۷

دترمینانهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

۲.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

۱.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

۴.

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

۳.

$$\begin{vmatrix} 6 & 13 & -2 \\ 5 & 37 & -5 \\ 1 & 13 & -2 \end{vmatrix}$$

۶.

$$\begin{vmatrix} -4 & 18 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

۵.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

۸.

$$\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix}$$

۷.

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$$

۹.

۱۰. نشان دهید که معادله خط راستی که از دو نقطه $P_1: (x_1, y_1)$ و $P_2: (x_2, y_2)$ در صفحه xy می‌گذرد، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

و با استفاده از آن، دستور معروف زیر را به دست آورید

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}.$$

۱۰.۷ دترمینانهای با مرتبه دلخواه

يك دترمینان با مرتبه دلخواه n كمیتی است اسكالركه به شرح زیر به يك ماتریس مربعی n سطری منتسب شده است. دترمینان مرتبه n را می توان به طرقي متفاوت ولی هم ارز تعريف كرد. يك طريق، استفاده از فرایند حل n معادله خطی n مجهولی است. در مورد $n=2$ و $n=3$ این روش را در بخش قبل دیدیم و تعمیم آن به حالتی که n دلخواه است در بخش بعد شرح داده خواهد شد.

دترمینان کاربردهای متعددی در ریاضیات مهندسی دارد؛ گرچه از اهمیت آن در محاسبات عددی به علت غیر عملی بودنش کاسته شده است. در واقع، قاعده کرامر (بخشهای ۹.۷ و ۱۱.۷) مسلماً روش عملی مناسبی برای حل عددی دستگاههای معادلات خطی نیست و برای مسائل عددی روشهای بهتری وجود دارد (ر.ك. بخشهای ۵.۷، ۹.۱۹ تا ۱۱.۱۹). در این بخش دترمینان مرتبه n را تعريف كرده مهمترین خواص آن را بررسی می كنیم.

يك دترمینان مرتبه n به صورت آرایه ای مربعی از n^2 كمیت كه بین دو خط قائم محصور شده اند نوشته می شود ،

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و مقدار معینی دارد كه در زیر تعريف شده است. كمیتهای $a_{11}, \dots, a_{nn}$ كه عدد (یا گاهی تابع) هستند عناصر دترمینان نامیده می شوند. خطهای افقی متشكل از عناصر دترمینان سطر و خطهای قائم ستون نام دارند. خطیابی كه ابتدای آن a_{11} و انتهای آن a_{nn} است قطر اصلی دترمینان خوانده می شود.

با حذف سطر i ام و ستون k ام از دترمینان D ، يك دترمینان مرتبه $n-1$ ام (آرایه ای مربعی با $n-1$ سطر و $n-1$ ستون كه بین دو خط قائم قرار گرفته اند) به دست می آوریم، این دترمینان كهاده عنصر a_{ik} (كه به سطر و ستون حذف شده تعلق دارد) نامیده می شود و آن را با M_{ik} نشان می دهند.

حاصل ضرب كهاده M_{ik} در $(-1)^{i+k}$ را همساز a_{ik} در D می نامند و با C_{ik} نمایش می دهند؛ بنابراین

$$(2) \quad C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}.$$

به عنوان مثال، در دو دترمینان مرتبه سوم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

داریم

$$C_{22} = -M_{22} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و غیره.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم دترمینان مرتبه n را به روشی که برای مقاصد عملی مناسبتر است تعریف کنیم.

تعریف. دترمینان مرتبه n

علامت

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

دترمینان مرتبه n نامیده می‌شود. به ازای $n=1$ این دترمینان همان a_{11} است. به ازای $n \geq 2$ ، دترمینان عبارت از مجموع حاصل ضربهای عناصر هر سطر یا ستون در همسازهای نظیر آنها، یعنی

$$(3 \text{ الف}) \quad D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

یا

$$(3 \text{ ب}) \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

بدین طریق، D بر حسب n دترمینان مرتبه $n-1$ تعریف می‌شود که هر يك از آنها به نوبه خود بر حسب $n-1$ دترمینان مرتبه $n-2$ تعریف می‌شود و الی آخر؛ سرانجام به دترمینانهای مرتبه دوم می‌رسیم که در آنها همسازهای عناصر خود عنصری از D هستند. می‌بینیم که اگر عناصر D همگی عدد باشند مقدار D نیز يك عدد خواهد بود.

علاوه بر این، از تعریف نتیجه می‌شود که می‌توانیم D را نسبت به هر سطر یا ستون بسط دهیم، یعنی می‌توانیم در (3) عناصر هر سطر یا ستون را اختیار کنیم و به همین نحو در همسازهای (3) و غیره. بنابراین باید نشان دهیم که تعریف فوق عاری از ابهام است؛

یعنی مقداری که برای D به دست می‌آید بستگی به این ندارد که کدام ستون یا سطر را انتخاب کنیم. اثبات این مطلب در آخر همین بخش ارائه خواهد شد.
برای استفاده‌های بعدی، یادآور می‌شویم که (۳) را می‌توان برحسب کهادها نیز نوشت $[(۲). ر. ک.]$

$$(۴ الف) \quad D = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(۴ ب) \quad D = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

مثال ۱

فرض کنید

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

بسط این دترمینان نسبت به اولین سطر عبارت است از

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1(12 - 0) - 3(4 + 4) = -12$$

بسط نسبت به اولین ستون عبارت است از

$$D = 1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 - 12 = -12$$

وهمین طور نسبت به سطرها و ستونهای دیگر.

حال از روی تعریف به راحتی می‌توانیم مهمترین خواص دترمینان را به شرح زیر بیان کنیم.
چون نتیجه حاصل از بسط دترمینان نسبت به سطرها یا ستونهای مختلف یکسان است، داریم

قضیه ۱ (تراشه)

هرگاه سطرهای یک دترمینان را، با حفظ ترتیب، به جای ستونهای آن بنویسیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

قضیه ۲ (ضرب در عدد ثابت)

هرگاه تمام عناصر یک سطر (یا یک ستون) دترمینانی در عامل k ضرب شود، مقدار دترمینان جدید k برابر مقدار دترمینان اولیه خواهد بود.

اثبات دترمینان را نسبت به همان سطری (یا ستونی) که عناصرش در k ضرب شده‌اند بسط دهید. ▲

توجه کنید که kD دترمینانی است که از ضرب عناصر فقط یک سطر (یا ستون) D در k حاصل شده است، در حالی که در مورد ماتریسها، kA ، ماتریسی است که از ضرب تمام عناصر A در k به دست می‌آید.

قضیه ۲ را می‌توان برای ساده کردن یک دترمینان مفروضه به کار برد؛ به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

▲ $= 12$

از قضیه ۲، به ازای $k=0$ ، و یا مستقیماً از بسط دترمینان، داریم

قضیه ۳

هرگاه تمام عناصر یک سطر (یا ستون) دترمینانی صفر باشند، مقدار دترمینان صفر است.

قضیه ۴

هرگاه تمام عناصر یک سطر (یا ستون) دترمینانی به صورت دو جمله‌ای باشند، می‌توان دترمینان را به صورت مجموع دو دترمینان نوشت، مثلاً

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

اثبات. دترمینان را نسبت به سطری (یا ستونی) که عناصرش دو جمله‌ای هستند، بسط دهید.

مثالی دیگر در (۱۲)، بخش ۹.۷، ارائه شده است. تعمیم قضیه ۴ به حالتی که عناصر مجموع بیش از دو جمله هستند، واضح است.

قضیه ۵ (تعویض سطرها یا ستونها)

هرگاه دو سطر (یا دو ستون) دلخواه از دترمینانی را با هم عوض کنیم، مقدار دترمینان در ۱- ضرب می‌شود.

اثبات. اثبات به طریق استقرا انجام می‌شود. می‌بینیم که قضیه برای دترمینان مرتبه $n=2$ برقرار است. فرض می‌کنیم قضیه برای دترمینان مرتبه $n-1$ صادق باشد و نشان می‌دهیم که برای دترمینان مرتبه n هم صادق است.

فرض کنید D از مرتبه n بوده و E دترمینان حاصل از جابه‌جا کردن دو سطر آن باشد. D و E را نسبت به سطری، که یکی از دو سطر جابه‌جا شده نیست و آن را سطر i ام نامیده‌اید، بسط دهید. در این صورت بنا به (۴ الف) داریم

$$D = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}, \quad E = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} N_{ik}$$

کس N_{ik} از جابه‌جا کردن دو سطر در M_{ik} ، کهاد a_{ik} ی دترمینان D ، به دست آمده است. چون این کهادها از مرتبه $n-1$ هستند، بنا به فرض استقرا $N_{ik} = -M_{ik}$ و از اینجا حکم در مورد سطرها ثابت می‌شود، چرا که

$$E = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} (-M_{ik}) = - \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = -D.$$

در مورد ستونها نیز اثبات به همین نحو است.

در شماره (۱۱) بخش قبل مثالی ارائه شده است.

قضیه ۶. (سطرها یا ستونها متناسب)

هرگاه عناصر متنظر دو سطر (یا دو ستون) یک دترمینان با هم متناسب باشند، مقدار دترمینان صفر است.

اثبات. فرض کنید عناصر سطرهای i ام و j ام دترمینان D با هم متناسب باشند، مثلاً $a_{ik} = c a_{jk}$ ، $k=1, \dots, n$. هرگاه $c=0$ ، آنگاه $D=0$. فرض کنید $c \neq 0$.

بنابره قضیه ۲ داریم

$$D = cB$$

و B دترمینانی است که سطرهای i ام و j ام آن همانندند. این سطرها را با هم جابه‌جا کنید. در این صورت، بنا بر قضیه ۵، B به $-B$ تبدیل می‌شود. از طرف دیگر، چون سطرها همانندند، دترمینان جدید باز همان B است. بنابراین $B = -B$ ، $B = 0$ ، و از آنجا $D = 0$.

مثال ۳

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -6 & -12 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

توصیه می‌کنیم که قبل از محاسبه یک دترمینان آن را ساده کنید. بدین منظور می‌توان از قضیه ۲ و قضیه زیر استفاده کرد.

قضیه ۷ (جمع کردن سطر یا ستون)

هرگاه ضرب ثابتی از عناصر یک سطر (یا ستون) دترمینانی را به عناصر متناظرشان در یک سطر (یا ستون) دیگر بیفزاییم، مقدار آن دترمینان تغییری نمی‌کند.

اثبات. قضیه ۴ را در مورد دترمینان حاصل به کار برید. با این کار مجموعی از دو دترمینان به دست می‌آید؛ یکی از این دترمینانها دترمینان اصلی است و دیگری دارای دو سطر متناوب است. بنا بر قضیه ۶، دترمینان دوم برابر صفر است و قضیه به اثبات می‌رسد.

مثال ۴

دترمینان زیر را حساب کنید.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 24 & 21 & 93 \\ 2 & -37 & -1 & 194 \\ -2 & 35 & 0 & -171 \\ -3 & 177 & 63 & 234 \end{vmatrix}$$

سطر دوم را به سطر سوم اضافه می‌کنیم، سه برابر سطر اول را به سطر آخر می‌افزاییم، دو برابر سطر اول را از سطر دوم کم می‌کنیم و دترمینان حاصل را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 24 & 21 & 93 \\ 0 & -85 & -43 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 23 \\ 0 & 249 & 126 & 513 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -85 & -43 & 8 \\ -2 & -1 & 23 \\ 249 & 126 & 513 \end{vmatrix}$$

سه برابر سطر اول را با سطر آخر جمع می‌کنیم:

$$D = \begin{vmatrix} -85 & -43 & 8 \\ -2 & -1 & 23 \\ -6 & -3 & 537 \end{vmatrix}$$

سپس دو برابر ستون دوم را از ستون اول کم کرده دترمینان حاصل را نسبت به ستون اول بسط می‌دهیم:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -43 & 8 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & -3 & 537 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 23 \\ -3 & 537 \end{vmatrix} = -537 + 69 = -468$$

دترمینان عناصر ماتریس مربعی n سطری $A = (a_{jk})$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با $\det A$ نمایش می‌دهیم؛ بنابراین

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

حال این قضیه مهم را ثابت می‌کنیم که دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی n سطری برابر با حاصل ضرب دترمینانهای آن دو ماتریس است. این قضیه در مورد دترمینانها به شکل زیر بیان می‌شود: حاصل ضرب دو دترمینان مرتبه n امی توان به صورت دترمینان مرتبه n امی نوشت که عناصرش همانند عناصر ماتریس حاصل ضرب به دست می‌آیند.

قضیه ۸ (دترمینان حاصل ضرب ماتریسها)

فرض کنید $A = (a_{ik})$ و $B = (b_{ik})$ ماتریسهای مربعی n سطری باشند. در آن صورت داریم

$$(5) \quad \det(AB) = \det A \det B,$$

که هم ادا است با

$$(5^*) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

در اینجا عنصر c_{ik} که در سطر i ام و ستون k ام قرار دارد برابر است با

$$(5') \quad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk},$$

حاصل ضرب اسکالر بردار سطری i ام دترمینان اول و بردار ستونی k ام دترمینان دوم.

اثبات قضیه ۸ به ازای $n=2$. فرض کنید

$$D = D_1 D_2 \quad \text{و} \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که

$$(6) \quad D = D_1 D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

برای اثبات (۶)، ابتدا دترمینان سمت راست را نسبت به سطر اول بسط دهید و

سپس با دو دترمینان حاصل نیز همین کار را بکنید:

$$\begin{aligned} D &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{22} \\ -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ -1 & b_{11} & b_{22} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - a_{12} a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) D_2 = D_1 D_2. \end{aligned}$$

حال دترمینان (۶) را به ترتیب زیر تبدیل می‌کنیم. a_{11} برابر سطر سوم و a_{12} برابر سطر چهارم را به سطر اول اضافه می‌کنیم تا سطر اول به صورت زیر درآید:

$$0 \quad 0 \quad a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

اینک a_{21} برابر سطر سوم و a_{22} برابر سطر چهارم را با سطر دوم جمع می‌کنیم تا به صورت

زیردرآید:

$$\circ \quad \circ \quad a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

در مجموع داریم

$$D = \begin{vmatrix} \circ & \circ & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \circ & \circ & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & \circ & b_{11} & b_{12} \\ \circ & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

چنانچه این دترمینان را نسبت به ستون اول بسط دهیم و آنگاه دترمینان مرتبه سوم حاصل را نیز نسبت به سطر اولش بسط دهیم، به دست می آوریم

$$D = D_1 D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

که به ازای $n=2$ همان رابطه (5^*) است.

اثبات قضیه ۸ وقتی n دلخواه است. مراحل اثبات کاملاً شبیه مراحل اثبات در حالت $n=2$ است. مانند گذشته، فرض کنید $D_1 = \det A$ ، $D_2 = \det B$ و $D = D_1 D_2$. ابتدا نشان می دهیم که

$$(6^*) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & \circ & \dots & \circ \\ -1 & \circ & \dots & \circ & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \circ & -1 & \dots & \circ & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

برای اثبات این رابطه، ابتدا دترمینان را نسبت به سطر اول بسط دهید، سپس دترمینانهای مرتبه $n-1$ حاصل را نسبت به سطرهای اولشان بسط دهید و به همین ترتیب تا آخر. بعد از n مرحله، نتیجه به صورت زیر است:

$$(\dots) \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

که در آن (...) دترمینان D_1 را برحسب حاصل ضرب عناصرش نشان می‌دهد. بنا براین در $(*)$ ، D به صورت زیر تبدیل می‌شود. به اولین سطر

$$a_{11} \text{ برابر } (n+1) \text{ امین سطر ،}$$

$$a_{12} \text{ برابر } (n+2) \text{ امین سطر ،}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{1n} \text{ برابر } 2n \text{ امین سطر ،}$$

را اضافه کنید، در نتیجه اولین سطر چنین خواهد شد:

$$\underbrace{0 \dots 0}_{\text{عنصر اول } n} \quad \underbrace{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}}_{c_{11} = (n+1) \text{ امین عنصر}} \quad \dots \quad \underbrace{a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn}}_{c_{1n} = \text{آخرین عنصر}}$$

با تبدیل دومین، سومین، ...، n امین سطر به طریقی مشابه، به دست می‌آوریم

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

که در آن c_{ik} از رابطه (Δ') به دست می‌آید. چنانچه این دترمینان را نسبت به اولین ستون بسط دهیم، و دترمینان مرتبه $(2n-1)$ حاصل را نیز نسبت به ستون اولش بسط دهیم و همین طور تا آخر، نتیجه عبارت است از همان دترمینان سمت راست (Δ^*) که در $(*)$ ضرب شده است و، اگر n فرد باشد، دترمینان یک دفعه دیگر باید در $(-1)^n$ ضرب شود زیرا در این صورت در هر کدام از n بسط متوالی، همسازۀ عنصر -1 ، در اولین ستون دترمینانی که باید بسط داده شود، منهای یک برابر کهاد این عنصر است. از این رو هرگاه n فرد باشد، دترمینان در عامل $+1 = (-1)^n(-1)^n$ ضرب می‌شود و هرگاه n زوج باشد، در $+1 = (-1)^n$ ضرب می‌شود. بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

مثال ۵

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 18 \\ 46 & 10 & 76 \\ 29 & 7 & 49 \end{vmatrix}$$

اثبات اینکه تعریف دترمینان نامفهوم است. باید نشان دهیم تعریف دترمینان D ، که در

ابتدای این بخش بیان شد، نامیهم است؛ یعنی مقدار D بستگی به نحوه انتخاب سطر یا ستون ندارد.

درمورد درترمینان مرتبه دوم

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

این امر واضح است زیرا در این صورت (۳) فقط چهار حالت دارد که عبارتند از بسط درترمینان نسبت به

$$\text{سطر اول: } D = a_{11}a_{22} + a_{12}(-a_{21})$$

$$\text{سطر آخر: } D = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}a_{11}$$

$$\text{ستون اول: } D = a_{11}a_{22} + a_{21}(-a_{12})$$

$$\text{ستون آخر: } D = a_{12}(-a_{21}) + a_{22}a_{11}$$

می بینیم که برای D همیشه يك مقدار به دست می آید، مقداری که با (۳) بخش ۹.۷ سازگار است.

حال ثابت می کنیم تعریفی که از درترمینان D با مرتبه دلخواه n ارائه دادیم به يك مقدار D منجر می شود و بستگی به نحوه انتخاب سطر یا ستون ندارد. اول ثابت می کنیم که مقدار D بستگی به نحوه انتخاب سطر ندارد.

اثبات با استقرا انجام می پذیرد. این حکم درمورد درترمینان مرتبه دوم صادق است (قبلا دیدیم). فرض می کنیم این حکم درمورد درترمینان مرتبه $n-1$ صادق باشد و ثابت می کنیم که درمورد درترمینان مرتبه n نیز صادق است.

بدین منظور، D را بر حسب دوسطر دلخواه، مثلا سطرهاى i ام و j ام، بسط می دهیم و نتایج را مقایسه می کنیم. فرض می کنیم $j < i$ ، این فرض کلیت مسئله را ازین نمی برد. **بسط اول.** D را بر حسب i امین سطر بسط می دهیم. جمله نوعی این بسط عبارت است از

$$(Y) \quad a_{ik}C_{ik} = a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}.$$

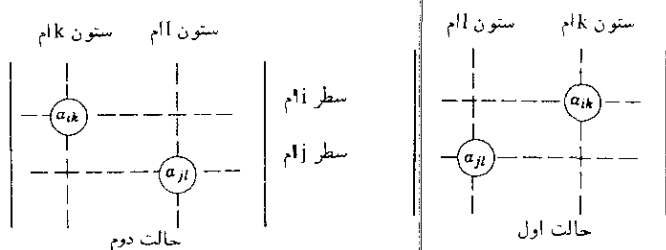
کها M_{ik} ، مربوط به عنصر a_{ik} ی D ، درترمینانی است با مرتبه $(n-1)$. بنا به فرض استقرا این درترمینان را می توان نسبت به هر سطرش بسط داد و ما آن را نسبت به سطر متناظر با i امین سطر D بسط می دهیم. این سطر شامل عناصر $a_{il} (l \neq k)$ است و درواقع این سطر $(j-1)$ امین سطر M_{ik} است، زیرا M_{ik} شامل عناصر i امین سطر D نیست، و $j < i$. دوحالت زیر مشخص می شود.

حالت الف. هرگاه $k < l$ ، آنگاه عنصر a_{il} به i امین ستون M_{ik} متعلق است

(ر. ک. شکل ۱۴۲). از این دو جمله شامل a_{jl} در این بسط عبارت است از

$$(۸) \quad a_{jl} \cdot (M_{ik} \text{ در } a_{jl} \text{ همساز}) = a_{jl} \cdot (-1)^{(j-1)+l} M_{ikjl}$$

که در آن M_{ikjl} عبارت است از کهاد a_{jl} در M_{ik} . چون این کهاد با حذف سطر و ستون مربوط به a_{jl} از M_{ik} به دست می آید، می توان گفت این کهاد، با حذف سطریهای i ام و j ام و ستونیهای k ام و l ام از D ، به دست آمده است. بسطهای M_{ik} را در بسطهای D قرار می دهیم. در این صورت از (۷) و (۸) نتیجه می شود که جملات این نمایش D به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۱۴۲. دو حالت بسط D

$$(۹ \text{ الف}) \quad a_{ik} a_{jl} \cdot (-1)^b M_{ikjl} \quad (l < k).$$

که در آن

$$b = i + k + j + l - 1.$$

حالت ب. اگر $l > k$ ، تنها تفاوت این است که a_{jl} متعلق به $(l-1)$ امین ستون M_{ik} است، زیرا M_{ik} شامل عناصر k امین ستون D نیست، و $k < l$. به همین دلیل یک علامت منهای اضافی در (۸) پیدا می شود و بنابراین، به جای (۹ الف) به دست می آوریم

$$(۹ \text{ ب}) \quad -a_{ik} a_{jl} \cdot (-1)^b M_{ikjl} \quad (l > k)$$

که b همان مقدار پیشین را دارد.

بسط دوم. اینک D را ابتدا نسبت به i امین سطر بسط می دهیم. جمله نوعی بسط عبارت است از

$$(۱۰) \quad a_{jl} C_{jl} = a_{jl} \cdot (-1)^{i+l} M_{jl}.$$

بنابیه فرض استقرا می توانیم کهاد M_{jl} ی عنصر a_{jl} در D را نسبت به i امین سطر آن بسط دهیم و می دانیم که این سطر متناظر با i امین سطر D است زیرا $j > i$.

حالت الف. هر گاه $k > l$ ، عنصر a_{ik} به $(k-1)$ امین ستون M_{ik} متعلق است،

زیرا M_{jl} شامل عناصر l امین ستون D نیست، و $l < k$ (ر.ک. شکل ۱۴۲). از این رو در این بسط، جمله‌ای که شامل a_{ik} باشد به صورت زیر است

$$(۱۱) \quad a_{ik} \cdot (M_{jl} \text{ در } a_{ik} \text{ همسازۀ}) = a_{ik} \cdot (-1)^{i+(k-1)} M_{ikjl},$$

که در آن کهاد M_{ikjl} از a_{ik} در M_{jl} ، با حذف سطرها i ام و j ام و ستونهای k ام و l ام D به دست آمده است [و بنابراین، همانند M_{ikjl} در (۸) می باشد و از این رو نمادگذاری ما تناقضی ندارد]. بسطهای M_{jl} را در بسطهای مربوط به D قرار دهیم. از (۱۰) و (۱۱) نتیجه می شود که جملات عبارت حاصله همانند (۹ الف) است وقتی که $l < k$.

حالت ب. هر گاه $l < k$ ، آنگاه a_{ik} متعلق به k امین ستون M_{jl} است، یک علامت منفی اضافی به دست می آوریم، و نتیجه با آنچه که در (۹ ب) دیدیم سازگار است. تا اینجا نشان داده ایم که دو بسط D از جملات یکسانی تشکیل یافته اند، و این حکم قضیه را درباره سطرها ثابت می کند.

اثبات حکم درباره ستونها کاملاً به همین نحو است؛ اگر D را بر حسب دو ستون اختیاری، مثلاً ستون k ام و ستون l ام، بسط دهیم درمی یابیم که جمله عمومی شامل $a_{jl}a_{ik}$ کاملاً مثل قبل است. این مطلب نشان می دهد که نه تنها تمام بسطهای ستونی D به یک مقدار منجر می شوند بلکه همچنین نشان می دهد که مقدار مشترک آنها با مقدار مشترکی که از بسط سطری D بر حسب سطرهایش به دست می آید برابر است.

این مطلب اثبات را تمام می کند و نشان می دهد که تعریف ما از دترمینان مرتبه n ام عاری از ابهام است.

مسائل بخش ۱۰.۷

دترمینانهای زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} \quad .۱$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 & -2 \\ -5 & -8 & 4 & -2 \\ 8 & 16 & -6 & 15 \\ -2 & 8 & -3 & 7 \end{vmatrix} \quad .۲$$

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} \quad ۳.$$

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} \quad ۴.$$

۵. ثابت کنید که تعریف دترمینان D از مرتبه n به يك مقدار برای D منجر می شود و نحوه انتخاب ستون تأثیری در این مقدار ندارد [ر. ک. (۳ ب)]. دهنمایی. شیوه ای تقریباً شبیه آنچه در مورد سطر در متن درس به کار برده شده اعمال کنید.

۶. اثبات قضیه ۲ را به تفصیل بنویسید.

۷. اثبات قضیه ۴ را به تفصیل بنویسید.

۸. نشان دهید $\det(kA) = k^n \det A$ ، که در آن A يك ماتریس مربعی n سطری است.

۹. نشان دهید که سه نقطه (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) وقتی و تنها وقتی بر يك استقامتند که

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

۱۰. نشان دهید که معادله دایره ای که از سه نقطه (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) در صفحه xy می گذرد، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

۱۱.۷ ارتباط رتبه با دترمینانها. قاعده کرامر

چنانکه در بخش ۷.۷ دیدیم، رتبه ماتریس مفهوم بسیار مهمی است. از بخش ۶.۷ می دانیم که رتبه ماتریس A تعداد بیشینه بردارهای سطری یا ستونی مستقل خطی A است. جالب، یا شاید تعجب آور، است که با استفاده از دترمینان A می توانیم رتبه A را مشخص کنیم. از این خصوصیت برای تعریف رتبه استفاده می شود. ما با فرض $\text{rank } A > 0$ (زیرا $\text{rank } A = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$ ؛ ر.ک. بخش ۶.۷) ارتباط رتبه و دترمینان را به صورت زیر فرمولبندی می کنیم.

قضیه ۱ (ارتباط رتبه با دترمینان)

ماتریسی $(m \times n)$ مانند $A = (a_{jk})$ دارای رتبه $r \geq 1$ است اگر و تنها اگر A زیر-ماتریسی $(r \times r)$ با دترمینان غیر صفر داشته باشد ضمن آنکه دترمینان هر زیرماتریس مربعی A که $r+1$ سطری یا بیشتر دارد (دصورت وجود) صفر باشد. در حالت خاص، هرگاه A یک ماتریس مربعی باشد، A نانکین است و بنابراین معکوس A یعنی A^{-1} وجود دارد، اگر و تنها اگر

$$\det A \neq 0.$$

اثبات. نکته اصلی اثبات این است که اعمال سطری مقدماتی (بخش ۵.۷)، که رتبه را تغییر نمی دهند (بنابر قضیه ۲ بخش ۶.۷)، خاصیت صفر بودن یا نبودن دترمینان را نیز تغییر نمی دهند زیرا دترمینان

(الف) در ۱- ضرب می شود هرگاه دوسطر آن را با هم جابه جا کنیم (قضیه ۵، بخش ۱۰.۷)،

(ب) در $c \neq 0$ ضرب می شود هرگاه یک سطر آن را در $c \neq 0$ ضرب کنیم (قضیه ۲، بخش ۱۰.۷)،

(پ) در ۱ ضرب می شود هرگاه مضربی از یک سطر آن را با سطر دیگری از آن جمع کنیم (قضیه ۷، بخش ۱۰.۷).

فرض کنید $\bar{A}$ دارای صورت پلکانی A باشد (ر.ک. بخش ۵.۷). A دارای r بردار سطری غیر صفر (که اولین r بردار سطریند) است اگر و تنها اگر $\text{rank } A = r$ فرض کنید $\bar{R}$ زیرماتریسی $(r \times r)$ از $\bar{A}$ باشد که از r عنصری که در عین حال هم در اولین r سطر و هم در اولین r ستون $\bar{A}$ واقعند تشکیل شده است. از آنجا که $\bar{R}$ مثلثی است و تمام عناصر روی قطر آن مخالف صفرند، $\det \bar{R} \neq 0$. چون $\bar{R}$ به کمک اعمال مقدماتی از R که زیرماتریسی $(r \times r)$ از A که با R متناظر است به دست آمده، $\det R \neq 0$. به همین ترتیب در مورد S ، زیرماتریس مربعی S که $r+1$ سطر یا بیشتر دارد (اگر

ایجاب می کند که $\text{rank } A = n$. حال (۲) را ثابت می کنیم. D را نسبت به k امین

ستون بسط می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \dots + a_{nk}C_{nk}$$

که در آن C_{ik} همسازۀ عنصر a_{ik} در D است. اگر اعداد دیگری به جای عناصر k امین ستون D قرار دهیم دترمینان جدیدی مانند $\bar{D}$ به دست می‌آوریم. واضح است که بسط این دترمینان نسبت به k امین ستون به صورت (۳) خواهد بود که در آن به جای $a_{1k}, \dots, a_{nk}$ عناصر جدید قرار گرفته‌اند و همسازۀ‌های C_{ik} تغییری نکرده‌اند. در حالت خاص، اگر عناصر $a_{1l}, \dots, a_{nl}$ از l امین ستون D را به عنوان عناصر جدید انتخاب کنیم ($l \neq k$) در این صورت بسط $\bar{D}$ ، دترمینان جدید، چنین می‌شود:

$$(۴) \quad a_{1l}C_{1k} + a_{2l}C_{2k} + \dots + a_{nl}C_{nk} = 0 \quad (l \neq k),$$

زیرا D دارای دو ستون همانند است و برابر صفر می‌شود (ر.ک. قضیه ۶ بخش ۱۰.۷). اگر اولین معادله از معادلات (۱) را در C_{1k} دومی را در C_{2k} ، و ... و آخری را در C_{nk} ضرب کرده معادلات حاصله را با هم جمع کنیم، ابتدا به دست می‌آوریم

$$C_{1k}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + C_{nk}(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \\ = b_1C_{1k} + \dots + b_nC_{nk}$$

عبارت سمت چپ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x_1(a_{11}C_{1k} + \dots + a_{n1}C_{nk}) + \dots + x_n(a_{1n}C_{1k} + \dots + a_{nn}C_{nk}).$$

از (۳) نتیجه می‌شود که عامل x_k در این نمایش برابر D است، و از (۴) نتیجه می‌شود که عامل x_l ، $l \neq k$ ، برابر صفر است. پس

$$x_k D = b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \dots + b_nC_{nk}.$$

نظر به اینکه $D \neq 0$ پس از تقسیم داریم

$$(۵) \quad x_k = \frac{1}{D} (b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \dots + b_nC_{nk}) = \frac{D_k}{D}$$

که در آن $k = 1, \dots, n$ و این با (۲) مطابقت دارد.

به علاوه، هر گاه مانند گذشته $D \neq 0$ و (۱) همگن باشد آنگاه $D_1 = 0, \dots, D_n = 0$ و بنابراین از (۲) جواب بدیهی به دست می‌آید. هر گاه $D = 0$ و (۱) همگن باشد آنگاه بنابه قضیه ۱، $A < n$ و از این رو بنابه قسمت (پ) قضیه بنیادی (بخش ۷.۷) جوابهای غیر بدیهی وجود دارند. ▲

مثالی در این مورد در بخش ۹.۷ آمده است.

حال متذکر می‌شویم که می‌توان (اگر چه در عمل مشکل است) قاعده کرامر را در مورد دستگاه‌های m معادله خطی

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

با n مجهول به کار برد. هر گاه ماتریس ضرایب A و ماتریس افزوده B هر دو دارای رتبه r باشند، بنا به قضیه بنیادی می‌دانیم که می‌توان مقادیر دایره‌های را به $n-r$ مجهول مناسب، که آنها را $x_{r+1}, \dots, x_n$ می‌نامیم، نسبت داد به طوری که زیرماتریس ضرایب سایر مجهولات $x_1, \dots, x_r$ دارای رتبه r باشد. بدین ترتیب، بنا به تعریف رتبه، ماتریسهای A و B دارای r بردار سطری مستقل خطی هستند، مثلاً این بردارهای می‌توانند اولین r بردار سطری (در صورت لزوم پس از بازآرایی) باشند، و هر گاه $r < m$ ، آنگاه هر یک از بردارهای سطری دیگر ترکیبی خطی از آنهاست. نتیجه اینکه $m-r$ معادله متناظر را می‌توان با اعمال مقدماتی به صورت $0=0$ تحویل کرد. از این مطلب و قضیه ۱ بخش ۵.۷ مشاهده می‌کنیم که می‌توان آن $m-r$ معادله را از دستگاه حذف کرد. حالا می‌توانیم دستگاه تحویل یافته را به صورت

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n)$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r + (a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n)$$

بنویسیم (که در آن هر گاه $r=n$ ، عبارات سمت راست عبارتند از $b_1, \dots, b_r$) و آن را نسبت به $x_1, \dots, x_r$ با قاعده کرامر حل کنیم.

مثال ۱. قاعده کرامر

دستگاه زیر را حل کنید

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 8$$

$$2x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 9$$

$$4x_1 - x_2 - x_3 + 11x_4 = 7$$

ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده دارای رتبه ۳ هستند. می‌توانیم آخرین معادله را حذف کنیم (چرا؟) و دستگاه تحویل یافته را به صورت زیر بنویسیم:

$$3x_1 + 2x_2 = 8 - 2x_3 + 5x_4$$

$$2x_1 + 5x_2 = 9 - 5x_3 + 18x_4$$

با استفاده از قاعدهٔ کرامر نتیجه می‌شود $x_1 = 2 - x_4$ و $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$ ، که x_3 و x_4 اختیاری هستند. ▲

حال به عنوان نتیجه ای مهم از قضیهٔ کرامر، می توانیم عناصر معکوس يك ماتریس را به ترتیب زیر بیان کنیم.

قضیهٔ ۳ (معکوس ماتریس)

معکوس ماتریس $(n \times n)$ ناککین $A = (a_{jk})$ عبارت است از

$$(۶) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

که در آن A_{jk} همسازۀ a_{jk} در $\det A$ است. (درست توجه کنید که در A^{-1} ، همسازۀ A_{jk} همان محلی را اشغال می‌کند که a_{kj} (و نه a_{jk}) در A اشغال می‌کند.

اثبات. سمت راست (۶) را با B نمایش داده نشان می‌دهیم که $BA = I$ همچنانکه در بخش ۸.۷ در رابطه با یکتایی معکوس خاطر نشان کردیم اینس اینجاب می‌کند که $B = A^{-1}$. می‌نویسیم

$$(۷) \quad BA = G = (g_{kl}).$$

در اینجا، بنابه تعریف ضرب ماتریسی

$$(۸) \quad g_{kl} = \sum_{s=1}^n \frac{A_{sk}}{\det A} a_{sl} = \frac{1}{\det A} \sum_{s=1}^n A_{sk} a_{sl}.$$

به ازای $l = k$ ، مجموع اخیر همان بسط $D = \det A$ نسبت به k امین ستون است. بنابر این

$$g_{kk} = \frac{1}{\det A} \sum_{s=1}^n A_{sk} a_{sk} = \frac{1}{\det A} \det A = 1$$

به ازای $l \neq k$ ، این بسطی مشابه از درمیان D است، که از قراردادن l امین ستون D ،

به جای k امین ستون آن حاصل شده است، بنابراین $\bar{D}$ دارای دو ستون همانند بوده و صفر است:

$$g_{kl} = \frac{1}{\det A} \sum_{s=1}^n A_{sk} a_{sl} = \frac{1}{\det A} \bar{D} = 0 \quad (k \neq l).$$

پس در (۷) داریم $\mathbf{BA} = \mathbf{G} = \mathbf{I}$ ، و بنابراین $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

مسائل بخش ۱۱.۷

با استفاده از قضیه ۱، رتبه هر یک از ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

$$1. \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2. \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \quad 4. \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -12 \\ -2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad 6. \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

با استفاده از قاعده کرامر و روش حذفی گاوس (بخش ۵.۷) دستگاههای زیر را حل کنید.

$$7. \quad \begin{aligned} 7x + 3y &= 13 \\ -x - 2y &= -5 \end{aligned} \quad 8. \quad \begin{aligned} 3x + 7y &= 17 \\ 5x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{aligned} x - 3y &= -10 \\ 10x - 5y &= 0 \end{aligned} \quad 10. \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$11. \quad \begin{aligned} 2x + y + 2z &= -1 \\ x + z &= -1 \end{aligned} \quad 12. \quad \begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 3x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

$$13. \quad \begin{aligned} -x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$14. \quad \begin{aligned} -x + 2y - 2z &= 7 \end{aligned}$$

۱۳. فرمولهای کلی جواب (۱) به ازای $n=2$ را، که از روش حذفی گاوس (بخش ۵.۷) به دست می آید، بنویسید و آنها را با فرمولهای مربوط به قاعده کرامر مقایسه کنید.

۱۴. به ازای چه مقادیری از λ دستگاه زیر جواب غیربدیهی دارد؟ (در بخش ۱۳.۷ خواهیم دید که این مسئله از نظر کاربردی بسیار مهم است.)

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0$$

با استفاده از قضیه ۳، معکوس ماتریسهای زیر را بیابید. جواب را امتحان کنید.

۱۵. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ۱۶. $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

۱۷. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ۱۸. $\begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.5 & 0.3 & -1.5 \end{pmatrix}$

۱۹. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ۲۰. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

۲۱. آیا می توانید در مورد به دست آوردن معکوس در مسئله ۱۶، استدلالی هندسی ارائه دهید؟

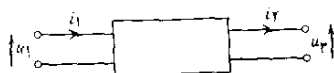
۲۲. رابطه (۴)، بخش ۸.۷، را از قضیه ۳ همین بخش به دست آورید.

۲۳. رابطه (۵)، بخش ۸.۷، را از قضیه ۳ به دست آورید.

۲۴. (الف) ثابت کنید که حاصل ضرب دو ماتریس $(n \times n)$ تکین است اگر و تنها اگر حداقل یکی از دو ماتریس تکین باشد. (ب) ثابت کنید که مجموع دو ماتریس $(n \times n)$ ناتکین می تواند تکین باشد، و مجموع دو ماتریس تکین می تواند ناتکین باشد.

۲۵. با استفاده از A^{-1} داده شده در (۶)، نشان دهید که $AA^{-1} = I$.

شبکه چهارسر. یک شبکه چهارسر (نظیر شکل زیر) در نظر بگیرید که در آن یک سیگنال ورودی به یک جفت از سرها اعمال شده و سیگنال خروجی از دوسر دیگر گرفته شده است.



شبکه چهارسر

فرض کنید که شبکه خطی است؛ یعنی، جریانهای i_1 و i_2 توابعی خطی از u_1 و u_2 هستند:

$$\begin{aligned} i_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ i_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{aligned} \quad (11)$$

۲۶. نشان دهید که (۱۱) را می توان به صورت $\mathbf{i} = \mathbf{A}\mathbf{u}$ نوشت که در آن

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

و $\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{i}$

۲۷. نشان دهید که پتانسیل و شدت جریان ورودی را می توان به صورت توابع خطی از پتانسیل و شدت جریان خروجی بیان کرد:

$$\begin{aligned} u_1 &= t_{11}u_2 + t_{12}i_2 \\ i_1 &= t_{21}u_2 + t_{22}i_2 \end{aligned} \quad (12)$$

یا $\mathbf{v}_1 = \mathbf{T}\mathbf{v}_2$ که در آن $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$ ، و «ماتریس انتقال» عبارت است از $\mathbf{T}$

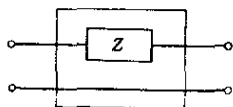
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{21}} \begin{pmatrix} -a_{22} & 1 \\ \det \mathbf{A} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

داهنمایی. برای تحقیق رابطه آخر از (۱۱) شروع کنید؛ ابتدا u_1 را بر حسب u_2 و i_2 بنویسید، سپس i_1 را بر حسب u_2 و i_2 بنویسید؛ و سرانجام، فرمولهای حاصل را با (۱۲) مقایسه کنید.

۲۸. $\mathbf{A}$ را بر حسب عناصر $\mathbf{T}$ بیان کنید.

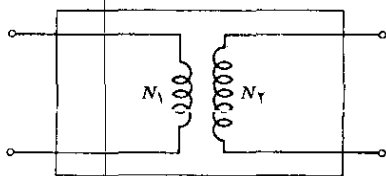
در هر يك از حالات زیر نشان دهید که ماتریس انتقال داده شده، $\mathbf{T}$ ، متناظر با شبکه چهارسر مربوط است.

۳۰



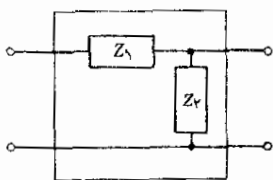
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۲۹



$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} N_1/N_2 & 0 \\ 0 & N_2/N_1 \end{pmatrix}$$

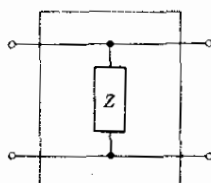
۳۲



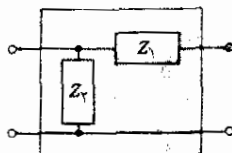
$$T = \begin{pmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix}$$

۳۱



۳۳



$$T = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 + Z_1/Z_2 \end{pmatrix}$$

۳۴. هرگاه دوشبکه چهارسر، به نحوی که در شکل مشخص شده، به طور زنجیره‌ای به هم وصل شده باشند، ثابت کنید که شبکه حاصل را می‌توان شبکه چهارسری در نظر گرفت که در آن $v_1 = T v_2$ ، اگر

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix}, \quad T = T_1 T_2.$$



شبکه‌های چهارسر زنجیره‌ای

۳۵. با به کار بردن نتیجه مسئله ۳۴، ماتریس مسئله ۳۲ را از ماتریسهای مسائل ۳۰ (به ازای $Z = Z_1$) و ۳۱ (به ازای $Z = Z_2$) به دست آورید. ماتریس مسئله ۳۳ را از ماتریسهای مسائل ۳۰ و ۳۱ به دست آورید.

می‌نامند. چنانچه این صورت را با Q نمایش دهیم، داریم

$$(۳) \quad Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k.$$

اگر Q را باز کنیم و جملات متناظر $a_{jk} x_j x_k$ و $a_{kj} x_k x_j$ را کنار هم بنویسیم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} Q = & a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + \dots + (a_{1n} + a_{n1}) x_1 x_n \\ & + a_{22} x_2^2 + \dots + (a_{2n} + a_{n2}) x_2 x_n \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_{nn} x_n^2. \end{aligned}$$

حال می‌توانیم قرار دهیم

$$\frac{1}{2} (a_{jk} + a_{kj}) = c_{jk}$$

در این صورت خواهیم داشت $c_{kj} = c_{jk}$ و $c_{jk} + c_{kj} = a_{jk} + a_{kj}$ به‌طوری‌که می‌توان نوشت

$$Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} x_j x_k.$$

هرگاه A حقیقی باشد، آنگاه ماتریس ضرایب $C = (c_{jk})$ در نمایش جدید يك ماتریس متقارن حقیقی است (ر. ک. بخش ۳.۷). این مطلب نشان می‌دهد که هر صورت درجه دوم حقیقی Q از n متغیر $x_1, \dots, x_n$ را می‌توان به صورت

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$$

نوشت که در آن C يك ماتریس متقارن حقیقی است. خواننده می‌تواند ثابت کند که تناظر بین صورتهای Q و ماتریسهای متقارن C يك به يك است؛ یعنی به هر صورت درجه دوم Q دقیقاً يك ماتریس متقارن C نظیر می‌شود و بالعکس.

مثال ۲. صورت درجه دوم

صورت درجه دوم

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 2x_1^2 + x_1 x_2 - 3x_2^2$$

دارای ماتریس ضرایب

$$\mathbf{A} = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

است. بنا براین ماتریس ضرایب متقارن متناظر عبارت است از

$$C = \frac{1}{2}(A + A^T) \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

حال نماد گذاری زیر را معرفی می کنیم. فرض می کنیم $A = (a_{jk})$ ماتریسی دلخواه باشد. در آن صورت $\bar{A}$ معرّف ماتریس $(\bar{a}_{jk})$ است که از تعویض هر عنصر a_{jk} با مزدوج مختلط آن a_{jk} در A به دست می آید.

ماتریس مربعی $A = (a_{jk})$ را که ترانهاد و مزدوج مختلط آن با هم برابرند:

$$(۴) \quad A^T = \bar{A} \quad (\text{یعنی، } a_{kj} = \bar{a}_{jk})$$

را ماتریس هرمیتی^۱ می نامند.

از (۴) می بینیم که عناصر قطر اصلی يك ماتریس هرمیتی همیشه حقیقی هستند. به علاوه، هر گاه تمام عناصر ماتریس هرمیتی A حقیقی باشند آنگاه (۴) به صورت $A^T = A$ در می آید که نشان می دهد هر ماتریس هرمیتی حقیقی ماتریسی متقارن است، و بنا براین ماتریسهای هرمیتی تعمیمی طبیعی از ماتریسهای متقارن حقیقی هستند.

صورت

$$H = \bar{x}^T A x \quad (A \text{ هرمیتی است})$$

را صورت هرمیتی می نامند؛ در اینجا n مؤلفه بردار x می توانند متغیرهایی حقیقی یا مختلط باشند. واضح است که این تعمیمی از صورت درجه دوم حقیقی است. از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه می شود که

$$H = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \bar{x}_j x_k.$$

مثال ۳. صورت هرمیتی

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 1 \end{pmatrix}$$

۱. شارل هرمیت (Charles Hermite)، ۱۸۲۲-۱۹۰۱، ریاضیدان فرانسوی که به خاطر کارهایش درجبر و نظریه اعداد مشهور است.

هرمیتی است و صورت هرمیتی متناظر با آن عبارت است از

$$\begin{aligned} H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2\bar{x}_1 x_1 + (3+i)\bar{x}_1 x_2 = (3-i)\bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_2 x_2 \\ &= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2\operatorname{Re}[(3+i)\bar{x}_1 x_2] \end{aligned}$$

که در آن Re نشان دهنده قسمت حقیقی است. عبارت آخر نشان می‌دهد که به ازای هر بردار $\mathbf{x}$ مقدار H عددی حقیقی است. حال ثابت می‌کنیم که هر صورت هرمیتی دارای خاصیت جالب توجه زیر است. ▲

قضیه ۱. (صورت هرمیتی)

به ازای هر بردار $\mathbf{x}$ مقدار صورت هرمیتی $H = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ (که $\mathbf{A}$ هرمیتی است) عددی حقیقی است.

اثبات. با استفاده از (۴) به دست می‌آوریم

$$\bar{H} = \overline{(\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x})} = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}}.$$

عبارت سمت راست یک اسکالر است. بنابراین، ترانزپوز، مقدار آن را تغییر نمی‌دهد. با استفاده از رابطه (۱۲) بخش ۴.۷ داریم

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}})^T = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = H.$$

بنابراین $\bar{H} = H$ ، که به مفهوم حقیقی بودن H است و بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

ماتریس مربعی $\mathbf{A} = (a_{jk})$ را که در مورد آن داریم

$$(۵) \quad \mathbf{A}^T = -\bar{\mathbf{A}} \quad (\text{یعنی } a_{kj} = -\bar{a}_{jk})$$

ماتریس ضد هرمیتی می‌نامند. بدیهی است که این تعمیمی از یک ماتریس ضد متقارن حقیقی است، زیرا هرگاه تمام عناصر یک ماتریس ضد هرمیتی $\mathbf{A}$ حقیقی باشند آنگاه (۵) به شکل $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ درمی‌آید؛ یعنی در این صورت $\mathbf{A}$ یک ماتریس متقارن ضد حقیقی است (ر. ک. بخش ۳.۷).

صورت

$$(۶) \quad S = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\mathbf{A} \text{ ضد هرمیتی است})$$

را صورت ضد هرمیتی می نامند. خواننده می تواند قضیه زیر را اثبات کند.

قضیه ۲. (صورت ضد هرمیتی)

مقدار يك صورت ضد هرمیتی به ازای هر x يك عدد موهومی محض و یا صفر است.

مسائل بخش ۱۲.۷

۱. نشان دهید که هر ماتریس مربعی را می توان به صورت مجموع يك ماتریس هرمیتی و يك ماتریس ضد هرمیتی نوشت.

۲. هر گاه A و B ماتریسهای هرمیتی n سطری، و a و b اعداد حقیقی باشند، نشان دهید که $C = aA + bB$ يك ماتریس هرمیتی است.

۳. فرض کنید A و B دو ماتریس ضد هرمیتی باشند. تحت چه شرایطی $C = aA + bB$ يك ماتریس ضد هرمیتی است؟ (a و b عددند).

۴. نشان دهید که عناصر قطر اصلی يك ماتریس ضد هرمیتی موهومی محض و یا صفرند.

صورت های درجه دوم. ماتریس متقارن حقیقی C را به قسمی بیابید که $Q = x^T C x$ برابر باشد با

$$5. \quad 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 \quad 6. \quad (x_1 - x_2)^2$$

$$7. \quad 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \quad 8. \quad (x_1 + x_2)^2 - x_2^2$$

$$9. \quad (x_1 - x_2 + x_3)^2 \quad 10. \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 2x_3^2$$

۱۱. نشان دهید که هر گاه روی متغیرهای يك صورت درجه دوم $Q = x^T C x$ يك تبدیل خطی، مثل $x = Py$ ، انجام شود، آنگاه خواهیم داشت $Q = y^T A y$ ، که در آن $A = P^T C P$.

۱۲. صورت درجه دوم $Q = x^T C x$ (C متقارن است) را با سه متغیر x_1 ، x_2 ، x_3 در نظر بگیرید. $\partial Q / \partial x_1$ ، $\partial Q / \partial x_2$ ، $\partial Q / \partial x_3$ را بیابید و نشان دهید که اینها مؤلفه های بردار $2Cx$ هستند.

۱۳. (معین بودن) صورت درجه دوم حقیقی $Q = x^T C x$ و ماتریس متقارن آن $C = (c_{jk})$ را معین مثبت نامند هر گاه به ازای جمیع مقادیر $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$

داشته باشیم $Q > 0$. شرط لازم و کافی برای معین و مثبت بودن آن است که تمام دترمینانهای

$$C_1 = c_{11}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \dots, C_n = \det C$$

مثبت باشند (ر.ک. مرجع [C۴]). نشان دهید صورتی که در مسئله ۵ دیدیم معین مثبت است.

۱۴. معین مثبت بودن صورتهای ذکر شده در مسائل ۶ و ۱۵ را بیازمایید.
صورتهای هرمیتی $H = \bar{x}^T A x$ را پیدا کنید، هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \quad ۱۵$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad ۱۶$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \delta+i \\ \delta-i & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad ۱۷$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix} \quad (a \text{ و } c \text{ حقیقی هستند}) \quad ۱۸$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2i \\ i & 1 & 0 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad ۱۹$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ۲۰$$

صورتهای ضد هرمیتی $S = \bar{x}^T A x$ را پیدا کنید، هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad .21$$

$$A = \begin{pmatrix} 5i & 2+i \\ -2+i & i \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \end{pmatrix} \quad .22$$

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad .23$$

$$A = \begin{pmatrix} i\alpha & \mu+iv \\ -\mu+iv & i\beta \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} -i \\ 4 \end{pmatrix} \quad .24$$

۲۵. قضیه ۲ را ثابت کنید.

۱۳۰۷ مقادیر ویژه بردارهای ویژه

از لحاظ کاربردهای مهندسی، مسائل مقدار ویژه از جمله مهمترین مسائل مربوط به ماتریسها هستند، و تعداد مقالات تحقیقی درباره روشهای عددی متناظر برای کامپیوتر بسیار زیاد است. مفاهیم اساسی به شرح زیرند.

فرض کنید $A = (a_{jk})$ یک ماتریس مربعی n سطری باشد و معادله برداری

$$(1) \quad Ax = \lambda x$$

را، که در آن λ یک عدد است، در نظر بگیرید.

بدیهی است که بردار صفر $x = 0$ به ازای هر مقدار λ جوابی برای (۱) است. مقداری از λ را که به ازای آن (۱) دارای جوابی مانند $x \neq 0$ باشد مقدار ویژه یا مقدار مشخصه (یا دیشهٔ داکد) ماتریس A نامند. جوابهای متناظر $x \neq 0$ معادله (۱) را بردارهای ویژه یا بردارهای مشخصه A ی نظیر مقدار ویژه λ می نامند. مجموعه مقادیر ویژه را طیف A نامند. بزرگترین قدر مطلق مقادیر ویژه A را شعاع طیفی A نامند.

مسئله تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس را مسئله مقدار ویژه نامند. مسائلی از این نوع در ارتباط با کاربردهای فیزیکی و فنی مطرح می شوند. بنابراین، دانشجو باید آن دسته از ایده ها و مفاهیم بنیادی را که در این رشته از ریاضیات اهمیت دارند بداند. در طول دوده گذشته روشهای متنوع جدیدی برای تعیین تقریبی مقادیر ویژه ابداع شده اند و روشهایی هم که از پیش شناخته شده بودند به صورتی که برای استفاده در

۱. به عبارت دقیقتر: مسئله مقدار ویژه جبری، زیرا مسائل مقدار ویژه دیگری وجود دارند که يك معادله دیفرانسیل (بخشهای ۸.۴ و ۳.۱۱) یا يك معادله انتگرالی را در بر می گیرند.

حسابگرهای الکترونیکی مناسب باشند در آمده‌اند. به مراجع [C۳] و [C۱۵] ضمیمه ۱ رجوع کنید.

حال به ذکر دو مسئله ساده که به معادله‌ای به صورت (۱) منجر می‌شوند، می‌پردازیم.

مثال ۱. دستگاه مرتعش

حرکت قائم دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۳ (که در آن میرایی وجود ندارد و جرم فنرها ناچیزند) از دستگاه دو معادله دیفرانسیلی زیر تبعیت می‌کند:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -3y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ \ddot{y}_2 &= -2(y_2 - y_1) \end{aligned} \quad (2)$$

در این معادله‌ها $y_1(t)$ و $y_2(t)$ تغییر مکانهای دو جرم هستند و $y_1 = 0$ و $y_2 = 0$ یا وضعیت تعادل ایستا متناظرند. طرز به دست آوردن این معادلات شبیه نحوه به دست آوردن معادله‌ای است که در بخش ۶.۲ داشتیم. دستگاه بالا را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 &= 2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

و یا به صورت يك معادله برداری تنها

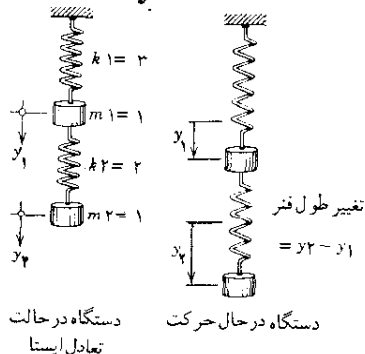
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

که در آن $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ، $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ نوشت.

برای حل این معادله قرار می‌دهیم

(۳)

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}$$



شکل ۱۴۳. مثال ۱

در نتیجه خواهیم داشت

$$\omega^2 \mathbf{x} e^{\omega t} = \mathbf{A} \mathbf{x} e^{\omega t}$$

و یا

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\lambda = \omega^2).$$

پس، برای اینکه (۳) جواب غیرصفری برای (۲) باشد، بایستی $\omega^2 = \lambda$ مقدار ویژه‌ای برای $\mathbf{A}$ باشد و بردار $\mathbf{x}$ که در (۳) آمده است بردار ویژه متناظر آن باشد.

مثال ۲. تبدیل خطی

تبدیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\mathbf{A} \text{ حقیقی است})$$

آیا برداری حقیقی مانند $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ وجود دارد که بردار $\mathbf{y}$ متناظر با آن حقیقی بوده و همان جهت و امتداد $\mathbf{x}$ را داشته باشد؟ به عبارت دیگر می‌خواهیم برداری مانند $\mathbf{x}$ را به قسمی پیدا کنیم که

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (\lambda \text{ حقیقی و مثبت است})$$

آشکار است که چنین برداری وقتی و تنها وقتی وجود دارد که $\mathbf{A}$ دارای مقدار ویژه حقیقی مثبتی باشد. در این صورت $\mathbf{x}$ بردار ویژه متناظر به آن مقدار ویژه است. ▲

حال (۱) را در نظر می‌گیریم. هر گاه $\mathbf{x}$ بردار دلخواهی باشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A} \mathbf{x}$ ، در حالت کلی، مستقل خطی هستند. هر گاه $\mathbf{x}$ بردار ویژه باشد، آنگاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A} \mathbf{x}$ وابسته خطی هستند؛ بدین ترتیب مؤلفه‌های متناظر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{A} \mathbf{x}$ با هم متناسبند و ضریب تناسب عبارت از مقدار ویژه λ است.

حال نشان می‌دهیم که هر ماتریس مربعی n سطری حداقل ۱ و حداکثر n مقدار ویژه متمایز (حقیقی یا مختلط) دارد.

برای این منظور (۱) را باز می‌کنیم:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n.$$

پس از انتقال جملات سمت راست به سمت چپ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{1r}x_r + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ (\varphi) \quad & a_{r1}x_1 + (a_{rr}-\lambda)x_r + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{n1}x_1 + a_{nr}x_r + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{aligned}$$

و با نماز ماتریس،

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

بناباره قضیه کرامر که در بخش ۱۱.۷، ذکر شد این دستگاه همگن معادلات خطی وقتی و تنها وقتی جواب غیر بدهی دارد که دترمینان ضرایب آن صفر باشد:

$$(\Delta) \quad D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$D(\lambda)$ را دترمینان مشخصه و (Δ) را معادله مشخصه متناظر با ماتریس A نامند. بایست $D(\lambda)$ یک چندجمله‌ای درجه n ام بر حسب λ به دست می‌آوریم. این چندجمله‌ای را چند-جمله‌ای مشخصه متناظر با A نامند. بدین ترتیب قضیه مهم زیر را به دست آورده‌ایم.

قضیہ ۱. (مقادیہ ویشہ)

مقادیر ویژه ماتریس مربعی A (ریشه‌های معادله مشخصه متناظر با (۵) هستند.
مقدار ویژه‌ای را که ریشه مرتبه m ام چندجمله‌ای مشخصه است مقدار ویژه مرتبه m ام ماتریس متناظر نامند.

بهمجرد اینکه مقادیر ویژه تعیین گردیدند بردارهای ویژه متناظر را می‌توان از دستگاه (۴) به دست آورد. چون دستگاه همگن است، پیدا است که هرگاه x بردار ویژه A باشد، kx نیز، که در آن k مقداری ثابت و غیر صفر است، بردار ویژه A ، متناظر با همان مقدار ویژه، است.

مثال ۳. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را معین کنید:

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & \varphi \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

معادله مشخصه

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

دارای ریشه‌های $\lambda_1 = 6$ و $\lambda_2 = 1$ است. به ازای $\lambda = \lambda_1$ دستگاه (۴) به شکل زیر درمی‌آید:

$$-x_1 + 4x_2 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 = 0$$

بنابراین $x_1 = 4x_2$ ، و

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

یک بردار ویژه A ، متناظر با مقدار ویژه λ_1 ، است. به همین طریق درمی‌یابیم که بردار ویژه A ، متناظر با λ_2 ، عبارت است از

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

x_1 و x_2 بردارهای مستقل خطی هستند.

مثال ۴. مقادیر ویژه مختلط

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (a \text{ و } b \text{ حقیقی، و } b \neq 0)$$

دارای مقادیر ویژه مختلط مزدوج $\lambda_1 = a + ib$ و $\lambda_2 = a - ib$ است. بردارهای ویژه متناظر عبارتند از

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

هرگاه $b = 0$ ، آنگاه $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ ؛ ماتریس A در این حالت فقط یک مقدار ویژه دارد (که از مرتبه دوم است)، و هر بردار $x \neq 0$ که دو مؤلفه داشته باشد بردار ویژه‌ای از A است.

مثال ۵

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۲ & ۲ & -۳ \\ ۲ & ۱ & -۶ \\ -۱ & -۲ & ۰ \end{pmatrix}$$

دارای مقادیر ویژه $\lambda_1 = ۵$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = -۳$ است. بردار

$$x_1 = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$$

یک بردار ویژه A متناظر، با مقدار ویژه ۵ ، است و بردارهای

$$x_2 = \begin{pmatrix} -۲ \\ ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x_3 = \begin{pmatrix} ۳ \\ ۰ \\ ۱ \end{pmatrix}$$

دو بردار ویژه دیگر A ، متناظر با مقدار ویژه -۳ ، هستند که مستقل خطی نیستند. این امر با این واقعیت که به ازای $\lambda = -۳$ ماتریس $A - \lambda I$ دارای رتبه ۱ بوده و بنا بر این، طبق قضیه ۲ بخش ۷.۷ ، پایه‌ای برای جوابهای دستگاه متناظر با (۴) است. دستگاه متناظر با (۴) عبارت است از

$$x_1 + ۲x_2 - ۳x_3 = ۰$$

$$۲x_1 + ۴x_2 - ۶x_3 = ۰$$

$$-x_1 - ۲x_2 + ۳x_3 = ۰,$$

که از دو بردار مستقل خطی تشکیل شده است. ▲

مثال ۵ نشان می‌دهد که به یک مقدار ویژه ممکن است چند بردار مستقل خطی مربوط شود. حداکثر تعداد بردارهای ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه λ را چندبارگی (هندسی) λ می‌نامند.

مسائل بخش ۱۳.۲

۱. آیا ماتریسهایی وجود دارند که هیچ مقدار ویژه‌ای نداشته باشند؟

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

$$.۲ \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .۳ \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$.۴ \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .۵ \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$.۶ \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad .۷ \quad \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$.۸ \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .۹ \quad \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ 2 & -1.5 \end{pmatrix}$$

$$.۱۰ \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .۱۱ \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$.۱۲ \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad .۱۳ \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریسهای زیر را پیدا کنید.

$$.۱۴ \quad \begin{pmatrix} 13 & 0 & -15 \\ -3 & 4 & 9 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad .۱۵ \quad \begin{pmatrix} 26 & 2 & 4 \\ -2 & 21 & 2 \\ 2 & 4 & 28 \end{pmatrix}$$

$$.۱۶ \quad \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & -2 \\ -0.4 & 1.2 & 0.4 \\ -0.3 & -0.6 & -0.2 \end{pmatrix}$$

۱۷. نشان دهید که مقادیر ویژه ماتریس مثلثی A برابر با عناصر قطر اصلی A هستند.

۱۸. نشان دهید که A^T ، ترانژاد A ، دارای همان مقادیر ویژه A است.

۱۹. نشان دهید که هر گاه A دارای عناصر حقیقی باشد، آنگاه یا مقادیر ویژه A حقیقند و یا دوبه دو مزدوج مختلطند.

۲۰. نشان دهید که هر گاه A یک ماتریس مربعی n سطری و n فرد باشد، آنگاه A حداقل یک مقدار ویژه حقیقی دارد.

۲۱. نشان دهید که جمله ثابت $D(\lambda)$ برابر با $\det A$ است.

۲۲. نشان دهید که $\lambda = 0$ مقدار ویژه‌ای برای ماتریس مربعی A است اگر و تنها اگر A تکیه‌ناپذیر باشد.

۲۳. نشان دهید که هر گاه A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه kA مقادیر ویژه $k\lambda_1, \dots, k\lambda_n$ را داراست. با استفاده از این مطلب، مقادیر ویژه مسئله ۳ را به کمک مقادیر ویژه مسئله ۶ پیدا کنید.

۲۴. نشان دهید که هر گاه A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه A^m (m یک عدد صحیح نامنفی است) مقادیر ویژه $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$ را داراست.

۲۵. نشان دهید که هر گاه A دارای مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه

$$k_m A^m + k_{m-1} A^{m-1} + \dots + k_1 A + k_0 I$$

دارای مقادیر ویژه زیر است:

$$k_m \lambda_j^m + k_{m-1} \lambda_j^{m-1} + \dots + k_1 \lambda_j + k_0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

۱۴.۷ مقادیر ویژه ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی

ماتریس مربعی $A = (a_{jk})$ را که در مورد آن داریم

$$(1) \quad A^T = \bar{A}^{-1}$$

ماتریس یکانی می‌نامند.

ماتریس یکانی حقیقی A ماتریس متعامد نامیده می‌شود. برای چنین ماتریسی، (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(2) \quad A^T = A^{-1},$$

یعنی ماتریس متعامد ماتریسی حقیقی است که معکوس و ترانزپوز آن با هم برابرند.

دسته بردارهای $x_1, \dots, x_n$ را که در رابطه

$$(۳) \quad \bar{\mathbf{x}}_j^T \mathbf{x}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

صدق می کنند، دستگاه یکانی نامند.

بدیهی است که هر گاه این بردارها حقیقی باشند، آنگاه $\bar{\mathbf{x}}_j^T \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_k$ حاصل ضرب داخلی (حاصل ضرب اسکالر) $\mathbf{x}_j$ و $\mathbf{x}_k$ به معنای معمولی اصطلاح است، و شرط (۳) بدین مفهوم است که $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ بردارهای یک‌متعامند. از این دو یک دستگاه یکانی از بردارهای حقیقی، دستگاهی از بردارهای یک‌متعامد (دو به دو عمود برهم) است.

قضیه ۱ (ماتریس یکانی)

بردارهای ستونی (و همچنین بردارهای سطری) یک ماتریس یکانی، تشکیل یک دستگاه یکانی می دهند.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس یکانی با بردارهای ستونی $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ باشد. در آن صورت از (۱) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} &= \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{a}_1 & \bar{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{a}_2 & \dots & \bar{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{a}_n \\ \bar{\mathbf{a}}_2^T \mathbf{a}_1 & \bar{\mathbf{a}}_2^T \mathbf{a}_2 & \dots & \bar{\mathbf{a}}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{a}}_n^T \mathbf{a}_1 & \bar{\mathbf{a}}_n^T \mathbf{a}_2 & \dots & \bar{\mathbf{a}}_n^T \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \mathbf{I} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{\mathbf{a}}_j^T \mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ 1 & j = k. \end{cases}$$

این مطلب نشان می دهد که بردارهای ستونی ماتریس یکانی تشکیل دستگاه یکانی می دهند. از (۱) نتیجه می شود که معکوس ماتریس یکانی $\mathbf{A}$ ، یعنی $\mathbf{A}^{-1}$ ، یکانی است (ر.ک. مسئله ۹)، علاوه بر این، بردارهای ستونی $\mathbf{A}^{-1}$ ، مزدوج بردارهای سطری $\mathbf{A}$ هستند؛ بنابراین بردارهای سطری $\mathbf{A}$ یک دستگاه یکانی تشکیل می دهند.

مفهوم قضیه ۱ در رابطه با ماتریسهای متعامد این است که بردارهای سطری (و نیز بردارهای ستونی) یک ماتریس متعامد $A = (a_{jk})$ تشکیل دستگاهی از بردارهای یکانی متعامد می‌دهند؛ یعنی

$$(۴) \quad \sum_{m=1}^n a_{jm} a_{km} = \delta_{jk}.$$

ماتریسهای متعامد از اهمیت عملی زیادی برخوردارند زیرا تبدیلات متعامد، یعنی تبدیلات خطی $y = Ax$ با ماتریس ضرایب متعامد، دارای خاصیت زیرند.

قضیه ۲ (تبدیل متعامد)

تبدیل متعامد، حاصل ضرب داخلی

$$(x, y) = x^T y \quad \text{و بنابراین نرم} \quad \|x\| = \sqrt{x^T x}$$

را ناوردی باقی می‌گذارد. بخصوص، در فضای سه بعدی اقلیدسی تبدیل متعامد طول هر بردار و زاویه بین هر دو بردار را حفظ می‌کند؛ لذا این تبدیل یک دوران است (که گاه با یک انعکاس ترکیب شده)، و ماتریس ضرایب دوران یک دستگاه مختصات دکارتی، ماتریسی متعامد است.

اثبات. فرض کنید A متعامد باشد و $u = Ax$ و $v = Ay$. با استفاده از (۲)ی همین بخش و (۱۲) بخش ۴.۷، به دست می‌آوریم

$$(u, v) = u^T v = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay = x^T A^{-1} Ay = x^T Iy = x^T y = (x, y).$$

▲

حال مقادیر ویژه ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی را در نظر می‌گیریم و مشخصات عمومی نشان داده شده در شکل ۱۴۴ را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳ (مقادیر ویژه)

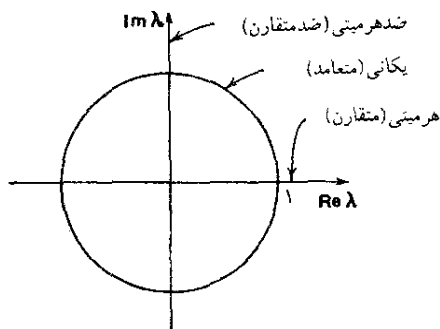
(الف) مقادیر ویژه ماتریس هرمیتی حقیقیند.

(ب) مقادیر ویژه ماتریس ضد هرمیتی موهومی محض یا صفرند.

(پ) مقادیر ویژه ماتریس یکانی دارای قدر مطلق ۱ هستند.

اثبات. (الف) و (ب) فرض کنید λ یکی از مقادیر ویژه A باشد. در این صورت بنا به تعریف، برداری مانند $x \neq 0$ وجود دارد به طوری که $Ax = \lambda x$. پس داریم

$$x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda \bar{x}^T x.$$



شکل ۱۴۴. وضعیت مقادیر ویژه ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی، و یکانی در صفحه مختلط λ .

چون $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ، نتیجه می شود که $\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \neq 0$ و می توان با تقسیم به دست آورد

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}}.$$

مخرج کسر حقیقی است. هرگاه $\mathbf{A}$ هرمیتی باشد، صورت نیز حقیقی است. (قضیه ۱ بخش ۱۲.۷) و بنابراین λ حقیقی خواهد بود. اگر $\mathbf{A}$ ضد هرمیتی باشد، صورت کسر موهومی محض یا صفر است (قضیه ۲ بخش ۱۲.۷) و بنابراین λ نیز موهومی محض یا صفر خواهد بود.

(پ). فرض کنید $\mathbf{U}$ یکانی، λ مقدار ویژه ای از $\mathbf{U}$ و $\mathbf{x}$ بردار ویژه متناظر با آن باشد. در این صورت

$$\mathbf{U} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

با گرفتن ترانزپوز از طرفین رابطه اخیر و با استفاده از (۱۲) بخش ۴.۷ به دست می آوریم

$$(\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{x}})^T = \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{U}}^T = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T$$

چون $\mathbf{U}$ یکانی است، $\bar{\mathbf{U}}^T = \mathbf{U}^{-1}$ ، و رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{U}^{-1} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T \quad (۶)$$

حال طرفین (۶) را از سمت چپ در طرفین (۵) ضرب می کنیم:

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{x} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \bar{\lambda} \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

در این رابطه داریم $U^{-1}U = I$ و $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2$. بنابراین رابطه به صورت زیر درمی آید:

$$\bar{x}^T x = |\lambda|^2 \bar{x}^T x.$$

چون $x \neq 0$ ، نتیجه می شود که $\bar{x}^T x \neq 0$. لذا باید داشته باشیم $|\lambda|^2 = 1$. بنابراین $|\lambda| = 1$ ، واثبات تمام می شود. ▲

يك حالت خاص مهم قضیه ۳ عبارت است از

قضیه ۴

مقادیر ویژه ماتریس متقارن، حقیقی هستند. مقادیر ویژه ماتریس ضد متقارن موهومی محض و یا صفرند. مقادیر ویژه ماتریس متعامد دارای قدر مطلق ۱ هستند و یا حقیقینند یا دو به دو مزدوج مختلط.

روشهای عددی مربوط به مسائل مقدار ویژه ماتریسی در بخشهای ۱۳.۱۹ و ۱۴.۱۹، که از سایر بخشهای فصل ۱۹ مستقلند، آمده اند؛ بنابراین می توان آنها را همین حالا نیز مطالعه کرد.

مسائل بخش ۱۴.۷

نشان دهید که ماتریسهای زیر متعامدند.

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ۲. \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad ۱.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ۳.$$

۴. تبدیل $y = Ax$ را که در آن A ماتریس مسئله ۱ است و مؤلفه های x و y مختصات دکارتی هستند، تعبیر هندسی کنید.

۵. مسئله ۴ را حل کنید. با این فرض که A ماتریس مسئله ۲ باشد.

۶. نشان دهید که هر گاه A متعامد باشد، آنگاه $\det A$ برابر $+1$ یا -1 است. چند مثال ارائه دهید.

نشان دهید که ماتریسهای زیر یکانی هستند و مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آنها را معین کنید.

$$۷. \begin{pmatrix} ۱/\sqrt{۲} & i/\sqrt{۲} \\ -i/\sqrt{۲} & -۱/\sqrt{۲} \end{pmatrix} \quad ۸. \begin{pmatrix} ۱/\sqrt{۳} & i\sqrt{۲/۳} \\ -i\sqrt{۲/۳} & -۱/\sqrt{۳} \end{pmatrix}$$

۹. نشان دهید که معکوس يك ماتریس یکانی، یکانی است. درستی این مطلب را در مورد مسئله ۷ تحقیق کنید.

۱۰. نشان دهید که حاصل ضرب دو ماتریس یکانی n سطری، یکانی است. درستی این مطلب را در مورد ماتریسهای مسائل ۷ و ۸ تحقیق کنید.

۱۱. نشان دهید بردارهای ویژه يك ماتریس متقارن حقیقی که با مقادیر ویژه متفاوتی متناظر باشند معامدند. مثالی ارائه دهید.

۱۲. (تبدیل تشابه) تبدیل خطی $y = Ax$ را که در آن A مربعی است در نظر بگیرید و فرض کنید $y = T\bar{y}$ ، $x = T\bar{x}$ که در آن T ناکین است. در این صورت نشان دهید

$$\bar{A} = T^{-1}AT \quad \text{که در آن } \bar{y} = A\bar{x}$$

(این تبدیل که A را به $\bar{A}$ تبدیل می کند تبدیل تشابه نام دارد و A و $\bar{A}$ را ماتریسهای مشابه گویند.)

۱۳. نشان دهید که هر گاه $A = T^{-1}AT$ ، که در آن A ماتریس مربعی دلخواهی است، آنگاه $\det \bar{A} = \det A$. (دانه مایی. از (۵) بخش ۱۰.۷ استفاده کنید.

۱۴. A را ماتریس مربعی مفروضی بگیرید و فرض کنید X ماتریسی باشد که $x_1, \dots, x_n$ ، بردارهای ستونی آن، بردارهای ویژه A متناظر با $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ، مقادیر ویژه A ، باشند. نشان دهید

$$AX = (\lambda_1 x_1 \dots \lambda_n x_n) = XD$$

که در آن D ماتریس قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هستند.

۱۵. هر گاه در مسئله ۱۴ x_i ها مستقل خطی باشند، نشان دهید که $X^{-1}AX = D$.

۱۶. (اثر) مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس مربعی $C = (c_{ik})$ را اثر C می نامند، و با $\text{tr } C$ نشان می دهند*. بنابراین

$$\text{tr } C = c_{11} + c_{22} + \dots + c_{nn}.$$

فرض کنید $A = (a_{ik})$ و $B = (b_{ik})$ دو ماتریس مربعی n سطری باشند. نشان دهید که

$$\text{tr } AB = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \text{tr } BA.$$

۱۷. هرگاه داشته باشیم $\bar{A} = T^{-1}AT$ ، نشان دهید که $\text{tr } \bar{A} = \text{tr } A$.

۱۸. نشان دهید که مقادیر ویژه و مؤثرهای A و $\bar{A} = T^{-1}AT$ یکسان هستند.

۱۹. اگر x بردار ویژه‌ای از A باشد که متناظر با مقدار ویژه λ است، نشان دهید که $y = T^{-1}x$ بردار ویژه‌ای از $\bar{A} = T^{-1}AT$ است که متناظر با همان مقدار ویژه λ است.

۲۰. درستی حکم مسئله ۱۸ را در مورد ماتریسهای زیر تحقیق کنید:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{که در آن} \quad \bar{A} = T^{-1}AT \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۲۱. (ماتریس نرمال). بنا به تعریف، ماتریس نرمال ماتریسی است مربعی که با ترانهاد مزدوج مختلط خودش تعویضپذیر باشد، یعنی

$$A\bar{A}^T = \bar{A}^T A.$$

نشان دهید که ماتریسهای هرمیتی، ضد هرمیتی و یکانی نرمال هستند.

ماتریسهای زیر تحت چه شرایطی نرمالند؟

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .22 \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad .23$$

۲۴. (ماتریس تصادفی). بنا به تعریف، ماتریس تصادفی یک ماتریس مربعی حقیقی با عناصر نامنفی است و مجموع عناصر هر سطر آن ۱ است. نشان دهید که در هر ماتریس تصادفی یکی از مقادیر ویژه برابر ۱ است.

۲۵. عناصر یک ماتریس تصادفی ممکن است احتمال باشند؛ مثلاً، احتمال مربوط به حرکت مردم از یک شهر به حومه آن و بالعکس. ماتریس

وضعیت نهایی

شهر حومه

$$\begin{pmatrix} 0.055 & 0.095 \\ 0.098 & 0.002 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{matrix} \quad \text{وضعیت اولیه}$$

را در نظر بگیرید که در آن وضعیت نهایی به معنی وضعیت در یک سال بعد است. فرض کنید $(C, S) = (100000, 100000)$ حالت اولیه باشد که در آن C به مفهوم

شهر و ک. به معنی حومه است. پس از يك سال وضعیت چگونه خواهد بود؟ پس از دو سال چه؟ (از افزایش جمعیت صرف نظر کنید.)

۱۵.۷ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

دستگاههای معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی مختلفی مطرح می شوند. در بخشهای ۱.۳ و ۱۳.۷ ایده ای از این موضوع ارائه گردید. دستگاههای ساده تر را می توان بدون استفاده از ماتریسها حل کرد (ر. ک. بخش ۱.۳). با این همه، برای دستگاههای بزرگ و یا برای بحث در خواص عمومی جوابها و گسترش يك نظریه سیستماتیک، استفاده از ماتریسها ارزشمند و مناسب است.

در این بخش نقش ماتریسها و مقادیر ویژه را در ارتباط با دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی تشریح خواهیم کرد.

مثال ۱. دستگاه مرتعش

معادلات حرکت دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۵ را تعیین کنید به نحوی که در شرایط اولیه زیر صدق کنند:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad \dot{y}_1(0) = -2\sqrt{6}, \quad \dot{y}_2 = \sqrt{6}$$

این دستگاه را در مثال ۱ بخش ۱۳.۷ بررسی کردیم، و می دانیم که دستگاه معادلات دیفرانسیل مربوطه را می توان چنین نوشت:

$$\dot{y} = Ay$$

که در آن

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

با جایگزین کردن $y = xe^{\omega t}$ و حذف $e^{\omega t}$ ، به دست می آوریم

$$Ax = \lambda x \quad (\lambda = \omega^2)$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0.$$

ریشه های این معادله عبارتند از $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = -6$. اینها مقادیر ویژه A هستند.

بردارهای ویژه متناظر عبارتند از

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

به ازای $\lambda_1 = -6$ و $\lambda_2 = -6$ به ترتیب داریم $\omega_1 = \pm i\sqrt{6}$ و $\omega_2 = \pm i\sqrt{6}$. بنابراین یکی از جوابها برابر است با

$$(1) \quad y(t) = a_1 x_1 \cos t + b_1 x_1 \sin t + a_2 x_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 x_2 \sin \sqrt{6}t$$

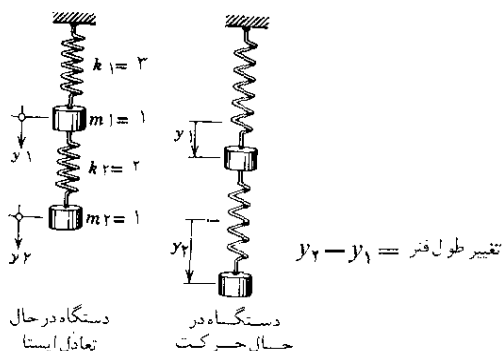
که در آن a_1, b_1, a_2, b_2 ثابتهایی دلخواه هستند. معادله بالا را بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$y_1(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 \sin \sqrt{6}t$$

$$(2) \quad y_2(t) = 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{2}a_2 \cos \sqrt{6}t + \frac{1}{2}b_2 \sin \sqrt{6}t$$

و این از شکل x_1 و x_2 معلوم می‌شود. بنابر (۱) و شرایط اولیه $y_1(0) = 2$ و $y_2(0) = 1$ که به صورت برداری نوشته شده‌اند، داریم

$$\mathbf{y}(0) = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



بنابراین $a_1 = 1$ و $a_2 = 0$. با قراردادن این مقادیر در (۱) و مشتقگیری از آن نتیجه می‌شود

$$\dot{y}(t) = -x_1 \sin t + b_1 x_1 \cos t + b_2 \sqrt{6} x_2 \cos \sqrt{6} t$$

از این رابطه و دو شرط اولیه دیگر، یعنی $\dot{y}_1(0) = -2\sqrt{6}$ و $\dot{y}_2(0) = \sqrt{6}$ ، به دست می‌آوریم

$$\dot{y}(0) = b_1 x_1 + b_2 \sqrt{6} x_2 = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_2 \sqrt{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

از این رو $b_1 = 0$ و $b_2 = -2$. جواب مسئله چنین است:

$$y(t) = x_1 \cos t - 2x_2 \sin \sqrt{6} t,$$

که بر حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر درمی‌آید:

$$y_1(t) = \cos t - 2 \sin \sqrt{6} t$$

$$y_2(t) = 2 \cos t + \sin \sqrt{6} t$$

طریق دیگر بررسی دستگاه معادلات مزبور تحویل آن به يك معادله است. این موضوع را در بخش ۱.۳ دیدیم، و جواب (۲) ی بالا با جواب (۹) آن بخش مطابقت دارد. راه سوم - که در این مورد چندان سودمند نیست اما دراصل بسیار مهم است - عبارت است از تبدیل دستگاه داده شده به دستگاه بزرگتری از معادلات مرتبه اول. این عمل بسیار ساده است. تنها کاری که باید انجام دهیم این است که قرار دهیم $\dot{y}_1 = y_2$ و $\dot{y}_2 = y_3$. در این صورت $\dot{y}_3 = \dot{y}_2 = y_3$ ، و جمعاً چهار معادله مرتبه اول زیر را داریم:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_3$$

(۳)

$$\dot{y}_3 = -5y_1 + 2y_2$$

$$\dot{y}_4 = 2y_1 - 2y_2$$

این معادلات را می‌توان به صورت $\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y}$ ، نوشت که در آن

$$(۲) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس از قراردادن $\bar{y} = \bar{\lambda} x e^{\lambda t}$ و $\bar{y} = \bar{x} e^{\bar{\lambda} t}$ خواهیم داشت

$$A x = \lambda x.$$

از این معادله، معادله مشخصه زیر نتیجه می‌شود،

$$\bar{\lambda}^4 + 7\bar{\lambda}^2 + 6 = 0.$$

بنابراین $\bar{\lambda}^2$ برابر با ۱- و یا ۶- است و لذا چهار مقدار ویژه A عبارتند از i ، $-i$ ، $i\sqrt{6}$ ، $-i\sqrt{6}$. بردارهای ویژه متناظر برابرند با

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -i \\ -2i \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ i\sqrt{6} \\ -i\sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -i\sqrt{6} \\ i\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

جواب متناظر (۳) عبارت است از

$$\bar{y} = c_1 \bar{x}_1 e^{it} + c_2 \bar{x}_2 e^{-it} + c_3 \bar{x}_3 e^{i\sqrt{6}t} + c_4 \bar{x}_4 e^{-i\sqrt{6}t}.$$

و بر حسب مؤلفه‌ها می‌توان نوشت

$$y_1 = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it} + c_3 e^{i\sqrt{6}t} + c_4 e^{-i\sqrt{6}t}.$$

$$y_2 = 2c_1 e^{it} + 2c_2 e^{-it} - \frac{1}{2} c_3 e^{i\sqrt{6}t} - \frac{1}{2} c_4 e^{-i\sqrt{6}t}$$

و $y_3 = \dot{y}_1$ ، $y_4 = \dot{y}_2$ پس می‌توان نوشت

$$y_1 = a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 \sin \sqrt{6}t$$

$$y_2 = 2a_1 \cos t + 2b_1 \sin t - \frac{1}{2}a_2 \cos \sqrt{6}t - \frac{1}{2}b_2 \sin \sqrt{6}t$$

که با نتیجه (۲) مطابقت دارد.

دستگاه مرتبه اول (۳) در این مثال به شکل زیر است:

$$\dot{y}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k + h_j(t) \quad j = 1, \dots, n$$

حال چند کلمه‌ای دربارهٔ نظریهٔ عمومی برای چنین دستگاه‌هایی صحبت می‌کنیم. معمولاً a_{jk} ها به t بستگی دارند اما، برای سادگی، فرض می‌کنیم که آنها ثابت باشند. (در مثال ۱ داریم $h_j = 0$) دستگاه را به صورت ماتریسی می‌توان چنین نوشت:

$$(5) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}.$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{A}$ دارای n بردار ویژهٔ مستقل خطی $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ باشد. (مثلاً، این شرط در مورد ماتریس متقارن، که اغلب به علت وجود تقارن در مسائل پیش می‌آید، صادق است.) فرض کنید $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ معرف بردارهای ویژهٔ متناظر باشند. (توجه داشته باشید که ممکن است بعضی از این مقادیر با هم برابر باشند.) آنگاه داریم

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{x}_n = \lambda_n \mathbf{x}_n$$

و یا، اگر بخواهیم این معادلات را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی تنها بنویسیم، خواهیم داشت

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_n) = (\lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{x}_n).$$

با معرفی

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n),$$

که از بردارهای ستونی $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ تشکیل یافته است. می‌توانیم بنویسیم

$$(6) \quad \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{X},$$

که در آن $\mathbf{D}$ ماتریسی قطری است که عناصر روی قطر اصلی آن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ هستند. برای وارد کردن $\mathbf{X}$ در (۵) فرض می‌کنیم

$$(7) \quad \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z}$$

که آنگاه $\dot{y} = Xz$ و (δ) چنین می‌شود:

$$\dot{Xz} = AXz + h.$$

به فرض آنکه X ناکین باشد، به دست می‌آوریم

$$\dot{z} = X^{-1}AXz + X^{-1}h.$$

چون بنا به (۶) داریم $X^{-1}AX = D$ ، به سادگی به دست می‌آوریم

$$(۸) \quad \dot{z} = Dz + X^{-1}h.$$

اگر Dz را به سمت چپ برده، رابطه را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسیم، خواهیم داشت

$$(۸^*) \quad \dot{z}_j - \lambda_j z_j = r_j(t) \quad (j = 1, \dots, n),$$

که در آن، بنا به تعریف ضرب ماتریسی، $r_j(t)$ ترکیبی خطی، با ضرایب ثابت، از $h_1(t), \dots, h_n(t)$ است. بنا بر بخش ۷.۱، جواب (۸^*) عبارت است از

$$(۹) \quad z_j(t) = e^{\lambda_j t} \left(\int e^{-\lambda_j t} r_j(t) dt + c_j \right)$$

که در آن c_j ثابتی دلخواه است. مانند بخش ۷.۱ می‌توانیم با در نظر گرفتن یک شرط اولیه به c_j مقدار یکتایی نسبت دهیم.

$$(۱۰) \quad y(t_0) = y_0.$$

در واقع، بنا به (۷)، از این شرط نتیجه می‌شود

$$z(t_0) = z_0 = X^{-1}y_0.$$

و یا، بر حسب مؤلفه‌ها، $z_j(t_0) = z_{j0}$ ، که در آن z_{j0} عبارت از j امین مؤلفه بردار ثابت z_0 است.

با توجه به چگونگی پیدا کردن جواب عمومی یک معادله خطی مرتبه اول در بخش ۷.۱، می‌بینیم که نتیجه را می‌توانیم به ترتیب زیر فرمولبندی کنیم.

قضیه وجود و یگانگی برای دستگاهها

فرض کنید $h(t)$ که در رابطه (۵) معرفی شد در فاصله $\alpha < t < \beta$ پیوسته بوده t_0 نقطه مفروض دلخواهی در آن فاصله باشد. فرض کنید A دارای مجموعه‌ای از n بردار ویژه مستقل خطی باشد. در این صورت مسئله با مقدار اولیه (۵)، (۱۰) در آن فاصله دارای جواب یکتای $y(t)$ است.

می توان ثابت کرد که ماتریسهای متقارن حقیقی و کلیتر از آن ماتریسهای هرمیتی حائز این شرط هستند، و نظر به اینکه در بیشتر کاربردها با ماتریسهای هرمیتی سروکار داریم، این قضیه از اهمیت عملی قابل ملاحظه ای برخوردار است.

در کاربردها، اغلب دانستن این نکته مهم است که وقتی $t \rightarrow \infty$ آیا جواب به سمت صفر میل می کند یا نه. این مسئله پایداری جوابهاست. بحث ما منجر به نتیجه زیر می شود. هرگاه در (۵)، $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ، آنگاه در (۸) داریم $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ، لذا در (λ^*) داریم $r_j = 0$ و در (۹) $z_j = c_j e^{\lambda_j^* t}$ ؛ پس می توان نتیجه گرفت:

قضیه ۲ (پایداری)

تمام جوابهای دستگاه (۵)، با $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ، وقتی $t \rightarrow \infty$ به سمت $\mathbf{0}$ میل می کنند اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ دارای قسمت های حقیقی منفی باشند.

مثال ساده زیر حالت خاصی از استدلال کلی بالا را بررسی می کند:

مثال ۲

مسئله با مقدار اولیه ای را که از معادلات

$$y_1 = 5y_1 + 8y_2 + 1$$

$$y_2 = -6y_1 - 9y_2 + t$$

و شرایط اولیه $y_1(0) = 4$ ، $y_2(0) = -3$ تشکیل شده است حل کنید.

با نماد گذاری ماتریسی داریم $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}$ ، که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

معادله مشخصه مقادیر ویژه $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = -3$ را به دست می دهد. بردارهای ویژه متناظر عبارتند از

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

و رابطه (۸) به صورت زیر درمی آید

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{X}^{-1}\mathbf{h}$$

که در آن

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 4+4t \\ -3-4t \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{Dz}$ را به سمت چپ می بریم، معادله را بر حسب مؤلفه ها می نویسیم و از (۹) استفاده می کنیم:

$$z_1 = c_1 e^{-t} + 4t, \quad \text{جواب: } \dot{z}_1 + z_1 = 4 + 4t$$

$$z_2 = c_2 e^{-3t} - \frac{5}{9} - \frac{4}{3}t, \quad \text{جواب: } \dot{z}_2 + 3z_2 = -3 - 4t$$

از اینجا به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -5+44t \\ 5-15t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

بنا به شرایط اولیه،

$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

نتیجه می شود $c_1 = 4$ ، $c_2 = 5/9$. بنابراین جواب مسئله ما عبارت است از

$$y_1 = 4e^{-t} + \frac{5}{9}e^{-3t} - \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t.$$

$$y_2 = -3e^{-t} - \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{5}{9} - \frac{4}{3}t.$$

و بدین ترتیب مثال بالا استدلال ما را، که منجر به قضیه وجود و یگانگی شد، روشن می کند (مطالب قبلی را ببینید).

مسائل بخش ۱۵.۷

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\dot{y}_1 = 4y_1 - 2y_2 \quad y_1(0) = 3, y_2(0) = 2 \quad .1$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + y_2$$

$$\dot{y}_1 = 3y_1 + 4y_2 \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 3 \quad .2$$

$$\dot{y}_2 = 4y_1 - 3y_2$$

$$\dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 \quad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1 \quad .3$$

$$\dot{y}_2 = -8y_1 + 11y_2$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad .4$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + 3y_2 \quad y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 2$$

$$\dot{y}_3 = y_2$$

$$\dot{y}_1 = 3y_1 \quad .5$$

$$\dot{y}_2 = 5y_1 + 4y_2 \quad y_1(0) = 2, y_2(0) = -10, y_3(0) = -27$$

$$\dot{y}_3 = 3y_1 + 6y_2 + y_3$$

۶. در مثال ۱، نمودار جوابهایی را که در شرایط اولیه $y_1(0) = 1$ ، $y_2(0) = 2$ ، $\dot{y}_1(0) = 0$ ، $\dot{y}_2(0) = 0$ صدق می کنند رسم کنید.

۷. نشان دهید که به ازای مقادیر عمومی m_1 ، m_2 ، k_1 ، k_2 دستگاه مکانیکی شکل ۱۴۵ از معادله $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ تبعیت می کند، که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

۸. نشان دهید که به ازای هر مقدار مثبتی از k_1 ، k_2 ، m_1 ، m_2 مقادیر ویژه ماتریسی که در مسئله ۷ دیدیم حقیقی و منفید. از این موضوع راجع به حرکت دستگاه چه نتیجه ای می توان گرفت؟

جوابهای معادلات دیفرانسیل مسئله ۷ را پیدا کنید، با این فرض که

$$9. \quad \dot{y}_1(0) = 0, \dot{y}_2(0) = 1, \dot{y}_3(0) = -2, k_1 = 6, k_2 = 9, m_1 = m_2 = 1, \dot{y}_2(0) = 0$$

$$10. \quad \dot{y}_1(0) = \sqrt{2}, \dot{y}_2(0) = 0, \dot{y}_3(0) = 0, k_1 = 4, k_2 = 6, m_1 = m_2 = 1, \dot{y}_2(0) = 2\sqrt{2}$$

۱۱. در مثال ۱، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس A را به دست آورید.

۱۲. (ارتعاشات) نشان دهید که در شکل زیر ارتعاشات قائم دستگاه مکانیکی (جرم‌فرها و میرایی ناچیز فرض می‌شوند) از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند:

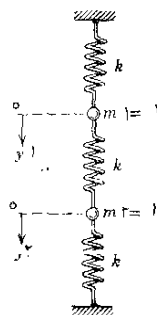
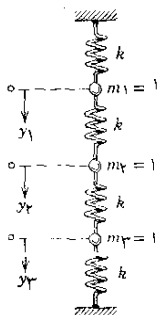
$$\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2 - y_1)$$

$$\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) - ky_2$$

$$A = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -2k \end{pmatrix} \quad \text{یعنی } \ddot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \text{ که در آن}$$

۱۳. برای حل معادله برداری مسئله ۱۲، قراری دهیم $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}$ نشان دهید که این عمل منجر به مسئله مقدار ویژه $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ می‌شود که در آن $\lambda = \omega^2$. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را پیدا کنید. جواب معادله برداری را به قسمی پیدا کنید که در شرایط اولیه $y_1(0) = 1, \dot{y}_1(0) = -\sqrt{3k}, \dot{y}_2(0) = \sqrt{3k}, y_2(0) = 1$ صدق کند.

۱۴. در مسئله ۱۲، مقادیر ویژه حقیقی و منفی هستند. نشان دهید که هر گاه فرها را با فنرهای که دارای ثابتهای فنر (مثبت) دلخواه k_1, k_2, k_3 هستند، تعویض کنیم باز هم مقادیر ویژه حقیقی و منفی خواهند بود.



مسئله ۱۵ (دستگاه در حالت تعادل ایستا)

مسئله ۱۲ (دستگاه در حالت تعادل ایستا)

۱۵. نشان دهید که ارتعاشات قائم دستگاه مکانیکی نشان داده شده در شکل از $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ تبعیت می‌کنند، دراین معادله

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{pmatrix}$$

و با قرار دادن $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{i\omega t}$ در آن به نتیجه $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ می‌رسیم که $\lambda = \omega^2$.

۱۶. تحقیق کنید که ضرایب

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

معادله مشخصه ماتریس $\mathbf{A}$ در مسئله ۱۵، مثبت هستند و نتیجه بگیرید که مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ باید حقیقی و منفی باشند. در رابطه با حرکت دستگاه مکانیکی مسئله ۱۵، این نتیجه چه مفهومی دارد؟

۱۷. فرض کنید $\mathbf{A}$ ماتریس مسئله ۱۵ باشد و $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$. نشان دهید که ماتریس متناظر $\mathbf{B} = (\frac{1}{k})\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$ دارای مقادیر ویژه 0 ، $\sqrt{2}$ ، و $-\sqrt{2}$ است. از اینجا نتیجه بگیرید که $\mathbf{A}$ دارای مقادیر ویژه $-2k$ ، $(-2 + \sqrt{2})k$ ، و $(-2 - \sqrt{2})k$ است.

۱۸. قضیه ۲ را به تفصیل اثبات کنید.

۱۹. درستی تمام مراحل مثال ۲ را تحقیق کنید.

۲۰. مثال ۲ را، از طریق تبدیل دستگاه مربوطه به یک معادله، حل کنید.



حساب دیفرانسیل برداری. میدانهای برداری

میدانهای برداری را می‌توان بر حسب توابع برداری معین کرد (بخش ۱۰.۸)؛ این میدانها دارای کاربردهای فیزیکی و هندسی گوناگونی هستند. مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل را می‌توان به نحوی ساده و طبیعی به توابع برداری توسعه داد (بخش ۲۰.۸). توابع برداری برای نمایش و بررسی منحنیها (بخشهای ۳۰.۸ تا ۵۰.۸) و به خاطر کاربردشان در مکانیک (بخش ۶۰.۸) مفیدند. مفاهیمی که از نظریه فیزیکی و هندسی در ارتباط با میدانهای برداری و اسکالر اهمیت دارند عبارتند از گرادینان (بخش ۸۰.۸)، دیورژانس (بخش ۱۰۰.۸) و تاو (بخش ۱۱۰.۸). (قضایای انتگرالی مربوطه در فصل ۹ مورد بررسی قرار خواهند گرفت).

پیشنیاز این فصل: فصل ۶.

بخشهایی که برای دوره‌های فشرده‌تر قابل حذفند: ۴۰.۸ تا ۶۰.۸ و ۹۰.۸.

مراجع: ضمیمه ۱، قسمت C.

جواب مسائل: ضمیمه ۲.

۱۰.۸ میدانهای اسکالر و میدانهای برداری

تابع اسکالر تابعی است که در هر نقطه از مجموعه‌ی معینی از نقاط فضا تعریف شده باشد و مقادیرش اعدادی حقیقی باشند که فقط به نقاط فضا بستگی داشته مستقل از انتخاب دستگاه مختصات باشند. در اکثر کاربردها D ، قلمرو تعریف تابع اسکالر f ، یک منحنی، یک رویه

یا يك ناحیه در فضای سه بعدی است. تابع f به هر نقطه D عددی حقیقی نسبت می دهد و گوییم که در D يك میدان اسکالر داده شده است.

هر گاه مختصات x, y, z را به کار ببریم، آنگاه f را می توان بر حسب این مختصات به صورت $f(x, y, z)$ نوشت، اما باید همواره در نظر داشت که مقدار f در هر نقطه P مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است. برای نشان دادن این مطلب مرسوم است که به جای $f(x, y, z)$ بنویسند $f(P)$. ممکن است تابع f به پارامترهایی مانند زمان نیز بستگی داشته باشد.

مثال ۱. تابع اسکالر

$f(P)$ ، فاصله هر نقطه P از يك نقطه ثابت P_0 در فضا، تابعی است اسکالر که D ، قلمرو آن، تمام فضا است. $f(P)$ در فضا يك میدان اسکالر تعریف می کند. اگر يك دستگاه مختصات دکارتی را در نظر بگیریم و P_0 دارای مختصات x_0, y_0, z_0 باشد آنگاه f از فرمول معروف

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

به دست می آید که در آن x, y, z مختصات P هستند. چنانچه این دستگاه مختصات را با دستگاه مختصات دیگری عوض کنیم آنگاه مقادیر مختصات P و P_0 عموماً عوض می شوند ولی $f(P)$ همان مقدار قبلی را خواهد داشت. از این رو $f(P)$ تابعی است اسکالر. کمینوسهای هادی خطی که از P و P_0 می گذرد اسکالر نیستند زیرا مقادیر آنها بستگی به انتخاب دستگاه مختصات دارد.

مثال ۲. میدانهای اسکالر

T ، دمای داخل يك جسم B ، تابعی اسکالر است. این تابع يك میدان اسکالر یعنی میدان دما در B را تعریف می کند. تابع T ممکن است به زمان و یا پارامتر دیگری بستگی داشته باشد. مثالهای دیگری از میدان اسکالر عبارتند از فشار داخل ناحیه ای که سیال تراکم پذیری در آن جریان دارد، و چگالی هوای جو زمین.

اگر به هر نقطه P از مجموعه معینی از نقاط فضا (مثلاً نقاط يك منحنی، يك رویه، یا يك ناحیه سه بعدی) برداری مانند $\mathbf{v}(P)$ مربوط شود، آنگاه گوییم يك میدان برداری در آن نقاط تعریف شده است و $\mathbf{v}(P)$ را يك تابع برداری می نامیم. چند مثال تشریحی در شکلهای ۱۴۶ تا ۱۴۹ نشان داده شده است.

با در نظر گرفتن مختصات دکارتی x, y, z می توان نوشت

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\mathbf{i} + v_2(x, y, z)\mathbf{j} + v_3(x, y, z)\mathbf{k},$$

اما باید به خاطر داشت که $\mathbf{v}$ فقط به نقاط دامنه تعریف خود بستگی دارد و در هر يك از این نقاط برداری تعریف می کند که مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.



شکل ۱۴۷. میدان بردارهای عمود بر يك رویه



شکل ۱۴۶. میدان بردارهای مماس بر يك منحنی

مثال ۳. میدان برداری (میدان سرعت)

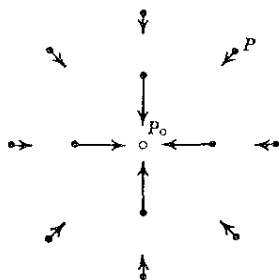
$\mathbf{v}(P)$ ، بردار سرعت يك جسم در حال دوران B در هر لحظه يك میدان برداری تشکیل می‌دهد که اصطلاحاً میدان سرعت دوران نامیده می‌شود. هر گاه يك دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنیم که مبدأ آن روی محور دوران باشد، آنگاه خواهیم داشت (مثال ۳ بخش ۸.۶)

$$(۱) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

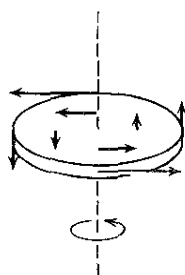
که در آن x, y, z مختصات نقطه دلخواه P از B در لحظه مورد نظر است. چنانچه مختصات طوری باشند که محور z ها محور دوران باشد و $\boldsymbol{\omega}$ در جهت مثبت محور z ها باشد آنگاه $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ و

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

مثالی از يك جسم در حال دوران و میدان سرعت مربوط به آن در شکل ۱۴۸ نشان داده شده است.



شکل ۱۴۹. میدان گرانشی



شکل ۱۴۸. میدان سرعت يك جسم در حال دوران

مثال ۴. میدان برداری (میدان نیرو)

فرض کنید ذره A به جرم M در نقطه P_0 ثابت شده باشد و فرض کنید ذره B به جرم m بتواند در نقاط گوناگون P قرار گیرد، در این صورت A ، B را جذب می کند. طبق قانون گرانش نیوتون، جهت نیروی گرانشی متناظر p از P به طرف P_0 و اندازه آن متناسب با $1/r^2$ است که در آن r فاصله بین P و P_0 است، پس

$$(۲) \quad |\mathbf{p}| = \frac{c}{r^2} \quad c = GMm,$$

در اینجا $G (= 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gm} \cdot \text{sec}^2)$ ثابت گرانشی است. از این رو $\mathbf{p}$ یک میدان برداری در فضا تعریف می کند. هرگاه مختصات دکارتی را طوری انتخاب کنیم که P_0 دارای مختصات x_0, y_0, z_0 و P دارای مختصات x, y, z باشد آنگاه با توجه به قضیه فیثاغورس داریم

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (\geq 0).$$

با فرض $r > 0$ و معرفی بردار

$$\mathbf{r} = (x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}$$

داریم $|\mathbf{r}| = r$ و $-\mathbf{r}/r$ بردار یکه ای در جهت $\mathbf{p}$ است؛ علامت منفی دلالت بر آن دارد که جهت $\mathbf{p}$ از P به P_0 است (شکل ۱۴۹). با استفاده از این مطلب و (۲) به دست می آوریم

$$(۳) \quad \begin{aligned} \mathbf{p} &= |\mathbf{p}| \times \left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -c \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= -c \frac{x-x_0}{r^3} \mathbf{i} - c \frac{y-y_0}{r^3} \mathbf{j} - c \frac{z-z_0}{r^3} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

این تابع برداری آن نیروی گرانشی را که بر B اثر می کند توصیف می کند.

مسائل بخش ۱.۸

منحنیهای تراز ثابت $p(x, y) = \text{ثابت}$ (منحنیهای فشار ثابت یا هم فشار) میدانهای فشار در صفحه xy را که با توابع زیر داده شده اند معین کنید. تعدادی از منحنیهای هم فشار را رسم کنید.

$$.۱ \quad p = y \quad .۲ \quad p = xy \quad .۳ \quad p = x^2 - y^2$$

$$p = e^x \cos y \quad .۶ \quad p = \arctan \frac{y}{x} \quad .۵ \quad p = \ln(x^2 + y^2) \quad .۴$$

منحنیهای همدمما (منحنیهای دمای ثابت T) ی میدانهای دمای زیر را بیابید.

$$T = x^2 + 4y^2 \quad .۹ \quad T = x - y \quad .۸ \quad T = x + y \quad .۷$$

میدانهای اسکالر (میدان دمای) $T(x, y) = 3x^2y - y^3$ را در نظر می گیریم. پیدا کنید:

$$۱۰. \text{ دما در نقاط } (1, 1), (-2, 2), (3, 4) \text{ را.}$$

$$۱۱. \text{ ناحیه‌ای را که در آن } T > 0 \text{ (این ناحیه را رسم کنید).}$$

$$۱۲. \text{ مقدار } T \text{ روی خطوط } y = x \text{ و } y = -x \text{ را. (نمودار این دو تابع را رسم کنید).}$$

$$۱۳. \text{ فرمولی برای } T \text{ بر دایره } x^2 + y^2 = 1 \text{ را.}$$

$$۱۴. \text{ شکل } T(x, y) \text{ را به صورت رویه‌ای در قضا.}$$

سطوح تراز (سطوح ثابت f) میدانهای اسکالر در فضا را که با توابع زیر داده شده‌اند بیابید.

$$f = x + y \quad .۱۶ \quad f = x + y + z \quad .۱۵$$

$$f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \quad .۱۸ \quad f = x^2 + y^2 + z^2 \quad .۱۷$$

$$f = x^2 + 2y^2 + 4z^2 \quad .۲۰ \quad f = x^2 + y^2 - z \quad .۱۹$$

میدان فشار در فضا را که با تابع $p(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2$ داده شده‌است در نظر می گیریم. پیدا کنید:

$$۲۱. \text{ سطوح تراز را. (بعضی از آنها را رسم کنید).}$$

$$۲۲. \text{ فرمولی را که فشار بر رویه } xyz = 1 \text{ از آن به دست آید.}$$

$$۲۳. \text{ منحنیهای تراز در صفحه } z = 1 \text{ را. (برخی از آنها را رسم کنید).}$$

$$۲۴. \text{ ناحیه‌ای را که در آن } 3 \leq p(x, y, z) \leq 12 \text{ را.}$$

شکل میدانهای برداری را که در صفحه xy ، با توابع برداری $\mathbf{v}$ به صورت زیر داده شده‌اند، (مانند شکل ۱۴۹) رسم کنید.

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \quad .۲۶ \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} \quad .۲۵$$

$$v = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad .28 \quad v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad .27$$

$$v = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} \quad .30 \quad v = 6xy\mathbf{i} + 2(x^2 - y^2)\mathbf{j} \quad .29$$

در هر يك از حالات زیر منحنیهای را بیابید که بر آنها طول v ثابت است و همچنین منحنیهای را بیابید که بر آنها جهت v ثابت است و آنها را رسم کنید.

$$v = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} \quad .32 \quad v = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad .31$$

$$v = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} \quad .34 \quad v = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad .33$$

$$.35 \text{ رویه‌هایی را بیابید که بر آنها } v = 3x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + y\mathbf{k} \text{ طولی ثابت داشته باشد.}$$

۲۰۸ حساب برداری

مفاهیم اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مانند همگرایی، پیوستگی و مشتق‌گیری را می‌توان به‌طریقی ساده و طبیعی، به‌شرح زیر، وارد آنالیز برداری کرد.

دنباله‌ای نامتناهی از بردارهای $\mathbf{a}_{(n)}$ ، که در آن $n = 1, 2, \dots$ ، را همگرا نامند هر گاه برداری مانند $\mathbf{a}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{a}_{(n)} - \mathbf{a}| = 0.$$

$\mathbf{a}$ را بردار حد این دنباله نامند و می‌نویسند

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{a}.$$

واضح است اگر يك دستگاه مختصات دکارتی انتخاب کنیم. آنگاه دنباله بردارها، وقتی و تنها وقتی به $\mathbf{a}$ همگراست که سه دنباله‌ای که از مؤلفه‌های بردارها تشکیل شده‌اند به مؤلفه‌های متناظر $\mathbf{a}$ همگرا باشند. اثبات این مطلب ساده است و بدخواهنده واکذازمی شود. همین‌طور، تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ از متغیر حقیقی t وقتی t بدست t میل کند دارای حد $\mathbf{l}$ است اگر $\mathbf{u}(t)$ در يك همسایگی $\mathbf{l}$ از t (احتمالاً جز در نقطه t) تعریف شده باشد و

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{l}| = 0$$

آنگاه می‌نویسیم

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{l}.$$

تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ را در $t = t_0$ پیوسته نامند هر گاه این تابع در يك همسایگی

۱. یعنی، در فاصله‌ای بر محور t که t_0 يك نقطه داخلی آن است.

از t_0 تعریف شده باشد و

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0).$$

اگر يك دستگاه مختصات دکارتی داشته باشیم، می توانیم $\mathbf{u}(t)$ را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\mathbf{u}(t) = u_1(t) \mathbf{i} + u_2(t) \mathbf{j} + u_3(t) \mathbf{k}.$$

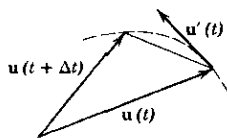
بدین ترتیب $\mathbf{u}(t)$ در t_0 پیوسته است اگر و تنها اگر هر سه مؤلفه آن در t_0 پیوسته باشند. تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ در نقطه t مشتقپذیر است اگر حد

$$(6) \quad \mathbf{u}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t}$$

موجود باشد. بردار $\mathbf{u}'(t)$ را مشتق $\mathbf{u}(t)$ نامند. شکل ۱۵۰ را ببینید. (در این شکل منحنی خطچین مکان هندسی انتهای پیکانهای نمایش دهنده $\mathbf{u}$ ، به ازای مقادیر متغیر مستقل در فاصله ای شامل t و $t + \Delta t$ است.)

در يك دستگاه مختصات دکارتی، $\mathbf{u}(t)$ در t مشتقپذیر است اگر و تنها اگر هر سه مؤلفه آن در t مشتقپذیر باشند؛ یعنی اگر مشتقات

$$u_m'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_m(t + \Delta t) - u_m(t)}{\Delta t} \quad (m = 1, 2, 3)$$



شکل ۱۵۰. مشتق يك تابع برداری

موجود باشند. در این صورت داریم

$$(7) \quad \mathbf{u}'(t) = u_1'(t) \mathbf{i} + u_2'(t) \mathbf{j} + u_3'(t) \mathbf{k};$$

یعنی، برای مشتقگیری از يك تابع برداری کافی است از مؤلفه های آن به طور مجزا مشتق بگیریم.

قواعد آشنای مشتقگیری، قواعد مشابهی برای مشتقگیری توابع برداری به دست می دهند، مثلاً

$$(c \mathbf{u})' = c \mathbf{u}' \quad (c \text{ ثابت}),$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

و به ویژه

$$(8) \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(9) \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$$

$$(10) \quad (\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w})' = (\mathbf{u}' \mathbf{v} \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \mathbf{v}' \mathbf{w}) + (\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w}').$$

اثبات این روابط ساده است و به خواننده واگذار می‌شود. در (۹)، ترتیب بردارها باید کاملاً مراعات شود زیرا ضرب برداری دارای خاصیت جابه‌جایی نیست.

مثال ۱. مشتق یک تابع برداری که طولش ثابت است

فرض کنید $\mathbf{u}(t)$ تابعی برداری باشد که طول آن ثابت است، $|\mathbf{u}(t)| = c$. در این صورت داریم $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2$ و پس از مشتقگیری آن [ر. ک. (۸)] خواهیم داشت $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که مشتق تابع برداری $\mathbf{u}(t)$ که طول آن ثابت است، صفر دیا بر $\mathbf{u}(t)$ عمود است. ▲

کاربردهای مهم مشتق در بخشهای بعدی مورد بحث قرار می‌گیرند. با توجه به بحثهای فوق‌روشن تعریف مشتقات جزئی در آنالیز برداری آشکار می‌گردد. فرض کنید مؤلفه‌های تابع برداری

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

توابع مشتق‌پذیری از n متغیر $t_1, \dots, t_n$ باشند. در این صورت مشتق جزئی $\mathbf{u}$ نسبت به t_l با $\partial \mathbf{u} / \partial t_l$ نشان داده می‌شود و به صورت تابع برداری زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_l} = \frac{\partial u_1}{\partial t_l} \mathbf{i} + \frac{\partial u_2}{\partial t_l} \mathbf{j} + \frac{\partial u_3}{\partial t_l} \mathbf{k}.$$

و همین‌طور

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t_l \partial t_m} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t_l \partial t_m} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t_l \partial t_m} \mathbf{k}.$$

والی آخر.

مثال ۲. مشتقات جزئی

فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t_1, t_2) = a \cos t_1 \mathbf{i} + a \sin t_1 \mathbf{j} + t_2 \mathbf{k}$. آنگاه

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_1} = -a \sin t_1 \mathbf{i} + a \cos t_1 \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_2} = \mathbf{k}.$$

توجه کنید که هر گاه $\mathbf{r}(t_1, t_2)$ به عنوان بردار مکان تعبیر شود آنگاه این بردار استوانه دواری به شعاع a را نمایش می دهد که محور دوران آن محور y ها است. (نمایش رویه ها در بخش ۵.۹ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.)

مسائل بخش ۲.۸

مطلوب است $\mathbf{u}'$ ، $|\mathbf{u}'|$ ، $\mathbf{u}''$ ، $|\mathbf{u}''|$ هر گاه $\mathbf{u}$ برابر باشد با

۱. $\mathbf{a} + b\mathbf{t}$
۲. $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
۳. $\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$
۴. $\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$
۵. $t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
۶. $\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
۷. $e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$
۸. $e^{-t}(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j})$
۹. $\sin \pi t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

فرض کنید $\mathbf{u} = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ و $\mathbf{w} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. مطلوب است محاسبه

۱۰. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})'$
۱۱. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})'$
۱۲. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})'$
۱۳. $[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}]'$
۱۴. $[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]'$
۱۵. $[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}]'$

در هر يك از مسائل زیر مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به x ، y ، z را بیابید.

۱۶. $x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
۱۷. $(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$
۱۸. $x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
۱۹. $yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
۲۰. $(x + y)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
۲۱. $x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$

۲۲. با استفاده از فرمول (۸) بخش ۵.۶ رابطه (۸) را ثابت کنید. (۹) را ثابت کنید.

۲۳. با استفاده از (۸) و (۹) رابطه (۱۰) را به دست آورید.

۲۴. (۱۰) را مستقیماً ثابت کنید.

۲۵. فرمولهایی شبیه (۸) و (۹) برای $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})''$ و $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})''$ بیابید.

۲۶. نشان دهید که هر گاه $\mathbf{u}(t)$ برداری یکه باشد و $\mathbf{u}'(t) \neq 0$ ، آنگاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{u}'$ متعامدند.

۲۷. نشان دهید که معادله $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{c}$ دارای جواب $\mathbf{u}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{b}$ است که در آن $\mathbf{b}$ و بردارهای ثابتی هستند.

۲۸. نشان دهید که $u(t) = be^{\lambda t} + ce^{-\lambda t}$ در معادله $u'' - \lambda^2 u = 0$ صدق می‌کند. (b و c بردارهایی ثابتند.)

۲۹. نشان دهید که

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right)' = \frac{\mathbf{u}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{3/2}}$$

۳۰. از $(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) / |t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}|$ مشتق بگیرید.

۳۰.۸ منحنیها

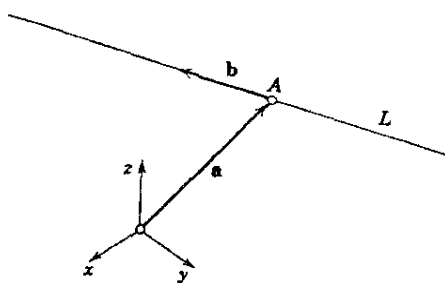
حال به عنوان کاربردی مهم از حساب برداری، به بررسی چند مطلب اساسی در مورد منحنیهای فضایی می‌پردازیم. دانشجویی خواهد برد که منحنیها در بسیاری از مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال و همین‌طور در فیزیک، مثلاً در مسائل مربوط به مسیر حرکت ذرات، مطرح می‌شوند. بررسی ما بخشی از یک شاخه مهم ریاضیات موسوم به هندسه دیفرانسیل را تشکیل می‌دهد که می‌توان آن را مطالعه منحنیها و سطوح به وسیله حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف کرد. به مرجع [C۸] ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

در یک دستگاه مختصات دکارتی مفروض، منحنی C را می‌توان به صورت تابع برداری

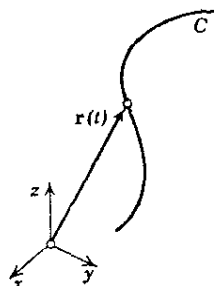
$$(۱) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

نمایش داد (شکل ۱۵۱)؛ به هر مقدار t_0 از متغیر حقیقی t نقطه‌ای از C با بردار مکان $\mathbf{r}(t_0)$ ، یعنی با مختصات $x(t_0)$ ، $y(t_0)$ ، $z(t_0)$ مربوط می‌شود.

نمایشی از نوع (۱) را نمایش پارامتری منحنی C و t را پادراستر این نمایش نامند. این نوع نمایش در بسیاری کاربردها، مثلاً در مکانیک که در آنجا متغیر t می‌تواند زمان باشد، مفید است.



شکل ۱۵۲. نمایش پارامتری یک خط راست



شکل ۱۵۱. نمایش پارامتری یک منحنی

انواع دیگر نمایش منحنیها در فضا عبارتند از

$$(۲) \quad y = f(x), \quad z = g(x)$$

$$(۳) \quad F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0.$$

با قرارداد دادن $x = t$ می‌توانیم (۲) را به صورت (۱) بنویسیم:

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + f(t) \mathbf{j} + g(t) \mathbf{k}.$$

در (۳)، هر معادله یک رویه را نمایش می‌دهد، و منحنی فصل مشترک این دو رویه است. **منحنی صفحه‌ای** منحنی است که در صفحه‌ای در فضا قرار دارد. منحنی که منحنی صفحه‌ای نباشد **منحنی تابدار** نامیده می‌شود.

مثال ۱. خط راست

هر خط راست L را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$(۴) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t \mathbf{b} = (a_1 + tb_1) \mathbf{i} + (a_2 + tb_2) \mathbf{j} + (a_3 + tb_3) \mathbf{k}$$

که در آن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای ثابتی هستند. L از نقطه A ، با بردار مکان $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ ، می‌گذرد و با $\mathbf{b}$ همجهت است (شکل ۱۵۲). هر گاه $\mathbf{b}$ برداری یکه باشد آنگاه مؤلفه‌های آن کسینوسهای هادی L هستند، و در این حالت $|t|$ برابر با فاصله نقاط L از نقطه A است.

مثال ۲. بیضی، دایره

تابع برداری

$$(۵) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$$

نمایش بیضی در صفحه xy است که مرکز آن بر مبدأ مختصات قرار دارد و محوره‌های اصلی آن در امتداد محوره‌های x و y هستند. در واقع، چون $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ، از (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$

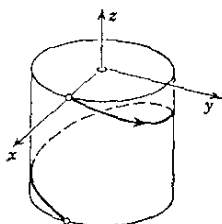
هر گاه $b = a$ ، آنگاه (۵) نمایش دایره‌ای به شعاع a است.

مثال ۳. مارپیچ مستدیر

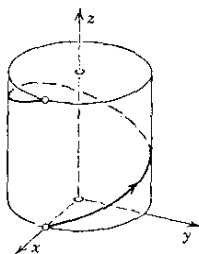
منحنی تابدار C را که با تابع برداری

$$(۶) \quad \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k} \quad (c \neq 0)$$

نمایش داده شده است مارپیچ هستدیر می نامند. این منحنی براستوانه $x^2 + y^2 = a^2$ واقع است. هر گاه $c > 0$ ، آنگاه منحنی به شکل يك پیچ راستگرد (شکل ۱۵۳) و هر گاه $c < 0$ به شکل يك پیچ چپگرد است (شکل ۱۵۴). ▲



شکل ۱۵۴. مارپیچ هستدیر چپگرد



شکل ۱۵۳. مارپیچ هستدیر راستگرد

بخشی از منحنی را، که بین دو نقطه دلخواه از آن واقع است، اغلب قوسی از منحنی می نامند. ما برای سادگی کلمه «منحنی» را هم به يك منحنی کامل و هم به قوسی از يك منحنی، اطلاق می کنیم.

يك منحنی ممکن است خودش را قطع کند، نقاط تقاطع را نقاط چند گانه منحنی می نامند. دو نمونه از این نقاط در شکل ۱۵۵ نشان داده شده است. منحنی بدون نقاط چند-گانه را منحنی ساده می نامند.

مثال ۴. منحنیهای ساده و غیر ساده

بیضی و مارپیچ منحنیهای ساده هستند. منحنی که به صورت

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j}$$

نمایش داده می شود ساده نیست چون دارای نقطه ای دو گانه در مبدأ است؛ این نقطه متناظر با دو مقدار $t = 1$ و $t = -1$ است. ▲

در پایان متذکر می شویم که منحنی مفروض C را می توان با توابع برداری مختلفی نمایش داد. مثلاً چنانچه C با (۱) نمایش داده شده باشد و قرار دهیم $t = h(t^*)$ ، آنگاه تابع برداری جدیدی مانند $\mathbf{r}(t^*) = \mathbf{r}(h(t^*))$ برای نمایش C به دست می آوریم، مشروط بر اینکه $h(t^*)$ تمام مقادیر t در (۱) را اتخاذ کند.

مثال ۵. تغییر پارامتر

سهمی $y = x^2$ در صفحه xy را می توان با تابع برداری زیر نمایش داد:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \quad (-\infty < t < \infty)$$

چنانچه قرار دهیم $t^* = -t$ ، نمایش دیگری از سهمی به دست می آوریم:

$$\mathbf{r}(t^*) = \mathbf{r}(-t^*) = -t^* \mathbf{i} + t^* \mathbf{j}.$$

اگر قرار دهیم $t = t^*$ ، به دست می آوریم

$$\mathbf{r}(t^*) = t^* \mathbf{i} + t^* \mathbf{j},$$

اما این تابع فقط نمایش دهنده قسمتی از سهمی است که در ربع اول واقع است، زیرا $t^* \geq 0$ هر چه باشد داریم.



شکل ۱۵۵. منحنیهایی که نقاط دوگانه دارند

مسائل بخش ۳.۸

نمایشی پارامتری برای خط راستی که از A می گذرد و در امتداد بردار $\mathbf{b}$ است بیابید در صورتی که داشته باشیم

۱. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ $A: (0, 0, 0)$ ۲. $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ $A: (1, 3, 2)$

۳. $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $A: (2, 1, 0)$ ۴. $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ $A: (0, 4, 1)$

نمایشی پارامتری برای خطوط راستی که از A و B می گذرند در هر یک از حالات زیر بیابید.

۵. $A: (0, 0, 0), B: (1, 1, 1)$

۶. $A: (-1, 8, 3), B: (1, 0, 0)$

۷. $A: (1, 5, 3), B: (0, 2, -1)$

۸. $A: (1, 4, 2), B: (1, 4, -2)$

نمایشی پارامتری برای خطوط راستی که به شکل زیر نمایش داده شده اند بیابید

۹. $y = x, z = 0$

۱۰. $7x - 3y + z = 14, 4x - 3y - 2z = -1$

$$x+y+z=1, \quad y-z=0. \quad ۱۲ \quad x+y=0, \quad x-z=0. \quad ۱۱$$

منحنیهای زیر را به صورت پارامتری بنویسید و سپس آنها را رسم کنید.

$$y=x^4, \quad z=0. \quad ۱۴ \quad x^2+y^2=1, \quad z=0. \quad ۱۳$$

$$y=x^2, \quad z=x^3. \quad ۱۵$$

$$x^2+y^2-2x-4y=-1, \quad z=0. \quad ۱۶$$

$$x^2+y^2=4, \quad z=e^x. \quad ۱۸ \quad 4(x+1)^2+y^2=4, \quad z=0. \quad ۱۷$$

۱۹. تصاویر قائم مارپیچ مستدیر (۶) را بر صفحات مختصات بیابید.

نمودار منحنیهای را رسم کنید که با توابع برداری $\mathbf{r}(t)$ ی زیر نمایش داده شده اند.

$$2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} \quad ۲۱ \quad t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} - t \mathbf{k} \quad ۲۰$$

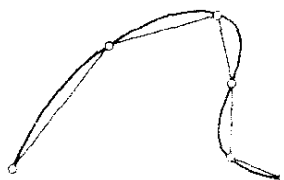
$$\cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} \quad ۲۳ \quad (1 + \cos t) \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad ۲۲$$

$$t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k} \quad ۲۵ \quad \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad ۲۴$$

۴.۸ طول قوس

طول منحنی ساده C را به طریق زیر تعریف می کنیم. مطابق شکل ۱۵۶، خط شکسته ای را که از n وتر تشکیل شده است در C طوری محاط می کنیم که دو نقطه انتهایی C را به هم وصل کند. این عمل را به ازای هر عدد صحیح مثبت n به روشی دلخواه انجام می دهیم و تنها این شرط را رعایت می کنیم که ما کمزیم طول وترها وقتی n به سمت بینهایت میل می کند به سمت صفر میل کند. طول این وترها را می توان از قضیه فیثاغورس به دست آورد. چنانچه دنباله این طولها که آن را با $l_1, l_2, \dots$ نشان می دهیم همگرا بوده و حد آن l باشد آنگاه C را راستی پذیر و l را طول C می نامند.

چنانچه C ساده نباشد ولی متشکل از تعدادی منتهای منحنی ساده راستی پذیر باشد، طول C به صورت مجموع طولهای این منحنیها تعریف می شود.



شکل ۱۵۶. طول منحنی

هر گاه بتوان C را با تابع برداری پیوسته مشتقپذیری^۱ چون

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

نمایش داد آنگاه می توان نشان داد که C راستی پذیر است و طول آن، l ، از انتگرال

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt \quad \left(\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \quad (1)$$

به دست می آید، که مقدار آن مستقل از انتخاب نمایش پارامتری است. اثبات کاملاً شبیه اثبات مربوط به منحنیهای صفحه ای است که معمولاً در حساب انتگرال مقدماتی بررسی می شود (ر. ک. مرجع [A۱۴]) و در مرجع [CA] ضمیمه ۱ یافت می شود.

چنانچه در (۱) حد بالایی ثابت انتگرال، یعنی b ، را با حد بالایی متغیر t عوض کنیم، انتگرال به تابعی از t ، مثلاً $s(t)$ ، بدل خواهد شد؛ اگر متغیر انتگرالگیری را با t^* نشان دهیم خواهیم داشت

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt^* \quad \left(\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt^*} \right). \quad (2)$$

تابع $s(t)$ تابع طول قوس یا، به عبارت ساده تر، طول قوس C نام دارد. از آنچه گفته شد نتیجه می شود که از نقطه نظر هندسی، طول قوس $s(t_0)$ ، به ازای مقدار مشخص $t_0 \geq a$ ، طول قسمتی از C است که بین نقاط متناظر با $t = a$ و $t = t_0$ قرار دارد. به ازای $t = t_0 < a$ داریم $s(t_0) < 0$ و طول قوس برابر $-s(t_0)$ است.

طول قوس s را می توان به عنوان پارامتر در نمایش پارامتری منحنیها به کار گرفت. خواهیم دید که این امر سبب ساده تر شدن فرمولهای متعددی می شود.

ثابت a در (۲) را می توان با ثابت دیگری عوض کرد؛ یعنی، نقطه ای از منحنی را که با $s = 0$ متناظر است می توان به طور دلخواه انتخاب کرد. جهت متناظر با افزایش مقادیر s را جهت مثبت روی C نامند؛ بدین طریق هر نمایش $\mathbf{r}(s)$ یا $\mathbf{r}(t)$ از C جهت خاصی برای C تعیین می کند. واضح است که دو امکان برای نسبت دادن جهت به C موجود است، و دریافتن این نکته که انتقال از یک جهت به جهت مخالف با تبدیل پارامتری که مشتق منفی است، حاصل می شود نیز مشکل نیست.

از (۲) به دست می آوریم

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

۱. «پیوسته مشتقپذیر» به این معنی است که مشتق موجود و پیوسته است؛ «دو بار پیوسته مشتقپذیر» یعنی مشتقهای اول و دوم موجود و پیوسته اند، والی آخر.

مرسوم است که بنویسند

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

و

$$(۴) \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

ds را عنصر خطی C می نامند.

مثال ۱. دایره. طول قوس به عنوان پارامتر

درمورد دایره

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$$

داریم $\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = a^2$ و $\dot{\mathbf{r}} = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$ بنابراین

$$s(t) = \int_a^t a \, dt^* = at.$$

از این رو $t(s) = s/a$ و نمایش دایره وقتی که طول قوس s را به عنوان پارامتر انتخاب کنیم عبارت است از

$$\mathbf{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a \cos \frac{s}{a} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{a} \mathbf{j}.$$

دایره در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، که متناظر با جهت افزایش مقادیر s است جهت دار شده است. با قرار دادن $s = -s$ و با توجه به اینکه $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ و $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ به دست می آوریم

$$\mathbf{r}\left(-\frac{\tilde{s}}{a}\right) = a \cos \frac{\tilde{s}}{a} \mathbf{i} - a \sin \frac{\tilde{s}}{a} \mathbf{j};$$

داریم $ds/d\tilde{s} = -1 < 0$ ، و اینک دایره در جهت حرکت عقربه های ساعت جهت دار شده است.

مسائل بخش ۴.۸

منحنیهای زیر را رسم کنید و طول آنها را بیابید

۱. منحنی ذنجیر $y = \cosh x$ ، $z = 0$ ، از $x = 0$ تا $x = 1$.

۲. مارپیچ مستدیر $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$ از $(a, 0, 0)$ تا $(a, 0, 2\pi c)$.

۳. سهمی نیم مکعبی $y = x^{3/2}$ ، $z = 0$ از $(0, 0, 0)$ تا $(4, 8, 0)$.

۴. دودنچرخزاد چهار گوش $\mathbf{r}(t) = a \cos^2 t \mathbf{i} + a \sin^2 t \mathbf{j}$ ، طول قوس کامل

۵. گسترندۀ دایره $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + (\sin t - t \cos t) \mathbf{j}$ از $(1, 0, 0)$ تا $(-1, \pi, 0)$.

$$۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}, \mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} \quad ۶.$$

۷. چنانچه يك منحنی صفحه‌ای را با $y = f(x)$ ، $z = 0$ ، نمایش دهیم، با استفاده از (۱) نشان دهید طول قسمتی از این منحنی که بین $x = a$ و $x = b$ قرار دارد عبارت است از

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

۸. با استفاده از فرمول مسئله ۷، محیط دایره‌ای به شعاع a را بیابید.

۹. نشان دهید که اگر يك منحنی صفحه‌ای در مختصات قطبی $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\theta = \arctan(y/x)$ نمایش داده شود آنگاه $ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$.

با استفاده از فرمولی که در مسئله ۹ دیدیم، طول منحنیهای زیر را بیابید.

۱۰. دایره‌ای به شعاع a ، طول کامل

$$۰ \leq \theta \leq \pi, \rho = e^\theta \quad ۱۱.$$

$$۰ \leq \theta \leq \pi/۲, \rho = \theta^2 \quad ۱۲.$$

$$۱۳. \rho = a(1 - \cos \theta) \text{ (نمودار این منحنی را رسم کنید.)}$$

$$۰ \leq \theta \leq \pi/۲, \rho = 1 + \cos \theta \quad ۱۴.$$

۱۵. اگر يك منحنی به طریق پارامتری نمایش داده شده باشد، نشان دهید تبدیل پارامتری که مشتق آن منفی باشد جهتگیری را معکوس می‌کند.

۵.۸. مماس، انحناء و تاب

مماس بر منحنی C در نقطه P از C عبارت است از وضع حدی خط راست L ، که از P و نقطه دیگری مانند Q از C می‌گذرد، وقتی که Q در طول منحنی به سمت P میل کند (شکل ۱۵۷).

فرض کنید که C با تابع برداری پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{r}(t)$ ، که در آن t يك پارامتر است، نمایش داده شده باشد. فرض کنید P و Q به ترتیب متناظر با t و $t + \Delta t$ باشند. در این صورت L با بردار

$$[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)]/\Delta t$$

هم‌امتداد است. بدین ترتیب، هر گاه بردار

$$(۱) \quad \dot{\mathbf{r}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

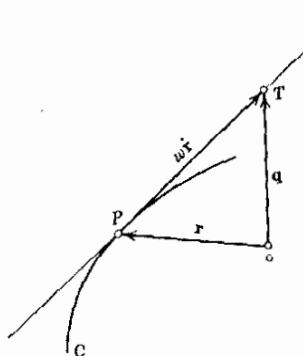
بردار صفر نباشد هم‌امتداد با مماس بر C در P خواهد بود. سوی این بردار همان‌سوی افزایش مقادیر t است، و بنابراین جهت آن بستگی به جهتگیری منحنی دارد. $\dot{\mathbf{r}}$ را بردار مماس بر C در نقطه P و بردار یکه متناظر با آن یعنی

$$(۲) \quad \mathbf{u} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$

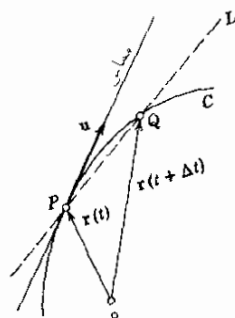
را بردار یکه مماس بر C در نقطه P می‌نامند.

به‌خصوص اگر C را با $\mathbf{r}(s)$ که در آن s طول قوس است، نمایش دهیم، از رابطه (۳) بخش ۴.۸ نتیجه می‌شود که مشتق $d\mathbf{r}/ds$ برداری یکه است و (۲) چنین می‌شود:

$$(۳) \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$



شکل ۱۵۸. نمایش مماس بر منحنی



شکل ۱۵۷. مماس بر منحنی

واضح است که بردار مکان نقطه T از مماس برابر است با مجموع بردار مکان $\mathbf{r}$ نقطه P و برداری در جهت مماس. از این رو نمایش پارامتری مماس عبارت است از (شکل ۱۵۸)

$$(۴) \quad \mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\dot{\mathbf{r}}$$

که در آن $\mathbf{r}$ و $\dot{\mathbf{r}}$ هر دو به P بستگی دارند و w متغیری حقیقی است.

منحنی مفروض C را که با تابع برداری سه بار پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{r}(s)$ نمایش داده شده است در نظر می گیریم، s طول قوس است. در این صورت

$$(۵) \quad \kappa(s) = |\mathbf{u}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad (\kappa \geq 0)$$

را انتخابی C می نامند. چنانچه $\kappa \neq 0$ ، آنگاه بردار یکه $\mathbf{p}$ در جهت $\mathbf{u}'(s)$ عبارت است از

$$(۶) \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{u}'}{\kappa} \quad (\kappa > 0)$$

که آن را بردار قائم اصلی یکه C می نامند. از مثال ۱ بخش ۲۰۸ می دانیم که $\mathbf{p}$ بر $\mathbf{u}$ عمود است. بردار

$$(۷) \quad \mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{p} \quad (\kappa > 0)$$

را بردار قائم دوم یکه C می نامند. از تعریف ضرب برداری نتیجه می شود که $\mathbf{p}$ ، $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{b}$ دستگاه راستگرد سه گانه ای از بردارهای یکه متعامد تشکیل می دهند (بخشهای ۳۰۶ و ۷۰۶). این دستگاه سه گانه را سه وجهی C در نقطه مورد نظر می نامند (شکل ۱۵۹). سه خط راستی که در امتداد $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{p}$ و $\mathbf{b}$ از نقطه مورد نظر می گذرند به ترتیب همسای، قائم اصلی، قائم دوم C نامیده می شوند. در شکل ۱۵۹ همچنین نامهای سه صفحه ای که به وسیله دوبعدی این بردارها تولید شده اند، نوشته شده اند.

هر گاه $\mathbf{b}'$ ، مشتق $\mathbf{b}$ ، بردار صفر نباشد، بر $\mathbf{b}$ عمود است (ر. ک. مثال ۱ بخش ۲۰۸). $\mathbf{b}'$ بر $\mathbf{u}$ نیز عمود است. در واقع با مشتقگیری از $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$ داریم $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' = 0$ ؛ از این رو $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{u} = 0$ زیرا $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}' = 0$. در نتیجه $\mathbf{b}'$ به صورت $\mathbf{b}' = \alpha \mathbf{p}$ است که در آن α اسکالر است. معمولاً فرض می کنند $\alpha = -\tau$. در این صورت

$$(۸) \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p} \quad (\kappa > 0).$$

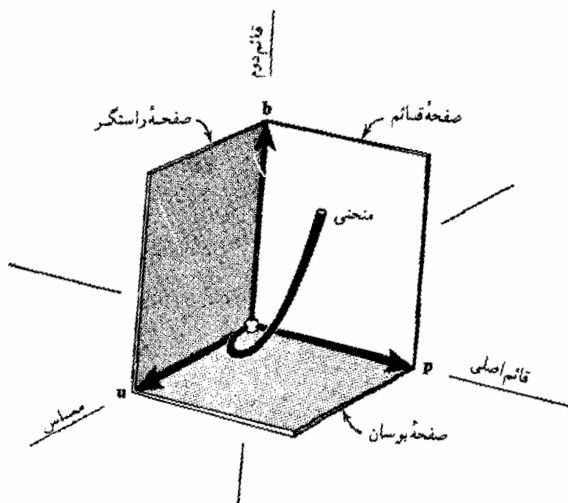
تابع اسکالر τ را قاب C می نامند. ضرب اسکالر طرفین (۸) در $\mathbf{p}$ نتیجه می دهد

$$(۹) \quad \tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s).$$

مطالبی که در این بخش دیدیم در نظریه و کاربرد منحنیها از مفاهیم اساسی هستند. حال با ارائه يك مثال نوعی این مطالب را شرح می دهیم. کاربردهای بیشتر را به بعد موکول می کنیم.

مثال ۱. مارپیچ مستدیر

در مورد مارپیچ مستدیر (۶)، بخش ۳۰۸، طول قوس عبارت است از $s = t\sqrt{a^2 + c^2}$. از این رو مارپیچ را می توان به صورت



شکل ۱۵۹. سه‌وجهی

$$K = \sqrt{a^2 + c^2} \quad \text{نمایش داد که در آن} \quad \mathbf{r}(s) = a \cos \frac{s}{K} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{K} \mathbf{j} + c \frac{s}{K} \mathbf{k}$$

در نتیجه

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s) = -\frac{a}{K} \sin \frac{s}{K} \mathbf{i} + \frac{a}{K} \cos \frac{s}{K} \mathbf{j} + \frac{c}{K} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(s) = -\frac{a}{K^2} \cos \frac{s}{K} \mathbf{i} - \frac{a}{K^2} \sin \frac{s}{K} \mathbf{j}$$

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = \sqrt{\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''} = \frac{a}{K^2} = \frac{a}{s^2 + c^2}$$

$$\mathbf{p}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{\kappa(s)} = -\cos \frac{s}{K} \mathbf{i} - \sin \frac{s}{K} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{u}(s) \times \mathbf{p}(s) = \frac{c}{K} \sin \frac{s}{K} \mathbf{i} - \frac{c}{K} \cos \frac{s}{K} \mathbf{j} + \frac{a}{K} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b}'(s) = \frac{c}{K^2} \cos \frac{s}{K} \mathbf{i} + \frac{c}{K^2} \sin \frac{s}{K} \mathbf{j}$$

$$\tau(s) = -\mathbf{p}(s) \cdot \mathbf{b}'(s) = \frac{c}{K^2} = \frac{c}{a^2 + c^2}$$

پس مارپیچ مستدیر دارای انحنا و تاب ثابت است. هرگاه $c > 0$ (مارپیچ راستگرد، ر.ک. شکل ۱۵۳)، آنگاه $\tau > 0$ و هرگاه $c < 0$ (مارپیچ چپگرد، ر.ک. شکل ۱۵۴)، آنگاه $\tau < 0$.

چون $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{p}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای مستقل خطی هستند، هر برداری از فضا را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از این بردارها نوشت. بنا براین اگر مشتقات $\mathbf{u}'$ ، $\mathbf{p}'$ و $\mathbf{b}'$ وجود داشته باشند می‌توان آنها را نیز به همین طریق نمایش داد. فرمولهای مربوطه عبارتند از

$$\mathbf{u}' = \kappa \mathbf{p} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{p}' = -\kappa \mathbf{u} + \tau \mathbf{b} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{p} \quad (\text{پ})$$

این فرمولها را فرمولهای فرنه می‌نامند. (۱۵ الف) از (۶) نتیجه می‌شود، و (۱۵ پ) همان (۸) است. برای رسیدن به (۱۵ ب) با توجه به تعریف ضرب برداری داریم

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{p} \times \mathbf{u} = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{p} = -\mathbf{u}.$$

با مشتقگیری از فرمول اول و با استفاده از (۱۵ الف) و (۱۵ پ) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{p}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \times \mathbf{u}' = -\tau \mathbf{p} \times \mathbf{u} + \mathbf{b} \times \kappa \mathbf{p} = -\tau(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{u}),$$

و بدین ترتیب (۱۵ ب) اثبات می‌شود.

مسائل بخش ۵.۸

نمایشی پارامتری برای مماس بر منحنیهای زیر در نقطه مفروض P بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}, \quad P: (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad ۱.$$

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}, \quad P: (1, 1, 1) \quad ۲.$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad P: (1, 0, \pi/4) \quad ۳.$$

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j}, \quad P: (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 0) \quad ۴.$$

۵. در مثال ۱ نشان دهید که زاویه بین $\mathbf{u}$ و محور z ها ثابت است.

۶. نشان دهید خطوط راست تنها منحنیهایی هستند که بردار یک مماس آنها ثابت است.

۷. نشان دهید که انحنا خط راست متحد با صفر است.

۸. نشان دهید که اگر منحنی C را با $\mathbf{r}(t)$ که در آن t پارامتر دلخواهی است، نمایش دهیم، آنگاه انحنای عبارت است از

$$(5') \quad \kappa = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2}}{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{3/2}}$$

۹. نشان دهید که انحنای دایره‌ای به شعاع a برابر $1/a$ است.

۱۰. انحنای بیضی $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$ را بیابید.

۱۱. با استفاده از (۵') نشان دهید در مورد منحنی $y = y(x)$ واقع در صفحه xy داریم

$$\kappa = |y''| / (1 + y'^2)^{3/2} \quad (y' = dy/dx \text{ و غیره}).$$

۱۲. نشان دهید که تاب يك منحنی صفحه‌ای (با $\kappa > 0$) متحد با صفر است.

۱۳. با استفاده از (۷) و (۹) نشان دهید که

$$(9') \quad \tau = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \mathbf{p}') \quad (\kappa > 0).$$

۱۴. با استفاده از (۶)، نشان دهید که (۹') را می‌توان چنین نوشت:

$$(9'') \quad \tau = \frac{(\mathbf{r}' \mathbf{r}'' \mathbf{r}''')}{\kappa^2} \quad (\kappa > 0).$$

۱۵. نشان دهید اگر منحنی C با $\gamma(t)$ نمایش داده شود، که در آن t پارامتری دلخواه است، آنگاه (۹'') چنین می‌شود:

$$(9''') \quad \tau = \frac{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})}{(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})^2} \quad (\kappa > 0).$$

۶.۸ سرعت و شتاب

فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان ذره متحرک P در فضا باشد، که در آن t زمان است. در این صورت $\mathbf{r}(t)$ مسیر C نقطه P را نمایش می‌دهد. از بخش قبل می‌دانیم که بردار

$$(1) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

بر C مماس است و بنا بر این در هر لحظه در جهت حرکت P است. بنا بر رابطه (۳) بخش ۴.۸، مشاهده می‌کنیم که

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \frac{ds}{dt}$$

که در آن s طول قوس است و فاصله نقطه P را از نقطه ثابتی بر روی C (با $s=0$) در طول منحنی نشان می‌دهد. بنابراین ds/dt **تندی** p است. بردار $\mathbf{v}$ را به این دلیل **بردار سرعت**^۱ حرکت می‌نامند.

مشقت بردار سرعت را **بردار شتاب** می‌نامند و آن را معمولاً با $\mathbf{a}$ نشان می‌دهند؛ بنابراین

$$(۲) \quad \mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

مثال ۱. شتاب مرکزگرا

تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = R \cos \omega t \mathbf{i} + R \sin \omega t \mathbf{j} \quad (\omega > 0)$$

دایره‌ای مانند C به شعاع R و به مرکز مبدأ صفحه xy را نشان می‌دهد و حرکت ذره P در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت را توصیف می‌کند. بردار سرعت

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -R\omega \sin \omega t \mathbf{i} + R\omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

(ر.ک. شکل ۱۶۰) مماس بر C است و اندازه آن، تندی

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = R\omega$$

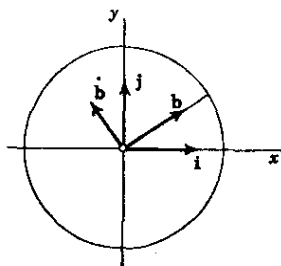
ثابت است. **تندی زاویه‌ای** (تندی تقسیم بر فاصله R از مرکز) برابر ω است. بردار شتاب عبارت است از

$$(۳) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -R\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - R\omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

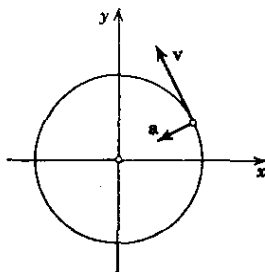
مشاهده می‌کنیم که شتابی با بزرگی ثابت $|\mathbf{a}| = \omega^2 R$ به طرف مبدأ وجود دارد. این شتاب موسوم به **شتاب مرکزگرا** است و از آنجا ناشی می‌شود که جهت بردار سرعت با آهنگ ثابتی تغییر می‌کند. **نیروی مرکزگرا** برابر $m\mathbf{a}$ است، که در آن m جرم P است. بردار $-m\mathbf{a}$ را، که در جهت مخالف $m\mathbf{a}$ است، **نیروی گریز از مرکز** می‌نامند و این دو نیرو در هر لحظه از حرکت در حال تعادل هستند. ▲

واضح است که $\mathbf{a}$ برابر با نرخ تغییرات زمانی $\mathbf{v}$ است. در مثال ۱ داریم $|\mathbf{v}| \neq 0$ ، اما $|\mathbf{a}| \neq 0$. این نشان می‌دهد که در حالت کلی اندازه $\mathbf{a}$ برابر نرخ

۱. اگر امکان اشتباه نباشد، کلمه سرعت را اغلب برای نمایش تندی، طول بردار سرعت $\mathbf{v}$ ، به کار می‌بریم.



شکل ۱۶۱. حرکت درمثال ۲



شکل ۱۶۰. شتاب مرکزگرا

تغییرات $|v|$ نیست. دلیل این امر آن است که، درحالت کلی، a مماس برمسیر C نیست. درواقع، اگر قاعدهٔ زنجیری مشتق را درمورد (۱) به کار ببریم و مشتق نسبت به s را با پریم نشان دهیم، خواهیم داشت

$$v = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt}$$

و با مشتقگیری مجدد،

$$(۲) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}' \frac{ds}{dt} \right) = \mathbf{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \mathbf{r}' \frac{d^2s}{dt^2}$$

چون $\mathbf{r}'$ برابر $\mathbf{u}$ ، برداریکه مماس بر C (بخش ۵.۸)، و مشتقش $\mathbf{u}' = \mathbf{r}''$ عمود بر $\mathbf{u}$ است (بخش ۵.۸)، فرمول (۲) تجزیهٔ بردار شتاب به مؤلفهٔ قائم $\mathbf{r}'' \dot{s}^2$ و مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{r}' \ddot{s}$ است. نتیجه می گیریم که وقتی و فقط وقتی مؤلفهٔ قائم صفر است که $|\mathbf{a}|$ برابر نرخ تغییر زمانی $\dot{s} = |v|$ (صرف نظر از علامت) باشد، زیرا دراین صورت خواهیم داشت

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{r}'| |\ddot{s}| = |\ddot{s}|$$

مثال ۲. شتاب کوریولی^۱

ذرهٔ P روی قرصی به طرف لبهٔ آن درحرکت است، بردار مکان عبارت است از

$$(۵) \quad \mathbf{r}(t) = t \mathbf{b}$$

دراینجا $\mathbf{b}$ برداری یکه است، که همراه با قرص با سرعت زاویه ای ثابت ω درجهت خلاف

۱. گوستاو گاسپار کوریولی (Gustave Gaspard Coriolis)، ۱۷۹۲-۱۸۴۳، فیزیکدان فرانسوی.

حرکت عقر به های ساعت دوران می کند (شکل ۱۶۱). $\mathbf{a}$ ، شتاب P را پیدا کنید.
به دلیل دوران، $\mathbf{b}$ به صورت زیر است

$$(۶) \quad \mathbf{b}(t) = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}.$$

با مشتقگیری از (۵)، سرعت را به دست می آوریم

$$(۷) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{b}} + t \ddot{\mathbf{b}}.$$

واضح است که $\mathbf{b}$ سرعت P نسبت به قرص، و $t \ddot{\mathbf{b}}$ سرعت اضافی ناشی از دوران است.
بامشتقگیری مجدد، شتاب را به دست می آوریم

$$(۸) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}} + t \ddot{\mathbf{b}}.$$

در جمله آخر (۸) داریم $\ddot{\mathbf{b}} = -\omega^2 \mathbf{b}$ که با مشتقگیری از (۶) حاصل شده است. از این رو جهت $t \ddot{\mathbf{b}}$ به طرف مرکز دیسک است، و با توجه به مثال ۱، این همان شتاب مرکز-گرای ناشی از دوران است. درواقع، فاصله P از مرکز برابر t است که نقش R در مثال ۱ را دارد.

جمله جالب و غیرمنتظره (۸) جمله $\dot{\mathbf{v}}$ است که موسوم به شتاب کوریولی است، این شتاب از برهم کنش دوران دیسک و حرکت P بر روی آن ایجاد شده است. جهت این شتاب همان جهت $\mathbf{b}$ ، مماس بر لبه دیسک، است و، در دستگاه مختصات ثابت xy ، جهت دوران را نشان می دهد. اگر P شخصی به جرم m باشد که روی قرص، برطبق (۵)، در حال قدم زدن است، این شخص نیرویی برابر $\mathbf{F} = -m \dot{\mathbf{v}}$ را در جهت مخالف، یعنی در جهت عکس دوران، احساس خواهد کرد.

مثال ۳. برهم نهش دو دوران

شتاب ذره ای مانند P را پیدا کنید که بر روی «نصف النهار» M از کره در حال دورانی با تندی ثابت نسبت به کره، در حال حرکت است.

حرکت P بر M را می توان به طور تحلیلی به صورت زیر بیان کرد:

$$(۹) \quad \mathbf{r}(t) = R \cos \gamma t \mathbf{b} + R \sin \gamma t \mathbf{k}$$

که در آن R شعاع کره، $\gamma (> 0)$ سرعت زاویه ای P بر M ، $\mathbf{b}$ بردار یکه افقی واقع در صفحه M (شکل ۱۶۲)، و $\mathbf{k}$ بردار یکه در جهت مثبت محور z هاست. چون $\mathbf{b}$ با کره دوران می کند، به صورت زیر است:

$$(۱۰) \quad \mathbf{b} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j},$$

در اینجا ($\omega > 0$) تندی زاویه‌ای کره است و $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهای یک‌جهت مثبت محور x ها و محور y ها هستند، که در فضا ثابت شده‌اند. با مشتق‌گیری از (۹) سرعت را به دست می‌آوریم:

$$(۱۱) \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = R \cos \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma R \sin \gamma t \mathbf{b} + \gamma R \cos \gamma t \mathbf{k}.$$

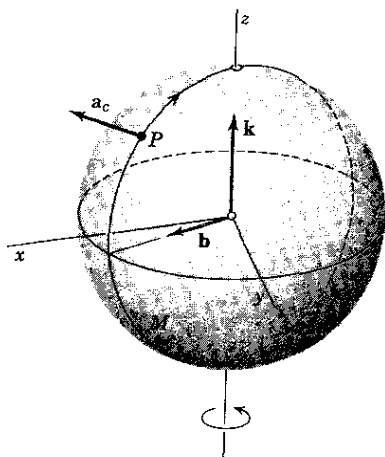
با مشتق‌گیری مجدد، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$(۱۲) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = R \cos \gamma t \ddot{\mathbf{b}} - \gamma \dot{R} \sin \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma^2 R \cos \gamma t \mathbf{b} - \gamma^2 R \sin \gamma t \mathbf{k},$$

که در آن، با توجه به (۱۰) داریم

$$\dot{\mathbf{b}} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j},$$

$$\ddot{\mathbf{b}} = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{b}.$$



شکل ۱۶۲. برهم‌فش دو دوران

بنابر (۹) ملاحظه می‌کنیم که مجموع دو جمله آخر (۱۲) برابر $-\gamma^2 \mathbf{r}$ است، و (۱۲) چنین می‌شود:

$$(۱۳) \quad \mathbf{a} = -\omega^2 R \cos \gamma t \mathbf{b} - \gamma \dot{R} \sin \gamma t \dot{\mathbf{b}} - \gamma^2 \mathbf{r}.$$

جمله اول طرف راست برابر شتاب مرکز گراست که از دوران کره حاصل شده است و جمله آخر شتاب مرکز گرای حاصل از دوران P بر روی M است. جمله دوم شتاب

کوریولی است:

$$(۱۲) \quad \mathbf{a}_e = -\gamma R \sin \gamma t \mathbf{b}.$$

بر روی «نیمکره شمالی» داریم $\sin \gamma t > 0$ [ر.ک. (۹)] و به علت وجود علامت منفی، $\mathbf{a}_e$ در جهت مخالف $\mathbf{b}$ است، یعنی مماس بر سطح کره، عمود بر M ، و در جهت مخالف دوران کره است. اندازه آن، $\gamma R |\sin \gamma t| \omega$ ، در «قطب شمال» ماکزیمم است و در خط استوا برابر صفر است. هر گاه P مگسی به جرم m_e باشد که بر طبق (۹) حرکت می کند، این مگس نیرویی برابر $-m_e \mathbf{a}_e$ ، در جهت مخالف $\mathbf{a}_e$ ، احساس خواهد کرد؛ این نیرو کاملاً شبیه نیرویی است که شخص مذکور در مثال ۲ احساس می کند. این نیرو سبب می شود که مگس از مسیر M به طرف راست متمایل شود. روی «نیمکره جنوبی»، $\sin \gamma t < 0$ و نیرو در جهت مخالف اثر می کند و سبب می شود که مگس از M به طرف چپ متمایل شود. این عمل را می توان در مورد گلوله ها یا سایر پرتابه ها مشاهده کرد. جریان هوا به طرف ناحیه ای که در آنجا فشار کم است نیز این انحراف را نشان می دهد.

مسائل بخش ۶.۸

فرض کنید $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان یک ذره متحرک باشد، $t (\geq 0)$ زمان است. در هر یک از حالات زیر، شکل هندسی مسیر را تشریح کنید و بردار سرعت، تندى، و بردار شتاب را بیابید.

$$1. \quad \mathbf{r} = t \mathbf{i} \quad \mathbf{r} = t^2 \mathbf{k}$$

$$3. \quad \mathbf{r} = (2t - t^2) \mathbf{i} \quad \mathbf{r} = t^3 \mathbf{i}$$

$$5. \quad \mathbf{r} = \sin t \mathbf{j} \quad \mathbf{r} = 3 \cos 2t \mathbf{i} + 3 \sin 2t \mathbf{j}$$

$$7. \quad \mathbf{r} = \cos t^2 \mathbf{i} + \sin t^2 \mathbf{j} \quad \mathbf{r} = 3 \cos 2t \mathbf{i} + 2 \sin 3t \mathbf{j}$$

$$9. \quad \mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 10. \quad \mathbf{r} = (1 + t^3) \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j} + (2 - t^3) \mathbf{k}$$

۱۱. شتاب مرکز گرای ماه به طرف زمین را بیابید، فرض کنید که مدار ماه دایره ای به شعاع 385×10^8 متر و زمان یک دوران کامل آن ۲۷۳ روز یا 236×10^6 ثانیه است.

۱۲. در مثال ۲ به جای (۵) بگذارید $\mathbf{r} = t^2 \mathbf{b}$ و شتاب کوریولی را بیابید.

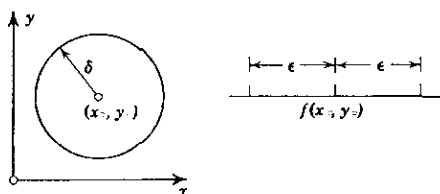
۱۳. حرکتی بیابید که بردار شتاب آن ثابت باشد.

۱۴. با مشتق گیری از (۷) بخش ۸.۶ فرمول (۳) را به دست آورید.

۱۵. هرگاه $\mathbf{r}(t)$ نمایش مسیر حرکت يك ذره و t زمان باشد، تبدیل پارامتری $t = q(\tilde{t})$ از نقطه نظر مکانیکی چه مفهومی دارد؟

۷.۸. قاعده زنجیری و قضیه مقدار میانگین در مورد توابع چند متغیره

حال مطالبی را در مورد توابع چند متغیره بررسی می کنیم که در بخشهای بعدی به آنها نیاز داریم. برای سهولت با توابع دومتغیره کار می کنیم؛ تعمیم فرمولهای حاصله به توابع سه-متغیره و بیشتر ساده خواهد بود. فرض می کنیم که دانشجو با مفهوم مشتق جزئی آشنائی دارد.



شکل ۱۶۳. پیوستگی تابع دومتغیره

تابع $f(x, y)$ را در نقطه (x_0, y_0) پیوسته نامند هرگاه f در يك همسایگی^۱ از آن نقطه تعریف شده باشد و به ازای هر عدد مثبت ϵ (که هر قدر هم کوچک باشد مهم نیست فقط کافی است صفر نباشد) بتوان عدد مثبتی مانند δ یافت به طوری که به ازای هر (x, y) واقع در آن همسایگی یعنی به ازای هر (x, y) ی که

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

داشته باشیم

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

معنی هندسی پیوستگی $f(x, y)$ در (x_0, y_0) این است که به ازای هر فاصله^۲ به طول ϵ و نقطه وسط $f(x_0, y_0)$ ، می توان قرص مستدیری به شعاع غیر صفر δ و به مرکز (x_0, y_0) در آن همسایگی که تابع تعریف شده است یافت به طوری که به ازای هر نقطه (x, y) واقع در قرص مقدار متناظر تابع $f(x, y)$ در آن فاصله باشد (شکل ۱۶۳). از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که اگر w تابعی مشتقپذیر از x و x تابعی مشتقپذیر از t باشد، آنگاه

۱. یعنی در قرص مستدیری مانند $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$ ، با $r > 0$ در صفحه xy .

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

این قاعده را که اصطلاحاً به قاعدهٔ زنجیری مشتقگیری موسوم است می‌توان به طریق زیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۱ (قاعدهٔ زنجیری)

فرض کنید $w = f(x, y)$ پیوسته بوده در هر نقطه از دامنهٔ D در صفحهٔ xy دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. فرض کنید $x = x(t)$ و $y = y(t)$ توابعی مشتقپذیر از یک متغیر در فاصله‌ای مانند T باشند به طوری که، به ازای هر t در T ، نقطهٔ $[x(t), y(t)]$ در D واقع باشد. در آن صورت $w = f[x(t), y(t)]$ به ازای هر t در T مشتقپذیر است و

$$(۱) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

اثبات. t را در T اختیار می‌کنیم و Δt را آنقدر کوچک می‌گیریم که $t + \Delta t$ نیز در T باشد، و فرض می‌کنیم

$$(۲) \quad \Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t),$$

و به علاوه

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

با اضافه کردن و کم کردن يك جمله، رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \Delta w = & [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ & + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

هر گاه قضیهٔ مقدار میانگین در مورد توابع يك متغیره (ر.ك. مرجع [A۱۴]) را روی هر يك از دو عبارت داخل کروشه اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad \Delta w = \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_1, y + \Delta y} + \Delta y \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x, y_1}$$

۱. دامنه‌ای مانند D عبارت از يك مجموعهٔ نقطه‌ای، همبند باز است، که در آن «همبند» به این مفهوم است که هر دو نقطه از D را می‌توان با خط شکسته‌ای که از تعدادی متناهی پاره‌خط تشکیل شده است که نقاطشان متعلق به D است، بهم وصل کرد، و «باز» به این مفهوم است که هر نقطهٔ D همسایگی دارد که همهٔ نقاط آن متعلق به D هستند. مثلاً درون يك مستطیل یا درون يك دایره، دامنه است.

که در آن x_1 بین x و $x + \Delta x$ و y_1 بین y و $y + \Delta y$ واقع است. با تقسیم طرفین (۳) بر Δt و میل دادن Δt به سمت صفر، و با فرض پیوسته بودن $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ ، (۱) را به دست می آوریم.

▲ اکنون می توان این قضیه را به شرح زیر تعمیم داد.

قضیه ۲

فرض کنید $w = f(x, y)$ پیوسته بوده در دامنه ای مانند D در صفحه xy دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. فرض کنید $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ توابعی هستند که در دامنه ای مانند B واقع در صفحه uv دارای مشتقات جزئی مرتبه اولند، و فرض کنید که به ازای هر نقطه (u, v) در B ، نقطه متناظر $[x(u, v), y(u, v)]$ در D باشد. در آن صورت تابع $w = f(x(u, v), y(u, v))$ در B تعریف شده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول نسبت به u و v در B است و

$$(۴) \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

اثبات این قضیه مستقیماً با دو بار استفاده از قضیه ۱، با ثابت گرفتن یکی از دو متغیر u و v در هر بار نتیجه می شود.

از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که اگر تابع $f(x)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \frac{df}{dx},$$

مشتق در نقطه مناسبی بین x_0 و $x_0 + h$ محاسبه می شود (ر. ک. مرجع [A۱۴]). این قضیه را که در حساب دیفرانسیل به قضیه مقدار میانگین موسوم است می توان به شرح زیر به توابع دو متغیره تعمیم داد.

قضیه ۳. (قضیه مقدار میانگین)

فرض کنید $f(x, y)$ پیوسته بوده دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در دامنه D باشد. به علاوه، فرض کنید (x_0, y_0) و $(x_0 + h, y_0 + k)$ نقاطی در D باشند به طوری که پاره خط داصل این نقاط در D واقع باشد (شکل ۱۶۴). آنگاه

$$(۵) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y},$$

مشتقات جزئی در نقطه مناسبی از پاره خط مزبور محاسبه می شوند.

اثبات. فرض کنید

$$x = x_0 + th, \quad y = y_0 + tk \quad (0 \leq t \leq 1).$$

و

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk).$$

آنگاه

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = F(1), \quad f(x_0, y_0) = F(0).$$

بنابر قضیه مقدار میانگین در مورد توابع يك متغیره، عدد t_1 ی بین ۰ و ۱ موجود است به طوری که

$$(۶) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = F'(t_1).$$

حال قضیه ۱ را به کار می آوریم. چون $dx/dt = h$ و $dy/dt = k$ ، به دست می آوریم

$$(۷) \quad F'(t_1) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k,$$

مشتقات طرف راست در نقطه $(x_0 + t_1 h, y_0 + t_1 k)$ ، که بر پاره خط با نقاط انتهایی

(x_0, y_0) و $(x_0 + h, y_0 + k)$ واقع است، محاسبه می شوند. با قرار دادن (۷) در

(۶)، (۵) را به دست می آوریم و بدین ترتیب اثبات قضیه به اتمام می رسد.

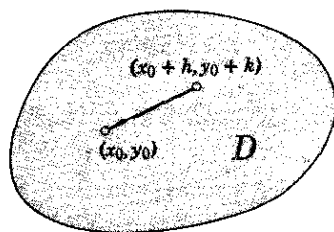
در مورد تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ که در شرایطی شبیه شرایط قضیه ۳ صدق کند،

بحث کاملاً مشابه است و منجر به فرمول

$$(۸) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0) = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + l \frac{\partial f}{\partial z}$$

می شود که در آن مشتقات جزئی در نقطه مناسبی از پاره خط با نقاط انتهایی (x_0, y_0, z_0)

و $(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l)$ محاسبه می شوند.



شکل ۱۶۴. قضیه مقدار میانگین

مسائل بخش ۷.۸

با استفاده از (۱)، در هر يك از حالات زیر dw/dt را پیدا کنید

$$w = x + y, \quad x = t^x, \quad y = \ln t \quad .1$$

$$w = \sqrt{x^x + y^x}, \quad x = x^x, \quad y = e^{-x^x} \quad .2$$

$$w = \frac{x}{y}, \quad x = g(t), \quad y = h(t) \quad .3$$

$$w = x^y, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t \quad .4$$

۵. فرض کنید $w = f(x, y, z)$ که در آن x, y, z توابعی از t هستند. نشان دهید که تحت شرایطی شبیه شرایط قضیه ۱ داریم

$$(9) \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

با استفاده از (۹)، dw/dt را بیابید.

$$w = x^x + y^x + z^x, \quad x = e^{xt} \cos xt, \quad y = e^{xt} \sin xt, \quad z = e^{xt} \quad .6$$

$$w = (x^x + y^x + z^x)^{-1/x}, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t \quad .7$$

۸. قضیه ۲ را ثابت کنید.

$\partial w / \partial u$ و $\partial w / \partial v$ را پیدا کنید.

$$w = \ln(x^x + y^x), \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v \quad .9$$

$$w = x^x - y^x, \quad x = u^x - v^x, \quad y = xuv \quad .10$$

$$w = xy, \quad x = e^u \cos v, \quad y = e^u \sin v \quad .11$$

۱۲. فرمول (۸) را به دست آورید.

۱۳. فرض کنید $w = f(x, y)$ و $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^x + \frac{1}{r^x} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^x = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^x.$$

۱۴. فرض کنید $w = f(v, z)$ و $v = x + ct$ ، $z = x - ct$ ، که c عددی ثابت است. در صورتی که f به اندازه کافی مشتقپذیر باشد، نشان دهید که

$$c^x w_{xx} - w_{tt} = 4c^x w_{vz}$$

۱۵. فرض کنید $w = f(x, y)$ و $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$. نشان دهید که

$$w_{xx} + w_{yy} = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}.$$

۸.۸ مشتق جهتی. گرادیان میدان اسکالر

میدان اسکالری در فضا با تابع اسکالر $f(P) = f(x, y, z)$ داده شده است (ر.ک. بخش ۱۰.۸). می‌دانیم که مشتقات جزئی مرتبه اول f نرخ تغییر f در جهت محورهای مختصات هستند. غیرطبیعی به نظر می‌رسد که توجه خود را فقط به این سه جهت محدود کنیم و طبیعی است که نرخ تغییر f را در تمام جهات بررسی کنیم. این ایده ساده منجر به مفهوم مشتق جهتی می‌گردد.

برای تعریف این مشتق، نقطه‌ای مانند P در فضا و امتدادی در P ، که با بردار یکه $\mathbf{b}$ معین می‌شود، انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم C شعاعی از P در جهت $\mathbf{b}$ و Q نقطه‌ای واقع بر C به فاصله s از P باشد (شکل ۱۶۵). در این صورت هر گاه حد

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s} \quad (Q = \text{فاصله بین } P \text{ و } Q)$$

موجود باشد، آن را **مشتق جهتی** f در P در جهت $\mathbf{b}$ می‌نامند. واضح است که $\partial f / \partial s$ برابر نرخ تغییر f در P در جهت $\mathbf{b}$ است.

نماد دیگری نیز که در کتابها برای $\partial f / \partial s$ به کار می‌رود عبارت است از

$$D_{\mathbf{b}} f$$

است که در آن D مشتقگیری را نشان می‌دهد و $\mathbf{b}$ جهت را.

بدین ترتیب f در P بینهایت مشتق جهتی دارد که هر يك متناظر با جهت معینی است. اما در يك دستگاه مختصات دکارتی مفروض، هر يك از این مشتقات را می‌توان به شرح زیر بر حسب مشتقات جزئی مرتبه اول f در P نمایش داد. هر گاه P دارای بردار مکان $\mathbf{a}$ باشد. آنگاه شعاع C را می‌توان به صورت

$$(2) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (s \geq 0)$$

نمایش داد، و $\partial f / \partial s$ مشتق تابع $f[x(s), y(s), z(s)]$ نسبت به طول قوس s از C است. از این رو با فرض آنکه f دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد و با به کار بردن قاعده زنجیری (قضیه ۱ از بخش قبل) به دست می‌آوریم

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z'$$

که پریم مشتق نسبت به s را نشان می‌دهد (مشتقی که در $s = 0$ محاسبه می‌شود). حال بنا بر (۲)،

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = \mathbf{b}.$$

این تساوی نشان می‌دهد که مفید است بردار

$$(۴) \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

را معرفی کنیم و (۳) را به صورت حاصل ضرب داخلی (حاصل ضرب نقطه‌ای) زیر بنویسیم:

$$(۵) \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \text{grad } f \quad (|\mathbf{b}| = 1).$$

بردار $\text{grad } f$ را **گرادیان** تابع اسکالر f می‌نامند.

با معرفی عملگر دیفرانسیل

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

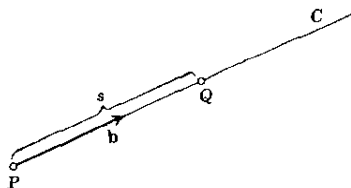
(بخوانید نابل یا «دل») می‌توان نوشت

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

نماد ∇f برای نشان دادن گرادیان به کرات در متون مهندسی به کار می‌رود. خصوصاً اگر $\mathbf{b}$ در جهت مثبت محور x ها باشد، آنگاه $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ و

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \mathbf{b} \cdot \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

همین‌طور، مشتق جهتی در جهت مثبت محور y ها برابر $\partial f / \partial y$ است، و الی آخر.



شکل ۰۱۶۵. مشتق جهتی

مثال ۱. مشتق جهتی

مطلوب است محاسبه $\partial f / \partial s$ ، مشتق جهتی از تابع $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ در نقطه $P: (2, 1, 3)$ در جهت بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$. داریم

$$\text{grad } f = 4x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

و در P

$$\text{grad } f = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

چون $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$ ، بردار یکجهته عبارت است از

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \right) = -\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

علامت منفی دلالت بر آن دارد که f در جهت مورد بحث نزول می‌کند. ▲

حال نشان می‌دهیم که طول و جهت $\text{grad } f$ مستقل از انتخاب مختصات دکارتی هستند.

البته این موضوع واضح نیست، زیرا (۴) شامل مشتقات جزئی است که بستگی به انتخاب مختصات دارند، لذا هنوز نمی‌دانیم که آیا عبارت متناظر

$$\frac{\partial f}{\partial x^*}\mathbf{i}^* + \frac{\partial f}{\partial y^*}\mathbf{j}^* + \frac{\partial f}{\partial z^*}\mathbf{k}^*$$

که نسبت به مختصات دکارتی x^*, y^*, z^* (با بردارهای یکجهته متناظر $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$) نوشته شده است دارای همان طول و همان جهت (۴) است یا نه.

برای اثبات این حکم، می‌توان به شرح زیر استدلال کرد. بنابه تعریف اسکالر، مقدار f در نقطه‌ای مانند P بستگی به P دارد ولی مستقل از مختصات است، و s ، طول قوس شعاع C ، نیز مستقل از انتخاب مختصات است. از این رو $\partial f / \partial s$ مستقل از انتخاب مختصات است. از (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial s} = |\mathbf{b}| |\text{grad } f| \cos \gamma = |\text{grad } f| \cos \gamma$$

که در آن γ زاویه بین $\mathbf{b}$ و $\text{grad } f$ است. مشاهده می‌کنیم که $\partial f / \partial s$ وقتی ماکزیمم

است که $\cos \gamma = 1$ یا $\gamma = 0$ که در آن صورت $|\text{grad } f| = \partial f / \partial s$. این موضوع نشان می‌دهد که طول و جهت $\text{grad } f$ مستقل از دستگاه مختصات است، و بدین ترتیب قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۰۱ (گرادیان)

فرض می‌کنیم $f(P) = f(x, y, z)$ تابعی اسکالر باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته است. در آن صورت $\text{grad } f$ وجود دارد و طول و جهت آن مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا است. اگر در نقطه‌ای مانند P گرادیان f بردار صفر نباشد، بیشترین افزایش f در نقطهٔ P در جهت این گرادیان است.

مشخصهٔ هندسی مهم دیگر گرادیان را می‌توان به طریق زیر به دست آورد. تابع اسکالر مشتق‌پذیر $f(x, y, z)$ را در فضا در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که به ازای هر مقدار c معادلهٔ

$$(۶) \quad f(x, y, z) = c = \text{ثابت}$$

نمایش سطحی مانند S در فضا باشد. در آن صورت با توجه به اینکه c می‌تواند هر مقدار را اختیار کند، خانواده‌ای از سطوح به دست می‌آید که اعضای آن سطوح تراز تابع f نامیده می‌شوند. چون بنا بر تعریف تابع، f در هر نقطه از فضا دارای مقداری یکتاست، نتیجه می‌شود که از هر نقطه در فضا یکی و تنها یکی از سطوح تراز f می‌گذرد. یادآوری می‌کنیم که منحنی فضایی C را می‌توان به صورت زیر نمایش داد. (ر. ک. بخش ۳۰۸)

$$(۷) \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

حال اگر بخواهیم که C بر S واقع باشد، آنگاه توابع $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ در (۷) باید طوری باشند که

$$f[x(t), y(t), z(t)] = c;$$

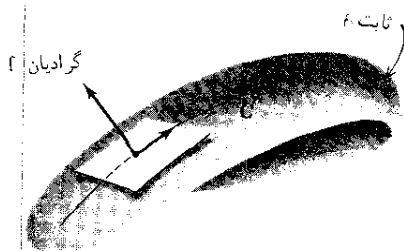
(۶) را ببینید. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به t و به کار بردن قاعدهٔ زنجیری (بخش ۷۰۸) به دست می‌آوریم

$$(۸) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = (\text{grad } f) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0,$$

که در آن بردار

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$

بر C مماس است (ر. ک. بخش ۵۰۸). هرگاه آن رشته از منحنیهای واقع بر S را که در جهت‌های مختلف از نقطهٔ P می‌گذرند در نظر بگیریم، در حالت کلی، خطوطی که در نقطهٔ



شکل ۱۶۶. سطح تراز و گرادیان

P بر این منحنیها مماسند در صفحه‌ای قرار می‌گیرند که در P بر S مماس است. این صفحه را صفحه مماس بر S در P می‌نامند. خط راستی که از P می‌گذرد و بر صفحه مماس عمود است نرمال S در P نامیده می‌شود (شکل ۱۶۶). از (۸) و قضیه ۱ بخش ۵.۶، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۲. (گرادیان و نرمال سطح)

فرض کنید f تابعی اسکالر باشد که در یک دامنه D از فضا تعریف شده و مشتقپذیر است و P نقطه دلخواهی از D باشد که بر سطح تراز S از f قرار دارد. آنگاه اگر گرادیان f در P بردار صفر نباشد، این گرادیان عمود بر S در نقطه P است، یعنی بردار گرادیان در جهت نرمال بر S در P است.

مثال ۲. نرمال منحنی صفحه‌ای

منحنیهای تراز ثابت $f = \ln(x^2 + y^2)$ تابع $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ دوائر متحدالمرکزی حول مبدأ هستند. گرادیان

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

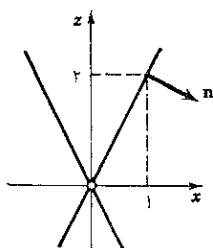
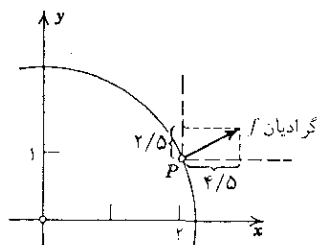
در جهت عمود بردایره است و جهت آن جهتی است که f را کم می‌افزایش خود را دارد. مثلاً، در نقطه $P: (1, 2)$ داریم. (ر. ک. شکل ۱۶۷)

$$\text{grad } f = 0.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}.$$

مثال ۳. نرمال بر سطح

n بردار نرمال بر مخروط دوار $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ را در نقطه $P: (1, 0, 2)$ پیدا کنید. مخروط را می‌توان به صورت $f = 0$ ، سطح تراز تابع

$$f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2$$

شکل ۱۶۸. مقطع صفحه xz و مخروط مثال ۳

شکل ۱۶۷. نرمال بردایره

در نظر گرفت. در این صورت

$$\text{grad } f = 4x \mathbf{i} + 4y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}$$

و در نقطه P

$$\text{grad } f = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

از این رو بنابر قضیه ۲،

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{k}$$

بردار یک‌ه نرمال بر مخروط در P است، همین‌طور است $-\mathbf{n}$ (ر. ک. شکل ۱۶۸). ▲

برخی از میدانهای برداری مطرح در فیزیک با توابعی برداری معین می‌شوند که می‌توان آنها را به صورت گرادین توابع اسکالر مناسب نوشت. چنین تابع اسکالری را تابع پتانسیل یا پتانسیل میدان برداری متناظومی نامند. استفاده از توابع پتانسیل، بررسی میدانهای برداری را به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند. مثال مهم زیر ما را با چنین رهیافتی به میدانهای برداری آشنا می‌کند.

مثال ۴. میدان گرانشی. معادله لاپلاس

در مثال ۴ بخش ۱۰۸ دیدیم که بر طبق قانون جاذبه نیوتون، نیروی جاذبه بین دودره عبارت است از

$$(۹) \quad \mathbf{p} = -c \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -c \left(\frac{x-x_0}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y-y_0}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z-z_0}{r^3} \mathbf{k} \right)$$

که در آن

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

فاصله بین دو ذره و c عددی ثابت است. با ملاحظه

$$(۱۰ \text{ الف}) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{r(x-x_0)}{r[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \\ = - \frac{x-x_0}{r^3}$$

و همین طور

$$(۱۰ \text{ ب}) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{y-y_0}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{z-z_0}{r^3},$$

نتیجه می گیریم که $\mathbf{p}$ گرادیان تابع اسکالر

$$f(x, y, z) = \frac{c}{r} \quad (r > 0)$$

است؛ یعنی ∇f یک پتانسیل میدان گرانشی است.

با مشتقگیری از (۱۰) خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^5}.$$

چون مجموع سه عبارت سمت راست صفر است، بنابراین پتانسیل $f = c/r$ در معادله

$$(۱۱) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

صدق می کند. این معادله بامشتق جزئی مهم را معادله لاپلاس می نامند و ما آن را در فصول ۱۱ و ۱۸ به تفصیل بررسی خواهیم کرد. عبارت سمت چپ را لاپلاسی f می نامند و با $\nabla^2 f$ به Δf نشان می دهند. عملگر دیفرانسیل

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(بخوانید «مربع نابلا» یا «دلتا») را عملگر لاپلاس می نامند. با استفاده از این عملگر،

معادله (۱۱) را می‌توان بدصورت زیر نوشت:

$$\nabla^2 f = 0.$$

می‌توان نشان داد که میدان نیروی حاصل از هر توزیع جرمی توسط تابعی برداری داده می‌شود که برابر گرادیان تابع اسکالری مانند f است، و f در هر ناحیه از فضا که تهی از ماده باشد در معادله (۱۱) صدق می‌کند.

قوانین دیگری در فیزیک وجود دارند که بدصورت قانون گرانش نیوتن هستند. مثلاً در الکترواستاتیک، نیروی جاذبه (یا دافعه) بین دو ذره با بارهای غیرهمنام (یا همنام) Q_1 و Q_2 عبارت است از

$$p = k \frac{r}{r^3} \quad (\text{قانون کولن})$$

که در آن $k = Q_1 Q_2 / 4\pi\epsilon$ ، و ϵ ثابت دی‌الکتریک است. از این رو p گرادیان پتانسیل $f = -k/r$ است، و هرگاه $r > 0$ ، در معادله (۱۱) صدق می‌کند. ▲

هرگاه تابع برداری معرف یک میدان برداری برابر گرادیان تابعی اسکالر باشد، میدان را **پایستار** می‌نامند، زیرا، همان‌طور که در بخش ۱۲.۹ خواهیم دید، در چنین میدانی کار انجام شده برای منتقل کردن یک ذره از نقطه P_1 به نقطه P_2 در میدان فقط به نقاط P_1 و P_2 بستگی دارد و مستقل از مسیری است که ذره روی آن از P_1 به P_2 برده می‌شود. همچنین خواهیم دید که هر میدانی پایستار نیست.

مسائل بخش ۸.۸

گرادیان ∇f را بیابید، هرگاه

۱. $f = e^x \cos y$	۲. $f = 2x - y$
۳. $f = x^2 - y^2$	۴. $f = \sin x \cosh y$
۵. $f = \arctan(y/x)$	۶. $f = \ln(x^2 + y^2)$
۷. $f = yz + zx + xy$	۸. $f = xyz$
۹. $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$	۱۰. $f = x^2 + y^2 + z^2$
۱۱. $f = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$	۱۲. $f = e^{xyz}$

نمودار برخی از منحنیهای تراز ثابت f را رسم کنید. ∇f را بیابید و آن را با رسم

پیکانهایی در چند نقطه از منحنیهای تراز نشان دهید.

$$f = xy \quad .15 \quad f = y/x \quad .14 \quad f = 2x - 3y \quad .13$$

$$f = 4x^2 + 9y^2 \quad .18 \quad f = 9x^2 + y^2 \quad .17 \quad f = x^2 y^2 \quad .16$$

بردارهای نرمال بر منحنیهای صفحه‌ای داده شده را در نقطه $P: (x, y)$ بیابید و آنها را رسم کنید.

$$y = x^2, \quad P: (-2, 4) \quad .20 \quad y = x, \quad P: (3, 3) \quad .19$$

$$x^2 + y^2 = 25, \quad P: (3, 4) \quad .22 \quad y = 3x - 4, \quad P: (1, -1) \quad .21$$

$$3x^2 - 2y^2 = 1, \quad P: (1, 1) \quad .24 \quad y^2 = x^3, \quad P: (4, -8) \quad .23$$

بردارهای نرمال بر سطوح داده شده را در نقطه $P: (x, y, z)$ بیابید.

$$x + y + z = 0, \quad P: (1, 1, -2) \quad .25$$

$$2x + 3y - z = 1, \quad P: (1, 2, 7) \quad .26$$

$$z = x^2 + y^2, \quad P: (2, 2, 8) \quad .27$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad P: (2, -2, 0) \quad .28$$

$$x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 6, \quad P: (2, 0, 1) \quad .29$$

$$z = xy, \quad P: (3, -1, -3) \quad .30$$

تابع اسکالر f را طوری بیابید که $\nabla f = \mathbf{v}$.

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad .32 \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad .31$$

$$\mathbf{v} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad .34 \quad \mathbf{v} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad .33$$

$$\mathbf{v} = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j} \quad .36 \quad \mathbf{v} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) / (x^2 + y^2) \quad .35$$

$$\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} \text{ در جهت بردارهای } P: (2, 2) \text{ در نقطه } f = x^2 + y^2 \text{ مشتق جهتی} \quad .37$$

$\mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $-\mathbf{j}, -\mathbf{i} - \mathbf{j}, -\mathbf{i}, -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j}$ پیدا کنید.

در هر يك از حالات زیر مشتق جهتی f در P را در جهت $\mathbf{a}$ پیدا کنید.

$$f = x^2 - y^2, \quad P: (2, 3), \quad \mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad .38$$

$$f = 2x + 3y, \quad P: (0, 2), \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{j} \quad .39$$

$$f = x^2 + y^2, \quad P: (1, 2), \quad a = i - j \quad .۴۰$$

$$f = y/x, \quad P: (3, -1), \quad a = 9i - 3j \quad .۴۱$$

$$f = x + 2y - z, \quad P: (1, 4, 0), \quad a = j - k \quad .۴۲$$

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \quad P: (2, 0, 3), \quad a = 2i - j \quad .۴۳$$

۴۴. مشتقات جهتی تابع $f(x, y, z)$ در جهتهای x ، y و z چیست؟ در جهتهای منفی x ، y و z چیست؟

۴۵. فرض کنید r فاصله نقطه مشخص P از نقطه $Q: (x, y, z)$ باشد. سطوح تراز r را پیدا کنید. نشان دهید که ∇r برداری یکجهت P به Q است.

۴۶. نشان دهید که توابع ذکر شده در مسائل ۱ تا ۶ جوابهای معادله لاپلاس هستند.

گرادیان حاصل ضرب و غیره. در صورتی که توابع داده شده به اندازه کافی مشتقپذیر باشند، نشان دهید که

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad .۴۷$$

$$\nabla(f^n) = nf^{n-1}\nabla f \quad .۴۸$$

$$\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2 \quad .۴۹$$

$$\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g \quad .۵۰$$

۹.۸ تبدیل دستگاههای مختصات و مؤلفه‌های بردار

حال تبدیلاتی را مشخص می‌کنیم که یک دستگاه مختصات دکارتی را به دستگاه دکارتی دیگری می‌برند، و تغییر مؤلفه‌های یک بردار را در این تبدیل‌هایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مسئله، هم به دلائل نظری و هم به دلائل عملی، مسئله‌ای اساسی است.^۱ در این بحث به نتایج دوبخش بعدی نیاز پیدا خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم x ، y و z و x^* ، y^* و z^* دو دستگاه مختصات دکارتی دلخواه باشند. گیریم

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \quad \text{و} \quad (b) \quad v = v_1^* i^* + v_2^* j^* + v_3^* k^* \quad (۱)$$

۱. می‌خواهیم این بخش کاملاً مستقل از فصل ۷ باشد، اما خواننده‌ای که با ماتریسها آشنایی دارد تشخیص می‌دهد که بحث فعلی ما در مورد تبدیلات و ماتریسهای متعامد است و قضایای ۱ و ۲ از قضیه ۲ بخش ۱۴.۷ نتیجه می‌شوند.

نمایش بردار مفروض $\mathbf{v}$ در این دو دستگاه باشد؛ در اینجا $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ و $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$ به ترتیب بردارهای یک‌جهته‌های مثبت x, y, z و x^*, y^*, z^* هستند. می‌خواهیم مؤلفه‌های v_1^*, v_2^*, v_3^* را برحسب v_1, v_2, v_3 بیان کنیم و بالعکس. از (۱الف) به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1 \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} + v_2 \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} + v_3 \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}.$$

همین‌طور، از ضرب اسکالر $\mathbf{i}^*$ در (۱ب) به دست می‌آوریم

$$\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} + v_2^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} + v_3^* \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k}.$$

چون در سمت راست حاصل اولین ضرب اسکالر یک است و بقیه صفر،

$$\mathbf{i}^* \cdot \mathbf{v} = v_1^*.$$

از این رابطه و (۲) نتیجه می‌شود که

$$v_1^* = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} v_1 + \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} v_2 + \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k} v_3,$$

همین‌طور

$$v_2^* = \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{i} v_1 + \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j} v_2 + \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k} v_3,$$

$$v_3^* = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i} v_1 + \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j} v_2 + \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k} v_3.$$

پس مؤلفه‌های بردار $\mathbf{v}$ را در یک دستگاه مختصات دکارتی می‌توان به صورت توابعی خطی از مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ در دستگاه مختصات دیگر بیان کرد.

برای اینکه فرمولهای تبدیل را به شکل ساده‌تری درآوریم، نمادهای زیر را به کار می‌بریم:

$$(۳) \quad \begin{array}{lll} \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i} = c_{11} & \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j} = c_{12} & \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{k} = c_{13} \\ \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{i} = c_{21} & \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{j} = c_{22} & \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{k} = c_{23} \\ \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{i} = c_{31} & \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{j} = c_{32} & \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{k} = c_{33}. \end{array}$$

در این صورت داریم

$$(۴) \quad \begin{array}{l} v_1^* = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 \\ v_2^* = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 \\ v_3^* = c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3. \end{array}$$

با استفاده از علامت جمع $\sum$ ، می‌توان (۴) را به صورت خلاصه‌تری نوشت:

$$(۴') \quad v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl} v_l, \quad k=1, 2, 3.$$

بدین‌طورن مشابهی می‌توان فرمولهای معکوس زیر را به‌دست آورد:

$$(۵) \quad \begin{aligned} v_1 &= c_{11} v_1^* + c_{21} v_2^* + c_{31} v_3^* \\ v_2 &= c_{12} v_1^* + c_{22} v_2^* + c_{32} v_3^* \\ v_3 &= c_{13} v_1^* + c_{23} v_2^* + c_{33} v_3^*, \end{aligned}$$

خلاصه‌تر.

$$(۵') \quad v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^*, \quad l=1, 2, 3.$$

توجه کنید که (۴) و (۵) شامل همان ضرایب c_{kl} هستند، ولی محل این ضرایب (به‌غیر از c_{11}, c_{22}, c_{33}) همان نیست.

تعبیر هندسی ۹ ضریب c_{kl} بسیار ساده است. چون $\mathbf{i}$ و $\mathbf{i}^*$ بردارهای یکه هستند، از (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می‌شود که $c_{11} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{i}$ کسینوس زاویه بین محور x^* های مثبت و محور x های مثبت است. همین‌طور $c_{12} = \mathbf{i}^* \cdot \mathbf{j}$ کسینوس زاویه بین x^* های مثبت و محور y های مثبت است، والی آخر.

ضرایب c_{kl} در روابط مهمی که هم‌اکنون به‌دست خواهند آمد، صدق می‌کنند. بنا برآوردادن (۵') در (۴') می‌یابیم

$$(۶) \quad v_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{kl} v_l = \sum_{l=1}^3 c_{kl} \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^* = \sum_{m=1}^3 v_m^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} \right),$$

که در آن $k=1, 2, 3$. مثلاً هرگاه $k=1$ ، این رابطه چنین می‌شود

$$v_1^* = v_1^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{1l} \right) + v_2^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{2l} \right) + v_3^* \left(\sum_{l=1}^3 c_{1l} c_{3l} \right).$$

برای آنکه این رابطه به‌ازای هر بردار $\mathbf{v} = v_1^* \mathbf{i}^* + v_2^* \mathbf{j}^* + v_3^* \mathbf{k}^*$ برقرار باشد، باید مجموع اول و دو مجموع دیگر صفر باشند. به‌ازای $k=2$ و $k=3$ وضع به همین منوال است. در نتیجه (۶) به‌ازای هر بردار برقرار است اگر و تنها اگر

$$(۷) \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m). \end{cases}$$

با استفاده از نماد کرانکر^۱ با دلتای کرانکر

$$\delta_{km} = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 1 & (k = m) \end{cases}$$

می توان (۷) را به صورت زیر نوشت :

$$(۷)' \quad \sum_{l=1}^3 c_{kl} c_{ml} = \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, 3).$$

با تشکیل سه بردار با مؤلفه های

$$c_{11}, c_{12}, c_{13} \quad c_{21}, c_{22}, c_{23} \quad c_{31}, c_{32}, c_{33}$$

مشاهده می کنیم که طرف چپ (۷') برابر حاصل ضرب اسکالر دوتا از این بردارهاست، و بنا به (۷') این بردارها بردارهای یکتة متعامدند. از این رو حاصل ضرب سه گانه آنها یا دارای مقدار $+1$ است یا -1 ؛ یعنی

$$(۸) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

بدون اثبات می پذیریم که اگر هر دو دستگاه مختصات مورد بحث راستگرد (یا چپگرد) باشند، آنگاه مقدار دترمینان فوق برابر $+1$ خواهد بود. درحالی که اگر یکی از دستگاهها راستگرد و دیگری چپگرد باشد، مقدار دترمینان برابر -1 می شود. اکنون نتیجه را می توان به صورت زیر جمع بندی کرد.

قضیه ۱ (قانون تبدیل درمورد مؤلفه های بردار)

مؤلفه های v_1, v_2, v_3 و v_1^*, v_2^*, v_3^* بردار دلخواه v نسبت به دو دستگاه مختصات دکارتی دلخواه را می توان به وسیله روابط (۴) و (۵) از یکدیگر به دست آورد، در این روابط ضرایب c_{kl} از (۳) به دست می آیند و در (۷) و (۸) صدق می کنند.

با توجه به آنچه درمورد مؤلفه های بردار دیدیم، بلافاصله می توانیم فرمولهای مربوط به تبدیل يك دستگاه مختصات دکارتی به هر دستگاه مختصات دکارتی دیگر را به صورت زیر به دست آوریم.

هر گاه xyz و $x^*y^*z^*$ دستگاههای مختصاتی با مبدأ مشترك باشند، آنگاه v را مقید به مبدأ کرده آن را به صورت يك بردار مکانی با نقطه انتهایی Q تصور کرد. هر گاه

۱. لئوپولد کرانکر (Leopold Kronecker)، ۱۸۲۳-۱۸۹۱، ریاضیدان آلمانی که سهم

مهمی در پیشرفت جبر و نظریه اعداد دارد.

(x, y, z) و (x^*, y^*, z^*) مختصات Q نسبت به دودستگاه باشند، آنگاه در (۴) و (۵) داریم

$$v_1 = x, v_2 = y, v_3 = z \quad \text{و} \quad v_1^* = x^*, v_2^* = y^*, v_3^* = z^*$$

در نتیجه (۴) و (۵)، وقتی آنها را به جای v_1, v_2, v_3 و v_1^*, v_2^*, v_3^* بر حسب x, y, z و x^*, y^*, z^* بنویسیم، تبدیلات دودستگاه مختصات با مبدأ مشترک را نمایش می‌دهند.

کلیترین شکل تبدیل دستگاههای مختصات دکارتی به یکدیگر را می‌توان به تبدیلی از نوع بالا و یک انتقال تجزیه کرد. در انتقال، تفاوت بین مختصات مناظر، عددی ثابت است. با توجه به آنچه گفته شد داریم

قضیه ۲ (قانون تبدیل در مورد مختصات دکارتی)

تبدیل هر دستگاه مختصات دکارتی xyz به هر دستگاه مختصات دکارتی مانند $x^*y^*z^*$ به صورت زیر است:

$$x^* = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + b_1$$

$$y^* = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + b_2 \quad (9)$$

$$z^* = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + b_3$$

و بالعکس

$$x = c_{11}x^* + c_{12}y^* + c_{13}z^* + \bar{b}_1$$

$$y = c_{21}x^* + c_{22}y^* + c_{23}z^* + \bar{b}_2 \quad (10)$$

$$z = c_{31}x^* + c_{32}y^* + c_{33}z^* + \bar{b}_3$$

که ضرایب c_{ki} از (۳) به دست می‌آیند و باید در (۷) و (۸) صدق کنند و $b_1, b_2, b_3, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ اعدادی ثابتند.

کاربردهای مهم این قضایا در دو بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مسائل بخش ۹.۸

۱. کلیه ضرایبی را که در (۳') آمده‌اند تعبیر هندسی کنید.

ثابت‌های c_{ki} و b_k را طوری تعیین کنید که (۹) نمایش دهنده تبدیلهای زیر (مسائل ۲ تا ۷) باشد.

۲. انتقالی که مبدأ را به نقطه (۲، ۳، ۱) می‌برد

۳. انتقالی که نقطه $(0, -1, 2)$ را به نقطه $(2, 4, 1)$ می برد

۴. انعکاس نسبت به صفحه xy

۵. انعکاس نسبت به صفحه $y = x$

۶. دوران حول محور x ها به اندازه زاویه θ

۷. دورانی که محوره‌های x^* ، y^* ، z^* مثبت را به ترتیب بر محوره‌های x ، y ، z مثبت منطبق کند

۸. درمسائل ۲ تا ۷ مقادیر دترمینان (۸) چقدر است؟

۹. (۵) را به دست آورید.

۱۰. از (۱) بخش ۵.۶ نتیجه می شود که مقدار حاصل ضرب اسکالر مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی است. با استفاده از (۴) یا (۵) همین بخش، نشان دهید که این حکم از (۸) بخش ۵.۶ نیز نتیجه می شود.

۱۰.۸ دیورژانس میدان برداری

فرض می کنیم $\mathbf{v}(x, y, z)$ تابع برداری مشتق پذیری باشد، که در آن x ، y ، z مختصات دکارتی در فضا و v_1 ، v_2 ، v_3 مؤلفه های $\mathbf{v}$ هستند. در این صورت تابع

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

را **دیورژانس $\mathbf{v}$** یا **دیورژانس میدان برداری** تعریف شده با $\mathbf{v}$ می نامند. نماد رایج دیگر برای دیورژانس $\mathbf{v}$ نماد $\nabla \cdot \mathbf{v}$ است،

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \end{aligned}$$

که در آن «حاصل ضرب» $v_1 (\partial/\partial x)$ در حاصل ضرب نقطه ای ظاهر می شود به معنی مشتق جزئی $\partial v_1 / \partial x$ است و غیره، و این چیزی بیش از یک نمادگذاری ساده نیست. توجه کنید که $\nabla \cdot \mathbf{v}$ به معنی کمیت اسکالر $\operatorname{div} \mathbf{v}$ است و حال آنکه ∇f به معنی بردار $\operatorname{grad} f$ است، که در بخش ۸.۸ تعریف شد. مثلاً، اگر

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_z + v_x - v_{yz} \quad \text{آنگاه} \quad \mathbf{v} = v_{xz} \mathbf{i} + v_{xy} \mathbf{j} - v_z \mathbf{k}$$

بعداً خواهیم دید که دیورژانس معنی فیزیکی مهمی دارد. واضح است که مقادیر تابعی که مشخص کننده یک خاصیت فیزیکی یا هندسی است باید مستقل از انتخاب مختصات باشد؛ یعنی مقادیر آن باید نسبت به تبدیلات مختصات ناورد باشد.

قضیه ۱ (ناوردایی دیورژانس نسبت به تبدیل مختصات)

مقادیر $\operatorname{div} \mathbf{v}$ فقط به نقاط فضا (و البته به $\mathbf{v}$) بستگی دارد و مستقل از انتخاب مختصات (۱) است، به طوری که نسبت به دستگاه مختصات دکارتی x^* ، y^* ، z^* و مؤلفه‌های متناظر v_1^* ، v_2^* ، v_3^* از $\mathbf{v}$ تابع $\operatorname{div} \mathbf{v}$ چنین داده می‌شود:

$$(۲) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$$

اثبات. می‌خواهیم از (۱) به (۲) برسیم. برای اینکه فرمولها ساده‌تر شوند، نمادگذاری زیر را اختیار می‌کنیم:

$$x_3^* = z^* \quad , \quad x_2^* = y^* \quad , \quad x_1^* = x^* \quad \text{و} \quad x_3 = z \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_1 = x$$

در این صورت فرمول (۹) بخش ۹.۸ را می‌توان به صورت مختصر زیر نوشت:

$$(۳) \quad x_k^* = \sum_{l=1}^3 c_{lk} x_l + b_k \quad (k=1, 2, 3).$$

با توجه به قاعده زنجیری در مورد توابع چندمتغیره (بخش ۷.۸) نتیجه می‌شود

$$(۴) \quad \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} \frac{\partial x_k^*}{\partial x_l}.$$

در این مجموع، همان‌طور که از (۳) نتیجه می‌شود، داریم $\partial x_k^* / \partial x_l = c_{kl}$. با توجه به (۵') بخش ۹.۸،

$$v_l = \sum_{m=1}^3 c_{ml} v_m^*.$$

با مشتق‌گیری از این رابطه داریم

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_k^*} = \sum_{m=1}^3 c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}.$$

هرگاه این عبارات را در (۴) قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^r c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} c_{kl} \quad (l=1, 2, 3).$$

با جمع این سه فرمول داریم

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{l=1}^r \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^r \sum_{l=1}^r c_{kl} c_{ml} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*}.$$

بنا به (۷') بخش ۹.۸، این تساوی به صورت زیر درمی آید:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^r \delta_{km} \frac{\partial v_m^*}{\partial x_k^*} = \frac{\partial v_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial v_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial v_3^*}{\partial x_3^*}.$$

مشاهده می کنیم که عبارت طرف راست با عبارت سمت راست (۲) یکسان است، و بدین ترتیب اثبات به اتمام می رسد.

هرگاه تابع اسکالر $f(x, y, z)$ دوبار مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

و با توجه به (۱)،

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

عبارت سمت راست لاپلاسی f است (ر.ک. بخش ۸.۸). بنا براین

$$(5) \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f.$$

مثال ۱. نیروی گرانشی

نیروی گرانشی $\mathbf{p}$ که در مثال ۴ بخش ۸.۸ مورد بحث قرار گرفت برابر گرادیان تابع اسکالر $f(x, y, z) = c/r$ است، که در معادله لاپلاس $\nabla^2 f = 0$ صدق می کند. بر طبق (۵)، این بدان معنی است که $\operatorname{div} \mathbf{p} = 0$ (به ازای $r > 0$). ▲

مثال زیر که از هیدرودینامیک گرفته شده است، نشان دهنده اهمیت فیزیکی دیورژانس میدان برداری است. تعبیر فیزیکی دیورژانس با جزئیات بیشتر بعداً ارائه می شود (در بخش ۹.۹).

مثال ۲. حرکت سیال تراکمپذیر

حرکت یک سیال را در ناحیه ای مانند R که دارای چشمه یا چاهک نیست، یعنی در ناحیه ای

که در هیچ نقطه آن سیال تولید نمی‌شود و از بین نمی‌رود، در نظری می‌گیریم. در بحث ما، مفهوم حالت سیال، گاز و بخار را نیز شامل می‌شود. سیالات به معنی اخص کلمه، یامایعات، تراکم پذیری کمی دارند، که در اغلب مسائل می‌توان آن را نادیده گرفت. ولی تراکم پذیری گاز و بخار بسیار زیاد است، یعنی، چگالی آنها $\rho (= \text{جرم بر واحد حجم})$ به مختصات نقاط فضا بستگی دارد (و ممکن است بد زمان نیز بستگی داشته باشد). فرض می‌کنیم که سیال مورد نظر ما تراکم پذیر است.

جریانی را در نظری می‌گیریم که از مکعب مستطیل کوچک W ، که ابعاد آن Δx ، Δy ، Δz هستند و یالهایش موازی با محورها می‌گذرد (شکل ۱۶۹). حجم W برابر است با $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. فرض می‌کنیم

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

بردار سرعت سیال باشد. قرار می‌دهیم

$$(۶) \quad \mathbf{u} = \rho \mathbf{v} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

و فرض می‌کنیم $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ توابع برداری پیوسته مشتق پذیری از x ، y ، z و t باشند. حال با بررسی شاری که از وجه W می‌گذرد، یعنی با در نظر گرفتن کل جرمی که در واحد زمان از W خارج می‌شود. تغییر جرم داخل W را حساب می‌کنیم. جریانی را در نظر می‌گیریم که از وجه سمت چپ W که مساحت آن $\Delta x \Delta z$ است عبور می‌کند. مؤلفه‌های v_x و v_y موازی با صفحه‌اند و هیچ نقشی در این جریان ندارند. از این رو جرم سیالی که طی فاصله زمانی کوتاه Δt از طریق این صفحه وارد مکعب مستطیل می‌شود تقریباً برابر است با

$$(\rho v_x)_y \Delta x \Delta z \Delta t = (u_x)_y \Delta x \Delta z \Delta t$$

در این رابطه شاخص y نشان می‌دهد که عبارت به صفحه طرف چپ مربوط می‌شود. جرم سیالی که در همان فاصله زمانی از صفحه مقابل خارج می‌شود تقریباً برابر است با $(u_x)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t$ ، در اینجا هم شاخص $y + \Delta y$ نشان می‌دهد که عبارت به صفحه راست مربوط است. تفاضل

$$\Delta u_x \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \Delta V \Delta t \quad [\Delta u_x = (u_x)_{y+\Delta y} - (u_x)_y]$$

مقدار تقریبی جرم تلف شده است. با بررسی دو جهت صفحه موازی دیگر نیز دور رابطه مشابه نتیجه می‌شود. هر گاه این سه رابطه را با هم جمع کنیم، مقدار تقریبی جرم تلف شده کل

۱. معمول است که مقادیر کوچک را با Δ نشان می‌دهند؛ البته این Δ هیچ ارتباطی با لاپلاسی ندارد.

در W در فاصله زمانی Δt به دست می آید :

$$\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta y} + \frac{\Delta u_3}{\Delta z} \right) \Delta V \Delta t$$

که در آن

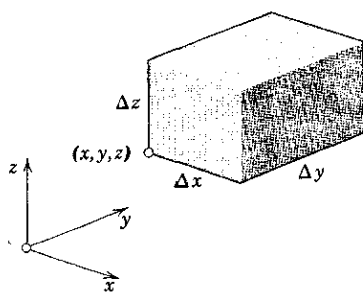
$$\Delta u_3 = (u_3)_{z+\Delta z} - (u_3)_z \quad \text{و} \quad \Delta u_1 = (u_1)_{x+\Delta x} - (u_1)_x$$

جرم تلف شده در W متناسب با نرخ تغییرات چگالی نسبت به زمان است و بنابراین برابر است با

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V \Delta t.$$

هر گاه دو عبارت را مساوی هم قرار دهیم و نتیجه را بر $\Delta V \Delta t$ تقسیم کنیم و فرض کنیم که Δx ، Δy ، Δz و Δt به سمت صفر میل می کنند، به دست می آوریم

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$



شکل ۱۶۹. تعبیر فیزیکی دیورژانس

یا

$$(۷) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

این رابطه مهم، شرط بقای جرم یا معادله پیوستگی جریان سیال تراکم پذیر نامیده می شود. هر گاه جریان پایرجا، یعنی مستقل از زمان، باشد آنگاه $\partial \rho / \partial t = 0$ ، و معادله پیوستگی چنین می شود:

$$(۸) \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

هرگاه سیال تراکم ناپذیر باشد، آنگاه چگالی ρ ثابت است و (۸) چنین می شود:

$$(۹) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

این رابطه به شرط تراکم ناپذیری معروف است و نشان می دهد که بین جریان خروجی و جریان ورودی يك عنصر حجم مفروض در هر لحظه موازنه برقرار است. روشن است که در استدلال ما این فرض که جریان دارای چشمه یا چاهکی نباشد ضروری است.

مسائل بخش ۱۰.۸

دیورژانس توابع برداری زیر را پیدا کنید.

$$۱. \quad x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \quad ۲. \quad y^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$$

$$۳. \quad (x^2 - 3y^2) \mathbf{i} \quad ۴. \quad x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - z \mathbf{k}$$

$$۵. \quad xyz(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad ۶. \quad x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$$

$$۷. \quad yz^2 \mathbf{j} - zx^2 \mathbf{k} \quad ۸. \quad (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

۹. آیا با توجه به (۱) اسکالر بودن $\operatorname{div} \mathbf{v}$ واضح است؟

فرمولهایی در مورد دیورژانس. نشان دهید که

$$۱۰. \quad \operatorname{div}(k \mathbf{v}) = k \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (k \text{ ثابت})$$

$$۱۱. \quad \operatorname{div}(f \mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$$

$$۱۲. \quad \operatorname{div}(f \nabla g) = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$$

$$۱۳. \quad \operatorname{div}(f \nabla g) - \operatorname{div}(g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

۱۴. نشان دهید که معادله پیوستگی (۷) را می توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0.$$

با استفاده از فرمولی که در مسئله ۱۱ به دست آمد، دیورژانس توابع زیر را بیابید.

$$۱۵. \quad e^x (\sin y \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j})$$

$$۱۶. \quad (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

۱۷. جریانی پابرجا را که بردار سرعت آن $\mathbf{v} = y \mathbf{i}$ است در نظر بگیرید. نشان دهید که

این جریان دارای خواص زیر است. تراکم ناپذیر است. ذراتی که در لحظه $t=0$

در مکعب محدود به صفحات $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، $y=1$ ، $z=0$ ، $z=1$

قرار دارند در لحظه $t = ۱$ حجمی برابر يك اشغال می کنند.

۱۸. جریانی پابرجا را که دارای سرعت $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ است در نظر می گیریم. نشان دهید هر يك از ذرات دارای بردار مکان $\mathbf{r}(t) = c_1 e^t \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}$ است، که c_1, c_2, c_3 ثابت هستند، جریانی تراکم ناپذیر است، و ذراتی که در $t = ۰$ مکعب ذکر شده در مسئله ۱۷ را پر می کنند در لحظه $t = ۱$ حجمی برابر e را اشغال می کنند.

مشتق جهتی $\text{div } \mathbf{u}$ را در نقطه $P(4, 4, 2)$ در جهت نرمال خارجی کره $x^2 + y^2 + z^2 = ۳۶$ پیدا کنید هر گاه

$$\mathbf{u} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k} \quad ۱۹. \quad \mathbf{u} = xz\mathbf{i} + yx\mathbf{j} + zy\mathbf{k} \quad ۲۰.$$

۱۱.۸ تاو میدان برداری

فرض می کنیم x, y, z دستگاه دکارتی راستگردی در فضا باشد و

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

تابع برداری مشتق پذیری باشد. آنگاه تابع

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ (۱) \quad &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

را تاو تابع برداری $\mathbf{v}$ یا تاو میدان برداری تعریف شده با $\mathbf{v}$ می نامند. در حالتی که دستگاه مختصات دکارتی چپگرد باشد، در جلوی نماد درمیان در (۱) علامت منها ظاهر می شود و این با (۵) بخش ۸.۶ مطابقت دارد.

در بعضی از کتابها به جای $\text{curl } \mathbf{v}$ از نماد $\text{rot } \mathbf{v}$ نیز استفاده می شود.

قضیه ۱. (ناوردایی تاو)

طول و جهت $\text{curl } \mathbf{v}$ مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا هستند.

اثبات این قضیه را در مسئله ۱۹ به عهده خواننده گذاشته ایم.

تاو در بسیاری از مسائل کاربردی نقش مهمی دارد. اهمیت آن با جزئیات بیشتر در بخش ۱۱.۹ بیان خواهد شد. در حال حاضر به ذکر چند مثال ساده و پاره‌ای نکات اکتفا می‌کنیم.

مثال ۱. دوران جسم صلب

در مثال ۳ بخش ۸.۶ مشاهده کردیم که دوران جسم صلب B حول محور مشخصی در فضا را می‌توان با برداری مانند $\mathbf{w}$ که اندازه آن ω است و جهت آن جهت محور دوران است بیان کرد؛ در اینجا ($\omega > 0$) تندی زاویه‌ای دوران است، جهت $\mathbf{w}$ طوری است که اگر در آن جهت نگاه کنیم دوران را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌بینیم. بر طبق (۷) بخش ۸.۶، میدان سرعت دوران را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

که $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه‌ای متحرک است نسبت به دستگاه مختصات دکارتی که مبدأ آن بر محور دوران واقع است. مختصات دکارتی راستگرد را طوری انتخاب می‌کنیم که $\mathbf{w} = \omega \mathbf{k}$ ؛ یعنی محور دوران را محور z ها می‌گیریم. آنگاه (ر. ک. مثال ۳ بخش ۱۰.۸)

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

و بنابراین

$$\text{curl } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k},$$

یعنی

$$(۲) \quad \text{curl } \mathbf{v} = 2\mathbf{w}.$$

پس، هرگاه جسم صلبی دوران کند، تاو میدان سرعت در جهت محور دوران است و اندازه آن مساوی دو برابر تندی زاویه‌ای دوران، ω ، است.

توجه کنید که نتیجه حاصل بستگی به انتخاب دستگاه مختصات دکارتی در فضا ندارد. ▲

در مورد هر تابع اسکالر f که دوبار پیوسته مشتق‌پذیر باشد داریم

$$(۳) \quad \text{curl}(\text{grad } f) = \mathbf{0},$$

درستی این رابطه را می توان با محاسبه مستقیم تحقیق کرد. از این دو هرگاه تابعی برداری برابر گرادیان تابعی اسکالر باشد، تاو آن، بردار صفر است. چون تاو دوران در یک میدان را مشخص می کند، اجمالا می توان گفت میدانهای گرادینایی که حرکتی را توصیف می کنند، غیر دورانی هستند. (هرگاه چنین میدانهایی در زمینه دیگری مطرح شوند، و میدان سرعت نباشند، آنها را معمولا پایستار می نامند؛ ر. ک. انتهای بخش ۸.۸).

مثال ۲

میدان گرانشی که در مثال ۴ بخش ۸.۸ مورد بحث قرار گرفت دارای تاوی برابر صفر است، $\text{curl } \mathbf{p} = 0$. میدانی که در مثال ۱ بخش حاضر معرفی شد غیر دورانی نیست. یک میدان سرعت دیگری که مشابه با این میدان است از حرکت قهوه در فنجان حاصل می شود.

مسائل بخش ۱۱.۸

در مسائل زیر $\text{curl } \mathbf{v}$ را بیابید اگر نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داشته باشیم

$$1. \quad \mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \quad 2. \quad \mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$$

$$3. \quad \mathbf{v} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k} \quad 4. \quad \mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

$$5. \quad \mathbf{v} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} \quad 6. \quad \mathbf{v} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

در مسائل زیر $\mathbf{v}$ ، سرعت حرکت پسابرجای سیالی، داده شده است. $\text{curl } \mathbf{v}$ را بیابید. آیا حرکت تراکم ناپذیر است؟ مسیر ذرات را پیدا کنید.

$$7. \quad \mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad 8. \quad \mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$$

$$9. \quad \mathbf{v} = y^2\mathbf{i}$$

فرمولهایی در مورد div ، curl و غیره. چنانچه مشتقگیری به اندازه کافی امکان داشته باشد، نشان دهید که

$$10. \quad \text{curl}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{curl } \mathbf{u} + \text{curl } \mathbf{v}$$

$$11. \quad \text{div}(\text{curl } \mathbf{v}) = 0$$

$$12. \quad \text{curl}(f\mathbf{v}) = \text{grad } f \times \mathbf{v} + f\text{curl } \mathbf{v}$$

$$13. \quad \text{curl}(\text{grad } f) = 0$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v} \quad .14$$

$$\operatorname{div}(g \nabla f \times f \nabla g) = 0 \quad .15$$

فرض می‌کنیم نسبت به یک دستگاه مختصات دکارتی راستگرد $\mathbf{u} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ و پیدا کنید $\mathbf{v} = x y \mathbf{i} + y z \mathbf{j} + z x \mathbf{k}$

$$\mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \times \operatorname{curl} \mathbf{u} \quad .17 \quad \operatorname{curl}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad .16$$

$$\cdot \operatorname{curl} \mathbf{p} = 0 \quad , \quad \text{در مثال ۲} \quad .18$$

$$\cdot \operatorname{curl} \mathbf{p} = 0 \quad , \quad \text{قضیه ۱ را ثابت کنید} \quad .19$$

۲۰. با استفاده از مسئله ۱۲ نشان دهید که به ازای بردار $\mathbf{w}$ که جهت آن ثابت است، هرگاه $\operatorname{curl} \mathbf{w} \neq 0$ ، آنگاه $\operatorname{curl} \mathbf{w}$ بر $\mathbf{w}$ عمود است.

انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح . قضایای انتگرال

در این فصل انتگرال روی خط و انتگرال روی سطح را تعریف می‌کنیم و چند کاربرد مهم آنها را که در مسائل فیزیکی و مهندسی به دفعات پیش می‌آیند بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که انتگرال روی خط تعمیمی طبیعی از انتگرال معین است، و انتگرال روی سطح تعمیمی است از انتگرال دو گانه.

انتگرال روی خط را می‌توان به انتگرال دو گانه (بخش ۴.۹) یا انتگرال سطح (بخش ۱۰.۹) تبدیل کرد، و بالعکس. انتگرال سه گانه را می‌توان به انتگرال سطح تبدیل کرد (بخش ۸.۹). این تبدیلهای از اهمیت عملی زیادی برخوردارند. فرمولهای گاوس، گرین، و استوکس که با این تبدیلهای متناظرند در بسیاری از کاربردها ابزار پر قدرتی محسوب می‌شوند. همچنین که در مسائل نظری هستند. خواهیم دید که این فرمولها سبب می‌شوند معنی فیزیکی دیورژانس و تاور تابع برداری را بهتر درک کنیم.

پیشنیاز این فصل: حساب انتگرال مقدماتی و فصل ۸.

بخشهایی که برای دوره‌های کوتاه‌تر قابل حذفند: ۶.۹، ۹.۹، ۱۱.۹.

مراجع: ضمیمه ۱، بخش C

جواب مسائل: ضمیمه ۲

۱.۹ انتگرال دوی خط

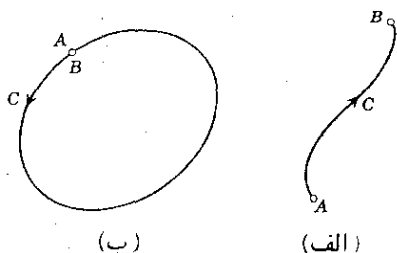
مفهوم انتگرال روی خط تعمیمی ساده و طبیعی از مفهوم انتگرال معین

$$(۱) \quad \int_a^b f(x) dx$$

است. در (۱) از a تا b در طول محور x ها انتگرال می گیریم و انتگرال f تابعی است که در هر نقطه بین a و b تعریف شده است. در مورد انتگرال روی خط در طول یک منحنی مانند C در فضا (یا در صفحه) انتگرال می گیریم و انتگرال f تابعی است که در هر نقطه C تعریف شده است. (از این رو شاید انتگرال دوی منحنی برای این کار اسم مناسبتری باشد ولی انتگرال دوی خط اصطلاحی استاندارد است.)

روش تعریف انتگرال روی خط کاملاً شبیه روش تعریف انتگرال معین است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آن آشنا شده ایم. به طریق زیر عمل می کنیم.

منحنی فضایی C را در نظر می گیریم. با انتخاب یکی از دو جهت در طول C به عنوان جهت مثبت منحنی C را جهت داد می کنیم. جهت مخالف را جهت منفی می نامیم. فرض می کنیم که با توجه به جهت انتخاب شده A معرف ابتدا و B معرف انتهای C باشد. (ممکن است این نقاط همان طور که در شکل ۱۷۵ ب دیده می شود برهم منطبق باشند، در چنین



شکل ۱۷۵. منحنی جهت دار

حالتی C بسته است.)

فرض می کنیم C یک منحنی ساده (بخش ۳.۸) بوده و دارای نمایشی به صورت

$$(۲) \quad \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

باشد (s طول قوس C است؛ ر. ک. بخش ۳.۸) به طوری که $\mathbf{r}(s)$ پیوسته بوده و دارای مشتق مرتبه اول پیوسته $\mathbf{r}'(s)$ ، که به ازای هر s متعلق به فاصله مورد نظر مخالف بردار صفر است، باشد. در این صورت C یک منحنی هموار است؛ یعنی منحنی C در هر نقطه از نقاط خود دارای مماسی یکتاست که جهت آن در طول منحنی به طور پیوسته تغییر می کند. فرض می کنیم $f(x, y, z)$ تابع مفروضی باشد که (لا اقل) در هر نقطه از C

تعریف شده و تابعی پیوسته از s باشد. C را به n قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم (شکل ۱۷۱)؛ فرض می‌کنیم $P_0 (= A)$ ، P_1 ، P_2 ، $\dots$ ، $P_n (= B)$ نقاط انتهایی این قسمتها و

$$s_0 (= a) < s_1 < s_2 < \dots < s_n (= b)$$

مقادیر s نظیر آنها باشند. حال روی هر قسمت نقطه دلخواهی، مثلا نقطه Q_1 را بین P_0 و P_1 ، نقطه Q_2 را بین P_1 و P_2 و غیره، انتخاب می‌کنیم. مقادیر f را در این نقاط Q_1 ، Q_2 ، $\dots$ ، Q_n در نظر گرفته و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$J_n = \sum_{m=1}^n f(x_m, y_m, z_m) \Delta s_m$$

که در آن x_m ، y_m ، z_m مختصات Q_m هستند و

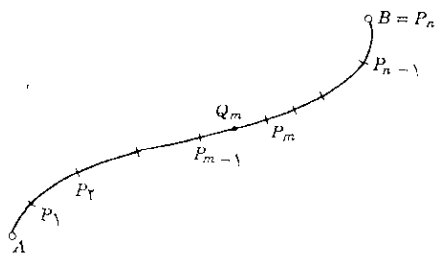
$$\Delta s_m = s_m - s_{m-1}.$$

این عمل را برای هر $n = 2, 3, \dots$ به روشی کاملاً مستقل انجام می‌دهیم اما به طوری که بزرگترین Δs_m ، وقتی که n به بینهایت میل کند، به سمت صفر میل کند. بدین طریق دنباله‌ای از اعداد حقیقی J_2 ، J_3 ، $\dots$ به دست می‌آوریم. حد این دنباله را انتگرال روی خط f در طول C از A تا B می‌نامند و به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\int_C f(x, y, z) ds.$$

منحنی C را مسیر انتگرالگیری می‌نامند.

چون، بنا به فرض، f پیوسته و C هموار است، حد مزبور وجود دارد و مستقل از



شکل ۱۷۱. تقسیم جزئی C

انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط Q_m است. در واقع، وضعیت نقطه P روی C با مقدار نظیر طول قوس s معین می‌شود؛ چون A و B به ترتیب نظیر $s=a$ و $s=b$ هستند، داریم

$$(۳) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds.$$

از این رو انتگرال روی خط مساوی با انتگرال معین طرف راست (۳) است که در مورد آن، همان‌طور که در حساب دیفرانسیل و انتگرال دیدیم، حکم بالا برقرار است.

فرض کلی

در این کتاب فرض می‌کنیم که همه مسیرهای مربوط به انتگرال روی خط هموار تکه‌ای است؛ یعنی هر مسیر متشکل از تعدادی متناهی منحنی هموار است. برای نشان دادن انتگرال روی خط، روی مسیر بسته C ، گاهی اوقات از علامت

$$\oint_C \quad \left(\int_C \text{ به جای} \right)$$

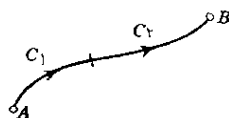
استفاده می‌شود.

از تعریف نتیجه می‌شود که خواص آشنای انتگرال معین معمولی در مورد انتگرال روی خط نیز صادقند:

$$(الف) \quad \int_C k f ds = k \int_C f ds \quad (k \text{ ثابت})$$

$$(۴) \quad \int_C (f+g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds \quad (ب)$$

$$(پ) \quad \int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$



شکل ۱۷۲. فرمول (۴ پ)

توجه کنید که در (۴ پ) مسیر C به دو قوس C_1 و C_2 که هم‌جهت با C هستند، تقسیم شده است (شکل ۱۷۲). در (۴ ب) جهت C برای هر سه انتگرال یکی است. هر گاه جهت

انتگرالگیری در طول C عوض شود، مقدار انتگرال در ۱- ضرب می‌شود. مثالهای مربوطه در بخشهای بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲.۹ محاسبه انتگرال روی خط

انتگرال روی خط را با تبدیل آن به انتگرال معین محاسبه می‌کنند. این کار بسیار ساده است و با نمایش دادن مسیره انتگرالگیری C به صورت زیر انجام می‌شود. اگر C به صورت

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad a \leq s \leq b$$

نمایش داده شود (s طول قوس C)، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم [ر.ک. (۳) بخش ۱۰.۹]

$$(۱) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds.$$

هرگاه C به صورت

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

نمایش داده شود (t پارامتر دلخواه)، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$(۲) \quad \int_C f(x, y, z) ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{ds}{dt} dt,$$

که در آن، بنابر (۳) بخش ۴.۸،

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

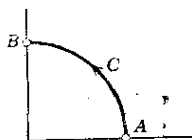
در اینجا فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t)$ و $\dot{\mathbf{r}}(t)$ پیوسته باشند و $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ، و این با فرض کلی که در بخش قبل داشتیم سازگار است.

حال فرمول (۲) را به دست می‌آوریم. به جای $\mathbf{r}(t)$ می‌نویسیم

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = x(t)\mathbf{i} + \bar{y}(t)\mathbf{j} + \bar{z}(t)\mathbf{k}.$$

از اینجا طول قوس $s(t)$ را به دست می‌آوریم. سال قرار می‌دهیم $\mathbf{r}(s(t)) = \bar{\mathbf{r}}(t)$ ؛ یعنی $x(s(t)) = \bar{x}(t)$ و غیره. آنگاه با استفاده از قاعده جایگذاری در مورد انتگرال معین، طرف راست (۱) چنین می‌شود:

$$\int_a^b f[x(s), y(s), z(s)] ds = \int_{t_0}^{t_1} f[\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)] \frac{ds}{dt} dt.$$



شکل ۱۷۳. مثال ۱

این انتگرال صرف نظر از اختلاف در علامتگذاری، همان انتگرال (۲) است. ▲

فرمول (۲) در بیشتر کاربردها مورد استفاده قرار می گیرد زیرا، در اغلب کاربردها، یا نمایش $\mathbf{r}(t)$ در دست است و یا به سادگی می توان آن را به دست آورد.

مثال ۱. کاربردی از (۱)

از $f(x, y) = 2xy^2$ روی قوس مستقیم شکل ۱۷۳ انتگرال بگیرید :

$$\mathbf{r}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j} \quad 0 \leq s \leq \pi/2.$$

نظریه اینکه $x(s) = \cos s$ و $y(s) = \sin s$ ؛ فرمول (۱) نتیجه می دهد

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y) ds &= \int_C 2xy^2 ds = \int_0^{\pi/2} 2 \cos s \sin^2 s ds \\ &= 2 \int_0^1 u^2 du = \frac{2}{3} \quad (\sin s = u). \end{aligned}$$

مثال ۲. کاربردی از (۲)

مطلوب است محاسبه $\int_C xy^2 ds$ ، که در آن C قطعه ای از خط $y = 2x$ است که در صفحه xy نقاط $A: (1, 2, 0)$ و $B: (1, 2, 0)$ را به هم وصل می کند. C را می توان به صورت

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} \quad -1 \leq t \leq 1$$

نمایش داد. آنگاه

۱. البته چون $x = t$ ، می توانیم به جای t بنویسیم x .

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \sqrt{5} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{i}} + 2\dot{\mathbf{j}}$$

روی C داریم $xy^2 = t(2t)^2 = 4t^3$ در نتیجه

$$\int_C xy^2 ds = 4\sqrt{5} \int_{-1}^1 t^3 dt = \frac{16}{\sqrt{5}} \approx 7.16.$$

مثال ۳. استفاده از (۲) در مورد يك منحنی فضایی

مطلوب است محاسبه $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds$ ، که در آن C قوسی از مارپیچ مستدیر (بخش ۳.۸)

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

از $A: (1, 0, 0)$ تا $B: (1, 0, 6\pi)$ است ، داریم $ds/dt = \sqrt{10}$ ، روی C

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = [\cos^2 t + \sin^2 t + (t)^2]^2 = (1 + t^2)^2.$$

چون C با فاصله $0 \leq t \leq 2\pi$ متناظر است، داریم

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^2 ds &= \sqrt{10} \int_0^{2\pi} (1 + t^2)^2 dt \\ &= \sqrt{10} \left[2\pi + 6(2\pi)^3 + \frac{1}{5}(2\pi)^5 \right] \approx 506400. \end{aligned}$$

▲

انتگرالهای روی خطی را که شامل توابعی هستند که از تجربه به دست می آیند، یا منجر به انتگرالهای معین پیچیده می شوند، می توان با استفاده از روشهای عددی انتگرالگیری محاسبه کرد.

در بسیاری از کاربردها انتگرالهای انتگرالهای روی خط به صورت زیر هستند:

$$(3) \quad g(x, y, z) \frac{dz}{ds} \quad \text{یا} \quad g(x, y, z) \frac{dy}{ds} \quad , \quad g(x, y, z) \frac{dx}{ds}$$

که در آنها dx/ds ، dy/ds و dz/ds مشتقهای توابعی هستند که در نمایش پارامتری مسیر انتگرالگیری ظاهر می شوند. در این صورت می توان نوشت

$$(4) \quad \int_C g(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds = \int_C g(x, y, z) dx ,$$

و همین طور در مورد دو حالت دیگر. برای مجموعههایی از این نوع انتگرالها که در طول

مرزی مانند C گرفته می‌شوند، نماد ساده شده زیر را به کار می‌بریم

$$(۵) \quad \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f dx + g dy + h dz).$$

با استفاده از نمایش C ، می‌توان دو متغیر از سه متغیر مستقل موجود در انتگرال را حذف کرد و سپس انتگرال معین حاصل را که متغیر مستقل باقی‌مانده متغیر انتگرالگیری آن است، محاسبه کرد.

مثال ۴. کاربردی از (۴) و (۵)

انتگرال روی خط $I = \int_C [x^2 y dx + (x - z) dy + x y z dz]$ را محاسبه کنید؛ در این انتگرال C قوسی از سهمی $y = x^2$ است که در صفحه $z = 2$ بین نقاط $A: (0, 0, 2)$ و $B: (1, 1, 2)$ قرار دارد (شکل ۱۷۴).

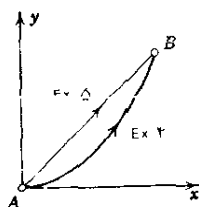
چون $y = x^2$ ، داریم $dy/dx = 2x$ یا $dy = 2x dx$. نظریه اینکه $z = 2$ ثابت است، نتیجه می‌شود که انتگرال جمله آخر انتگرال صفر است. بنابراین

$$I = \int_0^1 [x^2 x^2 dx + (x - 2) 2x dx] = \int_0^1 (x^4 + 2x^2 - 4x) dx = -\frac{17}{15}.$$

مثال ۵. انتگرالگیری روی مسیرهای مختلفی که نقاط انتهایی یکسان دارند

انتگرال روی خط I را که در مثال ۴ ذکر شد محاسبه کنید در صورتی که C این بار قسمتی از خط $y = x$ ، $z = 2$ باشد که بین نقاط $A: (0, 0, 2)$ و $B: (1, 1, 2)$ واقع است. در اینجا داریم $dy = dx$ ، بنابراین

$$I = \int_0^1 (x^2 + x - 2) dx = -\frac{5}{4}.$$



شکل ۱۷۴. مسیرهای مربوط به مثالهای ۴ و ۵

در مثالهای ۴ و ۵ انتگرالها و نقاط انتهایی مسیرها یکی هستند، ولی مقادیر I با هم اختلاف دارند. این موضوع نشان دهنده این واقعیت مهم است که در حالت کلی مقدار انتگرال روی خط يك تابع مفروض نه فقط به نقاط انتهایی بلکه به شکل هندسی مسیر انتگرالگیری نیز بستگی دارد. این مطلب اساسی را در بخش ۱۲.۹ بررسی خواهیم کرد. در بسیاری موارد، توابع f ، g و h در (۵) مؤلفه‌های v_1 ، v_2 ، v_3 ی تابع برداری

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$$

هستند. در آن صورت داریم

$$v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz = \left(v_1 \frac{dx}{ds} + v_2 \frac{dy}{ds} + v_3 \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

عبارت واقع در پرانتز برابر حاصل ضرب اسکالر بردار $\mathbf{v}$ در بردار مماس يکۀ

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k} \quad (\text{ر. ک. بخش ۵.۸})$$

است، که در آن $\mathbf{r}(s)$ مسیر انتگرالگیری C را نمایش می‌دهد. بنا براین،

$$(۶) \quad \int_C (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \int_C \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds.$$

این رابطه را گاهی به صورت زیر می‌نویسند:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

که در آن

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k},$$

اما باید متذکر شویم که این صرفاً يك نماد گذاری برای ساده کردن کار است.

مثال ۶. کار انجام شده توسط يك نیرو

ذره‌ای را که بر آن نیروی متغیر $\mathbf{p}$ وارد می‌شود در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم این ذره در طول مسیر فضایی مفروضی مانند C تغییر مکان دهد. در این صورت W ، کار انجام شده توسط $\mathbf{p}$ در این تغییر مکان، برابر انتگرال زیر است:

$$(۷) \quad W = \int_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r},$$

انتگرال در جهت تغییر مکان گرفته می‌شود. این تعریف کار از تعریفی که در مثال ۱، بخش ۵.۶ داشتیم، و از تعریف انتگرال روی خط به صورت حد يك مجموع نتیجه می‌شود. زمان t را می‌توان بدعنوان متغیر انتگرالگیری به کار برد. در این صورت

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt$$

که در آن $\mathbf{v}$ بردار سرعت است (ر. ک. بخش ۶.۸). از این رو انتگرال روی خط (۷) چنین می‌شود:

$$(۷') \quad W = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dt$$

در این انتگرال t_0 و t_1 مقادیر اولیه و نهایی t هستند. به علاوه، بنابر قانون دوم نیوتون (بخش ۶.۲) داریم

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}},$$

که در آن m جرم ذره است. هر گاه این مقدار $\mathbf{p}$ را در (۷') قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_0}^{t_1} m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dt \\ &= \frac{m}{2} |\mathbf{v}|^2 \Big|_{t_0}^{t_1}; \end{aligned}$$

یعنی کار انجام شده برابر افزایش انرژی جنبشی است. این یکی از قوانین اساسی مکانیک است.

مسائل بخش ۲.۹

اگر جهت C را طوری انتخاب کنیم که انتگرالگیری در جهت مثبت C انجام شود،

$$\int_C (x^2 + y^2) ds \quad \text{را محاسبه کنید:}$$

۱. روی مسیر $y = 2x$ از $(0, 0)$ تا $(1, 2)$

۲. روی مسیر $y = -x$ از $(1, -1)$ تا $(2, -2)$

۳. عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت، در طول دایره $x^2 + y^2 = 4$ از $(2, 0)$ تا $(0, 2)$

۴. در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ از $(1, 0)$ تا $(1, 0)$

۵. روی محور x ها از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ و سپس موازی با محور y ها از $(1, 0)$ تا $(1, 1)$

۶. روی محور y ها از $(0, 0)$ تا $(0, 1)$ و سپس موازی محور x ها از $(0, 1)$ تا $(1, 1)$

۷. مطلوب است محاسبه $\int_C x^{-1}(y+z) ds$ که در آن C قوسی از دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 0$ است که بین نقاط $(2, 0, 0)$ و $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ قرار دارد (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت).

مطلوب است محاسبه $\int_C (y^2 dx - 2x^2 dy)$

۸. در طول خط مستقیم از $(0, 2)$ تا $(1, 1)$

۹. در طول سهمی $y = x^2$ از $(0, 0)$ تا $(2, 4)$

۱۰. عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت در طول دایره $x^2 + y^2 = 1$ از $(1, 0)$ تا $(0, 1)$

مطلوب است محاسبه کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{p} = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ در تغییر مکان روی محور y ها از 0 تا 1

۱۲. روی سهمی $z = 2$ ، $y = 2x^2$ از $(0, 0, 2)$ تا $(1, 2, 2)$

۱۳. روی منحنی $x = 1$ ، $z = y^4$ از $(1, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$

۱۴. روی مسیر بسته متشکل از سه پاره‌خطی که از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ و از آنجا تا $(1, 1, 1)$ و سپس تا $(0, 0, 0)$ کشیده شده‌اند.

۱۵. روی خط راست $z = x$ ، $y = x$ از $(1, 1, 1)$ تا $(3, 3, 3)$

۱۶. روی منحنی $z = x^2$ ، $y = x$ از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$

۱۷. روی منحنی $z = 2$ ، $y = x^3$ از $(1, 1, 2)$ تا $(2, 8, 2)$

۱۸. فرض کنید $\mathbf{p}$ تابعی برداری باشد که در همه نقاط منحنی C تعریف شده است و فرض کنید $|\mathbf{p}|$ کراندار است، یعنی بر C ، $|\mathbf{p}| < M$ که در آن M عددی مثبت است. نشان دهید

$$(8) \quad \left| \int_C \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} \right| < Ml$$

که در آن l طول C است.

۱۹. با استفاده از (۸)، یک کران بالایی برای قدرمطلق W ، کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ وقتی این نیرو در طول خط مستقیم از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ ، تغییر مکان پیدا می کند، بیابید. با انتگرالگیری W را به دست آورید و نتایج را مقایسه کنید.

۴۰. با استفاده از قاعده دوزنقه ای (بخش ۶.۱۹)، $\int_C f(x, y) ds$ را در طول قطعه ای از خط مستقیم $y = x$ که در صفحه xy بین نقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ واقع است محاسبه کنید؛ در صورتی که $f(x, y)$ با مقادیر زیر داده شده باشد:

$$f(0, 0) = 120, f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = 125, f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 127, f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 128, f(1, 1) = 120.$$

۳.۹ انتگرالهای دو گانه

در قسمتهای بعدی کتاب به مفهوم انتگرال دو گانه نیاز خواهیم داشت. گرچه خواننده با انتگرالهای دو گانه در حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شده است، با این حال در اینجا مرور کوتاهی بر این مبحث داریم.

در انتگرال معین

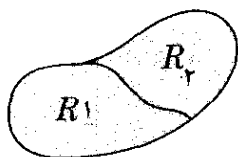
$$\int_a^b f(x) dx$$

انتگران عبارت است از تابع $f(x)$ که به ازای هر x در فاصله $a \leq x \leq b$ از محور x ها وجود دارد. در انتگرال دو گانه، انتگران تابعی مانند $f(x, y)$ است که به ازای هر (x, y) در ناحیه کراندار بسته R از صفحه xy داده شده است.

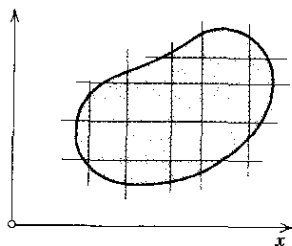
تعریف انتگرال دو گانه کاملاً شبیه تعریف انتگرال معین است. با رسم خطوط موازی محوره های x و y ناحیه R را به ناحیه های کوچکتر تقسیم می کنیم (شکل ۱۷۵). مستطیلهای داخل R را از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. در هر یک از این مستطیلهای نقطه ای، مثلاً (x_k, y_k) در مستطیل k ام، اختیار می کنیم و سپس مجموع زیر را تشکیل می دهیم:

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

۱. «بسته» بدان معنی است که کرانه قسمتی از ناحیه است و «کراندار» به این مفهوم است که ناحیه را می توان در دایره ای با شعاع به قدر کافی بزرگ محاط کرد.



شکل ۱۷۶. فرمول (۱)



شکل ۱۷۵. تقسیم جزئی R

که در آن ΔA_k مساحت مستطیل k ام است. این کار را به ازای مقادیر بزرگ صحیح و مثبت n به روشی کاملاً مستقل طوری انجام می‌دهیم که وقتی n به سمت بینهایت میل می‌کند بزرگترین قطر مستطیلهای به سمت صفر میل کند. بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد حقیقی $J_{n1}, J_{n2}, \dots, J_{nr}$ به دست می‌آوریم. با فرض آنکه $f(x, y)$ در R پیوسته باشد و R با تعدادی متناهی منحنی هموار محصور شده باشد (ر. ک. بخش ۱۰۹)، می‌توان نشان داد که این دنباله همگراست و حد آن مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط متناظر (x_k, y_k) است. این حد را **انتگرال دوگانه** $f(x, y)$ بر ناحیه R می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\iint_R f(x, y) dx dy.$$

از تعریف نتیجه می‌شود که انتگرالهای دوگانه دارای خواصی کاملاً مشابه با انتگرالهای معین هستند. فرض می‌کنیم f و g توابعی از x و y باشند که در ناحیه R تعریف شده و پیوسته‌اند، آنگاه

$$\iint_R k f dx dy = k \iint_R f dx dy \quad (k \text{ ثابت})$$

$$(۱) \quad \iint_R (f+g) dx dy = \iint_R f dx dy + \iint_R g dx dy$$

$$\iint_R f dx dy = \iint_{R_1} f dx dy + \iint_{R_2} f dx dy \quad (\text{ر. ک. شکل ۱۷۶})$$

به علاوه لاقفل يك نقطه (x_0, y_0) در R وجود دارد به طوری که

$$(۲) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) A,$$

که در آن A مساحت R است؛ این را قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای دوگانه می‌نامند.

انتگرالهای دوگانه بر ناحیه R را با دو انتگرالگیری متوالی می‌توان محاسبه کرد.

فرض می‌کنیم که R را بتوان با نامساویهایی به صورت

$$a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x)$$

نشان داد (شکل ۱۷۷) و به طوری که $y = g(x)$ ، $y = h(x)$ نمایش کرانه R باشد. از آنجا

$$(۳) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

نخست انتگرال درونی

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

را محاسبه می‌کنیم. در این انتگرال معین، x نقش یک پارامتر را بازی می‌کند و نتیجه انتگرالگیری تابعی از x ، مثلاً $F(x)$ ، است. سپس با انتگرالگیری از $F(x)$ نسبت به x از a تا b ، مقدار انتگرال دوگانه (۳) را به دست می‌آوریم. به همین نحو، هرگاه R را بتوان با نامساویهایی به صورت

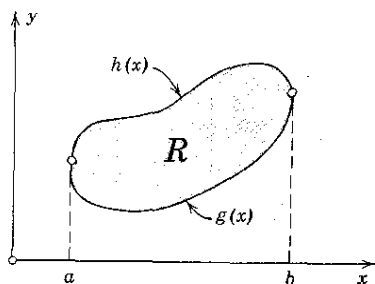
$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

بیان کرد (شکل ۱۷۸)، آنگاه به دست می‌آوریم

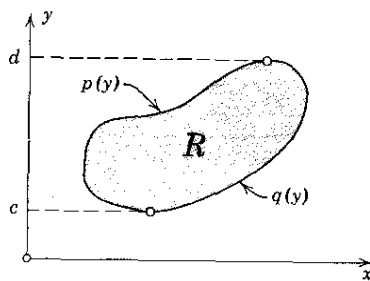
$$(۴) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right] dy;$$

اکنون نخست نسبت به x انتگرال می‌گیریم و سپس انتگرال نتیجه را که تابعی از y است، از c تا d محاسبه می‌کنیم.

اگر نتوانیم R را با نامساویهای فوق نمایش دهیم، ولی بتوانیم آن را به تعدادی متناهی نواحی جزئی که به ترتیب بالا قابل نمایش هستند تقسیم کنیم، آنگاه قادر خواهیم بود که از $f(x, y)$ به طور جداگانه بر هر یک از نواحی جزئی انتگرال بگیریم و نتایج را با هم جمع می‌کنیم؛ به این ترتیب مقدار انتگرال دوگانه $f(x, y)$ بر ناحیه R به دست می‌آید.



شکل ۱۷۸. محاسبه انتگرال دو گانه



شکل ۱۷۷. محاسبه انتگرال دو گانه

کاربردهای انتگرال دو گانه

انتگرالهای دو گانه دارای کاربردهای هندسی و فیزیکی گونا گونی هستند. مثلاً A ، مساحت R ، عبارت است از

$$A = \iint_R dx dy.$$

V ، حجم زیر رویه $z = f(x, y) (> 0)$ و بالای ناحیه R در صفحه xy ، عبارت است از (شکل ۱۷۹)

$$V = \iint_R f(x, y) dx dy,$$

زیرا جمله $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ در J_n ، پاراگراف سوم همین بخش، نمایش حجم مکعب مستطیلی با قاعده ΔA_k و ارتفاع $f(x_k, y_k)$ است.

فرض می کنیم $f(x, y)$ چگالی (جرم بر واحد سطح) توزیع جرم در صفحه xy باشد. آنگاه M ، جرم کل R ، عبارت است از

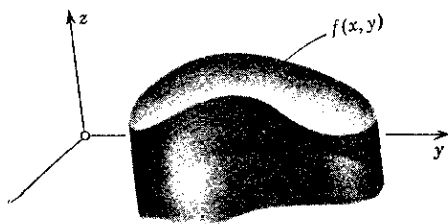
$$M = \iint_R f(x, y) dx dy$$

گرانیه جرم موجود در R دارای مختصات زیر است:

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R y f(x, y) dx dy \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R x f(x, y) dx dy$$

گشتاورهای لختی جرم R نسبت به محورهای x و y که با I_x و I_y نشان داده می شوند عبارتند از

$$I_x = \iint_R y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_R x^2 f(x, y) dx dy,$$



شکل ۱۷۹. انتگرال دوگانه به‌مثابه حجم

و گشتاورد قطبی لختی حول مبدأ برابر است با

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy.$$

مثال ۱. کاربردهای انتگرال دوگانه

فرض کنید $f(x, y) = 1$ چگالی جرم در ناحیه R که با $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ نمایش داده می‌شود (شکل ۱۸۰) باشد. گرانیگاه و گشتاورهای لختی I_x ، I_y ، I_0 را بیابید. جرم کل R عبارت است از

$$\begin{aligned} M &= \iint_R dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$(x = \sin \theta)$ ، که برابر با مساحت R است. مختصات گرانیگاه عبارتند از

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iint_R x dx dy = \frac{1}{\pi/4} \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right] dx = \frac{1}{\pi/4} \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} z^2 dz = \frac{1}{3\pi} \end{aligned}$$

$(\sqrt{1-x^2} = z)$ ، و به دلیل تقارن $\bar{y} = \bar{x}$. به علاوه

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{16}, \quad I_y = \frac{\pi}{16}, \quad I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi}{8} \approx 0.3927. \end{aligned}$$

روشی ساده‌تر برای محاسبه I_x در مثال ۲ ارائه خواهد شد.

اغلب اوقات لازم می شود که متغیرهای انتگرالگیری را در انتگرالهای دو گانه تغییر دهیم. در حساب دیفرانسیل و انتگرال خواندیم که در مورد انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) dx$$

متغیر انتگرالگیری جدید u را می توان با قرار دادن

$$x = x(u)$$

معرفی کرد، که در آن تابع $x(u)$ در فاصله ای مانند $\alpha \leq u \leq \beta$ است و داریم $x(\alpha) = a$ ، $x(\beta) = b$ [یا $x(\alpha) = b$ ، $x(\beta) = a$] و هنگامی که u بین α و β تغییر می کند $x(u)$ بین a و b تغییر می کند. بدین ترتیب داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(u)) \frac{dx}{du} du,$$

مثلا فرض می کنیم $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $a=0$ ، $b=1$ و قرار می دهیم $x = \sin u$. آنگاه

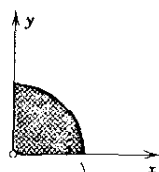
$$f[x(u)] = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u, \quad \frac{dx}{du} = \cos u, \quad \alpha=0, \quad \beta=\frac{\pi}{2},$$

و

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{\pi}{4}.$$

در مورد انتگرال دو گانه

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$



شکل ۱۸۰. مثال ۱

متغیرهای جدید انتگرالگیری u, v را می‌توان با قرار دادن

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

معرفی کرد، توابع $x(u, v)$ و $y(u, v)$ در ناحیه‌ای مانند R^* از صفحه uv پیوسته‌اند و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند؛ این تابع هر نقطه (u_0, v_0) از R^* را با نقطه‌ای مانند $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)]$ از R متناظر می‌کند و بالعکس و علاوه بر آن، ژاکوبی^۱

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در سراسر R^* یا مثبت است و یا منفی. در این صورت داریم

$$(۶) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv;$$

یعنی انتگران بر حسب u و v بیان شده و $dx dy$ با حاصل ضرب $du dv$ در قدر مطلق ژاکوبی عوض شده است. برای اثبات به مرجع [A۲]، ضمیمه ۱، مراجعه کنید.

مثلاً، مختصات قطبی r و θ را می‌توان با انتخاب

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

معرفی کرد. در این صورت

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

و

$$(۷) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

که در آن R^* ناحیه‌ای در صفحه $r\theta$ است متناظر با R که در صفحه xy واقع است.

۱. این دترمینان به افتخار ریاضیدان آلمانی کارل گوستاو ژاکوب (یا ژاکوبی) (Carl Gustav Jacob Jacobi)، ۱۸۵۴-۱۸۵۱، نامگذاری شده است؛ ژاکوبی سهم بسزایی در کارهای مربوط به توابع بیضوی، معادلات با مشتق جزئی، مکانیک و حساب بردشهادارد.

مثال ۲. انتگرال دوگانه درمختصات قطبی

با استفاده از (۷)، برای I_x که در مثال ۱ معرفی شد به دست می آوریم

$$I_x = \iint_R y^2 dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}.$$

مثال ۳. تغییر متغیر در انتگرال دوگانه

انتگرال دوگانه

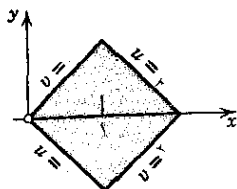
$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

را محاسبه کنید، ناحیه R مربعی است که در شکل ۱۸۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل R پی می بریم که می توان از تبدیل $x+y=u$ ، $x-y=v$ استفاده کرد. پس $y=(u-v)/2$ ، $x=(u+v)/2$ ، ژاکوبی برابر است با

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

R متناظر است با مربع $0 \leq u \leq 2$ ، $0 \leq v \leq 2$ ، و بنابراین

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{4} (u^2 + v^2) \frac{1}{2} du dv = \frac{\lambda}{3}.$$



شکل ۱۸۱. ناحیه مثال ۳

مسائل بخش ۳.۹

هر يك از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید و در هر مورد ناحیه انتگرالگیری را مشخص کنید.

$$1. \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dy dx \quad 2. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$3. \int_0^1 \int_{xy}^x (1 - xy) dy dx \quad 4. \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{1}{x}}^1 xy dx dy$$

$$5. \int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y dx dy \quad 6. \int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos \theta} r dr d\theta$$

حجم نواحی فضایی زیر را محاسبه کنید.

۷. چهاروجهی واقع بین صفحه $x + y + z = 1$ و صفحات مختصات در ناحیه اول

۸. چهاروجهی واقع بین صفحه $6x + 3y + 2z = 6$ و صفحات مختصات در ناحیه اول

۹. ناحیه محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + z^2 = 1$

۱۰. ناحیه محدود به سطوح $x = y^2$ ، $y = x^2$ و صفحات $z = 0$ ، $z = 3$

$\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، مختصات گرانیگاه جرمی با چگالی $f(x, y)$ را که در ناحیه R توزیع شده است بیابید، اگر داشته باشیم

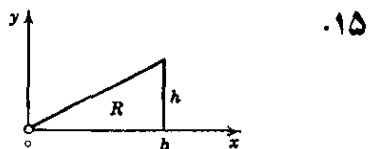
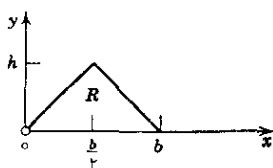
$$11. R, f(x, y) = 1: \text{مستطیل } 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq 2$$

$$12. R, f(x, y) = 1: \text{ناحیه } x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ واقع در ربع اول}$$

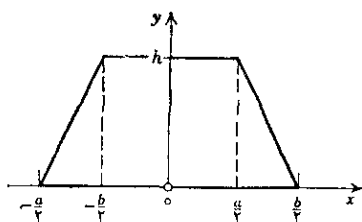
$$13. R, f(x, y) = xy: \text{مستطیل } 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4$$

$$14. R, f(x, y) = x^2 + y^2: \text{ناحیه } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ در ربع اول}$$

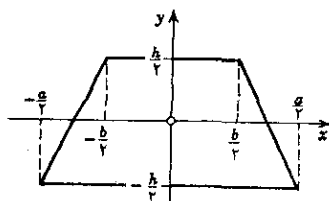
گشتاورهای I_x ، I_y ، I_o جرمی را که با چگالی $f(x, y) = 1$ در ناحیه‌های R (نشان داده شده در اشکال زیر) توزیع شده‌اند پیدا کنید (مهندسين در کاربردها به این گشتاورها نیاز دارند).



۰۱۸



۰۱۷



با استفاده از مختصات قطبی، $\iint_R f(x, y) dx dy$ را محاسبه کنید، اگر داشته باشیم

$$f = x + y, \quad R: x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \geq 0 \quad ۰۱۹$$

$$f = \cos(x^2 + y^2), \quad R: x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{4}, \quad x \geq 0 \quad ۰۲۰$$

$$f = (x^2 + y^2)^2, \quad R: x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0 \quad ۰۲۱$$

$$f = e^{-x^2 - y^2}, \quad R: x^2 + y^2 = 4 \text{ و } x^2 + y^2 = 1 \text{ طوق محدود به } ۰۲۲$$

در هر يك از تمرینات زیر ژاکوبی را بیابید و با يك استدلال هندسی آن را توجیه کنید.

$$۰۲۳ \text{ انتقال } y = v + b, \quad x = u + a$$

$$۰۲۴ \text{ انقباض } y = bv, \quad x = au$$

$$۰۲۵ \text{ دوران } y = u \sin \Phi + v \cos \Phi, \quad x = u \cos \Phi - v \sin \Phi$$

۴.۹ تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال روی خط

انتگرال دوگانه بر يك ناحیه صفحه ای را می توان به انتگرال روی خط بر کرانه ناحیه تبدیل کرد و بالعکس. این تبدیل در عمل جالب است زیرا ممکن است سبب آسانتر شدن محاسبه انتگرال گردد؛ همچنین در مسائل نظری به تبدیل يك نوع انتگرال به نوع دیگر کمک می کند. این تبدیل را می توان با توجه به قضیه اساسی زیر انجام داد.

قضیه گرین^۱ در صفحه (تبدیل انتگرال دوگانه به انتگرال روی خط و بالعکس)

فرض می کنیم R ناحیه ای کراندار و بسته در صفحه xy باشد که کرانه آن، C ، متشکل از تعدادی منتهای منحنی هموار است. گیریم $f(x, y)$ و $g(x, y)$ توابعی باشند که در تمام نقاط

۱. جرج گرین (George Green)، ۱۸۴۱-۱۹۷۳، ریاضیدان انگلیسی.

ناحیه‌ای شامل R پیوسته و دارای مشتقات جزئی $\partial g/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ پیوسته هستند. آنگاه داریم.

$$(۱) \quad \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (f dx + g dy);$$

انتگرالگیری در طول تمام C ، کرانه R ، انجام می‌گیرد و جهت آن طوری است که ناظری که در جهت انتگرالگیری حرکت می‌کند ناحیه R در طرف چپ خود می‌بیند (شکل ۱۸۲).

اثبات. نخست قضیه را در مورد ناحیه خاص R که می‌توان آن را به هر دو صورت

$$a \leq x \leq b, \quad u(x) \leq y \leq v(x)$$

و

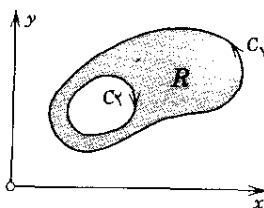
$$c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y)$$

نمایش داد (شکل ۱۸۳) ثابت می‌کنیم. با استفاده از (۴)، بخش ۳.۹، به دست می‌آوریم

$$(۲) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right] dx.$$

انتگرال داخلی گروه را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(x, y) \Big|_{y=u(x)}^{y=v(x)} = f[x, v(x)] - f[x, u(x)].$$



شکل ۱۸۲. ناحیه R که کرانه آن C

متشکل از دو قسمت C_1 و C_2 است؛ جهت

C_1 عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت

است، و حال آنکه جهت C_2 همان جهت

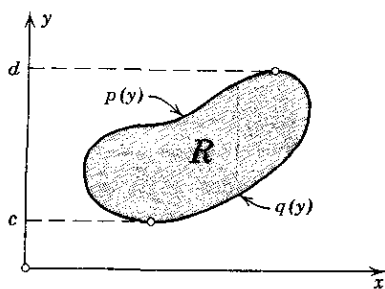
حرکت عقربه‌های ساعت است.

با قرار دادن نتیجه در رابطه (۲) به دست می‌آوریم

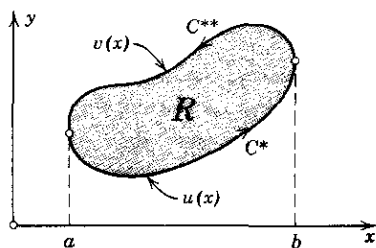
$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \int_a^b f[x, v(x)] dx - \int_a^b f[x, u(x)] dx \\ &= - \int_a^b f[x, u(x)] dx - \int_b^a f[x, v(x)] dx.\end{aligned}$$

چون $y = u(x)$ نمایش دهنده منحنی جهت دار C^* است (شکل ۱۸۳ الف) و $y = v(x)$ نمایش دهنده C^{**} است، انتگرالهای طرف راست را می توان به صورت انتگرالهای روی خط بر C^* و C^{**} نوشت، و بنابراین

$$\begin{aligned}(۳) \quad \iint_R \frac{\partial f}{\partial y} x dy &= - \int_{C^*} f(x, y) dx - \int_{C^{**}} f(x, y) dx \\ &= - \int_C f(x, y) dx.\end{aligned}$$



(ب)



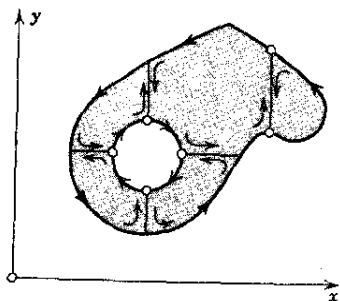
(الف)

شکل ۱۸۳. مثالی از يك ناحیه خاص برای قضیه گرین

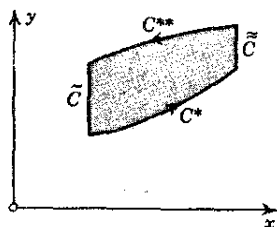
اگر قسمتهایی از C قطعاتی موازی محور y ها باشند (مانند $\tilde{C}$ و $\tilde{C}$ در شکل ۱۸۴)، آنگاه نتیجه مانند قبل است، زیرا انتگرالهای روی این قسمتها صفرند و آنها را می توان به انتگرالهای روی C^* و C^{**} افزود تا انتگرال روی تمام کرانه C به دست آید. همین طور با استفاده از (۴)، بخش ۳.۹، به دست می آوریم (شکل ۱۸۳ ب)

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial g}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial g}{\partial x} dx \right] dy \\ &= \int_c^d g[q(y), y] dy + \int_d^c g[p(y), y] dy \\ &= \int_C g(x, y) dy.\end{aligned}$$

از رابطهٔ اخیر و (۳)، فرمول (۱) نتیجه می‌شود و قضیه برای نواحی خاص به اثبات می‌رسد.



شکل ۱۸۵. اثبات قضیه گرین



شکل ۱۸۴. اثبات قضیه گرین

حال قضیه را برای ناحیه‌ای مانند R که خود ناحیه خاص نیست ولی قابل تقسیم به تعدادی متناهی از نواحی خاص است، ثابت می‌کنیم (شکل ۱۸۵). در این حالت قضیه را در مورد يك نواحی جزئی به کار می‌بریم و سپس نتایج را با هم جمع می‌کنیم؛ در این جمع اعضای طرف چپ برابر انتگرال بر R است و حال آنکه اعضای طرف راست برابر انتگرال روی خط C به علاوه انتگرال بر منحنیهای حاصل از تقسیم R به نواحی جزئی است. هر يك از انتگرالهای اخیر دوبار در دو جهت مختلف محاسبه می‌شوند و از این رو یکدیگر را حذف می‌کنند و آنچه باقی می‌ماند انتگرال بر C است.

بنابراین اثبات قضیه تمام ناحیه‌هایی را که در مسائل مهندسی پیش می‌آیند، در بر می‌گیرد. برای اثبات قضیه در مورد کلیترین ناحیه R که در شرایط قضیه صدق می‌کند، باید R را با ناحیه‌هایی از همان نوع که اخیراً مورد بحث قرار دادیم، تقریب بزنیم و سپس با گرفتن حد، قضیه را برای R ثابت کنیم. برای جزئیات بیشتر به مرجع [A۲] ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

قضیه گرین در ملاحظات بعدی ما از اهمیتی اساسی برخوردار است. در حال حاضر به بررسی چند مثال ساده و روشنگر می‌پردازیم.

مثال ۱. مساحت يك ناحیه صفحه‌ای به صورت انتگرال روی خط بر کرانه

در (۱)، فرض می‌کنیم $f = 0$ و $g = x$. آنگاه

$$\iint_R dx dy = \int_C x dy.$$

انتگرال طرف چپ برابر A ، مساحت R ، است. همین‌طور، فرض می‌کنیم $f = -y$

و $g=0$ ، آنگاه بنابر (۱)،

$$A = \iint_R dx dy = - \int_c y dx.$$

با جمع این دو فرمول به دست می آوریم

$$(۴) \quad A = \frac{1}{2} \int_c (x dy - y dx),$$

انتگرالگیری به همان روشی انجام می گیرد که در قضیه گرین شرح دادیم. این فرمول جالب مساحت ناحیه R را بر حسب انتگرال روی خط بر کرانه بیان می کند. این فرمول دارای کاربردهای مختلفی است؛ مثلاً اساس کار بعضی مساحت سنجها بر این فرمول استوار است؛ به مرجع [G۲۰]، ضمیمه ۱، مراجعه شود.

مثال ۲. مساحت ناحیه صفحه ای در مختصات قطبی

فرض می کنیم r و θ مختصات قطبی تعریف شده با $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ باشند. آنگاه

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

و (۴) به صورت زیر درمی آید:

$$(۵) \quad A = \frac{1}{2} \int_c r^2 d\theta.$$

این فرمول را از حساب دیفرانسیل و انتگرال به یاد می آوریم.

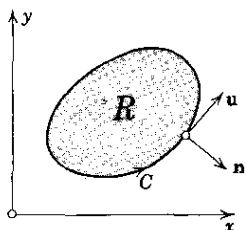
برای نشان دادن کاربرد θ از (۵)، دوار $r = a(1 - \cos \theta)$ را که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ در نظر می گیریم (شکل ۱۸۶). داریم

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2.$$

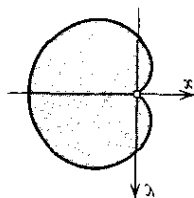
مثال ۳. تبدیل انتگرال دوگانه لاپلاسی يك تابع به انتگرال روی خط مشتق نرمال آن

فرض می کنیم $w(x, y)$ تابعی باشد که در قلمرویی از صفحه xy مشتمل بر ناحیه ای مانند R ، که مشخصات ذکر شده در قضیه گرین را دارد، پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد، قرار می دهیم $f = -\partial w / \partial y$ و $g = \partial w / \partial x$. آنگاه $\partial f / \partial y$ و $\partial g / \partial x$ در R پیوسته اند و

$$(۶) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w,$$



شکل ۱۸۷. مثال ۳



شکل ۱۸۶. دلوار

لاپلاسی w است (ر. ک. بخش ۸.۸). به علاوه، با استفاده از عبارات مربوط به f و g ، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} (۷) \quad \int_C (f dx + g dy) &= \int_C \left(f \frac{dx}{ds} + g \frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \int_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) ds, \end{aligned}$$

که در آن s طول قوس C است، و C مطابق شکل ۱۸۷ جهت دار شده است. انتگرال آخر را می توان به صورت حاصل ضرب نقطه ای (حاصل ضرب اسکالر) بردارهای زیر نوشت:

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j} \quad \text{و} \quad \text{grad } w = \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j}$$

یعنی

$$(۸) \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dy}{ds} = (\text{grad } w) \cdot \mathbf{n}.$$

بردار $\mathbf{n}$ بردار یککه نرمال بر C است، زیرا بردار

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}$$

(ر. ک. بخش ۵.۸) بردار یککه مماس بر C است و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. به علاوه، به آسانی دیده می شود که جهت $\mathbf{n}$ به طرف خارج C است. از این رو و بنابر (۵) بخش ۸.۸، نتیجه می شود که عبارت طرف راست (۸) برابر مشتق w در جهت نرمال خارجی بر C است. اگر این مشتق جهتی را با $\partial w / \partial n$ نشان دهیم و (۶) و (۷) را نیز به حساب آوریم، بنابر قضیه گرین فرمول انتگرال مفید زیر را به دست می آوریم:

$$(۹) \quad \iint_R \nabla^2 w \, dx \, dy = \int_C \frac{\partial w}{\partial n} \, ds.$$

دیگر کاربردهای مهم و نتایج قضیه گرین در صفحه، در بخشهای بعد مورد بررسی قرار می گیرند.

مسائل بخش ۴.۹

(الف) با محاسبه مستقیم؛ (ب) با استفاده از قضیه گرین، هر یک از انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱. C : کرانه مربع $-1 \leq x \leq 1$ ، $-1 \leq y \leq 1$ ، $\int_C (y^2 dx + x^2 dy)$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۲. C : کرانه مربع $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $\int_C (y dx - x dy)$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۳. $\int_C [(3x^2 + y) dx + 4y^2 dy]$
 C : کرانه مثلثی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, 2)$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۴. $\int_C [y^2 dx + (x^2 + 3y^2 x) dy]$
 C : کرانه ناحیه بین $y = x^2$ و $y = x$ ، که در آن $0 \leq x \leq 1$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

۵. $\int_C (-xy^2 dx + x^2 y dy)$
 C : کرانه ناحیه واقع در ربع اول محدود به $y = 1 - x^2$ (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)

با استفاده از قضیه گرین، انتگرال روی خط $\int_C (f dx + g dy)$ را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در حول مرز بسته داده شده C بیابید، $f dx + g dy$ برابر است با:

۶. C : کرانه مربع $0 \leq x \leq 2$ ، $0 \leq y \leq 2$ ، $(x - y) dx - x^2 dy$

۷. C : کرانه‌ای که در مسئله ۳ ذکر شد $(x^2 - 3y) dx + (x + \sin y) dy$

۸. $C : x^2 + 4y^2 = 4$ ، $(e^x - 3y) dx + (e^y + 6x) dy$

۹. C : کرانه مستطیل $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq x \leq \pi$ ، $(x^2 - \cosh y) dx + (y + \sin x) dy$

$$-y^3 dx + x^3 dy \quad C: x^2 + y^2 = 1 \quad ۱۰$$

$$(\cos x \sin y - xy) dx + \sin x \cos y dy \quad C: x^2 + y^2 = 1 \quad ۱۱$$

$$x^{-1} e^y dx + (e^y \ln x + yx) dy \quad ۱۲$$

C : کرانه ناحیه محدود به $y = 2$ و $y = x^2 + 1$

با استفاده از یکی از فرمولهایی که در مثال ۱ ذکر شد، مساحت هر يك از نواحی صفحه‌ای زیر را بیابید.

$$۱۳ \quad \text{درون بیضی } x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

$$۱۴ \quad \text{ناحیه‌ای از ربع اول که به } y = x, \quad y = 1/x, \quad \text{و } y = x/4 \text{ محدود است.}$$

$$۱۵ \quad \text{ناحیه محدود به } y = x^2 \text{ و } y = x + 2$$

با استفاده از (۹)، $\int_c \frac{\partial w}{\partial n} ds$ را محاسبه کنید، در صورتی که داشته باشیم

$$۱۶ \quad w = x^2 + 3y^2 \quad C: x^2 + y^2 = 4$$

$$۱۷ \quad w = 3x^2 y - y^3 \quad C: \text{کرانه‌ای که در مسئله ۲ ذکر شد}$$

$$۱۸ \quad w = e^x + e^y \quad C: \text{کرانه مستطیل } 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$۱۹ \quad \text{هر گاه } w(x, y) \text{ در ناحیه } R \text{ در معادله لاپلاس } \nabla^2 w = 0 \text{ صدق کند، نشان دهید که}$$

$$(۱۰) \quad \iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_c w \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

در اینجا $\partial w / \partial n$ مانند مثال ۳ تعریف می‌شود. دهنمایی. با روشی که در مثال ۳ داشتیم کار کنید.

با استفاده از (۱۰)، $\int_c w \frac{\partial w}{\partial n} ds$ را محاسبه کنید، در صورتی که داشته باشیم

$$۲۰ \quad w = x, \quad C \text{ مانند مسئله ۲} \quad ۲۱ \quad w = e^x \cos y, \quad C \text{ مانند مسئله ۲}$$

$$۲۲ \quad \text{با معرفی } \mathbf{v} = g\mathbf{i} - f\mathbf{j}, \text{ نشان دهید که فرمول قضیه گرین را می‌توان چنین نوشت:}$$

$$(۱۱) \quad \iint_R \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy = \int_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی منحنی C (شکل ۱۵۸) و s طول قوس C است.

۲۳. درستی (۱۱) را در صورتی که داشته باشیم $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، و C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ باشد، تحقیق کنید.

۲۴. نشان دهید فرمولی را که در قضیهٔ گرین دیدیم می‌توان چنین نوشت:

$$(12) \quad \iint_R (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, ds$$

که در آن $\mathbf{k}$ بردار یکهٔ عمود بر صفحهٔ xy ، $\mathbf{u}$ بردار یکهٔ مماس بر C ، و s طول قوس C است.

۲۵. درستی (۱۲) را در صورتی که داشته باشیم $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ، و C کرانهٔ مثلثی با رئوس $(0, 0)$ و $(1, 0)$ و $(1, 1)$ باشد، تحقیق کنید.

۵.۹ سطوحها

در بخش ۷.۹ انتگرالهای روی سطح را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور باید چند مطلب اساسی در مورد سطوحی که هم اکنون توصیفشان خواهیم کرد و با آوردن مثالهایی به تشریح آنها خواهیم پرداخت بدانیم. سطح دلخواه S را می‌توان به صورت

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

نمایش داد، که در آن x ، y و z مختصات دکارتی در فضا هستند. در این صورت گرادینان f نرمال بر S است (ر. ک. قضیهٔ ۲ بخش ۸.۸)، مشروط بر اینکه $\text{grad } f \neq 0$. در نتیجه برای اینکه S در هر نقطه دارای نرمال یکتایی باشد که جهت آن به طور پیوسته به نقاط S بستگی داشته باشد، لازم است که f دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد و در هر نقطه لااقل یکی از این مشتقات صفر نباشد. در این صورت بردار

$$(2) \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

بردار یکهٔ نرمال S است (و $-\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال دیگر آن).

مثال ۱. بردار یکهٔ نرمال

کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ دارای بردار یکهٔ نرمال زیر است:

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{y}{a} \mathbf{j} + \frac{z}{a} \mathbf{k}.$$

▲

گاهی بهتر است که نمایش جریح

$$(۳) \quad z = g(x, y)$$

را در مورد يك سطح مفروض به کار بریم. بدیهی است می توانیم با نوشتن $z - g(x, y) = 0$ يك نمایش ضمنی برای سطح به دست آوریم که در صورت کلی (۱) صدق کند.

سطح دلخواه S را می توان با نمایش پارامتری

$$(۴) \quad \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$$

نیز نشان داد. در اینجا u و v دو متغیر حقیقی مستقلند که پارامترهای نمایش نامیده می شوند و تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ به آنها بستگی دارد. $\mathbf{r}(u, v)$ بردار مکان نقاط S است؛ وقتی (u, v) در يك ناحیه R در صفحه uv تغییر کند، نوک این بردار نقاط مختلف سطح S را اختیار می کند. با هر نقطه (u_0, v_0) در R ، نقطه ای از S با بردار مکان $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ متناظر است. از این رو سطح S نقش ناحیه صفحه ای R است که در صفحه uv قرار دارد (ر. ک. شکل ۱۸۸). این شبیه نمایش پارامتری $\mathbf{r}(t)$ ی منحنی C است که در بخش ۳.۸ مورد بحث واقع شد، در آنجا C نقش يك پاره خط (فاصله ای بر محور t ها) بود؛ شکل ۱۸۸ را ببینید. تنها تفاوت اساسی این است که در مورد سطح به دو پارامتر نیازمندیم، در حالی که در مورد منحنی تنها به يك پارامتر احتیاج داشتیم.

برای آنکه بتوانیم کارمان را ادامه دهیم، باید سطوحی که به کار می بریم دارای خواص هندسی معینی باشند. بدین منظور فرض می کنیم که

مفروضات

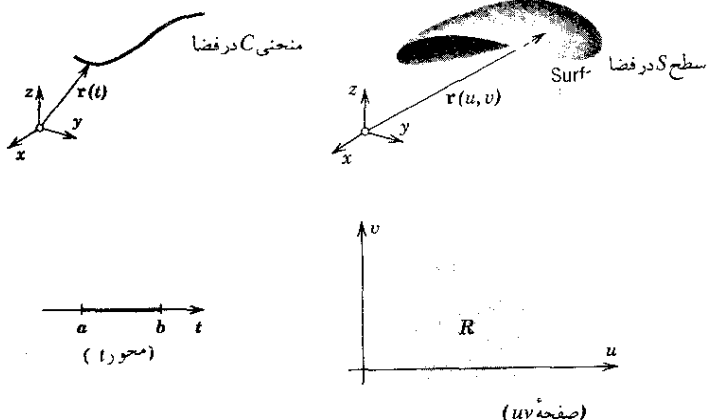
$\mathbf{r}(u, v)$ که در (۴) معرفی شد در حوزه ای از صفحه uv که شامل ناحیه R است، R همبند ساده و کراندار است (پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ است. به علاوه، در هر نقطه R

$$(۵) \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}.$$

بنابر تعریف، سطح هموار S سطحی است که دارای نرمال یکتایی است که جهت آن به طور پیوسته به نقاط S بستگی دارد.

۱. یعنی هر منحنی بسته در R را می توان بدون خارج شدن از R به طور پیوسته به هر نقطه از R فشرده کرد. «کراندار» در پانوش ۲ ی بخش ۳.۹ تشریح شده است.

در بخش بعد خواهیم دید که با مفروضات فوق، S ی که با $\mathbf{r}(u, v)$ نمایش داده می شود هموار است.



شکل ۱۸۸. نمایشهای پارامتری منحنی و سطح

سطح هموار تکه‌ای سطحی است که بتوان آن را به تعدادی مثناهی سطح هموار تقسیم کرد. مثلاً سطح مکعب هموار تکه‌ای است. کره سطحی هموار است.

مثال ۲. نمایش پارامتری کره

کره‌ای را که در مثال ۱ ذکر شد می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$(۶) \quad \mathbf{r}(u, v) = a \cos v \cos u \mathbf{i} + a \cos v \sin u \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$$

که در آن $0 \leq u \leq 2\pi$ ، $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$ ؛ یعنی

$$x = a \cos v \cos u, \quad y = a \cos v \sin u, \quad z = a \sin v.$$

منحنیهای ثابت u و ثابت v «نصف النهارها» و «مدارها»ی S هستند (ر. ک. شکل ۱۸۹). رابطه (۵) همه‌جا جز در «قطبها»ی $v = \pi/2$ و $v = -\pi/2$ برقرار است. نمایش (۶) در جغرافیا برای اندازه‌گیری طول و عرض جغرافیایی نقاط روی کره زمین به کار می‌رود.

مسائل بخش ۵.۹

هر یک از نمایشهای پارامتری زیر چه سطحی را نشان می‌دهد؟ منحنیهای مختصاتی (منحنیهای ثابت u و ثابت v) روی هر سطح کدامند؟

۱. $r = u i + v j$ ۲. $r = u \cos v i + u \sin v j$
۳. $r = \cos u i + \sin u j + v k$ ۴. $r = u i + v j + uv k$
۵. $r = v \cos u i + \sin u j + v k$ ۶. $r = u i + v j + (u+v) k$
۷. $r = u \cos v i + u \sin v j + u k$ ۸. $r = u \cos v i + u \sin v j + u^2 k$

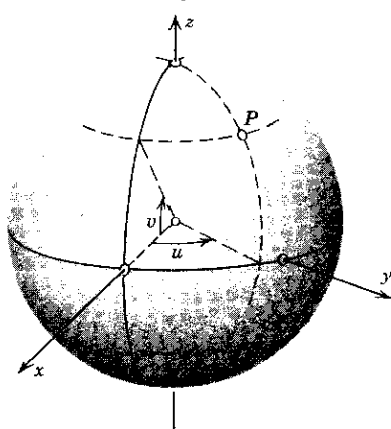
نمایش پارامتری سطوح زیر را بیابید.

۹. صفحه xz ۱۰. صفحه $z = x$
۱۱. صفحه $x + y + z = 1$ ۱۲. استوانه دوار $y^2 + z^2 = a^2$
۱۳. استوانه سهمی گون $z = x^2$ ۱۴. استوانه بیضی گون $y^2 + 9z^2 = 9$

هر یک از سطوحی زیر را به صورت (۱) نمایش دهید و شکل آنها را رسم کنید.

۱۵. بیضی وار $r = a \cos v \cos u i + b \cos v \sin u j + c \sin v k$

۱۶. سهمی وار بیضی گون $r = au \cos v i + bu \sin v j + u^2 k$



شکل ۱۸۹. نمایش پارامتری کره

۱۷. سهمی وار هذلولی گون $r = au \cosh v i + bu \sinh v j + u^2 k$
۱۸. هذلولی وار $r = a \sinh u \cos v i + b \sinh u \sin v j + c \cosh u k$
۱۹. بردار یکة نرمال سطحی را که در مسئله ۴ دیدیم بیابید.

۲۵. در مثال ۲، مسئله ۲، و مسئله ۷ نقاطی را بیابید که در آنها (۵) برقرار نباشد.

۶.۹ صفحه مماس. صورت بنیادی اول. مساحت

هرگاه سطح S به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ نمایش داده شده باشد، آنگاه هر منحنی واقع بر S را می توان با زوج تابع پیوسته

$$(۱) \quad u = g(t), \quad v = h(t)$$

از پارامتر حقیقی t نمایش داد.

مثال ۱. استوانه دوار و مارپیچ مستدیر

تابع برداری $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \mathbf{i} + a \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$ استوانه دوار S را که شعاع آن a است نمایش می دهد. معادلات $v = ct$ ، $u = t$ روی S مارپیچ مستدیری را نمایش می دهند. درواقع، با قرار دادن این معادلات در نمایش S به دست می آوریم (ر. ک. مثال ۳، بخش ۳.۸)

$$\mathbf{r}[u(t), v(t)] = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + ct \mathbf{k}$$

▲

فرض می کنیم S سطحی هموار باشد که با تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ نمایش داده شده است و فرض می کنیم C یک منحنی روی S باشد که نمایشی به صورت (۱) دارد؛ آنگاه C به عنوان یک منحنی فضایی با تابع برداری

$$(۲) \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[u(t), v(t)]$$

نمایش داده می شود. فرض می کنیم توابع (۱) هر دو دارای مشتقات اول پیوسته باشند به طوری که به ازای هر t دلخواه لااقل یکی از این مشتقات مخالف صفر باشد. آنگاه C در هر یک از نقاط خود دارای مماسی است که جهت آن به طور پیوسته به نقاط S بستگی دارد؛ بردار مماس بر C عبارت است از

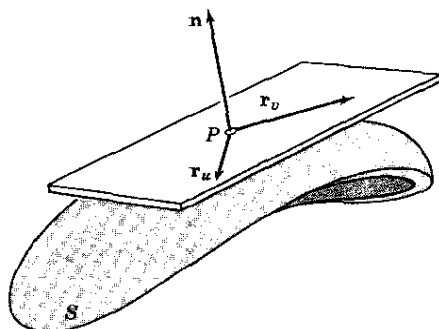
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}.$$

از (۵) بخش قبل نتیجه می شود که بردارهای $\mathbf{r}_u = \partial \mathbf{r} / \partial u$ و $\mathbf{r}_v = \partial \mathbf{r} / \partial v$ مستقل خطیند. پس این دو بردار صفحه ای را مشخص می کنند. این صفحه را صفحه مماس بر S در نقطه متناظر P از S می نامند و با $T(P)$ نشان می دهند. این صفحه در P بر S مماس است. از (۲) نتیجه می شود که $T(P)$ مماسهای (در نقطه P) تمام منحنیهایی

را که روی S قرار دارند و از P می‌گذرند ددیر می‌گردد (بخش ۸.۸ را نیز ببینید).
خط راستی که از P می‌گذرد و بر $T(P)$ عمود است نرمال بر S در P نام دارد. چون بردارهای $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$ در $T(P)$ واقعند، بردار یکت (شکل ۱۹۰)

(۳)

$$n = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$



شکل ۱۹۰. صفحه مماس و بردار نرمال

عمود بر $T(P)$ است این بردار را بردار یکت نرمال بر S در P می‌نامند. جهت این بردار بستگی به انتخاب مختصات u و v دارد؛ تبدیل $u = -\bar{u}$ ، $v = \bar{v}$ یا هر تبدیل دیگری که ژاکوبی (ر.ک. بخش ۳.۹) آن منفی باشد، جهت $\mathbf{n}$ را عوض می‌کند. حال عنصر خطی منحنی C را که خود به صورت (۱) نمایش داده شده است و روی سطح S ، که با $\mathbf{r}(u, v)$ نموده شده است قرار دارد تعیین می‌کنیم. داریم

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,$$

و، بنابر (۴) بخش ۴.۸،

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \\ &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v du dv + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v dv^2. \end{aligned}$$

هر گاه از علامتگذاری متعارف

$$(۴) \quad E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$$

استفاده کنیم، عبارت بالا چنین می‌شود:

$$(۵) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

این صورت دیفرانسیلی درجه دوم را صورت بنیادی اول S می‌نامند.

مثال ۲. صورت بنیادی اول در مختصات قطبی

تابع برداری

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j}$$

نمایش صفحه xy است، u و v مختصات قطبی هستند. با مشتقگیری به دست می آوریم

$$\mathbf{r}_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}.$$

از این رو $E=1$ و $F=0$ و $G=u^2$ ، و صورت بنیادی اول متناظر در مختصات قطبی $u=\rho$ و $v=\theta$ عبارت است از

$$(۶) \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

▲

هم اکنون خواهیم دید که صورت بنیادی اول اهمیتی اساسی دارد زیرا ما را قادر می سازد که طولها، زوایای بین منحنیها و مساحتها را روی سطح S را اندازه گیری کنیم.

طول. از (۱) و (۴) بخش ۴.۸ و (۵) همین بخش نتیجه می شود طول منحنی

$$C: u(t), v(t), \quad a \leq t \leq b,$$

که روی سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ قرار دارد چنین است:

$$(۷) \quad l = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}} dt = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$

زاویه. دو منحنی

$$C_\gamma: u=p(t), v=q(t) \quad \text{و} \quad C_\gamma: u=g(t), v=h(t)$$

را که روی سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ قرار دارند و یکدیگر را در نقطه P قطع می کنند در نظر می گیریم. بردارهای

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}[g(t), h(t)] = \mathbf{r}_u \dot{g} + \mathbf{r}_v \dot{h}$$

و

$$\mathbf{b} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}[p(t), q(t)] = \mathbf{r}_u \dot{p} + \mathbf{r}_v \dot{q}$$

در نقطه P به ترتیب بر C_γ و C_γ مماسند. زاویه بین C_γ و C_γ در نقطه تقاطع P را γ ،

زاویه بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ، تعریف می‌کنیم، و بنا بر (۳) بخش ۵.۶ می‌نویسیم

$$(۸) \quad \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

که در آن

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{r}_u \dot{g} + \mathbf{r}_v \dot{h}) \cdot (\mathbf{r}_u \dot{p} + \mathbf{r}_v \dot{q}) = E \dot{g} \dot{p} + F (\dot{g} \dot{q} + \dot{h} \dot{p}) + G \dot{h} \dot{q}$$

و همین‌طور

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{E \dot{g}^2 + 2F \dot{g} \dot{h} + G \dot{h}^2}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{E \dot{p}^2 + 2F \dot{p} \dot{q} + G \dot{q}^2}.$$

این نتیجه مهم نشان می‌دهد که زاویه بین دو منحنی متقاطع واقع بر یک سطح را می‌توان بر حسب E ، F ، G و مشتق‌های توابع نمایش دهنده این منحنیها، که در نقطه تقاطع محاسبه می‌شوند، بیان کرد.

مساحت A ، مساحت سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ ، با انتگرال دو گانه

$$(۹) \quad A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

روی ناحیه R از صفحه uv که متناظر با سطح است تعریف می‌شود. عبارت

$$(۱۰) \quad dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

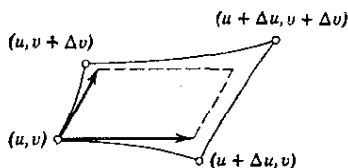
را عنصر مساحت می‌نامند.

فرمول (۹) ناشی از این واقعیت است که، بر طبق تعریف حاصل ضرب برداری، مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک نشان داده شده در شکل ۱۹۱ عبارت است از

$$\Delta A = |\mathbf{r}_u \Delta u \times \mathbf{r}_v \Delta v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v.$$

انتگرال (۹) از تقسیم کردن S به قسمت‌های جزئی $S_1, \dots, S_n$ و تقریب زدن هر قسمت S_k به وسیله بخشی از صفحه مماس بر S در نقطه‌ای از S_k ، و تشکیل دادن مجموع همه مساحت‌های تقریبی، به دست می‌آید. این عمل به‌ازای هر $n = 1, 2, \dots$ طوری انجام می‌گیرد که ابعاد بزرگترین S_k وقتی که n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل کنند. حد این مجموعه‌ها عبارت از انتگرال (۹) است. برای جزئیات بیشتر به مرجع [C۸] ضمیمه ۱ مراجعه کنید.

درستی این ادعا را که صورت بنیادی اول ما را قادر به اندازه‌گیری مساحت می‌سازد، به راحتی می‌توان تحقیق کرد. کل کاری که باید انجام دهیم این است که (۹) را بر حسب



شکل ۱۹۱. مساحت

E ، F ، G بیان کنیم. بنابر (۵) بخش ۷.۶ و (۴) همین بخش، به دست می آوریم

$$(۱۱) \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2.$$

از این رو می توان (۹) را به صورت

$$(۹^*) \quad A = \iint_R \sqrt{EG - F^2} du dv$$

و (۱.۵) را به صورت

$$(۱۰^*) \quad dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

نوشت.

مثال ۳. چنبره

تابع برداری

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sin u \mathbf{j} + b \sin v \mathbf{k} \quad (a > b > 0)$$

یک چنبره (شکل ۱۹۲) را نمایش می دهد. این سطح از دوران دایره ای مانند C حول خط مستقیم مشخصی مانند A به وجود می آید، لازم است که در طول دوران، صفحه C همواره از A بگذرد، در ضمن شرط می کنیم که A و C متقاطع نباشند. با استفاده از (۴) داریم

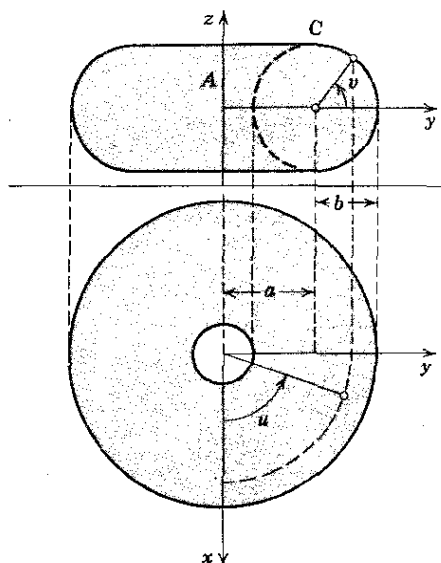
$$E = (a + b \cos v)^2 \quad F = 0, \quad G = b^2.$$

از این رو

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = b^2(a + b \cos v)^2,$$

و مساحت کل چنبره عبارت است از

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos v) du dv = 4\pi^2 ab.$$



شکل ۱۹۲. چنبره

مساحت سطح $z = g(x, y)$ فرض می‌کنیم که سطح S با نمایش

$$z = g(x, y)$$

معین شده باشد. آنگاه می‌توان فرض کرد $x = u$ و $y = v$ ، و نمایش سطح فوق را به صورت پارامتری نوشت:

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + g(u, v)\mathbf{k}.$$

در این صورت مشتقات جزئی $\mathbf{r}$ نسبت به u و v عبارتند از

$$(۱۲) \quad \mathbf{r}_u = \mathbf{i} + g_u\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + g_v\mathbf{k}.$$

در نتیجه، ضرایب صورت بنیادی اول عبارتند از

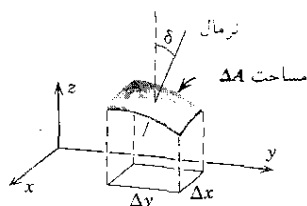
$$E = 1 + g_u^2, \quad F = g_u g_v, \quad G = 1 + g_v^2.$$

و بنابراین

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = EG - F^2 = 1 + g_u^2 + g_v^2.$$

چون $u = x$ و $v = y$ ، انتگرال (۹) به صورت

$$(۹') \quad A = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$



شکل ۱۹۳. توضیح (۱۰")

درمی آید، که در آن $\bar{S}$ تصویر قائم S در صفحه xy است. بدیهی است که

$$(۱۰') \quad dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

برای استفاده‌های بعدی نشان می‌دهیم که این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$(۱۰'') \quad dA = \sec \delta \, dx dy$$

که در آن δ زاویه حاده بین محور z ها و نرمال (بدون جهت) بر S است. شکل ۱۹۳ نمایش‌دهنده استدلال هندسی زیر است: يك «متوازی‌الاضلاع» كوچك روی سطح که مساحتش ΔA باشد بر روی مستطیل كوچكی به مساحت $\bar{\Delta A} = \Delta A \cos \delta$ در صفحه xy تصویر می‌شود، و چون داریم $\bar{\Delta A} = \Delta x \Delta y$ ، به دست می‌آوریم

$$\Delta A = \bar{\Delta A} \sec \delta = \sec \delta \, \Delta x \Delta y.$$

در زیر اثباتی برای (۱۰'') ارائه می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ با استفاده از (۱۲) و با توجه به اینکه $u = x$ ، $v = y$ ، از تعریف حاصل ضرب برداری به دست می‌آوریم

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}$$

پس $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 1$. از طرف دیگر، $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{a}| \cos \delta^*$ ، که در آن δ^* زاویه بین $\mathbf{a}$ و جهت مثبت محور z ها است؛ بنابراین $|\mathbf{a}| \cos \delta^* = 1$. بدیهی است که $\cos \delta^* > 0$ و در نتیجه $\delta^* < \pi/2$ ، یعنی δ^* زاویه‌ای است حاده و بنابراین برابر δ است. بدین ترتیب داریم

$$|\mathbf{a}| \cos \delta = 1 \quad \text{یا} \quad \sec \delta = |\mathbf{a}| \quad \text{و} \quad \left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$$

به این ترتیب (۱۰'') به اثبات می‌رسد.

مسائل بخش ۹.۶

۱. نشان دهید که صفحه مماس بر سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ در نقطه P را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\mathbf{r}^*(p, q) = \mathbf{r} + p\mathbf{r}_u + q\mathbf{r}_v \quad (\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \text{ بردارهای مربوط به نقطه } P \text{ هستند.})$$

و با استفاده از حاصل ضرب سه گانه (بخش ۹.۶)

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_u \quad \mathbf{r}_v) = 0.$$

نمایشی برای صفحه مماس و بردار یکه نرمال سطح S در نقطه P بیابید در صورتی که S به یکی از صورتهای زیر باشد.

$$f(x, y, z) = 0 \quad \quad \quad z = g(x, y) \quad \quad \quad ۲. \quad \quad \quad ۳.$$

۴. فرض می‌کنیم $\mathbf{n}(u, v)$ بردار یکه نرمال (۳) بر سطح $S: \mathbf{r}(u, v)$ باشد. فرض کنید $\tilde{u} = -u$ ، $\tilde{v} = v$ و نشان دهید که بردار یکه نرمال متناظر با نمایش حاصل عبارت از $-\mathbf{n}(u, v)$ است.

نمایشی برای صفحه مماس به هر یک از سطوحهای زیر در $P_0: (x_0, y_0, z_0)$ پیدا کنید.

$$z = xy, \quad P_0: (1, 1, 1) \quad \quad \quad ۵.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad P_0: (3, 4, 0) \quad \quad \quad ۶.$$

$$z = x^2, \quad P_0: (2, 1, 4) \quad \quad \quad ۷.$$

$$x^2 + y^2 = 8, \quad P_0: (2, 2, 3) \quad \quad \quad ۸.$$

$$z = x^2 + y^2, \quad P_0: (2, 1, 5) \quad \quad \quad ۹.$$

$$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20, \quad P_0: (1, 2, 3) \quad \quad \quad ۱۰.$$

صورت بنیادی اول سطوحهای زیر را بیابید.

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k} \quad \quad \quad ۱۲ \quad \quad \quad \mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad \quad \quad ۱۱.$$

$$۱۳. \text{ کره } (۶), \text{ بخش } ۵.۹ \quad \quad \quad ۱۴. \text{ چنبره مثال } ۳$$

$$\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k} \quad \quad \quad ۱۶ \quad \quad \quad \mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k} \quad \quad \quad ۱۵.$$

۱۷. (مختصات متعامد) نشان دهید منحنیهای مختصاتی ثابت u و ثابت v که بر سطح $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ واقعند وقتی و تنها وقتی یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می‌کنند که

داشته باشیم $F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$.

۱۸. تحت چه شرایطی منحنیهای مختصاتی ثابت p و ثابت q که در جواب مسئله ۱ ظاهر شدند یکدیگر را با زاویه قائمه قطع می کنند.

با استفاده از (۹)، مساحت سطحهای زیر را پیدا کنید.

۱۹. $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$. کره (۶)، بخش ۵.۹.

۲۱. $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. $z^2 = x^2 + y^2$, $-1 \leq z \leq 1$.

۲۳. (قضیه پاپوس^۱) نشان دهید که در مثال ۳ مساحت A را می توان به کمک قضیه پاپوس به دست آورد، بنا به این قضیه مساحت يك سطح دوار برابر حاصل ضرب طول نصف النهار C و طول مسیر گرانیگاه C است وقتی که C به اندازه 2π دوران کند.

۲۴. با استفاده از قضیه پاپوس، گرانیگاه $(\bar{x}, \bar{y})$ نیمدایره $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$ را بیابید.

۲۵. با استفاده از قضیه پاپوس، مساحت مخروط $(0 \leq z \leq 1)$ $z^2 = x^2 + y^2$ را بیابید.

۷.۹ انتگرال روی سطح

مفهوم انتگرال روی سطح تعمیمی طبیعی از مفهوم انتگرال دو گانه است که در بخش ۳.۹ مورد بررسی قرار گرفت. انتگرال روی سطح در بسیاری از کاربردها مطرح می شود، مثلاً در مسائل مربوط به گرانیگاه ورقه های منحنی، پتانسیل ناشی از توزیع بار روی سطوح، و غیره. تعریف انتگرال روی سطح شبیه تعریف انتگرال دو گانه است. فرض کنیم S بخشی از سطحی با مساحت متناهی باشد، و فرض می کنیم $f(x, y, z)$ تابعی باشد که روی S تعریف شده و بر آن پیوسته است. S را به n قسمت جزئی $S_1, \dots, S_n$ با مساحت های $\Delta A_1, \dots, \Delta A_n$ تقسیم می کنیم. در هر قسمت S_k نقطه دلخواه P_k با مختصات x_k, y_k, z_k را انتخاب می کنیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم:

$$(۱) \quad J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta A_k.$$

این کار را به طریقی دلخواه برای هر $n = 1, 2, \dots$ انجام می دهیم، و تنها این شرط را رعایت می کنیم که به سمت بینهایت میل می کند بزرگترین S_k به یک نقطه میل کند. دنباله نامتناهی اعداد $J_1, J_2, \dots$ دارای حدهای است که مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و

نقاط P_k است؛ اثبات این موضوع شبیه اثباتی است که در مورد انتگرال دو گانه داشتیم. این حد را انتگرال روی سطح $f(x, y, z)$ روی S می نامند و با

$$(۲) \quad \iint_S f(x, y, z) dA$$

نشان می دهند.

برای محاسبه انتگرال روی سطح (۲)، می توانیم آن را به ترتیب زیر به انتگرال دو گانه تبدیل کنیم.

هر گاه S با تابع برداری $\mathbf{r}(u, v)$ به صورت پارامتری نمایش داده شده باشد آنگاه داریم $dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$ (ر. ک. (۱۰) بخش قبل). از این رو

$$(۳) \quad \begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dA \\ &= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv \\ &= \iint_R f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

که در آن R ناحیه متناظر با S در صفحه uv است. همین طور هر گاه S به صورت $z = g(x, y)$ نمایش داده شده باشد، آنگاه از (۱۰') بخش قبل نتیجه می شود که

$$(۴) \quad \begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dA \\ &= \iint_S f[x, y, g(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

مثال ۱. گشتاور لختی

مطلوب است I ، گشتاور لختی پوسته کروی همگن $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ نسبت به محور z ها، در صورتی که جرم پوسته M باشد.

هر گاه جرمی بر سطح S توزیع شود و $\mu(x, y, z)$ چگالی جرم (= جرم بر واحد سطح) باشد، آنگاه I ، گشتاور لختی جرم نسبت به یک محور مفروض L با انتگرال روی سطح

$$(۵) \quad I = \iint_S \mu D^2 dA$$

تعریف می‌شود، که در آن $D(x, y, z)$ فاصله نقطه (x, y, z) از L است. چون در این مثال، μ ثابت است و مساحت S برابر $A = 2\pi a^2$ است، داریم

$$\mu = \frac{M}{A} = \frac{M}{2\pi a^2}.$$

اگر S را با (۶) بخش ۵.۹، نمایش دهیم، با توجه به (۴) بخش قبل به دست می‌آوریم

$$E = a^2 \cos^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2,$$

و از آنجا

$$dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv = a^2 \cos v du dv.$$

به علاوه، مربع فاصله نقطه (x, y, z) از محور z ها عبارت است از

$$D^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 v.$$

در نتیجه

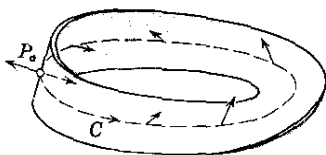
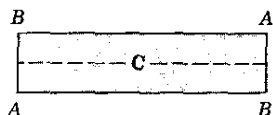
$$\begin{aligned} I &= \iint_S \mu D^2 dA = \frac{M}{2\pi a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 v du dv \\ &= \frac{Ma^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 v dv = \frac{2Ma^2}{3}. \end{aligned}$$

در بسیاری از کاربردها با انتگرالهای روی سطحی سروکار داریم که در آنها مفهوم جهت سطح نقشی اساسی دارد. بنابراین با شروع از سطح هموار (ر. ک. بخش ۵.۹) به بررسی این مفهوم می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم S سطحی هموار و P نقطه دلخواهی از آن باشد. در این صورت می‌توانیم در P بردار یکه‌ای نرمال بر S انتخاب کنیم، این بردار را $\mathbf{n}$ می‌نامیم. جهت $\mathbf{n}$ را جهت نرمال مثبت S در P می‌نامند. بدیهی است که دو امکان برای انتخاب $\mathbf{n}$ وجود دارد.

سطح هموار S را جهت‌پذیر نامند هر گاه وقتی جهت نرمال مثبت، در نقطه دلخواهی مانند P_0 داده شده باشد، بتوان آن را به نحوی یکتا و پیوسته روی تمامی سطح حرکت داد. بنابراین سطح S جهت‌پذیر است مشروط بر اینکه در آن منحنی بسته‌ای مانند C وجود نداشته باشد که از P_0 بگذرد و طوری باشد که جهت نرمال مثبت آن، وقتی از P_0 در طول C حرکت کرده و مجدداً به P_0 برگردیم، عوض شود.

هر بخش به اندازه کافی کوچک از یک سطح هموار همیشه جهت‌پذیر است. ولی ممکن است بخشهای بزرگ سطح چنین نباشند. سطوحی وجود دارند که جهت‌ناپذیرند. مثال



شکل ۱۹۴. نوار موبیوس

معروف این سطوح نوار موبیوس^۱ است که آن را در شکل ۱۹۴ نشان داده ایم. وقتی یک بردار نرمال، که در نقطه P_0 داده شده است، به طور پیوسته در امتداد منحنی C ، شکل ۱۹۴، حرکت داده شود، جهت این بردار هنگامی که دوباره به P_0 برمی گردد مخالف جهت اولیه اش خواهد بود. نمونه ای از نوار موبیوس را می توان با یک نوار کاغذی مستطیلی شکل به طریق زیر ساخت: نوار را نیم دور تاب می دهیم و سپس اضلاع کوچک آن را طوری بهم می چسبانیم که در شکل ۱۹۴، دونقطه A برهم و دونقطه B برهم منطبق شوند. چنانچه سطح هموار S جهت پذیر باشد، آنگاه می توان با انتخاب یکی از دو جهت ممکن برای بردار نرمال $\mathbf{n}$ سطح S را جهت داد کرد.

هرگاه کرانه S منحنی بسته ساده ای مانند C باشد، آنگاه مطابق شکل ۱۹۵ الف می توان با هر یک از دو جهت ممکن S جهتی برای C متناظر کرد. با استفاده از این ایده ساده، به سادگی می توان مفهوم جهت را برای رویه های هموار تکه ای به شرح زیر توسعه داد. سطح تکه ای هموار S را جهت پذیر نامند هرگاه هر تکه هموار از S را بتوان طوری جهت دار کرد که در طول هر منحنی C^* که کرانه مشترک دونقطه S_1 و S_2 است، جهت مثبت C^* نسبت به S_1 خلاف جهت مثبت C^* نسبت به S_2 باشد.

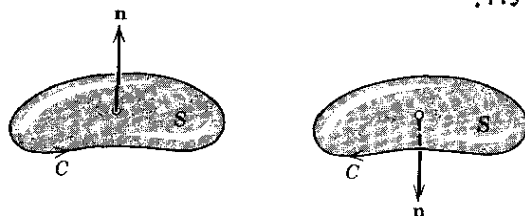
شکل ۱۹۵ ب سطحی متشکل از دو سطح هموار را نشان می دهد. فرض می کنیم S سطح جهت پذیر مفروضی باشد. با انتخاب بردار یکه نرمال $\mathbf{n}$ بر روی S آن را جهت دار می کنیم. زوایای بین $\mathbf{n}$ و جهت های مثبت محور x ها، y ها و z ها را به ترتیب با α, β, γ و γ نشان می دهیم، داریم

$$(۶) \quad \mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}.$$

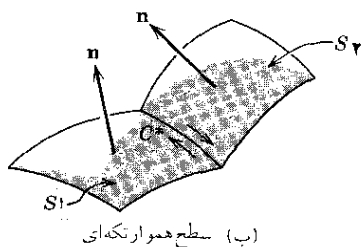
فرض می کنیم $u_1(x, y, z)$ ، $u_2(x, y, z)$ ، $u_3(x, y, z)$ توابع مفروضی باشند که در هر نقطه S تعریف شده و پیوسته اند. آنگاه انتگرالهایی که باید مورد بررسی قرار گیرند معمولاً به شکل زیرند:

$$\iint_S u_1 dy dz, \quad \iint_S u_2 dz dx, \quad \iint_S u_3 dx dy,$$

۱. آگوست فردیناند موبیوس (August Ferdinand Möbius)، ۱۷۹۰ - ۱۸۶۸، ریاضیدان آلمانی که سهم مهمی در نظریه سطوح و هندسه تصویری دارد.



(الف) سطح هموار



(ب) سطح هموارنگه‌ای

شکل ۱۹۵. جهت سطح

و بنا بر تعریف داریم

$$\begin{aligned}
 \iint_S u_x dy dz &= \iint_S u_x \cos \alpha dA, \\
 \iint_S u_y dz dx &= \iint_S u_y \cos \beta dA, \\
 \iint_S u_z dx dy &= \iint_S u_z \cos \gamma dA,
 \end{aligned}
 \tag{۷}$$

بدیهی است که مقدار چنین انتگرال‌هایی به انتخاب $\mathbf{n}$ ، یعنی به جهت S ، بستگی دارد. انتخاب جهت مخالف با ضرب انتگرال در -۱ — متناظر است، زیرا در این صورت هریک از مؤلفه‌های $\mathbf{n}$ ، یعنی $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ ، در -۱ ضرب می‌شوند. حاصل جمع این سه انتگرال را با استفاده از نماد برداری می‌توان به صورت ساده‌ای نوشت. در واقع، هرگاه بردار

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}$$

را در نظر بگیریم، آنگاه بنا بر تعریف (۷)، فرمول زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 \iint_S (u_x dy dz + u_y dz dx + u_z dx dy) \\
 = \iint_S (u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta + u_z \cos \gamma) dA = \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA.
 \end{aligned}
 \tag{۸}$$

برای محاسبه انتگرالهای (۷) می‌توان آنها را به شرح زیر به انتگرالهای دو گانه بر روی يك ناحیه صفحه‌ای تبدیل کرد.

هر گاه بتوان S را به صورت $z = h(x, y)$ نمایش داد و هر گاه S طوری جهت‌دار شده باشد که $\mathbf{n}$ به طرف بالا باشد، آنگاه γ حاده خواهد بود. در نتیجه در (۱۰) بخش قبل خواهیم داشت $\delta = \gamma$ ، بنابراین از تعریف (۷) نتیجه می‌شود

$$(۹الف) \quad \iint_S u_{\gamma}(x, y, z) dx dy = + \iint_{\bar{R}} u_{\gamma}[x, y, h(x, y)] dx dy$$

که در آن $\bar{R}$ تصویر قائم S بر صفحه xy است. هر گاه $\mathbf{n}$ به طرف پایین باشد، آنگاه γ منفرجه است و به دست می‌آوریم

$$(۹ب) \quad \iint_S u_{\gamma}(x, y, z) dx dy = - \iint_{\bar{R}} u_{\gamma}[x, y, h(x, y)] dx dy.$$

در مورد دو انتگرال دیگر (۷) نیز وضع به همین منوال است. هر گاه S به صورت پارامتری

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

نمایش داده شود، آنگاه بسته به انتخاب جهت، بردار نرمال عبارت است از [ر. ک. (۳)، بخش قبل]

$$(۱۰) \quad \mathbf{n} = - \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (ب) \quad \text{یا} \quad \mathbf{n} = + \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (الف)$$

حال با توجه به (۶) داریم $\cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$ و با توجه به (۱۰) بخش ۶.۹ داریم

$$dA = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma dA &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dA = \pm \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv = \pm \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \pm \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv, \end{aligned}$$

که در آن عبارت آخر شامل ژاکوبی [ر. ک. بخش ۳.۹] است. از این رو در (۷)،

$$\begin{aligned} (۱۱) \quad \iint_S u_{\gamma}(x, y, z) dx dy \\ = \pm \iint_R u_{\gamma}[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \end{aligned}$$

علامت مثبت وقتی به کار می رود که S طوری جهت دار شده باشد که (۱۰ الف) برقرار باشد و علامت منها درحالتی به کار می رود که جهت S مخالف این جهت باشد. در اینجا R ناحیه متناظر با S در صفحه uv است.

مسائل بخش ۷.۹

با نمایش دادن S به صورت پارامتری و با استفاده از (۳)،

$$\iint_S f(x, y, z) dA$$

را محاسبه کنید، هر گاه

$$f = x + 1, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 3 \quad ۱.$$

$$f = \lambda x, \quad S: z = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 2 \quad ۲.$$

$$f = xy, \quad S: z = xy, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad ۳.$$

$$f = \arctan(y/x), \quad S: z = x^2 + y^2, \quad 1 \leq z \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad ۴.$$

$$f = 3x^2 \sin y, \quad S: z = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi \quad ۵.$$

$$f = x + y + z, \quad S: x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 2 \quad ۶.$$

$$f = xy, \quad S: x^2 + y^2 = 4, \quad -1 \leq z \leq 1 \quad ۷.$$

$$f = \cos x + \sin y, \quad S: x + y + z = 1 \quad \text{بخشی از} \quad \text{که در یک هشتم اول واقع است} \quad ۸.$$

$$f = x(z^2 + 12y - y^2), \quad S: z = y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad ۹.$$

$$f = (x^2 + y^2)^2, \quad S: z = (x^2 + y^2)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad ۱۰.$$

۱۱. درستی فرمولهای زیر را در مورد جرم M و $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ، گرانیگاه پسته S ، که چگالی (جرم بر واحد سطح) آن $\sigma(x, y, z)$ است تحقیق کنید:

$$M = \iint_S \sigma dA, \quad \bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x \sigma dA, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y \sigma dA,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iint_S z \sigma dA.$$

۱۲. درستی فرمولهای زیر را برای گشتاورهای لختی پسته ای که در مسئله ۱۱ داشتیم به ترتیب حول محور x ها، y ها و z ها تحقیق کنید:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \sigma dA, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \sigma dA,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \sigma dA.$$

گشتاور لختی پوسته S را که چگالی آن ρ است حول محور A بیابید، هرگاه

۱۳. $S: x^2 + y^2 = 1$ ، $0 \leq z \leq h$ ، A : محور z ها

۱۴. $S: z^2 = x^2 + y^2$ ، $0 \leq z \leq h$ ، A : محور z ها

۱۵. S : چتره مثل ۳، بخش ۶.۹، A : محور z ها

۱۶. S : مانند مسئله ۱۵، A : خط $x=a$ در صفحه xz

۱۷. S : مانند مسئله ۱۵، A : خط $x=a+b$ در صفحه xz

۱۸. (قضیه ۱ اشتاینر) اگر I_A گشتاور لختی توزیع جرمی با جرم کل M نسبت به محوری مانند A که از گرانیگاه می گذرد باشد، نشان دهید که I_B گشتاور لختی همان توزیع جرم نسبت به محور B که موازی A است و به فاصله k از آن قرار دارد برابر است با

$$I_B = I_A + k^2 M.$$

۱۹. با استفاده از قضیه اشتاینر و جواب مسئله ۱۵، مسائل ۱۶ و ۱۷ را حل کنید.

۲۰. مدلی کاغذی برای نوار موبیوس درست کنید. هرگاه آن را در طول منحنی C ، شکل ۱۹۴، ببرید چه پیش می آید؟

۸.۹ انتگرالهای سه گانه. قضیه دیورژانس گاوس

انتگرال سه گانه تعمیمی از انتگرال دو گانه است که در بخش ۳.۹ با آن آشنا شدید. برای تعریف این انتگرال تابع $f(x, y, z)$ را که در ناحیه بسته کراندار T ازفضا تعریف شده است در نظر می گیریم. T را توسط صفحاتی موازی با سه صفحه مختصات تقسیم می کنیم. آنگاه متوازی السطوح های داخل T را از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. در هر یک از این متوازی السطوح ها نقطه دلخواهی، مثل (x_k, y_k, z_k) واقع در متوازی السطوح

۱. یاکوب اشتاینر (Jacob Steiner)، ۱۷۹۶ - ۱۸۶۳، هندسه دان سوییسی.

۲. در پانوش ۲ بخش ۳.۹ توضیح داده شده است (در این حالت به جای «دایره»، «کره» می گذاریم).

k ام اختیار می‌کنیم و مجموع

$$J_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

را تشکیل می‌دهیم ΔV_k حجم متوازی‌السطوح k ام است. این کار را برای اعداد صحیح مثبت بزرگ n به روش دلخواه طوری انجام می‌دهیم که طول یا لایهای بزرگترین متوازی-السطوح وقتی که n به سمت بینهایت میل می‌کند به سمت صفر میل کند. بدین طریق دنباله‌ای از اعداد حقیقی $J_{n_1}, J_{n_2}, \dots$ به دست می‌آید. فرض می‌کنیم که $f(x, y, z)$ در حوزه‌ای شامل T پیوسته بوده و T توسط تعدادی منتهای سطح هموارا محصور شده باشد، در این صورت می‌توان نشان داد (ر. ک. مرجع [A۳]) دنباله مذکور به حدی همگراست که مستقل از انتخاب تقسیمات جزئی و نقاط متناظر (x_k, y_k, z_k) است. این حد را **انتگرال سه‌گانه** $f(x, y, z)$ بر ناحیه T می‌نامند و چنین نشان می‌دهند

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{یا} \quad \iiint_T f(x, y, z) dV$$

حال نشان می‌دهیم که انتگرال سه‌گانه دیورژانس یک تابع برداری پیوسته مشتقپذیر $\mathbf{u}$ روی ناحیه‌ای مانند T درفضا را می‌توان به انتگرال روی سطح مؤلفه نرمال $\mathbf{u}$ بر سطح S ، کرانه T ، تبدیل کرد. این کار را می‌توان به کمک قضیه دیورژانس انجام داد؛ این قضیه نظیر سه‌بعدی قضیه گرین در صفحه (بخش ۴.۹) است. قضیه دیورژانس در بسیاری از زمینه‌های عملی و نظری اهمیتی اساسی دارد.

قضیه دیورژانس گاوس (تبدیل انتگرال روی حجم به انتگرال روی سطح و بالعکس)

فرض می‌کنیم T ناحیه‌ای بسته و کراندار درفضا باشد که کرانه آن سطح جهت‌پذیر هموار تکه‌ای S است. گیریم $\mathbf{u}(x, y, z)$ تابعی برداری باشد که در ناحیه‌ای شامل T پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته است. آنگاه داریم

$$(۱) \quad \iiint_S \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \iint_T u_n dA$$

که در آن

$$(۲) \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

مؤلفه $\mathbf{u}$ درجهت نرمال خارجی S نسبت به T بوده و $\mathbf{n}$ بردار یکه نرمال خارجی S است.

تبصره ۵. هر گاه $\mathbf{u}$ و $\mathbf{n}$ را بر حسب مؤلفه‌هایشان بنویسیم، مثلاً اگر بنویسیم

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$

که در آن α ، β و γ به ترتیب زوایای بین $\mathbf{n}$ و جهت مثبت محور x ها و y ها و z ها باشند فرمول (۱) به شکل

$$\begin{aligned} (3^*) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) dx dy dz \\ = \iint_S (u_1 \cos \alpha + u_2 \cos \beta + u_3 \cos \gamma) dA \end{aligned}$$

درمی آید. بنابر (۸) بخش قبل رابطه بالا را می توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned} (3) \quad \iiint_T \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ \iint_S (u_1 dy dz + u_2 dz dx + u_3 dx dy) \end{aligned}$$

اثبات قضیه دیورژانس. بدیهی است که (۳*) درست است، هر گاه سه رابطه زیر به طور همزمان برقرار باشند :

$$(4) \quad \iiint_T \frac{\partial u_1}{\partial x} dx dy dz = \iint_S u_1 \cos \alpha dA,$$

$$(5) \quad \iiint_T \frac{\partial u_2}{\partial y} dx dy dz = \iint_S u_2 \cos \beta dA,$$

$$(6) \quad \iiint_T \frac{\partial u_3}{\partial z} dx dy dz = \iint_S u_3 \cos \gamma dA.$$

نخست (۶) را برای ناحیه خاص T ثابت می کنیم که با سطح جهت پذیر هموار تکه ای S محصور شده و دارای این خاصیت است که هر خط موازی با هریک از محورهاى مختصات و متقاطع با T حداکثر دارای یک باره خط (یا تنها یک نقطه) مشترک با T است. اگر شرایط بالا برقرار باشد، T را می توان به صورت

$$(7) \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$$

نمایش داد، که در آن (x, y) در $\bar{R}$ ، تصویر قائم T در صفحه xy ، تغییر می کند. بدیهی است که $z = g(x, y)$ نمایش S_1 «قسمت تحتانی S » (شکل ۱۹۶) و $z = h(x, y)$

نمایش S_1 «قسمت فوقانی S » است، حال تنها ممکن است يك تکه قائم S_p از S باقی بماند. (ممکن است S_p يك منحنی باشد، مثلاً در مورد کره چنین است.)

برای اثبات (۶) از (۷) استفاده می‌کنیم. چون u در حوزه‌ای شامل T پیوسته مشتقپذیر است، داریم

$$(۸) \quad \iint_T \frac{\partial u_p}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\bar{R}} \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \frac{\partial u_p}{\partial z} dz \right] dx dy.$$

انتگرال داخل کروشه را محاسبه می‌کنیم:

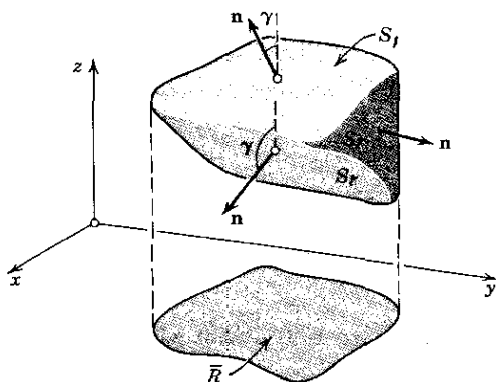
$$\int_g^h \frac{\partial u_p}{\partial z} dz = u_p(x, y, h) - u_p(x, y, g).$$

از این دو طرف چپ (۸) برابر است با

$$(۹) \quad \iint_{\bar{R}} u_p[x, y, h(x, y)] dx dy - \iint_{\bar{R}} u_p[x, y, g(x, y)] dx dy.$$

حال نشان می‌دهیم که عبارت بالا مساوی طرف راست (۶) است S_p ، تکه قائم S (شکل ۱۹۶) داریم $\gamma = \pi/2$ و $\cos \gamma = 0$. در نتیجه این تکه اثری در محاسبه انتگرال روی سطح (۶) ندارد، و

$$\iint_S u_p \cos \gamma dA = \iint_{S_1} u_p \cos \gamma dA + \iint_{S_p} u_p \cos \gamma dA$$



شکل ۱۹۶. مثالی از ناحیه خاص

(ر.ک. شکل ۱۹۶). در شکل ۱۹۶ زاویه γ برای S_1 حاده است. پس بنابر (۱۰'') انتهای بخش ۹.۶، به ازای $\delta = \gamma$ ، داریم $dA = \sec \gamma dx dy$. چون $\cos \gamma \sec \gamma = 1$ ، به دست می‌آوریم

$$\iint_{S_1} u_p \cos \gamma \, dA = \iint_{\bar{R}} u_p [x, y, h(x, y)] \, dx \, dy,$$

که برابر اولین انتگرال دوگانه (۹) است. زاویه γ برای S_p منفرجه است (شکل ۱۹۶)، بنابراین $\pi - \gamma$ مناظر با زاویه حاده δ در (۱۰") بخش ۶.۹ است، واز آنجا

$$dA = \sec(\pi - \gamma) \, dx \, dy = -\sec \gamma \, dx \, dy.$$

در نتیجه

$$\iint_{S_1} u_p \cos \gamma \, dA = - \iint_{\bar{R}} u_p [x, y, g(x, y)] \, dx \, dy,$$

که برابر جمله آخر (۹) است. بدین ترتیب (۶) به اثبات می‌رسد. روابط (۴) و (۵) تنها با عوض کردن اندیس متغیرها و فرض آنکه ناحیه T دارای نمایشی مشابه (۷) است، به دست می‌آیند؛ این نمایشها عبارتند از

$$.g^*(z, x) \leq y \leq h^*(z, x) \quad \text{و} \quad \bar{g}(y, z) \leq x \leq \bar{h}(y, z)$$

بدین ترتیب قضیه دیورژانس برای نواحی خاص به اثبات می‌رسد.

برای هر ناحیه T که بتوان آن را به وسیله سطوح کمکی به تعدادی متناهی ناحیه خاص تقسیم کرد، قضیه برقرار است زیرا می‌توان قضیه را به‌طور جداگانه در مورد هر قسمت به کار برد و نتایج حاصل را با هم جمع کرد؛ این شبیه همان کاری است که هنگام اثبات قضیه گرین در بخش ۴.۹ انجام دادیم. انتگرالهای روی سطوح کمکی دوه‌دو با هم حذف می‌شوند و آنچه باقی می‌ماند انتگرال روی S ، کرانه T ، است؛ مجموع انتگرال روی حجم قسمتهای مختلف T برابر انتگرال روی حجم T است.

بدین ترتیب قضیه دیورژانس در مورد هر ناحیه کراندار ثابت می‌شود؛ تا همینجای قضیه برای مسائل عملی اهمیت زیادی دارد، برای تعمیم قضیه به نحوی که در مورد هر ناحیه دلخواه T صادق باشد، عمل حدگیری بخصوصی لازم است؛ این مطلب شبیه به تعمیم قضیه گرین در بخش ۴.۹ است. ▲

قضیه گرین در صفحه (بخش ۴.۹) را می‌توان برای محاسبه انتگرال روی خط‌مورد استفاده قرار داد. همین‌طور، قضیه دیورژانس برای محاسبه انتگرال روی سطح مناسب است؛ مثال زیر مطلب را روشن می‌کند.

مثال ۱. محاسبه انتگرال روی سطح به کمک قضیه دیورژانس

با تبدیل انتگرال زیر به انتگرال سه گانه، آن را محاسبه کنید:

$$I = \iiint_S (x^2 \, dy \, dz + x^2 y \, dz \, dx + x^2 z \, dx \, dy)$$

در این انتگرال S سطح بسته‌ای است که از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ ($0 \leq z \leq b$) و قرصهای مستدیر $z = b$ و $z = 0$ ($x^2 + y^2 \leq a^2$) تشکیل شده است.

با توجه به (۳) داریم

$$u_x = x^2, \quad u_y = x^2 y, \quad u_z = x^2 z.$$

پس، هرگاه از تقارن ناحیه T که با S محصور شده است استفاده کنیم، انتگرال سه گانه طرف چپ (۳) چنین می شود

$$\iiint_T (3x^2 + x^2 + x^2) dx dy dz = 4 \times 5 \int_0^b \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} x^2 dx dy dz.$$

انتگرال نسبت به x برابر است با $(1/3)(a^2 - y^2)^{3/2}$. با قرارداد $y = a \cos t$ داریم

$$dy = -a \sin t dt, \quad (a^2 - y^2)^{3/2} = a^3 \sin^3 t,$$

و انتگرال نسبت به y چنین می شود

$$\frac{1}{3} \int_0^a (a^2 - y^2)^{3/2} dy = -\frac{1}{3} a^4 \int_{\pi/2}^0 \sin^3 t dt = \frac{\pi}{16} a^4.$$

و حاصل انتگرال نسبت به z عبارت است از b ؛ در نتیجه

$$I = 4 \times 5 \frac{\pi}{16} b a^4 = \frac{5\pi}{4} a^4 b.$$

۹.۹ نتایج و کاربردهای قضیه دیورژانس

قضیه دیورژانس کاربردهای گوناگون و نتایج مهمی دارد که برخی از آنها را در مثالهای زیر توضیح می دهیم. در این مثالها فرض بر این است که نواحی و توابع در شرایطی که تحت آنها قضیه دیورژانس برقرار است صدق می کنند و در هر مورد، مانند قبل، n عبارت از بردار یکه نرمال خارجی بر سطح کرانه ای ناحیه است.

مثال ۱. نمایش مستقل از مختصات دیورژانس

با تقسیم طرفین رابطه (۱) بخش ۸.۹ بر $V(T)$ ، حجم ناحیه T ، به دست می آوریم

$$(1) \quad \frac{1}{V(T)} \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} u_n dA$$

که در آن $S(T)$ سطح کرانه ای T است. خواص اساسی انتگرال سه گانه عمدتاً همان خواص انتگرال دو گانه هستند که در بخش ۳.۹ بررسی شد. خصوصاً بنابه قضیه مقدار میانگین در مورد u سه گانه به ازای هر تابع پیوسته $f(x, y, z)$ در ناحیه مورد نظر T ، نه $Q: (x_0, y_0, z_0)$ در T موجود است به طوری که

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0) V(T).$$

با قرار دادن $f = \text{div } \mathbf{u}$ و با استفاده از (۱) داریم

$$(۲) \quad \frac{1}{V(T)} \iiint_T \text{div } \mathbf{u} dV = \text{div } \mathbf{u}(x_0, y_0, z_0).$$

فرض می‌کنیم $P: (x_1, y_1, z_1)$ نقطه مشخصی در T باشد و فرض می‌کنیم ناحیه T کوچک شده به سمت نقطه P میل کند به طوری که $d(T)$ ، ماکزیم فاصله نقاط T از P به سمت صفر میل کند. در این صورت Q باید به سمت P میل کند و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که دیورژانس $\mathbf{u}$ در نقطه P عبارت است از

$$(۳) \quad \text{div } \mathbf{u}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iiint_{S(T)} u_n dA.$$

این فرمول گاهی برای تعریف دیورژانس مورد استفاده واقع می‌شود. با آنکه در تعریف دیورژانس بخش ۱۰.۸ مختصات دخالت دارد، فرمول (۳) مستقل از مختصات است. بنابراین از (۳) نتیجه می‌شود که دیورژانس مستقل از انتخاب دستگاه مختصات دکارتی است.

مثال ۲. تعبیر فیزیکی دیورژانس

به وسیله قضیه دیورژانس می‌توان تعبیری شهودی از دیورژانس بردار به دست آورد. بدین منظور جریان یک سیال تراکم ناپذیر (ر.ک. انتهای بخش ۱۰.۸) با چگالی ثابت $\rho = 1$ را در نظر می‌گیریم، به طوری که این جریان ایستود یا پائرجا باشد، یعنی به زمان بستگی نداشته باشد. چنین جریانی توسط میدان $\mathbf{v}(P)$ ، بردار سرعت، در هر نقطه P تعیین می‌شود.

فرض می‌کنیم S سطح کرانه‌ای ناحیه فضایی T باشد، و فرض می‌کنیم $\mathbf{n}$ بردار یکه نرمال خارجی S باشد. جرم سیالی که در واحد زمان از قسمت کوچک ΔS به مساحت ΔA از داخل S به خارج جریانی می‌یابد برابر $v_n \Delta A$ است که در آن $\mathbf{v}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ مؤلفه نرمال $\mathbf{v}$ در جهت $\mathbf{n}$ در نقطه مناسبی از ΔS است. در نتیجه، جرم کل سیالی که در واحد زمان از طریق S از T خارج می‌شود با انتگرال روی سطح

$$\iint_S v_n dA$$

معین می‌شود. پس این انتگرال کل جریانی را که از T خارج می‌شود نمایش می‌دهد، و انتگرال

۱. توجه کنید که v_n می‌تواند در نقطه معینی منفی باشد، و این بدان معنی است که سیال در چنین نقطه‌ای وارد ناحیه فضایی محصور به K می‌شود.

$$(۴) \quad \frac{1}{V} \int_S v_n dA,$$

که در آن V حجم T است، جریان میانگین خارج شده از T را نمایش می‌دهد. چون جریان پابرجا و سیال تراکم‌ناپذیر است، مقدار سیال خروجی باید به طور پیوسته جبران شود. از این رو هر گاه مقدار انتگرال (۴) مخالف صفر باشد، در آن صورت باید چشمه‌هایی (چشمه‌های مثبت و چشمه‌های منفی موسوم به **چاهک**)، یعنی نقاطی که در آنها سیال تولید یا ناپدید می‌شود در T وجود داشته باشند.

هر گاه فرض کنیم که T کوچک شده به سمت نقطه‌ای مانند P در T میل کند، آنگاه از (۴) شدت چشمه در P به دست می‌آید که برابر طرف راست (۳) (با u_n به جای v_n) است. از اینجا و از (۳) نتیجه می‌شود که دیوژانس $\nabla \cdot \mathbf{v}$ بردار سرعت جریان تراکم‌ناپذیر پابرجا، برابر شدت چشمه جریان در نقطه متناظر است. در T چشمه‌ای وجود ندارد اگر و تنها اگر $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$ ؛ در این حالت به ازای هر سطح بسته S^* در T داریم

$$\int_{S^*} \int v_n dA = 0.$$

مثال ۳. جریان گرما. معادله گرما

می‌دانیم که در هر جسم جریان گرما در جهت کاهش دما است. آزمایشهای فیزیکی نشان می‌دهند که نرخ جریان متناسب با گرادیان دماست. این بدان معنی است که ∇ ، سرعت جریان گرما، در جسم به صورت

$$(۵) \quad \mathbf{v} = -K \operatorname{grad} U$$

است که در آن $U(x, y, z, t)$ دما و t زمان است و K ضریب هدایت حرارتی جسم نامیده می‌شود؛ در شرایط عادی فیزیکی K ثابت است.

فرض می‌کنیم R ناحیه‌ای در جسم و S سطح کرانه‌ای آن باشد. آنگاه مقدار گرمایی که در واحد زمان از R خارج می‌شود برابر است با

$$\int_S \int v_n dA,$$

که در آن $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ مؤلفه $\mathbf{v}$ در جهت $\mathbf{n}$ ، بردار یکه نرمال خارجی بر S ، است. این عبارت با روشی شبیه آنچه در مثال قبل دیدیم به دست می‌آید. بنابر (۵) و قضیه دیوژانس به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad \begin{aligned} \int_S \int v_n dA &= -K \int_R \int \int \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) dx dy dz \\ &= -K \int_R \int \int \nabla^2 U dx dy dz; \end{aligned}$$

ر.ك. (۵)، بخش ۱۰۰۸.

از طرف دیگر، مقدار کل گرمای H در R عبارت است از

$$H = \iiint_R \sigma \rho U \, dx \, dy \, dz,$$

که در آن ثابت σ گرمای ویژه جسم و ρ چگالی (= جرم واحد حجم) ماده است. از این رو نرخ زمانی کاهش H عبارت است از

$$-\frac{\partial H}{\partial t} = - \iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dx \, dy \, dz,$$

و این مقدار باید برابر مقدار گرمای خارج شده از R باشد؛ پس بنابر (۶) داریم

$$- \iiint_R \sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} \, dx \, dy \, dz = -K \iiint_R \nabla^2 U \, dx \, dy \, dz$$

یا

$$\iiint_R \left(\sigma \rho \frac{\partial U}{\partial t} - K \nabla^2 U \right) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

چون این رابطه در مورد هر ناحیه R از جسم برقرار است، انتگران (در صورت پیوستگی) باید همه جا صفر باشد؛ یعنی

$$(7) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = c^2 \nabla^2 U \quad c^2 = \frac{K}{\sigma \rho}$$

این معادله با مشتق جزئی را **معادله گرما** می نامند؛ معادله (۷) معادله بنیادی هدایت گرمایی است. روشهای حل مسائل مربوط به هدایت گرمایی در فصل ۱۱ مورد بررسی قرار می گیرند.

مثال ۴. يك خاصیت اساسی جوابهای معادله لاپلاس

فرمول قضیه دیورژانس را در نظر می گیریم:

$$(8^*) \quad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \iint_S u_n \, dA.$$

فرض می کنیم $\mathbf{u}$ گرادیان يك تابع اسکالر باشد، مثلاً $\mathbf{u} = \operatorname{grad} f$. در آن صورت [ر.ك. (۵)، بخش ۱۰۰۸]

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \nabla^2 f.$$

به علاوه

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } f,$$

و از (۵)، بخش ۸.۸، مشاهده می‌کنیم که طرف راست برابر مشتق جهتی f در جهت نرمال خارجی بر S است. هرگاه این مشتق را با $\partial f / \partial n$ نشان دهیم، فرمول (۸*) چنین می‌شود:

$$(۸) \quad \iiint_T \nabla^2 f dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n} dA.$$

بدیهی است که این فرمول نظیر سه بعدی فرمول (۹)، بخش ۴.۹، است. با در نظر گرفتن مفروضاتی که تحت آنها قضیه دیورژانس برقرار است، از (۸) قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱. (خاصیتی از جوابهای معادله لاپلاس)

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ جواب معادله لاپلاس

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

در ناحیه‌ای مانند D باشد و فرض کنیم که مشتقات جزئی مرتبه دوم f در D پیوسته باشد. آنگاه انتهگرال مشتق نرمال f روی هر سطح جهت پذیر بسته هموار تکه‌ای S که در D قرار داشته باشد صفر است.

مثال ۵. قضیه گرین

فرض می‌کنیم f و g توابعی اسکالر باشند به طوری که $\mathbf{u} = f \text{ grad } g$ در ناحیه T در مفروضات قضیه دیورژانس صدق کند. آنگاه

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{div } (f \text{ grad } g) = f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g$$

(ر. ک. مسئله ۱۳، انتهای بخش ۱۰.۸). به علاوه

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot (f \text{ grad } g) = f (\mathbf{n} \cdot \text{grad } g).$$

عبارت $\mathbf{n} \cdot \text{grad } g$ مشتق جهتی g در جهت بردار نرمال خارجی $\mathbf{n}$ بر سطح S است. هرگاه این مشتق را با $\partial g / \partial n$ نشان دهیم، فرمول قضیه دیورژانس چنین می‌شود:

$$(۹) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA.$$

این فرمول به فرمول اول گرین یا (به انضمام مفروضات بالا) صورت اول قضیه گرین موسوم است.

با تعویض f و g فرمول مشابهی به دست می آوریم. پس از کم کردن این فرمول از (۹) داریم

$$(۱۰) \quad \iiint_T (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA.$$

این فرمول به فرمول دوم گرین یا (همراه با مفروضات مربوطه) صورت دوم قضیه گرین موسوم است.

مثال ۶. یکتایی جوابهای معادله لاپلاس

فرض کنید f در مفروضات قضیه ۱ صدق کند و در همه نقاط سطح جهت پذیر بسته هموار تکه ای S در D صفر باشد. آنگاه، با قرار دادن $g = f$ در (۹) و نشان دادن داخل S با T ، به دست می آوریم

$$\iiint_T \text{grad } f \cdot \text{grad } f dV = \iint_T \int |\text{grad } f|^2 dV = 0$$

چون بنا بر فرض $|\text{grad } f|$ در T و روی S پیوسته و غیرمنفی است بنابراین باید در تمام نقاط T صفر باشد. در نتیجه $f_x = f_y = f_z = 0$ و f در T ثابت است و، به دلیل پیوستگی، برابر مقدارش روی S ، یعنی صفر، است. این ثابت می کند که

قضیه ۲

هرگاه تابع $f(x, y, z)$ در مفروضات قضیه ۱ صدق کند و در همه نقاط سطح جهت پذیر بسته هموار تکه ای S در D صفر باشد، آنگاه این تابع در ناحیه T هم که با S محصور شده متحد با صفر است.

این قضیه نتیجه مهمی دارد. فرض می کنیم f_1 و f_2 توابعی باشند که در مفروضات قضیه ۱ صدق می کنند و مقادیرشان روی سطح S با هم مساوی است. آنگاه تفاضل آنها، $f_1 - f_2$ ، در مفروضات قضیه ۱ صدق می کند و مقدارش در تمام نقاط S صفر است. بدین ترتیب، از قضیه ۲ نتیجه می شود که در تمام نقاط T داریم $f_1 - f_2 = 0$ ، و قضیه زیر به دست می آید.

قضیه ۳. (قضیه یکتایی جوابهای معادله لاپلاس)

فرض می کنیم f جوابی از معادله لاپلاس باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته در حوزه D است و فرض می کنیم T ناحیه ای در D باشد که در مفروضات قضیه دیورژانس

صدق می‌کند. دراین صورت اگر در T به‌طور یکتا با مقادیرش بر S ، سطح کرانه‌ای T ، مشخص می‌شود.

مسائل بخش ۹.۹

حجم نواحی زیر را با انتگرال‌گیری سه گانه پیدا کنید.

۱. يك چهاروجهی با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(2, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(0, 0, 3)$

۲. ناحیه‌ای واقع در يك هشتم اول محدود به $y = x$ ، $y = x^2$ و $z = 1 - x$

۳. ناحیه بین سهمی وار $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه xy

۴. ناحیه محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $y^2 + z^2 = 1$

جرم کل توزیع جرمی به چگالی σ را در ناحیه T بیابید، هر گاه

۵. $T: \sigma = xyz$ ، مکعب $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $0 \leq z \leq 1$

۶. $T: \sigma = x + y + 2z$ ، يك چهاروجهی با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، $(0, 0, 1)$

۷. $T: \sigma = xy$ ، ناحیه‌ای که در مسئله ۶ تشریح شد.

۸. $T: \sigma = z$ ، ناحیه‌ای واقع در يك هشتم اول که به $y = 1 - x^2$ و $z = x$ محدود است

گشتاور اختی جرمی به چگالی ۱،

$$I_x = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz$$

را در ناحیه T ، حول محور z ها بیابید؛ T عبارت است از

۹. مکعب $0 \leq x \leq c$ ، $0 \leq y \leq c$ ، $0 \leq z \leq c$

۱۰. استوانه $0 \leq z \leq h$ ، $x^2 + y^2 \leq c^2$

۱۱. مخروط $0 \leq z \leq h$ ، $x^2 + y^2 \leq z^2$

۱۲. داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$

۱۳. با استفاده از قضیه دیورژانس نشان دهید که V ، حجم ناحیه T ی محصور به سطح

S ، عبارت است از

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S x \, dy \, dz = \iiint_S y \, dz \, dx = \iiint_S z \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{3} \iiint_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \end{aligned}$$

۱۴. درستی فرمولهای مسئله ۱۳ را در مورد مکعب تحقیق کنید.

۱۵. درستی فرمولهای مسئله ۱۳ را در مورد استوانه $0 \leq z \leq h$ ، $x^2 + y^2 \leq 1$ تحقیق کنید.

۱۶. با استفاده از $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ در (۱)، بخش ۸.۹، نشان دهید حجم ناحیه‌ای مانند T که سطح کرانه‌ای آن S است عبارت است از

$$V = \frac{1}{3} \iint_S r \cos \theta \, dA$$

که در آن r فاصله نقطه متغیر $P: (x, y, z)$ ، واقع بر S ، از مبدأ O و زاویه بین خط جهت‌دار OP و نرمال خارجی بر S در P است.

۱۷. با استفاده از فرمولی که در مسئله ۱۶ داده شده است، حجم کره‌ای به شعاع a را بیابید.

انتگرالهای روی سطح زیر را به کمک قضیه دیورژانس محاسبه کنید، فرض بر این است که S به همان نحوی که در قضیه گفته شد جهت‌دار شده است.

$$\iint_S [(x+z) \, dy \, dz + (y+z) \, dz \, dx + (x+y) \, dx \, dy] \quad ۱۸$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$\iint_S (x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy) \quad ۱۹$$

S : سطح مکعبی که در مسئله ۵ معرفی شد

$$\iint_S (e^x \, dy \, dz - ye^z \, dz \, dx + z \, dx \, dy) \quad ۲۰$$

مسئله ۱۰ معرفی شد.

$$\iint_S (yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx + xy \, dx \, dy) \quad ۲۱$$

S مانند مسئله ۱۸

۲۲. $\iint_S xyz \, dy \, dz$ ، S : متوازی السطوح $0 \leq x \leq 3$ و $0 \leq y \leq 2$ و $0 \leq z \leq 1$

۲۳. S مانند مسئله ۲۲ ، $\iint_S [\sin x \, dy \, dz + (2 - \cos x) y \, dz \, dx]$

۲۴. S مانند $\iint_S [(y \cos x^2 + y^2) \, dz \, dx + z (\sin^2 x - 3y^2) \, dx \, dy]$

مسئله ۱۸

فرض کنید T ناحیه کراندار بسته‌ای در فضا و S سطح کرانه‌ای آن باشد. با استفاده از قضیه دیورژانس، احکام زیر را ثابت کنید.

۲۵. هر گاه g در حوزه‌ای شامل T همساز^۱ باشد، آنگاه

$$\iint_S \frac{\partial g}{\partial n} dA = 0.$$

۲۶. هر گاه g در حوزه‌ای شامل T همساز باشد، آنگاه

$$\iint_S g \frac{\partial g}{\partial n} dA = \iiint_T |\text{grad } g|^2 dV.$$

۲۷. هر گاه g در حوزه‌ای شامل T همساز باشد و در هر نقطه از S داشته باشیم $\partial g / \partial n = 0$ ، آنگاه g در T ثابت است.

۲۸. هر گاه f و g در حوزه‌ای شامل T همساز باشند و در هر نقطه از S داشته باشیم $\partial f / \partial n = \partial g / \partial n$ ، آنگاه در T داریم $f = g + c$ ، که در آن c مقداری ثابت است.

۲۹. هر گاه f و g در حوزه‌ای شامل T همساز باشند، آنگاه

$$\iint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0.$$

۳۰. نشان دهید که لاپلاسی را می‌توان مستقل از تمامی دستگاه‌های مختصات به صورت

$$\nabla^2 f = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n} dA$$

۱. یعنی g جواب معادله لاپلاس است و مشتقات جزئی مرتبه دوم آن در T پیوسته‌اند.

نمایش داد که در آن $d(T)$ ما کریم فاصله نقاط ناحیه T محصور با $S(T)$ ، از نقطه‌ای است کسه لاپلاسی در آن محاسبه می‌شود و $V(T)$ حجم T است. راهنمایی. در (۳) قرار دهید $\mathbf{u} = \text{grad } f$ واز (۵) بخش ۸.۸، با این فرض که $\mathbf{b} = \mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال خارجی بر S است استفاده کنید.

۱۰.۹ قضیهٔ استوکس

در بخش ۴.۹ نشان دادیم که انتگرال دو گانه روی یک ناحیهٔ صفحه‌ای را می‌توان به انتگرال روی خط، روی منحنی کرانه‌ای آن ناحیه، تبدیل کرد. اکنون با تعمیم این قضیه به بررسی مسئلهٔ متناظر در مورد انتگرال روی سطح می‌پردازیم.

قضیهٔ استوکس^۱ (تبدیل انتگرالهای روی سطح به انتگرالهای روی خط و بالعکس)

فرض می‌کنیم S یک سطح جهت‌دار هموار تکه‌ای^۲ در فضا باشد و C ، کرانهٔ S ، یک منحنی بستهٔ سادهٔ هموار تکه‌ای باشد. فرض می‌کنیم $\mathbf{v}(x, y, z)$ تابع برداری پیوسته‌ای باشد که در حوزه‌ای شامل S در فضا دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد، آنگاه

$$(۱) \quad \iint_S (\text{curl } \mathbf{v})_n dA = \int_C v_t ds;$$

در اینجا $(\text{curl } \mathbf{v})_n = (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ مؤلفهٔ $\text{curl } \mathbf{v}$ در امتداد $\mathbf{n}$ ، بردار یکهٔ نرمال بر S است، انتگرالگیری حول C در جهت نشان داده شده در شکل ۱۹۷ انجام می‌گیرد، و v_t مؤلفهٔ $\mathbf{v}$ در امتداد بردار مماس بر C در شکل ۱۹۷ است.

اثبات. نخست قضیهٔ استوکس را در مورد سطح S که می‌توان آن را در عین حال به صورت‌های

$$(۲) \quad \text{الف) } z = f(x, y), \quad \text{ب) } y = g(x, z), \quad \text{پ) } x = h(y, z)$$

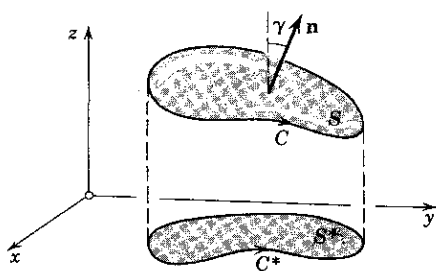
نمایش داد، ثابت می‌کنیم. در اینجا f, g, h نسبت به متغیرهای مربوطه پیوسته هستند و نسبت به آنها دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم

$$(۳^*) \quad \mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

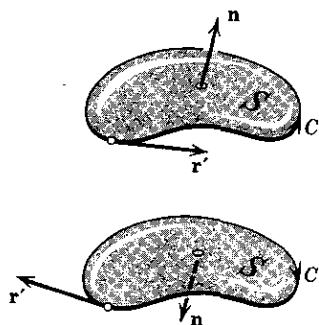
بردار یکهٔ نرمال «بالایی» S باشد (شکل ۱۹۸) و فرض می‌کنیم $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$ هرگاه C را به صورت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ نمایش دهیم؛ (در این معادله طول قوس s در جهت انتگرالگیری افزایش می‌یابد)؛ بردار یکهٔ مماس عبارت است از

۱. جرج گبریل استوکس (George Gabriel Stokes)، ۱۸۱۹-۱۹۰۳، ریاضیدان و فیزیکدان ایرلندی که سهم بسزایی در پیشبرد نظریهٔ سریهای نامتناهی و بعضی شاخه‌های فیزیک نظری دارد.

۲. ر. ک. بخشهای ۱۰.۹ و ۵.۹.



شکل ۱۹۸. اثبات قضیه استوکس



شکل ۱۹۹. قضیه استوکس

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k},$$

بنابراین

$$v_t = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v_x \frac{dx}{ds} + v_y \frac{dy}{ds} + v_z \frac{dz}{ds}.$$

از اینجا داریم

$$v_t ds = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

در نتیجه، هر گاه از نمایش تاو در دستگاه مختصات دکارتی راستگرد [ر. ک. (۱)]، بخش [۱۹۸] استفاده کنیم، می‌توانیم فرمول قضیه استوکس را به صورت زیر بنویسیم:

$$(۳) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dA = \int_C (v_x dx + v_y dy + v_z dz),$$

که α ، β ، و γ به کمک (۳*) تعریف می‌شوند.

ثابت می‌کنیم که در (۳) انتگرالهای شامل v_x برابرند با

$$(۴) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial v_x}{\partial y} \cos \gamma \right) dA = \int_C v_x dx.$$

فرض می‌کنیم S^* تصویر قائم S در صفحه xy و C^* کرانه آن باشد که مطابق شکل ۱۹۸ جهت‌دار شده است. با استفاده از نمایش (۲ الف) برای S ، می‌توانیم انتگرال روی خط C را به صورت انتگرال روی خط C^* بنویسیم:

$$\int_C v_x(x, y, z) dx = \int_{C^*} v_x[x, y, f(x, y)] dx.$$

حال قضیه گـرین در صفحه (بخش ۴.۹) را روی توابع $[v_1(x, y, f(x, y))]$ و 0 [به جای f و g در بخش ۴.۹] اعمال می کنیم. آنگاه

$$\int_{c^*} v_1[x, y, f(x, y)] dx = - \int_{s^*} \frac{\partial v_1}{\partial y} dx dy.$$

در انتگرال طرف راست داریم

$$\frac{\partial v_1[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$[z = f(x, y)]$$

و بنابراین

$$(5) \quad \int_c v_1(x, y, z) dx = - \int_{s^*} \int \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

ثابت می کنیم که انتگرال طرف چپ (۴) برابر انتگرال طرف راست (۵) است. در انتگرال اخیر x و y را به عنوان متغیرهای انتگرالگیری در نظر می گیریم. با نوشتن (۲ الف) به صورت

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0,$$

به دست می آوریم

$$\text{grad } F = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

اگر طول $\text{grad } F$ را با a نشان دهیم، داریم

$$a = |\text{grad } F| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

چون $\text{grad } F$ نرمال بر S است، به دست می آوریم

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\text{grad } F}{a}.$$

که در آن $\mathbf{n}$ مانند قبل تعریف شده است. ولی مؤلفه های $\mathbf{n}$ و $\text{grad } F$ هر دو در جهت مثبت محور z ها هستند، بنابراین

$$\mathbf{n} = + \frac{\text{grad } F}{a}.$$

پس با توجه به نمایشهای پیشین $\mathbf{n}$ و $\text{grad } F$ بر حسب مؤلفه‌هایشان نسبت به دستگاه مختصات xyz ، مشاهده می‌کنیم که

$$\cos \alpha = -\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{a}.$$

به علاوه، بنا بر (۱۵')، انتهای بخش ۶.۹، نتیجه می‌شود که در (۴) داریم $dA = a \, dx \, dy$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_S \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial v_1}{\partial y} \cos \gamma \right) dA \\ = \iint_{S^*} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial v_1}{\partial y} \frac{1}{a} \right) a \, dx \, dy. \end{aligned}$$

انتگرال سمت راست برابر طرف راست (۵) است و بدین ترتیب (۴) به اثبات می‌رسد. هرگاه $\mathbf{n}$ — به عنوان جهت مثبت نرمال انتخاب شود، آنگاه بنا بر فرض جهت انتگرالگیری در امتداد C عوض می‌شود و نتیجه همان نتیجه قبلی خواهد بود. این موضوع نشان می‌دهد که (۴) مستقل از انتخاب جهت مثبتی برای نرمال بر S برقرار است. با استفاده از نمایشهای (۲ ب) و (۲ پ) S و با استدلالی کاملاً مشابه، به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial v_2}{\partial z} \cos \alpha \right) dA = \int_C v_2 \, dy$$

و

$$(۷) \quad \iint_S \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial v_3}{\partial x} \cos \beta \right) dA = \int_C v_3 \, dz.$$

با جمع کردن (۴)، (۶) و (۷) فرمول (۱) را به دست می‌آوریم. این S اثبات قضیه استوکس است در مورد سطحی مانند S که می‌توان آن را همزمان به صورتهای (۲ الف)، (۲ ب) و (۲ پ) نمایش داد.

مانند آنچه در اثبات قضیه دیورژانس دیدیم، قضیه فوق را می‌توان به سطحی مانند S که قابل تبدیل است به تعدادی متناهی سطح، که دارای خواص گفته شده هستند، تعمیم داد؛ مواردی که در عمل پیش می‌آیند معمولاً از این نوعند. اثبات قضیه در حالت کلی برای تمامی سطوحی که در مفروضات قضیه صدق می‌کنند نیاز به یک فرایند حدگیری دارد شبیه آنچه در قضیه گرین بخش ۴.۹ به آن اشاره کردیم. ▲

۱۱.۹ نتایج و کاربردهای قضیه استوکس

مثال ۱. قضیه گرین در صفحه به عنوان حالت خاصی از قضیه استوکس

فرض می کنیم $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$ تابعی برداری باشد که درحوزه‌ای از صفحه xy که شامل ناحیه بسته همبند ساده S که C ، کرانه آن، يك منحنی بسته و هموار تکه‌ای است، پیوسته مشتقپذیر باشد. آنگاه بنابر (۱)، بخش ۱۱.۸، داریم

$$(\text{curl } \mathbf{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

به علاوه، $v_1 ds = v_1 dx + v_2 dy$ و (۱) بخش قبل به صورت

$$\iint_S \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dA = \int_C (v_1 dx + v_2 dy).$$

درمی آید، این نشان می‌دهد که قضیه گرین در صفحه (بخش ۴.۹) حالت خاصی از قضیه استوکس است.

مثال ۲. تعبیر فیزیکی تاو

فرض می کنیم S_r قرص مستدیری با شعاع r و مرکز P باشد که با دایره C_r محصور شده است (شکل ۱۹۹)، و فرض می کنیم $\mathbf{v}(Q) \equiv \mathbf{v}(x, y, z)$ تابع برداری پیوسته مشتقپذیری، درحوزه‌ای شامل S_r ، باشد. آنگاه بنابر قضیه استوکس و قضیه مقدار میانگین درمورد انتگرال روی سطح داریم

$$\int_{C_r} v_i ds = \iint_{S_r} (\text{curl } \mathbf{v})_n dA = [\text{curl } \mathbf{v}(P^*)]_n A_r,$$

که در آن A_r مساحت S_r و P^* نقطه مناسبی از S_r است. این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$[\text{curl } \mathbf{v}(P^*)]_n = \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_i ds.$$

درمورد حرکت سیالی که سرعت آن $\mathbf{v}$ است، انتگرال

$$\int_{C_r} v_i ds$$

به گردش جریان حول C_r موسوم است؛ این انتگرال محدوده‌ای را تعیین می‌کند که حرکت سیال متناظر به آن، دورانی حول دایره C_r است. حال اگر r را به سمت صفر

میل دهیم، خواهیم داشت

$$(۱) \quad \cdot [\operatorname{curl} \mathbf{v}(P)]_n = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{A_r} \int_{C_r} v_t ds;$$

یعنی مؤلفهٔ تاو درجهٔ مثبت نرمال را می‌توان به صورت گردش خاصی (گردش بر واحد سطح) جریان در سطح، در نقطهٔ متناظر، تصور کرد.

مثال ۳. محاسبهٔ انتگرال روی خط به کمک قضیهٔ استوکس

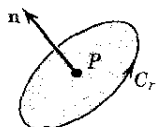
مطلوب است محاسبهٔ $\int_C v_t ds$ که در آن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = -3$ است. دایرهٔ C از نظر ناظری که در مبدأ ایستاده است در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است، و نسبت به دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داریم

$$\mathbf{v} = y \mathbf{i} + xz^3 \mathbf{j} - zy^2 \mathbf{k}.$$

سطح S را که باید به C محصور باشد می‌توان قرص مستدیر سطح $x^2 + y^2 \leq 4$ ، صفحهٔ $z = -3$ در نظر گرفت. در این صورت بردار $\mathbf{n}$ که در قضیهٔ استوکس داشتیم درجهٔ مثبت محور z ها خواهد بود، بنابراین $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ و $(\operatorname{curl} \mathbf{v})_n$ مؤلفهٔ $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ در جهت مثبت محور z هاست. چون $\mathbf{v}$ به ازای $z = -3$ دارای مؤلفه‌های $v_1 = y$ ، $v_2 = -27x$ ، $v_3 = 3y^3$ است، بنابراین به دست می‌آوریم

$$(\operatorname{curl} \mathbf{v})_n = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -27 - 1 = -28.$$

پس انتگرال روی S ، (در قضیهٔ استوکس) -28 برابر 4π ، مساحت قرص S ، است. با توجه به این امر، جواب چنین است $-352 \approx -112\pi \approx -28 \times 4\pi$. برای صرفه‌جویی در محاسبات، خواننده می‌تواند انتگرال را مستقیماً محاسبه کند،



شکل ۱۹۹. مثال ۲

بدین ترتیب که ابتدا C را به صورت پارامتری نمایش دهد، بعد $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ را محاسبه کند و سپس نسبت به طول قوس s انتگرال بگیرد؛ در اینجا، $\mathbf{v}$ در نقاط C در نظر گرفته می‌شود و $\mathbf{u}$ بردار یک مماس بر C در جهت انتگرال‌گیری است.

مسائل بخش ۱۱.۹

مطلوب است محاسبه $\int_S \int (\text{curl } \mathbf{v})_n dA$ ، که در آن

۱. $\mathbf{v} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ، S : مربع $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، $z = 1$

۲. $\mathbf{v} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ ، S : مربعی که در مسئله ۱ معرفی شد

۳. $\mathbf{v} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ ، S : قرص مستدیر $x^2 + y^2 \leq 1$ ، $z = 0$

۴. درستی قضیه استوکس را در مورد $\mathbf{v}$ و S ی که در مسئله ۱ داده شده اند تحقیق کنید.

۵. درستی قضیه استوکس را در مورد $\mathbf{v}$ و S ی که در مسئله ۳ داده شده اند تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که اگر $\mathbf{v}$ و S در مفروضات قضیه استوکس صدق کند و

$\mathbf{v} = \text{grad } f$ ، آنگاه $\int_C v_i ds = 0$ ، که در آن C کرانه S است.

با توجه به قضیه استوکس، مطلوب است محاسبه $\int_C v_i ds$ ؛ اگر نسبت به دستگاه مختصات دکارتی راستگرد داشته باشیم

۷. $\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ ، C : اشتراك $z = x + 3$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ که نسبت به ناظری که در مبدأ است در جهت حرکت عقربه های ساعت جهت دار شده

۸. $\mathbf{v} = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، C : دایره $x = \cos \alpha$ ، $y = \sin \alpha$ ، $z = 1$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

۹. $\mathbf{v} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - (x+z)\mathbf{k}$ ، C : کرانه مثلثی با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(1, 1, 0)$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت)

۱۰. $\mathbf{v} = 2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ ، C : اشتراك $x^2 + y^2 = 1$ و $z = y + 1$ ، که نسبت به ناظری که در مبدأ است در جهت حرکت عقربه های ساعت جهت دار شده

۱۱. $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ، C : فصل مشترك $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $z = y^2$

با استفاده از (۳) ی بخش قبل، هریک از انتگرالهای روی خط زیر را حول مرز داده شده C ، در جهت حرکت عقربه های ساعت (نسبت به ناظری که در مبدأ است)، محاسبه کنید.

۱۲. $\int_C (z dx + x dy + y dz)$ ، C : کرانه مثلثی با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$

$$13. \int_C (yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz) \quad , \quad C: \text{فصل مشترک } z = y^2 \text{ و } x^2 + y^2 = 1$$

$$14. \int_C (\sin z \, dx - \cos x \, dy + \sin y \, dz) \quad , \quad C: \text{کرانه مستطیل } 0 \leq x \leq \pi, \quad z = 3, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$15. \int_C (e^x \, dx + 2y \, dy - dz) \quad , \quad C: x^2 + y^2 = 4, \quad z = 2$$

۱۲.۹ انتگرالهای روی خط مستقل از مسیر

در بخش ۲.۹ دیدیم که مقدار انتگرال روی خط

$$(1) \quad \int_C (f \, dx + g \, dy + h \, dz) \quad .$$

در حالت کلی نه فقط به نقاط انتهایی P و Q از مسیر C بلکه به خود C نیز بستگی دارد؛ یعنی، هر گاه از P تا Q در امتداد مسیرهای مختلف انتگرال بگیریم، در حالت کلی، مقادیر مختلفی برای انتگرال به دست خواهد آمد. حال می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی این مقدار فقط به P و Q بستگی دارد و به مسیر C از P تا Q بستگی ندارد. این مسأله بسیار با اهمیت است. نخست تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ و $h(x, y, z)$ توابعی باشند که در حوزه‌ای مانند D از فضا تعریف شده و پیوسته‌اند. آنگاه انتگرال روی خط (۱) را در D مستقل از مسیر نامند هر گاه به ازای هر زوج نقطه انتهایی P و Q در D مقدار انتگرال به ازای همه مسیرهای C واقع در D که از P شروع و به Q ختم می‌شوند یکسان باشد. بدین ترتیب این مقدار، در حالت کلی، به انتخاب نقاط P و Q بستگی دارد و نه به مسیری که آنها را به هم وصل می‌کند.

یادآوری می‌کنیم که بنا بر تعریف، تابع رابطه‌ای است **تک مقداری**، یعنی یک تابع به هر نقطه از حوزه تعریفش تنها یک مقدار از برد خود مربوط می‌کند. این موضوع در بحث حاضر حائز اهمیت است.

برای فرمولبندی کردن نتایج، دو مفهوم زیر مفید است.
عبارتی به صورت

$$(2) \quad f \, dx + g \, dy + h \, dz \quad ,$$

که در آن f ، g ، h توابعی هستند که در حوزه‌ای مانند D در فضا تعریف شده‌اند، به صورت **دیفرانسیلی مرتبه اول** سه متغیره موسوم است. این صورت را **کامل** یا **یک دیفرانسیل کامل** در D نامند، هر گاه در همه نقاط D مساوی دیفرانسیل

$$(۳) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

تابع مشتقپذیر $u(x, y, z)$ باشد؛ یعنی داشته باشیم

$$(۴) \quad f dx + g dy + h dz = du.$$

بامقایسه (۳) و (۴) مشاهده می‌کنیم که صورت (۲) در D وقتی و فقط وقتی کامل است که تابع مشتقپذیری مانند $u(x, y, z)$ موجود باشد به طوری که همه جا در D داشته باشیم

$$(۵) \quad f = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad g = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

به زبان برداری این بدان معنی است که صورت (۲) در D وقتی و فقط وقتی کامل است که تابع برداری

$$\mathbf{v} = f \mathbf{i} + g \mathbf{j} + h \mathbf{k}$$

برای گرادینان تابع $u(x, y, z)$ در D باشد:

$$(۵') \quad \mathbf{v} = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

حال ثابت می‌کنیم که کامل بودن، شرطی لازم و کافی است برای آنکه انتگرال از مسیر مستقل باشد.

قضیه ۱ (کامل بودن و استقلال از مسیر)

فرض می‌کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ و $h(x, y, z)$ در حوزه‌ای مانند D از فضا پیوسته باشند. آنگاه انتگرال روی خط

$$(۶) \quad \int_c (f dx + g dy + h dz)$$

در D مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر صورت دیفرانسیلی زیر علامت انتگرال در D کامل باشد.

تبصره. توجه کنید که (۶) را می‌توان چنین نوشت:

$$(۶') \quad \int_c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

که در آن $\mathbf{v} = f \mathbf{i} + g \mathbf{j} + h \mathbf{k}$ و $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$

اثبات قضیه. (الف) فرض می‌کنیم انتگرال مورد نظر در D مستقل از مسیر باشد. نقطه ثابت دلخواه $P: (x_0, y_0, z_0)$ و نقطه‌ای مانند $Q: (x, y, z)$ را در D انتخاب می‌کنیم. سپس تابع $u(x, y, z)$ را با فرمول

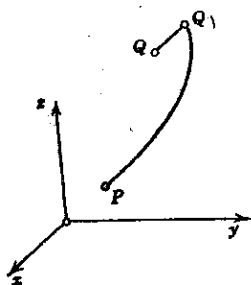
$$(۷) \quad u(x, y, z) = u_0 + \int_P^Q (f dx^* + g dy^* + h dz^*)$$

که در آن u_0 مقداری است ثابت، تعریف می‌کنیم و در D در امتداد مسیری دلخواه از P تا Q انتگرال می‌گیریم، چون انتگرال مستقل از مسیر و P نقطه‌ای ثابت است، بنا بر این انتگرال مزبور فقط به مختصات x, y, z نقطه انتهایی Q ، بستگی دارد و تابعی مانند $u(x, y, z)$ در D تعریف می‌کند. حالا کافی است نشان دهیم که روابط (۵) از (۷) نتیجه می‌شوند. یعنی نشان دهیم که $f dx + g dy + h dz$ در D کامل است. نخست به اثبات اولین رابطه از این روابط می‌پردازیم؛ چون انتگرال مستقل از مسیر است، می‌توانیم از P تا نقطه‌ای مانند $Q_1: (x_1, y, z)$ و سپس به موازات محور x ها در امتداد پاره‌خطی از Q_1 تا Q انتگرال بگیریم (شکل ۲۰۰)؛ در اینجا Q_1 طوری اختیار می‌شود که تمامی پاره خط $Q_1 Q$ در D واقع شود. آنگاه

$$u(x, y, z) = u_0 + \int_P^{Q_1} (f dx^* + g dy^* + h dz^*) + \int_{Q_1}^Q (f dx^* + g dy^* + h dz^*).$$

از طرفین نسبت به x مشتق جزئی می‌گیریم. چون P و Q_1 به x بستگی ندارند، مشتق انتگرال اول صفر است. چون روی پاره خط $Q_1 Q$ هم y و هم z ثابت هستند، انتگرال آخر را می‌توان به صورت انتگرال معین زیر نوشت:

$$\int_{x_1}^x f(x^*, y, z) dx^*.$$



شکل ۲۰۰. اثبات قضیه ۱

از این دو مشتق جزئی انتگرال نسبت به x برابر $f(x, y, z)$ است، و بدین ترتیب رابطه اول از روابط (۵) به اثبات می‌رسد. دو رابطه دیگر را می‌توان به همین طریق ثابت کرد.

(ب) برعکس، فرض کنید که $f dx + g dy + h dz$ در D کامل باشد. آنگاه (۵) به ازای تابعی مانند u در D برقرار است. گیریم C مسیری دلخواه از P تا Q در D باشد و

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (t_0 \leq t \leq t_1)$$

نمایشی پارامتری از C باشد به طوری که در آن P متناظر با $t = t_0$ و Q متناظر با $t = t_1$ باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} \int_P^Q (f dx + g dy + h dz) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{du}{dt} dt = u \left[x(t), y(t), z(t) \right]_{t=t_0}^{t=t_1} \\ &= u(Q) - u(P). \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که مقدار انتگرال عبارت است از تفاضل مقادیر u در دو نقطه انتهایی C ، و بنابراین، مستقل از C است. بدین طریق قضیه ۱ ثابت می‌شود. ▲

آخرین فرمولی که در اثبات دیدیم:

$$(۸) \quad \int_P^Q (f dx + g dy + h dz) = u(Q) - u(P),$$

شبه فرمول متداول

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad [F'(x) = f(x)] \quad \text{[که در آن]}$$

برای محاسبه انتگرالهای معین است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با آن آشنا شده ایم. فرمول (۸) وقتی به کار می‌رود که انتگرال روی خط مستقل از مسیر باشد. مورد استفاده عملی این فرمول در انتهای همین بخش، در مثال ۳، تشریح شده است.

یادآوری می‌کنیم کار $\bar{W}$ که نوسط نیروی (متغیر) $\mathbf{p} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}$ ، برای جابه‌جا کردن ذره‌ای در امتداد مسیر C در فضا انجام می‌شود با انتگرال روی خط (۷) بخش ۲.۹ معین می‌شود:

$$W = \int_C \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f dx + g dy + h dz),$$

انتگرالگیری درجهت جابه‌جایی انجام می‌گیرد. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای آنکه W فقط به P و Q ، نقاط انتهایی مسیر C ، بستگی داشته باشد آن است که صورت دیفرانسیلی زیر علامت انتگرال کامل باشد؛ و این صورت وقتی و فقط وقتی کامل است که p برابر گرادیان تابع اسکالری مانند u باشد. در این حالت میدان نیروی p را پایستار می‌نامند (انتهای بخش ۸.۸ را نیز ببینید).

مثال ۱. کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد

مطلوب است محاسبه W کاری که نیروی $p = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ برای جابه‌جا کردن یک ذره در امتداد پاره‌خط مستقیم C از $P: (1, 1, 1)$ تا $Q: (3, 3, 2)$ انجام می‌دهد. این کار با انتگرال زیر داده می‌شود:

$$W = \int_C (yz dx + xz dy + xy dz).$$

این انتگرال به صورت (۱) است و در آن

$$f = yz, \quad g = xz, \quad h = xy,$$

یعنی (۵) به‌ازای $u = xyz$ برقرار است. پس W مستقل از مسیر است و می‌توانیم از (۸) استفاده کنیم، در نتیجه

$$W = u(Q) - u(P) = u(3, 3, 2) - u(1, 1, 1) = 18 - 1 = 17$$

▲

از قضیه ۱، بلافاصله می‌توان نتیجه مهم زیر را گرفت.

قضیه ۲ (استقلال از مسیر)

فرض می‌کنیم f ، g ، h در حوزه‌ای مانند D از فضا پیوسته باشند. آنگاه انتگرال روی خط

$$\int_C (f dx + g dy + h dz)$$

در D مستقل از مسیر است اگر و تنها اگر این انتگرال روی هر مسیر بسته ساده در D صفر باشد.

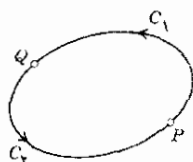
اثبات. (الف) فرض می‌کنیم C مسیر بسته ساده‌ای در D باشد و انتگرال مزبور در D مستقل از مسیر باشد. C را به دو قوس C_1 و C_2 تقسیم می‌کنیم (شکل ۲۰۱). آنگاه

$$\begin{aligned} & \oint_C (f dx + g dy + h dz) \\ (9) \quad &= \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) + \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz). \end{aligned}$$

به دلیل مستقل بودن انتگرال از مسیر، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) &= \int_{C_1^*} (f dx + g dy + h dz) \\ &= - \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz),\end{aligned}$$

که در آن C_1^* همان C_1 است منتهی با جهت معکوس. از اینجا نتیجه می شود که طرف چپ (۹) برابر صفر است.



شکل ۲۰۱. اثبات قضیه ۲

(ب) برعکس، فرض می کنیم که انتگرال مورد نظر روی هر مسیر بسته ساده در D صفر باشد. گیریم P و Q دو نقطه دلخواه از D ، و C_1 و C_2 دو مسیر در D باشند که P و Q را به هم وصل می کنند و متقاطع نیستند (شکل ۲۰۱). C_1 و C_2 با هم مرز بسته ساده C را تشکیل می دهند. بنا براین،

$$\begin{aligned}\int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) + \int_{C_2} (f dx + g dy + h dz) \\ = \oint_C (f dx + g dy + h dz) = 0.\end{aligned}$$

از اینجا به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\int_{C_2} (f dx + g dy + h dz) &= - \int_{C_1} (f dx + g dy + h dz) \\ &= \int_{C_1^*} (f dx + g dy + h dz).\end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه ۲ به اتمام می رسد.

تعمیم این قضیه به مسیرهای بسته ای که به دفعات محدودی خود را قطع می کنند به سادگی صورت می پذیرد.

برای اینکه در عمل بتوانیم از قضیه ساده ۱ به طور مؤثری استفاده کنیم به معیاری نیاز داریم که بتوانیم توسط آن کامل بودن صورت دیفرانسیلی زیر علامت انتگرال را تحقیق کنیم. چنین معیاری در قضیه ۳ی زیر ارائه شده است. برای فرمولبندی کردن این قضیه به مفهوم زیر نیاز داریم.

حوزه D را همبند ساده می نامند هرگاه هر منحنی بسته در D را بتوان به طور پیوسته بدون اینکه از D خارج شود، در یک نقطه دلخواه D جمع کرد.

مثلاً داخل یک کره یا یک مکعب، داخل کره‌ای که تعدادی متناهی از نقاط آن برداشته شده و ناحیه بین دو کره متحدالمرکز همبند ساده‌اند ولی داخل یک چنبره (ر. ک. بخش ۶.۹) و داخل مکعبی که یک قطر فضایی آن برداشته شده باشد، همبند ساده نیستند.

قضیه ۳. (معیار کامل بودن و استقلال از مسیر)

فرض می کنیم $f(x, y, z)$ ، $g(x, y, z)$ و $h(x, y, z)$ توابعی پیوسته، با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته، در حوزه‌ای مانند D از فضا باشند. هرگاه انتگرال روی خط

$$(10) \quad \int_c (f dx + g dy + h dz)$$

در D مستقل از مسیر باشد (در نتیجه $f dx + g dy + h dz$ در D کامل باشد، آنگاه

$$(11) \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

یا به زبان برداری، در تمام نقاط D

$$(11') \quad \text{curl } \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{v} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k})$$

برعکس، هرگاه D همبند ساده باشد و (۱۱) در همه نقاط D برقرار باشد، آنگاه انتگرال (۱۰) در D مستقل از مسیر است (در نتیجه، صورت دیفرانسیلی $f dx + g dy + h dz$ در D کامل است).

اثبات. (الف) فرض می کنیم که (۱۰) در D مستقل از مسیر باشد. آنگاه، با توجه به قضیه ۱، صورت $f dx + g dy + h dz$ در D کامل است و تابعی مانند u وجود دارد به طوری که، با توجه به (۵')، در D داریم

$$\mathbf{v} = f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k} = \text{grad } u$$

از این رابطه و از (۳) ی بخش ۱۱.۸ به دست می آوریم

$$\text{curl } \mathbf{v} = \text{curl } (\text{grad } u) = \mathbf{0}.$$

(ب) برعکس، فرض می‌کنیم که D همبند ساده است و $(11')$ در همه نقاط D برقرار. فرض می‌کنیم C مسیر بسته ساده دلخواهی در D باشد. چون D همبند ساده است، می‌توان در D سطحی مانند S یافت که با C محصور شده باشد؛ با استفاده از قضیه استوکس (بخش ۱۰.۹)، و با انتخاب جهت مناسبی برای C و نرمال $\mathbf{n}$ بر S ، به دست می‌آوریم

$$\int_C (f dx + g dy + h dz) = \int_C v_i ds = \int_S \int (\text{curl } \mathbf{v})_n dA = 0.$$

از اینجا و از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که انتگرال (10) در D مستقل از مسیر است و بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ▲

مشاهده می‌کنیم که در مورد انتگرال روی خط

$$\int_C (f dx + g dy)$$

در صفحه xy ، روابط (11) به رابطه

$$(11^*) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

بدل می‌شوند.

این فرض که D همبند ساده باشد فرضی ضروری است و نمی‌توان آن را حذف کرد. این مطلب را می‌توان با مثال زیر روشن کرد.

مثال ۲. درباره فرض همبند ساده بودن در قضیه ۳

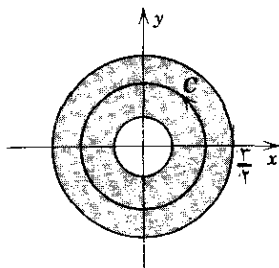
فرض می‌کنیم

$$f = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad h = 0.$$

مشتقگیری نشان می‌دهد که (11^*) در هر حوزه‌ای از صفحه xy که شامل مبدأ نباشد صادق است، مثلاً در حوزه $1/2 < \sqrt{x^2 + y^2} < 3/2$ که در شکل ۲۰۲ نشان داده شده است. بدیهی است که D همبند ساده نیست. هر گاه انتگرال

$$I = \int_C (f dx + g dy) = \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

در D مستقل از مسیر باشد، آنگاه روی هر منحنی بسته واقع در D ، مثلاً بر دایره



شکل ۲۰۲. مثال ۲

$x^2 + y^2 = 1$ ، داریم $I = 0$. اما با قرار دادن $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ و با توجه به اینکه دایره با $r = 1$ نمایش داده می‌شود، به آسانی به دست می‌آوریم

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

انتگرالگیری یک دور حول دایره، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، انجام شده است. درواقع، چون D همبند ساده نیست، نمی‌توانیم قضیه ۳ را به کار ببریم و استنتاج کنیم که I در D مستقل از مسیر است. به علاوه مشاهده می‌کنیم که

$$u = \arctan \frac{y}{x} = \theta \quad \text{در آن} \quad f dx + g dy = du$$

اما u در D تک‌مقداری نیست. از طرف دیگر، هر گاه «مقدار اصلی» u را که با $-\pi \leq u \leq \pi$ تعریف می‌شود در نظر بگیریم، آنگاه u در نقاط واقع بر قسمت منفی محور x ها در D مشتق‌پذیر (و حتی پیوسته) نیست؛ ذکر این مطالب در ارتباط با کامل بودن صورت دیفرانسیلی، لازم بود. ▲

هر گاه انتگرال روی خط مستقل از مسیر باشد، آن را می‌توان به وسیله فرمول (۸) محاسبه کرد.

مثال ۳. محاسبه انتگرال روی خط در حالتی که این انتگرال مستقل از مسیر است مطلوب است محاسبه

$$I = \int_C [2xyz^2 dx + (x^2 z^2 + z \cos yz) dy + (2x^2 yz + y \cos yz) dz]$$

روی مسیر دلخواهی از $P: (0, 0, 1)$ تا $Q: (1, \pi/4, 2)$.

از قضیه ۳ نتیجه می‌شود که انتگرال مستقل از مسیر در فضا است. چون $f = 2xyz^2$ ، از رابطه اول (۵) به دست می‌آوریم

$$(۱۲) \quad u = \int f dx = x^y y z^y + a(y, z),$$

از این رابطه و رابطه دوم (۵) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y z^y + \frac{\partial a}{\partial y} = g = x^y z^y + y \cos yz.$$

پس باید داشته باشیم

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z \cos yz, \quad a = \sin yz + c(z).$$

از رابطه اخیر، رابطه سوم (۵)، و (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial z} = y x^y yz + y \cos yz + \frac{dc}{dz} = h = y x^y yz + y \cos yz.$$

در نتیجه $dc/dz = 0$ ، ثابت c ، و بنابراین

$$u(x, y, z) = x^y y z^y + a = x^y y z^y + \sin yz + c.$$

خواننده می‌تواند با نگاهی دوباره به انتگرال سعی کند که این u را با حدس و بررسی پیدا کند. سرانجام از فرمول (۸) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$I = [x^y y z^y + \sin yz + c] \Big|_p^q = \pi + \sin \frac{\pi}{y} = \pi + 1.$$

مسائل بخش ۱۳.۹

آیا صورتهای دیفرانسیلی زیر کا هستند؟

$$x dx - y dy + z dz \quad .۱$$

$$x^y dx + y xy dy + y^y dz \quad .۲$$

$$e^y dx + e^x dy + e^z dz \quad .۳$$

$$(y + z \cos x) dx + x dy + \sin x dz \quad .۴$$

$$z \cos yz dy + y \cos yz dz \quad .۵$$

$$y^y dx + z^y dy + x^y dz \quad .۶$$

$$yz dx + xz dy + xy dz \quad .۷$$

$$y^2 z^2 dx + 2xyz^2 dy + 3xy^2 z^2 dz \quad .۸$$

در هر يك از مسائل زیر نشان دهید که صورت دیفرانسیلی داده شده کامل است و تابعی مانند u پیدا کنید به طوری که صورت داده شده برابر du باشد.

$$x dx - y dy - z dz \quad .۹$$

$$dx + dy + dz \quad .۱۰$$

$$dx + z dy + y dz \quad .۱۱$$

$$(z^2 - 2xy) dx - x^2 dy + 2xz dz \quad .۱۲$$

$$\cos x dx - 2yz dy - y^2 dz \quad .۱۳$$

$$6xy dx + 3x^2 dy - 4z dz \quad .۱۴$$

نشان دهید که صورت زیر علامت انتگرال، کامل است و سپس انتگرال را محاسبه کنید:

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (x dx + y dy - z dz) \quad .۱۵$$

$$\int_{(1,0,0)}^{(2,1,4)} [yz dx + (xz + 1) dy + xy dz] \quad .۱۶$$

$$\int_{(0,-1,-1)}^{(\pi,2,2)} (\cos x dx + z dy + y dz) \quad .۱۷$$

$$\int_{(1,2,2)}^{(4,0,1)} [z dx - z dy + (x - y) dz] \quad .۱۸$$

$$\int_{(0,2,1)}^{(2,0,1)} [ze^x dx + 2yz dy + (e^x + y^2) dz] \quad .۱۹$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,4,2)} (3y^2 e^z dy + y^2 e^z dz) \quad .۲۰$$