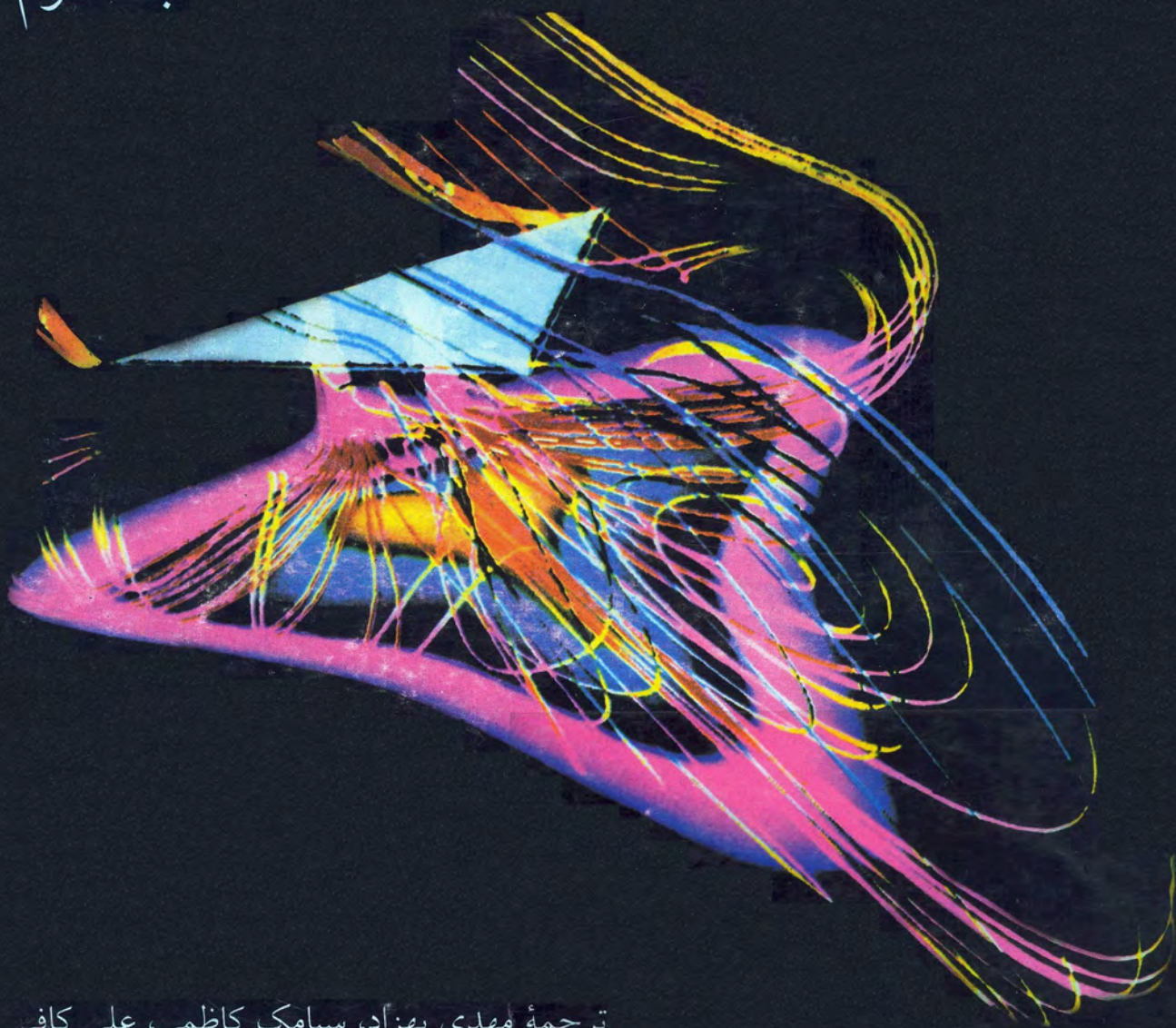




حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جورج توماس، راس فیلی

جلد دوم



ترجمه مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد دوم

جورج توماس، راس فینی

ترجمه مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

مرکز نشر دانشگاهی



Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Ross L. Finney
Seventh Edition
Addison-Wesley, 1988

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (ویراست هفتم)

جلد دوم

تألیف جورج توماس، راس فینی

ترجمه مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

نسخه پرداز: محمدعلی رزاقی
صفحه آرا: علی اکبر شعبانی
ناظر چاپ: حمیدرضا دمیرچی لو
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۷۰
چاپ شانزدهم ۱۳۸۹
تعداد ۱۵۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: خجسته
۱۰۵۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فروش اینترنتی: <http://eshop.iup.ir>

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Thomas, George Brinton

توماس، جورج برنتن، ۱۹۱۴ -

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی / جورج توماس، راس فینی؛ ترجمه مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳-۱۳۷۴.
ج ۲: مصور (بخشی رنگی)، نمودار (بخشی رنگی). - (مرکز نشر دانشگاهی: ۵۳۶، ۵۹۱ ریاضی، آمار، و کامپیوتر: ۶۷، ۷۸)

ISBN 978-964-01-8040-2 (دوره)

ISBN 978-964-01-0536-8 (ج ۱ ق ۱)

ISBN 978-964-01-8039-6 (ج ۱ ق ۲)

ISBN 978-964-01-0591-7 (ج ۲ ق ۲)

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.

عنوان اصلی: Calculus and analytic geometry, 7th ed.

این کتاب توسط مترجمان و ناشران مختلف در سالهای متفاوت نیز منتشر شده است.
کتابنامه.

نمایه.

ج ۲ (چاپ شانزدهم: ۱۳۸۹).

۱. حسابان ۲. هندسه تحلیلی، الف. فینی، راس، Ross L. Finney، ب. بهزاد، مهدی، ۱۳۱۵ - ، مترجم، ج. کاظمی، سیامک، ۱۳۳۳ - ، مترجم، د. کافی، علی، ۱۳۳۳ - ، مترجم، ه. مرکز نشر دانشگاهی، و. عنوان.

ح ۵ ق ۹ / QAR۳۰۳ ۵۱۵/۱۵

۱۳۷۳

کتابخانه ملی ایران

۶۷-۷۳*

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

عنوان	صفحه	عنوان	صفحه
پیشگفتار		پنج هشت	
در امد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟		فصل ۱۵ رویه‌ها، دستگاههای مختصات، و ترسیم	
فصل ۱۳ بردارها			
چشم انداز		چشم انداز	
۱۰۱۳ بردارهای واقع در صفحه		۱۰۱۵ استوانه	
۲۰۱۳ معادلات حرکت پرتابه		۲۰۱۵ رویه‌های درجه دوم	
۳۰۱۳ مختصات و بردارها در فضا		۳۰۱۵ مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی	
۴۰۱۳ ضرب عددی دو بردار		پرسشها و تمرینهای مروری	
۵۰۱۳ ضرب برداری دو بردار		مسأله‌های گوناگون	
۶۰۱۳ معادله‌های خط، پاره خط، و صفحه در فضا			
۷۰۱۳ ضرب سه یا بیش از سه بردار			
پرسشها و تمرینهای مروری			
مسأله‌های گوناگون			
فصل ۱۴ تابعهای برداری و حرکت		فصل ۱۶ تابعهای دو یا چندمتغیره و مشتق آنها	
چشم انداز		چشم انداز	
۱۰۱۴ تابعهای برداری و حرکت		۱۰۱۶ تابعهایی که بیش از يك متغیر مستقل دارند	
۲۰۱۴ فاصله جهتدار و بردار مماس واحد T		۲۰۱۶ حد و پیوستگی	
۳۰۱۴ خمیدگی، تاب، و دستگاه TNB		۳۰۱۶ مشتقهای جزئی	
۴۰۱۴ حرکت سیارات و ماهواره‌ها		۴۰۱۶ قاعده زنجیری	
پرسشها و تمرینهای مروری		۵۰۱۶ مشتقهای جزئی با متغیرهای مفید	
مسأله‌های گوناگون		۶۰۱۶ گرادیان و مشتقهای جهتی	
		۷۰۱۶ صفحه‌های مماس و خطهای قائم	
		۸۰۱۶ مشتقهای جزئی، مراتب بالاتر، معادلات دیفرانسیل	
		جزئی مربوط به فیزیک	
		پرسشها و تمرینهای مروری	

عنوان	صفحه	عنوان	صفحه
مسأله‌های گوناگون	۱۴۱	استقلال از مسیر و میدانهای پایستار	۲۸۶
		پرسشها و تمرینهای مروری	۲۹۳
		مسأله‌های گوناگون	۲۹۳

فصل ۱۷ کاربردهای مشتقات جزئی

چشم انداز	۱۴۸	فصل ۲۰ معادلات دیفرانسیل	۲۹۹
۱۰۱۷ ماکسیممها، مینیممها، و نقاط زینی	۱۴۸	چشم انداز	۲۹۹
۲۰۱۷ تقریب خطی و برآورد نمو	۱۵۶	مقدمه	۲۹۹
۳۰۱۷ ضرایب لاگرانژ	۱۶۵	معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول از درجه اول	۳۰۱
۴۰۱۷ فرمول تیلر، آزمون مشتق دوم، و برآورد خطا	۱۷۵	معادله‌های مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول	۳۱۰
پرسشها و تمرینهای مروری	۱۸۰	معادله‌های همگن مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت	۳۱۳
مسأله‌های گوناگون	۱۸۱	معادله‌های ناهمگن مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت	۳۱۶

فصل ۱۸ انتگرالهای چندگانه

چشم انداز	۱۸۳	پایوستها	۳۴۵
۱۰۱۸ انتگرالهای دوگانه	۱۸۳	پ ۶ قانون توزیع پذیری در مورد ضرب برداری بردارها	۳۴۵
۲۰۱۸ مساحت، گشتاور، و مرکز جرم	۱۹۴	پ ۷ دترمینان و قاعده کرامر	۳۴۶
۳۰۱۸ انتگرال دوگانه به صورت قطبی	۲۰۰	پ ۸ ماتریس، معادلات خطی، و ویژه مقادیرها	۳۵۳
۴۰۱۸ انتگرالهای سه گانه در مختصات قائم. حجم و مقدار متوسط	۲۰۹	پ ۹ قضیه نمو و قضیه مشتقات آمیخته اوایلر	۳۶۴
۵۰۱۸ جرم و گشتاور در سه بعد	۲۱۵	پ ۱۰ فرمولهای عملگرهای برداری در مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی، اتحادهای برداری	۳۶۷
۶۰۱۸ انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی	۲۱۹	پ ۱۱ عددهای مختلط	۳۶۹
پرسشها و تمرینهای مروری	۲۲۸	پ ۱۲ جدولهای $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ ، e^x ، e^{-x} و $\ln x$	۳۷۸
مسأله‌های گوناگون	۲۲۹	پاسخها	۳۸۰

فصل ۱۹ میدانهای برداری و انتگرالگیری

چشم انداز	۲۳۴	فهرست راهنما	۴۰۸
۱۰۱۹ انتگرالهای خمیده خطی	۲۳۴		
۲۰۱۹ انتگرالهای خمیده خطی در میدانهای برداری، کار، گردش، و شار	۲۴۱		
۳۰۱۹ قضیه گرین در صفحه	۲۴۸		
۴۰۱۹ مساحت رویه و انتگرال رویه‌ای	۲۶۰		
۵۰۱۹ قضیه دیورژانس	۲۶۹		
۶۰۱۹ قضیه استوکس	۲۷۸		

در این ویرایش جدید از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی کوشیده ایم مفیدترین کیفیات و ویژگی‌هایی که ویرایشهای قبلی از نظر خوانندگان داشته‌اند، محفوظ بماند. با این حال، در این ویرایش یکی از جسامت‌ترین تجدیدنظرها در تاریخ سی ساله این کتاب هم در صورت و هم در محتوا به عمل آمده است. این تجدیدنظر مبتنی است بر دهها نقد، گفتگوهای متعدد با خوانندگان و ویرایشهای قبلی، نامه‌های حاوی توصیه از دوستان، دانشجویان و مدرسان از سراسر جهان. هدف کلی ما در این تجدیدنظر این بوده است که کتاب را خواندنی‌تر، و مطالبش را برای مبتدیان قابل فهم‌تر سازیم بدون آنکه استانداردها و مطالبی را که خوانندگان مایل‌اند این کتاب داشته باشد، قربانی کنیم.

در این ویرایش جدید از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی کوشیده ایم مفیدترین کیفیات و ویژگی‌هایی که ویرایشهای قبلی از نظر خوانندگان داشته‌اند، محفوظ بماند. با این حال، در این ویرایش یکی از جسامت‌ترین تجدیدنظرها در تاریخ سی ساله این کتاب هم در صورت و هم در محتوا به عمل آمده است. این تجدیدنظر مبتنی است بر دهها نقد، گفتگوهای متعدد با خوانندگان و ویرایشهای قبلی، نامه‌های حاوی توصیه از دوستان، دانشجویان و مدرسان از سراسر جهان. هدف کلی ما در این تجدیدنظر این بوده است که کتاب را خواندنی‌تر، و مطالبش را برای مبتدیان قابل فهم‌تر سازیم بدون آنکه استانداردها و مطالبی را که خوانندگان مایل‌اند این کتاب داشته باشد، قربانی کنیم.

مخاطبان و پیشنیازها این کتاب تمام مطالب لازم را برای یک درس متعارف حساب دیفرانسیل و انتگرال که در سه ترم نیمساله یا چهار ترم سه ماهه به دانشجویان سالهای اول و دوم عرضه شود، در بر دارد. پیشنیاز آن، آشنایی با جبر و مثلثات در حد معمولی است ولی برای یادآوری، فصل ۱ را با مرور مختصری بر مختصات، خطها، تابعها، و نمودارها آغاز کرده‌ایم. در فصل ۲ نیز مروری بر مثلثات شده است.

ویژگیهای برگرفته از ویرایشهای قبلی مانند قبل، هدف ما آموزش حساب دیفرانسیل و انتگرال و ارائه آن نوع تعلیمی است که خوانندگان برای کاربرد مؤثر این حساب در کارهای دانشگاهی و حرفه‌ای آینده خود به آن نیاز خواهند داشت. برای انجام این کار، سطح ریاضی مطالب، جهتگیری کاربردی آن، تأکید کتاب بر مثالهای حل شده، و کثرت و تنوع تمرینها را محفوظ نگه داشته‌ایم و مانند قبل، ارتباطات بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و برخی از روشهای عددی مورد استفاده در درسهای دیگر را نشان داده‌ایم.

کاربردها حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل مسائلی در فیزیک و نجوم ابداع شد. و گرچه در سیر پیشرفت خود به شاخه ریاضی گسترده و مستقلی تبدیل شده است، اما اکثر کاربردهایش در خارج از ریاضیات هنوز با علوم [تجربی] و مهندسی در ارتباط‌اند. همانند ویرایشهای قبلی، در کتاب حاضر هم کاربردها بیشتر در همین زمینه‌ها هستند. نمونه‌هایی از این کاربردها عبارت‌اند از محاسبه مقادیر اکستریم، مراکز جرم، کار و نیروی هیدرواستاتیکی، محاسبه مدارهای ماهواره‌ها، و توصیف جریان سیال (بخشهای ۵.۳، ۸.۵، ۹.۵، ۱۰.۵، ۴.۱۴، و ۲.۱۹ را ببینید). ولی درس‌الهای اخیر حساب دیفرانسیل و انتگرال در بسیاری از رشته‌های دیگر هم اهمیت پیدا کرده است. از جمله در اقتصاد، تجارت، علوم زیستی و حتی مسائل فیزیکی مربوط به ورزشها. بنا بر این، مثالهای متنوعی هم از این رشته‌ها آورده‌ایم که مثلاً چند مورد آن عبارت است از متوسط موجودی روزانه، آهنگ تولد و رشد جمعیت و کار لازم برای نواختن ضربه به یک توپ گلف یا یک توپ تنیس. (صفحات ۳۵۰، ۳۱۳، ۳۷۵ را ببینید). هر وقت حس کرده‌ایم که می‌توان

بدون تحمیل مطلبی به متن ارتباطاتی بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و زندگی واقعی برقرار کرد، چنین کاری کرده ایم. در این ویرایش، صفحات بیشتری را به مراحل مسأله حل کردن در کاربردهایی که با مدل سازی ریاضی مربوط اند، اختصاص داده ایم، مثلاً در اوایل بخش آهنگهای وابسته (صفحات ۱۸۵-۲۸۱)، و در حل مسأله کابل آویزان (صفحات ۵۱۴-۵۱۵).

مثالهای حل شده تمرینها در جاهایی می آیند که خواننده باید دست به کار شود ولی مثالها در جاهایی می آیند که کار برعهده هاست. ما مثالهای مورد علاقه خوانندگان را در این ویرایش حفظ کرده ایم و تعدادی مثال تازه هم آورده ایم که غالباً مراحل حل را با تفصیل بیشتری از قبل نشان می دهند. همچنین به جای برخی از مثالهای مشکل، مثالهای ساده تری آورده ایم که همان نکات را دربردارند. مثالها مربوط به مباحث متنوعی هستند از عایق کاری خط لوله سراسری آلاسکا تا زهکشی و پر کردن باتلاقها، از برق شهر تا روشی برای ترسیم سهمیها؛ از تحلیل شکل طاق دروازه غرب در سنت لوئیس تا معماهای محاسبات کامپیوتری و تغییر دما در زیر سطح زمین (صفحات ۱۲۱، ۲۶۰، ۲۹۹، ۳۶۴، ۵۱۶، ۶۴۹ و انتهای بخش ۱۰۱۶ را ببینید).

مجموعه های مسأله ها هر مجموعه از مسائل، آمیزه ای است از مسأله های عادی ریاضی و مسأله های مبارز طلب تر. در بسیاری از این مجموعه ها جهش از مسائل آسان به مسائل پیچیده تدریجیتر از قبل صورت می گیرد. تقریباً در هر مجموعه، مسائل کمابردی آمده است و بسیاری از مجموعه ها شامل تمرینهایی هستند که با ماشین محاسبه انجام می شود (صفحات ۱۱۵-۱۱۲، ۱۷۵-۱۸۵، ۲۶۱-۲۶۳) هر فصل بابخی که شامل مسائل گوناگون است پایان می پذیرد. این مسأله ها به مباحثی که در فصل آمده اند، مربوط اند و ترتیب ارائه آنها همان ترتیب ارائه مباحث است. در بسیاری از این بخشهای پایانی، مطالبی [و مسأله ای در ارتباط با آنها] آمده است که جالب اند ولی معمولاً کمتر تدریس می شوند و ریاضیات مورد بحث در آنها، در راستای مطالب فصل است (صفحات ۳۲۴-۳۲۵ و ۵۵۴-۵۵۵).

روشهای عددی بحثهای مربوط به ریشه یابی، تقریبهای خطی و درجه دوم توابع، و تقریبهای عددی انتگرالها را در کتاب حاضر هم آورده ایم. این مباحث در ریاضیات و رشته های دیگر اهمیت روزافزونی می یابند. همانند ویرایشهای قبلی، گاه تمرینهایی آمده که به کمک ماشین محاسبه حل می شوند و گاه نیز در آخر مجموعه های مسائل ارجاعاتی نیز به برنامه های میکرو کامپیوتری در

The Calculus Toolkit شده است^۱. ولی مطالعه متن مستلزم داشتن تجربه کار با کامپیوتر یا ماشین حساب یا دسترسی به آنها نیست.

ویژگیهای جدید

علاوه بر آنکه کوشیده ایم آنچه را که به نظر خوانندگان، بهترین ویژگیهای ویرایشهای قبلی بوده حفظ کنیم، کتاب را از ویژگیهای جدیدی برخوردار ساخته ایم تا نیازهای فعلی کلاسهای درس را بر آورد.

مباحث ترسیم ترسیم اشکال سه بعدی غالباً دشوار است. بنا بر این، برای ترسیم صفحه ها، استوانه ها، و رویه های دوبعدی و برای اینکه اشیاء سه بعدی چنان رسم شوند که سه بعدی به نظر برسند، رهنمودهای گام به گامی آورده ایم. رویه های مورد نظر در مباحث ترسیم و در تمرینها، رویه هایی هستند که خوانندگان بعداً در این کتاب هنگام مطالعه حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره با آنها سروکار خواهند داشت (انتهای بخشهای ۳۰۱۳ و ۱۰۱۵ را ببینید).

کیفیت تصویری و هنری بسیاری از تصویرهای قدیمی را دوباره رسم کرده ایم و تصاویر جدیدی هم به متن افزوده ایم تا فهم استدلالهای ریاضی و تصور خمها، رویه ها و اجسامی که در مثالها و تمرینها مطرح می شوند، آسانتر شود. تصاویر این ویرایش از ویرایشهای قبلی بیشتر است و مجموعه های مسائل هم از کیفیت تصویری بهتری برخوردارند.

چشم اندازهای فصلها هر فصل با مطلبی تحت عنوان چشم انداز آغاز می شود که مباحث فصل را با مباحث دیگر کتاب مربوط می سازد و اهمیت آنها را از لحاظ نظری و کاربردی شرح می دهد (مثلاً ابتدای فصلهای ۴ و ۱۶ را ببینید). بیشتر بخشهای کتاب نیز خود با مقدمه کوتاهی شروع می شوند که زمینه را برای مباحثی که می خواهند مطرح کنند، فراهم می سازد. (مثلاً صفحات ۳۴۴ و ۵۸۳ را ببینید).

یادداشتهای تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل قرنهای تلاش آدمی است، و ما برای آگاهانیدن خواننده از این موضوع، یادداشتهایی در باره افرادی که در پیشرفت آن سهم برده اند و درباره کارهایی که آنها انجام داده اند، آورده ایم (مثلاً یادداشت راجع به کار ماری آنیزی در صفحه ۴۹۰ و یادداشت راجع به سری تیلر در صفحه ۶۲۱ را ببینید).

نمودارها و دستورالعملهایی برای مراجعه سریع در این ویرایش نمودارها و دستورالعملهایی آورده ایم که در آنها دسته ای از

۱. نرم افزار *The Calculus Toolkit* شامل بیست و هفت برنامه در زمینه مباحث مختلفی از ناپها گرفته تا میدانهای برداری است. این نرم افزار به استاد و دانشجو امکان می دهد که از میکرو کامپیوتر به عنوان «کج و تختة الکترونیکی» استفاده کنند.

فرمولهای مربوط به هم فهرست بندی می شود، شیوه های عمل روشن می گردد، و خط مشی حل مسأله توصیف می شود. (صفحات ۲۸۷، ۳۹۷، ۴۱۶ و ۶۰۸ را ببینید).

تغییرات دیگر

علاوه بر کیفیاتی که در بالا برشمردیم، این ویرایش تفاوت های مهم دیگری با ویرایش های قبلی دارد.

تمایز بین مباحث اصلی و اختیاری کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال باید در یک زمان پاسخگوی نیاز درسهای متفاوت زیادی باشد و در نتیجه، مطالب چنین کتابی معمولاً بیش از آن است که هر مدرس خاصی بدان نیاز دارد. برای کمک به خواننده که بین مباحث اصلی و حاشیه ای تمایز قائل شود، تعدادی از بخشها و زیر بخشها را با مربع تو خالی ($\square$) مشخص کرده ایم. این مربعها نشان دهنده بخشهای اختیاری اند که مطالعه آنها برای پیگیری بخشهای بعدی ضروری نیست.

تجدید سازمان مباحث در این ویرایش، دیفرانسیل در فصل ۲ معرفی می شود و تابعهای معکوس از فصل ۲ به جایی که اولین بار در فصل ۶ به آنها نیاز داریم انتقال یافته اند. معرفی قاعده زنجیری از مقدمه معادلات پارامتری تفکیک شده است. بخشهای طولانی کوتاه شده یا به دو بخش تقسیم گشته اند. (مثلاً، مبحث تابعها و نمودارها در فصل ۱ و گرافیکها در فصل ۱۶) و برخی از بخشهای کوتاه در هم ادغام شده اند تا طول مبحث مناسب شود (قضیه رول و قضیه مقدار میانگین اکنون در یک مبحث آمده اند). برخی از مباحثی که کمتر مطرح اند از قبیل قضایای پاپوس، جانشانی $z = \tan(x/2)$ ، کسینوسهای هادی، و تقسیم سریهای توانی - کوتاه شده، جزو مباحث اختیاری آمده، یا به مجموعه های مسائل انتقال یافته اند.

حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره ترتیب ارائه مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال چند متغیره تغییر کرده و بیشتر آن از نو نوشته شده است. رویه های درجه دوم از فصل مربوط به بردارها خارج شده و بدین فصل جدید (۱۵) منتقل شده که استوانه ها، مختصات استوانه ای، مختصات کروی، و مباحث ترسیم را در بر دارد. ترتیب

مطالب فصل ۱۴ که درباره توابع برداری و حرکت است، تغییر کرده و این فصل فشرده تر شده تا معرفی خمیدگی، پیچش و دستگاه TNB آسانتر شود. فصل قدیم در زمینه مشتقات جزئی به دو فصل جداگانه تقسیم شده که یکی درباره نظریه و دیگری درباره کاربردها است. شیوه پرداختن به قضایای انتگرال برداری در فصل ۱۹ کاملاً جدید است. این مبحث با انتگرالهای خمیده خطی، میدانهای برداری، و قضیه گرین در صفحه شروع می شود، سپس به سراغ انتگرالهای رویه ای، قضیه دیورژانس، و قضیه استوکس می رود و با میدانهای پایستار و توابع پتانسیل به پایان می رسد. ما همچنین ارتباط دنیای واقعی را با این موضوع، که انگیزه اولیه پیدایش و رشد آن بوده است، بیشتر مورد بحث قرار می دهیم.

کاربردهای جدید دهها کاربرد جدید را در کتاب آورده ایم؛ از جمله، تحلیل حرکت یک کامیون از روی نمودار زمان-مسافت آن، محاسبه آهنگ تغییر شعاع حباب صابون، بحث مقیاس دسیبل برای اندازه گیری صدا، و تعیین مشخصات مسیر توپ بیسبال در عبور از دیوار پارک فن دی در بوستون (مثلاً صفحات ۱۲۳، ۱۸۵، ۳۷۱ را ببینید).

تجدید نظر در شیوه بررسی مباحث استاندارد از میان بسیاری از مباحثی که در شیوه پرداختن به آنها تجدید نظر شده، اینها را نام می بریم:

دیفرانسیل (بخش ۴.۲)
قاعده زنجیری (بخش ۵.۲)
قضیه های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (بخش ۷.۴)
حجم اجسام دورانی (بخشهای ۳.۵ و ۴.۵)
گشتاور و مرکز جرم (بخشهای ۸.۵ و ۵.۱۸)
معادله های پارامتری (بخشهای ۸.۲ و ۹.۸)
دنباله ها، از جمله بخشی درباره بازگشت و زبان کامپیوتری (بخش ۱.۱۱)

آزمونهای همگرایی (بخشهای ۵.۱۱ و ۹.۱۱)
ژاکوبیها، در دو بخش اختیاری (بخشهای ۳.۱۸ و ۶.۱۸)
انتگرالهای خمیده خطی در میدانهای برداری (بخش ۲.۱۹)
مساحت رویه و انتگرالهای رویه ای (بخش ۴.۱۹)
میدانهای مستقل از مسیر و پایستار (بخش ۷.۱۹)

جورج توماس مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

راس فینی مؤسسه تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

* در ترجمه این پیشگفتار، برخی از قسمت های پایانی آن که برای خوانندگان فارسی زبان مفید به نظر نرسیده، حذف شده است. در ضمن چند جمله راجع به کیفیت رنگهای تصاویر کتاب اصلی و نحوه تقسیم بندی کتاب در دو جلد، ترجمه نشده است.

درآمد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیات مربوط به حرکت و تغییر است. هر جا حرکت یا رشدی هست، هر جا نیروهای متغیری در کار تولیدشتاب اند، حساب دیفرانسیل و انتگرال درست همان ریاضیاتی است که به کار می آید. این امر در آغاز پیدایش این مبحث صادق بود، و امروز نیز چنین است.

حساب دیفرانسیل و انتگرال در آغاز برای برآورده کردن نیازهای دانشمندان قرن هفدهم ابداع شد. حساب دیفرانسیل با مسأله محاسبه آهنگهای تغییر سروکار داشت و به دانشمندان امکان می داد شیب خمها را تعریف کنند، سرعت و شتاب اجسام متحرک را محاسبه کنند، زاویه آتشیاری توپ را برای حصول بیشترین برد به دست آورند، و زمانهایی را که سیارات نزدیکترین و دورترین فاصله را از هم دارند، پیش بینی کنند. حساب انتگرال به مسأله تعیین تابع براساس اطلاع از آهنگ تغییرش می پرداخت و این امکان را فراهم می کرد که مکان آتی یک جسم را با توجه به مکان فعلی اش و نیروهای مؤثر بر آن محاسبه کنند. مساحت نواحی نامنظم واقع در صفحه را بیابند، طول خمها را اندازه بگیرند، و محل مرکز جرم هر جسم دلخواه را به دست آورند.

پیش از پیشرفت های ریاضی که به کشف بزرگ نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷) و بارون گوتفرید ویلهلم لایب نیتس (۱۶۴۶-۱۷۱۶) انجامید، یوهانس کپلر منجم (۱۵۷۱-۱۶۳۰) با بیست سال تفکر، ثبت اطلاعات، و انجام محاسبات، سه قانون حرکت سیارات را که اکنون به نام او معروف اند، کشف کرد:

۱. هر سیاره در مداری بیضی شکل حرکت می کند که یک کانونش در خورشید قرار دارد (شکل).
۲. بردار شعاعی (یعنی خط واصل بین خورشید و سیاره) در مدت های مساوی مساحت مساوی را می روبد.
۳. مربع مدت گردش هر سیاره به دور خورشید، متناسب است با مکعب فاصله متوسط آن سیاره از خورشید. (اگر T مدت گردش سیاره به دور خورشید و D فاصله متوسط باشد، نسبت T^2/D^3

برای تمام سیاره های منظومه شمسی ثابت است،)



گردش سیاره ای به دور خورشیدش. در اینجا ناحیه های سایه خورده مساحت های برابر دارند. طبق قانون دوم کپلر، سیاره آن قسمت از مرز این نواحی را که روی مدارش قرار دارد در زمانهای مساوی می پیماید. بنابراین، سیاره در نزدیکی خورشید تندتر حرکت می کند تا در قسمت های دورتر مدار.

همان طور که در بخش ۴.۱۴ خواهید دید، استنتاج قوانین کپلر از قوانین حرکت نیوتن با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال کار ساده ای است.

امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال و تمیمه های آن در آنالیز ریاضی قلمرو واقعاً گسترده ای دارند و فیزیکدانان، ریاضیدانان، و منجمانی که اول بار این موضوع را ابداع کردند مسلماً شگفت زده و شادمان می شدند اگر می دیدند که این موضوع

چه انبوهی از مسائل را حل می‌کند و چه رشته‌های متنوعی آن را برای مدل‌سازی ریاضی به‌کار می‌برند و به‌فهم عالم و دنیای پیرامون ما کمک می‌کنند. امیدواریم شما هم در این شگفت‌زدگی و لذت سهیم باشید.

اقتصاددانان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای پیش‌بینی گرایشهای کلی اقتصادی استفاده می‌کنند. اقیانوس‌شناسان از این حساب برای فرمول‌بندی نظریه‌هایی دربارهٔ جریانهای دریایی بهره می‌گیرند و هواشناسان آن را برای توصیف جریان هوای جو به‌کار می‌گیرند. زیست‌شناسان به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال میزان جمعیت را پیش‌بینی می‌کنند و تأثیر جانوران شکارگر مانند روباه‌ها بر جمعیت جانوران شکارشونده تشریح می‌کنند. پژوهشگران پزشکی با استفاده از این حساب تجهیزات فراصوتی و پرتو X را برای بازبینی اندامهای داخلی بدن طراحی می‌کنند و دانشمندان علوم فضایی آن را برای طراحی موشکها و کشف سیاره‌های دور دست به‌کار می‌گیرند. روانشناسان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای درک توهّمات بصری استفاده می‌کنند و فیزیکدانان آن را برای طراحی سیستمهای ناوبری لخت و مطالعه ماهیت زمان و عالم به‌کار می‌برند. مهندسان هیدرولیک به کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال الگوهای مطمئنی برای آب‌بندی شیرها در خطوط لوله می‌یابند و مهندسان برق با به‌کارگیری آن، تجهیزات استروبو스코پی را طراحی و معادلات دیفرانسیلی را که توصیف‌کنندهٔ جریان الکتریکی در کامپیوترها هستند، حل می‌کنند. تولیدکنندگان وسایل ورزشی برای طراحی راکتهای تنیس و بیسبال، و تحلیلگران بازار سهام برای پیش‌بینی قیمت‌ها و ارزیابی مخاطرهٔ نرخ بهره، این حساب را به‌کار می‌گیرند و فیزیولوژیست‌ها با استفاده از آن تکاندها (ایمپالسها)ی الکتریکی را در نورونهای دستگاه عصبی انسان توصیف می‌کنند. شرکتهای دارویی برای تعیین میزان مناسب موجودی دارو، و تولیدکنندگان الوار برای تعیین مناسبترین زمان قطع درختان، به کمک این حساب نیازمندند. این فهرست عملاً بی‌پایان است زیرا امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال تقریباً در هر زمینه و حرفه‌ای به‌طریق می‌رود.

حساب دیفرانسیل و انتگرالی که امروز به‌کار می‌بریم از نظر تاریخی حاصل تلاشهای افراد بسیاری است. ریشه‌های این حساب را تا هندسهٔ کلاسیک یونانی می‌توان ردیابی کرد، ولی

ابداع آن عمدتاً کار دانشمندان قرن هفدهم است. از میان این دانشمندان می‌توان رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰)، بونانوئورا کاوالیری^۱ (۱۵۹۸-۱۶۴۷)، پیردوفوما (۱۶۰۱-۱۶۶۵)، جان والیس (۱۶۱۶-۱۷۰۳) و جیمز گرگوری (۱۶۳۸-۱۶۷۵) را نام برد. این کار با ابداعات بزرگ نیوتن و لایب‌نیتس به‌اوج خود رسید. آنان پیشگام بودند.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در طی قرن بعد با سرعت زیادی ادامه یافت و هر روز کاربردهای جدیدی برای آن در هندسه، مکانیک، مهندسی، و نجوم پیدا می‌شد. در زمرهٔ مهمترین افسرادی که در این زمینه سهم داشتند، چندین نسل از برنولیه‌ها مخصوصاً یساکوب برنولی (۱۶۵۴-۱۷۰۵) و برادرش یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) بودند (خانوادهٔ برنولی همان نشی را در ریاضیات داشتند که خانوادهٔ باخ در موسیقی)؛ همچنین باید از لئونهارت اوپلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) - که با قدرت ابداع خارق‌العاده‌اش چهرهٔ اصلی ریاضیات در قرن هجدهم بود - یاد کرد و نیز از ژوزف لسوئی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، و آدرین ماری ژاندر (۱۷۵۲-۱۸۳۳)، و بسیاری دیگر.

تکمیل ساختار منطقی روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را ریاضیدانان قرن نوزدهم از جمله برنهارد بولسانو (۱۷۸۱-۱۸۴۸)، آگوستین لسوئی کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، و کارل وایرشتراس (۱۸۱۵-۱۸۹۷) برعهده گرفتند. همچنین قرن نوزدهم شاهد دور جدیدی از تعمیمهای جالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و پیشرفتهای بزرگ ریاضیات در ورای این حساب بود. برای کسب اطلاعاتی در مورد این پیشرفتهای می‌توانید کتاب مهم مورس کلاین تحت عنوان اندیشهٔ ریاضی از دوران باستان تا عصر جدید^۲ را مطالعه کنید.

جان فون نویمان (۱۹۰۳-۱۹۵۷) یکی از ریاضیدانان بزرگ قرن بیستم نوشت «حساب دیفرانسیل و انتگرال نخستین دستاورد ریاضیات نوین است و درک اهمیت آن کار آسانی نیست. به‌عقیدهٔ من، این حساب روشنتر از هر مبحث دیگری مرحلهٔ آغازی ریاضیات نوین را توصیف می‌کند؛ و نظام آنالیز ریاضی، که توسعهٔ منطقی آن است، هنوز بزرگترین پیشرفت فنی در تفکر دقیق به‌شمار می‌آید.»

1. Bonaventura Cavalieri

2. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

بردارها

چشم انداز

برخی از کمیاتی که اندازه می گیریم با اندازه شان کاملاً مشخص می شوند. جرم، طول، و زمان نمونه هایی از این کمیات اند که با يك عدد و يك واحد اندازه گیری مناسب مشخص می شوند. اما توصیف نیرو، تغییر مکان، و سرعت تنها با اندازه شان میسر نیست. این کمیات علاوه بر اندازه، جهت نیز دارند. برای توصیف يك نیرو باید علاوه بر اندازه آن جهت اثر آن را نیز مشخص کنیم. برای توصیف تغییر مکان يك جسم، علاوه بر مقدار جا به جایی باید جهت حرکت را نیز معلوم کنیم. برای توصیف سرعت يك جسم در هر لحظه مفروض، علاوه بر مقدار سرعت جسم باید معلوم کنیم در چه جهتی حرکت می کند.

کمیاتی که علاوه بر اندازه جهت نیز دارند معمولاً با پیکانهایی به نمایش درمی آیند که به جهت اثر کمیت اشاره می کنند و طولهایشان اندازه اثر آنها را بر حسب واحد مناسبی مشخص می کنند. وقتی این پیکانها را به صورت انتزاعی به عنوان پاره خطهای جهتدار در صفحه یا در فضا توصیف می کنیم بردارشان می نامیم.

این فصل را با توصیف بردارها در صفحه مختصات و تشریح چگونگی استفاده از آنها برای نوشتن معادلاتی که مدل رفتار پرتابه ها در نزدیک سطح زمین اند آغاز می کنیم. سپس بردارها را در فضا تعریف می کنیم، دوراه را برای ضرب کردن دو بردار درهم بررسی می کنیم، و از معادلات شامل ضرب بردارها برای توصیف خطوط در صفحه و خطوط و صفحات در فضا استفاده می کنیم. حاصل ضرب سه بردار نیز در مهندسی و ریاضیات جایگاهی دارد،

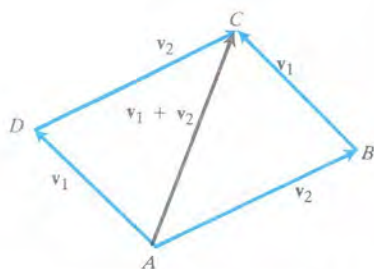
در انتهای این فصل به این مطلب می پردازیم. همه این مطالب مقدمه ای است برای بررسی مفصلتر حرکت در فصل ۱۴. در آنجا است که پای حساب دیفرانسیل و انتگرال به میان می آید. بردارهایی که در آن مبحث به آنها می پردازیم توابع مشتق پذیری از زمان اند، و برای توصیف مکان، سرعت، و شتاب اجسام متحرك در فضا، هم از دانشمان در باره حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده می کنیم و هم از آنچه در باره بردارها می دانیم.

۱۰۱۳ بردارهای واقع در صفحه

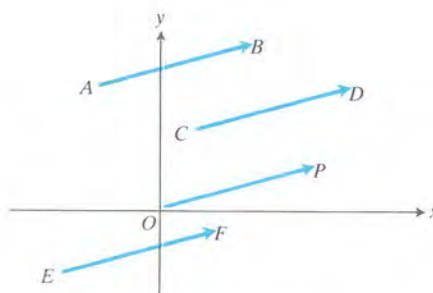
در این بخش، حساب بردارها در صفحه را بررسی می کنیم و به اختصار به چگونگی استفاده از بردارها برای اثبات قضایا در هندسه می پردازیم.

بردار

يك بردار واقع در صفحه عبارت است از پاره خطی جهتدار. از آنجا که بردار اساساً از طول و جهت تشکیل می شود، دو بردار را «همسنگ» و یا حتی «یکی» می نامیم هر گاه طول و جهتشان یکی باشد. دو بردار که با پیکان نمایش داده می شوند در صورتی همسنگ اند که پیکانهایشان طول مساوی داشته، موازی، و همجهت باشند. شکل ۱۰۱۳ چهار پیکان را نشان می دهد که همگی يك بردار را نمایش می دهند.



۳.۱۳ قانون متوازی الاضلاع در مورد جمع، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است زیرا اضلاع مقابلش برابرند. این قانون را ارسطو برای توصیف مجموع اثر دوتیر و به کار برد.



۱.۱۳ چهار پیکانی که در این شکل دیده می شوند همگی طول و جهت یکسان دارند. بنابراین یک بردار را نمایش می دهند و می نویسیم $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{OP} = \vec{EF}$.

مؤلفه ها

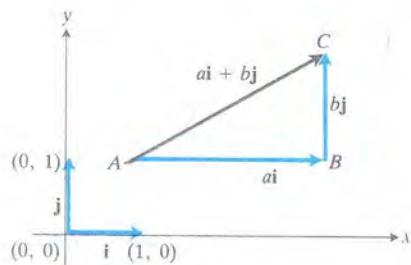
هر گاه برداری مانند $\vec{v}$ را بتوان به صورت مجموع زیر نوشت

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

بردارهای $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را مؤلفه های $\vec{v}$ می نامند.

متداولترین جبر بردارها بر این اساس مبتنی است که هر بردار را با مؤلفه هایی از آن که موازی با محورهای یک دستگاه مختصات دکارتی است نشان می دهند. بدین منظور روی هر دو محور یک واحد طول برمی گزینند، بردارهای به طول واحد روی محورها را بردارهای پایه می گیرند و دیگر بردارهای صفحه را برحسب آنها بیان می کنند.

روی محور x مطابق شکل ۴.۱۳ بردار $\vec{i}$ را از $(0, 0)$ تا $(1, 0)$ به عنوان یک بردار پایه برمی گزینیم. بردار پایه دیگر



۴.۱۳ هر برداری چون $\vec{AC}$ را می توان به صورت مجموع مضربی از $\vec{i}$ و مضربی از $\vec{j}$ بیان کرد.

جمع هندسی: قانون متوازی الاضلاع

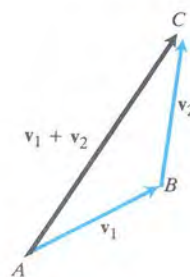
برای جمع کردن دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ از راه هندسی چنین عمل می کنیم: $\vec{v}_1$ را، مثلاً از A به B مطابق شکل ۲.۱۳، رسم می کنیم و از انتهای آن بردار $\vec{BC}$ را همسنگ با $\vec{v}_2$ می کشیم. به این ترتیب، مجموع $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ برداری است از ابتدای $\vec{v}_1$ یعنی A تا انتهای $\vec{v}_2$ یعنی C . یعنی اگر

$$\vec{v}_1 = \vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{v}_2 = \vec{BC}$$

آنگاه

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

این روش جمع را گاه قانون متوازی الاضلاع می نامند زیرا چنانکه در شکل ۳.۱۳ دیده می شود، $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ قطر متوازی الاضلاعی است که $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ آن را به وجود می آورند.



۲.۱۳ جمع $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$

* در متون چاپی بردار را معمولاً با یک حرف سیاه ایستاده (رومان) نشان می دهند. اما برداری که به صورت پاره خط جهتدار از نقطه A تا B تعریف می شود با $\vec{AB}$ نمایش داده می شود. در نوشته های دستی معمول است که پیکان کوچکی بالای همه حروف نشان دهند؛ بردار رسم کنند. بنابراین معادله $\vec{v} = \vec{AB}$ که به صورت چاپی است، در دستنویس به صورت $\vec{v} = \vec{AB}$ نوشته می شود.

مثال ۱

$$(2i - 2j) + (5i + 3j) = (2+5)i + (-2+3)j \\ = 7i - j.$$

تفریق

قرینه بردار $\vec{v}$ بردار $-\vec{v}$ است که طولی برابر $\vec{v}$ دارد اما جهت آن مخالف جهت $\vec{v}$ است. برای کم کردن بردار $\vec{v}_2$ از بردار $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ را به $\vec{v}_1$ می‌افزاییم. این کار را به طریق هندسی نیز می‌توان انجام داد. به این ترتیب که مطابق شکل ۶.۱۳ (الف) از انتهای $\vec{v}_1$ ، $-\vec{v}_2$ را رسم می‌کنیم و سپس برداری را از ابتدای $\vec{v}_1$ تا انتهای $-\vec{v}_2$ می‌کشیم. داریم

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

راه دیگری برای کم کردن $\vec{v}_2$ از $\vec{v}_1$ این است که مطابق شکل ۶.۱۳ (ب) ابتدای دوبردار را یکی گرفته دوبردار را رسم کنیم و سپس از انتهای $\vec{v}_2$ تا انتهای $\vec{v}_1$ برداری بکشیم. در این حالت داریم

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

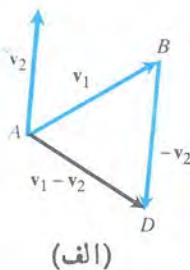
بنابراین $\vec{CB}$ برداری است که وقتی با $\vec{v}_2$ جمع می‌شود $\vec{v}_1$ را به دست می‌دهد

$$\vec{CB} + \vec{v}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

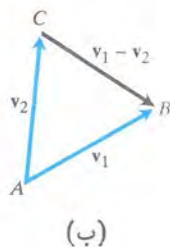
تفریق دوبردار برحسب مؤلفه‌هایشان، از قانون جبری ساده زیر تبعیت می‌کند

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (a_1 - a_2)\vec{i} + (b_1 - b_2)\vec{j}. \quad (3)$$

این قانون حساکی است که مؤلفه‌های عددی متناظر از هم کم می‌شوند.



(الف)



(ب)

۶.۱۳ دو راه برای رسم $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$: (الف) به صورت $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ و (ب) به صورت برداری از انتهای $\vec{v}_2$ به انتهای $\vec{v}_1$.

را روی محور y برمی‌گزینیم که بردار $\vec{j}$ از $(0, 0)$ تا $(0, 1)$ است. به این ترتیب $a\vec{i}$ ، که a یک عدد است، برداری موازی محور x را نشان می‌دهد که اندازه‌اش $|a|$ است و به راست متوجه است اگر a مثبت باشد و به چپ متوجه است اگر a منفی باشد. همین‌طور، $b\vec{j}$ برداری موازی محور y و همجهت است با $\vec{j}$ اگر b مثبت باشد و در خلاف جهت b است اگر b منفی باشد. در شکل ۴.۱۳ چگونگی «تجزیه» بردار $\vec{v} = \vec{AC}$ به مؤلفه‌های $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و به صورت مجموع زیر دیده می‌شود

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

بردارهای $a\vec{i}$ و $b\vec{j}$ را مؤلفه‌های برداری $\vec{v}$ در جهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و اعداد a و b را مؤلفه‌های عددی $\vec{v}$ در جهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ می‌نامیم (در باره جهت بعداً بحث بیشتری می‌کنیم). مؤلفه‌ها راهی برای تعریف برابری [همسنگی] بردارها از طریق جبری پیش‌پا می‌نهند.

تعریف

برابری بردارها (تعریف جبری)

$$a\vec{i} + b\vec{j} = a'\vec{i} + b'\vec{j} \Leftrightarrow a = a' \text{ و } b = b' \quad (1)$$

یعنی دوبردار برابرند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های عددیشان در جهات $\vec{i}$ و $\vec{j}$ برابر باشند.

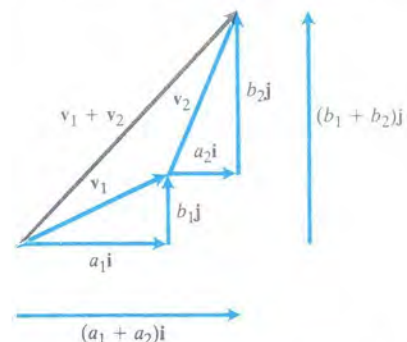
جمع جبری

دوبردار را می‌توان از طریق جبری مطابق شکل ۵.۱۳ با افزودن مؤلفه‌های عددی متناظرشان به یکدیگر باهم جمع کرد. اگر

$$\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$$

آنگاه

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}. \quad (2)$$



۵.۱۳ اگر $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ و $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$ آنگاه $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (a_1 + a_2)\vec{i} + (b_1 + b_2)\vec{j}$.

مثال ۲

$$(6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (6-3)\mathbf{i} + (2-(-5))\mathbf{j} \\ = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}.$$

طول بردار

طول بردار $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را معمولاً با $|\mathbf{v}|$ نشان می‌دهند که می‌توان آن را «اندازهٔ $\mathbf{v}$ » [مقدار $\mathbf{v}$] خواند. شکل ۴.۱۳ نشان می‌دهد که $\mathbf{v}$ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که طول اضلاع دیگرش $|a|$ و $|b|$ است. بنابراین می‌توان از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کرد و به‌دست آورد

$$|\mathbf{v}| = |a\mathbf{i} + b\mathbf{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (۴)$$

مثال ۳

$$|3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}.$$

ضرب بردار در عدد

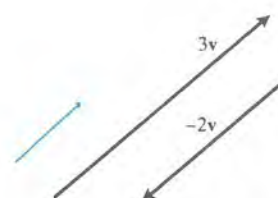
عمل جبری ضرب برداری مانند $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ در عددی چون c نیز ساده است، به این ترتیب که

$$c(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) = (ca)\mathbf{i} + (cb)\mathbf{j}. \quad (۵)$$

توجه کنید که چگونه بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ این امکان را به ما می‌دهند که وقتی روی بردارها عملیات جبری انجام می‌دهیم مؤلفه‌ها را از یکدیگر جدا نگهداریم. از لحاظ هندسی، $c\mathbf{v}$ برداری است که طولش، $|c|$ برابر طول $\mathbf{v}$ است

$$|c\mathbf{v}| = |(ca)\mathbf{i} + (cb)\mathbf{j}| = \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ = |c| \sqrt{a^2 + b^2} = |c| |\mathbf{v}|. \quad (۶)$$

جهت $c\mathbf{v}$ با جهت $\mathbf{v}$ یکی است اگر c مثبت باشد و مخالف جهت $\mathbf{v}$ است اگر c منفی باشد (شکل ۷.۱۳). اگر $c=0$ ، بردار $c\mathbf{v}$ جهتی ندارد.



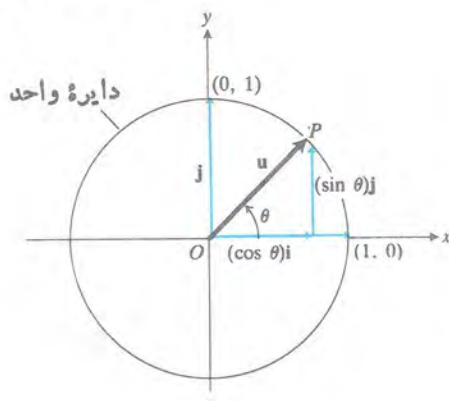
۷.۱۳ ضرب $\mathbf{v}$ در عدد.

مجادله در باب بردارها و حکاکي بر روی سنگ

بردارهای نوین امروزی ریشه در کواتر نیونها دارند. کواتر نیونها تعمیمی هستند از جفت $a + b\mathbf{i}$ به چهار تایی مرتب $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. جبر کواتر نیونها را ویلیام همیلتن ریاضیدان ایرلندی (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ابداع کرد. روزی در حالی که همیلتن با همسرش در کنار آبسراه رویال دوبلین پرسه می‌زد جرقه‌ای در ذهنش در مورد فرمولبندی اندیشه‌های پانزده ساله‌اش زده شد. او بلافاصله با چاقویی و ویژگیهای اصلی کواتر نیونها را بر سنگی حک کرد: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$. او جبر نوینی آفریده بود که در آن قانون تعویض پذیری در مورد عمل ضرب را کنار گذاشته بود.

در همین زمان، ریاضیدان آلمانی هرمان گونتر گراسمان (۱۸۰۹-۱۸۷۷) ابر عددی با n مؤلفه عرضه کرد. در این مورد نیز مانند کواتر نیونها عمل ضرب تعویض پذیر نبود. حاصل کار ایجاد یک حساب عام بردارها با هر تعداد بعد بود. این حساب را گراسمان در سال ۱۸۴۴ یعنی یکسال پس از انتشار اثر همیلتن در مورد کواتر نیونها منتشر کرد.

یک ریاضی-فیزیکدان آمریکایی به نام جوسیا ویلارد گیبیس (۱۸۳۹-۱۹۰۳) در دانشگاه ییل که بیشتر متأثر از اثر گراسمان بود تا کار همیلتن، استفاده از بردارها را ترویج کرد. دوستان آمریکایی همیلتن به خصوص پیتر گوتتری تیت فیزیکدانان را به پسندیدن کواتر نیونها ترغیب کردند، اما مهندسان علی‌الخصوص اولیور هويساید آنالیز برداری را رواج دادند. برخی از فیزیکدانان، از جمله شاخصترین آنسان جیمز کلارک ماکسول، از هر دو مضمون کواتر نیونها و بردارها (با تفکیک قسمتهای اسکالر و برداری) بهره بردند. سرانجام مقارن با تحویل قرن، آنالیز برداری گیبیس و هويساید غلبه کرد. مهندسان از نخستین معقدان، فیزیکدانان از نخستین گروندگان، و ریاضیدانان آخرین پذیرندگان این باب از ریاضیات بودند.



۸.۱۳ هر بردار واحدی مانند u به ازای زاویه ای مانند θ به صورت

$$u = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$
 است.

اگر زاویه θ در معادله (۸) از 0 تا 2π تغییر کند، نقطه P در شکل ۸.۱۳ یکبار دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ را در خلاف جهت ساعت طی می کند. چون بدین وسیله همه جهات ممکن اختیار می شود، هر بردار واحد در صفحه را می توان به ازای مقداری از θ از معادله (۸) به دست آورد.

برای مشخص کردن بردارهای واحد در منتهای دستنویس، بالای آنها «کلاه» می گذارند؛ مانند $\hat{i}$ که «کلاه i خوانده می شود». با این نمادگذاری $\hat{i}$ و $\hat{j}$ به صورت $\hat{i}$ و $\hat{j}$ درمی آید.

جهت

معمولاً در مباحثی مانند نظریه کلاسیک الکتریسته و مغناطیس که از بردارها زیاد استفاده می شود، جهت بردار ناصفر A به صورت بردار واحدی تعریف می شود که از تقسیم A بر طولش به دست می آید

$$\text{جهت } A = \frac{A}{|A|} \quad (9)$$

به جای اینکه بگوییم بردار واحد $A/|A|$ جهت A را نشان می دهد، می گوییم این بردار واحد، جهت A است. برای اینکه ثابت کنیم $A/|A|$ بردار واحد است، طولش را مستقیماً محاسبه می کنیم

$$\frac{A}{|A|} \text{ طول} = \left| \frac{A}{|A|} \right| = \left| \frac{1}{|A|} A \right| = \frac{1}{|A|} |A| = 1 \quad (10)$$

برای بردار صفر 0 جهتی تعریف نمی شود.

مثال ۴ فرض می کنیم $c = 2$ و $v = -3i + 2j$. آنگاه

$$|v| = |-3i + 2j| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} = 5$$

$$|2v| = |2(-3i + 2j)| = |-6i + 4j| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 2|v|.$$

اگر c به جای اینکه 2 باشد -2 می بود، چنین به دست می آمد

$$|-2v| = |-2(-3i + 2j)| = |6i - 4j| = \sqrt{(6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2|v|.$$

بردار صفر

بردار

$$0 = 0i + 0j \quad (7)$$

با بردار صفر می نامند. این بردار تنها برداری است که طولش صفر است زیرا

$$|ai + bj| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a = b = 0.$$

بردار واحد

هر بردار u که طولش برابر واحد طول محورهای مختصات باشد، بردار واحد نام دارد. بردارهای $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بردارهای واحدند، زیرا

$$|\hat{i}| = |1i + 0j| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$|\hat{j}| = |0i + 1j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

اگر u بردار واحدی باشد که از چرخاندن $\hat{i}$ با زاویه ای به اندازه θ در جهت مثبت به دست آید، آنگاه (شکل ۸.۱۳) u مؤلفه ای افقی برابر با

$$u_x = \cos \theta$$

و مؤلفه ای قائم برابر با

$$u_y = \sin \theta$$

دارد به قسمی که

$$u = (\cos \theta)\hat{i} + (\sin \theta)\hat{j}. \quad (8)$$

مثال ۵ جهت $A = 3i - 4j$ برابر است با

$$A \text{ جهت} = \frac{A}{|A|} = \frac{3i - 4j}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{3i - 4j}{\sqrt{25}} \\ = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j.$$

برای بررسی طول آن می توان چنین محاسبه کرد

$$\left| \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} \\ = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1.$$

از تعریف جهت چنین برمی آید که دو بردار ناصفر A و B جهت یکسانی دارند اگر و تنها اگر

$$\frac{A}{|A|} = \frac{B}{|B|} \quad (11)$$

یا

$$A = \frac{|A|}{|B|} B. \quad (12)$$

بنابراین، اگر A و B جهت یکسانی داشته باشند، A مضرب عددی مثبتی از B است. به عکس اگر

$$A = kB, \quad k > 0$$

آنگاه

$$\frac{A}{|A|} = \frac{kB}{|kB|} = \frac{k}{|k|} \frac{B}{|B|} = \frac{k}{k} \frac{B}{|B|} = \frac{B}{|B|}. \quad (13)$$

بنابراین، جهت دو بردار ناصفر A و B یکی است اگر و تنها اگر A مضرب عددی مثبتی از B باشد.

گوییم دو بردار ناصفر A و B جهت های مخالف دارند اگر جهت هایشان قرینه باشند

$$\frac{A}{|A|} = -\frac{B}{|B|}. \quad (14)$$

از این مطلب چنین برمی آید (مسأله ۲۳ را ببینید) که A و B جهت مخالف دارند اگر و تنها اگر A مضرب عددی منفی B باشد از B .

مثال ۶

الف) جهت یکسان:

$$B = \frac{3}{4}i - 2j = \frac{1}{4}A \quad \text{و} \quad A = 3i - 4j$$

(B مضرب عددی مثبتی از A است.)

ب) جهت مخالف:

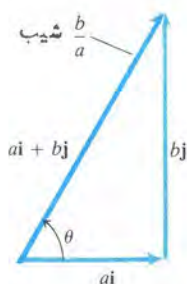
$$B = -9i + 12j = -3A \quad \text{و} \quad A = 3i - 4j$$

(B مضرب عددی منفی از A است.)

شیب، مماس، وقائم

دو بردار را موازی گویند هرگاه مضارب عددی مثبت یا منفی یکدیگر باشند و به بیان دیگر، پاره خط های نمایش دهنده آنها موازی باشند. همچنین، یک بردار موازی با یک خط است اگر پاره خط نمایش دهنده آن، موازی با خط باشد. شیب برداری که موازی محور y نیست برابر شیب خطوط موازی بردار است. بنابراین، هرگاه $a \neq 0$ ، بردار $v = ai + bj$ شیب خوشه ریخی دارد که خارج قسمت b به a یعنی b/a است (شکل ۹.۱۳).

وقتی که می گوئیم برداری در نقطه ای بزرگ خم مماس یا بر آن قائم است منظورمان این است که آن بردار موازی یا یا عمود بر خطی است که در آن نقطه بر خم مماس است. مثال بعدی چگونگی یافتن چنین بردارهایی را نشان می دهد.



۹.۱۳ اگر $a \neq 0$ ، بردار $ai + bj$ شیب $b/a = \tan \theta$ دارد.

مثال ۷ بردارهای واحد مماس و قائم بر خم زیر را در نقطه $(1, 1)$ بیابید.

$$y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$$

حل: بردارهای واحدی را می یابیم که موازی یا عمود بر خط مماس بر خم در نقطه $(1, 1)$ باشند (شکل ۱۰.۱۳).

باز هم دوبردار قائم‌اند و مزیتی برهم ندارند. جهت دوبردار مخالف است اما هر دو در نقطه $(1, 1)$ قائم بر خنم‌اند. ■

□ اثباتهای هندسی به کمک بردارها

بردارها زبانی آسان و کارا برای اثبات قضایا در هندسه فراهم می‌آورند. اینک مثالی درباره اثبات هندسی به کمک بردارها عرضه می‌شود.

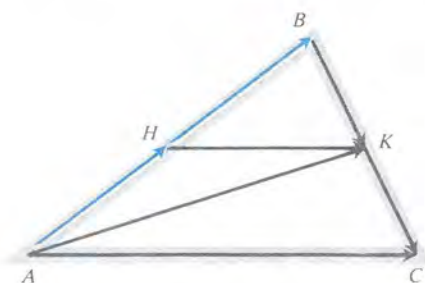
مثال ۸ ثابت کنید خطی که وسط دوزلع مثلثی را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است.

حل: مثلثی رسم می‌کنیم، وسط دوزلع آن را مشخص می‌کنیم، و بردارهای مربوط را می‌کشیم (شکل ۱۱.۱۳). مطابق نمادهای شکل ۱۱.۱۳ هدف ما اثبات رابطه زیر است

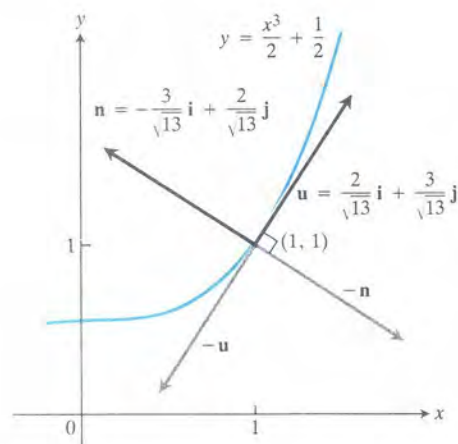
$$\vec{HK} = \frac{1}{2} \vec{AC}$$

زیرا این رابطه برداری حاکی است که $\vec{HK}$ موازی $\vec{AC}$ است و نیز حکایت از آن دارد که طول $\vec{HK}$ نصف طول $\vec{AC}$ است. به کارایی نمادگذاری برداری توجه کنید. مراحل اثبات سرراست‌اند:

$$\begin{aligned} \vec{HK} &= \vec{AK} - \vec{AH} & (\vec{HK} + \vec{AH} &= \vec{AK}) \\ &= (\vec{AB} + \vec{BK}) - \vec{AH} \\ &= \left(\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}\right) - \frac{1}{2} \vec{AB} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AC}. \end{aligned}$$



۱۱.۱۳ یک نمودار برداری برای اثبات این قضیه که خطی که وسط دوزلع مثلثی را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است. ■



۱۱.۱۳ بردارهای واحد مماس و قائم بر خنم $y = (x^3/2) + 1/2$ در نقطه $(1, 1)$.

شیب خط مماس بر خنم در $(1, 1)$ چنین است

$$y' = \frac{3x^2}{2} \Big|_{x=1} = \frac{3}{2}.$$

بردار واحدی می‌یابیم که شیبش برابر مقدار بالا باشد. بردار $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ و هر مضرب ناصفیری از آن دارای شیب $3/2$ است. برای یافتن مضربی از $\vec{v}$ که برداری واحد باشد، $\vec{v}$ را بر طولش تقسیم می‌کنیم. طول $\vec{v}$ برابر است با

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

پس بردار واحد عبارت است از

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}.$$

بردار $\vec{u}$ در $(1, 1)$ بر خنم مماس است زیرا جهتش بسا جهت $\vec{v}$ یکی است. بدیهی است که بردار

$$-\vec{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

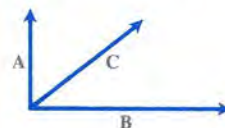
که جهتی مخالف دارد نیز در $(1, 1)$ بر خنم مماس است. این دوبردار هیچ رجحانی برهم ندارند مگر اینکه شرطی اضافی در کار باشد.

برای یافتن بردارهای واحد قائم بر خنم در $(1, 1)$ باید بردارهای واحدی را بیابیم که شیبشان قرینه عکس شیب $\vec{u}$ باشد. این کار نیز به سرعت با جا به جا کردن مؤلفه‌های عددی $\vec{u}$ و تغییر علامت یکی از آنها انجام می‌شود. به این ترتیب داریم

$$-\vec{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$$

مسئله‌ها

۰۱ سه بردار A ، B ، و C که آنها را در شکل زیر می بینید در يك صفحه اند. آنها را روی يك ورقه كاغذ رسم كنيد.



سپس با مرتب کردن بردارها به روشی که انتهای یکی بر ابتدای دیگری قرار داشته باشد، بردارهای زیر را بکشید
الف) $A+B$ ، و سپس C را به آن بیفزایید.
ب) $A+C$ ، و سپس B را به آن بیفزایید.
پ) $B+C$ ، و سپس A را به آن بیفزایید.
ت) $A-B$ ، و سپس C را به آن بیفزایید.
ث) $A+C$ ، و سپس B را از آن کم کنید.

در مسائل ۲-۱۱ هر يك از بردارها را به شکل $ai+bj$ بنویسید، و همه را به صورت نموداری نشان دهید.

۰۲ بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ هر گاه P_1 نقطه $(۱, ۳)$ و P_2 نقطه $(۲, -۱)$ باشد.

۰۳ بردار $\overrightarrow{OP_3}$ هر گاه O ابتدا و P_3 وسط بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ ، که $P_1(۲, -۱)$ را به $P_2(-۴, ۳)$ وصل می کند، باشد.

۰۴ برداری که از نقطه $A(۲, ۳)$ تأمیداً مختصات کشیده شده است.

۰۵ مجموع بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ با معلوم بودن چهار نقطه $A(۱, -۱)$ ، $B(۲, ۵)$ ، $C(-۱, ۳)$ ، و $D(-۲, ۲)$.

۰۶ بردار واحدی که با قسمت مثبت محور x زاویه ۳۵° می سازد.

۰۷ بردار واحدی که از دوران j به اندازه ۱۲۵° در جهت ساعت به دست می آید.

۰۸ بردار واحدی که جهتش با بردار $۳i-۴j$ یکی است.

۰۹ بردار واحدی که در نقطه $(۲, ۲)$ بر خم $y=x^2$ مماس است.

۰۱۰ بردار واحدی که در نقطه $P(۲, ۴)$ قائم بر خم $y=x^2$ است و از P متوجه درون خم است (یعنی، يك قائم «داخلی»).

۰۱۱ الف) بردار واحدی که در نقطه $(۱, ۳)$ بر خم $y=x^2+۲x$ مماس است و متوجه محور x است.

ب) بردار واحدی که در نقطه $(۱, ۳)$ قائم بر خم مذکور در قسمت الف) است و از دوران بردار مماس واحد در قسمت الف) به اندازه ۹۰° در خلاف جهت ساعت به دست می آید.

۰۱۲ نشان دهید که انتهای هر يك از بردارهای واحدی که از قرارداد $0, \pi/۴, \pi/۲, ۳\pi/۴, \pi, ۵\pi/۴, ۳\pi/۲, ۷\pi/۴$ به جای θ در معادله (۸) به دست می آیند بر نمودار دایره $x^2+y^2=۱$ قرار دارد.

در مسائل ۱۳-۱۸ طول و جهت بردارها و زاویه ای را که با قسمت مثبت محور x می سازند به دست آورید.

$$۰۱۳. i+j$$

$$۰۱۴. ۲i-۳j$$

$$۰۱۵. \sqrt{۳}i+j$$

$$۰۱۶. -۲i+۳j$$

$$۰۱۷. ۵i+۱۲j$$

$$۰۱۸. -۵i-۱۲j$$

۰۱۹. مقدار سرعت ذره ای که با سرعت v حرکت می کند به صورت $|v|$ ، یعنی طول (یا مقدار) v ، تعریف می شود. مقدار سرعت ذره ای را که سرعتش $v = -۲i+۲j$ است بیابید.

۰۲۰. نشان دهید که $A = ۲i+۶j$ و $B = -i-۲j$ جهت های مخالف دارند. هر دو را در يك نمودار با هم رسم کنید.

۰۲۱. نشان دهید که $C = ۳i+۶j$ و $D = (۱/۲)i+j$ همجهت اند.

۰۲۲. فرض می کنیم v برداری در صفحه باشد که با محور y موازی نیست. آیا شیب $-v$ با شیب v یکی است؟ با قرینه آن چطور؟ توضیح دهید.

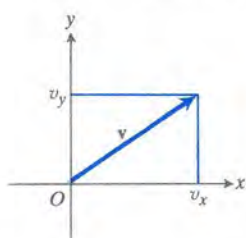
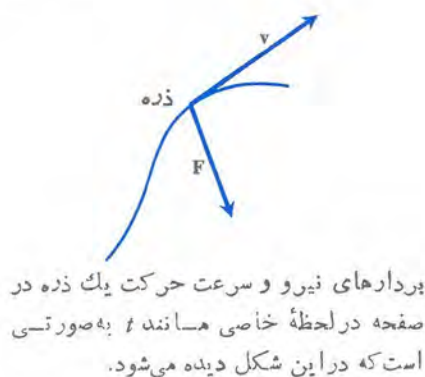
۰۲۳. نشان دهید که هر دو بردار A و B جهت مخالف دارند اگر و تنها اگر A مضرب عددی منفی از B باشد. (دانهایی: معادله ۱۴ را ببینید.)

۰۲۴. فرض می کنیم A' ، B' ، C' ، و D' به ترتیب وسط اضلاع AB ، BC ، CD ، و DA از چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید $A'B'C'D'$ يك متوازی الاضلاع است. (دانهایی: نخست نشان دهید که $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} = (۱/۲)\overrightarrow{AC}$)

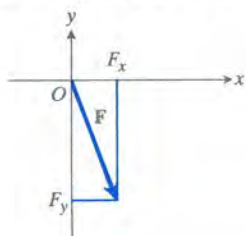
۰۲۵. نشان دهید که قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند. (دانهایی: فرض کنید A يك رأس M و N وسط قطرها باشند. سپس نشان دهید که $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$)

۲.۱۳ معادلات حرکت پرتابه

وقتی پرتابه ای را به هوا پرتاب می کنیم میل داریم بدانیم تا کجا پیش می رود (آیا به هدف اصابت می کند؟) چه مقدار بالایی رود (از بالای تپه عبور می کند؟)، و چه موقع به زمین می رسد (چه موقع به نتایج دست می یابیم؟) این اطلاعات را از معادلاتی به دست می آوریم که جوابهای آنها بر حسب مقدار و جهت بردار سرعت اولیه پرتابه است. معادلات از در آمیختن حساب دیفرانسیل و انتگرال و صورت برداری قانون دوم حرکت نیوتن به دست

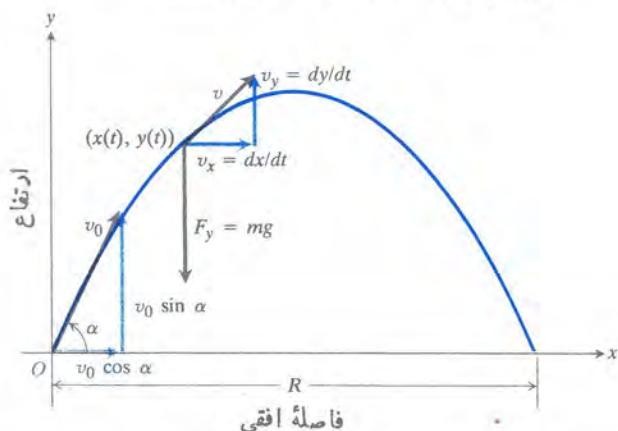


مؤلفه های عددی v_x و v_y سرعت v .



مؤلفه های عددی F_x و F_y نیروی F .

۱۲۰۱۳ در توصیف حرکت يك ذره در صفحه، بردارهای نیرو و سرعت را به صورت پیکانهایی رسم می کنیم که مبدأ آنها مکان ذره است.



۱۳۰۱۳ پرتابه های ایده آل روی يك سهمی حرکت می کنند. نمودار این شکل، بردار سرعت و مؤلفه های آن را نخست در لحظه $t=0$ و سپس حین حرکت نشان می دهد. هر برداری با مقدار مشخص شده است.

می آیند. در این بخش این معادلات را به دست می آوریم و چگونگی استفاده از آنها را برای به دست آوردن اطلاعات مورد نظر درباره حرکت پرتابه تشریح می کنیم.

معادلات پارامتری حرکت ایده آل پرتابه

برای به دست آوردن معادلات حرکت پرتابه فرض می کنیم پرتابه مانند ذره ای رفتار می کند که در صفحه مختصات قائم حرکت می کند و تنها نیروی مؤثر بر آن در ضمن حرکتش، نیروی ثابت گرانش است که همواره روبه پایین است. در عمل هیچ يك از این فرضیات برقرار نیست. زمین در زیر پرتابه می چرخد، هوا نیروی اصطکاکی تولید می کند که به سرعت و ارتفاع پرتابه بستگی دارد، و چنانچه مدت حرکت پرتابه طولانی باشد نیروی گرانش تغییر می کند. تمام این موارد باید با اعمال تصحیحاتی در معادلات ایده آلی که به دست می آوریم منظور شود. اما این تصحیحات موضوع بحث این بخش نیست.

بحث را با قانون دوم نیوتن آغاز می کنیم

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1)$$

صورت مؤلفه ای این قانون چنین است

$$F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = m \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + m \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} \quad (2)$$

(شکل ۱۲۰۱۳ را ببینید)، یا

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad \text{و} \quad F_x = m \frac{dv_x}{dt} \quad (3)$$

چون مکان و سرعت ذره را در لحظه پرتاب کردن می دانیم، باید بتوانیم مکان پرتابه را در هر لحظه بعدی با انتگرالگیری از معادلات (۳) نسبت به زمان و تعیین ثابتهای انتگرالگیری از شرایط اولیه به دست آوریم.

برای توصیف حرکت در يك دستگاه مختصات مشخص فرض می کنیم پرتابه در لحظه $t=0$ از مبدأ صفحه xy پرتاب می شود. همچنین فرض می کنیم پرتابه در ربع اول حرکت می کند و مقدار سرعت اولیه v_0 است و بردار سرعت با محور x های مثبت زاویه α می سازد. شکل ۱۳۰۱۳ را ببینید. در هر لحظه t ، $t \geq 0$ ، مکان پرتابه با جفت مختصات $x(t)$ ، $y(t)$ مشخص می شود. فرض می کنیم x و y نسبت به t مشتقات پیوسته داشته باشد.

شرایط اولیه حرکت پرتابه چنین اند

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0 \quad (\text{پرتابه از مبدأ شروع به حرکت می کند})$$

باشد، x و y از معادله برحسب متر به دست می آیند. اگر زمان برحسب ثانیه، فاصله برحسب فوت، و g برابر با 32 ft/sec^2 باشد، x و y از معادله برحسب فوت به دست می آیند.

مثال ۱ پرتابه‌ای با سرعت اولیه 500 m/sec و تحت زاویه پرتاب 60° از روی زمین پرتاب می‌شود. این پرتابه پس از 10 sec به کجا می‌رسد؟

حل: معادلات (۹) را به ازای $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60^\circ$ ، $g = 9.8$ ، و $t = 10$ به کار می‌بریم تا مختصات پرتابه را ۱۰ ثانیه پس از پرتاب برحسب متر (گرد شده به نزدیکترین عدد صحیح) به دست آوریم

$$x = (v_0 \cos \alpha)t = 500 \times \frac{1}{2} \times 10 = 2500 \text{ m}$$

$$y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 - \frac{1}{2} \times 9.8(10)^2$$

$$= 2500\sqrt{3} - 490 = 3840 \text{ m. (گرد شده)}$$

پرتابه ۱۰ ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع ۳۸۴۰ متری از سطح زمین و در فاصله افقی ۲۵۰۰ متری از محل پرتاب است. ■

اوج، برد، و مدت پرتاب

به کمک معادلات پارامتری (۹) می‌توان به اکثر سؤالات درباره پرتاب یک پرتابه ایده آل پاسخ داد.

مثال ۲ پرتابه‌ای با زاویه پرتاب α و سرعت اولیه v_0 پرتاب می‌شود. این پرتابه پس از چه مدتی به بالاترین نقطه مسیرش می‌رسد؟ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

حل: پرتابه وقتی به بالاترین نقطه می‌رسد که مؤلفه قائم سرعت صفر شود، یعنی وقتی که

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 0$$

مقدار y به ازای این مقدار t برابر است با

$$y_{\max} = (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 \\ = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} \quad (10)$$

$$v_x(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \cos \alpha \quad (\text{سرعت اولیه } v_0 \text{ و زاویه پرتاب } \alpha \text{ است}) \quad (4)$$

$$v_y(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \sin \alpha.$$

مؤلفه‌های عددی نیروی F که گرانش بر پرتابه وارد می‌آورد عبارت‌اند از

$$F_x = 0 \quad (\text{نیرویی که به موازات محور } y \text{ اعمال می‌شود})$$

$$F_y = -mg \quad (m, \text{ جرم پرتابه و } g, \text{ شتاب گرانش است و نیرو به طرف پایین وارد می‌آید}).$$

معادلات (۳) به ازای این مقادیر F_y و F_x به صورت زیر درمی‌آیند

$$0 = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -mg = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (5)$$

برای حل این معادلات از هر کدام دوبار انتگرال می‌گیریم. چهار ثابت انتگرالگیری حاصل می‌شود که آنها را به کمک شرایط اولیه مذکور در (۴) محاسبه می‌کنیم. از معادله نخست مذکور در (۵) خواهیم داشت

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = C_1, \quad x = C_1t + C_2 \quad (6)$$

از معادله دوم مذکور در (۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + C_3 \quad (7)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3t + C_4.$$

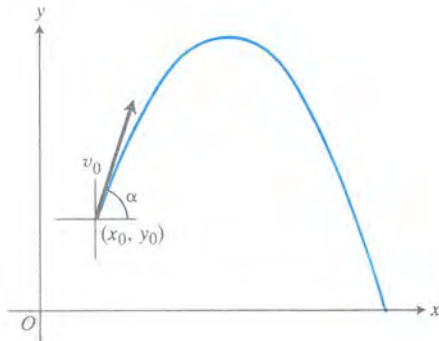
و از شرایط اولیه مذکور در (۴) داریم

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = 0 \\ C_3 = v_0 \sin \alpha, \quad C_4 = 0. \quad (8)$$

بنابراین مکان ذره، t ثانیه پس از پرتاب عبارت است از

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (9)$$

معادلات پارامتری (۹) مختصات مکان ذره را برحسب سرعت اولیه، v_0 ، و زاویه پرتاب، α ، بیان می‌کنند. اگر زمان برحسب ثانیه، فاصله برحسب متر، و g برابر با 9.8 m/sec^2



۱۴۰۱۳ مسیر پرتابه‌ای که از (x_0, y_0) با سرعت اولیه v_0 تحت زاویه α نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود.

تابتهای معادلات (۶) و (۷) به دست می‌آیند

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = x_0, \quad C_3 = v_0 \sin \alpha, \quad C_4 = y_0.$$

بنابراین

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t \quad (۱۳)$$

$$y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

مثال ۶ توپی را از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۰۰ ft با چه سرعتی به موازات زمین پرتاب کنیم تا در ۴۵۰ فوتی پسای ساختمان به زمین برسد؟

حل: دستگاه مختصاتی را به کار می‌بریم که در آن محور x در امتداد زمین باشد و مختصات مکان توپ در $t = 0$ عبارت باشند از

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 100.$$

شکل ۱۵.۱۳ را ببینید.

حال معادلات (۱۳) را نسبت به v_0 و با این فرض که $\alpha = 0$ و به ازای $y = 0$ داشته باشیم $x = 450$ حل می‌کنیم. این معادلات حاکی آنکه در لحظه اصابت توپ به زمین داریم

$$450 = 0 + (v_0 \cos 0)t$$

و

$$0 = 100 + (v_0 \sin 0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

اگر زمان بر حسب ثانیه باشد، g برابر با 32 ft/sec^2 می‌شود و

مثال ۳ در یک حرکت پرتابی در بالای سطح زمین، پرتابه چه موقع و کجا به زمین می‌رسد؟

حل: برای به دست آوردن مدت پرتاب، در معادله (۹)، y را برابر با صفر قرار می‌دهیم و معادله حاصل را نسبت به t حل می‌کنیم

$$y = t \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt \right) = 0$$

پس

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{یا} \quad t = 0 \quad (۱۱)$$

چون $t = 0$ لحظه پرتاب است، پس $t = (2v_0 \sin \alpha)/g$ باید لحظه‌ای باشد که پرتابه به زمین اصابت می‌کند. مقدار متناظر برد افقی پرتابه، R ، از محاسبه x به ازای این مقدار t به دست می‌آید

$$R = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} (2 \sin \alpha \cos \alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (۱۲)$$

برد پرتابه $(v_0^2 \sin 2\alpha)/g$ است.

مثال ۴ تحت چه زاویه پرتابی برد افقی ما کسیم می‌شود؟

حل: مقدار

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

در معادله (۱۲) وقتی ما کسیم می‌شود که $\sin 2\alpha = 1$ که از آن داریم $2\alpha = 90^\circ$ یا $\alpha = 45^\circ$. برد افقی ما کسیم به ازای زاویه پرتاب 45° به دست می‌آید.

مثال ۵ معادلات حرکت پرتابه‌ای را بیابید که مطابق شکل ۱۴.۱۳ در ربع اول از نقطه دلخواه (x_0, y_0) پرتاب می‌شود.

حل: از شرایط اولیه

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0 \cos \alpha$$

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = v_0 \sin \alpha$$

به بهترین وجه صورت می گیرند. همه زوایای پرتاب نسبت به افق در نظر گرفته می شوند.

۱. پرتابه ای با مقدار سرعت 840 m/sec و با زاویه 60° پرتاب می شود. چه مدت طول می کشد تا فاصله افقی پرتابه از محل پرتاب 21 km شود؟

۲. مقدار سرعت اولیه گلوله تفنگی را بیابید که ماکسیم بردش 245 km است.

۳. پرتابه ای با مقدار سرعت اولیه 550 m/sec و با زاویه 45° به طرف بالا پرتاب می شود.

الف) چه موقع و در چه فاصله ای به زمین اصابت می کند؟
ب) ارتفاع آن وقتی که فاصله افقی آن از محل پرتاب 5 km است چقدر است؟
پ) پرتابه تا چه ارتفاعی اوج می گیرد؟

۴. یک توپ بیسبال از ارتفاع 32 فوتی بالای سطح زمین سر بازی با زاویه 30° پرتاب می شود. اگر مقدار سرعت اولیه 32 ft/sec باشد چه موقع و در چه فاصله ای به زمین اصابت می کند؟

۵. نشان دهید که پرتابه ای که با زاویه α درجه، $90^\circ < \alpha < 0^\circ$ پرتاب می شود بردش برابر با برد پرتابه ای است که با زاویه $(90 - \alpha)$ درجه و با همان سرعت پرتاب می شود.

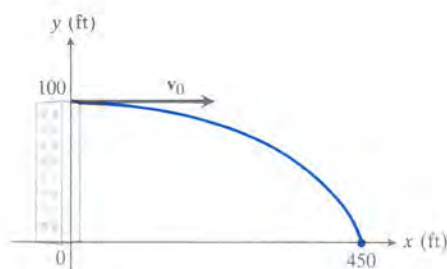
۶. تحت کدام دو زاویه باید یک گلوله را با سرعت اولیه 400 m/sec پرتاب کرد تا به هدفی که 16 km از آن فاصله دارد برسد (گلوله و هدف در یک سطح قرار دارند)؟

۷. توپ گلفی با زاویه 45° نسبت به سطح زمین پرتاب می شود و 10 m آنطرفتر به زمین می خورد. مقدار سرعت اولیه توپ چقدر بوده است؟ با همین مقدار سرعت اولیه با چه زاویه ای (دو زاویه) پرتاب شود تا بردش 6 m باشد؟

۸. الکترونی در یک لامپ تصویر تلویزیون با سرعت $5 \times 10^6 \text{ m/sec}$ به صورت افقی به سوی صفحه تصویر که در فاصله 40 سانتیمتری است تابیده می شود. قبل از برخورد با صفحه چقدر پایین می افتد؟

۹. آزمایشهایی صورت گرفته است تا تعیین شود توپهای گلفی که سختی متفاوت دارند در اثر برخورد با چوگان گلف تا چه فاصله ای پیش می روند. این آزمایشها نشان می دهند که وقتی یک توپ دو تکه با پوشش سورلینی و تراکم 100 با چوگانی که مقدار سرعت آن 100 مایل بر ساعت است تحت زاویه 9° پرتاب شود 2488 یارد پیش می رود. مقدار سرعت اولیه توپ چقدر بوده است؟ (برابر با 100 مایل بر ساعت نبوده است.)

۱۰. نشان دهید که اگر مقدار سرعت اولیه یک پرتابه را دو برابر



به مقیاس نیست

15.13 مقدار سرعت اولیه توپ چقدر باشد تا برد آن 450 ft باشد. برای یافتن جواب مثال ۶ را ببینید.

معادلات به صورت ساده زیر درمی آیند

$$450 = v_0 t, \quad 0 = 100 - 16t^2.$$

از حل این دستگاه معادلات داریم

$$t = 2.5 \quad \text{و} \quad v_0 = 180.$$

برای اینکه توپ در فاصله 450 فوتی پای ساختمان به زمین اصابت کند، باید سرعت اولیه افقی آن 180 ft/sec باشد.

مسیر ایده آل سهموی است

اغلب ادعا می شود که مسیر حرکت آبی که از یک لوله به بیرون می جهد یک سهمی است، اما اگر به دقت به این مسیر بنگریم می بینیم که چنین نیست. هوا سقوط آب را کند می کند و حرکت آن بدجلو آنقدر کند است که در انتهای سقوطش از شکل سهموی خارج می شود. ادعایی که در مورد سهموی بودن حرکت می شود فقط در مورد پرتابه های ایده آل واقعاً درست است. این مطلب را می توان از معادلات (۹) دریافت. اگر $x/(v_0 \cos \alpha)$ را از معادله نخست به جای t در معادله دوم قرار دهیم، معادله دگرگونی زیر به دست می آید

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) x^2 + (\tan \alpha)x. \quad (14)$$

این معادله نسبت به x از درجه دوم و نسبت به y از درجه اول است، پس نمودارش یک سهمی است.

مسئله ها

در مسائل زیر فرض می شود پرتابه ها ایده آل اند و رفتارشان دقیقاً همان است که معادلات به دست آمده در فوق توصیف می کنند. اما اکثر محاسبات مبتنی بر داده های واقعی هستند و با ماشین حساب

و زاویه 45° نسبت به افق پرتاب می‌شود. آیا توپ به پرچم می‌رسد؟

۰۱۵. توپ بیسبالی از ارتفاع ۳ فوتی تحت زاویه 20° پرتاب می‌شود. این توپ درست از لب منتهی‌الیه سمت چپ دیوار «گرین مونستر» در پارک فنوی در بوستون رد می‌شود. (شکل ۱۷.۱۳) ارتفاع دیوار ۳۷ ft و فاصله‌اش تا محل پرتاب ۳۱۵ ft است. سرعت توپ چقدر بوده است؟ پس از چه مدت به دیوار رسیده است؟

۰۱۶. شکل ۱۸.۱۳ مدل لوکوموتیوی را نشان می‌دهد که بر مسیر مستقیمی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در حالی که لوکوموتیو حرکت می‌کند توپی به وسیله فنری واقع در دودکش لوکوموتیو به هوا پرتاب می‌شود. توپ با همان سرعت لوکوموتیو به پیش می‌رود و یک ثانیه بعد به لوکوموتیو ملحق می‌شود. زاویه پرتاب توپ را نسبت به افق بیابید و به کمک آن تعیین کنید توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود و سرعت لوکوموتیو چقدر است.



۱۸.۱۳ لوکوموتیو مورد بحث درمسأله ۱۶.

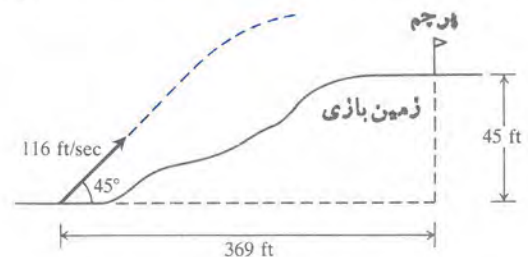
کنیم، ارتفاع ماکسیمم و بردش چهار برابر می‌شود. مقدار سرعت اولیه را چند درصد افزایش دهیم تا ارتفاع ماکسیمم و برد دوبرابر شود؟

۰۱۱. نشان دهید که یک پرتابه در مدتی برابر با نصف مدتی که به ارتفاع ماکسیمم می‌رسد به سه‌چهارم ارتفاع ماکسیمم می‌رسد.

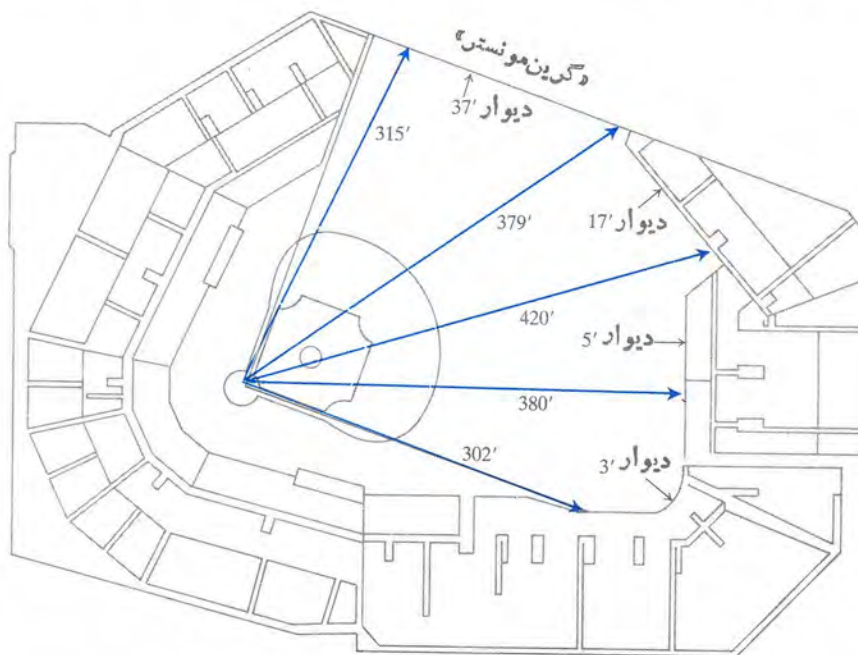
۰۱۲. قرار است سیرک‌بازی در سالن سیرکی به ارتفاع ۷۵ ft با سرعت اولیه‌ای به مقدار $v_0 = 80\sqrt{10}/3$ ft/sec پرتاب شود و بر روی بالشتکی که ۲۰۰ ft فاصله دارد بیفتد. آیا می‌توان سیرک‌باز را چنان پرتاب کرد که به سقف نخورد؟ با چه زاویه پرتابی؟

۰۱۳. توپ گلفی با زاویه 30° و مقدار سرعت ۹۰ ft/sec پرتاب می‌شود. آیا توپ از نوک درختی به ارتفاع ۳۰ ft و در فاصله ۱۳۵ ft می‌گذرد؟

۰۱۴. توپ گلفی مطابق شکل ۱۶.۱۳ با مقدار سرعت ۱۱۶ ft/sec



۱۶.۱۳ پرتاب توپ گلف مورد بحث درمسأله ۱۴.



۱۷.۱۳ دیوار گرین مونستر در پارک فنوی در بوستون.

۳.۱۳ مختصات و بردارها در فضا

هدف ما در این فصل توصیف دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی و آموختن مطالبی درباره مختصات و بردارها در فضا است. به این منظور فاصله را تعریف می کنیم، محاسبات روی بردارها را تمرین می کنیم (همان قواعدی که در صفحه جاری بود با يك جمله اضافی)، و ارتباطاتی میان مجموعه های نقاط در فضا و برابرهای نا برابرها برقرار می کنیم. می دانیم که ترسیم درسه بعد مشکلتر از ترسیم در دو بعد است، لذا توصیه هایی برای این نوع ترسیم هم آورده ایم. این توصیه ها را در صفحات ۲۵-۱۹ ببینید.

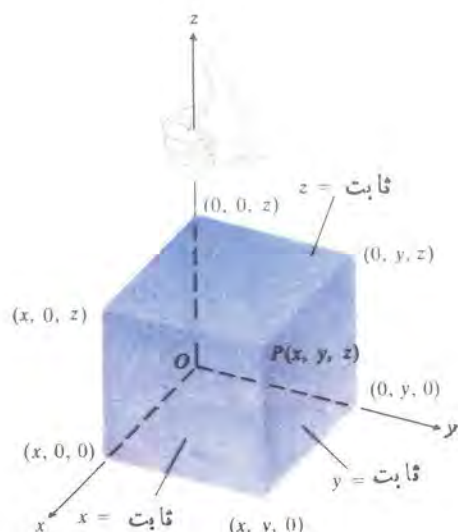
مختصات دکارتی

برای مشخص کردن نقاط در فضا، مطابق شکل ۲.۱۰.۱۳ از سه محور مختصات که دو به دو برهم عمودند استفاده می کنیم. محورهای Ox ، Oy و Oz که در شکل دیده می شوند دستگاه مختصاتی موسوم به دستگاه مختصات راستگرد را می سازند. در این دستگاه اگر انگشت شست دست راست را در جهت قسمت مثبت محور z نشانه بسوی جهت خم شدن انگشتان دیگر از قسمت مثبت محور x به سوی قسمت مثبت محور y است.

مختصات دکارتی (x, y, z) نقطه ای مانند P در فضا اعدادی را نشان می دهند که محل تقاطع محورهای مختصات با صفحاتی است که از P می گذرند و بر این محورها عمودند.

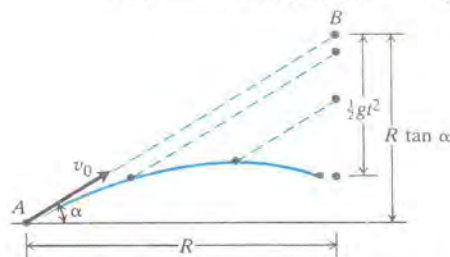
مختصات y و z نقاط واقع بر محور x صفرند. یعنی این نقاط مختصاتی به صورت $(x, 0, 0)$ دارند. همچنین نقاط روی محور y مختصاتی به صورت $(0, y, 0)$ ، و نقاط روی محور z مختصاتی به صورت $(0, 0, z)$ دارند.

نقاط واقع در يك صفحه عمود بر محور x دارای مختصهای



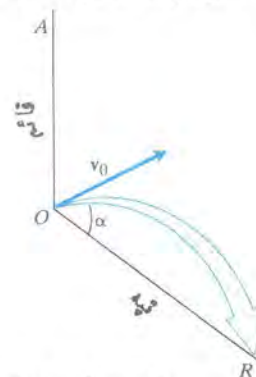
۲.۱۰.۱۳ دستگاه مختصات دکارتی راستگرد است.

۱۷. شکل ۱۹.۱۳ آزمایشی را بر روی دو توپ نشان می دهد. توپ A با زاویه α و با سرعت اولیه ای به مقدار v_0 به طرف توپ B پرتاب می شود. در همین لحظه توپ B از نقطه ای که فاصله افقی اش با A به اندازه R واحد است از ارتفاع $R \tan \alpha$ رها می شود. آزمایش نشان می دهد که صرف نظر از مقدار v_0 دو توپ به هم برخورد خواهند کرد. آیا این چنین باید باشد؟ چرا؟



۱۹.۱۳ دو توپ مورد بحث در مسأله ۱۷.

۱۸. يك پرتابه ایده آل مطابق شکل ۲۰.۱۳ از روی يك تپه (سطح شیبدار) به طرف پایین پرتاب می شود. نشان دهید که فاصله نقطه پرتاب تا نقطه فرود پرتابه بر روی تپه وقتی بیشترین مقدار را دارد که بردار سرعت اولیه زاویه AOR را نصف کند. اگر پرتابه به جای اینکه به سمت پایین تپه پرتاب شود به سمت بالا پرتاب شود، زاویه پرتاب چه باشد تا بردش بیشترین مقدار را داشته باشد؟



۲۰.۱۳ - برد پرتابه در امتداد تپه وقتی بیشترین مقدار را دارد که بردار سرعت زاویه AOR را نصف کند. مسأله ۱۸ را ببینید.

۱۹. فرض کنید هدفی با سرعت ثابت a ft/sec در حال حرکت است. این هدف در لحظه ای که تفنگی يك گلوله شلیک می کند همتر از با تفنگ و به فاصله b فوت از آن قرار دارد. اگر هدف روی خط مستقیمی از تفنگ دور شود، نشان دهید در صورتی گلوله به هدف برخورد می کند که مقدار سرعت اولیه گلوله، v_0 ، و زاویه پرتاب، α ، در رابطه زیر صدق کنند

$$v_0^2 \sin 2\alpha - 2av_0 \sin \alpha - bg = 0.$$



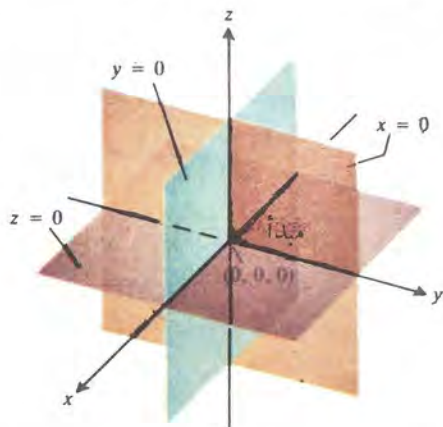
TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations

Super * Grapher

سه صفحه مختصات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=0$ فضا را به هشت قسمت تقسیم می کنند که هر قسمت يك هشتم (ثمن) نام دارد. يك هشتمی که هـر سه مختص نقاط آن مثبت باشد يك هشتم اول نام دارد، اما قراردادی برای شماره گذاری هفت يك هشتم دیگر وجود ندارد.

در مثالهای زیر تعدادی معادله و نام معادله مختصاتی را همراه با مجموعههایی از نقاط که در فضا معرفی می کنند آورده ایم.



۲۳.۱۳ صفحات $x=0$ ، $y=0$ ، و $z=0$ صفحاتی هستند که با محورهای مختصات مشخص می شوند. آنها فضا را به هشت قسمت موسوم به يك هشتم (ثمن) تقسیم می کنند.

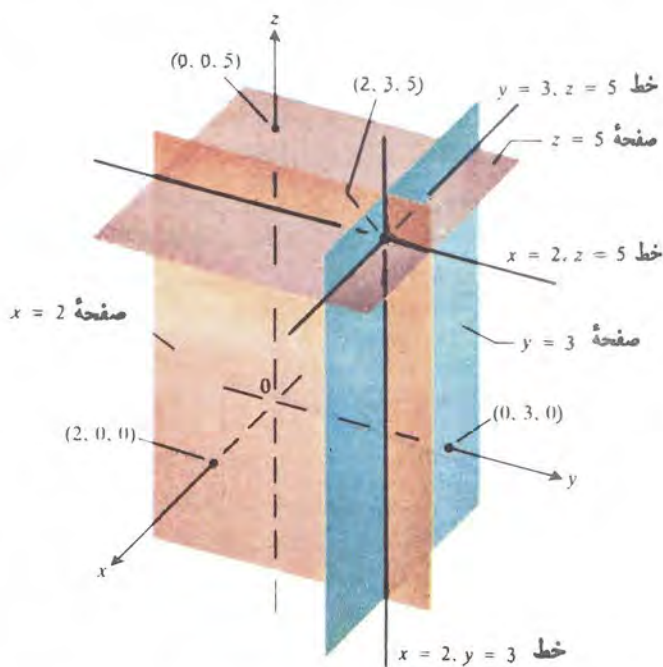
مثال ۱

معادله ها و نام معادله های معرف	شرح
$z \geq 0$	نیمی از فضا که شامل نقاط واقع بر صفحه xy و بالای آن است.
$x = -3$	صفحه عمود بر محور x در $x = -3$. این صفحه موازی صفحه yz است و به فاصله سه واحد در پشت آن قرار دارد.
$y \geq 0, x \leq 0, z = 0$	ربع دوم صفحه xy
$z \geq 0, y \geq 0, x \geq 0$	يك هشتم اول
$-1 \leq y \leq 1$	تیغه ای بین صفحات $y = -1$ و $y = 1$ (شامل خود صفحات)
$z = 2, y = -2$	خط تقاطع صفحات $z = 2$ و $y = -2$ یعنی خطی که از نقطه $(0, -2, 2)$ بگذرد و موازی محور x باشد.

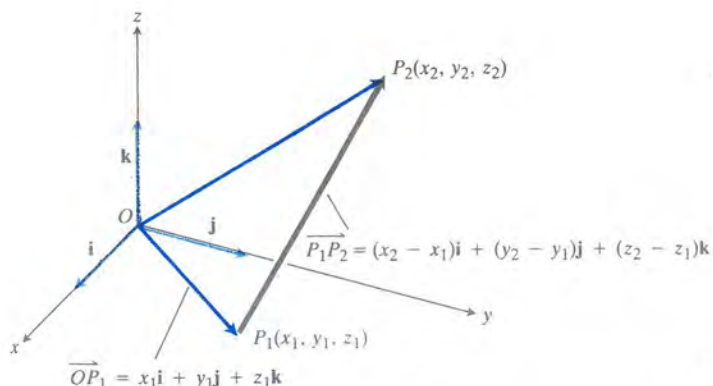
x برابرند که مساوی با مختص x نقطه تقاطع صفحه با محور x است. همچنین نقاط واقع در يك صفحه عمود بر محور y دارای مختصهای y برابرند، و نقاط واقع در يك صفحه عمود بر محور z مختصهای z برابر دارند. بنا بر این، نوشتن معادله این صفحات آسان است و کافی است آنها را با همان مقدار مختص مشترکشان مشخص کنیم. معادله $x = 2$ معادله صفحه عمود بر محور x در $x = 2$ است. معادله $y = 3$ معادله صفحه عمود بر محور y در $y = 3$ است. معادله $z = 5$ معادله صفحه عمود بر محور z در $z = 5$ است. شکل ۲۲.۱۳ صفحات $x = 2$ ، $y = 3$ ، و $z = 5$ را همراه با نقطه تقاطعشان یعنی $(2, 3, 5)$ نشان می دهد.

صفحات $x = 2$ و $y = 3$ در شکل ۲۲.۱۳ یکدیگر را در خطی که موازی محور z است قطع می کنند. این خط با جفت معادلات $x = 2$ ، $y = 3$ توصیف می شود. نقطه (x, y, z) روی این خط است اگر و تنها اگر x برابر با ۲ و y برابر با ۳ باشد. همچنین خط تقاطع (فصل مشترك) صفحات $y = 3$ و $z = 5$ با جفت معادله $y = 3$ ، $z = 5$ مشخص می شود. این خط موازی محور x است. فصل مشترك صفحات $x = 2$ و $z = 5$ خطی موازی محور y است و با جفت معادله $x = 2$ ، $z = 5$ مشخص می شود.

صفحاتی که با محورهای مختصات مشخص می شوند عبارت اند از صفحه xy که معادله متداولش $z = 0$ است؛ صفحه yz که معادله متداولش $x = 0$ است؛ و صفحه xz که معادله متداولش $y = 0$ است. هر سه این صفحات در نقطه $(0, 0, 0)$ مشترك اند که مبدأ دستگاه مختصات نام دارد. شکل ۲۳.۱۳ را ببینید.



۲۲.۱۳ صفحات $x = 2$ ، $y = 3$ ، و $z = 5$ سه خط گذرنده از نقطه $(2, 3, 5)$ را مشخص می کند.



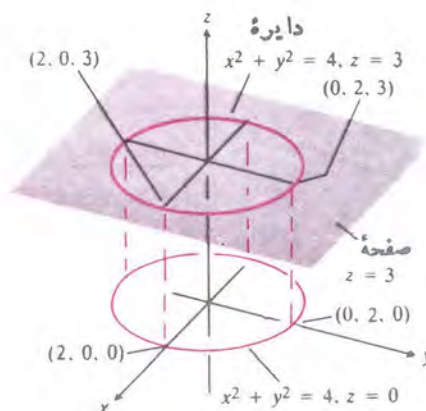
مثال ۲ مجموعه نقاطی مانند $P(x, y, z)$ را بیابید که مختصاتشان در دو معادله زیر صدق کند

$$x^2 + y^2 = 4$$

و

$$z = 3$$

حل: نقاط واقع در صفحه افقی $z = 3$ و تشکیل دهنده دایره $x^2 + y^2 = 4$ در این صفحه. این مجموعه نقاط را «دایره $x^2 + y^2 = 4$ در صفحه $z = 3$ » یا ساده تر، «دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 3$ » می نامیم. شکل ۲۴.۱۳ را ببینید.



۲۴.۱۳ دایره $x^2 + y^2 = 4$ ، $z = 3$.

۲۵.۱۳ بردار از P_1 تا P_2 چنین است

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

می نویسیم و نتایج را بر حسب $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بیان می کنیم

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2O} + \overrightarrow{OP_2}$$

$$= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

$$= x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k} - x_1\mathbf{i} - y_1\mathbf{j} - z_1\mathbf{k}$$

$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

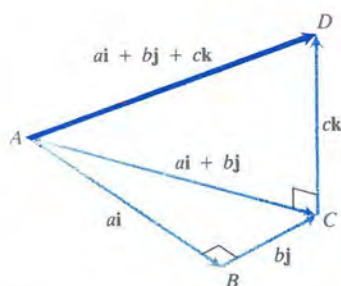
بردار از $P_1(x_1, y_1, z_1)$ تا $P_2(x_2, y_2, z_2)$ عبارت است از

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}. \quad (2)$$

طول و جهت

مهمترین ویژگی بردارها در فضا مانند حالتی که در صفحه قرار دارند طول و جهت آنهاست. طول برداری مانند $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ با دوبار استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می آید. بر اساس نمادهای شکل ۲۶.۱۳ از مثلث ABC داریم

$$|\overrightarrow{AC}| = |a\mathbf{i} + b\mathbf{j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



۲۶.۱۳ طول بردار $\overrightarrow{AD}$ را می توان با استفاده از قضیه فیثاغورس در مورد مثلثهای قائم الزاویه ABC و ACD به دست آورد.

بردارها در فضا

پاره خطهای جهت داری را که برای نمایش نیرو، تغییر مکان، و سرعت در فضا به کار می بریم مانند حالتی که در صفحه واقع اند بردار می نامیم. همان قواعد جمع، تفریق، و ضرب عددی در اینجا نیز برقرارند.

بردارهای از مبدأ تا نقاط $(0, 1, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$ بردارهای پایه اند. آنها را با $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ نمایش می دهیم. بردار مکان $\mathbf{R}$ از مبدأ تا نقطه نوعی $P(x, y, z)$ چنین است

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1)$$

بردار بین دو نقطه

اغلب ما بایلیم بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ از نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ تا نقطه $P_2(x_2, y_2, z_2)$ را بر حسب مختصات P_1 و P_2 بیان کنیم. بدین منظور، نخست مطابق شکل ۲۵.۱۳ ملاحظه می کنیم که $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_2O} + \overrightarrow{OP_2}$ حال $\overrightarrow{P_2O}$ را به صورت $-\overrightarrow{OP_2}$

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} \\ = \sqrt{9} = 3$$

$$\blacksquare \quad \mathbf{u} = \frac{\vec{P_1P_2}}{|\vec{P_1P_2}|} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

اگر بردار $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ را در عدد c ضرب کنیم، طول $c\mathbf{A}$ ، $|c|$ برابر طول $\mathbf{A}$ می‌شود زیرا

$$c\mathbf{A} = ca_1\mathbf{i} + ca_2\mathbf{j} + ca_3\mathbf{k}$$

بنابراین

$$|c\mathbf{A}| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} \\ = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2} \\ = |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ = |c| |\mathbf{A}|.$$

مثال ۶ مطلوب است برداری به طول ۶ واحد و درجهت

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

حل: بردار مطلوب چنین است

$$\frac{6}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} = \frac{6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ = \frac{6}{3} (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

فاصله در فضا

برای یافتن فاصله بین دو نقطه P_1 و P_2 در فضا، طول $\vec{P_1P_2}$ را می‌یابیم.

فاصله بین $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5)$$

مثال ۷ فاصله بین $P_1(2, 1, 5)$ و $P_2(-2, 3, 0)$ را بیابید.

حل:

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2 + (0-5)^2} \\ = \sqrt{16+4+25} \\ = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

و سپس از مثلث ACD داریم

$$|a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}| = |\vec{AD}| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 + |\vec{CD}|^2} \\ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

طول بردار $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ چنین است

$$|\mathbf{A}| = |a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3)$$

مثال ۳ طول $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ چنین است

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$$

باز هم مانند بردارهای واقع در صفحه، بردارهای با طول واحد را بردارهای واحد می‌نامیم. بردارهای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بردارهای واحدند زیرا

$$|\mathbf{i}| = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

$$|\mathbf{j}| = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$|\mathbf{k}| = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

جهت بردار ناصفر $\mathbf{A}$ بردار واحدی است که از تقسیم $\mathbf{A}$ بر طولش، $|\mathbf{A}|$ ، به دست می‌آید

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad \text{جهت } \mathbf{A} \text{ برابر } \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \text{ است.} \quad (4)$$

مثال ۴ در مثال ۳ طول $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ را برابر با $\sqrt{14}$ به دست آوردیم. بنا بر این جهت $\mathbf{A}$ چنین است

$$\blacksquare \quad \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).$$

مثال ۵ مطلوب است بردار واحد $\mathbf{u}$ که در جهت بردار از $P_1(1, 0, 1)$ تا $P_2(3, 2, 0)$ باشد.

حل: بردار مطلوب، جهت $\vec{P_1P_2}$ است. برای یافتن آن، $\vec{P_1P_2}$ را بر طولش تقسیم می‌کنیم. داریم

$$\vec{P_1P_2} = (3-1)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (0-1)\mathbf{k} \\ = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

معادله‌ها و نامعادله‌های معرف	شرح
(الف) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$ درون کره	
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	
(ب) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ توپ توپری که به کره	
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	
محدود است، یعنی کره	
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	
به همراه درون آن.	
(پ) $x^2 + y^2 + z^2 > 4$ برون کره	
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	
(ت) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \leq 0$ نیمکره پایینی کره	
$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	
کسه صفحه xy (صفحه)	
$z = 0$ آن را از کسه	
جدا می‌کند.	

وسط پاره خط

مختصات نقطه وسط (M) پاره خطی که دو نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ را به هم وصل می‌کند. متوسط مختصات P_1 و P_2 هستند. یعنی

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right). \quad (7)$$

برای پی بردن به دلیل این مطلب، کافی است ملاحظه کنیم کسه این مختصات مؤلفه‌های عددی بردار مسکن $\vec{OM}$ اند (شکل ۲۸.۱۳) و نیز اینکه

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}(\vec{P}_1\vec{P}_2) = \vec{OP}_1 + \frac{1}{2}(\vec{OP}_2 - \vec{OP}_1) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2) \\ &= \frac{x_1 + x_2}{2} \mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2} \mathbf{j} + \frac{z_1 + z_2}{2} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

کره

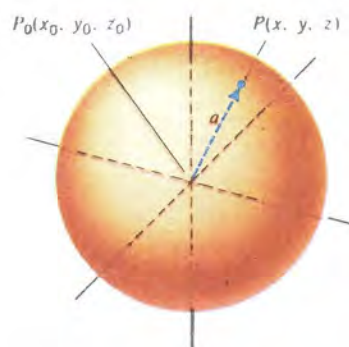
برای نوشتن معادله کره می‌توان از معادله (۵) بهره گرفت. نقطه $P(x, y, z)$ بر کره‌ای به شعاع a و به مرکز $P_0(x_0, y_0, z_0)$ واقع است اگر و تنها اگر این نقطه در فاصله a واحد از P_0 باشد. پس P بر کره واقع است اگر و تنها اگر

$$|\vec{P_0P}| = a$$

یا

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

این معادله، معادله متعارف کره است. شکل ۲۷.۱۳ را ببینید.



۲۷.۱۳ معادله متعارف کره‌ای به شعاع a و به مرکز نقطه (x_0, y_0, z_0) عبارت است از $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$

معادله متعارف کره به شعاع a و مرکز (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2. \quad (6)$$

مثال ۸ مرکز و شعاع کره زیر را بیابید

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0.$$

حل: در معادله مفروض، مربعات را کامل می‌کنیم و چنین به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 &= 0 + 1 + 4 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 &= 5. \end{aligned}$$

این همان معادله (۶) به ازای $x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 0$ و $a = \sqrt{5}$ است. بنا بر این مرکز، $(-1, 2, 0)$ و شعاع، $\sqrt{5}$ است. ■

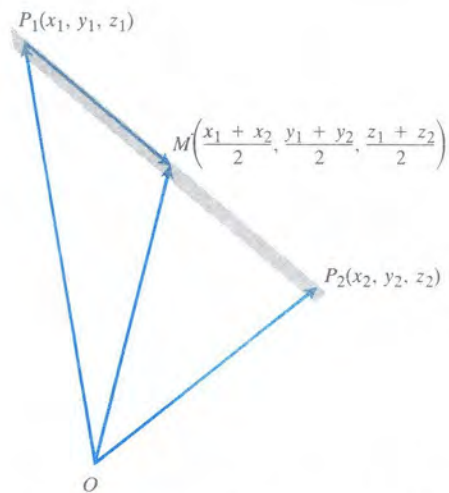
مثال ۹ مجموعه نقاط محدود به کره و بخشهایی از کره.

مثال ۱۰ وسط پاره‌خطی که $P_1(3, -2, 0)$ را به $P_2(7, 4, 4)$ وصل می‌کند این است

$$\blacksquare \left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2} \right) = (5, 1, 2).$$

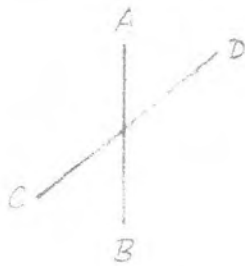
توصیه‌هایی در مورد ترسیم

در اینجا توصیه‌هایی برای کشیدن اجسام سه بعدی به گونه‌ای که تصاویرشان سه بعدی به نظر آید آمده است. ترسیم با مداد مطمئنتر از ترسیم با خودکار است زیرا ترسیمات مدادی را می‌توان پاک کرد، اما توصیه‌هایی که در زیر آمده است به ابزار رسم بستگی ندارد.

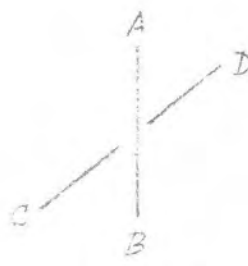


۲۸۰۱۳ مختصات نقطه وسط خط واصل نقاط P_1 و P_2 ، متوسط مختصات P_1 و P_2 هستند.

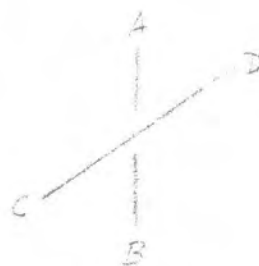
شیوه رسم اجسام سه بعدی به طوری که تصاویرشان سه بعدی به نظر آید



مقاطع

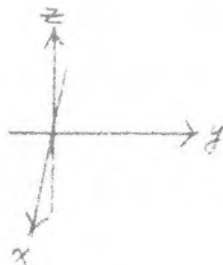


AB زیر CD

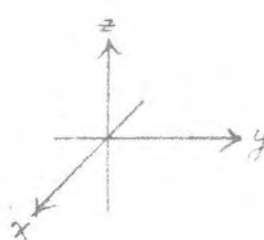


CD زیر AB

۱. وقتی خطی از زیر خط دیگری می‌گذرد، قسمتی از خط را در محل تقاطع قطع کنید تا نشان دهید خط دیگر را قطع نمی‌کند و نیز بخشی از آن دیده نمی‌شود.

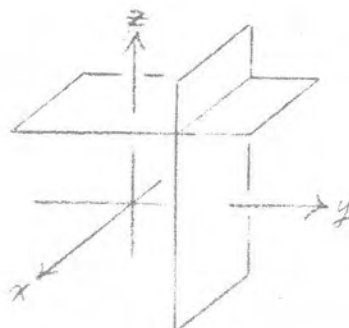


نه این طور

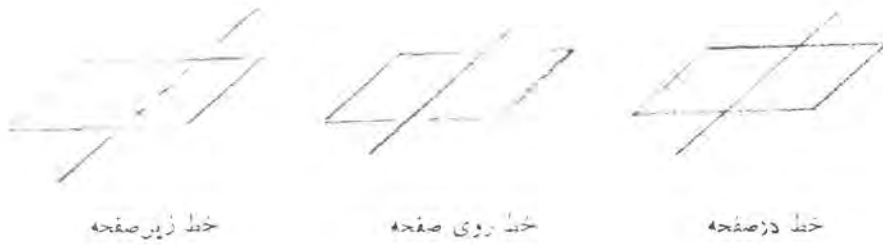


این طور

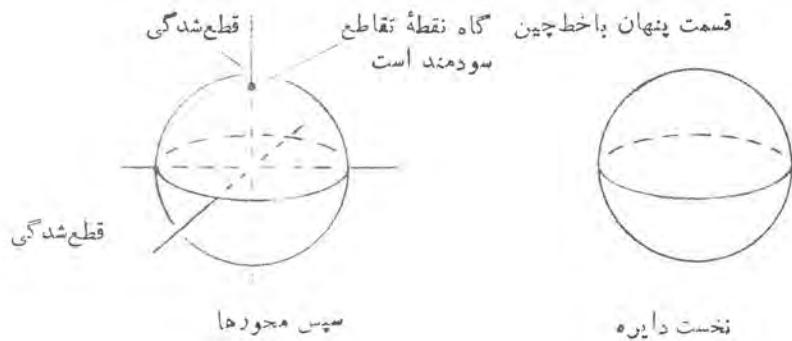
۲. زاویه بین قسمت مثبت محور zها و قسمت مثبت محور yها را به قدر کافی بزرگ بگیرید.



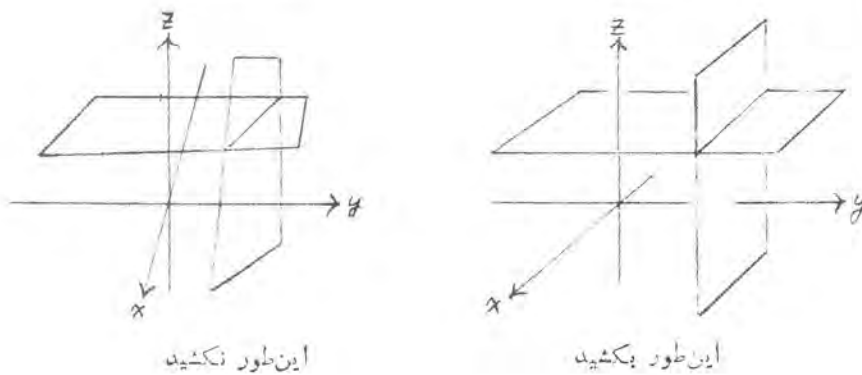
۳. صفحات موازی با صفحات مختصات را به صورت مستطیلهایی رسم کنید که اضلاعشان موازی با محورها مختصات باشد.



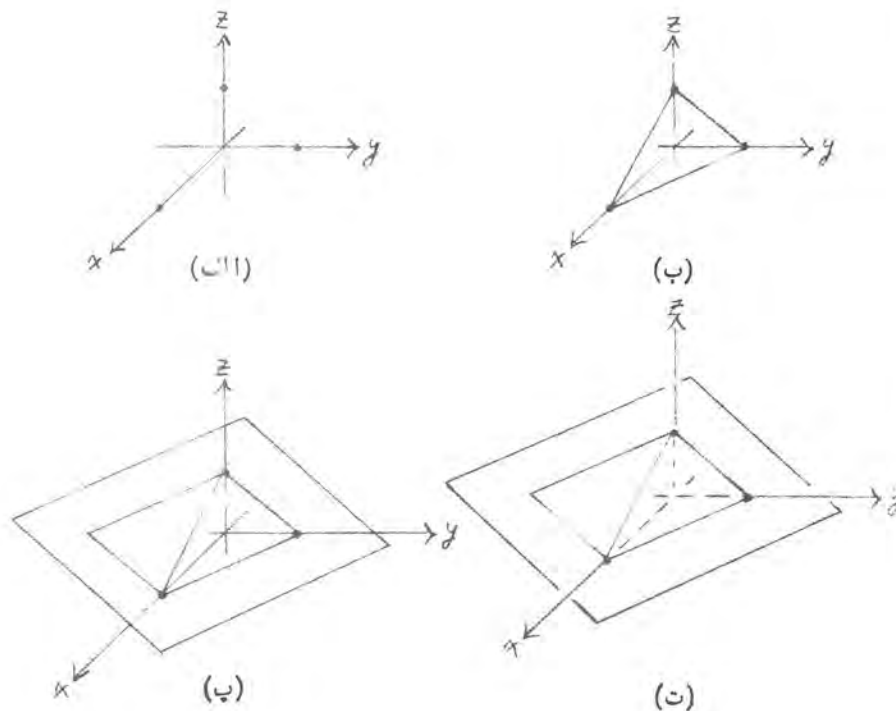
۴. بخشهایی از خطوط را که دیده نمی‌شوند با خط چین نشان دهید. خط، جز در موردی که در صفحه قرار دارد نباید اضلاع متوازی الاضلاعی را که نمایش دهنده صفحه است قطع کند.



۵. کره: نخست يك دایره و خطی مانند خط استوا دور آن، رسم کنید؛ سپس در صورت لزوم محورها را بکشید. قطع شدگی دایره و محورها را نشان دهید و از خط چین بهره بگیرید.



۶. قاعده کلی در مورد پرسپکتیو: شیء را چنان رسم کنید که گویی با اندکی فاصله، در پایین و سمت چپ قرار دارد.



۷. برای رسم صفحه‌ای که هر سه محور را قطع می‌کند مراحل زیر را طی کنید: (الف) محورها را بکشید و محل تقاطع با آنها را مشخص کنید، (ب) محل‌های تقاطع را بهم وصل کنید تا مثلثی به وجود آید. (پ) مثلث را گسترش دهید تا يك متوازی الاضلاع حاصل شود. سپس با کشیدن خطوطی به موازات اضلاع، آن متوازی الاضلاع را بزرگتر کنید. (ت) سرانجام، بخش‌های در معرض دید را سیاه کنید، قسمت‌های پنهان را به صورت خط چین در آورید و چنانچه مایل بودید بخش‌های پنهان محورها را هم به صورت خط چین در آورید.

در مسائل ۱۹-۲۸، مجموعه مفروض را با يك معادله يا با يك جفت معادله توصيف كنيد.

۱۹. صفحه عمود بر

الف) محور x در $(3, 0, 0)$

ب) محور y در $(0, -1, 0)$

پ) محور z در $(0, 0, -2)$

۲۰. صفحه گذرنده از نقطه $(3, -1, 2)$ و عمود بر

الف) محور x

ب) محور y

پ) محور z

۲۱. صفحه گذرنده از $(3, -1, 1)$ و موازی با

الف) صفحه xy

ب) صفحه yz

پ) صفحه xz

۲۲. دایره به شعاع ۲ و به مرکز $(0, 0, 0)$ واقع در

الف) صفحه xy

ب) صفحه yz

پ) صفحه xz

۲۳. دایره به شعاع ۲ و به مرکز $(0, 2, 0)$ واقع در

الف) صفحه xy

ب) صفحه yz

پ) صفحه $y=2$

۲۴. دایره به شعاع ۱ و به مرکز $(-3, 4, 1)$ واقع در صفحه‌ای

به موازات

الف) صفحه xy

ب) صفحه yz

پ) صفحه xz

۲۵. خط گذرنده از نقطه $(1, 3, -1)$ و موازی با

الف) محور x

ب) محور y

پ) محور z

۲۶. مجموعه نقاطی در فضا که از مبدأ و نقطه $(0, 2, 0)$ به يك فاصله باشند.

۲۷. دایره‌ای که مقطع صفحه گذرنده از نقطه $(1, 1, 3)$ و

عمود بر محور z با کره به شعاع ۵ و به مرکز مبدأ است.

مسئله‌ها

در هر يك از مسائل ۱-۱۲، مجموعه نقاطی از فضا را که مختصا نشان در جفتهای معادلات مفروض صادق می‌کنند به طور هندسی توصيف كنيد.

۱. $x=2, y=3$

۲. $x=-1, z=0$

۳. $y=0, z=0$

۴. $x=1, y=0$

۵. $x^2+y^2=4, z=0$

۶. $x^2+y^2=4, z=-2$

۷. $x^2+z^2=4, y=0$

۸. $y^2+z^2=1, x=0$

۹. $x^2+y^2+z^2=1, x=0$

۱۰. $x^2+y^2+z^2=25, y=-2$

۱۱. $x^2+y^2+(z+3)^2=25, z=0$

۱۲. $x^2+(y-1)^2+z^2=4, y=0$

در هر يك از مسائل ۱۳-۱۸، مجموعه نقاطی از فضا را توصيف كنيد که مختصا نشان در نامعادلات يا تركيب معادلات و نامعادلات داده شده صادق کنند.

۱۳. الف) $x \geq 0, y \geq 0, z=0$

ب) $x \geq 0, y \leq 0, z=0$

۱۴. الف) $0 \leq x \leq 1$

ب) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

پ) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

۱۵. الف) $x^2+y^2+z^2 \leq 1$

ب) $x^2+y^2+z^2 > 1$

۱۶. الف) $x^2+y^2 \leq 1, z=0$

ب) $x^2+y^2 \leq 1, z=3$

پ) z محدودیتی ندارد، $x^2+y^2 \leq 1$

۱۷. الف) $x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0$

ب) $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$

۱۸. الف) $x=y, z=0$

ب) z محدودیتی ندارد، $x=y$

۲۸. مجموعه نقاطی در فضا که ۲ واحد از نقطه $(0, 0, 1)$ و ۲ واحد از نقطه $(0, 0, -1)$ فاصله دارند.

نامعادلات توصیف کننده مجموعه های مذکور در مسائل ۲۹-۳۴ را بنویسید.

۲۹. تیغه محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ (شامل خود صفحات).

۳۰. مکعب توپری که در یک هشتم اول واقع و به صفحات $x=2$ ، $y=2$ و $z=2$ محدود است.

۳۱. نیمی از فضا که شامل نقاط واقع بر صفحه xyz و زیر آن می شود.

۳۲. نیم کره بالایی کره به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ.

۳۳. (الف) درون و (ب) بیرون کره به شعاع ۱ و به مرکز $(1, 1, 1)$.

۳۴. ناحیه بسته محدود به کره های به شعاع ۱ و ۲ و به مرکز مبدأ. (بسته به این معناست که ناحیه شامل کره ها می شود. اگر غرضمان این بود که کره ها منظور نشوند، ناحیه باز محدود به کره ها مورد بحث می بود. «بسته» و «باز» در مورد بازه ها تقریباً همان طور به کار می روند که در مورد مجموعه ها. در مورد بازه ها «بسته» به معنی در برداشتن نقاط انتهایی و «باز» به معنی در نداشتن نقاط انتهایی است. در مورد مجموعه ها بسته به معنی در برداشتن مرزها و باز به معنی در نداشتن مرزهاست.)

در مسائل ۳۵-۴۲، طول و جهت بردارها را بیابید

$$35. \mathbf{2i} + \mathbf{j} - \mathbf{2k}$$

$$36. \mathbf{3i} - \mathbf{6j} + \mathbf{2k}$$

$$37. \mathbf{i} + \mathbf{4j} - \mathbf{8k}$$

$$38. \mathbf{9i} - \mathbf{2j} + \mathbf{6k}$$

$$39. \mathbf{5k}$$

$$40. -\frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

$$41. \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

$$42. \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$43. \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$$

$$44. \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$$

$$45. \mathbf{6i}$$

$$46. -\mathbf{4j}$$

۴۷. مطلوب است تعیین بردارهایی که طول و جهتشان در زیر داده شده است. بکشید بدون نوشتن چیزی جواب دهید.

طول	جهت
(الف) ۲	$\mathbf{i}$
(ب) -۴	$\mathbf{j}$
(پ) $\sqrt{3}$	$\mathbf{k}$
(ت) $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$
(ث) ۷	$\frac{6}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$
(ج) a	$u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$

۴۸. بردار واحدی در جهت $\mathbf{A} = \mathbf{12i} - \mathbf{5k}$ بیابید.

۴۹. برداری به طول ۵ واحد و در جهت $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ بیابید.

۵۰. برداری به طول ۱/۲ واحد و در جهت $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ بیابید.

کره و فاصله

در هر يك از مسائل ۵۱-۵۴، مرکز و شعاع کره را بیابید.

$$51. x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$$

$$52. 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$$

$$53. x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0$$

$$54. 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$$

۵۵. فرمولی برای فاصله نقطه $P(x, y, z)$ تا (الف) محور x ، (ب) محور y ، (پ) محور z بیابید.

۵۶. فرمولی برای فاصله نقطه $P(x, y, z)$ تا (الف) صفحه yz ، (ب) صفحه xz ، (پ) صفحه xy بیابید.

استفاده از بردارها در هندسه

۵۷. فرض می کنیم نقاط

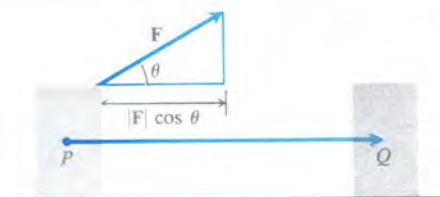
$$A(2, 2, 0), \quad B(1, 3, 0), \quad C(1, 1, 3)$$

گوشه های يك صفحه مثلثی همگن نازک در فضا است (شکل ۲۹.۱۳).

زاویه θ زاویه بین جهت $\mathbf{F}$ و جهت $\overrightarrow{PQ}$ است. کار برابر است با حاصلضرب مقدار جا به جایی در مؤلفه عددی نیرو در جهت جا به جایی. شکل ۳۰.۱۳ را ببینید. مثلاً، اگر $|\mathbf{F}| = 40$ نیوتن (حدود ۹ پوند)، $|\overrightarrow{PQ}| = 3$ m، و $\theta = 60^\circ$ یا $\cos \theta = 1/2$ ، آنگاه کاری که $\mathbf{F}$ ضمن جا به جایی نقطه اثرش از P تا Q انجام می‌دهد برابر است با

$$\text{نیوتن-متر} = (40)(3)\left(\frac{1}{2}\right) = 60 = \text{کار}$$

در ریاضیات، کمیت $|\mathbf{F}||\overrightarrow{PQ}|\cos \theta$ را حاصلضرب عددی یا حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{F}$ و $\overrightarrow{PQ}$ می‌نامند.



۳۰.۱۳ کاری که نیروی ثابت $\mathbf{F}$ در جا به جایی $\overrightarrow{PQ}$ انجام می‌دهد برابر است با $(|\mathbf{F}|\cos \theta)|\overrightarrow{PQ}|$.

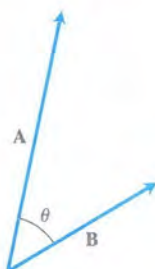
تعریف

ضرب عددی یا نقطه‌ای

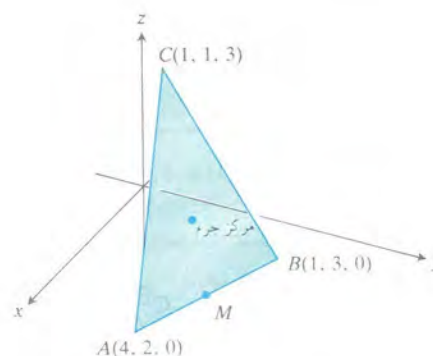
حاصلضرب عددی $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (A نقطه B) یا حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برابر است با عدد

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos \theta \quad (2)$$

که در آن θ کوچکترین زاویه‌ای است که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ وقتی ابتدایشان برهم منطبق است باهم می‌سازند (همان‌طور که در شکل ۳۱.۱۳ دیده می‌شود).



۳۱.۱۳ حاصلضرب $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ عدد $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos \theta$ است.



۲۹.۱۳ صفحه مثلثی مورد بحث درمسأله ۵۷.

الف) بردار از C تا M ، وسط ضلع AB ، را بیابید.
ب) مطلوب است بردار از C تا نقطه‌ای که روی میانه CM واقع است و فاصله آن تا M دوسوم طول این میانه است.
پ) مختصات محل تقاطع میانه‌های مثلث ABC را بیابید.
بنا به مثال ۶ از بخش ۸.۵ این نقطه همان مرکز جرم صفحه است.

۵۸. فرض می‌کنیم $ABCD$ یک چهارضلعی نامشخص (و نه الزاماً واقع در یک صفحه) در فضا باشد. نشان دهید که پاره‌خطهایی که وسطهای اضلاع روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند یکدیگر را نصف می‌کنند. (داهنمایی: نشان دهید وسطهای دو پاره‌خط برهم منطبق‌اند.)

۴.۱۳ ضرب عددی دو بردار

حال یکی از دو روش ضرب دو بردار درهم یعنی ضرب عددی دو بردار را معرفی می‌کنیم. انگیزه ما برای این تعریف، نیاز به محاسبه کاری است که یک نیروی ثابت برای جا به جا کردن یک جرم انجام می‌دهد. وقتی که نیرو و تغییر مکان به صورت بردار باشند با ضرب عددی دو بردار کاری که نیرو ضمن جا به جایی انجام می‌دهد به دست می‌آید.

حاصل ضرب عددی که ضرب نقطه‌ای نیز نامیده می‌شود عدد است نه بردار. ضرب عددی در ریاضیات، مهندسی، و فیزیک کاربرد دارد. در این بخش آن دسته از ویژگیهای جبری و هندسی ضرب عددی عرضه می‌شود که بسیاری از کاربردها به آنها بستگی دارند. نوع دوم ضرب بردارها، یعنی ضرب برداری، در بخش بعدی توصیف می‌شود.

تعریف

در مکانیک، کاری که نیروی ثابت $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد وقتی که نقطه اثر آن به اندازه $\overrightarrow{PQ}$ جا به جا شود، چنین تعریف می‌شود

$$= (|\mathbf{F}|\cos \theta)|\overrightarrow{PQ}| = |\mathbf{F}||\overrightarrow{PQ}|\cos \theta. \quad (1)$$

طرف چپ این رابطه، $A \cdot B$ است و طرف راست آن را می‌توان با استفاده از رابطه (۳) بخش ۳.۱۳ و با یافتن طولهای B ، A و C محاسبه کرد. نتیجه این محاسبات، فرمول زیر است

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (5)$$

بنابراین، برای یافتن حاصلضرب عددی دو بردار مفروض، مؤلفه‌های متناظر i ، j ، و k آنها را در هم ضرب و نتایج را بسا هم جمع می‌کنیم. در حالت خاص از معادله (۳) داریم

$$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (6)$$

مثال ۱ مطلوب است زاویه θ بین $A = i - 2j - 2k$ و $B = 6i + 3j + 2k$

حل: بنا به رابطه (۵) داریم

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) \\ &= 6 - 6 - 4 = -4. \end{aligned}$$

از طرف دیگر بنا به رابطه (۲) داریم

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta.$$

چون

$$|B| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7 \quad \text{و} \quad |A| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

پس

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|} = \frac{-4}{21} \quad \text{یا} \quad \theta = \cos^{-1} \frac{-4}{21} \approx 101^\circ$$

■

قوانین ضرب عددی

از رابطه $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ ، بلافاصله می‌توان دریافت که

$$A \cdot B = B \cdot A. \quad (7)$$

یعنی ضرب عددی دو بردار تعویض‌پذیر است. همچنین می‌توان دریافت که به ازای هر عدد دلخواهی مانند c داریم

$$(cA) \cdot B = A \cdot (cB) = c(A \cdot B) \quad (8)$$

(مسئله ۳۲ را ببینید). اگر

$$C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$$

یعنی حاصلضرب عددی دو بردار A و B برابر است با حاصلضرب طول A در طول B در کسینوس زاویه بین A و B . این حاصلضرب، عدد است و نه بردار. علت اینکه گاه به آن حاصلضرب نقطه‌ای می‌گویند نقطه‌ای است که بین A و B در نماد $A \cdot B$ وجود دارد.

بنا به رابطه (۲)، حاصلضرب عددی دو بردار مثبت است هرگاه زاویه بین آنها حاده باشد و منفی است هرگاه زاویه بین آنها منفرجه باشد.

چون زاویه برداری مانند A با خودش صفر است و کسینوس زاویه صفر برابر با ۱ است داریم

$$A \cdot A = |A||A| \cos 0 = |A||A|(1) = |A|^2 \quad (3) \quad \text{یا}$$

$$|A| = \sqrt{A \cdot A}.$$

این رابطه چنانکه اندکی بعد خواهیم دید راه آسانی برای محاسبه طول بردار به دست می‌دهد.

محاسبه

برای محاسبه $A \cdot B$ با استفاده از مؤلفه‌های A و B ، فرض می‌کنیم

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

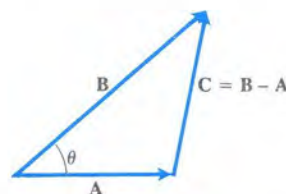
و

$$C = B - A = (b_1 - a_1)i + (b_2 - a_2)j + (b_3 - a_3)k.$$

حالا با استفاده از قانون کسینوسها در مورد مثلثی که اضلاعش بردارهای A ، B ، و C است (شکل ۳۲.۱۳) داریم

$$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \cos \theta$$

$$|A||B| \cos \theta = \frac{|A|^2 + |B|^2 - |C|^2}{2} \quad (4)$$

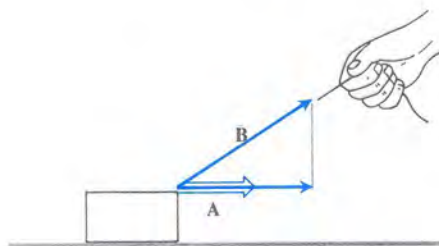


۳۲.۱۳ معادله ۵ با استفاده از قانون کسینوسها در مورد مثلثی که اضلاعش A ، B ، و $C = B - A$ است به دست می‌آید.

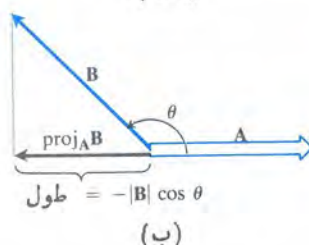
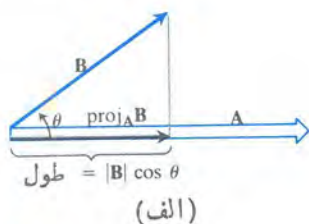
مانند A به دست می آید تصویر برداری B بر A نامیده می شود و گاه آن را چنین نشان می دهند

$$\text{proj}_A B \quad (\text{«تصویر برداری } B \text{ بر } A\text{»})$$

اگر B نیرویی را نشان دهد، آنگاه تصویر برداری B بر A نیروی مؤثر در جهت A است. شکل ۳۳.۱۳ را ببینید. اگر زاویه بین A و B حاده باشد، طول تصویر برداری B بر A برابر است با $|B| \cos \theta$. اگر زاویه منفرجه باشد، کسینوسش منفی است و طول تصویر برداری B بر A برابر است با $-|B| \cos \theta$. در هر حال، عدد $|B| \cos \theta$ را مؤلفه عددی B در جهت A می نامند. شکل ۳۴.۱۳ را ببینید.



۳۳.۱۳ کشیدن جعبه بساعت حرکت جعبه در جهت A می شود. نیرو در این جهت بسا تصویر برداری B بر A نشان داده می شود.



۳۴.۱۳ (الف) وقتی θ حاده است، طول تصویر برداری B بر A برابر است با $|B| \cos \theta$ ، یعنی مؤلفه عددی B در جهت A . (ب) وقتی θ منفرجه است، مؤلفه عددی B در جهت A منفی است و طول تصویر برداری B بر A برابر است با $-|B| \cos \theta$.

دوبردار دلخواه سومی باشد، داریم

$$\begin{aligned} A \cdot (B+C) &= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

بنابراین، ضرب عددی از قانون توزیع پذیری تبعیت می کند

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (۹)$$

اگر این قانون را بسا قانون تعویض پذیری، رابطه (۷)، بیامیزیم، آشکار می شود که

$$(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \quad (۱۰)$$

رابطه های (۹) و (۱۰) با هم این امکان را به ما می دهند که به کمک قوانین آشنای جبر، مجموعه های بردارها را درهم ضرب کنیم. مثلاً،

$$\begin{aligned} (A+B) \cdot (C+D) &= A \cdot C + A \cdot D \\ &\quad + B \cdot C + B \cdot D. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

بردارهای متعامد

دوبردار که حاصل ضرب عددیشان برابر با صفر است متعامد هستند. از رابطه $A \cdot B = |A||B| \cos \theta$ می توان دریافت که وقتی نه $|A|$ صفر باشد و نه $|B|$ ، $A \cdot B$ برابر با صفر است اگر و تنها اگر $\cos \theta$ برابر با صفر باشد یعنی وقتی θ برابر با 90° باشد. بنابراین در مورد بردارهایی که ما با آنها سروکار داریم «متعامد بودن» به معنی «عمود برهم بودن» است. (درسایر متون علمی که در آنها اصطلاح متعامد به کار می رود، ممکن است این اصطلاح دارای این تعبیر هندسی نباشد.)

بردار صفر $0 = 0i + 0j + 0k$ بر هر برداری عمود است زیرا حاصل ضرب عددی آن در هر برداری صفر است.

مثال ۲ بردارهای $A = 3i - 2j + k$ و $B = 2j + 4k$ متعامدند زیرا

$$A \cdot B = (3)(0) - (2)(2) + (1)(4) = 0.$$

تصاویر برداری و مؤلفه های عددی

برداري که از تصویر کردن برداری مساند B بر راستای برداری

از رابطه (۱۲)، مؤلفه عددی B در جهت A را می‌یابیم

$$|B| \cos \theta = B \cdot \frac{A}{|A|}$$

$$= (6i + 3j + 2k) \cdot \left(\frac{1}{3}i - \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k \right)$$

$$= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

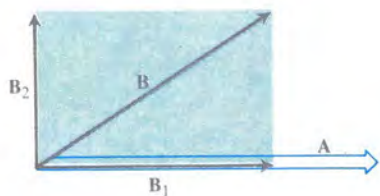


در مکانیک، اغلب مایلیم برداری مانند B را به صورت مجموع برداری مانند B_1 که موازی بردار خاصی چون A است و برداری مانند B_2 که عمود بر A است بیان کنیم. (شکل ۳۵.۱۳ را ببینید). این کار را می‌توان از راهی سراسر انجام داد به این ترتیب که B را به صورت مجموع تصویر برداری اش بر A به علاوه آنچه باقی می‌ماند می‌نویسیم، زیرا آنچه باقی می‌ماند خود به خود عمود بر A است. برای پی بردن به دلیل این مطلب، B را به صورت مجموع زیر می‌نویسیم

$$B = \underbrace{\frac{A \cdot B}{A \cdot A} A}_{B_1} + \underbrace{\left(B - \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \right)}_{B_2} \quad (15)$$

بردار B_1 که تصویر برداری B بر A است با A موازی است، حال آنکه B_2 عمود بر A است زیرا $A \cdot B_2 = 0$ برابری صفر است

$$\begin{aligned} A \cdot B_2 &= A \cdot \left(B - \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \right) \\ &= A \cdot B - \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \cdot A \quad (16) \\ &= A \cdot B - A \cdot B \\ &= 0 \end{aligned}$$



۳۵.۱۳ بردار B به صورت مجموع بردارهای موازی با و عمود بر A .

مؤلفه عددی B در جهت A را می‌توان از تقسیم طرفین رابطه θ $A \cdot B = |A||B| \cos \theta$ بر $|A|$ به دست آورد

$$|B| \cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A|} = B \cdot \frac{A}{|A|} \quad (12)$$

رابطه (۱۲) حاکی است که مؤلفه عددی B در جهت A را می‌توان از ضرب عددی B در جهت A به دست آورد.

تصویر برداری B بر A برابر است با مؤلفه عددی B در جهت A ضرب بردار جهت A . اگر زاویه بین A و B حاده باشد تصویر برداری طولی برابر با $|B| \cos \theta$ و جهتی برابر با $A/|A|$ دارد. اگر این زاویه منفرجه باشد، تصویر برداری طولی برابر با $-|B| \cos \theta$ و جهتی برابر با $-A/|A|$ دارد. در هر حال

$$\text{proj}_A B = (|B| \cos \theta) \frac{A}{|A|} \quad (13)$$

روابط (۱۲) و (۱۳) با هم راه سودمندی برای یافتن $\text{proj}_A B$ به دست می‌دهند

$$\text{proj}_A B = (|B| \cos \theta) \frac{A}{|A|} \quad (\text{رابطه } 13)$$

$$= \left(\frac{A \cdot B}{|A|} \right) \frac{A}{|A|} \quad (\text{رابطه } 12)$$

$$= \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \quad (|A|^2 = A \cdot A) \quad (14)$$

مثال ۳ تصویر برداری $B = 6i + 3j + 2k$ را بر

$$A = i - 2j - 2k$$

و نیز مؤلفه عددی B را در جهت A بیابید.

حل: از رابطه (۱۴)، $\text{proj}_A B$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} \text{proj}_A B &= \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \\ &= \frac{6 - 6 - 4}{1 + 4 + 4} (i - 2j - 2k) \\ &= -\frac{4}{9} (i - 2j - 2k) \\ &= -\frac{4}{9} i + \frac{8}{9} j + \frac{8}{9} k \end{aligned}$$

مثال ۴ بردار $B = 2i + j - 3k$ را به صورت مجموع برداری موازی با $A = 2i - j$ و برداری عمود بر A بیان کنید.

حل: به کمک رابطه (۱۵) به ازای

$$A \cdot A = 9 + 1 = 10 \quad \text{و} \quad A \cdot B = 6 - 1 = 5$$

داریم

$$\begin{aligned} B &= \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A + \left(B - \frac{A \cdot B}{A \cdot A} A \right) \\ &= \frac{5}{10} (2i - j) + \left(2i + j - 3k - \frac{5}{10} (2i - j) \right) \\ &= \left(\frac{3}{5}i - \frac{1}{5}j \right) + \left(\frac{1}{5}i + \frac{3}{5}j - 3k \right). \end{aligned}$$

بررسی درستی جواب: بردار نخست در مجموع فوق، با A موازی است زیرا برابر است با $\frac{1}{2}A$ ، بردار دوم این مجموع، عمود بر A است زیرا

$$\left(\frac{1}{5}i + \frac{3}{5}j - 3k \right) \cdot (2i - j) = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = 0.$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

معادله اخیر را می توان به صورت زیر مرتب کرد

$$ax + by = ax_0 + by_0.$$

یا به صورت ساده تر داریم

$$c = ax_0 + by_0 \quad \text{که در آن} \quad ax + by = c \quad (18)$$

توجه کنید که ضرایب x و y در معادله (۱۸) مؤلفه های x و y برداری عمود بر خط اند.

مثال ۵ معادله ای برای خط گذرنده از $P_0(3, 5)$ و عمود بر $N = i + 2j$ بیابید.

حل: با استفاده از معادله (۱۸) داریم

$$\blacksquare \quad x + 2y = 13 \quad \text{و} \quad c = 1(3) + 2(5) = 13$$

مثال ۶ فاصله نقطه $P(4, 3)$ را تا خط $x + 3y = 6$ بیابید.

حل: نقطه ای چون R روی خط می یابیم (شکل ۳۷-۱۳).
آنگاه فاصله عبارت است از طول تصویر برداری $\overrightarrow{RP}$ بر بردار N قائم بر خط. هر نقطه ای روی خط می تواند R باشد و بردار $N = i + 3j$ را می توان مستقیماً از معادله خط به دست آورد: داریم $N = i + 3j$.
مثلاً به ازای $R = (0, 2)$ داریم

$$\overrightarrow{RP} = (4 - 0)i + (3 - 2)j = 4i + j$$

و

$$\text{فاصله} = |\text{proj}_N \overrightarrow{RP}|$$

$$= \left| \overrightarrow{RP} \cdot \frac{N}{|N|} \right|$$

$$= \left| (4i + j) \cdot \frac{i + 3j}{\sqrt{10}} \right|$$

$$= \frac{4 + 3}{\sqrt{10}}$$

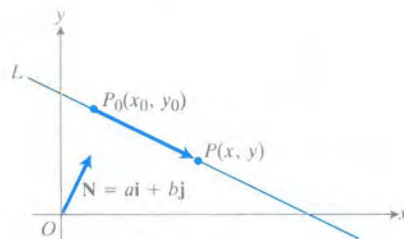
$$= \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

خطهای واقع در صفحه و فواصل نقطه ها از خطها

ضرب عددی بردارها روش نوینی برای درک معادلات خطوط واقع در صفحه و نیز راه سریعی برای محاسبه فواصل نقاط از خطوط به دست می دهد.

فرض می کنیم L خطی باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ می گذرد و بر بردار $N = ai + bj$ عمود است (شکل ۳۶-۱۳). نقطه ای مانند $P(x, y)$ بر این خط واقع است اگر و تنها اگر

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (17)$$



۳۶-۱۳ نقطه $P(x, y)$ بر خط گذرنده از P_0 و عمود بر N واقع است اگر و تنها اگر $N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

با این قطر در یک رأس مشترک است.

۰۱۷. مطلوب است نقطه $A(a, a, 0)$ یعنی پای عمودی که در صفحه xy از نقطه $B(2, 4, -3)$ بر خط $x=y$ فرود می آید.

۰۱۸. چند خط وجود دارند که از مبدأ می گذرند و با هر دو محور y و z زاویه 60° می سازند؟ این خطوط با قسمت مثبت محور x چه زوایایی می سازند؟

۰۱۹. بردار $B = 3j + 4k$ را به صورت مجموع برداری چون B_1 که موازی با $A = i + j$ است و برداری چون B_2 که عمود بر A است بنویسید.

۰۲۰. مسأله ۱۹ را برای $B = i + j + k$ دوباره حل کنید.

۰۲۱. در صفحه xy فاصله بین خط $x + 3y = 6$ را با هر یک از نقاط زیر بیابید.

الف) نقطه $(2, 8)$

ب) مبدأ

۰۲۲. فاصله بین خطوط $2x + y = 2$ و $2x + y = 4$ را بیابید.

۰۲۳. نشان دهید که بردارهای زیر متعامند

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}(i - j + k), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(j + k)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2i - j + k).$$

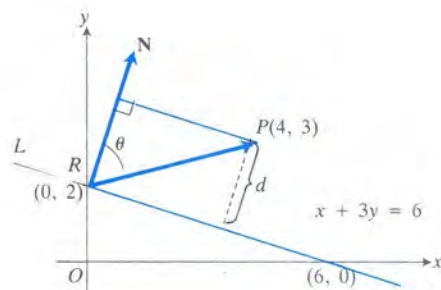
۰۲۴. تصاویر برداری $D = i + j + k$ را بر بردارهای A و B ، و C مذکور در مسأله ۲۳ بیابید. سپس نشان دهید که D مجموع این تصاویر برداری است.

۰۲۵. مطلوب است کاری که نیروی $F = -5k$ (اندازه نیرو ۵ نیوتن است) برای حرکت دادن جسمی در امتداد خط از مبدأ تا نقطه $(1, 1, 1)$ انجام می دهد.

۰۲۶. لوکوموتیوی نیروی ثابت ۶۰۰۰۰ نیوتن را بر یک قطار باری وارد می آورد و آن را به اندازه ۱ km روی مسیری مستقیم می کشد. این لوکوموتیو چه مقدار کار انجام می دهد؟

۰۲۷. برای جابجای کردن محموله ای در یک لنگرگاه به اندازه ۲۵۰ m، نیروی ثابت ۲۰۰ نیوتن با زاویه 30° نسبت به افق وارد می شود. این نیرو چه مقدار کار انجام می دهد؟

۰۲۸. فرض کنید می دانیم $A \cdot B_1 = A \cdot B_2$ و A صفر نیست، اما چیز دیگری درباره B_1 و B_2 نمی دانیم. آیا می توان A را از طریق این معادله حذف کرد؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.



۳۷.۱۳ فاصله P تا خط L ، یعنی d ، برابر است با طول تصویر برداری $\vec{RP}$ بر N .

مسأله ها

در مسائل ۱-۱۲، مطلوب است تعیین $A \cdot B$ ، $|A|$ ، $|B|$ ، کسینوس زاویه بین A و B ، مؤلفه عسادی B در جهت A ، و تصویر برداری B بر A .

۰۱. $A = 2i + 2j$, $B = 5j + k$

۰۲. $A = i$, $B = 5j - 2k$

۰۳. $A = 2i - 2j - k$, $B = -2j$

۰۴. $A = -2i + 7j$, $B = k$

۰۵. $A = 5j - 2k$, $B = i + j + k$

۰۶. $A = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}}j - k$

۰۷. $A = -i + j$, $B = \sqrt{2}i + \sqrt{3}j + 2k$

۰۸. $A = i + k$, $B = i + j + k$

۰۹. $A = 2i - 2j + \sqrt{5}k$, $B = -2i + 2j - \sqrt{5}k$

۰۱۰. $A = -5i + j$, $B = 2i + \sqrt{17}j + 10k$

۰۱۱. $A = 10i + 11j - 2k$, $B = 2j + 2k$

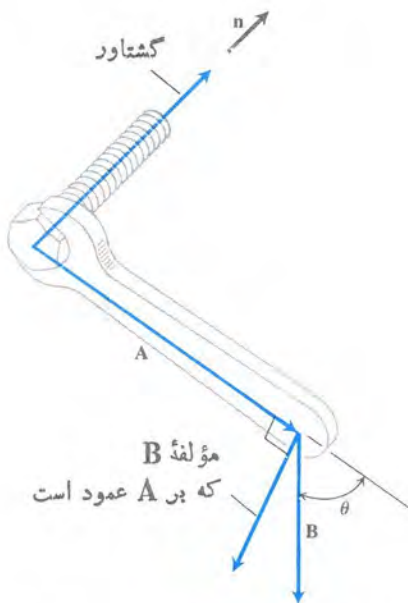
۰۱۲. $A = 2i + 10j - 11k$, $B = 2i + 2j + k$

۰۱۳. مطلوب است زوایای داخلی مثلث ABC با رئوس $A(-1, 0, 2)$ ، $B(2, 1, -1)$ ، و $C(1, -2, 2)$.

۰۱۴. زاویه بین $A = 2i + 2j + k$ و $B = 2i + 10j - 11k$ را بیابید.

۰۱۵. مطلوب است زاویه بین قطر یک مکعب و قطر یکی از وجوهش. (دانهایی: از مکعبی استفاده کنید که یالهایش i ، j ، و k اند.)

۰۱۶. مطلوب است زاویه بین قطر یک مکعب و یکی از یالهایش که



۳۹.۱۳ بردار گشتاور میل نیروی B در چرخاندن پیچ را توصیف می کند.

می پیچانیم، گشتاور ایجاد شده در امتداد محور پیچ عمل می کند و پیچ را به جلو می برد. اندازه گشتاور به طول بازوی آچار و زاویه نیروی وارد شده به امتداد آچار بستگی دارد. اندازه گشتاور برابر است با حاصلضرب طول بازوی بردار A و مؤلفه عددی B عمود بر A. بر مبنای نمادهای شکل ۳۹.۱۳ داریم

$$|A||B| \sin \theta = \text{اندازه بردار گشتاور}$$

اگر فرض کنیم n بردار واحدی در امتداد محور پیچ و در جهت گشتاور باشد، بردار گشتاور به این صورت کاملاً مشخص می شود

$$\text{بردار گشتاور} = n|A||B| \sin \theta$$

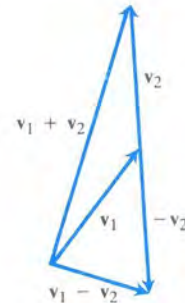
گشتاور را حاصلضرب برداری A و B می نامیم. ضرب برداری کاربرد گسترده ای در توصیف آثار نیروها در مطالعات مربوط به الکتریسیته، مغناطیس، مکانیک سیالات، و حرکت سیارات دارد. هدف این بخش آشنا کردن خواننده با آن دسته از ویژگیهای ریاضی ضرب برداری است که در مباحث فوق به کار می رود. ما تعدادی از این کاربردها را هنگام مطالعه حرکت در فضا و انتگرالهای مربوط به حرکت سیالات در فصول ۱۴ و ۱۹ خواهیم دید. در بخش بعدی نیز خواهیم دید که چگونه از ترکیب ضرب برداری و ضرب عددی، معادلات خطوط و صفحات در فضا به دست می آیند.

ضرب برداری دو بردار در فضا

برای تعریف ضرب برداری در ریاضیات، با دو بردار ناصفر A و

۲۹. در شکل ۳۸.۱۳ چنین به نظر می رسد که $v_1 + v_2$ و $v_1 - v_2$ متعامدند. آیا این امر تصادفی است یا اینکه شرایطی وجود دارد که تحت آن شرایط می توان انتظار داشت که مجموع دو بردار بر تفاضل همان دو بردار عمود باشد؟ با بسط طرف چپ معادله زیر این شرایط را بیابید.

$$(v_1 + v_2) \cdot (v_1 - v_2) = 0$$



۳۸.۱۳ مسئله ۲۹ درباره بردارهای این شکل است.

۳۰. ثابت کنید قطرهای يك لوزی بر هم عمودند.

۳۱. ثابت کنید مربع تنها مستطیلی است که قطرهایش بر هم عمودند.

۳۲. نشان دهید که اگر c عددی دلخواه و A و B بردارهایی دلخواه باشند، آنگاه

$$(cA) \cdot B = c(A \cdot B) = A \cdot (cB)$$

زوایای بین خمها

زوایای بین دو خم مشتق پذیر در يك نقطه تقاطع آنها عبارت اند از زوایای بین خطهای مماس بر آنها در آن نقطه. در مسائل ۳۳-۳۷ زوایای بین خمها را در هر نقطه تقاطعشان بیابید.

$$3x + y = 5, \quad 2x - y = 2 \quad ۳۳$$

$$y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2 \quad ۳۴$$

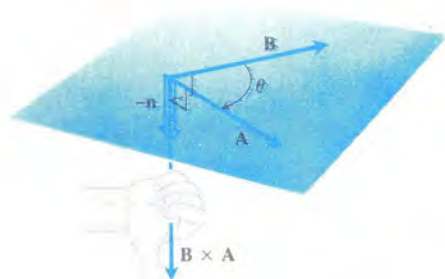
$$y = \sqrt{(3/4) + x}, \quad y = \sqrt{(3/4) - x} \quad ۳۵$$

$$y = x^3, \quad y = \sqrt{x} \quad (\text{دو نقطه تقاطع}) \quad ۳۶$$

$$y = x^2, \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (\text{دو نقطه تقاطع}) \quad ۳۷$$

۵.۱۳ ضرب برداری دو بردار

هنگامی که مطابق شکل ۳۹.۱۳ با اعمال نیرو به آچار پیچی را

۴۱.۱۳ رسم $B \times A$.

B داریم

$$B \times A = -(A \times B) \quad (۲)$$

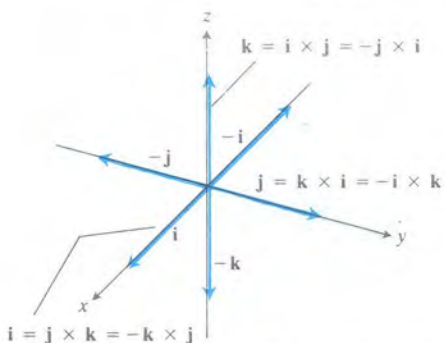
برخلاف ضرب عددی، ضرب برداری تعویضپذیر نیست. با استفاده از تعریف ضرب برداری در مورد بردارهای واحد i, j, k داریم

$$\begin{aligned} i \times j &= -(j \times i) = k \\ j \times k &= -(k \times j) = i \\ k \times i &= -(i \times k) = j \end{aligned} \quad (۳)$$

و

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$$

شکل ۴۲.۱۳ را ببینید.



۴۲.۱۳ حاصلضربهای برداری دوبه‌دوی بردارهای i, j, k را می‌توان در این نمودار دید.

 $|A \times B|$ مساحت یک متوازی‌الاضلاع استچون n یک بردار واحد است، مقدار $A \times B$ چنین است

$$|A \times B| = |n||A||B| \sin \theta = |A||B| \sin \theta.$$

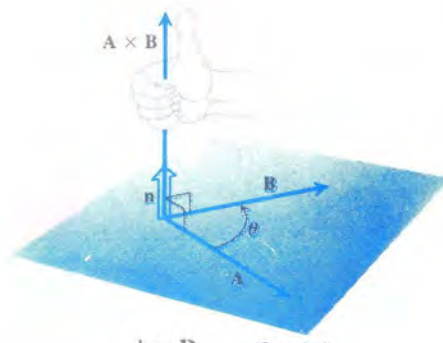
B آغاز می‌کنیم بدون اینکه این بردارها نیاز به تعبیر فیزیکی خاصی داشته باشند. اگر A و B موازی نباشند صفحه‌ای را مشخص می‌کنند. بردار واحد n را عمود بر این صفحه طبق قانون دست راست برمی‌گزینیم، به این ترتیب که n را آن بردار واحد (قائم) می‌گیریم که وقتی انگشتان دست راست ما روی زاویه θ در جهت از A به B خم شود، این بردار در جهت انگشت شست مسا باشد (شکل ۴۰.۱۳). حال حاصلضرب برداری $A \times B$ (خوانده می‌شود «ضربدر B » A) دو بردار A و B را با بردار زیر تعریف می‌کنیم

$$A \times B = n|A||B| \sin \theta. \quad (۱)$$

چون $A \times B$ یک مضرب عددی از n است، هم بر A و هم بر B عمود است.

اگر در رابطه (۱)، θ به 0° یا 180° میل کند، طول $A \times B$ به صفر میل می‌کند. بنابراین $A \times B$ را برابر با 0 تعریف می‌کنیم اگر A و B موازی باشند. این مطلب با تعبیری که از گشتاور داشتیم نیز سازگار است. در شکل ۳۹.۱۳ اگر نیروی B با آچار موازی باشد، یعنی اینکه بکوشیم پیچ را با فشردن یا کشیدن آن در امتداد دسته آچار بچرخانیم، گشتاور ایجاد شده 0 است.

اگر A یا B یا هر دو صفر باشد، باز هم $A \times B$ را برابر با صفر تعریف می‌کنیم. بنا بر این ضرب برداری دو بردار A و B صفر است اگر و تنها اگر A و B موازی باشند و یا یکی یا هر دوی آنها صفر باشد. برخلاف حاصلضرب عددی (نقطه‌ای) $A \cdot B$ که عدد است، حاصلضرب برداری A و B بردار است.

۴۰.۱۳ رسم $A \times B$.مقایسه $B \times A$ و $A \times B$

اگر در یک ضرب برداری ناصفر جای عوامل را عوض کنیم، جهت بردار حاصل عکس می‌شود. اگر انگشتان دست راست ما روی زاویه θ در جهت از B تا A خم شود، انگشت شست به جهت مخالف نشانه می‌رود و بردار واحدی که برای تشکیل $B \times A$ برمی‌گزینیم قرینه برداری است که برای تشکیل $A \times B$ برمی‌گزینیم (شکل ۴۱.۱۳). بنابراین به ازای هر بردار A و

بنابراین قوانین توزیع پذیری و قواعد ضرب i, j, k و داریم

$$\begin{aligned} A \times B &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 b_1 i \times i + a_1 b_2 i \times j + a_1 b_3 i \times k \\ &\quad + a_2 b_1 j \times i + a_2 b_2 j \times j + a_2 b_3 j \times k \\ &\quad + a_3 b_1 k \times i + a_3 b_2 k \times j + a_3 b_3 k \times k \quad (7) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \end{aligned}$$

جملات انتهایی رابطه (۷) جملاتی هستند که از بسط دترمینان نمادین زیر به دست می آیند

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

بنابراین برای محاسبه $A \times B$ می توان از قاعده زیر بهره گرفت.

اگر $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ و $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ آنگاه

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

رابطه (۸) از این جهت نیز قابل توجه است که نشان می دهد در ضرب برداری نه قانون شرکت پذیری برقرار است و نه قانون تعویض پذیری.

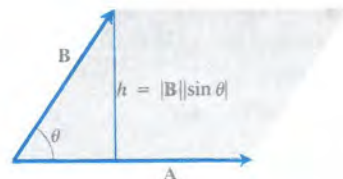
مثال ۱ مطلوب است $A \times B$ و $B \times A$ اگر

$$A = 2i + j + k, \quad B = -2i + 3j + k.$$

حل: برای یافتن $A \times B$ رابطه (۸) را به کار می بریم

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} k \\ &= -2i - 6j + 10k. \end{aligned}$$

این مقدار، مساحت متوازی الاضلاعی است که A و B آن را می سازند (شکل ۴۳.۱۳)، قاعده متوازی الاضلاع و $|B| \sin \theta$ ارتفاع آن است.



۴۳.۱۳ متوازی الاضلاعی که دوشلش A و B اند مساحتی برابر $|A \times B|$ دارد.

قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری

طبق قاعده، ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد زیرا چنانکه در بخش ۷.۱۳ خواهیم دید $(A \times B) \times C$ در صفحه A و B قرار دارد حال آنکه $A \times (B \times C)$ در صفحه B و C است، اما قانون توزیع پذیری عددی

$$(rA) \times (sB) = (rs)A \times B \quad (4)$$

در مورد ضرب برداری برقرار است. قوانین توزیع پذیری برداری

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (5)$$

و

$$(B + C) \times A = B \times A + C \times A \quad (6)$$

نیز برقرارند. حالت خاصی از رابطه (۴) این است

$$(-A) \times B = A \times (-B) = -(A \times B).$$

قانون توزیع پذیری عددی را می توان با به کار بردن رابطه (۱) در مورد حاصلضربهای موجود در طرفین رابطه (۴) و مقایسه نتایج اثبات کرد. اما اثبات قانون توزیع پذیری برداری، رابطه (۵)، آسان نیست. در اینجا فرض می کنیم این قانون درست است و ارائه برهان آن را به پیوست ۶ موکول می کنیم. رابطه (۶) از رابطه (۵) به دست می آید به این ترتیب که طرفین رابطه (۵) را در -1 ضرب و ترتیب عوامل ضرب را عوض می کنیم.

فرمول دترمینانی $A \times B$

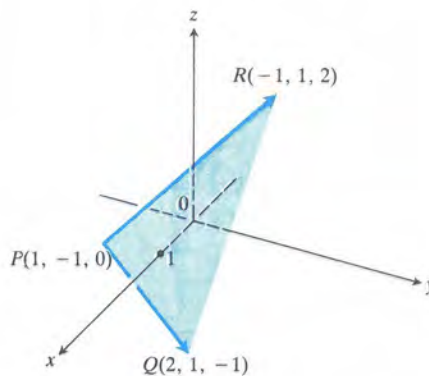
حال هدف ما این است که نشان دهیم مؤلفه های $A \times B$ را چگونه از مؤلفه های A و B به دست آوریم فرض می کنیم

$$A = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \quad B = b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

پس بنا به رابطه (۲)، $B \times A$ برابر است با

■ $B \times A = -A \times B = 2i + 6j - 10k.$

مثال ۲ مساحت مثلثی را بیابید که رؤوسش عبارت‌اند از $P(1, -1, 0)$ ، $Q(2, 1, -1)$ و $R(-1, 1, 2)$ (شکل ۴۴.۱۳).



۴۴.۱۳ مساحت مثلث PQR نصف $|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$ است.

حل: مساحت مثلث برابر است با $(1/2)|\vec{PQ} \times \vec{PR}|$.
بر حسب مؤلفه‌ها داریم

$$\vec{PQ} = (2-1)i + (1+1)j + (-1-0)k \\ = i + 2j - k$$

$$\vec{PR} = (-1-1)i + (1+1)j + (2-0)k \\ = -2i + 2j + 2k$$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} k \\ = 6i + 6k.$$

بنا بر این، مساحت مثلث برابر است با

■ $\frac{1}{2} |6i + 6k| = \frac{1}{2} \sqrt{72} = 3\sqrt{2}.$

مثال ۳ بردار واحدی را بیابید که بر $A = i + 2k$ و

$B = 2i - 2j$ عمود باشد.

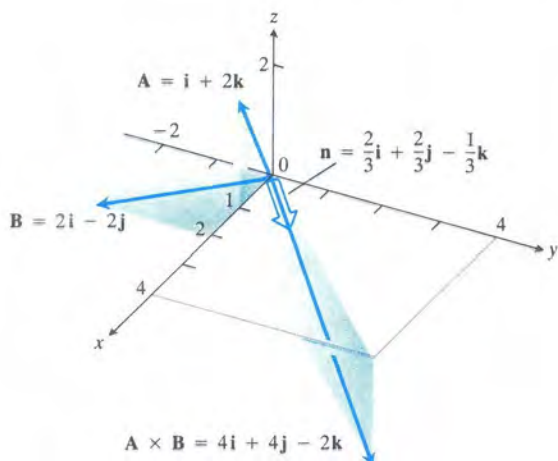
حل: جهت $A \times B$ یعنی n را می‌یابیم

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4i + 4j - 2k$$

$$|A \times B| = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$n = \frac{A \times B}{|A \times B|} = \frac{4i + 4j - 2k}{6} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k.$$

بردار واحد n هم بر A و هم بر B عمود است. شکل ۴۵.۱۳ را ببینید. بردار $-n$ نیز جواب است.



۴۵.۱۳ برای یافتن بردار واحد n که هم بر A و هم بر B عمود باشد، $A \times B$ را بر $|A \times B|$ که در این حالت ۶ است، تقسیم می‌کنیم.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۸ طول و جهت $A \times B$ و $B \times A$ را بیابید.

۱. $A = 2i - 2j - k$, $B = i + j + k$

۲. $A = 2i + 3j$, $B = -i + j$

۳. $A = 2i - 2j + 4k$, $B = -i + j - 2k$

۴. $A = i + j - k$, $B = 0$

۵. $A = 2i$, $B = -3j$

۶. $A = i \times j$, $B = j \times k$

استفاده از ضرب عددی و ضرب برداری این بردارها توصیف کنید.

(الف) تصویر برداری A بر B

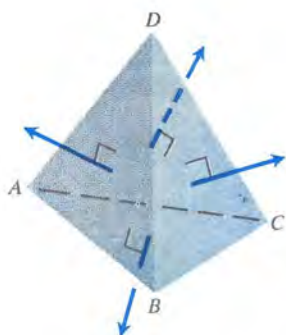
(ب) برداری عمود بر A و B

(پ) برداری که طولش برابر طول A و جهتش همان جهت B باشد

(ت) برداری عمود بر $A \times B$ و C

(ث) برداری واقع در صفحه B و C و عمود بر A .

۲۵. فرض کنید به هریک از وجوه چهاروجهی $ABCD$ در شکل ۴۶.۱۳ بردار قائمی رویه بیرون نسبت داده‌ایم که طولش برابر مساحت وجه متناظر است. نشان دهید که مجموع این چهار بردار قائم برابر با 0 است.



۴۶.۱۳ چهاروجهی مسأله ۲۵.

۲۶. فرض می‌کنیم A برداری ناصفر باشد. نشان دهید که (الف) از $B = C$ همواره نمی‌توان نتیجه گرفت $A \times B = A \times C$ (مسأله ۲۸ بخش ۴.۱۳ را ببینید). (ب) از $A \cdot B = A \cdot C$ و $A \times B = A \times C$ نتیجه می‌شود $B = C$.

مساحت نواحی مسطح

برای یافتن مساحت یک متوازی‌الاضلاع در یک صفحه، صفحه xy در فضا را صفحه مفروض بگیرد. سپس برای یک جفت ضلع مجاور، بردارها را بنویسید (مؤلفه‌های k ی آنها صفر خواهند بود) و مقدار حاصلضربهای برداری آنها را محاسبه کنید.

مطلوب است مساحت متوازی‌الاضلاعهایی که رئوسشان در مسائل ۲۷-۳۰ داده شده است.

۲۷. $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)$

۲۸. $A(0, 0), B(7, 3), C(9, 8), D(2, 5)$

۲۹. $A(-1, 2), B(2, 0), C(7, 1), D(4, 3)$

۳۰. $A(-6, 0), B(1, -4), C(3, 1), D(-4, 5)$

۷. $A = -8i - 2j - 4k, B = 2i + 2j + k$

۸. $A = i - \frac{1}{2}j + k, B = -\frac{3}{2}i - j - 2k$

در مسائل ۹-۱۴، $A \times B$ و B, A را همراه با محورهای مختصات رسم کنید.

۹. $A = i, B = j$

۱۰. $A = i + k, B = j$

۱۱. $A = i - k, B = j + k$

۱۲. $A = 2i - j, B = i + 2j$

۱۳. $A = i + 3j + 2k, B = k$

۱۴. $A = i + 2j, B = 2j + k$

۱۵. برداری مانند N بیابید که قائم بر صفحه‌ای باشد که با نقاط $A(1, -1, 2), B(2, 0, -1), C(0, 2, 1)$ مشخص می‌شود.

۱۶. برداری بیابید که بر $A = i + j + k$ و $B = i + j$ عمود باشد.

۱۷. مطلوب است تعیین فاصله مبدأ تا صفحه ABC مذکور در مسأله ۱۵، از راه تصویر کردن $\vec{OA}$ بر بردار قائم N .

۱۸. مطلوب است مساحت مثلث ABC در مسأله ۱۵.

۱۹. مطلوب است مساحت مثلث ABC اگر

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = 2i - 2j + 2k.$$

۲۰. (الف) مطلوب است برداری که بر صفحه گذرنده از نقاط $A(0, 2, 1), B(2, 1, 2), C(1, 1, 3)$ قائم باشد.

(ب) مطلوب است مساحت مثلثی که سه نقطه مذکور در قسمت (الف)، رئوسش باشند.

۲۱. اگر $A = 2i - j - 2k$ و $B = i + 2j - 2k$ ، مطلوب است $A \times B$. سپس $(A \times B) \cdot A$ و $(A \times B) \cdot B$ را بیابید.

۲۲. آیا $(A \times B) \cdot A$ همواره برابر با صفر است؟ توضیح دهید. $(A \times B) \cdot B$ چگونه؟

۲۳. فرض می‌کنیم

$$A = 5i - j + k, B = j - 5k, C = -15i + 2j - 2k.$$

کدام جفت از این بردارها (الف) متعامدند، (ب) موازی‌اند؟

۲۴. بردارهای A, B, C مفروض‌اند. بردارهای زیر را با

مطلوب است مساحت مثلثهایی که رئوسشان در مسائل ۳۱-۳۴ داده شده است.

$$A(0, 0), B(-2, 3), C(3, 1) \quad ۳۱$$

$$A(-1, -1), B(3, 3), C(2, 1) \quad ۳۲$$

$$A(-5, 3), B(1, -2), C(6, -2) \quad ۳۳$$

$$A(-6, 0), B(10, -5), C(-2, 4) \quad ۳۴$$

۳۵. نشان دهید که مساحت يك مثلث واقع در صفحه xy که رأسی از آن در مبدأ و دو رأس دیگرش در (a_1, a_2) و (b_1, b_2) واقع اند برابر است با

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

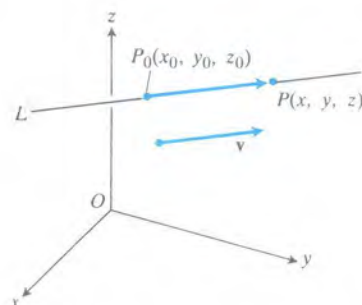
علامت به چه چیزی بستگی دارد؟

۶.۱۳ معادله‌های خط، پاره‌خط، و صفحه در فضا

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از ضرب عددی و برداری، معادله‌های خطها، پاره‌خطها، و صفحات در فضا را به دست آورد. معادلاتی که برای خطها و پاره‌خطها به کار می‌بریم پارامتری‌اند، و ممکن است مفید باشد که پیش از مطالعه این بحث، بحث معادلات پارامتری خمهای واقع در صفحه در بخش ۹.۸ را مرور کنیم.

معادله‌های خط و پاره‌خط

فرض می‌کنیم L خطی باشد در فضا که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد و موازی با بردار $\mathbf{v} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ باشد. پس L مجموعه نقاطی است مانند $P(x, y, z)$ به قسمی که بردار $\overrightarrow{P_0P}$ با $\mathbf{v}$ موازی است (شکل ۶.۱۳). یعنی P بر L واقع است اگر



۶.۱۳. نقطه P بر خط گذرنده از $\overrightarrow{P_0}$ و موازی $\mathbf{v}$ واقع است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{P_0P}$ مضربی عددی از $\mathbf{v}$ باشد.

و تنها اگر به ازای عددی مانند t داشته باشیم

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \quad (۱)$$

اگر معادله (۱) را بر حسب مؤلفه‌هایش بنویسیم

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \quad (۲)$$

و مؤلفه‌های متناظر از دو طرف را برابر بگیریم، سه معادله بر حسب پارامتر t به دست می‌آوریم

$$x - x_0 = tA, \quad y - y_0 = tB, \quad z - z_0 = tC. \quad (۳)$$

این معادلات پس از مرتب کردن به صورت معادلات پارامتری متعارف خط L درمی‌آیند

$$x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB, \quad z = z_0 + tC. \quad (۴)$$

وقتی پارامتر t از $-\infty$ تا ∞ افزایش می‌یابد، نقطه $P(x, y, z)$ دقیقاً یکبار خط را می‌پیماید. وقتی t بازه بسته $a \leq t \leq b$ را پیماید، P از نقطه‌ای که در آن $t = a$ تا نقطه‌ای که در آن $t = b$ بر روی يك پاره‌خط جا به جا می‌شود.

مثال ۱. معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(-2, 0, 4)$ و موازی با بردار $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ را بیابید.

حل: به ازای $P_0(x_0, y_0, z_0) = (-2, 0, 4)$ و

$$A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

معادلات (۴) به این صورت درمی‌آیند

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 4 - 2t.$$

شکل ۶.۱۳ را ببینید.

مثال ۲. مطلوب است معادلات پاره‌خطی خطی که از نقاط $P(-3, 2, -3)$ و $Q(1, -1, 2)$ می‌گذرد.

حل: بردار

$$\overrightarrow{PQ} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

موازی خط است و از معادلات (۴) به ازای

$$(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$$

داریم

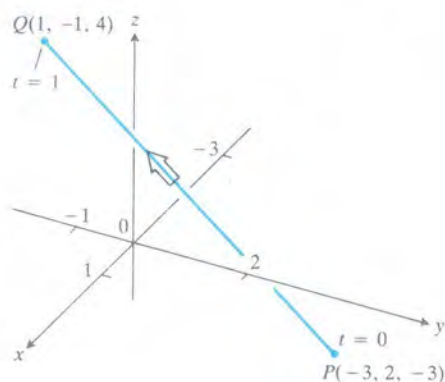
$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 5t. \quad (۵)$$

به ازای $t=0$ بر $P(-3, 2, -3)$ و به ازای $t=1$ بر $Q(1, -1, 4)$ منطبق است. شرط $0 \leq t \leq 1$ را به معادلات (۷) می‌افزاییم تا معادلات پاره‌خط را بیابیم

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t$$

$$z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

شکل ۴۹.۱۳ را ببینید.



۴۹.۱۳ در مثال ۳ معادلات پارامتری پاره‌خطی که P را به Q وصل می‌کند به دست آمده است. پیکان جهت افزایش t را نشان می‌دهد.

فاصله یک نقطه از یک خط

برای یافتن فاصله نقطه P از خط L گامهای زیر را برمی‌داریم:

گام ۱: نقطه Q را روی L چنان برمی‌گزینیم که نزدیکترین فاصله را تا P داشته باشد.

گام ۲: فاصله P تا Q را محاسبه می‌کنیم.

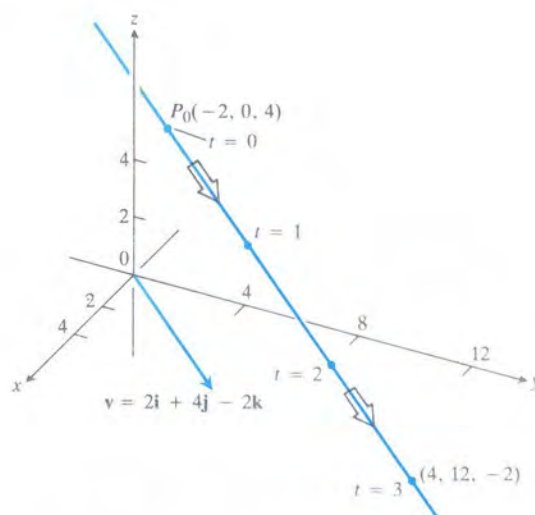
مثال بعدی چگونگی طی کردن این گامها را نشان می‌دهد.

مثال ۴: فاصله نقطه $P(1, 1, 5)$ را از خط زیر بیابید.

$$x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t.$$

حل:

گام ۱: نخست نقطه‌ای از خط برمی‌گزینیم که تا P نزدیکترین فاصله را داشته باشد. مختصات نقطه‌ای مانند $Q(1+t, 3-t, 2t)$ از آن می‌خواهیم مقداری از t را به دست آوریم که به ازای آن فاصله P تا Q مینیمم شود. برای اینکه دچار مشکلات کار با ریشه‌های دوم نشویم، این مقدار t را با مینیمم کردن مربع فاصله



۴۸.۱۳ چند نقطه و چند مقدار پارامتر روی خط

پیکان جهت افزایش t را نشان می‌دهند.

می‌توانستیم «نقطه پایه» را نقطه $Q(1, -1, 4)$ نیز بگیریم و بنویسیم

$$x = 1 + 4t, \quad y = -1 - 3t, \quad z = 4 + 7t \quad (۶)$$

که اینها نیز معادلات خط‌اند. معادلات پارامتری (۵) و (۶) به ازای یک مقدار t نقاط مختلفی را مشخص می‌کنند، اما با تغییر t از $-\infty$ تا ∞ هر دو دسته معادله، خط را به طور کامل مشخص می‌کنند.

برای یافتن معادلات پاره‌خطی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نخست معادلات خط گذرنده از این دو نقطه را می‌یابیم. سپس مقادیری از t را می‌یابیم که به ازای آنها خط از این نقاط می‌گذرد و t را در بازه بسته‌ای قرار می‌دهیم که به این مقادیر محدود است. معادلات خط به همراه این شرط اضافی، معادلات پاره‌خط را تشکیل می‌دهند.

مثال ۳: مطلوب است معادلات پارامتری پاره‌خطی که دو نقطه $P(-3, 2, -3)$ و $Q(1, -1, 4)$ را به هم وصل می‌کند.

حل: نخست معادلات خط گذرنده از P و Q را به دست می‌آوریم. بنا به مثال ۲ این معادلات عبارت‌اند از

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t. \quad (۷)$$

نقطه

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

ببینید. یعنی P روی M است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad (۸)$$

یا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

که از آن داریم

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

یا

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \quad \text{که در آن} \quad Ax + By + Cz = D \quad (۹)$$

توجه کنید که ضرایب x, y, z در معادله (۹)، مؤلفه‌های $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ و $\mathbf{k}$ برداری قائم بر صفحه‌اند.

مثال ۵ معادله صفحه‌ای را بیابید که از $P_0(-3, 0, 7)$ بگذرد و بر $\mathbf{N} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ عمود باشد.

حل: معادله (۹) را به کار می‌بریم و چنین به دست می‌آوریم

$$D = 5(-3) + 2(0) - 1(7) = -15 - 7 = -22$$

و

$$5x + 2y - z = -22.$$

مثال ۶ معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقاط $A(0, 0, 1)$ ، $B(2, 0, 0)$ و $C(0, 3, 0)$ بگذرد.

حل: یک بردار قائم بر صفحه می‌یابیم و از آن و از یکی از نقاط استفاده می‌کنیم و معادله صفحه را به دست می‌آوریم. حاصلضرب برداری

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

بر صفحه قائم است. مؤلفه‌های این بردار و مختصات نقطه $(0, 0, 1)$ را در معادله (۹) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$D = 3(0) + 2(0) + 6(1) = 6$$

و

$$3x + 2y + 6z = 6$$

که معادله صفحه است.

به دست می‌آوریم. فرمول مربع فاصله P تا Q چنین است

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+t-1)^2 + (3-t-1)^2 + (2t-5)^2 \\ &= (t)^2 + (2-t)^2 + (2t-5)^2 \\ &= t^2 + 4 - 4t + t^2 + 4t^2 - 20t + 25 \\ &= 6t^2 - 24t + 29. \end{aligned}$$

مشتق

$$\frac{df}{dt} = 12t - 24$$

به ازای $t = 2$ برابر با صفر است. به ازای این مقدار t مقدار f مینیمم می‌شود زیرا $d^2f/dt^2 = 12$ مثبت است. پس نزدیکترین نقطه به P عبارت است از

$$Q(1+t, 3-t, 2t)_{t=2} = Q(3, 1, 4).$$

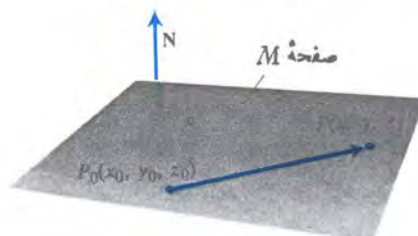
گام ۲: فاصله $P(1, 1, 5)$ تا $Q(3, 1, 4)$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2 + (5-4)^2} \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

فاصله P تا خط برابر با $\sqrt{5}$ است.

معادله صفحه

فرض می‌کنیم M صفحه‌ای در فضا است که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بر بردار ناصفر $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ عمود (قائم) است. پس M از مجموعه نقاطی مانند $P(x, y, z)$ تشکیل می‌شود که به ازای آنها بردار $\overrightarrow{P_0P}$ بر $\mathbf{N}$ عمود است. شکل ۵۰.۱۳ را

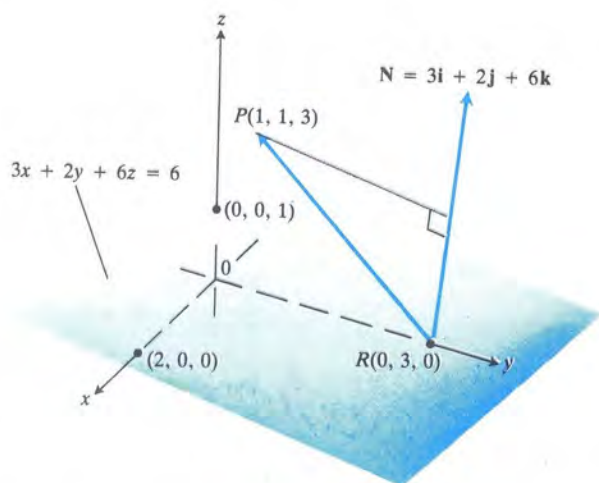


۵۰.۱۳ معادله متعارف صفحه در فضا بر حسب

برداری قائم بر صفحه تعریف می‌شود. نقطه

P در صفحه گذرنده از P_0 و عمود بر $\mathbf{N}$ است

اگر و تنها اگر $\mathbf{N} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.



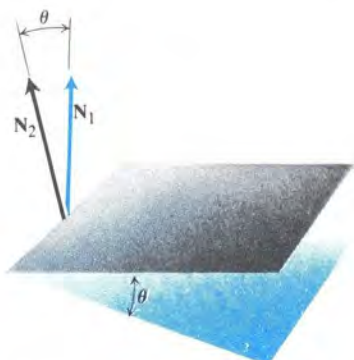
۵۱۰۱۳ فاصله P تا صفحه برابر است با طول تصویر برداری $\overrightarrow{RP}$ بر بردار N که قائم بر صفحه است.

طول تصویر برداری $\overrightarrow{RP}$ بر N (بنابراین رابطه ۱۲ در بخش ۴۰۱۳) برابر است با قدر مطلق

$$\overrightarrow{RP} \cdot \frac{N}{|N|} = (i - 2j + 3k) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{39}}i + \frac{2}{\sqrt{39}}j + \frac{6}{\sqrt{39}}k \right) \\ = \frac{3}{\sqrt{39}} - \frac{4}{\sqrt{39}} + \frac{18}{\sqrt{39}} = \frac{17}{\sqrt{39}}.$$

بنابراین، فاصله P از صفحه برابر با $17/\sqrt{39}$ است.

زاویه بین دو صفحه، فصل مشترک دو صفحه
 بنا به تعریف، زاویه بین دو صفحه متقاطع، زاویه حاده‌ای است که دو بردار قائم بر آن‌ها با هم می‌سازند (شکل ۵۲۰۱۳).



۵۲۰۱۳ زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردارهای قائم بر آن دو صفحه است.

مثال ۷ نقطه تقاطع خط

$$x = \frac{1}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

و صفحه $3x + 2y + 6z = 6$ را بیابید.

حل: نقطه

$$\left(\frac{1}{3} + 2t, -2t, 1 + t \right)$$

در صفحه واقع است هرگاه مختصاتش در معادله صفحه صدق کند، یعنی داشته باشیم

$$3\left(\frac{1}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1 + t) = 6$$

$$1 + 6t - 4t + 6 + 6t = 6$$

$$8t = -1$$

$$t = -1/8.$$

بنابراین محل تقاطع عبارت است از

$$\square \quad (x, y, z)_{t=-1/8} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{8} \right) = \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{8} \right).$$

مثال ۸ فاصله نقطه $P(1, 1, 3)$ از صفحه $3x + 2y + 6z = 6$ را بیابید.

حل: روشی که اختیار می‌کنیم شبیه روشی است که برای تعیین فاصله نقطه‌ای چون P از خطی چون L اختیار کردیم. در آن مورد نقطه‌ای چون R بر خط می‌یافتیم و فاصله P تا L را تعیین می‌کردیم به این ترتیب که طول تصویر برداری $\overrightarrow{PR}$ را بر برداری چون N قائم بر L ، محاسبه می‌کردیم. در اینجا، نقطه‌ای چون R در صفحه (مهم نیست کدام نقطه) می‌یابیم و طول تصویر برداری $\overrightarrow{RP}$ را بر بردار N قائم بر صفحه محاسبه می‌کنیم. شکل ۵۱۰۱۳ را ببینید.

ملاحظه می‌کنیم که نقطه $R(0, 3, 0)$ در صفحه است (برای یافتن آن، $x = z = 0$ را در معادله صفحه قرار می‌دهیم و y را به دست می‌آوریم). همچنین بنا به معادله صفحه می‌دانیم که $N = 3i + 2j + 6k$ قائم بر صفحه است. طول N برابر است با $|N| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$. بردار $\overrightarrow{RP}$ از مختصات P و R چنین به دست می‌آید

$$\overrightarrow{RP} = (1 - 0)i + (1 - 3)j + (3 - 0)k = i - 2j + 3k.$$

مثال ۹ زاویهٔ بین دو صفحه $3x - 6y - 2z = 15$ و $2x + y - 2z = 5$ را تعیین کنید.

حل: بردارهای

$$N_1 = 3i - 6j - 2k, \quad N_2 = 2i + j - 2k$$

قائم بر دو صفحه‌اند. بنابراین زاویهٔ بین آنها از حاصلضرب عددی دو بردار قائم چنین به دست می‌آید

$$\cos \theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1||N_2|} = \frac{2}{21}, \quad \theta = \cos^{-1} \frac{2}{21} \approx 79^\circ.$$

مثال ۱۰ برداری موازی فصل مشترک دو صفحه

$$2x + y - 2z = 5 \quad \text{و} \quad 3x - 6y - 2z = 15$$

بیابید.

حل: هر بردار که موازی با فصل مشترک دو صفحه باشد، با هر دو صفحه موازی است و لذا بر بردارهای قائم بر آن دو صفحه عمود است. متقابلاً، هر بردار عمود بر بردارهای قائم بر دو صفحه، موازی هر دو صفحه و لذا موازی فصل مشترک دو صفحه است. بردار

$$v = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12i + 2j + 15k$$

و هر مضرب عددی ناصفر آن حائز این شرایط است.

مثال ۱۱ معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه

$$2x + y - 2z = 5 \quad \text{و} \quad 3x - 6y - 2z = 15$$

را بیابید.

حل: برداری موازی با فصل مشترک و نقطه‌ای واقع بر فصل مشترک می‌یابیم و به کمک معادله (۴) معادلهٔ فصل مشترک را به دست می‌آوریم.

بنابر مثال ۱۰، بردار $v = 12i + 2j + 15k$ موازی فصل مشترک است. برای یافتن نقطه‌ای روی فصل مشترک باید نقطه‌ای را بیابیم که در هر دو صفحه باشد. بدین منظور $z = 0$ را در معادلات صفحه قرار می‌دهیم و دستگاه حاصل را نسبت به x و y حل می‌کنیم و نقطه $(3, -1, 0)$ را به دست می‌آوریم. بنابراین معادلهٔ پارامتری فصل مشترک چنین است

$$x = 3 + 12t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 15t.$$

معادله‌های خط و صفحه در فضا

خط گذرنده از $P(x_0, y_0, z_0)$ و موازی با $Ai + Bj + Ck$:

$$x = x_0 + tA, \quad y = y_0 + tB, \quad z = z_0 + tC$$

صفحهٔ گذرنده از $P(x_0, y_0, z_0)$ و عمود بر $Ai + Bj + Ck$:

$$Ax + By + Cz = D, \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0.$$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۲، معادلات پارامتری خطها را بیابید.

۱. خط گذرنده از $P(3, -4, -1)$ و موازی با بردار $i + j + k$.

۲. خط گذرنده از $P(1, 2, -1)$ و $Q(-1, 0, 1)$.

۳. خط گذرنده از $P(-2, 0, 3)$ و $Q(3, 5, -2)$.

۴. خط گذرنده از $P(1, 2, 0)$ و $Q(1, 1, -1)$.

۵. خط گذرنده از مبدأ و موازی با بردار $2j + k$.

۶. خط گذرنده از نقطهٔ $(3, -2, 1)$ و موازی با خط $z = 3t, y = 2 - t, x = 1 + 2t$.

۷. خط گذرنده از $(1, 1, 1)$ و موازی با محور z .

۸. خط گذرنده از $(2, 4, 5)$ و عمود بر صفحه

$$3x + 7y - 5z = 21$$

۹. خط گذرنده از $(0, -7, 0)$ و عمود بر صفحه

$$x + 2y + 2z = 13$$

۱۰. خط گذرنده از $(2, 3, 0)$ و عمود بر بردارهای

$$B = 2i + 2j + 5k \quad \text{و} \quad A = i + 2j + 3k$$

۱۱. محور x .

۱۲. محور z .

در مسائل ۱۳-۲۰، معادلات پارامتری پاره‌خطهایی را به دست آورید که نقاط مفروض را به هم وصل می‌کنند. هر خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و مشخص کنید که با افزایش t در معادلات، حرکت چیست.

۱۳. $(0, 0, 0), (1, 1, 1)$.

۱۴. $(0, 0, 0), (1, 0, 0)$.

۱۵. $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$.

$$x = 10 + 4t, y = -3, z = 4t; P(-1, 2, 3) \quad ۳۶$$

در مسائل ۳۷-۴۲، فاصله نقطه از صفحه مفروض را بیابید.

$$(2, -3, 4), x + 2y + 2z = 13 \quad ۳۷$$

$$(0, 0, 0), 3x + 2y + 6z = 6 \quad ۳۸$$

$$(0, 1, 1), 4y + 3z = -12 \quad ۳۹$$

$$(2, 2, 3), 2x + y + 2z = 4 \quad ۴۰$$

$$(0, -1, 0), 2x + y + 2z = 4 \quad ۴۱$$

$$(1, 0, -1), -4x + y + z = 4 \quad ۴۲$$

در مسائل ۴۳-۴۶، نقطه تلاقی خط با صفحه مفروض را بیابید.

$$x = 1 - t, y = 3t, z = 1 + t; 2x - y + 3z = 6 \quad ۴۳$$

$$x = 2, y = 2 + 2t, z = -2 - 2t; \quad ۴۴$$

$$6x + 3y - 4z = -12$$

$$x = 1 + 2t, y = 1 + 5t, z = 3t; x + y + z = 2 \quad ۴۵$$

$$x = -1 + 3t, y = -2, z = 5t; 2x - 3z = 7 \quad ۴۶$$

در مسائل ۴۷-۵۰، زاویه بین دو صفحه مفروض را بیابید.

$$2x + 2y + 2z = 3, 2x - 2y - z = 5 \quad ۴۷$$

$$x + y = 1, 2x + y - 2z = 2 \quad ۴۸$$

$$5x + y - z = 10, x - 2y + 3z = -1 \quad ۴۹$$

$$x + y - 3z = 1, -2x - 2y + 6z = 7 \quad ۵۰$$

در هر یک از مسائل ۵۱-۵۲، معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه مفروض را بیابید.

$$x + y + z = 1, x + y = 2 \quad ۵۱$$

$$3x - 6y - 2z = 3, 2x + y - 2z = 2 \quad ۵۲$$

$$x - 2y + 4z = 2, x + y - 2z = 5 \quad ۵۳$$

$$5x - 2y = 11, 4y - 5z = -17 \quad ۵۴$$

۵۵. نقاط تقاطع خط $x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$ با سه صفحه مختصات را تعیین کنید.

۵۶. الف) معادله صفحه‌ای را بیابید که از $P_0(4, 2, 1)$ بگذرد و بر $N = 6i - 2j + 3k$ عمود باشد.

ب) فاصله مبدأ از صفحه مذکور در قسمت الف) را بیابید.

$$(1, 1, 0), (1, 1, 1) \quad ۱۶$$

$$(0, -1, 1), (0, 1, 1) \quad ۱۷$$

$$(3, 0, 0), (0, 2, 0) \quad ۱۸$$

$$(2, 2, 0), (1, 2, -2) \quad ۱۹$$

$$(1, -1, -2), (0, 2, 1) \quad ۲۰$$

در مسائل ۲۱-۳۰، معادلات صفحات را تعیین کنید.

۲۱. صفحه گذرنده از $P_0(0, 2, -1)$ و عمود بر

$$N = 2i - 2j - k$$

۲۲. صفحه گذرنده از $(1, -1, 3)$ و موازی با صفحه

$$3x + y + z = 7$$

۲۳. صفحه گذرنده از $(1, 1, -1)$ ، $(2, 0, 2)$ ، و $(0, -2, 1)$

۲۴. صفحه گذرنده از $(2, 4, 5)$ ، $(1, 5, 7)$ ، و $(-1, 6, 8)$

۲۵. صفحه گذرنده از $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$

۲۶. صفحه گذرنده از $P_0(2, 2, 5)$ و عمود بر خط

$$x = 5 + t, y = 1 + 3t, z = 4t$$

۲۷. صفحه گذرنده از مبدأ و دربردارنده خط

$$x = 1 + 2t, y = -1 + 3t, z = 4t$$

۲۸. صفحه گذرنده از $A(1, -2, 1)$ و عمود بر برداری که از مبدأ شروع و به A ختم می‌شود.

۲۹. صفحه گذرنده از $P_0(2, 1, -1)$ و عمود بر فصل مشترک دو صفحه $x + 2y + z = 2$ ، $2x + y - z = 3$

۳۰. صفحه گذرنده از نقاط $P_0(1, 2, 3)$ و $P_1(3, 2, 1)$ و عمود بر صفحه $4x - y + 2z = 7$

در مسائل ۳۱-۳۶، فاصله نقطه از خط مفروض را بیابید.

$$x = 4t, y = -2t, z = 2t; P(0, 0, 12) \quad ۳۱$$

$$x = 5 + 3t, y = 5 + 4t, z = -3 - 5t; P(0, 0, 0) \quad ۳۲$$

$$x = 2 + 2t, y = 1 + 6t, z = 3; P(2, 1, 3) \quad ۳۳$$

$$x = 2t, y = 1 + 2t, z = 2t; P(2, 1, -1) \quad ۳۴$$

$$x = 4, y = 4 + 2t, z = 4t; P(2, -1, -10) \quad ۳۵$$

C و A به عنوان قاعده‌های متوازی‌السطوح به اضلاع A ، B ، و C ، درمی‌یابیم که

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B. \quad (1)$$

چون ضرب عددی خاصیت تعویض پذیری دارد، از رابطه (۱) داریم

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C). \quad (2)$$

به عبارت دیگر در ضرب عددی سه گانه، جای علامتهای $\times$ و $\cdot$ را می‌توان عوض کرد بدون اینکه مقدار حاصلضرب تغییر کند. حاصلضرب عددی سه گانه را می‌توان به ترتیب زیر به صورت یک دترمینان حساب کرد

$$A \cdot (B \times C)$$

$$= A \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k \right]$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

مقدار $A \cdot (B \times C)$ را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد

$$A \cdot (B \times C) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

مثال ۱ مطلوب است حجم متوازی‌السطوحی به اضلاع $A = i + 2j - k$ ، $B = -2i + 3k$ ، و $C = 7j - 4k$.

حل: حجم برابر است با قدرمطلق

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -21 - 16 + 14 = -23 \end{aligned}$$

یا ۲۳.

ب) فاصله نقطه $(8, 6, 6)$ از صفحه مذکور در قسمت (الف) را بیابید.

ت) معادلات خطی را بنویسید که از $P_0(2, 2, -1)$ بگذرد و بر صفحه مذکور در قسمت (الف) عمود باشد.

۷.۱۳ ضرب سه یا بیش از سه بردار

در مباحث الکتروسیستم، مغناطیس، و سیالات برای نوشتن فرمولها و انجام محاسبات از ضربهای $(A \times B) \cdot C$ و $(A \times B) \times C$ استفاده می‌شود. در این بخش تعبیر هندسی $(A \times B) \cdot C$ را شرح می‌دهیم (از این مطلب در بخش ۴.۱۹ برای به دست آوردن فرمول مساحت رویه استفاده می‌کنیم) و اتحادهایی را به دست می‌آوریم که معمولاً برای محاسبه $(A \times B) \cdot C$ و $(A \times B) \times C$ با استفاده از مؤلفه‌های A ، B ، و C به کار می‌روند.

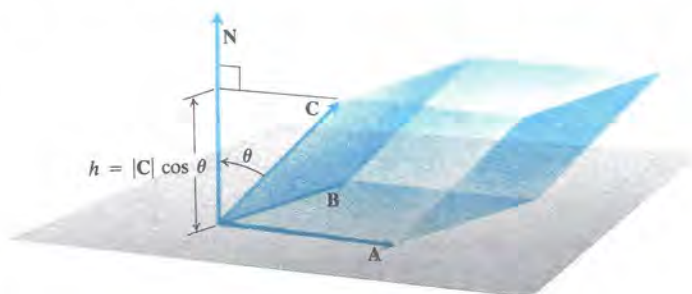
ضرب عددی سه گانه یا جعبه‌ای

حاصلضرب $(A \times B) \cdot C$ حاصلضرب عددی سه گانه A ، B ، و C (به ترتیب) نامیده می‌شود. چنانکه از فرمول

$$(A \times B) \cdot C = |A \times B| |C| \cos \theta$$

دیده می‌شود، این حاصلضرب برابر است با حجم جعبه‌ای با وجوه متوازی‌الاضلاع (متوازی‌السطوحی) که با اضلاع A ، B ، و C مشخص می‌شود (شکل ۵۳.۱۳). مقدار $|A \times B|$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع قاعده، و $|C| \cos \theta$ طول ارتفاع وارد از رأس C بر صفحه متشکل از A و B است. اگر θ بیش از 90° باشد، $\cos \theta$ منفی است و باید برای به دست آوردن حجم، قدرمطلق $(A \times B) \cdot C$ را در نظر بگیریم. حاصلضرب $(A \times B) \cdot C$ را به خاطر این تعبیر هندسی گاه حاصلضرب جعبه‌ای A ، B ، و C می‌نامند.

با در نظر گرفتن صفحات متشکل از B و C و نیز متشکل از



۵۳.۱۳ مقدار $(A \times B) \cdot C$ ، صرف نظر از علامت، حجم متوازی‌السطوحی را که در این شکل دیده می‌شود به دست می‌دهد.

همچنین به ازای عدد دلخواهی چون t داریم

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + t\mathbf{n}.$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{A}' + s\mathbf{n}) \times (\mathbf{B}' + t\mathbf{n}) \\ &= \mathbf{A}' \times \mathbf{B}' + t(\mathbf{A}' \times \mathbf{n}) + s(\mathbf{n} \times \mathbf{B}') \\ &\quad + st(\mathbf{n} \times \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (۲)$$

اما $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ ، درحالی که $\mathbf{A}' \times \mathbf{n}$ و $\mathbf{n} \times \mathbf{B}'$ هر دو بر $\mathbf{n}$ عمودند. بنا بر این اگر دو طرف (۲) را در $\mathbf{n}$ ضرب عددی کنیم، داریم

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{A}' \times \mathbf{B}') \cdot \mathbf{n}. \quad (۵)$$

بنا بر این حجمهای دو جعبه‌ای که این دو مقطع منشور با $\mathbf{n}$ می‌سازند باهم برابرند. وانگهی، این دو حجم با $(\mathbf{A}'' \times \mathbf{B}'') \cdot \mathbf{n}$ برابرند که علاوه بر اینکه حجم جعبه‌ای است که $P''Q''R''S''$ و $\mathbf{n}$ می‌سازند، مساحت $P''Q''R''S''$ نیز هست.

چون $P''Q''R''S''$ می‌تواند مقطع هر صفحه دلخواه عمود بر $\mathbf{n}$ با منشور باشد، به نتیجه مورد نیاز در بخش ۴.۱۹ دست می‌یابیم:

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}$ مساحت تصویر قائم متوازی الاضلاعی است که به وسیله $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می‌شود بر صفحه‌ای که بردار واحد قائم بر آن، $\mathbf{n}$ باشد. (۶)

در حکمی که با (۶) مشخص شده است، فرض بر این است که $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\mathbf{n}$ هر دو در یک طرف صفحه‌ای هستند که $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می‌شود. اگر چنین نباشد، $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}$ منفی است و قدر مطلق آن مساحت را به دست می‌دهد. بدون در نظر گرفتن علامت داریم

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{i} &= yz \text{ مساحت تصویر بر صفحه } xy \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{j} &= xz \text{ مساحت تصویر بر صفحه } xz \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{k} &= xy \text{ مساحت تصویر بر صفحه } yz \end{aligned} \quad (۷)$$

مثال ۲ متوازی الاضلاعی با نقاط $P(0, 0, 3)$ ، $Q(2, -1, 2)$ ، $R(3, 2, 1)$ و $S(1, 3, 2)$ مشخص می‌شود. مساحت تصویر آن را بر صفحه xy بیابید.

حل: داریم

$$(\vec{PQ} \times \vec{PS}) \cdot \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

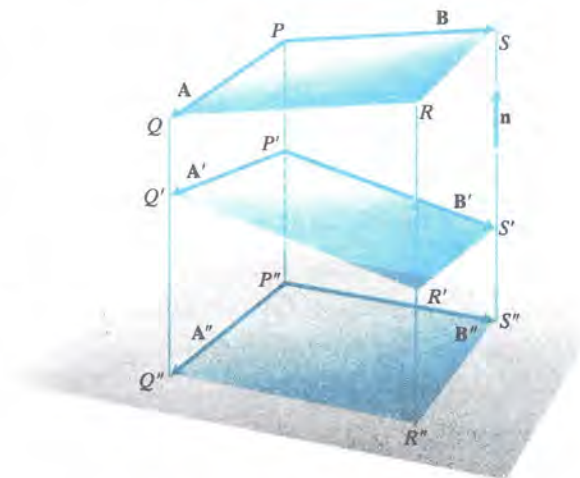
تصویر متوازی الاضلاع بر صفحه

هدف ما در اینجا استنتاج مطلبی است که در بخش ۴.۱۹ هنگام به دست آوردن فرمول محاسبه مساحت رویه‌های خمیده به آن نیاز داریم. آن مطلب این است که اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع و $\mathbf{n}$ بردار واحدی باشد، $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}$ برابر است با مساحت تصویر قائم متوازی الاضلاع بر هر صفحه عمود بر $\mathbf{n}$. برای دستیابی به این نتیجه راهی نسبتاً غیر مستقیم را برمی‌گزینیم: نشان می‌دهیم که هر گاه متوازی الاضلاع‌های $PQRS$ و $P'Q'R'S'$ دو مقطع دلخواه از منشوری باشند که یالهای موازی بردار واحدی مثل $\mathbf{n}$ است (شکل ۵۴.۱۳)، آنگاه حجم جعبه‌ای که با $PQRS$ و $\mathbf{n}$ مشخص می‌شود برابر با حجم جعبه‌ای است که با $P'Q'R'S'$ و $\mathbf{n}$ مشخص می‌شود. در حالت خاص اگر مقطعی از منشور باشد که بریال آن عمود است، ارتفاع جعبه‌ای که این مقطع با $\mathbf{n}$ می‌سازد برابر طول $\mathbf{n}$ یعنی یک واحد است، و حجم جعبه برابر با مساحت این متوازی الاضلاع می‌شود. صحت این مطلب را با استفاده از نمادهای برداری درمی‌یابیم. فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \vec{PQ}, \quad \mathbf{A}' = \vec{P'Q'}, \quad \mathbf{A}'' = \vec{P''Q''} \\ \mathbf{B} &= \vec{PS}, \quad \mathbf{B}' = \vec{P'S'}, \quad \mathbf{B}'' = \vec{P''S''}. \end{aligned}$$

پس به ازای عدد دلخواهی چون s ، چون $\vec{PP'}$ و $\vec{QQ'}$ هر دو موازی با $\mathbf{n}$ اند داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \vec{PQ} = \vec{PP'} + \vec{P'Q'} + \vec{Q'Q} \\ &= \vec{P'Q'} + (\vec{PP'} - \vec{QQ'}) \\ &= \mathbf{A}' + s\mathbf{n} \end{aligned}$$



۵۴.۱۳ اگر $|\mathbf{n}| = 1$ ، آنگاه $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}$ عبارت است از مساحت تصویر متوازی الاضلاع مشخص شده با $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بر صفحه عمود بر $\mathbf{n}$.



۵۶.۱۳ بردارهای متعامد I و J در صفحه A و B

$$A \times B = a_1 b_2 K$$

پس

و

$$(A \times B) \times C = a_1 b_2 c_1 J - a_1 b_2 c_2 I. \quad (11)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۱) و (۹) داریم

$$m(a_1 I) + n(b_1 I + b_2 J) = a_1 b_2 c_1 J - a_1 b_2 c_2 I.$$

این رابطه معادل است با جفت معادله عددی زیر

$$ma_1 + nb_1 = -a_1 b_2 c_2$$

$$nb_2 = a_1 b_2 c_1.$$

اگر b_2 برابر با صفر باشد، A و B موازی می‌شوند که مغایر با فرض است. بنابراین $b_2 \neq 0$ و می‌توان معادله آخری را نسبت به n حل کرد. نتیجه می‌شود

$$n = a_1 c_1 = A \cdot C.$$

آنگاه با قراردادن مقدار n به دست می‌آوریم

$$ma_1 = -nb_1 - a_1 b_2 c_2$$

$$= -a_1 c_1 b_1 - a_1 b_2 c_2$$

و چون $a_1 \neq 0$ ، $|A| = a_1$ می‌توانیم دو طرف را بر a_1 تقسیم کنیم و به دست آوریم

$$m = -(b_1 c_1 + b_2 c_2) = -(B \cdot C).$$

وقتی این مقادیر m و n را در رابطه (۹) قرار دهیم، رابطه (۸) به دست می‌آید.

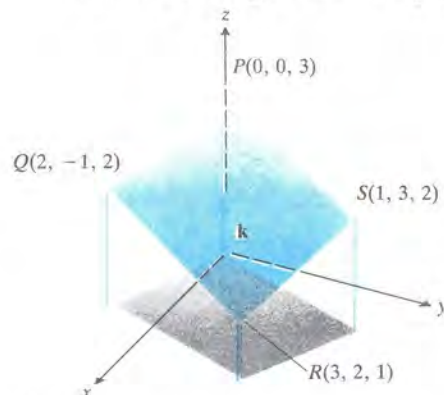
با تعویض جای حروف A ، B ، و C ، اتحاد

$$(B \times C) \times A = (B \cdot A)C - (C \cdot A)B \quad (12)$$

از رابطه (۸) نتیجه می‌شود. حال اگر $B \times C$ و O را با هم عوض کنیم باید علامت طرف راست رابطه را هم تغییر دهیم، در نتیجه اتحاد زیر که نظیر رابطه (۸) است به دست می‌آید

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C. \quad (13)$$

مساحت برابر با ۷ است. شکل ۵۵.۱۳ را ببینید.



۵۵.۱۳ در مثال ۲ مساحت تصویر قائم متوازی‌الاضلاع $PQRS$ بر صفحه xy محاسبه شده است.

ضرب برداری سه‌بردار

معمولاً حاصلضربهای $A \times (B \times C)$ و $(A \times B) \times C$ برابر نیستند. اما با فرمولهایی که هم‌اکنون به دست خواهیم آورد هر یک از آنها را می‌توان به سادگی به دست آورد.

در آغاز نشان می‌دهیم که حاصلضرب برداری $(A \times B) \times C$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A. \quad (8)$$

در این فرمول، $A \cdot C$ عددی است که در B ضرب می‌شود و $B \cdot C$ عددی است که در A ضرب می‌شود.

اگر یکی از بردارها بردار صفر باشد، رابطه (۸) برقرار است زیرا دو طرف صفر می‌شوند.

اگر هیچ یک از بردارها صفر نباشد اما به‌ازای یک عدد داشته باشیم $B = sA$ ، آنگاه دو طرف معادله (۸) باز هم صفر می‌شوند.

حال فرض می‌کنیم هیچ یک از بردارها صفر نیست و A و B نیز موازی نیستند. بردار طرف چپ رابطه (۸) بر $A \times B$ عمود است و لذا موازی است با صفحه‌ای که با A و B مشخص می‌شود. از این رو می‌توان اعدادی مانند m و n یافت به‌قسمی که

$$(A \times B) \times C = mA + nB. \quad (9)$$

برای محاسبه m و n بردارهای واحد متعامد I و J را در صفحه A و B در نظر می‌گیریم به‌طوری که داشته باشیم $I = A/|A|$ (شکل ۵۶.۱۳). همچنین بردار واحد سوم $K = I \times J$ را در نظر می‌گیریم و همه بردارها را بر حسب بردارهای واحد I ، J ، و K می‌نویسیم

$$\begin{aligned} A &= a_1 I \\ B &= b_1 I + b_2 J \\ C &= c_1 I + c_2 J + c_3 K. \end{aligned} \quad (10)$$

$$C = 3i - 2j + 12k$$

مطلوب است، محاسبه موارد زیر

۱. حجم جعبه‌ای که با A ، B ، و C مشخص می‌شود

۲. $A(B \cdot C)$ و $(A \cdot B)C$

۳. الف) $A \times B$ و سپس $(A \times B) \times C$

ب) $(A \times B) \times C$ از راهی دیگر.

۴. مطلوب است حجم متوازی‌السطوحی که یا لهایش با $A = 3j$ ، $B = -2i + j$ و $C = -i + j + k$ مشخص می‌شوند.

در مسائل ۵-۸، مطلوب است حجم چهاروجهی که رئوسش نقاط مفروض‌اند.

۵. $(0, 0, 0)$ ، $(2, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ ، $(0, 0, 2)$

۶. $(0, 0, 0)$ ، $(1, -1, 1)$ ، $(2, 1, -2)$ ، $(-1, 2, -1)$

۷. $(0, 0, 0)$ ، $(2, 1, 0)$ ، $(2, -1, 1)$ ، $(1, 0, 2)$

۸. $(1, 0, 3)$ ، $(2, 1, 1)$ ، $(0, 0, 2)$ ، $(3, 4, 1)$

۹. فرض می‌کنسیم $P(1, 2, -1)$ ، $Q(3, -1, 2)$ ، و $R(2, 6, 2)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $PQRS$ باشند. مطلوب است

الف) مختصات S

ب) مساحت $PQRS$

پ) مساحت تصویر $PQRS$ بر صفحه xy ، بر صفحه yz ، بر صفحه xz

۱۰. مطلوب است معادله خطی واقع در صفحه $P(0, 0, 0)$ ، $Q(2, 2, 0)$ و $R(0, 1, -2)$ که از نقطه P بگذرد و بر خط زیر عمود باشد

$$x = 3t, \quad y = 2t, \quad z = t/2.$$

۱۱. کدام يك از روابط زیر در حالت کلی برقرار نیست؟

الف) $A \times B = B \times A$

ب) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

پ) $A \times (-A) = 0$

ت) $(A \times B) \cdot B = 0$

ث) $A \cdot (B \times C) = (A \cdot B) \times C$

ج) $(A \times B) \cdot A = B \cdot (A \times B)$

چ) $(A \times A) \cdot A = 0$

مثال ۳ درستی رابطه (۸) را به‌ازای

$$A = i - j + 2k, \quad B = 2i + j + k, \quad C = i + 2j - k$$

تحقیق کنید.

حل: چون

$$B \cdot C = 3 \quad \text{و} \quad A \cdot C = -3$$

طرف راست رابطه (۸) چنین است

$$(A \cdot C)B - (B \cdot C)A = -3B - 3A = -3(2i + j + k) - 3(i - j + 2k) = -9i - 9k.$$

برای محاسبه طرف چپ رابطه (۸) چنین عمل می‌کنیم. ابتدا داریم

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 3j + 3k$$

پس

$$\blacksquare (A \times B) \times C = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9i - 9k.$$

مثال ۴ عبارت $(A \times B) \times (C \times D)$ را بر حسب ضرب عدد در بردار و ضرب برداری که شامل بیش از دو بردار نباشد، بنویسید.

حل: برای سهولت فرض می‌کنیم

$$C \times D = V.$$

حال به کمک رابطه (۸) چنین می‌نویسیم

$$(A \times B) \times V = (A \cdot V)B - (B \cdot V)A$$

یا

$$(A \times B) \times (C \times D) = (A \cdot C \times D)B - (B \cdot C \times D)A.$$

طرف راست این رابطه جواب است که به صورت حاصلضرب يك عدد در B منهای حاصلضرب يك عدد در A بیان شده است. می‌توانستیم با استفاده از رابطه (۱۳) به جای رابطه (۸)، جواب را به صورت حاصلضرب يك عدد در C منهای حاصلضرب يك عدد در D نیز بیان کنیم. مسأله ۱۶ را ببینید. $\blacksquare$

مسأله‌ها

در مسائل ۱-۳، به فرض

$$A = 2i - 8j + k, \quad B = 2i + j - 2k$$

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A \quad (\text{ح})$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) \quad (\text{خ})$$

چه ارتباطی دارد؟ اگر عدد برابر با صفر باشد چه می‌شود؟ منفی باشد چطور؟

۵. يك برهان هندسی عرضه کنید که در آن از بردارها استفاده شده باشد.

۶. معادلات حرکت پرتابه ایده آل کدام‌اند؟ چگونه از مکان اولیه پرتابه و بردار سرعت اولیه، برد پرتابه، مدت حرکت، و اوج به دست می‌آیند؟

۷. ضرب عددی دوبردار را تعریف کنید. کدام يك از قوانین جبری (توزیع پذیری، شرکت پذیری، توزیع پذیری) در مورد جمع و ضرب عددی بردارها برقرار است؟ کدام يك از این قوانین در مورد این دو عمل برقرار نیست؟ توضیح دهید. در چه صورت حاصل ضرب عددی دوبردار برابر با صفر است؟

۸. تصویر برداری بردار B بر بردار A چیست؟ بردار B را به صورت مجموع يك بردار موازی با A و يك بردار عمود بر A بنویسید.

۹. ضرب بردادی دوبردار را تعریف کنید. کدام يك از قوانین جبری (توزیع پذیری، شرکت پذیری، توزیع پذیری) در مورد ضرب برداری (در ترکیب با عمل جمع) برقرار است و کدام يك برقرار نیست؟ توضیح دهید. در چه صورت حاصل ضرب برداری دوبردار برابر با صفر است؟

۱۰. فرمول دترمینانی ضرب برداری دوبردار را به دست آورید. تغییر ترتیب ضرب دوبردار و سطرهاي متناظر دترمینان چه نتیجه‌ای به بار می‌آورد؟

۱۱. چگونه از ضرب عددی و برداری برای یافتن معادله خطوط، پاره خطها، و صفحات استفاده می‌شود؟ مثالهایی بیاورید.

۱۲. چگونه می‌توان از بردارها برای محاسبه فاصله يك نقطه تا يك خط استفاده کرد؟ برای فاصله يك نقطه تا يك صفحه چطور؟ مثالهایی بیاورید.

۱۳. تعبیر هندسی حاصل ضرب $(A \times B) \cdot C$ به صورت حجم چیست؟ به صورت مساحت چیست؟ در چه صورت حاصل ضرب مثبت، صفر، یا منفی است؟ این حاصل ضرب را چگونه می‌توان با استفاده از مؤلفه‌های A ، B ، و C محاسبه کرد؟

۱۴. فرمولهایی که $(A \times B) \times C$ و $A \times (B \times C)$ را بر حسب مضر بهایی عددی از A ، B ، و C بیان می‌کنند کدام‌اند؟

مسئله‌های گوناگون

۱. در شکل ۵۷.۱۳، D وسط ضلع AB است و E به فاصله

۱۲. فرض می‌کنیم

$$A \cdot A = 4, \quad B \cdot B = 2, \quad A \cdot B = 0$$

$$(A \times B) \times C = 0, \quad (A \times B) \cdot C = 8.$$

مطلوب است تعیین

$$A \cdot C \quad (\text{الف})$$

$$|C| \quad (\text{ب})$$

$$B \times C \quad (\text{پ})$$

(داهنمایی: بردارها را رسم کنید، و هندسی بیندیشید. تعاریف اصلی و مستقل از مختصات را به کار ببرید، از انجام محاسبات طولانی پرهیز کنید.)

۱۳. ثابت کنید که هر بردار A در اتحاد زیر صدق می‌کند

$$A = \frac{1}{4} [i \times (A \times i) + j \times (A \times j) + k \times (A \times k)].$$

۱۴. ضرب $R = (A \times B) \times (C \times D)$ را به صورت $aC + bD$ بیان کنید (a و b عددند).

۱۵. به کمک رابطه (۳) نشان دهید که

$$A \cdot (C \times B) = -A \cdot (B \times C) \quad (\text{الف})$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$(A + D) \cdot (B \times C) = A \cdot (B \times C) \quad (\text{پ})$$

$$+ D \cdot (B \times C)$$

تعبیر هندسی نتایج به دست آمده چیست؟

۱۶. نشان دهید که

$$(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C$$

$$- (A \times B \cdot C)D.$$

(داهنمایی: فرض کنید $V = A \times B$ ، و رابطه ۱۳ را به کار ببرید.)

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. در چه صورت دوبردار برابر (همسنگ)‌اند؟

۲. بردارها را چگونه با هم جمع و چگونه از هم تفریق می‌کنند؟

۳. طول و جهت بردار چگونه محاسبه می‌شود؟

۴. اگر برداری در يك عدد ضرب شود، نتیجه بسا بردار اصلی

$$\mathbf{R}(t) = (256t + 1720)\mathbf{i} + (185t - 494t^2)\mathbf{j}$$

می‌رسد (فواصل بر حسب مترند). در فاصله ۷۸۶۰ متری خمپاره انداز قلعه تپه‌ای واقع است که ۱۱۰۰ متر نسبت به محور x ارتفاع دارد. اگر در سر راه گلوله مانع دیگری وجود نداشته باشد آیا گلوله از بالای تپه عبور می‌کند؟ اگر جواب مثبت است با چند متر فاصله از قلعه؟

۹. به توپ گلفی واقع در پای یک تپه ضربه‌ای وارد می‌شود. توپ گلف با سرعت اولیه v و زاویه α نسبت به افق پرتاب می‌شود. زاویه تپه نسبت به افق ϕ است به طوری که

$$0 < \phi < \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

نشان دهید توپ در نقطه‌ای به تپه اصابت می‌کند که فاصله‌اش از پای تپه برابر است با

$$\frac{2v^2 \cos \alpha}{g \cos^2 \phi} \sin(\alpha - \phi)$$

با استفاده از این عبارت ثابت کنید که به ازای مقدار سرعت مفروض v ، وقتی برد بیشترین مقدار را دارد که $\alpha = (\phi/2) + (\pi/4)$.

۱۰. فرض کنید A ، B ، و C بردارهایی باشند از نقطه مشترک O تا نقاط A ، B ، و C .

الف) نشان دهید که اگر A ، B ، و C روی یک خط باشند سه ثابت x ، y ، z (که همگی صفر نیستند) وجود دارند که به قسمی که

$$x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \text{و} \quad x + y + z = 0$$

ب) متقابلاً نشان دهید که اگر سه ثابت x ، y ، z (که همگی صفر نیستند) وجود داشته باشند به قسمی که

$$x\mathbf{A} + y\mathbf{B} + z\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad x + y + z = 0$$

آنگاه A ، B ، و C روی یک خط اند.

۱۱. اگر

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

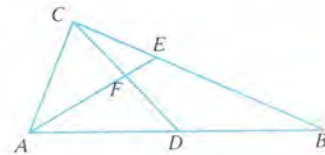
مطلوب است تصویر برداری $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$.

۱۲. نشان دهید که به ازای دو بردار دلخواه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ داریم

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

۱۳. فرض کنید بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی نیستند و $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$ که در آن $\mathbf{C}$ موازی $\mathbf{B}$ و $\mathbf{D}$ عمود بر $\mathbf{B}$ است. $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را بر حسب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بیان کنید.

یک سوم CB از C قرارداد. با استفاده از بردارها، ثابت کنید F وسط خط CD است.



۵۷.۱۳ مثلث مورد بحث در مسأله ۱.

۲. مبدأ بردارهای $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ، $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، و $5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ منطبق بر مبدأ دستگاه مختصات است. مقدار y چه باشد تا انتهای بردارها روی یک خط مستقیم مشترک باشد؟

۳. A و B بردارهایی از مبدأ تا دو نقطه A و B هستند. نقطه P با بردار $\vec{OP} = x\mathbf{A} + y\mathbf{B}$ مشخص می‌شود به طوری که x و y اعداد مثبتی هستند که مجموعشان برابر با ۱ است. ثابت کنید P بر پاره خط AB قرار دارد.

۴. فرض کنید ABC یک مثلث، M وسط AB ، و P نقطه‌ای است واقع بر CM که فاصله‌اش تا C دو سوم CM است. نیز فرض کنید O نقطه‌ای است دلخواه در فضا

الف) نشان دهید

$$\vec{OP} = \left(\frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \right).$$

ب) نشان دهید که از نتیجه حاصل از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که میانه‌های یک مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۵. فرض کنید A ، B ، و C رئوس یک مثلث a ، b ، و c وسطهای اضلاع مقابل آنها باشد. نشان دهید

$$\vec{Aa} + \vec{Bb} + \vec{Cc} = \mathbf{0}.$$

تعبیر هندسی نتیجه چیست؟

۶. از مرکز یک چندضلعی منتظم بردارهایی به رئوسش رسم می‌شود. نشان دهید که مجموع این بردارها صفر است.

۷. به کمک بردارها ثابت کنید که نابرابری زیر به ازای هر چهار عدد دلخواه a ، b ، c ، و d صحیح است

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2.$$

(دانهایی: فرض کنید $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$.)

۸. خمپاره اندازی در نقطه $(0, 1720)$ در صفحه xy واقع است و گلوله‌ای مشقی پرتاب می‌کند که t ثانیه پس از پرتاب به مکان

۱۴. نشان دهید که اگر $a = |A|$ و $b = |B|$ ، بردار

$$C = aB + bA$$

زاویه بین A و B را نصف می‌کند.

۱۵. با همان نمادهای مسأله ۱۴ نشان دهید که $aB + bA$ و $bA - aB$ برهم عمودند.

۱۶. نشان دهید ضرب عددی معین مثبت است؛ یعنی به ازای هر بردار دلخواه A ، $A \cdot A \geq 0$ و $A \cdot A = 0$ اگر و تنها اگر A بردار صفر باشد.

۱۷. با استفاده از روشهای برداری نشان دهید که فاصله d بین نقطه (x_1, y_1) و خط $ax + by = c$ برابر است با

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

۱۸. نشان دهید که نقاط $(0, -1, 0)$ ، $(1/2, 0, 1/2)$ ، و $(1, 1, 1)$ روی یک خط‌اند.

۱۹. برداری را بیابید که از مبدأ تا نقطه تقاطع میان‌های مثلثی با رئوس زیر امتداد دارد

$$A(1, -1, 2), \quad B(2, 1, 3), \quad C(-1, 2, -1).$$

۲۰. با تشکیل ضرب برداری دو بردار مناسب، اتحاد مثلثاتی زیر را به دست آورید

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

۲۱. نشان دهید

$$i \times (j \times (i + j)) \neq (i \times j) \times (i + j).$$

۲۲. مطلوب است تعیین یک بردار قائم بر صفحه‌ای که با نقاط زیر مشخص می‌شود

$$A(1, 0, -1), \quad B(2, -1, 1), \quad C(-1, 1, 2).$$

۲۳. سه بردار

$$A = 2i - j + k, \quad B = i + 2j - k$$

$$C = i + j + k$$

همگی از مبدأ رسم می‌شوند. مطلوب است معادله صفحه‌ای که از نقاط انتهایی این سه بردار می‌گذرد.

۲۴. نشان دهید که فصل مشترك صفحات

$$5x - 2y - z = 0 \quad \text{و} \quad x + 2y - 2z = 5$$

با خط زیر موازی است

$$x = -3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + 2t.$$

۲۵. نقطه تقاطع خط گذرنده از مبدأ و قائم بر صفحه $2x - y - z = 4$ را با صفحه $x + y - 2z = 2$ بیابید.

۲۶. نقطه تقاطع خط گذرنده از $P(3, 2, 1)$ و قائم بر صفحه $2x - y + 2z = -2$ را با همین صفحه بیابید.

۲۷. برداری را بیابید که با صفحه $2x - y - z = 4$ موازی و بر بردار $i + j + k$ عمود باشد.

۲۸. مطلوب است برداری به طول ۲ و موازی با فصل مشترك صفحات زیر

$$x - y + 2z + 7 = 0 \quad \text{و} \quad x + 2y + z - 1 = 0$$

۲۹. زاویه خط فصل مشترك صفحات

$$x + y + 2z = 0 \quad \text{و} \quad 2x + y - z = 0$$

با قسمت منفی محور x چیست؟

۳۰. معادلات خطی واقع در صفحه $z = 3$ را بیابید که با زاویه 30° و با زاویه 60° بسازد.

۳۱. نقطه P محل تقاطع خط L با معادلات

$$x = 3 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t$$

را با صفحه

$$x + 3y - z + 4 = 0.$$

بیابید و معادلات خطی واقع در این صفحه را بیابید که از P بگذرد و بر L عمود باشد.

۳۲. کدام یک از معادلات زیر معادلات صفحه گذرنده از نقاط $P(1, 1, -1)$ ، $Q(3, 0, 2)$ ، $R(-2, 1, 0)$ است؟
(الف)

$$(2i - 3j + 3k) \cdot ((x + 2)i + (y - 1)j + zk) = 0$$

$$(ب) \quad x = 3 - t, \quad y = -11t, \quad z = 2 - 2t$$

$$(پ) \quad (x + 2) + 11(y - 1) = -3z$$

$$(ت) \quad (2i - 3j + 3k) \times ((x + 2)i + (y - 1)j + zk) = 0$$

$$(ث) \quad (2i - j + 3k) \times (-2i + k) \cdot ((x + 2)i + (y - 1)j + zk) = 0$$

از مرکزش بگذرند. (دانه‌ماچی: معادلات خط فصل مشترك صفحات $2x - y = 0$ و $3x - z = 0$ را بیابید و سپس از فرمول مسأله ۵۰ استفاده کنید).

۳۹. اگر

$$A = 2i - j + k, \quad B = i + 2j - k \\ C = i + j - 2k$$

مطلوب است بردار واحدی که بر A عمود و در صفحه B و C باشد.

۴۰. مطلوب است معادله صفحه‌ای که از $A(-2, 0, -3)$ و $B(1, -2, 1)$ بگذرد و موازی خطی باشد که از $D(16/5, -13/5, 0)$ و $C(-2, -13/5, 26/5)$ می‌گذرد.

۴۱. زاویه بین صفحات $x = 7$ و $x + y + \sqrt{2}z = -3$ را بیابید.

۴۲. رئوس متوازی‌الاضلاع شکل ۵۸.۱۳ عبارت‌اند از: $A(2, -1, 4)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 3)$ و D مطلوب است

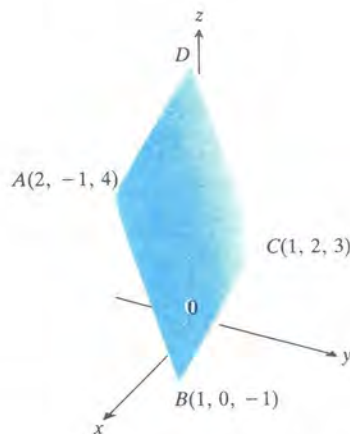
الف) مختصات D

ب) کسینوس زاویه داخلی B

پ) تصویر برداری $\vec{BA}$ بر $\vec{BC}$

ت) مساحت متوازی‌الاضلاع

ث) معادله صفحه‌ای که متوازی‌الاضلاع در آن واقع است.



۵۸.۱۳ متوازی‌الاضلاع مورد بحث در مسأله ۴۲.

۴۳. در یک مانور نظامی دو کشتی می‌کوشند مسیر و مقدار سرعت یک زیردریایی را مشخص کنند و این اطلاعات را در اختیار یک هواپیما قرار دهند تا مانع حرکت زیردریایی شود. چنانکه در شکل

۳۳. نشان دهید که به ازای هر عدد حقیقی دلخواه k ، صفحه

$$x - 2y + z + 3 + k(2x - y - z + 1) = 0$$

خط فصل مشترك صفحات $x - 2y + z + 3 = 0$ و $2x - y - z + 1 = 0$ را در بردارد.

۳۴. معادله $N \cdot \vec{P_0P} = 0$ صفحه‌ای را نشان می‌دهد که از P_0 می‌گذرد و بر N عمود است. نابرابری $N \cdot \vec{P_0P} > 0$ چه مجموعه‌ای را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.

۳۵. نشان دهید

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}$$

معادله صفحه‌ای است که از سه نقطه زیر که غیر واقع بر یک خط‌اند، می‌گذرد

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).$$

۳۶. فرض کنید $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ، $i = 1, 2, 3$ ، سه نقطه غیر واقع بر یک خط باشند. معادله زیر چه مجموعه‌ای را توصیف می‌کند؟

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

۳۷. دو خط

$$x = a_1s + b_1, \quad y = a_2s + b_2, \quad z = a_3s + b_3$$

$$x = c_1t + d_1, \quad y = c_2t + d_2, \quad z = c_3t + d_3$$

مفروض‌اند؛ s و t پارامترند. نشان دهید یک شرط لازم و کافی برای اینکه این دو خط متقاطع یا موازی باشند این است که

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

۳۸. معادله کره‌ای را بیابید که صفحات

$$x + y + z - 3 = 0, \quad x + y + z - 9 = 0$$

بر آن مماس باشند و صفحات

$$2x - y = 0, \quad 3x - z = 0$$

۴۹ الف) نشان دهید که فاصله دو صفحه موازی

$$Ax + By + Cz = D_1, \quad Ax + By + Cz = D_2$$

از فرمول زیر به دست می آید

$$\text{فاصله دو صفحه} = \frac{|D_1 - D_2|}{|Ai + Bj + Ck|} \quad (۱)$$

ب) با استفاده از رابطه (۱) فاصله دو صفحه $2x + 3y - z = 12$ و $2x + 3y - z = 6$ را بیابید.

پ) معادله صفحه ای را بیابید که با صفحه $2x - y + 2z = -4$ موازی باشد و نیز نقطه $(3, 2, -1)$ از هر دو صفحه به یک فاصله باشد.

ت) معادلات صفحاتی را بیابید که موازی صفحه $x - 2y + z = 3$ و به فاصله ۵ واحد از آن باشد.

۵۰ با استفاده از روشهای برداری نشان دهید که فاصله نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ از صفحه $Ax + By + Cz - D = 0$ برابر است با

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(این فرمول را با فرمول مسأله ۱۷ مقایسه کنید.)

۵۱ خط L_1 از نقطه $A(1, 0, -1)$ و $B(-1, 1, 0)$ و خط L_2 از دو نقطه $C(3, 1, -1)$ و $D(2, 5, -2)$ می گذرد. مطلوب است فاصله بین دو خط. (فاصله در امتداد خطی که عمود بر L_1 و L_2 است اندازه گیری می شود. نخست یک بردار N را که بر هر دو خط عمود باشد بیابید، سپس $\vec{AC}$ را بر N تصویر کنید.)

۵۲ مسأله ۵۱ را برای نقاط $A(2, 0, 2)$ ، $B(2, 4, 1)$ ، $C(1, 3, 2)$ و $D(2, 2, 2)$ دوباره حل کنید.

۵۳ اگر

$$A = i + j - k, \quad B = 2i + j + k$$

$$C = -i - 2j + 3k$$

مطلوب است

$$A \cdot (B \times C) \quad \text{الف)}$$

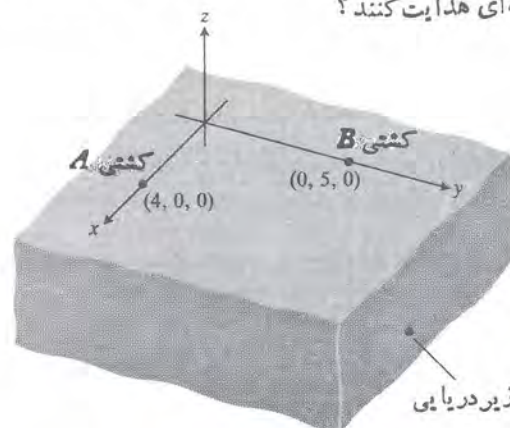
$$A \times (B \times C) \quad \text{ب)}$$

۵۴ ثابت کنید چهار نقطه A ، B ، C ، و D هم صفحه اند (بریک صفحه واقع اند) اگر و تنها اگر $(\vec{AB} \times \vec{BC}) \cdot \vec{AD} = 0$.

۵۵ درستی یا نادرستی فرمول زیر را ثابت کنید

$$A \times [A \times (A \times B)] \cdot C = -|A|^2 A \cdot B \times C.$$

۵۹۰۱۳ دیده می شود کشتی A در $(2, 0, 0)$ و کشتی B در $(0, 5, 0)$ است. همه مختصات به هزار فوت است. محل زیردریایی از نظر کشتی A در جهت بردار $2i + 3j - (1/3)k$ و از نظر کشتی B در جهت بردار $18i - 6j - k$ است. چهار دقیقه قبل، زیردریایی در $(2, -1, -1/3)$ بوده است. قرار است هواپیما تا ۲۰ دقیقه دیگر از راه برسد. با فرض اینکه زیردریایی روی خطی مستقیم و با سرعت ثابت در حرکت است، کشتیها باید هواپیما را به سوی چه نقطه ای هدایت کنند؟



۵۹۰۱۳ کشتیها و زیردریایی مورد بحث در مسأله ۴۳. مقیاس تصویر دقیق نیست.

۴۴ دوهلیکوپتر H_1 و H_2 با یکدیگر پرواز می کنند. در زمان $t = 0$ از هم جدا می شوند و هر یک روی مسیر مستقیمی با معادلات زیر به راه خود ادامه می دهد (t بر حسب ساعت است)

$$H_1: x = 6 + 40t, \quad y = -3 + 10t, \quad z = -3 + 2t$$

$$H_2: x = 6 + 110t, \quad y = -3 + 4t, \quad z = -3 + t$$

(همه مختصات بر حسب مایل اند). هلیکوپتر H_2 در $(246, 13, 1)$ دچار نقص فنی می شود و به لافاصله در $(246, 13, 0)$ به زمین می نشیند. دو ساعت بعد هلیکوپتر H_1 متوجه این قضیه می شود و با سرعت ۱۵۰ mph به سوی H_2 می رود. پس از چه مدتی H_1 به H_2 می رسد؟

۴۵ فاصله $P(2, 2, 0)$ را از خط $x = -t$ ، $y = t$ ، $z = -1 + t$ بیابید.

۴۶ فاصله $P(0, 4, 1)$ را از خط $x = 2 + t$ ، $y = 2 + t$ ، $z = t$ بیابید.

۴۷ مطلوب است فاصله $P(1, 4, 0)$ از صفحه ای که از نقاط $A(0, 0, 0)$ ، $B(2, 0, -1)$ و $C(2, -1, 0)$ می گذرد.

۴۸ فاصله نقطه $P(2, 2, 3)$ را از صفحه $2x + 3y + 5z = 0$ بیابید.

داریم

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = u_1, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = u_2, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = u_3. \quad (۳)$$

بنا بر این

$$u_1 = \cos \alpha, \quad u_2 = \cos \beta, \quad u_3 = \cos \gamma. \quad (۴)$$

یعنی مؤلفه‌های هر بردار واحد دلخواهی مانند $\mathbf{u}$ برابرند با کسینوسهای زوایایی که بردار با محورهای مختصات می‌سازد

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma. \quad (۵)$$

اگر $\mathbf{A}$ یک بردار ناصفر دلخواه باشد، $\mathbf{A}$ و جهتش $\mathbf{u} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ با محورهای مختصات زوایای برابر می‌سازند. برای یافتن کسینوس این زوایا کافی است مؤلفه‌های بردار واحد زیر را بیابیم

$$\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma.$$

این کسینوسها را کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ می‌نامند. به عبارت دیگر کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ عبارت اند از مؤلفه‌های جهت $\mathbf{A}$.
مطلوب است کسینوسهای هادی بردارهای مسائل ۵۹-۶۸.

$$۵۹. \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$۶۰. 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$$

$$۶۱. \mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$$

$$۶۲. 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$۶۳. \mathbf{i}$$

$$۶۴. \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$۶۵. \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$۶۶. 8\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$۶۷. \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

$$۶۸. \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

۶۹. فرض کنید α, β, γ و زوایایی باشند که یک خط گذرنده از مبدأ با قسمت‌های مثبت محورهای x, y, z می‌سازد. نشان دهید

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

۵۶. اگر چهار بردار $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ در یک صفحه واقع باشند، نشان دهید

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{0}.$$

۵۷. نشان دهید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ داریم

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0}. \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{i})]\mathbf{i} + [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{j})]\mathbf{j} + [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{k})]\mathbf{k}. \quad (\text{ب})$$

۵۸. نشان دهید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ داریم

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} & \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \end{vmatrix}.$$

بردارهای واحد و کسینوسهای هادی

فرض کنید $\mathbf{u}$ بردار واحدی باشد که اگر با پیکانی نشان داده شود که ابتدایش مبدأ دستگاه مختصات باشد، با محورهای مختصات زوایای α, β, γ بسازد. شکل ۶۰.۱۳ حالتی را نشان می‌دهد که سه زاویه حاده اند. داریم

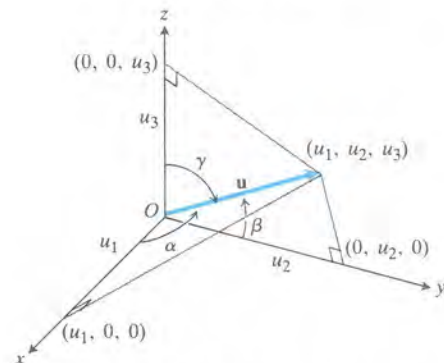
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{u}||\mathbf{i}| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{u}||\mathbf{j}| \cos \beta = \cos \beta \quad (۲)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{u}||\mathbf{k}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$

اگر $\mathbf{u}$ را به صورت زیر بنویسیم

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$$



$$۶۰.۱۳. \mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \quad \text{اگر}$$

بردارهای واحد باشد، آنگاه $u_1 = \cos \alpha$ ، $u_2 = \cos \beta$ و $u_3 = \cos \gamma$. این اطلاعات را از سه مثلث قائم الزاویه نشان داده شده در این شکل به دست می‌آوریم.



تابعهای برداری و حرکت

چشم انداز

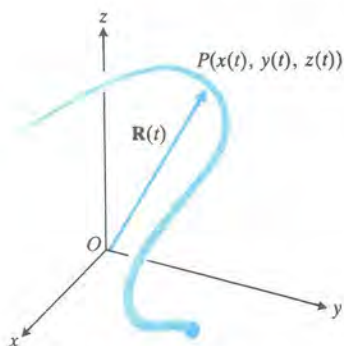
در این فصل با ترکیب حساب دیفرانسیل و انتگرال و بردارها به مطالعه حرکت اجسام در فضا می پردازیم. به این منظور مؤلفه های عددی بردار شعاعی $\mathbf{R}(t)$ از مبدأ تا جسم را توابع مشتق پذیری از زمان در نظر می گیریم (شکل ۱۰۱۴). به این ترتیب، بردارهای $\mathbf{v}(t)$ و $\mathbf{a}(t)$ که سرعت و شتاب جسم را توصیف می کنند با مشتق گیری از مؤلفه های $\mathbf{R}$ به دست می آیند

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

بردارهای $\mathbf{R}$ ، $\mathbf{v}$ ، و $\mathbf{a}$ توابعی برداری از t اند، و قواعد مشتق گیری از آنها چنانکه در فرمولهای فوق دیده می شود تعمیم طبیعی قواعد مشتق گیری از توابع با مقدار حقیقی (که گاه توابع عددی نسامیده می شوند) است. چنانکه در طول فصل خواهیم دید، قواعد مشتق گیری از حاصلضرب عددی و حاصلضرب برداری بردارها به همان صورت قواعد مشتق گیری از حاصلضرب توابع عددی است. پس از آشنایی با مشتق توابع برداری، توجه خود را به بردارهای مماس و قائم مربوط به حرکت در فضا معطوف می کنیم. یکی از پارامترهای مهم این مبحث طول قوس است، این پارامتر را همراه با مفاهیم خمیدگی و تاب که شاخصهایی از چرخش و پیچش



۱۰۱۴ برای توصیف تغییر مکان جسمی که در فضا حرکت می کند، یک بردار شعاعی متغیر، چون $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ، به کار می بریم.

مسیر حرکت جسم هستند، بررسی خواهیم کرد. سرانجام، حساب بردارها را در مورد حرکت ماهواره به کار می بندیم و نشان می دهیم که چگونه می توان قوانین کپلر در مورد مدار سیارات و ماهواره ها را از قوانین حرکت و گرانش نیوتن به دست آورد.

در سراسر بحثمان فرض می کنیم حرکتی که در یک صفحه انجام می شوند، در فضا در صفحه xy صورت می پذیرند. بنا بر این فرمولهای حرکت در صفحه حالت خاصی از فرمولهای حرکت در فضا هستند و با صفر قرار دادن مؤلفه های k ی بردارها به دست می آیند.

مماس بر مسیر پرتابه در P میل می‌کند و ΔR به‌صفر نزدیک می‌شود. اما خارج قسمت

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j}$$

به‌صفر میل نمی‌کند بلکه به‌برداری

$$\mathbf{v}(t_1) = \left(\frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_1} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_1} \right) \mathbf{j}$$

میل می‌کند. این بردار در P برخم مماس است و در جهت حرکت پرتابه است. وانگهی طولش یعنی

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \frac{ds}{dt}$$

مقدار سرعت پرتابه در t_1 است.

اما پاسخ به پرسش مطرح‌شده: مقدار سرعت پرتابه در ثانیه t_1 حرکتش برابر با $|\mathbf{v}(t_1)|$ و جهتش $\mathbf{v}(t_1)/|\mathbf{v}(t_1)|$ است. به‌طور خلاصه سرعت پرتابه در t_1 بردار $\mathbf{v}(t_1)$ است.

مثال ۱ پرتابه‌ای با مقدار سرعت اولیه 500 m/sec و زاویه 60° در ربع اول از مبدأ پرتاب می‌شود. پس از 1 ثانیه، سرعت، مقدار سرعت، و جهت پرتابه چیست؟

حل: بنا به مثال ۵ بخش ۲۰۱۳، معادلات پارامتری پرتابه‌ای که از نقطه (x_0, y_0) با مقدار سرعت اولیه v_0 و زاویه α در ربع اول پرتاب می‌شود عبارت‌اند از

$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t$$

$$y(t) = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

این معادلات به‌ازای $x_0 = 0$ ، $y_0 = 0$ ، $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60^\circ$ ، و $g = 9.8$ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$x(t) = 250t, \quad y = 250\sqrt{3}t - 4.9t^2.$$

بنابراین بردار مکان پرتابه عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (250t)\mathbf{i} + (250\sqrt{3}t - 4.9t^2)\mathbf{j}$$

و بردار سرعت آن در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(250t)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(250\sqrt{3}t - 4.9t^2)\mathbf{j}$$

$$= 250\mathbf{i} + (250\sqrt{3} - 9.8t)\mathbf{j}.$$

۱۰۱۴ تابه‌های برداری و حرکت

در این بخش مشتق توابع برداری را تعریف می‌کنیم و قواعد مشتقگیری از حاصلضربهای عددی و برداری را به‌دست می‌آوریم. این قواعد چنانکه خواهیم دید به‌همان صورت قاعده مشتقگیری از حاصلضرب توابع با مقادیر حقیقی است. مهمترین تابع برداری، بردار شعاعی

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

از مبدأ تا نقطه $P(x(t), y(t), z(t))$ است که مکان ذره را در لحظه t از حرکتش در فضا، به‌دست می‌دهد. این بردار، بردار مکان [موضع] ذره است. مشتق اول و دومش نسبت به t سرعت و شتاب ذره‌اند. مطلب را با مثالی آغاز می‌کنیم که در آن، تابع برداری توصیف‌کننده سرعت یک پرتابه ایده‌آل را در لحظه t از حرکتش به‌دست می‌آوریم.

سرعت یک پرتابه ایده‌آل

فرض می‌کنیم پرتابه‌ای در لحظه $t = 0$ از نقطه (x_0, y_0) واقع در ربع اول صفحه قسائم xy پرتاب می‌شود. مقدار سرعت اولیه پرتابه v_0 و زاویه پرتاب α است. پس از t_1 ثانیه مقدار سرعت و جهت پرتابه چیست؟

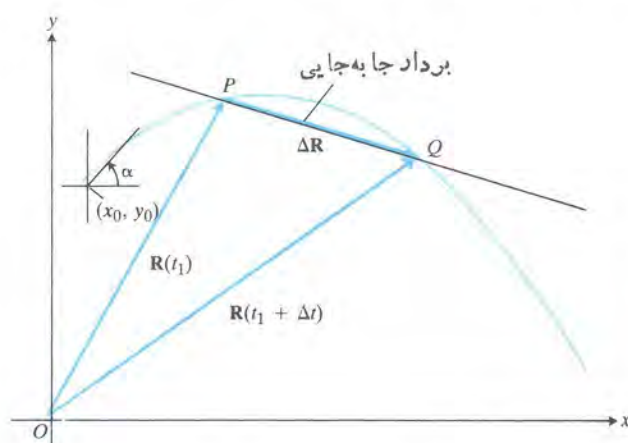
برای پاسخ‌دادن به این پرسش، فرض می‌کنیم

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

برداری مکان پرتابه در لحظه t باشد و نیز x و y توابع مشتقپذیری از t باشند. به این ترتیب، بردار

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{R}(t_1)$$

جابه‌جایی پرتابه را در بازه زمانی t_1 تا $t_1 + \Delta t$ به‌دست می‌دهد (شکل ۲۰۱۴). با میل کردن Δt به‌صفر، خط قاطع PQ به خط



۲۰۱۴ توصیف جابه‌جایی یک ذره به‌صورت نمودی در بردار مکان.

مقدار مشتق در $t = \pi/3$ ، بردار زیر است

$$\mathbf{F}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{3}{\pi}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

مثال ۳ اگر

$$\mathbf{R}(t) = (250t)\mathbf{i} + (250\sqrt{3}t - 49t^2)\mathbf{j}$$

$d\mathbf{R}/dt$ را بیابید.

حل:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 250\mathbf{i} + (250\sqrt{3} - 98t)\mathbf{j}.$$

این مشتق، بردار سرعت پرتابه در مثال ۱ است.

مکان، سرعت، مقدار سرعت، و شتاب

اگر $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ بردار مکان جسمی در فضا باشد، $d\mathbf{R}/dt$ و $d^2\mathbf{R}/dt^2$ را، در صورت وجود، سرعت و شتاب جسم می‌نامند. مانند حالت حرکت در صفحه، طول بردار سرعت مقدار سرعت جسم و جهت بردار سرعت جهت حرکت است. در این مورد در بخش بعد بحث بیشتری خواهیم کرد.

تعاریفها

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{مکان:}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad \text{سرعت:}$$

$$|\mathbf{v}| \quad \text{مقدار سرعت:}$$

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{جهت:}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \quad \text{شتاب:}$$

مثال ۴ بردار

$$\mathbf{R}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

مکان یک جسم متحرک در لحظه t را مشخص می‌کند. در $t = 2$ ، مقدار سرعت جسم و جهت آن را مشخص کنید. در چه لحظاتی، در صورت وجود، سرعت و شتاب جسم برهم عمودند؟

در $t = 10$ ، سرعت، مقدار سرعت، و جهت آن عبارت‌اند از سرعت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(10) &= 250\mathbf{i} + (250\sqrt{3} - 98)\mathbf{j} \\ &= 250\mathbf{i} + 335\mathbf{j} \quad (\text{گرد شده}) \end{aligned}$$

مقدار سرعت:

$$|\mathbf{v}(10)| = \sqrt{(250)^2 + (335)^2} = 418 \text{ m/sec} \quad (\text{گرد شده})$$

جهت:

$$\frac{\mathbf{v}(10)}{|\mathbf{v}(10)|} = 0.6\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j}. \quad (\text{گرد شده})$$

مشتق يك تابع برداری

اگر $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ توابعی با مقادیر حقیقی [حقیقی-مقدار] از t باشند، بردار

$$\mathbf{F}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

یک تابع با مقادیر برداری یا به اختصار یک تابع برداری از t است. دامنه $\mathbf{F}$ مجموعه‌ای است از مقادیر t که در دامنه‌های x و y و z مشترك باشند. در بحث‌های قبلی ما، $\mathbf{F}(t)$ بردار مکان یک جسم متحرک بود، اما برای اینکه یک تابع، تابعی برداری از t باشد نیازی به چنین تعبیر یا تعبیر دیگری نیست.

اگر $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ توابع مشتق‌پذیری از t باشند،

بردار

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (1)$$

مشتق $\mathbf{F}$ نسبت به t نام دارد. دامنه $\mathbf{F}'$ مجموعه‌ای است از مقادیر t که در دامنه‌های مشتقات x ، y ، و z مشترك باشند. تابع برداری $\mathbf{F}(t)$ را در مقدار $t = t_0$ مشتق‌پذیر گویند اگر x ، y ، و z در t_0 مشتق‌پذیر باشند. تابع برداری $\mathbf{F}(t)$ را مشتق‌پذیر گویند اگر به ازای هر مقدار t در دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۲ اگر

$$\mathbf{F}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j} + (\tan t)\mathbf{k}$$

$d\mathbf{F}/dt$ را در $t = \pi/3$ بیابید.

حل: $d\mathbf{F}/dt$ را با مشتق‌گیری از مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ نسبت به t

می‌یابیم

$$\mathbf{F}'(t) = (\cos t)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}.$$

توابع مشتقپذیر حقیقی - مقدار داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{F}}{ds} &= \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \\ &= \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right)\frac{dt}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{F}}{dt}\frac{dt}{ds}.\end{aligned}\quad (۳)$$

به طور خلاصه

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (۲)$$

که آن را قاعده زنجیری در مورد توابع برداری از یک متغیر حقیقی می نامیم.

مثال ۵ اگر

$$t = s^2 - 1 \quad \text{و} \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{i} + \sin(t+1)\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

$d\mathbf{F}/ds$ را به صورت تابعی از s بیابید.

حل: قاعده زنجیری، رابطه (۲)، را به کار می بریم و برای اینکه نتیجه بر حسب s باشد از جانشانی $t = s^2 - 1$ استفاده می کنیم

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \frac{dt}{ds} = \left(\cos(t+1)\mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}\right)(2s)$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = (2s \cos s^2)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}\mathbf{k}.$$

مشتق حاصلضرب عددی و حاصلضرب برداری

اگر $\mathbf{U}(t)$ و $\mathbf{V}(t)$ توابع برداری مشتقپذیری از t باشند، حاصلضربهای $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ و $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ توابع مشتقپذیری از t اند و مشتقاتشان از قواعد زیر محاسبه می شود

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (۵)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{U}}{dt} \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (۶)$$

حل: داریم

$$\mathbf{R}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = -(3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -(3 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

رقتی $t=2$ ، مقدار سرعت و جهت حرکت جسم عبارت اند از

مقدار سرعت:

$$|\mathbf{v}(2)| = \sqrt{(-3 \sin 2)^2 + (3 \cos 2)^2 + (2)^2} = 5$$

جهت:

$$\frac{\mathbf{v}(2)}{|\mathbf{v}(2)|} = -\left(\frac{3}{5} \sin 2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5} \cos 2\right)\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k}.$$

برای اینکه ببینیم چه هنگام $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برهم عمودند، باید مقادیری از t را بیابیم که به ازای آنها داشته باشیم

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) &= 9 \sin t \cos t - 9 \cos t \sin t + 4t \\ &= 4t = 0.\end{aligned}$$

تنها مقدار عبارت است از $t=0$.

قاعده زنجیری

اگر $\mathbf{R}(t)$ مکان ذره ای باشد که روی یک مسیر در حرکت است و اگر با قراردادن تابعی از s به جای t متغیرها را تعویض کنیم، مکان ذره تابعی از s می شود. ذره با تغییر s روی همان مسیر حرکت می کند، اما سرعتی متفاوت دارد (مگر آنکه اتفاقاً s برابر با t باشد). مشتق $d\mathbf{R}/dt$ را قاعده زیر به $d\mathbf{R}/ds$ مربوط می سازد

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (۲)$$

در هر نقطه، مشتق dt/ds عددی است که در $d\mathbf{R}/dt$ ضرب می شود تا $d\mathbf{R}/ds$ را به دست دهد.

برای پی بردن به دلیل این امر فرض می کنیم

$$\mathbf{F}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

یک تابع برداری مشتقپذیر از t و $t = g(s)$ یک تابع عددی مشتقپذیر از s باشد. در این صورت، x ، y ، و z که توابع مشتقپذیری از t هستند، توابع مشتقپذیری از s نیز هستند و بنا به قاعده زنجیری در مورد

سرانجام داریم

$$\frac{dW}{dt} = U \times \frac{dV}{dt} + \frac{dU}{dt} \times V \quad (7)$$

که معادل رابطه (۶) است.

مشتق بردارهایی که طولشان ثابت است

اگر V تابع مشتقپذیری از t باشد که طولش ثابت است، آنگاه

$$V \cdot V = |V|^2$$

ثابت است. با مشتقگیری از دوطرف این رابطه داریم

$$V \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dt} \cdot V = 0, \quad 2V \cdot \frac{dV}{dt} = 0$$

و یا

$$V \cdot \frac{dV}{dt} = 0. \quad (8)$$

رابطه ۸ حاکی است که V و مشتقش dV/dt متعامدند. به عبارت دیگر، مشتق یک بردار با طول ثابت، همواره برداری عمود بر آن است.

به عکس، اگر V تابعی مشتقپذیر از t باشد و نیز $V \cdot dV/dt = 0$ ، آنگاه طول V ثابت است (مسأله ۳۱).

مثال ۶ نشان دهید که طول

$$V(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$$

ثابت است و این بردار بر مشتقش عمود است.

حل: داریم

$$V(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$$

$$|V(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 3} = 2$$

$$V'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

$$\blacksquare \quad V(t) \cdot V'(t) = \sin t \cos t - \cos t \sin t = 0.$$

مثال ۷ فرض می‌کنیم ذره‌ای بر کره‌ای به مرکز مبدأ چنان حرکت می‌کند که بردار مکانش، $R(t)$ ، مشتقپذیر است. نشان دهید که سرعت، dR/dt ، همواره بر R عمود است (شکل ۳۰.۱۴).

به شباهت روابط (۵) و (۶) با قاعده ضرب در مورد توابع حقیقی-مقدار توجه کنید. همچنین به یاد داشته باشید که ترتیب عوامل در رابطه (۶) باید محفوظ باشد: اول U ، بعد V . اگر در طرف چپ رابطه، اول U بیاید در طرف راست نیز باید اول U بیاید، در غیر این صورت علامتها غلط می‌شوند.

یک روش برای به دست آوردن روابط (۵) و (۶) بیان U و V بر حسب مؤلفه‌ها، ضرب کردن آنها در هم، استفاده از قواعد معمولی مشتقگیری از حاصلضرب توابع عددی است. اما این راه طولانی است. بهتر است روش Δ را مستقیماً در مورد خود بردارها به کار ببریم.

مثلاً برای اثبات درستی رابطه (۶) فرض می‌کنیم

$$W = U \times V$$

که در آن U و V توابع مشتقپذیری از t اند. نیز فرض می‌کنیم Δt نمو t باشد و نمونه‌های نظیر U ، W ، V به ترتیب ΔU ، ΔW و ΔV باشند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} W + \Delta W &= (U + \Delta U) \times (V + \Delta V) \\ &= U \times V + U \times \Delta V + \Delta U \times V \\ &\quad + \Delta U \times \Delta V \end{aligned}$$

و

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = U \times \frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} \times V + \frac{\Delta U}{\Delta t} \times \Delta V.$$

حال وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ حدها را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lim \frac{\Delta W}{\Delta t} &= \lim \left(\frac{\Delta w_1}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta w_2}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{\Delta w_3}{\Delta t} \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{dw_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dw_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dw_3}{dt} \mathbf{k} \\ &= \frac{dW}{dt}. \end{aligned}$$

همچنین

$$\lim \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{dU}{dt}, \quad \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

و

$$\lim \Delta V = \lim \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \lim \Delta t = \frac{dV}{dt} \cdot 0 = 0.$$

انتگرالگیری دوم نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{R}(t) = -(\cos t)\mathbf{i} + (2t - \sin t)\mathbf{j} + C_2$$

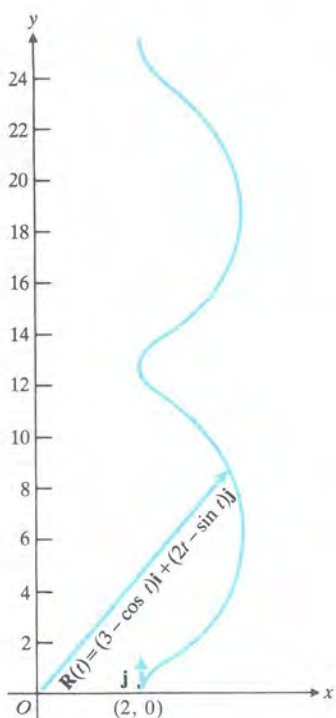
و از شرط $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i}$ به دست می‌آید

$$2\mathbf{i} = -\mathbf{i} + C_2, \quad C_2 = 3\mathbf{i}.$$

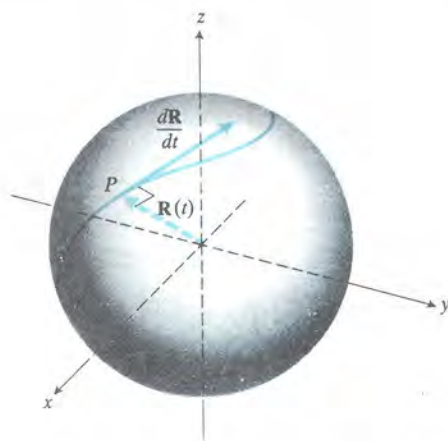
بنابراین بردار مکان ذره عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (3 - \cos t)\mathbf{i} + (2t - \sin t)\mathbf{j}.$$

شکل ۳۰۱۴ مسیر حرکت ذره را نشان می‌دهد.



۳۰۱۴ مسیر ذره در مثال ۸



۳۰۱۴ بردار سرعت ذره‌ای چون P که بر سطح کره‌ای حرکت می‌کند بر کره مماس است.

حل: طول $\mathbf{R}$ ثابت است زیرا همواره برابر شعاع کره است، پس $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}/dt = 0$.

تعیین $\mathbf{R}(t)$ به کمک انتگرالگیری

در مثال بعدی می‌بینیم که گاه چگونه می‌توان مسیر حرکت یک ذره را وقتی سرعت و مکان اولیه‌اش معلوم باشد با انتگرالگیری از بردار شتابش به دست آورد.

مثال ۸ شتاب ذره‌ای در صفحه عبارت است از

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}. \quad (9)$$

اگر $\mathbf{v}(0) = \mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i}$ ، مکان ذره را به صورت تابعی از t بیابید.

حل: از رابطه (۹) دوبار انتگرال می‌گیریم و ضمن آن برای به دست آوردن ثابتهای انتگرالگیری شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم. انتگرالگیری اول چنین به دست می‌دهد

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + C_1$$

که در آن C_1 یک بردار است. شرط $\mathbf{v}(0) = \mathbf{j}$ نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{j} = (0)\mathbf{i} - (1)\mathbf{j} + C_1, \quad C_1 = 2\mathbf{j}.$$

بنابراین

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\sin t)\mathbf{i} + (2 - \cos t)\mathbf{j}.$$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۲، مکان یک ذره در لحظه t است. بردارهای سرعت و شتاب ذره را بیابید. سپس مقدار سرعت ذره را در لحظه داده شده تعیین کنید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j}, \quad t = \pi/2$

۲. $\mathbf{R}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j}, \quad t = 2$

۳. $\mathbf{R}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j}, \quad t = 0$

۴. $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 3$

$$\mathbf{a}(t) = -9.8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha)\mathbf{j}, \quad 24$$

$$\mathbf{R}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$$

۲۵. فرض می‌کنیم $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ بردار مکان ذره‌ای باشد که در صفحه xy حرکت می‌کند.

الف) $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را بیابید.

ب) مسیر حرکت را بکشید، و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را به‌ازای $t = 2$ به‌صورت بردارهایی که از نقطه $(2, 2)$ شروع می‌شوند رسم کنید.

۲۶. مقاومت متناسب با سرعت، اگر پرتابه‌ای با مقاومتی مواجه شود که با سرعت متناسب باشد، نیروی کل وارد به پرتابه، $m d^2\mathbf{R}/dt^2$ ، در معادله زیر صدق می‌کند

$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -mg\mathbf{j} - k \frac{d\mathbf{R}}{dt}.$$

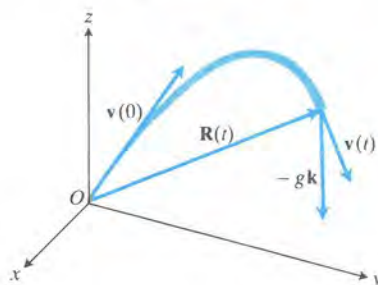
نشان دهید که با یکبار انتگرال‌گیری از این معادله، معادله زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{k}{m}\mathbf{R} = \mathbf{v}(0) - g t \mathbf{j}.$$

این معادله را حل کنید. (دانهایی: دوطرف را در $e^{(k/m)t}$ ضرب کنید. در این صورت طرف چپ، مشتق حاصلضرب $\mathbf{R}e^{(k/m)t}$ خواهد بود و از طرفین معادله می‌توان انتگرال گرفت.)

۲۷. ماشین حساب توبی از بسالای ساختمانی به‌ارتفاع 100 m با مقدار سرعت 20 m/sec در امتداد افقی پرتاب می‌شود. دو ثانیه بعد سرعت توپ و مقدار آن چقدر است؟

۲۸. ذره‌ای در یک‌هشتم اول از مبدأ در $t = 0$ با سرعت $\mathbf{v}(0)$ پرتاب می‌شود (شکل ۵.۱۴). شتاب، بردار ثابت $\mathbf{a} = -g\mathbf{k}$ است. سرعت و مکان ذره را به‌صورت توابعی از t به‌دست آورید.



۵.۱۴ اگر پرتابه‌ای از مبدأ با سرعت اولیه $\mathbf{v}(0)$ به‌طرف بالای صفحه xy پرتاب شود، در هر لحظه‌ای پس از آن سرعت و مکانش از راه انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید (مسئله ۲۸).

$$\mathbf{R}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j}, \quad t = \pi/6 \quad 5$$

$$\mathbf{R}(t) = [\ln(t+1)]\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 1 \quad 6$$

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j}, \quad t = \pi/(3\omega) \quad 7$$

(a و ω ثابتهای مثبتی هستند)

$$\mathbf{R}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2 \cos 3t)\mathbf{j} + (2 \sin 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0 \quad 8$$

$$\mathbf{R}(t) = (1+t)\mathbf{i} + (t^2/\sqrt{2})\mathbf{j} + (t^2/3)\mathbf{k}, \quad t = 1 \quad 9$$

$$\mathbf{R}(t) = (4 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = \pi/3 \quad 10$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{2}/(t+1))\mathbf{i} + (t^2/3)\mathbf{j} + (\sqrt{2} \ln t)\mathbf{k}, \quad t = 1 \quad 11$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cosh 3t)\mathbf{i} + (2 \sinh t)\mathbf{j}, \quad t = 0 \quad 12$$

در مسائل ۱۳-۱۶، $\mathbf{R}(t)$ بردار مکان جسمی در لحظه t است. لحظه یا لحظاتی را در بازه زمانی مفروض بیابید که بردارهای سرعت و شتاب برهم عمود باشند.

$$\mathbf{R}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad 13$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \quad 14$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + (\delta \cos t)\mathbf{j} + (3 \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad 15$$

$$\mathbf{R}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \quad 16$$

در مسائل ۱۷-۲۰، $\mathbf{R}(t)$ بردار مکان ذره‌ای در لحظه t است. در $t = 0$ زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب ذره را بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t \cos t)\mathbf{k} \quad 17$$

$$\mathbf{R}(t) = (\tan t)\mathbf{i} + (\sinh 2t)\mathbf{j} + (\operatorname{sech} 2t)\mathbf{k} \quad 18$$

$$\mathbf{R}(t) = (\ln(t^2+1))\mathbf{i} + (\tan^{-1}t)\mathbf{j} + (\sqrt{t^2+1})\mathbf{k} \quad 19$$

$$\mathbf{R}(t) = (v_0 \cos \alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \quad 20$$

در مسائل ۲۱-۲۴، با استفاده از شتاب و شرایط اولیه، $\mathbf{R}(t)$ را تعیین کنید.

$$\mathbf{a}(t) = -3t\mathbf{i}, \quad \mathbf{v}(0) = 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{R}(0) = 2\mathbf{i} \quad 21$$

$$\mathbf{a}(t) = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{R}(0) = 5\mathbf{j} \quad 22$$

$$\mathbf{a}(t) = (1+t)^{-1/2}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad 23$$

$$\mathbf{R}(0) = (1/3)\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

است با مجموع سه دترمینان بسا این مشخصات: سه دترمینان همان دترمینان اصلی هستند با این تفاوت که سطر اول دترمینان اول مشتق سطر اول دترمینان اصلی، سطر دوم دترمینان دوم مشتق سطر دوم دترمینان اصلی، و سطر سوم دترمینان سوم مشتق سطر سوم دترمینان اصلی است. این حکم را می توان در مورد دترمینانهای با مراتب مختلف تعمیم داد.

۳۴. فرض می کنیم $F(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ و نیز فرض می کنیم x, y, z مشتقات اول، دوم، و سوم داشته باشند. به کمک رابطه (۱۵) در مسأله ۳۳، و یا معادل آن رابطه (۱۱)، نشان دهید که

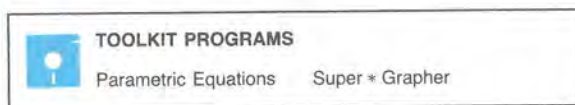
$$\frac{d}{dt} \left[F \cdot \left(\frac{dF}{dt} \times \frac{d^2F}{dt^2} \right) \right] = F \cdot \left(\frac{dF}{dt} \times \frac{d^3F}{dt^3} \right).$$

(دانهمایی: مشتق طرف چپ را نسبت به t محاسبه کنید و در جستجوی بردارهایی باشید که حاصلضرب بهایشان برابر صفرند.)

۳۵. برای به دست آوردن رابطه (۷) به طور ضمنی فرض شد که

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(U \times \frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = U \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (12)$$

به کمک فرمول دترمینانی ضرب برداری (رابطه ۸ بخش ۵.۱۳) به نشان دهید که این رابطه بهراستی برقرار است.



۲.۱۴ فاصله جهتدار و بردار مماس واحد T

خم مسیر جسمی که بردار مکانش، $R(t)$ ، تابعی مشتقپذیر از t باشد خم مشتقپذیر نام دارد. همچنانکه می توان حدس زد، خمهای مشتقپذیر، به ویژه آنها که مشتقات اول و دوم پیوسته دارند، به خاطر جذابیت ریاضی و کاربردهایشان مورد بررسی بسیار قرار گرفته اند. در این بخش و بخش بعد، برخی از ویژگیهایی که دلیل معروفیت این خمهاست شرح داده می شود.

یکی از ویژگیهای خاص خمهای پیوسته-مشتقپذیر این است که این خمها آن قدر هموارند که طولی اندازه پذیر دارند. این ویژگی این امکان را به ما می دهد که محل نقاط را برای این خمها به این طریق تعیین کنیم که فاصله جهتدار آنها را روی خم از نقطه مبنا دلخواهی مشخص کنیم. از همین راه است که محل نقاط را روی محورهای مختصات با مشخص کردن فاصله جهتدار آنها از مبدأ تعیین می کنیم. بنا بر این هر خم پیوسته-مشتقپذیر می تواند یک محور مختصات خمیده باشد (شکل ۶.۱۴). در حالی که زمان، پارامتر طبیعی در توصیف سرعت و شتاب یک جسم متحرک است، مختص s یعنی

۲۹. ذره ای روی بیضی $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$ چنان حرکت می کند که مکانش در لحظه t عبارت است از

$$R(t) = (3 \cos t)i + (2 \sin t)j.$$

مقادیر ما کسیم و مینیمم اندازه شتاب را بیابید.

۳۵. فرض می کنیم بردارهای مکان ذرات P_1 و P_2 که در فضا در حرکت اند عبارت اند از

$$R_1(s) = 2si + (s-5)j + sk$$

$$R_2(t) = (3+t)i - (2+t)j + (1+t)k$$

که در آنها s و t هر دو زمان را نشان می دهند.

الف) نقطه تقاطع مسیرهای P_1 و P_2 را بیابید. در چه لحظه ای ذرات به این نقطه تقاطع می رسند؟

ب) چون s و t هر دو زمان را نشان می دهند، s را برابر با t قرار دهید و فاصله بین P_1 و P_2 را به صورت تابعی از t تعیین کنید. در چه لحظه ای فاصله دو ذره کمترین مقدار را دارد؟

۳۱. فرض می کنیم $V(t)$ تابع مشتقپذیری از t است. نشان دهید که اگر به ازای هر t $V \cdot V' = 0$ ، طول V ثابت است.

۳۲. رابطه (۵) را با روش Δ به دست آورید.

۳۳. مشتق حاصلضرب عددی سه گانه.

الف) با استفاده از روابط (۵) و (۶) نشان دهید که

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U \cdot V \times W) &= \frac{dU}{dt} \cdot V \times W + U \cdot \frac{dV}{dt} \times W \\ &+ U \cdot V \times \frac{dW}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

ب) نشان دهید که رابطه (۱۵) معادل است با

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} & \frac{du_2}{dt} & \frac{du_3}{dt} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \frac{dv_3}{dt} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{dw_1}{dt} & \frac{dw_2}{dt} & \frac{dw_3}{dt} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

(رابطه ۱۱ حاکی است که مشتق یک دترمینان مرتبه ۳ برابر

زیر به دست می آید

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (2)$$

بنابراین، طول خم از $t=a$ تا $t=b$ با انتگرالگیری از طول بردار سرعت حرکت از a تا b به دست می آید. اگر از رابطه (۲) جمله مربوط به z حذف شود فرمول معمول طول قوس خمهای واقع در صفحه به دست می آید.

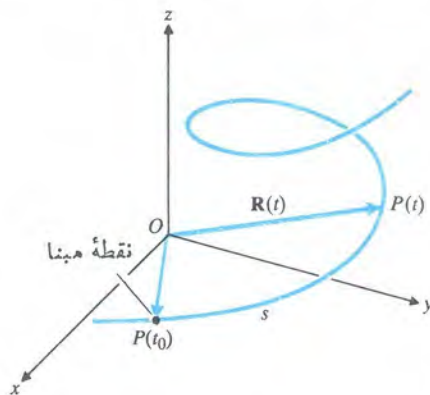
تعریف

طول یک خم

طول خم $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ از $t=a$ تا $t=b$ برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (3)$$

اگر مطابق شکل ۸.۱۴ یک نقطه مبنا چون $P(t_0)$ روی خم برگزینیم، انتگرال $|\mathbf{v}|$ از t_0 تا t فاصله جهتدار s از $P(t_0)$ تا $P(t)$ در روی خم را به دست می دهد.

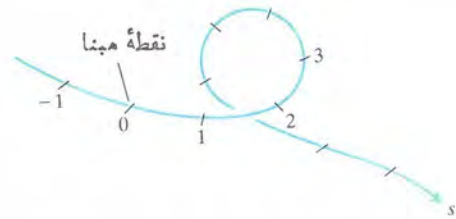


۸.۱۴ فاصله جهتدار روی خم از $P(t_0)$ تا هر نقطه دلخواهی چون $P(t)$ عبارت است از

$$s = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}| d\tau.$$

فاصله جهتدار روی یک خم از t_0 تا t

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2 + z'(\tau)^2} d\tau = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}| d\tau \quad (4)$$



۶.۱۴ خمهای پیوسته - مشتقپذیر هم می توانند مانند محورهای مختصات مقیاس داشته باشند. مختص منسوب به هر نقطه فاصله جهتدار آن از یک نقطه مبنا از پیش برگزیده است.

فاصله جهتدار، پارامتر طبیعی در مطالعه هندسه خم است. برای ساده کردن بیان مطلب، خم مسیر انتهایی بردار مکان

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

را «بردار $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ » می نامیم.

فاصله جهتدار روی یک خم

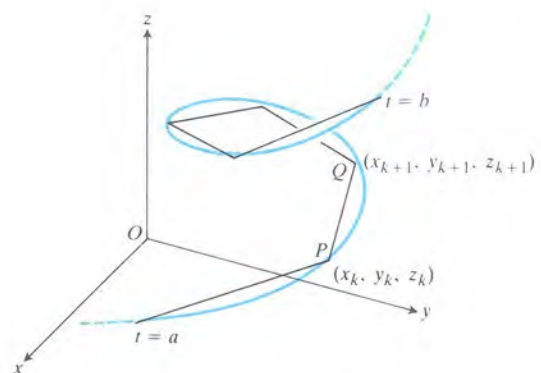
همان طور که در شکل ۷.۱۴ دیده می شود، طول خم

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

به صورت حد طولهای خطهای شکسته تقریب زنده خم یعنی

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2} \quad (1)$$

تعریف می شود که این تعریف شبیه تعریف طول خم واقع در صفحه (خم مسطح) در بخش ۵.۵ است. وقتی x ، y ، و z مشتقات اول پیوسته داشته باشند، این حد وجود دارد و از فرمول



۷.۱۴ طول خم از $t=a$ تا $t=b$ حد طول خطهای شکسته است.

$\cos t$ و $\sin t$ برابر با 2π است، وقتی t از ۰ تا 2π تغییر کند یک دور کامل پیچ پیموده می شود. از این رو، بنا به رابطه (۳)، طول مطلوب برابر است با

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |v| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

این طول، $\sqrt{2}$ برابر طول دایره واحدی واقع در صفحه xy است که پیچ بر آن برپا می شود. (مسأله ۱۵ را نیز ببینید.) ■

مثال ۲ نشان دهید که اگر $u = u_x i + u_y j + u_z k$ برداری واحد باشد، فاصله جهتدار روی خط

$$\begin{aligned}x &= x_0 + tu_x, \quad y = y_0 + tu_y, \quad z = z_0 + tu_z \\ \text{از نقطه مبنای } P_0(x_0, y_0, z_0) \text{ تا نقطه } P_t(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z) \\ \text{برابر است با } s &= t.\end{aligned}$$

حل: معادله برداری خط عبارت است از

$$R(t) = (x_0 + tu_x)i + (y_0 + tu_y)j + (z_0 + tu_z)k.$$

بنابراین

$$v(t) = u_x i + u_y j + u_z k = u$$

و فاصله جهتدار از P_0 تا P_t برابر است با

$$s = \int_0^t |v| d\tau = \int_0^t |u| d\tau = \int_0^t 1 d\tau = \tau \Big|_0^t = t.$$

بردار مماس واحد T
فرض می کنیم مؤلفه های

$$R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

توابعی باشند که مشتق اول پیوسته دارند و نیز فرض می کنیم $s(t)$ فاصله جهتدار در روی خمی باشد که انتهای R رسم می کند ($s(t)$ از یک نقطه مبنای از پیش برگزیده چون $P(t_0)$ اندازه گیری می شود). چون ds/dt نباید برابر با صفر باشد، s یک به یک است و معکوسی دارد که t را به صورت تابعی مشتق پذیر از s به دست می دهد (بخش ۶.۱). مشتق این تابع معکوس برابر است با

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|v|}. \quad (7)$$

مقدار s مثبت است هرگاه t از ۰ بزرگتر باشد و منفی است هرگاه t از ۰ کوچکتر باشد. اگر مشتقات زیر رادیکال پیوسته باشند، نخستین قضیه اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال حاکی است که s تابعی مشتق پذیر از t است و مشتق آن برابر است با اندازه بردار سرعت $R(t)$ ، یعنی

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = |v(t)|. \quad (5)$$

بار دیگر درمی یابیم که مقدار سرعت جسمی که روی مسیر خود در حرکت است برابر است با اندازه بردار v :

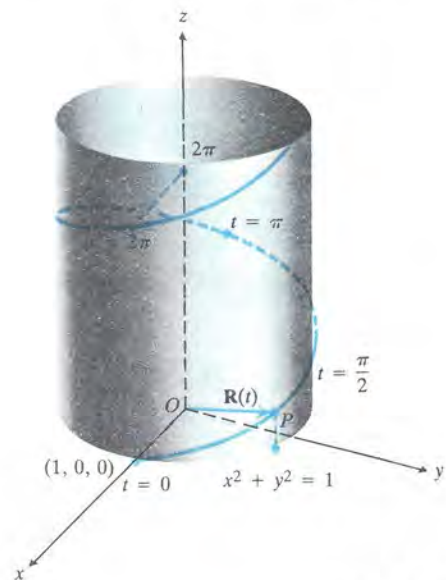
$$\frac{ds}{dt} = |v|. \quad (6)$$

به این نکته توجه کنید که نقطه مبنای $P(t_0)$ با اینکه در تعریف s نقش دارد، در رابطه (۵) نقشی ندارد. آهنگ تغییر s به فاصله آن تا نقطه مبنای بستگی ندارد. همچنین باید دانست مادام که $|v|$ مخالف صفر باشد، و از این پس فرض می کنیم چنین باشد، ds/dt مثبت و s تابعی صعودی از t است.

مثال ۱ مطلوب است طول یک دور از پیچ

$$R(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk.$$

حل: این پیچ در شکل ۹.۱۴ دیده می شود. چون دوره تناوب



۹.۱۴ پیچ

$$R(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$$

وقتی t از صفر شروع به افزایش می کند، از صفحه xy به طرف بالا می پیچد.

مثال ۳ مطلوب است تعیین بردار $\mathbf{T}$ در مورد بیج

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

حل: به ازای

$$\mathbf{v}(t) = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} \\ = \sqrt{2}$$

داریم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

مثال ۴ مطلوب است تعیین بردار $\mathbf{T}$ در مورد خم مسطح زیر

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0.$$

حل:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = (-\sin t + t \cos t + \sin t)\mathbf{i} \\ + (\cos t + t \sin t - \cos t)\mathbf{j} \\ = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = |t| = t$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}.$$

(شکل ۲۰.۱۴ را ببینید.)

مثال ۵ در حرکت بردار

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

روی دایره واحد و در خلاف جهت ساعت، بردار سرعت

$$\mathbf{v} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

یك بردار واحد است، بنابراین $\mathbf{v} = \mathbf{T}$. در واقع، همان $\mathbf{R}$ است که 90° در خلاف جهت ساعت چرخیده است (شکل ۱۱.۱۲).

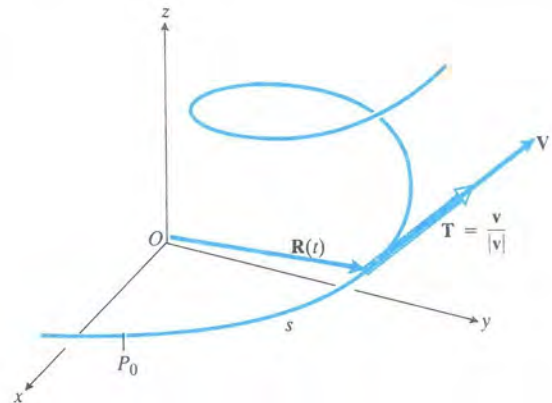
این امر سبب می شود که $\mathbf{R}$ تابعی مشتق پذیر از s باشد و مشتقش را بتوان از قاعده زنجیری چنین به دست آورد

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (8)$$

از این رابطه نتیجه می گیریم

$$\left| \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = 1. \quad (9)$$

روابط (۸) و (۹) همراه به هم حکایت از آن دارند که $d\mathbf{R}/ds$ برداری واحد است که متوجه جهت $\mathbf{v}$ است. $d\mathbf{R}/ds$ را بردار مماس واحد خمی می نامیم که انتهای $\mathbf{R}$ رسم می کند. این بردار را با $\mathbf{T}$ نشان می دهیم. شکل ۱۰.۱۴ را ببینید.



۱۰.۱۴ برای به دست آوردن بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{v}$ را بر $|\mathbf{v}| = ds/dt$ تقسیم می کنیم.

تعریف

بردار مماس واحد

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

هرگاه $\mathbf{v}$ تابعی مشتق پذیر از پارامتر t باشد، $\mathbf{T}$ نیز تابعی مشتق پذیر از t است. چنانکه در بخش بعدی خواهیم دید، $\mathbf{T}$ یکی از سه بردار واحد در يك دستگاه مرجع متحرك است که حرکت سفینه های فضایی و سایر اجسامی را توصیف می کند که در فضای سه بعدی در حرکت اند.

نقطه‌ای که در آن $t = 0$ ، اندازه‌گیری می‌شود. با محاسبه انتگرال

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)| d\tau$$

مطلوب است فاصله جهتدار s به صورت تابعی از t . همچنین طول قطعه مشخص شده از خم را بیابید.

۱۱. $\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ ، قطعه از $t = -\pi$ تا $t = \pi$

۱۲. $\mathbf{R}(t) = (\sinh t)\mathbf{i} + (\cosh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \ln 2$

۱۳. اگر $\mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + (6t + 7)\mathbf{j} + 2t^3\mathbf{k}$ ، مطلوب است $\mathbf{v}$ ، $|\mathbf{v}|$ ، $\mathbf{T}$ ، و $\mathbf{a}$ در $t = 0$.

۱۴. مطلوب است طول خمی که انتهای بردار

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (\sqrt{2}t)\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}$$

از $(0, 0, 1)$ تا $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ می‌پیماید.

۱۵. طول یک دور از پیچ مثال ۱ یعنی $2\pi\sqrt{2}$ برابر است با طول قطر مربعی که طول ضلع آن 2π واحد است. نشان دهید که چگونه می‌توان این مربع را با بریدن و پهن کردن بخشی از استوانه‌ای که مارپیچ حول آن می‌پیچد به دست آورد.



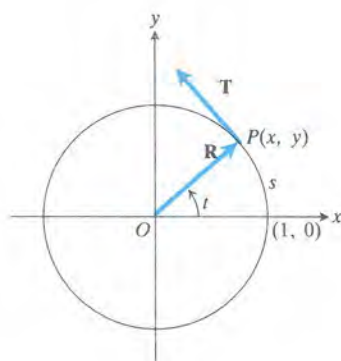
TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations

Super + Grapher

۳.۱۴ خمیدگی، تاب، و دستگاه TNB

در این بخش دستگاهی از بردارهای واحد دو به دو متعامد را تعریف می‌کنیم که همراه با اجسام متحرک در فضا حرکت می‌کند (شکل ۱۲.۱۴). در این دستگاه، سه بردار وجود دارد. یکی از آنها بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ ، و دیگری بردار $\mathbf{N}$ است که جهت $d\mathbf{T}/ds$ است. سومی هم $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ است. این بردارها و مشتقاتشان، چنانچه موجود باشند، اطلاعات سودمندی درباره اجسام متحرک و مسیر حرکت آنها به دست می‌دهند. مثلاً، اندازه مشتق $d\mathbf{T}/ds$ این اطلاع را به ما می‌دهد که مسیر حرکت تا چه اندازه به چپ یا راست خم می‌شود که ما آن را خمیدگی مسیر حرکت می‌نامیم. مقدار $|d\mathbf{B}/ds|$ این اطلاع را به ما می‌دهد که مسیر حرکت تا چه اندازه پیچ و تاب می‌خورد که ما آن را تاب مسیر حرکت می‌نامیم. بار دیگر به شکل ۱۲.۱۴ بنگرید. اگر P قطاری باشد که روی مسیر خمیده‌ای بالا می‌رود، آهنگ خم شدن چراغ جلوی این



۱۱.۱۴. $\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۵، بردار $\mathbf{R}(t)$ بردار مکان ذره‌ای است که در صفحه یا در فضا حرکت می‌کند. مطلوب است بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ در مورد خمی که ذره روی آن حرکت می‌کند. همچنین طول قطعه مشخص شده از خم را بیابید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \pi$

۲. $\mathbf{R}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \pi/2$

۳. $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{j}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = 8$

۴. $\mathbf{R}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = 3$

۵. $\mathbf{R}(t) = t^3(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ ، قطعه از $t = -1$ تا $t = 1$

۶. $\mathbf{R}(t) = (6 \sin 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \pi$

۷. $\mathbf{R}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2}\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \pi$

۸. $\mathbf{R}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = a$

۹. $\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ ، $\omega > 0$ ، $a > 0$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = 2\pi/\omega$

۱۰. $\mathbf{R}(t) = (3 \cosh 2t)\mathbf{i} + (3 \sinh 2t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$ ، قطعه از $t = 0$ تا $t = \ln 2$

در مسائل ۱۱ و ۱۲، فرض کنید فاصله جهتدار روی خم مفروض از

(کاپا) است. اگر $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ معادله برداری خمی واقع در صفحه باشد، می توان فرمولی برای خمیدگی κ به دست آورد به این ترتیب که: مطابق نمادگذاری نقطه ای نیوتن که در آن $\dot{y}$ به معنی dy/dt است، $\dot{y}$ به معنی dy/dt است، و الی آخر، داریم

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \quad (1)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{1}{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\dot{x}^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{|\mathbf{v}|^3}. \end{aligned} \quad (2)$$

بنابراین خمیدگی برابر است با

$$\left| \frac{d\phi}{ds} \right| = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\mathbf{v}|^3}. \quad (3)$$

با توجه به این مطلب که $|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|$ اندازه بردار

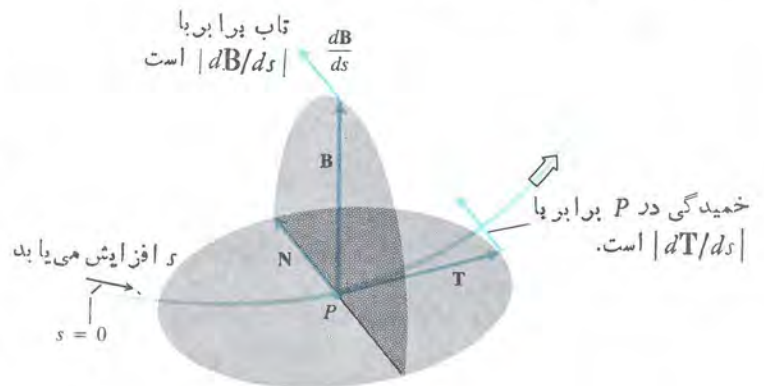
$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

است می توانیم رابطه (۳) را به صورت فشرده برداری زیر بنویسیم

خمیدگی

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}. \quad (5)$$

از روی رابطه (۵) می توان خمیدگی را که يك خاصیت هندسی خم است با استفاده از سرعت و شتاب هر نمایش برداری از خم که در آن $|\mathbf{v}|$ مخالف صفر باشد به دست آورد، اندکی در این باره



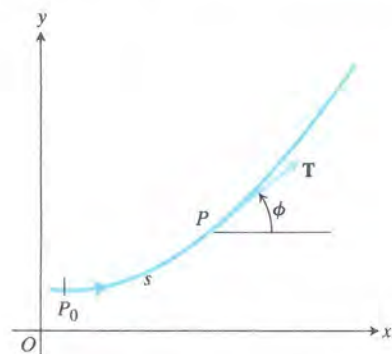
۱۲۰۱۴ هر جسم متحرکی با دستگاهی از بردارها حرکت می کند که چگونگی حرکت آن را توصیف می کند.

قطار به این طرف و آن طرف در واحد فاصله، خمیدگی مسیر قطار است. آهنک چرخش موتور قطار حول محور طولی (خط T) تاب است.

مطلب را با خمهای واقع در صفحه

خمیدگی يك خم واقع در صفحه

وقتی روی يك خم مشتق پذیر واقع در صفحه حرکت می کنیم، بردار مماس واحد T هر وقت که خم، خم می شود می چرخد. آهنک چرخش T را با اندازه گیری تغییر زاویه ϕ یعنی زاویه ای که T با $\mathbf{i}$ می سازد اندازه می گیریم (شکل ۱۳۰۱۴). در هر نقطه دلخواهی چون P، قدرمطلق $d\phi/ds$ ، که بر حسب رادیان بر واحد طول خم ذکر می شود، خمیدگی در P نام دارد. اگر $|d\phi/ds|$ بزرگ باشد، وقتی از P می گذریم T چرخش سریعی دارد و خمیدگی در P بزرگ است. اگر $|d\phi/ds|$ نزدیک به صفر باشد، T چرخش آهسته ای دارد و خمیدگی در P کوچک است. چنانکه در مثالهای ۱ و ۲ خواهیم دید خمیدگی در مورد دایره ها و خطوط، ثابت است. در مورد سایر خمها ممکن است خمیدگی از جایی به جای دیگر فرقی کند. نماد متعارف برای تابع خمیدگی حرف یونانی κ

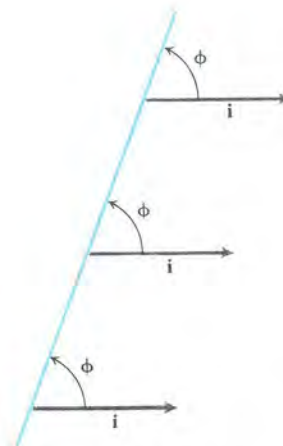


۱۳۰۱۴ مقدار $|d\phi/ds|$ در P خمیدگی خم در P نام دارد.

و بیندیشید که این نکته، چه نکته جالبی است: از هر فرمولی که در مورد حرکت روی یک خم درست داشته باشیم، هر چند هم که حرکت متغیر باشد (مادام که v صفر نباشد)، می‌توان یک ویژگی فیزیکی خم را محاسبه کرد که به نظر می‌رسد هیچ ربطی به مسیری که خم می‌پیماید نداشته باشد.

مثال ۱ نشان دهید که خمیدگی یک خط راست، صفر است.

حل: روی خط راست، ϕ ثابت است (شکل ۱۴.۱۴). بنابراین $\kappa = |d\phi/ds|$ هر دو صفرند.



۱۴.۱۴ روی یک خط راست ϕ همواره ثابت است و خمیدگی $\kappa = |d\phi/ds|$ ، صفر است.

مثال ۲ نشان دهید که خمیدگی یک دایره به شعاع a برابر است با $1/a$.

حل: داریم

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = (-a \sin t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = (-a \cos t)\mathbf{i} - (a \sin t)\mathbf{j}$$

پس

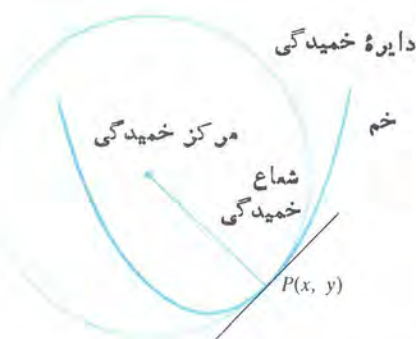
$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & 0 \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)\mathbf{k} = a^2 \mathbf{k} \\ |\mathbf{v}|^3 &= [v^2]^{3/2} = [(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2]^{3/2} = a^3 \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{a^2 |\mathbf{k}|}{a^3} = \frac{1}{a}$$

دایره خمیدگی و شعاع خمیدگی

دایره خمیدگی یا دایره بوسان در نقطه‌ای چون P بر یک خم واقع در صفحه که در این نقطه $\kappa \neq 0$ ، دایره‌ای در صفحه خم است با این مشخصات:

۱. در P بر خم مماس است (دایره و خم هر دو یک مماس دارند)؛
۲. در P خمیدگی‌اش با خمیدگی خم برابر است؛ و
۳. (مانند شکل ۱۵.۱۴) در طرف تقعر یا داخل خم قرار دارد.



۱۵.۱۴ دایره بوسان یا دایره خمیدگی در $P(x, y)$ در طرف داخل خم قرار دارد.

شعاع خمیدگی در P شعاع دایره خمیدگی است که بنا به مثال ۲ برابر است با

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad (۶)$$

برای محاسبه ρ ، κ را محاسبه می‌کنیم و عکس آن را به دست می‌آوریم.

مرکز خمیدگی خم در P مرکز دایره خمیدگی است.

اگر معادله دکارتی دایره خمیدگی را در نقطه‌ای چون P

واقع بر خم $y = f(x)$ بنویسیم و از آن مشتق ضمنی بگیریم و dy/dx و d^2y/dx^2 را بیابیم. مقدار این مشتقات با مقدار f' و f'' در P مطابقت دارند. (در اینجا این مطلب را اثبات نمی‌کنیم، با وجود این مسئله ۴۵ را ببینید.)

بردار قائم واحد اصلی در مورد خمهای واقع در صفحه

بردارهای $d\mathbf{T}/ds$ و $d\mathbf{T}/d\phi$ را قاعده زنجیری چنین به هم

مربوط می‌کند

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \quad (۷)$$

وانگهی، چون T برداری به طول ثابت است، dT/ds و $dT/d\phi$ هر دو بر T عمودند. آنها همجهت‌اند اگر $d\phi/ds$ مثبت باشد و در خلاف جهت یکدیگرند اگر $d\phi/ds$ منفی باشد. باری،

$$T = (\cos \phi)\mathbf{i} + (\sin \phi)\mathbf{j} \quad (۸)$$

و

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\phi} &= -(\sin \phi)\mathbf{i} + (\cos \phi)\mathbf{j} \\ &= \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (۹)$$

برداری واحدی است که از دوران T در خلاف جهت ساعت و به اندازه $\pi/2$ رادیان به دست می‌آید. بنابراین اگر در نقطه‌ای برخم و رو به جهت T بایستیم، بردار

$$dT/ds = (dT/d\phi)(d\phi/ds)$$

متوجه چپ‌است اگر $d\phi/ds$ مثبت باشد و متوجه راست‌است اگر $d\phi/ds$ منفی باشد. به بیان دیگر dT/ds متوجه طرف تقعر خم‌است (شکل ۱۶.۱۴).

چون $dT/d\phi$ یک بردار واحدی است، چنانکه رابطه زیر نشان می‌دهد اندازه dT/ds در هر نقطه‌ای برخم، خمیدگی در آن نقطه است

$$\left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT}{d\phi} \right| \left| \frac{d\phi}{ds} \right| = (۱)(\kappa) = \kappa \quad (۱۰)$$

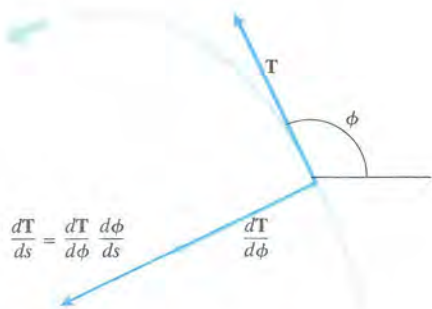
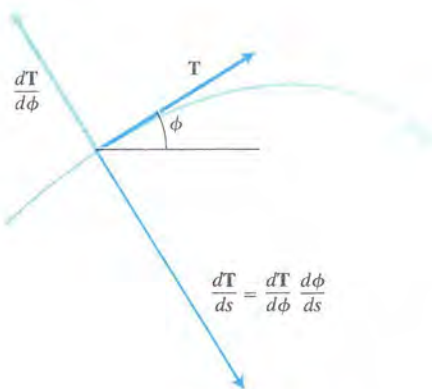
وقتی $dT/ds \neq 0$ ، جهتش با بردار واحد زیر مشخص می‌شود

$$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds} \quad (۱۱)$$

چون جهت N همان جهت dT/ds است، N همواره بر T عمود است و متوجه طرف تقعر خم‌است. بردار N را بردار قائم واحد اصلی خم می‌نامیم.

چون فاصله جهتدار بر خمی چون $R(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ با ds/dt مثبت تعریف می‌شود، بنا به قاعده زنجیری داریم

$$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} = \frac{(dT/dt)(dt/ds)}{|dT/dt||dt/ds|} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|} \quad (۱۲)$$

(الف) $\frac{d\phi}{ds} > 0$ (ب) $\frac{d\phi}{ds} < 0$

۱۶.۱۴ بردار dT/ds همواره متوجه داخل است.

با این فرمول می‌توان N را یافت بدون اینکه لازم باشد اول ϕ ، κ یا s را بیابیم.

مثال ۳ مطلوب است T و N برای حرکت مستدیر

$$R(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}.$$

حل: نخست T را می‌یابیم

$$v = -(2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos 2t)\mathbf{j}$$

$$|v| = \sqrt{4 \sin^2 2t + 4 \cos^2 2t} = 2$$

$$T = \frac{v}{|v|} = -(\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}$$

و با استفاده از آن داریم

$$\frac{dT}{dt} = -(2 \cos 2t)\mathbf{i} - (2 \sin 2t)\mathbf{j}$$

مقادیر a و b چه تأثیری بر κ دارند؟

حل: برای محاسبه κ رابطه (۱۳) را به کار می‌بریم

$$\mathbf{v}(t) = -(a\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (a\omega \cos \omega t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = -(a\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{i} - (a\omega^2 \sin \omega t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\omega \sin \omega t & a\omega \cos \omega t & b \\ -a\omega^2 \cos \omega t & -a\omega^2 \sin \omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab\omega^2 \sin \omega t)\mathbf{i} - (ab\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{j} + a^2\omega^3 \mathbf{k}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 \omega^4 + a^4 \omega^6}}{(a^2 \omega^2 + b^2)^{3/2}} \quad (14)$$

$$= \frac{a\omega^2 \sqrt{a^2 \omega^2 + b^2}}{(a^2 \omega^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a\omega^2}{a^2 \omega^2 + b^2}.$$

از رابطه (۱۴) درمی‌یابیم که اگر a و ω ثابت باشند افزایش b باعث کاهش خمیدگی می‌شود، و اگر ω و b ثابت باشند کاهش a نیز نهایتاً باعث کاهش خمیدگی می‌شود. به بیان دیگر، کشیدن یک فنر سرانجام موجب می‌شود که فنر به صورت مستقیم درآید. اگر $b = 0$ ، پیچ یک دایره خواهد شد و رابطه (۱۴)، چنانکه باید، به صورت $\kappa = 1/a$ درمی‌آید. اگر $a = 0$ ، مارپیچ محور z می‌شود و رابطه (۱۴)، باز هم چنانکه بساید، به صورت $\kappa = 0$ درمی‌آید.

به طور کلی، خمیدگی پیچ مقدار ثابتی است کمتر از $1/a$ ، یعنی کمتر است از خمیدگی دایره‌ای در صفحه xy که پیچ بر آن برپا شده است.

بردار $\mathbf{N}$ در مورد خمهای واقع در فضا

برای تعریف بردار قائم واحد اصلی یک خم در فضا، همان تعریفی را به کار می‌بریم که در مورد خمهای واقع در صفحه به کار بردیم:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \quad (15)$$

هرگاه $d\mathbf{T}/ds \neq 0$ ، باز هم $d\mathbf{T}/ds$ و بردار واحد جهتش یعنی $\mathbf{N}$ بر $\mathbf{T}$ عمودند زیرا طول $\mathbf{T}$ ثابت است (در اینجا برابر ۱ است).

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \sqrt{v^2 \cos^2 \varphi t + v^2 \sin^2 \varphi t} = v$$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -(\cos \varphi t)\mathbf{i} - (\sin \varphi t)\mathbf{j}.$$

خمیدگی خمهای واقع در فضا

درفضا برای یافتن زاویه‌ای چون ϕ که با آن بتوان تغییرات $\mathbf{T}$ را روی یک خم مشتق‌پذیر اندازه گرفت راهی طبیعی وجود ندارد. با این حال s یعنی فاصله جهندار روی خم را داریم و می‌توانیم خمیدگی را همان‌طوری تعریف کنیم که در مورد خمهای واقع در صفحه تعریف کردیم:

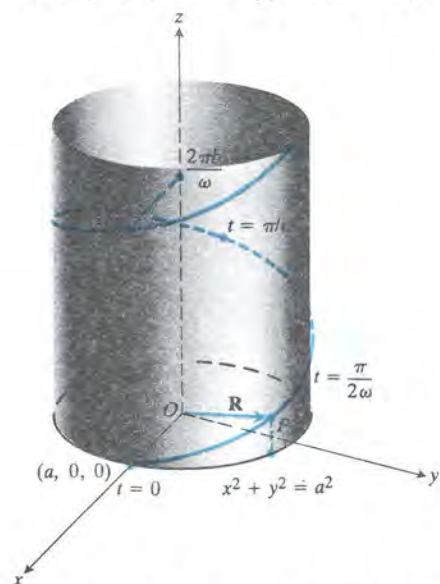
$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

اگر مسأله ۴۳ را حل کنید خواهید دید که در اینجا هم داریم

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}. \quad (13)$$

مثال ۴ پیچ کلی. خمیدگی پیچی با معادله زیر را که در شکل ۱۷.۱۴ دیده می‌شود بیابید

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k}, \quad a, b, \omega > 0.$$



۱۷.۱۴ در مورد پیچی که در این شکل دیده می‌شود داریم

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k}$$

که در آن a و b مثبت‌اند و $t \geq 0$.

مثال ۵ N را برای پیچ مثال ۲ بیابید.

حل: فرمول ۷ در مثال ۲ چنین به دست می دهد

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{-(a\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (a\omega \cos \omega t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}.$$

بنا بر این

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{a\omega^2}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}} ((\cos \omega t)\mathbf{i} + (\sin \omega t)\mathbf{j})$$

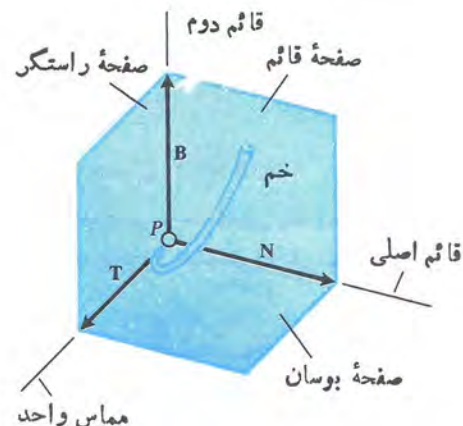
و

$$\blacksquare \quad \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -(\cos \omega t)\mathbf{i} - (\sin \omega t)\mathbf{j}.$$

تاب و بردار قائم دوم

بردار $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ بردار واحدی است که هم بر $\mathbf{T}$ و هم بر $\mathbf{N}$ عمود است. این بردار را بردار قائم دوم خم می نامیم. سه بردار واحد $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}$ يك دستگاه برداری راستگرد متحرك تشكيل می دهند که در محاسبه مسیرهای حرکت سفینه های فضایی اهمیت دارد.

شکل ۱۸.۱۴ سه صفحه ای را نشان می دهد که با $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می شوند. خمیدگی $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ را می توان به صورت آهنگ چرخش صفحه قائم وقتی که P روی خم حرکت می کند در نظر گرفت. همچنین، تاب $\tau = |d\mathbf{B}/ds|$ آهنگ بالارفتن صفحه بوسان است وقتی که P روی خم حرکت می کند. تاب شاخصی است از مقدار پیچش خم.



۱۸.۱۴ سه صفحه ای که با $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$ مشخص می شوند.

متداولترین فرمول برای محاسبه تاب عبارت است از

$$\tau = \pm \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{\ddot{x}} & \ddot{\ddot{y}} & \ddot{\ddot{z}} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \quad (۱۶)$$

که روش به دست آوردن آن در کتابهای پیشرفته تر آمده است. با این فرمول می توان تاب را مستقیماً از $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{v}$ و $\dot{\mathbf{a}}$ به دست آورد. علامت طوری برگزیده می شود که داشته باشیم $\tau \geq 0$. در مسأله ۴۴ فرمول دیگری برای τ ارائه می شود.

مثال ۶ تاب پیچ زیر را بیابید

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

حل: با استفاده از رابطه (۱۶) داریم

$$\mathbf{v} = -(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -(\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{a}} = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$$

$$\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

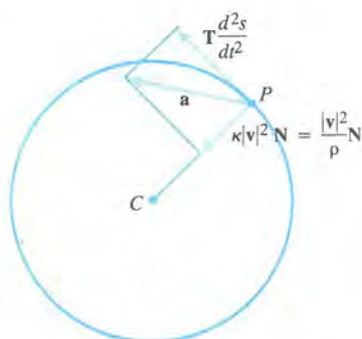
$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2 = 2$$

$$\tau = \frac{1}{2}.$$

خمی که تاب آن صفر است در يك صفحه قرار دارد. بردار قائم دومش ثابت است و $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ باز هم بر این جهت ثابت عمودند. مسأله ۴۷ را ببینید.

مؤلفه های مماس و قائم شتاب

چنانکه از روابط زیر معلوم می شود، بردار شتاب يك جسم متحرك



۱۹۰۱۴ مؤلفه‌های مماس وقائم بردار شتاب ذره‌ای که روی یک دایره در خلاف جهت ساعت با سرعت متغیر حرکت می‌کند.

برای محاسبه a_T رابطه (۲۰) را به کار می‌بریم، اما برای محاسبه a_N به جای استفاده از رابطه (۲۱) معمولاً رابطه زیر را به کار می‌بریم

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - a_T^2}. \quad (22)$$

این رابطه از حل معادله $|a|^2 = a \cdot a = a_T^2 + a_N^2$ به دست می‌آید. از این راه می‌توان a_N را بدون نیاز به محاسبه κ به دست آورد.

مثال ۷ مکان ذره‌ای در $t \geq 0$ عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}.$$

بدون اینکه $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ را بیابید، $\mathbf{a}$ را به صورت زیر بنویسید

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} \quad t > 0.$$

حل: روابط (۲۰) و (۲۲) را به کار می‌بریم

$$\mathbf{v} = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = (\cos t - t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t \cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = t$$

$$a_T = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}| = 1$$

$$|\mathbf{a}|^2 = (\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 = t^2 + 1$$

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2} = \sqrt{t^2} = t$$

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} = \mathbf{T} + t \mathbf{N}.$$

شکل ۲۰.۱۴ را ببینید.

همواره در صفحه بوسان که با $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ مشخص می‌شود قرار دارد

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{T} \frac{ds}{dt} \quad (17)$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{T} \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} \left(\kappa \mathbf{N} \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (18)$$

این یکی از دلایل استفاده از دستگاه TNB برای بررسی حرکت است.

با ترکیب برابریهای (۱۸) داریم

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{T} + \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}. \quad (19)$$

این معادله $\mathbf{a}$ را بر حسب مؤلفه‌های مماس و قائمش به دست می‌دهد. مؤلفه عددی مماس

$$a_T = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}| \quad (20)$$

مشتق مقدار سرعت ذره در امتداد مسیر است. مؤلفه عددی قائم

$$a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \kappa |\mathbf{v}|^2 \quad (21)$$

برابری با حاصلضرب خمیدگی در مربع مقدار سرعت. این فرمول نشان می‌دهد که برای اینکه اتوموبیلی ضمن حرکت در پیچ (وقتی که پیچ تند (κ بزرگ) یا سرعت زیاد ($|\mathbf{v}|^2$ بزرگ) باشد) از جاده خارج نشود باید اصطکاک تایر با کف جاده، نیروی قائم بزرگی را ایجاد کند.

اگر ذره‌ای روی دایره‌ای با سرعتی که مقدارش ثابت است حرکت کند، $d^2 s / dt^2$ صفر است و شتاب بر $\mathbf{N}$ واقع و متوجه مرکز دایره است. اگر مقدار سرعت ثابت نباشد، $\mathbf{a}$ یک مؤلفه مماس ناصفر دارد (شکل ۱۹.۱۴).

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۸، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{T}$ ، κ و $\mathbf{a}$ را در مورد خمهای مسطح مفروض بیا بید.

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (\ln \cos t)\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad ۰۱$$

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} \quad ۰۲$$

$$\mathbf{R}(t) = (\ln \sec t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2 \quad ۰۳$$

$$\mathbf{R}(t) = (2t+3)\mathbf{i} + (5-t^2)\mathbf{j} \quad ۰۴$$

$$\mathbf{R}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0 \quad ۰۵$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0 \quad ۰۶$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2 \quad ۰۷$$

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh(t/a))\mathbf{j} \quad ۰۸$$

در مسائل ۹-۱۴، $\mathbf{B}$ ، κ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}$ ، τ و $\mathbf{a}$ را در مورد خمهای مفروض بیا بید.

$$\mathbf{R}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \quad ۰۹$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad ۰۱۰$$

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad ۰۱۱$$

$$\mathbf{R}(t) = (e \sin 2t)\mathbf{i} + (e \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k} \quad ۰۱۲$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k} \quad ۰۱۳$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} + (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad ۰۱۴$$

در مسائل ۱۵-۲۰، بدون یافتن $\mathbf{N}$ و $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{a}$ را به صورت $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

$$\mathbf{R}(t) = (2t+3)\mathbf{i} + (t^2-1)\mathbf{j} \quad ۰۱۵$$

$$\mathbf{R}(t) = \ln(t^2+1)\mathbf{i} + (t-2 \tan^{-1}t)\mathbf{j} \quad ۰۱۶$$

$$\mathbf{R}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} \quad ۰۱۷$$

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} \quad ۰۱۸$$

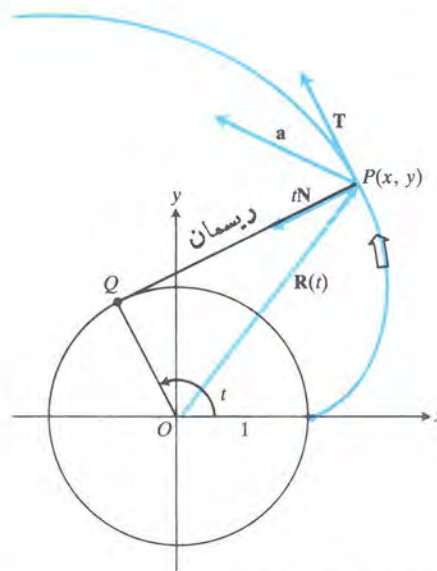
$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \quad ۰۱۹$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} + (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad ۰۲۰$$

در مسائل ۲۱-۲۶، بدون یافتن $\mathbf{N}$ و $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{a}$ را بدای t داده شده بد صورت $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ بنویسید.

$$\mathbf{R}(t) = (t+1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t=1 \quad ۰۲۱$$

$$\mathbf{R}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t=0 \quad ۰۲۲$$



۲۰.۱۴ گسترش دایره مسیری است که نقطه انتهایی P ریسمانی که دور دایره پیچیده شده هنگام باز شدن می‌پیمايد. ریسمانی که در این شکل دیده می‌شود در خلاف جهت ساعت بازمی‌شود و مسیر زیر را می‌پیمايد

$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$. در این حالت مؤلفه‌های بردارهای مماس و قائم شتاب $\mathbf{a}$ ، چنانکه در مثال ۷ نشان داده شده، برابرند با $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$.

چند فرمول در مورد حرکت ($|\mathbf{v}| \neq 0$)

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{بردار مماس واحد}$$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \quad \text{بردار قائم واحد اصلی}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad \text{بردار قائم دوم}$$

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \quad \text{خمیدگی}$$

$$\tau = \left| \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right| = \pm \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \quad \text{تاب}$$

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} \quad \begin{array}{l} \text{مؤلفه‌های عددی مماس} \\ \text{و قائم شتاب} \end{array}$$

$$a_T = \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|$$

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T^2}$$

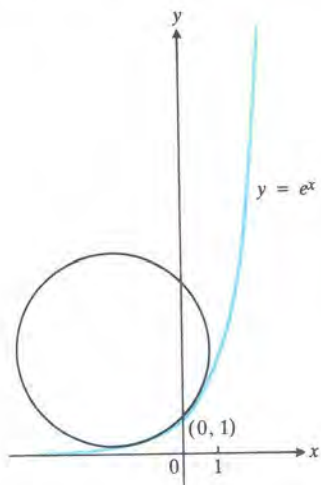
این فرمول را در مورد خم $x = \ln(\sec t)$ ، $y = t$ ، $-\pi/2 < t < \pi/2$ بدکار بندید، و نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید با نتیجه مسأله ۳ مقایسه کنید.

۳۸. معادله دایره خمیدگی خم سطح زیر را بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = (2 \ln t)\mathbf{i} - (t + (1/t))\mathbf{j}.$$

۳۹. معادله دایره خمیدگی خم $y = \sin x$ را در نقطه $(\pi/2, 1)$ بیابید.

۴۰. معادله دایره بوسان خم $y = e^x$ را در نقطه $(0, 1)$ بیابید. با استفاده از این معادله dy/dx و d^2y/dx^2 را در نقطه $(0, 1)$ محاسبه کنید. نشان دهید که مقادیر این مشتقات با مقادیر مشتقات متناظر $y = e^x$ برابرند. شکل ۲۱.۱۴ را ببینید.



۲۱.۱۴ خم $y = e^x$ و دایره بوسان آن در $(0, 1)$. مسأله ۴۰ را ببینید.

۴۱. فرض کنید توابع $x(t)$ و $y(t)$ نسبت به t مشتق اول پیوسته دارند و مشتق $\phi = \tan^{-1}(\dot{y}/\dot{x})$ نسبت به s صفر است. نشان دهید $y = C_1x + C_2$. بدیوان دیگر نشان دهید که اگر $d\phi/ds = 0$ ، مسیری که $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ می‌پیماید خطی راست است.

۴۲. اگر a_N و $|v|$ معلوم باشند به راحتی می‌توان خمیدگی را از رابطه $a_N = \kappa|v|^2$ به دست آورد. از این رابطه استفاده کنید و خمیدگی و شعاع خمیدگی خم زیر را که در مثال ۷ آمده بود به ازای $t > 0$ به دست آورید.

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}.$$

۴۳. دوش به دست آوردن فرمول خمیدگی. با استفاده از روابط

$$\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + \left(t + \frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{j} + \left(t - \frac{1}{3}t^3\right)\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۳$$

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{e}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۴$$

$$\mathbf{R}(t) = (2 + 3t + 3t^2)\mathbf{i} + (2t + 2t^2)\mathbf{j} - (6 \cos t)\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۵$$

$$\mathbf{R}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (t + 2t^2)\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۶$$

در مسائل ۲۷-۳۰، معادلات صفحات بوسان، قائم، و راستگر خمها را به ازای t داده شده بیابید. (شکل ۱۸.۱۴ را ببینید.)

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad t = \pi/4. \quad ۲۷$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۸$$

$$\mathbf{R}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۲۹$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} + (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 0. \quad ۳۰$$

۳۱. نشان دهید که برای خط زیر κ و τ هر دو صفرند

$$\mathbf{R}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}.$$

۳۲. نشان دهید که تاب هر خم سطح (که به اندازه کافی مشتقپذیر باشد) صفر است.

۳۳. نشان دهید که اگر مؤلفه قائم شتاب یک ذره در حال حرکت صفر باشد، مسیر حرکت خط راست است.

۳۴. نشان دهید که اگر مقدار سرعت ذره‌ای ثابت باشد، شتابش در جهت $\mathbf{N}$ است.

۳۵. نشان دهید که اگر نیروی وارد بر ذره‌ای همواره بر بردار سرعتش عمود باشد، مقدار سرعت ثابت است.

۳۶. الف) نشان دهید که خمیدگی نمودار تابعی چون $y = f(x)$ که دوبار مشتقپذیر است از فرمول زیر به دست می‌آید

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

(دانهمایی: فرض کنید $\mathbf{R}(t) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$.)

ب) فرمول قسمت الف را در مورد $y = \ln(\cos x)$ بدکار ببرید و نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید با نتیجه مسأله ۱ مقایسه کنید.

۳۷. رابطه (۳) حاکی است که خمیدگی خم سطح $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ برابر است با

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

(۱۷) و (۱۹) نشان دهید

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \left| \mathbf{B} \kappa \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right| = \kappa |\mathbf{v}|^3.$$

۴۴. فرمول دیگری برای تاب، با استفاده از تعریف $\tau = d\mathbf{B}/ds$ نشان دهید که تاب از فرمول زیر به دست می آید

$$\tau = \frac{|d\mathbf{B}/dt|}{|\mathbf{v}|}.$$

از این فرمول استفاده کنید و تاب پیچ مورد بحث در مثال ۶ یعنی

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

را دوباره به دست آورید.

۴۵. بنا به مثال ۴، خمیدگی پیچ

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k}$$

که در آن $a, b, \omega > 0$ ، برابر است با $\kappa = a\omega^2/(a^2\omega^2 + b^2)$ اگر ω و b معلوم باشند، بزرگترین مقدار κ چه می تواند باشد؟

۴۶. تاب پیچ مسأله ۴۵ را بیابید. اگر خمیدگی، بیشترین مقدار را که در مسأله ۴۵ به دست آمد داشته باشد، مقدار تاب چقدر است؟ اگر a و ω معلوم باشند بزرگترین مقدار تاب چقدر می تواند باشد؟

۴۷. خمهای مشتقپذیر با تاب صفر در یک صفحه واقع اند. این امر که خم مشتقپذیر با تاب صفر در یک صفحه واقع است، حالت خاصی است از این مطلب که ذره‌ای که شتاب و سرعتش همواره عمود بر یک بردار ثابت $\mathbf{C}$ است در صفحه‌ای عمود بر $\mathbf{C}$ حرکت می کند. این مطلب به نوبه خود می تواند جواب مسأله زیر در حساب دیفرانسیل و انتگرال باشد:

فرض کنید $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ دوبار مشتقپذیر باشد، $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$ ، و به ازای هر t ، $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$. در این صورت به ازای هر t داریم $z(t) = 0$. این مسأله را حل کنید. (دانهایی: با $\mathbf{a} = d^2\mathbf{R}/dt^2$ آغاز کنید و شرایط اولیه را به ترتیب معکوس به کار ببرید.)



TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations Super * Grapher

قطبی را عرضه می کنیم و با افزودن محور θ این معادلات را به فضا تعمیم می دهیم. سپس نشان می دهیم هر جسمی که از قوانین گرانش و حرکت نیوتن تبعیت کند در یک صفحه حرکت می کند. مختصات قطبی را در این صفحه معرفی می کنیم و از معادلات در مختصات قطبی بهره می گیریم و سه قانون کپلر در مورد حرکت سیارات را به دست می آوریم. گرچه این روش استنتاج نسبت به آنچه که تاکنون دیده ایم طولانی است، اما یکی از موفقیت های حساب بردارها محسوب می شود و محاسباتی که در مختصات قطبی انجام می شود نمونه محاسباتی است که در مکانیک حرکت سیارات بر روی مدارها انجام می گیرد.

معادلات حرکت در مختصات قطبی

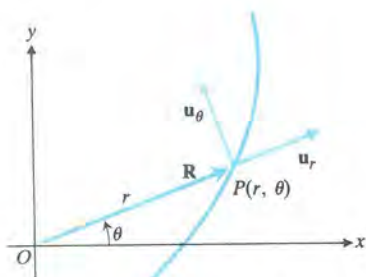
وقتی ذره ای روی خمی در صفحه مختصات قطبی حرکت می کند، مکان، سرعت، و شتابش را بر حسب بردارهای واحد متحرک زیر که در شکل ۲۲.۱۴ دیده می شوند بیان می کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r &= (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta &= -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

بردار $\mathbf{u}_r$ در امتداد بردار شعاعی $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ است به طوری که داریم $\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r$. بردار $\mathbf{u}_\theta$ بر $\mathbf{u}_r$ عمود است و متوجه جهت افزایش θ است. از (۱) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} &= -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta \\ \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} &= -(\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j} = -\mathbf{u}_r. \end{aligned} \quad (2)$$

برای یافتن تغییرات $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ نسبت به زمان باید از آنها



۲۲.۱۴ طول $\mathbf{R}$ برابر است با r یعنی مختص قطبی نقطه P . بنا بر این $\mathbf{u}_r$ که عبارت است از $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ ، برابر با $\mathbf{r}/r$ است.

۴.۱۴ حرکت سیارات و ماهواره ها □

در این بخش معادلات برداری متعارف حرکت در صفحه مختصات

در فضا، به طرف راست رابطه $\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r$ ، $z(t)\mathbf{k}$ را می‌افزاییم

$$\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k} \quad (۷ الف)$$

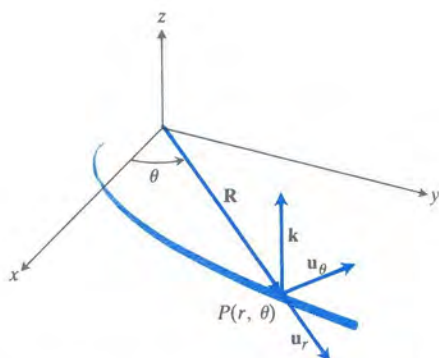
$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (۷ ب)$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \quad (۷ پ)$$

بردارهای $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{k}$ یک دستگاه راست‌گرد می‌سازند که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta &= \mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r &= \mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} &= \mathbf{u}_r. \end{aligned} \quad (۸)$$

شکل ۲۴.۱۴ را ببینید.



۲۴.۱۴ حرکت در فضا که طبق معمول شامل مختصات قطبی در صفحه xy و محور z می‌شود.

مختصات برای حرکت سیارات؛ شرایط اولیه

قانون گرانش نیوتن حاکی است که اگر $\mathbf{R}$ برداری شعاعی از مرکز جرم خورشیدی به جرم M تا مرکز جرم سیاره‌ای به جرم m باشد، آنگاه $\mathbf{F}$ ، نیروی جاذبه گرانشی بین سیاره و خورشید، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \quad (۹)$$

(شکل ۲۵.۱۴). ثابت G در این معادله ثابت گرانش (عام) نامیده می‌شود. اگر جرم بر حسب کیلوگرم، زمان بر حسب ثانیه، و

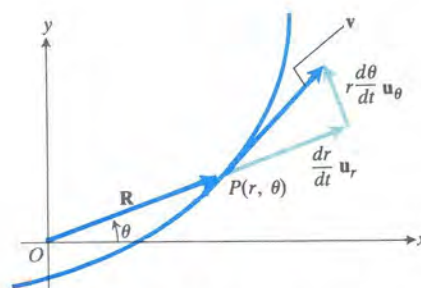
نسبت به t مشتق بگیریم. بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} &= \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \\ \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} &= \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r. \end{aligned} \quad (۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) \\ &= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta. \end{aligned} \quad (۴)$$

شکل ۲۳.۱۲ را ببینید.



۲۳.۱۴ در مختصات قطبی بردار سرعت عبارت است از

$$\mathbf{v} = (dr/dt)\mathbf{u}_r + r(d\theta/dt)\mathbf{u}_\theta.$$

شتاب برابری است با

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left(\frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}\right) \\ &+ \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}\right). \end{aligned} \quad (۵)$$

اگر به کمک روابط (۳)، $d\mathbf{u}_r/dt$ و $d\mathbf{u}_\theta/dt$ را محاسبه کنیم و مؤلفه‌ها را از هم جدا کنیم، معادله شتاب به صورت زیر درمی‌آید

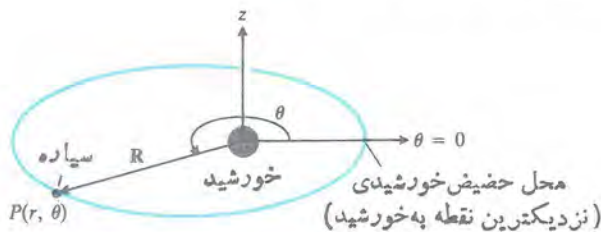
$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\mathbf{u}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta. \quad (۶)$$

برای تعمیم معادلات حرکت در صفحه به معادلات حرکت

داریم

$$\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{C}. \quad (13)$$

معادله (۱۳) حاکی است که $\mathbf{R}$ و $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{v}$ همواره در صفحه‌ای واقع اند که بر $\mathbf{C}$ عمود است و از این رو سیاره در صفحه ثابتی حرکت می‌کند که از مرکز جرم خورشیدش می‌گذرد. حال، چنانچه لازم باشد دستگاه مختصات x, y را به محلی می‌بریم که مبدأ آن بر مرکز جرم خورشید منطبق باشد و صفحه x, y را صفحه حرکت سیاره اختیار می‌کنیم. همچنین محور z را طوری قرار می‌دهیم که $\mathbf{k}$ جهت $\mathbf{C}$ باشد. سپس در صفحه x, y مختصات قطبی را چنان اختیار می‌کنیم که جهت پرتو نخستین، وقتی که سیاره کوتاهترین فاصله را با خورشید دارد با جهت $\mathbf{R}$ یکی باشد. در این حالت پرتو نخستین از محل حضیض خورشیدی سیاره می‌گذرد (شکل ۲۶، ۱۲).



۲۶، ۱۴ دستگاه مختصات برای حرکت سیارات.

اگر وقتی سیاره در حضیض خورشیدی خود است t را برابر صفر بگیریم داریم

$$r(0) = r_0 \quad (\text{کمترین مقدار } r)$$

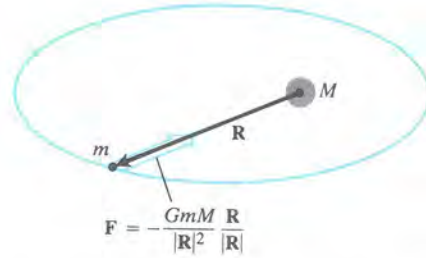
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad (\text{زیرا } r \text{ در } t=0 \text{ مینیمم است}) \quad (14)$$

$$\theta(0) = 0 \quad (\text{سیاره وقتی } t=0 \text{ روی پرتو نخستین است})$$

$$|\mathbf{v}(0)| = v_0 = \left| \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right|_{t=0} = \left| r \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0}.$$

قانون دوم کپلر (قانون مساحت‌های مساوی)

علت اینکه از قانون دوم کپلر شروع کردیم این است که برای اثبات قانون اول به آن نیاز داریم. قانون دوم کپلر حاکی است که بردار شعاعی (از خورشید تا سیاره) در زمانهای مساوی مساحت‌های مساوی را جاروب می‌کند (شکل ۲۷، ۱۲). برای به دست آوردن این قانون، رابطه (۲) را به کار می‌بریم و حاصلضرب برداری (۱۳) را محاسبه



۲۵، ۱۴ نیروی گرانش در امتداد خطی است که مراکز جرم را بهم وصل می‌کند.

فاصله بر حسب متر باشد، G حدود $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$ است.

از ترکیب رابطه (۹) با قانون دوم حرکت نیوتن، $\mathbf{F} = m d^2\mathbf{R}/dt^2$ ، چنین به دست می‌آید

$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GmM}{|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}$$

یا

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GM}{|\mathbf{R}|^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}. \quad (10)$$

این رابطه نمونه‌ای است از یک نیروی مرکزی که همواره متوجه مرکز ثابتی است که در این حالت مرکز جرم خورشید است.

رابطه (۱۰) حاکی است که $d^2\mathbf{R}/dt^2$ با $\mathbf{R}$ متناسب است و در نتیجه

$$\mathbf{R} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

طرف چپ رابطه (۱۱) مشتق $\mathbf{R} \times d\mathbf{R}/dt$ است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{R} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{R} \times \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

بنابراین رابطه (۱۱) معادل است با

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) = \mathbf{0}$$

که از آن می‌توان نتیجه گرفت که به ازای بردار ثابتی چون $\mathbf{C}$

قانون اول کپلر (قانون مقطع مخروطی)

قانون اول کپلر حاکی است که مسیر سیاره مقطعی مخروطی است با معادله

$$r = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{GM}}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1\right) \cos \theta} \quad (18)$$

این مسیر دایره‌است اگر خروج از مرکز، $e = (r_0 v_0^2 / GM) - 1$ ، صفر باشد، بیضی است اگر e بین صفر و ۱ باشد، سهمی است اگر e برابر با ۱ باشد، و هذلولی است اگر e بزرگتر از ۱ باشد. سیاره وقتی به حضیض می‌رسد که θ صفر باشد و در این حالت فاصله سیاره تا کانونی که خورشید در آن قرار دارد دقیقاً همان r_0 است (درستی این مطلب را می‌توان با قرارداد $\cos \theta = 1$ در رابطه (۱۸) تحقیق کرد).

برای به دست آوردن رابطه (۱۸) باید r را بر حسب θ بیان کنیم. این کار نیاز به محاسبات پیچیده و تعدادی جانشانی دارد و به طور کلی آسان نیست.

ضرایب u از روابط (۶) و (۱۰) را مساوی قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (19)$$

از این معادله نمی‌توانیم نسبت به t انتگرال بگیریم زیرا از نحوه تغییر r نسبت به t اطلاع نداریم. بنابراین $d\theta/dt$ را حذف می‌کنیم و به جای آن $r_0 v_0 / r^2$ را از رابطه ۱۶ قرار می‌دهیم

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \quad (20)$$

حال به جای dr/dt ، حرف p را به کار می‌بریم و برای بیان $d^2 r/dt^2$ بر حسب p و r از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم

$$\frac{dr}{dt} = p, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dt} = p \frac{dp}{dr}$$

در معادله (۲۰) به جای $d^2 r/dt^2$ ، $p(dp/dr)$ را قرار می‌دهیم و متغیرها را از هم جدا می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$p dp = \left(\frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \right) dr \quad (21)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه داریم

$$p^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \quad (22)$$



۲۷۰۱۴ خطی که سیاره را به خورشیدش وصل می‌کند در زمانهای مساوی مساحت‌های مساوی را جاروب می‌کند.

می‌کنیم

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{R} \times \mathbf{v} \\ &= r \mathbf{u}_r \times \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) \\ &= r \mathbf{u}_r \times r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \\ &= r \left(r \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (15)$$

اگر $t=0$ ، داریم $\mathbf{C} = r_0 v_0 \mathbf{k}$. بنابراین معادله (۱۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} r_0 v_0 \mathbf{k} &= r^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{k} \\ \text{یا} \\ r^2 \frac{d\theta}{dt} &= r_0 v_0 \end{aligned} \quad (16)$$

در اینجا مساحت وارد کار می‌شود. در بخش ۲۰۱۰ دیدیم که جزء مساحت در مختصات قطبی برابر است با

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

پس

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0 \quad (17)$$

به عبارت دیگر، dA/dt ثابت است و این همان قانون دوم کپلر است. در مورد زمین r_0 حدود 150000000 km ، v_0 حدود 30 km/sec و dA/dt حدود $225000000 \text{ km}^2/\text{sec}$ است.

شرایط اولیه

کدام علامت را برگزینیم؟ می‌دانیم که

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ و } r = r_0, t = 0 \text{ وقتی که}$$

مثبت است، همچنین چون r در $t = 0$ از یک مقدار هینیم شروع به تغییر می‌کند، کاهش نمی‌یابد و درمی‌یابیم که دست کم به ازای مقادیرهای نخستین مثبت t ، $dr/dt \geq 0$ و بنا براین

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \leq 0 \quad \text{و} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} \geq 0$$

و از این رو در رابطه (۲۷) علامت منفی را برمی‌گزینیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{-du}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}} = d\theta. \quad (28)$$

انتگرال رابطه (۲۸) برابر است با

$$\cos^{-1} \left(\frac{u - h}{u_0 - h} \right) = \theta + C_2$$

و چون

$$u = u_0, \theta = 0 \text{ به ازای}$$

و

$$\cos^{-1}(1) = 0 + C_2 = 0.$$

ثابت انتگرالگیری، C_2 ، برابر با صفر است. بنا براین

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos \theta$$

یا

$$u = \frac{1}{r} = h + (u_0 - h) \cos \theta.$$

با چند عمل جبری دیگر نتیجه می‌گیریم

$$r = \frac{(1/h)}{1 + e \cos \theta} \quad (29)$$

که در آن

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{h} = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \quad (30)$$

این، فرمولبندی نوین قانون اول کپلر است.

را به کار می‌بریم تا C_1 را محاسبه کنیم

$$C_1 = v_0^2 \frac{2GM}{r_0}.$$

هرگاه این مقدار C_1 را در رابطه (۲۲) قرار دهیم چنین نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (23)$$

هرگاه دوطرف رابطه (۱۶) را مربع کرده، طرفین رابطه (۲۳) را برطرفین متناظر رابطه حاصل تقسیم کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (24)$$

برای ساده شدن رابطه، $GM/r_0^2 v_0^2$ را برابر h می‌گیریم و رابطه (۲۴) را دوباره می‌نویسیم

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4} + 2h \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (25)$$

برای اینکه رابطه از این هم ساده‌تر شود، جانشانیهای زیر را به کار می‌بریم

$$u = \frac{1}{r}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}, \quad \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

و نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 &= u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 \\ &= (u_0 - h)^2 - (u - h)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

اگر برای به دست آوردن $du/d\theta$ از دوطرف معادله (۲۶) جذر بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{du}{d\theta} = \pm \sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}. \quad (27)$$

در مورد e می‌توان از رابطه (۳۰) بهره گرفت و در مورد a ، θ را در رابطه (۲۹) مساوی با π قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$r_{\max} = \frac{(1/h)}{1-e} = \frac{r_0}{2r_0h-1}.$$

بنابراین،

$$2a = r_0 + r_{\max} = \frac{2r_0^2h}{2r_0h-1} = \frac{2r_0GM}{2GM-r_0v_0^2}. \quad (33)$$

اگر طرفین (۳۲) را مربع کنیم و نتایج روابط (۳۰) و (۳۳) را در آن قرار دهیم قانون سوم کپلر به دست می‌آید (درمسأله ۱۲ از شما خواسته می‌شود این مطلب را ثابت کنید).

اطلاعات نجومی

بسیار اینک کپلر قوانینش را به طور تجربی به دست آورد و آنها را تنها در موردش سیاره‌ای که در آن زمان شناخته شده بود بیان کرد، اما با توجه به استنتاجاتی که کردیم می‌دانیم که این قوانین را می‌توان در مورد هر جسمی به کار برد که نیروی مؤثر در حرکت آن از قانون عکس مجذور تبعیت می‌کند. مثلاً این قوانین را می‌توان در مورد ستاره دنباله‌دار هالی یا اخترواره ایکاروس، یا مدار ماه حول زمین و مدار سفینه فضایی آپولو ۸ حول ماه به کار برد. همچنین این قوانین را می‌توان در مورد جسم نشان داده شده در شکل ۲۸.۱۴ که نیروی مبتنی بر قانون عکس مجذور آن را منحرف می‌کند



۲۸.۱۴ این عکس جسمی را نشان می‌دهد که روی یک هذلولی حرکت می‌کند و این درحالی است که نیروی مبتنی بر قانون عکس مجذور جسم را منحرف می‌کند.

قانون سوم کپلر (قانون دوره گردش-فاصله میانگین)

مدت زمان T را که طول می‌کشد تا سیاره یک دور به دور خورشیدش بچرخد دوره گردش مداری سیاره می‌نامند. نصف طول قطر بزرگ مدار سیاره، a ، فاصله متوسط سیاره از خورشید است. قانون سوم کپلر حاکی است که T و a را رابطه زیر به هم مربوط می‌سازد

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (31)$$

چون همه کمیات طرف راست این رابطه برای یک منظومه شمسی خاص ثابت اند، نسبت T^2/a^3 برای همه سیارات آن منظومه یکی است.

قانون سوم کپلر نقطه شروعی است برای به دست آوردن ابعاد منظومه شمسی ما. به کمک آن می‌توان نصف طول قطر بزرگ مدار هر سیاره را بر حسب واحد نجومی بیان کرد. در این محاسبات، فاصله متوسط زمین تا خورشید را برابر واحد می‌گیریم. به این ترتیب، فاصله بین هر دو سیاره را در هر زمانی می‌توان بر حسب واحد نجومی به دست آورد و کافی است یکی از این فواصل را بر حسب کیلومتر به دست آوریم. به این منظور می‌توان مثلاً با فرستادن امواج به سیاره زهره و دریافت آن به کمک رادار، فاصله زمین تا زهره را یافت. امروزه پس از یک سلسله اندازه گیری مشخص شده است که واحد نجومی برابر با 149597870 km است.

برای به دست آوردن قانون سوم کپلر، دو فرمول مساحت بیضی مسیر را ترکیب می‌کنیم. داریم

$$b \text{ (فاصله سیاره تا خورشید است)} = \pi ab = \text{مساحت}$$

و از رابطه (۱۷) داریم

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^T dA \\ &= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 dt \\ &= \frac{1}{2} T r_0 v_0. \end{aligned}$$

این دو رابطه را مساوی هم قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0}.$$

در مورد هر بیضی داریم $b = a\sqrt{1-e^2}$ ، پس

$$T = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0} \sqrt{1-e^2}. \quad (32)$$

حال باید a و e را بر حسب r_0 ، v_0 ، G و M بیان کنیم.

(شکل ۲۸.۱۲) استفاده کرد. در اینجا مسیر حرکت هذلولی است. حتی ذرات بارداری که به سویی هسته‌ایم پرتاب می‌شوند، در امتداد مسیرهای هذلولوی پراکنده می‌شوند.

در جدول ۱۰.۱۴ تا ۳۰.۱۴ اطلاعاتی درباره مدار سیارات و مدار هشت ماهواره دور زمین آمده است (شکل ۲۹.۱۲).

جدول ۱۰.۱۴ مقادیر a ، e ، و T در مورد سیارات اصلی منظومه شمسی

سیاره	فاصله متوسط از خورشید*	خروج از مرکز	دوره گردش
تیر (عطارد)	۵۷٫۹۵	۰٫۲۰۵۶	۸۷٫۹۶۷ روز
ناهید (زهره)	۱۰۸٫۱۱	۰٫۰۰۶۸	۲۲۴٫۷۰۱ روز
زمین	۱۴۹٫۵۷	۰٫۰۱۶۷	۳۶۵٫۲۵۶ روز
بهرام (مریخ)	۲۲۷٫۸۴	۰٫۰۹۳۴	۱۸۸٫۰۸ سال
برجیس (مشتری)	۷۷۸٫۱۴	۰٫۰۴۸۴	۱۱٫۸۶۱۳ سال
کیوان (زحل)	۱۴۲۷٫۰	۰٫۰۵۴۳	۲۹٫۴۵۶۸ سال
اورانوس	۲۸۷٫۰۳	۰٫۰۴۶۰	۸۴٫۰۰۸۱ سال
نپتون	۴۴۹۹٫۹	۰٫۰۰۸۲	۱۶۴٫۷۸۴ سال
پلوتون	۵۹۰۹	۰٫۲۴۸۱	۲۴۸٫۳۵ سال

* بر حسب میلیون کیلومتر.

جدول ۳۰.۱۴ اطلاعات عددی

ثابت گرانش: $G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$	جرم خورشید: $1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
جرم زمین: $5.975 \times 10^{24} \text{ kg}$	شعاع استوایی زمین: 6378.533 km
شعاع قطبی زمین: 6356.912 km	دوره حرکت وضعی زمین: 1436.1 min
دوره گردش مدار (حرکت انتقالی) زمین:	
$365.256 \text{ روز} = 1 \text{ سال}$	

اطلاعاتی که ونگارد^۱ فرستاد اختلاف میان سطح اقیانوسها را آشکار کرد و نخستین بار امکان تعیین محل دقیق برخی جزایر دور افتاده اقیانوس آرام را فراهم آورد. این اطلاعات، این مطالب را نیز تأیید کرد که گرانش خورشید و ماه بر مدارهای ماهواره‌های دور زمین تأثیر دارد و نور خورشید می‌تواند آن اندازه فشار وارد کند که شکل یک مدار را تغییر دهد. سینکوم^۲ یکی از ماهواره‌های مخابراتی وزارت دفاع امریکا است. تیروس^۳ یکی از چند ماهواره مربوط به هواشناسی است. گوئس^۴ یکی از چند ماهواره‌ای است که برای جمع‌آوری اطلاعات درباره جو زمین طراحی شده‌اند. دوره گردش این ماهواره ۱۴۳۶٫۲ دقیقه است که تقریباً با زمان گردش زمین به دور خودش یعنی ۱۴۳۶٫۱ دقیقه برابر است. مدارش نیز تقریباً مستدیر است ($e = 0.0003$). اینتلست^۵

جدول ۲۰.۱۴ اطلاعاتی در مورد ماهواره‌های زمین

نام	تاریخ پرتاب	مدت سفر	وزن (kg)	دوره گردش (دقیقه)	ارتفاع اوج (km)	ارتفاع حضیض (km)	فاصله متوسط تا زمین (km)	خروج از مرکز
اسپوتنیک ۱	اکتبر ۱۹۵۷	۵۷٫۶ روز	۸۳٫۶	۹۶٫۲	۲۱۵	۹۳۹	۶۹۵۵	۰٫۰۵۲
ونگارد ۱	مارس ۱۹۵۸	۳۰۰ سائ	۱٫۲۷	۱۳۸٫۵	۶۲۹	۲۳۴۰	۸۸۷۲	۰٫۲۰۸
سینکوم ۳	اوت ۱۹۶۴	بیش از ۱۰۶ سال	۳۹	۱۴۳۶٫۲	۳۵۷۱۸	۳۵۹۰۳	۲۲۱۸۹	۰٫۰۰۲
اسکای لب ۴	نوامبر ۱۹۷۳	۸۴٫۰۶ روز	۱۳۹۸۰	۹۳٫۱۱	۲۲۲	۲۳۷	۶۸۰۸	۰٫۰۰۱
تیروس	اکتبر ۱۹۷۸	۵۰۰ سال	۷۳۲	۱۰۲٫۱۲	۸۵۰	۸۶۶	۷۲۳۶	۰٫۰۰۱
گوئس ۴	سپتامبر ۱۹۸۰	بیش از ۱۰۶ سال	۶۲۷	۱۴۳۶٫۲	۳۵۷۷۶	۳۵۸۰۰	۲۲۱۶۶	۰٫۰۰۰۳
اینتلست ۵	دسامبر ۱۹۸۰	بیش از ۱۰۶ سال	۱۹۲۸	۱۴۱۷٫۶۷	۳۵۱۴۳	۳۵۷۰۷	۲۱۸۰۳	۰٫۰۰۷

۱۲۹۵۷۷۰۰۰ km، و خروج از مرکز مدار زمین حول خورشید ۰۱۶۷ دره است. به کمک رابطه ۳۰، سرعت v زمین در روی مدارش در نقطه حضیض را بیابید.

۳. اتحاد جماهیر شوروی سفینه پروتون I به وزن ۱۲۲۰۰ kg را در ژوئیه ۱۹۶۵ به فضا پرتاب کرد. ارتفاع حضیض این ماهواره ۱۸۳ km و ارتفاع اوجش ۵۸۹ km و دوره گردش آن ۹۲٫۲۵ دقیقه است. به کمک رابطه (۳۱) و اطلاعات مربوط به جرم زمین و ثابت گرانش G ، فاصله متوسط این ماهواره از زمین را بیابید. نتیجه به دست آمده را با حاصل جمع ارتفاع حضیض و ارتفاع اوج و قطر زمین مقایسه کنید.

۴. الف) وایکینگ ۱ که از اوت ۱۹۷۵ تا ژوئن ۱۹۷۶ به دور بهرام (مریخ) می چرخید، دوره گردشی برابر ۱۶۳۹ دقیقه داشت. فاصله متوسط این ماهواره تا بهرام را بیابید (جرم بهرام برابر با ۶۴۱۸×۱۰^{۲۳} kg است).

ب) کمترین فاصله مدار وایکینگ ۱ از سطح بهرام ۱۴۹۹ km و بیشترین فاصله آن ۳۵۸۰۰ km بود. قطر متوسط بهرام را به کمک این اطلاعات و نتیجه به دست آمده از الف) به دست آورید.

۵. وایکینگ ۲ که از سپتامبر ۱۹۷۵ تا اوت ۱۹۷۶ به دور بهرام می چرخید مداری بیضی شکل داشت و فاصله متوسط آن از مریخ ۲۲۰۳۰ km بود. دوره گردش وایکینگ ۲ بر حسب دقیقه چقدر بوده است؟

۶. اگر ماهواره‌ای در مداری به دور زمین قرار گیرد به طوری که دوره گردش آن با دوره حرکت وضعی زمین یکی باشد، فاصله متوسطش تا زمین چقدر است؟ نتیجه به دست آمده را با فواصل متوسط ماهواره‌هایی که در جدول ۲۰۱۲ آمده است مقایسه کنید.

۷. جرم بهرام ۶۴۱۸×۱۰^{۲۳} kg است. اگر ماهواره‌ای در مداری حول بهرام قرار گیرد و دوره گردشی برابر دوره حرکت وضعی بهرام یعنی ۱۴۷۷٫۴ دقیقه داشته باشد، متوسط فاصله‌اش تا بهرام چقدر است؟

۸. دوره گردش ماه به دور زمین ۲۳۶۰۵۵×۱۰^۶ sec است. فاصله ماه تا زمین تقریباً چقدر است؟

۹. به ازای چه مقادیری از v مدار در رابطه (۲۹) سهمی است؟ دایره‌ای است؟ بیضی است؟ هذلولی است؟

۱۰. ماهواره‌ای دور زمین در یک مدار مستدیر حرکت می کند. مقدار سرعت ماهواره را به صورت تابعی از شعاع مدار بیان کنید.

۱۱. اگر T بر حسب ثانیه و a بر حسب متر باشد، مقدار T^2/a^3 در مورد سیارات منظومه شمسی چقدر است؟ در مورد ماهواره‌هایی



۲۹۰۱۴ مدار یک ماهواره دور زمین،

ارتفاع اوج + ارتفاع حضیض + قطر زمین = $2a$.

یک ماهواره مخبراتی عظیم برای امور بازرگانی است. در مورد مدارهای مستدیر، e صفر است و رابطه (۲۹) در مورد این مدارها به صورت زیر درمی آید

$$r = \frac{1}{h} = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM}$$

که چون r و v ثابت اند به صورت ساده زیر تبدیل می شود (مسألة ۱۳ را ببینید)

$$r = \frac{GM}{v^2} \quad (۳۲)$$

چون در اینجا $a = r$ ، قانون سوم کپلر برای مدارهای مستدیر به این صورت درمی آید

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \quad (۳۵)$$

مسئله‌ها

توجه: وقتی در محاسبه‌ای قرار است از ثابت گرانش G استفاده شود فاصله را بر حسب متر، جرم را بر حسب کیلوگرم، و زمان را بر حسب ثانیه بیان کنید.

۱. چون فاصله متوسط اسکای لب ۴ از زمین ۶۸۰۸ km است، اگر M را برابر با جرم زمین بگیریم از قانون سوم کپلر دوره گردش این ماهواره به دست می آید. دوره گردش را به دست آورید و نتیجه به دست آمده را با مقداری که در جدول ۲۰۱۴ آمده است، مقایسه کنید.

۲. فاصله زمین از خورشید در نقطه حضیض حدود

که دور زمین می‌چرخند چقدر؟ در مورد ماهواره‌هایی که دور ماه می‌چرخند چقدر؟ (جرم ماه 7.35×10^{22} kg است.)

۱۲. استنتاج قانون سوم کپلر را کامل کنید (بخشی از استنتاج را که زیر رابطه (۳۳) آمده است).

۱۳. نشان دهید مقدار سرعت سیاره‌ای که مداری مستدیر دارد ثابت است. (دانه‌مایی: این مطلب نتیجه‌ای از یکی از قوانین کپلر است.)

۱۴. بدون استفاده از مختصات، برهانی هندسی برای درستی رابطه زیر بیاورید

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|$$

که در آن $\mathbf{R}$ بردار مکان ذره‌ای است که در امتداد خمی واقع در صفحه، حرکت می‌کند و dA/dt آهنگی است که با آن، این بردار مساحت را می‌روبد.

در مسائل ۱۵-۲۰، r و θ مختصات قطبی ذره‌ای هستند که در صفحه حرکت می‌کند. در مورد هر حرکت، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را بر حسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بیان کنید.

۱۵. $\frac{d\theta}{dt} = 3$ و $r = a(1 - \cos \theta)$

۱۶. $\frac{d\theta}{dt} = 2t$ و $r = a \sin 2\theta$

۱۷. $\frac{d\theta}{dt} = 2$ و $r = e^{\theta}$

۱۸. $\theta = 1 - e^{-t}$ و $r = a(1 + \sin t)$

۱۹. $\theta = 2t$ و $r = 2 \cos 2t$

۲۰. الف) $\theta = \pi t$ و $r = \sin \theta$

ب) مطلوب است $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ به ازای $t = 1/2$.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. قواعد مشتقگیری از حاصلضرب عددی و حاصلضرب برداری توابع برداری را بیان کنید. مثالهایی بیاورید.

۲. درباره مشتقگیری از بردارهای با طول ثابت چه می‌دانید؟ مثال بیاورید.

۳. خمیدگی، شعاع خمیدگی، دایره خمیدگی، و مرکز خمیدگی را در مورد خمهای واقع در صفحه تعریف کنید. نمونه‌ای از محاسبات

ارائه دهید. چه نوع از خمهای واقع در صفحه، خمیدگی صفر دارند؟

۴. $\mathbf{N}$ را در مورد خمهای واقع در صفحه تعریف کنید. جهت $\mathbf{N}$ چیست؟

۵. طول در مورد خمهای واقع در فضا چگونه تعریف می‌شود؟ طول یک دور از یک پیچ را محاسبه کنید.

۶. $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}$ ، و τ را در مورد خمهای فضایی تعریف کنید. نمونه‌ای از محاسبات ارائه دهید. چه خمهایی، تاب صفر دارند؟ چه خمهایی تاب صفر و خمیدگی صفر دارند؟

۷. فرمولهای مؤلفه‌های مماس و قائم شتاب یک جسم متحرک کدام‌اند؟ اگر مقدار سرعت جسم ثابت باشد فرمولها به چه صورتی درمی‌آیند؟ در مورد حرکت به دور دایره با مقدار سرعت ثابت چگونه؟

۸. قوانین کپلر را بیان کنید. این قوانین در مورد چه چیزهایی به کار می‌روند؟

مسئله‌های گوناگون

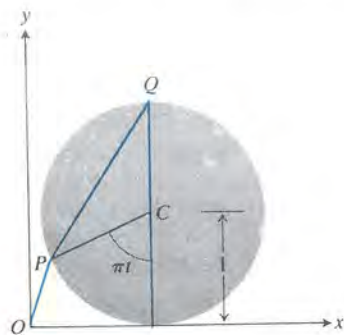
۱. مختصات ذره‌ای که در یک صفحه حرکت می‌کند عبارت‌اند از

$$x = 1/\sqrt{1+t^2}, \quad y = t/\sqrt{1+t^2}.$$

بیشترین مقدار سرعت ذره را بیابید.

۲. چرخ مستدیری روی محور x با سرعت نیم دور در ثانیه بدراست می‌غلتد (شکل ۳۰.۱۴). مکان نقطه P روی محیط این چرخ عبارت است از $\mathbf{R}(t) = (\pi t - \sin \pi t)\mathbf{i} + (1 - \cos \pi t)\mathbf{j}$. مرکز دایره نقطه C است. بالاترین نقطه چرخ در هر لحظه مفروض را Q می‌نامیم.

الف) مطلوب است $\mathbf{v}(t)$ و $\mathbf{a}(t)$.



۳۰.۱۴ چرخ مورد بحث در مسئله ۲.

بر بردار مکانش عمود است. نشان دهید که ذره بر دایره ای به مرکز مبدأ حرکت می کند.

۱۲. سرعت و شتاب ذره ای که در يك صفحه حرکت می کند در نقطه P عبارت اند از $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$. خمیدگی مسیر ذره در P را بیابید.

۱۳. درجه نقطه ای از خم $\gamma = e^*$ شعاع خمیدگی کمترین مقدار را دارد؟

۱۴. خمیدگی مسیر زیر را به صورت تابعی از فاصله جهتدار s نسبت به $(0, 0)$ بیابید

$$\mathbf{R}(\theta) = \left(\int_0^\theta \cos\left(\frac{1}{4}\pi t^2\right) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^\theta \sin\left(\frac{1}{4}\pi t^2\right) dt \right) \mathbf{j}$$

۱۵. نشان دهید که شعاع خمیدگی خم $\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ که در صفحه واقع است، چنین به دست می آید

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \ddot{s}^2}}$$

که در آن، نقطه به معنی مشتق نسبت به t است $\dot{x} = dx/dt$ ، $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ و الی آخر)

$$\ddot{s} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

۱۶. مطلوب است صفحه قائم خم $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$ در نقطه $(1, 1, 2/3)$.

۱۷. مطلوب است $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{K}$ ، $\mathbf{B}$ و τ در مورد خم زیر در $t=0$:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \sin 2t)\mathbf{i} + (e^t \cos 2t)\mathbf{j} + (2e^t)\mathbf{k}.$$

۱۸. معادلات صفحات بوسان، قائم، و راستگر خم زیر را در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

۱۹. شکل ۳۱.۱۲ فاصله جهتدار s بردایره $x^2 + y^2 = a^2$ را نشان می دهد. این فاصله در خلاف جهت ساعت از محور x تا نقطه ای چون P اندازه گیری می شود. در این شکل زاویه ϕ که مماس بردایره در P با محور x می سازد نیز دیده می شود. به کمک روابط $s = a\theta$ و $\phi = \theta + \pi/2$ خمیدگی دایره را مستقیماً از تعریف $\kappa = |d\phi/ds|$ محاسبه کنید.

ب) شیبهای خطوط PQ و PC را به صورت توابعی از t بیابید.

پ) $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ چگونه به خطوط PC و PQ مربوط می شوند؟

۳. مطلوب است معادلات پارامتری خط مماس بر خم زیر در $t=0$:

$$\mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \ln(1-t)\mathbf{k}.$$

۴. طول خم زیر را از $t=0$ تا $t=2$ بیابید

$$\mathbf{R}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$

۵. جسم صلبی با مقدار سرعت زاویه ای ثابت 6 rad/sec حول خط گذرنده از مبدأ و نقطه $A(1, 1, 1)$ دوران می کند. اگر از A به مبدأ بنگریم، دوران را در جهت ساعت می بینیم. سرعت نقطه ای از جسم را بیابید که در مکان $(1, 3, 2)$ است.

۶. ذره ای در صفحه xy حول دایره واحد می گردد. در لحظه t ، مکانش عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

مؤلفه عددی سرعت در جهت $\mathbf{i}$ برابر است با $dx/dt = y$. dy/dt را بیابید. حرکت ذره در جهت ساعت است یا در خلاف آن؟

۷. جسمی بر خم $y = x^3$ (فواصل به متر) حرکت می کند. در نقطه $(3, 3)$ داریم $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 2$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = -2$. در نقطه $(3, 3)$ مقادیر $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}$ را بیابید.

۸. مکان ذره ای در فضا در $t \geq 0$ عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + \left(2 \sin \frac{t}{4}\right)\mathbf{j} + \left(2 - \frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}.$$

نخستین لحظه ای را بیابید که در آن، $\mathbf{R}(t)$ بر بردار $\mathbf{j} - \mathbf{i}$ عمود است.

۹. فرض کنید $\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j}$.

الف) نشان دهید $\mathbf{a} = 2\mathbf{v} - 2\mathbf{R}$.

ب) نشان دهید که زاویه بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{R}$ ثابت است.

پ) این زاویه را بیابید.

۱۰. حرکت ذره ای در صفحه xy عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j}.$$

مطلوب است مقدار سرعت و مؤلفه های مماس و قسائم شتاب در $t = \sqrt{3}$.

۱۱. ذره ای چنان حرکت می کند که مشتق بردار مکانش همواره

۲۴. يك معادله كپلر، مسألهٔ يسافتن محل يك سياره بر مدارش در لحظه‌ای مفروض، ايجاد مي‌كند كه معادلات «كپلر» را كه به صورت زيرند حل كنيم

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{4} \sin x = 0.$$

الف) نشان دهيد كه $f(x)$ در نقطه‌ای بين $x=0$ و $x=2$ ریشه دارد.

ب) در معادله $f(x)=0$ به جای $\sin x$ صورت خطی شده‌اش در $x=\pi/2$ را قرار دهيد و معادله خطی حاصل را حل كنيد. به اين ترتيب جوابی تقریبی برای معادله $f(x)=0$ به دست می‌آوريد.

پ) ماشین حساب درستی جواب به دست آمده را با قرار دادن آن در معادله بررسی كنيد.

۲۵. در بخش ۴.۱۲ بردار سرعت ذره‌ای را كه در يك صفحه حرکت می‌كند چنین به دست آوردیم

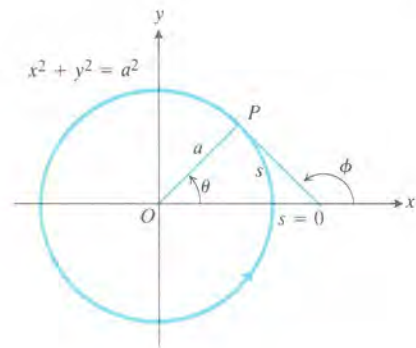
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + \frac{r d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta.$$

الف) با محاسبهٔ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}$ و $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}$ عبارات dx/dt و dy/dt را بر حسب dr/dt و $r d\theta/dt$ بیان كنيد.

ب) با محاسبهٔ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_r$ و $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\theta$ عبارات dr/dt و $rd\theta/dt$ را بر حسب dx/dt و dy/dt به دست آوريد.

۲۶. اگر ذره‌ای در يك بیضی با معادله قطبی $r=c/(1-e \cos \theta)$ حرکت كند و شتاب آن متوجه مبدأ باشد، نشان دهيد اندازهٔ شتاب با $1/r^2$ متناسب است.

۲۷. فضانوردان اسکای لب، وقتی كه این ماهواره در ارتفاع اوجش بود، چند درصد از سطح زمین را می‌توانستند ببینند؟ (ارتفاع اوج اسکای لب ۴ برابر بود با ۴۳۷ km).



۳۱.۱۴ دایره مورد بحث در مسأله ۱۹.

۲۰. ذره‌ای چنان حرکت می‌كند كه مكانش در لحظهٔ t دارای مختصات قطبی $r=t$ ، $\theta=t$ است. مطلوب است سرعت $\mathbf{v}$ ، شتاب $\mathbf{a}$ ، و خمیدگی κ در $t=0$.

۲۱. مطلوب است رابطه‌ای برای خمیدگی خمی كه در صفحه قرار دارد و معادله‌اش در مختصات قطبی عبارت است از $r=f(\theta)$.

۲۲. مختصات قطبی ذره‌ای در لحظهٔ t عبارت اند از

$$r = e^{\omega t} + e^{-\omega t}, \quad \theta = t$$

كه در آن ω ثابت است. بردار شتاب را در $t=0$ بیابيد.

۲۳. میلهٔ باریکی كه از نقطهٔ ثابت O می‌گذرد حول O در يك صفحه با سرعت ثابت 3 rad/min می‌چرخد. حشره‌ای روی میله با سرعت ثابت 1 in/min به طرف O می‌رود. مختصات قطبی را در صفحه به كار گیرید به طوری كه O مبدأ دستگاه باشد و فرض كنید حشره از نقطهٔ $r=2$ ، $\theta=0$ شروع به حرکت می‌كند. الف) مطلوب است سرعت و شتاب حشره به صورت قطبی، وقتی كه حشره در نیمه راه مبدأ است.

ب) حشره وقتی كه به مبدأ می‌رسد چه مسافتی را پیموده است؟

رویه‌ها، دستگاه‌های مختصات، و ترسیم

چشم‌انداز

موضوع هندسی مشترکی که این فصل و سه فصل آتسی این کتاب را به هم پیوند می‌دهد، رویه است. رویه‌ها نمودار تابعهای دومتغیره هستند و در مورد این تابعها همان نقشی را برعهده دارند که خمها در مورد تابعهای تک‌متغیره. رویه‌ها اطلاعاتی دربارهٔ آهنگهای تغییر، مقدارهای اکسترمم، وجود ریشه‌ها در اختیار ما می‌گذارند و نیز مرزهای نواحی فضایی را تشکیل می‌دهند و فرمولهای آنها در انتگرالهایی که حجمها، مساحت رویه‌ها، و مراکز جرم این نواحی را به دست می‌دهند، به کار می‌رود. همچنین از رویه‌ها به صورت مدل غشاهایی که سیال از طریق آنها جریان می‌یابد و ورقهایی که بارهای الکتریکی روی آنها توزیع می‌شوند و دیواره‌های مخزنهایی که در معرض انواع فشارها قرار می‌گیرند، استفاده می‌شود. همهٔ اینها را در فصلهایی که در پیش داریم خواهیم دید.

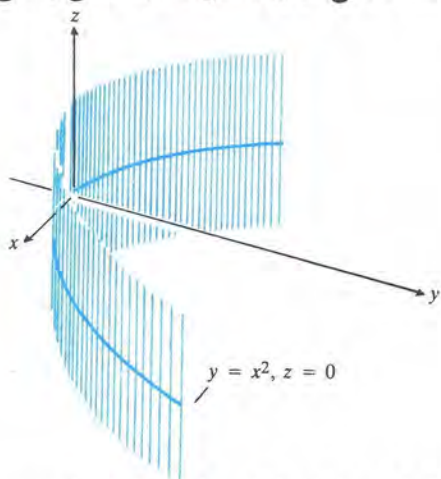
در فصل حاضر، هدف ما آشنا شدن با رویه‌هایی است که در نظریه و کاربردهای حساب تابعهای با بیش از یک متغیر، بیشتر از سایر رویه‌ها بدکار می‌روند؛ یعنی خواهیم دید که این گونه رویه‌ها به چه صورتی هستند، معادلاتشان چیست، و چگونه می‌توان آنها را رسم کرد.

همچنین دو دستگاه جدید مختصات را که برای فضا به کار می‌روند بررسی خواهیم کرد: مختصات استوانه‌ای، و مختصات کروی. ممکن است معادلهٔ یک رویه در یکی از این دستگاهها ساده‌تر از معادلهٔ آن در دستگاه مختصات دکارتی باشد. در چنین مواردی، استفاده از دستگاه مناسب باعث صرفه‌جویی در وقت می‌شود.

۱.۱۵ استوانه

رویه‌ای که ترسیم آن و نوشتن معادله‌اش از همهٔ رویه‌ها، صرف نظر از صفحه، آسانتر است، استوانه است. استوانه، رویه‌ای است متشکل از همهٔ خطوطی که از یک خم واقع در صفحه می‌گذرند و با خط ثابتی موازی‌اند. مثلاً، شکل ۱.۱۵ نشان‌دهندهٔ استوانه‌ای است متشکل از خطهای موازی با محور z و گذرنده از خم $y = x^2$ واقع در صفحهٔ xy . در این بخش، نحوهٔ ترسیم استوانه‌ها و نوشتن معادلاتشان را نشان می‌دهیم.

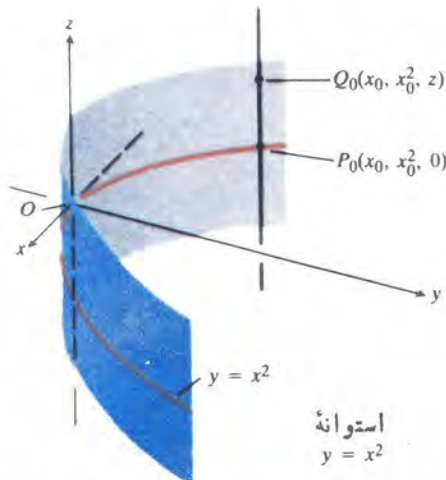
در هندسهٔ فضایی، واژهٔ «استوانه» را گاهی به معنی «استوانهٔ



۱.۱۵ استوانه‌ای که از خطهای گذرنده از سهمی $y = x^2$ در صفحهٔ xy و موازی با محور z تشکیل می‌شود.

مستدیر» به کار می‌برند ولی ما در اینجا این کار را نمی‌کنیم. در شکل ۱.۱۵، مقاطعی از استوانه که بر محور z عمودند، سهمی داشته باشند. استوانه‌های مورد بحث ما می‌توانند هر نوع مقطعی داشته باشند.

مثال ۱ معادله‌ای برای استوانه سهمی شکل ۱.۱۵ بیابید.



۲.۱۵ هر نقطه استوانه شکل ۱.۱۵ دارای مختصات به صورت (x_0, x_0^2, z) است.

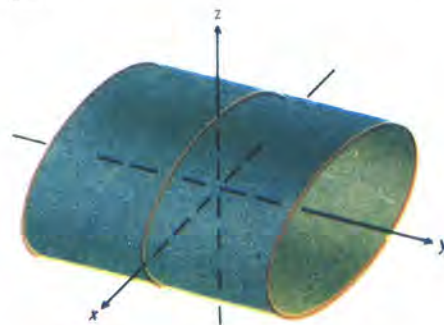
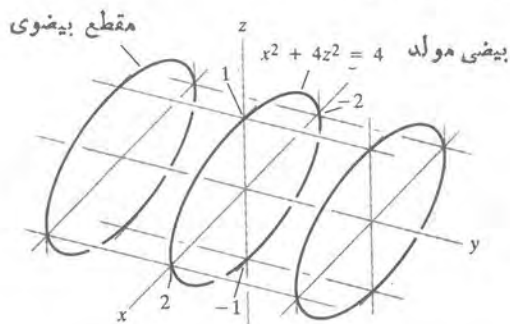
حل: فرض می‌کنیم $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ روی سهمی $y = x^2$ واقع در صفحه xy قرار داشته باشد. در این صورت، به ازای هر مقدار z ، نقطه $Q(x_0, x_0^2, z)$ روی این استوانه واقع است زیرا این نقطه روی خط $x = x_0, y = x_0^2$ قرار دارد که از P_0 می‌گذرد و موازی با محور z است. به عکس، هر نقطه $Q(x_0, x_0^2, z)$ که مختص z آن مربع مختص x باشد روی این استوانه است زیرا چنین نقطه‌ای روی خط $x = x_0, y = x_0^2$ قرار دارد که از P_0 می‌گذرد و با محور z موازی است. شکل ۲.۱۵ را ببینید. پس مقدار z هر چه باشد، نقاط واقع بر رویه نقاطی هستند که مختصاتشان در معادله $y = x^2$ صدق می‌کنند. به عبارت دیگر، $y = x^2$ معادله این استوانه است.

x, y ، آن را می‌سازند، و نظایر اینها. به همین نحو، هر خم $g(x, z) = C$ واقع در صفحه xz استوانه‌ای را مشخص می‌کند که موازی محور y و معادله‌اش همان $g(x, z) = C$ است، و هر خم $h(y, z) = C$ مشخص کننده استوانه‌ای است موازی محور x که معادله‌اش همان $h(y, z) = C$ است.

خلاصه اینکه، معادله‌ای بر حسب دو مختص از سه مختص دکارتی، مشخص کننده استوانه‌ای است که خطهای موازی با محور مختص سوم آن را می‌سازند. شکل‌های ۳.۱۵ و ۴.۱۵ را ببینید.

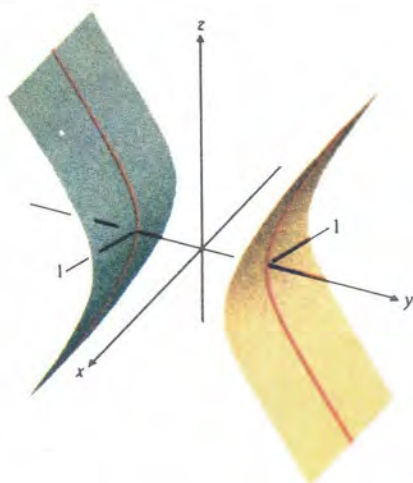
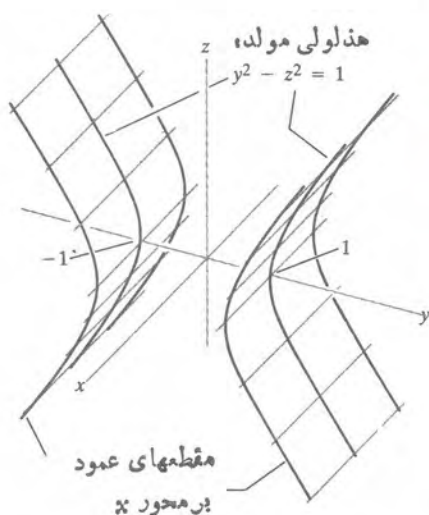
همان‌طور که از مثال ۱ برمی‌آید، هر خم $f(x, y) = C$ واقع در صفحه xy استوانه‌ای را مشخص می‌کند که موازی محور z و معادله‌اش همان $f(x, y) = C$ است. معادله $x^2 + y^2 = 1$ مشخص کننده استوانه مستدیری است متشکل از خطهای موازی محور z و گذرنده از دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع در صفحه xy . معادله $x^2 + 4y^2 = 9$ استوانه‌ای بیضوی را مشخص می‌کند که خطهای موازی محور z و گذرنده از بیضی $x^2 + 4y^2 = 9$ واقع در صفحه

استوانه بیضوی $x^2 + 4z^2 = 4$



۳.۱۵ استوانه بیضوی $x^2 + 4z^2 = 4$ از خطهایی به وجود می‌آید که موازی محور y و گذرنده از بیضی $x^2 + 4z^2 = 4$ در صفحه xz اند. مقاطعهای این استوانه با صفحات عمود بر محور y بیضیهایی قابل انطباق بر بیضی مولد استوانه هستند. این استوانه در سراسر محور y امتداد دارد ولی ما فقط قسمت محدودی از آن را می‌توانیم رسم کنیم.

استوانه هذلولوی $y^2 - z^2 = 1$



۴.۱۵ استوانه هذلولوی $y^2 - z^2 = 1$ از خطهایی به وجود می آید که موازی محور x و گذرنده از هذلولی $y^2 - z^2 = 1$ واقع در صفحه yz اند. مقطعیهای این استوانه با صفحات عمود بر محور x هذلولیهای قابل انطباق بر هذلولی مولد استوانه هستند.

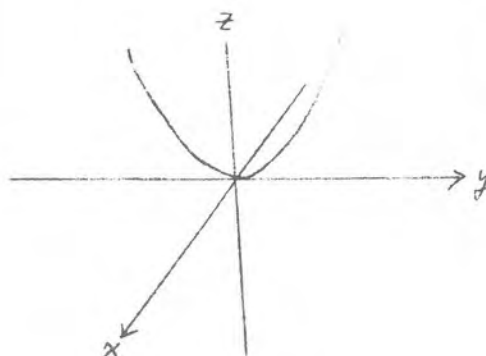
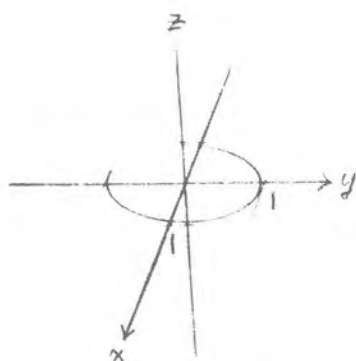
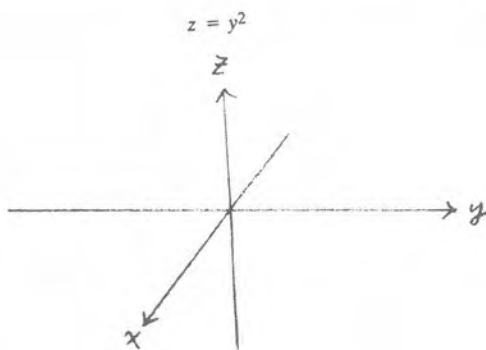
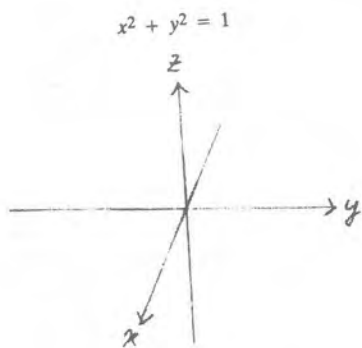
رسم استوانه‌های موازی محورهای مختصات

در اینجا چند توصیه در مورد رسم استوانه‌ها می‌کنیم. مثل همیشه، مداد بهتر از خودکار است چون اثر آن را در صورت لزوم می‌توان

پاک کرد ولی این توصیه‌ها صرف نظر از وسیله‌ای که برای ترسیم به کار می‌برید، مفیدند. کافی است معلوم کنید که استوانه با کدام محور موازی است و مراحل را که نشان می‌دهیم، طی کنید.

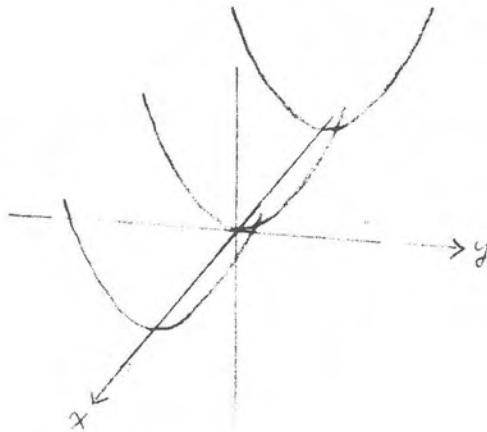
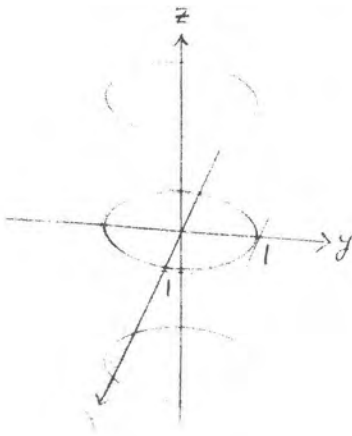
شیوه رسم استوانه‌های موازی محورهای مختصات

۱. هر سه محور مختصات را خیلی کمرنگ بکشید.

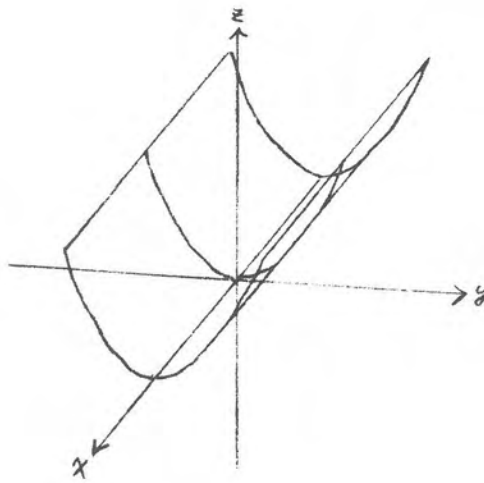
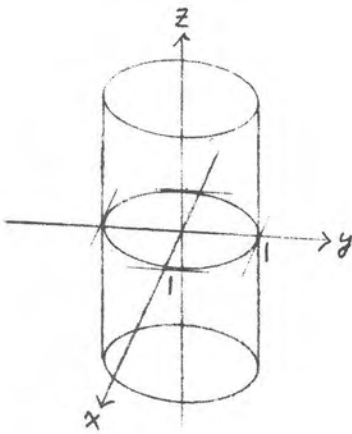


۲. مقطع استوانه را با صفحه مختصات دو متغیری که در معادله استوانه دیده می‌شوند، خیلی کمرنگ بکشید.

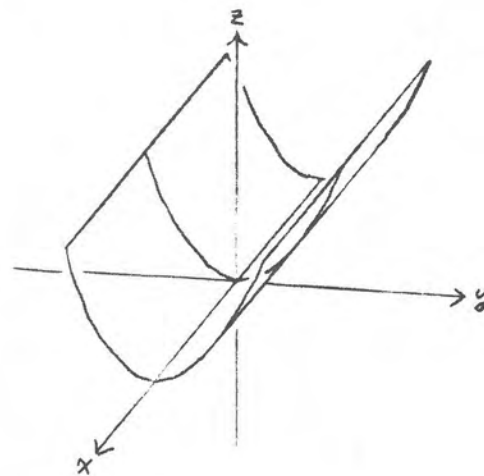
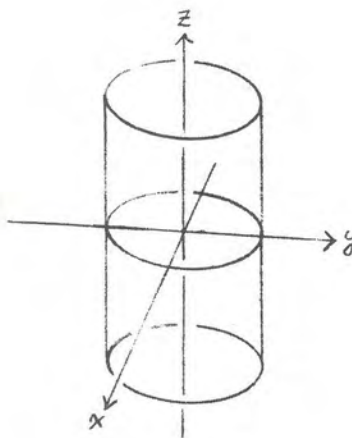
۳. مقطعهای استوانه را با صفحات موازی مقطع رسم شده، در دو طرف بکشید (باز هم کمر ننگ).



۴. دو یال موازی جانبی را بکشید تا شکل مشخص شود.



۵. اگر می‌خواهید شکل مشخصتر باشد، قسمت‌هایی از خطوط را که در معرض دید هستند پررنگ کنید و بگذارید قسمت‌های مخفی کمرنگ باشند. در صورت امکان از خط‌چین استفاده کنید.



۲۰. پیچ $R(t) = (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$ روی یک استوانه قرار دارد. این استوانه را رسم کنید و روی آن، قسمتی از پیچ را از $t = -2\pi$ تا $t = 2\pi$ بکشید.

۲۱. الف) نشان دهید که خم

$$R(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}$$

مقطع یک صفحه با یک استوانه است. چه استوانه‌ای؟ چه صفحه‌ای؟

ب) صفحه و استوانه را رسم کنید.

پ) انتگرالی برای طول این خم بنویسید ولی سعی نکنید انتگرال را محاسبه کنید. این محاسبه در سطح مقدماتی نیست.

مسئله‌ها

استوانه‌های مذکور در مسئله‌های ۱-۱۸ را رسم کنید.

۱. $x^2 + y^2 = 4$

۲. $x^2 + z^2 = 4$

۳. $y^2 + z^2 = 1$

۴. $z = y^2/2$

۵. $z = y^2 - 1$

۶. $x = y^2$

۷. $z = 4 - x^2$

۸. $x = 4 - y^2$

۹. $y = x^2$

۱۰. $y = x^2 - 2$

۱۱. $y = -x$

۱۲. $z = -y$

۱۳. $y^2 + 2z^2 = 16$

۱۴. $2x^2 + y^2 = 36$

۱۵. $z^2 + 4y^2 = 9$

۱۶. $y^2 - z^2 = 4$

۱۷. $z^2 - y^2 = 1$

۱۸. $yz = 1$

۱۹. توضیح دهید که این گزاره درست است یا غلط: هر صفحه، یک استوانه است.

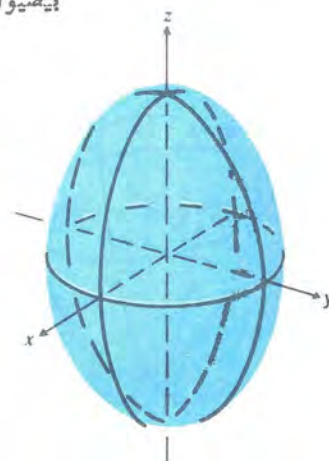
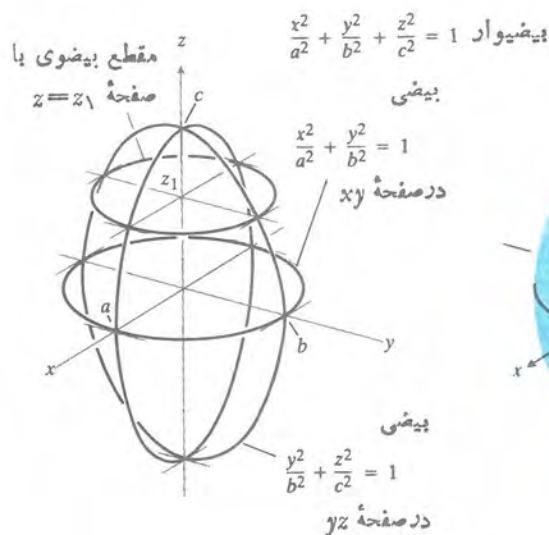
۲.۱۵ رویه‌های درجه دوم

بیشتر استوانه‌هایی که در بخش ۱.۱۵ دیدیم، رویه‌های درجه دوم بودند یعنی رویه‌هایی که معادلاتشان ترکیبی از جمله‌های درجه دوم، جمله‌های درجه اول، و مقادیر ثابت است. در این بخش، رویه‌های درجه دوم دیگری را توصیف می‌کنیم و نحوه ترسیم آنها را نشان می‌دهیم. ثابت‌های a ، b ، و c در مثال‌ها همگی مثبت‌اند.

مثال ۱ بیضیوار (شکل ۵.۱۵)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(۱)



۵.۱۵ نمونه‌ای از یک بیضیوار.

xy واقع است زیرا اگر هر يك از x یا y مخالف صفر باشد، z مثبت است. مقاطع این رویه با صفحات مختصات عبارت‌اند از

$$z = \frac{c}{b^2} y^2 \quad x = 0$$

$$z = \frac{c}{a^2} x^2 \quad y = 0 \quad (۲)$$

$$z = 0 : \text{نقطه } (0, 0, 0).$$

هر صفحه $z = z_1$ در بالای صفحه xy این رویه را در بیضی زیر قطع می‌کند

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_1}{c}.$$

مثال ۳ سهمیوار مستدیر یا سهمیوار دورانی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (۵)$$

از قرار دادن $b = a$ در معادله سهمیوار بیضوی، معادله ۳، به دست می‌آید. مقطعی‌های این رویه با صفحه‌های عمود بر محور z دایره‌هایی هستند که مراکزشان روی محور z است. مقطعی‌های آن با صفحه‌های شامل محور z ، سهمیهایی هستند قابل انطباق برهم [برابر] که کانون مشترکشان در نقطه $(0, 0, a^2/c)$ است.

آنتنهایی که در تلسکوپ رادیویی، ردیاب ماهواره‌ای، و ارتباط رادیویی مایکروویو به کار می‌روند اغلب به شکل قطعه‌هایی از سهمیوار مستدیر هستند (شکل ۷.۱۵).

محورهای مختصات را در $(\pm a, 0, 0)$ ، $(0, \pm b, 0)$ ، و $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌کند و در داخل مکعب مستطیل

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c$$

قرار دارد. چون در معادله این رویه فقط توانهای زوج x ، y ، و z وجود دارند، رویه نسبت به هر يك از صفحات مختصات متقارن است. مقطعی‌های آن با صفحات مختصات به شکل بیضی هستند. مثلاً

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0$$

هر مقطع این رویه با صفحه‌ای چون

$$z = z_1, \quad |z_1| < c$$

یک بیضی است

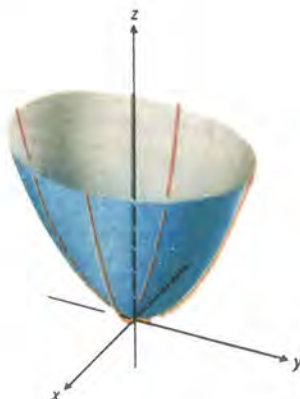
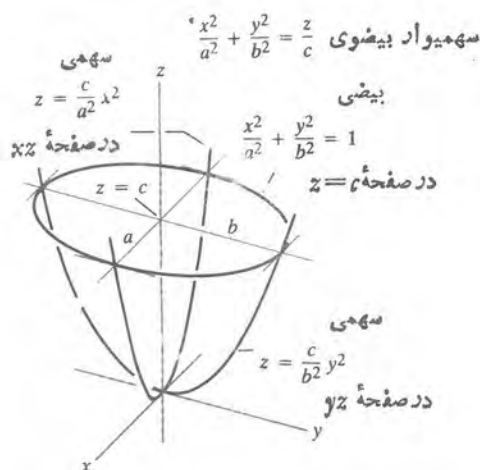
$$\frac{x^2}{a^2[1 - (z_1^2/c^2)]} + \frac{y^2}{b^2[1 - (z_1^2/c^2)]} = 1. \quad (۲)$$

وقتی دو تسا از سه نیم‌قطر a ، b ، و c برابر باشند، این رویه یک بیضیوار دورانی است و وقتی هر سه برابر باشند، یک کره است.

مثال ۲ سهمیوار بیضوی (شکل ۶.۱۵)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (۳)$$

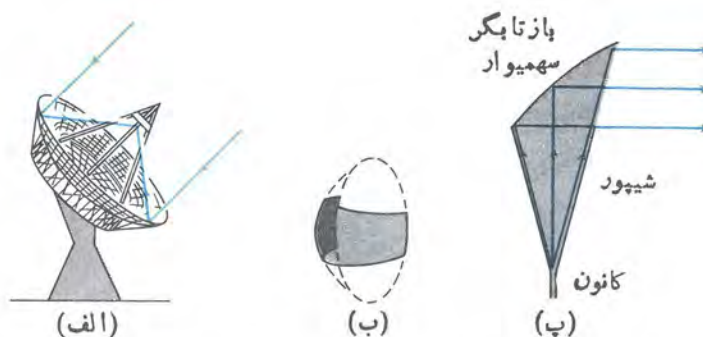
نسبت به صفحه‌های $x = 0$ و $y = 0$ متقارن است. تنها نقطه تقاطعش با محورها، مبدأ است. صرف‌نظر از این نقطه، رویه در بالای صفحه



۶.۱۵ رویه $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = z/c$ یک سهمیوار بیضوی است. مقطعی‌های این رویه با صفحه‌های عمود بر محور z در بالای صفحه xy ، بیضی‌اند. مقطعی‌های آن با صفحاتی که شامل محور z اند، سهمی هستند.

هندسه تحلیلی سه بعدی

هندسه تحلیلی سه بعدی را ریاضیدانان قرن هفدهم از قبیل فرما، دکارت و لاهیر^۱ ابداع کردند ولی دستگاه مختصاتی را که ما امروز به کار می‌بریم، یوهان برنولی در نامه‌ای به لایب‌نیتس در ۱۷۱۵ صورتبندی کرد. در قرن هجدهم، آلکسی کلرو (۱۷۱۳-۱۷۶۵) و لئونهارت اویلر (۱۷۵۷-۱۷۸۳) بسجسته‌ترین ریاضیدانانی بودند که هندسه سه بعدی را گسترش دادند. به خصوص کلرو معلوم ساخت که يك رویه را می‌توان بسا معادله‌ای بر حسب سه مختص نشان داد و برای توصیف خمی در فضا، دو تا از این گونه معادله‌ها لازم است. او ایده‌هایش را در کتاب تحقیق دبداده خمهای بسا خمیدگی مضاعف در ۱۷۳۱ مطرح کرد. وی در این کتاب معادلات چندین رویه درجه دوم از قبیل کره، استوانه، هذلولیوار، و بیضیوار را آورد. توجه او در نهایت معطوف به شکل زمین بود که فکر می‌کرد نوعی بیضیوار باشد. گاسپار مونژ هندسه‌دان پیشرو قرن هجدهم نیز مطالب زیادی در باره هندسه تحلیلی سه بعدی نوشت.



۷۰۱۵ خیلی از آنتنها به شکل قطعاتی از سهمیوار دورانی هستند. ۱۱ الف در تلسکوپ رادیویی از همان اصولی که تلسکوپ نوری بر آنها مبتنی است، استفاده می‌شود. (ب) يك بازتابگر را دار «برش-مستطیلی». (پ) مقطعی از يك آنتن شیپوری در يك ارتباط رادیویی مایکروویو.

مثال ۴ مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (۶)$$

نسبت به سه صفحه مختصات متقارن است (شکل ۸.۱۵). مقطعی آن با صفحه‌های مختصات عبارت اند از

$$z = \pm \frac{c}{b} y \quad \text{خطهای } x = 0 \quad (۷)$$

$$z = \pm \frac{c}{a} x \quad \text{خطهای } y = 0 \quad (۸)$$

$$z = 0 : \text{نقطه } (0, 0, 0).$$

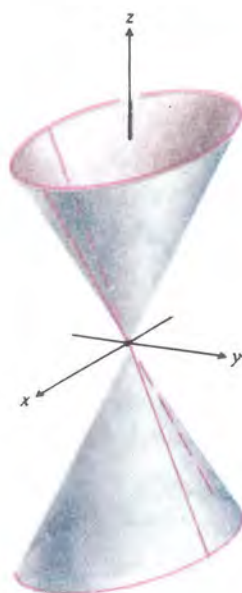
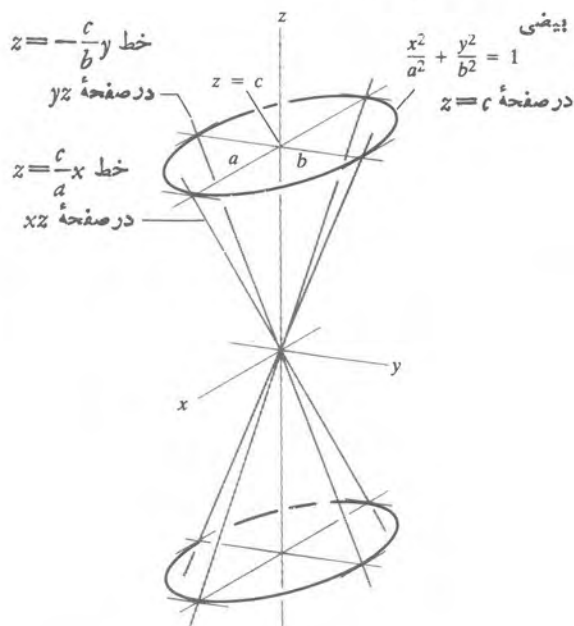
مقطعی این رویه با صفحات $z = z_1$ در بالا و پایین صفحه xy بیضیهایی هستند که مراکزشان روی محور z و رأسهایشان روی خطهای مذکور در معادلات (۷) و (۸) واقع اند. اگر $a = b$ ، این مخروط يك مخروط مستدیر قائم است.

مثال ۵ هذلولیوار یکپارچه (شکل ۹.۱۵)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (۹)$$

نسبت به هر يك از سه صفحه مختصات، متقارن است. مقطعی این

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad \text{منحروط بیضوی}$$



۸۰۱۵ رویه $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = z^2/c^2$ است. صفحه‌های عمود بر محور z این مخروط را در بیضیهایی در بالا و پایین صفحه xy قطع می‌کنند. هر صفحه قائمی که شامل محور z باشد مخروط را در یک جفت خط متقاطع قطع می‌کند.

صفحه $z=c$ این رویه را در بیضی که مرکزش روی محور z است و رأسهایش روی یکی از هذلولیهای (۱۰) واقع‌اند، قطع می‌کند.

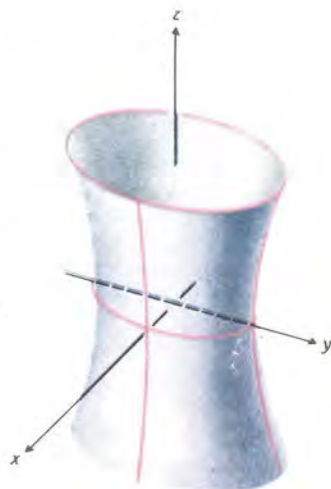
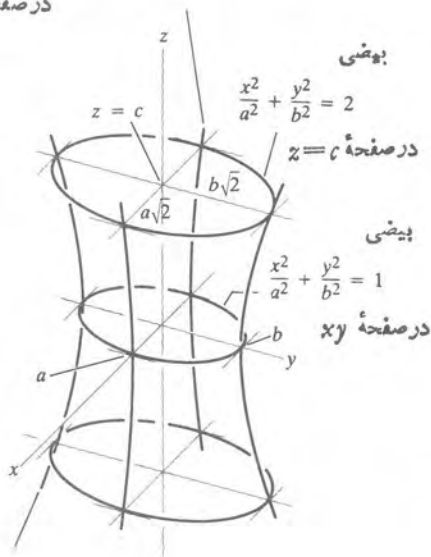
این رویه، همبند [متصل] است. یعنی بدون خارج شدن از رویه می‌توان از هر نقطه واقع بر آن به هر نقطه دیگر واقع بر آن رفت. بدین دلیل، آن را یکپارچه می‌نامند. برخلاف این رویه، هذلولیوار مثال بعد دوپارچه است.

اگر $a=b$ ، این هذلولیوار یک رویه دورانی است.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{هذلولیوار}$$

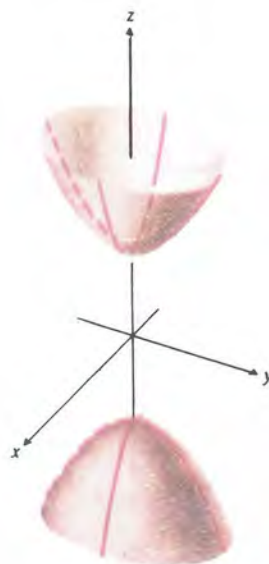
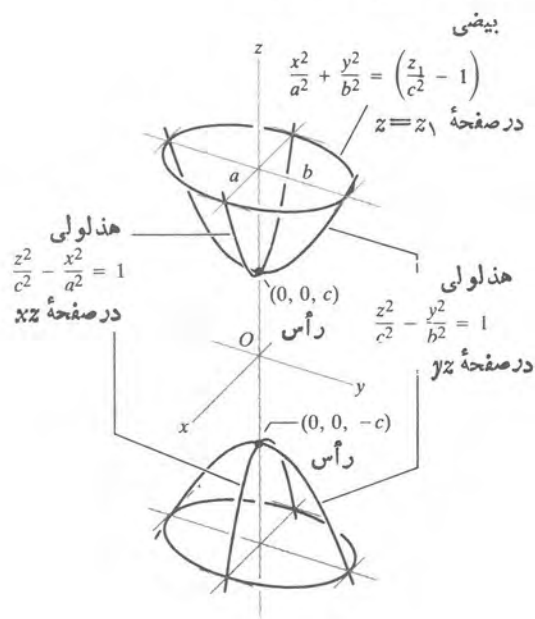
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{قسمتی از هذلولی}$$

در صفحه xy



۹۰۱۵ رویه $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ است. صفحه‌های عمود بر محور z آن را در بیضیهایی قطع می‌کنند. صفحه‌های قائمی که شامل محور z باشند این رویه را در مقاطعهایی به شکل هذلولی قطع می‌کنند.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{هذلولیوار}$$



۱۰۱۵ رویه $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ یک هذلولیوار (بیضوی) دوپارچه است. صفحات عمود بر محور z در بالا و پایین رأسها این رویه را در مقطعهایی به شکل بیضی قطع می‌کنند. مقطعهایی با صفحات قائمی که شامل محور z اند، هذلولی هستند.

مثال ۶ هذلولیوار دوپارچه (شکل ۱۰.۱۵)

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (۱۱)$$

نسبت به هر سه صفحه مختصات متفاوت است. صفحه $z = 0$ این رویه را قطع نمی‌کند؛ در واقع، برای اینکه این صفحه رویه را قطع کند باید به ازای مقادیر حقیقی x و y در معادله (۱۱)، داشته باشیم

$$|z| \geq c.$$

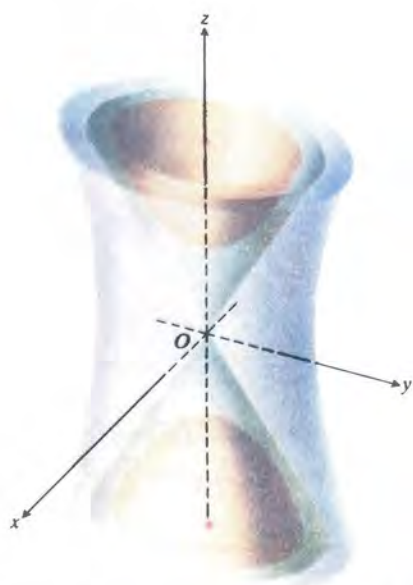
مقطعه‌های هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \quad x = 0$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1: \quad y = 0$$

رأسها و کانونهایشان روی محور z است. این رویه متشکل از دو قسمت جداگانه است، یکی بالای صفحه $z = c$ و دیگری، پایین صفحه $z = -c$. عنوان «دوپارچه» به این دلیل به این رویه اطلاق می‌شود.

معادله‌های (۹) و (۱۱) از لحاظ تعداد جملات منفی در طرف چپشان، وقتی طرف راست ۱+ است، تفاوت دارند. تعداد جمله‌های منفی برابر با تعداد پارچه‌های هذلولیوار است. اگر این معادله‌ها را با معادله (۶) مقایسه کنیم، می‌بینیم که با قراردادن صفر به جای یک در طرف راست هر یک از معادله‌های (۹) یا (۱۱)، معادله یک مخروط به دست می‌آید. این مخروط (شکل ۱۱.۱۵) در واقع مجانب



۱۱.۱۵ مخروط، مجانب هر دو هذلولیوار است.

هر دو هذلولیوار (۹) و (۱۱) است، همان‌طور که خطهای

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

مجانهای دو هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

در صفحه xy اند.

مثال ۷ سهمیوار هذلولوی (شکل ۱۲.۱۵)

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \quad (12)$$

نسبت به صفحه‌های $x=0$ و $y=0$ تقارن دارد. مقطعهایش با این دو صفحه عبارت اند از

$$x=0: \text{ سهمی } z = \frac{c}{b^2} y^2 \quad (13)$$

$$y=0: \text{ سهمی } z = -\frac{c}{a^2} x^2 \quad (14)$$

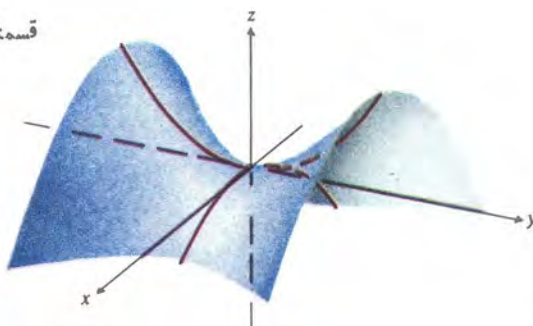
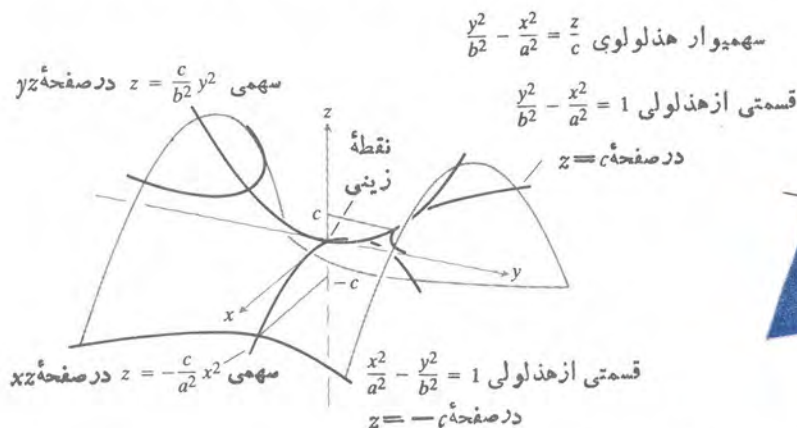
در صفحه $x=0$ ، سهمی به طرف بالا باز می‌شود و رأس آن در مبدأ است. سهمی واقع در صفحه $y=0$ نیز همین رأس را دارد ولی این سهمی به طرف پایین باز می‌شود.

اگر این رویه را با صفحه‌ای چون $z=z_1 > 0$ قطع کنیم، مقطع حاصل يك هذلولی است

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_1}{c} \quad (15)$$

که محور کانونی‌اش موازی با محور z است و رأسهایش بر سهمی مذکور در (۱۳) واقع اند. ولی اگر z_1 در معادله (۱۵) منفی باشد محور کانونی هذلولی موازی با محور x است، و رأسهایش روی سهمی مذکور در (۱۴) قرار دارند.

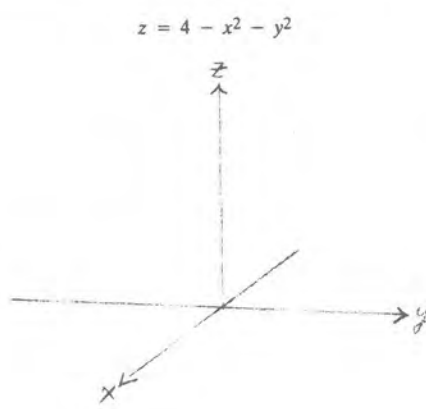
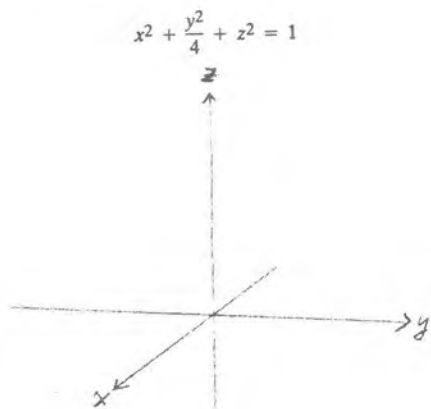
در نزدیکی مبدأ، رویه به شکل زین اسب است. از نظر شخصی که بر روی این رویه در صفحه xy حرکت می‌کند، مبدأ يك نقطه مینیمم است؛ ولی اگر شخصی در صفحه xz حرکت کند، مبدأ به صورت يك نقطه ماکسیمم به نظرش می‌رسد. چنین نقطه‌ای را يك نقطه زینی یا مینیماکسی رویه می‌نامند (شکل ۱۲.۱۵). نقاط ماکسیمم و مینیمم رویه را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.



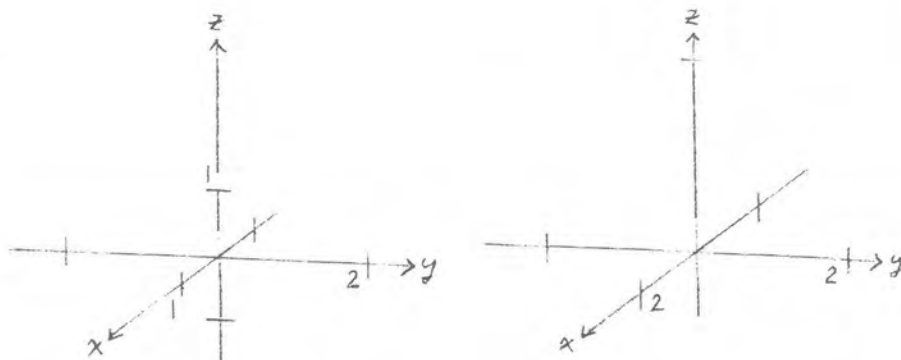
۱۲.۱۵ رویه $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$ يك سهمیوار هذلولوی است. مقطعهای آن با صفحات عمود بر محور z در بالا و پایین صفحه xy به شکل هذلولی اند و مقطعهایش با صفحات عمود بر محورهای دیگر به شکل سهمی اند.

شیوه رسم رویه‌های درجه دوم

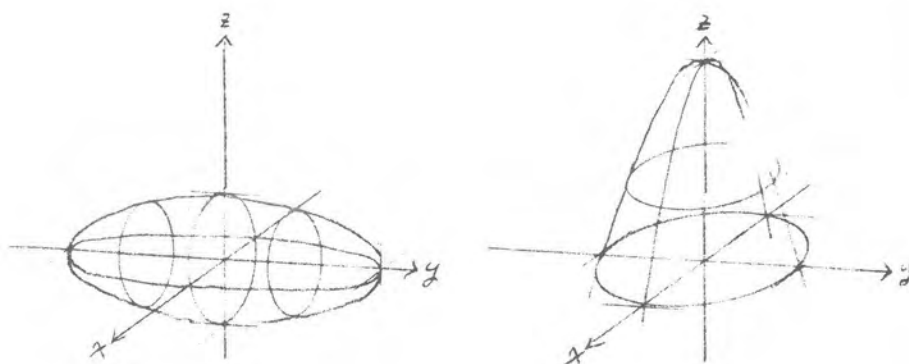
۱. سه محور مختصات را کمرنگ یک‌کشید.



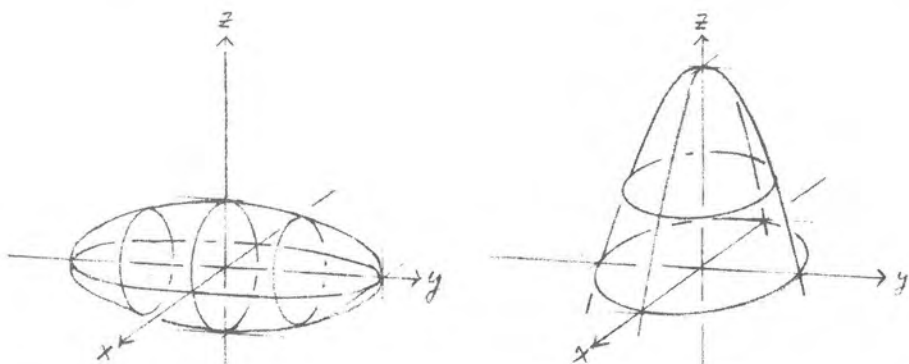
۲. مقیاسی روی محورها در نظر بگیرید و نقاط تقاطع رویه را با محورها مشخص کنید.



۳. مقطعی رویه را با صفحات مختصات و با چند صفحه موازی رسم کنید ولی تصویر را شلوغ نکنید. از خطهای مماس به عنوان راهنما استفاده کنید.



۴. اگر می‌خواهید شکل مشخصتر باشد، قسمتهایی را که در معرض دید هستند پررنگ کنید. در صورت امکان از خط‌چین استفاده کنید.



مسئله‌ها

رویه‌های مذکور در مسائل ۱-۳۴ را رسم کنید. در مورد سهمیوارها، هذلولیوارها و مخروطها، نوع رویه را ذکر کنید.

بیضیوارها

$$۹x^2 + y^2 + z^2 = ۹ \quad ۰۱$$

$$۲x^2 + ۴y^2 + z^2 = ۱۶ \quad ۰۲$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = ۲ \quad ۰۳$$

$$۹x^2 + ۴y^2 + z^2 = ۳۶ \quad ۰۴$$

$$۲x^2 + ۹y^2 + ۲z^2 = ۳۶ \quad ۰۵$$

$$۹x^2 + ۴y^2 + ۳۶z^2 = ۳۶ \quad ۰۶$$

سهمیوارها

$$x^2 + y^2 = z \quad ۰۷$$

$$x^2 + z^2 = y \quad ۰۸$$

$$x^2 + ۲y^2 = z \quad ۰۹$$

$$z = x^2 + ۹y^2 \quad ۰۱۰$$

رویه‌های مذکور در مسائل ۳۵-۳۸، استوانه‌های سهموی مورب هستند. آنها را، همان‌طور که رویه‌های درجه دوم دیگر را رسم می‌کنید، بکشید.

$$\begin{aligned} ۳۵. \quad z &= x^2 + y^2 \\ ۳۶. \quad x &= y^2 - z \\ ۳۷. \quad y &= x^2 + z \\ ۳۸. \quad z &= 4 - x^2 - y^2 \\ ۳۹. \quad \text{نخ} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{t} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{t} \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{1-t}\mathbf{k}$$

در بازه $0 \leq t \leq 1$ باریک رویه درجه دوم واقع است. معادله‌ای برای این رویه پیدا کنید و نوع آن را مشخص کنید.

۴۰. الف) مساحت مقطع بیضیوار

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

با صفحه $z = z_1$ را با $A(z_1)$ نشان دهید و آن را به صورت تابعی از z_1 بیان کنید. (مساحت بیضی که نصف طول قطرهای آن A و B باشد، برابر πAB است.)
ب) حجم بیضیوار قسمت (الف) را با انتگرالگیری بیابید. از برشهای عمود بر محور z استفاده کنید.
پ) حجم بیضیوار زیر را به دست آورید

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

اگر $a = b = c = 1$ ، آیا از پاسخ شما حجم کره‌ای به شعاع a به دست می‌آید؟



TOOLKIT PROGRAM

3D Grapher

۳.۱۵ مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی

در این بخش، دو دستگاه جدید مختصات را که در مورد فضا به کار می‌روند، معرفی می‌کنیم: دستگاه مختصات استوانه‌ای و دستگاه مختصات کروی. در دستگاه مختصات استوانه‌ای، استوانه‌هایی که محورشان در امتداد محور z است و صفحه‌هایی که شامل محور z هستند معادلات بسیار ساده‌ای دارند. در دستگاه مختصات کروی،

$$۱۱. \quad z = 8 - x^2 - y^2$$

$$۱۲. \quad z = 18 - x^2 - 9y^2$$

$$۱۳. \quad x = 4 - 4y^2 - z^2$$

$$۱۴. \quad y = 1 - x^2 - z^2$$

$$۱۵. \quad z = x^2 + y^2 + 1$$

$$۱۶. \quad z = 4x^2 + y^2 - 4$$

مخروطها

$$۱۷. \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$۱۸. \quad y^2 + z^2 = x^2$$

$$۱۹. \quad x^2 + z^2 = y^2$$

$$۲۰. \quad 4x^2 + 9y^2 = z^2$$

$$۲۱. \quad 9x^2 + 4y^2 = 36z^2$$

$$۲۲. \quad 4x^2 + 9z^2 = 9y^2$$

هذلولیوارها

$$۲۳. \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$۲۴. \quad y^2 + z^2 - x^2 = 1$$

$$۲۵. \quad (y^2/4) + (z^2/9) - (x^2/4) = 1$$

$$۲۶. \quad (x^2/4) + (y^2/4) - (z^2/9) = 1$$

$$۲۷. \quad (x^2/9) + (y^2/4) - z^2 = 1$$

$$۲۸. \quad z^2 - x^2 - y^2 = 1$$

$$۲۹. \quad z^2 - (x^2/4) - y^2 = 1$$

$$۳۰. \quad (y^2/4) - (x^2/4) - z^2 = 1$$

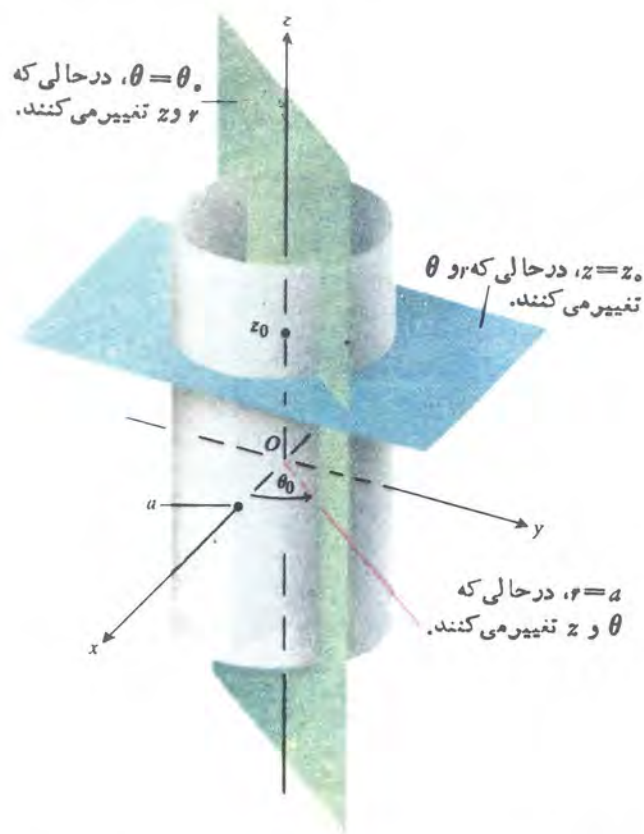
$$۳۱. \quad (x^2/4) - (y^2/9) - z^2 = 1$$

$$۳۲. \quad (x^2/4) - (z^2/4) - y^2 = 1$$

سهمیوارهای هذلولوی

$$۳۳. \quad y^2 - x^2 = z$$

$$۳۴. \quad x^2 - y^2 = z$$



۱۴۰۱۵ صفحه‌ها و استوانه‌هایی که معادلاتشان در مختصات استوانه‌ای به صورت $r = a$ یا $z = z_0$ یا $\theta = \theta_0$ است.

مثال ۱ نقاطی از فضا را که مختصات استوانه‌ای آنها در معادلات زیر صدق می‌کنند، وصف کنید.

$$r = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

حل: این نقاط، خطی را تشکیل می‌دهند که مقطع استوانه $r = 2$ با قسمتی از صفحه $\theta = \pi/4$ است که در آن r مثبت است (شکل ۱۵-۱۵). این خط، از نقطه $(2, \pi/4, 0)$ می‌گذرد و با محور z موازی است.

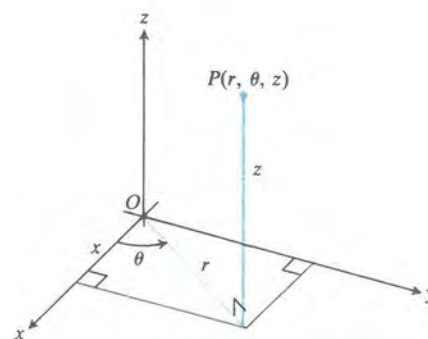
مثال ۲ رویه $r = 1 + \cos \theta$ را رسم کنید.

حل: این معادله فقط شامل r و θ است؛ مختص متغیر z در آن دیده نمی‌شود. پس این رویه، استوانه‌ای است متشکل از خطهایی که از دلواری $r = 1 + \cos \theta$ واقع در صفحه $r\theta$ می‌گذرند و با محور z موازی‌اند. قواعد رسم این استوانه طبق معمول

کره‌هایی که مرکزشان در مبدأ است و مخروطهای یکپارچه‌ای که رأسشان در مبدأ و محورشان در امتداد محور z است معادلات بسیار ساده‌ای دارند. وقتی سروکار شما با این گونه شکلهاست و نیاز به یک دستگاه مختصات دارید، اینها بهترین دستگاههای مختصاتی هستند که می‌توانید به کار ببرید.

مختصات استوانه‌ای

مختصات استوانه‌ای در فضا را از طریق تلفیق مختصات قطبی در صفحه xy با محور z معمولی به دست می‌آوریم. به این ترتیب، همان‌طور که در شکل ۱۳-۱۵ می‌بینید، به هر نقطه در فضا یک یا چند سه‌تایی مختصات به صورت (r, θ, z) نسبت داده می‌شود.



۱۳۰۱۵ مختصات استوانه‌ای نقطه‌ای در فضا، r, θ, z هستند.

مقادیر x, y, r, θ و z در مختصات استوانه‌ای، با روابط معمولی زیر به هم مربوط‌اند

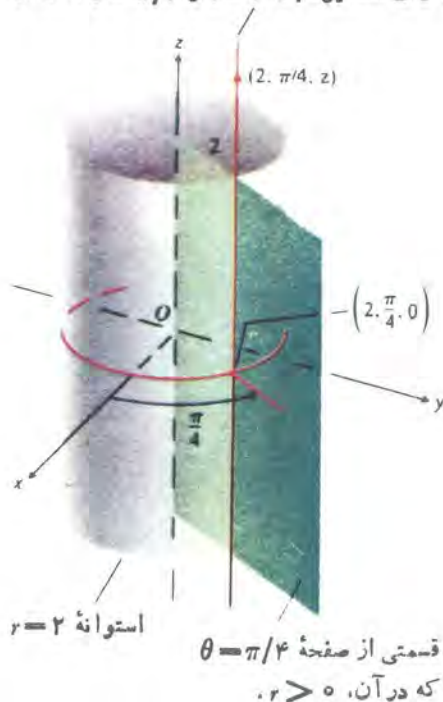
$$x = r \cos \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = r \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (1)$$

مختصات استوانه‌ای همان مختصاتی هستند که آنها را در مطالعه حرکت سیارات در بخش ۴-۱۴ به کار بردیم.

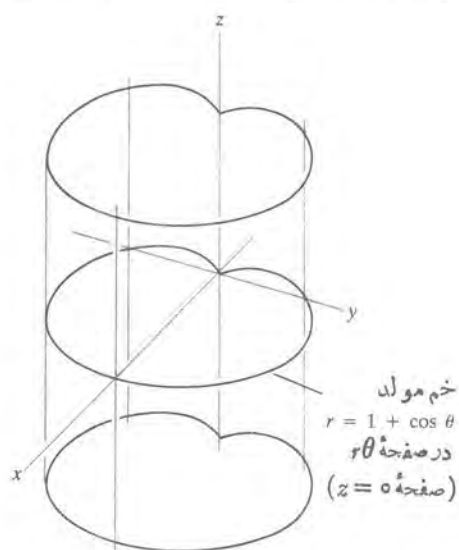
در مختصات استوانه‌ای، معادله $r = a$ فقط دایره‌ای در صفحه xy را مشخص نمی‌کند بلکه استوانه‌ای کامل حول محور z را توصیف می‌کند (شکل ۱۴-۱۵). خود محور z با معادله $r = 0$ معین می‌شود. معادله $\theta = \theta_0$ توصیف‌کننده صفحه‌ای است که شامل محور z است و زاویه‌ای به اندازه θ_0 رادیان با قسمت مثبت محور x می‌سازد.

روی این خط، z تغییر می‌کند در حالی که r و θ دارای مقادیر ثابت $r=2$ و $\theta=\pi/4$ هستند.



نقاطی که دومختص اول استوانه‌ای آنها $r=2$ و $\theta=\pi/4$ هستند خطی به موازات محور z تشکیل می‌دهند.

است: محورهای x, y, z را بکشید، چند مقطع عمود بر محور z را رسم کنید، مقطع‌ها را با خط‌های موازی به هم وصل کنید، و قسمتهایی را که در معرض دید هستند بر رنگ کنید. شکل ۱۶.۱۵ را ببینید.



۱۶.۱۵ معادله $r=1+\cos\theta$ در مختصات استوانه‌ای، استوانه‌ای را در فضا تعریف می‌کند که مقطع‌های عمود بر محور z آن، دلواریند.

مثال ۳ معادله‌ای دکارتی برای رویه $z=r^2$ بیابید و نوع رویه را مشخص کنید.

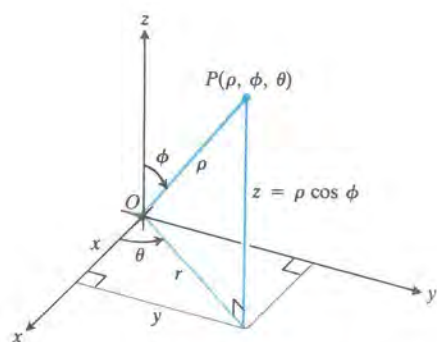
حل: از معادلات (۱) داریم $z=r^2=x^2+y^2$. این رویه، سهمیوار مستدیر $z=x^2+y^2$ است.

مثال ۴ معادله‌ای برای استوانه مستدیر $4x^2+4y^2=9$ در مختصات استوانه‌ای به دست آورید.

حل: این استوانه از نقاطی تشکیل می‌شود که فاصله آنها از محور z ، $\sqrt{x^2+y^2}=3/2$ است. معادله متناظر بر حسب مختصات استوانه‌ای این است: $r=3/2$.

مختصات کروی

در دستگاه مختصات کروی، همان‌طور که در شکل ۱۷.۱۵ دیده می‌شود، محل نقاط در فضا با دو زاویه و یک فاصله مشخص می‌شود. مختص اول، $\rho=|\vec{OP}|$ ، فاصله نقطه از مبدأ است. برخلاف r ، متغیر ρ هیچگاه منفی نیست. مختص دوم، ϕ ، زاویه‌ای است که بردار $\vec{OP}$ با قسمت مثبت محور z می‌سازد و لازم است که در بازه از ۰ تا π قرار داشته باشد. مختص سوم، همان زاویه θ در مختصات استوانه‌ای است.



۱۷.۱۵ مختصات کروی ρ, ϕ, θ و رابطه آنها با x, y, z, r .

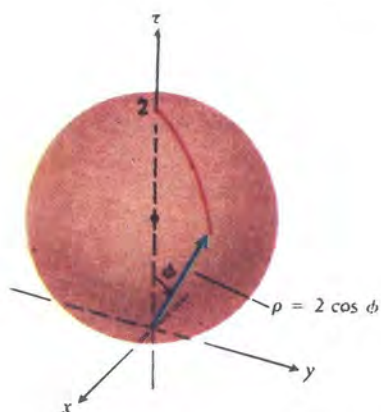
معادله $\rho=a$ کره‌ای به شعاع a را مشخص می‌کند که مرکزش در مبدأ است (شکل ۱۸.۱۵). معادله $\phi=\phi_0$ مخروط یکپارچه‌ای را مشخص می‌کند که رأس آن در مبدأ قرار دارد و محورش در امتداد محور z است. (با توجه به این معادله صفحه xy را می‌توان مخروط $\phi=\pi/2$ دانست.) اگر ϕ_0 بزرگتر از $\pi/2$ باشد، مخروط $\phi=\phi_0$ به طرف پایین باز می‌شود [دهانه‌اش به طرف پایین است].

در معدودی از کتابها مختصات کروی به ترتیب (ρ, θ, ϕ) ذکر می‌شوند یعنی، در مقایسه با ترتیبی که ما اختیار کرده‌ایم، جای

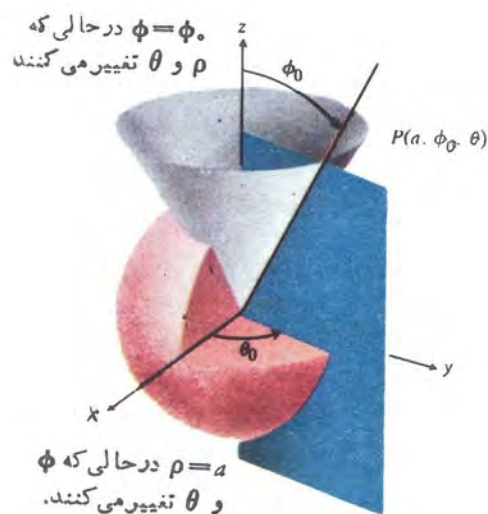
$$\rho^2 = 2\rho \cos \phi$$

$$\rho = 2 \cos \phi.$$

شکل ۱۹.۱۵ را ببینید.



۱۹.۱۵ کره $\rho = 2 \cos \phi$. توجه کنید که این معادله، ϕ را مقید می‌کند که در بازه $0 \leq \phi \leq \pi/2$ واقع باشد زیرا مختص کروی ρ نمی‌تواند منفی باشد.



$\theta = \theta_0$ در حالی که ρ و ϕ تغییر می‌کنند.

۱۸.۱۵ کره‌هایی که مرکزشان در مبدأ است و مخروطهای یکپارچه‌ای که رأس آنها در مبدأ و محورشان در امتداد محور z است، در دستگاه مختصات کروی معادلات ساده‌ای دارند.

ϕ و θ عوض می‌شود. همیشه به ترتیب انتخاب شده توجه داشته باشید.

چند رابطه که مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی را به هم ربط می‌دهند

$$r = \rho \sin \phi, \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta \quad (2)$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

مثال ۵ برای کره زیر، معادله‌ای در مختصات کروی بیابید

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

حل: با توجه به معادلات (۲)، طرف راست معادله مورد نظر این است

$$\begin{aligned} \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi - 2\rho \cos \phi + 1 \\ = \rho^2 - 2\rho \cos \phi + 1. \end{aligned}$$

پس معادله اولیه به این صورت درمی‌آید

$$\rho^2 - 2\rho \cos \phi + 1 = 1$$

مسئله‌ها

در جدول زیر، مختصات نقاط خاصی از فضا در یکی از سه دستگاه مختصات آمده است. در مسئله‌های ۱-۱۰، مختصات هر نقطه را در دودستگاه دیگر پیدا کنید. ممکن است بیش از یک جواب درست وجود داشته باشد زیرا نقاط در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کره‌ای ممکن است بیش از یک سه‌تایی مختصات داشته باشند.

کروی	استوانه‌ای	دکارتی
(ρ, ϕ, θ)	(r, θ, z)	(x, y, z)
		(۰, ۰, ۰)
		(۱, ۰, ۰)
		(۰, ۱, ۰)
		(۰, ۰, ۱)
	(۱, ۰, ۰)	
	$(\sqrt{2}, 0, 1)$	
	$(1, \pi/2, 1)$	
$(\sqrt{3}, \pi/3, -\pi/2)$		
$(2\sqrt{2}, \pi/2, 3\pi/2)$		
$(\sqrt{2}, \pi, 3\pi/2)$		

در مسأله‌های ۱۱-۲۰، هر معادله در یک دستگاه مختصات (دکارتی، استوانه‌ای، یا کروی) داده شده است. آن را به معادلاتی در دودستگاه دیگر تبدیل کنید. همچنین، مجموعه نقاطی را که به وسیله معادله تعریف می‌شوند، مشخص کنید.

$$r = 0 \quad 0.11$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad 0.12$$

$$z = 0 \quad 0.13$$

$$z = -2 \quad 0.14$$

$$\rho \cos \phi = 3 \quad 0.15$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad 0.16$$

$$\rho \sin \phi \cos \theta = 0 \quad 0.17$$

$$\tan^2 \phi = 1 \quad 0.18$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad 0.19$$

$$\rho = 6 \cos \phi \quad 0.20$$

در مسأله‌های ۲۱-۲۸، مجموعه‌هایی از نقاط را که مختصات استوانه‌ای آنها در معادله یا جفت معادله داده شده صدق می‌کنند، وصف کنید.

$$r = 2 \quad 0.21$$

$$r^2 + z^2 = 1 \quad 0.22$$

$$r = 1 - \cos \theta \quad 0.23$$

$$r = 2 \cos \theta \quad 0.24$$

$$r = 2, \quad z = 3 \quad 0.25$$

$$\theta = \pi/6, \quad z = r \quad 0.26$$

$$r = 3, \quad z = \theta/2 \quad 0.27$$

$$r^2 - z^2 = 1 \quad 0.28$$

در مسأله‌های ۲۹-۳۴، مجموعه‌هایی از نقاط را که مختصات کروی آنها در معادله یا جفت معادله داده شده صدق می‌کنند، وصف کنید.

$$\phi = \pi/6 \quad 0.29$$

$$\rho = 6, \quad \phi = \pi/6 \quad 0.30$$

$$\rho = 5, \quad \theta = \pi/4 \quad 0.31$$

$$\theta = \pi/4, \quad \phi = \pi/4 \quad 0.32$$

$$\theta = \pi/2, \quad \rho = 4 \cos \phi \quad 0.33$$

۰.۳۴ $\rho = 1 - \cos \phi$ (دانه‌ماهی: نبودن θ در این معادله، نشان دهنده تقارن نسبت به محور z است. مقطع این رویه با صفحه yz چیست؟)

پرسشها و تمرینهای مروری

۰.۱ استوانه چیست؟ چند معادله مثال بنویسید که تعریف کنند استوانه‌هایی در مختصات دکارتی باشند؛ و نیز چند مثال در مختصات استوانه‌ای بیاورید. در مورد رسم استوانه‌ها چه توصیه‌هایی می‌توانید ارائه کنید؟

۰.۲ مثالهایی از بیضیوار، سهمیوار، و هذلولیوار بیاورید (با ذکر معادله و رسم شکل). در مورد رسم این رویه‌ها چه توصیه‌هایی می‌توانید ارائه کنید؟

۰.۳ مختصات استوانه‌ای و کروی چگونه تعریف می‌شوند؟ نمودارهایی رسم کنید که نشان بدهند مختصات استوانه‌ای و کروی چگونه به مختصات دکارتی فضایی مربوط می‌شوند. در دستگاه‌های سه‌مختصی چه مجموعه‌هایی دارای معادلات «مختص-ثابت» (نظیر $x=1$ ، $r=1$ ، یا $\phi=\pi/3$) هستند؟

مسأله‌های گوناگون

در مسأله‌های ۱-۱۲، هر معادله، تعریف کنندۀ مجموعه‌ای در صفحه و مجموعه‌ای در فضای سه‌بعدی است. در مورد هر معادله، هر دو مجموعه را توصیف کنید.

$$x + y = 1 \quad 0.1$$

$$x = 0 \quad 0.2$$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad 0.3$$

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad 0.4$$

$$y^2 = -x \quad 0.5$$

$$r = 1 + \cos \theta \quad 0.6$$

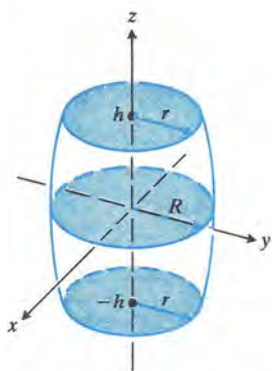
$$r = \cos 2\theta \quad 0.7$$

$$r = \frac{2}{(2 - \cos \theta)} \quad 0.8$$

$$r = -\sin \theta \quad 0.9$$

$$r \cos \theta = 1 \quad 0.10$$

اینکه، فرض کنید $r=0$ و $h=R$ و در نتیجه، بشکه به شکل کره باشد. آیا از فرمول شما حجم این کره به دست می‌آید؟



۲۰۱۵. بشکه مورد بحث در مسأله ۲۳.

۲۴. نشان دهید حجم قطعه‌ای که از تقاطع سهمیوار بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

با صفحه $z=h$ به دست می‌آید، برابر است با حاصلضرب نصف مساحت قاعده قطعه در ارتفاع آن.

۲۵. الف) مطلوب است حجم جسم محدود به هذلولیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

و صفحات $z=0$ و $z=h$ با ضابطه $h>0$.

ب) پاسخ خود به قسمت (الف) را بر حسب h و A_0 و A_h بیان کنید که A_0 و A_h مساحت نواحی حاصل از تقاطع صفحات $z=0$ و $z=h$ با هذلولیوار هستند.

پ) نشان دهید که حجم مورد نظر از فرمول زیر نیز به دست می‌آید

$$V = \frac{h}{6} (A_0 + 4A_m + A_h)$$

که در آن، A_m مساحت مقطع هذلولیوار با صفحه $z=h/2$ است.

۲۶. ذره‌ای چون P در امتداد سیم پیچی به شکل یک پیچ مستدیر قائم (شکل ۲۱۰۱۵) بدون اصطکاک می‌لغزد. اگر جهت مثبت محور z را به سمت پایین بگیریم، مختصات استوانه‌ای P در لحظه t در معادلات $r=a$ ، $z=b\theta$ ، $r=a$ صدق می‌کنند که a و b ثابت‌های مثبتی هستند. چنانچه ذره در $r=a$ ، $\theta=0$ با سرعت صفر شروع به حرکت کند و تحت نیروی گرانش پایین بیاید، قانون بقای

$$r = \sin 2\theta \quad ۰.۱۱$$

$$r = \theta \quad ۰.۱۲$$

در مسأله‌های ۱۳-۱۸، مطلوب است توصیف مجموعه‌هایی در فضا که با معادله‌ها و نامعادله‌های داده شده تعریف می‌شوند.

$$3 \leq \rho \leq 5 \quad ۰.۱۳$$

$$r \geq 2, \quad \rho \leq 5 \quad ۰.۱۴$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \quad ۰.۱۵$$

$$2x^2 + 9y^2 \leq 36 \quad ۰.۱۶$$

$$\rho = 1, \quad \theta = \phi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad ۰.۱۷$$

$$x^2 + y^2 = f(z) \quad ۰.۱۸$$

۰.۱۹ در رویه‌ای که معادله‌اش در مختصات کروی به شکل $\rho = f(\phi)$ است چه تقارنی می‌توان یافت؟

۲۰. فرض کنید PO فاصله $P(x, y, z)$ از مبدأ و PA فاصله P از نقطه $A(0, 0, 3)$ است. برای رویه‌هایی که با روابط زیر تعریف می‌شوند، معادلاتی دکارتی بنویسید

$$PO = 2PA \quad \text{(الف)}$$

$$PO + PA = 6 \quad \text{(ب)}$$

$$|PO - PA| = 2 \quad \text{(پ)}$$

۲۱. معادله

$$r^2 + z^2 = 4r \cos \theta + 6r \sin \theta + 2z$$

معادله یک کره در مختصات استوانه‌ای است. مختصات دکارتی مرکز کره را پیدا کنید.

۲۲. معادلات پارامتری $x=x(\theta)$ ، $y=y(\theta)$ و $z=z(\theta)$ را برای خمی که فصل مشترک کره $\rho=a$ با صفحه $z=0$ است پیدا کنید.

۲۳. بشکه‌ای به شکل بیضیواری است که دوانتهای آن با صفحاتی عمود بر محور z بریده شده و مقطعهای حاصل باهم برابرند (شکل ۲۰۱۵). ارتفاع بشکه $2h$ ، شعاع مقطع وسطی R ، و شعاع هر دو مقطع انتهایی r است. فرمولی برای حجم بشکه پیدا کنید. سپس دو موضوع را بررسی کنید. اول اینکه، فرض کنید این بشکه به شکل استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع $2h$ در آید. در این صورت، $r=R$. آیا از فرمول شما حجم این استوانه به دست می‌آید؟ دوم

۲۸. وقتی مکان ذره‌ای که در فضا حرکت می‌کند بر حسب مختصات استوانه‌ای معین می‌شود، بردارهای واحدی که برای توصیف مکان و حرکت ذره به کار می‌بریم عبارت‌اند از

$$\mathbf{u}_r = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$$

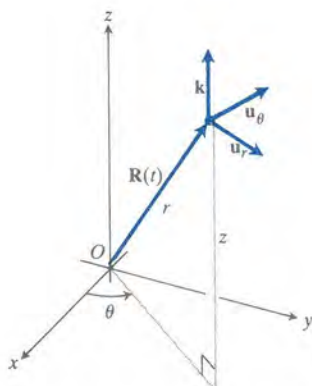
و $\mathbf{k}$. شکل ۲۳.۱۵ را ببینید. پس بردار مکان ذره عبارت است از

$$\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$$

الف) نشان دهید که $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{k}$ ، به همین ترتیب، دستگاه راستگردی از بردارهای واحد را تشکیل می‌دهند.
ب) نشان دهید که

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta$$

پ) با فرض اینکه مشتقات مناسب r ، θ ، و z نسبت به t وجود داشته باشند، $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{R}/dt$ و $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{R}/dt^2$ را بر حسب $\mathbf{u}_r$ ، $\mathbf{u}_\theta$ ، $\mathbf{k}$ و مشتقات r و θ نسبت به t بیان کنید. (در بخش ۴.۱۴ نشان دادیم که چگونه این بردارها در توصیف حرکت سیارات به کار می‌روند.)

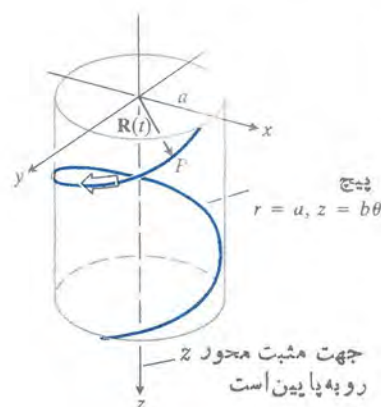


۲۳.۱۵ بردارهای واحد در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای توصیف حرکت. مسأله ۲۸ را ببینید.

۲۹. از سه مختص کروی نقطه P (شکل ۲۴.۱۵) یعنی ρ ، ϕ ، و θ ، دوتا را ثابت نگهدارید و بگذارید مختص سوم افزایش یابد. فرض کنید $\mathbf{u}$ ، همراه با اندیسی متناظر با مختص تغییر کننده، نشان دهنده برداری واحد و درجهتی باشد که P در آن جهت تحت این شرایط شروع به حرکت می‌کند.

الف) سه بردار واحد $\mathbf{u}_\rho$ ، $\mathbf{u}_\phi$ ، و $\mathbf{u}_\theta$ را که به این نحو به دست می‌آیند بر حسب ρ ، ϕ ، θ ، و بردارهای واحد $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، $\mathbf{k}$ بنویسید.

ب) نشان دهید که $\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{u}_\phi = 0$.



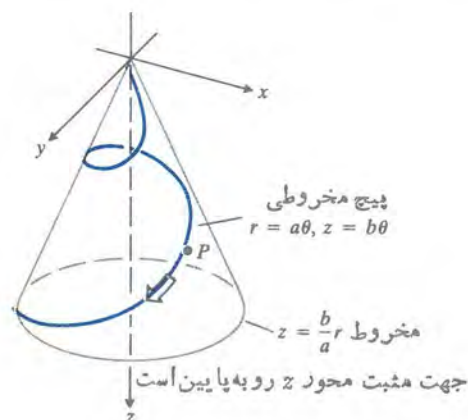
۲۱.۱۵ ذره‌ای در امتداد یک پیچ استوانه‌ای می‌لغزد. مسأله ۲۶ را ببینید.

انرژی می‌گوید که مقدار سرعت ذره پس از طی کردن مسافت [فاصله] قائم z برابر با $\sqrt{2gz}$ است.

الف) سرعت زاویه‌ای $d\theta/dt$ را به ازای $\theta = 2\pi$ بیابید.
ب) θ و z را به صورت توابعی از t بیان کنید.
پ) مؤلفه‌های مماس و قسائم سرعت $d\mathbf{R}/dt$ و شتاب $d^2\mathbf{R}/dt^2$ را به صورت توابعی از t پیدا کنید. آیا شتاب، مؤلفه‌ای در جهت بردار قائم دوم $\mathbf{B}$ دارد؟

۳۰. به جای خم مذکور در مسأله ۲۶، پیچ مخروطی $r = a\theta$ ، $z = b\theta$ را که در شکل ۲۲.۱۵ نشان داده شده در نظر بگیرید.
الف) سرعت زاویه‌ای $d\theta/dt$ را به صورت تابعی از θ بیان کنید.

ب) مسافتی را که ذره در امتداد این پیچ می‌پیماید به صورت تابعی از θ بیان کنید.



۲۲.۱۵ ذره‌ای که در امتداد یک پیچ مخروطی پایین می‌آید. مسأله ۲۷ را ببینید.

آنها به ترتیب مفروض تشکیل می‌دهند راستگرد است یا چپگرد؟

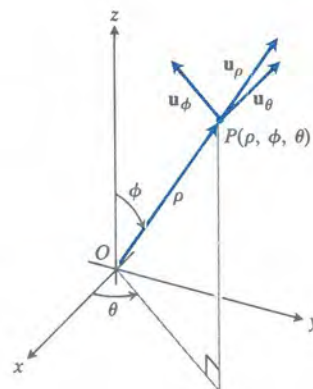
۳۰. اگر ρ ، ϕ ، و θ ، یعنی مختصات کروی نقطه‌ای متحرك چون P ، توابعی مشتقپذیر از زمان t باشند و $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ برداری از مبدأ تا P باشد، $\mathbf{R}$ و $d\mathbf{R}/dt$ را برحسب ρ ، ϕ ، θ و مشتقات آنها و بردارهای واحد $\mathbf{u}_\rho$ ، $\mathbf{u}_\phi$ ، $\mathbf{u}_\theta$ (مذکور درمسأله ۲۹) بیان کنید.

۳۱. عبارت $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ را برحسب (الف) مختصات استوانه‌ای r ، θ ، z و (ب) مختصات کروی ρ ، ϕ ، θ بیان کنید (مسأله ۳۰ را ببینید). نتایج خود را به صورت هندسی و برحسب اضلاع و قطری از يك مكعب مستطیل تعبیر کنید. شكل بکشید.

۳۲. با استفاده از نتایج مسأله ۳۱، طول خمهای زیر، بین $\theta = 0$ و $\theta = \ln 8$ ، را حساب کنید.

الف) $z = r = ae^\theta$

ب) $\phi = \pi/6$ ، $\rho = 2e^\theta$



۲۴۰۱۵ بردارهای واحد $\mathbf{u}_\rho$ ، $\mathbf{u}_\phi$ ، و $\mathbf{u}_\theta$ در دستگاه مختصات کروی. مسأله ۲۹ را ببینید.

پ) نشان دهید که $\mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_\rho \times \mathbf{u}_\phi$.

ت) آیا $\mathbf{u}_\rho$ ، $\mathbf{u}_\phi$ ، $\mathbf{u}_\theta$ دو به دو متعامدند؟ آیا دستگاهی که

تابعهای دو یا چندمتغیره و مشتق آنها

چشم انداز

این فصل را با مطالعه توابعی آغاز می‌کنیم که بیش از يك متغیر مستقل دارند. در علوم، توابع دو یا چندمتغیره بیش از توابع يك متغیره مطرح می‌شوند، و حساب دیفرانسیل و انتگرال آنها نیز غنیتر است. مشتقات آنها متنوعتر و جالبترند زیرا متغیرها می‌توانند به طرق مختلف بر یکدیگر اثر کنند. انتگرالهای این گونه توابع کاربردهای گوناگون بیشتری دارند. احتمال، آمار، دینامیک سیالات، و الکتروسیسته تنها چند نمونه از موضوعاتی هستند که مطالعه آنها به طور طبیعی به توابع با بیش از يك متغیر می‌انجامد، و آنالیز ریاضی مربوط به این توابع یکی از زیباترین دستاوردهای علم است. این گفته‌ها ممکن است به نظر تان مبالغه‌آمیز برسد، اما واقعیت دارد. در فصلهای آتی به مطالعه این دستاورد می‌پردازیم.

در این فصل با توابع با بیش از يك متغیر آشنا می‌شویم، مشتق آنها را تعریف و محاسبه می‌کنیم، می‌آموزیم چگونه قاعده زنجیری را بنویسیم، و یاد می‌گیریم که به چه نحو آهنگ تغییر توابع را وقتی در دامنه آنها درجهتهای متفاوت حرکت می‌کنیم، محاسبه نماییم. و نیز اندکی مهارتهای تازه کسب شده خود را در زمینه معادلات دیفرانسیلی که در فیزیک و شیمی مطرح می‌شوند، تمرین می‌کنیم.

در فصل ۱۷ که عمدتاً درباره کاربرد مشتق است، نحوه بر آورد کردن مقادیر توابع چندمتغیره و راه محاسبه ماکسیممها و مینیممهای آنها را بردامنه مفروضشان می‌آموزیم. فصل ۱۸ درباره انتگرال توابع دو و سه متغیره است. اینها انتگرالهایی هستند که به کمکشان حجم، گشتاور، و مرکز جرم اجسام سه بعدی را محاسبه

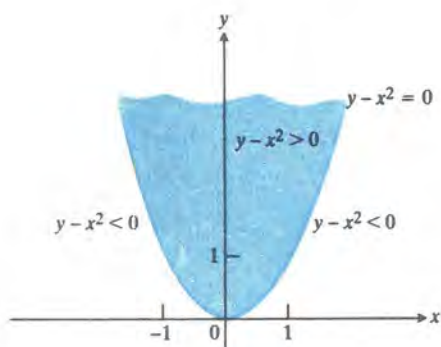
می‌کنیم. در فصل ۱۹ انتگرالهای رویه‌ای را تعریف می‌کنیم و به کمک آنها به محاسبه مساحت رویه‌ها و آهنگ جریان سیالها از میان رویه‌ها می‌پردازیم. و نیز قضایای انتگرالی حساب بردارها را به دست می‌آوریم که در مطالعه جریان سیالها و الکتروسیسته در فیزیک و مهندسی مطرح می‌شوند. سرانجام، در فصل ۲۰ آشنایی مختصری با معادلات دیفرانسیل پیدا می‌کنیم و به بررسی روشهای حل معادلات دیفرانسیلی که به صورت $dy/dx = f(x, y)$ هستند، می‌پردازیم؛ در این معادلات، مشتق $[dy/dx]$ تابع ناشناخته‌ای چون y از x ، به صورت تابعی از دو متغیر x و y داده می‌شود.

۱.۱۶ تابعهایی که بیش از يك متغیر مستقل دارند

مقادیر بسیاری از توابع به کمک بیش از يك متغیر مستقل معین می‌شوند. برای مثال، تابع $V = \pi r^2 h$ حجم استوانه مستدیری را بر حسب شعاع و ارتفاعش به دست می‌دهد. یا استفاده از تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ می‌توان ارتفاع سهمیوار $z = x^2 + y^2$ را از نقطه $P(x, y)$ به کمک مختصات P به دست آورد. تابع زیر که بعداً در مثال ۵ خواهد آمد، دمای نقطه‌ای واقع در x فوتی زیر سطح زمین را در t امین روز سال به صورت کسری از دمای سطح زمین در همان روز به دست می‌دهد.

$$w(x, t) = \cos(1.7 \times 10^{-2}x - 0.2x)e^{-0.2x}.$$

در این بخش، توابع با بیش از يك متغیر مستقل را تعریف



۱۰۱۶ دامنه $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ عبارت است از ناحیه سایه‌دار شکل، و مرز آن سهمی $y = x^2$ است. در نقاط دیگر صفحه، $y - x^2 < 0$ و f تعریف نمی‌شود.

به ازای آنها

$$y - x^2 \geq 0 \quad \text{یا} \quad y \geq x^2$$

بنابراین، D مجموعه تمام نقاطی است که در بالا و روی سهمی $y = x^2$ قرار می‌گیرند. برد f مجموعه تمام اعداد نامنفی، $z \geq 0$ ، است. ■

مثال ۲ دامنه و برد تابع زیر چیستند؟

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

حل: بنا به قرارداد، x و y هر مقداری می‌توانند داشته باشند مگر مقادیری که به ازای آنها $0 = y^2 - x^2$ یا $x^2 = y^2$. پس دامنه از تمام نقاط صفحه تشکیل می‌شود مگر نقاط روی خطهای $y = x$ و $y = -x$. برد f کل مجموعه اعداد حقیقی $-\infty < z < \infty$ است؛ اگر بگذاریم نقطه $P(x, y)$ شاخه راست هذلولی $1 = x^2 - y^2$ را طی کند، به این مطلب پی می‌بریم. در امتداد این خم، $x = \sqrt{1 + y^2}$ و مقادیر f از فرمول زیر به دست می‌آیند

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{(\sqrt{1 + y^2})y}{1} = y\sqrt{1 + y^2}.$$

اگر y از $-\infty$ تا ∞ تغییر کند، تغییر $y\sqrt{1 + y^2}$ نیز از $-\infty$ تا ∞ خواهد بود. ■

نمودار و خم تراز

برای تجسم مقادیر تابعی چون $f(x, y)$ دو راه متداول است.

می‌کنیم و دو روش را برای نمایش نموداری مقادیر آنها مورد بحث قرار می‌دهیم.

چند تعریف

فرض کنید D مجموعه‌ای باشد از n تاییه‌ای اعداد حقیقی به صورت زیر

$$(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

یک تابع حقیقی-مقدار f با دامنه D قاعده‌ای است که به هر n تایی از اعداد که در D باشد، عددی حقیقی چون

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

را نسبت می‌دهد. برد این تابع، مجموعه مقادیری است که f اختیار می‌کند. نماد w متغیر وابسته f را نشان می‌دهد، و گفته می‌شود که f تابعی از n متغیر مستقل x_1 تا x_n است.

در تابع $V = \pi r^2 h$ ، متغیر وابسته V است و متغیرهای مستقل r و h اند.

مقدار توابعی را که با فرمول مشخص می‌شوند می‌توان به روش معمول و با قرار دادن مقدار به جای متغیرهای مستقل و به دست آوردن مقدار متناظر متغیر وابسته محاسبه کرد. مثلاً مقدار تابع

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{در نقطه } (3, 0, 4)$$
 عبارت است از

$$\sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

دامنه

در تعریف توابع چندمتغیره، طبق معمول داده‌هایی را که به اعداد مختلط یا به عمل تقسیم بر صفر منجر می‌شوند استثناء می‌کنیم. مثلاً، اگر $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ، باید y از x^2 بزرگتر باشد، و اگر $f(x, y) = xy/(x^2 - y^2)$ ، نباید x^2 و y^2 برابر باشند. البته تنها استثناءها همینها هستند و دامنه تابع، بزرگترین مجموعه‌ای فرض می‌شود که قاعده معرف تابع به ازای عناصر آن مجموعه اعدادی حقیقی را به دست دهد. این مجموعه را گاه دامنه «طبیعی» تابع می‌نامند.

مثال ۱ دامنه تابع زیر را رسم کنید

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2}.$$

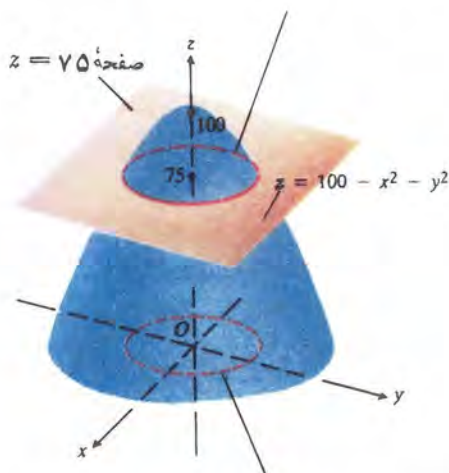
برد این تابع چیست؟

حل: بنا به قراردادمان، دامنه D مجموعه تمام جفت‌هایی از اعداد چون (x, y) در صفحه است که به ازای آنها $y - x^2 \geq 0$ حقیقی باشد (شکل ۱۰۱۶). لذا D متشکل از تمام نقاطی است که

مسیر

محل تقاطع صفحه $z=c$ با رویه‌ای چون $z=f(x, y)$ خمی است فضایی متشکل از نقاطی که مقادیر تابع $f(x, y)=c$ را نمایش می‌دهد. برای تمیز این خم از خم تراز $f(x, y)=c$ در دامنه f ، آن را مسیر c می‌نامند. شکل ۳.۱۶ مسیر $f(x, y)=75$ بر رویه $z=100-x^2-y^2$ را نشان می‌دهد که با تابع $f(x, y)=100-x^2-y^2$ تعریف می‌شود. این مسیر درست بالای دایره $x^2+y^2=25$ قرار دارد که خم تراز $f(x, y)=75$ در دامنه تابع است.

مسیر $f(x, y)=100-x^2-y^2=75$ ، دایره $x^2+y^2=25$ در صفحه $z=75$ است.



خم تراز $f(x, y)=100-x^2-y^2=75$ دایره $x^2+y^2=25$ در صفحه xy است.

۳.۱۶ نمودار $f(x, y)=100-x^2-y^2$ و مقطع آن با صفحه $z=75$.

اما، همه این تمایز را قائل نمی‌شوند؛ در صورت تمایل می‌توان هر دو را با یک نام نامید و برای درک اینکه کدام خم مورد نظر است، به مضمون بحث توجه کرد. به عنوان مثال، در بیشتر نقشه‌ها هر خم با ارتفاع ثابت (ارتفاع بالای سطح دریا) را مسیر می‌نامند و نه خم تراز (شکل ۴.۱۶).

رویه تراز

در صفحه، نقاطی که در آنها تابعی با دو متغیر مستقل مقداری ثابت چون $f(x, y)=c$ را اختیار می‌کند، خم تراز آن تابع نامیده می‌شود. در فضا، نقاطی که در آنها یک تابع با سه متغیر مستقل مقداری ثابت چون $f(x, y, z)=c$ را اختیار می‌کند، رویه تراز آن تابع نام دارد.

یک راه این است که برخی از خمهای تراز آن را رسم کنیم. خم تراز خمی است در دامنه تابع که در امتداد آن، تابع مقداری ثابت چون $f(x, y)=c$ داشته باشد. راه دیگر این است که رویه $z=f(x, y)$ را در فضا رسم کنیم. رویه متشکل از نقاط $(x, y, f(x, y))$ را نمودار f می‌نامند.

مثال ۳ نمودار تابع زیر را در فضا رسم کنید، و خمهای تراز $f(x, y)=0$ ، $f(x, y)=51$ ، و $f(x, y)=75$ را در دامنه تابع در صفحه بکشید

$$f(x, y)=100-x^2-y^2.$$

حل: دامنه f کل صفحه xy است و برد f مجموعه اعداد حقیقیی نابیشتر از ۱۰۰ است. نمودار، سهمی‌سوار $z=100-x^2-y^2$ است که بخشی از آن در شکل ۲.۱۶ نمایش داده شده است.

خم تراز $f(x, y)=0$ مجموعه نقاطی از صفحه xy است که به ازای مختصات هر یک از آن نقاط،

$$f(x, y)=100-x^2-y^2=0$$

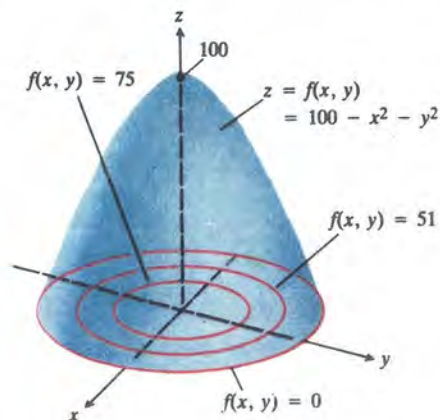
یا

$$x^2+y^2=100.$$

و این، دایره به مرکز مبدأ و به شعاع ۱۰ است (شکل ۲.۱۶). به همین ترتیب، خمهای تراز $f(x, y)=51$ و $f(x, y)=75$ دوار زیرند

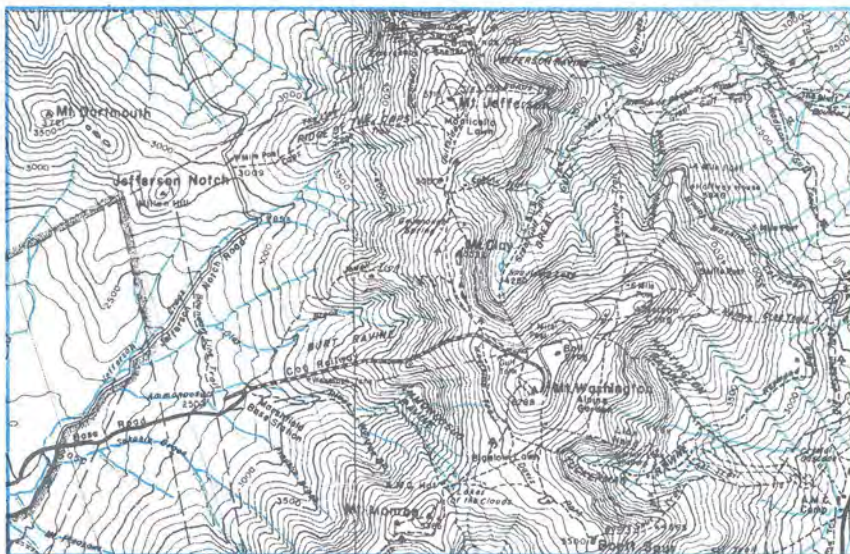
$$f(x, y)=100-x^2-y^2=75 \quad \text{یا} \quad x^2+y^2=25$$

$$f(x, y)=100-x^2-y^2=51 \quad \text{یا} \quad x^2+y^2=49.$$



۲.۱۶ نمودار و چند خم تراز تابع

$$f(x, y)=100-x^2-y^2.$$



۴.۱۶ مسیرهای کوه واشنگتن در ایالات متحده آمریکا.

رویه‌های تراز يك تابع چگونگی تغییر مقادیر تابع را هنگامی که در دامنه‌اش حرکت می‌کنیم نشان می‌دهند. اگر روی کره به شعاع c و به مرکز مبدأ بمانیم، مقدار تابع ثابت، یعنی همان c ، باقی می‌ماند. اگر از کره‌ای به کره دیگر برویم مقدار تابع تغییر می‌کند. این مقدار زیاد می‌شود اگر از مبدأ دور شویم، و کم می‌شود اگر به آن نزدیک شویم. پس، نحوه تغییر مقادیر تابع بستگی به جهت انتخاب شده دارد. این وابستگی تغییر مقادیر تابع به جهت، مهم است، و ما در بخش ۶.۱۶ به آن باز می‌گردیم.

ترسیم کامپیوتری

برنامه‌های کامپیوتری موجود برای ترسیم سه بعدی به ما این امکان را می‌دهند که تنها با فشردن دکمه‌هایی، نمودار تابع دومتغیره را رسم کنیم. غالباً از روی این گونه نمودارها سریع‌تر می‌توانیم اطلاع به دست آوریم تا از فرمول تابع.

مثال ۵ در شکل ۶.۱۶ نمودار تابع زیر را می‌بینید که با کامپیوتر رسم شده است.

$$w(x, t) = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

که در آن t بر حسب روز، و x بر حسب فوت است. این نمودار چگونگی تغییر دمای نقاط زیر سطح زمین را بر حسب زمان نشان می‌دهد. این تغییر به صورت کسری از تغییر دما در سطح زمین معین می‌شود. در عمق ۱۵ فوتی، تغییر (برآمدگی قائم در شکل) ۵ درصد تغییر در سطح است. در ۳۰ فوتی، در طول سال تقریباً هیچ تغییری در دما دیده نمی‌شود.

مطلب دیگری که نمودار نشان می‌دهد، ولی فوراً از معادله f دیده نمی‌شود، این است که دما در عمق ۱۵ فوتی نسبت به دما

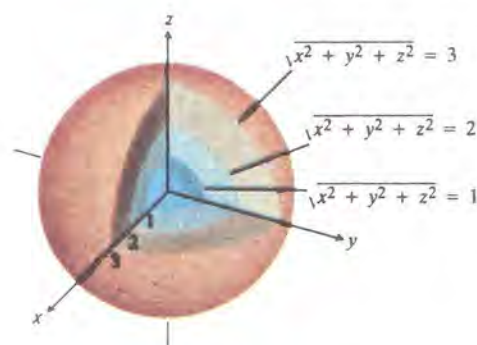
مثال ۴ رویه‌های تراز تابع زیر را مشخص کنید

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

حل: مقدار f فاصله مبدأ تا نقطه (x, y, z) است. هر رویه تراز

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c, \quad c > 0$$

کره‌ای است به شعاع c و به مرکز مبدأ. شکل ۵.۱۶ برشی از سه تا از این کره‌ها را نشان می‌دهد. رویه تراز $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ واقعاً رویه نیست زیرا تنها از مبدأ تشکیل می‌شود. توجه کنید که قصد ما در اینجا رسم نمودار این تابع نیست، نمودار تابع از نقاط $(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ تشکیل می‌شود که در يك فضای چهار متغیره قرار دارد، بلکه به رویه‌های واقع در دامنه تابع نظر داریم.



۵.۱۶ رویه‌های تراز تابع

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

کره‌هایی هم مرکزند.

در مسائل ۹-۱۸، رویه‌های تراز را در دامنه توابع مفروض مشخص کنید.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad ۰۹$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad ۰۱۰$$

$$f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2) \quad ۰۱۱$$

$$f(x, y, z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9) \quad ۰۱۲$$

$$f(x, y, z) = x \quad ۰۱۳$$

$$f(x, y, z) = x + y \quad ۰۱۴$$

$$f(x, y, z) = x + y + z \quad ۰۱۵$$

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \quad ۰۱۶$$

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 \quad ۰۱۷$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y \quad ۰۱۸$$

در مسائل ۱۹-۲۴، مقادیر توابع را از دو راه نمایش دهید: (الف) رویه $z = f(x, y)$ را بکشید، و (ب) خمهای تراز را در دامنه تابع رسم کنید. هر خم تراز را که رسم می‌کنید با معادله $f(x, y) = c$ مربوطه مشخص کنید.

$$f(x, y) = 4 - y^2 \quad ۰۱۹$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} \quad ۰۲۰$$

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 \quad ۰۲۱$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۰۲۲$$

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad ۰۲۳$$

$$f(x, y) = \sqrt{y - x^2} \quad ۰۲۴ \quad (\text{این همان تسابع مذکور در مثال ۱ است.})$$

$$۰۲۵ \quad \text{خمهای تراز تابع}$$

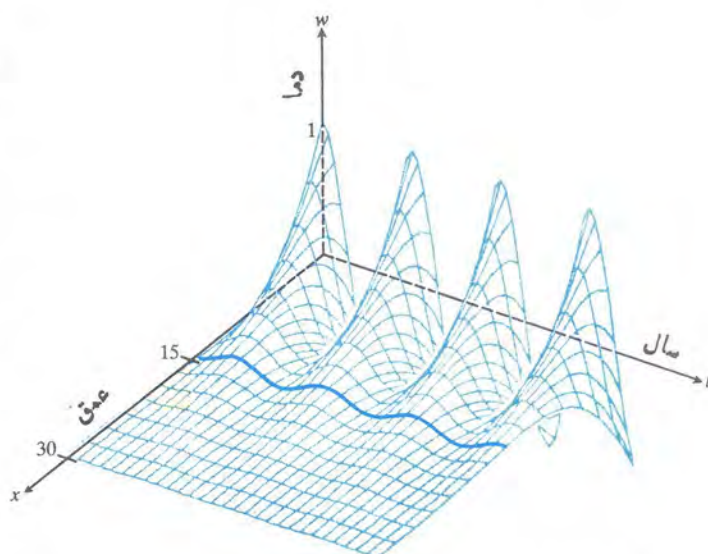
$$f(x, y) = -(x-1)^2 - y^2 + 1$$

را به ازای $f(x, y) = 1, 0, -3, -8$ رسم کنید.

$$۰۲۶ \quad \text{خمهای تراز تابع } f(x, y) = 2x^2 - y + 1 \text{ را به ازای } f(x, y) = 0, 1, 2 \text{ رسم کنید.}$$

$$۰۲۷ \quad \text{معادله‌ای برای خم تراز } f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \text{ که از نقطه } (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ بگذرد، بیابید.}$$

$$۰۲۸ \quad \text{معادله‌ای برای خم تراز تابع } f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1} \text{ که از نقطه } (1, 0) \text{ بگذرد، بیابید.}$$



۶۰۱۶ این نمودار که نمودار کامپیوتری

$$w(x, t) = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}$$

است، تغییر فصلی دمای زیر زمین را به صورت کسری از دمای سطح زمین نشان می‌دهد، $\Delta x = 0.375 \text{ ft}$ و $\Delta t = 15625$ روز. در $x = 15 \text{ ft}$ تغییر دما تنها ۵٪ تغییر در سطح زمین است. در $x = 30 \text{ ft}$ تغییر کمتر از ۰.۲۵٪ تغییر در سطح زمین است.

در سطح زمین تقریباً شش ماه اختلاف فاز دارد. وقتی در سطح زمین دما به حداقل می‌رسد (قرصاً، اوایل بهمن ماه) در عمق ۱۵ فوتی دما حداکثر است. در عمق ۱۵ فوتی جای فصلها عوض می‌شود. ■

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۸، دامنه و برد تابع را به دست آورید و خمهای تراز را در دامنه مشخص کنید.

$$۰۱ \quad f(x, y) = x + y$$

$$۰۲ \quad f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$۰۳ \quad f(x, y) = \ln(x + y)$$

$$۰۴ \quad f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$۰۵ \quad f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$$

$$۰۶ \quad f(x, y) = \cos xy$$

$$۰۷ \quad f(x, y) = \sqrt{y/x}$$

$$۰۸ \quad f(x, y) = y/x^2$$



۲۰۱۶ حد و پیوستگی

در این بخش حد و پیوستگی توابع دو یا چند متغیره را تعریف می‌کنیم. این تعریفها مانند تعریفهای متناظر در مورد توابع يك متغیره هستند، جز اینکه در این مورد باید متغیرهای بیشتری در نظر گرفته شوند. اما، خواهید دید که نمونه‌ها متنوعتر خواهند بود زیرا، همان گونه که بدزدی توضیح خواهیم داد، مسیر میل کردن ممکن است موضوع بحث انگیزی باشد.

حد

اگر بتوان مقادیر تابعی چون $z = f(x, y)$ را با نزدیک کردن نقطه (x, y) به نقطه (x_0, y_0) ، تا آنجا که بر آن منطبق نشود، به اندازه دلخواه به عدد ثابتی مانند L نزدیک کرد، می‌گوییم که L حد f است وقتی که (x, y) به (x_0, y_0) میل می‌کند. به صورت نمادی می‌نویسیم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \quad (۱)$$

و می‌گوییم «حد f وقتی (x, y) به (x_0, y_0) میل می‌کند برابر با L است.» که نظیر حد يك تابع يك متغیره است، با این تفاوت که به جای يك متغیر مستقل، دو متغیر داریم.

برای اینکه (x, y) «نزدیک» (x_0, y_0) باشد، باید به يك معنا فاصله دکارتی $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ کوچک باشد، چون

$$|x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (۲)$$

و

$$|y - y_0| = \sqrt{(y-y_0)^2} \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (۳)$$

از نابرابری

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

نتیجه می‌شود که

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{و} \quad |y - y_0| < \delta$$

به عکس، اگر به ازای δ ی مثبتی هم $|x - x_0| < \delta$ و هم $|y - y_0| < \delta$ ، آنگاه

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \sqrt{\delta^2 + \delta^2} = \sqrt{2} \delta$$

که اگر δ کوچک باشد، کوچک است. شکل ۸۰۱۶ را ببینید. پس

۲۹. غرش کنکورد. w ، پهنای ناحیه‌ای که ساکنان آن غرش هواپیمای کنکورد را مستقیماً می‌توانند بشنوند و نه از طریق انعکاس غرش از لایه‌ای درجو، تابعی است از عوامل زیر:

T = دمای هوا در سطح زمین (بر حسب درجه کلون)

h = ارتفاع کنکورد (بر حسب km)

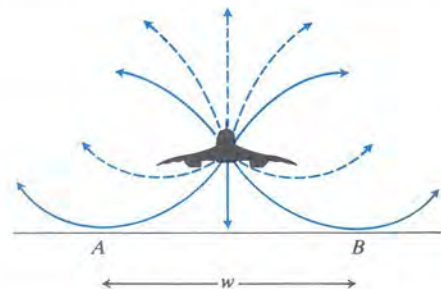
d = گرادیان دمای قائم (افت دما بر حسب درجه کلون بر km).

فرمول w عبارت است از

$$w = 4(T h / d)^{1/2}.$$

شکل ۷۰۱۶ را ببینید.

هواپیمای کنکوردی که از اروپا به مقصد واشنگتن می‌رود از جنوب جزیره نانتوکت و در ارتفاع ۱۶۸ km به ایالات متحده نزدیک می‌شود. اگر دمای سطح زمین ۲۹۰ K، و گرادیان دمای قائم ۵ K/km باشد، هواپیما چقدر باید دور از جنوب نانتوکت پرواز کند تا اینکه صدای غرشش به جزیره نرسد؟

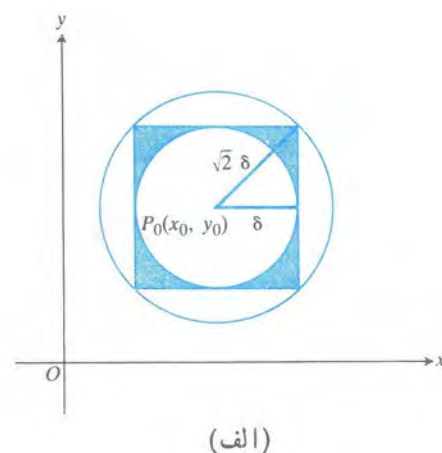
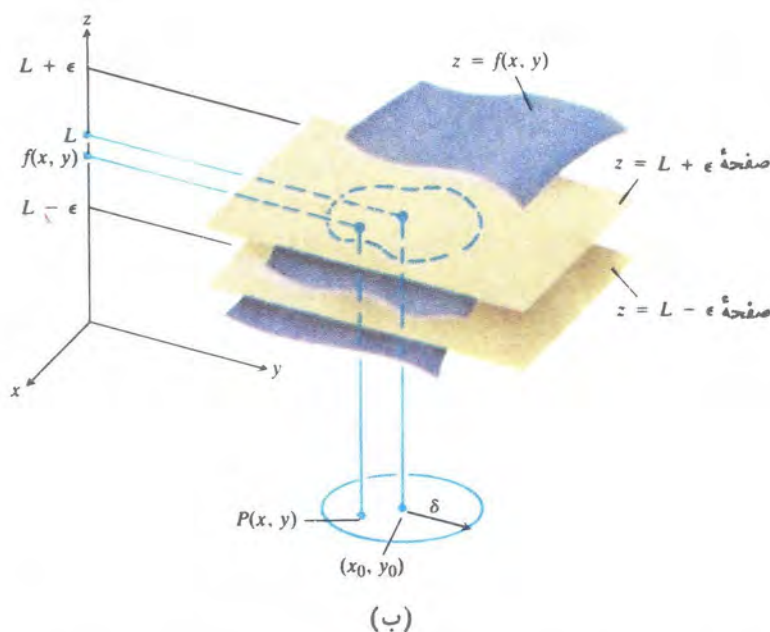


سطح زیر پوشش غرش کنکورد

۷۰۱۶ امواج صوتی کنکورد متناسب با

تغییر دمای بالا و پایین ارتفاعی که هواپیما پرواز می‌کند، خم می‌شوند. سطح زیر پوشش غرش، ناحیه‌ای است از زمین که امواج ضربه‌ای هواپیما مستقیماً به آن می‌رسد، و نه امواجی که از جو منعکس می‌شود یا امواجی که در امتداد زمین متفرق می‌شود. این ناحیه محدوده‌ای است که در آن، امواج از يك نقطه زیر هواپیما مستقیماً به زمین برخورد می‌کند.

۳۵. مقدار ماکسیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را روی خط $z = 20$ ، $y = 2$ ، $x = 20 - z$ بیابید. درجه نقطه یا نقاطی از خط، این ماکسیمم به دست می‌آید؟ (دانه‌مادی: در امتداد خط، f را می‌توان به صورت تابع مشتق‌پذیری از يك متغیر t بیان کرد.)



۸.۱۶ (الف) مربع باز $|x - x_0| < \delta$ ، $|y - y_0| < \delta$ درون قرص باز $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \sqrt{2} \delta$ قرار دارد و قرص باز $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ را دربردارد. پس با کوچک کردن δ می‌توان هم $|x - x_0|$ و هم $|y - y_0|$ را کوچک کرد، و بدعکس، (ب) به‌ازای هر نقطه (x, y) به‌فاصله کمتر از δ تا (x_0, y_0) ، فاصله مقدار $f(x, y)$ تا L از ϵ کمتر است.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0$$

و (۴)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k$$

برای محاسبه حد، می‌توان یا از مفهوم فاصله در صفحه استفاده کرد و یا از تفاضلهای مختصات متناظر. لذا حد دوتعریف معادل دارد.

دوتعریف معادل برای حد

حد $f(x, y)$ وقتی $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ عدد L است هرگاه به‌ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مثبت چون δ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای تمام نقاط $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ واقع در دامنه f داشته باشیم

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &< \delta \\ \Rightarrow |f(x, y) - L| &< \epsilon \end{aligned} \quad (۱)$$

و یا

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \quad \text{و} \quad |y - y_0| < \delta \\ \Rightarrow |f(x, y) - L| &< \epsilon. \end{aligned} \quad (۲)$$

همان‌گونه که در بخش ۹.۱ در مورد توابع تک‌متغیره عمل کردیم، با استفاده از تعریف حد می‌توانیم مستقیماً ثابت کنیم که

اثبات، نظیر اثباتهای قبلی است، و ما تکرار آنها را لازم نمی‌بینیم. همچنین می‌توان قضیه‌ای نظیر قضیه ۱ از بخش ۹.۱ به این مضمون ذکر کرد که حد مجموعی چون $f(x, y) + g(x, y)$ حدهای f و g (در صورت وجود هر دو) است. در مورد تفاضل، حاصلضرب، مضرب ثابت، و خارج قسمت هم احکام مشابهی برقرار است.

قضیه ۱

قضیه ترکیب حدها

اگر

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L_y \quad \text{و} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L_x$$

آنگاه

$$\lim [f(x, y) + g(x, y)] = L_x + L_y \quad (i)$$

مجموعشان، $f(x, y) + g(x, y)$ ، نیز در آن نقطه پیوسته است. احکام مشابهی در مورد تفاضل، حاصلضرب، و مضارب توابع پیوسته برقرار است. علاوه بر اینها، خارج قسمت دو تابع پیوسته هر جا که تعریف داشته باشد، پیوسته است. نتیجه اینکه چند جمله ایها و توابع گویای دو متغیره در هر نقطه که تعریف داشته باشند پیوسته اند. اگر $z = f(x, y)$ تابعی پیوسته از x و y باشد، و $w = g(z)$ تابعی پیوسته از z باشد، آنگاه تابع مرکب

$$w = g(f(x, y))$$

پیوسته است. بنا بر این توابع مرکبی چون

$$e^{x-y}, \quad \cos \frac{xy}{x^2+y^2+1}, \quad \ln(1+x^2y^2)$$

در همه نقاط (x, y) پیوسته اند.

در اینجا هم مانند توابع یک متغیره قاعده کلی این است که توابع مرکب حاصل از توابع پیوسته خود پیوسته اند. تنها شرط این است که هر تابع در نقطه مورد نظر پیوسته باشد.

مثال ۲ $\epsilon > 0$ مفروض است. (x, y) چقدر به $(0, 0)$ نزدیک باشد تا در مورد تابع

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$$

داشته باشیم $|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$ ؟

حل: چون $f(0, 0) = 0$ داریم

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \right|.$$

پس سؤال این است که (x, y) چقدر به $(0, 0)$ نزدیک باشد تا داشته باشیم

$$\left| \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \right| < \epsilon.$$

چون مخارج کسر هرگز از ۱ کمتر نیست، داریم

$$\left| \frac{x+y}{x^2+y^2+1} \right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= 2\sqrt{x^2+y^2}$$

که با شرط زیر این مقدار از ϵ کمتر است

$$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\lim [f(x, y) - g(x, y)] = L_1 - L_2 \quad (\text{ii})$$

$$\lim [f(x, y)g(x, y)] = L_1 L_2 \quad (\text{iii})$$

$$\lim [kf(x, y)] = kL_1 \quad (\text{iv}) \quad \text{هر عددی می تواند باشد}$$

$$\lim \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0 \quad (\text{v})$$

این حدها همگی با فرض $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ محاسبه می شوند.

وقتی قضیه ۱ را در مورد تابعها و حدهای مذکور در (۲) به کار بندیم به این نتیجه مفید می رسیم که حد چند جمله ایها و توابع گویای پیوسته

$$x^2+y^2, \quad \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3}$$

را وقتی $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ می توان با محاسبه مقدار این توابع در نقطه (x_0, y_0) به دست آورد. تنها کافی است که تابع در این نقطه تعریف شده باشد. به عبارت دیگر، همان گونه که ذیلا مشاهده خواهیم کرد، چند جمله ایها و توابع گویای دو متغیره در هر جا که تعریف بشوند، پیوسته هستند.

مثال ۱

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-4)} (x^2+y^2) = (3)^2 + (-4)^2 \quad (\text{الف})$$

$$= 9 + 16 = 25.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{0-0(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3} = -3.$$

پیوستگی

تعریف

یک تابع $f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) پیوسته است هرگاه

۱. f در (x_0, y_0) تعریف شود

۲. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ وجود داشته باشد، و

۳. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

نتیجه ای از قضیه ۱، که از اثبات آن صرف نظر می کنیم، این است که اگر $f(x, y)$ و $g(x, y)$ هر دو در نقطه ای پیوسته باشند،

داریم $m = \tan \theta$

$$f(x, y) = \frac{m}{1+m^2} = \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

که نشان می‌دهد بسته به زاویه میل، این حد از $1/2$ تا $-1/2$ تغییر می‌کند. عدد منحصر به فردی چون L وجود ندارد که بتوانیم آن را حد f وقتی که $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ بنامیم. بنابراین حدی وجود ندارد و این تابع در $(0, 0)$ نمی‌تواند پیوسته باشد. مسأله ۳۳ راه دیگری برای اثبات ناپیوستگی این تابع به دست می‌دهد.

مثال ۴ حدهای

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

را وقتی (x, y) در امتداد خط $y = mx$ و در امتداد سهمی $y = x^2$ به $(0, 0)$ میل کنند، به دست آورید. آیا وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، تابع f حد دارد؟

حل: شکل ۱۵.۱۶ را ببینید. در امتداد خط $y = mx$ داریم

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x^2(mx)}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}.$$

بنابراین

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx \text{ در امتداد}}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

بنابراین، اگر فاصله (x, y) تا $(0, 0)$ کمتر از $\epsilon/2$ باشد، نابرابری اولیه مربوط به ϵ برقرار خواهد بود. بنابراین می‌توانیم با اطمینان δ را در تعریف حد برابر با $\epsilon/2$ بگیریم. ■

مثال ۳ نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در هر نقطه‌ای بجز مبدأ پیوسته است. شکل ۹.۱۶ را ببینید.

حل: تابع f در هر نقطه $(x, y) \neq (0, 0)$ پیوسته است زیرا مقادیرش با تابع گویایی از x و y معین می‌شوند. تابع f در $(0, 0)$ مقدار دارد، اما ادعا می‌کنیم f وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، حد ندارد. زیرا ممکن است بسته به مسیر میل کردن به مبدأ، نتایج متفاوتی به دست آید. اگر در امتداد خط $y = mx$ داشته باشیم $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ولی $(x, y) \neq (0, 0)$ ، آنگاه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x(mx)}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

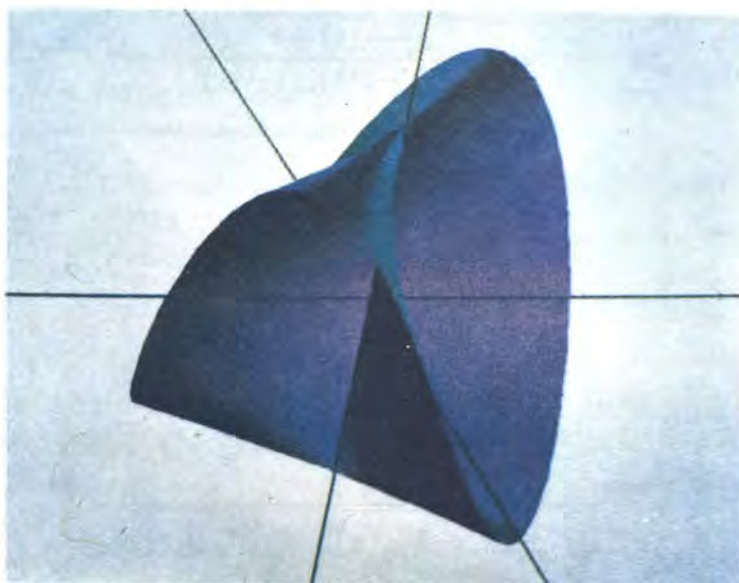
$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = mx \text{ در امتداد}}} f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2}.$$

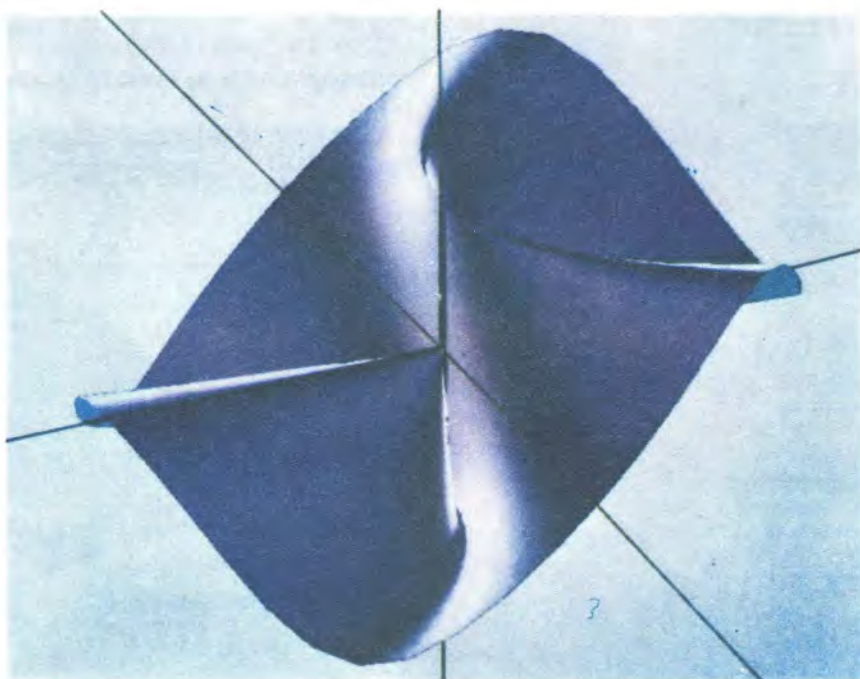
مقدار این حد با تغییر m تغییر می‌کند. در واقع، با جانشانی

۹.۱۶ نمودار رویه

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تنها نقطه‌ای از محور z که به این رویه تعلق دارد، نقطه $(0, 0, 0)$ است.





۱۰.۱۶ نمودار

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تنها نقطه‌ای از محور z که به این رویه تعلق دارد، نقطه $(0, 0, 0)$ است.

در هر نقطه‌ای که تعریف شوند پیوسته‌اند و حدهایی نظیر

$$\lim_{P \rightarrow (1, 0, 1)} \frac{e^{x-y+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{e^{1-0+1}}{(1)^2 + \cos(0)} = \frac{e^2}{2}$$

را که در آنها P نقطه (x, y, z) را نشان می‌دهد می‌توان با جانشانی مستقیم به دست آورد.

این واقعیت که در امتداد تمام مسیرهای خطی که به $(0, 0)$ ختم می‌شوند، حد وجود دارد و مقدار آن برابر با صفر است ممکن است باعث این گمان شود که $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ وجود دارد. اما در امتداد

سهمی $y = x^2$ داریم

$$f(x, y) = f(x, x^2) = \frac{x^2(x^2)}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

پس

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = x^2}} f(x, y) = \frac{1}{2}.$$

برای اینکه وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، f حد داشته باشد باید حدها در امتداد تمام مسیرها برابر باشند. چون در امتداد مسیرهای مختلف به حدهای متفاوت رسیدیم، نتیجه می‌گیریم که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، f حد ندارد. ■

توابع سه یا بیش از سه متغیره

تعریفهای حد و پیوستگی در مورد توابع دو متغیره و نتایجی را که در باره حد و پیوستگی مجموع، حاصلضرب، خارج قسمت، و ترکیب این توابع به دست آوردیم، می‌توان به توابع سه یا بیش از سه متغیره تعمیم داد. از همین رو، توابعی نظیر

$$\frac{e^{x-y+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} \quad \text{و} \quad \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

توابع پیوسته‌ای که بر نواحی کراندار بسته تعریف می‌شوند

همان‌طور که می‌دانیم، تابع یک متغیره‌ای که در سراسر یک بازه بسته و کراندار $[a, b]$ پیوسته باشد، در این بازه دست کم یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق اختیار می‌کند. این مطلب در مورد تابعی چون $z = f(x, y)$ ، که بر یک مجموعه بسته و کراندار R واقع در صفحه (نظیر یک پاره خط، قرص، یا مثلث توپر) پیوسته باشد، نیز صادق است. چنین تابعی در نقطه‌ای از R یک ماکسیمم مطلق و در نقطه‌ای از R یک مینیمم مطلق اختیار می‌کند.

قضایای مشابهی در مورد توابع سه و بیش از سه متغیره برقرارند. مثلاً، تابعی پیوسته چون $w = f(x, y, z)$ بر هر مجموعه بسته و کراندار (مانند گوی یا مکعب توپر، پوسته کروی یا ورق مستطیلی شکل) که تابع بر آن تعریف شده باشد، مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق اختیار می‌کند.

روش محاسبه این مقادیر ماکسیمم و مینیمم، موضوع بحث بخشهای ۱۰.۱۷ و ۱۰.۱۸ است.

مسائلها

در مسائل ۱-۱۶، حدها را بیابید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2} \quad ۱.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln|1 + x^2 y^2| \quad ۲.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln 2)} e^{x-y} \quad ۳.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}} \quad ۴.$$

$$\lim_{P \rightarrow (1,2,4)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} \quad ۵.$$

$$\lim_{P \rightarrow (1,2,4)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad ۶.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} \quad ۷.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \pi/4)} \sec x \tan y \quad ۸.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy + y - 2x - 2}{x + 1} \quad ۹.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + y + 1} \quad ۱۰.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1} \quad ۱۱.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2 + 1} \quad ۱۲.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}, \quad x \neq y \quad ۱۳.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, \quad x \neq y \quad ۱۴.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \tan^{-1}(1/\sqrt{x^2 + y^2}) \quad ۱۵.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right) \left(\frac{y-2}{y^2 - 4} \right) \quad ۱۶.$$

در مسائل ۱۷-۲۲، با در نظر گرفتن خطوط میل مختلف نشان دهید

که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، توابع مفروض حد ندارند.

$$\frac{x+y}{x-y} \quad ۱۷.$$

$$\frac{x-y}{x+y} \quad ۱۸.$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ۱۹.$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ۲۰.$$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} \quad ۲۱.$$

$$\frac{xy}{|xy|} \quad ۲۲.$$

در مسائل ۲۳-۲۶، نشان دهید که اگر نقطه (x, y) به اندازه کافی نزدیک مبدأ اختیار شود، داریم

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < 0.01.$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad ۲۳.$$

$$f(x, y) = y/(x^2 + 1) \quad ۲۴.$$

$$f(x, y) = (x + y)/(x^2 + 1) \quad ۲۵.$$

$$f(x, y) = (x + y)/(2 + \cos x) \quad ۲۶.$$

در مسائل ۲۷-۳۰، نشان دهید که اگر به ازای ϵ مثبت مفروض، نقطه (x, y, z) به اندازه کافی نزدیک مبدأ انتخاب شود، داریم

$$|f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon.$$

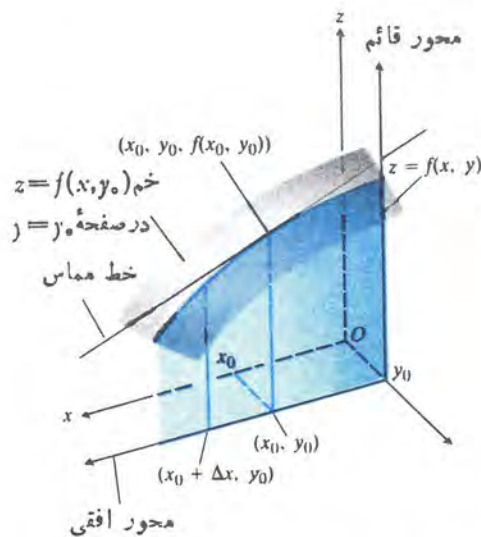
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.01 \quad ۲۷.$$

$$f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008 \quad ۲۸.$$

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad \epsilon = 0.015 \quad ۲۹.$$

$$f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03 \quad ۳۰.$$

۳۱. آیا $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ در $(0, 0, 0)$ پیوسته است؟ توضیح دهید.۳۲. با بررسی حدهای $f(x, y) = x^2/(x^2 + y)$ وقتی (x, y) در امتداد سهمیهای $y = kx^2$ (به ازای چند مقدار k) به



۱۱۰۱۶ محل تقاطع صفحه $y = y_0$ با رویه $z = f(x, y)$ وقتی از يك نقطه واقع در بالای ربع چهارم صفحه xy به آن نگریده شود.

واقع در صفحه $y = y_0$ در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ مقدار این مشتق جزئی نسبت به x در (x_0, y_0) است. مماس بر خم $z = f(x, y)$ در $x = x_0$ خطی واقع در صفحه $y = y_0$ است که از نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ می‌گذرد و شیب آن این مقدار است.

نمادهای معمول مشتق جزئی $z = f(x, y)$ نسبت به x در (x_0, y_0) عبارت‌اند از:

«مشتق جزئی f نسبت به x در (x_0, y_0) » یا « f اندیس x در (x_0, y_0) ». این نماد برای تأکید بر نقطه (x_0, y_0) مناسب است.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{یا} \quad f_x(x_0, y_0)$$

«مشتق جزئی z نسبت به x در (x_0, y_0) ». این نماد در علوم و مهندسی وقتی به کار می‌رود که با متغیرها سروکار داشته باشند و تابع به‌طور صریح ذکر نشود.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

«مشتق جزئی f (یا z) نسبت به x ». این نماد وقتی مناسب است که مشتق جزئی، خود به‌عنوان يك تابع در نظر گرفته شود.

$$\frac{\partial z}{\partial x}, z_x, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x$$

$(0, 0)$ میل می‌کند، نشان دهید که این تابع وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ حد ندارد.

۳۳ در مورد تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مذکور در مثال ۳، خمهای تراز $f(x, y) = 0$ ، $f(x, y) = 1/2$ و $f(x, y) = -1/2$ را رسم کنید. این هم‌راه دیگری است برای نشان دادن ناپیوستگی این تابع در مبدأ.

TOOLKIT PROGRAM
3D Grapher

۳.۱۶ مشتقات جزئی

مشتقات جزئی وقتی به دست می‌آیند که در يك تابع چندمتغیره همه متغیرها را به‌جز یکی ثابت نگه داریم، و نسبت به آن متغیر مشتق بگیریم. در این بخش، نشان می‌دهیم که مشتقات جزئی چگونه به‌صورت هندسی پدید می‌آیند، و چگونه می‌توانیم آنها را با استفاده از قوانینی که در مورد مشتق توابع يك‌متغیره به دست آورده‌ایم محاسبه کنیم. بحث را با توابعی که دارای دو متغیر مستقل اند آغاز می‌کنیم.

تعریف

اگر نقطه‌ای از دامنه يك تابع $z = f(x, y)$ باشد، محل تقاطع صفحه $y = y_0$ با رویه $z = f(x, y)$ طبق شکل ۱۰۱۶ خم $z = f(x, y_0)$ است. این خم نمودار تابع $z = f(x, y_0)$ در صفحه $y = y_0$ است. در این صفحه، مختص قائم z است و آن، فاصله نقطه واقع در بالای (پایین) صفحه xy از این صفحه است. مختص افقی x است.

مشتق $z = f(x, y_0)$ نسبت به x در $x = x_0$ طبق معمول تعریف می‌شود و عبارت است از حد

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \quad \text{در } x = x_0$$

(۱)

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

به‌شرطی که این حد وجود داشته باشد. این حد را مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x_0, y_0) می‌نامیم. شیب خم $z = f(x, y_0)$

محاسبات

چنانکه معادله (۱) نشان می‌دهد $\partial f / \partial x$ مشتق معمولی f نسبت به x است وقتی y ثابت در نظر گرفته شود. بنا براین، برای محاسبه $\partial f / \partial x$ با ثابت در نظر گرفتن y به طریق معمولی از f نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال ۱ اگر

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

$\partial f / \partial x$ را در نقطه (۴، ۵) بیابید.

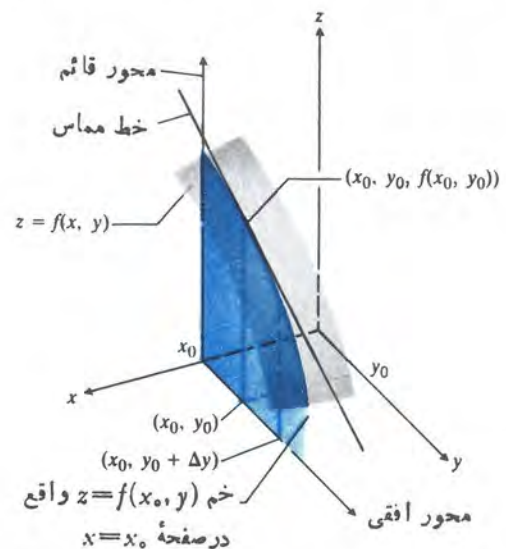
حل: y را ثابت در نظر گرفته نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3y + 0 - 0 \\ &= 2x + 3y.\end{aligned}$$

بنابراین، مقدار $\partial f / \partial x$ در (۴، ۵) برابر است با

$$2(4) + 3(5) = 23.$$

تعریف مشتق جزئی $\partial f / \partial y$ تابع $z = f(x, y)$ نسبت به y در نقطه (x_0, y_0) شبیه تعریف $\partial f / \partial x$ است. $\partial f / \partial x$ را به صورت تابعی از یک متغیر مستقل y (شکل ۱۲.۱۶) در نظر می‌گیریم



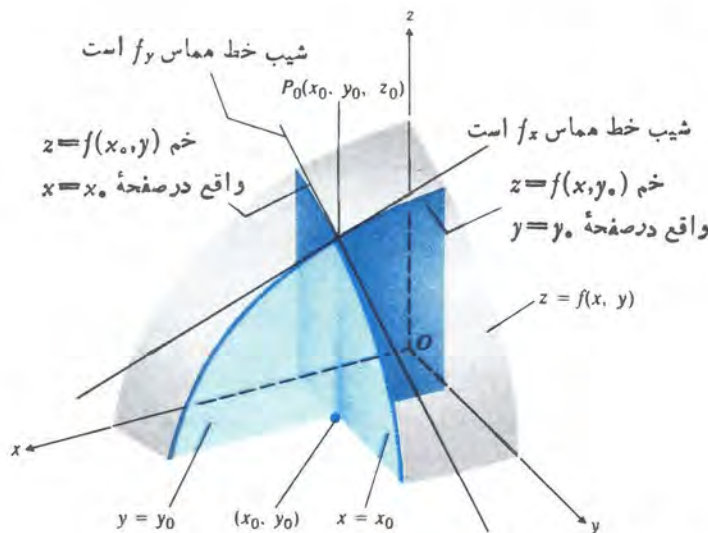
۱۲.۱۶ محل تقاطع صفحه $x = x_0$ با رویه $z = f(x, y)$ وقتی از ربع اول صفحه xy به آن نگریسته شود.

و، به شرطی که حد زیر وجود داشته باشد، چنین تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left. \frac{d}{dy} f(x_0, y) \right|_{y=y_0} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.\end{aligned}\quad (2)$$

این حد، شیب خم $z = f(x_0, y)$ واقع در صفحه $x = x_0$ نیز هست. مماس بر خم خطی است واقع در صفحه $x = x_0$ که با این شیب از نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ می‌گذرد.

اکنون ما دو خط مماس بر $z = f(x, y)$ در (x_0, y_0) در اختیار داریم که شکل ۱۳.۱۶ هر دو را نشان می‌دهد. اگر $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ هر دو در (x_0, y_0) پیوسته باشند، صفحه‌ای که با این دو خط مشخص می‌شود در نقطه (x_0, y_0) بر رویه $z = f(x, y)$ مماس است. مسائل مربوط به مماس در مورد رویه‌ها نسبت به خمها بسیار دشوارتر است و لذا ادامه بحث را تا بخش ۷.۱۶ که به این مطلب می‌پردازیم به تعویق می‌اندازیم.



۱۳.۱۶ محل تقاطع صفحه $y = y_0$ با رویه $z = f(x, y)$ خم $z = f(x, y_0)$ است. به ازای هر شیب این خم برابر است با $f_x(x_0, y_0)$. همین‌طور، محل تقاطع صفحه $x = x_0$ با رویه $z = f(x, y)$ خمی است با شیب $f_y(x_0, y)$.

مثال ۲ اگر

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

مقدار $\partial f / \partial y$ را در نقطه (۴، ۵) بیابید.

حل: x را ثابت در نظر می‌گیریم و نسبت به y مشتق

می‌گیریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) \\ &= 0 + 3x + 1 - 0 = 3x + 1.\end{aligned}$$

مقدار $\partial f / \partial y$ در $(4, 5)$ برابر با $13 = 3(4) + 1$ است.

مثال ۳ اگر

$$f(x, y) = y \sin xy$$

$\partial f / \partial y$ را بیابید.

حل: x را ثابت، و f را به صورت حاصلضرب y و $\sin xy$ در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + \sin xy \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= y \cos xy \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy \\ &= xy \cos xy + \sin xy.\end{aligned}$$

مثال ۴ اگر

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}$$

f_x و f_y را بیابید.

حل: f را به صورت خارج قسمت $2y$ بر $(y + \cos x)$ در نظر می‌گیریم. اگر y را ثابت بگیریم، داریم

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) \\ &= \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y \frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{2y \sin x}{(y + \cos x)^2}.\end{aligned}$$

حال آنکه اگر x را ثابت بگیریم، داریم

$$\begin{aligned}f_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2y}{y + \cos x} \right) \\ &= \frac{(y + \cos x) \frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y \frac{\partial}{\partial y}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2} \\ &= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2}.\end{aligned}$$

توابع با بیش از دو متغیر

تعریف مشتق‌های جزئی توابعی که بیش از دو متغیر مستقل دارند، شبیه تعریف مربوط به توابع دو متغیره است. این مشتق‌ها همان مشتق‌های معمولی نسبت به یک متغیرند با این شرط که سایر متغیرهای مستقل، ثابت در نظر گرفته شوند.

مثال ۵ مطلوب است

$$\frac{\partial}{\partial z}(x \sin(y + 3z)).$$

حل:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(x \sin(y + 3z)) &= x \frac{\partial}{\partial z} \sin(y + 3z) \\ &= x \cos(y + 3z) \frac{\partial}{\partial z}(y + 3z) \\ &= 3x \cos(y + 3z).\end{aligned}$$

مثال ۶ فرض کنید $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) در مختصات دکارتی باشد، و فرض کنید $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ، $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ ، $z = \rho \cos \phi$. مطلوب است $\partial \mathbf{R} / \partial \theta$.

حل:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{k} \\ &= -(\rho \sin \phi \sin \theta) \mathbf{i} + (\rho \sin \phi \cos \theta) \mathbf{j}.\end{aligned}$$

مثال ۷ سه مقاومت R_1 ، R_2 و R_3 به صورت موازی به هم وصل شده و مقاومتی چون R به وجود آورده‌اند که مقدار آن از رابطه

در مسائل ۲۱-۲۸، مشتق جزئی f را نسبت به هر يك از متغیرها بیابید.

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx \quad ۲۱$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad ۲۲$$

$$f(x, y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \quad ۲۳$$

$$f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2} \quad ۲۴$$

$$f(P, Q, R) = 1/PQR \quad ۲۵$$

$$f(u, v, w, x) = \ln(uvwx) \quad ۲۶$$

$$f(\rho, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta \quad ۲۷$$

$$f(r, \theta, z) = r(1 - \cos \theta) - z \quad ۲۸$$

۲۹. فرض کنید معادله زیر z را به صورت تابع مشتقپذیری از دو متغیر مستقل x و y تعریف می کند

$$xy + z^2x - 2yz = 0.$$

مطلوب است مقدار $\partial z / \partial x$ در نقطه $(1, 1, 1)$.

۳۰. فرض کنید معادله زیر x را به صورت تابع مشتقپذیری از دو متغیر مستقل y و z تعریف می کند

$$xz + y \ln x + x^2 + 4 = 0.$$

مطلوب است مقدار $\partial x / \partial z$ در نقطه

$$(x, y, z) = (1, -1, -3).$$

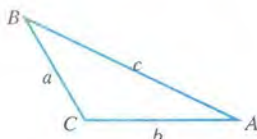
۳۱. فرض کنید که معادله زیر x را به صورت تابع مشتقپذیری از دو متغیر مستقل y و z تعریف می کند

$$x \sin(y+z) - xy + z^2 = 0.$$

مطلوب است مقادیر $\partial x / \partial y$ و $\partial x / \partial z$ در نقطه $(1, -1, 1)$.

۳۲. فرض کنید $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) در مختصات دکارتی باشد، و فرض کنید r ، θ ، و z مختصات استوانه‌ای آن باشند. $\partial \mathbf{R} / \partial r$ ، $\partial \mathbf{R} / \partial \theta$ ، و $\partial \mathbf{R} / \partial z$ را به صورت توابعی برداری از r ، θ ، و z بیان کنید.

مسائل ۳۳ و ۳۴ مربوط به اضلاع و زوایای مثلث شکل ۱۴.۱۶ هستند.



۱۴.۱۶ مثلث مربوط به مسائل ۳۳ و ۳۴.

زیر به دست می آید. مطلوب است $\partial R / \partial R_y$:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

حل: R_1 و R_2 را ثابت فرض می کنیم و از دو طرف معادله نسبت به R_3 مشتق می گیریم. داریم

$$\frac{\partial R}{\partial R_3} = \left(\frac{R}{R_3}\right)^2 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$$

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۲۰، $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ را بیابید.

$$f(x, y) = 2x \quad ۱$$

$$f(x, y) = -3y \quad ۲$$

$$f(x, y) = -2 \quad ۳$$

$$f(x, y) = 2x - 3y - 4 \quad ۴$$

$$f(x, y) = x(y-1) \quad ۵$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad ۶$$

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 \quad ۷$$

$$f(x, y) = (x+2)(y+3) \quad ۸$$

$$f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2 \quad ۹$$

$$f(x, y) = 1/(x+y) \quad ۱۰$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۱۱$$

$$f(x, y) = x/(x^2 + y^2) \quad ۱۲$$

$$f(x, y) = (x+y)/(xy-1) \quad ۱۳$$

$$f(x, y) = (y-x)e^x \quad ۱۴$$

$$f(x, y) = e^x \ln y \quad ۱۵$$

$$f(x, y) = \sin(x+y) \quad ۱۶$$

$$f(x, y) = e^x \sin(y+1) \quad ۱۷$$

$$f(x, y) = \tan^{-1}(y/x) \quad ۱۸$$

$$f(x, y) = \tanh(2x+5y) \quad ۱۹$$

$$f(x, y) = \cosh(y/x) \quad ۲۰$$

نسبت به t را روی مسیر بدانیم، کافی است از این تابع مرکب نسبت به t مشتق بگیریم (البته با این شرط که df/dt وجود داشته باشد).

برای محاسبه df/dt گاه می‌توان $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ را در فرمول مربوط به f قرار داد و از نتیجه مستقیماً نسبت به t مشتق گرفت. اما، غالباً با توابعی سروکار داریم که یا فرمول آنها آنقدر پیچیده است که نمی‌توان جانشانی مناسبی در آن انجام داد و یا فرمول بدراحتی در دسترس ما نیست. در این گونه موارد برای یافتن مشتقات توابع از قاعده زنجیری استفاده می‌کنیم. صورت قاعده زنجیری به تعداد متغیرها بستگی دارد، اما کاربرد آن نظیر قاعده زنجیری مذکور در فصل ۲ است به‌جز اینکه در اینجا با تعداد بیشتری متغیر سروکار داریم.

قاعده زنجیری در مورد توابع دو متغیره

در فصل ۲ با تابع مشتق‌پذیری چون $u = f(x)$ سروکار داشتیم که در آن، x نیز تابع مشتق‌پذیری از t بود. دیدیم که u خود تابع مشتق‌پذیری از t است و

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

برای تابعی چون $w = f(x, y)$ ، وقتی که x و y توابع مشتق‌پذیری از t باشند، فرمول متناظر عبارت است از

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (2)$$

اگر f ، $\partial f/\partial x$ ، و $\partial f/\partial y$ پیوسته باشند، این فرمول برقرار است.

نحوه به‌دست آوردن معادله (۲) خیلی شبیه روش به‌دست آوردن قاعده زنجیری مربوط به تابع یک متغیره است. قضیه‌ای که مضمونش شبیه رابطه (۱۱) در بخش ۴.۲ است، حاکی است که اگر Δx ، Δy ، و Δw نهموهای باشند که از تغییر t از t_0 به $t_0 + \Delta t$ حاصل می‌شوند، داریم

$$\Delta w = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t_0} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{t_0} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y. \quad (3)$$

ϵ_1 و ϵ_2 موجود در این فرمول از این نظر شبیه ϵ موجود در معادله (۱۱) بخش ۴.۲ هستند که وقتی Δt به‌صفر نزدیک می‌شود، هر دو به‌صفر میل می‌کنند. برای محاسبه مقدار dw/dt در t_0 ، دوطرف معادله (۳) را بر Δt تقسیم می‌کنیم و Δt را به‌صفر میل می‌دهیم. حاصل تقسیم عبارت است از

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{t_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad (4)$$

۳۳. A را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از a ، b ، و c بیان، و $\partial A/\partial a$ و $\partial A/\partial b$ را محاسبه کنید.

۳۴. a را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از A ، b ، و B بیان، و $\partial a/\partial B$ و $\partial a/\partial A$ را محاسبه کنید.

در مسائل ۳۵–۴۰، مختصات کروی ρ ، ϕ ، و θ را به‌صورت توابعی از مختصات دکارتی x ، y ، و z بیان، و مشتقات خواسته‌شده را محاسبه کنید.

$$35. \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$36. \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$37. \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$38. \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

$$39. \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$40. \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

۴۱. فرض کنید $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) در دستگاه مختصات دکارتی باشد. x ، y ، و z را به صورت توابعی از مختصات کروی ρ ، ϕ ، و θ بیان و $\partial \mathbf{R}/\partial \rho$ ، $\partial \mathbf{R}/\partial \theta$ ، و $\partial \mathbf{R}/\partial \phi$ را محاسبه کنید. سپس این مشتقات را بر حسب بردارهای واحد بنویسید.

$$\mathbf{u}_\rho = (\sin \phi \cos \theta) \mathbf{i} + (\sin \phi \sin \theta) \mathbf{j} + (\cos \phi) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\phi = (\cos \phi \cos \theta) \mathbf{i} - (\cos \phi \sin \theta) \mathbf{j} - (\sin \phi) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -(\sin \theta) \mathbf{i} + (\cos \theta) \mathbf{j}.$$

۴.۱۶ قاعده زنجیری

وقتی که دمای $f(x, y, z)$ در نقاطی روی مسیر

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

واقع در فضا، یا فشار یا چگالی در نقاط روی مسیری که از درون گاز یا سیالی می‌گذرد، مورد توجه ما باشد، می‌توان f را به‌صورت تابعی از تک‌متغیر t تصور کرد. به‌ازای هر t ، دمای نقطه $(x(t), y(t), z(t))$ واقع بر مسیر، مقدار تابع مرکب $f(x(t), y(t), z(t))$ است. حال اگر بخواهیم آهنگ تغییر f

مثال ۱ با استفاده از قاعده زنجیری، مشتق

$$f(x, y) = xy$$

را در امتداد مسیر $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ نسبت به t بیابید. مقدار مشتق در $t = \pi/2$ چقدر است؟

حل: طرف راست معادله (۷) را با فرض $f(x, y) = xy$ ، $x = \cos t$ و $y = \sin t$ محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = \sin t, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x = \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t \\ &= \cos 2t. \end{aligned}$$

در این حالت، می‌توان درستی نتیجه را با محاسبه سرراست تری آزمود. $f(x, y) = xy$ به صورت تابعی از t عبارت است از

$$f(x, y) = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

بنابراین

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right) = \cos 2t.$$

در هر حال، مقدار df/dt به ازای $t = \pi/2$ برابر است با

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_{\pi/2} = \cos \pi = -1.$$

قاعده زنجیری در مورد توابع سه‌متغیره

اگر $w = f(x, y, z)$ و مشتقات جزئی آن پیوسته باشند، و $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، $z = z(t)$ توابع مشتق‌پذیری از t باشند، آنگاه فرمول مناسب برای df/dt عبارت است از

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (8)$$

نحوه به دست آوردن این فرمول با شیوه استنتاج معادله (۳) یکی

و وقتی Δt به صفر میل کند، مقدار dw/dt در t_0 به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dt} \right)_{t_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{t_0} \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{t_0} \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t_0} \\ &+ 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt} \right)_{t_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

چون دو عبارت آخر سمت راست صفرند، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (6)$$

در اینجا انديس t_0 که مشخص می‌کند مشتقها در کجا محاسبه می‌شوند، حذف شده است.

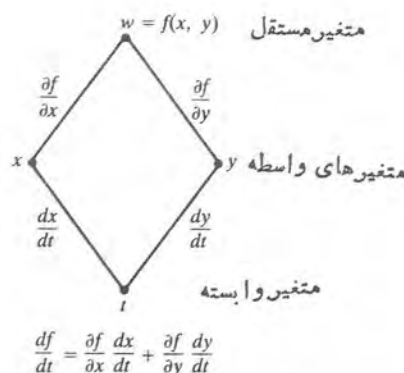
برای کسانی که مایل اند اطلاعات بیشتری در مورد معادله (۳) کسب کنند و می‌خواهند بدانند چرا $\partial f / \partial x$ ، w و $\partial f / \partial y$ پیوسته فرض می‌شوند، جزئیات استنتاج را در پیوست ۹ آورده‌ایم.

معادله (۶) را به صورت زیر نیز می‌نویسند که در آن حرف f جای حرف w را گرفته است.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (7)$$

هر دو صورت متداول اند. صورت dw/dt ، بر متغیر مستقل تأکید دارد حال آنکه df/dt بر تابع تأکید دارد. در هر دو حالت راه به خاطر سپردن قاعده زنجیری تجسم نمودار [گراف] ۱۵.۱۶ است.

قاعده زنجیری



۱۵.۱۶ برای محاسبه df/dt ، از w آغاز کنید و در امتداد هر دو مسیر به t بروید، و در طول راه مشتقها را در هم ضرب کنید، و در پایان حاصلضربها را به هم بیفزایید.

زیر بیان می کنیم

$$f(x(r, s), y(r, s), z(r, s)).$$

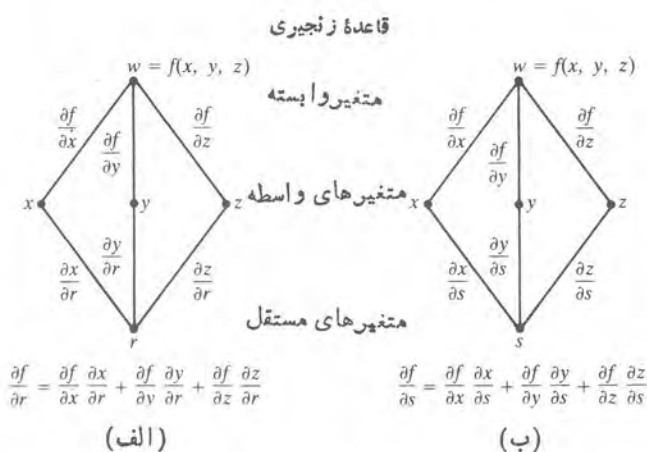
اگر f و مشتقات جزئی آن نسبت به x, y, z و پیوسته باشند، و نیز اگر x, y, z و مشتقات جزئی آنها نسبت به r و s پیوسته باشند، آنگاه f نسبت به r و s مشتقات جزئی پیوسته دارد و داریم

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (۹)$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (۱۰)$$

معادله (۹) از معادله (۸) با ثابت نگه داشتن s و قراردادن r به جای t به دست می آید. به همین ترتیب، معادله (۱۰) را می توان با ثابت نگه داشتن r و قراردادن s به جای t به دست آورد. نمودارهای معادلات (۹) و (۱۰) در شکل ۱۷.۱۶ داده شده اند.



۱۷.۱۶

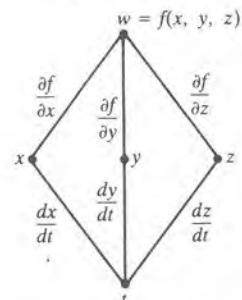
مثال ۳ اگر $x = r/s$ ، $f(x, y, z) = x + 2y + z^2$ و $z = 2r$ ، $y = r^2 + \ln s$ به صورت توابعی از r و s .

حل: بنا به معادله (۹)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (1) \left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2) = \frac{1}{s} + 12r. \end{aligned}$$

است، با این تفاوت که در اینجا به جای دو متغیر واسطه، سه متغیر (x, y, z) در کارند. نموداری هم که برای به خاطر سپردن این فرمول رسم می شود با نمودار فرمول (۳) مشابه است (شکل ۱۶.۱۶).

قاعده زنجیری



$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

۱۶.۱۶

مثال ۲ اگر $y = \sin t$ ، $x = \cos t$ و $f(x, y, z) = xy + z$ مقدار df/dt را در $t = 0$ بیابید.

حل: مشتق df/dt نشان می دهد که چگونه مقادیر f در امتداد یک پیچ به ازای مقادیر دامنه تابع تغییر می کند. از معادله (۸) داریم

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + 1(1) \\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 \\ &= 1 + \cos 2t. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_0 = 1 + \cos(0) = 2.$$

قاعده زنجیری در مورد توابعی که بر رویه ها تعریف می شوند

اگر دمای $f(x, y, z)$ در نقاط واقع بر کره ای در فضا مورد توجه ما باشد، ممکن است ترجیح دهیم x, y, z را به صورت توابعی از متغیرهای r و s که عرض و طول جغرافیایی نقاط را به دست می دهند در نظر بگیریم. در این صورت دما را به صورت تابع مرکب

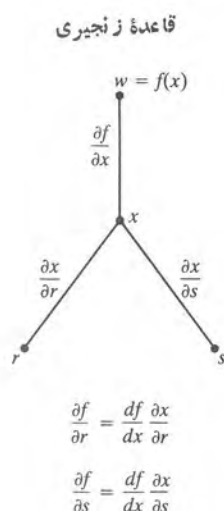
بنا به معادله (۱۰)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)(-1) + (2y)(1) \\ &= -2(r-s) + 2(r+s) = 4s.\end{aligned}$$

اگر f تابعی از x تنها باشد، آنگاه معادلات (۹) و (۱۰) به صورت ساده زیر درمی آید

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial r} \quad (12)$$

در اینجا df/dx مشتق معمولی (یک متغیره) است. شکل ۱۹.۱۶ را ببینید.



۱۹.۱۶

مثال ۵ نشان دهید که هر تابع مشتقپذیر به صورت $w = f(s)$ ، که در آن $s = y + ax$ ، جوابی برای معادله دیفرانسیل جزئی زیر است

$$\frac{\partial w}{\partial x} - a \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (a \neq 0 \text{ و } a \text{ بت است}).$$

حل: بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = a \frac{df}{ds}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{df}{ds}.$$

بنا بر این

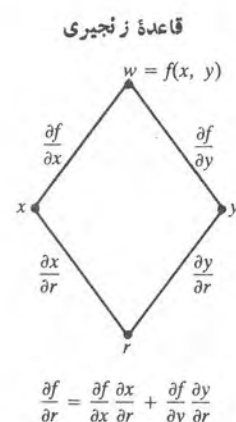
$$\frac{\partial w}{\partial x} - a \frac{\partial w}{\partial y} = a \frac{df}{ds} - a \frac{df}{ds} = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) \\ &= -\frac{r}{s^2} + \frac{2}{s}.\end{aligned}$$

اگر f تابعی از تنها دو متغیر x و y باشد، و متغیر z از معادله (۹) حذف شود، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (11)$$

(شکل ۱۸.۱۶). در مورد $\partial f / \partial s$ هم نتیجه مشابهی به دست می آید.



۱۸.۱۶

مثال ۴ اگر $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، $x = r - s$ و $y = r + s$ ، مطلوب است محاسبه $\partial f / \partial r$ و $\partial f / \partial s$ به صورت توابعی از r و s .

حل:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x)(1) + (2y)(1) \\ &= 2(r-s) + 2(r+s) = 4r.\end{aligned}$$

به صورت زیر به دست می آیند

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial p} + \dots + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p} \quad (۱۳)$$

معادلات دیگر با قرار دادن $q, r, s, \dots$ به جای p به دست می آیند.

راه ساده به خاطر سپردن رابطه (۱۳) این است که فکر کنیم طرف راست، حاصل ضرب نقطه ای دوبردار با مؤلفه های زیر است

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \text{ و } \left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \dots, \frac{\partial v}{\partial p} \right) \quad (۱۴)$$

بردار اول مشتقات f نسبت به متغیرهای واسطه را شامل می شود، و بردار دوم مشتقات متغیرهای واسطه نسبت به متغیر مستقل انتخابی را.

مسئله ها

در مسائل ۱-۸، با استفاده از قاعده زنجیری، df/dt را بر حسب t بیان کنید. سپس به ازای مقدار مفروض t ، df/dt را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \ln(x+y+z), \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = t; \quad t = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x+y)/z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1/t; \quad t = 3 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad t = \pi \quad ۳$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t; \quad t = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = 2+t, \quad y = -t-1, \quad z = t; \quad t = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t, \quad z = \sin t; \quad t = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad x = y = z = t; \quad t = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy/(x^2 - y^2), \quad x = e^t + e^{-t}, \quad y = e^t - e^{-t}; \quad t = 0 \end{aligned}$$

در هر يك از مسائل ۹-۱۶، نموداری درختی رسم کنید و فرمولی

مثال ۶ فرض کنید $f(u, v, w)$ و مشتقات جزئی آن نسبت به u, v, w پیوسته باشند و داشته باشیم $u = x - y, v = y - z, w = z - x$ نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

حل: در این مسأله، x, y, z متغیرهای مستقل اند، و u, v, w متغیرهای واسطه. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} (1) + \frac{\partial f}{\partial v} (0) + \frac{\partial f}{\partial w} (-1) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}. \end{aligned}$$

از محاسبات مشابهی نتایج زیر را به دست می آوریم

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

چگونگی به خاطر سپردن صورتهای مختلف قاعده زنجیری
چگونه می توان صورتهای مختلف قاعده زنجیری را به خاطر سپرد؟ پاسخ این است که لازم نیست همه آنها را به خاطر بسپاریم. بهترین کار این است که چند صورت اصلی، نظیر معادلات (۷)، (۸)، و (۹) را به خاطر بسپاریم. بقیه را هم در هنگام نیاز می توان از نمودارها [گرافها]ی داده شده به دست آورد. نمودار مناسب همیشه به این ترتیب به دست می آید که متغیر وابسته را در بالا، متغیرهای واسطه را در وسط، و متغیر مستقل انتخابی را در پایین قرار دهیم.

قاعده زنجیری در مورد توابعی با متغیرهای بسیار

فرض کنید $f(x, y, z, u, \dots, v)$ تابع مشتق پذیری از متغیرهای $x, y, z, u, \dots, v$ (يك مجموعه متناهی) باشد، و نیز این متغیرها خود توابع مشتق پذیری از متغیرهای $p, q, r, s, \dots, t$ (باز هم يك مجموعه متناهی) باشند. همچنین فرض کنید که تمام توابع مورد بحث پیوسته باشند. در این صورت، f تابع مشتق پذیری از متغیرهای p تا t است، و مشتقات جزئی f نسبت به این متغیرها از روابطی

برای هر مشتق بنویسید.

 $w = z - x$. نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

این فرمولها، محاسبات مثال ۶ را تکمیل می‌کنند.

۲۰. اگر $z = x^2 + 2xy$ ، $x = u \cos v$ ، $y = u \sin v$ و $\partial z / \partial v$ را محاسبه کنید. (پاسخ را بر حسب x و y بیان کنید.)۲۱. اگر $w = uv + \ln v$ ، $u = x + y^2$ ، $v = e^x \cos y$ و $\partial w / \partial x$ را بیابید. (پاسخ را بر حسب u و v بیان کنید.)۲۲. اگر $z = e^x + xy^2$ ، $x = u + v$ ، $y = e^{u+v}$ و $\partial z / \partial u$ را بیابید. (پاسخ را بر حسب x و y بیان کنید.)۲۳. اگر $w = x^2 + y^2$ ، $x = u - v$ ، $y = ve^{xu}$ و $\partial w / \partial u$ را بیابید. (پاسخ را بر حسب x و y بیان کنید.)۲۴. اگر $z = \sin xy + x \sin y$ ، $x = u^2 + v^2$ ، $y = uv$ و $\partial z / \partial u$ مطلوب است وقتی که $u = 0$ و $v = 1$.

۲۵. اگر

$$w = (x^2 + y - 2)^2 + (x - y + 2)^2, \quad x = u - 2v + 1$$

$$y = 2u + v - 2.$$

مطلوب است $\partial w / \partial v$ وقتی که $u = 0$ و $v = 0$.۲۶. اگر $w = \cos uv$ ، $u = xyz$ ، $v = \pi / (4(x^2 + y^2))$ و $\partial w / \partial x$ را در نقطه $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ بیابید.

۲۷. اگر

$$F(x, y) = \int_0^{x^2 y} \cos \sqrt{t} \, dt$$

 $\partial F / \partial x$ را در $(x, y) = (\pi, 1)$ بیابید.۲۸. با فرض اینکه $z = f(t)$ و $t = (x + y) / xy$ ، نشان دهید که

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

۲۹. اگر a و b ثابت باشند، $w = f(u)$ و $u = ax + by$ ، نشان دهید که

$$a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}.$$

۳۰. اگر $w = f(u)$ و $u = xy / (x^2 + y^2)$ ، نشان دهید که

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{dz}{dt} \quad z = f(x, y), \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad ۹$$

$$\frac{dz}{dt} \quad z = f(u, v, w), \quad u = u(t), \quad v = v(t) \quad ۱۰$$

$$w = w(t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \quad w = g(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \quad ۱۱$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} \quad z = f(x, y), \quad x = x(t, s), \quad z = z(t, s) \quad ۱۲$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} \quad y = f(u), \quad u = u(r, s) \quad ۱۳$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} \quad w = f(x, y), \quad x = x(u), \quad y = y(v) \quad ۱۴$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} \quad w = f(x, y, z, t), \quad x = x(p, q) \quad ۱۵$$

$$y = y(p, q), \quad z = z(p, q), \quad t = t(p, q)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} \quad w = g(x, y), \quad x = x(r, s, t) \quad ۱۶$$

$$y = y(r, s, t)$$

۱۷. اگر $u = x^2 + e^{y^2}$ ، $x = \sin 2t$ ، $y = \cos t^2$ ، کدام يك از عبارات زیر، du/dt را به دست می‌دهد؟

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{الف}$$

$$4x \cos 2t - 2ye^{y^2} t \sin t^2 \quad \text{ب}$$

$$2x \cos 2t - 2ye^{y^2} \sin t^2 \quad \text{پ}$$

۱۸. اگر داشته باشیم

$$x = u - 2v + 1, \quad w = (x^2 + y - 2)^2 + (x - y + 2)^2$$

و $y = 2u + v - 2$ ، مطلوب است $\partial w / \partial v$ وقتی که $u = 0$ و $v = 0$.۱۹. فرض کنید $f(u, v, w)$ و مشتقات جزئی‌اش نسبت به u ، v و w پیوسته هستند، و داریم $u = x - y$ ، $v = y - z$ و

۳۷. با استفاده از دترمینان، از معادلات مذکور درمسأله ۳۶، f_x و f_y را بر حسب $(\partial w / \partial r)$ و $(\partial w / \partial \theta)$ به دست آورید.

۳۸. در ارتباط با مسأله ۳۶ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = f_x^2 + f_y^2.$$

۵.۱۶ مشتقات جزئی با متغیرهای مقید

هنگام محاسبه مشتقات جزئی توابعی نظیر $w = f(x, y)$ تاکنون فرض کرده ایم که x و y مستقل اند. اما در بسیاری از موارد کاربردی این وضع برقرار نیست. مثلاً، انرژی درونی U یک گاز را می توان بر حسب فشار، p ، حجم، v ، و دما، T ، بیان کرد

$$U = f(p, v, T).$$

اما، اگر این گاز یک گاز ایده آل باشد، p ، v ، و T از قانون گازهای ایده آل

$$pv = nRT \quad (n \text{ و } R \text{ ثابت})$$

تبعیت می کنند و لذا مستقل نیستند. محاسبه مشتقات جزئی در این گونه موارد ممکن است پیچیده باشد. ولی بهتر است حالا برای اولین بار با این مسأله پیچیده مواجه شوید تا بعداً که در مطالعه اقتصاد، مهندسی یا فیزیک به آن برخورد خواهید کرد.

کدام متغیرها مستقل اند و کدام متغیرها وابسته؟

اگر متغیرهای x ، y ، و z تابعی چون $w = f(x, y, z)$ با رابطه ای مانند معادله $z = x^2 + y^2$ مقید شوند تعبیر هندسی و مقادیر عددی مشتقات جزئی f بستگی به این خواهند داشت که چه متغیرهایی را وابسته و چه متغیرهایی را مستقل انتخاب کنیم. برای اینکه ببینیم این انتخاب چه اثری بر نتیجه می گذارد، مثال زیر را که مربوط به محاسبه $\partial w / \partial x$ یا شرط $w = x^2 + y^2 + z^2$ و $z = x^2 + y^2$ است بررسی می کنیم.

مثال ۱ اگر

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad w = x^2 + y^2 + z^2$$

$\partial w / \partial x$ را بیابید.

حل: دو معادله و چهار مجهول x ، y ، z ، و w مفروض اند.

در این دستگاه معادلات، نظیر بسیاری از دستگاههای دیگر، می توان دو مجهول (متغیرهای وابسته) را بر حسب دو مجهول دیگر (متغیرهای مستقل) یافت. چون $\partial w / \partial x$ از ما خواسته شده است، پس w یک متغیر وابسته، و x یک متغیر مستقل است. پس دو انتخاب

۳۹. اگر $u = x + y$ ، $v = x - y$ ، و $w = f(u, v)$ نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

۳۲. ابعاد مکعب مستطیلی در لحظه مفروض t عبارت اند از $a(t_0) = 13 \text{ cm}$ ، $b(t_0) = 9 \text{ cm}$ ، و $c(t_0) = 5 \text{ cm}$ و اگر c با آهنگ 2 cm/sec افزایش یابد، و b با آهنگ 4 cm/sec کاهش یابد، حجم، V ، و مساحت رویه مکعب مستطیل، S ، با چه آهنگی تغییر می کنند؟ آیا V و S زیاد می شوند، کم می شوند، یا ثابت می مانند؟

۳۳. فرض کنید که مشتقات جزئی $f(x, y, z)$ در نقاط پیچ $z = t$ ، $y = \sin t$ ، $x = \cos t$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos t, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin t, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = t^2 + t - 2.$$

f در چه نقاطی از این خم (در صورت وجود چنین نقاطی) مقادیر اکسترم به دست می آورد؟

۳۴. فرض کنید $f(x, y, z) = x^2 e^{yz} \cos 2z$. مطلوب است مقدار df/dt در نقطه $(1, \ln 2, 0)$ روی خم $x = \cos t$ ، $z = t$ ، $y = \ln(t + 2)$.

۳۵. الف) فرض کنید $f(x, y)$ دما در نقطه (x, y) از دایره $y = \sin t$ ، $x = \cos t$ باشد و فرض کنید که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4y \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 4x.$$

دما در چه نقاطی از این دایره ماکسیمم و مینیمم است؟ (داهنمایی: df/dt و d^2f/dt^2 را به صورت توابعی از t بیان کنید.)

ب) فرض کنید مقادیر تابع مذکور در الف) از فرمول زیر به دست آیند

$$f(x, y) = 4x^2 - 4xy + 4y^2.$$

مقادیر ماکسیمم و مینیمم f برای این دایره را بیابید.

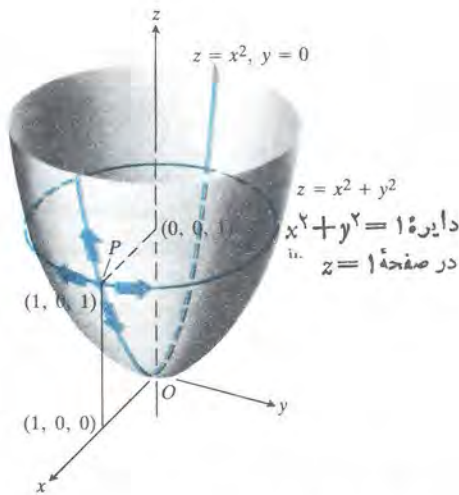
۳۶. اگر مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ را در یک تابع پیوسته $w = f(x, y)$ که مشتقات جزئی پیوسته دارد قرار دهیم، نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

و

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta.$$

وجود دارد:



۲۰۱۶ الف) وقتی x تغییر می‌کند و $y=0$ ، نقطه P بر سهمی $z=x^2$ که در صفحه xz واقع است روی رویه بالا و پایین می‌رود. (ب) وقتی x تغییر می‌کند، و $z=1$ ، نقطه P روی دایره $x^2+y^2=1$ ، $z=1$ حرکت می‌کند.

نقطه‌ای چون $P(x, y, z)$ که فقط می‌تواند بر این رویه حرکت کند به چه معناست؟ مثلاً وقتی مختصات P ، $(1, 0, 1)$ باشند، مقدار $\partial w / \partial x$ چقدر است؟

اگر x و y متغیرهای مستقل فرض شوند، برای محاسبه $\partial w / \partial x$ ، y را ثابت می‌گیریم (در این حالت $y=0$) و می‌گذاریم x تغییر کند. این بدین معناست که P بر سهمی $z=x^2$ واقع در صفحه xz حرکت می‌کند. وقتی P بر این سهمی حرکت کند، w که مربع فاصله P تا مبدأ است تغییر می‌کند. در این حالت (نخستین پاسخ مذکور در بالا) $\partial w / \partial x$ را محاسبه می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 2xy^2.$$

در نقطه $P(1, 0, 1)$ مقدار این مشتق عبارت است از

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6.$$

اگر x و z را مستقل فرض کنیم، آنگاه $\partial w / \partial x$ به این ترتیب به دست می‌آید که z را ثابت بگیریم و x را متغیر. چون مختص z نقطه P برابر با ۱ است، با تغییر x ، نقطه P بزرگ دایره واقع در صفحه $z=1$ حرکت می‌کند. وقتی P بر این دایره حرکت می‌کند، فاصله‌اش تا مبدأ ثابت می‌ماند، و w که مربع این فاصله

وابسته	مستقل
w, z	x, y
w, y	x, z

در هر حالت، w را می‌توان به طور صریح بر حسب متغیرهای مستقل انتخابی به دست آورد. این کار را با استفاده از معادله دوم و حذف متغیر وابسته دیگر در معادله اول، انجام می‌دهیم.

در حالت اول، متغیر وابسته دیگر z است که با قراردادن x^2+y^2 به جای آن، از معادله اول حذف می‌شود. عبارت حاصل برای w عبارت است از

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ = x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

و

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2. \quad (1)$$

این، فرمول $\partial w / \partial x$ است وقتی که x و y متغیرهای مستقل باشند. در حالت دوم که x و z متغیرهای مستقل اند و متغیر وابسته دیگر y است، متغیر وابسته y را بدین ترتیب حذف می‌کنیم که در عبارت مربوط به w به جای y^2 می‌نویسیم $z - x^2$. در نتیجه داریم

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

و

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

این، فرمول $\partial w / \partial x$ است وقتی که x و z متغیرهای مستقل باشند. فرمولهای مربوط به $\partial w / \partial x$ در معادلات (۱) و (۲) کاملاً متفاوت اند. با استفاده از رابطه $z = x^2 + y^2$ نمی‌توان یکی را بدیگری تبدیل کرد. تنها يك $\partial w / \partial x$ وجود ندارد، بلکه دو تا وجود دارد. و بدین ترتیب می‌بینیم که صورت مسأله برای یافتن $\partial w / \partial x$ کامل نبوده است. بسايد مشخص می‌کردیم کدام $\partial w / \partial x$ مورد نظر است.

پاسخهای مذکور در معادلات (۱) و (۲) تعابیر هندسی هم دارند که به ماکمک می‌کنند علت اختلاف آنها را توضیح دهیم. تابع $w = x^2 + y^2 + z^2$ مربع فاصله نقطه (x, y, z) از مبدأ است. شرط $z = x^2 + y^2$ حاکی است که نقطه (x, y, z) بر رویه سهمیوار دورانی شکل ۲۰۱۶ قرار دارد. محاسبه $\partial w / \partial x$ در

و z به دست می آوریم. از معادله (۴)، $\partial z / \partial x$ را حساب می کنیم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

این مقدار را در معادله (۳) قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}.$$

مقدار این مشتق در $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{(2, -1, 1)} &= 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} \\ &= 4 + \frac{-2}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

در محاسبه مشتق، برای اینکه نشان دهیم چه متغیرهایی را مستقل فرض کرده ایم، می توانیم از نمادگذاری زیر استفاده کنیم

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_y, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{با } x \text{ و } y \text{ مستقل} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_z, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{با } x \text{ و } z \text{ مستقل} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{با } x, y, \text{ و } z \text{ مستقل.} \quad (7)$$

مثال ۳ اگر

$$x + y = t \quad \text{و} \quad w = x^2 + y - z + \sin t$$

مطلوب است

$$\text{الف) } \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y,z}, \quad \text{و}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{t,z}$$

حل:

الف) اگر x, y و z مستقل باشند داریم

$$t = x + y, \quad w = x^2 + y - z + \sin(x + y)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x + y) \frac{\partial}{\partial x} (x + y)$$

$$= 2x + \cos(x + y).$$

است، تغییر نمی کند. لذا

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

و این همان پاسخ دوم است.

همان گونه که در مثال ۱ دیدیم، شیوه یافتن $\partial w / \partial x$ وقتی متغیرهای موجود در تابع $w = f(x, y, z)$ با معادله دیگری به هم مربوط می شوند، از سه مرحله تشکیل می شود.

مرحله ۱: تصمیم می گیریم که کدام متغیرها وابسته و کدام متغیرها مستقل باشند. (در عمل، این تصمیم براساس محتوای نظری یا فیزیکی مسأله گرفته می شود. در مسائل آخر این بخش همیشه ذکر خواهیم کرد که متغیرها از چه نوع هستند.)

مرحله ۲: در عبارت مربوط به w ، متغیر (های) وابسته دیگر را حذف می کنیم.

مرحله ۳: طبق معمول مشتق می گیریم.

پس از اینکه تصمیم گرفتیم چه متغیرهایی وابسته باشند، اگر نتوانیم مرحله ۲ را اجرا کنیم، از معادلات به هم وابسته که هستند مشتق می گیریم و سرانجام می کوشیم $\partial w / \partial x$ را از معادلات به دست آوریم. مثال بعدی نحوه عمل را نشان می دهد.

مثال ۴ اگر x و y متغیرهای مستقل باشند و اگر

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z^2 - xy + yz + y^2 = 0$$

$$\partial w / \partial x \quad \text{را در نقطه } (x, y, z) = (2, -1, 1) \text{ بیابید.}$$

حل: حذف x در عبارت مربوط به w آسان نیست. بنابراین از هر دو معادله نسبت به x مشتق ضمنی می گیریم، بدین ترتیب که x و y را متغیرهای مستقل، و z را متغیرهای وابسته در نظر می گیریم. داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \quad (3)$$

و

$$2z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - y + y \frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0. \quad (4)$$

حال این معادلات را تلفیق می کنیم و $\partial w / \partial x$ را بر حسب x, y, z

معادله (۹) ظاهر شده اند محاسبه کنیم

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= 2x \frac{\partial x}{\partial x} + (1) \frac{\partial y}{\partial x} + (-1) \frac{\partial z}{\partial x} + \cos t \frac{\partial t}{\partial x} \\ &= 2x \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} + \cos t \frac{\partial t}{\partial x}.\end{aligned}\quad (10)$$

برای محاسبه بقیه مشتقات جزئی، از آنچه که درباره استقلال و وابستگی متغیرها می دانیم استفاده می کنیم. همان طور که در نمودار (۸) نشان داده شده است، متغیرهای x ، y ، و z مستقل اند و داریم $t = x + y$ پس

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = (1+0) = 1.\end{aligned}\quad (11)$$

برای محاسبه $\partial w / \partial x$ ، این مقادیر را در معادله (۱۰) می گذاریم

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x(1) + 0 - 0 + (\cos t)(1) \\ &= 2x + \cos t \\ &= 2x + \cos(x+y).\end{aligned}\quad (\text{بر حسب متغیرهای مستقل})$$

وقتی هیچ فرمول مشخصی در دست نیست

در کاربردها، اغلب مجبوریم مشتق تابع را در حالی بیابیم که نه تابع صریحاً مشخص شده و نه رابطه بین متغیرهای آن. در این موارد، دو نکته می تواند کارساز باشد.

نخستین نکته این است که اگر $F(r, s)$ در سرتاسر ناحیه ای چون R از صفحه rs ثابت باشد، که در این صورت F ، $\partial F / \partial r$ ، و $\partial F / \partial s$ پیوسته و r و s متغیرهای مستقل اند، در سرتاسر R داریم

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial s} = 0. \quad (12)$$

پس در حالت خاص هم، اگر در سرتاسر R داشته باشیم $F(r, s) = 0$ ، معادله (۱۲) برقرار است.

برای پی بردن به نکته دوم، فرض کنید که در سرتاسر ناحیه ای چون R از صفحه rs داریم

$$f(x, y, z) = f(x(r, s), y(r, s), z(r, s)) = F(r, s). \quad (13)$$

ب) اگر x ، t ، و z مستقل باشند داریم

$$y = t - x, \quad w = x^2 + (t - x) - z + \sin t$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{t,z} = 2x - 1 - 0 + 0 = 2x - 1.$$

نمودارهای پیکانی

در حل مسائلی نظیر مسأله مذکور در مثال ۳، غالباً سودمند است که به کمک يك نمودار پیکانی کار را آغاز کنیم و نشان دهیم که متغیرها و توابع چگونه به هم مربوط می شوند. اگر داشته باشیم

$$x + y = t \quad \text{و} \quad w = x^2 + y - z + \sin t$$

و بخواهیم $\partial w / \partial x$ را بیابیم، وقتی x ، y ، و z مستقل اند، نمودار مناسب به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w \quad (A)$$

متغیرهای واسطه و روابط
مستقل

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = z$$

$$t = x + y$$

این نمودار، متغیرهای مستقل را در طرف چپ، متغیرهای واسطه و روابط بین آنها و متغیرهای مستقل را در وسط، و متغیر وابسته را در طرف راست نشان می دهد.

برای محاسبه $\partial w / \partial x$ ، ابتدا صورت چهارمتغیره قاعده زنجیری را در مورد w به کار می بندیم. داریم

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x}. \quad (9)$$

حال از فرمول مربوط به w یعنی

$$w = x^2 + y - z + \sin t$$

استفاده می کنیم تا مشتقات جزئی w را که درست است

این همان نمودار مذکور در (۱۴) است که در آن $r=x$ ، $s=y$ ، و از بعضی از جزئیات صرف نظر شده است. از معادله (۱۵) به ازای $r=x$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 برابر با ۱ برابر با صفر است
 زیرا y مستقل از x است

پس

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

مسئله‌ها

در هر یک از مسائل ۱-۳، ابتدا نموداری رسم کنید که روابط بین متغیرها را نشان دهد.

۱. اگر $w = x^2 + y^2 + z^2$ و $z = x^2 + y^2$ ، مطلوب است

(الف) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

(ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$

(پ) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

۲. اگر $w = x^2 + y - z + \sin t$ و $x + y = t$ ، مطلوب است

(الف) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}$

(ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$

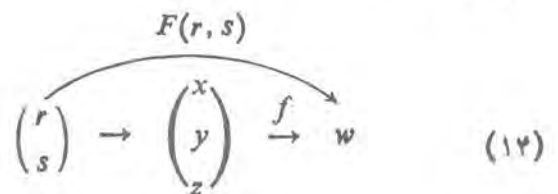
(پ) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

(ت) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$

(ث) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$

(ج) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$

در اینجا تمام توابع و مشتقات جزئی مربوط پیوسته‌اند، و r و s متغیر مستقل‌اند. برای به نمایش گذاشتن این مطلب، یک نمودار پیکانی رسم می‌کنیم



متغیر وابسته متغیرهای واسطه و روابط متغیرهای مستقل

$$\begin{aligned} x &= x(r, s) & w &= f(x, y, z) \\ y &= y(r, s) & &= F(r, s) \\ z &= z(r, s) & & \end{aligned}$$

علاوه بر این فرض کنید که در سرتاسر R ، $F(r, s) = 0$. در این صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad (16)$$

طرف چپ این معادلات عبارت‌اند از $\partial F / \partial r$ و $\partial F / \partial s$ ، و این مشتق‌ها صفرند زیرا $F(r, s)$ در سرتاسر R مقداری ثابت دارد.

مثال ۴ فرض کنید که معادله $f(x, y, z) = 0$ را به صورت تابع مشتق‌پذیری از متغیرهای مستقل x و y به دست می‌دهد و نیز فرض کنید $\partial f / \partial z \neq 0$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z}$$

حل: هر سه متغیر x ، y ، و z را مطابق نمودار زیر به صورت توابعی از دو متغیر مستقل x و y در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} w \end{array} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z(x, y) \end{aligned}$$

۳. فرض کنید $U = f(p, v, T)$ انرژی درونی گازی باشد که از قانون گازهای ایده آل یعنی $p v = n R T$ (n و R ثابت) تبعیت می کند. مطلوب است

(الف) $\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_v$

(ب) $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v$

۴. اگر

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{و} \quad y \sin z + z \sin x = 1$$

مشتقهای زیر را در نقطه $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ بیابید.

(الف) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$

(ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

۵. اگر

$$w = x^2 y^2 + y z - z^3 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

مشتقهای زیر را در نقطه $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$ بیابید.

(الف) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$

(ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

۶. اگر $x = u^2 + v^2$ و $y = uv$ مقدار $(\partial u / \partial y)_x$ در نقطه $(u, v) = (1/\sqrt{2}, 1)$ را بیابید.

۷. فرض کنید که $x^2 + y^2 = r^2$ و $x = r \cos \theta$ (همان طور که در مختصات قطبی داریم). مطلوب است

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$$

۸. فرض کنید معادله $g(x, y, z) = 0$ را به صورت تابع مشتق پذیری از متغیرهای مستقل x و y به دست می دهد، و نیز فرض کنید $g_z \neq 0$. نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

۹. با فرض $f(x, y, z) = 0$ رابطه زیر را که در هیدرودینامیک کاربرد زیادی دارد ثابت کنید

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

(دانهمایی: تمام مشتقها را بر حسب مشتقات جزئی معمول $\partial f / \partial x$ ، $\partial f / \partial y$ و $\partial f / \partial z$ بیان کنید.)

۱۰. اگر $z = x + f(u)$ و $u = xy$ ، نشان دهید که

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

۱۱. فرض کنید

$$w = x^2 - y^2 + 2z + t \quad \text{و} \quad x + 2z + t = 25$$

نشان دهید بسته به اینکه چه متغیرهایی را مستقل و چه متغیرهایی را وابسته فرض کنیم هر یک از معادلات زیر $\partial w / \partial x$ را به دست می دهد.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1$$

در هر حالت متغیرهای مستقل را مشخص کنید.

۶.۱۶ گرادیان و مشتقهای جهتی

در بخش ۴.۱۶ دیدیم که اگر $f(x, y, z)$ و مشتقات جزئی آن پیوسته باشند، آنگاه آهنگ تغییر مقادیر f نسبت به t در امتداد یک خم مشتق پذیر

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

را می توان از فرمول زیر به دست آورد

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (۱)$$

برای استفاده از این فرمول در مورد نقطه خاصی چون

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$$

مشتقات جزئی f را در P_0 و مشتقات x, y, z را در t_0 محاسبه می کنیم.

مشتق df/dt در معادله (۱) آهنگ تغییر f در P_0 نسبت به افزایش t است و در نتیجه، علاوه بر چیزهای دیگر، به جهت حرکت در امتداد خم نیز بستگی دارد. این نکته بالاخص وقتی مهم است که خم یک خط مستقیم باشد و پارامتر t اندازه فاصله از P_0 در جهت یک بردار واحد مقروض $\parallel$ در امتداد خط را به دست دهد. زیرا در این صورت df/dt آهنگ تغییر f نسبت به فاصله در دامنه اش در جهت $\parallel$ است. اگر $\parallel$ تغییر کند، می توانیم آهنگ تغییر f نسبت به فاصله را وقتی که در جهتهای مختلف از P_0 عبور می کنیم به دست آوریم. این «مشتقهای جهتی» در علوم و مهندسی (و نیز در ریاضیات) فوق العاده مهم اند. هدف این بخش ارائه فرمول ساده ای برای محاسبه آنهاست.

محاسبه مشتقات جهتی

فرض کنید مشتقات جزئی تابعی چون $f(x, y, z)$ در سرتاسر يك ناحیه R در فضا پیوسته باشند، $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای از R ، و $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ يك بردار واحد (شکل ۲۱.۱۶) باشد. آنگاه معادلات

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2, \quad z = z_0 + su_3 \quad (2)$$

معادلات پارامتری خط مارپیر P_0 و موازی با $\mathbf{u}$ هستند، و پارامتر s فاصله جهتدار P_0 تا نقطه $(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3)$ را در امتداد این خط، طبق آنچه که در مثال ۲ بخش ۲۰.۱۴ دیدیم، مشخص می‌کند. برای محاسبه df/ds که آهنگ تغییر f نسبت به فاصله در جهت $\mathbf{u}$ و در نقطه P_0 است، مشتقات

$$\frac{dx}{ds} = u_1, \quad \frac{dy}{ds} = u_2, \quad \frac{dz}{ds} = u_3$$

را در معادله

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

قرار می‌دهیم و مشتقات جزئی f در P_0 را به دست می‌آوریم

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} u_3. \quad (3)$$

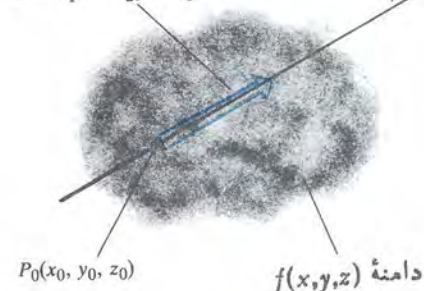
عبارت سمت راست معادله (۳) حاصلضرب عددی $\mathbf{u}$ و بردار زیر است

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \mathbf{k}.$$

این بردار را گرادیان f در P_0 می‌نامند. مرسوم است که گرادیان

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2, \quad z = z_0 + su_3$$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$



۲۱.۱۶ مشتق f در جهت بردار واحد $\mathbf{u}$ در نقطه‌ای P_0 چون P_0 واقع در دامنه f ، مقدار df/ds در P_0 است.

را به صورت برداری در دامنه f نمایش دهند. مؤلفه‌هایش با محاسبه سه مشتق جزئی f در (x_0, y_0, z_0) به دست می‌آیند. مشتق مذکور درست چپ معادله (۳)، مشتق f در نقطه P_0 در جهت $\mathbf{u}$ نام دارد، و غالباً با نماد زیر نشان داده می‌شود

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}.$$

تعریف

تعریف گرادیان و مشتق جهتی

۱. اگر مشتقات جزئی $f(x, y, z)$ در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ تعریف شوند، آنگاه گرادیان f در P_0 بردار زیر است که با محاسبه مشتقات جزئی f در P_0 به دست می‌آید

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (4)$$

۲. اگر $f(x, y, z)$ در $P_0(x_0, y_0, z_0)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشد، و $\mathbf{u}$ يك بردار واحد باشد، آنگاه مشتق f در P_0 در جهت $\mathbf{u}$ عدد زیر است که حاصلضرب عددی گرادیان f در P_0 و $\mathbf{u}$ است

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}. \quad (5)$$

نماد دیگری برای گرادیان f ،

$$\text{grad } f$$

است که گراد f خوانده می‌شود. نماد ∇f را «گراد f »، «گرادیان f » و نیز «دل f » می‌نامند. نماد معمول دیگر برای مشتق جهتی به صورت زیر است

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0}.$$

مثال ۱ مشتق

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^2 - z$$

را در $P_0(1, 1, 0)$ در جهت بردار $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ بیابید.

حل: جهت $\mathbf{A}$ با تقسیم کردن $\mathbf{A}$ بر طولش به دست می‌آید

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

مشتقات جزئی f در P_0 عبارت اند از

$$f_x = 3x^2 - y^2|_{(1,1,0)} = 2$$

$$f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2$$

$$f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1.$$

گرادیان f در P_0 چنین است

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

پس مشتق f در P_0 در جهت $\mathbf{A}$ عبارت است از

$$(D_{\mathbf{u}}f)|_{(1,1,0)} = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \mathbf{u}$$

$$= (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{6}{5}\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{6}{5} - \frac{6}{4}$$

$$= \frac{4}{5}.$$

■

وقتی بخواهیم مقدار تغییر f را در اثر حرکت از یک نقطه P_0 به یک نقطه نزدیک و به فاصله ds از آن برآورد کنیم، نقش مشتق جهتی نظیر نقش مشتق معمولی است. اگر f یک تابع یک متغیره باشد، داریم

$$df = f'(P_0)ds. \quad (\text{نمو} \times \text{مشتق معمولی})$$

در مورد توابع دو یا چند متغیره از فرمول زیر استفاده می کنیم که در آن، $\mathbf{u}$ جهت دور شدن از P_0 را نشان می دهد

$$df = \nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} ds \quad (\text{نمو} \times \text{مشتق جهتی}) \quad (6)$$

مثال ۲ اگر نقطه $P(x, y, z)$ از $P_0(2, 0, 0)$ مستقیماً به طرف $P_1(4, 1, -2)$ برود و از P_0 به اندازه $ds = 0.5$ واحد دور شود، مطلوب است برآورد تغییر تابع

$$f(x, y, z) = xe^y + yz.$$

حل: ابتدا مشتق f را در P_0 و در جهت بردار زیرمی یابیم

$$\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

جهت این بردار عبارت است از

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

گرادیان f در P_0 چنین است

$$\begin{aligned} \nabla f|_{(2,0,0)} &= (e^y\mathbf{i} + (xe^y + z)\mathbf{j} + y\mathbf{k})|_{(2,0,0)} \\ &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j}. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} \nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

تغییر df ناشی از دور شدن P از P_0 به اندازه $ds = 0.5$ واحد و در جهت $\mathbf{u}$ به طور تقریبی عبارت است از

$$\blacksquare \quad df = \nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u} ds = \left(\frac{4}{3}\right)(0.5) \approx 0.67.$$

در بخش ۲۰۱۷ در باره برآورد تغییر بازهم بحث خواهیم کرد. اگر حاصلضرب عددی موجود در فرمول مشتق جهتی را محاسبه کنیم، فرمول

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta \quad (7)$$

به دست می آید و از آن احکام زیر نتیجه می شود.

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos \theta \quad \text{و ویژگیهای مشتق جهتی}$$

۱. مشتق جهتی وقتی بزرگترین مقدار مثبت را دارد که $\cos \theta = 1$ ، و یا $\mathbf{u}$ جهت گرادیان باشد، یعنی f در بین تمام نقاط دامنه اش در جهت ∇f سریعترین افزایش را دارد. مشتق در این جهت عبارت است از

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|.$$

۲. به همین ترتیب، f در جهت $-\nabla f$ سریعترین کاهش را دارد. مشتق در این جهت عبارت است از

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|.$$

۳. $D_{-\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot (-\mathbf{u}) = -\nabla f \cdot \mathbf{u} = -D_{\mathbf{u}}f$ ، یعنی، مشتق f در جهت $-\mathbf{u}$ برابر است با منهای مشتق f در جهت $\mathbf{u}$.

۴. ارتباط مشتقهای جزئی f با مشتق جهتی چنین است

$$D_{\mathbf{i}}f = \nabla f \cdot \mathbf{i} = f_x, \quad D_{\mathbf{j}}f = \nabla f \cdot \mathbf{j} = f_y$$

$$D_{\mathbf{k}}f = \nabla f \cdot \mathbf{k} = f_z.$$

فرمولهای سه متغیره به دست می آیند. پس، در مورد تسایعی چون $f(x, y)$ و بردار واحدی چون $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$ داریم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (۸)$$

و

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2. \quad (۹)$$

مثال ۴

الف) مطلوب است مشتق

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

در نقطه $P_0(1, 1)$ در جهت بردار واحد $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}$.
(ب) تسایع f در چه جهتی از دامنه اش (صفحه xy) در $(1, 1)$ سریعترین افزایش را دارد؟ مشتق f در این جهت چیست؟

(پ) جهتهایی را بیابید که در آنها مشتق f در $(1, 1)$ صفر است.

حل:

الف) داریم

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_x(1, 1) = 2x|_{(1, 1)} = 2$$

$$f_y(1, 1) = 2y|_{(1, 1)} = 2$$

$$(\nabla f)_{(1, 1)} = f_x(1, 1)\mathbf{i} + f_y(1, 1)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

و

$$\begin{aligned} (D_{\mathbf{u}} f)_{(1, 1)} &= (\nabla f)_{(1, 1)} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u} \\ &= 2u_1 + 2u_2. \end{aligned}$$

مشتق f در $(1, 1)$ در جهت $\mathbf{u}$ برابر است با $2u_1 + 2u_2$.

(ب) این تابع در $(1, 1)$ در جهت ∇f در $(1, 1)$ حداکثر افزایش را دارد. این جهت عبارت است از

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right)_{(1, 1)} &= \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{8}} \mathbf{j} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

پس

مشتق f در جهت $\mathbf{i}$ $f_x = \mathbf{i}$

مشتق f در جهت $\mathbf{j}$ $f_y = \mathbf{j}$

مشتق f در جهت $\mathbf{k}$ $f_z = \mathbf{k}$

از تلفیق این نتایج با مرحله ۳ نتایج زیر به دست می آیند

$$D_{-\mathbf{i}} f = -f_x, \quad D_{-\mathbf{j}} f = -f_y, \quad D_{-\mathbf{k}} f = -f_z.$$

۵. هر جهت $\mathbf{u}$ قائم (عمود) بر گرادیان جهتی است با تغییر صفر در f زیرا

$$D_{\mathbf{u}} f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

مثال ۳ جهتهایی را بیابید که در آنها، تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

در نقطه $(1, 1, 1)$ از دامنه اش سریعترین افزایش یا کاهش را دارد. در این جهتها آهنگ تغییر f چیست؟

حل: سریعترین افزایش در جهت زیر است

$$\nabla f = 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}.$$

در $(1, 1, 1)$ داریم

$$\nabla f = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}.$$

جهت ∇f عبارت است از

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

مشتق f در این جهت برابر است با

$$|\nabla f| = 2\sqrt{3}.$$

جهتی که در آن، تابع در $(1, 1, 1)$ سریعترین کاهش را دارد، این است

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

و مشتق f در این جهت برابر است با

$$-|\nabla f| = -2\sqrt{3}.$$

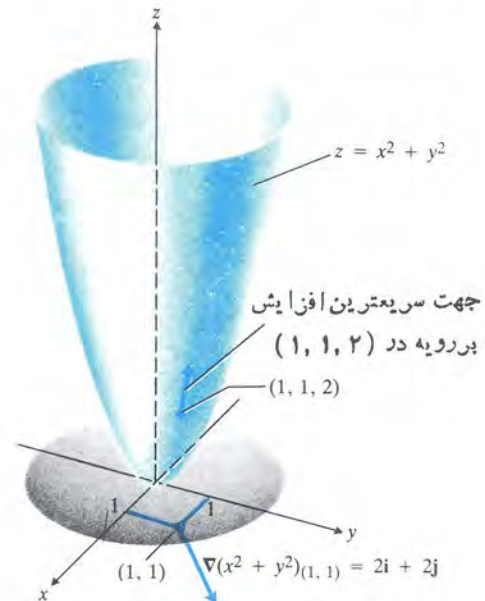
نتایج در مورد توابع دومتغیره

در مورد توابع دومتغیره، نتایج خیلی شبیه نتایج مربوط به توابع سه متغیره اند. فرمولهای دومتغیره با حذف جملات مربوط به z از

مشتق f در این جهت در $(1, 1)$ برابر است با

$$|\nabla f|_{(1,1)} = 2\sqrt{2}.$$

شکل ۲۲.۱۶ را ببینید.



۲۲.۱۶ گرادیان $f(x, y) = x^2 + y^2$ در نقطه $(1, 1)$ ، بردار $\nabla f = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ در صفحه xy است. این بردار متوجه جهتی است که در آن جهت f در $(1, 1)$ سریعترین افزایش را دارد. این متناظر است با جهت سریعترین افزایش بر رویه $z = x^2 + y^2$ در نقطه $(1, 1, 2)$.

پ) مشتق f در جهت های عمود بر ∇f صفر است. یکی از این جهت ها وقتی به دست می آید که مؤلفه های $(\nabla f / |\nabla f|)_{(1,1)}$ را با هم عوض کنیم، و علامت نخستین مؤلفه جدید را تغییر دهیم (مثال ۷ از بخش ۱۰.۱۳ را ببینید). به این ترتیب، خواهیم داشت

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

برای آزمایش، $\mathbf{n} \cdot \nabla f$ را حساب می کنیم تا ببینیم برابر با صفر می شود یا نه

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \mathbf{n} &= (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0.\end{aligned}$$

جهت دیگری که تغییر f در $(1, 1)$ صفر است، عبارت از

$$-\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

ویژگیهای جبری بردارهای گرادیان

اگر $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ مشتقات جزئی داشته باشند، آنگاه kf (که در آن k عدد ثابتی است)، مجموع $f + g$ ، و حاصلضرب fg ، بردارهای گرادیان دارند، و داریم

$$\nabla(kf) = k\nabla f \quad (k \text{ هر عدد دلخواه}) \quad ۰.۱$$

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad ۰.۲ \quad (۱۰)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad ۰.۳$$

اثباتها به عنوان تمرین واگذار می شوند.

مثال ۵ اگر

$$f(x, y, z) = e^x, \quad g(x, y, z) = y - z$$

آنگاه

$$\nabla f = e^x \mathbf{i}, \quad \nabla g = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

بنابراین

$$\nabla(2f) = \nabla(2e^x) = 2e^x \mathbf{i} = 2\nabla f \quad ۰.۱$$

$$\nabla(f + g) = \nabla(e^x + y - z) = e^x \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = \nabla f + \nabla g \quad ۰.۲$$

$$\nabla(fg) = \nabla(ye^x - ze^x) \quad ۰.۳$$

$$= (ye^x - ze^x)\mathbf{i} + e^x \mathbf{j} - e^x \mathbf{k}$$

$$= (y - z)e^x \mathbf{i} + e^x (\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$= g\nabla f + f\nabla g.$$

مسئله ها

در مسائل ۱-۸، ∇f را در نقطه مفروض بیابید.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad (1, 1, 1) \quad ۰.۱$$

$$f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z, \quad (1, 1, 1) \quad ۰.۲$$

$$f(x, y, z) = e^{-2y} \cos 2x, \quad (\pi/4, 0, 0) \quad ۰.۳$$

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3, 4, 0) \quad ۰.۴$$

۰۲۴ $f(x, y, z) = z \ln(x^2 + y^2 - 1), \quad P_0(1, 1, 1)$

۰۲۵ تابع $f(x, y) = \cos \pi xy + xy^2$ مفروض است. اگر (x, y) از $(-1, -1)$ به اندازه $ds = 0.1$ واحد در جهت $i + j$ حرکت کند، برآورد کنید که مقدار $f(x, y)$ چقدر تغییر خواهد کرد.

۰۲۶ تابع $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ مفروض است. اگر نقطه (x, y, z) از $(3, 4, 12)$ به اندازه $ds = 0.1$ واحد در جهت $2k - 3j + 4i$ حرکت کند، $f(x, y, z)$ حدوداً چقدر تغییر می کند؟

۰۲۷ تابع $f(x, y, z) = e^x \cos yz$ مفروض است. اگر نقطه $P(x, y, z)$ از مبدأ به اندازه $ds = 0.1$ واحد در جهت $2k - 3j + 4i$ حرکت کند، این تابع حدوداً چقدر تغییر می کند؟

۰۲۸ تابع $f(x, y, z) = x + x \cos z - y \sin z + y$ مفروض است. اگر نقطه $P(x, y, z)$ از $P_0(2, -1, 0)$ به اندازه $ds = 0.2$ واحد به طرف نقطه $P_1(0, 1, 2)$ برود، $f(x, y, z)$ حدوداً چقدر تغییر می کند؟

۰۲۹ در کدام دو جهت است که مشتق $f(x, y) = xy + y^2$ در نقطه $P_0(2, 5)$ برابر با صفر می شود؟

۰۳۰ در کدام دو جهت است که مشتق

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$$

در $P_0(1, 1)$ برابر با صفر می شود؟

۰۳۱ مشتق $f(x, y)$ در $P_0(1, 2)$ در جهت بردار $i + j$ برابر است با $2/\sqrt{2}$ و در جهت بردار $2j - i$ برابر است با -3 . مشتق f در جهت $2j - i$ چقدر است؟

۰۳۲ مشتق $f(x, y, z)$ در نقطه ای چون P در جهت بردار $A = i + j - k$ بزرگترین مقدار را دارد. مقدار مشتق در این جهت، $2/\sqrt{3}$ است. مطلوب است

الف) ∇f در P .

ب) مشتق f در P در جهت $i + j$.

۰۳۳ مطلوب است مشتق $f(x, y, z) = xyz$ در جهت بردار سرعت پیچ زیر در $t = \pi/3$:

$$R(t) = (\cos 3t)i + (\sin 3t)j + 3tk.$$

۰۳۴ در مورد تابع $f(x, y) = x^2y + 2y^2x$ در نقطه $P_0(1, 3)$ مطلوب است

الف) جهت بزرگترین افزایش f

ب) مشتق f در جهت بزرگترین افزایش f

۰۵ $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \quad (1, 2, -2)$

۰۶ $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z, \quad (0, 0, \pi/6)$

۰۷ $f(x, y, z) = \cos x \cos y \sinh z, \quad (0, \pi/4, 0)$

۰۸ $f(x, y, z) = \cosh xyz, \quad (0, 0, 0)$

در مسائل ۹-۱۸، مشتق f را در P_0 و در جهت A بیابید.

۰۹ $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad P_0(1, 0), \quad A = i - j$

۱۰ $f(x, y) = e^x \sin \pi y, \quad P_0(0, 1), \quad A = 2i + 2j$

۱۱ $f(x, y) = \cos xy, \quad P_0(2, \pi/4), \quad A = 2i - j$

۱۲ $f(x, y) = \frac{x - y^2}{x}, \quad P_0(1, 1), \quad A = 12i + 5j$

۱۳ $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2, \quad P_0(1/2, 1/2)$

$$A = \sqrt{2}i + j$$

۱۴ $f(x, y) = x \tan^{-1}(y/x), \quad P_0(1, 1), \quad A = 2i - j$

۱۵ $f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad P_0(1, -1, 2)$

$$A = 10i + 11j - 2k$$

۱۶ $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad P_0(1, 1, 1)$

$$A = i + j + k$$

۱۷ $f(x, y, z) = e^x \cos yz, \quad P_0(0, 0, 0)$

$$A = 2i + j - 2k$$

۱۸ $f(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx$

$$P_0(1, 0, 1/2), \quad A = i + 2j + 2k$$

در مسائل ۱۹-۲۴، جهتهایی را بیابید که در آنها f در P_0 سریعترین افزایش یا کاهش را داشته باشد، و در این جهتها آهنگ تغییر f را به دست آورید.

۱۹ $f(x, y) = x^2 + \cos xy, \quad P_0(1, 0)$

۲۰ $f(x, y, z) = e^{xy} + z^2, \quad P_0(0, 2, 3)$

۲۱ $f(x, y, z) = (x + y - 2)^2 + (3x - y - 6)^2$

$$P_0(1, 1, 0)$$

۲۲ $f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad P_0(-1, 1)$

۲۳ $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2$

$$P_0(2, -1, 2)$$

پ) جهت بزرگترین کاهش f
 ت) جهتهایی که در آنها مشتق f صفر است.

۳۵. فرض کنید درمورد تابع $w = f(x, y, z)$ مختصات استوانه‌ای r, θ, z را به کار ببریم و $w = F(r, \theta, z)$ را به دست آوریم. نیز فرض کنید u_r و u_θ بردارهای واحد زیر باشند

$$u_r = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$$

$$u_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j.$$

نشان دهید که

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial w}{\partial z} k.$$

(راهنمایی: مؤلفه عددی ∇w در جهت u_r برابر است با مشتق w در آن جهت. اما این مقدار دقیقاً برابر است با $\partial w / \partial r$. در مورد مؤلفه‌های عددی ∇w در جهتهای u_θ و k دلیل مشابهی بیاورید.)

۳۶. درستی نتیجه مسأله ۳۵ را به طریق زیر بررسی کنید: عناصر طرف راست معادله مربوط به ∇w را به مؤلفه‌های i, j, k تبدیل کنید، به جای مختصات استوانه‌ای r و θ ، مختصات دکارتی x و y را قرار دهید، و از قاعده زنجیری استفاده کنید.

۳۷. فرض کنید مختصات کروی ρ, ϕ, θ را در مورد تابعی چون $w = f(x, y, z)$ به کار ببریم و $w = F(\rho, \phi, \theta)$ را به دست آوریم. ∇w را بر حسب مختصات کروی و بردارهای واحد زیر بیان کنید

$$u_\rho = (\sin \phi \sin \theta)i + (\sin \phi \cos \theta)j + (\cos \phi)k$$

$$u_\phi = (\cos \phi \cos \theta)i + (\cos \phi \sin \theta)j - (\sin \phi)k$$

$$u_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j.$$

با استدلال هندسی، مؤلفه‌های عددی ∇w را در جهت هریک از این بردارها تعیین کنید. راهنمایی مسأله ۳۵ را ببینید.

۳۸. درستی عبارتی را که در مسأله ۳۷ برای ∇w به دست آوردید با برگرداندن آن به مختصات دکارتی بررسی کنید. از قاعده زنجیری استفاده کنید.

۳۹. درستی فرمولهای گرادیانی مذکور در معادله (۱۰) را تحقیق کنید.

۷.۱۶ صفحه‌های مماس و خطهای قائم

با استفاده از گرادیان می‌توان به طور طبیعی و مؤثری صفحات

مماس و خطهای قائم را در نقاط روی رویه‌ها تعریف کرد. در این بخش چگونگی انجام این عمل را نشان می‌دهیم.

صفحه‌های مماس و خطهای قائم بر رویه $f(x, y, z) = c$ فرض کنید $f(x, y, z)$ و مشتقهای جزئی آن پیوسته‌اند، و $z = z(t)$ ، $y = y(t)$ ، $x = x(t)$

خیم مشتق‌پذیری است که بر رویه S قرار دارد، و این رویه با $f(x, y, z) = c$ تعریف شده است. و نیز فرض کنید که این خم از نقطه P_0 واقع بر این رویه می‌گذرد. در این صورت به ازای هر مقدار t داریم

$$f(x(t), y(t), z(t)) = c.$$

اگر از دوطرف معادله مربوط به S نسبت به t مشتق بگیریم داریم

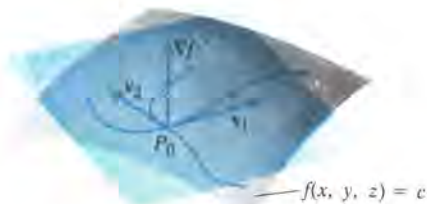
$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0 \quad (1)$$

یا

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

که در آن $\mathbf{v}$ بردار سرعت خم است. از معادله (۲) نتیجه می‌گیریم که گرادیان f بر بردار سرعت هر خم مشتق‌پذیر واقع در S که از P_0 بگذرد عمود است. بنابراین گرادیان بر خط مماس بر هر خم مشتق‌پذیر واقع در S که از P_0 عبور کند عمود است. پس این مماسها همه در یک صفحه مشترک قرار دارند و آن، صفحه مارپَر P_0 و قائم بر ∇f است. بنابه تعریف، این صفحه را صفحه مماس بر رویه $f(x, y, z) = c$ در نقطه P_0 می‌نامند (شکل ۲۳.۱۶). معادله این صفحه عبارت است از

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (3)$$



۲۳.۱۶ ∇f بردار سرعت هر خم مشتق‌پذیر واقع در رویه مارپَر P_0 عمود است. بنابراین، بردارهای سرعت مارپَر P_0 در یک صفحه مشترک قرار دارند که آن را صفحه مماس در P_0 می‌نامند.

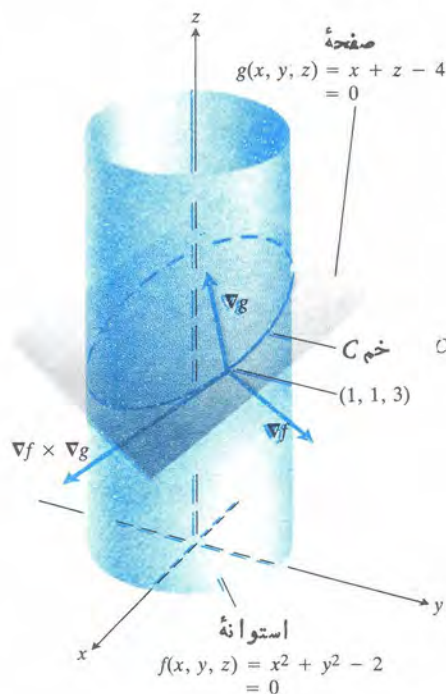
مثال ۲ مقطع رویه‌های

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad (\text{يك استوانه})$$

و

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \quad (\text{يك صفحه})$$

خمی چون C (شکل ۲۵.۱۶) است. معادلات پارامتری خط مماس بر C در نقطه $P_0(1, 1, 3)$ را بیابید.



۲۵.۱۶ مقطع استوانه

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

و صفحه $g(x, y, z) = x + z - 4 = 0$ خم C

است. هر بردار مماس بر C خود به خود بر ∇f و ∇g عمود و در نتیجه با $\nabla f \times \nabla g$ موازی است. این اطلاع به ما امکان می‌دهد معادله خط مماس مذکور در مثال ۲ را بنویسیم.

حل: خط مماس در P_0 هم بر ∇f عمود است و هم بر ∇g .

پس بردار $\mathbf{v} = \nabla f \times \nabla g$ با این خط مماس موازی است. برای نوشتن معادلات خط از مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ و مختصات P_0 استفاده می‌کنیم. داریم

$$\nabla f_{(1, 1, 3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1, 1, 3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

و

$$\nabla g_{(1, 1, 3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1, 1, 3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

خط قائم بر این رویه در P_0 ، بنا به تعریف، خط قائم بر صفحه مماس در P_0 است. معادلات پارامتری این خط بر حسب ∇f را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\begin{aligned} x &= x_0 + f_x(P_0)t, & y &= y_0 + f_y(P_0)t \\ z &= z_0 + f_z(P_0)t. \end{aligned} \quad (۲)$$

مثال ۱ معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه زیر را، در نقطه $P_0(1, 2, 4)$ بیابید

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \quad (\text{يك سهمیوار مستدیر})$$

حل: این رویه در شکل ۲۴.۱۶ نمایش داده شده است. صفحه مماس عبارت است از صفحه مسایر P_0 و عمود بر گرادیان f در P_0 . گرادیان عبارت است از

$$\nabla f_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1, 2, 4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

پس این صفحه، صفحه

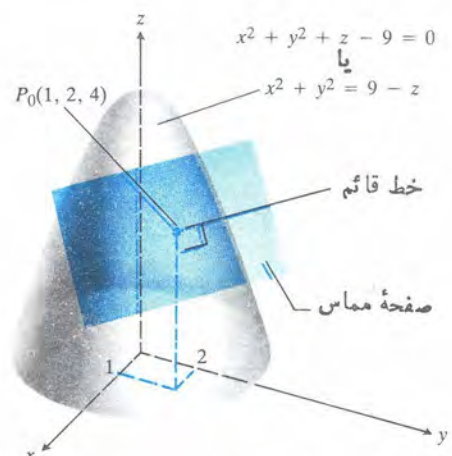
$$2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0$$

یا

$$2x + 4y + z = 14$$

است. خط قائم بر رویه در P_0 عبارت است از

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 4 + t.$$



۲۴.۱۶ صفحه مماس و خط قائم بر رویه

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \text{ در } P_0(1, 2, 4).$$

پس

$$\mathbf{v} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

خط عبارت است از

$$\blacksquare \quad x = 1 + 2t, \quad y = 1 - 2t, \quad z = 3 - 2t.$$

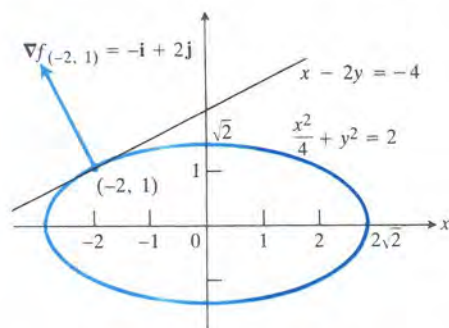
نتایج مشابه در مورد توابع دومتغیره

همان گونه که گرادیان $f(x, y, z)$ بر رویه‌های تراز $f(x, y, z) = c$ عمود است، گرادیان تابع دومتغیره $f(x, y)$ نیز بر سطحهای تراز $f(x, y) = c$ عمود است. (مسأله ۵۷ از مسأله‌های گوناگون را ببینید.)

مثال ۳ بردار قائم بر خم تراز

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

از تابع $f(x, y) = (x^2/4) + y^2$ در نقطه $P_0(-2, 1)$ بنویسید. معادله‌ای برای مماس بر این خم در P_0 بنویسید. (شکل ۲۶.۱۶ را ببینید.)



۲۶.۱۶ مماس بر خم تراز $f(x, y) = 2$ از تابع $f(x, y) = (x^2/4) + y^2$ در نقطه $P_0(-2, 1)$ بنویسید. خط مارپیچ ∇f است که بر P_0 عمود است.

حل: بردار گرادیان

$$\nabla f_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2} \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} \right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

بر این خم در نقطه $(-2, 1)$ قائم است. مماس در این نقطه عبارت است از خط

$$\blacksquare \quad x - 2y = -4 \quad \text{یا} \quad -1(x + 2) + 2(y - 1) = 0$$

مسأله‌ها

در هریک از مسائل ۱-۱۸، نقطه‌ای چون P_0 داده شده است که بریک رویه $f(x, y, z) = c$ واقع است. مطلوب است معادلات (الف) صفحه مماس در P_0 ، و (ب) خط قائم بر رویه در P_0 .

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad P_0(1, 1, 1) \quad ۱.$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad P_0(3, 5, -4) \quad ۲.$$

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0, \quad P_0(3, 4, -5) \quad ۳.$$

$$2z - x^2 = 0, \quad P_0(2, 0, 2) \quad ۴.$$

$$z - \ln(x^2 + y^2) = 0, \quad P_0(1, 0, 0) \quad ۵.$$

$$(x + y)^2 + z^2 = 25, \quad P_0(1, 2, 4) \quad ۶.$$

$$x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7, \quad P_0(1, -1, 3) \quad ۷.$$

$$\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad P_0(0, 1, 2) \quad ۸.$$

$$x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad P_0(1, 1, -1) \quad ۹.$$

$$\tan^{-1}(y/x) - z = 0, \quad P_0(1, 1, \pi/4) \quad ۱۰.$$

$$\cos(\pi x/2) - z = 0, \quad P_0(1, 0, 0) \quad ۱۱.$$

$$x + y + z = 1, \quad P_0(0, 1, 0) \quad ۱۲.$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4 \quad ۱۳.$$

$$P_0(2, -3, 18)$$

$$x - y^2 + z^2 - 2z^2 = 0, \quad P_0(-2, -2, 1) \quad ۱۴.$$

$$x + y^2 + z^2 = 1, \quad P_0(0, 0, 1) \quad ۱۵.$$

$$x^2 + y + 4z^2 = 4, \quad P_0(0, 0, 1) \quad ۱۶.$$

$$\sin x - y = 0, \quad P_0(0, 0, 0) \quad ۱۷.$$

$$(x + y)/(xy - 1) - z = 0, \quad P_0(1, 2, 3) \quad ۱۸.$$

در مسائل ۱۹-۲۸، رویه را رسم کنید، و بردار گرادیان آن را در نقطه مفروض بکشید.

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad (1, 1, 2) \quad ۱۹.$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad (2, -1, -\sqrt{5}) \quad ۲۰.$$

$$x^2 + y^2 + z = 4, \quad (-1, -1, 2) \quad ۲۱.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad (1, 2, 2) \quad ۲۲.$$

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (-1, \sqrt{3}, 1) \quad ۲۳.$$

$$x^2 + z^2 = 2, \quad (1, -1, 1) \quad ۲۴.$$

۰۴۱. نقاطی از رویه

$$(y+z)^2 + (z-x)^2 = 16$$

را بیابید که در آنها، خط قائم با صفحه yz موازی است.

۰۴۲. برویه

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

نقاطی را بیابید که در آنها، صفحه مماس با صفحه xy موازی است.

۰۴۳. نشان دهید که خم زیر وقتی $t=1$ ، برویه $x^2 + y^2 - z = 1$ قائم است

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} - \frac{1}{t} (t+3) \mathbf{k}.$$

به عبارت دیگر، نشان دهید که بردار سرعت این خم مضربی از گرادینان تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ در آن نقطه است.

۰۴۴. نشان دهید که خم زیر وقتی $t=1$ برویه

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 1$$

مماس است:

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} + (2t-1) \mathbf{k}.$$

به عبارت دیگر، نشان دهید که $d\mathbf{R}/dt$ در نقطه تماس بر ∇f عمود است.

۸.۱۶ مشتقات جزئی مراتب بالاتر، معادلات دیفرانسیل جزئی مربوط به فیزیک

اگر از تابعی مکرراً مشتق جزئی بگیریم، مشتقاتی به دست می آیند که مشتقات مراتب بالاتر (یعنی بالاتر از مرتبه اول) نام دارند. این مشتقات در معادلاتی ظاهر می شوند که قوانین فیزیکی مهمی را در مورد حرکت موج، جریان گرما، و گرانش، بیان می کنند. همان گونه که در فصل بعد خواهیم دید این مشتقات در آزمونهای مربوط به مشخص کردن ماکسیممها و مینیممهای توابع با بیش از یک متغیر نیز ظاهر می شوند.

معمولاً حل معادلات دیفرانسیلی که شامل مشتقات جزئی اند دشوار است. بخشی از این دشواری ناشی از این است که جوابهای این معادلات صورتهای بسیار گوناگونی دارند. در اینجا از شما نمی خواهیم معادلات دیفرانسیل جزئی را که خواهید دید حل کنید، بلکه فقط می خواهیم نشان دهید که توابع داده شده جواب معادلات خاصی هستند. این کار فوایدی در بردارد: این فرصت برای شما فراهم می شود که با معادلات مهمی آشنا شوید، و قاعده زنجیری را در مباحث کار بردی مهم دیگری هم به کار بندید.

$$4y^2 + 9z^2 = 36, \quad (0, 2/\sqrt{2}, \sqrt{3}) \quad ۰۲۵$$

$$3/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1, \quad (1, 2, -2) \quad ۰۲۶$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad (1, 1, -1) \quad ۰۲۷$$

$$2x + 3y + 6z = 18, \quad (3, 2, 1) \quad ۰۲۸$$

در مسائل ۲۹-۳۴، مطلوب است معادلات پارامتری خطی که در نقطه مفروض بر خم محل تلاقی رویه ها مماس است.

$$x = 1, \quad x + y^2 + 2z = 4 \quad ۰۲۹ \text{ رویه ها:}$$

$$(1, 1, 1) \quad \text{نقطه:}$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, \quad xyz = 1 \quad ۰۳۰ \text{ رویه ها:}$$

$$(1, 1, 1) \quad \text{نقطه:}$$

$$y = 1, \quad x^2 + 2y + 2z = 4 \quad ۰۳۱ \text{ رویه ها:}$$

$$(1, 1, 1/2) \quad \text{نقطه:}$$

$$y = 1, \quad x + y^2 + z = 2 \quad ۰۳۲ \text{ رویه ها:}$$

$$(1/2, 1, 1/2) \quad \text{نقطه:}$$

$$۰۳۳ \text{ رویه ها:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11, \quad x^2 + 3x^2y^2 + y^2 + 4xy - z^2 = 0$$

$$(1, 1, 3) \quad \text{نقطه:}$$

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4 \quad ۰۳۴ \text{ رویه ها:}$$

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4) \quad \text{نقطه:}$$

در مسائل ۳۵-۴۰، خم تراز $f(x, y) = c$ را رسم کنید. سپس یک بردار قائم بر خم در نقطه P_0 بیابید، و معادله ای برای خط مماس بر این خم در P_0 بنویسید.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad ۰۳۵$$

$$x^2 - y^2 = 3, \quad P_0(2, -1) \quad ۰۳۶$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36, \quad P_0(2, 2\sqrt{5}/3) \quad ۰۳۷$$

$$x^2 - y = 1, \quad P_0(\sqrt{2}, 1) \quad ۰۳۸$$

$$xy = -4, \quad P_0(2, -2) \quad ۰۳۹$$

$$x^2 + xy + y^2 = 7, \quad P_0(1, 2) \quad ۰۴۰$$

(این همان مثال ۵ بخش ۳.۲ است.)

مشتقهای مرتبه دوم

وقتی از تابعی چون $f(x, y)$ دو بار مشتق می گیریم، مشتقهای مرتبه دوم آن را به دست می آوریم. این مشتقها را معمولاً با نمادهای زیر نمایش می دهیم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

یا

$$f_{xx}, \quad f_{yy}, \quad f_{yx}, \quad f_{xy}$$

و اینها را با معادلاتی نظیر

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

و غیره تعریف می کنیم. به ترتیب مشتق گرفتن توجه کنید:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \text{ابتدا نسبت به } y \text{ مشتق می گیریم و سپس نسبت به } x.$$

$$f_{yx} \text{ نیز به همین معناست.}$$

مثال ۱ اگر

$$f(x, y) = x \cos y + ye^x$$

داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = e^x$$

حال آنکه

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\sin y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = e^x.$$

قضیه مشتقهای آمیخته

ممکن است در مثال ۱ توجه کرده باشید که مشتقات مرتبه دوم «آمیخته»

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

برابرند. این امر به هیچ وجه اتفاقی نیست. در هر نقطه‌ای که f ، f_x ، f_y ، f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند، مشتقات جزئی آمیخته f_{xy} و f_{yx} باید باهم برابر باشند. این واقعیت را قضیه مشتقهای آمیخته می نامیم.

قضیه ۲

قضیه مشتقهای آمیخته

اگر $f(x, y)$ و مشتقهای جزئی f_x ، f_y ، f_{xy} ، f_{yx} آن در ناحیه‌ای که شامل نقطه‌ای چون (a, b) باشد تعریف بشوند، همگی در (a, b) پیوسته باشند، آنگاه

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b). \quad (1)$$

اثباتی از قضیه ۲ در پیوست ۹ آمده است.

مثال ۲ اگر

$$z = f(u, v), \quad u = x + y, \quad v = xy$$

و f و مشتقات جزئی آن پیوسته باشند، z_{xy} را بیابید.

حل: ابتدا z_x را با قاعده زنجیری می یابیم

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = f_u u_x + f_v v_x \\ &= f_u(1) + f_v(y) \\ &= f_u + y f_v. \end{aligned} \quad (2)$$

سپس، از دو طرف این معادله نسبت به y مشتق جزئی می گیریم، و f_y را به صورت حاصلضرب y در تابع f_v در نظر

بنابر این

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(e' f_x) + \frac{d}{dt}(2 f_y) \\ &= e' f_x + e' \frac{d}{dt}(f_x) + 2 \frac{d}{dt}(f_y). \end{aligned} \quad (6)$$

باز هم از قاعده زنجیری استفاده، و دومشتی باقیمانده را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f_x) &= f_{xx} \frac{dx}{dt} + f_{xy} \frac{dy}{dt} = f_{xx} e' + f_{xy} \cdot 2 \\ &= e' f_{xx} + 2 f_{xy} \\ \frac{d}{dt}(f_y) &= f_{yx} \frac{dx}{dt} + f_{yy} \frac{dy}{dt} = f_{yx} e' + f_{yy} \cdot 2 \\ &= e' f_{yx} + 2 f_{yy}. \end{aligned}$$

با قراردادن این برابریها در معادله (۵) داریم

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dt^2} &= e' f_x + e'(e' f_{xx} + 2 f_{xy}) + 2(e' f_{yx} + 2 f_{yy}) \\ &= e' f_x + e'^2 f_{xx} + 2 e' f_{xy} + 2 e' f_{yx} + 4 f_{yy} \\ &= e' f_x + e'^2 f_{xx} + 4 e' f_{xy} + 4 f_{yy}. \end{aligned}$$

در محاسبه اخیر برای رسیدن به آخرین عبارت از تساوی $f_{yx} = f_{xy}$ استفاده کرده‌ایم. ■

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

اگر بار دیگر به مثال ۱ برگردیم نه تنها متوجه می‌شویم که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

بلکه می‌بینیم که

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

این برابری را می‌توان از قضیه ۲ به طریق زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f_x \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f_x \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x^2}. \end{aligned}$$

می‌گیریم

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u + y f_v) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u) + y \frac{\partial}{\partial y}(f_v) + f_v \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u) + y \frac{\partial}{\partial y}(f_v) + f_v. \end{aligned} \quad (3)$$

دوباره از قاعده زنجیری استفاده، و دومشتی باقیمانده را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(f_u) &= f_{uu} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{uv} \frac{\partial v}{\partial y} = f_{uu} + x f_{uv} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_v) &= f_{vu} \frac{\partial u}{\partial y} + f_{vv} \frac{\partial v}{\partial y} = f_{vu} + x f_{vv}. \end{aligned}$$

این برابریها را در معادله (۳) منظور می‌کنیم

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}(f_u) + y \frac{\partial}{\partial y}(f_v) + f_v \\ &= f_{uu} + x f_{uv} + y(f_{vu} + x f_{vv}) + f_v \\ &= f_{uu} + x f_{uv} + y f_{vu} + x y f_{vv} + f_v \\ &= f_{uu} + (x + y) f_{uv} + x y f_{vv} + f_v \\ &= f_{uu} + u f_{uv} + v f_{vv} + f_v. \end{aligned} \quad (4)$$

برای رسیدن از (۴) به (۵) از برابری $f_{vu} = f_{uv}$ استفاده کرده‌ایم. ■

مثال ۳ اگر

$$w = f(x, y), \quad x = e^t, \quad y = 2t - 1$$

و اگر w و همه مشتقات جزئی آن پیوسته باشند، $d^2 w / dt^2$ را بیابید.

حل: ابتدا dw/dt را می‌یابیم و سپس از آن نسبت به t مشتق می‌گیریم. بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = f_x \cdot e' + f_y \cdot 2 \\ &= e' f_x + 2 f_y. \end{aligned}$$

در واقع، اگر تمام مشتقهای جزئی پیوسته باشند، می توان از نماد

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

برای نمایش نتیجه حاصل از مشتق گرفتن از $f(x, y)$ با نسبت به x و y به هر ترتیب استفاده کرد. ترتیب مشتقگیری هر چه باشد، نتیجه نهایی یکسان است.

مثال بعد نشان می دهد که مقید نبودن به رعایت ترتیب مشتقگیری تا چه حد به ما کمک می کند.

مثال ۴ مطلوب است

$$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y).$$

حل: کار مشتقگیری نسبت به y را به تأخیر می اندازیم و ابتدا نسبت به x مشتق می گیریم و بدون محاسبات دیگری نشان می دهیم که نتیجه نهایی صفر است

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (x \sin y + e^y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x \sin y + e^y) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} (\sin y) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^3} (0) = 0. \end{aligned}$$

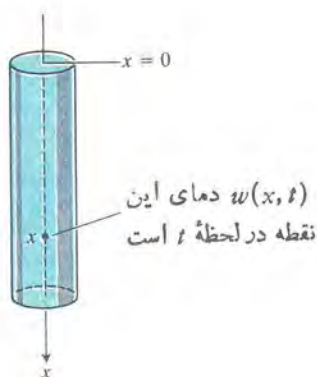
اگر ابتدا نسبت به y مشتق می گرفتیم خیلی بیشتر طول می کشید تا به این نتیجه برسیم. ■

□ معادله یک بعدی گرما (= معادله پخش = معادله تلگراف)

فرض کنیم $w(x, t)$ دمای نقطه x از میله رسانای یکنواختی در لحظه t باشد. اطراف میله کاملاً عایق اند (جریان گرما از دیواره لوله به هیچ وجه عبور نمی کند - شکل ۲۷.۱۶ را ببینید). در این صورت، مشتقهای جزئی w_t و w_{xx} در یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر صدق می کنند

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t. \quad (7)$$

این معادله را معادله یک بعدی گرما می نامند. مقدار c^2 از روی جنس میله تعیین می شود. این مقدار برای بسیاری از مواد به طور تجربی تعیین شده است. و در هر مورد خاص می توان مقدار لازم را از جدول به دست آورد.



۲۷.۱۶ توزیع دما در یک میله رسانای گرما در معادله زیر صدق می کند

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t.$$

در به دست آوردن مدلی برای تغییر دمای فصلی زیر سطح زمین، استفاده از معادله (۷) کارساز است؛ در این مورد، $w(x, t)$ دمای t امین روز سال در x فوتی زیر سطح زمین است. (می توان ستون قائمی از سطح زمین را به عنوان یک میله عایق بندی شده تلقی کرد.) در مورد خاک خشک داریم

$$c^2 = 0.19 \text{ فوت مربع}$$

و در نتیجه، معادله (۷) به صورت زیر درمی آید

$$w_t = 0.19 w_{xx} \quad \text{یا} \quad w_{xx} = \frac{1}{0.19} w_t \quad (8)$$

جوابی که با تغییر دمای سطح زمین در فصول مختلف مطابقت دارد عبارت است از

$$w(x, t) = \cos(1.7 \times 10^{-2} t - 0.2x) e^{-0.2x}. \quad (9)$$

درستی این مطلب چنین تحقیق می شود که w_t و w_{xx} را محاسبه کنیم و ببینیم که $w_t = 0.19 w_{xx}$ چون محاسبه خسته کننده است، از آن صرف نظر می کنیم. جواب مذکور در (۹) را در شکل ۱۶ عرسم کرده ایم. در شیمی و زیست شیمی، معادله گرما را معادله پخش می نامند. در این مباحث، $w(x, t)$ غلظت جسم حل نشده، مثلاً نمک، را نمایش می دهد که در طول اولیه پرازمایع پخش می شود. مقدار $w(x, t)$ غلظت در نقطه x و در لحظه t است. در کاربردهای دیگری، $w(x, t)$ پخش گاز در یک لوله طویل و نازک را نشان می دهد. در مهندسی برق، معادله گرما به صورت های زیر ظاهر می شود

$$v_{xx} = RC v_t \quad (10)$$

$$f(x, y) = x^2 + 5xy + \sin x + ye^x \quad \text{ث}$$

$$f(x, y) = x \ln xy \quad \text{ج}$$

۱۲. در مورد هریک از توابع زیر، مشتق $\partial^5 f / \partial x^2 \partial y^3$ صفر است. برای اینکه هرچه سریعتر این مطلب را نشان دهید نسبت به چه متغیری ابتدا باید مشتق گرفت: x یا y ؟ بکوشید بدون نوشتن هیچ چیزی پاسخ دهید.

$$f(x, y) = y^2 x^4 e^x + 2 \quad \text{الف}$$

$$f(x, y) = y + y^2 [\ln(x^2 + 5) + \sin x - 7x^2] \quad \text{ب}$$

$$f(x, y) = xe^y + x \sin y - x \cos y \quad \text{پ}$$

$$f(x, y) = x \int_1^y e^{t^2/t} dt \quad \text{ت}$$

در مسائل ۱۳-۱۸، فرض کنید که مشتقات لازم وجود دارند، و توابع و همه مشتقات پیوسته اند.

۱۳. اگر $w = f(u, v)$ ، $u = x + y$ ، $v = xy$ و w_{xy} مطلوب است. جواب را بر حسب u ، v ، f_u و f_v بیان کنید.

۱۴. اگر $z = f(u, v)$ ، $u = x^2 - y^2$ و $v = 2xy$ ، z_{xx} را بیابید. جواب را بر حسب x ، y ، f_u و f_v بیان کنید.

۱۵. اگر $u = f(x, y)$ ، $x = r^2 + s^2$ و $y = 2rs$ ، u_{ss} را بیابید. جواب را بر حسب r ، s ، f_x و f_y بنویسید.

۱۶. اگر $w = f(u, v)$ ، $u = x + y$ ، $v = y^2$ و $\partial^2 w / \partial x \partial y$ را بیابید. جواب را بر حسب x ، y ، f_u و f_v بیان کنید.

۱۷. اگر $w = f(x, y)$ ، $x = \sin t$ و $y = t^2$ ، $d^2 w / dt^2$ را بیابید.

۱۸. فرض کنید $w = f(u)$ که در آن $u = xg(y)$. نشان دهید که $w_{xx} = f''(xg(y)) \cdot g^2(y)$.

۱۹. اگر $w = f(x, y)$ ، $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ و اگر وقتی $r = 2$ و $\theta = \pi/2$ داشته باشیم $f_y = f_{xx} = 1$ ، مقدار $\partial^2 w / \partial \theta^2$ را در $r = 2$ و $\theta = \pi/2$ بیابید. (قبل از جانشانی مقادیر عددی، تمام مشتقات را محاسبه کنید.)

معادلات لاپلاس

در معادله لاپلاس سه بعدی [زیر] توزیعهای دمای حالت پایا، $T = f(x, y, z)$ در فضا، پتانسیلهای گرانشی، و پتانسیلهای الکترواستاتیکی صدق می کنند

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

و

$$i_{xx} = RCi_t \quad (11)$$

که به معادلات تلگراف معروف اند. این معادلات ولتاژ v و جریان i را در یک کابل هم محور یا در هر کابل دیگری توصیف می کنند که در آنها نشت و القاکنایی قابل اغماض اند. توابع و ثابتهای موجود در این معادلات عبارت اند از

$$v(x, t) = t \quad \text{ولتاژ در نقطه } x \text{ در لحظه } t$$

$$R = \text{مقاومت در هر واحد طول}$$

$$C = \text{ظرفیت نسبت بدزمین در هر واحد از طول کابل}$$

$$i(x, t) = t \quad \text{جریان در نقطه } x \text{ در لحظه } t$$

مسئله ها

در مسائل ۱-۶، مطلوب است $\partial^2 f / \partial x^2$ ، $\partial^2 f / \partial y^2$ و $\partial^2 f / \partial x \partial y$.

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad 1$$

$$f(x, y) = e^x \ln(3 - y^2) \quad 2$$

$$f(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x \quad 3$$

$$f(x, y) = (x - y) / xy \quad 4$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad 5$$

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx \quad 6$$

در مسائل ۷-۱۰، نشان دهید که $w_{xy} = w_{yx}$.

$$w = \ln(2x + 3y) \quad 7$$

$$w = \tan^{-1}(y/x) \quad 8$$

$$w = xy^2 + x^2 y^3 + x^3 y^4 \quad 9$$

$$w = e^x \sinh y + \cos(2x - 3y) \quad 10$$

۱۱. محاسبه f_{xy} با کدام ترتیب مشتقگیری سریعتر انجام می شود: اول x یا اول y ؟ بکوشید بدون نوشتن هیچ چیزی پاسخ دهید.

$$f(x, y) = x \sin y + e^y \quad \text{الف}$$

$$f(x, y) = 1/x \quad \text{ب}$$

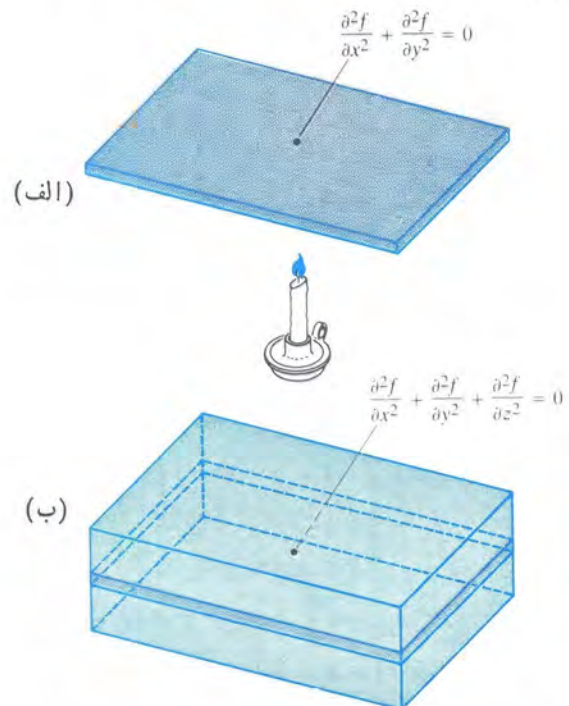
$$f(x, y) = y + (x/y) \quad \text{پ}$$

$$f(x, y) = y + x^2 y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1) \quad \text{ت}$$

معادله لاپلاس دوبعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (۱۳)$$

که از حذف جمله $\partial^2 f / \partial z^2$ از (۱۲) به دست می آید، پتانسیلها، و توزیعهای دمای حالت پایا در صفحه را نشان می دهد. شکل ۲۸.۱۶ را ببینید.



۲۸.۱۶ توزیعهای دمای حالت پایا در صفحه و در اجسام سه بعدی در معادلات لاپلاس صدق می کنند. صفحه را می توان (الف) به صورت برش نازکی از جسم سه بعدی و (ب) عمود بر محور z در نظر گرفت.

نشان دهید که تابعهای ذکر شده در مسائل ۲۰-۲۷ در یکی از معادلات لاپلاس صدق می کنند.

$$۲۰. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

$$۲۱. f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$$

$$۲۲. f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$$

$$۲۳. f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$۲۴. f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$۲۵. f(x, y, z) = e^{x+4y} \cos 5z$$

$$۲۶. f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$$

$$۲۷. f(x, y, z) = \cos 3x \cos 4y \sinh 5z$$

۲۸. نشان دهید که اگر $w = f(u, v)$ در معادله لاپلاس $f_{uu} + f_{vv} = 0$ و $v = xy$ و $u = (x^2 - y^2)/2$ اگر $w_{xx} + w_{yy} = 0$ آنگاه

۲۹. نشان دهید که اگر تمام مشتقهای جزئی لازم وجود داشته باشند، آنگاه $u = f(x - iy) + g(x + iy)$ (که $i = \sqrt{-1}$) یک جواب معادله زیر است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

۳۰. تابع زیر به ازای چه مقادیری از n در معادله لاپلاس دوبعدی (۱۲) صدق می کند؟

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^n$$

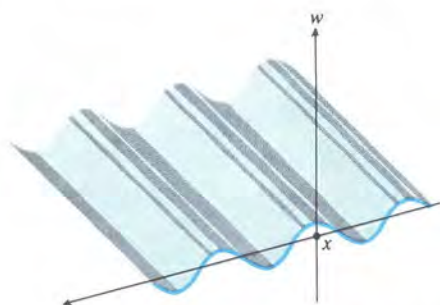
۳۱. تمام جوابهای معادله لاپلاس دوبعدی (۱۳) را که به صورتهای زیرند، بیابید.

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y) = ax^2 + bx^2y + cxy^2 + dy^2 \quad (\text{ب})$$

معادله موج

اگر در ساحل اقیانوسی بایستیم و در لحظه ای از زمان از امواج عکس بگیریم، عکس، الگوهای منظمی از برآمدگیها و فروفتگیها را نشان می دهد (شکل ۲۹.۱۶). در فضا حرکت قائم متناوب نسبت به فاصله را می بینیم. اگر روی آب باشیم، با عبور امواج می توانیم بالا و پایین رفتن آب را حس کنیم. در زمان، حرکت قائم متناوب را مشاهده می کنیم. در فیزیک، این تقارن زیبا را با معادله یک بعدی



۲۹.۱۶ امواج آب در یک لحظه از زمان. با گذشت زمان داریم

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

پرسشها و تمرینهای موری

۱. فرض کنید $f(x, y)$ تابعی از دو متغیر مستقل باشد که در ناحیه‌ای چون R واقع در صفحه xy تعریف شده است. دوراه برای نمایش ترمیمی مقادیر f شرح دهید.

۲. رویه تراز و خم تراز را تعریف کنید.

۳. دو تعریف معادل برای

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

به دست دهید. قضیه اساسی در مورد محاسبه حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت توابع دو متغیره چیست؟

۴. چه موقع يك تابع دو متغیره در نقطه‌ای از دامنه‌اش پیوسته است؟ تابعی مثال بزنید که در يك یا چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته نباشد.

۵. چه موقع يك تابع سه متغیره در نقطه‌ای از دامنه‌اش پیوسته است؟ تابع سه متغیره‌ای مثال بزنید که در نقاطی از دامنه‌اش پیوسته و در سایر نقاط ناپیوسته باشد.

۶. فرض کنید $f(x, y)$ تابعی از دو متغیر مستقل x و y باشد. مشتقات $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ چگونه تعریف می‌شوند؟ تعبیر هندسی آنها چیست؟ چگونه آنها را محاسبه می‌کنید؟ نمونه‌ای از نحوه محاسبه را به دست دهید.

۷. در مورد قاعده زنجیری برای مشتقات جزئی توابع دو و سه متغیره، مثالهایی بیاورید. نمودار درختی مثالهای خود را رسم کنید.

۸. گرادیان تابعی چون $f(x, y, z)$ را تعریف کنید و نقش گرادیان را در تعریف مشتقات جهتی، صفحات مماس، و خطوط قائم بیان کنید. رابطه بین ∇f و جهتهایی که در آنها f سریعترین تغییرات را دارد چیست؟ نتایج مشابه در مورد توابع دو متغیره چه هستند؟ مثالهایی بیاورید.

۹. قضیه اساسی مربوط به مشتقات جزئی مرتبه دوم آمیخته توابع دو متغیره چیست؟ درباره مشتقات جزئی آمیخته مراتب بالاتر چه می‌توان گفت؟ مثالهایی بیاورید.

۱۰. سه معادله دیفرانسیل جزئی مهم را که در فیزیک مطرح می‌شوند و نمونه‌هایی از جوابهای آنها را ارائه دهید.

مسئله‌های گوناگون

۱. هدلولیهایی را رسم کنید که دامنه تابع زیر را محصور می‌کنند

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(\pi xy)}, \quad xy \geq 0.$$

سپس با سایه‌زدن دامنه تابع شکل را تکمیل کنید.

موج

$$(14) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

بیان می‌کنند که در آن w ارتفاع موج، x متغیر فاصله، t متغیر زمان، و c سرعت انتشار موج است.

در مثال فوق، x فاصله بین دو نقطه از سطح اقیانوس است، اما در کاربردهای دیگر، x ممکن است فاصله دو نقطه از یک سیم مرتعش، یا فاصله دو نقطه در هوا (امواج صوت)، یا فاصله دو نقطه فضا (امواج نور) باشد. مقدار c به محیط و نوع موج بستگی دارد.

نشان دهید که توابع مذکور در مسائل ۳۲-۳۷ جواب معادله موج، معادله ۱۴، هستند.

$$32. \quad w = \sin(x + ct)$$

$$33. \quad w = \cos(2x + 2ct)$$

$$34. \quad w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$$

$$35. \quad w = \ln(2x + 2ct)$$

$$36. \quad w = \tan(2x - 2ct)$$

$$37. \quad w = 5 \cos(3x + 3ct) - 7 \sinh(4x - 4ct)$$

۳۸. اگر c ثابت باشد، و اگر $w = f(u) + g(v)$ که در آن $u = x + ct$ و $v = x - ct$ ، با این شرط که تمام مشتقات لازم وجود داشته باشند، نشان دهید

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c^2 (f''(u) + g''(v)).$$

معادله گرما

۳۹. تمام جوابهای معادله يك بعدی گرما، $w_t = c^2 w_{xx}$ ، را که به صورت $w = e^{rt} \sin \pi x$ (ثابت r) اند، بیابید.

۴۰. تمام جوابهای معادله يك بعدی گرما، $w_t = c^2 w_{xx}$ ، را که به صورت $w = e^{rt} \sin kx$ اند و در شرایط $w(0, t) = 0$ و $w(L, t) = 0$ صدق می‌کنند، بیابید. وقتی $t \rightarrow \infty$ در مورد جواب چه اتفاقی می‌افتد؟

۴۱. فرض کنید $u = f(y)$ تابع مشتق پذیری از y باشد، و نیز فرض کنید $y = x - tg(u)$ که در آن g تابع دلخواهی از u است. نشان دهید u در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

۲. حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin(1/x)$

ب) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 y^2 - 1}{xy - 1}$

۳. فرض کنید $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ و $x^2 + y^2 \neq 0$. آیا می توان $f(0, 0)$ را چنان تعریف کرد که f در $(0, 0)$ پیوسته باشد؟ چرا؟۴. فرض کنید تابع $f(x, y)$ با معادلات زیر تعریف بشود

$$f(x, y) = \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|}, \quad |x|+|y| \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0.$$

آیا f در مبدأ پیوسته است؟۵. فرض کنید $f(x, y)$ به ازای تمام x و y ها تعریف بشود و پیوسته باشد (مشتق پذیری، فرض نشده است). نشان دهید که همواره می توان تعداد دلخواهی نقطه چون $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ یافت که به ازای آنها مقدار f یکسان باشد.۶. ثابت کنید که اگر به ازای همه x ها و y ها $f(x, y)$ با ضابطه

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تعریف شود، آنگاه

الف) به ازای هر x ثابت، $f(x, y)$ تابع پیوسته ای از y استب) به ازای هر y ثابت، $f(x, y)$ تابع پیوسته ای از x استپ) $f(x, y)$ در $(0, 0)$ پیوسته نیستت) در $(0, 0)$ ، $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ وجود دارند اما در آنجا پیوسته نیستند.

این مثال نشان می دهد که ممکن است تابعی در همه نقاط ناحیه ای مشتقات جزئی داشته باشد، اما در آن ناحیه پیوسته نباشد. این مطلب با آنچه که در مورد توابع يك متغیره صادق است تفاوت زیادی دارد؛ در مورد توابع يك متغیره، وجود مشتق، پیوستگی را ایجاب می کند.

۷. مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر را بیابید

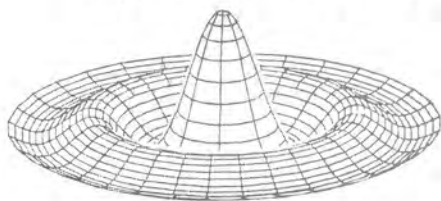
الف) $(\sin xy)^2$

ب) $\sin((xy)^2)$

۸. فرض کنید α, β, γ و زوایایی باشند که خط مار بر مبدأ و درون ثمن اول با قسمت مثبت محورها می سازد. γ را به صورت تابعی از α و β فرض کنید. وقتی $\alpha = \pi/4$ ، $\beta = \pi/3$ ، و $\gamma = \pi/3$ ، مطلوب است مقدار $\partial \gamma / \partial \alpha$.۹. فرض کنید (r, θ) و (x, y) مختصات قطبی و دکارتی در صفحه باشند. به طریق هندسی و با استفاده از تعاریف $\partial r / \partial x$ و $\partial x / \partial r$ نشان دهید که $\partial r / \partial x$ و $(\partial x / \partial r)^{-1}$ برابر نیستند.۱۰. اگر $z = xe^{xy}$ ، کدام گزاره های زیر درباره مقدار مشتق $\partial z / \partial x$ در نقطه $(1, 1)$ درست اند؟i) مقدار مشتق $2e$ است.ii) مقدار مشتق به طور هندسی شیب خط مماس بر رویه $z = xe^{xy}$ را در نقطه $(1, 1, e)$ که در صفحه $y = 1$ قرار دارد نمایش می دهد.iii) این مشتق با ثابت نگه داشتن متغیر x و محاسبه مشتق معمولی نسبت به متغیر y ، و محاسبه تابع حاصل در $(1, 1)$ به دست می آید.

۱۱. فرض کنید

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta r}{\theta r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

(شکل ۳۰.۱۶ را ببینید). مطلوب است: (الف) $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta)$ (ب) $f_r(0, 0)$ ، (پ) $f_\theta(r, \theta)$ ، $r \neq 0$ 

۳۰.۱۶ رویه مذکور در مسأله ۱۱.

۱۲. فرض کنید $u = x$ ، $z = f(u, v)$ و $v = \ln(x^2 + 1)$. $\partial z / \partial x$ را بر حسب x ، f_x و f_v بیان کنید.۱۳. فرض کنید $w = f(r, \theta)$ ، $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، و $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.مطلوب است $\partial w / \partial x$ و $\partial w / \partial y$ بر حسب r و θ .۱۴. فرض کنید $z = f(u, v)$ ، $u = ax + by$ و $v = ax - by$. فرمولهای $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ را بیابید.

تعریف می‌شوند که حد بالایی و نیز حد پایینی آنها متغیر است

$$y = \int_{\sin x}^{x^2} (1+t) dt, \quad y = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin t^2 dt.$$

انتگرال اول را می‌توان مستقیماً محاسبه کرد، اما انتگرال دوم را نمی‌توان. با وجود این، مشتق هر دو انتگرال را با فرمولی موسوم به قاعده لایب‌نیتس می‌توان محاسبه کرد.

قاعده لایب‌نیتس

اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و $u(x)$ و $v(x)$ توابع مشتق‌پذیری از x باشند که مقادیرشان به $[a, b]$ تعلق دارند، آنگاه

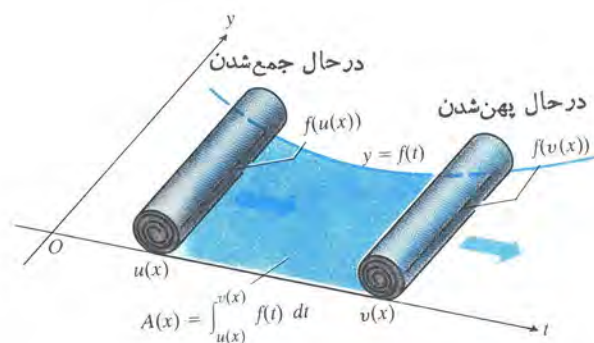
$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

شکل ۳۱.۱۶ تعبیری هندسی از قاعده لایب‌نیتس به دست می‌دهد. این شکل قالیچه‌ای با طول متغیر $f(t)$ را نشان می‌دهد که در لحظه x درست چپ جمع، و در همان لحظه x درست راست پهن می‌شود. (در این تعبیر، زمان x است و نه t). در لحظه x ، کف اتاق از $u(x)$ تا $v(x)$ فرش شده است. آهنگ جمع شدن قالیچه، du/dx ، لزوماً برابر با آهنگ پهن شدن آن، dv/dx ، نیست. در هر لحظه مفروض x مساحتی که با قالیچه فرش می‌شود برابر است با

$$A(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt.$$

حال، مساحت فرش شده با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ در لحظه x ، آهنگ افزایش $A(x)$ برابر است با حاصلضرب طول $f(v(x))$ لبه‌ای از قالیچه که در حال پهن شدن است در آهنگ پهن شدن قالیچه، dv/dx . به عبارت دیگر، $A(x)$ با آهنگ

$$f(v(x)) \frac{dv}{dx}$$



۳۱.۱۶ یک تعبیر هندسی از قاعده لایب‌نیتس

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}.$$

۱۵. a و b ثابت‌اند، $w = u^2 + \tanh u + \cos u$ ، و $u = ax + by$ نشان دهید که

$$a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}.$$

۱۶. اگر $y = e^r \sin s$ ، $x = e^r \cos s$ ، $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $z = e^s$ ، به کمک قاعده زنجیری $\partial w / \partial r$ و $\partial w / \partial s$ را بیابید. با روشی دیگر پاسخ خود را بیازمایید.

۱۷. اگر $y = r - s$ ، $x = r + s$ ، $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ و $z = 2rs$ ، به کمک قاعده زنجیری، $\partial w / \partial r$ و $\partial w / \partial s$ را بیابید و با روشی دیگر پاسخ خود را بیازمایید.

۱۸. معادلات

$$e^u \sin v - y = 0 \quad \text{و} \quad e^u \cos v - x = 0$$

u و v را به صورت توابعی از x و y ، مثلاً $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ ، تعریف می‌کنند. نشان دهید زاویه بین بردارهای

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathbf{j}$$

و

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathbf{j}$$

ثابت است.

۱۹. اگر جانشانی $v = (x+y)/2$ ، $u = (x-y)/2$ تابع $f(u, v)$ را به $F(x, y)$ بدل کند، $\partial F / \partial x$ و $\partial F / \partial y$ را بر حسب مشتقات $f(u, v)$ نسبت به u و v بنویسید.

۲۰. فرض کنید که n عدد صحیح ثابتی است، $f(x, y, z)$ پیوسته است و مشتقات جزئی پیوسته دارد. و نیز فرض کنید که به ازای تمام مقادیر x, y, z و t معادله زیر برقرار است

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z).$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z = n f.$$

(دانهایی: از معادله اول نسبت به t مشتق بگیرید و $t = 1$ را در آن قرار دهید.)

قاعده لایب‌نیتس

در مسائل کاربردی گاه به توابعی برمی‌خوریم که با انتگرال‌هایی

زیاد می‌شود. در همین لحظه، A با آهنگ زیر کم می‌شود

$$f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

که حاصلضرب طول لبه‌ای است که در حال جمع شدن است در آهنگ du/dx . پس تغییر خالص A برابر است با

$$\frac{dA}{dx} = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

که دقیقاً همان قاعده لایب‌نیتس است.

۲۱. با استفاده از

$$g(u, v) = \int_u^v f(t) dt, \quad u = u(x), \quad v = v(x)$$

و با استفاده از قاعده زنجیری و محاسبه dg/dx ، قاعده لایب‌نیتس را ثابت کنید.

۲۲. اگر

$$F(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{t} dt \quad (\text{الف})$$

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt \quad (\text{ب})$$

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \sin t^2 dt \quad (\text{پ})$$

با استفاده از قاعده لایب‌نیتس، dF/dx را محاسبه کنید.

۲۳. مقداری برای x بیابید که انتگرال زیر را ماکسیمم کند

$$\int_x^{x+3} t(5-t) dt.$$

(مسائلی نظیر این، در نظریه ریاضی انتخابات سیاسی پیش می‌آیند.)

۲۴. فرض کنید $u = xyz$. نشان دهید که اگر x و y متغیرهای مستقل باشند (در نتیجه، u و z توابعی از x و y باشند)، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + yz$$

اما، اگر x ، y ، و z متغیرهای مستقل باشند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz.$$

۲۵. اگر y از دو معادله $z = f(x, y)$ و $g(x, y) = 0$ حذف شود، حاصل را می‌توان به صورت $z = h(x)$ بیان کرد. مشتق

$h'(x)$ را بر حسب $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ ، $\partial g/\partial x$ ، و $\partial g/\partial y$ بیان کنید. با محاسبه صریح $h(x)$ و $h'(x)$ در مورد $f(x, y) = x^2 + y^2$ و $g(x, y) = x^2 + y^2 - x$ ، فرمول خود را بیازمایید.

۲۶. فرض کنید معادله $F(x, y, z) = 0$ را به صورت تابعی از x و y ، مثلاً به صورت $z = f(x, y)$ بیان می‌کند، و مشتقهای آن عبارت‌اند از $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$. نیز فرض کنید که معادله $F(x, y, z) = 0$ را نیز به صورت تابعی از y و z ، مثلاً به صورت $x = g(y, z)$ بیان می‌کند، و مشتقات آن عبارت‌اند از $\partial g/\partial z$ و $\partial g/\partial y$. ثابت کنید که

$$\frac{\partial g}{\partial y} = - \frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial x}$$

و $\partial g/\partial z$ را بر حسب $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ بنویسید.

۲۷. اگر $z = f(u)$ و $u = (x-y)/y$ ، نشان دهید که $x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

۲۸. اگر $f(x, y, z) = 0$ و $z = x + y$ ، مستطوب است dz/dx .

۲۹. مشتق تابع زیر را در جهت $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ در نقطه $(2, 0, 1)$ بیابید

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + 2(z-2)^2 - 6.$$

۳۰. مشتق تابع زیر را در نقطه $(3, 3, 1)$ در جهت بردار $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ بیابید

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2.$$

۳۱. مقدار ماکسیمم مشتق جهتی تابع زیر در نقطه $(1, 3, 5)$ چقدر است؟

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z.$$

۳۲. جهت بزرگترین تغییر تابع زیر را در نقطه $(1, 1, \sqrt{14})$ بیابید

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2.$$

۳۳. مشتق $f(x, y, z) = xyz$ را در جهت بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید. بزرگترین مقدار مشتقهای جهتی f در $(1, 1, 1)$ چیست؟

۳۴. در نقطه $(1, 2)$ مشتق تابع $f(x, y)$ در جهت معطوف به $(2, 2)$ برابر با $+2$ و در جهت معطوف به $(1, 1)$ برابر با -2 است. مشتق f در نقطه $(1, 2)$ در جهت معطوف به $(4, 6)$ چیست؟

جزئی پیوسته باشد. علاوه بر این فرض کنید u و v خود تابعی از متغیرهای مستقل x, y, z با مشتقات جزئی پیوسته باشند. نشان دهید که اگر w به صورت تابعی از x, y, z فرض شود، گرادیان آن در هر نقطه (x_0, y_0, z_0) در یک صفحه مشترک با گرادیانهای $u = u(x, y, z)$ و $v = v(x, y, z)$ قرار می گیرد.

۴۳. بردار واحد قائم بر رویه $x^2 + y^2 = 3z$ را در نقطه $(1, 3, 10/3)$ بیابید.

۴۴. برای صفحه مماس بر رویه $z = 0$ در نقطه $x^2y + 2y^2x - z = 0$ در نقطه $(1, 3, 21)$ معادله ای بنویسید.

۴۵. نشان دهید که خط قائم بر رویه $xy + z = 2$ در نقطه $(1, 1, 1)$ از مبدأ می گذرد.

۴۶. الف) گرادیان $f(x, y) = x^5 + 4xy^3 - 3y^5$ را بیابید.
ب) برای خط واقع در صفحه xy که بر خم زیر در نقطه $(1, 1)$ مماس باشد معادله ای بنویسید

$$x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2.$$

۴۷. الف) مطلوب است يك بردار $N(x, y, z)$ قائم بر رویه $z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$ در نقطه (x, y, z) از رویه.

ب) مطلوب است کسینوس زاویه γ بین $N(x, y, z)$ و محور z و حد $\cos \gamma$ وقتی که $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

۴۸. برای صفحه مماس بر رویه

$$x^2z + y^2x^2 + \sin(yz) + 5z = 0$$

در نقطه $(2, 0, -3)$ معادله ای بنویسید. همچنین برای خط قائم بر این رویه در $(2, 0, -3)$ معادلاتی بیابید.

۴۹. الف) رویه $z^2 + y^2 - x^2 = 4$ را رسم کنید.

ب) يك بردار قائم بر این رویه در $(3, -3, 2)$ بیابید.

پ) معادلات صفحه مماس و خط قائم در $(3, -3, 2)$ را بیابید.

۵۰. الف) برای صفحه مماس بر رویه

$$x^2 + xy^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

در نقطه $(2, 1, -2)$ ، معادله ای بنویسید.

ب) معادلات خط قائم بر این رویه در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

۵۱. مطلوب است تمام نقاط (a, b, c) از فضا که به ازای آنها

۳۵. در يك سیال جاری هموار، چگالی $\rho(x, y, z, t)$ به مکان و زمان بستگی دارد. اگر

$$V = V(x, y, z, t)$$

سرعت ذره ای از سیال در نقطه (x, y, z) و در زمان t باشد، آنگاه

$$\frac{d\rho}{dt} = V \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = V_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_3 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

که در آن $V = V_1 i + V_2 j + V_3 k$. تعبیر فیزیکی و هندسی این رابطه را بیان کنید.

۳۶. اگر گرادیان تابعی چون $f(x, y, z)$ همیشه با بردار $xi + yj + zk$ موازی باشد، نشان دهید که این تابع در نقاط $(0, 0, a)$ و $(0, 0, -a)$ مقادیر یکسانی دارد.

۳۷. نشان دهید که مشتق جهتی

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

در هر جهتی در مبدأ برابر با ۱ است، اما r در مبدأ بردار گرادیان ندارد.

۳۸. فرض کنید $R = xi + yj + zk$ و $r = |R|$.

الف) با تعبیر هندسی نشان دهید که $\nabla r = R/r$.

ب) نشان دهید که $\nabla(r^n) = nr^{n-2}R$.

پ) تابعی بیابید که گرادیان آن برابر با R باشد.

ت) نشان دهید که $R \cdot dR = r dr$.

ث) اگر A يك بردار ثابت باشد، نشان دهید که

$$\nabla(A \cdot R) = A.$$

۳۹. فرض کنید $\theta(x, y)$ مختص قطبی θ به صورت تابعی از x و y در صفحه xy باشد. جهت و مقدار $\nabla \theta$ را هم در مختصات دکارتی و هم در مختصات قطبی بیابید.

۴۰. اگر A و B نقاط ثابتی باشند، و θ زاویه ای به رأس $P(x, y, z)$ و روبه رو به پاره خط AB باشد، نشان دهید که $\nabla \theta$ بر دایره ما بر A, B ، و P قائم است.

۴۱. الف) نشان دهید که هر دوی $f(x, y) = ay - bx + C$ و $f(x, y) = e^{ay-bx} + C$ در معادله $af_x + bf_y = 0$ صدق می کنند.

ب) نشان دهید که هر تابع مشتق پذیری چون $f(x, y)$ که گرادیانش به صورت $ak(x, y)j - bk(x, y)i$ باشد در معادله مذکور در الف) صدق می کند.

۴۲. فرض کنید $w = f(u, v)$ تابعی از u و v و دارای مشتقات

کره‌های

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$$

و

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

به طور متعامد یکدیگر را قطع کنند (یعنی در هر نقطه تقاطع، صفحه‌های مماسشان برهم عمود باشند).

۵۲ الف) مطلوب است گرادینان

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 + z^2$$

در نقطه $P_0(1, -1, 3)$.

ب) برای صفحه مماس بر رویه

$$x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7$$

در $P_0(1, -1, 3)$ معادله‌ای بنویسید.

۵۳. به ازای چه مقداری از ثابت a صفحه‌های مماس بر کره‌های زیر، در هر نقطه از محل تقاطع کره‌ها، بر یکدیگر عمودند؟

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \quad \text{و} \quad (x-a)^2 + y^2 + z^2 = 3$$

۵۴. می‌گوییم یک خم بر یک رویه در نقطه‌ای چون P مماس است هرگاه خط مماس بر خم در صفحه‌ای قرار داشته باشد که در P بر این رویه مماس است.

الف) نشان دهید که خم

$$\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

بر رویه

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

در $P(0, 0, 1)$ مماس است.

ب) نشان دهید که خم

$$\mathbf{R}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{t}{4} - 3\right)\mathbf{j} + \cos(t-2)\mathbf{k}$$

بر رویه

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

در $t=2$ مماس است.

۵۵. فرض کنید C خم دلخواهی باشد که بر رویه $f(x, y, z) = 0$ قرار دارد و از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد. فرض کنید C_x خم محل تقاطع رویه با صفحه $y=y_0$ و C_y خم محل تقاطع رویه با صفحه $x=x_0$ است. ثابت کنید که خط مماس بر C در P_0 در

صفحه‌ای قرار دارد که با خطهای مماس بر خمهای C_x و C_y در P_0 پدید می‌آید. (فرض کنید که f و مشتقات جزئی مرتبه اول آن پیوسته‌اند.)

۵۶. اگر $f(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آن در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ پیوسته باشند، از گزاره‌های زیر کدام یک درست است؟

الف) اگر $\mathbf{u}$ بردار واحدی باشد، آنگاه مشتق f در جهت $\mathbf{u}$ عبارت است از

$$(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}.$$

ب) مشتق f در جهت $\mathbf{u}$ یک بردار است.

ب) مشتق جهتی f در P_0 بیشترین مقدار خود را در جهت ∇f به دست می‌آورد.

ت) در (x_0, y_0) ، ∇f قائم بر خم تراز

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

است.

۵۷. فرض کنید که $f(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آن پیوسته‌اند، و نیز فرض کنید که f در سراسر خم مشتق‌پذیر $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ مقدار ثابت c را دارد؛ یعنی به ازای تمام مقادیر t داریم

$$f(x(t), y(t)) = c.$$

از دوطرف این معادله نسبت به t مشتق بگیرید و نشان دهید که ∇f بر بردار مماس در هر نقطه از خم عمود است.

۵۸. فرض کنید $w=f(x, y)$ ، $x=u+v$ ، و $y=u-v$. نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

۵۹. جانشانی $v=xy^2$ ، $u=x+y$ تابع $f(u, v)$ را به $F(x, y)$ تبدیل می‌کند. مشتق جزئی $\partial^2 F / \partial x \partial y$ را بر حسب x و y بیان، و مشتقات جزئی $f(u, v)$ را نسبت به u و v محاسبه کنید.

۶۰. فرض کنید a و b ثابت‌اند، $z=u(x, y) \cdot e^{ax+by}$. $\partial^2 u / \partial x \partial y = 0$ و u تابعی از x و y است، و b چه باشند تا عبارت زیر به ازای تمام مقادیر x و y برابر صفر باشد

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z.$$

۶۱. با استفاده از مختصات قطبی $x=r \cos \theta$ و $y=r \sin \theta$

۶۸. در هر يك از موارد زیر، نشان دهید كه تابع در معادله دیفرانسیل صدق می‌كند

الف)
$$f(x, t) = \int_0^{x/(2\sqrt{kt})} e^{-\sigma^2} d\sigma$$

$kf_{xx} - f_t = 0$ (ك ثابت)

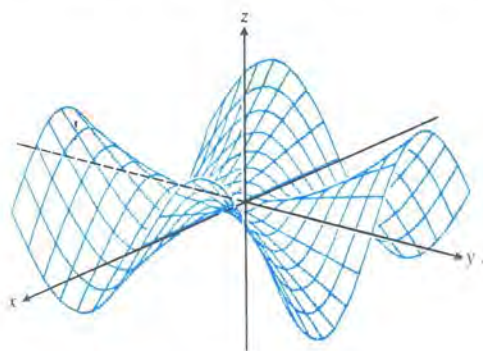
ب)
$$f(x, t) = \phi(x+at) + \psi(x-at)$$

$f_{tt} = a^2 f_{xx}$

۶۹. فرض كنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوب است $f_{xy}(0, 0)$ و $f_{yx}(0, 0)$. شكل ۳۲.۱۶ را ببینید.



۳۲.۱۶ رویه مذکور درمسأله ۶۹.

۷۰. تابعی چون $w = f(x, y)$ بیابید به‌قسمی‌كه $\partial w / \partial y = 2y - e^x \sin y$ و $\partial w / \partial x = 1 + e^x \cos y$ ؛ و اگر این كار ممكن نیست، توضیح دهید چرا چنین تابعی وجود ندارد.

۷۱. در ترمودیناميك پنج كمیت S, T, u, p, v چنان‌اند كه دو تا از آنها را می‌توان متغیرهای مستقل فرض كرد و سپس بقیه را به‌دست آورد. این كمیتها را رابطه دیفرانسیلی $T dS = du + p dv$ به‌هم مربوط می‌سازد. نشان دهید كه

$$\left(\frac{\partial v}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

تابع $f(x, y)$ به $g(r, \theta)$ بدل می‌شود. مطلوب است مقدار $\partial^2 g / \partial \theta^2$ در نقطه‌ای كه در آن $r = 2$ و $\theta = \pi/2$ ، با این شرط كه در آن نقطه داشته باشیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

۷۲. با این فرض كه معادله $f(x, y) = 0$ را به‌صورت يك تابع از x تعریف كند كه دو بار مشتقپذیر باشد، و تمام مشتقات جزئی لازم پیوسته باشند، $d^2 y / dx^2$ را بیابید.

۷۳. فرض كنید كه f تابعی از r است. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، و $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ نشان دهید كه به‌ازای مقادیر ثابتی چون a و b داریم

$$f(r) = \frac{a}{r} + b.$$

۷۴. تابعی چون $f(x, y)$ كه به‌ازای تمام مقادیر x و y تعریف می‌شود و مشتقپذیر است، همگن از درجه n (يك عدد صحیح نامنفی) نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر x, y, t داشته باشیم $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. در مورد چنین تابعی ثابت كنید كه

الف) $x(\partial f / \partial x) + y(\partial f / \partial y) = n f(x, y)$ و این رابطه را به‌صورت برداری بنویسید.

ب) اگر f مشتق جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته باشد، داریم

$$x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1) f.$$

پ) يك تابع همگن از درجه صفر، يك تابع ثابت است.

۷۵. فرض كنید معادله $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$ را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x و y تعریف می‌كند. $\partial^2 z / \partial x \partial y$ را بر حسب x, y, z محاسبه كنید.

۷۶. اگر $z = xy^2 - y \sin x$ ، مطلوب است

$$y(\partial^2 z / \partial y \partial x) - \partial z / \partial x.$$

۷۷. فرض كنید $w = z \tan^{-1}(x/y)$ ، مطلوب است

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

کاربردهای مشتقات جزئی

چشم انداز

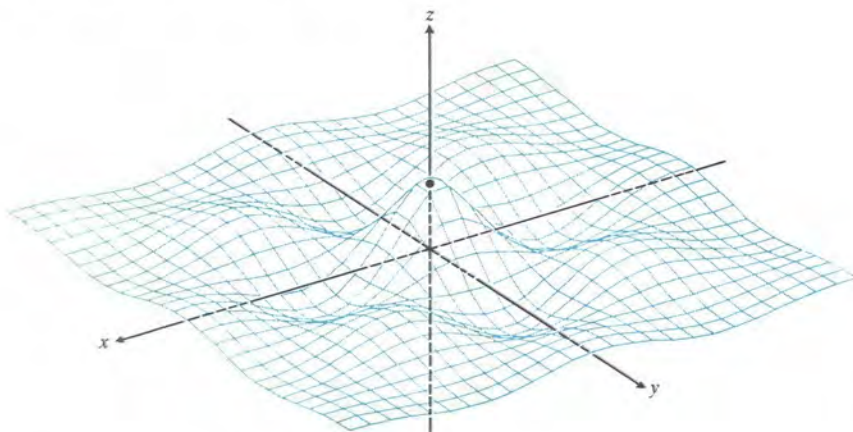
همان‌طور که در پایان بخش ۲.۱۶ گفتیم، توابع پیوسته‌ای که بر توایح بسته و کراندار صفحه x تعریف شوند، در دامنه خود مقادیر ماکسیمم و مینیمم دارند. توانایی ما در بدست آوردن این مقادیر و یافتن محل وقوع آنها اهمیت دارد. مثلاً، بیشترین دمای لبه یک ورق حرارت دیده چقدر است؟ بالاترین نقطه یک رویه مفروض در بالای یک بخش مشخص از صفحه x کدام است؟ در بخش ۱.۱۷ و مجدداً در بخش ۳.۱۷ خواهیم دید که به این قبیل پرسشها می‌توان با بررسی مشتقات جزئی تابع پاسخ داد.

مشتقات جزئی در بدست آوردن تقریبهای خطی، محاسبه نمودار و برآورد خطاهای تقریبها نیز نقشی اساسی دارند (بخش ۲.۱۷). از آنها در بدکار بردن روش ضرایب لاگرانژ-روش برای یافتن مقادیر اکسترمم توابع مشتقپذیر بر زیر مجموعه‌های معینی از دامنه‌هایشان نیز استفاده می‌شود. با این روش مثلاً می‌توان بیشترین و کمترین مقدار تابع $T = 400xyz^2$ را بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بدست آورد.

مشتقات جزئی مبنای بدست آوردن صورت دو متغیره ظریف و کارسازی از فرمول تیلر نیز هستند. این فرمول را در بخش ۴.۱۷ (که مطالعه آن اختیاری است) معرفی، و از آن برای اثبات نتایجی استفاده می‌کنیم که مطالب مربوط به مقادیر اکسترمم و برآورد در اوایل فصل، بر آنها مبتنی است. همچنین، از این فرمول برای بدست آوردن تقریبهای درجه دوم توابع دو متغیره، و برآورد خطاهای مربوط به این تقریبها استفاده می‌کنیم.

۱.۱۷ ماکسیممها، مینیممها، و نقاط زینی

توابع دارای دو متغیر مستقل نیز مانند توابع یک متغیره می‌توانند ماکسیمم و مینیمم موضعی داشته باشند (شکلهای ۱.۱۷ و ۲.۱۷ را ببینید). در این بخش، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از مشتقات جزئی یک تابع پیوسته چون $f(x, y)$ بر ناحیه‌ای مانند R از صفحه x برای بدست آوردن مقادیر ماکسیمم و مینیمم استفاده کرد. گام اول، استفاده از مشتقات جزئی مرتبه اول تابع است که با آن، فهرست (معمولاً) کوتاه و جامعی از نقاطی را بدست می‌آوریم که در آنها f ممکن است مقادیر اکسترمم موضعی خود را اختیار کند. گام بعدی بدین بستگی دارد که R بسته و کراندار باشد یا نه. در صورتی که باشد، به قضیه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته متوسل می‌شویم که حاکی است که هر تابع پیوسته بر یک ناحیه بسته و کراندار چون R یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق دارد. سپس بدکمک فهرست، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق را می‌یابیم. اگر R بسته و کراندار نباشد، تابع ممکن است بر R مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد. با وجود این باز هم می‌توانیم تلاش کنیم تا با استفاده از مشتقات جزئی مرتبه دوم دریابیم که آیا ناچاراً چه نقاطی از فهرست، مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی‌اند. خواهید دید که روش کار خیلی شبیه روش کار با توابع یک متغیره است. اختلاف عمده در این است که آزمونهای مشتقات اول و دوم در این مورد با مشتقات زیاده‌تری سروکار دارند.



۱۰۱۷ تابع $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ ماکسیمها و مینیمهای موضعی زیادی دارد.

در آنها مشتقات جزئی مرتبه اول f_x یا f_y وجود ندارند، بررسی می‌کنیم.

برای یافتن مقادیر اکسترمم یک تابع پیوسته $f(x, y)$ بزرگ ناحیه R سه مرحله را طی می‌کنیم:

مرحله ۱: فهرستی تنظیم می‌کنیم که شامل نقاطی باشد که به ازای آنها تابع f ماکسیم موضعی یا مینیم موضعی داشته باشد، و به ازای تمام نقاط موجود در فهرست، مقادیر f را می‌یابیم.

بعداً خواهیم دید که ماکسیمها و مینیمهای موضعی تنها به ازای نقاط زیر به دست می‌آیند

(i) نقاط مرزی R ،

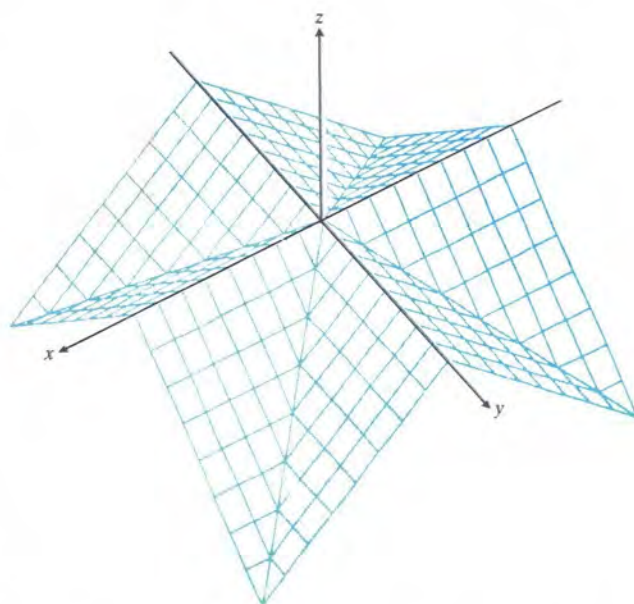
(ii) نقاط درونی R که به ازای آنها $f_x = f_y = 0$ و

نقاطی که در آنها f_x یا f_y وجود ندارد. (این نقاط را نقاط بحرانی f می‌نامیم).

بنابراین، برای تنظیم فهرست، مقادیر ماکسیم و مینیم f را در نقاط مرزی R و مقادیر f را در نقاط بحرانی می‌یابیم.

از لحاظ نظری چنین فهرستی ممکن است خیلی طولانی، و حتی شامل بینهایت نقطه باشد، اما غالباً در عمل، و مسلماً در این کتاب، چنین موردی پیش نمی‌آید. این فهرست در مورد مثالها و مسائل این کتاب کوتاه خواهد بود.

مرحله ۲: اگر R بسته و کراندار باشد، در فهرست به دنبال مقادیر ماکسیم و مینیم f می‌گردیم. این مقادیر، مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق f بر R خواهند بود. همان‌طور که در مقدمه ذکر کردیم، تابعی که بزرگ ناحیه بسته و کراندار صفحه پیوسته باشد، در آن ناحیه هم مقدار ماکسیم مطلق دارد و هم مقدار مینیم مطلق. چون مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق f ماکسیمها و مینیمهای موضعی نیز هستند، مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق f در نقاطی از فهرست تنظیمی مرحله ۱ قرار دارند. کافی است به فهرست نگاه کنیم و آنها را بیابیم. حال اگر بخواهیم بدانیم که در بین بقیه مقادیر، کدامها ماکسیم یا مینیم موضعی (در صورت وجود) هستند، می‌توانیم مرحله ۳ را طی کنیم.



۲۰۱۷ رویه $z = \frac{1}{4} (|x| - |y| - |x| - |y|)$ اگر از نقطه $(10, 15, 20)$ به آن نگاه شود.

آزمونهای مشتق

برای یافتن ماکسیم موضعی، مینیم موضعی، یا نقطه عطف یک تابع یک‌متغیره به بررسی نقاطی می‌پردازیم که در آنها خط مماس بر نمودار، افقی است. همچنین مقادیر تابع را به ازای نقاط مرزی دامنه آن و به ازای نقاطی که در آنها مشتق مرتبه اول وجود ندارد، بررسی می‌کنیم.

در مورد یک تابع $f(x, y)$ با دو متغیر مستقل، به جستجوی نقاطی می‌پردازیم که در آنها صفحه مماس بر رویه $z = f(x, y)$ افقی است. سپس ماکسیمهای موضعی، مینیمهای موضعی، یا نقاط زینی را در این نقاط جستجو می‌کنیم (شکل ۳۰۱۷). همچنین مقادیر تابع را به ازای نقاط مرزی دامنه آن و به ازای نقاطی که

ماکسیمم مطلق (f هیچ جا از این مقدار بزرگتر نیست)؛ و نیز يك ماکسیمم موضعی

ماکسیمم موضعی (f در این نزدیکیها از این مقدار بزرگتر نیست)



۳۰۱۷ چگونه می‌توان بدی مقادیر $f(x, y)$ نقاط زینی، متناظر به بعدی نقاط غطف‌اند. مقادیر موضعی را غالباً مقادیر «نسبی» می‌نامند.

با نگاه کردن به فرمول آن به رفتار f پی می‌بریم: در مبدأ مقدار f صفر است و وقتی (x, y) از مبدأ دور می‌شود، بر مقدار تابع افزوده می‌گردد. در مثال ۱ می‌خواهیم نشان دهیم آزمونهای مشتق چگونه این مطلب را آشکار می‌سازند.

مثال ۱ مطلوب است مقادیر اکسترمم تابع

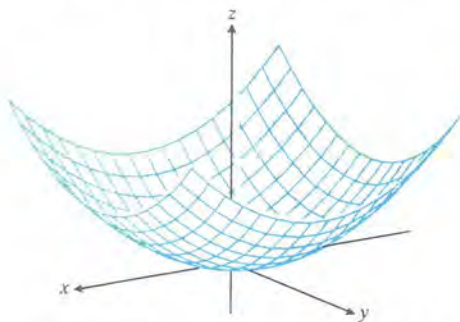
$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

حل: دامنهٔ f هیچ نقطهٔ مرزی ندارد، زیرا تمام صفحه، دامنه است (شکل ۴۰۱۷). مشتقهای $f_x = 2x$ و $f_y = 2y$ همه جا وجود دارند. پس ماکسیممها و مینیممهای موضعی تنها می‌توانند در نقاطی باشند که در آنها

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{و} \quad f_y = 2y = 0.$$

تنها نقطه ممکن، مبدأ است که در آن مقدار f صفر است. چون f هرگز منفی نمی‌شود، صفر مینیمم مطلق است. در اینجا اصلاً نیازی به آزمون مشتق دوم نیست. اگر آن را به کار بگیریم، درمی‌یابیم که

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = 0$$



۴۰۱۷ نمودار تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ سهمیوار $z = x^2 + y^2$ است. تابع تنها يك مقدار اکسترمم دارد، و آن، مقدار مینیمم مطلق صفر در مبدأ است.

مرحلهٔ ۳: اگر R بسته و کمرانداذ نباشد، آزمون مشتق دوم را که در زیر می‌آید به کار می‌گیریم.

واقعیت این است که تساوی $f_x = f_y = 0$ به ازای يك نقطهٔ درونی (a, b) از R به تنهایی تضمین نمی‌کند که f در آن نقطه يك مقدار اکسترمم داشته باشد. اما، اگر f و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن بر R پیوسته باشند، آزمون موسوم به آزمون مشتق دوم وجود دارد که ممکن است رفتار f در (a, b) را مشخص کند. این آزمون به شرح زیر است:

اگر $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ، آنگاه

(i) در (a, b) يك ماکسیمم موضعی دارد هرگاه در

(a, b) داشته باشیم $f_{xx} < 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$.

(ii) در (a, b) يك مینیمم موضعی دارد هرگاه در

(a, b) داشته باشیم $f_{xx} > 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$.

(iii) در (a, b) يك نقطهٔ زینی دارد هرگاه در (a, b) داشته باشیم

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0.$$

(iv) این آزمون در (a, b) نتیجه‌بخش نیست هرگاه در

(a, b) داشته باشیم $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$. در این صورت،

برای تعیین رفتار f در (a, b) باید به راه دیگری متوسل شویم.

عبارت $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ را هسین f می‌نامند. گاه به خاطر سپردن آن به صورت دترمینانی زیر آسانتر است

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

حال چند مثال را ملاحظه می‌کنیم که این آزمونها در آنها

به کار رفته‌اند. بعد نشان می‌دهیم برای اینکه يك تابع مشتق‌پذیر f

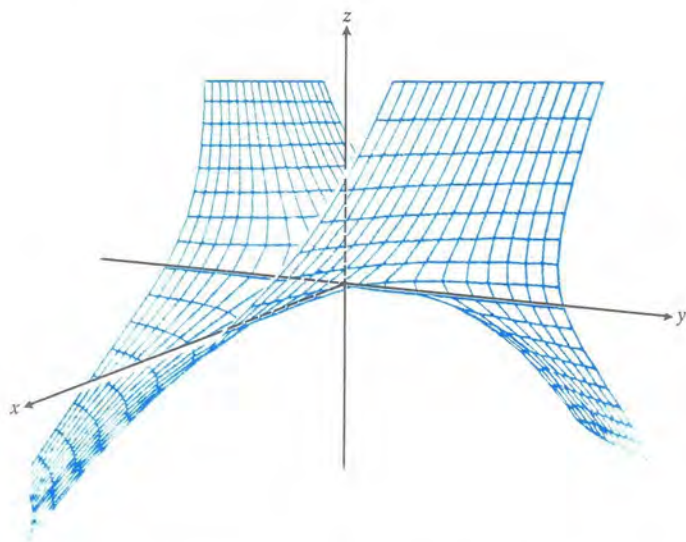
در یکی از نقاط درونی دامنه‌اش يك مقدار اکسترمم داشته باشد،

شرط $f_x = f_y = 0$ شرطی است لازم. دلایل ریاضی مؤید آزمون

مشتق دوم را در بخش ۴۰۱۷ ذکر خواهیم کرد.

کاربرد آزمونها

در نخستین مثال، تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ را در نظر می‌گیریم که



۵.۱۷ رویه $z = xy$ در مبدأ یک نقطه زینی دارد.

اکسترم داشته باشد که

$$f_x = y = 0 \quad \text{و} \quad f_y = x = 0$$

پس، مبدأ تنها نقطه‌ای است که در آن f ممکن است مقدار اکسترم داشته باشد. برای اینکه ببینیم در مبدأ چه خبر است، به محاسبات زیر می‌پردازیم

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1.$$

میین

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

منفی است. پس تسابع در $(0, 0)$ یک نقطه زینی دارد. نتیجه اینکه $f(x, y) = xy$ اصلاً مقدار اکسترم ندارد. ■

مثال ۴ مقادیر ما کسیم و مینیمم مطلق تسابع زیر را بر یک ناحیه مثالی شکل واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$ ، $y=0$ ، $y=9-x$ بیابید

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2.$$

حل: تنها نقاطی که f ممکن است در آنجا ما کسیم یا مینیمم مطلق داشته باشد، نقاط واقع بر مرز مثلث (شکل ۶.۱۷) و نقاط درون مثلث است که در آنها $f_x = f_y = 0$.

نقاط مرزی. تک تک اضلاع مثلث را در نظر می‌گیریم:
۱. بر ضلع OA داریم $y=0$. حال تسابع

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (2)(2) - (0)^2 = 4 > 0$$

که نشان می‌دهد $(0, 0)$ یک مینیمم موضعی است. این مطلب به خودی خود نشان نمی‌دهد که $(0, 0)$ مینیمم مطلق است. برای رسیدن به این نتیجه به اطلاعات بیشتری نیاز است. ■

یکی از مزایای شیوه‌ای که برای یافتن مقادیر اکسترم شرح دادیم، این است که این شیوه در مورد توابعی که ترسیم آنها بیش از حد پیچیده است نیز به کار می‌رود. مثال بعد این نکته را نشان می‌دهد.

مثال ۲ مقادیر اکسترم تابع زیر را بیابید

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

حل: این تابع به ازای تمام مقادیر x و y تعریف می‌شود و مشتق دارد و دامنه‌اش هیچ نقطه مرزی ندارد. پس این تابع تنها در نقاطی مقدار اکسترم دارد که در آنها f_x و f_y با هم صفر باشند. از این مطلب نتیجه می‌شود که

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

یا

$$x = y = -2.$$

بنابر این نقطه $(-2, -2)$ تنها نقطه‌ای است که در آن ممکن است f یک مقدار اکسترم داشته باشد. برای اینکه ببینیم این نقطه اکسترم است یا نه، مقادیر زیر را می‌یابیم

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{xy} = 1.$$

میین f در $(-2, -2)$ برابر است با

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

دو برابر

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{و} \quad f_{xx} < 0$$

حاکی از این هستند که f در $(-2, -2)$ یک مینیمم موضعی دارد. مقدار f در این نقطه برابر است با $f(-2, -2) = 8$. ■

مثال ۳ مقادیر اکسترم تابع زیر را بیابید

$$f(x, y) = xy.$$

حل: چون این تابع همه جا مشتق پذیر است و دامنه‌اش هیچ نقطه مرزی ندارد (شکل ۵.۱۷)، f تنها در نقاطی می‌تواند مقدار

پس

$$f'(x, 9-x) = 18 - 4x = 0$$

و داریم

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

بدای این مقدار از x ،

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

و

$$f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

نقاط درونی. برای این نقاط داریم

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

یا

$$(x, y) = (1, 1)$$

که در آن

$$f(1, 1) = 4.$$

خلاصه. تمام مقادیر اکسترمم احتمالی را در نظر می‌گیریم

$$4, 2, -61, 3, -\frac{41}{2}.$$

ما کسیم، ۴ است که f بدای $(1, 1)$ آن را اختیار می‌کند. مینیمم، -61 است که f به ازای $(0, 9)$ و $(9, 0)$ آن را می‌گیرد. ■

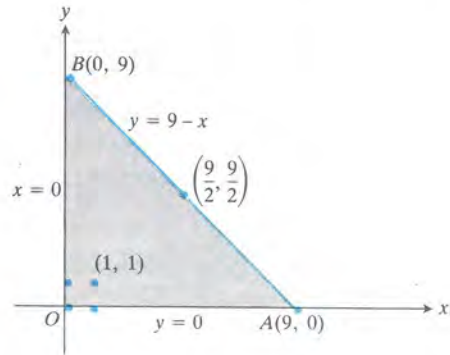
$$\text{شرط } f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$$

فرض کنید که یک مقدار ما کسیم موضعی تابع $f(x, y)$ به ازای یک نقطه درونی (a, b) از دامنه تابع بدست می‌آید و هر دوی $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ در (a, b) وجود دارند (شکل ۷.۱۷ را ببینید). در این صورت

۱. $x = a$ یک نقطه درونی دامنه خم $z = f(x, b)$ است که در آن صفحه $y = b$ رویه $z = f(x, y)$ را قطع می‌کند.

۲. تابع $z = f(x, b)$ در $x = a$ یک مقدار ما کسیم نسبی دارد.

۳. بنابراین مقدار مشتق $z = f(x, b)$ در $x = a$ صفر است.



۶.۱۷ این ناحیه مثلثی شکل دامنه تابع مذکور در مثال ۴ است.

را می‌توان به صورت تابعی از x در نظر گرفت که بر بازه بسته $0 \leq x \leq 9$ تعریف می‌شود.

(در فصل ۳ آموختیم که) مقادیر اکسترمم این تابع ممکن است به ازای نقاط انتهایی

$$x = 0 \text{ که در آن } f(0, 0) = 2$$

$$x = 9 \text{ که در آن } f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61$$

و به ازای نقاطی درونی که در آنها

$$f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$$

بدست آیند. تنها نقطه درونی که در آن $f'(x, 0) = 0$ ، نقطه $x = 1$ است و داریم

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3.$$

۲. بر ضلع OB داریم $x = 0$ و لذا

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2.$$

از تقارن f نسبت به x و y و از تحلیل فوق برمی‌آید که مقادیر اکسترمم احتمالی واقع بر این ضلع عبارت‌اند از

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3.$$

۳. چون در دو حالت فوق مقادیر f در نقاط انتهایی AB را در نظر گرفته‌ایم، تنها به نقاط درونی AB می‌پردازیم. با ضابطه

$$y = 9 - x$$

داریم

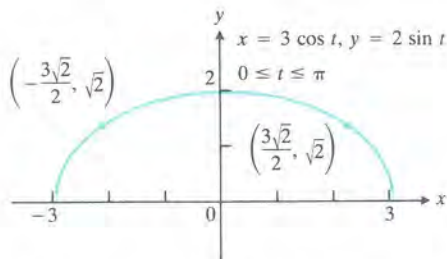
$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 \\ &= -61 + 18x - 2x^2. \end{aligned}$$

زیر بیابید

$$x = 3 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

حل: این خم در شکل ۸.۱۷ نشان داده شده است. مشتق f نسبت به t عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \\ &= (2 \sin t)(-3 \sin t) + (3 \cos t)(2 \cos t) \\ &= -6 \sin^2 t + 6 \cos^2 t = 6 \cos 2t. \end{aligned}$$



۸.۱۷ مثال ۵ هر بوط است به مقادیر $f(x, y) = xy$ بر نیمه بالایی بیضی $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$.

مشتق به ازای تمام مقادیر t تعریف می شود و وقتی $\cos 2t = 0$ ، برابر است با صفر. در دامنه $0 \leq t \leq \pi$ این بدان معناست که $t = \pi/4$ و $t = 3\pi/4$. بنابراین مقادیر اکسترم احتمالی f برای این خم عبارت اند از مقادیر تابع در نقاط بحرانی:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} = 3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -3$$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی:

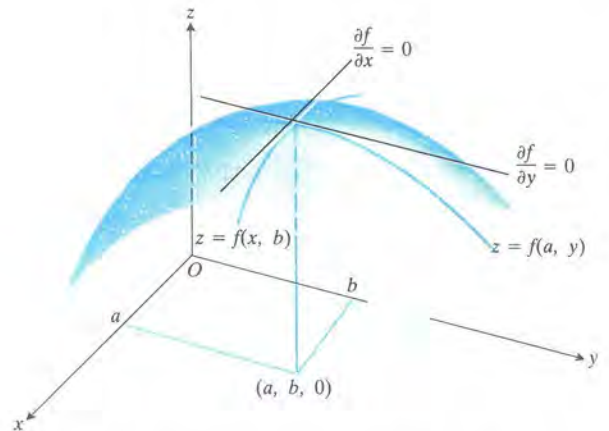
$$f(0) = 3 \sin(0) = 0$$

$$f(\pi) = 3 \sin(2\pi) = 0.$$

مقایسه این مقادیر نشان می دهد که روی خم مورد بحث، f در نقطه

$$\left(3 \cos \frac{\pi}{4}, 2 \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

دارای مقدار ماکسیمم مطلق ۳، و در نقطه



۸.۱۸ ماکسیمم f در $x=a$ و $y=b$ است.

چون این مشتق دقیقاً $\partial f / \partial x|_{(a,b)}$ است، نتیجه می گیریم که

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,b)} = 0.$$

استدلالی مشابه در مورد تابع $z = f(a, y)$ نشان می دهد که

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(a,b)} = 0.$$

پس

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

شرطی است لازم برای اینکه f در يك نقطه درونی (a, b) ، که در آن هم f_x وجود دارد و هم f_y ، يك مقدار اکسترم داشته باشد. اما، به خاطر داشته باشید که در يك نقطه زینی هم این مشتقات صفرند، و نیز به خاطر داشته باشید که مقدار يك تابع می تواند در نقطه ای که یکی یا هر دو مشتق آن وجود نداشته باشد، اکسترم باشد.

مقادیر اکسترم خمهای پارامتری

برای یافتن مقادیر اکسترم يك تابع $f(x, y)$ بر يك خم $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ ، f را به صورت تابعی از يك متغیر t تلقی، و از قاعده زنجیری برای حل $df/dt = 0$ استفاده می کنیم و به این ترتیب، مثل هر تابع يك متغیره ای، مقادیر اکسترم f از بین مقادیر f در نقاط زیر به دست می آیند.

الف) نقاط بحرانی (نقاطی که به ازای آنها df/dt صفر است یا وجود ندارد)، و

ب) نقاط انتهایی دامنه پارامتر.

مثال ۵ مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x, y) = xy$ را بر خم

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4 \quad ۰۸$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3y + 3 \quad ۰۹$$

$$f(x, y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y \quad ۰۱۰$$

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y \quad ۰۱۱$$

$$f(x, y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y \quad ۰۱۲$$

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 5x - 2y \quad ۰۱۳$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 \quad ۰۱۴$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6 \quad ۰۱۵$$

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1 \quad ۰۱۶$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \quad ۰۱۷$$

$$f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2 \quad ۰۱۸$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5 \quad ۰۱۹$$

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4 \quad ۰۲۰$$

$$f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^2 - 8x + 9y + 10 \quad ۰۲۱$$

$$f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x - 4y + 10 \quad ۰۲۲$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 6 \quad ۰۲۳$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x^2 - 3y^2 - 8 \quad ۰۲۴$$

$$f(x, y) = 6x^2 - 2x^2 + 3y^2 + 6xy \quad ۰۲۵$$

$$f(x, y) = 9x^2 + y^2/3 - 4xy \quad ۰۲۶$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 15 \quad ۰۲۷$$

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 \quad ۰۲۸$$

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 \quad ۰۲۹$$

$$f(x, y) = x \sin y \quad ۰۳۰$$

در مسائل ۳۱-۳۸، ماکسیمها و مینیمهای مطلق تسوابع را بردارندهای مفروض بیابید.

۰۳۱ $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ بر ناحیه مثلثی شکل بسته محدود به خطوط $x=0$ ، $y=2$ ، $y=2x$ واقع در ربع اول.

۰۳۲ $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ بر ناحیه مثلثی شکل بسته واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$ ، $y=4$ ، $y=x$.

۰۳۳ $f(x, y) = x^2 + y^2$ بر ناحیه مثلثی شکل بسته واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=0$ ، $y=0$ ، $x+y=2$.

$$\left(2 \cos \frac{3\pi}{4}, 2 \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right)$$

دارای مقدار مینیمم مطلق ۳- است.

خلاصه آزمونهای ماکسیم-مینیم

مقادیر اکسترم $f(x, y)$ تنها در نقاط زیر ممکن است باشند

(i) نقاط مرزی دامنه f

(ii) نقاط درونی با شرط $f_x = f_y = 0$ یا نقاطی که در

آنها f_x یا f_y وجود نداشته باشد (اینها را نقاط بحرانی f می نامند).

اگر f و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در همه جای یک قرص باز شامل (a, b) پیوسته باشند، و اگر $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ، آنگاه

(i) در (a, b) ، $f_{xx} < 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$\Leftarrow$ ماکسیم موضعی

(ii) در (a, b) ، $f_{xx} > 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$

$\Leftarrow$ مینیم موضعی

(iii) در (a, b) ، $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

$\Leftarrow$ نقطه زینی

(iv) در (a, b) ، $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$

$\Leftarrow$ آزمون نتیجه بخش نیست.

روی خمی چون $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ را بدصورت تابعی از t تلقی می کنیم و مقادیر اکسترم f را مانند تابع یک متغیره به دست می آوریم.

مسئله ها

توابع زیر را از لحاظ داشتن ماکسیمها، مینیمها و نقاط زینی بیازمایید. در این نقاط، مقادیر تابعها را بیابید.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4 \quad ۰۱$$

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 6x + 3y - 6 \quad ۰۲$$

$$f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2 \quad ۰۳$$

$$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4 \quad ۰۴$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5 \quad ۰۵$$

$$f(x, y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2 \quad ۰۶$$

$$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4 \quad ۰۷$$

۰۴۴. مبین $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$ هر يك از توابع زیر در مبدأ صفر است. در مورد هر يك از این توابع شکل رویه $z = f(x, y)$ را تجسم کنید و تعیین کنید که آیا تابع در مبدأ ماکسیم دارد، مینیم دارد، و یا فاقد هر دو است.

$$\text{الف) } f(x, y) = x^2 y^2$$

$$\text{ب) } f(x, y) = 1 - x^2 y^2$$

$$\text{پ) } f(x, y) = x y^2$$

$$\text{ت) } f(x, y) = x^2 y^2$$

$$\text{ث) } f(x, y) = x^3 y^3$$

$$\text{ج) } f(x, y) = x^4 y^4$$

مقادیر اکسترمم روی خهها

۰۴۵. مطلوب است تعیین مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق توابع مفروض بر نواحی زیر

$$\text{(i) ربع دایره } x^2 + y^2 = 4 \text{ واقع در ربع اول}$$

$$\text{(ii) نیمدایره } x^2 + y^2 = 4, y \geq 0, \text{ و}$$

$$\text{(iii) کل دایره } x^2 + y^2 = 4.$$

$$\text{الف) } f(x, y) = xy$$

$$\text{ب) } f(x, y) = x + y$$

$$\text{پ) } f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

برای پارامتری کردن توابع از روابط $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ استفاده کنید.

۰۴۶. مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق تابع $f(x, y) = xy$ بر نواحی زیر را (در صورت وجود) بیابید.

$$\text{الف) خط } x = 2t, y = t + 1$$

$$\text{ب) پاره خط } x = 2t, y = t + 1, -1 \leq t \leq 0$$

$$\text{پ) پاره خط } x = 2t, y = t + 1, 0 \leq t \leq 1$$

۰۴۷. مطلوب است تعیین مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق توابع مفروض بر نواحی زیر

$$\text{(i) ربع بیضی } (x^2/9) + (y^2/4) = 1 \text{ واقع در ربع اول}$$

$$\text{(ii) نیم بیضی } (x^2/9) + (y^2/4) = 1, y \geq 0, \text{ و}$$

$$\text{(iii) بیضی کامل } (x^2/9) + (y^2/4) = 1.$$

$$\text{الف) } f(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$\text{ب) } f(x, y) = 2x + 3y$$

$$\text{۰۳۴. } T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x \text{ بر ناحیه مستطیلی شکل } 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3.$$

$$\text{۰۳۵. } T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2 \text{ بر ناحیه مستطیلی شکل } 0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 0.$$

$$\text{۰۳۶. } f(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2 \text{ بر ناحیه مستطیلی شکل } 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{۰۳۷. } f(x, y) = (x^2 - 4x) \cos y \text{ بر ناحیه } 1 \leq x \leq 3, -\pi/4 \leq y \leq \pi/4.$$

$$\text{۰۳۸. } f(x, y) = x - (x - 1/4)(y + 1/2) \text{ بر ناحیه مثلثی شکل بسته محدود به خطوط } x + y = 1, y = 0, x = 0 \text{ واقع در ربع اول.}$$

۰۳۹. ورق تخت گردی به شکل ناحیه $x^2 + y^2 \leq 1$ است. این ورق و مرز آن را که معادله اش $x^2 + y^2 = 1$ است چنان حرارت می دهیم که در هر نقطه (x, y) دما برابر با

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

باشد. گرمترین و سردترین نقاط ورق و دمای هر يك از این نقاط را بیابید.

۰۴۰. نقطه بحرانی

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$$

را در ربع اول باز $(x > 0, y > 0)$ بیابید و نشان دهید که f در این نقطه يك مینیم دارد.

۰۴۱. تمام ماکسیمها و مینیمهای مطلق و موضعی تابع زیر را در ربع اول بسته $x \geq 0, y \geq 0$ بیابید

$$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 2y + 2.$$

۰۴۲. ماکسیمها، مینیمها و نقاط زینی $f(x, y)$ را (در صورت وجود) با فرضهای زیر بیابید

$$\text{الف) } f_x = 2x - 2y \text{ و } f_y = 2y - 4x$$

$$\text{ب) } f_x = 2(x - 1) \text{ و } f_y = 2(y - 2)$$

$$\text{پ) } f_x = 9x^2 - 9 \text{ و } f_y = 2y + 4$$

۰۴۳. رویه

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

را روی ناحیه $R: |x| \leq 1, |y| \leq 1$ رسم کنید. نقاط ماکسیم و مینیم رویه را روی R پیدا کنید، درباره وجود و مقادیر $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ در این نقاط بحث کنید.

۴۸. مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $xy = f(x, y)$ را بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ بیابید.



TOOLKIT PROGRAM

3D Grapher

مماس آن را قرار دهیم. اگر $F(x, y, z)$ را برابر با $z - f(x, y)$ بگیریم، رویه $z = f(x, y)$ در شکل ۹.۱۷ معادله $F(x, y, z) = 0$ را نیز خواهد داشت. بنابراین صفحه مماس بر این رویه در

$$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

عبارت است از صفحه

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

اگر این معادله را بر حسب f بنویسیم داریم

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

یا

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (1)$$

تابع

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (2)$$

واقع در سمت راست معادله (۱) را صورت خطی f در نزدیکی (x_0, y_0) می‌نامند. در جاهایی که صفحه مماس نزدیک رویه قرار داشته باشد، مقادیر L تقریبهای خوبی از مقادیر f هستند.

تقریب

صورت خطی و تقریب خطی متعارف f در (x_0, y_0)
صورت خطی تابع $f(x, y)$ در (x_0, y_0) عبارت است از تابع

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (3)$$

تقریب

$$L(x, y) \approx f(x, y) \quad (4)$$

تقریب خطی متعارف f در نزدیکی (x_0, y_0) است.

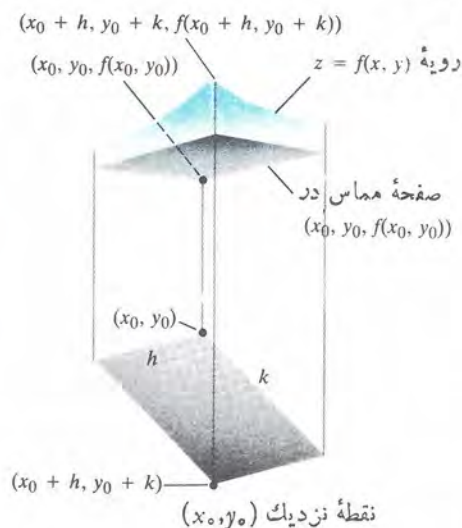
در موارد زیادی می‌توانیم فرمول L را به جای فرمول f به کار ببریم. هنگام استفاده از فرمول L طبق معمول فرض می‌کنیم

۲۰۱۷ تقریب خطی و برآورد نمو

در علوم تجربی و ریاضی غالباً می‌توانیم به جای توابع دو متغیره پیچیده توابع ساده تری را در نظر بگیریم که با استفاده از آنها، بدون اینکه لازم باشد کار زیادی انجام دهیم، دقت مطلوب تأمین می‌شود. در این مورد نحوه عمل شبیه کاری است که در بخش ۴.۲ در مورد توابع یک متغیره انجام دادیم، با این تفاوت که در اینجا تقریبها از صفحه مماس به دست می‌آیند و نه از خط مماس. در این بخش چگونگی تعریف تقریبهای مبتنی بر صفحه مماس و استفاده از آنها را نشان می‌دهیم.

صورت خطی تابع $f(x, y)$

همان طور که از شکل ۹.۱۷ برمی‌آید، صفحه مماس بر رویه $z = f(x, y)$ در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در نزدیکیهای نقطه تماس نزدیک رویه قرار دارد. بنا بر این در نقاط $(x_0 + h, y_0 + k)$ نزدیک (x_0, y_0) ، مقادیر z واقع در صفحه مماس تقریبهای خوبی برای مقادیر z واقع بر رویه هستند. پس، برای تقریب زدن مقادیر f نزدیک (x_0, y_0) می‌توانیم به جای فرمول f ، فرمول صفحه



۹.۱۷ قسمتی از رویه $z = f(x, y)$ و صفحه مماس بر آن در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. در نزدیکیهای نقطه تماس، صفحه و رویه نزدیک به هم قرار دارند.

می‌کنیم. نتیجه عبارت است از

$$L(x, y) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)(x-2) + \left(\frac{1}{4}\right)(y-1) \\ = \frac{3}{4} - \frac{x}{4} + \frac{y}{4}.$$

دقت تقریب خطی متعارف چقدر است؟

برای اینکه ببینیم تقریب خطی متعارف تا چه حد دقیق است، باید مشتقات جزئی مرتبه دوم f را در نظر بگیریم. در نتیجه‌ای که ذیلاً ذکر می‌کنیم، فرض بر این است که f و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در ناحیه مستطیلی

$$R: |x - x_0| \leq h, \quad |y - y_0| \leq k$$

که مرکز (x_0, y_0) است، همه‌جا پیوسته باشند. شکل ۱۵.۱۷ را ببینید. چون ناحیه R بسته و کراندار است و بر f_{xx} ، f_{yy} ، f_{xy} و f_{yx} پیوسته‌اند، قدرمطلق این مشتقات مرتبه دوم بر R ، مقادیر ماکسیمم دارند. اگر بنویسیم

$$B = R \quad \text{ماکسیمم } |f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{xy}| \text{ بر } B = R \quad (7)$$

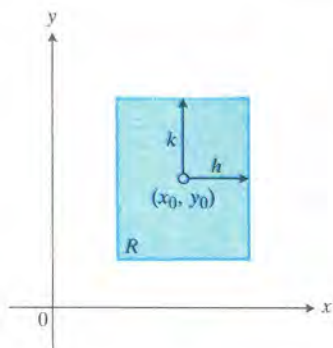
به دلایلی که در بخش ۴.۱۷ بیان خواهد شد، در سراسر R داریم

$$|f(x, y) - L(x, y)| \leq \frac{1}{4} B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \quad (8)$$

تا برای (۸) نشان می‌دهد که کران خطای

$$E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$$

که از تقریب خطی f بر ناحیه مستطیلی R ناشی می‌شود عبارت



۱۵.۱۷ ناحیه مستطیلی شکل

$$R: |x - x_0| \leq b, \quad |y - y_0| \leq k$$

واقع در صفحه xy .

که در همسایگی (x_0, y_0) ، f و مشتقات جزئی مرتبه اول آن پیوسته باشند.

مثال ۱ نشان دهید که در نزدیکی $(0, 0)$ داریم

$$f(x, y) = \frac{1}{1+x-y} \approx 1 - x + y. \quad (5)$$

حل: نشان می‌دهیم که صورت خطی f برابر است با

$$L(x, y) = 1 - x + y.$$

تابع f و مشتقات جزئی آن

$$f_x(x, y) = \frac{-1}{(1+x-y)^2} \\ f_y(x, y) = \frac{1}{(1+x-y)^2} \quad (6)$$

به ازای $|x - y| < 1$ پیوسته‌اند. در $(x_0, y_0) = (0, 0)$ صورت خطی

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \text{عبارت است از}$$

$$L(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ = 1 + (-1)x + (1)y \\ = 1 - x + y.$$

پس همان‌طور که در معادله (۵) آمده است، نزدیک $(0, 0)$ داریم

$$f(x, y) \approx 1 - x + y.$$

مثال ۲ صورت خطی تابع زیر را در نزدیکی نقطه $(2, 1)$ بیابید

$$f(x, y) = \frac{1}{1+x-y}.$$

حل: بنا بر معادله (۲)، صورت خطی f در نقطه $(2, 1)$ عبارت است از

$$L(x, y) = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) \\ + f_y(2, 1)(y - 1).$$

از روابط (۶) برای محاسبه f_x و f_y در نقطه $(2, 1)$ استفاده

است از

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{4} B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \quad (9)$$

وقتی از این نابرابری برای برآورد E استفاده می‌کنیم، معمولاً نمی‌توانیم B را با کمک مقادیر f_{xx} ، f_{yy} ، و f_{xy} به دست آوریم، بلکه باید به جای خود B یک کران بالای مقدار «بدترین حالت» را قرار دهیم. اگر M کران بالای مشترک $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ ، و $|f_{xy}|$ باشد، آنگاه B از M بیشتر نخواهد بود و داریم

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{4} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \quad (10)$$

معمولاً از این نابرابری برای برآورد E استفاده می‌کنیم. وقتی بخواهیم برای یک M مفروض، $|E(x, y)|$ را کوچک سازیم، صرفاً $|x - x_0|$ و $|y - y_0|$ را کوچک می‌گیریم.

خطا در تقریب خطی متعارف $f(x, y)$ در نزدیکی (x_0, y_0)

اگر f و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در سراسر یک ناحیه مستطیلی R به مرکز (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه خطای حاصل از قرار دادن صورت خطی

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (11)$$

به جای $f(x, y)$ بر R ، در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{4} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \quad (12)$$

در این نابرابری، M کران بالایی برای مقادیر $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ ، و $|f_{xy}|$ بر R است.

مثال ۳ صورت خطی $L(x, y)$ تابع زیر را در نزدیکی نقطه $(3, 2)$ بیابید

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + 3$$

و نیز مطلوب است کران بالایی برای خطای تقریب

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

بر مستطیل زیر

$$R: |x - 3| \leq 0.1, |y - 2| \leq 0.1.$$

این کران بالای خطا را بر حسب درصدی از $f(3, 2)$ ، یعنی مقدار f در مرکز مستطیل، بیان کنید.

حل: با توجه به

$$f(3, 2) = 8$$

$$f_x(3, 2) = 2x - y|_{(3, 2)} = 4$$

$$f_y(3, 2) = -x + y|_{(3, 2)} = -1$$

از معادله (۱۱) داریم

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(3, 2) + f_x(3, 2)(x - 3) \\ &\quad + f_y(3, 2)(y - 2) \\ &= 8 + 4(x - 3) - (y - 2) \\ &= 4x - y - 2. \end{aligned}$$

از معادله (۱۲) استفاده می‌کنیم و کران بالایی برای خطای حاصل از تقریب زدن f به وسیله L ، در R ، به دست می‌آوریم

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{4} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

برای یافتن مقدار مناسبی برای M محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$|f_{xx}| = |2| = 2$$

$$|f_{yy}| = |1| = 1$$

$$|f_{xy}| = |-1| = 1.$$

بزرگترین عدد در بین این اعداد ۲ است، و لذا از $M = 2$ استفاده می‌کنیم. به ازای $(x_0, y_0) = (3, 2)$ در سراسر R داریم

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq \frac{1}{4} (2)(|x - 3| + |y - 2|)^2 \\ &= (|x - 3| + |y - 2|)^2 \\ &\text{و بالاخره، از آنجا که روی } R \text{ داریم} \end{aligned}$$

$$|y - 2| \leq 0.1 \quad \text{و} \quad |x - 3| \leq 0.1$$

نتیجه می‌گیریم که

$$|E(x, y)| \leq (0.1 + 0.1)^2 = (0.2)^2 = 0.04.$$

خطا بر حسب درصدی از $f(3, 2) = 8$ بزرگتر از

$$\frac{0.04}{8} \times 100 = 0.5\%$$

کار با فرمول Δf غالباً به همان اندازه سخت است که کار با فرمول f . اما، کار با فرمول ΔL همیشه آسان است زیرا خطی است. تغییر L برابر است با حاصلضرب یک مقدار ثابت در h به علاوه حاصلضرب یک مقدار ثابت در k .

تغییر

$$\Delta L = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

غالباً با نماد گویاتر زیر نمایش داده می شود

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \quad (14)$$

کسه در آن df تغییر صورت خطی f ناشی از تغییرات dx و dy در x و y را نمایش می دهد. dx و dy را دیفرانسیل های x و y و df را دیفرانسیل متناظر f می نامند.

از دیدگاه صرفاً ریاضی، معادله (۱۴) چیزی نیست جز معادله ای که یک متغیر وابسته df را به صورت تابعی از چهار متغیر مستقل x_0, y_0, dx, dy تعریف می کند. اما، هنگام استفاده از این معادله، معمولاً می خواهیم دامنه های متغیرهای مستقل چنان محدود باشند که مطمئن شویم نقطه $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ درون دامنه f قرار می گیرد. هرگاه نقطه جدید آن قدر دور باشد که در دامنه تابع قرار نگیرد، محاسبه تغییر صورت خطی سودی نخواهد داشت.

مثال ۴ فرض کنید شعاع استوانه مستدیر قائمی در آغاز ۱ واحد و ارتفاع آن ۵ واحد باشد. حساسیت حجم استوانه نسبت به تغییرات کوچک در ارتفاع و شعاع آن چقدر است؟

حل: حجم استوانه به صورت تابعی از شعاع r و ارتفاع h برابر است با

$$V = \pi r^2 h.$$

تغییر حجم ناشی از تغییرات کوچک dr و dh در r و h تقریباً برابر است با

$$\begin{aligned} dV &= V_r(1, 5)dr + V_h(1, 5)dh \\ &= (2\pi rh)_{(1, 5)}dr + (\pi r^2)_{(1, 5)}dh \\ &= 10\pi dr + \pi dh. \end{aligned} \quad (15)$$

پس، یک واحد تغییر در r ، V را حدود 10π واحد تغییر می دهد. یک واحد تغییر در h ، V را حدود π واحد تغییر می دهد. حجم استوانه ای که شعاع آن یک واحد و ارتفاع آن ۵ واحد باشد، نسبت به تغییرات کوچک در شعاع تقریباً ۱۰ برابر حساستر است تا تغییرات کوچک در ارتفاع.

نخواهد بود. مدام که (x, y) در R بماند، خطای تقریب $f(x, y) \approx L(x, y)$ از ۵۰۴، که ۱/۲٪ مقدار f در مرکز R است، بیشتر نخواهد بود.

پیش بینی تغییر دیفرانسیل

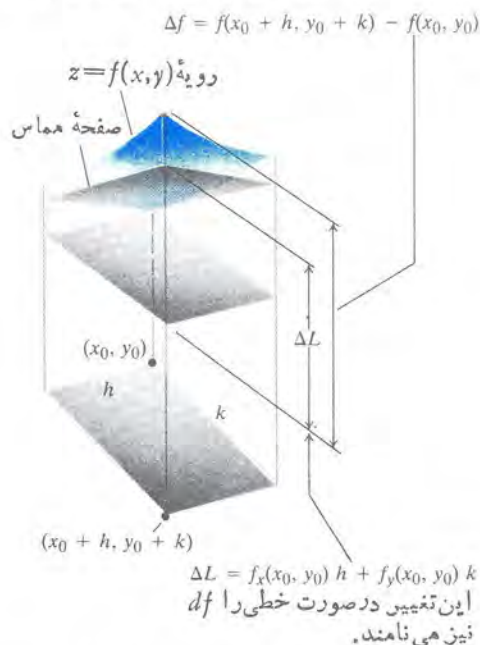
فرض کنید مقدار یک تابع مشتق پذیر $f(x, y)$ را در نقطه خاصی چون (x_0, y_0) می دانیم و می خواهیم پیش بینی کنیم که اگر به نقطه مجاور $(x_0 + h, y_0 + k)$ برویم این مقدار چقدر تغییر می کند. اگر h و k کوچک باشند، f و صورت خطی آن در (x_0, y_0) تقریباً به یک اندازه تغییر می کنند. چون محاسبه مقادیر L همواره آسان است، محاسبه تغییر در L راهی عملی برای برآورد تغییر متناظر در f است.

با استفاده از نمادهای شکل ۱۱.۱۷، تغییر f چنین به دست می آید

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

تغییر متناظر L برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(x_0 + h, y_0 + k) - L(x_0, y_0) \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)((x_0 + h) - x_0) \\ &\quad + f_y(x_0, y_0)((y_0 + k) - y_0) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k. \end{aligned} \quad (13)$$



۱۱.۱۷ اگر h و k کوچک باشند، مقدار تغییر صورت خطی f تقریباً برابر است با مقدار تغییر f .

حل: برای برآورد تغییر مطلق در V ،

$$dV = V_r(r_0, h_0) dr + V_h(r_0, h_0) dh \quad (۱۷)$$

را محاسبه می‌کنیم و مقدار زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh \\ &= 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) \\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi. \end{aligned}$$

این عدد را بر $V(r_0, h_0)$ تقسیم و تغییر نسبی را برآورد می‌کنیم

$$\frac{dV}{V(r_0, h_0)} = \frac{0.2\pi}{\pi r_0^2 h_0} = \frac{0.2\pi}{\pi(1)^2(5)} = 0.04.$$

مقدار حاصل را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم تا تغییر درصدی برآورد شود

$$\frac{dV}{V(r_0, h_0)} \times 100 = 0.04 \times 100 = 4\%.$$

مثال ۶ قرار است حجم $V = \pi r^2 h$ یک استوانه مستدیرقائم را با اندازه‌گیری مقادیر r و h محاسبه کنیم. فرض کنید r را با خطایی که از ۲٪ و h را با خطایی که از ۵٪ بیشتر نیست اندازه گرفته باشیم. خطای درصدی حاصل از محاسبه V را برآورد کنید.

حل: بنا به فرض

$$\left| \frac{dh}{h} \times 100 \right| \leq 5 \quad \text{و} \quad \left| \frac{dr}{r} \times 100 \right| \leq 2$$

چون

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r h dr + \pi r^2 dh}{\pi r^2 h} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{dV}{V} \times 100 \right| &= \left| 2 \frac{dr}{r} \times 100 + \frac{dh}{h} \times 100 \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{dr}{r} \times 100 \right| + \left| \frac{dh}{h} \times 100 \right| \\ &\leq 2(2) + 5 = 9. \end{aligned}$$

برآورد ما این است که خطا در محاسبه حجم حداکثر ۹٪ است.

در مقابل، اگر جای مقادیر h و r را عوض کنیم و داشته باشیم $r=5$ و $h=1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} dV &= (2\pi r h)_{(5,1)} dr + (\pi r^2)_{(5,1)} dh \\ &= 10\pi dr + 25\pi dh. \end{aligned}$$

در این صورت حجم استوانه نسبت به تغییرات کوچک در h حساستر خواهد بود تا تغییرات کوچک در r . شکل ۱۲.۱۷ را ببینید. از این مثال این قاعده کلی را می‌توان آموخت که توابع نسبت به تغییرات کوچک متغیرهایی حساسترند که بزرگترین مشتقات جزئی را به دست می‌دهند.



(الف)

(ب)

۱۲.۱۷ حجم استوانه (الف) به یک تغییر کوچک در r حساستر است تا به همان اندازه تغییر در h . حجم استوانه (ب) نسبت به تغییرات کوچک در h حساستر است تا به تغییرات کوچک در r .

تغییر مطلق، نسبی، و درصدی

وقتی از (x_0, y_0) به یک نقطه مجاور برویم تغییر متناظر در مقدار تابعی چون $f(x, y)$ را می‌توان با سه روش مختلف توصیف کرد.

تقریبی	واقعی	
df	Δf	تغییر مطلق:
$\frac{df}{f(x_0, y_0)}$	$\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)}$	(۱۶) تغییر نسبی:
$\frac{df}{f(x_0, y_0)} \times 100$	$\frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)} \times 100$	تغییر درصدی:

مثال ۵ فرض کنید که متغیرهای r و h از مقادیر اولیه $(r_0, h_0) = (1, 5)$ به اندازه $dr = 0.03$ و $dh = -0.1$ تغییر کنند. مطلوب است برآورد تغییرات مطلق، نسبی، و درصدی حاصل در مقدار تابع $V = \pi r^2 h$.

بنویسیم $dh = dr$ و مقدار زیر را به دست آوریم

$$dV = 120\pi dr + 25\pi dr = 145\pi dr.$$

حال می‌پرسیم: dr را چقدر کوچک بگیریم تا مطمئن باشیم که $|dV|$ از ۰٫۱ بیشتر نیست؟ برای پاسخگویی، محاسبه را با نابرابری

$$|dV| \leq 0.1$$

آغاز، و dV را بر حسب dr بیان می‌کنیم

$$|145\pi dr| \leq 0.1.$$

سپس کران بالایی متناظری برای dr به دست می‌آوریم

$$|dr| \leq \frac{0.1}{145\pi} \approx 2.1 \times 10^{-4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{طوری کرد می‌کنیم که} \\ \text{مطمئن شویم } dr \text{ تصادفاً} \\ \text{خیلی بزرگ نمی‌شود.} \end{array} \right)$$

بنابراین، با توجه به $dh = dr$ ، مربع مورد نظر با نابرابریهای زیر مشخص می‌شود

$$|r - 5| \leq 2.1 \times 10^{-4}, \quad |h - 12| \leq 2.1 \times 10^{-4}.$$

هنگامی که (r, h) در این مربع باشد، می‌توانیم انتظار داشته باشیم که $|dV|$ و در نتیجه $|\Delta V|$ بیشتر از ۰٫۱ نباشد. ■

نتایج مربوط به توابع با بیش از دو متغیر

در مورد توابعی با هر تعداد متناهی متغیر، احکام مشابهی برقرار است که ما آنها را بدون اثبات ذکر می‌کنیم.

فرمولهای صورت خطی و برآورد نمو تابع $f(x, y, z)$

۱. صورت خطی: صورت خطی f در نقطه (x_0, y_0, z_0) ، تابع زیر است

$$\begin{aligned} L(x, y, z) = & f(x_0, y_0, z_0) \\ & + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ & + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ & + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0). \end{aligned} \quad (18)$$

وقتی (x, y, z) به (x_0, y_0, z_0) نزدیک باشد، مقدار L تقریب خوبی از مقدار f به دست می‌دهد.

۲. کران خطی: فرض کنید که $f(x, y, z)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در سراسر ناحیه مکعب مستطیلی R به مرکز (x_0, y_0, z_0) که با نابرابریهای زیر تعریف می‌شود، پیوسته

r و h را با چه دقتی باید اندازه بگیریم تا این توفیق را داشته باشیم که در محاسبه $V = \pi r^2 h$ خطا مثلاً از ۲٪ کمتر باشد؟ در مورد توابع با بیش از یک متغیر پاسخ دادن به چنین سؤالاتی دشوار است زیرا معمولاً جواب درست منحصر به فرد نیست. چون

$$\frac{dV}{V} = 2 \frac{dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

می‌بینیم که ترکیب dr/r و dh/h مقدار dV/V را کنترل می‌کند. اگر بتوانیم h را با دقت زیادی اندازه بگیریم، حتی اگر در مورد اندازه‌گیری r سهل‌انگاری کنیم ممکن است باز هم به نتیجه درست برسیم. از طرف دیگر، ممکن است در اندازه‌گیری h چنان dh بزرگی به دست آید که حتی اگر dr صفر باشد، dV/V حاصل، برآورد خوبی از $\Delta V/V$ نباشد و نتواند مفید واقع شود.

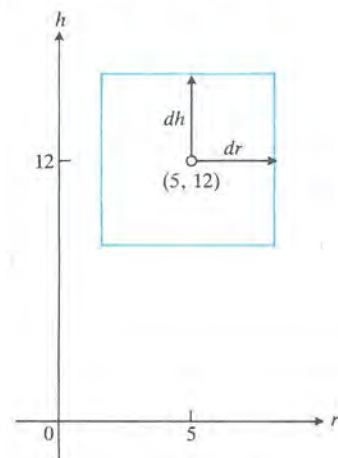
در این گونه موارد به دنبال مربع «مناسبی» به مرکز مقادیر اندازه‌گیری شده (r_0, h_0) می‌گردیم که در آن V بیش از مقدار مجاز از $V_0 = \pi r_0^2 h_0$ دور نشود. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۷ مربعی مناسب به مرکز نقطه $(r_0, h_0) = (5, 12)$ بیابید که در آن، تغییر مقدار $V = \pi r^2 h$ بیش از ۰٫۱ $\pm$ نباشد.

حل: تغییر مقدار ΔV را با دیفرانسیل آن تقریب می‌زنیم

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi r_0 h_0 dr + \pi r_0^2 dh \\ &= 2\pi(5)(12)dr + \pi(5)^2 dh \\ &= 120\pi dr + 25\pi dh. \end{aligned}$$

چون ناحیه مورد توجه ما یک مربع است (شکل ۱۳.۱۷)، می‌توانیم



۱۳.۱۷ مربعی کوچک به مرکز نقطه $(5, 12)$ در صفحه rh .

باشند

$$|x-x_0| \leq h, \quad |y-y_0| \leq k, \quad |z-z_0| \leq m.$$

همچنین فرض کنید که $|f_{xy}|, |f_{yz}|, |f_{zx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xx}|$ در سراسر R بیش از عددی چون M نباشند. آنگاه در سراسر R کران اندازه خطا

$$E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$$

در تقریب زدن f با L از نابربری زیر به دست می آید

$$|E| \leq \frac{1}{6} M (|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|)^2. \quad (۱۹)$$

۳. برآورد نمو: فرض کنید که f و مشتقات جزئی مرتبه اول آن پیوسته باشند و x و y و z به اندازه مقادیر کوچک dx, dy, dz تغییر کنند. آنگاه، دیفرانسیل df که با معادله زیر تعریف می شود تقریب خوبی از تغییر حاصل در f است

$$df = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz.$$

مثال ۸ مطلوب است $L(x, y, z)$ ، صورت خطی تابع زیر در نقطه $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$

$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3 \sin z$$

کران بالایی برای خطای حاصل از تقریب زدن

$$f(x, y, z) \approx L(x, y, z)$$

در مکعب مستطیل زیر بیابید

$$R: |x-2| \leq 0.01, \quad |y-1| \leq 0.02, \quad |z| \leq 0.01.$$

حل: صورت خطی را از معادله (۱۸) به دست می آوریم. با ضوابط

$$f(2, 1, 0) = (2)^2 - (2)(1) + 3 \sin(0) = 2$$

$$f_x(2, 1, 0) = (2x - y)_{(2, 1, 0)} = 3$$

$$f_y(2, 1, 0) = (-x)_{(2, 1, 0)} = -2$$

$$f_z(2, 1, 0) = (3 \cos z)_{(2, 1, 0)} = 3.$$

از معادله (۱۸) نتیجه می شود

$$L(x, y, z) = 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0)$$

$$= 3x - 2y + 3z - 2.$$

کران بالای خطا از معادله (۱۹) به دست می آید. چون

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{zz} = -3 \sin z$$

$$f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yz} = 0$$

با اطمینان مقدار زیر را به عنوان کران بالایی برای قدر مطلق مقادیر مشتقات مرتبه دوم بر R انتخاب می کنیم

$$M = \max(2, |-3 \sin z|) = 3$$

پس

$$|E| \leq \frac{1}{6} (3)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.00024.$$

در تقریب زیر، خطا بر R بیش از ۰.۰۰۰۲۴ نخواهد بود

$$\blacksquare \quad x^2 - xy + 3 \sin z \approx 3x - 2y + 3z - 2.$$

مثال ۹ خیز تیر بساد دارد. اگر دوانتهای تیر مکعب مستطیل شکلی مطابق شکل ۱۴.۱۷ بر روی دوتکیه گاه باشد و باری یکنواخت بر تیر اعمال شود، تیر شکم پیدا می کند. مقدار شکم S که خیز تیر نام دارد از فرمول

$$S = C \frac{px^4}{wh^3}$$

به دست می آید که در آن

p بار (بر حسب نیوتن در هر متر از طول تیر)

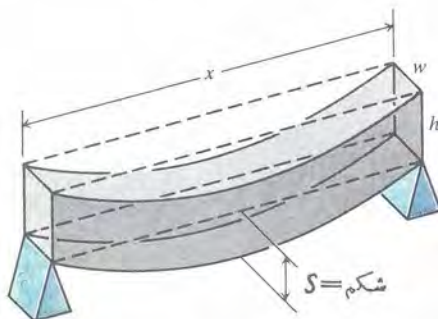
x فاصله دوتکیه گاه (m)

w عرض تیر (m)

h ارتفاع تیر (m)

C ثابتی که به واحدهای اندازه گیری و

نیز به جنس تیر بستگی دارد.



۱۴.۱۷ تیری که دوانتهایش بر دوتکیه گاه

قرار دارند، قبل و بعد از بارگذاری.

$$۲. f(x, y) = x^3 y^4 \text{ در الف } (1, 1), \text{ ب } (0, 0)$$

$$۳. f(x, y) = e^x \cos y \text{ در الف } (0, 0), \text{ ب } (0, \pi/2)$$

$$۴. f(x, y) = (x + y + 2)^2 \text{ در الف } (0, 0), \text{ ب } (1, 2)$$

$$۵. f(x, y) = 3x - 4y + 5 \text{ در الف } (0, 0), \text{ ب } (1, 1)$$

$$۶. f(x, y) = e^{2y-x} \text{ در الف } (0, 0), \text{ ب } (1, 2)$$

در مسائل ۷-۱۲، صورت خطی $L(x, y)$ تابع $f(x, y)$ را در P_0 بیابید. آنگاه با استفاده از معادله (۱۲) کران بالایی برای اندازه خطای E ناشی از تقریب زدن $f(x, y) \approx L(x, y)$ بر مستطیل R بیابید.

$$۷. f(x, y) = x^2 - 3xy + 5, \quad P_0(2, 1)$$

$$R: |x-2| \leq 0.1, \quad |y-1| \leq 0.1$$

۸.

$$f(x, y) = (1/2)x^2 + xy + (1/4)y^2 + 3x - 3y + 4$$

$$P_0(2, 2)$$

$$R: |x-2| \leq 0.1, \quad |y-2| \leq 0.1$$

$$۹. f(x, y) = 1 + y + x \cos y, \quad P_0(0, 0)$$

$$R: |x| \leq 0.2, \quad |y| \leq 0.2$$

(در برآورد E از $|\sin y| \leq 1$ و $|\cos y| \leq 1$ استفاده کنید.)

$$۱۰. f(x, y) = \ln x + \ln y, \quad P_0(1, 1)$$

$$R: |x-1| \leq 0.2, \quad |y-1| \leq 0.2$$

$$۱۱. f(x, y) = e^x \cos y, \quad P_0(0, 0)$$

$$R: |x| \leq 0.1, \quad |y| \leq 0.1$$

(در برآورد کردن E از $e^x \leq 1.1$ و $|\cos y| \leq 1$ استفاده کنید.)

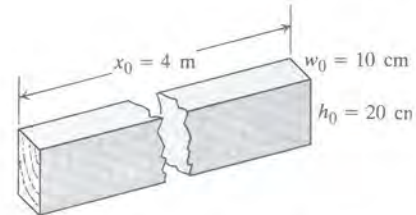
$$۱۲. f(x, y) = xy^2 + y \cos(x-1), \quad P_0(1, 2)$$

$$R: |x-1| \leq 0.1, \quad |y-2| \leq 0.1$$

۱۳. در مورد تابع $V = \pi r^2 h$ ، چه رابطه‌ای باید بین r_0 و h_0 وجود داشته باشد تا حساسیت تابع نسبت به تغییرات کوچک در r و h در نقطه‌ای چون (r_0, h_0) یکسان باشد؟ مثال ۴ را ببینید.

۱۴. می‌خواهیم مساحت مستطیل دراز و باریکی را از روی اندازه‌های طول و عرض حساب کنیم. در مورد کدام یک از این دو اندازه‌گیری باید بیشتر دقت کنیم؟ چرا؟

اگر تیری ۴ متر طول، ۱۰ سانتیمتر عرض، و ۲۰ سانتیمتر ارتفاع داشته باشد و بر آن باری به مقدار 100 N/m (شکل ۱۵.۱۷) اعمال شود، dS چقدر است؟ از رابطه dS حاصل چه نتیجه‌ای درباره تیر می‌توان گرفت؟



۱۵.۱۷ ابعاد تیر مثال ۹.

حل: چون S تابعی از چهار متغیر مستقل x, p, w, h است، دیفرانسیل آن، dS ، از معادله زیر به دست می‌آید

$$dS = S_p dp + S_x dx + S_w dw + S_h dh.$$

گر مقادیر خاصی چون p_0, x_0, w_0, h_0 را در این فرمول قرار دهیم و نتیجه را ساده کنیم داریم

$$dS = S_0 \left(\frac{dp}{p_0} + \frac{x}{x_0} dx - \frac{dw}{w_0} - \frac{h}{h_0} dh \right). \quad (20)$$

در اینجا $S_0 = S(p_0, x_0, w_0, h_0) = C p_0 x_0^2 / w_0 h_0^2$. اگر $w_0 = 0.1 \text{ m}$ ، $x_0 = 4 \text{ m}$ ، $p_0 = 100 \text{ N/m}$ و $h_0 = 0.2 \text{ m}$ ، آنگاه

$$dS = S_0 \left(\frac{dp}{100} + dx - 10 dw - 15 dh \right). \quad (21)$$

از معادله (۲۱) این نتیجه به دست می‌آید: چون ضرایب dp و dx مثبت‌اند، افزایش مقادیر p و x ، شکم را زیاد می‌کند. اما ضرایب dw و dh منفی هستند، لذا افزایش w و h شکم را کم می‌کند (تیر را مقاوم‌تر می‌کند). شکم نسبت به تغییرات بارچندان حساس نیست زیرا ضرایب dp ، $1/100$ است. اندازه ضریب dh بزرگتر از اندازه ضریب dw است. اگر بر ارتفاع تیر یک سانتیمتر بیفزاییم، کاهش شکم بیشتر خواهد بود تا اینکه بر عرض آن یک سانتیمتر اضافه کنیم.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۶، صورت خطی $L(x, y)$ توابع مفروض را در نقاط داده شده بیابید.

$$۱. f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \text{ در الف } (0, 0), \text{ ب } (1, 1)$$

۱۵. الف) آیا تابع $f(x, y) = x^2(y+1)$ در اطراف نقطه $(1, 0)$ نسبت به تغییرات x حساستر است یا نسبت به تغییرات y ؟

ب) چه نسبتی از dx به dy ، df را در $(1, 0)$ برابر با صفر می‌کند؟

۱۶. می‌خواهیم T را از فرمول $T = x \cosh y$ محاسبه کنیم. می‌دانیم $x = 2$ و $y = \ln 2$ و ماکسیمم خطاهای ممکن، $|dx| = 0.01$ و $|dy| = 0.02$ اند. ماکسیمم خطای ممکن در مقدار T محاسبه شده از این فرمول را برآورد کنید.

۱۷. اگر r و h با خطای ۱٪ اندازه‌گیری شده باشند، $V = \pi r^2 h$ را با چه دقتی می‌توان محاسبه کرد؟

۱۸. اگر با خطای کمتر از یک میلی‌متر داشته باشیم $r = 5 \text{ cm}$ و $h = 12 \text{ cm}$ ، ماکسیمم درصد خطا در محاسبه $V = \pi r^2 h$ چقدر است؟

۱۹. برای برآورد کردن حجم استوانه‌ای به شعاع حدوداً 2 m و ارتفاع حدوداً 3 m با چه دقتی باید شعاع و ارتفاع را اندازه بگیریم تا خطای حاصل از برآورد حجم از 1 m^3 بیشتر نشود؟ فرض کنید که خطای ممکن dr در اندازه‌گیری r با خطای ممکن dh در اندازه‌گیری h برابر باشد.

۲۰. مربع مناسبی با مرکز $(1, 1)$ بیابید که اگر مقدار $f(x, y) = x^3 y^4$ را بر آن بیابیم خطای بیش از $0.01 \pm$ نباشد.

۲۱. اگر دو مقاومت x اهمی و y اهمی را به‌طور موازی ببندیم، مقاومت حاصل، R ، از فرمول $1/R = 1/x + 1/y$ محاسبه می‌شود. اگر x از ۲۰ به ۲۰.۱ اهم افزایش یابد، و y از ۲۵ به ۲۴.۹ اهم کاهش یابد، R تقریباً چند درصد تغییر می‌کند؟

۲۲. الف) اگر $x = 3 \pm 0.01$ و $y = 4 \pm 0.01$ ، مختصات قطبی r و θ نقطه (x, y) را تقریباً با چه دقتی می‌توان از فرمولهای $r^2 = x^2 + y^2$ و $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ محاسبه کرد؟ برآورد خود را به‌صورت درصدی از مقادیر r و θ در نقطه $(x_0, y_0) = (3, 4)$ بیان کنید.

ب) در نقطه $(x_0, y_0) = (3, 4)$ ، آیا r و θ نسبت به تغییرات x حساسترند یا نسبت به تغییرات y ؟ شکلی رسم کنید که در آن x ، y ، r و θ نشان داده شوند، و نتیجه‌گیری خود را از راه تعبیر هندسی تأیید کنید.

در مسائل ۲۳-۲۸، صورت خطی $L(x, y, z)$ تابع مفروض را در نقاط داده شده بیابید.

۲۳. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

الف) $(1, 1, 1)$

ب) $(1, 0, 0)$

پ) $(0, 0, 0)$

۲۴. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

الف) $(1, 1, 1)$

ب) $(0, 1, 0)$

پ) $(1, 0, 0)$

۲۵. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

الف) $(1, 0, 0)$

ب) $(1, 1, 0)$

پ) $(1, 2, 2)$

۲۶. $f(x, y, z) = (\sin xy)/z$

الف) $(\pi/2, 1, 1)$

ب) $(2, 0, 1)$

۲۷. $f(x, y, z) = e^x + \cos(y+z)$

الف) $(0, 0, 0)$

ب) $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$

پ) $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

۲۸. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xyz)$

الف) $(1, 0, 0)$

ب) $(1, 1, 0)$

پ) $(1, 1, 1)$

در مسائل ۲۹-۳۲، صورت خطی $L(x, y, z)$ تابع $f(x, y, z)$ را در P_0 بیابید. سپس با استفاده از معادله (۱۹) کران بالایی برای اندازه خطای E ناشی از تقریب‌زدن

$f(x, y, z) \approx L(x, y, z)$

بر مکتب مستطیل R بیابید.

۲۹. $f(x, y, z) = xz - 3yz + 2$ ، $P_0(1, 1, 2)$

$R: |x-1| \leq 0.01, |y-1| \leq 0.01$

$|z-2| \leq 0.02$

۳۰. $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + (1/4)z^2$

$P_0(1, 1, 2)$

$R: |x-1| \leq 0.01, |y-1| \leq 0.01$

$|z-2| \leq 0.08$

۳۸. فرض کنید که $u = xe^y + y \sin z$ و x, y, z را می‌توان به ترتیب با حداکثر خطای ممکن ± 0.02 ، ± 0.06 ، و $\pm \pi/180$ اندازه گرفت. حداکثر خطای ممکن در محاسبه u را بر اساس مقادیر $x = 2$ ، $y = \ln 3$ ، $z = \pi/2$ برآورد کنید.

۳۹. فرمول ویلسون درباره مقدار کالا. در علم اقتصاد، فرمول ویلسون درباره مقدار کالا حاکی است که با صرفه‌ترین مقدار کالا (Q) که یک فروشگاه می‌تواند سفارش دهد، از فرمول $Q = \sqrt{2KM/h}$ به دست می‌آید که در آن K هزینه سفارش، M تعداد فروش در هفته، و h هزینه نگهداری هر واحد کالا (هزینه محل، آب، برق، نگهداری، و غیره) در هفته است. Q در نزدیکی نقطه $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ نسبت به کدام متغیر از متغیرهای K, M, h حساستر است؟

۴۰. فرض کنید $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$. اگر تمام مشتقات جزئی لازم وجود داشته باشند، فرمولهای دیفرانسیل زیر را اثبات کنید:

الف) $d(cu) = c du$ (ثابت دلخواه)

ب) $d(u^n) = nu^{n-1} du$ (n عدد دلخواه)

پ) $d(uv) = u dv + v du$

ت) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

۳.۱۷ ضرایب لاگرانژ

همان گونه که در بخش ۱.۱۷ دیدیم، گاه مجبوریم مقادیر ماکسیمم و مینیمم توابعی را بیابیم که دامنه‌هایشان درون زیر مجموعه خاصی از صفحه-نظیر یک قرص یا یک ناحیه مثلثی-قرار دارند. اما چنانکه از شکل ۱۷.۱۷ برمی‌آید تسامع ممکن است قیدهایی دیگری هم داشته باشد.

در این بخش، به بحث درباره روش نیرومندی برای یافتن ماکسیممها و مینیممهای توابع مقید می‌پردازیم: روش ضرایب لاگرانژ. لاگرانژ در ۱۷۵۵ این روش را برای حل مسائل پیچیده ماکسیمم-مینیمم در هندسه ابداع کرد، و از آن زمان این روش در علم اقتصاد، در مهندسی (مثلاً هنگام طراحی راکتهای چند مرحله‌ای) و در خود ریاضیات مورد توجه بوده است.

ابتدا دو مثال می‌آوریم، سپس روش کلی را شرح می‌دهیم، و در پایان مثالهای بیشتری ارائه می‌دهیم.

۳۱. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$, $P_0(1, 1, 0)$
 $R: |x-1| \leq 0.01, |y-1| \leq 0.01, |z| \leq 0.01$

۳۲. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \sin(y+z)$
 $P_0(0, 0, \pi/4)$

$R: |x| \leq 0.01, |y| \leq 0.01, |z - \pi/4| \leq 0.01$

۳۳. تیر مسد کور در مثال ۹ را برمی‌گردانیم به قسمی که $w = 0.02 \text{ m}$ و $h = 0.01 \text{ m}$.

الف) مقدار ds در این حالت چقدر است؟

ب) در وضعیت جدید، حساسیت تیر را نسبت به تغییری کوچک در ارتفاع آن با حساسیتش نسبت به همان اندازه تغییر در عرض تیر مقایسه کنید.

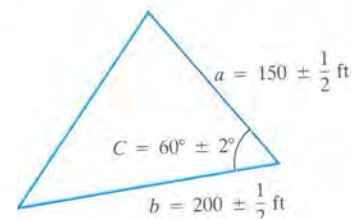
۳۴. اگر $|a|$ خیلی بزرگتر از $|b|$ ، $|c|$ و $|d|$ باشد، تعیین کنید مقدار دترمینان زیر نسبت به کدام درایه از همه حساستر است؟

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

۳۵. مطلوب است برآورد تأثیر خطاهای همزمان دودرصد در a ، b ، و c بر محاسبه حاصلضرب abc .

۳۶. می‌خواهیم جعبه چوبی سربازی از تخته‌ای به ضخامت $1/2 \text{ in}$ بسازیم. از داخل، طول جعبه 5 ft ، عرض 3 ft و ارتفاع آن 2 ft است. مقدار چوب لازم را برآورد کنید.

۳۷. مساحت مثلث، $(1/2)ab \sin C$ است که در آن a و b اندازه‌های دو ضلع مثلث و C اندازه زاویه بین آنهاست. در مساحت یک زمین مثلثی شکل دریافته‌ایم که a ، b ، و C به ترتیب عبارت‌اند از 150 ft ، 200 ft ، و $60^\circ \pm 2^\circ$. اگر مقادیر a و b به اندازه نیم فوت، و اندازه C به اندازه 2° کم یا زیاد باشد، خطای مساحت محاسبه‌شده تقریباً چقدر است؟ شکل ۱۶.۱۷ را ببینید.



۱۶.۱۷ با اندازه‌گیریهای نشان داده شده،

مساحت مثلث را با چه دقتی می‌توان محاسبه

کرد؟ مسأله ۳۷ را ببینید.

چون دامنه h تمام صفحه xy است، آزمون مشتق اول از بخش ۱۰۱۷ حاکی است مییممهایی که h ممکن است داشته باشد در نقاطی به دست می آیند که

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5) = 0$$

$$h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0.$$

لذا داریم

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10$$

و جواب عبارت است از

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}.$$

با استفاده از استدلال هندسی یا آزمون مشتق دوم می توان نشان داد که این مقادیر h را مییمم می کنند. مختص z نقطه متناظر بر صفحه $z = 2x + y - 5$ عبارت است از

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}.$$

بنابراین نقطه مطلوب نقطه زیر است

$$P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right) \quad \text{نزدیکترین نقطه:}$$

حل مسائل ماکسیمم یا مییمم مقید از راه جانشانی، که می توانیم آن را روش مثال ۱ بنامیم، همیشه بدون گرفتاری نیست. مثال ۲ این مطلب را نشان می دهد و این یکی از دلایلی است که در این بخش به ارائه روش جدیدی می پردازیم که در آن مجبور نیستیم از قبل تصمیم بگیریم از متغیرهای مقید کدام را مستقل فرض کنیم.

مثال ۲ مطلوب است نقاطی از رویه زیر که نزدیکترین نقاط به مبدأ باشند

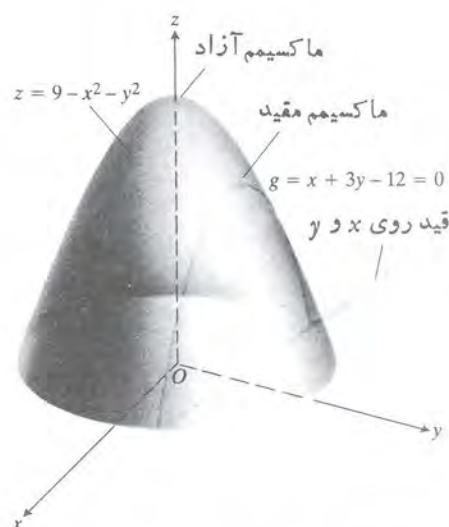
$$x^2 - z^2 - 1 = 0.$$

راه حل ۱: رویه را در شکل ۱۸.۱۷ نشان داده ایم. در جستجوی نقاطی از رویه هستیم که نزدیکترین نقاط به مبدأ باشند. اینها نقاطی هستند که مختصاتشان مقدار تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{مربع فاصله})$$

را با قید $x^2 - z^2 - 1 = 0$ مییمم می کنند. اگر x و y را در معادله مقیدکننده به عنوان متغیرهای مستقل تلقی کنیم، آنگاه

$$z^2 = x^2 - 1$$



$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \quad 17.17 \\ g(x, y) = x + 3y - 12 = 0$$

ماکسیممها و مییممهای مقید

مثال ۱ بر صفحه

$$2x + y - z - 5 = 0$$

نقطه ای چون $P(x, y, z)$ بیابید که نزدیکترین نقطه به مبدأ باشد.

حل: این مسأله از ما می خواهد مقدار مییمم تابع

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

را با این شرط بیابیم که

$$2x + y - z - 5 = 0.$$

چون مقدار مییمم $|\vec{OP}|$ در جایی به دست می آید که تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

یک مقدار مییمم داشته باشد، این مسأله را با محاسبه مقدار مییمم $f(x, y, z)$ تحت شرط $2x + y - z - 5 = 0$ حل می کنیم. اگر در این معادله x و y را متغیرهای مستقل فرض کنیم و بنویسیم

$$z = 2x + y - 5$$

مسأله تبدیل می شود به یافتن نقاطی چون (x, y) که در آنها تابع زیر مقدار یا مقادیر مییمم داشته باشد

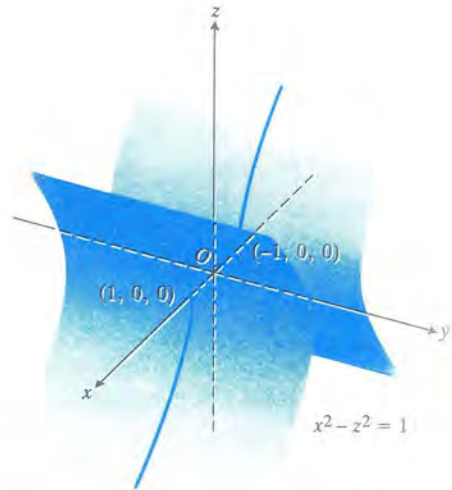
$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) \\ = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2.$$

ضرایب لاگرانژ

حساب وردشها که یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) آن را ابداع کرد به مسائلی از این دست می‌پردازد: مسیری چون $y = f(x)$ از نقطه $P_1(x_1, y_1)$ تا نقطه $P_2(x_2, y_2)$ بیابید که بر آن، مقدار انتگرال

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y) dx$$

مینیمم باشد. از جمله این مسائل، این است که مسیری از P_1 تا P_2 بیابیم که زمان حرکت جسمی که در اثر نیروی گرانش از یک نقطه به نقطه دیگر می‌گذرد، بر این مسیر مینیمم باشد (بخش ۹.۸ را ببینید). مسأله دیگر، یافتن مسیری از P_1 تا P_2 است که اگر حول محور x دوران کند رویه‌ای با مینیمم مساحت ایجاد شود. (این مسیر، یک خم زنجیری نظیر خم مذکور در بخش ۳.۹ است.)
نبوتن، لایب‌نیتس و اوایلر همه روی مسائل وردشی به‌عنوان بخشی از حساب دیفرانسیل و انتگرال کار کرده‌اند، اما کارهای ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) در این زمینه که از حدود سال ۱۷۶۵ آغاز شد، حساب وردشها را به صورت شاخه مستقلی از ریاضیات درآورد. اوایلر کار لاگرانژ در این رشته جدید را از کار خودش برتر می‌دانست و لذا انتشار اثر خود را به تأخیر انداخت تا امتیاز کامل به لاگرانژ تعلق گیرد. لاگرانژ حین کار در زمینه حساب وردشها، به شیوه زیبایی دست یافت که امروزه آن را به‌عنوان روش ضرایب لاگرانژ می‌شناسیم.



۱۸.۱۷ استوانه هذلولوی $x^2 - z^2 - 1 = 0$ مذکور در مثال ۲.

و مقادیر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ بر این رویه از تابع زیر به دست می‌آیند

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

برای یافتن نقاطی از رویه که مختصاتشان f را مینیمم می‌کنند، بدنبال نقاطی از صفحه xy می‌گردیم که مختصاتشان h را مینیمم کنند. تنها مقدار اکسترمم h در جایی به دست می‌آید که

$$h_y = 2y = 0 \quad \text{و} \quad h_x = 4x = 0$$

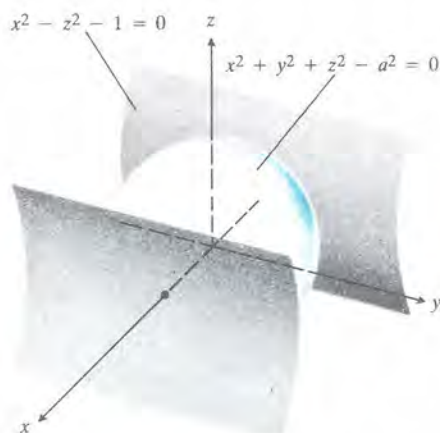
یعنی در نقطه $(0, 0)$ ، اما به در دسر افتاده‌ایم—رویه هیچ نقطه‌ای ندارد که هم x و هم y آن صفر باشند. چه اشتباهی کرده‌ایم؟
ما چرا از این قرار است که آزمون مشتق اول (چنانکه باید) نقطه‌ای از دامنه h را به ما داد که در آن h یک مقدار مینیمم دارد. از طرف دیگر، ما نقاطی از رویه را می‌خواهیم که در آنجا h یک مقدار مینیمم داشته باشد. هر چند دامنه h تمام صفحه xy است، جایی که در آن می‌توانیم دو مختص اول نقطه (x, y, z) بر رویه را انتخاب کنیم محدود است به سایه [تصویر] رویه بر صفحه xy که نوار بین خطوط $x = 1$ و $x = -1$ را شامل نیست (شکل ۱۹.۱۷).

اگر (به جای x و y) z و y را متغیرهای مستقل بگیریم و x را بر حسب y و z به صورت

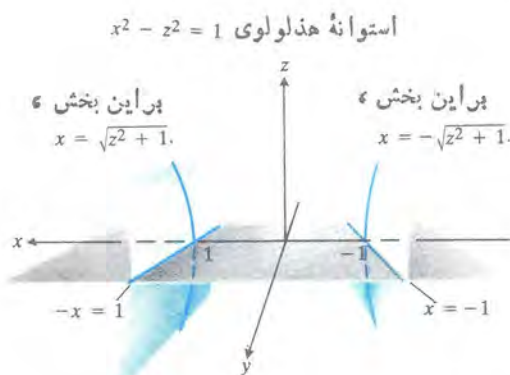
$$x^2 = z^2 + 1$$

بیان کنیم، با این اشکال مواجه نمی‌شویم. با این جانشانی، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ به صورت زیر درمی‌آید

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2.$$



۲۰۰۱۷ کره حاصل از انبساط حباب صابونی که مرکزش مبدأ است و به استوانه هذلولوی $x^2 - z^2 - 1 = 0$ می‌رسد. راه حل ۲۲ مثال ۲ را ببینید.



۱۹۰۱۷ ناحیه‌ای از صفحه xy که در آن دو مختص اول نقطه (x, y, z) بر رویه $x^2 - z^2 = 1$ انتخاب می‌شود. این ناحیه شامل نوار $-1 < x < 1$ از صفحه xy نیست.

پس، در هر يك از نقاط تماس می‌توانیم عددی چون λ بیابیم که

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

یا

$$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi - 2zk).$$

در نتیجه، مختصات x ، y ، و z هر يك از نقاط تماس باید در سه معادله عددی زیر صدق کنند

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z. \quad (1)$$

به‌ازای چه مقادیری از λ نقطه‌ای چون (x, y, z) که مختصاتش در معادلات (۱) صدق می‌کنند، بر رویه $x^2 - z^2 - 1 = 0$ نیز قرار می‌گیرد؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که مختص x هیچ نقطه‌ای از رویه صفر نیست، و لذا نتیجه می‌گیریم که در نخستین معادله مذکور در (۱) داریم $x \neq 0$. پس $2x = 2\lambda x$ تنها وقتی برقرار است که

$$\lambda = 1 \quad \text{یا} \quad 2 = 2\lambda$$

به‌ازای $\lambda = 1$ معادله $2z = -2\lambda z$ به صورت $2z = -2z$ درمی‌آید. برای اینکه این معادله هم برقرار باشد باید z صفر باشد. علاوه بر این چون $2y = 0$ (از معادله $2y = 0$)، نتیجه می‌گیریم که نقاط مطلوب، مختصاتی به صورت زیر دارند

$$(x, 0, 0).$$

و بالاخره، مختصات چه نقطه‌ای از رویه $x^2 - z^2 = 1$ به این صورت‌اند؟ نقطه‌ای چون $(x, 0, 0)$ که در شرایط زیر صدق کنند

$$x = \pm 1 \quad \text{یا} \quad x^2 = 1, \quad x^2 - (0)^2 = 1$$

حال به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که در آنها k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در این صورت دامنه k در صفحه yz با ناحیه‌ای که مختصات y و z نقاط (x, y, z) بر رویه را از آن ناحیه انتخاب می‌کنیم یکی درمی‌آید. پس، نقطه‌ای از صفحه که k را مینیمم می‌کنند نقاط متناظری روی هذلولیوار دارند. کمترین مقدار k در جایی به دست می‌آید که

$$k_x = 2x = 0 \quad \text{و} \quad k_y = 2y = 0$$

یا جایی که $y = z = 0$. نتیجه اینکه

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \pm 1.$$

نقاط متناظر روی رویه، نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ اند. از نا برابری

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

ملاحظه می‌شود که از نقاط $(\pm 1, 0, 0)$ مقدار مینیممی برای k به دست می‌آید. همچنین می‌توان مشاهده کرد که مینیمم فاصله از مبدأ تا نقطه‌ای از رویه، یک واحد است.

راه دیگر برای یافتن نقطه‌ای از رویه که نزدیکترین نقاط به مبدأ باشند، این است که تصور کنیم کره کوچکی با مرکز مبدأ مثل حباب صابون منبسط می‌شود تا اینکه به رویه برسد (شکل ۲۰۰۱۷). در هر يك از نقاط تماس، رویه و کره دارای صفحه تماس و خط قائم مشترك هستند. بنابراین، اگر کره و رویه را رویه‌های تراز توابع زیر بینگاریم، آنگاه در محل تماس رویه‌ها، گرادیانهای ∇f و ∇g موازی خواهند بود

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 = 0.$$

و مینیممهای موضعی خود را به دست می آورده نقاطی هستند که در آنها $\nabla f \cdot d\mathbf{R}/dt = 0$.

حال نشان می دهیم که قضیه ۱ دلیل اصلی کارساز بودن روش ضرایب لاگرانژ است. فرض کنید $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند و P_0 نقطه ای از رویه $g(x, y, z) = 0$ باشد که در آن f نسبت به مقادیرش بر رویه، يك مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد، آنگاه f در P_0 نسبت به مقادیرش بر هر خم مشتق پذیری که بر رویه $g(x, y, z) = 0$ باشد و از P_0 بگذرد نیز يك ماکسیمم یا مینیمم موضعی دارد. بنا براین، ∇f بر بردار سرعت اینگونه خمهای مشتق پذیری که از P_0 بگذرند عمود است. ضمناً ∇g نیز چنین است (زیرا همان گونه که در بخش ۷.۱۶ دیدیم ∇g بر رویه $g = 0$ تراز $g = 0$ عمود است). در نتیجه، در P_0 ، ∇f مضربی عددی چون λ از ∇g است. استدلال برای حالت دومتغیره را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (مسأله ۱۷ از مسأله های گوناگون).

روش ضرایب لاگرانژ

فرض کنید که $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ و مشتقات جزئی مرتبه اولشان پیوسته باشند. برای یافتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی f با قید $g(x, y, z) = 0$ ، مقادیر x, y, z و λ را چنان می یابیم که به طور همزمان در معادلات زیر صدق کنند

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x, y, z) = 0 \quad (۲)$$

لذگرمی درباره نمادگذاری در برخی از کتابها، روش ضرایب لاگرانژ را بدون استفاده از نماد برداری به صورت معادل زیر بیان می کنند: برای ماکسیمم یا مینیمم کردن تابعی چون $f(x, y, z)$ با قید $g(x, y, z) = 0$ تابع کمکی زیر را تشکیل می دهیم

$$H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z). \quad (۳)$$

سپس مقادیر x, y, z و λ را چنان می یابیم که مشتقات جزئی H همه صفر باشند

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0, \quad H_\lambda = 0. \quad (۴)$$

با محاسبه مشتقات جزئی H می توان دید که این شرایط با معادلات مذکور در (۲) معادل اند. بنا بر (۴) داریم

$$\begin{aligned} f_x &= \lambda g_x & \text{یا} & & H_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y &= \lambda g_y & \text{یا} & & H_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ f_z &= \lambda g_z & \text{یا} & & H_z &= f_z - \lambda g_z = 0 \\ g(x, y, z) &= 0 & \text{یا} & & H_\lambda &= -g(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (۵)$$

نزدیکترین نقاط رویه به مبدأ عبارت اند از نقاط $(\pm 1, 0, 0)$.

روش ضرایب لاگرانژ

در راه حل ۲ بالا، مسأله را با روش ضرایب لاگرانژ حل کردیم. به بیان کلی، این روش حاکی است که مقادیر اکسترمم تابعی چون $f(x, y, z)$ که متغیرهایش قیدی به صورت $g(x, y, z) = 0$ دارند، در نقاطی از رویه $g = 0$ به دست می آیند که در آن نقاط به ازای عددی چون λ (موسوم به ضریب لاگرانژ) داشته باشیم

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

برای اینکه این روش را بهتر بشناسیم و ببینیم چرا کارساز است، ابتدا به ذکر مطلبی به صورت يك قضیه می پردازیم.

قضیه ۱

فرض کنید $f(x, y, z)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول آن در ناحیه ای که خم مشتق پذیر زیر را دربردارد پیوسته باشند

$$C: \mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

اگر P_0 نقطه ای از C باشد که در آن، f نسبت به مقادیرش بر C يك ماکسیمم یا يك مینیمم موضعی داشته باشد، آنگاه در P_0 ، ∇f بر C عمود است.

اثبات نشان می دهیم که در نقاط مورد نظر، $\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$ که در آن $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt$ بردار مماس بر C است. مقادیر f بر C از تابع مرکب زیر به دست می آیند

$$f(x(t), y(t), z(t))$$

که مشتقش نسبت به t برابر است با

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{v}.$$

در هر نقطه ای چون P_0 که در آن f ، نسبت به مقادیرش بر خم، يك ماکسیمم یا يك مینیمم موضعی داشته باشد، داریم $df/dt = 0$ و لذا

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0.$$

اگر در صورت و اثبات قضیه ۱ جملات شامل z را حذف کنیم، نتیجه مشابهی برای توابع دو متغیره به دست می آوریم: نقاطی از يك خم مشتق پذیر

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

که در آنها تابعی چون $f(x, y)$ نسبت به مقادیرش بر خم، ماکسیممها

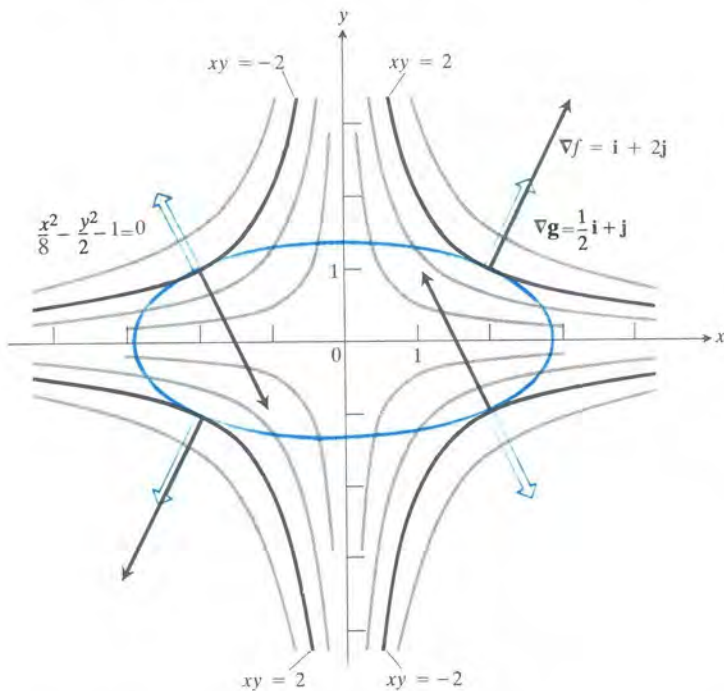
پس تابع $f(x, y) = xy$ روی این بیضی مقادیر اکسترم خود را در چهار نقطه $(\pm 2, 1)$ ، $(\pm 2, -1)$ به دست می‌آورد. مقادیر اکسترم عبارت‌اند از $xy = 2$ و $xy = -2$.

تبیین هندسی راه حل (شکل ۲۱.۱۷ را ببینید.) خمهای تراز تابع $f(x, y) = xy$ عبارت‌اند از هذلولیهای $xy = c$. هرچه هذلولیها از مبدأ دور شوند، قدر مطلق f بزرگتر می‌شود. می‌خواهیم مقادیر اکسترم $f(x, y)$ را بیابیم با این شرط که نقطه (x, y) بر بیضی $x^2 + 4y^2 = 8$ نیز قرار داشته باشد. در بین هذلولیهایی که بیضی را قطع می‌کنند کدام از مبدأ دورتر است؟ هذلولیهایی که بر بیضی مماس‌اند. در این نقاط، هر بردار قائم بر هذلولی بر بیضی نیز قائم است، و در نتیجه، گرادیان $\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ مضربی از $\nabla g = (x/4)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ است. مثلاً در نقطه $(2, 1)$ داریم

$$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla f = 2\nabla g$$

در نقطه $(-2, 1)$ داریم

$$\nabla f = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{و} \quad \nabla f = -2\nabla g$$



۲۱.۱۷ تابع $f(x, y) = xy$ با قید $g(x, y) = x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$ مقادیر اکسترم خود را در چهار نقطه $(\pm 2, \pm 1)$ به دست می‌آورد. این چهار نقطه نقاطی از بیضی هستند که در آنها ∇f مضربی از ∇g است.

از سه معادله اول داریم $\nabla f = \lambda \nabla g$ و آخری عبارت است از $g(x, y, z) = 0$.

مثال ۳ مطلوب است بزرگترین و کوچکترین مقادیری که تابع

$$f(x, y) = xy$$

روی بیضی زیر اختیار می‌کند

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

حل: از ما خواسته شده مقادیر اکسترم $f(x, y) = xy$ با قید زیر را بیابیم

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

برای انجام این کار ابتدا مقادیر x, y, z ، و λ را چنان می‌یابیم که

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x, y) = 0$$

از معادله گرادیان داریم

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \frac{\lambda}{4}x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j}$$

و از آن داریم

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y$$

و

$$y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y \quad \text{در نتیجه} \quad y = 0 \quad \text{یا} \quad \lambda = \pm 2$$

حال به این دو حالت می‌پردازیم.

حالت ۱: اگر $y = 0$ ، آنگاه $x = y = 0$. اما نقطه $(0, 0)$ بر بیضی واقع نیست. در نتیجه $y \neq 0$.

حالت ۲: اگر $y \neq 0$ ، آنگاه $\lambda = \pm 2$ و

$$x = \pm 2y.$$

با قراردادن این تساوی در معادله $g(x, y) = 0$ داریم

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$4y^2 + 4y^2 = 8$$

$$y = \pm 1.$$

می بینیم که مقادیر ماکسیم و مینیم تابع بردایره $x^2 + y^2 = 1$ عبارت اند از

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5$$

و

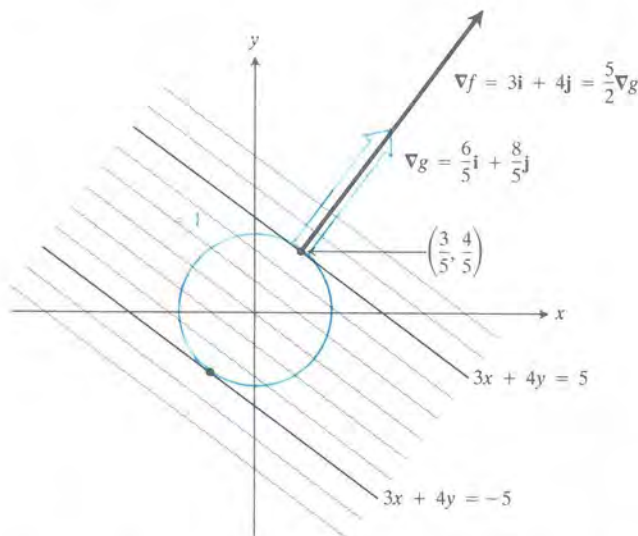
$$3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5.$$

تبیین هندسی راه حل (شکل ۲۲.۱۷) خمهای تراز

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

عبارت اند از خطوط $3x + 4y = c$. هر چه این خطوط از مبدأ دور شوند، قدر مطلق f بیشتر می شود. در پی مقادیر اکسترم $f(x, y)$ هستیم با این شرط که نقطه (x, y) بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ نیز قرار داشته باشد. از بین خطهایی که دایره را قطع می کنند کدام از مبدأ دور تر است؟ خطوط مماس بر دایره. در نقاط تماس، هر بردار عمود بر خط، بردایره نیز عمود است، و لذا گرادیان $\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ مضربی $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ است. مثلاً در نقطه $(3/5, 4/5)$ داریم

$$\nabla f = \frac{5}{2} \nabla g \quad \text{و} \quad \nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i} + \frac{8}{5}\mathbf{j}$$



۲۲.۱۷ تابع $f(x, y) = 3x + 4y$ بزرگترین مقدار خود را بر دایره واحد $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ در نقطه $(3/5, 4/5)$ و کوچکترین مقدار خود را در نقطه $(-3/5, -4/5)$ به دست می آورد. در هر یک از این نقاط $\nabla f = (5/2)\nabla g$. در شکل، گرادیان در نقطه اول نشان داده شده است و نه در نقطه دوم. ■

مثال ۴ مقادیر ماکسیم و مینیم تابع

$$3x + 4y$$

را بردایره زیر بیابید

$$x^2 + y^2 = 1.$$

حل: ما این مسأله را به صورت يك مسأله مربوط به ضرایب لاگرانژ در نظر می گیریم که در آن

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad f(x, y) = 3x + 4y$$

و به دنبال مقادیر x, y و λ می گردیم که در معادلات زیر صدق کنند

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j} \quad (6)$$

$$g(x, y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

از معادله گرادیان نتیجه می گیریم که $\lambda \neq 0$ و داریم

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{4}{\lambda}.$$

از جمله نتایجی که از این معادلات می گیریم این است که x و y همعلامت اند. اگر مقادیر x و y را در معادله $g(x, y) = 0$ قرار دهیم داریم

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{\lambda^2} = 1$$

$$9 + 16 = 4\lambda^2$$

$$4\lambda^2 = 25$$

$$\lambda = \pm \frac{5}{2}.$$

پس

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm \frac{3}{5}, \quad y = \frac{4}{\lambda} = \pm \frac{4}{5}$$

و $f(x, y) = 3x + 4y$ در نقاط زیر مقادیر اکسترم دارد

$$(x, y) = \pm \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

(به جای ۴ نقطه تنها دو نقطه وجود دارد زیرا x و y همعلامت اند.) با محاسبه مقدار $3x + 4y$ در نقاط $(3/5, 4/5)$ و $(-3/5, -4/5)$

□ ضرایب لاگرانژ با دوقید

اگر متغیرهای $f(x, y, z)$ دوقید، فرضاً

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{و} \quad g_2(x, y, z) = 0$$

داشته باشند، می‌توانیم ماکسیمها و مینیمهای موضعی و مقید f را با معرفی دوضرب لاگرانژ λ و μ به دست آوریم. برای این کار با یافتن مقادیر x, y, z, λ, μ ی که همزمان در معادلات زیر صدق کنند، نقاطی چون $P(x, y, z)$ را می‌یابیم که در آنها f مقادیر اکسترمم مقید خود را به دست آورد.

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \quad (۷ \text{ الف})$$

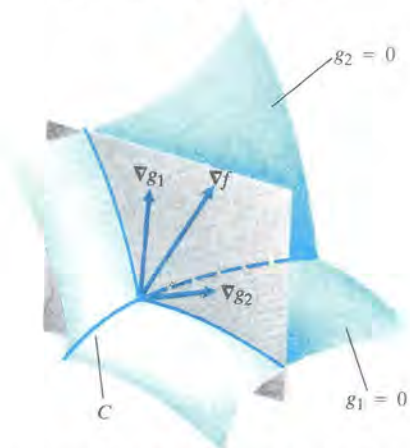
$$g_1(x, y, z) = 0 \quad (۷ \text{ ب})$$

$$g_2(x, y, z) = 0 \quad (۷ \text{ پ})$$

لازم است که توابع f, g_1 و g_2 پیوسته باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند.

معادلات مذکور در (۷) تعبیر هندسی جالبی دارند. محل تقاطع رویه‌های $g_1 = 0$ و $g_2 = 0$ (معمولاً یک خم مشتق‌پذیر، مثلاً C است (شکل ۲۳.۱۷))، در امتداد این خم به دنبال نقاطی می‌گردیم که در آنها f نسبت به سایر مقادیرش بسرخم، مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی داشته باشد. اینها نقاطی هستند که در آنها، بنا به قضیه ۱، ∇f بر C عمود است. اما ∇g_1 و ∇g_2 نیز در این نقاط بر C عمودند زیرا $g_1 = 0$ و $g_2 = 0$ بر رویه قرار دارد. بنابراین ∇f در صفحه‌ای قرار دارد که با ∇g_1 و ∇g_2 مشخص می‌شود، و این بدین معناست که به ازای اعدادی چون λ و μ داریم

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2.$$



۲۳.۱۷ بردارهای ∇g_1 و ∇g_2 در صفحه‌ای عمود بر خم C قرار دارند زیرا ∇g_1 قائم بر رویه $g_1 = 0$ است و ∇g_2 قائم بر رویه $g_2 = 0$.

چون نقاط مطلوب بر هر دو رویه نیز واقع هستند، مختصاتشان باید در معادلات زیر صدق کنند

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{و} \quad g_2(x, y, z) = 0$$

این معادلات همان شرایط دیگر مذکور در (۷) هستند.

مثال ۵ مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 1 + x + y$ یکدیگر را در یک مقطع مخروطی C قطع می‌کنند. روی C نقاطی را بیابید که از سایر نقاط به‌مبدأ دورتر یا نزدیکتر باشند.

حل: ما این مسأله را به صورت یک مسأله مربوط به ضرایب لاگرانژ تلقی می‌کنیم که در آن باید مقادیر اکسترمم

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(مربع تابعی که فاصله از مبدأ را تعیین می‌کند) را با دوقید

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (۸ \text{ الف})$$

$$g_2(x, y, z) = 1 + x + y - z = 0 \quad (۸ \text{ ب})$$

بیابیم. بنا بر معادله گرایان (۷ الف) داریم

$$2xi + 2yj + 2zk = \lambda(2xi + 2yj - 2zk) + \mu(i + j - k)$$

که به معادلات عددی زیر منجر می‌شود

$$\left. \begin{aligned} 2x &= 2x\lambda + \mu \\ 2y &= 2y\lambda + \mu \\ 2z &= -2z\lambda - \mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x - y &= (x - y)\lambda \\ y + z &= (y - z)\lambda. \end{aligned} \quad \begin{aligned} (۹ \text{ الف}) \\ (۹ \text{ ب}) \end{aligned}$$

معادله $x - y = (x - y)\lambda$ وقتی برقرار است که $x = y$ یا وقتی که $\lambda = 1$ ، $x \neq y$.

مقدار $\lambda = 1$ نقطه‌ای از صفحه‌ای از صفحه‌ای را به ما نمی‌دهد (یعنی نقطه‌ای را به ما نمی‌دهد که مختصاتش در معادله ۸ ب صدق کنند). زیرا از $\lambda = 1$ نتیجه می‌شود

$$y + z = y - z \quad (\text{بنا بر معادله ۹ ب})$$

$$2z = 0$$

$$z = 0$$

و سپس از (۸ الف) نتیجه می‌شود

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

نقطه $(0, 0, 0)$ در شرط (۸ ب) صدق نمی‌کند.

۰۷. مطلوب است محاسبه موارد زیر با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ.

الف) مقدار مینیمم $x+y$ با قیدهای $xy=16$ ، $x>0$ ، $y>0$

ب) مقدار ماکسیمم xy با قید $x+y=16$.

در هر مورد، راه حل را به صورت هندسی نیز تبیین کنید.

۰۸. مطلوب است نزدیکترین و دورترین نقاط خم $x^2+xy+y^2=1$ به مبدأ.

۰۹. مطلوب است ابعاد قوطی استوانه‌ای بسته‌ای که حجمش $16\pi \text{ cm}^3$ و مساحتش مینیمم باشد.

۰۱۰. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، ابعاد مستطیلی را بیابید که مساحتش ماکسیمم باشد، اضلاعش با محورهای مختصات موازی باشند، و بتواند دریضی $x^2/16+y^2/9=1$ محاط شود.

۰۱۱. در نقطه (x, y) از یک ورق فلزی، دما برابر است با $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. مورچه‌ای به دور یک دایره به شعاع ۵ و مرکز مبدأ روی این ورق راه می‌رود. حداکثر و حداقل دمایی که مورچه با آن مواجه می‌شود چیست؟

۰۱۲. از شرکتی خواسته شده مخزنی برای انبار کردن گاز مایع طراحی کند. مشتری مخزنی می‌خواهد که استوانه‌ای شکل و دو انتهای آن به صورت نیمکره، و ظرفیت آن 8000 m^3 باشد. مشتری می‌خواهد در ساختن این مخزن از حداقل ورق استفاده شود. شعاع و ارتفاع بخش استوانه‌ای مخزن چقدر باید باشد؟

۰۱۳. مقادیر ماکسیمم و مینیمم x^2+y^2 را با قید

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

بیابید.

۰۱۴. با قراردادن یک مثلث متساوی الساقین بر بالای یک مستطیل یک پنج ضلعی می‌سازیم. ابعاد چه باشند تا به ازای مساحت مفروض A ، محیط مینیمم باشد؟

۰۱۵. نزدیکترین نقطه صفحه $13 = x + 2y + 3z$ به نقطه $(1, 1, 1)$ را بیابید.

۰۱۶. مطلوب است مقادیر ماکسیمم و مینیمم

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z$$

بر کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 30.$$

۰۱۷. مطلوب است فاصله مینیمم رویه $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ از مبدأ.

بنابراین $\lambda \neq 1$ و داریم $x=y$. محل تقاطع صفحه $x=y$ و صفحه $z=1+x+y$ یک خط است و این خط مخروط را در تنها دو نقطه قطع می‌کند. برای نشان دادن این مطلب، $y=x$ و $z=1+2x$ را در معادله مخروط قرار می‌دهیم. داریم

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$(1+2x)^2 = x^2 + x^2$$

$$2x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

این نقاط عبارت‌اند از

$$A = \left(-1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, -1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, -1 - \sqrt{2}\right) \quad (10)$$

$$B = \left(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, -1 + \sqrt{2}\right).$$

حال، می‌دانیم که C یا بیضی است یا هذلولی. اگر بیضی باشد، نتیجه می‌گیریم که B نزدیکترین نقطه به مبدأ و A دورترین نقطه از مبدأ است. اما اگر C هذلولی باشد، نقطه‌ای ندارد که دورترین نقطه از مبدأ باشد، و نقاط A و B نقاطی از دوشاخه هذلولی هستند که نزدیکترین نقطه به مبدأ هستند. درمسأله ۳۶ از شما خواسته شده است که بگویید C چه نوع مقطع مخروطی است. به نظر واضح می‌رسد که نقاط بحرانی باید در شرط $x=y$ صدق کنند زیرا رفتار هر سه تابع f ، g_1 ، و g_2 با x و y همانند است. ■

مسأله‌ها

۰۱. مطلوب است نقاطی واقع بر بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ که در آنها $f(x, y) = xy$ مقدار اکسترمم داشته باشد.

۰۲. مقادیر اکسترمم $f(x, y) = xy$ را با قید

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$$

بیابید.

۰۳. مطلوب است مقدار ماکسیمم $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ بر خط $x + 3y = 12$ (شکل ۱۷.۱۷).

۰۴. خط $y = x + 1$ چقدر به سهمی $x^2 = y$ نزدیک می‌شود؟

۰۵. مطلوب است مقادیر اکسترمم $f(x, y) = x^2y$ بر خط $x + y = 3$.

۰۶. مطلوب است نزدیکترین نقاط خم $x^2y = 2$ به مبدأ.

۱۸. مطلوب است نزدیکترین نقطه روی $z = xy + 1$ به مبدأ.

۱۹. مطلوب است نزدیکترین نقاط روی $z^2 = xy + 4$ به مبدأ.

۲۰. مطلوب است نقاطی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ که در آنها تابع $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ مقادیر ماکسیم و مینیم خود را اختیار می کند.

۲۱. دمای T در هر نقطه (x, y, z) از فضا عبارت است از $T = 400xyz^2$. حداکثر دما را روی کره واحد زیر بیابید

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

۲۲. سه عدد حقیقی بیابید که مجموعشان ۹ و مجموع مربعاتشان حداقل ممکن باشد.

۲۳. اگر $x + y + z^2 = 16$ ، بیشترین مقدار حاصلضرب x, y, z را بیابید.

۲۴. اگر a, b, c اعدادی مثبت باشند، مقدار ماکسیم را که $f(x, y, z) = ax + by + cz$ می تواند بر کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

اختیار کند بیابید.

۲۵. مطلوب است مقادیر ماکسیم و مینیم

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$$

بر قرص واحد $x^2 + y^2 \leq 1$.

۲۶. مطلوب است مقادیر اکسترم $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ با کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ در محل تقاطع صفحه $z = 1$.

۲۷. یک فضا پیما به شکل بیضیوار

$$4x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$$

وارد جو زمین می شود و سطح آن شروع به گرم شدن می کند. بعد از یک ساعت، دمای نقطه (x, y, z) بر سطح فضا پیما برابر است با

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600.$$

گرمترین نقطه روی فضا پیما را بیابید.

۲۸. فرض کنید مسئول نصب یک تلسکوپ رادیویی بر یک سیاره تازه کشف شده هستید. برای مینیم کردن تداخل، می خواهید آن را در جایی نصب کنید که میدان مغناطیسی سیاره از سایر نقاط ضعیفتر باشد. سیاره کروی است و شعاع آن ۶ واحداست. بر اساس دستگاه مختصاتی که مبدأ آن در مرکز سیاره است، شدت میدان مغناطیسی از رابطه $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ به دست می آید.

تلسکوپ رادیویی را در کجا قرار می دهید؟

۲۹. مثالی از اقتصاد. در علم اقتصادگاه مقادیر مفید یا به اصطلاح مطلوب x و y از دو کالای سرمایه ای G_1 و G_2 ، از تابعی چون $U(x, y)$ به دست می آید. مثلاً G_1 و G_2 ممکن است دواژه شیمیایی باشند که یک شرکت داروسازی به آن نیاز دارد و $U(x, y)$ هزینه ساخت محصولی است که برای تولید آن، بسته به شیوه ساخت، به مقادیر مختلفی از این مواد شیمیایی نیاز است. اگر بهای هر کیلوگرم G_1 ، a دلار و بهای هر کیلوگرم G_2 ، b دلار باشد، و کل مبلغ تخصیص یافته برای خرید G_1 و G_2 ، c دلار باشد، شرکت مایل است با شرط $ax + by = c$ ، $U(x, y)$ را مینیم کند. پس، این شرکت باید یک مسئله از نوع ضرایب لاگرانژ را حل کند.

فرض کنید

$$U(x, y) = xy + 2x$$

و معادله $ax + by = c$ ، پس از ساده کردن به صورت زیر باشد

$$2x + y = 30.$$

مینیم مقدار U و مقادیر متناظر x و y را با این قید اخیر بیابید.

۳۰. شرط $\nabla f = \lambda \nabla g$ کافی نیست. هر چند $\nabla f = \lambda \nabla g$ شرطی لازم برای این است که $f(x, y)$ با قید $g(x, y) = 0$ یک مقدار اکسترم داشته باشد، اما این شرط وجود این مقدار اکسترم را تضمین نمی کند. به عنوان مثال، بکشید با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ یک مقدار ماکسیم برای تابع $f(x, y) = x + y$ با قید $xy = 16$ بیابید. این روش دو نقطه $(4, 4)$ و $(-4, -4)$ را به عنوان محلهای احتمالی مقادیر اکسترم به دست می دهد. اما مجموع $x + y$ بر هذلولی $xy = 16$ هیچ مقدار ماکسیم ندارد. هر چه برای این هذلولی در ربع اول از مبدأ دور تر شویم، مجموع $f(x, y) = x + y$ بزرگتر می شود.

۳۱. n عدد مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ مفروض اند. مطلوب است مقدار ماکسیم عبارت

$$w = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

با این قید که مجموع مربعات متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر با ۱ باشد.

۳۲. صفحه ای به صورت

$$z = Ax + By + C$$

باید از نقاط (x_i, y_i, z_i) زیر «بگذرد»:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, -1).$$

نیست. مشکل در چیست؟ (رسم وضعیت در صفحه $x=y$ ممکن است مشکل گشا باشد.)

۳۸. در مثال ۵، می‌توانیم نشان دهیم که به ازای تمام نقاط واقع بر مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ ، مربع فاصله مبدأ تا $P(x, y, z)$ برابر است با $w = 2(x^2 + y^2)$ که تابعی است از دو متغیر مستقل x و y . اما اگر P علاوه بر مخروط روی صفحه

$$z = 1 + x + y$$

نیز باشد، آنگاه

$$(1 + x + y)^2 = x^2 + y^2.$$

نشان دهید که این نقاط مختصاتی دارند که در معادله زیر صدق می‌کنند

$$2xy + 2x + 2y + 1 = 0.$$

به دو طریق این معادله را تعبیر کنید:

(الف) به عنوان خمی در صفحه xy ، و

(ب) به عنوان مجموعه‌ای از نقاط یک استوانه در فضای سه بعدی.

خم مذکور در (الف) را رسم کنید، و نقطه یا نقاطی از آن را بیابید که به ازای آنها w مینیمم باشد. آیا روی این خم نقاطی وجود دارند که w را ماکسیمم کنند؟ حال با استفاده از اطلاعات به دست آمده بحث مربوط به مثال ۵ را تکمیل کنید.

□ ۲۰۱۷ فرمول تیلر، آزمون مشتق دوم، و برآورد خطا

در این بخش، نظریه مربوط به آزمون مشتق دوم در بخش ۱۰۱۷ و فرمولهایی که در بخش ۲۰۱۷ برای برآورد خطاهای حاصل از تقریبهای خطی به کار بردیم بررسی می‌شود. در همه موارد، مباحث ریاضی مربوط به فرمول تیلر که در بخش ۳۰۱۲ ارائه شد، ابزار ریاضی لازم را در اختیارمان می‌گذارد. استفاده ما از فرمول تیلر «یک متغیره» در این مبحث به تعمیم فرمول تیلر به توابع دو متغیره می‌انجامد. این فرمول تعمیم یافته امکان تقریبهای درجه دوم توابع دو متغیره و نیز برآورد خطاهای حاصل را فراهم می‌کند.

استنتاج آزمون مشتق دوم

آزمون مشتق دوم که در بخش ۱۰۱۷ ذکر شد حاکی از این است که اگر $f(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبه‌های اول و دومش در سراسر ناحیه‌ای چون R پیوسته باشند و نقطه‌ای چون (a, b) درون R باشد و در این نقطه f_x و f_y صفر باشند، آنگاه

۱. f در (a, b) یک ماکسیمم موضعی دارد هرگاه در (a, b) ،

صفحه‌ای بیابید که مجموع مربعات انحرافها

$$\sum_{i=1}^4 (Ax_i + By_i + C - z_i)^2$$

را مینیمم کند.

□ ضرایب لگرانژ با دو قید

۳۳. نزدیکترین نقطه تقاطع صفحه‌های $12 = y + 2z$ و $6 = x + z$ به مبدأ را بیابید.

۳۴. مقدار ماکسیمم $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ را با قیدهای $2x - y = 0$ و $y + z = 0$ بیابید.

۳۵. (الف) مقدار ماکسیمم $w = xyz$ را در بین تمام نقاطی که بر محل تقاطع دو صفحه $z = 40$ و $x + y + z = 40$ قرار دارند بیابید.

(ب) استدلالی هندسی ارائه دهید که کار شما را در پیدا کردن یک مقدار ماکسیمم (و نه یک مقدار مینیمم) برای xyz با قیود داده شده تأیید کند.

۳۶. ادامه مثال ۵. در حل مثال ۵، دو نقطه A و B به عنوان نقاط احتمالی که دارای ماکسیمم یا مینیمم فاصله از مبدأ هستند مشخص شدند. معادلات مخروط، صفحه $z = 1 + x + y$ ، و استوانه شامل خم تقاطع آنها را که مولدهایش موازی محور z اند با استفاده از مختصات استوانه‌ای r, θ, z بنویسید. آیا این استوانه، مستدیر، بیضوی، سهموی، یا هذلولوی است؟ (محل تقاطع آن را با صفحه xy در نظر بگیرید.) فاصله مبدأ از نقطه‌ای واقع بر خم تقاطع مخروط و صفحه را به صورت تابعی از θ بنویسید. آیا این تابع مینیمم دارد؟ ماکسیمم چطور؟ در این حالت درباره نقاط A و B از معادلات (۱۰)، به عنوان جوابهایی از مثال ۵، چه می‌توانید بگویید؟

۳۷. در مثال ۵، مقادیر اکسترمم $f(x, y, z)$ واقع بر مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحه $z = 1 + x + y$ را به قسمی یافتیم که در معادله $x = y$ صدق کنند. پس داریم $z = 1 + 2x$ و تابعی که بسایند ماکسیمم یا مینیمم آن محاسبه شود عبارت است از

$$x^2 + x^2 + (1 + 2x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ که به صورت}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6(x + 1/3)^2 + 1/3$$

نیز می‌تواند نوشته شود. مسلماً وقتی $x = -1/3$ ، یک مینیمم به دست می‌آید. اما با

$$y = x, \quad z = 1 + 2x, \quad x = -\frac{1}{3}$$

نقطه $(-1/3, -1/3, 1/3)$ به دست می‌آید که بر مخروط واقع

$\partial f / \partial y$ پیوسته‌اند و مشتقات جزئی پیوسته دارند. بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} F''(t) &= h \frac{\partial F'(t)}{\partial x} + k \frac{\partial F'(t)}{\partial y} \\ &= h \left(h \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + k \left(h \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + k \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

پس $F(t)$ به ازای $n=2$ فرضهای قضیه تیلر را روی بازه $[0, 1]$ برآورده می‌کند، یعنی F' و F بر $[0, 1]$ پیوسته‌اند و F' بر $(0, 1)$ مشتقپذیر است. پس

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c) \frac{(1-0)^2}{2}$$

یا

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(c) \quad (4)$$

که در آن c عددی است بین ۰ و ۱. اگر F و مشتقاتش را برحسب f بیان کنیم، داریم

$$\begin{aligned} F(1) &= f(a+h, b+k) \\ F(0) &= f(a, b) \\ F'(0) &= hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ F''(c) &= (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a+ch, b+ck)}. \end{aligned} \quad (5)$$

با این جانشانیها، معادله (۴) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a+ch, b+ck)}. \end{aligned} \quad (6)$$

این معادله‌ای است که از آن، آزمون مشتق دوم نتیجه می‌شود. فرض کنید f_x و f_y هر دو در (a, b) صفر باشند و بخواهیم بدانیم که f در (a, b) ماکسیم یا مینیمم دارد یا خیر. با شرط $f_x = f_y = 0$ ، از معادله (۶) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a+ch, b+ck)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$f_{xx} < 0 \text{ و } f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0;$$

۲. f در (a, b) یک مینیمم موضعی دارد هرگاه در (a, b) ،

$$f_{xx} > 0 \text{ و } f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0;$$

۳. f در (a, b) یک نقطه زنی دارد هرگاه در (a, b) ،

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0;$$

۴. در نقطه (a, b) ، این آزمون نتیجه‌بخش نیست هرگاه در این نقطه، $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$. در این حالت برای تعیین رفتار f در (a, b) باید به راه دیگری متوسل شویم.

عبارت $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ را همین f می‌نامند. برای استنتاج این آزمون باید از فرمول تیلر که در بخش ۳.۱۲ ذکر شد به طرز هوشمندانه‌ای استفاده کنیم. استدلال چنین است:

فرض می‌کنیم که f و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن، طبق شکل ۲۴.۱۷ در ناحیه‌ای چون R حول نقطه $P(a, b)$ پیوسته باشند. نیز فرض می‌کنیم $S(a+h, b+k)$ یکی از نقاط نزدیک P باشد به قسمی که پاره‌خط PS درون R قرار گیرد. حال PS را با معادلات پارامتری زیر توصیف می‌کنیم

$$x = a + th, \quad y = b + tk, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

با در نظر گرفتن تابع

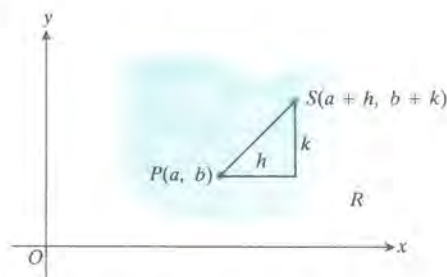
$$F(t) = f(a + ht, b + kt)$$

مقادیر $f(x, y)$ را بر امتداد PS بررسی می‌کنیم. اولاً F' تابع مشتق‌پذیری از تک متغیر t است زیرا مشتقات جزئی مرتبه اول f پیوسته‌اند و $x = a + th$ و $y = b + tk$ نیز توابع مشتق‌پذیری از t اند. از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2)$$

همچنین F' بر بازه بسته $0 \leq t \leq 1$ پیوسته است زیرا $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ در سراسر R پیوسته‌اند.

ثانیاً $F'(t)$ تابع مشتق‌پذیری از t است زیرا $\partial f / \partial x$ و



۲۴.۱۷ ناحیه‌ای چون R که درونش نقطه $P(a, b)$ را دربردارد.

۳. اگر در (a, b) ، $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ، آنگاه می‌توان نشان داد که مقادیر ناصفر و به‌دلخواه کوچکی برای h و k وجود دارند که به‌ازای آنها $Q(0) > 0$ و نیز مقادیر ناصفر و به‌دلخواه کوچکی برای آنها یافت می‌شوند که $Q(0) < 0$. پس هر جادر نزدیکی $P_0(a, b, f(a, b))$ بر روی $z = f(x, y)$ نقاطی بالای P_0 و نقاطی زیر P_0 وجود دارند. بنابراین تابع f در (a, b) نقطهٔ ذینی دارد.

۴. سرانجام، اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ، دربارهٔ علامت $Q(c)$ هیچ نتیجه‌ای نمی‌توانیم بگیریم، و به آزمون دیگری نیاز داریم. از معادله (۱۰) برمی‌آید که به‌ازای همهٔ مقادیر h و k ، داریم $Q(0) \geq 0$ ، اما اگر $Q(0) = 0$ ، دربارهٔ علامت $Q(c)$ هیچ نتیجه‌ای نمی‌توانیم بگیریم.

به‌این ترتیب، استنتاج آزمون مشتق دوم به‌انجام می‌رسد.

استنتاج برآورد خطای تقریبهای خطی متعارف $f(x, y)$

در بخش ۲۰۱۷ گفتیم که اگر $f(x, y)$ و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم آن در سراسر مستطیلی چون R به‌مرکز نقطهٔ (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه $|E|$ ، یعنی قدرمطلق تفاضل بین f و مقدار خطی آن در نقطهٔ (x_0, y_0) واقع در R ، در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$|E| \leq \frac{1}{2} B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \quad (11)$$

اگر نمادهای معادله (۶) این بخش را تغییر دهیم، روش استنتاج این نابرابری روشن می‌شود. با نمادگذاری زیر

$$\begin{aligned} (a, b) &= (x_0, y_0), \quad a + h = x, \quad b + k = y \\ h &= (x - x_0), \quad k = (y - y_0) \end{aligned} \quad (12)$$

$$(a + ch, b + ck) = (x_0 + c(x - x_0), y_0 + c(y - y_0))$$

شکل ۲۵۰۱۷ به‌شکل ۲۶۰۱۷ تبدیل می‌شود و معادله (۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{صورت خطی } L(x, y)} \end{aligned} \quad (13)$$

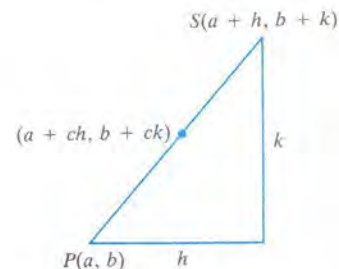
$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} ((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} \\ &\quad + (y - y_0)^2 f_{yy})_{(x_0 + c(x - x_0), y_0 + c(y - y_0))} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{خطای } E(x, y)} \end{aligned}$$

چون مقدار ماکسیمم یا مینیمم f در (a, b) بستگی به علامت $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ دارد، مجبوریم علامت

$$Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a+ch, b+ck)} \quad (8)$$

یعنی علامت عبارت درجهٔ دوم واقع درست راست معادله (۷) (بدون ضریب $1/2$) را در نظر بگیریم.

مشتقات مرتبهٔ دوم در $Q(c)$ را باید در نقطه‌ای چون $(a + ch, b + ck)$ واقع بر پاره‌خط PS در شکل ۲۵۰۱۷ حساب کنیم. چون f_{xx} ، f_{xy} و f_{yy} در سراسر R پیوسته‌اند، وقتی h و k کوچک باشند مقدار هر یک از این مشتقات در $(a + ch, b + ck)$ با مقدار آنها در (a, b) تقریباً برابر است. در حالت خاص، اگر $Q(0) \neq 0$ ، علامت $Q(c)$ وقتی h و k به اندازهٔ کافی کوچک باشند با علامت $Q(0)$ یکی است.



۲۵۰۱۷ ارتباط هندسی کمیت‌های معادله (۶).

علامت

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \quad (9)$$

(و در نتیجه علامت $Q(c)$ را می‌توان از علامتهای f_{xx} و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ در (a, b) پیش‌بینی کرد. بدین‌منظور، دوطرف رابطه (۹) را در f_{xx} ضرب می‌کنیم؛ پس از تغییر ترتیب جملات سمت راست داریم

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2. \quad (10)$$

علامت $Q(0)$ از این معادله مشخص می‌شود، و معیار زیر برای تعیین رفتار $f(x, y)$ در (a, b) به‌دست می‌آید.

۱. اگر در (a, b) ، $f_{xx} < 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ، آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر ناصفر و به‌اندازهٔ کافی کوچک h و k داریم $Q(0) < 0$ ، و f در (a, b) یک مقدار ماکسیمم موضعی دارد.
۲. اگر در (a, b) ، $f_{xx} > 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ، آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر ناصفر و به‌اندازهٔ کافی کوچک h و k داریم $Q(0) > 0$ ، و f در (a, b) یک مقدار مینیمم موضعی دارد.

d/dt را در مورد $F(t) = f(a+ht, b+kt)$ به کار ببریم، همان نتیجه به دست می آید که عملگر

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

را به $f(x, y)$ اعمال کنیم. همین طور فرمول

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

از معادله (۳) حاکی است که به کار بردن d^2/dt^2 در مورد $F(t)$ همان نتیجه را به دست می دهد که به کار بردن

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

در مورد $f(x, y)$ اینها دو نمونه از فرمول کلیتر

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} F(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \quad (۱۷)$$

هستند. این فرمول حاکی است که از به کار بردن d^n/dt^n در مورد $F(t)$ همان نتیجه عاید می شود که از به کار بردن عملگر زیر (پس از بسط دادن آن به کمک قضیه دو جمله ای) در مورد $f(x, y)$:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n.$$

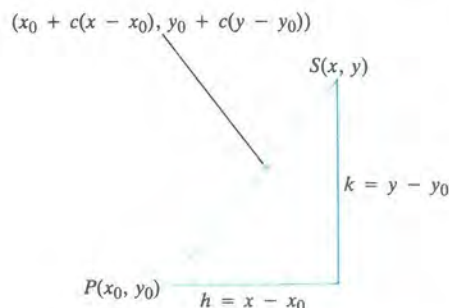
حال فرض کنید که $f(x, y)$ و همه مشتقات جزئی آن تا مشتق مرتبه $(n+1)$ م در سراسر یک ناحیه مستطیلی به مرکز نقطه ای چون (a, b) پیوسته باشند. در این صورت می توانیم فرمول تیلر را در مورد $F(t)$ با جملات بیشتری بنویسیم

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + \text{باقیمانده}$$

حال اگر $t=1$ ، داریم

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{باقیمانده}.$$

اگر به جای n مشتق اول واقع در سمت راست این سری، عبارتهای معادله را که از معادله (۱۷) به ازای $t=0$ محاسبه می شوند،



۲۶۰۱۷ ارتباط هندسی کمیتهای معادلات (۱۲) و (۱۳). شکل ۲۵۰۱۷ با نمادهای جدید.

بدین ترتیب فرمول صریحی برای $E(x, y)$ ، یعنی خطای حاصل از خطی سازی f ، به دست آمده است. با استفاده از این فرمول به روش زیر کران بالایی مفیدی برای $|E|$ حاصل می شود. اولاً

$$|E| \leq \frac{1}{6} ((x-x_0)^2 |f_{xx}| + 2|x-x_0||y-y_0| |f_{xy}| + (y-y_0)^2 |f_{yy}|). \quad (۱۴)$$

پس اگر B کران بالایی برای مقادیر $|f_{xx}|$ ، $|f_{xy}|$ ، و $|f_{yy}|$ بر R باشد، آنگاه

$$|E| \leq \frac{1}{6} ((x-x_0)^2 B + 2|x-x_0||y-y_0| B + (y-y_0)^2 B) \leq \frac{1}{6} B ((x-x_0)^2 + 2|x-x_0||y-y_0| + (y-y_0)^2) \quad (۱۵)$$

به این ترتیب، نابرابری مطلوب به دست می آید، یعنی داریم

$$|E| \leq \frac{1}{6} B (|x-x_0| + |y-y_0|)^2. \quad (۱۶)$$

فرمول تیلر برای توابع دومتغیره فرمول

$$F'(t) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

از معادله (۲) را می توان بدین صورت تعبیر کرد که اگر عملگر

مشتقات جزئی موجود در همه جملات بجز جمله آخر را باید در $(0, 0)$ محاسبه کرد، اما مشتق موجود در جمله آخر را باید در (cy, cx) ، نقطه‌ای واقع بر پاره خط گذرنده از مبدأ و (x, y) ، به دست آورد.

مثال ۱ با استفاده از فرمول تیلر، یک چندجمله‌ای درجه دوم بیابید که تابع زیر را در نزدیکی مبدأ تقریب بزند

$$f(x, y) = \sin x \sin y.$$

اگر $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ ، دقت این تقریب چقدر است؟

حل: در معادله (۱۹) اگر فرض کنیم $n=2$ ، داریم

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + (xf_x + yf_y) \\ &+ \frac{1}{2!}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) \\ &+ \frac{1}{6}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} \\ &+ 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy})(cx, cy) \end{aligned}$$

که در آن، همه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم باید در مبدأ محاسبه شوند، و مشتقات جزئی مرتبه سوم در (cx, cy) با مقادیر

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin x \sin y \\ f(0, 0) &= \sin x \sin y|_{(0, 0)} = 0 \\ f_x(0, 0) &= \cos x \sin y|_{(0, 0)} = 0 \\ f_y(0, 0) &= \sin x \cos y|_{(0, 0)} = 0 \\ f_{xx}(0, 0) &= -\sin x \sin y|_{(0, 0)} = 0 \\ f_{xy}(0, 0) &= \cos x \cos y|_{(0, 0)} = 1 \\ f_{yy}(0, 0) &= -\sin x \sin y|_{(0, 0)} = 0 \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned} \sin x \sin y \\ \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2!}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)) \end{aligned}$$

یا

$$\sin x \sin y \approx xy.$$

این، تقریب درجه دوم متعارف $\sin x \sin y$ در نزدیکی مبدأ است.

قرار دهیم و جمله باقیمانده مناسب را به آن بیفزاییم به فرمول زیر دست می‌یابیم.

فرمول تیلر $f(x, y)$ در نقطه (a, b)

فرض کنید که $f(x, y)$ و همه مشتقات جزئی آن، تا مرتبه $n+1$ ام، در سراسر یک ناحیه مستطیلی به مرکز نقطه‌ای چون (a, b) پیوسته باشند. در این صورت، در سراسر R داریم

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + (hf_x + kf_y)_{(a, b)} \\ &+ \frac{1}{2!}(h^2f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2f_{yy})_{(a, b)} \\ &+ \frac{1}{3!}(h^3f_{xxx} + 3h^2kf_{xxy} \\ &+ 3hk^2f_{xyy} + k^3f_{yyy})_{(a, b)} \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \Big|_{(a, b)} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f \Big|_{(a+ch, b+ck)} \end{aligned} \quad (18)$$

مشتقات موجود در همه جملات مگر جمله آخر را باید در (a, b) محاسبه کرد. مشتق موجود در جمله آخر باید در نقطه‌ای چون $(a+ch, b+ck)$ واقع بر پاره خط گذرنده از (a, b) و $(a+h, b+k)$ محاسبه شود.

اگر $(a, b) = (0, 0)$ و اگر h و k را به صورت متغیرهای مستقل تلقی کنیم، معادله (۱۸) به صورت ساده‌تر زیر درمی‌آید.

فرمول تیلر $f(x, y)$ در مبدأ

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + xf_x + yf_y \\ &+ \frac{1}{2!}(x^2f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2f_{yy}) \\ &+ \frac{1}{3!}(x^3f_{xxx} + 3x^2yf_{xxy} \\ &+ 3xy^2f_{xyy} + y^3f_{yyy}) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f \Big|_{(cx, cy)}. \end{aligned} \quad (19)$$

خطای این تقریب برابر است با

$$E(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx, cy)}.$$

قدر مطلق مشتقهای مرتبه سوم هرگز از ۱ تجاوز نمی‌کند زیرا این مشتقها حاصلضربهای سینوس و کسینوس اند. همچنین، $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ پس

$$\begin{aligned} |E(x, y)| &\leq \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) \\ &\leq \frac{1}{6}(0.1)^3 \\ &\leq 0.00134. \end{aligned}$$

خطای این تقریب مادام که $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ ، از ۰.۰۰۱۳۴ تجاوز نخواهد کرد. ■

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۶، با استفاده از فرمول تیلر یک چندجمله‌ای درجه دوم بیابید که $f(x, y)$ را در نزدیکی مبدأ تقریب بزند.

$$1. f(x, y) = e^x \cos y$$

$$2. f(x, y) = e^x \ln(1+y)$$

$$3. f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$4. f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

$$5. f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$$

$$6. f(x, y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$$

۷. با استفاده از فرمول تیلر یک تقریب درجه دوم برای $f(x, y) = \cos x \cos y$ در نزدیکی مبدأ بیابید. اگر $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ ، خطای تقریب را برآورد کنید.

۸. با استفاده از فرمول تیلر یک تقریب درجه دوم برای $e^x \sin y$ در نزدیکی مبدأ بیابید. اگر $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ ، خطای تقریب را برآورد کنید.

۹. کران خطای تقریبهای خطی توابع سه متغیره (بخش ۲.۱۷ ناابری ۱۹)

الف) فرض کنید که $f(x, y, z)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آن در سراسر یک ناحیه مکعب مستطیلی R به مرکز نقطه $P(a, b, d)$ پیوسته باشند. همچنین فرض کنید نمودهای h, k و m آنقدر کوچک باشند که پاره خط PS گذرنده از P و نقطه $S(a+h, b+k, d+m)$ در درون R قرار گیرد. PS را با معادلات زیر پارامتری کنید

$$x = a + th, \quad y = b + tk, \quad z = d + tm, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

قضیه تیلر را در مورد تابع

$$F(t) = f(a + th, b + tk, d + tm)$$

به کار ببرید و نشان دهید که به ازای c بی بین ۰ و ۱ داریم

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, d+m) &= f(a, b, d) + hf_x(a, b, d) \\ &\quad + kf_y(a, b, d) + mf_z(a, b, d) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[h^2 f_{xx} + k^2 f_{yy} + m^2 f_{zz} + 2hkf_{xy} \right. \\ &\quad \left. + 2hmf_{xz} + 2kmf_{yz} \right]_{(a+ch, b+ck, d+cm)} \end{aligned} \quad (6')$$

این، صورت سه متغیره معادله (۶) این بخش است.

ب) با استفاده از معادله (۶') قسمت (الف)، تا برابری (۱۹) از بخش ۲.۱۷ را به دست آورید.

۱۰. قضیه مقدار میانگین برای توابع دومتغیره

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) &= f_x(x+\theta h, y+\theta k)h \\ &\quad + f_y(x+\theta h, y+\theta k)k \\ 0 &< \theta < 1 \end{aligned}$$

را با فرضهای مناسبی در مورد f اثبات کنید. این فرضها چه باید باشند؟ (قضیه مقدار میانگین برای توابع یک متغیره را در مورد $F(t) = f(x+ht, y+kt)$ به کار ببندید.)

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. راهی برای یافتن مقادیر اکسترمم تابعی چون $f(x, y)$ بیابید که خود و مشتقات جزئی مرتبه اول و دومش (الف) در یک نقطه درونی دامنه، و (ب) در یک نقطه مرزی، دامنه پیوسته باشند. مثالهایی بیاورید.

۲. چگونه باید به جستجوی مقادیر اکسترمم تابعی چون $f(x, y)$ در امتداد یک خم مشتقپذیر $x = x(t)$ ، $y = y(t)$ واقع در دامنه تابع پرداخت؟ مثالی بیاورید.

۳. R : ناحیه مربعی شکل محصور بین خطهای $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$.

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 2 \quad ۴$$

۵. R : ناحیه مستطیلی شکل واقع در ربع اول که به محاورهای مختصات و خطوط $x = 10$ و $y = 4$ محدود است.

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y \quad ۵$$

۶. R : ناحیه مثلثی شکلی که از بالا به محور x ، از پایین به خط $y = x + 2$ ، و از چپ به خط $x = 2$ محدود است.

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16 \quad ۶$$

۷. R : ناحیه مثلثی واقع در بالای خط $y = -2$ ، زیر خط $y = x$ ، و سمت چپ خط $x = 2$.

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 \quad ۷$$

۸. R : ناحیه مربعی محصور بین خطوط $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$.

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1 \quad ۸$$

۹. R : ناحیه مربعی محصور به خطهای $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$.

۱۰. مقادیر ماکسیمم و مینیمم $f(x, y) = x^2 - y^2$ را بر قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ بیابید.

۱۱. بزرگترین و کوچکترین مقادیر z را (در صورت وجود) بر هر یک از رویه‌های زیر بیابید.

$$\text{الف) } x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$\text{ب) } x^2 + y^2 = 2z$$

$$\text{پ) } x^2 - y^2 = 2z$$

۱۲. ثابت کنید که تنها ماکسیممها و مینیممهای ممکن z بر رویه $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ در $(0, 0)$ و $(3, 3)$ به دست می‌آیند. نیز ثابت کنید که $(0, 0)$ نه ماکسیممی به دست می‌دهد و نه مینیممی. تعیین کنید که آیا z در $(3, 3)$ ماکسیمم یا مینیمم می‌شود یا نه.

۱۳. مقدار ماکسیمم تابع $xy e^{-(2x+3y)}$ را در ربع اول بیابید.

۱۴. مطلوب است نزدیکترین نقطه یا نقاط رویه $xyz = 1$ به مبدأ.

۱۵. حجم یک جعبه مکعب مستطیل شکل بسته با ابعاد V باشد. بهای هراينج مربع ورق برای ساختن جعبه به شرح زیر است: بالا و پایین a تومان، جلو و عقب b تومان، و دو وجه دیگر c تومان. ابعاد چه باشند تا بهای کل ورق مصرفی مینیمم شود؟

۱۶. مطلوب است مینیمم حجم ناحیه محصور بین صفحات $x = 0$ ،

۳. صورت خطی $L(x, y)$ يك تابع $f(x, y)$ در يك نقطه (x_0, y_0) چیست؟ کران بالایی برای خطای تقریب زدن f با L به دست دهید. برای برآوردنموهای f از چه فرمولی می‌توان استفاده کرد؟ مثالهایی بنویسید.

۴. فرض کنید که $R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ خمی واقع در دامنه يك تابع $f(x, y, z)$ باشد. ارتباط بین df/dt ، ∇f ، و $v = dR/dt$ را توصیف کنید. در نقاطی از خم که در آنها f نسبت به مقادیرش روی خم دارای ماکسیمم یا مینیمم موضعی است، درباره ∇f و v چه می‌توانید بگویید؟

۵. روش ضرایب لاگرانژ را توصیف کنید، و تعبیر هندسی آن را در مسأله ماکسیمم یا مینیمم کردن تابعی چون $f(x, y)$ با قید $g(x, y) = 0$ بیان کنید.

۶. اگر موضوع ضرایب لاگرانژ با دوقید را مطالعه کرده‌اید، روش کلی یافتن مقادیر اکسترمم يك تابع $f(x, y, z)$ با قیدهای همزمان $g_1(x, y, z) = 0$ و $g_2(x, y, z) = 0$ را شرح دهید.

۷. برخی از خمهای تراز $f(x, y) = 2x + 3y$ را رسم کنید و نقاطی از خم $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ را بیابید که (الف) f را ماکسیمم کنند، (ب) f را مینیمم کنند. آیا معقول به نظر می‌رسد که خم تراز f در هر یک از این نقاط الزاماً بر خم $g(x, y) = 0$ در هر یک از همین نقاط مماس باشد؟ آیا این مطلب درست است؟

۸. اگر مبحث فرمول تیلر برای يك تابع $f(x, y)$ (بخش ۴.۱۷) را مطالعه کرده‌اید، فرمول را ذکر کنید و به کمک آن، يك تقریب درجه دوم برای $f(x, y) = e^{x+y}$ در نزدك مبدأ به دست آورید. اگر $|x| \leq 0.1$ و $|y| \leq 0.1$ ، چگونگی برآورد کردن خطای این تقریب را نشان دهید.

مسأله‌های گوناگون

در مسائل ۱-۸، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x, y)$ را بر ناحیه R بیابید.

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y \quad ۱$$

R : ناحیه مثلثی شکلی که خط $x + y = 4$ از ربع اول جدا می‌کند.

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1 \quad ۲$$

R : ناحیه مستطیلی شکل واقع در ربع اول که به محاورهای مختصات و خطهای $x = 4$ و $y = 2$ محدود است.

$$f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x \quad ۳$$

$z=0$ ، $y=0$ و يك صفحه مماس بر بیضیوار زیر در يك نقطه واقع در يك هشتم اول

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

۱۶. قضیه زیر را ثابت کنید: اگر $f(x, y)$ بر يك ناحیه R تعریف بشود، و f_x و f_y وجود داشته و در R کراندار باشند، آنگاه $f(x, y)$ در R پیوسته است. (فرض کراندار بودن الزامی است).

۱۷. استدلالی برای وجود دومتغیره دوش ضرایب لاگرانژ. فرض کنید که $f(x, y)$ و $g(x, y)$ مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند و بخواهیم مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی f با قید $g(x, y) = 0$ را بیابیم. برای یافتن این مقادیر f ، مقادیر x ، y ، و λ را چنان می یابیم که در معادله های زیر به طور همزمان صدق کنند

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{و} \quad g(x, y) = 0.$$

برای اثبات این مطلب، فرض کنید P_0 نقطه ای از خم $g(x, y) = 0$ باشد که در آن f نسبت به مقادیر دیگرش بر این خم يك مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد. حال به طی کردن مراحل زیر بپردازید.

مرحله ۱: فرض کنید $x = x(t)$ و $y = y(t)$ معادلات پارامتری خم $g(x, y) = 0$ در يك بازه شامل P_0 باشند، نشان دهید که در P_0 ، $df/dt = 0$ و در نتیجه ∇f بر بردار سرعت خم در P_0 عمود است، (فرض کنید که هیچ يك از این دو بردار در P_0 صفر نمی شود).

مرحله ۲: با تلفیق نتیجه مرحله ۱ با نتیجه مذکور درمسأله ۵۷ از مسأله های گوناگون فصل ۱۶ نشان دهید که ∇f و ∇g در P_0 موازی اند و در نتیجه به ازای عددی چون λ در P_0 داریم

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

انتگرالهای چندگانه

چشم انداز

در این فصل چگونگی محاسبه انتگرالهای چندگانه یعنی انتگرالهای توابع دو یا چندمتغیره تشریح می شود. انتگرالهای چندگانه درست مانند انتگرالهای توابع يك متغیره تعریف می شوند و درعین حال، تعبیر گسترده تری دارند.

نخست با انتگرالهای دوگانه روی نواحی واقع در صفحه آشنا می شویم. با استفاده از این انتگرالها مساحت نواحیی که مرزهای خمیده دارند، گشتاورها، جرم، مرکز جرم، و شعاعهای چرخش ورقه های تخت نازک با شکلهای غیر منظم محاسبه می شوند. روشهای انجام این محاسبات را در مختصات قائم و قطبی تشریح و درباره راههای دیگر تعویض متغیرها بحث می کنیم. پس از آن به انتگرالهای سه گانه می پردازیم، انتگرالهایی که به کمک آنها حجم، گشتاورها، جرم، مرکز جرم، و شعاعهای چرخش اجسام منظم و غیر منظم در فضا محاسبه می شوند. چگونگی انجام این محاسبات در مختصات قائم، استوانه ای، و کروی را تشریح می کنیم و درباره جانشانیها در انتگرالهای سه گانه در حالت کلیتر بحث خواهیم کرد.

در فصل بعد انتگرالهای چندگانه را با بردارها می آمیزیم و مساحت رویه های خمیده و آهنگ گردش سیالات و جریان آنها را در دو و سه بعد محاسبه می کنیم. انتگرالهای چندگانه نقش مهمی در آمار، مهندسی برق، و نظریه فیزیکی الکترومغناطیس دارند، اما در این فصل به این کار بردها نخی اهیم پرداخت.

۱۰۱۸ انتگرالهای دوگانه

در این بخش چگونگی محاسبه انتگرال تسابعی چون $f(x, y)$ بر ناحیه ای محصور و واقع در صفحه xy تشریح می شود. این انتگرال را انتگرال دوگانه f بر این ناحیه می نامیم. بحث را با نواحی مستطیلی آغاز می کنیم و سپس به نواحیی که شکل کلیتری دارند تعمیم می دهیم.

خواهید دید که بین انتگرالهای دوگانه و انتگرالهای «یگانه» [ساده]، یعنی انتگرالهایی که در فصل ۴ در مورد توابع يك متغیره تعریف کردیم، شباهتهای فراوانی وجود دارد. در واقع، این ارتباط بسیار قوی است. قضیه اصلی محاسبه انتگرالهای دوگانه حاکی است که هر انتگرال دوگانه ای را می توان به کمک روشهای انتگرالگیری از انتگرالهای یگانه که بر آنها تسلط پیدا کرده ایم، طی چند مرحله به دست آورد.

انتگرالهای دوگانه روی نواحی مستطیلی

فرض می کنیم $f(x, y)$ بر ناحیه مستطیلی R زیر تعریف شود

$$R: a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

و فرض می کنیم R مطابق شکل ۱۰۱۸ با شبکه ای از خطوط موازی با محورهای x و y پوشیده شده باشد. این خطوط، R را به قطعات کوچکی تقسیم می کنند که مساحت هر کدام

میل می کنند. برهان وجود و یکتایی این حد در مورد تابع پیوسته‌ای چون f در کتابهای پیشرفته‌تر آمده است. پیوستگی f شرطی کافی برای وجود انتگرال دوگانه است، اما شرط لازم نیست. این حد در مورد بسیاری از توابع ناپیوسته هم وجود دارد.

ویژگیهای انتگرالهای دوگانه

انتگرالهای دوگانه توابع پیوسته مانند انتگرالهای یگانه این توابع ویژگیهایی جبری دارند که در محاسبات و کاربردها سودمندند. این ویژگیها چون در مورد مجموعههایی که به کمک آنها انتگرالها را تعریف می کنیم برقرارند، در مورد انتگرالها هم برقرارند. برخی از این ویژگیها عبارتند از

۱.

$$\int_R \int k f(x, y) dA = k \int_R \int f(x, y) dA \quad (\text{عدد دلخواه } k)$$

$$\int_R \int (f(x, y) + g(x, y)) dA = \int_R \int f(x, y) dA + \int_R \int g(x, y) dA \quad ۲$$

$$\int_R \int (f(x, y) - g(x, y)) dA = \int_R \int f(x, y) dA - \int_R \int g(x, y) dA \quad ۳$$

$$\int_R \int f(x, y) dA \geq 0 \quad ۴$$

(اگر بر ناحیه R داشته باشیم $f(x, y) \geq 0$)

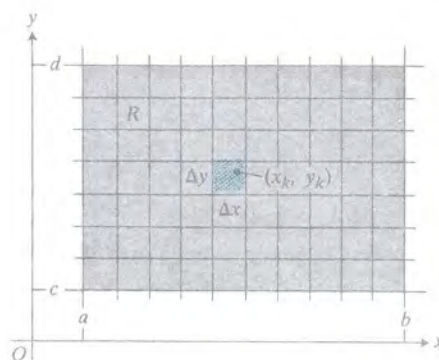
$$\int_R \int f(x, y) dA \geq \int_R \int g(x, y) dA \quad ۵$$

(اگر بر ناحیه R داشته باشیم $f(x, y) \geq g(x, y)$)

این ویژگیها نظیر ویژگیهای ۱ تا ۵ بخش ۵.۴ است و اثباتهایشان نیز مشابه است و در اینجا آنها را نمی آوریم. ویژگی دیگری نیز به نام ویژگی «جمعپذیری دامنه‌ها» وجود دارد:

۶.

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{R_1} \int f(x, y) dA + \int_{R_2} \int f(x, y) dA$$



۱.۱۸ شبکه مستطیلی، ناحیه R را به مستطیل‌های کوچکی با مساحت $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ تقسیم می کند.

برابر است با

$$\Delta A = \Delta x \Delta y.$$

این قطعات را به ترتیبی شماره گذاری می کنیم:

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n.$$

در هر قطعه‌ای مانند قطعه ΔA_k نقطه (x_k, y_k) را برمی گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (۱)$$

اگر f در سراسر R پیوسته باشد، با کوچک کردن خانه‌های شبکه یعنی میل دادن Δx و Δy به صفر، مجموع مشخص شده در رابطه (۱) به حدی میل می کند که آن را انتگرال دوگانه f روی R می نامیم. نماد انتگرال دوگانه عبارت است از

$$\int_R \int f(x, y) dx dy \quad \text{یا} \quad \int_R \int f(x, y) dA$$

بنابراین

$$\int_R \int f(x, y) dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (۲)$$

مانند حالتی که با توابع یک متغیره سروکار داشتیم، به شرط اینکه Δx و Δy هر دو به صفر میل کنند مجموعه‌ها به این حد میل می کنند و به نحوه تقسیم بندی بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ که R را مشخص می کنند بستگی ندارند. همچنین این حد به ترتیب شماره گذاری مساحت‌های ΔA_k و نحوه انتخاب نقطه (x_k, y_k) در هر یک از ΔA_k ها بستگی ندارد. مقدار هر یک از مجموعه‌های تقریب زننده S_n به چگونگی این انتخابها بستگی دارد، اما در نهایت این مجموعه‌ها به حد واحدی

بنامیم، تقریب می‌زنند. این حجم را چنین تعریف می‌کنیم

$$\text{حجم} = \lim S_n = \iint_R f(x, y) dA. \quad (3)$$

همان‌طور که انتظار می‌رود، این روش عامتر محاسبهٔ حجم با روشهای مورد بحث در فصل ۵ مطابقت دارد (اگر چنین نبود، این روش بی‌فایده بود). ولی ما در اینجا این مطلب را اثبات نمی‌کنیم.

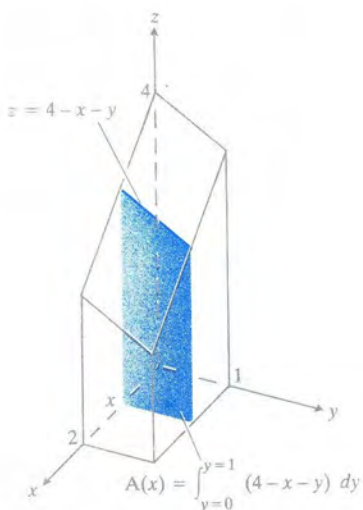
قضیهٔ فوینی در مورد محاسبهٔ انتگرالهای دوگانه

اکنون آماده‌ایم که نخستین انتگرال دوگانه را محاسبه کنیم. فرض کنیم می‌خواهیم حجم زیر صفحه $z = 4 - x - y$ را روی ناحیهٔ مستطیلی $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ که در صفحهٔ xy واقع است بیابیم. از روش برش‌دادن مذکور در بخش ۳۰۵ استفاده می‌کنیم و مطابق شکل ۳۰۱۸ برشهایی را عمود بر محور x در نظر می‌گیریم. در این صورت حجم برابر است با

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x) dx \quad (4)$$

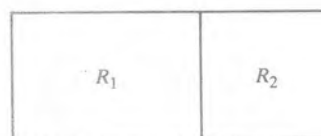
که در آن $A(x)$ مساحت سطح مقطع در x است. $A(x)$ را می‌توان به ازای هر x به کمک انتگرال زیر محاسبه کرد

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y) dy \quad (5)$$



۳۰۱۸ مساحت سطح مقطع A با ثابت نگاه داشتن x و انتگرال‌گیری نسبت به y به دست می‌آید.

که وقتی برقرار است که R مطابق شکل ۲۰۱۸ اجتماعی باشد از دومتطیل R_1 و R_2 که تداخلی باهم نداشته باشند. اثبات این مطلب را هم ذکر نمی‌کنیم.



$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

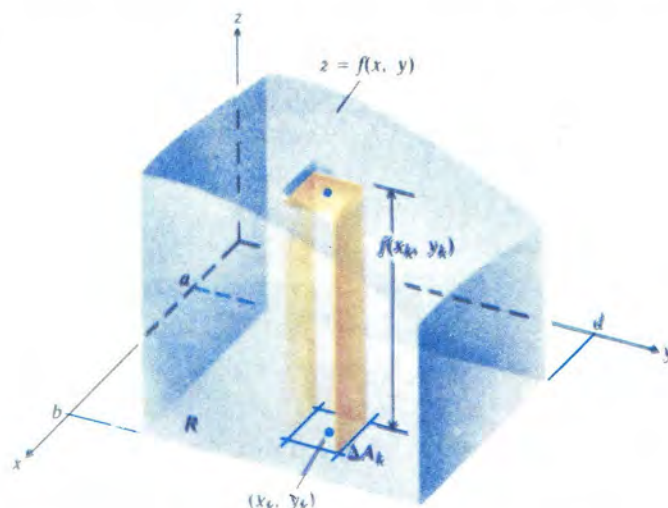
۲۰۱۸ انتگرالهای دوگانه هم مانند انتگرالهای یکانه دارای ویژگی جمعپذیری دامنه‌ها هستند.

تعبیر انتگرالهای دوگانه به صورت حجم

وقتی $f(x, y)$ مثبت باشد، انتگرال دوگانه f روی ناحیهٔ مستطیلی R را می‌توان به صورت حجم منشوری تعبیر کرد که از پایین به R و از بالا به رویهٔ $z = f(x, y)$ محدود است (شکل ۳۰۱۸). هر جملهٔ $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ از مجموع

$$S_n = \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

برابر است با حجم منشور قائمی با قاعدهٔ مستطیل شکل به مساحت ΔA_k . بنابراین مجموع S_n آنچه را که می‌خواهیم حجم کل جسم



۳۰۱۸ تقریب زدن اجسام با منشورهای با قاعدهٔ مستطیل، به آنجا می‌انجامد که حجم هر منشوری را به صورت انتگرال دوگانه تعریف کنیم. حجم منشوری که در این شکل دیده می‌شود انتگرال دوگانهٔ $f(x, y)$ روی ناحیهٔ قاعدهٔ R است.

مقطع نمونه به صورت تابعی از y برابر است با

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4-x-y) dx \quad (7)$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y.$$

بنابراین حجم کل جسم برابر است با

$$\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} A(y) dy = \int_{y=0}^{y=1} (6-2y) dy$$

$$= \left[6y - y^2 \right]_0^1 = 5$$

که با محاسبات قبلی ما سازگار است.

باز هم می توان دستورالعملی برای محاسبه حجم به صورت یک انتگرال مکرر عرضه کرد

$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4-x-y) dx dy.$$

عبارت طرف راست حاکی است که حجم را می توان با انتگرالگیری از $4-x-y$ نسبت به x از $x=0$ تا $x=2$ (همان طور که در رابطه ۷ انجام دادیم) و سپس با انتگرالگیری از نتیجه حاصل نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ به دست آورد. ترتیب انتگرالگیری در این انتگرال مکرر نخست x است بعد y ، یعنی عکس ترتیبی که در (۶) به کار بردیم.

این در روش محاسبه حجم به کمک انتگرالهای مکرر چه ارتباطی با انتگرال دوگانه

$$\iint_R (4-x-y) dA$$

روی مستطیل $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ دارند؟ پاسخ این است که هر دوش، مقدار این انتگرال دوگانه را به دست می دهند. قضیه ای که گوید فوینی (۱۸۷۹-۱۹۴۳) ثابت کرد در ۱۹۰۷ منتشر کرد، حاکی است که انتگرال دوگانه هر تابع پیوسته ای روی یک مستطیل را می توان همواره به صورت یک انتگرال مکرر با هر ترتیب دلخواهی از انتگرالگیری محاسبه کرد. (فوینی این قضیه را در حالت کلیتری ثابت کرد، ولی ما آن را به صورتی که در اینجا به کارمان بیاید، بیان می کنیم.)

قضیه ۱

قضیه فوینی (صورت اول)

اگر $f(x, y)$ بر ناحیه مستطیلی

$$R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$$

که برابر است با مساحت زیر خم $z = 4-x-y$ در صفحه ای که در x حجم را قطع می کند. برای محاسبه $A(x)$ ، x را ثابت می گیریم و نسبت به y انتگرال می گیریم. حجم کل جسم از ترکیب (۴) و (۵) به دست می آید

$$\text{حجم} = \int_{x=0}^{x=2} A(x) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4-x-y) dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx \quad (6)$$

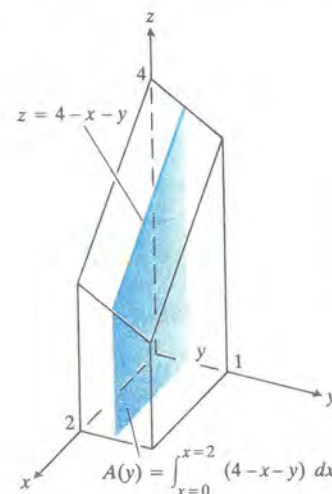
$$= \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{3}{2} - x \right) dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5.$$

اگر بخواهیم فقط دستورالعملی برای محاسبه حجم بنویسیم بدون اینکه انتگرالی بگیریم، می توانیم چنین بنویسیم

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4-x-y) dy dx.$$

عبارت سمت راست، انتگرال مکرر نام دارد و حاکی است که حجم را می توان با ثابت نگاه داشتن x و انتگرالگیری از $4-x-y$ نسبت به y از $y=0$ تا $y=1$ و سپس با انتگرالگیری از عبارت به دست آمده بر حسب x ، نسبت به x از $x=0$ تا $x=2$ ، به دست آورد.

اگر مطابق شکل ۵۰۱۸ حجم را به کمک برشهای عمود بر محور y حساب می کردیم چه می شد؟ در این حالت مساحت سطح



۵۰۱۸ مساحت سطح مقطع با ثابت گرفتن y و انتگرالگیری نسبت به x به دست می آید.

بامعکوس کردن ترتیب انتگرالگیری نیز همین نتیجه به دست می آید

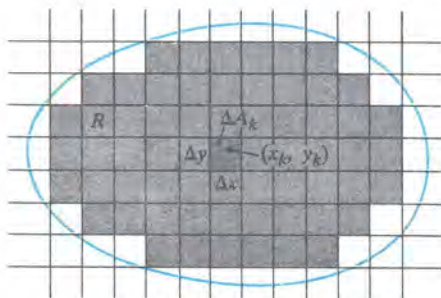
$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2 \right]_{y=-1}^{y=1} dx \\ &= \int_0^2 [1 - 3x^2 - (-1 - 3x^2)] dx \\ &= \int_0^2 2 dx = 4. \end{aligned}$$

انتگرالهای دوگانه روی نواحی غیرمستطیلی محصور

برای تعریف انتگرال دوگانه تابعی چون $f(x, y)$ روی یک ناحیه غیرمستطیلی محصور مانند ناحیه نشان داده شده در شکل ۶.۱۸، بار دیگر فرض می کنیم R را یک شبکه مستطیلی پوشانده است. اما در مجموع جزئی، تنها مساحت آن عده از اجزاء ناحیه یعنی $\Delta A = \Delta x \Delta y$ هایی را که کاملاً درون ناحیه قرار دارند (و در شکل با سایه مشخص شده اند) منظور می کنیم. برای شماره گذاری قطعات ترتیبی اتخاذ می کنیم، نقطه دلخواه (x_k, y_k) را در هر ΔA_k برمی گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

تنها تفاوت این مجموع با مجموع مشخص شده در رابطه (۱) که در مورد نواحی مستطیلی بود، این است که در اینجا ممکن است مساحت های ΔA_k همه R را نپوشانند. ولی هرچه تعداد خانه های شبکه بیشتر شود و تعداد جملات S_n افزایش یابد، قسمت بیشتری از R پوشانده می شود. اگر f پیوسته باشد و مرز R از تعدادی متناهی پاره خط یا خم هموار تشکیل شده باشد که آنها به انتها به یکدیگر وصل شده باشند، آنگاه مجموعه های S_n وقتی که Δx و Δy به صفر میل می کنند حدی خواهند داشت. این حد را انتگرال دوگانه f



۶.۱۸ یک شبکه مستطیلی، یک ناحیه غیرمستطیلی محصور را به تعدادی خانه تقسیم می کند.

پوسته باشد، داریم

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

قضیه فوبینی حاکی است که انتگرالهای دوگانه روی مستطیلها را می توان همواره به صورت انتگرالهای مکرر محاسبه کرد. یعنی می توان یک انتگرال دوگانه را با انتگرالگیری از یک متغیر در هر بار، با استفاده از روشهای انتگرالگیری که در مورد توابع یک متغیره می دانیم، محاسبه کرد.

قضیه فوبینی همچنین حاکی است که برای انتگرالگیری از انتگرال دوگانه هر ترتیبی را می توان برگزید. همان طور که در مثال ۳ خواهیم دید، این نتیجه باعث سهولت فوق العاده در کار است. به خصوص وقتی که حجمی را از راه برش دادن محاسبه می کنیم می توانیم هم صفحات عمود بر محور x را به کار ببریم و هم صفحات عمود بر محور y را. در هر حال نتیجه یکی است.

از اینها مهمتر اینکه، قضیه فوبینی در مورد هرتابع پیوسته ای چون $f(x, y)$ برقرار است. به خصوص f می تواند روی R هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی داشته باشد، و همان طور که بعداً خواهیم دید انتگرالهایی که با استفاده از قضیه فوبینی محاسبه می شوند می توانند علاوه بر حجم چیزهای دیگری را نیز نمایش دهند.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه $\iint_R f(x, y) dA$ به ازای

$$f(x, y) = 1 - 6x^2y$$

$$R: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1.$$

حل: با استفاده از قضیه فوبینی داریم

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy = \left[2y - 8y^2 \right]_{-1}^1 \\ &= (2 - 8) - (-2 - 8) = 4. \end{aligned}$$

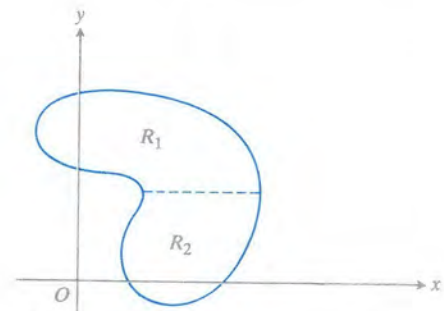
روی R می‌نامیم

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum f(x_k, y_k) \Delta A_k.$$

ممکن است این حد تحت محدودیتهای کمتری نیز وجود داشته باشد، اما در اینجا به این بحث نمی‌پردازیم.

انتگرالهای دوگانه توابع پیوسته روی نواحی غیرمستطیلی همه ویژگیهای جبری را که برای انتگرالهای روی نواحی مستطیلی برشمردیم، دارند. ویژگی جمعپذیری دامنه‌ها که نظیر ویژگی ۶ است حاکی است که اگر R شامل دو ناحیه نامتناهی R_1 و R_2 باشد که مرزهایشان از پاره‌خطها یا خمهای هموار تشکیل شده باشند (مثلا ناحیه مشخص شده در شکل ۷.۱۸)، آنگاه

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_{R_1} f(x, y) dA \\ &+ \iint_{R_2} f(x, y) dA. \end{aligned} \quad ۶$$



$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

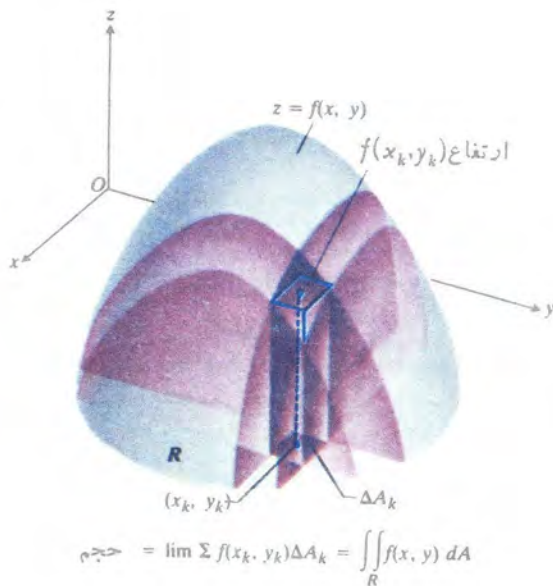
۷.۱۸ ویژگی جمعپذیری دامنه‌ها که قبلا در مورد نواحی مستطیلی عنوان شد، در مورد نواحی دیگر نیز برقرار است.

اگر $f(x, y)$ روی R مثبت و پیوسته باشد (شکل ۸.۱۸)، حجم ناحیه فضایی بین R و رویه $z = f(x, y)$ را مثل گذشته برابر با $\iint_R f(x, y) dA$ تعریف می‌کنیم.

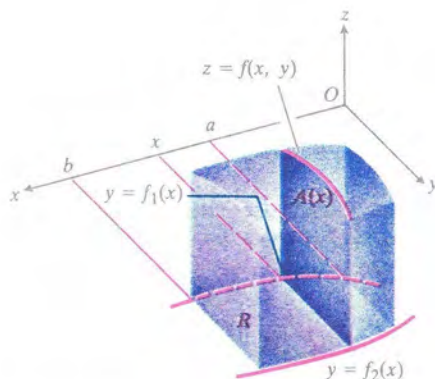
اگر R ناحیه‌ای واقع در صفحه xy مطابق شکل ۹.۱۸ باشد که از «بالا» و «پایین» به خمهای $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ از طرفین به خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود باشد، باز هم می‌توان حجم را با روش برش دادن محاسبه کرد. نخست مساحت سطح مقطع را می‌یابیم

$$A(x) = \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} f(x, y) dy$$

و سپس از $A(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ انتگرال می‌گیریم و حجم



۸.۱۸ تعریف حجم اجسامی که قاعده‌هایشان خمیده است. ما نند تعریف حجم اجسامی است که قاعده‌هایشان مستطیل شکل است.



۹.۱۸ مساحت برش قائمی که در این شکل دیده می‌شود عبارت است از

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy.$$

حجم جسم با انتگرال گرفتن از این مساحت از $x = a$ تا $x = b$ به دست می‌آید.

را به صورت یک انتگرال مکرر به دست می‌آوریم

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (۸)$$

همین‌طور اگر R ناحیه‌ای مانند ناحیه شکل ۱۰.۱۸ باشد که به خمهای $x = g_1(y)$ و $x = g_2(y)$ و خطوط $y = c$ و

مثال ۲ مطلوب است حجم منشوری که قاعده پایینی اش مثلثی باشد واقع در صفحه xy و محدود به محور x و خطوط $y=x$ و $x=1$ و قاعده بالایی اش بر صفحه زیر واقع باشد

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

حل: شکل ۱۱.۱۸ (الف) را ببینید. به ازای هر x بین ۰ و ۱، y می تواند از $y=0$ تا $y=x$ تغییر کند (شکل ۱۱.۱۸ ب). بنا بر این

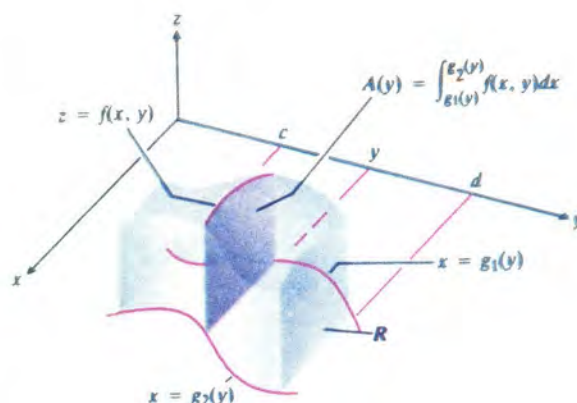
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1. \end{aligned}$$

وقتی ترتیب انتگرالگیری معکوس شود (شکل ۱۱.۱۸ ب)، انتگرال حجم عبارت است از

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 1. \end{aligned}$$

هر دو انتگرال، چنانکه باید، برابرند.

گرچه قضیه فوینی به ما اطمینان می دهد که یک انتگرال دوگانه را می توان به صورت یک انتگرال مکرر با هر ترتیب دلخواهی از انتگرالگیری محاسبه کرد، اما چنانکه مثال بعدی نشان می دهد ممکن است یافتن مقدار یک انتگرال آسانتر از یافتن مقدار انتگرال دیگر باشد.



۱۱.۱۸ حجم جسمی که در شکل دیده می شود برابر است با

$$\int_c^d A(y) dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

$y=d$ محدود باشد، آنگاه حجمی که از روش برش دادن به دست می آید عبارت است از انتگرال مکرر زیر

$$\text{حجم} = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

این مطلب که انتگرالهای مکرر در روابط (۸) و (۹) هر دو حجمی را به دست می دهند که بنا به تعریف عبارت است از انتگرال دوگانه f روی R ، نتیجه صورت قویتر قضیه فوینی است که در زیر می آید.

قضیه ۲

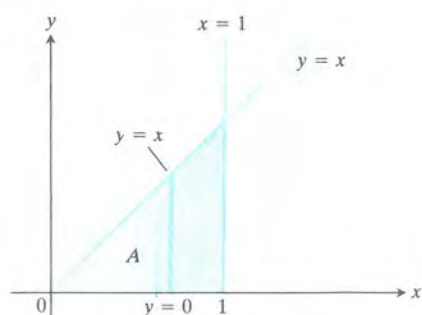
قضیه فوینی (صورت قویتر)

فرض می کنیم $f(x, y)$ روی ناحیه ای چون R پیوسته باشد.
۱. اگر تعریف R عبارت باشد از: $a \leq x \leq b$ ، $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ با این شرط که f_1 و f_2 بر $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

۲. اگر تعریف R عبارت باشد از: $c \leq y \leq d$ ، $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ با این شرط که g_1 و g_2 بر $[c, d]$ پیوسته باشند، آنگاه

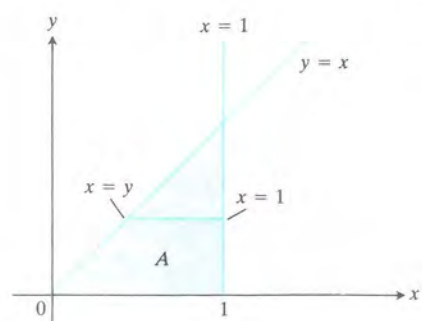
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy.$$



(ب) حدود انتگرالگیری

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} F(x, y) dy dx.$$

وقتی که نخست نسبت به y انتگرال می‌گیریم، روی یک خط قائم واقع در A انتگرال می‌گیریم و سپس انتگرال دیگری می‌گیریم تا همه خطوط قائم واقع در A را شامل شود.

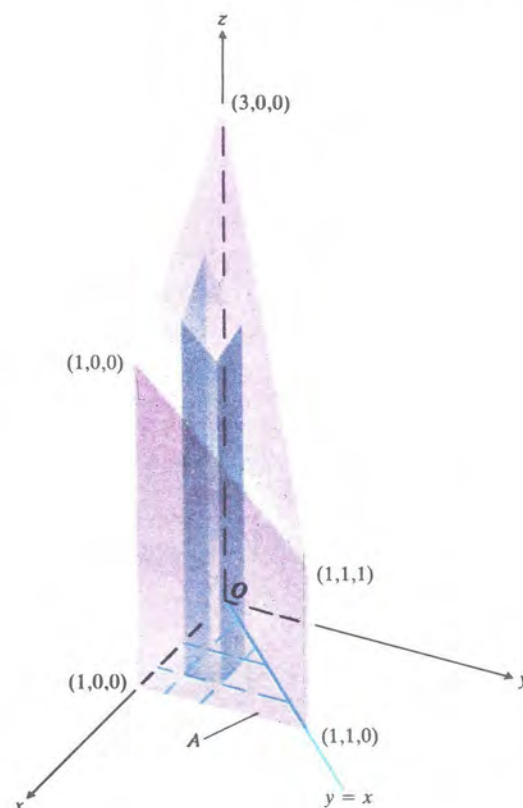


(پ) حدود انتگرالگیری

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} F(x, y) dx dy.$$

وقتی که نخست نسبت به x انتگرال می‌گیریم، روی یک خط افقی واقع در A انتگرال می‌گیریم و سپس انتگرال دیگری می‌گیریم تا همه خطوط افقی واقع در A را شامل شود.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left(y \frac{\sin x}{x} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \sin x dx \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46. \end{aligned}$$



(الف) منشوری که قاعده‌اش مثلثی شکل و در صفحه xy است. حجم این منشور را به صورت یک انتگرال دوگانه بر A تعریف می‌کنیم. برای محاسبه این انتگرال به صورت یک انتگرال مکرر، نخست نسبت به y و سپس نسبت به x یا برعکس، انتگرال می‌گیریم.

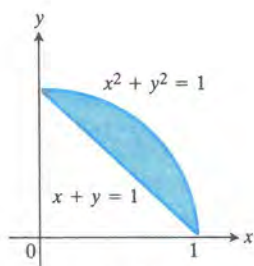
۱۱۰۱۸

مثال ۳ مطلوب است محاسبه

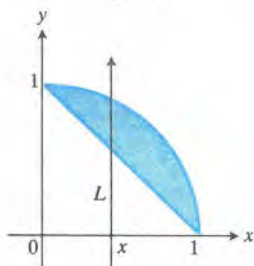
$$\iint_A \frac{\sin x}{x} dA$$

که در آن A مثلثی است واقع در صفحه xy و محدود به محور x ، خط $y=x$ و خط $x=1$.

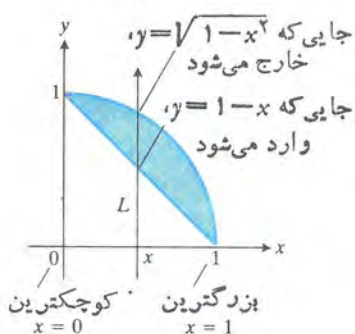
حل: شکل ۱۲۰۱۸ ناحیه انتگرالگیری را نشان می‌دهد. اگر نخست نسبت به y و سپس نسبت به x انتگرال بگیریم به دست می‌آوریم



(الف)



(ب)



(پ)

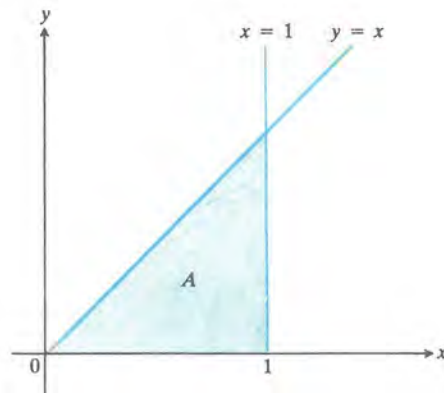
۱۳۰۱۸ اگر بخواهیم نخست نسبت به y انتگرال بگیریم ترتیب تصاویر در این شکل نشان می‌دهد که چگونه حدود انتگرالگیری را برای یک انتگرال دوگانه به دست آوریم.

نقطه خروج L از R را حسب بسالایی اختیار می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم.

مرحله ۳: حدود x را چنان برمی‌گزینیم که همه خطوط قائمی را که از R می‌گذرند، در بر بگیرند (شکل ۱۳۰۱۸ پ). انتگرال برابر است با

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

برای محاسبه همین انتگرال دوگانه به صورت یک انتگرال مکرر اما با ترتیب انتگرالگیری معکوس، از خطوط افقی استفاده



۱۲۰۱۸ ناحیه انتگرالگیری در مثال ۳.

اگر ترتیب انتگرالگیری را معکوس کنیم و بخواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$$

کار به بن بست می‌رسد زیرا $\int (\sin x/x) dx$ را نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی بیان کرد. هیچ قاعده کلی وجود ندارد که بتوان به کمک آن پیش بینی کرد که در مواردی نظیر این مسئله کدام ترتیب انتگرالگیری مناسبتر است. لذا باید بدون نگرانی انتگرالگیری را با یک ترتیب دلخواه شروع کرد و چنانچه با این ترتیب کار به بن بست رسید، ترتیب دیگر را امتحان کرد. ■

تعیین حدود انتگرالگیری

شاید دشوارترین بخش کار محاسبه یک انتگرال دوگانه تعیین حدود انتگرالگیری باشد. خوشبختانه شیوه مناسبی برای این بخش از کار وجود دارد که به شرح زیر است. اگر بخواهیم انتگرال

$$\iint_R f(x, y) dA$$

را روی ناحیه R نشان داده شده در شکل ۱۳۰۱۸ (الف) به این ترتیب محاسبه کنیم که نخست نسبت به y و سپس نسبت به x انتگرال بگیریم، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحله ۱: خط قائمی چون L را در نظر می‌گیریم که در جهت افزایش y ناحیه R را قطع کند (شکل ۱۳۰۱۸ ب).

مرحله ۲: مختص y نقطه ورود L به R را حد پایینی و مختص y

تا $y=4$ تغییر کند. در این صورت انتگرال عبارت است از

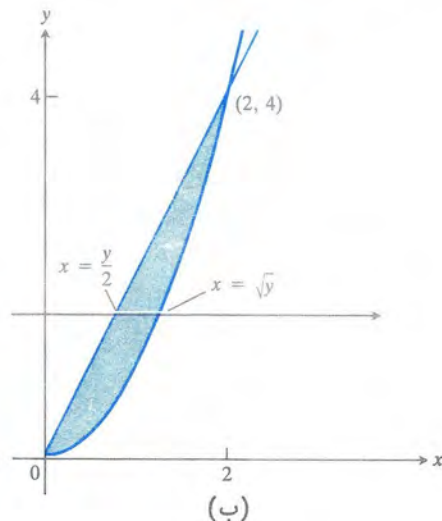
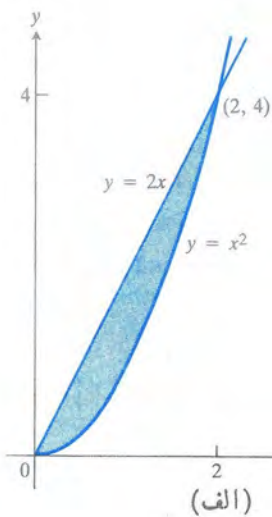
$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) dx dy.$$

مقدار انتگرال اول برابراست با

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) dy dx \\ &= \int_0^4 \left[2xy + 2y \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^4 (8x^2 + 4x - 4x^3 - 2x^2) dx \\ &= \int_0^4 (6x^2 + 4x - 4x^3) dx \\ &= \left[2x^3 + 2x^2 - x^4 \right]_{x=0}^{x=4} \\ &= 16 + 8 - 16 = 8. \end{aligned}$$

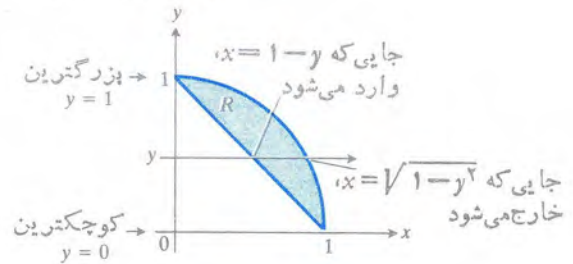
مقدار انتگرال دوم برابراست با

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left[2x^2 + 2x \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left(2y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4} - y \right) dy \\ &= \int_0^4 \left(y + 2\sqrt{y} - \frac{y^2}{4} \right) dy \\ &= \left[\frac{y^2}{2} + \frac{4}{3} y^{3/2} - \frac{y^3}{12} \right]_0^4 \\ &= 8 + \frac{4}{3}(8) - \frac{64}{3} = 8. \end{aligned}$$



می‌کنیم (شکل ۱۴۰۱۸ را ببینید) و نتیجه می‌گیریم

$$\int_{y=0}^{y=4} \int_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} f(x, y) dx dy.$$



$$\iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

۱۴۰۱۸ روش یافتن حدود انتگرالگیری در یک انتگرال دوگانه، اگر انتگرالگیری نخست نسبت به x صورت گیرد.

مثال ۴ ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرالگیری

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx$$

روی آن صورت می‌پذیرد و انتگرال معادلی بیابید که در آن ترتیب انتگرالگیری معکوس باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

حل: ناحیه انتگرالگیری از نابرابریهای $x^2 \leq y \leq 2x$ و $0 \leq x \leq 2$ به دست می‌آید. لذا این ناحیه مطابق شکل ۱۵۰۱۸ محدود است به خمهای $y=x^2$ و $y=2x$ بین $x=0$ و $x=2$. برای یافتن حدود انتگرالگیری بسا ترتیب معکوس، خطی افقی در نظر می‌گیریم که از چپ به راست از ناحیه بگذرد. این خط در $x=y/2$ به ناحیه وارد و در $x=\sqrt{y}$ از آن خارج می‌شود. برای اینکه همه این خطوط در نظر گرفته شوند، باید y از $y=0$

۱۵۰۱۸ برای اینکه انتگرال

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy dx$$

را به صورت انتگرال دوگانه‌ای با ترتیب معکوس بنویسیم (الف) ناحیه انتگرالگیری را رسم و (ب) حدود جدید انتگرالگیری را تعیین می‌کنیم. در مثال ۴ جزئیات مطلب آمده است.

۱۴. تابع $f(x, y) = x^2 + 3xy$ روی مستطیل

$$R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

۱۵. تابع $f(x, y) = 1/xy$ روی مستطیل

$$R: 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$$

۱۶. تابع $f(x, y) = y \cos xy$ روی مستطیل

$$R: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$$

در مسائل ۱۷-۲۴، ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرالگیری روی آن صورت می‌گیرد و انتگرال معادلی را بیابید که ترتیب انتگرالگیری در آن، معکوس ترتیب انتگرال مفروض باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} dy dx \quad ۱۷$$

$$\int_0^1 \int_2^{4-2x} dy dx \quad ۱۸$$

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy \quad ۱۹$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 dx dy \quad ۲۰$$

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx \quad ۲۱$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy \quad ۲۲$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy \quad ۲۳$$

$$\int_0^1 \int_0^{4-x^2} dy dx \quad ۲۴$$

در مسائل ۲۵-۳۰، انتگرال مکرر معادلی را بیابید که ترتیب انتگرالگیری آن معکوس باشد. انتگرال نگیرید. برای این کار، رسم ناحیه‌ای که انتگرالگیری بر آن صورت می‌پذیرد سودمند است.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx \quad ۲۵$$

$$\int_0^1 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad ۲۶$$

همان‌طور که بنا به قضیهٔ فوبینی انتظار می‌رود، مقدار دو انتگرال برابر است. ■

مسئله‌ها

هر يك از انتگرالهای زیر را حساب کنید و در هر مورد ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرال روی آن محاسبه می‌شود.

$$\int_0^2 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx \quad ۱$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x + y + 1) dx dy \quad ۲$$

$$\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2 y - 2xy) dy dx \quad ۳$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x + \cos y) dx dy \quad ۴$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^x x \sin y dy dx \quad ۵$$

$$\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy \quad ۶$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y dy dx \quad ۷$$

$$\int_1^2 \int_y^{y^2} dx dy \quad ۸$$

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_1^2 \int_0^{1/y} y e^{xy} dx dy \quad ۹$$

$$\int_0^1 \int_0^{e^x} e^{y/x} dy dx \quad ۱۰$$

در مسائل ۱۱-۱۶، از تابع $f(x, y)$ روی ناحیهٔ مفروض انتگرال بگیرید.

۱۱. تابع $f(x, y) = x/y$ روی ناحیه‌ای واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = x$ و $y = 2x$

۱۲. تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$ روی ناحیه‌ای مثلثی که رئوسش عبارت‌اند از $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$

۱۳. تابع $f(x, y) = y - \sqrt{x}$ روی ناحیه‌ای مثلثی که خط $x + y = 1$ از ربع اول جدا می‌کند.

۴۲. حجم زیر سهمیوار $z = x^2 + y^2$ و بالای ناحیه خاصی چون R در صفحه xy عبارت است از

$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

ناحیه را رسم کنید و حجم را به صورت یک انتگرال مکرر با ترتیب انتگرالگیری معکوس بیان کنید. این انتگرال را محاسبه کنید تا حجم به دست آید.

۴۳. قاعده پایینی جسمی ناحیه‌ای است در صفحه xy که به دایره $x^2 + y^2 = a^2$ محدود است. قاعده بالایی جسم به سهمیوار $az = x^2 + y^2$ محدود است. حجم جسم را بیابید.

۴۴. انتگرال زیر را بیابید

$$\int_0^{\pi} (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x) dx.$$

(راهنمایی: انتگرالده را به صورت یک انتگرال بنویسید.)



TOOLKIT PROGRAM

Double Integral

۲.۱۸ مساحت، گشتاور، و مرکز جرم

در این بخش چگونگی استفاده از انتگرالهای دوگانه را در محاسبه مساحت نواحی محصور [کراندار] واقع در صفحه و نیز جرم، گشتاور، مرکز جرم و شعاعهای چرخش وردهای نازکی که این نواحی را می‌پوشانند نشان می‌دهیم. این کاربردها شبیه کاربردهایی هستند که در فصل ۵ مطرح شدند، اما به کمک انتگرال دوگانه می‌توان به اشکال بسیار متنوع‌تری پرداخت.

مساحت نواحی محصور واقع در صفحه

اگر در تعریف انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای چون R که در بخش قبل مورد بحث بود، $f(x, y)$ را برابر با ۱ اختیار کنیم، مجموعه‌های جزئی به صورت ساده زیر درمی‌آیند

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \sum_{k=1}^n \Delta A_k \quad (1)$$

و آنچه را ما یلیم مساحت R بنامیم، تقریب می‌زنند. وقتی Δx و Δy به صفر میل کنند، ΔA_k ها رفته رفته ناحیه R را کاملاً می‌پوشانند

$$\int_0^1 \int_1^x e^x dy dx \quad ۲۷$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos(x+y) dy dx \quad ۲۸$$

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx \quad ۲۹$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy \quad ۳۰$$

انتگرالهای مسائل ۳۱-۳۶ را به این ترتیب محاسبه کنید که با معکوس کردن ترتیب انتگرالگیری انتگرال معادلی بیابید و سپس از آن انتگرال بگیرید.

$$\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy dx \quad ۳۱$$

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2) dx dy \quad ۳۲$$

$$\int_0^1 \int_y^1 x^y e^{xy} dx dy \quad ۳۳$$

$$\int_0^2 \int_x^2 y^x \sin xy dy dx \quad ۳۴$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{dy dx}{y^4 + 1} \quad ۳۵$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{xy}}{y-y^2} dy dx \quad ۳۶$$

۳۷. حجم جسمی را بیابید که قاعده پایینی اش ناحیه‌ای است واقع در صفحه xy و محدود به سهمی $y = 4 - x^2$ و خط $y = 3x$ ؛ و قاعده بالایی اش محدود است به صفحه $z = x + 4$.

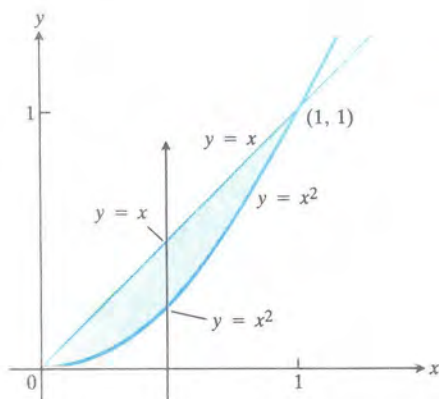
۳۸. حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول واقع و محدود است به صفحات مختصات، استوانه $x^2 + y^2 = 4$ ، و صفحه $z + y = 3$.

۳۹. حجم جسمی را بیابید که در یک هشتم اول واقع و محدود است به صفحات مختصات، صفحه $x = 3$ ، و استوانه سهمی $z = 4 - y^2$.

۴۰. حجم جسمی را بیابید که صفحه $z = 4 - x^2 - y$ از یک هشتم اول جدا می‌کند.

۴۱. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx dy.$$



۱۷.۱۸ انتگرال زیر، مساحت ناحیه بین سهمی و خط را به دست می‌دهد

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx.$$

مثال ۲ مطلوب است مساحت ناحیه R که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ محدود است.

حل: اگر ناحیه R را مطابق شکل ۱۸.۱۸ به دو ناحیه R_1 و R_2 تقسیم کنیم، مساحت را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} A &= \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA \\ &= \int_0^1 \int_{-x^2}^{\sqrt{y}} dx dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy. \end{aligned}$$

از سوی دیگر، اگر ترتیب انتگرالگیری را معکوس کنیم، نتیجه می‌گیریم که

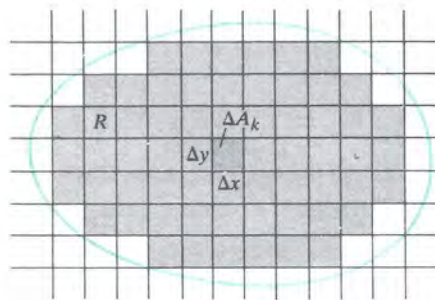
$$A = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx.$$

مسلماً این نتیجه ساده‌تر است و در عمل برای محاسبه مساحت ناحیه از آن استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 \left[y \right]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(شکل ۱۶.۱۸) و مساحت R را چنین تعریف می‌کنیم

$$\text{مساحت} = \lim \sum \Delta A_k = \iint_R dA. \quad (2)$$



۱۶.۱۸ نخستین مرحله در تعریف مساحت يك ناحیه، تقسیم درون آن به خانه‌های کوچک است.

مساحت يك ناحیه محصور و بسته و واقع در صفحه از فرمول زیر به دست می‌آید

$$\text{مساحت} = \iint_R dA. \quad (3)$$

این تعریف، مانند تعاریف دیگر این فصل، نسبت به تعریف يك متغیره مساحت در مورد نواحی بسیار متنوع‌تری کاربرد دارد، اما در مورد نواحی که هر دو را می‌توان به کاربرد این تعریف با تعریف قبلی سازگار است.

برای محاسبه انتگرال مساحت در رابطه (۳) از تابع ثابت $f(x, y) = 1$ روی R انتگرال می‌گیریم.

مثال ۱ مطلوب است مساحت ناحیه R که در ربع اول واقع و به $y = x^2$ و $y = x$ محدود است.

حل: ناحیه را رسم (شکل ۱۷.۱۸)، و مساحت را چنین محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

جدول ۱۰۱۸ فرمولهای جرم و گشتاور ورقه‌های نازکی که نواحی واقع در صفحه xy را می‌پوشانند.

چگالی: $\delta(x, y)$

جرم: $M = \iint \delta(x, y) dA$

گشتاور اول: $M_x = \iint y \delta(x, y) dA$

$M_y = \iint x \delta(x, y) dA$

مرکز جرم: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

گشتاور لختی (گشتاور دوم)

حول محور x : $I_x = \iint y^2 \delta(x, y) dA$

حول محور y : $I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dA$

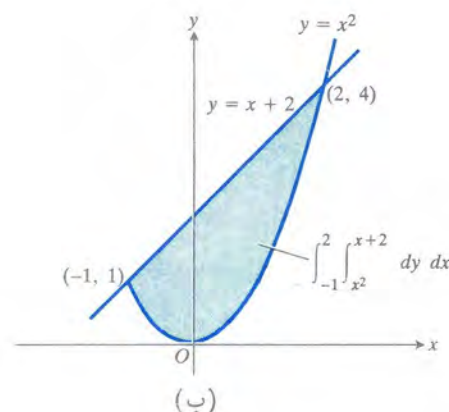
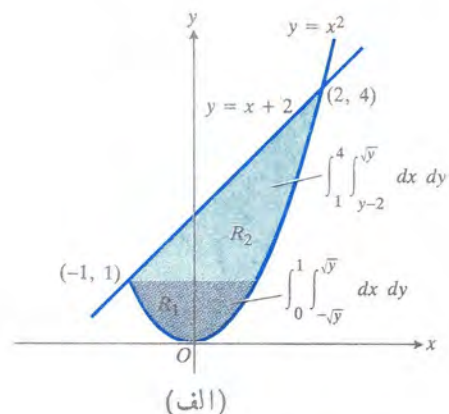
حول مبدأ: $I_o = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = I_x + I_y$

شعاعهای چرخش

حول محور x : $R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$

حول محور y : $R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$

حول مبدأ: $R_o = \sqrt{\frac{I_o}{M}}$



۱۸۰۱۸ محاسبه مساحتی که در این شکل دیده می‌شود شامل (الف) دوانتگرال است اگر نخستین انتگرالگیری نسبت به x باشد، (ب) تنها یک انتگرال است اگر نخستین انتگرالگیری نسبت به y باشد.

گشتاور اول و دوم و مرکز جرم

برای یافتن گشتاور و مرکز جرم پوسته‌ها و ورقه‌های نازک از فرمول‌هایی شبیه فرمولهای فصل ۵ بهره می‌گیریم. تفاوت اصلی در اینجاست که حال با انتگرالهای دوگانه می‌توانیم به‌اشکال و توابع چگالی بسیار متنوع‌تری پردازیم. فرمولها در جدول ۱۰۱۸ آمده‌اند. مثالهایی که بعداً می‌آیند چگونگی استفاده از این فرمولها را نشان می‌دهند.

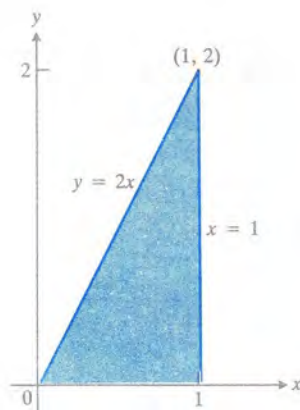
گشتاور لختی در محاسبه انرژی جنبشی اجسام دوران‌کننده اهمیت دارد. این کمیت در فرمولهای محاسبه سفتی تیرها نیز به‌کار می‌رود.

تفاوت میان گشتاورهای اول، M_x و M_y ، و گشتاورهای لختی یا گشتاورهای دوم، I_x و I_y ، در این است که در گشتاورهای دوم مجذور فواصل x و y به‌کار می‌رود.

گشتاور I_o را گشتاور قطبی لختی حول مبدأ نیز می‌نامیم.

برای محاسبه آن از حاصلضرب چگالی $\delta(x, y)$ در $x^2 + y^2$ ، یعنی مجذور فاصله نقطه نمونه (x, y) تا مبدأ، انتگرال می‌گیریم. با توجه به فرمول $I_o = I_x + I_y$ وقتی دو کمیت به‌دست آمد سومی را می‌توان از این فرمول تعیین کرد. (گشتاور I_o را گاه I_z می‌نامیم، زیرا گشتاور لختی حول محور z است. بنابراین، گزاره $I_z = I_x + I_y$ را قضیه مجذور عمودی می‌نامیم.) شعاع چرخش R_x با رابطه زیر تعریف می‌شود

$I_x = MR_x^2$



۱۹۰۱۸ ناحیه مثلثی شکلی که ورقه مورد بحث در مثال ۳ آن را می پوشاند.

با محاسبه مشابهی نتیجه می گیریم

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x \delta(x, y) dy dx = 100.$$

بنا بر این مختصات مرکز جرم عبارت اند از

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{100}{14} = \frac{25}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}.$$

گشتاور لختی حول محور x عبارت است از

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \delta(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (40x^4 + 16x^3) dx \\ &= \left[8x^5 + 4x^4 \right]_0^1 = 12. \end{aligned}$$

به همین نحو، گشتاور لختی حول محور y برابر است با

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y) dy dx = \frac{39}{5}.$$

چون I_x و I_y معلوم شدند دیگر نیازی نیست که برای محاسبه I_0 از يك انتگرال استفاده کنیم، بلکه می توانیم از رابطه $I_0 = I_x + I_y$ استفاده کنیم

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}.$$

R_x فاصله ای تا محور x را مشخص می کند که اگر کل جرم ورقه در آن فاصله متمرکز شود همان I_x به دست آید. با استفاده از شعاع چرخش راه ساده ای برای بیان گشتاور لختی بر حسب جرم و طول به دست می آید. شعاعهای R_x و R_y به همین نحو با روابط زیر تعریف می شوند

$$I_0 = MR_0^2 \quad \text{و} \quad I_y = MR_y^2.$$

برای به دست آوردن فرمولهای جدول ۱۰۱۸ از این روابط جذر می گیریم.

مثال ۳ ورقه نازکی ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به محور x و خطوط $x=1$ و $y=2x$ را می پوشاند. چگالی ورقه در نقطه (x, y) عبارت است از $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$. مطلوب است تعیین جرم، گشتاورهای اول، مرکز جرم، گشتاورهای لختی ورقه، و شعاع چرخش حول محورهای مختصات.

حل: شکل ورقه را رسم و جزئیات لازم را مشخص می کنیم و حدود انتگرالگیری را برای انتگرالهای لازم به دست می آوریم (شکل ۱۹۰۱۸).

جرم صفحه برابر است با

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (24x^2 + 12x) dx \\ &= \left[8x^3 + 6x^2 \right]_0^1 = 14. \end{aligned}$$

گشتاور اول حول محور x عبارت است از

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y \delta(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy + 6y^2 + 6y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[3xy^2 + 2y^3 + 3y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (24x^3 + 12x^2) dx \\ &= \left[7x^4 + 4x^3 \right]_0^1 = 11. \end{aligned}$$

سه شعاع چرخش عبارت اند از

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}}$$

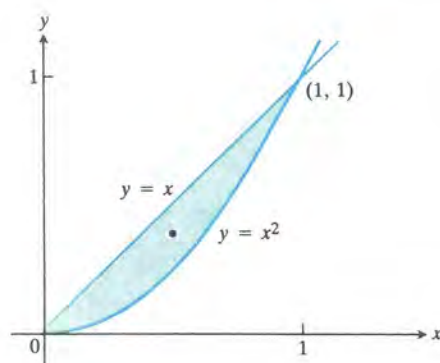
$$R_o = \sqrt{\frac{I_o}{M}} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}.$$

مرکزوار شکلهای هندسی

اگر چگالی جسمی ثابت باشد، مقدارش از صورت و مخرج فرمولهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ حذف می‌شود. بنابراین، در فرمولها δ را برابر ۱ می‌توان گرفت. بنابراین وقتی δ ثابت است، محل مرکز جرم از ویژگیهای شکل جسم است و به جنس ماده‌ای که جسم از آن ساخته شده بستگی ندارد. در این گونه موارد، مرکز جرم را مرکزوار شکل می‌نامند. برای یافتن مرکزوار کافی است δ را برابر با ۱ بگیریم و مثل گذشته با تقسیم کردن گشتاورهای اول بر جرمها، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را بیابیم.

مثال ۴ مرکزوار ناحیه‌ای را بیابید که در ربع اول واقع است و از بالا به خط $x=y$ و از پایین به سهمی $y=x^2$ محدود است.

حل: ناحیه را رسم و جزئیات را در آن مشخص می‌کنیم تا حدود انتگرالگیری معلوم شود (شکل ۲۰.۱۸). سپس δ را برابر ۱ می‌گیریم و فرمولهای مناسب را از جدول ۱۰.۱۸ به کار



در مثال ۴ مختصات مرکزوار ناحیه‌ای را که در این شکل دیده می‌شود محاسبه می‌کنیم.

می‌بریم

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^x 1 \, dy \, dx = \int_0^1 \left[y \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^x y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x \, dy \, dx = \int_0^1 \left[xy \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

با استفاده از این مقادیر M ، M_x ، و M_y داریم

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$$

مرکزوار، نقطه $(1/2, 2/5)$ است.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۸، مساحت ناحیه محدود به خمها و خطوط مفروض را به کمک انتگرالگیری دوگانه بیابید.

۱. محورهاى مختصات و خط $x+y=a$

۲. محور x ، خم $y=e^x$ ، و خطوط $x=0$ و $x=1$

۳. محور y ، خط $y=2x$ ، و خط $y=4$

۴. خم $x^2+y^2=0$ و خط $y=x+2$

۵. خمهای $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

۶. سهمی $x=y-y^2$ و خط $x+y=0$

۷. نیمدایره $y=\sqrt{1-x^2}$ ، خطوط $x=\pm 1$ ، و خط $y=-1$

۸. از بالا به $y=x^2$ ، از پایین به $y=-1$ ، از چپ به $x=-2$ ،

و از راست به $y=2x-1$

انتگرالهای مسائل ۹-۱۴، مساحت نواحی از صفحه xy را مشخص می‌کنند. در هر مورد، ناحیه را رسم کنید، خمهای محدودکننده

محور x باشد. (مهم نیست رأس مثلث در چه نقطه‌ای از این خط باشد. چنانکه خواهید دید همه این گونه مثلثها حول محور x گشتاور لختی و شعاع چرخش برابر دارند.)

۲۲. مساحت ناحیه‌ای که در ربع اول واقع و به سهمی $y = 6 - x^2$ و خط $y = x$ محدود است، برابر است با $125/6$ واحد مربع. مرکز و این ناحیه را بیابید.

۲۳. مطلوب است مرکز و این ناحیه‌ای که دایره $x^2 + y^2 = a^2$ از ربع اول جدا می‌کند.

۲۴. مطلوب است گشتاور لختی ورقه‌ای نازک حول محور x در صورتی که ورقه چگالی ۱ داشته و به دایره $x^2 + y^2 = a^2$ محدود باشد. سپس با استفاده از نتیجه به دست آمده I_x و I_y ورقه را بیابید.

۲۵. مطلوب است مرکز و این ناحیه واقع در بین محور x و طاق $y = \sin x$ ، $0 \leq x \leq \pi$.

۲۶. مطلوب است گشتاور لختی ورقه‌ای نازک حول محور y در صورتی که ورقه چگالی ۱ داشته و به خم $y = (\sin^2 x)/x^2$ و بازه $2\pi \leq x \leq \pi$ از محور x محدود باشد.

۲۷. مطلوب است گشتاور لختی قطبی ورقه مستطیلی نازکی حول مرکز ورقه، در صورتی که ورقه چگالی ۱ داشته و به خطوط $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ محدود باشد. (دانه‌جایی: I_x را بیابید. سپس با استفاده از فرمول I_x ، I_y را بیابید و آنها را با هم جمع کنید تا I_o به دست آید.)

۲۸. مطلوب است گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه‌ای نازک حول محور x ، در صورتی که ورقه چگالی ۱ داشته و به بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ محدود باشد.

چگالی متغیر

۲۹. ورقه نازک مثلثی شکلی به خطوط $y = x$ ، $y = -x$ ، و $y = 1$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = y + 1$ ، مرکز جرم، گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش ورقه حول محورهای مختصات، و گشتاور لختی قطبی و شعاع چرخش ورقه را بیابید.

۳۰. مسأله ۲۹ را به ازای $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ دوباره حل کنید.

۳۱. مطلوب است مرکز جرم ورقه نازک مثلثی شکل محدود به محور y و خطوط $y = x$ و $y = 2 - x$ در صورتی که

$$\delta(x, y) = 6x + 3y + 3.$$

۳۲. سهمی $x = 4y^2$ بیضی $x^2 + 4y^2 = 12$ را قطع می‌کند و دو ناحیه به وجود می‌آورد. ورقه نازکی به چگالی $\delta(x, y) = 5x$

آن را با معادلاتشان مشخص کنید. مختصات نقاط مرزی یعنی محل تقاطع خمها را بیابید. سپس مساحت ناحیه را تعیین کنید.

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx dy \quad ۹$$

$$\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} dy dx \quad ۱۰$$

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx \quad ۱۱$$

$$\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} dx dy \quad ۱۲$$

$$\int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx \quad ۱۳$$

$$\int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx \quad ۱۴$$

چگالی ثابت

۱۵. مطلوب است مرکز جرم ورقه نازکی به چگالی $\delta = 3$ که در ربع اول واقع و به خطوط $x = 0$ ، $y = x$ ، و سهمی $x^2 - y = 2$ محدود است.

۱۶. مطلوب است گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش ورقه مستطیلی نازکی حول محور x در صورتی که ورقه چگالی ثابت داشته، در ربع اول واقع، و به خطوط $x = a$ و $y = b$ محدود باشد.

۱۷. مرکز و این ناحیه‌ای واقع در ربع اول را بیابید که به محور x ، سهمی $y = 2x$ ، و خط $x + y = 4$ محدود است.

۱۸. مرکز و این ناحیه مثلثی شکلی را بیابید که خط $x + y = a$ ، $a > 0$ از ربع اول جدا می‌کند.

۱۹. مرکز جرم، گشتاورهای لختی، و شعاعهای چرخش یک ورقه نازک را حول محورهای مختصات بیابید در صورتی که ورقه دارای چگالی ثابت $\delta = 60$ باشد و از راست به سهمی $x^2 + y = 0$ و از چپ به خط $y = x + 2$ محدود باشد.

۲۰. مطلوب است مرکز و این ناحیه‌ای به شکل نیم‌دایره که به محور x و خم $y = \sqrt{1 - x^2}$ محدود است.

۲۱. مطلوب است گشتاور لختی و شعاع چرخش ناحیه‌ای مثلثی شکل حول محور x در صورتی که ناحیه چگالی ثابت داشته و قاعده‌اش بازه $0 \leq x \leq b$ بر محور x و رأسش روی خط $y = h$ در بالای

۴۲. مرکزوار ناحیه‌ای در صفحه xy را بیابید که به‌خیمهای $x = 1/\sqrt{1-x^2}$ ، $y = 1/\sqrt{1-y^2}$ ، و خطوط $x = 0$ ، $y = 0$ (دائره‌ای: بنا به تقارن، $\bar{x} = 0$) محدود است.

۴۳. مقدار متوسط تابعی چون $f(x, y)$ روی ناحیه‌ای مانند R چنین تعریف می‌شود

$$\frac{1}{\text{مساحت } R} \iint_R f(x, y) dA.$$

الف) مطلوب است مقدار متوسط مشتق تابع $u = u_1 i + u_2 j$ در جهت بردار واحد $w = (x^2 + y^2)/2$ روی ناحیه داخلی مثلثی که رئوسش عبارت‌اند از $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$.

ب) نشان دهید که در حالت کلی وقتی که $w = (x^2 + y^2)/2$ ، مقدار متوسط $D_u w$ روی ناحیه R برابر است با مقدار $D_u w$ در مرکزوار R .

۴۴. مطلوب است شعاع چرخش يك میله نازک یکنواخت به چگالی ثابت δ و طول L نسبت به محوری

الف) عمود بر محور میله و گذرنده از مرکز جرم آن

ب) عمود بر محور میله و گذرنده از يك انتهای آن

پ) موازی با میله و به فاصله d از محور آن. فرض کنید d از شعاع میله خیلی بزرگتر است.



TOOLKIT PROGRAM

Double Integral

۳۰۱۸ انتگرال دوگانه به صورت قطبی

گاه اگر مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل شود، محاسبه انتگرالها ساده تر می‌شود. در این بخش روش تبدیل مختصات قائم به مختصات قطبی و چگونگی محاسبه انتگرالها روی دامنه‌هایی که مرزهایشان به صورت قطبی مشخص شده تشریح می‌شود. بحث مختصری هم دربارهٔ ژاکوبیها، یعنی دترمینانهایی که از آنها برای تعویض متغیرها در انتگرالهای چندگانه استفاده می‌کنیم، خواهیم کرد.

انتگرالها در مختصات قطبی

وقتی می‌خواستیم انتگرال دوگانه يك تابع را روی ناحیه R در صفحه xy تعریف کنیم، نخست R را به تعدادی مستطیل که اضلاعشان موازی محورهای مختصات بود تقسیم می‌کردیم. این

ناحیه کوچکتر را اشغال کرده است. جرم آن را بیابید.

۳۳. ورقه نازکی به‌خیمهای $x = y^2$ و $x = 2y - y^2$ محدود است. چگالی این ورقه در نقطه (x, y) برابر است با $\delta(x, y) = y + 1$. مرکز جرم و گشتاور لختی ورقه را حول محور x بیابید.

۳۴. ورقه نازکی به‌سهمی $x = y - y^2$ و خط $x + y = 0$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = x + y$ ، گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محور x بیابید.

۳۵. ورقه مستطیلی نازکی را خطوط $x = 6$ و $y = 1$ از ربع اول جدای کنند. اگر $\delta(x, y) = x + y + 1$ ، مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محور y بیابید.

۳۶. ورقه نازکی به‌خط $y = 1$ و سهمی $y = x^2$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = y + 1$ ، مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محور y بیابید.

۳۷. ورقه نازکی به‌محور x ، خطوط $x = \pm 1$ و سهمی $y = x^2$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = y + 1$ ، مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محور y بیابید.

۳۸. ورقه مربع شکل نازکی به خطوط $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 1/5$ ، مرکز جرم و گشتاور لختی قطبی ورقه را بیابید.

۳۹. ورقه مستطیل شکل نازکی به خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ و $y = 1$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = 1 + (x/20)$ ، مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محور x بیابید.

۴۰. ورقه نازکی به $y = x$ و $y = x^2$ محدود است. اگر $\delta(x, y) = x + 1$ ، مرکز جرم و گشتاورهای لختی و شعاع چرخش ورقه را حول محورهای مختصات بیابید.

چند مسأله دیگر

۴۱. يك ورقه مستطیلی شکل با چگالی ثابت $\delta(x, y) = 1$ ناحیه‌ای را می‌پوشاند که به خطوط $x = 4$ و $y = 2$ محدود و در ربع اول واقع است. گشتاور لختی (I_a) ورقه حول خط $y = a$ از انتگرال زیر به دست می‌آید

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y-a)^2 dy dx.$$

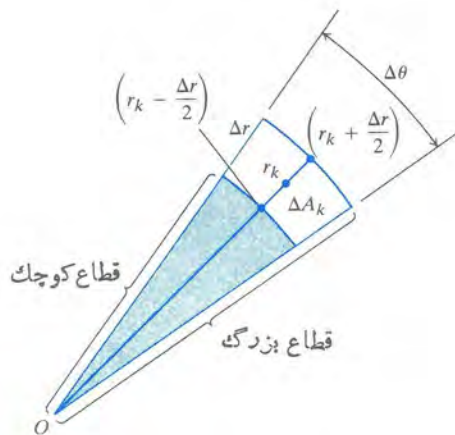
به ازای چه مقداری از a ، I_a مینیمم می‌شود؟

اگر F در سراسر R پیوسته باشد، این مجموع وقتی که مستطیلهای قطبی با میل کردن Δr و $\Delta \theta$ به صفر، کوچک و کوچکتر شوند، به یک حد میل می کند. این حد را انتگرال دوگانه F روی R می نامیم. به صورت نمادی داریم

$$\lim S_n = \iint_R F(r, \theta) dA.$$

برای محاسبه این حد، باید مجموع S_n را به صورتی بنویسیم که ΔA_k را بر حسب Δr و $\Delta \theta$ بیان کنند. شیوه کار چنین است. می دانیم که شعاع قوس داخلی محدودکننده ΔA_k برابر است با $r_k - (\Delta r/2)$ (شکل ۲۲.۱۸). بنا براین، مساحت قطاع مستدیر روبهرو به این قوس برابر است با

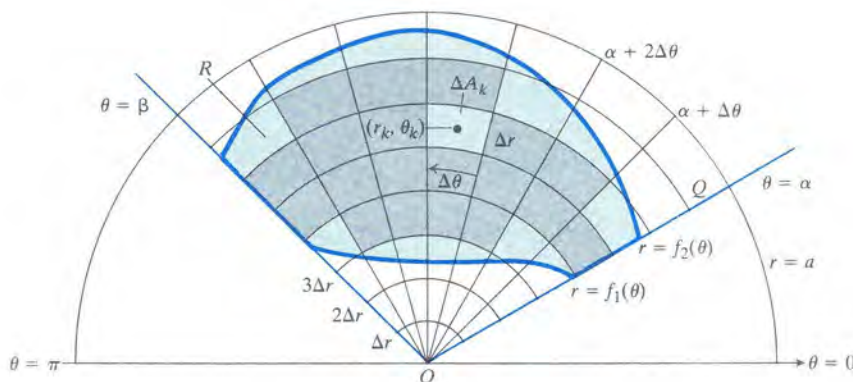
$$\frac{1}{2} \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta. \quad (2)$$



۲۲.۱۸ از این واقعیت که

$$\Delta A_k = (\text{مساحت قطاع بزرگتر}) - (\text{مساحت قطاع کوچکتر})$$

فرمول $\Delta A_k = r_k \Delta r \Delta \theta$ را نتیجه می گیریم. شرح مطلب در متن آمده است.



مستطیلهای طبیعیترین اشکالی بودند که می توانستیم به کار ببریم زیرا مقدار x یا مقدار y اضلاعشان ثابت است. درمختصات قطبی، شکل طبیعی، «مستطیل قطبی» است که حال آن را توصیف می کنیم. فرض می کنیم تابع $F(r, \theta)$ روی ناحیه ای چون R تعریف شود که به پرتوهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ و خمهای پیوسته $r = f_1(\theta)$ و $r = f_2(\theta)$ محدود باشد. همچنین فرض می کنیم به ازای هر مقدار θ بین α و β ، $0 \leq f_1(\theta) \leq f_2(\theta) \leq a$. در این صورت R در ناحیه بادبزی شکلی به نام Q قرار دارد که با نابرابریهای $0 \leq r \leq a$ و $\alpha \leq \theta \leq \beta$ تعریف می شود. شکل ۲۱.۱۸ را ببینید.

ناحیه Q را با شبکه ای متشکل از قوسهای مستدیر و پرتوها می پوشانیم. قوسها قطعاتی هستند از دایری به مرکز مبدأ و به شعاعهای زیر

$$\Delta r, 2\Delta r, \dots, m\Delta r$$

که $\Delta r = a/m$. پرتوها چنین مشخص می شوند

$$\theta = \alpha, \theta = \alpha + \Delta \theta, \theta = \alpha + 2\Delta \theta, \dots,$$

$$\theta = \alpha + n\Delta \theta = \beta.$$

قوسها و پرتوها Q را به تکه های کوچکی به نام «مستطیلهای قطبی» تقسیم می کنند.

مستطیلهای قطبی درون R را شماره گذاری می کنیم (ترتیب مهم نیست) و مساحت های آنها را چنین می نامیم

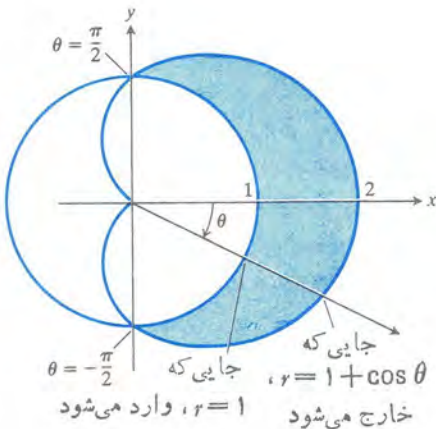
$$\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n.$$

فرض می کنیم (r_k, θ_k) مرکز مستطیل قطبی باشد که مساحتش ΔA_k است. منظور ما از «مرکز» نقطه ای است واقع بر پرتوی که قوسها را نصف می کند و وسط قطعه ای از پرتواست که بین دو قوس است. حال مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(r_k, \theta_k) \Delta A_k. \quad (1)$$

۲۱.۱۸ ناحیه $R: f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$

در ناحیه بادبزی شکلی $Q: 0 \leq r \leq a, \alpha \leq \theta \leq \beta$ قرار دارد. اگر Q را با قوسهای مستدیر و پرتوها تقسیم کنیم، R هم تقسیم می شود.



۲۳۰۱۸ در مثال روش تعیین حدود انتگرالگیری برای محاسبه مساحت ناحیه سایه دار شکل توصیف می شود. این ناحیه بین دایره $r=1$ و دلووار $r=1+\cos\theta$ واقع است.

مرحله ۳: حدود θ را چنان برمی گزینیم که همه پرتوهایی را که R را قطع می کنند در بر بگیرد.

نتیجه این مراحل انتگرال زیر است

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{r=1}^{r=1+\cos\theta} F(r, \theta) r dr d\theta.$$

اگر $F(r, \theta)$ تابع ثابتی با مقدار ۱ باشد، مقدار انتگرال F روی ناحیه R مساحت R را به دست می دهد

مساحت یک ناحیه بسته و محصور R واقع در صفحه مختصات قطبی از فرمول زیر به دست می آید

$$R \text{ مساحت} = \iint_R r dr d\theta. \quad (6)$$

همان طور که انتظار می رود، این فرمول مساحت با همه فرمولهای قبلی سازگار است، اما ما این مطلب را ثابت نمی کنیم.

مثال ۲: مطلوب است مساحت ناحیه محصور در پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$.

حل: پروانه را رسم می کنیم (شکل ۲۴۰۱۸) و مساحت

به همین نحو، شعاع مرز بیرونی ΔA_k برابر با $r_k + (\Delta r/2)$ است و مساحت قطاع رو به رو به این قوس برابر است با

$$\frac{1}{2} \left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \Delta \theta. \quad (3)$$

بنابراین

(مساحت قطاع کوچکتر) - (مساحت قطاع بزرگتر) $\Delta A_k =$

$$= \frac{\Delta \theta}{2} \left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\Delta \theta}{2} [2r_k \Delta r]$$

$$= r_k \Delta r \Delta \theta.$$

از ترکیب این رابطه با رابطه (۱) نتیجه می گیریم

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta. \quad (4)$$

حال صورتی از قضیه فویننی حاکی است که حدی را که این مجموعه به آن میل می کنند، می توان با انتگرالگیری مکرر نسبت به r و θ به دست آورد

$$\iint_R F(r, \theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} F(r, \theta) r dr d\theta. \quad (5)$$

حدود انتگرالگیری

در اینجا هم می توان از همان روشی که برای یافتن حدود انتگرالگیری انتگرالها در مختصات قائم به کار بردیم استفاده کرد.

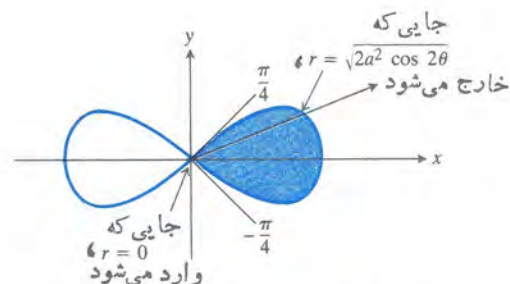
مثال ۱: مطلوب است حدود انتگرالگیری برای انتگرال گرفتن از تابعی چون $F(r, \theta)$ روی ناحیه R که درون دلووار $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ واقع است.

حل: دلووار و دایره را رسم می کنیم (شکل ۲۳۰۱۸) و مراحل زیر را طی می کنیم:

مرحله ۱: پرتوی به ازای θ ی معین از مبدأ رسم می کنیم.

مرحله ۲: نسبت به r ، از مقدار r در محل ورود پرتو به R تا مقدار r در محل خروج پرتو از R ، انتگرال می گیریم.

که در آن، G ناحیه انتگرالگیری در مختصات قطبی است. این شبیه روش جانشانی در فصل ۴ است با این تفاوت که در اینجا به عوض یک متغیر در مورد دو متغیر جانشانی صورت می گیرد. توجه کنید که $dx dy$ به $r dr d\theta$ تبدیل نمی شود بلکه به $r dr d\theta$ تبدیل می شود در پایان این بخش به طور مختصر به برهان این مطلب اشاره می کنیم.



۲۴.۱۸ برای انتگرالگیری روی ناحیه سایه دار شکل که به پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ محدود است، r را از ۰ تا $\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}$ و سپس θ را از $-\pi/4$ تا $\pi/4$ تغییر می دهیم.

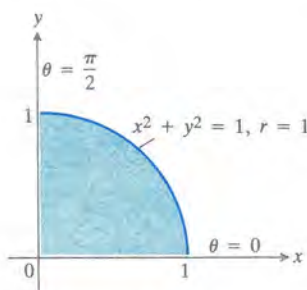
حل: ناحیه انتگرالگیری را رسم و حدود انتگرالگیری را مشخص می کنیم (شکل ۲۵.۱۸).
گشتاور قطبی در مختصات دکارتی برابر با مقدار انتگرال زیر است

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx.$$

اگر نسبت به y انتگرال بگیریم، نتیجه می گیریم

$$\int_0^1 \left(x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx.$$

محاسبه این انتگرال بدون استفاده از جدول دشوار است.



۲۵.۱۸ در مثال ۳ انتگرال تابعی روی ناحیه واقع در ربع اول و محدود به ربع دایره $x^2 + y^2 = 1$ محاسبه می شود. این ناحیه در مختصات قطبی با نابرابریهای ساده زیر توصیف می شود
 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ و $0 \leq r \leq 1$

اگر انتگرال دکارتی را به انتگرال قطبی تبدیل کنیم محاسبات ساده تر می شود. با جانشانیهای

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta$$

نیمه راست را چنین به دست می آوریم

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}} d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2} \sin 2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{a^2}{2} [1 - (-1)] = a^2. \end{aligned}$$

بنابر این، مساحت کل برابر با $2a^2$ است.

تبدیل انتگرالهای دکارتی به انتگرالهای قطبی
عمل تبدیل یک انتگرال دکارتی مانند

$$\iint_R F(x, y) dx dy$$

به یک انتگرال قطبی دو مرحله دارد:

مرحله ۱: در انتگرال دکارتی جانشانیهای زیر را انجام می دهیم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

مرحله ۲: حدود قطبی انتگرالگیری را برای مرز R تعیین می کنیم.

به این ترتیب، انتگرال دکارتی به صورت زیر در می آید

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \iint_G F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (۷)$$

نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned}\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (e-1) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} (e-1).\end{aligned}$$

r در $r dr d\theta$ همان چیزی بود که برای انتگرال گرفتن از e^{r^2} لازم داشتیم. بدون آن در حل مسئله درمی ماندیم. ■

جانشانیهای قطبی اغلب برای محاسبه انتگرالهای دکارتی روی نواحی که توصیفشان در مختصات قطبی ساده تر است مناسب اند. در مثال بعد این نکته روشن می شود.

مثال ۵ مطلوب است گشتاور لختی ناحیه محصور در دوار زیر حول محور y

$$r = 1 - \cos \theta.$$

حل: وقتی با یک شکل هندسی سروکار داریم، $\delta(x, y)$ را برابر ۱ می گیریم. بنابراین

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dA = \iint x^2 dA.$$

جانشانیهای زیر را انجام می دهیم

$$x = r \cos \theta, \quad dA = r dr d\theta$$

و ناحیه را رسم و حدود انتگرالگیری را تعیین می کنیم (شکل ۲۷.۱۸)

$$\begin{aligned}I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)^4 d\theta.\end{aligned}$$

چون توانهای $\cos \theta$ بزرگ اند با استفاده از فرمول زیر

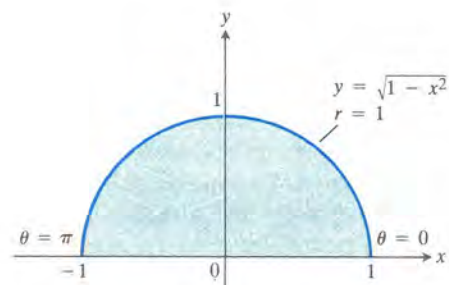
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dy dx &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^1 d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

چرا تبدیل مختصات این قدر مؤثر بود؟ یکی از دلایل آن این است که x^2+y^2 به صورت ساده r^2 درآمد. دلیل دیگر این است که حدود انتگرالگیری به صورت مقادیر ثابت درآمدند. ■

مثال ۴ مطلوب است محاسبه

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy dx$$

که در آن R ناحیه ای است نیمدایره ای و محدود به محور x و خم $y = \sqrt{1-x^2}$ (شکل ۲۶.۱۸).



۲۶.۱۸ ناحیه نیمدایره ای در مثال ۴ با

فایبریه ای زیر توصیف می شود

$$0 \leq r \leq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

حل: انتگرال مورد بحث در مختصات دکارتی انتگرالی غیرمقدماتی است و راه سراسری برای محاسبه انتگرال $e^{x^2+y^2}$ نسبت به x یا y وجود ندارد. اما این انتگرال و انتگرالهای نظیرش در ریاضیات—مثلاً در آمار—اهمیت دارند و باید راهی برای محاسبه آنها یافت. یکی از این راهها استفاده از مختصات قطبی است. با جانشانیهای

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dy dx = r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^7 \theta d\theta = \frac{2}{7} \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

پس

$$I_y = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 2 \cos^4 \theta + 6 \cos^6 \theta - 4 \cos^8 \theta + \cos^{10} \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{18}{4} + \frac{5}{8} \right] \pi$$

$$= \frac{49\pi}{32}$$

□ جانشانی در انتگرالهای دوگانه

جانشانی مختصات قطبی حالت خاصی است از روش عامتر جانشانی در مورد انتگرالهای دوگانه، روشی که تغییر متغیرها را به صورت تبدیل نواحی مجسم می‌سازد.

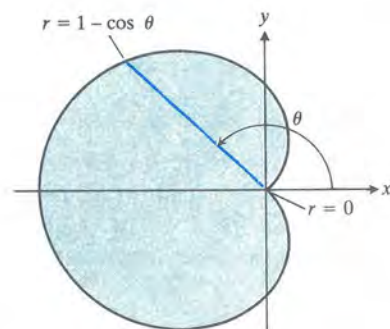
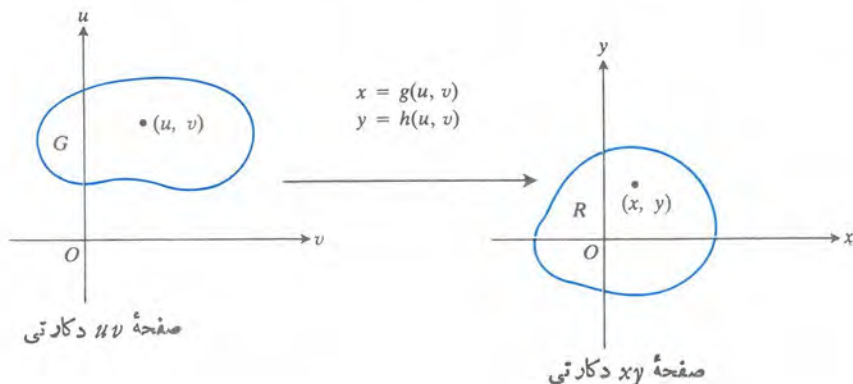
فرض می‌کنیم ناحیه G در صفحه uv با معادلات زیر به ناحیه R در صفحه xy تبدیل می‌شود

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v).$$

این تبدیل در شکل ۲۸.۱۸ دیده می‌شود. به این ترتیب، هر تابعی چون $F(x, y)$ را که روی R تعریف می‌شود می‌توان تابعی چون $F(g(u, v), h(u, v))$ دانست که روی G تعریف می‌شود. انتگرال $F(x, y)$ روی R چه ارتباطی با انتگرال $F(g(u, v), h(u, v))$ روی G دارد؟

پاسخ این است: اگر g ، h ، و F پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند، این انتگرالها چنین به هم مربوط

۲۸.۱۸ روابط $y = h(u, v)$ ، $x = g(u, v)$ را به ما می‌دهند که انتگرال روی ناحیه R در صفحه xy را به صورت انتگرالی روی ناحیه G در صفحه uv بنویسیم.



۲۷.۱۸ برای انتگرالگیری روی ناحیه محصور در دلواری r را از ۰ تا $1 - \cos \theta$ و سپس θ را از ۰ تا 2π تغییر می‌دهیم.

(از بخش ۹.۷) آنها را به توانهای کوچکتر تبدیل می‌کنیم

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \frac{\cos^{n-1} \theta \sin \theta}{n} \Big|_0^{2\pi} + \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} \theta d\theta.$$

چون به ازای هر دوحد $\sin \theta$ صفر است، داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^{2\pi} \cos^{n-2} \theta d\theta.$$

بنابراین

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{4} \sin^2 \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^6 \theta d\theta = \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \pi = \frac{5\pi}{8}$$

می شوند

بنابراین، رابطه (۸) به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned}\iint_R F(x, y) dx dy \\&= \iint_G F(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta \quad (10) \\&= \iint_G F(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta\end{aligned}$$

که همان رابطه (۷) است.

شکل ۲۹.۱۸ نشان می دهد که چگونه روابط $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ مستطیل $G: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ را به ربع دایره R واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به $x^2 + y^2 = 1$ تبدیل می کند.

توجه کنید که انتگرال طرف راست رابطه (۱۰) انتگرال $F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ روی ناحیه ای در صفحه مختصات قطبی نیست، بلکه برابر است با انتگرال حاصلضرب $F(r \cos \theta, r \sin \theta)$ و r روی ناحیه G در صفحه دکارتی.

در اینجا مثالی از جانشانی دیگری می آوریم.

مثال ۶ انتگرال

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy$$

را با استفاده از تبدیل

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\iint_R F(x, y) dx dy \\&= \iint_G F(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv.\end{aligned} \quad (8)$$

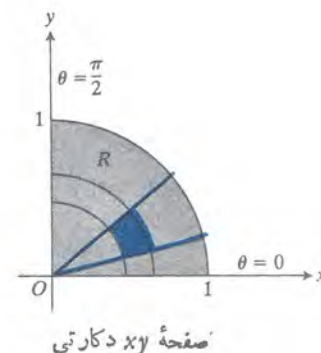
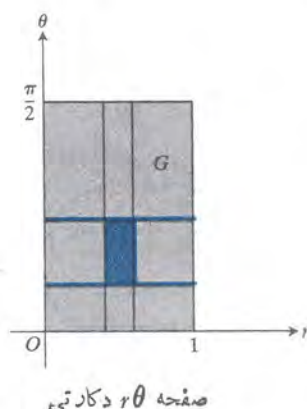
عامل $J(u, v)$ که قدرمطلقش در این فرمول آمده است برابر است با دترمینان

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (9)$$

این دترمینان را به یاد ژاکوبی^۱ ریاضیدان آلمانی (۱۸۵۱-۱۸۰۴) دترمینان ژاکوبی یا ژاکوبی تبدیل مختصات $x = g(u, v)$ ، $y = h(u, v)$ می نامند. نماد $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ می تواند به شما کمک کند که چگونگی تشکیل دترمینان از مشتقات جزئی x و y را به یاد بسپارید. استنتاج رابطه (۸) پیچیده است و ما در اینجا آن را به دست نمی آوریم.

در مختصات قطبی به جای u و v ، r و θ را داریم. به ازای $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ، ژاکوبی عبارت است از

$$\begin{aligned}J(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\&= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.\end{aligned}$$



۲۹.۱۸ روابط $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ ناحیه G را به ناحیه R تبدیل می کنند.

صفحه دکارتی $r\theta$ صفحه دکارتی xy

۱. تلفظ نام این ریاضیدان به آلمانی، کارل گوستاو یاکوب یا کوپی است.

و انتگرالگیری روی ناحیه مناسبی در صفحه uv به دست آورید. است با

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

اکنون همه چیز برای استفاده از رابطه ۸ مهیاست

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx dy \\ &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u |J(u, v)| du dv \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) du dv = \int_0^2 \left[u^2 \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^2 dv = 2. \end{aligned}$$

درمسأله ۳۱ از شما خواسته شده است که انتگرال xy اصلی را مستقیماً به دست آورید و نشان دهید که مقدارش برابر با ۲ است.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۴، انتگرال دکارتی را به انتگرال قطبی معادلش تبدیل، و انتگرال قطبی را محاسبه کنید.

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad ۱.$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx \quad ۲.$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad ۳.$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad ۴.$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx \quad ۵.$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy \quad ۶.$$

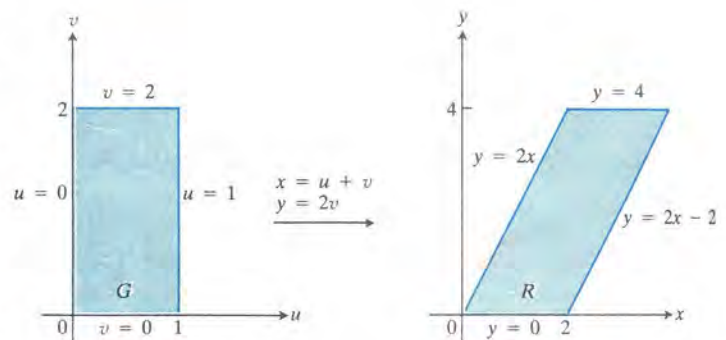
حل: ناحیه انتگرالگیری R در صفحه xy را رسم و مرزهایش را مشخص می‌کنیم (شکل ۳۰.۱۸). برای استفاده از رابطه (۸) باید ناحیه متناظر G در صفحه uv و نیز ژاکوبی تبدیل را بیابیم. برای یافتن آنها، نخست از روابط (۱۱)، x و y را بر حسب u و v به دست می‌آوریم. با چند عمل ساده جبری داریم

$$x = u + v, \quad y = 2v. \quad (۱۲)$$

اگر این عبارتها را در معادلات مربوط به مرزهای R قرار دهیم، مرزهای G نتیجه می‌شوند:

مرز R	مرز متناظر G	رابطه ساده شده
$x = \frac{y}{2}$	$u + v = \frac{2v}{2} = v$	$u = 0$
$x = \left(\frac{y}{2}\right) + 1$	$u + v = \left(\frac{2v}{2}\right) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

شکل ۳۰.۱۸ را ببینید.



۳۰.۱۸ روابط $x = u + v$ و $y = 2v$ ناحیه G را به ناحیه R تبدیل می‌کنند. روابط معکوس $u = (2x - y)/2$ و $v = y/2$ را به G تبدیل می‌کنند. مثال ۶ را ببینید.

ژاکوبی تبدیل (باز هم با استفاده از روابط ۱۲) برابر

۲۴. قرص نازکی با چگالی $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ، k ثابت، به دایره $x^2 + y^2 = a^2$ محدود است. گشتاور لختی این قرص را حول محور x و گشتاور لختی قطبی آن را حول مبدأ بیابید.

۲۵. مرکزوار ناحیه محصور در دلواری $r = 1 + \cos \theta$ را بیابید.

۲۶. مرکزوار ناحیه واقع در درون دلواری $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ را بیابید.

۲۷. ورقه نازکی با چگالی $\delta(x, y) = 1$ به دلواری $r = 1 + \cos \theta$ محدود است. گشتاور لختی این ورقه را حول مبدأ بیابید.

۲۸. ورقه نازکی با چگالی $\delta(x, y) = 1$ ناحیه‌ای را می‌پوشاند که درون دلواری $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ واقع است. گشتاور لختی این ورقه را حول مبدأ بیابید.

۲۹. ناحیه‌ای در درون دلواری $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ قرار دارد. این ناحیه قاعده پایینی استوانه قائم صلبی است که قاعده بالایی آن در صفحه $z = x$ قرار دارد. حجم استوانه را بیابید.

۳۰. ناحیه محصور در پروانه $r^2 = 2 \cos 2\theta$ قاعده پایینی استوانه قائم صلبی است که قاعده بالایی اش به کره $z = \sqrt{2 - r^2}$ محدود است. حجم استوانه را بیابید.

□ جانشانیها

۳۱. انتگرال

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{yx-y}{2} dx dy$$

را که در مثال ۶ آمده بود، مستقیماً با انتگرالگیری نسبت به x و y محاسبه کنید و نشان دهید که مقدارش برابر ۲ است.

۳۲. مطلوب است ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ در مورد تبدیلهای

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v \quad (\text{الف})$$

$$x = u \sin v, \quad y = u \cos v \quad (\text{ب})$$

۳۳. الف) از دستگاه

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

x و y را بر حسب u و v به دست آورید. سپس مقدار ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ را بیابید.

ب) فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول و محدود به خطوط $y = x - 2$ ، $y = -2x + 7$ ، $y = -2x + 4$ و $y = x + 1$ باشد. از تعویض متغیرهای قسمت (الف)

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} x dx dy \quad ۷$$

$$\int_0^2 \int_0^x y dy dx \quad ۸$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2-x}} \frac{dy dx}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ۹$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx \quad ۱۰$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 5\sqrt{x^2+y^2} dy dx \quad ۱۱$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \quad ۱۲$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx \quad ۱۳$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad ۱۴$$

۱۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که خم $r = (2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ از ربع اول جدا می‌کند.

۱۶. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که در درون دلواری $r = 1 + \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 1$ قرار دارد.

۱۷. مطلوب است مساحت ناحیه محصور در يك برگ از گل $r = \cos 2\theta$.

۱۸. مطلوب است مساحت ناحیه محصور بین قسمت مثبت محور x و مارپیچ $r = 4\theta/3$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

۱۹. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که دلواری $r = 1 + \sin \theta$ از ربع اول جدا می‌کند.

۲۰. مطلوب است مساحت ناحیه فصل مشترك قسمت‌های درونی دلواری $r = 1 - \cos \theta$ و $r = 1 + \cos \theta$.

۲۱. از تابع $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ روی قرص $x^2 + y^2 \leq 3/4$ انتگرال بگیرید.

۲۲. از تابع $f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2))/(x^2 + y^2)$ روی ناحیه بین دو دایره $x^2 + y^2 = e^2$ و $x^2 + y^2 = 1$ انتگرال بگیرید.

۲۳. ورقه نازکی با چگالی $\delta(x, y) = 3$ از پایین به محور x و از بالا به دلواری $r = 1 - \cos \theta$ محدود است. گشتاور این ورقه را حول محور x به دست آورید.

انتگرال، این است که از تبدیل $x = au$ ، $y = bv$ بهره بگیریم و انتگرال تبدیل شده را روی قرص $G: u^2 + v^2 \leq 1$ در صفحه uv محاسبه کنیم. از این راه مساحت بیضی را بیابید.

۳۷. ورقه نازکی با ضخامت و چگالی یکنواخت ناحیه‌ای را می‌پوشاند که در صفحه xy به بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ محدود است. گشتاور ورقه را حول مبدأ بیابید. (دانه‌جایی: از تبدیل $x = ar \cos \theta$ ، $y = br \sin \theta$ بهره بگیرید.)

۳۸. انتگرال

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2} dx dy$$

را با استفاده از تبدیل $x = u + 1/2v$ ، $y = v$ و تبدیل این انتگرال به یک انتگرال روی ناحیه‌ای چون G در صفحه uv ، محاسبه کنید.

۴.۱۸ انتگرالهای سه گانه در مختصات قائم. حجم و مقدار متوسط

از انتگرالهای سه گانه برای محاسبه حجم اشکال سه بعدی نامنظم و مقدار متوسط توابع روی نواحی سه بعدی استفاده می‌شود. همچنین از این انتگرالها برای محاسبه جرم و گشتاور اجسام سه بعدی بهره می‌گیرند. وقتی این انتگرالها با بردارها ترکیب شوند، چنانکه در فصل ۱۹ خواهیم دید، آنها را برای توصیف بسیاری از پدیده‌های مربوط به جریان سیالات و الکترومغناطیس به کار می‌برند. در این بخش، انتگرالهای سه گانه را تعریف می‌کنیم و با استفاده از آنها حجم اجسام و مقدار متوسط توابع را محاسبه می‌کنیم. تعیین جرم و گشتاور، موضوع بحث بخش بعدی یعنی بخش ۵.۱۸ است. انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی، موضوع آخرین بخش یعنی بخش ۶.۱۸ است.

انتگرالهای سه گانه

اگر $F(x, y, z)$ تابعی باشد که روی ناحیه بسته و محصور D در فضا تعریف شود، مثل ناحیه‌ای که یک توپ یا کلوخ اشغال می‌کند، آنگاه انتگرال F روی D را می‌توان به روشی که در پی می‌آید تعریف کرد. ناحیه مکعب مستطیلی در بردارنده D را مطابق شکل ۳۲.۱۸ با صفحات موازی صفحات مختصات به خانه‌های مکعب مستطیلی تقسیم می‌کنیم. ابعاد این خانه‌ها عبارت‌اند از: Δx در Δy در Δz . خانه‌های درون D را به ترتیبی شماره گذاری می‌کنیم

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n.$$

در هر ΔV_k ، نقطه‌ای چون (x_k, y_k, z_k) برمی‌گزینیم و مجموع

استفاده کنید و انتگرال

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2) dx dy$$

را روی ناحیه G در صفحه uv محاسبه کنید.

۳۴. الف) ذاکوبی تبدیل $x = u$ ، $y = uv$ را تعیین کنید و ناحیه $G: 1 \leq u \leq 2, 1 \leq uv \leq 2$ را در صفحه uv رسم کنید.

ب) سپس با استفاده از رابطه (۸) انتگرال

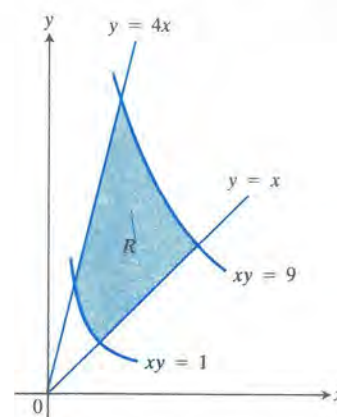
$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy dx$$

را به انتگرالی روی G تبدیل کنید و هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

۳۵. فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولیه‌های $xy = 1$ و $xy = 9$ و خطوط $y = x$ و $y = 4x$ باشد (شکل ۳۱.۱۸). با استفاده از تبدیل $x = u/v$ ، $y = uv$ با ضوابط $u > 0$ و $v > 0$ ، انتگرال

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

را به صورت انتگرالی روی ناحیه مناسبی چون G واقع در صفحه uv بنویسید. سپس این انتگرال را روی G محاسبه کنید.



۳۱.۱۸ ناحیه xy در مسئله ۳۵.

۳۶. مساحت بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ یعنی πab را می‌توان با انتگرال گرفتن از تابع $f(x, y) = 1$ روی ناحیه محدود به بیضی در صفحه xy به دست آورد. محاسبه مستقیم این انتگرال یک جانشانی مثلثاتی را می‌طلبد. راه آسانتری برای محاسبه این

$$4. \iiint_D F dV \geq 0 \quad (F \geq 0, D \text{ اگر روی})$$

$$5. \iiint_D F dV \geq \iiint_D G dV \quad (F \geq G, D \text{ اگر روی})$$

چون مجموعه‌های تقریب‌زننده انتگرالها این ویژگیها را دارند، انتگرالها نیز این ویژگیها را دارند.

انتگرال سه‌گانه هم ویژگی جمعپذیری دامنه‌ها را دارد که علاوه بر ریاضیات در فیزیک و مهندسی سودمند است. اگر دامنه D یک تابع پیوسته F با رویه‌هایی هموار به‌شمار می‌آید از خانه‌ها یعنی $D_1, D_2, \dots, D_n$ تقسیم شود، آنگاه

$$6. \iiint_D F dV = \iiint_{D_1} F dV + \iiint_{D_2} F dV + \dots + \iiint_{D_n} F dV.$$

حجم یک ناحیه در فضا

اگر F تابعی ثابت و مقدارش برابر ۱ باشد، آنگاه مجموعه‌ای که در رابطه (۱) آمده‌اند به‌صورت ساده زیر درمی‌آیند

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta V_k = \sum_{k=1}^n \Delta V_k. \quad (3)$$

وقتی $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ هر سه به‌صفر میل کنند، خانه‌های ΔV_k کوچک‌تر و بیشتر می‌شوند و در نهایت D را می‌پوشانند بنابراین حجم D را به‌صورت انتگرال سه‌گانه زیر تعریف می‌کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \iiint_D dV.$$

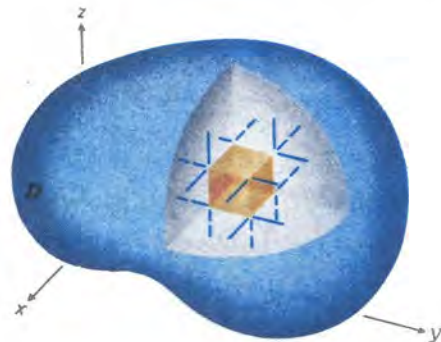
حجم ناحیه محصور و بسته‌ای چون D در فضا از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$D \text{ حجم} = \iiint_D dV. \quad (4)$$

همان‌طور که به‌زودی خواهیم دید این فرمول ما را قادر می‌سازد که حجم اجسام محصور در رویه‌های خمیده را محاسبه کنیم.

محاسبه انتگرالهای سه‌گانه

برای محاسبه انتگرال سه‌گانه به‌سادت مستقیماً از تعریف آن به‌صورت یک حد استفاده می‌کنیم. بلکه صورت سه‌بعدی قضیه فوبینی



۳۲۰۱۸ تقسیم یک جسم به خانه‌های مکعب‌مستطیلی با حجم ΔV .

زیر را تشکیل می‌دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^n F(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k. \quad (1)$$

اگر F پیوسته باشد و رویه محدودکننده D از رویه‌های همواری که با خمهای پیوسته به‌هم وصل می‌شوند تشکیل شده باشد، آنگاه وقتی $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ به‌صفر میل کنند، مجموعه‌های S_n به‌سمت حدی میل می‌کنند

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z) dV. \quad (2)$$

این حد را انتگرال سه‌گانه F روی D می‌نامیم. این حد برای برخی از توابع ناپیوسته نیز وجود دارد.

ویژگیهای انتگرال سه‌گانه

همان ویژگیهای جبری را که انتگرالهای دوگانه و یگانه [ساده] دارند، انتگرالهای سه‌گانه نیز دارند. اگر $F = F(x, y, z)$ و $G = G(x, y, z)$ هر دو انتگرالپذیر باشند، داریم

$$1. \iiint_D kF dV = k \iiint_D F dV$$

(k هر عددی می‌تواند باشد)

$$2. \iiint_D [F+G] dV = \iiint_D F dV + \iiint_D G dV$$

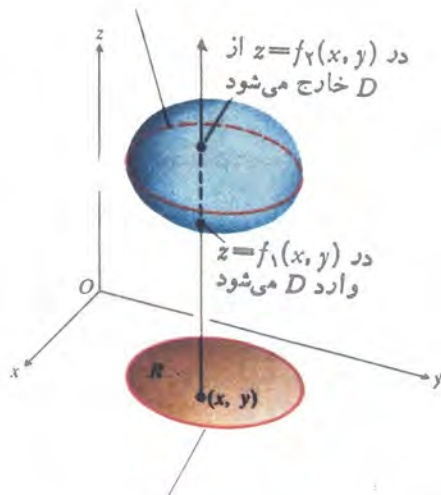
$$3. \iiint_D [F-G] dV = \iiint_D F dV - \iiint_D G dV$$

معمول با استفاده از مرزهای R تعیین شوند. اگر مساحت رویه جانبی استوانه مطابق شکل ۳۴.۱۸ و مثال بعدی صفر شود، می توان با حذف z بین دو معادله $z = f_1(x, y)$ و $z = f_2(x, y)$ معادله مرز R را یافت. داریم

$$f_1(x, y) = f_2(x, y).$$

این معادله، z ندارد و مرز R در صفحه xy را تعریف می کند. برای تعیین حدود z انتگرالگیری در هر مورد خاص، می توان از روشی شبیه روشی که در مورد انتگرالهای دو گانه به کار می رفت استفاده کرد. فرض می کنیم خطی چون L از نقطه ای چون (x, y) در R می گذرد و با محور z موازی است. وقتی z افزایش می یابد این خط در $z = f_1(x, y)$ وارد D می شود و در $z = f_2(x, y)$ از آن خارج می شود. به این ترتیب حد بالا و پایین انتگرالگیری نسبت به z به دست می آید. حال نتیجه این

خم محل تقاطع رویه های محدود کننده بالایی و پایینی. روی این خم، $f_1(x, y) = f_2(x, y)$.



تصویر قائم خم محل تقاطع دو رویه بر صفحه xy . روی این خم، $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ و می توان از این معادله به عنوان معادله مرز R استفاده کرد.

۳۴.۱۸ نموداری برای تعیین حدود انتگرالگیری انتگرال سه گانه تابعی چون F روی ناحیه سه بعدی D که بین دو رویه محصور است. در مورد این ناحیه داریم

$$\iiint_D F dV = \iint_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F dz dy dx.$$

را به کار می بریم و با استفاده از انتگرالگیری یگانه ساده مکرر، انتگرال سه گانه را محاسبه می کنیم.

مثلاً فرض کنید ناحیه ای چون D داریم که از پایین به رویه $z = f_1(x, y)$ ، از بالا به رویه $z = f_2(x, y)$ و از اطراف به استوانه C که موازی محور z است محدود است (شکل ۳۴.۱۸) و می خواهیم از تابع پیوسته ای چون $F(x, y, z)$ روی این ناحیه انتگرال بگیریم. فرض می کنیم R تصویر قائم D روی صفحه xy باشد. R ناحیه ای در صفحه xy است که C آن را محصور می کند. بنابراین انتگرال F روی D چنین محاسبه می شود

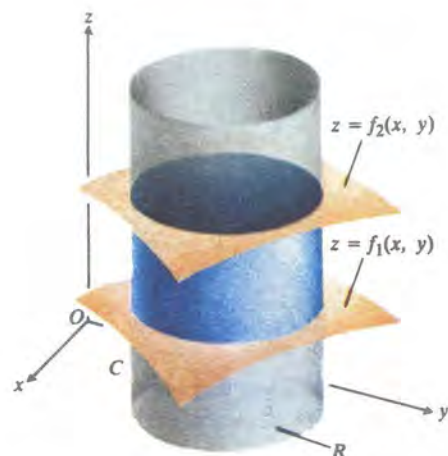
$$\begin{aligned} \iiint_D F(x, y, z) dV \\ &= \iint_R \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz \right) dy dx. \end{aligned}$$

اگر پرازنهای بزرگ را حذف کنیم نتیجه می گیریم

$$\iiint_D F(x, y, z) dV \quad (5)$$

$$= \iint_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx.$$

حدود z در انتگرالگیری نشان می دهد که به ازای هر (x, y) در ناحیه R ، z می تواند از رویه پایینی، $z = f_1(x, y)$ تا رویه بالایی، $z = f_2(x, y)$ تغییر کند. حدود x و y به طور صریح در انتگرالگیری (رابطه ۵) نیامده اند اما باید به روش



۳۴.۱۸ حجم محصور را می توان از رابطه زیر یافت

$$V = \iint_R \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz dy dx.$$

انتگرالگیری تابعی است از تنها دو متغیر x و y که با تعیین حدود آن به روش معمول، از آن روی R انتگرال می گیریم.

مثال ۱ مطلوب است حجم ناحیه سه بعدی محصور بین رویه های

$$z = x^2 + 3y^2$$

و

$$z = 8 - x^2 - y^2.$$

حل: دو رویه (شکل ۳۵.۱۸) یکدیگر را در استوانهٔ

بیضوی

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$$

یا

$$x^2 + 2y^2 = 4$$

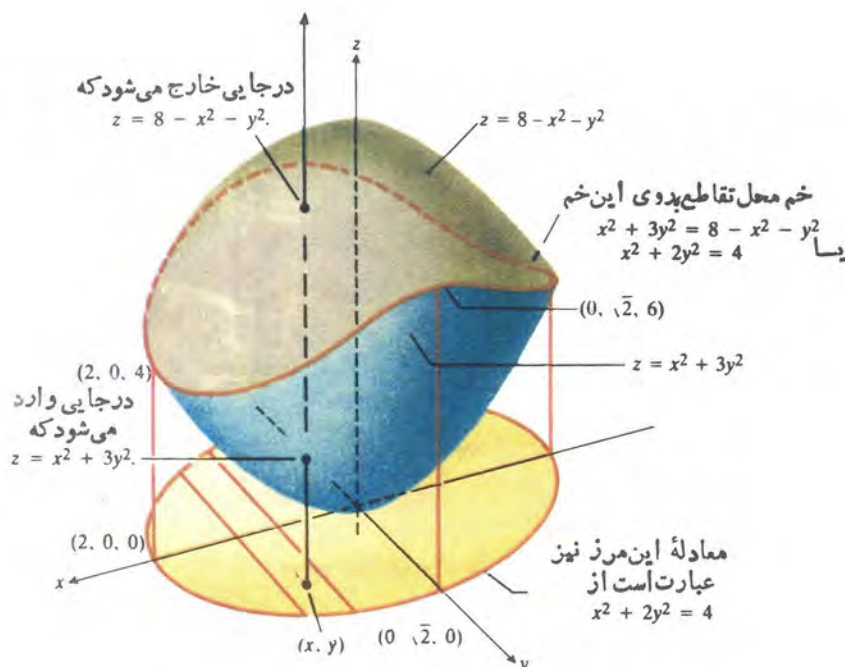
قطع می کنند. تصویر این ناحیه سه بعدی بر ناحیه دو بعدی R در صفحه xy ، در بیضی با همین معادله محصور است. در انتگرال دو گانه نسبت به y و x روی R ، اگر نخست نسبت به y انتگرال بگیریم و x را ثابت نگه داریم، y از $-\sqrt{(4-x^2)/2}$ تا $+\sqrt{(4-x^2)/2}$ تغییر می کند. سپس x از -2 تا $+2$ تغییر

می کند. بنا بر این داریم

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(8 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(2(8 - x^2) \sqrt{\frac{4-x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right) dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(8 \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} - \frac{8}{3} \left(\frac{4-x^2}{2} \right)^{3/2} \right) dx \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^2 (4-x^2)^{3/2} dx \\ &= 8\pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(پس از انتگرالگیری با
جانشانی $x = 2 \sin u$)

همان طور که می دانیم، در محاسبهٔ یک انتگرال دو گانه گاه (و نه همیشه) دوتریب برای انجام انتگرالگیریهای یگانه [ساده] وجود دارد. در مورد انتگرالهای سه گانه هم گاه (و نه همیشه)



۳۵.۱۸ در مثال ۱، حجم ناحیه محصور بین این دو سهمیوار محاسبه می شود.

برابر است با فاصله متوسط نقاط واقع در D از مبدأ. اگر $F(x, y, z)$ چگالی جسمی باشد که ناحیه D در فضا را اشغال می کند، آنگاه مقدار متوسط F روی D برابر است با چگالی متوسط جسم بر حسب واحدهای جرم در هر واحد حجم.

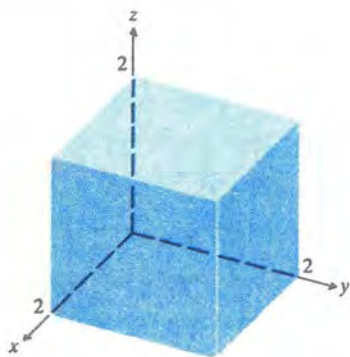
مثال ۳ مطلوب است مقدار متوسط $F(x, y, z) = xyz$ روی مکعبی که در یک هشتم اول واقع و به صفحات $x=2$ ، $y=2$ ، و $z=2$ محدود است.

حل: مکعب را رسم و جزئیات را مشخص می کنیم تا حدود انتگرال گیری نشان داده شود (شکل ۳۷۰۱۸). سپس به کمک رابطه (۶) مقدار متوسط F روی مکعب را می یابیم. حجم مکعب برابر است با $(2)(2)(2) = 8$. مقدار انتگرال F روی مکعب برابر است با

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} yz \right]_{x=0}^{x=2} dy \, dz \\ &= \int_0^2 \int_0^2 2 yz \, dy \, dz \\ &= \int_0^2 \left[y^2 z \right]_{y=0}^{y=2} dz \\ &= \int_0^2 4z \, dz = \left[2z^2 \right]_0^2 = 8. \end{aligned}$$

با استفاده از این مقادیر از رابطه (۶) نتیجه می گیریم

$$\text{مقدار متوسط } xyz \text{ روی مکعب} = \frac{1}{\text{حجم}} \int \int \int xyz \, dV = \left(\frac{1}{8} \right) (8) = 1.$$



۳۷۰۱۸ مکعب محدود به صفحات $x=2$ ، $y=2$ ، و $z=2$. ناحیه انتگرال گیری در مثال ۳ است.

شش ترتیب برای انتگرال گیری وجود دارد. مثال بعدی حالتی را نشان می دهد که از هر شش ترتیب می توان برای محاسبه انتگرال استفاده کرد.

مثال ۲ هر یک از انتگرالهای زیر حجم جسمی را که در شکل ۳۶۰۱۸ دیده می شود به دست می دهد.

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 dx \, dy \, dz \quad (\text{الف})$$

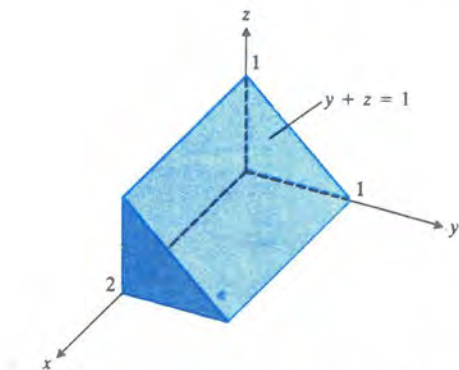
$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 dx \, dz \, dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} dy \, dx \, dz \quad (\text{پ})$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} dy \, dz \, dx \quad (\text{ت})$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} dz \, dx \, dy \quad (\text{ث})$$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} dz \, dy \, dx \quad (\text{ج})$$



۳۶۰۱۸ در مثال ۲ چگونگی محاسبه حجم این منشور با شش انتگرال سه گانه هکر متفاوت آمده است.

مقدار متوسط یک تابع در فضا

مقدار متوسط تابع F روی ناحیه D در فضا با فرمول زیر تعریف می شود

$$\text{مقدار متوسط } F \text{ روی } D = \frac{1}{\text{حجم } D} \int \int \int_D F \, dV. \quad (۶)$$

اگر $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، مقدار متوسط F روی D

برای محاسبه این انتگرال، ترتیب dx ، dy ، dz را برگزیدیم، اما از هر یک از پنج ترتیب دیگر نیز می توان به همین نتیجه رسید.

مسئله ها

۱. مقدار انتگرالهای مثال ۲ چقدر است؟

۲. شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم مکعب مستطیلی که در یک هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=2$ ، و $z=3$ محدود است بنویسید. یکی از انتگرالها را محاسبه کنید.

۳. شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم یک چهاروجهی که صفحه $6x+3y+2z=6$ از یک هشتم اول جدا می کند بنویسید. یکی از انتگرالها را محاسبه کنید.

۴. شش انتگرال سه گانه مکرر مختلف برای حجم ناحیه ای واقع در یک هشتم اول و محدود به استوانه $x^2+z^2=4$ و صفحه $y=3$ بنویسید. یکی از انتگرالها را محاسبه کنید.

در مسائل ۵-۱۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$5. \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

$$6. \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz dx dy$$

$$7. \int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz} dx dy dz$$

$$8. \int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz dy dx$$

$$9. \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi y \sin z dx dy dz$$

$$10. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x+y+z) dy dx dz$$

$$11. \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-x^2}}^{\sqrt{1-y^2-x^2}} dx dy dz$$

$$12. \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz dy dx$$

$$13. \int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} dz dx dy$$

$$14. \int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz dy dx$$

$$15. \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{(2-2x^2-2y^2)} dz dy dx$$

$$16. \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x dz dy dx$$

$$17. \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z) dx dy dz$$

$$18. \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{\frac{5-x^2}{4x^2}}^{5-x^2} (x-y+1) dz dy dx$$

در مسائل ۱۹-۲۲، مقدار متوسط $F(x, y, z)$ را روی ناحیه داده شده بیابید.

۱۹. $F(x, y, z) = x^2 + 9$ روی مکعبی که در یک هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و صفحات $x=2$ ، $y=2$ ، و $z=2$ محدود است.

۲۰. $F(x, y, z) = x + y - z$ روی مکعب مستطیلی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، و $z=1$.

۲۱. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ روی مکعبی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، و $z=1$.

۲۲. $F(x, y, z) = xyz$ روی مکعبی واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=a$ ، $y=a$ ، و $z=a$.

در مسائل ۲۳-۳۸، حجم اشکال و نواحی را بیابید.

۲۳. ناحیه ای که از بالا به سهمیوار $z = 2 - x^2 - y^2$ و از پایین به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ محدود است.

۲۴. ناحیه بین استوانه $z = y^2$ و صفحه xy که به چهار صفحه قائم $x=0$ ، $x=1$ ، $y=-1$ ، $y=1$ محدود است.

۲۵. ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات $x+z=1$ ، $y+z=2$.

۲۶. ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به استوانه $x^2 - y^2 = 4$ و صفحات $z=0$ ، $x=0$ ، $z=y$.

۲۷. برشی گوه ای از استوانه $x^2 + y^2 = 1$ که از بالا به صفحه $z=y$ و از پایین به صفحه $z=0$ محدود است.

۳۸. ناحیه‌ای که در یک هشتم اول واقع و از بالا به رویه استوانه $z = 4 - x^2 - y^2$ و از پایین به صفحه $z = 3$ محدود است.

۳۹. دامنه انتگرالگیری انتگرال زیر را رسم کنید

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx.$$

سپس این انتگرال را به صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیبهای زیر بنویسید.

الف) $dy dz dx$

ب) $dy dx dz$

پ) $dx dy dz$

ت) $dx dz dy$

ث) $dz dx dy$

۴۰. مسأله ۳۹ را در مورد انتگرال زیر حل کنید

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{y^2} dz dy dx.$$



TOOLKIT PROGRAM
Double Integral

۵.۱۸ جرم و گشتاور در سه بعد

در این بخش، روش محاسبه جرم و گشتاور اجسام سه بعدی در مختصات دکارتی تشریح می‌شود. محاسبات در مختصات کروی و استوانه‌ای در بخش ۶.۱۸ خواهد آمد.

جرم و گشتاور

اگر $\delta(x, y, z)$ چگالی جسمی باشد که ناحیه‌ای چون D را در فضا اشغال کرده است، انتگرال δ روی D جرم جسم را به دست می‌دهد. برای پی بردن به دلیل این مطلب، فرض کنید D مطابق شکل ۳۹.۱۸ تقسیم‌بندی شده باشد. به این ترتیب جرم جسم برابر است با حد زیر

$$\begin{aligned} M &= \lim \sum_k \Delta m_k = \lim \sum_k \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \\ &= \iiint_D \delta(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (1)$$

اگر $r(x, y, z)$ فاصله نقطه (x, y, z) در D تا خطی

۲۸. ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات، استوانه $4 = x^2 + y^2$ ، و صفحه $3 = x + z$.

۲۹. ناحیه واقع در یک هشتم اول که به صفحات مختصات، و از بالا به استوانه $1 = x^2 + z^2$ و از راست به سهمیوار $y = x^2 + z^2$ محدود است. (دانه‌مایی: نخست نسبت به y انتگرال بگیرد).

۳۰. ناحیه محصور بین استوانه‌های $z = 4 - x^2$ ، $z = 5 - x^2$ ، و صفحات $0 = y$ و $1 = x + y$.

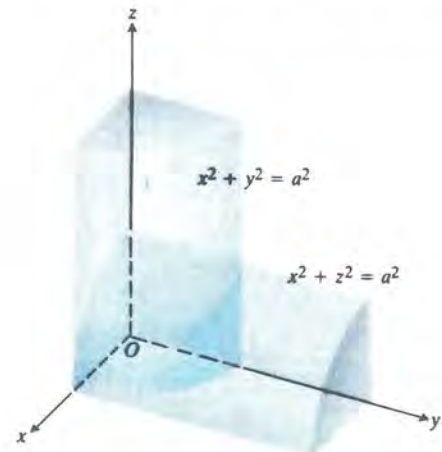
۳۱. ناحیه محصور بین استوانه $16 = y^2 + 4z^2$ و صفحات $0 = x + y$ ، $0 = x$.

۳۲. ناحیه‌ای که از پایین به صفحه $z = 0$ ، از اطراف به استوانه بیضوی $4 = x^2 + 4y^2$ ، و از بالا به صفحه $z = x + 2$ محدود است.

۳۳. چهار وجهی که در یک هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و صفحه $1 = x/a + y/b + z/c$ محدود است.

۳۴. ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات، صفحه $1 - x = y$ ، و رویه $z = \cos(\pi x/2)$.

۳۵. فصل مشترک نواحی داخلی استوانه $a^2 = x^2 + y^2$ و استوانه $a^2 = x^2 + z^2$ (شکل ۳۸.۱۸).

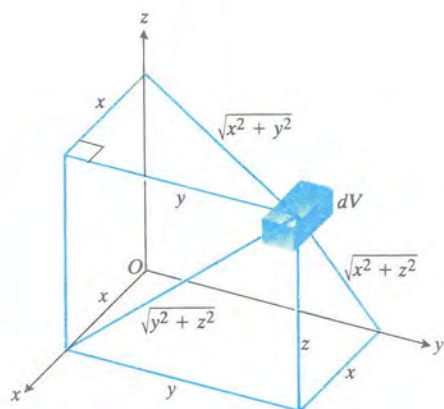


۳۸.۱۸ یک هشتم حجم مشترک استوانه‌های $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ مذکور در مسأله ۳۵.

۳۶. ناحیه محصور بین سهمیوارهای بیضوی $z = x^2 + 9y^2$ و $z = 18 - x^2 - 9y^2$.

۳۷. ناحیه محصور در بیضیوار

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1.$$



۴۰.۱۸ فاصله‌های dV تا صفحات و محاورهای مختصات.

فرمولهای جرم و گشتاور اجسام در فضا
جرم:

$$M = \iiint_D \delta \, dV \quad (\delta = \text{چگالی})$$

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz} = \iiint_D x \delta \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y \delta \, dV$$

$$M_{xy} = \iiint_D z \delta \, dV$$

مرکز جرم:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_D x \delta \, dV}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \delta \, dV}{M}$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_D z \delta \, dV}{M}$$

گشتاورهای لختی (گشتاورهای دوم):

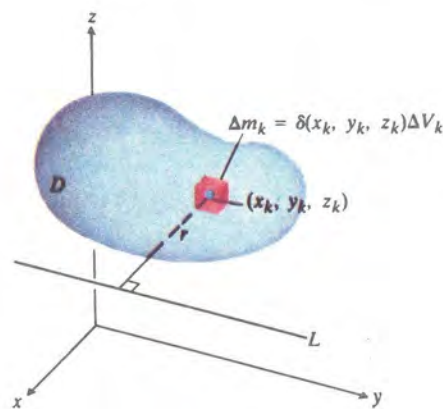
$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta \, dV$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dV$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV, \quad I_L = \iiint_D r^2 \delta \, dV$$

فاصله نقطه (x, y, z) تا خط L

شعاع چرخش حول خط L : $R = \sqrt{I_L/M}$



۳۹.۱۸ برای تعریف I_L ، نخست فرض می‌کنیم D به تعدادی متناهی جزء جرم Δm_k تقسیم شده است.

چون L باشد، گشتاور لختی جرم یعنی

$$\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

(که در شکل ۳۹.۱۸ دیده می‌شود) حول خط L تقریباً برابر است با

$$\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k) \Delta m_k.$$

گشتاور لختی کل جسم حول L عبارت است از

$$I_L = \lim \sum_k \Delta I_k$$

$$= \lim \sum_k r^2(x_k, y_k, z_k) \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

$$= \iiint_D r^2 \delta \, dV.$$

اگر L ، محور x باشد، آنگاه $r^2 = y^2 + z^2$ (شکل ۴۰.۱۸) و

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \delta \, dV.$$

همچنین

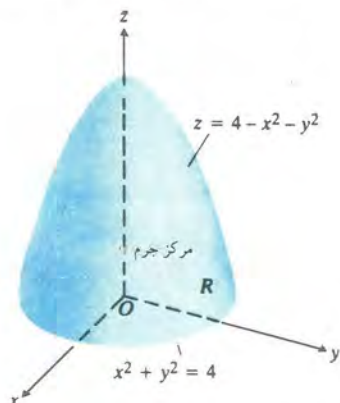
$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \delta \, dV$$

و

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV.$$

این فرمولها و فرمولهای مفید دیگری در فهرست زیر آمده‌اند.

مثال ۲: مطلوب است مرکز جرم جسمی که چگالی آن ثابت و از پایین به قرص $R: x^2 + y^2 \leq 4$ در صفحه $z=0$ و از بالا به سهمیوار $z=4-x^2-y^2$ محدود است (شکل ۲۰.۱۸).



۲۰.۱۸ مختصات مرکز جرم این جسم در مثال ۲ محاسبه می‌شود.

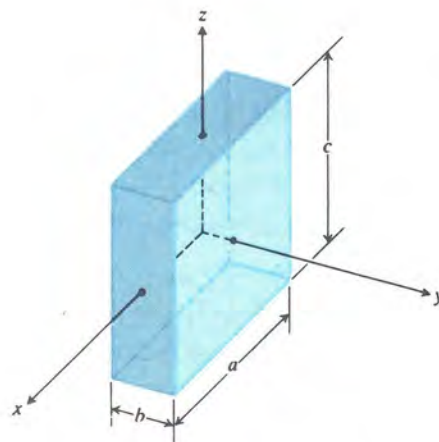
حل: بنا به تقارن داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$. برای یافتن $\bar{z}$ نخست چنین عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int \int_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \delta \, dz \, dy \, dx \\ &= \int \int_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int \int_R (4-x^2-y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2)^2 r \, dr \, d\theta \quad (\text{مختصات قطبی}) \\ &= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (4-r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\ &= \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{32\pi\delta}{3}. \end{aligned}$$

با محاسبات مشابهی نتیجه می‌گیریم که

$$M = \int \int_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta.$$

مثال ۱: مطلوب است I_x, I_y, I_z برای مکعب مستطیل توپز در شکل ۲۱.۱۸ که چگالی δ آن ثابت است.



۲۱.۱۸ در مثال ۱، I_x, I_y و I_z برای این مکعب مستطیل محاسبه می‌شود. مبدأ در مرکز این مکعب مستطیل قرار دارد.

حل: بنا به فرمول قبل در مورد I_x داریم

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz. \quad (2)$$

چون $(y^2 + z^2)\delta$ تابعی زوج از x ، y ، و z است، می‌توان از برخی محاسبات انتگرالگیری اجتناب کرد. داریم

$$\begin{aligned} I_x &= 8 \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \delta \, dx \, dy \, dz \\ &= 4a\delta \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + z^2) \, dy \, dz \\ &= 4a\delta \int_{-c/2}^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y \right]_{y=-b/2}^{y=b/2} dz \\ &= 4a\delta \int_{-c/2}^{c/2} \left(\frac{b^3}{3} + \frac{z^2 b}{1} \right) dz \\ &= 4a\delta \left(\frac{b^3 c}{3} + \frac{c^3 b}{3} \right) = \frac{abc\delta}{3} (b^2 + c^2) \\ &= \frac{M}{12} (b^2 + c^2). \end{aligned}$$

همچنین

$$\blacksquare \quad I_z = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) \quad \text{و} \quad I_y = \frac{M}{12} (a^2 + c^2)$$

بنابراین

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$$

و مرکز جرم این جسم برابر است با $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$.

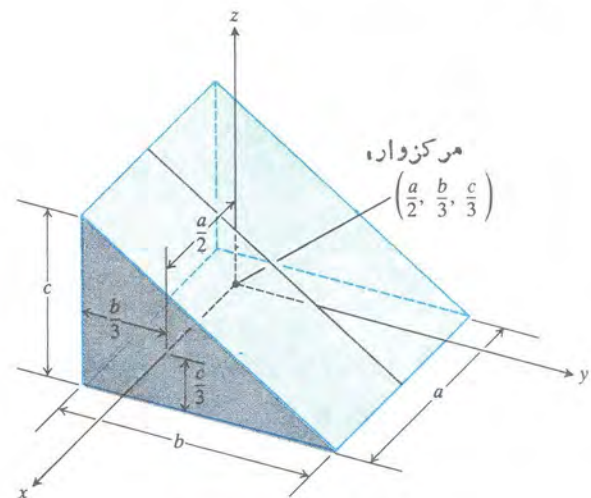
مسئله‌ها

چگالی ثابت

در مسائل ۱-۱۲، هرگاه از چگالی ذکر شده به میان نیامده، آن را برابر با ۱ بگیرید.

۱. انتگرال مربوط به I_x در رابطه (۲) را مستقیماً محاسبه کنید و نشان دهید راه حل میانبر مذکور در مثال ۱ همین جواب را به دست می‌دهد. با استفاده از نتیجه مثال ۱ شعاع چرخش جسم مکعب مستطیلی را حول هر یک از محاورهای مختصات بیابید.

۲. در شکل ۴۳.۱۸ محاورهای مختصات از مرکزوار گوته توپر می‌گذرند و با یالهای آن موازی‌اند. با استفاده از اندازه‌های روی شکل، I_x ، I_y و I_z را بیابید.

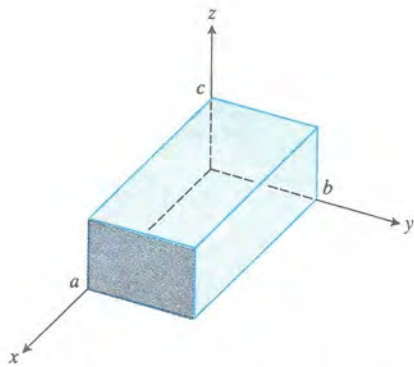


شکل مسئله ۲. ۴۳.۱۸

۳. گشتاورهای لختی (I_x ، I_y و I_z) جسم مکعب مستطیلی شکل ۴۴.۱۸ را نسبت به یالهایش بیابید.

۴. الف) مطلوب است مرکزوار و گشتاورهای لختی I_x ، I_y و I_z برای یک چهاروجهی که رئوسش در نقاط $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ واقع‌اند.

ب) شعاع چرخش این چهاروجهی را حول محور x بیابید و آن را با فاصله مرکزوار تا محور x مقایسه کنید.



۴۴.۱۸ مکعب مستطیل مسئله ۳.

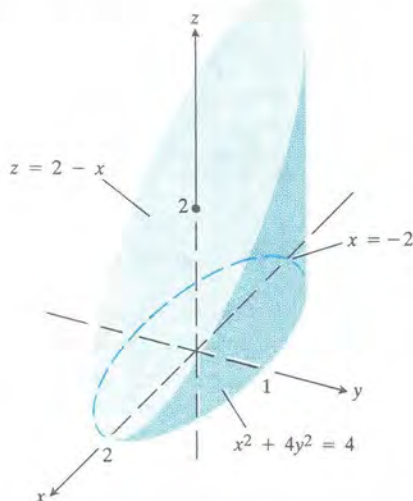
۵. یک آبشخور توپر با چگالی ثابت δ از پایین به رویه $z = 4y^2$ ، از بالا به صفحه $z = 4$ ، و از طرفین به صفحات $x = -1$ و $x = 1$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاورهای لختی این آبشخور نسبت به سه محور.

۶. جسمی با چگالی ثابت $\delta = 1$ از پایین به صفحه $z = 0$ ، از طرفین به استوانه بیضوی $4 = x^2 + 4y^2$ ، و از بالا به صفحه $z = 2 - x$ محدود است (شکل ۴۵.۱۸).

الف) مطلوب است $\bar{x}$ و $\bar{y}$.

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید؛ به این منظور از جداول انتگرال برای محاسبه آخرین انتگرال نسبت به x استفاده کنید.

$$M_{xy} = \int_{-2}^2 \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-x} z \, dz \, dy \, dx$$

سپس M_{xy} را بر M تقسیم کنید و نشان دهید $\bar{z} = 5/2$.

۴۵.۱۸ جسم مورد بحث در مسئله ۶.

۷. الف) مطلوب است مرکز جرم جسم همگنی که از پایین به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ و از بالا به صفحه $z = 4$ محدود است.

ب) صفحه‌ای چون $z=c$ بیابید که جسم را به دو قسمت مساوی

احجام مساوی تقسیم کند. این صفحه از مرکز جرم نمی‌گذرد.

$$\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$$

مرکز جرم، گشتاورهای لختی، و شعاعهای چرخش مکعب را حول محاورهای مختصات بیابید.

۸. مکعبی توپر به طول ضلع ۲ واحد به صفحات $x = \pm 1$ ، $z = \pm 1$ ، $y = 0$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش حول محاورهای مختصات. فرض کنید جرم مکعب در مرکز جرمش متمرکز است. در این حالت آیا گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش تغییری می‌کنند؟ اگر می‌کنند چقدر؟

۹. در گوه‌ای نظیر گوه شکل ۴۳.۱۸ داریم $a=4$ ، $b=6$ ، و $c=3$. شکلی رسم کنید و نشان دهید که مربع فاصله نقطه‌ای از گوه چون (x, y, z) تا خط $L: z=0, y=6$ برابر است با $r^2 = (y-6)^2 + z^2$. سپس گشتاور لختی و شعاع چرخش گوه را حول L بیابید.

۱۰. در گوه‌ای نظیر گوه شکل ۴۳.۱۸ داریم $a=4$ ، $b=6$ ، و $c=3$. شکلی رسم کنید و نشان دهید که مربع فاصله نقطه نمونه‌وار (x, y, z) از گوه تا خط $L: x=4, y=0$ برابر است با $r^2 = (x-4)^2 + y^2$. سپس گشتاور لختی و شعاع چرخش گوه را حول L بیابید.

۱۱. در مکعب مستطیلی توپر نظیر مکعب مستطیل شکل ۴۴.۱۸ داریم $a=4$ ، $b=2$ ، $c=1$. شکلی رسم کنید و ثابت کنید که مربع فاصله نقطه نمونه‌وار (x, y, z) از مکعب مستطیل تا خط $L: y=2, z=0$ برابر است با $r^2 = (y-2)^2 + z^2$. سپس گشتاور لختی و شعاع چرخش مکعب مستطیل را حول L بیابید.

۱۲. در مکعب مستطیلی توپر نظیر مکعب مستطیل شکل ۴۴.۱۸ داریم $a=4$ ، $b=2$ ، $c=1$. شکلی رسم کنید و نشان دهید که مربع فاصله نقطه نمونه‌وار (x, y, z) از مکعب مستطیل تا خط $L: x=4, y=0$ برابر است با $r^2 = (x-4)^2 + y^2$. سپس گشتاور لختی و شعاع چرخش مکعب مستطیل را حول L بیابید.

۱۳. جسمی در یک‌هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و صفحه $z=2$ محدود است. چگالی جسم عبارت است از $\delta(x, y, z) = 2x$. مرکز جرم جسم را بیابید.

چگالی متغیر

۱۴. ابعاد گوه‌ای توپر نظیر گوه شکل ۴۳.۱۸ برابر است با $a=4$ ، $b=6$ ، $c=3$. چگالی گوه عبارت است از $\delta(x, y, z) = x$. مرکز جرم، گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش گوه را حول محاورهای مختصات بیابید. توجه کنید که اگر چگالی ثابت باشد، مرکز جرم در $(2, 2, 1)$ قرار خواهد گرفت.

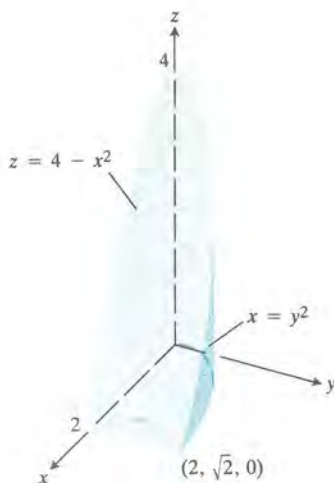
۱۵. مکعبی در یک‌هشتم اول واقع و به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=1$ ، $z=1$ محدود است. اگر

الف) جرم جسم

ب) $\bar{x}$

پ) $\bar{y}$

ت) $\bar{z}$



۴۶.۱۸ جسم مورد بحث در مسئله ۱۶.

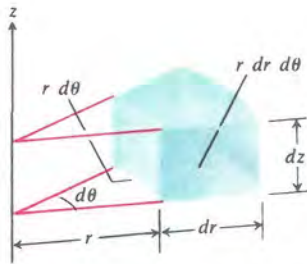


TOOLKIT PROGRAM

Double Integral

۶.۱۸ انتگرالهای سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی

اگر با اجسامی به شکل مخروط یا پوسته استوانه‌ای یا نظایر آنها سروکار داشته باشیم که دارای محور تقارن باشند، اغلب می‌توانیم محور تقارن را محور z در یک دستگاه مختصات استوانه‌ای بگیریم و محاسبات را ساده کنیم. به همین ترتیب، اگر با اجسامی به شکل کره یا پوسته کروی سروکار داشته باشیم که دارای مرکز تقارن باشند، اغلب می‌توانیم مرکز تقارن را مرکز یک دستگاه مختصات



۴۸.۱۸ جزء حجم در مختصات استوانه‌ای عبارت است از $dV = dz r dr d\theta$.

مثال ۱ مطلوب است مرکزوار جرمی که در استوانه $x^2 + y^2 = 4$ محصور و از بالا به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است.

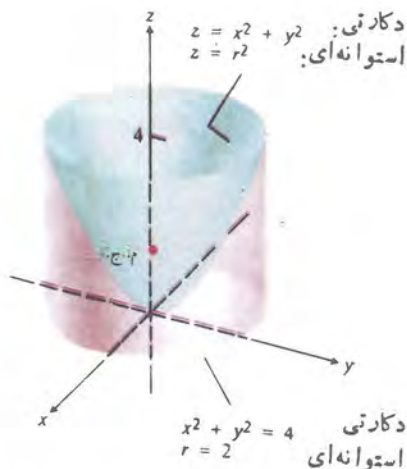
حل: شکل را رسم می‌کنیم و رویه‌ها را نشان می‌دهیم. به کمک این شکل حدود انتگرالگیری را تعیین می‌کنیم (شکل ۴۹.۱۸). در مختصات استوانه‌ای، رویه‌ها عبارت‌اند از

استوانه: $r = 2$

سهمیوار: $z = r^2$

صفحه xy : $z = 0$

از روی شکل درمی‌یابیم که r از ۰ تا ۲، θ از ۰ تا 2π ، و z از ۰ تا r^2 تغییر می‌کند.



۴۹.۱۸ در مثال ۱، نشان داده می‌شود که مرکز جرم این جسم چگونه به دست می‌آید.

مرکز جرم جسم بر محور تقارن آن قرار دارد که در این مورد، محور z است. پس $\bar{x} = \bar{y} = 0$. برای یافتن $\bar{z}$ ، گشتاور M_{xy} را بر جرم M تقسیم می‌کنیم. مقدار M_{xy} عبارت است از

کروی بگیریم و در محاسبات صرفه‌جویی کنیم. در این بخش روش محاسبه جرم، گشتاورها، و حجم را در دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی تشریح می‌کنیم.

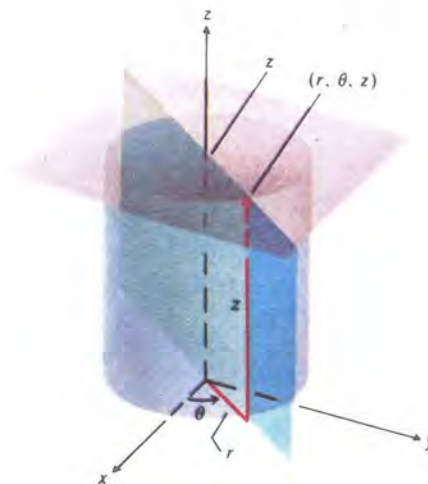
مختصات استوانه‌ای

مختصات استوانه‌ای (شکل ۴۷.۱۸) برای توصیف استوانه‌هایی که محورشان در امتداد محور z است و صفحه‌ای که یا شامل محور z یا عمود بر آن‌اند، مناسب است. چنانکه در بخش ۳۰.۱۵ دیدیم، رویه‌های نظیر این رویه‌ها معادلات ساده‌ای دارند که به صورت برابر y یک مختص با یک مقدار ثابت است:

(استوانه‌ای به شعاع ۴ که محورش بر محور z منطبق است) $r = 4$

(صفحه شامل محور z) $\theta = \frac{\pi}{3}$

(صفحه عمود بر محور z) $z = 2$



۴۷.۱۸ مختصات استوانه‌ای و نمونه‌هایی از رویه‌هایی که یکی از مختصاتشان ثابت است.

چنانکه در شکل ۴۸.۱۸ دیده می‌شود، جزء حجمی که برای تقسیم بندی ناحیه‌ای در فضا با مختصات استوانه‌ای در نظر می‌گیریم عبارت است از

$$dV = dz r dr d\theta. \quad (1)$$

به این ترتیب، انتگرالهای سه گانه چنانکه در مثال بعدی خواهید دید به صورت انتگرالهای مکرر محاسبه می‌شوند.

محدودند، و مخروطهای یکپارچه‌ای که رأسشان در مبدأ و محورشان در امتداد محور z است، مناسب است. رویه‌های نظیر این رویه‌ها معادلات ساده‌ای دارند که به صورت برابری یک مختص با یک مقدار ثابت است

$\rho = 4$ (کره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز مبدأ)

$\phi = \frac{\pi}{3}$ (مخروطی که رأسش در مبدأ است و با قسمت مثبت محور z زاویه $\pi/3$ رادیان می‌سازد)

$\theta = \frac{\pi}{3}$ (نیم صفحه‌ای که از یک طرف به محور z محدود است و با قسمت مثبت محور z زاویه $\pi/3$ رادیان می‌سازد)

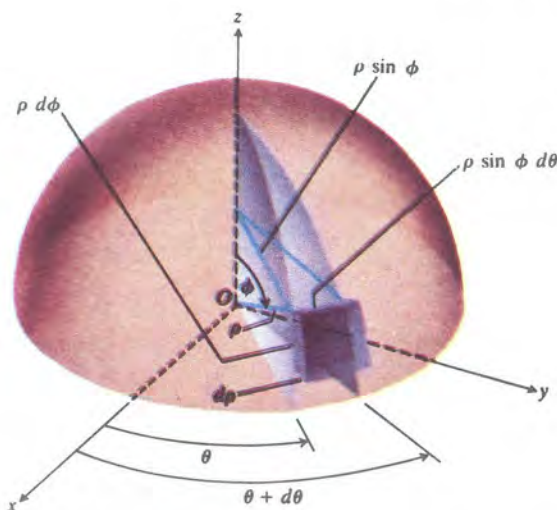
جزء حجم در مختصات کروی (چنانکه در شکل ۵۰۱۸ دیده می‌شود) برابر است با

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad (2)$$

و انتگرال سه گانه به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \iiint F(\rho, \phi, \theta) \, dV \\ = \iiint F(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

برای محاسبه این گونه انتگرالها معمولاً نخست نسبت به ρ انتگرال می‌گیریم. روش یافتن حدود انتگرالگیری برای ناحیه‌ای چون D در فضا چنین است.



۵۰۱۸ جزء حجم در مختصات کروی برابر است با

$$dV = d\rho \cdot \rho \, d\phi \cdot \rho \sin \phi \, d\theta = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

گام ۱: ϕ و θ را ثابت نگاه می‌داریم و ρ را افزایش می‌دهیم. به این ترتیب پرتوی از مبدأ خارج می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^4 z \, dz \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^4 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{r^5}{5} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{12} \right]_0^4 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} d\theta = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

مقدار M عبارت است از

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^4 dz \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[z \right]_0^4 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} r^2 \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^4 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} d\theta = 16\pi. \end{aligned}$$

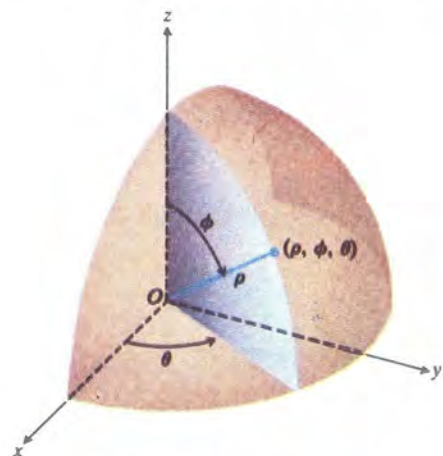
بنابراین

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3} \cdot \frac{1}{16\pi} = \frac{2}{3}$$

و مرکز جرم جسم در نقطه $(0, 0, 2/3)$ واقع است.

مختصات کروی

مختصات کروی (شکل ۵۰۱۸) برای توصیف کره‌هایی که مرکزشان مبدأ است، نیم صفحه‌هایی که از یک طرف به محور z



۵۰۱۸ در مختصات کروی، مختصات عبارت‌اند از یک فاصله و دو زاویه.

مثال ۳: مطلوب است گشتاور لختی ناحیه مورد بحث در مثال ۲ حول محور z .

حل: گشتاور درمختصات قائم عبارت است از

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2) dV.$$

درمختصات کروی داریم

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\rho \sin \phi \cos \theta)^2 + (\rho \sin \phi \sin \theta)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} I_z &= \int \int \int (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int \int \int \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta. \end{aligned}$$

این انتگرال درمورد ناحیه مثال ۲ چنین می‌شود

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^4 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin^3 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^{\pi/3} d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{5}{24} d\theta = \frac{1}{24} (2\pi) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

□ جانشانی در انتگرالهای سه‌گانه

جانشانی مختصات استوانه‌ای و کروی حالت خاصی است از روش جانشانی که تعویض متغیرها در انتگرالهای سه‌گانه را به صورت تبدیلات نواحی سه‌بعدی مجسم می‌کند. روش مذکور درست شبیه روشی است که در انتهای بخش ۳.۱۸ درمورد انتگرالهای دوگانه توصیف شد، فقط در اینجا به‌جای دوبعد از سه‌بعد صحبت می‌شود.

فرض می‌کنیم ناحیه‌ای چون G از فضای uvw با معادلات مشتق‌پذیری به‌صورت زیر به ناحیه R واقع در فضای xyz تبدیل

گام ۲: انتگرالی را محاسبه می‌کنیم که حد پایینی‌اش مقدار ρ در محل ورود پرتو به D و حد بالایی‌اش مقدار ρ در محل خروج پرتو از D است. به این ترتیب حدود ρ مشخص می‌شود.

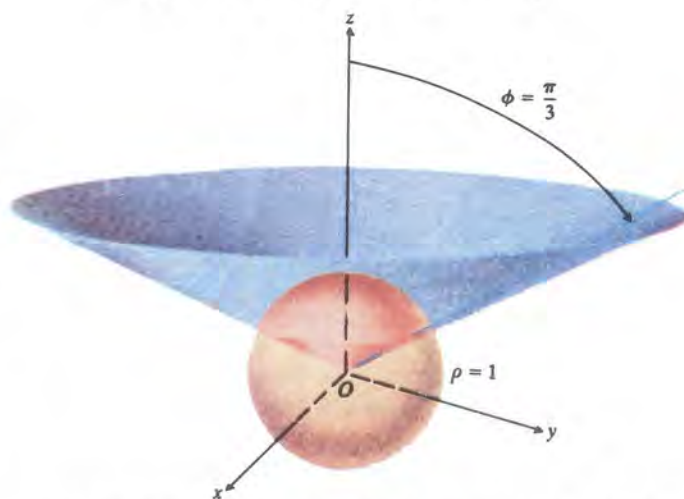
گام ۳: θ را ثابت نگاه می‌داریم و ϕ را افزایش می‌دهیم. (به این ترتیب دسته‌ای پرتو به دست می‌آید که يك «بادزن» قائم را تشکیل می‌دهند.) روی مقادیری از ϕ انتگرال می‌گیریم که به‌ازای آنها پرتوها از سراسر ناحیه D بگذرند.

گام ۴: حدود θ را چنان برمی‌گزینیم که همهٔ بادزنهایی که D را قطع می‌کنند در بر بگیرد.

مثال ۲: حجم ناحیه‌ای را بیابید که مخروط $\phi = \pi/3$ از کره $\rho \leq 1$ جدا می‌کند.

حل: برای تعیین حدود انتگرال‌گیری کره و مخروط را رسم می‌کنیم (شکل ۵۲.۱۸). در این شکل می‌بینیم که ρ از ۰ تا ۱، ϕ از ۰ تا $\pi/3$ ، و θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند. بنابراین حجم برابر است با

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cos \phi \right]_0^{\pi/3} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) d\theta = \frac{1}{6} (2\pi) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



۵۲.۱۸ ناحیه‌ای که مخروط $\phi = \pi/3$ از کره $\rho \leq 1$ جدا می‌کند.

است با دترمینان ژاکوبی

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}. \quad (5)$$

مانند حالت دوبعدی، به دست آوردن فرمول تعویض متغیر مذکور در رابطه (۴) دشوار است و در اینجا به آن نمی پردازیم.

در مختصات استوانه‌ای، r ، θ ، و z به جای u ، v ، و w می‌نشینند. روابط زیر، فضای $r\theta z$ دکارتی را به فضای xyz دکارتی تبدیل می‌کنند (شکل ۵۴.۱۸)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

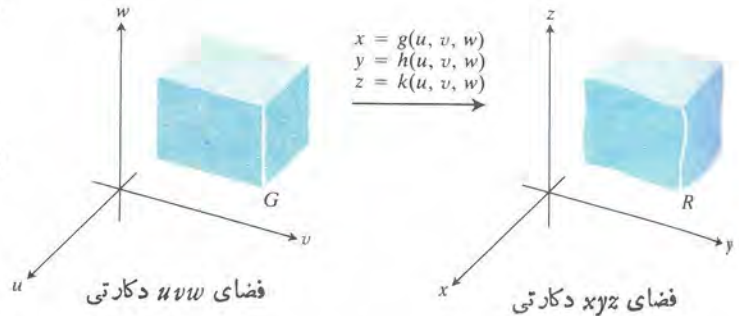
ژاکوبی این تبدیل عبارت است از

$$\begin{aligned} J(r, \theta, z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \end{aligned}$$

صورت متناظر رابطه (۴) عبارت است از

$$\begin{aligned} \iiint_R F(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_G H(r, \theta, z) |r| dr d\theta dz \end{aligned} \quad (6)$$

۵۴.۱۸ روابط $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ ، و $z = z$ را به R تبدیل می‌کنند.



۵۳.۱۸ معادلات $x = g(u, v, w)$ ، $y = h(u, v, w)$ ، و $z = k(u, v, w)$ به ما این امکان را می‌دهند که انتگرال روی ناحیه‌ای چون R در فضای xyz دکارتی را به صورت انتگرالی روی ناحیه‌ای چون G در فضای uvw دکارتی بنویسیم.

شود (شکل ۵۳.۱۸)

$$x = g(u, v, w), \quad y = h(u, v, w), \quad z = k(u, v, w).$$

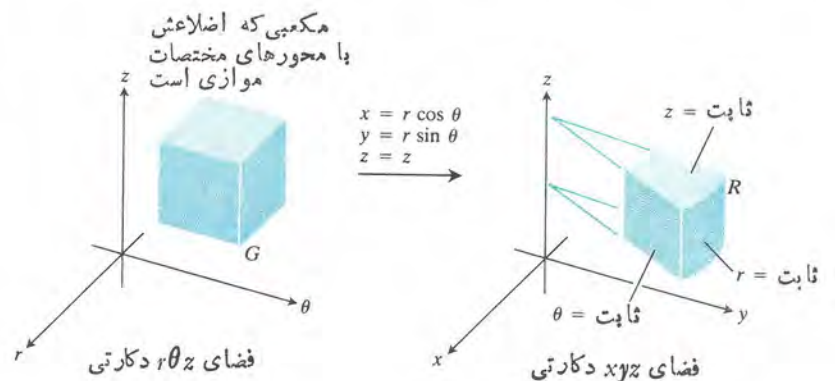
به این ترتیب، می‌توان هر تابعی چون $F(x, y, z)$ را که بر R تعریف شده به صورت تابع

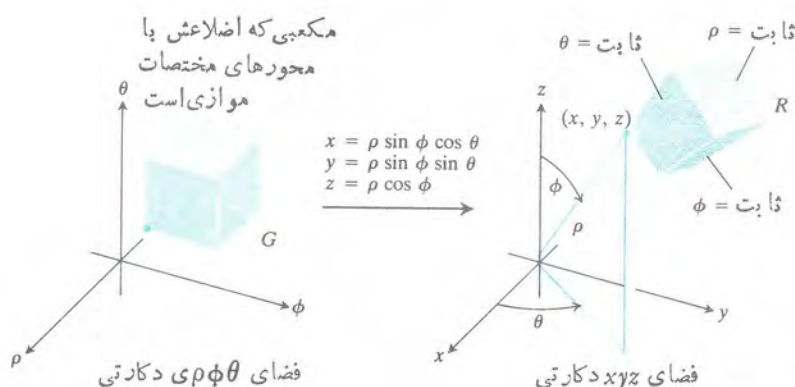
$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

که بر G تعریف شده، در نظر گرفت. رابطه زیر انتگرال $F(x, y, z)$ روی R را به انتگرال $H(u, v, w)$ روی G مربوط می‌سازد

$$\begin{aligned} \iiint_R F(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_G H(u, v, w) |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (7)$$

عامل $J(u, v, w)$ که قدر مطلقش در این رابطه آمده است برابر





۵۵.۱۸ روابط $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ، $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ ، $z = \rho \cos \phi$ را به G تبدیل می‌کنند.

صورت متناظر را بطة (۴) عبارت است از

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G H(\rho, \phi, \theta) |\rho^2 \sin \phi| d\rho d\phi d\theta. \quad (۸)$$

چون $\sin \phi$ هرگز منفی نیست می‌توان علائم قدرمطلق را حذف کرد.

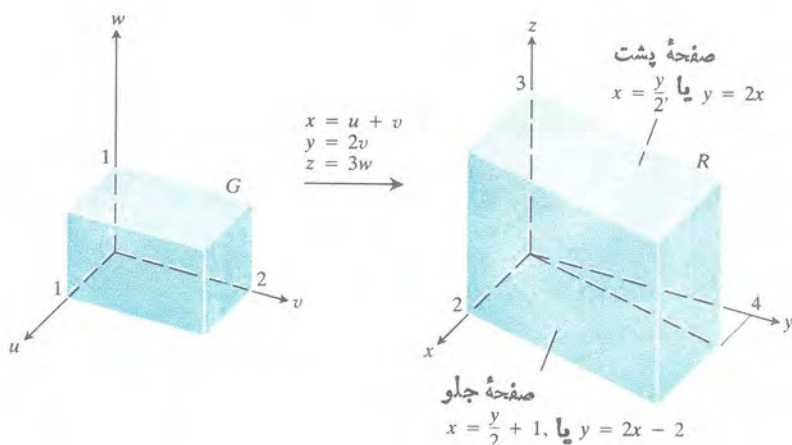
مثالی از يك‌جانشانی دیگر در زیر آمده‌است.

مثال ۴ انتگرال

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{4} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz$$

را با استفاده از تبدیل

$$u = \frac{2x-y}{4}, \quad v = \frac{y}{2}, \quad w = \frac{z}{3} \quad (۹)$$



۵۶.۱۸ روابط $x = u + v$ ، $y = 2v$ ، $z = 3w$ را به G تبدیل می‌کنند. به‌عکس، روابط $u = (2x-y)/2$ ، $v = y/2$ ، $w = z/3$ را به R تبدیل می‌کنند. مثال ۴ را ببینید.

که هرگاه $r \geq 0$ ، می‌توان علائم قدرمطلق را حذف کرد. در مختصات کروی، ρ ، ϕ ، و θ به جای u ، v ، و w می‌نشینند. روابط زیر فضای $\rho\phi\theta$ دکاری را به فضای xyz دکاری تبدیل می‌کنند (شکل ۵۵.۱۸)

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi. \end{aligned}$$

همان‌طور که درمسأله ۵۷ خواهید دید ژاکوبی این تبدیل عبارت است از

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi. \quad (۷)$$

(۴) را به کار ببریم

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^2 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{4} + \frac{z}{3} \right) dx dy dz \\ = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^1 (u+w) |J(u,v,w)| du dv dw \\ = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6) du dv dw \\ = 6 \int_0^2 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw \right]_0^1 dv dw \\ = 6 \int_0^2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w \right) dv dw \\ = 6 \int_0^2 (1+2w) dw \\ = 6 \left[w + w^2 \right]_0^2 = 6(2) = 12. \end{aligned}$$

درمسأله ۵۸ از شما خواسته می‌شود که انتگرال اصلی مورد بحث در این مثال را مستقیماً محاسبه کنید و نشان دهید که مقدارش برابر با ۱۲ است. ■

فرمولهای تبدیل مختصات

قطبی به قائم	کروی به استوانه‌ای	کروی به قائم
$x = r \cos \theta$	$r = \rho \sin \phi$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$
$y = r \sin \theta$	$z = \rho \cos \phi$	$y = \rho \sin \phi \sin \theta$
$z = z$	$\theta = \theta$	$z = \rho \cos \phi$

(تفصیل مطلب را در بخش ۳.۱۵ ببینید.)

$$\begin{aligned} dV = dx dy dz &= dz r dr d\theta \\ &= \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$

مسأله‌ها

درمسائل ۶-۱، انتگرالها را که در مختصات استوانه‌ای هستند، محاسبه کنید.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz r dr d\theta \quad ۱.$$

و انتگرالگیری روی ناحیه مناسبی از فضای uvw محاسبه کنید.

حل: ناحیه (R) انتگرالگیری در فضای xyz را رسم و مرزهایش را تعیین می‌کنیم (شکل ۵۶.۱۸). در این مورد رویه‌های محدودکننده R همگی صفحه‌اند.

برای به کار بردن رابطه (۴) باید ناحیه uvw ی متناظری چون G و نیز ژاکوبی تبدیل را بیابیم. بدین منظور، نخست معادلات (۹) را نسبت به x, y, z و بر حسب u, v, w و حل می‌کنیم

$$\begin{aligned} x &= u+v \\ y &= 2v \\ z &= 3w. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

سپس با قراردادن این عبارتها در روابط مربوط به مرزهای R ، مرزهای G را می‌یابیم

مرز R	مرز متناظر G	رابطه ساده شده
$x = \frac{y}{2}$	$u+v = \frac{2v}{2} = v$	$u=0$
$x = \left(\frac{y}{2}\right) + 1$	$u+v = \left(\frac{2v}{2}\right) + 1 = v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$
$z=0$	$3w=0$	$w=0$
$z=3$	$3w=3$	$w=1$

شکل ۵۶.۱۸ را ببینید.

ژاکوبی تبدیل بازهم از روابط (۱۰) به دست می‌آید و برابر است با

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

اکنون هر آنچه نیاز داشتیم در اختیار داریم و می‌توانیم رابطه

به مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ محدود است. V یعنی حجم D را به صورت یک انتگرال سه گانه مکرر در مختصات (الف) استوانه‌ای، و (ب) کروی بیان کنید. سپس (پ) را بیابید.

۱۷. مطلوب است تعیین حدود انتگرالگیری برای محاسبه انتگرال مکرر

$$\iiint_D f(r, \theta, z) \, dz \, r \, dr \, d\theta$$

روی ناحیه D که از پایین به صفحه $z=0$ ، از اطراف به استوانه مستدیر $r = \cos \theta$ و از بالا به سهمیوار $z = 3r^2$ محدود است.

۱۸. انتگرال $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \delta \, dV$ را به صورت یک انتگرال سه گانه مکرر روی ناحیه‌ای دلخواه چون D در مختصات (الف) استوانه‌ای و (ب) کروی بیان کنید.

۱۹. گشتاور لختی (I_z) جسمی را که از پایین به صفحه $z=0$ و از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ محدود است به صورت یک انتگرال سه گانه مکرر در مختصات (الف) استوانه‌ای و (ب) کروی بیان کنید.

۲۰. انتگرال

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^x (x^2 + y^2) \, dz \, dx \, dy$$

را به یک انتگرال معادل در مختصات استوانه‌ای تبدیل و نتیجه را محاسبه کنید.

مختصات استوانه‌ای

در مسائلی که محاسبه جرم و گشتاور از شما خواسته شده، فرض کنید چگالی δ برابر با ۱ است مگر آنکه خلافش گفته شده باشد.

۲۱. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به صفحه $z=0$ ، از اطراف به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و از بالا به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ محدود است.

۲۲. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ ، از اطراف به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و از بالا به سهمیوار $z = x^2 + y^2 + 1$ محدود است.

۲۳. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به صفحه $z=0$ و از بالا به سهمیوار $z = 4 - x^2 - y^2$ محدود است.

۲۴. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که بین استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z=0$ و $z=4-y$ محصور است. (دانه‌یابی: در مختصات استوانه‌ای، $z=4-y$ به صورت $z=4-r \sin \theta$ درمی آید.)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{r^{2/3}}^{\sqrt{1-r^2}} dz \, r \, dr \, d\theta \quad ۲$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\theta/2\pi} \int_0^{3+4r^2} dz \, r \, dr \, d\theta \quad ۳$$

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\theta/\pi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \, r \, dr \, d\theta \quad ۴$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{\sqrt{1-r^2}} r^3 \, dz \, r \, dr \, d\theta \quad ۵$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) \, dz \, r \, dr \, d\theta \quad ۶$$

در مسائل ۷-۱۲، انتگرالها را که در مختصات کروی اند، محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۷$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۸$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{(1-\cos \phi)^{1/2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۹$$

$$\int_0^{3\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta \rho^3 \sin^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۱۰$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec \phi}^2 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۱۱$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sec \phi} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \quad ۱۲$$

۱۳. مطلوب است تشکیل یک انتگرال سه گانه مکرر برای حجم کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در مختصات (الف) کروی، و (ب) استوانه‌ای، و (پ) قائم.

۱۴. کره توپری به شعاع ۲ واحد را صفحه‌ای که ۱ واحد از مرکز کره فاصله دارد به دو قسمت تقسیم می‌کند. فرض کنید قسمت کوچکتر D باشد. حجم D را به صورت یک انتگرال سه گانه مکرر در مختصات (الف) کروی، (ب) استوانه‌ای، و (پ) قائم بیان کنید.

۱۵. انتگرال زیر را به (الف) مختصات قائم، (ب) مختصات کروی تبدیل کنید.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, r \, dr \, d\theta.$$

۱۶. فرض کنید D ناحیه‌ای در یک هشتم اول باشد که از پایین

۳۸. مطلوب است گشتاور لختی يك استوانه مستدير توپر به شعاع ۱ و ارتفاع ۲ (الف) حول محور استوانه و (ب) حول خطی که از مرکزوار استوانه می‌گذرد و بر محور آن عمود است.

۳۹. مطلوب است گشتاور لختی يك مخروط مستدير قائم به شعاع قاعده ۱ و ارتفاع ۱ حول محوری که از رأس مخروط می‌گذرد و با قاعده آن موازی است.

۴۰. مطلوب است گشتاور لختی يك كره توپر به شعاع α حول یکی از اقطارش.

۴۱. مرکزوار بخشی از كره توپر $x^2 + z^2 = 1$ را بیابید که بین نیمصفحه‌های $\theta = -\pi/3$ ، $\theta = \pi/3$ و $r \geq 0$ قرار دارد.

۴۲. جسمی از بالا به سهمیوار $z = r^2$ ، از پایین به صفحه $z = 0$ ، و از اطراف به استوانه $r = 1$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش این جسم حول محور z در دو حالت (الف) $z = r$ و (ب) $z = r^2$.

۴۳. جسمی از پایین به مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و از بالا به صفحه $z = 1$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش این جسم حول محور z در دو حالت (الف) $z = r$ و (ب) $z = r^2$.

۴۴. يك استوانه مستدير قائم توپر به استوانه $r = \alpha$ و صفحات $z = 0$ و $z = h$ محدود است. مطلوب است مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش این جسم حول محور z در حالتی که $z = 1 + r$.

مختصات گروی

در مسائلی که جرم و گشتاور از شما خواسته شده، فرض کنید چگالی برابر با ۱ است مگر آنکه خلافش گفته شده باشد.

۴۵. مطلوب است حجم ناحیه‌ای از كره $\rho = a$ که بین مخروطهای $\phi = \pi/3$ و $\phi = 2\pi/3$ قرار دارد.

۴۶. حجم بخشی از كره $\rho = a$ را بیابید که نیمصفحه‌های $\theta = 0$ و $\theta = \pi/6$ در يك هشتم اول از آن جدا می‌کنند.

۴۷. صفحه $z = 1$ كره $\rho = 2$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند. حجم قسمت کوچکتر را بیابید.

۴۸. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویه $\rho = 1 + \cos \phi$ و از بیرون به كره $\rho = 2$ محدود است.

۴۹. حجم محصور در رویه $\rho = 1 - \cos \phi$ را بیابید.

۲۵. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از بالا به سهمیوار $z = 5 - x^2 - y^2$ و از پایین به سهمیوار $z = 4x^2 + 4y^2$ محدود است.

۲۶. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از بالا به سهمیوار $z = 9 - x^2 - y^2$ و از پایین به صفحه xy محدود است و در بیرون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد.

۲۷. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ از كره $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ جدا می‌کند.

۲۸. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از بالا به كره $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ و از پایین به سهمیوار $az = x^2 + y^2$ محدود است.

۲۹. در کاسه‌ای که به شکل نیمکره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر است، تا ارتفاع ۳ سانتیمتری آب ریخته ایم. حجم آب درون کاسه را بیابید.

۳۰. مطلوب است حجم ناحیه‌ای در يك هشتم اول که بین استوانه‌های $r = 1$ و $r = 2$ قرار دارد و از پایین به صفحه xy و از بالا به رویه $z = xy$ محدود است.

۳۱. مطلوب است مقدار متوسط تابع $F(r, \theta, z) = r$ روی ناحیه محدود به استوانه $r = 1$ و صفحات $z = 1$ و $z = -1$.

۳۲. مطلوب است مقدار متوسط تابع $F(r, \theta, z) = r$ روی گوی توپر محصور به كره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (این همان كره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است).

۳۳. جسمی از پایین به صفحه $z = 0$ و از بالا به مخروط $z = r$ ، $r \geq 0$ و از اطراف به استوانه $r = 1$ محدود است. مرکز جرم جسم را بیابید.

۳۴. مرکزوار ناحیه‌ای را بیابید که از پایین به رویه $z = \sqrt{r}$ و از بالا به صفحه $z = 2$ محدود است.

۳۵. استوانه قائم مستدیری با دیواره ضخیم از داخل به استوانه $r = 1$ ، از خارج به استوانه $r = 2$ ، و از بالا و پایین به صفحات $z = 0$ و $z = 4$ محدود است. مطلوب است گشتاور لختی و شعاع چرخش این استوانه حول محور z .

۳۶. جسمی با چگالی ثابت δ در يك هشتم اول واقع و از بالا به مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ ، از پایین به صفحه $z = 0$ ، و از اطراف به استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $x = 0$ و $y = 0$ محدود است. مطلوب است گرانیگاه این جسم. (دانه‌مایی: $\bar{x} = 0$).

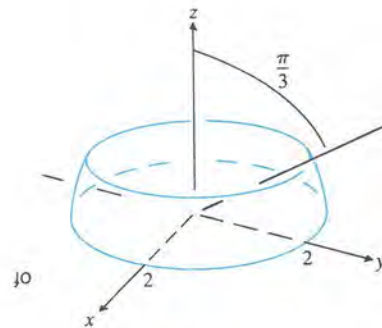
۳۷. مطلوب است مرکزوار ناحیه‌ای که از بالا به كره $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ و از پایین به سهمیوار $az = x^2 + y^2$ محدود است.

۵۰. دایره $\rho = 2 \sin \phi$ ، $\theta = \pi/2$ دایره‌ای است به شعاع ۱ در صفحه xy که بر محور z مماس است و در طرف راست آن قرار دارد. ناحیه واقع در صفحه xy و محدود به این دایره حول محور z دوران می‌کند و جسمی ایجاد می‌شود. مطلوب است حجم جسم. (با استفاده از قضیه اول پاپوس که در بخش مسائل گوناگون فصل ۵ آمده است می‌توان درستی نتیجه را به سرعت بررسی کرد.)

۵۱. مطلوب است مقدار متوسط تابع $F(\rho, \phi, \theta) = \rho$ روی کره توپر $\rho \leq 1$.

۵۲. شکل ۵۷.۱۸ جسمی را نشان می‌دهد که با ایجاد یک سوراخ مخروطی در یک نیمکره توپر به وجود آمده است. معادله مخروط $\phi = \pi/3$ و شعاع نیمکره $\rho = 2$ است. مرکز جرم این جسم را بیابید.

۵۳. مطلوب است مرکز جرم جسمی که از بالا به کره $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\phi = \pi/3$ محدود است. (جسم شبیه یک بستنی قیفی است. شکل ۵۲.۱۸ را ببینید.)



۵۷.۱۸ جسم مورد بحث درمسأله ۵۲.

۵۴. مطلوب است مرکز جرم نیمکره توپری به شعاع a و به چگالی ثابت δ .

۵۵. مطلوب است گشتاور لختی و شعاع چرخش کره توپری به شعاع a و به چگالی ثابت δ حول یکی از اقطار کره.

۵۶. مطلوب است گشتاور لختی و شعاع چرخش کره توپر $\rho = a$ حول محور z درحالات زیر

$$\text{الف) } \delta(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$$

$$\text{ب) } \delta(\rho, \phi, \theta) = r = \rho \sin \phi$$

$$\text{پ) } \delta(\rho, \phi, \theta) = r^2 = (\rho \sin \phi)^2$$

□ جانشانها

۵۷. درمیان مذکور در رابطه (۷) را محاسبه کنید و نشان دهید

۵۸. انتگرال مذکور در مثال ۴ را با انتگرالگیری نسبت به x ، y ، و z محاسبه کنید.

۵۹. مطلوب است حجم بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(دانهمایی: فرض کنید $x = au$ ، $y = bv$ ، و $z = cw$. سپس حجم یک ناحیه مناسب از فضای uvw را بیابید.)

۶۰. مطلوب است محاسبه

$$\iiint |xyz| dx dy dz$$

روی بیضیوار توپر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

(دانهمایی: فرض کنید $x = au$ ، $y = bv$ ، و $z = cw$. سپس روی ناحیه مناسبی از فضای uvw انتگرال بگیرید.)

۶۱. فرض کنید R ناحیه‌ای در فضای xyz باشد که با نابرابریهای زیر تعریف می‌شود

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq xy \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

انتگرال

$$\iiint_R (x^2 y + 3xyz) dx dy dz$$

را با استفاده از تبدیل

$$u = x$$

$$v = xy$$

و

$$w = 3z$$

و انتگرالگیری روی ناحیه مناسبی چون G از فضای uvw ، محاسبه کنید.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. انتگرال دوگانه یک تابع دومتغیره را روی یک ناحیه محصور واقع در صفحه مختصات تعریف کنید.

(دانهمایی: با استفاده از رابطه

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

يك انتگرال دو گانه تشكيل دهيد و بسا تغيير ترتيب انتگرالگيري، انتگرال را محاسبه كنيد.

۴. نشان دهيد كه مقدار

$$\iint \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy$$

روی مستطیل $x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1$ برابر است با

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0).$$

۵. نشان دهيد كه با تغيير ترتيب انتگرالگيري در انتگرال دو گانه زیر می توان آن را به يك انتگرال یگانه تبدیل کرد

$$\int_0^x \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) dt du = \int_0^x (x-t) e^{m(x-t)} f(t) dt.$$

همچنین ثابت كنيد كه

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^v \int_0^u e^{m(x-t)} f(t) dt du dv \\ = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t) dt. \end{aligned}$$

۶. گاه می توان يك انتگرال چند گانه بسا حدود متغیر را به يك انتگرال با حدود ثابت تبدیل کرد. بسا تغيير ترتيب انتگرالگيري نشان دهيد كه

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \left(\int_0^x g(x-y) f(y) dy \right) dx \\ = \int_0^1 f(y) \left(\int_y^1 g(x-y) f(x) dx \right) dy \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 g(|x-y|) f(x) f(y) dx dy. \end{aligned}$$

۷. انتگرال

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 dy dx$$

مساحت ناحیه ای از صفحه xy را نشان می دهد. این ناحیه را رسم كنید و همین مساحت را به صورت يك انتگرال دو گانه با ترتیب انتگرالگيري معکوس بیان كنید.

۲. انتگرالهای دو گانه چگونه محاسبه می شوند؟ حدود انتگرالگيري چگونه تعیین می شود؟ مثالی بیاورید.

۳. چگونه از انتگرالهای دو گانه برای محاسبه مساحت، جرم، گشتاور، مرکز جرم، و شعاع چرخش استفاده می شود؟ مثالهایی بیاورید.

۴. چگونه يك انتگرال دو گانه از مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل می شود؟ مثالی بیاورید.

۵. انتگرال سه گانه يك تابع $f(x, y, z)$ را روی ناحیه ای محصور واقع در قضا تعريف كنید.

۶. چگونه انتگرالهای سه گانه در مختصات دکارتی محاسبه می شوند؟ حدود انتگرالگيري چگونه تعیین می شوند؟ مثالی بیاورید.

۷. چگونه از انتگرالهای سه گانه در مختصات دکارتی برای محاسبه حجم، مقدار متوسط، جرم، گشتاور، مرکز جرم، و شعاع چرخش استفاده می شود؟ مثالهایی بیاورید.

۸. انتگرالهای سه گانه در مختصات استوانه ای و کره ای چگونه تعريف می شوند؟

۹. انتگرالهای سه گانه چگونه در مختصات استوانه ای محاسبه می شوند؟ حدود انتگرالگيري چگونه به دست می آیند؟ مثالهایی بیاورید.

مسأله های گوناگون

در مسأله ای كه درباره جرم و گشتاور است، فرض كنید $\delta = 1$ مگر آنكه خلافش گفته شود.

۱. ترتیب انتگرالگيري را در انتگرال زیر معکوس و آن را محاسبه كنید

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy.$$

۲. ناحیه ای را رسم كنید كه انتگرال

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy dx dy$$

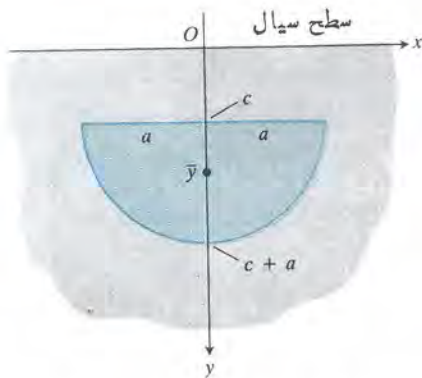
روی آن محاسبه می شود و مقدار انتگرال را بیابید.

۳. انتگرال زیر را محاسبه كنید

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

۰۱۵. مرکز فشار. مرکز فشار روی صفحه‌ای واقع در درون یک سیال، نقطه‌ای است که نیروی هیدرواستاتیکی کل می‌تواند به آن نقطه وارد شود و گشتاوری که حول هر محور واقع در صفحه ایجاد می‌کند برابر گشتاور ایجاد شده بدون در نظر گرفتن مرکز فشار باشد. فشار هیدرواستاتیکی در عمق y درون یک سیال برابر است با wy که w وزن مخصوص سیال است. (مقدمه بخش ۱۰.۵ را ببینید.) یک ورقه نیم‌دایره‌ای به شعاع a مطابق شکل ۵۹.۱۸ به‌طور قائم‌وارد سیالی به وزن مخصوص w می‌شود. نشان دهید که عمق مرکز فشار عبارت است از

$$\bar{y} = \frac{3\pi a^3 + 32ac + 12\pi c^3}{4(4a + 3\pi c)}.$$



۵۹.۱۸ ورقه مورد بحث درمسأله ۱۵.

۰۱۶. یک ورقه تخت و نازک با چگالی ثابت، ناحیه‌ای از صفحه xy را می‌پوشاند که به بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ محدود است. نشان دهید که گشتاور لختی ورقه حول خطی که از مرکز بیضی می‌گذرد و با قسمت مثبت محور x زاویه α می‌سازد برابر است با $M(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)/4$ ، که در آن M جرم ورقه است.

۰۱۷. فرض کنید $f(x, y)$ را بتوان به صورت حاصلضرب تابعی از x و یک تابع از y ، یعنی به صورت $f(x, y) = F(x)G(y)$ نوشت. در این صورت، انتگرال f روی مستطیل $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ را می‌توان به کمک فرمول زیر به صورت حاصلضرب دو انتگرال نیز محاسبه کرد

$$\iint_R f(x, y) dA = \left(\int_a^b F(x) dx \right) \left(\int_c^d G(y) dy \right). \quad (1)$$

۰۸. قاعده یک تپه شنی ناحیه‌ای از صفحه xy را می‌پوشاند که به سهمی $z = 6 - x^2 - y^2$ و خط $y = x$ محدود است. ارتفاع شنی در بالای نقطه (x, y) برابر با x^2 است. قاعده تپه شنی را رسم کنید و جزء حجم نمونه dV را مشخص کنید و به کمک انتگرالگیری دو گانه حجم تپه را محاسبه کنید.

۰۹. در فرایند تشکیل یک انتگرال دو گانه برای حجم (V) زیر سهمیوار $z = x^2 + y^2$ و بالای ناحیه R از صفحه xy ، مجموع انتگرالهای مکرر زیر به دست آمده است

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy.$$

ناحیه R در صفحه xy را رسم و V را به صورت یک انتگرال مکرر که در آن ترتیب انتگرالگیری معکوس شده باشد، بیان کنید.

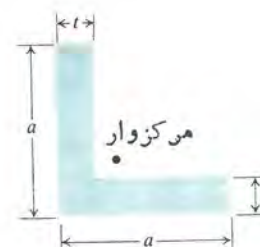
۰۱۰. مرکزوار ناحیه بین سهمی $2y = x + y^2$ و خط $x + 2y = 0$ را به دست آورید.

۰۱۱. مطلوب است گشتاور لختی قطبی یک ورقه مثلثی شکل نازک که به محور y و خطوط $y = 2x$ و $y = 4$ محدود است.

۰۱۲. مطلوب است مرکزوار ناحیه نامتناهی واقع در ربع دوم که به محورها و خط $y = e^x$ محدود است.

۰۱۳. مطلوب است گشتاور لختی ناحیه نامتناهی زیر خم $y = e^{-x^2/2}$ و واقع در ربع اول حول محور y .

۰۱۴. مطلوب است گشتاور لختی ناحیه گوشه‌دار در شکل ۵۸.۱۸، (الف) نسبت به قاعده افقی و (ب) نسبت به خطی افقی که از مرکزوار می‌گذرد.



۵۸.۱۸ مورد بحث درمسأله ۱۴.

استدلال چنین است

$$\begin{aligned} \iint f(x,y) dA &= \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y) dx \right) dy \\ &\quad \text{(قضیه فوبینی)} \\ &= \int_c^d \left(G(y) \int_a^b F(x) dx \right) dy \\ &\quad \text{(در نظر می گیریم } G(y) \text{ را ثابت)} \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b F(x) dx \right) G(y) dy \\ &\quad \text{(جا به جا می کنیم)} \\ &= \left(\int_a^b F(x) dx \right) \int_c^d G(y) dy \\ &\quad \text{(انتگرال } F(x) \text{ را ثابت در نظر می گیریم)} \end{aligned}$$

بسا استفاده از رابطه (۱) می توان درمیزان محاسبات صرفه جویی کرد. به کمک رابطه (۱) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad & \int_{-1}^{\ln 2} \int_0^{\pi/2} e^x \cos y \, dx \, dy \\ \text{ب)} \quad & \int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} \, dx \, dy \end{aligned}$$

۱۸. مرکزوار ناحیه ای را بیابید که با نابرابریهای $0 \leq r \leq a$ و $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ درمختصات قطبی تعریف می شود.

۱۹. مرکزوار ناحیه ای واقع در ربع اول را بیابید که به پرتوهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/4$ و دوایر $r = 1$ و $r = 2$ محدود است.

۲۰. ناحیه R ناحیه ای است که بردار شعاعی $\overrightarrow{OP}$ وقتی P روی خم $r = f(\theta)$ از $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ حرکت می کند آن را ایجاد می کند. در بخش ۴.۱۰ فرمول

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

را برای مساحت این ناحیه یافتم. نشان دهید این فرمول نتیجه رابطه زیر (مذکور در بخش ۳.۱۸) نیز هست.

$$R \text{ مساحت} = \int \int_R r \, dr \, d\theta.$$

۲۱. انتگرال دو گانه زیر را به یک انتگرال دو گانه معادل در

مختصات قطبی تبدیل، و ناحیه انتگرالگیری را رسم کنید

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x \, dx \, dy.$$

۲۲. طریق معمول برای محاسبه انتگرال غیر عادی

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right)$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx \, dy.$$

در رابطه اخیر مختصات قطبی را به کار ببرید و نشان دهید که

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

۲۳. نشان دهید که اگر $u = x - y$ و $v = y$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \int_0^x f(x-y, y) dy \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u, v) du \, dv. \end{aligned}$$

۲۴. دایره توپری به شعاع a را و تری به فاصله b از مرکزش ($b < a$) به دو قطعه تقسیم می کند. (پارسنگ یک چرخ طیار به شکل قطعه کوچکتر این دایره است) مساحت این قطعه کوچکتر را بیابید و گشتاور لختی قطبی آن را حول مرکز دایره تعیین کنید.

۲۵. یک ورقه نازک بسا چگالی $\delta = 1$ در یک طوق از خم $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$) محصور است. شعاعهای چرخش این ورقه را حول $\theta = 0$ و $\theta = \pi/2$ بیابید.

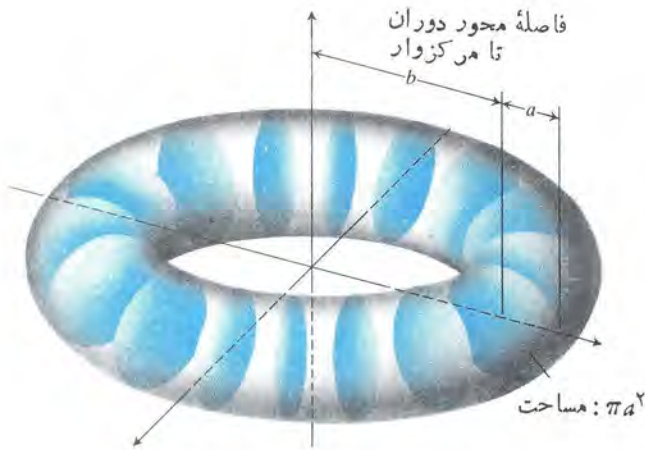
۲۶. مطلوب است مساحت ناحیه محصور در پروانه $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. گشتاور لختی این ناحیه حول محور y را نیز بیابید.

۲۷. با تبدیل به مختصات قطبی، نشان دهید که

$$\begin{aligned} K(a) &= \int_0^{\alpha \sin \beta} \int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2+y^2) dx \, dy \\ &= a^2 \beta \left(\ln a - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

که در آن $0 < \beta < \pi/2$ و $a > 0$. بسا تغییر ترتیب انتگرالگیری به چه عبارتی می رسید؟

۳۷. ناحیه محدود به دایره $(y-b)^2 + z^2 = a^2$ ، $b > a$ ، واقع در صفحه yz حول محور z دوران، و یک چنبره توپر ایجاد می‌کند (شکل ۶۰.۱۸). گشتاور لختی این چنبره را حول محور z بیابید.



۶۰.۱۸ چنبره مورد بحث درمسأله ۳۷.

۳۸. یک کره توپر را سوراخ می‌کنیم به‌قسمی که محور سوراخ، قطری از کره باشد. حجم جسم باقی‌مانده از انتگرال زیر به‌دست می‌آید

$$V = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r \, dr \, dz \, d\theta.$$

الف) با بررسی این انتگرال، شعاع سوراخ و شعاع کره را بیابید.

ب) انتگرال را محاسبه کنید. (مثال ۶ بخش ۴.۵ را ببینید.)

۳۹. برای انتگرال زیر، یک انتگرال سه‌گانه معادل درمختصات قائم بنویسید. (ترتیب انتگرالگیری را چنان برگزینید که انتگرالگیری اول نسبت به z ، انتگرالگیری دوم نسبت به y ، و انتگرالگیری سوم نسبت به x باشد.)

$$\int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3 \sin \theta \cos \theta \, z^2 \, dz \, dr \, d\theta.$$

۴۰. مطلوب است حجم ناحیه محدود به صفحه $z=0$ ، استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ ، و استوانه $az = a^2 - x^2$.

۴۱. مطلوب است حجم ناحیه‌ای از کره توپر $r^2 + z^2 \leq a^2$ که استوانه $r = a \sin \theta$ از آن جدا می‌کند.

۴۲. مختصات استوانه‌ای در برابر مختصات کروی. استفاده از مختصات کروی برای انتگرالهایی که مربوط به اشکال کروی هستند

۲۸. مقادیری از a, b, c را بیابید که به‌ازای آنها داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} \, dx \, dy = 1.$$

(داهنمایی: فرض کنید $s = \alpha x + \beta y$ و $t = \gamma x + \delta y$ که $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$ سپس رابطه

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$$

را نتیجه بگیرید.)

۲۹. انتگرال

$$\iint \frac{dx \, dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

را روی ناحیه محصور در یک طوق از پروانه

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

محاسبه کنید. (داهنمایی: از مختصات قطبی بهره بگیرید.)

۳۰. مطلوب است حجم ناحیه محدود به استوانه $y = \cos x$ و صفحات

$$z = y, \quad x = 0, \quad x = \pi/2, \quad z = 0.$$

۳۱. مطلوب است مرکز جرم هرم همگنی که قاعده‌اش مربع محدود به خطوط $x=1, x=-1, y=1, y=-1$ و $z=0$ در صفحه $z=0$ است و رأسش در نقطه $(0, 0, 1)$ واقع است.

۳۲. مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از بالا به کره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$$

و از پایین به سهمیوار $az = x^2 + y^2$ محدود است.

۳۳. مطلوب است حجم ناحیه محصور بین رویه‌های زیر

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{و} \quad z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 1)$$

۳۴. حجم ناحیه محصور بین رویه‌های $x = y^2 + z^2$ و $x = 1 - y^2$ را به کمک یک انتگرال سه‌گانه بیابید.

۳۵. مطلوب است مقدار متوسط

$$F(x, y, z) = 15xy\sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

روی مکعب واقع در یک‌هشتم اول و محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=2, y=2, z=2$.

۳۶. جسمی با چگالی ثابت δ از پایین به سهمیوار $az = x^2 + y^2$ و از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ محدود است. گشتاور لختی این جسم را نسبت به محور z بیابید.

۴۳. xy حول محور yz دوران می کند و جسمی را به وجود می آورد. مطلوب است حجم جسم. (دانه سایی: از انتگرال گیری دوگانه استفاده کنید. مساحت dA را حول محور yz دوران دهید و حجم dV را ایجاد کنید.)
(ب) مطلوب است گشتاور لختی جسم قسمت (الف) حول محور x .

۴۴. مطلوب است گشتاور لختی کره توپری به شعاع a حول یکی از خطهای مماس بر آن.

۴۵. هشدار: حل این مسأله دشوار است. تشکیل انتگرال آسان است، اما انتگرال گیری ساعتها وقت می گیرد. (از کامپیوتر MACSYMA، ۲۰ دقیقه وقت گرفته است.)
سوراخی با مقطع مربع که هر ضلع مقطع برابر $2b$ واحد است، به صورت متقارن در کره ای به شعاع a ($a > b\sqrt{2}$) ایجاد می شود. حجم این سوراخ را بیابید.

۴۶. فرض کنید S کره توپری است به شعاع a ، چگالی ثابت δ ، و جرم $M = (4/3)\pi a^3 \delta$. همچنین فرض کنید P ذره ای به جرم m باشد که در فاصله b ($b > a$) از مرکز S قرار دارد. بنا به نظر نیوتن، نیروی جاذبه گرانشی کره بر P از رابطه زیر به دست می آید

$$\mathbf{F} = Gm \iint_S \frac{\mathbf{u} \delta dV}{r^2}$$

که در آن G ثابت گرانش، $\mathbf{u}$ بردار واحدی در جهت از P به جزء حجم dV در S ، و r مربع فاصله P تا dV است. مبدأ را مرکز کره و P را در $(0, 0, b)$ روی محور z بگیرید و نشان دهید که $\mathbf{F} = -(GMm/b^2)\mathbf{k}$. این رابطه نشان می دهد که اگر همه جرم کره در مرکز متمرکز باشد نیروی وارد بر P فوقی نمی کند.

همواره سبب ساده تر شدن محاسبات نمی شود. در برخی از مسائل، استفاده از مختصات استوانه ای، محاسبات را ساده تر می کند. برای نمونه با استفاده از (الف) مختصات استوانه ای، (ب) مختصات کروی، حجم ناحیه ای را بیابید که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ و از پایین به صفحه $z = 2$ محدود باشد.

۴۳. ناحیه ای از بالا به کره $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\phi = \pi/3$ محدود است (ρ ، ϕ ، و θ مختصات کروی اند). مطلوب است گشتاور لختی این ناحیه حول محور z .

۴۴. مطلوب است حجم ناحیه محصور در رویه $\rho = a \sin \phi$ در مختصات کروی.

۴۵. جسمی با چگالی ثابت δ به دو کره هم مرکز به شعاعهای a و b ($a < b$) محدود است. گشتاور لختی این جسم را حول یکی از اقطار کره ها بیابید.

۴۶. حجم جسمی را انتگرال سه گانه زیر به دست می دهد

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx.$$

(الف) با تعیین معادله رویه های که مرز جسم اند، جسم را توصیف کنید.

(ب) حجم را به صورت یک انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای بیان کنید. حدود انتگرال گیری را مشخص کنید اما انتگرال را محاسبه نکنید.

۴۷. I_x ناحیه ای از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را بیابید که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از آن جدا می کند.

۴۸. (الف) ناحیه محصور در دلو $r = 1 - \cos \theta$ در صفحه

میدانهای برداری و انتگرالگیری

چشم انداز

در این فصل نتایج مهم حاصل از ترکیب حساب انتگرال با بردارها را مشاهده می‌کنیم. مطلب را با انتگرالهای خمیده خطی که انتگرال توابعی هستند که روی خم تعریف می‌شوند آغاز می‌کنیم. به کمک انتگرالهای خمیده خطی می‌توانیم جرم یک فنر، مقدار کاری که یک نیرو برای جا به جا کردن یک جسم روی یک مسیر سه بعدی انجام می‌دهد، و آهنگ گردش یک سیال در یک حلقه (طوق) بسته را محاسبه کنیم. سپس قضیه گرین را بررسی می‌کنیم که یکی از قضایای مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال است. این قضیه به همان نیرومندی و سودمندی قضایای اصلی است که در فصل ۴ آنها را بررسی کردیم. کاشف این قضیه جورج گرین (۱۷۹۳-۱۸۴۱) یک ریاضیدان انگلیسی خودآموخته، و پیشگام کسانی بود که مبانی ریاضی نظریه الکترومغناطیس را پدید آوردند. به همراه قضیه گرین، مفاهیم چگالی شار و چگالی گردش یک میدان برداری را که در ریاضیات به دیورژانس و تاور میدان معروف اند معرفی خواهیم کرد. سپس به بررسی انتگرالهای رویه‌ای می‌پردازیم و روش محاسبه مساحت رویه و شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه واقع در فضا را ارائه می‌کنیم. پس از این، تعمیمهای قضیه گرین در فضای سه بعدی را در قالب قضیه دیورژانس و قضیه استوکس بیان می‌کنیم. این قضایا زمینه‌ساز مبانی ریاضی غالب کارهای نظری در الکتریسته، مغناطیس، مکانیک سیالات، و مکانیک مدارهای سیارات اند. اکثر موارد کاربردی مورد بحث از مبحث حرکت سیالات انتخاب شده‌اند زیرا درک حرکت سیالات به نسبت آسان است. درخاسته

به شرح ویژگیهای جالب میدانهای برداری پایستار و روش تعیین توابع پتانسیل این میدانها می‌پردازیم.

۱۰.۱۹ انتگرالهای خمیده خطی

وقتی خم $R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, $a \leq t \leq b$ خود را از میان دامنه تابعی چون $f(x, y, z)$ در فضا برمی‌گزیند، مقدار این تابع در روی خم را تابع مرکب $f(x(t), y(t), z(t))$ به دست می‌دهد. اگر از این تابع مرکب از $t=a$ تا $t=b$ انتگرال بگیریم، به اصطلاح «انتگرال خمیده خطی» f را روی خم به دست می‌آوریم. انتگرال خمیده خطی صرفنظر از هندسه سه بعدی آن، چیزی جز یک انتگرال عادی از یک تابع حقیقی-مقدار بر بازه‌ای از اعداد حقیقی نیست. چنین انتگرالهایی را از فصل ۴ به بعد محاسبه کرده ایم. از همان روشهای معمول استفاده می‌کنیم و به هیچ چیز جدیدی نیاز نداریم.

اهمیت انتگرالهای خمیده خطی در کار بردشان است. به کمک این انتگرالها می‌توانیم جرم و گشتاور فنرها و سیمهایی را که روی خمهایی در فضا قرار دارند حساب کنیم. همچنین می‌توانیم با ترکیب این انتگرالها و حاصلضرب برداری کاری را که یک نیروی متغیر روی خمی در فضا انجام می‌دهد، یا آهنگ حرکت سیالات را روی یک خم واقع در فضا یا واقع در صفحه محاسبه کنیم. در این بخش به تفصیل درباره چگونگی تعریف و محاسبه انتگرالهای

از خم که در مورد آن داشته باشیم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (۳)$$

با محاسبه انتگرال زیر به دست آورد

$$\int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t), z(t)) \times \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (۴)$$

چون ریشه دوم مذکور در رابطه (۴) طول بردار سرعت خم یعنی $|v(t)|$ است، پس

قضیه

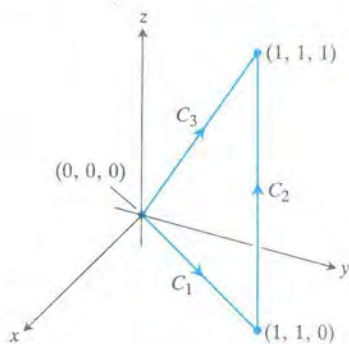
قضیه محاسبه انتگرالهای خمیده خطی

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{t=a}^{t=b} f(x(t), y(t), z(t)) |v(t)| dt \quad (۵)$$

انتگرال f روی C تنها به ماهیت f و شکل خم بستگی دارد و آن را می توان از روی تقریباً هر صورت پارامتری مناسب دلخواهی محاسبه کرد.

توجه کنید که اگر f تابع ثابتی با مقدار ۱ باشد، انتگرال f در امتداد C ، طول C را به دست می دهد. طول خمها را در بخش ۲.۱۴ محاسبه کردیم و در اینجا این محاسبات را تکرار نمی کنیم. در نخستین مثال این بخش، انتگرال تابعی را روی دوسمیر متفاوت که از مبدأ تا نقطه (۱، ۱، ۱) ادامه دارند، محاسبه می کنیم.

مثال ۱ شکل ۲.۱۹ دوسمیر متفاوت از مبدأ تا نقطه (۱، ۱، ۱) را



۲.۱۹ مسیرهای انتگرالگیری در مثال ۱.
 بیکنها جهت افزایش f را در صورت پارامتری
 برگزیده نشان می دهند.

خمیده خطی سخن می رانیم و از آنها برای یافتن جرم و گشتاور فنرها، سیمها، و میله های نازک بهره می گیریم. در بخش بعد با استفاده از انتگرالهای خمیده خطی و بردارها کار را محاسبه می کنیم و جریان سیالات را اندازه می گیریم.

انتگرالهای خمیده خطی

انتگرالهای خمیده خطی عبارت اند از انتگرال توابع روی خمها. این انتگرالها را این چنین تعریف می کنیم: فرض می کنیم $f(x, y, z)$ تابعی باشد که دامنه اش شامل خم زیر است

$$R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k, \quad a \leq t \leq b.$$

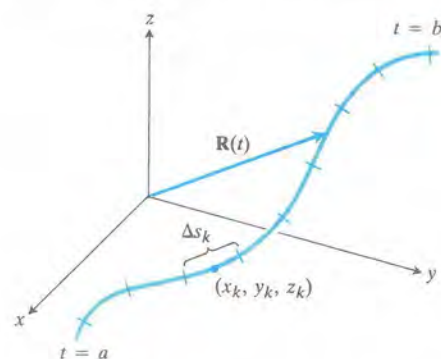
خم را از $t=a$ تا $t=b$ مطابق شکل ۱.۱۹ به تعدادی متناهی از قوسهای پیاپی تقسیم می کنیم. طول قوس نمونه، Δs_k است. بر هر قوسی نقطه (x_k, y_k, z_k) را برمی گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k \quad (۱)$$

اگر f پیوسته باشد و توابع $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ مشتقات اول پیوسته داشته باشند، آنگاه وقتی که n افزایش یابد و طولهای Δs_k به صفر میل کنند مجموعه های مذکور در (۱) به سوی حدی میل می کنند. این حد را انتگرال (خمیده خطی) f روی خم از a تا b می نامیم. وقتی خم با تک حرفی مانند C مشخص شود، نماد این انتگرال چنین است

$$\int_C f(x, y, z) ds. \quad (\text{«انتگرال } f \text{ روی } C\text{»}) \quad (۲)$$

برای محاسبه این انتگرال از يك قضیه محاسباتی مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یاری می جویم. این قضیه حاکی است که مقدار انتگرال را می توان از هر صورت پارامتری دلخواهی



۱.۱۹ خم $R(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$
 به قوسهای کوچک تقسیم شده است. طول قوس
 نمونه برابر است با Δs_k .

نشان می‌دهد. یکی از مسیرها از دوپاره خط C_1 و C_2 تشکیل می‌شود و مسیر دیگر پاره خط C_3 است. از تابع زیر روی هر دو مسیر انتگرال بگیریم

$$f(x, y, z) = x - 3y^2 + z.$$

حل: نخست پاره‌خطهای تشکیل دهنده مسیرها را به صورت پارامتری درمی‌آوریم. بنا به قضیهٔ محاسبه، مادام که $|\mathbf{v}(t)|$ صفر نشود از هر صورت پارامتری دلخواه می‌توان بهره گرفت. ما در جهت افزایش t انتگرال می‌گیریم تا اینکه $|\mathbf{v}(t)| dt$ مثبت باشد. ساده‌ترین صورت پارامتری را که به ذهنمان می‌رسد برمی‌گزینیم و ضمن کار طول بردارهای سرعت را هم مدنظر قرار می‌دهیم:

در مورد C_1 :

$$\mathbf{R}_1(t) = ti + tj, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$|\mathbf{v}_1(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

در مورد C_2 :

$$\mathbf{R}_2(t) = i + j + tk, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$|\mathbf{v}_2(t)| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

در مورد C_3 :

$$\mathbf{R}_3(t) = ti + tj + tk, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$|\mathbf{v}_3(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

پس از انتخاب صورت پارامتری، رابطهٔ (۵) را به کار می‌بریم و از $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ روی هر دو مسیر در جهت افزایش t انتگرال می‌گیریم:

مسیر ۱:

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z) ds &= \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2) \sqrt{2} dt + \int_0^1 (1 - 3 + t) \cdot 1 dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 (t - 3t^2) dt + \int_0^1 (t - 2) dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 3) \end{aligned}$$

مسیر ۲:

$$\begin{aligned} \int_{C_3} f(x, y, z) ds &= \int_{t=0}^{t=1} f(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{v}(t)| dt \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t) \sqrt{3} dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t - 3t^2) dt \\ &= \sqrt{3} \left[t^2 - t^3 \right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

در مورد انتگرالگیری مثال ۱ به سه نکته توجه کنید. اول، پس از اینکه مؤلفه‌های برداری مناسب $\mathbf{R}(t)$ در فرمول f قرار گرفت و برای هر پاره خط، $|\mathbf{v}(t)| dt$ مناسب جای ds را گرفت، انتگرالگیری به صورت یک انتگرالگیری سرراست نسبت به t درمی‌آید. دوم، انتگرال f روی مسیر ۱ با انتگرالگیری از f روی هر دو پاره خط مسیر و جمع کردن نتایج به دست آمده تعیین می‌شود. سوم، مقادیر انتگرال روی مسیر ۱ و مسیر ۲ متفاوت اند. در مورد اکثر توابع، مقدار انتگرال خمیده خطی روی مسیرهای مختلفی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند فرق می‌کند. اما در مورد برخی از توابع مقدار انتگرال در مورد همهٔ مسیرهایی که دو نقطه را به هم وصل می‌کنند برابر است. این پدیدهٔ جالب را در بخش ۷.۱۹ بررسی می‌کنیم.

جمع‌پذیری

انتگرالهای خمیده خطی همهٔ ویژگیهای جبریی را که تا کنون در مورد انتگرالها آموخته‌ایم دارند: انتگرال مجموع دو تابع برابر است با مجموع انتگرالهایشان، انتگرال حاصلضرب یک ثابت در یک تابع برابر است با حاصلضرب آن ثابت در انتگرال تابع، انتگرال یک تابع از b تا a قرینهٔ انتگرال آن تابع از a تا b است، و نظایر آن. به این فهرست باید این ویژگی را افزود که اگر خمی چون C از اتصال تعدادی متناهی از خمهای $C_1, C_2, \dots, C_n$ ، تشکیل شده باشد به طوری که انتهای یکی بر ابتدای دیگری منطبق باشد، آنگاه انتگرال یک تابع روی C برابر است با مجموع انتگرالها روی خمهای تشکیل دهندهٔ C :

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds. \quad (۶)$$

این مطلب در مثال ۱ وقتی که انتگرال f روی مسیر ۱ را با جمع کردن انتگرالها روی C_1 و C_2 محاسبه کردیم، نشان داده شد.

چگالی فنر ثابت و برابر با ۱ است. مطلوب است جرم فنر، مختصات مرکز جرم فنر، و گشتاور لختی و شعاع چرخش فنر حول محور z .

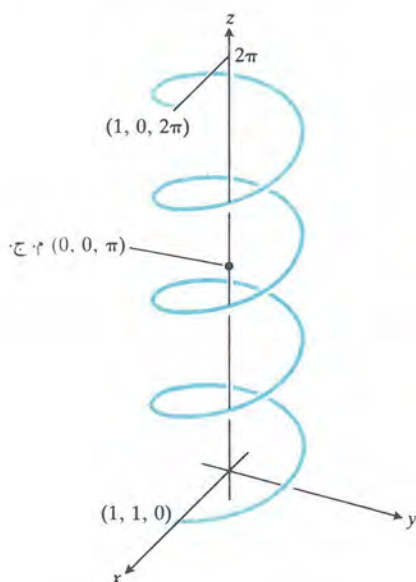
حل: فنر را رسم می‌کنیم (شکل ۳۰۱۹). به علت تقارن موجود، مرکز جرم در نقطه $(0, 0, \pi)$ بر محور z قرار دارد. برای انجام محاسبات دیگر، نخست ds را بر حسب t بیان می‌کنیم

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{17} dt. \end{aligned}$$

با استفاده از فرمولهای جدول ۱۰۱۹ داریم

$$M = \int_C \delta ds = \int_0^{2\pi} (1) \sqrt{17} dt = 2\pi \sqrt{17}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \delta ds \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t) (1) \sqrt{17} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} dt = 2\pi \sqrt{17} \end{aligned}$$



۳۰۱۹ فنر پیچی شکل مورد بحث در مثال ۲.

محاسبه جرم و گشتاور

فرض می‌کنیم سیمی در امتداد خم C در فضا قرار دارد و چگالی سیم در نقطه (x, y, z) واقع بر خم برابر است با $\delta(x, y, z)$. جرم، مرکز جرم، و گشتاورهای سیم را می‌توان با استفاده از فرمولهایی که در جدول ۱۰۱۹ آمده است محاسبه کرد. از این فرمولها در مورد فنرها، سیمها، و میله‌های نازک نیز می‌توان استفاده کرد.

جدول ۱۰۱۹ فرمولهای جرم و گشتاور در مورد سیمها، فنرها، و میله‌های نازک.

$$M = \int_C \delta(x, y, z) ds \quad \text{جرم:}$$

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz} = \int_C x \delta ds, \quad M_{xz} = \int_C y \delta ds$$

$$M_{xy} = \int_C z \delta ds$$

مختصات مرکز جرم:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

گشتاورهای لختی:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \delta ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2) \delta ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \delta ds, \quad I_L = \int_C r^2 \delta ds$$

فاصله نقطه (x, y, z) تا خط L

شعاع چرخش حول خطی چون L :

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}.$$

در مثال زیر چگونگی استفاده از فرمولهای جدول ۱۰۱۹ نشان داده می‌شود.

مثال ۲ فنری به شکل پیچک روی پیچ زیر قرار دارد

$$\mathbf{R}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

و

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \int_C y \delta \, ds = \int_C y(2-y) \, ds \\
 &= \int_0^\pi \sin t (2 - \sin t) \, dt \\
 &= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt \\
 &= \int_0^\pi \left(2 \sin t - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right) dt \\
 &= \left[-2 \cos t - \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^\pi \\
 &= \left(-2(-1) - \frac{\pi}{2} \right) - \left(-2 \right) \\
 &= 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{4-\pi}{4\pi-4} \approx 0.57.$$

مختصات مرکز جرم تا دو رقم اعشار برابر است با

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0.57, 0).$$

مسأله‌ها

در هر يك از مسائل ۱-۸، تعیین کنید که نمودار معادله برداری مفروض کدام يك از نمودارهای (الف) تا (ح) است.

$$1. \quad \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$2. \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$3. \quad \mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$4. \quad \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$5. \quad \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$6. \quad \mathbf{R}(t) = t\mathbf{j} + (2-t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

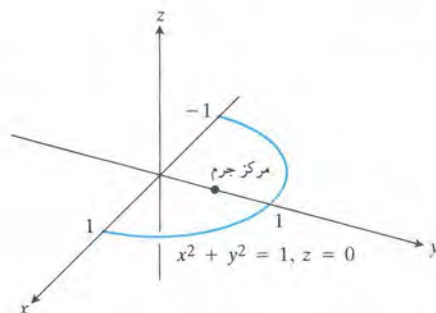
$$7. \quad \mathbf{R}(t) = (t^2-1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$8. \quad \mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$R_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi \sqrt{1/2}}{2\pi \sqrt{1/2}}} = 1.$$

توجه کنید که شعاع چرخش حول محور z برابر است با شعاع استوانه‌ای که پیچ دور آن پیچیده است. ■

مثال ۳ يك کمان فیزی با يك روی نیمه دایره $x^2 + y^2 = 1$ ، $y \geq 0$ در صفحه xy واقع است (شکل ۴۰۱۹). اگر چگالی کمان در نقطه (x, y, z) واقع در روی آن برابر باشد با $\delta(x, y, z) = 2 - y$ ، مرکز جرم کمان را بیابید.



۴۰۱۹ در مثال ۳ مختصات مرکز جرم يك کمان با يك که بر این نیمه دایره در صفحه xy واقع است محاسبه می‌شود.

حل: می‌دانیم $\bar{z} = 0$ زیرا کمان در صفحه xy واقع است. همچنین می‌دانیم $\bar{x} = 0$ زیرا جرم کمان نسبت به محور y به صورت متقارن توزیع شده است. پس تنها کافی است که $\bar{y}$ را بیابیم. بدین منظور نیمه دایره را به صورت پارامتری زیر درمی‌آوریم

$$C: \quad \mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

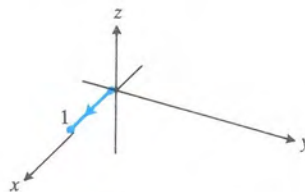
و ds را بر حسب dt بیان می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (0)^2} dt = dt.
 \end{aligned}$$

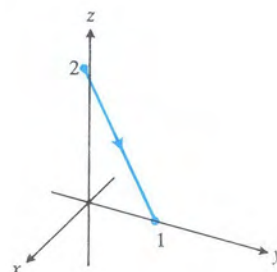
با استفاده از فرمولهای جدول ۱۰۱۹ داریم

$$\begin{aligned}
 M &= \int_C \delta \, ds = \int_C (2-y) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t) \, dt \\
 &= \left[2t + \cos t \right]_0^\pi = (2\pi - 1) - (0 + 1) \\
 &= 2\pi - 2
 \end{aligned}$$

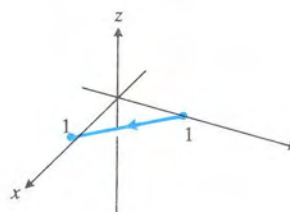
(الف)



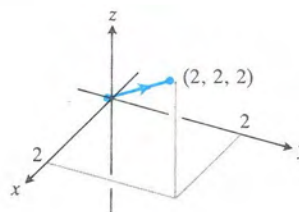
(ب)



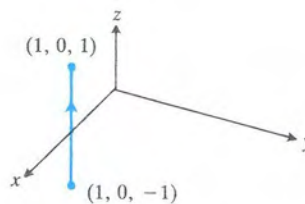
(پ)



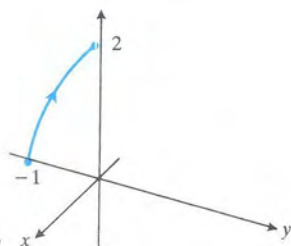
(ت)



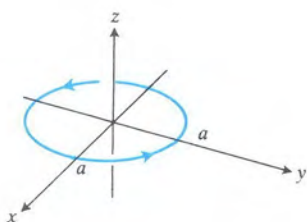
(ث)



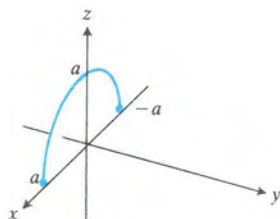
(ج)



(ح)



(ح)



در مسائل ۹-۲۰، انتگرال $f(x, y, z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

۹. $f(x, y, z) = x + y$

$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

۱۰. $f(x, y, z) = x - y$

$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

۱۱. $f(x, y, z) = x - y + z - 2$

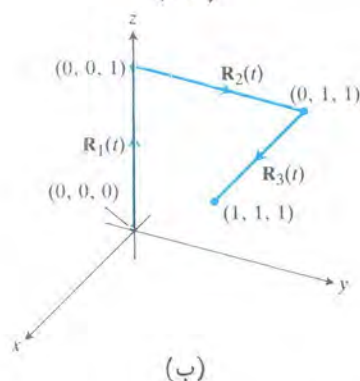
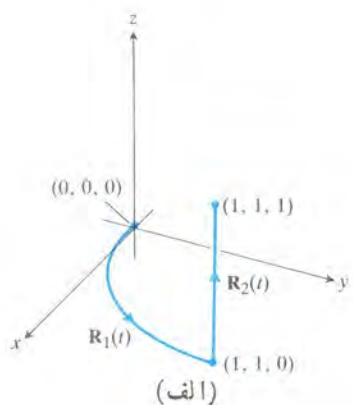
$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

۱۲. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$

۱۳. $f(x, y, z) = xy + y + z$

$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2-2t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$



۵.۱۹ مسیرهای انتگرالگیری در مسائل ۲۱ و ۲۲.

۲۵. سیمی به شکل حلقه مستدیر با چگالی ثابت δ روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در صفحه xy واقع است. گشتاور لختی حلقه را حول محور z بیابید. گشتاور را به صورت حاصلضرب یک ثابت در جرم حلقه بیان کنید. شعاع چرخش حلقه را حول محور z بیابید.

۲۶. میله نازکی با چگالی ثابت روی پاره خط

$$R(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

در صفحه yz در فضا قرار دارد. مطلوب است گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش میله حول محورهای مختصات.

۲۷. گشتاور لختی یک میله حول محوری عمود بر یک انتهای میله. میله نازکی به طول L و چگالی ثابت δ روی بازه $0 \leq x \leq L$ از محور x قرار دارد. گشتاور لختی میله را حول محور z بیابید. گشتاور را به صورت حاصلضرب یک ثابت در جرم میله بیان کنید.

۲۸. گشتاور لختی یک میله حول محوری عمود بر وسط میله. میله نازکی به طول L و چگالی ثابت δ روی بازه $-L/2 \leq x \leq L/2$ از محور x قرار دارد. گشتاور لختی میله را حول محور z بیابید. گشتاور را به صورت حاصلضرب یک ثابت در جرم میله بیان کنید.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} \quad ۱۴$$

$$R(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$f(x, y, z) = x + y \quad ۱۵$$

$$R(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۱۶$$

$$R(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۱۷$$

$$R(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

$$f(x, y, z) = 3z\sqrt{3x^2 + y^2 + z^2} \quad ۱۸$$

$$R(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2) \quad ۱۹$$

$$R(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2) \quad ۲۰$$

$$R(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq \infty$$

۲۱. از $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ روی مسیری که در شکل ۵.۱۹ (الف) دیده می شود و از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ امتداد دارد انتگرال بگیرد. این مسیر از خمهای زیر تشکیل می شود.

$$R_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$R_2(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

۲۲. از $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ روی مسیری که در شکل ۵.۱۹ (ب) دیده می شود و از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ امتداد دارد انتگرال بگیرد. این مسیر از خمهای زیر تشکیل می شود

$$R_1(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$R_2(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$R_3(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

۲۳. I_z و R_z را در مورد کمان مثال ۳ به دست آورید.

۲۴. سیمی در امتداد خم زیر قرار دارد

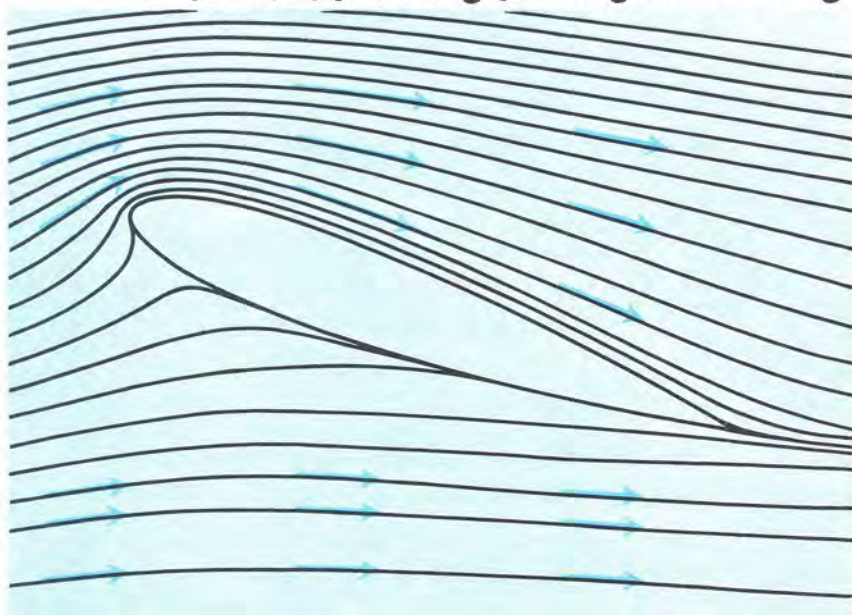
$$R(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

اگر چگالی سیم برابر با $\delta = (3/2)t$ باشد جرم آن را بیابید.

مثلا ممکن است به مطالعه میدان سرعت يك سيال در حال حرکت يا میدان الكتريکی حاصل از توزيع بارهای الكتريکی پردازيم. در چنین مواردی، انتگرالهای توابع حقیقی-مقدار بر بازه‌های بسته جای خود را به انتگرالهای خمیده خطی توابع روی مسیرهای واقع در میدان برداری می‌دهند، و تابعی که قرار است از آن انتگرال بگیریم حاصلضرب عددی بردارهاست. از انتگرالهای خمیده خطی در میدانهای برداری می‌توان برای محاسبه کار لازم برای جا به جایی يك جسم روی يك مسیر در جهت مخالف يك نیروی متغیر استفاده کرد. (جسم می‌تواند سفینه‌ای باشد که در جهت مخالف میدان گرانش زمین به فضا فرستاده می‌شود). یا ممکن است بخواهیم کاری را محاسبه کنیم که يك میدان برداری برای به حرکت در آوردن يك جسم روی مسیری واقع در میدان انجام می‌دهد (مثلا، کاری که يك شتاب‌دهنده ذرات برای بالا بردن انرژی يك ذره انجام می‌دهد). همچنین می‌توان از انتگرالهای خمیده خطی برای محاسبه آهنگ جریان سیالات روی خمها و نیز از میان آنها استفاده کرد. در این بخش چگونگی انجام این محاسبات بررسی می‌شود.

میدانهای برداری

يك میدان برداری روی دامنه‌ای از فضا یا از صفحه عبارت است از تابعی که به هر نقطه از دامنه، برداری نسبت می‌دهد. اگر به هر نقطه از مسیر يك پرتابه يك بردار سرعت نسبت دهیم، روی مسیر يك میدان برداری داریم. اگر به هر نقطه از رویه تراز يك تابع يك بردار گرادیان نسبت دهیم، بر این رویه يك میدان برداری داریم. اگر به هر نقطه از جریان يك سيال در سه بعد يك بردار سرعت نسبت دهیم، میدانی برداری بر ناحیه‌ای از فضا در اختیار داریم. شکلهای ۶.۱۹ تا ۶.۱۳ این میدانهای برداری و نیز چند میدان برداری دیگر را نشان می‌دهند. در برخی از شکلها فرمول میدان نیز آمده است.



۶.۱۳ بردارهای سرعت يك جریان در اطراف يك هواشکن در يك تونل باد. دود «کروزن» خطوط جریان را قابل رؤیت ساخته است.

۶.۲۹ سیمی با چگالی ثابت δ روی نیم‌دایره

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

قرار دارد. مرکز جرم و گشتاور لختی و شعاع چرخش سیم حول محور x را بیابید.

۶.۳۰ فنری با چگالی ثابت δ در امتداد پیچ زیر قرار دارد

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + (bt)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

الف) I_x و I_y را بیابید.

ب) فرض کنید طول فنر دو برابر می‌شود در بازه $0 \leq t \leq 2\pi$ بر پیچ قرار می‌گیرد. این تغییر چه اثری بر مقادیر I_x و I_y دارد؟ درستی پیش‌بینی خودتان را با محاسبه I_x و I_y در حالتی که طول فنر دو برابر شده است بیازمایید.

۶.۳۱ سیمی برخم زیر قرار دارد

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

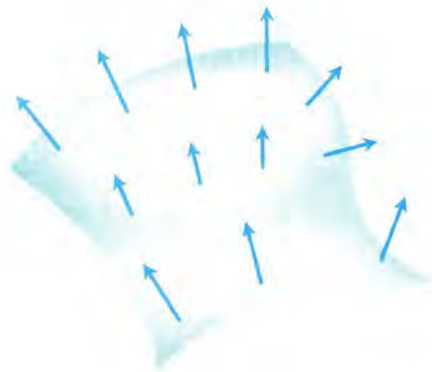
اگر چگالی سیم در نقطه (x, y, z) از خم برابر با

$$\delta(x, y, z) = \sqrt{y+2}$$

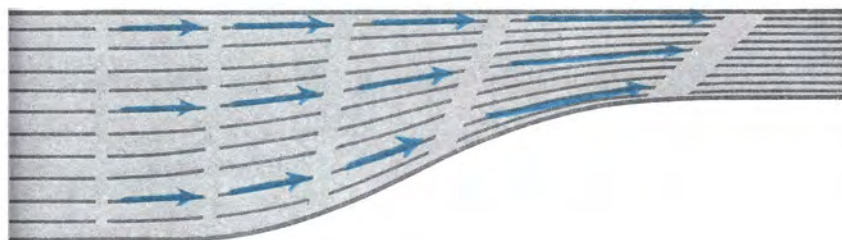
باشد، مرکز جرم و گشتاورهای لختی و شعاعهای چرخش سیم حول محورهای مختصات را بیابید.

۶.۱۹ انتگرالهای خمیده خطی در میدانهای برداری. کار، گردش، و شار

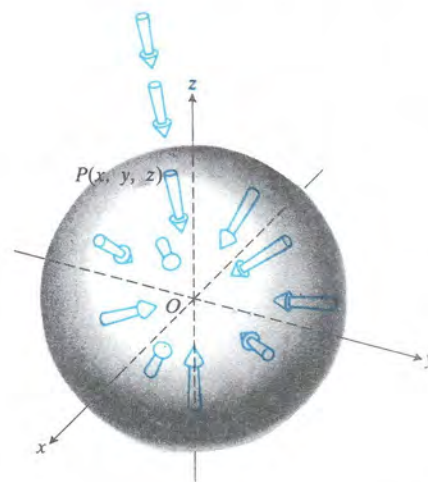
در بررسی پدیده‌های فیزیکی که با بردار به نمایش درمی‌آیند، ایده میدان برداری بر دامنه‌ای از فضا را مطرح می‌کنیم. میدان برداری به هر نقطه‌ای از این دامنه يك کمیت برداری نسبت می‌دهد.



۶.۱۹ میدان بردارهای گرادیان ∇f بر رویه $f(x, y, z) = c$

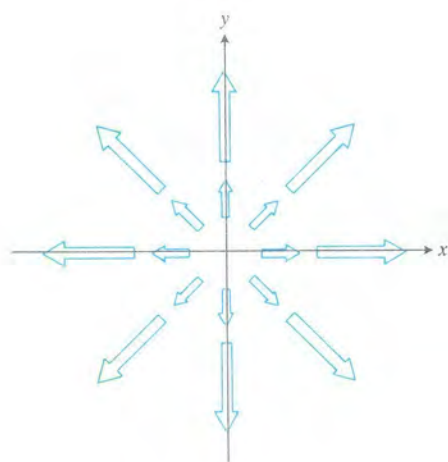


۹۰۱۹ خطوط جریان در يك گذرگاه باريك شونده. وقتی گذرگاه تنگ می شود آب تندتر حرکت می کند و طول بردارهای سرعت افزایش می یابند.

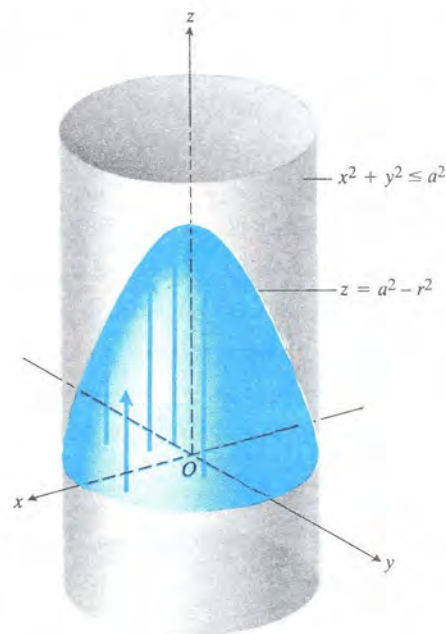


۸۰۱۹ بردارها در میدان گرانش

$$\mathbf{F} = -GM(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$



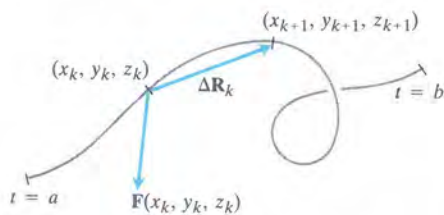
۱۱۰۱۹ میدان $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ بردارهای مکان نقاطی از صفحه. به این قرارداد توجه کنید که در نقاطی که $\mathbf{F}$ محاسبه می شود ابتدای پیکانها قرارداد و نه نوک آنها.



۱۰۰۱۹ جریان سیال در يك لوله استوانه ای بلند. ابتدای بردارهای سرعت $\mathbf{v} = (a^2 - r^2)\mathbf{k}$ که در درون استوانه اند در صفحه xy و انتهایشان بر سهمیوار $z = a^2 - r^2$ قرارداد.

می گیرد و نه نوک آنها. این روش نمایش با روش نمایش بردار مکان يك پرتابه یا سیاره فرق می کند. در آنجا ابتدای پیکان در مبدأ و نوکش در محل پرتابه یا سیاره قرارداد.

برای رسم میدانهایی که فرمول داشتند، يك دسته نمونه از نقاط دامنه را برگزیدیم و بردارهای منسوب به آنها را رسم کردیم. به این قرارداد توجه کنید که در نقاطی که تابع برداری محاسبه می شود ابتدای پیکانهای نمایش دهنده بردارها قرار



۱۴.۱۹ کاری که میدان F روی مسیر از (x_k, y_k, z_k) تا $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ انجام می‌دهد تقریباً برابر است با $F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta R_k$

مربوط به نقطه (x_k, y_k, z_k) تا نقطه $(x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1})$ و در جهت حرکت است. مقدار کاری که F از نقطه k تا نقطه $k+1$ در روی خم انجام می‌دهد تقریباً برابر است با $F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta R_k$. کاری که F در سراسر طول خم از $t=a$ تا $t=b$ انجام می‌دهد تقریباً برابر است با

$$(۱) \quad \sum_a^b F(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta R_k \quad (\text{مقدار تقریبی کار})$$

اگر مؤلفه‌های F پیوسته باشند و توابع $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ مشتقات اول پیوسته داشته باشند، آنگاه وقتی که تقسیم‌بندی ظریفتر شود و مقادیر $|\Delta R_k|$ به صفر میل کنند، مجموعه‌های مذکور در (۱) به سوی حسی میل می‌کنند. این حد را کاری که F در امتداد خم $R(t)$ از $t=a$ تا $t=b$ انجام می‌دهد می‌نامیم. نماد این حد عبارت است از

$$(۲) \quad \text{کار} = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot dR$$

برای محاسبه این انتگرال، F را روی خم می‌یابیم، سپس حاصلضرب عددی F در dR را محاسبه می‌کنیم و از تابع عددی حاصل نسبت به t انتگرال می‌گیریم:

فرمول محاسبه کار اگر

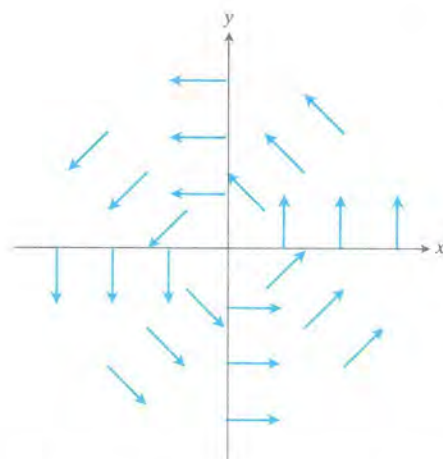
$$F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

و

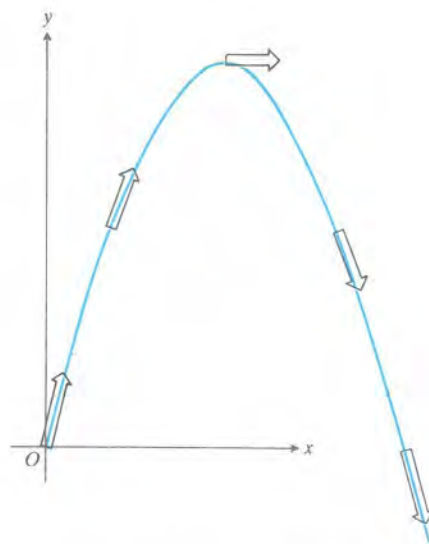
$$dR = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

آنگاه

$$(۳) \quad \text{کار} = \int_{t=a}^{t=b} F \cdot dR = \int_{t=a}^{t=b} M dx + N dy + P dz$$



۱۲.۱۹ میدان دوبعدی بردارهای واحد در $F(x, y) = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) / (x^2 + y^2)^{1/2}$ می‌باشد، میدان تعریف نمی‌شود.



۱۳.۱۹ بردارهای سرعت $v(t)$ یک پرتابه روی مسیر حرکت یک میدان برداری می‌سازند.

کار

برای محاسبه کاری که یک میدان برداری نیروها چون $F(x, y, z)$ برای به حرکت درآوردن جسمی از $t=a$ تا $t=b$ روی خم

$$R(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

واقع در دامنه میدان انجام می‌دهد، فرض می‌کنیم خم مطابق شکل ۱۴.۱۹ به تعدادی متناهی قطعه تقسیم می‌شود. دوسرهر قطعه‌ای با یک نمو کوچک در بردار مکان، ΔR_k ، به هم وصل می‌شود. این نمو

مثال بعدی چگونگی استفاده از این فرمول را نشان می‌دهد.

مثال ۱ کاری را که نیروی

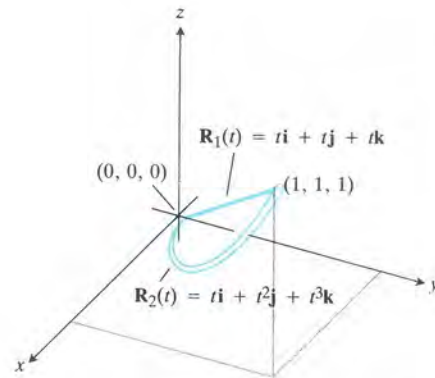
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - z)\mathbf{j} + (z^2 - x)\mathbf{k}$$

روی خمهای زیر از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ انجام می‌دهد بیابید

$$\mathbf{R}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{R}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

حل: خمها در شکل ۱۵.۱۹ رسم شده‌اند. در هر دو حالت با استفاده از رابطه (۳) کار انجام شده از $t = 0$ تا $t = 1$ را محاسبه می‌کنیم.



۱۵.۱۹ خمهای مورد بحث در مثال ۱.

روی خم اول

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - z)\mathbf{j} + (z^2 - x)\mathbf{k}$$

$$= (t^2 - t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} + (t^2 - t)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{R}_1 = dt\mathbf{i} + dt\mathbf{j} + dt\mathbf{k}$$

و

$$\text{کار} = \int_{t=0}^{t=1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}_1$$

$$= \int_0^1 (t^2 - t) dt + (t^2 - t) dt + (t^2 - t) dt$$

$$= 3 \int_0^1 (t^2 - t) dt = 3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

پس کاری که $\mathbf{F}$ روی خم اول انجام می‌دهد برابر با $-1/2$ است.

در مورد خم دوم

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - z)\mathbf{j} + (z^2 - x)\mathbf{k}$$

$$= (t^2 - t^2)\mathbf{i} + (t^4 - t^3)\mathbf{j} + (t^6 - t)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{R}_2 = dt\mathbf{i} + 2t dt\mathbf{j} + 3t^2 dt\mathbf{k}$$

و

$$\text{کار} = \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}_2$$

$$= \int_0^1 (0) dt + 2t(t^4 - t^3) dt + 3t^2(t^6 - t) dt$$

$$= \int_0^1 (2t^5 - 2t^4 + 3t^8 - 3t^3) dt$$

$$= \left[\frac{2}{6}t^6 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{3}{9}t^9 - \frac{3}{4}t^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{29}{60}.$$

پس کاری که $\mathbf{F}$ روی خم دوم انجام می‌دهد برابر با $-29/60$ است. ■

انتگرالهای شارش، و گردش

فرض می‌کنیم $\mathbf{F}(x, y, z)$ میدان سرعت شارش [جریان] سیالی در ناحیه‌ای از فضا باشد و نیز فرض می‌کنیم

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

خمی باشد که در این ناحیه قرار دارد. در این صورت انتگرال نسبت به طول قوس $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ (مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت بردار واحد مماس بر خم) را انتگرال شارش $\mathbf{F}$ روی خم می‌نامیم.

انتگرال شارش، و گردش

فرض می‌کنیم درمیدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j}$$

$$+ P(x, y, z)\mathbf{k}$$

خمی چون C با معادله برداری زیر مشخص شود

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

در این صورت، انتگرال شارش $\mathbf{F}$ روی C و در جهت افزایش t را

مثال ۳ گردش میدان

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

را در امتداد دایره زیر بیابید

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

حل: نخست $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{R}$ را بر حسب t می‌یابیم

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$= (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$d\mathbf{R} = (-\sin t dt)\mathbf{i} + (\cos t dt)\mathbf{j}.$$

سپس انتگرال شارش را حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{گردش} &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

شارگذرنده از يك خم واقع در صفحه

فرض کنید می‌خواهیم آهنگ وارد شدن يك سیال به ناحیه محدود به خمی چون C واقع در صفحه xy یا آهنگ خارج شدن آن را از این ناحیه بدانیم. برای یافتن این آهنگ، انتگرال خمیده خطی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ (یعنی مؤلفه عددی میدان سرعت سیال در جهت بردار واحد قوائم برونسو) را نسبت به طول قوس روی C محاسبه می‌کنیم. مقدار این انتگرال را شار $\mathbf{F}$ گذرنده از رویه محدود به C می‌نامیم. شاذ لفظی است کلی و تنها به شارش سیالات محدود نمی‌شود، چه بسیاری از محاسبات مربوط به شار ابداء ربطی به حرکت سیالات ندارد. اگر $\mathbf{F}$ برای نمونه میدانی الکتریکی یا میدانی مغناطیسی باشد، باز هم انتگرال $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ در امتداد C را شار $\mathbf{F}$ گذرنده از C می‌نامیم.

تعریف

شارگذرنده از يك خم بسته واقع در صفحه

$$C \text{ شار } \mathbf{F} \text{ گذرنده از } = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \quad (5)$$

می‌توان با استفاده از هر يك از سه فرمول زیر به دست آورد

$$\begin{aligned} \text{انتگرال شارش } \mathbf{F} \text{ روی } C &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad (\text{صورت دیگر، چون } \mathbf{T} = d\mathbf{R}/ds) \quad (4) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} M dx + N dy + P dz \quad (\text{صورت مؤلفه‌ای}) \end{aligned}$$

وقتی خم، بسته باشد، مقدار انتگرال شارش را گردش در امتداد خم می‌نامیم.

به نحوه وابستگی علامت انتگرال شارش در رابطه (۴) به جهت حرکت روی C وقتی t از a به b افزایش می‌یابد، توجه کنید. اگر جهت را عوض کنیم، در واقع جهت $\mathbf{T}$ را عوض می‌کنیم و در نتیجه علامت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ و علامت انتگرالش نسبت به طول قوس از $t=a$ تا $t=b$ تغییر می‌کند.

مثال ۴ انتگرال شارش میدان

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

را روی خم زیر بیابید

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

حل: نخست $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{R}$ را بر حسب t بیان می‌کنیم

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

$$= (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{R} = (-\sin t dt)\mathbf{i} + (\cos t dt)\mathbf{j} + (dt)\mathbf{k}.$$

سپس انتگرال شارش مذکور در رابطه (۴) را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{انتگرال شارش} &= \int_{t=0}^{t=\pi/4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_0^{\pi/4} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t) dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/4} \\ &= \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

می‌شود که در این صورت ناگزیر حرکت در خلاف جهت ساعت است. بنا براین با اینکه مقدار انتگرال طول قوس در تعریف شار (رابطه ۵) به جهت طی شدن C بستگی ندارد، اما در فرمولهایی که از آنها برای یافتن مقدار انتگرال مذکور در رابطه (۵) بهره می‌گیریم فرض بر این است که حرکت در خلاف جهت ساعت است.

بر حسب مؤلفه‌ها داریم

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}. \quad (۶)$$

اگر فرمول $\mathbf{F}$ را به صورت

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

بنویسیم، آنگاه

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x, y) \frac{dy}{ds} - N(x, y) \frac{dx}{ds}.$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \int_C \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \oint_C M dy - N dx. \end{aligned} \quad (۷)$$

روی آخرین انتگرال دایره جهتدار $\odot$ را گذاشته‌ایم تا یادآور این نکته باشد که انتگرالگیری روی خم بسته C در خلاف جهت ساعت انجام می‌شود. برای محاسبه این انتگرال، M ، N ، dx و dy را بر حسب t بیان می‌کنیم و از $t=a$ تا $t=b$ انتگرال می‌گیریم. بنا براین برای یافتن شار نیازی نیست که $\mathbf{n}$ یا ds بر ما معلوم باشد.

فرمول محاسبه شار گذرنده از یک خم بسته واقع در صفحه

$$C \text{ از } \mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ شار} = \oint_C M dy - N dx \quad (۸)$$

از روی هر صورت پارامتری دلخواه $\mathbf{R}(t)$ که C را یکبار در خلاف جهت ساعت طی کند می‌توان این انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۴ مطلوب است شار میدان

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

گذرنده از دایره زیر که در صفحه xy واقع است

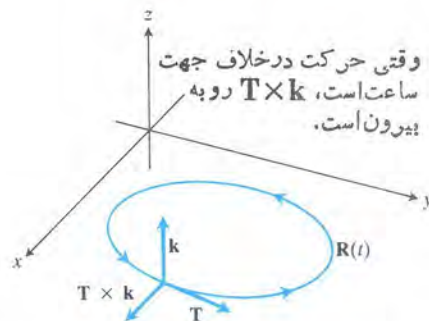
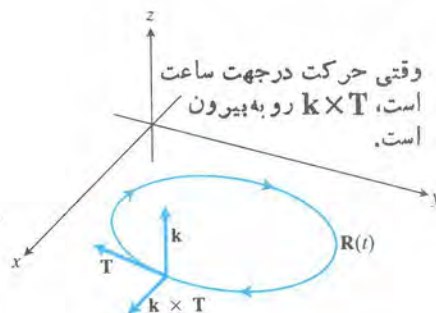
$$C: \mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

به تفاوت بین شار و گردش توجه کنید. شار $\mathbf{F}$ گذرنده از C برابر است با انتگرال خمیده خطی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ یعنی مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت قائم روبه بیرون (برونسو) نسبت به طول قوس. گردش $\mathbf{F}$ در امتداد C عبارت است از انتگرال خمیده خطی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ یعنی مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت بردار مماس واحد، نسبت به طول قوس. به طور خلاصه، شار، انتگرال مؤلفه قائم $\mathbf{F}$ است حال آنکه گردش انتگرال مؤلفه مماس $\mathbf{F}$ است.

برای محاسبه انتگرال مذکور در (۵) نخست خم C را به صورت پارامتری زیر بیان می‌کنیم

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

که وقتی t از a تا b افزایش یابد خم C را دقیقاً یکبار طی می‌کند. اگر بردار مماس واحد خم یعنی $\mathbf{T}$ را در بردار $\mathbf{k}$ ضرب برداری کنیم می‌توانیم بردار قسائم واحد برونسوی $\mathbf{n}$ را بیابیم. اما کدام ترتیب را برگزینیم، $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ یا $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ را؟ کدام یک از اینها متوجه بیرون است؟ جواب این پرسش بستگی به این دارد که وقتی پارامتر t افزایش می‌یابد C در کدام جهت طی شود. اگر حرکت در جهت ساعت باشد آنگاه جهت $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ روبه بیرون است؛ اگر حرکت در خلاف جهت ساعت باشد، آنگاه جهت $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ روبه بیرون است (شکل ۱۶.۱۹). معمولاً $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ انتخاب



۱۶.۱۹ برای یافتن بردار قسائم واحد برونسوی خمی چون $\mathbf{R}(t)$ واقع در صفحه xy که با افزایش t در خلاف جهت ساعت طی می‌شود $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ را اختیار می‌کنیم.

$$F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + 1} \mathbf{j} \quad ۰۳$$

$$F(x, y, z) = \sqrt{z} \mathbf{i} - 2x \mathbf{j} + \sqrt{y} \mathbf{k} \quad ۰۴$$

$$F(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + xz \mathbf{k} \quad ۰۵$$

$$F(x, y, z) = 3x(x-1) \mathbf{i} + 3z \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad ۰۶$$

$$F(x, y, z) = (y+z) \mathbf{i} + (z+x) \mathbf{j} + (x+y) \mathbf{k} \quad ۰۷$$

$$F(x, y, z) = (y \sin z) \mathbf{i} + (x \sin z) \mathbf{j} + (xy \cos z) \mathbf{k} \quad ۰۸$$

در مسائل ۹-۱۲، مطلوب است کاری که نیروی $F(x, y, z)$ روی مسیر مفروض در جهت افزایش مقدار t انجام می‌دهد.

$$F(x, y, z) = xy \mathbf{i} + y \mathbf{j} - yz \mathbf{k} \quad ۰۹$$

$$\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F(x, y, z) = 2y \mathbf{i} + 3x \mathbf{j} + (x+y) \mathbf{k} \quad ۰۱۰$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + \frac{t}{\pi} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F(x, y, z) = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k} \quad ۰۱۱$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sin t) \mathbf{i} + (\cos t) \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F(x, y, z) = 6z \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + 12x \mathbf{k} \quad ۰۱۲$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sin t) \mathbf{i} + (\cos t) \mathbf{j} + \frac{t}{\pi} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در مسائل ۱۳-۱۶، انتگرال شارش میدان برداری $F(x, y, z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

$$F(x, y, z) = -4xy \mathbf{i} + 8y \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \quad ۰۱۳$$

$$\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$F(x, y, z) = x^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k} \quad ۰۱۴$$

$$\mathbf{R}(t) = 3t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F(x, y, z) = (x-z) \mathbf{i} + x \mathbf{k} \quad ۰۱۵$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t) \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$F(x, y, z) = -y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + b \mathbf{k} \quad ۰۱۶$$

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t) \mathbf{i} + (b \sin t) \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(a و b ثابتهای مثبتی هستند)

حل: صورت پارامتری مفروض وقتی t از ۰ تا 2π تغییر می‌کند دقیقاً یکبار دایره را در خلاف جهت ساعت طی می‌کند. بنابراین می‌توان رابطه (۸) را با این صورت پارامتری به کار برد. بر حسب t داریم

$$M = x - y = \cos t - \sin t$$

$$N = x = \cos t$$

$$dy = -\sin t \, dt$$

$$dx = -\sin t \, dt$$

بنابراین شار برابر است با

$$\begin{aligned} \oint_C M \, dy - N \, dx &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t \, dt) \\ &\quad - (\cos t)(-\sin t \, dt) \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t \\ &\quad + \cos t \sin t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

شار F گذرنده از دایره برابر با π است. چون جواب مثبت است، شارش خالص گذرنده از خم، روبه بیرون است. شارش خالص درون و دارای مقدار شار منفی است. ■

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۸، کاری را که نیروی F روی مسیرهای مفروض زیر از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ انجام می‌دهد بیابید.

(الف) پاره خط $\mathbf{R}_1(t) = t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

(ب) خم $\mathbf{R}_2(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$

(پ) مسیری متشکل از دو پاره خط پیاپی یکی از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 0)$ و دیگری از $(1, 1, 0)$ تا $(1, 1, 1)$.

$$F(x, y, z) = 2x \mathbf{i} + 3y \mathbf{j} + 4z \mathbf{k} \quad ۰۱$$

$$F(x, y, z) = 3y \mathbf{i} + 2x \mathbf{j} + 2z \mathbf{k} \quad ۰۲$$

۱۷. مطلوب است محاسبه انتگرال شارش میدان برداری

$$F(x, y) = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$$

روی هر يك از مسیرهای زیر که در صفحه xy از $(1, 0)$ تا $(-1, 0)$ واقع اند.الف) نیمه بالایی دایره $x^2 + y^2 = 1$ ب) پاره خط از $(1, 0)$ تا $(-1, 0)$ پ) دو پاره خط پیاپی یکی از $(1, 0)$ تا $(0, -1)$ ودیگری از $(0, -1)$ تا $(-1, 0)$ ۱۸. مطلوب است گردش $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ روی مسیر بسته متشکل از پیچ

$$R_1(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

و پاره خطهای

$$R_2(t) = \mathbf{j} + \frac{\pi}{4}(1-t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

و

$$R_3(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

در مسائل ۱۹-۲۲، مطلوب است گردش و شار میدان $F(x, y)$ در امتداد (گذرنده از) مسیر بسته ای که از نیمدایره

$$R_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

و پاره خط زیر که به دنبال نیمدایره است تشکیل می شود

$$R_2(t) = t\mathbf{i}, \quad -a \leq t \leq a.$$

$$F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad ۱۹$$

$$F(x, y) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} \quad ۲۰$$

$$F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad ۲۱$$

$$F(x, y) = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad ۲۲$$

۲۳. مطلوب است گردش و شار میدانهای برداری

$$F_1(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad \text{و} \quad F_2(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

در امتداد (گذرنده از) هر يك از خمهای زیر
الف) بیضی

$$R_1(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

ب) بیضی

$$R_2(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۲۴. مطلوب است شار میدانهای برداری

$$F_1(x, y) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \quad \text{و} \quad F_2(x, y) = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

گذرنده از دایره

$$R(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۲۵. فرض کنید $f(t)$ به ازای $a \leq t \leq b$ مثبت و پیوسته باشد.نیز فرض کنید $R(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$ ، $a \leq t \leq b$ ، و نیز $F(x, y) = y\mathbf{i}$ نشان دهید.

$$\int_{t=a}^{t=b} F \cdot dR$$

برابر است با مساحت زیر نمودار f از $t=a$ تا $t=b$.TOOLKIT PROGRAM
Vector Fields

۳.۱۹ قضیه گرین در صفحه

اکنون به بررسی قضیه ای می پردازیم که رابطه چگونگی جریان یافتن يك سیال در امتداد یا گذرنده از مرز يك ناحیه واقع در صفحه و حرکت سیال در درون این ناحیه را توصیف می کند. بنا به فرض سیال مانند آب غیر قابل تراکم است و نه مانند گاز که تراکم پذیر است رفتار سیال در مرز و درون ناحیه را می توان به کمک مفاهیم دیورژانس و تاو به یکدیگر مربوط کرد. دیورژانس میدان سرعت سیال معیاری است از آهنگ وارد شدن يك سیال به درون ناحیه در هر نقطه دلخواه یا آهنگ خارج شدن سیال از آن ناحیه در هر نقطه دلخواه. تاو میدان سرعت، معیاری است از آهنگ چرخش سیال در هر نقطه دلخواه. این مطلب را اندکی بعد با دقت بیشتری بررسی می کنیم.

قضیه گرین حاکی است که در شرایطی که معمولاً در عمل پیش می آید، شار برونسوی يك میدان برداری گذرنده از مرز يك ناحیه واقع در صفحه برابر است با انتگرال دوگانه دیورژانس میدان روی درون ناحیه. صورت دیگری از قضیه گرین حاکی است که گردش يك میدان برداری در خلاف جهت ساعت حول مرز يك ناحیه برابر است با انتگرال دوگانه تاو میدان برداری روی همان ناحیه. قضیه گرین یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است. این قضیه، عمیق، جالب و دارای نتایج بسیار است. در ریاضیات محض از نظر اهمیت در ردیف قضایای اصلی حساب

در متر یا به مربع متر بر ثانیه خواهد بود. آهنگ خروج سیال از سه ضلع دیگر در جهت قائمهای برونسوی آنها را می توان به طریق مشابه بر آورد کرد. داریم

$$\text{ضلع بالا: } F(x, y + \Delta y) \cdot j \Delta x = N(x, y + \Delta y) \Delta x$$

$$\text{ضلع پایین: } F(x, y) \cdot (-j) \Delta x = -N(x, y) \Delta x$$

ضلع سمت راست:

$$F(x + \Delta x, y) \cdot i \Delta y = M(x + \Delta x, y) \Delta y \quad (۲)$$

ضلع سمت چپ:

$$F(x, y) \cdot (-i) \Delta y = -M(x, y) \Delta y.$$

با ترکیب آهنگهای نظیر اضلاع مقابل داریم

بالا و پایین:

$$(N(x, y + \Delta y) - N(x, y)) \Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \quad (۳)$$

راست و چپ:

$$(M(x + \Delta x, y) - M(x, y)) \Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y. \quad (۴)$$

اگر (۳) و (۴) را باهم جمع کنیم نتیجه می گیریم

$$(N(x, y + \Delta y) - N(x, y)) \Delta x + (M(x + \Delta x, y) - M(x, y)) \Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (۵)$$

حال دوطرف را بر $\Delta x \Delta y$ تقسیم می کنیم تا مقدار تقریبی شار کل بر مساحت واحد یا چگالی شار را بیابیم

$$\frac{\text{شار گذرنده از مرز مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right). \quad (۶)$$

سرانجام برای تعریف چگالی شار F در نقطه (x, y) ، Δx و Δy را به صفر میل می دهیم.

تعریف

چگالی شار در يك نقطه

چگالی شار میدان برداری $F = Mi + Nj$ در نقطه (x, y) عبارت است از

$$\text{چگالی شار} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad (۷)$$

دیفرانسیل و انتگرال جای دارد. در ریاضیات کاربرد، تعمیمهای قضیه گرین به فضای سه بعدی مبنای قضایای مهمی است درباره الکتروستاتیک، مغناطیس، و حرکت سیالات. در بخشهای ۵.۱۹ و ۶.۱۹ صورتهای سه بعدی قضیه گرین بررسی می شوند.

درسرتاسر بحثمان درباره قضیه گرین صحبت از میدانهای

سرعت شارش سیالات می کنیم و این از آن جهت است که تصور شارش سیالات و تعبیر مفاهیم شار و گردش آسان است. اما بهتر است بدانید که قضیه گرین را می توان در مورد هر میدان برداری دلخواهی که شرایط ریاضی خاصی را برآورده سازد به کاربرد و اعتبار آن به تعامیر فیزیکی خاص میدان بستگی ندارد.

چگالی شار در يك نقطه. دیورژانس

در مورد قضیه گرین نیاز به دو مفهوم نو داریم. یکی مفهوم چگالی شار يك میدان برداری در يك نقطه است که در ریاضیات آن را دیورژانس میدان برداری می نامیم. از طریق زیر به این مفهوم دست می یابیم.

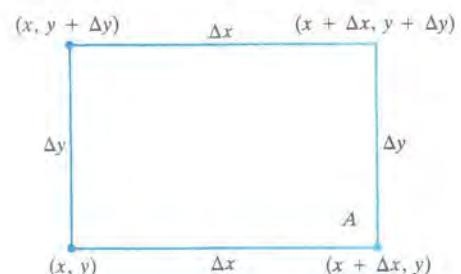
فرض می کنیم

$$F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

میدان سرعت شارش سیالی در صفحه باشد و مشتقهای جزئی اول M و N در هر نقطه از ناحیه ای چون R پیوسته باشند. نیز فرض می کنیم (x, y) نقطه ای از R باشد و A مستطیل کوچکی باشد که يك رأسش (x, y) است و خودش و درونش تماماً در R واقع اند (شکل ۱۷.۱۹). اضلاع مستطیل طولهایی برابر Δx و Δy دارند و موازی محورهای مختصات اند. آهنگ خروج سیال از ضلع پایینی مستطیل تقریباً برابر است با

$$F(x, y) \cdot (-j) \Delta x = -N(x, y) \Delta x. \quad (۱)$$

این آهنگ برابر است با حاصلضرب مؤلفه عددی سرعت در (x, y) در جهت قائم برونسوی در طول پاره خط. اگر سرعت مثلاً به متر بر ثانیه باشد، آهنگ خروج سیال به حاصلضرب متر بر ثانیه



۱۷.۱۹ مستطیلی که به کمک آن چگالی شار

(دیورژانس) يك میدان برداری در نقطه

(x, y) تعریف می شود.

در ریاضیات، چگالی شار را دیورژانس F می‌نامیم. نماد آن $\text{div } F$ است که «دیورژانس F » خوانده می‌شود.

تعریف

دیورژانس یک میدان برداری واقع در صفحه

دیورژانس میدان برداری $F = Mi + Nj$ عبارت است از تابع عددی

$$\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad (۸)$$

اگر آب از حفره کوچکی در نقطه (x_0, y_0) به‌درون ناحیه‌ای جریان یابد، خطوط شارش آب واگرا خواهند بود و $\text{div } F(x_0, y_0)$ مثبت است. اگر برعکس آب از حفره‌ای خارج شود دیورژانس منفی است. شکل ۱۸.۱۹ را ببینید.



۱۸۰۱۹ در شارش یک سیال تراکم‌ناپذیر در ناحیه‌ای واقع در صفحه در یک «چشمه» یعنی نقطه‌ای که سیال وارد سیستم می‌شود دیورژانس مثبت و در یک «چاه» یعنی نقطه‌ای که سیال از سیستم خارج می‌شود دیورژانس منفی است.

مثال ۱ دیورژانس میدان برداری زیر را بیابید

$$F(x, y) = (x^2 - y^2)i + (xy - y^2)j.$$

پیدایش قضیه گرین

این قضیه به جورج گرین (۱۷۹۳-۱۸۴۱) منسوب است. گرین ریاضیدانی خودآموخته بود که می‌خواست در مطالعاتش در زمینه الکتریسیته ساکن و مغناطیس از ریاضیات بهره بگیرد. او این قضیه را در ۱۸۲۸ به‌صورت خصوصی تحت عنوان «گفتاری درباره کار برد آنالیز در نظریه‌های الکتریسیته و مغناطیس» منتشر کرد. در این مقاله جامع درباره انتگرالهای خمیده خطی و رویه‌ای هم بحث شده بود، اما اثر گاوس در سال ۱۸۴۰ بود که بین انتگرال خمیده خطی و کار ارتباط صریحی برقرار کرد. اثر گرین مدت‌ها مورد توجه قرار نگرفت تا آنکه در دهه ۱۹۵۰ ویلیام تامسن فیزیکدان (که بعدها به لرد کلوین معروف شد) این اثر را پس از مرگ گرین منتشر کرد. ریاضیدان روسی میخائیل اوستروگرادسکی هم به‌طور همزمان قضیه گرین را اثبات و آن را در سال ۱۸۲۸ به آکادمی علوم سن‌پترزبورگ عرضه کرد. اما شاید علت اینکه این قضیه را بیشتر به‌نسب گرین می‌شناسند این باشد که گرین الهام‌بخش دست‌اندرکاران بعدی فیزیک ریاضی در کیمبرج نظیر ویلیام تامسن، گابریل استوکس، لرد ریلی، و جیمز کلارک ماکسول بود. پس از معارضه بین نیوتن و لایب‌نیتس، گرین نخستین ریاضیدان بزرگ انگلیسی بود که در قرن هیجدهم به‌جریان فعالیت ریاضی در بقیه اروپا پیوست و انگلستان را دوباره در جریان این فعالیت گذاشت.

به دست می آید. داریم

ضلع بالا:

$$\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta x = -M(x, y + \Delta y) \Delta x$$

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x \quad \text{ضلع پایین:}$$

ضلع راست:

$$\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j} \Delta y = N(x + \Delta x, y) \Delta y \quad (10)$$

ضلع چپ:

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta y = -N(x, y) \Delta y.$$

با ترکیب آهنگهای شارش مربوط به اضلاع مقابل داریم

بالا و پایین:

$$\begin{aligned} & -(M(x, y + \Delta y) - M(x, y)) \Delta x \\ & \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x \end{aligned} \quad (11)$$

راست و چپ:

$$(N(x + \Delta x, y) - N(x, y)) \Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y. \quad (12)$$

اگر (۱۱) و (۱۲) را با هم جمع کنیم و نتیجه را بر $\Delta x \Delta y$ تقسیم کنیم مقدار تقریبی چگالی شارش در مورد مستطیل نتیجه می شود

$$\frac{\text{گردش در امتداد مستطیل}}{\text{مساحت مستطیل}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (13)$$

سرانجام برای تعریف چگالی گردش $\mathbf{F}$ در نقطه (x, y) ، Δx و Δy را به صفر میل می دهیم.

تعریف

چگالی گردش در نقطه ای از صفحه

چگالی گردش میدان برداری $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ در نقطه (x, y) برابر است با

$$\text{چگالی گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (14)$$

در ریاضیات چگالی گردش را نماد $\mathbf{F}$ می نامیم. نماد تاو $\mathbf{F}$

حل: فرمول (۸) را به کار می بریم

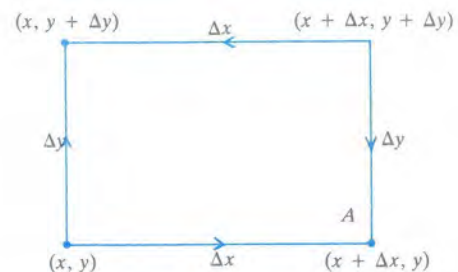
$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\ &= 2x + x - 2y \\ &= 3x - 2y. \end{aligned}$$

چگالی گردش در یک نقطه. تاو

دومین مفهوم نوینی که برای قضیه گرین لازم داریم، مفهوم چگالی گردش یک میدان برداری چون $\mathbf{F}$ در یک نقطه است. این مفهوم را در ریاضیات تاو $\mathbf{F}$ می نامیم. برای به دست آوردن تاو باز هم از میدان سرعت

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \quad (9)$$

و مستطیل A استفاده می کنیم. مستطیل را دوباره در شکل ۱۹.۱۹ رسم کرده ایم.



۱۹.۱۹ مستطیلی که به کمک آن چگالی گردش (تاو) یک میدان برداری در نقطه ای چون (x, y) تعریف می شود.

گردش $\mathbf{F}$ در خلاف جهت ساعت روی مرز A برابر است با مجموع آهنگهای شارش در امتداد اضلاع مستطیل. در مورد ضلع پایین مستطیل، آهنگ شارش تقریباً برابر است با

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x.$$

این آهنگ شارش برابر است با حاصلضرب مؤلفه عددی سرعت $\mathbf{F}(x, y)$ در جهت بردار مماس $\mathbf{i}$ در طول ضلع مستطیل. آهنگ شارش روی اضلاع دیگر در خلاف جهت ساعت به روش مشابهی

به صورت $\text{curl } \mathbf{F}$ است که به همین صورت یعنی کرل $\mathbf{F}$ خوانده می شود.

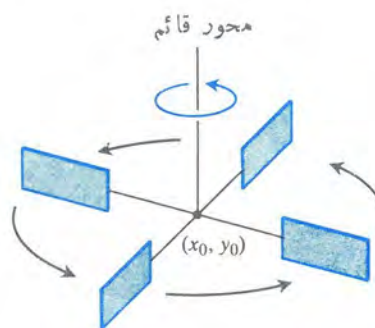
تعریف

تاو يك میدان سرعت در صفحه

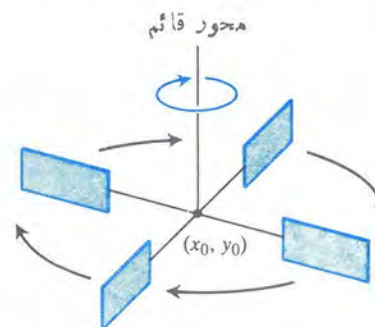
تاو میدان سرعت $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ برابر است با تابع

$$\text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (15)$$

اگر آب در ناحیه ای از صفحه xy در لایه ای نازک حرکت کند، با استفاده از گردش یا تاو در نقطه (x_0, y_0) می توان سرعت و جهت چرخش چرخ پره دار کوچکی را که در نقطه (x_0, y_0) از آب قرار دارد و محورش بر صفحه عمود است به دست آورد (شکل ۲۰.۱۹).



$\text{curl } \mathbf{F}(x_0, y_0) > 0$
گردش در خلاف جهت ساعت



$\text{curl } \mathbf{F}(x_0, y_0) < 0$
در جهت ساعت

۲۰.۱۹ در شارش يك سیال تراکم ناپذیر در ناحیه ای از صفحه تاو، آهنگ چرخش سیال در يك نقطه را به دست می دهد. اگر در يك نقطه چرخش در خلاف جهت ساعت باشد تاو مثبت و اگر در جهت ساعت باشد تاو منفی است.

مثال ۲ مطلوب است تاو میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}.$$

حل: فرمول (۱۵) را به کار می بریم

$$\text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1.$$

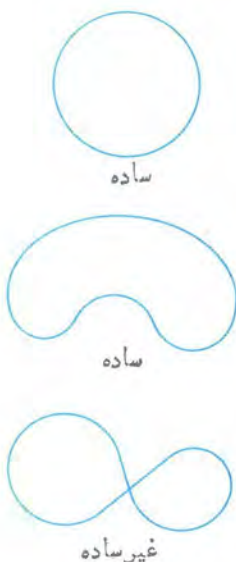
قضیه گرین در صفحه

صورتی از قضیه گرین حاکی است که با شرایط مناسب، شار برونسوی يك میدان برداری $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ گذرنده از يك خم بسته ساده چون C برابر است با انتگرال دوگانه $\text{div } \mathbf{F}$ روی ناحیه R که به C محدود است

$$\oint_C M dy - N dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16)$$

شار دیورژانس

خمهای بسته ساده خمهایی هستند که خود را قطع نمی کنند. دایره يك خم بسته ساده است، اما شکل نماد بینهایت چنین نیست (شکل ۲۱.۱۹)



۲۱.۱۹ برای اثبات قضیه گرین خمهای بسته را به درنوع ساده و غیر ساده تقسیم می کنیم. خمهای ساده خمهایی هستند که خود را قطع نمی کنند.

دوطرف رابطه (۱۶) عبارت اند از

$$\oint_C M dy - N dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t dt) - (\cos t)(-\sin t dt) \\ = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (1+0) dx dy \\ = \iint_R dx dy = \pi.$$

دوطرف رابطه (۱۷) عبارت اند از

$$\oint_C M dx + N dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t dt) + (\cos t)(\cos t dt) \\ = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1) dt = 2\pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (1 - (-1)) dx dy \\ = 2 \iint_R dx dy = 2\pi.$$

اگر خم بسته C از تعدادی از خمهای مختلف پیاپی تشکیل شده باشد، محاسبه انتگرال خطی روی C ممکن است طولانی باشد زیرا انتگرالهای مختلف زیادی را باید محاسبه کنیم. اما اگر C محدودکننده ناحیه‌ای چون R باشد که قضیه گرین را بتوان در مورد آن به کار برد، می‌توان از قضیه گرین بهره گرفت و انتگرال خمیده خطی در امتداد C را به یک انتگرال دوگانه ساده روی R تبدیل کرد.

مثال ۴ مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\oint xy dy - y^2 dx$$

در امتداد مربعی که خطوط $x=1$ و $y=1$ از ربع اول جدا می‌کنند.

صورت دیگری از قضیه گرین حاکی است که گردش F در خلاف جهت ساعت روی C برابر است با انتگرال دوگانه F روی R

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (17)$$

این دو صورت قضیه گرین هم‌ارزند. اگر رابطه (۱۶) را در مورد میدان $G = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ به کار ببریم رابطه (۱۷) و اگر رابطه (۱۷) را در مورد $G = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ به کار ببریم رابطه (۱۶) به دست می‌آید. ضرورتی ندارد که هر دو رابطه را اثبات کنیم. به زودی صورت ناوی قضیه را به اختصار اثبات می‌کنیم.

دو نوع فرض در مورد قضیه گرین ضروری است. نخست، M و N باید شرایطی داشته باشند که مطمئن شویم انتگرالها وجود دارند؛ شرایط معمولی این است که M ، N ، و مشتقهای جزئی اولشان در هر نقطه دلخواه از ناحیه‌ای که C و R را دربردارد پیوسته باشند. دوم، خم C باید دارای شرایط هندسی خاصی باشد؛ خم C باید ساده، بسته و متشکل از قطعاتی باشد که بتوانیم روی آنها از M و N انتگرال بگیریم؛ شرایط معمولی عبارت اند از اینکه C از تعدادی متناهی خم پیوسته-مشتقپذیر تشکیل شده باشد به قسمی که وقتی یکی پایان می‌یابد دیگری آغاز شود. اما برهانی که در این بخش برای قضیه گرین ارائه می‌شود مفروضات دیگری هم در مورد شکل R در بر دارد. در کتابهای پیشرفته‌تر می‌توانید به برهانهای با محدودیتهای کمتر دست یابید. (یکی از این کتابها را در انتهای این بخش معرفی می‌کنیم.)

مثال ۳ درستی دو صورت قضیه گرین را در مورد میدان

$$F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

و ناحیه R محصور به دایره زیر بیازمایید

$$C: \mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

حل: نخست همه توابع، مشتقها، و دیفرانسیلها را بر حسب t بیان می‌کنیم

$$M = \cos t - \sin t, \quad dx = d(\cos t) = -\sin t dt$$

$$N = \cos t, \quad dy = d(\sin t) = \cos t dt$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

حل: از هر يك از دو صورت قضیه گرین می توان بهره گرفت و انتگرال خمیده خطی را به انتگرال دوگانه ای روی مربع تبدیل کرد.

۱. با استفاده از رابطه (۱۶): اگر قرار دهیم $M = xy$ ، $N = y^2$ و C و R را به عنوان مرز و درون مربع اختیار کنیم نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned}\oint_C xy \, dy - y^2 \, dx &= \iint_R (y + 2y) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 3y \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left[3xy \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y \, dy \\ &= \left[\frac{3}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

۲. با استفاده از رابطه (۱۷): اگر M را برابر با $-y^2$ و N را برابر با xy اختیار کنیم داریم

$$\oint_C -y^2 \, dx + xy \, dy = \iint_R (y - (-2y)) \, dx \, dy = \frac{3}{2}$$

که برابر است با مقدار قبلی. ■

مثال ۵ مطلوب است محاسبه شار بیرونسوی میدان $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ گذرنده از مربع محدود به خطوط $y = \pm 1$ و $x = \pm 1$

حل: اگر بخواهیم شار را با استفاده از انتگرال خمیده خطی محاسبه کنیم چهار انتگرالگیری لازم است: برای هر ضلع مربع يك انتگرالگیری، اما با استفاده از قضیه گرین می توان انتگرال خمیده خطی را به يك انتگرال دوگانه ساده تبدیل کرد. اگر $M = x$ ، $N = y^2$ ، C مربع، و R درون مربع اختیار شوند، داریم

$$\begin{aligned}\text{شار} &= \oint_C M \, dy - N \, dx \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + 2y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[x + 2xy \right]_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_{-1}^1 (2 + 2y) \, dy = \left[2y + y^2 \right]_{-1}^1 = 4.\end{aligned}$$

■

اثباتی برای قضیه گرین (نواحی خاص)

فرض می کنیم C يك خم بسته ساده پیوسته-مشتقپذیر در صفحه xy باشد و نیز این خاصیت را داشته باشد که خطوط موازی محورها در بیش از دو نقطه قطعش نکنند. فرض می کنیم M ، N ، و مشتقهای جزئی اولشان در هر نقطه ای از C پیوسته باشند و نیز R ناحیه ای باشد که به C محدود است. در این صورت

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (18)$$

شکل ۲۲.۱۹ حالت خاصی را نشان می دهد که C از دو قسمت زیر تشکیل شده است

$$C_1: y_1 = f_1(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$C_2: y_2 = f_2(x), \quad b \geq x \geq a.$$

برای هر نقطه x دلخواه بین a و b می توان از $\partial M / \partial y$ نسبت به y از $y_1 = f_1(x)$ تا $y_2 = f_2(x)$ انتگرال گرفت و چنین به دست آورد

$$\begin{aligned}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial M}{\partial y} dy &= M(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \\ &= M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).\end{aligned} \quad (19)$$

حال می توان از این نتیجه نسبت به x از a تا b انتگرال گرفت

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \, dx &= \int_a^b \{ M(x, f_2(x)) \\ &\quad - M(x, f_1(x)) \} dx \\ &= - \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &\quad - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} M \, dx - \int_{C_1} M \, dx \\ &= - \oint_C M \, dx.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\oint_C M \, dx = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (20)$$

تعمیم برهان به نواحی دیگر

برهانی را که هم اکنون به کمک آن رابطه گرین استنتاج شد، نمی توان مستقیماً در مورد ناحیه مستطیلی شکل ۲۴.۱۹ به کار برد زیرا خطوط $x=a$ ، $x=b$ ، $y=c$ ، و $y=d$ مرز ناحیه را در بیش از دو نقطه قطع می کنند. اما اگر مرز C را به چهار پاره خط جهتدار زیر تقسیم کنیم

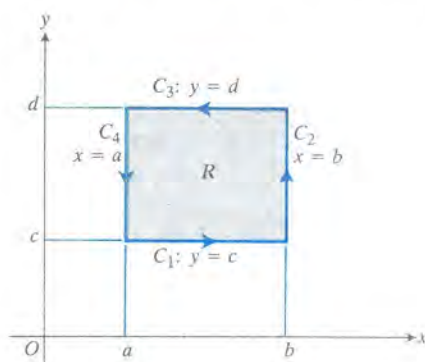
$$C_1: y=c, \quad a \leq x \leq b$$

$$C_2: x=b, \quad c \leq y \leq d$$

$$C_3: y=d, \quad b \geq x \geq a$$

$$C_4: x=a, \quad d \geq y \geq c$$

می توانیم برهان را به روش زیر اصلاح کنیم.



۲۴.۱۹ برای اثبات قضیه گرین در مورد ناحیه مستطیلی شکلی که در این شکل دیده می شود مرز را به چهار پاره خط جهتدار تقسیم می کنیم.

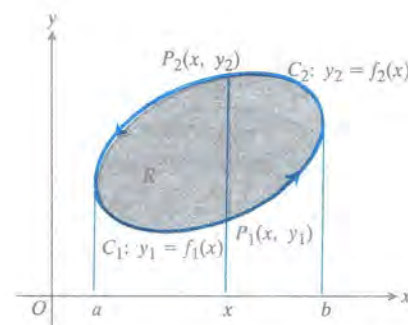
اگر روش اثبات رابطه (۲۱) را دنبال کنیم نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy &= \int_c^d [N(b, y) - N(a, y)] dy \\ &= \int_c^d N(b, y) dy \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_d^c N(a, y) dy \\ &= \int_{C_1} N dy + \int_{C_2} N dy. \end{aligned}$$

چون y در امتداد C_1 و C_2 ثابت است، داریم

$$\int_{C_1} N dy = \int_{C_2} N dy = 0$$



۲۲.۱۹ خم مرزی C از دو قسمت

$$C_1: y_1=f_1(x) \text{ و } C_2: y_2=f_2(x)$$

تشکیل می شود.

رابطه (۲۵) نیمی از نتیجه ای است که برای رابطه (۱۸) نیاز داریم. در مسأله ۲۵ از شما خواسته می شود که نیم دیگر را به دست آورید به این ترتیب که مطابق شکل ۲۳.۱۹ از $\partial N / \partial x$ نخست نسبت به x و سپس نسبت به y انتگرال بگیرید. در این شکل خم C شکل ۲۲.۱۹ به دو قسمت جهتدار زیر تقسیم شده است

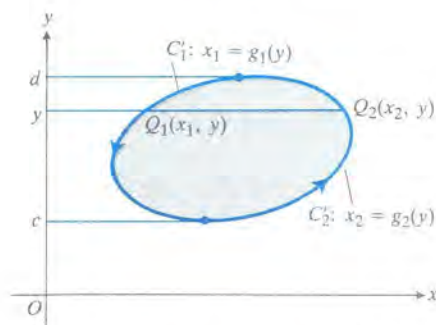
$$C'_1: x_1=g_1(y), \quad d \geq y \geq c$$

$$C'_2: x_2=g_2(y), \quad c \leq y \leq d.$$

نتیجه این انتگرالگیری دوگانه به صورت زیر بیان می شود

$$\oint_C N dy = \int_R \frac{\partial N}{\partial x} dx dy. \quad (21)$$

اگر روابط (۲۵) و (۲۱) را باهم ترکیب کنیم، رابطه (۱۸) به دست می آید و برهان به پایان می رسد.



۲۳.۱۹ خم مرزی C' از دو قسمت

$$C'_1: x_1=g_1(y) \text{ و } C'_2: x_2=g_2(y)$$

تشکیل می شود.

در نتیجه می‌توانیم مجموع

$$\int_{C_1} N dy + \int_{C_2} N dy$$

را به طرف راست رابطه (۲۲) بیفزاییم بدون اینکه برابری از میان برود. بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \oint_c N dy. \quad (۲۳)$$

بدروش مشابهی می‌توان نشان داد که

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = - \oint_c M dx. \quad (۲۴)$$

اگر (۲۴) را از (۲۳) کم کنیم بار دیگر به

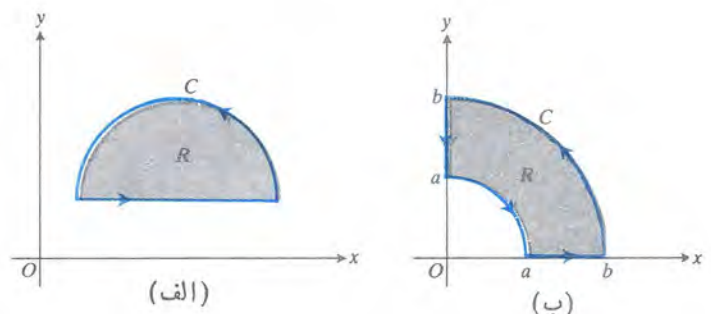
$$\oint_c M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

می‌رسیم.

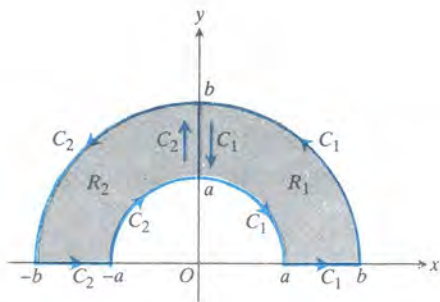
در مورد ناحیه‌هایی نظیر ناحیه‌ای که در شکل ۲۵.۱۹ دیده می‌شود، می‌توان بدون دشواری بیشتر عمل کرد. در مورد این نواحی هم رابطه (۱۸) را می‌توان به کار برد. این رابطه را برای ناحیه R در شکل ۲۶.۱۹ که به شکل نعل اسب است نیز می‌توان به کار برد و این امر با کنار هم گذاشتن نواحی R_1 و R_2 و روی هم قراردادن بخشی از مرزهایشان ملاحظه می‌شود. اگر قضیه گرین را در مورد C_1 ، C_2 ، R_1 و R_2 به کار ببریم نتیجه می‌گیریم

$$\int_{C_1} M dx + N dy = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{C_2} M dx + N dy = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$



۲۵.۱۹ نواحی دیگری که قضیه گرین در مورد آنها به کار می‌رود.



۲۶.۱۹ ناحیه R که از دو ناحیه R_1 و R_2 تشکیل می‌شود.

اگر این دو رابطه را با هم جمع کنیم، انتگرال خمیده خطی C_1 روی محور y از b تا a ، انتگرال C_2 روی همین قطعه اما در جهت مخالف را حذف می‌کند. بنابراین

$$\oint_c M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

که در آن C از دو قطعه واقع بر محور x از $-b$ تا $-a$ و از a تا b و از دو نیمدایره تشکیل می‌شود و R ناحیه درون C است.

روش جمع کردن انتگرالهای خمیده خطی روی مرزهای مجزا برای ساختن انتگرالی روی يك تك مرز را می‌توان به هر تعداد متناهی زیر ناحیه تعمیم داد. در شکل ۲۷.۱۹ (الف) فرض می‌کنیم C_1 مرز ناحیه R_1 در ربع اول باشد. به همین ترتیب، C_i مرز R_i است، $i = 1, 2, 3, 4$. بنا به قضیه گرین

$$\oint_{C_i} M dx + N dy = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (۲۵)$$

روابط (۲۵) را به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ با هم جمع می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \oint_{r=b} (M dx + N dy) + \oint_{r=a} (M dx + N dy) \\ = \iint_{a \leq r \leq b} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (۲۶) \end{aligned}$$

رابطه (۲۶) حاکی است که انتگرال دو گانه

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

روی ناحیه طوقی شکل R برابر است با انتگرال خمیده خطی $M dx + N dy$ روی تمام مرز R ، و در جهتی که اگر روی مرز

حل: شکل ۲۸.۱۹ را ببینید. مرز R متشکل است از دایره

$$C_1: x = \cos \theta, y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

که روی آن در خلاف جهت ساعت انتگرال می گیریم، و دایره

$$C_h: x = h \cos \phi, y = h \sin \phi, 2\pi \geq \phi \geq 0$$

که روی آن در جهت ساعت انتگرال می گیریم. توجه کنید که چون h مثبت است R شامل مبدأ نمی شود. به ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، توابع M و N و مشتقات جزئی آنها پیوسته اند. علاوه بر این،

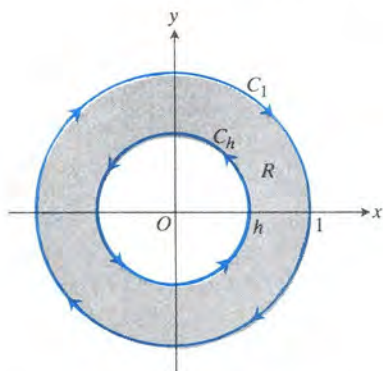
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

بنابراین

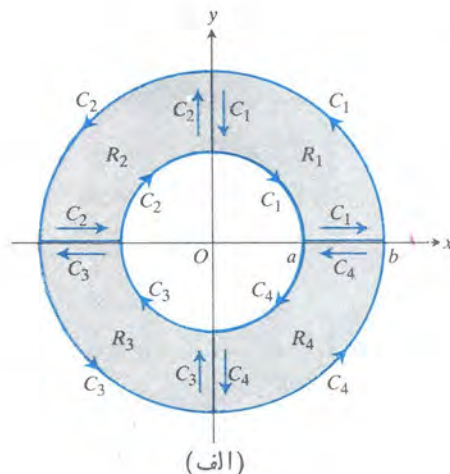
$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R 0 dx dy = 0.$$

انتگرال خمیده خطی برابر است با

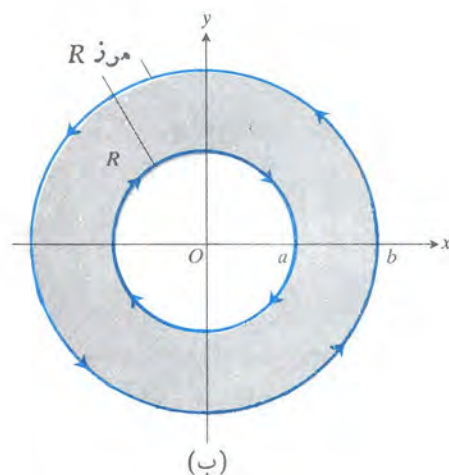
$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \oint_{C_1} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &+ \oint_{C_h} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{h^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\phi}{h^2} \\ &= 2\pi - 2\pi = 0. \end{aligned}$$



۲۸.۱۹ قضیه گرین را می توان در مورد ناحیه طوقی شکل R با انتگرالگیری روی مرزها، به طوری که دیده می شود، به کار برد.



(الف)



(ب)

۲۷.۱۹ ناحیه طوقی شکل R که در این شکل دیده می شود از چهار ناحیه کوچکتر تشکیل می شود. در مختصات قطبی در مورد دایره داخلی، $r = a$ ؛ در مورد دایره خارجی، $r = b$ ؛ و در مورد خود ناحیه، $a \leq r \leq b$.

به پیش رویم ناحیه R در طرف چپ ما واقع شود (شکل ۲۷.۱۹ ب).

مثال ۶ درستی صورت گردشی قضیه گرین (رابطه ۱۷) را برای حالتی بیازما پیدا کنید که

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

و ناحیه طوقی شکل R با نابرابریهای زیر تعریف شود

$$h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 < h < 1.$$

صورت‌های قائم و مماسی قضیه گرین

چنانکه در بخش ۲۰.۱۹ آموختیم، شار یک میدان برداری دوبعدی $\mathbf{F}$ گذرنده از خم بسته‌ای چون C در جهت بردار قائم برونسوی $\mathbf{n}$ برابری است با

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (\text{شار})$$

همچنین گردش در امتداد C در جهت بردار مماس واحد $\mathbf{T}$ برابر است با

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds. \quad (\text{گردش})$$

بنابراین، صورت شاری قضیه گرین را می‌توان چنین نوشت

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy \quad (\text{صورت قائم}) \quad (27)$$

و صورت گردشی قضیه گرین را می‌توان چنین نوشت

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (\text{صورت مماسی}) \quad (28)$$

اینک طرف چپ هر یک از این روابط به صورت برداری است. طرف راست آنها چگونه؟ آیا آنها را هم می‌توان به صورت برداری بیان کرد؟ جواب مثبت است و چگونگی انجام این کار را در بخشهای ۵۰.۱۹ و ۶۰.۱۹ با استفاده از عملگر برداری ∇ (دل) نشان می‌دهیم.

مراجعی برای مطالعه بیشتر

برای کسب اطلاعاتی در مورد جنبه‌های ریاضی قضیه گرین رجوع کنید به

Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume 2, 2nd ed., New York, John Wiley and Sons, 1969.

برای کسب اطلاعاتی در مورد تعابیر فیزیکی دیورژانس و تاو رجوع کنید به

H. M. Schey, *Div, Grad, Curl and All That*, New York, W. W. Norton, 1973.

برای کسب اطلاعاتی در مورد تاریخچه و سیر تحول قضیه گرین رجوع کنید به

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972.

در مثال ۶، توابع M و N در $(0, 0)$ ناپیوسته‌اند و لذا نمی‌توان قضیه گرین را در $C_1: x^2 + y^2 = 1$ و ناحیه درون آن به کار برد. باید مبدأ را حذف کنیم و ما با کنار گذاشتن نقاط درون C_h چنین کردیم.

در مثال ۶، می‌توانیم به جای دایره C_1 یک بیضی یا هر خم بسته ساده‌ای چون C را که بیرون از C_h باشد قرار دهیم. در هر صورت خواهیم داشت

$$\oint_C (M \, dx + N \, dy) + \oint_{C_h} (M \, dx + N \, dy) = 0$$

که به نتیجه زیر منجر می‌شود

$$\oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

این نتیجه به سادگی قابل حصول است زیرا اگر C را در مختصات قطبی بیان کنیم:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

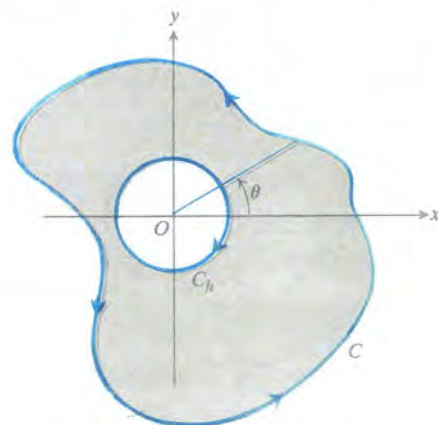
$$dx = -r \sin \theta \, d\theta + \cos \theta \, dr$$

$$dy = r \cos \theta \, d\theta + \sin \theta \, dr$$

داریم

$$\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \, d\theta}{r^2} = d\theta$$

که وقتی در خلاف جهت ساعت روی C یکبار پیش روییم θ به اندازه 2π افزایش می‌یابد (شکل ۲۹.۱۹ را ببینید).



۲۹.۱۹ ناحیه محدود به دایره C_h و خم C .

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۴، درستی قضیه گرین را با محاسبه طرفین روابط (۱۶) و (۱۷) به ازای میدان برداری $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ بیازمایید. دامنه انتگرالگیری را قرص $R: x^2 + y^2 \leq a^2$ و مرزش را دایره زیر بگیرد

$$C: \mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$F(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad ۰۱$$

$$F(x, y) = y\mathbf{i} \quad ۰۲$$

$$F(x, y) = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \quad ۰۳$$

$$F(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} \quad ۰۴$$

در مسائل ۵-۱۰، با استفاده از قضیه گرین، گردش در خلاف جهت ساعت و شار برونسوا را در مورد میدان $\mathbf{F}$ و خم C بیابید.

$$F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} \quad ۰۵$$

$$C: \text{مربع محدود به } x=1, x=0, y=0, y=1$$

$$F(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} \quad ۰۶$$

$$C: \text{مربع محدود به } x=1, x=0, y=0, y=1$$

$$F(x, y) = (xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j} \quad ۰۷$$

$$C: \text{مربع محدود به } x=1, x=0, y=0, y=1$$

$$F(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} \quad ۰۸$$

$$C: \text{مثلث محدود به } x=1, y=0, y=x$$

$$F(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} \quad ۰۹$$

$$C: \text{مثلث محدود به } x=1, y=0, y=x$$

$$F(x, y) = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j} \quad ۰۱۰$$

$$C: \text{مثلث محدود به } x=1, y=0, y=x$$

۰۱۱. مطلوب است گردش در خلاف جهت ساعت و شار برونسوی میدان $F(x, y) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ روی مرز ناحیه محدود به سهمی $y = x^2$ و خط $y = x$ واقع در ربع اول.

۰۱۲. مطلوب است گردش در خلاف جهت ساعت و شار برونسوی میدان $F(x, y) = (-\sin y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{j}$ روی مربعی که خطوط $x = \pi/2$ و $y = \pi/2$ از ربع اول جدا می کنند.

با استفاده از یکی از دو صورت قضیه گرین، انتگرالهای خمیده

خطی در مسائل ۱۳-۱۸ را محاسبه کنید.

$$\oint_C (y^2 dx + x^2 dy) \quad ۰۱۳$$

$$C \text{ مثلثی است محدود به } x=0, x+y=1, y=0$$

$$\oint_C (3y dx + 2x dy) \quad ۰۱۴$$

$$C \text{ عبارت است از مرز } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$$

$$\oint_C (6y + x) dx + (y + 2x) dy \quad ۰۱۵$$

$$C \text{ عبارت است از دایره } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$\oint_C (2x + y^2) dx + (2xy + 3y) dy \quad ۰۱۶$$

C عبارت است از یک خم بسته ساده دلخواه در صفحه ای که قضیه گرین در مورد آن برقرار است.

$$\oint_C 2xy^2 dx + 4x^2y^2 dy \quad ۰۱۷$$

C عبارت است از ناحیه «مثلثی شکل» واقع در ربع اول که به محور x ، خط $x=1$ ، و خم $y=x^3$ محدود است.

$$\oint_C (4x - 2y) dx + (2x - 4y) dy \quad ۰۱۸$$

$$C \text{ عبارت است از دایره } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

۰۱۹. فرض کنید C مرز ناحیه ای باشد که قضیه گرین در آن برقرار است. با استفاده از قضیه گرین انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\oint_C f(x) dx + g(y) dy \quad \text{الف}$$

$$\oint_C k y dx + h x dy \quad \text{ب (} h \text{ و } k \text{ ثابت اند)}$$

۰۲۰. نشان دهید به ازای هر خم بسته دلخواه C که قضیه گرین در مورد آن برقرار است داریم

$$\oint_C 4x^3y dx + x^4 dy = 0.$$

۰۲۱. نشان دهید به ازای هر خم بسته C که قضیه گرین در مورد آن برقرار است انتگرال زیر مثبت است

$$\oint_C -y^3 dx + x^3 dy.$$

۲۲۰ نشان دهید مقدار

می‌کنیم.

$$R \text{ مساحت} = \iint_R dy dx$$

$$= \iint_R \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\right) dy dx$$

$$= \oint_C \frac{1}{y} x dy - \frac{1}{y} y dx.$$

به کمک رابطه (۲۹) مساحت نواحی مذکور در مسائل ۲۷-۳۰ را بیابید.

۲۷ مساحت دایره

$$R(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۲۸ مساحت بیضی

$$R(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (b \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۲۹ مساحت محدود به درون چرخزاد

$$R(t) = (a \cos^3 t)\mathbf{i} + (a \sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(شکل ۳۵.۵ را ببینید.)

۳۰ مساحت محدود به خم

$$R(t) = t^2 \mathbf{i} + \left(\frac{t^3}{3} - t\right) \mathbf{j}, \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$$

(شکل ۳۶.۵ را ببینید.)



TOOLKIT PROGRAMS

Scalar Fields Vector Fields
These programs evaluate line integrals.

۴.۱۹ مساحت رویه و انتگرال رویه‌ای

می‌دانیم که از یک تابع روی ناحیه‌ای تحت واقع در صفحه چگونه انتگرال بگیریم، اما اگر تابع روی رویه‌ای خمیده تعریف شود چه؟ در این صورت چگونه می‌توان انتگرال تابع را حساب کرد؟ شگرت محاسبه این انتگرالها که انتگرالهای رویه‌ای نام دارند این است که آنها را به صورت یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ای واقع در یکی از صفحات مختصات که زیر رویه قرار دارد بنویسیم (شکل ۳۵.۱۹). از این راه، انتگرال رویه‌ای به نوعی انتگرال تبدیل می‌شود که روش محاسبه آن را می‌دانیم.

$$\oint_C xy^2 dx + (x^2y + 2x) dy$$

روی هر مربع دلخواهی تنها به مساحت مربع بستگی دارد و به مربع بستگی ندارد.

۲۳ قضیه گرین و معادله لاپلاس. فرض کنید همه مشتقات لازم وجود دارد و پیوسته است. نشان دهید اگر $f(x, y)$ در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند آنگاه برای هر خم بسته C که قضیه گرین در مورد آن برقرار باشد داریم

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

(عکس آن نیز صحیح است؛ اگر انتگرال خمیده خطی همواره برابر با صفر باشد، آنگاه f در معادله لاپلاس صدق می‌کند.)

۲۴ فرض کنید

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

از میان همه خمهای بسته ساده هموار واقع در صفحه، خمی را بیابید که کار انجام شده در امتداد آن در خلاف جهت ساعت بیشترین مقدار باشد. (دانهمایی: در کجا ناو $\mathbf{F}$ مثبت است؟)

۲۵ برای تکمیل اثبات حالت خاص قضیه گرین، رابطه (۲۱) را ثابت کنید.

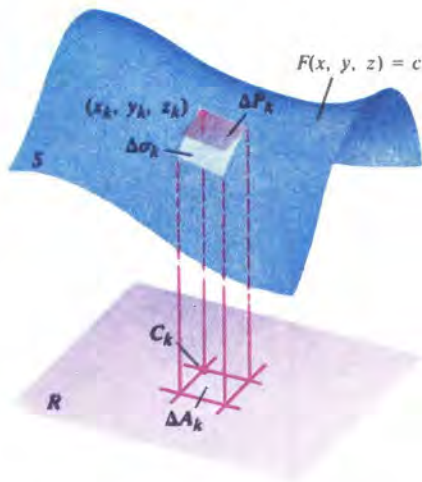
۲۶ برای تکمیل اثبات تعمیم قضیه گرین، رابطه (۲۴) را ثابت کنید.

نتیجه‌ای از قضیه گرین: تعیین مساحت یک ناحیه

اگر ناحیه R و مرز آن، خم بسته ساده C ، مفروضات قضیه گرین را برآورده سازند، مساحت R از فرمول زیر به دست می‌آید

$$R \text{ مساحت} = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx. \quad (29)$$

برای اثبات این رابطه از رابطه (۱۶) و در جهت عکس استفاده



۳۱.۱۹ رویه S و تصویر قائمش بر صفحه‌ای که زیر S است. R را می‌توان سایه S بر صفحه دانست. صفحه مماس ΔP_k بر قطعه $\Delta \sigma_k$ از رویه را که بالای ΔA_k است تقریب می‌زند.

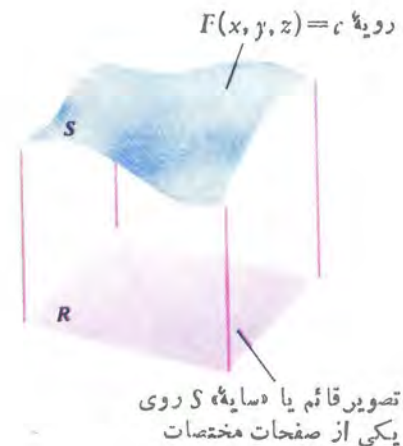
ناحیه R به مستطیلهای کوچک ΔA_k از همان نوع مستطیلهایی که اگر می‌خواستیم انتگرال را بر R تعریف کنیم از آنها استفاده می‌کردیم. درست در بالای هر یک از ΔA_k ها قطعه‌ای چون $\Delta \sigma_k$ از رویه واقع است که آن را می‌توان با قطعه ΔP_k از صفحه مماس تقریب زد. برای اینکه مطلب را دقیقتر بیان کنیم، فرض می‌کنیم ΔP_k قطعه‌ای از صفحه‌ای باشد که در نقطه (x_k, y_k, z_k) ، که درست بالای C_k یعنی گوشه عقبی ΔA_k است، بر رویه مماس باشد. اگر صفحه مماس موازی R باشد، آنگاه ΔP_k قابل انطباق بر ΔA_k است. در غیر این صورت متوازی الاضلاعی است که مساحتش از مساحت ΔA_k بزرگتر است.

شکل ۳۲.۱۹ تصویر بزرگ‌شده ΔP_k و $\Delta \sigma_k$ را نشان می‌دهد. در این شکل بردار گرادیان $\nabla F(x_k, y_k, z_k)$ و بردار واحد $\mathbf{p}$ که بر R قائم است دیده می‌شود. در این شکل، زاویه γ بین ∇F و $\mathbf{p}$ نیز مشخص شده است. بردارهای دیگر در این شکل عبارت‌اند از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ که در امتداد لبه‌های ΔP_k و در صفحه مماس واقع‌اند. بنا بر این هم $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ و هم ∇F بر صفحه مماس عمودند.

حال به مطلبی نیاز داریم که از بخش ۷.۱۳ تاکنون از آن استفاده نکرده‌ایم و آن مطلب این است که $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ مساحت تصویر متوازی الاضلاعی مشخص‌شونده با $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است بر هر صفحه‌ای که قائمش $\mathbf{p}$ باشد. این مطلب در حالت مورد بحث ما به این معنی است که

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \Delta A_k \cdot |\mathbf{p}| \quad (1)$$

اما $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ برابر مساحت ΔP_k است (با استفاده از مفهوم ضرب



۳۵.۱۹ به‌زودی می‌بینیم که انتگرال تابع $g(x, y, z)$ روی رویه S واقع در فضا را می‌توان با محاسبه یک انتگرال دوگانه مرتبط با آن روی تصویر قائم یا «سایه» S بر یکی از صفحات مختصات به‌دست آورد.

نخستین گام، یافتن فرمول انتگرال دوگانه برای محاسبه مساحت یک رویه خمیده است. سپس خواهیم دید که می‌توانیم از برخی از ایده‌هایی که ضمن کار به‌دست می‌آوریم دوباره بهره بگیریم و انتگرالهای رویه‌ای را تعریف و محاسبه کنیم. وقتی بر انتگرالهای رویه‌ای مسلط شدیم می‌توانیم شار یک میدان برداری سه‌بعدی گذرنده از یک رویه و جرم و گشتاور ورقه‌های نازک را محاسبه کنیم. در بخشهای ۵.۱۹ و ۶.۱۹ خواهیم دید که چگونه انتگرالهای رویه‌ای زمینه لازم را برای تعمیم هر دو صورت قضیه گرین به فضای سه‌بعدی فراهم می‌سازند. یکی از این تعمیمها به ما امکان می‌دهد که شار یک میدان برداری گذرنده از یک رویه بسته را به‌صورت یک انتگرال سه‌گانه روی ناحیه سه‌بعدی محصور به رویه بیان کنیم. تعمیم دیگر به ما امکان می‌دهد که گردش یک میدان برداری در امتداد یک خم بسته در فضا را به‌صورت یک انتگرال روی رویه محدود به خم بیان کنیم. این نتایج پیامدهای گسترده‌ای در ریاضیات و نظریه‌های الکترومغناطیس و جریان سیالات دارند.

مساحت رویه

شکل ۳۱.۱۹ قطعه S از رویه $F(x, y, z) = c$ را نشان می‌دهد که در بالای سایه‌اش، ناحیه R ، قرار دارد. ناحیه R در صفحه‌ای واقع است که درست زیر رویه F است. اگر F و مشتقهای جزئی اولش پیوسته باشند، مساحت S را می‌توان به‌صورت یک انتگرال دوگانه روی R تعریف و محاسبه کرد. یافتن انتگرال مدتی به‌درازا می‌کشد اما محاسبه‌اش آسان است.

نخستین گام در تعریف مساحت S ، عبارت است از تقسیم

بنامیم. همچنین به نظر می‌رسد که اگر تقسیمات R را افزایش دهیم این تقریب بهتر می‌شود. در واقع مجموعه‌های طرف راست رابطه (۳) تقریبهایی هستند از انتگرال دوگانه

$$\iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|} dA. \quad (4)$$

بنا بر این مساحت S را به صورت مقدار این انتگرال تعریف می‌کنیم مشروط به اینکه این انتگرال وجود داشته باشد.

در مورد رویه خاصی چون $F(x, y, z) = c$ داریم

$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F| |\mathbf{p}| \cos \gamma = |\nabla F| |\cos \gamma|$$

و

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}.$$

اگر این رابطه را با رابطه (۴) در آمیزیم فرمولی عملی برای محاسبه مساحت رویه بالای ناحیه R به دست می‌آید.

$$\text{مساحت رویه} = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA. \quad (5)$$

بنا بر این مساحت رویه $F(x, y, z) = c$ واقع در بالای ناحیه مسطحی چون R برابر است با انتگرال دوگانه‌ای روی R که انتگرالده آن عبارت است از خارج قسمت اندازه گرادینان F بر مؤلفه عددی گرادینان قائم بر R .

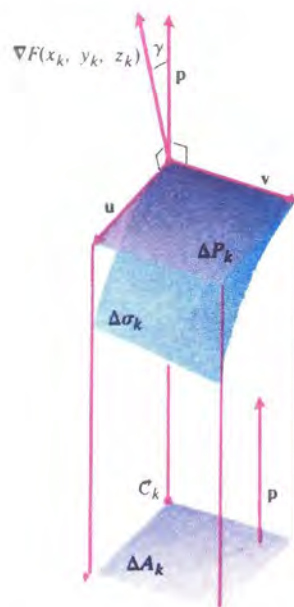
رابطه (۵) با این مفروضات به دست آمده که $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$ و F و مشتقهای جزئی اولش بر R پیوسته اند (پس ∇F بر R تعریف می‌شود و بر R پیوسته است)، اما هرگاه انتگرال وجود داشته باشد می‌توان مقدارش را به صورت مساحت رویه‌ای که در بالای R قرار دارد تعریف کرد.

مساحت رویه به صورتی که در رابطه (۵) تعریف شد، با تعاریف قبلی مساحت رویه سازگار است. این مطلب را در اینجا ثابت نمی‌کنیم؛ با وجود این، مسأله ۱۲ را ببینید.

مثال ۱ مطلوب است مساحت قسمت پایینی سهمیوار $z = 0 - x^2 - y^2$ که به صفحه $z = 1$ محدود است.

حل: رویه و ناحیه زیر آن در صفحه xy را رسم می‌کنیم (شکل ۳۳.۱۹).
رویه S بخشی از رویه تراز

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$$



۳۲.۱۹ تصویر بزرگ شده‌ای از شکل ۳۱.۱۹. بردار $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ که در این شکل نشان داده نشده است با ∇F موازی است زیرا هر دو بردار بر ΔP_k عمودند.

برداری)، بنا بر این رابطه (۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| |\mathbf{p}| |\cos(\mathbf{p} \text{ و } \mathbf{u} \times \mathbf{v})| = \Delta A_k \quad (2)$$

همان $|\cos \gamma|$ است زیرا ∇F و $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ هر دو بر صفحه مماس عمودند.

یا

$$\Delta P_k |\cos \gamma| = \Delta A_k$$

یا در صورتی که $\cos \gamma \neq 0$

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma|}.$$

مادام که ∇F موازی R نباشد یعنی مادام که $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$ داریم $\cos \gamma \neq 0$.

چون قطعات ΔP_k تقریبهایی هستند از قطعات $\Delta \sigma_k$ که با هم S را می‌سازند، به نظر می‌رسد مجموع

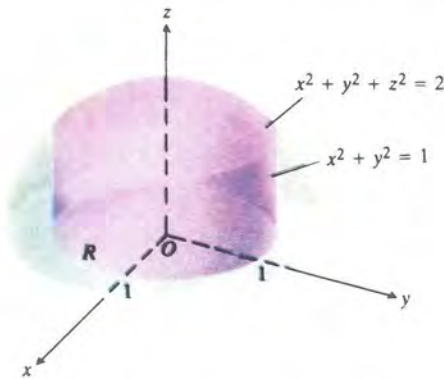
$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma|} \quad (3)$$

تقریبی باشد از آن چیزی که ما می‌خواهیم آن را مساحت رویه S

مثال ۲ مطلوب است مساحت عرقچینی از نیمکره

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad z \geq 0$$

که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از نیمکره جدا می کند (شکل ۳۴.۱۹).



۳۴.۱۹ تصویر قائم عرقچینی که استوانه از نیمکره جدا می کند، قرص $R: x^2 + y^2 \leq 1$ است.

حل: عرقچین بخشی است از رویه

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

تصویر آن در صفحه xy عبارت است از قرص $R: x^2 + y^2 \leq 1$. بردار $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ بر صفحه R قائم است. در هر نقطه واقع بر رویه داریم

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$|\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$$

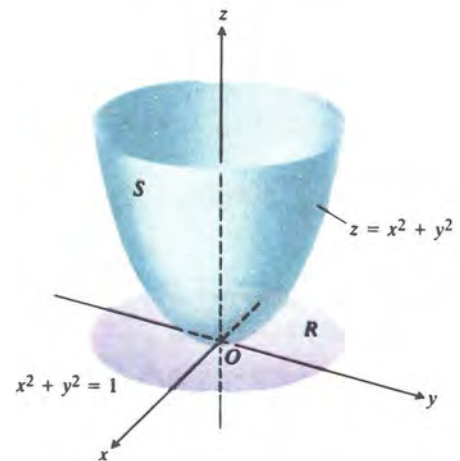
$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{مساحت رویه} &= \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \\ &= \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z}. \end{aligned} \quad (6)$$

با z چه بکنیم؟

چون z مختص z نقطه ای واقع بر کره است، می توان آن را



۳۳.۱۹ مساحت رویه سهمی که در این شکل دیده می شود در مثال ۱ محاسبه می شود.

و ناحیه R زیر آن، قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ است. برای به دست آوردن بردار واحدی قائم بر صفحه R می توانیم فرض کنیم $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

در هر نقطه (x, y, z) دلخواه از رویه داریم

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} |\nabla F| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \end{aligned}$$

و

$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1.$$

بنابراین مساحت رویه برابر است با

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \quad (\text{مختصات قطبی}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

■

باقی می ماند و ΔP_k هم تقریباً برابر $\Delta \sigma_k$ می شود. بنا بر این کل بار روی S را می توان با مجموع زیر تقریب زد

$$\begin{aligned} &\approx \sum g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k \\ &\approx \sum g(x_k, y_k, z_k) \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma|} \end{aligned} \quad (۷)$$

اگر F یعنی تابع تعریف کننده رویه S و مشتقات جزئی اولش پیوسته باشند، و اگر g بر S پیوسته باشد، و اگر عمل تقسیم R به مستطیلهای ظریفتر شود، آنگاه طرف راست رابطه (۷) به حد زیر میل می کند

$$\begin{aligned} &\int \int_R g(x, y, z) \frac{dA}{|\cos \gamma|} \\ &= \int \int_R g(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \end{aligned} \quad (۸)$$

این حد را انتگرال g روی رویه S می نامیم. این انتگرال را به صورت یک انتگرال دوگانه روی R محاسبه می کنیم. مقدار انتگرال، کل بار روی رویه S را به دست می دهد.

چنانکه انتظار می رود، فرمول (۸) انتگرال هر تابع دلخواه g را روی رویه S تعریف می کند البته به شرطی که این انتگرال وجود داشته باشد. مقدار این انتگرال در کار بردهای مختلف معانی مختلفی دارد. اگر g تابعی ثابت با مقدار ۱ باشد، این انتگرال مساحت رویه را به دست می دهد. اگر $g(x, y, z)$ چگالی جرم ورقه نازکی باشد که رویه S مدلی از آن است، این انتگرال جرم ورقه را به دست می دهد.

معمولاً انتگرال موجود در رابطه (۸) را به صورت ساده زیر می نویسیم

$$\int \int_R g(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA = \int \int_S g d\sigma \quad (۹)$$

که در آن $d\sigma$ عبارت است از دیفرانسیل مساحت رویه:

$$d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{dA}{|\cos \gamma|} \quad (۱۰)$$

انتگرالهای رویه ای همه ویژگیهای جبری معمولی انتگرالهای دوگانه را دارند. مثلاً انتگرال مجموع دو تابع برابر است با مجموع انتگرالهای آن دو تابع و به همین نحو، دیگر ویژگیها نیز برقرار است.

بر حسب x و y چنین بیان کرد

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$

در رابطه (۶) این جانشانی را انجام می دهیم و کار را دنبال می کنیم

$$\begin{aligned} \text{مساحت رویه} &= \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} \\ &= \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \quad (\text{مختصات قطبی}) \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[-(\sqrt{2-r^2})^{1/2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}-1) d\theta \\ &= 2\pi(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

انتگرالهای رویه ای

اکنون با استفاده از ایده هایی که در مورد محاسبه مساحت رویه به کار بردیم نشان خواهیم داد چگونه از یک تابع روی یک رویه انتگرال بگیریم.

فرض کنید مثلاً باری الکتریکی بر رویه $F(x, y, z) = c$ ، نظیر رویه ای که در شکل ۳۱.۱۹ دیده می شود، توزیع شده باشد و تابع $g(x, y, z)$ بار بر واحد سطح (چگالی بار) در نقاط روی S را مشخص کند. کل بار روی S را می توان بدروش زیر بدست آورد. یک انتگرال به دست آورد.

ناحیه R یعنی سایه رویه را که درست زیر آن واقع است به مستطیلهای کوچکی تقسیم می کنیم، از آن نوع مستطیلهایی که اگر می خواستیم مساحت رویه S را تعریف کنیم از آنها استفاده می کردیم. در این صورت درست در بالای هر ΔA_k یک قطعه از رویه، $\Delta \sigma_k$ ، قرار دارد که ما آن را با قطعه ای از صفحه مماس، ΔP_k ، که به شکل متوازی الاضلاع است، تقریب می زنیم.

تا اینجا هر چه کرده ایم نظیر کاری است که در تعریف مساحت رویه انجام دادیم، اما اکنون قدم دیگری برمی داریم: g را در (x_k, y_k, z_k) محاسبه می کنیم و کل بار روی قطعه $\Delta \sigma_k$ از رویه را با حاصلضرب زیر تقریب می زنیم

$$g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k.$$

وقتی تقسیم بندی ظریفتر شود، مقدار g در سراسر $\Delta \sigma_k$ تقریباً ثابت

وجه A ، رویه $F(x, y, z) = z = 1$ روی ناحیه مربعی R_{xy} (که در آن $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) از صفحه xy است. در مورد این رویه و ناحیه داریم

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \quad \nabla F = \mathbf{k}, \quad |\nabla F| = 1, \quad |\nabla F \cdot \mathbf{p}| = 1$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dx dy, \quad xyz = xy(1) = xy$$

و

$$\begin{aligned} \iint_{\text{وجه } A} xyz \, d\sigma &= \iint_{R_{xy}} xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy \\ &= \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین، انتگرالهای xyz روی B و C نیز برابر با $1/4$ اند.

$$\blacksquare \quad \iint_{\text{مکعب}} xyz \, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

انتگرال رویه‌ای برای تعیین شار

اگر بتوان یک بردار قائم واحد چون $\mathbf{n}$ روی رویه S چنان برگزید که وقتی ابتدای $\mathbf{n}$ به اطراف حرکت می‌کند $\mathbf{n}$ به طور پیوسته تغییر کند، آنگاه رویه را جهت‌پذیر یا دو طرفه می‌نامیم. کره و سایر رویه‌های بسته واقع در فضا (رویه اجسام) جهت‌پذیرند و بنا به قرارداد $\mathbf{n}$ را روی رویه بسته در جهت روبه بیرون اختیار می‌کنیم. به محض انتخاب $\mathbf{n}$ ، رویه را جهت‌دار می‌نامیم. جهت $\mathbf{n}$ در هر نقطه را جهت مثبت می‌نامیم. هر قطعه‌ای از یک رویه جهت‌پذیر خود جهت‌پذیر است. نوار مویوس که در شکل ۵۵.۱۹ در بخش ۶.۱۹ دیده می‌شود یکطرفه یا جهت‌ناپذیر است.

اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری پیوسته روی رویه S باشد، انتگرال $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ ، یعنی مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت $\mathbf{n}$ ، روی S را شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S در جهت مثبت می‌نامیم.

تعریف

شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S در جهت $\mathbf{n}$ برابر است با

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (11)$$

این تعریف، تعمیم مستقیمی است از تعریفی که در بخش ۲.۱۹ در مورد شار یک میدان برداری دوبعدی $\mathbf{F}$ گذرنده از خم C واقع

ویژگی جمع‌پذیری دامنه‌ها به صورت زیر است

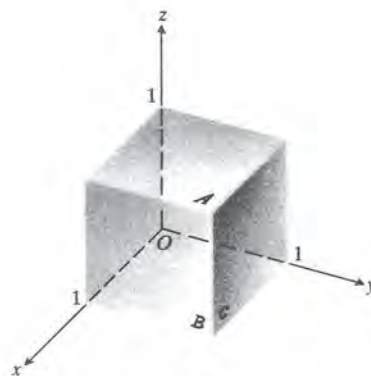
$$\begin{aligned} \iint_S g \, d\sigma &= \iint_{S_1} g \, d\sigma + \iint_{S_2} g \, d\sigma + \dots \\ &+ \iint_{S_n} g \, d\sigma. \end{aligned}$$

منظور از این ویژگی این است که اگر S به وسیله خمهایی هموار و تعدادی پاره خط به تعدادی متناهی قطعه هموار نامتناهی افزای شود، آنگاه انتگرال تابع g بر S برابر است با مجموع انتگرالها بر این قطعات. بنابراین انتگرال یک تابع روی رویه یک مکعب برابر است با مجموع انتگرالها روی وجوه این مکعب. در روی یک «پوسته لاک‌پشتی» متشکل از چند ورقه جوش خورده بر یک یک ورقه‌ها انتگرال می‌گیریم و نتایج را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۳ از $g(x, y, z) = xyz$ روی مکعبی که صفحات $x=1$ ، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند انتگرال بگیریم.

حل: مکعب در شکل ۳۵.۱۹ دیده می‌شود. از xyz روی همه وجوه انتگرال می‌گیریم و نتایج را با هم جمع می‌کنیم. چون روی وجوهی که بر صفحات مختصات منطبق‌اند داریم $xyz=0$ ، انتگرال xyz روی هر یک از این وجوه برابر با ۰ است و انتگرال روی مکعب به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \iint_{\text{مکعب}} xyz \, d\sigma &= \iint_{\text{وجه } A} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{وجه } B} xyz \, d\sigma \\ &+ \iint_{\text{وجه } C} xyz \, d\sigma. \end{aligned}$$



۳۵.۱۹ برای انتگرال گرفتن از یک تابع روی رویه یک مکعب، روی هر یک از وجوه مکعب انتگرال می‌گیریم و نتایج را با هم جمع می‌کنیم.

بريك صفحه ارائه شده بود. در اين صفحه شار عبارت است از

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

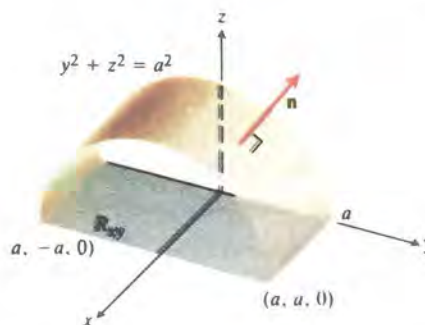
که برابر است با انتگرال مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت قائم بر خم. در فضا، شار يك میدان سه بعدی $\mathbf{F}$ گذرنده از يك رويه برابر است با انتگرال مؤلفه عددی $\mathbf{F}$ در جهت قائم بر رويه.

اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت شارش يك سیال در سه بعد باشد، آنگاه شار برابر است با آهنگ خالص گذر سیال از S در جهت مثبت. درباره شارش سیالات در حالت سه بعدی در بخش ۶.۱۹ مفصلتر بحث می کنیم.

اگر S بخشی از يك رويه تراز $G(x, y, z) = c$ باشد، آنگاه $\mathbf{n}$ را می توان یکی از دو بردار زیر، بسته به اینکه کدام يك از آنها جهت مطلوب را به دست دهد، اختیار کرد

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla G}{|\nabla G|} \quad \text{یا} \quad \mathbf{n} = +\frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

مثال ۴ رويه S عبارت است از رويه ای که صفحات $x=0$ و $x=a$ از استوانه $y^2+z^2=a^2$ ، $z \geq 0$ جدا می کنند (شکل ۳۶.۱۹). مطلوب است شار برونسوی $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ گذرنده از رويه S .



۳۶.۱۹ در مثال ۴ شار يك میدان برداری که از این رويه در جهت روبه بیرون عبور می کند محاسبه می شود. مساحت ناحیه سایه دار R_{xy} برابر است با $2a^2$.

حل: بردار قائم واحد برونسوی S را می توان از گرادیان $G(x, y, z) = y^2 + z^2$ چنین محاسبه کرد

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= +\frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} \\ &= \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2a} = \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

همچنین داریم

$$d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{2}{|2z|} dA = \frac{a}{z} dA$$

که در آن چون بر S همواره $z \geq 0$ ، علامتهای قدرمطلق را حذف کرده ایم.

مقدار $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ بر رويه S از فرمول زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}\right) \\ &= \frac{y^2z + z^3}{a} = \frac{z}{a}(y^2 + z^2) \\ &= \frac{z}{a}(a^2) \quad (y^2 + z^2 = a^2, S \text{ بر}) \\ &= az. \end{aligned}$$

بنابراین شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از S برابر است با

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_S (az) \frac{a}{z} dA = \iint_{R_{xy}} a^2 dx dy \\ &= a^2 \cdot (R_{xy}) = 2a^2. \end{aligned}$$

جرم و گشتاور

در مهندسی و فیزیک از رويهها برای کاسهها، بشکههای فلزی، و گنبدهایی که از ورقههای نازک ساخته می شوند مدل می سازند. جرم و گشتاور این اجسام با استفاده از انتگرالهای رويه ای و به کمک فرمولهای موجود در جدول ۲.۱۹ محاسبه می شوند.

مثال ۵ مرکز جرم يك پوسته نازک نیمکره ای به شعاع a و چگالی ثابت δ را بیابید.

حل: مدل این پوسته نیمکره زیر است

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

شکل ۳۷.۱۹ را ببینید. بنا بر این مرکز جرم بر محور z واقع است. از این رو $\bar{x} = \bar{y} = 0$. پس تنها باید $\bar{z}$ را از فرمول M_{xy}/M بیابیم. جرم پوسته عبارت است از

$$M = \iint_S \delta d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = 2\pi a^2 \delta$$

که برابر است با حاصلضرب مساحت رويه در چگالی.

برای محاسبه انتگرال مربوط به M_{xy} قرار می‌دهیم

$$|\nabla F| = |2xi + 2yj + 2zk| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ = 2a$$

$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{a}{z} dA.$$

از اینجا داریم

$$M_{xy} = \int_S \int z \delta d\sigma = \delta \int_R \int z \frac{a}{z} dA \\ = \delta a \int_R dA = \delta a (\pi a^2) = \pi a^3 \delta.$$

بنابراین مختص δ مرکز جرم برابر است با

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

و مرکز جرم عبارت است از نقطه $(0, 0, a/2)$.

مسئله‌ها

مساحت رویه

۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که صفحه $z=2$ از سهمیوار $z = x^2 + y^2 - 2$ جدا می‌کند.

۲. مطلوب است مساحت نواری که صفحات $z=2$ و $z=6$ از سهمیوار $z = x^2 + y^2 - 2$ جدا می‌کنند.

۳. رویه جانبی استوانه‌ای از دو قسمت به معادلات $x=y^2$ و $x=2-y^2$ تشکیل شده است. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که این استوانه از صفحه $x+2y+2z=5$ جدا می‌کند.

۴. مطلوب است مساحت آن بخش از رویه $x^2 - 2z = 0$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x=\sqrt{3}$ ، $y=0$ و $y=x$ قرار دارد.

۵. مطلوب است مساحت بخشی از رویه $x^2 - 2y - 2z = 0$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x=2$ ، $y=0$ و $y=3x$ قرار دارد.

۶. مطلوب است مساحت بخشی از رویه

$$x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$$

که بالای مربع $0 \leq y \leq 1$ ، $1 \leq x \leq 2$ واقع در صفحه xy قرار دارد.

جدول ۲۰۱۹ فرمولهای جرم و گشتاور پوسته‌های بسیار نازک

جرم:

$$M = \int_S \int \delta(x, y, z) d\sigma$$

(چگالی در $(x, y, z) = \delta(x, y, z)$)

گشتاورهای اول حول صفحات مختصات:

$$M_{yz} = \int_S \int x \delta d\sigma, \quad M_{xz} = \int_S \int y \delta d\sigma$$

$$M_{xy} = \int_S \int z \delta d\sigma$$

مختصات مرکز جرم:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

گشتاورهای لختی:

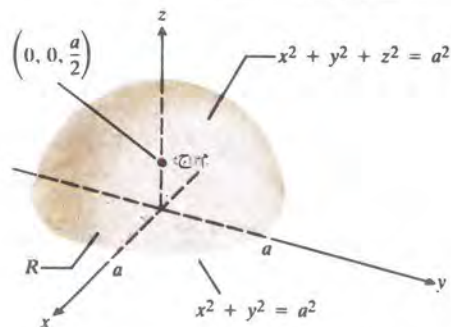
$$I_x = \int_S \int (y^2 + z^2) \delta d\sigma, \quad I_y = \int_S \int (x^2 + z^2) \delta d\sigma$$

$$I_z = \int_S \int (x^2 + y^2) \delta d\sigma, \quad I_L = \int_S \int r^2 \delta d\sigma$$

فاصله نقطه (x, y, z) از خط $r(x, y, z) = L$

شعاع چرخش حول خط L :

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$



۳۷۰۱۹ در مثال ۵ مختصات مرکز جرم این پوسته نازک نیمکره‌ای حساب می‌شود.

۰۷. مطلوب است مساحت عرقچینی که صفحه $z = \sqrt{2}/2$ از بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ جدا می‌کند.

۰۸. مطلوب است مساحت عرقچینی که مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ جدا می‌کند.

۰۹. مطلوب است مساحت بیضی که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از صفحه $z = cx$ جدا می‌کند.

۰۱۰. مطلوب است مساحت بخشی از استوانه $x^2 + z^2 = 1$ که بین صفحات $x = \pm 1/2$ و $y = \pm 1/2$ قرار دارد.

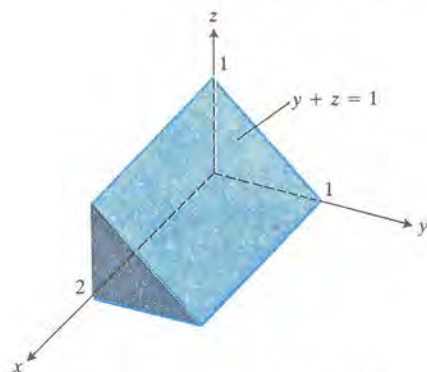
۰۱۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که صفحه $y = 0$ از سهمیوار $x^2 + y + z^2 = 1$ جدا می‌کند. (داهنمایی: رویه را بر صفحه xz تصویر کنید.)

۰۱۲. هر وقت به جای یک تعریف قدیمی از یک تعریف جدید استفاده می‌کنیم خوب است تعریف جدید را در مورد اشیاء آشنا به کار بندیم و ببینیم آیا این تعریف همان جوابی را که انتظار داریم به دست می‌دهد یا خیر. مثلاً آیا باز هم مساحت رویه یک استوانه مستدیر با شعاع قاعده r و ارتفاع h همان $2\pi rh$ است؟ این مطلب را با استفاده از رابطه (۵) و ضابطه $p = k$ در مورد مساحت رویه‌ای که صفحات $x = 0$ و $x = h > 0$ از استوانه $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ جدا می‌کنند معلوم کنید. (مساحت قسمت بالای صفحه xy را بیابید و آن را دو برابر کنید.)

انتگرالهای رویه‌ای

۰۱۳. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x + y + z$ بر رویه مکعبی که صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ و $z = 1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

۰۱۴. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = y + z$ بر رویه گوه‌ای که در شکل ۳۸.۱۹ دیده می‌شود.



۳۸.۱۹ گوه مورد بحث در مسئله ۱۴.

۰۱۵. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = xyz$ بر رویه مکعب مستطیلی که صفحات $x = a$ ، $y = b$ و $z = c$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

۰۱۶. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = xyz$ بر رویه مکعب مستطیلی که بد صفحات $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ و $z = \pm c$ محدود است. (داهنمایی: اگر روی دو وجه روبرو انتگرال بگیرید خواهید دید چه باید بکنید.)

۰۱۷. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x + y + z$ بر بخشی از صفحه $2x + 2y + z = 2$ که در یک هشتم اول واقع است.

۰۱۸. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = yz$ بر بخشی از صفحه $x + y + z = 1$ که در یک هشتم اول واقع است.

۰۱۹. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ بر رویه‌ای که صفحات $x = 0$ و $x = h$ از استوانه $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ جدا می‌کنند. h را بزرگتر از ۰ اختیار کنید.

۰۲۰. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ بر نیمکره $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

شارگذرنده از یک رویه

در مسائل ۲۱-۲۶، مطلوب است شار میدان برداری F گذرنده از بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ واقع در یک هشتم اول و در جهتی که از مبدأ دور می‌شود.

$$F(x, y, z) = zk \quad ۰۲۱$$

$$F(x, y, z) = -yi + xj \quad ۰۲۲$$

$$F(x, y, z) = yi - xj + k \quad ۰۲۳$$

$$F(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad ۰۲۴$$

$$F(x, y, z) = xi + yj + zk \quad ۰۲۵$$

$$F(x, y, z) = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad ۰۲۶$$

۰۲۷. مطلوب است شار بالاسوی میدان

$$F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$$

گذرنده از رویه‌ای که صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ و $z = 0$ از استوانه سهمی $z = 4 - y^2$ جدا می‌کنند.

۲۸. مطلوب است شار برونسوی میدان

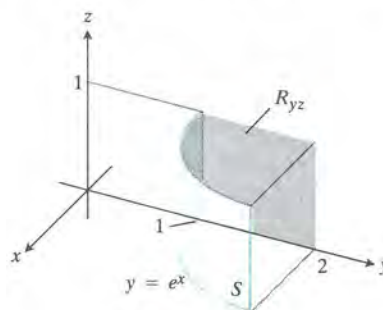
$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

گذرنده از رویه‌ای که صفحه $z = 1$ از پایین سهمیوار $z = x^2 + y^2$ جدا می‌کند.

۲۹. فرض کنید S آن بخش از استوانه $y = e^x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائمش بر صفحه yz ، مستطیل

$$R_{yz}: 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$$

باشد (شکل ۳۹.۱۹). نیز فرض کنید $\mathbf{n}$ آن بردار قائم بر S باشد که متوجه بیرون صفحه yz است. مطلوب است شار میدان $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از S و در جهت $\mathbf{n}$.



۳۹.۱۹. رویه و ناحیه مورد بحث در مسأله ۲۹.

۳۰. فرض کنید S آن بخش از استوانه $y = \ln x$ واقع در یک هشتم اول باشد که تصویر قائمش بر صفحه xz مستطیل $R_{xz}: 1 \leq x \leq e, 0 \leq z \leq 1$ است. نیز فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار واحدی باشد که بر S عمود و متوجه بیرون صفحه xz است. مطلوب است شار $\mathbf{F} = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از S و در جهت $\mathbf{n}$.

۳۱. صفحه $z = 3$ کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ را قطع می‌کند؛ بخش کوچکت‌ر حاصل، جسمی است محدود به یک رویه بسته S متشکل از عرقچین S_1 و قرص تخت S_2 . اگر $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ در هر یک از انتگرالهای سمت راست رابطه زیر، قائمی باشد که متوجه بیرون رویه است مطلوب است

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

۳۲. مطلوب است شار برونسوی میدان

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

از میان رویه مکعبی که صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ و $z = 1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

جرم و گشتاور

۳۳. مطلوب است مرکز جرم بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ که چگالی آن ثابت و در یک هشتم اول واقع است.

۳۴. مطلوب است مرکز جرم رویه‌ای که صفحات $x = a$ و $x = 0$ از نیمه بالایی استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ که چگالش ثابت است، جدا می‌کنند. (این رویه همان رویه مثال ۴ است.)

۳۵. صفحات $z = 1$ و $z = 2$ از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ پوسته نازکی با چگالی ثابت جدا می‌کنند. مطلوب است مرکز جرم، گشتاور لختی، و شعاع چرخش این پوسته حول محور z .

۳۶. استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ پوسته نازکی با چگالی ثابت ۱ جدا می‌کند. مطلوب است گشتاور لختی این پوسته حول محور z . (دانه‌نمایی: معادله استوانه در مختصات استوانه‌ای عبارت است از $r = 2 \cos \theta$.)

۳۷. جرم یک پوسته کروی نازک به شعاع a را در هر یک از حالات زیر بیابید.

- الف) چگالی در هر نقطه برابر باشد با فاصله آن نقطه تا قطر ثابتی از کره.
- ب) چگالی در هر نقطه برابر باشد با مربع فاصله آن نقطه تا قطر ثابتی از کره.

۳۸. صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ و $z = 1$ مکعبی از یک هشتم اول جدا می‌کنند. اگر چگالی ثابت باشد، مطلوب است گشتاور لختی رویه این مکعب حول محور z .

۵.۱۹ قضیه دیورژانی

چنانکه در بخش ۳.۱۹ آموختیم صورت دیورژانی قضیه گرین در صفحه حاکی است که شار خالص برونسوی یک میدان برداری گذرنده از یک خم بسته ساده واقع در صفحه را می‌توان با انتگرال گرفتن از دیورژانس میدان روی ناحیه محصور در خم محاسبه کرد. قضیه نظیر این قضیه در حالت سه بعدی، قضیه دیورژانس نام دارد و حاکی است که شار خالص برونسوی یک میدان برداری گذرنده از یک رویه بسته واقع در فضا را می‌توان با انتگرال گرفتن از دیورژانس میدان روی ناحیه محصور در رویه محاسبه کرد. در این بخش قضیه دیورژانس را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم این قضیه محاسبه شار را ساده می‌کند. همچنین معادله پیوستگی هیدرودینامیک (معادله‌ای در مورد بقاء جرم در شارش سیالات با چگالیهای متغیر) و قانون گاوس در مورد شار در یک میدان الکتریکی را به دست می‌آوریم. صورت گسردشی قضیه گرین در سه بعد، در بخش بعد بررسی می‌شود.

دیورژانس و نماد دل

دیورژانس میدانی برداری چون

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

تابع عددی زیر است

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (۱)$$

نماد « $\operatorname{div} \mathbf{F}$ » را به صورت «دیورژانس $\mathbf{F}$ » می خوانند. تعبیر فیزیکی آن مانند تعبیر فیزیکی دیورژانس یک میدان برداری دو بعدی است. اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت شارش یک سیال باشد، مقدار $\operatorname{div} \mathbf{F}$ در (x, y, z) برابر است با آهنگ ورود یا خروج سیال در (x, y, z) . دیورژانس برابر است با شار در واحد حجم یا چگالی شار در آن نقطه. درباره این مطلب در انتهای این بخش بیشتر بحث می کنیم.

دیورژانس یک میدان برداری سه بعدی چون $\mathbf{F}$ را معمولاً بر حسب عملگر نمادین ∇ (دل) بیان می کنیم. دل را با معادله زیر تعریف می کنیم

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (۲)$$

این عملگر را می توان در مورد هر میدان برداری مشتق پذیری چون $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ به کار برد و دیورژانس $\mathbf{F}$ را به صورت حاصلضرب نقطه ای نمادین زیر به دست آورد

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (۳)$$

نماد $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را به صورت «دل نقطه $\mathbf{F}$ » می خوانند. وقتی عملگر دل را در مورد تابع عددی مشتق پذیر $f(x, y, z)$ به کار ببریم گرادیان f که مفهومی آشناست به دست می آید

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (۴)$$

در این حالت می توانیم ∇f را هم $\operatorname{grad} f$ و هم $\operatorname{del} f$ بخوانیم. چون داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \quad (۵)$$

معادله لاپلاس، از بخش ۸.۱۶، یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

قضیه دیورژانس

میخائیل واسیلیویچ اوستروگرادسکی (۱۸۵۱-۱۸۶۲) نخستین ریاضیدانی بود که برهانی برای قضیه دیورژانس منتشر کرد. وی به خاطر لامذهبی و عدم توجه به دروس فلسفه و الهیات از دریافت مدرک دانشگاه خارکوف در ۱۸۲۵ محروم شد و در ۱۸۲۲ روسیه را به قصد پاریس ترک گفت و در آنجا با لاپلاس، ژاندر، فوریه، بواسن، و کوشی مراوده برقرار کرد. وی در اواسط دهه ۱۸۲۵ ضمن تحقیق در نظریه گرما، قضیه دیورژانس را به صورت ابزاری برای تبدیل انتگرالهای حجمی به انتگرالهای رویه ای فرمول بندی کرد.

کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) این قضیه را ضمن کار در زمینه نظریه گرانش در یادداشت های اثبات کرده بود (اما این یادداشتها تا سالها بعد چاپ نشد)، و از همین روست که گاه این قضیه را به عنوان قضیه گاوس می شناسند. فهرست آثار گاوس در علوم و ریاضیات حقیقتاً اعجاب برانگیز است. اختراع تلگراف برقی (بسا همکاری ویلهلم وبر در ۱۸۳۳)، پردازش نظریه ای فوق العاده دقیق در مورد مدار سیارات، و پرداختن به هندسه نا اقلیدسی که بعدها مبنای نظریه نسبیت عام اینشتین شد، گستردگی کار او را نشان می دهد.

است که ناحیه D را محصور می‌کند. همچنین فرض می‌کنیم D ناحیه‌ای محدب و بدون حفره و حباب مثل کره، مکعب، یا بیضیوار است و نیز S یک رویه قطعه‌قطعه هموار است. باز هم فرض می‌کنیم تصویر D بر صفحه xy یک ناحیه ساده-همبند چون R_{xy} است و هر خط عمود بر صفحه xy در نقطه‌ای در درون R_{xy} رویه S را دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند و به این ترتیب دو رویه S_1 و S_2 به وجود می‌آید

$$S_1: z = f_1(x, y), \quad R_{xy} \text{ در } (x, y)$$

$$S_2: z = f_2(x, y), \quad R_{xy} \text{ در } (x, y)$$

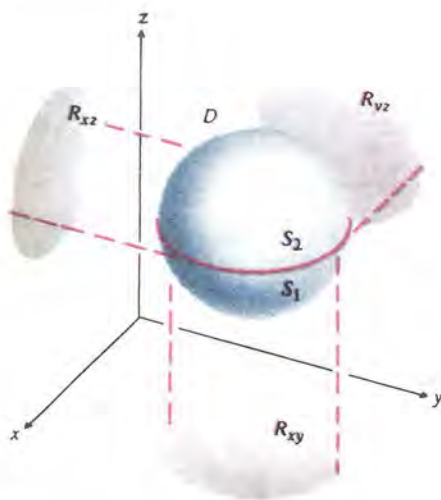
با این شرط که $z_1 \leq z_2$. مفروضات مشابهی در مورد تصویر D بر دیگر صفحات مختصات نیز در نظر می‌گیریم. شکل ۴۰.۱۹ را ببینید.

مؤلفه‌های بردار واحد قائم $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ عبارت‌اند از کسینوس زوایای α ، β ، و γ که $\mathbf{n}$ با $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ می‌سازد (شکل ۴۰.۱۹). درستی این مطلب از آن جهت است که همه بردارهایی که با آنها سروکار داریم بردارهای واحدند. داریم

$$n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}| |\mathbf{i}| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}| |\mathbf{j}| \cos \beta = \cos \beta \quad (10)$$

$$n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}| |\mathbf{k}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$



۴۰.۱۹ برای اثبات قضیه دیورژانس نخست آن را در مورد ناحیه‌ای سه بعدی نظیر ناحیه‌ای که در این شکل دیده می‌شود اثبات می‌کنیم. سپس اثبات این قضیه را به نواحی دیگر تعمیم می‌دهیم.

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla^2 f = 0 \quad (6)$$

اگر میدان برداری دوبعدی

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

را میدانی سه بعدی بدانیم که مؤلفه $\mathbf{k}$ آن برابر صفر است، آنگاه

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{F}$$

و صورت قسائم قضیه گرین در مورد میدانهای دوبعدی (در باره شار و دیورژانس، رابطه ۲۷ بخش ۳.۱۹ را ببینید) به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA. \quad (7)$$

صورت مماسی قضیه گرین در مورد میدانهای دوبعدی را هم می‌توان، چنانکه در بخش ۶.۱۹ خواهید دید، به صورت برداری بر حسب نماد دل بیان کرد.

چنانکه این روابط نشان می‌دهند، نماد دل روش آسانی برای بیان کردن و به خاطر سپردن برخی از روابط مهم در ریاضیات، مهندسی، و فیزیک به دست می‌دهد. ضمن مطالعه بقیه این فصل این مطلب روش‌تر می‌شود.

قضیه دیورژانس (نواحی خاص)

قضیه دیورژانس با استفاده از نمادها حاکی است که

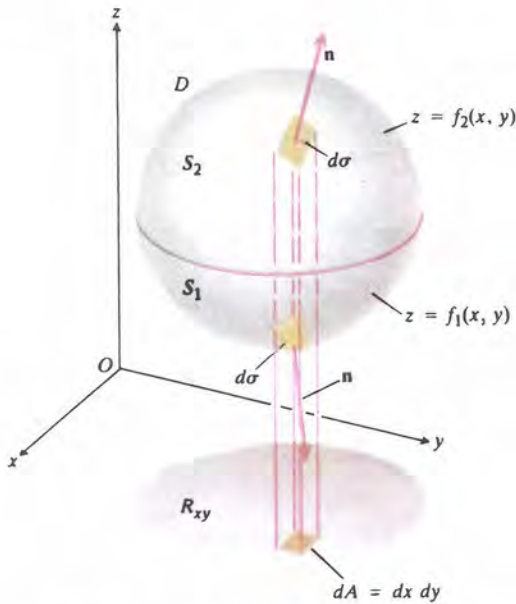
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} dV \quad (8)$$

یا بر حسب نماد دل

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (9)$$

چنانکه ملاحظه می‌کنید، رابطه (۹) شبیه رابطه (۷) است که صورت شاری-دیورژانسی قضیه گرین در مورد میدانهای دوبعدی را به دست می‌دهد. تنها تفاوت این دو رابطه در این است که رابطه (۹) به جای دوبعد در مورد سه بعد نوشته شده است.

برای اثبات قضیه دیورژانس فرض می‌کنیم مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ مشتقهای جزئی پیوسته دارند و $\mathbf{n}$ ، قائم واحد برونسوی رویه S



۴۲.۱۹ در این شکل ناحیه سه بعدی D میان رویه های S_1 و S_2 محصور است و تصویر قائم آن در صفحه xy ناحیه دو بعدی R_{xy} است.

قائم برونسوی $\mathbf{n}$ مثبت است و داریم

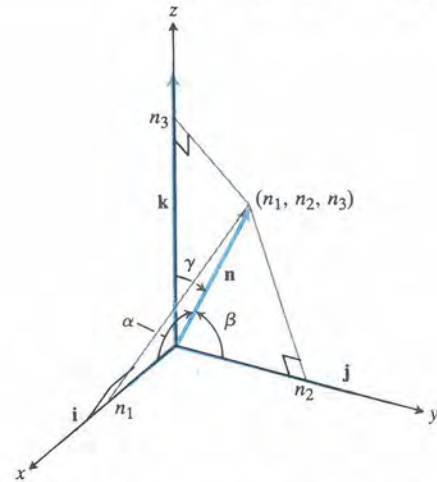
$$\cos \gamma d\sigma = dx dy \quad (15) \quad \text{زیرا} \quad d\sigma = \frac{dA}{|\cos \gamma|} = \frac{dx dy}{\cos \gamma}$$

شکل ۴۳.۱۹ را ببینید. روی S_1 مؤلفه k بردار قائم برونسوی $\mathbf{n}$ منفی است و داریم

$$\cos \gamma d\sigma = -dx dy. \quad (16)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \iint_S P \cos \gamma d\sigma &= \iint_{S_2} P \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_1} P \cos \gamma d\sigma \\ &= \iint_{R_{xy}} P(x, y, z_2) dx dy \\ &\quad - \iint_{R_{xy}} P(x, y, z_1) dx dy \\ &= \iint_{R_{xy}} [P(x, y, z_2) - P(x, y, z_1)] dx dy \\ &= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dx dy \\ &= \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy. \quad (17) \end{aligned}$$



۴۱.۱۹ مؤلفه های عددی بردار قائم واحد $\mathbf{n}$ عبارت اند از کسینوس زوایای α ، β ، و γ که $\mathbf{n}$ با $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ می سازد.

بنابراین

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma.$$

قضیه دیورژانس بر حسب مؤلفه ها عبارت است از

$$\begin{aligned} \iiint_S (M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma) d\sigma \\ = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (11) \end{aligned}$$

برای اثبات این قضیه سه برابر زیر را اثبات می کنیم و سپس آنها را با هم جمع می کنیم تا رابطه (۱۱) بدست آید

$$\iint M \cos \alpha d\sigma = \iiint \frac{\partial M}{\partial x} dx dy dz \quad (12)$$

$$\iint N \cos \beta d\sigma = \iiint \frac{\partial N}{\partial y} dx dy dz \quad (13)$$

$$\iint P \cos \gamma d\sigma = \iiint \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz. \quad (14)$$

برای اثبات رابطه (۱۴) انتگرال رویدای طرف چپ را بدیك انتگرال دو گانه روی تصویر D بر صفحه xy یعنی R_{xy} تبدیل می کنیم (شکل ۴۲.۱۹). رویه S از دو رویه یکی در بالا، S_2 ، با معادله $z = f_2(x, y)$ و دیگری در پایین، S_1 ، با معادله $z = f_1(x, y)$ تشکیل شده است. روی S_2 ، مؤلفه k بردار

است از

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{\nabla(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}$$

بنابراین چون برای این رویه، $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ داریم

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} d\sigma = \frac{a^2}{a} d\sigma = a d\sigma$$

از این رو

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_S a d\sigma = a \iint_S d\sigma \\ &= a(4\pi a^2) = 4\pi a^3 \end{aligned}$$

دیورژانس $\mathbf{F}$ برابر است با

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

بنابراین

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_D 3 dV = 3 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3$$

■

مثال ۲ مطلوب است شار میدان

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$$

بر رویه مکعبی که صفحات $x=1$ ، $y=1$ و $z=1$ از یک هشتم اول جدا می کنند.

حل: قضیه دیورژانس حاکی است که به جای محاسبه شار به صورت مجموع شش انتگرال جداگانه، یک انتگرال برای هر وجه مکعب، می توان شار را از راه انتگرال گرفتن از دیورژانس

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

روی درون مکعب چنین محاسبه کرد

$$\begin{aligned} \text{شار} &= \iint_{\text{رویه مکعب}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iiint_{\text{داخل مکعب}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV \quad (\text{قضیه دیورژانس}) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) dx dy dz \\ &= \frac{3}{2} \quad (\text{پس از یک انتگرال گیری سرراست}) \end{aligned}$$

■



در اینجا γ حاده است،

$$d\sigma = dx dy / \cos \gamma$$

در اینجا γ منفرجه است،

$$-d\sigma = -dx dy / \cos \gamma$$

۴۳۰۱۹ تصویر بزرگ شده قطعات رویه های

مورد بحث در شکل ۴۲۰۱۹. روابط

به $d\sigma = \pm dx dy / \cos \gamma$ در بخش ۴۰۱۹

دست آمدند.

پس رابطه (۱۴) به اثبات می رسد.

روابط (۱۲) و (۱۳) را هم می توانید به همین روش اثبات کنید یا، فقط $x, y, z; P, N, M; \alpha, \beta, \gamma$ را به ترتیب با هم جا به جا کنید و نتایج مطلوب را از رابطه (۱۴) به دست آورید.

قضیه

قضیه دیورژانس

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (18)$$

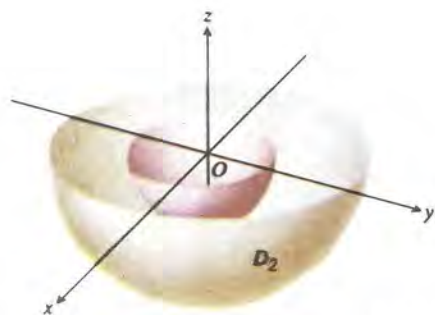
انتگرال شار انتگرال دیورژانس

مثال ۱ مطلوب است محاسبه طرفین رابطه (۱۸) در مورد میدان برداری

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

حل: بردار واحد برونسوی قائم بر S ، که از گرادیان $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ به دست می آید، عبارت



۴۵.۱۹ نیمه پایینی ناحیه‌ای که بین دو کره واقع است.

$\mathbf{n}_1$ و $\mathbf{n}_2$ قرینه‌اند و به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV. \quad (21)$$

که در آن D ناحیه بین دو کره است، S مرز D است و متشکل است از دو کره، و $\mathbf{n}$ بردار واحد قائم بر S است که متوجه به سمت بیرون D است.

مثال ۳ مطلوب است شار خالص برونسوی میدان

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

گذرنده از مرز ناحیه $D: a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2$.

حل: شار با انتگرال گرفتن از $\nabla \cdot \mathbf{F}$ روی D به دست می‌آید. داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (2x) = \frac{x}{\rho}.$$

و

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}.$$

همین‌طور

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5} \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}$$

بنابراین

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

قضیه دیورژانس در مورد نواحی دیگر

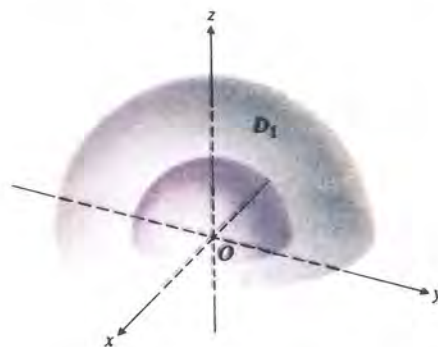
قضیه دیورژانس را می‌توان به ناحیه‌های پیچیده‌تری هم تعمیم داد به شرطی که بتوان آن نواحی را به تعدادی متناهی از نواحی ساده از نوعی که بحث شد تقسیم کرد یا بتوان آنها را به روشهای خاصی به صورت حد نواحی ساده تعریف کرد. مثلاً، فرض کنید D ناحیه بین دو کره هم‌مرکز باشد، و $\mathbf{F}$ در سراسر D و روی رویه‌های محدودکننده آن مؤلفه‌های پیوسته مشتق‌پذیر داشته باشد. ناحیه D را با یک صفحه استوایی به دو قسمت تقسیم کنید و در مورد هر قسمت قضیه دیورژانس را به کار ببرید. نیمه بالایی، D_1 ، در شکل ۴۴.۱۹ دیده می‌شود. رویه‌ای که D_1 را محصور می‌کند متشکل است از یک نیمکره خارجی، یک قاعده مستوی به شکل وایر، و یک نیمکره داخلی. قضیه دیورژانس حاکی است که

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_1. \quad (19)$$

جهت بردار قائم واحد $\mathbf{n}_1$ که از D_1 به طرف بیرون متوجه است روی رویه خارجی از مبدأ به طرف خارج، روی قاعده مستوی به طرف پایین، و روی رویه داخلی به طرف مبدأ است. حال قضیه دیورژانس را در مورد D_2 که در شکل ۴۵.۱۹ دیده می‌شود به کار می‌بریم

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_2. \quad (20)$$

وقتی روی S_2 ، $\mathbf{n}_2$ را که از D_2 متوجه بیرون است در نظر بگیریم ملاحظه می‌کنیم که جهت آن روی قاعده مستوی واقع در صفحه xy به طرف بالا، روی کره خارجی از مبدأ به طرف بیرون، و روی کره داخلی به طرف مبدأ است. اگر (۱۹) و (۲۰) را با هم جمع کنیم انتگرالهای رویه‌ای روی قاعده مستوی حذف می‌شود زیرا علامتهای



۴۴.۱۹ نیمه بالایی ناحیه‌ای که بین دو کره واقع است.

بر حسب نماد مورد استفاده در مثال ۳ داریم

$$\mathbf{E} = q\mathbf{F}.$$

محاسبات مثال ۳ نشان داد که شار برونسوی $\mathbf{E}$ گذرنده از هر کره دایره‌ای به مرکز مبدأ، برابر است با $4\pi q$. اما این نتیجه منحصر به کره نیست. شار برونسوی $\mathbf{E}$ گذرنده از هر رویه دایره‌ای S که شامل مبدأ باشد (و بتوان قضیه دیورژانس را در مورد آن به کار برد) برابر است با $4\pi q$. برای اینکه به دلیل این مطلب پی ببریم کافی است کره بزرگی چون S_a را در نظر بگیریم که مرکز آن مبدأ است و رویه S را در برمی گیرد. چون

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot q\mathbf{F} = q\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

انتگرال $\nabla \cdot \mathbf{E}$ روی ناحیه D بین S و S_a برابر با صفر است. بنابراین با استفاده از قضیه دیورژانس، داریم

$$\iint_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

و شار $\mathbf{E}$ گذرنده از S در جهت متوجه به بیرون از مبدأ باید برابر باشد با شار $\mathbf{E}$ گذرنده از S_a در جهت متوجه به بیرون از مرکز که برابر است با $4\pi q$. این مطلب را به نام کارل فریدریش گاوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) قانون گاوس می‌نامند. گاوس ریاضیدان، فیزیکدان، و اخترشناس بزرگ آلمانی است که از جمله کارهای او اختراع تلگراف برقی است. اگر به هر کتاب درسی دانشگاهی در زمینه فیزیک مراجعه کنید درمی یابید که قانون گاوس را می‌توان در مورد توزیعهای بار بسیار کلیتر از آنچه که ما در اینجا بحث کردیم به کار برد.

قانون گاوس

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 4\pi q. \quad (22)$$

□ معادله پیوستگی هیدرودینامیک

اگر $v(x, y, z)$ برداری مشتق پذیر باشد که سرعت شارش یک سیال را از ناحیه D در فضا نمایش بدهد، اگر $\delta = \delta(x, y, z, t)$ چگالی سیال در نقطه (x, y, z) در لحظه t باشد، و اگر $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ ، آنگاه، معادله پیوستگی معادله زیر است

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0. \quad (23)$$

همان طور که اکنون نشان خواهیم داد اگر توابعی که با آنها سروکار داریم پیوسته باشند معادله پیوستگی نتیجه طبیعی قضیه

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = 0.$$

بنابراین انتگرال $\nabla \cdot \mathbf{F}$ روی D صفر است، و شار خالص برونسو گذرنده از مرز D نیز برابر با صفر است. اما از این مثال چیز دیگری هم می‌آموزیم. مقدار شاری که از کره داخلی S_a می‌گذرد و از D خارج می‌شود قرینه مقدار شاری است که از کره خارجی S_b می‌گذرد و از D خارج می‌شود (زیرا مجموع این شارها صفر است). یعنی شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S_a در جهتی که از مبدأ متوجه بیرون از مبدأ است برابر است با شار $\mathbf{F}$ گذرنده از S_b در جهتی که از مبدأ متوجه بیرون از مبدأ است. بنابراین مقدار شار $\mathbf{F}$ گذرنده از کره‌ای به مرکز مبدأ، مستقل از شعاع کره است. پس مقدار آن چقدر است؟

برای یافتن جواب، انتگرال شار را مستقیماً محاسبه می‌کنیم. بردار واحد برونسوی قائم بر کره‌ای به شعاع a برابر است با

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

بنابراین بر روی کره داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi.$$

پس شار برونسوی $\mathbf{F}$ گذرنده از هر کره‌ای به مرکز مبدأ برابر است با 4π . □

□ قانون گاوس

مطلب دیگری هم از مثال ۳ می‌آموزیم. در نظریه الکترومغناطیس، میدان الکتریکی که بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ ایجاد می‌کند برابر است با میدان

$$\mathbf{E}(x, y, z) = q \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = q \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) است و

$$\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

دیورژانس است

جرم از D از میان S را چنین به دست می آوریم

$$\frac{dm}{dt} = \int_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (25)$$

که در مورد شارش سیال در حالت خاص مورد بحث ما عبارت است از

$$\frac{dm}{dt} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (26)$$

حال فرض می کنیم B گویی باشد به مرکز Q واقع در يك
شاره. مقدار میانگین $\nabla \cdot \mathbf{F}$ روی این گوی برابر است با

$$\frac{1}{\text{حجم}} \int_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (27)$$

این مطلب که $\nabla \cdot \mathbf{F}$ عملاً این مقدار را در نقطه ای چون P واقع
در B اختیار می کند نتیجه پیوستگی دیورژانس است. پس

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{F})_P &= \frac{1}{\text{حجم}} \int_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \frac{\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\text{حجم}} \\ &= \frac{\text{آهنک خروج جرم از } B \text{ از میان رویه اش}}{\text{حجم } B}. \end{aligned} \quad (28)$$

کسر طرف راست، کاهش جرم در واحد حجم را توصیف می کند.
حال شعاع گوی B را به صفر میل می دهیم و مرکز Q را ثابت
نگاه می داریم. طرف چپ رابطه (۲۸) به $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$ همگراست،
طرف راست هم برابر است با $(-\partial \delta / \partial t)_Q$. برابری این دو حد،
معادله پیوستگی است

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (29)$$

معادله پیوستگی، $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را «توصیف می کند»: دیورژانس
 $\mathbf{F}$ در يك نقطه برابر است با آهنک کاهش چگالی سیال در آنجا.
حال قضیه دیورژانس

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

حاکی است که کاهش خالص چگالی سیال در ناحیه D به علت انتقال
جرم از میان رویه S است و این به عبارتی بیانی است از اصل
بقاء جرم.

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

پیش از هر چیز باید گفت که انتگرال

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

آهنک خروج جرم از D از میان S است (خسارج می شود چون
 $\mathbf{n}$ قائم برونسوست). برای پی بردن به دلیل این مطلب قطعه $\Delta \sigma$ را
روی رویه در نظر بگیریم (شکل ۴۶.۱۹). در بازه زمانی کوتاه Δt ،
حجم ΔV سیالی که از میان این قطعه شارش می یابد تقریباً برابر
است با حجم استوانه ای با قاعده $\Delta \sigma$ و ارتفاع $(\mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$ که
در آن $\mathbf{v}$ بردار سرعتی است که مبدأ آن نقطه ای از این قطعه است

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma \Delta t.$$

جرم این حجم سیال حدوداً برابر است با

$$\Delta m \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma \Delta t$$

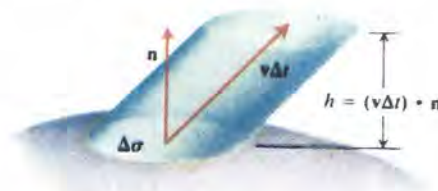
بنابراین آهنک خروج جرم از D از میان این قطعه حدوداً برابر
است با

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma.$$

این رابطه به رابطه تقریبی زیر منجر می شود که برآوردی است از
آهنک میانگین عبور جرم از میان S .

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta \sigma \quad (24)$$

بالاخره $\Delta \sigma$ و Δt را به صفر میل می دهیم و آهنک لحظه ای خروج



۴۶.۱۹ سیالی که از میان قطعه $\Delta \sigma$ در مدت
کوتاه Δt به طرف بالا جریان می یابد
استوانه ای به حجم تقریبی $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t \Delta \sigma$
(که مساوی ارتفاع $\times$ قاعده است) را پر می کند.

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۱۲، با استفاده از قضیه دیورژانس، شار برونسوی F گذرنده از مرز ناحیه D را بیابید.

$$F(x, y, z) = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k} \quad ۱$$

D : مکعبی محدود به صفحات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، و $z = \pm 1$

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad ۲$$

D : مکعبی که صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $z = 1$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad ۳$$

D : مکعب محدود به صفحات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، و $z = \pm 1$

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad ۴$$

D : ناحیه‌ای که صفحات $z = 1$ و $z = 0$ از استوانه توپر $x^2 + y^2 \leq a^2$ جدا می‌کنند.

$$F(x, y, z) = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۵$$

D : ناحیه واقع در درون استوانه توپر $x^2 + y^2 \leq 4$ و بین صفحه $z = x^2 + y^2$ و سهمیوار $z = 0$

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۶$$

D : کره توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k} \quad ۷$$

D : ناحیه‌ای که کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ از یک هشتم اول جدا می‌کند.

۸.

$$F(x, y, z) = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^2\mathbf{k}$$

D : ناحیه‌ای که استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $z = 4$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

$$F(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} \quad ۹$$

D : گوه‌ای که صفحه $z = y$ و استوانه بیضوی $x^2 + 4y^2 = 16$ از یک هشتم اول جدا می‌کنند.

$$F(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k} \quad ۱۰$$

D : کره توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

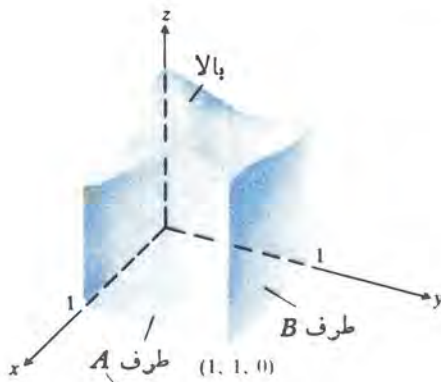
$$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \quad ۱۱$$

D : کره توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

$$F(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ۱۲$$

$$D: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

۱۳. فرض کنید S رویه‌ای مکعب مانند نظیر آنچه در شکل ۴۷۰۱۹ دیده می‌شود باشد. قاعده این مکعب، مربع واحدی است در صفحه xy ؛ چهاروجه جانبی آن صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ و وجه بالایی آن رویه هموار دلخواهی است که معادله‌اش نامعلوم است. فرض کنید $F = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z+3)\mathbf{k}$. همچنین فرض کنید شار برونسوی F گذرنده از وجه A برابر با ۱ و گذرنده از وجه B برابر با ۳- است. شار برونسوی F گذرنده از ضلع بالایی را محاسبه کنید.



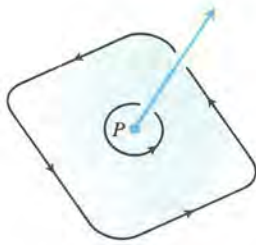
۴۷۰۱۹ درمسأله ۱۳ شار یک میدان برداری گذرنده از وجه بالایی این جسم محاسبه می‌شود.

۱۴. فرض کنید $F(x, y, z)$ میدانی برداری باشد که مؤلفه‌هایش بر بخشی از فضا که شامل ناحیه (متناهی) D و رویه مرزیش S است پیوسته و مشتق پذیر است. فرض کنید طول بردار $F(x, y, z)$ وقتی (x, y, z) نقطه‌ای از S است هرگز از ۱ بیشتر نمی‌شود. چه کرانی می‌توان برای مقدار عددی انتگرال زیر قائل شد؟ توضیح دهید.

$$\iiint_D \nabla \cdot F \, dV$$

۱۵. الف) نشان دهید که شار برونسوی بردار مکان $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از یک رویه بسته قطعه قطعه هموار، سه برابر حجمی است که رویه در بر می‌گیرد.

ب) فرض کنید n بردار واحد برونسوی قائم بر رویه بسته قطعه قطعه هموار S باشد. نشان دهید که امکان ندارد که بردار مکان $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ در هر نقطه‌ای از S بر n عمود باشد.



۴۸۰۱۹ بردار گردش در نقطه P در يك صفحه واقع در يك شارش سیال سه بعدی. به رابطه راستگردی این بردار با خط گردش توجه کنید.

با خط گردش رابطه راستگرد دارد. طول بردار، آهنگ چرخش سیال است که معمولاً وقتی صفحه گردش حول P از يك طرف به طرف دیگر کج شود تغییر می کند. می توان ثابت کرد که بردار بیشترین چرخش در يك شاره بامیدان سرعت $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ برابر است با بردار

$$\text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (1)$$

این مطلب را از قضیه استوکس که تعمیم صورت گردشی-تاوی قضیه گرین در فضا است به دست می آوریم.

در این بخش قضیه استوکس را عرضه می کنیم و به بررسی ارتباط این قضیه با گردش می پردازیم. همچنین نشان می دهیم که گاه چگونه می توان با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال خمیده خطی حول يك طوق در فضا را با محاسبه انتگرال رویه ای ساده تری حساب کرد. این روش شبیه روشی است که طی آن از قضیه گرین بهره می گرفتیم و انتگرال خمیده خطی در امتداد يك خم پیچیده واقع در صفحه را با محاسبه يك انتگرال دو گانه ساده تر روی ناحیه محصور در خم حساب می کردیم. علاوه بر اینها، صورت گردشی-تاوی یا مماسی قضیه گرین را به صورت نهایی برداریش بیان خواهیم کرد. قضیه استوکس کاربردهای مهمی در نظریه الکترومغناطیس دارد. در انتهای این بخش اشاره کوتاهی به ارتباط میان قضیه استوکس و قانون آمپر در مورد جریان الکتریکی در يك میدان مغناطیسی خواهیم کرد.

قضیه استوکس

قضیه استوکس حاکی است که در شرایطی که معمولاً در عمل پیش می آید، گردش يك میدان برداری چون $\mathbf{F}$ در امتداد مرز يك رویه در فضا، در جهتی که نسبت به بردار قائم $\mathbf{n}$ بر رویه خلاف جهت

تابهای همساز

۱۶. تابعی چون f را در ناحیه D همساز گویند هرگاه این تابع در سراسر D در معادله لاپلاس زیر صدق کند

$$\nabla^2 f = 0.$$

فرض کنید f در سراسر D همساز باشد، S مرز D باشد، $\mathbf{n}$ بردار واحد مثبت قائم بر S باشد، و $\partial f / \partial n$ مشتق جهتی f در جهت $\mathbf{n}$ باشد. این مشتق را مشتق قائم f می نامند. ثابت کنید

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = 0.$$

(داهنمایی: فرض کنید $\mathbf{F} = \nabla f$)

۱۷. ثابت کنید اگر f در D همساز باشد (مسأله ۱۶ را ببینید). آنگاه

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2 dV.$$

(داهنمایی: فرض کنید $\mathbf{F} = f \nabla f$)

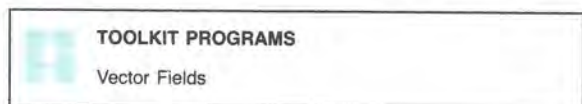
۱۸. فرض کنید S يك هشتم از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد که در يك هشتم اول واقع است، و نیز فرض کنید

$$f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

مطلوب است محاسبه

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma.$$

(مسأله ۱۶ را ببینید.)



۶۰۱۹ قضیه استوکس

هنگام مطالعه میدانهای برداری و شارش سیالات در بخش ۳۰۱۹ آموختیم که چگالی گردش یا تاو يك میدان دوبعدی نظیر $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ در نقطه (x, y) با کمیت عددی

$$(\partial N / \partial x - \partial M / \partial y)$$

توصیف می شود. در سه بعد، گردش حول نقطه ای چون P واقع در يك صفحه با يك بردار توصیف می شود نه با يك عدد. این بردار، قائم بر صفحه گردش است (شکل ۴۸۰۱۹) و متوجه جهتی است که



قضیه استوکس و سنتی در ریاضیات

جورج گابریل استوکس (۱۸۱۹-۱۹۰۳) نخستین بار قضیه‌اش را در ۱۸۵۴ به صورت یک سؤال در امتحان جایزه اسمیت در دانشگاه کیمبریج انگلستان منتشر کرد. این قضیه را در سال ۱۸۵۰ دوستی، ویلیام تامسن (لرد کلوین)، در یک نامه برای استوکس فرستاده بود. استوکس که مدافع مکتب فیزیک ریاضی فرانسوی لاگرانژ، لاپلاس، فوریه، پواسن، و کوشی بود با تدریس فراوان و ترتیب دادن مسابقات مناسب بر سنت ریاضی کیمبریج تأثیر گذاشت. در دامن همین سنت جدید بود که نسلی از ریاضیدانان و دانشمندان کیمبریج سر بر آوردند. از جمله اینان می‌توان از کسی که چه بسا مهمترین دانشمند فیزیک ریاضی قرن نوزدهم باشد، یعنی جیمز کلارک ماکسول، نام برد.

ساعت است، برابر است با انتگرال دوگانه $\mathbf{n} \cdot \text{curl } \mathbf{F}$ روی رویه.

قضیه استوکس

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (2)$$

انتگرال تاو انتگرال گردش

طبیعتاً باید محدودیتهایی برای $\mathbf{F}$ و نوع رویه قائل شویم تا این قضیه صادق باشد. پس از اولین مثال درباره این محدودیتهای بحث می‌کنیم.

تاو یک میدان برداری سه بعدی چون $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ بر حسب نماد دل به صورت ضرب متقاطع نمادین زیر نوشته می‌شود

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (3)$$

به این ترتیب قضیه استوکس به صورت زیر درمی‌آید.

قضیه استوکس بر حسب نماد دل

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (4)$$

اگر C خمی در صفحه xy و جهت آن خلاف جهت ساعت و R ناحیه محدود به C باشد، آنگاه $d\sigma = dx dy$ و

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (5)$$

در این شرایط معادله استوکس به صورت زیر درمی‌آید

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

که عبارت است از صورت گردش-تاوی معادله مربوط به قضیه گرین. به عکس، با معکوس کردن این مراحل می‌توان قضیه گرین در مورد

درمورد انتگرال تاو $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ داریم

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} \quad (\text{قائم واحد برونسو})\end{aligned}$$

$$d\sigma = \frac{a}{z} dA \quad (\text{مانند مورد مثال ۵ از بخش ۴.۱۹ به دست می آید})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{2z}{a} \frac{a}{z} dA = -2 dA$$

و

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} -2 dA = -2\pi a^2.$$

گردش روی دایره، چنانکه باید، برابر است با انتگرال تاو روی نیمکره. ■

شرایط ریاضی لازم برای قضیه استوکس

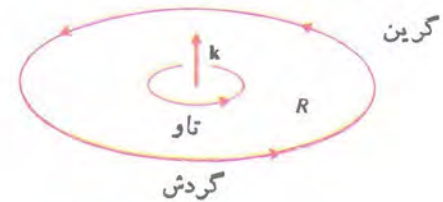
در قضیه استوکس رویه باید دوطرفه باشد. به این ترتیب رویه‌هایی نظیر نوار مویوس، که در شکل ۵۰.۱۹ دیده می‌شود، از رده رویه‌های قابل قبول خارج می‌شوند. این رویه جهت ناپذیر است، زیرا یک بردار قائم واحد (پایه بونز را که روی رویه قرار دارد در نظر بگیرید) می‌تواند روی رویه به‌طور پیوسته چنان حرکت کند که با مرز نوار برخوردی نداشته باشد به‌طوری‌که وقتی به جسای اولش باز می‌گردد جهتش کاملاً مخالف جهت اولش باشد.

همچنین C را جهت‌دار می‌کنیم به‌طوری‌که جهت مثبت آن طبق قاعده دست راست با جهت مثبت روی S مربوط باشد (شکل ۵۱.۱۹ را ببینید) و محدودیتهایی روی $\mathbf{F}$ ، C ، و S می‌گذاریم تا مطمئن شویم انتگرالهای مذکور در رابطه استوکس وجود دارند. معمولاً این محدودیتها عبارت‌اند از اینکه توابع و مشتقهایشان پیوسته باشند.

میدانهای دوبعدی را بر حسب نماد دل به صورت زیر نوشت

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA. \quad (6)$$

شکل ۴۹.۱۹ را ببینید.



۴۹.۱۹ قضیه گرین و قضیه استوکس.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه دو انتگرال مذکور در قضیه استوکس درمورد نیمکره

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

با دایره مرزی

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

و میدان

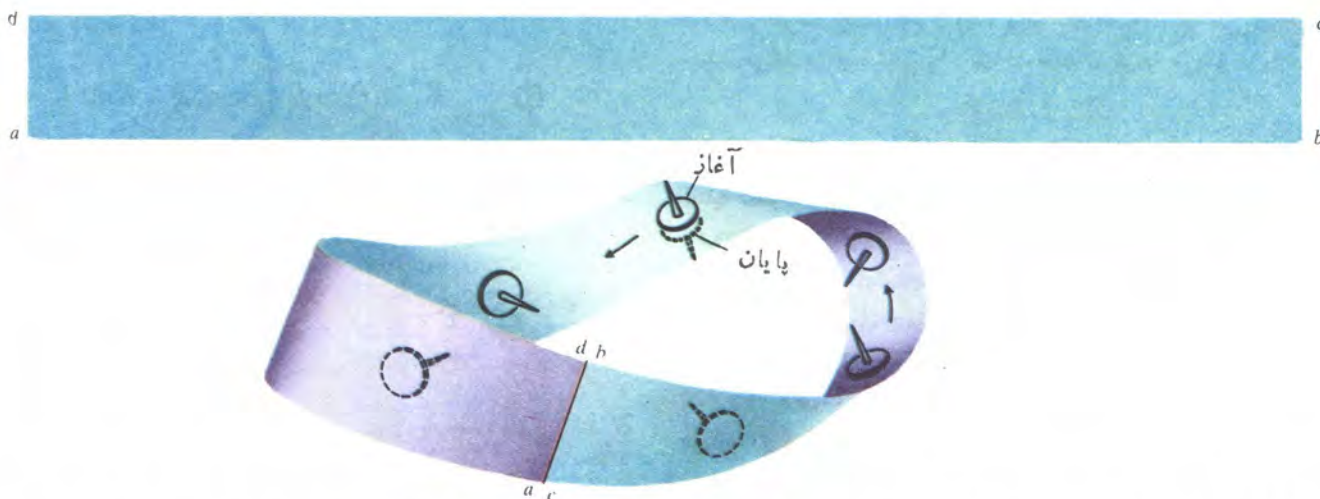
$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

حل: انتگرالده انتگرال گردش برابر است با

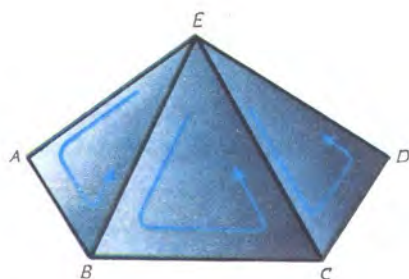
$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \mathbf{F} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= y dx - x dy.\end{aligned}$$

با استفاده از صورت گردش قضیه گرین درمورد صفحه داریم

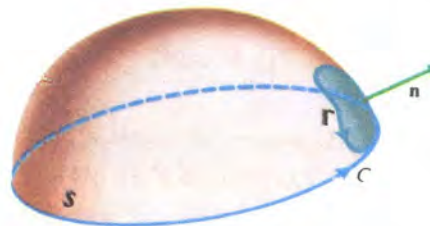
$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \oint_C (y dx - x dy) \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} -2 dx dy = -2\pi a^2.\end{aligned}$$



۵۰.۱۹ نوار موبیوس را می‌توان این‌طور ساخت؛ یک نوار کاغذی به شکل مستطیل $abcd$ اختیار کنید، سر bc ی نوار را یک بار پتانید تا محل رؤس b و c عوض شود. سپس دو سر نوار را به یکدیگر بچسبانید به طوری که رؤس a و c برهم و رؤس b و d برهم منطبق شوند. نوار موبیوس یک رویه جهت‌ناپذیر یا یکطرفه است و قضیه استوکس در مورد آن برقرار نیست.



۵۲.۱۹ بخشی از یک رویه چندوجهی.



۵۱.۱۹ جهت‌دار کردن مرز C ی یک رویه جهت‌دار. به این مطلب توجه کنید که جهت مثبت C و جهت مثبت n طبق قاعده دست راست (داستگرد) است.

و جمع کردن نتایج به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left(\oint_{ABE} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \left(\iint_{ABE} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE} \right) \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \end{aligned} \quad (7)$$

از ترکیب سه انتگرال خمیده خطی طرف چپ رابطه (۷) یک انتگرال خمیده خطی روی محیط $ABCDE$ به دست می‌آید زیرا انتگرالهایی که روی پاره‌خطهای داخلی گرفته می‌شود دو به دو همدیگر را حذف می‌کنند. مثلاً علامت انتگرال روی پاره‌خط BE از مثلث ABE مخالف علامت انتگرال روی همان پاره‌خط از مثلث EBC است و همین‌طور در مورد پاره‌خط CE . بنابراین (۷) به صورت

اثبات قضیه استوکس در مورد رویه‌های چندوجهی

فرض می‌کنیم S رویه‌ای چندوجهی باشد که از تعدادی متناهی ناحیه مستوی تشکیل شده باشد. قضیه گسین را در مورد هر یک از این وجوه جداگانه به کار می‌بریم. دو نوع وجه داریم

۱. وجهی که همه یالهای آن با وجوه دیگر مشترک است.

۲. وجهی که دست کم یک یال غیر مشترک با وجوه دیگر دارد.

مرز S یعنی Δ متشکل است از یالهایی از وجوه نوع دوم که با وجوه دیگر مشترک نیست. در شکل ۵۲.۱۹ مثلثهای ABE ، BCE و CDE بخشی از S را نشان می‌دهند و $ABCD$ بخشی از مرز Δ است. با به کار بستن قضیه گسین در مورد هریک از این سه مثلث

ساده‌تر درمی‌آید

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int \int_{ABCDE} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

به‌طور کلی اگر قضیه گرین را در مورد همه وجوه به کار بندیم و نتایج را باهم جمع کنیم به دست می‌آوریم

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (۸)$$

این رابطه، قضیه استوکس در مورد یک رویه چندوجهی مانند S است.

گردش يك سيال

قضیه استوکس تعبیر برداری زیر را برای $\mathbf{F}$ به دست می‌دهد. اگر مانند آنچه که در مبحث دیورژانس ملاحظه شد، $\mathbf{v}$ میدان سرعت يك سيال متحرك و δ چگالی باشد و داشته باشیم $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ ، آنگاه

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

برابر است با گردش سیال در امتداد خم بسته C . بنا به قضیه استوکس این گردش برابر با شار $\mathbf{F}$ گذرنده از رویه S به دهانه C نیز هست

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

در دامنه $\mathbf{F}$ نقطه‌ای چون Q و جهتی چون $\mathbf{u}$ در Q را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید C دایره‌ای به شعاع ρ و مرکز Q باشد که صفحه‌اش بر $\mathbf{u}$ عمود است. اگر $\mathbf{F}$ و Q پیوسته باشد، آنگاه وقتی $\rho \rightarrow 0$ مقدار متوسط مؤلفه $\mathbf{u}$ ی $\mathbf{F}$ روی C مستدیر محصور در C به مؤلفه $\mathbf{u}$ ی $\mathbf{F}$ در Q میل می‌کند

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\sigma. \quad (۱۱)$$

اگر به جای انتگرال دو گانه طرف راست رابطه (۱۱) «گردش» را قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}. \quad (۱۲)$$

طرف چپ رابطه (۱۲) در Q ماکسیمم است هرگاه جهت $\mathbf{u}$ و جهت $\mathbf{F}$ یکی باشند. حد طرف راست رابطه (۱۲) وقتی ρ

اثبات دقیق قضیه استوکس در مورد رویه کلیتری چون S بالاتر از سطح يك درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال است. اما برهان شهودی زیر نشان می‌دهد که چرا انتظار داریم که رابطه استوکس برقرار باشد. دنباله‌ای از رویه‌های چندوجهی تقریب زنده

$$S_1, S_2, \dots$$

و مرزهای نظیرشان $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ را در نظر بگیرید. ساخت رویه S_n به گونه‌ای است که مرز Δ_n در C ، مرز S ، محاط یا بر آن مماس است، و در نتیجه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، طول Δ_n به طول C میل می‌کند. وجوه S_n باید به صورت نواحی چندوجهی باشند و قطعاتی از S را تقریب بزنند به طوری که وقتی $n \rightarrow \infty$ مساحت S_n به مساحت S میل کند. با فرض اینکه M, N, P ، و مشتقات جزئی آنها در ناحیه‌ای مانند D که شامل S و C است پیوسته باشند می‌توان انتظار داشت که وقتی $n \rightarrow \infty$

$$\oint_{\Delta_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad \text{به} \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad \text{میل کند}$$

و نیز

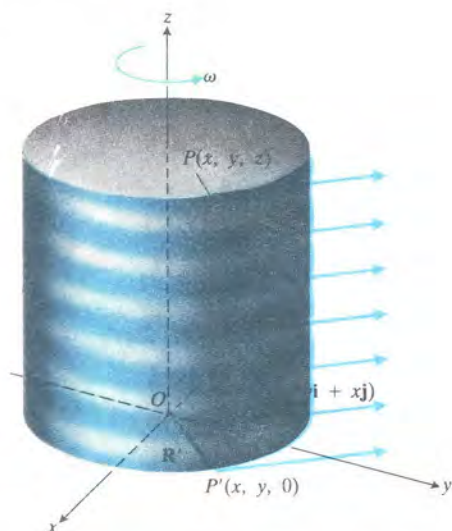
$$\int \int_{S_n} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{به} \quad \int \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{میل کند}$$

اما اگر

$$\oint_{\Delta_n} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \rightarrow \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \quad (۹)$$

و

$$\int \int_{S_n} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \rightarrow \int \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (۱۰)$$



۵۴.۱۹ یک شارش چرخشی ثابت موازی با صفحه xy ، با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت مثبت (خلاف جهت ساعت).

برابر است با

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

$$= \int \int \gamma \delta \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} dx dy = (\gamma \delta \omega)(\pi r^2).$$

بنابراین

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \gamma \delta \omega = \frac{1}{\pi r^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

که با رابطه (۱۲) به ازای $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ وفق می‌دهد.

اتحادی مهم

رابطه

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \text{curl grad } f = \mathbf{0} \quad (13)$$

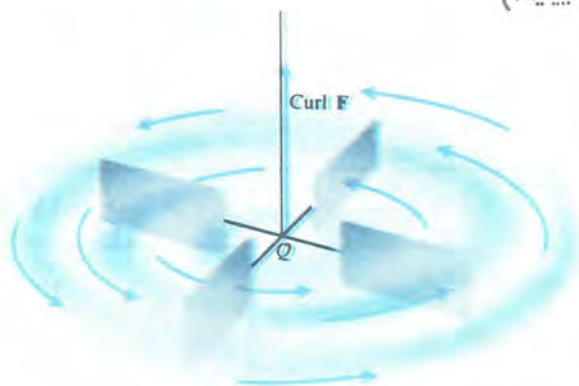
اتحادی برداری است که در ریاضیات و علوم فیزیکی غالباً از آن در زمینه میدانهای برداری استفاده می‌شود. (ما خود آن را در بخش ۷.۱۹ به کار می‌بریم.) این اتحاد در مورد هر تابع پیوسته‌ای چون $f(x, y, z)$ که مشتقات جزئی اول و دومش پیوسته باشد برقرار است. اثبات این مطلب سراسر است و به قرار زیر است: چون

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

کوچک است تقریباً برابر است با

$$\frac{1}{\pi r^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

که عبارت است از خارج قسمت گردش در امتداد C بر مساحت قرص (چگالی گردش). فرض کنید یک چرخ پره‌دار کوچک به شعاع ρ در نقطه Q داخل سیال باشد و محورش در جهت $\mathbf{u}$ باشد. گردش سیال در امتداد C بر سرعت چرخیدن چرخ پره‌دار تأثیر می‌گذارد. وقتی انتگرال گردش ما کسیمم باشد سرعت چرخش بیشترین مقدار را دارد؛ بنابراین وقتی محور چرخ پره‌دار در جهت $\mathbf{F}$ باشد، این دستگاه سریعترین چرخش را خواهد داشت. (شکل ۵۳.۱۹ را ببینید.)



۵۳.۱۹ تعبیر تاو $\mathbf{F}$ به چرخ پره‌دار.

مثال ۲ سیالی به چگالی ثابت δ با سرعت $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ حول محور z می‌چرخد. ω ثابت مثبتی است که سرعت زاویه‌ای چرخش نام دارد (شکل ۵۴.۱۹). اگر $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ ، تاو $\mathbf{F}$ را به دست آورید و رابطه‌اش با چگالی گردش را نشان دهید.

حل: به ازای $\mathbf{F} = -\delta \omega y \mathbf{i} + \delta \omega x \mathbf{j}$ داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= (0 - 0) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (\delta \omega - (-\delta \omega)) \mathbf{k}$$

$$= 2 \delta \omega \mathbf{k}.$$

بنابراین قضیه استوکس، گردش $\mathbf{F}$ روی دایره‌ای چون C به شعاع ρ

تاوگرادیان ∇ از فرمول زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} \\ &\quad + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}.\end{aligned}\quad (12)$$

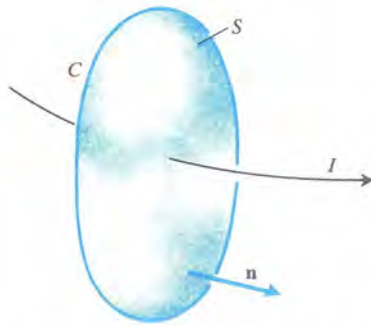
چون ∇ و مشتقات جزئی اول و دومش پیوسته اند، مشتقات دوم آمیخته داخل پرانتزها برابرند و لذا بردار برابر با صفر است. در مسائل ۱۲ و ۱۳ با اتحادهای دیگری هم آشنا می شوید.

□ قانون آمپر

در نظریه الکترومغناطیس، قانون آمپر از قضیه استوکس به دست می آید

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \frac{\mu_0}{c} \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \frac{\mu_0}{c} I.\end{aligned}\quad (15)$$

در این رابطه، $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی در فضا است، C طوقی است در فضا که جریان I را در بردارد. S رویه محدود به C است، چگالی جریان (جریان در واحد سطح) است، و c سرعت نور است. در این معادله فرض بر این است که جهت عبور جریان و جهت C نظیر همان قاعده راستگردی باشد که جهت C را به جهت بردار $\mathbf{n}$ قائم بر رویه S مربوط می سازد (شکل ۵۵.۱۹). نام این قانون از نام کاشفش، آندره ماری آمپر (۱۷۷۵-۱۸۳۶) گرفته شده است. او یک فیزیکدان، ریاضیدان، و فیلسوف طبیعی فرانسوی بود که به خاطر کارهایش در الکترودینامیک شهرت دارد. این قانون حاکی است که انتگرال $\mathbf{B}$ در امتداد یک مسیر بسته متناسب است با جریان گذرنده از رویه ای که در میان این مسیر محصور است.



۵۵.۱۹ جهت های C ، $\mathbf{n}$ ، و جریان در قانون آمپر.

خلاصه قضایای انتگرالی بر حسب نماد دل این بخش را با عرضه جدولی که در آن قضیه گرین و صورت های تعمیم یافته آن در سه بعد آمده است به پایان می بریم.

جدول ۳۰.۱۹ قضیه گرین و صورت های تعمیم یافته آن

قضیه گرین:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$$

قضیه دیورژانس:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

قضیه استوکس:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

مسائلها

در مسائل ۱-۶، با استفاده از انتگرال رویه ای در قضیه استوکس، گردش میدان $\mathbf{F}$ را روی خم C در جهت مشخص شده بیابید.

$$1. \mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

C : بیضی $x^2 + y^2 = 4$ ، در خلاف جهت ساعت هرگاه از بالا نگاه کنیم.

نیز فرض کنید $F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. با استفاده از قضیه استوکس شار برونسوی F گذرنده از S را بیابید.

۰۹۰ نشان دهید مقدار

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$$

برای همه رویه‌های جهنداری که محدود به C هستند و جهت مثبت یکسانی را روی C به وجود می‌آورند یکی است.

۰۹۱ نشان دهید اگر $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، آنگاه $\nabla \cdot F = 3$ و $\nabla \times F = 0$.

۰۹۲ الف) نشان دهید اگر مشتقات جزئی لازم مؤلفه‌های

$$F = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

پیوسته باشند، آنگاه $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0$.

ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) نشان دهید برای هر رویه دلخواهی که قضیه دیورژانس را بتوان در مورد آن به کار برد داریم

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

۰۹۳ فرض کنید $g(x, y, z)$ یک تابع عددی مشتقپذیر باشد؛ و F_1, F_2, F_3 و F_4 میدانهای برداری مشتقپذیر باشند. درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

$$\operatorname{div}(gF) = \nabla \cdot (gF) = g \nabla \cdot F + F \cdot \nabla g \quad (\text{الف})$$

$$\nabla \times (gF) = g \nabla \times F + \nabla g \times F \quad (\text{ب})$$

$$\nabla \cdot (F_1 \times F_2) = F_2 \cdot \nabla \times F_1 - F_1 \cdot \nabla \times F_2 \quad (\text{پ})$$

۰۹۴ فرض کنید $F = \operatorname{grad} f$ برابر باشد با گرادیان یک تابع عددی پیوسته f که در سراسر یک ناحیه ساده‌همبند که شامل رویه S و مرز C می‌شود دارای مشتقات جزئی اول و دوم پیوسته

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \dots$$

است. با این شرایط مقدار ثابت

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{R}$$

چقدر است؟ توضیح دهید.

۰۹۵ رویه $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = f(x, y, z)$ مفروض است،

$$F = 2y\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} \quad ۰۲$$

C : دایره $x^2 + y^2 = 9$ واقع در صفحه xy ، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

$$F = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} \quad ۰۳$$

C : مرز مثلثی که صفحه $x + y + z = 1$ از یک هشتم اول جدا می‌کند، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

$$F = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k} \quad ۰۴$$

C : مرز مثلثی که صفحه $x + y + z = 1$ از یک هشتم اول جدا می‌کند، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

$$F = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k} \quad ۰۵$$

C : مربعی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ ، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

$$F = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۰۶$$

C : مرز دایره $x^2 + y^2 = a^2$ واقع در صفحه xy ، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

۰۷ فرض کنید S ناحیه محدود به بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ و C واقع در صفحه $z = 1$ باشد. نیز فرض کنید $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ و

$$F = x^2\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

مطلوب است مقدار

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{R}.$$

۰۸ فرض کنید $\mathbf{n}$ قائم برونسوی پوسته بیضوی زیر باشد

$$S: 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \quad z \geq 0$$

و فرض کنید

$$F = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^2)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xy}} \mathbf{k}.$$

با استفاده از قضیه استوکس مقدار زیر را بیابید

$$\iint_S \nabla \times F \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

(دانهمایی: یکی از صورتهای پارامتری بیضی واقع در قاعده پوسته چنین است: $0 \leq t \leq 2\pi, y = 2 \sin t, x = 3 \cos t$)

۰۹ فرض کنید S عبارت باشد از استوانه $x^2 + y^2 = a^2, z = h, x^2 + y^2 \leq a^2$ همراه با قاعده بالایی اش: $0 \leq z \leq h$.

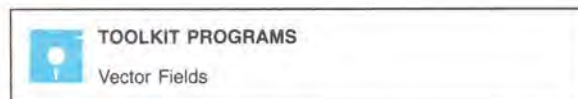
هر گاه $F = \nabla f$ و C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ ، $z = 0$ واقع در صفحه xy باشد، برابری

$$\oint_C F \cdot dR = 0$$

را از دوراه ثابت کنید

الف) از راه محاسبه مستقیم انتگرال، و
ب) با به کار بستن قضیه استوکس وقتی S نیمکره زیر باشد

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2.$$



۷.۱۹ استقلال از مسیر و میدانهای پایستار

در این بخش به شرح موضوع استقلال از مسیر و ویژگیهای مهم میدانها، نظیر میدانهای گرانشی و الکتریکی، که انتگرالهای مستقل از مسیر دارند می پردازیم.

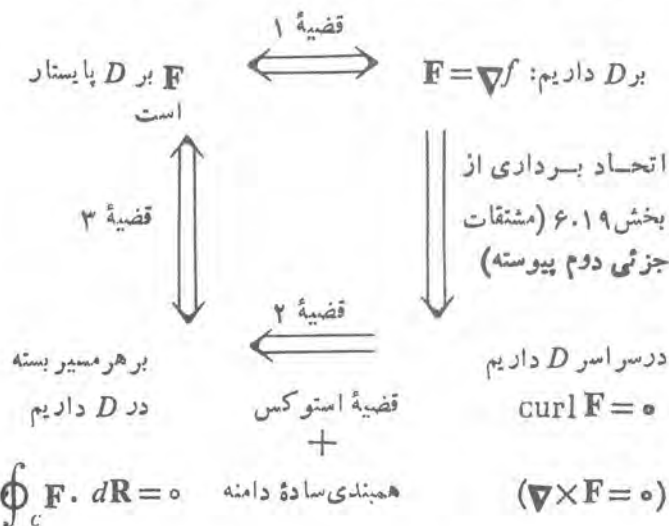
استقلال از مسیر

اگر فرض کنیم A و B دو نقطه واقع در یک ناحیه باز از فضا چون D باشند، کاری که میدان F ، که بر D تعریف می شود، برای جا به جا کردن ذره ای از A تا B انجام می دهد یعنی $\int F \cdot dR$ معمولاً به مسیر انتخاب شده بستگی دارد. اما در مورد برخی از میدانها مقدار انتگرال تنها به نقاط A و B بستگی دارد و برای همه مسیرهای از A تا B یکسان است. اگر چنین امری برای هر دو نقطه ای از D برقرار باشد، انتگرال $\int F \cdot dR$ در D مستقل از مسیر است و میان F بر D پایستار است.

میدانهای پایستار در علوم حائز اهمیت اند زیرا یک میدان، در شرایطی که معمولاً در عمل پیش می آیند، پایستار است اگر و تنها اگر به ازای تابعی f ، $F = \nabla f$ ، تابع f را تابع پتانسیل F می نامند. پتانسیل الکتریکی تابعی است که میدان گرادیان آن یک میدان الکتریکی باشد. پتانسیل گرانشی تابعی است که گرادیان آن یک میدان گرانشی است. چنانکه ملاحظه خواهید کرد وقتی پتانسیل f میدان F را به دست آوردیم می توانیم با استفاده از قاعده زیر همه انتگرالهای خمیده خطی در F را محاسبه کنیم.

$$\int_A^B F \cdot dR = f(B) - f(A). \quad (1)$$

میدانهای پایستار ویژگیهای قابل توجه دیگری نیز دارند. پایستار بودن F بر D معادل است با اینکه F روی هر طوق بسته در D صفر باشد. این امر هم به نوبه خود در بسیاری از دامنه ها معادل این است که $\text{curl } F = 0$. این مطالب را با بحث درباره استزاهایی که در نمودار زیر دیده می شود توضیح می دهیم.



برای اینکه این استنتاجات درست باشند، قاعدتاً باید خمها، میدانها، و دامنه ها شرایطی داشته باشند. فرض می کنیم همه خمها قطعه قطعه هموار باشند یعنی از قطعات پیوسته مشتق پذیر پیاپی ساخته شده باشند.

همچنین فرض می کنیم که مؤلفه های F پیوسته اند و مشتقات جزئی اول و دوم آنها نیز پیوسته اند. بدون این فرضها از $F = \nabla f$ نمی توان نتیجه گرفت که $\text{curl } F = 0$. همان طور که در بخش پیشین ملاحظه کردید در صورتی این استنتاج درست است که مشتقات دوم آمیخته f برابر باشند. برای اطمینان یافتن از این امر از شرط پیوستگی بهره می گیریم.

فرض می کنیم D در فضا ناحیه ای باز باشد. یعنی هر نقطه ای در D بتواند مرکز گویی باشد که کاملاً در D جای گیرد. اگر بخواهیم از $\text{curl } F = 0$ نتیجه بگیریم که انتگرال F روی هر مسیر بسته ای در D برابر صفر است، به شرط دیگری در مورد D نیاز داریم. این شرط این است که D ساده همبند باشد؛ یعنی هر مسیر بسته ای در D را بتوان منقبض و در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه از D خارج شد. اگر مثلاً D از فضایی تشکیل شده باشد که یکی از محورهاش حذف شده است، D ساده همبند نیست زیرا حول این محور نمی توان طوقی را منقبض و در یک نقطه جمع کرد بدون اینکه بتوان از D خارج شد. (مسأله ۲۷ را ببینید.) اما فضا خود ساده همبند است.

سرانجام فرض می کنیم D همبند باشد که در مورد یک ناحیه باز به این معنی است که هر نقطه را می توان با خم همواری که در ناحیه قرار دارد به هر نقطه دیگری وصل کرد. شکل ۵۶.۱۹ را ببینید.

دارد به قسمی که

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

اگر و تنها اگر به ازای هر دو نقطه از D چون A و B مقدار انتگرال

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

مستقل از مسیری باشد که A و B را در D به هم وصل می کند. ۲. اگر این انتگرال مستقل از مسیری باشد که A را به B وصل می کند، مقدارش برابر است با

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = f(B) - f(A).$$

اثبات این مطلب که از $\mathbf{F} = \nabla f$ ، استقلال انتگرال از مسیر نتیجه می شود. فرض می کنیم A و B دو نقطه از D باشند و فرض می کنیم

$$C: \mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

خم قطعه قطعه همواری باشد که A و B را به هم وصل می کند. روی خم، f تابعی مشتق پذیر از t است و داریم

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (\text{قاعده زنجیری})$$

$$= \nabla f \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) \quad (2)$$

$$= \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

$$= \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_c \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt} dt \\ &= \int_c \frac{df}{dt} dt \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \frac{df}{dt} dt \\ &= f(x(b), y(b), z(b)) \\ &\quad - f(x(a), y(a), z(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$



همبند و ساده همبند است



همبند است اما ساده همبند نیست



همبند و ساده همبند است



ساده همبند است اما همبند نیست
مسیری از A تا B وجود ندارد که کاملاً در ناحیه قرار گیرد.

۵۶.۱۹ همبندی و ساده همبندی یکی نیستند. در واقع همان طور که در این شکل دیده می شود نمی توان یکی را از دیگری نتیجه گرفت.

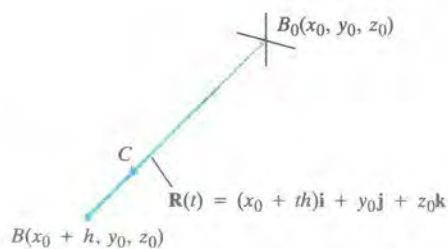
استنتاجها

حال به بررسی استنتاجها در نمودار فوق می پردازیم. مطلب را با قضیه ۱ آغاز می کنیم، سپس قضیه ۲، و سرانجام قضیه ۳ را عرضه می کنیم. قضیه ۱ از دو قسمت تشکیل می شود که هر دو قسمت را اثبات می کنیم. در این مرحله نمی توان قضیه ۲ را به طور کامل اثبات کرد اما نکات اصلی را شرح می دهیم. اثبات قضیه ۳ آسان و کوتاه است.

قضیه ۱

قضیه اصلی انتگرالهای خمیده خطی

۱. فرض می کنیم $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ میدانی برداری باشد که مؤلفه هایش در سراسر یک ناحیه همبند باز چون D واقع در فضا پیوسته باشند، در این صورت تابعی مشتق پذیر چون f وجود



۵۷.۱۹ برای محاسبه مشتق جزئی تابع

$$f(x, y, z) = \int_A^{(x, y, z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

نسبت به x در نقطه $B_0(x_0, y_0, z_0)$ حد

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ را وقتی $h \rightarrow 0$ محاسبه می‌کنیم.

داریم

$$\begin{aligned} \int_{B_0}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{t=0}^{t=1} (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \cdot (h dt \mathbf{i}) \\ &= h \int_0^1 M(x_0 + th, y_0, z_0) dt. \end{aligned} \quad (۷)$$

بنابراین خارج قسمت تفاضلی که برای تعریف $\partial f / \partial x$ در B_0 به کار می‌بریم عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{B_0}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_0^1 M(x_0 + th, y_0, z_0) dt. \end{aligned} \quad (۸)$$

چون M پیوسته است، به ازای هر $\epsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد به قسمی که

وقتی $|M(x_0 + th, y_0, z_0) - M(x_0, y_0, z_0)| < \epsilon$ ، $|th| < \delta$ از این مطلب نتیجه می‌شود که وقتی $|h| < \delta$ ، انتگرال موجود در رابطه (۸) با انتگرال زیر فرق می‌کند و این تفاوت کمتر از ϵ است.

$$\int_0^1 M(x_0, y_0, z_0) dt = M(x_0, y_0, z_0)$$

بنابراین وقتی $h \rightarrow 0$ ، حد انتگرال موجود در رابطه (۸) برابر است با $M(x_0, y_0, z_0)$. بنابراین طرف چپ رابطه (۸) همان حد را دارد و می‌توان نتیجه گرفت که در هر نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0)

از این دو مقدار انتگرال خطی برابر است با $f(B) - f(A)$ که عددی است مستقل از مسیری که A را به B وصل می‌کند. به این ترتیب، قسمت ۲ و نیز بخش «تنها اگر» قسمت ۱ اثبات شده.

اثبات این مطلب که از استقلال انتگرال از مسیر، رابطه $\mathbf{F} = \nabla f$ نتیجه می‌شود. لازم است نشان دهیم که اگر $\mathbf{F}$ در D پایستار باشد، آنگاه تابع مشتق‌پذیری چون f وجود دارد که در هر نقطه D تعریف می‌شود و در مورد آن داریم

$$\frac{\partial f}{\partial z} = P \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M. \quad (۳)$$

برای تعریف f ، نقطه A را در D برمی‌گزینیم و f را در هر نقطه دلخواهی چون B به صورت مقدار انتگرال $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$ روی مسیری هموار از A تا B تعریف می‌کنیم

$$f(B) = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}. \quad (۴)$$

چون $\mathbf{F}$ پایستار است، هر مسیری در D بگیریم، همین مقدار را به دست می‌دهد.

یکی از پیامدهای تعریف f این است که به ازای هر دو نقطه دلخواه B و B_0 واقع در D داریم

$$\begin{aligned} f(B) - f(B_0) &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} - \int_A^{B_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_{B_0}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} + \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_{B_0}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (۵)$$

حال مشتقات جزئی f را در نقطه $B_0(x_0, y_0, z_0)$ محاسبه می‌کنیم. چون B_0 مرکز گویی است که کاملاً در D قرار دارد (چون D باز است)، می‌توان عدد مثبت کوچکی چون h یافت که به ازای آن نقطه $B(x_0 + h, y_0, z_0)$ و پاره خط C که B_0 را به B وصل می‌کند نیز در D جای داشته باشد (شکل ۵۷.۱۹). مقدار انتگرال

$$\int_{B_0}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

را می‌توان با انتگرال‌گیری روی C با صورت پارامتری زیر محاسبه کرد

$$\mathbf{R}(t) = (x_0 + th)\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (۶)$$

قضیه ۳

احکام زیر با هم معادل اند:

$$1. \text{ روی هر مسیر بسته در } D \text{ داریم } \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0$$

۲. میدان $\mathbf{F}$ روی D پایستار است.

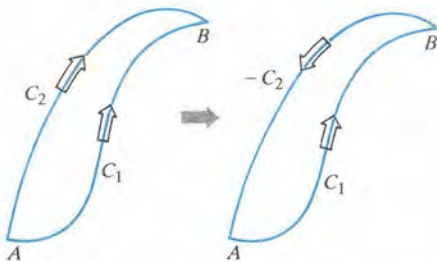
اثبات (۲) $\Rightarrow$ (۱) می‌خواهیم نشان دهیم که مقدار انتگرال

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

برای هر دو مسیر دلخواه C_1 و C_2 از A تا B با هم برابر است. جهت را بر C_2 عوض می‌کنیم تا مسیر $C_2 - C_1$ از A تا B به دست آید (شکل ۵۹.۱۹). دو مسیر C_1 و $C_2 - C_1$ طوق بسته C را تشکیل می‌دهند و داریم

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &+ \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین مقادیر انتگرال روی C_1 و C_2 با هم برابرند.



۵۹.۱۹ اگر دو مسیر از A تا B داشته باشیم با معکوس کردن جهت یکی می‌توان یک طوق ساخت.

اثبات (۱) $\Rightarrow$ (۲) می‌خواهیم نشان دهیم که روی هر طوق بسته C داریم

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

دو نقطه A و B را بر C بر می‌گزینیم و از آنها برای تقسیم C به دو قطعه C_1 از A تا B و C_2 از B تا A بهره می‌گیریم

واقع در D داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M.$$

به همین روش می‌توان روابط $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = P$ را نتیجه گرفت. در اینجا اثبات قضیه ۱ به پایان می‌رسد.

قضیه ۲

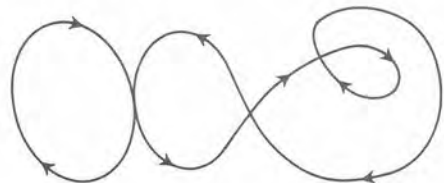
اگر در هر نقطه از یک ناحیه باز ساده-همبند D واقع در فضا داشته باشیم $\text{curl } \mathbf{F} = 0$ ، آنگاه روی هر مسیر بسته قطعه-قطعه هموار C واقع در D داریم

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

طرح اثبات این قضیه را معمولاً در دو مرحله اثبات می‌کنند. مرحله اول در مورد خمهای بسته ساده (یعنی خمهایی که خودشان را قطع نمی‌کنند) است. قضیه‌ای از توپولوژی که شاخه‌ای از ریاضیات پیشرفته است حاکی است که هر خم بسته ساده مشتق‌پذیری چون C در یک ناحیه باز ساده-همبند چون D ، مرکز یک رویه دوطرفه هموار مانند S است که آن نیز در D قرار دارد. از این رو، بنا بر قضیه استوکس داریم

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

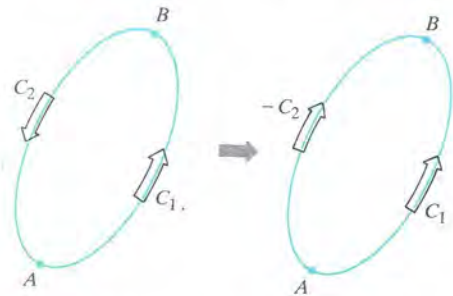
مرحله دوم در مورد خمهایی است که خودشان را قطع می‌کنند. نمونه‌ای از این خمها در شکل ۵۸.۱۹ دیده می‌شود. روش کار به این ترتیب است که این خمها را به طوقهای ساده‌ای تقسیم می‌کنند که رویه‌های محدود به جهت‌پذیرند. آنگاه قضیه استوکس را هر بار در مورد یک طوق به کار می‌بندند و نتایج را با هم جمع می‌کنند.



۵۸.۱۹ در یک ناحیه ساده-همبند، خمهایی را که خودشان را قطع می‌کنند می‌توان به طوقهایی تقسیم کرد که قضیه استوکس در مورد آنها کاربرد داشته باشد.

(شکل ۶۰.۱۹). آنگاه

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \\ = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$



۶۰.۱۹ اگر A و B روی یک طوق باشند، با معکوس کردن جهت بخشی از یک طوق می توان دومسیر از A تا B ساخت.

تعیین پتانسیل برای میدانهای پایستار

وجه تسمیه میدانهای پایستار این است که اجسامی که تحت تأثیر این میدانها قرار می گیرند از اصل پایستاری (بقاء) انرژی تبعیت می کنند. همان طور که دیدیم آزمون پایستار بودن این است که $\text{curl } \mathbf{F} = 0$. بر حسب مؤلفه ها، $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ پایستار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (9)$$

وقتی بدانیم $\mathbf{F}$ پایستار است معمولاً می خواهیم یک تابع پتانسیل یا پتانسیل برای $\mathbf{F}$ بیابیم؛ یعنی می خواهیم تابعی چون f بیابیم به قسمی که

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}. \quad (10)$$

بدین منظور چنانکه در مثال زیر دیده می شود از روابط زیر انتگرال می گیریم و f را تعیین می کنیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P.$$

مثال ۱ نشان دهید

$$\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$$

پایستار است. سپس تابع پتانسیلی برای آن بیابید.

حل: آزمون (۹) را با مفروضات زیر به کار می بندیم

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

و چنین محاسبه می کنیم

$$\frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

این برابریها نشان می دهند که تابعی چون f وجود دارد به قسمی که $\nabla f = \mathbf{F}$.

برای تعیین f از روابط زیر انتگرال می گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y \quad (11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + z.$$

از معادله نخست با ثابت گرفتن y و z نسبت به x انتگرال می گیریم و به دست می آوریم

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z).$$

ثابت انتگرالگیری را به صورت تابعی از y و z می نویسیم زیرا اگر y و z تغییر کنند ممکن است مقدار انتگرال تغییر کند. سپس از این رابطه $\partial f / \partial y$ را محاسبه می کنیم و آن را با عبارت $\partial f / \partial y$ در (۱۱) انطباق می دهیم و نتیجه می گیریم

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یا

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

بنابراین g تنها تابعی از z است و

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z).$$

حال از این معادله $\partial f / \partial z$ را محاسبه می کنیم و آن را با فرمول $\partial f / \partial z$ در (۱۱) انطباق می دهیم و نتیجه می گیریم

$$\frac{dh}{dz} = z \quad \text{یا} \quad xy + \frac{dh}{dz} = xy + z$$

کامل است. بنابراین آزمون کامل بودن صورت دیفرانسیلی همان آزمون پایستار بودن F است

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (۱۳)$$

این درست مانند این است که بگوییم صورت کامل است اگر و تنها اگر $\nabla \times F = 0$.

آزمون کامل بودن $M dx + N dy + P dz$ صورت دیفرانسیلی $M dx + N dy + P dz$ کامل است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (۱۴)$$

این درست معادل این است که بگوییم میدان $F = Mi + Nj + Pk$ پایستار است یا اینکه بگوییم

$$\nabla \times F = 0. \quad (۱۵)$$

مثال ۳ نشان دهید که $y dx + x dy + 4 dz$ کامل است و سپس انتگرال زیر را روی پاره خطی که از $(1, 1, 1)$ تا $(2, 3, -1)$ امتداد دارد محاسبه کنید

$$\int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, -1)} y dx + x dy + 4 dz.$$

حل: فرض می‌کنیم

$$M = y, \quad N = x, \quad P = 4$$

و آزمون (۱۴) را به کار می‌بندیم

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

این برابریها حکایت از کامل بودن $y dx + x dy + 4 dz$ دارند. چون انتگرالده کامل است، به ازای تابعی f داریم

$$y dx + x dy + 4 dz = df$$

و مقدار انتگرال برابر است با $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$ با انتگرال گرفتن از معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4. \quad (۱۶)$$

f را با اختلاف يك مقدار ثابت می‌یابیم. از نخستین معادله

بنابراین

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

از این رو

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

به ازای هر مقدار C يك تابع پتانسیل برای F وجود دارد. بنابراین بینهایت تابع پتانسیل وجود دارد. ■

مثال ۲ نشان دهید که

$$F = (2x - 3)i - zj + (\cos z)k$$

پایستار نیست.

حل: آزمون مذکور در روابط (۹) را به کار می‌بندیم و مستقیماً درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0$$

حال آنکه

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

بنابراین $\partial P / \partial y \neq \partial N / \partial z$ پس F پایستار نیست. آزمون دیگری لازم نیست. ■

صورت‌های دیفرانسیلی کامل

صورت‌های

$$M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + P(x, y, z) dz$$

را که در انتگرالهای خمیده خطی ظاهر می‌شوند صورت‌های دیفرانسیلی می‌نامند. گویند يك صورت دیفرانسیلی بر ناحیه‌ای چون D کامل است اگر در هر نقطه از D دیفرانسیل تابعی f باشد. یعنی يك صورت دیفرانسیلی بر D کامل است هر گاه به ازای تابعی f در سراسر D داشته باشیم

$$M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df. \quad (۱۲)$$

اگر صورت کامل باشد، میدان $F = Mi + Nj + Pk$ میدان گرادینان f است. به عکس، اگر $F = \nabla f$ ، صورت دیفرانسیلی

به دست می آوریم

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z).$$

معادله دوم حاکی است که

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$

بنابراین g تنها تابعی از z است، و

$$f(x, y, z) = xy + h(z).$$

معادله سوم در (۱۴) حاکی است که

$$h(z) = 4z + C \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4$$

بنابراین

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C$$

و مقدار انتگرال برابر است با

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3.$$

در مسأله ۲۱ روش دیگری برای محاسبه این انتگرال پیشنهاد شده است. ■

در فصل بعد هنگام بررسی معادلات دیفرانسیل بار دیگر با صورتهای دیفرانسیلی کامل روبرو می شویم.

مسأله‌ها

در مسائل ۱-۶، تعیین کنید کدام میدان پایستار است و کدام پایستار نیست.

$$F = yzi + xzj + xyk \quad ۱$$

$$F = (y \sin z)i + (x \sin z)j + (xy \cos z)k \quad ۲$$

$$F = yi + (x+z)j - yk \quad ۳$$

$$F = -yi + xj \quad ۴$$

$$F = (z+y)i + zj + (y+x)k \quad ۵$$

$$F = (e^x \cos y)i - (e^x \sin y)j + zk \quad ۶$$

در مسائل ۷-۱۰، يك پتانسیل f برای میدان F بیابید.

$$F = 2xi + 3yj + 4zk \quad ۷$$

$$F = (y+z)i + (x+z)j + (x+y)k \quad ۸$$

$$F = e^{y+2z}(i + xj + 2xk) \quad ۹$$

$$F = (y \sin z)i + (x \sin z)j + (xy \cos z)k \quad ۱۰$$

در مسائل ۱۱-۲۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x dx + 2y dy + 2z dz \quad ۱۱$$

$$\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz dx + xz dy + xy dz \quad ۱۲$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} x dx + y^2 dy \quad ۱۳$$

$$\int_{(1,0)}^{(0,1)} 2x \cos y dx - x^2 \sin y dy \quad ۱۴$$

$$\int_{(1,0)}^{(1,\pi/2)} 2x \sin y dx + x^2 \cos y dy \quad ۱۵$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} (x^2 + y) dx + (y^2 + x) dy \quad ۱۶$$

$$\int_{(1,1)}^{(2,2)} (y^2 x + y) dx + (x^2 y + x) dy \quad ۱۷$$

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy dx + (x^2 + z^2) dy + 2yz dz \quad ۱۸$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(2,2,1)} 3x^2 dx + \frac{z^2}{y} dy + 2z \ln y dz \quad ۱۹$$

$$\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy + dz \quad ۲۰$$

۲۱. انتگرال زیر

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y dx + x dy + 4 dz$$

در مثال ۳ آمده بود. این انتگرال را به این ترتیب محاسبه کنید که معادلات پارامتری پاره‌خطی را که از $(1, 1, 1)$ تا $(2, 3, -1)$ ادامه دارد بیابید و انتگرال $F = yi + xj + 4k$ را روی این پاره‌خط به دست آورید. این کار مجاز است زیرا F پایستار است و انتگرال مستقل از مسیر است.

۲۲. نشان دهید که مقدار

$$\int_A^B z^2 dx + 2y dy + xz dz$$

به مسیر از A تا B بستگی ندارد.

۲۳. انتگرال زیر را روی پاره‌خطی که $(0, 0, 0)$ را به $(0, 3, 4)$ وصل می‌کند محاسبه کنید

$$\int_C x^2 dx + yz dy + y^2 dz.$$

۲۴. نشان دهید میدان زیر پایستار نیست

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + z\mathbf{j} - y\mathbf{k}.$$

۲۵. قضیه گرین در مورد گردش يك میدان پایستار در امتداد يك خم بسته واقع در يك ناحیه باز ساده‌همبند در صفحه چه می‌گوید؟

۲۶. قضیه استوکس در مورد گردش يك میدان پایستار حول يك خم بسته واقع در يك ناحیه باز ساده‌همبند در فضا چه می‌گوید؟

۲۷. نشان دهید تاو

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

صفر است اما اگر C دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع در صفحه xy باشد انتگرال زیر صفر نیست

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}.$$

(قضیه ۲ در این مورد کاربرد ندارد زیرا دامنه $\mathbf{F}$ ساده‌همبند نیست. میدان $\mathbf{F}$ روی محور z تعریف نمی‌شود زیرا برای منقبض کردن C و جمع کردن آن در يك نقطه بدون اینکه از دامنه $\mathbf{F}$ خارج شویم، راهی وجود ندارد.)



TOOLKIT PROGRAMS

Scalar Fields Vector Fields

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. انتگرال خمیده خطی چیست؟ انتگرالهای خمیده خطی برای چه به کار می‌روند؟ مثالهایی بیاورید.

۲. میدان برداری چیست؟ مثالهایی بیاورید.

۳. کاری را که يك نیرو برای جابه‌جا کردن يك ذره روی يك خم انجام می‌دهد چگونه محاسبه می‌کنند؟

۴. چگالی شار و چگالی گردش يك میدان برداری چیستند؟

اینها چگونه به دیورژانس و تاو میدان مربوط می‌شوند؟

۵. چه قضیه‌ای شار يك میدان برداری را که در صفحه تعریف می‌شود به دیورژانس آن مربوط می‌کند؟ مثالی بیاورید.

۶. چه قضیه‌ای گردش يك میدان برداری را که در صفحه تعریف می‌شود به تاو آن مربوط می‌کند؟ مثالی بیاورید.

۷. مساحت رویه‌ها چگونه محاسبه می‌شود؟ مثالی بیاورید.

۸. انتگرال رویه‌ای چیست؟ چگونه از انتگرالهای رویه‌ای برای محاسبه جرم و گشتاور استفاده می‌شود؟ مثالهایی بیاورید.

۹. چه قضیه‌ای شار يك میدان برداری در فضا را به دیورژانس آن مربوط می‌کند؟ مثالی بیاورید.

۱۰. چه قضیه‌ای گردش يك میدان برداری در فضا را به تاو آن مربوط می‌کند؟ مثالی بیاورید.

۱۱. پایستار بودن يك میدان برداری در ناحیه‌ای چون D از فضا یعنی چه؟ میدانهای پایستار چگونه مشخص می‌شوند؟

۱۲. اگر $f(x, y, z) = 2x - 3y + e^z$ و اگر C خم همواری از $A(0, 0, 0)$ تا $(1, 2, \ln 3)$ باشد مقدار انتگرال زیر چقدر است؟

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{R}$$

۱۳. تابع پتانسیل يك میدان پایستار را چگونه می‌یابید؟ انتگرال زیر را در يك میدان پایستار چگونه محاسبه می‌کنید؟ مثالی بیاورید

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}.$$

۱۴. اگر $\mathbf{F} = \nabla f$ ، S يك رویه تراز f ، و C خمی بر S باشد، آیا رابطه زیر برقرار است یا برقرار نیست؟ چرا؟

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0.$$

مسئله‌های گوناگون

۱. شکل ۶۱۰۹ دو مسیر متشکل از چند پاره‌خط در فضا از مبدأ تا نقطه $(1, 1, 1)$ را نشان می‌دهد. از

$$f(x, y, z) = 2x - y^2 - 2z + 1$$

روی این دو مسیر انتگرال بگیرد.

۶. سیمی روی خم

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

واقع است. مطلوب است جرم سیم هر گاه

الف) δ ثابت باشد،ب) $\delta = t$.

در مسائل ۷-۱۰، میدانهای برداری را رسم کنید.

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۷$$

$$\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} \quad ۸$$

$$\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} \quad ۹$$

$$\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) / (x^2 + y^2) \quad ۱۰$$

۱۱. در حالتی زیر فرمولی برای میدان برداری $\mathbf{F}(x, y, z)$ پس نویسید به قسمی که $\mathbf{F} = f(\rho)\mathbf{R}$ که در آن $\rho = |\mathbf{R}|$ و

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

الف) $\mathbf{F}$ به صورت شعاعی از مبدأ به بیرون متوجه است و

$$|\mathbf{F}| = \rho^{-n}$$

ب) $\mathbf{F}$ متوجه مبدأ است و $|\mathbf{F}| = 2$ پ) $\mathbf{F}$ میدان جاذبه گرانشی جرم M واقع در مبدأ

است و قانون هکس معکوس در مورد آن به کار می رود. (نگران

این مطلب نباشید که ممکن است چنین میدانی وجود نداشته

باشد.)

۱۲. فرض کنید

$$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, -a \leq x \leq a\}$$

و نیز فرض کنید C مرز R باشد.الف) R و C را رسم کنید.

ب) برهان قضیه گرین را در مورد این ناحیه بیان کنید.

۱۳. مطلوب است مساحت روبه‌ای که صفحه $x = 1$ از انتهایسه‌میوار $2x = y^2 + z^2$ جدا می‌کند.

۱۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای بیضوی که استوانه

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
 از صفحه $x + y + z = 1$ جدا می‌کند.

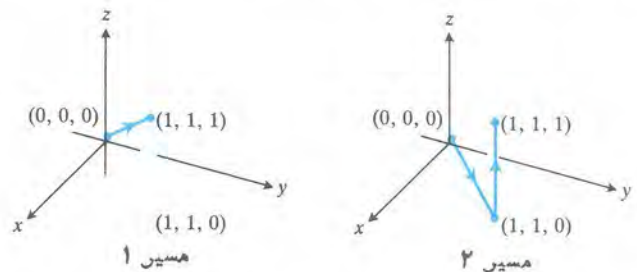
۱۵. مطلوب است مساحت مثلثی که یک هشتم اول از صفحه

$$x/a + y/b + z/c = 1$$

می‌کند. درستی جواب خود را با روشهای برداری بیازمایید.

۱۶. مطلوب است مساحت ناحیه واقع در بالای صفحه xyz که

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

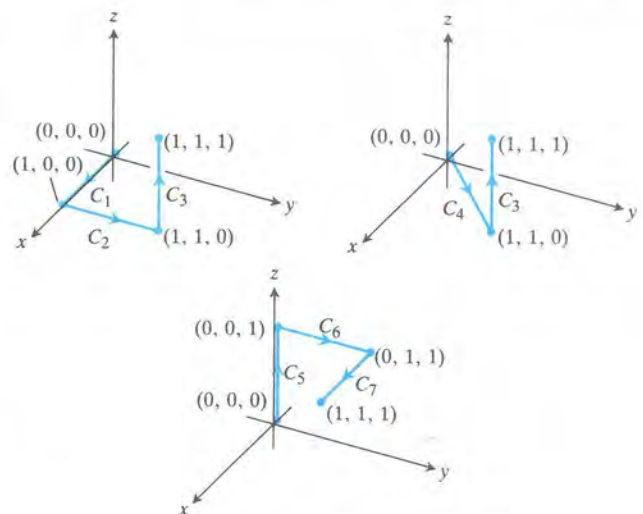


۱۹.۶ مسیرهای مذکور درمسأله ۱.

۲. شکل ۱۹.۶ سه مسیر متشکل از چند پاره خط از مبدأ تا نقطه $(1, 1, 1)$ را در فضا نشان می‌دهد. از

$$f(x, y, z) = x^2 + y - z$$

روی هر یک از این مسیرها انتگرال بگیرید.



۱۹.۶ مسیرهای مذکور درمسأله ۲.

۳. سیم نازکی به چگالی ثابت روی خم زیر قرار دارد. مطلوب

است I_x و R_x .

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \ln 2.$$

۴. یک کمان فلزی نازک روی نیم‌دایره $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ در صفحه xy قرار دارد. چگالی در نقطه (x, y) کمان برابر است با

$$\delta(x, y) = 2a - y.$$

۵. سیمی به چگالی ثابت δ روی خم زیر واقع است. مطلوب است I_x ، I_y و R_x .

$$\mathbf{R}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \mathbf{k},$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

۲۴. مطلوب است مساحت بخشی از استوانه مسأله ۲۳ که در درون نیمکره قرار دارد. (دانهایی: بر صفحه xz تصویر کنید، یا انتگرالگیری یگانه $\int h \, ds$ را به کار ببرید که در آن ارتفاع استوانه و ds جزء طول قوس واقع در صفحه xy است.)

۲۵. فرمولهای خاصی برای مساحت دویهها، اگر S رویه همواری باشد که با معادله $z = f(x, y)$ که بر ناحیه R_{xy} واقع در صفحه xy تعریف می شود مشخص شود، می توان نوشت

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

و می توان S را به عنوان رویه تراز $F(x, y, z) = 0$ تابع F قلمداد کرد. اگر قائم واحد بر R_{xy} را $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ اختیار کنیم به دست می آوریم

$$|\nabla F| = |f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} - \mathbf{k}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

$$|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |(f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1$$

و

$$S \text{ مساحت} = \iint_{R_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|} dA \quad (1)$$

$$= \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dx \, dy.$$

همچنین مساحت یک رویه هموار چون $x = f(y, z)$ بر ناحیه R_{yz} واقع در صفحه yz برابر است با

$$S \text{ مساحت} = \iint_{R_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1} \, dy \, dz \quad (2)$$

و مساحت یک رویه هموار چون $y = f(x, z)$ بر ناحیه R_{xz} واقع در صفحه xz برابر است با

$$S \text{ مساحت} = \iint_{R_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1} \, dx \, dz. \quad (3)$$

الف) مطلوب است مساحت رویه ای که صفحه $z = 4$ از پایین سهمیوار $z = x^2 + y^2$ جدا می کند.
 ب) مطلوب است مساحت رویه ای که صفحه $z = 2$ از پایین سهمیوار $z = 1 - y^2 - z^2$ جدا می کند.
 پ) مطلوب است مساحت رویه واقع در ربع اول که صفحات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 2$ و $z = 2$ از استوانه $z = y^2$ جدا می کنند.

۱۷. مطلوب است یک انتگرال دوگانه برای مساحت رویه ای که استوانه $z = x^2 + y^2$ از استوانه $z = a^2 - y^2$ جدا می کند. این انتگرال دوگانه را به یک انتگرال یگانه نسبت به متغیر y تبدیل کنید.

۱۸. سوراخی به مقطع مربع و به ضلع $2/\sqrt{2}$ به صورت متقارن در کره ای به شعاع ۲ ایجاد می شود. نشان دهید که مساحت رویه جدا شده برابر است با $16\pi(\sqrt{2} - 1)$.

۱۹. مطلوب است مساحت رویه چتره شکل ۶۰.۱۸ در بخش مسائل گوناگون انتهای فصل ۱۸.

۲۰. مطلوب است مساحت رویه $z = x^2 - y^2$ که $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 - y^2$ (دانهایی: مختصات قطبی را به کار ببرید.)

۲۱. مطلوب است مساحت بخش کروی مرز ناحیه

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

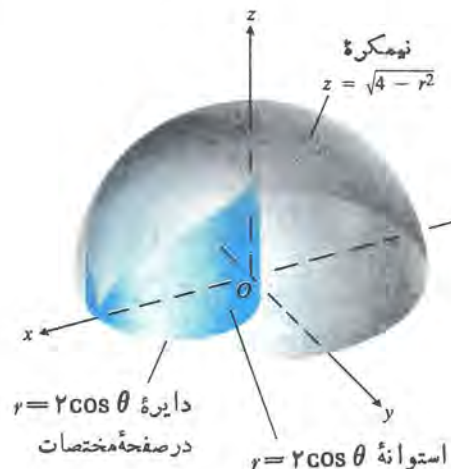
$$x^2 + y^2 - x \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + x \geq 0.$$

(دانهایی: نخست نسبت به x و y انتگرال بگیرید.)

۲۲. مطلوب است مساحت ناحیه ای که استوانه $z = a^2 - y^2$ از رویه $z = x^2 - y^2$ جدا می کند.

۲۳. مطلوب است مساحت رویه ای که استوانه $z = x^2 + y^2$ از نیمکره $z = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ جدا می کند. (شکل ۶۳.۱۹).



۶۳.۱۹ رویه ای که استوانه $z = x^2 + y^2$ از نیمکره $z = 4 - x^2 - y^2 - z^2$ جدا می کند (مسأله ۲۳). در مختصات استوانه ای، معادلات نیمکره و استوانه عبارت اند از $z = \sqrt{4 - r^2}$ و $r = 2 \cos \theta$.

ت) رابطه (۲) را به دست آورید.

ث) رابطه (۳) را به دست آورید.

۲۶. فرض کنید رویه نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، $z \geq 0$ را قوسهای دایره عظیمه‌ای که بر آنها مختص کروی θ ثابت است (مدارهای نصف النهار طول جغرافیایی) و دایره موازی با صفحه xy که بر آنها ϕ ثابت است (مدارهای موازی با خط استوا) تقسیم می‌کنند. فرض کنید فواصل زاویه‌ای به ترتیب برابرند با $\Delta\theta$ و $\Delta\phi$. انتگرال $\int_S \int z \, d\sigma$ روی نیمکره را با حدود مناسب انتگرالگیری به صورت زیر بیان کنید و انتگرال را محاسبه کنید

$$\lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow 0 \\ \Delta\phi \rightarrow 0}} \sum F(\theta, \phi) \Delta\theta \Delta\phi = \iint F(\theta, \phi) d\theta d\phi$$

(داهنمایی: بهتر است نتیجه زیر را به دست آورید)

$$\begin{aligned} d\sigma &= (r \, d\theta) \cdot (\rho \, d\phi) = \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \\ &= a^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

که در آن ρ ، ϕ ، و θ مختصات کروی اند.

۲۷. به کمک نتیجه $d\sigma = a^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi$ از مسأله ۲۶، فاصله متوسط «دایره عظیمه‌ای» یک نقطه واقع بر نیمکره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ، $z \geq 0$ را از قطب شمال، $N(0, 0, a)$ ، بیابید.

۲۸. گرما از یک جسم گرم به یک جسم سرد منتقل می‌شود. در شارش گرما در سه بعد، معادله اصلی آهنگ خروج گرما از ناحیه‌ای چون D عبارت است از

$$\iint_S K \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iiint_D c \delta \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (۱)$$

نمادهای این فرمول عبارت‌اند از

$u = u(x, y, z, t)$ دما در نقطه (x, y, z) در لحظه t

K ضریب رسانندگی گرمایی

δ چگالی جرم

c ضریب گرمای ویژه و آن عبارت است از مقدار گرمایی که باید به واحد جرم یک ماده داده شود تا دمای آن یک درجه بالا رود.

S رویه مرزی ناحیه D

$\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق جهتی در جهت قائم بر و نوسو بر S

چگونه $\partial u / \partial n$ به گرادیان دما مربوط می‌شود؟ ∇u متوجه کدام جهت است؟ (پاسخ خود را با کلمات بیان کنید.) چرا به نظر می‌رسد طرف چپ رابطه (۱) شاخصی از آهنگ شارش گرما باشد؟ حال به طرف راست رابطه (۱) بنگرید: اگر ΔV جزء حجمی کوچکی در D باشد، $\delta \Delta V$ نشانگر چیست؟ اگر دمای این جزء در مدت Δt به اندازه Δu تغییر کند (الف) مقدار، (ب) آهنگ متوسط تغییر گرما در این جزء چقدر است؟ طرف راست رابطه (۱) چه چیز فیزیکی را نشان می‌دهد (جواب را با کلمات بیان کنید.) آیا این تعبیر از معادله (۱) درست است که بگوییم: «آهنگ خروج گرما از مرز D برابر است با آهنگی که با آن گرما از D تأمین می‌شود»؟

۲۹. فرض کنید رابطه (۱) در مسأله ۲۸ برقرار است و فرض کنید در D چشمه یا چاه گرما وجود ندارد. معادله زیر را به عنوان معادله‌ای که در هر نقطه از D باید برقرار باشد به دست آورید

$$\nabla \cdot (K \nabla u) = c \delta \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (۲)$$

(پیشنهاد: قضیه دیورژانس را در مورد طرف چپ رابطه (۱) به کار ببرید، و D را کره‌ای به شعاع ϵ بگیرید؛ سپس $\epsilon \rightarrow 0$.)

۳۰. عملگر لاپلاس. فرض کنید نتیجه مسأله ۲۹ برقرار است و نیز فرض کنید K ، c ، و δ ثابت‌اند. نتیجه بگیرید که شرط دمای حالت ماندگار در D ، معادله لاپلاس زیر است

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{یا} \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$$

در ریاضیات پیشرفته، نماد Δ را برای عملگر لاپلاس به کار می‌برند

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

بنا بر این، طبق این نماد

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u).$$

با استفاده از قضیه دیورژانس و با فرض اینکه توابع u و v و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آنها در نواحی مورد نظر پیوسته باشند، فرمولهای مسائل ۳۱-۳۴ را ثابت کنید. فرض کنید S رویه مرزی ناحیه ساده-همبند D است.

$$\iint_S u \nabla v \cdot d\sigma = \iiint_D [u \Delta v + (\nabla u) \cdot (\nabla v)] dV. \quad ۳۱$$

۳۲

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) dV$$

الف) وقتی $\rho = 1$ ، $u = 100$ ؛ و وقتی $\rho = 2$ ، $u = 0$ ؛
 ب) وقتی $\rho = 1$ ، $u = 100$ ؛ و وقتی $\rho = 2$ ، $u = 0$ ؛
 (توجه: قسمت الف) مربوط می شود به مسئله شارش گرما در
 حالت ماندگار که نظیر آن را در انتهای مسئله ۳۷ مشاهده
 کردیم؛ قسمت ب) مربوط می شود به يك مرز عایق روی
 کره $\rho = 2$.)

در مسائل ۳۹-۴۱، گردش F در امتداد C را در جهت مشخص
 شده بیابید.

$$F = xi + yj + zk \quad ۳۹$$

C : بیضی محصل تقاطع صفحه $z = 0$ و $2x + 3y - z = 0$
 استوانه $x^2 + y^2 = 12$ ، در خلاف جهت ساعت وقتی
 از بالا نگاه شود.

$$F = \nabla(xy^2z^3) \quad ۴۰$$

C : نظیرمسئله ۳۹

$$F = \nabla \times (xi + yj + zk) \quad ۴۱$$

C : دایره $x^2 + y^2 = 1$ ، $z = 0$ ، در جهت ساعت وقتی
 از بالا نگاه شود.

۴۲) مطلوب است محاسبه انتگرال شارش

$$F = \nabla \times (xi + yj + zk)$$

روی پاره خط بین مبدأ و نقطه $(1, 2, 3)$.

۴۳) مطلوب است محاسبه انتگرال شارش $F = \nabla(xy^2z^3)$ روی
 پاره خط بین $(1, 1, 1)$ و $(2, 1, -1)$.

۴۴) فرض کنید C خم مسطحی باشد که معادله بردارپش عبارت
 است از

$$R(t) = (e^t \cos t)i + (e^t \sin t)j.$$

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر روی C از نقطه $(1, 0)$ تا نقطه
 $(e^{2\pi}, 0)$

$$\int \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

۴۵) اگر چگالی $\rho(x, y, z)$ سیالی، تابعی از فشار $p(x, y, z)$
 باشد و اگر

$$f(x, y, z) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}$$

که در آن p_0 ثابت است، نشان دهید $\nabla f = \nabla p / \rho$.

(پیشنهاد: فرض کنید نتیجه مسئله ۳۱ برقرار است و در آن جای
 u و v را عوض کنید و از آن بهره بگیرید.)

$$\int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_D \int [u \Delta u + |\nabla u|^2] dV \quad ۳۳$$

(پیشنهاد: نتیجه مسئله ۳۱ را به ازای $v = u$ به کار ببرید.)

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_D \int \Delta u dV \quad ۳۴$$

(پیشنهاد: در نتیجه مسئله ۳۲، از $v = -1$ استفاده کنید.)

۳۵) تابع u در ناحیه D همساز است اگر و تنها اگر این تابع در
 سراسر D در معادله لاپلاس $\Delta u = 0$ صدق کند. با استفاده از اتحاد
 موجود در مسئله ۳۳ نتیجه بگیرید که اگر u در D همساز باشد و
 در تمام نقاط روی رویه S که مرز D است، یا $u = 0$ و یا
 $\partial u / \partial n = 0$ ، آنگاه در سراسر D داریم $\nabla u = 0$ و بنا بر این u
 در سراسر D ثابت است.

۳۶) از نتیجه مسئله ۳۵ می توان برای اثبات یکتایی جوابهای
 معادله لاپلاس در D بهره گرفت، مشروط بر اینکه یا (i) مقدار u
 در هر نقطه واقع بر S مشخص باشد یا (ii) مقدار $\partial u / \partial n$ در
 هر نقطه از S مشخص باشد. این مطلب را می توان با فرض اینکه
 u_1 و u_2 در D همسازند و هر دو شرایط مرزی یکسانی را بر آورده
 می سازند و سپس با فرض $u = u_1 - u_2$ اثبات کرد. این بر همان
 یکتایی را کامل کنید.

۳۷) در مسائل ۲۸-۳۰، با شارش گرما سروکار داشتیم. فرض
 کنید K ، c ، و δ ثابت اند و دمای $u = u(x, y, z)$ با زمان تغییر
 نمی کند. با استفاده از نتایج مسائل ۳۰ و ۳۴ نتیجه بگیرید که
 آهنگ خالص خروج گرما از طریق رویه S برابر با صفر است.
 (توجه: این نتیجه را می توان مثلاً در مورد نساحیه D بین دو کره
 هم مرکز به کاربرد هر گاه کره داخلی در دمای 100° و کره خارجی
 در دمای 0° نگاه داشته شوند. به این ترتیب، گرما با آهنگ یکسانی
 از میان رویه داخلی وارد D می شود و از میان رویه خارجی از D
 خارج می گردد.)

۳۸) فرض کنید $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. نشان دهید که اگر
 C_1 و C_2 ثابت باشند و $\rho > 0$ ، آنگاه

$$u = C_1 + \frac{C_2}{\rho}$$

همساز است. مقادیر C_1 و C_2 را چنان بیابید که شرایط مرزی
 زیر بر آورده شوند.

قضیه گرین در مورد نواحی ساده-همبند

۴۶. با يك برهان هندسی نشان دهید كه قضیه گرین در مورد هر ناحیه ساده-همبندی چون R كه مرزش خم بسته ساده C است برقرار است مشروط به اینکه بتوان R را به تعدادی متناهی از نواحی نامتناحل $R_1, R_2, \dots, R_n$ با مرزهای $C_1, C_2, \dots, C_n$ از نوعی كه قضیه در مورد هر يك از R_i ها و C_i ها، $i = 1, \dots, n$ ، برقرار باشد تقسیم کرد.

۴۷. فرض کنید R ناحیه ای واقع در صفحه xy ، و C مرز آن باشد. نیز فرض کنید مساحت R عبارت باشد از

$$A(R) = \oint_C \frac{1}{2} (x dy - y dx).$$

تصور کنید معادلات $y = g(u, v)$ ، $x = f(u, v)$ ناحیه R و مرز C را به روشی پیوسته و يك به يك به ترتیب به ناحیه R' و خم C' واقع در صفحه uv می نگارند. با استفاده از فرمول گرین ثابت کنید

$$\begin{aligned} \iint_R dx dy &= \iint_{R'} \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \iint_{R'} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \right) du dv. \end{aligned}$$

(داهنمایی: توجه کنید كه

$$\begin{aligned} \iint_R dx dy &= \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{C'} \left[f(u, v) \left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right) \right. \\ &\quad \left. - g(u, v) \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right) \right] \\ &\text{و فرمول گرین را در مورد } R' \text{ و } C' \text{ به كار بندید.} \end{aligned}$$

معادلات دیفرانسیل

چشم انداز

مبحث معادلات دیفرانسیل را در چشم اندازهای فصلهای ۴ و ۵ معرفی کردیم. دیدیم که مدل ریاضی برای یک پدیده طبیعی غالباً شامل معادله ای به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (۱ \text{ الف})$$

همراه با شرط اولیه ای چون

$$y = y_0 \quad \text{هنگامی که} \quad x = x_0 \quad (۱ \text{ ب})$$

است.

در مبحث معادلات دیفرانسیل، معادله های (۱ الف) و (۱ ب) چیزی را تعریف می کنند که يك «مسألة با مقدار اولیه» نامیده می شود. علاوه بر روشهایی که تا به حال برای حل چنین مسائلی آموخته ایم، [در این فصل] روشهای تازه ای می آموزیم که از آن جمله اند: روشهای ترسیمی، روشهای عددی، و استفاده از سریهای نامتناهی.

معادلات دیفرانسیل توصیف کننده حرکت سیارات، که از قانون دوم حرکت نیوتن به دست می آیند، هم شامل شتاب و هم شامل سرعت می شوند. این معادلات را در فصل ۱۴ بررسی کردیم. در مورد حرکت موشکها در نزدیکی سطح زمین و در فضا، معادلات دیفرانسیل پیچیده ترند. برای حل آنها از روشهای عددی به کمک کامپیوترهای سریع و پیشرفته استفاده می کنند. همچنین کامپیوتر به

موتور موشک دستور می دهد که چگونه و در چه زمان کار خود را آغاز کند تا موشک در مدار مناسب قرار گیرد. لزوم سرعت و دقت در این گونه کاربردهای کامپیوتری، انگیزه ای قوی برای پژوهش در زمینه سخت افزار و نرم افزار کامپیوتر به منظور تولید کامپیوترهای سریعتر و قابل اعتمادتر بوده و هست.

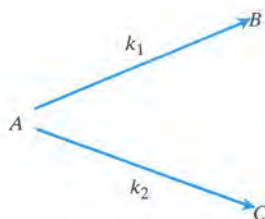
در این فصل، هدف این است که انواع معادلاتی را که به طور تحلیلی قابل حل اند، به اختصار شرح دهیم و روش حل آنها را نیز ارائه کنیم. گاه روشهای تحلیلی کارساز نیستند و باید از روشهای عددی استفاده کنیم، همان گونه که قاعده سیمپسون را برای محاسبه انتگرال معین به کار می بریم. (حتی در مواردی که می توان راه حلی تحلیلی یافت، ممکن است روش عددی مفیدتر باشد، مثلاً در مباحث دینامیک فضا و کنترل.)

بحث ما ازوماً مختصر است. دانشجویان علوم و مهندسی به احتمال زیاد درسهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و معادلات دیفرانسیل می گیرند و در آن دروسها مطالب بسیار بیشتری درباره کاربرد و حل معادلات دیفرانسیل خواهند آموخت.

۱۰۲۰ مقدمه

معادله دیفرانسیل معادله ای است که شامل يك یا چند مشتق یا دیفرانسیل باشد. معادلات دیفرانسیل بر اساس ویژگیهای زیر رده بندی می شوند.

الف) نوع (عادی یا جزئی)



۱۰۲۰ واکنش دهنده A با آهنکهای متناسب با مقدار موجود A ، فرآورده های B و C را تولید می کند.

اگر x ، y ، و z مقادیر A ، B ، و C در لحظه t باشند، آنگاه معادلات دیفرانسیلی که این فرایندها توصیف می کنند عبارت اند از

$$\frac{dx}{dt} = -(k_1 + k_2)x, \quad \frac{dy}{dt} = k_1x, \quad \frac{dz}{dt} = k_2x. \quad (5)$$

اگر در لحظه $t=0$ ، تنها A وجود داشته باشد، شرایط اولیه عبارت اند از

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \quad (6)$$

معادلات (5) و (6) همراه با هم مثالی از یک مسئله با مقدار اولیه است. اولین معادله موجود در (5) را می توان به سادگی بر حسب x حل کرد

$$x = x_0 e^{-(k_1 + k_2)t}. \quad (7 \text{ الف})$$

وقتی این مقدار را در دو معادله دیگر (5) قرار دهیم، انتگرال آنها را نیز می توانیم به دست آوریم

$$y = \frac{k_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}) x_0. \quad (7 \text{ ب})$$

$$z = \frac{k_2}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2)t}) x_0. \quad (7 \text{ پ})$$

روابط (7 الف، ب، پ) روی هم جوابی برای مسئله مقدار اولیه مذکور در معادلات (5) و (6) هستند که با جانشانی مستقیم می توان آنها را آزمود.

جواب

تابعی چون

$$y = f(x)$$

را جواب یک معادله دیفرانسیل نامند اگر چنانچه در معادله دیفرانسیل

(ب) مرتبه (که عبارت است از مرتبه مشتقی که بالاترین مرتبه را در معادله دارد)؛ و

(پ) درجه (نمای بالاترین توان مشتقی که بالاترین مرتبه را در معادله دارد، پس از حذف مخارج کسرها و رادیکالهای مربوط به متغیر وابسته و مشتقاتش).

مثلاً

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^5 + \frac{y}{x^2 + 1} = e^x \quad (1)$$

یک معادله دیفرانسیل عادی از مرتبه سه و از درجه دو است. وقتی متغیر وابسته، y ، تابعی از تنها یک متغیر مستقل x باشد، فقط مشتقات «عادی» در معادله ظاهر می شوند. ولی اگر متغیر وابسته، y ، تابعی از بیش از یک متغیر مستقل باشد، فرضاً وقتی

$$y = f(x, t)$$

که در آن x و t متغیرهای مستقل هستند، آنگاه مشتقات جزئی y در معادله ظاهر می شوند. به عنوان مثال، معادله موج

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2)$$

(مسائل ۳۲-۳۸ از بخش ۸.۱۶) یک معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه ۲ و از درجه یک است. (بحث اسلوبمند درباره معادلات دیفرانسیل جزئی از حیطه بحث ما خارج است.)

مسائل فیزیکی زیادی بعد از فرمولبندی آنها به زبان ریاضی به معادلات دیفرانسیل منجر می شوند. مثلاً، در بخش ۲.۱۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را که حرکت پرتابه ای را (بدون در نظر گرفتن مقاومت هوا) توصیف می کند بحث و حل کردیم

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg. \quad (3)$$

در واقع، یکی از منابع عمده معادلات دیفرانسیل در مکانیک قانون دوم نیوتن

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (4)$$

است که در آن $\mathbf{F}$ برآیند نیروهای وارد بر جسمی به جرم m ، و سرعت $\mathbf{v}$ است.

مثالی از رشته سینتیک شیمیایی، واکنش دهنده ای چون A است که در تبدیلاتی موازی با سرعتی متناسب با مقدار A موجود در لحظه t به دو فرآورده B و C تبدیل می شود. (شکل ۱۰۲۰ را ببینید.)

مسئله‌ها

در مسائل زیر، نشان دهید که توابع مفروض جوابی برای معادله دیفرانسیل داده شده هستند.

$$xy'' - y' = 0 \quad ۱.$$

$$y = x^2 + 3 \quad (\text{الف})$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 y''' + 4x^2 y'' + xy' + y = x, \quad y = (1/2)x \quad ۲.$$

$$yy'' = 2(y')^2 - 2y' \quad ۳.$$

$$y = C \quad (\text{الف})$$

$$C_1 y = \tan(C_1 x + C_2) \quad (\text{ب})$$

$$y' + \frac{1}{x}y = 1, \quad y = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} \quad ۴.$$

$$2y' + 3y = e^{-x}, \quad y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x} \quad ۵.$$

$$(x \sin x)y' + (\sin x + x \cos x)y = e^x/x \quad ۶.$$

$$y = \frac{1}{x \sin x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

۲.۲۵ معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول از درجه اول

معادله دیفرانسیل مرتبه اول از درجه اول را همواره می‌توان به صورت زیر درآورد که در آن M و N معرف توابعی از x و y اند

$$M dx + N dy = 0. \quad (۱)$$

وقتی این توابع شرایط معینی را برآورند، جواب نسبتاً به آسانی به دست می‌آید و به صورت زیر نوشته می‌شود

$$f(x, y) = C. \quad (۲)$$

انواع خاصی از معادلات مرتبه اول از درجه اول که مسا آنها را بررسی می‌کنیم، جدایی پذیر، همگن، خطی و کامل نام دارند.

معادله‌های جدایی پذیر

وقتی M فقط تابعی از x و N فقط تابعی از y باشد، آنگاه معادله (۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$M(x) dx + N(y) dy = 0.$$

مزبور به جای y ، $f(x)$ ، و به جای مشتقات مربوط به y ، مشتقات متناظر $f'(x)$ را قرار دهیم، معادله برقرار بماند. مثلاً، اگر C_1 و C_2 مقادیر ثابتی باشند، آنگاه

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (\text{الف})$$

جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0. \quad (\text{ب})$$

مسئله‌ای فیزیکی که به صورت یک معادله دیفرانسیل درمی‌آید، معمولاً شامل شرایطی اضافی هم هست که به وسیله خود معادله دیفرانسیل بیان نمی‌شوند. مثلاً، در مکانیک معمولاً هم مکان و سرعت اولیه جسم متحرک و هم نیروها به طور جداگانه مشخص می‌شوند. معادله یا معادلات دیفرانسیل حرکت، معمولاً جوابهایی دارند که طبق معادله (الف) بسالاً ثابتهای دلخواهی را دربردارند. از این رو به این ثابتهای دلخواه مقادیر خاصی نسبت می‌دهند تا شرایط اولیه توصیف شده برآورده شوند. (به مثالهای بخشهای ۹.۶ و ۲۰.۱۳ رجوع کنید.)

معمولاً یک معادله دیفرانسیل مرتبه n جوابی شامل n ثابت دلخواه دارد. این جواب را جواب عمومی می‌نامند. وقتی جواب عمومی در دست باشد و شرایط اولیه هم داده شده باشند، صرفاً با عملیات جبری می‌توان مقادیر خاص این ثابتها را به دست آورد. پس توجه خودمان را به مسئله یافتن جواب عمومی انواع معینی از معادلات دیفرانسیل معطوف خواهیم کرد.

در بقیه این فصل به بحث درباره مطالب زیر می‌پردازیم و هم‌جا فقط معادلات دیفرانسیل عادی را بررسی می‌کنیم.

۱. معادلات مرتبه اول از درجه اول

(الف) با متغیرهای جدایی پذیر

(ب) همگن

(پ) خطی

(ت) با دیفرانسیلهای کامل

۲. انواع خاصی از معادلات مرتبه دوم

۳. معادلات خطی با ضرایب ثابت

(الف) همگن

(ب) ناهمگن

۴. تکنیکهای تقریب زدن

(الف) سریهای توانی

(ب) روشهای عددی

اصطلاحات تازه فهرست بالا را در جای خود تعریف خواهیم کرد.

را معرفی می‌کنیم. در این صورت داریم

$$y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

و (۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$v + x \frac{dv}{dx} = F(v). \quad (۷)$$

معادله (۷) را با جدا کردن متغیرها به صورت زیر می‌توان حل کرد

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - F(v)} = 0. \quad (۸)$$

بعد از حل شدن (۸)، جواب معادله اصلی با قرار دادن y/x به جای v به دست می‌آید.

مثال ۲ نشان دهید که معادله زیر همگن است و آن را حل کنید

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0.$$

حل: با استفاده از معادله مفروض داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{2xy} = -\frac{1 + (y/x)^2}{2(y/x)}.$$

این معادله با فرض

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{که در آن} \quad F(v) = -\frac{1 + v^2}{2v}$$

به صورت معادله (۵) است. سپس معادله (۸) به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v dv}{1 + 3v^2} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{x} + \frac{dv}{v + \frac{1 + v^2}{2v}} = 0$$

جواب این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\ln|x| + \frac{1}{3} \ln(1 + 3v^2) = C$$

و لذا

$$x^3(1 + 3v^2) = \pm e^{3C} = C'.$$

جواب بر حسب x و y عبارت است از

$$x^3 \left(1 + \frac{3y^2}{x^2}\right) = x(x^2 + 3y^2) = C'.$$

این، صورت متعارف معادله جدایی پذیر مرتبه اول است. با این معادلات زیاد مواجه می‌شویم، و درکاربردهای بسیاری که در فصل ۶ مطرح کردیم (سود مرکب، واپاشی رادیواکتیو، قانون سرمایه‌ش نیوتن، و رشد جمعیت) مورد استفاده قرار گرفتند. بعد از اینکه معادله را به صورت متعارف درآوردیم، می‌توانیم مستقیماً با انتگرال‌گیری از هر جمله جواب را بیابیم که در این صورت داریم

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

مثال ۱ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2) e^x. \quad (۳)$$

حل: معادله را به صورت دیفرانسیلی می‌نویسیم، تمام جملات شامل y را همراه با dy و تمام جملات شامل x را همراه با dx گروه‌بندی می‌کنیم

$$\frac{dy}{1 + y^2} = e^x dx \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{1 + y^2} - e^x dx = 0$$

اگر از جزء اول نسبت به x و از جزء دوم نسبت به y انتگرال بگیریم جواب به دست می‌آید

$$e^x - \tan^{-1}(y) = C. \quad (۴)$$

اگر y را محاسبه کنیم داریم

$$y = \tan(e^x - C).$$

معادله‌های همگن

گاه معادله دیفرانسیلی را که متغیرهایش جدایی پذیر نیستند، با تعویض متغیر می‌توان به معادله‌ای تبدیل کرد که متغیرهایش جدایی پذیر باشند. این کار را در مورد هر معادله دیفرانسیلی که بتواند به صورت زیر درآید می‌توان کرد

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \quad (۵)$$

چنین معادله‌ای را همگن می‌نامند.

برای تبدیل معادله (۵) به معادله‌ای که متغیرهایش جدایی پذیر باشند، متغیر تازه

$$v = \frac{y}{x} \quad (۶)$$

معادلات دیفرانسیل خطی در زمینه‌های بسیاری مطرح می‌شوند به عنوان مثالی ساده، جمعیت کشوری را در نظر بگیرید که در اثر تولد، مرگ، مهاجرت از کشور، و مهاجرت به آن، در حال تغییر است. آهنگ هر یک از اینها ممکن است با زمان تغییر کند. اگر y جمعیت در زمان t ، $k(t)$ آهنگ تولد منهای آهنگ مرگ، و $m(t)$ آهنگ مهاجرت به کشور منهای آهنگ مهاجرت از آن باشد، آنگاه آهنگ تغییر جمعیت عبارت است از

$$\frac{dy}{dt} = k(t)y + m(t).$$

این معادله نسبت به y خطی است، و با روشی که ذیلاً به بررسی آن می‌پردازیم، اگر $k(t)$ و $m(t)$ معلوم باشند می‌توانیم آن را حل کنیم.

راه معمول حل معادله (۹) این است که تابعی چون $\rho = \rho(x)$ بیابیم که اگر معادله را در آن ضرب کنیم، طرف چپ، مشتق حاصلضرب ρy باشد. لذا (۹) را در ρ ضرب می‌کنیم

$$\rho \frac{dy}{dx} + \rho P y = \rho Q \quad (9')$$

و سپس شرط زیر را بر ρ اعمال می‌کنیم

$$\rho \frac{dy}{dx} + \rho P y = \frac{d}{dx}(\rho y). \quad (10)$$

اگر سمت راست (۱۰) را بسط دهیم و جملات برابر را حذف کنیم، معادله زیر به عنوان شرطی که ρ باید در آن صدق کند به دست می‌آید

$$\frac{d\rho}{dx} = \rho P. \quad (11)$$

در معادله (۱۱)، تابع $P = P(x)$ معلوم است، لذا می‌توانیم متغیرها را از هم جدا کنیم و ρ را بیابیم

$$\frac{d\rho}{\rho} = P dx, \quad \ln |\rho| = \int P dx + \ln C \quad (12)$$

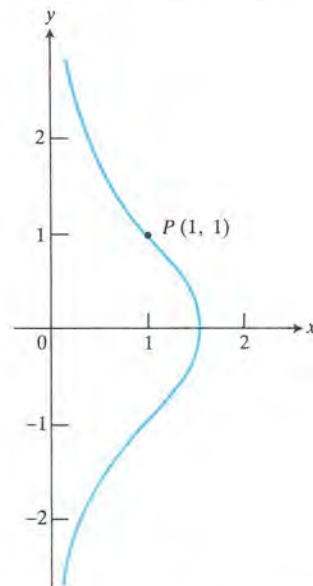
$$\rho = \pm C e^{\int P dx}.$$

چون به کلیترین صورت تابع ρ نیاز نیست، با انتخاب $\pm C = 1$ می‌توانیم (۱۲) را به صورت زیر در آوریم

$$\rho = e^{\int P dx}. \quad (13)$$

این تابع را یک عامل انتگرالگیری برای معادله (۹) می‌نامند.

نکته اگر بخواهیم شرط اولیه $y = 1$ به ازای $x = 1$ برقرار باشد، این مقادیر را در معادله $x(x^2 + 3y^2) = C'$ قرار می‌دهیم و $C' = 4$ را به دست می‌آوریم. نمودار این معادله در شکل ۲۰۲۰ آمده است. این نمودار نسبت به محور x تقارن دارد و معادله $x(x^2 + 3y^2) = 4$ ، y را به صورت تابعی از x تعریف نمی‌کند. با وجود این، به ازای هر y یک x وجود دارد، لذا می‌توانیم نظر گاه خود را تغییر دهیم و با استفاده از همین معادله و نمودار، x را به صورت تابعی از y تعریف کنیم که در معادله دیفرانسیل $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$ صدق کند و شرط اولیه $x = 1$ به ازای $y = 1$ را بر آورد.



۲۰۲۰ جواب $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$
با شرط $y = 1$ وقتی $x = 1$ ، عبارت است از
 $x(x^2 + 3y^2) = 4$

معادله‌های خطی

پیچیدگی یک معادله دیفرانسیل عمدتاً بستگی به نحوه ظهور متغیر وابسته و مشتقاتش دارد. از این نظر معادلات خطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. در یک معادله دیفرانسیل خطی، هر جمله معادله از درجه صفر یا یک است؛ در محاسبه درجه یک جمله، نماهای متغیر وابسته و هر یک از مشتقاتش را که در معادله وجود دارند با هم جمع می‌کنیم. مثلاً، (d^2y/dx^2) از درجه اول و $y(dy/dx)$ از درجه دوم است، زیرا باید یک را که نمای y است با یک که نمای dy/dx است جمع کنیم.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول را همیشه می‌توان به صورت متعارف زیر در آورده که در آن P و Q توابعی از x اند

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q. \quad (9)$$

با کمک آن (۹') به

$$\frac{d}{dx}(\rho y) = \rho Q$$

تبدیل می‌شود که جوابش به صورت زیر است

$$\rho y = \int \rho Q dx. \quad (14)$$

چون ρ از (۱۳) به دست می‌آید، و P و Q از روی معادله دیفرانسیل مفروض (۹) معلوم‌اند، روابط (۱۳) و (۱۴) خلاصه آنچه را که برای حل (۹) لازم داریم، به دست می‌دهند.

مثال ۳ مطلوب است حل معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

حل: هم‌اکنون این معادله خود به صورت متعارف است و داریم $P=1$ و $Q=e^x$. از معادله زیر عامل انتگرالگیری را محاسبه می‌کنیم

$$\rho = e^{\int P dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

وقتی دو طرف معادله اصلی را در این عامل ضرب کنیم، طرف چپ به صورت

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = \frac{d}{dx}(e^x y)$$

و طرف راست به صورت e^{2x} درمی‌آید. لذا داریم

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^{2x}$$

که پس از انتگرالگیری از آن داریم

$$e^x y = \frac{1}{3} e^{2x} + C$$

$$y = \frac{1}{3} e^x + C e^{-x}.$$

مثال ۴ مطلوب است حل معادله

$$x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2.$$

حل: این معادله را به صورت متعارف

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x} y = x$$

درمی‌آوریم و می‌بینیم که

$$P = -\frac{3}{x}, \quad Q = x$$

پس

$$\rho = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = \frac{1}{e^{3 \ln x}} = \frac{1}{x^3}$$

و

$$\frac{1}{x^3} y = \int \frac{x}{x^3} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$y = -x^2 + C x^3.$$

توجه کنید که وقتی $\int P dx$ شامل لگاریتم باشد، همان‌طور که در مثال ۴ هست، بهتر است قبل از قرار دادن عبارت $e^{\int P dx}$ در معادله (۱۴)، آن را ساده کنیم. برای ساده کردن این عبارت، از ویژگی‌های توابع لگاریتمی و نمایی استفاده می‌کنیم

$$e^{\ln A} = A, \quad e^{m \ln A} = A^m, \quad e^{n+m \ln A} = A^m e^n.$$

معادله دیفرانسیلی که بر حسب y و dy/dx خطی باشد، ممکن است جدایی‌پذیر یا همگن هم باشد. در این حالتها، انتخاب روش حل با ماست. همچنین توجه کنید معادله‌ای که نسبت به x و dx/dy خطی باشد، با تکنیک مبتنی بر عامل انتگرالگیری قابل حل است؛ کافی است در معادله‌های (۹)، (۱۳)، و (۱۴) نقش x و y را عوض کنیم.

معادله‌های کامل

معادله‌ای که بتوان آن را به صورت

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (15)$$

نوشت و دارای ویژگی زیر باشد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (16)$$

کامل نامیده می‌شود، زیرا طرف چپ آن یک دیفرانسیل کامل است. (معادلات ۱۲ و ۱۳ بخش ۷.۱۹ را ببینید. برای اینکه آن معادلات



شکل زمین و دیفرانسیل کامل

در قرن هیجدهم، دو نظر متضاد درباره شکل زمین وجود داشت. یکی که توسط طرفداران دکارت ابراز می‌شد این بود که زمین در دو قطب کشیدگی دارد. دیگری که از آن طرفداران نیوتن بود این بود که زمین در دو قطب پهن و مسطح است. ریاضیدانان بسیاری به طرفداری از یکی از این دو گروه وارد معرکه شدند. در ۱۷۳۶ ریاضیدان جوان فرانسوی موسوم به الکسی کلرو^۱ (۱۷۱۳-۱۷۶۵) به یک هیأت اعزامی که سرپرست آن پیر دوموپرتویی^۲ بود ملحق شد تا به لاپلند برود و با اندازه‌گیری طول جغرافیایی آنجا به مساجرا خاتمه دهد. نتیجه کار او، نظر طرفداران نیوتن را تأیید کرد. کلرو حاصل مطالعات خود درباره شکل زمین را در ۱۷۴۳ در مقاله‌ای منتشر کرد و در آنجا به بحث درباره تعادل سیالات و جاذبه گرانشی بیضیوارهای دورانی نیز پرداخت. در این اثر و نیز در آثار قبلیش (به سال ۱۷۳۹ و ۱۷۴۰) برای نخستین بار محك مشتق جزئی برای کامل بودن يك صورت دیفرانسیلی $M dx + N dy$ ذکر شده است.

را در اینجا به کار ببریم فرض کنید $P=0$ و توجه کنید که $M(x, y)$ و $N(x, y)$ به z بستگی ندارند. در این صورت سه شرط مذکور در معادله ۱۳ به یک شرط $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$ تبدیل می‌شود. روش حل يك معادله کامل این است که تابعی چون $f(x, y)$ بیابیم که داشته باشیم

$$df = M dx + N dy. \quad (17)$$

در این صورت (۱۵) به صورت

$$df = 0$$

درمی‌آید و جواب به صورت زیر است که در آن C ثابت دلخواهی است

$$f(x, y) = C. \quad (18)$$

برای اینکه تابعی مانند $f(x, y)$ بیابیم که در معادله (۱۷) صدق کند، لازم است داشته باشیم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y).$$

اگر از اولی نسبت به x مشتق بگیریم و y را ثابت فرض کنیم، داریم

$$f(x, y) = \int_x M(x, y) dx + g(y) \quad (19)$$

که در آن $g(y)$ تابع مجهولی است از y که نقش يك ثابت انتگرال‌گیری دلخواه را دارد. انتگرال

$$\int_x M(x, y) dx$$

يك انتگرال نامعین معمولی نسبت به x است که در آن y ثابت می‌باشد. تابع f حاصل از معادله (۱۹) به ازای هر انتخابی از تابع $g(y)$ در شرط زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y).$$

زیرا هنگام محاسبه مشتق جزئی نسبت به x ، $g(y)$ ثابت است. برای اینکه ببینیم چگونه باید شرط دوم

$$\partial f / \partial y = N(x, y)$$

برآورده شود، از دو طرف معادله (۱۹) نسبت به y مشتق گرفته،

نتیجه را برابر با $N(x, y)$ می‌گیریم

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y) dx + \frac{\partial g(y)}{\partial y} = N(x, y).$$

چون $g(y)$ تابعی از y تنهاست، dg/dy را به جای $\partial g/\partial y$ می‌نویسیم، و نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dg}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_x M(x, y) dx. \quad (20)$$

اگر شرط کامل بودن برآورده شود، طرف راست معادله (۲۰) تنها تابعی از y خواهد بود و می‌توانیم از آن نسبت به y انتگرال بگیریم تا $g(y)$ به دست آید. وقتی این مقدار از $g(y)$ در معادله (۱۹) قرار گیرد، تابعی چون $f(x, y)$ به دست می‌آید که جواب معادله $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ را به صورت $f(x, y) = C$ به دست می‌دهد. مثال زیر نحوه کار را نشان می‌دهد.

مثال ۵ نشان دهید که معادله زیر کامل است و آن را حل کنید

$$(x^2 + y^2) dx + (2xy + \cos y) dy = 0.$$

حل: در این مثال داریم

$$M(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N(x, y) = 2xy + \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y.$$

پس شرط $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ برآورده می‌شود زیرا $2y = 2y$. حال برای یافتن تابعی چون $f(x, y)$ با ویژگی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \cos y$$

از معادله اول نسبت به x انتگرال می‌گیریم و y را ثابت فرض می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + g(y).$$

از دوطرف این معادله نسبت به y مشتق می‌گیریم و نتیجه را برابر با $N(x, y)$ قرار می‌دهیم

$$\frac{dg}{dy} = \cos y \quad \text{یا} \quad 2xy + \frac{dg}{dy} = 2xy + \cos y$$

اگر از این معادله آخر نسبت به y انتگرال بگیریم خواهیم داشت

$$g(y) = \sin y.$$

در اینجا از ثابت دلخواه انتگرال‌گیری می‌توانیم صرف‌نظر کنیم زیرا در جواب نهایی می‌نویسیم $f(x, y) = C$ تابع f مطلوب عبارت است از $f(x, y) = x^3/3 + xy^2 + \sin y$ و جواب معادله دیفرانسیل برابر است با

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + \sin y = C.$$

نکته روش مورد استفاده در این مثال از الگوی معادلات (۱۹) و (۲۰) تبعیت می‌کند. خود شما پس از به دست آوردن تجربه بیشتر احتمالاً خواهید توانست راههای میانبری پیدا کنید. در این مثال جملات $y^2 dx$ و $2xy dy$ را می‌توان با الهام از الگوی کلی

$$d(uv) = u dv + v du$$

با ضوابط $u = y^2$ و $v = x$ به صورت زیر ترکیب کرد

$$y^2 dx + 2xy dy = d(xy^2).$$

در این صورت معادله دیفرانسیل مقروض چیزی جز

$$d\left(\frac{x^3}{3} + xy^2 + \sin y\right) = 0$$

نیست زیرا

$$d\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 dx, \quad d(xy^2) = y^2 dx + 2xy dy$$

$$d(\sin y) = \cos y dy.$$

اگر بدو این الگو را می‌شناختیم، می‌توانستیم فوراً جوابی را که با روش طولانی‌تر یافتیم بنویسیم. می‌توان ثابت کرد که هر معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

را می‌توان با ضرب کردن دوطرف آن در عامل انتگرال‌گیری مناسبی چون $\rho(x, y)$ به صورت کامل درآورد. این عامل انتگرال‌گیری دارای ویژگی زیر است

$$\frac{\partial}{\partial y}[\rho(x, y)P(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\rho(x, y)Q(x, y)].$$

متأسفانه، تعیین ρ از روی این معادله ساده نیست. درواقع، روشی کلی وجود ندارد که با آن بتوان حتی یک عامل انتگرال‌گیری

تعدادی از مسأله‌ها را مشخص کرده، و نوع بقیه را مشخص نکرده‌ایم. برای حل مسائل دسته اخیر، ممکن است ابتدا بخواهید راه ابتکاری پیدا کنید (این کار می‌تواند مشکل را حل کند) و سپس ببینید آیا معادله کامل است، جدایی‌پذیر است، همگن است یا خطی است. جواب را به هر نحوی به دست آورده باشید، همیشه می‌توانید با مشتق‌گیری پاسخ را آزمایش کنید. مسائلی هم هستند که ظاهر ساده‌ای دارند، اما با هیچ یک از روشهای این فصل قابل حل نیستند. (در بخش ۹.۲۵ نشان خواهیم داد که یک راه کنار آمدن با این گونه مسائل استفاده از سریهاست.) همچنین باید در نظر داشته باشید که این فصل همه روشهایی را که در کتابهای پیشرفته تر مطرح می‌شوند، در بر نمی‌گیرد. (ضمناً پژوهشگرانی که تخصص آنها معادلات دیفرانسیل است مرتباً به نتایج جدیدی در این زمینه دست می‌یابند.)

مسأله‌ها

جدایی‌پذیر

در معادلات دیفرانسیل زیر متغیرها را از هم جدا و آنها را حل کنید.

$$x(2y-3)dx + (x^2+1)dy = 0 \quad ۰۱$$

$$x^2(y^2+1)dx + y\sqrt{x^2+1}dy = 0 \quad ۰۲$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} \quad ۰۳$$

$$\sqrt{2xy} \frac{dy}{dx} = 1 \quad ۰۴$$

$$\sin x \frac{dx}{dy} + \cosh 2y = 0 \quad ۰۵$$

$$\ln x \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad ۰۶$$

$$xe^y dy + \frac{x^2+1}{y} dx = 0 \quad ۰۷$$

$$y\sqrt{2x^2+3} dy + x\sqrt{4-y^2} dx = 0 \quad ۰۸$$

$$\sqrt{1+x^2} dy + \sqrt{y^2-1} dx = 0 \quad ۰۹$$

$$x^2 y \frac{dy}{dx} = (1+x) \csc y \quad ۰۱۰$$

۰۱۱ سود پدوسته. شخصی با ۱۰۰۰ دلار حساب باز می‌کند و قصد دارد در هر سال ۱۰۰۰ دلار به آن بیفزاید. به تمام سپرده‌ها در هر سال به‌طور پیوسته ۱۰٪ سود تعلق می‌گیرد. با این فرض که

برای معادله دیفرانسیل دلخواهی به دست آورد، و جستجو برای یافتن آن ممکن است بی‌نتیجه باشد. با وجود این، غالباً می‌توان ترکیبهای خاصی از دیفرانسیلها را که به «روشهای ابتکاری» به صورت کامل درمی‌آیند، تشخیص داد.

مثال ۶ معادله زیر را حل کنید

$$x dy - y dx = x y^2 dx.$$

حل: ترکیب $x dy - y dx$ ممکن است ما را به یاد فرمول زیر بیندازد

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} = -\left(\frac{u dv - v du}{v^2}\right).$$

بنابراین می‌توانیم معادله را بر x^2 تقسیم کنیم یا پس از تغییر دادن علامتها، آن را بر y^2 تقسیم کنیم. مسلماً این راه نتیجه بخش تر است، و لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$x dy - y dx = x y^2 dx, \quad \frac{y dx - x dy}{y^2} = -x dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) + x dx = 0, \quad \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

اگر معادله را به صورت

$$(x y^2 + y) dx - x dy = 0$$

می‌نوشتیم و حاصل را در عامل انتگرالگیری $1/y^2$ ضرب می‌کردیم می‌توانستیم همین نتیجه را به دست آوریم. از اینجا به دست می‌آمد

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2}\right) dy = 0$$

که کامل است زیرا

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

فکته وقتی معادله مفروضی چون $M dx + N dy = 0$ در دست باشد، ممکن است بتوانیم آن را از چند راه حل کنیم. مثلاً، معادله $x dy + y dx = 0$ را می‌توانیم پس از تقسیم کردن بر xy با جدا کردن متغیرها حل کنیم؛ این معادله یک معادله همگن هم هست، و خطی (بر حسب x و y هر دو) و کامل نیز هست. ساده‌ترین راه حل آن این است که تمیز دهیم

$$x dy + y dx = d(xy)$$

و لذا جواب آن $xy = C$ است. در مجموعه مسائل زیر، نوع

زیر درآید

$$(r+s)dr + (r-s)ds = 0.$$

این معادله را حل و جواب را بر حسب x و y بیان کنید.

مسیرهای متعامد. اگر هر عضو خانواده‌ای از خمها جوابی برای معادله دیفرانسیل

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

و هر عضو خانواده دیگری از خمها جوابی برای معادله

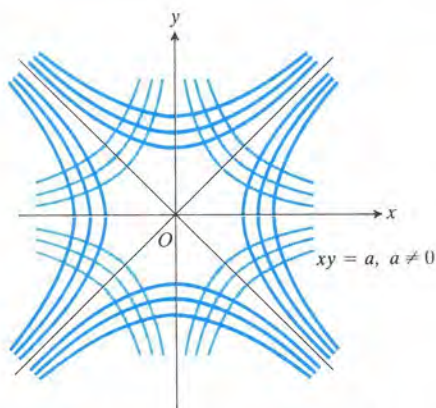
$$N(x, y)dx - M(x, y)dy = 0$$

باشد، آنگاه هر خم متعلق به یکی از خانواده‌ها بر هر خم خانواده دیگر عمود است. در این صورت می‌گویند که هر یک از خانواده‌ها خانواده مسیرهای متعامد خانواده دیگری است. در مسائل ۲۱ و ۲۲ خانواده جوابهای معادله دیفرانسیل مفروض و خانواده مسیرهای متعامد را بیابید. هر دو خانواده را رسم کنید.

$$x dy - y dx = 0 \quad ۰۲۱$$

$$2xy dy + (x^2 - y^2) dx = 0 \quad ۰۲۲$$

۰۲۳ مسیرهای متعامد خانواده خمهای $xy = a$ ، $a \neq 0$ (شکل ۳۰۲۵) را بیابید



۳۰۲۵ هر خم بر هر خم از خانواده دیگر که با آن متلاقی باشد، متعامد است.

خطی

مسائل ۲۴-۳۳ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \quad ۰۲۴$$

$$2 \frac{dy}{dx} - y = e^{x/2} \quad ۰۲۵$$

سپرده‌های اضافه شونده نیز به‌طور پیوسته افزوده شوند، نشان دهید که $x(0) = 1000$ و $dx/dt = 1000 + 0.15x$ در اینجا x مبلغ موجود در حساب (بر حسب دلار) در زمان t است. چند سال طول می‌کشد تا موجودی به ۱۰۰۰۰۰۰ دلار برسد؟

۱۲. مسأله دستگاه برف‌دوب. در یکی از صبحهای زمستان برف با آهنگ ثابتی شروع به باریدن می‌کند. یک دستگاه برف‌روب کار خود را در ظهر آغاز می‌کند، و با آهنگ ثابتی (بر حسب حجم در واحد زمان) برفها را پارو می‌کند. میزان پیشروی تیغه دستگاه بین ساعت یک تا دو به اندازه نصف پیشروی آن بین ظهر تا یک بعد از ظهر است. در چه ساعتی بارش برف آغاز شده است؟

۱۳. قاذون سرمایش نیوتن. فرض بر این است که T ، دمای جسم کوچکی که وارد محیطی با دمای T_0 می‌شود، با آهنگی متناسب با $T - T_0$ تقلیل می‌یابد. اگر جسمی با دمای 100°C وارد محیطی با دمای 20°C شود و بیست دقیقه طول بکشد تا دمای آن به 80°C برسد، ظرف چه مدت دمای این جسم از 100°C به 60°C می‌رسد؟

(برای مسائل دیگری در این باب، به بخش ۹.۶ رجوع کنید.)

همگن

نشان دهید که معادلات مذکور در مسائل ۱۴-۱۹ همگن اند و آنها را حل کنید.

$$(x^2 + y^2)dx + xy dy = 0 \quad ۰۱۴$$

$$x^2 dy + (y^2 - xy) dx = 0 \quad ۰۱۵$$

$$(xe^{y/x} + y)dx - x dy = 0 \quad ۰۱۶$$

$$(x+y)dy + (x-y)dx = 0 \quad ۰۱۷$$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y-x}{x} \quad ۰۱۸$$

$$\left(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad ۰۱۹$$

۲۰. مطلوب است حل معادله

$$(x+y+1)dx + (y-x-3)dy = 0$$

با تعویض متغیری به صورت

$$x = r + a, \quad y = s + b$$

و انتخاب ثوابتهای a و b به‌طوری که معادله حاصل به صورت

در زمان t ، x چقدر است؟ (اگر يك ماشین حساب بر نامه‌پذیر در اختیار داشته باشید، به سادگی می‌توانید $x(5)$ ، $x(10)$ ، $x(20)$ و $x(40)$ را بیابید و نحوه رشد سرمایه را ببینید.)

کامل

در مسائل ۳۶-۳۸، از عامل انتگرال‌گیری مقروض ρ استفاده کنید و معادله دیفرانسیل را به صورت کامل در آورید. سپس معادله را حل کنید.

$$(x+2y)dx - xdy = 0, \quad \rho = 1/x^2 \quad ۳۶$$

$$ydx + xdy = 0 \quad ۳۷$$

$$\rho = \frac{1}{xy} \quad (\text{الف})$$

$$\rho = \frac{1}{(xy)^2} \quad (\text{ب})$$

$$ydx - xdy = 0 \quad ۳۸$$

$$\rho = \frac{1}{y^2} \quad (\text{الف})$$

$$\rho = \frac{1}{x^2} \quad (\text{ب})$$

$$\rho = \frac{1}{xy} \quad (\text{پ})$$

$$\rho = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (\text{ت})$$

مسائل ۳۹-۴۸ را حل کنید.

$$(x+y)dx + (x+y^2)dy = 0 \quad ۳۹$$

$$(2xe^y + e^x)dx + (x^2 + 1)e^y dy = 0 \quad ۴۰$$

$$(2xy + y^2)dx + (x^2 + 2xy - y)dy = 0 \quad ۴۱$$

$$(x + \sqrt{y^2 + 1})dx - \left(y - \frac{xy}{\sqrt{y^2 + 1}}\right)dy = 0 \quad ۴۲$$

$$x dy - y dx + x^2 dx = 0 \quad ۴۳$$

$$x dy - y dx = (x^2 + y^2) dx \quad ۴۴$$

$$(x^2 + x - y)dx + x dy = 0 \quad ۴۵$$

$$(e^x + \ln y + \frac{y}{x})dx + \left(\frac{x}{y} + \ln x + \sin y\right)dy = 0 \quad ۴۶$$

$$x \frac{dy}{dx} + y = \frac{\sin x}{x^2} \quad ۲۶$$

$$x dy + y dx = \sin x dx \quad ۲۷$$

$$x dy + y dx = y dy \quad ۲۸$$

$$(x-1)^2 \frac{dy}{dx} + 4(x-1)^2 y = x+1 \quad ۲۹$$

$$\cosh x dy + (y \sinh x + e^x) dx = 0 \quad ۳۰$$

$$e^{2y} dx + 2(xe^{2y} - y) dy = 0 \quad ۳۱$$

$$(x-2y)dy + ydx = 0 \quad ۳۲$$

$$(y^2+1)dx + (2xy+1)dy = 0 \quad ۳۳$$

۳۴. قند خون. اگر گلوکز با آهنگ ثابتی داخل رگ شود، و تغییر غلظت کل گلوکز خون نسبت به زمان را با $c(t)$ نمایش دهیم، $c(t)$ را می‌توان با معادله دیفرانسیل زیر توصیف کرد

$$\frac{dc}{dt} = \frac{G}{100V} - kc.$$

در این معادله V ، G و k ثابت‌های مثبتی هستند؛ G بر حسب میلی‌گرم بر دقیقه عبارت است از آهنگ وارد شدن گلوکز به رگ، و V حجم خون بدن بر حسب لیتر است (حدوداً ۵ لیتر برای بزرگسالان). غلظت $c(t)$ بر حسب میلی‌گرم بر سانتی‌لیتر اندازه‌گیری می‌شود. جمله $-kc$ به معادله اضافه شده است زیرا فرض بر این است که گلوکز مرتباً با آهنگی متناسب با غلظتش به ملکولهای دیگری تبدیل می‌شود.

الف) از این معادله $c(t)$ را به دست آورید؛ به جای $c(0)$ از c_0 استفاده کنید.

ب) غلظت در حالت پایا، $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t)$ ، را بیابید.

۳۵. برنامه یک سرمایه‌گذار. حقوق سرمایه‌گذاری ۲۰۰۰۰ دلار در سال است و انتظار دارد به این مبلغ در هر سال ۱۰۰۰ دلار اضافه شود. اگر این سرمایه‌گذار ابتدا ۱۰۰۰ دلار در حسابی بگذارد که به طور پیوسته ۸٪ در سال سود می‌دهد، و به میزان ۵٪ حقوقش به طور پیوسته بر سرمایه خود بیفزاید، فرمولی برای سپرده x در پایان t سال به صورت $dx/dt = a + bx + ct$ است که در آن a ، b ، و c ثابت‌های مثبت هستند و $x(0) = 1000$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 0.08x + 0.05(20000 + 1000t) \\ &= 1000 + 0.08x + 50t. \end{aligned}$$

تعویض مناسب متغیرها به معادلات مرتبه اول تبدیل کرد. معادلات مرتبه اول حاصل را غالباً با روشهای مذکور در بخش قبل می توان حل کرد.

صورت کلی يك معادله دیفرانسیل مرتبه دوم عبارت است از

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \quad (1)$$

دو نوع از معادلاتی که می توان آنها را با جانشانی به مرتبه اول تبدیل کرد، آنها می هستند که یا x نداشته باشند یا y .

نوع ۱ معادلات بدون متغیر وابسته. هرگاه معادله (۱) به صورت خاص

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (2)$$

باشد، با جانشانیهای

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

می توان آن را به يك معادله مرتبه اول تبدیل کرد. در این صورت معادله (۲) به صورت زیر درمی آید که بر حسب p از مرتبه اول است

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

اگر بتوانیم p را از این معادله به صورت تابعی از x ، فرضاً به صورت

$$p = \phi(x, C_1)$$

بیابیم، آنگاه با يك انتگرالگیری دیگر می توانیم y را محاسبه کنیم

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int p dx = \int \phi(x, C_1) dx + C_2.$$

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

را در بخش ۳.۹ با همین روش حل کردیم.

مثال ۱ جواب عمومی معادله مرتبه دوم زیر را بیابید

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2.$$

$$\left(\frac{y^2}{1+x^2} - 2y\right) dx + (2y \tan^{-1} x - 2x$$

$$+ \sinh y) dy = 0$$

$$dy + \frac{y - \sin x}{x} dx = 0. \quad ۴۸$$

۴۹. اگر a, b, c ثابت باشند و

$$(ax^2 + by^2) dx + cxy dy = 0$$

يك معادله کامل باشد، چه رابطه یا رابطه هایی باید بین این ثابتها برقرار باشد؟ تحت چنین شرایطی معادله را حل کنید.

۵۰. اگر a, b, c ثابتهای باشند، و معادله زیر

$$(ax^2 + by^2) dx + cxy dy = 0$$

کامل نباشد، ولی $1/x^2$ عامل انتگرالگیری آن باشد، چه رابطه یا رابطه هایی بین این ثابتها باید برقرار باشد؟ تحت چنین شرایطی معادله را حل کنید.

در مسائل ۵۱-۶۰، (الف) جواب عمومی را بیابید، و (ب) جوابی را بیابید که در شرط اولیه مفروض صدق کند.

$$(\cos x + y \cos x) dx + dy = 0 \quad y = 0 \text{ وقتی } x = \pi/2 \quad ۵۱$$

$$(x + y^2) dx + (2xy + 1) dy = 0 \quad y = 2 \text{ وقتی } x = 0 \quad ۵۲$$

$$y' + 2y = x \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 0 \quad ۵۳$$

$$(x + xy^2) dx + (y - x^2y) dy = 0 \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 0 \quad ۵۴$$

$$(1 + y^2) dx + e^{-x} dy = 0 \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 0 \quad ۵۵$$

$$(x + e^y) dx + (y + xe^y) dy = 0 \quad y = 0 \text{ وقتی } x = 2 \quad ۵۶$$

$$(x + 2y) dx + (y + 2x) dy = 0 \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 1 \quad ۵۷$$

$$(x + 2y) dx + (y - 2x) dy = 0 \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 1 \quad ۵۸$$

$$xy' + 2y = x^3 \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 2 \quad ۵۹$$

$$y dx + (2x - y^2) dy = 0 \quad y = 2 \text{ وقتی } x = 1 \quad ۶۰$$

۳.۲۰ معادله های مرتبه دوم قابل تبدیل به مرتبه اول
انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را می توان با

نوع ۲ معادلات بدون متغیر مستقل. وقتی معادله (۱) به طور صریح شامل x نباشد، و به صورت

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \quad (3)$$

باشد، آنگاه از جانشانیهای زیر استفاده می‌کنیم

$$p = \frac{dy}{dx} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

و معادله (۳) به صورت زیر درمی‌آید که بر حسب p از مرتبه اول است

$$F\left(y, p, p \frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

جواب این معادله، p را بر حسب y به دست می‌دهد. و سپس با انتگرال‌گیری مجدد، جواب معادله (۳) حاصل می‌شود.

مثال ۲ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

حل: فرض کنید

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} p$$

حال به صورت زیر کار را ادامه می‌دهیم

$$p \frac{dp}{dy} + y = 0, \quad p dp + y dy = 0$$

$$\frac{p^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2}, \quad p = \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \pm dx, \quad \sin^{-1} \frac{y}{C_1} = \pm (x + C_2)$$

$$y = C_1 \sin[\pm(x + C_2)] = \pm C_1 \sin(x + C_2).$$

چون C_1 دلخواه است، به علامت $\pm$ نیازی نیست، و جواب عمومی زیر به دست می‌آید

$$y = C_1 \sin(x + C_2).$$

حل: در این مثال، متغیر وابسته y (بجز در مشتقات) درجایی ظاهر نمی‌شود و جانشانیهای

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

معادله را به معادله زیر تبدیل می‌کنند

$$x \frac{dp}{dx} + p = x^2.$$

اگر دو طرف را در dx ضرب کنیم و حاصل را به صورت دیفرانسیلی درآوریم، داریم

$$x dp + p dx = x^2 dx$$

یا $d(xp) = d(x^3/3)$ که جوابش عبارت است از

$$xp = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

حال به جای p می‌نویسیم dy/dx و حاصل را بر x بخش می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

سپس مستقیماً انتگرال را محاسبه می‌کنیم و فرمول زیر را به دست می‌آوریم

$$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

در يك مسأله مقدار اولیه نوعی، ممکن است چنان جوابی لازم باشد که در $x = x_0$ مقادیر از پیش تعیین شده‌ای به y و به dy/dx نسبت دهد؛ مثلاً اگر وقتی $x = 1$ داشته باشیم $y = 0$ و $dy/dx = 1$ ، در این صورت دو معادله زیر را داریم

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 1 = \frac{1}{3} + C_1, \quad C_1 = \frac{2}{3}$$

و

$$(y)_{x=1} = 0 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \ln 1 + C_2, \quad C_2 = -\frac{1}{9}.$$

جواب مسأله با این شرایط اولیه عبارت است از

$$y = \frac{x^3}{9} + \frac{2}{3} \ln|x| - \frac{1}{9}.$$

$y'' + P y' + Q y = F$ را به $v'' + v' [P + 2u'/u] = F/u$ تبدیل می‌کند. در این صورت اگر قرار دهیم $w = v'$ ، معادلهٔ اخیر به یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول بر حسب w تبدیل می‌شود.

مسئله‌ها

مسائل ۱-۸ را حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۱.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۲.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۳.$$

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۴.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \quad ۵.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0 \quad ۶. \quad (\omega \text{ ثابت و مخالف صفر است})$$

$$x y''' - 2 y'' = 0 \quad ۷. \quad (\text{دانه‌مایی: از جانشانی } y'' = q \text{ استفاده کنید})$$

$$2 y'' + (y')^2 + 1 = 0 \quad ۸.$$

۹. در مثال ۲، جواب عمومی معادلهٔ مرتبهٔ دوم $y'' + y = 0$ را به صورت $y = C_1 \sin(x + C_2)$ یا فتمیم. ثابتهای C_1 و C_2 را در صورتی که y در شرایط زیر نیز صدق کند بیابید

$$y(0) = 0 \quad \text{الف} \quad \text{و} \quad y(\pi/2) = 5$$

$$y(0) = 0 \quad \text{ب} \quad \text{و} \quad y'(0) = 2$$

۱۰. قانون هوک. جرم m به یک سرفتر قائمی آویزان، و سردیگر آن به نقطهٔ آویز سختی وصل است. می‌گذاریم جسم به حال تعادل در آید، و سپس جسم را به مقدار اندک A به طرف پایین می‌کشیم و آن را رها می‌کنیم. معادلهٔ حرکت جسم را بیابید. (دانه‌مایی: قانون دوم حرکت نیوتن و قانون هوک را در نظر بگیرید. این قانون می‌گوید: کشش در فتر متناسب است با مقداری که به طول آن افزوده می‌شود. فرض کنید x تغییر مکان جسم در لحظهٔ t را نسبت به وضع تعادل نشان می‌دهد. در این صورت $m(d^2 x / dt^2) = -kx$ ، که در آن، k موسوم به «ثابت فتر»، ضریب تناسب در قانون هوک است.

۱۱. مقاومت هوا متناسب با سرعت. جسمی که به یک چتر بسته است

□ معادلات مرتبهٔ دوم خطی. انواع عمومی از معادلات مرتبهٔ دوم نیز گاه قابل تبدیل به معادلات مرتبهٔ اول هستند. اینها معادلات خطی مرتبهٔ دوم هستند که (احتمالاً با حدس زدن یا با اطلاع قبلی) یکی از جوابهای آنها را می‌شناسیم. منظور ما از معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم معادله‌ای به صورت زیر است

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = F(x).$$

اگر بتوانیم جوابی، فرضاً $y = u(x)$ ، بیابیم که در معادلهٔ ساده شده

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0$$

صدق کند، آنگاه جواب عمومی معادلهٔ متناظر

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

را گاه می‌توان با جانشانی

$$y = uv$$

به دست آورد و از آن، تابع $v = v(x)$ را محاسبه کرد. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۳ نشان دهید که $y = e^x$ جوابی برای معادله

$$y'' - 2y' + y = 0$$

است، و با استفاده از این نتیجه، جواب عمومی را بیابید.

حل: اگر $y = e^x$ ، آنگاه $y' = y'' = e^x$ و

$$y'' - 2y' + y = e^x - 2e^x + e^x = 0.$$

این نشان می‌دهد که $y = e^x$ یکی از جوابهاست. حال جانشانیهای $y = uv = e^x v$ ، $u = e^x$ را به کار می‌بریم و مشتقات مرتبهٔ اول و دوم را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$y' = e^x v' + e^x v, \quad y'' = e^x v'' + 2e^x v' + e^x v.$$

سپس این نتایج را در معادلهٔ $y'' - 2y' + y = 0$ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$e^x(v'' + 2v' + v - 2v' - 2v + v) = 0$$

که به صورت $v'' = 0$ ساده می‌شود. جواب این معادله چیزی جز $v = C_1 x + C_2$ نیست و لذا جواب عمومی $y'' - 2y' + y = 0$ عبارت است از

$$y = e^x v = e^x (C_1 x + C_2).$$

در مسئلهٔ ۱۷ از شما می‌خواهیم نشان دهید که اگر

$$u'' + Pu' + Qu = 0 \quad \text{و} \quad u \neq 0, \quad \text{آنگاه جانشانی } y = uv,$$

$a_1, \dots, a_n$ ، توابعی از x باشند این معادله باز هم خطی نامیده می‌شود. اما، در اینجا صرفاً حالتی را بررسی می‌کنیم که این ضرایب ثابت باشند.

عملگرهای دیفرانسیلی خطی

در این مرحله از کار، مناسب است نماد D را که عملگر مشتق‌گیری نسبت به x را نمایش می‌دهد معرفی کنیم. بدین ترتیب $Df(x)$ را به معنای $(d/dx)f(x)$ به کار می‌بریم. علاوه بر این، توانهای D را به معنای گرفتن مشتقات متوالی تعریف می‌کنیم

$$D^x f(x) = D\{Df(x)\} = \frac{d^x f(x)}{dx^x}$$

$$D^r f(x) = D\{D^x f(x)\} = \frac{d^r f(x)}{dx^r}$$

و غیره. یک چندجمله‌ای بر حسب D را به عنوان عملگری تعبیر می‌کنیم که وقتی به $f(x)$ اعمال شود، ترکیبی خطی از f و مشتقات متوالیش را به دست دهد. مثلاً

$$\begin{aligned}(D^2 + D - 2)f(x) &= D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) \\ &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx} - 2f(x).\end{aligned}$$

یک چنین چندجمله‌ای بر حسب D را یک عملگر دیفرانسیلی خطی می‌نامند و آن را با یک حرف L نمایش می‌دهند. اگر L_1 و L_2 دو تا از این عملگرهای خطی باشند، مجموع و حاصلضرب آنها را با روابط زیر تعریف می‌کنند

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)f(x) &= L_1 f(x) + L_2 f(x) \\ L_1 L_2 f(x) &= L_1(L_2 f(x)).\end{aligned}$$

عملگرهای دیفرانسیلی خطی که چندجمله‌ایهایی بر حسب D با ضرایب ثابت هستند تا آنجا که صحبت از جمع، ضرب، و تجزیه در میان است، از قوانین اساسی جبر تبعیت می‌کنند و لذا می‌توانیم با آنها نظیر چندجمله‌ایهای معمولی رفتار کنیم. مثلاً داریم

$$\begin{aligned}(D^2 + D - 2)f(x) &= (D + 2)(D - 1)f(x) \\ &= (D - 1)(D + 2)f(x).\end{aligned}$$

چون این رابطه به ازای هر تابع دوبار مشتق‌پذیر f برقرار است، آن را در مورد عملگرها نیز می‌نویسیم

$$D^2 + D - 2 = (D + 2)(D - 1) = (D - 1)(D + 2).$$

معادله مشخصه

در بقیه این بخش، صرفاً معادلات مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت را در نظر می‌گیریم. چون جوابهای معادلات ناهمگن به جوابهای

تحت اثر نیروی گرانش در هوا سقوط می‌کند. اگر مقاومت هوا نیروی کند کننده‌ای متناسب با سرعت جسم ایجاد کند و جسم در لحظه $t = 0$ از سکون حرکت خود را آغاز کند، مقدار مسافتی که جسم تا لحظه t سقوط می‌کند چقدر است؟

□ در مسائل ۱۲-۱۶، ابتدا نشان دهید که $y = u(x)$ در معادله مفروض صدق می‌کند، و سپس جواب عمومی را بیابید.

$$u = \cos x, \quad y'' + y = 0. \quad ۱۲$$

$$u = x^2, \quad x^2 y'' - 2y = 0. \quad ۱۳$$

$$u = e^{-x}, \quad y'' - y' - 2y = 0. \quad ۱۴$$

$$u = x^{1/2}, \quad y'' + y/(4x^2) = 0 \quad (x > 0). \quad ۱۵$$

$$u = x, \quad x^2 y'' + xy' - y = 0. \quad ۱۶$$

۱۷. اگر P و Q توابعی از x باشند و $y = u(x)$ در معادله خطی $y'' + Py' + Qy = 0$ صدق کند، و $u \neq 0$ ، نشان دهید که جانشانی $y = uv$ معادله $y'' + Py' + Qy = F(x)$ را به معادله $v'' + v'[P + 2u'/u] = F(x)/u$ تبدیل می‌کند. آنگاه جانشانی دیگر $w = v'$ این معادله اخیر را به یک معادله خطی مرتبه اول بر حسب $w = w(x)$ تبدیل می‌کند. نشان دهید که اگر این روش را در مورد معادله $y'' - 2y' + y = e^x$ با ضابطه $u(x) = e^x$ به کار بندیم، به ترتیب نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$w' = 1, \quad w = x + C_1 = v', \quad v = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

و

$$y = uv = e^x \left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right).$$

۴.۲. معادله‌های همگن مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت

معادله‌ای به صورت

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots$$

$$+ a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

که نسبت به y و مشتقاتش خطی است، یک معادله خطی از مرتبه n نام دارد. اگر $F(x)$ متحد با صفر باشد، معادله را همگن، و در غیر این صورت آن را ناهمگن می‌نامند. حتی اگر ضرایب

این معادله نسبت به y خطی است. عامل انتگرالگیری آن به صورت

$$\rho = e^{-r_2 x}$$

است (بخش ۲۰۲۰ را ببینید)، و جوابش عبارت است از

$$e^{-r_2 x} y = C_1 \int e^{(r_1 - r_2)x} dx + C_2. \quad (4)$$

نحوه ادامه کار در اینجا بستگی به این دارد که r_1 و r_2 مساوی باشند یا نباشند.

حالت ۱: اگر $r_1 \neq r_2$ ، محاسبه انتگرال مذکور در معادله (۴) به روابط زیر می انجامد

$$e^{-r_2 x} y = \frac{C_1}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2)x} + C_2$$

یا

$$y = \frac{C_1}{r_1 - r_2} e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

چون C_1 ثابت دلخواهی است، $C_1/(r_1 - r_2)$ نیز چنین است و جواب معادله (۲) را می توان به صورت ساده زیر نوشت

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad r_1 \neq r_2. \quad (5)$$

حالت ۲: اگر $r_1 = r_2$ ، آنگاه $e^{(r_1 - r_2)x} = e^0 = 1$ ، و معادله (۴) به صورت زیر درمی آید

$$e^{-r_2 x} y = C_1 x + C_2$$

یا

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_2 x}, \quad r_1 = r_2. \quad (6)$$

مثال ۱ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

حل: ریشه های معادله مشخصه $r^2 + r - 2 = 0$ عبارت اند از $r_1 = 1$ ، $r_2 = -2$. پس، بنا به معادله (۵) جواب معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

معادلات همگن متناظرشان بستگی دارند، بحث را بر معادلاتی به صورت زیر متمرکز می کنیم

$$(D^2 + 2aD + b)y = 0. \quad (1)$$

(معادلات ناهمگن را در بخش بعد بررسی می کنیم، و کاربرد آنها را در بخش ۶۰۲۰)

روش معمول برای حل معادله (۱) این است که ابتدا عملگر را به حاصلضرب عوامل تجزیه می کنیم

$$D^2 + 2aD + b = (D - r_1)(D - r_2).$$

این کار را با یافتن دوریشه r_1 و r_2 معادله زیر انجام می دهیم

$$r^2 + 2ar + b = 0. \quad (1')$$

معادله (۱') را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل می نامیم. ریشه های این معادله در روابط

$$r_1 + r_2 = -2a, \quad r_1 r_2 = b$$

صدق می کنند، و تجزیه به عوامل مطلوب را به ما می دهند

$$\begin{aligned} (D - r_1)(D - r_2) &= D^2 - (r_1 + r_2)D + r_1 r_2 \\ &= D^2 + 2aD + b. \end{aligned}$$

بنابراین، معادله (۱) هم ارز است با

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0. \quad (2)$$

حال اگر فرض کنیم

$$(D - r_2)y = u \quad (3 \text{ الف})$$

معادله زیر را به دست خواهیم آورد

$$(D - r_1)u = 0. \quad (3 \text{ ب})$$

از اینجا می توانیم معادله (۲) را در دوگام حل کنیم. از معادله (۳ ب) که يك معادله مرتبه اول جدایی پذیر بر حسب u و x است، درمی یابیم که

$$u = C_1 e^{r_1 x}.$$

این رابطه را در (۳ الف) قرار می دهیم؛ داریم

$$(D - r_2)y = C_1 e^{r_1 x}$$

یا

$$\frac{dy}{dx} - r_2 y = C_1 e^{r_1 x}.$$

برای حل مسأله‌ای که در آن، ریشه‌های معادله مشخصه مزدوجهای مختلط باشند، کافی است صورت مناسب معادله (۹') را بنویسیم.

مثال ۳ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

حل: ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + 2r + 2 = 0$ عبارت‌اند از $r_1 = -1 + i$ ، $r_2 = -1 - i$. پس در معادله (۹') داریم

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1$$

و جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$y = e^{-x} [C_1 \cos x + C_2 \sin x].$$

مثال ۴ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0, \quad \omega \neq 0.$$

حل: ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 + \omega^2 = 0$ عبارت‌اند از $r_1 = i\omega$ ، $r_2 = -i\omega$. پس در معادله (۹') قرار می‌دهیم $\alpha = 0$ ، $\beta = \omega$ و جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

مسأله‌ها

معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۱.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad ۲.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad ۳.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0 \quad ۴.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad ۵.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad ۶.$$

مثال ۲ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

حل:

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$$

$$r_1 = r_2 = -2$$

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}.$$

ریشه‌های انگاری (موهومی)

اگر در معادله (۱) ضرایب a و b حقیقی باشند، ریشه‌های معادله مشخصه یا حقیقی‌اند یا زوجی از اعداد مختلط مزدوج‌اند:

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta. \quad (۷)$$

اگر $\beta \neq 0$ ، رابطه (۵) به کار می‌آید، و نتیجه آن به صورت زیر است

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ = e^{\alpha x} [c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}]. \quad (۸)$$

در اینجا c_1 و c_2 ثابتهای مختلط‌اند. بنا به فرمول اویلر داریم

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x.$$

پس، به جای معادله (۸) می‌توان معادله زیر را قرار داد

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2) \cos \beta x + i(c_1 - c_2) \sin \beta x]. \quad (۹)$$

سرانجام، اگر ثابتهای دلخواه تازه زیر را معرفی کنیم، معادله (۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$C_1 = c_1 + c_2, \quad C_2 = i(c_1 - c_2).$$

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

(۹') اگر

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

ثابتهای دلخواه C_1 و C_2 در (۹') حقیقی خواهند بود اگر ثابتهای c_1 و c_2 در (۹) مزدوج مختلط باشند

$$c_1 = \frac{1}{2} (C_1 - iC_2), \quad c_2 = \frac{1}{2} (C_1 + iC_2).$$

$u_2(x)$ توابعی از يك يا چند متغیر به صورت های زیرند:

$$e^{rx}, xe^{rx}, e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

شیوه ای را که خلاصه اش در بخش اختیاری و درمسأله ۱۷ از بخش ۳.۲۰ بیان شد می توانیم برای حل معادله (۲) به کار ببریم، اما، راه های دیگری هم وجود دارند که معمولاً هم سریعتر و هم ساده تر مسا را به نتیجه می رسانند. این راه ها از این قرارند که **جوابی خاص برای معادله (۲) بیابیم و آن را با جواب عمومی معادله (۱) جمع کنیم.** در اینجا به بحث درباره سهره برای یافتن جواب خصوصی می پردازیم

۱. حدس مبتنی بر الهام

۲. روش تغییر پارامترها

۳. روش ضرایب مجهول

اما، ابتدا نشان می دهیم که همه جواب های معادله ناهمگن به صورت زیرند

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

که در آن، $y_h(x)$ مذکور در معادله (۳)، جواب عمومی معادله همگن (۱) است، و $y_p(x)$ جواب خاصی است از معادله ناهمگن (۲)، چنان کلام اینکه اگر L عملگر دیفرانسیلی خطی دلخواهی (نه لزوماً عملگری از مرتبه دوم یا عملگری با ضرایب ثابت) باشد، آنگاه به ازای ثابت هایی چون k_1 و k_2 و توابعی مانند y_1 و y_2 که عملگر L به آنها اعمال می شود، داریم

$$L(k_1 y_1 + k_2 y_2) = k_1 L(y_1) + k_2 L(y_2).$$

در بحث حاضری می توانیم بنویسیم

$$L = D^2 + 2aD + b$$

و معادلات (۱) و (۲) را به ترتیب به صورت های $L(y) = 0$ و $L(y) = F(x)$ بنویسیم. قضیه زیر رابطه بین جواب های معادلات خطی همگن و ناهمگن را نشان می دهد.

رابطه بین جواب های معادله های خطی همگن و ناهمگن

قضیه

فرض کنید $L(y) = F(x)$ يك معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی، و $L(y) = 0$ معادله همگن متناظر آن و یا همان عملگر L باشد. اگر y_h جواب عمومی معادله همگن و y_p يك جواب خاص معادله ناهمگن باشد، آنگاه جواب عمومی معادله ناهمگن عبارت است از

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

اثبات فرض کنید $L(y_h(x)) = 0$ و $L(y_p(x)) = F(x)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0 \quad ۰۷$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 10y = 0 \quad ۰۸$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad ۰۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10 \frac{dy}{dx} + 16y = 0 \quad ۰۱۰$$

معادلات زیر را با شرایط اولیه مفروض حل کنید ($y'' = d^2 y / dx^2$) و $(y' = dy/dx)$.

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \quad ۰۱۱$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad ۰۱۲$$

$$2y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \quad ۰۱۳$$

$$y'' - 2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \quad ۰۱۴$$

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \quad ۰۱۵$$

$$y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad ۰۱۶$$

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \quad ۰۱۷$$

۵.۲۰ معادله های ناهمگن مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت

در بخش ۴.۲۰ نحوه حل معادله همگن زیر را آموختیم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = 0. \quad (۱)$$

حال می توانیم روشی برای حل معادله ناهمگن زیر به دست دهیم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = F(x). \quad (۲)$$

برای حل معادله (۲) ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر یعنی معادله (۱) را که با قراردادن ۰ به جای $F(x)$ به دست می آید تعیین می کنیم. این جواب را با

$$y_h = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) \quad (۳)$$

نشان می دهیم که در آن C_1 و C_2 ثابت های دلخواه اند و $u_1(x)$ و

آنگاه

ثابت y با این شرط که $-3y=6$ ، مناسب است. پس

$$y_p = -2$$

يك جواب خاص معادله است. جواب كامل به صورت زیر است

$$y = y_p + y_h = -2 + C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

تغییر پارامترها

خوشبختانه روشی کلی برای یافتن جواب معادله ناهمگن (۲) وجود دارد مشروط به اینکه جواب عمومی معادله همگن متناظر آن معلوم باشد. این روش به روش تغییر پارامترها مشهور است. این روش عبارت است از قراردادن تابعهایی چون $v_1(x)$ و $v_2(x)$ به جای C_1 و C_2 موجود در طرف راست معادله (۳) همراه با این شرط که عبارت جدید

$$y = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

جوابی برای معادله ناهمگن (۲) باشد. در اینجا دو تابع v_1 و v_2 را باید تعیین کنیم و تنها يك شرط که صدق کردن y در معادله (۲) است در اختیار داریم. معلوم می شود که اگر شرط

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0 \quad (4)$$

را هم بگذاریم، کار ساده تری شود. بدین ترتیب داریم

$$y = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

$$\frac{dy}{dx} = v_1 u_1' + v_2 u_2' + v_1' u_1 + v_2' u_2$$

$$= v_1 u_1' + v_2 u_2'$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = v_1 u_1'' + v_2 u_2'' + v_1' u_1' + v_2' u_2'.$$

اگر این عبارتها را در سمت چپ معادله (۲) قرار دهیم و آرایش جملات را تغییر دهیم، داریم

$$\begin{aligned} & v_1 \left[\frac{d^2 u_1}{dx^2} + 2a \frac{du_1}{dx} + bu_1 \right] \\ & + v_2 \left[\frac{d^2 u_2}{dx^2} + 2a \frac{du_2}{dx} + bu_2 \right] \\ & + v_1' u_1' + v_2' u_2' = F(x). \end{aligned}$$

عبارتهای داخل کروشه‌ها صفرند زیرا u_1 و u_2 جوابهای معادله همگن (۱) هستند. پس اگر علاوه بر معادله (۴) داشته باشیم

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' = F(x) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L(y_h(x) + y_p(x)) &= L(y_h(x)) + L(y_p(x)) \\ &= 0 + F(x) = F(x) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می شود که $y = y_h + y_p$ جوابی برای معادله ناهمگن است. برای اینکه نشان دهیم تمام جوابها به همین صورت اند، فرض کنید y جواب دلخواهی از معادله ناهمگن $L(y) = F(x)$ باشد. آنگاه

$$L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = F(x) - F(x) = 0$$

و لذا $y - y_p$ در معادله همگن صدق می کند. بنا بر این، اگر y_h جواب عمومی $(D^2 + 2aD + b)y = 0$ باشد، C_1 و C_2 را می توانیم طوری انتخاب کنیم که

$$y - y_p = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

و این بدین معناست که

$$y = y_p + C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x).$$

حس مبتنی بر الهام در مثال زیر لازم نیست نباشد تا بتوانید حدس بزنید که ممکن است يك جواب خاص معادله به صورت: ثابت $y_p(x)$ باشد؛ اگر جوابی به این صورت وجود داشته باشد، مقدار ثابت خاصی که مفید واقع شود به سادگی از خود معادله به دست می آید.

مثال ۱ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 6.$$

حل: جواب y_h در معادله همگن زیر صدق می کند

$$\frac{d^2 y_h}{dx^2} + 2 \frac{dy_h}{dx} - 3y_h = 0.$$

معادله مشخصه اش

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

است که ریشه هایش عبارت اند از

$$r_1 = -3, \quad r_2 = 1.$$

پس

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

حال برای یافتن يك جواب خاص معادله اصلی، مشاهده کنید که:

آنگاه معادله (۲) برقرار می‌شود. معادلات (۴) و (۵) را به صورت زوج زیر می‌توان حل کرد و توابع مجهول v_1' و v_2' را به دست آورد

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 = 0, \quad v_1' u_1' + v_2' u_2' = F(x).$$

بنا به قاعدهٔ کرامر داریم

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ F(x) & u_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}} = \frac{-u_2 F(x)}{D}$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & F(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}} = \frac{u_1 F(x)}{D}$$

که در آن

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

حال v_1 و v_2 با انتگرالگیری به دست می‌آیند.

روش تغییر پارامترها

وقتی روش تغییر پارامترها را برای حل معادله

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = F(x) \quad (2)$$

به کار می‌گیریم می‌توانیم مستقیماً از روابط مذکور در (۶) استفاده کنیم. لازم نیست دوباره آنها را به دست آوریم. مراحل این کار عبارت‌اند از:

مرحله ۱: معادلهٔ همگن متناظر زیر را حل می‌کنیم و توابع u_1 و u_2 را به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = 0.$$

مرحله ۲: از (۶)، D ، v_1' و v_2' را حساب می‌کنیم.

مرحله ۳: از v_1' و v_2' انتگرال می‌گیریم و v_1 و v_2 را می‌یابیم.

مرحله ۴: جواب عمومی (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$y = v_1 u_1 + v_2 u_2.$$

تغییر پارامترها

در حدود ۱۷۲۸ لئونهارت اویلر (۱۷۸۳-۱۷۵۷) حین مطالعه در زمینهٔ مکانیک توجه خود را به معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم که مرتباً با آنها مواجه می‌شد، معطوف کرد. مسائلی فیزیکی نظیر حرکت آونگ در محیط‌های دارای مقاومت، حرکت پرتابه‌ها، و اثر مقاومت هوا توجه وی را جلب کرده بودند. اویلر اساساً از روش تغییر پارامترها برای تبدیل معادلات مرتبهٔ دوم به مرتبهٔ اول استفاده کرد. از نظر تاریخی، این کار اویلر آغاز مطالعهٔ اسلوب‌مند معادلات مرتبهٔ دوم محسوب می‌شود. در اینجا است که اویلر نقش اساسی تابع‌نمایی را در حل معادلات مرتبهٔ دوم و بالاتر نشان داد. ژوزف لویی لاگرانژ (۱۸۱۳-۱۷۳۶)، وارث ریاضیات اویلر، کار را پیگیری کرد و روش کلیتری را که امروزه برای حل معادلات دیفرانسیل ناهمگن به کار می‌رود، ابداع کرد.

در مورد معادله‌ای نظیر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3y = e^x \quad (9)$$

ممکن است حدس بزنیم که جوابی به صورت زیر دارد

$$y_p = Ae^x$$

و $y_p = Ae^x$ و مشتق دومش را در معادله (۹) قرار دهیم و A را محاسبه کنیم. اگر این کار را انجام دهیم درمی یابیم که تابع $y_p = (1/4)e^x$ جوابی برای معادله (۹) است. و باز ممکن است حدس بزنیم که معادله

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 3x^2 + 4 \quad (10)$$

جواب خاصی به صورت

$$y_p = Cx^2 + Dx + E$$

دارد. وقتی این چندجمله‌ای و مشتق دومش را در معادله (۱۰) قرار دهیم تا ببینیم که آیا می‌توانیم مقادیر مناسبی برای ثابتهای C ، D ، و E بیابیم، معادله (۱۰) به صورت زیر درمی آید

$$2C + (Cx^2 + Dx + E) = 3x^2 + 4 \quad (11)$$

$$Cx^2 + Dx + 2C + E = 3x^2 + 4.$$

اگر دو طرف معادله اخیر دو چندجمله‌ای یکسان بر حسب x باشند، آنگاه این معادله به ازای تمام مقادیر x برقرار خواهد بود؛ و این بدین معناست که داشته باشیم

$$2C + E = 4 \quad \text{و} \quad D = 0, \quad C = 3 \quad (12)$$

یا

$$C = 3, \quad D = 0, \quad E = -2.$$

نتیجه اینکه

$$y_p = 3x^2 + 0x - 2 = 3x^2 - 2 \quad (13)$$

جوابی برای معادله (۱۰) است.

در هر يك از مثالهای فوق، جواب خاصی که یافتیم شبیه تابع $F(x)$ واقع در طرف راست معادله دیفرانسیل مفروض بود. این مطلب تصادفی نیست، زیرا در ابتدا صورت جواب خاص را با نگاه کردن به $F(x)$ حدس زدیم. این روش که ابتدا صورت جواب را در حد ثابتهای مجهول خاصی حدس می‌زنیم و سپس مقادیر این ثابتهای را با استفاده از معادله دیفرانسیل به دست می‌آوریم،

مثال ۲ معادله زیر، مذکور در مثال ۱، را با تغییر پارامترها حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 6.$$

حل: نظیر مثال ۱ ابتدا معادله همگن متناظر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

را حل می‌کنیم و نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$u_1(x) = e^{-3x}, \quad u_2(x) = e^x.$$

سپس، بنا بر روابط مذکور در (۶) داریم

$$D = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^x \\ -3e^{-3x} & e^x \end{vmatrix} = e^{-2x} + 3e^{-2x} = 4e^{-2x} \quad (7)$$

$$v_1' = \frac{-6e^x}{4e^{-2x}} = -\frac{3}{2}e^{3x}, \quad v_2' = \frac{6e^{-2x}}{4e^{-2x}} = \frac{3}{2}e^{-x}.$$

پس

$$v_1 = \int -\frac{3}{2}e^{3x} dx = -\frac{1}{2}e^{3x} + C_1$$

$$v_2 = \int \frac{3}{2}e^{-x} dx = -\frac{3}{2}e^{-x} + C_2$$

و

$$y = v_1 u_1 + v_2 u_2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^{3x} + C_1\right)e^{-3x} + \left(-\frac{3}{2}e^{-x} + C_2\right)e^x$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{2} + C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

ضرایب مجهول

روش تغییر پارامترها کاملاً کلی است، زیرا به ازای هر تابع پیوسته $F(x)$ ، می‌توانیم جوابی خاص برای معادله ناهمگن (۲) به دست آوریم. اما محاسبات مربوط ممکن است پیچیده باشد، و درحالاتی خاص ممکن است بتوان از روشهای ساده‌تری استفاده کرد. مثلاً، برای یافتن جوابی خاص از

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 5y = 3 \quad (8)$$

لازم نیست از روش تعویض پارامترها استفاده کنیم، زیرا می‌توانیم جواب خاص $y_p = 3/5$ را با آزمون به دست آوریم. حتی

یا

$$A = -1, \quad B = 1.$$

جواب خاص مورد نظر عبارت است از

$$y_p = \cos x - \sin x.$$

مثال ۴ جواب خاصی برای معادله زیر بیابید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 5e^x. \quad (18)$$

حل: اگر

$$y_p = Ae^x$$

و مشتقاتش را در معادله (۱۸) قرار دهیم درمی یابیم که

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x \\ 0 = 5e^x.$$

اشکالی که پیش آمده از این واقعیت ناشی می شود که $y = e^x$ خود جوابی برای معادله همگن متناظر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (19)$$

است. معادله مشخصه معادله (۱۹) عبارت است از

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$$

که ریشه ساده $r=1$ را دارد. بنا بر این می توانیم انتظار داشته باشیم که وقتی Ae^x در طرف چپ (۱۸) قرار گیرد حاصل «صفر شود». در این حالت راه مناسب برای اصلاح جواب آزمایشی این است که بجای Ae^x ، Axe^x را قرار دهیم. وقتی

$$y_p = Axe^x$$

و مشتقاتش را در (۱۸) قرار دهیم، داریم

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 3(Axe^x + Ae^x) + 2Axe^x = 5e^x \\ -Ae^x = 5e^x \\ A = -5.$$

تابع

$$y_p = -5xe^x$$

یک جواب خاص معادله (۱۹) است.

روش ضرایب مجهول می نامند. موفقیت این روش بستگی به توانایی ما در تشخیص صورت یک جواب خاص دارد، و این یکی از دلایلی است که این روش از کلیت روش تغییر پارامترها برخوردار نیست. با وجود این، سادگی آن باعث می شود در حالات خاصی مورد استفاده قرار گیرد.

بحث در باره روش ضرایب مجهول را محدود به معادلاتی می کنیم که در آنها $F(x)$ مسدود در معادله (۲) مجموعی از بعضی از جملات نظیر

$$e^{rx}, \quad \cos kx, \quad \sin kx, \quad ax^2 + bx + c$$

باشد. با وجود این درخواست می یاف که جوابهای خاص معادله (۲) همیشه به اندازه مثالهای فوق به $F(x)$ شباهت ندارند.

مثال ۳ جوابی خاص برای معادله زیر بیابید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2 \sin x. \quad (14)$$

حل: اگر بگوئیم جواب خاصی به صورت

$$y_p = A \sin x$$

بیابیم و مشتقات y_p را در معادله مفروض قرار دهیم، درمی یابیم که A باید به ازای تمام مقادیر x در معادله زیر صدق کند

$$-A \sin x - A \cos x = 2 \sin x. \quad (15)$$

برای تحقق این امر لازم است که A به طور همزمان هم برابر با -2 و هم برابر با 0 باشد، و لذا نتیجه می گیریم که معادله (۱۴) جوابی به صورت $A \sin x$ ندارد.

ثابت می شود که صورت مطلوب، مجموع زیر است

$$y_p = A \sin x + B \cos x. \quad (16)$$

نتیجه حاصل از قراردادن مشتقات این نامزد جدید در معادله (۱۴) عبارت است از

$$-A \sin x - B \cos x - (A \cos x - B \sin x) = 2 \sin x \quad (17)$$

$$(B-A) \sin x - (A+B) \cos x = 2 \sin x.$$

معادله (۱۷) یک اتحاد است هرگاه

$$A+B=0 \quad \text{و} \quad B-A=2$$

و لذا جواب عمومی معادله همگن متناظر به صورت زیر است

$$y_h = C_1 e^x + C_2.$$

حال به دنبال يك جواب خاص y_p می گردیم. یعنی تابعی را جستجو می کنیم که وقتی در طرف چپ معادله (۲۱) قرار گیرد، حاصل برابر با $5e^x - \sin 2x$ شود. يك جزء y_p باید $5e^x$ را تولید کند و جزء دیگرش $-\sin 2x$ را.

چون هر تابع به صورت $C_1 e^x$ يك جواب معادله همگن متناظر است، y_p آزمایشی را به صورت مجموع زیر در نظر می گیریم

$$y_p = Axe^x + B \cos 2x + C \sin 2x.$$

در اینجا xe^x را آورده ایم حال آنکه ممکن بود e^x را بیاوریم. وقتی مشتقات y_p را در معادله (۲۱) قرار دهیم، معادلات حاصل به صورت زیر در می آیند

$$\begin{aligned} (Axe^x + 2Ae^x - 4B \cos 2x - 4C \sin 2x) \\ - (Axe^x + Ae^x - 2B \sin 2x + 2C \cos 2x) \\ = 5e^x - \sin 2x \\ Ae^x - (4B + 2C) \cos 2x + (2B - 4C) \sin 2x \\ = 5e^x - \sin 2x. \end{aligned}$$

این معادلات وقتی برقرارند که داشته باشیم

$$A = 5, \quad (4B + 2C) = 0, \quad (2B - 4C) = -1$$

یا

$$A = 5, \quad B = -\frac{1}{10}, \quad C = \frac{1}{5}.$$

جواب خاص مطلوب عبارت است از

$$y_p = 5xe^x - \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x.$$

جواب کامل معادله (۲۱) به صورت زیر است

$$y = y_h + y_p$$

$$= C_1 e^x + C_2 + 5xe^x - \frac{1}{10} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin 2x.$$

در حل مسائل آخر این بخش جدول ۱۰.۲۰ می تواند به شما کمک کند.

مثال ۵ يك جواب خاص برای معادله زیر بیا بید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = e^{3x}. \quad (20)$$

حل: معادله مشخصه

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$$

ریشه دوگانه $r = 3$ را دارد. در این مورد انتخاب مناسبی برای y_p نه Ae^{3x} و نه Axe^{3x} ، بلکه $Ax^2 e^{3x}$ است. وقتی

$$y_p = Ax^2 e^{3x}$$

و مشتقاتش را در معادله دیفرانسیل مفروض قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned} (9Ax^2 e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}) \\ - 6(3Ax^2 e^{3x} + 2Axe^{3x}) + 9Ax^2 e^{3x} = e^{3x} \\ 2Ae^{3x} = e^{3x} \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2}.$$

تابع

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$$

يك جواب معادله (۲۰) است.

وقتی می خواهیم يك جواب خاص برای معادله (۲) بیا بید، و تابع $F(x)$ مجموع دو یا چند جمله است، تابعی آزمایشی برای هر جمله موجود در $F(x)$ می یابیم و آنها را با هم جمع می کنیم.

مثال ۶ معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 5e^x - \sin 2x. \quad (21)$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را بررسی می کنیم که عبارت است از

$$r^2 - r = 0.$$

ریشه های این معادله عبارت اند از

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 0$$

جدول ۱۰۲۰ روش ضرایب مجهول برای حل چند معادله خاص به صورت

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = F(x)$$

آنگاه این عبارت را در تابع آزمایشی y_p قرار دهید	و اگر	اگر $F(x)$ شامل جمله‌ای باشد که مضرب ثابتی است از
Ae^{rx}	r ریشه‌ای از معادله مشخصه نباشد	e^{rx}
Axe^{rx}	r یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد	
$Ax^2 e^{rx}$	r یک ریشه دوگانه معادله مشخصه باشد	
$B \cos kx + C \sin kx$	ki یک ریشه معادله مشخصه نباشد	$\sin kx, \cos kx$
$Dx^2 + Ex + F$ (طوری انتخاب شده که با درجه $ax^2 + bx + c$ جور در آید)	0 یک ریشه معادله مشخصه نباشد	$ax^2 + bx + c$
$Dx^3 + Ex^2 + Fx$ (درجه یکی بیش از درجه $(ax^2 + bx + c$	0 یک ریشه ساده معادله مشخصه باشد	
$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$ (درجه دو تا بیش از درجه $(ax^2 + bx + c$	0 یک ریشه دوگانه معادله مشخصه باشد	

مسئله‌ها

معادلات مذکور در مسائل ۱-۱۲ را با تغییر پارامترها حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = \sin x \quad ۰۸$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 10 \quad ۰۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2^x \quad ۰۱۰$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad ۰۱۱$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x \cos x, \quad x > 0 \quad ۰۱۲$$

معادلات مذکور در مسائل ۱۳-۲۸ را با روش ضرایب مجهول حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 10y = -3 \quad ۰۱۳$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 10y = 2x - 3 \quad ۰۱۴$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x \quad ۰۱$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad ۰۲$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sin x \quad ۰۳$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = e^x \quad ۰۴$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \quad ۰۵$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = x \quad ۰۶$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = e^x \quad ۰۷$$

۳۰.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x, \quad y_p = A \cos x + B \sin x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2 \cos x + \sin x \quad ۳۱$$

$$y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$$

در مسائل ۳۲-۳۵، معادلات دیفرانسیل مفروض را (الف) با روش تغییر پارامترها، و (ب) با روش ضرایب مجهول حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x} \quad ۳۲$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x + e^{-x} \quad ۳۳$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 9 \frac{dy}{dx} = 9e^{9x} \quad ۳۴$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} - 5y = e^x + 4 \quad ۳۵$$

معادلات دیفرانسیل مذکور در مسائل ۳۶-۴۵ را حل کنید. بعضی از این معادلات را می‌توان با روش ضرایب مجهول حل کرد، ولی بعضی را نمی‌توان.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi \quad ۳۶$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cot x, \quad 0 < x < \pi \quad ۳۷$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \sin x \quad ۳۸$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} = e^{8x} \quad ۳۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = x + 2 \quad ۴۰$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^2 \quad ۴۱$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 9x - \cos x \quad ۴۲$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \sin x \quad ۱۵$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 \quad ۱۶$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos 3x \quad ۱۷$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^{2x} \quad ۱۸$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 20 \cos x \quad ۱۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2x + 3e^x \quad ۲۰$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = e^x + x^2 \quad ۲۱$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 6 \sin 2x \quad ۲۲$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{-x} - 7 \cos x \quad ۲۳$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x \quad ۲۴$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} = 15x^2 \quad ۲۵$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -8x + 3 \quad ۲۶$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = e^{2x} - 12x \quad ۲۷$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 7 \frac{dy}{dx} = 42x^2 + 5x + 1 \quad ۲۸$$

در هر یک از مسائل ۲۹-۳۱، معادله دیفرانسیل مفروض یک جواب خاص y_p به صورت داده شده دارد. ضرایب موجود در y_p را بیابید. سپس معادله دیفرانسیل را حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} = xe^{\Delta x}, \quad y_p = Ax^2 e^{\Delta x} + Bxe^{\Delta x} \quad ۲۹$$

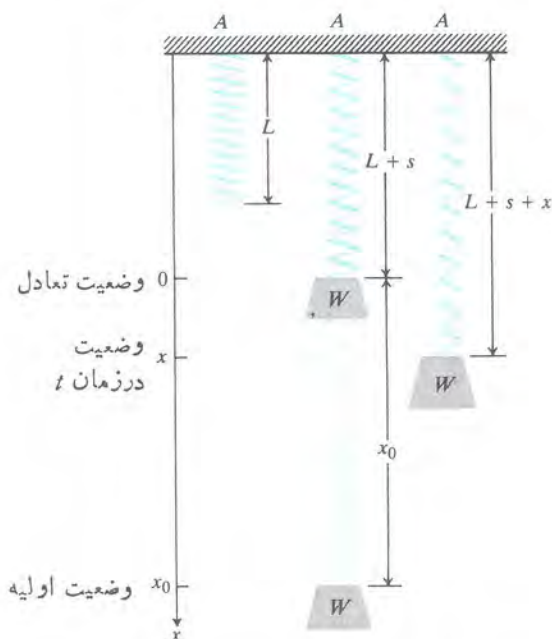
۶.۲۰ ارتعاش

یکی از مهمترین کاربردهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت، در مطالعه ارتعاش است. ارتعاش، یا حرکت نوسانی، در بسیاری از موارد عملی رخ می‌دهد، اما مثال معروف آن حرکت فنر است. فرض کنید یک سر فنری به طول طبیعی L را به نقطه A از یک آویز گاه غیر قابل ارتعاش وصل کرده (شکل ۴.۲۰) و وزنه W به جرم m ، را به سر دیگر فنر آویزان کنیم. وقتی حرکت فنر متوقف شود، و به وضعیت تعادل تازه برسد، این وزنه باعث می‌شود طول فنر به $L+s$ برسد. بنا به قانون هوک، کشش فنر ks است که در آن k ثابت فنر نام دارد. نیروی گرانش که وزنه را به پایین می‌کشاند برابر است با $W=mg$. تعادل ایجاب می‌کند که

$$ks = mg. \quad (۱)$$

حال فرض کنید که وزنه را از وضعیت تعادل به اندازه x واحد دیگر به طرف پایین بکشیم و آن را رها کنیم. این حرکت را چگونه می‌توان توصیف کرد؟

فرض کنید x ، جهت مثبت به طرف پایین، تغییر مکان وزنه را نسبت به حالت تعادل در لحظه t پس از آغاز حرکت نشان دهد.



۴.۲۰ فنری به طول طبیعی L را به وسیله وزنه W به اندازه s واحد می‌کشیم. سپس فنر را به اندازه a واحد دیگر می‌کشانیم و آن را رها می‌کنیم تا به ارتعاش درآید. وضعیت وزنه در هر زمان پس از آن با یک معادله دیفرانسیل توصیف می‌شود.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = x^2 - e^x. \quad ۴۳$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x - e^{2x}. \quad ۴۴$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec x \tan x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}. \quad ۴۵$$

در حل معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه اول گاه می‌توان از روش ضرایب مجهول استفاده کرد. در حل معادلات مذکور در مسائل ۴۶-۴۹ از این روش استفاده کنید.

$$\frac{dy}{dx} + 4y = x. \quad ۴۶$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = e^x. \quad ۴۷$$

$$\frac{dy}{dx} + y = \sin x. \quad ۴۸$$

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 5e^{3x}. \quad ۴۹$$

معادلات دیفرانسیل مذکور در مسائل ۵۰ و ۵۱ را با توجه به شرایط اولیه داده شده حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^{2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{2}{5}. \quad ۵۰$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}; \quad ۵۱$$

$$y(0) = y'(0) = 1$$

۵۲ معادله برنولی از مرتبه ۲. معادله

$$\frac{dy}{dx} + y = (xy)^2$$

را با طی کردن مراحل زیر حل کنید: (۱) دوطرف معادله را بر y^2 تقسیم کنید؛ (۲) از تعویض متغیر $u = y^{-1}$ استفاده کنید؛ (۳) از معادله حاصل u را بر حسب x محاسبه کنید؛ (۴) فرض کنید $y = u^{-1}$.

۵۳ معادله انتگرالی زیر را حل کنید

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = x.$$

(راهنمایی: مشتق بگیرید.)

از اینجا داریم

$$x_0 = c_1, \quad 0 = c_2 \omega.$$

بنابراین

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = 0$$

و

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (۶)$$

این معادله، حرکت وزنه را توصیف می‌کند. معادله (۶) معرف حرکت همساز ساده با دامنه a و دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ است.

دوجمله مذکور در طرف راست معادله (۵) را با استفاده از اتحاد مثلثاتی زیر می‌توان تلفیق کرد و به صورت یک جمله درآورد

$$\sin(\omega t + \phi) = \cos \omega t \sin \phi + \sin \omega t \cos \phi.$$

برای استفاده از این اتحاد، فرض کنید

$$c_1 = C \sin \phi, \quad c_2 = C \cos \phi \quad (۷ \text{ الف})$$

که در آن طبق شکل ۵.۲۰

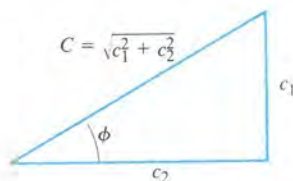
$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{c_1}{c_2}. \quad (۷ \text{ ب})$$

در این صورت معادله (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x = C \sin(\omega t + \phi). \quad (۸)$$

در اینجا C و ϕ را می‌توان به عنوان دو ثابت دلخواه تازه تلقی کرد که به جای دو ثابت c_1 و c_2 موجود در معادله (۵) قرار می‌گیرند. معادله (۸) معرف حرکت همساز ساده با دامنه C و دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ است. زاویه ϕ را زاویه فاز می‌نامند. نمودار معادله (۸) در شکل ۵.۲۰ داده شده است.

در معادله (۳) فرض بر این است که در سیستم هیچ اصطکاکی وجود ندارد. حال وضعی را در نظر بگیرید که در آن حرکت وزنه با یک نیروی اصطکاک $c(dx/dt)$ که با سرعت متناسب، و c یک ثابت مثبت است کند می‌شود. در این صورت معادله دیفرانسیل



$$c_1 = C \sin \phi \quad \text{و} \quad c_2 = C \cos \phi \quad ۵.۲۰$$

آنگاه نیروهای وارد بر وزنه عبارت‌اند از

$$+mg, \quad \text{ناشی از گرانش،}$$

$$-k(s+x), \quad \text{ناشی از کشش فنر.}$$

برایند این نیروها، بنا به قانون دوم نیوتن، برابر است با

$$m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

بنابراین، اگر نیروی دیگری (چون اصطکاک) وجود نداشته باشد، داریم

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - ks - kx. \quad (۲)$$

بنابر معادله (۱)، $mg - ks = 0$ ، لذا (۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (۳)$$

افزون بر معادله دیفرانسیل (۳)، شرایط اولیه حرکت عبارت‌اند از

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{و} \quad x = x_0 : t = 0 \quad (۴)$$

فرض کنید $\omega = \sqrt{k/m}$. آنگاه معادله (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$(D^2 + \omega^2)x = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ریشه‌های معادله مشخصه

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

مزدوجهای مختلط زیرند

$$r = \pm \omega i.$$

پس

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (۵)$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است. برای ملحوظ کردن شرایط اولیه، مشتق زیر را محاسبه می‌کنیم و (۴) را در آن قرار می‌دهیم

$$\frac{dx}{dt} = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t.$$

نابرابرند، و داریم

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (12)$$

که در آن

$$r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad \text{و} \quad r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

در اینجا باز هم حرکت نوسانی نیست. r_1 و r_2 هر دو منفی اند، و با گذشت زمان x به صفر نزدیک می شود.

حالت ۳: اگر $\omega < b$ ، فرض کنید

$$\omega^2 - b^2 = \alpha^2.$$

در این صورت

$$r_1 = -b + \alpha i, \quad r_2 = -b - \alpha i$$

و

$$x = e^{-bt} [c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t]. \quad (13 \text{ الف})$$

با استفاده از جانشانیهای (۷) معادله (۱۳ الف) را می توانیم به صورت هم ارز زیر بنویسیم

$$x = C e^{-bt} \sin(\alpha t + \phi). \quad (13 \text{ ب})$$

این معادله معرف حرکت ارتعاشی میراست، که شبیه حرکت همساز ساده با دوره تناوب $T = 2\pi/\alpha$ است. با این تفاوت که دامنه ثابت نیست و با $C e^{-bt}$ مشخص می شود. چون با ازدیاد t ، این کمیت به صفر میل می کند، ارتعاشات با گذشت زمان از بین می روند. با وجود این، ملاحظه کنید که معادله (۱۳ ب) در صورت نبود اصطکاک به معادله (۸) بدل می شود. اثر اصطکاک دوجنبه دارد:

۱. $b = c/(2m)$ در عامل میرای نمایی e^{-bt} ظاهر می شود. هرچه b بزرگتر باشد، ارتعاشات سریعتر ناپدید می شوند.

۲. دوره تناوب $T = 2\pi/\alpha = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ از دوره تناوب $T_0 = 2\pi/\omega$ مربوط به سیستم بدون اصطکاک، بزرگتر است.

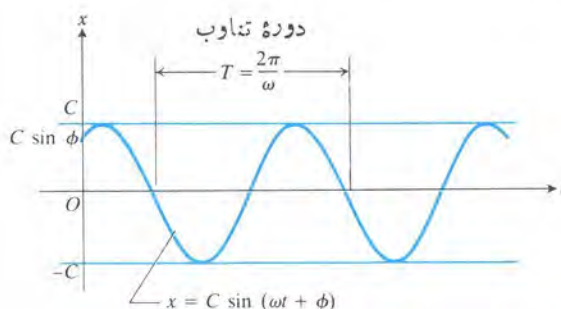
در شکلهای ۶.۲۵ و ۷.۲۵ خمهای نمایش جوابهای معادله (۹) مربوط به چند مورد نمونه وار را می بینید. بزرگی b نسبت به ω ، هم نوع جواب را تعیین می کند و هم آهنگ میرایی را. بنابراین، معمولاً اصطلاحات زیر را به کار می برند

الف) اگر $b = \omega$ ، میرایی بحرانی؛

ب) اگر $b > \omega$ ، میرایی فوق بحرانی؛

پ) اگر $0 < b < \omega$ ، میرایی تحت بحرانی؛

ت) اگر $b = 0$ ، بدون میرایی.



۶.۲۵ نمودار حرکت همساز ساده فنر بدون اصطکاک که به ارتعاش نامیرا موسوم است.

به صورت زیر است

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma b \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (9)$$

که در آن

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{و} \quad \gamma b = \frac{c}{m}$$

با معرفی عملگر $D = d/dt$ ، معادله (۹) به صورت زیر درمی آید

$$(D^2 + \gamma b D + \omega^2)x = 0.$$

معادله مشخصه

$$r^2 + \gamma b r + \omega^2 = 0$$

دارای ریشه های زیر است

$$r = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \quad (10)$$

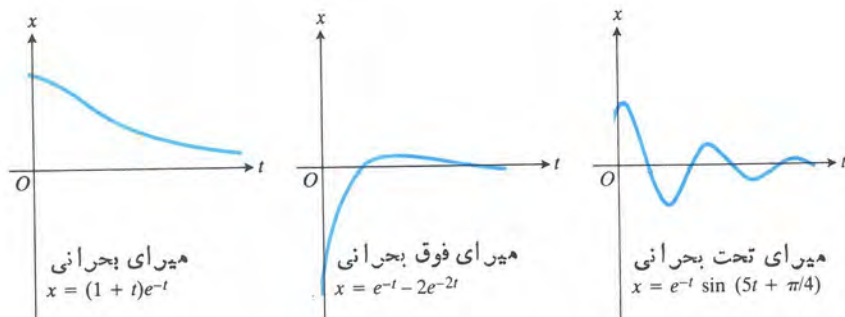
بسته به اینکه b و ω نسبت به هم چگونه باشند، سه حالت پیش می آید.

حالت ۱: اگر $b = \omega$ ، دو ریشه مذکور در رابطه (۱۰) برابرند و جواب (۹) به صورت زیر است

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega t}. \quad (11)$$

با گذشت زمان، x به صفر نزدیک می شود. حرکت نوسانی نیست.

حالت ۲: اگر $b > \omega$ ، آنگاه ریشه های (۱۰) هر دو حقیقی و



۷۰۲۰. سه راه برای میرایی ارتعاش.

مسئله‌ها

۴. آونگ ساده‌ای به طول l با خط قائم زاویه θ می‌سازد. حرکت رفت و برگشت آونگ، صرفنظر از اصطکاک، با معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

بیان می‌شود که در آن g (شتاب گرانش، $g \approx 32 \text{ ft/sec}^2$) ثابت است. (شکل ۹۰۲۰ را ببینید.) با این فرض که θ آن قدر کوچک



۹۰۲۰. حرکت يك آونگ ساده.

۱. فرض کنید حرکت وزنه شکل ۴۰۲ با معادله دیفرانسیل (۳) وصف شود. اگر در لحظه $t=0$ داشته باشیم $x=x_0$ و $dx/dt=v_0$ ، حرکت را بیابید. جواب را به دو صورت معادل بیان کنید (معادلات ۵ و ۶).

۲. انتهای پایینی فنری را به يك وزنه 5 پوندی وصل کرده و سردیگرش را به يك آویز گاه غیر قابل ارتعاش بسته ایم. وزنه، فنر را به اندازه 2 اینچ می‌کشد. بعد از اینکه وزنه در وضع تعادل جدید قرار می‌گیرد ضربه محکمی به آن وارد می‌کنیم به طوری که با سرعت 4 ft/sec به طرف پایین برود، حرکت بعدی را بیابید. فرض کنید که اصطکاک وجود ندارد.

۳. يك مدار RLC سری. در شکل ۸۰۲۰ يك مدار الکتریکی ساده نشان داده شده است. این مدار شامل يك خازن با ظرفیت C فاراد، يك القاگر با القاکنایی L هانری، يك مقاومت R اهمی، و مولدی با نیروی محرکه الکتریکی v ولت است که به صورت سری وصل شده اند. اگر شدت جریان مدار در لحظه t ، i آمپر باشد معادله دیفرانسیلی که جریان i را توصیف می‌کند عبارت است از

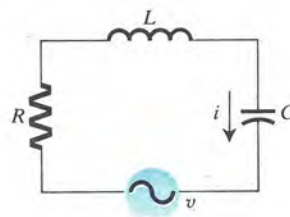
$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}i = \frac{dv}{dt}.$$

مطلوب است i به صورت تابعی از t هر گاه

الف) $R=0$ ، $1/(LC)=\omega^2$ ، ثابت v

ب) $R=0$ ، $1/(LC)=\omega^2$ ، $v=V \sin \alpha t$ ، ثابت V ، $\alpha \neq \text{ثابت}$

پ) $R=0$ ، $1/(LC)=\omega^2$ ، $v=V \sin \omega t$ ، ثابت V



۸۰۲۰. يك مدار RLC به صورت سری.

۷.۲۰ معادله‌های خطی از مرتبه‌های بالاتر با ضرایب ثابت

روشهای حل معادلات مذکور در بخشهای ۷.۲۰ و ۵.۲۰ را می‌توان برای معادلات مراتب بالاتر تعمیم داد. معادله جبری مشخصه وابسته به معادله دیفرانسیل

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n)y = F(x) \quad (۱)$$

عبارت است از

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = 0. \quad (۲)$$

اگر ریشه‌های $r_1, r_2, \dots, r_n$ همه متمایز باشند، با قراردادن ۰ به جای $F(x)$ در معادله (۱)، معادله همگنی به دست می‌آید که جواب آن عبارت است از

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}.$$

زوجهای متشکل از ریشه‌های مزدوج مختلط $\alpha \pm i\beta$ را می‌توان گسروه‌بندی کرد و بخش متناظر y_h را می‌توان برحسب توابع زیر نوشت

$$e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{و} \quad e^{\alpha x} \cos \beta x$$

در حالتی که ریشه‌های معادله (۲) همه متمایز نباشند، به جای بخشی از y_h که متناظر با یک ریشه r با چندگانگی m است، عبارت زیر را قرار می‌دهیم

$$(C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_m) e^{rx}.$$

توجه کنید که عبارت داخل پرانتز شامل m ثابت دلخواه است.

مثال معادله زیر را حل کنید

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0.$$

حل: معادله مشخصه عبارت است از

$$r^4 - 3r^3 + 3r^2 - r = r(r-1)^3.$$

ریشه‌های معادله مشخصه عبارت اند از

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = r_4 = 1.$$

جواب به صورت زیر است

$$y = C_1 + (C_2 x^2 + C_3 x + C_4) e^x.$$

باشد که بدون خطای قابل توجهی بتوان به جای $\sin \theta$ ، θ را قرارداد، معادله دیفرانسیل حرکت را حل کنید. فرض کنید در لحظه $t=0$ ، $\theta = \theta_0$ و $d\theta/dt = 0$.

۵. یک قرص مستدیر به جرم m و شعاع r را به سیم نازکی که به مرکز یکی از وجوه تخت آن وصل است آویزان کرده‌ایم. اگر قرص را به اندازه یک زاویه θ بچرخانیم، پیچش سیم سبب می‌شود قرص در جهت مخالف برگردد. معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$\frac{1}{2} m r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k \theta$$

که در آن k ضریب تاب (پیچش) سیم است. اگر در $t=0$ ، $\theta = \theta_0$ و $d\theta/dt = v_0$ ، حرکت را بیابید.

۶. بخشی از جسم شناور استوانه‌ای شکلی به قطر ۱ ft، و وزن ۱۰۰ lb در آب فرو رفته و به طور قائم شناور است. وقتی در حالت تعادل به جسم مختصر فشاری وارد آوریم و آن را رها کنیم، طبق معادله دیفرانسیل زیر بالا و پایین می‌رود

$$\frac{100}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = -16\pi x - c \frac{dx}{dt}.$$

در اینجا x برحسب فوت جا به جایی قائم جسم نسبت به حالت تعادل آن است، و $c(dx/dt)$ مقاومت اصطکاکی آب می‌باشد. اگر بیینیم که دوره تناوب نوسان ۱/۶ sec است، c را بیابید. (فرض کنید $g = 32 \text{ ft/sec}^2$.)

۷. فرض کنید انتهای بالایی فنر شکل ۷.۲۰ به یک آویز گاه غیرقابل ارتعاش وصل نشده، بلکه به آویز گاهی وصل است که خود تحت تابعی از زمان، فرضاً $f(t) = y$ ، بالا و پایین می‌رود. اگر جهت مثبت y به طرف پایین باشد، معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = kf(t).$$

فرض کنید در $t=0$ ، داریم $x = x_0$ و $dx/dt = 0$. معادله را با شرایط زیر نسبت به x حل کنید.

الف) اگر $f(t) = A \sin \alpha t$ و $\alpha \neq \sqrt{k/m}$

ب) اگر $f(t) = A \sin \alpha t$ و $\alpha = \sqrt{k/m}$



TOOLKIT PROGRAMS

Damped Oscillator

Forced Damped Oscillator

۸.۲۰ روشهای تقریب‌زنی: سریهای توانی

در بقیه این فصل راههایی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل به دست می‌دهیم. بحث ما در این قسمت الزاماً مختصر و نادقیق خواهد بود. هدف، ارائه روشهایی است برای حل معادلات دیفرانسیلی که با روشهای قبلی قابل حل نیستند. با وجود این، برای سادگی، برخی از مثالها را چنان انتخاب کرده‌ایم که با روشهای قبلی نیز قابل حل باشند، و بتوانیم روشهای قدیم و جدید را باهم مقایسه کنیم.

مثال زیر مربوط است به معادله $u'' + x^2 u = 0$ که باروشهای پیشین قابل حل نیست. اما اگر فرض کنیم جواب آن را می‌توان با یک سری توانی $\sum a_n x^n$ نمایش داد، می‌توانیم آن را حل کنیم. معادله $u'' + x^2 u = 0$ یک معادله خطی مرتبه دوم است که به‌درد معادلات به‌صورت $u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0$ تعلق دارد که در آن ضرایب $a_1(x)$ و $a_2(x)$ در همسایگی $x=0$ تحلیلی‌اند (به این معنا که سری مکلاورن هر یک در بازه‌ای چون $|x| < h$ به تابع مربوط همگراست). در این مثال $a_1(x) = 0$ و $a_2(x) = x^2$.

مثال ۱ برای معادله زیر جوابی به‌صورت یک سری توانی بیابید

$$u'' + x^2 u = 0. \quad (1)$$

حل: فرض کنید این معادله جوابی به‌صورت

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (2)$$

داشته باشد که در آن a_n ها ضرایبی هستند که باید چنان تعیین شوند که در معادله (۱) صدق کنند. اگر از این سری دوبار مشتق بگیریم داریم

$$u'' = 2a_2 + 3 \times 2a_3 x + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots \quad (3)$$

سری مربوط به $x^2 u$ چیزی جز حاصلضرب x^2 و طرف راست معادله (۲) نیست

$$x^2 u = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \dots + a_n x^{n+2} + \dots \quad (4)$$

سری مربوط به $u'' + x^2 u$ مجموع سریهای معادلات (۳) و (۴) است

$$u'' + x^2 u = 2a_2 + 6a_3 x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 + \dots \quad (5)$$

$$+ [n(n-1)a_n + a_{n-4}]x^{n-2} + \dots$$

تغییر پارامترها اگر جواب عمومی معادله همگن چنین باشد

$$y_h = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n$$

آنگاه

$$y = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

جوابی برای معادله ناهمگن (۱) خواهد بود با این شرط که

$$v_1' u_1 + v_2' u_2 + \dots + v_n' u_n = 0$$

$$v_1' u_1' + v_2' u_2' + \dots + v_n' u_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$v_1' u_1^{(n-2)} + v_2' u_2^{(n-2)} + \dots + v_n' u_n^{(n-2)} = 0$$

$$v_1' u_1^{(n-1)} + v_2' u_2^{(n-1)} + \dots + v_n' u_n^{(n-1)} = F(x).$$

از این معادلات به کمک قاعده کرامر می‌توان $v_1', \dots, v_n'$ را به دست آورد و با محاسبه انتگرال آنها $v_1, \dots, v_n$ را حساب کرد.

مسئله‌ها

معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۰.۱$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - y = 0 \quad ۰.۲$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0 \quad ۰.۳$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 16y = 0 \quad ۰.۴$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 16y = 0 \quad ۰.۵$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad ۰.۶$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + y = 7 \quad ۰.۷$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + y = x + 1 \quad ۰.۸$$

بیان کرد

$$u = a_0 \left(1 - \frac{x^4}{3 \times 4} + \frac{x^8}{3 \times 4 \times 7 \times 8} - \frac{x^{12}}{3 \times 4 \times 7 \times 8 \times 11 \times 12} + \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^5}{4 \times 5} + \frac{x^9}{4 \times 5 \times 8 \times 9} - \frac{x^{13}}{4 \times 5 \times 8 \times 9 \times 12 \times 13} + \dots \right). \quad (9)$$

با آزمون نسبت به سهولت دیده می‌شود که هر دوسری به ازای تمام مقادیر x مطلقاً همگرا هستند.

فکته اگر معادله دیفرانسیل $x^2 u'' + u = 0$ برای ما مهم باشد، می‌توانیم مقادیر هر دوسری را به ازای مقادیر خاصی از x در جدولی یادداشت کنیم، یا برنامه محاسبه آن را برای ماشین حساب یا کامپیوتر بنویسیم. در واقع، جواب عمومی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$u = C_1 x^{1/2} J_{1/4}(x^2/2) + C_2 x^{1/2} J_{-1/4}(x^2/2)$$

که در آن $J_p(x)$ را تابع بسل از نوع اول و از مرتبه p می‌نامند. با استفاده از سریها، جدولهای جامعی از توابع بسل تدوین شده‌اند. حال برای یافتن جوابی به صورت سری برای يك مسأله با مقدار اولیه متشکل از يك معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' = f(x, y) \quad (10)$$

و شرط اولیه

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (11)$$

روش دیگری را ارائه می‌کنیم. اگر يك سری تیلر بر حسب توانهای $x - x_0$ وجود داشته باشد که به جوابی از این مسأله همگرا باشد، آنگاه این سری باید به صورت زیر باشد

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} y''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

ایده کار این است که با استفاده از خود معادله دیفرانسیل، به محاسبه $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ و مشتقات مراتب بالاتر پردازیم، به این طریق که از دوطرف معادله (۱۰) نسبت به x مکرراً مشتق بگیریم، و سپس همان گونه که در مثال زیر نشان داده خواهد شد مقادیر قبلا محاسبه شده را قرار دهیم. در این مثال، $x_0 = 1$ ، $y_0 = 0$ ، و $f(x, y) = x + y$

توجه کنید که ضریب x^{n-2} در معادله (۴) برابر است با a_{n-4} . برای برقراری معادله (۱) باید ضرایب توانهای x موجود در طرف راست معادله (۵) همه صفر باشند

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0 \quad (6)$$

و به ازای هر $n \geq 4$ باید داشته باشیم

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0. \quad (7)$$

فورا از معادله (۲) می‌توان دریافت که

$$a_0 = u(0), \quad a_1 = u'(0). \quad (8)$$

به عبارت دیگر، ضرایب اول و دوم عبارت‌اند از مقادیر u و u' در $x = 0$. فرمولهای بازگشتی (۶) و (۷) به ما امکان می‌دهند که بقیه ضرایب را بر حسب این دو به دست آوریم. از دو معادله اول (۶) داریم

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$$

معادله (۷) نشان می‌دهد که اگر $a_{n-4} = 0$ ، آنگاه $a_n = 0$ ؛ لذا نتیجه می‌گیریم که

$$a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0$$

و هر وقت n برابر با $2 + 4k$ یا $3 + 4k$ باشد، a_n صفر است. در مورد ضرایب دیگر داریم

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

و لذا

$$a_4 = \frac{-a_0}{4 \times 3}, \quad a_8 = \frac{-a_4}{8 \times 7} = \frac{a_0}{3 \times 4 \times 7 \times 8}$$

$$a_{12} = \frac{-a_8}{12 \times 11} = \frac{-a_0}{3 \times 4 \times 7 \times 8 \times 11 \times 12}$$

و

$$a_5 = \frac{-a_1}{5 \times 4}, \quad a_9 = \frac{-a_5}{9 \times 8} = \frac{a_1}{4 \times 5 \times 8 \times 9}$$

$$a_{13} = \frac{-a_9}{13 \times 12} = \frac{-a_1}{4 \times 5 \times 8 \times 9 \times 12 \times 13}.$$

جواب را می‌توان به بهترین نحو به صورت مجموع دوسری جداگانه، که یکی در a_0 ضرب می‌شود و دیگری در a_1

به $y(x)$ قرار دهیم داریم

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 + 1(x-1) + 2 \frac{1}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + 2 \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots \quad (20) \\ &= x-1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

این سری ما را به یاد سری مشابهی می‌اندازد و آن سری مربوط به $2e^{x-1}$ است که عبارت است از

$$2e^{x-1} = 2 + 2(x-1) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}. \quad (21)$$

با مقایسه معادلات (20) و (21) می‌بینیم که سری نمایش داده شده در معادله 20 مربوط است به

$$y(x) = 2e^{x-1} - 2 - (x-1). \quad (22)$$

درمسأله 1 از شما خواسته شده که نشان دهید رابطه (22) در معادله دیفرانسیل $y' = x + y$ با شرط $y = 0$ وقتی $x = 1$ صدق می‌کند. ■

نکته روشی را که برای حل مثال 1 به کار بردیم می‌توانستیم در مورد مثال 2 نیز به کار ببریم. برای حل $y' = x + y$ با استفاده از روش مثال 1، می‌توانیم از سری

$$\begin{aligned} y(x) &= b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 \\ &\quad + b_3(x-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

همراه با سری مربوط به x به صورت $x = 1 + (x-1)$ استفاده کنیم. در این صورت داریم

$$y' = b_1 + 2b_2(x-1) + 3b_3(x-1)^2 + \dots$$

و معادله $y' = x + y$ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2(x-1) + 3b_3(x-1)^2 + \dots + nb_n(x-1)^{n-1} \\ + (n+1)b_{n+1}(x-1)^n + \dots \\ = 1 + (x-1) + b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 + \dots \\ + b_n(x-1)^n + \dots \\ = (1+b_0) + (1+b_1)(x-1) + b_2(x-1)^2 + \dots \\ + b_n(x-1)^n + \dots \end{aligned}$$

مثال 2 مطلوب است حل معادله دیفرانسیل

$$y' = x + y \quad (12)$$

با شرط اولیه

$$y = 0 \quad \text{وقتی که} \quad x = 1. \quad (13)$$

حل: سری تیلر $y(x)$ برحسب توانهای $x-1$ عبارت است از

$$\begin{aligned} y(x) &= y(1) + y'(1)(x-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}y''(1)(x-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

در معادله (12)، $x = 1$ و $y = 0$ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$y'(1) = 1 + 0 = 1. \quad (14)$$

از دوطرف معادله (12) نسبت به x مشتق می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$y'' = 1 + y'. \quad (15)$$

می‌دانیم که $y'(1) = 1$ و لذا می‌توانیم به محاسبه $y''(1)$ پردازیم

$$y''(1) = 1 + y'(1) = 2. \quad (16)$$

ادامه کار: از معادله (15) نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$y''' = 0 + y'' = y''. \quad (17)$$

چون می‌دانیم $y''(1) = 2$ درمی‌یابیم که

$$y'''(1) = y''(1) = 2.$$

همین کار را ادامه می‌دهیم: تمام مشتقات مراتب بالاتر در معادله زیر صدق می‌کنند

$$y^{(n+1)}(x) = y^{(n)}(x) \quad (n \geq 2) \quad (18)$$

در $x = 1$ مقدار همه این مشتقها 2 است

$$y^{(n)}(1) = 2 \quad (n \geq 2) \quad (19)$$

اگر مقادیر $y(1)$ ، $y'(1)$ ، $y''(1)$ و غیره را در سری تیلر مربوط

شیب، و تکشیه‌های يك معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ آغاز می‌کنیم.

خم جواب خمی است که معادله‌اش در معادله دیفرانسیل صدق کند. مثلاً، هر خم با معادله $y = Ce^x$ يك خم جواب معادله $y' = y$ است.

يك میدان شیب به هر نقطه $P(x, y)$ از دامنه f عدد $f(x, y)$ را تخصیص می‌دهد که شیب خم جواب مار بر P است.

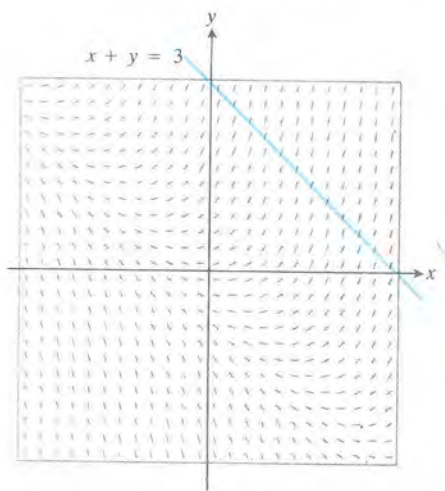
يك تکشیه، مربوط به يك معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ ، خم با معادله: ثابت $f(x, y) = C$ است. مثلاً تکشیه‌های مربوط به معادله $y' = y$ خطوط $y = C$ هستند که در آن C ثابت است.

می‌توانستیم میدان شیب معادله $y' = f(x, y)$ را رویه $z = f(x, y)$ معرفی کنیم، اما در اینجا ترجیح می‌دهیم راه دیگری در پیش گیریم، و آن راهی است که بدون اینکه معادله دیفرانسیل را عملاً حل کنیم با کمک آن بتوانیم تصویری از خم جواب به دست آوریم. شکل ۱۰.۲۰ نمودار بخشی از میدان شیب مربوط به معادله زیر را نمایش می‌دهد

$$y' = x + y. \quad (1)$$

(برای سادگی بیان، فقط می‌گوییم که این، میدان شیب است.) این شکل را کامپیوتر رسم کرده است اما می‌توانیم آن را به صورت الگویی از براده‌های آهن تصور کنیم که بريك صفحه کاغذ چنان پخش شده‌اند و آرایش آنها به گونه‌ای است که هر ذره براده موجود در نقطه $P(x, y)$ دارای شیب $x + y$ است. چون براده‌های آهن عملاً این کار را برای ما انجام نمی‌دهند به راههای دیگری متوسل می‌شویم.

يك راه ساده این است که ابتدا مجموعه‌ای از تکشیه‌ها را



۱۰.۲۰ میدان شیب $y' = x + y$ ، $-3 \leq x \leq 3$ ،

$$-3 \leq y \leq 3.$$

در دوطرف این معادله، ضرایب توانهای متناظر $x - 1$ باید مساوی باشند. به عبارت دیگر داریم

$$b_1 = 1 + b_0.$$

$$2b_2 = 1 + b_1$$

$$3b_3 = b_2, \dots, (n+1)b_{n+1} = b_n, \quad n \geq 2.$$

این معادلات را می‌توان به‌طور بازگشتی حل کرد و تمام ضرایب را برحسب b_0 که $b_0 = y(1)$ ، به دست آورد. در حالت خاص اگر $y(1) = 0$ ، داریم $b_0 = 0$ ، $b_1 = 1$ ، $b_2 = 1$ ، $b_3 = 1/3$ و لذا $b_4 = 1/3$ ؛ همین‌طور $b_4 = 1/3$ ، در نتیجه $b_5 = 1/3$ و الی آخر.

مسئله‌ها

۱. نشان دهید که $y = 2e^{x-1} - 2 - (x-1)$ در معادله دیفرانسیل $y' = x + y$ با شرط اولیه $y = 0$ وقتی $x = 1$ ، صدق می‌کند.

مطلوب است سری مک‌لورن یا تیلر مناسب برای جوابهای مسائل با مقادیر اولیه زیر.

$$y' = y; \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 2.$$

$$y' + y = 0; \quad y = 1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 3.$$

$$y' = 2y; \quad y = 2 \text{ وقتی } x = 0. \quad 4.$$

$$y' + y = 0; \quad y = -1 \text{ وقتی } x = 1. \quad 5.$$

$$y' = y; \quad y = 0 \text{ و } y' = 1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 6.$$

$$y' + y = 0; \quad y = 1 \text{ و } y' = 0 \text{ وقتی } x = 0. \quad 7.$$

$$y' + y = x; \quad y = 2 \text{ و } y' = 1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 8.$$

$$y' - y = x; \quad y = -1 \text{ و } y' = 2 \text{ وقتی } x = 0. \quad 9.$$

$$y' + x = y; \quad y = 0 \text{ و } y' = -2 \text{ وقتی } x = 2. \quad 10.$$

$$y'' - x^2 y = 0; \quad y = y_0 \text{ و } y' = y_1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 11.$$

$$y'' + x^2 y = x; \quad y = y_0 \text{ و } y' = y_1 \text{ وقتی } x = 0. \quad 12.$$

۹.۲۰ میدانهای شیب و قضیه پیکار درباره وجود و

یگانگی

این بخش را با معرفی مفاهیم هندسی خمهای جواب، میدانهای

در این مثال به سادگی می‌توانیم جواب عمومی معادله زیر را بیابیم

$$y' = x + y, \quad y(x_0) = y_0.$$

در مسأله ۲۱ از شما می‌خواهیم نشان دهید که جواب عمومی به صورت زیر است

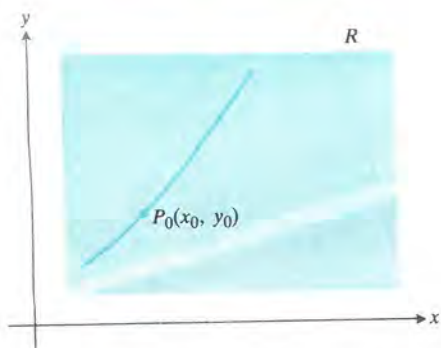
$$y = -1 - x + (1 + x_0 + y_0)e^{x-x_0}.$$

قضیه وجود و یگانگی و روش تکرار پیکار

حال به قضیه مهمی می‌پردازیم که منسوب است به یک ریاضیدان فرانسوی موسوم به شارل امیل پیکار (۱۸۵۶-۱۹۴۱). اثبات متداول این قضیه مبتنی است بر یک فرایند تکراری که دنباله‌ای از توابعی را تولید می‌کند که به جوابی از مسأله $y' = f(x, y)$ با $y(x_0) = y_0$ همگرايند، با این شرط که فرضهای قضیه برقرار باشند. این فرایند تکرار، معروف به روش تکرار پیکار، روش هوشمندانه‌ای است برای یافتن تقریبات تحلیلی جواب. بعد از اینکه نظری به قضیه افکنندیم، روش را توضیح خواهیم داد. فرض کنید یک مسأله با مقدار اولیه به صورت زیر داده شده

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

که در آن f در درون یک مستطیل R واقع در صفحه xy تعریف شده و پیوسته است (شکل ۱۲.۲۰). آیا این مسأله با مقدار اولیه با این فرض که (x_0, y_0) در درون R باشد همیشه جواب دارد؟ آیا ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد؟ مثال زیر نشان می‌دهد که جواب سؤال دوم مثبت است، مگر اینکه f شرایط دیگری هم داشته باشد.



۱۲.۲۰ چه موقع $y' = f(x, y)$ با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ دقیقاً یک جواب دارد؟ جواب: وقتی که در سراسر ناحیه R که f و f_y در $P_0(x_0, y_0)$ درونش قرار دارد، پیوسته باشند.

رسم کنیم. در مورد معادله (۱) هر تکشیبه خط مستقیمی است که در معادله زیر صدق می‌کند

$$x + y = C$$

که در آن، C یک مقدار ثابت است. از نقطه‌ای روی یکی از این خطها، مثلاً $x + y = 3$ ، پاره خط کوتاهی با شیب ۳ رسم می‌کنیم. بعد از اینکه یکی از آنها را رسم کردیم، بقیه را به موازات آن می‌کشیم. بر خط موجود در شکل ۱۲.۲۰، تا از این پاره خطها را رسم کرده‌ایم. حال این عمل را در مورد هر یک از تکشیبه‌ها تکرار می‌کنیم؛ آغاز کار، رسم یک پاره خط کوتاه به شیب C در یک نقطه واقع بر خط $x + y = C$ است. الگوی حاصل بخشی از میدان شیب معادله دیفرانسیل $y' = x + y$ را تشکیل می‌دهد.

به یک خط خاص، خط $x + y = -1$ ، توجه کنید. این خط خود شیب ۱- را دارد و در معادله $y' = x + y$ صدق می‌کند. در هر نقطه از این خط، میدان شیب بر خود خط قرار دارد. در بالای این خط، تفرع هر خم جواب روبه بالاست زیرا

$$y'' = 1 + y' = 1 + x + y$$

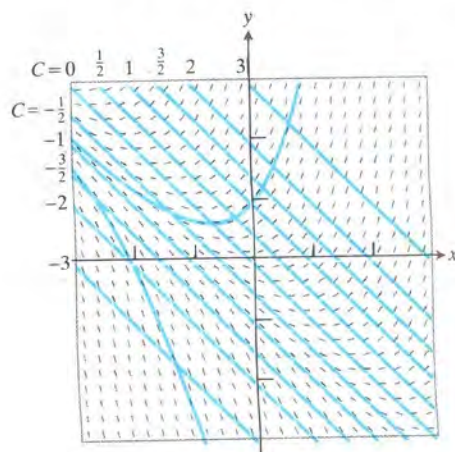
مثبت است هر گاه $x + y > -1$ و در زیر این خط، تفرع هر خم جواب باید روبه پایین باشد.

در شکل ۱۲.۲۰ چند چیز رسم شده است: دو خم جواب، مجموعه‌ای از تکشیبه‌ها، و بخشی از میدان شیب $y' = x + y$ واقع در ناحیه $-3 \leq x \leq 3$ ، $-3 \leq y \leq 3$. خم جواب بالا مربوط است به مسأله با مقدار اولیه

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1; \quad y = -1 - x + 2e^x$$

و خم پایین مربوط است به

$$y' = x + y, \quad y(-2) = 0; \quad y = -1 - x - e^{x+2}.$$



۱۲.۲۰ میدان شیب، تکشیبه‌های $x + y = C$ و خمهای جوابهای خاصی از معادله $y' = x + y$ ، $-3 \leq x \leq 3$ ، $-3 \leq y \leq 3$.

مثال ۱ مسأله با مقدار اولیه

$$(3) \quad y' = y^{4/5}, \quad y(0) = 0$$

جواب بدیهی $y \equiv 0$ را دارد. جوابی دیگر با جدا کردن متغیرها و انتگرالگیری به دست می آید:

$$y = \left(\frac{x}{5}\right)^5.$$

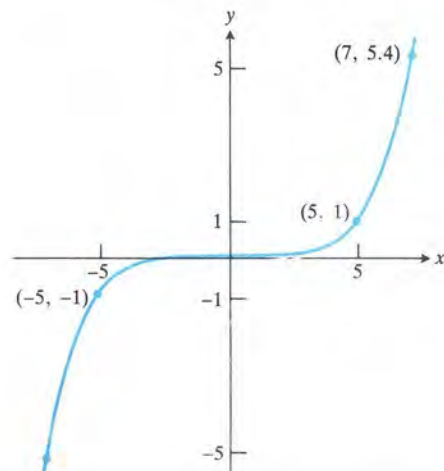
دو جواب دیگر هم وجود دارند (شکل ۱۳.۲۰ را ببینید)

$$y = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{5}\right)^5 & x > 0 \end{cases}$$

و

$$y = \begin{cases} \left(\frac{x}{5}\right)^5 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}.$$

در این مثال، $f(x, y) = y^{4/5}$ در تمام صفحه xy پیوسته است. اما مشتق جزئی آن $f_y = (4/5)y^{-1/5}$ در $y = 0$ پیوسته نیست.



۱۳.۲۰ بخشی از نمودار $y = (x/5)^5$ ، یکی از جوابهای $y' = y^{4/5}$ ، $y(0) = 0$. یک جواب دیگر، $y = 0$ است.



قضیه زیر شرطی کافی برای وجود و یگانگی جواب مسأله با مقدار اولیه معادلات (۲) به دست می دهد.

قضیه

قضیه وجود و یگانگی پیکار

فرض کنید $f(x, y)$ و مشتق جزئی مرتبه اول f_y آن همه جا در درون و روی محیط یک مستطیل R پیوسته باشند. اگر نقطه $P(x_0, y_0)$ متعلق به درون R باشد، آنگاه عدد مثبتی چون ϵ وجود دارد به قسمی که مسأله با مقدار اولیه

$$(4) \quad y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

به ازای $x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon$ جواب یکتایی چون $y = y(x)$ دارد.

این قضیه را اثبات نخواهیم کرد، ولی روش تکرار پیکار را که نقش مهمی در اثبات دارد شرح می دهیم. کار را با توجه به این نکته آغاز می کنیم که هر جواب مسأله با مقدار اولیه معادلات (۴) باید در معادله انتگرالی زیر نیز صدق کند

$$(5) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

زیرا

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{dt} dt = y(x) - y(x_0).$$

عکس این مطلب نیز درست است: اگر $y(x)$ در معادله (۵) صدق کند، آنگاه داریم $y' = f(x, y(x))$ و $y(x_0) = y_0$. لذا به جای معادلات (۴) می توان معادله (۵) را در نظر گرفت. این مطلب راه را برای روش تکرار پیکار هموار می کند: در انتگرالده معادله (۵) به جای $y(t)$ مقدار ثابت y_0 را قرار می دهیم، سپس انتگرال را محاسبه می کنیم و نتیجه حاصل در طرف راست معادله (۵) را $y_1(x)$ می نامیم

$$(6) \quad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt.$$

این آغاز فرایند است. برای ادامه کار از فرمول تکراری زیر استفاده می کنیم

$$(7) \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

اثبات قضیه پیکار متضمن اثبات این مطلب است که با این فرایند، دنباله ای از توابع $\{y_n(x)\}$ به دست می آید که همگرا به تابعی چون $y(x)$ هستند که به ازای مقادیر x به اندازه کافی نزدیک به x_0 ،

داریم

$$y = x - 1 + 2 \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \\ = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + 2 \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots \right)$$

و می بینیم که با استفاده از روش پیکار، در عبارت مربوط به $y_2(x)$ در معادله (۹ پ)، چهار جمله اول این بسط را به دست آورده ایم.

در مثال زیر، نمی توانیم جوابی بر حسب توابع مقدماتی به دست آوریم. یکی از راههایی که می تواند درباره رفتار جواب در نزدیکیهای نقطه آغازی ایده های به ما بدهد، روش پیکار است.

مثال ۳ در مورد مسأله با مقدار اولیه

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

$y_n(x)$ را به ازای $n = 0, 1, 2, 3$ بیابید.

حل: بنا به تعریف، $y_0(x) = y(0) = 0$. توابع دیگر $y_n(x)$ با نمایش انتگرالی زیر تولید می شوند

$$y_{n+1}(x) = 0 + \int_0^x [t^2 + (y_n(t))^2] dt \\ = \frac{x^3}{3} + \int_0^x (y_n(t))^2 dt.$$

محاسبات زیر را متوالیاً انجام می دهیم

$$y_1(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

نکته در بخش بعد برای حل مسائل با مقدار اولیه ای از قبیل مثالهای ۲ و ۳، روشهایی عددی معرفی می کنیم. وقتی برنامه چنین راهحلی را برای ماشین حساب یا کامپیوتر می نویسیم، بهتر است که برنامه خود را با روشی مستقل کنترل کنیم. برای x نزدیک صفر، باید انتظار داشته باشیم که $y_2(x)$ یا $y_3(x)$ برنامه را بیازمایند.

در معادلات (۴) و (۵) صدق می کند. (و اینکه جواب یکناست: به این معنا که از هیچ روش دیگری جوابی متفاوت به دست نمی آید.) مثالهای زیر روش تکرار پیکار را روشن می کنند، اما در بیشتر مسائل عملی، محاسبات خیلی زود بغرنج می شوند و ادامه کار مشکل می شود.

مثال ۴ در مورد مسأله مقدار اولیه زیر روش تکرار پیکار را به کار ببرید

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1. \quad (۸)$$

حل: در مورد این مسأله، معادله (۶) به صورت زیر در می آید

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t - 1) dt \\ = 1 + \frac{x^2}{2} - x. \quad (۹ الف)$$

حال اگر از معادله (۷) با فرض $n = 1$ استفاده کنیم، داریم

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t - 1 - \frac{t^2}{2} + t \right) dt \\ = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}. \quad (۹ ب)$$

در مرحله بعد، به ازای $n = 2$ ، به دست می آوریم

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(t - 1 + t - t^2 + \frac{t^3}{6} \right) dt \\ = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}. \quad (۹ پ)$$

در این مثال می توانیم جواب دقیق را نیز به دست آوریم زیرا

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

یک معادله مرتبه اول است که نسبت به y خطی است. عامل انتگرال گیری اش e^x ، و جواب عمومی آن به صورت زیر است

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

جواب مسأله با مقدار اولیه مورد نظر عبارت است از

$$y = x - 1 + 2e^{-x}. \quad (۱۰)$$

اگر در معادله (۱۰) به جای e^{-x} سری مکلاورن آن را قرار دهیم،

مسئله‌ها

در مسائل ۱-۶ بعضی از تکشیبه‌ها، و بخشی از میدان شیب را رسم کنید. با استفاده از میدان شیب، بخشی از نمودار جواب را که شامل نقطه $P(1, -1)$ باشد، رسم کنید.

$$y' = x \quad ۰۱$$

$$y' = y \quad ۰۲$$

$$y' = 1/x \quad ۰۳$$

$$y' = 1/y \quad ۰۴$$

$$y' = xy \quad ۰۵$$

$$y' = x^2 + y^2 \quad ۰۶$$

۰۷ برای معادله $y' = (x+y)^2$ بخشی از میدان شیب را رسم کنید. در جاهایی که شیب ۰، $1/4$ ، 1 ، 4 است تکشیبه‌ها را رسم کنید. (به‌طور تقریبی) جوابهایی از معادله را که شامل نقاط زیرند بکشید (الف) $P(0, 0)$ ، (ب) $Q(-1, 1)$ ، و (پ) $R(1, 0)$. حال با استفاده از جان‌نشانی $u = x+y$ ، جواب عمومی $y' = (x+y)^2$ را بیابید. معادله جوابی که از مبدأ بگذرد چیست؟ این جواب را دقیقتر رسم کنید.

۰۸ نشان دهید که هر يك از جوابهای معادله $y' = (x+y)^2$ نموداری دارد که دارای نقطه عطف است. ولی هیچ‌کدام مینیمم ندارد. (اگر قرار دهید $u = x+y$ ، مشاهده خواهید کرد که این نمودار مجانبهای قائم نیز دارد.)

۰۹ با استفاده از تکشیبه‌ها، بخشی از میدان شیب معادله $y' = x - y$ را رسم کنید. جواب باید شامل بخشی از هر چهار ربع باشد.

(الف) کدام تکشیبه جوابی برای این معادله دیفرانسیل نیز هست؟

(ب) با استفاده از این معادله دیفرانسیل تعیین کنید تقعرخمهای جواب در کجا روبه بالا و در کجا روبه پایین است.

در مسائل ۱۰-۱۳، برای يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول و شرط اولیه معادل بنویسید.

$$y = 1 + \int_0^x y(t) dt \quad ۰۱۰$$

$$y = -1 + \int_1^x (t - y(t)) dt \quad ۰۱۱$$

$$y = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad ۰۱۲$$

$$y = 2 - \int_0^x (1 + y(t)) \sin t dt \quad ۰۱۳$$

۰۱۴ چه معادله انتگرالی با مسئله با مقدار اولیه $y' = f(x)$ ، $y(x_0) = y_0$ معادل است؟

در مسائل ۱۵-۲۰ با استفاده از روش تکرار پیکار، $y_n(x)$ را به‌ازای $n = 0, 1, 2, 3$ بیابید.

$$y' = x, \quad y(1) = 2 \quad ۰۱۵$$

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad ۰۱۶$$

$$y' = xy, \quad y(1) = 1 \quad ۰۱۷$$

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0 \quad ۰۱۸$$

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1 \quad ۰۱۹$$

$$y' = 2x - y, \quad y(-1) = 1 \quad ۰۲۰$$

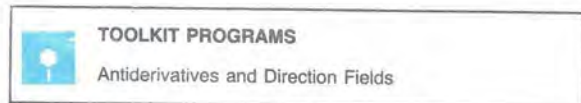
۰۲۱ نشان دهید که جواب عمومی

$$y' = x + y, \quad y(x_0) = y_0$$

عبارت است از

$$y = -1 - x + (1 + x_0 + y_0)e^{x-x_0}.$$

۰۲۲ در مثال ۳ درستی برابری مربوط به $y_2(x)$ را تحقیق کنید. (اگر اشتباهی وجود دارد آن را بیابید.)



۱۰.۲۰ روشهای عددی

بررسی روشهای تقریب‌زدن جوابهای معادلات دیفرانسیل را با ارائه چند تکنیک عددی تکمیل می‌کنیم. چگونگی به‌کار بردن این تکنیکها را در مسئله با مقدار اولیه $y' = f(x, y)$ با شرط $y = y_0$ وقتی که $x = x_0$ ، شرح می‌دهیم. هرچند این روشها جواب عمومی معادله $y' = f(x, y)$ را به‌دست نمی‌دهند، اما مثلاً در حل معادلات حرکت در وضعیتهایی واقعی نظیر پرتاب موشک یا قرار گرفتن يك موشک در مدارش بسیار اهمیت دارند. در این موارد جوابهای عددی به مراتب مفیدترند تا عبارتهای جبری. ما مثالهای ساده‌ای می‌آوریم ولی ایده‌های مطرح شده را می‌توان در مورد معادلات و دستگاه معادلات بسیار پیچیده‌تر نیز به‌کار برد. طبیعتاً، قصد نداریم چنین دستگاههای پیچیده معادلات را با ملحد

بررسی کنید. کار را تا $x = 1$ ادامه دهید.

حل: جواب کامل معادلات (۲) عبارت است از

$$y = 2e^x - 1. \quad (4)$$

در جدول ۲.۲۰ نتایج استفاده از معادلات (۳) و نتایج

دقیق را که برای مقایسه تا چهار رقم اعشار گرد شده اند می بینید.

وقتی به $x = 1$ می رسیم، خطا حدوداً ۵٪ است.

جدول ۲.۲۰

x	(تقریبی) y	(دقیق) y	(تقریبی) $y -$ (دقیق) $y =$ خطا
۰	۱	۱	۰
۰.۱	۱.۲	۱.۲۱۰۳	۰.۰۱۰۳
۰.۲	۱.۴۲	۱.۴۴۲۸	۰.۰۲۲۸
۰.۳	۱.۶۶۲	۱.۶۹۹۷	۰.۰۳۷۷
۰.۴	۱.۹۲۸۲	۱.۹۸۳۶	۰.۰۵۵۴
۰.۵	۲.۲۲۱۰	۲.۲۹۷۴	۰.۰۷۶۴
۰.۶	۲.۵۴۳۱	۲.۶۴۴۲	۰.۱۰۱۱
۰.۷	۲.۸۹۷۴	۳.۰۲۷۵	۰.۱۳۰۱
۰.۸	۳.۲۸۷۲	۳.۴۵۱۱	۰.۱۶۳۹
۰.۹	۳.۷۱۵۹	۳.۹۱۹۲	۰.۲۰۳۳
۱.۰	۴.۱۸۷۵	۴.۴۳۶۶	۰.۲۴۹۱

روش اصلاح شده اویلر

در این روش ابتدا، نظیر روش اصلی اویلر، y_{n+1} را برآورد می کنیم، اما نتیجه را z_{n+1} می نامیم. سپس در گام بعدی به جای $f(x_n, y_n)$ معدل $f(x_n, y_n)$ و $f(x_{n+1}, z_{n+1})$ را محاسبه می کنیم. پس

$$z_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (5 \text{ الف})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1})]. \quad (5 \text{ ب})$$

اگر این روش اصلاح شده را در مورد مثال ۱ به کار ببریم، و باز هم

و کاغذ حل کنیم؛ بلکه از برنامه های کامپیوتری که به نحو جالبی طراحی، و دقیق بودن آنها با دقت آزمایش شده، استفاده می کنیم. به بررسی سه روش عددی می پردازیم: ابتدا روشی ساده منسوب به اویلر، سپس یک روش اصلاح شده اویلر، و در پایان روشی دقیقتر از آن را شرح می دهیم که به روش رونگه-کوتا موسوم است.

روش اویلر

مسئله با مقدار اولیه

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

نقطه آغازی، $P(x_0, y_0)$ ، و شیب $f(x_0, y_0)$ را در اختیار ما می گذارد. می دانیم نمودار جواب باید خمی باشد که از P بگذرد و شیب آن $f(x_0, y_0)$ باشد. اگر از مماس مساوی P برای تقریب زدن خم جواب واقعی استفاده کنیم، این تقریب از $x_0 - h$ تا $x_0 + h$ ، برای مقادیر کوچک h ، خوب است. پس ممکن است فرضاً $h = 0.1$ را انتخاب کنیم و روی خط مماس از P به $P'(x_1, y_1)$ برویم که در آن $x_1 = x_0 + h$ و

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

اگر P' را نقطه آغازی جدید تصور کنیم، می توانیم از P' به $P''(x_2, y_2)$ برویم که در آن $x_2 = x_1 + h$ و

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

اگر به جای h ، $-h$ را قرار دهیم از P به جای رفتن به طرف راست به طرف چپ می رویم. این فرایند را می توان ادامه داد، اما هر چه جلوتر برویم ممکن است خطاها بیشتر روی هم انباشته شوند.

این روش تقریب زدن یک خم جواب از راه حرکت کردن در امتداد خطهای مماس با گامهای کوچک، به اویلر منسوب است. برای اینکه عملکرد این فرایند را ببینیم و ایده ای درباره خطاها به دست آوریم، روش اویلر را در مورد مسئله با مقدار اولیه $y(0) = 1$ ، $y' = 1 + y$ به کار می بریم.

مثال ۱ فرض کنید $h = 0.1$. دقت روش تقریب زدن اویلر را برای مسئله با مقدار اولیه

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1 \quad (2)$$

با فرض

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h(1 + y_n) \quad (3)$$

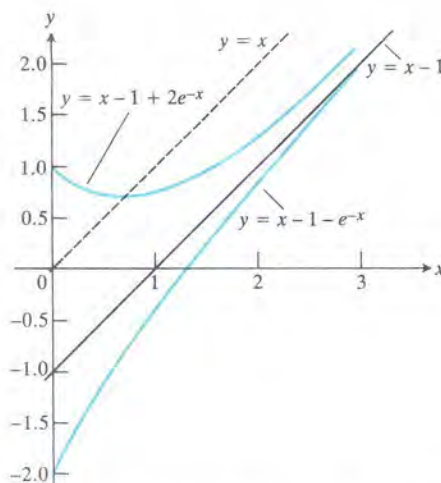
$$(ب) \quad y' = x - y, \quad y(0) = -2$$

نکته در بحث از دقت تقریب رونگه-کوتا این واقعیت که معادله دیفرانسیل نسبت به y خطی است اهمیت دارد. چنین دقتی در مورد مسأله با مقدار اولیه زیر به دست نمی آید

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

تقریب رونگه-کوتا برای $y(2)$ با فرض $h = 0.1$ ، برابر با 10.11×1.47 است. در مورد این مسأله مقدار y وقتی x از $x = 2$ تجاوز کند بدون کران افزایش می یابد (به زبان ریاضی می گوییم «بینهایت می شود»). ختم جواب در (تقریباً) $14.7 \times 10.11 = 149.2$ را يك مجانب قائم دارد. (شکل ۱۶.۲۰ را که بعداً می آید، و مسأله ۵ را ببینید.) هر چند هم h را کوچک بگیریم، وقتی به این مجانب نزدیک می شویم در مورد دقت تقریب خود هیچ حکمی نمی توانیم بدهیم.

مثال ۲ جدول ۳.۲۰ مقایسه برآورد $y(x)$ به روش رونگه-کوتا با فرض $h = 0.1$ را با مقدار واقعی جوابهای $y' = x - y$ (الف) با $y(0) = 1$ و (ب) با $y(0) = -2$ نشان می دهد. در عمل برای رسم نمودار شکل ۱۶.۲۰ نقاط بیشتری را به دست آورده و در نمودار مشخص کرده ایم. تقریب بالا ای، $y = x - 1 + 2e^{-x}$ ، روبه بالا است و وقتی $x = y = \ln 2$ ، مینیمم دارد. تقریب پایینی روبه پایین است، با افزایش x همیشه صعود می کند، و محور x را به ازای مقداری از x که نزدیک ۱.۳



$$14.20 \quad \text{دو جواب برای } y' = x - y$$

$$(الف) \quad y = x - 1 + 2e^{-x}, \quad y(0) = 1$$

$$(ب) \quad y = x - 1 - e^{-x}, \quad y(0) = -2$$

با $h = 0.1$ شروع کنیم، در $x = 1$ به نتایج زیر دست می یابیم

$$y(1) \approx 1.693 \quad 42816$$

$$y(1) \approx 3.656 \quad 43656$$

$$y(1) \approx 1.693 \quad 00840 \quad 500$$

و خطا کمتر از دو دهم ۱٪ است.

روش رونگه-کوتا*

روش اصلاح شده اولیه که در بالا آن را توصیف کردیم متناظر با تقریب زدن يك انتگرال با فرمول دوزنقه ای است. روش رونگه-کوتا که اینک آن را شرح می دهیم متناظر با تقریب زدن يك انتگرال با قاعده سیمپسون است. این روش مستلزم چهار محاسبه فرعی به صورت معادلات زیر است

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (6)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

حال y_{n+1} را از فرمول زیر به دست می آوریم

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (7)$$

اگر این روش را در مورد تعیین برآورد $y(1)$ برای مسأله $y' = 1 + y$ ، $y(0) = 1$ ، بازم با فرض $h = 0.1$ ، به کار ببریم، داریم

$$y(1) \approx 9490 \quad 43655$$

با خطای ۴۱۶۶ ۰۰۰۰۰۰ که کمتر از يك ده هزارم ۱٪ است، این مسلماً دقیقترین روش در بین سه روش فوق است و نوشتن برنامه آن برای ماشین حساب یا کامپیوتر مشکل نیست.

مثال بعد نشان می دهد که در تقریب رونگه-کوتا وقتی کار ادامه یابد، افزایش خطا متوقف می شود. در واقع، با $h = 0.1$ اختلاف بین جوابهای دقیق و تقریبی دو مسأله با مقدار اولیه زیر کمتر از 10^{-6} باقی می ماند

$$(الف) \quad y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

* روشی که در اینجا آن را شرح می دهیم یکی از چندین روش رونگه-کوتا است. این روش ساده و کارساز است.

جدول ۳.۲۰

تفاضل	(مقدار واقعی) y	(روننگه-کوتا) y	x
(الف)			
۰	۱	۱	۰
۵۷۵×10^{-7}	۰۷۱۳۰۶ ۱۳۱۹	۰۷۱۳۰۶ ۱۸۶۹	۰۵
۶۶۷×10^{-7}	۰۷۳۵۷۵ ۸۸۸۲	۰۷۳۵۷۵ ۹۵۴۹	۱۰
۶۰۷×10^{-7}	۰۹۴۶۲۶ ۰۳۲۰	۰۹۴۶۲۶ ۰۹۲۷	۱۵
۴۹۱×10^{-7}	۱۲۷۰۶۷ ۰۵۶۶	۱۲۷۰۶۷ ۱۰۵۷	۲۰
۳۷۳×10^{-7}	۱۶۶۴۱۶ ۹۹۹۷	۱۶۶۴۱۷ ۰۳۷۰	۲۵
۲۷۰×10^{-7}	۲۰۹۹۵۷ ۴۱۳۷	۲۰۹۹۵۷ ۴۴۰۷	۳۰
(ب)			
۰	-۲	-۲	۰
-۲۷۵×10^{-7}	-۱۱۰۶۵۳ ۰۶۶۰	-۱۱۰۶۵۳ ۰۹۳۵	۰۵
-۳۳۴×10^{-7}	-۰۳۶۷۸۷ ۹۴۴۱	-۰۳۶۷۸۷ ۹۷۷۵	۱۰
-۳۰۳×10^{-7}	+۰۲۷۶۸۶ ۹۸۴۰	+۰۲۷۶۸۶ ۹۵۳۷	۱۵
-۲۴۶×10^{-7}	۰۸۶۴۶۶ ۲۷۱۷	۰۸۶۴۶۶ ۴۴۷۲	۲۰
-۱۸۵×10^{-7}	۱۴۱۷۹۱ ۵۰۰۱	۱۴۱۷۹۱ ۴۸۱۶	۲۵
-۱۳۶×10^{-7}	۱۹۵۰۲۱ ۲۹۳۲	۱۹۵۰۲۱ ۲۷۹۶	۳۰

است قطع می‌کند. وقتی $x \rightarrow \infty$ هر دو خم به خط $y = x - 1$ نزدیک می‌شوند. به عنوان مجانب، نزدیک می‌شوند.

مثال ۳ در مورد مسأله با مقدار اولیه

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0 \quad (۸)$$

چند تقریب از نوع روننگه-کوتا را که با $h = ۰.۱$ به دست آورده ایم در جدول ۴.۲۰ نشان داده ایم. بخشی از نمودار در شکل ۱۵.۲۰ نشان داده شده است.

هر چند معادله $y' = x^2 + y^2$ هیچ جواب مقدماتی ندارد، می‌توان جوابی به صورت یک سری برای آن به دست آورد. در وهله اول، سری مکلاورن متناظر با مقدار اولیه $y(0) = 0$ به صورت زیر آغاز می‌شود

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{6237} + \dots \quad (۹)$$

جدول ۴.۲۰

x	(روننگه-کوتا) y	(واقعی) y
۰	۰	۰
۰.۵	۰.۰۴۱۷۹ ۱	۰.۰۴۱۷۹ ۱۱۴۶
۱.۰	۰.۳۵۰۲۳ ۴	۰.۳۵۰۲۳ ۱۸۴۴
۱.۵	۱.۵۱۷۴۷ ۳	۱.۵۱۷۴۴ ۷۵۴۴
۲.۰	۷.۱۵۷۸۹۹ ۶	۳۱۷۲۲۲۴۴۰ ۰
۲.۱	1×10^{11}	۱۴۷۰۰۱
۲.۲	9×10^{99}	۹۹۹۹۹۹

بنابراین، اگر بخواهیم مسئله کلی با مقدار اولیه

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = y_0 \quad (الف ۱۲)$$

را با استفاده از

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{C_1 u_1'(x) + C_2 u_2'(x)}{C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)} \quad (ب ۱۲)$$

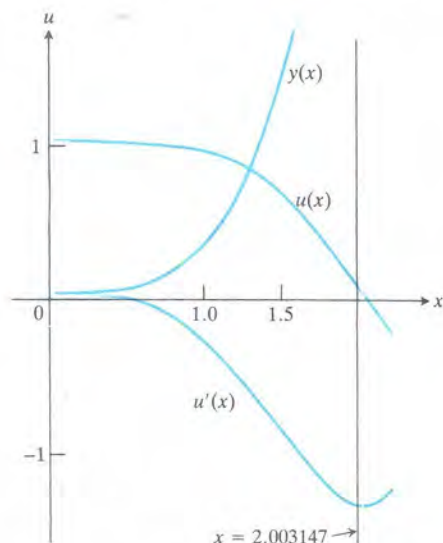
حل کنیم باید داشته باشیم

$$y(0) = -\frac{C_2}{C_1} = y_0.$$

بنابراین فرض می‌کنیم $C_1 = 1$ ، $C_2 = -y_0$. به ازای مقادیر خاصی از y_0 ، می‌توانیم مقادیر چهارسری را برای $u_1(x)$ ، $u_2(x)$ ، $u_1'(x)$ و $u_2'(x)$ نسبتاً به آسانی محاسبه کنیم و از تلفیق آنها جواب زیر را به دست آوریم

$$y(x) = -\frac{-u_1'(x) - y_0 u_2'(x)}{-u_1(x) - y_0 u_2(x)}. \quad (پ ۱۲)$$

در جدولین جدول ۴.۲۰ از این روش برای یافتن مقادیر واقعی به ازای $y = 0$ استفاده، و آنها را با مقادیر حاصل از به کار بردن روش رونگه-کوتا مقایسه کرده ایم. (شکل ۱۶.۲۰ را ببینید.)



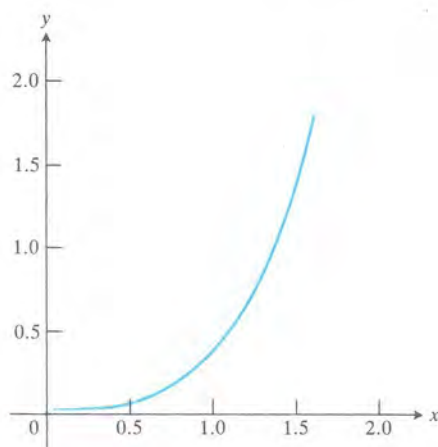
۱۶.۲۰ نمودارهای $y(x)$ ، $u_1(x)$ و $u_2'(x)$ برای مسائل با مقدار اولیه زیر

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$

$$y(x) = -u'/u.$$

خم مربوط به y در $x = 2.003147$ که در آن $u = 0$ ، یک معیّن دارد.



۱۵.۲۰ جواب تقریبی $y' = x^2 + y^2$ ، $y(0) = 0$

به طور نظری می‌توان جملات بسیار زیادتری از این سری را نیز به دست آورد، اما ضرایب از الگوی ساده‌ای تبعیت نمی‌کنند. روش سودمندتر، متضمن جانشانی هوشمندانه

$$y = -\frac{u'}{u} \quad (الف ۱۰)$$

است که معادله $y' = x^2 + y^2$ را به معادله مرتبه دوم زیر تبدیل می‌کند

$$u'' + x^2 u = 0. \quad (ب ۱۰)$$

در بخش ۸.۲۰، معادله (۹)، جواب معادله (ب ۱۰) را به صورت دوسری توانی زیر یافتیم

$$u_1(x) = 1 - \frac{x^4}{3 \times 4} + \frac{x^8}{3 \times 4 \times 7 \times 8} - \frac{x^{12}}{3 \times 4 \times 7 \times 8 \times 11 \times 12} + \dots \quad (الف ۱۱)$$

و

$$u_2(x) = x - \frac{x^5}{4 \times 5} + \frac{x^9}{4 \times 5 \times 8 \times 9} - \frac{x^{13}}{4 \times 5 \times 8 \times 9 \times 12 \times 13} + \dots \quad (ب ۱۱)$$

جواب عمومی معادله (ب ۱۱) عبارت است از

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2.$$

توجه کنید که

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1.$$

الف) وقتی متغیرها جدایی پذیرند

ب) وقتی معادله همگن است

پ) وقتی معادله نسبت به یک متغیر خطی است

ت) وقتی معادله کامل است.

در هر مورد مثالی بیاورید.

۵. روشهای حل معادلات مرتبه دوم را در حالت‌های زیر بیان کنید

الف) وقتی متغیر وابسته نداشته باشد

ب) وقتی متغیر مستقل نداشته باشد.

در هر مورد مثالی بیاورید.

۶. روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را

در حالت‌های زیر بیان کنید

الف) وقتی معادله همگن باشد

ب) وقتی معادله ناهمگن باشد.

در هر مورد مثالی بیاورید.

۷. موشک با جرم متغیر. اگر یک نیروی خارجی F بر سیستمی اثر

کند که جرمش با زمان تغییر می‌کند، قانون حرکت نیوتن عبارت

است از

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + (v+u) \frac{dm}{dt}.$$

در این معادله، m جرم سیستم در زمان t ، v سرعت، و u سرعت جرمی است که با آهنگ dm/dt به سیستم وارد (یا از آن خارج) می‌شود. فرض کنید که موشکی با جرم اولیه m_0 حرکت خود را از سکون آغاز می‌کند و با به عقب راندن مستقیم بخشی از جرمش با آهنگ ثابت $dm/dt = -b$ واحد در هر ثانیه و با سرعت ثابت $u = -c$ نسبت به موشک به طرف بالا رانده می‌شود. تنها نیروی خارجی وارد بر موشک نیروی گرانش $F = -mg$ است. تحت این شرایط، نشان دهید که ارتفاع موشک از سطح زمین در پایان ثانیه t ام (در مقایسه با m_0/b کوچک است) عبارت است از

$$y = c \left(t + \frac{m_0 - bt}{b} \ln \frac{m_0 - bt}{m_0} \right) - \frac{1}{2} g t^2.$$

۸. از معادلات دیفرانسیل زیر کدامیک را نمی‌توان به عنوان یک

معادله دیفرانسیل کامل مرتبه اول حل کرد؟

$$y^2 dx + 2xy dy = 0 \quad \text{الف)}$$

ب)

$$(2x \sin y + y^3 e^x) dx + (x^3 \cos y + 3y^2 e^x) dy = 0$$

پ)

$$(2x \cos y + 3x^2 y) dx + (x^3 - x^2 \sin y - y) dy = 0$$

$$(y \ln y - e^{-xy}) dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y \right) dy = 0 \quad \text{ت)}$$

۹. معادله دیفرانسیل $y' = 2xy(x^2 - y^2)$ یک عامل انتگرالگیری به صورت y^n دارد. n را بیابید و معادله را حل کنید.

۱۰. اگر y جوابی برای $y = e^x (D^2 + 4)y = 0$ باشد، نشان دهید y در معادله $(D^2 + 4)y = 0$ صدق می‌کند، زیرا با این فرض که $D = d/dx$ داریم $(D - 1)e^x = 0$. جواب عمومی $(D^2 + 4)y = 0$ را بیابید و از نتیجه برای حل $(D^2 + 4)y = e^x$ استفاده کنید.

۱۱. اگر بخواهید معادله $y'' = 2y$ ، $y'(0) = 1$ ، $y(0) = 1$ را با یافتن سری مکلورن $y(x)$ حل کنید، به ازای چه مقادیری از x انتظار دارید که این سری همگرا باشد؟ چرا؟ (پیشنهاد: ابتدا مسأله با مقدار اولیه را بدون استفاده از سری حل کنید، سپس جواب خود را به صورت یک سری بسط دهید.)

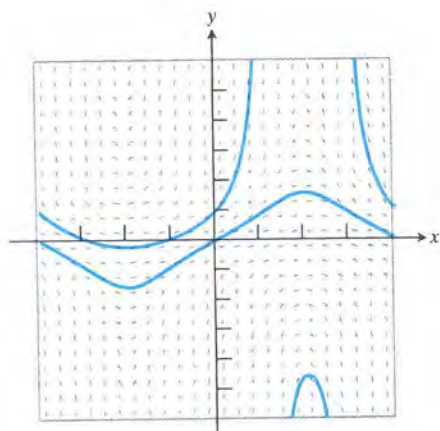
۱۲. یک دانشجوی رشته ریاضی و علم کامپیوتر با استفاده از کامپیوتر نمودار جواب

$$y' = (1 + y^2) \cos x$$

را به ازای

الف) $y(0) = 0$ وب) $y(0) = 1$

رسم کرده است. یکی از خمها پیوسته و بسیار خوش رفتار است. دیگری بسیار نامنظم است! با حل این معادله برای یک مقدار اولیه دلخواه $y(0) = y_0$ مجموعه مقادیری از y_0 را بیابید که به ازای آنها جواب کراندار باقی بماند. اگر جواب کراندار باقی نماند، مجانیهای نمودارش در کجا قرار می‌گیرند؟ شکل ۱۷.۲۰ را ببینید.

۱۷.۲۰ جوابهای $y = \tan(\sin x + D)$ به ازای $D = 0, \pi/4$.

مسئله‌های گوناگون

معادلات دیفرانسیل مذکور در مسائل ۱-۳۰ را حل کنید.

$$x \frac{d^2 x}{dy^2} + 2x = 0 \quad ۰.۲۲$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad ۰.۲۳$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = 1 - \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \quad ۰.۲۴$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 1 \quad ۰.۲۵$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad ۰.۲۶$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۰.۲۷$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = \sec 2x \quad ۰.۲۸$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = e^{2x} \quad ۰.۲۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x} \quad ۰.۳۰$$

۰.۳۱. مطلوب است جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$4x^2 y'' + 4xy' - y = 0$$

با این فرض که جوابی به صورت $y = x^c$ ، به ازای يك c ثابت دارد.

۰.۳۲. نشان دهید تنها خمهای مسطحی که خمیدگی ثابت دارند عبارت‌اند از دایره و خط مستقیم. (فرض کنید مشتقهای لازم وجود دارند و پیوسته‌اند.)

۰.۳۳. مسیرهای قائم خانوادهٔ خمهای $x^2 = Cy^3$ را بیابید. (هشدار: معادلهٔ دیفرانسیل نباید مقدار ثابت C را داشته باشد.)

۰.۳۴. مسیرهای قائم خانوادهٔ دایره‌های $(x-C)^2 + y^2 = C^2$ را بیابید.

۰.۳۵. مسیرهای قائم خانوادهٔ سهمیهای $y^2 = 4C(C-x)$ را بیابید.

۰.۳۶. معادلهٔ $d^2 y/dt^2 + 100y = 0$ نشان‌دهندهٔ حرکت هماهنگ ساده است. جواب عمومی این معادله را بیابید و ثابتهای انتگرالگیری آن را چنان تعیین کنید که وقتی $t = 0$ داشته باشیم $y = 10$ ،

$$y \ln y dx + (1+x^2) dy = 0 \quad ۰.۱$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - y - 2}{x^2 + x} \quad ۰.۲$$

$$e^{x+2y} dy - e^{y-2} dx = 0 \quad ۰.۳$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = ky \quad ۰.۴$$

$$y dy = \sqrt{1+y^2} dx \quad ۰.۵$$

$$(2x+y) dx + (x-2y) dy = 0 \quad ۰.۶$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad ۰.۷$$

$$x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۰.۸$$

$$x dy = \left(y + x \cos^2 \frac{y}{x}\right) dx \quad ۰.۹$$

$$x(\ln y - \ln x) dy = y(1 + \ln y - \ln x) dx \quad ۰.۱۰$$

$$x dy + (2y - x^2 - 1) dx = 0 \quad ۰.۱۱$$

$$\cos y dx + (x \sin y - \cos^2 y) dy = 0 \quad ۰.۱۲$$

$$\cosh x dy - (y + \cosh x) \sinh x dx = 0 \quad ۰.۱۳$$

$$(x+1) dy + (2y-x) dx = 0 \quad ۰.۱۴$$

$$(1+y^2) dx + (2xy + y^2 + 1) dy = 0 \quad ۰.۱۵$$

$$(x^2 + y) dx + (e^y + x) dy = 0 \quad ۰.۱۶$$

$$(x^2 + y^2) dx + (2xy + \cosh y) dy = 0 \quad ۰.۱۷$$

$$(e^x + \ln y) dx + \frac{x+y}{y} dy = 0 \quad ۰.۱۸$$

$$x(1+e^y) dx + (1/2)(x^2 + y^2)e^y dy = 0 \quad ۰.۱۹$$

۰.۲۰

$$\left(\sin x + \tan^{-1} \frac{y}{x}\right) dx - (y - \ln \sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad ۰.۲۱$$

۳۷. در مورد جوابهای نزدیک به $y=0$ ، می توانیم از تقریب $\sin y \approx y$ استفاده کنیم و معادله $dy/dx = x+y$ را به جای مسئله اصلی قرار دهیم. این معادله را با فرض $y(0)=0$ حل کنید. سری مکلاورن جوابتان چیست؟

۳۸. سریها. مسئله با مقدار اولیه $y' = x + \sin y$ ، $y(0)=0$ مفروض است. با مشتقگیری ضمنی می توانیم مشتقهای متوالی را محاسبه کنیم. مثلاً $y'' = 1 + (\cos y)y'$ ،

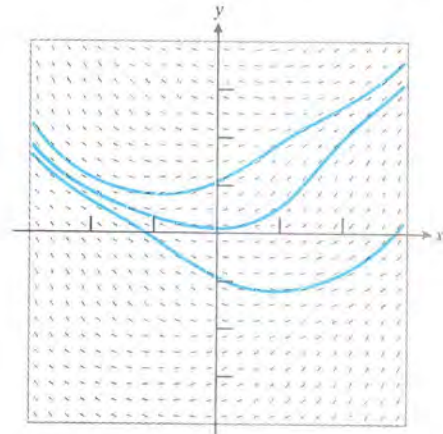
$$y''' = -(\sin y)(y')^2 + (\cos y)y''.$$

با استفاده از مقدار اولیه مفروض $y(0)=0$ می توانیم مقادیر این مشتقها را در $x=0$ حساب کنیم. با استفاده از این شیوه، جملات سری مکلاورن $y(x)$ را تا x^4 بیابید. (جواب را با جواب مسئله ۳۷ مقایسه کنید.)

۳۹. با استفاده از روش مسئله قبل، مطلوب است جملات اول تا x^4 سری مکلاورن $y(x)$ به قسمی که y در معادله $y' = x + \sin y$ ، با شرط (الف) $y(0) = \pi/2$ و (ب) $y(0) = -\pi/2$ ، صدق کند.

$dy/dt = 50$. دوره تناوب و دامنه حرکت را بیابید.

مسائل ۳۷-۳۹ به معادله دیفرانسیل $dy/dx = x + \sin y$ مربوط اند. (شکل ۱۸۰۲۰ را ببینید.)



۱۸۰۲۰ جوابهایی از $dy/dx = x + \sin y$ که از نقاط $(0, -\pi/2)$ ، $(0, \pi/2)$ ، $(0, 0)$ می گذرند. (مسائل ۳۷-۳۹ را ببینید.)

پیوستها

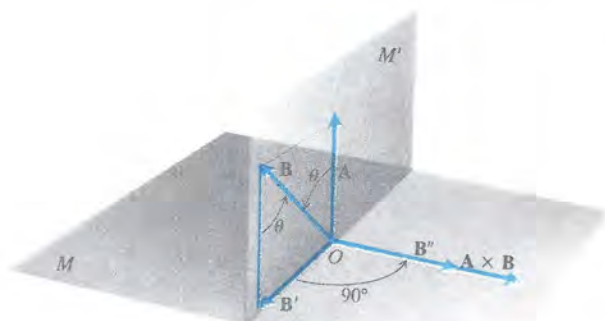
پ ۶

قانون توزیعپذیری در مورد ضرب برداری بردارها

در این پیوست قانون توزیعپذیری

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (۱)$$

مذکور در بخش ۵.۱۳ را اثبات می‌کنیم.



پ.۴ همان گونه که در متن ذکر شد، $A \times B = |A|B''$.

۳. ضرب در عدد $|A|$.

اگر این سه عمل را در مورد مثلثی با اضلاع B, C ، و $B+C$ (شکل پ.۵) انجام دهیم به ترتیب مثلثهای زیر را به دست می‌آوریم

۱. مثلثی با اضلاع B', C' ، و $(B+C)'$ که در معادله برداری

$$B' + C' = (B + C)'$$

صدق می‌کنند،

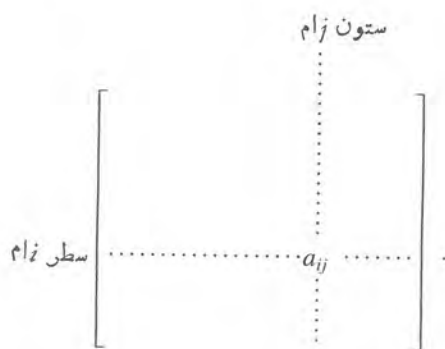
اثبات برای اثبات درستی رابطه (۱)، $A \times B$ را با روش تازه‌ای رسم می‌کنیم. از نقطه مشترک O بردارهای A و B را رسم و از O صفحه‌ای چون M بر A عمود می‌کنیم (شکل پ.۴). سپس تصویر قائم B بر M را می‌یابیم و برداری چون B' را که طولش $|B| \sin \theta$ است به دست می‌آوریم. B' را حول A در جهت مثبت به اندازه 90° دوران می‌دهیم تا بردار B'' به دست آید. سرانجام، B'' را در طول A ضرب می‌کنیم. بردار حاصل $|A|B''$ برابر با $A \times B$ است زیرا بنا به روش ترسیم فوق جهت B'' با جهت $A \times B$ یکی است (شکل پ.۴) و داریم

$$|A||B''| = |A||B'| = |A||B| \sin \theta = |A \times B|.$$

حال اگر هر يك از سه عمل زیر را در مورد مثلثی که صفحه‌اش با A موازی نباشد انجام دهیم مثلث دیگری به دست می‌آوریم

۱. یافتن تصویر بر M

۲. دوران حول A به اندازه 90°



درمورد ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

داریم

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 3$$

$$a_{21} = 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -2.$$

ماتریسی را که تعداد سطرها و ستونهایش با هم برابر باشند، ماتریس مربعی می‌نامند. چنین ماتریسی، یک ماتریس مرتبه n است اگر تعداد سطرها و تعداد ستونهایش n باشد.

به هر ماتریس مربعی A عددی چون $\det A$ یا $|a_{ij}|$ موسوم به دترمینان A نسبت می‌دهیم که از درایه‌های A با روش زیر به دست می‌آید. (پاره خطهای عمودی در نماد $|a_{ij}|$ به معنای قدر مطلق نیستند.) به ازای $n=2$ و $n=3$ بنا به تعریف داریم

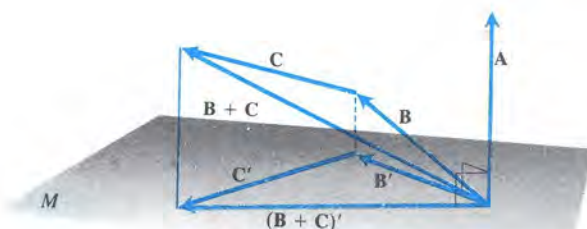
$$\det[a] = a \quad (1)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (2)$$

درمورد یک ماتریس مرتبه ۳ بنا به تعریف داریم

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{مجموع تمام حاصلضربهای} \\ \text{علامتدار به صورت} \\ \pm a_{11}a_{22}a_{33} \end{matrix} \quad (3)$$

که در آن i و j و k جایگشتی از ۱، ۲، و ۳ با ترتیبی معین است. تعداد $6 = 3!$ جایگشت از این نوع وجود دارد، و لذا در این مجموع شش جمله وجود دارد. با توجه به اندیس جایگشت که به شرح زیر تعریف می‌شود علامت نصف این جملات مثبت و علامت



پ.۵ بردارهای B ، C ، و $B+C$ ، و تصاویرشان بر صفحه‌ای عمود بر A .

۲. مثلی با اضلاع B'' ، C'' ، و $(B+C)''$ که در معادله برداری

$$B'' + C'' = (B+C)''$$

صدق می‌کنند (نماد «''» در بالای هر یک از بردارها همان معنا را دارد که در شکل پ.۴ دارد) و سرانجام

۳. مثلی با اضلاع $|A|B''$ ، $|A|C''$ ، و $|A|(B+C)''$ که در معادله برداری

$$|A|B'' + |A|C'' = |A|(B+C)'' \quad (2)$$

صدق می‌کنند. وقتی از معادلات $|A|B'' = A \times B$ ، $|A|C'' = A \times C$ و $|A|(B+C)'' = A \times (B+C)$ که در بحث فوق به دست آمدند استفاده کنیم، معادله (۲) به صورت زیر درمی‌آید، و این قانون توزیع پذیری (۱) است که درصدد اثباتش بودیم.

$$A \times B + A \times C = A \times (B+C)$$

پ ۷

دترمینان و قاعده کرامر

یک آرایه مستطیلی از اعداد نظیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

را ماتریس می‌نامند. A یک ماتریس «۲ در ۳» است زیرا دو سطر و سه ستون دارد. یک ماتریس « m در n » دارای m سطر و n ستون است، و درایه یا عنصر (عدد) واقع در سطر i ام و ستون j ام را غالباً با a_{ij} نمایش می‌دهند.

$$\begin{aligned}
 & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\
 & \quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
 & = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 & \quad + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (5) \\
 & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

فرمول زیر غالباً برای محاسبه دترمینانهای ۳ در ۳ به کار می رود

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (6)$$

رابطه (۶) محاسبه یک دترمینان ۳ در ۳ را به محاسبه سه دترمینان ۲ در ۲ تبدیل می کند.

خیلیها ترجیح می دهند در مورد محاسبه شش حاصلضرب علامتدار مربوط به دترمینان یک ماتریس ۳ در ۳، شکل زیر را به خاطر بسپارند:

این علامتها را تغییر دهید $\leftarrow$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

این علامتها را نگهدارید $\leftarrow$

کهاد و همسازه

دترمینانهای مرتبه دوم طرف راست رابطه (۶) به کهادهای (خلاصه دترمینانهای کهاد) درایه هایی که در آنها ضرب می شوند موسوم اند. پس

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ کهاد } a_{11} \text{ است،}$$

بقیه منفی هستند. علامت، مثبت است وقتی که اندیس زوج باشد و منفی است وقتی که اندیس فرد باشد.

تعریف

اندیس یک جایگشت

جایگشتی از اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ که به $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ نمایش داده می شود مفروض است. در این نمایش، برخی از اعدادی که بعد از i_1 می آیند ممکن است کمتر از i_1 باشند؛ شمارچنین اعدادی را تعداد وارونیهای این آرایه نسبت به i_1 می نامند و همین طور به ازای هر i دیگر تعداد وارونیها مشخص می شود؛ این عدد تعداد i هایی است که بعد از این i خاص در نمایش ظاهر می شوند و از آن کمترند. اندیس این جایگشت برابر است با مجموع کل تعداد وارونیهای اندیسهای متمایز جایگشت.

مثال ۱ به ازای $n=5$ ، جایگشت

$$5 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4$$

دارای

۴ وارونی نسبت به نخستین عنصر، ۵، و

۲ وارونی نسبت به دومین عنصر، ۳،

است و هیچ وارونی دیگری ندارد. لذا اندیس این جایگشت برابر است با $4+2=6$. ■

جدول زیر جایگشتهای ۱، ۲، و ۳، اندیس هر جایگشت، و حاصلضرب علامتدار مربوط به دترمینان در رابطه (۳) را به دست می دهد.

جایگشت	اندیس	حاصلضرب علامتدار
۱ ۲ ۳	۰	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
۱ ۳ ۲	۱	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
۲ ۱ ۳	۱	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
۲ ۳ ۱	۲	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
۳ ۱ ۲	۲	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
۳ ۲ ۱	۳	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

(۴)

مجموع این شش حاصلضرب علامتدار برابر است با

حل ۱: همسازها عبارت اند از

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

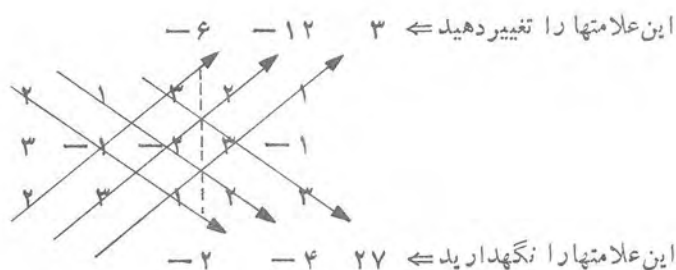
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

برای محاسبه $\det A$ هر يك از عناصر سطر اول A را در همسازهاش ضرب و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1+6) - 1(3+4) + 3(9+2) \\ &= 10 - 7 + 33 = 36. \end{aligned}$$

حل ۲: بنا به الگوی (۷) داریم



$$\begin{aligned} \det A &= -(-6) - (-12) - 3 + (-2) \\ &\quad + (-4) + 27 = 36. \end{aligned}$$

محاسبه دترمینان از روی ستونها یا از روی سطرها دیگر

دترمینان هر ماتریس مربعی را می‌توان از همسازهای هر سطر یا هر ستونی محاسبه کرد.

مثلاً اگر می‌خواستیم دترمینان مثال ۲ را با استفاده از همسازهای عناصر ستون سومش به دست آوریم به نتیجه زیر می‌رسیدیم

$$\begin{aligned} &+ 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(9+2) + 2(6-2) + 1(-2-3) \\ &= 33 + 8 - 5 = 36. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ کهاد } a_{22} \text{ است،}$$

و غیره. کهاد عنصر a_{ij} از يك ماتریس A دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر و ستون شامل a_{ij} به دست می‌آید

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ کهاد } a_{22} \text{ عبارت است از}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ کهاد } a_{23} \text{ عبارت است از}$$

همساز a_{ij} دترمینان A_{ij} است که از ضرب $(-1)^{i+j}$ در کهاد a_{ij} به دست می‌آید. پس

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

اثر عامل $(-1)^{i+j}$ این است که علامت کهاد را تغییر می‌دهد وقتی که مجموع $i+j$ فرد باشد. الگویی به صورت جدول برای به خاطر سپردن این تغییر علامتها در دست است:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

در گوشه شمال غربی، $i=1, j=1 \Rightarrow (-1)^{1+1} = +1$. اگر از خانه‌ای به خانه مجاور در همان سطر یا ستون برویم i یا j را به اندازه يك واحد تغییر می‌دهیم ولی نه هر دو را. پس نما از زوج به فرد یا از فرد به زوج تغییر می‌کند و در نتیجه علامت از $+$ به $-$ یا از $-$ به $+$ تغییر می‌یابد.

اگر رابطه (۶) را بر حسب همسازها بنویسیم داریم

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (۸)$$

مثال ۲ دترمینان ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

صفر می‌شود.

حکم ۹: اگر هر يك از عناصر سطری از يك ماتریس را در عدد ثابتی چون c ضرب کنیم و نتایج را به سطر دیگری بیفزاییم، دترمینان تغییر نمی‌کند.

مثال ۵ اگر با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

آغاز کنیم و -2 برابر سطر ۱ را به سطر ۲ بیفزاییم (دو برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم کنیم) داریم

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

چون $\det A = 36$ (مثال ۲) همچنین باید داشته باشیم $\det B = 36$. همان گونه که محاسبات زیر نشان می‌دهد، واقعیت همین است:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & -18 & -48 & -1 & \\ & & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ & & & 2 & 1 & 3 & \\ & & & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & & -1 & -3 & -8 & \\ & & & \nwarrow & \nwarrow & \nwarrow & \\ & & & 2 & 3 & 1 & \\ & & & \nwarrow & \nwarrow & \nwarrow & \\ & & & -6 & -16 & -9 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det B &= -(-18) - (-48) - (-1) + (-6) \\ &\quad + (-16) + (-9) \\ &= 18 + 48 + 1 - 6 - 16 - 9 \\ &= 67 - 31 = 36. \end{aligned}$$

مثال ۶ دترمینان مرتبه چهارم زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

احکام سودمندی درباره دترمینان

حکم ۱: اگر دو سطر ماتریسی یکسان باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

حکم ۲: جا به جا کردن دو سطر يك ماتریس، علامت دترمینان آن را تغییر می‌دهد.

حکم ۳: به ازای هر i ، دترمینان هر ماتریس برابر است با مجموع حاصلضربهای عناصر سطر (یا ستون) i ام در همسازهای مربوط.

حکم ۴: دترمینان ترانژاده هر ماتریس برابر است با دترمینان ماتریس اصلی. («ترانژاده» به این معناست که سطرها را به جای ستونهای نظیر قرار دهیم.)

حکم ۵: اگر هر يك از عناصر سطر (یا ستون) ماتریسی را در عدد ثابتی چون c ضرب کنیم، دترمینان در c ضرب می‌شود.

حکم ۶: اگر تمام عناصر بالا (یا تمام عناصر پایین) قطر اصلی صفر باشند، دترمینان ماتریس برابر است با حاصلضرب عناصر واقع بر قطر اصلی.

مثال ۳

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (3)(-2)(5) = -30.$$

حکم ۷: اگر عناصر سطری از يك ماتریس را در همسازهای عناصر متناظر سطری دیگر ضرب، و نتایج را باهم جمع کنیم، حاصل جمع صفر می‌شود.

مثال ۴ اگر A_{11}, A_{12}, A_{13} و همسازهای عناصر سطر اول $A = (a_{ij})$ باشند، آنگاه مجموعه‌های

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$$

(عناصر سطر دوم ضرب بدر همسازهای عناصر سطر اول) و

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}$$

هر دو صفرند.

در مورد ستونها نیز نتیجه مشابهی صادق است.

حکم ۸: اگر عناصر ستونی از يك ماتریس را در همسازهای عناصر متناظر ستونی دیگر ضرب و نتایج را باهم جمع کنیم، حاصل جمع

آنکه دستگاه

$$x + y = 0$$

$$2x + 2y = 2$$

هیچ جوابی ندارد. اگر $x + y = 0$ ، آنگاه

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

نمی‌تواند ۲ باشد.

اگر $D \neq 0$ ، دستگاه (۹) جوابی منحصر به فرد دارد و قاعده کرامر حاکی است که جواب را می‌توان از فرمولهای زیر به دست آورد

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}. \quad (10)$$

صورت فرمول مربوط به x از قرار دادن ستون شامل ثابتهای b_1 و b_2 (ستون b ها) به جای ستون اول A (ستون x ها) به دست می‌آید. از قرار دادن ستون b ها به جای ستون y ها صورت جواب y به دست می‌آید.

مثال ۷ مطلوب است حل دستگاه زیر

$$3x - y = 9$$

$$x + 2y = -4.$$

حل: روابط (۱۰) را به کار می‌بریم. دترمینان ماتریس ضرایب عبارت است از

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7.$$

پس

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{18 - 4}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-12 - 9}{7} = \frac{-21}{7} = -3.$$

حل: دو برابر سطر ۱ را از سطر ۲ کم می‌کنیم و سطر ۱ را به سطر ۳ می‌افزاییم. داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

حال عناصر ستون اول را در همسازهاشان ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(4 + 2) - (-6)(0 + 1) + 0 = 36.$$

قاعده کرامر

وقتی دترمینان

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

متعلق به ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی زیر صفر باشد

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \quad (9)$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

آنگاه یا دستگاه بینهایت جواب دارد یا هیچ جوابی ندارد. دستگاه

$$x + y = 0$$

$$2x + 2y = 0$$

که دترمینانش این است

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

بینهایت جواب دارد. به ازای هر y يك x به دست می‌آید. حال

فرمولهای دیگری که با استفاده از دترمینان نوشته می‌شوند
۱. معادله خط گذرنده از دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در صفحه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

۲. مساحت مثلثی با رئوسهای (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) و (x_3, y_3) عبارت است از

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

۳. حجم متوازی السطوحی که با بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ ایجاد می‌شود عبارت است از

$$\pm \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

۴. حاصلضرب برداری

$$\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

عبارت است از

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

۵. اگر $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ ،
آنگاه

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

فرمول ساده‌ای برای محاسبه دترمینان

فرمول دترمینان یک ماتریس n در n ، $A = (a_{ij})$ ، عبارت است از

حل دستگاه سه معادله با سه مجهول نیز به همین روش انجام می‌شود. اگر

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

متعلق به دستگاه

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \quad (11)$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

صفر باشد، دستگاه یا بینهایت جواب دارد یا اصلاً جواب ندارد. اگر $D \neq 0$ ، دستگاه جواب منحصر بفردی دارد که از قاعده کرامر به دست می‌آید

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

الگو برای ابعاد بالاتر نیز همین است: اگر $AX = B$ و $\det A = 0$ ، دستگاه یا بینهایت جواب دارد یا اصلاً جواب ندارد. اگر $\det A \neq 0$ ، دستگاه جواب منحصر بفردی دارد که از فرمول

$$x_i = \frac{\det U_i}{\det A} \quad (13)$$

به دست می‌آید. در اینجا U_i ماتریسی است که از قراردادن ستون b ها به جای ستون i ام A به دست می‌آید.

برای اثبات قاعده کرامر، پیوست ۸، مسأله ۳۲، را ببینید.

$$\det A = \left(\frac{1}{a_{11}}\right)^{n-1} \begin{vmatrix} |a_{11} & a_{12}| & |a_{11} & a_{13}| & |a_{11} & a_{14}| & \dots & |a_{11} & a_{1n}| \\ |a_{21} & a_{22}| & |a_{21} & a_{23}| & |a_{21} & a_{24}| & \dots & |a_{21} & a_{2n}| \\ |a_{31} & a_{32}| & |a_{31} & a_{33}| & |a_{31} & a_{34}| & \dots & |a_{31} & a_{3n}| \\ |a_{41} & a_{42}| & |a_{41} & a_{43}| & |a_{41} & a_{44}| & \dots & |a_{41} & a_{4n}| \\ |a_{\ell 1} & a_{\ell 2}| & |a_{\ell 1} & a_{\ell 3}| & |a_{\ell 1} & a_{\ell 4}| & \dots & |a_{\ell 1} & a_{\ell n}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ |a_{n1} & a_{n2}| & |a_{n1} & a_{n3}| & |a_{n1} & a_{n4}| & \dots & |a_{n1} & a_{nn}| \end{vmatrix}.$$

مثال ۸

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{1}\right)^2 \begin{vmatrix} |1 & 0| & |1 & 2| & |1 & -1| \\ |3 & -2| & |3 & 6| & |3 & 4| \\ |5 & 4| & |5 & 3| & |5 & 0| \\ |2 & 2| & |2 & -5| & |2 & 6| \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 4 & -7 & 5 \\ 2 & -9 & 8 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{-2}\right)' \begin{vmatrix} 14 & -38 \\ 18 & -30 \end{vmatrix} = -132$$

مسئله‌ها

دترمینانهای زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot 4$$

دترمینانهای زیر را برحسب همسازدهای (الف) سطر سوم، و (ب) ستون دوم محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot 3$$

۱۷. مقادیر h و k را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر (الف) بینهایت جواب داشته باشد، (ب) هیچ جوابی نداشته باشد

$$2x + hy = 8$$

$$x + 3y = k.$$

۱۸. به ازای چه مقدار از x رابطه زیر برقرار است؟

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۱۹. فرض کنید u, v, w و x توابعی از x اند که دوبار مشتقپذیرند و در رابطه $au + bv + cw = 0$ صدق می کنند؛ a, b, c و ثابت اند و همه صفر نیستند. نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0$$

۲۰. برای بسط کسر

$$\frac{ax+b}{(x-r_1)(x-r_2)}$$

به کسرهای ساده باید مقادیری برای C و D بیابیم که به ازای آنها معادله زیر به ازای تمام مقادیر x صادق باشد

$$\frac{ax+b}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{C}{x-r_1} + \frac{D}{x-r_2}.$$

(الف) دستگاهی از معادلات خطی بیابید که C و D را تعیین کند.

(ب) در چه شرایطی دستگاه معادلات مذکور در بند (الف) جواب یکتا دارد؟ به عبارت دیگر، چه وقت دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه صفر نیست؟

پ ۸

ماتریس، معادلات خطی، و ویژه مقادیر

آرایه ای مستطیلی از اعداد نظیر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

را ماتریس می نامند. A يك ماتریس «۲ در ۳» نام دارد زیرا

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad ۰۷$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad ۰۸$$

با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x + 8y = 2 \quad ۰۹$$

$$3x - y = -13$$

$$2x + 3y = 5 \quad ۰۱۰$$

$$3x - y = 2$$

$$2x - 3y = 6 \quad ۰۱۱$$

$$3x - 2y = 5$$

$$x + y + z = 2 \quad ۰۱۲$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 2$$

$$2x + y - z = 2 \quad ۰۱۳$$

$$x - y + z = 7$$

$$2x + 2y + z = 4$$

$$2x - 2y = 6 \quad ۰۱۴$$

$$x + y + z = 1$$

$$5y + 7z = 10$$

$$x - z = 3 \quad ۰۱۵$$

$$2y - 2z = 2$$

$$2x + z = 3$$

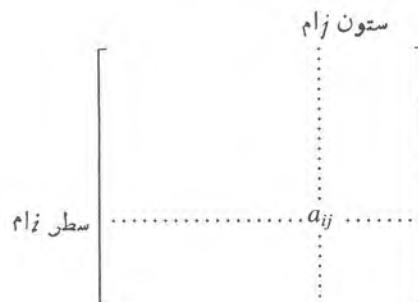
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \quad ۰۱۶$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = -1$$

دوسطر و سه ستون دارد. ماتریس « m در n » دارای m سطر و n ستون است، و درایه یا عنصر (عدد) واقع در سطر i ام و ستون j ام را غالباً با a_{ij} نمایش می‌دهند.



درمورد ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 3 \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= 0, & a_{23} &= -3. \end{aligned}$$

جمع و ضرب ماتریسها

دوماتریس برابرند اگر (و تنها اگر) در همه مکانهای نظیر، اعداد یکسان داشته باشند. مثلاً

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

به این معناست که

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2, & b_{12} &= 1, & b_{13} &= 3 \\ b_{21} &= 1, & b_{22} &= 0, & b_{23} &= -2. \end{aligned}$$

برای اینکه دوماتریس A و B برابر باشند باید شکل یکسان داشته باشند (تعداد سطرها برابر و تعداد ستونها برابر باشند) و به ازای هر i و j باید داشته باشیم

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

با افزودن عناصر متناظر می‌توان دوماتریس هم‌شکل را باهم جمع کرد. مثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

برای ضرب کردن عددی چون c در یک ماتریس، هر عنصر آن را در c ضرب می‌کنیم. مثلاً

$$7 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & 21 \\ 7 & 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

دستگاهی از معادلات خطی

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

را می‌توان به صورت ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

یا به صورت فشرده‌تر

$$AX = B \quad (3)$$

هم نوشت که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

برای یافتن حاصلضرب AX مذکور در معادله (۳)، عناصر سطر اول A را به ترتیب از چپ به راست در عناصر متناظر X از بالا به پایین ضرب و نتایج حاصل را باهم جمع می‌کنیم تا به دست آید

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

و این عدد را برابر با b_1 می‌گیریم. نتیجه، معادله اول مذکور در (۱) است. با تکرار این روش درمورد سطر دوم (۲)، معادله دوم مذکور در (۱) به دست می‌آید.

یک ماتریس m در n چون A را می‌توان از سمت چپ در

ضرب ماتریسها دارای ویژگیهای زیر است:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC) & (\text{قانون شرکتپذیری}) \\ A(B+C) &= AB+AC & (\text{قانون توزیعپذیری چپ}) \\ (A+B)C &= AC+BC & (\text{قانون توزیعپذیری راست}) \\ k(AB) &= (kA)B = A(kB) & (\text{قانون توزیعپذیری عددی}) \\ & & (\text{به ازای هر عدد } k) \end{aligned}$$

ضرب ماتریسها ویژگی تعویضپذیری را ندارد زیرا تساوی $AB=BA$ همواره درست نیست. مثلاً

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

حال آنکه

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای همه ماتریسهای 2×2 همانی ضربی است، به این معنا که برای هر ماتریس 2×2 چون M داریم $IM=MI=M$. بر حسب درایه‌ها، به ازای اعدادی چون a, b, c, d داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (8)$$

به همین ترتیب

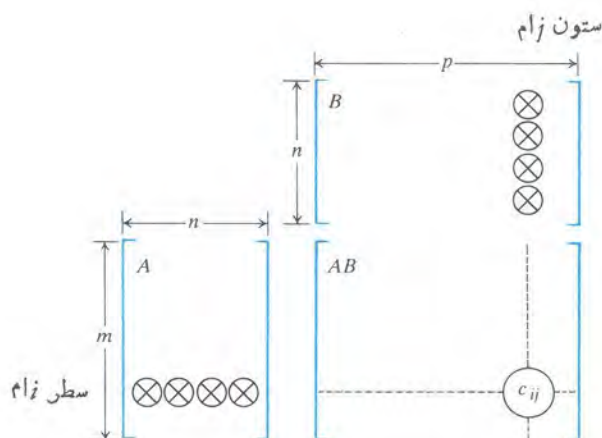
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همانی ضربی همه ماتریسهای 3×3 در 3 است.

اعمال سطری مقدماتی و ساده کردن سطری

دو دستگاه معادلات خطی را هم‌ارز نامند هرگاه مجموعه جوابهای آنها یکی باشد. برای حل يك دستگاه معادلات خطی غالباً می‌توان

ماتریسی n در p چون B ضرب کرد و يك ماتریس $m \times p$ چون $C=AB$ به دست آورد:



عنصر واقع در سطر i ام و ستون j ام AB عبارت است از مجموع

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (6)$$

$j = 1, 2, \dots, p \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, m$

معادله (۶) حاکی است که، «برای به دست آوردن عنصر واقع در سطر i ام و ستون j ام AB ، باید درایه‌های سطر i ام A را از چپ به راست در درایه‌های متناظر ستون j ام B از بالا به پایین ضرب و نتیجه‌ها را باهم جمع کرد. مجموع برابر است با c_{ij} » مثلاً

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a-d+3u & 2b-e+3v & 2c-f+3w \\ 3a+2d+2u & 3b+2e+2v & 3c+2f+2w \end{bmatrix}.$$

در بیشتر حالتها اگر در ضرب ماتریسها عوامل را کنار هم بنویسیم جای کمتری اشغال می‌شود. بنا بر این معمولاً ضرب مذکور در (۷) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-d+3u & 2b-e+3v & 2c-f+3w \\ 3a+2d+2u & 3b+2e+2v & 3c+2f+2w \end{bmatrix}$$

هدف این است که $[A|B]$ را به $[I|S]$ تبدیل کنیم که در آن

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

ماتریس $[I|S]$ ماتریس دستگاه زیر است

$$\begin{aligned} x &= s_1 \\ y &= s_2 \\ z &= s_3 \end{aligned} \quad (14)$$

جواب (۱۴) واضح است و اگر با تبدیلات سطری مقدماتی از $[A|B]$ به $[I|S]$ برسیم این جواب با جواب (۹) یکی خواهد بود. پس با به دست آوردن (۱۴)، در واقع (۹) را حل می کنیم. راه اصولی این است که در گوشه شمال غربی يك ۱ به دست آوریم و با اعمال نوع ۲ بقیه درایه های ستون اول را صفر سازیم. با این کار، ستون اول با ستون اول I یکسان می شود. سپس از اعمال نوع ۱ یا نوع ۳ استفاده می کنیم و در مکان دوم سطر دوم يك ۱ به دست می آوریم؛ بعد با به کار بردن اعمال نوع ۲ ستون دوم را به صورت دلخواه، یعنی شبیه ستون دوم I درمی آوریم. حال نوبت ستون سوم است.

آغاز:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right] \quad (15)$$

مرحله ۱: جای سطرهای ۱ و ۲ را عوض می کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right] \quad (16)$$

مرحله ۲: ۲ — برابر سطر ۱ را به سطر ۲ می افزاییم.

مرحله ۳: ۳ — برابر سطر ۱ را به سطر ۳ می افزاییم. نتیجه مراحل ۲ و ۳ عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -10 & -9 \\ 0 & -7 & -10 & -3 \end{array} \right] \quad (17)$$

مرحله به مرحله آن را به يك دستگاه معادلات هم ارز ساده تبدیل کرد به طوری که جوابها به سادگی قابل حصول باشند. برای روشن شدن این رشته مراحل، دستگاه

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -3 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ 3x - y - z &= 6 \end{aligned} \quad (9)$$

را به دستگاه هم ارز

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

تبدیل می کنیم.

مثال ۱ دستگاه معادلات (۹) را حل کنید.

حل: دستگاه (۹) با دستگاه زیر یکی است

$$AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

کار را با ماتریس ۳ در ۴ $[A|B]$ که سه ستون اولش ستونهای A هستند و ستون چهارمش B است آغاز می کنیم. پس داریم

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{array} \right] \quad (12)$$

این را با ماتریس افزوده دستگاه $AX = B$ می نامند.

حال این ماتریس افزوده را با رشته ای از اعمال، موسوم به اعمال سطری مقدماتی، تغییر می دهیم. این اعمال که روی سطرهای ماتریس انجام می شوند، از سه نوع زیرند:

۱. هر سطری را در عدد ثابتی بجز صفر ضرب می کنیم.
۲. مضرب ثابتی از هر سطر را به سطر دیگری می افزاییم.
۳. دو سطر را جا به جا می کنیم.

توجه کنید که در هر حال جواب را آزمایش کردیم، و بهتر است این کار را همیشه بکنیم.

وارون ماتریس مربعی

اگر M و P دو ماتریس مربعی $n \times n$ ، و دارای این ویژگی باشند که $PM = MP = I$ ، آنگاه P را وارون M می‌نامیم و از نماد

$$P = M^{-1}$$

که تلفظ می‌شود « M وارون» استفاده می‌کنیم.

همان رشته از اعمال سطری را که برای یافتن جواب دستگاه $AX = B$ مذکور در مثال ۱ به کار بردیم می‌توانیم برای یافتن وارون ماتریس A نیز به کار ببریم. کار را با ماتریس ۳ در ۳، $[A|I]$ ، که سه ستون اولش ستونهای A و سه ستون آخرش ستونهای I هستند آغاز می‌کنیم. پس داریم

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (21)$$

حال مراحل ۱ تا ۹ مذکور در مثال ۱ را در مورد ماتریس افزوده $[A|I]$ به کار می‌بریم. نتیجه نهایی عبارت است از

$$[I|A^{-1}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{60} & \frac{7}{60} & \frac{17}{60} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{60} & \frac{15}{60} & -\frac{10}{60} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \end{array} \right]. \quad (22)$$

ماتریس ۳ در ۳ حاصل از سه ستون آخر عبارت است از

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 15 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

برای آزمایش، A را در A^{-1} ضرب می‌کنیم:

مرحله ۴: سطر ۲ را در ۱ - ضرب می‌کنیم. سپس

مرحله ۵: ۲ - برابر سطر ۲ را به سطر ۱ می‌افزاییم، و

مرحله ۶: ۷ برابر سطر ۲ را به سطر ۳ اضافه می‌کنیم.

نتیجه حاصل از تمام این مراحل عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & -15 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 60 & 60 \end{array} \right]. \quad (18)$$

مرحله ۷: سطر ۳ را در $1/60$ ضرب می‌کنیم.

مرحله ۸: ۱۷ برابر سطر ۳ را به سطر ۱ می‌افزاییم.

مرحله ۹: ۱۰ - برابر سطر ۳ را به سطر ۲ اضافه می‌کنیم.

نتیجه نهایی عبارت است از

$$[I|S] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (19)$$

این، دستگاه (۱۰) را نمایش می‌دهد. جواب این دستگاه و در نتیجه جواب دستگاه (۹)، عبارت است از: $x = 2$ ، $y = -1$ ، $z = 1$. برای آزمایش جواب، این مقادیر را در (۹) قرار می‌دهیم و می‌بینیم که در واقع داریم

$$2(2) + 3(-1) - 4(1) = -3$$

$$(2) + 2(-1) + 2(1) = 3 \quad (20)$$

$$3(2) - (-1) - (1) = 6.$$

روش استفاده از اعمال سطری مقدماتی برای تبدیل ماتریس افزوده يك دستگاه معادلات خطی به صورتی ساده‌تر، موسوم است به روش ساده کردن سطری. این روش کارساز است زیرا در هر مرحله، دستگاه معادلات منتج از ماتریس حاصل هم‌ارز است با دستگاه اصلی. برای نمونه، در مثال ۱ وقتی سرانجام به ماتریس (۱۹) رسیدیم که دستگاه (۱۰) را نمایش می‌داد و جوابش به سادگی قابل حصول بود، می‌دانستیم که این جواب، جواب (۹) نیز هست.

دستگاه عبارت است از

$$X = A^{-1}B.$$

تنها ماتریسهای مربعی می‌توانند وارون داشته باشند. اگر ماتریسی n در n چون A وارونی داشته باشد، روش مذکور در حالت $n=3$ آن را به دست خواهد داد؛ ماتریس همانی $n \times n$ ، I ، را سمت راست A قرار می‌دهیم و با استفاده از اعمال سطری، به جای A ، ماتریس I را به دست می‌آوریم. ماتریس n در n که کنار آن قرار دارد و قبلاً I بود، همان A^{-1} است.

هر ماتریس n در n وارون ندارد. مثلاً ماتریس 2 در 2 زیر وارون ندارد

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$$

روشی که در بالا خلاصه وار ذکر شد این ماتریس را به ماتریس زیر تبدیل می‌کند که با اعمال سطری مقدماتی قابل تبدیل به ماتریس همانی 2 در 2 نیست

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به زودی مطالب دیگری درباره وارون ماتریس ذکر خواهیم کرد. دستگاهی از m معادله و n مجهول ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد، یا یک جواب، و یا بینهایت جواب داشته باشد. اگر جوابی داشته باشد، با روش ساده کردن سطری که در بالا شرح داده شد قابل حصول است.

فرمول دترمینانی برای وارون ماتریس

راه دیگری یافتن وارون یک ماتریس مربعی چون A (با این فرض که A وارون داشته باشد) برای این حکم مبتنی است: A وارون دارد اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$. این روش را شرح می‌دهیم، مثالی می‌زنیم، و سپس نشان می‌دهیم که چرا این روش کارساز است. مطلب را با ماتریسهای 3 در 3 توضیح می‌دهیم، اما این روش برای هر ماتریس مربعی با دترمینان غیر صفر کارساز است.

برای یافتن وارون ماتریسی که دترمینانش صفر نباشد:

۱. ماتریس همسازهای A را تشکیل می‌دهیم

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 2+7+51 & 3+14-17 & -4+21-17 \\ 20+10-30 & 20+20+10 & -40+30+10 \\ -14+11+3 & -21+22-1 & 28+33-1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24)$$

می‌دانیم که A^{-1} راه دیگری برای حل دستگاه زیر در اختیار ما می‌گذارد

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -3 \\ x + 2y + 3z &= 3 \\ 3x - y - z &= 6. \end{aligned} \quad (25)$$

پس دستگاه را به صورت ماتریسی $AX = B$ می‌نویسیم، B را از طرف چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم و ماتریس جواب (بردار ستونی) X را می‌یابیم. بنابراین

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 120 \\ -60 \\ 60 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

به صورت غیر ماتریسی، جواب عبارت است از $x=2$ ، $y=-1$ ، $z=1$ ، دستورالعمل کلی عبارت است از:

اگر ماتریس ضرایب A ی دستگاهی چون

$$AX = B$$

متشکل از n معادله و n مجهول، وارون داشته باشد، آنگاه جواب

$\text{adj } A$ (که سطر اول ماتریس همسازهاست، و لذا عملاً عناصر سطر اول A در همسازهای خودشان ضرب می‌شوند) می‌توان به‌دست آورد

$$\det A = 2(1) + 3(10) + (-4)(-7) \\ = 2 + 30 + 28 = 60.$$

حال $\text{adj } A$ را بر $\det A$ تقسیم می‌کنیم تا

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

به‌دست آید که با رابطه (۲۳) سازگار است.

چرا فرمول دترمینانی کارساز است؟ حاصلضرب $(\text{adj } A)A$ به‌ازای $n=3$ را دقیقتر بررسی کنیم. چون $\text{adj } A$ ترانژاده ماتریس همسازهاست، داریم

$$(\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ (26) \\ = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix}.$$

درایه‌ها به همان صورت درایه‌های این ماتریس آخرند زیرا A_{ij} همساز a_{ij} است. هر درایه روی قطر اصلی، $\det A$ است زیرا از ضرب کردن ستونی از A در همسازهای همان ستون به‌دست می‌آید. هر درایه که روی قطر اصلی نباشد، از ضرب کردن ستونی از A در همسازهای ستونی دیگر به‌دست می‌آید و بنا به حکم ۸ مذکور در پیوست ۷، صفر است. کاری را که با رابطه (۲۶) آغاز کردیم بدین ترتیب ادامه می‌دهیم که از $\det A$ فاکتور می‌گیریم

$$(\text{adj } A)A = (\det A)I \\ \left(\frac{1}{\det A} \text{adj } A\right)A = I. \quad (27)$$

ماتریس داخل پرانتز واقع در سمت چپ این معادله آخر باید A^{-1} باشد زیرا حاصلضربش با A برابر است با I (مسئله ۳۱ را ببینید).

۲. ماتریس ترانژاده این ماتریس را (که به ماتریس الحاقی A موسوم است) می‌یابیم.

$$\text{adj } A = (\text{cof } A)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

«ترانژاده» به این معناست که سطرها را به جای ستونهای نظیر قرار می‌دهیم.

۳. در این صورت داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A. \quad (28)$$

مثال ۲ با استفاده از فرمول دترمینانی (۲۵)، وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس کهادها را تشکیل می‌دهیم

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -7 \\ -7 & 10 & -11 \\ 17 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

علامتها را طبق الگوی $(-1)^{i+j}$ تصحیح می‌کنیم تا ماتریس همسازها را به‌دست آوریم

$$\text{cof } A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 7 & 10 & 11 \\ 17 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

[cof مخفف cofactor به معنی «همساز» است.]
ماتریس الحاقی، ترانژاده ماتریس همسازهاست

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

adj مخفف adjoint به معنی «الحاقی» است.]
دترمینان A را با ضرب کردن سطر اول A در ستون اول

همچنین داریم

$$A \left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \right) = I.$$

ویژه بردار و ویژه مقدار

همان گونه که قبلاً دیدیم، حاصلضرب یک ماتریس مربعی A و یک بردار ستونی X باز هم یک بردار ستونی است. اگر $X \neq 0$ (درایه‌های ستون همه صفر نباشند) و اگر AX برابر با مضرب عددی ناصفیری چون λ از X باشد، آنگاه X را ویژه بردار A می‌نامند. مثلاً بردار

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

یک ویژه بردار ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

است زیرا

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4-6 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

عدد $\lambda = -2$ را یک ویژه مقدار A می‌نامند.

ویژه مقدارها و ویژه بردارها در نظریه دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل نقش مهمی دارند. برای به دست آوردن شیوه‌ای جهت یافتن آنها، معادله $AX = \lambda X$ را به روش زیر به صورت یک دستگاه معادلات خطی می‌نویسیم

$$AX = \lambda X$$

$$AX - \lambda X = 0 \quad (\text{در اینجا } 0 \text{ نشان دهنده ماتریس ستونی است که همه درایه‌هایش صفرند.})$$

$$AX - \lambda IX = 0 \quad (IX = XI \text{ و لذا } X = IX)$$

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (\text{ضرب ماتریسها تو زیعندیر است.})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

(درایه‌ها به نمایش گذاشته شده‌اند).

پس، X یک ویژه بردار A است اگر و تنها اگر معادله اخیر به ازای یک یا چند مقدار λ برقرار باشد.

اگر $\det(A - \lambda I) \neq 0$ ، تنها جواب دستگاه (۲۹) به اصطلاح جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است. اما اگر $\det(A - \lambda I) = 0$ ، این دستگاه جوابهای دیگری نیز دارد که جوابهای نابديهی نام دارند و می‌خواهیم آنها را بیابیم. پس به دنبال مقادیری از λ هستیم که به ازای آنها این دترمینان صفر باشد. بر حسب درایه‌ها داریم

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{22}\lambda - a_{11}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A. \end{aligned}$$

پس $\det(A - \lambda I) = 0$ اگر و تنها اگر

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0. \quad (30)$$

این معادله معادله مشخصه A نام دارد و جوابهایش مقادیری از λ هستند که به ازای آنها معادلات $AX = \lambda X$ و $(A - \lambda I)X = 0$ جوابهای نابديهی دارند. پس فرایند یافتن ویژه بردارهای A شامل دو مرحله به شرح زیر است:

مرحله ۱: حل معادله (۳۰) برای یافتن ویژه مقدارهای A .

مرحله ۲: حل معادله $(A - \lambda I)X = 0$ به ازای هر ویژه مقدار جهت یافتن ویژه بردارهای متناظر.

مثال زیر چگونگی انجام این مراحل را در مورد ماتریسی 2×2 چون A که ویژه مقادیرش حقیقی و متمایزند نشان می‌دهد. اطلاعات مربوط به ویژه مقدارهای مختلط و سایر اطلاعات مربوط به ویژه مقادیر حقیقی تکراری را می‌توان در اغلب کتابهای درسی جبرخطی و معادلات دیفرانسیل و در بسیاری از کتابهای درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت.

مثال ۳ ویژه بردارهای ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: معادله مشخصه عبارت است از

$$\lambda^2 - (4 + (-1))\lambda + ((4)(-1) - (2)(3)) = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda + 2) = 0$$

دستگاه $(A - \lambda I)X = 0$ را می‌یابیم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

معادله مشخصه ماتریس A ی مذکور در (۳۱) به صورت زیر است

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

و لذا ویژه‌مقادیر عبارت‌اند از $\lambda = 3$ ، $\lambda = -2$ و $\lambda = 1$.
به ازای $\lambda = 1$ ، معادله $(A - \lambda I)X = 0$ به صورت

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-5x_2 - 2x_3 = 0$$

$$5x_2 + 2x_3 = 0$$

درمی‌آید. پس

$$x_2 = -\frac{5}{2}x_3$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 = \frac{5}{2}x_3 - x_3 = \frac{3}{2}x_3$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{5}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{x_3}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

ویژه‌بردارهای وابسته به $\lambda = 1$ مضارب ناصفر بردار زیرند

$$X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

نظیر حالت دوبعدی، معادلات مشخصه ماتریسهای با ابعاد بالاتر می‌توانند ریشه‌های مختلط یا ریشه‌های حقیقی تکراری داشته باشند، ولی ما در اینجا به بررسی آنها نمی‌پردازیم.

پس

$$\lambda = -2 \quad \text{یا} \quad \lambda = 5.$$

برای یافتن ویژه‌بردارهای مربوط به $\lambda = 5$ ، دستگاه $(A - 5I)X = 0$ را نسبت به X حل می‌کنیم

$$(A - 5I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4-5 & 2 \\ 3 & -1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

$$3x_1 - 6x_2 = 0.$$

از دو معادله اخیر داریم

$$x_1 = 2x_2.$$

به عبارت دیگر اگر $x_1 = 2x_2$ ، آنگاه X يك ویژه‌بردار A مربوط به ویژه‌مقدار $\lambda = 5$ است. پس، هر بردار به صورت

$$X = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \neq 0$$

يك ویژه‌بردار A مربوط به ویژه‌مقدار $\lambda = 5$ است. اگر فقط يك ویژه‌بردار می‌خواستیم، می‌توانستیم

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

را برگزینیم که ساده‌ترین بردار (ناصفر) به صورت مطلوب است. بنا بر معادله (۲۸) می‌دانستیم که

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

يك ویژه‌بردار A مربوط به $\lambda = -2$ است. سایر ویژه‌بردارهای مربوط به $\lambda = -2$ مضارب عددی X_2 هستند (مسئله ۳۳). ■

ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریسهای مربعی با ابعاد بالاتر، به طور مشابه به دست می‌آیند. مثلاً، برای یافتن ویژه‌بردارهای ماتریس زیرمقادیری برای λ می‌یابیم که به ازای آنها $\det(A - \lambda I) = 0$ و برای هر مقدار به دست آمده جوابهای ناپذیری

مسأله‌ها

۰۱ الف) دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت ماتریسی

$$AX = B$$

بنویسید

$$2x - 3y + 4z = -19$$

$$6x + 4y - 2z = 8$$

$$x + 5y + 4z = 23$$

ب) نشان دهید که

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

جوابی برای دستگاه مذکور در قسمت (الف) است.

۰۲ فرض کنید A ماتریس دلخواهی با سه سطر و سه ستون باشد و داشته باشیم

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

نشان دهید که $IA = A$ و همچنین $AI = A$. این مطلب نشان می‌دهد که I ماتریس همانی ضربی تمام ماتریسهای 3×3 است.

۰۳ فرض کنید A یک ماتریس دلخواه 3×3 در R_{12} ماتریس حاصل از جابه‌جا کردن سطرها ۱ و ۲ ماتریس همانی 3×3 باشد

$$R_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$R_{12}A$ را محاسبه کنید و نشان دهید که از جابه‌جا کردن سطرها ۱ و ۲ ماتریس A همین نتیجه حاصل می‌شود.

۰۴ فرض کنید A و R_{12} ماتریسهای مذکور در مسأله ۳ باشند. AR_{12} را محاسبه کنید و نشان دهید که از جابه‌جا کردن ستونهای ۱ و ۲ ماتریس A همین نتیجه حاصل می‌شود. (توجه کنید که R_{12} از تعویض ستونهای ۱ و ۲ ماتریس همانی 3×3 در I نیز به دست می‌آید.)

با ساده کردن سطری، دستگاههای معادلات زیر را حل کنید.

$$x + 8y = 4 \quad 0.5$$

$$3x - y = -13$$

$$2x + 3y = 5 \quad 0.6$$

$$3x - y = 2$$

$$4x - 3y = 6 \quad 0.7$$

$$3x - 2y = 5$$

$$x + y + z = 2 \quad 0.8$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 4$$

$$2x + y - z = 2 \quad 0.9$$

$$x - y + z = 7$$

$$2x + 2y + z = 4$$

$$2x - 4y = 6 \quad 0.10$$

$$x + y + z = 1$$

$$5y + 7z = 10$$

$$x - z = 3 \quad 0.11$$

$$2y - 2z = 2$$

$$2x + z = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \quad 0.12$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = -1$$

۰۱۳ بررسی کنید که وارون

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عبارت است از

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad \neq bc.$$

یعنی، نشان دهید که

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

به دست آوردید، معادلات پارامتری خط محل تقاطع صفحه‌ها را بنویسید.

در مسائل ۱۹-۳۰، ویژه مقادارهای ماتریسها را بیابید. (ریشه‌های برخی از معادلات مشخصه یا حقیقی تکراری اند یا مختلط.) سپس به ازای هر ویژه مقدار حقیقی، یک ویژه بردار بیابید.

$$019. \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$020. \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$021. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$022. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$023. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$024. \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$025. \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$026. \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$027. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$028. \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$029. \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$030. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

014. الف) با استفاده از نتیجه مذکور درمسأله ۱۳ وارون ماتریسهای زیر را بنویسید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) در قسمت (الف)، B ترانهادۀ A است. آیا B^{-1} ترانهادۀ A^{-1} هست؟

015. با استفاده از نتیجه مذکور درمسأله ۱۳ دستگاه معادلات مسأله ۵ را حل کنید.

016. با فرض

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه زیر را حل کنید

$$AX = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

017. الف) وارون ماتریس زیر را بیابید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ب) دستگاه معادلات زیر را حل کنید

$$x + 8y + 9z = 10$$

$$4y + 6z = 10$$

$$3z = -10.$$

018. الف) دستگاه

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 2z \\ 7 + 3z \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{l} 2x - y + 2z = 5 \\ 3x + y - 3z = 7 \end{array}$$

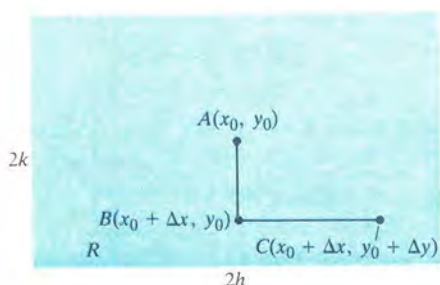
را نسبت به x و y و بر حسب z حل کنید.

ب) هر يك از معادلات طرف راست در قسمت (الف) نمایش يك صفحه است. با استفاده از جوابی كه در قسمت (الف)

را به صورت زیر نوشت

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \quad (2)$$

اثبات ناحیه R (شکل پ. ۶) مستطیلی است به مرکز $A(x_0, y_0)$ و به ابعاد $2h$ و $2k$. چون $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در R قرار دارد، نقطه $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ و نیز پاره خطهای AB و BC در R قرار می گیرند. پس در هر نقطه از این پاره خطها f پیوسته است و مشتقات جزئی f_x و f_y وجود دارند.



پ. ۶ ناحیه مستطیلی R مربوط به اثبات قضیه نمو.

Δz را به صورت مجموع دو نمو زیر در نظر می گیریم

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 \quad (3)$$

که در آن

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \quad (4)$$

تغییر از A به B و

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \quad (5)$$

تغییر از B به C است (شکل پ. ۷). توجه کنید که مجموع $\Delta z_1 + \Delta z_2$ ، همان طور که انتظار داریم برابر است با Δz :

$$\begin{aligned} \Delta z_1 + \Delta z_2 &= [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &\quad + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= \Delta z. \end{aligned} \quad (6)$$

تابع

$$F(x) = f(x, y_0)$$

۳۱. فرض کنید ماتریس n در n چون A وارونی چون A^{-1} دارد و ماتریس n در n مثل B دارای این ویژگی است که $BA = I$. نشان دهید که $B = A^{-1}$.

۳۲. داهی برای به دست آوردن قاعده کرامر. دیده ایم که اگر ماتریس ضرایب A از یک دستگاه $AX = B$ متشکل از n معادله خطی با n مجهول، وارون داشته باشد، آنگاه جواب دستگاه عبارت است از $X = A^{-1}B$. و نیز می دانیم که $A^{-1} = (1/\det A) \operatorname{adj} A$. با تلفیق این مطالب نشان دهید که i امین درایه X عبارت است از

$$x_i = \frac{1}{\det A} (A_{1i}b_1 + \dots + A_{ki}b_k + \dots + A_{ni}b_n)$$

و در نتیجه داریم

$$x_i = \frac{\det U_i}{\det A}.$$

در اینجا U_i ماتریسی است که از ماتریس A ، با قرار دادن B به جای i امین ستون A ، به دست می آید.

۳۳. نشان دهید که اگر X یک ویژه بردار یک ماتریس A باشد، آنگاه هر مضرب عددی ناصفر X یک ویژه بردار A است.

پ ۹

قضیه نمو و قضیه مشتقات آمیخته اولی

در این پیوست معادله (۳) از بخش ۴.۱۶ را (با صورتی اندک متفاوت) به دست می آوریم، و سپس می پردازیم به اثبات قضیه مشتقات آمیخته اولی (قضیه ۲ از بخش ۸.۱۶) که اول بار اولی آن را در سال ۱۷۳۴ جزو یک سری از مقالات مربوط به هیدروپنماتیک منتشر کرد.

قضیه

قضیه نمو در مورد توابع دو متغیره

فرض کنید $z = f(x, y)$ در همه جای یک ناحیه

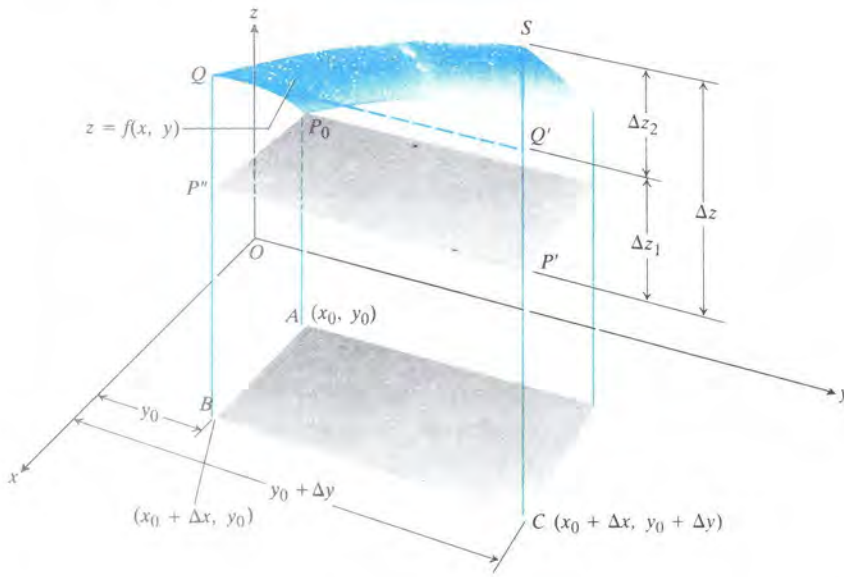
$$R: |x - x_0| < h, \quad |y - y_0| < k$$

واقع در صفحه xy پیوسته و دارای مشتقات جزئی باشد. و نیز فرض کنید Δx و Δy به قدر کافی کوچک باشند که $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در R قرار گیرد. اگر f_x و f_y در (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه با فرض

$$\Delta x, \Delta y \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$$

می توان نمو

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1)$$



پ.۷ بخشی از رویه $z=f(x, y)$ نزدیک

$$P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

نقاط P_0 و P' و P'' که در بالای صفحه xy قرار دارند دارای ارتفاع یکسان $z_0=f(x_0, y_0)$ هستند. تغییر در z برابر است با $\Delta z=P'S$. تغییر

$$\Delta z_1=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

که به صورت $P''Q=P'Q'$ نشان داده می شود از تغییر x از x_0 به $x_0+\Delta x$ ناشی می شود در حالی که در این تغییر y برابر با y_0 می ماند. حال اگر x را برابر با $x_0+\Delta x$ نگهداریم،

$$\Delta z_2=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)$$

تغییر z را که از تغییر y از y_0 به $y_0+\Delta y$ نتیجه می شود نشان می دهد. این تغییر را با $Q'S$ نشان می دهیم. کل تغییر z برابر است با مجموع Δz_1 و Δz_2 .

یا در بازه بسته ای که $x_0+\Delta x$ و x_0 را به هم وصل می کند تابعی پیوسته و مشتق پذیر از x است، و مشتق آن عبارت است از

$$F'(x)=f_x(x, y_0).$$

پس، بنا به قضیه مقدار میانگین در بخش ۷.۳، بین x_0 و $x_0+\Delta x$ نقطه ای چون c وجود دارد که در آن

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=F'(c)\Delta x$$

یا

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)=f_x(c, y_0)\Delta x$$

یا

$$\Delta z_1=f_x(c, y_0)\Delta x. \quad (۷)$$

به همین ترتیب، تابع

$$G(y)=f(x_0+\Delta x, y)$$

در بازه بسته ای که $y_0+\Delta y$ و y_0 را به هم وصل می کند تابعی پیوسته و مشتق پذیر از y است، و داریم

$$G'(y)=f_y(x_0+\Delta x, y).$$

پس بین y_0 و $y_0+\Delta y$ نقطه ای چون d وجود دارد که

$$G(y_0+\Delta y)-G(y_0)=G'(d)\Delta y$$

یا

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0) \\ =f_y(x_0+\Delta x, d)\Delta y \end{aligned}$$

$$\Delta z_2=f_y(x_0+\Delta x, d)\Delta y. \quad (۸)$$

حال، وقتی Δx و Δy به صفر میل کنند، می دانیم که $c \rightarrow x_0$ و $d \rightarrow y_0$. بنابراین، چون f_x و f_y در (x_0, y_0) پیوسته اند، هر دو کمیت زیر وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ و $\Delta y \rightarrow 0$ به صفر میل می کنند

$$\epsilon_1=f_x(c, y_0)-f_x(x_0, y_0) \quad (۹)$$

$$\epsilon_2=f_y(x_0+\Delta x, d)-f_y(x_0, y_0)$$

و سرانجام

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0+\Delta x, d)\Delta y \quad ((۷) \text{ و } (۸)) \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y \quad ((۹)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \\ &\text{که در آن وقتی } \Delta x \rightarrow 0 \text{ و } \Delta y \rightarrow 0, \epsilon_1 \rightarrow 0 \text{ و } \epsilon_2 \rightarrow 0. \\ &\text{این همان است که در پی اثباتش بودیم.} \end{aligned}$$

نتایج مشابهی در مورد توابع با هر تعداد متغیری متغیر مستقل برقرارند. اگر

$$w=f(x, y, z)$$

در آن f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} همه پیوسته‌اند. فرض کنید h و k چنان اعدادی هستند که نقطه $(a+h, b+k)$ نیز در مستطیل R قرار دارد، و تفاضل

$$\Delta = F(a+h) - F(a) \quad (۱۳)$$

را در نظر بگیرید که در آن

$$F(x) = f(x, b+k) - f(x, b). \quad (۱۴)$$

قضیه مقدار میانگین را در مورد F (که پیوسته‌است زیرا مشتقپذیر است) به کار می‌بریم، و لذا رابطه (۱۳) به صورت

$$\Delta = hF'(c_1) \quad (۱۵)$$

درمی‌آید که c_1 بین a و $a+h$ قرار دارد. بنا بر معادله (۱۴) داریم

$$F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$$

و لذا معادله (۱۵) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Delta = h[f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b)]. \quad (۱۶)$$

حال اگر قضیه مقدار میانگین را در مورد تابع $g(y) = f_x(c_1, y)$ به کار ببریم، به ازای d_1 بین b و $b+k$ داریم

$$g(b+k) - g(b) = kg'(d_1) \quad (۱۷ الف)$$

یا

$$f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1) \quad (۱۷ ب)$$

این را در معادله (۱۶) قرار می‌دهیم، و به ازای نقطه‌ای چون (c_1, d_1) واقع در مستطیل R' که رأسهایش چهار نقطه (a, b) ، $(a+h, b)$ ، $(a+h, b+k)$ ، و $(a, b+k)$ هستند، به نتیجه زیر می‌رسیم (شکل پ.۸)

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1). \quad (۱۸)$$

اگر از معادله (۱۴) در معادله (۱۳) قرار دهیم، Δ به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \Delta &= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) \\ &\quad - f(a, b+k) + f(a, b) \\ &= [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] \\ &\quad - [f(a+h, b) - f(a, b)] \\ &= \phi(b+k) - \phi(b) \end{aligned} \quad (۱۹)$$

تابعی از سه متغیر باشد که در نقطه (x_0, y_0, z_0) و در تمام نقاط همسایه‌ای از این نقطه پیوسته و دارای مشتقات جزئی f_x, f_y, f_z و f باشد که در نقطه مزبور پیوسته باشند، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z \\ &\quad + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

در اینجا وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ ، $\Delta y \rightarrow 0$ ، و $\Delta z \rightarrow 0$ ، آنگاه $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow 0$. مشتقات جزئی f_x, f_y, f_z موجود در این فرمول باید در نقطه (x_0, y_0, z_0) محاسبه شوند.

برای اثبات نتیجه (۱۰) باید Δw را به صورت مجموع سه نمو زیر در نظر گرفت و در مورد هر يك از نموها، قضیه مقدار میانگین را جداگانه به کار برد

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \quad (۱۱ الف)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_2 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) \\ &\quad - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \end{aligned} \quad (۱۱ ب)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_3 &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \\ &\quad - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) \end{aligned} \quad (۱۱ پ)$$

در هر يك از این نموهای جزئی $\Delta w_1, \Delta w_2, \Delta w_3$ ، دو مختص ثابت باقی‌مانند و تنها یکی تغییر می‌کند. مثلاً در (۱۱ ب) تنها y تغییر می‌کند، زیرا x برابر با $x_0 + \Delta x$ و z برابر با z_0 گرفته می‌شود. چون تابع $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ نسبت به y پیوسته است و مشتقش برابر با f_y است، در مورد آن قضیه مقدار میانگین به کار می‌رود و به ازای يك y_1 بین y_0 و $y_0 + \Delta y$ داریم

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0) \Delta y.$$

قضیه

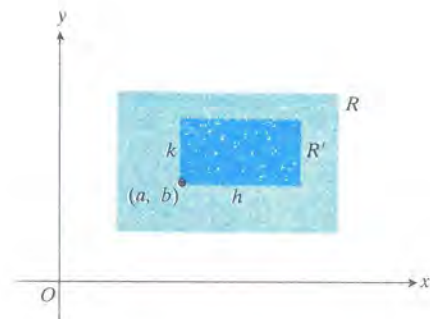
قضیه مشتقات آمیخته اوایلر

اگر $f(x, y)$ و مشتقات جزئی f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} در ناحیه‌ای که (a, b) را شامل باشد تعریف شوند، و همگی در (a, b) پیوسته باشند، آنگاه

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b). \quad (۱۲)$$

اثبات با چهار بار کاربرد قضیه مقدار میانگین می‌توان برابری $f_{xy}(a, b)$ و $f_{yx}(a, b)$ را اثبات کرد. بنا به فرض، نقطه (a, b) در درون يك ناحیه مستطیلی R واقع در صفحه xy قرار دارد که

زیرا فقط می‌گویید که مقدار f_{xy} در (c_1, d_1) برابر است با مقدار f_{yx} در (c_2, d_2) . اما اعداد h و k مورد بحث را می‌توان به اندازه دلخواه کوچک گرفت. فرض پیوستگی هردوی f_{xy} و f_{yx} در (a, b) به این معناست که $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ و $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$ که در آن وقتی $h, k \rightarrow 0$ داریم $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$. پس، اگر اجازه دهیم $h \rightarrow 0$ و $k \rightarrow 0$ داریم $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.



پ.ا. کلید اثبات $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ این نکته است که هرچه R' کوچک گرفته شود، باز هم در نقاطی واقع در درون R' و f_{xy} و f_{yx} مقادیر برابر دارند (هرچند ممکن است این مقادیر به ازای نقاط متفاوتی از R' به دست آیند).

نکته: برای $f_{xy}(a, b)$ و $f_{yx}(a, b)$ را می‌توان با فرضیهایی ضعیفتر از آنچه که ما به کار گرفتیم نیز اثبات کرد، مثلاً کافی است که f_x, f_y و f در R وجود داشته باشند و f_{xy} در (a, b) پیوسته باشد. در این صورت f_{yx} در (a, b) وجود دارد و با مقدار f_{xy} در آن نقطه برابر است.

پ ۱۰

فرمولهای عملگرهای برداری در مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی. اتحادهای برداری حاصلربهای سه‌تایی بردارها

$$(A \times B) \cdot C = (B \times C) \cdot A = (C \times A) \cdot B$$

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

اتحادهای برداری در مورد صورت دکارتی عملگر ∇

در اتحادهای زیر، $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ توابع عددی مشتقپذیر، و $u(x, y, z)$ و $v(x, y, z)$ توابع برداری مشتقپذیرند.

$$\nabla \cdot f v = f \nabla \cdot v + v \cdot \nabla f = f \nabla \cdot v + (v \cdot \nabla) f$$

$$\nabla \times f v = f \nabla \times v + \nabla f \times v$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla(u \cdot v) = (u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u + u \times (\nabla \times v) + v \times (\nabla \times u)$$

$$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$$

$$\nabla \times (u \times v) = (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v + u(\nabla \cdot v) - v(\nabla \cdot u)$$

که در آن

$$\phi(y) = f(a+h, y) - f(a, y). \quad (20)$$

حال اگر قضیه مقدار میانگین را در مورد معادله (۱۹) به کار ببریم به ازای d_2 بین b و $b+k$ داریم

$$\Delta = k \phi'(d_2) \quad (21)$$

بنابر معادله (۲۰) داریم

$$\phi'(y) = f_y(a+h, y) - f_y(a, y). \quad (22)$$

از معادله (۲۲) در معادله (۲۱) مقدار قرار می‌دهیم و معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$\Delta = k[f_y(a+h, d_2) - f_y(a, d_2)]. \quad (23)$$

سرانجام، قضیه مقدار میانگین را در مورد عبارت داخل کروشه به کار می‌بریم و به ازای یک عدد c_2 بین a و $a+h$ به دست می‌آوریم

$$\Delta = kh f_{yx}(c_2, d_2) \quad (24)$$

معادلات (۱۸) و (۲۴) توأمآ نشان می‌دهند که

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \quad (25)$$

که در آن (c_1, d_1) و (c_2, d_2) ، هر دو، در مستطیل R' قرار دارند (شکل پ.ا). معادله (۲۵) تمام آنچه می‌خواستیم نیست،

فرمولهای مربوط به Curl ، Div ، Grad و لاپلاسی

(ρ, ϕ, θ) کروی	استوانه‌ای (r, θ, z)	دکارتی (x, y, z)
$\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\theta$ و بردارهای واحد در جهت افزایش θ, ϕ و ρ اند.	$\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$ و بردارهای واحد در جهت افزایش r, θ و z اند.	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ و بردارهای واحد در جهت افزایش x, y و z اند.
$\mathbf{F}(\rho, \phi, \theta)$ مؤلفه‌های عددی F_ρ, F_ϕ, F_θ در همین جهت‌ها هستند.	$\mathbf{F}(r, \theta, z)$ مؤلفه‌های عددی F_r, F_θ, F_z در همین جهت‌ها هستند.	$\mathbf{F}(x, y, z)$ مؤلفه‌های عددی F_x, F_y, F_z در همین جهت‌ها هستند.
$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$
$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi \sin \phi) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{u}_\rho}{\rho \sin \phi} & \frac{\mathbf{u}_\phi}{\rho \sin \phi} & \frac{\mathbf{u}_\theta}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_\rho & \rho F_\phi & \rho \sin \phi F_\theta \end{vmatrix}$	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_\theta & \frac{1}{r} \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & r F_\theta & F_z \end{vmatrix}$	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$	$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

لاپلاسی

دیوژانس

گرادیان

تور

فرض کنید این شخص همچنین می‌داند چگونگی دوتا از اعداد صحیح مذکور در (۲) را در هم ضرب کند. اگر در معادلات (۱)، m و q داده شده باشند، این شخص درمی‌یابد که گاه می‌توان n را یافت و گاه نمی‌توان. اگر قدرت تخیل شخص از این هم قوی‌تر باشد، به فکر ابداع اعداد بیشتری می‌افتد و کسرهای را که چیزی جز جفتهای مرتب m/n متشکل از اعداد صحیح m و n نیستند، شناسایی می‌کند. عدد صفر ویژگیهای خاصی دارد که ممکن است برای مدتی ایجاد زحمت کند، اما سرانجام شخص درمی‌یابد که می‌تواند تمام کسرهای اعداد صحیح به صورت m/n را در نظر بگیرد و فقط کسرهایی را که مخرجشان صفر است کنار بگذارد. اینک این دستگاه که به مجموعه اعداد گویا موسوم است به اندازه کافی بزرگ است که بتوان اعمال اصلی اعداد گویا را روی آن انجام داد:

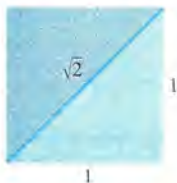
- | | |
|-------------|-------------|
| ۱. الف) جمع | ۲. الف) ضرب |
| ب) تفریق | ب) تقسیم |

این اعمال در مورد هر دو عدد موجود در این دستگاه قابل انجام اند جز اینکه تقسیم بر صفر ممکن نیست.

ویژگیهای هندسی مربع واحد (شکل پ. ۹) و قضیه فیثاغورس به بشر فهماند که می‌تواند پاره خطی هندسی رسم کند که طولش بر حسب یک طول واحد مبنای برابر با $\sqrt{2}$ باشد. پس انسان توانست معادله زیر را از طریق ترسیم هندسی حل کند

$$x^2 = 2.$$

سپس دریافت که پاره خطی که $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد و پاره خطی که طول واحد را نمایش می‌دهد دو کمیت نامتوافق اند. به این معنی که نسبت $\sqrt{2}/1$ را نمی‌توان به صورت نسبت دو مضرب صحیح از واحد طول دیگری، که احتمالاً پایه‌ای تر باشد، بیان کرد. به عبارت دیگر، نتوانست برای معادله $x^2 = 2$ جواب گویا پیدا کند.



پ. ۹. با ستاره و پرگار می‌توان پاره خطی رسم کرد که طولش عددی گویا نباشد.

عددی گویا وجود ندارد که مجذورش ۲ باشد. برای اثبات این موضوع، فرض کنید که چنین عددی وجود دارد. پس اعداد صحیحی چون p و q وجود دارند که نسبت به هم اول اند و داریم

$$p^2 = 2q^2. \quad (3)$$

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot v) - (\nabla \cdot \nabla)v \\ = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2 v$$

$$(\nabla \times v) \times v = (v \cdot \nabla)v - \frac{1}{2}\nabla(v \cdot v).$$

۱۱ پ

عددهای مختلط

اعداد مختلط عباراتی به صورت $a+ib$ اند که در آنها a و b اعداد «حقیقی» اند و i نمادی است برای عدد «انگاری» یا «موهومی» $\sqrt{-1}$. متأسفانه، بار معنایی کلمات «حقیقی» و «انگاری» چنان است که در ذهن ما $\sqrt{-1}$ مکان نامطلوبتری را در مقایسه با $\sqrt{2}$ اشغال می‌کند. در واقع برای ابداع دستگاه اعداد حقیقی نیز که اساس حساب دیفرانسیل و انتگرال است، به انگارش (تخیل) نیاز بوده است. در این بخش به بررسی مراحل مختلف این ابداع می‌پردازیم. به این ترتیب، ابداع بعدی یعنی ابداع دستگاه اعداد مختلط خیلی عجیب به نظر نخواهد رسید.

اولین مرحله ابداع اعداد تشخیص اعداد شمارشی ۱، ۲، ۳، ... بود که امروزه آنها را اعداد طبیعی یا اعداد صحیح مثبت می‌نامیم. می‌توان اعمال اصلی ساده‌ای را بر این اعداد انجام داد بدون اینکه از این دستگاه خارج شد. و این بدین معناست که دستگاه اعداد صحیح مثبت تحت اعمال جمع و ضرب بسته است. منظور از این عبارت این است که اگر m و n اعداد صحیح و مثبت دلخواهی باشند، آنگاه

$$mn = q \quad \text{و} \quad m+n = p \quad (1)$$

نیز اعداد صحیح مثبت اند. اگر دو عدد صحیح و مثبت طرف چپ هر يك از معادلات (۱) مفروض باشند، می‌توانیم اعداد صحیح و مثبت متناظر طرف راست را نیز بیابیم. علاوه بر این، گاه می‌توان اعداد صحیح و مثبت m و p را مشخص کرد و عددی صحیح و مثبت چون n یافت که $m+n = p$. مثلاً، معادله $3+n=7$ حتی اگر تنها اعداد شناخته شده، اعداد صحیح مثبت باشند قابل حل است. اما معادله $7+n=3$ قابل حل نیست مگر اینکه این دستگاه اعداد را گسترش دهیم. عدد صفر و اعداد صحیح منفی ابداع شده‌اند تا معادلاتی نظیر این معادله قابل حل باشند. در تمدنی که تمام اعداد صحیح

$$(2) \quad \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

در آن شناخته شده باشد، يك فرد تحصیل کرده همواره می‌تواند از معادله $m+n=p$ با فرض معلوم بودن دوتا از اعداد صحیح، عدد صحیح دیگر را بیابد.

اجراست به طوری که نتیجه اعمال از دستگاه خارج نمی شود:

۱. در دستگاه تمام اعداد صحیح، کلیه معادلات به صورت زیر را که در آن a عدد صحیح دلخواهی است می توان حل کرد

$$x + a = 0 \quad (۶)$$

۲. در دستگاه تمام اعداد گویا، کلیه معادلات به صورت زیر را که در آن a و b اعداد گویای دلخواهی اند و $a \neq 0$ ، می توان حل کرد

$$ax + b = 0 \quad (۷)$$

۳. در دستگاه تمام اعداد حقیقی، نه تنها تمام معادلات مذکور در (۶) و (۷) را می توان حل کرد بلکه تمام معادلات درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{با فرض } a \neq 0 \text{ و } b^2 - 4ac \geq 0 \quad (۸)$$

را نیز می توان حل کرد.

۸. احتمالاً با فرمول زیر که جوابهای معادله مذکور در (۸) را به دست می دهد آشنا هستید

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (۹)$$

و نیز از این واقعیت خبر دارید که وقتی $d = b^2 - 4ac$ ، منفی باشد، جوابهای مذکور در (۹) به هیچ یک از دستگاههای مذکور تعلق ندارند. در واقع، اگر صرفاً با استفاده از سه دستگاه ابداعی مذکور بخواهیم معادله درجه دوم خیلی ساده

$$x^2 + 1 = 0 \quad (۱۰)$$

را حل کنیم، حل آن ممکن نیست.

پس به چهارمین دستگاه ابداع شده می رسیم: مجموعه تمام اعداد مختلط $a + ib$. در واقع می توانیم نماد i را کلاً فراموش کنیم و نمادی نظیر (a, b) را به کار ببریم. در این صورت صرفاً درباره جفتی از اعداد حقیقی a و b صحبت می کنیم. از آنجا که تأثیر اعمال جبری بر اعداد a و b متفاوت است، لازم است که ترتیب رعایت شود. بنا بر این می توان گفت که دستگاه اعداد مختلط متشکل است از مجموعه تمام جفتهای مرتب اعداد حقیقی (a, b) همراه با قواعدی به شرح زیر در مورد برابری، جمع، ضرب و ... آنها. در اینجا هم نماد (a, b) را به کار می بریم و هم نماد $a + ib$ را. a را جزء حقیقی و b را جزء انگاری (موهومی) (a, b) می نامیم.

چون p و q اعدادی صحیح اند، p باید زوج باشد؛ در غیر این صورت حاصل ضرب آن در خودش باید فرد باشد. بر حسب نماد داریم $p = 2p_1$ که در آن p_1 یک عدد صحیح است. از اینجا داریم $q^2 = 2p_1^2$ که حاکی است که q باید زوج باشد. فرض کنید $q = 2q_1$ که در آن q_1 یک عدد صحیح است. در نتیجه ۲ باید یک عامل مشترک p و q باشد، و این در تناقض با فرض ماست که p و q دو عدد صحیح اند که عامل مشترکی جز ۱ ندارند. پس عدد گویایی وجود ندارد که مجذورش ۲ باشد.

هر چند اشخاص تحصیل کرده نتوانستند جوابی گویا برای معادله $x^2 = 2$ بیابند ولی توانستند دنباله ای از اعداد گویا چون

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \dots \quad (۴)$$

پیدا کنند که مجذورهایشان دنباله زیر را تشکیل می دهند که حدش ۲ است

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57121}{28561}, \dots \quad (۵)$$

در این زمان قدرت تخیل به آنها فهماند که به مفهوم حد یک دنباله از اعداد گویا نیاز دارند. اگر این واقعیت را بپذیریم که هر دنباله صعودی از بالا کراندار همواره به یک حد میل می کند و ملاحظه کنیم که دنباله مذکور در (۴) این ویژگیها را دارد، آنگاه باید بپذیریم که حد این دنباله عددی چون L است. این مطلب همراه با (۵) این معنا را القاء می کنند که $L^2 = 2$ ، و در نتیجه L نمی تواند عددی گویا باشد. اگر علاوه بر اعداد گویا، حد تمام دنباله های صعودی کراندار متشکل از اعداد گویا را نیز در نظر بگیریم به دستگاه تمام اعداد «حقیقی» دست می یابیم. کلمه حقیقی را داخل گیومه نوشتیم زیرا در مورد این دستگاه چیزی وجود ندارد که از سایر دستگاههای ریاضی «کمتر حقیقی» یا «بیشتر حقیقی» باشد.

در جریان پیدایش دستگاه اعداد حقیقی به کرات به تخیل نیاز افتاد. در واقع، در پدید آوردن دستگاههایی که در بالا مورد بحث ما قرار گرفت، دست کم سه بار از هنر ابداع استفاده شد:

۱. نخستین دستگاه ابداع شده: مجموعه تمام اعداد صحیح که از اعداد شمارشی ساخته شد.
۲. دومین دستگاه ابداع شده: مجموعه اعداد گویای m/n که از اعداد صحیح ساخته شد.
۳. سومین دستگاه ابداع شده: مجموعه تمام اعداد حقیقی x که از اعداد گویا ساخته شد.

این دستگاههای ابداع شده سلسله ای را تشکیل می دهند که در آن هر دستگاه دستگاه قبل را شامل است. و نیز هر دستگاه از دستگاه پیش از خود غیرتر است زیرا در آن اعمالی اضافی قابل

صفر یعنی $(0, 0)$ را به دست می‌دهد؛ یعنی

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

پس در این دستگاه جدید از اعداد، معادله

$$x^2 + 1 = 0$$

جوابی به صورت $x = (0, 1)$ دارد.

احتمالا شما با نماد $a + ib$ بیشتر آشنا هستید تا با نماد (a, b) . از آنجا که قوانین جبر در مورد جفتهای مرتب به مسا اجازه می‌دهند که بنویسیم

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

که در آن $(1, 0)$ نظیر واحد عمل می‌کند و $(0, 1)$ نظیر يك ریشه دوم منهای يك، نباید در نوشتن $a + ib$ به جای (a, b) تردید کنیم. i وابسته به b ، نظیر يك عنصر ردیاب است که جزء انگاری $a + ib$ را مشخص می‌کند. بنا به میل خود می‌توانیم جفتهای مرتب (a, b) را به کار ببریم یا عبارتهای $a + ib$ را. اما وقتی که قوانین جبر دستگاه اعداد مختلط (a, b) را آموختیم می‌بینیم که نماد $i = (0, 1)$ کمتر از نماد $1 = (1, 0)$ «حقیقی» نیست.

برای تبدیل هر ترکیب گویا از اعداد مختلط به يك تك عدد مختلط، قوانین جبر مقدماتی را به کار می‌بریم و هر جا که i^2 ظاهر می‌شود به جای -1 را قرار می‌دهیم. البته، تقسیم کردن بر عدد مختلط $0 + i0 = (0, 0)$ مجاز نیست. اما اگر $a + ib \neq 0$ عمل تقسیم به صورت زیر انجام می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{c + id}{a + ib} &= \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} \\ &= \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

نتیجه، عددی است مختلط به صورت $x + iy$ که در آن

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

و $0 \neq a^2 + b^2$ زیرا $(0, 0) \neq (a, b) = a + ib$. عدد $a - ib$ که در مخرج ضرب می‌شود تا i حذف گردد، مزدوج مختلط $a + ib$ نام دارد. مرسوم است که مزدوج مختلط z را با $\bar{z}$ («زد بار» تلفظ شود) نمایش می‌دهند؛ پس

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib.$$

بنا بر این، صورت و مخرج کسر مختلط $(c + id)/(a + ib)$ را در مزدوج مختلط مخرج ضرب کردیم. با این عمل همیشه به جای مخرج يك عدد حقیقی قرار می‌گیرد.

برابری

$$a + ib = c + id$$

دو عدد مختلط (a, b) و (c, d)

برابرند اگر و تنها اگر $a = c$ و

اگر و تنها اگر

$$b = d \quad \text{و} \quad a = c$$

جمع

$$(a + ib) + (c + id)$$

مجموع دو عدد مختلط (a, b) و

عدد مختلط (c, d)

$$= (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + c, b + d)$$

است.

ضرب

$$(a + ib)(c + id)$$

حاصلضرب دو عدد مختلط

(a, b) و (c, d) عدد مختلط

$$= (ac - bd)$$

$(ac - bd, ad + bc)$ است.

$$+ i(ad + bc)$$

حاصلضرب عددی حقیقی چون

$$c(a + ib) = ac + i(bc)$$

c در عدد مختلط (a, b) عدد

مختلط (ac, bc) است.

مجموعه تمام اعداد مختلط (a, b) که در آنها عدد دوم جفت صفر باشد تمام ویژگیهای مجموعه اعداد حقیقی a را دارد. مثلا، با جمع و ضرب $(0, 0)$ و $(c, 0)$ داریم

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

که اعدادی از همان نوع هستند یعنی جزء انگاری آنها برابر با صفر است. همچنین اگر «عدد حقیقی» $(a, 0)$ و عدد مختلط (c, d) را در هم ضرب کنیم به نتیجه زیر می‌رسیم

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

عدد مختلط $(0, 0)$ نقش صفر دستگاه اعداد مختلط را بازی می‌کند، و عدد مختلط $(1, 0)$ در نقش واحد است.

جفت اعداد $(0, 1)$ که جزء حقیقی آن برابر با صفر و جزء انگاریش برابر با يك است این ویژگی را دارد که مجذور جزء حقیقی آن برابر با منهای يك و جزء انگاری آن برابر با صفر است

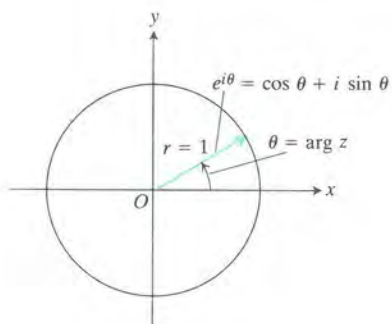
$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

پس، در دستگاه اعداد مختلط (a, b) عددی چون $x = (0, 1)$ وجود دارد که چون مجذورش به واحد یعنی $(1, 0)$ افزوده شود،

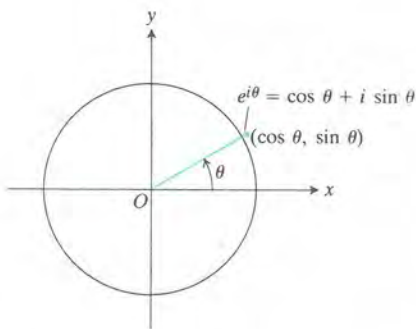
اتحاد

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۱۴)$$

که در بخش ۳.۱۲ معرفی شد، به قوانین زیر می‌انجامد که مربوط است به محاسبه حاصلضرب، خارج قسمت، توان، و ریشه اعداد مختلط. این اتحاد به نمودار آرگان برای $e^{i\theta}$ نیز منجر می‌شود. چون با انتخاب $r=1$ در معادله (۱۱)، $\cos \theta + i \sin \theta$ به دست می‌آید، طبق شکل پ.۱۱ می‌توان گفت که نمایش $e^{i\theta}$ بردار واحدی است که با جهت مثبت محور x زاویه θ می‌سازد.



(الف)



(ب)

پ.۱۱ نمودارهای آرگان برای

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

(الف) به صورت یک بردار، (ب) به صورت یک نقطه.

حاصلضرب برای ضرب دو عدد مختلط، قدرمطلقهایشان را درهم ضرب، و زاویه‌هایشان را با هم جمع می‌کنیم. فرض کنید

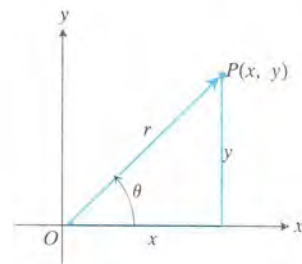
$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (۱۵)$$

نمودار آرگان دو روش برای نمایش هندسی عدد مختلط $z = x + iy$ وجود دارد:

الف) به صورت نقطه $P(x, y)$ در صفحه xy و

ب) به صورت بردار $\vec{OP}$ از مبدأ تا P .

در هر یک از این دو نمایش، محور x را محور حقیقی و محور y را محور انکاری می‌نامند، و هر دو نمایش را نمودار آرگان $z = x + iy$ می‌خوانند (شکل پ.۱۰).



پ.۱۰ این نمودار آرگان، $z = x + iy$ را هم به صورت یک نقطه $P(x, y)$ و هم به صورت یک بردار $\vec{OP}$ نمایش می‌دهد.

بر حسب مختصات قطبی x و y داریم

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

و

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (۱۱)$$

قدرمطلق عدد مختلط $x + iy$ بنا به تعریف طول (r) بردار $\vec{OP}$ از مبدأ تا $P(x, y)$ است. قدرمطلق را با پاره‌خطهای عمودی نمایش می‌دهیم؛ پس

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (۱۲ \text{ الف})$$

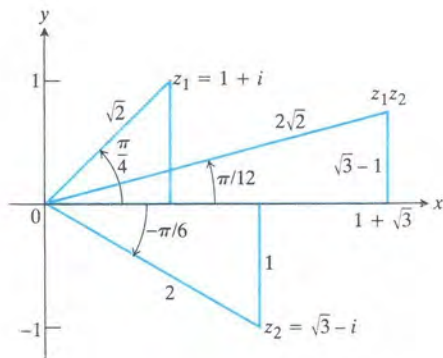
اگر همیشه مختصات قطبی r و θ را چنان اختیار کنیم که r نامنفی باشد، آنگاه

$$r = |x + iy|. \quad (۱۲ \text{ ب})$$

زاویه قطبی θ را شناسه z می‌نامند و آن را به صورت $\theta = \arg z$ می‌نویسند. البته هر مضرب صحیح 2π که به θ اضافه شود زاویه مناسب دیگری پدید می‌آید.

رابطه زیر، فرمول مفیدی است که یک عدد مختلط z ، مزدوجش $\bar{z}$ ، و قدرمطلقش $|z|$ را بهم ربط می‌دهد

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \quad (۱۳)$$



پ.۱۳: برای ضرب دو عدد مختلط، قدر مطلقها را در هم ضرب، و شناسه‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2} \exp\left(\frac{i\pi}{12}\right)$$

$$\blacksquare = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \approx 2.73 + 0.73i.$$

خارج قسمت فرض کنید در معادله (۱۵)، $r_2 \neq 0$. در این صورت

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

پس

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

یعنی، طولها را بر هم تقسیم، و زاویه‌ها را از هم کم می‌کنیم.

مثال ۲: نظیر مثال ۱ فرض کنید $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = \sqrt{3} - i$. داریم

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi i/12}$$

$$\approx 0.707 \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$\blacksquare \approx 0.183 + 0.683i.$$

لذا

$$|z_1| = r_1, \arg z_1 = \theta_1; \quad |z_2| = r_2, \arg z_2 = \theta_2. \quad (16)$$

پس

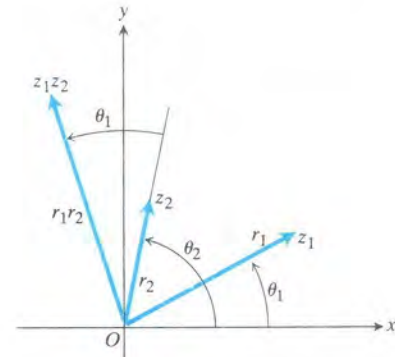
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

و لذا

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \quad (17)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

بنابراین، حاصلضرب دو عدد مختلط با برداری نمایش داده می‌شود که طولش حاصلضرب طولهای دو عامل ضرب است و شناسه‌اش مجموع شناسه‌های آنها (شکل پ.۱۲). اگر یکی از عوامل ضرب $e^{i\theta}$ باشد، کافی است بردار دیگر را در خلاف جهت ساعت به اندازه زاویه θ دوران دهیم. ضرب در i زاویه را به اندازه 90° ، در -1 به اندازه 180° ، در $-i$ به اندازه 270° ، و غیره، دوران می‌دهد.



پ.۱۲: وقتی z_1 و z_2 در هم ضرب شوند،

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2.$$

مثال ۱: فرض کنید

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i.$$

نمودارهای آرگان این اعداد مختلط را به دست می‌آوریم (شکل پ.۱۳) و از روی آنها نمایش قطبی این اعداد را می‌نویسیم

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 2 e^{-i\pi/6}.$$

توان اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، با استفاده از فرمول حاصلضرب (۱۷) داریم

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z \quad (n \text{ عامل})$$

با ضابطه $z = re^{i\theta}$ داریم

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta + \theta + \dots + \theta)} \quad (n \text{ جمله})$$

$$= r^n e^{in\theta}. \quad (18)$$

طول $r = |z|$ به توان n می‌رسد و زاویه $\theta = \arg z$ در n ضرب می‌شود. اگر در رابطه (۱۸) فرض شود $r = 1$ ، قضیه دموآور به دست می‌آید.

قضیه

قضیه دموآور

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (19)$$

اگر طرف چپ معادله دموآور را با کمک قضیه دو جمله‌ای بسط دهیم و آن را به صورت $a + ib$ بنویسیم، برای $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ فرمولهایی به صورت چند جمله‌ایهای از درجه n بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ به دست می‌آوریم.

مثال ۴ اگر در رابطه (۱۹)، $n = 3$ ، داریم

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta.$$

طرف چپ این برابری عبارت است از

$$\cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta.$$

جزء حقیقی این عبارت باید برابر با $\cos 3\theta$ و جزء انگاری آن باید برابر با $\sin 3\theta$ باشد. پس

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

ریشه اگر $z = re^{i\theta}$ عدد مختلطی مخالف با صفر و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه دقیقاً n عدد مختلط متفاوت $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ وجود دارند که ریشه‌های n ام z اند. برای ملاحظه دلیل این امر، فرض کنید $w = pe^{i\alpha}$ یکی از ریشه‌های n ام $z = re^{i\theta}$ باشد،

لذا داریم

$$w^n = z$$

یا

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}. \quad (20)$$

در نتیجه

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad (21)$$

ریشه n ام حقیقی و مثبت r است. در مورد زاویه، هر چند نمی‌توان گفت که $n\alpha$ و θ باید برابر باشند، ولی می‌توان دید که اختلاف آنها صرفاً مضرب صحیحی از 2π است. پس

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (22)$$

بنابراین

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}.$$

در نتیجه، تمام ریشه‌های n ام $z = re^{i\theta}$ از فرمول زیر به دست می‌آیند.

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \exp i \left(\frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \quad (23)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ممکن است به نظر برسد که به ازای بینهایت مقدار ممکن برای k ، بینهایت جواب متناظر مختلف به دست می‌آید. اما به سادگی دیده می‌شود که در معادله (۲۳)، $k = n + m$ ، همان جواب را به دست می‌دهد که $k = m$. پس کافی است n مقدار متوالی برای k انتخاب کنیم تا تمام n ریشه متفاوت z را به دست آوریم. برای سادگی فرض می‌کنیم

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

تمام n ریشه $re^{i\theta}$ بردایره‌ای قرار می‌گیرند که مرکزش در مبدأ O است و شعاعش برابر با n امین ریشه حقیقی و مثبت r است. شناسه یکی از آنها $\alpha = \theta/n$ است. بقیه با فواصل متساوی روی دایره قرار می‌گیرند، و هر دو نقطه متوالی با زاویه‌ای برابر با $2\pi/n$ از هم جدا می‌شوند. شکل پ. ۱۴ محل سه ریشه سوم w_0, w_1, w_2 از عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ را نشان می‌دهد.

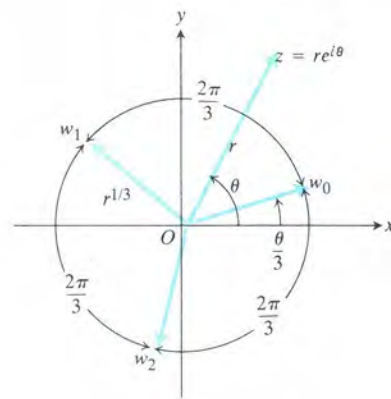
و چهار ریشه عبارت اند از

$$w_0 = 2 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(1+i)$$

$$w_1 = 2 \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(-1+i)$$

$$w_2 = 2 \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(-1-i)$$

$$\blacksquare \quad w_3 = 2 \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right] = \sqrt{2}(1-i).$$



پ.۱۴ سه ریشه سوم $z = re^{i\theta}$.

مثال ۵ چهار ریشه چهارم -۱۶ را بیابید.

حل: به عنوان گام نخست، عدد -۱۶ را به وسیله نمودار آرگان مشخص (شکل پ.۱۵)، و نمایش قطبی $re^{i\theta}$ آن را تعیین می کنیم. داریم

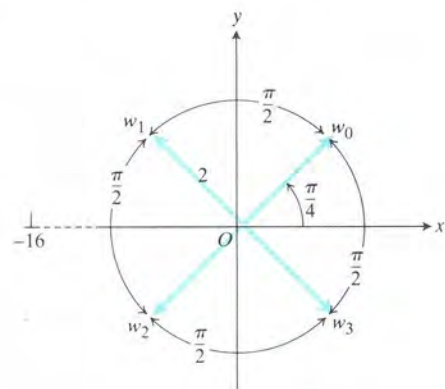
$$z = -۱۶$$

$$r = +۱۶$$

$$\theta = \pi.$$

یکی از ریشه های چهارم $۱۶e^{i\pi}$ عبارت است از $۲e^{i\pi/4}$. حال به طور متوالی $2\pi/4 = \pi/2$ را به شناسه این ریشه می افزاییم تا سایر ریشه ها را به دست آوریم. پس داریم

$$\sqrt[4]{16 \exp i\pi} = 2 \exp i \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right)$$



پ.۱۵ چهار ریشه چهارم -۱۶ .

قضیه بنیادی جبر ممکن است به حق گفته شود که ابداع $\sqrt{-۱}$ بسیار خوب است و به دستگاه اعدادی منجر می شود که از خود دستگاه اعداد حقیقی غنی تر است، اما این فرایند کجا متوقف می شود؟ آیا به فکر ابداع دستگاه های دیگری هم هستیم که $\sqrt[4]{-۱}$ و $\sqrt[6]{-۱}$ و غیره را در برداشته باشند؟ باید برای شما روشن شده باشد که این کار لازم نیست. هم اکنون نیز می توانیم این اعداد را بر حسب اعداد مختلط $a+ib$ بیان کنیم. در واقع، قضیه بنیادی جبر حاکی است که با معرفی اعداد مختلط، به اندازه کافی عدد در اختیار داریم که هر چند جمله ای دلخواه را به صورت حاصلضرب بی از عوامل خطی بنویسیم و در نتیجه به اندازه کافی عدد در اختیارمان هست که ریشه های هر چند جمله ای ممکن را بیابیم.

قضیه

قضیه بنیادی جبر

هر معادله چند جمله ای به صورت

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

که در آن ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد مختلط دلخواهی باشند، درجه اش (n) از یک کمتر نباشد، و ضریب پیشروش (a_n) صفر نباشد، در دستگاه اعداد مختلط دقیقاً n ریشه دارد، با این شرط که هر ریشه چند گانه با چندگانگی m را m ریشه به حساب آوریم.

اثبات این قضیه را می توان در تقریباً تمام کتاب های درسی مربوط به نظریه توابع یک متغیر مختلط یافت.

مسئله ها

۱. مطلوب است $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

الف) $(2, 3) \cdot (2, -2)$

چه می توان گفت؟

۰۹ اگر $Re(z)$ و $Im(z)$ به ترتیب جزءهای حقیقی و انگاری z را نمایش دهند، نشان دهید که

$$z + \bar{z} = 2Re(z) \quad (\text{الف})$$

$$z - \bar{z} = 2i Im(z) \quad (\text{ب})$$

$$|Re(z)| \leq |z| \quad (\text{پ})$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \bar{z}_2) \quad (\text{ت})$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{ث})$$

۱۰ نشان دهید که فاصله بین دو نقطه z_1 و z_2 در یک نمودار آرگان برابر است با $|z_1 - z_2|$.

در مسائل ۱۱-۱۵، مکان هندسی نقاط $z = x + iy$ را که در شرایط مفروض صدق می کنند بیابید.

$$|z| = 2 \quad (\text{الف } ۱۱)$$

$$|z| < 2 \quad (\text{ب})$$

$$|z| > 2 \quad (\text{پ})$$

$$|z - 1| = 2 \quad ۱۲$$

$$|z + 1| = 1 \quad ۱۳$$

$$|z + 1| = |z - 1| \quad ۱۴$$

$$|z + i| = |z - 1| \quad ۱۵$$

در مسائل ۱۶-۱۹، جوابها را به صورت $re^{i\theta}$ با ضوابط $r \geq 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$ بنویسید. شکل رسم کنید.

$$(1 + \sqrt{-3})^2 \quad ۱۶$$

$$\frac{1+i}{1-i} \quad ۱۷$$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ۱۸$$

$$(2+3i)(1-2i) \quad ۱۹$$

۲۰ با استفاده از قضیه دمو آور (رابطه $\cos \varphi \theta$ و $\sin \varphi \theta$ را به صورت چندجمله ایی بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ بنویسید.

$$(2, -1) \cdot (-2, 3) \quad (\text{ب})$$

$$(2, 1) \cdot (-1, -2) \quad (\text{پ})$$

کامپیوتر اعداد مختلط را با این روش ضرب می کند.

۲ در معادلات زیر اعداد حقیقی x و y را بیابید.

$$(3+4i)^2 - 2(x-iy) = x+iy \quad (\text{الف})$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i \quad (\text{ب})$$

$$(3-2i)(x+iy) = 2(x-2iy) + 2i - 1 \quad (\text{پ})$$

۳ به کمک نمودار آرگان نشان دهید که قانون جمع کردن اعداد مختلط با قانون متوازی الاضلاع مربوط به جمع کردن بردارها یکی است.

۴ چگونه می توان اعداد مختلط زیر را به روش هندسی از $z = x + iy$ به دست آورد؟ شکل رسم کنید.

$$\bar{z} \quad (\text{الف})$$

$$(-z) \quad (\text{ب})$$

$$-z \quad (\text{پ})$$

$$1/z \quad (\text{ت})$$

۵ نشان دهید که مزدوج مجموع (حاصلضرب یا خارج قسمت) دو عدد مختلط z_1 و z_2 برابر است با مجموع (حاصلضرب یا خارج قسمت) مزدوجهاشان.

۶ الف) نتایج مسأله ۵ را تعمیم دهید و نشان دهید که اگر

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

یک چندجمله ای با ضرایب حقیقی $a_0, \dots, a_n$ باشد، آنگاه $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

ب) اگر z ریشه ای از معادله $f(z) = 0$ باشد که در آن $f(z)$ یک چندجمله ای با ضرایب حقیقی نظیر قسمت (الف) باشد، نشان دهید که مزدوج $\bar{z}$ نیز یک ریشه این معادله است. پس ریشه های مختلط چندجمله ایهای با ضرایب حقیقی همواره به صورت جفت هایی ظاهر می شوند که یکی مزدوج دیگری است. (دانه مایی: فرض کنید $f(z) = u + iv = 0$ ؛ آنگاه هم u و هم v صفرند. حال از این واقعیت بهره بگیرید که $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$.)

$$|\bar{z}| = |z| \quad (\text{ب})$$

۸ اگر z و $\bar{z}$ برابر باشند، درباره جای نقطه z در صفحه مختلط

۰۲۶. شش جواب معادله $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ را بیابید.

۰۲۷. تمام جوابهای معادله $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ را بیابید.

۰۲۸. معادله $x^4 + 1 = 0$ را حل کنید.



TOOLKIT PROGRAMS

Complex Number Calculator

۰۲۱. سه ریشه سوم ۱ را بیابید.

۰۲۲. دو ریشه دوم i را بیابید.

۰۲۳. سه ریشه سوم $i - 8$ را بیابید.

۰۲۴. شش ریشه ششم 64 را پیدا کنید.

۰۲۵. چهار جواب معادله $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ را بیابید.

جدول ۱ توابع مثلثاتی معمولی

زاویه					زاویه				
درجه	رادیان	سینوس	کسینوس	تانژانت	درجه	رادیان	سینوس	کسینوس	تانژانت
0°	0.000	0.000	1.000	0.000	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
1°	0.017	0.017	1.000	0.017	47°	0.820	0.731	0.682	1.072
2°	0.035	0.035	0.999	0.035	48°	0.838	0.743	0.669	1.111
3°	0.052	0.052	0.999	0.052	49°	0.855	0.755	0.656	1.150
4°	0.070	0.070	0.998	0.070	50°	0.873	0.766	0.643	1.192
5°	0.087	0.087	0.996	0.087	51°	0.890	0.777	0.629	1.235
6°	0.105	0.105	0.995	0.105	52°	0.908	0.788	0.616	1.280
7°	0.122	0.122	0.993	0.123	53°	0.925	0.799	0.602	1.327
8°	0.140	0.139	0.990	0.141	54°	0.942	0.809	0.588	1.376
9°	0.157	0.156	0.988	0.158	55°	0.960	0.819	0.574	1.428
10°	0.175	0.174	0.985	0.176	56°	0.977	0.829	0.559	1.483
11°	0.192	0.191	0.982	0.194	57°	0.995	0.839	0.545	1.540
12°	0.209	0.208	0.978	0.213	58°	1.012	0.848	0.530	1.600
13°	0.227	0.225	0.974	0.231	59°	1.030	0.857	0.515	1.664
14°	0.244	0.242	0.970	0.249	60°	1.047	0.866	0.500	1.732
15°	0.262	0.259	0.966	0.268	61°	1.065	0.875	0.485	1.804
16°	0.279	0.276	0.961	0.287	62°	1.082	0.883	0.469	1.881
17°	0.297	0.292	0.956	0.306	63°	1.100	0.891	0.454	1.963
18°	0.314	0.309	0.951	0.325	64°	1.117	0.899	0.438	2.050
19°	0.332	0.326	0.946	0.344	65°	1.134	0.906	0.423	2.145
20°	0.349	0.342	0.940	0.364	66°	1.152	0.914	0.407	2.246
21°	0.367	0.358	0.934	0.384	67°	1.169	0.921	0.391	2.356
22°	0.384	0.375	0.927	0.404	68°	1.187	0.927	0.375	2.475
23°	0.401	0.391	0.921	0.424	69°	1.204	0.934	0.358	2.605
24°	0.419	0.407	0.914	0.445	70°	1.222	0.940	0.342	2.748
25°	0.436	0.423	0.906	0.466	71°	1.239	0.946	0.326	2.904
26°	0.454	0.438	0.899	0.488	72°	1.257	0.951	0.309	3.078
27°	0.471	0.454	0.891	0.510	73°	1.274	0.956	0.292	3.271
28°	0.489	0.469	0.883	0.532	74°	1.292	0.961	0.276	3.487
29°	0.506	0.485	0.875	0.554	75°	1.309	0.966	0.259	3.732
30°	0.524	0.500	0.866	0.577	76°	1.326	0.970	0.242	4.011
31°	0.541	0.515	0.857	0.601	77°	1.344	0.974	0.225	4.332
32°	0.559	0.530	0.848	0.625	78°	1.361	0.978	0.208	4.705
33°	0.576	0.545	0.839	0.649	79°	1.379	0.982	0.191	5.145
34°	0.593	0.559	0.829	0.675	80°	1.396	0.985	0.174	5.671
35°	0.611	0.574	0.819	0.700	81°	1.414	0.988	0.156	6.314
36°	0.628	0.588	0.809	0.727	82°	1.431	0.990	0.139	7.115
37°	0.646	0.602	0.799	0.754	83°	1.449	0.993	0.122	8.144
38°	0.663	0.616	0.788	0.781	84°	1.466	0.995	0.105	9.514
39°	0.681	0.629	0.777	0.810	85°	1.484	0.996	0.087	11.43
40°	0.698	0.643	0.766	0.839	86°	1.501	0.998	0.070	14.30
41°	0.716	0.656	0.755	0.869	87°	1.518	0.999	0.052	19.08
42°	0.733	0.669	0.743	0.900	88°	1.536	0.999	0.035	28.64
43°	0.750	0.682	0.731	0.933	89°	1.553	1.000	0.017	57.29
44°	0.768	0.695	0.719	0.966	90°	1.571	1.000	0.000	
45°	0.785	0.707	0.707	1.000					

جدول ۳

لگاریتمهای طبیعی

x	$\log_e x$	x	$\log_e x$	x	$\log_e x$
0.0	*	3.5	1.2528	7.0	1.9459
0.1	7.6974	3.6	1.2809	7.1	1.9601
0.2	8.3906	3.7	1.3083	7.2	1.9741
0.3	8.7960	3.8	1.3350	7.3	1.9879
0.4	9.0837	3.9	1.3610	7.4	2.0015
0.5	9.3069	4.0	1.3863	7.5	2.0149
0.6	9.4892	4.1	1.4110	7.6	2.0281
0.7	9.6433	4.2	1.4351	7.7	2.0412
0.8	9.7769	4.3	1.4586	7.8	2.0541
0.9	9.8946	4.4	1.4816	7.9	2.0669
1.0	0.0000	4.5	1.5041	8.0	2.0794
1.1	0.0953	4.6	1.5261	8.1	2.0919
1.2	0.1823	4.7	1.5476	8.2	2.1041
1.3	0.2624	4.8	1.5686	8.3	2.1163
1.4	0.3365	4.9	1.5892	8.4	2.1282
1.5	0.4055	5.0	1.6094	8.5	2.1401
1.6	0.4700	5.1	1.6292	8.6	2.1518
1.7	0.5306	5.2	1.6487	8.7	2.1633
1.8	0.5878	5.3	1.6677	8.8	2.1748
1.9	0.6419	5.4	1.6864	8.9	2.1861
2.0	0.6931	5.5	1.7047	9.0	2.1972
2.1	0.7419	5.6	1.7228	9.1	2.2083
2.2	0.7885	5.7	1.7405	9.2	2.2192
2.3	0.8329	5.8	1.7579	9.3	2.2300
2.4	0.8755	5.9	1.7750	9.4	2.2407
2.5	0.9163	6.0	1.7918	9.5	2.2513
2.6	0.9555	6.1	1.8083	9.6	2.2618
2.7	0.9933	6.2	1.8245	9.7	2.2721
2.8	1.0296	6.3	1.8405	9.8	2.2824
2.9	1.0647	6.4	1.8563	9.9	2.2925
3.0	1.0986	6.5	1.8718	10	2.3026
3.1	1.1314	6.6	1.8871	11	2.3979
3.2	1.1632	6.7	1.9021	12	2.4849
3.3	1.1939	6.8	1.9169	13	2.5649
3.4	1.2238	6.9	1.9315	14	2.6391

* برای $x < 1$ ، $\log_e x$ را از درجههای x کم کنید.

جدول ۲

توانهای نمایی

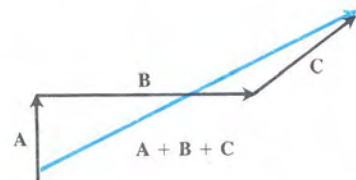
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.0	1.0000	1.0000	2.5	12.182	0.0821
0.05	1.0513	0.9512	2.6	13.464	0.0743
0.10	1.1052	0.9048	2.7	14.880	0.0672
0.15	1.1618	0.8607	2.8	16.445	0.0608
0.20	1.2214	0.8187	2.9	18.174	0.0550
0.25	1.2840	0.7788	3.0	20.086	0.0498
0.30	1.3499	0.7408	3.1	22.198	0.0450
0.35	1.4191	0.7047	3.2	24.533	0.0408
0.40	1.4918	0.6703	3.3	27.113	0.0369
0.45	1.5683	0.6376	3.4	29.964	0.0334
0.50	1.6487	0.6065	3.5	33.115	0.0302
0.55	1.7333	0.5769	3.6	36.598	0.0273
0.60	1.8221	0.5488	3.7	40.447	0.0247
0.65	1.9155	0.5220	3.8	44.701	0.0224
0.70	2.0138	0.4966	3.9	49.402	0.0202
0.75	2.1170	0.4724	4.0	54.598	0.0183
0.80	2.2255	0.4493	4.1	60.340	0.0166
0.85	2.3396	0.4274	4.2	66.686	0.0150
0.90	2.4596	0.4066	4.3	73.700	0.0136
0.95	2.5857	0.3867	4.4	81.451	0.0123
1.0	2.7183	0.3679	4.5	90.017	0.0111
1.1	3.0042	0.3329	4.6	99.484	0.0101
1.2	3.3201	0.3012	4.7	109.95	0.0091
1.3	3.6693	0.2725	4.8	121.51	0.0082
1.4	4.0552	0.2466	4.9	134.29	0.0074
1.5	4.4817	0.2231	5	148.41	0.0067
1.6	4.9530	0.2019	6	403.43	0.0025
1.7	5.4739	0.1827	7	1096.6	0.0009
1.8	6.0496	0.1653	8	2981.0	0.0003
1.9	6.6859	0.1496	9	8103.1	0.0001
2.0	7.3891	0.1353	10	22026	0.00005
2.1	8.1662	0.1225			
2.2	9.0250	0.1108			
2.3	9.9742	0.1003			
2.4	11.023	0.0907			

پاسخها

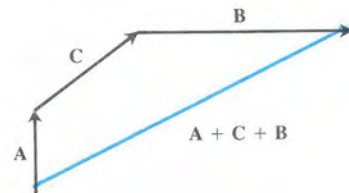
فصل ۱۳

بخش ۱۰.۱۳، صفحه ۸

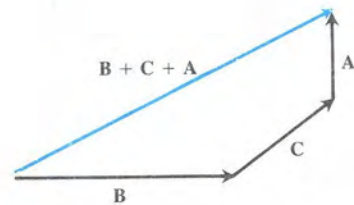
۱. الف)



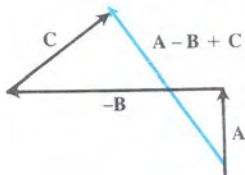
ب)



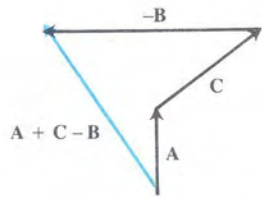
پ)



ت)



ث)



$$-i + j \quad ۳.$$

$$۰.۵$$

$$(\sqrt{3}/2)i - (1/2)j \quad ۷.$$

$$\pm (1/\sqrt{17})i \pm (4/\sqrt{17})j \quad ۹.$$

$$-(1/\sqrt{17})i - (4/\sqrt{17})j \quad ۱۱. الف)$$

$$-(4/\sqrt{17})i + (1/\sqrt{17})j \quad ب)$$

$$\sqrt{2}, (1/\sqrt{2})i + (1/\sqrt{2})j, \pi/4 \quad ۱۳.$$

$$۲, (\sqrt{3}/2)i + (1/2)j, \pi/6 \quad ۱۵.$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4, z=0 \quad \text{الف} \quad ۰۲۳$$

$$(y-2)^2 + z^2 = 4, x=0 \quad \text{ب}$$

$$x^2 + z^2 = 4, y=2 \quad \text{پ}$$

$$y=3, z=-1 \quad \text{الف} \quad ۰۲۵$$

$$x=1, z=-1 \quad \text{ب}$$

$$x=1, y=3 \quad \text{پ}$$

$$x^2 + y^2 = 16, z=3 \quad ۰۲۷$$

$$0 \leq z \leq 1 \quad ۰۲۹$$

$$z \leq 0 \quad ۰۳۱$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1 \quad \text{الف} \quad ۰۳۳$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1 \quad \text{ب}$$

$$3, (2/3)\mathbf{i} + (1/3)\mathbf{j} - (2/3)\mathbf{k} \quad ۰۳۵$$

$$9, (1/9)\mathbf{i} + (4/9)\mathbf{j} - (8/9)\mathbf{k} \quad ۰۳۷$$

$$5, \mathbf{k} \quad ۰۳۹$$

$$1, (1/\sqrt{2})\mathbf{i} - (1/\sqrt{2})\mathbf{k} \quad ۰۴۱$$

$$1, (1/\sqrt{3})\mathbf{i} + (1/\sqrt{3})\mathbf{j} + (1/\sqrt{3})\mathbf{k} \quad ۰۴۳$$

$$6, \mathbf{i} \quad ۰۴۵$$

$$2\mathbf{i} \quad \text{الف} \quad ۰۴۷$$

$$-4\mathbf{j} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{3}\mathbf{k} \quad \text{پ}$$

$$(3/10)\mathbf{j} + (4/10)\mathbf{k} \quad \text{ت}$$

$$6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{ث}$$

$$(au_x/|u|)\mathbf{i} + (au_y/|u|)\mathbf{j} + (au_z/|u|)\mathbf{k} \quad \text{ج}$$

$$|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

$$(5/\sqrt{3})\mathbf{i} + (5/\sqrt{3})\mathbf{j} + (5/\sqrt{3})\mathbf{k} \quad ۰۴۹$$

$$C(-2, 0, 2), r=2\sqrt{2} \quad ۰۵۱$$

$$C(0, 0, a), r=a \quad ۰۵۳$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{الف} \quad ۰۵۵$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{ب}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{پ}$$

$$(3/2)\mathbf{i} + (3/2)\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad \text{الف} \quad ۰۵۷$$

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad \text{ب}$$

$$(2, 2, 1) \quad \text{پ}$$

$$13, (5/13)\mathbf{i} + (12/13)\mathbf{j}, \tan^{-1}(12/5) \quad ۰۱۷$$

$$2\sqrt{5} \quad ۰۱۹$$

بخش ۲۰.۱۳، صفحه‌های ۱۲ تا ۱۴

$$50 \text{ sec} \quad ۰۱$$

$$7272 \text{ sec}, 2551072 \text{ m} \quad \text{الف} \quad ۰۳$$

$$4020 \text{ m} \quad \text{ب}$$

$$637776 \text{ m} \quad \text{پ}$$

$$189 \text{ m/sec}; 99^\circ \text{ یا } 716^\circ \quad ۰۷$$

$$18996 \text{ mph} \quad ۰۹$$

$$y = 2999 \text{ ft}, \text{ خیر} \quad ۰۱۳$$

$$1493 \text{ ft/sec}; 2725 \text{ sec} \quad ۰۱۵$$

۰۱۷. بله، توپ A در لحظه $t = R/(v_0 \cos \alpha)$ به فاصله R از محل پرتابش می‌رسد. در این لحظه ارتفاع هر دو توپ $R \tan \alpha - 1/2 [R/(v_0 \cos \alpha)]^2$ است.

بخش ۳۰.۱۳، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۳

۰۱. خطی موازی محور z و گذرنده از نقطه $(2, 3, 0)$

۰۳. محور x

۰۵. دایره‌ای واقع در صفحه xy به مرکز $(0, 0, 0)$ و به شعاع ۲

۰۷. دایره‌ای واقع در صفحه xz به مرکز $(0, 0, 0)$ و به شعاع ۲

۰۹. دایره‌ای واقع در صفحه yz به مرکز $(0, 0, 0)$ و به شعاع ۱

۰۱۱. دایره‌ای در صفحه xy به مرکز $(0, 0, 0)$ و به شعاع ۴

۰۱۳. الف) ربع اول صفحه xy

ب) ربع چهارم صفحه xy

۰۱۷. الف) نیمکره‌ای در بالای صفحه xy به مرکز مبدأ و به شعاع ۱

ب) همان نیمکره با حجم داخلش

$$x=3 \quad \text{الف} \quad ۰۱۹$$

$$y=-1 \quad \text{ب}$$

$$z=-2 \quad \text{پ}$$

$$z=1 \quad \text{الف} \quad ۰۲۱$$

$$x=3 \quad \text{ب}$$

$$y=-1 \quad \text{پ}$$

بخش ۴۰۱۳، صفحه‌های ۲۸ تا ۲۹

$A \cdot B$	$ A $	$ B $	$\cos \theta$	$ B \cos \theta$	$\text{Proj}_A B$	
۱۰	$\sqrt{13}$	$\sqrt{26}$	$5\sqrt{2}/13$	$10/\sqrt{13}$	$(30/13)i + (20/13)j$	۰۱
۴	$\sqrt{14}$	۲	$\sqrt{14}/7$	$2\sqrt{14}/7$	$(6/7)i - (4/7)j - (2/7)k$	۰۳
۲	$\sqrt{34}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{102}$	$2/\sqrt{34}$	$(5/17)j - (3/17)k$	۰۵
$-\sqrt{2} + 3$	$\sqrt{2}$	۳	$(\sqrt{6} - 2)/6$	$(\sqrt{6} - 2)/2$	$[(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2](-i + j)$	۰۷
-۲۵	۵	۵	-۱	-۵	$-2i + 4j - \sqrt{5}k$	۰۹
۲۵	۱۵	۵	$1/3$	$5/3$	$(10/9)i + (11/9)j - (2/9)k$	۰۱۱
		k	۰۹		$37.9^\circ, 71.1^\circ, 71.1^\circ$	۰۱۳
		$i - j + k$	۰۱۱		35.3°	۰۱۵
		$2i - j$	۰۱۳		$(3, 3, 0)$	۰۱۷
		$4i + 2j + 2k$	۰۱۵		$B_1 = (3/2)i + (3/2)j$	۰۱۹
		$\sqrt{3/2}$	۰۱۷		$B_2 = -(3/2)i + (3/2)j + 2k$	
		۳	۰۱۹		۲ $\sqrt{10}$ (الف)	۰۲۱
		$2i + 2j + 7k, 0, 0$	۰۲۱		۶ $\sqrt{10}$ (ب)	
		$A \parallel C$	۰۲۳		$B \cdot C = 0, A \cdot C = 0, A \cdot B = 0$ ثابت کنید	۰۲۳
		۲	۰۲۷		-۵ N-m	۰۲۵
		۱۳	۰۲۹		$2000\sqrt{3}$ N-m	۰۲۷
		$11/2$	۰۳۱		$\pi/4$	۰۳۳
		$25/2$	۰۳۳		$\pi/3$	۰۳۵
					$\pi/2, \pi/4$	۰۳۷

بخش ۴۰۱۳، صفحه‌های ۳۸ تا ۳۹

$$\begin{aligned}
 x &= 3 + t, y = -4 + t, z = -1 + t & ۰۱ \\
 x &= -2 - 5t, y = -5t, z = 3 + 5t & ۰۳ \\
 x &= 0, y = 2t, z = t & ۰۵ \\
 x &= 1, y = 1, z = 1 + t & ۰۷ \\
 x &= t, y = -7 + 2t, z = 2t & ۰۹ \\
 x &= t, y = 0, z = 0 & ۰۱۱
 \end{aligned}$$

بخش ۴۰۱۳، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{26}, -(1/\sqrt{26})i - (3/\sqrt{26})j + (4/\sqrt{26})k & ۰۱ \\
 &\sqrt{26}, (1/\sqrt{26})i + (3/\sqrt{26})j - (4/\sqrt{26})k & \\
 &A \times B = B \times A = 0i + 0j + 0k & ۰۳ \\
 &6, -k, 6, k & ۰۵ \\
 &6\sqrt{5}, (1/\sqrt{5})i - (2/\sqrt{5})k & ۰۷ \\
 &6\sqrt{5}, -(1/\sqrt{5})i + (2/\sqrt{5})k &
 \end{aligned}$$

۹. الف) $(0, 9, -3)$

ب) $\sqrt{963}$

پ) $11, 29, 1$

۱۱. قسمتهای (الف)، (ث)، (خ)

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۳، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۹

۱۱. $3/11(2i - j + k)$

۱۳. $C = (A \cdot B/B \cdot B)B, D = A - C$

۱۹. $(2/3)i + (2/3)j + (4/3)k$

۲۳. $2x + 2y + z = 5$

۲۵. $(4/3, -2/3, -2/3)$

۲۷. $-2j + 2k$

۲۹. 59.5°

۳۱. $(1, -2, -1), x = 1 - 5t, y = -2 + 3t$

$z = -1 + 4t$

۳۹. $(1/\sqrt{2})j + (1/\sqrt{2})k$

۴۱. 60°

۴۳. به‌سوی $(26, 23, -\frac{1}{3})$

۴۵. $\sqrt{78}/3$

۴۷. 3

۴۹. ب) $6/\sqrt{14}$

پ) $2x - y + 2z = 8$

ت) $x - 2y + z = 3 \pm 5\sqrt{6}$

۵۱. $11/\sqrt{107}$

۵۳. الف) 1

ب) $-10i - 2j - 12k$

۵۹. $\cos \alpha = 2/3, \cos \beta = 11/15, \cos \gamma = -2/15$

۶۱. $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 1/2, \cos \gamma = \sqrt{3}/2$

۱۳. $x = t, y = t, z = t, 0 \leq t \leq 1$

۱۵. $x = 1, y = t, z = 0, 0 \leq t \leq 1$

۱۷. $x = 0, y = 1 - 2t, z = 1, 0 \leq t \leq 1$

۱۹. $x = 1 + t, y = 2, z = -2 = 2t, 0 \leq t \leq 1$

۲۱. $3x - 2y - z = -3$

۲۳. $7x - 5y - 4z = 6$

۲۵. $x + y + z = 1$

۲۷. $4x + 4y - 5z = 0$

۲۹. $x - y + z = 0$

۳۱. $\sqrt{120}$

۳۳. 0

۳۵. 2

۳۷. 3

۳۹. $19/5$

۴۱. $5/3$

۴۳. $(3/2, -3/2, 1/2)$

۴۵. $(1, 1, 0)$

۴۷. 78.9°

۴۹. 90°

۵۱. $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1$

۵۳. $x = 4, y = 1 + 6t, z = 3t$

۵۵. $(1, -1, 0), (-1, 0, -3), (0, -1/2, -3/2)$

بخش ۷.۱۳، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴

۱. 225

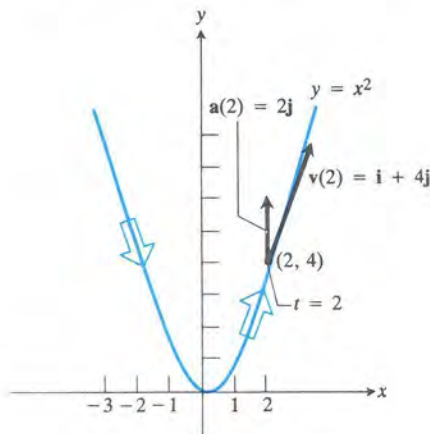
۳. $200i - 120j - 90k$

۵. $4/3$

۷. $7/6$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \quad \mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j} \quad (\text{الف } ۰۲۵)$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{j} \quad (\text{ب } ۰۲۵)$$



$$\mathbf{v}(2) = 20\mathbf{i} - 196\mathbf{j}; \quad |\mathbf{v}(2)| \approx 28 \quad ۰۲۷$$

۰۲۹. ما کسیمم برابر با ۳ و مینیمم برابر با ۲ است.

بخش ۰۱۴، صفحه ۶۱

$$\mathbf{T} = [-(2/3)\sin t]\mathbf{i} + [(2/3)\cos t]\mathbf{j} + (\sqrt{5}/3)\mathbf{k} \quad ۰۱$$

۳π

$$\mathbf{T} = (1/\sqrt{1+t})\mathbf{i} + (\sqrt{t}/\sqrt{1+t})\mathbf{j}; \quad ۵۲/۳ \quad ۰۳$$

$$\mathbf{T} = (6/7)\mathbf{i} - (2/7)\mathbf{j} - (3/7)\mathbf{k}; \quad ۱۴ \quad ۰۵$$

$$\mathbf{T} = [(\cos t - t \sin t)/|1+t|]\mathbf{i} \quad ۰۷$$

$$+ [(\sin t + t \cos t)/|1+t|]\mathbf{j} + (\sqrt{2t}/|1+t|)\mathbf{k};$$

$$\pi + (1/2)\pi^2$$

$$\mathbf{T} = (-\sin \omega t)\mathbf{i} + (\cos \omega t)\mathbf{j}; \quad 2\pi a \quad ۰۹$$

$$s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1); \quad \sqrt{3}(e^\pi - e^{-\pi}) \quad ۰۱۱$$

$$\mathbf{v}(0) = 6\mathbf{j}; \quad |\mathbf{v}(0)| = 6; \quad \mathbf{T}(0) = \mathbf{j}; \quad \mathbf{a}(0) = 6\mathbf{i} \quad ۰۱۳$$

بخش ۰۱۴، صفحه‌های ۶۸ تا ۷۰

$$\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j}; \quad \mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} \quad ۰۱$$

$$\kappa = \cos t$$

$$\mathbf{T} = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}; \quad \mathbf{N} = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} \quad ۰۳$$

$$\kappa = \cos t$$

$$\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0 \quad ۰۶۳$$

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1/\sqrt{3} \quad ۰۶۵$$

$$\cos \alpha = 2/7, \cos \beta = -3/7, \cos \gamma = 6/7 \quad ۰۶۷$$

فصل ۱۴

بخش ۰۱۴، صفحه‌های ۵۵ تا ۵۷

$$\mathbf{v} = (-2 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} \quad ۰۱$$

$$\mathbf{a} = (-2 \cos t)\mathbf{i} - (3 \sin t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{26}/2, t = \pi/2 \text{ در}$$

$$\mathbf{v} = (-2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} \quad ۰۳$$

$$|\mathbf{v}| = 2, t = 0 \text{ در}; \quad \mathbf{a} = (-2 \cos 2t)\mathbf{i} - (2 \sin t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = (\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\sec^2 t)\mathbf{j} \quad ۰۵$$

$$\mathbf{a} = (\sec^2 t + \tan^2 t \sec t)\mathbf{i} + (2 \sec^2 t \tan t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{5}/3, t = \pi/6 \text{ در}$$

$$\mathbf{v} = (-a\omega \sin \omega t)\mathbf{i} + (a\omega \cos \omega t)\mathbf{j} \quad ۰۷$$

$$\mathbf{a} = (-a\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{i} - (a\omega^2 \sin \omega t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = a\omega, t = \pi/(3\omega) \text{ در}$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{2}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} \quad ۰۹$$

$$|\mathbf{v}| = 2, t = 1 \text{ در}$$

$$\mathbf{v} = (-\sqrt{2}/(t+1)^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (\sqrt{2}/t)\mathbf{k} \quad ۰۱۱$$

$$\mathbf{a} = (2\sqrt{2}/(t+1)^3)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - (\sqrt{2}/t^2)\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{v}| = 5\sqrt{2}/4, t = 1 \text{ در}$$

$$t = 0, \pi, 2\pi \quad ۰۱۳$$

$$t = 0, \pi/2, \pi \quad ۰۱۵$$

$$\theta = \cos^{-1}(3/\sqrt{15}) \approx 39.2^\circ \quad ۰۱۷$$

$$\pi/2 \quad ۰۱۹$$

$$\mathbf{v}(t) = -(3/2)t^2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad ۰۲۱$$

$$\mathbf{R}(t) = [-(1/2)t^3 + 4]\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t) = (2\sqrt{1+t-3})\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} \quad ۰۲۳$$

$$\mathbf{R}(t) = [(2/3)(1+t)^{3/2} - 3t - 1]\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بخش ۴۰۱۲، صفحه‌های ۷۷ تا ۷۸

$$۰۱ \quad ۹۳۰۱۶ \text{ min}$$

$$۰۳ \quad ۶۷۶۳ \text{ km}$$

$$۰۵ \quad ۱۶۵۲ \text{ min}$$

$$۰۷ \quad ۲۰۴۲۶۷ \text{ km}$$

$$۰۹ \quad \text{اگر } v_0 = \sqrt{GM/r_0}, \text{ دایره‌است}$$

$$\text{اگر } \sqrt{GM/r_0} < v_0 < \sqrt{2GM/r_0}, \text{ بیضی است}$$

$$\text{اگر } v_0 = \sqrt{2GM/r_0}, \text{ سهمی است}$$

$$\text{اگر } v_0 > \sqrt{2GM/r_0}, \text{ هذلولی است}$$

$$۰۱۱ \quad \text{در مورد سیارات } ۱۰^{-۱۹} \times ۲۹, \text{ در مورد ماهواره‌های}$$

$$\text{دور زمین } ۱۰^{-۱۴} \times ۹۹, \text{ در مورد ماهواره‌های دور ماه}$$

$$۱۰^{-۱۲} \times ۸۰۴$$

$$۰۱۵ \quad \mathbf{v} = (3a \sin \theta) \mathbf{u}_r + [2a(1 - \cos \theta)] \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (18a \cos \theta - 9a) \mathbf{u}_r + (18a \sin \theta) \mathbf{u}_\theta$$

$$۰۱۷ \quad \mathbf{v} = (2ae^{a\theta}) \mathbf{u}_r + (2e^{a\theta}) \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (4ae^{a\theta} - 4e^{a\theta}) \mathbf{u}_r + (8ae^{a\theta}) \mathbf{u}_\theta$$

$$۰۱۹ \quad \mathbf{v} = (-8 \sin 4t) \mathbf{u}_r + (4 \cos 4t) \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (-40 \cos 4t) \mathbf{u}_r - (32 \sin 4t) \mathbf{u}_\theta$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۴، صفحه‌های ۷۸ تا ۸۰

$$۰۱ \quad s(0) = 1$$

$$۰۳ \quad x = 1+t; y = t; z = -t$$

$$۰۵ \quad 2/\sqrt{r}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$۰۷ \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 12; \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = 26$$

$$۰۹ \quad \pi/2 \quad \text{ب}$$

$$۰۱۳ \quad (\ln(1/\sqrt{r}), 1/\sqrt{r})$$

$$۰۱۷ \quad \mathbf{T} = (2/3)\mathbf{i} + (1/3)\mathbf{j} + (2/3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = (1/\sqrt{5})\mathbf{i} - (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = (4/3\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/3\sqrt{5})\mathbf{j} - (5/3\sqrt{5})\mathbf{k}$$

$$\kappa = 2/\sqrt{5/9}; \tau = 1/3$$

$$۰۱۹ \quad 1/a$$

$$۰۵ \quad \mathbf{T} = (t/\sqrt{1+t^2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{1+t^2})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = (1/\sqrt{1+t^2})\mathbf{i} - (t/\sqrt{1+t^2})\mathbf{j}$$

$$\kappa = 1/t(t^2+1)^{3/2}$$

$$۰۷ \quad \mathbf{T} = (-\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}; \mathbf{N} = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$\kappa = -(1/3) \sec t \csc t$$

$$۰۹ \quad \mathbf{T} = [(3/5)\cos t]\mathbf{i} - [(3/5)\sin t]\mathbf{j} + (4/5)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = (-\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}; \kappa = 3/25$$

$$\mathbf{B} = [(4/5)\cos t]\mathbf{i} - [(4/5)\sin t]\mathbf{j} - (3/5)\mathbf{k}$$

$$\tau = -4/25$$

$$۰۱۱ \quad \mathbf{T} = (1/\sqrt{r})(\cos t - \sin t)\mathbf{i}$$

$$+ (1/\sqrt{r})(\sin t + \cos t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = (1/\sqrt{r})(-\sin t - \cos t)\mathbf{i}$$

$$+ (1/\sqrt{r})(\cos t - \sin t)\mathbf{j}$$

$$\kappa = (1/\sqrt{r})e^{-t}; \mathbf{B} = \mathbf{k}; \tau = 0$$

$$۰۱۳ \quad \mathbf{T} = (2/3)(1+t)^{1/2}\mathbf{i} - (2/3)(1-t)^{1/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{N} = \sqrt{(1-t)/2}\mathbf{i} + \sqrt{(1+t)/2}\mathbf{j}$$

$$\kappa = \sqrt{2}/(3\sqrt{1-t^2})$$

$$۰۱۵ \quad \mathbf{a} = (2t/\sqrt{1+t^2})\mathbf{T} + (2/\sqrt{1+t^2})\mathbf{N}$$

$$۰۱۷ \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{N}$$

$$۰۱۹ \quad \mathbf{a} = a\omega^2\mathbf{N}$$

$$۰۲۱ \quad \mathbf{a} = (4/2)\mathbf{T} + [(2/\sqrt{5})/2]\mathbf{N}$$

$$۰۲۳ \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{N}$$

$$۰۲۵ \quad \mathbf{a} = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$$

$$۰۲۷ \quad \text{بوسان: } z=0; \text{ قائم: } -(1/\sqrt{2})x + (1/\sqrt{2})y = 0$$

$$\text{راستگر: } (1/\sqrt{2})x + (1/\sqrt{2})y = 1$$

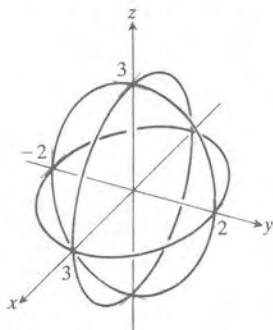
$$۰۲۹ \quad \text{بوسان: } -(1/\sqrt{5})y + (2/\sqrt{5})z = 0$$

$$\text{قائم: } (2/\sqrt{5})y + (1/\sqrt{5})z = 0; \text{ راستگر: } x=2$$

$$۰۳۹ \quad [x - (\pi/2)]^2 + y^2 = 1$$

$$۰۴۵ \quad \omega/2b$$

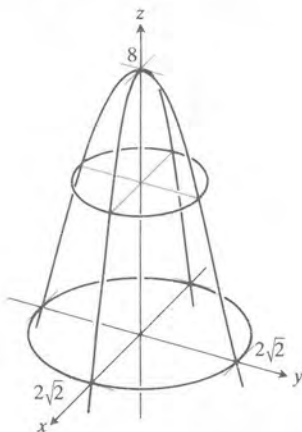
۵. $2x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$



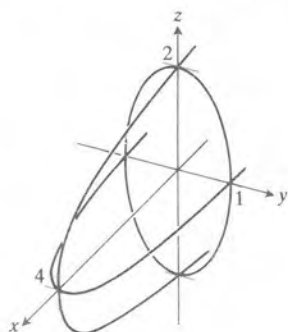
۷. $z = x^2 + y^2$



۱۱. $z = 8 - x^2 - y^2$



۱۳. $x = y^2 + 4z^2 + 1$



۲۱. $\kappa = |f'' + 2(f')^2 - f f''| / [f'' + (f')^2]^{3/2}$

۲۳. الف $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_r + 2\mathbf{u}_\theta$; $\mathbf{a} = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$

ب $\sqrt{3v} + \ln(\sqrt{3v} + 6)$

۲۵. الف $dx/dt = (\cos \theta)(dr/dt) - (r \sin \theta)(d\theta/dt)$

$dy/dt = (\sin \theta)(dr/dt) + (r \cos \theta)(d\theta/dt)$

ب $dr/dt = (\cos \theta)(dx/dt) + (\sin \theta)(dy/dt)$

$r(d\theta/dt) = (-\sin \theta)(dx/dt) + (\cos \theta)(dy/dt)$

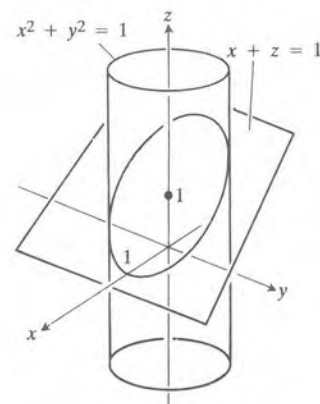
فصل ۱۵

بخش ۱۰۱۵، صفحه ۸۵

۱۹. درست است، خم هادی، يك خط است

۲۱. الف استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $x + z = 1$

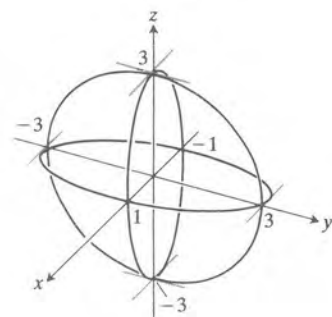
ب



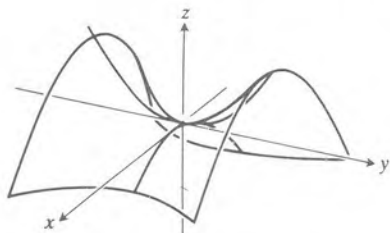
ب $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - \cos^2 t} dt$

بخش ۲۰۱۵، صفحه های ۹۱ تا ۹۲

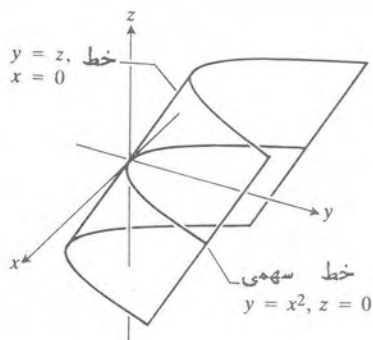
۱. $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$



$$y^2 - x^2 = z \quad ۳۳$$



$$y = x^2 + z \quad ۳۷$$



$$(x^2/4) + (y^2/9) + z^2 = 1 \quad ۳۹ \text{ بیضیوار}$$

بخش ۳۰۱۵، صفحه‌های ۹۵ تا ۹۶

(x, y, z)	(r, θ, z)	(ρ, ϕ, θ)	
$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$	۱
$(0, 1, 0)$	$(1, \pi/2, 0)$	$(1, \pi/2, \pi/2)$	۳
$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(1, \pi/2, 0)$	۵
$(0, 1, 1)$	$(1, \pi/2, 1)$	$(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/2)$	۷
$(0, -2\sqrt{2}, 0)$	$(2\sqrt{2}, 3\pi/2, 0)$	$(2\sqrt{2}, \pi/2, 3\pi/2)$	۹

۱۱ دکارتی: $x = y = 0$ ؛ کروی: $\rho \sin \phi = 0$ ؛ محور z

۱۳ $\phi = \pi/2$ ؛ $z = 0$ ؛ صفحه xy

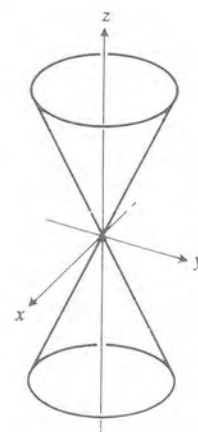
۱۵ $z = 3$ ؛ $z = 3$ ؛ صفحه موازی با صفحه xy

۱۷ $x = 0$ ؛ $r \cos \theta = 0$ ؛ صفحه yz

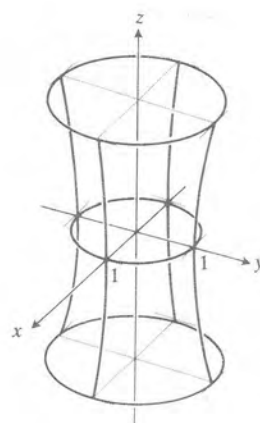
۱۹ $\rho = 2$ ؛ $r^2 + z^2 = 4$ ؛ کره

۲۱ استوانه‌ای که مقطع آن با صفحه xy دایره $x^2 + y^2 = 16$ و محورش محور z است.

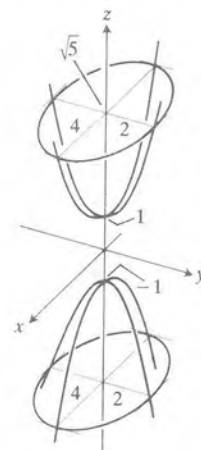
$$x^2 + y^2 = z^2 \quad ۱۷$$



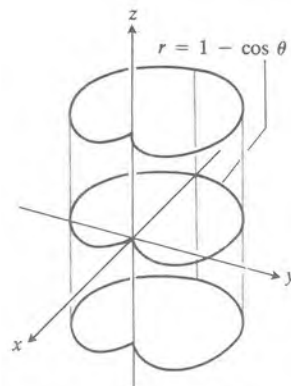
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad ۲۳$$



$$z^2 - x^2/4 - y^2 = 1 \quad ۲۹$$

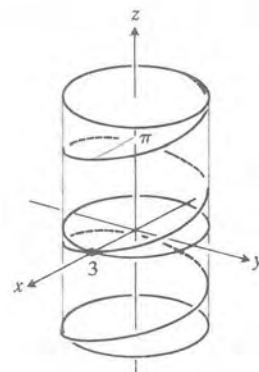


۲۳. استوانه‌ای که مقطع آن با صفحه xy دایره $r = 1 - \cos \theta$ است و مولدهایش موازی محور z اند.



۲۵. دایره‌ای در صفحه $z = 3$ به مرکز $(0, 0, 3)$ و شعاع ۲

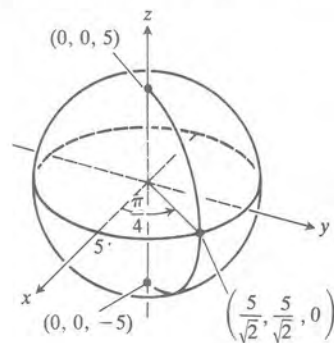
۲۷. پیچی که از نقطه $(3, 0, 0)$ می‌گذرد و بر رویه استوانه‌ای که مقطع آن با صفحه xy دایره $x^2 + y^2 = 9$ است می‌پیچد و بالا می‌رود.



$$z = \theta/2, \quad r = 3$$

۲۹. مخروطی که رأسش مبدأ است، با محور z زاویه $\pi/6$ می‌سازد، و محور z محور آن است.

۳۱. نیمدایره‌ای واقع بر رویه کره‌ای به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع ۵. نیمدایره از نقاط $(0, 0, 5)$ ، $(5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, 0)$ و



$(0, 0, -5)$ می‌گذرد.

۳۳. نیمدایره‌ای که محل تقاطع نیمکره به مرکز $(0, 0, 2)$ و شعاع ۲، $y \geq 0$ و صفحه yz است.

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۵، صفحه‌های ۹۶ تا ۹۹

۱. خط؛ صفحه

۳. دایره؛ استوانه

۵. سهمی؛ استوانه

۷. گل چهار برگ؛ استوانه

۹. دایره؛ استوانه

۱۱. گل چهار برگ؛ استوانه

۱۳. ناحیه بین دو کره هم‌مرکز

۱۵. ناحیه گوه‌ای شکلی که صفحه‌های $y = 0$ و $y = x$ از مخروط $\phi = \pi/4$ جدا می‌کنند.

۱۷. محل تقاطع کره $\rho = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 - y = 0$

۱۹. تقارن نسبت به محور z

۲۱. $(2, 3, 1)$

$$V = 2\pi R^2 h [1 - (R^2 - r^2)/3R^2] \quad ۲۳$$

$$V = (\pi abh/3)(3c^2 + h^2) \quad \text{الف} \quad ۲۵$$

$$V = (h/3)(2A_0 + A_h) \quad \text{ب}$$

$$d\theta/dt = \sqrt{2gb\theta/(a^2 + a^2\theta^2 + b^2)} \quad \text{الف} \quad ۲۷$$

ب

$$s = (a\theta/2)[\sqrt{c^2 + \theta^2} + c^2 \ln(\theta + \sqrt{c^2 + \theta^2}) - c^2 \ln c] \\ c^2 = (a^2 + b^2)/a^2$$

$$\mathbf{u}_\rho = (\sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k} \quad ۲۹$$

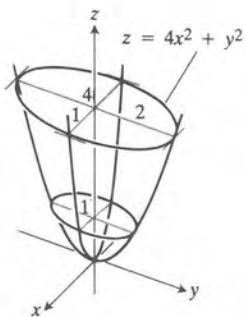
$$\mathbf{u}_\phi = (\cos \theta \cos \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{j} - (\sin \phi)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\theta = (-\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$$

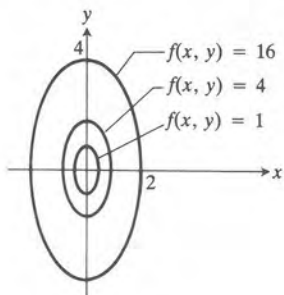
$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad \text{الف} \quad ۳۱$$

$$ds^2 = \rho^2 d\phi^2 + d\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \phi d\theta^2 \quad \text{ب}$$

۰۲۱ الف

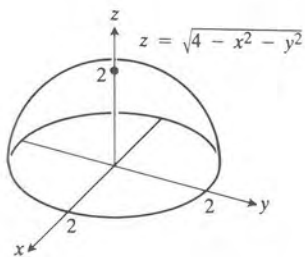


(ب)

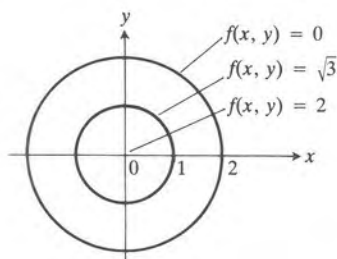


۰۲۳ نمودار $z = f(x, y)$ نیمکره‌ای است به مرکز $(0, 0, 0)$ و شعاع ۲ در بسالای صفحه xy . خمهای تراز عبارت‌اند از دایره‌های هم‌مرکزی با شعاع نایزگتر از ۲.

الف



(ب)



فصل ۱۶

بخش ۱۰۱۶، صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۵

۰۱ دامنه: $(-\infty, \infty)$ ، برد: $(-\infty, \infty)$ ، خمهای تراز:

$$x + y = k$$

۰۳ دامنه: $\{(x, y) : y > -x\}$ ، برد: $(-\infty, \infty)$ ، خمهای

$$x + y = e^k$$

۰۵ دامنه: $\{(x, y) : x \neq 0\}$ ، برد: $(-\pi/2, \pi/2)$ ، خمهای

$$x \neq 0, y = mx$$

۰۷ دامنه: $\{(x, y) : x \neq 0, y \geq 0\}$ ، برد: $(-\infty, \infty)$ ،

$$x \neq 0, k \geq 0, y = kx^2$$

۰۹ کره‌هایی به مرکز مبدأ

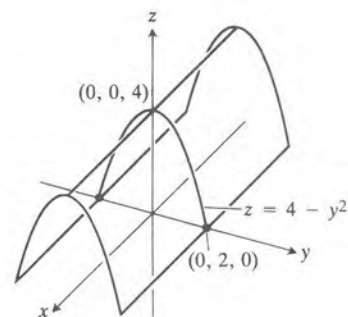
۰۱۱ کره‌هایی به مرکز مبدأ

۰۱۳ صفحه‌های موازی صفحه yz

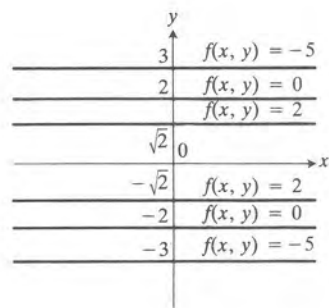
۰۱۵ صفحه‌های $x + y + z = k$

۰۱۷ استوانه‌هایی که محورشان محور x است

۰۱۹ الف



(ب)



بخش ۳۰۱۶، صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۵

$$f_x = 2, f_y = 0 \quad ۰.۱$$

$$f_x = f_y = 0 \quad ۰.۳$$

$$f_x = y - 1, f_y = x \quad ۰.۵$$

$$f_x = 2x - y, f_y = 2y - x \quad ۰.۷$$

$$f_x = 5y - 14x + 3, f_y = 5x - 2y - 6 \quad ۰.۹$$

$$f_x = x/\sqrt{x^2 + y^2}, f_y = y/\sqrt{x^2 + y^2} \quad ۰.۱۱$$

$$f_x = -(y^2 + 1)/(xy - 1)^2 \quad ۰.۱۳$$

$$f_y = -(x^2 + 1)/(xy - 1)^2$$

$$f_x = e^x \ln y, f_y = e^x / y \quad ۰.۱۵$$

$$f_x = e^x \sin(y + 1), f_y = e^x \cos(y + 1) \quad ۰.۱۷$$

$$f_x = 2 \operatorname{sech}^2(2x + 5y) \quad ۰.۱۹$$

$$f_y = 5 \operatorname{sech}^2(2x + 5y)$$

$$f_x = y + z, f_y = x + z, f_z = y + x \quad ۰.۲۱$$

$$f_x = 0, f_y = 2y, f_z = 2z \quad ۰.۲۳$$

$$f_P = -1/QR^2, f_Q = -1/RP^2 \quad ۰.۲۵$$

$$f_R = -1/PQ^2$$

$$f_\rho = \sin \phi \cos \theta, f_\phi = \rho \cos \theta \cos \phi \quad ۰.۲۷$$

$$f_\theta = -\rho \sin \phi \sin \theta$$

$$-2 \quad ۰.۲۹$$

$$\partial x / \partial y = 0; \quad \partial x / \partial z = -3 \quad ۰.۳۱$$

$$\partial A / \partial a = a / (bc \sin A) \quad ۰.۳۳$$

$$\partial A / \partial b = (c \cos A - b) / bc \sin A$$

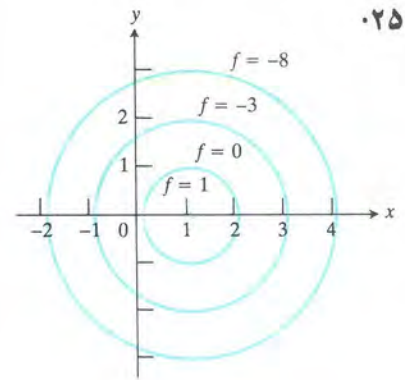
$$\partial \rho / \partial x = x / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ۰.۳۵$$

$$\partial \theta / \partial y = x / (x^2 + y^2) \quad ۰.۳۷$$

$$\partial \phi / \partial x = xz / (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۰.۳۹$$

$$\partial \mathbf{R} / \partial \rho = \mathbf{u}_\rho, \partial \mathbf{R} / \partial \phi = \rho \mathbf{u}_\phi \quad ۰.۴۱$$

$$\partial \mathbf{R} / \partial \theta = (\rho \sin \phi) \mathbf{u}_\theta$$



۰.۲۵

$$x^2 + y^2 = 10 \quad ۰.۲۷$$

$$۶۲۰۴۳ \text{ km} \quad ۰.۲۹$$

بخش ۲۰۱۶، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۱

$$5/2 \quad ۰.۱$$

$$1/2 \quad ۰.۳$$

$$5 \quad ۰.۵$$

$$1 \quad ۰.۷$$

$$0 \quad ۰.۹$$

$$1 \quad ۰.۱۱$$

$$0 \quad ۰.۱۳$$

$$\pi/2 \quad ۰.۱۵$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 0.1 \quad ۰.۲۳$$

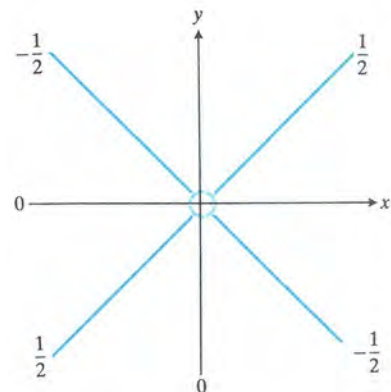
$$|x| < 0.0005, |y| < 0.0005 \quad ۰.۲۵$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 0.1 \quad ۰.۲۷$$

$$|x| < 0.0005, |y| < 0.0005, |z| < 0.0005 \quad ۰.۲۹$$

$$\text{بله} \quad ۰.۳۱$$

$$۰.۳۳$$



بخش ۴۰۱۶، صفحه‌های ۱۱۹ تا ۱۲۱

۰۱ $1/(1+\pi)$

۰۳

۰۵ $-3/\sqrt{5}$

۰۷ $-1/\sqrt{3}$

۰۹ $dz/dt = \partial z/\partial x \cdot dx/dt + \partial z/\partial y \cdot dy/dt$

۰۱۱ $\partial w/\partial y = \partial w/\partial u \cdot \partial u/\partial y + \partial w/\partial v \cdot \partial v/\partial y$

۰۱۳ $\partial y/\partial r = dy/du \cdot \partial u/\partial r$

۰۱۵ $\partial w/\partial p = \partial w/\partial x \cdot \partial x/\partial p + \partial w/\partial y \cdot \partial y/\partial p$

$+ \partial w/\partial z \cdot \partial z/\partial p + \partial w/\partial t \cdot \partial t/\partial p$

۰۱۷ الف) آری

ب) آری

پ) خیر

۰۲۱ $v + uv + 1$

۰۲۳ $2x + 4y^2$

۰۲۵ ۹۹

۰۲۷ -2π

۰۳۳ $t = -2, 1$

۰۳۵ الف) مینیمم در $\pi/4$ و $5\pi/4$ ، ماکسیمم در $3\pi/4$

$7\pi/4$

ب) ۶ و ۲

۰۳۷ $f_x = (\cos \theta)(\partial w/\partial r) - (\sin \theta/r)(\partial w/\partial \theta)$

$f_y = ((\cos \theta)/r)(\partial w/\partial \theta) + (\sin \theta)(\partial w/\partial r)$

بخش ۵۰۱۶، صفحه‌های ۱۲۵ تا ۱۲۶

۰۱ الف)

ب) $1+2z$

پ) $1+2z$

۰۳ الف) $\partial U/\partial p + (v/mR)(\partial U/\partial T)$

ب) $(nR/v)(\partial U/\partial p) + \partial U/\partial T$

۰۵ الف)

ب) ۵

۰۷ $(\partial x/\partial r)_\theta = \cos \theta; (\partial r/\partial x)_y = x/r$

بخش ۶۰۱۶، صفحه‌های ۱۳۰ تا ۱۳۲

۰۱ $2i + 2j - 2k$

۰۳ $-2i$

۰۵ $-(1/27)i - (2/27)j + (2/27)k$

۰۷ $(1/\sqrt{2})k$

۰۹ $\sqrt{2}$

۰۱۱ $(2-\pi)/\sqrt{17}$

۰۱۳ $\sqrt{3}-1$

۰۱۵ $43/15$

۰۱۷ $2/3$

۰۱۹ سریعترین افزایش: $i, 2$ ؛ سریعترین کاهش: $-i, -2$ ۰۲۱ سریعترین افزایش: $j, (1/\sqrt{10})i + (3/\sqrt{10})j$ سریعترین کاهش: $j, (1/\sqrt{10})i - (3/\sqrt{10})j$ ۰۲۳ سریعترین افزایش: $(10i + 4j + 10k), (1/\sqrt{216})(10i + 4j + 10k)$ سریعترین کاهش: $(10i + 4j + 10k), -(1/\sqrt{216})(10i + 4j + 10k)$

$-6/\sqrt{6}$

۰۲۵ $3\sqrt{2}/10$

۰۲۷ $1/15$

۰۲۹ $-(12/13)i + (5/13)j, (12/13)i - (5/13)j$

۰۳۱ $-7/\sqrt{5}$

۰۳۳ $\pi/\sqrt{2}$

۰۳۷ $\nabla w = (\partial w/\partial \rho)u_\rho + (1/\rho)(\partial w/\partial \phi)u_\phi$

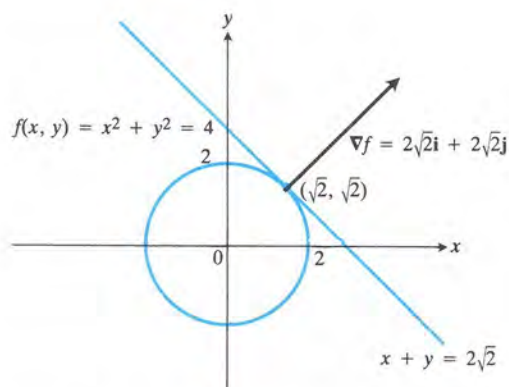
$+ (1/\rho \sin \phi)(\partial w/\partial \theta)u_\theta$

بخش ۷۰۱۶، صفحه‌های ۱۳۴ تا ۱۳۰

۰۱ الف) $x+y+z=3$

ب) $x=1+t, y=1+t, z=1+t$

۳۵. قائم: $x+y=2/\sqrt{2}; 2/\sqrt{2}i+2/\sqrt{2}j$



۳۷. قائم: $4x+3\sqrt{5}y=18; 16i+12\sqrt{5}j$

۳۹. قائم: $x-y=4; -2i+2j$

۴۱. دو خط: $z=t, y=\pm 4-t, x=t$

بخش ۸.۱۶، صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۰

۱. $f_{xx} = 2(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$

$f_{yy} = 2(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$

$f_{yx} = (-4xy)/(x^2 + y^2)^2$

۳. $f_{xx} = 2y - y \sin x, f_{yy} = -\cos y$

$f_{yx} = 2x + \cos x$

۵. $f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = z$

۱۱. الف) اول x

ب) اول y

پ) اول x

ت) اول x

ث) اول y

ج) اول y

۱۳. $f_{uu} + u f_{uv} + v f_{vu} + f_v$

۱۵. $2f_x + 4s^2 f_{xx} + 4r^2 f_{yy} + 8rs f_{xy}$

۱۷. $(-\sin t)f_x + (\cos^2 t)f_{xx} + 2f_y + 4t^2 f_{yy}$

$+ (4t \cos t)f_{xy}$

۱۹. ۲

۳۱. الف) $f(x, y) = bxy + c^2$ دلخواه: c و b ، $a = 0$

ب) b و a دلخواه: $b = -3d$ ، $c = -3a$

$f(x, y) = ax^2 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$

۳. الف) $3x + 4y + 5z = 0$

ب) $x = 3 - 6t, y = 4 - 8t, z = -5 - 10t$

۵. الف) $2x - z = 2$

ب) $x = 1 - 2t, y = 0, z = t$

۷. الف) $2y + 3z = 7$

ب) $x = 1, y = -1 + 4t, z = 3 + 6t$

۹. الف) $x - 3y - z = -1$

ب) $x = 1 + t, y = 1 - 3t, z = -1 - t$

۱۱. الف) $(\pi/2)x + z = \pi/2$

ب) $x = 1 - (\pi/2)t, y = 0, z = -t$

۱۳. الف) $9x - 7y - z = 21$

ب) $x = 2 + 9t, y = -3 - 7t, z = 18 - t$

۱۵. الف) $x + 2z = 2$

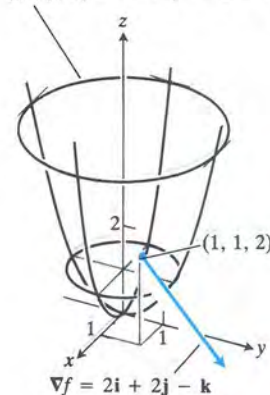
ب) $x = t, y = 0, z = 1 + 2t$

۱۷. الف) $x - y = 0$

ب) $x = t, y = -t, z = 0$

۱۹. $\nabla f = 2i + 2j - k$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$



۲۱. $\nabla f = -2i - 2j + k$

۲۳. $\nabla f = -2i + 2\sqrt{3}j$

۲۵. $\nabla f = 12j + 18\sqrt{3}k$

۲۷. $\nabla f = 2i + 2j + 2k$

۲۹. $x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 - 2t$

۳۱. $x = 1 - 2t, v = 1, z = 1/2 + 2t$

۳۳. $x = 1 + 90t, y = 1 - 90t, z = 3$

۷. ۳۱

۳۳. $\sqrt{3}$

۳۹. $|\nabla\theta| = \sqrt{1/(x^2+y^2)} = 1/r$ جهت، $(\pi/2) + \theta$ است.

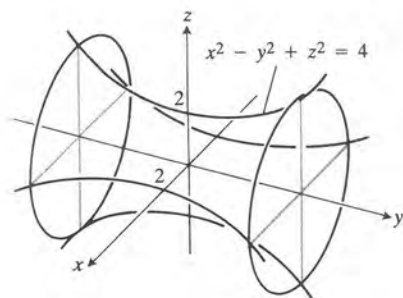
۴۳. $(1/7)(2i + 6j - 3k)$

۴۷. الف) $[1/\sqrt{x^2+y^2}][(x+3x^3+3xy^2)i$

$+(y+3y^3+3yx^2)j] - k$

ب) $-1/\sqrt{(1+3(x^2+y^2))^2+1}; -1/\sqrt{2}$

۴۹. الف)



ب) $2i + 6j + 6k$

پ) $2x + 3y + 3z = 4; x = 2 + 2t$

$y = -3 + 6t, z = 3 + 6t$

۵۱. همه نقاط (a, b, c) که $a^2 + b^2 + c^2 = 2$

۵۳. $a = \pm\sqrt{3}$

۵۹. $f_{uu} + (y^2 + 2xy)f_{uv} + 2yf_v + 2xy^2f_{vv}$

۶۱. ۲

۶۵. $[\sin^2(y+z) + \sin(x+y)]/\cos^2(y+z)$

۶۷. ۰

۶۹. $f_{yx}(0, 0) = 1, f_{xy}(0, 0) = -1$

فصل ۱۷

بخش ۱۰۱۷، صفحه‌های ۱۵۴ تا ۱۵۶

۱. مینیمم -۵ در $(-3, 3)$

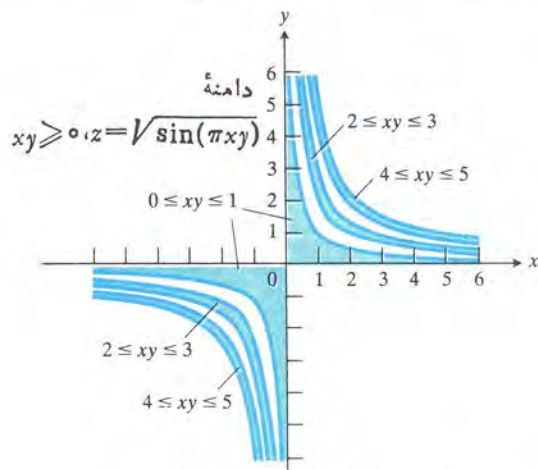
۳. نقطهٔ زینی در $(6/5, 69/25, -112/25)$

۵. نقطهٔ زینی در $(-2, 1, 3)$

۳۹. $w = e^{-e^2 \pi^2 t} \sin \pi x$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۶، صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۷

۱. دامنهٔ $z = \sqrt{\sin(\pi xy)}$ ، $xy \geq 0$ مجموعهٔ نقاطی از ربع اول و سوم اند که به‌ازای آنها $\sin(\pi xy) \geq 0$. این نقاط ناحیهٔ بسته‌ای را تشکیل می‌دهند که عبارت است از ناحیهٔ بین محورهای مختصات و هذلولی $xy = 1$ ، و نوارهای یک‌دک در میان بین هذلولیهایی $xy = n$ ، n عدد صحیح مثبت: $2 \leq xy \leq 3$ ، $4 \leq xy \leq 5$ ، $6 \leq xy \leq 7$ ، ... شکل را ببینید.



۳. نه، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$

۷. الف) $f_x = y \sin 2xy, f_y = x \sin 2xy$

ب) $f_x = 2xy^2 \cos(xy^2), f_y = 2x^2y \cos(xy^2)$

۱۱. الف) ۱

ب) ۰

پ) ۰

۱۳. $\partial w / \partial x = (\cos \theta)(\partial w / \partial r) - ((\sin \theta)/r)(\partial w / \partial \theta)$

$\partial w / \partial y = (\sin \theta)(\partial w / \partial r) + ((\cos \theta)/r)(\partial w / \partial \theta)$

۱۷. $\partial w / \partial r = \partial w / \partial s = 2/(r+s)$

۱۹. $\partial F / \partial x = (1/2)(\partial f / \partial u + \partial f / \partial v)$

$\partial F / \partial y = -(1/2)(\partial f / \partial u - \partial f / \partial v)$

۲۳. ۱

۲۵. $h'(x) = f_x(x, y) - (g_x(x, y)/g_y(x, y))f_y(x, y)$

۲۹. $-14/\sqrt{6}$

۰۷. ماکسیمم $۲۸/۹ -$ در $(۴/۹, ۲/۹)$ ۰۹. مینیمم ۰ در $(۱, -۲)$ ۰۱۱. مینیمم -۶ در $(۲, -۱)$ ۰۱۳. نقطهٔ زینی در $(۱/۶, ۴/۳, -۱۱/۱۲)$ ۰۱۵. نقطهٔ زینی در $(۱, ۲, ۹)$ ۰۱۷. نقطهٔ زینی در $(۰, ۰, ۰)$ ۰۱۹. مینیمم -۲ در $(-۲, ۳)$ ۰۲۱. مینیمم -۳ در $(۱, -۲)$ ۰۲۳. نقطهٔ زینی در $(۰, ۰, ۶)$ ؛ماکسیمم $۱۷۰/۲۷$ در $(-۲/۳, ۲/۳)$ ۰۲۵. نقطهٔ زینی در $(۱, -۱, ۱)$ ؛ مینیمم ۰ در $(۰, ۰)$ ۰۲۷. نقطهٔ زینی در $(۰, ۰, ۱۵)$ ؛ مینیمم ۱۴ در $(۱, ۱)$ ۰۲۹. نقطهٔ زینی در $(۰, ۰, ۰)$ ؛ماکسیمم ۲ در $(۱, ۱)$ و $(-۱, ۱)$ ۰۳۱. مینیمم مطلق -۵ در $(۱, ۲)$ ؛ ماکسیمم مطلق ۱ در $(۰, ۰)$ ۰۳۳. مینیمم مطلق ۰ در $(۰, ۰)$ ؛ ماکسیمم مطلق ۴ در $(۰, ۲)$ ۰۳۵. ماکسیمم مطلق ۱۱ در $(۰, -۳)$ ؛مینیمم مطلق -۱۰ در $(۲, -۲)$ ۰۳۷. مینیمم مطلق -۴ در $(۲, ۰)$ ؛ ماکسیمم مطلق $۳\sqrt{۲}/۲$ در نقاط انتهایی $(۱, \pm \pi/۴)$ و $(۳, \pm \pi/۴)$ ۰۳۹. گرمترین نقاط عبارت‌اند از نقاط $(-۱/۲, \pm \sqrt{۳}/۲)$ با دمای $۹/۲$ ، سردترین نقطه عبارت است از نقطه $(۱/۲, ۰)$ با دمای $-۱/۲$ ۰۴۱. ماکسیمم مطلق ۴ در $(۱, ۱)$ ؛ مینیمم مطلق وجود ندارد.۰۴۳. مینیمم در $(۰, ۰, ۰)$ ، ماکسیمم در نقاط انتهایی $(\pm ۱, \pm ۱, \sqrt{۲})$ ؛ $\partial z/\partial x$ و $\partial y/\partial x$ در مبدأ وجود ندارند اما در نقاط کناری موجود و ناصفرند.۰۴۵. الف) (i) $۰, ۲$ (ii) $-۲, ۲$ (iii) $-۲, ۲$ ب) (i) $۲, ۲\sqrt{۲}$ (ii) $-۲, ۲\sqrt{۲}$ (iii) $-۲\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}$ ب) (i) $۴, ۸$ (ii) $۴, ۸$ (iii) $۴, ۸$ ۰۴۷. الف) (i) $۹, ۱۲$ (ii) $۹, ۱۲$ (iii) $۹, ۱۲$ ب) (i) $۶, ۶\sqrt{۲}$ (ii) $-۶, ۶\sqrt{۲}$ (iii) $-۶\sqrt{۲}, ۶\sqrt{۲}$

بخش ۲۰۱۷، صفحه‌های ۱۶۳ تا ۱۶۵

۰۱. الف) $L(x, y) = ۱$ ب) $L(x, y) = ۲x + ۲y - ۱$ ۰۳. الف) $L(x, y) = ۱ + x$ ب) $L(x, y) = (\pi/۲) - y$ ۰۵. الف) $L(x, y) = ۳x - ۴y + ۵$ ب) $L(x, y) = ۳x - ۴y + ۵$ ۰۷. الف) $L(x, y) = x - ۶y + ۷$, $|E| \leq ۰.۰۰۶$ ۰۹. $L(x, y) = ۱ + x + y$, $|E| \leq ۰.۰۰۸$ ۰۱۱. $L(x, y) = ۱ + x$, $|E| \leq ۰.۰۰۲$ ۰۱۳. $۲h_0 = r_0$ ۰۱۵. الف) نسبت به تغییرات x ب) $dx/dy = -۱/۲$

۰۱۷. ۳٪

۰۱۹. ۰.۰۰۰۲ m

۰۲۱. ۰.۰۱٪

۰۲۳. الف) $L(x, y, z) = ۲x + ۲y + ۲z - ۳$ ب) $L(x, y, z) = y + z$ پ) $L(x, y, z) = ۰$ ۰۲۵. الف) $L(x, y, z) = x$ ب) $L(x, y, z) = (۱/\sqrt{۲})(x + y)$ پ) $L(x, y, z) = (۱/۳)(x + ۲y + ۲z)$ ۰۲۷. الف) $L(x, y, z) = ۲ + x$ ب) $L(x, y, z) = ۱ + x - [y - (\pi/۲)] - z$ پ) $L(x, y, z) = ۱ + x - [y - (\pi/۴)]$ $-[z - (\pi/۴)]$ ۰۲۹. $L(x, y, z) = ۲x - ۶y - ۲z + ۶$; $|E| \leq ۰.۰۰۰۲۴$

۳۵. ماکسیمم ۲۰۰۰ در (۱۰، ۱۰، ۲۰)

۳۷. وقتی رابطه $y = x$ را در معادله $z = 1 + x + y$ قرار می‌دهیم، $y = x$ را یکی از قبود اصلی مسئله است؛ در نظر می‌گیریم حال آنکه چنین نیست و این رابطه را ما ضمن تعیین مختصات نقاطی واقع بر C که نزدیکترین و دورترین نقاط به مبدأ اند به دست آوردیم.

بخش ۴۰۱۷، صفحه ۱۸۰

$$1 + x + (1/2)x^2 - (1/2)y^2 \quad ۰۱$$

$$x^2 + y^2 \quad ۰۳$$

$$1 + x + y + x^2 + 2xy + y^2 \quad ۰۵$$

$$\cos x \cos y \approx 1 - (1/2)(x^2 + y^2) \quad ۰۷$$

$$|E| \leq 0.0013$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۷، صفحه‌های ۱۸۱ تا ۱۸۲

۱. ماکسیمم مطلق ۲۸ است؛ مینیمم مطلق $9/4$ - است

۳. ماکسیمم مطلق ۱۸ است؛ مینیمم مطلق $17/4$ - است

۵. ماکسیمم مطلق ۸ است؛ مینیمم مطلق ۱ - است

۷. ماکسیمم مطلق ۴ است؛ مینیمم مطلق ۴ - است

۹. ماکسیمم مطلق ۴ است؛ مینیمم مطلق ۴ - است

۱۱. $(0, 0)$ يك نقطهٔ زینتی است؛ z در $(3, 3)$ يك مینیمم دارد

۱۳. $(1, 1, 1)$ ، $(1, -1, -1)$ ، $(-1, -1, 1)$ ،

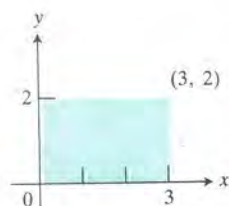
$(-1, 1, -1)$

$$(1/3abc)/2 \quad ۰۱۵$$

فصل ۱۸

بخش ۱۰۱۸، صفحه‌های ۱۹۳ تا ۱۹۴

۱. ۱۶



$$L(x, y, z) = 1 + x + y - z; \quad |E| \leq 0.00135 \quad ۰۳۱$$

$$dS = S_0(dx + dP/100 - 30dh - 5dw) \quad \text{الف} \quad ۰۳۳$$

ب) نسبت به تغییر ارتفاع حساستر است

$$6\% \quad ۰۳۵$$

$$338 \text{ ft}^2 \quad ۰۳۷$$

$$dQ = -400dh + 100dk + dM \quad ۰۳۹$$

است

بخش ۳۰۱۷، صفحه‌های ۱۷۳ تا ۱۷۵

۱. ماکسیمم در $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/2)$ ،

مینیمم در $(1/\sqrt{2}, -1/2)$ و $(-1/\sqrt{2}, 1/2)$

۳. ماکسیمم $27/5$ - در $(6/5, 18/5)$

۵. مینیمم موضعی ۰ در $(0, 3)$ ، ماکسیمم موضعی ۴ در $(2, 1)$

۷. الف) مینیمم ۸ در $(4, 4)$

ب) ماکسیمم ۶۴ در $(8, 8)$

$$h = 4 \text{ cm}, r = 2 \text{ cm} \quad ۰۹$$

۱۱. حداقل دمای ۰ در $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ یا $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ ، حداکثر دمای ۱۲۵ در $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ یا $(-2\sqrt{5}, \sqrt{5})$

۱۳. مینیمم ۰ در $(0, 0)$ ، ماکسیمم ۲۰ در $(2, 4)$

$$(3/2, 2, 5/2) \quad ۰۱۵$$

۱۷. فاصلهٔ مینیمم برابر است با ۱

۱۹. نزدیکترین نقاط به مبدأ عبارت‌اند از $(0, 0, \pm 2)$

$$50 \quad ۰۲۱$$

$$4096\sqrt{5}/125 \quad ۰۲۳$$

۲۵. ماکسیمم ۵ در $(0, 1)$ ، مینیمم $1/3$ - در $(0, -1/3)$

۲۷. گرمترین نقاط عبارت‌اند از $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$

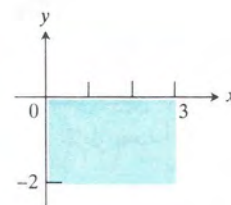
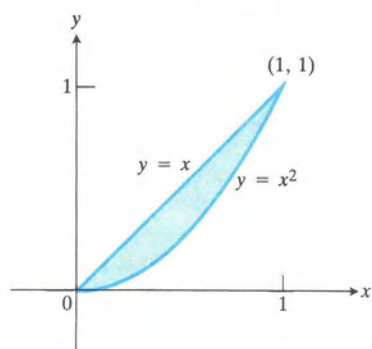
۲۹. ماکسیمم ۱۲۸ در $(8, 14)$

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad ۰۳۱$$

$$(1, 2, 5) \quad ۰۳۳$$

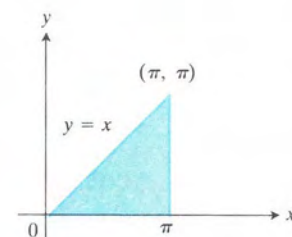
$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = 1/6 \cdot 19$$

۰.۳

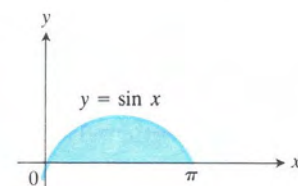
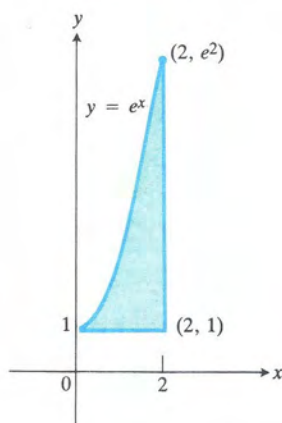


$$(\pi^2 + 4)/2 \cdot 5$$

$$\int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 dx dy = e^2 - 3 \cdot 21$$



$$\pi/4 \cdot 7$$



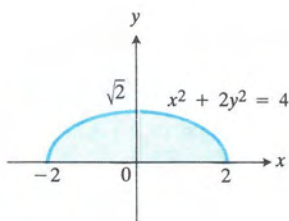
$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{(4-x^2)}/2} y dy dx = 8/3 \cdot 23$$

$$9 - 9e \cdot 9$$

$$(3/2) \ln 2 \cdot 11$$

$$-1/10 \cdot 13$$

$$(\ln 2)^2 \cdot 15$$



$$\int_0^4 \int_0^{(4-y)/2} dx dy = 4 \cdot 17$$

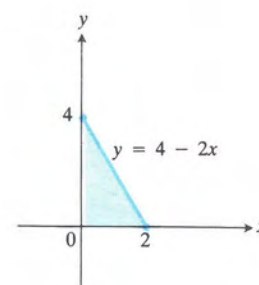
$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y) dx dy \cdot 25$$

$$\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx dy \cdot 27$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y) dx dy \cdot 29$$

$$2 \cdot 31$$

$$(e-2)/2 \cdot 33$$



$$(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}); I_x = 189 \quad ۰.۱۹$$

$$I_y = 6345/7, I_o = 7668/7; R_x = \sqrt{7/10}$$

$$R_y = \sqrt{47/14}, R_o = \sqrt{142/35}$$

$$h/\sqrt{e} \quad ۰.۲۱$$

$$\bar{x} = \bar{y} = 4a/3\pi \quad ۰.۲۳$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\pi/2, \pi/8) \quad ۰.۲۵$$

$$\frac{4}{3}ab(a^2 + b^2) \quad ۰.۲۷$$

$$I_y = 3/10, I_x = 9/10; (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 7/10) \quad ۰.۲۹$$

$$R_y = 2\sqrt{2}/10, R_x = 2\sqrt{6}/10, I_o = 6/5$$

$$R_o = 2\sqrt{2}/5$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (3/8, 17/16) \quad ۰.۳۱$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (8/5, 8/15); I_x = 1/6 \quad ۰.۳۳$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (11/3, 14/27); I_y = 432, R_y = 4 \quad ۰.۳۵$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 13/31); I_y = 7/5, R_y = \sqrt{21/31} \quad ۰.۳۷$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (100/9, 0); I_x = 20, R_x = \sqrt{1/3} \quad ۰.۳۹$$

$$a = 1 \quad ۰.۴۱$$

$$(u_1 + u_2)/3 \quad \text{الف} \quad ۰.۴۳$$

بخش ۳.۱۸، صفحه‌های ۲۰۷ تا ۲۰۹

$$\pi/2 \quad ۰.۱$$

$$\pi/8 \quad ۰.۳$$

$$\pi a^2 \quad ۰.۵$$

$$a^2 \sqrt{2}/6 \quad ۰.۷$$

$$3 \ln|2 + \sqrt{3}| \quad ۰.۹$$

$$5\pi/6 \quad ۰.۱۱$$

$$\pi/2 + 1 \quad ۰.۱۳$$

$$(\pi - 1)/2 \quad ۰.۱۵$$

$$\pi/12 \quad ۰.۱۷$$

$$(3\pi/8) + 1 \quad ۰.۱۹$$

$$\pi \ln 2 \quad ۰.۲۱$$

$$(1/4) \ln 17 \quad ۰.۳۵$$

$$625/12 \quad ۰.۳۷$$

$$16 \quad ۰.۳۹$$

$$e - 1 \quad ۰.۴۱$$

$$(\pi a^2)/2 \quad ۰.۴۳$$

بخش ۲.۱۸، صفحه‌های ۱۹۸ تا ۲۰۰

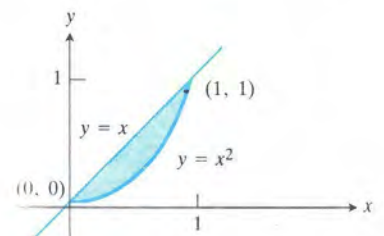
$$a^2/2 \quad ۰.۱$$

$$4 \quad ۰.۳$$

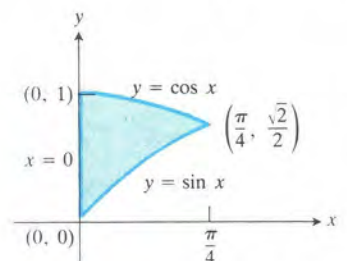
$$1/3 \quad ۰.۵$$

$$2 + (\pi/2) \quad ۰.۷$$

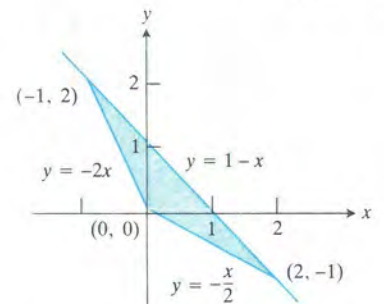
$$1/6 \quad ۰.۹$$



$$\sqrt{2} - 1 \quad ۰.۱۱$$



$$3/2 \quad ۰.۱۳$$



$$(\bar{x}, \bar{y}) = (5/14, 38/35) \quad ۰.۱۵$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (64/35, 5/7) \quad ۰.۱۷$$

۲/۳ .۲۷

۲/۷ .۲۹

۳۲π .۳۱

abc/۶ .۳۳

۱۶a^۳/۳ .۳۵

۴πabc/۳ .۳۷

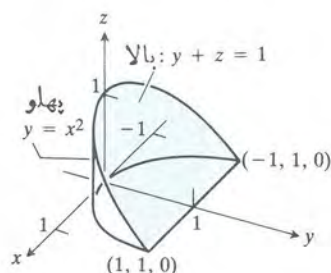
$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} dy dz dx$ (الف) .۳۹

$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} dy dx dz$ (ب)

$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy dz$ (پ)

$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dz dy$ (ت)

$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{1-y} dz dx dy$ (ث)



بخش ۵۰۱۸، صفحه‌های ۲۱۸ تا ۲۱۹

$R_x = \sqrt{(b^2 + c^2)/12}$, $R_y = \sqrt{(a^2 + c^2)/12}$.۱

$R_z = \sqrt{(a^2 + b^2)/12}$

$I_x = (M/3)(b^2 + c^2)$, $I_y = (M/3)(a^2 + c^2)$.۳

$I_z = (M/3)(a^2 + b^2)$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 12/5)$; $I_x = (7904/105)\delta$.۵

$I_y = (4832/63)\delta$; $I_z = (256/45)\delta$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 8/3)$ (الف) .۷

$c = 2\sqrt{2}$ (ب)

$I_L = 1386$; $R_L = 77\sqrt{2}/2$.۹

$I_L = 40/3$; $R_L = \sqrt{5/3}$.۱۱

۴ .۲۳

$(5/6, 0)$.۲۵

$35\pi/16$.۲۷

$(22 + 15\pi)/22$.۲۹

الف) ۱/۳ .۳۳

ب) ۳۳/۴

$8 + (52/3)\ln 2$.۳۵

$(\pi ab/4)(a^2 + b^2)$.۳۷

بخش ۴۰۱۸، صفحه‌های ۲۱۴ تا ۲۱۵

۱ .۱

$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-2y-x)/2} dz dy dx$.۳

$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-2z-x)/3} dy dz dx$

$\int_0^3 \int_0^{(1-2z)/3} \int_0^{(1-2y-x)/6} dx dy dz$

$\int_0^3 \int_0^{(1-z)/3} \int_0^{(1-2z-x)/3} dy dx dz$

$\int_0^2 \int_0^{(1-y)/2} \int_0^{(1-2y-x)/3} dz dx dy$

$\int_0^2 \int_0^{(1-2y)/2} \int_0^{(1-2y-x)/6} dx dz dy = 1$

۱ .۵

۱ .۷

$(\pi^2/2)(1 - \cos 1)$.۹

$4\pi/3$.۱۱

$16/3$.۱۳

$\pi/2$.۱۵

۰ .۱۷

$31/3$.۱۹

۱ .۲۱

π .۲۳

$2/3$.۲۵

$$(4\pi a^3/3)(1-2\sqrt{3}) \quad \cdot 27$$

$$52\pi/3 \quad \cdot 29$$

$$2/3 \quad \cdot 31$$

$$(0, 0, 3/8) \quad \cdot 33$$

$$I_x = 30\pi; R_z = \sqrt{10}/2 \quad \cdot 35$$

$$(0, 0, 7a/2(8\sqrt{2}-7)) \quad \cdot 37$$

$$\pi/4 \quad \cdot 39$$

$$(9\sqrt{3}/32, 0, 0) \quad \cdot 41$$

$$(0, 0, 4/5); I_x = \pi/12, R_z = \sqrt{1/3} \quad \text{(الف)} \quad \cdot 43$$

$$(0, 0, 5/6); I_x = \pi/12, R_z = \sqrt{5/12} \quad \text{(ب)} \quad \cdot 45$$

$$(2a^3\pi)/3 \quad \cdot 45$$

$$5\pi/3 \quad \cdot 47$$

$$8\pi/3 \quad \cdot 49$$

$$3/4 \quad \cdot 51$$

$$(0, 0, 9a/16) \quad \cdot 53$$

$$I_x = (8\pi\delta a^5)/15, R_z = a\sqrt{2/5} \quad \cdot 55$$

$$(4/3)\pi abc \quad \cdot 59$$

$$2+3\ln 2 \quad \cdot 61$$

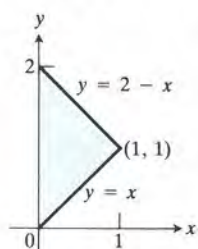
مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۸، صفحه‌های ۲۲۹ تا ۲۳۳

$$\int_{-2}^2 \int_{2-x}^{4-x^2} dy dx = 4/3 \quad \cdot 1$$

$$\ln(b/a) \quad \cdot 3$$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy \quad \cdot 7$$

$$\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2) dy dx \quad \cdot 9$$



$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (2/5, 2/5, 2/5) \quad \cdot 13$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (8/15, 8/15, 8/15) \quad \cdot 15$$

$$I_x = I_y = I_z = 11/6; R_x = R_y = R_z = \sqrt{11/15}$$

بخش ۶۰۱۸، صفحه‌های ۲۲۵ تا ۲۲۸

$$2\pi(2\sqrt{2}-2)/3 \quad \cdot 1$$

$$17\pi/5 \quad \cdot 3$$

$$2\pi(3\sqrt{2}-2) \quad \cdot 5$$

$$\pi^2 \quad \cdot 7$$

$$\pi/3 \quad \cdot 9$$

$$5\pi \quad \cdot 11$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{(الف)} \quad \cdot 13$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta \quad \text{(ب)}$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx \quad \text{(ب)}$$

$$\text{(الف)} \quad \cdot 15$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \sin^2 \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{(ب)}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi \int_0^{\csc \phi} \rho^3 \sin^2 \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \int_0^{2r^2} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta \quad \cdot 17$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{1-r^2}} r^3 dz dr d\theta \quad \text{(الف)} \quad \cdot 19$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin^2 \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{(ب)}$$

$$\pi/2 \quad \cdot 21$$

$$8\pi \quad \cdot 23$$

$$5\pi/2 \quad \cdot 25$$

- ۰۳ (ج) ۱۰۴/۳ ۰۱۱
- ۰۵ (ت) ۱ ۰۱۳
- ۰۷ (ج) $\sin(\ln 2)[e^{\pi/2} - 1]$ الف ۰۱۷
- ۰۹ $\sqrt{2}$ ب ۰
- ۰۱۱ $-\sqrt{2}$ ۰۱۹ $(2\lambda\sqrt{2}/9\pi, 2\lambda(2-\sqrt{2})/9\pi)$
- ۰۱۳ $13/2$ ۰۲۱ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^a (r \cos \theta) r dr d\theta$
- ۰۱۵ $2\sqrt{2}$ ۰۲۵ $R_x = (a/4)\sqrt{(3\pi - 8)/3}$
- ۰۱۷ $7/3$ $R_y = (a/4)\sqrt{(3\pi + 8)/3}$
- ۰۱۹ $1/2$ ۰۲۷ $K(a) = \int_0^{a \cos \beta} \int_0^{x \tan \beta} \ln(x^2 + y^2) dy dx$
- ۰۲۱ $(5\sqrt{5} + 9)/6$ $+ \int_{a \cos \beta}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \ln(x^2 + y^2) dy dx$ ۰۲۹ $(\pi - 2)/2$
- ۰۲۳ $2\pi - 2, 1$ ۰۳۱ $(0, 0, 1/4)$
- ۰۲۵ $I_z = 2\pi\delta a^2 = a^2 M; R_z = a$ ۰۳۳ $\pi/2$
- ۰۲۷ $L^2 M/3$ ۰۳۵ $(1/2)(122 - 25\sqrt{5})$
- ۰۲۹ $(0, 2a/\pi); I_x = \pi a^2 \delta/2; R_x = a/\sqrt{2}$ ۰۳۷ $[(\delta\pi^2 a^2 b)/2](3a^2 + 4b^2)$
- ۰۳۱ مرکز جرم: $(0, -3/5, 9/8)$ ۰۳۹ $\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz^2 dz dy dx$
- $I_x = 192/35; I_y = 64/15; I_z = 128/105$ $+ \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz^2 dz dy dx$
- $R_x = \sqrt{72/35}; R_y = \sqrt{8/5}; R_z = \sqrt{16/35}$ ۰۴۱ $(2a^3/9)(3\pi - 4)$
- بخش ۲۰۱۹، صفحه‌های ۲۴۷ تا ۲۴۸ ۰۴۳ $\pi a^5/12$
- ۰۱ الف ۹/۲ ۰۴۵ $(8\pi/15)(b^5 - a^5)$
- ۰۲ ب ۹/۲ ۰۴۷ $(2\pi/15)(128 - 51\sqrt{3})$
- ۰۳ ب ۹/۲ ۰۴۹ $(28\pi a^5)/15$
- ۰۳ الف $\pi/4$ فصل ۱۹
- ۰۵ ب $\ln 2$ بخش ۱۰۱۹، صفحه‌های ۲۳۸ تا ۲۴۱
- ۰۵ ب $\pi/4$ ۰۱ (ب)
- ۰۷ الف ۳ ۰۱۱
- ۰۳ ب ۳
- ۰۳ ب ۳

- ۰.۹ $1/2$
- ۰.۱۱ $-\pi$
- ۰.۱۳ 48
- ۰.۱۵ π
- ۰.۱۷ الف $(\pi/2)$
- ب 0
- پ 1
- ۰.۱۹ $0 =$ گردش؛ $\pi a^2 =$ شار
- ۰.۲۱ $\pi a^2 =$ گردش؛ $0 =$ شار
- ۰.۲۳ الف $0 =$ گردش F_1 ، $8\pi =$ شار
- $8\pi =$ گردش F_2 ، $0 =$ شار
- ب $0 =$ گردش F_1 ، $8\pi =$ شار
- $8\pi =$ گردش F_2 ، $0 =$ شار
- بخش ۳۰.۱۹، صفحه‌های ۲۵۹ تا ۲۶۰
- ۰.۱ $0 =$ شار؛ $2\pi a^2 =$ گردش
- ۰.۳ $-\pi a^2 =$ شار؛ $0 =$ گردش
- ۰.۵ $2 =$ گردش؛ $2 =$ شار
- ۰.۷ $0 =$ گردش؛ $1 =$ شار
- ۰.۹ $1 =$ گردش؛ $1 =$ شار
- ۰.۱۱ $1/12 =$ گردش؛ $1/5 =$ شار
- ۰.۱۳ 0
- ۰.۱۵ $16\pi -$
- ۰.۱۷ $2/33$
- ۰.۱۹ الف 0
- ب اگر A مساحت ناحیه محدود به C باشد، $(h-k)A$
- ۰.۲۷ πa^2
- ۰.۲۹ $3a^2\pi/8$
- بخش ۴۰.۱۹، صفحه‌های ۲۶۷ تا ۲۶۹
- ۰.۱ $13\pi/3$
- ۰.۳ 2
- ۰.۵ $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$
- ۰.۷ $(2 - \sqrt{2})\pi$
- ۰.۹ $\pi\sqrt{c^2+1}$
- ۰.۱۱ $(\pi/6)(5\sqrt{5} - 1)$
- ۰.۱۳ 9
- ۰.۱۵ $(abc/4)(ab+bc+ac)$
- ۰.۱۷ 2
- ۰.۱۹ $2\pi ah(h^2+3a^2)/3$
- ۰.۲۱ $\pi a^3/6$
- ۰.۲۳ $\pi a^3/4$
- ۰.۲۵ $\pi a^3/2$
- ۰.۲۷ -32
- ۰.۲۹ -2
- ۰.۳۱ 128π
- ۰.۳۳ $(1/2, 1/2, 1/2)$
- ۰.۳۵ $(0, 0, 14/9); I_x = 15\sqrt{2}\pi/2; R_x = \sqrt{5}/2$
- ۰.۳۷ الف $(\pi^2 a^3)$ از $r = \sqrt{x^2+y^2} = \delta$ و فرمول ۳۳ جدول انتگرال استفاده کنید
- ب $(8\pi a^4/3)$ از $\delta = x^2+y^2 = r^2$ استفاده کنید.
- بخش ۵۰.۱۹، صفحه‌های ۲۷۷ تا ۲۷۸
- ۰.۱ 16
- ۰.۳ 0
- ۰.۵ 8π
- ۰.۷ 3π
- ۰.۹ $16/3$
- ۰.۱۱ $4\pi a^4$
- ۰.۱۳ 5

$$\mathbf{F} = -GmM\mathbf{R}/\rho^3 \quad (\text{ب})$$

$$(2\pi/3)(3\sqrt{3}-1) \quad ۰.۱۳$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \quad ۰.۱۵$$

$$2 \int_0^a (1+2y^2)^{1/2}(a^2-y^2)^{1/2} dy \quad ۰.۱۷$$

$$2\pi^2 ab \quad ۰.۱۹$$

$$۸ \quad ۰.۲۱$$

$$2-8\pi \quad ۰.۲۳$$

$$(\pi/6)(17\sqrt{17}-1) \quad (\text{الف}) \quad ۰.۲۵$$

$$(\pi/6)(5\sqrt{5}-1) \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{5}+(1/2)\ln(\sqrt{5}+2) \quad (\text{پ})$$

$$a \quad ۰.۲۷$$

$$۰ \quad ۰.۳۹$$

$$۰ \quad ۰.۴۱$$

$$-3 \quad ۰.۴۳$$

فصل ۲۰

بخش ۲۰.۲۰، صفحه‌های ۳۰۷ تا ۳۱۰

$$|2y-3|=C/(x^2+1) \quad ۰.۱$$

$$e^y=e^x+C \quad ۰.۳$$

$$\sinh 2y-2\cos x=C \quad ۰.۵$$

$$e^y(y-1)+x^2/2+\ln|x|=C \quad ۰.۷$$

$$\cosh^{-1}y+\sinh^{-1}x=C \quad ۰.۹$$

$$10 \ln 10 \text{ سال} \quad ۰.۱۱$$

$$۴۸.۲ \text{ دقیقه} \quad ۰.۱۳$$

$$y=x/(\ln|x|+C) \quad ۰.۱۵$$

$$(1/2)\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}(y/x)=C \quad ۰.۱۷$$

$$\sin(y/x)=C/x \quad ۰.۱۹$$

$$y=Cx^2, x^2+2y^2=C \quad ۰.۲۱$$

بخش ۶.۱۹، صفحه‌های ۲۸۴ تا ۲۸۶

$$4\pi \quad ۰.۱$$

$$-5/6 \quad ۰.۳$$

$$۰ \quad ۰.۵$$

$$4\pi \quad ۰.۷$$

$$2\pi a^2 \quad ۰.۹$$

بخش ۷.۱۹، صفحه‌های ۲۹۲ تا ۲۹۳

۰.۱ پایستار است

۰.۳ پایستار نیست

۰.۵ پایستار نیست

$$f(x, y, z)=x^2+\frac{3}{2}y^2+2z^2+C \quad ۰.۷$$

$$f(x, y, z)=xe^{y+2z}+C \quad ۰.۹$$

$$29 \quad ۰.۱۱$$

$$5/6 \quad ۰.۱۳$$

$$1 \quad ۰.۱۵$$

$$25/2 \quad ۰.۱۷$$

$$8+\ln 2 \quad ۰.۱۹$$

$$-3 \quad ۰.۲۱$$

$$22 \quad ۰.۲۳$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = 0 \quad ۰.۲۵$$

مسئله‌های گوناگون، فصل ۱۹، صفحه‌های ۲۹۳ تا ۲۹۸

$$2\sqrt{3}/3 \quad (\text{الف}) \quad ۰.۱$$

$$(2\sqrt{2}+3)/3 \quad (\text{ب})$$

$$I_z=7\delta\sqrt{3}/3; R_z=\sqrt{7/3} \quad ۰.۳$$

$$\bar{z}=32\sqrt{2}/105; I_z=7/12; R_z=\sqrt{7/18} \quad ۰.۵$$

$$\mathbf{F}=\rho^{-(n+1)}\mathbf{R} \quad (\text{الف}) \quad ۰.۱۱$$

$$\mathbf{F}=-(2/\rho)\mathbf{R} \quad (\text{ب})$$

$$y = \delta \sin x \quad \text{الف} \quad ۰۹$$

$$y = 2 \sin x \quad \text{ب}$$

$$x = mgt/k + (m^2 g/k^2)(e^{-kt/m} - 1) \quad ۰۱۱$$

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 \quad ۰۱۳$$

$$y = \sqrt{x}(C_1 \ln|x| + C_2) \quad ۰۱۵$$

بخش ۴۰۲۰، صفحه‌های ۳۱۵ تا ۳۱۶

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} \quad ۰۱$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} \quad ۰۳$$

$$y = e^{-x/2}(C_1 \cos(\sqrt{3}/2)x + C_2 \sin(\sqrt{3}/2)x) \quad ۰۵$$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} \quad ۰۷$$

$$y = e^x(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x) \quad ۰۹$$

$$y = -(1/2)e^x + (3/2)e^{-x} \quad ۰۱۱$$

$$y = -(2/3)e^{-x/2} - (1/3)e^x \quad ۰۱۳$$

$$y = (3/4)(e^{2x} - e^{-2x}) \quad ۰۱۵$$

$$y = \sin 2x \quad ۰۱۷$$

بخش ۵۰۲۰، صفحه‌های ۳۲۲ تا ۳۲۴

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + (1/2)x^2 - x \quad ۰۱$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (1/2)x \cos x \quad ۰۳$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (1/2)x^2 e^{-x} \quad ۰۵$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x/2 \quad ۰۷$$

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2 \quad ۰۹$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| \quad ۰۱۱$$

$$+ x \sin x$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} + 3/10 \quad ۰۱۳$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + (\cos x - \sin x)/2 \quad ۰۱۵$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (1/8) \cos 3x \quad ۰۱۷$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 6 \cos x - 2 \sin x \quad ۰۱۹$$

$$x^2 - y^2 = C \quad ۰۲۳$$

$$y = (1/2)e^{x/2}(x + C) \quad ۰۲۵$$

$$y = (1/x)(C - \cos x) \quad ۰۲۷$$

$$y = (x^2 - 2x + C)/2(x - 1)^2 \quad ۰۲۹$$

$$x = e^{-2y}(y^2 + C) \quad ۰۳۱$$

$$x = (C - y)/(y^2 + 1) \quad ۰۳۳$$

$$x(t) = -2031225 - 625t + 2131225e^{0.08t} \quad ۰۳۵$$

$$xy = C \quad \text{الف} \quad ۰۳۷$$

$$xy = C \quad \text{ب}$$

$$x^2/2 + xy + y^2/3 = C \quad ۰۳۹$$

$$x^2 y + xy^2 - y^2/2 = C \quad ۰۴۱$$

$$y = Cx - x^2/2 \quad ۰۴۳$$

$$y = Cx - x^2 - x \ln|x| \quad ۰۴۵$$

$$y^2 \tan^{-1} x + \cosh y - 2xy = C \quad ۰۴۷$$

$$c = 2b; ax^3/2 + bxy^2 = C \quad ۰۴۹$$

$$y = -1 \pm e^{1 - \sin x} \quad ۰۵۱$$

$$y = (1/2)x + (5/2)e^{-2x} - 1/4 \quad ۰۵۳$$

$$y = \tan(1 - e^x + \pi/4) \quad ۰۵۵$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 6 \quad ۰۵۷$$

$$y = (1/5)x^2 - 12/5x^2 \quad ۰۵۹$$

بخش ۳۰۲۰، صفحه‌های ۳۱۲ تا ۳۱۳

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \quad ۰۱$$

$$y = C_1 \int e^{-x/2} dx + C_2 \quad ۰۳$$

(این انتگرال را به صورت ترکیبی متناهی از توابع مقدماتی نمی‌توان محاسبه کرد.)

$$y = C_1 \sinh(x + C_2) \quad ۰۵$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t, \omega = \sqrt{2k/mr^3} \quad \cdot ۵$$

$$x = C_1 \cos \sqrt{k/mt} + C_2 \sin \sqrt{k/mt} \quad (\text{الف}) \cdot ۷$$

$$+ [kA/(k - m\alpha^2)] \sin \alpha t$$

$$x = C_1 \cos \sqrt{k/mt} + C_2 \sin \sqrt{k/mt} \quad (\text{ب})$$

$$- \sqrt{A^2 k / 4mt} \cos \alpha t$$

بخش ۷.۲۰، صفحه ۳۲۹

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{x^2} + C_3 \quad \cdot ۱$$

$$y = (C_1 x + C_2) e^{\sqrt{x}} + (C_3 x + C_4) e^{-\sqrt{x}} \quad \cdot ۳$$

$$y = e^{\sqrt{x}} (C_1 \cos \sqrt{x} + C_2 \sin \sqrt{x}) \quad \cdot ۵$$

$$+ e^{-\sqrt{x}} (C_3 \cos \sqrt{x} + C_4 \sin \sqrt{x})$$

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) e^x + \gamma \quad \cdot ۷$$

بخش ۸.۲۰، صفحه ۳۳۲

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n / n! \quad \cdot ۳$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (2^n / n!) (x-1)^n \quad \cdot ۵$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} / (2n)! \quad \cdot ۷$$

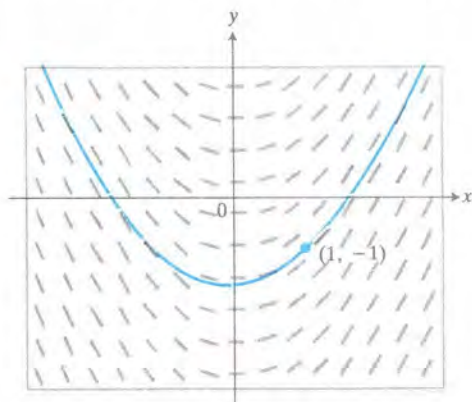
$$y = 2 \sum_{n=0}^{\infty} [x^{2n+1} / (2n+1)!] - \sum_{n=0}^{\infty} (x^{2n} / (2n)!) - x \quad \cdot ۹$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, a_0 = y_0, a_1 = y_1, a_2 = 0, a_3 = 0 \quad \cdot ۱۱$$

$$a_n = [1/n(n-1)] a_{n-2}, n \geq 2$$

بخش ۹.۲۰، صفحه ۳۳۶

۱. تکشیبه‌ها عبارت‌اند از خطوط قائم: ثابت x .



$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^{x/2} - x^2 - 2 \quad \cdot ۲۱$$

$$y = C_1 e^{x^2} + C_2 e^{-x^2} - e^{-x} / 2 \quad \cdot ۲۳$$

$$+ (29 \cos x + 7 \sin x) / 50$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-\Delta x} + x^2 - 3x^2 / 5 + 6x / 25 \quad \cdot ۲۵$$

$$y = C_1 + C_2 e^{x^2} + x e^{x^2} / 3 + 2x^2 + 4x / 3 \quad \cdot ۲۷$$

$$y = C_1 + C_2 e^{\Delta x} + (x^2 / 10 - x / 25) e^{\Delta x} \quad \cdot ۲۹$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x \quad \cdot ۳۱$$

$$- (x \cos x) / 2$$

$$y = C_1 + C_2 e^x + x e^x + e^{-x} / 2 \quad \cdot ۳۳$$

$$y = C_1 e^{\Delta x} + C_2 e^{-x} - e^x / 8 - 4 / 5 \quad \cdot ۳۵$$

$$\cdot ۳۷$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin x \ln |\csc x + \cot x|$$

$$y = C_1 + C_2 e^{\Delta x} + x e^{\Delta x} / 8 \quad \cdot ۳۹$$

$$y = C_1 + C_2 e^x - x^2 / 4 - x^2 - 3x^2 - 6x \quad \cdot ۴۱$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x^2} + x^2 / 6 - x^2 / 4 + x / 4 - e^x / 3 \quad \cdot ۴۳$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x \quad \cdot ۴۵$$

$$+ \sin x \ln |\sec x|$$

$$y = C e^{x^2} - e^x / 2 \quad \cdot ۴۷$$

$$y = C e^{x^2} + \Delta x e^{x^2} \quad \cdot ۴۹$$

$$y = 2 \cos x + \sin x - 1 \quad \cdot ۵۱$$

$$+ \sin x \ln |\sec x + \tan x|$$

$$y = 1 - e^{-x} \quad \cdot ۵۳$$

بخش ۶.۲۰، صفحه‌های ۳۲۷ تا ۳۲۸

$$x = x_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t \quad \cdot ۱$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \sin(\omega t + \tan^{-1}(x_0 \omega / v_0))$$

$$i = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (\text{الف}) \quad \cdot ۳$$

$$i = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (\text{ب})$$

$$+ \alpha V / L (\omega^2 - \alpha^2) \cos \alpha t$$

$$i = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + (V/2L)t \sin \omega t \quad (\text{پ})$$

$$i = e^{-\Delta t} (C_1 \cos 149t + C_2 \sin 149t) \quad (\text{ت})$$

$$y_0 = 2; y_1 = (1/2)x^2 + 3/2 \quad ۱۵$$

$$y_2 = (1/2)x^2 + 3/2; y_3 = (1/2)x^2 + 3/2$$

$$y_0 = 1; y_1 = (1/2)x^2 + 1/2 \quad ۱۷$$

$$y_2 = 5/8 + (1/4)x^2 + (1/8)x^4$$

$$y_3 = 29/48 + (5/16)x^2 + (1/16)x^4 + (1/48)x^6$$

$$y_0 = 1; y_1 = 1 + x + (1/2)x^2 \quad ۱۹$$

$$y_2 = 1 + x + x^2 + (1/6)x^3$$

$$y_3 = 1 + x + x^2 + (1/3)x^3 + (1/24)x^4$$

بخش ۱۰۰۲۰، صفحه ۳۴۱

$$y(1) \approx 2.488320 \quad ۱ \quad \text{مقدار دقیق } e \text{ است.}$$

$$y(1) \approx 2.702708 \quad ۳$$

$$1 + x + x^2 + (4/3)x^3 + (7/6)x^4 \quad ۵$$

مسأله‌های گوناگون، فصل ۲۰، صفحه‌های ۲۴۳ تا ۳۴۴

$$\ln|\ln y| = C - \tan^{-1}x \quad ۱$$

$$y = \ln(C - e^{-x}) - 2 \quad ۳$$

$$\sinh^{-1}y^2 = 2x + C \quad ۵$$

$$y^2 = x^2 - Cx \quad ۷$$

$$y = x \tan^{-1}(\ln|x| + C) \quad ۹$$

$$y = 1/2 + x^2/4 + C/x^2 \quad ۱۱$$

$$y = \cosh x [\ln(\cosh x) + C] \quad ۱۳$$

$$3x + 3xy^2 + 3y + y^3 = C \quad ۱۵$$

$$x^2 + 3xy^2 + 3\sinh y = C \quad ۱۷$$

$$x^2(e^y + 1) + e^y(y^2 - 2y + 2) = C \quad ۱۹$$

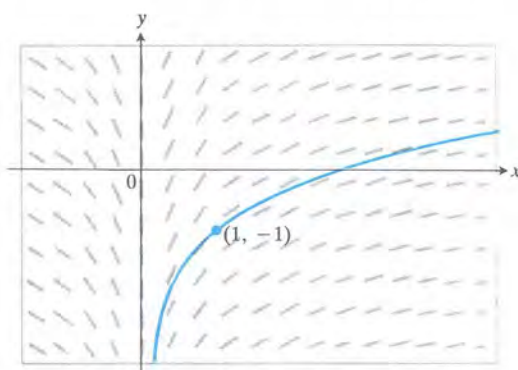
$$y = C_1 \tan(C_1 x + C_2) \quad ۲۱ \quad \text{یا} \quad y = -(x + C)^{-1}$$

$$(1/2C_1) \ln|(y - C_1)/(y + C_1)| = x + C_2$$

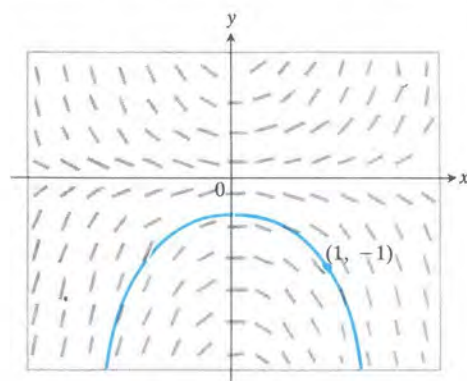
$$y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2 \quad ۲۳$$

$$y = (1/2) \ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2 \quad ۲۵$$

۳. تکشیه‌ها عبارت‌اند از خطوط قائم: ثابت x .



۵. تکشیه‌ها عبارت‌اند از هذلولیهای: ثابت xy .

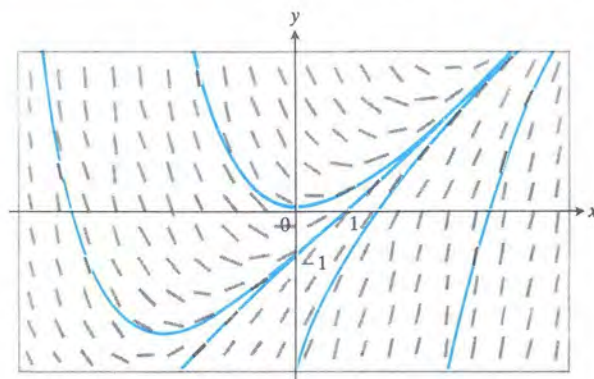


۷. تکشیه‌ها عبارت‌اند از خطوط مورب: ثابت $x + y$.

$y = \tan(x + C) - x$ وقتی $C = 0$ از $(0, 0)$ می‌گذرد

۹. الف) $y = x - 1$

ب) به ازای $y > x - 1$ تقعر رو به بالا؛ به ازای $y < x - 1$ تقعر رو به پایین.



$$y' = x - y; y(1) = -1 \quad ۱۱$$

$$y' = -(1 + y) \sin x; y(0) = 2 \quad ۱۳$$

$$x=3, y=2 \quad ۰۷$$

$$x=3, y=-2, z=2 \quad ۰۹$$

$$x=2, y=0, z=-1 \quad ۰۱۱$$

$$x=-4, y=1 \quad ۰۱۵$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (الف) \quad ۰۱۷$$

$$x=-20, y=15/2, z=-10/3 \quad (ب)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda=2 \text{ یا } \lambda=3 \quad ۰۱۹$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \lambda=2 \text{ یا } \lambda=0 \quad ۰۲۱$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \lambda=0 \quad ۰۲۳$$

$$\lambda=1 \pm \sqrt{19}; \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{19}-3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{19}-3 \end{bmatrix} \quad ۰۲۵$$

$$\lambda=2; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ۰۲۷$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \lambda=\pm 2 \text{ یا } \lambda=0 \quad ۰۲۹$$

پ ۱۱، صفحه‌های ۳۷۵ تا ۳۷۷

۰۱ (الف) (۱۴، ۸)

(ب) (-۱، ۸)

(پ) (۵، -۵)

۰۱۱ (الف) دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲

(ب) درون دایره قسمت (الف)

$$y=C_1+(C_2+C_3x)e^x \quad ۰۲۷$$

$$y=[C_1+(1/3)x]e^{3x}+C_2e^{-x} \quad ۰۲۹$$

$$y=C_1\sqrt{x}+C_2/\sqrt{x} \quad ۰۳۱$$

$$3x^2+2y^2=C \quad ۰۳۳$$

$$y^2=2Bx+B^2 \quad ۰۳۵$$

$$y=e^x-x-1; y=\sum_{n=2}^{\infty} (x^n/n!) \quad ۰۳۷$$

$$\pi/2+x+x^2/2!-x^3/3!-3x^4/4! \quad (الف) \quad ۰۳۹$$

$$-\pi/2-x+x^2/2!+x^3/3!-3x^4/4! \quad (ب)$$

پیوسته

پ ۷، صفحه ۳۵۲ تا ۳۵۴

۰۱ -۵

۰۳ ۱

۰۵ (الف) -۷

(ب) -۷

۰۷ (الف) ۳۸

(ب) ۳۸

$$x=-4, y=1 \quad ۰۹$$

$$x=3, y=2 \quad ۰۱۱$$

$$x=3, y=-2, z=2 \quad ۰۱۳$$

$$x=2, y=0, z=-1 \quad ۰۱۵$$

$$h=6, k=4 \quad (الف) \quad ۰۱۷$$

$$h=6, k \neq 4 \quad (ب)$$

پ ۸، صفحه‌های ۳۶۲ تا ۳۶۳

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ 8 \\ 23 \end{bmatrix} \quad (الف) \quad ۰۱$$

$$x=-4, y=1 \quad ۰۵$$

$$۱, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ۰۲۱$$

$$2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i \quad ۰۲۳$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad ۰۲۵$$

$$1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i \quad ۰۲۷$$

پ) بیرون دایره قسمت (الف)

۰۱۳ دایره به مرکز $(-1, 0)$ و شعاع ۱

۰۱۵ نقاط روی خط $y = -x$

$$e^{(\pi/2)i} \quad ۰۱۷$$

$$\sqrt{65} e^{i \tan^{-1}(-0.۱۲۵)} \quad ۰۱۹$$

فهرست راهنما

- آزمون ماکسیم و مینیم ← ماکسیمها و مینیمها
 آزمون مشتق دوم برای ماکسیم و مینیم ۱۷۵
 آمپر، آندره ماری (۱۷۷۵-۱۸۳۶) ۲۸۴
 قانون- ۲۸۴
 آونگ ۳۲۷ (۴)، ۳۲۸ (۷)
- ابوستل، تام ۲۵۸
 اخترواره ایکاروس ۷۵
 ارتعاش ۳۲۴
 - بدون میرایی ۳۲۶
 - میرای بحرانی، فوق بحرانی، و تحت بحرانی ۳۲۶
 ارتعاشات فتر ۳۲۸ (۷)
 استقلال از مسیر ۲۸۶
 استوانه
 - بیضوی ۸۲
 شیوه رسم- ۸۳
 استوکس، جورج گابریل (۱۸۱۹-۱۹۰۳)، ۲۵۰، ۲۷۸
 اسکای لب ۷۷ (۱)، ۸۰ (۲۷)
 اعداد
 - صحیح ۳۶۹
 - گنگ ۳۷۰
 - گویا ۳۶۹
 - مختلط ← عددهای مختلط
 دستگاه- ۳۶۹
 اکسترمهای خمها ۱۵۳، ۱۵۵ (۴۷-۴۵)، ۱۵۶ (۴۸)
 الکترون ۱۲ (۸)
 الکتريسيته ۲۴۹
 - و مغناطيس ۲۴۹
 امواج صوتی کنکورد ۱۰۵ (۲۹)
 انتگرال
- چندگانه ۱۸۳
 - خمیده خطی ۲۳۵، ۲۳۴
 - برای محاسبه جرم و گشتاور ۲۳۷
 - در میدانهای برداری ۲۴۱
 قضیه اصلی- ۲۸۷
 - و شار ۲۴۱
 - و کار ۲۴۳
 ویژگیهای جبری- ۲۳۶
 - دوگانه ۱۸۳
 - به صورت حجم ۱۸۵
 - روی نواحی غیرمستطیلی محصور ۱۸۷
 - روی نواحی مستطیلی ۱۸۳
 - و مساحت ۱۹۴
 تعیین حدود انتگرالگیری در- ۱۹۱
 تغییر متغیر در- ۲۰۵
 جانسانی در- ۲۰۵
 صورت قطبی- ۲۰۰
 - و تعیین حدود انتگرالگیری ۲۰۲
 قضیه فوینی در مورد محاسبه- ۱۸۵
 کاربردهای فیزیکی- ۱۹۴
 ویژگیهای- ۱۸۴
 - رویه‌ای، ۲۶۰، ۲۶۴
 - برای تعیین فشار ۲۶۵
 - سه‌گانه ۲۰۹، ۲۱۹
 - به منزله انتگرال مکرر ۲۱۰
 - در مختصات استوانه‌ای ۲۱۹
 - در مختصات قائم ۲۰۹
 - در مختصات کروی ۲۲۱
 - و حجم ۲۱۰
 تغییر متغیر در- ۲۲۲
 جانسانی در- ۲۲۲
 ویژگیهای- ۲۱۰
 - شارش ۲۴۴
- معین
 مشتق - و قاعده لایب نیتس ۱۴۳
 - مکرر ۱۸۶
 انتگرالگیری
 - از توابع برداری ۵۵
 عامل- ۳۰۳
 اندیس جایگشت ۳۴۷
 اوج
 ارتفاع- ۸۰ (۲۷)
 اوستروگرادسکی، میخائیل واسیلیویچ (۱۸۰۱-۱۸۶۲) ۲۷۰، ۲۵۰
 اوپلر، لئونهارت (۱۷۰۷-۱۷۸۳) ۷۸، ۱۶۷، ۳۱۸
 اینتلست ۷۶
 اینشتین، آلبرت (۱۸۷۹-۱۹۵۵)
 قضیه نسبت- ۲۷۰
 بار الکتریکی ۲۶۴
 برآورد خطا در تقریب خطی ۱۵۸، ۱۶۱، ۱۷۷، ۱۸۰
 (۹)
 بردار
 اتحادهای- ی در مورد عملگر ∇ ۳۶۷
 اثباتهای هندسی به کمک- ۷
 برابری- ها ۳، ۲
 - بین دو نقطه ۱۶
 - سرعت ۵۰، ۵۰، ۵۲، ۷۰
 - صفر ۵
 - عمود بر خط $ax+by=c$ ۲۷
 - قائم ۶
 - قائم دوم ۶۶
 - قائم واحد اصلی ۶۴
 - گرادیانی ۱۷۲ (شکل ۲۳.۱۷)
 - مکان ۵۱
 - و سرعت، مقدار سرعت، و شتاب ۵۲

- مماس ۶، ۶۰
- و قائم ۶، ۶۱، ۶۳، ۶۴
- واحد ۲، ۵، ۶۱، ۷۰
- به صورت قطبی ۷۰
- قائم اصلی ۶۴
- قائم دوم ۶۸
- مماس ۵۹، ۶۰
- و جهت ۵
- و کسینوسهای هادی ۴۹ (۵۹، ۶۹)
- و شتاب ۱۰، ۵۰، ۵۲، ۶۶، ۷۰
- و فاصله ۱۷
- و فرمول خمیدگی ۶۲
- و کوآترنیون ۴
- و معادلات پارامتری ۸
- ها در مختصات قطبی و استوانه‌ای ۷۰
- های i و j ۲
- های I و J و k ۱۶
- های T ، N ، و B ۶۱
- های متعامد ۲۵
- های موازی ۱، ۶
- تصویر - ی B بر A ۲۵
- تفریق - ها ۳
- جمع جبری - ها ۳
- جمع هندسی - ها ۲
- جهت ۱۷، ۳
- شیب ۶
- ضرب - در عدد ۴
- ضرب برداری دو - ۲۹
اثبات قانون توزیعپذیری در مورد - ۳۴۵
ضرب سه یا بیش از سه - ۴۰
ضرب عددی (نقطه‌ای) دو - ۲۳
ضرب عددی سه گانه (جعبه‌ای) - ها ۴۰
طول - ۴، ۱۶
طول و جهت - ۱۶
فرمولهای عملگرهای - ی در مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و کروی ۳۶۷
قانون توزیعپذیری در ضرب - ی ۳۱، ۳۴۵
قرینه ۳
مؤلفه عددی - ۲۵
مؤلفه‌های - ۲
برنولی، یوهان (۱۶۶۷-۱۷۴۸)، ۸۷، ۱۶۷
بسل
تابع - ۳۳۰
بوسان
دایره - ۶۳، ۶۹ (۴۰)
صفحه - ۶۹
بهرام (مربخ) ۷۶، ۷۷ (۷)
بیضیوار ۸۵، ۹۱ (۶-۱)
- یواسن، سیمون دنیس (۱۷۸۱-۱۸۴۰)، ۲۷۰، ۲۷۹
پوسته
جرم و گشتاور - ۲۶۷
پیچ ۵۹، ۶۱ (۱۵)، ۶۵، ۶۶، ۷۰ (۴۵، ۴۶)
بیکار، شارل امیل (۱۸۵۶-۱۹۴۱) ۳۳۳
روش تکرار - ۳۳۳
قضیه وجود و یگانگی - ۳۳۳
پیوستگی ۱۰۷
معادله - هیدرودینامیک ۲۶۹، ۲۷۵
تاب ۶۱، ۶۶، ۷۰ (۴۴)
تابع ۱۰۰، ۱۱۳
برد - ۱۰۱
- با بیش از یک متغیر ۱۱۳، ۱۰۰
- برداری ۵۰
- مشتقپذیر ۵۲
قاعده زنجیری برای - ۵۳
مشتق - ۵۲
- پیوسته ۱۰۷، ۱۰۹
- بر نواحی کراندار بسته ۱، ۹
- دو متغیره
تقریب خطی - ۱۵۶
دامنه‌های طبیعی - ۱۰۱
مشتقهای جزئی - ۱۱۱
مقادیر ماکسیمم و مینیمم - ۱۴۸
مقدار متوسط - ۲۱۳
- پیوسته ۱۰۷
تامسن، ویلیام (لرد کلون) ۲۵۰، ۲۷۹
ناو میدانهای برداری ۲۵۲، ۲۷۸، ۲۸۳، ۲۸۵
(۱۰-۱۳)، ۳۶۷-۳۶۸
- و مدل چرخ پره‌دار ۲۸۳
ترسیم رویه‌ها ۸۱
ترسیم کامپیوتری ۱۰۳
ترمودینامیک ۱۴۷ (۷۱)
تعادل سیالات ۳۰۵
تغییر پارامترها ۳۱۷، ۳۱۸
تغییر مطلق، نسبی، و درصدی ۱۶۰
تیت، پیترو گوتی ۴
تیر ۱۶۳
خیز - ۱۶۲
تیروس ۷۶
ثابت گرانش ۷۶
جاذبه گرانشی ۲۳۳ (۵۱)
- بیضیوارها ۳۰۵
جایگشت
اندیس - ۳۴۷
وارونیهای - ۳۴۷
- جبر کوآترنیونی ۴
جدول
- لگاریتم طبیعی ۳۷۹
- مثلثاتی ۳۷۸
- نمایی ۳۷۹
جرم ۱۹۶، ۲۱۶، ۲۶۷
انتقال - ۲۷۶
بقای - ۲۷۶
- متغیر ۳۴۲
مرکز - ۱۹۶، ۲۱۷، ۲۶۷
جرم و گشتاور
فرمولهای - ۱۹۶، ۲۱۶، ۲۶۷
محاسبه - به کمک انتگرالهای خمیده خطی ۲۳۷
جریان سیال ← شارش سیال
جریان متناوب ۳۲۷ (۳)
جواب عمومی ۳۰۱
جوابهای معادلات دیفرانسیل به صورت سری توانی ۳۲۹
چاه و چشمه ۲۵۰
چرخ پره‌دار ۲۸۳
چرخزاد ۲۶۰ (۲۹)
چشمه و چاه ۲۵۰
چگالی جریان ۲۸۴
چنبرد ۳۳۲، ۳۷۱، ۲۹۵ (۱۹)
حجم
- به منزله انتگرال دوگانه ۱۸۵
- به منزله انتگرال سه گانه ۲۱۰
- در مختصات استوانه‌ای ۲۲۰
- در مختصات کروی ۲۲۱
حد (ها) ۱۰۵
- $f(x, y)$ ۱۰۶
- و پیوستگی ۱۰۵
قضایای - ۱۰۶
قضیه ترکیب - ۱۰۶
حرکت ۸، ۵۰
چند فرمول در مورد - ۶۸
- پرتابه ۸، ۹
- در صفحه ۶۲، ۶۴
- سیارات ۷۰
- موشک ۳۴۲ (۷)
- و تابعهای برداری ۵۰
- و قانون دوم نیوتن ۷۲
- همساز ساده ۳۲۵، ۳۲۶
معادلات - در مختصات قطبی ۷۰
حرکت پرتابه ۸، ۹، ۵۱
اوج در - ۱۰
برد در - ۱۰

- زاویه پرتاب در - ۱۰
 سرعت اولیه در - ۱۰
 مدت پرتاب در - ۱۰
 معادلات پارامتری - ۱۰، ۹
 حضیض ۷۲
 خط ۳۸، ۳۴، ۲۷
 - قائم ۱۳۲
 خم
 - بسته ساده ۲۸۹، ۲۵۲
 - تراز (مسیر) ۱۰۲
 - و گرادیان ۱۳۴
 - مشتقپذیر ۵۷
 - با تاب صفر ۷۰ (۴۷)
 - واقع در فضا ۵۰، ۵۷، ۶۵، ۶۶
 بردار قائم واحد اصلی - ۶۵
 بردارهای مماس، قائم، و قائم دوم - ۶۸، ۶۱
 - و چند فرمول در مورد حرکت ۶۸
 - ی مشتقپذیر ۵۷
 خمیدگی - ۶۵
 طول - ۵۸
 مماس بر - ۶۰
 خمیدگی - ۶۲
 طول - ۵۸
 خمیدگی ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۹ (۳۶، ۴۳)
 - در مختصات قطبی ۸۰
 - و بردار قائم واحد ۶۳
 - و فرمولهای برداری ۶۸
 - يك دایره ۶۳
 دایره - ۶۳
 شعاع - ۶۳
 فرمول برداری در مورد - ۶۲
 مرکز - ۶۳
 خورشید
 جرم - ۷۶
 فشار نور - ۷۶
 خیز تیرهای باردار ۱۶۲
 دامنه طبیعی تابع ۱۰۱
 دایره
 - بوسان ۶۳، ۶۹ (۴۰)
 - خمیدگی ۶۳
 دترمینان ۳۴۶
 احکام سودمندی درباره - ۳۴۹
 - ژاکوبی ۲۰۶
 - و فرمولهایی برای وارون ماتریس ۳۵۸
 - و قاعده کرامر ۳۴۶
 فرمولهای ساده شده برای محاسبه - ۳۵۱
 فرمولهایی که با استفاده از - نوشته می شود ۳۵۱
- درایه يك ماتریس ۳۴۶
 درونچرخزاد ۷۸ (۲)
 دستگاه اعداد
 ابداع - ۳۶۹
 دستگاه TNB ۶۱
 دستگاه مختصات
 - دکارتی، استوانه‌ای، و کروی ۹۵
 - راستگرد ۱۴
 دستگاه معادلات خطی ۳۵۴
 - و ساده کردن سطری ۳۵۵
 - و ماتریس افزوده ۳۵۶
 - و ماتریسها ۳۵۳
 دکارت، رنه (۱۵۹۶-۱۶۵۰)
 دلوار
 گشتاور لختی - ۲۰۴
 دنباله دار هالی ۷۵
 دوره تناوب نوسان ۳۲۵
 دومو پرتویی، پیر ۳۰۵
 دیفرانسیل ۱۵۹، (۱۶۱-۱۶۲)
 پیش بینی تغییر ۱۵۹
 - $f(x, y)$ ۱۵۹
 - $f(x, y, z)$ ۱۶۲
 دیورژانس ۲۴۹، ۲۶۹، ۳۶۸
 - میدان برداری ۲۴۹، ۲۶۹، ۳۲۸
 قضیه - ۲۴۹، ۲۷۳، ۲۸۴
 راستگر
 صفحه - ۶۶
 رسم
 - اجسام سه بعدی ۱۹
 - استوانه ۸۳
 - رویه‌های درجه دوم ۹۰
 روش ضرایب نامعین، جدول توابع آزمایشی ۳۳۲
 روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل ۳۳۶
 رونگه - کوتا
 روش - ۳۳۸
 رویه
 - $z=f(x+y)$ ۱۰۲
 - تراز ۱۰۲
 - و خطهای قائم ۱۳۲
 - و خطهای مماس ۱۳۲
 - و گرادیانها ۱۳۲
 - جهتیپذیر ۲۲۵
 - جهتدار ۲۶۵
 جهت مثبت - ۲۶۵
 - جهت ناپذیر ۲۸۱
 - درجه دوم ۸۵
 - زینی ۱۴۷
 ماکسیمم و مینیمم - ۱۴۸
- ریشه n ام $re^{i\theta}$ ۳۷۴
 ریلی، لرد جان ویلیام (۱۸۴۲-۱۹۱۹) ۲۵۰
 زاویه (های)
 - بین خمها ۲۹ (۳۳-۳۷)
 - بین صفحات ۳۷
 زاویه فاز ۳۲۵
 زمین
 اطلاعاتی در مورد - ۷۶
 شکل - ۳۰۵
 زیردریایی ۴۷ (۴۳)
 زیست شیمی ۱۳۸
 ژاکوبی (یاکوبی)، کارل گوستاو یاکوب
 (۱۸۰۴-۱۸۵۱) ۲۰۶
 دترمینان - ۲۰۶
 سرعت
 - پرتابه ۵۱
 بردار - بردار
 سود پیوسته ۳۰۷ (۱۱)
 سهمیوار
 - بیضوی ۸۶، ۹۷ (۲۴)
 - مستدیر ۸۶
 - هذلولوی ۹۰
 سیارات و ماهواره‌ها
 حرکت - ۷۰
 سیارات و مدارها ۷۲
 سیال تراکم ناپذیر ۲۵۰
 سینکوم ۷۶۳
 شار ۲۴۱
 چگالی - ۲۴۹
 - و دیورژانس ۲۴۹، ۲۵۰
 - گذرنده از يك خم ۲۴۵
 - و انتگرال خمیده خطی ۲۴۶
 - و انتگرالهای رویه‌ای ۲۶۴
 شارش [جریان]
 - در يك گذرگاه باریک شونده ۲۴۲
 - سیال ۲۴۹
 شارش گرما ۲۹۶ (۲۸، ۲۹)
 شارش و گردش ۲۴۴
 شتاب
 - در فضا ۱۰، ۵۰، ۵۴، ۶۷، ۷۰
 مؤلفه‌های مماس و قائم - ۶۷
 شرایط اولیه ۲۹۹
 شعاع جرخش ۱۹۶
 - حلقه سیم ۲۴۰ (۲۵)
 شعاع خمیدگی ۶۳، ۷۹ (۱۵)
 شکل زمین و دیفرانسیل کامل ۳۰۵

- سناسه عدد مختلط ۳۷۲
شیمی ۱۳۸
- صفحه ۳۶
- بوسان ۶۶
- راستگر ۶۶
- قائم بر يك خط فضایی ۶۶
- صورت خطی ۱۶۱
- $f(x,y)$ در (x_0, y_0) ۱۵۸
- $f(x,y,z)$ ۱۶۱
- و کران خطا ۱۶۱
- صورتهای دیفرانسیلی کامل ۲۹۱
- ضرب
- برداری بردارها ۳۰، ۲۹
- قانون توزیعپذیری در مورد - ۳۴۵
- عددی
- دو بردار ۲۳
- سه گانه (جعبه‌ای) ۴۰
- طول خم ۵۸
- های واقع در فضا ۵۹
- در مختصات استوانه‌ای و کروی ۹۹ (۳۱)
- عددهای مختلط ۳۶۹
جزء حقیقی - ۳۷۰
جزء موهومی (انگاری) - ۳۷
حاصلضرب - ۳۷۲
خارج قسمت - ۳۷۳
ریشه - ۳۷۴
شناسه - ۳۷۲
قدر مطلق - ۳۷۲
مزدوج - ۳۷۱
عملگر
- دل (∇) ۱۲۷، ۲۷۰، ۲۸۲، ۲۸۳، ۳۶۷، ۳۶۸
- D یا d/dx ۳۱۳
- لاپلاسی ۳۶۸
- های دیفرانسیلی ۳۱۳
- فاصله ۱۷
- جهتدار روی يك خم ۵۸
- يك نقطه از يك خط ۳۵
- يك نقطه از يك صفحه ۳۷
فرما، پیر دو (۱۶۰۱-۱۶۶۵) ۸۷
فرمول
- تیلر $f(x,y)$ ۱۷۵، ۱۷۹
- ویلسون درباره مقدار کالا ۱۶۵ (۳۹)
.. های تبدیل مختصات ۲۲۵
- های مربوط به گرادیان، دیورژانس، کرل، و
- لاپلاسی ۳۶۸
فوبینی، گویدو (۱۸۷۹-۱۹۴۳)
صورت اول قضیه - ۱۸۶
صورت قویتر قضیه - ۱۸۹
فضایای - ۱۸۶
فوریه، ژان بابتیست ژوزف (۱۷۰۸-۱۸۳۰) ۲۷۰، ۲۷۹
قاعده زنجیری ۱۱۶
- در مورد توابعی با متغیرهای بسیار ۱۱۹
قانون
- دست راست ۳۰
- دوم حرکت نیوتن ۳۲۵، ۷۲
- سرمایش نیوتن ۳۰۸ (۱۳)
- گاز ایده‌آل ۱۲۱
- گرانش نیوتن ۷۱
- های کیلر ۷۲، ۷۳، ۷۵
- هوک ۳۱۲ (۱۰)
قضیه استوکس ۲۷۸، ۲۸۴
- بر حسب نماد دل ۲۷۹
- در مورد رویه‌های دارای حفره ۲۸۲
قضیه بنیادی جبر ۳۷۵
قضیه ترکیب حدها ۱۰۶
قضیه گرین ۲۴۸، ۲۵۲، ۲۹۸ (۴۶، ۴۷)
اثبات - برای نواحی خاص ۲۵۴
تعمیم - ۲۸۴
صورتهای قائم و مماس - ۲۵۸
- و تعیین مساحت ۲۶۰ (۲۷-۳۰)
- و معادله لایلاس ۲۶۰
قضیه محور عمودی ۱۹۶
قضیه مشتقهای آمیخته ۱۳۶، ۳۶۴
اثبات - ۳۶۶
- اویلر ۳۶۴
- برای حالت $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ۱۴۷ (۶۹)
قضیه مقدار میانگین برای $f(x,y)$ ۱۸۰ (۱۰)
قضیه نمو
- در مورد توابع دو متغیره ۳۶۴
- در مورد توابع سه متغیره ۳۶۶
قضیه‌های انتگرال بر حسب نماد دل ۲۸۴
قند خون
غلظت - ۳۰۹ (۳۴)
- کار ۲۳، ۲۴۱، ۲۴۳
انتگرال مربوط به - ۲۴۳، ۲۸۶
- و استقلال از مسیر ۲۸۶
- و انتگرال خمیده خطی ۲۴۱
کیلر
قوانین - ۷۲، ۷۳، ۷۵
معادله - ۸۰
- کسینوسهای هادی و بردارهای واحد ۴۹ (۵۹-۶۹)
کلاین، موریس ۲۵۸
کلرو، آلکسی (۱۷۱۳-۱۷۶۵) ۸۷، ۳۰۵
کلوین، لرد (ویلیام تامسون) (۱۸۲۴-۱۹۰۷) ۲۵۰، ۲۷۹
کنکورد ۱۰۵ (۲۹)
کوشی، آگوستین لویی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) ۲۷۰، ۲۷۹
کهاد و همسازه ۳۴۷
- گوس، کارل فریدریش (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ۲۵۰، ۲۷۰، ۲۷۵
- - ۲۷۵
گرادیان (grad) ۱۲۶، ۳۶۸
- در مختصات استوانه‌ای ۱۳۲ (۳۵)، ۳۶۸
- در مختصات کروی ۱۳۲ (۳۷)، ۳۶۸
- و خطهای قائم بر صفحه ۱۳۲
- و کرل ۲۸۳
- و مشتقهای جهتی ۱۲۶، ۱۲۸
ویژگیهای جبری - ۱۳۰
گراسمان، هرمان گوتتر (۱۸۰۹-۱۸۷۷) ۴
گرانش ۲۳۳ (۵۱)
گردش
چگالی - ۲۵۱، ۲۸۳
- و شارش ۲۴۲
- يك سیال ۲۸۲
- يك میدان ۲۴۱
گرین، جورج (۱۷۹۳-۱۸۴۱) ۲۳۴، ۲۵۰
گسترنده دایره ۶۸
گشتاور (ها) ۱۹۴، ۲۱۵، ۲۶۶، ۲۶۷
- اول و دوم ۱۹۶، ۲۶۷
- قطبی لختی ۱۹۶
- لختی ۱۹۶، ۲۴۰ (۲۵، ۲۷، ۲۸)، ۲۶۷
- و انرژی جنبشی ۱۹۷
- و مرکز جرم ۱۹۶، ۲۱۶، ۲۶۷
گونس ۴ ۷۶
گیس، جوسیاویلارد (۱۸۳۹-۱۹۰۳) ۴
- لاپلاس، پیرسیمون (۱۷۴۹-۱۸۲۷) ۲۷۰، ۲۷۹
عملگر-ی ۳۶۸
معادلات - ۱۴۰ (۲۰-۲۷)، ۲۷۰
لاگرانژ، ژوزف لویی (۱۷۳۶-۱۸۱۳) ۱۶۷، ۲۷۹، ۳۱۸
ضرایب - ۱۶۵
- با دو قید ۱۷۵، ۱۷۲ (۳۳-۳۵)
لاهی، فیلیپ (۱۶۰۴-۱۷۱۸) ۸۷
لایب نیتس، گوتفرید ویلهلم (۱۶۴۶-۱۷۱۶) ۱۶۵، ۲۵۰
قاعده - ۱۴۳
لژاندر، آندره ماری (۱۷۵۲-۱۸۳۳) ۲۷۰

- مؤلفه قائم شتاب ۶۷
ماتریس (ها)
ترانهادۀ - ۳۵۹، ۳۴۹
جمع - ۳۵۴
درایۀ يك - ۳۴۶
ساده کردن سطری - ۳۵۵
شکل - ۳۴۶
ضرب - ۳۵۴
تعویض ناپذیری - ۳۵۶
قانونهای شرکت پذیری و توزیع پذیری در -
۳۵۵
افزوده ۳۵۶
الحاقی ۳۵۹
مربعی ۳۴۶
مرتبه ۱۱ ۳۴۶
و اعمال سطری مقدماتی ۳۵۵
و معادلات خطی ۳۵۳
معادلۀ مشخصۀ - ۳۶۰
همانی ۳۵۵
همسازۀ ۳۵۹
وارون - ۳۵۸، ۳۵۷
ماکسول، جیمز کلارک (۱۸۳۱-۱۸۷۹) ۲۷۹، ۲۵۰
ماکسیمم موضعی ۱۵۰
ماکسیممها و مینیممها ۱۴۸
خلاصه آزمونهای - ۱۵۴
و آزمون مشتق دوم ۱۵۰
ی $f(x,y)$ ۱۴۸
ی مقید ۱۶۶
ماه (۸)۷۷
ماهواره مخابراتی ۷۶
ماهواره ۷۰
اطلاعاتی در مورد - ی زمین ۷۶
مبین ۳۷۰، ۱۵۰
متعامد
بردارهای - ۲۵
مسیرهای - ۳۰۸ (۲۳-۲۱)
متغیر
مستقل ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۲۱
وابسته ۱۰۱
متوازی الاضلاع
تصویر - بر صفحه ۴۱
قانون - در مورد جمع بردارها ۲
مساحت - ۳۰
محورهای x, y, z ۱۴
مختصات
استوانه‌ای ۲۲۵، ۹۵، ۹۲
عملگرهای برداری در - ۳۶۷
و انتگرالهای سه‌گانه ۲۱۹
- x, y, z ۱۴
- دکارتی (قائم) ۲۲۵، ۹۵، ۱۴
دکارتی (قائم)، استوانه‌ای، و کروی ۲۲۵
فضایی ۱۴
روابط بین - ۹۵
کروی ۲۲۵، ۹۴
و انتگرالهای رویه‌ای ۲۹۶ (۲۶، ۲۷)
و انتگرالهای سه‌گانه ۲۱۹
مخروط بیضی ۸۷
مدار
سیارات ۷۲
ماهواره‌ها ۷۶
مستدیر ۷۷
مدارهای الکتریکی ۳۲۷ (۳)
مرکز
جرم ۲۱۶، ۱۹۴
خمیدگی ۶۳
فشار ۲۳۰
مرکزوار ۱۹۸
مریخ ← بهرام
مساحت ۱۹۴
تعیین - به کمک نتیجه‌ای از قضیۀ گرین ۲۶۰
(۲۷-۳۰)
رویه‌ها ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۹۵ (۲۵) ۲۹۶ (۲۶)
فرمولهای خاص - ۲۹۵ (۲۵)
و انتگرالهای دوگانه
مسیر (خم تراز) ۱۰۲
مسیر ایده‌آل ۱۲
مسیرهای سهموی ۱۲
مشتري ۷۶
مستق
جزئی ۱۱۱
قاعدهٔ زنجیری و - ۱۱۹، ۱۱۶
کاربرد - ۱۴۸
با متغیرهای مقید ۱۲۱
توابعی که صریحاً مشخص نشده‌اند ۲۱۴
در حالت $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ۱۴۷
مراتب بالاتر ۱۳۷، ۱۳۵
مرتبهٔ دوم ۱۳۶
و قضیۀ مشتقهای آمیخته ۱۳۶
جهتی ۱۲۶
و گرادیان ۱۳۷
ویژگیهای - ۱۲۸
حاصلضرب بردارها ۵۷، ۵۳ (۳۳)
قائم ۲۷۸ (۱۶)
معادلات دیفرانسیل ۲۹۹
تکشیبه‌ها برای - ۳۳۲
جداسازی متغیرها در - ۳۰۲، ۳۰۱
جوابهای تقریبی - ۳۳۶، ۳۲۳، ۳۲۹
حل - به کمک
- تغییر پارامترها ۳۱۷
- روش اویلر ۳۳۷
- روش پیکار ۳۳۲
- روش رونگه - کوتا ۳۳۸
- سریهای توانی ۳۲۹
- ضرایب مجهول ۳۱۹
خم جواب و - ۳۳۲
درجۀ - ۳۰۰
شرایط اولیهٔ - ۳۰۰
قضیۀ پیکار و - ۳۳۳
قضیۀ وجود و یگانگی جواب - ۳۳۴
مرتبهٔ - ۳۰۰
- جزئی ۱۳۵
- خطی از مرتبه‌های بالاتر ۳۲۸
- مرتبهٔ اول از درجۀ اول ۳۰۱
- جدایی‌پذیر ۳۰۱
- خطی ۳۰۳
عامل انتگرالگیری برای - ۳۰۳
- کامل ۳۰۴
- همگن ۳۰۲
- مرتبهٔ دوم خطی ۳۱۲، ۳۱۳ (۱۷)
- با ضرایب ثابت ۳۱۳
- ناهمگن مرتبهٔ دوم ۳۱۶
- و معادلۀ برنولی از مرتبهٔ ۲ ۳۲۴
- همگن
رابطۀ میان - و معادلات دیفرانسیل ناهمگن
۳۱۶
- قابل تبدیل ۳۱۰
- مرتبهٔ دوم ۳۱۳
میدانهای شیب و - ۳۳۲
نوع - ۲۹۹
معادلۀ (های)
حل دستگاه - خطی ۳۵۸، ۳۶۰
- به کمک قاعدهٔ کرامر ۳۵۰
- استوانه ۸۲
- برنولی از مرتبهٔ ۲ ۳۲۴
- پاره خط ۳۴
- پخش ۱۳۸
- پیوستگی هیدروینامیک ۲۷۵
- تلگراف ۱۳۸
- خط ۳۴، ۳۸
- رویه‌های درجۀ دوم ۸۵
- صفحه ۳۴، ۳۸
- کیلر ۸۰
- کره ۱۸
- گرما ۱۴۱، ۱۳۸ (۳۹، ۴۰)
- مشخصه
- يك ماتریس ۳۶۰
- موج ۱۴۰، ۱۴۱ (۳۲-۳۸)

- معین مثبت ۴۶ (۱۶)
مغناطیس ۲۴۹
مقدار متوسط يك تابع ۲۱۳
مماس
بردارهای - ۶۰
صفحه‌های - ۱۳۲
- و خطهای قائم ۱۳۲
- بر خمهای واقع در فضا ۵۹
مونژ، گاسبار ۸۷
مهندسی برق ۱۳۸
میدان (های)
- الکتریکی ۲۴۱، ۲۴۶، ۲۷۵
- برداری ۲۳۴، ۲۴۱
تاو - ۲۵۲، ۲۷۸، ۲۸۳، ۲۸۵ (۱۰-۱۳)،
۳۸۶
دیورژانس - ۲۵۰، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۳،
۲۸۴، ۳۶۸
- پایستار ۲۸۶
- و انتگرالگیری ۲۳۴
- پایستار ۲۸۶
- دوبعدی ۲۴۳
- گرادیان ۲۴۱
- گرانش ۷۱، ۲۴۲
- مغناطیس ۲۸۴
- نیرو ۲۴۳
- ی پایستار ۲۸۶
- ی مرکزی ۷۲
- و جریان سیال ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳
مینیماکس ۹۰
مینیمم موضعی ۱۵۰
مینیممها ← ماکسیممها و مینیممها
ناحیه‌ها
- ی باز و بسته ۲۲ (۳۴)
- ی همبند و ساده - همبند ۲۸۶، ۲۸۹
نجوم
اطلاعات - ی ۷۶
نقطه زینی ۹۰، ۱۵۰
نمودار آرگان ۳۷۱
نمودار و خم تراز ۱۰۱
نمودارهای پیکانی و قاعده زنجیری ۱۲۴
نموها و دیفرانسیلها ۱۵۹، ۱۶۲
نواحی کراندار و بسته ۱۰۹
نوار موبیوس ۲۸۱
نیوتن، سرآیزك (۱۶۴۲-۱۷۲۷) ۱۶۷، ۲۵۰
قانون دوم حرکت - ۷۲، ۳۲۵
قانون سرمایش - ۳۰۸ (۱۳)
- قانون گرانش - ۷۱
وارونیه
تعداد - ۳۴۷
ویر، ویلهلم ۲۷۰
وسط پاره خطها ۱۸
ونگارد ۱ ۷۶
ویژه بردار ۳۶۰
ویژه مقدار ۳۵۳، ۳۶۰
هذلولیوار
- دوبارچه ۸۹
- یکبارچه ۸۷
همپلتن، ویلیام (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ۴
هندسه سه بعدی ۸۷
هندسه نااقلیدسی ۲۷۰
هواشکن در تونل باد ۲۴۱
هوك
قانون - ۳۱۲ (۱۰)
هویساید، الیور (۱۸۵۰-۱۹۲۵) ۴
یادداشت‌های تاریخی ۴، ۸۷، ۱۶۷، ۲۵۰، ۲۷۰، ۲۷۹،
۳۰۵، ۳۱۸



www.iup.ir

ISBN: 978-964-01-0591-7



9 789640 105917