

لوئیس لیتھلد



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسہ تحلیلی

جلد دوم

(قسمت دوم)

ترجمہ مہدی بہزاد، محسن رزاقی،
سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد دوم

(قسمت دوم)

لوئیس لیتهد

ترجمه

مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



The Calculus with Analytic Geometry

Louis Leithold

Fourth Edition

Harper & Row, 1981

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد دوم قسمت دوم

تألیف لوئیس لیتهلد

ترجمه دکتر مهدی بهزاد، دکتر محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی

ویراسته دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۷۱

چاپ ششم ۱۳۸۵

تعداد ۸۰۰۰

لیتوگرافی: کوهرنگ

چاپ: آثار برتر چاپ

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Leithold, Louis

لیتهلد، لوئیس

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی / لوئیس لیتهلد؛ ترجمه مهدی بهزاد

... [و دیگران]. — تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵ - ۱۳۷۵.

ج. ۲: مصور، جدول، نمودار. — (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۶۱، ۶۳۱. ریاضی، آمار

و کامپیوتر؛ ۲۴؛ ۸۳)

ISBN 964-01-8049-1 (دوره)

ISBN 964-01-0261-X (ج. ۱. ق. ۱)

ISBN 964-01-0323-9 (ج. ۲. ق. ۱)

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.

The calculus with analytic geometry.

عنوان اصلی:

واژه‌نامه.

ج. ۲. ق. ۲ (چاپ ششم: ۱۳۸۵).

ISBN 964-01-0631-3

۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب انتگرال. ۳. هندسه تحلیلی. الف. بهزاد، مهدی،

۱۳۱۵ - مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۵/۱۵

ح ۹/۳/۴۳۰۳ QA

۱۳۶۵

*۶۶۶-۱۸۷

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
	۱۷ بردارها در فضای سه بعدی، وهندسه تحلیلی فضایی
۵۰۳	۱۰۱۷ R^3 ، فضای سه بعدی اعداد
۵۱۵	۲۰۱۷ بردارها در فضای سه بعدی
۵۲۶	۳۰۱۷ حاصلضرب نقطه‌ای در V_3
۵۳۴	۴۰۱۷ صفحه
۵۴۶	۵۰۱۷ خط در R^3
۵۵۵	۶۰۱۷ حاصلضرب برداری
۵۷۱	۷۰۱۷ استوانه‌ها و رویه‌های دوار
۵۸۰	۸۰۱۷ رویه‌های درجه دوم
۵۹۱	۹۰۱۷ منحنیها در R^3
۶۰۴	۱۰۰۱۷ مختصات استوانه‌ای و کروی
۶۱۳	تمرینهای مروری فصل ۱۷
	۱۸ حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیری
۶۱۸	۱۰۱۸ توابع چندمتغیری
۶۳۲	۲۰۱۸ جد توابع چندمتغیری
۶۵۱	۳۰۱۸ پیوستگی توابع چندمتغیری
۶۶۰	۴۰۱۸ مشتقات جزئی
۶۷۳	۵۰۱۸ مشتق پذیری و دیفرانسیل کلی
۶۹۳	۶۰۱۸ قاعده زنجیری
۷۰۴	۷۰۱۸ مشتقات جزئی از مراتب بالاتر
۷۱۷	تمرینهای مروری فصل ۱۸

۷۲۴	۱۹ مشتقات جهتی، گرادیان، کاربردهای مشتقات جزئی، ...
۷۳۸	۱۰۱۹ مشتق جهتی و گرادیان
۷۴۴	۲۰۱۹ صفحات مماس و خطوط قائم بر رویه‌ها
۷۶۴	۳۰۱۹ اکستریمهای توابع دومتغیری
۷۷۵	۴۰۱۹ ضرایب لاگرانژ
۷۸۳	۵۰۱۹ تعیین يك تابع با استفاده از گرادیانش
۷۹۷	۶۰۱۹ انتگرالهای منحنی الخط
۸۱۰	۷۰۱۹ انتگرالهای منحنی الخط مستقل از مسیر
	تمرینهای مروری فصل ۱۹

۸۱۶	۲۰ انتگرال گیری چندگانه
۸۲۷	۱۰۲۰ انتگرال دوگانه
۸۴۰	۲۰۲۰ محاسبه انتگرالهای دوگانه و انتگرالهای مکرر
۸۴۹	۳۰۲۰ مرکز جرم و گشتاورهای لختی
۸۵۹	۴۰۲۰ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
۸۶۹	۵۰۲۰ مساحت رویه
۸۸۷	۶۰۲۰ قضیه گرین
۸۹۶	۷۰۲۰ انتگرال سه گانه
۹۰۹	۸۰۲۰ انتگرال سه گانه در مختصات استوانه‌ای و کروی
	تمرینهای مروری فصل ۲۰

۹۱۴	پیوست
۹۱۶	جدول ۱ توانها و ریشه‌ها
۹۱۷	جدول ۲ لگاریتمهای طبیعی
۹۱۹	جدول ۳ توابع نمایی
۹۲۶	جدول ۴ توابع هیپر بولیک
۹۲۷	جدول ۵ توابع مثلثاتی
۹۲۸	جدول ۶ لگاریتمهای معمولی
۹۳۰	جدول ۷ الفبای یونانی
۹۳۱	جدول واحد های فیزیکی
۹۳۹	جدولی از مشتقها
۹۴۰	جدولی از انتگرالها
۹۵۰	پاسخ تمرینهای با شماره فرد
۱۰۲۲	واژه نامه
۱۰۲۸	فهرست راهنما

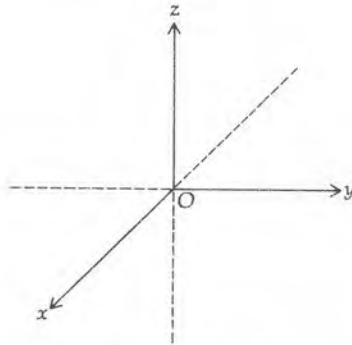
بردارها در فضای سه بعدی، و هندسه تحلیلی فضایی

۱.۱۲، فضای سه بعدی اعداد

در فصل ۱، R^1 یعنی خط اعداد (فضای یک بعدی اعداد) و R^2 یعنی صفحه اعداد (فضای دو بعدی اعداد) را بررسی کردیم. اعداد حقیقی موجود در R^1 را با نقاط روی محوری افقی، و زوجهای اعداد حقیقی، موجود در R^2 ، را با نقاط واقع در صفحه‌ای هندسی یکی گرفتیم. حال مجموعه تمام سه تاییهای مرتب از اعداد حقیقی را به روش مشابهی معرفی می‌کنیم.

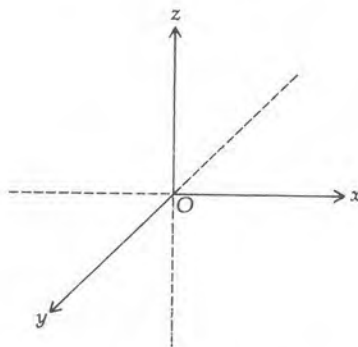
۱.۱۲.۱۷ تعریف مجموعه تمام سه تاییهای مرتب از اعداد حقیقی موسوم به فضای سه بعدی اعداد است و با R^3 نمایش داده می‌شود. هر سه تایی مرتب (x, y, z) ، نقطه‌ای از فضای سه بعدی اعداد نام دارد.

برای نمایش R^3 در یک فضای سه بعدی هندسی، فاصله‌های جهت‌دار یک نقطه را از سه صفحه دو به دو متعامد در نظر می‌گیریم. برای تشکیل این صفحات ابتدا سه خط دو به دو متعامد را در نظر می‌گیریم که در نقطه‌ای موسوم به مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند؛ مبدأ را با حرف O مشخص می‌کنیم. این خطوط را که به محورهای مختصات موسوم‌اند، محور x ها، محور y ها، و محور z ها می‌نامیم. معمولاً محور x ها و محور y ها را در یک صفحه افقی انتخاب می‌کنیم و محور z ها را قائم در نظر می‌گیریم. روی هر محور یک جهت مثبت انتخاب می‌کنیم. اگر جهت‌های مثبت را طبق شکل ۱.۱۲.۱۷ انتخاب کنیم، دستگاه مختصات، دستگاه (استگردها)



شکل ۱.۱.۱۷

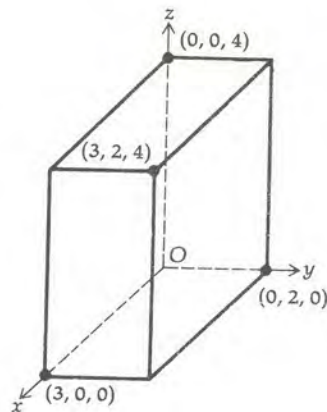
نامیده می‌شود. این اصطلاح از این واقعیت گرفته شده که اگر دست راست را طوری بگیریم که انگشت شست به طرف جهت مثبت محور x ‌ها، و انگشت سبابه به طرف جهت مثبت محور y ‌ها باشد، آنگاه انگشت وسط به طرف جهت مثبت محور z ‌ها خواهد بود. در صورتی که انگشت وسط به طرف جهت منفی محور z ‌ها باشد، دستگاه مختصات، چپگرد نامیده می‌شود. شکل ۲.۱.۱۷ يك دستگاه چپگرد را نشان می‌دهد. به طور کلی، مسا از دستگاه راستگرد استفاده می‌کنیم. سه محور، سه صفحه مختصات را تعیین می‌کنند: صفحه xy شامل محور x ‌ها و محور y ‌ها، صفحه xz شامل محور x ‌ها و محور z ‌ها، و صفحه yz شامل محور y ‌ها و محور z ‌هاست.



شکل ۲.۱.۱۷

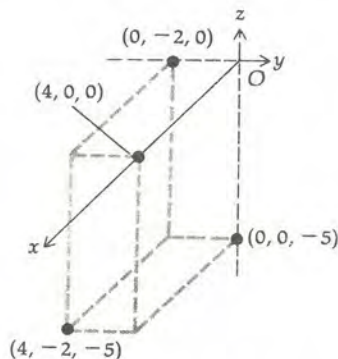
به هر نقطه چون P از يك فضای سه بعدی هندسی، يك سه تایی مرتب از اعداد حقیقی مانند (x, y, z) منسوب می‌شود. فاصله جهت‌دار P از صفحه yz به مختص x ، فاصله

جهت دار P از صفحه xz به مختص y ، و فاصله جهت دار P از صفحه xy به مختص z موسوم اند. این سه مختص را مختصات دکارتی قائم نقطه می نامیم، و تناظری يك به يك (موسوم به دستگاه مختصات دکارتی قائم) بین تمام این سه تاییهای مرتب از اعداد حقیقی و نقاط واقع در يك فضای سه بعدی هندسی وجود دارد. لذا R^3 را با فضای سه بعدی هندسی یکی می گیریم و سه تایی مرتب (x, y, z) را يك نقطه می نامیم. نقطه $(3, 2, 4)$ در شکل ۳۰۱۰۱۷، و نقطه $(4, -2, -5)$ در شکل ۴۰۱۰۱۷ نشان داده شده اند. سه صفحه مختصات، فضا را به هشت ناحیه، موسوم به هجمن یا يك هشتم تقسیم می کنند. ثمن اول ناحیه ای است که در آن، هر سه مختص مثبت اند.



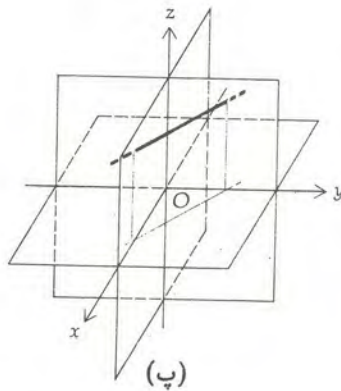
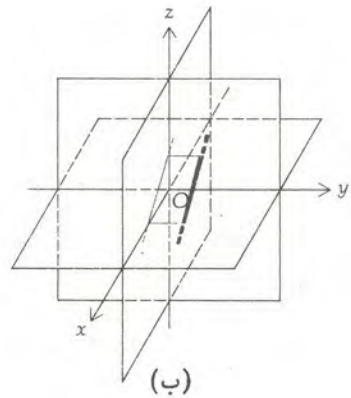
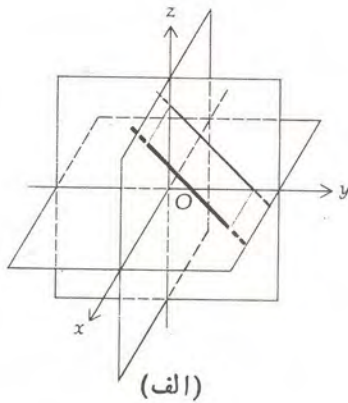
شکل ۳۰۱۰۱۷

يك خط موازی با يك صفحه است اگر و تنها اگر فاصله همه نقاط آن خط تا صفحه یکی باشد.



شکل ۴۰۱۰۱۷

○ نمونه ۱ در شکل ۵۰۱۰۱۷ (الف)، (ب) و (پ)، به ترتیب يك خط موازی صفحه yz ، يك خط موازی صفحه xz ، و يك خط موازی صفحه xy دیده می شوند.



○

شکل ۵۰۱۰۱۷

تمام خطوط واقع بر يك صفحه را موازی با آن صفحه تلقی می کنیم؛ در این مورد فاصله هر نقطه روی هر خط تا صفحه، صفر است. قضیه زیر بلافاصله به دست می آید.

قضیه ۲۰.۱۰۱۷

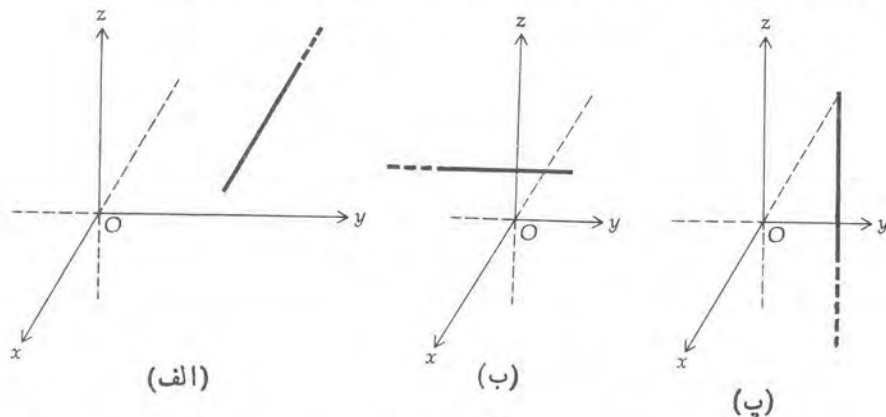
- (i) يك خط موازی با صفحه xy است اگر و تنها اگر مختص x تمام نقاط واقع بر آن خط یکی باشد.
- (ii) يك خط موازی با صفحه xz است اگر و تنها اگر مختص y تمام نقاط واقع بر آن خط یکی باشد.
- (iii) يك خط موازی با صفحه yz است اگر و تنها اگر مختص z تمام نقاط واقع بر آن خط یکی باشد.

در فضای سه بعدی، اگر خطی موازی با هر يك از دو صفحه متقاطع باشد، آن خط موازی با خط مقطع آن دو صفحه است. همچنین، اگر خط مفروضی موازی با خطی دیگر باشد، آنگاه خط مفروض موازی با هر صفحه‌ای است که آن خط دیگر را دربردارد. قضیه ۳۰.۱۰۱۷ از این دو واقعیت هندسه فضایی و از قضیه ۲۰.۱۰۱۷ نتیجه می‌شود.

قضیه ۳۰.۱۰۱۷

- (i) يك خط با محور x موازی است اگر و تنها اگر تمام نقاط خط دارای مختص y یکسان و مختص z یکسان باشند.
- (ii) يك خط موازی با محور y است اگر و تنها اگر تمام نقاط خط دارای مختص x یکسان و مختص z یکسان باشند.
- (iii) يك خط موازی با محور z است اگر و تنها اگر تمام نقاط خط دارای مختص x یکسان و مختص y یکسان باشند.

○ نمونه ۲ در شکل ۶۰.۱۰۱۷ (الف)، (ب)، و (پ)، به ترتیب، يك خط موازی محور x ها، يك خط موازی محور y ها، و يك خط موازی محور z ها نشان داده شده‌اند.



○

شکل ۶۰.۱۰۱۷

فرمولهای محاسبه فاصله جهت‌دار از يك نقطه تا نقطه‌ای دیگر بر روی خطی موازی یکی از محورهای مختصات، از تعریف فاصله جهت‌دار مذکور در بخش ۳.۱ به‌دست می‌آیند، و ما آنها را در قضیه زیر ذکر می‌کنیم.

۴.۱۰۱۷ قضیه

(i) اگر $A(x_1, y, z)$ و $B(x_2, y, z)$ دو نقطه واقع بر خطی موازی با محور x ها باشند، آنگاه فاصله جهت‌دار از A تا B که با $\overline{AB}$ نمایش داده می‌شود، از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\overline{AB} = x_2 - x_1$$

(ii) اگر $C(x, y_1, z)$ و $D(x, y_2, z)$ دو نقطه واقع بر خطی موازی با محور y ها باشند، آنگاه فاصله جهت‌دار از C تا D که با $\overline{CD}$ نمایش داده می‌شود، از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\overline{CD} = y_2 - y_1$$

(iii) اگر $E(x, y, z_1)$ و $F(x, y, z_2)$ دو نقطه واقع بر خطی موازی با محور z ها باشند، آنگاه فاصله جهت‌دار از E تا F که با $\overline{EF}$ نمایش داده می‌شود، از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$\overline{EF} = z_2 - z_1$$

○ نمونه ۳ فاصله جهت‌دار $\overline{PQ}$ از نقطه $P(2, -5, -4)$ تا نقطه $Q(2, -3, -4)$ از قضیه ۴.۱۰۱۷ (ii) به این صورت به‌دست می‌آید

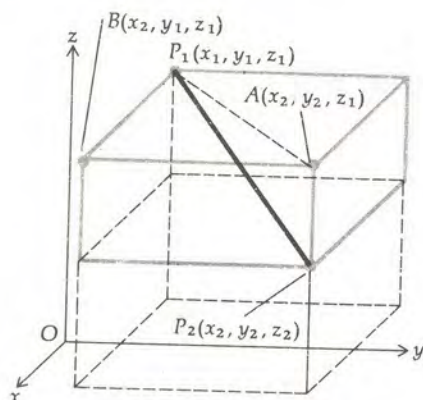
$$\circ \quad \overline{PQ} = (-3) - (-5) = 2.$$

قضیه زیر فرمولی برای یافتن فاصله غیر جهت‌دار بین هر دو نقطه واقع در فضای سه بعدی به‌دست می‌دهد.

۵.۱۰۱۷ قضیه فاصله غیر جهت‌دار بین دو نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

اثبات مکعب مستطیلی رسم می‌کنیم که P_1 و P_2 دو رأس متقابل آن، و وجوه آن موازی با صفحات مختصات باشند (شکل ۷.۱۰۱۷ را ببینید).



شکل ۷.۱۰.۱۷

بنابر قضیه فیثاغورث

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = |\overline{P_1 A}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \quad (۱)$$

چون

$$|\overline{P_1 A}|^2 = |\overline{P_1 B}|^2 + |\overline{BA}|^2 \quad (۲)$$

از (۲) در (۱) مقدار قرار می‌دهیم

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = |\overline{P_1 B}|^2 + |\overline{BA}|^2 + |\overline{AP_2}|^2 \quad (۳)$$

اگر در طرف راست (۳)، قضیه ۷.۱۰.۱۷ (i)، (ii)، و (iii) را به کار ببریم، خواهیم داشت

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

لذا

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

□

و قضیه اثبات می‌شود.

مثال ۱ فاصله غیرجهت‌دار بین نقاط $P(-۳, ۴, -۱)$ و $Q(۲, ۵, -۴)$ را بیابید.

حل بنابر قضیه ۷.۱۰.۱۷،

$$\Delta \quad |\overline{PQ}| = \sqrt{(۲+۳)^2 + (۵-۴)^2 + (-۴+۱)^2} = \sqrt{۲۵+۱+۹} = \sqrt{۳۵}.$$

فرمول فاصله بین دو نقطه در R^3 ، تعمیمی است از فرمول متناظر برای فاصله بین دو نقطه در R^2 که در قضیه ۱.۳.۱ ذکر شد. قابل توجه است که فاصله غیر جهت دار بین دو نقطه x_1 و x_2 در R^1 از فرمول زیر به دست می آید

$$|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

فرمولهای مختصات نقطه وسط یک پاره خط با تشکیل مثلثهای متشابه و به کار بردن روشی نظیر روش حالت دوبعدی به دست می آیند. این فرمولها را در قضیه ۶.۱.۱۷ می آوریم و اثبات آنها را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۱۸ را ببینید).

۶.۱.۱۷ قضیه مختصات نقطه وسط پاره خطی که نقاط انتهایی آن $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ هستند، از فرمولهای زیر به دست می آیند

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

۷.۱.۱۷ تعریف نمودار یک معادله در R^3 ، مجموعه تمام نقاط (x, y, z) است که مختصاتشان اعدادی هستند که در آن معادله صدق می کنند.

نمودار یک معادله در R^3 را یک رویه می نامند. نوع خاصی از رویه، کره است که ذیلاً معرفی می شود.

۸.۱.۱۷ تعریف کره مجموعه تمام نقاطی از فضای سه بعدی است که از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند. نقطه ثابت را مرکز کره، و اندازه فاصله ثابت را شعاع کره می نامند.

۹.۱.۱۷ قضیه معادله کره ای به شعاع r که مرکزش در (h, k, l) قرار دارد، عبارت است از

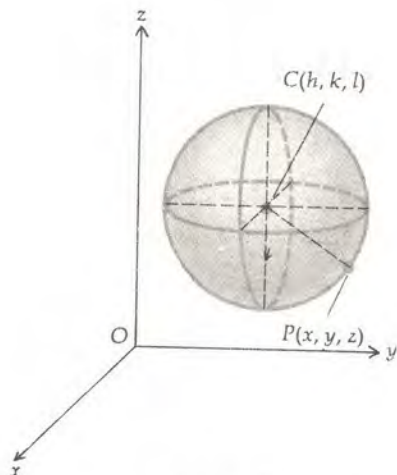
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2. \quad (4)$$

اثبات فرض کنید C نقطه (h, k, l) را نمایش دهد (شکل ۸.۱.۱۷ را ببینید). نقطه $P(x, y, z)$ یک نقطه کره است اگر و تنها اگر

$$|\overline{CP}| = r$$

یا معادلش

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r.$$



شکل ۸۰۱۰۱۷

□ اگر دوطرف معادله بالا را مجذور کنیم، نتیجه مطلوب به دست می آید.

اگر مرکز کره در مبدأ باشد، آنگاه $h=k=l=0$ ؛ لذا معادله این کره به صورت زیر است

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

اگر جملات (۴) را بسط دهیم و جملات حاصل را دوباره دسته بندی کنیم، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - 2ky - 2lz + (h^2 + k^2 + l^2 - r^2) = 0.$$

این معادله به صورت

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (5)$$

است که در آن G, H, I, J مقادیر ثابت هستند. معادله (۵) را صورت کلی معادله یک کره، و (۴) را صورت شعاع-مرکزی آن می نامند. چون هر کره یک مرکز و یک شعاع دارد، معادله کره را می توان به صورت شعاع-مرکزی، و لذا به صورت کلی نوشت
 نشان داده می شود که هر معادله به صورت (۵) را می توان به صورت زیر در آورد

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = K^2 \quad (6)$$

که در اینجا

$$h = -\frac{1}{4}G, \quad k = -\frac{1}{4}H, \quad l = -\frac{1}{4}I,$$

$$K = \frac{1}{4}(G^2 + H^2 + I^2 - 4J).$$

اثبات این مطلب را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم (تمرین ۱۹ را ببینید).
اگر $K > 0$ ، آنگاه (۶) به صورت معادله (۴) است؛ لذا نمودار این معادله، کره ای است به مرکز (h, k, l) و شعاع $\sqrt{K}$. اگر $K = 0$ ، نمودار معادله نقطه (h, k, l) است کسه آن را یک کره-نقطه می نامند.
اگر $K < 0$ ، نمودار، مجموعه تهی است زیرا مجموع مربعات سه عدد حقیقی، نامنفی است. این نتیجه را به عنوان یک قضیه بیان می کنیم.

۹۰.۱۰۱۷ قضیه نمودار هر معادله درجه دوم بر حسب x, y, z به صورت

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

یا یک کره است، یا یک کره-نقطه، و یا مجموعه تهی است.

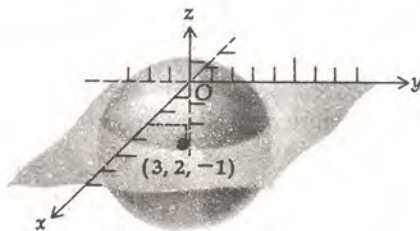
مثال ۲ نمودار معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 2$ را رسم کنید.

حل با دسته بندی جملات و کامل کردن مربعات داریم

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 2 + 9 + 4 + 1$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$$

لذا نمودار، کره ای است به مرکز $(3, 2, -1)$ و شعاع ۴. شکل ۹۰.۱۰۱۷ نمودار را نشان می دهد.



شکل ۹۰.۱۰۱۷

مثال ۳ معادله کره‌ای را بیابید که نقاط $A(-5, 6, -2)$ و $B(9, -4, 0)$ دو نقطه انتهایی يك قطرش باشند.

حل مرکز کره وسط پاره خط AB است. فرض کنید این نقطه $C(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ باشد. بنا بر قضیه ۶.۱.۱۷ داریم

$$\bar{x} = \frac{9-5}{2} = 2, \quad \bar{y} = \frac{-4+6}{2} = 1, \quad \bar{z} = \frac{0-2}{2} = -1.$$

لذا C نقطه $(2, 1, -1)$ است. شعاع کره برابر است با

$$r = |\overline{CB}| = \sqrt{(9-2)^2 + (-4-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{75}$$

لذا، بنا بر قضیه ۹.۱.۱۷ معادله این کره عبارت است از

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 75$$

یا معادلتش

$$\Delta \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 69 = 0.$$

تمرینهای ۱.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۵، نقاط A و B دئوس متقابل مکعب مستطیلی هستند که وجوه آن موازی با صفحات مختصات اند. در هر تمرین، (الف) شکل را رسم کنید، (ب) مختصات شش رأس دیگر، و نیز طول قطر AB را بیابید.

۱. $A(0, 0, 0); B(7, 2, 3)$ ۲. $A(1, 1, 1); B(3, 4, 2)$

۳. $A(-1, 1, 2); B(2, 3, 5)$

۴. $A(2, -1, -3); B(4, 0, -1)$

۵. $A(1, -1, 0); B(3, 3, 5)$

۶. رأس مقابل به يك کنج اتاقی نسبت به رأس آن کنج در ۱۸ فوتی شرق، ۱۵ فوتی جنوب، و ۱۲ فوتی شمال قرار دارد. (الف) شکل را رسم کنید؛ (ب) طول قطری را که دور رأس متقابل را به هم وصل می کند تعیین کنید؛ (پ) مختصات هر هشت رأس اتاق را بیابید.

در تمرینهای ۷ تا ۱۱ مطلوب است: (الف) فاصله غیرجهت‌دار بین نقاط A و B ; و (ب) نقطه وسط پاره خط واصل A و B .

۷. $A(3, 4, 2); B(1, 6, 3)$

۸. $A(4, -3, 2); B(-2, 3, -5)$

۹. $A(2, -4, 1); B\left(\frac{1}{2}, 2, 3\right)$

۱۰. $A\left(-2, -\frac{1}{2}, 5\right); B(5, 1, -4)$

۱۱. $A(-5, 2, 1); B(3, 7, -2)$

۱۲. ثابت کنید که سه نقطه $(1, -1, 3)$ ، $(2, 1, 7)$ ، و $(4, 2, 6)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند، و مساحت این مثلث را بیابید.

۱۳. از نقطه $(6, 4, 2)$ خطی عمود بر صفحه xy رسم کرده ایم. مختصات نقاطی از این خط را که در فاصله ۱۰ واحدی نقطه $(0, 2, 0)$ هستند، بیابید.

۱۴. تمرین ۱۳ را برای حالتی حل کنید که خط بر صفحه xy عمود شده باشد.

۱۵. با استفاده از فرمول فاصله، ثابت کنید که سه نقطه $(-3, 2, 4)$ ، $(6, 1, 2)$ ، و $(-12, 3, 6)$ همخط‌اند.

۱۶. رئوس مثلثی را بیابید که وسطهای اضلاعش در $(3, 2, 3)$ ، $(-1, 1, 5)$ ، و $(0, 3, 4)$ واقع‌اند.

۱۷. در مورد مثلثی با رئوس $A(2, -5, 3)$ ، $B(-1, 7, 0)$ ، و $C(-4, 9, 7)$ مطلوب است: (الف) طول هر ضلع، و (ب) وسط هر ضلع.

۱۸. قضیه ۱۰.۱۷ را ثابت کنید.

۱۹. نشان دهید که هر معادله به صورت $x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ می‌توان به صورت $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = K$ درآورد.

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۵، نمودار معادله مفروض را تعیین کنید.

۲۰. $x^2 + y^2 + z^2 - 8y + 6z - 25 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0. \quad ۲۱$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 3z + 2 = 0. \quad ۲۲$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = 0. \quad ۲۳$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 4z + 13 = 0. \quad ۲۴$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 19 = 0. \quad ۲۵$$

در تمرینهای ۲۶ تا ۲۸، برای کره‌ای که در شرایط مفروض صدق می‌کند، معادله‌ای بیابید.

۲۶. یک قطر کره، پاره‌خطی با دو انتهای $(-4, 0, 7)$ و $(6, 2, -5)$ است.

۲۷. با کره به معادله $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z - 9 = 0$ هم‌مرکز، شعاع آن ۳ است.

۲۸. نقاط $(0, 0, 4)$ ، $(2, 1, 3)$ ، و $(0, 2, 6)$ را در بردارد، و مرکزش در صفحه yz است.

۲۹. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که در هر مکعب مستطیل، چهار قطری که رئوس متقابل را به هم وصل می‌کنند منصف یکدیگرند.

۳۰. اگر P, Q, R ، و S چهار نقطه از فضای سه بعدی، و A, B, C ، و D به ترتیب وسطهای PQ, QR, RS ، و SP باشند، به‌طور تحلیلی ثابت کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۳۱. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که طول هر چهار قطر یک مکعب برابر است.

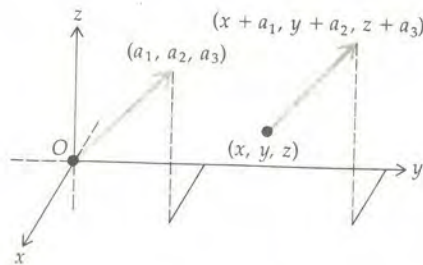
۲۰.۱۲ بردارها در فضای سه بعدی

ارائه مطالب در هندسه تحلیلی فضایی با استفاده از بردارهای واقع در فضای سه بعدی ساده‌تر می‌شود. تعریفها و قضیه‌های مذکور در بخشهای ۱۰.۱۶ و ۲۰.۱۶ در مورد بردارهای واقع در صفحه، به آسانی تعمیم می‌یابند.

۱۰.۲۰۱۷ تعریف یک بردار در فضای سه بعدی یک سه‌تایی مرتب از اعداد حقیقی $\langle x, y, z \rangle$ است. اعداد x, y ، و z را مؤلفه‌های بردار $\langle x, y, z \rangle$ می‌نامند.

فرض کنید V_3 مجموعه تمام سه‌تاییهای مرتب $\langle x, y, z \rangle$ باشد که x, y ، و z اعداد حقیقی هستند. در این فصل، بردار همیشه متعلق به V_3 است مگر اینکه خلافش ذکر شود.

درست نظیر بردارهای واقع در V_2 ، هر بردار واقع در V_3 را می توان به وسیله یک پاره خط جهت دار نمایش داد. اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، آنگاه پاره خط جهت داری را که نقطه ابتدایی آن مبدأ و نقطه انتهایی آن نقطه (a_1, a_2, a_3) باشند نمایش موضع A می نامند. هر پاره خط جهت داری که ابتدایش در (x, y, z) و انتهایش در $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ باشد نیز نمایشی از بردار A است. شکل ۱۰۲۰۱۷ را ببینید.



شکل ۱۰۲۰۱۷

بردار صفر بردار $\langle 0, 0, 0 \rangle$ است که با 0 نمایش داده می شود. هر نقطه، نمایشی است از بردار صفر.

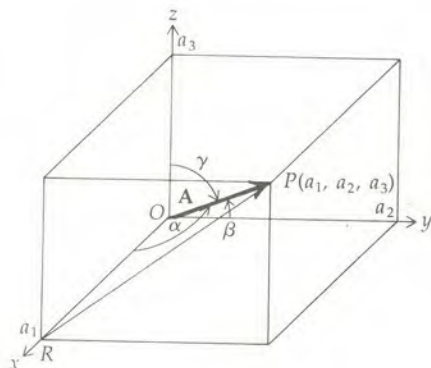
بزرگی یک بردار، طول هریک از نمایشهای آن است. اگر بردار به صورت $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ باشد، نماد $|A|$ بزرگی A را نشان می دهد، و در نتیجه

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

جهت هر بردار ناصفر در V_3 با سه زاویه، موسوم به زاویه های هادی بردار، تعیین می شود.

۲۰۲۰۱۷ تعریف زاویه های هادی یک بردار ناصفر عبارت اند از سه زاویه ای که کوچکترین اندازه های رادیانی نامنفی α ، β ، و γ را دارند اگر از قسمت مثبت محورهای، به ترتیب، x ، y ، و z ها تا نمایش موضع بردار اندازه گیری شوند.

اندازه رادیانی هریک از زاویه های هادی یک بردار از 0 کمتر و از π بیشتر نیست. شکل ۲۰۲۰۱۷ زوایای هادی بردار $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ را که اندازه آنها برحسب رادیان α ، β ، و γ است نشان می دهد. در این شکل مؤلفه های A ، همه اعداد مثبت هستند، و زوایای هادی این بردار همه اندازه های رادیانی مثبتی کمتر از $\pi/2$ دارند. از شکل برمی آید که مثلث POR قائم الزاویه است و



شکل ۲۰۲-۱۷

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_1}{|A|}.$$

می توان نشان داد که اگر $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ ، این فرمول باز برقرار است. برای $\cos \gamma$ و $\cos \beta$ هم می توان فرمولهایی مشابه به دست آورد؛ داریم

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|A|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|A|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|A|}. \quad (۱)$$

سه عدد $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، و $\cos \gamma$ را کسینوسهای هادی بردار A می نامند. بردار صفر هیچ زاویه هادی ندارد و لذا کسینوس هادی هم ندارد.

○ نمونه ۱ بزرگی و کسینوسهای هادی بردار $A = \langle ۳, ۲, -۶ \rangle$ را می یابیم.

$$|A| = \sqrt{(۳)^2 + (۲)^2 + (-۶)^2} = \sqrt{۹ + ۴ + ۳۶} = \sqrt{۴۹} = ۷.$$

بنابراین روابط (۱) داریم

$$\circ \quad \cos \alpha = \frac{۳}{۷}, \quad \cos \beta = \frac{۲}{۷}, \quad \cos \gamma = -\frac{۶}{۷}.$$

اگر بزرگی برداری همراه با کسینوسهای هادیش معلوم باشند به طور یکتا معین می شود زیرا از (۱) نتیجه می شود که

$$a_1 = |A| \cos \alpha, \quad a_2 = |A| \cos \beta, \quad a_3 = |A| \cos \gamma. \quad (۲)$$

سه کسینوس هادی يك بردار از يكديگر مستقل نیستند. در قضیه زیر این نکته را می بینیم.

۳.۲.۱۷ قضیه اگر $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، و $\cos \gamma$ کسینوسهای هادی برداری باشند، آنگاه

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

اثبات اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، کسینوسهای هادی A از (۱) به دست می آیند، و داریم

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{a_1^2}{|A|^2} + \frac{a_2^2}{|A|^2} + \frac{a_3^2}{|A|^2} \\ &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|A|^2} \\ &= \frac{|A|^2}{|A|^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

○ نمونه ۲ درستی قضیه ۳.۲.۱۷ را در مورد بردار مذکور در نمونه ۱ تحقیق می کنیم.

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 \\ &= \frac{9}{49} + \frac{4}{49} + \frac{36}{49} = \frac{49}{49} \\ &= 1. \end{aligned}$$

○

بردار $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ يك بردار واحد است هرگاه $|A| = 1$ ، لذا بنا بر روابط (۱) مؤلفه های يك بردار واحد، کسینوسهای هادیش هستند. تعریفهای اعمال جمع، تفریق، و ضرب عددی برای بردارهای واقع در V_3 نظیر تعاریف متناظر برای بردارهای واقع در V_2 هستند.

۴.۲.۱۷ تعریف اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ آنگاه مجموع این بردارها از رابطه زیر به دست می آید

$$A + B = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle.$$

مثال ۱ $A = \langle 5, -2, 6 \rangle$ و $B = \langle 8, -5, -4 \rangle$ مفروض اند. $A+B$ را بیابید.

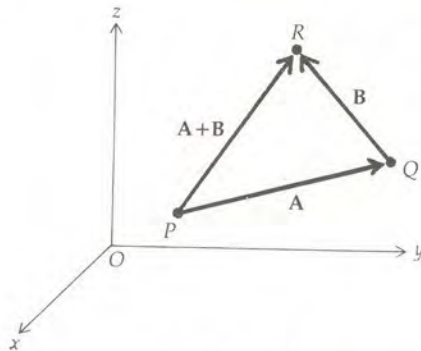
حل

$$\blacktriangle \quad A+B = \langle 5+8, (-2)+(-5), 6+(-4) \rangle = \langle 13, -7, 2 \rangle.$$

تعبیر هندسی مجموع دو بردار در V_3 مشابه است با تعبیر هندسی متناظر در V_2 . شکل ۳.۲.۱۷ را ببینید. اگر نقطه $P(x, y, z)$ ، $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{PQ}$ نمایشی از A باشد، آنگاه نقطه $Q(x+a_1, y+a_2, z+a_3)$ است. فرض کنید $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ و $\vec{QR}$ نمایشی از B باشد. آنگاه نقطه R

$$(x+(a_1+b_1), y+(a_2+b_2), z+(a_3+b_3))$$

است. بنا بر این $\vec{PR}$ نمایشی از بردار $A+B$ است و قانون متوازی الاضلاع برقرار است.



شکل ۳.۲.۱۷

۵.۲.۱۷ تعریف اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، آنگاه بردار $\langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$ بنا به تعریف قویته A است و با $-A$ نمایش داده می شود.

۶.۲.۱۷ تعریف تفاضل دو بردار A و B که با $A-B$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می شود

$$A-B = A + (-B).$$

از تعریفهای ۵.۲.۱۷ و ۶.۲.۱۷ نتیجه می گیریم که اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، آنگاه $-B = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$ و

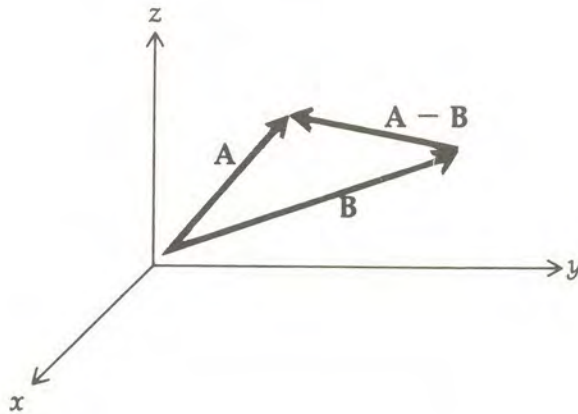
$$A-B = \langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3 \rangle.$$

مثال ۲ در مورد بردارهای A و B مذکور در مثال ۱، $A - B$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} A - B &= \langle 5, -2, 6 \rangle - \langle 8, -5, -4 \rangle \\ &= \langle 5, -2, 6 \rangle + \langle -8, 5, 4 \rangle \\ &= \langle -3, 3, 10 \rangle. \end{aligned}$$

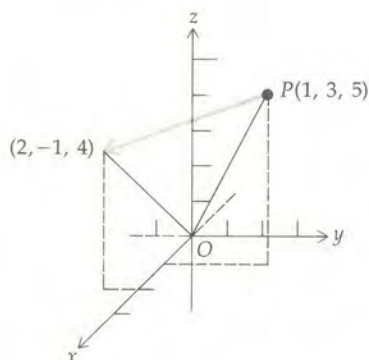
تعبیر هندسی تفاضل دو بردار در V_3 نیز نظیر تعبیر تفاضل در V_2 است. شکل ۴۰۲۰۱۷ را ببینید. با انتخاب نمایشهایی از A و B که ابتدای آنها یکی باشد، نمایشی از بردار $A - B$ به دست می‌آید؛ بدین ترتیب، نمایشی از بردار $A - B$ پاره‌خط جهت‌داری است از انتهای نمایش B تا انتهای نمایش A .



شکل ۴۰۲۰۱۷

○ نمونه ۳ نقاط $P(1, 3, 5)$ و $Q(2, -1, 4)$ مفروض‌اند. شکل ۴۰۲۰۱۷، $\vec{PQ}$ ، و نیز $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل داریم $V(\vec{PQ}) = V(\vec{OQ}) - V(\vec{OP})$. لذا

$$V(\vec{PQ}) = \langle 2, -1, 4 \rangle - \langle 1, 3, 5 \rangle = \langle 1, -4, -1 \rangle.$$



شکل ۵.۲۰۱۷

۷.۲۰۱۷ تعریف اگر c یک اسکالر، و A برداری چون $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ باشد، آنگاه حاصلضرب c و A که با cA نمایش داده می‌شود برداری است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$cA = c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle.$$

$[cA]$ را حاصلضرب اسکالر c و A ، و عمل مربوط را ضرب اسکالر می‌نامند.

مثال ۳ $A = \langle -4, 7, -2 \rangle$ مفروض است. $3A$ و $-5A$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} 3A &= 3\langle -4, 7, -2 \rangle & -5A &= (-5)\langle -4, 7, -2 \rangle \\ &= \langle -12, 21, -6 \rangle & &= \langle 20, -35, 10 \rangle. \end{aligned}$$

فرض کنید $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ بردار ناصفری باشد که کسینوسهای هادی $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ هستند، و c اسکالر دلخواه ناصفری باشد. در این صورت، $cA = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$ ؛ و اگر $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ کسینوسهای هادی cA باشند، بنا بر روابط (۱) داریم

$$\cos \alpha_1 = \frac{ca_1}{|cA|}, \quad \cos \beta_1 = \frac{ca_2}{|cA|}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{ca_3}{|cA|}$$

یا معادلشان

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_1}{|A|}, \quad \cos \beta_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_2}{|A|}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{c}{|c|} \frac{a_3}{|A|}$$

و از اینجا

$$\cos \alpha_1 = \frac{c}{|c|} \cos \alpha, \quad \cos \beta_1 = \frac{c}{|c|} \cos \beta, \quad \cos \gamma_1 = \frac{c}{|c|} \cos \gamma. \quad (3)$$

لذا اگر $c > 0$ ، از روابط (۳) چنین برمی آید که کسینوسهای هادی بردار cA همان کسینوسهای هادی A هستند. و اگر $c < 0$ ، کسینوسهای هادی cA قرینه کسینوسهای هادی A هستند. بنابراین، اگر c اسکالر ناصفری باشد، آنگاه بردار cA برداری است که بزرگیش $|c|$ برابر بزرگی A است. اگر $c > 0$ ، جهت cA با جهت A یکی است و اگر $c < 0$ ، جهت cA مخالف با جهت A است.

اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بردارهای واقع در V_3 و ویژگیهای دارند که با ویژگیهای مذکور در قضیه ۱۰.۲۰۱۶ یکی است. این ویژگیها را در قضیه زیر بیان کرده اثباتشان را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۱۵ تا ۲۰ را ببینید).

۸.۲۰۱۷ قضیه اگر A, B, C بردارهای دلخواهی در V_3 ، و c و d اسکالرهایی دلخواهی باشند، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر دارای ویژگیهای زیر هستند:

$$A+B=B+A \quad (i) \quad (\text{قانون تعویض پذیری})$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad (ii) \quad (\text{قانون شرکت پذیری})$$

$$(iii) \quad \text{در } V_3 \text{ برداری چون } 0 \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$A+0=A \quad (\text{وجود همانی در جمع})$$

$$(iv) \quad \text{در } V_3 \text{ برداری چون } -A \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$A+(-A)=0 \quad (\text{وجود قرینه})$$

$$(v) \quad (cd)A=c(dA) \quad (\text{قانون شرکت پذیری})$$

$$(vi) \quad c(A+B)=cA+cB \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$(vii) \quad (c+d)A=cA+dA \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$(viii) \quad 1(A)=A \quad (\text{وجود همانی در ضرب اسکالر}).$$

از تعریف ۲۰.۲۰۱۶ و قضیه ۸.۲۰۱۷ نتیجه می گیریم که V_3 یک فضای برداری حقیقی است. سه بردار واحد

$$i=\langle 1, 0, 0 \rangle, \quad j=\langle 0, 1, 0 \rangle, \quad k=\langle 0, 0, 1 \rangle$$

پایه ای برای فضای برداری V_3 تشکیل می دهند زیرا هر بردار $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ را می توان بر حسب این سه بردار به صورت زیر نوشت

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

لذا، اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ را به صورت زیر هم می توانیم بنویسیم

$$A = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}. \quad (۴)$$

چون در پایه سه عنصر وجود دارد، V_3 یک فضای برداری سه بعدی است.

اگر از (۲) در (۴) مقدار قرار دهیم، داریم

$$A = |A| \cos \alpha \mathbf{i} + |A| \cos \beta \mathbf{j} + |A| \cos \gamma \mathbf{k}$$

یا معادلش

$$A = |A| (\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}). \quad (۵)$$

رابطه (۵) به ما امکان می دهد که هر بردار ناصفر دلخواهی را بر حسب بزرگی و کسینوسهای هادیش بنویسیم.

مثال ۴ بردار مذکور در نمونه ۱ را بر حسب بزرگی و کسینوسهای هادیش بنویسید.

حل در نمونه ۱، $A = \langle 3, 2, -6 \rangle$ ، $|A| = 7$ ، $\cos \alpha = 3/7$ ، $\cos \beta = 2/7$ ، $\cos \gamma = -6/7$ ، لذا، بنا بر (۵) داریم

$$\blacktriangle \quad A = 7 \left(\frac{3}{7} \mathbf{i} + \frac{2}{7} \mathbf{j} - \frac{6}{7} \mathbf{k} \right).$$

۹۰۲۰۱۷ قضیه اگر بردار ناصفر A به صورت $a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ باشد، آنگاه بردار واحد U که جهتش با جهت A یکی باشد از فرمول زیر به دست می آید

$$U = \frac{a_1}{|A|} \mathbf{i} + \frac{a_2}{|A|} \mathbf{j} + \frac{a_3}{|A|} \mathbf{k}.$$

اثبات قضیه ۹۰۲۰۱۷ شبیه اثبات قضیه ۳۰۲۰۱۶ در مورد برداری واقع در V_3 است و ما آن را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۳۸ را ببینید).

مثال ۵ نقاط $R(2, -1, 3)$ و $S(3, 4, 6)$ داده شده اند. بردار واحد همجهت با $\vec{V(RS)}$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} \vec{V(RS)} &= \langle 3, 4, 6 \rangle - \langle 2, -1, 3 \rangle = \langle 1, 5, 3 \rangle \\ &= \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

لذا

$$|V(\overrightarrow{RS})| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{35}$$

بنابراین، طبق قضیه ۹.۲۰.۱۷ بردار واحد مطلوب عبارت است از

$$\blacktriangle \quad U = \frac{1}{\sqrt{35}} \mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{35}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{35}} \mathbf{k}.$$

تمرینهای ۲۰.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1 \rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5 \rangle$ و $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6 \rangle$.

۱. $\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$ را بیابید.
۲. $2\mathbf{A} - \mathbf{C}$ را بیابید.
۳. $7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}$ را بیابید.
۴. $|2\mathbf{A}| - |\mathbf{C}|$ را بیابید.
۵. $|7\mathbf{C}| - |5\mathbf{D}|$ را بیابید.
۶. $4\mathbf{B} + 6\mathbf{C} - 2\mathbf{D}$ را بیابید.
۷. $|7\mathbf{C} - 5\mathbf{D}|$ را بیابید.
۸. $|4\mathbf{B}| + |6\mathbf{C}| - |2\mathbf{D}|$ را بیابید.
۹. $\mathbf{C} + 3\mathbf{D} - 8\mathbf{A}$ را بیابید.
۱۰. $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C} - 12\mathbf{D}$ را بیابید.
۱۱. $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|(\mathbf{C} - \mathbf{D})$ را بیابید.
۱۲. $|\mathbf{A}||\mathbf{C}| - |\mathbf{B}||\mathbf{D}|$ را بیابید.
۱۳. مطلوب است اسکالرهای a و b به طوری که $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + b(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{0}$.
۱۴. مطلوب است اسکالرهای a ، b ، و c به طوری که $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \mathbf{0}$.
۱۵. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (i) را ثابت کنید.
۱۶. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (ii) را ثابت کنید.
۱۷. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (iii)، (iv)، و (viii) را ثابت کنید.
۱۸. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (v) را ثابت کنید.
۱۹. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (vi) را ثابت کنید.
۲۰. قضیه ۸.۲۰.۱۷ (vii) را ثابت کنید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۴ کسینوسهای هادی بردار $V(\overrightarrow{P_1 P_2})$ را بیابید، و پاسخها را با تحقیق این مطلب که مجموع مجذوراتشان ۱ است آزمایش کنید.

$$21. \quad P_1(7, 2, 4) \quad ; \quad P_2(3, -1, -4)$$

$$P_2(2, -1, 4) \quad ; \quad P_1(1, 3, 5) \quad .22$$

$$P_2(-2, -4, -8) \quad ; \quad P_1(4, -3, -1) \quad .23$$

$$P_2(2, 4, 1) \quad ; \quad P_1(-2, 6, 5) \quad .24$$

.25 با استفاده از نقاط P_1 و P_2 مذکور در تمرین ۲۱، نقطه‌ای چون Q بیابید به طوری که $V(\overrightarrow{P_1 P_2}) = 3V(\overrightarrow{P_1 Q})$.

.26 با استفاده از نقاط P_1 و P_2 مذکور در تمرین ۲۲ نقطه‌ای چون R بیابید به طوری که $V(\overrightarrow{P_1 R}) = -2V(\overrightarrow{P_2 R})$.

.27 نقاط $P_1(3, 2, -4)$ و $P_2(-5, 4, 2)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای چون P_3 بیابید که $3V(\overrightarrow{P_1 P_2}) = -2V(\overrightarrow{P_2 P_3})$.

.28 نقاط $P_1(7, 0, -2)$ و $P_2(2, -3, 5)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای چون P_3 بیابید به طوری که $5V(\overrightarrow{P_1 P_2}) = V(\overrightarrow{P_2 P_3})$.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، بردار مفروض را بر حسب بزرگی و کسینوسهای هادیش بنویسید.

$$-6i + 2j + 3k \quad .29 \quad 2i - 2j + k \quad .30$$

$$-2i + j - 3k \quad .31 \quad 2i + 2j - 5k \quad .32$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۶، بردار واحدی بیابید که جهت با جهت $V(\overrightarrow{P_1 P_2})$ یکی باشد.

$$P_1(4, -1, -6); \quad P_2(5, 7, -2) \quad .33$$

$$P_1(3, 0, -1); \quad P_2(-3, 8, -1) \quad .34$$

$$P_1(-2, 5, 3); \quad P_2(-4, 7, 5) \quad .35$$

$$P_1(-8, -5, 2); \quad P_2(-3, -9, 4) \quad .36$$

.37 اگر اندازه‌های رادیانی زاویه‌های هادی برداری برابر باشند، آن بردار چیست؟

.38 قضیه ۹.۲.۱۷ را ثابت کنید.

.39 سه بردار در V_3 را مستقل نامند اگر و تنها اگر نمایشهای موضع آنها در يك صفحه نباشند؛ و گویند سه بردار E_1, E_2, E_3 برای فضای برداری V_3 يك پایه تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر هر بردار در V_3 را بتوان به صورت ترکیبی خطی از E_1, E_2, E_3 نوشت. می‌توان قضیه‌ای را ثابت کرد که می‌گوید سه بردار برای فضای برداری V_3 يك پایه تشکیل می‌دهند اگر مستقل باشند. با اقدامات زیر نشان دهید که این قضیه در مورد سه بردار $\langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle$ ، و $\langle 1, 1, 1 \rangle$ برقرار است:

(الف) نشان دهید که نمایشهای موضع این سه بردار همصفحه نیستند، و در نتیجه بردارها مستقل اند؛ (ب) نشان دهید که هر برداری چون A را می توان به صورت زیر نوشت، و لذا این بردارها يك پایه تشکیل می دهند:

$$A = r\langle 1, 0, 0 \rangle + s\langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, 1, 1 \rangle. \quad (۶)$$

در اینجا r, s, t و x اسکلر هستند. (پ) اگر $A = \langle 6, -2, 5 \rangle$ ، مقادیر خاص r, s, t و x چه باشند تا (۶) برقرار باشد؟

۴۰. (الف) نشان دهید که هر بردار A را می توان به صورت زیر نوشت، و به این ترتیب نشان دهید که بردارهای $\langle 2, 0, 1 \rangle$ ، $\langle 0, -1, 0 \rangle$ ، و $\langle 1, -1, 0 \rangle$ يك پایه برای V_3 تشکیل می دهند:

$$A = r\langle 2, 0, 1 \rangle + s\langle 0, -1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 0 \rangle. \quad (۷)$$

در اینجا r, s, t و x اسکلر هستند. (ب) اگر $A = \langle -2, 3, 5 \rangle$ ، مقادیر خاص r, s, t و x چه باشند تا (۷) برقرار باشد؟

۴۱. به نخستین جمله تمرین ۳۹ رجوع کنید. می توان قضیه ای حاکی از این موضوع اثبات کرد که سه بردار برای فضای برداری V_3 يك پایه تشکیل می دهند تنها اگر این سه بردار مستقل باشند. با اقدامات زیر نشان دهید که در مورد سه بردار $F_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$ ، $F_2 = \langle 1, 1, 1 \rangle$ ، و $F_3 = \langle 2, 1, 2 \rangle$ این قضیه برقرار است: (الف) نشان دهید که نمایشهای موضع این سه بردار همصفحه اند، و لذا F_1, F_2, F_3 مستقل نیستند؛ (ب) نشان دهید که هر بردار در V_3 را نمی توان به صورت ترکیبی خطی از F_1, F_2, F_3 نوشت، و لذا این بردارها يك پایه تشکیل نمی دهند.

۳.۱۷ حاصلضرب نقطه ای در V_3

تعریف حاصلضرب نقطه ای دو بردار در V_3 تعمیمی است از تعریف متناظر در V_2 .

۱۰۳۰۱۷ تعریف اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، آنگاه حاصلضرب نقطه ای A و B که با $A \cdot B$ نمایش داده می شود از رابطه زیر به دست می آید.

$$A \cdot B = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

○ نمونه ۱ اگر $A = \langle 4, 2, -6 \rangle$ و $B = \langle -5, 3, -2 \rangle$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \langle 4, 2, -6 \rangle \cdot \langle -5, 3, -2 \rangle \\ &= 4(-5) + 2(3) + (-6)(-2) \\ &= -20 + 6 + 12 \\ &= -2. \end{aligned}$$

در مورد بردارهای واحد i, j, k داریم

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

و

$$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0.$$

قوانین ضرب نقطه‌ای که در قضیه ۲.۳.۱۷ ارائه می‌شوند، با قوانین مذکور در قضیه‌های ۲.۳.۱۶ و ۳.۳.۱۶ در مورد بردارهای واقع در V_3 یکی هستند. اثباتها را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم (تمرینهای ۱۵ تا ۱۸ را ببینید).

۲.۳.۱۷ قضیه اگر A, B ، و C بردارهای دلخواهی از V_3 باشند، و c اسکالر باشد، آنگاه

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (i)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (ii)$$

$$c(A \cdot B) = (cA) \cdot B \quad (iii)$$

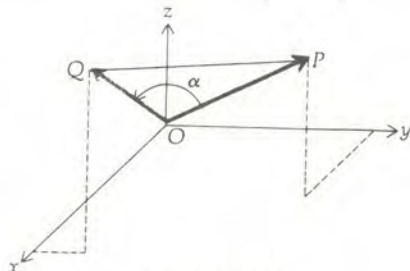
$$0 \cdot A = 0 \quad (iv)$$

$$A \cdot A = |A|^2 \quad (v)$$

قبل از ارائه تعبیری هندسی از حاصلضرب نقطه‌ای بردارهای واقع در V_3 ، همان کاری را می‌کنیم که در مورد بردارهای واقع در V_2 کردیم: زاویه بین دو بردار را تعریف، و آنگاه حاصلضرب نقطه‌ای را برحسب کسینوس اندازه رادیانی این زاویه بیان می‌کنیم.

۳.۳.۱۷ تعریف فرض کنید A و B دو بردار ناصفر در V_3 باشند به‌طوری‌که A مضرب اسکالر B نباشد. اگر $\vec{OP}$ نمایش موضع A ، و $\vec{OQ}$ نمایش موضع B باشد، آنگاه زاویه بین بردارهای A و B ، بنا به تعریف، زاویه با اندازه مثبت بین $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ واقع در داخل مثلث POQ است. اگر $A = cB$ (c یک اسکالر دلخواه)، آنگاه اگر $c > 0$ ، اندازه رادیانی زاویه بین بردارها 0 است و اگر $c < 0$ ، اندازه رادیانی زاویه بین بردارها π است.

شکل ۱.۳.۱۷، زاویه θ (رادیان) بین دو بردار را که یکی مضربی اسکالر از دیگری



شکل ۱.۳.۱۷

نیست نشان می‌دهد.

۴۰۳۰۱۷ قضیه اگر θ اندازه رادیانی زاویه بین دو بردار ناصفر A و B باشد که در V_3 واقع اند، آنگاه

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta. \quad (۱)$$

اثبات قضیه ۴۰۳۰۱۷ مشابه با اثبات قضیه ۵۰۳۰۱۶ در مورد بردارهای واقع در V_2 است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۱۹ را ببینید).
اگر U بردار واحدی در جهت A باشد، آنگاه بنا بر (۱) داریم

$$U \cdot B = |U| |B| \cos \theta = |B| \cos \theta.$$

در اینجا هم مانند فضای V_2 ، $|B| \cos \theta$ تصویر اسکالر B است روی A ، و مؤلفه B است در جهت A . از قضیه ۴۰۳۰۱۷ نتیجه می‌شود که حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار A و B برابر است با حاصلضرب $|A|$ ، یعنی بزرگی یک بردار، در $|B| \cos \theta$ ، یعنی تصویر اسکالر بردار دوم روی بردار اول.

مثال ۱ بردارهای $A = 6i - 3j + 2k$ و $B = 2i + j - 3k$ مفروض‌اند. مطلوب است: (الف) مؤلفه B در جهت A ؛ (ب) تصویر برداری B روی A ، و (پ) $\cos \theta$ با این شرط که θ اندازه رادیانی زاویه بین A و B باشد.

حل

(الف) $|A| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ (الف)
واحد در جهت A عبارت است از

$$U = \frac{6}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k.$$

چون $U \cdot B = |B| \cos \theta$ ، مؤلفه B در جهت A عبارت است از

$$\begin{aligned} U \cdot B &= \left(\frac{6}{7}i - \frac{3}{7}j + \frac{2}{7}k \right) \cdot (2i + j - 3k) \\ &= \frac{12}{7} - \frac{3}{7} - \frac{6}{7} \\ &= \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

(ب) بنا براین، تصویر برداری B روی A عبارت است از

$$\frac{3}{7}U = \frac{18}{49}i - \frac{9}{49}j + \frac{6}{49}k.$$

(پ) بنا بر (۱)

$$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A| |B|} = \frac{U \cdot B}{|B|}.$$

$$|B| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} \text{ و } U \cdot B = \frac{3}{7}$$

$$\Delta \quad \cos \theta = \frac{3}{7\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{98}.$$

مثال ۲ فاصله نقطه $P(4, 1, 6)$ تا خط مار بر نقاط $A(8, 3, 2)$ و $B(2, -3, 5)$ را بیابید.

حل شکل ۲.۳.۱۷ نقطه P و نمودار خط مار بر نقاط A و B را نشان می‌دهد. پای خط عمود از P بر خط مار بر A و B با M نشان داده شده است. فرض کنید فاصله $|PM|$ برابر با d واحد باشد. برای یافتن d ، $|AM|$ و $|AP|$ را می‌یابیم و قضیه فیثاغورث را به کار می‌گیریم. $|AP|$ بزرگی بردار $V(\vec{AP})$ است.

$$\begin{aligned} V(\vec{AP}) &= V(\vec{OP}) - V(\vec{OA}) \\ &= \langle 4, 1, 6 \rangle - \langle 8, 3, 2 \rangle \\ &= \langle -4, -2, 4 \rangle. \end{aligned}$$

پس

$$|AP| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6.$$

برای یافتن $|AM|$ ، تصویر اسکالر $V(\vec{AP})$ روی $V(\vec{AB})$ را می‌یابیم

$$\begin{aligned} V(\vec{AB}) &= V(\vec{OB}) - V(\vec{OA}) \\ &= \langle 2, -3, 5 \rangle - \langle 8, 3, 2 \rangle \\ &= \langle -6, -6, 3 \rangle. \end{aligned}$$

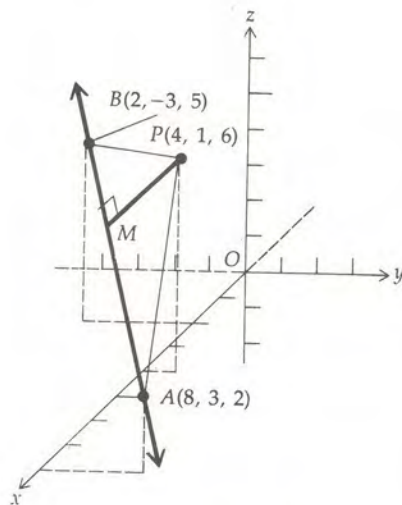
پس، تصویر اسکالر $V(\vec{AP})$ روی $V(\vec{AB})$ برابر است با

۵۳۰ بردارها در فضای سه بعدی، و...

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AP}) \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})|} &= \frac{\langle -4, -2, 4 \rangle \cdot \langle -6, -6, 3 \rangle}{\sqrt{36+36+9}} \\ &= \frac{24+12+12}{\sqrt{81}} \\ &= \frac{48}{9}.\end{aligned}$$

در نتیجه $|\overrightarrow{AM}| = \frac{48}{9}$ ؛ لذا

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2} \\ &= \sqrt{36 - \left(\frac{48}{9}\right)^2} = 6\sqrt{1 - \frac{64}{81}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{17}.\end{aligned}$$



شکل ۲۰۳۰۱۷

تعریف بردارهای متوازی در V_3 مشابه با تعریف ۶.۳۰۱۶ در مورد بردارهای واقع در V_2 است.

حاصلضرب نقطه‌ای در V_p ۵۳۱

۵۳۰۱۷ تعریف دو بردار واقع در V_p را متوازی نامیم اگر و تنها اگر یکی از آن دو، مضرب اسکالری از دیگری باشد.

قضیه زیر از تعریف ۵۳۰۱۷ و قضیه ۴۳۰۱۷ نتیجه می‌شود؛ و ما اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۲۵ را ببینید).

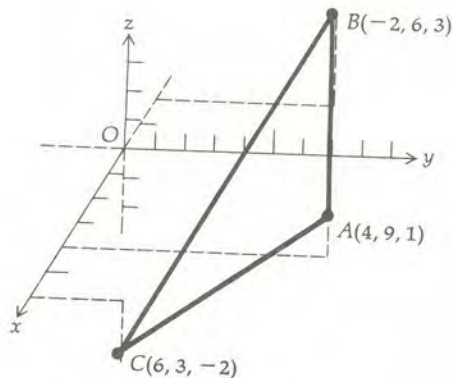
۶۳۰۱۷ قضیه دو بردار ناصفر در V_p متوازی‌اند اگر و تنها اگر اندازه رادیانی زاویه بین آنها ۰ یا π باشد.

تعریف زیر درباره بردارهای متعامد در V_p ، متناظر با تعریف ۷۳۰۱۶ در مورد بردارهای واقع در V_p است.

۷۳۰۱۷ تعریف اگر A و B دو بردار در V_p باشند، A و B را متعامد نامیم اگر و تنها اگر $A \cdot B = 0$.

مثال ۳ با استفاده از بردارها ثابت کنید که نقاط $A(4, 9, 1)$ ، $B(-2, 6, 3)$ و $C(6, 3, -2)$ رؤس يك مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

حل مثلث CAB در شکل ۳۳۰۱۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل چنین به نظر می‌رسد که ممکن است زاویه A يك زاویه قائمه باشد. $V(\overrightarrow{AC})$ و $V(\overrightarrow{AB})$ را می‌یابیم؛ اگر حاصلضرب نقطه‌ای این دو بردار صفر باشد، این زاویه يك زاویه قائمه است.



شکل ۳۳۰۱۷

$$\begin{aligned}\vec{V}(\overrightarrow{AB}) &= \vec{V}(\overrightarrow{OB}) - \vec{V}(\overrightarrow{OA}) \\ &= \langle -2, 6, 3 \rangle - \langle 4, 9, 1 \rangle \\ &= \langle -6, -3, 2 \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(\overrightarrow{AC}) &= \vec{V}(\overrightarrow{OC}) - \vec{V}(\overrightarrow{OA}) \\ &= \langle 6, 3, -2 \rangle - \langle 4, 9, 1 \rangle \\ &= \langle 2, -6, -3 \rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(\overrightarrow{AB}) \cdot \vec{V}(\overrightarrow{AC}) &= \langle -6, -3, 2 \rangle \cdot \langle 2, -6, -3 \rangle \\ &= -12 + 18 - 6 = 0.\end{aligned}$$

بنابراین، $\vec{V}(\overrightarrow{AB})$ و $\vec{V}(\overrightarrow{AC})$ متعامدند؛ و لذا زاویه A در مثلث CAB یک زاویه قائمه است. $\blacktriangle$

تمرینهای ۳.۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle -4, -2, 4 \rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle 2, 7, -1 \rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle 6, -3, 0 \rangle$ و $\mathbf{D} = \langle 5, 4, -3 \rangle$.

۱. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ را بیابید. ۲. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ را بیابید.
۳. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})$ را بیابید. ۴. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ را بیابید.
۵. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ را بیابید. ۶. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$ را بیابید.
۷. $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{A} - (\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$ را بیابید.
۸. $(2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}) \cdot (4\mathbf{C} - \mathbf{D})$ را بیابید.
۹. کسینوس اندازه زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را بیابید.
۱۰. کسینوس اندازه زاویه بین $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ را بیابید.
۱۱. مطلوب است: (الف) مؤلفه $\mathbf{C}$ در جهت $\mathbf{A}$ ؛ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{C}$ روی $\mathbf{A}$.
۱۲. مطلوب است: (الف) مؤلفه $\mathbf{B}$ در جهت $\mathbf{D}$ ؛ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{D}$.
۱۳. مطلوب است: (الف) مؤلفه $\mathbf{A}$ در جهت $\mathbf{B}$ ؛ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$.
۱۴. مطلوب است: (الف) مؤلفه $\mathbf{D}$ در جهت $\mathbf{C}$ ؛ و (ب) تصویر برداری $\mathbf{D}$ روی $\mathbf{C}$.
۱۵. قضیه ۲.۳.۱۷ (i) را ثابت کنید. ۱۶. قضیه ۲.۳.۱۷ (ii) را ثابت کنید.

تمرین ۵۳۳

۱۷. قضیه ۲.۳.۱۷ (iii) را ثابت کنید. ۱۸. قضیه ۲.۳.۱۷ (iv) و (v) را ثابت کنید.

۱۹. قضیه ۲.۳.۱۷ را ثابت کنید. ۲۰. قضیه ۲.۳.۱۷ را ثابت کنید.

۲۱. فاصله نقطه $(2, -1, -4)$ تا خط مار بر نقاط $(3, -2, 2)$ و $(-9, -6, 6)$ را بیابید.

۲۲. فاصله نقطه $(3, 2, 1)$ تا خط مار بر نقاط $(1, 2, 9)$ و $(-3, -6, -3)$ را بیابید.

۲۳. با استفاده از بردار ثابت کنید که نقاط $(2, 2, 2)$ ، $(2, 0, 1)$ ، $(4, 1, -1)$ و $(4, 3, 0)$ رؤس یک مستطیل اند.

۲۴. با استفاده از بردار ثابت کنید که نقاط $(2, 2, 2)$ ، $(0, 1, 2)$ ، $(-1, 3, 3)$ و $(3, 0, 1)$ رؤس یک متوازی الاضلاع اند.

۲۵. مساحت مثلثی با رؤس $(-2, 3, 1)$ ، $(1, 2, 3)$ و $(3, -1, 2)$ را بیابید.

۲۶. با استفاده از بردار ثابت کنید که نقاط $(-2, 1, 6)$ ، $(2, 4, 5)$ و $(-1, -2, 1)$ رؤس یک مثلث قائم الزاویه اند، و مساحت این مثلث را بیابید.

۲۷. اگر $A = 3i + 5j - 2k$ ، $B = -i - 2j + 3k$ و $C = 2i - j + 4k$ ، مؤلفه B در جهت $A - 2C$ را بیابید.

۲۸. کسینوسهای زوایای مثلثی بارئوس $A(0, 0, 0)$ ، $B(4, -1, 3)$ و $C(1, 2, 3)$ را بیابید.

۲۹. اگر نمایش برداری نیروی $F = 3i - 2j + k$ باشد، مطلوب است کار انجام شده توسط این نیرو، وقتی که شیئی را در امتداد یک خط مستقیم از نقطه $P_1(-2, 4, 3)$ به نقطه $P_2(1, -3, 5)$ انتقال دهد. بزرگی نیرو بر حسب پوند، و فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود. (داهنجایی: بخش ۳.۱۶ را مرور کنید.)

۳۰. اگر نمایش برداری نیروی $F = 5i - 3k$ باشد، مطلوب است کار انجام شده توسط این نیرو، وقتی که شیئی را در امتداد خطی مستقیم، از نقطه $P_1(4, 1, 3)$ به نقطه $P_2(-5, 6, 2)$ انتقال دهد. بزرگی نیرو بر حسب پوند و فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود. (داهنجایی: تمرین ۲۹ را ببینید.)

۳۱. نیروی بابر دار F نمایش داده شده است؛ بزرگی آن ۱۰ پوند است، و کسینوسهای هادی F عبارتند از $\cos \alpha = (1/6)\sqrt{6}$ و $\cos \beta = (1/3)\sqrt{6}$. اگر این نیرو شیئی را از مبدأ در امتداد خطی مستقیم به نقطه $(7, -4, 2)$ انتقال دهد، کار

انجام شده را بیابید. فاصله بر حسب فوت است. (داهنجایی: تمرین ۲۹ را ببینید.)

۳۲. اگر A و B بردارهای ناصفری باشند، ثابت کنید که بردار $A - cB$ ، با شرط $c = A \cdot B / |B|^2$ ، بر B عمود است.

۳۳. اگر $A = 12i + 9j - 5k$ و $B = 4i + 3j - 5k$ ، با استفاده از نتیجه تمرین ۳۲، مقدار اسکالر c را بیابید به طوری که بردارهای A و $B - cA$ متعامد باشند.

۳۴. با استفاده از نتیجه تمرین ۳۲ و بردارهای مذکور در تمرین ۳۳، مقدار اسکالر d را بیابید به طوری که بردارهای $A - dB$ و B متعامد باشند.

۳۵. ثابت کنید که اگر A و B دوبردار دلخواه باشند، آنگاه $|B|A + |A|B$ و $|B|A - |A|B$ متعامدند.

۳۶. ثابت کنید که اگر A و B بردارهای ناصفردلخواهی باشند و $C = |B|A + |A|B$ ، آنگاه اندازه زاویه بین A و C با اندازه زاویه بین B و C برابر است.

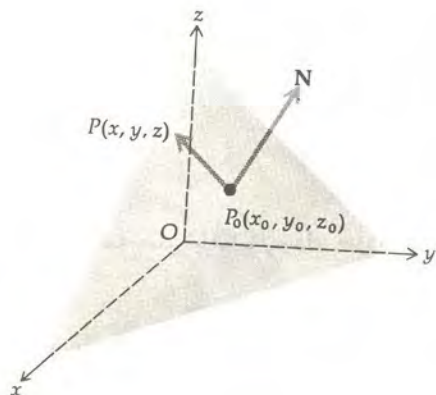
۴.۱۷ صفحه

نمودار معادله‌ای با دو متغیر x و y در صفحه xy یک منحنی است. ساده‌ترین نوع منحنی در فضای دوبعدی، خط مستقیم است؛ و معادله کلی خط مستقیم به صورت $Ax + By + C = 0$ است که یک معادله درجه اول است. در فضای سه بعدی نمودار معادله‌ای با سه متغیر x ، y ، و z یک رویه است. ساده‌ترین نوع رویه، صفحه است؛ و خواهیم دید که معادله یک صفحه، یک معادله سه متغیری درجه اول است.

۱۰۴۰۱۷ تعریف اگر N یک بردار ناصفر مفروض و P_0 یک نقطه مفروض باشد، آنگاه مجموعه تمام نقاطی چون P که به ازای آنها $\vec{V}(\vec{P_0P})$ و N متعامد باشند، بنا به تعریف یک صفحه ماربر P_0 است که N یک بردار قائم آن است.

شکل ۱۰۴۰۱۷ بخشی از یک صفحه ماربر نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ و بردار قائم N را که ابتدایش نقطه P_0 است، نشان می‌دهد.

در هندسه تحلیلی مسطحه، اگر یک نقطه واقع بر یک خط، و راستای (ضریب زاویه) آن خط داده شوند، می‌توان معادله‌ای برای خط به دست آورد. به روشی مشابه، در هندسه تحلیلی فضایی اگر نقطه‌ای از یک صفحه، و جهت یک بردار قائم بر صفحه معلوم باشند، می‌توان معادله‌ای برای صفحه به دست آورد.



شکل ۱۰۴۰۱۷

۲۰۴۰۱۷ قضیه اگر نقطه‌ای از يك صفحه و $N = \langle a, b, c \rangle$ برداری قائم بر صفحه باشند، آنگاه معادله‌ای از صفحه به صورت زیر است

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

اثبات به شکل ۱۰۴۰۱۷ توجه کنید. فرض کنید نقطه دلخواهی از صفحه $P(x, y, z)$ باشد. $V(\vec{P_0P})$ برداری است که $\vec{P_0P}$ نمایشی از آن است؛ لذا

$$V(\vec{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle. \quad (2)$$

از تعریفهای ۱۰۴۰۱۷ و ۷۰۳۰۱۷ نتیجه می‌گیریم که

$$V(\vec{P_0P}) \cdot N = 0.$$

چون $N = \langle a, b, c \rangle$ ، از (۲) و معادله فوق به دست می‌آوریم

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

□

که معادله مطلوب است.

مثال ۱ برای صفحه‌ای که شامل نقطه $(2, 1, 3)$ است و بردار قائمی چون $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ دارد، معادله‌ای بیابید.

حل باقراردادن نقطه $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$ و بردار $\langle a, b, c \rangle = \langle 3, -4, 1 \rangle$ در (۱)، معادله‌ای برای صفحه مطلوب به دست می‌آوریم که عبارت است از

$$3(x-2) - 4(y-1) + (z-3) = 0$$

یا معادالش

$$\Delta \quad 3x - 4y + z - 5 = 0.$$

۳.۴.۱۷ قضیه اگر a, b, c و c همه صفر نباشند، نمودار معادله‌ای به صورت

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (۲)$$

صفحه‌ای است که $\langle a, b, c \rangle$ يك بردار قائم بر آن است.

اثبات فرض کنید $b \neq 0$. در این صورت، نقطه $(0, -d/b, 0)$ روی نمودار معادله فوق است زیرا مختصاتش در معادله صدق می‌کنند. معادله مفروض را می‌توان به صورت

$$a(x-0) + b\left(y + \frac{d}{b}\right) + c(z-0) = 0$$

هم نوشت که بنا بر قضیه ۲.۴.۱۷ معادله‌ای است از يك صفحه مار بر نقطه $(0, -d/b, 0)$ که $\langle a, b, c \rangle$ يك بردار قائم بر صفحه است. به این ترتیب، قضیه در حالتی که $b \neq 0$ اثبات می‌شود. اگر $b = 0$ ، اما $a \neq 0$ یا $c \neq 0$ ، استدلال مشابهی انجام می‌شود. $\square$

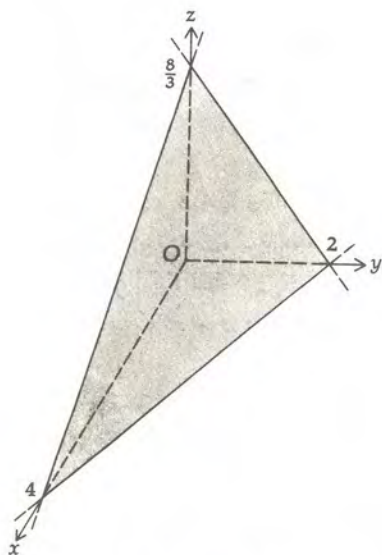
معادلات (۱) و (۲) را معادلات دکارتی صفحه می‌نامند. معادله (۱) مشابه با صورت نقطه-ضرب زاویه‌ای معادله خط در فضای دو بعدی است. معادله (۲) معادله کلی درجه اول با سه متغیر است که آن را يك معادله خطی می‌نامند. صفحه با سه نقطه ناهمخط، با يك خط و يك نقطه غیر واقع بر آن، با دو خط متقاطع، و یا با دو خط متوازی معین می‌شود. برای رسم نمودار صفحه از روی معادله‌اش، بهتر است نقاط تقاطع صفحه را با هر يك از محورهای مختصات بیابیم. مختص x نقطه تقاطع صفحه با محور x ها طول از مبدأ صفحه، مختص y نقطه تقاطع صفحه با محور y ها عرض از مبدأ صفحه، و مختص z نقطه‌ای که صفحه محور z ها را قطع می‌کند، ارتفاع از مبدأ صفحه نامیده می‌شود.

○ نمونه ۱ می‌خواهیم نمودار صفحه با معادله

$$2x + 4y + 3z = 8$$

را رسم کنیم. با قراردادن صفر به جای y و z داریم $x = 4$ ؛ لذا طول از مبدأ صفحه ۴ است. با روشی مشابه، عرض و ارتفاع از مبدأ را به دست می‌آوریم که به ترتیب عبارت‌اند از ۲ و ۸/۳. اگر نقاط متناظر با این تلاقیها را مشخص کرده با خطوطی مستقیم به هم وصل کنیم

نمودار صفحه، طبق شکل ۲۰۴۰۱۷، به دست می آید. دقت کنید که تنها بخشی از این صفحه را در شکل نشان داده ایم.



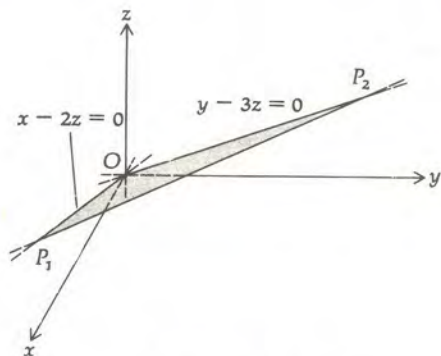
شکل ۲۰۴۰۱۷

○

○ نمونه ۲ برای رسم نمودار صفحه ای به معادله

$$3x + 2y - 6z = 0$$

ابتدا دقت کنید که چون وقتی x ، y ، و z همه صفر باشند معادله برقرار است، صفحه هر یک



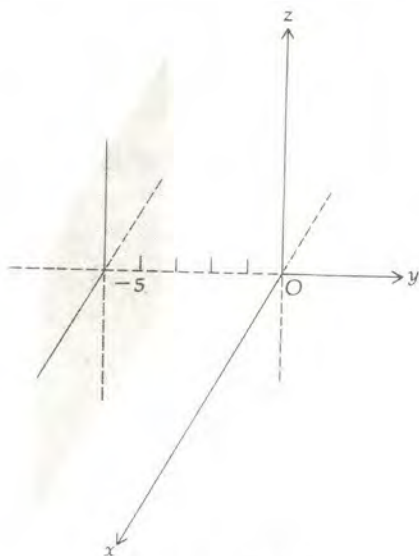
شکل ۳۰۴۰۱۷

از محورها را در مبدأ قطع می‌کند. اگر در معادله مفروض $x = 0$ ، به دست می‌آید $0 - 3z = 0$ که خطی در صفحه yz است؛ این خط محل تقاطع صفحه yz با صفحه مفروض است. به طور مشابه، محل برخورد صفحه xz با صفحه مفروض با قرار دادن $y = 0$ در معادله به دست می‌آید که عبارت است از $0 - 2z = 0$. اگر نمودار هر یک از این دو خط را رسم، و یکی از نقاط واقع بر یکی از این دو خط را با پاره خطی به نقطه‌ای از خط دیگر وصل کنیم، شکل ۳.۴.۱۷ به دست می‌آید.

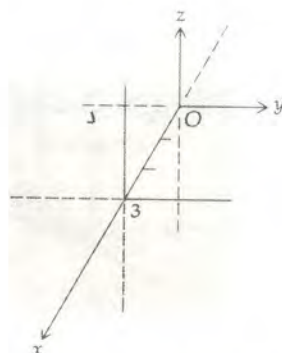
○

در نمونه ۲، خط واقع در صفحه yz و خط واقع در صفحه xz را که برای رسم صفحه به کار رفت، اثر صفحه مفروض، به ترتیب، بر صفحه yz و صفحه xz می‌نامند. معادله $x = 0$ معادله‌ای است برای صفحه yz زیرا نقطه (x, y, z) در صفحه yz است اگر و تنها اگر $x = 0$. به طور مشابه، معادلات $y = 0$ و $z = 0$ ، به ترتیب، معادلات صفحه xz و صفحه xy هستند.

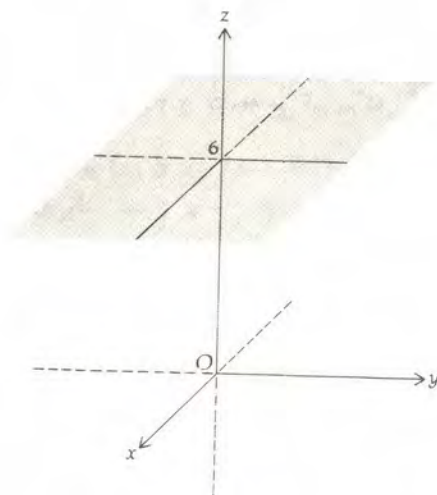
معادله صفحه‌ای موازی با صفحه yz به صورت $x = k$ است که در آن k مقداری ثابت است. شکل ۴.۴.۱۷ نمودار صفحه‌ای با معادله $x = 3$ را نشان می‌دهد. یک صفحه موازی با صفحه xz معادله‌ای به صورت $y = k$ دارد، و یک صفحه موازی با صفحه xy معادله‌ای به صورت $z = k$ دارد. شکل‌های ۵.۴.۱۷ و ۶.۴.۱۷ نمودارهای صفحاتی با معادلات، به ترتیب، $5 - y = 0$ و $6 - z = 0$ را نشان می‌دهند.



شکل ۵.۴.۱۷



شکل ۴.۴.۱۷



شکل ۶.۴.۱۷

۴.۴.۱۷ تعریف زاویه بین دو صفحه، بنا به تعریف، زاویه بین بردارهای قائم دو صفحه است.

مثال ۲ اندازه رادیانی زاویه بین دو صفحه $5x - 2y + 5z - 12 = 0$ و $2x + y - 7z + 11 = 0$ را بیابید.

حل فرض کنیم N_1 يك بردار قائم بر صفحه اول باشد و $N_1 = 5i - 2j + 5k$ ؛ و فرض کنیم N_2 يك بردار قائم بر صفحه دوم باشد و $N_2 = 2i + j - 7k$. بنا بر تعریف ۴.۴.۱۷، زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین N_1 و N_2 است، و لذا بنا به قضیه ۴.۳.۱۷، اگر θ اندازه رادیانی این زاویه باشد

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| |N_2|} = \frac{(5i - 2j + 5k) \cdot (2i + j - 7k)}{\sqrt{25 + 4 + 25} \sqrt{4 + 1 + 49}} \\ &= \frac{-27}{54} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

بنا بر این

▲ $\theta = \frac{2}{3}\pi.$

۵۰۴.۱۷ تعریف دو صفحه متوازی اند اگر و تنها اگر بردارهای قائمشان متوازی باشند.

بنابر تعریفهای ۵۰۴.۱۷ و ۵۰۳.۱۷ نتیجه می گیریم که اگر دو صفحه با معادلات

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad (۵)$$

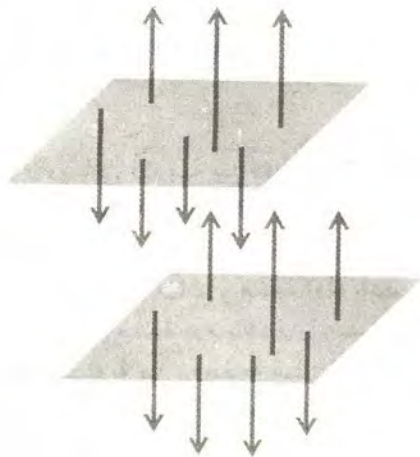
و

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad (۶)$$

داده شده باشند که بردارهای قائمشان به ترتیب $N_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ و $N_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ باشند، آنگاه این دو صفحه متوازی اند اگر و تنها اگر

$$N_1 = kN_2, \text{ که در آن } k \text{ عدد ثابتی است.}$$

شکل ۷۰۴.۱۷ نمودارهای دو صفحه متوازی و نمایشهایی از برخی از بردارهای قائمشان را نشان می دهد.



شکل ۷۰۴.۱۷

۶۰۴.۱۷ تعریف دو صفحه متعامدند اگر و تنها اگر بردارهای قائمشان متعامد باشند.

بنابر تعریفهای ۶۰۴.۱۷ و ۷۰۳.۱۷ نتیجه می گیریم که دو صفحه دارای بردارهای قائم N_1 و N_2 متعامدند اگر و تنها اگر

$$N_1 \cdot N_2 = 0. \quad (۷)$$

مثال ۳. معادله‌ای برای صفحه عمود بر هر یک از صفحات $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z - 5 = 0$ بیابید که شامل نقطه $(2, 0, -4)$ باشد.

حل. فرض کنید M صفحه مطلوب، و $\langle a, b, c \rangle$ یک بردار قائم بر M باشد. نیز فرض کنید M_1 ، صفحه با معادله $x - y + z = 0$ باشد. بنا بر قضیه ۳.۴.۱۷ یک بردار قائم بر M_1 ، $\langle 1, -1, 1 \rangle$ است. چون M و M_1 متعامدند، از (۷) نتیجه می‌شود که

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, -1, 1 \rangle = 0$$

یا معادلش

$$a - b + c = 0. \quad (8)$$

گیریم M_2 صفحه‌ای با معادله $2x + y - 4z - 5 = 0$ باشد. یک بردار قائم بر M_2 عبارت است از $\langle 2, 1, -4 \rangle$. چون M و M_2 متعامدند، داریم

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 2, 1, -4 \rangle = 0$$

یا معادلش

$$2a + b - 4c = 0. \quad (9)$$

اگر (۸) و (۹) را باهم حل کنیم و b و c را بر حسب a به دست آوریم، داریم $b = 2a$ و $c = a$. بنابراین، یک بردار قائم بر M ، $\langle a, 2a, a \rangle$ است. چون $\langle 4, 0, -2 \rangle$ یک نقطه M است، بنا بر قضیه ۲.۴.۱۷ معادله‌ای برای M عبارت است از

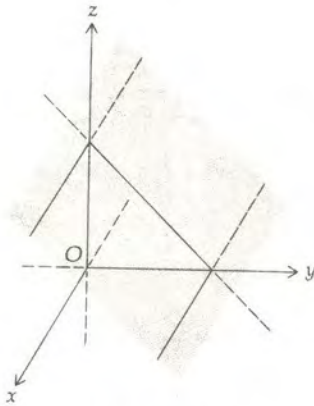
$$a(x - 4) + 2a(y - 0) + a(z + 2) = 0$$

یا معادلش

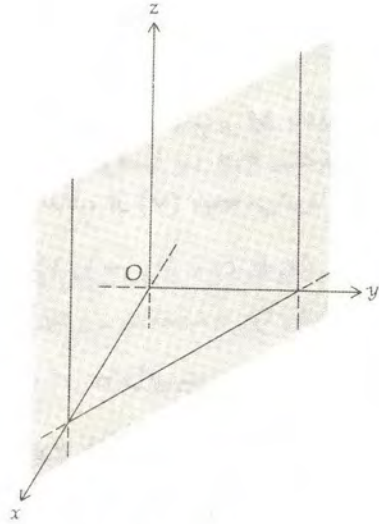
$$\blacktriangle \quad x + 2y + z - 2 = 0.$$

حال صفحه با معادله $ax + by + dz = 0$ و صفحه xy را که معادله‌اش $z = 0$ است در نظر بگیرید. بردارهای $\langle a, b, 0 \rangle$ و $\langle 0, 0, 1 \rangle$ به ترتیب بردارهای قائم بر این دو صفحه‌اند. چون $\langle 0, 0, 1 \rangle \cdot \langle a, b, 0 \rangle = 0$ ، این دو صفحه متعامدند. و این بدان معناست که هر صفحه‌ای که در معادله‌اش جمله z نباشد بر صفحه xy عمود است. شکل ۸.۴.۱۷ این موضوع را نشان می‌دهد. با روشی مشابه می‌توان نتیجه گرفت که هر صفحه‌ای که در معادله‌اش جمله x نباشد بر صفحه yz عمود است (شکل ۹.۴.۱۷ را ببینید)، و هر صفحه‌ای که در معادله‌اش جمله y نباشد بر صفحه xz عمود است (شکل ۱۰.۴.۱۷ را ببینید).

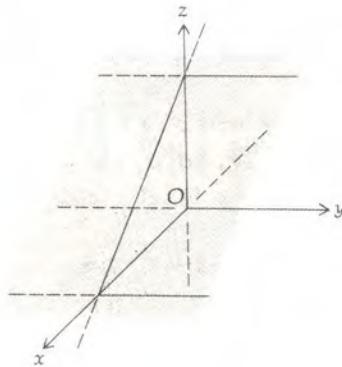
۵۴۲ بردارها در فضای سه بعدی، و...



شکل ۹۰۴۰۱۷



شکل ۸۰۴۰۱۷



شکل ۱۰۴۰۱۷

يك کاربرد مهم بردارها در محاسبه فاصله غیرجهت دار يك نقطه تا يك صفحه است. مثال زیر این نکته را روشن می کند.

مثال ۴ فاصله صفحه $2x - y + 2z + 10 = 0$ تا نقطه $(1, 4, 6)$ را بیابید.

حل نقطه $(1, 4, 6)$ را P بگیرید و نقطه دلخواه Q را در صفحه انتخاب کنید.

برای سادگی نقطه Q را نقطه‌ای بگیرید که محل تلاقی صفحه و محور x هاست؛ یعنی، فرض کنید Q نقطه $(-5, 0, 0)$ باشد. برداری که $\vec{QP}$ نمایشی از آن است عبارت است از

$$\mathbf{V}(\vec{QP}) = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

یک بردار قائم بر صفحه مفروض عبارت است از

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

قرینه $\mathbf{N}$ نیز یک بردار قائم بر صفحه مفروض است، و

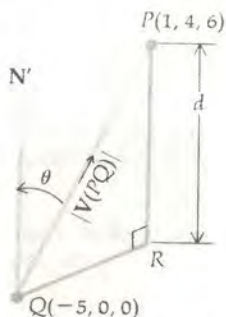
$$-\mathbf{N} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

یقین نداریم کدام یک از دو بردار، $\mathbf{N}$ یا $-\mathbf{N}$ ، زاویه کوچکتری با بردار $\mathbf{V}(\vec{QP})$ می‌سازد. فرض کنید $\mathbf{N}'$ یکی از دو بردار $\mathbf{N}$ یا $-\mathbf{N}$ باشد که زاویه‌اش با $\mathbf{V}(\vec{QP})$ برحسب رادیان، θ است که $\theta < \pi/2$. بخشی از صفحه مفروض که شامل نقطه $Q(-5, 0, 0)$ است، نمایشی از بردار $\mathbf{N}'$ که ابتدایش در Q است، نقطه $P(1, 4, 6)$ ، پاره‌خط جهت‌دار $\vec{QP}$ ، و نقطه R که پای عمود از P بر صفحه است، همه در شکل ۱۱.۴.۱۷ نشان داده شده‌اند. برای سادگی، در این شکل محورهای مختصات را رسم نکرده‌ایم. فاصله $|\vec{RP}|$ ، فاصله مطلوب است که ما آن را d می‌نامیم. از شکل ۱۱.۴.۱۷ پیداست که

$$d = |\mathbf{V}(\vec{QP})| \cos \theta. \quad (10)$$

چون θ اندازه رادیانی زاویه بین $\mathbf{N}'$ و $\mathbf{V}(\vec{QP})$ است، داریم

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{N}' \cdot \mathbf{V}(\vec{QP})}{|\mathbf{N}'| |\mathbf{V}(\vec{QP})|}.$$



شکل ۱۱.۴.۱۷

اگر از (۱۱) در (۱۰) مقدار قرار دهیم و به جای $|N'|$ بنویسیم $|N|$ ، داریم

$$d = \frac{|V(\vec{QP})|(N' \cdot V(\vec{QP}))}{|N||V(\vec{QP})|} = \frac{N' \cdot V(\vec{QP})}{|N|}.$$

چون d فاصله‌ای غیر جهت‌دار است، عددی نامنفی است؛ لذا به جای صورت عبارت فوق می‌توانیم قدرمطلق حاصلضرب نقطه‌ای N و $V(\vec{QP})$ را بنویسیم. پس:

$$\blacktriangle \quad d = \frac{|N \cdot V(\vec{QP})|}{|N|} = \frac{|(2i - j + 2k) \cdot (6i + 2j + 6k)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{20}{3}.$$

تمرینهای ۲۰۱۷

در تمرینهای ۱ تا ۶، برای صفحه‌ای که شامل نقطه مفروض P باشد و بردار داده‌شده N يك بردار قائم آن باشد، معادله‌ای بیابید.

$$P(3, 1, 2); \quad N = \langle 1, 2, -3 \rangle \quad ۱.$$

$$P(-3, 2, 5); \quad N = \langle 6, -3, -2 \rangle \quad ۲.$$

$$P(0, -1, 2); \quad N = \langle 0, 1, -1 \rangle \quad ۳.$$

$$P(-1, 8, 3); \quad N = \langle -7, -1, 1 \rangle \quad ۴.$$

$$P(2, 1, -1); \quad N = -i + 2j + 2k \quad ۵.$$

$$P(1, 0, 0); \quad N = i + k \quad ۶.$$

در تمرینهای ۷ و ۸، معادله‌ای برای صفحه شامل سه نقطه مفروض بیابید.

$$(3, 4, 1), \quad (1, 7, 1), \quad (-1, -2, 5) \quad ۷.$$

$$(0, 0, 2), \quad (2, 4, 1), \quad (-2, 3, 3) \quad ۸.$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۴، نمودار صفحه مفروض را رسم کنید و دو بردار واحد را که قائم بر صفحه باشند بیابید.

$$4x - 4y + 2z - 9 = 0 \quad ۱۰. \quad 2x - y + 2z - 6 = 0 \quad ۹.$$

$$y + 2z - 4 = 0 \quad ۱۲. \quad 4x + 3y - 12z = 0 \quad ۱۱.$$

$$z = 5 \quad ۱۴. \quad 3x + 2z - 6 = 0 \quad ۱۳.$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۰، برای صفحه‌ای که در شرایط مفروض صدق می‌کند، معادله‌ای بیابید.

۱۵. عمود بر سطح گذرنده از نقاط $(2, 2, -4)$ و $(7, -1, 3)$ ، و شامل نقطه $(-5, 1, 2)$.

۱۶. موازی با صفحه $4x - 2y + z - 1 = 0$ و شامل نقطه $(2, 6, -1)$.

۱۷. عمود بر صفحه $x + 3y - z - 7 = 0$ و شامل نقاط $(2, 0, 5)$ و $(0, 2, -1)$.

۱۸. عمود بر هر یک از صفحات $x - y + z = 0$ و $2x + y - 4z - 5 = 0$ و شامل نقطه $(4, 0, -2)$.

۱۹. عمود بر صفحه yz ، شامل نقطه $(2, 1, 1)$ و سازنده زاویه‌ای به اندازه $\cos^{-1}(2/3)$ رادیان با صفحه $2x - y + 2z - 3 = 0$.

۲۰. شامل نقطه $P(-3, 5, -2)$ و عمود بر نمایشهای بردار $\vec{V}(\overrightarrow{OP})$.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۳، کسینوس اندازه زاویه بین دو صفحه مفروض را بیابید.

۲۱. $6x - 2y + 3z + 8 = 0$ و $2x - y - 2z - 5 = 0$

۲۲. $y - 5z + 3 = 0$ و $2x - 5y + 3z - 1 = 0$

۲۳. $4x - 7y + 4z - 6 = 0$ و $3x + 4y = 0$

۲۴. فاصله نقطه $(2, 2, -4)$ تا صفحه $2x + 2y - z - 6 = 0$ را بیابید.

۲۵. فاصله نقطه $(-2, 6, 3)$ تا صفحه $5x + 11y + 2z - 30 = 0$ را بیابید.

۲۶. فاصله عمودی بین صفحات موازی

$$4x - 8y - z - 6 = 0 \quad \text{و} \quad 4x - 8y - z + 9 = 0$$

را بیابید.

۲۷. فاصله عمودی بین صفحات موازی $4y - 3z - 6 = 0$ و $8y - 6z - 27 = 0$ را بیابید.

۲۸. ثابت کنید که فاصله غیرجهت‌دار از صفحه $ax + by + cz + d = 0$ تا نقطه (x_0, y_0, z_0) با فرمول زیر به دست می‌آید

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

۲۹. ثابت کنید که فاصله عمودی بین دو صفحه متوازی $ax+by+cz+d_1=0$ و $ax+by+cz+d_2=0$ از فرمول زیر به دست می آید

$$\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

۳۰. اگر a, b, c و c ناصفر و به ترتیب، طول از مبدأ، عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ صفحه ای باشند، ثابت کنید که معادله ای برای این صفحه عبارت است از

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

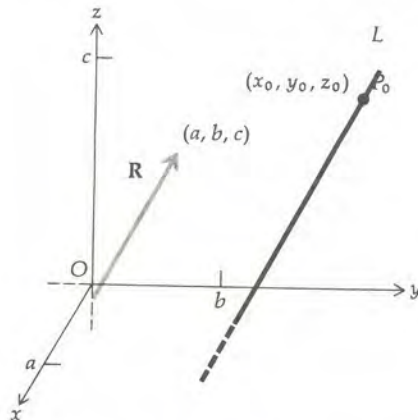
این معادله را صورت طول و عرض و ارتفاع از مبدأ معادله صفحه می نامند.

۵.۱۷ خط در R^3

فرض کنید L خطی در R^3 باشد که نقطه مفروضی چون $P_0(x_0, y_0, z_0)$ را دربر دارد، و موازی بانمایی از يك بردار مفروض $\mathbf{R} = \langle a, b, c \rangle$ است. شکل ۱۰.۵.۱۷ نمودار خط L و نمایش موضع بردار $\mathbf{R}$ را نشان می دهد. خط L مجموعه نقاطی چون $P(x, y, z)$ است که $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P})$ موازی با بردار $\mathbf{R}$ باشد. لذا P روی خط L است اگر و تنها اگر اسکالر ناصفري چون t وجود داشته باشد که

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = t\mathbf{R}. \quad (۱)$$

چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_0P}) = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ ، بنابر (۱) داریم



شکل ۱۰.۵.۱۷

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t \langle a, b, c \rangle$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$x - x_0 = ta, \quad y - y_0 = tb, \quad z - z_0 = tc$$

یا معادلش

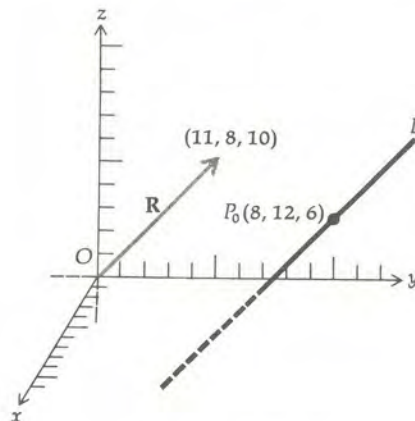
$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc. \quad (2)$$

اگر پارامتر t عدد حقیقی دلخواهی باشد (یعنی، اگر t تمام مقادیر را در بازه $(-\infty, +\infty)$ اختیار کند)، نقطه P می‌تواند هر نقطه از خط L باشد. لذا معادلات (۲) خط L را معرفی می‌کنند؛ این معادلات به معادلات پارامتری خط موسوم‌اند.

○ نمونه ۱: بنابر معادلات (۲)، معادلات پارامتری خطی که با نمایشهای بردار $R = \langle 11, 8, 10 \rangle$ موازی است و نقطه $P_0(8, 12, 6)$ را شامل است عبارت‌اند از

$$x = 8 + 11t, \quad y = 12 + 8t, \quad z = 6 + 10t.$$

شکل ۲۰۵.۱۷ نمودار خط و نمایش موضع R را نشان می‌دهد.



○

شکل ۲۰۵.۱۷

اگر هیچ‌یک از اعداد a, b, c یا c صفر نباشد، از معادلات (۲) می‌توان t را حذف کرد و معادله زیر را به دست آورد

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad (3)$$

این معادلات به معادلات متقارن خط موسوم اند.

بردار $R = \langle a, b, c \rangle$ جهت خط را مشخص می کند، و اعداد a, b, c اعداد هادی خط نامیده می شوند. جهت هر بردار موازی با R یا با جهت R یکی است یا با آن مخالف است؛ لذا در بحث فوق می توانیم به جای R از چنین برداری استفاده کنیم. چون مؤلفه های هر بردار موازی با R با مؤلفه های R متناسب اند، هر مجموعه متشکل از سه عدد a, b, c متناسب باشند می توان مجموعه ای از اعداد هادی خط تلقی کرد. پس، در مورد هر خط، تعداد مجموعه های اعداد هادی آن نامتناهی است. یک مجموعه [مرتب] از اعداد هادی را در داخل کرشه به صورت $[a, b, c]$ می نویسیم.

○ نمونه ۲ اگر $[2, 3, -4]$ مجموعه ای از اعداد هادی خطی را نمایش دهد، مجموعه های دیگری از اعداد هادی همین خط را می توان به صورت های $[4, 6, -8]$ ، $[1, 3/2, -2]$ ، و $[2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}]$ نمایش داد.

○ نمونه ۳ مجموعه ای از اعداد هادی خط مذکور در نمونه ۱، $[11, 8, 10]$ است، و این خط نقطه $(8, 12, 6)$ را دربر دارد. پس، بنابر (۳)، معادلات متقارن این خط عبارت اند از

$$\circ \quad \frac{x-8}{11} = \frac{y-12}{8} = \frac{z-6}{10}.$$

مثال ۱ دو دسته از معادلات متقارن خط ماربر دو نقطه $(-3, 2, 4)$ و $(6, 1, 2)$ را بیابید.

حل نقطه $(-3, 2, 4)$ را P_1 و نقطه $(6, 1, 2)$ را P_2 می نامیم. پس خط مطلوب موازی با نمایشهای بردار $V(P_1 P_2)$ است، و لذا مؤلفه های این بردار مجموعه ای از اعداد هادی خط را تشکیل می دهند. $V(P_1 P_2) = \langle 9, -1, -2 \rangle$. اگر نقطه $(-3, 2, 4)$ را P بنامیم، بنابر (۳)، معادلات زیر را داریم

$$\frac{x+3}{9} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{-2}$$

دسته دیگری از معادلات متقارن خط که با انتخاب $(6, 1, 2)$ به عنوان نقطه P به دست می آید، عبارت است از

$$\triangle \quad \frac{x-6}{9} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}.$$

معادلات (۳) معادل‌اند با دستگاه سه معادله زیر

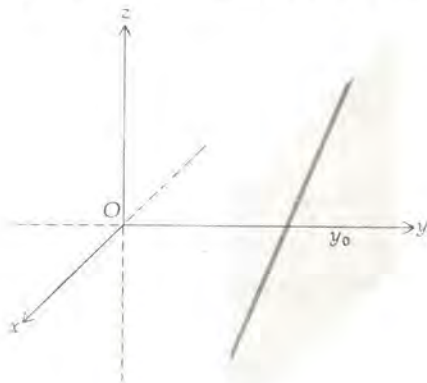
$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0). \end{aligned} \quad (۲)$$

درواقع، سه معادله مذکور در (۲) مستقل نیستند، زیرا هر يك از آنها را می‌توان از دوتای دیگر به‌دست آورد. هر يك از معادلات (۲)، معادله‌ای است از يك صفحه شامل خط L که با معادلات مذکور در (۳) معرفی می‌شود. مقطع هر دو تا از این صفحات، خط L است؛ لذا هر دو تا از معادلات (۲) معرف این خط هستند. اما، تعداد صفحاتی که خط مفروضی را دربر دارند، بینهایت است، و چون هر دو تا از این صفحات این خط را معین می‌کنند، تعداد زوجهای معادلاتی که يك خط را معرفی می‌کنند بینهایت است.

اگر یکی از اعداد a, b, c ، یا c صفر باشد، از معادلات متقارن (۳) استفاده نمی‌کنیم. لذا، فرض کنید مثلاً $b = 0$ ولی نه a صفر باشد و نه c . آنگاه معادلات خط عبارت‌اند از

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \quad \text{و} \quad y = y_0. \quad (۵)$$

خطی که معادلات متقارنش به‌صورت (۵) باشند در صفحه $y = y_0$ قرار دارد و لذا با صفحه xy موازی است. شکل ۳.۵.۱۷ چنین خطی را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۵.۱۷

مثال ۲ دو صفحه $9 = x + 3y - z$ و $0 = 2x - 3y + 4z + 3$ مفروض‌اند.

برای خط تقاطع این دو صفحه، (الف) يك دسته معادله متقارن، (ب) يك دسته معادله پارامتری، بیا بید.

حل از دو معادله مفروض، x و y را بر حسب z به دست می آوریم

$$x = -z + 2, \quad y = \frac{2}{3}z + \frac{7}{3}$$

پس داریم

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{z-0}{1}$$

یا معادلش

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{2} = \frac{z-0}{3}$$

که يك دسته معادله متقارن برای خط است. اگر هر يك از نسبتهای فوق را مساوی با t بگیریم، يك دسته معادله پارامتری برای خط به دست می آید که عبارت است از

$$\blacktriangle \quad x = 2 - 3t, \quad y = \frac{7}{3} + 2t, \quad z = 3t.$$

مثال ۳ مطلوب است کسینوسهای هادی برداری که نمایشهای موازی با خط مذکور در مثال ۲ باشند.

حل با توجه به معادلات متقارن خط مذکور در مثال ۲، يك مجموعه از اعداد هادی خط عبارت است از $[-3, 2, 3]$. بنا بر این بردار $\langle -3, 2, 3 \rangle$ بردازی است که نمایشهای موازی با خط مفروض موازی اند. کسینوسهای هادی این بردار به صورت زیرند:

$$\blacktriangle \quad \cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{22}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{22}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

مثال ۴ مطلوب است معادلات خطی که ماربر نقطه $(1, -1, 1)$ و عمود بر خط $3x = 2y = z$ و موازی با صفحه $0 = x + y - z$ باشد.

حل فرض کنید مجموعه ای از اعداد هادی خط مطلوب، $[a, b, c]$ باشد. معادلات

$3x = 2y = z$ را می‌توان به صورت

$$\frac{x-0}{1/3} = \frac{y-0}{1/2} = \frac{z-0}{1}$$

که معادلات متقارن خط است نوشت. يك مجموعه از اعداد هادی این خط $[1/3, 1/2, 1]$ است. چون خط مطلوب بر این خط عمود است، بردارهای $\langle a, b, c \rangle$ و $\langle 1/3, 1/2, 1 \rangle$ متعامدند. پس

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \rangle = 0$$

یا معادلش

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 0. \quad (۶)$$

يك بردار قائم بر صفحه $x + y - z = 0$ عبارت است از $\langle 1, 1, -1 \rangle$. چون خط مطلوب موازی با این صفحه است، بر نمایشهای این بردار قائم عمود است. پس بردارهای $\langle a, b, c \rangle$ و $\langle 1, 1, -1 \rangle$ متعامدند و لذا

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, 1, -1 \rangle = 0$$

یا معادلش

$$a + b - c = 0. \quad (۷)$$

اگر از (۶) و (۷)، a و b را بر حسب c محاسبه کنیم، داریم $a = 9c$ و $b = -8c$. پس، يك مجموعه از اعداد هادی خط مطلوب، $[9c, -8c, c]$ است، و این خط نقطه $(1, -1, 1)$ را هم در بر دارد. بنابراین، معادلات متقارن خط عبارت اند از

$$\frac{x-1}{9c} = \frac{y+1}{-8c} = \frac{z-1}{c}$$

یا معادلش

$$\Delta \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}.$$

مثال ۵ اگر l_1 خط ماربر $A(1, 2, 7)$ و $B(-2, 3, -4)$ و l_2 خط ماربر $C(2, -1, 4)$ و $D(5, 7, -3)$ باشد، ثابت کنید که l_1 و l_2 دو خط متناظرند (یعنی، هر دو در يك صفحه قرار ندارند).

حل برای اینکه نشان دهیم دو خط در يك صفحه قرار ندارند، نشان می‌دهیم که

این دوخط نه متقاطع اند و نه متوازی. معادلات پارامتری يك خط عبارت اند از

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc$$

که در آن $[a, b, c]$ مجموعه‌ای از اعداد هادی خط، و (x_0, y_0, z_0) نقطه دلخواهی از خط است. چون $V(\overrightarrow{AB}) = \langle -3, 1, -11 \rangle$ ، مجموعه‌ای از اعداد هادی l_1 عبارت است از $[-3, 1, -11]$. اگر A را به عنوان نقطه P_0 اختیار کنیم، معادلات پارامتری l_1 به صورت زیر در می آیند

$$x = 1 - 3t, \quad y = 2 + t, \quad z = 7 - 11t. \quad (8)$$

چون $V(\overrightarrow{CD}) = \langle 3, 8, -7 \rangle$ و l_2 نقطه C را دربر دارد، معادلات پارامتری l_2 عبارت اند از

$$x = 2 + 3s, \quad y = -1 + 8s, \quad z = 4 - 7s. \quad (9)$$

چون دو مجموعه اعداد هادی متناسب نیستند، l_1 و l_2 نمی توانند متوازی باشند. برای اینکه این دوخط متقاطع باشند، باید مقداری برای t و مقداری برای s یافت شود که چنانچه به ترتیب در معادلات (۸) و (۹) قرار گیرند هر دو، نقطه (x_1, y_1, z_1) را به دست دهند. بنابراین طرفهای راست معادلات متناظر را با هم مساوی قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$1 - 3t = 2 + 3s$$

$$2 + t = -1 + 8s$$

$$7 - 11t = 4 - 7s.$$

دومعادله اول را با هم حل می کنیم و به دست می آوریم $s = 8/27$ و $t = -17/27$. این دسته از مقادیر در معادله سوم صدق نمی کنند؛ لذا این دوخط متقاطع نیستند. پس l_1 و l_2 دوخط متناظرند. ▲

تمرینهای ۵.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۸، معادلات پارامتری و متقارن خطی را که در شرایط داده شده صدق می کند، بیابید.

۱. ماربر دو نقطه $(1, 2, 1)$ و $(5, -1, 1)$.
۲. ماربر نقطه $(5, 3, 2)$ ، با اعداد هادی $[4, 1, -1]$.
۳. ماربر مبدأ و عمود بر خط $z = (1/2)y = (1/3)x = (1/4)(x - 10)$ در نقطه تقاطعشان.
۴. ماربر مبدأ و عمود بر خطهایی با اعداد هادی $[4, 2, 1]$ و $[-3, -2, 1]$.

۵. عمود بر خطهای با اعدادهای $[۲, -۳, -۴]$ و $[-۵, ۱, ۲]$ در نقطه $(-۲, ۰, ۳)$.

۶. ماربر نقطه $(-۳, ۱, -۵)$ و عمود بر صفحه $۴x - ۲y + z - ۷ = ۰$.

۷. ماربر نقطه $(۴, -۵, ۲۰)$ و عمود بر صفحه $x + ۳y - ۶z - ۸ = ۰$.

۸. ماربر نقطه $(۲, ۰, -۴)$ و موازی با هر یک از صفحات $۲x + y - z = ۰$ و $x + ۳y + ۵z = ۰$.

۹. یک دسته معادلات متقارن برای خط زیر بیابید.

$$\begin{cases} ۴x - ۳y + z - ۲ = ۰ \\ ۲x + ۵y - ۳z + ۴ = ۰ \end{cases}$$

۱۰. نشان دهید که خطهای

$$\frac{x-۳}{-۲} = \frac{y+۱۴}{۵} = \frac{z-۸}{-۳} \quad \text{و} \quad \frac{x+۱}{۲} = \frac{y+۴}{-۵} = \frac{z-۲}{۳}$$

برهم منطبق اند.

۱۱. ثابت کنید که خط $(۱/۲)(x-۳) = (۱/۳)(y+۲) = (۱/۴)(z+۱)$ در صفحه $x - ۲y + z = ۶$ قرار دارد.

۱۲. ثابت کنید که خط $x + ۱ = (-۱/۲)(y-۶) = z$ در صفحه $۳x + y - z = ۳$ قرار دارد.

صفحات ماربر یک خط که بر صفحات مختصات عمود باشند، به صفحات مصور خط موسوم اند. در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، معادلات صفحات مصور خط مفروض را بیابید و نمودار خط را رسم کنید.

$$\begin{cases} x + y - ۳z + ۱ = ۰ \\ ۲x - y - ۳z + ۱۴ = ۰ \end{cases} \quad ۱۴ \quad \begin{cases} ۳x - ۲y + ۵z - ۳۰ = ۰ \\ ۲x + ۳y - ۱۰z - ۶ = ۰ \end{cases} \quad ۱۳$$

$$\begin{cases} ۲x - y + z - ۷ = ۰ \\ ۴x - y + ۳z - ۱۳ = ۰ \end{cases} \quad ۱۶ \quad \begin{cases} x - ۲y - ۳z + ۶ = ۰ \\ x + y + z - ۱ = ۰ \end{cases} \quad ۱۵$$

۱۷. کسینوس اندازه کوچکترین زاویه بین دو خط $x = ۲y + ۴$, $z = -y + ۴$ و $x = y + ۷$, $۲z = y + ۲$ بیابید.

۱۸. معادله ای برای صفحه شامل نقطه $(۶, ۲, ۴)$ و خط

$$\frac{1}{5}(x-1) = \frac{1}{6}(y+2) = \frac{1}{7}(z-3)$$

بیا بید.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، معادله‌ای برای صفحه شامل خطوط متقاطع داده شده بیا بید.

$$\begin{cases} 3x+2y+z+2=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad ۱۹$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{و} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \quad ۲۰$$

۲۱. نشان دهید که خطوط زیر متوازی‌اند، و معادله‌ای برای صفحه ماربر این دو خط بیا بید.

$$\begin{cases} x-3y+z+2=0 \\ 3x-y-z+5=0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 3x-y-z=0 \\ 8x-2y-3z+1=0 \end{cases}$$

۲۲. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = z+4$$

و

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

متوازی‌اند، و معادله‌ای برای صفحه ماربر این دو خط بیا بید.

۲۳. مختصات نقطه تقاطع صفحه $5x - y + 2z - 12 = 0$ و خط

$$\frac{1}{4}(x-2) = -\frac{1}{2}(y+3) = \frac{1}{7}(z-1)$$

را بیا بید.

۲۴. معادلات خط ماربر نقطه $(1, -1, 1)$ ، عمود بر خط $3x = 2y = z$ و موازی با صفحه $x + y - z = 0$ را بیا بید.۲۵. معادلات خط ماربر نقطه $(3, 6, 4)$ ، قطع کننده محور z ها، و موازی با صفحه $x - 3y + 5z - 6 = 0$ را بیا بید.

۲۶. فاصله عمودی از مبدأ تا خط زیر را بیابید.

$$x = -2 + \frac{6}{7}t, \quad y = 7 - \frac{2}{7}t, \quad z = 4 + \frac{3}{7}t.$$

۲۷. فاصله عمودی از نقطه $(-1, 3, -1)$ تا خط $x - 2z = 7, y = 1$ را بیابید.

۲۸. معادلات خط مار بر مبدأ، عمود بر خط $z = 2y - 3, x = y - 5$ ، و قطع کننده خط $y = 2x + 1, z = x + 2$ را بیابید.

۲۹. ثابت کنید که دو خط زیر متناظرند

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+3}{2}, \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-3}.$$

۳۰. معادلات خطی مار بر نقطه $(3, -4, -5)$ را که هر دو خط متناظر تمرین ۲۹ را قطع کند، بیابید.

۶.۱۷ حاصلضرب برداری

فرض کنید **A** و **B** دو بردار نامتوازی باشند. نمایشهایی از این دو بردار که ابتدای آنها یکی باشد، طبق شکل ۱۰۶.۱۷ یک صفحه تشکیل می‌دهند. نشان می‌دهیم برداری که نمایشهایش بر این صفحه عمود باشند بایک عمل برداری موسوم به ضرب برداری دو بردار **A** و **B** به دست می‌آید. ضرب برداری، عملی برداری روی بردارهای واقع در V_3 است و در مورد بردارهای متعلق به V_3 ، چنین عملی در کار نبود. ابتدا این عمل را تعریف می‌کنیم و سپس ویژگیهای جبری و هندسی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱۰۶.۱۷

۱۰۶.۱۷ تعریف اگر $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، آنگاه حاصلضرب برداری $A \times B$ که با **B** و **A** نمایش داده می‌شود از ضابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle. \quad (1)$$

عمل به دست آوردن حاصل ضرب برداری، ضرب برداری نام دارد.

○ نمونه ۱ اگر $\mathbf{A} = \langle 2, 1, -3 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle 3, -1, 4 \rangle$ ، آنگاه بنا بر تعریف ۱۰.۶۰.۱۷ داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle 2, 1, -3 \rangle \times \langle 3, -1, 4 \rangle \\ &= \langle (1)(4) - (-3)(-1), (-3)(3) - (2)(4), (2)(-1) - (1)(3) \rangle \\ &= \langle 4 - 3, -9 - 8, -2 - 3 \rangle \\ &= \langle 1, -17, -5 \rangle \\ \circ \quad &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

شیوه‌ای برای به‌خاطر سپردن فرمول (۱) وجود دارد که از نماد دترمینان ناشی می‌شود. دترمینان مرتبه دوم با رابطه

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

تعریف می‌شود که a, b, c و d اعداد حقیقی هستند. مثلاً

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - (6)(-2) = 27.$$

لذا فرمول (۱) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

طرف راست عبارت فوق به صورت

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

نوشته می‌شود که نماد يك دترمینان مرتبه سوم است. اما، ملاحظه کنید که سطر اول متشکل از سه بردار است و نه آن‌طور که در نماد دترمینان مرسوم است، سه عدد حقیقی.

○ نمونه ۲ برای یافتن حاصلضرب برداری بردارهای مذکور در نمونه ۱، از نماد دترمینان استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= [(1)(4) - (-3)(-1)]\mathbf{i} - [(2)(4) - (-3)(3)]\mathbf{j} \\ &\quad + [(2)(-1) - (1)(3)]\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

○

۲۰۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ برداری در V_3 باشد، آنگاه

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{o} \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{o} \times \mathbf{A} = \mathbf{o} \quad (\text{ii})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (\text{iii})$$

اثبات (i) اگر $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ بنا به تعریف ۱۰۶.۱۷،

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \langle a_2 a_3 - a_3 a_2, a_3 a_1 - a_1 a_3, a_1 a_2 - a_2 a_1 \rangle$$

$$= \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$= \mathbf{o}.$$

□ اثبات (ii) و (iii) را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱۳ را ببینید).

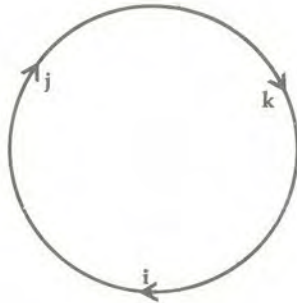
اگر تعریف ۱۰۶.۱۷ را در مورد زوجهایی از بردارهای واحد $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

برای به خاطر سپردن حاصلضربهای برداری فوق، ابتدا توجه کنید که حاصلضرب برداری هر یک از بردارهای واحد $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ در خودش بردار صفر است. حاصلضرب برداری آنها در یکدیگر را از شکل ۲۰۶.۱۷ باروش زیر می‌توان به دست آورد: حاصلضرب برداری دو بردار متوالی در جهت ساعت، بردار بعدی است؛ و حاصلضرب برداری دو بردار متوالی در خلاف جهت ساعت، قرینه بردار بعدی است.



شکل ۲۰۶.۱۷

به آسانی می‌توان دید که ضرب برداری دو بردار، خاصیت تعویض پذیری ندارد زیرا در حالت خاص $\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$. اما، $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ و $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ، لذا $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$ ؛ و در حالت کلی داریم $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ ، که آن را در قضیه زیر بیان و اثبات می‌کنیم.

۲۰۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای دلخواهی در V_3 باشند،

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}).$$

اثبات اگر $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، آنگاه بنا بر تعریف ۱۰۶.۱۷،

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle \\ &= -\langle a_3 b_2 - a_2 b_3, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_2 b_1 - a_1 b_2 \rangle \\ &= -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}). \end{aligned}$$

□

ضرب برداری بردارها شرکت پذیر نیست. این نکته را در مثال زیر می‌توان دید.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) &= \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

لذا

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}.$$

همان‌طور که در قضیهٔ ذیل آمده است، ضرب برداری بردارها نسبت به جمع برداری توزیع پذیر است.

۴.۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ بردارهای دلخواهی در V_3 باشند، آنگاه

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (۲)$$

بافرض $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ، و $\mathbf{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ و نشان دادن اینکه مؤلفه‌های بردار در طرف چپ (۲) با مؤلفه‌های بردار در طرف راست (۲) یکی هستند، قضیه را می‌توان اثبات کرد. جزئیات را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱۴ را ببینید).

۵.۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار دلخواه در V_3 و c یک اسکالر باشد، آنگاه

$$(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B}) \quad (i)$$

$$(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (ii)$$

اثبات قضیهٔ ۵.۶.۱۷ را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرینهای ۱۵ و ۱۶ را ببینید).

با استفادهٔ مکرر از قضایای ۴.۶.۱۷ و ۵.۶.۱۷ و به‌کار بردن قوانین جبر می‌توان حاصلضرب برداری دو بردار را محاسبه کرد، با این شرط که در ضرب برداری ترتیب بردارها تغییر نکند، زیرا بنا به قضیهٔ ۳.۶.۱۷ این امر مجاز نیست. نمونهٔ زیر شیوهٔ کار را نشان می‌دهد.

○ نمونهٔ ۳ با استفاده از قضایای ۴.۶.۱۷ و ۵.۶.۱۷ حاصلضرب برداری بردارهای نمونهٔ ۱ را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &= 6(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 3(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &\quad - 1(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + 4(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 9(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) \\ &\quad + 3(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) - 12(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 6(0) - 2(\mathbf{k}) + 8(-\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{k}) - 1(0) \\ &\quad + 4(\mathbf{i}) - 9(\mathbf{j}) + 3(-\mathbf{i}) - 12(0) \end{aligned}$$

$$= -2\mathbf{k} - 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + 2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 3\mathbf{i}$$

$$\circ \quad = \mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

روشی که در نمونه ۳ به کار رفت نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم حاصلضرب برداری را بیابیم بدون اینکه مجبور باشیم فرمول (۱) را به یاد بسپاریم یا از نماد دترمینان استفاده کنیم. در عمل، تمام مراحل مذکور در این راه حل لازم نیستند زیرا انواع حاصلضرب برداری بردارهای واحد را می‌توان بلافاصله با استفاده از شکل ۲.۶.۱۷ و قاعدهٔ مربوط به دست آورد.

قضیهٔ زیر فرمولی را به دست می‌دهد که در اثبات قضیهٔ ۷.۶.۱۷ مفید واقع می‌شود. از قضیهٔ اخیر يك تعبیر هندسی برای حاصلضرب برداری به دست می‌آید.

۶.۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار دلخواه در V_3 باشند، آنگاه

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

اثبات فرض کنید $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. آنگاه

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 \\ &\quad + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 \\ &\quad + a_3^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 \\ &\quad - 2a_2 a_3 b_2 b_3. \end{aligned}$$

از این دو عبارت به دست می‌آوریم

$$\square \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2.$$

۷.۶.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار در V_3 باشند و θ اندازهٔ رادیانی زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta. \quad (3)$$

اثبات بنابر قضیه ۳.۶.۱۷

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (۴)$$

اگر θ اندازه رادیانی زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، از قضیه ۳.۳.۱۷ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta. \quad (۵)$$

از (۵) در (۴) مقدار قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 (1 - \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

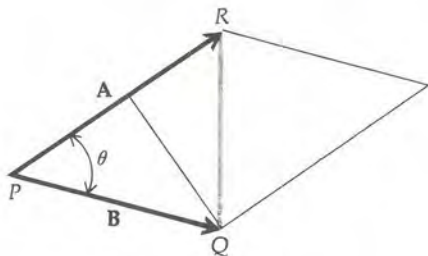
لذا

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2 \theta. \quad (۶)$$

چون $0 \leq \theta \leq \pi$ ، $\sin \theta \geq 0$ ، پس، بنابر (۶)،

$$\square \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta.$$

حال يك تعبير هندسی $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ را بررسی می‌کنیم. اگر $\overrightarrow{PR}$ نمایشی از $\mathbf{A}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نمایشی از $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه زاویه بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زاویه رأس P از مثلث RPQ است (شکل ۳.۶.۱۷ را ببینید). فرض کنید اندازه رادیانی این زاویه θ باشد. آنگاه مساحت متوازی‌الاضلاع با اضلاع مجاور $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ برحسب واحد مساحت، $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ است زیرا طول ارتفاع متوازی‌الاضلاع، $|\mathbf{B}| \sin \theta$ واحد و طول قاعده آن $|\mathbf{A}|$ واحد است. لذا بنابر (۳) نتیجه می‌گیریم که مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر با $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ واحد مساحت است.



شکل ۳.۶.۱۷

مثال ۱ نشان دهید که چهار ضلعی با رئوس $P(1, -2, 3)$ ، $Q(4, 3, -1)$ ،

$R(2, 2, 1)$ و $S(5, 7, -3)$ يك متوازی الاضلاع است، ومساحت آن را بیابید.

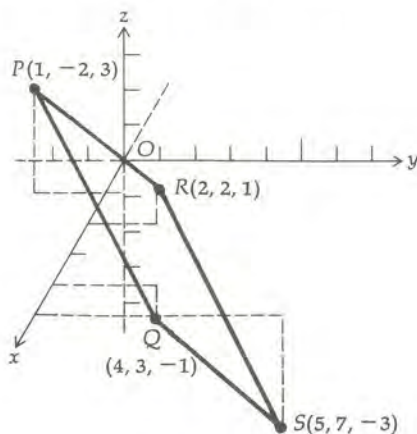
حل شکل ۴.۶.۱۷ چهارضلعی $PQSR$ را نشان می دهد.

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \langle 2-1, 2-(-2), 1-3 \rangle = \langle 1, 4, -2 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \langle 2-1, 2-(-2), 1-3 \rangle = \langle 1, 4, -2 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{RS}) = \langle 5-2, 7-2, -3-1 \rangle = \langle 3, 5, -4 \rangle$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{QS}) = \langle 5-4, 7-3, -3-(-1) \rangle = \langle 1, 4, -2 \rangle.$$



شکل ۴.۶.۱۷

چون $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{RS})$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PR}) = \mathbf{V}(\overrightarrow{QS})$ ، نتیجه می گیریم که $\overrightarrow{PQ}$ موازی با $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PR}$ موازی با $\overrightarrow{QS}$ است. بنابراین $PQSR$ يك متوازی الاضلاع است. فرض کنید $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$ و $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ ؛ دراین صورت

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \\ &= 3(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) - 4(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + 12(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + 20(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \\ &\quad - 16(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) - 6(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) - 10(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 8(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= 3(0) + 5(\mathbf{k}) - 4(-\mathbf{j}) + 12(-\mathbf{k}) + 20(0) - 16(\mathbf{i}) \\ &\quad - 6(\mathbf{j}) - 10(-\mathbf{i}) + 8(0) \\ &= -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}. \end{aligned}$$

پس

$$|A \times B| = \sqrt{۳۶ + ۴ + ۲۹} = \sqrt{۸۹}.$$

▲ لذا مساحت متوازی الاضلاع برابر $\sqrt{۸۹}$ واحد مساحت است.

قضیه زیر نشان می‌دهد که چگونه معلوم کنیم دو بردار در V_3 متوازی‌اند، و این قضیه از قضیه ۷.۶۰.۱۷ نتیجه می‌شود.

۸.۶۰.۱۷ قضیه اگر A و B دو بردار در V_3 باشند، A و B متوازی‌اند اگر و تنها اگر $A \times B = 0$.

اثبات اگر A یا B بردار صفر باشد، آنگاه بنابر قضیه ۷.۶۰.۱۷، $A \times B = 0$. چون بردار صفر با هر برداری موازی است، قضیه برقرار است. اگر نه A بردار صفر باشد و نه B ، $|A| \neq 0$ و $|B| \neq 0$. پس بنا بر (۳)، $|A \times B| = 0$ اگر و تنها اگر $\sin \theta = 0$. چون $|A \times B| = 0$ اگر و تنها اگر $A \times B = 0$ ، و $\sin \theta = 0$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) اگر و تنها اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$A \times B = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \theta = 0 \text{ یا } \theta = \pi.$$

اما، بنابر قضیه ۶.۳۰.۱۷ دو بردار ناصفر متوازی‌اند اگر و تنها اگر اندازه رادیانی زاویه بین دو بردار ۰ یا π باشد. لذا قضیه اثبات می‌شود. □

حاصلضرب $(B \times C)$. A را حاصلضرب اسکالر سه‌گانه بردارهای A ، B ، و C می‌نامند. درواقع، وجود پراونتز زائد است زیرا $A \cdot B$ اسکالر است، و بنابراین $A \cdot B \times C$ بیش از یک تعبیر ندارد.

۹.۶۰.۱۷ قضیه اگر A ، B و C بردارهایی در V_3 باشند، آنگاه

$$A \cdot B \times C = A \times B \cdot C. \quad (۷)$$

قضیه ۹.۶۰.۱۷ را می‌توان با انتخاب $A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ و $C = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ ، و سپس با نشان دادن اینکه عدد طرف چپ (۷) با عدد طرف راست آن یکی است، اثبات کرد. جزئیات اثبات را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱۷ را ببینید).

○ نمونه ۴ با شرط اینکه

$$C = \langle -5, 1, -4 \rangle, B = \langle 3, 4, -2 \rangle, A = \langle 1, -1, 2 \rangle$$

درستی قضیه ۹.۶.۱۷ را تحقیق می‌کنیم.

$$\begin{aligned} B \times C &= (3i + 4j - 2k) \times (-5i + j - 4k) \\ &= 2k - 12(-j) - 20(-k) - 16i + 10j - 2(-i) \\ &= -14i + 22j + 22k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot (B \times C) &= \langle 1, -1, 2 \rangle \cdot \langle -14, 22, 22 \rangle \\ &= -14 - 22 + 44 \\ &= 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= (i - j + 2k) \times (3i + 4j - 2k) \\ &= 2k - 2(-j) - 3(-k) + 2i + 6j + 8(-i) \\ &= -6i + 8j + 7k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot C &= \langle -6, 8, 7 \rangle \cdot \langle -5, 1, -4 \rangle \\ &= 30 + 8 - 28 \\ &= 10. \end{aligned}$$

○ لذا درستی قضیه برای این سه بردار تأیید می‌شود.

۹.۶.۱۷ قضیه اگر A و B دو بردار در V_3 باشند، آنگاه بردار $A \times B$ هم بر A عمود است و هم بر B .

اثبات بنا بر قضیه ۹.۶.۱۷

$$A \cdot A \times B = A \times A \cdot B.$$

طبق قضیه ۹.۶.۱۷ $(i) A \times A = 0$ ، پس، بنا بر معادله فوق داریم

$$A \cdot A \times B = 0 \cdot B = 0.$$

چون حاصلضرب نقطه‌ای A و $A \times B$ صفر است، از تعریف ۷.۳.۱۷ نتیجه می‌شود که $A \times B$ و A متعامدند.

همچنین طبق قضیه ۹.۶.۱۷

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{B}.$$

بازهم با استفاده از قضیه ۹.۶.۱۷ (i) داریم $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ، و لذا بنا بر معادله بالا

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

پس، چون حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ صفر است، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ و $\mathbf{B}$ متعامدند و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

از قضیه ۹.۶.۱۷ می‌توان استنتاج کرد که اگر ابتدای نمایشهای بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ یکی باشد، آنگاه نمایش $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ بر صفحه تشکیل شده از نمایشهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.

مثال ۲ نقاط $P(-1, -2, -3)$ ، $Q(-2, 1, 0)$ و $R(0, 5, 1)$ مفروض‌اند. بردار واحدی بیابید که نمایش بر صفحه ماربر نقاط P ، Q ، و R عمود باشند.

حل فرض کنید $\mathbf{A} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PQ})$ و $\mathbf{B} = \mathbf{V}(\overrightarrow{PR})$. آنگاه

$$\mathbf{A} = \langle -2 - (-1), 1 - (-2), 0 - (-3) \rangle = \langle -1, 3, 3 \rangle$$

$$\mathbf{B} = \langle 0 - (-1), 5 - (-2), 1 - (-3) \rangle = \langle 1, 7, 4 \rangle.$$

صفحه ماربر نقاط P ، Q ، و R صفحه‌ای است که از $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ یعنی از نمایشهای بردارهای، به ترتیب، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ تشکیل می‌شود. بنا براین، هر نمایشی از بردار $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ بر این صفحه عمود است.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = -9\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$$

بردار مطلوب، بردار واحدی است موازی با $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. برای یافتن این بردار واحد از قضیه ۹.۲.۱۷ استفاده، $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را بر $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\blacktriangle \quad \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = -\frac{9}{\sqrt{230}}\mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{230}}\mathbf{j} - \frac{10}{\sqrt{230}}\mathbf{k}.$$

مثال ۳ معادله‌ای برای صفحه ماربر نقاط $P(1, 3, 2)$ ، $Q(3, -2, 2)$ ، و $R(2, 1, 3)$ بیابید.

حل $\vec{V}(\overrightarrow{PR}) = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{V}(\overrightarrow{QR}) = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ يك بردار قائم بر صفحه مطلوب، حاصلضرب برداری $\vec{V}(\overrightarrow{QR}) \times \vec{V}(\overrightarrow{PR})$ است که عبارت است از

$$(-\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \times (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

لذا اگر $P_0 = (1, 3, 2)$ و $N = \langle 5, 2, -1 \rangle$ ، بنا بر قضیه ۲.۴.۱۷ معادله‌ای برای صفحه مطلوب عبارت است از

$$5(x-1) + 2(y-3) - (z-2) = 0$$

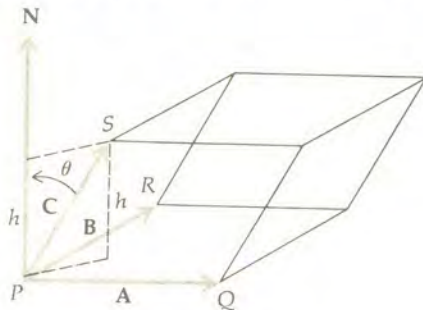
یا معادلش

$$\blacktriangle \quad 5x + 2y - z - 9 = 0.$$

تعبیر دیگری از حاصلضرب عددی سه گانه، بنا در نظر گرفتن يك متوازی السطوح به دست می آید که یا لهایش $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشند و $\vec{B} = \vec{V}(\overrightarrow{PR})$ ، $\vec{A} = \vec{V}(\overrightarrow{PQ})$ و $\vec{C} = \vec{V}(\overrightarrow{PS})$ شکل ۵.۶.۱۷ را ببینید. بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ يك بردار قائم بر صفحه $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ است. بردار $-(\vec{A} \times \vec{B})$ نیز يك بردار قائم بر این صفحه است. یقین نداریم کداميك از دو بردار $(\vec{A} \times \vec{B})$ یا $-(\vec{A} \times \vec{B})$ زاویه کوچکتری با $\vec{C}$ می سازد. فرض کنید N یکی از دو بردار $(\vec{A} \times \vec{B})$ و $-(\vec{A} \times \vec{B})$ باشد که زاویه اش (θ) با $\vec{C}$ بر حسب رادیان از $\pi/2$ کوچکتر است. در این صورت، نمایشهای N و $\vec{C}$ با نقاط ابتدایی در P ، مطابق شکل ۵.۶.۱۷، در يك طرف صفحه $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PR}$ واقع اند. مساحت قاعده متوازی السطوح، $|\vec{A} \times \vec{B}|$ واحد مربع است. اگر طول ارتفاع این متوازی السطوح h واحد باشد، و اگر حجم متوازی السطوح V واحد مکعب باشد، داریم

$$V = |\vec{A} \times \vec{B}| h. \quad (۸)$$

حال حاصلضرب نقطه‌ای $N \cdot \vec{C}$ را در نظر می گیریم. بنا بر قضیه ۴.۳.۱۷، $N \cdot \vec{C} = |N| |\vec{C}| \cos \theta$ اما $h = |\vec{C}| \cos \theta$ ، ولذا $N \cdot \vec{C} = |N| h$ چون N یا $(\vec{A} \times \vec{B})$ است یا $-(\vec{A} \times \vec{B})$ ، نتیجه می شود که $|N| = |\vec{A} \times \vec{B}|$. پس



شکل ۵.۶.۱۷

$$N \cdot C = |A \times B|h. \quad (۹)$$

از مقایسه (۸) و (۹) داریم

$$N \cdot C = V.$$

نتیجه اینکه، اندازه حجم متوازی السطوح یا $(A \times B) \cdot C$ است یا $-(A \times B) \cdot C$ ؛ یعنی، اندازه حجم متوازی السطوح، قدر مطلق حاصلضرب عددی سه گانه $A \times B \cdot C$ است.

مثال ۴ حجم متوازی السطوحی با رئوس $P(۵, ۲, ۵)$ ، $Q(۴, ۱۰, ۶)$ ، $R(۱, ۸, ۷)$ و $S(۲, ۶, ۹)$ و یالهای $\vec{PQ}$ ، $\vec{PR}$ و $\vec{PS}$ را بیابید.

حل شکل ۶.۶.۱۷ متوازی السطوح را نشان می دهد. گیریم

$$A = V(\vec{PQ}) = \langle -1, 6, 1 \rangle, \quad B = V(\vec{PR}) = \langle -4, 2, 2 \rangle,$$

$$C = V(\vec{PS}) = \langle -3, 2, 4 \rangle.$$

در این صورت

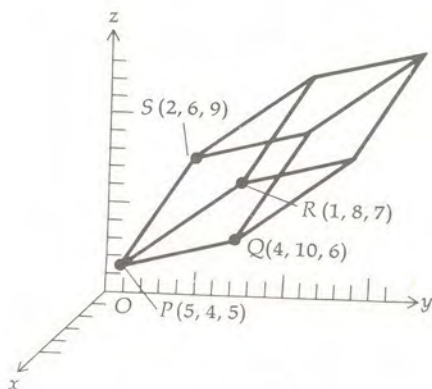
$$A \times B = (-i + 6j + k) \times (-4i + 2j + 2k)$$

$$= 8i - 2j + 20k.$$

بنابراین

$$(A \times B) \cdot C = \langle 8, -2, 20 \rangle \cdot \langle -3, 2, 4 \rangle = -24 - 4 + 80 = 52.$$

پس حجم، ۵۲ واحد مکعب است.



شکل ۶.۶.۱۷

مثال ۵ فاصله بین دو خط متناظر l_1 و l_2 مذکور در مثال ۵ از بخش ۵.۱۷ را بیابید.

حل چون l_1 و l_2 دو خط متناظرند، دو صفحه متوازی P_1 و P_2 که به ترتیب l_1 و l_2 را شامل‌اند وجود دارند. شکل ۷.۶.۱۷ را ببینید. فرض کنید فاصله بین صفحات P_1 و P_2 ، d واحد باشد. فاصله بین l_1 و l_2 نیز d واحد است. یک بردار قائم بر این دو صفحه، $\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})$ است. فرض کنید $\mathbf{U}$ یک بردار قائم واحد در جهت $\mathbf{N}$ باشد. در این صورت

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})|}$$

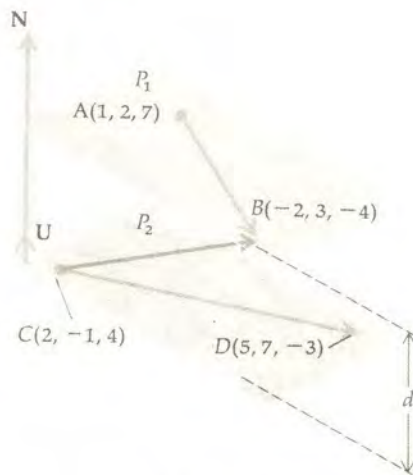
حال دو نقطه، یکی در هر یک از صفحات (مثلاً B و C) انتخاب می‌کنیم. آنگاه تصویر اسکالر $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB})$ بر $\mathbf{N}$ عبارت است از $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{CB})$ و

$$d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}| = \left| \mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \frac{\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})}{|\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD})|} \right|.$$

بعد از انجام محاسبات لازم داریم

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$



شکل ۷.۶.۱۷

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \times \mathbf{V}(\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -11 \\ 3 & 8 & -7 \end{vmatrix} = 27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

$$\mathbf{U} = \frac{27(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})}{\sqrt{27^2(3^2 + 2^2 + 1^2)}} = \frac{3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$$

و بالاخره، $\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ ، و لذا

$$\Delta \quad d = |\mathbf{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \mathbf{U}| = \frac{1}{\sqrt{14}} |-12 - 8 + 8| = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \sqrt{14}.$$

تمرینهای ۶.۱۷

دو تمرینهای ۱ تا ۱۲، فرض کنید $\mathbf{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ ، $\mathbf{B} = \langle 4, -3, -1 \rangle$ ، $\mathbf{C} = \langle -5, -3, 5 \rangle$ ، $\mathbf{D} = \langle -2, 1, 6 \rangle$ ، $\mathbf{E} = \langle 4, 0, -7 \rangle$ ، و $\mathbf{F} = \langle 0, 2, 1 \rangle$.

۱. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ را بیابید.
۲. $\mathbf{D} \times \mathbf{E}$ را بیابید.
۳. $(\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{F})$ را بیابید.
۴. $(\mathbf{C} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{D} \times \mathbf{F})$ را بیابید.
۵. با بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، درستی قضیه ۳.۶.۱۷ را تحقیق کنید.
۶. با بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ ، درستی قضیه ۴.۶.۱۷ را تحقیق کنید.
۷. با بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و ضابطه $c = 3$ ، درستی قضیه ۵.۶.۱۷ (i) را تحقیق کنید.
۸. با بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ و ضابطه $c = 3$ ، درستی قضیه ۵.۶.۱۷ (ii) را تحقیق کنید.
۹. با بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ ، درستی قضیه ۹.۶.۱۷ را تأیید کنید.
۱۰. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ و $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ را بیابید.
۱۱. $(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$ و $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{D})$ را بیابید و تساوی آنها را نشان دهید.
۱۲. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| |\mathbf{C} \times \mathbf{D}|$ را بیابید.
۱۳. قضیه ۲.۶.۱۷ (ii) و (iii) را اثبات کنید.
۱۴. قضیه ۴.۶.۱۷ را اثبات کنید.
۱۵. قضیه ۵.۶.۱۷ (i) را اثبات کنید.

۱۶. قضیه ۵.۶.۱۷ (ii) را اثبات کنید. ۱۷. قضیه ۹.۶.۱۷ را اثبات کنید.

۱۸. دوبردار واحد

$$\mathbf{A} = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} - \frac{4}{9}\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$$

مفروض‌اند. اگر θ اندازه رادیانی زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد، $\sin \theta$ را با دوش بیا بید: (الف) با استفاده از حاصلضرب برداری (فرمول (۳) مذکور در این بخش)؛ (ب) با استفاده از حاصلضرب نقطه‌ای و یک اتحاد مثلثاتی.

۱۹. دستورات مذکور در تمرین ۱۸ را در مورد دوبردار واحد زیر به کار برید.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}.$$

۲۰. نشان دهید که چهارضلعی با رئوس $(1, 1, 3)$ ، $(-2, 1, -1)$ ، $(-5, 4, 0)$ ، و $(-8, 4, -2)$ یک متوازی‌الاضلاع است و مساحت آن را بیا بید.

۲۱. نشان دهید که چهارضلعی با رئوس $(1, -2, 3)$ ، $(4, 3, -1)$ ، $(2, 2, 1)$ ، و $(5, 7, -3)$ یک متوازی‌الاضلاع است و مساحت آن را بیا بید.

۲۲. مساحت متوازی‌الاضلاع $PQRS$ را با شرط $\mathbf{V}(\overrightarrow{PQ}) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{PS}) = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ بیا بید.

۲۳. مساحت مثلث با رئوس $(0, 2, 2)$ ، $(8, 8, -2)$ ، و $(9, 12, 6)$ را بیا بید.

۲۴. مساحت مثلث با رئوس $(4, 5, 6)$ ، $(4, 4, 5)$ ، و $(3, 5, 5)$ را بیا بید.

دو تمرینهای ۲۵ و ۲۶ با استفاده از حاصلضرب برداری معادله‌ای برای صفحه‌ماربسه نقطه مفروض بیا بید.

$$(3, 4, -1), (-8, 1, 6), (-2, 2, 2)$$

$$(a, b, 0), (a, 0, c), (0, b, c)$$

۲۷. فرض کنید $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضع بردار $\mathbf{A}$ ، $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضع بردار $\mathbf{B}$ ، و $\overrightarrow{OR}$ نمایش موضع بردار $\mathbf{C}$ باشد. ثابت کنید که مساحت مثلث PQR عبارت است از

$$\frac{1}{2} |(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{A})|.$$

۲۸. بردار واحدی بیابید که نمایشهای آن عمود بر صفحه شامل $\vec{PQ}$ و $\vec{PR}$ باشند: $\vec{PQ}$ يك نمايش بردار $\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{PR}$ يك نمايش بردار $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ است.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۱ بردار واحدی بیابید که نمایشهای عمود بر صفحه مار بر نقاط P ، Q ، و R باشند.

$$P(5, 2, -1), \quad Q(2, 4, -2), \quad R(11, 1, 4). \quad ۲۹$$

$$P(-2, 1, 0), \quad Q(2, -2, -1), \quad R(-5, 0, 2). \quad ۳۰$$

$$P(1, 4, 2), \quad Q(3, 2, 4), \quad R(4, 3, 1). \quad ۳۱$$

۳۲. حجم متوازی السطوحی با یالهای $\vec{PQ}$ ، $\vec{PR}$ ، و $\vec{PS}$ را بیابید: P ، Q ، R ، و S به ترتیب عبارت اند از $(1, 3, 4)$ ، $(3, 5, 3)$ ، $(2, 1, 6)$ ، و $(2, 2, 5)$.

۳۳. حجم متوازی السطوح $PQRS$ را بیابید اگر بردارهای $\vec{V}(\vec{PQ})$ ، $\vec{V}(\vec{PR})$ ، و $\vec{V}(\vec{PS})$ به ترتیب عبارت باشند از $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ، $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ، و $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

۳۴. اگر A و B دو بردار دلخواه از V_3 باشند، ثابت کنید که

$$(A - B) \times (A + B) = 2(A \times B).$$

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، فاصله عمودی بین دو خط متناظر مفروض را بیابید.

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3} \quad \text{و} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}. \quad ۳۵$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{-3}. \quad ۳۶$$

۳۷. فرض کنید P ، Q ، و R سه نقطه ناهمخط در R^3 باشند، و فرض کنید $\vec{OP}$ ، $\vec{OQ}$ ، و $\vec{OR}$ به ترتیب نمایشهای موضع بردارهای A ، B ، و C باشند. ثابت کنید که نمایشهای بردار $A \times B + B \times C + C \times A$ بر صفحه مار بر نقاط P ، Q ، و R عمودند.

۳۸. معادله‌ای برای صفحه شامل نقاط انتهایی نمایشهای موضع بردارهای $2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ، $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ، و $5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ بیابید.

۷.۱۷ استوانه‌ها و رویه‌های دوار

همان‌طور که قبلاً هم گفتیم نمودار يك معادله سه‌متغیری يك رویه است. يك معادله، نمايش يك رویه است اگر مختصات هر نقطه رویه در آن معادله صدق کند، و هر نقطه‌ای که مختصاتش

در معادله صادق می‌کند بر رویه قرار داشته باشد. قبلاً در مورد دونوع رویه: صفحه و کره، بحث کرده‌ایم. نوع دیگری از رویه که نسبتاً ساده است، استوانه است. احتمالاً با استوانه‌های مستدیر قائم از قبل آشنا هستید. حال رویه استوانه‌ای را در حالت کلیتر مورد بحث قرار می‌دهیم.

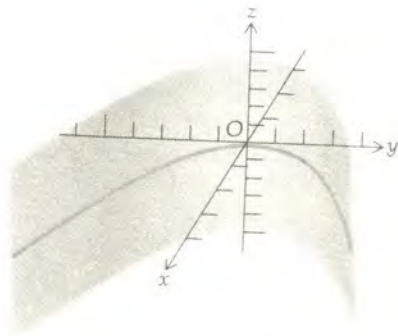
۱۷.۰۷ تعریف استوانه رویه‌ای است که با حرکت یک خط در امتداد یک منحنی مسطح تولید می‌شود، با این شرط که آن خط همواره موازی با خطی ثابت باشد که در صفحه منحنی مفروض قرار ندارد. خط متحرک را مولد استوانه، و منحنی مسطح مفروض را هادی استوانه می‌نامند. هر موضع مولد، یک خط مولد استوانه نام دارد.

بحث ما محدود است به استوانه‌هایی که هادی آنها در یکی از صفحات مختصات باشد و خطوط مولد آنها عمود بر آن صفحه باشند. اگر خطهای مولد یک استوانه عمود بر صفحه هادی آن باشند، می‌گوییم استوانه بر آن صفحه عمود است. استوانه مستدیر قائم که شما با آن آشنا هستید، استوانه‌ای است که هادیش دایره‌ای است واقع در صفحه‌ای عمود بر استوانه.

○ نمونه ۱ در شکل ۱۷.۰۷ استوانه‌ای را می‌بینید که هادیش سهمی $8x = y^2$ واقع در صفحه xy است و خطهای مولدش موازی با محور z ها هستند. این استوانه را یک استوانه سهموی می‌نامند. یک استوانه بیضوی در شکل ۲۰.۷۰۱۷ نشان داده شده است؛ هادیش بیضی $144 = 9x^2 + 16y^2$ واقع در صفحه xy است و خطوط مولدش موازی با محور z ها هستند. در شکل ۳۰.۷۰۱۷ یک استوانه هذلولوسی را می‌بینید که هادیش هذلولوسی

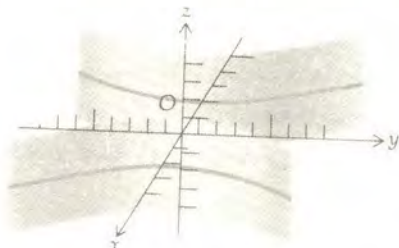


شکل ۲۰.۷۰۱۷



شکل ۱۰.۷۰۱۷

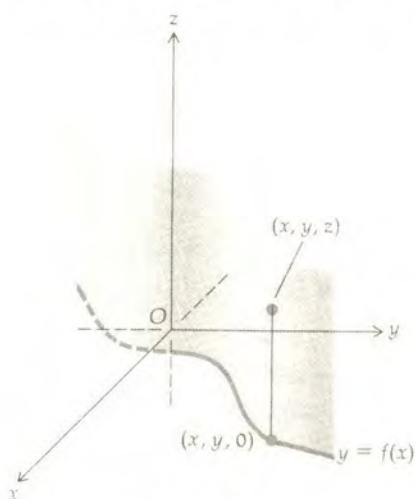
$100 = 4y^2 - 25x^2$ واقع در صفحه xy است و خطوط مولدش موازی با محور z ها هستند.



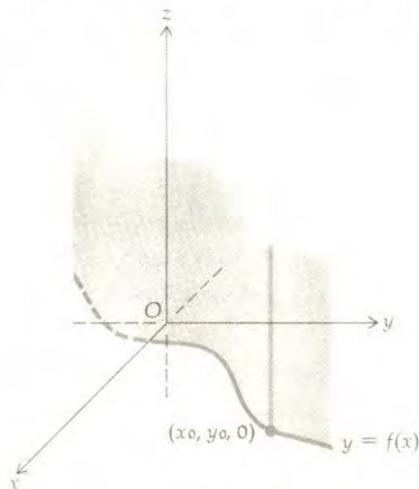
○

شکل ۳.۷.۱۷

حال می‌خواهیم معادله استوانه‌ای را پیدا کنیم که هادیش در یکی از صفحات مختصات است، و خطوط مولدش موازی با محور مختصاتی هستند که در صفحه واقع نیست. مثلاً هادی را در صفحه xy می‌گیریم و خطوط مولد را موازی با محور z ها. به شکل ۳.۷.۱۷ نگاه کنید. فرض کنید یک معادله هادی واقع در صفحه xy ، $y = f(x)$ باشد. اگر $(x_0, y_0, 0)$ نقطه‌ای از صفحه xy باشد که در این معادله صدق کند، آنگاه هر نقطه (x_0, y_0, z) در فضای سه بعدی، که در آن z یک عدد حقیقی دلخواه است، نیز در این معادله صدق می‌کند، زیرا در این معادله z وجود ندارد. نقاطی که به صورت (x_0, y_0, z) اند همه بر خط ماربر نقطه $(x_0, y_0, 0)$ و موازی با محور z ها واقع هستند. این خط یک خط مولد استوانه است. پس هر نقطه‌ای که مختصات x و y آن در معادله $y = f(x)$ صدق کنند بر استوانه قرار دارد. برعکس، اگر نقطه $P(x, y, z)$ بر استوانه واقع باشد (شکل ۳.۷.۱۷)



شکل ۳.۷.۱۷



شکل ۳.۷.۱۷

را ببینید)، آنگاه نقطه $(x, y, 0)$ بر آن هادی استوانه قرار دارد که در صفحه xy واقع است، و لذا مختصات x و y نقطه P در معادله $y = f(x)$ صدق می کنند. پس، اگر $y = f(x)$ به عنوان معادله يك نمودار در فضای سه بعدی تلقی شود، نمودار استوانه ای است که خطوط مولدش موازی با محور z ها هستند، و هادیش منحنی $y = f(x)$ در صفحه $z = 0$ است. وقتی که هادی در یکی دیگر از صفحات مختصات باشد، بحث مشابهی می توان کرد. این نتایج را در قضیه زیر خلاصه می کنیم.

۲.۷.۱۷ قضیه در فضای سه بعدی، نمودار معادله ای شامل دو متغیر از سه متغیر x, y, z ، استوانه ای است که خطوط مولدش موازی اند با محور مختصات مربوط به متغیری که در معادله ظاهر نمی شود، و هادیش يك منحنی است در صفحه مختصات مربوط به دو متغیر موجود در معادله.

○ نمونه ۲ از قضیه ۲.۷.۱۷ نتیجه می شود که يك معادله استوانه سهموی شکل ۲.۷.۱۷، $xy^2 = 8x$ است، با این شرط که به عنوان معادله ای در R^3 تلقی شود. همین طور، معادلات استوانه بیضوی شکل ۲.۷.۱۷ و استوانه هذلولوی شکل ۳.۷.۱۷ به ترتیب عبارت اند از $144 = 16y^2 + 9x^2$ و $100 = 4y^2 - 25x^2$ به عنوان معادلاتی در R^3 . ○

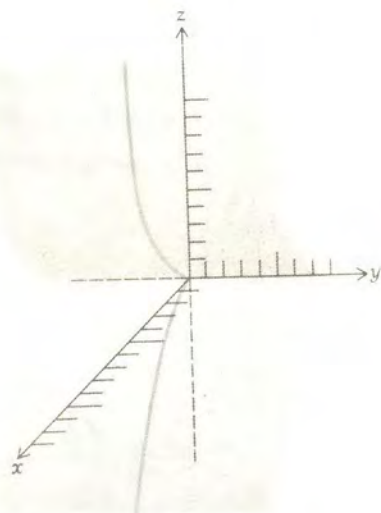
مقطع يك رویه با يك صفحه مفروض، مجموعه تمام نقاطی از رویه است که در آن صفحه قرار دارند. اگر صفحه ای با صفحه هادی يك استوانه موازی باشد، مقطع استوانه با این صفحه همان هادی استوانه است. مثلاً، مقطع استوانه بیضوی شکل ۲.۷.۱۷ با هر صفحه موازی با صفحه xy ، يك بیضی است.

مثال ۱ نمودار هر يك از معادلات زیر را رسم کنید: (الف) $y = \ln z$ ؛ (ب) $z^2 = x^3$.

حل

(الف) نمودار، استوانه ای است که هادیش منحنی $y = \ln z$ در صفحه yz است و خطوط مولدش موازی با محور x ها هستند. این نمودار در شکل ۶.۷.۱۷ رسم شده است.

(ب) نمودار، استوانه ای است که هادیش در صفحه xz واقع است و خطوط مولدش موازی با محور y ها هستند. يك معادله هادی، منحنی $z^2 = x^3$ در صفحه xz است، نمودار در شکل ۷.۷.۱۷ نشان داده شده است.



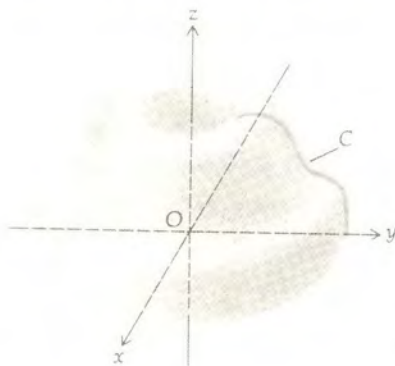
▲ شکل ۷.۷.۱۷



شکل ۶.۷.۱۷

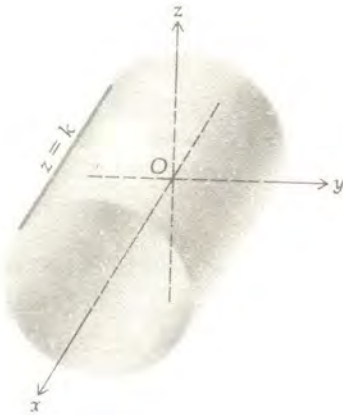
۳.۷.۱۷ تعریف اگر منحنی مسطحی را حول يك خط ثابت واقع در صفحه منحنی دوران دهیم، رویه‌ای مرسوم به **رویه دوار** تولید می‌شود. خط ثابت را **محور رویه دوار** و منحنی مسطح را **منحنی مولد** آن می‌نامند.

شکل ۸.۷.۱۷ رویه دواری را نشان می‌دهد که منحنی مولدش منحنی C واقع در صفحه xy ، و محورش محور z است. کره مثال خاصی از يك رویه دوار است زیرا کره را می‌توان با دوران يك نیم‌دایره حول قطرش به وجود آورد.

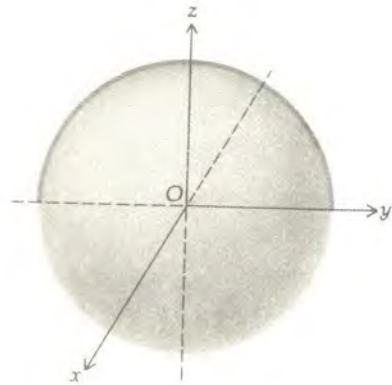


شکل ۸.۷.۱۷

○ نمونه ۳ شکل ۹.۷.۱۷ کره‌ای را نشان می‌دهد که با دوران نیم‌دایره $y^2 + z^2 = r^2$ ، $z \geq 0$ ، حول محور y ها، تولید شده است. مثال دیگری از رویه دوار، استوانه مستدیر قائم است؛ منحنی مولد و محور آن خطوط مستقیم متوازی هستند. اگر منحنی مولد خط $z = k$ واقع در صفحه yz ، و محور، محور x ها باشد، استوانه مستدیر قائم شکل ۱۰.۷.۱۷ به دست می‌آید.



○ شکل ۱۰.۷.۱۷



شکل ۹.۷.۱۷

حال معادله‌ای برای رویه حاصل از دوران منحنی واقع در صفحه yz به معادله دوبعدی

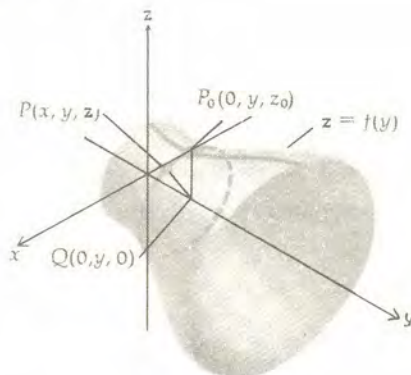
$$z = f(y) \quad (۱)$$

حول محور y ها، می‌یابیم. به شکل ۱۱.۷.۱۷ نگاه کنید. فرض کنید نقطه داخلی از رویه دوار باشد. صفحه‌ای ماربر P و عمود بر محور y ها رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع صفحه با محور y ها را با $Q(0, y, 0)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $P_0(0, y, z_0)$ نقطه تقاطع صفحه با منحنی مولد باشد. چون مقطع رویه با صفحه ماربر P یک دایره است، P واقع بر رویه است اگر و تنها اگر

$$|\overline{QP}|^2 = |\overline{QP_0}|^2. \quad (۲)$$

چون $|\overline{QP}| = \sqrt{x^2 + z^2}$ و $|\overline{QP_0}| = z_0$ ، از (۲) به دست می‌آوریم

$$x^2 + z^2 = z_0^2. \quad (۳)$$



شکل ۱۱-۷-۱۷

نقطه P_0 واقع بر منحنی مولد است؛ لذا مختصاتش باید در (۱) صدق کنند، در نتیجه

$$z_0 = f(y). \quad (۴)$$

بنابر (۳) و (۴)، نقطه P بر رویه دوار واقع است اگر و تنها اگر

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2. \quad (۵)$$

معادله (۵) معادله مطلوب برای رویه دوار است. چون (۵) با

$$\pm \sqrt{x^2 + z^2} = f(y)$$

معادل است، با قراردادن $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$ به جای z در (۱) می‌توان (۵) را به دست آورد. به روشی مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که اگر منحنی واقع در صفحه yz با معادله دوبعدی

$$y = g(z) \quad (۶)$$

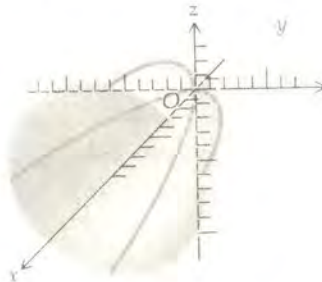
را حول محور z ها دوران دهیم، معادله رویه دوار حاصل با قراردادن $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ به جای y در (۶) به دست می‌آید. اگر يك منحنی واقع در هريك از صفحات مختصات را حول هر يك از محورهای مختصات واقع در آن صفحه دوران دهیم، وضع مشابهی برقرار است. به طور خلاصه، نمودارهای هريك از معادلات زیر رویه‌های دواری هستند با محور ذکر شده: $x^2 + y^2 = [F(z)]^2$ با محور z ها؛ $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ با محور y ها؛ $y^2 + z^2 = [F(x)]^2$ با محور x ها. در هر حالت، مقاطع رویه با صفحات عمود بر محور، دوایری هستند که مراکزشان بر محور واقع‌اند.

مثال ۲ معادله‌ای برای رویه دوار حاصل از دوران سهمی $y^2 = 4x$ در صفحه xy حول محور z ها بیابید. نمودار رویه را رسم کنید.

حل در معادله سهمی به جای y ، $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ را قرار می‌دهیم و

$$y^2 + z^2 = 4x$$

را به دست می‌آوریم. نمودار در شکل ۱۲.۷.۱۷ رسم شده است. اگر سهمی $z^2 = 4x$ در صفحه xz را حول محور x ها دوران دهیم باز هم همین رویه تولید می‌شود.



شکل ۱۲.۷.۱۷

رویه حاصل در مثال ۲ را يك سهمیوادیوار می‌نامند. اگر يك بیضی را حول یکی از محورهايش دوران دهیم رویه‌ای موسوم به بیضیوادیوار به دست می‌آید. هذلولیوادیوار از دوران يك هذلولی حول يك محور حاصل می‌شود.

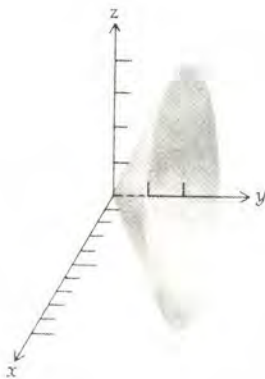
مثال ۳ نمودار رویه $0 = y^2 - 4x^2 + z^2$ را وقتی که $0 \leq y$ رسم کنید.

حل معادله مفروض به صورت $x^2 + z^2 = [F(y)]^2$ است؛ لذا نمودارش رویه دوازی است که محورش، محور y هاست. اگر y را از معادله مفروض محاسبه کنیم داریم

$$2y = \pm\sqrt{x^2 + z^2}.$$

پس منحنی مولد می‌تواند یا خط مستقیم $2y = x$ در صفحه xy باشد، یا خط مستقیم $2y = z$ در صفحه yz . حال با توجه به این واقعیت که مقاطع عرضی رویه با صفحات عمود بر محور y ها دوازی هستند که مراکزشان بر محور y ها قرار دارند، و با رسم دو منحنی مولد ممکن، رویه‌ای را که در شکل ۱۳.۷.۱۷ نشان داده شده است، به دست می‌آوریم (توجه کنید که چون $0 \leq y$ ، فقط يك دامنه مخروط را رسم کرده‌ایم).

رویه به دست آمده در مثال ۳ را يك مخروط مستدیر قائم می‌نامند.



شکل ۱۳۰۷۰۱۷

تمرینهای ۷۰۱۷

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۳ مقطع استوانه مفروض با صفحه مفروض را رسم کنید.

۱. $4z^2 - y^2 = 4$ صفحه yz ؛ ۲. $x = |y|$ صفحه xy

۳. $z = e^x$ صفحه xz

در هر یک از تمرینهای ۴ تا ۱۱، استوانه‌ای را که معادله آن داده شده، رسم کنید.

۴. $x^2 - z^2 = 4$ ۵. $4x^2 + 9y^2 = 36$

۶. $z = \sin y$ ۷. $y = |z|$

۸. $x^2 = y^3$ ۹. $z = 2x^2$

۱۰. $z^2 = 4y^2$ ۱۱. $y = \cosh x$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۸، مطلوب است معادله‌ای برای رویه دوار حاصل از دوران منحنی مسطح مفروض حول محور تعیین شده. رویه را رسم کنید.

۱۲. $x^2 = 4y$ در صفحه xy ، حول محور x ها.

۱۳. $x^2 = 4y$ در صفحه xy ، حول محور y ها.

۱۴. $x^2 + 4z^2 = 16$ در صفحه xz ، حول محور z ها.

۱۵. $x^2 + 4z^2 = 16$ در صفحه xz ، حول محور x ها.

۱۶. $y^2 = z^3$ در صفحه yz ، حول محور z ها.

۱۷. $y = \sin x$ در صفحه xy ، حول محور x ها.

۱۸. $144 = 4z^2 - 9y^2$ در صفحه yz ، حول محور z ها.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۴، برای رویه دوار مفروض، يك منحنی مولد بیابید و محور آن را تعیین کنید. رویه را رسم کنید.

$$y^2 + z^2 = e^{2x} \quad ۲۰$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4 \quad ۱۹$$

$$4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36 \quad ۲۲$$

$$x^2 + z^2 = |y| \quad ۲۱$$

$$4x^2 + 4y^2 - z = 9 \quad ۲۴$$

$$9x^2 - y^2 + 9z^2 = 0 \quad ۲۳$$

۲۵. تراکتریس

$$x = t - a \tanh \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

از $x = -a$ تا $x = 2a$ را حول محور xy ها دوران می دهیم. رویه دوار حاصل را رسم کنید.

۸.۱۷ رویه های درجه دوم

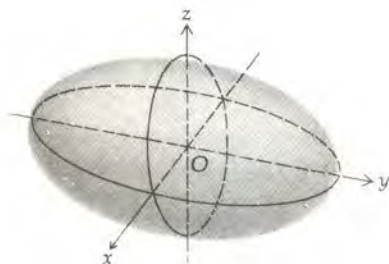
تمودار يك معادله درجه دوم سه متغیری x ، y ، و z را يك رویه درجه دوم می نامند. این رویه ها با مقاطع مخروطی در صفحه متناظرند.

ساده ترین انواع رویه های درجه دوم استوانه های سهموی، بیضوی، و هذلولوی هستند که موضوع بحث در بخش قبل بودند. شش نوع دیگر رویه درجه دوم وجود دارند که اینک بررسی می شوند. محورهای مختصات را طوری انتخاب می کنیم که معادلات مربوط به ساده ترین شکل در آیند. در بحث مربوط به هر يك از این رویه ها، مقاطع رویه با صفحات موازی صفحات مختصات را در نظر خواهیم گرفت. این مقاطع در تجسم رویه به ما كمك خواهند کرد.

بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (۱)$$

که در آن a ، b ، و c مثبت اند (شکل ۸.۱۷ را ببینید). اگر در (۱)، 0 به جای z قرار گیرد، مقطع بیضیوار با صفحه xy به دست می آید،



شکل ۱۰۸۰۱۷

که عبارت است از بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ برای به دست آوردن مقاطع رویه با صفحات $z = k$ را به جای z در معادله بیضیوار قرار می‌دهیم و

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

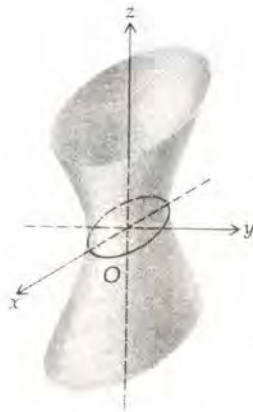
را به دست می‌آوریم. اگر $|k| < c$ ، مقطع يك بیضی است، و وقتی که $|k|$ افزایش می‌یابد و به مقدار c نزدیک می‌شود، طول اقطار کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک می‌شود. اگر $|k| = c$ ، مقطع صفحه $z = k$ با بیضیوار، تنها نقطه $(0, 0, k)$ است. اگر $|k| > c$ ، مقطعی وجود ندارد. اگر مقاطع رویه با صفحات موازی با صفحات مختصات دیگر را در نظر بگیریم، وضع مشابهی برقرار است.

اعداد a, b, c و نصف طولهای اقطار بیضیوار هستند. اگر دوتا از این سه تا عدد با هم مساوی باشند، يك بیضیوار دوار خواهیم داشت که کره‌وار نیز نامیده می‌شود. کره‌واری که در مورد آن، عدد سوم از دو عدد دیگر بزرگتر باشد، کشیده نامیده می‌شود. شكل يك کره‌وار کشیده شبیه يك توپ فوتبال آمریکایی است. اگر عدد سوم از دو عدد دیگر کوچکتر باشد، يك کره‌وار پنج به دست می‌آید. اگر اعداد a, b, c در معادله بیضیوار همه با هم مساوی باشند، بیضیوار يك کره است.

هذلولیوار بیضوی یکپارچه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (۲)$$

که در آن a, b, c مثبت‌اند (شکل ۲۰۸۰۱۷ را ببینید).
مقاطع رویه با صفحات $z = k$ ، بیضیهایی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 + k^2/c^2$ هستند. وقتی که $k = 0$ ، طولهای قطرهای بیضی کوچکترین مقادیر را دارند، و وقتی که $|k|$ افزایش می‌یابد به طول این قطرها نیز اضافه می‌شود. مقاطع با صفحات $z = k$ ، هذلولیهای



شکل ۲۰۸-۱۷

با $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1 - k^2/a^2$ هستند. اگر $|k| < a$ ، محور قاطع هذلولی موازی با محور y هاست، و اگر $|k| > a$ ، محور قاطع موازی با محور z هاست. اگر $k = a$ ، هذلولی، به دو خط مستقیم: $y/b - z/c = 0$ و $y/b + z/c = 0$ تبدیل می‌شود. به طور مشابه، مقاطع با صفحات $y = k$ نیز هذلولی هستند. محور این هذلولیوار محور z هاست.

اگر $a = b$ ، رویه یک هذلولیوار دوار است که محورش خط شامل محور مزدوج است.

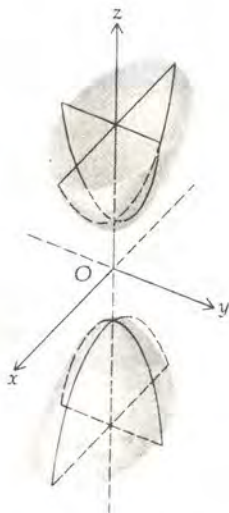
هذلولیوار بیضوی دوپارچه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (۳)$$

که در آن a, b, c و مثبت اند (شکل ۳۰۸-۱۷ را ببینید).

با قرار دادن k به جای z در (۳)، $x^2/a^2 + y^2/b^2 = k^2/c^2 - 1$ به دست می‌آید. اگر $|k| < c$ ، صفحه $z = k$ با رویه مقطعی ندارد؛ لذا هیچ نقطه از رویه بین صفحات $z = c$ و $z = -c$ قرار ندارد. اگر $|k| = c$ ، اشتراك صفحه $z = k$ با رویه مفروض تنها نقطه $(0, 0, k)$ است. اگر $|k| > c$ ، مقطع رویه با صفحه $z = k$ یک بیضی است، و طولهای اقطار بیضی همراه با افزایش $|k|$ افزایش می‌یابد.

مقاطع رویه با صفحات $x = k$ هذلولیهایی $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1 + k^2/a^2$ اند که محورهایی قاطعشان موازی با محور z ها هستند. همین‌طور، مقاطع رویه با صفحات $y = k$ هذلولیهایی با معادلات $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1 + k^2/b^2$ اند که محورهایی قاطعشان باز هم



شکل ۳۰۸-۱۷

با محور z ها موازی‌اند. اگر $a = b$ ، رویه یک هذلولیوار دوار است که محور آن، خط شامل محور قاطع هذلولی است. هر یک از سه رویه درجه دوم فوق نسبت به هر یک از صفحات مختصات و نیز نسبت به مبدأ متقارن است. نمودارهایشان به رویه‌های درجه دوم مرکزدار موسوم‌اند و مرکزشان مبدأ است. نمودار هر معادله به صورت

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

که در آن a ، b ، و c مثبت‌اند، یک رویه درجه دوم مرکزدار است.

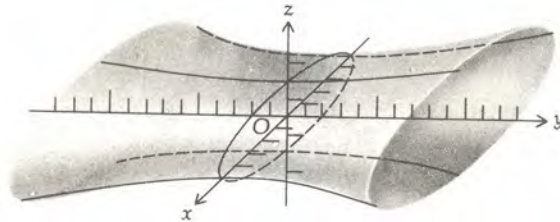
مثال ۱ نمودار معادله $4x^2 - y^2 + 25z^2 = 100$ را رسم، و نام رویه را ذکر کنید.

حل معادله مفروض را می‌توان به صورت

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 1$$

نوشت که پس از جا به جا کردن y و z به صورت معادله مذکور در (۲) درمی‌آید. پس رویه یک هذلولیوار بیضوی یکپارچه است که محورش محور y هاست. مقاطع رویه با صفحات $y = k$ بیضیهایی $x^2/25 + z^2/4 = 1 + k^2/100$ اند. مقاطع با صفحات $x = k$

هذلولیهای $z^2/4 - y^2/100 = 1 - k^2/25$ اند، و مقاطع با صفحات $z = k$ هذلولیهای $x^2/25 - y^2/100 = 1 - k^2/4$ هستند. نمودار رویه در شکل ۴۰۸.۱۷ نشان داده شده است.



▲

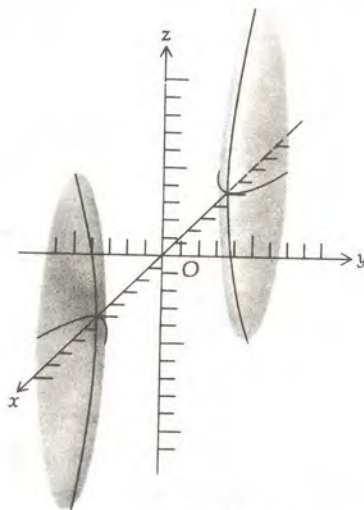
شکل ۴۰۸.۱۷

مثال ۲ نمودار معادله $4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$ را رسم، و نام رویه را ذکر کنید.

حل معادله مفروض را می توان به صورت

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$$

نوشت که پس از جا به جا کردن x و z به صورت معادله (۳) درمی آید؛ پس رویه يك



شکل ۵۰۸.۱۷

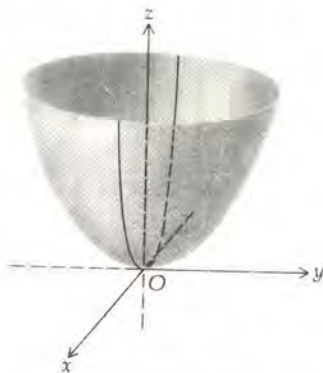
هذلولیوار بیضوی دو پارچه است که محورش محور x هاست. مقاطع رویه با صفحات $x=k$ ، $|k| > ۵$ ، بیضیهایی $1 - k^2/۲۵ = y^2/۴ + z^2/۱۰۰$ است. صفحات $x=k$ ، $|k| < ۵$ ، رویه را قطع نمی‌کنند. مقاطع با صفحات $y=k$ هذلولیهای $1 + k^2/۴ = x^2/۲۵ - z^2/۱۰۰$ است، و مقاطع با صفحات $z=k$ هذلولیهای $1 + k^2/۱۰۰ = x^2/۲۵ - y^2/۴$ هستند. نمودار مطلوب در شکل ۵.۸.۱۷ رسم شده است. ▲

دو رویه درجه دوم زیر به رویه‌های درجه دوم بدون مرکز موسوم‌اند.

سه‌میوار بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (۲)$$

که در آن a و b مثبت‌اند و $c \neq 0$. شکل ۶.۸.۱۷ رویه را در حالت $c > 0$ نشان می‌دهد.



شکل ۶.۸.۱۷

اگر در (۲)، k را به جای z قرار دهیم، داریم $x^2/a^2 + y^2/b^2 = k/c$. وقتی $k=0$ ، این معادله به صورت $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$ درمی‌آید که یک تک‌نقطه، مبدأ، را نمایش می‌دهد. اگر $k \neq 0$ و k و c علامت یکسان داشته باشند، معادله، معادله یک بیضی است. لذا نتیجه می‌گیریم که مقاطع رویه با صفحات $z=k$ ، با فرض یکسان بودن علامتهای k و c ، بیضیهایی هستند که طولهای اقطارشان همراه با افزایش $|k|$ ، افزایش می‌یابند. اگر k و c علامت مخالف داشته باشند، صفحات $z=k$ رویه را قطع نمی‌کنند. مقاطع رویه با صفحات $x=k$ و $y=k$ سهمی هستند. اگر $c > 0$ ، مطابق شکل ۶.۸.۱۷ دهانه این

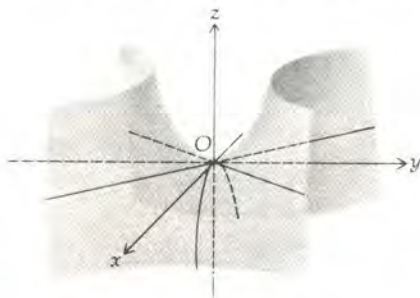
سه‌میها روبه بالا است؛ و اگر $c < 0$ ، دهانهٔ این سه‌میها روبه پایین است. اگر $a = b$ ، روبه یک سه‌میوار دوار است.

سه‌میوار هذلولوی

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \quad (5)$$

که در آن a و b مثبت اند و $c \neq 0$. در حالت $c > 0$ ، روبه را در شکل ۷.۸.۱۷ رسم کرده‌ایم.

مقاطع روبه باصفحات $z = k$ ، $k \neq 0$ ، هذلولیهای هستند که محورهای قاطعشان با محور y ها موازی اند اگر k و c علامت یکسان داشته باشند؛ و با محور x ها موازی اند اگر علامتهای k و c مختلف باشند. مقطع روبه باصفحهٔ $z = 0$ متشکل است از دو خط مستقیم ماربر مبدأ. مقاطع باصفحات $x = k$ سه‌میهای هستند که اگر $c > 0$ دهانهٔ آنها روبه بالا، و اگر $c < 0$ دهانهٔ آنها روبه پایین است. اما مقاطع باصفحات $y = k$ سه‌میهای هستند که اگر $c > 0$ دهانهٔ آنها روبه پایین، و اگر $c < 0$ دهانهٔ آنها روبه بالا است.



شکل ۷.۸.۱۷

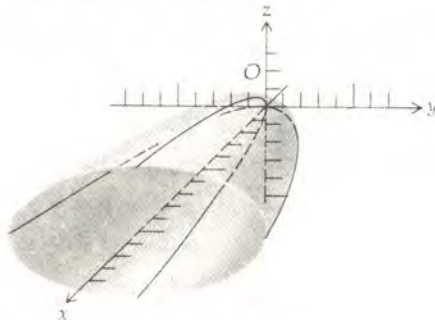
مثال ۳ نمودار معادلهٔ $3y^2 + 12z^2 = 16x$ را رسم، و نام روبه را ذکر کنید.

حل معادلهٔ مفروض را می‌توان به صورت

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

نوشت که با جا به جا کردن x و z به صورت معادلهٔ (۲) درمی‌آید. پس نمودار معادله، یک سه‌میوار بیضوی است که محورش، محور x هاست. مقاطع باصفحات $x = k > 0$ بیضیهای $y^2/16 + z^2/4 = k/3$ اند، و صفحات $x = k < 0$ روبه را قطع نمی‌کنند. مقاطع با

صفحات $y = k$ سهمیهای $12z^2 = 16x - 3k^2$ اند، و مقاطع با صفحات $z = k$ سهمیهای $3y^2 = 16x - 12k^2$ هستند. نمودار سهمیوار بیضوی در شکل ۸.۸.۱۷ رسم شده است.



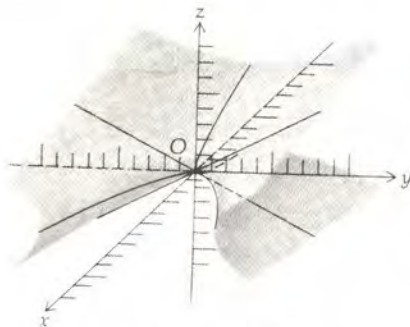
شکل ۸.۸.۱۷

مثال ۴ نمودار معادله $12z^2 - 3y^2 = 16x$ را رسم، و نام رویه را ذکر کنید.

حل اگر معادله مفروض را به صورت

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = \frac{x}{3}$$

بنویسیم، و x و z را جا به جا کنیم همان صورت مذکور در (۵) به دست می آید. بنابراین رویه یک سهمیوار هذلولوی است. مقاطع با صفحات $x = k \neq 0$ هذلولیهای $y = -2z$ و $y = 2z$ از دو خط $(x=0)$ yz باصفحه yz $y^2/16 - z^2/4 = k/3$ اند. مقطع باصفحه $z = k$ سهمیهای $12k^2 - 16x = 3y^2$ اند و با صفحات $y = k$ ، سهمیهای $12z^2 = 3k^2 - 16x$ هستند. شکل ۹.۸.۱۷ نمودار سهمیوار هذلولوی را نشان می دهد.

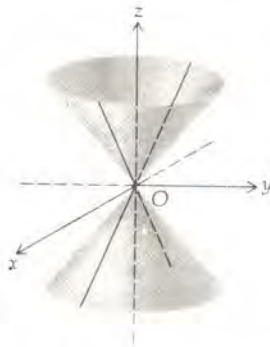


شکل ۹.۸.۱۷

مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (۶)$$

که در آن a, b, c و مثبت اند (شکل ۱۰.۸.۱۷ را ببینید).
مقطع صفحه $z=0$ با این رویه تنها يك نقطه، مبدأ، است. مقاطع رویه با صفحات $z=k, k \neq 0$ ، بیضیهایی هستند که طولهای اقطارشان همراه با ازدیاد k افزایش می یابند. مقاطع با صفحات $x=0$ و $y=0$ جفتهایی از خطوط متقاطع اند. همه مقاطع یا صفحات $x=k, y=k$ و $z=k, k \neq 0$ ، هذلولی هستند.



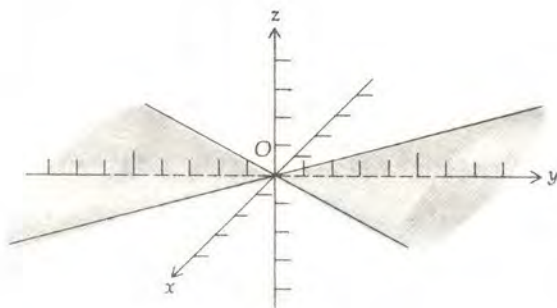
شکل ۱۰.۸.۱۷

مثال ۵ نمودار معادله $4x^2 - y^2 + 25z^2 = 0$ را رسم، و نام رویه را ذکر کنید.

حل معادله مفروض را می توان به صورت

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} + \frac{z^2}{4} = 0$$

نوشت که پس از جا به جا کردن y و z به صورت (۶) درمی آید. پس رویه يك مخروط بیضوی است که محورش محور y هاست. این رویه صفحه xz ($y=0$) را فقط در مبدأ قطع می کند. مقطع رویه با صفحه yz ($x=0$) دو خط متقاطع $y = \pm 5z$ است و مقطع آن با صفحه xy ($z=0$) خطوط متقاطع $y = \pm 2x$. مقاطع با صفحات $y = k \neq 0$ بیضیهایی $x^2/25 + z^2/4 = k^2/100$ هستند و با صفحات $x = k \neq 0$ و $z = k \neq 0$ ، به ترتیب، هذلولیهای $x^2/25 - z^2/4 = k^2/25$ و $y^2/100 - z^2/4 = k^2/25$ و $y^2/100 - x^2/25 = k^2/4$ اند. نمودار رویه در شکل ۱۱.۸.۱۷ رسم شده است.



شکل ۱۱۰۸۰۱۷

معادله کلی درجه دوم بر حسب x ، y ، و z به صورت

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

است که در آن $a, b, c, \dots, j$ اعدادی ثابت اند. می‌توان نشان داد که با انتقال و دوران محورهای مختصات در فضای سه بعدی (که بحث آن از حیطه این کتاب خارج است) این معادله را می‌توان به یکی از صورتهای زیر درآورد.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad (۷)$$

یا

$$Ax^2 + By^2 + Iz = 0. \quad (۸)$$

نمودار هر معادله درجه دوم یا یکی از شش نوع رویه درجه دوم مذکور در بالاست و یا به شکل تباهیده یک استوانه، صفحه، خط، نقطه، یا مجموعه تهی است.

منحنیهای ناتباهیدهای که به معادلاتی به صورت (۷) مربوط می‌شوند، رویه‌های درجه دوم مرکزدار و مخروط بیضوی هستند، و منحنیهای مربوط به صورت (۸)، رویه‌های درجه دوم بدون مرکز می‌باشند. مثالهای زیر به بعضی از حالت‌های تباهیده مربوط اند:

$$x^2 - y^2 = 0 \text{؛ دو صفحه } x - y = 0 \text{ و } x + y = 0$$

$$z^2 = 0 \text{؛ يك صفحه، صفحه } xy$$

$$x^2 + y^2 = 0 \text{؛ يك خط، محور } z \text{ ها}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{؛ يك نقطه تنها، مبدأ}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 \text{؛ مجموعه تهی.}$$

تمرینهای ۸.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۶، نام دویۀ با معادله مفروض را ذکر کنید.

۱. $9x^2 - 2y^2 + 36z^2 = 36$
۲. $4x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 0$
۳. $5x^2 - 2z^2 - 3y = 0$
۴. $25x^2 = 4y^2 + z^2 + 100$
۵. $4y^2 - 25x^2 = 100$
۶. $3y^2 + 7z^2 = 6x$

در تمرینهای ۷ تا ۱۸، نمودار معادله مفروض را (سم و نام دویۀ را ذکر کنید).

۷. $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$
۸. $4x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$
۹. $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$
۱۰. $4x^2 - 9y^2 + z^2 = 36$
۱۱. $x^2 = y^2 - z^2$
۱۲. $x^2 = y^2 + z^2$
۱۳. $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 4y$
۱۴. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{36} = 4$
۱۵. $\frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 9y$
۱۶. $x^2 = 2y + 2z$
۱۷. $x^2 + 16z^2 = 4y^2 - 16$
۱۸. $9y^2 - 4z^2 + 18x = 0$

۱۹. مطلوب است مقادیری از k که به ازای آنها مقطع صفحه $1 = x + ky$ با هذلولیوار بیضوی دوبارچۀ $1 = y^2 - x^2 - z^2$: (الف) يك بیضی و (ب) يك هذلولی باشد.

۲۰. رأس و کانون سهمبسی را که مقطع صفحه $2 = y$ با سهمیوار هذلولوی $z/9 = x^2/4 - y^2/16$ است بیابید.

۲۱. رأس و کانون سهمبسی را که مقطع صفحه $1 = x$ با سهمیوار هذلولوی $y/3 = x^2/9 - z^2/4$ است بیابید.

۲۲. مساحت مقطع مسطح حاصل از تقاطع صفحه $3 = y$ با جسم محدود به بیضیوار $1 = x^2/9 + y^2/25 + z^2/4$ را بیابید.

۲۳. نشان دهید که مقطع رویۀ $36 = x^2 - 4y^2 - 9z^2$ با صفحه $9 = x + z$ يك بیضی است.

۲۴. نشان دهید که مقطع سهمیوار هذلولوی $z/c = x^2/a^2 - y^2/b^2$ با صفحه $z = bx + ay$ از دوخط راست متقاطع تشکیل می شود.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۷، با استفاده از روش مقاطع مسطح متوازی (بخش ۴.۲)، حجم جسم مفروض را بیابید. اندازه مساحت ناحیه محصور در بیضی با اقطاد $2a$ ، $2b$ ، πab است.

۲۵. جسم محصور در بیضیوار $36 = x^2 + 9y^2 + 4z^2$.

۲۶. جسم محصور در بیضیوار $1 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$.

۲۷. جسم محدود به صفحه $z = h$ ، $h > 0$ ، و سهمیوار بیضوی

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/c, c > 0$$

۹.۱۷ منحنیها در R^3

حال به بررسی توابع با مقادیر برداری در فضای سه بعدی می پردازیم.

۱۰۹۰۱۷ تعریف گیریم f_1, f_2, f_3 و f سه تابع با مقادیر حقیقی از یک متغیر حقیقی t باشند. آنگاه به ازای هر عدد t متعلق به قلمرو مشترک f_1, f_2, f_3 و f ، برداری چون R وجود دارد که با ضابطه

$$R(t) = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k \quad (1)$$

تعریف می شود. R را یک تابع با مقادیر برداری یا به اختصار، تابع برداری می نامند.

راه به دست آوردن نمودار تابع برداری در فضای سه بعدی مشابه است با شیوه به دست آوردن نمودار تابع برداری در فضای دوبعدی که شرح آن در بخش ۴.۱۶ آمد. وقتی که t تمام مقادیر موجود در قلمرو R را می پذیرد، نقطه انتهایی نمایش موضع بردار $R(t)$ یک منحنی چون C رسم می کند؛ این منحنی را نمودار (۱) می نامند. نمایش دکارتی هر نقطه واقع بر منحنی C به صورت (x, y, z) است که

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (2)$$

معادلات (۲) را معادلات پارامتری C می نامند، حال آنکه معادله مذکور در (۱) یک معادله برداری C نامیده می شود. با حذف t از معادلات (۲)، دو معادله بر حسب x, y, z به دست می آیند. این معادلات، معادلات دکارتی C نام دارند. هر معادله دکارتی، معادله یک رویه است، و منحنی C محل تقاطع این دو رویه می باشد. معادلات هر دو رویه ای که C را در برداشته باشند، می توانند به عنوان معادلات دکارتی معرف C در نظر گرفته شوند.

○ نمونه ۱ منحنی با معادله برداری

$$\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

را رسم می‌کنیم. معادلات پارامتری منحنی مفروض عبارت‌اند از

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = t.$$

برای حذف t از دو معادله اول، آنها را به صورت

$$y^2 = b^2 \sin^2 t, \quad x^2 = a^2 \cos^2 t$$

می‌نویسیم و از آنها

$$\frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$$

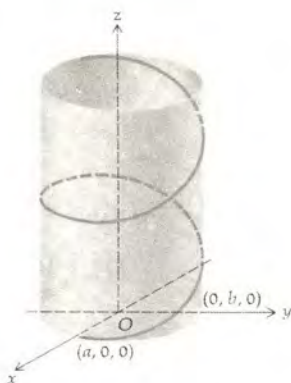
را به دست می‌آوریم. با جمع کردن طرفهای متناظر این دو معادله داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

بنابراین منحنی به طور کامل روی استوانه‌ای بیضوی قرار می‌گیرد که هادیش بیضی در صفحه xy است و خطهای مولدش موازی با محور z ها هستند. جدول ۱۰.۹.۱۷ به ازای مقادیر خاصی از t ، مقادیر x ، y ، و z مربوط را به دست می‌دهد. منحنی در شکل ۱۰.۹.۱۷ نشان داده شده است.

جدول ۱۰.۹.۱۷

t	x	y	z
0	a	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	b	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$
π	$-a$	0	π
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-b$	$\frac{3\pi}{2}$



شکل ۱۰۹۰۱۷

منحنی نمونه ۱ پیچ نام دارد. اگر $a=b$ ، پیچ را پیچ مستدیر می نامند، و این پیچ بر استوانه مستدیر قائم $x^2 + y^2 = a^2$ قرار دارد.

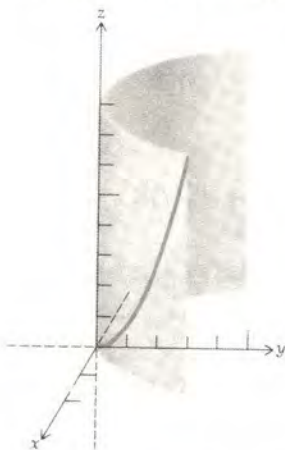
○ نمونه ۲ منحنی با معادله برداری

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

به منحنی درجه سوم نامسطح موسوم است. معادلات پارامتری این منحنی عبارت اند از

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

با حذف t از دو معادله اول، رابطه $y = x^2$ حاصل می شود که معادله استوانه ای است که هادیش یک سهمی در صفحه xy است. منحنی درجه سوم نامسطح بر این استوانه قرار دارد. شکل ۲۰۹۰۱۷ این استوانه، و بخشی از منحنی نامسطح از $t=0$ تا $t=2$ را نشان می دهد.



شکل ۲۰۹۰۱۷

بسیاری از تعاریف و قضایای مربوط به توابع برداری در فضای دو بعدی را می توان به توابع برداری در فضای سه بعدی تعمیم داد.

۲.۹.۱۷ تعریف اگر $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} f_1(t)\mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_2(t)\mathbf{j} + \lim_{t \rightarrow t_1} f_3(t)\mathbf{k}$$

با این شرط که $\lim_{t \rightarrow t_1} f_1(t)$ ، $\lim_{t \rightarrow t_1} f_2(t)$ و $\lim_{t \rightarrow t_1} f_3(t)$ همه وجود داشته باشند.

۳.۹.۱۷ تعریف تابع برداری $\mathbf{R}$ در t_1 پیوسته است اگر و تنها اگر

(i) $\mathbf{R}(t_1)$ وجود داشته باشد،

(ii) $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t)$ وجود داشته باشد، و

(iii) $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$

۴.۹.۱۷ تعریف مشتق تابع برداری $\mathbf{R}$ يك تابع برداری است که با $\mathbf{R}'$ نشان داده می شود و به صورت

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

به شرط وجود این حد، تعریف می گردد.

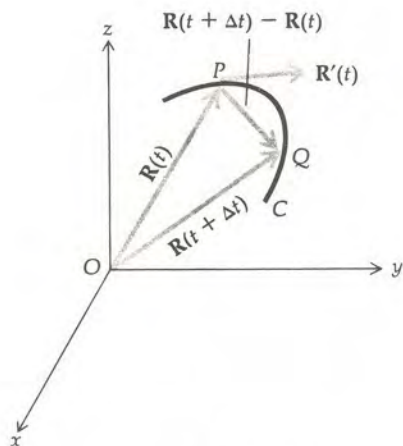
۵.۹.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{R}$ تابعی برداری با ضابطه زیر باشد

$$\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$$

و $\mathbf{R}'(t)$ وجود داشته باشد، آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = f'_1(t)\mathbf{i} + f'_2(t)\mathbf{j} + f'_3(t)\mathbf{k}.$$

اثبات قضیه ۵.۹.۱۷ را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۱۳ را ببینید).
تعبیر هندسی مشتق $\mathbf{R}$ مانند تعبیر هندسی مشتق يك تابع برداری در $\mathbf{R}^2$ است. شکل ۳.۹.۱۷ بخشی از منحنی C را نشان می دهد که نمودار $\mathbf{R}$ است. در این شکل، $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ ، $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضع $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ و $\overrightarrow{PQ}$ نمایشی از بردار $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ است. وقتی که Δt به ۰ میل کند، بردار $[\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)] / \Delta t$ نمایشی دارد که به يك پاره خط جهت دار مماس بر منحنی C در P میل می کند.



شکل ۳۰۹۰۱۷

تعریف بردار مماس واحد، مشابه با تعریف ۱۰۸۰۱۶ در مورد بردارهای واقع در صفحه است. لذا اگر $\mathbf{T}(t)$ بردار واحد مماس بر منحنی C به معادله برداری (۱) باشد، آنگاه

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|}. \quad (۳)$$

○ نمونه ۳ بردار واحد مماس بر منحنی درجه سوم نامسطح نمونه ۲ را می‌یابیم. چون $\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ داریم

$$D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$|D_t \mathbf{R}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

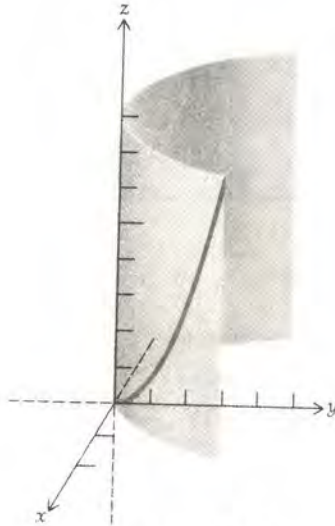
لذا، بنا بر (۳)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}).$$

بنا بر این در حالت خاص

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{k}.$$

شکل ۴.۹.۱۷ نمایش $T(1)$ در نقطه $(1, 1, 1)$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۹.۱۷

قضایای ۶.۵.۱۶، ۷.۵.۱۶، و ۸.۵.۱۶ در مورد مشتقهای مجموع و حاصلضرب توابع برداری در فضای دو بعدی، برای بردارهای سه بعدی نیز برقرارند. قضیه زیر که مربوط به مشتق حاصلضرب برداری دو تابع برداری است، مشابه با فرمول متناظر در مورد مشتق حاصلضرب توابع با مقادیر حقیقی است؛ اما، در مورد توابع برداری، برقراری ترتیب صحیح اهمیت دارد زیرا حاصلضرب برداری جا به جایی [تعویض پذیر] نیست.

۶.۹.۱۷ قضیه اگر $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ دو تابع برداری باشند، آنگاه به ازای جميع مقادیری از t که به ازای آنها $\mathbf{Q}'(t)$ و $\mathbf{R}'(t)$ وجود دارند،

$$D_t[\mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}(t)] = \mathbf{R}(t) \times \mathbf{Q}'(t) + \mathbf{R}'(t) \times \mathbf{Q}(t).$$

اثبات قضیه ۶.۹.۱۷ را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱۴ را ببینید). طول قوس يك منحنی C در فضای سه بعدی را می‌توان درست به همان طریقی که طول قوس يك منحنی در صفحه را تعریف کردیم، تعریف کرد. (تعریف ۱.۶.۱۶ را ببینید.) اگر C منحنی با معادلات پارامتری (۲) باشد، f'_1, f'_2, f'_3 و f'_4 بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند، و به ازای هیچ دو مقدار مختلف t ، يك نقطه واحد (x, y, z) بر C به دست نیایند،

آنگاه می‌توان قضیه‌ای نظیر قضیه ۳.۶.۱۶ را اثبات کرد (روش همان است که در مورد صفحه به کار رفت). این قضیه حاکی است که طول قوس منحنی C ، L واحد، از نقطه $(f_1(a), f_2(a), f_3(a))$ تا نقطه $(f_1(b), f_2(b), f_3(b))$ با فرمول زیر به دست می‌آید

$$L = \int_a^b \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} dt. \quad (۲)$$

اگر s اندازه طول قوس C از نقطه ثابت $(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$ تا نقطه متغیر $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ باشد و وقتی که t افزایش می‌یابد s نیز افزایش یابد، آنگاه s تابعی از t است و با ضابطه زیر به دست می‌آید

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f_1'(u)]^2 + [f_2'(u)]^2 + [f_3'(u)]^2} du. \quad (۵)$$

همان گونه که در بخش ۳.۶.۱۶ در مورد منحنیهای مسطح نشان داده شد، می‌توان ثابت کرد که اگر (۱)، يك معادله برداری برای C باشد، آنگاه

$$D_t s = |D_t \mathbf{R}(t)| \quad (۶)$$

و طول قوس، L واحد، که از (۴) به دست می‌آید با ضابطه

$$L = \int_a^b |D_t \mathbf{R}(t)| dt. \quad (۷)$$

نیز تعیین می‌شود.

مثال ۱ پیچ مستدیر $\mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ ، $a > 0$ ، داده شده است. طول قوس از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ را بیابید.

حل $D_t \mathbf{R}(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ لذا بنا بر (۷)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + 1} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + 1}. \end{aligned}$$

پس طول قوس، $2\pi \sqrt{a^2 + 1}$ واحد است. ▲

تعریف بردار انحنا، $\mathbf{K}(t)$ ، و انحنا $K(t)$ ، در نقطه‌ای چون P روی يك منحنی C

واقع در R^3 همانند تعریف ۱۰.۹.۱۶ است که در مورد منحنیهای واقع در صفحه بود. پس، اگر $\mathbf{T}(t)$ بردار واحد مماس بر C در نقطه P و s اندازه طول قوس از نقطه دلخواهی از C تا P باشد، و وقتی t افزایش می یابد s نیز افزایش یابد، آنگاه

$$\mathbf{K}(t) = D_s \mathbf{T}(t)$$

یا معادلش

$$\mathbf{K}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} \quad (۸)$$

و

$$K(t) = |D_s \mathbf{T}(t)|$$

یا معادلش

$$K(t) = \left| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} \right|. \quad (۹)$$

اگر حاصلضرب نقطه ای $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{K}(t)$ را محاسبه کنیم، و (۸) را به کار بگیریم، داریم

$$\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{1}{|D_t \mathbf{R}(t)|} D_t \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t). \quad (۱۰)$$

قضیه ۱۱.۵.۱۶ حاکی است که اگر بزرگی یک تابع برداری در یک صفحه ثابت باشد، بر مشتقش عمود است. این قضیه و اثباتش در مورد بردارهای واقع در فضای سه بعدی نیز درست اند. بنا بر این، چون $|\mathbf{T}(t)| = 1$ ، از (۱۰) نتیجه می گیریم که $\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. و لذا بردار انحنا و بردار واحد مماس در یک نقطه منحنی، متعامدند.

بردار قائم واحد، با این شرط که بردار انحنا بردار صفر نباشد، به صورت بردار واحد همجهت با بردار انحنا تعریف می شود. پس اگر $\mathbf{N}(t)$ بردار واحد قائم بر یک منحنی C در نقطه ای چون P باشد، و اگر $\mathbf{K}(t) \neq 0$ ، آنگاه

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{K}(t)}{|\mathbf{K}(t)|}. \quad (۱۱)$$

بنا بر (۱۱) و بحث قبل، نتیجه می گیریم که بردار قائم واحد و بردار مماس واحد متعامدند. پس اندازه رادیانی زاویه بین این دو بردار $\pi/2$ است، و بنا بر قضیه ۶.۶.۱۷

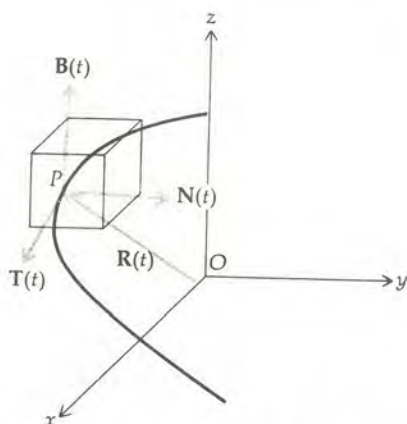
$$|\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)| = |\mathbf{T}(t)| |\mathbf{N}(t)| \sin \frac{1}{2} \pi = (1)(1)(1) = 1.$$

پس حاصلضرب برداری $T(t)$ و $N(t)$ يك بردار واحد است. بنا بر قضیه ۹.۶.۱۷،
 $T(t) \times N(t)$ هم بر $T(t)$ عمود است و هم بر $N(t)$ ؛ لذا بردار با ضابطه

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad (۱۲)$$

برداری واحدی است عمود بر $T(t)$ و $N(t)$. این بردار را بردار قائم دوگانه واحد
 بر منحنی C در P می نامند.

سه بردار واحد دوبه دو متعامد $N(t)$ ، $T(t)$ و $B(t)$ از يك منحنی C به سه وجهی
 متحرك C موسوم اند (شکل ۵.۹.۱۷ را ببینید).



شکل ۵.۹.۱۷

مثال ۲ برای هر نقطه از پیچ مستدیر مذکور در مثال ۱، سه وجهی متحرك و اینجا
 را بیابید.

حل يك معادله برداری پیچ مستدیر، این است

$$R(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

لذا $D_t R(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $|D_t R(t)| = \sqrt{a^2 + 1}$ بنا بر (۳)

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

پس

$$D_t T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j}).$$

با استفاده از (۸)،

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{a^2 + 1} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j})$$

به دست می آید. بنابراین، انحنا به این صورت معین می شود

$$K(t) = |\mathbf{K}(t)| = \frac{a}{a^2 + 1}$$

و لذا انحنا ی پیچ مستدیر ثابت است. بنابر (۱۱)

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}.$$

اگر (۱۲) را به کار ببریم، داریم

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j})$$

$$\triangle \quad = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + a \mathbf{k}).$$

مطالعه دقیق منحنیها و رویهها با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، موضوع هندسهٔ دیفرانسیل است. استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال برداری به این هندسه غنای بیشتری می بخشد. بحث قبل ما چیزی جز يك مقدمه کوتاه بر این مبحث نیست. حال به طور مختصر حرکت يك ذره را در امتداد يك منحنی در فضای سه بعدی بررسی می کنیم. اگر پارامتر t در معادله برداری (۱) اندازه زمان را به دست دهد، آنگاه موضع ذره ای که در امتداد منحنی C به معادله برداری (۱) حرکت می کند در لحظه t نقطه $P(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ است. بردار سرعت، $\mathbf{V}(t)$ ، و بردار شتاب، $\mathbf{A}(t)$ ، مشابیه موارد متناظر در صفحه تعریف می شوند. بردار $\mathbf{R}(t)$ را بردار موضع می نامند، و داریم

$$\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t) \quad (13)$$

و

$$\mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t) = D_t^2 \mathbf{R}(t). \quad (14)$$

هقدار سرعت ذره در t ، بزرگی بردار سرعت است. با استفاده از (۶) می توان نوشت

$$|\mathbf{V}(t)| = D_t s.$$

مثال ۳ ذره ای در امتداد منحنی با معادله پارامتری $x = 3t$ ، $y = t^2$ ، و

$z = (2/3)t^3$ در حرکت است. بردارهای سرعت و شتاب و مقدار سرعت ذره در $t = 1$ را بیابید. بخشی از منحنی، شامل نقطه حاصل از $t = 1$ ، را رسم کنید، و نمایشهای بردارهای سرعت و شتاب در نقطه مذکور را بکشید.

حل يك معادله برداری منحنی عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}.$$

بنا بر این

$$\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t) = 3\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$$

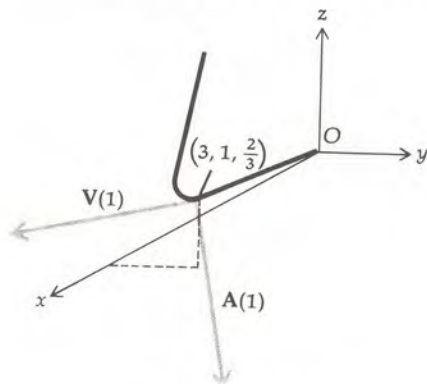
و

$$\mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t) = 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}.$$

پس

$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{9 + 4t^2 + 4t^4}.$$

لذا وقتی که $t = 1$ ، $\mathbf{V} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{A} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ، و $|\mathbf{V}(1)| = \sqrt{17}$. نمودار مطلوب در شکل ۶.۹.۱۷ رسم شده است.



شکل ۶.۹.۱۷

تمرینهای ۹.۱۷

دو تمرینهای ۱ تا ۵، بردار مماس واحد را برای منحنی با معادله برداری مفروض بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = (t+1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (1-2t)\mathbf{k} \quad ۱.$$

$$\mathbf{R}(t) = \sin 2t \mathbf{i} + \cos 2t \mathbf{j} + 2t^{3/2} \mathbf{k} \quad ۲.$$

$$\mathbf{R}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \quad ۳.$$

$$\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + \left(t + \frac{1}{3} t^3\right) \mathbf{j} + \left(t - \frac{1}{3} t^3\right) \mathbf{k} \quad ۴.$$

$$\mathbf{R}(t) = 2t \cos t \mathbf{i} + 5t \mathbf{j} + 2t \sin t \mathbf{k} \quad ۵.$$

۶. مطلوب است بردار واحد مماس بر منحنی با معادله برداری

$$\mathbf{R}(t) = 2 \cosh 2t \mathbf{i} + 2 \sinh 2t \mathbf{j} + 6t \mathbf{k}$$

در نقطه‌ای که $t = 0$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۱، طول قوس منحنی از t_1 تا t_2 را بیابید.

۷. منحنی مذکور در تمرین ۱؛ $t_1 = -1$ ، $t_2 = 2$.

۸. منحنی مذکور در تمرین ۲؛ $t_1 = 0$ ، $t_2 = 1$.

۹. منحنی مذکور در تمرین ۳؛ $t_1 = 0$ ، $t_2 = 3$.

۱۰. منحنی مذکور در تمرین ۴؛ $t_1 = 0$ ، $t_2 = 1$.

$$t_1 = 2, t_2 = 0; \mathbf{R}(t) = 2t^{3/2} \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + 3 \cos t \mathbf{k} \quad ۱۱.$$

۱۲. ثابت کنید بردار مماس واحد پیچ‌مستدیر مذکور در مثال ۱ و بردار واحد $\mathbf{k}$ ، زاویه‌ای با اندازه رادیانی ثابت تشکیل می‌دهند.

۱۳. قضیه ۵.۹.۱۷ را اثبات کنید.

۱۴. قضیه ۶.۹.۱۷ را اثبات کنید.

۱۵. معادله‌ای برداری برای منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $y = e^x$ و $z = xy$ بنویسید.

۱۶. معادله‌ای برداری برای منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $x = \ln(z^2 + 2)$ و $y = xz^3$ بنویسید.

۱۷. مطلوب است کسینوس زاویه بین بردار $\mathbf{j}$ و بردار واحد مماس بر منحنی

$$\mathbf{R}(t) = \cos 2t \mathbf{i} - 3t \mathbf{j} + 2 \sin 2t \mathbf{k}$$

در نقطه‌ای که $t = \pi$.

۱۸. مطلوب است انحنای منحنی $\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + (2+t) \mathbf{j} + (3-2t) \mathbf{k}$ در نقطه‌ای که $t = 1$.

۱۹. مطلوب است سه وجهی متحرك و انحنای منحنی درجه سوم نامسطح، مذکور در نمونه ۲، در نقطه‌ای که $t = 1$.

۲۰. مطلوب است سه وجهی متحرك و انحنای در هر نقطه دلخواه از منحنی

$$\mathbf{R}(t) = \cosh t \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، سه وجهی متحرك و انحنای منحنی مفروض را در $t = t_1$ ، در صورت وجود، بیابید.

۲۱. منحنی مذکور در تمرین ۱؛ $t_1 = -1$.

۲۲. منحنی مذکور در تمرین ۲؛ $t_1 = 0$.

۲۳. منحنی مذکور در تمرین ۳؛ $t_1 = 0$.

۲۴. منحنی مذکور در تمرین ۴؛ $t_1 = 1$.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸، ذره‌ای در امتداد يك منحنی مفروض در حرکت است؛ بردار سرعت، بردار شتاب، و مقدار سرعت در $t = t_1$ را بیابید. بخشی از منحنی در $t = t_1$ را رسم کنید، و بردارهای سرعت و شتاب در این نقطه را بکشید.

۲۵. پیچ مستدیر مذکور در مثال ۱؛ $t_1 = \pi/2$.

۲۶. $t_1 = 2$ ؛ $z = \frac{1}{3}t^3$ ، $y = \frac{1}{4}t^2$ ، $x = t$.

۲۷. $t_1 = 1$ ؛ $z = te^{2t}$ ، $y = e^{-2t}$ ، $x = e^{2t}$.

۲۸. $t_1 = 1$ ؛ $z = \tan^{-1}t$ ، $y = \ln(1+t^2)$ ، $x = \frac{1}{4}(t^2+1)$.

۲۹. ثابت کنید که اگر $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ يك معادله برداری منحنی C ، و $K(t)$ انحنای C باشد، آنگاه

$$K(t) = \frac{|D_t \mathbf{R}(t) \times D_t^2 \mathbf{R}(t)|}{|D_t \mathbf{R}(t)|^3}.$$

۳۰. با استفاده از فرمول مذکور در تمرین ۲۹ نشان دهید که انحنای پیچ مستدیر مثال ۱، $a/(a^2+1)$ است.

در تمرینهای ۳۱ و ۳۲، انحنای منحنی مفروض در نقطه داده شده را بیابید.

۳۱. مبدأ؛ $z = t^3$ ، $y = t^2$ ، $x = t$.

۳۲. $x = e^t, y = e^{-t}, z = t; t = 0$.

۳۳. ثابت کنید که اگر $\mathbf{R}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$ يك معادله برداری منحنی C ، $K(t)$ انحنای C در نقطه‌ای چون P ، و s طول قوس از يك نقطه اختیاری C تا P بر حسب واحد طول باشد، آنگاه

$$D_s \mathbf{R}(t) \cdot D_t \mathbf{R}(t) = -[K(t)]^2.$$

۳۴. ذره‌ای در امتداد يك منحنی با معادله برداری

$$\mathbf{R}(t) = \tan t \mathbf{i} + \sinh 2t \mathbf{j} + \operatorname{sech} t \mathbf{k}$$

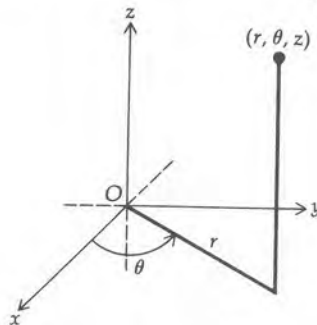
در حرکت است. ثابت کنید که بردار سرعت و بردار شتاب در $t = 0$ متعامدند.

۳۵. ثابت کنید که اگر مقدار سرعت يك ذره متحرك ثابت باشد، بردار شتاب همواره بر بردار سرعت ذره عمود است.

۳۶. ثابت کنید که در مورد منحنی درجه سوم نامسطح مذکور در نمونه ۲، اگر $t \neq 0$ ، هیچ جفتی از بردارهای $\mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{A}(t)$ برهم عمود نیستند.

۱۰.۱۷ مختصات استوانه‌ای و کروی

مختصات استوانه‌ای و کروی تعمیمهای مختصات قطبی در فضای سه بعدی هستند. نمایش نقطه‌ای چون P در مختصات قطبی به صورت (r, θ, z) است که در آن، r و θ مختصات قطبی تصویر P بر يك صفحه قطبی است و z فاصله جهت دار از نقطه P تا این صفحه قطبی است. شکل ۱۰.۱۰.۱۷ را ببینید.



شکل ۱۰.۱۰.۱۷

مثال ۱ نمودار هریک از معادلات زیر را که در آنها c يك ثابت است رسم کنید:

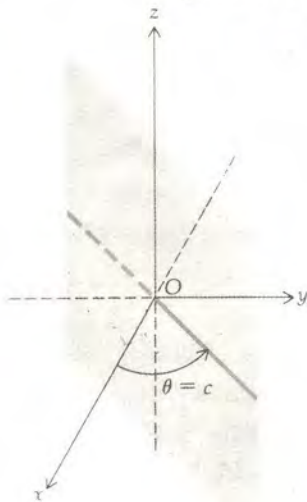
(الف) $r = c$ ؛ (ب) $\theta = c$ ؛ (پ) $z = c$.

حل

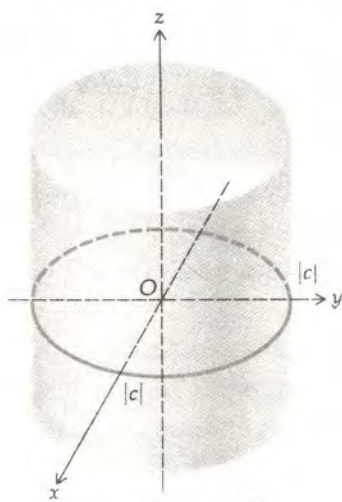
الف) در مورد نقطه‌ای چون $P(r, \theta, z)$ بر نمودار $r=c$ ، θ و z می‌توانند هر مقداری داشته باشند، ولی r ثابت است. نمودار، استوانهٔ مستدیر قائمی است که شعاعش $|c|$ و محورش محور z هاست. این نمودار در شکل ۲.۱۰.۱۷ نشان داده شده است.

ب) در مورد تمام نقاط $P(r, \theta, z)$ بر نمودار $\theta=c$ ، r و z می‌توانند هر مقداری را بپذیرند، اما θ ثابت باقی می‌ماند. نمودار، صفحه‌ای ماربر محور z هاست. شکل ۳.۱۰.۱۷ این نمودار را نشان می‌دهد.

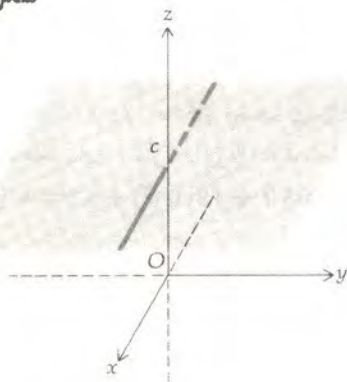
پ) نمودار $z=c$ صفحه‌ای است به موازات صفحهٔ قطبی که فاصلهٔ جهت‌دار آن تا این صفحه c واحد است. شکل ۴.۱۰.۱۷ این نمودار را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱۰.۱۷



شکل ۲.۱۰.۱۷



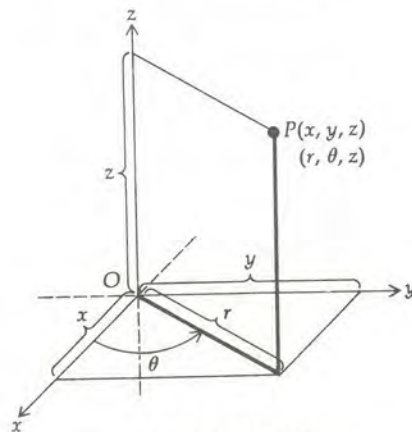
شکل ۴.۱۰.۱۷

نام «مختصات استوانه‌ای» از اینجا می‌آید که نمودار $r=c$ ، همچنانکه در مثال ۱ (الف) دیدیم، یک استوانهٔ مستدیر قائم است. از مختصات استوانه‌ای اغلب در مسائلی فیزیکی که در آنها محور تقارن وجود دارد استفاده می‌شود. فرض کنید دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات استوانه‌ای را طوری قرار داده باشیم که صفحهٔ xy بر صفحهٔ قطبی دستگاه مختصات استوانه‌ای منطبق، و قسمت مثبت محور z ها، طبق شکل ۵.۱۰.۱۷، محور قطبی باشد. آنگاه (x, y, z) و (r, θ, z) دو دستهٔ مختصات نقطهٔ P هستند که طبق معادلات زیر در ارتباط اند.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad (۱)$$

و

$$z = z, \quad x \neq 0, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (۲)$$



شکل ۵.۱۰.۱۷

مثال ۲ مطلوب است معادله‌ای در دستگاه مختصات دکارتی برای هر یک از رویه‌های زیر که معادلاتشان در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده است؛ رویه را نیز مشخص کنید:

(الف) $r = 6 \sin \theta$ (ب) $r(3 \cos \theta + 2 \sin \theta) + 6z = 0$

حل

(الف) دو طرف معادله را در r ضرب می‌کنیم تا $r^2 = 6r \sin \theta$ حاصل شود. چون $r^2 = x^2 + y^2$ و $r \sin \theta = y$ داریم $x^2 + y^2 = 6y$. این معادله را به صورت $x^2 + (y-3)^2 = 9$ نیز می‌توان نوشت که نشان می‌دهد نمودار آن، استوانهٔ مستدیر قائمی است که مقطعش با صفحهٔ xy دایرهٔ به مرکز $(0, 3)$ و شعاع ۳ است.

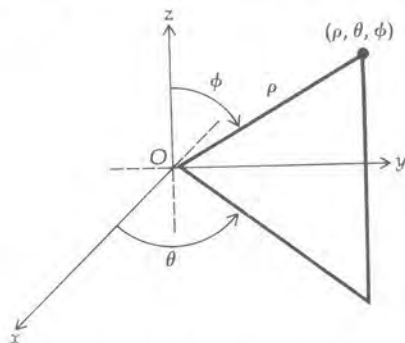
(ب) اگر به جای y ، $r \sin \theta$ و به جای x ، $r \cos \theta$ قرار دهیم، معادله $3x + 2y + 6z = 0$ به دست می‌آید. پس نمودار، صفحه‌ای ماربر مبدأ است که $(3, 2, 6)$ يك بردار قائم آن است. ▲

مثال ۳ برای هريك از رویه‌های زیر که معادلاتشان در دستگاه مختصات دکارتی مفروض است، معادله‌ای در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید؛ رویه را نیز مشخص کنید: (الف) $x^2 + y^2 = z$ ؛ (ب) $x^2 - y^2 = z$.

حل

(الف) این معادله مشابه با معادله (۴) از بخش ۸.۱۷ است؛ لذا نمودار آن يك سهمیوار بیضوی است. اگر به جای $x^2 + y^2$ ، r^2 قرار گیرد معادله به $r^2 = z$ تبدیل می‌شود. (ب) این معادله مشابه با معادله (۵) مذکور در بخش ۸.۱۷ است که در آن جای x و y عوض شده است. بنابراین نمودار آن يك سهمیوار هذلولوی است که محورش محور z هاست. وقتی به جای x ، $r \cos \theta$ و به جای y ، $r \sin \theta$ قرار گیرد، معادله به صورت $r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = z$ در می‌آید؛ و چون $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ ، آن را می‌توان به صورت $z = r^2 \cos 2\theta$ نیز نوشت. ▲

در دستگاه مختصات کروی، يك صفحه قطبی وجود دارد و يك محور عمود بر صفحه قطبی به طوری که مبدأ محور z ها با قطب صفحه قطبی یکی است. هر نقطه با سه عدد مشخص می‌شود و نمایش نقطه‌ای چون P با مختصات کروی، (ρ, θ, ϕ) است که در آن $\rho = |\overline{OP}|$ ، θ اندازه رادیانی زاویه قطبی تصویر P بر صفحه قطبی، و ϕ اندازه رادیانی نامنفی کوچکترین زاویه‌ای است که از قسمت مثبت محور z ها تا خط OP اندازه گیری می‌شود. شکل ۶.۱۰.۱۷ را ببینید. نمایش مبدأ با مختصات کروی به صورت $(0, \theta, \phi)$ است که در آن θ و ϕ هر مقداری می‌توانند باشند. اگر نقطه $P(\rho, \theta, \phi)$ مبدأ θ نباشد، آنگاه



شکل ۶.۱۰.۱۷

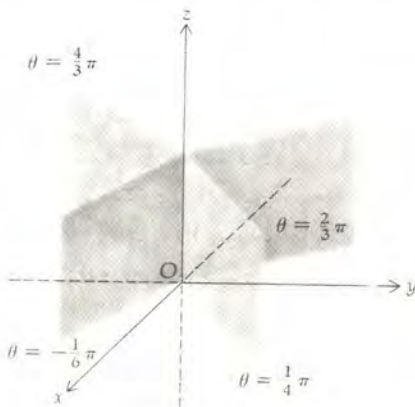
$\phi > 0$ و $0 \leq \phi \leq \pi$ ، که در آن $\phi = 0$ اگر P بر قسمت مثبت محور z ها قرار داشته باشد و $\phi = \pi$ اگر P بر قسمت منفی محور z ها واقع باشد.

مثال ۴ نمودار هر يك از معادلات زیر را رسم کنید؛ c يك مقدار ثابت است:
(الف) $\rho = c$ ، و $0 < c < \pi$ ؛ (ب) $\theta = c$ ؛ (پ) $\phi = c$ و $0 < c < \pi$.

حل

(الف) هر نقطه $P(\rho, \theta, \phi)$ بر نمودار $\rho = c$ دارای مقدار ثابت ρ است، θ هر عددی می تواند باشد، و $0 \leq \phi \leq \pi$. نتیجه می گیریم که نمودار، کره ای به شعاع c است که مرکزش در قطب است. شکل ۷.۱۰.۱۷ نمودار کره را نشان می دهد.

(ب) در مورد هر نقطه $P(\rho, \theta, \phi)$ بر نمودار $\theta = c$ ، ρ می تواند هر عدد نامنفی باشد، ϕ می تواند هر عدد متعلق به بازه بسته $[0, \pi]$ باشد، و θ ثابت است. نمودار، نیم صفحه ای است که محور z ها را در بر دارد و از دوران قسمتی از نیم صفحه xy (که در آن $x \geq 0$) حول محور z ها به اندازه c رادیان به دست می آید. شکل ۸.۱۰.۱۷ نمودارهای این نیم صفحه ها را به ازای $\theta = (\frac{1}{4})\pi$ ، $\theta = (\frac{2}{3})\pi$ ، $\theta = (\frac{4}{3})\pi$ ، و $\theta = -(\frac{1}{6})\pi$ نشان می دهد.

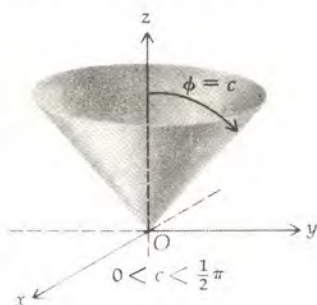


شکل ۸.۱۰.۱۷

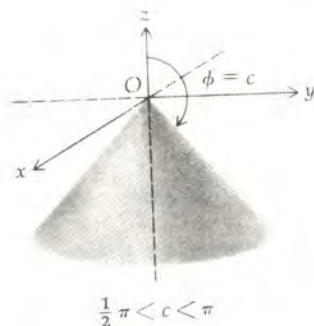


شکل ۷.۱۰.۱۷

(پ) نمودار $\phi = c$ تمام نقاطی چون $P(\rho, \theta, \phi)$ را در بردارد که ρ عددی دلخواه نامنفی، θ عددی دلخواه، و ϕ مقدار ثابت c است. این نمودار، نیمی از مخروطی است که رأسش در مبدأ و محورش محور z هاست. شکل های ۹.۱۰.۱۷ (الف) و (ب) هر يك نیمی از مخروط را به ترتیب به ازای $\phi = (\frac{1}{2})\pi$ و $0 < c < \pi$ نشان می دهند.



(الف)



(ب)

شکل ۹.۱۰.۱۷

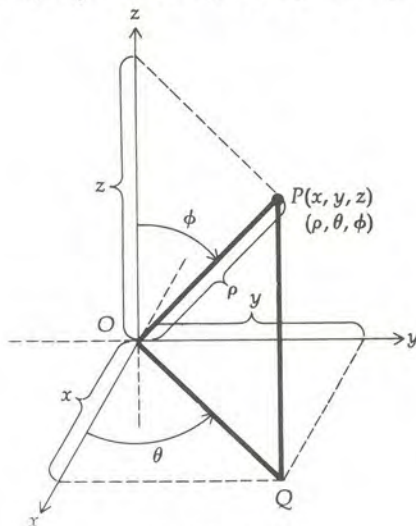
همان گونه که در مثال ۴ (الف) دیدیم نمودار $\rho = c$ يك كره است، و اصطلاح «مختصات کروی» از اینجا می آید. در مسائل فیزیکی، وقتی مرکز تفارن وجود دارد، غالباً مختصات کروی را به کار می برند.

اگر دستگاه مختصات کروی را طبق شکل ۱۰.۱۰.۱۷ بر دستگاه مختصات دکارتی منطبق کنیم، ارتباط بین مختصات کروی و مختصات دکارتی نقطه‌ای چون P را به صورت

$$x = |\overline{OQ}| \cos \theta, \quad y = |\overline{OQ}| \sin \theta, \quad z = |\overline{OP}|$$

به دست می آوریم. چون $|\overline{OQ}| = \rho \sin \phi$ و $|\overline{OP}| = \rho \cos \phi$ ، این معادلات به صورت

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi \quad (۳)$$



شکل ۱۰.۱۰.۱۷

در می آیند.

اگر هر يك از روابط مذکور در (۳) را مجذور و نتایج را با هم جمع کنیم، داریم

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

مثال ۵ برای هر يك از رویه‌های زیر که معادلاتشان در مختصات کروی داده شده است، معادله‌ای در مختصات دکارتی بیابید، و رویه را مشخص کنید: (الف) $\rho \cos \phi = 4$ ؛ (ب) $\rho \sin \phi = 4$.

حل

(الف) چون $z = \rho \cos \phi$ ، معادله به صورت $z = 4$ در می آید. پس نمودار، صفحه‌ای است موازی صفحه xy و واقع در فاصله ۴ واحدی بالای آن.

(ب) در دستگاه مختصات کروی داریم $\rho \geq 0$ و $\sin \phi \geq 0$ (زیرا $0 \leq \phi \leq \pi$)؛ بنا بر این، با مجذور کردن دوطرف معادله مفروض، معادله $\rho^2 \sin^2 \phi = 16$ به دست می آید که به نوبه خود معادل است با

$$\rho^2 (1 - \cos^2 \phi) = 16$$

$$\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \phi = 16.$$

اگر به جای ρ^2 ، $x^2 + y^2 + z^2$ و به جای $\rho \cos \phi$ ، z را قرار دهیم خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16.$$

بنا بر این نمودار، استوانه مستدیر قائمی است که محورش محور z ها و شعاعش ۴ است. ▲

مثال ۶ معادله‌ای در دستگاه مختصات کروی برای: (الف) سهمیوار بیضوی مذکور در مثال ۳ (الف)؛ (ب) صفحه مذکور در مثال ۲ (ب) بیابید.

حل

(الف) معادله‌ای دکارتی برای سهمیوار بیضوی مذکور در مثال ۳ (الف)، $x^2 + y^2 = z$ است. اگر به جای x ، $\rho \sin \phi \cos \theta$ ، به جای y ، $\rho \sin \phi \sin \theta$ ، و به جای z ، $\rho \cos \phi$ را قرار دهیم داریم

$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta = \rho \cos \phi$$

$$\rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho \cos \phi$$

که معادل است با دو معادله

$$\rho \sin^2 \phi = \cos \theta \quad \text{و} \quad \rho = 0$$

مبدأ تنها نقطه‌ای است که مختصاتش در $\rho = 0$ صدق می‌کنند. چون مبدأ $(0, \theta, \pi/2)$ بر $\rho \sin^2 \phi = \cos \theta$ قرار دارد، می‌توانیم از معادله $\rho = 0$ صرف‌نظر کنیم. علاوه بر این، $\sin \phi \neq 0$ زیرا هیچ مقداری برای ϕ وجود ندارد که $\sin \phi$ و $\cos \phi$ هر دو ۰ باشند. پس، معادله $\rho \sin^2 \phi = \cos \theta$ را می‌توان به صورت $\rho = \csc^2 \phi \cos \theta$ یا معادلش $\rho = \csc \phi \cot \phi$ نیز نوشت.

(ب) يك معادله دکارتی برای صفحه مذکور در مثال ۲ (ب) عبارت است از $3x + 2y + 6z = 0$. با استفاده از معادلات (۳)، این معادله به صورت

$$3\rho \sin \phi \cos \theta + 2\rho \sin \phi \sin \theta + 6\rho \cos \phi = 0$$

در می‌آید. ▲

تمرینهای ۱۰.۱۲

۱. مختصات دکارتی نقطه‌ای را که مختصات استوانه‌ایش در زیر داده شده‌اند، بیابید:

(الف) $(3, \frac{1}{4}\pi, 5)$ ؛ (ب) $(7, \frac{2}{3}\pi, -4)$ ؛ (پ) $(1, 1, 1)$.

۲. يك دسته مختصات استوانه‌ای برای نقطه‌ای که مختصات دکارتیش در زیر داده شده‌اند، بیابید:

(الف) $(4, 4, -2)$ ؛ (ب) $(-3\sqrt{3}, 3, 6)$ ؛ (پ) $(1, 1, 1)$.

۳. مختصات دکارتی نقطه‌ای را بیابید که مختصات کرویش عبارت‌اند از:

(الف) $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ ؛ (ب) $(4, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ ؛ (پ) $(\sqrt{6}, \frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.

۴. مطلوب است يك دسته مختصات کروی برای نقطه‌ای که مختصات دکارتیش عبارت‌اند از:

(الف) $(1, -1, -\sqrt{2})$ ؛ (ب) $(-1, \sqrt{3}, 2)$ ؛ (پ) $(2, 2, 2)$.

۵. يك دسته مختصات استوانه‌ای برای نقطه‌ای بیابید که مختصات کرویش عبارت‌اند از:

(الف) $(4, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$ ؛ (ب) $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi)$ ؛ (پ) $(2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

۶. يك دسته مختصات كروی برای نقطه‌ای بیابید که مختصات استوانه‌ایش عبارت انداز:

$$(الف) \left(3, \frac{1}{6}\pi, 3 \right); (ب) \left(3, \frac{1}{4}\pi, 2 \right); (پ) \left(2, \frac{5}{6}\pi, -4 \right)$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، معادله‌ای برای رویه مفروض در دستگاه مختصات استوانه‌ای بنویسید، و رویه را مشخص کنید.

$$۷. \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = 16 \quad ۸. \quad x^2 - y^2 = 9$$

$$۹. \quad x^2 + y^2 = 3z \quad ۱۰. \quad 9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$۱۱. \quad x^2 - y^2 = 3z^2 \quad ۱۲. \quad x^2 + y^2 = z^2$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۷، معادله‌ای در مختصات کروی برای رویه مفروض بیابید، و رویه را مشخص کنید.

$$۱۳. \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0 \quad ۱۴. \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$۱۵. \quad x^2 + y^2 = 9 \quad ۱۶. \quad x^2 + y^2 = 2z$$

$$۱۷. \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0$$

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۲، برای رویه‌ای که معادله‌اش در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده، معادله‌ای در مختصات دکارتی بیابید. در تمرینهای ۱۸ و ۱۹، رویه را مشخص کنید.

$$۱۸. \quad r = 3 \cos \theta \quad ۱۹. \quad (الف) r = 2; (ب) \theta = \frac{1}{4}\pi$$

$$۲۰. \quad r = 3 + 2 \cos \theta \quad ۲۱. \quad r^2 \cos 2\theta = z^2$$

$$۲۲. \quad z^2 \sin^2 \theta = r^2$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۷، برای رویه‌ای که معادله‌اش در مختصات کروی داده شده است، معادله‌ای در مختصات دکارتی بیابید. در تمرینهای ۲۳ تا ۲۵، رویه را مشخص کنید.

$$۲۳. \quad (الف) \rho = 9; (ب) \theta = \frac{1}{4}\pi; (پ) \phi = \frac{1}{4}\pi$$

$$۲۴. \quad \rho = 9 \sec \phi \quad ۲۵. \quad \rho = 6 \csc \phi$$

$$۲۶. \quad \rho = 3 \cos \phi \quad ۲۷. \quad \rho = 2 \tan \theta$$

$$۲۸. \quad \rho = 6 \sin \phi \sin \theta + 3 \cos \phi$$

۲۹. منحنیی چون C در R^3 درمختصات استوانه‌ای دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$r = F_1(t), \quad \theta = F_2(t), \quad z = F_3(t).$$

با استفاده از فرمول (۲) از بخش ۹.۱۷ و فرمولهای (۱) مذکور در این بخش ثابت کنید که اگر طول قوس C از نقطه‌ای که در آن $t = a$ تا نقطه‌ای که در آن $t = b$ ، L واحد باشد، آنگاه

$$L = \int_a^b \sqrt{V(D_t r)^2 + r^2 (D_t \theta)^2 + (D_t z)^2} dt.$$

۳۰. منحنیی چون C در R^3 در مختصات کروی دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$\rho = G_1(t), \quad \theta = G_2(t), \quad \phi = G_3(t).$$

با استفاده از فرمول (۴) از بخش ۹.۱۷ و فرمولهای (۳) مذکور در این بخش ثابت کنید که اگر طول قوس C از نقطه‌ای که در آن $t = a$ تا نقطه‌ای که در آن $t = b$ ، L واحد باشد، آنگاه

$$L = \int_a^b \sqrt{V(D_t \rho)^2 + \rho^2 \sin^2 \phi (D_t \theta)^2 + \rho^2 (D_t \phi)^2} dt.$$

۳۱. (الف) نشان دهید که معادلات پارامتری پیچ مستدیر مذکور در مثال ۱ از بخش ۹.۱۷ عبارت‌اند از:

$$r = a, \quad \theta = t, \quad z = t.$$

(ب) با استفاده از فرمول تمرین ۲۹ طول قوس پیچ مستدیر قسمت (الف) را از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ بیابید. پاسخ خود را با نتیجه مذکور در مثال ۱ از بخش ۹.۱۷ مقایسه کنید.

۳۲. پیچ مخروطی به همان نحوی که پیچ مستدیر به دور يك استوانه مسی پیچد، به دور يك مخروط پیچ مسی خورد. با استفاده از فرمول تمرین ۳۰ طول قوس پیچی مخروطی با معادلات پارامتری زیر را از $t = 0$ تا $t = 2\pi$ بیابید.

$$\rho = t, \quad \theta = t, \quad \phi = \frac{1}{4}\pi.$$

تمرینهای مروری فصل ۱۷

۱. نمودار $x = 3$ را در R^1 ، R^2 و R^3 رسم کنید.

۲. نمودار مجموعه نقاطی را که هم در معادله $x = 6$ و هم در معادله $y = 3$ صدق می‌کنند، در R^2 و R^3 رسم کنید.

در تمرینهای ۳ تا ۱۱، مجموعه نقاطی از R^3 را که در معادله مفروض یا در زوج معادلات مفروض صدق می‌کنند به زبان معمولی توصیف کنید. نمودار را رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} & \cdot ۴ \\ \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} & \cdot ۳ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y^2 - z^2 = 0 & \cdot ۶ \\ \begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} & \cdot ۵ \end{array}$$

$$x^2 + z^2 = 4 \quad \cdot ۸ \qquad x = y \quad \cdot ۷$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \cdot ۱۰ \qquad x^2 + y^2 = 9z \quad \cdot ۹$$

$$x^2 - y^2 = z^2 \quad \cdot ۱۱$$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۷، فرض کنید $A = -i + 3j + 2k$ ، $B = 2i + j - 4k$ ، $C = i + 2j - 2k$ ، $D = 3j - k$ ، $E = 5i - 2j$ ، بردار یا اسکلر موردنظر را بیابید.

$$6C + 4D - E \quad \cdot ۱۳ \qquad 3A - 2B + C \quad \cdot ۱۲$$

$$D \cdot B \times C \quad \cdot ۱۵ \qquad 2B \cdot C + 2D \cdot E \quad \cdot ۱۴$$

$$|A \times B| |D \times E| \quad \cdot ۱۷ \qquad (A \times C) - (D \times E) \quad \cdot ۱۶$$

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۳، تنها به یک طریق می‌توان عبارت معنی‌داری با قراردادن پرانتز به‌دست آورد. پرانتزهای لازم را درج کنید و بردار یا اسکلری را که عبارت حاصل نشان می‌دهد بیابید. فرض این است که

$$C = \langle 4, 6, -1 \rangle, B = \langle -5, 7, 2 \rangle, A = \langle 3, -2, 4 \rangle$$

$$AB \cdot C \quad \cdot ۱۹ \qquad A \cdot BC \quad \cdot ۱۸$$

$$A + B \cdot C \quad \cdot ۲۱ \qquad B \cdot A - C \quad \cdot ۲۰$$

$$A \times B \cdot A + B - C \quad \cdot ۲۳ \qquad A \times B \cdot C \times A \quad \cdot ۲۲$$

۲۴. اگر A بردار دلخواهی باشد، ثابت کنید که $A = (A \cdot i)i + (A \cdot j)j + (A \cdot k)k$.

۲۵. خطی ماربر نقطه $(-3, 5, 1)$ بر صفحه xz عمود است. مختصات نقاطی از این خط را که فاصله‌شان تا $(-2, 0, 0)$ ، ۱۳ واحد باشد بیابید.

۲۶. مطلوب است معادله‌ای برای کره‌ای که یکی از اقطارش پاره‌خطی با نقاط انتهایی $(3, 5, -2)$ و $(-1, 7, 4)$ باشد.

۲۷. مطلوب است معادله کره‌ای که هم مرکز با کره

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 10 = 0$$

باشد و نقطه $(-4, 2, 5)$ را در برداشته باشد.

۲۸. ثابت کنید که نقاط $(4, 1, -1)$ ، $(2, 0, 1)$ ، و $(4, 3, 0)$ رئوس يك مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و مساحت این مثلث را بیابید.

۲۹. محور رویه دواری به معادله $x^2 + z^2 = e^4$ و يك منحنی مولد آن را بیابید.

۳۰. مطلوب است معادله‌ای برای رویه دوار حاصل از دوران بیضی $9x^2 + 4z^2 = 36$ در صفحه xz ، حول محور x . رویه را رسم کنید.

۳۱. مطلوب است تعیین مقدار c به طوری که بردارهای $3i + cj - 2k$ و $5i - 4j + k$ متعامد باشند.

۳۲. نشان دهید نمایشهایی از سه بردار $A = 5i + j - 2k$ ، $B = i + 3j - 2k$ ، و $C = -4i + 2j + k$ وجود دارند که يك مثلث تشکیل بدهند.

۳۳. نقاط $A(5, 9, -3)$ و $B(-2, 4, -5)$ مفروض‌اند. مطلوب است: (الف) کسینوسهای هادی $V(\overline{AB})$ و (ب) بردار واحدی که همجهت با $V(\overline{AB})$ باشد.

۳۴. اگر

$$A = i + j - k, B = 2i - j + k, C = 2i - 2j + 4k, D = 5i + 6j - 8k$$

مطلوب است اسکالرهای a ، b ، و c به طوری که $aA + bB + cC = D$.

۳۵. اگر $A = \langle 7, -1, 5 \rangle$ و $B = \langle -2, 3, 1 \rangle$ ، مطلوب است: (الف) مؤلفه B در جهت A و (ب) تصویر برداری B بر روی A .

۳۶. معادله‌ای برای صفحه شامل نقاط $(1, 7, -3)$ و $(3, 1, 2)$ بیابید که محور x ها را قطع نکند.

۳۷. به دو روش، معادله‌ای برای صفحه ماربر سه نقطه $(-1, 2, 1)$ ، $(1, 4, 0)$ ، و $(1, -1, 3)$ بیابید: (الف) با استفاده از حاصلضرب برداری؛ (ب) بدون استفاده از حاصلضرب برداری.

۳۸. معادله‌ای برای صفحه شامل نقطه $(7, -2, -5)$ بنویسید که بر خط ماربر نقاط $(3, 2, 1)$ و $(-3, 0, 4)$ عمود باشد.

۳۹. مطلوب است تعیین فاصله مبدأ تا صفحه‌ای ماربر نقطه $(-۶, ۳, -۲)$ که یکی از بردارهای قائمش $۲\mathbf{k} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{i}$ باشد.

۴۰. دو بردار واحد بیابید که عمود بر بردار $\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$ باشند و نمایشهایشان با صفحه yz موازی باشند.

۴۱. فاصله نقطه $P(۴, ۶, -۴)$ تا خط ماربر دو نقطه $A(۲, ۲, ۱)$ و $B(۲, ۳, -۱)$ را بیابید.

۴۲. فاصله صفحه $۹x - ۲y + ۶z + ۴۴ = ۰$ تا نقطه $(-۳, ۲, ۰)$ را بیابید.

۴۳. اگر اندازه زاویه بین بردارهای $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = ۲\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ ، θ رادیان باشد، $\cos \theta$ را به دو روش بیابید: (الف) با استفاده از حاصلضرب نقطه‌ای؛ (ب) با استفاده از حاصلضرب برداری واتحاد مثلثاتی.

۴۴. ثابت کنید که خطوط

$$\frac{x-۲}{۲} = \frac{y-۵}{۳} = \frac{z-۵}{۱} \quad \text{و} \quad \frac{x-۱}{۱} = \frac{y+۲}{۲} = \frac{z-۲}{۲}$$

دو خط متناظرند، و فاصله بین آنها را بیابید.

۴۵. مطلوب است معادلات متقارن و پارامتری خط ماربر مبدأ و عمود بر هر یک از خطوط مذکور در تمرین ۴۴.

۴۶. معادلات متقارن و پارامتری خط ماربر دو نقطه $(-۳, ۵, ۲)$ و $(-۱, -۳, ۴)$ را بیابید.

۴۷. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+۱}{-۶} = \frac{y+۲}{۲} = \frac{z-۱}{-۸} \quad \text{و} \quad \frac{x-۲}{۳} = \frac{y+۳}{-۱} = \frac{z-۵}{۴}$$

بر هم منطبق‌اند.

۴۸. معادله‌ای برای صفحه شامل خط

$$(۱/۲)(x-۳) = -(y+۵) = (-۱/۳)(z+۲)$$

و نقطه $(۵, ۰, -۴)$ بنویسید.

۴۹. مساحت مقطع بیضیوار $x^2/۴ + y^2/۹ + z^2/۲۵ = ۱$ با صفحه $z = ۴$ را بیابید.

۵۰. مساحت متوازی‌الاضلاعی را که دو تا از اضلاعش نمایشهای موضع بردارهای $۵\mathbf{i} + ۴\mathbf{k}$ و $۲\mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$ باشند بیابید.

۵۱. حجم متوازی السطوحی به رئوس $(1, 3, 0)$ ، $(2, -1, 3)$ ، $(-2, 2, -1)$ ، و $(-1, 1, 2)$ را بیابید.

۵۲. مطلوب است تعیین طول قوس منحنی زیر از $t=0$ تا $t=\pi/2$.

$$x=t \cos t, \quad y=t \sin t, \quad z=t.$$

۵۳. طول قوس منحنی $\mathbf{R}(t) = (2-3t)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ را از $t=0$ تا $t=5/2$ بیابید.

۵۴. ذره‌ای در امتداد منحنیی با معادلات پارامتری زیر حرکت می‌کند

$$x = \ln(t^2+1), \quad y = t^2+1, \quad z = \tan^{-1}t.$$

بردار سرعت، بردار شتاب، و مقدار سرعت در $t=0$ را بیابید.

۵۵. ذره‌ای در امتداد منحنی مذکور در تمرین ۵۲ حرکت می‌کند. بردار سرعت، بردار شتاب، و مقدار سرعت در $t=\pi/2$ را بیابید. بخشی از منحنی را که شامل نقطه حاصل از $t=\pi/2$ باشد رسم کنید، و نمایشهای بردارهای سرعت و شتاب در آن نقطه را بکشید.

۵۶. در هر نقطه از منحنیی با معادله برداری $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ بردار مماس واحد و انحنای آن را بیابید.

۵۷. مطلوب است سه وجهی متحرک منحنی $\mathbf{R}(t) = 3 \sin 2t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 3 \cos 2t\mathbf{k}$ در نقطه‌ای که $t=\pi/2$ را بیابید.

۵۸. یک دسته مختصات کروی برای نقطه‌ای با مختصات دکارتی $(-3, \sqrt{3}, 2)$ بیابید.

۵۹. یک دسته مختصات استوانه‌ای برای نقطه‌ای با مختصات کروی $(3, \pi, \pi/3)$ بیابید.

۶۰. برای نمودار هر یک از معادلات زیر، معادله‌ای در مختصات استوانه‌ای بیابید:

$$(الف) \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 \quad (ب) \quad 4x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$$

۶۱. برای نمودار هر یک از معادلات زیر، معادله‌ای در مختصات استوانه‌ای بیابید:

$$(الف) \quad (x+y)^2 + 1 = z \quad (ب) \quad 25x^2 + 4y^2 = 100$$

۶۲. اگر $\mathbf{R}$ ، $\mathbf{Q}$ ، و $\mathbf{W}$ سه تابع برداری باشند که نسبت به t مشتق داشته باشند، ثابت کنید که

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t)] = D_t\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot D_t\mathbf{Q}(t) \times \mathbf{W}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) \times D_t\mathbf{W}(t).$$

حساب دیفرانسیل توابع چندمتغیری

۱۰۱۸ توابع چندمتغیری

اکنون مفهوم تابع را به توابع n متغیری تعمیم می‌دهیم، و در بخشهای بعدی مفاهیم حد، پیوستگی، و مشتق تابع را در مورد توابع n متغیری مورد بحث قرار خواهیم داد. بررسی کامل این مباحث در درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته انجام می‌گیرد. در این کتاب، بیشتر بحث ما دربارهٔ توابع چند متغیری، محدود به توابع دو و سه متغیری است؛ با این حال، تعاریف را برای توابع n متغیری ذکر می‌کنیم و سپس کاربرد این تعاریف را برای توابع دو و سه متغیری نشان می‌دهیم. همچنین وقتی که هر يك از این تعاریف را برای تابع يك متغیری به کار می‌بریم، نشان می‌دهیم که این تعریف قبلاً ارائه شده است.

برای تعمیم مفهوم يك تابع به توابعی با هر تعداد متغیر، ابتدا باید نقاط را در فضای n بعدی اعداد در نظر بگیریم، همان‌طور که يك نقطه در R^1 را با يك عدد حقیقی x ، و يك نقطه در R^2 را با زوج مرتبی از اعداد حقیقی (x, y) ، و يك نقطه در R^3 را با سه تایی مرتبی از اعداد حقیقی (x, y, z) نمایش می‌دهیم، يك نقطه در فضای n بعدی اعداد، R^n ، را با n تایی مرتبی از اعداد حقیقی مشخص می‌کنیم و بر حسب معمول با $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. در حالت خاص، اگر فرض کنیم $n=1$ ، آنگاه $P=x$ ؛ اگر $n=2$ ، داریم $P=(x, y)$ ؛ اگر $n=3$ ، می‌نویسیم $P=(x, y, z)$ و اگر $n=6$ ، $P=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

۱۰۱۰۱۸ تعریف مجموعه تمام n تاییهای مرتب از اعداد حقیقی را فضای n بعدی اعداد می نامند و با R^n نشان می دهند. هر n تایی مرتب $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ را يك نقطه در فضای n بعدی اعداد گویند.

۲۰۱۰۱۸ تعریف يك تابع n متغیری مجموعه ای از زوجهای مرتب به صورت (P, w) است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی که عنصر اولشان یکی باشد، وجود ندارد. P يك نقطه در فضای n بعدی اعداد و w يك عدد حقیقی است. مجموعه تمام مقادیر ممکن P را قلمرو تابع، و مجموعه تمام مقادیر ممکن w را برد تابع گویند.

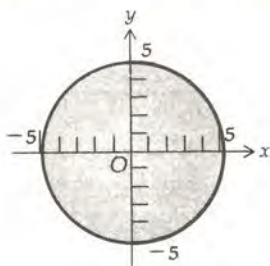
بنا به این تعریف، قلمرو يك تابع n متغیری مجموعه نقاطی واقع در R^n و برد آن مجموعه ای از اعداد حقیقی یا به عبارت دیگر، مجموعه نقاطی در R^1 است. وقتی $n=1$ ، يك تابع يك متغیری داریم؛ پس قلمرو آن، مجموعه نقاطی واقع در R^1 ، یا به عبارت دیگر، مجموعه ای از اعداد حقیقی است، و برد آن نیز مجموعه ای از اعداد حقیقی است. بنابراین، تعریف ۱۰۵۰۱ حالت خاصی از تعریف ۲۰۱۰۱۸ است. اگر $n=2$ ، يك تابع دو متغیری داریم، که قلمرو آن مجموعه نقاطی در R^2 ، یا به عبارت دیگر، مجموعه زوجهای مرتبی از اعداد حقیقی به صورت (x, y) است. برد این تابع مجموعه ای از اعداد حقیقی است.

○ نمونه ۱ فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y و به صورت مجموعه تمام زوجهای مرتب (P, z) باشد، به طوری که

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

قلمرو f مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) است که به ازای آنها $25 - x^2 - y^2 \geq 0$. این مجموعه، مجموعه تمام نقاطی از صفحه xy است که روی دایره $x^2 + y^2 = 25$ و داخل ناحیه محدود به دایره قرار دارند.

چون $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$ ، پس $0 \leq z \leq 5$ ؛ بنابراین برد f مجموعه تمام اعداد حقیقی در بازه بسته $[0, 5]$ است. در شکل ۱۰۱۰۱۸ نموداری رسم شده است که مجموعه نقاط قلمرو f را به صورت يك ناحیه سایه خورده در R^2 نشان می دهد.



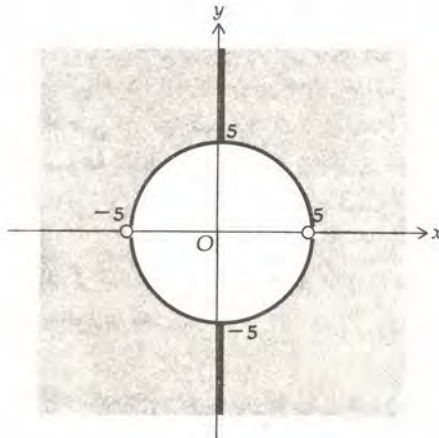
○

شکل ۱۰۱۰۱۸

○ نمونه ۲ تابع g از دو متغیر x و y عبارت است از مجموعه تمام زوجهای مرتب (P, z) بهطوری که

$$z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}{y}.$$

قلمرو g مجموعه $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 25, y \neq 0\}$ است. این مجموعه، مجموعه نقاطی است غیرواقع بر محور x ها که یا روی دایره $x^2 + y^2 = 25$ یا در خارج ناحیه محدود به دایره هستند. در شکل ۲۰۱۰۱۸ نموداری رسم شده است که مجموعه نقاط قلمرو g را به صورت یک ناحیه سایه خورده در R^2 نشان می دهد.



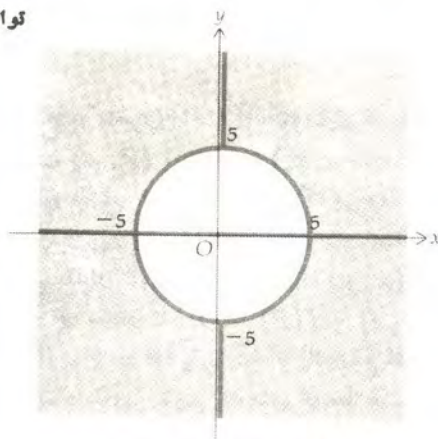
○

شکل ۲۰۱۰۱۸

○ نمونه ۳ تابع f از دو متغیر x و y به صورت مجموعه تمام زوجهای مرتب (P, z) است بهطوری که

$$z = y\sqrt{x^2 + y^2 - 25}.$$

اگر $y = 0$ ، صرف نظر از مقدار x ، داریم $z = 0$. ولی اگر $y \neq 0$ ، بایستی $x^2 + y^2 - 25$ غیرمنفی باشد تا z تعریف شود. بنابراین قلمرو f شامل تمام زوجهای مرتب (x, y) است که به ازای آنها یا $y = 0$ و یا $x^2 + y^2 \geq 25$. این قلمرو عبارت است از مجموعه تمام نقاط روی دایره $x^2 + y^2 = 25$ ، تمام نقاط خارج از ناحیه محدود به دایره، و تمام نقاط روی محور x ها بهطوری که $-5 < x < 5$. در شکل ۳۰۱۰۱۸ نموداری رسم شده است، که مجموعه نقاط واقع در قلمرو f را به صورت ناحیه سایه خورده در R^2 نشان می دهد.



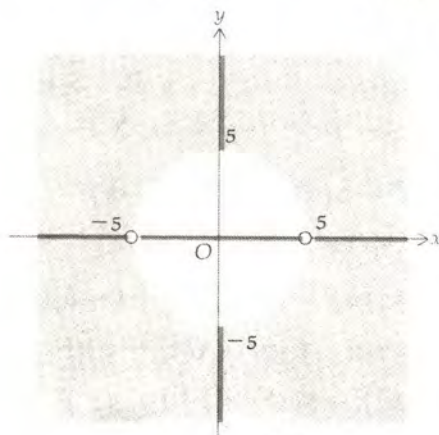
○

شکل ۳.۱۰۱۸

○ نمونه ۴ تابع G از دو متغیر x و y عبارت است از مجموعه زوجهای مرتب به صورت (P, z) به طوری که

$$z = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}.$$

اگر $y = 0$ ، به شرط اینکه $x^2 + y^2 - 25 \neq 0$ داریم $z = 0$. اگر $y \neq 0$ ، آنگاه بایستی $x^2 + y^2 - 25$ مثبت باشد تا z تعریف شود. پس قلمرو G شامل تمام زوجهای مرتب (x, y) است که به ازای آنها $x^2 + y^2 - 25 > 0$ و نیز زوجهای مرتبی که به ازای آنها $y = 0$ و $x \neq \pm 5$. این نقاط عبارت اند از همه نقاط خارج از ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 25$ و نقاط روی محور x ها که به ازای آنها $-5 < x < 5$. در شکل ۳.۱۰۱۸، نموداری رسم شده است، که مجموعه نقاط واقع در قلمرو G را به صورت ناحیه سایه خورده در R^2 نشان می دهد.



○

شکل ۴.۱۰۱۸

اگر f یک تابع n متغیری باشد، آنگاه طبق تعریف ۲۰۱.۱۸، f مجموعه‌ای از زوجهای مرتب به صورت (P, w) است که $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ نقطه‌ای در R^n و w یک عدد حقیقی است. مقدار خاصی از w را که مربوط به یک نقطه P است، با علامت $f(P)$ یا $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان می‌دهیم. در حالت خاص، اگر $n=2$ ، و $P = (x, y)$ ، می‌توانیم مقدار تابع را با $f(P)$ یا $f(x, y)$ نشان دهیم. همین‌طور، اگر $n=3$ و $P = (x, y, z)$ ، مقدار تابع را با $f(P)$ یا $f(x, y, z)$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که اگر $n=1$ ، داریم $P = x$ ؛ پس اگر f یک تابع یک‌متغیری باشد، $f(P) = f(x)$. بنابراین، این نماد با نماد مقادیر تابع یک متغیری مطابقت دارد. یک تابع n متغیری را می‌توان به وسیله معادله زیر تعریف کرد

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ را متغیرهای مستقل و w را متغیر وابسته می‌نامند.

○ نمونه ۵ فرض کنید f تابع مذکور در نمونه ۱ باشد؛ یعنی

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

آنگاه

$$f(3, -4) = \sqrt{25 - (3)^2 - (-4)^2} = \sqrt{25 - 9 - 16} = 0$$

$$f(-2, 1) = \sqrt{25 - (-2)^2 - (1)^2} = \sqrt{25 - 4 - 1} = 2\sqrt{5}$$

$$\circ \quad f(u, 3v) = \sqrt{25 - u^2 - (3v)^2} = \sqrt{25 - u^2 - 9v^2}$$

مثال ۱ تابع g به صورت $g(x, y, z) = x^2 - 5xz + yz^2$ تعریف شده است. مطلوب است (الف) $g(1, 4, -2)$ ؛ (ب) $g(2a, -b, 3c)$ ؛ (پ) $g(x^2, y^2, z^2)$ ؛ (ت) $g(y, z, -x)$.

حل

$$g(1, 4, -2) = 1^2 - 5(1)(-2) + 4(-2)^2 \quad (\text{الف})$$

$$= 1 + 10 + 16 = 27$$

$$g(2a, -b, 3c) = (2a)^2 - 5(2a)(3c) + (-b)(3c)^2 \quad (\text{ب})$$

$$= 4a^2 - 30ac - 9bc^2$$

$$g(x^2, y^2, z^2) = (x^2)^2 - 5(x^2)(z^2) + (y^2)(z^2)^2 \quad (\text{پ})$$

$$= x^4 - 5x^2z^2 + y^2z^4$$

$$\blacktriangle \quad g(y, z, -x) = y^2 - 5y(-x) + z(-x)^2 = y^2 + 5xy + x^2z \quad (\text{ت})$$

۳۰۱۰۱۸ تعریف اگر f يك تابع يك متغیری و g يك تابع دو متغیری باشد، آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ تابعی است دو متغیری که به صورت زیر تعریف می شود

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)).$$

قلمرو $f \circ g$ مجموعه تمام نقاط (x, y) در قلمرو g است به طوری که $g(x, y)$ در قلمرو f باشد.

مثال ۲ $f(t) = \ln t$ و $g(x, y) = x^2 + y$ مفروض اند؛ اگر $h = f \circ g$ ، مطلوب است $h(x, y)$ ، و قلمرو h .

حل

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (f \circ g)(x, y) \\ &= f(g(x, y)) \\ &= f(x^2 + y) \\ &= \ln(x^2 + y). \end{aligned}$$

قلمرو g مجموعه تمام نقاط در R^2 ، و قلمرو f بازه $(0, +\infty)$ است. بنابراین قلمرو h مجموعه $\{(x, y) | x^2 + y \geq 0\}$ می باشد. $\blacktriangle$

تعریف ۳۰۱۰۱۸ را می توان برای يك تابع مرکب n متغیری به صورت زیر تعمیم داد.

۴۰۱۰۱۸ تعریف اگر f يك تابع يك متغیری و g يك تابع n متغیری باشد، آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ تابعی n متغیری است که به صورت زیر تعریف می شود

$$(f \circ g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(g(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

قلمرو $f \circ g$ مجموعه تمام آن نقاط $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در قلمرو g است که به ازای آنها $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در قلمرو f باشد.

مثال ۳ فرض کنید $F(x) = \sin^{-1}x$ و $G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}$ تابع $F \circ G$ و قلمرو آن را بیابید.

حل

$$\begin{aligned}
 (F \circ G)(x, y, z) &= F(G(x, y, z)) \\
 &= F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}) \\
 &= \sin^{-1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}.
 \end{aligned}$$

قلمرو G مجموعه $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - 4 \geq 0\}$ ، و قلمرو F بازه بسته $[-1, 1]$ است. پس قلمرو $F \circ G$ مجموعه تمام آن نقاط (x, y, z) در R^3 است که به ازای آنها $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 - 4 \leq 5$ یا $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. ▲

يك تابع چندجمله‌ای از دو متغیر x و y تابعی است مانند f به طوری که $f(x, y)$ مجموع جملاتی به صورت $cx^m y^n$ باشد، که در آن c يك عدد حقیقی، و m و n اعداد صحیح نامنفی هستند. اگر مجموع نماهای x و y را در هر يك از جملات در نظر بگیریم، بزرگترین مجموع نماها، درجهٔ تابع چندجمله‌ای را معین می‌کند. مثلاً تابع f باضابطه زیر

$$f(x, y) = 6x^2 y^2 - 5xy^3 + 7x^2 y - 2x^2 + y$$

يك تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۵ است.

نمودار يك تابع يك متغیری f مجموعهٔ نقاطی چون (x, y) در R^2 است که به ازای آنها $y = f(x)$. همین‌طور، نمودار يك تابع دو متغیری، مجموعهٔ نقاطی در R^3 است.

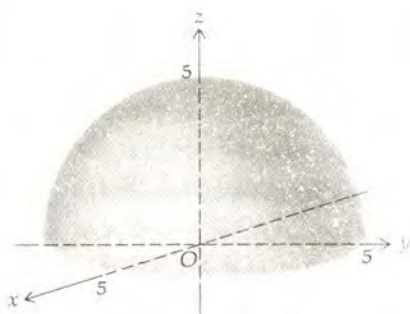
۵۰۱۱۸ تعریف اگر f يك تابع دو متغیری باشد، آنگاه نمودار f مجموعهٔ تمام نقاطی چون (x, y, z) در R^3 است به طوری که (x, y) نقطه‌ای در قلمرو f باشد و $z = f(x, y)$.

بنابراین، نمودار تابع دو متغیری f رویه‌ای است شامل مجموعهٔ نقاطی در فضای سه بعدی که مختصات دکارتی این نقاط با سه تاییهای مرتب از اعداد حقیقی (x, y, z) معین شود. چون قلمرو f مجموعه‌ای از نقاط واقع در صفحهٔ xy است، و چون برای هر زوج مرتب (x, y) واقع در قلمرو f مقدار یکتای متناظر z وجود دارد، هیچ خط عمود بر صفحهٔ xy نمی‌تواند نمودار f را در بیشتر از يك نقطه قطع کند.

○ نمونه ۶ تابع مذکور در نمونهٔ ۱، تابع f است که مجموعهٔ تمام زوجهای مرتبی به صورت (P, z) می‌باشد به طوری که

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

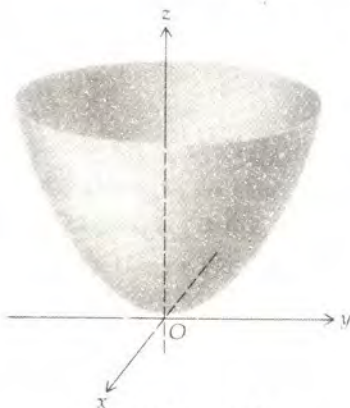
پس نمودار f نیمکره‌ای است واقع بر روی صفحهٔ xy و بالای آن، که شعاع آن ۵ است و مرکزش در مبدأ قرار دارد. نمودار این نیمکره در شکل ۵۰۱۱۸ نشان داده شده است.



شکل ۵.۱۰۱۸

مثال ۴ نمودار تابع f با ضابطه $f(x, y) = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

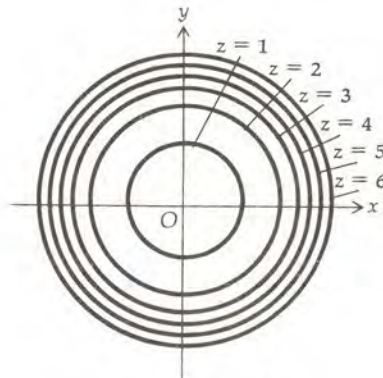
حل نمودار f رویه‌ای است با معادله $z = x^2 + y^2$. مقطع این رویه با صفحه xy ، با حل دستگاه متشکل از $z = 0$ و معادله رویه به دست می‌آید. نتیجه می‌شود $x^2 + y^2 = 0$ که مبدأ است. مقاطع رویه با صفحات xz و yz به ترتیب با حل دستگاه معادلات $y = 0$ و $z = x^2 + y^2$ و دستگاه معادلات $x = 0$ و $z = x^2 + y^2$ به دست می‌آیند. این مقاطع، سهمیه‌های $z = x^2$ و $z = y^2$ هستند. مقطع این رویه با صفحه‌ای مانند $z = k$ ، موازی با صفحه xy ، دایره‌ای است که مرکزش روی محور z ها و شعاعش $\sqrt{k}$ است. با این اطلاعات، نمودار مطلوب در شکل ۶.۱۰۱۸ رسم شده است.



شکل ۶.۱۰۱۸

روش مفید دیگری برای نمایش هندسی يك تابع دو متغیری، مشابه است با نمایش يك منظره سه بعدی به وسیله يك نقشه توبوگرافيك دوبعدی. فرض کنید صفحه $z = k$ رویه

$z = f(x, y)$ را قطع کند، و منحنی حاصل از تقاطع روی صفحه xy تصویر شود. این منحنی تصویر شده دارای معادله $f(x, y) = k$ خواهد بود، و این منحنی را منحنی تراز تابع f در k می نامند. هر نقطه روی منحنی تراز متناظر با نقطه منحصر به فردی روی رویه است که اگر k مثبت باشد، به فاصله k واحد بالای صفحه xy ، و اگر k منفی باشد، به فاصله k واحد زیر آن خواهد بود. با در نظر گرفتن مقادیر مختلفی برای ثابت k ، مجموعه ای از منحنیهای تراز را به دست می آوریم که يك نقشه تراز نامیده می شود. مجموعه تمام مقادیر ممکن k ، برد تابع f است، و هر منحنی تراز $f(x, y) = k$ در نقشه تراز متشکل از نقاطی مانند (x, y) در قلمرو f است که f به ازای آنها مقادیر k ی یکسانی دارد. مثلاً منحنیهای تراز تابع مذکور در مثال ۴، دوایری هستند که مرکز شان در مبدأ است. منحنیهای تراز خاص برای $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ در شکل ۷۰۱۰۱۸ نشان داده شده است.

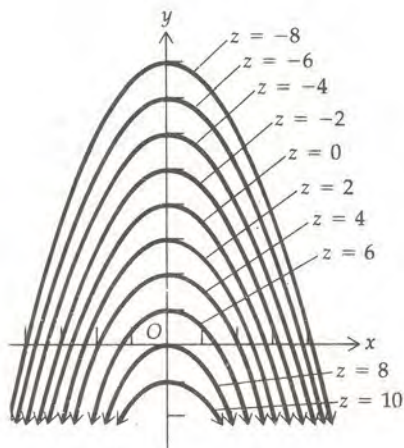


شکل ۷۰۱۰۱۸

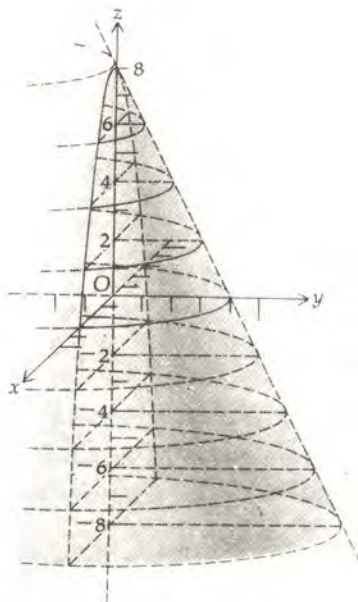
نقشه تراز، تغییرات z نسبت به x و y را نشان می دهد. منحنیهای تراز معمولاً به ازای مقادیر z در بازه های ثابت نشان داده می شوند، و مقادیر z ، وقتی که منحنیهای تراز نسبت به هم نزدیک اند سریعتر تغییر می کنند تا موقعی که از هم دورند؛ یعنی، وقتی که منحنیهای تراز به هم نزدیک اند، رویه دارای شیب تند است، و وقتی که منحنیهای تراز از هم دورند ارتفاع رویه به طور آهسته تغییر می کند. با ملاحظه فاصله منحنیهای تراز در يك نقشه جغرافیایی بزرگ مقیاس و دوبردی از يك ناحیه، می توان تصویری کلی از شیب آن ناحیه به دست آورد. همچنین اگر روی چنین نقشه ای مسیر يك منحنی تراز را تعقیب کنیم، ارتفاع ثابت می ماند.

مثال ۵ فرض کنید f تابعی باشد با ضابطه $f(x, y) = 8 - x^2 - 2y$. نموداری از f و نقشه تراز از f رسم کنید که منحنیهای تراز f در $z = 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$ را نشان دهد.

حل نمودار f در شکل ۸.۱۰۱۸ نشان داده شده است و عبارت است از رویهٔ $z = 8 - x^2 - 2y$. با قراردادن $z = 0$ ، مقطع این رویه با صفحهٔ xy به دست می آید که سهمی $x^2 = -2(y - 4)$ است. با قراردادن $y = 0$ و $x = 0$ ، مقاطع رویه با صفحات xz و yz که به ترتیب سهمی $x^2 = -(z - 8)$ و خط $2y + z = 8$ می باشند، به دست می آید. مقطع رویه با صفحهٔ $z = k$ يك سهمی است که رأس آن روی خط $2y + z = 8$ در صفحهٔ yz است و دهانه اش به طرف چپ می شود. مقاطع رویه به ازای $z = 8, 6, 4, 2, -2, -4, -6, -8$ در شکل نشان داده شده است. منحنیهای تراز f سهمیهای $x^2 = -2(y - 4 + k/2)$ هستند. نقشهٔ تراز f با نمودار منحنیهای تراز خواسته شده در شکل ۹.۱۰۱۸ رسم شده است.



▲ شکل ۹.۱۰۱۸



شکل ۸.۱۰۱۸

برای اینکه کار بردی از منحنیهای تراز نشان داده شود، فرض می کنیم دما در هر نقطهٔ يك صفحهٔ فلزی مسطح به وسیلهٔ تابع f معین شود؛ یعنی اگر t بر حسب درجه، دما باشد، آنگاه در هر نقطهٔ (x, y) داشته باشیم $t = f(x, y)$. در این صورت منحنیهایی که معادلاتی به صورت $f(x, y) = k$ دارند، که در آن k يك ثابت است، منحنیهایی هستند که روی آنها دما ثابت است. این منحنیها، منحنیهای تراز f اند و منحنیهای تکدما نامیده می شوند. به علاوه، اگر مقدار پتانسیل الکتریکی در هر نقطهٔ (x, y) از صفحهٔ xy برابر V ولت باشد،

و $V = f(x, y)$ در این صورت، منحنیهای تراز f منحنیهای همپتانسیل نامیده می‌شوند، چون پتانسیل الکتریکی در هر نقطه یک چنین منحنی، یکسان است. به عنوان کاربردی از منحنیهای تراز در اقتصاد، بهره‌وری (یا خروجی) صنعتی را که به چندین ورودی وابستگی دارد در نظر بگیرید. ورودیها ممکن است تعداد ماشینهای که برای تولید به کار می‌رود، تعداد فرد ساعت کار موجود، مقدار سرمایه به کار افتاده، مقدار مواد مصرف شده، و مقدار زمین موجود باشند. فرض کنید مقادیر ورودیها x و y ، و مقدار خروجی z باشد و $z = f(x, y)$. چنین تابعی را تابع تولید گویند، و منحنیهای تراز f ، که معادلاتی به صورت $f(x, y) = k$ دارند، که در آن k یک ثابت است، منحنیهای تولید ثابت نامیده می‌شوند.

مثال ۶ فرض کنید f تابع تولیدی باشد که به صورت $f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2}$ تعریف می‌شود. یک نقشه تراز از f رسم کنید که نشان دهنده منحنیهای تولید ثابت ۸، ۶، ۴، ۲ و ۱ باشد.

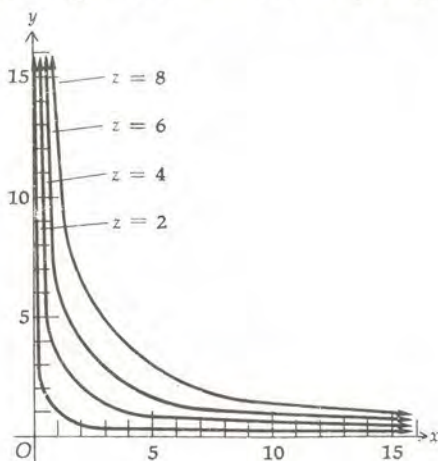
حل نقشه تراز شامل منحنیهای $z = 8, 6, 4, 2$ است که از تقاطع روبره

$$z = 2x^{1/2}y^{1/2} \quad (1)$$

با صفحات $z = k$ به ازای $k = 8, 6, 4, 2, 1$ به دست می‌آیند. با قراردادن $z = 8$ در معادله (۱) به دست می‌آوریم $xy = 16$ ، و یا به عبارت دیگر

$$xy = 16, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (2)$$

منحنی که در صفحه xy با ضابطه (۲) نشان داده می‌شود یک شاخه هذلولی واقع در ربع اول است. باریک از اعداد ۶، ۴، و ۲ شاخه‌ای از یک هذلولی واقع در ربع اول به دست می‌آید. این منحنیها همان منحنیهای تولید ثابت هستند، و در شکل ۱۰.۱۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰.۱۸

تعریف زیر، مفهوم نمودار تابع را به توابع n متغیری تعمیم می‌دهد.

۶.۱.۱۸. تعریف اگر f یک تابع n متغیری باشد، آنگاه نمودار f مجموعه تمام نقاط $(x_1, x_2, \dots, x_n, w)$ در R^{n+1} است که به ازای آنها $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نقطه در قلمرو f است و $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

منحنیهای تراز توابع سه متغیری وضعیتی مشابه با منحنیهای تراز توابع دو متغیری دارند. اگر f تابعی باشد که قلمروش مجموعه نقاطی در R^3 است، آنگاه اگر k عددی در برد f باشد، نمودار معادله $f(x, y, z) = k$ یک رویه خواهد بود. این رویه را رویه تراز f در k می‌نامند. هر رویه در فضای سه بعدی را می‌توان به صورت یک رویه تراز از تابعی سه متغیری در نظر گرفت. به عنوان مثال، اگر تابع g با معادله

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

تعریف شود، در این صورت رویه نشان داده شده در شکل ۶.۱.۱۸ رویه تراز g در 0 است. به طور مشابه، رویه‌ای به معادله $z - x^2 - y^2 + 5 = 0$ رویه تراز g در 5 است.

تمرینهای ۱.۱۸

۱. فرض کنید تابعی چون f از دو متغیر x و y ، مجموعه تمام زوجهای مرتبی به صورت (P, z) است به طوری که $z = (x + y)/(x - y)$. مطلوب است (الف) $f(-3, 4)$ ؛ (ب) $f(x^2, y^2)$ ؛ (پ) $[f(x, y)]^2$ ؛ (ت) $f(x, -y) - f(-x, y)$ ؛ (ث) قلمرو f ؛ (ج) برد f . نموداری رسم کنید که مجموعه نقاطی را که در قلمرو f نیستند به صورت ناحیه سایه خورده‌ای در R^2 نشان دهد.

۲. فرض کنید تابعی چون g از سه متغیر x ، y ، و z ، مجموعه زوجهای مرتبی به صورت (P, w) باشد به طوری که $w = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. مطلوب است (الف) $g(1, -1, -1)$ ؛ (ب) $g(-a, 2b, c/2)$ ؛ (پ) $g(y, -x, -y)$ ؛ (ت) قلمرو g ؛ (ث) برد g ؛ (ج) $[g(x, y, z)]^2 - [g(x + 2, y + 2, z)]^2$. نموداری رسم کنید که مجموعه نقاط قلمرو g را به صورت یک ناحیه سه بعدی سایه خورده در R^3 نشان دهد.

در تمرینهای ۳ تا ۱۶، قلمرو و برد f را به دست آورید، و نموداری رسم کنید که در آن، یک ناحیه سایه خورده در R^2 ، مجموعه نقاط قلمرو f را نشان دهد.

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2} \quad ۴. \quad f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad ۳.$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}{y} \quad .۶ \quad f(x, y) = \frac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x} \quad .۵$$

$$f(x, y) = y\sqrt{16 - x^2 - 4y^2} \quad .۸ \quad f(x, y) = x\sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad .۷$$

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}} \quad .۱۰ \quad f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} \quad .۹$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} \quad .۱۲ \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad .۱۱$$

$$f(x, y) = \frac{x+y}{xy} \quad .۱۴ \quad f(x, y) = \frac{x}{|y|} \quad .۱۳$$

$$f(x, y) = \sin^{-1}(x+y) \quad .۱۶ \quad f(x, y) = \ln(xy-1) \quad .۱۵$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۱۹، قلمرو و برد تابع f را به دست آورید.

$$f(x, y, z) = |x|e^{y/z} \quad .۱۸ \quad f(x, y, z) = (x+y)\sqrt{z-2} \quad .۱۷$$

$$f(x, y, z) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}y + \tan^{-1}z \quad .۱۹$$

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۶، قلمرو و برد تابع f را به دست آورید و نموداری از آن رسم کنید.

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 \quad .۲۱ \quad f(x, y) = \sqrt{x+y} \quad .۲۰$$

$$f(x, y) = 16 - x^2 - y^2 \quad .۲۳ \quad f(x, y) = 144 - 9x^2 - 16y^2 \quad .۲۲$$

$$f(x, y) = \sqrt{100 - 25x^2 - 4y^2} \quad .۲۴$$

$$f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2} \quad .۲۵$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \quad .۲۶$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۲، نمودار نقشه تراز از تابع f (رسم کنید که منحنیهای تراز f را به ازای اعداد داده شده نشان دهد).

$$.۲۷ \quad \text{تابع تمرین ۲۱، در } ۲۵, ۳۶, ۱۶, ۹, ۴, ۱, ۰ \text{ و } ۰$$

$$.۲۸ \quad \text{تابع تمرین ۲۰، در } ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ \text{ و } ۰$$

$$.۲۹ \quad \text{تابع تمرین ۲۳، در } ۸, ۴, ۰, -۴, -۸ \text{ و } ۰$$

۳۰. تابع تمرین ۲۲، در ۵، ۶، ۸، ۱۰ و ۰.

۳۱. تابع f با ضابطه $f(x, y) = (1/2)(x^2 + y^2)$ ، در ۲، ۴، ۶، ۸ و ۰.

۳۲. تابع f با ضابطه $f(x, y) = (x-3)/(y+2)$ ، در ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱/۲، ۱/۴، ۳/۴، ۵/۴.

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، اگر $h = f \circ g$ ، مطلوب است $h(x, y)$ و همچنین قلمرو h .

۳۳. $f(t) = \sin^{-1} t$; $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

۳۴. $f(t) = e^t$; $g(x, y) = y \ln x$

۳۵. f و g و h با ضوابط $f(x, y) = x - y$ ، $g(t) = \sqrt{t}$ ، و $h(s) = s^2$ داده شده اند. مطلوب است (الف) $(5, 1)$ ؛ $(g \circ f)$ ؛ (ب) $(f(h(3)), g(9))$ ؛ (پ) $(f(g(x), h(y)), (g \circ h)(f(x, y)))$ ؛ (ت) $(g((h \circ f)(x, y)))$.

۳۶. f و g و h با ضوابط $f(x, y) = x/y^2$ ، $g(x) = x^2$ ، و $h(x) = \sqrt{x}$ داده شده اند. مطلوب است (الف) $(2, 1)$ ؛ $(h \circ f)$ ؛ (ب) $(f(g(2), h(2)))$ ؛ (پ) $(f(g(\sqrt{x}), h(x^2)))$ ؛ (ت) $(h((g \circ f)(x, y)))$ ؛ (ث) $(h \circ g)(f(x, y))$.

۳۷. پتانسیل الکتریکی در نقطه (x, y) از صفحه xy برابر با V ولت است، و $V = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. منحنیهای همپتانسیل را به ازای $V = 16, 12, 8, 4, 2$ رسم کنید.

۳۸. تابع تولید f برای کالای معینی دارای مقادیری به صورت $f(x, y) = 4x^{1/3}y^{2/3}$ است، که x و y مقدار دو ورودی را نشان می دهند. یک نقشه تراز از f رسم کنید که نشان دهنده منحنیهای تولید ثابت در ۱۶، ۱۲، ۸، ۴، و ۲ باشد.

۳۹. فرض کنید z تعداد واحدهای تولید شده از یک کالا باشد و $z = 6xy$ ، که x تعداد ماشینهای مورد استفاده در تولید و y تعداد فرد ساعت کار موجود است. در این صورت تابع f با ضابطه $f(x, y) = 6xy$ یک تابع تولید است. یک نقشه تراز از f رسم کنید که نشان دهنده منحنیهای تولید ثابت به ازای $z = 30, 24, 18, 12, 6$ باشد.

۴۰. دما در هر نقطه (x, y) روی یک صفحه فلزی مسطح، t درجه است و $t = 4x^2 + 2y^2$. منحنیهای تکدما را به ازای $t = 12, 8, 4, 1, 0$ رسم کنید.

در تمرینهای ۴۱ و ۴۲، رویه های تراز تابع f را به ازای اعداد داده شده رسم کنید.

۴۱. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$ در ۸، ۴، ۰، -۴، و -۸.

۴۲. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در ۱، ۴، ۹، و ۰.

۲.۱۸ حد توابع چندمتغیری

در R^1 ، فاصله بین دو نقطه برابر است با قدر مطلق تفاضل دو عدد حقیقی؛ یعنی، فاصله بین دو نقطه x و a برابر است با $|x-a|$. در R^2 ، فاصله بین دو نقطه $P(x, y)$ و $P_0(x_0, y_0)$ از فرمول $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ به دست می آید. در R^3 ، فاصله بین دو نقطه $P(x, y, z)$ و $P(x_0, y_0, z_0)$ به صورت زیر معین می شود

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

در R^n نیز فاصله بین دو نقطه به طور مشابه تعریف می شود.

۱۰۲۰۱۸ تعریف اگر $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ دو نقطه در R^n باشند، آنگاه فاصله بین P و A را با $\|P-A\|$ نمایش می دهند که به صورت زیر تعیین می شود

$$\|P-A\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \dots + (x_n-a_n)^2}. \quad (۱)$$

اگر در R^1 داشته باشیم $P=x$ و $A=a$ ، آنگاه (۱) به صورت زیر در می آید

$$\|x-a\| = \sqrt{(x-a)^2} = |x-a|. \quad (۲)$$

اگر در R^2 داشته باشیم $P=(x, y)$ و $A=(x_0, y_0)$ ، آنگاه (۱) به صورت زیر است

$$\|(x, y)-(x_0, y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}. \quad (۳)$$

و اگر در R^3 داشته باشیم $P=(x, y, z)$ و $A=(x_0, y_0, z_0)$ ، آنگاه (۱) به صورت زیر خواهد بود

$$\|(x, y, z)-(x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \quad (۴)$$

$\|P-A\|$ خوانده می شود «فاصله بین P و A ». این فاصله عددی نامنفی است.

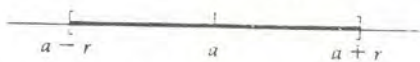
۲۰۲۰۱۸ تعریف اگر A یک نقطه در R^n و r یک عدد مثبت باشد، آنگاه گوی باز $B(A; r)$ ، مجموعه تمام نقاطی است چون P در R^n به طوری که $\|P-A\| < r$.

۳۰۲۰۱۸ تعریف اگر A یک نقطه در R^n و r یک عدد مثبت باشد، آنگاه گوی بسته $B[A; r]$ مجموعه تمام نقاطی است چون P در R^n به طوری که $\|P-A\| \leq r$.

برای روشن شدن این تعاریف، نشان می دهیم که این تعاریف در R^1 ، R^2 و R^3 چه معنایی دارند. ابتدا، فرض کنید a يك نقطه در R^1 است. در این صورت گوی باز $B(a; r)$ مجموعه تمام نقاطی چون x در R^1 است به طوری که

$$|x - a| < r. \quad (5)$$

مجموعه تمام نقاطی که در (۵) صدق می کند، عبارت است از مجموعه تمام نقاط واقع در بازه باز $(a-r, a+r)$ ؛ پس گوی باز $B(a; r)$ (شکل ۱۰۲۰۱۸ را ببینید) بازه باز $B(a; r)$ است که a نقطه وسط و $a-r$ ، $a+r$ نقاط انتهایی آن هستند. گوی بسته $B[a; r]$ در R^1 (شکل ۲۰۲۰۱۸ را ببینید) بازه بسته $[a-r, a+r]$ می باشد.



گوی بسته $B[a; r]$ در R^1

شکل ۲۰۲۰۱۸



گوی باز $B(a; r)$ در R^1

شکل ۱۰۲۰۱۸

اگر (x_0, y_0) يك نقطه در R^2 باشد، آنگاه گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ ، مجموعه تمام نقاطی چون (x, y) در R^2 است به طوری که

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r. \quad (6)$$

بنابر (۳) نتیجه می شود که (۶) معادل است با

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r.$$

پس گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ در R^2 (شکل ۳۰۲۰۱۸) متشکل از تمام نقاط داخل ناحیه محدود به دایره ای است که مرکزش در (x_0, y_0) و شعاع آن r است. گاهی گوی باز در R^2 را يك قرص باز می نامند. گوی بسته یا قرص بسته $B[(x_0, y_0); r]$ در R^2 (شکل ۴۰۲۰۱۸) عبارت است از مجموعه تمام نقاط واقع در گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ و روی دایره ای که مرکزش در (x_0, y_0) و شعاعش r می باشد.



گوی بسته $B[(x_0, y_0); r]$ در R^2

شکل ۴۰۲۰۱۸



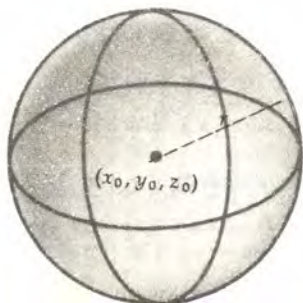
گوی باز $B((x_0, y_0); r)$ در R^2

شکل ۳۰۲۰۱۸

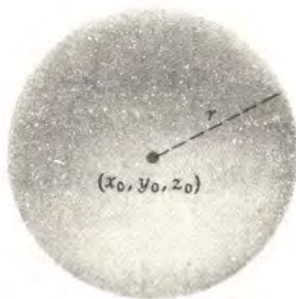
اگر (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای در R^3 باشد، آنگاه گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ مجموعه تمام نقاطی چون (x, y, z) در R^3 است به‌طوری که

$$\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\| < r. \quad (۷)$$

از (۴) و (۷) نتیجه می‌شود که گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3 (شکل ۵.۲.۱۸) مرکب از تمام نقاط داخل ناحیه محدود به کره‌ای است که مرکز کره در P_0 و شعاعش r می‌باشد. همین‌طور، گوی بسته $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ در R^3 (شکل ۶.۲.۱۸) مرکب از تمام نقاط واقع در گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ و روی کره‌ای به شعاع r است که مرکز کره در (x_0, y_0, z_0) قرار دارد. حال در موقعیتی هستیم که می‌توانیم حد یک تابع n متغیری را تعریف کنیم.



گوی بسته $B[(x_0, y_0, z_0); r]$ در R^3
شکل ۶.۲.۱۸



گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3
شکل ۵.۲.۱۸

۴.۲.۱۸ تعریف فرض کنید f یک تابع n متغیری است که در گوی بازی چون $B(A; r)$ ، بجز احتمالاً در خود نقطه A ، تعریف می‌شود. در این صورت حد $f(P)$ وقتی P به سمت A میل کند برابر با L است، و به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = L \quad (۸)$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، یک عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$0 < \|P - A\| < \delta \quad \text{وقتی} \quad |f(P) - L| < \varepsilon \quad (۹)$$

اگر f یک تابع یک‌متغیری باشد، و اگر در تعریف فوق $A = a$ (در R^1) و $P = x$ ، آنگاه (۸) به‌صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

درمی آید و (۹) به صورت زیر

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad |f(x)-L| < \varepsilon.$$

بنابراین تعریف (۱۰.۱۰۲) در مورد حد يك تابع يك متغیری حالت خاصی از تعریف ۴.۲.۱۸ است.

حال تعریف حد يك تابع دومتغیری را ارائه می کنیم. این تعریف حالت خاصی از تعریف ۴.۲.۱۸ است که در آن، A نقطه (x_0, y_0) و P نقطه (x, y) است.

۵.۲.۱۸ تعریف فرض کنید f يك تابع دومتغیری باشد که روی قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ ، بجز احتمالا در خود نقطه (x_0, y_0) ، تعریف شود. در این صورت حد $f(x, y)$ وقتی (x, y) به سمت (x_0, y_0) میل کند برابر با L است، که به صورت زیر نوشته می شود

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

به شرطی که برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، يك عدد $\delta > 0$ موجود باشد، که

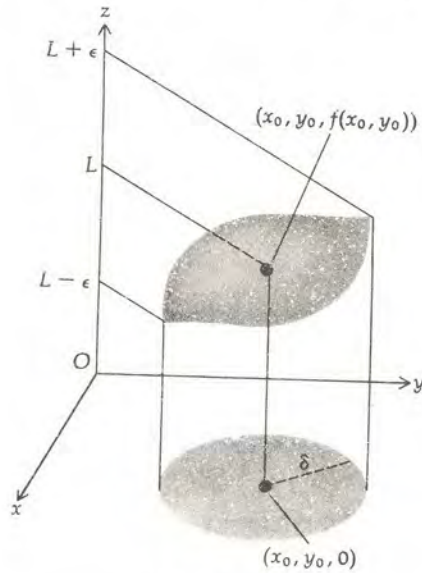
$$(۱۰) \quad \text{وقتی } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta, \quad |f(x, y)-L| < \varepsilon.$$

به عبارت دیگر، تعریف ۵.۲.۱۸ حاکی است که وقتی نقطه (x, y) به سمت (x_0, y_0) میل می کند، مقادیر تابع، $f(x, y)$ ، به سمت مقدار حدی L میل خواهد کرد، به شرط اینکه با انتخاب نقطه (x, y) به اندازه کافی نزدیک (x_0, y_0) اما نه مساوی با آن، قدر مطلق تفاضل بین $f(x, y)$ و L را بتوان به اندازه دلخواه کوچک کرد. در تعریف ۵.۲.۱۸ درباره مقدار تابع در نقطه (x_0, y_0) صحبتی نشده است؛ یعنی، برای اینکه

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

موجود باشد، لازم نیست که تابع در (x_0, y_0) تعریف شود.

تعبیر هندسی تعریف ۵.۲.۱۸ در شکل ۷.۲.۱۸ نشان داده شده است. قسمت بالای قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ از رویه به معادله $z = f(x, y)$ در شکل دیده می شود. می بینیم که هر گاه نقطه (x, y) در صفحه xy در قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ باشد، $f(x, y)$ روی محور z ها بین $L - \varepsilon$ و $L + \varepsilon$ قرار خواهد داشت. طریقه دیگر بیان این مطلب چنین است که با محصور کردن نقطه (x, y) از صفحه xy در قرص باز $B((x_0, y_0); \delta)$ ، می توان $f(x, y)$ را روی محور z ها بین $L - \varepsilon$ و $L + \varepsilon$ محصور نمود.



شکل ۷۰۲۰۱۸

○ نمونه ۱ با به کار بردن تعریف ۵۰۲۰۱۸، ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 3)} (2x + 3y) = 11.$$

شرط اول تعریف این است که $2x + 3y$ باید در قرص بازی که مرکزش در نقطه $(1, 3)$ قرار دارد، بجز احتمالا در $(1, 3)$ تعریف شود. چون $2x + 3y$ در هر نقطه (x, y) تعریف می‌شود، هر قرص بازی که مرکزش در $(1, 3)$ قرار داشته باشد، در این شرط صدق می‌کند. حال، باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta \implies |(2x+3y) - 11| < \varepsilon.$$

بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$|2x + 3y - 11| = |2x - 2 + 3y - 9| \leq 2|x - 1| + 3|y - 3|$$

چون

$$|x - 1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

و

$$|y - 3| \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$$

پس وقتی

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

آنگاه

$$2|x-1| + 3|y-3| < 2\delta + 3\delta.$$

پس اگر δ را $\varepsilon(1/5)$ بگیریم، وقتی که

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

آنگاه

$$|2x + 3y - 11| \leq 2|x-1| + 3|y-3| < 5\delta = \varepsilon.$$

و این ثابت می‌کند که

$$\bigcirc \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} (2x + 3y) = 11$$

مثال ۱ با استفاده از تعریف ۵.۲.۱۸ ثابت کنید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x^2 + y) = 5.$$

حل چون $3x^2 + y$ در هر نقطه (x, y) تعریف می‌شود، هر قرص بازی که مرکزش در $(1, 2)$ قرار داشته باشد، در شرط اول تعریف ۵.۲.۱۸ صدق خواهد کرد. باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \quad , \quad |(3x^2 + y) - 5| < \varepsilon \quad \text{وقتی}$$

بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$|3x^2 + y - 5| = |3x^2 - 3 + y - 2| \leq 3|x-1||x+1| + |y-2|. \quad (11)$$

اگر δ را، که دنبال آن می‌گردیم، نایب‌تر از ۱ بگیریم، در این صورت $1 \leq |x+1| < 1 + \delta$ و $|y-2| < \delta \leq 1$ ، به‌شرطی که

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \leq 1.$$

به‌علاوه، وقتی $|x-1| < 1$ ، آنگاه $-1 < x-1 < 1$ و بنا بر این $1 < x+1 < 3$. پس

$$3|x-1||x+1| + |y-2| < 3 \cdot \delta \cdot 3 + \delta = 10\delta \quad (12)$$

به شرطی که

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \leq 1.$$

بنابراین اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta = \min(1, \varepsilon/10)$ ، آنگاه از (۱۱) و (۱۲) داریم

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \leq \varepsilon \quad \text{وقتی} \quad |3x^2 + y - 5| < 10\delta \leq \varepsilon.$$

و این ثابت می‌کند که $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (3x^2 + y) = 5$ ▲

قضایای حدی فصل ۲ و اثباتهای آنها، با کمی تغییر، در مورد توابع چندمتغیری نیز به کار می‌رود. این قضایا را بدون بیان و اثبات دوباره به کار می‌بریم.

○ نمونه ۲ با به کار بردن قضایای حدی مجموع و حاصلضرب داریم

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (x^2 + 2x^2y - y^2 + 2) &= (-2)^2 \\ &\quad + 2(-2)^2(1) - (1)^2 + 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

○

مثال ۲ مطلوب است

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x - y}{27x^2 - y^2}.$$

حل

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x - y}{27x^2 - y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{3x - y}{(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{9x^2 + 3xy + y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{(9x^2 + 3xy + y^2)} \\ &= \frac{1}{9 + 9 + 9} \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned}$$

▲

نظیر قضیه ۶.۷.۲ در مورد حد توابع یک متغیری، قضیه زیر را در مورد حد یک تابع مرکب دومتغیری داریم.

۶.۲.۱۸ قضیه اگر g یک تابع دومتغیری باشد و $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = b$ و f یک تابع یک متغیری باشد که در b پیوسته است، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f \circ g)(x,y) = f(b)$$

یا به عبارت دیگر

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y)\right).$$

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۶.۷.۲ است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۴۹ را ببینید).

مثال ۳ مطلوب است محاسبه $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy-1)$ با استفاده از قضیه ۶.۲.۱۸.

حل فرض کنید g تابعی باشد با ضابطه $g(x,y) = xy-1$ ، و f تابعی باشد با ضابطه $f(t) = \ln t$. داریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy-1) = 1$$

و چون f در ۱ پیوسته است، بنا بر قضیه ۶.۲.۱۸ داریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \ln(xy-1) = \ln\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy-1)\right)$$

$$= \ln 1$$

▲

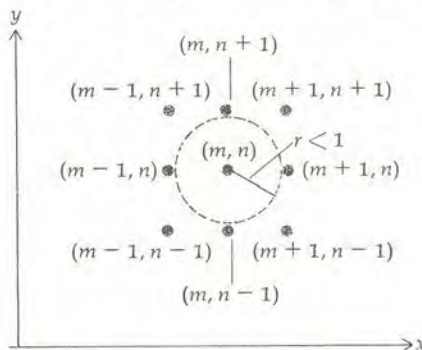
$$= 0.$$

اکنون مفهوم نقطه انباشتگی را بیان می کنیم، که برای ادامه بحث حاد توابع دومتغیری مورد نیاز است.

۷.۲.۱۸ قضیه نقطه P_0 را نقطه انباشتگی مجموعه ای چون S از نقاط واقع در R^n گویند اگر هر گوی باز $B(P_0; r)$ شامل بینهایت نقطه از S باشد.

نمونه ۳ اگر S مجموعه تمام نقاط R^2 واقع در طرف مثبت محور y ها باشد، آنگاه مبدأ يك نقطه انباشتگی S است چون هر فنظر از اینکه مقدار r را چقدر کوچک بگیریم، هر قرص بازی که مرکزش مبدأ و شعاعش r باشد، شامل بینهایت نقطه از S خواهد بود. این مثالی از مجموعه‌ای است که يك نقطه انباشتگی دارد به طوری که نقطه انباشتگی نقطه‌ای از مجموعه نیست. هر نقطه‌ای از خود مجموعه S نیز يك نقطه انباشتگی S است. ○

○ نمونه ۴ اگر S مجموعه تمام نقاطی از R^2 باشد که مختصات دکارتی آنها اعداد صحیح مثبتی باشند، این مجموعه هیچ نقطه انباشتگی ندارد. این مطلب را می‌توان با در نظر گرفتن نقطه (m, n) که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند، ملاحظه کرد. پس قرص بازی که مرکزش در (m, n) و شعاعش کمتر از ۱ باشد، شامل هیچ نقطه‌ای از S بجز (m, n) نخواهد بود؛ بنابراین تعریف ۷.۲۰۱۸ برقرار نیست (شکل ۸.۲۰۱۸ را ببینید).



شکل ۸.۲۰۱۸

○ حال حد يك تابع دومتغیری را وقتی که نقطه‌ای مانند (x, y) به سمت نقطه (x_0, y_0) میل می‌کند، به فرض اینکه (x, y) در مجموعه مشخصی از نقاط قرار داشته باشد، بررسی می‌کنیم.

۸.۲۰۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی باشد که روی مجموعه نقاط S در R^2 تعریف شود، و (x_0, y_0) يك نقطه انباشتگی S باشد. در این صورت حد $f(x, y)$ وقتی (x, y) به (x_0, y_0) میل کند برابر با L است، که به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (x, y) \in S}} f(x, y) = L \quad (۱۳)$$

به شرطی که برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

وقتی $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ ، $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ و (x, y) در S باشد.

حالت خاصی از (۱۳) وقتی پیش می‌آید که S مجموعه نقاطی روی یک منحنی شامل (x_0, y_0) باشد. در این حالت حد در (۱۳) تبدیل به حد یک تابع یک متغیری می‌شود. مثلاً، $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ را در نظر بگیرید. اگر S_1 مجموعه تمام نقاط واقع در طرف مثبت محور y ها باشد، داریم

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0).$$

اگر S_2 مجموعه تمام نقاط واقع در طرف منفی محور y ها باشد، داریم

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(0, y).$$

اگر S_3 مجموعه تمام نقاط واقع بر محور x ها باشد، داریم

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_3 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0).$$

اگر S_4 مجموعه تمام نقاط روی سهمی $y = x^2$ باشد، داریم

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_4 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2).$$

۹.۲.۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط واقع در قرص بازی که مرکزش در (x_0, y_0) است، بجز احتمالاً در خود (x_0, y_0) ، تعریف شود، و

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

در این صورت اگر S مجموعه دلخواهی از نقاط واقع در R^2 باشد که دارای نقطه انباشتگی (x_0, y_0) است، آنگاه

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (S \text{ در } P)}} f(x, y)$$

وجود دارد و مقدارش همواره L خواهد بود.

اثبات چون $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ، پس بنا بر تعریف ۵.۲.۱۸ ، برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد كه

$$\text{وقتی } 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \text{ ، } |f(x,y) - L| < \varepsilon .$$

عبارت بالا برقرار خواهد بود اگر به علاوه قید کنیم که (x,y) در مجموعه S واقع است، و S مجموعه نقاط دلخواهی است با نقطه انباشتگی (x_0,y_0) . بنابراین، با استفاده از تعریف ۸.۲.۱۸

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S \text{ در } P)}} f(x,y) = L$$

و وقتی که (x,y) به سمت (x_0,y_0) میل می کند، L بستگی به مجموعه S ندارد. با این مطلب، قضیه ثابت می شود. $\square$

قضیه زیر يك نتیجه مستقیم از قضیه ۹.۲.۱۸ است.

۱۰.۲.۱۸ قضیه اگر تابع f ، وقتی که (x,y) از طریق دو مجموعه متمایز از نقاط که دارای نقطه انباشتگی (x_0,y_0) هستند به سمت (x_0,y_0) میل کند، حدهای متفاوتی داشته باشد، آنگاه $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

اثبات فرض کنید S_1 و S_2 دو مجموعه متمایز از نقاط در R^2 باشند که دارای نقطه انباشتگی (x_0,y_0) هستند، و فرض کنید

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y) = L_2 \text{ و } \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) = L_1$$

حال تصور کنید $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود دارد. در این صورت بنا بر قضیه ۹.۲.۱۸ ، L_1 باید مساوی L_2 باشد، اما بنا به فرض داریم $L_1 \neq L_2$ ، و لذا این يك تناقض است. بنابراین $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد. $\square$

مثال ۴ فرض کنید

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل تابع f در تمام نقاط R^2 بجز در $(0, 0)$ تعریف می‌شود. فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط روی محور x ها باشد. در این صورت

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0.$$

فرض کنید S_2 مجموعه تمام نقاط واقع بر خط $y = x$ باشد. پس

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y)$$

▲ از قضیه ۱۵.۲.۱۸ نتیجه می‌شود که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال ۵ فرض کنید

$$f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}.$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل تابع f روی تمام نقاط R^2 بجز در مبدأ تعریف می‌شود. فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط روی محور x ها باشد. در این صورت

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0.$$

فرض کنید S_2 مجموعه تمام نقاط خط دلخواهی که از مبدأ می‌گذرد باشد؛ یعنی، برای هر نقطه (x,y) در S_2 ، داشته باشیم $y = mx$. پس

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2(mx)}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx}{1 + m^2} = 0.$$

اگر (x,y) از طریق مجموعه نقاط هر خطی که از مبدأ می‌گذرد به سمت $(0,0)$ میل

کند، حد یکسانی برابر با ۰ به دست می‌آید، ولی از این نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ موجود و برابر با ۰ است (مثال ۲ را ببینید). پس سعی می‌کنیم که ثابت کنیم $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. هر قرص بازی که مرکزش در مبدأ باشد در اولین شرط تعریف ۵.۲.۱۸ صدق خواهد کرد. اگر بتوانیم نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد که

$$(۱۴) \quad \text{وقتی } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

آنگاه ثابت کرده‌ایم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

چون $x^2 \leq x^2 + y^2$ و $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ، پس

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2}.$$

لذا، اگر $\delta = (1/3)\varepsilon$ ،

$$\text{وقتی } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \quad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right| < \varepsilon$$

که همان (۱۴) است. بنا بر این ثابت نمودیم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. ▲

مثال ۶ فرض کنید

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}.$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل تابع f در تمام نقاط R^2 بجز در $(0,0)$ تعریف می‌شود. فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط روی محور x ها یا محور y ها باشد. پس اگر (x,y) یک نقطه در S_1 باشد، $xy = 0$ بنا بر این

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) = 0.$$

فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط خط دلخواهی که از مبدأ می‌گذرد، باشد؛ پس اگر (x, y) يك نقطه در S_1 باشد، $y = mx$ در این صورت

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

فرض کنید S_2 مجموعه تمام نقاط روی سهمی $y = x^2$ باشد. پس

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

چون

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y)$$

▲

بنابراین نتیجه می‌شود که $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ وجود ندارد.

مثال ۷ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ را در صورت وجود بیابید.

حل تابع f در تمام نقاط R^2 تعریف می‌شود. فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط روی محور y ها باشد. در این صورت

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

فرض کنید S_2 مجموعه تمام نقاط خط دلخواهی که از مبدأ می‌گذرد بجز نقاط روی محور y ها باشد؛ یعنی، اگر (x, y) نقطه‌ای در S_2 باشد، $y = kx$ ، که $x \neq 0$. بنابراین

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + kx) \sin \frac{1}{x}.$$

برای به دست آوردن حد فوق، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $\lim_{x \rightarrow 0} (x + kx) = 0$ چون $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ وجود ندارد، قضیه حد حاصل ضرب را نمی‌توان به کار برد. ولی، چون $\lim_{x \rightarrow 0} (x + kx) = 0$ ، نتیجه می‌شود که برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x| < \delta \text{ ، } |x + kx| < \varepsilon$$

در حقیقت، δ برابر است با $\varepsilon/|1+k|$ اما

$$\left| (x + kx) \sin \frac{1}{x} \right| = |x + kx| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x + kx| \cdot 1$$

پس، برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x| < \delta \text{ ، } \left| (x + kx) \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

لذا

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) = 0 \quad (15)$$

فرض کنید S_3 مجموعه تمام نقاط (x, y) است به طوری که $y = kx^n$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی است و $x \neq 0$. پس با برهانی مشابه استدلال به کاررفته در اثبات (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (S_3 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + kx^n) \sin \frac{1}{x} = 0$$

حال سعی می‌کنیم يك $\delta > 0$ برای هر $\varepsilon > 0$ بیابیم که

$$(16) \quad \text{وقتی } 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \text{ ، } |f(x, y) - 0| < \varepsilon$$

که در این صورت ثابت خواهد شد $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$. دو حالت را بررسی می‌کنیم: $x = 0$ و $x \neq 0$.

حالت ۱: اگر $x = 0$ ، داریم $|f(x, y) - 0| = |0 - 0| = 0$ که برای هر $\delta > 0$ از ε کوچکتر است.

حالت ۲: اگر $x \neq 0$ ، داریم $|f(x, y) - 0| = |(x+y) \sin(1/x)|$

$$\begin{aligned} \left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \right| &= |x+y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x+y|(1) \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

یعنی،

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

پس

$$\left| (x+y) \sin \frac{1}{x} \right| < 2 \times \frac{1}{2} \varepsilon \quad , \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{وقتی}$$

لذا δ را برابر $\varepsilon/2$ در نظر می گیریم.

بنابراین، در هر دو حالت يك $\delta > 0$ برای هر $\varepsilon > 0$ به دست آوردیم به قسمی که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{برقرار است، و این ثابت می کند که} \quad \triangle$$

تمرینهای ۲۰۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۸، حد داده شده را با استفاده از قضایای حدی محاسبه کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad .2 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (3x^2 + xy - 2y^2) \quad .1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,4)} y \sqrt[3]{x^2 + 2y} \quad .4 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x^2 + 8y^2}{x + 2y} \quad .3$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x - e^y}{e^{-x} - e^{-y}} \quad .6 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y} \quad .5$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}{x - y} \quad .8 \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{y}}{x} \quad .7$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۶، تساویها را با یافتن يك $\delta > 0$ برای هر $\varepsilon > 0$ به طوری که تعریف ۵.۲۰.۱۸ برقرار باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (5x - 3y) = -2 \quad ۱۰. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} (3x - 4y) = 1 \quad ۹.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} (5x + 4y) = -6 \quad ۱۲. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,3)} (3x - 2y) = -9 \quad ۱۱.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} (2x^2 - y^2) = -1 \quad ۱۳. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + y^2) = 2 \quad ۱۲.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (x^2 + 2x - y) = 2 \quad ۱۵.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y) = -4 \quad ۱۶.$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، در مورد تابع داده شده f ثابت کنید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad ۱۸. \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ۱۷.$$

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad ۲۰. \quad f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^2} \quad ۱۹.$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \quad ۲۲. \quad f(x,y) = \frac{x^4y}{(x^4 + y^2)^2} \quad ۲۱.$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، ثابت کنید $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ وجود دارد.

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad ۲۴. \quad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ۲۳.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases} \quad ۲۵.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy) & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases} \quad ۲۶.$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۲۹، کاربرد قضیه ۶.۲.۱۸ را در پیدا کردن حد مفروضی نشان دهید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \left[5x + \frac{1}{y} y^2 \right] \quad .28$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad .27$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}} \quad .29$$

در هریک از تمرینهای ۳۰ تا ۳۵، اگر حد وجود دارد، آن را به دست آورید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad .31$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \quad .30$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2} \quad .33$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} \quad .32$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad ; f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad .34$$

.35

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad ; f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases}$$

۳۶. (الف) برای حد يك تابع سه متغیری وقتی كه نقطه (x, y, z) به سمت نقطه (x_0, y_0, z_0) میل می کند، تعریفی مشابه تعریف ۵.۲.۱۸ ارائه دهید؛ (ب) برای حد يك تابع سه متغیری وقتی كه نقطه (x, y, z) به سمت نقطه (x_0, y_0, z_0) در يك مجموعه مشخص از نقاط مانند S در R^3 میل می کند، تعریفی ارائه دهید.

۳۷. (الف) قضیه ای مشابه قضیه ۹.۲.۱۸ برای يك تابع سه متغیری ارائه و ثابت کنید؛ (ب) قضیه ای مشابه قضیه ۱۰.۲.۱۸ برای يك تابع سه متغیری ارائه و ثابت کنید.

در تمرینهای ۳۸ تا ۴۱، حد داده شده را با استفاده از قضایای حدی محاسبه کنید.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-2,1,4)} (4x^2 y - 3xyz^2 + 7y^2 z^2) \quad .38$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (\pi/2, 1, \pi)} \frac{\sec xy + \sec yz}{y - \sec z} \quad .39$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, -1, 1)} \frac{x^2 + y^2 z^2}{x + yz} \quad .۳۰$$

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{e^x e^z - e^y e^z}{e^x - e^y} \quad .۳۱$$

در تمرینهای ۴۲ تا ۴۵، با استفاده از تعاریف و قضایای تمرینهای ۳۶ و ۳۷ ثابت کنید که $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ وجود ندارد.

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + yz^2}{x^4 + y^2 + z^4} \quad .۳۲$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad .۳۳$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^4 + yx^2 + z^2 x^2}{x^4 + y^4 + z^4} \quad .۳۴$$

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6} \quad .۳۵$$

در تمرینهای ۴۶ و ۴۷، با استفاده از تعریف مذکور در تمرین ۳۶ (الف) ثابت کنید که $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$ وجود دارد.

$$f(x, y, z) = \frac{y^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad .۳۶$$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y + z) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases} \quad .۳۷$$

۴۸. فرض کنید f و g توابعی دومتغیری باشند که در شرایط زیر صدق می کنند.

(i) به ازای n و به ازای تمام t ها، $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ؛

$$g(tx, ty) = t^n g(x, y)$$

(ii) $g(1, 0) \neq 0$ و $g(1, 1) \neq 0$

(iii) $g(1, 1) \cdot f(1, 0) \neq g(1, 0) \cdot f(1, 1)$

نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ وجود ندارد.

۴۹. قضیه ۶.۲.۱۸ را ثابت کنید.

۳.۱۸ پیوستگی توابع چندمتغیری

در زیر، تعریف پیوستگی یک تابع n متغیری در یک نقطه واقع در R^n ذکر می‌شود.

۱.۳.۱۸ تعریف فرض کنید f یک تابع n متغیری و A نقطه‌ای در R^n باشد. در این صورت گوییم f در نقطه A پیوسته است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

(i) $f(A)$ وجود داشته باشد؛

(ii) $\lim_{P \rightarrow A} f(P)$ وجود داشته باشد؛

. $\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A)$ (iii)

اگر حتی یکی از سه شرط فوق در نقطه A برقرار نباشد، گوییم f در A ناپیوسته است.

تعریف ۱.۶.۲ در مورد پیوستگی یک تابع یک متغیری در عددی چون a حالت خاصی از تعریف ۱.۳.۱۸ است.

اگر f یک تابع دو متغیری باشد، A نقطه (x_0, y_0) است، و P نقطه‌ای چون (x, y) می‌باشد؛ پس تعریف ۱.۳.۱۸ به صورت زیر درمی‌آید.

۲.۳.۱۸ تعریف تابع f از دو متغیر x و y را در نقطه (x_0, y_0) پیوسته گویند اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد.

(i) $f(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد؛

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود داشته باشد؛

. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ (iii)

مثال ۱ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

آیا f در $(0, 0)$ پیوسته است؟

حل سه شرط تعریف ۲.۳.۱۸ را در نقطه $(0, 0)$ بررسی می‌کنیم.

(i) $f(0, 0) = 0$. بنا بر این شرط (i) برقرار است.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ ، که در مثال ۵ در بخش ۲.۱۸ ثابت شد.

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$

بنا بر این f در $(0, 0)$ پیوسته است.

مثال ۲ فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

آیا f در $(0, 0)$ پیوسته است؟

حل شرایط تعریف ۲.۳.۱۸ را بررسی می‌کنیم. داریم

(i) $f(0, 0) = 0$ ؛ پس شرط (i) برقرار است.

(ii) وقتی $(x, y) \neq (0, 0)$ ، داریم $f(x, y) = xy/(x^2+y^2)$. در مثال ۴

در بخش ۲.۱۸ نشان دادیم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy/(x^2+y^2)$ وجود ندارد.

بنابراین $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ موجود نیست. لذا شرط (ii) برقرار نیست.

پس f در $(0, 0)$ ناپیوسته است.

اگر تابع دومتغیری f در نقطه (x_0, y_0) ناپیوسته باشد، اما $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$

موجود باشد، در این صورت گویند f یک ناپیوستگی رفع‌شدنی در (x_0, y_0) دارد چون

اگر f در (x_0, y_0) طوری تعریف شود که $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ، آنگاه

f در (x_0, y_0) پیوسته می‌گردد. اگر ناپیوستگی رفع‌شدنی نباشد، آن را ناپیوستگی اساسی گویند.

○ نمونه ۱ (الف) اگر $g(x, y) = 3x^2y/(x^2 + y^2)$ ، آنگاه g در مبدأ ناپیوسته است زیرا $g(0, 0)$ تعریف نمی‌شود. ولی در مثال ۵ از بخش ۲.۱۸ نشان دادیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

بنابراین اگر $g(0, 0)$ برابر با ۰ تعریف شود، ناپیوستگی رفع شدنی است. (به مثال ۱ رجوع کنید.)

(ب) فرض کنید $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$. در این صورت h در مبدأ ناپیوسته است چون $h(0, 0)$ تعریف نمی‌شود. در مثال ۴ از بخش ۲.۱۸ نشان دادیم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy/(x^2 + y^2)$ وجود ندارد. بنابراین، ناپیوستگی اساسی است. (به مثال ۲ رجوع کنید.)

○

قضایای پیوستگی دربارهٔ توابع یک‌متغیری را می‌توان به توابع دومتغیری تعمیم داد.

۳.۳.۱۸ قضیه اگر f و g توابعی پیوسته در نقطهٔ (x_0, y_0) باشند، آنگاه

(i) $f + g$ در (x_0, y_0) پیوسته است؛

(ii) $f - g$ در (x_0, y_0) پیوسته است؛

(iii) fg در (x_0, y_0) پیوسته است؛

(iv) f/g در (x_0, y_0) پیوسته است، به شرط اینکه $g(x_0, y_0) \neq 0$.

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ متناظر (۱.۷.۲) در مورد توابع یک‌متغیری است، و لذا از آوردن آن صرف‌نظر می‌کنیم.

۴.۳.۱۸ قضیه هر تابع چندجمله‌ای دومتغیری، در هر نقطهٔ R^2 پیوسته است.

اثبات هر تابع چندجمله‌ای، مجموع حاصلضربهای توابع تعریف شده با ضوابط $f(x, y) = x$ ، $g(x, y) = y$ ، و $h(x, y) = c$ است که در آن c یک عدد حقیقی است. چون f ، g ، و h در هر نقطهٔ R^2 پیوسته‌اند، این قضیه با استفادهٔ مکرر از قسمت‌های (i) و (iii) قضیهٔ ۳.۳.۱۸ ثابت می‌شود. □

۵.۳.۱۸ قضیه هر تابع گویای دومتغیری، در هر نقطه از قلمروش پیوسته است.

اثبات يك تابع گویا، خارج قسمت دو تابع چند جمله ای f و g است که بنا بر قضیه ۲.۳.۱۸ در هر نقطه R^2 پیوسته هستند. اگر (x_0, y_0) نقطه دلخواهی در قلمرو f/g باشد، آنگاه $g(x_0, y_0) \neq 0$ ؛ پس بنا بر قضیه ۳.۳.۱۸ (iv)، f/g در آنجا پیوسته است. □

مثال ۳ فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

در مورد پیوستگی f بحث کنید. ناحیه پیوستگی f چیست؟

حل تابع f در تمام نقاط R^2 تعریف می شود. بنا بر این، شرط (i) از تعریف ۲.۳.۱۸ برای هر نقطه (x_0, y_0) برقرار است. با فرض $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ ، نقاط (x_0, y_0) را در نظر می گیریم. اگر $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = f(x_0, y_0).$$

اگر $x_0^2 + y_0^2 > 1$ ، آنگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} 0 = 0 = f(x_0, y_0).$$

پس f در تمام نقاطی چون (x_0, y_0) که $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$ ، پیوسته است. برای تعیین پیوستگی f در نقاطی چون (x_0, y_0) که به ازای آنها $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ، معلوم می کنیم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ موجود و برابر با ۱ است یا خیر. فرض کنید S_1 مجموعه تمام نقاط (x, y) باشد به طوری که $x^2 + y^2 \leq 1$. در این صورت

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} (x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = 1.$$

فرض کنید S_2 مجموعه تمام نقاط (x, y) باشد به طوری که $x^2 + y^2 > 1$. در این صورت

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} 0 = 0.$$

چون

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (S_2 \text{ در } P)}} f(x,y)$$

نتیجه می گیریم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ وجود ندارد. پس f در تمام نقاط (x_0, y_0) با ضابطه $x^2 + y^2 = 1$ ، ناپیوسته است. ناحیه پیوستگی f شامل تمام نقاط صفحه xy است بجز نقاط روی دایره $x^2 + y^2 = 1$. ▲

۶.۳.۱۸ تعریف گویند تابع n متغیری f روی گوی بازی پیوسته است اگر در هر نقطه گوی باز، پیوسته باشد.

مصادقی از تعریف بالا، تابع مثال ۳ است که روی هر قرص بازی که شامل نقطه‌ای از دایره $x^2 + y^2 = 1$ نباشد، پیوسته است. قضیه زیر بیان می کند که تابع پیوسته‌ای از یک تابع پیوسته، خود پیوسته است. این قضیه مشابه قضیه ۷.۷.۲ است.

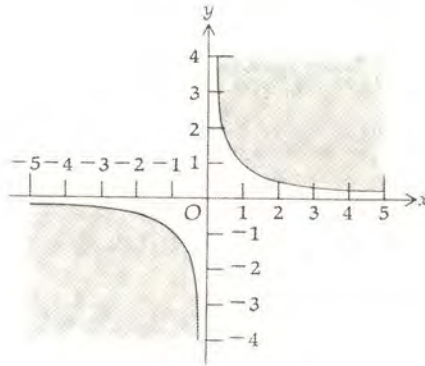
۷.۳.۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی یک متغیری و g تابعی دو متغیری باشد. همچنین فرض کنید g در (x_0, y_0) و f در $g(x_0, y_0)$ پیوسته باشد. در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ در (x_0, y_0) پیوسته است.

اثبات این قضیه که در آن از قضیه ۶.۲.۱۸ استفاده می شود، مشابه اثبات قضیه ۷.۷.۲ است و برای تمرین به خواننده واگذار می شود (تمرین ۱۵ را ببینید).

○ نمونه ۲ فرض کنید

$$h(x, y) = \ln(xy - 1).$$

در باره پیوستگی h بحث می کنیم. اگر تابع g با ضابطه $g(x, y) = xy - 1$ تعریف شود، g در تمام نقاط R^2 پیوسته است. تابع لگاریتمی طبیعی روی تمام قلمروش که مجموعه تمام اعداد مثبت است، پیوسته می باشد. پس اگر تابع f با ضابطه $f(t) = \ln t$ تعریف شده باشد، f به ازای هر $t > 0$ پیوسته است. در این صورت، تابع h تابع مرکب $f \circ g$ است و بنا بر قضیه ۷.۳.۱۸، در تمام نقاط (x, y) در R^2 که $xy - 1 > 0$ یا معادلش $xy > 1$ ، پیوسته است. ناحیه سایه خورده در شکل ۱.۳.۱۸ ناحیه پیوستگی h است.



شکل ۱۰۳۰۱۸

مثال ۴ فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}.$$

در مورد پیوستگی f بحث کنید، و نموداری رسم کنید که ناحیه پیوستگی f را به صورت ناحیه سایه‌خورده‌ای در R نشان دهد.

حل این تابع همان تابع G در نمونه ۴ از بخش ۱۰۱۸ است. قلمرو این تابع مجموعه تمام نقاط خارج از ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 25$ و نقاطی از محور x ‌هاست که در آنها $-5 < x < 5$.

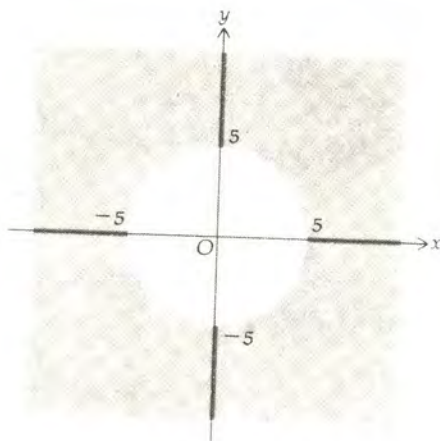
تابع f خارج قسمت توابع g و h است که برای آنها داشته باشیم $g(x, y) = y$ و $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$. تابع g یک تابع چندجمله‌ای است و بنا بر این در همه جا پیوسته است. از قضیه ۷۰۳۰۱۸ نتیجه می‌شود که h در تمام نقاط R^2 که در آنها $x^2 + y^2 > 25$ پیوسته است. پس، بنا بر قضیه ۳۰۳۰۱۸ (iv)، f در تمام نقاط خارج از ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 25$ پیوسته است.

حال نقاطی را روی محور x ‌ها که در آنها $-5 < x < 5$ ، در نظر می‌گیریم، یعنی نقاط $(a, 0)$ را که در آنها $-5 < a < 5$. اگر مجموعه نقاط روی خط $x = a$ باشد، آنگاه $(a, 0)$ یک نقطه انباشتگی S_1 است، اما داریم

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,0) \\ (S_1 \text{ در } P)}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2 - 25}}$$

که وجود ندارد چون اگر $|y| \leq \sqrt{25 - a^2}$ ، آنگاه $y / \sqrt{a^2 + y^2 - 25}$ تعریف

نمی‌شود. بنابراین، f روی نقاطی از محور x ها که در آنها $-5 < x < 5$ ، ناپیوسته است. ناحیه سایه‌خورده در شکل ۲.۳۰۱۸، ناحیه پیوستگی f است.



شکل ۲.۳۰۱۸

تمرینهای ۳.۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، درباره پیوستگی تابع داده شده بحث کنید.

$$F(x, y) = \frac{1}{x-y} \quad ۲. \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y-1} \quad ۱.$$

$$f(x, y) = \ln xy^2 \quad ۴. \quad h(x, y) = \sin \frac{y}{x} \quad ۳.$$

$$g(x, y) = \frac{5xy^2 + 2y}{16 - x^2 - 4y^2} \quad ۶. \quad f(x, y) = \frac{4x^2y + 3y^2}{2x - y} \quad ۵.$$

$$f(x, y) = \cos^{-1}(x+y) \quad ۸. \quad g(x, y) = \ln(25 - x^2 - y^2) \quad ۷.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۹.$$

(دانهمایی: تمرین ۲۳ از تمرینهای ۲.۱۸ را ببینید.)

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۱۰$$

(داهنمایی: مثال ۶ از بخش ۲۰.۱۸ را ببینید).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۱۱$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۱۲$$

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۱۳$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{|x^2|+|y^2|} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۱۴$$

۱۵. قضیه ۷.۳.۱۸ را ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۵، ناحیه پیوستگی f را معین کنید، و نموداری رسم کنید که ناحیه پیوستگی f را به صورت یک ناحیه سایه خورده در R^2 نشان دهد.

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}} \quad ۱۷ \qquad f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2-2}} \quad ۱۶$$

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+9y^2-36}} \quad ۱۹ \qquad f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \quad ۱۸$$

$$f(x, y) = \ln(x^2+y^2-9) - \ln(1-x^2-y^2) \quad ۲۰$$

$$f(x, y) = \sin^{-1}(xy) \quad ۲۲ \qquad f(x, y) = \sec^{-1}(xy) \quad ۲۱$$

$$f(x, y) = \sin^{-1}(x+y) + \ln(xy) \quad ۲۳$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & x \neq y \\ x - y & x = y \end{cases} \quad ۲۴$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & x+y \neq 0 \\ 1 & x+y = 0 \end{cases} \quad ۲۵$$

در تمرینهای ۲۶ تا ۳۱، تابع در مبدأ ناپیوسته است چون $f(0, 0)$ وجود ندارد. معین کنید که ناپیوستگی دفع شدنی است یا اساسی. اگر ناپیوستگی دفع شدنی است، $f(0, 0)$ را طوری تعریف کنید که ناپیوستگی دفع شود.

$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{x}{y} \quad ۲۷ \qquad f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ۲۶$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} \quad ۲۹ \qquad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad ۲۸$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy^2}{x^2 + y^2} \quad ۳۱ \qquad f(x, y) = \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ۳۰$$

۳۲. تابع F با ضابطه زیر تعریف شده است

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 - 3y^2 & x^2 - 3y^2 \leq 1 \\ 2 & x^2 - 3y^2 > 1 \end{cases}$$

نشان دهید که ناحیه پیوستگی F شامل تمام نقاط R^2 بجز نقاط روی هذلولی $x^2 - 3y^2 = 1$ است.

۳۳. تابع G با ضابطه زیر تعریف شده است

$$G(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y^2 & x^2 + 4y^2 \leq 5 \\ 3 & x^2 + 4y^2 > 5 \end{cases}$$

نشان دهید که ناحیه پیوستگی G شامل تمام نقاط R^2 بجز نقاط روی بیضی $x^2 + 4y^2 = 5$ است.

۳۴. (الف) تعریفی از پیوستگی يك تابع سه متغیری در يك نقطه، مشابه با تعریف ۲.۳.۱۸ ارائه دهید؛ (ب) قضایایی در مورد توابع سه متغیری مشابه با قضایای ۳.۳.۱۸ و

۷۰۳۰۱۸ بیان کنید؛ (ب) يك تابع چندجمله‌ای سه‌متغیری و يك تابع گویای سه‌متغیری تعریف کنید.

در تمرینهای ۳۵ تا ۳۸، با استفاده از تعاریف و قضایای تمرین ۳۴، دربارهٔ پیوستگی تابع داده‌شده بحث کنید.

$$f(x, y, z) = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}} \quad ۳۵$$

$$f(x, y, z) = \ln(۳۶ - ۲x^2 - y^2 - ۹z^2) \quad ۳۶$$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad ۳۷$$

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad ۳۸$$

۲.۱۸ مشتقات جزئی

در بحث مشتق‌گیری از توابع حقیقی n متغیری می‌توان تابع n متغیری را هر بار به‌عنوان تابعی از يك متغیر در نظر گرفت و سایر متغیرها را ثابت فرض کرد؛ به‌این ترتیب، بحث در حالت يك بعدی انجام می‌شود و از اینجا به‌مفهوم مشتق جزئی می‌رسیم. ابتدا مشتق جزئی يك تابع دومتغیری را تعریف می‌کنیم.

۱۰۴۰۱۸ تعریف فرض کنید f تابعی از دومتغیر x و y باشد. مشتق جزئی f نسبت به x تابعی است که با $D_1 f$ نمایش داده می‌شود و در هر نقطه (x, y) از قلمرو f با ضابطه زیر مشخص می‌شود

$$D_1 f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (۱)$$

به‌شرطی که این حد وجود داشته‌باشد. همین‌طور، مشتق جزئی f نسبت به y تابعی است که با $D_2 f$ نمایش داده می‌شود، و در هر نقطه (x, y) از قلمرو f با ضابطه زیر مشخص می‌شود

$$D_y f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (2)$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

فرایند یافتن مشتق جزئی را مشتق‌گیری جزئی می‌نامند.

$D_1 f$ نشان‌دهنده تابعی است که مشتق جزئی f نسبت به متغیر اول می‌باشد. $D_1 f(x, y)$ نشان‌دهنده مقدار تابع $D_1 f$ در نقطه (x, y) است. نمادهای دیگر $D_1 f$ به صورت f_x ، $f_x(x, y)$ و $\partial f / \partial x$ و نمادهای دیگر $D_2 f$ به صورت f_y ، $f_y(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ هستند. همین‌طور، نمادهای دیگری برای $D_2 f$ به صورت f_y ، $f_y(x, y)$ و $\partial f / \partial y$ هستند. اگر $z = f(x, y)$ ، می‌توانیم $\partial z / \partial x$ را به جای $D_1 f(x, y)$ بنویسیم. مشتق جزئی را نمی‌توان به عنوان نسبت $\partial z / \partial x$ و ∂x تلقی کرد، چون هیچ‌یک از این علامتها به تنهایی معنی ندارد. وقتی y تابعی از تنها یک متغیر x باشد نماد dy/dx را می‌توان به عنوان خارج قسمت دو دیفرانسیل در نظر گرفت؛ اما تعبیر مشابهی برای $\partial z / \partial x$ وجود ندارد.

مثال ۱ تابع $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$ مفروض است؛ $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ را با استفاده از تعریف ۱۰.۴.۱۸ به دست آورید.

حل

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2xy - 2y\Delta x + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2y\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x - 2y) \\ &= 6x - 2y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_y f(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 - x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (x^2 - xy + y^2)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x^2 - xy - x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2 - x^2 + xy - y^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-x\Delta y + 2y\Delta y + (\Delta y)^2}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-x + 2y + \Delta y) \\
\Delta \quad &= -x + 2y.
\end{aligned}$$

اگر (x_0, y_0) نقطه خاصی از قلمرو f باشد، آنگاه

$$D_x f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

به شرطی که این حد موجود باشد، و

$$D_y f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (4)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

○ نمونه ۱ برای تابع مثال ۱، $D_x f(3, -2)$ را با استفاده از فرمول (۳) به دست می آوریم.

$$\begin{aligned}
D_x f(3, -2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3 + \Delta x, -2) - f(3, -2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(3 + \Delta x)^2 - 2(3 + \Delta x)(-2) + (-2)^2 - (27 + 12 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{27 + 18\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 + 4\Delta x + 4 - 27}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (18 + 3\Delta x + 4) \\
\circ \quad &= 22.
\end{aligned}$$

صورت‌های دیگری از فرمول‌های (۳) و (۴) برای $D_1 f(x_0, y_0)$ و $D_2 f(x_0, y_0)$ اینها هستند

$$D_1 f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (5)$$

اگر این حد وجود داشته باشد، و

$$D_2 f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (6)$$

به‌شرطی که این حد موجود باشد.

○ نمونه ۲ برای تابع مثال ۱، با استفاده از فرمول (۵)، $D_1 f(3, -2)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$D_1 f(3, -2) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x, -2) - f(3, -2)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x + 4 - 23}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 4x - 19}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3x + 13)(x - 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 13)$$

$$\circ \quad = 22$$

○ نمونه ۳ در مثال ۱ نشان دادیم که

$$D_1 f(x, y) = 6x - 2y.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} D_1 f(3, -2) &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

○ که این نتیجه با نتایج به‌دست آمده در نمونه‌های ۱ و ۲ مطابقت دارد.

با مقایسه تعریف ۱۰.۴.۱۸ با تعریف مشتق معمولی (۱۰.۲.۳)، می بینیم که اگر f به عنوان تابعی از یک متغیر x در نظر گرفته شود (یعنی، y ثابت نگه داشته شود) آنگاه $D_1 f(x, y)$ ، مشتق معمولی f است، و اگر f تابعی از یک متغیر y در نظر گرفته شود (و x ثابت باشد) آنگاه $D_2 f(x, y)$ مشتق معمولی f می باشد. پس نتایج حاصل در مثال ۱ را به راحتی می توان با استفاده از قضایای مشتق معمولی به دست آورد، به شرط اینکه وقتی $D_1 f(x, y)$ را به دست می آوریم، y ثابت فرض شود و وقتی که $D_2 f(x, y)$ را محاسبه می کنیم، x ثابت در نظر گرفته شود.

مثال ۲ فرض کنید $f(x, y) = 3x^3 - 4x^2y + 3xy^2 + 7x - 8y$ ؛ $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ را به دست آورید.

حل با در نظر گرفتن f به عنوان تابعی از x و ثابت گرفتن y داریم

$$D_1 f(x, y) = 9x^2 - 4xy + 3y^2 + 7.$$

و با در نظر گرفتن f به عنوان تابعی از y و ثابت فرض کردن x خواهیم داشت

$$\blacktriangle \quad D_2 f(x, y) = -4x^2 + 6xy - 8.$$

مثال ۳ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوب است (الف) $f_1(0, y)$ ؛ (ب) $f_2(x, 0)$.

حل اگر $y \neq 0$ بنا به (۵) داریم

$$\begin{aligned} f_1(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{y^2}{y^2}$$

$$= -y.$$

اگر $y = 0$ ، خواهیم داشت

$$f_1(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{0} = 0.$$

چون $f_1(0, y) = -y$ اگر $y \neq 0$ ؛ و $f_1(0, 0) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که به ازای تمام y ها داریم $f_1(0, y) = -y$.
(ب) اگر $x \neq 0$ ، از (۶) خواهیم داشت

$$f_2(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2}$$

$$= x.$$

اگر $x = 0$ داریم

$$f_2(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

چون $f_2(x, 0) = x$ اگر $x \neq 0$ ، و $f_2(0, 0) = 0$ ، پس به ازای تمام x ها،
 $f_2(x, 0) = x$.
 ▲

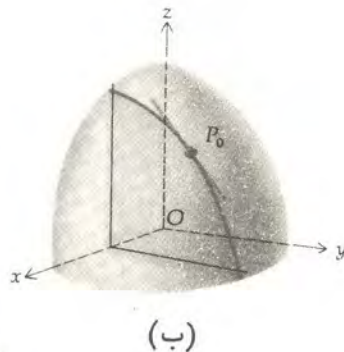
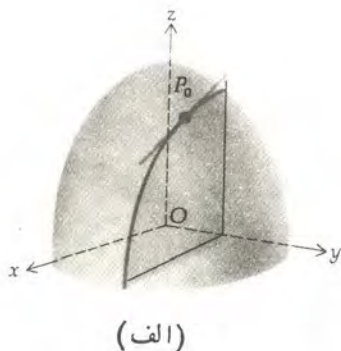
تعبیر هندسی مشتقات جزئی يك تابع دومتغیری مشابه تعبیر هندسی مشتقات تابعی يك متغیری است. نمودار يك تابع دومتغیری رویه‌ای است با معادله $z = f(x, y)$. اگر y ثابت نگه داشته شود (مثلاً $y = y_0$)، آنگاه $z = f(x, y_0)$ معادله مقطع این رویه با صفحه $y = y_0$ است. این منحنی را می‌توان با معادلات زیر نشان داد:

$$z = f(x, y) \quad \text{و} \quad y = y_0. \quad (۷)$$

چون منحنی حاصل، مقطع این دو رویه است. پس $D_1 f(x_0, y_0)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی به معادلات (۷) در نقطه $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ در صفحه $y = y_0$ است. همین طور، $D_2 f(x_0, y_0)$ نشان دهنده ضریب زاویه خط مماس بر منحنی با معادلات

$$z = f(x, y) \quad \text{و} \quad x = x_0.$$

در نقطه P_0 در صفحه $x = x_0$ است. شکل ۱۰۴۰۱۸ (الف) و (ب) قسمتی از منحنیها و خطوط مماس را نشان می دهد.



شکل ۱۰۴۰۱۸

مثال ۴ مطلوب است ضریب زاویه خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه $z = \sqrt{24 - x^2 - 2y^2}/2$ با صفحه $y = 2$ در نقطه $(2, 2, \sqrt{3})$.

حل ضریب زاویه مطلوب، مقدار $\partial z / \partial x$ در نقطه $(2, 2, \sqrt{3})$ است.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{24 - x^2 - 2y^2}}$$

پس در $(2, 2, \sqrt{3})$ داریم

$$\Delta \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2}{2\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

چون هر مشتق شاخصی از آهنگ تغییر است، پس مشتق جزئی رانیز می توان همین طور

تغییر کرد. اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد، مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه $P_0(x_0, y_0)$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x, y)$ را در واحد تغییر x ، در P_0 به دست می‌دهد (تنها x تغییر می‌کند و y در y_0 ثابت نگهداشته می‌شود). همین‌طور، مشتق جزئی f نسبت به y در P_0 ، آهنگ لحظه‌ای تغییر $f(x, y)$ در واحد تغییر y را در P_0 به دست می‌دهد.

مثال ۵ طبق قانون گاز ایده‌آل برای یک گاز محصور، اگر فشار، P نیوتن بر سانتیمتر مربع، حجم، V سانتیمتر مکعب، و دما T درجه باشد، فرمول زیر را داریم

$$PV = kT \quad (۸)$$

که در آن k ثابت تناسب است. فرض کنید حجم گازی در ظرف معینی برابر با ۱۰۰ سانتیمتر مکعب، دمای آن ۹۰° و $k = ۸$ باشند.

(الف) مطلوب است آهنگ لحظه‌ای تغییر P در واحد تغییر T در صورتی که V در ۱۰۰ ثابت بماند؛ (ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف)، تغییر فشار را اگر دما به ۹۲° افزایش یابد، به‌طور تقریبی بیابید؛ (پ) آهنگ لحظه‌ای تغییر V در واحد تغییر P را در صورتی که T در ۹۰ ثابت بماند، بیابید؛ (ت) فرض کنید دما ثابت نگه داشته شود. با استفاده از نتیجه قسمت (پ) تغییر تقریبی حجم لازم را برای ایجاد همان مقدار تغییر فشار که در قسمت (ب) به دست آمده، بیابید.

حل در رابطه (۸) با قراردادن $V = ۱۰۰$ ، $T = ۹۰$ ، و $k = ۸$ به دست می‌آوریم $P = ۷۲$.

(الف) به ازای $k = ۸$ ، با حل (۸) به دست می‌آید

$$P = \frac{8T}{V}.$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر P در واحد تغییر T ، اگر V ثابت بماند، برابر با $\partial P / \partial T$ است، و

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{8}{V}.$$

وقتی $T = ۹۰$ و $V = ۱۰۰$ ، داریم $\partial P / \partial T = ۰۰۸$ ، که همان جواب خواسته شده است. (ب) با توجه به نتیجه قسمت (الف)، وقتی T به اندازه ۲° افزایش یابد (و V ثابت بماند)، افزایش تقریبی P برابر با $۰۰۸(۲) = ۰۱۶$ است. پس، نتیجه می‌گیریم که اگر دما از ۹۰° به ۹۲° افزایش یابد، افزایش فشار به‌طور تقریبی برابر با ۰۱۶ نیوتن بر سانتیمتر مربع خواهد بود.

(پ) با حل (۸) نسبت به V وقتی که $k = ۸$ ، خواهیم داشت

$$V = \frac{8T}{P}.$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر V در واحد تغییر P در صورتی که T ثابت بماند، $\partial V / \partial P$ است، و

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{\lambda T}{P^2}.$$

وقتی $T = 90$ و $P = 72$ ، داریم

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{\lambda(90)}{(72)^2} = -\frac{125}{9}$$

که عبارت است از آهنگ لحظه‌ای تغییر V در یک واحد از تغییر P وقتی که $T = 90$ و $P = 72$ ، اگر T در 90° ثابت باقی بماند.

(ت) اگر P به اندازه ۱۶ افزایش یابد و T ثابت بماند، در این صورت با توجه به نتیجه به دست آمده در قسمت (ب)، تغییر V بایستی تقریباً برابر با

$$(0.16)\left(-\frac{125}{9}\right) = -\frac{20}{9}$$

باشد. پس اگر فشار از ۷۲ نیوتن بر سانتیمتر مربع به ۷۳۶ نیوتن بر سانتیمتر مربع افزایش یابد، حجم بایستی تقریباً به اندازه $20/9$ سانتیمتر مکعب کاهش یابد. ▲

حال مفهوم مشتق جزئی را به توابع n متغیری تعمیم می‌دهیم.

۲۰۴۰۱۸ تعریف فرض کنید $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نقطه‌ای در R^n ، و f تابعی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد. در این صورت مشتق جزئی f نسبت به x_k ، تابعی است که با $D_k f$ نمایش داده می‌شود و در نقطه P در قلمرو f با ضابطه زیر مشخص می‌شود

$$D_k f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

در حالت خاص، اگر f تابعی از سه متغیر x, y, z باشد، آنگاه مشتقات جزئی f به صورت زیر معین می‌شوند

$$D_1 f(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$D_2 f(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

و

$$D_z f(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

به شرط اینکه این حدها وجود داشته باشند.

مثال ۶ $f(x, y, z) = x^2 y + y z^2 + z^3$ مفروض است. تحقیق کنید که

$$x f_1(x, y, z) + y f_2(x, y, z) + z f_3(x, y, z) = 3 f(x, y, z).$$

حل با ثابت گرفتن y و z به دست می آوریم

$$f_1(x, y, z) = 2xy$$

و با ثابت فرض کردن x و z داریم

$$f_2(x, y, z) = x^2 + z^2$$

و همچنین با ثابت گرفتن x و y ،

$$f_3(x, y, z) = 2yz + 3z^2.$$

بنابر این

$$\begin{aligned} x f_1(x, y, z) + y f_2(x, y, z) \\ + z f_3(x, y, z) &= x(2xy) + y(x^2 + z^2) + z(2yz + 3z^2) \\ &= 2x^2 y + x^2 y + y z^2 + 2y z^2 + 3z^3 \\ &= 3(x^2 y + y z^2 + z^3) \\ &= 3f(x, y, z). \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۲.۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، با استفاده از تعریف ۲.۱۸.۱، هریک از مشتقات جزئی را به دست آورید.

$$f(x, y) = 6x + 3y - 7; \quad D_1 f(x, y) \quad ۱.$$

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy; \quad D_1 f(x, y) \quad ۲.$$

$$f(x, y) = 3xy + 6x - y^2; \quad D_1 f(x, y) \quad ۳.$$

$$f(x, y) = xy^2 - 5y + 6; \quad D_1 f(x, y) \quad ۴.$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad D_1 f(x, y) \quad ۵$$

$$f(x, y) = \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}; \quad D_2 f(x, y) \quad ۶$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، با استفاده از تعریف ۲۰.۴.۱۸، هریک از مشتقات جزئی را به دست آورید.

$$f(x, y, z) = x^2 y - 3xy^2 + 2yz; \quad D_1 f(x, y, z) \quad ۷$$

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 9z^2; \quad D_1 f(x, y, z) \quad ۸$$

$$f(x, y, z, r, t) = xy r + yz t + y r t + z r t; \quad D_2 f(x, y, z, r, t) \quad ۹$$

$$f(r, s, t, u, v, w) = 3r^2 s t + s t^2 v - 2t u v^2 - t v w + 3u w^2; \quad ۱۰$$

$$D_5 f(r, s, t, u, v, w)$$

$$۱۱. \quad f(x, y) = x^2 - 9y^2 \quad \text{مفروض است. مطلوب است محاسبه } D_1 f(2, 1) \text{ با استفاده}$$

از (الف) فرمول (۳)؛ (ب) فرمول (۵)؛ (پ) فرمول (۱) و سپس قراردادن ۱ و ۲ به ترتیب به جای x و y .

$$۱۲. \quad \text{برای تابع تمرین ۱۱، مطلوب است محاسبه } D_2 f(2, 1) \text{ با استفاده از (الف) فرمول}$$

(۴)، (ب) فرمول (۶)؛ (پ) فرمول (۲) و سپس ۱ و ۲ به ترتیب به جای x و y .

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۴، با استفاده از قضایای مشتق‌گیری معمولی و ثابت فرض کردن تمام متغیرها بجز یکی از آنها، مشتق جزئی خواسته شده را به دست آورید.

$$f(x, y) = 2y^3 + \sqrt{x^2 + y^2}; \quad D_1 f(x, y) \quad ۱۳$$

$$f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{y^2 - x^2}}; \quad D_2 f(x, y) \quad ۱۴$$

$$f(\theta, \phi) = \sin 2\theta \cos 2\phi; \quad D_2 f(\theta, \phi) \quad ۱۵$$

$$f(r, \theta) = r^2 \cos \theta - 2r \tan \theta; \quad D_1 f(r, \theta) \quad ۱۶$$

$$r = e^{-\theta} \cos(\theta + \phi); \quad \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad ۱۸ \quad z = e^{y/x} \ln \frac{x^2}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \quad ۱۷$$

$$u = \tan^{-1}(xyzw); \quad \frac{\partial u}{\partial w} \quad ۲۰ \quad u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} \quad ۱۹$$

$$f(x, y, z) = 2x y z + \ln(2xyz); \quad f_2(x, y, z) \quad ۲۱$$

$$f(x, y, z) = e^{xy} \sinh yz - e^{xy} \cosh yz; \quad f_r(x, y, z) \quad ۲۲$$

$$f(x, y, z) = e^{xyz} + \tan^{-1} \frac{xyz}{z^2}; \quad f_r(x, y, z) \quad ۲۳$$

$$f(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta + 5e^r \cos \theta \sin \phi - 2 \cos \phi; \quad f_r(r, \theta, \phi) \quad ۲۴$$

$$f_r(\sqrt{2}, \pi/4) \quad \text{اگر } f(r, \theta) = r \tan \theta - r^2 \sin \theta \quad \text{مطلوب است (الف)} \quad ۲۵$$

(ب) $f_r(2, \pi)$

$$f_r(3, 0, 17) \quad \text{اگر } f(x, y, z) = e^{xyz} + \ln(y+z) \quad \text{مطلوب است (الف)} \quad ۲۶$$

(ب) $f_z(1, 0, 2)$; (ب) $f_r(0, 0, 1)$

در تمرینهای ۲۷ و ۲۸، $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ را به دست آورید.

$$f(x, y) = \int_x^y e^{\cos t} dt \quad ۲۸ \quad f(x, y) = \int_x^y \ln \sin t dt \quad ۲۷$$

$$۲۹. \quad \text{با فرض } u = \sin \frac{r}{t} + \ln \frac{t}{r}, \quad \text{ثابت کنید که}$$

$$t \frac{\partial u}{\partial t} + r \frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

$$۳۰. \quad \text{با فرض } w = x^2 y + y^2 z + z^2 x, \quad \text{ثابت کنید که}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2.$$

$$۳۱. \quad \text{فرض کنید}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوب است (الف) $f_1(0, 0)$; (ب) $f_2(0, 0)$.

$$۳۲. \quad \text{فرض کنید که}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مطلوب است (الف) $f_1(0, y)$ به شرطی که $y \neq 0$ ؛ (ب) $f_1(0, 0)$.

۳۳. برای تابع تمرین ۳۲ مطلوب است (الف) $f_2(x, 0)$ اگر $x \neq 0$ ؛ (ب) $f_2(0, 0)$.

۳۴. مطلوب است ضریب زاویه خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه $0 = 36 + 4z^2 + 9y^2 - 36x^2$ با صفحه $x = 1$ در نقطه $(1, \sqrt{12}, -3)$. این ضریب زاویه را به صورت يك مشتق جزئی تعبیر کنید.

۳۵. مطلوب است ضریب زاویه خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه $z = x^2 + y^2$ با صفحه $y = 1$ در نقطه $(2, 1, 5)$. نموداری رسم کنید. این ضریب زاویه را به صورت يك مشتق جزئی تعبیر کنید.

۳۶. مطلوب است معادلات خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه $9 = x^2 + y^2 + z^2$ با صفحه $y = 2$ در نقطه $(1, 2, 2)$.

۳۷. دما در هر نقطه (x, y) از يك ورقه مسطح، T درجه است و

$$T = 54 - \left(\frac{2x^2}{3}\right) - 4y^2.$$

اگر فاصله بر حسب سانتیمتر اندازه گیری شود، مطلوب است آهنگ تغییر دما نسبت به فاصله، در نقطه $(3, 1)$ ، وقتی که روی ورقه در جهت مثبت محور x ها و y ها حرکت کرده باشیم.

۳۸. با استفاده از قانون گاز ایده آل برای يك گاز محصور (مثال ۵ را ببینید) نشان دهید که

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

۳۹. اگر سالانه ۱۰۰ دلار در حسابی بگذاریم، پس از t سال با نرخ بهره i ۱۰۰ درصد، سرمایه موجود (V) برابر خواهد بود با

$$V = 100 \left[\frac{1 - (1+i)^{-t}}{i} \right].$$

(الف) مطلوب است آهنگ لحظه‌ای تغییر V در تغییر يك واحد از i ، اگر t در ۸ ثابت بماند؛ (ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) مطلوب است تغییر تقریبی ارزش موجودی، در صورتی که نرخ بهره از ۶٪ به ۷٪ تغییر کند و زمان در ۸ سال ثابت بماند؛ (پ) مطلوب است آهنگ تغییر لحظه‌ای V نسبت به تغییر يك واحد t ، اگر i در ۶٪ ثابت بماند؛ (ت) با استفاده از نتیجه قسمت (پ) تغییر تقریبی ارزش موجودی

را بیابید در صورتی که زمان از ۸ سال به ۷ سال کاهش یابد و نرخ بهره ۶٪ ثابت بماند.

۴۵. فرض کنید x (بر حسب ده هزار دلار) کالای موجود در یک فروشگاه، y تعداد کارکنان فروشگاه، و P (بر حسب دلار) سود هفتگی فروشگاه باشد، و

$$P = 3000 + 240y + 20y(x - 2y) - 10(x - 12)^2$$

که در آن $25 \leq x \leq 15$ و $5 \leq y \leq 12$. در حال حاضر موجودی برابر با ۱۸۰۰۰۰ دلار است و ۸ کارمند در فروشگاه مشغول به کار هستند. (الف) اگر y در ۸ ثابت بماند، آهنگ لحظه‌ای تغییر P نسبت به واحد تغییر x را بیابید؛ (ب) در صورتی که موجودی فروشگاه از ۱۸۰۰۰۰ دلار به ۲۰۰۰۰۰ دلار تغییر یابد، و تعداد کارکنان در ۸ نفر ثابت بماند، با استفاده از نتیجه قسمت (الف) تغییر تقریبی سود هفتگی را بیابید؛ (پ) اگر x در ۱۸ ثابت بماند، آهنگ لحظه‌ای تغییر P نسبت به واحد تغییر y را پیدا کنید؛ (ت) با استفاده از نتیجه قسمت (پ) تغییر تقریبی سود هفتگی را در صورتی که تعداد کارکنان از ۸ به ۱۰ افزایش یابد و موجودی ثابت و برابر با ۱۸۰۰۰۰ دلار باشد، پیدا کنید.

۵.۱۸ مشتق پذیری و دیفرانسیل کلی

در بخش ۷.۳ در اثبات قاعده زنجیری نشان دادیم که اگر f تابعی مشتق پذیر از متغیری چون x باشد و $y = f(x)$ ، آنگاه نمودار متغیر وابسته (Δy) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x$$

که در آن، η تابعی از Δx است و وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ آنگاه $\eta \rightarrow 0$. از مطالب فوق نتیجه می‌شود که اگر f تابعی مشتق پذیر در x_0 باشد، نمودار f در x_0 که آن را با $\Delta f(x_0)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \eta \Delta x \quad (1)$$

که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \eta = 0$$

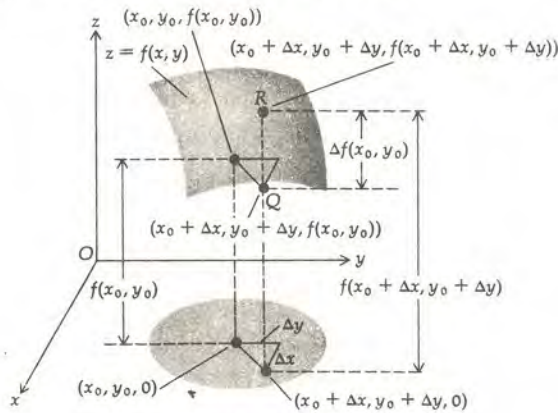
۱. در این بحث، اصطلاحات «مشتق پذیری» و «مشتق پذیر» در مورد توابع چندمتغیری را تسامحاً، برای برقراری تشابه با حالت یک متغیری و رعایت شیوه بیشتر کتابهای فارسی، به جای اصطلاحات دقیقتر «دیفرانسیل پذیری» و «دیفرانسیل پذیر» به کار می‌بریم. م.

برای توابع دو یا چندمتغیری از معادله‌ای متناظر با معادله (۱) برای تعریف مشتق پذیری تابع استفاده می‌کنیم، و از این تعریف معیاری برای مشتق پذیری يك تابع در يك نقطه به دست می‌آوریم. جزئیات موضوع را در مورد يك تابع دو متغیری بیان می‌کنیم و بدین منظور، ابتدا نمو چنین تابعی را تعریف می‌کنیم.

۱۰۵۰۱۸ تعریف اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد، نمو f در نقطه (x_0, y_0) با $\Delta f(x_0, y_0)$ نشان داده و به صورت زیر معین می‌شود

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \quad (2)$$

شکل ۱۰۵۰۱۸ نمایانگر معادله (۲) در مورد تابعی است که روی قرص بازی شده. نقاط (x_0, y_0) و $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ پیوسته است. این شکل قسمتی از رویه $z = f(x, y)$ را نشان می‌دهد، که در آن نقطه Q نقطه $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y))$ و R نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ است.



شکل ۱۰۵۰۱۸

○ نمونه ۱ برای تابع f که به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

نمو f در هر نقطه دلخواه (x_0, y_0) را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= 3(x_0 + \Delta x) - (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - (3x_0 - x_0 y_0^2) \\ &= 3x_0 + 3\Delta x - x_0 y_0^2 - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y \\ &\quad - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 - 3x_0 + x_0 y_0^2 \\ &= 3\Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

۲۰۵۰۱۸ تعریف اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد و نمو f در (x_0, y_0) را بتوان به صورت زیر نوشت

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (۳)$$

که ε_1 و ε_2 توابعی از Δx و Δy هستند و وقتی که $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ آنگاه $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ، در این صورت گوئیم f در (x_0, y_0) مشتق پذیر است.

○ نمونه ۲ برای اینکه ثابت کنیم تابع مذکور در نمونه ۱ در تمام نقاط R^2 مشتق پذیر است، از تعریف ۲۰۵۰۱۸ استفاده می کنیم. باید نشان دهیم به ازای تمام نقاط (x_0, y_0) در R^2 می توانیم ε_1 و ε_2 را طوری به دست آوریم که

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \Delta x - D_2 f(x_0, y_0) \Delta y = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

و وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، داشته باشیم $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

چون $f(x, y) = 3x - xy^2$ ، پس

$$D_1 f(x_0, y_0) = 3 - y_0^2 \quad \text{و} \quad D_2 f(x_0, y_0) = -2x_0 y_0.$$

با این مقادیر و مقدار به دست آمده $\Delta f(x_0, y_0)$ در نمونه ۱، داریم

$$\Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \Delta x - D_2 f(x_0, y_0) \Delta y = -x_0 (\Delta y)^2 - 2y_0 \Delta x \Delta y - \Delta x (\Delta y)^2.$$

طرف راست رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$[-2y_0 \Delta y - (\Delta y)^2] \Delta x + (-x_0 \Delta y) \Delta y$$

یا

$$(-2y_0 \Delta y) \Delta x + (-\Delta x \Delta y - x_0 \Delta y) \Delta y$$

یا

$$[-(\Delta y)^2] \Delta x + (-2y_0 \Delta x - x_0 \Delta y) \Delta y$$

و یا

$$0 \cdot \Delta x + [-2y_0 \Delta x - \Delta x \Delta y - x_0 \Delta y] \Delta y.$$

پس چهار زوج ممکن از مقادیر ε_1 و ε_2 به صورت زیر وجود دارد.

$$\varepsilon_2 = -x_0 \Delta y \quad \text{و} \quad \varepsilon_1 = -2y_0 \Delta y - (\Delta y)^2$$

یا

$$\varepsilon_2 = -\Delta x \Delta y - x_0 \Delta y \quad \text{و} \quad \varepsilon_1 = -2y_0 \Delta y$$

یا

$$\varepsilon_2 = -2y_0 \Delta x - x_0 \Delta y \quad \text{و} \quad \varepsilon_1 = -(\Delta y)^2$$

و یا

$$\varepsilon_2 = -2y_0 \Delta x - \Delta x \Delta y - x_0 \Delta y \quad \text{و} \quad \varepsilon_1 = 0$$

که برای هر زوج،

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1 = 0$$

○ شایان ذکر است که یافتن يك زوج از مقادیر ε_1 و ε_2 کافی است.

۳۰۵۰۱۸ قضیه اگر يك تابع دومتغیری f در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد، آنگاه f در آن نقطه پیوسته است.

اثبات اگر f در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد، از تعریف ۳۰۵۰۱۸ نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= D_1 f(x_0, y_0) \Delta x \\ &\quad + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

که در آن، وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + D_1 f(x_0, y_0) \Delta x \\ &\quad + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \end{aligned}$$

با گرفتن حد از دو طرف رابطه فوق وقتی که $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0). \quad (۴)$$

اگر فرض کنیم $x_0 + \Delta x = x$ و $y_0 + \Delta y = y$ ، آنگاه $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ معادل است با $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. پس با توجه به (۴) داریم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

□

که ثابت می کند f در (x_0, y_0) پیوسته است.

قضیه ۳۰۵۰۱۸ حاکی است که در مورد يك تابع دومتغیری، مشتق پذیری، پیوستگی (۱) نتیجه می دهد. ولی صرف وجود مشتقات جزئی $D_1 f$ و $D_2 f$ در يك نقطه، مشتق پذیری در آن نقطه را تضمین نمی کند. مثال زیر این مورد را روشن می کند.

مثال ۱ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ثابت کنید $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ وجود دارند، اما f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

حل

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$D_2 f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

بنابراین، $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ هر دو موجود هستند.

در مثال ۴ از بخش ۲.۱۸، در مورد این تابع نشان دادیم که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

وجود ندارد؛ پس f در $(0, 0)$ پیوسته نیست. چون f در $(0, 0)$ پیوسته نیست، بنابر قضیه ۳.۵.۱۸ نتیجه می گیریم که f در $(0, 0)$ مشتق پذیر هم نیست. ▲

قبل از بیان قضیه‌ای که شرایطی برای مشتق پذیری تابع در یک نقطه ارائه می‌دهد، قضیه دیگری را که در اثبات آن مورد نیاز است، مطرح می‌کنیم. این قضیه، همان قضیه مقدار میانگین در مورد تابع یک متغیری است که آن را برای تابع دو متغیری به کار می‌بریم.

۴.۵.۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی دو متغیری است که به ازای همه x های واقع در بازه بسته $[a, b]$ و همه y های واقع در بازه بسته $[c, d]$ تعریف می‌شود.

(i) اگر به ازای y_0 در $[c, d]$ و همه x های واقع در $[a, b]$ ، $D_1 f(x, y_0)$ وجود داشته باشد، آنگاه عددی چون ξ_1 در بازه باز (a, b) وجود دارد به طوری که

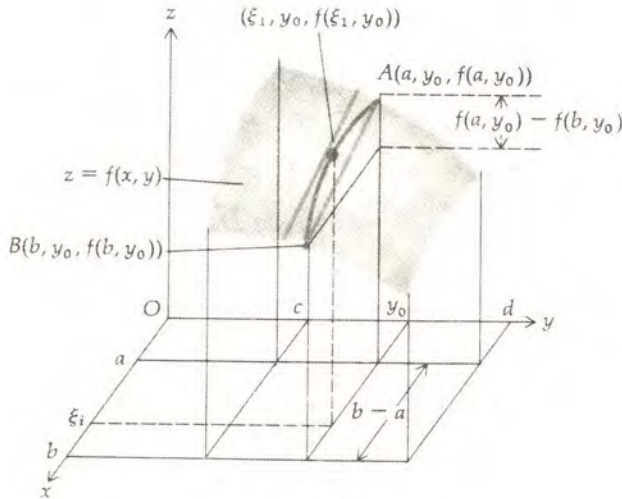
$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a) D_1 f(\xi_1, y_0). \quad (5)$$

(ii) اگر به ازای x_0 در $[a, b]$ و همه y های واقع در $[c, d]$ ، $D_2 f(x_0, y)$ وجود داشته باشد، آنگاه عددی چون ξ_2 در بازه باز (c, d) وجود دارد به طوری که

$$f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c) D_2 f(x_0, \xi_2). \quad (6)$$

قبل از اثبات این قضیه، تعبیر هندسی آن را ارائه می‌کنیم. برای قسمت (i)، شکل

۲.۵.۱۸ را ببینید، که نشان دهنده قسمتی از رویه $z = f(x, y)$ در بالای ناحیه مستطیلی



شکل ۲.۵.۱۸

واقع در صفحه xy و محصور بین خطوط $x=a$ ، $x=b$ ، $y=c$ ، و $y=d$ است. منحنی حاصل از تقاطع صفحه $y=y_0$ و این رویه دارای معادلات $z=f(x, y)$ و $y=y_0$ است. ضرب زاویه خط ماربر نقاط $A(a, y_0, f(a, y_0))$ و $B(b, y_0, f(b, y_0))$ برابر است با

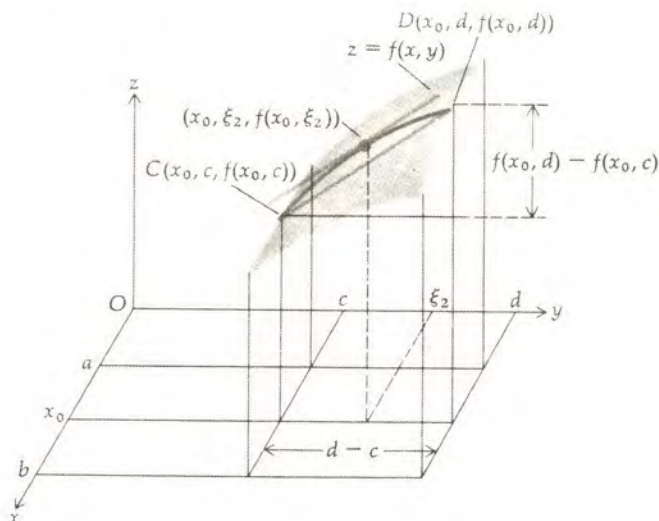
$$\frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}.$$

قضیه ۲.۵.۱۸ (i) حاکی است که نقطه‌ای چون $(\xi_1, y_0, f(\xi_1, y_0))$ روی منحنی بین نقاط A و B وجود دارد که در آن نقطه، خط مماس موازی با خط قاطع ماربر A و B است؛ یعنی، عددی چون ξ_1 در (a, b) وجود دارد به طوری که

$$D_1 f(\xi_1, y_0) = \frac{[f(b, y_0) - f(a, y_0)]}{(b - a)}$$

و این در شکل ۲.۵.۱۸ که در آن $D_1 f(\xi_1, y_0) < 0$ نشان داده شده است. شکل ۳.۵.۱۸ قسمت (ii) از قضیه ۲.۵.۱۸ را نشان می‌دهد. منحنی حاصل از تقاطع صفحه $x=x_0$ و رویه $z=f(x, y)$ دارای معادلات $z=f(x, y)$ و $x=x_0$ است. ضرب زاویه خط ماربر نقاط $C(x_0, c, f(x_0, c))$ و $D(x_0, d, f(x_0, d))$ برابر است با

$$\frac{[f(x_0, d) - f(x_0, c)]}{d - c}$$



شکل ۳.۵.۱۸

و قضیه ۳.۵.۱۸ (ii) حاکی است که نقطه‌ای چون $(x_0, \xi_2, f(x_0, \xi_2))$ روی منحنی بین نقاط C و D وجود دارد که در آن نقطه، خط مماس موازی با خط قاطع ماربر C و D است؛ یعنی، عددی چون ξ_2 در (c, d) وجود دارد به‌طوری که

$$D_y f(x_0, \xi_2) = \frac{[f(x_0, d) - f(x_0, c)]}{d - c}.$$

اثبات قضیه ۳.۵.۱۸ (i) فرض کنید g تابعی از یک متغیر x با ضابطه زیر باشد

$$g(x) = f(x, y_0)$$

در این صورت

$$g'(x) = D_x f(x, y_0).$$

چون به‌ازای تمام x های واقع در $[a, b]$ ، $D_x f(x, y_0)$ موجود است، نتیجه می‌شود که $g'(x)$ نیز به‌ازای تمام x های واقع در $[a, b]$ وجود دارد و بنابراین g روی $[a, b]$ پیوسته است. پس بنا به قضیه مقدار میانگین برای مشتقات معمولی، عددی چون ξ_1 در (a, b) وجود دارد به‌طوری که

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

یا معادلش

$$D_1 f(\xi_1, y_0) = \frac{f(b, y_0) - f(a, y_0)}{b - a}$$

که از آن به دست می آوریم

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a) D_1 f(\xi_1, y_0).$$

اثبات قسمت (ii) شبیه اثبات قسمت (i) است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۲۱ را ببینید). □

معادله (۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = h D_1 f(\xi_1, y_0) \quad (7)$$

که ξ_1 بین x_0 و $x_0 + h$ است و h یا مثبت و یا منفی است (تمرین ۲۲ را ببینید). معادله (۶) را نیز می توان به صورت زیر نوشت

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = k D_2 f(x_0, \xi_2) \quad (8)$$

که ξ_2 بین y_0 و $y_0 + k$ است و k یا مثبت و یا منفی است (تمرین ۲۳ را ببینید).

مثال ۲ فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{2xy}{3+x}.$$

اگر x در $[2, 5]$ باشد و $y = 4$ ، مطلوب است ξ_1 مورد نظر در قضیه ۴.۵.۱۸.

حل بنا به قضیه ۴.۵.۱۸، عددی چون ξ_1 در بازه بازه $(2, 5)$ وجود دارد به طوری که

$$f(5, 4) - f(2, 4) = (5 - 2) D_1 f(\xi_1, 4).$$

پس

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \times \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{72}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$(3 + \xi_1)^2 = 40$$

بنابراین

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}.$$

اما چون $5 < \xi_1 < 2$ ، پس تنها علامت + را در نظر می گیریم. داریم

$$\triangle \quad \xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$$

قضیه زیر حاکی است که اگر تابعی در نقطه‌ای دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد، در آن نقطه لزوماً مشتق پذیر است.

۵.۵.۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y باشد. همچنین فرض کنید $D_1 f$ و $D_2 f$ روی قرص بازی چون $B(P_0; r)$ ، که در آن P_0 نقطه (x_0, y_0) است، موجود باشند. در این صورت اگر $D_1 f$ و $D_2 f$ در P_0 پیوسته باشند، آنگاه f در P_0 مشتق پذیر است.

اثبات نقطه $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ را در $B(P_0; r)$ انتخاب کنید. در این صورت

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

با عمل کاستن و افزودن $f(x_0 + \Delta x, y_0)$ در طرف راست رابطه فوق، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] \\ &\quad + [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned} \quad (9)$$

چون $D_1 f$ و $D_2 f$ روی $B(P_0; r)$ وجود دارند، و $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در $B(P_0; r)$ می باشد، از (۸) نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) \\ = (\Delta y) D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن ξ_2 بین y_0 و $y_0 + \Delta y$ است.

از (۷) نتیجه می گیریم

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = (\Delta x) D_1 f(\xi_1, y_0) \quad (11)$$

که ξ_1 بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ است.

با قراردادن طرف راست روابط (۱۰) و (۱۱) در (۹) به دست می آید

$$\Delta f(x_0, y_0) = (\Delta y) D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) + (\Delta x) D_1 f(\xi_1, y_0) \quad (12)$$

چون $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ در $B(P_0; r)$ ، ξ_2 بین y_0 و $y_0 + \Delta y$ است، و $D_2 f$ در P_0 پیوسته است، نتیجه می شود که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) = D_2 f(x_0, y_0) \quad (13)$$

و چون ξ_1 بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ است، و $D_1 f$ در P_0 پیوسته است، داریم

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} D_1 f(\xi_1, y_0) = D_1 f(x_0, y_0). \quad (14)$$

اگر

$$\varepsilon_1 = D_1 f(\xi_1, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \quad (15)$$

از (۱۴) نتیجه می شود که

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1 = 0 \quad (16)$$

و اگر

$$\varepsilon_2 = D_2 f(x_0 + \Delta x, \xi_2) - D_2 f(x_0, y_0) \quad (17)$$

از (۱۳) نتیجه می گیریم

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2 = 0. \quad (18)$$

باتوجه به (۱۵) و (۱۷) و با قرار دادن مقادیر مربوطه در (۱۲) به دست می آوریم

$$\Delta f(x_0, y_0) = \Delta y [D_2 f(x_0, y_0) + \varepsilon_2] + \Delta x [D_1 f(x_0, y_0) + \varepsilon_1]$$

که از آن داریم

$$\Delta f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \quad (19)$$

بنابر (۱۶)، (۱۸)، و (۱۹)، تعریف ۲۰۵.۱۸ برقرار است؛ پس f در (x_0, y_0) مشتق پذیر است. $\square$

تابعی که در فرضهای قضیه ۵۰۵.۱۸ صدق کند، تابع پیوسته-مشتق پذیر در نقطه P_0 نامیده می شود.

مثال ۳ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

با استفاده از قضیه ۵۰۵.۱۸ ثابت کنید که f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.

حل برای یافتن $D_1 f$ دو حالت را در نظر می گیریم: $(x, y) = (0, 0)$ و

$(x, y) \neq (0, 0)$. اگر $(x, y) = (0, 0)$ ، داریم

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، داریم $f(x, y) = x^2 y^2 / (x^2 + y^2)$. برای به دست آوردن $D_1 f(x, y)$ قضیه مشتق معمولی خارج قسمت دو تابع را به کار می‌بریم و y را ثابت در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{2xy^2(x^2 + y^2) - 2x(x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

بنابراین، تابع $D_1 f$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$D_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

به همین طریق تابع $D_2 f$ را به دست می‌آوریم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

هردوی $D_1 f$ و $D_2 f$ روی هر قرص بازی که مرکزش در مبدأ قرار داشته باشد، وجود دارند. می‌ماند اینکه نشان دهیم $D_1 f$ و $D_2 f$ در $(0, 0)$ پیوسته‌اند. چون $D_1 f(0, 0) = 0$ ، $D_2 f(0, 0) = 0$ پیوسته خواهد بود اگر

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} D_1 f(x, y) = 0.$$

بنابراین باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$(20) \quad \left| \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \varepsilon, \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \text{وقتی}$$

داریم

$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+y^2})^4}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

در نتیجه

$$\left| \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \right| < 2\delta, \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \text{وقتی}$$

پس اگر $\delta = \epsilon/2$ ، عبارت (۲۰) را خواهیم داشت. بنابراین $D_1 f$ در $(0, 0)$ پیوسته است. به همین روش می‌توان نشان داد که $D_2 f$ نیز در $(0, 0)$ پیوسته است. در نتیجه، بنا بر قضیه ۵.۵۰۱۸، تابع f در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است. ▲

به رابطه (۳) برمی‌گردیم. عبارتی که شامل اولین دو جمله طرف راست، $D_1 f(x_0, y_0)\Delta x + D_2 f(x_0, y_0)\Delta y$ است، جزء اصلی $\Delta f(x_0, y_0)$ یا دیفرانسیل کلی تابع f در (x_0, y_0) نامیده می‌شود. این مطلب را به صورت تعریف رسمی زیر بیان می‌کنیم.

۶.۵.۱۸ تعریف اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد، و f در (x, y) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه دیفرانسیل کلی f تابع df است که با ضابطه زیر مشخص می‌شود.

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = D_1 f(x, y)\Delta x + D_2 f(x, y)\Delta y. \quad (21)$$

دقت کنید که df تابعی از چهار متغیر $x, y, \Delta x, \Delta y$ است. اگر $z = f(x, y)$ گاهی dz را به جای $df(x, y, \Delta x, \Delta y)$ می‌نویسیم، که در این صورت رابطه (۲۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$dz = D_1 f(x, y)\Delta x + D_2 f(x, y)\Delta y. \quad (22)$$

در حالت خاص اگر $f(x, y) = x$ ، آنگاه $z = x$ ، $D_1 f(x, y) = 1$ ، و $D_2 f(x, y) = 0$ ، و بنابراین از (۲۲) نتیجه می‌شود $dz = \Delta x$. چون $z = x$ ، برای این تابع داریم $dx = \Delta x$. به همین طریق، اگر $f(x, y) = y$ فرض شود، آنگاه $z = y$ ، $D_1 f(x, y) = 0$ ، و $D_2 f(x, y) = 1$ ، و بنابراین از (۲۲) داریم $dz = \Delta y$. چون $z = y$ ، برای این تابع داریم $dy = \Delta y$ ، پس دیفرانسیل‌های متغیرهای مستقل را به صورت $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$ تعریف می‌کنیم. بنابراین، رابطه (۲۲) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$dz = D_1 f(x, y)dx + D_2 f(x, y)dy \quad (23)$$

و در نقطه (x_0, y_0)

$$dz = D_1 f(x_0, y_0)dx + D_2 f(x_0, y_0)dy. \quad (24)$$

در رابطه (۳)، فرض کنید $\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)$ ، $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$.

پس

$$\Delta z = D_1 f(x_0, y_0)dx + D_2 f(x_0, y_0)dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy. \quad (25)$$

با مقایسه (۲۴) و (۲۵)، مشاهده می‌کنیم که وقتی dx (یعنی Δx) و dy (یعنی Δy) به صفر نزدیک باشند، و چون در این صورت ε_1 و ε_2 به صفر نزدیک خواهند بود، dz تقریبی از Δz است. چون اغلب محاسبه dz ساده‌تر از محاسبه Δz است، در مواردی از این واقعیت که $dz \approx \Delta z$ استفاده می‌کنیم. قبل از نشان دادن این موضوع در مثالی، (۲۳) را با استفاده از نمادهای $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ به ترتیب به جای $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ ، باز می‌نویسیم، داریم

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (26)$$

مثال ۴ یک قوطی فلزی در بسته به شکل استوانه مستدیر قائم به ارتفاع داخلی ۶ اینچ، شعاع داخلی ۲ اینچ، و ضخامت ۱/۴ اینچ مفروض است. اگر هزینه فلز به کار رفته در ساخت قوطی برای هر اینچ مکعب ۱۰ ریال باشد، با استفاده از دیفرانسیل، هزینه تقریبی فلز به کار رفته را به دست آورید.

حل اگر حجم استوانه مستدیر قائم V اینچ مکعب، شعاع آن r اینچ، و ارتفاعش h اینچ باشد، فرمول حجم آن به صورت زیر است

$$V = \pi r^2 h. \quad (27)$$

حجم دقیق فلز به کار رفته برابر است با تفاضل حجمهای دو استوانه مستدیر قائمی که به ترتیب دارای خصوصیات $r = 2.25$ ، $h = 6.25$ و $r = 2$ ، $h = 6$ هستند. ΔV حجم دقیق فلز را به دست می‌دهد، اما چون فقط مقداری تقریبی از ما خواسته شده، dV را به جای ΔV به دست می‌آوریم. از (۲۶) داریم

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh. \quad (28)$$

از (۲۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$$

با قراردادن این مقادیر در (۲۸) داریم

$$dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

چون $r=2$ ، $h=6$ ، $dr=0.1$ و $dh=0.2$ ، پس

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2)(6)(0.1) + \pi(2)^2(0.2) \\ &= 3.2\pi. \end{aligned}$$

بنابراین $\Delta V \approx 3.2\pi$ ، و لذا تقریباً 3.2π اینچ مکعب فلز در ساخت قوطی به کار رفته است. چون هزینه هراینچ مکعب ۱۰ ریال است، پس $10 \times 3.2\pi = 3.2\pi \approx 100.53$ ریال است. یعنی هزینه تقریبی فلزی که در ساخت قوطی به کار رفته برابر با ۱۰۰ ریال است. ▲

اکنون مفهوم مشتق پذیری و دیفرانسیل کلی را تعمیم داده برای توابع n متغیری تعریف می کنیم.

۷.۵.۱۸ تعریف اگر f تابعی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $\bar{P}$ نقطه $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ باشد، آنگاه f در $\bar{P}$ به صورت زیر است

$$\Delta f(\bar{P}) = f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \bar{x}_n + \Delta x_n) - f(\bar{P}) \quad (29)$$

۸.۵.۱۸ تعریف اگر f تابعی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد، و f در نقطه $\bar{P}$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \Delta f(\bar{P}) &= D_1 f(\bar{P}) \Delta x_1 + D_2 f(\bar{P}) \Delta x_2 + \dots + D_n f(\bar{P}) \Delta x_n \\ &\quad + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + \dots + \varepsilon_n \Delta x_n \quad (30) \end{aligned}$$

که در آن وقتی

$$(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$$

آنگاه $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ، $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ، $\dots$ ، $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ، در این صورت گوییم f در $\bar{P}$ مشتق پذیر است.

مشابه با قضیه ۵.۵.۱۸ می توان ثابت کرد که شرایط کافی برای اینکه یک تابع n متغیری در نقطه ای چون $\bar{P}$ مشتق پذیر باشد، آن است که $D_1 f$ ، $D_2 f$ ، $\dots$ ، $D_n f$ همگی سرگرمی باز $B(\bar{P}; r)$ موجود، و $D_1 f$ ، $D_2 f$ ، $\dots$ ، $D_n f$ همگی در $\bar{P}$ پیوسته باشند. مانند حالتی که در مورد توابع دومتغیری دیدیم، در مورد توابع n متغیری نیز مشتق پذیری، پیوستگی را ایجاب می کند. ولی وجود مشتقات جزئی $D_1 f$ ، $D_2 f$ ، $\dots$ ، $D_n f$ در یک نقطه، مشتق پذیری تابع را در آن نقطه ایجاب نمی کند.

۹.۵.۱۸ تعریف اگر f تابعی از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشد و f در P مشتق پذیر باشد،

آنگاه دیفرانسیل کلی f تابع df است که با ضابطه زیر مشخص می شود

$$df(P, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = D_1 f(P) \Delta x_1 + D_2 f(P) \Delta x_2 + \dots + D_n f(P) \Delta x_n. \quad (31)$$

بافرض $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و با تعریف $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots, dx_n = \Delta x_n$ و با استفاده از نماد $\partial w / \partial x_i$ به جای $D_i f(P)$ می توانیم (۳۱) را به صورت زیر بنویسیم

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n. \quad (32)$$

مثال ۵ ابعاد جعبه ای بادقت ۰۰۲ سانتیمتر اندازه گیری شده است و اندازه های ۱۰ سانتیمتر، ۱۲ سانتیمتر، و ۱۵ سانتیمتر به دست آمده است. اگر حجم جعبه از روی این اندازه ها محاسبه شود، بیشترین خطا تقریباً چقدر است؟ همچنین درصد خطا را به طور تقریبی بیابید.

حل فرض کنید حجم جعبه ای که ابعادش x سانتیمتر، y سانتیمتر، و z سانتیمتر است V سانتیمتر مکعب باشد. در این صورت

$$V = xyz.$$

مقدار دقیق خطا از ΔV به دست می آید؛ ولی ما از dV به عنوان تقریب ΔV استفاده می کنیم. از رابطه (۳۲) برای سه متغیر مستقل داریم

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

و لذا

$$dV = yz dx + xz dy + xy dz. \quad (33)$$

بنا به اطلاعات داده شده، $|\Delta x| \leq 0.02$ ، $|\Delta y| \leq 0.02$ و $|\Delta z| \leq 0.02$. برای به دست آوردن بیشترین خطا در محاسبه حجم، بیشترین خطا در اندازه های سه بعد را در نظر می گیریم. پس با فرض $dx = 0.02$ ، $dy = 0.02$ ، $dz = 0.02$ و $x = 10$ ، $y = 12$ ، $z = 15$ از رابطه (۳۳) به دست می آوریم

$$dV = (12)(15)(0.02) + (10)(15)(0.02) + (10)(12)(0.02) = 9.$$

پس $\Delta V \approx 9$ ، و بنابراین بیشترین خطای ممکن در محاسبه حجم با استفاده از اندازه‌های داده‌شده، تقریباً ۹ سانتیمتر مکعب است.

خطای نسبی از تقسیم خطا بر مقدار واقعی به دست می‌آید. پس خطای نسبی در محاسبه حجم از روی اندازه‌های داده‌شده برابر است با

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} \approx \frac{9}{1800} = \frac{1}{200} = 0.005$$

بنابراین، درصد خطا تقریباً ۰.۵٪ است. ▲

تمرینهای ۵.۱۸

۱. اگر $f(x, y) = 3x^2 + 2xy - y^2$ ، مطلوب است (الف) $\Delta f(1, 4)$ ، نمو f در $(1, 4)$ ؛ (ب) $\Delta f(1, 4)$ وقتی $\Delta x = 0.03$ و $\Delta y = -0.02$ ؛ (پ) $df(1, 4, \Delta x, \Delta y)$ ؛ (ت) $df(1, 4, 0.03, -0.02)$.

۲. اگر $f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 4y^2$ ، مطلوب است (الف) $\Delta f(2, -1)$ ، نمو f در $(2, -1)$ ؛ (ب) $\Delta f(2, -1)$ وقتی $\Delta x = -0.01$ و $\Delta y = 0.02$ ؛ (پ) $df(2, -1, \Delta x, \Delta y)$ ؛ (ت) $df(2, -1, -0.01, 0.02)$.

۳. اگر $g(x, y) = xye^{xy}$ ، مطلوب است (الف) $\Delta g(2, -4)$ ، نمو g در $(2, -4)$ ؛ (ب) $\Delta g(2, -4)$ وقتی $\Delta x = -0.01$ و $\Delta y = 0.02$ ؛ (پ) $dg(2, -4, \Delta x, \Delta y)$ ؛ (ت) $dg(2, -4, -0.01, 0.02)$.

۴. اگر $h(x, y) = (x+y)/(x-y)$ ، مطلوب است (الف) $\Delta h(3, 0)$ ، نمو h در $(3, 0)$ ؛ (ب) $\Delta h(3, 0)$ وقتی $\Delta x = 0.04$ و $\Delta y = 0.03$ ؛ (پ) $dh(3, 0, \Delta x, \Delta y)$ ؛ (ت) $dh(3, 0, 0.04, 0.03)$.

۵. اگر $F(x, y, z) = xy + \ln(yz)$ ، مطلوب است (الف) $\Delta F(4, 1, 5)$ ، نمو F در $(4, 1, 5)$ ؛ (ب) $\Delta F(4, 1, 5)$ وقتی $\Delta x = 0.02$ و $\Delta y = 0.04$ و $\Delta z = -0.03$ ؛ (پ) $dF(4, 1, 5, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ؛ (ت) $dF(4, 1, 5, 0.02, 0.04, -0.03)$.

۶. اگر $G(x, y, z) = x^2y + 2xyz - z^2$ ، مطلوب است (الف) $\Delta G(-3, 0, 2)$ ، نمو G در $(-3, 0, 2)$ ؛ (ب) $\Delta G(-3, 0, 2)$ وقتی $\Delta x = 0.01$ و $\Delta y = 0.03$ و $\Delta z = -0.01$ ؛ (پ) $dG(-3, 0, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ؛ (ت) $dG(-3, 0, 2, 0.01, 0.03, -0.01)$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۴، دیفرانسیل کلی، dw ، را بیابید.

$$w = y \tan x^2 - 2xy \quad .8 \quad w = 2x^3 - xy^2 + 3y - 7 \quad .7$$

$$w = xe^{2y} + e^{-y} \quad .10 \quad w = x \cos y - y \sin x \quad .9$$

$$w = \frac{xyz}{x+y+z} \quad .12 \quad w = \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad .11$$

$$w = e^{yz} - \cos xz \quad .14 \quad w = x \tan^{-1} z - \frac{y^2}{z} \quad .13$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸، از طریق اعمال زیر، ثابت کنید f در تمام نقاط واقع در قلمروش مشتق پذیر است. (الف) برای تابع داده شده، $\Delta f(x_0, y_0)$ را بیابید؛ (ب) ε_1 و ε_2 را طوری تعیین کنید که رابطه (۳) برقرار باشد؛ (پ) نشان دهید که وقتی $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ، ε_1 و ε_2 به دست آمده در قسمت (ب) نیز به سمت صفر میل می کنند.

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 \quad .16 \quad f(x, y) = x^2y - 2xy \quad .15$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \quad .18 \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y} \quad .17$$

.۱۹ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y - 2 & x = 1 \text{ یا } y = 1 \\ 2 & x \neq 1 \text{ و } y \neq 1 \end{cases}$$

ثابت کنید $D_1 f(1, 1)$ و $D_2 f(1, 1)$ وجود دارند اما f در $(1, 1)$ مشتق پذیر نیست.

.۲۰ فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ثابت کنید $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ وجود دارند ولی f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

.۲۱ قضیه ۴.۵.۱۸ (ii) را ثابت کنید.

.۲۲ نشان دهید که می توان رابطه (۵) را به صورت رابطه (۷) نوشت که در آن ε_1 بین

x_0 و $x_0 + h$ قرار دارد.

۳۳. نشان دهید که می‌توان رابطه (۶) را به صورت رابطه (۸) نوشت که در آن ξ_2 بین y_0 و $y_0 + k$ قرار دارد.

در تمرینهای ۲۴ تا ۲۷، با استفاده از قضیه ۴.۵.۱۸، هر کدام از ξ_1 یا ξ_2 را که به کار می‌آید، پیدا کنید.

$$۲۴. f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 \quad x \text{ در } [1, 3] \text{ است؛ } y = 4.$$

$$۲۵. f(x, y) = x^3 - y^2 \quad x \text{ در } [2, 6] \text{ است؛ } y = 3.$$

$$۲۶. f(x, y) = \frac{4x}{x+y} \quad y \text{ در } [-2, 2] \text{ است؛ } x = 4.$$

$$۲۷. f(x, y) = \frac{2x-y}{2y+x} \quad y \text{ در } [0, 4] \text{ است؛ } x = 2.$$

۲۸. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

این تابع در $(0, 0)$ پیوسته است (مثال ۵ در بخش ۲.۱۸، و نمونه ۱ در بخش ۳.۱۸ را ببینید). ثابت کنید $D_1f(0, 0)$ و $D_2f(0, 0)$ وجود دارند ولی D_1f و D_2f در $(0, 0)$ پیوسته نیستند.

۲۹. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

با استفاده از قضیه ۵.۵.۱۸، ثابت کنید که f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۲، به وسیله اعمال زیر ثابت کنید f در تمام نقاط R^3 مشتق پذیر است. (الف) $f(x_0, y_0, z_0)$ را بیابید؛ (ب) $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ و δ را طوری تعیین کنید که رابطه (۳۰) برقرار باشد؛ (پ) نشان دهید که وقتی $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ به سمت $(0, 0, 0)$ میل کند، آنگاه $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ و δ به دست آمده در قسمت (ب) نیز همگی به سمت صفر میل خواهند کرد.

$$f(x, y, z) = xy - xz + z^2 \quad ۳۱ \quad f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z \quad ۳۰$$

$$f(x, y, z) = 2x^2z - 3yz^2 \quad ۳۲$$

۳۳. فرض کنید

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که $D_x f(0, 0, 0)$ ، $D_y f(0, 0, 0)$ و $D_z f(0, 0, 0)$ موجودند؛
(ب) با استفاده از این نکته که مشتق پذیری، پیوستگی را ایجاب می کند، ثابت کنید که f در $(0, 0, 0)$ مشتق پذیر نیست.

۳۴. فرض کنید

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

ثابت کنید f در $(0, 0, 0)$ مشتق پذیر است.

۳۵. مخزن سر بسته ای به شکل مکعب مستطیل دارای طول داخلی ۸ متر، عرض داخلی ۵ متر، ارتفاع داخلی ۴ متر، وضخامت ۴ سانتیمتر است. با استفاده از دیفرانسیل مقدار جنس به کار رفته در ساخت ظرف را برآورد کنید.

۳۶. با استفاده از دیفرانسیلی کلی، بیشترین خطای ممکن را در محاسبه مساحت يك مثلث قائم الزاویه از روی طول اضلاع زاویه قائمه آن بیابید در صورتی که این اضلاع به ترتیب برابر با ۶ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر باشند و در هر اندازه گیری، خطای ممکن ۱ سانتیمتر باشد. همچنین درصد خطا را به طور تقریبی بیابید.

۳۷. با استفاده از دیفرانسیل کلی، بیشترین خطا را در محاسبه طول وتر يك مثلث قائم الزاویه از روی اندازه های مذکور در تمرین ۳۶ به طور تقریبی بیابید. همچنین درصد خطا را به طور تقریبی حساب کنید.

۳۸. اگر قانون گاز ایده آل (مثال ۵ در بخش ۴۰۱۸ را ببینید) برای محاسبه P وقتی که T و V معلوم اند به کار رود، ولی خطای ۳٪ در اندازه گیری T و خطای ۸٪ در اندازه گیری V وجود داشته باشد، بیشترین درصد خطا در محاسبه P را به طور تقریبی حساب کنید.

۳۹. s ، چگالی نسبی يك جسم، از فرمول زیر به دست می آید

$$s = \frac{A}{A - W}$$

که در آن A (برحسب پوند) وزن جسم در هوا و W (برحسب پوند) وزن جسم در آب می باشد. اگر وزن جسم در هوا با خطای ممکن ۰۰۵ پوند، ۲۵ پوند و وزن آن در آب با خطای ممکن ۰۰۲ پوند، ۱۳ پوند باشد، بیشترین خطای ممکن تقریبی را در محاسبه s به کمک این اندازه ها، به دست آورید. همچنین بیشترین خطای نسبی ممکن را بیابید.

۴۰. می خواهیم با استفاده از تخته ای به ضخامت $2/3$ اینچ جعبه چوبی سر بازی بسازیم. طول داخلی جعبه باید ۶ فوت، عرض داخلی آن ۳ فوت، و عمق داخلی آن ۴ فوت باشد. با استفاده از دیفرانسیل کلی مقدار تقریبی تخته لازم برای ساخت این جعبه را بیابید.

۴۱. شرکتی يك قرارداد برای ساخت ۱۰۰۰۰ صندوق چوبی سر بسته به ابعاد ۳ متر، ۴ متر، و ۵ متر بسته است. هزینه هر متر مربع چوب ۱ دلار است. اگر خطای ممکن در برش قطعات چوب توسط دستگاه برش در هر بعد ۵ سانتیمتر باشد، با استفاده از دیفرانسیل کلی، به طور تقریبی، بیشترین خطای ممکن در بر آورد هزینه چوب را بیابید.

در تمرینهای ۴۲ تا ۴۵، نشان می دهید که تابع ممکن است در نقطه ای مشتق پذیر باشد، ولی در آن نقطه پیوسته مشتق پذیر نباشد. از اینجا معلوم می شود که شرایط قضیه ۵.۵.۱۸ برای مشتق پذیری کافی هستند اما لازم نیستند. تابع f در این تمرینات با ضابطه زیر تعریف می شود.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۴۲. $\Delta f(0, 0)$ را بیابید.

۴۳. $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ را بیابید.

۴۴. با استفاده از تعریف ۲.۵.۱۸ و نتایج تمرینهای ۴۲ و ۴۳، ثابت کنید f در $(0, 0)$ مشتق پذیر است.

۴۵. ثابت کنید $D_1 f$ و $D_2 f$ در $(0, 0)$ پیوسته نیستند.

۶.۱۸ قاعده زنجیری

در بخش ۷.۳ قاعده زنجیری زیر (قضیه ۱.۷.۳) را برای توابع يك متغیری آوردیم: اگر y تابعی از u باشد و با ضابطه $y = f(u)$ تعریف شود، و $D_u y$ موجود باشد؛ و u تابعی از x باشد که با ضابطه $u = g(x)$ تعریف شود، و $D_x u$ موجود باشد؛ در این صورت y تابعی از x خواهد بود، و $D_x y$ موجود است و به صورت زیر

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

یا، با استفاده از نماد لایب نیتس به شکل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (۱)$$

معین می شود.

حال قاعده زنجیری را برای يك تابع دومتغیری، که در آن هریک از متغیرها خود تابعی از دومتغیر است، در نظر می گیریم.

۱.۶.۱۸ قضیه (قاعده زنجیری) اگر u تابعی مشتق پذیر از x و y با ضابطه $u = f(x, y)$ باشد، و $x = F(r, s)$ ، $y = G(r, s)$ ، و $\partial y / \partial r$ ، $\partial x / \partial s$ ، $\partial x / \partial r$ ، و $\partial y / \partial s$ همگی موجود باشند، آنگاه u تابعی از r و s است و داریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) \quad (۲)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right). \quad (۳)$$

اثبات فرمول (۲) را ثابت می کنیم. اثبات (۳) شبیه اثبات (۲) است. اگر s ثابت نگه داشته شود و r به مقدار Δr تغییر کند، آنگاه x به مقدار Δx و y به مقدار Δy تغییر خواهد کرد. پس

$$\Delta x = F(r + \Delta r, s) - F(r, s) \quad (۴)$$

و

$$\Delta y = G(r + \Delta r, s) - G(r, s). \quad (۵)$$

چون f مشتق پذیر است،

$$\Delta f(x, y) = D_x f(x, y) \Delta x + D_y f(x, y) \Delta y + \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y \quad (۶)$$

که وقتی $(\Delta x, \Delta y)$ به سمت $(0, 0)$ میل کند، هر دوی ε_1 و ε_2 به سمت صفر میل خواهند کرد. به علاوه، می‌خواهیم که وقتی $\Delta x = \Delta y = 0$ داشته باشیم $\varepsilon_1 = 0$ و $\varepsilon_2 = 0$. این شرط به این طریق برآورده می‌شود که ε_1 و ε_2 که توابعی از Δx و Δy هستند، در $(\Delta x, \Delta y) = (0, 0)$ پیوسته باشند.

اگر در (۶) به جای $\Delta f(x, y)$ ، $D_1 f(x, y)$ و $D_2 f(x, y)$ به ترتیب Δu ، $\partial u / \partial x$ و $\partial u / \partial y$ را قرار دهیم و طرفین را بر $\Delta r \neq 0$ تقسیم کنیم، به دست می‌آید

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta r} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta r}.$$

با گرفتن حد از طرفین، وقتی که Δr به سمت صفر میل می‌کند، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} \\ &+ (\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varepsilon_1) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} + (\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varepsilon_2) \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (7)$$

چون u تابعی از x و y است و هر دوی x و y نیز توابعی از r و s هستند، پس u تابعی از r و s است. چون s ثابت گرفته شده و r به مقدار Δr تغییر کرده است، بنابراین

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{u(r + \Delta r, s) - u(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (8)$$

همچنین

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{F(r + \Delta r, s) - F(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial x}{\partial r} \quad (9)$$

و

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{G(r + \Delta r, s) - G(r, s)}{\Delta r} = \frac{\partial y}{\partial r}. \quad (10)$$

چون $\partial x / \partial r$ و $\partial y / \partial r$ وجود دارند، پس F و G هر يك نسبت به متغیر r پیوسته‌اند. (توجه: همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، وجود مشتقات جزئی يك تابع، پیوستگی آن تابع را نسبت به تمام متغیرها به‌طور هم‌زمان ایجاب نمی‌کند، ولی مانند توابع يك‌متغیری، مشتق‌پذیری، پیوستگی تابع را نسبت به هر يك از متغیرها به‌طور جداگانه ایجاب می‌کند.) پس، از (۴) داریم

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta x &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [F(r + \Delta r, s) - F(r, s)] \\ &= F(r, s) - F(r, s) \\ &= 0\end{aligned}$$

و بنا به (۵)،

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} [G(r + \Delta r, s) - G(r, s)] \\ &= G(r, s) - G(r, s) \\ &= 0.\end{aligned}$$

بنابراین وقتی Δr به صفر میل کند، هر دوی Δx و Δy به صفر میل خواهند کرد. و چون وقتی $(\Delta x, \Delta y)$ به $(0, 0)$ میل می کند، ε_1 و ε_2 نیز به صفر میل می کنند، نتیجه می گیریم

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \varepsilon_1 = 0 \quad (11)$$

حال ممکن است به ازای مقادیر معینی از Δr داشته باشیم $\Delta x = \Delta y = 0$. چون در چنین حالتی می خواهیم $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ، لذا حدهای مذکور در (۱۱) باز هم صفرند. با قراردادن مقادیر از (۸)، (۹)، (۱۰)، و (۱۱) در (۷) به دست می آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

□

که (۲) را ثابت می کند.

مثال ۱ فرض کنید

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

که در آن $x = re^s$ و $y = re^{-s}$ ؛ $\partial u / \partial r$ و $\partial u / \partial s$ را به دست آورید.

حل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = e^s \quad \frac{\partial x}{\partial s} = re^s$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = e^{-s} \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -re^{-s}$$

از (۲) به دست می آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{x}{x^2 + y^2} (e^s) + \frac{y}{x^2 + y^2} (e^{-s}) = \frac{xe^s + ye^{-s}}{x^2 + y^2}$$

و از (۳) خواهیم داشت

$$\blacktriangle \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{x}{x^2 + y^2} (re^s) + \frac{y}{x^2 + y^2} (-re^{-s}) = \frac{r(xe^s - ye^{-s})}{x^2 + y^2}.$$

همان طور که قبلاً گفتیم، نمادهای $\partial u / \partial y$ ، $\partial u / \partial x$ ، $\partial u / \partial s$ ، $\partial u / \partial r$ و غیره را نباید به عنوان کسر تلقی کرد. نمادهای ∂x ، ∂u و غیره نیز به خودی خود معنی ندارند. در مورد توابع یک متغیری، قاعده زنجیری مذکور در معادله (۱) را با در نظر گرفتن مشتق معمولی به عنوان خارج قسمت دو دیفرانسیل به سادگی می توان به خاطر سپرد، ولی تعبیر مشابهی برای مشتقات جزئی وجود ندارد.

مسئله دیگری که در استفاده از نمادها پیش می آید وقتی است که u تابعی از x و y و x و y نیز توابعی از r و s باشند. اگر $u = f(x, y)$ ، $x = F(r, s)$ و $y = G(r, s)$ ، آنگاه $u = f(F(r, s), G(r, s))$. [نوشتن $u = f(r, s)$ نادرست است.]

○ نمونه ۱ در مثال ۱،

$$u = f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = F(r, s) = re^s$$

$$y = G(r, s) = re^{-s}$$

و بنابراین

$$u = f(F(r, s), G(r, s)) = \ln \sqrt{r^2 e^{2s} + r^2 e^{-2s}}$$

$$\circ \quad [f(r, s) = \ln \sqrt{r^2 + s^2} \neq u]$$

اگر فرض کنیم $f(F(r, s), G(r, s)) = h(r, s)$ ، آنگاه (۲) و (۳) را به ترتیب می توان به صورت زیر نوشت

$$h_1(r, s) = f_1(x, y)F_1(r, s) + f_2(x, y)G_1(r, s)$$

و

$$h_2(r, s) = f_1(x, y)F_2(r, s) + f_2(x, y)G_2(r, s).$$

در صورت قضیه ۱۰۶.۱۸ متغیرهای مستقل x و y را می‌توان متغیرهای واسطه نامید. حال قاعده زنجیری را در مورد n متغیر واسطه و m متغیر مستقل تعمیم می‌دهیم.

۲۰۶.۱۸ قضیه (قاعده زنجیری در حالت کلی) فرض کنید u تابعی مشتق پذیر از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ و هر یک از این متغیرها نیز تابعی از m متغیر $y_1, y_2, \dots, y_m$ است. به علاوه فرض کنید هر یک از مشتقات جزئی $\partial x_i / \partial y_j$ ($j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n$) موجود باشد. در این صورت u تابعی از $y_1, y_2, \dots, y_m$ است و داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y_1} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_2}\right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_m} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_m}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right)\end{aligned}$$

اثبات این قضیه، تعمیمی از اثبات قضیه ۱۰۶.۱۸ است. ملاحظه کنید که در قاعده زنجیری کلی، تعداد جملات در طرف راست هر معادله به اندازه تعداد متغیرهای واسطه است.

مثال ۲ فرض کنید $z = r \sin t$ ، $y = r \cos t$ ، $x = r$ ، $u = xy + xz + yz$ مطلوب است $\partial u / \partial t$ و $\partial u / \partial r$.

حل بنا بر قاعده زنجیری،

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right) \\ &= (y+z)(1) + (x+z)(\cos t) + (x+y)(\sin t) \\ &= y+z+x \cos t + z \cos t + x \sin t + y \sin t \\ &= r \cos t + r \sin t + r \cos t + (r \sin t)(\cos t) + r \sin t \\ &\quad + (r \cos t)(\sin t) \\ &= 2r(\cos t + \sin t) + r(2 \sin t \cos t) \\ &= 2r(\cos t + \sin t) + r \sin 2t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \\
 &= (y+z)(0) + (x+z)(-r \sin t) + (x+y)(r \cos t) \\
 &= (r+r \sin t)(-r \sin t) + (r+r \cos t)(r \cos t) \\
 &= -r^2 \sin t - r^2 \sin^2 t + r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t \\
 &= r^2(\cos t - \sin t) + r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\
 \blacktriangle \quad &= r^2(\cos t - \sin t) + r^2 \cos 2t.
 \end{aligned}$$

حال فرض کنید u تابعی مشتق پذیر از دو متغیر x و y است، و x و y نیز هر دو تابعی مشتق پذیر از یک متغیر مانند t هستند. در این صورت u تابعی از متغیر t است، و در نتیجه به جای مشتق جزئی u نسبت به t ، مشتق معمولی u نسبت به t را داریم، که به صورت زیر است

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right). \quad (12)$$

du/dt در معادله (۱۲) را مشتق کلی u نسبت به t می نامیم. اگر u تابعی مشتق پذیر از n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ و هر یک از x_i ها تابعی مشتق پذیر از متغیر t باشد، آنگاه u تابعی مشتق پذیر از t ، و مشتق کلی u نسبت به t به صورت زیر است

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\left(\frac{dx_2}{dt}\right) + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{dx_n}{dt}\right).$$

مثال ۳ فرض کنید $u = x^2 + 2xy + y^2$ ، $x = t \cos t$ ، $y = t \sin t$ ؛ به دو روش du/dt را محاسبه کنید. (الف) از قاعده زنجیری استفاده کنید؛ (ب) قبل از مشتق گیری، u را بر حسب t بنویسید.

حل

$$\begin{aligned}
 \text{(الف)} \quad \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x + 2y \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t \\
 &\quad \text{پس بنا به (۱۲)،}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= (2x + 2y)(\cos t - t \sin t) + (2x + 2y)(\sin t + t \cos t) \\
 &= 2(x + y)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t) \\
 &= 2(t \cos t + t \sin t)(\cos t - t \sin t + \sin t + t \cos t) \\
 &= 2t(\cos^2 t - t \sin t \cos t + \sin t \cos t + t \cos^2 t + \sin t \cos t \\
 &\quad - t \sin^2 t + \sin^2 t + t \sin t \cos t) \\
 &= 2t[1 + 2 \sin t \cos t + t(\cos^2 t - \sin^2 t)] \\
 &= 2t(1 + \sin 2t + t \cos 2t).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= (t \cos t)^2 + 2(t \cos t)(t \sin t) + (t \sin t)^2 \quad (\text{ب}) \\
 &= t^2 \cos^2 t + t^2(2 \sin t \cos t) + t^2 \sin^2 t \\
 &= t^2 + t^2 \sin 2t.
 \end{aligned}$$

پس

$$\blacktriangle \quad \frac{du}{dt} = 2t + 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t.$$

مثال ۴ اگر f تابعی مشتق پذیر و a و b ثابت باشند، ثابت کنید

$$z = f\left(\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}ay^3\right)$$

در معادله دیفرانسیل جزئی زیر صدق می کند

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

حل فرض کنید $u = (\frac{1}{2})bx^2 - (\frac{1}{3})ay^3$. می خواهیم ثابت کنیم که $z = f(u)$ در معادله داده شده صدق می کند. بنابر قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)(-ay^2) \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)(bx)$$

بنابراین

$$ay^2 \frac{\partial z}{\partial x} + bx \frac{\partial z}{\partial y} = ay^2[f'(u)(bx)] + bx[f'(u)(-ay^2)] = 0$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. ▲

مثال ۵ در لحظه‌ای، حجم گازی ۱۲۰ سانتیمتر مکعب و گاز تحت فشار ۸ نیوتن بر سانتیمتر مربع است. اگر حجم با آهنگ ۲ سانتیمتر مکعب در دقیقه افزایش و فشار با آهنگ ۱٪ نیوتن بر سانتیمتر مربع در دقیقه کاهش یابد، با استفاده از قانون گاز ایده‌آل (مثال ۵ از بخش ۴۰۱۸) با ضابطه $k = 10$ ، آهنگ تغییر دما را در این لحظه پیدا کنید.

حل فرض کنید از شروع افزایش حجم گاز t دقیقه سپری شده باشد، و در دقیقه t دما برابر T درجه، فشار برابر P نیوتن بر سانتیمتر مربع، و حجم گاز V سانتیمتر مکعب باشند.
بنابر قانون گاز ایده‌آل،

$$T = \frac{PV}{10}.$$

در لحظه مفروض، $P = 8$ ، $V = 120$ ، $dP/dt = -0.1$ ، و $dV/dt = 2$. بنا به قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial P} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial T}{\partial V} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{V}{10} \frac{dP}{dt} + \frac{P}{10} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{120}{10}(-0.1) + \frac{8}{10}(2) \\ &= -1.2 + 1.6 \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

بنابراین، در لحظه مفروض، دما با آهنگ ۰٫۴ درجه در دقیقه افزایش می‌یابد. ▲

تمرینهای ۶.۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، مشتق جزئی خواسته شده را به دروس به دست آورید. (الف) با استفاده از قاعده زنجیری؛ (ب) با نشانیهایی برای x و y قبل از مشتق گیری.

$$1. \quad u = x^2 - y^2; \quad x = 3r - s; \quad y = r + 2s; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$2. \quad u = 3x - 4y^2; \quad x = 5pq; \quad y = 3p^2 - 2q; \quad \frac{\partial u}{\partial p}; \quad \frac{\partial u}{\partial q}$$

$$3. \quad u = 3x^2 + xy - 2y^2 + 3x - y; \quad x = 2r - 3s; \quad y = r + s; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$4. \quad u = x^2 + y^2; \quad x = \cosh r \cos t; \quad y = \sinh r \sin t; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$5. \quad u = e^{y/x}; \quad x = 2r \cos t; \quad y = 4r \sin t; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$6. \quad V = \pi x^2 y; \quad x = \cos z \sin t; \quad y = z^2 e^t; \quad \frac{\partial V}{\partial z}; \quad \frac{\partial V}{\partial t}$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۴، مشتق جزئی خواسته شده را با استفاده از قاعده زنجیری بیابید.

$$7. \quad u = x^2 + xy; \quad x = r^2 + s^2; \quad y = 3r - 2s; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$8. \quad u = xy + xz + yz; \quad x = rs; \quad y = r^2 - s^2; \quad z = (r - s)^2; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$9. \quad u = \sin^{-1}(3x + y); \quad x = r^2 e^s; \quad y = \sin rs; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$10. \quad u = \sin(xy); \quad x = 2ze^t; \quad y = t^2 e^{-z}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$11. \quad u = \cosh \frac{y}{x}; \quad x = 3r^2 s; \quad y = 4se^r; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$12. \quad u = xe^{-y}; \quad x = \tan^{-1}(rst); \quad y = \ln(3rs + 5st); \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u = x^2 + y^2 + z^2; \quad x = r \sin \phi \cos \theta; \quad y = r \sin \phi \sin \theta; \quad z = r \cos \phi; \quad ۱۳$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial \phi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$u = x^2 yz; \quad x = \frac{r}{s}; \quad y = re^s; \quad z = re^{-s}; \quad \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \frac{\partial u}{\partial s} \quad ۱۴$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸، مشتق کلی، du/dt ، را با دودوش به دست آورید. (الف) از قاعده زنجیری استفاده کنید؛ (ب) قبل از مشتق‌گیری جانشانی برای x و y یا x ، y ، و z انجام دهید.

$$u = ye^x + xe^y; \quad x = \cos t; \quad y = \sin t \quad ۱۵$$

$$u = \ln xy + y^2; \quad x = e^t; \quad y = e^{-t} \quad ۱۶$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad x = \tan t; \quad y = \cos t; \quad z = \sin t; \quad 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad ۱۷$$

$$u = \frac{t + e^x}{y - e^t}; \quad x = 3 \sin t; \quad y = \ln t \quad ۱۸$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، مشتق کلی، du/dt ، را بدون اینکه u را قبل از مشتق‌گیری به صورت تابعی از t بنویسید، به دست آورید.

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); \quad x = \ln t; \quad y = e^t \quad ۱۹$$

$$u = xy + xz + yz; \quad x = t \cos t; \quad y = t \sin t; \quad z = t \quad ۲۰$$

$$u = \frac{x+t}{y+t}; \quad x = \ln t; \quad y = \ln \frac{1}{t} \quad ۲۱$$

$$u = \ln(x^2 + y^2 + t^2); \quad x = t \sin t; \quad y = \cos t \quad ۲۲$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، فرض کنید معادله داده شده، z را به عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کند. با مشتق‌گیری ضمنی، $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ را به دست آورید.

$$3x^2 + y^2 + z^2 - 3xy + 4xz - 15 = 0 \quad ۲۳$$

$$z = (x^2 + y^2) \sin xz \quad ۲۴$$

$$ye^{yz} \cos xz = 5 \quad ۲۵$$

$$ze^{yz} + 2xe^{yz} - 4e^{yz} = 3 \quad ۲۶$$

۲۷. اگر f تابعی مشتق‌پذیر از متغیر u باشد، با فرض $u = bx - ay$ ثابت کنید که $a(\partial z / \partial x) + b(\partial z / \partial y) = 0$ در معادله $z = f(bx - ay)$ صدق می‌کند. a و b ثابت هستند.

۲۸. اگر f تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر u و v باشد، با فرض $u = x - y$ و $v = y - x$ ثابت کنید که $(\partial z / \partial x) + (\partial z / \partial y) = 0$ در معادله $z = f(x - y, y - x)$ صدق می‌کند.

۲۹. اگر f تابعی مشتق‌پذیر از x و y باشد و $u = f(x, y)$ و $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ نشان دهید که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}.$$

۳۰. اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر از x و y باشند و $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ به طوری که $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ و $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$ ، آنگاه اگر $x = r \cos \theta$ ، $y = r \sin \theta$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

۳۱. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر از x و y است و $u = f(x, y)$. در این صورت اگر $x = \cosh v \cos w$ و $y = \sinh v \sin w$ ، $\partial u / \partial v$ و $\partial u / \partial w$ را بر حسب $\partial u / \partial x$ و $\partial u / \partial y$ بنویسید.

۳۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر از x ، y ، و z است و $u = f(x, y, z)$. در این صورت اگر $x = r \sin \phi \cos \theta$ ، $y = r \sin \phi \sin \theta$ ، $z = r \cos \phi$ ، $\partial u / \partial \theta$ و $\partial u / \partial \phi$ را بر حسب $\partial u / \partial x$ ، $\partial u / \partial y$ ، و $\partial u / \partial z$ بنویسید.

۳۳. در لحظه مفروضی، طول یک ضلع مثلث قائمه‌الزاویه‌ای ۱۰ سانتیمتر است و با آهنگ ۱ سانتیمتر در دقیقه افزایش می‌یابد و ضلع دیگر آن که ۱۲ سانتیمتر است با آهنگ ۲ سانتیمتر در دقیقه کاهش می‌یابد. آهنگ تغییر زاویه حاده مقابل به ضلع ۱۲ سانتیمتری را در لحظه مفروض به دست آورید.

۳۴. ارتفاع مخروط مستدیرقائمی با آهنگ ۴۵ سانتیمتر در دقیقه افزایش، و شعاع آن با آهنگ ۱۵ سانتیمتر در دقیقه کاهش می‌یابد. در لحظه‌ای که ارتفاع ۲۰۰ سانتیمتر و شعاع ۶۰ سانتیمتر است، آهنگ تغییر حجم را به دست آورید.

۳۵. ارتفاع استوانه مستدیرقائمی با آهنگ ۱۵ سانتیمتر در دقیقه کاهش، و شعاع آن با آهنگ ۴ سانتیمتر در دقیقه افزایش می‌یابد. در لحظه‌ای که ارتفاع ۵۰ سانتیمتر و شعاع ۱۶ سانتیمتر است، آهنگ تغییر حجم را به دست آورید.

۳۶. آب با آهنگ $\frac{4\pi}{5}$ مترمکعب در دقیقه وارد مخزنی به شکل استوانه مستدیرقائمی می‌شود. مخزن منبسط می‌شود به طوری که شکل استوانه‌ای خود را حفظ می‌کند ولی شعاعش با آهنگ $\frac{2}{5}$ سانتیمتر در دقیقه افزایش می‌یابد. وقتی شعاع مخزن ۲ متر و حجم آب داخل آن $\frac{20\pi}{3}$ مترمکعب است، سطح آب با چه سرعتی بالا می‌آید؟

۳۷. مقداری از یک گاز که از قانون گاز ایده‌آل (مثال ۵ از بخش ۱۸.۴ را ببینید) با ضابطه $k = 12$ تبعیت می‌کند، در ظرفی است که با آهنگ 3° در دقیقه گرم می‌شود. اگر در لحظه‌ای که دما 300° و فشار ۶ نیوتن بر سانتیمترمربع است، فشار با آهنگ 1° نیوتن بر سانتیمترمربع در دقیقه کاهش یابد، آهنگ تغییر حجم گاز را در این لحظه به دست آورید.

۳۸. دیواری با زمین زاویه‌ای به اندازه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان می‌سازد. نردبانی به طول ۲۰ فوت به دیوار تکیه دارد و سر آن با آهنگ ۳ فوت در ثانیه به پایین می‌لغزد. وقتی زاویه بین نردبان و زمین $\frac{\pi}{6}$ رادیان گردد، مساحت مثلثی که بین نردبان، دیوار، و زمین تشکیل شده است، با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۷.۱۸ مشتقات جزئی از مراتب بالاتر

اگر f یک تابع دومتغیری باشد، آنگاه به طور کلی $D_1 f$ و $D_2 f$ نیز توابعی دومتغیری هستند. و اگر مشتقات جزئی این توابع موجود باشند، آنها را مشتقات جزئی مرتبه دوم f می‌نامیم. در مقابل، $D_1 f$ و $D_2 f$ را مشتقات جزئی مرتبه اول f گوئیم. یک تابع دومتغیری چهارمشتق جزئی مرتبه دوم دارد. اگر f تابعی از دومتغیر x و y باشد، نمادهای

$$D_2(D_1 f), \quad D_1 D_2 f, \quad f_{12}, \quad f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

همگی آن مشتق جزئی مرتبه دوم f را نشان می‌دهند که از گرفتن مشتق جزئی f نسبت به x و سپس مشتق گیری جزئی از نتیجه حاصل نسبت به y به دست می‌آید. این مشتق جزئی مرتبه دوم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_{12}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y + \Delta y) - f_1(x, y)}{\Delta y} \quad (1)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد. نمادهای

$$D_1(D_1 f), \quad D_{11} f, \quad f_{11}, \quad f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

نیز همگی نشان دهنده آن مشتق جزئی مرتبه دوم f هستند که با دوبار مشتق گیری جزئی نسبت به x به دست می آید. تعریف زیر را به شرط اینکه حد وجود داشته باشد، داریم

$$f_{11}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_1(x + \Delta x, y) - f_1(x, y)}{\Delta x} \quad (2)$$

دیگر مشتقات جزئی مرتبه دوم به طور مشابه تعریف می شوند

$$f_{21}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(x + \Delta x, y) - f_2(x, y)}{\Delta x} \quad (3)$$

و

$$f_{22}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_2(x, y + \Delta y) - f_2(x, y)}{\Delta y} \quad (4)$$

به شرطی که حدهای فوق وجود داشته باشند.

تعاریف مشتقات جزئی مراتب بالاتر نیز مشابه تعاریف فوق است، و باز، نمادهای گوناگونی برای يك مشتق خاص وجود دارد. به عنوان مثال

$$D_{112} f, \quad f_{112}, \quad f_{xxy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$$

همگی آن مشتق جزئی مرتبه سوم f را نشان می دهند که با دو بار مشتق گیری جزئی نسبت به x و سپس يك بار مشتق گیری جزئی نسبت به y به دست می آید. در نماد اندیسی، ترتیب مشتق گیری جزئی از چپ به راست است؛ در نماد $\partial^3 f / \partial y \partial x \partial x$ ترتیب از راست به چپ است.

مثال ۱ فرض کنید $f(x, y) = e^x \sin y + \ln xy$ ؛ مطلوب است (الف) $D_{11} f(x, y)$ ؛ (ب) $D_{12} f(x, y)$ ؛ (پ) $\partial^3 f / \partial x \partial y^2$

حل

$$D_{\backslash} f(x, y) = e^x \sin y + \frac{1}{xy} y = e^x \sin y + \frac{1}{x}$$

پس (الف) $D_{\backslash} f(x, y) = e^x \sin y - (1/x^2)$ و (ب) $D_{\backslash} f(x, y) = e^x \cos y$ ؛
(پ) برای به دست آوردن $\partial^2 f / \partial x \partial y^2$ ، دوبار نسبت به y و سپس یکبار نسبت به x مشتق گیری جزئی می کنیم. به دست می آید

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y + \frac{1}{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y - \frac{1}{y^2}$$

$$\blacktriangle \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y$$

تعریفهای مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع n متغیری مشابه است با تعاریف این مشتقات در مورد تابع دو متغیری. اگر f تابعی n متغیری باشد، ممکن است در نقطه خاصی n^2 مشتق جزئی مرتبه دوم داشته باشد. یعنی، تابع سه متغیری، اگر تمام مشتقات جزئی مرتبه دوم آن موجود باشد ۹ مشتق جزئی مرتبه دوم دارد: $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}$.

مثال ۲ فرض کنید $f(x, y, z) = \sin(xy + 2z)$. مطلوب است $D_{122} f(x, y, z)$.

حل

$$D_{\backslash} f(x, y, z) = y \cos(xy + 2z)$$

$$D_{13} f(x, y, z) = -2y \sin(xy + 2z)$$

$$\blacktriangle \quad D_{122} f(x, y, z) = -2 \sin(xy + 2z) - 2xy \cos(xy + 2z).$$

مثال ۳ فرض کنید $f(x, y) = x^3 y - y \cosh xy$. مطلوب است (الف) $D_{21} f(x, y)$ ؛ (ب) $D_{12} f(x, y)$.

حل

$$D_{\backslash} f(x, y) = 3x^2 y - y^2 \sinh xy \quad (\text{الف})$$

$$D_{12} f(x, y) = 3x^2 - 2y \sinh xy - xy^2 \cosh xy$$

$$D_2 f(x, y) = x^2 - \cosh xy - xy \sinh xy \quad (\text{ب})$$

$$D_{21} f(x, y) = 2x^2 - y \sinh xy - y \sinh xy - xy^2 \cosh xy$$

$$\triangle \quad = 2x^2 - 2y \sinh xy - xy^2 \cosh xy$$

با توجه به نتایج بالا ملاحظه می‌کنید که برای تابع مذکور در این مثال مشتقات جزئی «آمیخته» $D_{21} f(x, y)$ و $D_{12} f(x, y)$ با هم مساوی‌اند. لذا برای این تابع خاص، ترتیب مشتق‌گیری در هنگام یافتن مشتق جزئی مرتبه دوم نسبت به x و سپس نسبت به y ، اهمیت ندارد. این حالت برای بسیاری از توابع برقرار است. ولی در مثال زیر نشان می‌دهیم که همیشه چنین نیست.

مثال ۴ تابع f با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy) \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f_{11}(0, 0)$ و $f_{12}(0, 0)$ را به دست آورید.

حل در مثال ۳ در بخش ۴.۱۸ نشان دادیم که برای این تابع داریم

$$f_1(0, y) = -y \quad \text{به ازای همه } y\text{ها،} \quad (5)$$

و

$$f_2(x, 0) = x \quad \text{به ازای همه } x\text{ها،} \quad (6)$$

بنابر فرمول (۱)،

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_1(0, 0 + \Delta y) - f_1(0, 0)}{\Delta y}.$$

اما بنابر (۵) داریم $f_1(0, \Delta y) = -\Delta y$ و $f_1(0, 0) = 0$ ، و لذا

$$f_{12}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-1) = -1.$$

بنابر فرمول (۳)،

$$f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_2(0 + \Delta x, 0) - f_2(0, 0)}{\Delta x}.$$

از (۶) داریم $f_2(\Delta x, 0) = \Delta x$ و $f_2(0, 0) = 0$. بنابراین

$$\Delta \quad f_{21}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

برای تابع مذکور در مثال ۴، مشتقات جزئی آمیخته $f_{12}(x, y)$ و $f_{21}(x, y)$ در $(0, 0)$ باهم مساوی نیستند. برای اینکه داشته باشیم $f_{12}(x_0, y_0) = f_{21}(x_0, y_0)$ ، مجموعه شرایطی در قضیه ۱۰۷.۱۸ داده شده است که در زیر می آید. تابع مثال ۴ در فرض این قضیه صدق نمی کند زیرا f_{12} و f_{21} در $(0, 0)$ ناپیوسته اند. اثبات این مورد را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم (تمرین ۲۴ را ببینید).

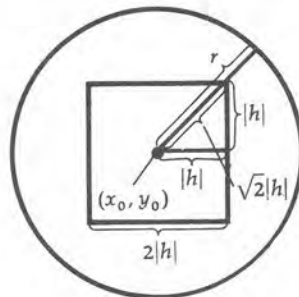
۱۰۷.۱۸ قضیه فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y باشد که روی قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ تعریف شده و f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} نیز روی B تعریف شده باشند. همچنین فرض کنید f_{xy} و f_{yx} روی B پیوسته باشند. در این صورت

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

اثبات مربعی را که مرکزش در (x_0, y_0) و طول ضلعش $2|h|$ است در نظر می گیریم به طوری که $0 < \sqrt{2}|h| < r$. در این صورت تمام نقاط داخل مربع و تمام نقاط روی اضلاع آن در قرص باز B قرار دارند (شکل ۱۰۷.۱۸ را ببینید). پس نقاط $(x_0 + h, y_0 + h)$ ، $(x_0 + h, y_0)$ و $(x_0, y_0 + h)$ نیز در B هستند. فرض کنید Δ به صورت زیر تعریف شود.

$$\Delta = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0) \quad (۷)$$

تابع G را که به صورت زیر تعریف می شود، در نظر می گیریم



شکل ۱۰۷.۱۸

$$G(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0). \quad (۸)$$

در این صورت

$$G(x+h) = f(x+h, y_0+h) - f(x+h, y_0).$$

بنابراین (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\Delta = G(x_0+h) - G(x_0). \quad (۹)$$

بنابر (۸)،

$$G'(x) = f_x(x, y_0+h) - f_x(x, y_0). \quad (۱۰)$$

حال چون $f_x(x, y_0+h)$ و $f_x(x, y_0)$ روی B تعریف می‌شوند، در صورتی که x در بازه بسته‌ای باشد که نقاط انتهایی آن x_0+h و x_0 باشند، $G'(x)$ وجود دارد. پس G پیوسته است اگر x در این بازه بسته باشد. بنا به قضیه مقدار میانگین (۲.۴.۴)، عددی مانند c_1 بین x_0 و x_0+h وجود دارد به طوری که

$$G(x_0+h) - G(x_0) = hG'(c_1). \quad (۱۱)$$

با قرار دادن مقدار از (۱۱) در (۹) به دست می‌آید

$$\Delta = hG'(c_1). \quad (۱۲)$$

با توجه به (۱۲) و (۱۰) داریم

$$\Delta = h[f_x(c_1, y_0+h) - f_x(c_1, y_0)]. \quad (۱۳)$$

حال اگر تابع g به صورت زیر تعریف شود

$$g(y) = f_x(c_1, y) \quad (۱۴)$$

می‌توانیم (۱۳) را به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta = h[g(y_0+h) - g(y_0)]. \quad (۱۵)$$

از (۱۴) داریم

$$g'(y) = f_{xy}(c_1, y). \quad (۱۶)$$

چون $f_{xy}(c_1, y)$ بر B تعریف می‌شود، در صورتی که y در بازه بسته‌ای باشد که دارای نقاط انتهایی y_0+h و y_0 است، $g'(y)$ وجود دارد؛ بنابراین اگر y در این بازه بسته باشد، g پیوسته است. پس، بنا به قضیه مقدار میانگین عددی چون d_1 بین y_0 و y_0+h وجود دارد به طوری که

$$g(y_0 + h) - g(y_0) = hg'(d_1). \quad (17)$$

با قراردادن مقدار از (۱۷) در (۱۵) به دست می آوریم $\Delta = h^2 g'(d_1)$ ؛ پس برای نقطه‌ای چون (c_1, d_1) در قرص باز B ، از (۱۶) نتیجه می شود که

$$\Delta = h^2 f_{xy}(c_1, d_1). \quad (18)$$

تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\phi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \quad (19)$$

و لذا $\phi(y + h) = f(x_0 + h, y + h) - f(x_0, y + h)$ بنا بر این $\phi(y)$ را می توان به صورت

$$\Delta = \phi(y_0 + h) - \phi(y_0) \quad (20)$$

نوشت. از (۱۹) داریم

$$\phi'(y) = f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y). \quad (21)$$

چون بنا به فرض هر يك از جملات طرف راست (۲۱) بر B موجود است، اگر y در بازه‌ای بسته که نقاط انتهایی آن y_0 و $y_0 + h$ هستند، قرار داشته باشد، آنگاه ϕ' وجود دارد. بنابراین ϕ روی این بازه بسته پیوسته است. پس بنا به قضیه مقدار میانگین عددی چون d_1 بین y_0 و $y_0 + h$ وجود دارد به طوری که

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = h\phi'(d_1). \quad (22)$$

از (۲۰)، (۲۱)، و (۲۲) نتیجه می شود

$$\Delta = h[f_y(x_0 + h, d_1) - f_y(x_0, d_1)]. \quad (23)$$

تابع χ را به این صورت تعریف می کنیم

$$\chi(x) = f_y(x, d_1) \quad (24)$$

و (۲۳) را به صورت زیر می نویسیم

$$\Delta = h[\chi(x_0 + h) - \chi(x_0)]. \quad (25)$$

از (۲۴) داریم

$$\chi'(x) = f_{yx}(x, d_1). \quad (26)$$

و بنا به قضیه مقدار میانگین عددی چون c_1 بین x_0 و $x_0 + h$ وجود دارد به طوری که

$$\chi(x_0 + h) - \chi(x_0) = h\chi'(c_1). \quad (27)$$

از (۲۵)، (۲۶)، و (۲۷) داریم

$$\Delta = h^2 f_{yx}(c_2, d_2). \quad (28)$$

با مساوی قراردادن طرف راست (۱۸) و طرف راست (۲۸) به دست می آید

$$h^2 f_{xy}(c_1, d_1) = h^2 f_{yx}(c_2, d_2)$$

و چون $h \neq 0$ ، طرفین را می توانیم بر h^2 تقسیم کنیم. پس

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2) \quad (29)$$

که (c_1, d_1) و (c_2, d_2) در B هستند.

چون c_1 و c_2 هر دو بین $x_0 + h$ و x_0 قرار دارند، می توانیم بنویسیم $c_1 = x_0 + \varepsilon_1 h$ و $c_2 = x_0 + \varepsilon_2 h$ که در آن $0 < \varepsilon_1 < 1$ و $0 < \varepsilon_2 < 1$ همین طور چون d_1 و d_2 بین $y_0 + h$ و y_0 قرار دارند، می توانیم بنویسیم $d_1 = y_0 + \varepsilon_3 h$ و $d_2 = y_0 + \varepsilon_4 h$ که در آن $0 < \varepsilon_3 < 1$ و $0 < \varepsilon_4 < 1$ با جایگزینی این مقادیر در (۲۹) به دست می آید

$$f_{xy}(x_0 + \varepsilon_1 h, y_0 + \varepsilon_3 h) = f_{yx}(x_0 + \varepsilon_2 h, y_0 + \varepsilon_4 h). \quad (30)$$

چون f_{xy} و f_{yx} روی B پیوسته هستند، با گرفتن حد از طرفین (۳۰) وقتی که h به سمت صفر میل کند به دست می آوریم

$$\square \quad f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

به عنوان نتیجه ای از قضیه فوق گوییم: اگر تابع دومتغیری f دارای مشتقات جزئی پیوسته روی قرص بازی باشد، آنگاه ترتیب مشتق گیری جزئی را می توان عوض کرد بدون اینکه تأثیری بر نتیجه داشته باشد؛ یعنی

$$D_{112}f = D_{121}f = D_{211}f$$

$$D_{1122}f = D_{1212}f = D_{2121}f = D_{2112}f = D_{2211}f = D_{2121}f$$

و الی آخر. به ویژه، اگر فرض کنیم که تمام مشتقات جزئی f روی قرص بازی پیوسته باشند، می توانیم با استفاده مکرر از قضیه ۱۰.۷.۱۸ ثابت کنیم که $D_{211}f = D_{112}f$. با انجام این عمل داریم

$$\begin{aligned} D_{211}f &= D_1(D_{21}f) = D_1(D_{12}f) = D_1[D_2(D_1f)] = D_2[D_1(D_1f)] \\ &= D_2(D_{11}f) = D_{112}f. \end{aligned}$$

مثال ۵ فرض کنید $u = f(x, y)$ ، $x = F(r, s)$ و $y = G(r, s)$ و همچنین $f_{xy} = f_{yx}$ با استفاده از قاعده زنجیری ثابت کنید

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) \\ &+ f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s). \end{aligned}$$

حل بنا به قاعده زنجیری (قضیه ۱۰۶.۱۸)،

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f_x(x, y)F_r(r, s) + f_y(x, y)G_r(r, s)$$

با گرفتن مشتق جزئی مجدد نسبت به r ، و استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب و قاعده زنجیری، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= [f_{xx}(x, y)F_r(r, s) + f_{xy}(x, y)G_r(r, s)]F_r(r, s) \\ &+ f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + [f_{yx}(x, y)F_r(r, s) \\ &+ f_{yy}(x, y)G_r(r, s)]G_r(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s). \end{aligned}$$

باضرب و ترکیب جملات، و استفاده از اینکه $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= f_{xx}(x, y)[F_r(r, s)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F_r(r, s)G_r(r, s) \\ &+ f_{yy}(x, y)[G_r(r, s)]^2 + f_x(x, y)F_{rr}(r, s) + f_y(x, y)G_{rr}(r, s) \end{aligned}$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم. ▲

تمرینهای ۲.۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۵، هر يك از کارهای زیر را انجام دهید. (الف) $D_{11}f(x, y)$ را بیابید؛ (ب) $D_{22}f(x, y)$ را بیابید؛ (پ) نشان دهید که $D_{12}f(x, y) = D_{21}f(x, y)$.

$$f(x, y) = 2x^2 - 3x^2y + xy^2 \quad ۲. \quad f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^2} \quad ۱.$$

$$f(x, y) = e^{-x/y} + \ln \frac{y}{x} \quad ۴. \quad f(x, y) = e^{xy} \sin y \quad ۳.$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad .5$$

$$f(x, y) = \sin^{-1} \frac{3y}{x^2} \quad .6$$

$$f(x, y) = 2x \sinh y + 3y \cosh x \quad .7$$

$$f(x, y) = x \cos y - ye^x \quad .8$$

$$f(x, y) = e^x \cos y + \tan^{-1} x \cdot \ln y \quad .9$$

$$f(x, y) = 3x \cosh y - y \sin^{-1} e^x \quad .10$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، مشتقات جزئی خواسته شده را بیابید.

$$f(x, y) = 2x^2y + 5x^2y^2 - 3xy^2 \quad .11$$

$$f_{211}(x, y) \quad (\text{ب}) ; f_{121}(x, y) \quad (\text{الف})$$

$$G(x, y) = 3x^2y^2 + 5x^2y^3 + 2x \quad .12$$

$$G_{yxy}(x, y) \quad (\text{ب}) ; G_{yyx}(x, y) \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y, z) = ye^x + ze^y + e^x \quad .13$$

$$f_{yz}(x, y, z) \quad (\text{ب}) ; f_{z2}(x, y, z) \quad (\text{الف})$$

$$g(x, y, z) = \sin(x - y - z) \quad .14$$

$$g_{12}(x, y, z) \quad (\text{ب}) ; g_{21}(x, y, z) \quad (\text{الف})$$

$$f(w, z) = w^2 \cos e^z \quad .15$$

$$f_{212}(w, z) \quad (\text{ب}) ; f_{121}(w, z) \quad (\text{الف})$$

$$f(u, v) = \ln \cos(u - v) \quad .16$$

$$f_{vuv}(u, v) \quad (\text{ب}) ; f_{uvv}(u, v) \quad (\text{الف})$$

$$g(r, s, t) = \ln(r^2 + 4s^2 - 5t^2) \quad .17$$

$$g_{122}(r, s, t) \quad (\text{ب}) ; g_{132}(r, s, t) \quad (\text{الف})$$

$$f(x, y, z) = \tan^{-1}(3xyz) \quad .18$$

$$f_{122}(x, y, z) \quad (\text{ب}) ; f_{112}(x, y, z) \quad (\text{الف})$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، نشان دهید که $u(x, y)$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

این معادله به معادله لاپلاس در R^2 معروف است.

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad ۱۹.$$

$$u(x, y) = e^x \sin y + e^y \cos x \quad ۲۰.$$

$$u(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad ۲۱.$$

$$u(x, y) = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad ۲۲.$$

۲۳. معادله لاپلاس در R^3 به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

نشان دهید که $u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ در معادله بالا صدق می‌کند.

۲۴. برای تابع مذکور در مثال ۴ نشان دهید که f_{12} در $(0, 0)$ ناپیوسته است، و بنا بر این اگر $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ، فرض قضیه ۱۰.۷.۱۸ درباره آن صدق نمی‌کند.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۷، $f_{11}(0, 0)$ و $f_{12}(0, 0)$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۲۵.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۲۶.$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y} & x \neq 0 \text{ و } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0 \end{cases} \quad ۲۷.$$

۲۸. فرض کنید $u = f(x, y)$ ، $x = F(t)$ ، و $y = G(t)$ ، و همچنین $f_{xy} = f_{yx}$. با استفاده از قاعده زنجیری ثابت کنید که

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= f_{xx}(x, y)[F'(t)]^2 + 2f_{xy}(x, y)F'(t)G'(t) \\ &\quad + f_{yy}(x, y)[G'(t)]^2 + f_x(x, y)F''(t) + f_y(x, y)G''(t). \end{aligned}$$

۲۹. فرض کنید $u = f(x, y)$ ، $x = F(r, s)$ ، و $y = G(r, s)$ ، و همچنین $f_{xy} = f_{yx}$. با استفاده از قاعده زنجیری ثابت کنید که

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} &= f_{xx}(x, y)F_r(r, s)F_s(r, s) + f_{xy}(x, y)[F_s(r, s)G_r(r, s) \\ &\quad + F_r(r, s)G_s(r, s)] + f_{yy}(x, y)G_r(r, s)G_s(r, s) \\ &\quad + f_x(x, y)F_{sr}(r, s) + f_y(x, y)G_{sr}(r, s). \end{aligned}$$

۳۰. فرض کنید $u = e^x \cos x$ ، $x = 2t$ ، و $y = t^2$. $d^2 u / dt^2$ را به سه روش زیر بیابید: (الف) ابتدا u را بر حسب t بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول تمرین ۲۸؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۱. فرض کنید $u = 3xy - 4y^2$ ، $x = 2se^t$ ، و $y = re^{-s}$. $\partial^2 u / \partial r^2$ را با سه روش زیر بیابید: (الف) ابتدا u را بر حسب r و s بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول مثال ۵؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۲. برای u ، x ، و y مذکور در تمرین ۳۱، $\partial^2 u / \partial s \partial r$ را به سه روش به دست آورید: (الف) ابتدا u را بر حسب r و s بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول تمرین ۲۹؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۳. فرض کنید $u = 9x^2 + 4y^2$ ، $x = r \cos \theta$ ، و $y = r \sin \theta$. $\partial^2 u / \partial r^2$ را به سه روش زیر بیابید: (الف) ابتدا u را بر حسب r و θ بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول مثال ۵؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۴. برای u ، x ، و y مذکور در تمرین ۳۳، $\partial^2 u / \partial \theta^2$ را به سه روش به دست آورید: (الف) ابتدا u را بر حسب r و θ بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول مثال ۵؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۵. برای u ، x ، و y مذکور در تمرین ۳۳، $\partial^2 u / \partial r \partial \theta$ را به سه روش به دست آورید: (الف) ابتدا u را بر حسب r و θ بنویسید؛ (ب) با استفاده از فرمول تمرین ۲۹؛ (پ) با استفاده از قاعده زنجیری.

۳۶. اگر $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y)$ ، آنگاه معادلات

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

را معادلات کوشی-ریمان می‌نامند. اگر f و g و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم آنها پیوسته باشند، ثابت کنید در صورتی که u و v در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، در معادله لاپلاس نیز صدق خواهند کرد (تمرینهای ۱۹ تا ۲۲ را ببینید).

۳۷. معادله دیفرانسیل جزئی رسانش گرما در یک بعد، به صورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

اگر f تابعی از x باشد که در معادله زیر صدق کند

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$$

و g تابعی از t باشد که در معادله $\frac{d}{dt}g + k^2 \lambda^2 g(t) = 0$ صدق کند، آنگاه اگر $u = f(x)g(t)$ ، نشان دهید که معادله دیفرانسیل جزئی فوق برقرار است. k و λ ثابت هستند.

۳۸. معادله دیفرانسیل جزئی یک تار مرتعش به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

اگر f تابعی از x باشد که در معادله $\frac{d^2 f}{dx^2} + \lambda^2 f(x) = 0$ صدق کند، و g تابعی از t باشد که در معادله $\frac{d^2 g}{dt^2} + a^2 \lambda^2 g(t) = 0$ صدق کند، آنگاه اگر $u = f(x)g(t)$ ، نشان دهید که معادله دیفرانسیل جزئی فوق برقرار است. a و λ ثابت هستند.

۳۹. اگر f و g توابع دلخواهی از یک متغیر حقیقی باشند که مشتقات دومشان پیوسته باشد، و $u = f(x+at) + g(x-at)$ ، در این صورت ثابت کنید u در معادله دیفرانسیل جزئی تار مرتعش مذکور در تمرین ۳۸ صدق می‌کند. (داهنمایی: فرض کنید $u = f(x)g(t)$ ، نشان دهید که معادله دیفرانسیل جزئی فوق برقرار است. a و λ ثابت هستند.)

۴۰. اگر f یک تابع دومتغیری باشد که تمام مشتقات جزئی اش تا مرتبه چهارم بر قرص

بازی پیوسته باشند، ثابت کنید

$$D_{1122}f = D_{2121}f.$$

تمرینهای مروری فصل ۱۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، مشتقاتی خواسته شده را به دست آورید.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y}{3y^2}; \quad D_1 f(x, y), \quad D_2 f(x, y), \quad D_{12} f(x, y) \quad ۱.$$

$$F(x, y, z) = 2xy^2 + 3yz^2 - 5xz^2; \quad D_1 f(x, y, z), \quad D_2 f(x, y, z), \quad D_{12} f(x, y, z) \quad ۲.$$

$$g(s, t) = \sin(st^2) + te^s; \quad D_1 g(s, t), \quad D_2 g(s, t), \quad D_{12} g(s, t) \quad ۳.$$

$$h(x, y) = \tan^{-1} \frac{x^2}{y^2}; \quad D_1 h(x, y), \quad D_2 h(x, y), \quad D_{11} h(x, y) \quad ۴.$$

$$f(u, v, w) = \frac{\ln 4uv}{w^2}; \quad D_1 f(u, v, w), \quad D_2 f(u, v, w), \quad D_{12} f(u, v, w) \quad ۵.$$

$$f(u, v, w) = w \cos 2v + 3v \sin u - 2uv \tan w; \quad D_1 f(u, v, w), \quad D_2 f(u, v, w), \quad D_{12} f(u, v, w) \quad ۶.$$

در تمرینهای ۷ و ۸، $\partial u / \partial s$ و $\partial u / \partial t$ را به دو روش به دست آورید.

$$u = y \ln(x^2 + y^2), \quad x = 2s + 3t, \quad y = 3t - 2s \quad ۷.$$

$$u = e^{2s+3t} \cos(2y-x), \quad x = 2s^2 - t^2, \quad y = s^2 + 2t^2 \quad ۸.$$

۹. اگر $z = \ln 4$ ، $y = r^3 s^2$ ، $x = e^{rst}$ ، $u = 3x^2 y + 2xy - 3yz - 2z^2$ ، $\partial u / \partial r$ را به دو روش زیر به دست آورید. (الف) با استفاده از قاعده زنجیری؛ (ب) قبل از مشتق گیری، عبارات x ، y ، و z را در معادله u قرار دهید.

۱۰. اگر $z = \tan \theta$ ، $y = \cos \theta$ ، $x = \sin \theta$ ، $u = e^{x^2+y^2} - (3x/y) + 3z$ ، مشتق کلی $du/d\theta$ را به دو روش زیر به دست آورید: (الف) قبل از مشتق گیری، u را بر حسب θ بنویسید؛ (ب) قبل از مشتق گیری، u را بر حسب θ بنویسید.

۱۱. اگر $u = xy + x^2$ ، $x = 4 \cos t$ ، و $y = 3 \sin t$ ، با دو روش زیر، مقدار مشتق

کلی du/dt در $t = \pi/4$ را به دست آورید: (الف) قبل از مشتق گیری، u را بر حسب t بنویسید؛ (ب) قبل از مشتق گیری u را بر حسب t بنویسید.

۱۲. اگر $f(x, y) = x^2 + ye^x$ ، مطلوب است (الف) $\Delta f(0, 2)$ ، نمو f در $(0, 2)$ ؛ (ب) $\Delta f(0, 2)$ وقتی $\Delta x = -0.1$ و $\Delta y = 0.2$ ؛ (پ) $df(0, 2, \Delta x, \Delta y)$ ؛ (ت) $df(0, 2, -0.1, 0.2)$.

۱۳. اگر $f(x, y, z) = 3xy^2 - 5xz^2 - 2xyz$ ، مطلوب است (الف) $\Delta f(-1, 3, 2)$ ، نمو f در $(-1, 3, 2)$ ؛ (ب) $\Delta f(-1, 3, 2)$ وقتی $\Delta x = 0.02$ ، $\Delta y = -0.01$ و $\Delta z = -0.02$ ؛ (پ) $df(-1, 3, 2, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ؛ (ت) $df(-1, 3, 2, 0.02, -0.01, -0.02)$.

در تمرینهای ۱۴ تا ۱۸، قلمرو و برد f را بیابید و نموداری رسم کنید که در آن، مجموعه نقاط قلمرو f به صورت ناحیه سایه خورده‌ای در R^2 نشان داده شود.

$$f(x, y) = \sqrt{2x^2 - y} \quad ۱۴$$

$$f(x, y) = \tan^{-1} \sqrt{x^2 - y^2} \quad ۱۵$$

$$f(x, y) = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad ۱۶$$

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{36 - 4x^2 - y^2}} \quad ۱۷$$

$$f(x, y) = [x] + [\sqrt{1 - y^2}] \quad ۱۸$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۱، قلمرو و برد تابع f را بیابید.

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{\sqrt{z}} \quad ۱۹$$

$$f(x, y, z) = \frac{xy + xz + yz}{xyz} \quad ۲۰$$

$$f(x, y, z) = \frac{x}{|y| - |z|} \quad ۲۱$$

۲۲. دما در نقطه (x, y) از یک ورقه فلزی مسطح، t درجه است و $t = x^2 + 2y$. منحنیهای تکدام را برای $t = 0, 2, 4, 6, 8$ رسم کنید.

۲۳. فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x, y) = 2x/3y$ ، و $h(x) = 1/x$ ، مطلوب است:

(الف) $h \circ g(-3, 2)$ ؛ (ب) $g(f(3), h(1/2))$ ؛

(پ) $g(f(x), h(y))$ ؛ (ت) $f((h \circ g)(x, y))$ ؛

در تمرینهای ۲۴ و ۲۵، با استفاده از قضایای حدی، حد داده شده را محاسبه کنید.

۲۴. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \pi/2)} \frac{xy^2 + e^x}{\cos x + \sin y}$. ۲۵. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, 2)} \sin^{-1}\left(\frac{3x}{2y}\right)$

در تمرینهای ۲۶ تا ۲۸، برای هر حدی که ثابت کنید، باین منظور، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ بیابید به طوری که تعریف ۵.۲.۱۸ برقرار باشد.

۲۶. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4, -1)} (2x - 5y) = 21$

۲۷. $\lim_{(x,y) \rightarrow (2, -2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$

۲۸. $\lim_{(x,y) \rightarrow (3, 1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، حد را در صورت وجود به دست آورید.

۲۹. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}$. ۳۰. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$

۳۱. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^6 + y^2)^2}$. ۳۲. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + 4x^2 y}{x^2 + y^2}$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۷، در مورد پیوستگی f بحث کنید.

۳۳. $f(x, y) = \frac{x^2 + 4y^2}{x^2 - 4y^2}$

۳۴. $f(x, y) = \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi y}{2}}$

۳۵. $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2} + \cos^2 \frac{\pi y}{2}}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۳۶$$

(داهنمایی: تمرین ۳۰ را ببینید).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad ۳۷$$

(داهنمایی: تمرین ۲۹ را ببینید).

۳۸. اگر $w = x^2 y - y^2 x + y^2 z - z^2 y + z^2 x - x^2 z$ ، نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

۳۹. مطلوب است (الف) $f_y(x, 0)$ اگر $x \neq 0$ ، و (ب) $f_y(0, 0)$ اگر

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12x^2 y - 3y^2}{x^2 + y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در تمرینهای ۴۰ و ۴۱، با نشان دادن اینکه تعریف ۲۰۵.۱۸ برقرار است، ثابت کنید f در تمام نقاط قلمروش مشتق پذیر است.

۴۰. $f(x, y) = 3xy^2 - 4x^2 + y^2$

۴۱. $f(x, y) = \frac{2x + y}{y^2}$

۴۲. فرض کنید اندازه زاویه حاده‌ای از يك مثلث قائم الزاویه بر حسب رادیان برابر α است و $\sin \alpha$ با نسبت a/c معین می شود که در آن a (بر حسب سانتیمتر) طول ضلع مقابل آن زاویه و c (بر حسب سانتیمتر) طول وتر مثلث هستند. اگر در يك اندازه گیری طول a برابر با ۳۵۲ سانتیمتر و طول c برابر با ۷۱۴ سانتیمتر به دست آید و خطای ممکن در اندازه گیری برای هر يك ۰.۱ سانتیمتر باشد، خطای ممکن در محاسبه $\sin \alpha$ از روی این اندازه ها را به دست آورید.

۴۳. يك نقاش ساختمانی برای هر متر مربع نقاشی چهار دیوار و سقف يك اتاق ۲ دلار

می گیرد. اگر طول و عرض اتاق به ترتیب ۵ متر و ۴ متر، و ارتفاع اتاق ۳ متر باشد و خطای هر یک از این اندازه ها بیش از ۵ره سانتیمتر نباشد، با استفاده از دیفرانسیل کلی تعیین کنید که بیشترین خطا در برآورد هزینه این کار از روی این اندازه ها چقدر است.

۴۴. در لحظه مفروضی، طول یک ضلع مستطیلی ۶ سانتیمتر است و با آهنگ ۱ سانتیمتر در ثانیه افزایش می یابد و طول ضلع دیگر آن ۱۰ سانتیمتر است و با آهنگ ۲ سانتیمتر در ثانیه کاهش می یابد. آهنگ تغییر مساحت مستطیل را در این لحظه به دست آورید.

۴۵. شعاع استوانه مستدیر قائمی با آهنگ ۵ سانتیمتر در دقیقه کاهش و ارتفاع آن با آهنگ ۱۲ سانتیمتر در دقیقه افزایش می یابد. مطلوب است آهنگ تغییر حجم در لحظه ای که شعاع ۲۰ سانتیمتر و ارتفاع ۴۰ سانتیمتر می شود.

۴۶. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه

$$25x^2 - 16y^2 + 9z^2 - 4 = 0$$

با صفحه $x = 4$ را در نقطه $(4, 9, 10)$ به دست آورید.

۴۷. اگر حجم گازی با آهنگ ۳ سانتیمتر مکعب در دقیقه و دمای آن با آهنگ 3° ره در دقیقه افزایش یابد، از قانون گاز ایده آل (مثال ۵ از بخش ۴۰.۱۸ را ببینید) با ضابطه $k = 5$ استفاده کنید و آهنگ تغییر فشار را در لحظه ای که حجم گاز ۸۰ سانتیمتر مکعب و دما 75° است، بیابید.

۴۸. معادله لاپلاس در R^2 به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

تحقیق کنید که $u(x, y) = (\sinh x)(\sin y)$ در این معادله صدق می کند.

۴۹. اگر f تابعی مشتق پذیر از متغیر u باشد، با فرض $u = x^2 + y^2$ ثابت کنید $z = xy + f(x^2 + y^2)$ در معادله زیر صدق می کند

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2.$$

۵۰. معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت زیر است

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

اگر n يك مقدار ثابت باشد، تحقیق کنید که $u(r, \theta) = r^n \sin n\theta$ در این معادله صدق می‌کند.

۵۱. معادلهٔ لاپلاس در R^3 به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

تحقیق کنید که $u(x, y, z) = e^{3x+4y} \sin 5z$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کند.

۵۲. اگر A و k ثابت‌هایی اختیاری باشند، تحقیق کنید که

$$u(x, t) = A \cos(kat) \sin(kx)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی يك تار مرتعش که به صورت زیر است، صدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

۵۳. معادلهٔ دیفرانسیل رسانش گرما در حالت يك بعدی به صورت زیر است

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

تحقیق کنید که

$$u(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{(-n^2 \pi^2 k^2 / L^2)t}$$

در معادلهٔ فوق صدق می‌کند.

۵۴. تابع f به صورت زیر مفروض است

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ثابت کنید $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ وجود دارند ولی f در $(0, 0)$ مشتق پذیر نیست. (داهنمایی: مثال ۶ در بخش ۲۰۱۸، و تمرین ۱۵ از تمرینهای ۳۰۱۸ را ببینید.)

۵۵. اگر

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

ثابت کنید f در $(0, 0, 0)$ مشتق پذیر است.

۵۶. فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شود

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید f در مبدأ ناپیوسته است.

۵۷. برای تابع تمرین ۵۶، ثابت کنید که $D_1 f(0, 0)$ و $D_2 f(0, 0)$ هر دو وجود دارند.

۵۸. اگر f تابعی مشتق پذیر از دو متغیر x و y باشد و $x = r \cos \theta$ ، $u = f(x, y)$ و $y = r \sin \theta$ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

مشتقات جهتی، گرادیان، کاربردهای مشتقات جزئی، و انتگرالهای منحنی الخط

۱۰.۱۹ مشتق جهتی و گرادیان

اکنون تعریف مشتق جزئی را تعمیم داده آهنگ تغییر يك تابع را نسبت به جهت دلخواهی به دست می آوریم. این مطلب به مفهوم مشتق جهتی منتهی می شود.
فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y ، و $P(x, y)$ نقطه ای در صفحه xy باشد. همچنین فرض کنید $\mathbf{U}$ بردار واحدی باشد که زاویه ای به اندازه θ رادیان با جهت مثبت محور x ها می سازد. در این صورت

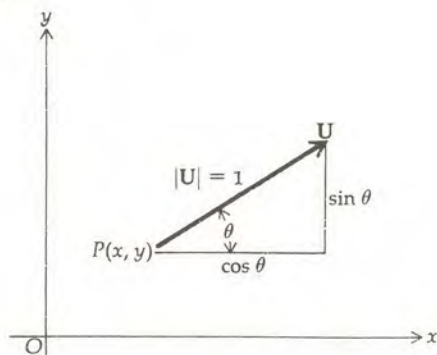
$$\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}.$$

شکل ۱۰.۱۹.۱۹ نمایشی از $\mathbf{U}$ را نشان می دهد که ابتدایش در نقطه $P(x, y)$ قرار دارد.

تعریف ۱۰.۱۹.۱۹ فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y باشد. اگر $\mathbf{U}$ بردار واحد $\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ باشد، آنگاه مشتق جهتی f در جهت $\mathbf{U}$ را با $D_{\mathbf{U}}f$ نشان می دهیم که به صورت زیر به دست می آید

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h}$$

البته به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد.

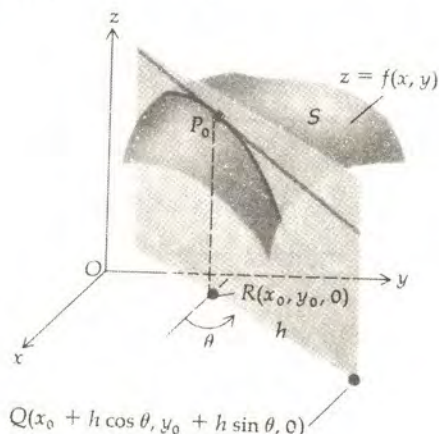


شکل ۱.۱.۱۹

مشتق جهتی، آهنگ تغییر مقادیر تابع، $f(x, y)$ ها، رانست به جهت بردار واحد U به دست می‌دهد. این نکته در شکل ۲.۱.۱۹ نشان داده شده است. معادله رویه S در این شکل $z = f(x, y)$ است. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای روی این رویه است، و نقاط $Q(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta, 0)$ و $R(x_0, y_0, 0)$ ماربر Q و R موازی محور z هاست، و زاویه‌ای با اندازه θ رادیان با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. فصل مشترک این صفحه با رویه S منحنی C است. مشتق جهتی، $D_U f$ ، که در نقطه P_0 محاسبه شود، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی C در P_0 در صفحه R, Q ، و P_0 است.

اگر $U = i$ ، آنگاه $\cos \theta = 1$ و $\sin \theta = 0$ ، و بنابر تعریف ۱.۱.۱۹،

$$D_i f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$



شکل ۲.۱.۱۹

که همان مشتق جزئی f نسبت به x است.
اگر $\mathbf{U} = \mathbf{j}$ ، آنگاه $\cos \theta = 0$ و $\sin \theta = 1$ ، و

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

که این نیز مشتق جزئی f نسبت به y است.
بنابراین، f_x و f_y حالت‌های خاصی از مشتق جهتی هستند که بترتیب همجهت با بردارهای واحد $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ می‌باشند.

○ نمونه ۱ فرض می‌کنیم

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$$

و $\mathbf{U}$ بردار واحد درجهت $\pi/6$ باشد. با به‌کارگیری تعریف ۱۰.۱۰۱۹، $D_{\mathbf{U}}f$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{6} \mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j}$$

پس بنا به تعریف ۱۰.۱۰۱۹،

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{U}}f(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h, y + \frac{1}{2}h\right) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right)^2 - \left(y + \frac{1}{2}h\right)^2 + 4\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - (3x^2 - y^2 + 4x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - y^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 4x + 2\sqrt{3}h - 3x^2 + y^2 - 4x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{3}hx + \frac{9}{4}h^2 - hy - \frac{1}{4}h^2 + 2\sqrt{3}h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3\sqrt{3}x + \frac{9}{4}h - y - \frac{1}{4}h + 2\sqrt{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

○

حال فرمولی را به دست می آوریم که به کمک آن می توانیم مشتق جهتی را به روشی کوتاهتر از به کارگیری تعریف، محاسبه کنیم. فرض کنید g تابعی از یک متغیر t باشد و x, y, θ ثابت باشند به طوری که

$$g(t) = f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \quad (۱)$$

و فرض کنید $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ در این صورت بنا به تعریف مشتق معمولی داریم

$$\begin{aligned} g'(\circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(x + (\circ + h) \cos \theta, y + (\circ + h) \sin \theta) - f(x + \circ \cos \theta, y + \circ \sin \theta)}{h} \\ g'(\circ) &= \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{f(x + h \cos \theta, y + h \sin \theta) - f(x, y)}{h} . \end{aligned}$$

چون طرف راست رابطه فوق، $D_{\mathbf{U}}f(x, y)$ است، لذا

$$g'(\circ) = D_{\mathbf{U}}f(x, y) . \quad (۲)$$

حال $g'(t)$ را با به کار بردن قاعده زنجیری در طرف راست (۱) به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(x + t \cos \theta)}{\partial t} \\ &\quad + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \frac{\partial(y + t \sin \theta)}{\partial t} \\ &= f_1(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \cos \theta \\ &\quad + f_2(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) \sin \theta . \end{aligned}$$

بنابراین

$$g'(\circ) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta . \quad (۳)$$

از (۲) و (۳) قضیه زیر به دست می آید.

۲.۱.۱۹ قضیه اگر f تابع مشتق پذیری از x و y باشد و $\mathbf{U} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ آنگاه

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta .$$

○ نمونه ۲ برای تابع f و بردار واحد $\mathbf{U}$ مذکور در نمونه ۱، با استفاده از قضیه ۲۰.۱۰۱۹، $D_{\mathbf{U}}f$ را به دست می آوریم.

چون $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ ، پس $f_x(x, y) = 6x + 4$ و $f_y(x, y) = -2y$ چون $\mathbf{U} = \cos(\pi/6)\mathbf{i} + \sin(\pi/6)\mathbf{j}$ ، پس بنا به قضیه ۲۰.۱۰۱۹ داریم

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (6x + 4)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-2y)\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - y$$

○ که با نتیجه نمونه ۱ مطابقت دارد.

مشتق جهتی را می توان به صورت حاصلضرب نقطه ای (داخلی) دو بردار نوشت. چون

$$f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\sin\theta = (\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]$$

از قضیه ۲۰.۱۰۱۹ نتیجه می شود که

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = (\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}) \cdot [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]. \quad (۴)$$

بردار دوم در طرف راست (۴) بردار بسیار مهمی است، و گرادیان تابع f نامیده می شود. ∇f علامت مورد استفاده برای گرادیان f است، که در آن ∇ دلتای بزرگ و ∇f خوانده می شود. گاهی از عبارت اختصاری گرادیان $(\text{grad } f)$ نیز استفاده می شود.

۳۰.۱۰۱۹ تعریف اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد و f_x و f_y موجود باشند، در این صورت گرادیان f را با ∇f (بخوانید «دلف») نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

بنا به تعریف ۳۰.۱۰۱۹، معادله (۴) را می توان به صورت زیر هم نوشت

$$D_{\mathbf{U}}f(x, y) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y). \quad (۵)$$

بنا بر این هر مشتق جهتی یک تابع مشتق پذیر را می توان با ضرب نقطه ای گرادیان در بردار واحدی در جهت دلخواه به دست آورد.

مثال ۱ اگر $f(x, y) = (1/16)x^2 + (1/9)y^2$ ، گرادیان f را در نقطه $(2, 3)$ به دست آورید. همچنین آهنگ تغییر $f(x, y)$ در جهت $\pi/4$ را در نقطه $(2, 3)$ پیدا کنید.

حل چون $f_x(x, y) = x/8$ و $f_y(x, y) = 2y/9$ ، پس

$$\nabla f(x, y) = \frac{1}{8}x\mathbf{i} + \frac{2}{9}y\mathbf{j}$$

بنابراین

$$\nabla f(4, 3) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}.$$

آهنگ تغییر $f(x, y)$ در جهت $\pi/4$ در $(4, 3)$ عبارت است از $D_U f(4, 3)$ ، که در آن U بردار واحد زیر است

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

که از ضرب نقطه‌ای $\nabla f(4, 3)$ در U به دست می‌آید. بنابراین داریم

$$\blacktriangle D_U f(4, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

اگر α اندازه رادیانی زاویه بین دو بردار U و ∇f باشد، آنگاه

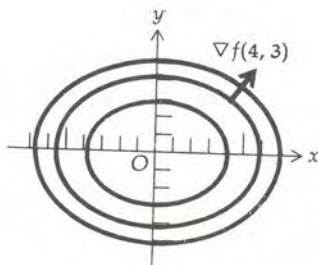
$$U \cdot \nabla f(x, y) = |U| |\nabla f(x, y)| \cos \alpha. \quad (6)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که

$$D_U f(x, y) = |U| |\nabla f(x, y)| \cos \alpha. \quad (7)$$

با توجه به (۷)، وقتی $\cos \alpha = 1$ ، یعنی، وقتی که U همجهت با ∇f است، $D_U f$ ما کسیمی خواهد بود؛ و در این حالت، داریم $D_U f = |\nabla f|$. پس گرادیان یک تابع در جهتی است که تابع در آن جهت دارای ما کسیم آهنگ تغییر است. مثلاً، در یک نقشه جغرافیایی بزرگ مقیاس از یک ناحیه که در آن z (واحد) برابر با ارتفاع در نقطه (x, y) باشد و $z = f(x, y)$ ، جهتی که آهنگ تغییر z در آن ما کسیم است، جهتی است که توسط $\nabla f(x, y)$ معین می‌شود؛ یعنی $\nabla f(x, y)$ متوجه جهت تندترین صعود [صعود با بیشترین شیب] است.

○ نمونه ۳ در شکل ۳.۱۰۱۹ یک نقشه تراز وجود دارد که منحنیهای تراز تابع مذکور در مثال ۱ را در ۱، ۲، و ۳ نشان می‌دهد. منحنیهای تراز، بیضی هستند. این شکل همچنین نشان‌دهنده نمایشی از $\nabla f(4, 3)$ است که ابتدای آن در $(4, 3)$ قرار دارد.



شکل ۳۰۱۰۱۹

مثال ۲ $f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 3x - y$ مفروض است؛ ما کسیم مقدار $D_U f$ را در نقطه‌ای که $x = 1$ و $y = -2$ بیابید.

حل $f_x(x, y) = 4x + 3$ و $f_y(x, y) = -2y - 1$ پس

$$\nabla f(x, y) = (4x + 3)\mathbf{i} + (-2y - 1)\mathbf{j}.$$

بنابراین

$$\nabla f(1, -2) = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

پس ما کسیم مقدار $D_U f$ در نقطه $(1, -2)$ برابر است با

$$\Delta \quad |\nabla f(1, -2)| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}.$$

مثال ۳ دما در هر نقطه (x, y) از یک ورقه مستطیلی شکل واقع در صفحه xy با ضابطه $T(x, y) = x^2 + y^2$ معین می‌شود. (الف) مطلوب است آهنگ تغییر دما در نقطه $(3, 4)$ در جهتی که با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ای به اندازه $\pi/3$ رادیان می‌سازد؛ (ب) جهتی را بیابید که در آن، آهنگ تغییر دما در نقطه $(-3, 1)$ ما کسیم باشد.

حل

(الف) می‌خواهیم $D_U T(x, y)$ را بیابیم که در آن

$$\mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{3} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{3} \mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j}.$$

چون $T(x, y) = x^2 + y^2$ داریم $T_x(x, y) = 2x$ و $T_y(x, y) = 2y$ پس

$$\nabla T(x, y) = T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} D_U T(x, y) &= \mathbf{U} \cdot \nabla T(x, y) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \right) (2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j}) \\ &= x + \sqrt{3}y. \end{aligned}$$

لذا

$$D_U T(3, 4) = 3 + 4\sqrt{3} \approx 3 + 4(1.732) = 9.93.$$

بنابراین دما در $(3, 4)$ با آهنگ ۹.۹۳ واحد نسبت به واحد تغییر فاصله اندازه گیری شده در جهت $\mathbf{U}$ ، افزایش می یابد.

(ب) وقتی $\mathbf{U}$ همجهت با $\nabla T(-3, 1)$ باشد، $D_U T(-3, 1)$ ما کسینوس است. چون $\nabla T(-3, 1) = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ، اندازه رادیانی زاویه ای که جهت $\nabla T(-3, 1)$ را مشخص می کند، θ است که $\tan \theta = -1/3$. لذا $\theta = \pi - \tan^{-1}(1/3)$. بنابراین آهنگ تغییر دما در نقطه $(-3, 1)$ در جهتی که با جهت مثبت محور x ها زاویه $\pi - \tan^{-1}(1/3)$ رادیان می سازد، ما کسینوس است. ▲

تعریف مشتق جهتی را برای توابع سه متغیری تعمیم می دهیم. در فضای سه بعدی، جهت بردار توسط کسینوسهای هادیش معین می شود. فرض کنید $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ و $\cos \gamma$ کسینوسهای هادی بردار واحد $\mathbf{U}$ باشند؛ بنابراین $\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$.

۴.۱.۱۹ تعریف فرض کنید f تابعی از سه متغیر x ، y ، و z باشد. اگر $\mathbf{U}$ بردار واحد $\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ باشد، آنگاه مشتق جهتی f در جهت $\mathbf{U}$ که با $D_U f$ نشان داده می شود به صورت زیر است

$$D_U f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma) - f(x, y, z)}{h}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

مشتق جهتی یک تابع سه متغیری، آهنگ تغییر مقادیر تابع، $f(x, y, z)$ ها، را نسبت به فاصله اندازه گیری شده در فضای سه بعدی در جهت بردار واحد $\mathbf{U}$ به دست می دهد. قضیه زیر که شامل روشی برای محاسبه مشتق جهتی یک تابع سه متغیری است، شبیه قضیه ۲.۱.۱۹ ثابت می شود.

۵.۱.۱۹ قضیه اگر f تابعی مشتق پذیر از x ، y ، و z باشد و

$$\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

آنگاه

$$D_U f(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cos \beta + f_z(x, y, z) \cos \gamma. \quad (۸)$$

مثال ۴ فرض کنید $f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2$ ؛ مطلوب است آهنگ تغییر $f(x, y, z)$ در $(1, -2, -1)$ در جهت بردار $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

حل بردار واحد همجهت با $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ عبارت است از

$$\mathbf{U} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

همچنین

$$f(x, y, z) = 3x^2 + xy - 2y^2 - yz + z^2.$$

لذا از (۸) داریم

$$D_U f(x, y, z) = \frac{2}{3}(6x + y) - \frac{2}{3}(x - 2y - z) - \frac{1}{3}(-y + 2z).$$

بنابراین آهنگ تغییر $f(x, y, z)$ در $(1, -2, -1)$ در جهت $\mathbf{U}$ برابر است با

$$\Delta \quad D_U f(1, -2, -1) = \frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(10) - \frac{1}{3}(0) = -4.$$

۶.۱۰۱۹ تعریف اگر f تابعی از سه متغیر x, y, z باشد و مشتقات جزئی مرتبه اول f_x, f_y, f_z و f موجود باشند، آنگاه گرادیان f که با ∇f نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می گردد

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

نظیر حالت توابع دو متغیری، از قضیه ۵.۱۰۱۹ و تعریف ۶.۱۰۱۹ نتیجه می شود که اگر $\mathbf{U} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$ ، آنگاه

$$D_U f(x, y, z) = \mathbf{U} \cdot \nabla f(x, y, z). \quad (۹)$$

همچنین وقتی که $\mathbf{U}$ همجهت با گرادیان باشد، مشتق جهتی ماکسیمم است، و ماکسیمم مشتق جهتی، برابر است با بزرگی گرادیان.

گرادیان در مسائل فیزیکی مربوط به رسانش گرما و الکتریسیته کاربرد دارد. فرض

کنید $w = f(x, y, z)$. يك رویه تراز این تابع f به‌ازای ثابت دلخواه k عبارت است از

$$f(x, y, z) = k. \quad (۱۰)$$

اگر دما در نقطه (x, y, z) برحسب درجه برابر با w باشد، تمام نقاط واقع بر رویه مذکور در (۱۰) دمای یکسانی برابر با k درجه دارند، و رویه را **رویه تکدما** می‌نامند. اگر w (برحسب ولت) پتانسیل الکتریکی در نقطه (x, y, z) باشد، تمام نقاط واقع بر این رویه دارای پتانسیل برابر هستند، و این رویه را **رویه همپتانسیل** می‌نامیم. بردار گرادیان در يك نقطه، جهت بزرگترین آهنگ تغییر w را به‌دست می‌دهد، لذا اگر رویه تراز مذکور در معادله (۱۰) يك رویه تکدما باشد، $\nabla f(x, y, z)$ جهت بزرگترین آهنگ تغییر دما در (x, y, z) را معین می‌کند. اگر (۱۰) معادله يك رویه همپتانسیل باشد، $\nabla f(x, y, z)$ جهت بزرگترین آهنگ تغییر پتانسیل در (x, y, z) را مشخص می‌کند.

مثال ۵ اگر در هر نقطه (x, y, z) از فضای سه‌بعدی، پتانسیل الکتریکی برابر با V ولت باشد و $V = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، مطلوب است (الف) آهنگ تغییر V در نقطه $(2, 2, -1)$ در جهت بردار $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ؛ (ب) جهت بزرگترین آهنگ تغییر V در $(2, 2, -1)$.

حل فرض کنید $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
(الف) يك بردار واحد همجهت با $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ عبارت است از

$$\mathbf{U} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

می‌خواهیم $D_{\mathbf{U}}f(2, 2, -1)$ را به‌دست آوریم

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
 D_U f(2, 2, -1) &= \mathbf{U} \cdot \nabla f(2, 2, -1) \\
 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}\right) \cdot \left(-\frac{2}{27} \mathbf{i} - \frac{2}{27} \mathbf{j} + \frac{1}{27} \mathbf{k}\right) \\
 &= -\frac{4}{189} + \frac{4}{189} + \frac{1}{189} \\
 &= \frac{1}{189} \\
 &\approx 0.00529.
 \end{aligned}$$

بنابراین، پتانسیل در $(2, 2, -1)$ با آهنگ 0.00529 ولت نسبت به واحد تغییر فاصله اندازه گیری شده در جهت $\mathbf{U}$ افزایش می یابد.

(ب) $\nabla f(2, 2, -1) = -\left(\frac{2}{27}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{2}{27}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{27}\right)\mathbf{k}$ بردار واحد همجهت با $\nabla f(2, 2, -1)$ برابر است با

$$\frac{\nabla f(2, 2, -1)}{|\nabla f(2, 2, -1)|} = \frac{-\frac{2}{27}\mathbf{i} - \frac{2}{27}\mathbf{j} + \frac{1}{27}\mathbf{k}}{\frac{1}{27}} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

کسینوسهای هادی این بردار عبارت اند از $2/3$ ، $-2/3$ ، و $1/3$ ، که مشخص کننده جهت بزرگترین آهنگ تغییر V در $(2, 2, -1)$ هستند. ▲

تمرینهای ۱۰۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۶ با استفاده از تعریف ۱۰.۱۰۱۹ یا ۴.۱۰۱۹، مشتق جهتی تابع مفروض را در جهت بردار واحد مفروض $\mathbf{U}$ بیابید، و سپس نتیجه خود را با به کارگیری قضیه ۲.۱۰۱۹ یا قضیه ۵.۱۰۱۹، هر کدام که به کار می آید، بررسی کنید.

$$f(x, y) = 2x^2 + 5y^2; \quad \mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{j} \quad ۱.$$

$$g(x, y) = 3x^2 - 4y^2; \quad \mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{3} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{3} \mathbf{j} \quad ۲.$$

$$h(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - 4z^2; \quad \mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{j} + \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{k} \quad ۳.$$

$$f(x, y, z) = 6x^2 - 2xy + yz; \quad \mathbf{U} = \frac{2}{y}\mathbf{i} + \frac{y}{y}\mathbf{j} + \frac{z}{y}\mathbf{k} \quad .۴$$

$$g(x, y) = \frac{1}{x-y}; \quad \mathbf{U} = -\frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j} \quad .۵$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad \mathbf{U} = \frac{2}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} \quad .۶$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۴، گرادیان تابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 \quad .۷$$

$$g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad .۸$$

$$g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad .۹$$

$$f(x, y) = e^y \tan 2x \quad .۱۰$$

$$f(x, y, z) = \frac{x-y}{x+z} \quad .۱۱$$

$$f(x, y, z) = 3z \ln(x+y) \quad .۱۲$$

$$g(x, y, z) = xe^{-yz} \sec z \quad .۱۳$$

$$g(x, y, z) = e^{xz}(\sin x - \cos y) \quad .۱۴$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۲، مقدار مشتق جهتی تابع داده شده را در جهت $\mathbf{U}$ در نقطه خاص P_0 به دست آورید.

$$f(x, y) = x^2 - 2xy^2; \quad \mathbf{U} = \cos \pi \mathbf{i} + \sin \pi \mathbf{j}; \quad P_0 = (1, -2) \quad .۱۵$$

$$g(x, y) = 3x^2y + 2y^2 - xy; \quad \mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{j}; \quad P_0 = (0, 2) \quad .۱۶$$

$$g(x, y) = y^2 \tan^2 x; \quad \mathbf{U} = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j}; \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{3}, 2\right) \quad .۱۷$$

$$f(x, y) = xe^{xy}; \quad \mathbf{U} = \frac{1}{y}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\sqrt{2}\mathbf{j}; \quad P_0 = (2, 0) \quad .۱۸$$

$$h(x, y, z) = \cos(xy) + \sin(yz); \quad ۱۹.$$

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}; \quad P_0 = (2, 0, -2)$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2); \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}; \quad P_0 = (1, 3, 2) \quad ۲۰.$$

$$f(x, y) = e^{-x^2} \cos 3y; \quad ۲۱.$$

$$\mathbf{U} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\mathbf{i} + \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\mathbf{j}; \quad P_0 = \left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$$

$$g(x, y, z) = \cos 2x \cos 3y \sinh 4z; \quad ۲۲.$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}; \quad P_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، تابع f ، نقطه P ، و بردار واحد $\mathbf{U}$ داده شده‌اند. مطلوب است (الف) گرادیان f در P ، و (ب) آهنگ تغییر مقدار تابع در جهت $\mathbf{U}$ در P .

$$f(x, y) = x^2 - 4y; \quad P = (-2, 2); \quad \mathbf{U} = \cos \frac{\pi}{3}\mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{3}\mathbf{j} \quad ۲۳.$$

$$f(x, y) = e^{xy}; \quad P = (2, 1); \quad \mathbf{U} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j} \quad ۲۴.$$

$$f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4xz; \quad P = (-2, 1, 3); \quad \mathbf{U} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{6}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{5}}\mathbf{k} \quad ۲۵.$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 + xz^2; \quad P = (1, 1, 1); \quad \mathbf{U} = \frac{\sqrt{21}}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\sqrt{7}\mathbf{k} \quad ۲۶.$$

۲۷. يك نقشه تراز رسم کنید که نشان‌دهنده منحنیهای تراز تابع مذکور در تمرین ۲۳ در $8, 4, 0, -4$ و -8 باشد. همچنین نمایشی از $\nabla f(-2, 2)$ را که ابتدای آن در $(-2, 2)$ باشد، نشان دهید.

۲۸. يك نقشه تراز رسم کنید که نشان‌دهنده منحنیهای تراز تابع مذکور در تمرین ۲۴ در $e^8, e^4, 1, e^{-4}$ و e^{-8} باشد. همچنین نمایشی از $\nabla f(2, 1)$ را که ابتدای آن در $(2, 1)$ باشد نشان دهید.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، $D_U f$ را در نقطه داده شده P به دست آورید که در آنجا U یک بردار واحد در جهت $\vec{PQ}$ است. همچنین $D_U f$ را در P بیابید به شرطی که به ازای بردار واحد U ، $D_U f$ ماکسیمم باشد.

$$۲۹. Q(3, 5), P(0, 1) : f(x, y) = e^x \tan^{-1} y$$

$$۳۰. Q(-3, 3), P(1, 0) : f(x, y) = e^x \cos y + e^y \sin x$$

$$۳۱. Q(10, 7, 2), P(3, 1, -2) : f(x, y, z) = x - 2y + z^2$$

$$۳۲. Q(-6, 3, 2), P(3, 1, -2) : f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz$$

۳۳. اگر $f(x, y) = e^{xy} \tan^{-1}(y/3x)$ ، از نقطه $(1, 3)$ جهتی را بیابید که در آن جهت مقدار f تغییر نکند.

۳۴. چگالی در هر نقطه (x, y) از یک ورقه مستطیلی شکل واقع در صفحه xy برابر است با ρ اسلاگ بر فوت مربع و $\rho = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + 3}$. (الف) آهنگ تغییر چگالی در نقطه $(3, 2)$ را در جهت بردار واحد $\cos(2/3)\pi \mathbf{i} + \sin(2/3)\pi \mathbf{j}$ بیابید؛ (ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر ρ در $(3, 2)$ را پیدا کنید.

۳۵. دما در هر نقطه (x, y) از یک ورقه مستطیلی شکل واقع در صفحه xy برابر است با T درجه و $T = 3x^2 + 2xy$. فاصله بر حسب متر اندازه گیری می شود. (الف) ماکسیمم آهنگ تغییر دما در نقطه $(3, -6)$ روی ورقه را بیابید؛ (ب) جهتی را پیدا کنید که به ازای آن، این ماکسیمم آهنگ تغییر در $(3, -6)$ روی می دهد.

۳۶. دما در هر نقطه (x, y, z) از یک جسم در فضای سه بعدی برابر است با T درجه و $T = 60/(x^2 + y^2 + z^2 + 3)$. فاصله بر حسب اینچ اندازه گیری می شود. (الف) آهنگ تغییر دما در نقطه $(3, -2, 2)$ در جهت بردار $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ را بیابید؛ (ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر T را در $(3, -2, 2)$ پیدا کنید.

۳۷. پتانسیل الکتریکی در هر نقطه (x, y) از صفحه xy برابر است با V ولت، و $V = e^{-2x} \cos 2y$. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود. (الف) آهنگ تغییر پتانسیل در نقطه $(0, \pi/4)$ در جهت بردار واحد $\cos(\pi/6)\mathbf{i} + \sin(\pi/6)\mathbf{j}$ را بیابید؛ (ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر V در $(0, \pi/4)$ را پیدا کنید.

۳۸. معادله رویه یک کوه به صورت $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ است که در آن فاصله بر حسب متر اندازه گیری می شود، و محور x متوجه شرق، و محور y متوجه شمال است. یک کوهنورد در نقطه متناظر با $(-10, 5, 850)$ قرار دارد. (الف) جهت تندترین صعود چیست؟ (ب) اگر کوهنورد در جهت شرق حرکت کند، صعود می کند

یا نزول، و با چه آهنگی؟ (پ) اگر کوهنورد در جهت جنوب غربی حرکت کند، صعود می‌کند یا نزول، و با چه آهنگی؟ (ت) او در چه جهتی روی یک مسیر تراز حرکت خواهد کرد؟

۲.۱۹ صفحات مماس و خطوط قائم بر رویه‌ها

فرض کنید S رویه‌ای با معادله

$$F(x, y, z) = 0 \quad (۱)$$

و $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای بر S باشد. در این صورت $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. به علاوه فرض کنید C یک منحنی روی S باشد که از نقطه P_0 می‌گذرد، و معادلات پارامتری C به صورت زیر باشد

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t). \quad (۲)$$

فرض کنید t مقدار پارامتر t در نقطه P_0 است. یک معادله برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}. \quad (۳)$$

چون منحنی C بر رویه S قرار دارد، لذا با قراردادن طرف راست برابر یهای (۲) در (۱) خواهیم داشت

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0. \quad (۴)$$

فرض کنید $G(t) = F(f(t), g(t), h(t))$. اگر F_x, F_y, F_z و F_z پیوسته باشند و همگی در P_0 صفر نباشند، و اگر $f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)$ موجود باشند، آنگاه مشتق کلی F نسبت به t در P_0 با ضابطه زیر به دست می‌آید

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)h'(t_0)$$

که آنرا به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$G'(t_0) = [F_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + F_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}] \times [f'(t_0)\mathbf{i} + g'(t_0)\mathbf{j} + h'(t_0)\mathbf{k}]$$

$$G'(t_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0).$$

چون به ازای تمام t های مورد نظر داریم $G'(t) = 0$ (بنابر (۴))، پس $G'(t_0) = 0$ و لذا از بالا نتیجه می‌شود که

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot D_t \mathbf{R}(t_0) = 0. \quad (5)$$

در بخش ۹.۱۷ دیدیم که جهت $D_t \mathbf{R}(t_0)$ با جهت بردار واحد مماس بر منحنی C در P_0 یکی است. بنابراین از (۵) نتیجه می گیریم که بردار گرادیان F در P_0 بر بردار واحد مماس بر هر منحنی C ماربر P_0 و واقع بر S ، عمود خواهد بود. پس به تعریف زیر می رسمیم.

۱۰.۲.۱۹ تعریف برداری که عمود بر بردار واحد مماس هر منحنی C ، ماربر يك نقطه P_0 واقع بر رویه S ، باشد، يك بردار قائم بر S در P_0 نامیده می شود.

از این تعریف و بحث قبلی به قضیه زیر می رسمیم.

۲۰.۲.۱۹ قضیه اگر $F(x, y, z) = 0$ معادله رویه S باشد، و F_x, F_y, F_z پیوسته باشند و همگی در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ از S صفر نباشند، آنگاه $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ يك بردار قائم بر S در P_0 است.

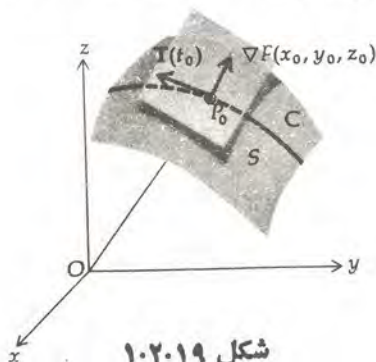
مفهوم بردار قائم برای تعریف صفحه مماس بريك رویه در يك نقطه به کار می رود.

۳۰.۲.۱۹ تعریف اگر $F(x, y, z) = 0$ معادله رویه S باشد، صفحه مماس بر S در يك نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ صفحه ای است که از P_0 می گذرد و $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ بردار قائم آن است.

معادله صفحه مماسی که در تعریف بالا از آن یاد شده به صورت زیر است

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

به شکل ۱۰.۲.۱۹ نگاه کنید؛ در این شکل، صفحه مماس بر رویه S در P_0 ، و نمایشی از بردار گرادیان که ابتدایش در P_0 است، نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۲.۱۹

يك معادله برداری صفحه مماس مذکور در (۶) به صورت زیر است

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot [(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k}] = 0. \quad (۷)$$

مثال ۱ مطلوب است معادله صفحه مماس بر سهمیوار بیضوی $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ در نقطه $(2, 4, 2)$.

حل فرض کنید $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$ در این صورت

$$\nabla F(x, y, z) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

و بنا بر این $\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ از (۷) نتیجه می شود که معادله صفحه مماس به صورت زیر است

$$16(x-2) + 8(y-4) - 16(z-2) = 0$$

$$\blacktriangle \quad 2x + y - 2z - 4 = 0.$$

۴.۲.۱۹ تعریف خط قائم بر رویه S در نقطه ای چون P_0 روی S ، خطی است که از P_0 می گذرد و مؤلفه های هر بردار قائم بر S در P_0 ، مجموعه ای از اعداد هادی آن هستند.

اگر $F(x, y, z) = 0$ معادله S باشد، از تعریف ۴.۲.۱۹ نتیجه می شود که معادلات متقارن خط قائم بر S در $P_0(x_0, y_0, z_0)$ به صورت زیر هستند

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (۸)$$

مخرجها در (۸) مؤلفه های $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ هستند که يك بردار قائم بر S در P_0 است؛ پس (۸) از تعریف ۴.۲.۱۹ نتیجه می شود. خط قائم در يك نقطه بر يك رویه، عمود بر صفحه مماس در آنجاست.

مثال ۲ معادلات متقارن خط قائم بر رویه مذکور در مثال (۱) را در نقطه $(2, 4, 2)$ به دست آورید.

حل چون $\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$ ، نتیجه می شود که معادلات متقارن خط قائم عبارت اند از

$$\blacktriangle \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{-2}.$$

۵.۲.۱۹ تعریف خط مماس بر منحنی C در نقطه P_0 خطی است که از P_0 می‌گذرد و مؤلفه‌های بردار واحد مماس بر C در P_0 ، مجموعه‌ای از اعداد هادیش هستند.

بنابه تعریفهای ۳.۲.۱۹ و ۵.۲.۱۹، تمام خطوط مماس در نقطه P_0 بر منحنیهای واقع بر يك رویه مفروض، در صفحه مماس بر این رویه در P_0 قرار دارند. در شکل ۲.۲.۱۹ نمودارهای يك رویه و صفحه مماس در P_0 نشان داده شده است. همچنین بعضی از منحنیهای که از P_0 می‌گذرند و خطوط مماس آنها در این شکل دیده می‌شوند.



شکل ۲.۲.۱۹

منحنیی چون C را در نظر بگیرید که از تقاطع دو رویه با معادلات

$$F(x, y, z) = 0 \quad (9)$$

و

$$G(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

به دست می‌آید. می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه معادلات خط مماس بر C در نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ به دست می‌آیند، چون این خط مماس در هر يك از صفحات مماس بر رویه‌های مفروض در P_0 قرار دارد، پس خط تقاطع دو صفحه مماس است. يك بردار قائم در P_0 بر رویه به معادله (۹) به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) &= F_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + F_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} \\ &+ F_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k} \end{aligned}$$

و يك بردار قائم در P_0 بر رویه به معادله (۱۰) این است

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2 = \nabla G(x_0, y_0, z_0) &= G_x(x_0, y_0, z_0) \mathbf{i} + G_y(x_0, y_0, z_0) \mathbf{j} \\ &+ G_z(x_0, y_0, z_0) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

هر دوی $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ بر بردار واحد مماس بر C در P_0 عمودند؛ پس، اگر $\mathbf{N}_1$ و $\mathbf{N}_2$ متوازی نباشند، از قضیه ۹.۶.۱۷ نتیجه می‌شود که جهت بردار واحد مماس یا با جهت

$N_1 \times N_2$ یکی است و یا درخلاف آن است. بنابراین مؤلفه‌های $N_1 \times N_2$ مجموعه‌ای از اعداد هادی خط مماس به حساب می‌آیند. با استفاده از این مجموعه اعداد هادی و مختصات P_0 ، می‌توانیم معادلات متقارن خط مماس خواسته شده را به دست آوریم. این مورد در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۳ معادلات متقارن خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $49 = x^2 + 2y^2 + 3x^2 - 2z^2$ را در نقطه $(3, -3, 2)$ به دست آورید.

حل فرض کنید $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 49$ و

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 - 10.$$

در این صورت

$$\nabla F(x, y, z) = 6x \mathbf{i} + 4y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$$

و

$$\nabla G(x, y, z) = 2x \mathbf{i} + 2y \mathbf{j} - 4z \mathbf{k}.$$

پس

$$N_1 = \nabla F(3, -3, 2) = 18 \mathbf{i} - 12 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k} = 2(9 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k})$$

و

$$N_2 = \nabla G(3, -3, 2) = 6 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j} - 8 \mathbf{k} = 2(3 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} - 4 \mathbf{k})$$

$$N_1 \times N_2 = 2(9 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}) \times (3 \mathbf{i} - 3 \mathbf{j} - 4 \mathbf{k})$$

$$= 2(30 \mathbf{i} + 42 \mathbf{j} - 9 \mathbf{k})$$

$$= 12(10 \mathbf{i} + 14 \mathbf{j} - 3 \mathbf{k}).$$

بنابراین، مجموعه‌ای از اعداد هادی خط مماس خواسته شده عبارت است از $[10, 14, -3]$.
لذا معادلات متقارن این خط عبارت اند از

$$\triangle \quad \frac{x-3}{10} = \frac{y+3}{14} = \frac{z-2}{-3}.$$

اگر دو رویه دارای یک صفحه مماس مشترک در یک نقطه باشند، گوئیم این دو رویه در آن نقطه بر هم مماس هستند.

تمرینهای ۲۰۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، معادله صفحه مماس و معادلات خط قائم بر رویه داده شده را در نقطه مفروض بیا بیید.

$$۱. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 17; (2, -2, 3)$$

$$۲. \quad 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 26; (1, -2, 3)$$

$$۳. \quad x^2 + y^2 - 3z = 2; (-2, -4, 6)$$

$$۴. \quad x^2 + y^2 - z^2 = 6; (3, -1, 2)$$

$$۵. \quad y = e^x \cos z; (1, e, 0)$$

$$۶. \quad z = e^{xy} \sin 3y; (0, \frac{\pi}{6}, 1)$$

$$۷. \quad x^2 = 12y; (6, 3, 3)$$

$$۸. \quad z = x^{1/2} + y^{1/2}; (1, 1, 2)$$

$$۹. \quad x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4; (4, 1, 1)$$

$$۱۰. \quad zx^2 - xy^2 - yz^2 = 18; (0, -2, 3)$$

$$۱۱. \quad x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14; (-8, 27, 1)$$

$$۱۲. \quad x^{1/2} + z^{1/2} = 8; (25, 2, 9)$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۰، اگر دو رویه داده شده یکدیگر را در یک منحنی قطع می کنند، معادلات خط مماس بر این منحنی در نقطه داده شده را بیا بیید؛ اگر رویه های مفروض در نقطه مفروض برهم مماس اند، این مطلب را ثابت کنید.

$$۱۳. \quad x^2 + y^2 - z = 8, x - y^2 + z^2 = -2; (2, -2, 0)$$

$$۱۴. \quad x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0; (0, 1, 1)$$

$$۱۵. \quad y = x^2, y = 16 - z^2; (4, 16, 0)$$

$$۱۶. \quad x = 2 + \cos \pi yz, y = 1 + \sin \pi xz; (3, 1, 2)$$

$$۱۷. \quad y = e^x \sin 2\pi z + 2, z = y^2 - \ln(x+1) - 3; (0, 2, 1)$$

$$۱۸. \quad x^2 - 3xy + y^2 = z, 2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0; (1, -2, 11)$$

$$۱۹. \quad x^2 + z^2 + 4y = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 7 = 0; \quad (0, -1, 2)$$

$$۲۰. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 8, \quad yz = 4; \quad (0, 2, 2)$$

$$۲۱. \quad \text{نشان دهید که کره‌های } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ و } (x-b)^2 + y^2 + z^2 = (b-a)^2 \text{ در نقطه } (a, 0, 0) \text{ برهم مماس اند.}$$

$$۲۲. \quad \text{ثابت کنید هر خط قائم بر کره } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ از مرکز کره می‌گذرد.}$$

$$۲۳. \quad \text{دو رویه را در نقطه‌ای چون } P \text{ واقع بر محل تقاطع این رویه‌ها عمود برهم گویند اگر بردارهای قائم بر رویه‌ها در } P \text{ متعامد باشند. نشان دهید رویه } x^2 - 2yz + y^2 = 4 \text{ بر هر عضو خانواده رویه‌های } x^2 + (y-c-2)yz - cz^2 + 1 = 0 \text{ در نقطه } (1, -1, 2) \text{ عمود است.}$$

۳.۱۹ اکسترمهای توابع دو متغیری

يك کاربرد مهم مشتق تابع يك متغیری در مطالعه مقادیر اکسترم تابع است، که به مسائل گوناگونی می‌انجامد که با ما کسیم و مینیم سروکار دارند. این مطلب در فصل ۴ مورد بحث قرار گرفت؛ در آنجا قضایای مربوط به مشتقات اول و دوم را ثابت کردیم که با استفاده از آنها مقادیر ما کسیم و مینیم نسبی تابع يك متغیری معین می‌شد. در تعمیم این نظریه به حالت توابع دو متغیری، خواهیم دید که نظریه، مشابه با حالت يك متغیری است، اما با پیچیدگیهای بیشتری همراه است.

۱۰۳۰۱۹ تعریف گوییم تابع دو متغیری f دارای مقدار ما کسیم نسبی در نقطه (x_0, y_0) است اگر قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در B داشته باشیم $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

۲۰۳۰۱۹ تعریف گوییم تابع دو متغیری f دارای مقدار مینیم نسبی در نقطه (x_0, y_0) است اگر قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در B داشته باشیم $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

○ نمونه ۱ در شکل ۱۰۳۰۱۹ نموداری از تابع f را که با ضابطه زیر تعریف می‌شود، می‌بینید

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}.$$

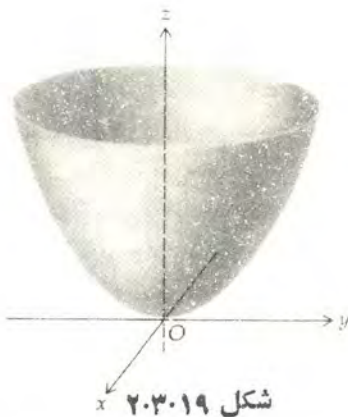
فرض کنید B قرص باز دلخواهی چون $(0, 0); r$ باشد که در آن $r \leq 5$. از تعریف ۱۰۳۰۱۹ نتیجه می‌شود که f دارای مقدار ما کسیم نسبی ۵ در نقطه به مختصات $x = 0$ و

$y=0$ است.

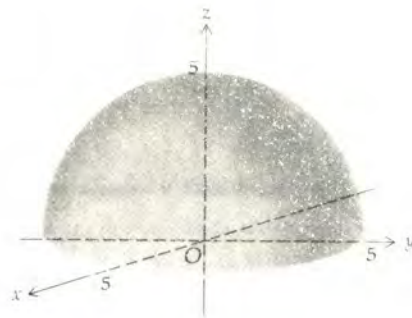
در شکل ۲.۳.۱۹ نموداری از تابع g رسم شده است که درضا بطة زیر صدق می کند

$$g(x, y) = x^2 + y^2.$$

فرض کنید B قرص باز دلخواهی چون $(0, 0; r)$ است. در این صورت بنا به تعریف ۲.۳.۱۹، تابع g دارای يك مقدار مینیمم نسبی ۰ در مبدأ است.



شکل ۲.۳.۱۹



شکل ۱.۳.۱۹

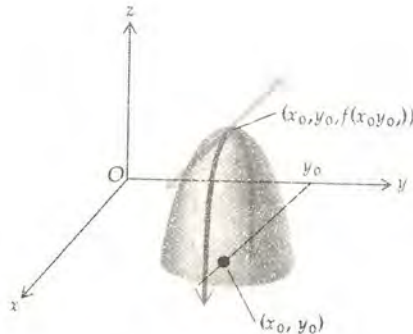
مشابه قضیه ۳.۲.۴ در مورد توابع يك متغیری، قضیه زیر را در مورد توابع دومتغیری داریم.

۳.۳.۱۹ قضیه اگر $f(x, y)$ در تمام نقاط واقع در قرص بازی مانند $B((x_0, y_0); r)$ موجود، و f دارای يك اکثرم نسبی در (x_0, y_0) باشد، آنگاه در صورت وجود $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ داریم

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

قبل از اثبات قضیه ۳.۳.۱۹ يك برهان هندسی غیر رسمی ارائه می کنیم. فرض کنید f تابعی باشد که در فرضهای قضیه ۳.۳.۱۹ صدق می کند، و f يك مقدار ماکسیمم نسبی در (x_0, y_0) داشته باشد. منحنی حاصل از تقاطع صفحه $y = y_0$ با رویه $z = f(x, y)$ را در نظر بگیرید (به شکل ۳.۳.۱۹ مراجعه کنید). این منحنی با معادلات زیر نشان داده می شود

$$y = y_0, \quad z = f(x, y). \quad (1)$$



شکل ۳.۳.۱۹

چون f در نقطه به مختصات $x = x_0$ و $y = y_0$ دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است، پس منحنی به معادلات (۱) دارای یک خط مماس افقی در صفحه $y = y_0$ در $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ است. ضریب زاویه این خط مماس برابر است با $f_x(x_0, y_0)$ ؛ لذا $f_x(x_0, y_0) = 0$. با روشی مشابه می‌توانیم منحنی حاصل از تقاطع صفحه $x = x_0$ و رویه $z = f(x, y)$ را در نظر بگیریم و $f_y(x_0, y_0) = 0$ را به دست آوریم. بحث مشابهی را نیز برای تابع f در حالتی که دارای یک مقدار مینیمم نسبی در (x_0, y_0) باشد، می‌توان پیش کشید. در زیر، اثبات رسمی آمده است.

اثبات قضیه ۳.۳.۱۹ ثابت می‌کنیم که اگر f یک مقدار ماکسیمم نسبی در (x_0, y_0) داشته باشد، و $f_x(x_0, y_0)$ موجود باشد، آنگاه $f_x(x_0, y_0) = 0$. بنا به تعریف مشتق جزئی داریم

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

چون f در (x_0, y_0) یک مقدار ماکسیمم نسبی دارد، از تعریف ۳.۳.۱۹ نتیجه می‌شود

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

با این شرط که Δx به اندازه کافی کوچک باشد تا $(x_0 + \Delta x, y_0)$ در B قرار گیرد. اگر Δx از طرف راست به سمت صفر میل کند، $\Delta x > 0$ ؛ بنابراین

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

پس بنا به قضیه ۳.۱۰.۲، اگر $f_x(x_0, y_0)$ وجود داشته باشد، $f_x(x_0, y_0) \leq 0$. همین‌طور، اگر Δx از طرف چپ به سمت صفر میل کند، $\Delta x < 0$ ؛ و لذا

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

پس بنابر قضیه ۴.۱۵.۲، اگر $f_x(x_0, y_0)$ موجود باشد، $f_x(x_0, y_0) \geq 0$ و $f_x(x_0, y_0) \leq 0$ نتیجه می‌گیریم که چون $f_x(x_0, y_0)$ وجود دارد، هر دو نابرابری $f_x(x_0, y_0) \geq 0$ و $f_x(x_0, y_0) \leq 0$ باید برقرار باشند. در نتیجه $f_x(x_0, y_0) = 0$.

اثبات این که $f_y(x_0, y_0) = 0$ اگر $f_y(x_0, y_0)$ موجود و f یک مقدار ماکسیمم نسبی در (x_0, y_0) داشته باشد، مشابه است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۲۹ را ببینید). همچنین اثبات قضیه وقتی $f(x_0, y_0)$ یک مقدار مینیمم نسبی باشد به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۳۵ را ببینید). $\square$

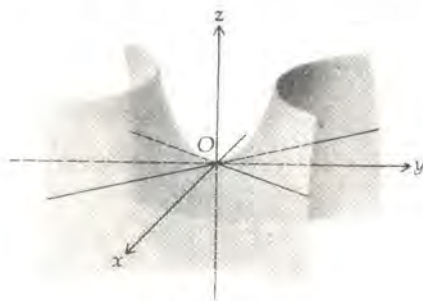
۴.۳.۱۹ تعریف نقطه‌ای چون (x_0, y_0) را نقطه بحرانی گویند اگر $f_x(x_0, y_0) = 0$ و هم $f_y(x_0, y_0) = 0$.

قضیه ۴.۳.۱۹ حاکی است که یک شرط لازم برای وجود اکسترمم نسبی تابعی دو متغیری در نقطه‌ای که مشتقات جزئی مرتبه اول تابع موجودند، این است که آن نقطه یک نقطه بحرانی باشد. ممکن است مشتقات جزئی تابعی دومتغیری در یک نقطه وجود نداشته باشند ولی تابع در آن نقطه دارای اکسترمم نسبی باشد، ولی این حالت را در این کتاب بررسی نمی‌کنیم. به علاوه، صفر شدن مشتقات جزئی مرتبه اول تابعی دومتغیری در یک نقطه، شرط کافی برای وجود اکسترمم نسبی در آن نقطه نیست. چنین حالتی در نقطه‌ای که نقطهٔ ذینی نامیده می‌شود، پیش می‌آید.

○ نمونه ۲ یک مثال ساده از تابعی که نقطهٔ زینی دارد، تابعی است با ضابطهٔ زیر

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

در مورد این تابع می‌بینیم که $f_x(x, y) = -2x$ و $f_y(x, y) = 2y$. هر دوی $f_x(0, 0)$ و $f_y(0, 0)$ برابر با صفر هستند. نمودار این تابع در شکل ۴.۳.۱۹ نشان داده شده است؛



شکل ۴.۳.۱۹

این نمودار در نقاط نزدیک مبدأ به شکل زین است. وقتی $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ، واضح است که این تابع در تعریف ۱۰.۳.۱۹ یا ۲.۳.۱۹ صدق نمی کند.

یک آزمون مشتق دوم وجود دارد که شرایط وجود اکسترمم نسبی تابع را در نقطه‌ای که مشتقات جزئی مرتبه اول صفر می شوند، به دست می دهد. ولی گاهی می توان اکسترممهای نسبی یک تابع را، همچنانکه در نمونه زیر می بینید، با استفاده از تعریف ۱۰.۳.۱۹ و ۲.۳.۱۹ به دست آورد.

○ نمونه ۳ فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

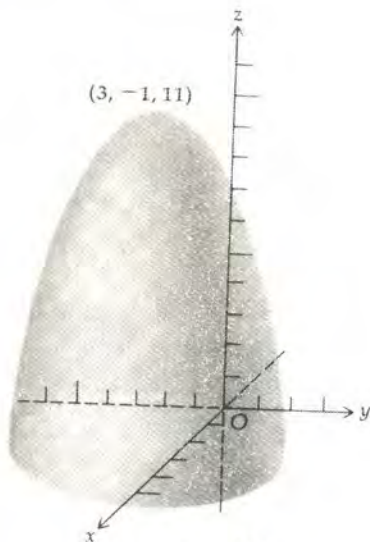
$$f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2.$$

معلوم می کنیم که f اکسترمم نسبی دارد یا نه. چون f و مشتقات جزئی اولش به ازای هر (x, y) در R^2 وجود دارند، پس قضیه ۳.۳.۱۹ قابل استفاده است. با مشتق گیری به دست می آوریم

$$f_x(x, y) = 6 - 2x \quad \text{و} \quad f_y(x, y) = -4 - 4y$$

با مساوی صفر قرار دادن $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ به دست می آید $x = 3$ و $y = -1$. به شکل ۵.۳.۱۹ نگاه کنید که در آن نموداری از معادله

$$z = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$$



شکل ۵.۳.۱۹

رسم شده است. این نمودار، سهمیواری با يك محور قائم، و رأس آن در $(11, -1, 3)$ است و دهانه اش روبه پایین است. نتیجه می گیریم که به ازای هر (x, y) داریم $f(x, y) \leq f(3, -1)$ ؛ پس بنا به تعریف ۱۹.۳۰.۱۹، $f(3, -1) = 11$ يك مقدار ماکسیمم نسبی تابع است. $\circ$

آزمون اساسی برای تعیین ماکسیممها و مینیممهای نسبی يك تابع دومتغیری، آزمون مشتق دوم است که در قضیه زیر بیان می گردد.

۵.۳۰.۱۹ قضیه (آزمون مشتق دوم) فرض کنید f يك تابع دومتغیری باشد به طوری که f و مشتقات جزئی اول و دوم آن روی قرص باز $B((a, b); r)$ پیوسته اند. به علاوه فرض کنید $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. در این صورت

(i) f يك مقدار مینیمم نسبی در (a, b) دارد اگر

$$f_{xx}(a, b) > 0 \quad \text{و} \quad f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$$

(ii) f يك مقدار ماکسیمم نسبی در (a, b) دارد اگر

$$f_{xx}(a, b) < 0 \quad \text{و} \quad f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0.$$

(iii) $f(a, b)$ يك اکثریم نسبی نیست اگر

$$f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0.$$

(iv) هیچ نتیجه ای نمی توان گرفت اگر

$$f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0.$$

اثبات (i) برای سادگی نماد گذاری، $\phi(x, y)$ را به صورت

$$\phi(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

تعریف می کنیم. $\phi(a, b) > 0$ و $f_{xx}(a, b) > 0$ داده شده اند، و می خواهیم ثابت کنیم که $f(a, b)$ يك مقدار مینیمم نسبی تابع است. چون f_{xx} ، f_{xy} و f_{yy} روی $B((a, b); r)$ پیوسته هستند، نتیجه می گیریم که ϕ نیز روی B پیوسته است. پس قرص باز $B'((a, b); r')$ باضا بطه $r' \leq r$ وجود دارد به طوری که به ازای هر نقطه (x, y) در B' داریم $\phi(x, y) > 0$ و $f_{xx}(x, y) > 0$. فرض کنید h و k ثابتهایی باشند که هر دو صفر نیستند، به طوری که نقطه $(a+h, b+k)$ در B' است. در این صورت دو معادله

$$0 \leq t \leq 1, \quad y = b + kt \quad \text{و} \quad x = a + ht$$

تمام نقاط واقع بر پاره خط بین (a, b) و $(a+h, b+k)$ را معین می کنند، و تمام این نقاط در B' قرار دارند. فرض کنید تابع يك متغیری F باضابطه زیر تعریف شود

$$F(t) = f(a+ht, b+kt). \quad (۲)$$

از فرمول تیلر (فرمول (۹) در بخش ۵۰۱۴) داریم

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(\xi)}{2!}t^2 \quad (۳)$$

که در آن ξ بین ۰ و t قرار دارد. اگر در (۳) قرار دهیم $t=1$ داریم

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \quad (۴)$$

که در آن $0 < \xi < 1$. چون $F(0) = f(a, b)$ و $F(1) = f(a+h, b+k)$ ، از (۴) نتیجه می شود که

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\xi) \quad (۵)$$

که در آن $0 < \xi < 1$.

برای یافتن $F'(t)$ و $F''(t)$ از (۲)، از قاعده زنجیری استفاده می کنیم و به دست می آوریم

$$F'(t) = h f_x(a+ht, b+kt) + k f_y(a+ht, b+kt) \quad (۶)$$

و

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + h k f_{yx} + h k f_{xy} + k^2 f_{yy}$$

که در آن هر يك از مشتقات جزئی دوم در $(a+ht, b+kt)$ محاسبه می شود. از قضیه ۱۰۷۰۱۸ نتیجه می شود که به ازای هر (x, y) در B' ، $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. لذا

$$F''(t) = h^2 f_{xx} + 2 h k f_{xy} + k^2 f_{yy} \quad (۷)$$

که در آن هر يك از مشتقات جزئی دوم در $(a+ht, b+kt)$ محاسبه می شود. با قرار دادن ۰ به جای t در معادله (۶) و ξ به جای t در معادله (۷) به دست می آید

$$F'(0) = h f_x(a, b) + k f_y(a, b) = 0 \quad (۸)$$

و

$$F''(\xi) = h^2 f_{xx} + 2 h k f_{xy} + k^2 f_{yy} \quad (۹)$$

که هر يك از مشتقات جزئی دوم در $(a+h\xi, b+k\xi)$ محاسبه می‌شود، و $0 < \xi < 1$.
با قراردادن طرفهای راست (۸) و (۹) در (۵) به دست می‌آوریم

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}) \quad (10)$$

جملات داخل پرانتز در طرف راست (۱۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy} = f_{xx} \left[h^2 + 2hk \frac{f_{xy}}{f_{xx}} + \left(k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 - \left(k \frac{f_{xy}}{f_{xx}} \right)^2 + k^2 \frac{f_{yy}}{f_{xx}} \right].$$

پس، از (۱۰) داریم

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{f_{xx}}{2} \left[\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k \right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}^2} k^2 \right]. \quad (11)$$

چون $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ، اگر در $(a+h\xi, b+k\xi)$ محاسبه شود، برابر است با

$$\phi(a+h\xi, b+k\xi) > 0.$$

در نتیجه عبارت داخل کروشه در طرف راست رابطه (۱۱) مثبت است. به علاوه، چون $f_{xx}(a+h\xi, b+k\xi) > 0$ از (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0.$$

پس به ازای هر نقطه $(a+h, b+k) \neq (a, b)$ در B' ثابت کرده‌ایم که

$$f(a+h, b+k) > f(a, b).$$

بنابراین از تعریف ۲.۳.۱۹ نتیجه می‌گیریم که $f(a, b)$ يك مقدار مینیمم نسبی f است.

اثبات قسمت (ii) شبیه اثبات فوق است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۳۱ را ببینید). اثبات قسمت (iii) نیز به عهده خواننده گذاشته می‌شود (تمرین ۳۲ را ببینید). قسمت (iv) به این دلیل آورده شد که قضیه تمام حالات ممکن را در بر بگیرد. $\square$

مثال ۱ اگر $f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2xy$ ، اکسترممهای نسبی f را در صورت وجود به دست آورید.

حل با به کارگیری آزمون مشتق دوم، مشتقات جزئی اول و دوم f را به دست می آوریم

$$f(x, y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

$$f_x(x, y) = 8x^3 - 2x \quad f_y(x, y) = 2y - 2$$

$$f_{xx}(x, y) = 24x^2 - 2 \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0$$

با قرار دادن $f_x(x, y) = 0$ به دست می آید $x = 0$ ، $x = 1/2$ و $x = -1/2$. با قرار دادن $f_y(x, y) = 0$ داریم $y = 1$. بنابراین f_x و f_y هر دو در نقاط $(-1/2, 1)$ ، $(0, 1)$ و $(1/2, 1)$ صفر هستند، و اینها نقاط بحرانی f می باشند. نتایج حاصل از به کار بردن آزمون مشتق دوم در این نقاط در جدول ۱۰.۳.۱۹ خلاصه شده است

جدول ۱۰.۳.۱۹

نتیجه	$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$	f_{xy}	f_{yy}	f_{xx}	نقطه بحرانی
f مینیمم نسبی دارد	۸	۰	۲	۴	$(-\frac{1}{2}, 1)$
f اکسترمم نسبی ندارد	-۴	۰	۲	-۲	$(0, 1)$
f مینیمم نسبی دارد	۸	۰	۲	۴	$(\frac{1}{2}, 1)$

در نقطه $(-1/2, 1)$ ، $f_{xx} > 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ؛ پس بنا به قضیه ۵.۳.۱۹ (i)، f یک مقدار مینیمم نسبی در $(-1/2, 1)$ دارد. در $(0, 1)$ ، $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ؛ لذا بنا به قضیه ۵.۳.۱۹ (iii)، f در $(0, 1)$ اکسترمم نسبی ندارد. چون در $(1/2, 1)$ داریم $f_{xx} > 0$ و $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ؛ لذا بنا به قضیه ۵.۳.۱۹ (i)، f یک مقدار مینیمم نسبی دارد.

چون $f(-1/2, 1) = -9/8$ و $f(1/2, 1) = -9/8$ ، نتیجه می گیریم که در هر یک از نقاط $(-1/2, 1)$ و $(1/2, 1)$ تابع f دارای یک مقدار مینیمم نسبی برابر $-9/8$ است. ▲

اکنون اکسترممهای مطلق توابع دومتغیری را بررسی می کنیم.

۶.۳.۱۹ تعریف گوییم تابع دو متغیری f در قلمروش D در صفحه xy دارای مقدار ماکسیمم مطلق است اگر نقطه‌ای چون (x_0, y_0) در D وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D داشته باشیم $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. در چنین حالتی $f(x_0, y_0)$ مقدار ماکسیمم مطلق f در D است.

۷.۳.۱۹ تعریف گوییم تابع دو متغیری f در قلمروش D در صفحه xy دارای مقدار مینیمم مطلق است اگر نقطه‌ای چون (x_0, y_0) در D وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در D داشته باشیم $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. در چنین حالتی $f(x_0, y_0)$ مقدار مینیمم مطلق f در D است.

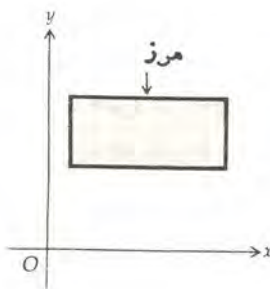
برای توابع یک متغیری قضیه زیر (۹.۲.۴) را داشتیم که قضیه اکسترم نامیده شد. اگر تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f در $[a, b]$ یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق دارد. همچنین آموختیم که اکسترم مطلق تابعی که در بازه بسته‌ای پیوسته است، یا اکسترم نسبی است و یا مقدار تابع به ازای یکی از نقاط انتهایی بازه. در مورد توابع دو متغیری نیز وضع مشابهی برقرار است. در بیان قضیه اکسترم برای توابع دو متغیری از ناحیه بسته‌ای در صفحه xy سخن می‌رود. منظور از ناحیه بسته ناحیه‌ای است که شامل مرز خود باشد. در نمونه زیر چند ناحیه بسته را مثال می‌زنیم و مرز هر ناحیه را مشخص می‌کنیم.

○ نمونه ۴

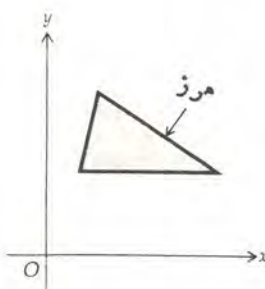
(الف) هر قرص بسته، یک ناحیه بسته است. مرز این ناحیه محیط قرص است. شکل ۶.۳.۱۹ را ببینید.

(ب) اضلاع یک مثلث همراه با ناحیه محدود به این مثلث، یک ناحیه بسته است. مرز ناحیه، متشکل از اضلاع مثلث است. شکل ۷.۳.۱۹ را ببینید.

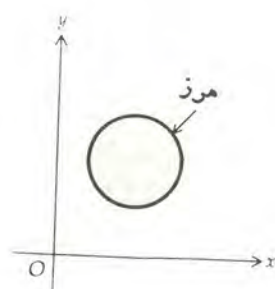
(پ) اضلاع یک مستطیل همراه با ناحیه محدود به این مستطیل، یک ناحیه بسته است. مرز ناحیه، متشکل از اضلاع مستطیل است. شکل ۸.۳.۱۹ را ببینید.



○ شکل ۸.۳.۱۹



شکل ۷.۳.۱۹



شکل ۶.۳.۱۹

۸.۳.۱۹ (قضیه اکسترمم برای توابع دو متغیری) فرض کنید R ناحیه بسته‌ای در صفحه x, y و f یک تابع دو متغیری پیوسته روی R باشد. در این صورت حداقل یک نقطه در R وجود دارد که در آنجا f دارای مقدار ماکسیمم مطلق است، و حداقل یک نقطه در R موجود است که در آنجا f دارای مقدار مینیمم مطلق است.

اثبات قضیه ۸.۳.۱۹ را نمی‌آوریم چون خارج از قلمرو این کتاب است. اگر f تابعی باشد که در قضیه ۸.۳.۱۹ صدق کند و اگر به ازای تمام نقاط واقع در R ، هر دوی $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ وجود داشته باشند، آنگاه اکسترممهای مطلق f یا در نقطه (x_0, y_0) که در آن $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ، یا در یک نقطه مرزی R به دست می‌آیند.

مثال ۲ یک تولید کننده انحصاری، دو نوع مختلف لامپ تولید می‌کند. وی از روی تجربه دریافته که اگر x لامپ از نوع اول و y لامپ از نوع دوم ساخته شود، هر عدد از آنها را به ترتیب $(2x - 100)$ دلار و $(3y - 125)$ دلار می‌توان فروخت. هزینه ساخت x لامپ از نوع اول و y لامپ از نوع دوم برابر با $(4x + 11y + 12x)$ دلار است. چه تعداد از هر نوع لامپ باید تولید گردد تا بیشترین سود به دست آید، و بیشترین سود چقدر است؟

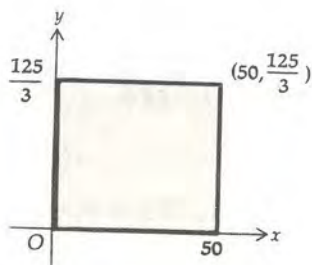
حل در آمد حاصل از فروش لامپهای نوع اول برابر با $x(100 - 2x)$ دلار، و از لامپهای نوع دوم برابر با $y(125 - 3y)$ دلار است. پس، اگر سود این تولید کننده $f(x, y)$ دلار باشد،

$$f(x, y) = x(100 - 2x) + y(125 - 3y) - (4x + 11y + 12x) \\ f(x, y) = 88x + 114y - 2x^2 - 3y^2 - 4xy. \quad (12)$$

چون x و y هر دو نشان دهنده تعداد لامپها هستند، لازم است که $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و x و y مجازند هر عدد حقیقی غیر منفی باشند. به علاوه، چون $(100 - 2x)$ دلار برابر با قیمت فروش لامپهای نوع اول است، پس باید $100 - 2x \geq 0$ ، یا معادلش $x \leq 50$. همین طور چون $(125 - 3y)$ دلار قیمت فروش لامپهای نوع دوم است، لذا باید $(125/3) \geq y$. بنابراین، قلمرو f ناحیه بسته تعریف شده به وسیله مجموعه

$$\{(x, y) | 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq \frac{125}{3}\} \quad (13)$$

است. این ناحیه، مستطیلی است و در شکل ۹.۳.۱۹ نشان داده شده است. اضلاع مستطیل مرز این ناحیه را تشکیل می‌دهند. چون f یک تابع چند جمله‌ای است، پس در همه جای پیوسته



شکل ۹.۳.۱۹

است. لذا f روی ناحیه بسته تعریف شده به وسیله مجموعه (۱۳) پیوسته است؛ بنابراین قضیه اکستریم را می توان به کار برد. با قراردادن $f_x(x, y) = 0$ و $f_y(x, y) = 0$ ؛ نقاط بحرانی تابع f تعیین می شود.

$$f_x(x, y) = ۸۸ - ۴x - ۴y$$

$$f_y(x, y) = ۱۱۴ - ۶y - ۴x$$

قرار می دهیم $f_x(x, y) = 0$ و $f_y(x, y) = 0$ ؛ داریم

$$x + y = ۲۲$$

$$۲x + ۳y = ۵۷$$

با حل دستگاه دو معادله بالا به دست می آید $x = ۹$ و $y = ۱۳$. با به کارگیری آزمون مشتق دوم، مشتقات جزئی دوم را به دست می آوریم

$$f_{xx}(x, y) = -۴, \quad f_{yy}(x, y) = -۶, \quad f_{xy}(x, y) = -۴.$$

در نقطه $(۹, ۱۳)$ ،

$$f_{xx}(۹, ۱۳) = -۴ < 0$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(۹, ۱۳)f_{yy}(۹, ۱۳) - f_{xy}^2(۹, ۱۳) &= (-۴)(-۶) - (-۴)^2 \\ &= ۸ > 0. \end{aligned}$$

بنابراین از قضیه ۵.۳.۱۹ (ii) نتیجه می گیریم که f در $(۹, ۱۳)$ یک مقدار ماکسیمم نسبی دارد.

از معادله (۱۲)،

$$f(x, y) = x(۸۸ - ۲x) + y(۱۱۴ - ۳y) - ۴xy. \quad (۱۴)$$

پس

$$\begin{aligned} f(9, 13) &= 9(70) + 13(75) - 468 \\ &= 1137. \end{aligned}$$

مقدار ماکسیمم مطلق f باید در $(9, 13)$ و یا روی مرز قلمرو f حاصل شود. $f(9, 13)$ را با مقادیر تابع روی مرز مقایسه می‌کنیم. برای قسمتی از مرز که روی محور y ‌هاست و در آن $x \in [0, 50]$ ، مقادیر تابع را از (۱۴) به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$f(x, 0) = 88x - 2x^2.$$

قرض کنید

$$g(x) = 88x - 2x^2 \quad x \in [0, 50]$$

در این صورت

$$g'(x) = 88 - 4x \quad \text{و} \quad g''(x) = -4.$$

چون $g'(22) = 0$ و $g''(22) < 0$ ، پس g يك مقدار ماکسیمم نسبی برابر با ۹۶۸ در $x = 22$ دارد. به علاوه، $g(0) = 0$ و $g(50) < 0$. چون $968 > 1137 = f(9, 13)$ ، مقدار ماکسیمم مطلق f روی محور x ‌ها حاصل نمی‌شود.

برای قسمتی از مرز که روی محور y ‌هاست و در آن $y \in [0, 125/3]$ ، از (۱۴) داریم

$$f(0, y) = 114y - 3y^2.$$

قرض کنید

$$h(y) = 114y - 3y^2 \quad y \in \left[0, \frac{125}{3}\right]$$

در این صورت

$$h'(y) = 114 - 6y \quad \text{و} \quad h''(y) = -6.$$

چون $h'(19) = 0$ و $h''(19) < 0$ ، پس h يك مقدار ماکسیمم نسبی برابر با ۱۰۸۳ در $y = 19$ دارد. به علاوه، $h(0) = 0$ و $h(125/3) < 0$. چون

$$f(9, 13) = 1137 > 1083$$

مقدار ماکسیمم مطلق f روی محور y ‌ها حاصل نمی‌شود. حال قسمتی از مرز را که روی خط $x = 50$ با ضابطه $y \in [0, 125/3]$ است،

در نظر می گیریم. از (۱۴) به دست می آوریم

$$f(50, y) = y(112 - 3y) - 600 - 200y \quad (15)$$

$$f(0, y) = y(112 - 3y). \quad (16)$$

با مقایسه (۱۵) و (۱۶) داریم

$$f(50, y) < f(0, y). \quad (17)$$

چون به ازای تمام y های واقع در $[0, 125/3]$ داریم $f(9, 13) > f(0, y)$ ، آنگاه از نابرابری (۱۷) به ازای $y \in [0, 125/3]$ داریم

$$f(9, 13) > f(50, y).$$

بنابراین مقدار ماکسیمم مطلق f روی خط $x = 50$ به دست نمی آید. بالاخره، قسمتی از مرز را که روی خط $y = 125/3$ است و در آن $x \in [0, 50]$ ، در نظر می گیریم. از (۱۴) داریم

$$f\left(x, \frac{125}{3}\right) = x(88 - 2x) - \frac{1375}{3} - \frac{500}{3}x \quad (18)$$

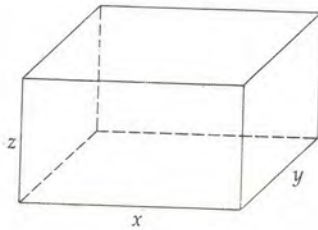
$$f(x, 0) = x(88 - 2x). \quad (19)$$

از (۱۸) و (۱۹) نتیجه می شود که $f(x, 125/3) < f(x, 0)$. بنابراین چون به ازای هر x در $[0, 50]$ داریم $f(9, 13) > f(x, 0)$ ، نتیجه می گیریم که به ازای هر x در $[0, 50]$ ، $f(9, 13) > f(x, 125/3)$ نیز بزرگتر است. پس مقدار ماکسیمم مطلق نمی تواند روی خط $y = 125/3$ به دست آید.

بنابراین مقدار ماکسیمم مطلق f روی مرز نیست و لذا در نقطه $(9, 13)$ است. پس نتیجه می گیریم که ۹ لامپ از نوع اول و ۱۳ لامپ از نوع دوم باید تولید گردد تا بیشترین سود یعنی ۱۱۳۷ دلار به دست آید. ▲

مثال ۳ مطلوب است تعیین نسبت ابعاد جعبه سربازی به شکل مکعب مستطیل و با حجمی معین، در صورتی که بخواهیم مقدار جنس مورد نیاز برای ساخت آن حداقل باشد.

حل فرض کنید طول قاعده جعبه x واحد، عرض قاعده جعبه y واحد، ارتفاع جعبه z واحد، و مساحت رویه جعبه S واحد مربع باشد. جعبه دارای حجم معینی است، بنابراین اگر حجم جعبه V واحد مکعب باشد، V یک مقدار ثابت است. در شکل ۱۵۰۳.۱۹ جعبه نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۳۰۱۹

هر يك از متغیرهای x ، y ، و z در بازه $(0, +\infty)$ قرار دارد. معادلات زیر را داریم

$$V = xyz \quad \text{و} \quad S = xy + 2xz + 2yz$$

با به دست آوردن z از معادله دوم بر حسب x ، y ، و ثابت V ، داریم $z = V/xy$ و با قرار دادن آن در اولین معادله به دست می آوریم

$$S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}. \quad (20)$$

با مشتق گیری به دست می آوریم

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{x^3} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4V}{y^3}$$

قرار می دهیم $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ و $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$ و به دست می آوریم

$$x^2 y - 2V = 0$$

$$x y^2 - 2V = 0$$

از حل این دستگاه نتیجه می شود $x = \sqrt[3]{2V}$ و $y = \sqrt[3]{2V}$. به ازای این مقادیر x و y ،

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} = \frac{4V}{2V} = 2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \right)^2 = \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} \cdot \frac{4V}{(\sqrt[3]{2V})^3} - 1 = 3 > 0.$$

از قضیه ۵.۳.۱۹ (i) نتیجه می‌شود که S یک مقدار مینیمم نسبی به‌ازای $x = \sqrt[3]{2V}$ و $y = \sqrt[3]{2V}$ دارد. یادآوری می‌کنیم که x و y هر دو در بازه $(0, +\infty)$ هستند، و با توجه به معادله (۲۰) نتیجه می‌گیریم که وقتی x و y نزدیک صفر یا خیلی بزرگ باشند، S خیلی بزرگ خواهد بود. بنابراین، مقدار مینیمم نسبی S ، مقدار مینیمم مطلق S است.

وقتی $x = \sqrt[3]{2V}$ و $y = \sqrt[3]{2V}$ ،

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$$

پس جعبه باید دارای قاعده‌ای مربع‌شکل، و ارتفاعی برابر با نصف طول ضلع قاعده باشد. ▲

در بخش ۱۰.۱۸ از یک تابع تولید صحبت کردیم که در آن، هر متغیر مستقل می‌توانست یکی از چندین ورودی باشد، از قبیل تعداد ماشین‌آلات مورد استفاده در تولید، تعداد کارگر-ساعت موجود، مقدار سرمایه در گردش، مقدار مواد اولیه استفاده‌شده، و مقدار زمین موجود. حال یک تابع تولید دومتغیری چون f در نظر می‌گیریم که در آن، مقادیر ورودیها با x و y ، و مقدار خروجی با z مشخص می‌گردد؛ بنابراین $z = f(x, y)$. فرض کنید قیمت دو ورودی برای هر واحد به ترتیب برابر با a دلار و b دلار، و قیمت خروجی برابر با c دلار باشد (a, b, c ثابت هستند). این وضعیت وقتی پیش می‌آید که تولیدکنندگان متعددی در بازار باشند به‌طوری که اگر تغییری در خروجی یکی از تولیدکننده‌ها رخ دهد، تأثیری بر قیمت کالا نداشته باشد. چنین بازاری با ذائقه‌ای نام دارد. اگر سود کل P دلار باشد، و چون سود کل با کم کردن هزینه کل از درآمد کل به دست می‌آید، داریم

$$P = cz - (ax + by)$$

و چون $z = f(x, y)$

$$P = cf(x, y) - ax - by.$$

البته، مطلوب آن است که P را ماکسیم کنیم. این را در مثالی نشان می‌دهیم.

مثال ۴ فرض کنید تولید کالای خاصی بستگی به دو ورودی دارد. مقادیر اینها برابر با $100x$ و $100y$ فرض شده است و قیمت آنها به ترتیب ۷ دلار و ۴ دلار است. مقدار

خروجی برابر با ۱۰۰z، و قیمت هر واحد آن برابر با ۹ دلار است. به علاوه مقادیر تابع تولید f به صورت زیر معین می‌شود

$$f(x, y) = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

بیشترین سود را تعیین کنید.

حل اگر سود P دلار باشد،

$$P = 9(100z) - 7(100x) - 4(100y). \quad (21)$$

با فرض $z = f(x, y)$ داریم

$$\begin{aligned} P &= 900 \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) - 700x - 400y \\ &= 4500 - \frac{900}{x} - \frac{900}{y} - 400x - 100y. \end{aligned}$$

x و y هر دو در بازه $(0, +\infty)$ هستند. پس

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{900}{y^2} - 100 \quad \text{و} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{900}{x^2} - 400$$

همچنین

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{1800}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{1800}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 0.$$

با قراردادن $\partial P / \partial y = 0$ و $\partial P / \partial x = 0$ داریم

$$\frac{900}{y^2} - 100 = 0 \quad \text{و} \quad \frac{900}{x^2} - 400 = 0$$

که از آنها به دست می‌آید $x = 3/2$ و $y = 3$ (جوابهای منفی قابل قبول نیستند چون x و y باید مثبت باشند). در $(3/2, 3)$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} \right)^2 = \left(-\frac{1800}{27/8} \right) \left(-\frac{1800}{27} \right) - (0)^2 > 0.$$

با توجه به مطالب فوق و اینکه در $(3/2, 3)$ داریم $\partial^2 P / \partial x^2 < 0$ ، از قضیه ۵.۳.۱۹ (ii) نتیجه می‌گیریم که P یک مقدار ماکسیمم نسبی در $(3/2, 3)$ دارد. چون x و y هر دو در بازه $(0, +\infty)$ قرار دارند، و وقتی که x و y نزدیک صفر و یا خیلی بزرگ باشند، P

يك عدد منفی است، نتیجه می شود مقدار ماکسیمم نسبی P يك مقدار ماکسیمم مطلق است. چون $z = f(x, y)$ مقدار z در $(3/2, 3)$ برابر است با

$$f\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} + 1 + 5 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{2}.$$

بنابراین از معادله (۲۱) داریم

$$P_{\max} = 900 \cdot \frac{11}{2} - 700 \cdot \frac{3}{2} - 400 \cdot 3 = 2700.$$

▲ پس بیشترین سود برابر است با ۲۷۰۰ دلار.

بحث اکسترمهای توابع دومتغیری را می توان درمورد توابع سه متغیری یا بیش از سه متغیری تعمیم داد. تعریف اکسترمهای نسبی و نقطه بحرانی به سادگی انجام می شود. به عنوان مثال، اگر f تابعی از سه متغیر x, y, z باشد، و

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

آنگاه (x_0, y_0, z_0) يك نقطه بحرانی f است. چنین نقطه ای را با حل دستگاه سه معادله سه مجهولی می توان به دست آورد. برای يك تابع n متغیری، نقاط بحرانی از مساوی صفر قرار دادن تمام n مشتق جزئی اول و حل دستگاه n معادله n مجهولی حاصل به دست می آید. تعمیم قضیه ۵.۳.۱۹ برای توابع سه متغیری با بیش از سه متغیری درمئون حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته آمده است.

تمرینهای ۳.۱۹

دو تمرینهای ۱ تا ۱۲، اکسترمهای نسبی f را در صورت وجود تعیین کنید.

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6x^2 + y - 1 \quad ۱.$$

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y \quad ۲.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy \quad ۳.$$

$$f(x, y) = 18x^2 - 32y^2 - 36x - 128y - 110 \quad ۴.$$

$$f(x, y) = e^{xy} \quad ۵.$$

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 18xy \quad ۶.$$

$$f(x, y) = 4xy^2 - 2x^2y - x \quad ۷.$$

$$f(x, y) = \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad ۰۸$$

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 3y^2 - 3x - 9y + 2 \quad ۰۹$$

$$f(x, y) = \sin x + \sin y; \quad 0 \leq x \leq \pi; \quad 0 \leq y \leq \pi \quad ۰۱۰$$

$$f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y; \quad 0 \leq x \leq 2\pi; \quad 0 \leq y \leq 2\pi \quad ۰۱۱$$

$$f(x, y) = e^x \sin y \quad ۰۱۲$$

۰۱۳. سه عدد مثبت بیابید که مجموعشان ۲۴ و حاصلضربشان بیشترین مقدار ممکن باشد.

۰۱۴. سه عدد مثبت بیابید که حاصلضربشان ۲۴ و مجموعشان کمترین مقدار ممکن باشد.

۰۱۵. نسبت ابعاد جعبه سر بازی به شکل مکعب مستطیل را بیابید که قرار است از یک مقدار معین جنس ساخته شود و بیشترین حجم را داشته باشد.

۰۱۶. ثابت کنید جعبه با بیشترین حجم که بتوان آن را داخل یک کره قرارداد، یک مکعب است.

۰۱۷. مطلوب است حجم بزرگترین مکعب مستطیلی که بتوان آن را در بیضیوار $36 = 4z^2 + 9y^2 + 36x^2$ محاط کرد، با این فرض که اضلاع، موازی محورهای مختصات باشند.

۰۱۸. در یک فرایند تولید، کارگران به دو طبقه A و B تقسیم می‌شوند. طبقه A شامل کارگرانی است که ۱۴ دلار به ازای هر بار اجرای فرایند می‌گیرند و طبقه B شامل کارگرانی که ۱۳ دلار در هر اجرا دریافت می‌دارند. معلوم شده که علاوه بر حقوق کارگران، اگر x کارگر از طبقه A و y کارگر از طبقه B به کار گرفته شوند، هزینه اجرای فرایند بر حسب دلار برابر است با $600 + 8xy - x^2 - y^2$. اگر در هر اجرا حداقل سه کارگر از هر طبقه مورد نیاز باشد، چند کارگر از هر طبقه باید به کار گرفته شوند تا هزینه اجرای فرایند مینیمم گردد؟

۰۱۹. نزدیکترین نقطه صفحه $z = 5 - 2y + 3x$ تا نقطه $(1, -2, 3)$ را بیابید، و فاصله مینیمم را به دست آورید.

۰۲۰. نزدیکترین نقاط رویه $z = 4 - xz$ تا مبدأ را به دست آورید، و فاصله مینیمم را بیابید.

۰۲۱. مطلوب است تعیین نزدیکترین نقاط منحنی حاصل از تقاطع بیضیوار

۴ = ۴z² + ۴y² + x² با صفحه $z = ۴ - y - x$ تسا مبدأ مختصات، و نیز فاصلهٔ مینیمم.

۲۲. می‌خواهیم جعبهٔ مکعب مستطیلی سر‌بازی بسازیم که هزینهٔ جنس به‌کاررفته در آن ۱۰ دلار باشد. اگر بهای هر فوت مربع از جنسی که برای پایین جعبه به‌کار می‌رود ۱۵ دلار و بهای هر فوت مربع از جنسی که برای بدنه به‌کار می‌رود ۳۰ دلار باشد، ابعاد این جعبه را طوری بیابید که جعبه دارای بیشترین حجم باشد.

۲۳. می‌خواهیم يك جعبهٔ مکعب مستطیلی سر‌بسته به‌حجم ۱۶ فوت مکعب از سه نوع جنس بسازیم. بهای هر فوت مربع از جنسی که برای سطوح بالا و پایین جعبه به‌کار می‌رود ۱۸ دلار، بهای هر فوت مربع از جنسی که برای جلو و عقب جعبه به‌کار می‌رود ۱۶ دلار، و بهای هر فوت مربع از جنسی که برای سایر سطوح جعبه به‌کار می‌رود ۱۲ دلار است. ابعاد جعبه را طوری بیابید که هزینهٔ جنسهای به‌کاررفته در ساخت جعبه مینیمم باشد.

۲۴. فرض کنید دما در هر نقطهٔ (x, y, z) روی کرهٔ $4 = x^2 + y^2 + z^2$ برابر با T درجه باشد که $T = ۱۰۰xy^2z$. نقاطی از کره را به‌دست آورید که دارای بیشترین دما هستند، و نیز نقاطی که دارای کمترین دما هستند. همچنین دما را در این نقاط تعیین کنید.

۲۵. فرض کنید اگر برای تولید کالای خاصی x ماشین-ساعت و y شخص-ساعت مورد نیاز باشد، هزینهٔ تولید توسط $f(x, y)$ تعیین شود که

$$f(x, y) = ۲x^۳ - ۶xy + y^۲ + ۵۰۰.$$

تعداد ماشین-ساعت و شخص-ساعت مورد نیاز برای تولید این کالا را طوری تعیین کنید که هزینه حداقل گردد.

۲۶. يك فروشگاه لباس دو نوع پیراهن مشابه می‌فروشد که توسط دو تولیدکنندهٔ مختلف تولید می‌شود. هزینهٔ پیراهن نوع اول برای فروشگاه ۴۰ دلار و هزینهٔ نوع دوم ۵۰ دلار است. بنا به تجربه معلوم شده که اگر بهای فروش پیراهن نوع اول x دلار و بهای فروش نوع دوم y دلار باشد، تعداد فروش ماهانهٔ پیراهن نوع اول $۲۵y - ۵۰x - ۳۲۰۰$ ، و تعداد فروش ماهانهٔ نوع دوم $۲۵x - ۲۵y$ است. بهای فروش هریک از این دو نوع پیراهن چقدر باشد تا بیشترین سود خالص به‌دست آید؟

۲۷. f ، تابع تولید يك کالای معین با مقادیر $f(x, y) = ۴ - (۸/xy)$ است. مقادیر دو ورودی $۱۰۰x$ و $۱۰۰y$ هستند، که بهای هرواحد آنها به ترتیب ۱۰ دلار و

۵ دلار است، و مقدار خروجی، $z = 100$ است که بهای هرواحد آن ۲۰ دلار است. بیشترین سود را به دست آورید.

۲۸. تمرین ۲۷ را با این فرضها حل کنید که

$$f(x, y) = x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{8}$$

و بهای هرواحد از ورودیها به ترتیب ۴ دلار و ۸ دلار (به جای ۱۰ دلار و ۵ دلار) و بهای یک واحد از خروجی ۱۶ دلار باشد.

۲۹. اگر $f(x_0, y_0)$ موجود و f یک مقدار ماکسیمم نسبی در (x_0, y_0) داشته باشد، ثابت کنید $f_y(x_0, y_0) = 0$.

۳۰. وقتی که $f(x_0, y_0)$ یک مقدار مینیمم نسبی باشد، قضیه ۳.۳۰.۱۹ را ثابت کنید.

۳۱. قضیه ۵.۳۰.۱۹ (ii) را ثابت کنید.

۳۲. قضیه ۵.۳۰.۱۹ (iii) را ثابت کنید.

۴.۱۹ ضرایب لاگرانژ

در حل مثال ۳ در بخش ۳.۱۹ تابعی را که دارای مقادیری به صورت $xy + 2xz + 2yz$ بود با این شرط که x, y, z در معادله $xyz = 1$ صدق کنند، مینیمم کردیم. این مثال را با مثال ۱ در بخش ۳.۱۹ مقایسه کنید که در آنجا اکستریمهای نسبی تابع f با ضابطه $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x^2 - 2y$ را به دست آوردیم. این دو نوع مسأله اساساً متفاوت هستند، چون در حالت اول یک شرط اضافی داریم که قید (یا شرط جنبی) نامیده می شود. چنین مسأله ای، مسأله ای در باب اکستریمهای مقید نام دارد در حالی که مسأله نوع دوم، مسأله ای در باب اکستریمهای آزاد نامیده می شود.

در حل مثال ۳ در بخش ۳.۱۹، تابعی از دو متغیر x و y را با قرارداد مقدار z از معادله دوم در معادله اول پیدا کردیم. چون همیشه نمی توان از روی معادله قید، متغیری را بر حسب متغیرهای دیگر به دست آورد، فرایند دیگری را برای حل مسائل اکستریمهای مقید به کار می برند. این فرایند منسوب به نام ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) است و به عنوان روش ضرایب لاگرانژ شناخته می شود. قبل از بحث درباره نظریه مربوط به این روش، این فرایند را خلاصه وار شرح می دهیم و مثالی برای روشن شدن آن می آوریم. فرض کنید می خواهیم اکستریمهای نسبی تابعی چون f از سه متغیر x, y, z را با قید $g(x, y, z) = 0$ به دست آوریم. متغیر جدید λ را معرفی می کنیم که ضرایب لاگرانژ

نام دارد، و تابع کمکی F را با ضابطه زیر تشکیل می‌دهیم

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

در این صورت، مسأله تبدیل می‌شود به مسأله یافتن نقاط بحرانی تابع F از چهار متغیر x, y, z, λ . مقادیر x, y, z که اکسترممهای نسبی تابع f را به دست می‌دهند، در بین این نقاط بحرانی خواهند بود. نقاط بحرانی F ، مقادیری از x, y, z, λ هستند که چهار مشتق جزئی اول F نسبت به هر یک برابر با صفر است، یعنی

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_\lambda = 0.$$

مثال ۱ مثال ۳ از بخش ۳.۱۹ را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ حل کنید.

حل متغیرهای x, y, z و ثابت V همانهایی هستند که در حل مثال ۳.۱۹ بخش ۳.۱۹ تعریف شدند. فرض کنید

$$S = f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

و

$$g(x, y, z) = xyz - V.$$

می‌خواهیم مینیمم تابع f را با قید زیر به دست آوریم

$$g(x, y, z) = 0.$$

تابع F را با ضابطه زیر تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ &= xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V). \end{aligned}$$

برای یافتن نقاط بحرانی F ، چهار مشتق جزئی اول F_x, F_y, F_z و F_λ را محاسبه و مقادیر تابع را مساوی با صفر قرار می‌دهیم

$$F_x(x, y, z, \lambda) = y + 2z + \lambda yz = 0 \quad (۱)$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = x + 2z + \lambda xz = 0 \quad (۲)$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = 2x + 2y + \lambda xy = 0 \quad (۳)$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = xyz - V = 0. \quad (۴)$$

با تفریق جملات متناظر معادله (۲) از معادله (۱)، به دست می آوریم

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$

که در نتیجه دو معادله زیر به دست می آید

$$y = x \quad (5)$$

و

$$\lambda = -\frac{1}{z}. \quad (6)$$

با منظور کردن (۶) در (۲) داریم $x + 2z - x = 0$ و در نتیجه $z = 0$ ، ولی چون z در بازه $(0, +\infty)$ است، این جواب قابل قبول نیست. با ملحوظ کردن (۵) در (۳) نتیجه می شود

$$2x + 2x + \lambda x^2 = 0$$

$$x(4 + \lambda x) = 0$$

$$\lambda = -\frac{4}{x} \quad (x \neq 0 \text{ چون})$$

اگر در معادله (۲)، $\lambda = -4/x$ ، آنگاه

$$x + 2z - \frac{4}{x}(xz) = 0$$

$$x + 2z - 4z = 0$$

$$z = \frac{x}{2}. \quad (7)$$

با منظور کردن (۵) و (۷) در (۴) داریم $(1/2)x^3 - V = 0$ که از آن به دست می آید
از (۵) و (۷) نتیجه می شود که $y = \sqrt[3]{2V}$ و $z = (1/2)\sqrt[3]{2V}$. بنا براین

$$\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\right)$$

یک نقطه بحرانی تابع F است، و همان طور که در مثال ۳ ی بخش ۳۰۱۹ نشان دادیم، f در این نقطه یک مقدار مینیمم مطلق دارد.

توجه کنید که معادله $F_\lambda(x, y, z, \lambda) = 0$ معادل است با قیدی که معادله $V = xyz$ ارائه می‌کند.

درستی روش ضرایب لاگرانژ را می‌توان با بررسی مسأله کلی اکستریمهای مقید نشان داد. فرض کنید می‌خواهیم اکستریمهای نسبی تابع f از سه متغیر x, y, z را با قید زیر بیابیم.

$$g(x, y, z) = 0. \quad (8)$$

تصور کنید از (8) بتوان z را به دست آورد

$$z = h(x, y) \quad (9)$$

که در آن h روی قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ تعریف شود و $f(x, y, h(x, y))$ در $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ یک اکستریم نسبی داشته باشد. همچنین فرض کنید مشتقات جزئی اول f, g ، و h روی B موجودند، و روی B داریم $g_3(x, y, h(x, y)) \neq 0$. چون f در $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ یک اکستریم نسبی دارد، مشتقات جزئی اول f صفر هستند. این مشتقات جزئی اول را با استفاده از قاعده زنجیری محاسبه می‌کنیم

$$f_1 + f_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad f_2 + f_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \text{در} \quad (x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \quad (10)$$

اگر در (8)، اول نسبت به x و سپس نسبت به y به طور ضمنی مشتق‌گیری کنیم، و z را به عنوان تابع مشتق‌پذیر h از x و y در نظر بگیریم، آنگاه در یک نقطه (x, y) واقع در قرص باز B داریم

$$g_1 + g_3 \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad g_2 + g_3 \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

به عبارت دیگر چون در قرص باز B داریم $g_3 \neq 0$ ، پس

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{g_1}{g_3} \quad \text{و} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{g_2}{g_3} \quad \text{در نقطه} \quad (x, y) \quad \text{واقع در} \quad B, \quad (11)$$

که مقادیر توابع g_1, g_2, g_3 و در $(x, y, h(x, y))$ هستند. اگر مقادیر $\partial h / \partial x$ و $\partial h / \partial y$ را از معادلات (11) در معادلات (10) قرار دهیم، در $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ داریم

$$f_1 + f_3 \left(-\frac{g_1}{g_3} \right) = 0 \quad \text{و} \quad f_2 + f_3 \left(-\frac{g_2}{g_3} \right) = 0$$

به علاوه، در هر جایی که $g_3 \neq 0$ ، داریم

$$f_3 - g_3 \left(\frac{f_3}{g_3} \right) = 0.$$

بنابراین در $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ ،

$$\begin{aligned} f_1 + g_1 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) &= 0, & f_2 + g_2 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) &= 0, \\ f_3 + g_3 \left(-\frac{f_3}{g_3} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

اگر $\lambda = -f_3/g_3$ ، آنگاه معادلات (۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f_1 + \lambda g_1 = 0, \quad f_2 + \lambda g_2 = 0, \quad f_3 + \lambda g_3 = 0. \quad (13)$$

به علاوه، چون f در $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ يك اكسترمم نسبی دارد و این اكسترمم مقید به $g(x, y, z) = 0$ است، پس

$$g(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0. \quad (14)$$

اگر

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \quad (15)$$

و اگر $z_0 = h(x_0, y_0)$ ، آنگاه (۱۳) و (۱۴) معادل اند با معادلات زیر در (x_0, y_0, z_0)

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0, \quad F_\lambda = 0. \quad (16)$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم نقطه‌ای چون (x_0, y_0, z_0) که تابع در آن يك اكسترمم نسبی دارد، در میان نقاط بحرانی تابع F تعریف شده توسط (۱۵) است. ملاحظه کنید که می‌توان معادلات (۱۳) را به صورت معادله برداری زیر نوشت

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad \text{در } (x_0, y_0, z_0).$$

این معادله برداری همراه با معادله $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ صورت دیگری از معادلات (۱۶) را به دست می‌دهند.

مثال ۲ با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ کوتاه‌ترین فاصله صفحه $Ax + By + Cz = D$ را از مبدأ بیابید.

حل فرض کنید فاصله مبدأ تا نقطه (x, y, z) در این صفحه، w واحد باشد.
در این صورت

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

وقتی w^2 مینیمم باشد، w نیز مینیمم خواهد بود؛ تابع f را با ضابطه زیر تشکیل می‌دهیم

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

می‌خواهیم مقدار مینیمم f را با در نظر گرفتن قید زیر به دست آوریم

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

با فرض اینکه چنین مقدار مینیممی وجود دارد، محل رخ دادن آن در نقطه بحرانی تابع F با ضابطه زیر خواهد بود

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(Ax + By + Cz - D).$$

برای یافتن نقاط بحرانی F ، مشتقات جزئی F را محاسبه و برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$F_x(x, y, z, \lambda) = 2x + \lambda A = 0 \quad (17)$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = 2y + \lambda B = 0 \quad (18)$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = 2z + \lambda C = 0 \quad (19)$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = Ax + By + Cz - D = 0. \quad (20)$$

از (۱۷)، (۱۸)، و (۱۹) داریم

$$x = -\frac{1}{2}\lambda A, \quad y = -\frac{1}{2}\lambda B, \quad z = -\frac{1}{2}\lambda C. \quad (21)$$

با قراردادن این مقادیر x, y, z در (۲۰) به دست می‌آید

$$-\frac{1}{2}\lambda(A^2 + B^2 + C^2) = D$$

$$-\frac{1}{2}\lambda = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (22)$$

اگر مقدار $-\lambda/2$ را از (۲۲) در معادلات (۲۱) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$x = \frac{AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y = \frac{BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad z = \frac{CD}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (23)$$

نقطه‌ای که دارای این مختصات باشد فقط نقطه بحرانی F است. بنابراین کوتاهترین فاصله از مبدأ تا صفحه مفروض، فاصله بین مبدأ و نقطه (x_0, y_0, z_0) است که x_0, y_0, z_0 به ترتیب برابر با مقادیر x, y, z در معادلات (۲۳) هستند. پس کوتاهترین فاصله برابر است با

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{B^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} + \frac{C^2 D^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}} \\ \triangle &= \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

مثال ۳ با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، مثال ۴ در بخش ۳.۱۹ را حل کنید.

حل می‌خواهیم تابع P را که با ضابطه

$$P(x, y, z) = 900z - 700x - 400y$$

تعریف می‌شود، تحت قید ارائه‌شده توسط معادله $z = x/3 + y/3 + 5 - 1/x - 1/y$ ماکسیم کنیم؛ این قید را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$g(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5 = 0.$$

فرض کنید

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \lambda) &= P(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ &= 900z - 700x - 400y \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5 \right). \end{aligned}$$

چهار مشتق جزئی F_x, F_y, F_z و F_λ را به دست می‌آوریم و مساوی با صفر قرار می‌دهیم

$$F_x(x, y, z, \lambda) = -700 - \frac{\lambda}{x^2} - \frac{\lambda}{3} = 0$$

$$F_y(x, y, z, \lambda) = -400 - \frac{\lambda}{y^2} - \frac{\lambda}{3} = 0$$

$$F_z(x, y, z, \lambda) = 900 + \lambda = 0$$

$$F_\lambda(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - 5 = 0.$$

از حل این دستگاه معادلات نتیجه می‌شود

$$\lambda = -900, \quad x = \frac{3}{2}, \quad y = 3, \quad z = \frac{11}{2}.$$

مقادیر x, y, z با آنچه که قبلاً به دست آمده بود مطابقت دارد، و

$$P\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{11}{2}\right) = 2700.$$

با همان روش قبلی می‌توان نشان داد که P یک مقدار ماکسیمم مطلق برابر با ۲۷۰۰ دارد.

▲

اگر چندین قید درکار باشد، می‌توان روش ضرایب لاگرانژ را با استفاده از چندین ضریب تعمیم داد. مثلاً اگر بخواهیم نقاط بحرانی تابعی با مقادیر $f(x, y, z)$ را تحت دو شرط جنبی $g(x, y, z) = 0$ و $h(x, y, z) = 0$ به دست آوریم، نقاط بحرانی تابع F از پنج متغیر x, y, z, λ, μ را که با ضابطه زیر تعریف می‌شود، به دست می‌آوریم

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

مثال زیر این روش را نشان می‌دهد.

مثال ۴ اگر $f(x, y, z) = xz + yz$ ، و نقطه (x, y, z) روی تقاطع رویه‌های $x^2 + z^2 = 2$ و $yz = 2$ قرار داشته باشد، اکسترممهای نسبی تابع f را به دست آورید.

حل تابع F را با ضابطه زیر تشکیل می‌دهیم

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xz + yz + \lambda(x^2 + z^2 - 2) + \mu(yz - 2).$$

با یافتن پنج مشتق جزئی و مساوی صفر قرار دادن آنها داریم

$$F_x(x, y, z, \lambda, \mu) = z + 2\lambda x = 0 \quad (24)$$

$$F_y(x, y, z, \lambda, \mu) = z + \mu z = 0 \quad (25)$$

$$F_z(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y + 2\lambda z + \mu y = 0 \quad (26)$$

$$F_{\lambda}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + z^2 - 2 = 0 \quad (27)$$

$$F_{\mu}(x, y, z, \lambda, \mu) = yz - 2 = 0. \quad (28)$$

از (۲۵) به دست می آید $\mu = -1$ یا $z = 0$. ما $z = 0$ را رد می کنیم چون با (۲۸) متناقض است. از (۲۴) داریم

$$\lambda = -\frac{z}{2x}. \quad (29)$$

با قراردادن مقدار λ از (۲۹) و نیز $\mu = -1$ در (۲۶) نتیجه می گیریم

$$x + y - \frac{z^2}{x} - y = 0$$

و بنابراین

$$x^2 = z^2. \quad (30)$$

از (۳۰) در (۲۷) مقدار می گذاریم و به دست می آوریم $2x^2 - 2 = 0$ یا $x^2 = 1$. دو مقدار ۱ و -1 برای x به دست می آید و به ازای هر يك از این مقادیر x ، از (۳۰) دو مقدار ۱ و -1 را برای z به دست می آوریم. با یافتن مقادیر متناظر y از (۲۸)، چهار مجموعه جواب برای پنج معادله مذکور در (۲۴) تا (۲۸) به دست می آید. این جوابها عبارت اند از

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = 1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = -1 \quad y = 2 \quad z = 1 \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

$$x = -1 \quad y = -2 \quad z = -1 \quad \lambda = -\frac{1}{2} \quad \mu = -1$$

از اولین و چهارمین مجموعه جوابها نتیجه می شود $f(x, y, z) = 3$ ، و از دومین و سومین مجموعه جوابها داریم $f(x, y, z) = 1$. بنابراین f يك مقدار ماكسيمم نسبی برابر ۳ و يك مقدار مينيمم نسبی برابر ۱ دارد. Δ

تمرینهای ۲۰۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۴، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، نقاط بحرانی تابع داده شده را با در نظر گرفتن قید مفروض به دست آورید.

۱. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ با قید $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

۲. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ با قید $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

۳. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ با قید $3x - 2y + z - 4 = 0$.

۴. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ با قید $x^2 - y^2 = 1$.

در تمرینهای ۵ تا ۸، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، اکسترمهای نسبی f را با در نظر گرفتن قید داده شده بیابید. همچنین مطلوب است نقاطی که اکسترمها در آنجا رخ می دهند. فرض کنید اکسترمهای نسبی موجودند.

۵. $f(x, y) = x^2 + y$ با قید $x^2 + y^2 = 9$.

۶. $f(x, y) = x^2 y$ با قید $x^2 + 8y^2 = 24$.

۷. $f(x, y, z) = xyz$ با قید $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$.

۸. $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$ با قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

در تمرینهای ۹ و ۱۰، مقدار مینیم f را با در نظر گرفتن قید داده شده به دست آورید. فرض کنید مقدار مینیم وجود دارد.

۹. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ با قید $xyz = 1$.

۱۰. $f(x, y, z) = xyz$ با قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

در تمرینهای ۱۱ و ۱۲، مقدار ماکسیم f را با در نظر گرفتن قید داده شده به دست آورید. فرض کنید مقدار ماکسیم وجود دارد.

۱۱. $f(x, y, z) = x + y + z$ با قید $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

۱۲. $f(x, y, z) = xyz$ با قید $2xy + 3xz + yz = 72$.

۱۳. مطلوب است مقدار مینیم تابع f با ضابطه $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 16z^2$ با در نظر گرفتن قید (الف) $xyz = 1$ ؛ (ب) $xy = 1$ ؛ (پ) $x = 1$.

۱۴. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، کوتاهترین فاصله بین نقطه $(1, 3, 0)$ و

صفحه ۵ $4x + 2y - z = 5$ را به دست آورید.

۱۵. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، کوتاهترین فاصله بین نقطه $(1, -1, -1)$ و صفحه $2 = x + 4y + 3z$ را به دست آورید.

۱۶. کمترین و بیشترین فاصله بین مبدأ و نقطه‌ای روی بیضی $16 = x^2 + 4y^2$ را به دست آورید.

۱۷. کمترین و بیشترین فاصله بین مبدأ و نقطه‌ای واقع بر بیضیوار $36 = 9x^2 + 4y^2 + z^2$ را به دست آورید.

۱۸. اگر $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ ، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نقطه‌ای در صفحه $5 = x + y + z$ به دست آورید که در آن، $f(x, y, z)$ مینیمم باشد.

۱۹. اگر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ و دوقید $6 = x + 2y + 3z$ و $3 = x - y - z$ مفروض باشند، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مقدار مینیمم نسبی تابع f را به دست آورید.

۲۰. اگر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ و دوقید

$$1 = x + y + 2z \quad \text{و} \quad -4 = 3x - 2y + z$$

مفروض باشند، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مقدار مینیمم نسبی تابع f را به دست آورید.

۲۱. اگر $f(x, y, z) = xyz$ و دوقید $4 = x + y + z$ و $3 = x - y - z$ مفروض باشند، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مقدار ماکسیمم نسبی تابع f را به دست آورید.

۲۲. اگر $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ و دوقید $1 = x + y + z$ و $0 = x + y - z$ مفروض باشند، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ مقدار ماکسیمم نسبی تابع f را به دست آورید.

در تمرینهای ۲۳ تا ۳۲، تمرینهای ذکر شده (از مجموعه تمرینهای ۳.۱۹) را با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ حل کنید.

۲۳. تمرین ۱۳ ۲۴. تمرین ۱۴

۲۵. تمرین ۱۵ ۲۶. تمرین ۱۶

۲۷. تمرین ۱۹ ۲۸. تمرین ۲۰

۳۰. تمرین ۲۲

۲۹. تمرین ۲۱

۳۲. تمرین ۲۲

۳۱. تمرین ۲۳

۳۳. يك قرص مستدير به شكل ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ است. اگر دما در هر نقطه دلخواه (x, y) روی قرص برابر با T درجه باشد و $T = 2x^2 + y^2 - y$ ، مطلوب است گرمترین و سردترین نقاط قرص.

۳۴. شرکتی سه کارخانه دارد که هر سه يك کالا را تولید می کنند. اگر کارخانه A ، x واحد، کارخانه B ، y واحد، و کارخانه C ، z واحد کالا تولید کنند، هزینه تولید آنها به ترتیب $(3x^2 + 200)$ دلار، $(y^2 + 400)$ دلار، و $(2z^2 + 300)$ دلار است. اگر سفرهای برای ۱۱۰۰ واحد کالا رسیده باشد، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تعیین کنید که میزان تولید چگونه بین سه کارخانه تقسیم گردد تا هزینه تولید کل مینیمم شود.

۵.۱۹ تعیین يك تابع با استفاده از گرادیانش

در اینجا مسأله یافتن تابع را در صورتی که گرادیانش معلوم باشد، بررسی می کنیم. یعنی فرض می کنیم

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \quad (1)$$

داده شده است، می خواهیم $f(x, y)$ را به دست آوریم.

○ نمونه ۱ فرض کنید

$$\nabla f(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}. \quad (2)$$

در این صورت چون رابطه (۱) باید برقرار باشد، نتیجه می شود

$$f_x(x, y) = y^2 + 2x + 4 \quad (3)$$

و

$$f_y(x, y) = 2xy + 4y - 5. \quad (4)$$

با انتگرال گیری از دوطرف (۳) نسبت به x داریم

$$f(x, y) = y^2 x + x^2 + 4x + g(y). \quad (5)$$

دقت کنید که چون نسبت به x انتگرال گیری می کنیم، «ثابت» انتگرال گیری تابعی از y است و به x بستگی ندارد. حال اگر از دوطرف (۵) نسبت به y مشتق جزئی بگیریم،

به دست می آید

$$f_y(x, y) = 2xy = g'(y). \quad (۶)$$

معادلات (۴) و (۶) دو عبارت برای $f_y(x, y)$ هستند. پس

$$2xy + 4y - 5 = 2xy + g'(y)$$

بنابراین

$$g'(y) = 4y - 5$$

$$g(y) = 2y^2 - 5y + C.$$

با جایگزینی این مقدار $g(y)$ در (۵) داریم

$$\circ \quad f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y + C.$$

مثال ۱ اگر $\nabla f(x, y) = e^{xy} \cos x \mathbf{i} + 2ye^{xy} \sin x \mathbf{j}$ ، مطلوب است $f(x, y)$.

حل چون رابطه (۱) باید برقرار باشد، لذا

$$f_x(x, y) = e^{xy} \cos x \quad (۷)$$

و

$$f_y(x, y) = 2ye^{xy} \sin x. \quad (۸)$$

با انتگرال گیری نسبت به y از دو طرف (۸) به دست می آید

$$f(x, y) = e^{xy} \sin x + g(x) \quad (۹)$$

که $g(x)$ مستقل از y است. حال از دو طرف (۹) نسبت به x مشتق گیری جزئی می کنیم و به دست می آوریم

$$f_x(x, y) = e^{xy} \cos x + g'(x). \quad (۱۰)$$

از مساوی قرار دادن طرفهای راست (۷) و (۱۰) نتیجه می شود

$$e^{xy} \cos x = e^{xy} \cos x + g'(x)$$

$$g'(x) = 0$$

$$g(x) = C.$$

این مقدار $g(x)$ را در (۹) قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$\blacktriangle \quad f(x, y) = e^{y^2} \sin x + C.$$

همان‌طور که در نمونه زیر می‌بینید تمام بردارهایی که به‌صورت

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

هستند ضرورتاً گرادیان نیستند.

○ نمونه ۲ نشان می‌دهیم که هیچ تابعی چون f با ضابطه زیر وجود ندارد

$$\nabla f(x, y) = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}. \quad (11)$$

فرض می‌کنیم چنین تابعی وجود دارد. در این صورت نتیجه می‌گیریم که

$$f_x(x, y) = 3y \quad (12)$$

و

$$f_y(x, y) = -2x. \quad (13)$$

از دو طرف (۱۲) نسبت به x انتگرال می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$f(x, y) = 3xy + g(y).$$

از دو طرف این معادله نسبت به y مشتق جزئی می‌گیریم

$$f_y(x, y) = 3x + g'(y). \quad (14)$$

با مساوی قرار دادن طرفهای راست (۱۳) و (۱۴) به‌دست می‌آید

$$-2x = 3x + g'(y)$$

$$-5x = g'(y).$$

اگر از دو طرف این معادله نسبت به x مشتق‌گیری کنیم، نتیجه می‌شود

$$-5 = 0$$

که البته، درست نیست. پس این فرض که $3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$ يك گرادیان است، به تناقض می‌رسد. ○

اکنون شرطی را بررسی می‌کنیم که باید برقرار باشد تا يك بردار، گرادیان باشد.

فرض کنید M_y و N_x روی قرص بازی چون B در R^2 پیوسته هستند. اگر

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \quad (15)$$

روی B یک گرادیان باشد، در این صورت به ازای تمام (x, y) ها در B تابعی چون f موجود است به طوری که

$$f_x(x, y) = M(x, y) \quad (16)$$

و

$$f_y(x, y) = N(x, y). \quad (17)$$

چون $M_y(x, y)$ روی B موجود است، بنا بر این از (۱۶) نتیجه می گیریم

$$M_y(x, y) = f_{xy}(x, y). \quad (18)$$

همچنین چون $N_x(x, y)$ روی B وجود دارد، لذا از (۱۷) داریم

$$N_x(x, y) = f_{xy}(x, y) \quad (19)$$

چون M_y و N_x روی B پیوسته هستند، پس معادله‌های f_{xy} و f_{yx} نیز روی B پیوسته‌اند. حال از قضیه ۱۰.۷.۱۸ نتیجه می شود که به ازای تمام نقاط واقع در B ، $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. بنابراین طرفهای چپ (۱۸) و (۱۹) در تمام نقاط واقع در B متساوی‌اند. پس ثابت کرده ایم که اگر M_y و N_x روی قرص بازی چون B در R^2 پیوسته باشند، شرط لازم برای اینکه بردار (۱۵) روی B ، یک گرادیان باشد این است که

$$M_y(x, y) = N_x(x, y). \quad (20)$$

برای اینکه بردار (۱۵) روی B یک گرادیان باشد، معادله (۲۰) یک شرط کافی نیز هست. اثبات دقیق کفایت این شرط با مفاهیمی سروکار دارد که خارج از قلمرو بحث این کتاب است. اگر (۲۰) برقرار باشد، می توان چگونگی یافتن تابعی مانند f را به طوری که بردار (۱۵) یک گرادیان باشد، نشان داد. ولی اثبات اینکه هر وقت (۲۰) برقرار باشد چنین تابعی موجود است، در دروسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مطرح می گردد. روش یافتن f تعمیمی از روشهای به کار گرفته شده در نمونه های ۱ و مثال ۱، و مثال ۲ ی زیر می باشد. حال قضیه زیر را داریم.

۱۰.۵.۱۹ قضیه فرض کنید M و N توابعی از دو متغیر x و y باشند که روی قرص بازی چون $B((x_0, y_0); r)$ در R^2 تعریف شده‌اند، و M_y و N_x روی B پیوسته باشند.

در این صورت بردار

$$M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

يك گراديان روی B است اگر و تنها اگر به ازای تمام نقاط واقع در B ،

$$M_y(x, y) = N_x(x, y).$$

○ نمونه ۳

(الف) قضیه ۱۰.۵.۱۹ را در مورد بردار مذکور در طرف راست رابطه (۲) در نمونه ۱ به کار می‌بریم. فرض کنید

$$N(x, y) = 2xy + 4y - 5 \text{ و } M(x, y) = y^2 + 2x + 4$$

در این صورت

$$N_x(x, y) = 2y \text{ و } M_y(x, y) = 2y$$

پس $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ ، و بنابراین، این بردار يك گراديان است.
(ب) اگر قضیه ۱۰.۵.۱۹ را برای بردار مذکور در طرف راست رابطه (۱۱) در نمونه ۲ با ضوابط $M(x, y) = 3y$ و $N(x, y) = -2x$ به کار ببریم، به دست می‌آید

$$N_x(x, y) = -2 \text{ و } M_y(x, y) = 3$$

○ پس $M_y(x, y) \neq N_x(x, y)$ ؛ لذا این بردار يك گراديان نیست.

مثال ۲ آیا بردار $(e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}$ گراديانی چون $\nabla f(x, y)$ است یا خیر؟ اگر گراديان است، $f(x, y)$ را به دست آورید.

حل قضیه ۱۰.۵.۱۹ را به کار می‌گیریم. فرض کنید $M(x, y) = e^{-y} - 2x$ و $N(x, y) = -xe^{-y} - \sin y$. در این صورت

$$N_x(x, y) = -e^{-y} \text{ و } M_y(x, y) = -e^{-y}$$

بنابراین $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ ؛ لذا بردار داده شده گراديانی چون $\nabla f(x, y)$ است. به علاوه

$$f_x(x, y) = e^{-y} - 2x \quad (21)$$

و

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} - \sin y. \quad (22)$$

با انتگرال گیری از دوطرف (۲۱) نسبت به x خواهیم داشت

$$f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + g(y) \quad (23)$$

که در آن $g(y)$ مستقل از x است. حال با مشتق گیری جزئی از دوطرف (۲۳) نسبت به y داریم

$$f_y(x, y) = -xe^{-y} + g'(y). \quad (24)$$

با مساوی قرار دادن (۲۴) و (۲۲) به دست می آوریم

$$-xe^{-y} + g'(y) = -xe^{-y} - \sin y$$

$$g'(y) = -\sin y$$

$$g(y) = \cos y + C.$$

این عبارت را به جای $g(y)$ در (۲۳) قرار می دهیم

$$\blacktriangle \quad f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y + C.$$

قضیه ۱۰۵.۱۹ را می توان در مورد توابع سه متغیری نیز تعمیم داد.

۲.۵.۱۹ قضیه فرض کنید N, M و R توابعی از سه متغیر x, y, z باشند که روی گوی بازی چون $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3 تعریف شده اند، و $N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z, R_x, R_y, R_z$ روی B پیوسته هستند. در این صورت بردار

$$M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

روی B يك گرادیان است اگر و تنها اگر $M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$ ، $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ و $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$.

اثبات قسمت «تنها اگر» قضیه ۲.۵.۱۹ شبیه اثبات قسمت «تنها اگر» قضیه ۱۰۵.۱۹ است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود (تمرین ۲۷ را ببینید). اثبات قسمت «اگر» خارج از قلمرو این کتاب می باشد.

مثال ۳ تعیین کنید که بردار زیر يك گرادیان $\nabla f(x, y, z)$ است یا نه؟ و اگر گرادیان است، $f(x, y, z)$ را به دست آورید.

$$(e^x \sin z + yz)\mathbf{i} + (xyz + y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + xy + z^2)\mathbf{k}.$$

حل قضیه ۲.۵.۱۹ را به کار می‌بریم. فرض کنید $M(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz$ ،
 $N(x, y, z) = 2xz + 2y$ و $R(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$. آنگاه

$$M_x(x, y, z) = 2z \quad M_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2y$$

$$N_x(x, y, z) = 2z \quad N_z(x, y, z) = 2x$$

$$R_x(x, y, z) = e^x \cos z + 2y \quad R_y(x, y, z) = 2x$$

بنابراین $M_x(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ ، $M_y(x, y, z) = N_x(x, y, z)$ و $N_z(x, y, z) = R_y(x, y, z)$. پس بردار داده شده يك گرادیان چون $\nabla f(x, y, z)$ است. به علاوه

$$f_x(x, y, z) = e^x \sin z + 2yz \quad (25)$$

$$f_y(x, y, z) = 2xz + 2y \quad (26)$$

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2. \quad (27)$$

با انتگرال گیری از دو طرف (۲۵) نسبت به x داریم

$$f(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz + g(y, z) \quad (28)$$

که $g(y, z)$ مستقل از x است. از دو طرف (۲۸) نسبت به y مشتق گیری جزئی می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$f_y(x, y, z) = 2xz + g_y(y, z). \quad (29)$$

با مساوی قرار دادن طرفهای راست (۲۹) و (۲۶) خواهیم داشت

$$2xz + g_y(y, z) = 2xz + 2y$$

$$g_y(y, z) = 2y.$$

حال از دو طرف این معادله نسبت به y انتگرال می‌گیریم

$$g(y, z) = y^2 + h(z) \quad (30)$$

که h مستقل از x و y است. با قرار دادن طرف راست (۳۰) در (۲۸) داریم

$$f(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz + y^2 + h(z). \quad (31)$$

اکنون از دو طرف (۳۱) نسبت به z مشتق جزئی می‌گیریم

$$f_z(x, y, z) = e^x \cos z + 2xy + h'(z). \quad (32)$$

طرفهای راست (۳۲) و (۲۷) را مساوی هم قرار می‌دهیم

$$e^x \cos z + 2xy + h'(z) = e^x \cos z + 2xy + 3z^2$$

$$h'(z) = 3z^2$$

$$h(z) = z^3 + C. \quad (33)$$

از (۳۳) در (۳۱) مقدار می‌گذاریم و به‌دست می‌آوریم

$$\blacktriangle \quad f(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz + y^2 + z^3 + C.$$

تمرینهای ۵.۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۲۶، تعیین کنید که بردار داده شده يك گرادیان است یا خیر. اگر گرادیان است، تابعی بیابید که دارای گرادیان مفروض باشد.

$$1. \quad 2xi - 3yj$$

$$2. \quad y^2i + 3x^2j$$

$$3. \quad (6x - 5y)i - (5x - 6y^2)j$$

$$4. \quad (4y^2 + 6xy - 2)i + (3x^2 + 8xy + 1)j$$

$$5. \quad (6x^2y^2 - 14xy + 3)i + (4x^2y - 7x^2 - 8)j$$

$$6. \quad 2(2x^2 + 6xy)i + 2(3x^2 + 8y)j$$

$$7. \quad (2xy + y^2 + 1)i + (x^2 + 2xy + x)j$$

$$8. \quad \frac{2x-1}{y}i + \frac{x-x^2}{y^2}j$$

$$9. \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)i + \left(\frac{1-2x}{y^2}\right)j$$

$$10. \quad (2x + \ln y)i + \left(y^2 + \frac{x}{y}\right)j$$

$$11. \quad (2x \cos y - 1)i - x^2 \sin yj$$

$$12. \quad (ye^x + x)i + (xe^y - y)j$$

$$2x \sec 2y \mathbf{i} + 2x^y \sec 2y \tan 2y \mathbf{j} \quad ۱۳$$

$$(2xy - y \sin x) \mathbf{i} + (x^y + \cos x) \mathbf{j} \quad ۱۴$$

$$(e^y - 2xy) \mathbf{i} + (xe^y - x^y) \mathbf{j} \quad ۱۵$$

$$(\sin 2x - \tan y) \mathbf{i} - x \sec^y \mathbf{j} \quad ۱۶$$

$$(2y - 5z) \mathbf{i} + (2x + 8z) \mathbf{j} - (5x - 8y) \mathbf{k} \quad ۱۷$$

$$2x^y \mathbf{i} + 9y^y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k} \quad ۱۸$$

$$e^y \sin z \mathbf{i} + xe^y \sin z \mathbf{j} + xe^y \cos z \mathbf{k} \quad ۱۹$$

$$(2xy + 7z^2) \mathbf{i} + (x^y + 2y^y - 3z) \mathbf{j} + (21xz^y - 4y) \mathbf{k} \quad ۲۰$$

$$(2xy + 3yz - 2) \mathbf{i} + (2x^y + 3xz - 5z^y) \mathbf{j} + (3xy - 10yz + 1) \mathbf{k} \quad ۲۱$$

$$(2y + z) \mathbf{i} + (2x - 3z + 4yz) \mathbf{j} + (x - 3y + 2y^y) \mathbf{k} \quad ۲۲$$

$$z \tan y \mathbf{i} + xz \sec^y y \mathbf{j} + x \tan y \mathbf{k} \quad ۲۳$$

$$e^x \cos x \mathbf{i} + z \sin y \mathbf{j} + (e^x \sin x - \cos y) \mathbf{k} \quad ۲۴$$

$$e^x(e^z - \ln y) \mathbf{i} + (e^y \ln z - e^x y^{-1}) \mathbf{j} + (e^{x+z} + e^y z^{-1}) \mathbf{k} \quad ۲۵$$

$$\frac{1}{y+z} \mathbf{i} - \frac{x-z}{(y+z)^2} \mathbf{j} - \frac{x+y}{(y+z)^2} \mathbf{k} \quad ۲۶$$

$$۲۷. \text{ قسمت «تنها اگر» قضیه ۲۰۵.۱۹ را ثابت کنید.}$$

$$۲۸. \text{ ثابت کنید } \nabla f(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \text{ اگر و تنها اگر } f(x, y) = ax + by + c, \text{ که در آن } a, b, \text{ و } c \text{ ثابت هستند.}$$

۱۹. ۶ انتگرالهای منحنی الخط

در فصل ۶ با استفاده از مفهوم مساحت زمینه را برای تعریف انتگرال معین فراهم کردیم. برای تعریف انتگرال تابعی با مقادیر برداری، از مفهوم فیزیکی کار استفاده می‌کنیم.

می‌دانیم که اگر نیروی ثابتی با نمایش برداری $\mathbf{F}$ شیئی را در امتداد یک خط مستقیم حرکت دهد، آنگاه اندازه کار انجام شده برابر است با حاصلضرب مؤلفه بردار $\mathbf{F}$ در امتداد خط حرکت و بردار نمایشگر تغییر مکان. در بخش ۳.۱۶ نشان دادیم که اگر نیروی ثابتی با نمایش برداری $\mathbf{F}$ شیئی را از نقطه A به نقطه B حرکت دهد، و اگر W اندازه کار

انجام شده باشد، داریم

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}) \quad (۱)$$

حال فرض کنید بردار نیرو ثابت نباشد و به جای حرکت در امتداد يك خط مستقیم در امتداد يك منحنی حرکت کند. نیز فرض کنید نیروی وارد بر شیء در نقطه (x, y) واقع در قرص بازی چون B در R^2 به صورت بردار نیروی زیر معین شده باشد

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

که در آن M و N روی B پیوسته هستند. تابع با مقادیر برداری $\mathbf{F}$ را يك میدان نیرو یا میدان برداری روی B می نامند. فرض کنید منحنی C واقع در B دارای معادله برداری زیر باشد

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad a \leq t \leq b.$$

شرط می کنیم توابع f و g طوری باشند که f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته باشند. می خواهیم کار انجام شده توسط نیروی متغیر با اندازه برداری $\mathbf{F}$ را در حرکت دادن شیء در امتداد C از نقطه $(f(a), g(a))$ تا $(f(b), g(b))$ به دست آوریم. در نقطه ای چون $(f(t), g(t))$ روی C بردار نیرو عبارت است از

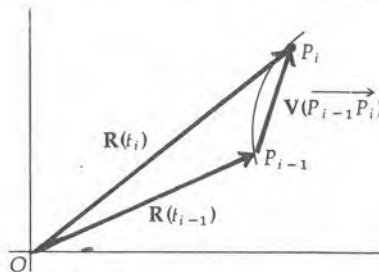
$$\mathbf{F}(f(t), g(t)) = M(f(t), g(t))\mathbf{i} + N(f(t), g(t))\mathbf{j}. \quad (۲)$$

فرض کنید Δ افزای از بازه $[a, b]$ به صورت زیر باشد

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

همچنین فرض کنید نقطه $P_i = (x_i, y_i) = (f(t_i), g(t_i))$ روی C باشد. به شکل ۱۰.۶۰۱۹ نگاه کنید. داریم $\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = \mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})$ ؛ بنابراین

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = f(t_i)\mathbf{i} + g(t_i)\mathbf{j} - [f(t_{i-1})\mathbf{i} + g(t_{i-1})\mathbf{j}]$$



شکل ۱۰.۶۰۱۹

یا

$$\vec{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f(t_i) - f(t_{i-1})]\mathbf{i} + [g(t_i) - g(t_{i-1})]\mathbf{j}. \quad (۳)$$

چون f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته هستند، از قضیه مقدار میانگین (قضیه ۲.۴.۴) نتیجه می‌شود که در بازه باز (t_{i-1}, t_i) اعداد c_i و d_i وجود دارند به طوری که

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \quad (۴)$$

و

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(d_i)(t_i - t_{i-1}). \quad (۵)$$

با فرض $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$ و با قراردادن طرفهای راست روابط (۴) و (۵) در (۳) به دست می‌آوریم

$$\vec{V}(\overrightarrow{P_{i-1}P_i}) = [f'(c_i)\mathbf{i} + g'(d_i)\mathbf{j}]\Delta_i t. \quad (۶)$$

به‌ازای هر i بردار زیر را در نظر بگیریم

$$\mathbf{F}_i = M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}. \quad (۷)$$

هر کدام از این بردارهای $\mathbf{F}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)، تقریبی است از بردار نیروی $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ که توسط رابطه (۲) معین می‌شود، در امتداد قوسی از C از نقطه P_{i-1} تا P_i مشاهده می‌کنید که اگرچه c_i و d_i در حالت کلی اعداد متفاوتی در بازه باز (t_{i-1}, t_i) هستند، ولی مقادیر بردارهای $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ نزدیک بردار $\mathbf{F}_i$ می‌باشند. به‌علاوه، ما قوسی از C از P_{i-1} تا P_i را به‌وسیله پاره خط $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ تقریب می‌زنیم، پس فرمول (۱) را به‌کار می‌بریم و تقریبی برای کار انجام شده توسط بردار $\mathbf{F}(f(t), g(t))$ در حرکت یک‌شیء در امتداد قوس C از P_{i-1} تا P_i به دست می‌آوریم. اگر این تقریب را با $\Delta_i W$ نشان دهیم، از فرمول (۱) و معادلات (۷) و (۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \Delta_i W &= [M(f(c_i), g(c_i))\mathbf{i} + N(f(d_i), g(d_i))\mathbf{j}] \cdot [f'(c_i)\mathbf{i} \\ &\quad + g'(d_i)\mathbf{j}]\Delta_i t \end{aligned}$$

یا معادش

$$\Delta_i W = [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)]\Delta_i t + [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)]\Delta_i t.$$

تقریبی از اندازه کار انجام شده توسط $F(f(t), g(t))$ در امتداد C برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i W \quad \text{یا معادش}$$

$$\sum_{i=1}^n [M(f(c_i), g(c_i))f'(c_i)] \Delta_i t + \sum_{i=1}^n [N(f(d_i), g(d_i))g'(d_i)] \Delta_i t .$$

هر يك از مجموعه‌های فوق يك مجموع ریمانی است. مجموع اول يك مجموع ریمانی برای تابعی است که دارای مقادیر $M(f(t), g(t))f'(t)$ است و مجموع دوم يك مجموع ریمانی برای تابعی است با مقادیر $N(f(t), g(t))g'(t)$. اگر $n \rightarrow +\infty$ ، آنگاه این دو مجموع به سمت انتگرال معین میل می‌کنند:

$$\int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt$$

بنابراین تعریف زیر را داریم.

۱۰۶.۱۹ تعریف فرض کنید C منحنیی واقع در قرص بساز B در R^2 باشد که معادله برداری آن عبارت است از $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ ، که f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته‌اند. به علاوه، فرض کنید يك میدان نیرو روی B با ضابطه $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ تعریف شود که در آن M و N روی B پیوسته‌اند. در این صورت اگر W اندازه کار انجام شده توسط نیرویی با نمایش برداری $\mathbf{F}$ در حرکت يك شیء در امتداد C از $(f(a), g(a))$ تا $(f(b), g(b))$ باشد، آنگاه

$$W = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt . \quad (۸)$$

و یا با استفاده از نماد برداری داریم

$$W = \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt \quad (۹)$$

یا معادلش

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt . \quad (۱۰)$$

مثال ۱ فرض کنید شیئی در امتداد سهمی $y = x^2$ از نقطه $(-1, 1)$ تا نقطه $(2, 4)$ حرکت می‌کند. اگر میدان نیرو $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ باشد، حرکت شیء شده باشد، کل کار انجام شده را بیابید. فرض کنید که قوس سهمی بر حسب متر و نیرو بر حسب نیوتن اندازه‌گیری می‌شود.

حل معادلات پارامتری سهمی عبارت‌اند از

$$x = t \text{ و } y = t^2, \quad -1 \leq t \leq 2 .$$

پس يك معادله برداری سهمی این است

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

چون $f(t) = t$ ، $g(t) = t^2$ ، و $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y^2, 3x^2y \rangle$ ، پس
 $\mathbf{F}(f(t), g(t)) = \mathbf{F}(t, t^2) = \langle t^2 + t^4, 3t^6 \rangle$.

اگر کار انجام شده W ژول باشد، از فرمول (۱۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \mathbf{F}(t, t^2) \cdot \mathbf{R}'(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 \langle t^2 + t^4, 3t^6 \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + 64 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 \right) \\ &= \frac{363}{5}. \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده برابر با $363/5$ ژول است. ▲

انتگرال مذکور در رابطه (۸) انتگرال منحنی الخط نامیده می‌شود و معمولاً به صورت نمادی زیر نوشته می‌شود

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

صورت نمادی فوق از اینجا به دست آمده است که چون معادلات پارامتری C عبارت‌اند از $x = f(t)$ و $y = g(t)$ ، پس $dx = f'(t) dt$ و $dy = g'(t) dt$ ؛ در این مورد، تعریف رسمی زیر را داریم.

۲۰۶.۱۹ تعریف فرض کنید M و N توابعی باشند از دو متغیر x و y به قسمی که روی قرص باز B در R^2 پیوسته باشند. همچنین فرض کنید منحنی C واقع در B دارای

معادلات پارامتری زیر باشد

$$x=f(t) \quad y=g(t) \quad a \leq t \leq b$$

به طوری که f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته باشند. در این صورت انتگرال منحنی الخط $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ روی C باضابطه زیر معین می شود

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy \\ = \int_a^b [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt. \end{aligned}$$

و یا با نمادگذاری برداری،

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy \\ = \int_a^b \langle M(f(t), g(t)), N(f(t), g(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

○ نمونه ۱ در مثال ۱، W با انتگرال منحنی الخط زیر داده شد

$$\int_C (x^2 + y^2)dx + 3x^2y dy$$

○ که در آن C قوسی از سهمی $y = x^2$ از $(-1, 1)$ تا $(2, 4)$ است.

اگر معادله C به صورت $y = F(x)$ باشد، آنگاه x را می توان به عنوان پارامتر به جای t به کار برد. همین طور، اگر معادله C به صورت $x = G(y)$ باشد، می توان از y به عنوان پارامتر به جای t استفاده نمود.

○ نمونه ۲ در مثال ۱ و نمونه ۱، معادله C ، $y = x^2$ است که به صورت $y = F(x)$ می باشد. بنابراین می توان x را به عنوان پارامتر به جای t به کار برد. پس، در انتگرال مذکور در نمونه ۱ می توانیم x^2 را به جای y و $2x dx$ را به جای dy قرار دهیم و به دست آوریم

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4)dx + 3x^2x^2(2x dx) \\ &= \int_{-1}^2 (x^2 + x^4 + 6x^5) dx. \end{aligned}$$

این انتگرال مشابه دومین انتگرال به دست آمده در حل مثال ۱ است با این تفاوت که در اینجا متغیر x به جای t آمده است.

اگر منحنی C در تعریف انتگرال منحنی الخط، بازه بسته $[a, b]$ روی محور x ها باشد، آنگاه $y = 0$ و $dy = 0$ پس

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_a^b M(x, 0) dx.$$

بنا بر این در چنین حالتی، انتگرال منحنی الخط تبدیل به يك انتگرال معین می شود. در تعریف انتگرال منحنی الخط اگر C دارای معادلات پارامتری زیر باشد

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b$$

لازم است f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته باشند. همچنین، اگر علاوه بر شرط پیوستگی، $f'(t)$ و $g'(t)$ در هیچ نقطه واقع در بازه باز (a, b) با هم صفر نباشند، آنگاه گوییم C روی $[a, b]$ هموار است. اگر بازه I را بتوان به تعداد متناهی زیر بازه طوری افزایش کرد که C روی آنها هموار باشد، گوییم C روی I قطعه قطعه هموار است.

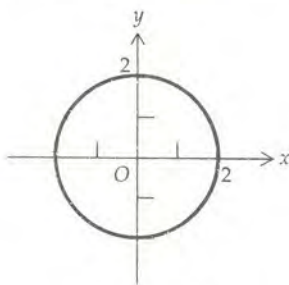
○ نمونه ۳

(الف) منحنی تعریف شده با معادلات پارامتری

$$x = 2 \cos t \quad y = 2 \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

يك دایره است که مرکزش در مبدأ و شعاعش ۲ است. شکل ۲۰۶.۱۹ را ببینید. برای این منحنی داریم

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos t & g(t) &= 2 \sin t \\ f'(t) &= -2 \sin t & g'(t) &= 2 \cos t. \end{aligned}$$



شکل ۲۰۶.۱۹

چون f' و g' به ازای تمام t ها پیوسته هستند و $f'(t)$ و $g'(t)$ هیچ جا با هم صفر نیستند، این دایره يك منحنی همواره است.
(ب) منحنی تعریف شده با معادلات پارامتری

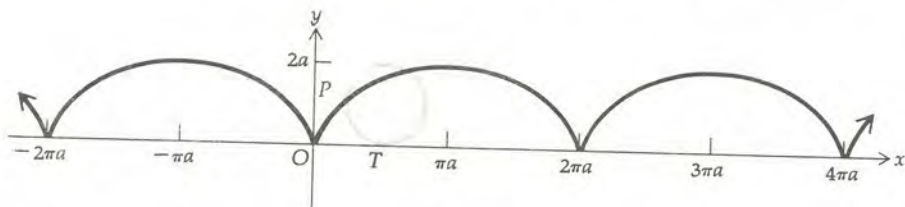
$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t) \quad t \in \mathbb{R}$$

يك چرخزاد است. این منحنی در بخش ۴.۱۶ مورد بحث قرار گرفت و نموداری از آن در بازه $[-2\pi a, 2\pi a]$ در شکل ۳.۶.۱۹ نشان داده شده است. برای این چرخزاد داریم

$$f(t) = a(t - \sin t) \quad g(t) = a(1 - \cos t)$$

$$f'(t) = a(1 - \cos t) \quad g'(t) = a \sin t.$$

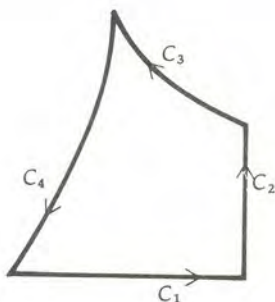
توابع f' و g' به ازای تمام t ها پیوسته هستند ولی وقتی $t = 2\pi n$ ، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است، $f'(t)$ و $g'(t)$ هر دو صفرند. بنابراین چرخزاد هموار نیست. با این حال، این چرخزاد قطعه قطعه هموار است چون روی هر زیر بازه ای همانند $[2\pi n, 2\pi(n+1)]$ ، که در آن n عدد صحیح دلخواهی است، هموار است.



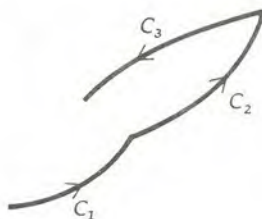
○

شکل ۳.۶.۱۹

شکلهای ۴.۶.۱۹ و ۵.۶.۱۹ دو منحنی قطعه قطعه هموار دیگر را نشان می دهند.



شکل ۵.۶.۱۹



شکل ۴.۶.۱۹

می‌توان مفهوم انتگرال منحنی الخط را طوری تعمیم داد که منحنیهای قطعه‌قطعه هموار را نیز دربر بگیرد.

۳.۶.۱۹ تعریف فرض کنید C متشکل از قوسهای هموار $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد. در این صورت انتگرال منحنی الخط $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ روی C به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy = \sum_{i=1}^n \left(\int_{C_i} M(x, y)dx + N(x, y)dy \right).$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی الخط

$$\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$$

روی منحنی C که متشکل از پاره‌خط بین $(-3, -2)$ و $(1, 0)$ و قوس دایره $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول از $(1, 0)$ تا $(0, 1)$ در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت است.

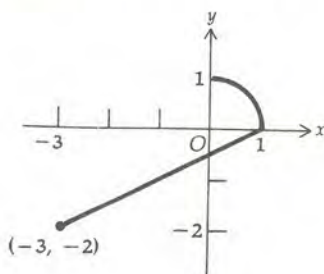
حل شکل ۶.۶.۱۹ منحنی C متشکل از قوسهای C_1 و C_2 را نشان می‌دهد. قوس C_1 پاره‌خط است. معادله خط ماربر $(-3, -2)$ و $(1, 0)$ عبارت است از $x - 2y = 1$. بنابراین C_1 را می‌توان به صورت پارامتری زیر نشان داد.

$$x = 1 + 2t \quad y = t \quad -2 \leq t \leq 0.$$

قوس C_2 را که قوس ربع اول دایره $x^2 + y^2 = 1$ است می‌توان به صورت پارامتری زیر نوشت

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

با به کارگیری تعریف ۲.۶.۱۹ در مورد هر یک از قوسهای C_1 و C_2 خواهیم داشت



شکل ۶.۶.۱۹

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_1} yxy \, dx + (yx^2 - yxy) \, dy \\
 &= \int_{-1}^0 y(1+y)t(y \, dt) + [y(1+y)^2 - y(1+y)t] \, dt \\
 &= \int_{-1}^0 (\lambda t + 1 \, \epsilon t^2 + 2 + \lambda t + \lambda t^2 - y t - \epsilon t^2) \, dt \\
 &= \int_{-1}^0 (1 \lambda t^2 + 1 \, \epsilon t + 2) \, dt \\
 &= \left[\frac{1}{3} \lambda t^3 + \frac{1}{2} \epsilon t^2 + 2t \right]_{-1}^0 \\
 &= -(-\frac{1}{3} \lambda + \frac{1}{2} \epsilon - 2) \\
 &= 2\frac{1}{2} .
 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
 & \int_{C_1} yxy \, dx + (yx^2 - yxy) \, dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} y \cos t \sin t (-\sin t \, dt) \\
 & \quad + [y \cos^2 t - y \cos t \sin t](\cos t \, dt) \\
 &= \int_0^{\pi/2} (-y \cos t \sin^2 t + y \cos^3 t - y \cos^2 t \sin t) \, dt \\
 &= \int_0^{\pi/2} [-y \cos t \sin^2 t + y \cos t (1 - \sin^2 t) \\
 & \quad - y \cos^2 t \sin t] \, dt. \\
 &= \int_0^{\pi/2} (y \cos t - 2 \cos t \sin^2 t - y \cos^2 t \sin t) \, dt \\
 &= \left[y \sin t - \frac{2}{3} \sin^3 t + \cos^3 t \right]_0^{\pi/2} \\
 &= y - y - 1 \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

پس، بنا به تعریف ۳.۶.۱۹،

$$\int_C 4xy \, dx + (2x^2 - 3xy) \, dy = 26 + (-1)$$

▲

$$= 25.$$

مفهوم انتگرال منحنی الخط را می‌توان به سه بعد نیز تعمیم داد.

۴.۶.۱۹ تعریف فرض کنید M ، N ، و R توابعی باشند از سه متغیر x ، y ، و z که روی قرص باز B در R^3 پیوسته باشند. همچنین فرض کنید منحنی C واقع در B دارای معادلات پارامتری

$$x=f(t) \quad y=g(t) \quad z=h(t) \quad a \leq t \leq b$$

باشد به طوری که f' ، g' ، و h' روی $[a, b]$ پیوسته باشند. در این صورت انتگرال منحنی الخط $\int_C M(x, y, z) \, dx + N(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$ با ضابطه زیر معین می‌شود

$$\begin{aligned} & \int_C M(x, y, z) \, dx + N(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz \\ &= \int_a^b [M(f(t), g(t), h(t))f'(t) + N(f(t), g(t), h(t))g'(t) \\ & \quad + R(f(t), g(t), h(t))h'(t)] \, dt \end{aligned}$$

و یا با استفاده از نمادهای برداری،

$$\begin{aligned} & \int_C M(x, y, z) \, dx + N(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz \\ &= \int_a^b \langle M(f(t), g(t), h(t)), N(f(t), g(t), h(t)), R(f(t), g(t), h(t)) \rangle \cdot \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle \, dt. \end{aligned}$$

می‌توانیم کار انجام شده توسط یک میدان نیرو را برای حرکت دادن شیئی در امتداد یک منحنی در R^3 ، به عنوان انتگرال منحنی الخط به شکلی که در تعریف ۴.۶.۱۹ آمد، تعریف کنیم.

مثال ۳ شیئی ختم درجه سوم نامسطح زیر را می‌پیماید

$$R(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

اگر میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + x \sin \pi y^2\mathbf{k}$ باعث حرکت شیئی باشد، کل کار انجام شده را به دست آورید. فرض کنید قوس بر حسب متر و نیرو بر حسب نیوتن اندازه گیری شود.

حل چون $M(x, y, z) = e^x$ ، $h(t) = t^3$ ، $g(t) = t^2$ ، $f(t) = t$

$N(x, y, z) = xe^z$ و $N(x, y, z) = xe^z$ پس

$$N(f(t), g(t), h(t)) = te^{t^3}, \quad M(f(t), g(t), h(t)) = e^t$$

و

$$R(f(t), g(t), h(t)) = t \sin \pi t^4$$

پس، اگر کار انجام شده W ژول باشد، از انتگرال منحنی الخط مذکور در تعریف ۲.۶.۱۹ داریم

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 [(e^t)(dt) + (te^{t^3})(2t dt) + (t \sin \pi t^4)(2t^3 dt)] \\ &= \int_0^1 (e^t + 2t^2 e^{t^3} + 2t^4 \sin \pi t^4) dt \\ &= \left[e^t + \frac{2}{3} e^{t^3} - \frac{2}{4\pi} \cos \pi t^4 \right]_0^1 \\ &= e + \frac{2}{3} e - \frac{2}{4\pi} \cos \pi - 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{4\pi} \cos 0 \\ &= \frac{5}{3} e + \frac{2}{2\pi} - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده برابر است با $\left[\frac{5}{3}(e-1) + \frac{2}{2\pi} \right]$ ژول. $\blacktriangle$

تمرینهای ۶.۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۲۲، انتگرال منحنی الخط را روی منحنی داده شده به دست آورید.

۱. $\int_C (x^2 + xy)dx + (y^2 - xy)dy$: خط $y = x$ از مبدأ تا نقطه $(2, 2)$.

۲. انتگرال منحنی الخط تمرین ۱؛ C : سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا نقطه $(2, 2)$.
۳. انتگرال منحنی الخط تمرین ۱؛ C : محور x ها از مبدأ تا $(2, 0)$ و سپس خط $x = 2$ از $(2, 0)$ تا $(2, 2)$.
۴. $\int_C yx^2 dx + (x+y) dy$ ؛ C : خط $y = -x$ از مبدأ تا نقطه $(-1, 1)$.
۵. انتگرال منحنی الخط تمرین ۴؛ C : منحنی $y = -x^3$ از مبدأ تا نقطه $(1, -1)$.
۶. انتگرال منحنی الخط تمرین ۴؛ C : محور y ها از مبدأ تا $(0, -1)$ و سپس خط $y = -1$ از $(0, -1)$ تا $(1, -1)$.
۷. $\int_C 3xy dx + (4x^2 - 3y) dy$ ؛ C : خط $y = 2x + 3$ از $(0, 3)$ تا $(3, 9)$ و سپس سهمی $y = x^2$ از $(3, 9)$ تا $(5, 25)$.
۸. $\int_C 9x^2 y dx + (5x^2 - y) dy$ ؛ C : منحنی $y = x^3 + 1$ از $(1, 2)$ تا $(3, 28)$.
۹. $\int_C y dx + x dy$ ؛ $C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ، $0 \leq t \leq 1$.
۱۰. $\int_C (x - 2y) dx + xy dy$ ؛ $C: \mathbf{R}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
۱۱. $\int_C 2xy dx + (x - 2y) dy$ ؛ $C: \mathbf{R}(t) = \sin t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j}$ ، $0 \leq t \leq \pi$.
۱۲. $\int_C xy dx - y^2 dy$ ؛ $C: \mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ از نقطه $(1, 1)$ تا نقطه $(4, -8)$.
۱۳. $\int_C (x - y) dx + (y + x) dy$ ؛ C : تمام دایره $x^2 + y^2 = 4$.
۱۴. $\int_C y \sin x dx - \cos x dy$ ؛ C : پاره خط از $(\frac{\pi}{2}, 0)$ تا $(\pi, 1)$.
۱۵. $\int_C (xy + x^2) dx + x^2 dy$ ؛ C : سهمی $y = 2x^2$ از مبدأ تا نقطه $(1, 2)$.
۱۶. $\int_C (xy - z) dx + e^x dy + y dz$ ؛ C : پاره خط از $(1, 0, 0)$ تا $(3, 4, 8)$.

$$۱۷. \int_C (x+y) dx + (y+z) dy + (x+z) dz \quad C: \text{پاره خط از مبدأ تا نقطه } (1, 2, 4)$$

$$۱۸. \text{انتگرال منحنی الخط تمرین ۱۶؛ } C: \mathbf{R}(t) = (t+1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$۱۹. \int_C z dx + x dy + y dz \quad C: \text{پیچ مستدیر } \mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$۲۰. \int_C 2xy dx + (6y^2 - xz) dy + 10z dz \quad C: \text{خم درجه سوم نامسطح } \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$۲۱. \text{انتگرال منحنی الخط تمرین ۲۰؛ } C: \text{پاره خط از مبدأ تا نقطه } (0, 0, 1) \text{؛ سپس پاره خط از } (0, 0, 1) \text{ تا } (0, 1, 1) \text{؛ بعد پاره خط از } (0, 1, 1) \text{ تا } (1, 1, 1).$$

$$۲۲. \text{انتگرال منحنی الخط تمرین ۲۰؛ } C: \text{پاره خط از مبدأ تا نقطه } (1, 1, 1).$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۳۶ مطلوب است، کل کار انجام شده در حرکت شیئی در امتداد قوس مفروض C ، اگر نیروی داده شده باعث حرکت باشد. فرض کنید قوس برحسب متر و نیرو برحسب نیوتن اندازه گیری شود.

$$۲۳. \mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} \quad C: \text{پاره خط از مبدأ تا نقطه } (1, 1).$$

$$۲۴. \text{میدان نیروی تمرین ۲۳؛ } C: \text{قوسی از سهمی } y^2 = x \text{ از مبدأ تا نقطه } (1, 1).$$

$$۲۵. \mathbf{F}(x, y) = (y-x)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} \quad C: \text{پاره خط بین نقطه } (1, 1) \text{ و } (2, 2).$$

$$۲۶. \text{میدان نیروی تمرین ۲۵؛ } C: \text{قوسی از سهمی } y = x^2 \text{ از نقطه } (1, 1) \text{ تا } (2, 2).$$

$$۲۷. \text{میدان نیروی تمرین ۲۵؛ } C: \text{پاره خط بین } (1, 1) \text{ و } (2, 2) \text{ و بعد پاره خط بین } (2, 2) \text{ و } (2, 4).$$

$$۲۸. \mathbf{F}(x, y) = -x^2y\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} \quad C: \text{پاره خط بین } (0, 0) \text{ و } (0, a).$$

$$۲۹. \text{میدان نیروی تمرین ۲۸؛ } C: \mathbf{R}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} \quad 0 \leq t < \pi/2$$

$$۳۰. \text{میدان نیروی تمرین ۲۸؛ } C: \text{پاره خط بین } (a, 0) \text{ و } (a, a) \text{ و بعد پاره خط بین } (a, a) \text{ و } (0, a).$$

$$۳۱. \mathbf{F}(x, y, z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k} : C: \text{پاره خط بین مبدأ و نقطه } (1, 1, 1).$$

$$۳۲. \mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k} : C: \text{پاره خط بین مبدأ و نقطه } (4, 0, 3).$$

$$۳۳. \mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + e^z\mathbf{k} : C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2.$$

$$۳۴. \mathbf{F}(x, y, z) = (xyz+x)\mathbf{i} + (x^2z+y)\mathbf{j} + (x^2y+z)\mathbf{k} : C: \text{قوس تمرین ۳۳.}$$

$$۳۵. \text{میدان نیروی تمرین ۳۴: } C: \text{پاره خط بین مبدأ و نقطه } (1, 0, 0); \text{ سپس پاره خط بین } (1, 0, 0) \text{ و } (1, 1, 0); \text{ و بعد پاره خط بین } (1, 1, 0) \text{ و } (1, 1, 1).$$

$$۳۶. \mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (yz-x)\mathbf{k} : C: \mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$$

۷.۱۹ انتگرالهای منحنی الخط مستقل از مسیر

در بخش ۶.۱۹ آموختیم که مقدار يك انتگرال منحنی الخط توسط انتگرال و يك منحنی بین نقاط P_1 و P_2 تعیین می شود. ولی تحت شرایط معینی مقدار انتگرال منحنی الخط فقط بستگی به انتگرال و نقاط P_1 و P_2 داشته و به مسیر از P_1 تا P_2 بستگی ندارد. چنین انتگرال منحنی الخطی را مستقل از مسیر می نامند.

○ نمونه ۱ فرض کنید میدان نیروی به صورت زیر

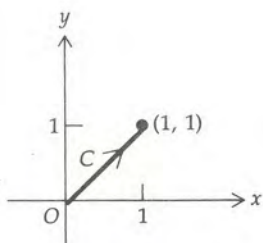
$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}$$

شیئی را از مبدأ تا نقطه $(1, 1)$ حرکت دهد. نشان می دهیم که کل کار انجام شده یکسان است، اگر مسیر حرکت در امتداد (الف) پاره خط واصل بین مبدأ و نقطه $(1, 1)$ باشد یا (ب) قطعه ای از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا $(1, 1)$ باشد و یا (پ) قطعه ای از منحنی $y^3 = x$ از مبدأ تا $(1, 1)$ باشد.

اگر W اندازه کار انجام شده باشد، آنگاه

$$W = \int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy. \quad (۱)$$

(الف) شکل ۱۰.۷.۱۹ را ببینید. معادله C عبارت است از $y = x$. ما x را پارامتر در نظر می گیریم و در معادله (۱) فرض می کنیم $y = x$ و $dy = dx$. آنگاه

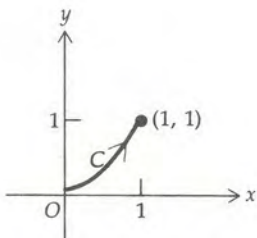


شکل ۱۰.۷.۱۹

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x - 5) dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 + 6x - 1) dx \\ &= \left[x^3 + 3x^2 - x \right]_0^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

(ب) شکل ۲۰.۷.۱۹ را ببینید. معادله C عبارت است از $y = x^2$. مجدداً با در نظر گرفتن x به عنوان پارامتر و با فرض $y = x^2$ و $dy = 2x dx$ در رابطه ۱، خواهیم داشت

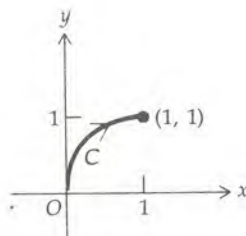
$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (x^2 + 2x + 4) dx + (2x^3 + 4x^2 - 5) 2x dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 8x^3 - 8x + 4) dx \\ &= \left[x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$



شکل ۲۰.۷.۱۹

(پ) شكل ٣.٧.١٩ را بينيد. معادلهٔ C ، $x = y^3$ است. y را پارامتر مي‌گيريم و در رابطهٔ ١ فرض مي‌كنيم $x = y^3$ و $dx = 3y^2 dy$ در اين صورت

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 (y^5 + 2y^3 + 4)3y^2 dy + (2y^4 + 4y - 5) dy \\ &= \int_0^1 (6y^6 + 5y^4 + 12y^2 + 4y - 5) dy \\ &= \left[y^7 + y^5 + 4y^3 + 2y^2 - 5y \right]_0^1 \\ &= 3. \end{aligned}$$



○

شكل ٣.٧.١٩

در نمونهٔ ١ مي‌بينيم كه مقدار انتهريال منحنی‌الخط روي سه مسير متفاوت از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ يكسان است. در حقيقت مقدار انتهريال منحنی‌الخط روي هر منحنی قطعه هموار از مبداء تا $(1, 1)$ يكسان است؛ بنابر اين، اين انتهريال منحنی‌الخط مستقل از مسير مي‌باشد. (اين مطلب در نمونهٔ ٢ كه بعد از قضيهٔ ١٠.٧.١٩ مي‌آيد، ثابت مي‌شود.)
اكنون قضيهٔ ١٠.٧.١٩ را بيان و اثبات مي‌كنيم، كه نه تنها شرايطي را ارائه مي‌كند كه تحت آن شرايط مقدار انتهريال منحنی‌الخط مستقل از مسير است بلكه فرمولي نيز براي يافتن مقدار چنين انتهريال منحنی‌الخطي به‌دست مي‌دهد.

١٠.٧.١٩ قضيه فرض كنيد M و N توابعي از دومتغير x و y باشند كه روي قرص باز $B((x_0, y_0); r)$ در R^2 تعريف مي‌شوند، M_x و N_y روي B پيوسته باشند، و ϕ تابعي به‌صورت زير باشد

$$\nabla \phi(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

فرض كنيد C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهي در B از نقطهٔ (x_1, y_1) تا نقطهٔ (x_2, y_2)

باشد. در این صورت انتگرال منحنی الخط

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

مستقل از مسیر C است و

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1).$$

اثبات اثبات را در حالتی که C هموار باشد ارائه می‌کنیم. اگر C فقط قطعه قطعه هموار باشد، آنگاه هر قطعه را جداگانه در نظر می‌گیریم؛ اثبات زیر برای هر قطعه هموار صادق است.

فرض کنید يك معادله برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad t_1 < t \leq t_2$$

که $(x_1, y_1) = (f(t_1), g(t_1))$ و $(x_2, y_2) = (f(t_2), g(t_2))$. در این صورت بنا بر تعریف انتگرال منحنی الخط داریم

$$\int_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \nabla \phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt. \quad (2)$$

حال به محاسبه انتگرال معین مذکور در طرف راست معادله (۲) می‌پردازیم. چون $\nabla \phi(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ پس $\phi_x(x, y) = M(x, y)$ و $\phi_y(x, y) = N(x, y)$. بنابراین به ازای تمام نقاط (x, y) در B داریم

$$d\phi(x, y) = M(x, y) dx + N(x, y) dy.$$

در این صورت اگر $(f(t), g(t))$ نقطه‌ای روی C باشد، داریم

$$d\phi(f(t), g(t)) = [M(f(t), g(t))f'(t) + N(f(t), g(t))g'(t)] dt$$

و یا، معادلش، به ازای $t_1 \leq t \leq t_2$ ،

$$d\phi(f(t), g(t)) = [\nabla \phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t)] dt. \quad (3)$$

تابع يك متغیری G از t را در نظر بگیرید که برای آن داریم

$$\phi(f(t), g(t)) = G(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (4)$$

در این صورت

$$d\phi(f(t), g(t)) = G'(t) dt. \quad (5)$$

از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود

$$\nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt = G'(t) dt.$$

بنابراین

$$\int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} G'(t) dt.$$

اما بنا بر قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضیه ۲.۵.۶) طرف راست این معادله برابر است با $G(t_2) - G(t_1)$. به علاوه از (۴) داریم

$$G(t_2) - G(t_1) = \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)).$$

بنابراین

$$\int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi(f(t), g(t)) \cdot \mathbf{R}'(t) dt = \phi(f(t_2), g(t_2)) - \phi(f(t_1), g(t_1)). \quad (6)$$

بنابه (۲) و (۶) و به علت اینکه

$$(f(t_1), g(t_1)) = (x_1, y_1) \text{ و } (f(t_2), g(t_2)) = (x_2, y_2)$$

خواهیم داشت

$$\int_c M(x, y) dx + N(x, y) dy = \phi(x_2, y_2) - \phi(x_1, y_1)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. $\square$

به علت شباهت قضیه ۱۰.۷.۱۹ با قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، آن را قضیه بنیادی انتگرال منحنی الخط می‌نامند.

○ نمونه ۲ از قضیه ۱۰.۷.۱۹ برای محاسبه انتگرال منحنی الخط مذکور در نمونه ۱ استفاده می‌کنیم. انتگرال منحنی الخط برابر است با

$$\int_c (y^3 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy.$$

از نمونه ۱ در بخش ۵.۱۹ نتیجه می‌شود که اگر

$$\phi(x, y) = y^3 x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$$

آنگاه

$$\nabla\phi(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}.$$

پس مقدار انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر است، و C می تواند هر منحنی قطعه قطعه هموار از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ باشد. لذا بنا بر قضیه ۱۰.۷.۱۹ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy &= \phi(1, 1) - \phi(0, 0) \\ &= 3 - 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

○

که با نتیجه نمونه ۱ مطابقت دارد.

اگر $\mathbf{F}$ تابعی برداری با ضابطه زیر باشد

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \quad (۷)$$

و

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi(x, y) \quad (۸)$$

آنگاه $\mathbf{F}$ میدان گرادیان و ϕ تابع پتانسیل نامیده می شوند، و $\phi(x, y)$ پتانسیل $\mathbf{F}$ در (x, y) است. به علاوه، اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد که در معادله (۸) صدق کند، آنگاه $\mathbf{F}$ را یک میدان برداری پایستار می نامند. همچنین وقتی که تابعی مساوند $\mathbf{F}$ به معادله (۷) یک میدان گرادیان باشد، آنگاه عبارت $M(x, y) dx + N(x, y) dy$ را دیفرانسیل کامل نامند؛ این اصطلاح، اصطلاح مناسبی است چون $M(x, y) dx + N(x, y) dy = d\phi$.

○ نمونه ۳ در نمونه ۱ میدان نیروی زیر را داشتیم

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 + 2x + 4)\mathbf{i} + (2xy + 4y - 5)\mathbf{j}.$$

در نمونه ۲ تابع ϕ با ضابطه زیر تعریف شد

$$\phi(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y.$$

چون

$$\nabla\phi(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$$

نتیجه می شود که $\mathbf{F}$ یک میدان نیروی پایستار، و ϕ یک تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ است. درحالت

خاص چون $\phi(2, 1) = 11$ ، پتانسیل F در $(2, 1)$ برابر است با ۱۱. همچنین

$$(y^2 + 2x + 2)dx + (2xy + 2y - 5)dy$$

یک دیفرانسیل کامل و برابر با $d\phi$ است. ○

مثال ۱ انتگرال منحنی الخط

$$\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin y)dy$$

را در صورتی که C قوس دایره $\mathbf{R}(t) = \pi \cos t \mathbf{i} + \pi \sin t \mathbf{j}$ واقع در ربع اول باشد و $0 \leq t \leq \pi/2$ ، محاسبه کنید.

حل در مثال ۲ مذکور در بخش ۵.۱۹ نشان دادیم که

$$\nabla(xe^{-y} - x^2 + \cos y) = (e^{-y} - 2x)\mathbf{i} - (xe^{-y} + \sin y)\mathbf{j}.$$

بنابراین، با ضابطه $\phi(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos y$ از قضیه ۱۰.۷.۱۹ استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin y)dy &= \phi(0, \pi) - \phi(\pi, 0) \\ &= \cos \pi - (\pi - \pi^2 + 1) \\ &= \pi^2 - \pi - 2. \end{aligned}$$

اگر مقدار انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر باشد، ضرورتی ندارد که یک تابع پتانسیل چون ϕ پیدا کنیم. در مثال بعد، فرایند مربوطه را نشان می‌دهیم.

مثال ۲ نشان دهید که مقدار انتگرال منحنی الخط زیر مستقل از مسیر است و آن را محاسبه کنید

$$\int_C \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy.$$

در اینجا C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی از نقطه $(5, -1)$ تا نقطه $(9, -3)$ است.

حل فرض کنید $M(x, y) = 1/y$ و $N(x, y) = -x/y^2$. در این صورت

$$N_x(x, y) = -\frac{1}{y^2} \quad \text{و} \quad M_y(x, y) = -\frac{1}{y^2}$$

چون $M_y(x, y) = N_x(x, y)$ ، از قضیه ۱۰۵.۹ نتیجه می گیریم که $\mathbf{j} - (x/y^2)\mathbf{i} - (1/y)\mathbf{i}$ یک گرادیان است، و بنابراین مقدار انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر است. پاره خط واصل $(1, -1)$ و $(9, -3)$ را به عنوان مسیر در نظر می گیریم. معادله این خط عبارت است از $x + 2y = 3$ ، لذا معادلات پارامتری این خط به صورت زیر خواهد بود

$$x = 3 + 2t \quad y = -t \quad 1 \leq t \leq 3.$$

با به کارگیری تعریف ۲.۶.۱۹ مقدار انتگرال منحنی الخط را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy &= \int_1^3 \langle M((3+2t), -t), N((3+2t), -t) \rangle \\ &\quad \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left\langle -\frac{1}{t}, -\frac{3+2t}{t^2} \right\rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle dt \\ &= \int_1^3 \left(-\frac{2}{t} + \frac{3+2t}{t^2} \right) dt \\ &= \int_1^3 \frac{3}{t^2} dt \\ &= -\frac{3}{t} \Big|_1^3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

نتایج این بخش را می توان در مورد توابع سه متغیری تعمیم داد. صورت و اثبات قضیه زیر مشابه با قضیه ۱۰۷.۱۹ است. اثبات به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۳۱ را ببینید).

۲۰۷.۱۹ قضیه فرض کنید M, N ، و R توابعی از سه متغیر x, y, z باشند که روی گوی باز $B((x_0, y_0, z_0); r)$ در R^3 تعریف شده اند؛ $M_x, M_y, M_z, N_x, N_y, N_z, R_x, R_y$ و R_z روی B پیوسته اند؛ و

$$\nabla\phi(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

فرض کنید C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی در B از نقطه (x_1, y_1, z_1) تا نقطه (x_2, y_2, z_2) باشد. در این صورت انتگرال منحنی الخط

$$\int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

مستقل از مسیر C است و داریم

$$\int_C M(x, y, z) dx + N(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1).$$

○ نمونه ۴ در مثال ۳ از بخش ۵.۱۹ نشان دادیم که بردار

$$(e^x \sin z + 2yz)\mathbf{i} + (2xz + 2y)\mathbf{j} + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2)\mathbf{k}$$

گرادیانی چون $\nabla f(x, y, z)$ است و

$$f(x, y, z) = e^x \sin z + 2xyz + y^2 + z^3 + C.$$

بنابراین، اگر C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی از $(0, 0, 0)$ تا $(1, -2, \pi)$ باشد، آنگاه از قضیه ۲.۷.۱۹ نتیجه می شود که انتگرال منحنی الخط

$$\int_C (e^x \sin z + 2yz) dx + (2xz + 2y) dy + (e^x \cos z + 2xy + 3z^2) dz$$

مستقل از مسیر است و مقدارش برابر است با

$$f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) = (e \sin \pi - 4\pi + 4 + \pi^3) - 0$$

○

$$= \pi^3 - 4\pi + 4.$$

مانند حالت توابع دومتغیری، اگر $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ ، آنگاه $\mathbf{F}$ يك میدان گرادیان، ϕ يك تابع پتانسیل، و $\phi(x, y, z)$ پتانسیل $\mathbf{F}$ در (x, y, z) است. اگر $\mathbf{F}$ يك میدان گرادیان باشد، در این صورت $\mathbf{F}$ يك میدان برداری پایستار است. همچنین اگر $\mathbf{F}$ يك میدان گرادیان باشد که با ضابطه

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

تعریف شود، آنگاه عبارت $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ دیفرانسیل کامل است.

مثال ۳ اگر F یک میدان برداری باشد که با ضابطه

$$F(x, y, z) = (z^2 + 1)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$$

تعریف شود، ثابت کنید F پایستار است و یک تابع پتانسیل پیدا کنید.

حل برای اینکه معلوم کنیم F پایستار است، با استفاده از قضیه ۲.۵.۱۹ معلوم می‌کنیم که F یک گرادیان است. فرض کنید $M(x, y, z) = z^2 + 1$ ، $N(x, y, z) = 2yz$ و $R(x, y, z) = 2xz + y^2$ در این صورت

$$\begin{aligned} M_y(x, y, z) &= 0 & M_z(x, y, z) &= 2z & N_x(x, y, z) &= 0 \\ N_z(x, y, z) &= 2y & R_x(x, y, z) &= 2z & R_y(x, y, z) &= 2y. \end{aligned}$$

بنابراین $M_z(x, y, z) = R_x(x, y, z)$ ، $M_y(x, y, z) = N_z(x, y, z)$ و $N_x(x, y, z) = R_y(x, y, z)$. پس بنا به قضیه ۲.۵.۱۹ نتیجه می‌گیریم که F یک گرادیان است و لذا یک میدان برداری پایستار است. حال یک تابع پتانسیل ϕ طوری پیدا می‌کنیم که $F(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ ؛ پس

$$\begin{aligned} \phi_x(x, y, z) &= z^2 + 1 & \phi_y(x, y, z) &= 2yz \\ \phi_z(x, y, z) &= 2xz + y^2. \end{aligned} \quad (9)$$

با انتگرال‌گیری از هر دو طرف معادله اول از معادلات (۹) نسبت به x ، داریم

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + g(y, z). \quad (10)$$

از دو طرف معادله (۱۰) نسبت به y مشتق‌گیری می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\phi_y(x, y, z) = g_y(y, z). \quad (11)$$

با مساوی قرار دادن طرف راست معادله (۱۱) و طرف راست دومین معادله از معادلات (۹)، داریم

$$g_y(y, z) = 2yz.$$

حال با انتگرال‌گیری از دو طرف این معادله نسبت به y به دست می‌آوریم

$$g(y, z) = y^2z + h(z). \quad (12)$$

از قراردادن طرف راست (۱۲) در (۱۰) به دست می آید

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + h(z). \quad (13)$$

نسبت به z از دوطرف (۱۳) مشتق جزئی می گیریم و خواهیم داشت

$$\phi_z(x, y, z) = 2xz + y^2 + h'(z). \quad (14)$$

با مساوی قراردادن طرفهای راست (۱۴) و سومین معادله از معادلات (۹) به دست می آوریم

$$2xz + y^2 + h'(z) = 2xz + y^2$$

$$h'(z) = 0$$

$$h(z) = C. \quad (15)$$

با قراردادن مقدار از (۱۵) در (۱۳) تابع پتانسیل خواسته شده ϕ به صورت زیر به دست می آید

$$\Delta \quad \phi(x, y, z) = xz^2 + x + y^2z + C.$$

تمرینهای ۷.۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، ثابت کنید که میدان برداری داده شده، پایستار است و یک تابع پتانسیل بیاورد.

$$1. \quad F(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

$$2. \quad F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

$$3. \quad F(x, y) = e^x \sin y \mathbf{i} + e^x \cos y \mathbf{j}$$

$$4. \quad F(x, y) = (\sin y \sinh x + \cos y \cosh x)\mathbf{i} \\ + (\cos y \cosh x - \sin y \sinh x)\mathbf{j}$$

$$5. \quad F(x, y) = (2xy^2 - y^3)\mathbf{i} + (2x^2y - 3xy^2 + 2)\mathbf{j}$$

$$6. \quad F(x, y) = (3x^2 + 2y - y^2e^x)\mathbf{i} + (2x - 2ye^x)\mathbf{j}$$

$$7. \quad F(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - 3z)\mathbf{j} + (z + 3y)\mathbf{k}$$

$$8. \quad F(x, y, z) = (2y^2 - 8xz^2)\mathbf{i} + (6xy^2 + 1)\mathbf{j} - (8x^2z + 3z^2)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x \cos y - 3)\mathbf{i} - (x^2 \sin y + z^2)\mathbf{j} - (2yz - 2)\mathbf{k} \quad ۹.$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\tan y + 2xy \sec z)\mathbf{i} + (x \sec^2 y + x^2 \sec z)\mathbf{j} + \sec z(x^2 y \tan z - \sec z)\mathbf{k} \quad ۱۰.$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۲۰، از نتایج تمرینهای ذکر شده استفاده کنید و ثابت کنید که مقدار انتگرال منحنی الخط مفروض مستقل از مسیر است. سپس با به کارگیری قضیه ۱۰.۷.۱۹ یا قضیه ۲.۷.۱۹ با استفاده از تابع پتانسیل به دست آمده در تمرینهای ذکر شده، انتگرال منحنی الخط را محاسبه کنید. در هر تمرین، C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی از نقطه A تا نقطه B می باشد.

$$۱۱. \int_C y dx + x dy \quad A: \text{نقطه } (1, 2) \text{ و } B: \text{نقطه } (3, 2); \text{ تمرین ۱.}$$

$$۱۲. \int_C x dx + y dy \quad A: \text{نقطه } (-5, 2) \text{ و } B: \text{نقطه } (1, 3); \text{ تمرین ۲.}$$

$$۱۳. \int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy \quad A: \text{نقطه } (0, 0) \text{ و } B: \text{نقطه } (2, \pi/2); \text{ تمرین ۳.}$$

۱۴

$$\int_C (\sin y \sinh x + \cos y \cosh x) dx + (\cos y \cosh x - \sin y \sinh x) dy$$

$A: \text{نقطه } (1, 0) \text{ و } B: \text{نقطه } (2, \pi); \text{ تمرین ۴.}$

$$۱۵. \int_C (2xy^2 - y^3) dx + (2x^2y - 3xy^2 + 2) dy \quad A: \text{نقطه } (-3, -1) \text{ و } B: \text{نقطه } (1, 2); \text{ تمرین ۵.}$$

$$۱۶. \int_C (3x^2 + 2y - y^2 e^x) dx + (2x - 2ye^x) dy \quad A: \text{نقطه } (0, 2) \text{ و } B: \text{نقطه } (1, -3); \text{ تمرین ۶.}$$

$$۱۷. \int_C (x^2 - y) dx - (x - 3z) dy + (z + 3y) dz \quad A: \text{نقطه } (-3, 1, 2) \text{ و } B: \text{نقطه } (3, 0, 4); \text{ تمرین ۷.}$$

$$۱۸. \int_C (2y^2 - 4xz^2) dx + (6xy^2 + 1) dy - (4x^2z + 3z^2) dz \quad A: \text{نقطه } (2, 0, 0) \text{ و } B: \text{نقطه } (3, 2, 1); \text{ تمرین ۸.}$$

۱۹. $\int_C (2x \cos y - 2) dx - (x^2 \sin y + z^2) dy - (2yz - 2) dz$: نقطه A :
 و نقطه B : $(1, \pi, 0)$ ؛ تمرین ۹.

۲۰. $\int_C (\tan y + 2xy \sec z) dx + (x \sec^2 y + x^2 \sec z) dy$
 $+ \sec z (x^2 \tan z - \sec z) dz$
 نقطه A : $(2, \pi/4, 0)$ و نقطه B : $(3, \pi, \pi)$ ؛ تمرین ۱۰.

در تمرینهای ۲۱ تا ۳۰، نشان دهید که مقدار انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر است و به روش مناسبی مقدار آن را محاسبه کنید. در هر تمرین، C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی از نقطه A تا نقطه B است.

۲۱. $\int_C (2y - x) dx + (y^2 + 2x) dy$: نقطه A : $(0, -1)$ و نقطه B : $(1, 2)$.

۲۲. $\int_C (\ln x + 2y) dx + (e^y + 2x) dy$: نقطه A : $(3, 1)$ و نقطه B : $(1, 3)$.

۲۳. $\int_C \tan y dx + x \sec^2 y dy$: نقطه A : $(-2, 0)$ و نقطه B : $(2, \pi/4)$.

۲۴. $\int_C \sin y dx + (\sin y + x \cos y) dy$: نقطه A : $(-2, 0)$ و نقطه B : $(2, \pi/6)$.

۲۵. $\int_C \frac{2y}{(xy+1)^2} dx + \frac{2x}{(xy+1)^2} dy$: نقطه A : $(0, 2)$ و نقطه B : $(1, 0)$.

۲۶. $\int_C \frac{x}{x^2+y^2+z^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2+z^2} dy + \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dz$: نقطه A :
 و نقطه B : $(1, 2, 3)$ و $(1, 0, 0)$.

۲۷. $\int_C (y+z) dx + (x+z) dy + (x+y) dz$: نقطه A : $(0, 0, 0)$ و نقطه B :
 $(1, 1, 1)$.

۲۸. $\int_C (yz+x) dx + (xz+y) dy + (xy+z) dz$: نقطه A : $(0, 0, 0)$ و نقطه B :
 $(1, 1, 1)$.

۲۹.

$$\int_C (e^x \sin y + yz) dx + (e^x \cos y + z \sin y + xz) dy + (xy - \cos y) dz$$

نقطه $A(2, 0, 1)$ و نقطه $B(0, \pi, 3)$.

$$\int_C (2x \ln yz - 5ye^x) dx - (5e^x - x^2 y^{-1}) dy + (x^2 z^{-1} + 2z) dz$$

نقطه $A(2, 1, 1)$ و نقطه $B(3, 1, e)$.

۳۱. قضیه ۲۰۷.۱۹ را ثابت کنید.

تمرینهای مروری فصل ۱۹

در تمرینهای ۱ تا ۵، مطلوب است مقدار مشتق جهتی در نقطه خاص P_0 برای تابع مفروض در جهت U .

۱. $P_0 = (5, 10)$; $U = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$; $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 1$

۲. $P_0 = (2, -2)$; $U = \frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$; $g(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

۳. $P_0 = (0, 3)$; $U = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j$; $h(x, y) = e^x + y^2 \cos x$

۴. $P_0 = (1, -2)$; $U = \cos \pi i + \sin \pi j$; $f(x, y) = x^2 - 2x^2 y + \ln x$

۵. $U = -\frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$; $f(x, y, z) = xy^2z - 3xyz + 2xz^2$

$P_0 = (2, 1, 1)$

در تمرینهای ۶ تا ۹، مطلوب است (الف) گرادیان f در P_0 ؛ (ب) آهنگ تغییر مقدار تابع در جهت U در P_0 .

۶. $P_0 = (-3, 1)$; $U = \cos \frac{\pi}{6}i + \sin \frac{\pi}{6}j$; $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^2$

۷. $P_0 = (1, 1)$; $U = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$; $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(x^2 + y^2)$

$$P_0 = (1, 2, 3) ; U = \frac{6}{\sqrt{14}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{k} ; f(x, y, z) = yz - y^2 - xz \quad ۸$$

$$; U = \frac{3}{\sqrt{14}} \mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}} \mathbf{k} ; f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xyz \quad ۹$$

$$. P_0 = (2, -1, 0)$$

د تمرینهای ۱۰ تا ۱۳، تعیین کنید که بردار، گرادیان است یا نه. اگر هست، تابعی بنیاید که دارای گرادیان مفروض باشد.

$$(e^x \tan y - \sec y) \mathbf{i} - \sec y (x \tan y - e^x \sec y) \mathbf{j} \quad ۱۰$$

$$2xe^{x^2} \ln y \mathbf{i} + \frac{e^{x^2}}{y} \mathbf{j} \quad ۱۱$$

$$y(\cos x - z \sin x) \mathbf{i} + z(\cos x + \sin y) \mathbf{j} - (\cos y - y \cos x) \mathbf{k} \quad ۱۲$$

$$\left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{1}{x^2} \right) \mathbf{i} + \frac{1}{x+z} \mathbf{j} + \left(\frac{-y}{(x+z)^2} + \frac{2}{z^2} \right) \mathbf{k} \quad ۱۳$$

د تمرینهای ۱۴ تا ۱۶، معادله صفحه مماس و معادلات خط قائم بر رویه داده شده را در نقطه مفروض بنیاید.

$$(2, 3, 4) ; 3x^2 + 2xy - y^2 = 15 \quad ۱۴$$

$$(2, 1, 2) ; x^2 + 2y + z = 8 \quad ۱۵$$

$$(1, 3, 7) ; z = x^2 + 2xy \quad ۱۶$$

۱۷. مطلوب است معادلات متقارن خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $x^2 - 3xy + y^2 = z$ و $2x^2 + y^2 - 3z + 27 = 0$ در نقطه $(1, -2, 11)$.

۱۸. مطلوب است معادلات خط مماس بر منحنی حاصل از تقاطع رویه $z = 3x^2 + y^2 + 1$ با صفحه $x = 2$ در نقطه $(2, -1, 14)$.

۱۹. معادله $z = 900 - 3xy$ معادله رویه يك کوه است که در آن، فاصله برحسب متر اندازه گیری می شود، محور x ها متوجه غرب است، و محور y ها به جنوب اشاره می کند. کوهنوردی در نقطه متناظر با $(50, 4, 300)$ قرار دارد. (الف) جهت تندترین صعود چیست؟ (ب) وقتی کوهنورد در جهت شمال حرکت کند، وی صعود

می‌کند یا نزول؟ (پ) درچه جهتی کوه‌نورد در يك مسیر تر از حرکت خواهد کرد؟

۳۵. اگر $f(x, y, z) = \sinh(x+z) \cosh y$ ، مطلوب است آهنگ تغییر $f(x, y, z)$ نسبت به فاصله در R^3 در نقطه $P(1, 1, 0)$ در جهت $\overrightarrow{PQ}$ ؛ در صورتی که Q نقطه $(-1, 0, 2)$ باشد.

در تمرینهای ۲۱ و ۲۲، اکستریمهای نسبی f را در صورت وجود تعیین کنید.

$$۳۱. f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$$

$$۳۲. f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 + 10x - 11y$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، نقطه (نقاط) بحرانی تابع مفروض را با در نظر گرفتن قید داده شده بیابید. معین کنید که آیا تابع در این نقاط بحرانی، دارای ماکسیم نسبی یا مینیمم نسبی هست یا خیر.

$$۳۳. f(x, y) = 5 + x^2 - y^2 \quad \text{با قید} \quad x^2 - 2y^2 = 5$$

$$۳۴. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{با قید} \quad x^2 - y^2 = 1$$

$$۳۵. f(x, y, z) = y + xz - 2x^2 - y^2 - z^2 \quad \text{با قید} \quad z = 35 - x - y$$

$$۳۶. f(x, y, z) = xz^2 + y^2 \quad \text{با قید} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

۳۷. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، کوتاهترین فاصله بین نقطه $(4, 1, 2)$ از صفحه $x - y + 2z = 0$ را به دست آورید.

۳۸. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، نزدیکترین نقطه رویه $z = x^2 + y^2 + 2$ را به مبدأ پیدا کنید.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، انتگرال منحنی الخط را روی منحنی داده شده محاسبه کنید.

$$۲۹. \int_C (2x + 3y) dx + xy dy; \quad C: \mathbf{R}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$۳۰. \int_C (2x + y) dx + (x - 2y) dy; \quad C: x^2 + y^2 = 9$$

$$۳۱. \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz; \quad C: \mathbf{R}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};$$

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\int_C x e^y dx - x e^z dy + e^z dz; C: \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; 0 \leq t \leq 1. \quad ۳۲$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۶، مطلوب است کل کار انجام شده به وسیله میدان نیروی مفروض در حرکت دادن شیئی در امتداد قوس C . فرض کنید قوسی برحسب متر و نیرو برحسب نیوتن اندازه گیری می شود.

$$y = 3x^2 + 2x + 4 \quad C: F(x, y) = 2x^2y\mathbf{i} + (x^2 + 3y)\mathbf{j} \quad ۳۳$$

از $(0, 4)$ تا $(1, 9)$.

$$C: F(x, y) = xy^2\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} \quad ۳۴$$

از $(0, 2)$ تا $(2, 0)$.

$$C: F(x, y, z) = (xy - z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۳۵$$

پاره خط بین مبدأ و نقطه $(4, 1, 2)$.

$$F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}; C: \mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; 0 \leq t \leq 3 \quad ۳۶$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۰، ثابت کنید که مقدار انتگرال منحنی الخط داده شده مستقل از مسیر است، و مقدار آن را به روش مناسب دلخواهی محاسبه کنید. در هر تمرین، منحنی C منحنی قطعه قطعه هموار دلخواهی از نقطه A تا نقطه B است.

$$\int_C 2xe^y dx + x^2e^y dy \quad ۳۷$$

A برابر با $(1, 0)$ و B برابر با $(3, 2)$ است.

$$\int_C \left(\frac{1}{y} - y\right) dx + \left(-\frac{x}{y^2} - x\right) dy \quad ۳۸$$

A عبارت از $(0, 1)$ و B عبارت از $(6, 3)$ است.

$$\int_C 3y dx + (3x + 4y) dy - 2z dz \quad ۳۹$$

A عبارت از $(0, 1, -1)$ و B عبارت از $(1, 2, 0)$ است.

$$\int_C z \sin y dx + xz \cos y dy + x \sin y dz \quad ۴۰$$

A عبارت از $(0, 0, 0)$ و B عبارت از $(2, 3, \frac{\pi}{4})$ است.

۴۱. مطلوب است ابعاد مکعب مستطیلی با بیشترین حجم که بتوان آن را در بیضیوار

۴۱. فرض کنید اضلاع موازی با محورهای مختصات $x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$ محاط کرد. هستند.

۴۲. سه عدد طوری بیابید که مجموعشان برابر با ۱۰۰ و مجموع مربعاتشان حداقل باشد.

۴۳. دما در هر نقطه دلخواه روی يك ورقه مستدیر گرم شده برابر با T درجه است و

$$T = \frac{44}{x^2 + y^2 + 9}$$

که در آن فاصله از مبدأ در مرکز ورقه بر حسب سانتیمتر اندازه گیری می شود. مطلوب است (الف) آهنگ تغییر دما در نقطه $(2, 3)$ در جهت بردار

$$\cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{6} \mathbf{j}.$$

(ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر T در نقطه $(2, 3)$.

۴۴. دما در هر نقطه (x, y) روی منحنی $1 = 4x^2 + 12y^2$ ، T درجه است و $T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$ نقاطی از منحنی را که دارای بیشترین دما باشد و نیز نقاطی را که دارای کمترین دما باشد، پیدا کنید. همچنین در این نقاط، دما را بیابید.

۴۵. اگر $f(x, y, z) = xyz$ ، مقادیر ماکسیمم و مینیمم f را تحت قیدهای $y = z$ و $x^2 + y^2 = 1$ به دست آورید.

در تمرینهای ۴۶ و ۴۷، ثابت کنید که میدان برداری داده شده پایستدار است و يك تابع پتانسیل به دست آورید.

$$\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x - \sin y) \mathbf{i} - (x \cos y + \cos x) \mathbf{j} \quad ۴۶$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \sec^2 x \mathbf{i} + 2ye^{xz} \mathbf{j} + (3y^2 e^{xz} + 2z \tan x) \mathbf{k} \quad ۴۷$$

۴۸. قطعه سیمی به طول L فوت را به سه قطعه تقسیم می کنیم. یک قطعه را به شکل دایره، قطعه دوم را به شکل مربع، و قطعه سوم را به شکل مثلث متساوی الاضلاع در می آوریم. این سیم را چگونه باید تقسیم کرد تا (الف) مجموع مساحت های سه شکل حاصل کمترین مقدار ممکن را داشته باشد؛ و (ب) مجموع مساحت های سه شکل حاصل بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۴۹. مطلوب است نسبت ابعاد يك جعبه مکعب مستطیلی شرباز که مساحت سطح آن مشخص است و می‌خواهیم حجمش ما کسیم باشد.

۵۰. مطلوب است بیشترین و کوتاها ترین فواصل از مبدأ تا منحنی حاصل از تقاطع رویه‌های $x^2 = 2yz$ و $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 30$.

۵۱. مقدار انتگرال منحنی الخط زیر را به دست آورید

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

که در آن C قوسی از دایره $x^2 + y^2 = 4$ از $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ تا $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ است.

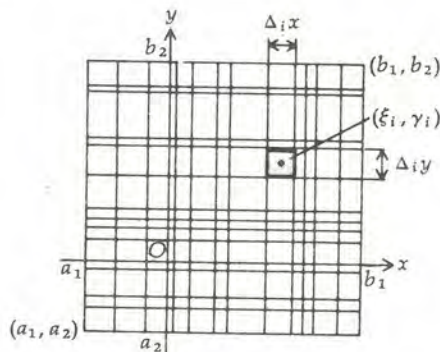
انتگرال گیری چند گانه

۱.۲۰ انتگرال دو گانه

انتگرال معین تابع يك متغیری را می توان در مورد تابع چند متغیری تعمیم داد. برای تمایز انتگرال چند گانه که متضمن تابعی از چند متغیر است از انتگرال تابعی يك متغیری، انتگرال اخیر را انتگرال یگانه می نامیم. نظیر کاربردهای انتگرالهای یگانه که در فصلهای ۷ و ۱۱ ذکر شد، انتگرالهای چند گانه نیز کاربردهایی فیزیکی و هندسی دارند.

در بحث مربوط به انتگرال یگانه لازم شمردیم که تابع بريك بازه بسته در R^1 معین باشد. برای انتگرال دو گانه تابعی از دو متغیر لازم است که تابع بر ناحیه بسته ای در R^2 تعریف بشود. ناحیه بسته ناحیه ای است که شامل مرزش باشد. در این فصل وقتی به يك ناحیه اشاره می کنیم، فرض بر این است که ناحیه بسته است. ساده ترین نوع ناحیه بسته در R^2 يك مستطیل بسته است که در زیر به تعریفش می پردازیم. دو نقطه متمایز $A(a_1, a_2)$ و $B(b_1, b_2)$ را با شرایط $a_1 \leq b_1$ و $a_2 \leq b_2$ در نظر بگیریم. این دو نقطه مستطیلی را مشخص می کنند که اضلاعش موازی با محورهای مختصات اند. به شکل ۱.۱.۲۰ نگاه کنید. این دو نقطه را همراه با نقاط (a_1, b_2) و (b_1, a_2) دئوس مستطیل می نامند. پاره خطهایی که رئوس متوالی را به هم وصل می کنند به اضلاع مستطیل موسوم اند. مجموعه تمام نقاط داخل مستطیل را مستطیل باز، و مجموعه تمام نقاط متعلق به مستطیل باز همراه با نقاط متعلق به اضلاع مستطیل را مستطیل بسته می نامند.

حال ناحیه مستطیلی بسته شکل ۱.۱.۲۰ را با R نمایش می دهیم و فرض می کنیم



شکل ۱۰۱۰۲۰

بر R ، تابعی چون f تعریف شده باشد. ناحیه R را يك ناحیه انتگرال گیری تلقی می کنیم. نخستین گام، معرفی افزازی چون Δ از R است. به موازات محورهای مختصات خطوطی رسم می کنیم و شبکه ای از زیر ناحیه های مستطیلی (مستطیلهای کوچک) به دست می آوریم که R را می پوشانند. نورم این افراز که با $\|\Delta\|$ نمایش داده می شود عبارت است از طول بزرگترین قطر زیر ناحیه های مستطیلی افراز. زیر ناحیه ها را به طریقی دلخواه شماره گذاری می کنیم و تعداد کل آنها را n می نامیم. طول قاعده i امین زیر ناحیه را با $\Delta_i x$ واحد نمایش می دهیم و ارتفاعش را با $\Delta_i y$ واحد. در این صورت اگر مساحت i امین زیر ناحیه مستطیلی $\Delta_i A$ واحد مربع باشد، داریم

$$\Delta_i A = \Delta_i x \cdot \Delta_i y.$$

فرض کنید (ξ_i, γ_i) يك نقطه اختیاری در i امین زیر ناحیه و $f(\xi_i, \gamma_i)$ مقدار تابع به ازای این نقطه باشد. حاصلضرب $\Delta_i A f(\xi_i, \gamma_i)$ را در نظر بگیرید. به هر يك از این n زیر ناحیه چنین حاصلضربی نسبت داده می شود، و مجموع این حاصلضربها عبارت است از

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A. \quad (1)$$

تعداد زیادی مجموع به صورت (۱) وجود دارد زیرا نورم افراز می تواند هر عدد مثبتی باشد و هر نقطه (ξ_i, γ_i) هم نقطه دلخواهی از i امین زیر ناحیه است. اگر با انتخاب افرازهایی با نورمهای به قدر کافی کوچک، بتوان تمام مجموعه های فوق را به اندازه دلخواه به عددی چون L نزدیک کرد، آنگاه L را به عنوان حد این مجموعه ها، وقتی که نورم افراز R به صفر میل می کند، معرفی می کنیم. تعریف زیر را داریم.

۱۰۱۰۲۰ تعریف فرض کنید f تابعی است که بر يك ناحیه مستطیلی بسته چون R تعریف

شده است. عدد L را حد مجموعهای به صورت $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ می نامیم هرگاه L دارای این ویژگی باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر افراز Δ ، با ضابطه $\|\Delta\| < \delta$ و هر انتخاب دلخواهی از نقطه (ξ_i, γ_i) در i امین مستطیل، $i = 1, 2, \dots, n$ ، داشته باشیم

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A - L \right| < \varepsilon.$$

اگر عددی چون L با این ویژگی وجود داشته باشد می نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = L.$$

اگر عددی چون L وجود داشته باشد که در تعریف ۱.۱.۲۰ صدق کند، می توان نشان داد که این عدد یکتاست. اثبات آن با اثبات قضیه (۲.۱.۲) مربوط به یکتایی حد يك تابع مشابه است.

۲.۱.۲۰ تعریف تابعی چون f از دو متغیر را بر يك ناحیه مستطیلی R انتگرال پذیر نامیم هرگاه f بر R تعریف شده و عدد L مذکور در تعریف ۱.۱.۲۰ وجود داشته باشد. عدد L را انتگرال دوگانه f بر R می نامیم و می نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int f(x, y) dA. \quad (2)$$

علامتهای دیگر برای انتگرال دوگانه مذکور در (۲) عبارت اند از

$$\int_R \int f(x, y) dy dx \quad \text{و} \quad \int_R \int f(x, y) dx dy$$

قضیه زیر که بدون اثبات ذکر می شود، شرطی کافی برای انتگرال پذیری تابعی از دو متغیر به دست می دهد.

۳.۱.۲۰ قضیه اگر تابعی چون f از دو متغیر بر ناحیه مستطیلی بسته ای چون R پیوسته باشد، آنگاه f بر R انتگرال پذیر است.

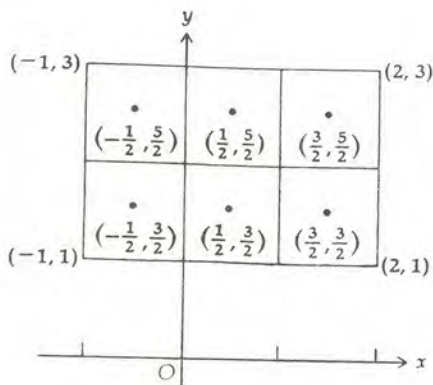
تقریب زدن مقدار انتگرال دوگانه را در مثال زیر نشان می دهیم.

مثال ۱ مقداری تقریبی برای انتگرال دوگانه $\int_R \int (2x^2 - 3y) dA$ بیابید که

در آن، R ناحیه مستطیلی با رئوس $(-1, 1)$ و $(2, 3)$ است. افزای از R را در نظر بگیرید که از خطوط $x=0$ ، $x=1$ و $y=2$ حاصل می‌شود، و نقطه (ξ_i, γ_i) را مرکز i امین زیر ناحیه انتخاب کنید.

حل به شکل ۲۰۱۰۲۰ نگاه کنید که ناحیه R و شش زیر ناحیه مربع شکل آن با طول ضلع یک واحد را نشان می‌دهد. به ازای هر i داریم $\Delta_i A = 1$. در هر زیر ناحیه، نقطه (ξ_i, γ_i) در مرکز مربع واقع است. با ضابطه $f(x, y) = 2x^2 - 3y$ ، یک مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه مفروض عبارت است از

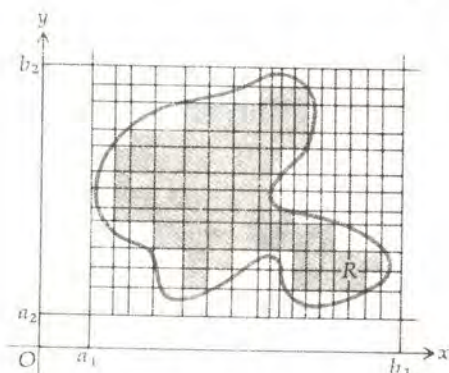
$$\begin{aligned} \int_R \int (2x^2 - 3y) dA &\approx f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot 1 \\ &\quad + f\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot 1 \\ &= -2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 7 \cdot 1 - 7 \cdot 1 \\ &= -25. \end{aligned}$$



شکل ۲۰۱۰۲۰

همان گونه که در مثال ۱ بخش ۲۰۲۰ نشان خواهیم داد، مقدار دقیق انتگرال دوگانه مذکور در مثال ۱ برابر با -25 است.

حال به بررسی انتگرال دوگانه یک تابع بر ناحیه کلیتری می‌پردازیم. در تعریف ۲۰۶۰۷، تابع هموار به عنوان تابعی تعریف شد که مشتق پیوسته داشته باشد، و هر منحنی هموار، نمودار یک تابع هموار است. فرض کنید R ناحیه بسته‌ای باشد که مرزش متشکل



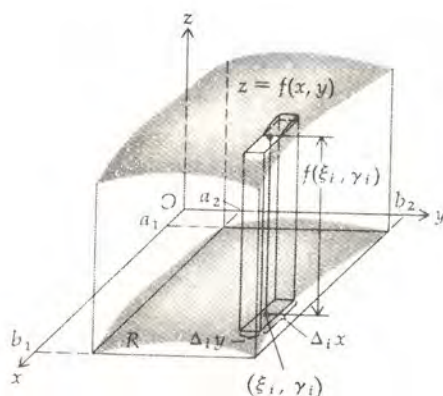
شکل ۳.۱.۲۰

از تعدادی متناهی قوس از منحنیهای هموار است که به هم ملحق شده و یک منحنی بسته تشکیل داده اند. همان گونه که در مورد ناحیه مستطیلی عمل کردیم، خطوطی به موازات محورهای مختصات رسم می کنیم تا یک افراز مستطیلی از ناحیه R به دست آید. از مستطیلهایی که شامل نقاطی خارج از R اند صرف نظر می کنیم و صرفاً آنهایی را در نظر می گیریم که کلاً در R هستند (یعنی آنهایی را که، در شکل ۳.۱.۲۰، سایه زده ایم). تعداد مستطیلهای سایه خورده را n می گیریم و باروشی نظیر روش گفته شده در مورد نواحی مستطیلی عمل می کنیم. تعاریف ۱.۱.۲۰ و ۲.۱.۲۰، در مورد این ناحیه R کلیتر نیز صادق اند. به طور شهودی درک می کنید که وقتی نرم افراز به صفر میل می کند، n بدون کران افزایش می یابد، و مساحت ناحیه محذوف (یعنی، مستطیلهای صرف نظر شده) به صفر نزدیک می شود. در واقع، می توان اثبات کرد که اگر تابعی بر ناحیه ای چون R انتگرال پذیر باشد، حد مجموعهای به صورت (۱) صرف نظر از نحوه تقسیم بندی R ، یکسان است، با این شرط که هر یک از زیر ناحیه ها به شکلی باشد که به آن بتوان مساحتی نسبت داد.

همان گونه که تعبیر هندسی انتگرال تابعی از یک متغیر تنها، اندازه مساحت یک ناحیه مسطح است، تعبیر هندسی انتگرال دو گانه، اندازه حجم یک جسم سه بعدی است. فرض کنید تابع f بر یک ناحیه بسته R واقع در R^2 پیوسته باشد. علاوه بر این، برای سادگی بحث، فرض کنید که $f(x, y)$ بر R نامنفی باشد. نمودار معادله $z = f(x, y)$ رویه ای است که بالای صفحه xy قرار می گیرد؛ شکل ۴.۱.۲۰ را ببینید. این شکل، زیر ناحیه مستطیلی خاصی از R را نشان می دهد که اندازه ابعادش $\Delta_i x$ و $\Delta_i y$ هستند. شکل همچنین جسمی مستطیلی را نشان می دهد که قاعده اش این زیر ناحیه، و اندازه ارتفاعش $f(\xi_i, \gamma_i)$ است. نقطه ای از i امین زیر ناحیه است. حجم این جسم مستطیلی از فرمول

$$\Delta_i V = f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \Delta_i y \quad (3)$$

به دست می آید. عدد مذکور در (۳) اندازه حجم جسم مستطیلی نازکی است که در شکل ۴.۱.۲۰ نشان داده شده است؛ لذا مجموع مذکور در (۱) مجموع اندازه های حجمهای



شکل ۴.۱.۲۰

n تا از این جسمهاست. این مجموع، اندازه تقریبی حجم جسم سه بعدی نشان داده شده در شکل ۴.۱.۲۰ است. این جسم از بالا به وسیله نمودار f ، و از پایین به وسیله ناحیه R واقع در صفحه xy محصور می شود. مجموع مذکور در (۱) عددی را نیز که به وسیله

$$\int_R \int f(x, y) dA$$

معین می شود، تقریب می زند، می توان ثابت کرد که حجم جسم سه بعدی شکل ۴.۱.۲۰ مقدار این انتگرال دوگانه است. این مطلب را بدون ارائه اثبات رسمی به صورت قضیه زیر می آوریم.

۴.۱.۲۰ قضیه فرض کنید تابعی دومتغیری چون f بر ناحیه بسته ای مانند R واقع در صفحه xy پیوسته باشد، و به ازای هر (x, y) در R ، $f(x, y) \geq 0$. اگر اندازه حجم جسمی که قاعده اش ناحیه R ، و ارتفاعش مقدار $f(x, y)$ در نقطه (x, y) از R است، $V(S)$ باشد، آنگاه

$$V(S) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int f(x, y) dA.$$

مثال ۲ حجم جسم محصور بین رویه $y^2 = (1/16)x^2 - (1/9)$ و $f(x, y) = 4$ ، صفحات $x = 3$ و $y = 2$ ، و سه صفحه مختصات را تقریب بزنید. برای یافتن مقداری تقریبی برای انتگرال دوگانه، با رسم خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ و $y = 1$ و انتخاب (ξ_i, γ_i) در مرکز زمین زیر ناحیه، ناحیه واقع در صفحه xy را افراز کنید.

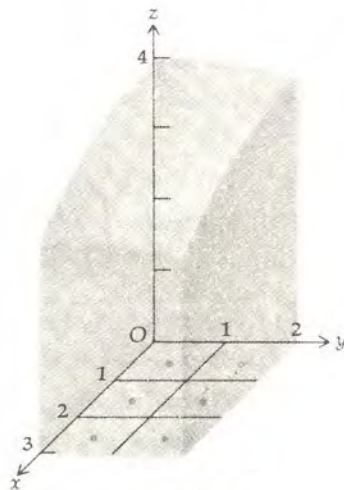
حل جسم در شکل ۵.۱۰۲۰ نشان داده شده است. ناحیه مستطیلی R ، مستطیل واقع در صفحه xy محصور بین محورهای مختصات و خطوط $x=3$ و $y=2$ است. بنابراین قضیه ۴.۱۰۲۰، اگر حجم جسم V واحد مکعب باشد، داریم

$$V = \int_R \int \left(4 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{16}y^2 \right) dA.$$

شکل ۵.۱۰۲۰ نشان می‌دهد که R به شش زیر ناحیه افراز شده است که مربهای با طول ضلع يك واحد هستند. بنابراین، به ازای هر i ، $\Delta_i A = 1$. نقطه (ξ_i, γ_i) در هر زیر ناحیه در مرکز مربع است. لذا مقدار تقریبی V از تقریب انتگرال دوگانه به دست می‌آید. در نتیجه

$$\begin{aligned} V &\approx f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot 1 \\ &\quad + f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot 1 \\ &= \left(4 - \frac{25}{576}\right) + \left(4 - \frac{17}{64}\right) + \left(4 - \frac{409}{576}\right) + \left(4 - \frac{97}{576}\right) \\ &\quad + \left(4 - \frac{25}{64}\right) + \left(4 - \frac{481}{576}\right) \\ &= 24 - \frac{695}{288} \\ &\approx 21,59. \end{aligned}$$

پس مقدار حجم تقریباً ۲۱٫۵۹ واحد مکعب است.



شکل ۵.۱۰۲۰

مقدار دقیق حجم مورد نظر در مثال ۲ برابر مثال ۲ ی مذکور در بخش ۲.۲۰ برابر ۲۱۵ واحد مکعب است.

نظیر ویژگیهای انتگرال معین تابع يك متغیری، انتگرال دوگانه نیز ویژگیهایی دارد که مهمترین آنها را در قضایای زیر ذکر می کنیم.

۵.۱۰۲۰ قضیه اگر c يك عدد ثابت، و تابع f بر ناحیه بسته ای چون R انتگرال پذیر باشد، آنگاه $c f$ بر R انتگرال پذیر است و

$$\int_R \int c f(x, y) dA = c \int_R \int f(x, y) dA.$$

۶.۱۰۲۰ قضیه اگر توابع f و g بر ناحیه بسته ای چون R انتگرال پذیر باشند، آنگاه تابع $f+g$ بر R انتگرال پذیر است و

$$\begin{aligned} \int_R \int [f(x, y) + g(x, y)] dA &= \int_R \int f(x, y) dA \\ &+ \int_R \int g(x, y) dA. \end{aligned}$$

نتیجه قضیه ۶.۱۰۲۰ را می توان به هر تعداد متناهی از توابع انتگرال پذیر تعمیم داد. اثبات قضایای ۵.۱۰۲۰ و ۶.۱۰۲۰ مستقیماً از تعریف انتگرال دوگانه نتیجه می شود. این اثباتها را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۲۳ و ۲۴ را ببینید).

۷.۱۰۲۰ قضیه اگر توابع f و g بر ناحیه بسته ای چون R انتگرال پذیر باشند و به ازای هر (x, y) در R ، $f(x, y) \geq g(x, y)$ ، آنگاه

$$\int_R \int f(x, y) dA \geq \int_R \int g(x, y) dA.$$

قضیه ۷.۱۰۲۰ شبیه قضیه ۸.۳.۶ در مورد انتگرال معین تابعی از يك متغیر تنهاست. اثبات آن هم مشابه است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۲۵ را ببینید).

۸.۱۰۲۰ قضیه فرض کنید f بر ناحیه بسته ای چون R انتگرال پذیر باشد، و m و M دو عدد باشند به قسمی که به ازای هر (x, y) در R ، $m \leq f(x, y) \leq M$. در این صورت اگر A اندازه مساحت ناحیه R باشد، داریم

$$mA \leq \int_R \int f(x, y) dA \leq MA.$$

اثبات قضیه ۸.۱.۲۰ را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۲۶ را ببینید). این اثبات مشابه با اثبات قضیه ۹.۳.۶ و مبتنی بر قضیه ۷.۱.۲۰ است.

۹.۱.۲۰ قضیه فرض کنید تابع f بر ناحیه بسته R پیوسته باشد؛ و فرض کنید ناحیه R متشکل از دو زیر ناحیه R_1 و R_2 باشد که بجز نقاط واقع بر بخشی از مرزهایشان هیچ نقطه مشترکی ندارند. در این صورت،

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{R_1} \int f(x, y) dA + \int_{R_2} \int f(x, y) dA.$$

اثبات قضیه ۹.۱.۲۰ را هم که مبتنی بر تعریف انتگرال دو گانه و قضایای حدی است، به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۲۷ را ببینید).

تمرینهای ۱.۲۰

۱. يك مقدار تقریبی برای انتگرال دو گانه $\int_R \int (3x - 2y + 1) dA$ ، که در آن R ناحیه ای مستطیلی به رئوس $(0, -2)$ و $(3, 0)$ است، بیابید. R را با خطوط $x=1$ ، $x=2$ و $y=-1$ افزایش، و (ξ_i, γ_i) را در مرکز i امین زیر ناحیه انتخاب کنید.

۲. يك مقدار تقریبی برای انتگرال دو گانه $\int_R \int (y^2 - 4x) dA$ بیابید؛ R ناحیه ای مستطیلی به رئوس $(-1, 0)$ و $(1, 3)$ است. R را با خطوط $x=0$ ، $y=1$ و $y=2$ افزایش، و (ξ_i, γ_i) را در مرکز i امین زیر ناحیه انتخاب کنید.

در تمرینهای ۳ تا ۸، يك مقدار تقریبی برای انتگرال دو گانه داده شده بیابید؛ R ناحیه ای مستطیلی به رئوس P و Q است، Δ افزای از R است، و (ξ_i, γ_i) نقطه وسط هر يك از زیر ناحیه هاست.

$$\int_R \int (x^2 + y) dA; P(0, 0), Q(2, 2); \Delta: x_1 = 0, x_2 = 1, \quad ۳.$$

$$x_3 = 2, x_4 = 3, y_1 = 0, y_2 = 1$$

$$\int_R \int (2 - x - y) dA; P(0, 0); Q(6, 2); \Delta: x_1 = 0, x_2 = 2, \quad ۴.$$

$$x_2 = 2, y_1 = 0, y_2 = 2$$

$$\int_R \int (xy + 3y^2) dA; P(-2, 0); Q(4, 6); \Delta: x_1 = -2, \quad ۵.$$

$$x_2 = 0, x_3 = 2, y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 2$$

$$\int_R \int (xy + 3y^2) dA; P(0, -2); Q(6, 4); \Delta: x_1 = 0, \quad ۶.$$

$$x_2 = 2, x_3 = 4, y_1 = -2, y_2 = 0, y_3 = 2$$

$$\int_R \int (x^2y - 2xy^2) dA; P(-3, -2); Q(1, 6); \Delta: x_1 = -3, \quad ۷.$$

$$x_2 = -1, y_1 = -2, y_2 = 0, y_3 = 2, y_4 = 2$$

$$\int_R \int (x^2y - 2xy^2), dA; P(-3, -2); Q(1, 6); \Delta: x_1 = -3, \quad ۸.$$

$$x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 0, y_1 = -2, y_2 = -1, y_3 = 0,$$

$$y_4 = 1, y_5 = 2, y_6 = 3, y_7 = 4, y_8 = 5.$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، مقداری تقریبی برای انتگرال دوگانه مفروض بیابید؛ R ناحیه مستطیلی به رئوس P و Q است، Δ افزای از R است، و (ξ_i, γ_i) یک نقطه دلخواه در هر زیر ناحیه است.

۹. انتگرال دوگانه P, Q ، و Δ همانها هستند که در تمرین ۳ بودند؛

$$(\xi_1, \gamma_1) = (1/2, 1/2) \quad ; \quad (\xi_2, \gamma_2) = (7/4, 0) \quad ; \quad (\xi_3, \gamma_3) = (5/2, 1/4)$$

$$(\xi_4, \gamma_4) = (4, 1) \quad ; \quad (\xi_5, \gamma_5) = (3/4, 7/4) \quad ; \quad (\xi_6, \gamma_6) = (5/4, 3/2)$$

$$(\xi_7, \gamma_7) = (5/2, 2) \quad ; \quad (\xi_8, \gamma_8) = (3, 1)$$

۱۰. انتگرال دوگانه P, Q ، و Δ همانها هستند که در تمرین ۴ بودند؛

$$(\xi_1, \gamma_1) = (1/2, 3/2) \quad ; \quad (\xi_2, \gamma_2) = (3, 1) \quad ; \quad (\xi_3, \gamma_3) = (11/2, 1/2)$$

$$(\xi_4, \gamma_4) = (2, 2) \quad ; \quad (\xi_5, \gamma_5) = (2, 2) \quad ; \quad (\xi_6, \gamma_6) = (5, 3)$$

۱۱. انتگرال دوگانه P, Q ، و Δ همانها هستند که در تمرین ۵ بودند؛

$$(\xi_1, \gamma_1) = (-1/2, 1/2) \quad ; \quad (\xi_2, \gamma_2) = (1, 3/2) \quad ; \quad (\xi_3, \gamma_3) = (5/2, 2)$$

$$(\xi_4, \gamma_4) = (-3/2, 7/2) \quad ; \quad (\xi_5, \gamma_5) = (0, 3) \quad ; \quad (\xi_6, \gamma_6) = (4, 4)$$

$$(\xi_9, \gamma_9) = (3, 9/2) \quad ; \quad (\xi_8, \gamma_8) = (1, 9/2) \quad ; \quad (\xi_7, \gamma_7) = (-1, 9/2)$$

۱۳. انتگرال دوگانه P, Q ، و Δ همانها هستند که در تمرین ۵ بودند؛

$$\begin{aligned} (\xi_3, \gamma_3) &= (2, 0) & (\xi_2, \gamma_2) &= (0, 0) & (\xi_1, \gamma_1) &= (-2, 0) \\ (\xi_6, \gamma_6) &= (2, 2) & (\xi_5, \gamma_5) &= (0, 2) & (\xi_4, \gamma_4) &= (-2, 2) \\ (\xi_9, \gamma_9) &= (2, 4) & (\xi_8, \gamma_8) &= (0, 4) & (\xi_7, \gamma_7) &= (-2, 4) \end{aligned}$$

۱۳. حجم جسم محصور بین کسره $z^2 = 64 - x^2 - y^2$ ، صفحات $x=3, y=3$ ، و سه صفحه مختصات، و واقع در ثمن (یک هشتم) اول را تقریب بزنید. جهت یافتن يك مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه، ناحیه واقع در صفحه xy را با خطهای $x=1$ ، $y=1$ ، $x=2$ ، $y=2$ افراز کنید و (ξ_i, γ_i) را مرکز i امین زیر ناحیه بگیرید.

۱۴. حجم جسم محصور بین صفحات $z = 2x + y + 4$ ، $x=2$ ، $y=3$ ، و سه صفحه مختصات را تقریب بزنید. جهت یافتن يك مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه، ناحیه واقع در صفحه xy را با خطوط $x=1$ ، $y=1$ ، $x=2$ ، $y=2$ افراز کنید و (ξ_i, γ_i) را مرکز i امین زیر ناحیه بگیرید.

۱۵. حجم جسم محصور بین رویه $z = 10 - (1/4)x^2 - (1/9)y^2$ ، صفحات $x=2$ ، $y=2$ ، و سه صفحه مختصات را تقریب بزنید. جهت یافتن يك مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه، ناحیه واقع در صفحه xy را با خطوط $x=1$ و $y=1$ افراز کنید و (ξ_i, γ_i) را مرکز i امین زیر ناحیه بگیرید.

۱۶. حجم جسم محصور بین رویه $z = 300 - 25x^2 - 4y^2$ ، صفحات $x=-1$ ، $x=3$ ، $y=-3$ ، $y=5$ ، و صفحه xy را تقریب بزنید. جهت یافتن يك مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه، ناحیه واقع در صفحه xy را با خطوط $x=1$ ، $y=-1$ ، $y=1$ ، $y=3$ افراز کنید و (ξ_i, γ_i) را مرکز i امین زیر ناحیه بگیرید.

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، با استفاده از قضیه ۸.۱.۲۰ بازه بسته ای را که مقدار انتگرال دوگانه مفروضی را دربرداشته باشد، پیدا کنید.

۱۷. $\int_R \int (2x + 5y) dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 2)$ ، و $(0, 2)$ است.

۱۸. $\int_R \int (x^2 + y^2) dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، و $(0, 1)$ است.

۱۹. $\int_R \int e^{xy} dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(0,0)$ ، $(1,0)$ ، $(1,1)$ و $(0,1)$ است.

۲۰. $\int_R \int (\sin x + \sin y) dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(0,0)$ ، $(\pi,0)$ ، (π,π) و $(0,\pi)$ است. (دانهمایی: از نتیجه تمرین ۱۰ در مجموعه تمرینهای ۳۰۱۹ استفاده کنید.)

۲۱. $\int_R \int [\sin(x+y) + \sin x + \sin y] dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(0,0)$ ، $(\pi,0)$ ، (π,π) و $(0,\pi)$ است. (دانهمایی: از نتیجه تمرین ۱۱ از مجموعه تمرینهای ۳۰۱۹ استفاده کنید.)

۲۲. $\int_R \int (2x + 2y + 1) / (x^2 + y^2 + 1) dA$ ؛ ناحیه مستطیلی با رئوس $(-1,-1)$ ، $(1,-1)$ ، $(1,1)$ و $(-1,1)$ است. (دانهمایی: از نتیجه تمرین ۸ از مجموعه تمرینهای ۳۰۱۹ استفاده کنید.)

۲۳. قضیه ۵.۱.۲۰ را اثبات کنید. ۲۴. قضیه ۶.۱.۲۰ را اثبات کنید.

۲۵. قضیه ۷.۱.۲۰ را اثبات کنید. ۲۶. قضیه ۸.۱.۲۰ را اثبات کنید.

۲۷. قضیه ۹.۱.۲۰ را اثبات کنید.

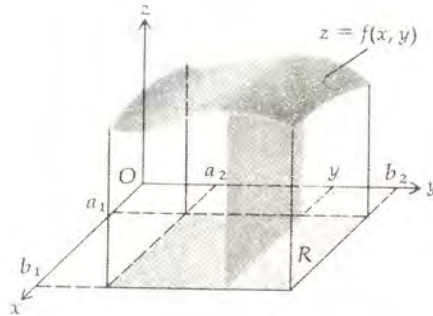
۲.۲۰ محاسبه انتگرالهای دوگانه و انتگرالهای مکرر

در مورد توابع يك متغیری، قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی برای محاسبه انتگرال معین از طریق یافتن ضدمشتق (یا انتگرال نامعین) انتگرال به دست می دهد. روش متناظری برای محاسبه انتگرالهای دوگانه وجود دارد که متضمن انتگرال گیرهای یگانه متوالی است. شرح دقیق این روش در درسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته می آید. بحث ما در اینجا شهودی است، و از تعبیر هندسی انتگرال دوگانه به عنوان اندازه حجم استفاده می کنیم. ابتدا روش را برای انتگرال دوگانه بريك ناحیه مستطیلی شرح می دهیم.

فرض کنید f تابع مفروضی باشد که بريك ناحیه مستطیلی بسته R در صفحه xy ، محدود به خطوط $x=a_1$ ، $x=b_1$ ، $y=a_2$ و $y=b_2$ ، انتگرال پذیر است. فرض کنید به ازای هر (x,y) در R ، $f(x,y) \geq 0$. به شکل ۱۰.۲.۲۰ رجوع کنید که نمودار معادله $z=f(x,y)$ را وقتی (x,y) در R است نشان می دهد. عددی که مقدار انتگرال دوگانه

$$\int_R \int f(x,y) dA$$

را نمایش می دهد، اندازه حجم جسم [ناحیه سه بعدی] واقع بین رویه و ناحیه R است. این عدد را می توان با روش مقاطع مسطح متوازی مذکور در بخش ۴.۷ به دست آورد؛ و ما باز هم همین روش را به کار می گیریم.



شکل ۱۰۲۰۲۰

فرض کنید y عددی متعلق به $[a_2, b_2]$ باشد. صفحه‌ای مار بر نقطه $(0, y, 0)$ که با صفحه xz موازی باشد، در نظر بگیرد. فرض کنید مساحت ناحیه مسطح حاصل از تقاطع این صفحه با جسم، $A(y)$ باشد. بنا برروش مقاطع مسطح متوازی، اندازه حجم جسم با

$$\int_{a_2}^{b_2} A(y) dy$$

بیان می‌شود. چون حجم جسم با انتگرال دوگانه نیز معین می‌شود، داریم

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} A(y) dy. \quad (۱)$$

با استفاده از (۱) می‌توان مقدار انتگرال دوگانه تابع f بر R را با محاسبه یک انتگرال یگانه $A(y)$ به دست آورد. حال بایست به ازای یک y مفروض، $A(y)$ را بیابیم. چون $A(y)$ اندازه مساحت یک ناحیه مسطح است، می‌توان آن را با انتگرال گیری به دست آورد. در شکل ۱۰۲۰۲۰ توجه کنید که وقتی x در $[a_1, b_1]$ باشد، مرز بالایی ناحیه مسطح، نمودار معادله $z = f(x, y)$ است. بنابراین $A(y) = \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx$. اگر طرف راست این رابطه را در (۱) قرار دهیم

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right] dy \quad (۲)$$

به دست می‌آید. انتگرال طرف راست (۲) را انتگرال مکرر می‌نامند. هنگام نوشتن انتگرال مکرر معمولاً کروه‌ها را حذف می‌کنند. لذا (۲) را می‌توان به صورت

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy \quad (۳)$$

نیز نوشت. هنگام محاسبه «انتگرال درونی» مذکور در (۳)، به یاد داشته باشید که x متغیر

انتگرال گیری است و y يك ثابت تلقی می شود. این امر شبیه است به در نظر گرفتن y به عنوان يك ثابت هنگام یافتن مشتق جزئی $f(x, y)$ نسبت به x .
 بادر نظر گرفتن مقاطع مسطح موازی با صفحه yz ، انتگرال مکرری به دست می آید که در آن، ترتیب انتگرال گیری متفاوت است؛ داریم

$$\int_R \int f(x, y) dA = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx. \quad (4)$$

يك شرط کافی برای برقراری (۳) و (۴) این است که تابع بر ناحیه مستطیلی R پیوسته باشد.

مثال ۱ انتگرال دوگانه $\int_R (2x^2 - 3y) dA$ را وقتی که R ناحیه متشکل از تمام نقاط (x, y) با شرط $-1 \leq x \leq 2$ و $1 \leq y \leq 3$ باشد، محاسبه کنید.

حل $a_1 = -1, b_1 = 2, a_2 = 1, b_2 = 3$. لذا بنابر (۳)

$$\begin{aligned} \int_R \int (2x^2 - 3y) dA &= \int_1^3 \int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx dy \\ &= \int_1^3 \left[\int_{-1}^2 (2x^2 - 3y) dx \right] dy \\ &= \int_1^3 \left[\frac{2}{3} x^3 - 3xy \right]_{-1}^2 dy \\ &= \int_1^3 (6 - 9y) dy \\ &= -22. \end{aligned}$$

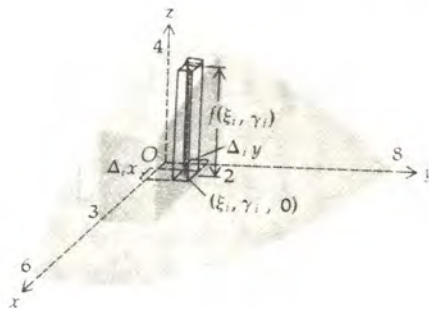
در مثال ۱ در بخش ۱۰.۲۵ دیدیم که يك مقدار تقریبی برای انتگرال دوگانه مثال فوق، ۲۵ - است.

مثال ۲ حجم جسم محصور بین رویه $z = 4 - (1/9)x^2 - (1/16)y^2$ و صفحات $x = 3$ و $y = 2$ و سه صفحه مختصات را بیابید.

حل شکل ۲۰.۲۰۲۵ نمودار معادله $z = f(x, y)$ واقع در ثمن اول و جسم مفروض را نشان می دهد. اگر حجم جسم V واحد مکعب باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۴۰.۱۰۲۵

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\
 &= \int_R \int f(x, y) dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^2 \left(4 - \frac{1}{9} x^2 - \frac{1}{16} y^2 \right) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[4y - \frac{1}{9} x^2 y - \frac{1}{48} y^3 \right]_0^2 dx \\
 &= \int_0^2 \left(\frac{47}{6} - \frac{2}{9} x^2 \right) dx = \left[\frac{47}{6} x - \frac{2}{27} x^3 \right]_0^2 \\
 &= 21.5.
 \end{aligned}$$

لذا حجم ۲۱٫۵ واحد مکعب است.



شکل ۲۰.۲۰

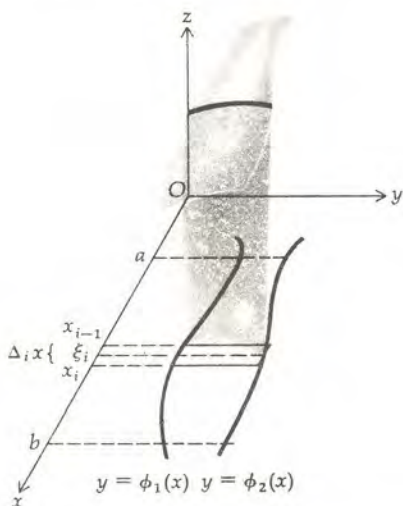
در مثال ۲ بخش ۱۰.۲۰ دیدیم که يك مقدار تقریبی برای حجم مذکور در مثال ۲، ۲۱٫۵۹ واحد مکعب است.

حال فرض کنید ناحیه R ناحیه‌ای است واقع در صفحه xy محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ با شرط $a < b$ ، و منحنیهای $y=\phi_1(x)$ و $y=\phi_2(x)$ که دو تابع ϕ_1 و ϕ_2 بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته‌اند؛ علاوه بر این، وقتی که $a \leq x \leq b$ داریم $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ (شکل ۳۰.۲۰ را ببینید). گیریم Δ يك افراز بازه $[a, b]$ با ضابطه قانمی به پهنای $\Delta_i x$ تقسیم شده است. در شکل يك نوار خاص را نشان داده‌ایم. مقطع رویه

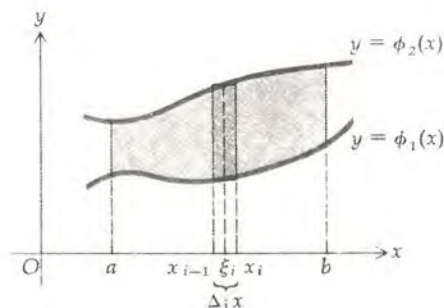
از $z = f(x, y)$ و یک صفحه $x = \xi_i$ ، با شرط $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، یک منحنی است. بخشی از این منحنی بالای z امین نوار قائم قرار دارد. ناحیه واقع در زیر این قسمت از منحنی و بالای صفحه xy را در شکل ۴.۲.۲۰ نشان داده‌ایم. اندازه مساحت این ناحیه از

$$\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy$$

به دست می‌آید.



شکل ۴.۲.۲۰



شکل ۴.۲.۲۰

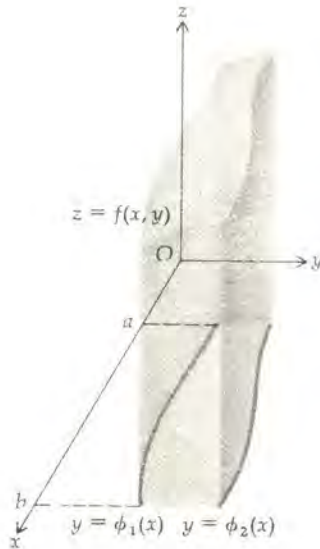
اندازه حجم جسم محصور بین رویه $z = f(x, y)$ از بالا و z امین نوار قائم از پایین، تقریباً برابر است با

$$\left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \right] \Delta_i x.$$

اگر وقتی که نورم Δ به صفر میل می‌کند، حد مجموع این اندازه‌های حجم را برای n نوار قائم R از $x = a$ تا $x = b$ محاسبه کنیم، اندازه حجم جسم محصور بین رویه $z = f(x, y)$ از بالا، و ناحیه R واقع در صفحه xy از پایین، به دست می‌آید. (شکل ۵.۲.۲۰ را ببینید). این، انتگرال دوگانه f بر R است؛ یعنی

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy \right] \Delta_i x &= \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx \\ &= \int_R \int f(x, y) dy dx. \quad (5) \end{aligned}$$

شرایط کافی برای برقراری (۵) این است که f بر ناحیه بسته R پیوسته باشد و ϕ_1 و ϕ_2 دو تابع هموار باشند.

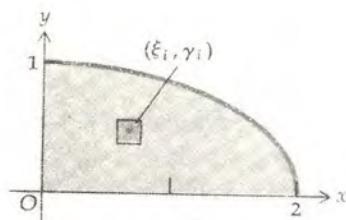


شکل ۵.۲.۲۰

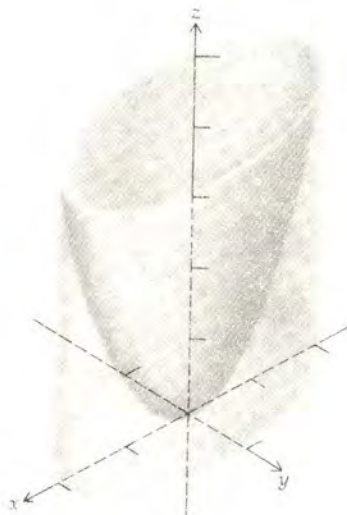
مثال ۳ اندازه حجم جسم واقع در بالای صفحه xy را که بین سهمیوار بیضوی $z = x^2 + 4y^2$ و استوانه $z = 4 - x^2 + 4y^2$ محصور است هم به صورت یک انتگرال دوگانه و هم به صورت یک انتگرال مکرر بیان کنید. برای یافتن حجم جسم، انتگرال مکرر را محاسبه کنید.

حل جسم در شکل ۵.۲.۲۰ نشان داده شده است. حجم بخشی از جسم را که در ثمن اول واقع است می یابیم؛ این مقدار بنابر ویژگیهای تقارن یک چهارم حجم مطلوب است. ناحیه R در صفحه xy ناحیه ای است که بین محور x ها، محور y ها، و بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ محصور است. این ناحیه و نیز ضامین زیر ناحیه یک افراز مستطیلی از R را که در آن نقطه دلخواهی از ضامین زیر ناحیه است در شکل ۷.۲.۲۰ نشان داده ایم. اگر حجم جسم مفروض V واحد مکعب باشد، آنگاه بنابر قضیه ۴.۱.۲۰،

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + 4\gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= 4 \int_R \int (x^2 + 4y^2) dA. \end{aligned}$$



شکل ۷.۲.۲۰

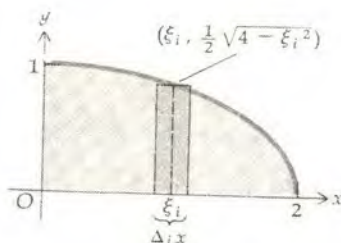


شکل ۶.۲.۲۰

برای بیان اندازه حجم به صورت يك انتگرال مكرر، ناحیه R را به n نوار قائم تقسیم می‌کنیم. ناحیه R و i امین نوار قائم با پهنای $\Delta_i x$ واحد و طول $\sqrt{4 - \xi_i^2}$ $(1/2)\sqrt{4 - \xi_i^2}$ واحد، با شرط $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ در شکل ۸.۲.۲۰ نشان داده شده‌اند. بنا بر (۵)

$$\begin{aligned} V &= 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{\sqrt{4 - \xi_i^2}/2} (x_i^2 + 4y^2) dy \right] \Delta_i x \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{4 - x^2}/2} dx \\ &= 4 \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^2 \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{6} (4 - x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^2 (x^2 + 2) \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} x (4 - x^2)^{3/2} + 2x \sqrt{4 - x^2} + 8 \sin^{-1} \frac{1}{2} x \Big|_0^2 \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

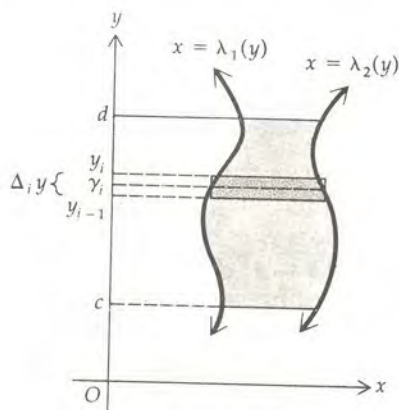
بنابراین، حجم $\mathcal{V}$ واحد مکعب است.



شکل ۸.۲۰.۲۰

فرض کنید ناحیه R بین منحنیهای $x = \lambda_1(y)$ و $x = \lambda_2(y)$ و خطوط $y = c$ و $y = d$ ($c < d$)، محصور باشد؛ λ_1 و λ_2 توابعی هستند که بر بازه بسته $[c, d]$ پیوسته‌اند و وقتی که $c \leq y \leq d$ ، $\lambda_1(y) \leq \lambda_2(y)$. افرازی چون Δ برای بازه $[c, d]$ در نظر می‌گیریم و ناحیه را به نوارهای افقی با پهنای Δy تقسیم می‌کنیم. شکل ۹.۲۰.۲۰ را ببینید که تضمین نوار افقی را نشان می‌دهد. مقطع رویه $z = f(x, y)$ و صفحه‌ای چون $y = \gamma_i$ ، $y_{i-1} \leq \gamma_i \leq y_i$ ، يك منحنی است، و بخشی از این منحنی بالای تضمین نوار افقی است. لذا، همان گونه که در استنتاج (۵) دیدیم، اندازه حجم محصور بین $z = f(x, y)$ از بالا، و تضمین نوار قائم از پایین، تقریباً برابر است با

$$\left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i) dx \right] \Delta y.$$



شکل ۹.۲۰.۲۰

اگر وقتی $\|\Delta\|$ به صفر میل می‌کند، از مجموع این اندازه‌های حجم برای n نوار افقی R از $y=c$ تا $y=d$ حد بگیریم، اندازه حجم جسم محصور بین رویه $z=f(x, y)$ از بالا، و ناحیه R واقع در صفحه xy از پایین، به دست می‌آید. این اندازه حجم، انتگرال دوجانه f بر R است. لذا

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_{\lambda_1(\gamma_i)}^{\lambda_2(\gamma_i)} f(x, \gamma_i) dx \right] \Delta_i y = \int_c^d \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} f(x, y) dx dy \\ = \int_R \int f(x, y) dx dy. \quad (۶)$$

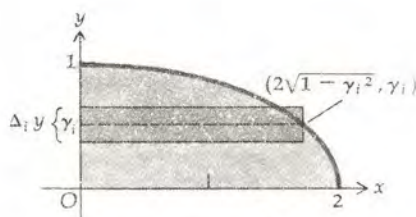
هموار بودن توابع λ_1 و λ_2 و پیوسته بودن f بر R شرایط کافی برای برقراری (۶) هستند. هنگام استفاده از (۵) و (۶)، گاه لازم می‌آید ناحیه‌ای چون R را به زیر ناحیه‌هایی که این شرایط کافی روی آنها برقرارند، تقسیم کنیم.

مثال ۴ حجم جسم مذکور در مثال ۳ را با انتگرال مکرری که ترتیب انتگرال‌گیری آن عکس ترتیب انتگرال‌گیری مثال ۳ باشد بیان کنید. این حجم را محاسبه کنید.

حل باز هم حجم بخش واقع در ثمن اول را می‌یابیم و نتیجه را در ۴ ضرب می‌کنیم. شکل ۱۰.۲.۲۰ ناحیه R واقع در صفحه xy و i امین نوار افقی را، که اندازه پهنایش $\Delta_i y$ و اندازه طولش $2\sqrt{1-\gamma_i^2}$ است، نشان می‌دهد. لذا بنا بر (۶)

$$V = 4 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{2\sqrt{1-\gamma_i^2}} (x^2 + 4\gamma_i^2) dx \right] \Delta_i y \\ = 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy \\ = 4 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x^3 + 4y^2 x \right]_0^{2\sqrt{1-y^2}} dy \\ = 4 \int_0^1 \left[\frac{8}{3} (1-y^2)^{3/2} + 8y^2 \sqrt{1-y^2} \right] dy \\ = \frac{32}{3} \int_0^1 (2y^2 + 1) \sqrt{1-y^2} dy \\ = -\frac{16}{3} y(1-y^2)^{3/2} + 8y\sqrt{1-y^2} + 8 \sin^{-1} y \Big|_0^1 \\ = 4\pi.$$

پس حجم، 4π واحد مکعب است، و با پاسخ مثال ۳ یکی است.



▲

شکل ۱۰.۲۰.۲۰

از روی حل مثالهای ۳ و ۴ می بینیم که انتگرال دو گانه $\int_R \int (x^2 + 4y^2) dA$ را می توان با هریک از انتگرالهای مکرر

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (x^2 + 4y^2) dx dy \quad \text{یا} \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx$$

به دست آورد.

اگر در (۵) و یا در (۶)، به ازای همه x ها و y ها داشته باشیم $f(x, y) = 1$ ، آنگاه A ، اندازه مساحت ناحیه ای چون R ، به صورت یک انتگرال دو گانه بیان می شود. لذا داریم

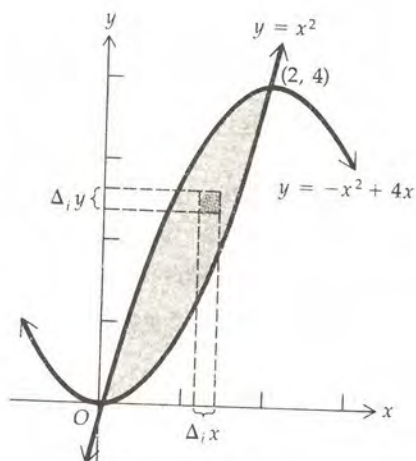
$$A = \int_R \int dy dx = \int_R \int dx dy. \quad (7)$$

مثال ۵ مساحت ناحیه واقع در صفحه xy محصور بین منحنیهای $y = x^2$ و $y = 4x - x^2$ را با انتگرال گیری دو گانه بیابید.

حل ناحیه در شکل ۱۱.۲۰.۲۰ نشان داده شده است. بنابر (۷)

$$\begin{aligned} A &= \int_R \int dy dx = \int_0^2 \int_{x^2}^{4x-x^2} dy dx \\ &= \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

لذا مساحت ناحیه، $8/3$ واحد مربع است.



شکل ۱۱۰۲۰۲۰

تمرینهای ۲.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، انتگرال مذکور را محاسبه کنید.

$$۱. \int_1^2 \int_0^{2x} xy^2 dy dx \quad ۲. \int_0^4 \int_0^y dx dy$$

$$۳. \int_0^4 \int_0^y \sqrt{9+y^2} dx dy \quad ۴. \int_{-1}^1 \int_1^{e^x} \frac{x}{y} dy dx$$

$$۵. \int_1^4 \int_{y^2}^y \sqrt{\frac{y}{x}} dx dy \quad ۶. \int_1^4 \int_{x^2}^x \sqrt{\frac{y}{x}} dy dx$$

$$۷. \int_0^1 \int_0^1 |x-y| dy dx \quad ۸. \int_0^3 \int_0^x x^y e^{xy} dy dx$$

$$۹. \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^x \sin(4x-y) dy dx \quad ۱۰. \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx dy$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، مقدار دقیق انتگرال دوگانه را بیابید.

۱۱. انتگرال دوگانه همان انتگرال مذکور در تمرین ۱ از تمرینهای ۱۰۲۰ است.

۱۲. انتگرال دوگانه همان انتگرال مذکور در تمرین ۲ از تمرینهای ۱۰۲۰ است.

۱۳. انتگرال دوگانه همان انتگرال مذکور در تمرین ۳ از تمرینهای ۱۰۲۰ است.

۱۴. انتگرال دوگانه همان انتگرال مذکور در تمرین ۶ از تمرینهای ۱۰۲۵ است.

۱۵. $\int_R \int \sin x \, dA$ ؛ ناحیه محصور بین خطوط $y = 2x$ ، $y = x/2$ ، و $x = \pi$ است.

۱۶. $\int_R \int \cos(x+y) \, dA$ ؛ ناحیه محصور بین خطوط $y = x$ و $x = \pi$ ، و محور x است.

۱۷. $\int_R \int x^2 \sqrt{9-y^2} \, dA$ ؛ ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 9$ است.

۱۸. $\int_R \int (y^2/x^2) \, dA$ ؛ ناحیه محصور بین خطوط $y = x$ و $y = 2$ ، و هذلولی $xy = 1$ است.

۱۹. حجم جسم واقع در زیر صفحه $z = 4x$ و بالای دایره $x^2 + y^2 = 16$ در صفحه xy را بیابید. نمودار جسم را رسم کنید.

۲۰. حجم جسم واقع در ثمن اول محصور بین صفحات $x = 0$ ، $x = y + 2z + 1$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، و $3y + z - 3 = 0$ را بیابید. نمودار جسم را رسم کنید.

۲۱. حجم جسم واقع در ثمن اول محصور بین دو استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + z^2 = 4$ را بیابید. نمودار جسم را رسم کنید.

۲۲. حجم جسم واقع در ثمن اول محدود به سهمیوار $z = 9 - x^2 - 3y^2$ را بیابید. شکل جسم را رسم کنید.

۲۳. حجم جسم واقع در ثمن اول محصور بین رویه‌های $x = y$ ، $x = y^2$ ، و $x + z^2 = 1$ را بیابید. شکل جسم را رسم کنید.

۲۴. با انتگرال گیری دوگانه، حجم بخشی از جسم محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ را که در ثمن اول واقع است بیابید. شکل جسم را رسم کنید.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸ با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای مفروض واقع در صفحه xy را بیابید. ناحیه را رسم کنید.

۲۵. $y = x^2$ و $y = x^3$ ۲۶. $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$

۲۷. $y = 9 - x^2$ و $y = x^2 - 9$ ۲۸. $x^2 + y^2 = 16$ و $y^2 = 6x$

۲۹. اندازه حجم جسم محصور در بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را به صورت يك انتگرال مكرر بيان كنيد.

۳۰. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، مساحت ناحیه واقع در ربع اول محصور بین سهمی $y^2 = 4x$ ، دایره $x^2 + y^2 = 5$ ، و محور x ها را با دو روش بیابید: (الف) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید. این دو روش را باهم مقایسه کنید.

۳۱. حجم جسم زیر صفحه $24 = 3x + 8y + 6z$ و بالای ناحیه‌ای در صفحه xy را که بین سهمی $y^2 = 2x$ ، خط $2x + 3y = 10$ ، و محور x ها محصور است با دو روش بیابید: (الف) ابتدا نسبت به x انتگرال بگیرید؛ (ب) ابتدا نسبت به y انتگرال بگیرید. این دو روش حل را باهم مقایسه کنید.

۳۲. انتگرال مكرر $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy dx$ مفروض است. (الف) شکل جسمی را که اندازه حجمش با انتگرال مكرر مفروض نشان داده می‌شود رسم کنید؛ (ب) انتگرال مكرر را محاسبه کنید؛ (پ) انتگرال مکرری را که اندازه حجم همین جسم را با ترتیب انتگرال گیری معکوس به دست می‌دهد، بنویسید.

۳۳. انتگرال مكرر $\frac{2}{3} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (2x + y) dy dx$ مفروض است. خواسته‌های مسأله همان خواسته‌های تمرین ۳۲ هستند.

۳۴. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، حجم جسم مشترك بین دو استوانه مستدیر قائم با شعاع r واحد را که محورهایشان برهم عمودند بیابید. (تمرین ۱۶ از تمرینهای ۴۰۷ را ببینید.)

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، با ترتیب مفروض برای انتگرال گیری، انتگرال مكرر را نمی‌توان دقیقاً برحسب توابع اولیه محاسبه کرد. ترتیب انتگرال گیری را عکس کنید و محاسبه را انجام دهید.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \pi y^2 dy dx \quad ۳۵$$

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy \quad ۳۶$$

۳.۲۰ مرکز جرم و گشتاورهای تختی

در فصل ۱۱ برای یافتن مرکز جرم يك ورقه همگن از انتگرالهای یگانه استفاده کردیم. در استفاده از انتگرالهای یگانه (بجز در حالت‌های ویژه) تنها ورقه‌های با چگالی سطحی ثابت را می‌توان در نظر گرفت؛ اما، با انتگرالهای دوگانه، مرکز جرم ورقه‌های همگن یا ناهمگن قابل محاسبه است.

فرض کنید ورقه‌ای به ما داده شده است که به شکل يك ناحیه بسته R واقع در صفحه xy است. گیریم اندازه چگالی سطحی ورقه در نقطه دلخواه (x, y) از R ، $\rho(x, y)$ ، و ρ بر R پیوسته باشد. برای یافتن جرم کل ورقه به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید Δ افزای از R به n مستطیل باشد. اگر (ξ_i, γ_i) نقطه دلخواهی از i امین مستطیل با اندازه مساحت $\Delta_i A$ باشد، آنگاه تقریبی برای اندازه جرم i امین مستطیل، $\rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$ است و اندازه تقریبی جرم کل ورقه برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A.$$

وقتی که نورم Δ به صفر میل می‌کند، از مجموع فوق حد می‌گیریم و اندازه جرم ورقه، M ، را به صورت

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int \rho(x, y) dA \quad (1)$$

بیان می‌کنیم. اندازه گشتاور جرم i امین مستطیل نسبت به محور y ها تقریباً برابر است با $\gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A$. لذا اندازه تقریبی مجموع اندازه‌های گشتاورهای جرم این n مستطیل نسبت به محور y ها برابر با مجموع n جمله از این نوع است. M_x ، اندازه گشتاور جرم کل ورقه نسبت به محور y ها از

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int y \rho(x, y) dA \quad (2)$$

به دست می‌آید. متناظراً، M_y ، اندازه گشتاور جرم نسبت به محور x ها به صورت

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int x \rho(x, y) dA \quad (3)$$

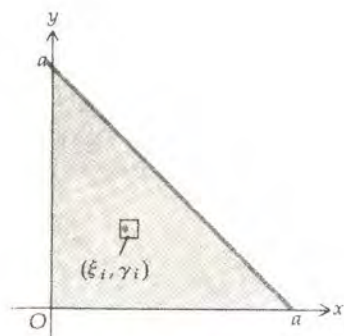
تعریف می‌شود. مرکز جرم ورقه، با نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ نمایش داده می‌شود و

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M}$$

مثال ۱ چگالی سطحی ورقه‌ای که به شکل يك مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است برحسب مجذور فاصله تا رأس زاویه قائمه تغییر می‌کند. اگر جرم برحسب کیلو گرم و فاصله برحسب متر اندازه‌گیری شود، جرم و مرکز جرم ورقه را بیابید.

حل محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که رأس قائمه مثلث در مبدأ واقع شود. و ساقهای مثلث به طول a متر در امتداد محورهای مختصات قرار گیرند (شکل ۱۰۳۰۲۰ را ببینید). فرض کنید چگالی سطحی ورقه در نقطه (x, y) ، $\rho(x, y)$ کیلو گرم در هر متر مربع باشد. آنگاه با این فرض که k يك عدد ثابت باشد، داریم $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$. بنا براین، اگر جرم ورقه M کیلو گرم باشد، بنا بر (۱) داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k(\xi_i^2 + \gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= k \int_R \int (x^2 + y^2) dA \\ &= k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= k \int_0^a \left[yx^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3} a^3 - a^2 x + \frac{2}{3} a x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) dx \\ &= k \left(\frac{1}{3} a^4 - \frac{1}{2} a^4 + \frac{2}{3} a^4 - \frac{1}{4} a^4 \right) \\ &= \frac{1}{6} k a^4. \end{aligned}$$



شکل ۱۰۳۰۲۰

برای یافتن مرکز جرم، ملاحظه کنید که جرم به خاطر تقارن باید بر خط $y = x$ قرار داشته باشد. بنا بر این، اگر $\bar{x}$ را بیابیم، $\bar{y}$ را هم داریم. طبق (۳)

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \xi_i (\xi_i^2 + \gamma_i^2) \Delta_i A \\ &= k \int_R \int x(x^2 + y^2) dA \\ &= k \int_0^a \int_0^{a-x} x(x^2 + y^2) dy dx \\ &= k \int_0^a \left[x^3 y + \frac{1}{3} x y^3 \right]_0^{a-x} dx \\ &= k \int_0^a \left(\frac{1}{3} a^3 x - a^2 x^2 + \frac{2}{3} a x^3 - \frac{1}{3} x^4 \right) dx \\ &= k \left(\frac{1}{6} a^5 - \frac{1}{3} a^5 + \frac{1}{2} a^5 - \frac{1}{15} a^5 \right) \\ &= \frac{1}{15} k a^5. \end{aligned}$$

چون $M\bar{x} = M_y$ ، پس $M\bar{x} = (1/15)ka^5$ ؛ و چون $M = (1/6)ka^4$ ، داریم $\bar{x} = (2/5)a$. بنا بر این مرکز جرم در نقطه $((2/5)a, (2/5)a)$ است. ▲

۱۰۳۰۲۰ تعریف گشتاور لختی يك ذره، که جرمش m کیلوگرم است، حول يك محور بنا به تعریف mr^2 کیلوگرم-متر مربع است که در آن r بر حسب متر، فاصله عمودی از ذره تا محور است.

اگر دستگاهی از n ذره مفروض باشد، گشتاور لختی دستگاه را به صورت مجموع گشتاورهای لختی تمام ذره ها تعریف می کنیم. بدین معنی که اگر جرم ذره i ام، m_i کیلوگرم، و فاصله آن تا محور r_i متر باشد، آنگاه گشتاور لختی دستگاه I کیلوگرم-متر مربع است که

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (۴)$$

اگر این مفهوم از گشتاور لختی را با روشهایی نظیر روشهایی که قبلاً به کار بردیم به توزیع پیوسته ای از جرم در يك صفحه، نظیر میله یا ورقه، تعمیم دهیم، تعریف زیر به دست می آید.

۲۰۳.۲۰ تعریف فرض کنید توزیع پیوسته‌ای از جرم که ناحیه‌ای چون R از صفحه xy را اشغال کرده، به ما داده شده است؛ و فرض کنید اندازه چگالی سطحی این توزیع در نقطه (x, y) ، $\rho(x, y)$ کیلو گرم بر متر مربع، و ρ بر R پیوسته است. در این صورت، I_x ، گشتاور تختی این توزیع جرم حول محور y ها، بر حسب کیلو گرم-متر مربع به صورت زیر معین می‌شود

$$I_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int y^2 \rho(x, y) dA. \quad (5)$$

به طور مشابه، I_y ، اندازه گشتاور تختی این توزیع جرم حول محور x ها، از فرمول

$$I_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A = \int_R \int x^2 \rho(x, y) dA \quad (6)$$

به دست می‌آید؛ و I_o ، گشتاور تختی حول مبدأ، یا محور z ها، به صورت

$$\begin{aligned} I_o &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \gamma_i^2) \rho(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i A \\ &= \int_R \int (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA. \end{aligned} \quad (7)$$

معین می‌شود. عدد I_o اندازه چیزی است که گشتاور تختی قطبی هم نامیده می‌شود.

مثال ۲ سیم راست همگنی دارای چگالی خطی ثابت ρ کیلو گرم بر متر است. گشتاور تختی سیم را حول يك محور عمود بر سیم و مار بريك انتهای آن بیابید.

حل فرض کنید طول سیم a متر باشد و سیم از مبدأ روی محور x ها امتداد یافته باشد. گشتاور تختی آن را حول محور y ها می‌یابیم. سیم را به n قسمت تقسیم می‌کنیم؛ طول i امین قسمت $\Delta_i x$ متر است. پس جرم i امین قسمت $\rho \Delta_i x$ کیلو گرم است. فرض کنید که جرم i امین قسمت در يك نقطه مانند ξ_i با شرط $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ متمرکز باشد. گشتاور تختی i امین قسمت حول محور y ها بین $(x_{i-1})^2 \Delta_i x$ کیلو گرم-متر مربع و $\rho x_i^2 \Delta_i x$ کیلو گرم-متر مربع واقع می‌شود و با $\rho \xi_i^2 \Delta_i x$ کیلو گرم-متر مربع، $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، تقریب زده می‌شود. اگر گشتاور تختی سیم حول محور y ها برابر با I_y کیلو گرم-متر مربع باشد، آنگاه

$$I_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho \xi_i^2 \Delta_i x = \int_0^a \rho x^2 dx = \frac{1}{3} \rho a^3.$$

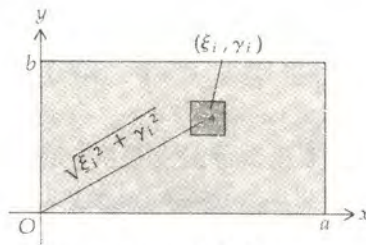
بنابراین گشتاور تختی $\rho a^3/3$ کیلو گرم-متر مربع است.

مثال ۳ ورقه مستطیلی همگنی دارای چگالی سطحی ثابت ρ اسلاک برفوت مربع است. گشتاور لختی ورقه حول یکی از گوشه‌هایش را بیابید.

حل فرض کنید که ورقه بین خطوط $x=a$ ، $y=b$ ، محور x ها، و محور y ها محصور باشد. شکل ۲۰۳۰۲۰ را ببینید. اگر گشتاور لختی حول مبدأ، I_o اسلاک برفوت مربع باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} I_o &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i^x + \gamma_i^y) \Delta_i A \\ &= \int_R \int \rho(x^x + y^y) dA \\ &= \rho \int_0^b \int_0^a (x^x + y^y) dx dy \\ &= \rho \int_0^b \left[\frac{1}{3} x^3 + x y^y \right]_0^a dy \\ &= \rho \int_0^b \left(\frac{1}{3} a^3 + a y^y \right) dy \\ &= \frac{1}{3} \rho ab (a^3 + b^3) \end{aligned}$$

بنابراین گشتاور لختی، $\rho ab(a^3 + b^3)/3$ اسلاک برفوت مربع است.



شکل ۲۰۳۰۲۰

یافتن فاصله از هر محوری چون L که جرم يك ورقه بتواند بر آن متمرکز شود بدون اینکه برگشتاور لختی ورقه حول L تأثیر گذارد، امکان پذیر است. اندازه این فاصله را که با r نمایش داده می شود شعاع چرخشی ورقه حول L می نامند. و این بدین معنی است که

اگر جرم M کیلو گرمی ورقه‌ای در نقطه‌ای به فاصله r متر از L متمرکز باشد، گشتاور لختی ورقه حول L مساوی است با گشتاور لختی ذره‌ای به جرم M کیلو گرم که در فاصله r متری از L واقع باشد؛ این گشتاور لختی Mr^2 کیلو گرم-متر مربع است. لذا تعریف زیر به دست می‌آید.

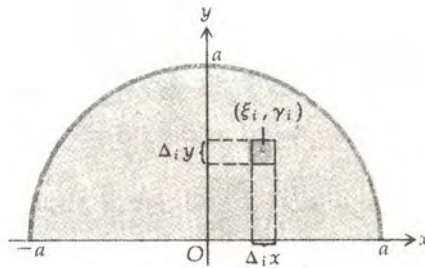
۳.۳.۲۰ تعریف اگر I اندازه گشتاور لختی توزیع جرمی در یک صفحه حول محوری چون L ، و M اندازه جرم کل توزیع باشد، آنگاه اندازه شعاع چرخش توزیع حول L ، r است و

$$r^2 = \frac{I}{M}.$$

مثال ۴ فرض کنید که ورقه‌ای به شکل یک نیم‌دایره باشد و اندازه چگالی سطحی ورقه در هر نقطه متناسب با اندازه فاصله آن نقطه تا قطر نیم‌دایره باشد. اگر جرم بر حسب کیلو گرم، و فاصله بر حسب متر اندازه گرفته شود، شعاع چرخش ورقه حول محور xx را بیابید.

حل محور xx ها و محور yy ها را چنان انتخاب می‌کنیم که نیم‌دایره، نیمه بالایی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ باشد. شکل ۳.۳.۲۰ را ببینید. لذا چگالی سطحی ورقه در نقطه (x, y) ، ky کیلو گرم بر متر مربع است. پس اگر جرم ورقه M کیلو گرم باشد، داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k y_i \Delta_i A \\ &= \int_R \int k y dA \\ &= \int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} k y dx dy \\ &= k \int_0^a \left[yx \right]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dy \\ &= 2k \int_0^a y \sqrt{a^2-y^2} dy \\ &= -\frac{2}{3} k (a^2 - y^2)^{3/2} \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{3} k a^3. \end{aligned}$$



شکل ۳.۳.۲۰

اگر گشتاور جرم ورقه حول محور x ها، I_x کیلو گرم-متر مربع باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 I_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i^2(k \gamma_i) \Delta_i A \\
 &= \int_R \int k y^2 dy dx \\
 &= \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} k y^2 dy dx \\
 &= k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{3} k \int_{-a}^a (a^3 - 2a^2 x^2 + x^3) dx \\
 &= \frac{1}{3} k \left(2a^3 - \frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{5} a^3 \right) \\
 &= \frac{2}{15} k a^3.
 \end{aligned}$$

بنابراین، اگر شعاع چرخش r متر باشد، داریم

$$r^2 = \frac{\frac{2}{15} k a^3}{\frac{2}{3} k a^2} = \frac{2}{5} a^2.$$

▲

و لذا $r = \sqrt{10} a / 5$. بنابراین شعاع چرخش $\sqrt{10} a / 5$ متر است.

تمرینهای ۳.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، جرم و مرکز جرم ورقه مفروض با چگالی سطحی داده شده را بیابید. جرم بر حسب کیلوگرم و فاصله بر حسب متر اندازه گیری می شود.

۱. ورقه ای به شکل یک ناحیه مستطیلی محصور بین خطوط $x=3$ و $y=2$ ، و محورهای مختصات. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه xy^2 کیلوگرم بر متر مربع است.

۲. ورقه ای به شکل یک ناحیه مستطیلی محصور بین خطوط $x=4$ و $y=5$ و محورهای مختصات. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه، (x^2+y) کیلوگرم بر متر مربع است.

۳. ورقه ای به شکل ناحیه ای مثلثی که اضلاعش قطعه هایی از محورهای مختصات و خط $x+2y=6$ اند. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه، y^2 کیلوگرم بر متر مربع است.

۴. ورقه ای به شکل ناحیه ای واقع در ربع اول محصور بین سهمی $y=x^2$ ، خط $y=1$ ، و محور y ها. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه، $(x+y)$ کیلوگرم بر متر مربع است.

۵. ورقه ای به شکل ناحیه ای محصور بین سهمی $x^2=8y$ ، خط $y=2$ ، و محور y ها. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا خط $y=-1$ تغییر می کند.

۶. ورقه ای به شکل ناحیه ای محصور بین منحنی $y=e^x$ ، خط $x=1$ ، و محورهای مختصات. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا محور x ها تغییر می کند.

۷. ورقه ای به شکل ناحیه ای واقع در ربع اول محصور بین دایره $x^2+y^2=a^2$ و محورهای مختصات. چگالی سطحی بر حسب مجموع فواصل تا دوطرف مستقیم تغییر می کند.

۸. ورقه ای به شکل ناحیه محصور در مثلثی که اضلاعش قطعه هایی از محورهای مختصات و خط $3x+2y=18$ اند. چگالی سطحی بر حسب حاصلضرب فواصل تا محورهای مختصات تغییر می کند.

۹. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین منحنی $y=\sin x$ و محور x ها، از $x=0$ تا $x=\pi$. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا محور x ها تغییر می کند.

۱۰. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین منحنی $y=\sqrt{x}$ و خط $y=x$. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا محور y ها تغییر می کند.

۱۱. ورقه ای به شکل ناحیه واقع در ربع اول محصور بین دایره $x^2+y^2=4$ و خط $x+y=2$. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه، xy کیلوگرم بر متر مربع است.

۱۲. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و خطوط $x = 1$ و $y = 1$. چگالی سطحی در هر نقطه دلخواه، xy کیلوگرم بر متر مربع است.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۸، گشتاور لختی لایه همگن مفروض را حول محور داده شده بیابید. چگالی سطحی ρ کیلوگرم بر متر مربع، و اندازه فاصله بر حسب متر است.

۱۳. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور بین $xy = 3x$ ، $y = 4$ ، $x = 4$ ، و محور xy ها؛ حول محور xy ها.

۱۴. ورقه مذکور در تمرین ۱۳؛ حول خط $x = 4$.

۱۵. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور در دایره‌ای به شعاع a واحد؛ حول مرکزش.

۱۶. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور بین سهمی $y = 4 - x^2$ و محور xy ها؛ حول محور xy ها.

۱۷. ورقه مذکور در تمرین ۱۶؛ حول مبدأ.

۱۸. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور در مثلثی که طول اضلاعش a متر، b متر، و c متر اند؛ حول ضلع به طول a متر.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، در مورد ورقه مفروض مطلوب است: (الف) گشتاور لختی حول محور xy ها؛ (ب) گشتاور لختی حول محور yz ها؛ (پ) شعاع چرخش حول محور xy ها؛ (ت) گشتاور لختی قطبی.

۱۹. ورقه مذکور در تمرین ۱.

۲۰. ورقه مذکور در تمرین ۴.

۲۱. ورقه مذکور در تمرین ۹.

۲۲. ورقه مذکور در تمرین ۱۵.

۲۳. یک ورقه همگن با چگالی سطحی ρ اسلاگ بر فوت مربع به شکل ناحیه محصور در مثلث متساوی الساقینی است که طول قاعده‌اش b فوت و طول ارتفاعش h فوت است. شعاع چرخش ورقه را حول خط تقارنش بیابید.

۲۴. ورقه همگنی با چگالی سطحی ρ اسلاگ بر فوت مربع به شکل ناحیه محصور بین منحنی $x = \sqrt{y}$ ، محور xy ها، و خط $x = a$ ، $a > 0$ ، است. گشتاور لختی ورقه را حول خط $x = a$ بیابید.

۲۵. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور بین سهمی $y = 2x - x^2$ و محور y هاست. گشتاور لختی ورقه را حول خط $y = 4$ بیابید؛ چگالی سطحی بر حسب فاصله تا خط $y = 4$ تغییر می‌کند. جرم بر حسب کیلوگرم، و فاصله بر حسب متر اندازه‌گیری می‌شود.

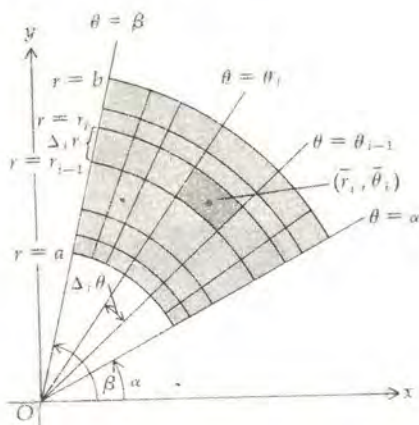
۴.۲۰ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان انتگرال دوگانه يك تابع را بر ناحیه بسته‌ای در صفحه مختصات قطبی تعریف کرد. با بررسی ساده‌ترین نوع ناحیه آغاز می‌کنیم. فرض کنید R ناحیه محصور بین پرتوهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ ، و دایره $r = a$ و $r = b$ باشد. سپس فرض کنید Δ افزای از این ناحیه باشد که با رسم پرتوهای ماربر قطب، و دایره‌ای که مرکز هر يك در قطب است به دست می‌آید. شکل ۱۰۴.۲۰ این را نشان می‌دهد. بدین ترتیب شبکه‌ای از زیر ناحیه‌ها حاصل می‌شود که ما آنها را مستطیلهای «خمیده» می‌نامیم. نورم $\|\Delta\|$ از این افزاز، طول طویلترین قطر این مستطیلهای «خمیده» است. فرض کنید تعداد زیر ناحیه‌ها n باشد، و $\Delta_i A$ اندازه مساحت i امین مستطیل «خمیده» باشد، چون مساحت i امین زیر ناحیه، تفاضل مساحت‌های دو قطاع مستدیر است،

$$\Delta_i A = \frac{1}{2} r_i^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 (\theta_i - \theta_{i-1})$$

$$= \frac{1}{2} (r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

گیریم $\bar{r}_i = (r_i + r_{i-1})/2$ ، $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$ ، و $\Delta_i \theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. پس

$$\Delta_i A = r_i \Delta_i r \Delta_i \theta.$$


شکل ۱۰۴.۲۰

نقطه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ را در i امین زیر ناحیه انتخاب می کنیم به طوری که $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$ و مجموع

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \quad (۱)$$

را تشکیل می دهیم. می توان نشان داد که اگر f بر ناحیه R پیوسته باشد، آنگاه حد مجموع در (۱) وقتی که $\|\Delta\|$ به صفر میل می کند وجود دارد و این حد، انتگرال دوگانه f بر R خواهد بود. بنابراین می نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = \int_R \int f(r, \theta) dA \quad (۲)$$

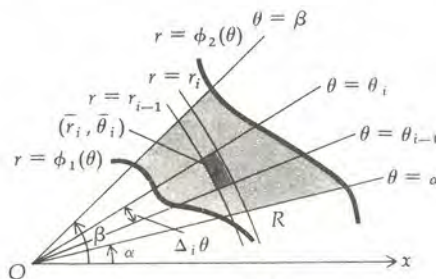
یا

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) r_i \Delta_i r \Delta_i \theta = \int_R \int f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (۳)$$

توجه کنید که در مختصات قطبی، $dA = r dr d\theta$. می توان نشان داد که انتگرال دوگانه مساوی بایک انتگرال مکرر به یکی از دو صورت ممکن زیر است:

$$\begin{aligned} \int_R \int f(r, \theta) dA &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} f(r, \theta) r d\theta dr. \end{aligned} \quad (۴)$$

علاوه بر ناحیه فوق، انتگرال دوگانه يك تابع پیوسته دو متغیری f را بر نواحی بسته دیگر از صفحه مختصات قطبی هم می توانیم تعریف کنیم. مثلاً، ناحیه R محصور بین $r = \phi_1(\theta)$ و $r = \phi_2(\theta)$ ، که ϕ_1 و ϕ_2 توابعی هموار هستند، و بین خطوط $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ را در نظر بگیرید. شکل ۲۰۴۰۲۰ را ببینید. در شکل، به ازای هر θ در بازه بسته



شکل ۲۰۴۰۲۰

$[\alpha, \beta]$ ، $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$. آنگاه می‌توان نشان داد که انتگرال دوگانه f بر R وجود دارد و برابر با يك انتگرال مکرر است، و داریم

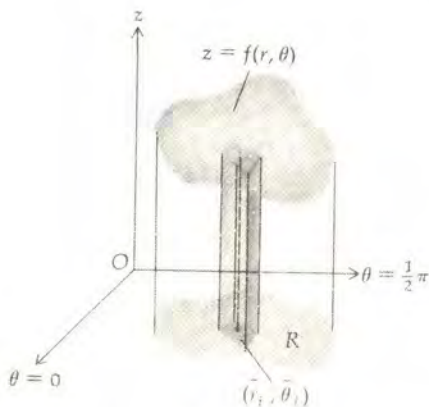
$$\int_R \int f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (5)$$

اگر ناحیه R بین منحنیهای $\theta = \chi_1(r)$ و $\theta = \chi_2(r)$ ، که χ_1 و χ_2 توابعی هموار هستند، و بین دایره $r = a$ و $r = b$ محصور باشد (طبق شکل ۳۰۴۰۲۰) و اگر به‌ازای هر r در بازه بسته $[a, b]$ ، $\chi_1(r) \leq \chi_2(r)$ ، آنگاه

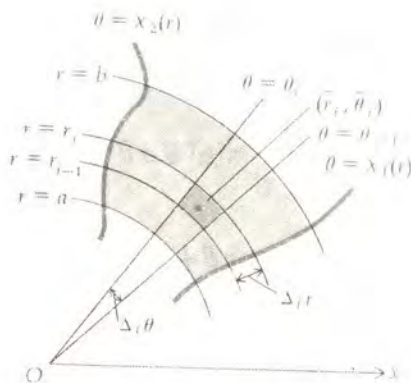
$$\int_R \int f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{\chi_1(r)}^{\chi_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr. \quad (6)$$

انتگرال دوگانه يك تابع را بر يك ناحیه بسته در صفحه مختصات قطبی می‌توان با استفاده از مختصات استوانه‌ای به‌صورت اندازه حجم يك جسم تعبیر کرد. شکل ۳۰۴۰۲۰ جسمی را نشان می‌دهد که قاعده‌اش يك ناحیه R واقع در صفحه مختصات قطبی است و از بالا توسط رویه $z = f(r, \theta)$ که در آن f بر R پیوسته است و بر R ، $f(x, y) \geq 0$ ، محصور است. افزای برای R انتخاب می‌کنیم که شبکه‌ای از n مستطیل «خمیده» به ما بدهد. n جسم می‌سازیم که قاعده‌ی زمین جسم، زمین مستطیل «خمیده» باشد و اندازه ارتفاعش $f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ ؛ در زمین زیر ناحیه است. شکل ۳۰۴۰۲۰، زمین جسم را نشان می‌دهد. اندازه حجم زمین جسم برابر است با

$$f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \Delta_i A = f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta.$$



شکل ۳۰۴۰۲۰



شکل ۳۰۴۰۲۰

مجموع اندازه‌های حجمهای این n جسم

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$$

است. اگر اندازه حجم جسم مفروض V باشد، آنگاه

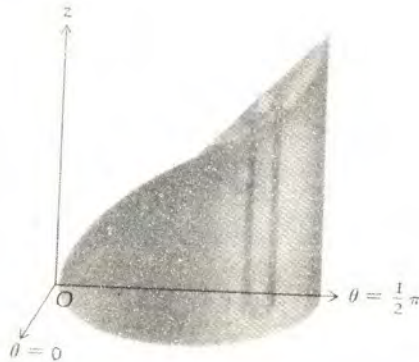
$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta = \int_R \int f(r, \theta) r dr d\theta. \quad (7)$$

مثال ۱. مطلوب است حجم جسم واقع در ثمن اول محصور بین مخروط $z = r$ و استوانه $r = 3 \sin \theta$.

حل. جسم و زامین جزء آن در شکل ۵.۴۰۲۰ نشان داده شده‌اند. با استفاده از فرمول (۷) و رابطه $f(r, \theta) = r$ ، چنانچه حجم جسم مفروض V واحد مکعب باشد، داریم

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \int_R \int r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{3 \sin \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{3 \sin \theta} d\theta \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \\ &= -9 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 6. \end{aligned}$$

بنابراین حجم، ۶ واحد مکعب است.



▲

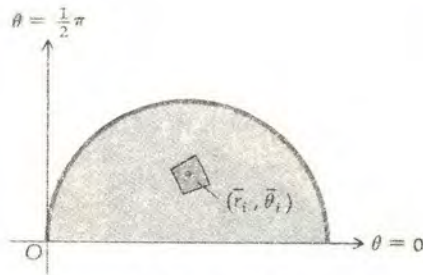
شکل ۵۰۴۰۲۰

مثال ۲ مطلوب است جرم ورقه‌ای به شکل ناحیه درون نیم‌دایره $r = a \cos \theta$ ، که اندازه چگالی سطحش در هر نقطه متناسب است با اندازه فاصله آن نقطه تا قطب. جرم بر حسب کیلو گرم، و فاصله بر حسب متر اندازه گیری می‌شود.

حل شکل ۵۰۴۰۲۰، ورقه و z امین مستطیل «خمیده» را نشان می‌دهد. چگالی سطحی در نقطه (r, θ) ، kr کیلو گرم بر متر مربع است (k عددی ثابت است). اگر جرم ورقه M کیلو گرم باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (k\bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \int_R \int k r^2 dr d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2 dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} k a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{3} k a^3 \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{9} k a^3. \end{aligned}$$

پس جرم، $\frac{2}{9} k a^3$ کیلو گرم است.



شکل ۶.۴.۲۰

مثال ۳ مرکز جرم ورقه مذکور در مثال ۲ را بیابید.

حل طبق معمول مسحور ی‌ها را در امتداد محور قطبی و محور ی‌ها را در امتداد محور $\pi/2$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم مختصات دکارتی مرکز جرم ورقه $\bar{x}$ و $\bar{y}$ باشد. نمایش مختصات دکارتی نقطه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i)$ را $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ می‌گیریم. در این صورت اگر گشتاور جرم ورقه نسبت به محور ی‌ها، M_x کیلوگرم-متر باشد،

$$M_x = \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i (k \bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta.$$

با قراردادن $\bar{r}_i \sin \bar{\theta}_i$ به جای $\bar{y}_i$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \bar{r}_i^3 \sin \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \int_R \int k r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{4} k a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= -\frac{1}{40} k a^4 \cos^5 \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{40} k a^4. \end{aligned}$$

اگر گشتاور جرم ورقه نسبت به محور y ها، M_y کیلو گرم-متر باشد، آنگاه

$$M_y = \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i (k \bar{r}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta.$$

با قرار دادن $\bar{r}_i \cos \bar{\theta}_i$ به جای $\bar{x}_i$ داریم

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \bar{r}_i^2 \cos \bar{\theta}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \int_R \int k r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \theta} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} k a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} k a^3 \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{1}{5} \sin^5 \theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{15} k a^3. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{2}{15} k a^3}{\frac{2}{9} k a^3} = \frac{3}{5} a$$

و

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{1}{20} k a^3}{\frac{2}{9} k a^3} = \frac{9}{40} a.$$

▲

پس مرکز جرم در نقطه $(3a/5, 9a/40)$ است.

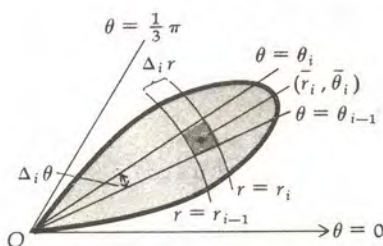
مساحت ناحیه‌ای در صفحه قطبی را می‌توان با انتگرال گیری دوگانه به دست آورد. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۴ با انتگرال گیری دوگانه، مساحت ناحیه واقع در یک برگ از گل $r = \sin 3\theta$ را بیابید.

حل شکل ۷.۴.۲۰، ناحیه و مستطیل «خمیده» i ام را نشان می‌دهد. اگر مساحت ناحیه A واحد مربع باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \\ &= \int_R \int r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{\sin 3\theta} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4} \theta - \frac{1}{44} \sin 6\theta \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{12} \pi. \end{aligned}$$

لذا مساحت، $\pi/12$ واحد مربع است.



شکل ۷.۴.۲۰

گاه اگر به جای مختصات دکارتی از مختصات قطبی استفاده کنیم، انتگرال دوگانه ساده‌تر محاسبه می‌شود. در مثال زیر این مورد را نشان می‌دهیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبه انتگرال دوگانه $\int_R \int e^{-(x^2+y^2)} dA$ که در آن ناحیه R در ربع اول واقع، و بین دایره $x^2+y^2=a^2$ و محاورهای مختصات محصور است.

حل چون $x^2+y^2=r^2$ ، و $dA=r dr d\theta$

$$\begin{aligned} \int_R \int e^{-(x^2+y^2)} dA &= \int_R \int e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[e^{-r^2} \right]_0^a d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (e^{-a^2} - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \pi (1 - e^{-a^2}). \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۴.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۶، مساحت ناحیه مفروض را با استفاده از انتگرال دوگانه بیابید.

۱. ناحیه درون دلواری $r = 2(1 + \sin \theta)$.
۲. یک برگ از گل $r = a \cos 2\theta$.
۳. ناحیه درون دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$ و بیرون دایره $r = a$.
۴. ناحیه درون دایره $r = 1$ و بیرون پروانه $r^2 = \cos 2\theta$.
۵. ناحیه درون طوق بزرگ حلزونی $r = 2 - 4 \sin \theta$ و بیرون طوق کوچک آن.
۶. ناحیه درون حلزونی $r = 3 - \cos \theta$ و بیرون دایره $r = 5 \cos \theta$.

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، حجم جسم مفروض را بیابید.

۷. جسم محصور در بیضیوار $z^2 + 9r^2 = 9$.
۸. جسم حاصل از تقاطع کره $z^2 + r^2 = 4$ و استوانه $r = 1$.

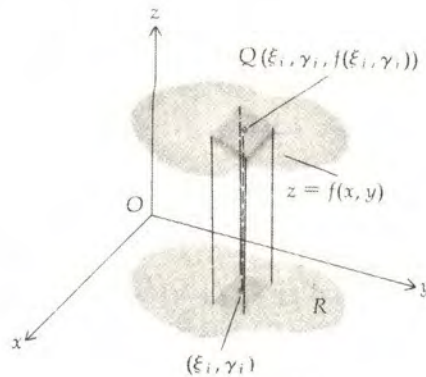
۹. جسم حاصل از تقاطع کره $z^2 + r^2 = 16$ و استوانه $z = 2 \cos \theta$ ، $r = 2$.
 ۱۰. آن قسمت از مقطع مخروط $z = 2r$ و استوانه $z = 1 - \cos \theta$ که در بالای صفحه قطبی واقع است.
 ۱۱. جسم محصور بین سهمیوار $z = 4 - r^2$ ، استوانه $r = 1$ ، و صفحه قطبی.
 ۱۲. جسم واقع در بالای سهمیوار $z = r^2$ و زیر صفحه $z = 2r \sin \theta$.
 در تمرینهای ۱۳ تا ۱۹، جرم و مرکز جرم ورقه مفروض با چگالی سطحی ذکر شده را بیابید. جرم بر حسب کیلوگرم، و فاصله بر حسب متر اندازه گیری می شود.
 ۱۳. ورقه ای به شکل ناحیه مذکور در تمرین ۱. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا قطب تغییر می کند.
 ۱۴. ورقه ای به شکل ناحیه مذکور در تمرین ۲. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا قطب تغییر می کند.
 ۱۵. ورقه ای به شکل ناحیه درون حلزونی $r = 2 - \cos \theta$. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا قطب تغییر می کند.
 ۱۶. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین حلزونی $r = 2 + \cos \theta$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ، و محور قطبی. چگالی سطحی در هر نقطه، $k \sin \theta$ کیلو گرم بر متر مربع است.
 ۱۷. ورقه مذکور در تمرین ۱۶. چگالی سطحی در هر نقطه، $kr \sin \theta$ کیلو گرم بر متر مربع است.
 ۱۸. ورقه ای به شکل ناحیه مذکور در تمرین ۶. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا قطب تغییر می کند.
 ۱۹. ورقه ای به شکل ناحیه مذکور در تمرین ۵. چگالی سطحی بر حسب فاصله تا قطب تغییر می کند.
 در تمرینهای ۲۰ تا ۲۴، گشتاور لختی ورقه مفروض با چگالی سطحی ذکر شده را حول محور یا نقطه داده شده بیابید. جرم بر حسب کیلوگرم، و فاصله بر حسب متر اندازه گرفته شده است.
 ۲۰. ورقه ای به شکل ناحیه درون دایره $r = \sin \theta$ ؛ حول محور $\pi/2$. چگالی سطحی در هر نقطه، k کیلو گرم بر متر مربع است.
 ۲۱. ورقه تمرین ۲۰؛ حول محور قطبی. چگالی سطحی در هر نقطه، k کیلو گرم بر متر مربع است.

n است، مجموع

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma$$

تقریبی است برای اندازه σ ، مساحت آن بخش از رویه که در بالای R قرار دارد. این مطلب به تعریف σ به صورت زیر منجر می شود:

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma. \quad (1)$$



شکل ۱۰۵۰۲۰

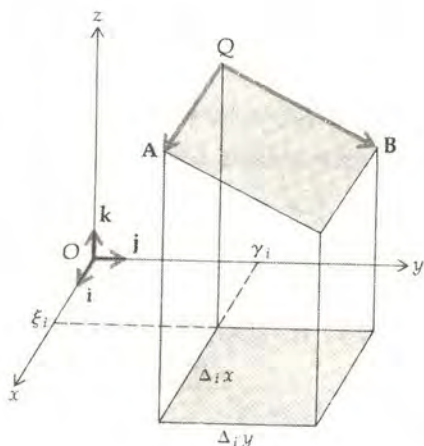
حال لازم است فرمولی برای محاسبه حد مذکور در (۱) به دست آوریم. برای انجام این کار، فرمولی برای محاسبه $\Delta_i \sigma$ به عنوان اندازه مساحت يك متوازی الاضلاع به دست می آوریم. برای سادگی محاسبه، نقطه (ξ_i, γ_i) در زامین مستطیل را گوشه (x_{i-1}, y_{i-1}) می گیریم. فرض کنید A و B بردارهایی باشند که نمایشهای آنها پاره خطهای جهت دار با نقاط ابتدایی در Q است و دوضلع مجاور متوازی الاضلاعی را تشکیل می دهند که اندازه مساحت آن $\Delta_i \sigma$ است. شکل ۱۰۵۰۲۰ را ببینید. در این صورت $\Delta_i \sigma = |A \times B|$ چون

$$A = \Delta_i x \mathbf{i} + f_x(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \mathbf{k}$$

و

$$B = \Delta_i y \mathbf{j} + f_y(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i y \mathbf{k}$$

نتیجه می گیریم که



شکل ۲۰۵۰۲

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta_i x & 0 & f_x(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i x \\ 0 & \Delta_i y & f_y(\xi_i, \gamma_i) \Delta_i y \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta_i x \Delta_i y f_x(\xi_i, \gamma_i) \mathbf{i} - \Delta_i x \Delta_i y f_y(\xi_i, \gamma_i) \mathbf{j} + \Delta_i x \Delta_i y \mathbf{k}.$$

بنابر این

$$\Delta_i \sigma = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y. \quad (2)$$

مقدار $\Delta_i \sigma$ را از (۲) در (۱) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\sigma = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{f_x^2(\xi_i, \gamma_i) + f_y^2(\xi_i, \gamma_i) + 1} \Delta_i x \Delta_i y.$$

این حد، يك انتگرال دوگانه است که بر R وجود دارد زیرا f_x و f_y بر R پیوسته‌اند. لذا قضیه زیر نتیجه می‌شود.

۱۰۵۰۲۰ قضیه فرض کنید f و مشتقات جزئی اول آن بر ناحیه بسته R واقع در صفحه xy پیوسته باشند. در این صورت اگر اندازه مساحت آن قسمت از رویه $z = f(x, y)$ که در بالای R قرار دارد σ فرض شود، داریم

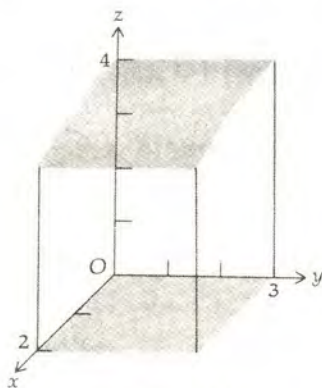
$$\sigma = \int_R \int \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} dx dy. \quad (3)$$

مثال ۱ اگر باصفحات $x=0$ ، $x=2$ ، $y=0$ ، و $y=3$ استوانه $x^2+z^2=16$ را قطع کنیم، مساحت رویه حاصل چقدر است؟

حل رویه مفروض در شکل ۳۰۵۰۲۰ نمایش داده شده است. ناحیه R ، مستطیل واقع در ربع اول صفحه xy است که به خطوط $x=2$ و $y=3$ محدود است. معادله رویه، $x^2+z^2=16$ است. این معادله را نسبت به z حل می کنیم: $z=\sqrt{16-x^2}$. پس $f(x,y)=\sqrt{16-x^2}$. لذا اگر اندازه مساحت رویه σ باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۱۰۵۰۲۰،

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_R \int \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2 + 0 + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_0^2 \int_0^3 \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} \, dx \, dy \\ &= 4 \int_0^2 \left[\sin^{-1} \frac{1}{4} x \right]_0^3 \, dy \\ &= 4 \int_0^2 \frac{1}{4} \pi \, dy \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

بنابراین مساحت رویه، 2π واحد مربع است.



شکل ۳۰۵۰۲۰

مثال ۲ مساحت سهمیوار $z = x^2 + y^2$ واقع در زیر صفحه $z = 4$ را بیابید.

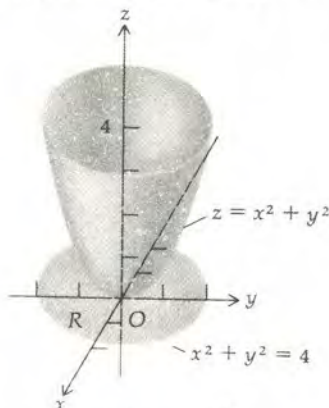
حل شکل ۴.۵.۲۰ رویه مفروض را نشان می‌دهد. بنا بر معادله سهمیوار داریم $f(x, y) = x^2 + y^2$. ناحیه R ناحیه بسته واقع در صفحه xy و محدود به دایره $x^2 + y^2 = 4$ است. اگر مساحت رویه مورد نظر σ واحد مربع باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۱۰.۵.۲۰ داریم

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_R \int \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx \, dy \\ &= \int_R \int \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} \, dx \, dy.\end{aligned}$$

چون انتگران شامل جمله $4(x^2 + y^2)$ است استفاده از مختصات قطبی کار محاسبه انتگرال دوگانه را ساده می‌کند. اما، $x^2 + y^2 = r^2$ و $dx \, dy = dA = r \, dr \, d\theta$. علاوه بر این، حدود r از ۰ تا ۲ و حدود θ از ۰ تا 2π است. بنابراین

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{1}{6} \pi (17\sqrt{17} - 1).\end{aligned}$$

لذا مساحت سهمیوار زیر صفحه مفروض، $\pi(17\sqrt{17} - 1)/6$ واحد مربع است.



شکل ۴.۵.۲۰

مثال ۳ مساحت نیمه بالایی کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ را بیابید.

حل نیمکره در شکل ۵.۵.۲۰ نشان داده شده است. اگر از معادله کره z را محاسبه کنیم و آن را برابر با $f(x, y)$ قرار دهیم داریم

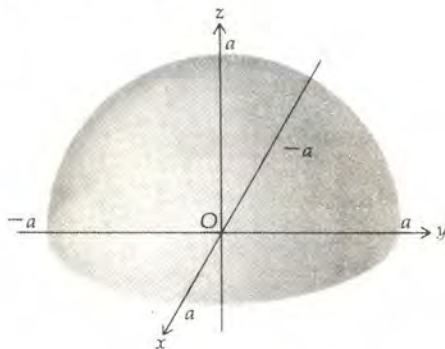
$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

چون $f_x, f_y(x, y) = -y/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و $f_x(x, y) = -x/\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ و f_y روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ که مرز ناحیه R واقع در صفحه xy است معین نیستند. علاوه بر این، انتگرال دوگانه حاصل از (۳)،

$$\int_R \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

است که چون انتگران آن در هر نقطه از مرز R يك ناپیوستگی بینهایت دارد، انتگرالی نامتعرف است. با در نظر گرفتن ناحیه ای چون R' که مرز دایره $x^2 + y^2 = b^2$ ، $b < a$ باشد و سپس با گرفتن حد وقتی که $b \rightarrow a$ ، این مشکل رفع می شود. علاوه بر این، اگر انتگرال دوگانه را با استفاده از مختصات قطبی، به وسیله يك انتگرال مکرر حساب کنیم، لذا محاسبه ساده می شود.

$$\begin{aligned} \sigma &= \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \int_0^{2\pi} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r d\theta dr \\ &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \int_0^b \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^b \end{aligned}$$



شکل ۵.۵.۲۰

$$= 2\pi a \lim_{b \rightarrow a^-} [-\sqrt{a^2 - b^2} + a]$$

$$= 2\pi a^2.$$

بنابراین، مساحت نیمکره $2\pi a^2$ واحد مربع است. ▲

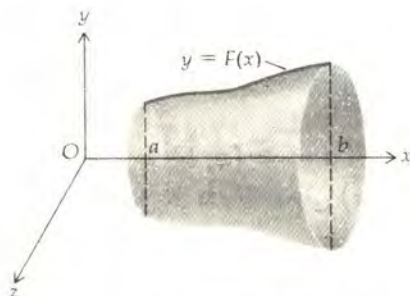
حال منحنی $y = F(x)$ را با ضابطه $a \leq x \leq b$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که روی $[a, b]$ ، $F(x) > 0$ و F' پیوسته باشد. اگر این منحنی حول محور x ها دوران کند، یک رویهٔ دوار به‌دست می‌آید. در بخش ۷.۱۷ دیدیم که معادلهٔ این رویه

$$y^2 + z^2 = [F(x)]^2 \quad (۴)$$

است. شکل ۶.۵.۲۰ رویهٔ دوار را نشان می‌دهد. در شکل، صفحهٔ xy همان صفحهٔ کاغذ است؛ ولی در اینجا هم دستگاه راستگرد است. می‌خواهیم با استفاده از قضیهٔ ۱.۵.۲۰ فرمولی برای محاسبهٔ اندازهٔ مساحت این رویه به‌دست آوریم. بنابر ویژگیهای تقارن، اندازهٔ مساحت آن قسمت از رویه که در بالای صفحهٔ xz و در جلو صفحهٔ xy است یک‌چهارم اندازهٔ مساحت کل رویه می‌باشد. از (۴)، z را (با صرفنظر کردن از ریشهٔ دوم منفی به‌خاطر اینکه $z \geq 0$) محاسبه می‌کنیم و $y^2 = [F(x)]^2 - z^2$ را به‌دست می‌آوریم. ناحیهٔ R واقع در صفحهٔ xy ناحیهٔ محصور بین محور x ها، منحنی $y = F(x)$ ، و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. با محاسبهٔ مشتقات جزئی f ،

$$f_x(x, y) = \frac{F(x)F'(x)}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}}$$

را به‌دست می‌آوریم. مشاهده می‌شود که بر بخشی از مرز R (وقتی که $y = -F(x)$ و وقتی که $y = F(x)$)، $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ وجود ندارد. انتگرال دوگانهٔ حاصل از



شکل ۶.۵.۲۰

(۳) عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_R \int \sqrt{\frac{[F(x)]^2 [F'(x)]^2}{[F(x)]^2 - y^2} + \frac{y^2}{[F(x)]^2 - y^2} + 1} dy dx \\ = \int_R \int \frac{F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1}}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} dy dx. \end{aligned}$$

این انتگرال دوگانه نامتعارف است زیرا در هر نقطه از مرز R که در آنجا $y = -F(x)$ و $y = F(x)$ ، انتگرال یک ناپیوستگی بینهایت دارد. لذا انتگرال دوگانه را به وسیله انتگرال مکرری که انتگرال درونی آن نامتعارف است محاسبه می کنیم

$$\sigma = 2 \int_a^b \left[F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \right] dx. \quad (5)$$

اما

$$\begin{aligned} \int_0^{F(x)} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{F(x) - \epsilon} \frac{dy}{\sqrt{[F(x)]^2 - y^2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\sin^{-1} \frac{y}{F(x)} \right]_0^{F(x) - \epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sin^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon}{F(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

لذا، بنابر (۵)،

$$\sigma = 2\pi \int_a^b F(x) \sqrt{[F'(x)]^2 + 1} dx.$$

حال با قراردادن f به جای F ، این نتیجه را به صورت یک قضیه بیان می کنیم.

۲۰۵.۲۰ قضیه فرض کنید تابع f بر $[a, b]$ مثبت، و f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر σ اندازه مساحت رویه دوار حاصل از دوران منحنی $y = f(x)$ با ضابطه $a \leq x \leq b$ حول محور xy باشد، آنگاه

$$\sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{[f'(x)]^2 + 1} dx.$$

مثال ۴ مطلوب است مساحت سهمیوار دوار حاصل از دوران نیمه بالایی سهمی $y^2 = 2px$ با ضابطه $0 \leq x \leq h$ حول محور x ها.

حل سهمیوار دوار در شکل ۷۰۵۰۲۰ نشان داده شده است. اگر معادله سهمی را نسبت به y ($y \geq 0$) حل کنیم، داریم $y = 2p^{1/2}x^{1/2}$. لذا اگر مساحت رویه σ واحد مربع باشد، بنابراین قضیه ۷۰۵۰۲۰ با ضابطه $f(x) = 2p^{1/2}x^{1/2}$ داریم

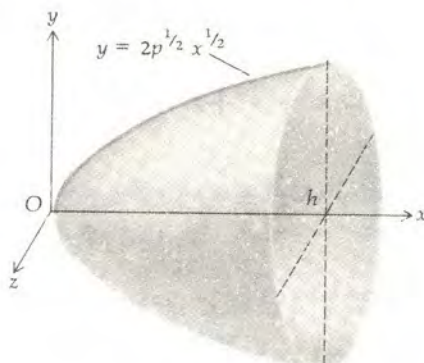
$$\sigma = 2\pi \int_0^h 2p^{1/2}x^{1/2} \sqrt{\frac{p}{x} + 1} dx$$

$$= 2\pi p^{1/2} \int_0^h \sqrt{p+x} dx$$

$$= \frac{8}{3} \pi p^{1/2} (p+x)^{3/2} \Big|_0^h$$

$$= \frac{8}{3} \pi (\sqrt{p(p+h)^3} - p^2).$$

بنابراین، مساحت سهمیوار دوار، $(8/3)\pi(\sqrt{p(p+h)^3} - p^2)$ واحد مربع است.



شکل ۷۰۵۰۲۰

تمرینهای ۵۰۲۰

- مطلوب است مساحت رویه حاصل از برش صفحه $2x + y + z = 2$ توسط صفحات $x=0$ ، $x=1$ ، $y=0$ ، و $y=1$.

۲. مطلوب است مساحت رویه حاصل از برش صفحه $z = 5 - 2x - y$ توسط صفحات $x=0$ ، $x=2$ ، $y=0$ و $y=4$.
۳. صفحه $z = 144 + 9y + 16x + 36x$ را با صفحات مختصات قطع می کنیم؛ مساحت رویه حاصل را بیابید.
۴. صفحه $z = ax + by$ را با صفحات $x=0$ ، $x=a$ ، $y=0$ و $y=b$ و $a > 0$ و $b > 0$ قطع می کنیم؛ مساحت رویه حاصل را بیابید.
۵. استوانه $x^2 + y^2 = 9$ را با صفحه $x = z$ قطع می کنیم؛ مساحت آن قسمت از رویه حاصل را که در ثمن اول واقع است بیابید.
۶. استوانه $x^2 + y^2 = 25$ را با صفحات $x=0$ ، $x=1$ ، $z=1$ و $z=3$ قطع می کنیم؛ مساحت رویه حاصل را بیابید.
۷. فرض کنید R ناحیه مثلثی واقع در صفحه xy با رئوس $(0, 0, 0)$ ، $(0, 4, 0)$ و $(2, 4, 0)$ باشد. مساحت رویه آن قسمت از نمودار $z = 5x - y^2 = 2$ را که در بالای R قرار می گیرد محاسبه کنید.
۸. مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را با صفحه $x + y = 4$ قطع می کنیم؛ مساحت آن قسمت از رویه حاصل را که در ثمن اول قرار می گیرد بیابید.
۹. کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ را با یک دایره از مخروط $x^2 + z^2 = y^2$ قطع کرده ایم؛ مساحت رویه حاصل را بیابید.
۱۰. مساحت بخشی از رویه کره $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ را که در استوانه $x^2 + y^2 = 9$ واقع است، بیابید.
۱۱. مساحت آن قسمت از رویه کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ را که درون سهمیوار $3z = x^2 + y^2$ قرار می گیرد بیابید.
۱۲. در مورد کره و سهمیوار مذکور در تمرین ۱۱، مساحت آن قسمت از رویه سهمیوار را که درون کره قرار می گیرد بیابید.
۱۳. پاره خط از مبدأ تا نقطه (a, b) را حول محور xy دوران می دهیم. مساحت رویه مخروط حاصل را بیابید.
۱۴. با دوران یک نیمدایره حول قطر آن، فرمول مساحت رویه یک کره را به دست آورید.
۱۵. مطلوب است مساحت زویه دوار حاصل از دوران قوسی از منحنی زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ از $x=0$ تا $x=a$ حول محور xy .

۱۶. مطلوب است مساحت رویه دوار حاصل از دوران منحنی زنجیری مذکور در تمرین ۱۵ حول محور x ها.

۱۷. طول منحنی $x(6-x)^2 = 18y^2$ را حول محور x ها دوران می دهیم. مساحت رویه دوار حاصل را بیابید.

۱۸. مطلوب است مساحت رویه دوار حاصل از دوران قوسی از منحنی $y = \ln x$ از $x = 1$ تا $x = 2$ حول محور y ها.

۱۹. مساحت آن قسمت از صفحه $x = z$ را که بین صفحات $y = 0$ و $y = 6$ و درون هذلولیوار $144 = 16z^2 + 4y^2 - 9x^2$ قرار می گیرد بیابید.

۲۰. سهمیوار هذلولوی $6z = x^2 - y^2$ را با استوانه $x^2 + y^2 = 36$ قطع می کنیم؛ مساحت رویه حاصل را بیابید.

۲۱. فرض کنید که f و مشتقات جزئی مرتبه اولش بر ناحیه بسته R واقع در صفحه xy پیوسته باشند. نشان دهید که اگر اندازه مساحت آن قسمت از رویه $z = f(x, y)$ را که بالای R قرار می گیرد σ فرض کنیم، آنگاه

$$\sigma = \int_R |\nabla g(x, y, z)| dx dy.$$

در اینجا $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

۶.۲۰ قضیه گرین

قضیه ای وجود دارد که انتگرال دوگانه بر ناحیه ای مسطح چون R را بر حسب انتگرالی روی يك منحنی که يك مرز R است بیان می کند. این قضیه به ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی جورج گرین (۱۷۹۳-۱۸۴۱) منسوب است که آن را در مقاله ای در زمینه کاربرد ریاضیات در الکترواستاتیستیک و مغناطیس معرفی کرده است. قبل از بیان قضیه، لازم است چند اصطلاح را در مورد منحنیهای مسطح مرور و معرفی کنیم.

در بخش ۶.۱۹ گفتیم که اگر يك منحنی C با معادلات پارامتری

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

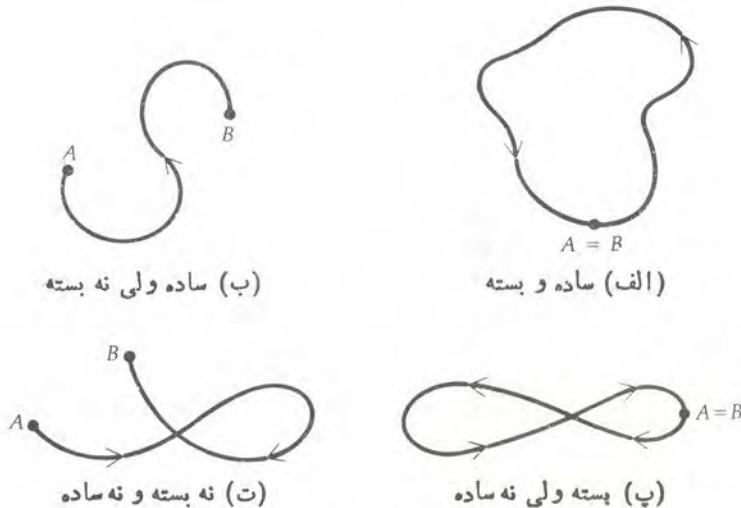
معرفی شده باشد، آنگاه C را بر بازه بسته $[a, b]$ هموار نامیم هرگاه f' و g' بر $[a, b]$ پیوسته باشند و در هیچ نقطه ای از بازه باز (a, b) ، $f'(t)$ و $g'(t)$ هر دو صفر نباشند. اگر نقطه ابتدایی $A(f(a), g(a))$ و نقطه انتهایی $B(f(b), g(b))$ يك منحنی C با معادلات

پارامتری (۱) برهم منطبق باشند، آنگاه منحنی C را بسته می‌نامند. منحنی C را ساده می‌نامیم هرگاه در بین نقاط A و B خودش را قطع نکند؛ بدین معنی که به ازای هر t_1 و t_2 واقع در بازه (a, b) با شرط $t_1 \neq t_2$ داشته باشیم

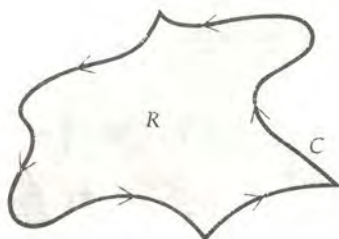
$$(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2)).$$

دایره و بیضی مثالهایی از منحنی هموار، بسته و ساده هستند. در شکل ۱۰۶۰۲۵ (الف) تا (ت) مثالهای دیگری از منحنی هموار دیده می‌شوند که ممکن است بسته و ساده باشند یا نباشند. در (الف) منحنی هم ساده است و هم بسته؛ در (ب) منحنی ساده است ولی بسته نیست؛ در (پ) منحنی بسته است ولی ساده نیست؛ و در (ت) منحنی نه ساده است و نه بسته.

همان‌طور که در بخش ۶۰۱۹ گفتیم، یک منحنی C را بر بازه‌ای چون I قطعه‌قطعه هموار نامیم هرگاه I را بتوان به تعدادی متناهی زیر بازه افراز کرد که C در هر یک از آنها هموار باشد. در بیان قضیه گرین، از انتگرال روی منحنی بسته ساده قطعه‌قطعه همواری چون C یاد می‌کنیم که مرز ناحیه‌ای چون R واقع در صفحه را تشکیل می‌دهد، و جهت حرکت روی C خلاف جهت ساعت است. در شکل ۲۰۶۰۲۵ ناحیه‌ای چون R همراه با مرز C مورد نظر نشان داده شده‌اند. انتگرال منحنی الخط C در خلاف جهت ساعت را با $\oint_C$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱۰۶۰۲۵



شکل ۲۰۶.۲۰

۱۰۶.۲۰ قضیه (قضیه گرین) فرض کنید M و N دو تابع از دو متغیر x و y باشند که بر قرص بازی چون B واقع در R^2 دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته هستند. اگر C یک منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار باشد که کلاً در B قرار دارد، و اگر R ناحیه تعریف شده توسط C باشد، آنگاه

$$\oint_C M(x, y) dx + N(x, y) dy = \int_R \int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA. \quad (۲)$$

اثبات قضیه گرین در مورد تمام ناحیه‌هایی که به منحنیهای بسته، ساده، و قطعه قطعه هموار محدودند، در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته می‌آید. با این حال، ما قضیه را در مورد نوع خاصی از ناحیه که هر خط افقی و هر خط قائم آن را در حداکثر دو نقطه قطع کند، اثبات می‌کنیم. اثبات به شرح زیر است.

اثبات فرض کنید R ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که بتوان آن را به صورت

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \quad f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \quad (۳)$$

یا

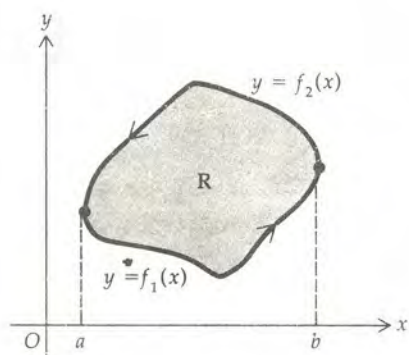
$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\} \quad (۴)$$

تعریف کرد؛ در اینجا f_1, f_2, g_1, g_2 هموارند. شکل ۲۰۶.۲۰ چنین ناحیه‌ای را نشان می‌دهد. در شکل ۲۰۶.۲۰ فرض بر این است که ناحیه R با ضابطه (۳) تعریف شده است و در شکل ۲۰۶.۲۰ با ضابطه (۴).

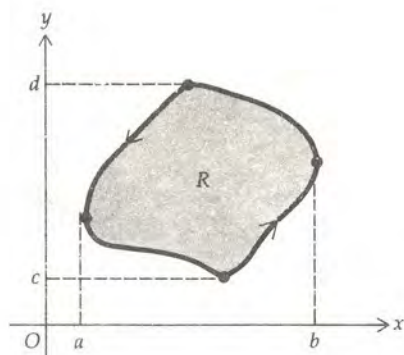
اثبات (۲) عبارت است از اثبات برابریهای زیر

$$\oint_C M(x, y) dx = - \int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA \quad (۵)$$

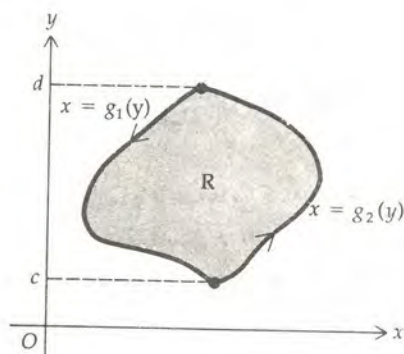
و



شکل ۴.۶.۲۰



شکل ۳.۶.۲۰



شکل ۵.۶.۲۰

$$\oint_C N(x, y) dy = \int_R \int \frac{\partial N}{\partial x} dA. \quad (۶)$$

برای اثبات (۵)، R را به عنوان ناحیه‌ای که با ضابطه (۳) تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. به شکل ۴.۶.۲۰ نگاه کنید. فرض کنید C_1 نمودار $y=f_1(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ باشد یعنی، فرض کنید C_1 بخش پایینی منحنی مرزی C باشد که جهت آن از چپ به راست است. نیز فرض کنید C_2 نمودار $y=f_2(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ باشد یعنی، بخش بالایی منحنی مرزی C باشد که جهت آن از راست به چپ است. حال انتگرال منحنی الخط

$\oint_C M(x, y) dx$ را در نظر بگیرید.

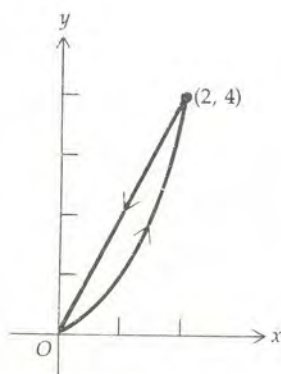
$$\begin{aligned}
 \oint_C M(x, y) dx &= \int_{c_1} M(x, y) dx + \int_{c_2} M(x, y) dx \\
 &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\
 &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx - \int_a^b M(x, f_2(x)) dx \\
 &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx. \quad (۷)
 \end{aligned}$$

حال انتگرال دو گانه $\int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که باز هم ضابطه تعریف R ، (۳) باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
 \int_R \int \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\
 &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right) dx \\
 &= \int_a^b M(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\
 &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx. \quad (۸)
 \end{aligned}$$

با مقایسه (۷) و (۸) نتیجه می گیریم که (۵) برقرار است.
 برای اثبات (۶)، همان طور که در شکل ۵.۶.۲۵ فرض شده، فرض می کنیم که R با ضابطه (۴) تعریف بشود. جزئیات اثبات را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۳۹ را ببینید).
 با جمع کردن طرفهای متناظر معادلات (۵) و (۶)، قضیه گرین برای این ناحیه R به دست می آید.
 □

○ نمونه ۱ فرض می کنیم C منحنی بسته ای باشد متشکل از قوسی از سهمی $y = x^2$ از مبدأ تا نقطه $(۲, ۴)$ و پاره خط از $(۲, ۴)$ تا مبدأ. برای محاسبه انتگرال منحنی الخط $\oint_C y^2 dx + 4xy dy$ از قضیه گرین استفاده می کنیم. ناحیه R و مرز C در شکل ۶.۶.۲۵ نشان داده شده است. بنابراین قضیه گرین داریم



شکل ۶.۶.۲۰

$$\begin{aligned}
 \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\
 &= \int_0^2 \int_{x^2}^{4-x^2} (4y - 2y) dy dx \\
 &= \int_0^2 \left[2y^2 \right]_{x^2}^{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx \\
 &= \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\
 &= \frac{64}{15}.
 \end{aligned}$$

برای اینکه فایده قضیه گرین را نشان دهیم همین انتگرال منحنی الخط را با روش مذکور در بخش ۶.۱۹ محاسبه می‌کنیم. اگر C_1 قوسی از سهمی $y = x^2$ از $(0, 0)$ تا $(2, 4)$ و C_2 پاره‌خط از $(2, 4)$ تا $(0, 0)$ باشد، آنگاه

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \oint_{C_1} y^2 dx + 4xy dy + \oint_{C_2} y^2 dx + 4xy dy.$$

معادلات پارامتری C_1 عبارت‌اند از

$$x = t \quad y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 2.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} y^x dx + x y dy &= \int_0^2 (t^2)^x dt + x(t)(t^x)(2t dt) \\ &= \int_0^2 9t^x dt \\ &= \left[\frac{9}{5} t^5 \right]_0^2 \\ &= \frac{288}{5}.\end{aligned}$$

قوس C_2 را به صورت پارامتری می‌توان با

$$t=0 \quad \text{تا} \quad t=2 \quad y=2t \quad , x=t$$

نمایش داد. پس

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} y^x dx + x y dy &= \int_2^0 (2t)^x dt + x(t)(2t)(2t dt) \\ &= \int_2^0 20t^x dt \\ &= \left[\frac{20}{3} t^3 \right]_2^0 \\ &= -\frac{160}{3}.\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}\oint_C y^x dx + x y dy &= \frac{288}{5} - \frac{160}{3} \\ &= \frac{64}{15}\end{aligned}$$

○

که همان نتیجه حاصل از به‌کاربردن قضیه گرین است.

مثال ۱ تحت تأثیر میدان نیروی $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x - y)\mathbf{i} + (e^y - x^2)\mathbf{j}$ شیئی روی دایره $x^2 + y^2 = a^2$ در خلاف جهت ساعت حرکت می‌کند و یک دور دایره

را می‌پیماید. با استفاده از قضیه گرین، کل کار انجام شده را بیابید. فرض کنید اندازه قوس بر حسب متر و اندازه نیرو بر حسب نیوتن باشد.

حل اگر کار انجام شده W ژول باشد، آنگاه با فرض اینکه C دایره $x^2 + y^2 = a^2$ باشد، داریم

$$W = \oint_C (\sin x - y) dx + (e^y - x^2) dy.$$

بنا بر قضیه گرین

$$\begin{aligned} W &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^y - x^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\sin x - y) \right] dA \\ &= \int_R \int (-2x + 1) dA. \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال دوگانه، مختصات قطبی با $x = r \cos \theta$ و $dA = r dr d\theta$ را به کار می‌بریم. پس

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r \cos \theta + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a (-2r^2 \cos \theta + r) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3} r^3 \cos \theta + \frac{r^2}{2} \right]_0^a d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3} a^3 \cos \theta + \frac{a^2}{2} \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{2}{3} a^3 \sin \theta + \frac{a^2}{2} \theta \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

▲

بنابراین کار انجام شده πa^2 ژول است.

قضیه زیر، که نتیجه‌ای از قضیه گرین است، روشی مفید برای محاسبه مساحت ناحیه‌ای محدود به يك منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار ارائه می‌کند.

۲۰۶۰۲۰ قضیه اگر R ناحیه‌ای باشد که مرز منحنی بسته ساده قطعه قطعه هموار C و مساحت آن برابر با A واحد مربع باشد، آنگاه

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

اثبات در قضیه گرین، فرض کنید $M(x, y) = -y/2$ و $N(x, y) = x/2$ در این صورت

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2} y dx + \frac{1}{2} x dy &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} y \right) \right] dA \\ &= \int_R \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA \\ &= \int_R \int dA. \end{aligned}$$

چون $\int_R \int dA$ برابر است با اندازه مساحت R ، پس

$$\square \quad \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = A.$$

مثال ۲ با استفاده از قضیه ۲۰۶۰۲۰ مساحت ناحیه محصور در بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را به دست آورید.

حل معادلات پارامتری بیضی عبارت اند از

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

پس $dx = -a \sin t dt$ و $dy = b \cos t dt$. اگر C بیضی و مساحت ناحیه محدود به C برابر با A واحد مربع باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۲۰۶۰۲۰ داریم

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t dt) - (b \sin t)(-a \sin t dt)] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\
 &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt \\
 &= \pi ab.
 \end{aligned}$$

▲ بنابراین مساحت برابر است با πab واحد مربع.

مثال ۳ اگر C بیضی $36 = 4y^2 + 9x^2$ باشد، با استفاده از قضیه گرین، انتگرال منحنی الخط $\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy$ را محاسبه کنید.

حل بنا به قضیه گرین،

$$\begin{aligned}
 &\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy \\
 &= \int_R \int \left[\frac{\partial}{\partial x} (2y^3 + 4x) - \frac{\partial}{\partial y} (x^4 - 3y) \right] dA \\
 &= \int_R \int (4 + 3) dA \\
 &= 7 \int_R \int dA.
 \end{aligned}$$

انتگرال دوگانه $\int_R \int dA$ ، اندازه مساحت ناحیه محدود به بیضی مفروض است. معادله بیضی عبارت است از $1 = x^2/4 + y^2/9$ ، و بنابراین با توجه به مثال ۲ با ضوابط $a=3$ و $b=2$ ، اندازه مساحت ناحیه محدود به این بیضی 6π خواهد بود. بنابراین

$$\oint_C (x^4 - 3y) dx + (2y^3 + 4x) dy = 42\pi.$$

▲

قضیه گرین دو صورت برداری دارد که آنها را به دست خواهیم آورد؛ و در این کار به دو کمیت اسکالر که در تعریف زیر ذکر می شوند، نیاز خواهیم داشت.

۳.۶.۲۰ تعریف اگر $F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ ، آنگاه F اسکالر F ، به صورت زیر

$$\text{curl } F = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

و دیورژانس F هم به صورت

$$\text{div } F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

معین می شود که curl نماد تاو و div نماد دیورژانس است. فرض کنید یک معادله برداری منحنی C به صورت زیر است

$$\mathbf{R}(s) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

و $x = f(s)$ و $y = g(s)$ که s واحد، اندازه طول قوسی است که از یک نقطه خاص P_0 روی C تا نقطه P روی C اندازه گیری می شود. در این صورت

$$D_s \mathbf{R}(s) = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}.$$

اگر $\mathbf{T}(s)$ بردار مماس واحد بر C در P باشد، از قضیه ۳.۸.۱۶ داریم

$$\mathbf{T}(s) = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}. \quad (۹)$$

با استفاده از نمادگذاری

$$d\mathbf{R} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

وابسته مذکور در (۹) را به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{T}(s) ds = d\mathbf{R} \quad (۱۰)$$

اگر

$$F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

آنگاه

$$F(x, y) \cdot d\mathbf{R} = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad (۱۱)$$

با منظور کردن (۱۰) در (۱۱) داریم

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = M(x, y) dx + N(x, y) dy. \quad (12)$$

پس، بنا به (۱۲) و تعریف ۳.۶.۲۰، معادله (۲) قضیه گرین را می توان به شکل زیر نوشت

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \int_R \text{curl } \mathbf{F} dA.$$

این صورت برداری قضیه گرین به طور رسمی در قضیه زیر بیان می گردد که منسوب به ریاضیدان و فیزیکدان ایرلندی جورج استوکس (۱۸۱۹-۱۹۰۳) است.

۳.۶.۲۰ قضیه (قضیه استوکس در صفحه) فرض کنید توابع M و N ، منحنی C ، و ناحیه R همان طور تعریف شوند که در قضیه گرین تعریف شدند. اگر

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

و $\mathbf{T}(s)$ بردار مماس واحد C در نقطه P باشد که در آن، طول قوس اندازه گیری شده از نقطه خاص P_0 روی C تا P برابر با s واحد است، آنگاه

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_R \text{curl } \mathbf{F} dA.$$

مثال ۴ اگر $\mathbf{F}(x, y) = 2y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j}$ ، و R ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد، درستی قضیه استوکس در صفحه را تحقیق کنید.

حل مرکز R ، دایره واحدی است با معادلات پارامتری زیر

$$x = \cos s \quad y = \sin s \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

که در اینجا s واحد، اندازه طول قوس از نقطه ای با ضابطه $s = 0$ تا نقطه P روی منحنی C است. پس يك معادله برداری C

$$\mathbf{R}(s) = \cos s \mathbf{i} + \sin s \mathbf{j}$$

است. و چون $\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$ ، داریم

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}.$$

در يك نقطه $P(\cos s, \sin s)$ روی C ، $\mathbf{F}$ برابر است با $2 \sin s \mathbf{i} + 5 \cos s \mathbf{j}$

بنابراین

$$\begin{aligned}\oint_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_0^{2\pi} (\gamma \sin s \mathbf{i} + \delta \cos s \mathbf{j}) \cdot (-\sin s \mathbf{i} + \cos s \mathbf{j}) ds \\&= \int_0^{2\pi} (-\gamma \sin^2 s + \delta \cos^2 s) ds \\&= -\gamma \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2s}{2} ds + \delta \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2s}{2} ds \\&= -s + \frac{1}{2} \sin 2s + \frac{\delta}{2} s + \frac{\delta}{2} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\&= \frac{\gamma}{2} s + \frac{\delta}{2} \sin 2s \Big|_0^{2\pi} \\&= 2\pi.\end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned}\text{curl } \mathbf{F} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \\&= \frac{\partial}{\partial x}(\delta x) - \frac{\partial}{\partial y}(\gamma y) \\&= \delta - \gamma \\&= 2\end{aligned}$$

$$\text{و } \int_R \int dA = \pi \text{، پس}$$

$$\begin{aligned}\int_R \int \text{curl } \mathbf{F} dA &= \int_R \int 2 dA. \\&= 2\pi.\end{aligned}$$

▲ بنابراین، قضیه استوکس در صفحه برای این $\mathbf{F}$ و R برقرار است.

برای به دست آوردن صورت برداری دوم قضیه گرین، معادله (۱۵) را در نظر می گیریم که $d\mathbf{R}$ را بر حسب بردار مماس واحد $\mathbf{T}(s)$ بیان می کند. با نوشتن $d\mathbf{R}$ به جای $dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ در این معادله خواهیم داشت

$$dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = \mathbf{T}(s) ds.$$

بردار $\mathbf{N}(s)$ که با معادله زیر تعریف می‌شود

$$dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j} = \mathbf{N}(s) ds$$

یک بردار قائم واحد C در P است. برای تحقیق در این مطلب، ملاحظه کنید که

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}(s) ds) \cdot (\mathbf{N}(s) ds) &= (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) \cdot (dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

و در نتیجه، بزرگهای $\mathbf{T}(s) ds$ و $\mathbf{N}(s) ds$ باهم مساوی است. چون

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= [M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}] \cdot (dy\mathbf{i} - dx\mathbf{j}) \\ &= M(x, y) dy - N(x, y) dx. \end{aligned}$$

پس

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds = \oint_C -N(x, y) dx + M(x, y) dy. \quad (13)$$

قضیه گرین را برای انتگرال منحنی الخط در طرف راست (۱۳) به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{N}(s) ds &= \int_R \int \left[\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(-N) \right] dA \\ &= \int_R \int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

بنابراین قضیه زیر را داریم.

۵.۶.۲۰ قضیه (قضیه دیورژانس در صفحه) فرض کنید توابع M و N ، منحنی C ، و ناحیه R همان‌طور تعریف شوند که در قضیه گرین تعریف شدند. اگر

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

و $\mathbf{N}(s)$ بردار قائم واحد C در P باشد که در آن، s برحسب واحد، اندازه طول قوس از نقطه خاص P_0 روی C تا P است، آنگاه

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} dA.$$

مثال ۵ در مورد $\mathbf{F}$ و R مذکور در مثال ۴، قضیه دیورژانس در صفحه را تحقیق کنید.

حل در مثال ۴ داشتیم

$$\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \Delta x\mathbf{j}$$

و بردار مماس واحد C در P با ضابطه زیر تعریف شد

$$\mathbf{T}(s) = -\sin s\mathbf{i} + \cos s\mathbf{j}.$$

اگر $\mathbf{N}(s)$ بردار قائم واحد C در P باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(s) &= \frac{D_s \mathbf{T}(s)}{|D_s \mathbf{T}(s)|} \\ &= -\cos s\mathbf{i} - \sin s\mathbf{j}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \int_0^{2\pi} (y \sin s\mathbf{i} + \Delta \cos s\mathbf{j}) \cdot (-\cos s\mathbf{i} - \sin s\mathbf{j}) \, ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-y \sin s \cos s - \Delta \sin s \cos s) \, ds \\ &= -y \int_0^{2\pi} \sin s \cos s \, ds \\ &= -\frac{y}{2} \sin^2 s \Big|_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(\Delta x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

پس

$$\int_R \int \operatorname{div} \mathbf{F} dA = 0.$$

بنابر این، قضیه دیورژانس در صفحه را برای $\mathbf{F}$ و R مفروض محقق کردیم. ▲

تمرینهای ۶.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۹، با استفاده از قضیه گرین، انتگرال منحنی الخط مفروض را محاسبه کنید. سپس، نتیجه را با روش مذکور در بخش ۶.۱۹ امتحان کنید.

۱. $\oint_C 2y dx + 3x dy$ ، که در آن C مربعی است با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(0, 1)$.

۲. $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$ ، که در آن C مربع مذکور در تمرین ۱ است.

۳. $\oint_C 2xy dx - x^2 y dy$ ، که در آن C مثلثی است با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(0, 1)$.

۴. انتگرال منحنی الخط مذکور در تمرین ۳، اگر C مثلثی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ و $(1, 1)$ باشد.

۵. انتگرال منحنی الخط مذکور در تمرین ۳، اگر C مستطیلی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 2)$ و $(0, 2)$ باشد.

۶. $\oint_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$ ، که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 1$ است.

۷. $\oint_C x^2 y dx - y^2 x dy$ ، که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 1$ است.

۸. انتگرال منحنی الخط مذکور در تمرین ۶، اگر C منحنی بسته‌ای باشد که متشکل از قوس $xy = x^3$ از $(0, 0)$ تا $(2, 2)$ و پاره خط بین $(2, 2)$ تا $(0, 0)$ است.

۹. انتگرال منحنی الخط مذکور در تمرین ۷، اگر C منحنی بسته مذکور در تمرین ۸ باشد.

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۲، انتگرال منحنی الخط را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید.

۱۰. $\oint_C \sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy$ ، که در آن منحنی بسته C با محور x ها، خط $x=1$ ، و منحنی $y=x^2$ معین می‌شود.

۱۱. $\oint_C (x+y) dx + xy dy$ ، که در آن منحنی بسته C با محور x ها، خط $x=2$ ، و منحنی $y=x^3$ معین می‌شود.

۱۲. $\oint_C (x^2+y) dx$ ، که در آن، منحنی بسته C با محور x ها و سهمی $y=4-x^2$ معین می‌شود.

۱۳. $\oint_C (-x^2+x) dy$ ، که در آن منحنی بسته C با خط $x-2y=0$ و سهمی $x=2y^2$ معین می‌شود.

۱۴. $\oint_C e^{x+y} dx + e^{x+y} dy$ ، که C دایره $x^2+y^2=4$ است.

۱۵. $\oint_C \cos y dx + \cos x dy$ ، که C مستطیلی است با رئوس $(\pi/3, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(0, \pi/4)$ ، و $(\pi/3, \pi/4)$.

۱۶. $\oint_C x \sin y dx - y \cos x dy$ ، که C مستطیلی است با رئوس $(0, 0)$ ، $(0, \pi/4)$ ، $(\pi/2, \pi/4)$ ، و $(\pi/2, 0)$.

۱۷. $\oint_C (\sin^4 x + e^{xz}) dx + (\cos^2 y - e^y) dy$ ، که C منحنی $x^4+y^4=16$ است.

۱۸. $\oint_C e^y \cos x dx + e^y \sin x dy$ ، که C منحنی $x^6+y^6=10$ است.

۱۹. $\oint_C \frac{x^2 y}{x^2+1} dx - \tan^{-1} x dy$ ، که C بیضی $4x^2+25y^2=100$ است.

۲۰. $\oint_C \tan y dx + x \tan^2 y dy$ ، که C بیضی $x^2+4y^2=1$ است.

۲۱. $\oint_C (e^x - x^2 y) dx + 3x^2 y dy$ ، که منحنی بسته C با $y = x^2$ و $x = y^2$ معین می شود.

۲۲. $\oint_C 2xy dx + 4x^2 y dy$ ، که منحنی بسته C با محور x ها، محور y ها، و قوسی از دایره $x^2 + y^2 = 4$ در ربع اول مشخص می شود.

در تمرینهای ۲۳ تا ۳۰ ، با استفاده از قضیه ۲۰.۶.۲۰ ، مساحت ناحیه مفروض را به دست آورید.

۲۳. ناحیه ای که مرزش يك چهارضلعی با رئوس $(0, 0)$ ، $(4, 0)$ ، $(3, 2)$ ، و $(1, 1)$ است.

۲۴. ناحیه ای که مرزش مثلثی است با رئوس $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ، و $(0, b)$ با ضوابط $a > 0$ و $b > 0$.

۲۵. ناحیه ای که مرزش دایره $x^2 + y^2 = a^2$ است.

۲۶. ناحیه ای که از پایین به محور x ها و از بالا به قوسی از يك چرخزاد با معادلات پارامتری زیر

$$x = t - \sin t \quad y = 1 - \cos t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

محدود است.

۲۷. ناحیه محصور در شبه چرخزادی که معادلات پارامتری آن

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad a > 0 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

است.

۲۸. ناحیه محصور بین سهمی $y = 2x^2$ و خط $y = 8x$.

۲۹. ناحیه محصور بین نمودارهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$.

۳۰. ناحیه محصور بین نمودارهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^3$.

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۴ ، قضیه گرین را به کار بگیرید و کل کار انجام شده را برای حرکت شیبی که منحنی مفروض C را یکبار در خلاف جهت ساعت می پیماید، به دست آورید. فرض کنید که حرکت شیء ناشی از میدان نیروی مفروض $F(x, y)$ باشد و طول قوس بر حسب متر

و نیرد برحسب نیوتن اندازه گیری شود.

۳۱. C ، بیضی $x^2 + y^2 = ۱۶$ است؛ $F(x, y) = (3x + y)i + (4x - 5y)j$

۳۲. C ، دایره $x^2 + y^2 = ۲۵$ است؛ $F(x, y) = (e^x + y^2)i + (x^2y + \cos y)j$

۳۳. C ، مثلثی با رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ و $(0, 2)$ است؛

$$F(x, y) = (e^{x^2} + y^2)i + (e^{y^2} + x^2)j$$

۳۴. C مرکب از نیمه بالایی بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ و بازه $[-2, 2]$ روی محور

$$x \text{ ها است؛ } F(x, y) = (xy + y^2)i + xyj$$

۳۵. اگر $F(x, y) = x^2i + y^2j$ و R ناحیه محدود به بیضی $4x^2 + 25y^2 = ۱۰۰$

باشد، درستی قضیه استوکس در صفحه را تحقیق کنید.

۳۶. اگر $F(x, y) = 3yi - 2xj$ و R ناحیه محدود به $x^{2/3} + y^{2/3} = ۱$ باشد، درستی

قضیه استوکس در صفحه را تحقیق کنید.

۳۷. برای F و R مذکور در تمرین ۳۵، قضیه دیورژانس در صفحه را تحقیق کنید.

۳۸. برای F و R مذکور در تمرین ۳۶، قضیه دیورژانس در صفحه را تحقیق کنید.

۳۹. اگر R ناحیه تعریف شده با ضابطه

$$R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$\text{باشد و } g_1 \text{ و } g_2 \text{ هموار باشند، ثابت کنید } \oint_C N(x, y) dy = \int_R \int \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

۷.۲۰ انتگرال سه گانه

تعمیم انتگرال دو گانه به انتگرال سه گانه مشابه تعمیم انتگرال یگانه به انتگرال دو گانه است. ساده ترین نوع ناحیه واقع در R^3 ، یک مکعب مستطیل است که محدود بهش صفحه $z = c_1$ ، $z = c_2$ و $x = a_1$ ، $x = a_2$ ، $y = b_1$ ، $y = b_2$ با ضوابط $a_1 < a_2$ ، $b_1 < b_2$ ، $c_1 < c_2$ است. فرض کنید f تابعی سه متغیری بوده و روی ناحیه ای مانند S پیوسته باشد. بارسم صفحات موازی صفحات مختصات، ناحیه S به جعبه هایی مکعب مستطیل شکل افراز می شود. چنین افرازی را با Δ نشان می دهیم و فرض می کنیم تعداد این جعبه ها n تاست. گیریم $\Delta_i V$ اندازه حجم i امین جعبه باشد. نقطه اختیاری (ξ_i, γ_i, μ_i) را در جعبه i ام انتخاب می کنیم. مجموع زیر را تشکیل می دهیم

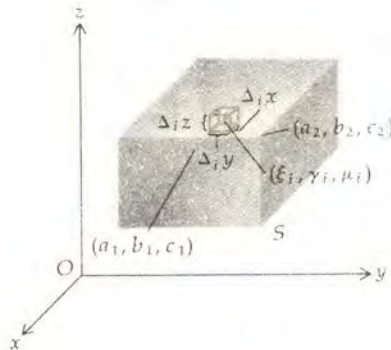
$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V. \quad (۱)$$

به شکل ۱۰۷۰۲۰ نگاه کنید که مکعب مستطیل و زامین جعبه را نشان می دهد. نودم افراز $\|\Delta\|$ ، طول بزرگترین قطر در میان اقطار جعبه هاست. اگر به ازای هر نقطه دلخواه (ξ_i, γ_i, μ_i) ، وقتی که $\|\Delta\|$ به سمت صفر میل کند، مجموع (۱) به سمت حدی میل کند، این حد را انتگرال سه گانه f روی S می نامیم و می نویسیم:

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV.$$

شرط کافی برای وجود انتگرال سه گانه f روی S ، پیوسته بودن f روی S است. همان طور که انتگرال دو گانه معادل است با دوانتگرال پی در پی، انتگرال سه گانه نیز معادل است با سه انتگرال پی در پی. وقتی که S مکعب مستطیل مذکور در فوق باشد و f تابعی پیوسته روی S ، داریم

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) dz dy dx.$$



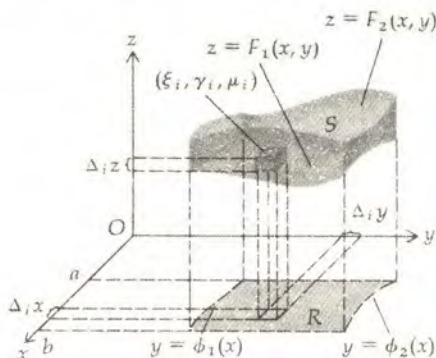
شکل ۱۰۷۰۲۰

مثال ۱ اگر S مکعب مستطیل محصور بین صفحات $x = \pi/2$ ، $y = \pi/2$ ، $z = \pi/3$ و صفحات مختصات باشد، انتگرال سه گانه $\iiint_S x y \sin y z dV$ را به دست آورید.

حل

$$\begin{aligned}
 \iiint_S xy \sin yz \, dV &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin yz \, dz \, dy \, dx \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \left[-x \cos yz \right]_0^{\pi/2} dy \, dx \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} x \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2} \right) dy \, dx \\
 &= \int_0^\pi x \left(y - \frac{2}{\pi} \sin \frac{1}{2} \pi y \right) \Big|_0^{\pi/2} dx \\
 &= \int_0^\pi x \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi^2}{4} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi^2}{4} \right) \Big|_0^\pi \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\pi^2 - 4 \sin \frac{\pi^2}{4} \right).
 \end{aligned}$$

اکنون در مورد چگونگی تعریف انتگرال سه گانه تابع پیوسته سه متغیری روی ناحیه‌ای در R^3 که مکعب مستطیل نیست بحث می‌کنیم. فرض کنید S یک ناحیه سه بعدی محصور بین صفحات $x=a$ و $x=b$ ، استوانه‌های $y=\phi_1(x)$ و $y=\phi_2(x)$ ، و رویه‌های $z=F_1(x,y)$ و $z=F_2(x,y)$ باشد که در آن F_1 ، F_2 ، ϕ_1 ، ϕ_2 هموار هستند (یعنی دارای مشتقات یا مشتقات جزئی پیوسته هستند). شکل ۲۰۷۰۲۰ را ببینید. صفحاتی



شکل ۲۰۷۰۲۰

به موازات صفحات مختصات رسم می کنیم و مجموعه ای از مکعب مستطیلها به دست می آوریم که S را کاملاً در بر می گیرد. مکعب مستطیلهایی که کاملاً در درون S یا روی مرز S هستند، افزایش چون Δ از S تشکیل می دهند. مکعب مستطیلها را از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. $||\Delta||$ ، نرم این افزایش S ، طول بزرگترین قطر از اقطار مکعب مستطیلهای افزایش است. فرض کنید حجم n امین مکعب مستطیل، $\Delta_i V$ باشد. نیز تصور کنید f تابعی سه متغیری باشد که بر S پیوسته است و (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطه دلخواهی در n امین مکعب مستطیل باشد. مجموعه زیر را تشکیل می دهیم

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V. \quad (2)$$

اگر مجموعه های به شکل (۲)، وقتی $||\Delta||$ به صفر میل می کند، حدی داشته باشند و اگر این حد مستقل از انتخاب صفحات افزایش کننده و انتخاب نقاط (ξ_i, γ_i, μ_i) در هر مکعب مستطیل باشد، آنگاه این حد را انتگرال سه گانه f روی S می نامیم و می نویسیم

$$\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \gamma_i, \mu_i) \Delta_i V = \iiint_S f(x, y, z) dV. \quad (3)$$

در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته می توان ثابت کرد که یک شرط کافی برای وجود حد (۳) این است که f بر S پیوسته باشد. به علاوه، با قائل شدن این شرط که تابعهای ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 و F_1, F_2 هموار باشند، می توان ثابت کرد که انتگرال سه گانه به وسیله انتگرال مکرر زیر قابل محاسبه است

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

همان طور که انتگرال دو گانه را می شود به صورت مساحت یک ناحیه مسطح، با شرط $f(x, y) = 1$ روی R^1 ، تعبیر کرد، انتگرال سه گانه را هم می توان به صورت حجم یک ناحیه سه بعدی تعبیر کرد. اگر روی S داشته باشیم $f(x, y, z) = 1$ ، رابطه (۳) به این صورت درمی آید

$$\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V = \iiint_S dV$$

و انتگرال سه گانه، اندازه حجم ناحیه S است.

مثال ۲ حجم جسم مذکور در مثال ۳ از بخش ۲۰۲۰ را به کمک انتگرال سه گانه به دست آورید.

حل جسم در بالای صفحه xy و محصور بین سهمیوار بیضوی $z = x^2 + 4y^2$ و

استوانه $z = 4 - x^2 - y^2$ است. این جسم در شکل ۶.۲.۲۰ نشان داده شده است. اگر حجم جسم، V واحد مکعب باشد، آنگاه

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V = \iiint_S dV \quad (۴)$$

که ذر آن، S ناحیه داخل جسم است. حدود z از ۰ (مقدار z روی صفحه xy) تا $4 - x^2 - y^2$ (مقدار z روی سهمیوار بیضوی) می باشد. حدود y برای یک چهارم حجم از ۰ (مقدار y روی صفحه xz) تا $\sqrt{4 - x^2}/2$ (مقدار y روی استوانه) است. حدود x در ثمن اول از ۰ تا ۲ است. انتگرال سه گانه (۴) را به وسیله یک انتگرال مکرر محاسبه می کنیم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} \int_0^{4-x^2-y^2} dz dy dx \\ &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}/2} (x^2 + 4y^2) dy dx. \end{aligned}$$

این دوانتگرال پی در پی همان است که در مثال ۳ از بخش ۲.۲۰ به دست آمد و لذا ادامه حل این مثال مشابه همان مثال است. ▲

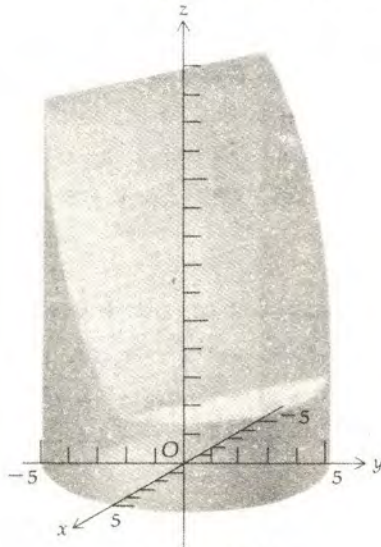
مثال ۳ مطلوب است حجم جسم محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 25$ ، صفحه $z = 8 - x - y$ و صفحه xy .

حل جسم در شکل ۳.۷.۲۰ نشان داده شده است. حدود z برای انتگرال مکرر از ۰ تا $8 - x - y$ (مقدار z روی صفحه) است. حدود y از مرکز ناحیه در صفحه xy به دست می آید که دایره $x^2 + y^2 = 25$ است. پس حدود y از $-\sqrt{25 - x^2}$ تا $\sqrt{25 - x^2}$ خواهد بود. حدود x از -5 تا 5 است. اگر حجم خواسته شده V واحد مکعب باشد، داریم

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i V \\ &= \iiint_S dV \\ &= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{8-x-y} dz dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-5}^5 \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} (\lambda - x - y) dy dx \\
&= \int_{-5}^5 \left[(\lambda - x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} dx \\
&= 2 \int_{-5}^5 (\lambda - x) \sqrt{25-x^2} dx \\
&= 16 \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx + \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} (-2x) dx \\
&= 16 \left(\frac{1}{2}x \sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{1}{5}x \right) + \frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2} \Big|_{-5}^5 \\
&= 200\pi.
\end{aligned}$$

بنابراین حجم برابر است با 200π واحد مکعب.

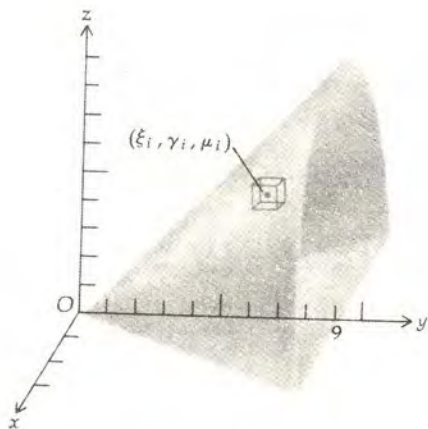


شکل ۳.۷.۲۰

مثال ۴ مطلوب است جرم جسم واقع در بالای صفحه xyz و محصور بین مخروط $x^2 + z^2 = y^2$ و صفحه $y = 9$ ، در صورتی که اندازه چگالی حجمی در هر نقطه دلخواه (x, y, z) از جسم متناسب با اندازه فاصله آن نقطه از صفحه xy باشد.

حل شکل ۴.۷.۲۰ جسم را نشان می‌دهد. فرض کنید جرم جسم M کیلو گرم باشد، و فاصله بر حسب متر اندازه گیری شده باشد. در این صورت چگالی حجمی در هر نقطه (x, y, z) از جسم برابر است با kz کیلو گرم بر متر مکعب، که در آن k يك ثابت است. بنابراین اگر (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطه‌ای اختیاری واقع در مکعب مستطیل Δ از افراز باشد، داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \mu_i \Delta_i V \\ &= \iiint_S kz \, dV \\ &= 2k \int_0^1 \int_0^{y/2} \int_0^{\sqrt{y^2 - 4x^2}} z \, dz \, dx \, dy \\ &= 2k \int_0^1 \int_0^{y/2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{y^2 - 4x^2}} dx \, dy \\ &= k \int_0^1 \int_0^{y/2} (y^2 - 4x^2) \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{9} k \int_0^1 y^2 \, dy \\ &= \frac{229}{2} k. \end{aligned}$$



شکل ۴.۷.۲۰

A

بنابراین جرم برابر است با $k(729/2)$ کیلوگرم.

تمرینهای ۷.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۴، انتگرال مکرر را محاسبه کنید

$$1. \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} x \, dz \, dy \, dx \quad 2. \int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z \, dz \, dx \, dy$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos \frac{y}{z} \, dy \, dx \, dz \quad 4. \int_0^2 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-z}} \frac{z}{x^2+z^2} \, dx \, dz \, dy$$

در تمرینهای ۵ تا ۱۰، انتگرال سه گانه را محاسبه کنید.

$$5. \iiint_S y \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه محصور بین چهاروجهی تشکیل شده توسط صفحه } 12x + 20y + 15z = 60 \text{ و صفحات مختصات باشد.}$$

$$6. \iiint_S (x^2 + z^2) \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه مذکور در تمرین ۵ باشد.}$$

$$7. \iiint_S z \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه محصور در چهاروجهی بارئوس } (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1) \text{ و } (0, 0, 1) \text{ باشد.}$$

$$8. \iiint_S yz \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه مذکور در تمرین ۷ باشد.}$$

$$9. \iiint_S (xz + 3z) \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه محصور بین استوانه } x^2 + z^2 = 9 \text{ و صفحات } x + y = 3, z = 0, \text{ و } y = 0 \text{ بالای صفحه } xy \text{ باشد.}$$

$$10. \iiint_S xyz \, dV, \text{ اگر } S \text{ ناحیه محصور بین استوانه های } x^2 + y^2 = 4 \text{ و } x^2 + z^2 = 4 \text{ باشد.}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۲۳، از انتگرال گیری سه گانه استفاده کنید.

۱۱. مطلوب است حجم جسمی واقع در ثمن اول که از پایین به صفحه xy ، از بالا به صفحه yz ، و از اطراف به استوانه $x^2 = y^2$ و صفحه $x = 1$ محدود است.

۱۲. مطلوب است حجم جسمی واقع در ثمن اول محصور بین استوانه $x^2 + z^2 = 16$ ، صفحه $x + y = 2$ ، و سه صفحه مختصات.

۱۳. مطلوب است حجم جسمی واقع در ثمن اول محصور بین استوانه‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + 2z = 4$ و صفحات مختصات.

۱۴. مطلوب است حجم جسمی محصور بین مخروط بیضوی $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 = 0$ و صفحه $z = 1$.

۱۵. مطلوب است حجم جسمی واقع در بالای سهمیوار بیضوی $z = x^2 + y^2$ و پایین استوانه $x^2 + z = 4$.

۱۶. مطلوب است حجم جسمی محصور در کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

۱۷. مطلوب است حجم جسمی محصور در بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

۱۸. مطلوب است حجم ناحیه محصور بین استوانه‌های $z = 5x^2$ و $z = 3 - x^2$ ، صفحه yz ، و $y + z = 4$.

۱۹. مطلوب است جرم جسم همگنی محصور بین استوانه $x^2 - z = 4$ ، صفحه $z = 5$ ، $y = 5$ ، و صفحات مختصات، اگر چگالی حجمی در هر نقطه، ρ کیلوگرم بر متر مکعب باشد.

۲۰. مطلوب است حجم جسم محصور در یک چهاروجهی که توسط صفحه $400 = 100x + 25y + 16z$ و صفحات مختصات تشکیل شده است؛ چگالی حجمی در هر نقطه با فاصله نقطه از صفحه yz متناسب است و بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب اندازه گیری می‌شود.

۲۱. مطلوب است جرم جسم محدود به استوانه‌های $x = z^2$ و $y = x^2$ ، و صفحات $x = 1$ ، $y = 0$ ، و $z = 0$. چگالی حجمی در هر نقطه با حاصلضرب فواصل نقطه از سه صفحه مختصات متناسب است و بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب اندازه گیری می‌شود.

۲۲. مطلوب است جرم جسم محدود به رویه $4x^2 - y^2 - 4z^2 = 4$ و صفحه xy . چگالی حجمی در هر نقطه جسم برابر است با $|x|$ کیلوگرم بر متر مکعب.

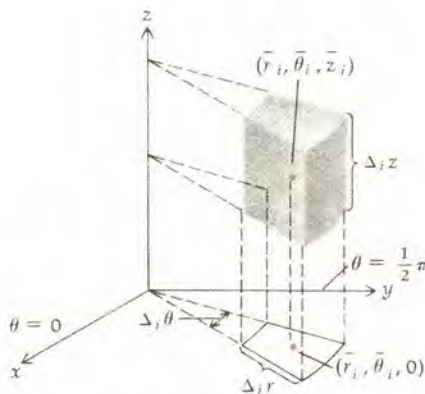
۲۳. مطلوب است جرم جسم محدود به رویه $z = xy$ و صفحات $x = 1$ ، $y = 1$ و $z = 0$. چگالی حجمی در هر نقطه جسم برابر است با $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$ کیلوگرم بر متر مکعب.

۲۴. جسمی به شکل یک استوانه مستدیر قائم به شعاع قاعده r متر و ارتفاع h متر مفروض است. اگر چگالی حجمی در هر نقطه با فاصله از یک قاعده متناسب باشد، جرم جسم را به دست آورید. چگالی حجمی بر حسب کیلوگرم بر متر مکعب اندازه گیری می شود.

۸.۲۰ انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای و کروی

اگر ناحیه ای مانند S در R^3 دارای یک محور تقارن باشد، محاسبه انتگرال سه گانه روی S ، در صورتی که از مختصات استوانه ای استفاده شود، آسانتر می شود. اگر ناحیه نسبت به یک نقطه تقارن داشته باشد، بهتر است این نقطه به عنوان مبدأ انتخاب گردد و از مختصات کروی استفاده شود. در این بخش انتگرال سه گانه را در این دو نوع مختصات مورد بحث قرار می دهیم و آنها را در مسائل فیزیکی به کار می گیریم.

برای تعریف انتگرال سه گانه در مختصات استوانه ای، با رسم صفحاتی گذرنده از محور z ها، صفحاتی عمود بر محور z ها، و استوانه های مستدیر قائمی که محور z ها محور آنها باشد، ناحیه S را افراز می کنیم. یک زیر ناحیه نمونه وار حاصل، در شکل ۱۰.۸.۲۰ نشان داده شده است. اجزای این افراز تماماً در S قرار دارند. این افراز را یک افراز استوانه ای می نامیم. اندازه طول بزرگترین «قطر» از اقطار زیر ناحیه ها، نورم افراز نامیده می شود. فرض کنید n تعداد زیر ناحیه های افراز و ΔV_i اندازه حجم زیر ناحیه i م باشد.



شکل ۱۰.۸.۲۰

اندازه مساحت قاعده، $\bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta$ است، که در آن $\bar{r}_i = (r_i + r_{i-1})/2$ بنا بر این، اگر $\Delta_i z$ اندازه ارتفاع i امین زیر ناحیه باشد، داریم

$$\Delta_i V = \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z.$$

فرض کنید f تابعی از r, θ, z باشد و همچنین فرض کنید f روی S پیوسته باشد. نقطه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ را در i امین زیر ناحیه انتخاب می‌کنیم به طوری که $\bar{\theta}_i \leq \theta_i \leq \theta_{i+1}$ و $\bar{z}_i \leq z_i \leq z_{i+1}$ مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V = \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z. \quad (1)$$

می‌توان نشان داد که تحت شرایط مناسبی روی S ، وقتی که نورم Δ به سمت صفر میل می‌کند، حد مجموعهای به شکل (۱) وجود دارد. این حد، انتگرال سه گانه تابع f روی S در مختصات استوانه‌ای نامیده می‌شود، و می‌نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \Delta_i V = \iiint_S f(r, \theta, z) dV \quad (2)$$

یا

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i) \bar{r}_i \Delta_i r \Delta_i \theta \Delta_i z = \int \int \int_S f(r, \theta, z) r dr d\theta dz. \quad (3)$$

دقت کنید که در مختصات استوانه‌ای داریم $dV = r dr d\theta dz$. می‌توانیم انتگرال سه گانه در (۲) یا (۳) را با استفاده از انتگرال مکرر محاسبه کنیم. مثلاً، فرض کنید ناحیه S در R^3 محدود باشد به صفحات $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ که $\alpha < \beta$ ، و استوانه‌های $r = \lambda_1(\theta)$ و $r = \lambda_2(\theta)$ که در آن $\lambda_1 < \lambda_2$ روی $[\alpha, \beta]$ هموار بوده و به ازای $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ، $\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta)$ و رویه‌های $z = F_1(r, \theta)$ و $z = F_2(r, \theta)$ که $F_1 < F_2$ تساوی دوم تغییری اند که روی ناحیه‌ای چون R در صفحه قطبی محدود به منحنیهای $r = \lambda_1(\theta)$ و $r = \lambda_2(\theta)$ ، $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ هموارند. همچنین فرض کنید به ازای هر نقطه (r, θ) در R داشته باشیم $F_1(r, \theta) \leq F_2(r, \theta)$. در این صورت انتگرال سه گانه را می‌توان با استفاده از انتگرال مکرر طبق فرمول زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \int \int \int_S f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \\ = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\lambda_1(\theta)}^{\lambda_2(\theta)} \int_{F_1(r, \theta)}^{F_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta. \quad (4) \end{aligned}$$

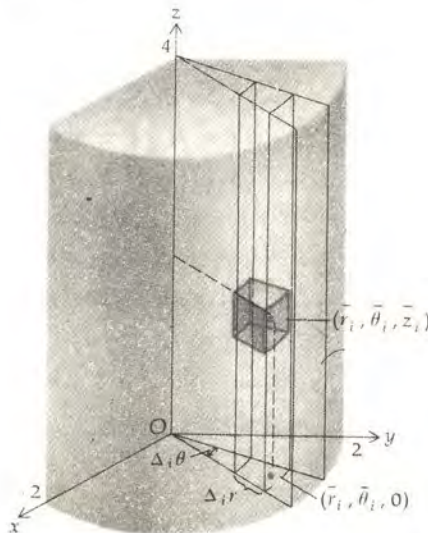
پنج انتگرال مکرر دیگر وجود دارد که برای محاسبه انتگرال سه گانه در (۴) می توان به کاربرد زیرا ۶ جایگشت ممکن برای سه متغیر r, θ, z وجود دارد. انتگرالهای سه گانه و مختصات استوانه ای در پیدا کردن گشتاور لختی يك جسم توپر نسبت به محور z ها بسیار مفید است، زیرا فاصله از محور z ها تا نقطه ای در جسم توسط مختص r معین می شود.

مثال ۱ جسم توپر همگنی به شکل يك استوانه مستدیر قائم دارای شعاع ۲ متر و ارتفاع ۴ متر است. گشتاور لختی جسم را نسبت به محورهايش پیدا کنید.

حل صفحات مختصات را طوری انتخاب می کنیم که صفحه xy ، صفحه قاعده جسم و محور z ها محور آن باشد. شکل ۲۰۸.۲۰ قسمتی از جسم را در ثمن اول و زامین زیر ناحیه از يك افراز استوانه ای را نشان می دهد. با استفاده از مختصات استوانه ای و با انتخاب نقطه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ در زیر ناحیه z ام، و با فرض اینکه چگالی حجمی در هر نقطه جسم، k کیلو گرم بر متر مکعب و گشتاور لختی جسم نسبت به محور z ها، I_z کیلو گرم-متر مربع باشد، خواهیم داشت

$$I_z = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i^2 k \Delta_i V$$

$$= \iiint_S k r^2 dV$$



شکل ۲۰۸.۲۰

شش ترتیب ممکن برای انتگرال‌گیری وجود دارد. شکل ۲.۸.۲۰ ترتیب $dz dr d\theta$ را نشان می‌دهد. با استفاده از این ترتیب خواهیم داشت

$$I_z = \int \int \int_S kr^2 dz dr d\theta$$

$$= 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^4 r^3 dz dr d\theta.$$

در انتگرال اول زیرناحیه‌ها از $z=0$ تا $z=4$ جمع می‌شوند و یک ستون ایجاد می‌کنند. در انتگرال دوم ستون‌ها از $r=0$ تا $r=2$ جمع شده و یک برش گوه‌ای شکل از استوانه را تشکیل می‌دهند. در انتگرال سوم این برش گوه‌ای شکل از $\theta=0$ تا $\theta=\pi/2$ دوران می‌کند و آن قسمت از ناحیه سه‌بعدی موردنظر را که در ثمن اول است، می‌روبد. با ضرب نتیجه در ۴، کل حجم جسم به دست می‌آید. با انجام انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$I_z = 16k \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^3 dr d\theta$$

$$= 64k \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= 32k\pi.$$

▲ پس گشتاور لختی جسم $32k\pi$ کیلو گرم-متر مربع است.

مثال ۲ مثال ۱ را با در نظر گرفتن ترتیبهای انتگرال‌گیری زیر حل کنید.

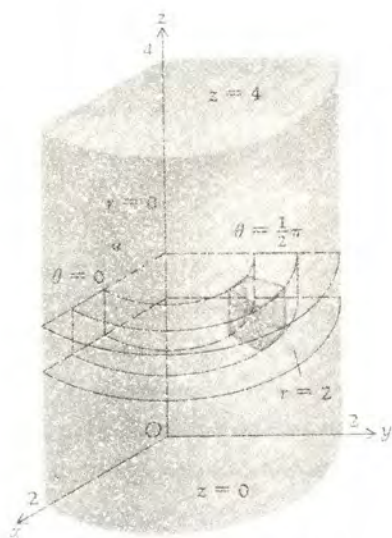
الف) $dr dz d\theta$ ؛ ب) $d\theta dr dz$.

حل الف) شکل ۲.۸.۲۰ ترتیب $dr dz d\theta$ را نشان می‌دهد. چنانکه می‌بینید، زیرناحیه‌ها را از $r=0$ تا $r=2$ جمع می‌کنیم تا قطعه‌ای گوه‌ای شکل به دست آید. سپس با جمع کردن این قطعه‌ها از $z=0$ تا $z=4$ یک قاچ (برش) گوه‌ای به دست می‌آید. این قاچ را از $\theta=0$ تا $\theta=\pi/2$ دوران می‌دهیم تا ثمن اول را بروبد. در این صورت

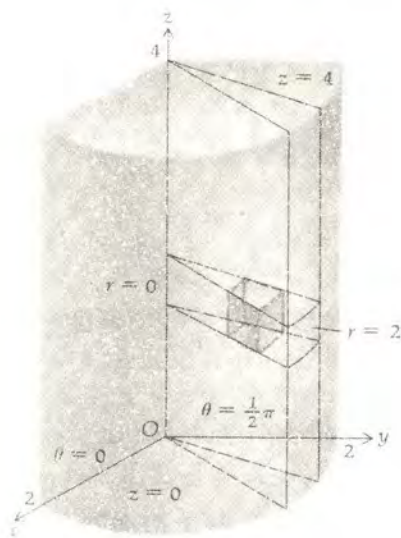
$$I_z = 4k \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^2 r^2 dr dz d\theta$$

$$= 32k\pi.$$

ب) شکل ۲.۸.۲۰ نشان‌دهنده ترتیب $d\theta dr dz$ است. چنانکه می‌بینید، زیرناحیه‌ها را از $\theta=0$ تا $\theta=\pi/2$ با هم جمع می‌کنیم تا ناحیه‌ای حلقوی در درون استوانه پدید



شکل ۳۰.۸.۲۰



شکل ۳۰.۸.۲۰

آید و این ناحیه‌های حلقوی را از $r=0$ تا $r=2$ جمع می‌کنیم تا یک قاچ افقی از استوانه تشکیل شود. و بالاخره، قاچهای افقی را از $z=0$ تا $z=4$ جمع می‌کنیم. بنابراین

$$I_z = 4k \int_0^4 \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r^3 d\theta dr dz$$

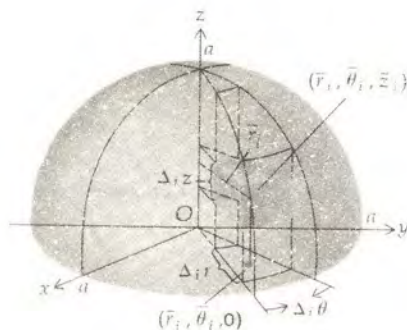
$$\Delta = 32 k\pi.$$

مثال ۳ مطلوب است جرم یک نیمکره توپر به شعاع a متر، اگر چگالی حجمی (بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب) در هر نقطه با فاصله آن نقطه از محور جسم متناسب باشد.

حل اگر صفحات مختصات را طوری انتخاب کنیم که مبدأ در مرکز کره و محور z ها، محور جسم باشد، در این صورت معادله رویه نیمکره‌ی بالای صفحه xy عبارت است از $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. در شکل ۵۰.۸.۲۰ این رویه و جسم به همراه زامین زیر ناحیه از یک افراز استوانه‌ای نشان داده شده است. معادله نیمکره در مختصات استوانه‌ای به صورت $z = \sqrt{a^2 - r^2}$ است. اگر نقطه $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_i, \bar{z}_i)$ در زیر ناحیه زام باشد، چگالی حجمی در این نقطه برابر با $k\bar{r}_i$ کیلو گرم بر متر مکعب است، که در آن k یک ثابت است؛ و اگر جرم جسم M کیلو گرم باشد، داریم

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \bar{r}_i \Delta_i V \\
 &= \int \int \int_S k r \, dV \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sqrt{a^2-r^2} \, dr \, d\theta \\
 &= k \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} r (a^2-r^2)^{3/2} + \frac{1}{8} a^2 r \sqrt{a^2-r^2} + \frac{1}{8} a^4 \sin^{-1} \frac{r}{a} \right]_0^a d\theta \\
 &= \frac{1}{16} k a^4 \pi \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{1}{8} k a^4 \pi^2
 \end{aligned}$$

پس جرم این نیمکره برابر با $ka^4\pi^2/8$ کیلوگرم است.



شکل ۵۰۸۰۲۰

مثال ۴ مرکز جرم جسم مذکور در مثال ۳ را به دست آورید.

حل فرض کنیم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ مرکز جرم جسم درمختصات دکارتی باشد. به علت تقارن داریم $\bar{x} = \bar{y} = 0$. بنابراین باید $\bar{z}$ را محاسبه کنیم. اگر گشتاور جرم نسبت به صفحه

xy برابر M_{xy} کیلو گرم-متر باشد، آنگاه داریم

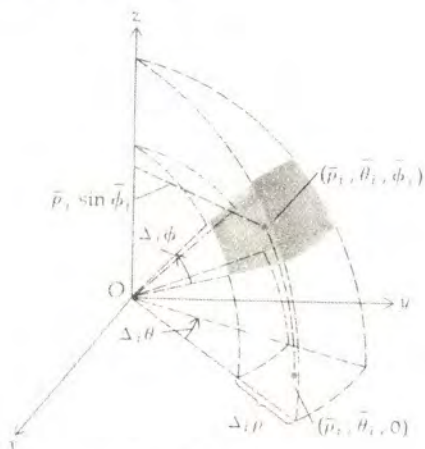
$$\begin{aligned} M_{xy} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{z}_i(k\bar{r}_i) \Delta_i V \\ &= \int \int \int_S k z r \, dV \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} z r^2 \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^{2\pi} \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{15} k a^5 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{2}{15} k a^5 \pi. \end{aligned}$$

چون $M_{\bar{z}} = M_{xy}$ ، به دست می آید

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{2}{15} k a^5 \pi}{\frac{1}{8} k a^4 \pi^2} = \frac{16}{15\pi} a$$

بنابراین مرکز جرم روی محور جسم به فاصله $16a/15\pi$ متر از سطح قاعده قرار دارد. ▲

حال تعریفی برای انتگرال سه گانه در مختصات کروی به دست می دهیم. یک افراز کروی از ناحیه سه بعدی S توسط صفحاتی شامل محور z ها، کره هایی به مرکز مبدأ، و مخروطهای دایره ای که رأس آنها در مبدأ و محور آنها محور z هاست، تشکیل می شود. زیر ناحیه نمونه واری از این افراز در شکل ۸.۸.۲۰ نشان داده شده است. اگر $\Delta_i V$ اندازه حجم i امین زیر ناحیه، و $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ نقطه ای در آن باشد، می توانیم ناحیه را طوری در نظر بگیریم که گویی یک مکعب مستطیل است و اندازه های سه بعد آن را در هم ضرب کرده تقریبی برای $\Delta_i V$ به دست آوریم. این اندازه ها عبارت اند از $\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \theta$ ، $\bar{\rho}_i \Delta_i \phi$ ، و $\Delta_i \rho$. شکل های ۸.۸.۲۰ و ۷.۸.۲۰ چگونگی یافتن دو مقدار اول را نشان



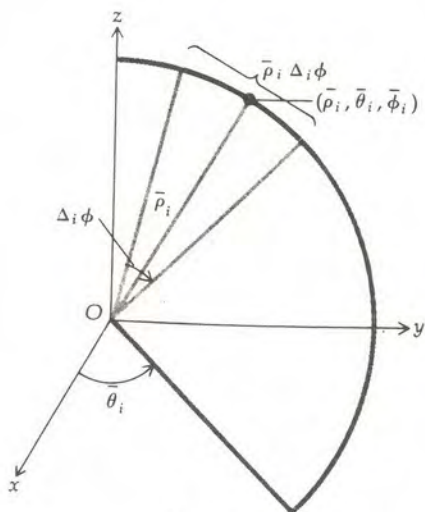
شکل ۶.۸.۲۰

می‌دهند، و شکل ۶.۸.۲۰ اندازه $\Delta_i \rho$ را بنا بر این

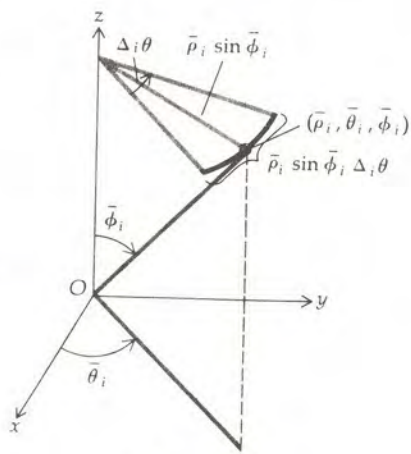
$$\Delta_i V = \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi.$$

انتگرال سه گانه تابعی چون f روی S در مختصات کروی توسط رابطه زیر معین می‌شود

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \Delta_i V = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) dV \quad (5)$$



شکل ۸.۸.۲۰



شکل ۷.۸.۲۰

یا

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i) \bar{\rho}_i^2 \sin \bar{\phi}_i \Delta_i \rho \Delta_i \theta \Delta_i \phi$$

$$= \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi. \quad (۴)$$

در نظر داشته باشید که در مختصات کروی داریم $dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. انتگرالهای سه گانه در (۵) یا (۴) را می توان با استفاده از انتگرال مکرر محاسبه نمود. مختصات کروی در بعضی مسائل که با کره ها سروکار دارند، بسیار مفید هستند. این امر در مثالهای زیر نشان داده می شود.

مثال ۵ مطلوب است جرم نیم کره توپر مثال ۳ اگر چگالی خجمی در هر نقطه متناسب با فاصله آن نقطه از مرکز قاعده نیم کره باشد.

حل اگر $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ نقطه ای در زیر ناحیه V از افزای کروی باشد، چگالی خجمی در این نقطه، $k\bar{\rho}_i$ کیلو گرم بر متر مکعب می باشد، که در آن k يك ثابت است. اگر جرم جسم، M کیلو گرم باشد، آنگاه

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \bar{\rho}_i \Delta_i V$$

$$= \iiint_{S'} k \rho \, dV$$

$$= k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^a \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= a^3 k \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= a^3 k \int_0^{\pi/2} \left[-\cos \phi \right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= a^3 k \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} a^3 k \pi.$$

پس جرم نیم کره توپر، $\frac{1}{2} a^3 k \pi$ کیلو گرم است.

مقایسه حل مثال ۵ که در آن از مختصات كروي استفاده شد، با راه‌حلی که شامل استفاده از مختصات دکارتی باشد، بسیار جالب است. در روش اخیر، افزای از S با تقسیم S به جعبه‌های مکعب مستطیلی از طریق رسم صفحاتی مسوازی صفحات مختصات تشکیل می‌گردد. اگر (ξ_i, γ_i, μ_i) نقطه‌ای دلخواه در زیر ناحیه z ام باشد، چون $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ داریم

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \sqrt{\xi_i^2 + \gamma_i^2 + \mu_i^2} \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= 4k \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz. \end{aligned}$$

به راحتی دیده می‌شود که محاسبات لازم برای به دست آوردن این انتگرال خیلی پیچیده‌تر از زمانی است که از مختصات كروي استفاده می‌کنیم.

مثال ۶ يك جسم توپر همگن از بالا به کره $\rho = a$ و از پایین به مخروط $\phi = \alpha$ که $0 < \alpha < \pi/2$ ، محدود است. گشتاور لختی جسم حول محور z ها را بیابید.

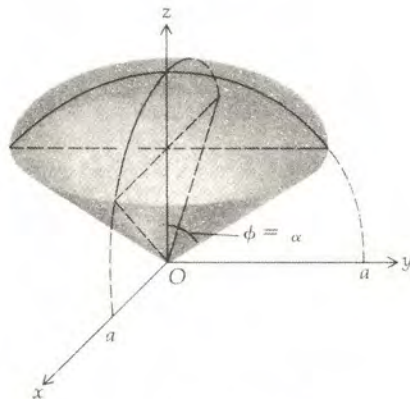
حل جسم در شکل ۹.۸.۲۵ نشان داده شده است. فرض کنید چگالی حجمی در هر نقطه جسم، k کیلوگرم بر متر مکعب باشد. يك افراز كروي از جسم تشکیل دهید و فرض کنید $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ نقطه‌ای در زیر ناحیه z ام باشد. اندازه فاصله نقطه $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i, \bar{\phi}_i)$ از محور z ها برابر است با $\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i$. بنا بر این اگر گشتاور لختی جسم مفروض حول محور z ها، I_z کیلوگرم بر متر مربع باشد، داریم

$$\begin{aligned} I_z &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_i \sin \bar{\phi}_i)^2 k \Delta_i V \\ &= \iiint_S k \rho^2 \sin^2 \phi dV \\ &= k \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho^2 \sin^2 \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{5} k a^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi d\theta d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \int_0^\alpha \sin^3 \phi \, d\phi \\
 &= \frac{2}{5} k a^5 \pi \left[-\cos \phi + \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right]_0^\alpha \\
 &= \frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) .
 \end{aligned}$$

بنابراین، گشتاور لختی جسم حول محور z ها برابر است با

$$\frac{2}{15} k a^5 \pi (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 2) \text{ kg-m}^2 .$$



شکل ۹.۸.۲۰

تمرینهای ۸.۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۶، انتگرال مکرر را محاسبه کنید.

$$۱. \int_0^{\pi/4} \int_0^a \int_0^{r \cos \theta} r \sec^3 \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$۲. \int_0^{\pi/4} \int_{\gamma \sin \theta}^{\gamma \cos \theta} \int_0^{r \sin \theta} r^2 \cos \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$۳. \int_0^\pi \int_\gamma^\pi \int_0^1 r e^z \, dz \, dr \, d\theta$$

$$۴. \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$۵. \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \cos \phi} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin \phi \, d\theta \, d\rho \, d\phi$$

$$۶. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\pi/4}^\phi \int_0^{\csc \theta} \rho^3 \sin^2 \theta \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

۷. جسمی به کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ محدود است. مطلوب است حجم جسم با استفاده از
الف) مختصات استوانه‌ای
ب) مختصات کروی

۸. اگر S جسمی در ثمن اول و محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و صفحات مختصات باشد، انتگرال سه گانه $\iiint_S xyz \, dV$ را به سه روش زیر به دست آورید:
الف) با استفاده از مختصات کروی
ب) با استفاده از مختصات قائم
ج) با استفاده از مختصات استوانه‌ای

در تمرینهای ۹ تا ۱۲ از مختصات استوانه‌ای استفاده کنید.

۹. مطلوب است جرم جسمی که محدود است به کره‌ای به شعاع a متر، اگر چگالی حجمی در هر نقطه متناسب با مربع فاصله آن نقطه از مرکز باشد و بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب اندازه گیری شود.

۱۰. مطلوب است جرم جسمی واقع در ثمن اول و در داخل استوانه $x^2 + y^2 = 4x$ و زیر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. چگالی حجمی متناسب است با فاصله از صفحه xy ، و بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب اندازه گیری می شود.

۱۱. جسم توپر همگنی به استوانه $r = 5$ ، مخروط $z = r$ ، و صفحه xy محدود است. گشتاور لختی جسم نسبت به محور z ها را به دست آورید. چگالی حجمی در هر نقطه k اسلاگ بر فوت مکعب است.

۱۲. جسم توپری به یک استوانه مستدیر قائم به ارتفاع h متر و شعاع a متر محدود است. گشتاور لختی جسم نسبت به محور استوانه را به دست آورید. چگالی حجمی در هر نقطه با فاصله از محور استوانه متناسب است و بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب اندازه گیری می شود.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶ از مختصات کروی استفاده کنید.

۱۳. مطلوب است مرکز جرم جسمی توپر محدود به نیمکره مذکور در مثال ۵. چگالی حجمی با چگالی حجمی در مثال ۵ یکی است.

۱۴. جسم توپر همگنی به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ محدود است. گشتاور لختی جسم نسبت به محور z را بیابید. چگالی حجمی جسم در هر نقطه k اسلاگت بر فوت مکعب است.

۱۵. جسم توپر همگنی در داخل استوانه $2x = 0$ ، $x^2 + y^2 = z^2$ ، زیر مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ و بالای صفحه xy واقع است. گشتاور لختی جسم نسبت به محور z را به دست آورید. چگالی حجمی در هر نقطه k کیلو گرم بر متر مکعب است.

۱۶. یک جسم کروی به شعاع a متر مفروض است. اگر چگالی حجمی در هر نقطه جسم متناسب با فاصله آن نقطه از مرکز کره باشد، جرم جسم کروی را به دست آورید. چگالی حجمی بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب اندازه گیری می شود.

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، از هردستگاه مختصاتی که فکر می کنید برای حل مسأله مناسبتر است، استفاده کنید.

۱۷. مطلوب است جرم نیمکره توپری به شعاع ۲ متر، اگر چگالی حجمی در هر نقطه متناسب با فاصله از مرکز قاعده نیمکره باشد و بر حسب کیلو گرم بر متر مکعب اندازه گیری شود.

۱۸. مطلوب است جرم جسم همگنی که در داخل سهمیوار $z = 3x^2 + 3y^2$ و خارج مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ است، اگر چگالی حجمی ثابت و k کیلو گرم بر متر مکعب باشد.

۱۹. مطلوب است مرکز جرم جسمی در داخل سهمیوار $z = x^2 + y^2$ و خارج مخروط $z^2 = x^2 + y^2$. چگالی حجمی ثابت و k کیلو گرم بر متر مکعب است.

۲۰. گشتاور لختی جسم همگن مذکور در تمرین ۱۹ را نسبت به محور z به دست آورید.

۲۱. مطلوب است گشتاور لختی جسم واقع در بین کره های متحدالمرکز به شعاعهای a فوت و $2a$ فوت. چگالی حجمی در هر نقطه با مربع فاصله از مرکز تناسب معکوس دارد، و بر حسب اسلاگت در فوت مکعب اندازه گیری می شود.

۲۲. جرم جسم مذکور در تمرین ۲۱ را بیابید. چگالی حجمی مشابه با چگالی حجمی در تمرین ۲۱ می باشد.

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، انتگرال مکرر را با استفاده از مختصات استوانه ای یا کروی محاسبه کنید.

$$.۲۳ \int_0^4 \int_0^3 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx dz$$

$$.۲۴ \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dz dx dy$$

$$.۲۵ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy$$

$$.۲۶ \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dz dy dx$$

تمرینهای مروری فصل ۲۰

در تمرینهای ۱ تا ۸، انتگرال مکرر داده شده را حساب کنید.

$$.۱ \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx$$

$$.۲ \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xy dx dy$$

$$.۳ \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} r \cos^2 \theta dr d\theta$$

$$.۴ \int_0^{\pi} \int_0^{2(1+\cos \theta)} r^2 \sin \theta dr d\theta$$

$$.۵ \int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} e^x e^y e^z dx dy dz$$

$$.۶ \int_1^2 \int_2^x \int_0^{\sqrt{xy}} \frac{y}{y^2+z^2} dz dy dx$$

$$.۷ \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$.۸ \int_0^a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} z r e^{-r^2} dr d\theta dz$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲ انتگرال چندگانه را به دست آورید.

۹. $\iint_R xy \, dA$ ؛ ناحیه‌ای در ربع اول محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و محورها مختصات.

۱۰. $\iint_R (x+y) \, dA$ ؛ ناحیه‌ای محصور بین منحنی $y = \cos x$ و محور x ها از $x = -\pi/2$ تا $x = \pi/2$.

۱۱. $\iiint_S z^2 \, dV$ ؛ ناحیه‌ای محصور بین استوانه‌های $x^2 + z = 1$ و $y^2 + z = 1$ و صفحه xy .

۱۲. $\iiint_S y \cos(x+z) \, dV$ ؛ ناحیه‌ای محصور بین استوانه $x = y^2$ و صفحات $z = c$ و $y = 0$ ، $x+z = \pi/2$.

۱۳. انتگرال دو گانه زیر را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2} \, dA.$$

در اینجا R ناحیه‌ای در ربع اول و محصور بین دو دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ است.

۱۴. انتگرال مکرر زیر را با استفاده از مختصات قطبی حساب کنید

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{4-y^2}} \ln(x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، انتگرال مکرر را با عوض کردن ترتیب انتگرال گیری حساب کنید.

۱۵. $\int_0^1 \int_x^1 \sin y^2 \, dy \, dx$ ۱۶. $\int_0^1 \int_{\cos^{-1}y}^{\sin^{-1}y} e^{\sin x} \, dx \, dy$

در تمرینهای ۱۷ و ۱۸، انتگرال منحنی الخط مفروض را با استفاده از قضیه گرین محاسبه کنید.

۱۷. $\oint_C (3x + 2y) \, dx + (3x + y^2) \, dy$ ، که در آن C بیضی $16x^2 + 9y^2 = 144$ است.

۱۸. $\oint_C \ln(y+1) dx - \frac{xy}{y+1} dy$ ، که در آن C منحنی بسته‌ای است که به وسیله

منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ و بازه‌های $[0, 4]$ روی محورهای x ها و y ها تعیین می‌شود.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰ انتگرال مکرر داده شده را با تبدیل مختصات به مختصات استوانه‌ای یا کروی حساب کنید.

$$19. \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

$$20. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

۲۱. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، مساحت ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین سهمیهای $x^2 = 4y$ و $x^2 = 8 - 4y$ را از دو روش زیر به دست آورید:

(الف) ابتدا نسبت به x انتگرال گیری کنید.

(ب) ابتدا نسبت به y انتگرال گیری کنید.

۲۲. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، مساحت ناحیه واقع در صفحه xy و محصور بین سهمیهای $x^2 = 9 - y$ و $y = x^2 + 1$ را به دست آورید.

۲۳. با استفاده از قضیه ۲۰.۶، مساحت ناحیه محصور بین سهمی $x^2 = y$ و خط $y = x + 2$ را به دست آورید.

۲۴. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، حجم جسم واقع در بالای صفحه xy و محصور بین استوانه $x^2 + y^2 = 16$ و صفحه $z = 2y$ را از دو روش زیر به دست آورید:

(الف) ابتدا نسبت به x انتگرال گیری کنید.

(ب) ابتدا نسبت به y انتگرال گیری کنید.

۲۵. حجم جسم محصور بین رویه‌های $x^2 = 4y$ ، $x^2 = 4x$ ، $y^2 = 4x$ ، و $x^2 = z - y$ را به دست آورید.

۲۶. مطلوب است تعیین جرم ورقه‌ای به شکل ناحیه محدود به سهمی $x^2 = y$ و خط $2 + y - x = 0$ ، اگر چگالی سطحی در هر نقطه $x^2 y^2$ کیلو گرم بر متر مربع باشد.

۲۷. مطلوب است مساحت رویه قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 9$ که در ثمن اول بین صفحات $x = z$ و $3x = z$ واقع است.

۲۸. مساحت رویه قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را که در داخل استوانه $x^2 + z^2 = a^2$

واقع است به دست آورید.

۳۹. با استفاده از انتگرال گیری دو گانه، مساحت ناحیه واقع در داخل دایره $r=1$ و طرف راست سهمی $r(1+\cos\theta)=1$ را به دست آورید.

۳۵. مطلوب است محاسبه جرم ورقه ای به شکل ناحیه خارج حلزونی $r=3-\cos\theta$ و داخل دایره $r=5\cos\theta$ ، اگر چگالی سطحی در هر نقطه، $2|\sin\theta|$ کیلو گرم بر متر مربع باشد.

۳۱. مطلوب است تعیین مرکز جرم ورقه ای مستطیلی شکل محصور بین خطوط $x=3$ و $y=2$ و محورهای مختصات، اگر چگالی سطحی در هر نقطه، xy کیلو گرم بر متر مربع باشد.

۳۲. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین سهمیهای $y=4+x^2$ و $y=4-8x^2$ است. اگر چگالی سطحی در هر نقطه آن kx^2 کیلو گرم بر متر مربع باشد، مرکز جرم ورقه را بیابید.

۳۳. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین محور قطبی و منحنی $r=\cos 2\theta$ با ضابطه $0 \leq \theta \leq \pi/4$ است. اگر چگالی سطحی در هر نقطه ورقه $r\theta$ کیلو گرم بر متر مربع باشد، جرم ورقه را بیابید.

۳۴. ورقه ای به شکل ناحیه محصور در دایره $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+y^2=a^2$ مفروض است؛ گشتاور لختی این ورقه را نسبت به محور xy ها به دست آورید؛ چگالی سطحی در هر نقطه، $k\sqrt{x^2+y^2}$ کیلو گرم بر متر مربع است.

۳۵. شیبی در خلاف جهت عقربه های ساعت روی بیضی $16=x^2+y^2$ حرکت می کند. اگر این حرکت ناشی از میدان نیروی $\mathbf{F}(x,y)=(e^x+2y)\mathbf{i}+(x^2-\tan y)\mathbf{j}$ باشد، با استفاده از قضیه گرین، کل کار انجام شده را در یکبار گردش شیء به دور بیضی حساب کنید. فرض کنید قوس بر حسب متر و نیرو بر حسب نیوتن اندازه گیری شود.

۳۶. اگر $\mathbf{F}(x,y)=x^2\mathbf{i}-2xy\mathbf{j}$ و R ناحیه ای محدود به دایره $x^2+y^2=9$ باشد، صحت قضیه استوکس در صفحه را نشان دهید.

۳۷. برای $\mathbf{F}$ و R داده شده در تمرین ۳۶، صحت قضیه دیورژانس در صفحه را نشان دهید.

۳۸. با استفاده از انتگرال گیری سه گانه، حجم جسمی واقع در ثمن اول و محصور بین صفحه $8=y+z$ ، استوانه $y=2x^2$ ، و صفحه xy ، را به دست آورید.

۳۹. ورقه ای به شکل ناحیه محصور بین منحنی $y=e^x$ و خط $x=2$ و محورهای

مختصات مفروض است. اگر چگالی سطحی در هر نقطه ورقه، ρ کیلوگرم بر متر مربع باشد، گشتاور لختی ورقه نسبت به محور yz را به دست آورید.

۴۵. مطلوب است گشتاور لختی نسبت به محور yz برای ورقه مذکور در تمرین ۳۹.

۴۱. ورقه همگنی به شکل ناحیه محدود به منحنی $z = 4 \cos 2\theta$ مفروض است. اگر چگالی سطحی در هر نقطه، k کیلوگرم بر متر مربع باشد، گشتاور لختی ورقه نسبت به محور $x/2$ را به دست آورید.

۴۲. جرم ورقه مذکور در تمرین ۴۱ را به دست آورید.

۴۳. مطلوب است گشتاور قطبی لختی و شعاع چرخش متناظر برای ورقه مذکور در تمرین ۴۱.

۴۴. ورقه‌ای به شکل ناحیه محصور بین سهمی $y = x - x^2$ و خط $x + y = 0$ است. اگر چگالی سطحی در هر نقطه ورقه، $(x + y)$ کیلوگرم بر متر مربع باشد، گشتاور لختی ورقه نسبت به محور yz را به دست آورید.

۴۵. جرمی بین کره‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ محصور است. اگر چگالی حجمی در هر نقطه آن $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کیلوگرم بر متر مکعب باشد، جرم جسم را به دست آورید.

۴۶. برای جسم مذکور در تمرین ۴۵ گشتاور لختی نسبت به محور z را به دست آورید.

۴۷. یک جسم همگن محصور بین مخروط $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ و صفحات $z = 0$ و $z = 4$ است و دارای چگالی حجمی k کیلوگرم بر متر مکعب در هر نقطه است. گشتاور لختی جسم نسبت به محور yz را به دست آورید.

۴۸. مطلوب است مرکز جرم جسمی که محدود به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ و مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و بالای مخروط است. چگالی حجمی در هر نقطه جسم kz کیلوگرم بر متر مکعب است.

پیوست

جدول ۱ توانها و ریشه‌ها

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.732
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.848
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.291	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.643	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

جدول ۲ لگاریتمهای طبیعی

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0100	0198	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862
1.1	0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740
1.2	1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546
1.3	2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293
1.4	3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988
1.5	4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637
1.6	4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247
1.7	5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822
1.8	5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366
1.9	6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881
2.0	6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372
2.1	7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839
2.2	7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286
2.3	8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713
2.4	8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123
2.5	9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517
2.6	9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895
2.7	9933	9969	*0006	*0043	*0080	*0116	*0152	*0188	*0225	*0260
2.8	1.0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613
2.9	0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953
3.0	1.0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282
3.1	1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600
3.2	1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909
3.3	1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208
3.4	2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499
3.5	1.2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782
3.6	2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056
3.7	3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324
3.8	3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584
3.9	3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838
4.0	1.3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085
4.1	4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327
4.2	4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563
4.3	4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793
4.4	4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019
4.5	1.5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239
4.6	5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454
4.7	5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665
4.8	5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872
4.9	5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074
5.0	1.6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273
5.1	6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467
5.2	6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658
5.3	6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6845
5.4	6864	6882	6901	6919	6938	6956	6974	6993	7011	7029

جدول ۲ (ادامه)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	1.7047	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7210
5.6	7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387
5.7	7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561
5.8	7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733
5.9	7750	7766	7783	7800	7817	7834	7851	7867	7884	7901
6.0	1.7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066
6.1	8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229
6.2	8245	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390
6.3	8405	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547
6.4	8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8703
6.5	1.8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856
6.6	8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006
6.7	9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155
6.8	9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301
6.9	9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445
7.0	1.9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587
7.1	9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727
7.2	9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865
7.3	9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	*0001
7.4	2.0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136
7.5	2.0149	0162	0176	0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268
7.6	0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399
7.7	0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528
7.8	0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0630	0643	0656
7.9	0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782
8.0	2.0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906
8.1	0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029
8.2	1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150
8.3	1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270
8.4	1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389
8.5	2.1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506
8.6	1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622
8.7	1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736
8.8	1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849
8.9	1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961
9.0	2.1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072
9.1	2083	2094	2105	2116	2127	2138	2148	2159	2170	2181
9.2	2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289
9.3	2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2386	2396
9.4	2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502
9.5	2.2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607
9.6	2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711
9.7	2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814
9.8	2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915
9.9	2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016

برای محاسبه لگاریتم اعداد بزرگتر از ۱۰ یا کوچکتر از ۱ از $\ln 10 = 2.30259$ استفاده کنید. مثال:

$$\ln 220 = \ln 2.2 + 2 \ln 10 = 0.7885 + 2(2.30259) = 5.3937$$

جدول ۳ توابع نمایی

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
0.00	1.0000	0.00000	1.000000	0.50	1.6487	0.21715	0.606531
0.01	1.0101	.00434	0.990050	0.51	1.6653	.22149	.600496
0.02	1.0202	.00869	.980199	0.52	1.6820	.22583	.594521
0.03	1.0305	.01303	.970446	0.53	1.6989	.23018	.588605
0.04	1.0408	.01737	.960789	0.54	1.7160	.23452	.582748
0.05	1.0513	0.02171	0.951229	0.55	1.7333	0.23886	0.576950
0.06	1.0618	.02606	.941765	0.56	1.7507	.24320	.571209
0.07	1.0725	.03040	.932394	0.57	1.7683	.24755	.565525
0.08	1.0833	.03474	.923116	0.58	1.7860	.25189	.559898
0.09	1.0942	.03909	.913931	0.59	1.8040	.35623	.554327
0.10	1.1052	0.04343	0.904837	0.60	1.8221	0.26058	0.548812
0.11	1.1163	.04777	.895834	0.61	1.8404	.26492	.543351
0.12	1.1275	.05212	.886920	0.62	1.8589	.26926	.537944
0.13	1.1388	.05646	.878095	0.63	1.8776	.27361	.532592
0.14	1.1503	.06080	.869358	0.64	1.8965	.27795	.527292
0.15	1.1618	0.06514	0.860708	0.65	1.9155	0.28229	0.522046
0.16	1.1735	.06949	.852144	0.66	1.9348	.28663	.516851
0.17	1.1853	.07383	.843665	0.67	1.9542	.29098	.511709
0.18	1.1972	.07817	.835270	0.68	1.9739	.29532	.506617
0.19	1.2092	.08252	.826959	0.69	1.9937	.29966	.501576
0.20	1.2214	0.08686	0.818731	0.70	2.0138	0.30401	0.496585
0.21	1.2337	.09120	.810584	0.71	2.0340	.30835	.491644
0.22	1.2461	.09554	.802519	0.72	2.0544	.31269	.486752
0.23	1.2586	.09989	.794534	0.73	2.0751	.31703	.481909
0.24	1.2712	.10423	.786628	0.74	2.0959	.32138	.477114
0.25	1.2840	0.10857	0.778801	0.75	2.1170	0.32572	0.472367
0.26	1.2969	.11292	.771052	0.76	2.1383	.33006	.467666
0.27	1.3100	.11726	.763379	0.77	2.1598	.33441	.463013
0.28	1.3231	.12160	.755784	0.78	2.1815	.33875	.458406
0.29	1.3364	.12595	.748264	0.79	2.2034	.34309	.453845
0.30	1.3499	0.13029	0.740818	0.80	2.2255	0.34744	0.449329
0.31	1.3634	.13463	.733447	0.81	2.2479	.35178	.444858
0.32	1.3771	.13897	.726149	0.82	2.2705	.35612	.440432
0.33	1.3910	.14332	.718924	0.83	2.2933	.36046	.436049
0.34	1.4049	.14766	.711770	0.84	2.3164	.36481	.431711
0.35	1.4191	0.15200	0.704688	0.85	2.3396	0.36915	0.427415
0.36	1.4333	.15635	.697676	0.86	2.3632	.37349	.423162
0.37	1.4477	.16069	.690734	0.87	2.3869	.37784	.418952
0.38	1.4623	.16503	.683861	0.88	2.4109	.38218	.414783
0.39	1.4770	.16937	.677057	0.89	2.4351	.38652	.410656
0.40	1.4918	0.17372	0.670320	0.90	2.4596	0.39087	0.406570
0.41	1.5068	.17806	.663650	0.91	2.4843	.39521	.402524
0.42	1.5220	.18240	.657047	0.92	2.5093	.39955	.398519
0.43	1.5373	.18675	.650509	0.93	2.5345	.40389	.394554
0.44	1.5527	.19109	.644036	0.94	2.5600	.40824	.390628
0.45	1.5683	0.19543	0.637628	0.95	2.5857	0.41258	0.386741
0.46	1.5841	.19978	.631284	0.96	2.6117	.41692	.382893
0.47	1.6000	.20412	.625002	0.97	2.6379	.42127	.379083
0.48	1.6161	.20846	.618783	0.98	2.6645	.42561	.375311
0.49	1.6323	.21280	.612626	0.99	2.6912	.42995	.371577
0.50	1.6487	0.21715	0.606531	1.00	2.7183	0.43429	0.367879

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
1.00	2.7183	0.43429	0.367879	1.50	4.4817	0.65144	0.223130
1.01	2.7456	.43864	.364219	1.51	4.5267	.65578	.220910
1.02	2.7732	.44298	.360595	1.52	4.5722	.66013	.218712
1.03	2.8011	.44732	.357007	1.53	4.6182	.66447	.216536
1.04	2.8292	.45167	.353455	1.54	4.6646	.66881	.214381
1.05	2.8577	0.45601	0.349938	1.55	4.7115	0.67316	0.212248
1.06	2.8864	.46035	.346456	1.56	4.7588	.67750	.210136
1.07	2.9154	.46470	.343009	1.57	4.8066	.68184	.208045
1.08	2.9447	.46904	.339596	1.58	4.8550	.68619	.205975
1.09	2.9743	.47338	.336216	1.59	4.9037	.69053	.203926
1.10	3.0042	0.47772	0.332871	1.60	4.9530	0.69487	0.201897
1.11	3.0344	.48207	.329559	1.61	5.0028	.69921	.199888
1.12	3.0649	.48641	.326280	1.62	5.0531	.70356	.197899
1.13	3.0957	.49075	.323033	1.63	5.1039	.70790	.195930
1.14	3.1268	.49510	.319819	1.64	5.1552	.71224	.193980
1.15	3.1582	0.49944	0.316637	1.65	5.2070	0.71659	0.192050
1.16	3.1899	.50378	.313486	1.66	5.2593	.72093	.190139
1.17	3.2220	.50812	.310367	1.67	5.3122	.72527	.188247
1.18	3.2544	.51247	.307279	1.68	5.3656	.72961	.186374
1.19	3.2871	.51681	.304221	1.69	5.4195	.73396	.184520
1.20	3.3201	0.52115	0.301194	1.70	5.4739	0.73830	0.182684
1.21	3.3535	.52550	.298197	1.71	5.5290	.74264	.180866
1.22	3.3872	.52984	.295230	1.72	5.5845	.74699	.179066
1.23	3.4212	.53418	.292293	1.73	5.6407	.75133	.177284
1.24	3.4556	.53853	.289384	1.74	5.6973	.75567	.175520
1.25	3.4903	0.54287	0.286505	1.75	5.7546	0.76002	0.173774
1.26	3.5254	.54721	.283654	1.76	5.8124	.76436	.172045
1.27	3.5609	.55155	.280832	1.77	5.8709	.76870	.170333
1.28	3.5966	.55590	.278037	1.78	5.9299	.77304	.168638
1.29	3.6328	.56024	.275271	1.79	5.9895	.77739	.166960
1.30	3.6693	0.56458	0.272532	1.80	6.0496	0.78173	0.165299
1.31	3.7062	.56893	.269820	1.81	6.1104	.78607	.163654
1.32	3.7434	.57327	.267135	1.82	6.1719	.79042	.162026
1.33	3.7810	.57761	.264477	1.83	6.2339	.79476	.160414
1.34	3.8190	.58195	.261846	1.84	6.2965	.79910	.158817
1.35	3.8574	0.58630	0.259240	1.85	6.3598	0.80344	0.157237
1.36	3.8962	.59064	.256661	1.86	6.4237	.80779	.155673
1.37	3.9354	.59498	.254107	1.87	6.4483	.81213	.154124
1.38	3.9749	.59933	.251579	1.88	6.5535	.81647	.152590
1.39	4.0149	.60367	.249075	1.89	6.6194	.82082	.151072
1.40	4.0552	0.60801	0.246597	1.90	6.6859	0.82516	0.149569
1.41	4.0960	.61236	.244143	1.91	6.7531	.82950	.148080
1.42	4.1371	.61670	.241714	1.92	6.8210	.83385	.146607
1.43	4.1787	.62104	.239309	1.93	6.8895	.83819	.145148
1.44	4.2207	.62538	.236928	1.94	6.9588	.84253	.143704
1.45	4.2631	0.62973	0.234570	1.95	7.0287	0.84687	0.142274
1.46	4.3060	.63407	.232236	1.96	7.0993	.85122	.140858
1.47	4.3492	.63841	.229925	1.97	7.1707	.85556	.139457
1.48	4.3929	.64276	.227638	1.98	7.2427	.85990	.138069
1.49	4.4371	.64710	.225373	1.99	7.3155	.86425	.136695
1.50	4.4817	0.65144	0.223130	2.00	7.3891	0.86859	0.135335

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
2.00	7.3891	0.86859	0.135335	2.50	12.182	1.08574	0.082085
2.01	7.4633	.87293	.133989	2.51	12.305	1.09008	.081268
2.02	7.5383	.87727	.132655	2.52	12.429	1.09442	.080460
2.03	7.6141	.88162	.131336	2.53	12.554	1.09877	.079659
2.04	7.6906	.88596	.130029	2.54	12.680	1.10311	.078866
2.05	7.7679	0.89030	0.128735	2.55	12.807	1.10745	0.078082
2.06	7.8460	.89465	.127454	2.56	12.936	1.11179	.077305
2.07	7.9248	.89899	.126186	2.57	13.066	1.11614	.076536
2.08	8.0045	.90333	.124930	2.58	13.197	1.12048	.075774
2.09	8.0849	.90756	.123687	2.59	13.330	1.12482	.075020
2.10	8.1662	0.91202	0.122456	2.60	13.464	1.12917	0.074274
2.11	8.2482	.91636	.121238	2.61	13.599	1.13351	.073535
2.12	8.3311	.92070	.120032	2.62	13.736	1.13785	.072803
2.13	8.4149	.92505	.118837	2.63	13.874	1.14219	.072078
2.14	8.4994	.92939	.117655	2.64	14.013	1.14654	.071361
2.15	8.5849	0.93373	0.116484	2.65	14.154	1.15088	0.070651
2.16	8.6711	.93808	.115325	2.66	14.296	1.15522	.069948
2.17	8.7583	.94242	.114178	2.67	14.440	1.15957	.069252
2.18	8.8463	.94676	.113042	2.68	14.585	1.16391	.068563
2.19	8.9352	.95110	.111917	2.69	14.732	1.16825	.067881
2.20	9.0250	0.95545	0.110803	2.70	14.880	1.17260	0.067206
2.21	9.1157	.95979	.109701	2.71	15.029	1.17694	.066537
2.22	9.2073	.96413	.108609	2.72	15.180	1.18128	.065875
2.23	9.2999	.96848	.107528	2.73	15.333	1.18562	.065219
2.24	9.3933	.97282	.106459	2.74	15.487	1.18997	.064570
2.25	9.4877	0.97716	0.105399	2.75	15.643	1.19431	0.063928
2.26	9.5831	.98151	.104350	2.76	15.800	1.19865	.063292
2.27	9.6794	.98585	.103312	2.77	15.959	1.20300	.062662
2.28	9.7767	.99019	.102284	2.78	16.119	1.20734	.062039
2.29	9.8749	.99453	.101266	2.79	16.281	1.21168	.061421
2.30	9.9742	0.99888	0.100259	2.80	16.445	1.21602	0.060810
2.31	10.074	1.00322	.099261	2.81	16.610	1.22037	.060205
2.32	10.176	1.00756	.098274	2.82	16.777	1.22471	.059606
2.33	10.278	1.01191	.097296	2.83	16.945	1.22905	.059013
2.34	10.381	1.01625	.096328	2.84	17.116	1.23340	.058426
2.35	10.486	1.02059	0.095369	2.85	17.288	1.23774	0.057844
2.36	10.591	1.02493	.094420	2.86	17.462	1.24208	.057269
2.37	10.697	1.02928	.093481	2.87	17.637	1.24643	.056699
2.38	10.805	1.03362	.092551	2.88	17.814	1.25077	.056135
2.39	10.913	1.03796	.091630	2.89	17.993	1.25511	.055576
2.40	11.023	1.04231	0.090718	2.90	18.174	1.25945	0.055023
2.41	11.134	1.04665	.089815	2.91	18.357	1.26380	.054476
2.42	11.246	1.05099	.088922	2.92	18.541	1.26814	.053934
2.43	11.359	1.05534	.088037	2.93	18.728	1.27248	.053397
2.44	11.473	1.05968	.087161	2.94	18.916	1.27683	.052866
2.45	11.588	1.06402	0.086294	2.95	19.106	1.28117	0.052340
2.46	11.705	1.06836	.085435	2.96	19.298	1.28551	.051819
2.47	11.822	1.07271	.084585	2.97	19.492	1.28985	.051303
2.48	11.941	1.07705	.083743	2.98	19.688	1.29420	.050793
2.49	12.061	1.08139	.082910	2.99	19.886	1.29854	.050287
2.50	12.182	1.08574	0.082085	3.00	20.086	1.30288	0.049787

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
3.00	20.086	1.30288	0.049787	3.50	33.115	1.52003	0.030197
3.01	20.287	1.30723	.049292	3.51	33.448	1.52437	.029897
3.02	20.491	1.31157	.048801	3.52	33.784	1.52872	.029599
3.03	20.697	1.31591	.048316	3.53	34.124	1.53306	.029305
3.04	20.905	1.32026	.047835	3.54	34.467	1.53740	.029013
3.05	21.115	1.32460	0.047359	3.55	34.813	1.54175	0.028725
3.06	21.328	1.32894	.046888	3.56	35.163	1.54609	.028439
3.07	21.542	1.33328	.046421	3.57	35.517	1.55043	.028156
3.08	21.758	1.33763	.045959	3.58	35.874	1.55477	.027876
3.09	21.977	1.34197	.045502	3.59	36.234	1.55912	.027598
3.10	22.198	1.34631	0.045049	3.60	36.598	1.56346	0.027324
3.11	22.421	1.35066	.044601	3.61	36.966	1.56780	.027052
3.12	22.646	1.35500	.044157	3.62	37.338	1.57215	.026783
3.13	22.874	1.35934	.043718	3.63	37.713	1.57649	.026516
3.14	23.104	1.36368	.043283	3.64	38.092	1.58083	.026252
3.15	23.336	1.36803	0.042852	3.65	38.475	1.58517	0.025991
3.16	23.571	1.37237	.042426	3.66	38.861	1.58952	.025733
3.17	23.807	1.36671	.042004	3.67	39.252	1.59386	.025476
3.18	24.047	1.38106	.041586	3.68	39.646	1.59820	.025223
3.19	24.288	1.38540	.041172	3.69	40.045	1.60255	.024972
3.20	24.533	1.38974	0.040764	3.70	40.447	1.60689	0.024724
3.21	24.779	1.39409	.040357	3.71	40.854	1.61123	.024478
3.22	25.028	1.39843	.039955	3.72	41.264	1.61558	.024234
3.23	25.280	1.40277	.039557	3.73	41.679	1.61992	.023993
3.24	25.534	1.40711	.039164	3.74	42.098	1.62426	.023754
3.25	25.790	1.41146	0.038774	3.75	42.521	1.62860	0.023518
3.26	26.050	1.41580	.038388	3.76	42.948	1.63295	.023284
3.27	26.311	1.42014	.038006	3.77	43.380	1.63729	.023052
3.28	26.576	1.42449	.037628	3.78	43.816	1.64163	.022823
3.29	26.843	1.42883	.037254	3.79	44.256	1.64598	.022596
3.30	27.113	1.44317	0.036883	3.80	44.701	1.65032	0.022371
3.31	27.385	1.43751	.036516	3.81	45.150	1.65466	.022148
3.32	27.660	1.44186	.036153	3.82	45.604	1.65900	.021928
3.33	27.938	1.44620	.035793	3.83	46.063	1.66335	.021710
3.34	28.219	1.45054	.035437	3.84	46.525	1.66769	.021494
3.35	28.503	1.45489	0.035084	3.85	46.993	1.67203	0.021280
3.36	28.789	1.45923	.034735	3.86	47.465	1.67638	.021068
3.37	29.079	1.46357	.034390	3.87	47.942	1.68072	.020858
3.38	29.371	1.46792	.034047	3.88	48.424	1.68506	.020651
3.39	29.666	1.47226	.033709	3.89	48.911	1.68941	.020445
3.40	29.964	1.47660	0.033373	3.90	49.402	1.69375	0.020242
3.41	30.265	1.48094	.033041	3.91	49.899	1.69809	.020041
3.42	30.569	1.48529	.032712	3.92	50.400	1.70243	.019840
3.43	30.877	1.48963	.032387	3.93	50.907	1.70678	.019644
3.44	31.187	1.49397	.032065	3.94	51.419	1.71112	.019448
3.45	31.500	1.49832	0.031746	3.95	51.935	1.71546	0.019255
3.46	31.817	1.50266	.031430	3.96	52.457	1.71981	.019063
3.47	32.137	1.50700	.031117	3.97	52.985	1.72415	.018873
3.48	32.460	1.51134	.030807	3.98	53.517	1.72849	.018686
3.49	32.786	1.51569	.030501	3.99	54.055	1.73283	.018500
3.50	33.115	1.52003	0.030197	4.00	54.598	1.73718	0.018316

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
4.00	54.598	1.73718	0.018316	4.50	90.017	1.95433	0.011109
4.01	55.147	1.74152	.018133	4.51	90.922	1.95867	.010998
4.02	55.701	1.74586	.017953	4.52	91.836	1.96301	.010889
4.03	56.261	1.75021	.017774	4.53	92.759	1.96735	.010781
4.04	56.826	1.75455	.017597	4.54	93.691	1.97170	.010673
4.05	57.397	1.75889	0.017422	4.55	94.632	1.97604	0.010567
4.06	57.974	1.76324	.017249	4.56	95.583	1.98038	.010462
4.07	58.577	1.76758	.017077	4.57	96.544	1.98473	.010358
4.08	59.145	1.77192	.016907	4.58	97.514	1.98907	.010255
4.09	59.740	1.77626	.016739	4.59	98.494	1.99341	.010153
4.10	60.340	1.78061	0.016573	4.60	99.484	1.99775	0.010052
4.11	60.947	1.78495	.016408	4.61	100.48	2.00210	.009952
4.12	61.559	1.78929	.016245	4.62	101.49	2.00644	.009853
4.13	62.178	1.79364	.016083	4.63	102.51	2.01078	.009755
4.14	62.803	1.79798	.015923	4.64	103.54	2.01513	.009658
4.15	63.434	1.80232	0.015764	4.65	104.58	2.01947	0.009562
4.16	64.072	1.80667	.015608	4.66	105.64	2.02381	.009466
4.17	64.715	1.81101	.015452	4.67	106.70	2.02816	.009372
4.18	65.366	1.81535	.015299	4.68	107.77	2.03250	.009279
4.19	66.023	1.81969	.015146	4.69	108.85	2.03684	.009187
4.20	66.686	1.82404	0.014996	4.70	109.95	2.04118	0.009095
4.21	67.357	1.82838	.014846	4.71	111.05	2.04553	.009005
4.22	68.033	1.83272	.014699	4.72	112.17	2.04987	.008915
4.23	68.717	1.83707	.014552	4.73	113.30	2.05421	.008826
4.24	69.408	1.84141	.014408	4.74	114.43	2.05856	.008739
4.25	70.105	1.84575	0.014264	4.75	115.58	2.06290	0.008652
4.26	70.810	1.85009	.014122	4.76	116.75	2.06724	.008566
4.27	71.522	1.85444	.013982	4.77	117.92	2.07158	.008480
4.28	72.240	1.85878	.013843	4.78	119.10	2.07593	.008396
4.29	72.966	1.86312	.013705	4.79	120.30	2.08027	.008312
4.30	73.700	1.86747	0.013569	4.80	121.51	2.08461	0.008230
4.31	74.440	1.87181	.013434	4.81	122.73	2.08896	.008148
4.32	75.189	1.87615	.013300	4.82	123.97	2.09330	.008067
4.33	75.944	1.88050	.013168	4.83	125.21	2.09764	.007987
4.34	76.708	1.88484	.013037	4.84	126.47	2.10199	.007907
4.35	77.478	1.88918	0.012907	4.85	127.74	2.10633	0.007828
4.36	78.257	1.89352	.012778	4.86	129.02	2.11067	.007750
4.37	79.044	1.89787	.012651	4.87	130.32	2.11501	.007673
4.38	79.838	1.90221	.012525	4.88	131.63	2.11936	.007597
4.39	80.640	1.90655	.012401	4.89	132.95	2.12370	.007521
4.40	81.451	1.91090	0.012277	4.90	134.29	2.12804	0.007477
4.41	82.269	1.91524	.012155	4.91	135.64	2.13239	.007372
4.42	83.096	1.91958	.012034	4.92	137.00	2.13673	.007299
4.43	83.931	1.92392	.011914	4.93	138.38	2.14107	.007227
4.44	84.775	1.92827	.011796	4.94	139.77	2.14541	.007155
4.45	85.627	1.93261	0.011679	4.95	141.17	2.14976	0.007083
4.46	86.488	1.93695	.011562	4.96	142.59	2.15410	.007013
4.47	87.357	1.94130	.011447	4.97	144.03	2.15844	.006943
4.48	88.235	1.94564	.011333	4.98	145.47	2.16279	.006874
4.49	89.121	1.94998	.011221	4.99	146.94	2.16713	.006806
4.50	90.017	1.95433	0.011109	5.00	148.41	2.17147	0.006738

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
5.00	148.41	2.17147	0.006738	5.50	244.69	2.38862	0.0040868
5.01	149.90	2.17582	.006671	5.55	257.24	2.41033	.0038875
5.02	151.41	2.18016	.006605	5.60	270.43	2.43205	.0036979
5.03	152.93	2.18450	.006539	5.65	284.29	2.45376	.0035175
5.04	154.47	2.18884	.006474	5.70	298.87	2.47548	.0033460
5.05	156.02	2.19319	0.006409	5.75	314.19	2.49719	0.0031828
5.06	157.59	2.19753	.006346	5.80	330.30	2.51891	.0030276
5.07	159.17	2.20187	.006282	5.85	347.23	2.54062	.0028799
5.08	160.77	2.20622	.006220	5.90	365.04	2.56234	.0027394
5.09	162.39	2.21056	.006158	5.95	383.75	2.58405	.0026058
5.10	164.02	2.21490	0.006097	6.00	403.43	2.60577	0.0024788
5.11	165.67	2.21924	.006036	6.05	424.11	2.62748	.0023579
5.12	167.34	2.22359	.005976	6.10	445.86	2.64920	.0022429
5.13	169.02	2.22793	.005917	6.15	468.72	2.67091	.0021335
5.14	170.72	2.23227	.005858	6.20	492.75	2.69263	.0020294
5.15	172.43	2.23662	0.005799	6.25	518.01	2.71434	0.0019305
5.16	174.16	2.24096	.005742	6.30	544.57	2.73606	.0018363
5.17	175.91	2.24530	.005685	6.35	572.49	2.75777	.0017467
5.18	177.68	2.24965	.005628	6.40	601.85	2.77948	.0016616
5.19	179.47	2.25399	.005572	6.45	632.70	2.80120	.0015805
5.20	181.27	2.25833	0.005517	6.50	665.14	2.82291	0.0015034
5.21	183.09	2.26267	.005462	6.55	699.24	2.84463	.0014301
5.22	184.93	2.26702	.005407	6.60	735.10	2.86634	.0013604
5.23	186.79	2.27136	.005354	6.65	772.78	2.88806	.0012940
5.24	188.67	2.27570	.005300	6.70	812.41	2.90977	.0012309
5.25	190.57	2.28005	0.005248	6.75	854.06	2.93149	0.0011709
5.26	192.48	2.28439	.005195	6.80	897.85	2.95320	.0011138
5.27	194.42	2.28873	.005144	6.85	943.88	2.97492	.0010595
5.28	196.37	2.29307	.005092	6.90	992.27	2.99663	.0010078
5.29	198.34	2.29742	.005042	6.95	1043.1	3.01835	.0009586
5.30	200.34	2.30176	0.004992	7.00	1096.6	3.04006	0.0009119
5.31	202.35	2.30610	.004942	7.05	1152.9	3.06178	.0008674
5.32	204.38	2.31045	.004893	7.10	1212.0	3.08349	.0008251
5.33	206.44	2.31479	.004844	7.15	1274.1	3.10521	.0007849
5.34	208.51	2.31913	.004796	7.20	1339.4	3.12692	.0007466
5.35	210.61	2.32348	0.004748	7.25	1408.1	3.14863	0.0007102
5.36	212.72	2.32782	.004701	7.30	1480.3	3.17035	.0006755
5.37	214.86	2.33216	.004654	7.35	1556.2	3.19206	.0006426
5.38	217.02	2.33650	.004608	7.40	1636.0	3.21378	.0006113
5.39	219.20	2.34085	.004562	7.45	1719.9	3.23549	.0005814
5.40	221.41	2.34519	0.004517	7.50	1808.0	3.25721	0.0005531
5.41	223.63	2.34953	.004472	7.55	1900.7	3.27892	.0005261
5.42	225.88	2.35388	.004427	7.60	1998.2	3.30064	.0005005
5.43	228.15	2.35822	.004385	7.65	2100.6	3.32235	.0004760
5.44	230.44	2.36256	.004339	7.70	2208.3	3.34407	.0004528
5.45	232.76	2.36690	0.004296	7.75	2321.6	3.36578	0.0004307
5.46	235.10	2.37125	.004254	7.80	2440.6	3.38750	.0004097
5.47	237.46	2.37559	.004211	7.85	2565.7	3.40921	.0003898
5.48	239.85	2.37993	.004169	7.90	2697.3	3.43093	.0003707
5.49	242.26	2.38428	.004128	7.95	2835.6	3.45264	.0003527
5.50	244.69	2.38862	0.004087	8.00	2981.0	3.47436	0.0003355

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
8.00	2981.0	3.47436	0.0003355	9.00	8103.1	3.90865	0.0001234
8.05	3133.8	3.49607	.0003191	9.05	8518.5	3.93037	.0001174
8.10	3294.5	3.51779	.0003035	9.10	8955.3	3.95208	.0001117
8.15	3463.4	3.53950	.0002887	9.15	9414.4	3.97379	.0001062
8.20	3641.0	3.56121	.0002747	9.20	9897.1	3.99551	.0001010
8.25	3827.6	3.58293	0.0002613	9.25	10405	4.01722	0.0000961
8.30	4023.9	3.60464	.0002485	9.30	10938	4.03894	.0000914
8.35	4230.2	3.62636	.0002364	9.35	11499	4.06065	.0000870
8.40	4447.1	3.64807	.0002249	9.40	12088	4.08237	.0000827
8.45	4675.1	3.66979	.0002139	9.45	12708	4.10408	.0000787
8.50	4914.8	3.69150	0.0002036	9.50	13360	4.12580	0.0000749
8.55	5166.8	3.71322	.0001935	9.55	14045	4.14751	.0000712
8.60	5431.7	3.73493	.0001841	9.60	14765	4.16923	.0000677
8.65	5710.0	3.75665	.0001751	9.65	15522	4.19094	.0000644
8.70	6002.9	3.77836	.0001666	9.70	16318	4.21266	.0000613
8.75	6310.7	3.80008	0.0001585	9.75	17154	4.23437	0.0000583
8.80	6634.2	3.82179	.0001507	9.80	18034	4.25609	.0000555
8.85	6974.4	3.84351	.0001434	9.85	18958	4.27780	.0000527
8.90	7332.0	3.86522	.0001364	9.90	19930	4.29952	.0000502
8.95	7707.9	3.88694	.0001297	9.95	20952	4.32123	0.0000477
9.00	8103.1	3.90865	0.0001234	10.00	22026	4.34294	0.0000454

جدول ۴ توابع هیپربولیک

x	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
0	.00000	1.0000	.00000
0.1	.10017	1.0050	.09967
0.2	.20134	1.0201	.19738
0.3	.30452	1.0453	.29131
0.4	.41075	1.0811	.37995
0.5	.52110	1.1276	.46212
0.6	.63665	1.1855	.53705
0.7	.75858	1.2552	.60437
0.8	.88811	1.3374	.66404
0.9	1.0265	1.4331	.71630
1.0	1.1752	1.5431	.76159
1.1	1.3356	1.6685	.80050
1.2	1.5095	1.8107	.83365
1.3	1.6984	1.9709	.86172
1.4	1.9043	2.1509	.88535
1.5	2.1293	2.3524	.90515
1.6	2.3756	2.5775	.92167
1.7	2.6456	2.8283	.93541
1.8	2.9422	3.1075	.94681
1.9	3.2682	3.4177	.95624
2.0	3.6269	3.7622	.96403
2.1	4.0219	4.1443	.97045
2.2	4.4571	4.5679	.97574
2.3	4.9370	5.0372	.98010
2.4	5.4662	5.5569	.98367
2.5	6.0502	6.1323	.98661
2.6	6.6947	6.7690	.98903
2.7	7.4063	7.4735	.99101
2.8	8.1919	8.2527	.99263
2.9	9.0596	9.1146	.99396
3.0	10.018	10.068	.99505
3.1	11.076	11.122	.99595
3.2	12.246	12.287	.99668
3.3	13.538	13.575	.99728
3.4	14.965	14.999	.99777
3.5	16.543	16.573	.99818
3.6	18.285	18.313	.99851
3.7	20.211	20.236	.99878
3.8	22.339	22.362	.99900
3.9	24.691	24.711	.99918
4.0	27.290	27.308	.99933
4.1	30.162	30.178	.99945
4.2	33.336	33.351	.99955
4.3	36.843	36.857	.99963
4.4	40.719	40.732	.99970
4.5	45.003	45.014	.99975
4.6	49.737	49.747	.99980
4.7	54.969	54.978	.99983
4.8	60.751	60.759	.99986
4.9	67.141	67.149	.99989
5.0	74.203	74.210	.99991

جدول ۵ توابع مثلثاتی

درجه	رادیان	Sin	Cos	Tan	Cot		
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000		1.5708	90
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.5533	89
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.5359	88
3	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.5184	87
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.5010	86
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.4835	85
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.4661	84
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.4486	83
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.4312	82
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.4137	81
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.3963	80
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.3788	79
12	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.3614	78
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.3439	77
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.3265	76
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.3090	75
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.2915	74
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.2741	73
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.2566	72
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.2392	71
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.2217	70
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.2043	69
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.1868	68
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.1694	67
24	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.1519	66
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1345	65
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1170	64
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.0996	63
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.0821	62
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.0647	61
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.0472	60
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.0297	59
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.0123	58
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	0.9948	57
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	0.9774	56
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	0.9599	55
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	0.9425	54
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	0.9250	53
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	0.9076	52
39	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	0.8901	51
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	0.8727	50
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	0.8552	49
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	0.8378	48
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	0.8203	47
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	0.8029	46
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	0.7854	45
		Cos	Sin	Cot	Tan	رادیان	درجه

جدول ۶ لگاریتمهای معمولی

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

جدول ٤ (ادامه)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

جدول ۷ الفبای یونانی

ν	نو	α	آلفا
ξ	کسی	β	بتا
o	اومیکرون	γ	گاما
π	پی	δ	دلتا
ρ	رو	ε	اپسیلون
σ	سیگما	ζ	زتا
τ	تاو	η	اتا
υ	اوپسیلون	θ	تتا
ϕ	فی	ι	یوتا
χ	خی	κ	کاپا
ψ	پسی	λ	لاندا
ω	اومگا	μ	مو

جداول واحدهای فیزیکی

طول

	سانتیمتر (cm)	متر (m)	کیلومتر (Km)	اینچ (in)	فوت (ft)	میل (mi)
$1 =$ سانتیمتر	۱	10^{-2}	10^{-5}	۰.۳۹۳۷	۳.۲۸۱×10^{-2}	۶.۲۱۴×10^{-6}
$1 =$ متر	۱۰۰	۱	10^{-2}	۳۹.۳۷	۳.۲۸۱	۶.۲۱۴×10^{-4}
$1 =$ کیلومتر	10^5	۱۰۰۰	۱	۳۹۳۷×10^4	۳۲۸۱	۰.۶۲۱۴
$1 =$ اینچ	۲.۵۴۰	۲.۵۴۰×10^{-2}	۲.۵۴۰×10^{-5}	۱	۸.۳۳۳×10^{-2}	۱.۵۷۸×10^{-5}
$1 =$ فوت	۳۰.۴۸	۰.۳۰۴۸	۳.۰۴۸×10^{-4}	۱۲	۱	۱.۵۹۴×10^{-4}
$1 =$ میل	۱.۶۰۹×10^5	۱۶۰۹	۱.۶۰۹	۶۳۳۶×10^4	۵۲۸۰	۱

۱ یارد = ۳ فوت

۱ میل دریایی = ۱.۸۵۲ متر = ۱.۱۵۱ میل = ۶۰۷۶ فوت

مساحت

	متر مربع (m^2)	سانتیمتر مربع (cm^2)	فوت مربع (ft^2)	اینچ مربع (in^2)
$1 =$ متر مربع	1	10^4	10.76	1550
$1 =$ سانتیمتر مربع	10^{-4}	1	10.76×10^{-2}	0.1550
$1 =$ فوت مربع	9.290×10^{-2}	9290	1	144
$1 =$ اینچ مربع	6.452×10^{-4}	6452	6.452×10^{-2}	1

1 اینچ = 2.54 سانتیمتر

1 فوت = 12 اینچ

حجم

اینچ مکعب (in ³)	فوت مکعب (ft ³)	لیتر (L)	سانتیمتر مکعب (cm ³)	متر مکعب (m ³)	
6.102×10^4	۲۵۷۳۱	۱۰۰۰	10^6	۱	۱ متر مکعب =
6.102×10^{-2}	2.531×10^{-5}	1.000×10^{-3}	۱	10^{-6}	۱ سانتیمتر مکعب =
۶۱۰۵۲	2.531×10^{-2}	۱	۱۰۰۰	1.000×10^{-3}	۱ لیتر =
۱۷۲۸	۱	۲۸.۳۲	2.832×10^4	2.832×10^{-2}	۱ فوت مکعب =
۱	5.787×10^{-4}	1.639×10^{-2}	۱۶۳۹	1.639×10^{-5}	۱ اینچ مکعب =

۱ گالون سیال آمریکایی = ۱۲۸ اونس سیال آمریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب
 ۱ گالون سلطنتی انگلیس = ۲۷۷.۴ اینچ مکعب

جرم

	گرم (gm)	کیلوگرم (kg)	اسلاگ (slug)	اونس (oz)	پوند (lb)	تن (ton)
۱ گرم	۱	۰۰۰۰۱	۶۸۲۵×۱۰^{-۵}	۳۵۲۷×۱۰^{-۲}	۲۲۰۵×۱۰^{-۲}	۱۰۲×۱۰^{-۶}
۱ کیلوگرم	۱۰۰۰	۱	۶۸۵۲×۱۰^{-۲}	۳۵۲۷	۲۲۰۵	۱۰۲×۱۰^{-۲}
۱ اسلاگ	۱۴۵۹×۱۰^۴	۱۴۵۹	۱	۵۱۴۸	۳۲۱۷	۱۶۰۹×۱۰^{-۲}
۱ اونس	۲۸۳۵	۲۸۳۵×۱۰^{-۲}	۱۹۴۳×۱۰^{-۲}	۱	۶۲۵۰×۱۰^{-۲}	۳۱۲۵×۱۰^{-۵}
۱ پوند	۴۵۳۶	۴۵۳۶	۳۱۰۸×۱۰^{-۲}	۱۶	۱	۰۰۰۰۵
۱ تن	۹۰۷۲×۱۰^۵	۹۰۷۲	۶۲۱۶	۳۲×۱۰^۴	۲۰۰۰	۱

در این جدول، کمتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند واحدهای جرم نیستند ولی غالباً به این عنوان به کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱ کیلوگرم = ۲۲۰۵ پوند، معنایش این است که ۱ کیلوگرم جرمی است که در شرایط استاندارد (۸۰۶۶۵ g = ۱ متر بر مجذور ثانیه) وزن آن ۲۲۰۵ پوند است.

نیرو

	دین (dyne)	نیوتن (N)	پوند (lb)	گرم نیرو (gf)	کیلو گرم نیرو (kgf)
۱ دین =	۱	10^{-5}	۲.۲۴۸×10^{-6}	۱.۰۲۰×10^{-3}	۱.۰۲۰×10^{-6}
۱ نیوتن =	10^5	۱	۰.۲۲۴۸	۱۰۲.۰	۰.۰۱۰۲۰
۱ پوند =	۴.۴۴۸×10^5	۴.۴۴۸	۱	۴۵۳.۶	۰.۴۵۳۶
۱ گرم نیرو =	۹۸۰.۶۷	۹.۸۰۶۷×10^{-3}	۲.۲۰۵×10^{-2}	۱	۰.۰۰۱
۱ کیلو گرم نیرو =	۹.۸۰۶۷×10^5	۹۸۰.۶۷	۲۲۰.۵	۱۰۰۰	۱

مقدار سرعت

	فوت بر ثانیه (ft/s)	کیلومتر بر ساعت (km/h)	متر بر ثانیه (m/s)	میل بر ساعت (mi/h)	سانتیمتر بر ثانیه (cm/s)	گره (knot)
۱ فوت در ثانیه	۱	۱۹۰۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸	۰٫۵۹۲۵
۱ کیلومتر در ساعت	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸	۰٫۵۴۰۰
۱ متر در ثانیه	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰	۱٫۹۴۴
۱ میل در ساعت	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰	۰٫۸۶۸۹
۱ سانتیمتر در ثانیه	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۱٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۲}$
۱ گره	۱٫۶۸۸	۱٫۸۵۲	۰٫۵۱۴۴	۱٫۱۵۱	۵۱٫۴۴	۱

۱ گره = ۱ میل دریایی بر ساعت
 ۱ میل بر دقیقه = ۸۸۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰۰۰ میل بر ساعت

انرژی، کار، حرما

کیلو گرم	کیلووات در ساعت	کالری	ژول	اسب بخار در ساعت	فوت - پوند	ارگ	
10^{-14} ۱۱۱۳	10^{-14} ۲۷۷۸	10^{-8} ۳۸۹	10^{-7} ۱۰۳۵۶	10^{-14} ۲۷۷۵	10^{-8} ۳۳۷۶	۱	۱ ارگ
10^{-17} ۱۵۵۹	10^{-17} ۳۷۶۶	۵۳۲۹	۱۳۵۶	10^{-7} ۵۵۵۱	۱	10^7 ۳۵۶	۱ فوت - پوند
10^{-11} ۹۸۸	۵۷۲۵۷	10^5 ۴۱۴	10^6 ۴۸۵	۱	10^4 ۹۸۵	10^{13} ۶۸۵	۱ اسب بخار در ساعت
10^{-17} ۱۱۳	10^{-17} ۷۷۸	۵۲۳۸۹	۱	10^{-7} ۲۷۲۵	۵۷۳۷۶	10^7 ۱۰۷	۱ ژول
10^{-17} ۴۶۵۹	10^{-17} ۱۶۳	۱	۱۸۶	10^{-6} ۱۵۵۹	۳۵۸۷	10^7 ۴۱۸۶	۱ کالری
10^{-11} ۲۵۵۷	۱	10^5 ۶۵۱	10^6 ۳۶	۱۳۲۱	10^5 ۶۵۵	10^{13} ۳۶	۱ کیلو وات در ساعت
۱	10^{10} ۲۳۹۷	10^{14} ۱۲۷	10^{14} ۸۹۸۷	10^{10} ۳۳۸	10^{14} ۶۶۲۹	10^{23} ۸۹۸۷	۱ کیلو گرم

فشار

	دین بر سانتیمتر مربع	پاسکال	پوند بر اینچ مربع	پوند بر فوت مربع
$1 =$ دین بر سانتیمتر مربع	۱	۰.۰۱	1.488×10^{-5}	1.488×10^{-2}
$1 =$ پاسکال	۱۰	۱	1.488×10^{-4}	1.488×10^{-2}
$1 =$ پوند بر اینچ مربع	6.894757×10^4	6.894757×10^3	۱	۱۴۴
$1 =$ پوند بر فوت مربع	۴۷۸۸	۴۷۸۸	6.944×10^{-2}	۱

جدولی از مشتقها

$$D_x(u+v) = D_x u + D_x v \quad .۲$$

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2} \quad .۴$$

$$D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u \quad .۶$$

$$D_x(\sin u) = \cos u D_x u \quad .۸$$

$$D_x(\tan u) = \sec^2 u D_x u \quad .۱۰$$

$$D_x(\sec u) = \sec u \tan u D_x u \quad .۱۲$$

$$D_x(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \quad .۱۴$$

$$D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u \quad .۱۶$$

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2-1}} D_x u \quad .۱۸$$

$$D_x(\sinh u) = \cosh u D_x u \quad .۲۰$$

$$D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u D_x u \quad .۲۲$$

$$D_x(u^n) = n u^{n-1} D_x u \quad .۱$$

$$D_x(uv) = u D_x v + v D_x u \quad .۳$$

$$D_x(e^u) = e^u D_x u \quad .۵$$

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u \quad .۷$$

$$D_x(\cos u) = -\sin u D_x u \quad .۹$$

$$D_x(\cot u) = -\operatorname{csc}^2 u D_x u \quad .۱۱$$

$$D_x(\csc u) = -\csc u \cot u D_x u \quad .۱۳$$

$$D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u \quad .۱۵$$

$$D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u \quad .۱۷$$

$$D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u| \sqrt{u^2-1}} D_x u \quad .۱۹$$

$$D_x(\cosh u) = \sinh u D_x u \quad .۲۱$$

$$D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u D_x u \quad .۲۳$$

$$D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u \quad .۲۴$$

$$D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u D_x u \quad .۲۵$$

جدولی از انتگرالها

چند صورت مقدماتی

$$\int du = u + C \quad ۱. \quad \int a du = au + C \quad ۲.$$

$$\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du \quad ۳.$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad ۵. \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad ۴.$$

صور گویای شامل $a+bu$

$$\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} [a+bu - a \ln|a+bu|] + C \quad ۶.$$

$$\int \frac{u^2 du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{1}{2} (a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2 \ln|a+bu| \right] + C \quad ۷.$$

$$\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu| \right] + C \quad ۸.$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu| \right] + C \quad ۹.$$

$$\int \frac{u du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{2(a+bu)^2} - \frac{1}{a+bu} \right] + C \quad ۱۰.$$

$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C \quad ۱۱.$$

$$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bu}{u} \right| + C \quad ۱۲.$$

$$\int \frac{du}{u^3(a+bu)} = \frac{1}{a(a+bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C \quad ۱۳.$$

صور شامل $\sqrt{a+bu}$

$$\int u \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15 b^2} (3bu - 2a) (a+bu)^{3/2} + C \quad ۱۴.$$

$$\int u^r \sqrt{a+bu} du = \frac{r}{10\delta b^r} (\delta b^r u^r - r abu + \lambda a^r) (a+bu)^{r/2} + C \quad .15$$

$$\int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{r u^n (a+bu)^{r/2}}{b(rn+r)} - \frac{ran}{b(rn+r)} \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du \quad .16$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r}{rb^r} (bu - ra) \sqrt{a+bu} + C \quad .17$$

$$\int \frac{u^r du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r}{\delta b^r} (rb^r u^r - rabu + \lambda a^r) \sqrt{a+bu} + C \quad .18$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r u^n \sqrt{a+bu}}{b(rn+1)} - \frac{ran}{b(rn+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}} \quad .19$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C & a > 0 \\ \frac{r}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C & a < 0 \end{cases} \quad .20$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(rn-r)}{ra(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}} \quad .21$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = r \sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u \sqrt{a+bu}} \quad .22$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{r/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(rn-\delta)}{ra(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^{n-1}} \quad .23$$

صور شامل $a^r \pm u^r$

$$\int \frac{du}{a^r + u^r} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad .24$$

$$\int \frac{du}{a^r - u^r} = \frac{1}{ra} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases} \quad .25$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases} \quad .۲۶$$

صور شامل $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

درفرمولهای ۲۷ تا ۳۸ ما می‌توانیم تبدیلات زیر را انجام دهیم

$$\cosh^{-1} \frac{u}{a} \quad \text{به} \quad \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| \quad \sinh^{-1} \frac{u}{a} \quad \text{به} \quad \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$\sinh^{-1} \frac{a}{u} \quad \text{به} \quad \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right|$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۷$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۸$$

$$\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^2}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۹$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C \quad .۳۰$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad .۳۱$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۳۲$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۳۳$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C \quad .۳۴$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad .۳۵$$

$$\int \frac{du}{u^r \sqrt{u^r \pm a^r}} = -\frac{\sqrt{u^r \pm a^r}}{\pm a^r u} + C. ۳۶$$

$$\int (u^r \pm a^r)^{r/r} du = \frac{u}{\lambda} (ru^r \pm \delta a^r) \sqrt{u^r \pm a^r} + \frac{ra^r}{\lambda} \ln |u + \sqrt{u^r \pm a^r}| + C. ۳۷$$

$$\int \frac{du}{(u^r \pm a^r)^{r/r}} = \frac{u}{\pm a^r \sqrt{u^r \pm a^r}} + C. ۳۸$$

صور شامل $\sqrt{a^r - u^r}$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^r - u^r}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۳۹$$

$$\int \sqrt{a^r - u^r} du = \frac{u}{r} \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۰$$

$$\int u^r \sqrt{a^r - u^r} du = \frac{u}{\lambda} (ru^r - a^r) \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{\lambda} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۱$$

$$\int \frac{\sqrt{a^r - u^r} du}{u} = \sqrt{a^r - u^r} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^r - u^r}}{u} \right| + C. ۴۲$$

$$= \sqrt{a^r - u^r} - a \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^r - u^r} du}{u^r} = -\frac{\sqrt{a^r - u^r}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۳$$

$$\int \frac{u^r du}{\sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{u}{r} \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۴$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^r - u^r}}{u} \right| + C = -\frac{1}{a} \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C. ۴۵$$

$$\int \frac{du}{u^r \sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{\sqrt{a^r - u^r}}{a^r u} + C. ۴۶$$

$$\int (a^2 - u^2)^{r/2} du = -\frac{u}{\lambda} (2u^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^2}{\lambda} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۷$$

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{r/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C. ۴۸$$

صور شامل $2au - u^2$

$$\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۴۹$$

$$\int u \sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2 - au - 2a^2}{5} \sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۰$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2} du}{u} = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۱$$

$$\int \frac{\sqrt{2au - u^2} du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۲$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۳$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۴$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u+2a)}{2} \sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C. ۵۵$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C. ۵۶$$

$$\int \frac{du}{(2au - u^2)^{r/2}} = \frac{u-a}{a^2 \sqrt{2au - u^2}} + C. ۵۷$$

$$\int \frac{u du}{(2au - u^2)^{r/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au - u^2}} + C. ۵۸$$

صور شامل توابع مثلثاتی

$$\int \cos u \, du = \sin u + C \quad .۶۰ \qquad \int \sin u \, du = -\cos u + C \quad .۵۹$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C \quad .۶۲ \qquad \int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C \quad .۶۱$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}u\right)\right| + C \quad .۶۳$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C = \ln|\tan \frac{1}{4}u| + C \quad .۶۴$$

$$\int \csc^x u \, du = -\cot u + C \quad .۶۶ \qquad \int \sec^x u \, du = \tan u + C \quad .۶۵$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad .۶۷$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \quad .۶۸$$

$$\int \sin^x u \, du = \frac{1}{x}u - \frac{1}{x}\sin^2 u + C \quad .۶۹$$

$$\int \cos^x u \, du = \frac{1}{x}u + \frac{1}{x}\sin^2 u + C \quad .۷۰$$

$$\int \tan^x u \, du = \tan u - u + C \quad .۷۱$$

$$\int \cot^x u \, du = -\cot u - u + C \quad .۷۲$$

$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}u \, du \quad .۷۳$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1}u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}u \, du \quad .۷۴$$

$$\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}u - \int \tan^{n-2}u \, du \quad .۷۵$$

$$\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}u - \int \cot^{n-2}u \, du \quad .۷۶$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-1} u \tan u + \frac{n-1}{n-1} \int \sec^{n-1} u \, du \quad .٧٧$$

$$\int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-1} u \cot u + \frac{n-1}{n-1} \int \csc^{n-1} u \, du \quad .٧٨$$

$$\int \sin mu \sin nu \, du = -\frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .٧٩$$

$$\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .٨٠$$

$$\int \sin mu \cos nu \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .٨١$$

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C \quad .٨٢$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C \quad .٨٣$$

$$\int u^x \sin u \, du = x u \sin u + (1 - u^x) \cos u + C \quad .٨٤$$

$$\int u^x \cos u \, du = x u \cos u + (u^x - 1) \sin u + C \quad .٨٥$$

$$\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du \quad .٨٦$$

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du \quad .٨٧$$

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du \quad .٨٨$$

$$= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u \, du$$

صور شامل توابع مثلثاتی معکوس

$$\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C \quad .٨٩$$

$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C \quad .٩٠$$

$$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \ln \sqrt{1+u^2} + C \quad .٩١$$

$$\int \cot^{-1} u \, du = u \cot^{-1} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C \quad ۹۲$$

$$\begin{aligned} \int \sec^{-1} u \, du &= u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C \quad ۹۳ \\ &= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \csc^{-1} u \, du &= u \csc^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C \quad ۹۴ \\ &= u \csc^{-1} u + \cosh^{-1} u + C \end{aligned}$$

صور شامل توابع نمایی و لگاریتمی

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad ۹۶ \qquad \int e^u \, du = e^u + C \quad ۹۵$$

$$\int u e^u \, du = e^u (u - 1) + C \quad ۹۷$$

$$\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du \quad ۹۸$$

$$\int u^n a^u \, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C \quad ۹۹$$

$$\int \frac{e^u}{u^n} \, du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} \, du \quad ۱۰۰$$

$$\int \frac{a^u}{u^n} \, du = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u}{u^{n-1}} \, du \quad ۱۰۱$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C \quad ۱۰۲$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C \quad ۱۰۳$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C \quad ۱۰۴$$

$$\int e^{au} \sin nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \sin nu - n \cos nu) + C \quad ۱۰۵$$

$$\int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \sin nu) + C. ۱۰۶$$

صور شامل توابع هیپر بولیک

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C. ۱۰۸ \quad \int \sinh u \, du = \cosh u + C. ۱۰۷$$

$$\int \tanh u \, du = \ln |\cosh u| + C. ۱۰۹$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C. ۱۱۰$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1}(\sinh u) + C. ۱۱۱$$

$$\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \left| \tanh \frac{1}{2} u \right| + C. ۱۱۲$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C. ۱۱۳$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C. ۱۱۴$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C. ۱۱۵$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C. ۱۱۶$$

$$\int \sinh^2 u \, du = \frac{1}{2} \sinh 2u - \frac{1}{2} u + C. ۱۱۷$$

$$\int \cosh^2 u \, du = \frac{1}{2} \sinh 2u + \frac{1}{2} u + C. ۱۱۸$$

$$\int \tanh^2 u \, du = u - \tanh u + C. ۱۱۹$$

$$\int \coth^2 u \, du = u - \coth u + C. ۱۲۰$$

$$\int u \sinh u \, du = u \cosh u - \sinh u + C. ۱۲۱$$

$$\int u \cosh u \, du = u \sinh u - \cosh u + C \quad .۱۲۲$$

$$\int e^{au} \sinh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \sinh nu - n \cosh nu) + C \quad .۱۲۳$$

$$\int e^{au} \cosh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \sinh nu) + C \quad .۱۲۴$$

پاسخ تمرینهای با شماره فرد

تمرینهای ۲۰۱۰

$$x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C \quad .۳ \qquad \frac{1}{3} x e^{x^3} - \frac{1}{9} e^{x^3} + C \quad .۱$$

$$x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C \quad .۷ \qquad x \ln x - x + C \quad .۵$$

$$\frac{e^x}{x+1} + C \quad .۱۱ \qquad \frac{1}{y} \tan^{-1} x (x^2 + 1) - \frac{1}{y} x + C \quad .۹$$

$$-\cos x \ln (\cos x) + \cos x + C \quad .۱۳$$

$$\frac{1}{y} e^x (\cos x + \sin x) + C \quad .۱۵$$

$$-x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} + C \quad .۱۷$$

$$x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2 \cosh x + C \quad .۱۹$$

$$\frac{1}{y} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{\lambda} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C \quad .۲۱$$

$$2\sqrt{z} \cot^{-1} \sqrt{z} + \ln(1+z) + C \quad .۲۳$$

$$\frac{36}{\ln 3} - \frac{36}{(\ln 3)^2} + \frac{16}{(\ln 3)^2} \quad .۲۵$$

$$\frac{9}{16} \quad .۲۷$$

$$\frac{2}{25}(e^{3\pi/4}+1) \cdot ۳۱$$

$$\frac{1}{4}(2e^4+1) \cdot ۲۹$$

$$(e^2+1) \text{ واحد مربع} \cdot ۲۵$$

$$\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \cdot ۲۳$$

$$(8-22e^{-2}) \cdot ۳۹ \text{ واحد مربع}$$

$$\frac{\pi}{4}(2e^4+1) \text{ واحد مکعب} \cdot ۲۷$$

$$۴۳ \cdot ۶۳۲۰ \text{ دلار}$$

$$\frac{1}{4}(1-9e^{-8})w\pi \text{ ft-lb} \cdot ۴۱$$

$$\frac{1}{5}\sec^4 x \tan x + \frac{2}{15}\sec^2 x \tan x + \frac{8}{15}\tan x + C \text{ (ب)} \cdot ۴۵$$

$$\frac{1}{5}x^5(\ln x)^2 - \frac{2}{25}x^5 \ln x + \frac{2}{125}x^5 + C \text{ (ب)} \cdot ۴۷$$

تمرینهای ۳.۱۰

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right| + C \cdot ۳$$

$$-\frac{(4-x^2)^{1/2}}{4x} + C \cdot ۱$$

$$\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C \cdot ۷ \quad \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + C \cdot ۵$$

$$-\frac{1}{9}x(4x^2-9)^{-1/2} + C \cdot ۱۱ \quad \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{1}{4}x - \frac{x}{2(x^2+4)} + C \cdot ۹$$

$$\frac{1}{5}\ln(\sqrt{t^2+25}-5) - \frac{2}{5}\ln t + C \cdot ۱۳$$

$$\ln|x+2+\sqrt{4x+x^2}| + C \cdot ۱۵$$

$$\frac{\tan x}{4\sqrt{4-\tan^2 x}} + C \cdot ۱۹$$

$$\frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C \cdot ۱۷$$

$$-\frac{e^t+2}{9\sqrt{e^{2t}+8e^t+7}} + C \cdot ۲۳ \quad \frac{1}{3}\sqrt{\ln^2 w - 2(\ln w + \ln^2 w)} + C \cdot ۲۱$$

$$\frac{1}{27}(6-2\sqrt{3}) \cdot 27$$

$$\frac{128}{3}-24\sqrt{3} \cdot 25$$

$$\frac{625}{16}\pi \cdot 31$$

$$\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\pi \cdot 29$$

$$-\frac{5}{2}\sqrt{3-2x^2}+C \text{ (ب)} \quad \sec^{-1}\left|\frac{2}{3}x\right|+C \text{ (الف)} \cdot 23$$

$$\ln\frac{1}{3}(2\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}-1)+\sqrt{10}-\sqrt{2} \cdot 25$$

$$11201300 \text{ دلار} \cdot 39$$

$$\frac{81}{16}\pi^2 \text{ واحد مکعب} \cdot 37$$

تمرینهای ۴۰۱۰

$$\ln|C(x-2)^2(x+2)^2| \cdot 3$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C \cdot 1$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{Cx^2(2x+1)^2}{2x-1}\right| \cdot 7$$

$$\ln\left|\frac{C(w+2)^2}{2w-1}\right| \cdot 5$$

$$2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+C \cdot 11$$

$$\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+3}{x}\right|-\frac{1}{3x}+C \cdot 9$$

$$\frac{3}{x+1}+\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C \cdot 13$$

$$\frac{5}{16(z+2)}-\frac{7}{16(z-2)}+\frac{1}{32}\ln\left|\frac{z+2}{z-2}\right|+C \cdot 15$$

$$\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{x-1}-\ln|x^2+2x-3|+C \cdot 17$$

$$-\ln(3x+2)^{2/3}(x-1)^2-\frac{1}{2(3x+2)}-\frac{3}{x-1}+C \cdot 19$$

$$\ln\frac{27}{2}-2 \cdot 23$$

$$2\ln\frac{4}{3}-\frac{2}{2} \cdot 21$$

$$\ln\frac{5}{2}-\frac{5}{3} \cdot 27$$

$$13\ln 2-2\ln 5 \cdot 25$$

$$۲\pi(۲+۶\ln ۳-۲\ln ۲) \cdot ۳۱$$

$$\ln ۲۵ \text{ واحد مربع} \cdot ۲۹$$

$$۷۲۲ \text{ پوند} \cdot ۳۵$$

$$\frac{۳۱}{۱۹} \cdot ۳۳$$

تمرینهای ۵۰۱۰

$$\frac{1}{8} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| - \frac{1}{4} \tan^{-1} 2x + C \cdot ۳$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{Cx^2}{2x^2+1} \right| \cdot ۱$$

$$\frac{1}{10} \ln |(t^2+1)(2t+1)^2| + \frac{2}{5} \tan^{-1} t + C \cdot ۵$$

$$\ln|x-1| + \tan^{-1} x + C \cdot ۷$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{Cx^2}{x^2+x+1} \right) - \frac{1}{\sqrt{r}} \tan^{-1} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{r}} \right) \cdot ۹$$

$$\ln \left(\frac{Cx^2}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2(x^2+1)} \cdot ۱۱$$

$$\frac{5}{2} \ln(z^2-2z+5) - \frac{55}{16} \tan^{-1} \left(\frac{z-1}{2} \right) + \frac{-47z+15}{8(z^2-2z+5)} + C \cdot ۱۳$$

$$\frac{5}{162} \ln|9x^2+3x+1| - \frac{2}{81} \ln|3x-1| + \frac{5}{9\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{6x+1}{\sqrt{3}} \right) + C \cdot ۱۵$$

$$\frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2}{3} x + \frac{x}{2x^2+9} + C \cdot ۱۷$$

$$\ln|1+\tan x| + \frac{2}{\sqrt{r}} \tan^{-1} \left(\frac{2 \tan x - 1}{\sqrt{r}} \right) + C \cdot ۱۹$$

$$\ln \frac{12}{5} + \frac{3}{2} \ln \frac{20}{13} \cdot ۲۳$$

$$6 \ln 2 \cdot ۲۱$$

$$\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{5}{8} \pi \cdot ۲۷$$

$$\frac{1}{4} \pi \cdot ۲۵$$

$$\frac{1}{6} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}}{18} \pi \cdot ۳۱$$

$$\frac{3}{8} \ln \frac{125}{21} \cdot ۲۹$$

$$\frac{3}{\Delta^5} \ln \frac{(t_1 + 2)^2}{2(t_1^2 + 1)} - \frac{V}{\Delta(t_1 + 2)} - \frac{2}{2\Delta} \tan^{-1} t_1 + \frac{V}{10} \quad .۳۳$$

تمرینهای ۶۰۱۰

$$\sinh^{-1} \frac{1}{2} x + C = \ln \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 4}) + C \quad .۱$$

$$\frac{1}{2} \cosh^{-1} x^2 + C = \frac{1}{2} \ln (x^2 + \sqrt{x^2 - 1}) + C \quad .۳$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{12} \tanh^{-1} \left(\frac{3}{2} x \right) + C & |x| < \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} \coth^{-1} \left(\frac{3}{2} x \right) + C & |x| > \frac{2}{3} \end{array} \right\} = \frac{1}{24} \ln \left| \frac{2-3x}{2+3x} \right| + C \quad .۵$$

$$\sinh^{-1} \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + C = \ln (\sin x + \sqrt{4 - \cos^2 x}) - C \quad .۷$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cosh^{-1} (\sqrt{\Delta} e^t) + C = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln (\sqrt{\Delta} e^t + \sqrt{\Delta e^{2t} - 1}) + C \quad .۹$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{6}} \tanh^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{6}} \right) + C & |x+2| < \sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \coth^{-1} \left(\frac{x+2}{\sqrt{6}} \right) + C & |x+2| > \sqrt{6} \end{array} \right\} \quad .۱۱$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2 + x}{\sqrt{6} - 2 - x} \right| + C$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\tanh^{-1}(x+5) + C & |x+5| < 1 \\ -\coth^{-1}(x+5) + C & |x+5| > 1 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+6}{x+4} \right| + C \quad .۱۳$$

$$\frac{3}{2} \sinh^{-1} \left(\frac{2 \ln w}{3} \right) + C = \frac{3}{2} \ln (2 \ln w + \sqrt{4 \ln^2 w + 9}) + C \quad .۱۵$$

$$\frac{1}{3} \ln \frac{V + \sqrt{V^2}}{V + \sqrt{V}} \quad .۲۱$$

$$\ln 3 \quad .۱۹$$

$$\ln \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{3 + \sqrt{5}} \right) \quad .۱۷$$

تمرینهای ۷۰۱۰

$$\frac{6}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{15}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad .۱$$

$$\frac{\sqrt{15}}{5} \ln \left| \frac{\sqrt{15} + \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{15} - \tan \frac{1}{2} x} \right| + C \quad .۳$$

$$\frac{1}{2} \ln |\tan \frac{1}{2} x| - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{1}{2} x + C \quad .۵$$

$$\frac{1}{5} \ln \left| \frac{3 \tan \frac{1}{2} x - 1}{\tan \frac{1}{2} x + 3} \right| + C \quad .۹ \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 \tan \frac{1}{2} x - 1}{3 \tan \frac{1}{2} x - 1} \right| + C \quad .۷$$

$$\sqrt{r} \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{r}}{\tan x - \sqrt{r}} \right| + C \quad .۱۱$$

$$\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{r}}{6} \ln \left| \frac{\sqrt{r} - \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{r} + \tan \frac{1}{2} x} \right| + C \quad .۱۳$$

$$2 \tan^{-1} \left(2 + \tan \frac{1}{2} x \right) + C \quad .۱۷ \quad -\frac{1}{2} \ln |13 - \tan^2 x| + C \quad .۱۵$$

$$2\sqrt{3} \ln(1 + \sqrt{3}) \quad .۲۱ \quad \frac{1}{2} \ln 3 \quad .۱۹$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{r} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{r} \right) \quad .۲۳$$

تمرینهای ۸۰۱۰

$$\frac{2}{3} x^{3/2} - 3x + 18\sqrt{x} - 54 \ln(3 + \sqrt{x}) + C \quad .۱$$

$$\ln \left| \frac{\sqrt{1+2x-1}}{\sqrt{1+2x+1}} \right| + C \quad .۳$$

$$-2\sqrt{1+x} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2}} \right| + C \quad .۵$$

$$\frac{2}{3}(x-2)^{3/2} - 2(x-2)^{1/2} + 3 \ln |1+(x-2)^{1/2}| + C \quad .۷$$

$$2\sqrt{2x} + 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{2} \ln \left| \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{x+2}(\sqrt{x}-2)}{x-2} \right| + C \quad .۹$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{1+2x^2}(2x^2+7) + C \quad .۱۱$$

$$2 \tan^{-1} \sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + C \quad .۱۳$$

$$\begin{cases} \ln \left| \frac{Cx}{x+2+2\sqrt{1+x+x^2}} \right| & x > 0 \\ -\ln \left| \frac{Cx}{x+2-2\sqrt{1+x+x^2}} \right| & x < 0 \end{cases} \quad .۱۵$$

$$\begin{cases} -\sin^{-1} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{12x}} \right) + C & x > 0 \\ \sin^{-1} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{12x}} \right) + C & x < 0 \end{cases} \quad .۱۷$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{5x^2+8x-1}}{x} - 2 \sin^{-1} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{21x}} \right) + C & x > 0 \\ \frac{\sqrt{5x^2+8x-1}}{x} + 2 \sin^{-1} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{21x}} \right) + C & x < 0 \end{cases} \quad .۱۹$$

$$\ln \frac{11}{10} \quad .۲۳$$

$$2 - 2 \ln 3 \quad .۲۱$$

$$\frac{3}{2}\pi - \frac{152}{35} \cdot 27$$

$$\frac{1}{9}(52 - 2\sqrt[3]{3}) \cdot 25$$

$$2\ln|\sqrt{x-1}| + C \cdot 29$$

تمرینهای مروری فصل ۱۰

$$-2\sqrt{2-e^x} + C \cdot 3 \quad \frac{1}{8}x - \frac{1}{128}\sin 16x + C \cdot 1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{9}\sin \frac{2}{3}x + C \cdot 7 \quad (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C \cdot 5$$

$$\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C \cdot 9$$

$$3\ln\left|\frac{x^{1/3}}{1+x^{1/3}}\right| + C \cdot 13 \quad \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C \cdot 11$$

$$\frac{1}{3}\tan 3x - \frac{1}{3}\cot 3x + \frac{2}{3}\ln|\tan 3x| + C \cdot 15$$

$$2t + \ln \frac{t^2}{(t+2)^{10}} - \frac{15}{t+2} + C \cdot 17$$

$$x - \tan^{-1}x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \cdot 19$$

$$\frac{1}{16}x - \frac{1}{192}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^2 6x + C \cdot 21$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{r+2}{\sqrt{r}}\right) + C \cdot 23$$

$$\frac{1}{2}x^2 \sin x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2 + C \cdot 25$$

$$\frac{2}{17}e^{t/2}(2\sin 2t + \cos 2t) + C \cdot 27$$

$$\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right) + C \cdot 29$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \left(-\cos nx + \frac{2}{3} \cos^3 nx - \frac{1}{5} \cos^5 nx \right) + C & \text{اگر } n \neq 0 \\ C & \text{اگر } n = 0 \end{cases} \quad .۳۹$$

$$-\frac{1}{4} \csc^3 x \cot x - \frac{3}{8} \csc x \cot x + \frac{3}{8} \ln |\csc x - \cot x| + C \quad .۳۳$$

$$2 \ln |y-2| - \lambda (y-2)^{-1} - \frac{9}{y} (y-2)^{-2} + C \quad .۳۵$$

$$-\tan^{-1}(\cos x) + C \quad .۳۷$$

$$2 \sin^{-1} \left(\frac{t-2}{3} \right) + \frac{1}{3} (t-2)(2t-t^2)^{1/2} + C \quad .۳۹$$

$$\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3}{2} e^x \right) + C \quad .۴۳ \qquad \frac{1}{3} \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| + C \quad .۴۱$$

$$-\frac{1}{15} \cot^5 3x - \frac{1}{9} \cot^3 3x + C \quad .۴۵$$

$$\frac{1}{3} x^2 \sin^{-1} x + \frac{1}{9} (x^2+2) \sqrt{1-x^2} + C \quad .۴۷$$

$$\frac{2}{3} \sec^{-1} |2 \sin 3t| + C \quad .۵۱ \qquad \tan^{-1}(\cos x) + C \quad .۴۹$$

$$-\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2a^2 x^2} + C \quad .۵۳$$

$$\sqrt{2t} - \sqrt{1-2t} \sin^{-1} \sqrt{2t} + C \quad .۵۵$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{2+\sqrt{x-1}} (\sqrt{x-1}-2) + C \quad .۵۷$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\tan x - \sqrt{2 \tan x + 1}}{\tan x + \sqrt{2 \tan x + 1}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} (\sqrt{2 \tan x - 1}) \quad .۵۹$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1} (\sqrt{2 \tan x + 1}) + C$$

$$\begin{cases} \frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C & n \neq -1 \\ \frac{1}{x} \ln^2 x + C & n = -1 \end{cases} \quad .۶۱$$

$$\frac{1}{x} + 2 \ln \frac{x}{5} \quad .۶۵ \quad ۲.۶۳$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \pi \quad .۶۹ \quad \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \sqrt{2} \quad .۶۷$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \ln 2 \quad .۷۳ \quad \frac{2}{3} \quad .۷۱$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{9}{2} - \frac{1}{6} \pi \quad .۷۷ \quad a^2 \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{9}{8} \sqrt{3} \right) \quad .۷۵$$

$$\frac{1}{6} + \ln \frac{3}{2} \quad .۸۱ \quad ۵.۷۹$$

$$1 - \frac{1}{2} \ln 3 \quad .۸۵ \quad \frac{2}{3} \quad .۸۳$$

$$\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \quad .۸۹ \quad \frac{1}{24} \pi \quad .۸۷$$

$$\frac{256}{15} \quad .۹۳ \quad \frac{1}{5} \ln \frac{3}{2} \quad .۹۱$$

$$9\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + \frac{3}{2} \ln(2\sqrt{10} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 6) \quad .۹۲$$

$$\frac{1}{8} \pi \quad .۹۹ \quad \text{واحد مربع}$$

$$\pi \left(e^x \ln 2 + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{8} \right) \quad .۱۰۱ \quad \text{واحد مکعب}$$

$$.۱۰۳ \quad (\text{الف}) \quad x = 300 \left(\frac{18^t - 17^t}{3 \times 18^t - 2 \times 17^t} \right) \quad (\text{ب}) \quad 3594 \quad \text{پوند}$$

تمرینهای ۱۰۱۱

۱. ۲۵۰ پوند ۳. ۴۰۰۰ دین

۵. $\frac{3}{2}$ متر برمجدور ثانیه ۷. $\frac{8}{3}$ اسلاگ

۹. ۴ ۱۱. ۶

۱۳. ۵۴ کیلوگرم؛ به فاصله $\frac{11}{3}$ متر از يك انتها

۱۵. ۱۷۱ اسلاگ؛ به فاصله ۵۹۲ اینچ از يك انتها

۱۷. ۴۲ گرم؛ به فاصله $\frac{44}{7}$ سانتیمتر از يك انتها

۱۹. ۳۱۵۰ کیلوگرم؛ به فاصله $\frac{18}{7}$ متر از انتهایی که چگالی بیشتری دارد.

۲۱. ۱۶ اسلاگ؛ به فاصله $\frac{16}{5}$ فوت از يك انتها

۲۳. به فاصله ۱۲ متر از انتهایی که چگالی بیشتری دارد.

۲۵. به فاصله $\frac{392}{60 + 27 \ln 3}$ از انتهای چپ

۲۷. $2(1 - e^{-6})$ کیلوگرم؛ به فاصله $\frac{e^6 - 7}{e^6 - 1}$ از يك انتها

۲۹. $8 \ln 2$ گرم؛ به فاصله $(\frac{15}{4 \ln 2} - 1)$ سانتیمتر از يك انتها

۳۱. $x^2 \frac{20}{L^2}$ اسلاگ بر فوت

تمرینهای ۲۰۱۱

۱. $(2, \frac{1}{3})$ ۳. $\frac{29}{7}$

۵. $(\frac{2}{3}, 1)$ ۷. $(0, \frac{8}{5})$

$$\begin{array}{ll}
 \left(0, \frac{12}{5}\right) \cdot ۹ & \left(\frac{16}{15}, \frac{64}{21}\right) \cdot ۱۱ \\
 \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot ۱۳ & \left(\frac{2e^3+1}{e^3-1}, \frac{e^3+1}{4}\right) \cdot ۱۵ \\
 \left(\frac{20-15\cos^{-1}\frac{3}{5}}{5\ln 3-2}, \frac{26}{225(5\ln 2-4)}\right) \cdot ۱۷ & \\
 \frac{5}{3}p \cdot ۲۱ & \left(\frac{8\ln 3-8}{2-\ln 3}, \frac{2}{9(2-\ln 3)}\right) \cdot ۱۹ \\
 (2, 0) \cdot ۲۳ & \frac{4}{3}k \ln 2 \cdot ۲۵
 \end{array}$$

۲۷. نقطه واقع بر قطر نیمدایره که فاصله اش از مرکز دایره، $\frac{4}{3\pi}$ برابر شعاع است.

$$\frac{1}{2} r^2 \left(\pi + \frac{4}{3}\right) \cdot ۳۱ \qquad \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ واحد مکعب} \cdot ۳۹$$

تمرینهای ۳۰۱۱

$$\begin{array}{ll}
 \left(0, \frac{8}{5}, 0\right) \cdot ۱ & \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \cdot ۳ \\
 \left(\frac{16}{5}, 0, 0\right) \cdot ۵ & \left(2, \frac{10}{7}, 0\right) \cdot ۷ \\
 \left(0, \frac{7}{3}, 0\right) \cdot ۹ & \left(0, \frac{13}{5}, 0\right) \cdot ۱۱ \\
 \left(\frac{5}{16}, 4, 0\right) \cdot ۱۳ & \left(p, \frac{5}{8}p, 0\right) \cdot ۱۵ \\
 \left(\frac{\pi^2+4}{4\pi}, 0, 0\right) \cdot ۱۷ & \left(\frac{e^2-3}{2e^2-2}, 0, 0\right) \cdot ۱۹
 \end{array}$$

۲۱. روی محور و به فاصله $\frac{3}{4}h$ واحد از رأس

$$۲۰۲۳ \quad (\frac{۴}{۵}, ۰, ۰) . ۲۵$$

$$۲۰۲۷ \quad (\frac{۸}{۹}, ۰, ۰)$$

تمرینهای ۴۰۱۱

$$۱. \quad ۳۲۰\rho \quad ۳. \quad ۶۴\rho$$

$$۵. \quad ۲۰۲۵\rho \quad ۷. \quad ۹۴۱۷۶۰ \text{ نیوتن}$$

$$۹. \quad ۴۰۸۷۵۰۰ \text{ نیوتن} \quad ۱۱. \quad (۴ - \frac{1}{۴}\pi) \rho \quad \text{پوند}$$

$$۱۳. \quad (\frac{۸}{۳}\pi + ۳\sqrt{۳}) \rho \quad \text{پوند} \quad ۱۵. \quad \sqrt[۳]{۱۶۳۱} \approx ۲۵۴ \text{ متر}$$

$$۱۷. \quad ۱۱۰۲۵۰\sqrt{۳}\rho \quad \text{پوند} \quad ۱۹. \quad ۲۵۰\sqrt{۴۰۹}\rho \quad \text{پوند}$$

$$۲۳. \quad \frac{1}{۹}\sqrt{۳}\rho \quad \text{پوند} \quad ۲۵. \quad ۱۰۰۰۰۰\rho \text{ فوت-پوند}$$

تمرینهای مروری فصل ۱۱

$$۱. \quad \frac{۲}{۱۳} \quad ۳. \quad (\frac{۳}{۲}, ۲)$$

$$۵. \quad \frac{۱۰۴}{۳} \text{ اسلاک؛ } \frac{۲۹۸}{۶۵} \text{ اینچ از انتهای چپ}$$

$$۷. \quad \frac{1}{۳}k(1 - e^{-۹}) \text{ کیلوگرم؛ } \frac{e^۹ - ۱۰}{۳(e^۹ - ۱)} \text{ متر از يك انتها}$$

$$۹. \quad (\frac{۹}{۸}, \frac{۱۸}{۵}) \quad ۱۱. \quad (\frac{۸e^۳ + ۴}{۹e^۲ + ۹}, \frac{۱۰e^۳ - ۴}{۲۷e^۲ + ۲۷})$$

$$۱۳. \quad (\frac{1}{۲}\pi - ۱, \frac{1}{۲}) \quad ۱۵. \quad (۰, \frac{۳۲}{۱۵\pi})$$

$$۱۷. \quad (۰, \frac{۸}{۵}) \quad ۱۹. \quad \frac{۲۵۶}{۳}\pi \text{ مترمکعب}$$

$$(0, 2, 0) \cdot 23$$

$$\left(0, \frac{e^2 + 1}{8}, 0\right) \cdot 21$$

$$\frac{18}{5} \rho \text{ بوند} \cdot 27$$

$$\left(\frac{\pi^2 - 2}{4\pi}, 0, 0\right) \cdot 25$$

$$3\rho \text{ بوند} \cdot 31$$

$$756 \text{ بوند} \cdot 29$$

تمرینهای ۱۰۱۲

$$1. (الف) \left(-2, \frac{5}{4}\pi\right) : (ب) \left(2, -\frac{7}{4}\pi\right) : (پ) \left(-2, -\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$3. (الف) \left(-2, \frac{3}{4}\pi\right) : (ب) \left(2, -\frac{3}{4}\pi\right) : (پ) \left(-2, -\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$5. (الف) \left(-\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right) : (ب) \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi\right) : (پ) \left(-\sqrt{2}, -\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$7. (الف) \left(-2, \frac{3}{4}\pi\right) : (ب) \left(-2, -\frac{5}{4}\pi\right) : (پ) \left(2, \frac{15}{4}\pi\right)$$

$$9. \left(3, \frac{4}{3}\pi\right) : \left(-3, \frac{1}{3}\pi\right) \cdot 11 \quad \left(2, -\frac{1}{6}\pi\right) : \left(-2, -\frac{7}{6}\pi\right)$$

$$13. \left(2, \frac{7}{4}\pi\right) : \left(-2, \frac{3}{4}\pi\right) \cdot 15 \quad (6 - \pi, -2) : (2, 2\pi + 6)$$

$$17. (الف) (-3, 0) : (ب) (-1, -1) : (پ) (2, -2\sqrt{3}) : (ت) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$19. (الف) \left(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right) : (ب) \left(2, \frac{5}{6}\pi\right) : (پ) \left(2\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi\right) : (ت) (5, \pi)$$

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \cdot 23$$

$$r = |a| \cdot 21$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta \cdot 27$$

$$r = 6 \sin \theta \cdot 25$$

$$r = \frac{3a \sin 2\theta}{2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \cdot 29$$

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 \quad .33$$

$$x = -1 \quad .37$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \quad .31$$

$$y = x \tan(x^2 + y^2) \quad .35$$

$$2x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0 \quad .39$$

تمرینهای ۲۰۱۲

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \theta = \frac{1}{3}\pi \quad .43$$

$$\theta = \frac{2}{3}\pi, \theta = \frac{2}{3}\pi \quad .41$$

-۱ .47

تمرینهای ۳۰۱۲

$$(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi) \quad \text{قطب} \quad .3$$

$$(\frac{3}{2}, \frac{5}{6}\pi) \quad ; \quad (\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\pi) \quad .1$$

$$(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{8}\pi) \quad .5$$

$$; (0, 22, 2, 47) \quad \text{قطب} \quad ; (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi) \quad ; (\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi) \quad ; (1, \frac{1}{2}\pi) \quad ; (1, \frac{3}{2}\pi) \quad .7$$

$$(0, 22, 3, 82)$$

$$n = 0, 1, \dots, 7 \quad \text{که در آن} \quad , (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{8}(2n+1)\pi) \quad \text{قطب} \quad .9$$

$$(\sqrt{15}, \pi - \cos^{-1}\frac{1}{4}) \quad ; \quad (\sqrt{15}, \cos^{-1}\frac{1}{4}) \quad \text{قطب} \quad .11$$

$$(-4, -1) \quad ; \quad (4, 1) \quad .15$$

$$(4\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi) \quad .13$$

$$(3, -\frac{\pi}{3}) \quad ; \quad (3, \frac{\pi}{3}) \quad .17$$

$$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}) \quad ; \quad (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}) \quad \text{قطب} \quad .19$$

$$.(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}) \quad .21$$

$$۲۳. \text{قطب؛ } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{6}(2n+1)\pi\right), n=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

تمرینهای ۴۰۱۲

$$۱. \frac{3}{4}\pi \quad ۳. ۱۵۳^{\circ} ۲۶'$$

$$۵. ۳۸^{\circ} ۹' \quad ۷. \frac{5}{6}\pi$$

$$۹. \frac{1}{3}\pi \quad ۱۱. \frac{\pi}{2}$$

$$۱۳. \frac{1}{3}\pi$$

$$۱۵. ۰ \text{ در قطب؛ } \frac{1}{4}\pi \text{ در } (1, \pi)؛ \frac{1}{4}\pi \text{ در } (1, 0)$$

$$۱۷. ۰^{\circ} \text{ در } \left(0, \frac{\pi}{4}\right)؛ ۷۹^{\circ} ۶' \text{ در } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{6}\pi\right)؛ ۷۹^{\circ} ۶' \text{ در } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{6}\pi\right)$$

تمرینهای ۵۰۱۲

$$۱. \frac{9}{4}\pi \text{ واحد مربع} \quad ۳. ۴\pi \text{ واحد مربع}$$

$$۵. ۴ \text{ واحد مربع} \quad ۷. \frac{9}{16}\pi^3 \text{ واحد مربع}$$

$$۹. \frac{9}{8}\pi \text{ واحد مربع}$$

$$۱۱. \left(\frac{11}{4}\pi - \frac{11}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} - 3\sqrt{2}\right) \text{ واحد مربع}$$

$$۱۳. \left(\frac{19}{3}\pi - \frac{11}{4}\sqrt{3}\right) \text{ واحد مربع} \quad ۱۵. \left(\frac{9}{2}\pi - 9\right) \text{ واحد مربع}$$

$$۱۷. a^2\left(2 - \frac{1}{4}\pi\right) \text{ واحد مربع} \quad ۱۹. \frac{1}{4}(\pi + 1) \text{ واحد مربع}$$

۲۳. ۲ واحد مربع

۲۱. $\frac{1}{4}\pi a^2$ واحد مربع

۲۵. $a^2\pi^2$ واحد مربع

تمرینهای مروری فصل ۱۲

۱. $r^2(2\cos^2\theta - 9\sin^2\theta) = 36$ ۳. $r = 9\cos\theta - 8\sin\theta$

۵. $4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 + 36x^2 + 36xy^2 - 81y^2 = 0$

۷. $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 - 12xy^2$ ۱۵. $2/\sqrt{3}$

۱۷. $\theta = \frac{1}{4}\pi$ ۱۹. $a^2\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$ واحد مربع

۲۱. $\left(\frac{e^{4k\pi} - 1}{4k}\right)$ واحد مربع ۲۳. $r = \frac{\pi^2}{\sin\theta - \pi\cos\theta}$

۲۵. قطب ۲۷. $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi$

۲۹. $(16\pi - 24\sqrt{3})$ واحد مربع؛ $(32\pi + 24\sqrt{3})$ واحد مربع

۳۱. (الف) $4r\sin\theta - r^2\cos^2\theta = 4$ (ب) $x^2 = 4y - 4$

۳۳. $r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = a^2$

تمرینهای ۱۰۱۳

۱. $(0, 1)$ ؛ $y = -1$ ۳. $(-2, 0)$ ؛ $x = 2$

۵. $(0, -\frac{1}{4})$ ؛ $y = \frac{1}{4}$ ۷. $(\frac{9}{8}, 0)$ ؛ $x = -\frac{9}{8}$

۹. $y^2 = 20x$ ۱۱. $x^2 = -8y$

۱۳. $y^2 = 2x$ ۱۵. $y^2 = -6x$

۱۷. $y^2 = 10x$ ۱۹. $x^2 = -y$

۲۱. $x^2 = -10y$ ؛ $k = -\frac{5}{4}$ ۲۳. ۱۶ متر

$$y^2 - 10x - 10y + 20 = 0. ۲۹ \quad ۲۲. اینج \frac{22}{25}$$

$$x^2 + y^2 + 10y = 0. ۳۱$$

$$۲۳. (الف) y = x; (ب) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (ب) (2\sqrt{2})$$

تمرینهای ۲۰۱۳

$$y'^2 = 6x' \quad ۳. \quad x'^2 + y'^2 = 13 \quad ۱.$$

$$y' = 2x'^2 \quad ۷. \quad x'^2 + 2y'^2 = 2 \quad ۵.$$

$$y' = \cosh x' \quad ۱۱. \quad y' = \ln x' \quad ۹.$$

$$3x'^2 - 2y'^2 = 6 \quad ۱۵. \quad x'^2 + 2y'^2 = 16 \quad ۱۳.$$

$$y = \frac{5}{4}; x = -3; \left(-3, -\frac{3}{4}\right); \left(-3, \frac{1}{4}\right) \quad ۱۷.$$

$$x = \frac{5}{4}; y = -5; \left(-\frac{1}{4}, -5\right); (1, -5) \quad ۱۹.$$

$$x = \frac{25}{22}; y = 1; \left(\frac{5}{22}, 1\right); \left(\frac{2}{22}, 1\right) \quad ۲۱.$$

$$x^2 + 2x - 8y + 41 = 0 \quad ۲۵. \quad y^2 + 20x - 8y - 24 = 0 \quad ۲۳.$$

$$x^2 - 6x + 6y + 21 = 0; x^2 - 6x - 6y - 3 = 0 \quad ۲۷.$$

$$y^2 - 4x - 4y - 12 = 0 \quad ۲۹.$$

$$y^2 - 18x - 8y + 169 = 0; y^2 - 2x - 8y + 25 = 0 \quad ۳۱.$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad ۳۳.$$

$$x^2 - 2x - 16y - 79 = 0; x^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \quad ۳۵.$$

$$x^2 - 2x + 16y + 49 = 0; x^2 - 2x - 4y - 31 = 0$$

$$x'^2 - y'^2 = 0 \quad ۳۷.$$

$$۴۱. محورها را چنان انتقال دهید که مبدأ جدید، $\left(\frac{1}{4}\pi, -3\right)$ باشد.$$

تمرینهای ۳۰۱۳

۱. $3x^2 - 24x + 4y^2 = 0$ ؛ بیضی
۳. $x^2 - 3y^2 + 30y - 27 = 0$ ؛ هذلولی
۵. $8x^2 - 24x - y^2 + 4y - 4 = 0$ ؛ هذلولی
۷. $4x^2 + 32x - 12y + 49 = 0$ ؛ سهمی
۹. $43x^2 + 30xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ ؛ هذلولی
۱۱. $16x^2 + 4xy + 19y^2 - 152x + 116y + 496 = 0$ ؛ بیضی

۱۰۱۵

۰۱۳
۵

۱۰۱۷

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 : e > 1 ; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : e < 1 ; y = 0 : e = 1 \quad ۰۱۹$$

تمرینهای ۴۰۱۳

۱. (الف) سهمی؛ (ب) هذلولی؛ (پ) بیضی؛ (ت) دایره.
۳. (الف) ۱؛ (ب) سهمی؛ (پ) $r \cos \theta = -2$
۵. (الف) $\frac{1}{2}$ ؛ (ب) بیضی؛ (پ) $r \sin \theta = 5$
۷. (الف) $\frac{2}{3}$ ؛ (ب) بیضی؛ (پ) $r \cos \theta = -3$
۹. (الف) $\frac{6}{5}$ ؛ (ب) هذلولی؛ (پ) $2r \sin \theta = -3$
۱۱. (الف) $\frac{2}{7}$ ؛ (ب) بیضی؛ (پ) $r \sin \theta = -5$
۱۳. (الف) $\frac{5}{4}$ ؛ (ب) هذلولی؛ (پ) $r \cos \theta = 2$

$$r = \frac{۳۶}{۳ + ۲ \cos \theta} \cdot ۱۷$$

$$r = \frac{۸}{۱ - \sin \theta} \cdot ۱۵$$

$$r = \frac{۳}{۲ - \cos \theta} \cdot ۱۹$$

$$۳r \cos \theta = -۵ \text{ (ب)} ; r = \frac{۵}{۱ - ۳ \cos \theta} \text{ (الف)} \cdot ۲۱$$

$$\frac{۱۶}{۳} \sqrt{۳} \pi \text{ واحد مربع} \cdot ۲۳$$

$$r = \frac{۲۰۰۰۰۰۰۰}{۱ - \cos \theta} \text{ (الف)} ; \text{ (ب) } ۲۰۰۰۰۰۰۰ \text{ مایل} \cdot ۲۹$$

$$r^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \theta} \cdot ۳۱$$

تمرینهای ۵۰۱۳

$$۱. \text{ رأسها: } (\pm ۳, ۰) ; \text{ کانونها: } (\pm \sqrt{۵}, ۰) ; \text{ هادیهها: } x = \pm \frac{۹}{۵} \sqrt{۵}$$

$$e = \frac{۱}{۳} \sqrt{۵} ; \text{ دو انتهای قطر کوچک: } (۰, \pm ۲)$$

$$۳. \text{ رأسها: } (\pm ۳, ۰) ; \text{ کانونها: } (\pm \sqrt{۳}, ۰) ; \text{ هادیهها: } x = \pm ۳ \sqrt{۳} ; e = \frac{۱}{۳} \sqrt{۳}$$

$$\text{دو انتهای قطر کوچک: } (۰, \pm \sqrt{۶})$$

$$۵. \text{ رأسها: } (\pm ۲, ۰) ; \text{ کانونها: } (\pm \sqrt{۱۳}, ۰) ; \text{ هادیهها: } x = \pm \frac{۲}{۱۳} \sqrt{۱۳}$$

$$۲b = ۶ ; ۲a = ۲ ; e = \frac{۱}{۲} \sqrt{۱۳}$$

$$۷. \text{ رأسها: } (\pm \frac{۱}{۳}, ۰) ; \text{ کانونها: } (\pm \frac{۵}{۱۲}, ۰) ; \text{ هادیهها: } x = \pm \frac{۲}{۱۵} ; e = \frac{۵}{۲}$$

$$۲b = \frac{۱}{۲} ; ۲a = \frac{۲}{۳}$$

$$16x^2 + 25y^2 = 100 \quad .11$$

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \quad .9$$

$$2x + 3y - 12 = 0 \quad .15$$

$$32x^2 - 33y^2 - 380 = 0 \quad .13$$

$$7x^2 - 4y^2 = 28 \quad .19$$

$$\sqrt{2}y - kx - 1 = 0 \quad .17$$

$$98\pi \text{ اینچ مکعب} \quad .23$$

$$\frac{42}{5} \text{ متر} \quad .21$$

$$16x^2 - 9y^2 = 14400 \text{ هذلولی} \quad .25$$

$$2400 \rho \text{ فوت-پوند} \quad .29$$

$$\frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ واحد مکعب} \quad .27$$

تمرینهای ۶.۱۳

$$1. \quad e = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{مرکز: } (2, 3); \quad \text{کانونها: } (2 \pm \sqrt{3}, 3); \quad \text{هادیها: } x = 2 \pm 3/\sqrt{3}$$

$$3. \quad e = \frac{1}{5}\sqrt{10} \quad \text{مرکز: } (0, \frac{1}{4}); \quad \text{کانونها: } (0, \frac{1}{4} \pm \frac{1}{10}\sqrt{170}); \quad \text{هادیها:}$$

$$y = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{170}$$

$$5. \quad \text{دایره-نقطه } (-\frac{5}{2}, 2)$$

$$7. \quad e = \frac{1}{5}\sqrt{10} \quad \text{مرکز: } (1, 0); \quad \text{کانونها } (\pm\sqrt{2} + 1, 0); \quad \text{هادیها:}$$

$$x = 1 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$3x^2 + 4y^2 = 300 \quad .11$$

$$9. \quad \text{بیضی-نقطه}$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \quad .15$$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad .13$$

$$\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{39} = 1 \quad .21$$

$$\frac{(y-3)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{48} = 1 \quad .17$$

$$18\pi \rho \text{ پوند} \quad .25$$

$$(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k) \quad .23$$

تمرینهای ۷۰۱۳

۱. $e = \sqrt{2}$ ؛ مرکز: $(-4, -1)$ ؛ کانونها: $(-4 \pm 6\sqrt{2}, -1)$ ؛
هادیها: $x = -4 \pm 3\sqrt{2}$ ؛ مجانبها: $x - y + 3 = 0$ ، $x + y + 5 = 0$

۳. $e = \sqrt{3}$ ؛ مرکز: $(-3, -1)$ ؛ کانونها: $(-3, -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{6})$ ؛

هادیها: $y = -1 \pm \frac{2}{9}\sqrt{6}$ ؛ مجانبها: $\pm x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} \pm 3 = 0$

۵. $e = \frac{1}{2}\sqrt{7}$ ؛ مرکز: $(-1, 4)$ ؛ کانونها: $(-1, 4)$ ، $(-1, 11)$ ؛

هادیها: $y = 8$ ، $y = 0$ ؛ مجانبها: $\pm 2x + \sqrt{3}y \pm 2 - 4\sqrt{3} = 0$

۷. $e = \frac{1}{3}\sqrt{13}$ ؛ مرکز: $(1, -2)$ ؛ کانونها: $(1, -2 \pm \sqrt{13})$ ؛

هادیها: $y = -2 \pm \frac{9}{13}\sqrt{13}$ ؛ مجانبها: $3x - 2y - 7 = 0$ ، $3x + 2y + 1 = 0$

۹. $25x^2 - 144y^2 = 14400$ ۱۱. $\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x+2)^2}{81} = 1$

۱۳. $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{81} = 1$ ۱۵. $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1$

۱۷. (الف) $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$ ؛ (ب) $2x - y + 3 = 0$ ؛ $2x + \bar{y} + 5 = 0$

۲۱. $\frac{(y-5)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$ ۲۳. $(3, 2)$

تمرینهای ۸۰۱۳

۱. $\bar{y}^2 - \bar{x}^2 = 8$ ۵. $16\bar{y}^2 - 9\bar{x}^2 = 36$

۷. $\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 16$ ۹. $9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$

۱۱. $3\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = 18$ ۱۳. $\bar{x}'^2 + 4\bar{y}'^2 = 16$

۱۵. $\sqrt{2}\bar{x}'^2 = \bar{y}'^2$ ۱۷. $\bar{x}'^2 - 4\bar{y}'^2 = 16$

تمرینهای مروری فصل ۱۳

$$۱. x^2 = -12y$$

$$۳. (الف) (2, 3); (ب) (0, 3); (پ) y=3; (ت) x=2$$

$$۵. x^2 - 3y^2 - 2x - 16y - 19 = 0 \quad \text{هذلولی}$$

$$۷. 5x^2 + 9y^2 - 78x - 54y + 297 = 0 \quad \text{بیضی}$$

$$۹. 9(x-1)^2 + 5(y-2)^2 = 405 \quad ۱۱. 3x^2 - y^2 - 3 = 0$$

$$۱۳. 29\left(x + \frac{53}{9}\right)^2 + 112(y-3)^2 = 576$$

$$۱۷. r = \frac{6}{1 - \sin \theta}$$

$$۱۵. r = \frac{8}{1 - 3 \cos \theta}$$

$$۱۹. (الف) e = \frac{1}{3}; (ب) \text{بیضی}; (پ) r \sin \theta = -2$$

$$۲۱. (الف) e = \frac{3}{4}; (ب) \text{هذلولی}; (پ) 3r \cos \theta = 2$$

$$۲۳. e = \frac{1}{3} \sqrt{3}; \text{مرکز: } (-3, 8); \text{کانونها: } (-3, 8 \pm 2\sqrt{3})$$

$$\text{هادیها: } y = 8 \pm \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

$$۲۵. e = \sqrt{26}; \text{مرکز: } (-1, 3); \text{کانونها: } (-1 \pm \sqrt{26}, 3)$$

$$\text{هادیها } x = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{26}, \Delta x + y + 2 = 0, \Delta x - y + 8 = 0$$

$$۲۹. r = \frac{1}{1 - \cos \theta}$$

$$۲۷. 21\bar{x}'^2 - 29\bar{y}'^2 = 72$$

$$۳۳. (x-5)^2 = 8(y-1)$$

$$۳۱. 4\sqrt{3}\pi a^2 b \quad \text{واحد مکعب}$$

$$۳۷. 600 \text{ مایل}$$

$$۳۵. 9\pi \text{ سانتی متر}$$

$$۳۹. \left(3 \pm \frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \text{ میلیون مایل}$$

۴۱. شاخهٔ چپ مزدولی $1220000 = 9y^2 - 16x^2$

۴۲. قسمت ربع اول سهمی

تمرینهای ۱۰۱۴

$\frac{1}{2}\pi$.۳	$\frac{2}{3}$.۱
۱ .۷	$-\frac{11}{3}$.۵
$+\infty$.۱۱	۲ .۹
$\ln \frac{2}{3}$.۱۵	$-\frac{1}{8}$.۱۳
$\frac{1}{3}$.۱۹	$\frac{1}{6}$.۱۷
۱ .۲۳	$\frac{1}{2}$.۲۱
۲ .۲۷	$\frac{3}{5}$.۲۵
$\frac{Et}{L}$.۳۱	-1 .۲۹

$b = \frac{9}{2}, a = -2$.۳۳

تمرینهای ۲۰۱۴

۰ .۳	۰ .۱
۰ .۷	۱ .۵
$\frac{1}{2}$.۱۱	۰ .۹
$\frac{1}{2}$.۱۵	۱ .۱۳

$$e^2 \cdot 19 \quad 1 \cdot 17$$

$$1 \cdot 23 \quad e^a \cdot 21$$

$$e^{-1/2} \cdot 27 \quad e^2 \cdot 25$$

$$0 \cdot 31 \quad \frac{1}{2} \cdot 29$$

$$1 \cdot 35 \quad 1 \cdot 33$$

$$2 \cdot 39$$

تمرینهای ۳۰۱۴

$$-\frac{1}{2 \ln 5} \cdot 3 \quad 1 \cdot 1$$

$$0.7 \text{ واگرا} \quad 1 \cdot 5$$

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 11 \quad 0.9 \text{ واگرا}$$

$$1 \cdot 15 \quad 2 \cdot 13$$

$$0.19 \text{ (الف) واگرا؛ (ب) } 0 \quad 0.17 \text{ واگرا}$$

$$\frac{1}{2} \pi \cdot 23 \quad 0.21 \text{ (الف) } 0$$

$$\frac{1000}{0.08 + \ln 2} \approx 1293741 \cdot 27 \text{ دلار} \quad \frac{1}{2} \pi \cdot 25$$

$$\frac{3}{2} \ln \frac{7}{16} ; n = \frac{3}{2} \cdot 31$$

تمرینهای ۴۰۱۴

$$-2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 1$$

$$0.7 \text{ واگرا} \quad \frac{1}{3} \pi \cdot 5$$

$$0.11 \text{ واگرا} \quad 0.9 \text{ واگرا}$$

۱۵. واگرا

۱۹. واگرا

۲۳. $\frac{1}{3}\pi$

۲۷. $\frac{1}{n+1} ; n > -1$

۳۱. 6π ؛ بله

۱۳. واگرا

۱۷. ۰

۲۱. ۰

۲۵. ۰

۲۹. $\frac{2}{(n+1)^2} ; n > -1$

تمرینهای ۵۰۱۴

۱. $R_r(x) = \frac{(x-1)^r}{(\xi-2)^\delta} ; P_r(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-3)^2$

ξ بین ۱ و x

۳. $P_r(x) = 8 + 3(x-4) + \frac{3}{16}(x-4)^2 - \frac{1}{128}(x-4)^3$

$R_r(x) = \frac{3(x-4)^r}{128\xi^{5/2}}$ ξ بین ۴ و x

۵. $P_r(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$

$R_r(x) = \frac{1}{24}\sin\xi\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$ ξ بین $\frac{\pi}{6}$ و x

۷. $R_r(x) = \frac{1}{120}\cosh\xi x^\delta ; P_r(x) = x + \frac{1}{6}x^2$ ξ بین ۰ و x

۹. $P_r(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

$R_r(x) = -\frac{1}{6}\xi^{-2}(x-1)^4$ ξ بین ۱ و x

۱۱. $P_r(x) = -\ln 2 - \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - 2\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^3$

$R_r(x) = -\frac{1}{12}(2\sec^2\xi \tan^2\xi + \sec^4\xi)\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^4$ ξ بین $\frac{1}{3}\pi$ و x

$$P_r(x) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3, R_r(x) = \frac{3}{128}(1+\xi)^{-5/2}x^4 \quad ۱۳$$

ξ بین ۰ و x

$$|خطا| < \frac{(0.1)^4}{24} < 0.0000005 \quad ۱۷ \quad ۲۷۱۸۲۸ \quad ۱۵$$

$$0.1823 \quad ۲۱ \quad 0.515 \quad ۱۹$$

$$x \approx \frac{\pi}{2(1+m)} \quad ۲۷ \quad |خطا| < \frac{1}{7680}\sqrt{2}, \frac{55\sqrt{2}}{672} \quad ۲۳$$

$$2(x-1) + 5(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + (x-1)^4 \quad ۲۹$$

تمرینهای مروری فصل ۱۴

$$\frac{1}{3} \quad ۳ \quad +\infty \quad ۱$$

$$1 \quad ۷ \quad +\infty \quad ۵$$

$$e^{12} \quad ۱۱ \quad -\frac{1}{2} \quad ۹$$

$$1 \quad ۱۵ \quad 0 \quad ۱۳$$

$$۱۹ \quad \text{واگرا} \quad e \quad ۱۷$$

$$۲۳ \quad \text{واگرا} \quad \frac{1}{2} \quad ۲۱$$

$$۲۷ \quad \text{واگرا} \quad \frac{32}{\ln 2} \quad ۲۵$$

$$۳۱ \quad \text{واگرا} \quad \frac{1}{4}\pi \quad ۲۹$$

$$۳۵ \quad (\text{الف خیر؛ (ب) ۰} \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad (\text{ب}) \quad ۳۳$$

$$۳۷ \quad (\text{الف واگرا؛ (ب) ۰}$$

$$R_f(x) = \frac{1}{5040} \sin \xi x^7; P_f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \quad ۳۹.$$

ξ بین ۰ و x

$$P_f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{54}(x-9) + \frac{1}{648}(x-9)^2 - \frac{5}{34992}(x-9)^3 \quad ۴۱.$$

$$+ \frac{35}{2519424}(x-9)^4$$

$$R_f(x) = -\frac{63}{256}\xi^{-11/2}(x-9)^5 \quad \xi \text{ بین } 9 \text{ و } x$$

$$\frac{64}{3} \quad ۴۵.$$

$$+\infty \quad ۴۳.$$

$$۱۵۲۵۰۰ \text{ دلار} \quad ۴۹.$$

$$۱ \quad ۴۷.$$

تمرینهای ۱۰۱۵

$$۳. \text{ واگرا}$$

$$۱. \frac{1}{2}$$

$$۵. ۰$$

$$۵. -2$$

$$۱۱. \text{ واگرا}$$

$$۹. ۱$$

$$۱۵. e^{1/2}$$

$$۱۳. \text{ واگرا}$$

$$۱۹. ۰$$

$$۱۷. ۱$$

$$۲۳. N = \frac{6}{\varepsilon} - \frac{3}{2} \text{ انتخاب کنید}$$

$$۲۱. N = 1 + \frac{3}{\varepsilon} \text{ انتخاب کنید}$$

$$۲۵. N = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2-5\varepsilon}{\varepsilon}} \text{ انتخاب کنید}$$

تمرینهای ۲۰۱۵

$$۳. \text{ نزولی}$$

$$۱. \text{ صعودی}$$

$$۷. \text{ یکنوا نیست}$$

$$۵. \text{ یکنوا نیست}$$

۱۱. پس از دو جمله اول صعودی است

۹. نزولی

۱۵. نزولی

۱۳. صعودی

$$۳۱. \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$$

۱۹. کراندار نیست

تمرینهای ۳۰۱۵

$$۳. \frac{5}{3} ; s_n = \frac{5n}{3n+1}$$

$$۱. \frac{1}{2} ; s_n = \frac{n}{2n+1}$$

$$۷. \frac{5}{2} ; s_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5n} \right)$$

$$۵. s_n = \ln \left(\frac{1}{n+1} \right) ; \text{واگرا}$$

$$۱۱. \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} ; ۰$$

$$۹. \frac{2}{3} ; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)}$$

۱۵. واگرا

$$۱۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) ; \text{واگرا}$$

۱۹. واگرا

۱۷. ۲

$$۲۳. \frac{1}{e-1}$$

۲۱. ۱

$$۲۷. \frac{3}{2}$$

۲۵. واگرا

$$۳۱. \frac{3}{11}$$

۲۹. واگرا

۳۵. ۸ متر

$$۳۳. \frac{137}{111}$$

$$۳۷. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} \text{ هر دو واگرايند؛ همگراست } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \text{ و } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

تمرینهای ۴۰۱۵

۳. همگرا

۱. همگرا

۷. همگرا

۵. واگرا

- | | |
|-----------|-----------|
| ۹. واگرا | ۱۱. همگرا |
| ۱۳. واگرا | ۱۵. همگرا |
| ۱۷. واگرا | ۱۹. همگرا |
| ۲۱. واگرا | ۲۳. همگرا |
| ۲۵. همگرا | |

تمرینهای ۵.۱۵

- | | |
|-----------|-----------|
| ۱. واگرا | ۳. همگرا |
| ۵. همگرا | ۷. همگرا |
| ۹. واگرا | ۱۱. همگرا |
| ۱۳. همگرا | ۱۵. همگرا |
| ۱۷. همگرا | ۱۹. همگرا |
| ۲۱. واگرا | |

$$۰.۷۰۳۲ < \sum_{m=50}^{100} \frac{1}{m} < ۰.۷۱۳۲$$

تمرینهای ۶.۱۵

- | | |
|----------|---------------------------|
| ۱. همگرا | ۳. همگرا |
| ۵. همگرا | ۷. واگرا |
| ۹. همگرا | $ R_4 < \frac{1}{5}$ ۱۱. |

$$۰.۱۱۲$$

۱۹. مطلقاً همگرا
۲۳. واگرا
۲۷. مطلقاً همگرا
۳۱. واگرا

$$|R_4| < \frac{1}{81}$$

$$۰.۴۰۶$$

۲۱. مطلقاً همگرا
۲۵. مطلقاً همگرا
۲۹. مطلقاً همگرا

تمرینهای ۷.۱۵

- | | |
|--------------|--------------|
| ۱. $[-1, 1]$ | ۳. $[-1, 1]$ |
|--------------|--------------|

$$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad ۰۵$$

$$(-3, 3) \quad ۰۷$$

$$۰ \quad ۰۱۱$$

$$(-\infty, +\infty) \quad ۰۹$$

$$(0, 2] \quad ۰۱۵$$

$$(-9, 9] \quad ۰۱۳$$

$$[-1, 1] \quad ۰۱۹$$

$$\left(-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right) \quad ۰۱۷$$

$$[2, 6) \quad ۰۲۳$$

$$(-2, 6) \quad ۰۲۱$$

$$(-e, e) \quad ۰۲۷$$

$$[-1, 1] \quad ۰۲۵$$

$$+\infty \quad ۰۲۹$$

تمرینهای ۸۰۱۵

$$۰۱ \quad \text{الف)} \quad R=1 \quad [-1, 1] \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \quad \text{ج)} \quad R=1 \quad (-1, 1)$$

$$۰۳ \quad \text{الف)} \quad R=1 \quad [-1, 1] \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n} x^{n-1} \quad \text{ج)} \quad R=1 \quad (-1, 1)$$

$$۰۵ \quad \text{الف)} \quad R=+\infty \quad (-\infty, +\infty)$$

$$\text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \quad \text{ج)} \quad R=+\infty \quad (-\infty, +\infty)$$

$$۰۷ \quad \text{الف)} \quad R=\frac{1}{3} \quad \left(0, \frac{2}{3}\right) \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n(n+1)(3x-1)^n \quad \text{ج)} \quad R=\frac{1}{3}$$

$$\text{د)} \quad \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$۰۹ \quad \text{الف)} \quad R=3 \quad [-2, 2) \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n-1}}{3^n} \quad \text{ج)} \quad R=3$$

$$\text{د)} \quad (-2, 2)$$

$$۰۱۳ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n(n+1)x^n$$

$$۰۱۱ \quad \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

$$۰۱۵ \quad \text{الف)} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \quad \text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^n x^{n-1} \quad \text{ج)} \quad |x| < \frac{1}{2} \quad \text{د)} \quad |x| < \frac{1}{2}$$

$$۱۷. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \text{ (ب) ؛ } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \text{ (الف)}$$

$$۰.۶۰۶۵۳.۱۹$$

$$۲۱. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ (ب) ؛ } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ (الف)}$$

$$۲۵. \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!} \text{ (الف)}$$

$$۲.۲۳$$

$$۲۷. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

تمرینهای ۹.۱۵

$$۱. \text{ (الف) } ۰.۲۸۸ ؛ \text{ (ب) } ۰.۲۸۸$$

$$۵. ۰.۴۸۵$$

$$۹. ۰.۰۴۱$$

$$۱۳. ۰.۲۲۸$$

$$۱۷. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$۱۹. ۰.۲۴۵$$

$$۲۱. ۰.۲۲۱$$

$$۲۳. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$۲۹. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} ; R = +\infty$$

تمرینهای ۱۰.۱۵

$$۷. \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n 2^n}$$

$$۹. \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n 2^n} ; R = 2$$

$$۱۱.$$

$$۲ + \frac{1}{4}(x-4) + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)(x-4)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot 4^n} ; R = 4$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{r} \left(x - \frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^2 + \frac{1}{12} \sqrt{r} \left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^3 \cdot ۱۳$$

$$+ \frac{1}{24} \left(x - \frac{1}{3}\pi\right)^4 - \dots; R = +\infty$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2x)^{2n}}{(2n)!} \cdot ۱۵$$

$$: ۱ + x^2 + \frac{2}{3} x^4 \text{ (ب)} : x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 \text{ (الف)} \cdot ۱۷$$

$$\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6 \text{ (ب)}$$

$$۱۰۹۷۴۳۵ \cdot ۲۱$$

$$۰۰۵۲۹۹ \cdot ۱۹$$

$$۲۷۱۸۲۸۱۸ \cdot ۲۵$$

$$-۰۰۲۲۳۱ \cdot ۲۳$$

$$۰۰۰۰۴۸ \cdot ۲۹$$

$$۰۰۰۴۱۵ \cdot ۲۷$$

$$۰۰۲۳۹۸ \cdot ۳۱$$

$$a_6 = 3; a_7 = -5; a_8 = 2; a_9 = -1; a_{10} = 6 \cdot ۳۳$$

تمرینهای ۱۱.۱۵

$$1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n; R=1 \cdot ۱$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^n; R=2 \cdot ۳$$

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n n!} x^{3n}; R=1 \cdot ۵$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{18^n n!} x^{3n}; R=\sqrt{3} \cdot ۷$$

$$x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{n+2}; R=1 \cdot ۹$$

$$۵۰۰۱۰ \cdot ۱۳$$

$$۴۰۸۹۹ \cdot ۱۱$$

۰٫۱۹۸ ۰۱۵

$$x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)}; R=1 \quad ۰۱۷$$

۰٫۴۹۷۰ ۰۲۱

۲٫۰۲۷۱ ۰۱۹

۰٫۵۰۸۲ ۰۲۳

$$\frac{1}{p+1} x^{p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+p+1}}{2^n n! (2n+p+1)}; R=1 \quad ۰۲۵$$

تمرینهای مروری فصل ۱۵

$$1 : \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \quad ۰۳$$

$$3 : 2, \frac{9}{5}, \frac{3}{2}, 1 \quad ۰۱$$

$$e^2 : \frac{390625}{65536}, \frac{2096}{729}, \frac{81}{16}, 2 \quad ۰۷$$

۰۵ : ۳، ۱، ۳، ۱؛ حد ندارد

$$\frac{1}{4} : s_n = \frac{4^n - 1}{4^{n+1}} : \frac{255}{1024}, \frac{63}{256}, \frac{15}{64}, \frac{3}{16} \quad ۰۹$$

۰۱۳ : واگرا

۰۱۱ : همگرا؛ ۳

۰۱۷ : همگرا؛ $\frac{1}{e}$

۰۱۵ : همگرا؛ $2 + \sqrt[3]{3}$

۰۲۱ : واگرا

۰۱۹ : همگرا

۰۲۵ : واگرا

۰۲۳ : همگرا

۰۲۹ : واگرا

۰۲۷ : همگرا

۰۳۳ : $\frac{437}{330}$

۰۳۱ : واگرا

۰۳۷ : به طور مشروط همگرا

۰۳۵ : مطلقاً همگرا

۰۴۱ : مطلقاً همگرا

۰۳۹ : واگرا

۰۴۵ : $[-3, 3]$

۰۴۳ : $[-1, 1]$

۰۴۹ : $(-7, 5)$

۰۴۷ : $x=3$

$$۵۳. ۰۰۱۹۷۴ \quad ۵۱. (-1, 3)$$

$$۵۷. ۰۰۹۹۸۶ \quad ۵۵. ۵۰۶۵۸$$

$$۶۱. ۰۰۰۱۲۴ \quad ۵۹. ۱۰۶۰۹۴$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n x^n}{n!}; (-\infty, +\infty) \quad ۶۳$$

$$\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (3^{2n} - 1) x^{2n+1}}{(2n+1)!}, (-\infty, +\infty) \quad ۶۵$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(x+1)^n}{n} \quad ۶۹ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3x+n)^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad ۶۷$$

تمرینهای ۱۰۱۶

$$۲ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۱$$

$$\langle 2, -3 \rangle \quad ۷ \quad \sqrt{11} \quad ۵$$

$$\langle 5, 6 \rangle \quad ۱۱ \quad \langle -2, -7 \rangle \quad ۹$$

$$\langle 12, -5 \rangle \quad ۱۵ \quad \langle -4, 3 \rangle \quad ۱۳$$

$$\langle 1, -5 \rangle \quad ۱۹ \quad \langle -1, 9 \rangle \quad ۱۷$$

$$\langle 7, 3 \rangle \quad ۲۳ \quad \langle -2, 2 \rangle \quad ۲۱$$

$$\langle \sqrt{2}, \sqrt{3} \rangle \quad ۲۷ \quad \langle -9, -2 \rangle \quad ۲۵$$

$$\langle 1, -2 \rangle \quad ۲۹ \quad \text{الف) } \langle 1, -2 \rangle; \text{ب) } \langle 1, -2 \rangle$$

$$\sqrt{74} \quad ۳۳ \quad \langle -2, 7 \rangle \quad ۳۱$$

$$2\sqrt{26} \quad ۳۷ \quad \sqrt{1061} \quad ۳۵$$

$$h = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{4} \quad ۳۹$$

تمرینهای ۲۰۱۶

$$-22i + 6j \quad ۳ \quad 10i + 15j \quad ۱$$

$$2\sqrt{10} \quad ۷ \quad 6i + 2j \quad ۵$$

$$-۱۴i + ۲۱j \quad .۱۱ \quad \sqrt{۱۳} + \sqrt{۱۷} \quad .۹$$

$$۵\sqrt{۱۳} - ۶\sqrt{۱۷} \quad .۱۵ \quad ۷\sqrt{۱۳} \quad .۱۳$$

$$۲\sqrt{۲۰۵} \quad (ب) \quad -۲۸i + ۶j \quad (الف) \quad .۱۷$$

$$\frac{۱۱}{\sqrt{۱۳۷}}i + \frac{۲}{\sqrt{۱۳۷}}j \quad .۱۹$$

$$\frac{۳}{۵}i - \frac{۲}{۵}j \quad (ب) \quad \frac{۳}{۵}i - \frac{۲}{۵}j \quad (الف) \quad .۲۱$$

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}i + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}j \quad (ب) \quad ۲\sqrt{۲} \left(\cos \frac{۱}{۲}\pi i + \sin \frac{۱}{۲}\pi j \right) \quad (الف) \quad .۲۳$$

$$-\frac{۱}{۲}i + \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}j \quad (ب) \quad ۸ \left(\cos \frac{۲}{۳}\pi i + \sin \frac{۲}{۳}\pi j \right) \quad (الف) \quad .۲۵$$

$$-i \quad (ب) \quad ۱۶(\cos \pi i + \sin \pi j) \quad (الف) \quad .۲۷$$

$$h=۲, k=۳ \quad .۲۹$$

تمرینهای ۳۰۱۶

$$-۱ \quad .۳ \quad ۱۰ \quad .۱$$

$$-\frac{۱۶}{۶۵} \quad .۱۳ \quad \frac{۱}{۱۰}\sqrt{۲} \quad .۱۱$$

$$-\frac{۲}{۵}, ۱۰ \quad .۱۵$$

$$۰ \quad (الف) \quad ; \quad (ب) \quad \text{چنین } k \text{ بی وجود ندارد.} \quad .۱۷$$

$$\frac{-۲۴۰ + \sqrt{۸۵۶۸۳}}{۴۰۷} \quad .۱۹$$

$$\frac{۲}{۱۷}\sqrt{۱۷}i - \frac{۱}{۱۷}\sqrt{۱۷}j \quad ; \quad -\frac{۲}{۱۷}\sqrt{۱۷}i + \frac{۱}{۱۷}\sqrt{۱۷}j \quad .۲۱$$

$$-\frac{۱۱۲}{۱۷}i + \frac{۹۶}{۱۷}j \quad .۲۵ \quad \pm \frac{۱}{|A|}(a_2i - a_1j) \quad .۲۳$$

$$\frac{29}{50}\sqrt{50} \quad ۰.۲۷$$

$$۰.۲۹ \quad \text{الف) } ۲۴ \text{ فوت-پوند؛ ب) } ۲۴\sqrt{۳} \text{ فوت-پوند}$$

$$۰.۳۱ \quad \text{فوت-پوند } ۲۲۱ \approx \text{فوت-پوند } (۱۸ - ۹\sqrt{۳})$$

تمرینهای ۴۰۱۶

$$۰.۱ \quad (-\infty, 0) \cup (0, 4] \quad ۰.۳ \quad [-1, 1]$$

۰.۵ تمام اعداد حقیقی که در $(-4, 3)$ نیستند

$$۰.۷ \quad \frac{4}{9}, \frac{4}{3}t$$

$$۰.۹ \quad \frac{(2+t) - (1 + \ln t)(2+4t+t^2)}{t^3 e^{t^2}(2+t)^3}; \frac{1 + \ln t}{t e^t(2+t)}$$

$$۰.۱۳ \quad (y-1)^x = x$$

$$۰.۱۱ \quad -\frac{b}{a} \cot t; -\frac{b}{a^x} \csc^x t$$

$$۰.۱۷ \quad x^x - y^x = 1, x \geq 1$$

$$۰.۱۵ \quad 25x^x - 9y^x = 225$$

$$۰.۲۱ \quad 5\sqrt{3}x + 2y = 20$$

$$۰.۱۹ \quad 9x^x + 16y^x = 144$$

$$۰.۲۷ \quad \frac{dy}{dx} = 0; \frac{d^x y}{dx^x} = -\frac{1}{x^a}; \frac{d^x y}{dx^x} = 0$$

$$۰.۲۳ \quad y = 1; x = -1$$

$$۰.۳۵ \quad 3\pi a^x \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۳۱ \quad x^{x/2} + y^{x/2} = a^{x/2}$$

تمرینهای ۵۰۱۶

$$۰.۳ \quad 2i$$

$$۰.۱ \quad 2i + 2j$$

$$۰.۵ \quad i$$

$$۰.۷ \quad \mathbf{R}'(t) = 2e^{x^t} \mathbf{i} + \frac{1}{t} \mathbf{j}; \mathbf{R}''(t) = 2e^{x^t} \mathbf{i} - \frac{1}{t^2} \mathbf{j}$$

$$۰.۹ \quad \mathbf{R}'(t) = (1+t^x)^{-1} \mathbf{i} + 2^t \ln 2 \mathbf{j}; \mathbf{R}''(t) = -2t(1+t^x)^{-2} \mathbf{i} + 2^t (\ln 2)^2 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}'(t) = -\gamma t(t^\gamma + \gamma)^{-\gamma} \mathbf{i} - \frac{\delta}{\gamma} (1 - \delta t)^{-1/\gamma} \mathbf{j}; \quad .11$$

$$\mathbf{R}''(t) = (\gamma t^\gamma - \gamma)(t^\gamma + \gamma)^{-\gamma} \mathbf{i} - \frac{\gamma \delta}{\gamma} (1 - \delta t)^{-\gamma/\gamma} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}'(t) = 1 \circ \cos \gamma t \mathbf{i} - \gamma \sec \gamma t \tan \gamma t \mathbf{j}; \quad .13$$

$$\mathbf{R}''(t) = -\gamma \circ \sin \gamma t \mathbf{i} + (1 \gamma \sec \gamma t - \gamma \gamma \sec^2 \gamma t) \mathbf{j}$$

$$\gamma \circ t \quad .17 \quad (\gamma t - \gamma)(\gamma t^\gamma - \gamma t + \delta)^{-1/\gamma} \quad .15$$

$$\ln |\sec t| \mathbf{i} - \ln |t| \mathbf{j} + \mathbf{C} \quad .25 \quad \lambda e^{\gamma t} - \lambda e^{-\gamma t} \quad .19$$

$$(t \ln t - t) \mathbf{i} + \frac{1}{\gamma} t^\gamma \mathbf{j} + \mathbf{C} \quad .29 \quad \frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} \mathbf{i} + \ln |t - 1| \mathbf{j} + \mathbf{C} \quad .27$$

$$\frac{1}{\gamma} \left(t - \frac{1}{\gamma} \sin \gamma t - \pi \right) \mathbf{i} + \left(t + \frac{1}{\gamma} \sin \gamma t - \pi \right) \mathbf{j} \quad .31$$

$$\circ \quad .35 \quad x^\gamma + y^\gamma = 1; \circ \quad .33$$

تمرینهای ۶.۱۶

$$2\sqrt{10} + \sqrt{r} \ln(2 + \sqrt{5}) \quad .3 \quad 1 + \frac{1}{\gamma} \sqrt{r} \ln(1 + \sqrt{r}) \quad .1$$

$$120 \quad .7 \quad \frac{\gamma}{\gamma \gamma} [(\gamma \circ)^{\gamma/\gamma} - (13)^{\gamma/\gamma}] \quad .5$$

$$8\pi \quad .11 \quad 6a \quad .9$$

$$5\pi \quad .15 \quad a[\ln \cosh \gamma + \ln \cosh 1] \quad .13$$

$$12 \quad .19 \quad 2\pi a \quad .17$$

$$\frac{1}{\gamma} a \left(\theta_1 - \frac{\gamma}{\gamma} \sin \frac{\gamma}{\gamma} \theta_1 \right) \quad .23 \quad \frac{1}{\gamma} \sqrt{\delta} (e^\lambda - 1) \quad .21$$

$$200 \text{ متر} \quad .25$$

تمرینهای ۷.۱۶

$$1 \quad (\text{الف}) \gamma t \mathbf{i} + \mathbf{j}; (\text{ب}) 2i; (\text{پ}) \sqrt{3\gamma}; (\text{ت}) \gamma$$

$$۳. \quad \text{(الف)} \quad -10 \sin 2t \mathbf{i} + 6 \cos 2t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad -20 \cos 2t \mathbf{i} - 12 \sin 2t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 10 \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 12$$

$$۵. \quad \text{(الف)} \quad \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad \sec^2 t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad \sqrt{2} \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 2$$

$$۷. \quad \text{(الف)} \quad \cos t \mathbf{i} + \sec^2 t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad -\sin t \mathbf{i} + 2 \sec^2 t \tan t \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad \frac{1}{6} \sqrt{91} \quad ; \quad \text{(ت)} \quad \frac{1}{18} \sqrt{849}$$

$$۹. \quad \text{(الف)} \quad 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad 2\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 2\sqrt{10} \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 2$$

$$۱۱. \quad \text{(الف)} \quad 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 2\sqrt{17} \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 2\sqrt{65}$$

$$۱۳. \quad \text{(الف)} \quad 3\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad -4\mathbf{i} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 3 \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 2$$

$$۱۵. \quad \text{(الف)} \quad \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 2 \quad ; \quad \text{(ت)} \quad 2$$

$$۱۷. \quad \frac{2t-3}{t-1} \mathbf{i} + \frac{4-2t-t^2}{2} \mathbf{j}$$

$$۱۹. \quad (e^{-t} + 3t - 1)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{5}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$۲۱. \quad \text{(الف)} \quad \frac{390625}{2} \text{ فوت} \quad ; \quad \text{(ب)} \quad \frac{390625}{8} \text{ فوت} \quad ; \quad \text{(پ)} \quad 1250\sqrt{2}\mathbf{i} - 1250\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$۲۳. \quad 20000\sqrt{3} + 8000\sqrt{1893} \text{ فوت} \quad ; \quad (25 + \sqrt{631}) \text{ ثانیه}$$

$$۲۵. \quad 283 \text{ فوت بر ثانیه} \quad \quad ۲۷. \quad 40^\circ 8'$$

تمرینهای ۸۰۱۶

$$۱. \quad \mathbf{T}(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1} \mathbf{i} + \frac{2t}{t^2+1} \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{2t}{t^2+1} \mathbf{i} + \frac{1-t^2}{t^2+1} \mathbf{j}$$

$$۳. \quad \mathbf{T}(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{i} + \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{j}$$

$$۵. \quad \mathbf{T}(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{N}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

$$۷. \quad \mathbf{T}(t) = -\sin kt \mathbf{i} + \cos kt \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{N}(t) = -\cos kt \mathbf{i} - \sin kt \mathbf{j}$$

$$T(t) = -(1 + \cot^{\gamma} t)^{-1/\gamma} \mathbf{i} + (1 + \tan^{\gamma} t)^{-1/\gamma} \mathbf{j}; \quad .۹$$

$$N(t) = \frac{-\cos^{\gamma} t}{\sqrt{\sin^{\gamma} t + \cos^{\gamma} t}} \mathbf{i} - \frac{\sin^{\gamma} t}{\sqrt{\sin^{\gamma} t + \cos^{\gamma} t}} \mathbf{j}$$

$$T(t) = \frac{\gamma t}{\sqrt{\gamma t^{\gamma} + e^{\gamma t}}} \mathbf{i} + \frac{e^t}{\sqrt{\gamma t^{\gamma} + e^{\gamma t}}} \mathbf{j}; \quad .۱۱$$

$$N(t) = \frac{e^t(1-t)}{|t-1|\sqrt{\gamma t^{\gamma} + e^{\gamma t}}} \mathbf{i} + \frac{\gamma t(t-1)}{|t-1|\sqrt{\gamma t^{\gamma} + e^{\gamma t}}} \mathbf{j}$$

$$T(t) = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}; \quad N(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} \quad .۱۳$$

$$\frac{\gamma \gamma}{185} \sqrt{r \gamma} \quad .۱۵$$

$$x = \gamma + \cos s, \quad y = \gamma + \sin s \quad .۱۹$$

$$x = \frac{1}{\gamma} [(\gamma \gamma s + 8)^{\gamma/3} - \gamma], \quad y = \frac{1}{\gamma \gamma} [(\gamma \gamma s + 8)^{\gamma/3} - \gamma]^{\gamma/\gamma} \quad .۲۱$$

$$x = a \left(\frac{\gamma a - \gamma s}{\gamma a} \right)^{\gamma/\gamma}, \quad y = a \left(\frac{\gamma s}{\gamma a} \right)^{\gamma/\gamma} \quad .۲۳$$

$$s = \sqrt{\gamma} (e^t - 1) \quad .۲۵$$

تمرینهای ۹.۱۶

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma}; \quad \gamma \sqrt{\gamma} \quad .۳$$

$$\frac{1}{8} \sqrt{\gamma}; \quad \gamma \sqrt{\gamma} \quad .۱$$

$$\frac{\sqrt{\gamma} |1 - t^{\gamma}|^{\gamma}}{(1 + \gamma t^{\gamma} + t^{\gamma})^{\gamma/\gamma}}; \quad \sqrt{\gamma}; \quad \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma} \quad .۵$$

$$\frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma}; \quad \gamma \sqrt{\gamma} \quad .۹$$

$$\frac{1}{\gamma}; \quad \gamma \quad .۷$$

$$\frac{\gamma}{\gamma 89} \sqrt{1 \gamma}; \quad \frac{1 \gamma}{\gamma} \sqrt{1 \gamma} \quad .۱۳$$

$$\frac{\gamma}{\gamma 9} \sqrt{\gamma}; \quad \frac{\gamma}{\gamma} \sqrt{\gamma} \quad .۱۱$$

$$\frac{1}{5 \gamma 6} (16 x^{\gamma} + 81 y^{\gamma})^{\gamma/\gamma} \quad .۱۷$$

$$\frac{(\gamma - x^{\gamma})^{\gamma/\gamma}}{|x|} \quad .۱۵$$

$$2 \left| a \sin \frac{1}{2} t \right| \cdot 21$$

$$\frac{2(x+y)^{2/3}}{a^{1/3}} \cdot 19$$

$$(-2, -1) \cdot 27$$

$$(3, 9) \cdot 25$$

$$\frac{23}{98} \sqrt{7}; \frac{12}{23} \sqrt{7} \cdot 31$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0 \cdot 29$$

$$2; \frac{1}{2}; \left(0, -\frac{1}{2}\right) \cdot 37$$

$$\frac{1}{16|a|}; 16|a| \cdot 33$$

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^2 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^2 t\right) \cdot 41$$

$$\left(3x + 2p, -\frac{y^2}{2p^2}\right) \cdot 39$$

تمرینهای ۱۰۰۱۶

$$\mathbf{V}(t) = (2t^2 - 2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; A_T(t) = 2t; A_N(t) = 2 \cdot 1$$

$$\mathbf{V}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j}; \cdot 3$$

$$\mathbf{A}(t) = (\cos t - t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t \cos t)\mathbf{j}; A_T(t) = 1; A_N(t) = t$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} - \frac{2}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}; \mathbf{A}\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{2}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}; \cdot 5$$

$$A_T\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0; A_N\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{2}{2}$$

$$\mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = 2\mathbf{j}; \mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}; \cdot 7$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}; |\mathbf{V}(t)| = 2\sqrt{1+t^2};$$

$$A_T(t) = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}; A_N(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}; K(t) = \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}};$$

$$\mathbf{V}(r) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}; \mathbf{T}(r) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}; \mathbf{A}(r) = 2\mathbf{j};$$

$$\mathbf{N}(r) = \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}; |\mathbf{V}(r)| = 2\sqrt{5}; A_T(r) = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$A_N(r) = \frac{2}{\sqrt{5}}; K(r) = \frac{1}{10\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{V}(t) = -15 \sin 3t \mathbf{i} + 15 \cos 3t \mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = -45 \cos 3t \mathbf{i} - 45 \sin 3t \mathbf{j}; \quad ۹$$

$$\mathbf{T}(t) = -\sin 3t \mathbf{i} + \cos 3t \mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = -\cos 3t \mathbf{i} - \sin 3t \mathbf{j};$$

$$|\mathbf{V}(t)| = 15; A_T(t) = 0; A_N(t) = 45; K(t) = \frac{1}{5}; \mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -15\mathbf{j};$$

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 45\mathbf{i}; \mathbf{T}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\mathbf{j}; \mathbf{N}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \mathbf{i}; \left|\mathbf{V}\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = 15$$

$$\mathbf{V}(t) = e^t \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}; \mathbf{A}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}; \quad ۱۱$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{j}; \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{i} + \frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}} \mathbf{j};$$

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{\sqrt{e^{4t}+1}}{e^t}; A_T(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^t \sqrt{e^{4t}+1}}; A_N(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{e^{4t}+1}};$$

$$K(t) = \frac{2e^{2t}}{(e^{4t}+1)^{3/2}}; \mathbf{V}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}; \mathbf{A}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j};$$

$$\mathbf{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}; \mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}; |\mathbf{V}(0)| = \sqrt{2};$$

$$A_T(0) = 0; A_N(0) = \sqrt{2}; K(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{65} \sqrt{65} \text{ (ث)}; \frac{64}{65} \sqrt{65} \text{ (ت)}; 8\mathbf{j} \text{ (ب)}; \mathbf{i} + 8\mathbf{j} \text{ (ب)}; \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \text{ (الف)} \quad ۱۳$$

$$\mathbf{V} = \frac{k}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{k}{\sqrt{2}} \mathbf{j} \text{ اگر } k \text{ سرعت ثابت باشد}; \mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad ۱۵$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}; \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}; \mathbf{A} = \frac{k^2}{16} \mathbf{i} - \frac{k^2}{16} \mathbf{j};$$

$$A_N = \frac{k^2 \sqrt{2}}{16}; A_T = 0$$

تمرینهای مروری فصل ۱۶

$$\sqrt{4594} \approx 67.8 \quad ۳ \quad -25\mathbf{i} + 63\mathbf{j} \quad ۱$$

$$۹۲ \quad ۷ \quad 15\sqrt{2} - 12\sqrt{13} \approx 71.7 \quad ۵$$

$$h = -\frac{1}{\sqrt{2}}; k = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .۱۱ \quad \frac{9}{\sqrt{106}} \mathbf{i} - \frac{5}{\sqrt{106}} \mathbf{j} \quad .۹$$

$$\frac{-38}{\sqrt{50}} \quad .۱۳$$

۱۵. (الف) همه اعداد حقیقی در $[0, +\infty)$ بجز ۱، (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$

$$\frac{-1}{(t+1)^2} \mathbf{i} + \frac{2t^{1/2}-t-1}{2t^{1/2}(t-1)^2} \mathbf{j} \quad (\text{ج})$$

$y = -16$ ؛ $y = 16$ ؛ $x = 12$.۱۹ $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{108t^3}$ ؛ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6t}$.۱۷

$$\frac{3}{2}\sqrt{3v} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3v}) \quad .۲۳ \quad -\frac{2(t^{1/2} + t^{1/2}) + 142(t^2 - 1)^2}{t^2(t^2 - 1)^2} \quad .۲۱$$

$$\frac{75}{2}, \frac{2}{75} \quad .۳۱ \quad |at| \quad .۲۹$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2a} \sec^2 t \csc t \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\tan t \quad .۳۳$$

$$A_N = \frac{2}{\sqrt{25 - 16t + 4t^2}} \quad ; \quad A_T = \frac{-8 + 4t}{\sqrt{25 - 16t + 4t^2}} \quad .۳۵$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{2}{e^t + e^{-t}} \mathbf{i} + \frac{e^{-t} + e^t}{e^t + e^{-t}} \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{T}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \mathbf{i} + \frac{2}{e^t + e^{-t}} \mathbf{j} \quad .۳۷$$

$$y = \frac{1}{3} \left\{ (3s + 17\sqrt{17})^{3/2} - 16 \right\}^{2/3} \quad ; \quad x = 2(3s + 17\sqrt{17})^{3/2} - 32 \quad .۳۹$$

$$h = \frac{1}{2\sqrt{2}} (v_0 \sin \alpha)^2 \quad .۴۱$$

$$\mathbf{A}(t) = 2 \cosh 2t \mathbf{i} + 2 \sinh 2t \mathbf{j} \quad ; \quad \mathbf{V}(t) = 2 \sinh 2t \mathbf{i} + 2 \cosh 2t \mathbf{j} \quad .۴۷$$

$$A_N(t) = \frac{2}{\sqrt{\cosh 4t}} \quad ; \quad A_T(t) = \frac{2 \sinh 2t}{\sqrt{\cosh 4t}} \quad ; \quad |\mathbf{V}(t)| = 2\sqrt{\cosh 4t}$$

تمرینهای ۱۰۱۷

۱. (ب) $(7, 2, 0), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (0, 2, 3), (7, 0, 0), (7, 0, 3)$ ؛
 $(\text{ب}) \sqrt{62}$
۳. (ب) $(2, 1, 2), (-1, 3, 2), (-1, 1, 5), (2, 3, 2), (-1, 3, 5)$ ؛
 $(\text{ب}) \sqrt{22}$
۵. (ب) $(3, -1, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 5), (1, -1, 5)$ ؛
 $(\text{ب}) 3\sqrt{5}$
۷. (الف) ۳؛ (ب) $(2, 5, 5)$ ؛ (الف) ۱۳؛ (ب) $(5, -1, 2)$
۱۱. (الف) $7\sqrt{2}$ ؛ (ب) $(-1, \frac{9}{7}, -\frac{1}{7})$
۱۳. $(\pm 2\sqrt{6}, 2, 2)$
۱۷. (الف) $9\sqrt{2} = |AB|$ ؛ $2\sqrt{62} = |AC|$ ؛ $\sqrt{62} = |\overline{BC}|$ ؛ (ب) نقطه وسط AB ؛
 $(\frac{1}{7}, 1, \frac{3}{7})$ ؛ نقطه وسط AC ؛ $(-1, 2, 5)$ ؛ نقطه وسط BC ؛ $(-\frac{5}{7}, 8, \frac{7}{7})$
۲۱. کره‌ای به مرکز $(-2, -2, 4)$ و شعاع $r=5$
۲۳. نقطه $(0, 0, 3)$
۲۵. مجموعه تهی
۲۷. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$

تمرینهای ۲۰۱۷

۱. $\langle 21, -13, -2 \rangle$
۳. $\langle -25, -26, 5 \rangle$
۵. $7\sqrt{59} - 5\sqrt{41}$
۷. $\sqrt{1326}$
۹. $\langle -19, -16, -1 \rangle$
۱۱. $\langle -6\sqrt{91}, -8\sqrt{91}, -2\sqrt{91} \rangle$
۱۳. $a=b=0$
۲۱. $\frac{8}{\sqrt{89}}, \frac{3}{\sqrt{89}}, \frac{4}{\sqrt{89}}$
۲۳. $-\frac{7}{\sqrt{86}}, -\frac{1}{\sqrt{86}}, -\frac{6}{\sqrt{86}}$
۲۵. $(\frac{13}{3}, 0, -\frac{2}{3})$

$$۲۹. \quad ۷\left(-\frac{۶}{۷}\mathbf{i} + \frac{۲}{۷}\mathbf{j} + \frac{۳}{۷}\mathbf{k}\right) \quad ۳۷. \quad \left(\frac{۱۷}{۳}, \frac{۲}{۳}, -۶\right)$$

$$۳۱. \quad \sqrt{۱۴}\left(-\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{i} + \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{j} - \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}\mathbf{k}\right)$$

$$۳۳. \quad \left\langle \frac{۱}{۹}, \frac{۸}{۹}, \frac{۲}{۹} \right\rangle \quad ۳۵. \quad \left\langle -\frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}} \right\rangle$$

$$۳۷. \quad \cos^{-1}\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) \text{ یا } \cos^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۳}} \quad ۳۹. \quad t=۵, s=-۷, r=۸ \text{ (ب)}$$

تمرینهای ۳.۱۷

$$۱. \quad -۴۲ \quad ۳. \quad -۴۶۸$$

$$۵. \quad -۳۱ \quad ۷. \quad \langle -۸۲, ۱۹۸, ۱۲۴ \rangle$$

$$۹. \quad -\frac{۱۳}{۵۴}\sqrt{۶} \quad ۱۱. \quad (الف) -۳؛ (ب) \langle ۲, ۱, -۲ \rangle$$

$$۱۳. \quad (الف) -\frac{۱۳}{۹}\sqrt{۶}؛ (ب) \left\langle -\frac{۲۶}{۲۷}, -\frac{۹۱}{۲۷}, \frac{۱۳}{۲۷} \right\rangle$$

$$۲۱. \quad \frac{۱}{۱۱}\sqrt{۳۲۲۲} \quad ۲۵. \quad \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} \text{ واحد مربع}$$

$$۲۷. \quad -\frac{۴۳}{۳۰}\sqrt{۶} \quad ۲۹. \quad ۲۵ \text{ فوت برپوند}$$

$$۳۱. \quad \frac{۵}{۳}\sqrt{۶} \text{ فوت برپوند} \quad ۳۳. \quad \frac{۲}{۵}$$

تمرینهای ۴.۱۷

$$۱. \quad x+۲y-۳z+۱=۰ \quad ۳. \quad y-z+۳=۰$$

$$۵. \quad x-۳y-۴z-۳=۰ \quad ۷. \quad ۳x+۲y+۶z=۲۳$$

$$۹. \quad \left\langle -\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, -\frac{۲}{۳} \right\rangle؛ \left\langle \frac{۲}{۳}, -\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳} \right\rangle$$

$$\left\langle -\frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle : \left\langle \frac{4}{13}, \frac{3}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle \quad .11$$

$$\left\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle : \left\langle \frac{3}{\sqrt{13}}, 0, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle \quad .13$$

$$5x - 3y + 7z + 14 = 0 \quad .15$$

$$z = 1, 4y - 3z - 1 = 0 \quad .19$$

$$2x - y - z + 1 = 0 \quad .17$$

$$-\frac{16}{25} \quad .23$$

$$\frac{8}{21} \quad .21$$

$$\frac{3}{2} \quad .27$$

$$\frac{16}{15}\sqrt{6} \quad .25$$

تمرینهای ۵-۱۷

$$z = 1, \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3} \quad ; z = 1, y = 2 - 3t, x = 1 + 4t \quad .1$$

$$\frac{x}{13} = \frac{y}{-12} = \frac{z}{-8} \quad ; z = -8t, y = -12t, x = 13t \quad .3$$

$$\left| ; z = 2 + \frac{13}{4}t, y = -8t, x = -2 + t \right. \quad .5$$

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-16} = \frac{z-3}{13}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-20}{-6} \quad ; z = 20 - 6t, y = -5 + 3t, x = 2 + t \quad .7$$

$$\frac{x-\frac{1}{5}}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-\frac{10}{5}}{13} \quad .9$$

$$13y - 20z + 42 = 0 \quad ; 13x - 5z - 102 = 0 \quad ; 8x - y - 66 = 0 \quad .13$$

$$3y + 4z - 7 = 0 \quad ; 3x - z + 4 = 0 \quad ; 4x + y + 3 = 0 \quad .15$$

$$2x + 7y - 3z + 7 = 0 \quad .19$$

$$\frac{5}{18}\sqrt{6} \quad .17$$

$$(\frac{5}{3}, -\frac{17}{6}, \frac{5}{12}) \cdot 23$$

$$\frac{2}{5}\sqrt{70} \cdot 27$$

$$-290 \cdot 3$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot 19$$

$$9\sqrt{29} \text{ واحد مربع} \cdot 23$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j-k) \cdot 29$$

$$20 \text{ واحد مکعب} \cdot 33$$

$$2x+2y-3z+5=0 \cdot 21$$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-4}{1} \cdot 25$$

تمرینهای ۶۰۱۷

$$\langle 7, 13, -11 \rangle \cdot 1$$

$$\langle 9, -1, -23 \rangle \cdot 11$$

$$\sqrt{89} \text{ واحد مربع} \cdot 21$$

$$5x-2y+7z=0 \cdot 25$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}i+\frac{2}{\sqrt{6}}j+\frac{1}{\sqrt{6}}k \cdot 31$$

$$\frac{38}{3\sqrt{78}} \cdot 35$$

تمرینهای ۷۰۱۷

$$x^2+4y^2+4z^2=16 \cdot 15$$

$$x^2-z^2=2 \text{ محور } z \text{ ها} \cdot 19$$

$$y^2=9x^2 \text{ محور } y \text{ ها} \cdot 23$$

$$x^2+z^2=4y \cdot 13$$

$$y^2+z^2=\sin^2 x \cdot 17$$

$$z=\sqrt{|y|} \text{ محور } y \text{ ها} \cdot 21$$

تمرینهای ۸۰۱۷

$$3 \text{ سهمیوار هذلولوی}$$

$$7 \text{ بیضیوار}$$

$$11 \text{ مخروط بیضوی}$$

$$15 \text{ سهمیوار هذلولوی}$$

$$1 \text{ هذلولیوار بیضوی یکپارچه}$$

$$5 \text{ استوانه هذلولوی}$$

$$9 \text{ هذلولیوار بیضوی یکپارچه}$$

$$13 \text{ سهمیوار بیضوی}$$

$$17 \text{ هذلولیوار بیضوی دوبارچه}$$

$$۱۹. |K| < ۱ \text{ (ب)} ؛ |K| < \sqrt{۲} \text{ (الف)}$$

$$۲۱. \text{ رأس: } (۱, -\frac{1}{۳}, ۰) ؛ \text{ کانون: } (۱, ۰, ۰)$$

$$۲۷. \frac{abh^2}{۲c} \pi \text{ واحد مکعب}$$

$$۲۵. ۸\pi \text{ واحد مکعب}$$

تمرینهای ۹۰۱۷

$$۱. \frac{1}{\sqrt{۴t^2+۵}} (i - ۲tj - ۲k)$$

$$۳. T(t) = \frac{1}{۳} \sqrt{۳} [(\cos t - \sin t)i + (\cos t + \sin t)j + k]$$

$$۵. \frac{1}{\sqrt{۴t^2+۲۹}} [۲(\cos t - t \sin t)i + ۵j + ۲(\sin t + t \cos t)k]$$

$$۹. \sqrt{۳}(e^x - ۱) \quad ۷. \sqrt{۲۱} + \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۲} \ln(۲ + \sqrt{۲۱})$$

$$۱۵. R(t) = ti + e'j + te'k \quad ۱۱. ۱۳$$

$$۱۲. -\frac{۳}{۵}$$

$$۱۹. T(۱) = \frac{1}{1۴} \sqrt{1۴}i + \frac{1}{۷} \sqrt{1۴}j + \frac{۳}{1۴} \sqrt{1۴}k ؛ N(۱) = -\frac{11}{۲۶۶} \sqrt{۲۶۶}i$$

$$-\frac{۲}{1۳۳} \sqrt{۲۶۶}j + \frac{۹}{۲۶۶} \sqrt{۲۶۶}k ؛ B(۱) = \frac{\sqrt{1۹}}{1۹} (۲i - ۳j + k) ؛$$

$$K(۱) = \frac{1}{۹۸} \sqrt{۲۶۶}$$

$$۲۱. T(-۱) = \frac{1}{۳} (i + ۲j - ۲k) ؛ N(-۱) = \frac{۲}{1۵} \sqrt{۵}i - \frac{1}{۳} \sqrt{۵}j - \frac{۲}{1۵} \sqrt{۵}k ؛$$

$$B(-۱) = -\frac{۲}{۵} \sqrt{۵}i - \frac{1}{۵} \sqrt{۵}k ؛ K(-۱) = \frac{۲}{۲۷} \sqrt{۵}$$

$$T(o) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{r}(i+j+k) ; N(o) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{r}(i-j) ; \quad ۲۳$$

$$B(o) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r}(i+j-k) ; K(o) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{r}$$

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pi\right) = -ai + k ; A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pi\right) = -aj ; \left|V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\pi\right)\right| = \sqrt{a^2+1} \quad ۲۵$$

$$V(1) = re^{\sqrt{3}}i - re^{-\sqrt{3}}j + re^{\sqrt{3}}k ; A(1) = re^{\sqrt{3}}i + re^{-\sqrt{3}}j + \lambda e^{\sqrt{3}}k ; \quad ۲۷$$

$$|V(1)| = \sqrt{13e^4 + 2e^{-4}}$$

۲۰۳۱

تمرینهای ۱۰۰۱۷

$$۱. (الف) (o, 3, 5) ; (ب) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r}, -2\right) ; (پ) (\cos 1, \sin 1, 1) \quad ۱$$

$$۳. (الف) (\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}) ; (ب) (o, 2\sqrt{3}, 2) ; (پ) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{r}\right) \quad ۳$$

$$۵. (الف) \left(2, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi, -2\sqrt{3}\right) ; (ب) \left(o, \frac{\sqrt{3}}{2}\pi, -\sqrt{2}\right) \quad ۵$$

$$(پ) (\sqrt{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\pi, \sqrt{6})$$

$$۷. بیضیوار؛ $r^2 + 4z^2 = 16$ \quad ۷$$

$$۹. سهمیوار بیضوی؛ $r^2 = 3z$ \quad ۹$$

$$۱۱. مخروط بیضوی؛ $r^2 \cos 2\theta = 3z^2$ \quad ۱۱$$

$$۱۳. کره؛ $\rho^2 - 9\rho \cos \phi = 0$ \quad ۱۳$$

$$۱۵. استوانه مستدیر قائم؛ $\rho^2 \sin^2 \phi = 9$ \quad ۱۵$$

$$۱۷. کره؛ $\rho = 8 \sin \phi \cos \theta$ \quad ۱۷$$

$$۱۹. (الف) استوانه مستدیر قائم؛ $x^2 + y^2 = 16$; (ب) صفحه ماربر محور z ها؛ \quad ۱۹$$

$$y = x$$

$$۲۱. $x^2 - y^2 = z^2$ \quad ۲۱$$

۲۳. (الف) کره؛ $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ ؛ (ب) صفحهٔ مادر محور z ها؛ $x = y$ ؛

(ب) مخروطی که رأس آن مبدأ است؛ $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

۲۵. استوانهٔ مستدیر قائم؛ $x^2 + y^2 = 36$

۲۷. $x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2y$

۳۱. (ب) $2\pi\sqrt{a^2 + 1}$

تمرینهای مروری فصل ۱۷

۳. محور x ها

۵. دایره‌ای واقع در صفحهٔ xz به مرکز مبدأ و شعاع ۲.

۷. صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ xy که صفحهٔ xy را در خط $y = x$ قطع می‌کند.

۹. جسم دوار حاصل از دوران $yz = 9z$ حول محور z ها.

۱۱. جسم دوار حاصل از دوران $y = x$ حول محور x ها.

۱۳. $16k - 26j + i$

۱۵. -3

۱۷. $7\sqrt{1270}$

۱۹. $\langle 60, -40, 80 \rangle$

۲۱. 16

۲۳. 295

۲۵. $(-3, \sqrt{167}, 1), (-3, -\sqrt{167}, 1)$

۲۷. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 17$

۲۹. $z^2 = e^{2x}$ یا $x^2 = e^{2y}$ ؛ محور y

۳۱. 3

۳۳. (الف) $\cos \alpha = -\frac{7}{\sqrt{78}}$ ، $\cos \beta = -\frac{5}{\sqrt{78}}$ ، $\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{78}}$ ؛

(ب) $-\frac{7}{\sqrt{78}}i - \frac{5}{\sqrt{78}}j - \frac{2}{\sqrt{78}}k$

۳۵. (الف) $-\frac{4}{5}\sqrt{3}$ ؛ (ب) $-\frac{4}{5}k + \frac{4}{25}j + \frac{28}{25}i$

$$\frac{47}{10}\sqrt{2} \cdot 39 \quad x - 6y - 10z + 23 = 0 \cdot 37$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 43 \quad 3 \cdot 41$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1} ; x = 4t, y = -3t, z = t \cdot 45$$

$$24 \cdot 51 \text{ واحد مکعب} \quad \frac{54}{25}\pi \cdot 49 \text{ واحد مربع}$$

$$\frac{25}{4} [\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)] \cdot 53$$

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} ; \left|\mathbf{V}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 + \pi^2} ; \cdot 55$$

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right) = -2\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right) = -\frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j} ; \mathbf{N}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right) = -\mathbf{k} ; \cdot 57$$

$$\mathbf{B}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2}, \pi, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cdot 59$$

$$r^2(25 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta) = 100 \text{ (ب)} ; z = r^2(1 + \sin^2 \theta) + 1 \text{ (الف)} \cdot 61$$

تمرینهای ۱۰۱۸

$$1. \text{ (الف)} -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \text{ (ب)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} ; \text{ (پ)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + y^2} ; \text{ (ت)} 0 ;$$

(ث) مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 بجز نقاطی که روی خط $x = y$ هستند؛
(ج) $(-\infty, +\infty)$.

۳. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که در داخل و روی محیط دایره $x^2 + y^2 = 25$ واقع اند؛ برد: $[0, 5]$.

۵. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که در داخل و روی محیط دایره $x^2 + y^2 = 25$ واقع اند بجز نقاط روی خط $x = 0$ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۷. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که در داخل و روی محیط دایره $x^2 + y^2 = 25$ واقع اند و نیز تمام نقاط روی محور y ها؛ برد: $[0, 5]$.
۹. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که در داخل دایره $x^2 + y^2 = 25$ واقع اند و تمام نقاط روی محور y ها بجز نقاط $(0, 5)$ و $(0, -5)$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۱۱. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 بجز نقاط واقع بر $x = y$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۱۳. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 بجز نقاط واقع بر محور x ها؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۱۵. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 به طوری که $xy > 1$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۱۷. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y, z) در R^3 واقع در روی و بالای صفحه $z = 2$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.
۱۹. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y, z) در R^3 که $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ ؛ برد: $(-\pi, 2\pi)$.
۲۱. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 ؛ برد: $[0, +\infty)$.
۲۳. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 ؛ برد: $(-\infty, 16]$.
۲۵. قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که $x + y^2 \leq 10$ ؛ برد: $[0, +\infty)$.
۳۳. $h(x, y) = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ؛ قلمرو: مجموعه تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 که داخل و روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ واقع اند.
۳۵. (الف) ۲؛ (ب) ۶؛ (پ) $\sqrt{x - y^2}$ ؛ (ت) $|x - y|$ ؛ (ث) $|x - y|$.

تمرینهای ۲۰۱۸

$$۰.۱ \quad ۱۲.۳$$

$$۲.۵ \quad \frac{1}{2}.۷$$

$$۰.۹ \quad \delta = \frac{1}{7}\varepsilon \quad ۱۱.۱ \quad \delta = \frac{1}{5}\varepsilon$$

$$۰.۱۳ \quad \delta = \min\left(1, \frac{1}{6}\varepsilon\right) \quad ۱۵.۱ \quad \delta = \min\left(1, \frac{1}{8}\varepsilon\right)$$

$$۰.۲۳ \quad ۰.۲۵$$

$$۰.۲۷ \quad \frac{1}{4}\pi \quad ۲۹.۱ \quad \frac{1}{2}$$

$$۳۱.۳ \quad \text{حد وجود دارد و برابر } ۰ \text{ است؛ فرض کنید } \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

$$۳۳.۳ \quad \text{حد وجود ندارد.}$$

$$۳۵.۳ \quad \text{حد وجود دارد و برابر } ۰ \text{ است؛ فرض کنید } \delta = \frac{1}{4}\varepsilon$$

$$۳۹.۳ \quad \frac{1}{2} \quad ۴۱.۴ \quad \frac{1}{2}$$

تمرینهای ۳۰۱۸

$$۱. \quad \text{در هر نقطه } (x, y) \text{ واقع در } R^2, \text{ بجز نقاط روی خط } y=1, \text{ پیوسته است.}$$

$$۳. \quad \text{در هر نقطه } (x, y) \text{ واقع در } R^2, \text{ بجز نقاط روی محور } y\text{ها، پیوسته است.}$$

$$۵. \quad \text{در هر نقطه } (x, y) \text{ واقع در } R^2, \text{ بجز نقاط روی خط } y=2x, \text{ پیوسته است.}$$

$$۷. \quad \text{در هر نقطه } (x, y) \text{ واقع در } R^2 \text{ که داخل دایره } x^2 + y^2 = 25 \text{ باشد، پیوسته است.}$$

$$۹. \quad \text{در هر نقطه } R^2 \text{ پیوسته است.}$$

$$۱۱. \quad \text{در هر نقطه } (0, 0) \neq (x, y) \text{ واقع در } R^2 \text{ پیوسته است.}$$

$$۱۳. \quad \text{در هر نقطه } R^2 \text{ پیوسته است.}$$

$$۱۷. \quad \text{تمام نقاطی چون } (x, y) \text{ در } R^2 \text{ که داخل دایره } x^2 + y^2 = 16 \text{ باشند.}$$

۱۹. تمام نقاطی چون (x, y) در R^2 که خارج بیضی $36 = 4x^2 + 9y^2$ باشند.
۲۱. تمام نقاطی چون (x, y) در R^2 به طوری که $|xy| \geq 1$.
۲۳. تمام نقاطی چون (x, y) در R^2 واقع در ربع اول و سوم به طوری که $|x+y| \leq 1$.
۲۵. تمام نقاط R^2
۲۷. رفع شدنی؛ $f(0, 0) = 0$
۲۹. اساسی
۳۱. رفع شدنی؛ $f(0, 0) = 0$
۳۵. در هر نقطه (x, y, z) در R^3 که خارج کره $1 = x^2 + y^2 + z^2$ باشد، پیوسته است.
۳۷. در تمام نقاط R^3 پیوسته است.

تمرینهای ۴۰۱۸

۱. ۶
۳. $3x - 2y$
۵. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
۷. $x^2 - 6xy + 2z$
۹. $xy + yt + zt$
۱۱. ۴
۱۳. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
۱۵. $-2 \sin^2 \theta \sin 2\phi$
۱۷. $\frac{e^{y/z}}{xy} \left(y \ln \frac{x^2}{y} - x \right)$
۱۹. $\frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
۲۱. $2xy + \frac{1}{z}$
۲۳. $xze^{xyz} + \frac{3xz^2}{z^4 + 9x^2y^2}$
۲۵. (الف) ۱-؛ (ب) ۱۲
۲۷. $-\ln \sin x; \ln \sin y$
۲۹. (الف) ۱؛ (ب) ۱
۳۱. (الف) ۱-؛ (ب) ۰
۳۳. (الف) ۲-؛ (ب) ۰
۳۵. ۲
۳۷. ۲- درجه برسانتیمتر؛ ۸- درجه برسانتیمتر

$$\frac{1}{0.00036} \left[\frac{1.052}{(1.006)^8} - 1 \right] \approx -2222 \text{ (ب)} ; \frac{100}{i^2} \left[\frac{9i+1}{(1+i)^8} - 1 \right] \text{ (الف) } ۳۹$$

$$-\frac{5000 \ln 1.006}{3(1.006)^8} \approx -61 \text{ (ت)} ; \frac{5000 \ln 1.006}{3(1.006)^8} \text{ (پ)}$$

تمرینهای ۵۰۱۸

$$۱. \text{ (الف) } 3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y)^2 + 14\Delta x - 6\Delta y \text{ (ب) } ۵۴۱۱ \text{ (پ) } 14\Delta x - 6\Delta y \text{ (ت) } ۵۴$$

$$۳. \text{ (الف) } (2+\Delta x)(-4+\Delta y)e^{(2+\Delta x)(-4+\Delta y)} + 8e^{-8} \text{ (ب) } -۵۵۵۲۶ \text{ (پ) } 28e^{-8}\Delta x - 14e^{-8}\Delta y \text{ (ت) } -۵۵۵۱۹$$

$$۵. \text{ (الف) } \Delta x + 2\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + \ln(1+\Delta y) + \ln(5+\Delta z) - \ln 5 \text{ (ب) } ۲۱۴۱ \text{ (پ) } \Delta x + 5\Delta y + \frac{1}{5}\Delta z \text{ (ت) } ۲۱۴$$

$$۷. (12x^2 - y^2) dx + (3 - 2xy) dy$$

$$۹. (\cos y - y \cos x) dx + (-x \sin y - \sin x) dy$$

$$۱۱. \frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$۱۳. \tan^{-1} z dx - \frac{2y}{z} dy + \left(\frac{x}{1+z^2} + \frac{y^2}{z^3} \right) dz$$

$$۱۵. \text{ (الف)}$$

$$2(x_0 y_0 - y_0) \Delta x + (x_0^2 - 2x_0) \Delta y + (y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y) \Delta x + 2(x_0 \Delta x - \Delta x) \Delta y$$

$$\varepsilon_2 = 2(x_0 \Delta x - \Delta x) \quad ; \quad \varepsilon_1 = y_0 \Delta x + \Delta x \Delta y \text{ (ب)}$$

$$۱۷. \text{ (الف) } ; \frac{2x_0 y_0 \Delta x + y_0 (\Delta x)^2 - x_0^2 \Delta y}{y_0^2 + y_0 \Delta y}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{x_0^2 \Delta y - 2x_0 y_0 \Delta x}{y_0^2 + y_0^2 \Delta y} \quad ; \quad \varepsilon_1 = \frac{y_0^2 \Delta x}{y_0^2 + y_0^2 \Delta y} \text{ (ب)}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{3} \sqrt{156} \quad ۲۵$$

$$\xi_2 = \sqrt{5} - 1 \quad ۲۷$$

$$(y_0 - z_0)\Delta x + x_0\Delta y + (yz_0 - x_0)\Delta z - (\Delta z)(\Delta x) \quad ۳۱$$

$$+ (\Delta x)(\Delta y) + (\Delta z)(\Delta z);$$

$$\varepsilon_2 = \Delta z, \varepsilon_3 = \Delta x, \varepsilon_1 = -\Delta z \quad (\text{ب})$$

$$۳۵ \quad ۷۳۶ \text{ مترمکعب} \quad ۳۷ \quad ۱۲۵ \text{ سانتیمتر}؛ ۱۴\%$$

$$۳۹ \quad ۳۲۵\%؛ \frac{۱۳}{۱۶۰۰} \quad ۴۱ \quad ۲۴۰۰ \text{ دلار}$$

$$D_{\backslash} f(x, y) \quad ۴۳$$

$$= \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & xy = (0, 0) \end{cases}$$

$$D_{\backslash} f(x, y)$$

$$= \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تمرینهای ۶۰۱۸

$$۱ \quad \frac{\partial u}{\partial r} : (\text{الف}) 6x - 2y ; (\text{ب}) 16r - 10s$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} : (\text{الف}) -2x - 4y ; (\text{ب}) -10r - 6s$$

$$۳ \quad \frac{\partial u}{\partial r} : (\text{الف}) 13x - 2y + 5 ; (\text{ب}) 24r - 21s + 5$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} : (\text{الف}) -17x - 7y - 10 ; (\text{ب}) -41r + 44s - 10$$

$$۵ \quad \frac{\partial u}{\partial r} : (\text{الف}) \frac{2e^{y/x}}{x^2} (2x \sin t - y \cos t) ; (\text{ب}) 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} : (\text{الف}) \frac{2re^{y/x}}{x^2} (y \sin t + 2x \cos t) ; (\text{ب}) 2e^{\gamma \tan t} \sec^2 t$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r(r(x+y) + r^2); \quad \frac{\partial u}{\partial s} = rs(r(x+y) - r^2) \quad .۷$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{re^s + s \cos rs}{\sqrt{1 - (r(x+y))^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{r^2 e^s + r \cos rs}{\sqrt{1 - (r(x+y))^2}} \quad .۹$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{rs}{x^2} \sinh \frac{y}{x} (xe^r - ry); \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{r}{x^2} \sinh \frac{y}{x} (rxe^r - yr^2) = 0 \quad .۱۱$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = rx \sin \phi \cos \theta + ry \sin \phi \sin \theta + rz \cos \phi \quad .۱۳$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = rxr \cos \phi \cos \theta + yrr \cos \phi \sin \theta - zr \sin \phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -rxr \sin \phi \sin \theta + yrr \sin \phi \cos \theta$$

$$: e^x (\cos t - y \sin t) + e^y (x \cos t - \sin t) \quad (\text{الف}) \quad .۱۵$$

$$e^{\cos t} (\cos t - \sin^2 t) + e^{\sin t} (\cos^2 t - \sin t) \quad (\text{ب})$$

$$\tan t \sec t \quad (\text{ب}) : \frac{x \sec^2 t - y \sin t + z \cos t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (\text{الف}) \quad .۱۷$$

$$\frac{txe^t - y}{t(x^2 + y^2)} \quad .۱۹$$

$$\frac{x + y + zt + ty - tx}{t(y+t)^2} \quad .۲۱$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ry - rx - rz}{rz + rx}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{rx - ry}{rz + rx} \quad .۲۳$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xyz + 1}{rxy \tan rzx - xy^2} \quad .۲۵$$

$$: \frac{\partial u}{\partial v} = \cos w \sinh v \frac{\partial u}{\partial x} + \sin w \cosh v \frac{\partial u}{\partial y} \quad .۲۱$$

$$\frac{\partial u}{\partial w} = -\sin w \cosh v \frac{\partial u}{\partial x} + \cos w \sinh v \frac{\partial u}{\partial y}$$

۳۳. با آهنگ $\frac{8}{61}$ رادیان بر دقیقه کاهش می یابد.

۳۵. با آهنگ 3840π سانتیمتر مکعب بر دقیقه افزایش می یابد.

۳۷. با آهنگ ۱۶ سانتیمتر مکعب بر دقیقه افزایش می یابد.

تمرینهای ۷۰۱۸

۱. (الف) $\frac{y}{x^4} - \frac{6y}{y}$ ؛ (ب) $\frac{2x^2}{y^3}$

۳. (الف) $4e^{2x} \sin y$ ؛ (ب) $-e^{2x} \sin y$

۵. (الف) $2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ؛ (ب) $2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

۷. (الف) $3y \cosh x$ ؛ (ب) $4x \sinh y$

۹. (الف) $e^x \cos y - \frac{2x \ln y}{(1+x^2)^2}$ ؛ (ب) $-e^x \cos y - \frac{\tan^{-1} x}{y^2}$

۱۱. (الف) $12x + 20y$ ؛ (ب) $12x + 20y$

۱۳. (الف) ۰ ؛ (ب) e^x

۱۵. (الف) $-2e^z \sin e^z$ ؛ (ب) $-2we^z(\sin e^z + e^z \cos e^z)$

۱۷. (الف) $\frac{-320rst}{(r^2 + 4s^2 - 4t^2)^2}$ ؛ (ب) $\frac{16r(4t^2 + 12s^2 - r^2)}{(r^2 + 4s^2 - 4t^2)^3}$

۲۵. هیچیک وجود ندارند.

۲۷. $f_{12}(0, 0) = -1$ ؛ $f_{21}(0, 0) = 1$

۳۱. $6se^{r-s}(2+r) - 8e^{-2s}$

۳۳. $10 \cos^2 \theta + 8$

۳۵. $-10r \sin 2\theta$

تمرینهای مروری فصل ۱۸

$$.۱ \quad \frac{2x}{3y^2}; \frac{y-2x^2}{3y^3}; -\frac{2x}{3y^3}$$

$$.۳ \quad t^2 \cos st^2 + te^2; 2st \cos st^2 + e^2; 2t(\cos st^2 - st^2 \sin st^2) + e^2$$

$$.۵ \quad \frac{1}{uw^2}; -\frac{2}{uw^3}; \frac{2}{u^2w^3}$$

.۷ (الف)

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{2y(x-y)}{x^2+y^2} - 2 \ln(x^2+y^2) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2y(x+y)}{x^2+y^2} + 3 \ln(x^2+y^2)$$

$$; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = (3t-2s) \frac{18t}{4s^2+9t^2} + 3 \ln(4s^2+18t^2) \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (3t-2s) \frac{8s}{4s^2+9t^2} - 2 \ln(4s^2+18t^2)$$

$$.۹ \quad (\text{الف}) \quad 18xyse^{rrs} + 6yse^{rrs} + 9x^2r^2s^2 + 6xr^2s^2 - 9zr^2s^2$$

$$(\text{ب}) \quad 6r^3s^2e^{rrs}(3e^{rrs}+1) + 3r^2s^2(3e^{rrs}+2e^{rrs}-3 \ln 2)$$

$$.۱۱ \quad (\text{الف}) \quad 3x \cos t - 2(y+2x) \sin t$$

$$(\text{ب}) \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=\pi/4} = -16 \quad ; \quad 12 \cos 2t - 16 \sin 2t$$

$$.۱۳ \quad (\text{الف}) \quad 3(-1+\Delta x)(3+\Delta y)^2 - 5(-1+\Delta x)(2+\Delta z)^2$$

$$; \quad -2(-1+\Delta x)(3+\Delta y)(2+\Delta z) - 5$$

$$(\text{ب}) \quad -0.47; \quad (\text{پ}) \quad -5\Delta x - 14\Delta y + 26\Delta z \quad (\text{ت}) \quad -0.48$$

$$.۱۵ \quad \text{قلمرو: مجموعه تمام نقاطی چون } (x, y) \text{ در } R^2 \text{ به طوری که } |x| \geq |y|$$

$$\text{برد: } \left[0, \frac{1}{2}\pi \right)$$

$$.۱۷ \quad \text{قلمرو: تمام نقاطی از } R^2 \text{ که داخل بیضی } 4x^2 + y^2 = 36 \text{ هستند و تمام نقاطی}$$

$$\text{چون } (x, y) \text{ در } R^2 \text{ که روی محور } y \text{ ها قرار دارند؛ برد: } (-\infty, +\infty).$$

$$.۱۹ \quad \text{قلمرو: تمام نقاطی مانند } (x, y, z) \text{ در } R^3 \text{ به طوری که } z > 0$$

$$\text{برد: } (-\infty, +\infty).$$

۲۱. قلمرو: تمام نقاط (x, y, z) در R^3 بجز نقاطی که $y = \pm z$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$.

$$۲۳. (الف) -۲؛ (ب) \frac{5}{3}؛ (پ) \frac{2}{3}y(x^2+1)؛ (ت) \frac{4x^2+9y^2}{4x^2}$$

$$۲۵. \frac{1}{6}\pi$$

$$۲۷. \delta = \min\left(1, \frac{1}{35}\varepsilon\right)$$

۲۹. حد وجود دارد و برابر با ۰ است؛ فرض کنید $\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$

۳۱. حد وجود ندارد.

۳۳. روی تمام نقاط R^2 بجز نقاط روی خطوط $x = \pm 2y$ پیوسته است.

۳۵. روی تمام نقاط R^2 بجز نقاطی به صورت $(x, y) = (2n+1, 2m+1)$ ، که در آن n و m اعداد صحیح دلخواهی هستند، پیوسته است.

۳۷. روی تمام نقاطی مانند (x, y) در R^2 پیوسته است.

$$۳۹. (الف) ۱۲؛ (ب) -۳$$

$$۴۳. ۳۹ \text{ سنت}$$

$$۴۵. ۳۲۰۰\pi - \text{مترمکعب در دقیقه}$$

$$۴۷. -\frac{201}{1280} \text{ نیوتن برسانتیمترمربع در دقیقه.}$$

تمرینهای ۱۰۱۹

$$۱. 4\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y \quad ۳. 3x + \sqrt{2}y + 4z$$

$$۵. \frac{17}{13(x-y)^2} \quad ۷. (8x-3y)\mathbf{i} + (2y-3x)\mathbf{j}$$

$$۹. \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j} \quad ۱۱. \frac{y+z}{(x+z)^2}\mathbf{i} - \frac{1}{x+z}\mathbf{j} - \frac{x-y}{(x+z)^2}\mathbf{k}$$

$$۱۳. e^{-2y} \sec z (\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + x \tan z \mathbf{k})$$

$$-۴۲.۱۷ \quad ۶.۱۵$$

$$-۳e^{\pi/۴} \cos \frac{1}{1۲} \pi.۲۱ \quad -۲.۱۹$$

$$-۲-۲\sqrt{۳} \text{ (ب) } \langle -۲, -۲ \rangle \text{ (الف) } .۲۳$$

$$\frac{۳}{۲۰} \pi + \frac{۲}{۵}; \frac{1}{۴} \sqrt{\pi^2 + ۲}.۲۹ \quad \frac{۶}{۷} \text{ (ب) } \langle -۱۲, ۲, ۱۲ \rangle \text{ (الف) } .۲۵$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{۳}{۳\pi + 1}.۳۳ \quad -\frac{۲۹}{۱۱}; \sqrt{۲۱}.۳۱$$

$$\frac{1}{\sqrt{۲}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{۲}} \mathbf{j} \text{ (ب) جهت بردار } ۶\sqrt{۲} \text{ درجه در متر؛ (الف) } .۳۵$$

$$۲ \text{ (الف) } -۱ \text{؛ (ب) جهت بردار } -\mathbf{j} \text{ و بزرگی } ۲ .۳۷$$

تمرینهای ۲۰۱۹

$$۲x - ۲y + ۳z = ۱۷; \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{-۲} = \frac{z-۳}{۳} .۱$$

$$۲x + ۸y + ۳z + ۲۲ = ۰; \frac{x+۲}{۲} = \frac{y+۲}{۸} = \frac{z-۶}{۳} .۳$$

$$ex - y = ۰; \frac{x-1}{-e} = \frac{y-e}{1}, z = ۰ .۵$$

$$x - y - ۳ = ۰; \frac{x-۶}{1} = \frac{y-۳}{-1}, z = ۳ .۷$$

$$x + ۲y + ۲z - ۸ = ۰; \frac{x-۴}{1} = \frac{y-1}{۲} = \frac{z-1}{۲} .۹$$

$$۳x - ۲y - ۶z + ۸۴ = ۰; \frac{x+۸}{-۳} = \frac{y-۲۷}{۲} = \frac{z-1}{۶} .۱۱$$

$$x = ۲, y = ۱۶.۱۵ \quad \frac{x-۲}{۲} = \frac{y+۲}{-1} = \frac{z}{۲۰}.۱۳$$

$$۱۹. \text{ رویه‌ها مماس‌اند} \quad \frac{x}{1-۸\pi} = \frac{y-۲}{-۲\pi} = \frac{z-1}{-1}.۱۷$$

تمرینهای ۳۰۱۹

۱. $f\left(2, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{133}{4}$ ، مینیمم نسبی

۳. $f\left(-\frac{1}{4}, 16\right) = -12$ ، ماکسیمم نسبی

۵. اکسترم نسبی ندارد

۷. اکسترم نسبی ندارد

۹. $f(1, 1) = -5$ ، مینیمم نسبی؛ $f(-1, -3) = 31$ ، ماکسیمم نسبی

۱۱. $f\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$ ، مینیمم نسبی

۱۳. ۸، ۸، ۸

۱۵. $l : w : h = 1 : 1 : \frac{1}{2}$ ۱۷. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ واحد مکعب

۱۹. $\left(\frac{41}{14}, -\frac{5}{7}, \frac{33}{14}\right)$

۲۱. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ و $\left(0, \frac{1}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$ ؛ ۱

۲۳. طول قاعده $\frac{2}{3}$ فوت؛ عرض قاعده ۲ فوت؛ عمق ۳ فوت.

۲۵. ۳ ماشین-ساعت و ۹ شخص-ساعت. ۴۷. ۲۰۰۰ دلار

تمرینهای ۴۰۱۹

۱. $(0, 4)$ و $(0, 0)$

۳. $\left(\frac{6}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$

۵. $f(0, 3) = f\left(\pm \frac{1}{4}\sqrt{35}, \frac{1}{4}\right) = 3$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(0, -3) = -3$ ، مینیمم نسبی.

$$\begin{aligned} ۷. \text{مینیمم نسبی،} \quad f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) &= f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ماکسیمم نسبی،} \quad f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) &= f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \\ &= f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \\ &= f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$۳\sqrt{3} \quad ۹. ۳$$

$$\frac{4}{13}\sqrt{26} \quad ۱۵. ۱۳ \quad \text{(الف) ۱۲؛ (ب) ۴؛ (پ) ۱}$$

$$\frac{37}{13} \quad ۱۹. ۶، ۲$$

$$\frac{7}{32} \quad ۲۱.$$

$$۳۳. \text{گرمترین نقطه،} \left(\pm\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{1}{4}\right)؛ \text{سردترین نقطه،} \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

تمرینهای ۵۰۱۹

$$۱. f(x, y) = 2x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C$$

$$۳. f(x, y) = 3x^2 - 5xy + 2y^3 + C$$

$$۵. f(x, y) = 2x^3y^2 - 7x^2y + 3x - 8y + C$$

$$۷. \text{يك گراديان نيست}$$

$$f(x, y) = \frac{2x^2 - 2y^2 - x}{2xy^2} + C \quad ۹.$$

$$f(x, y) = x^2 \cos y - x + C \quad ۱۱.$$

$$f(x, y) = x^2 \sec 2y + C \quad ۱۳.$$

$$f(x, y) = xe^y - x^2 y + C \quad ۱۵.$$

$$f(x, y, z) = 2xy - 5xz + 8yz + C \quad ۱۷.$$

$$f(x, y, z) = xe^y \sin z + C \quad ۱۹.$$

$$f(x, y, z) = 2x^2 y + 3xyz - 5yz^2 - 2x + z + C \quad ۲۱.$$

$$f(x, y, z) = xz \tan y + C \quad ۲۳.$$

$$f(x, y, z) = e^{x+z} + e^y \ln z - e^z \ln y + C \quad ۲۵.$$

تمرینهای ۶۰۱۹

$$\frac{4}{3} \quad ۳.$$

$$\frac{16}{3} \quad ۱.$$

$$\frac{1277}{2} \quad ۷.$$

$$-\frac{5}{12} \quad ۵.$$

$$\pi - \frac{1}{3} \quad ۱۱.$$

$$1 \quad ۹.$$

$$\frac{11}{6} \quad ۱۵.$$

$$8\pi \quad ۱۳.$$

$$\pi(a^2 + 2a) \quad ۱۹.$$

$$\frac{35}{2} \quad ۱۷.$$

$$\frac{4}{3} \text{ ذول} \quad ۲۳.$$

$$8 \quad ۲۱.$$

$$27 \frac{3}{4} \text{ ذول} \quad ۲۷.$$

$$20 \frac{3}{4} \text{ ذول} \quad ۲۵.$$

$$3 \text{ ذول} \quad ۳۱.$$

$$\left(\frac{1}{16}\pi a^2 + a^2\right) \text{ ذول} \quad ۲۹.$$

$$۳۳. (e^x + e^y + e^z - 3) \text{ دال} \quad ۳۵. 2\frac{1}{y} \text{ دال}$$

تمرینهای ۷۰۱۹

$$۱. \phi(x, y) = xy + C$$

$$۳. \phi(x, y) = e^x \sin y + C$$

$$۵. \phi(x, y) = x^y y^x - xy^x + 2y + C$$

$$۷. \phi(x, y, z) = \frac{1}{3}x^y + \frac{1}{y}z^y - xy + 3yz + C$$

$$۹. \phi(x, y, z) = x^y \cos y - yz^x - 3x + 2z + C$$

$$۱۱. 2 \quad ۱۳. e^x$$

$$۱۵. -2 \quad ۱۷. 15$$

$$۱۹. -14 \quad ۲۱. \frac{13}{2}$$

$$۲۳. 4 \quad ۲۵. 0$$

$$۲۷. 3 \quad ۲۹. 2$$

تمرینهای مروری فصل ۱۹

$$۱. 14 \quad ۳. -\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$۵. -\frac{8}{3}$$

$$۷. (الف) \frac{1}{y}i + \frac{1}{y}j ; (ب) \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})$$

$$۹. (الف) 12i + 3j - 4k ; (ب) \frac{13}{y}\sqrt{14}$$

$$۱۱. f(x, y) = e^{xy} \ln y + C$$

$$۱۳. f(x, y, z) = \frac{y}{x+z} - \frac{1}{x} - \frac{2}{z} + C$$

$$2x + 2y + z - 12 = 0; \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad ۱۵$$

$$\frac{x-1}{17} = \frac{y+2}{20} = \frac{z-11}{-4} \quad ۱۷$$

۱۹. (الف) درجهت بردار $150j - 12i$; (ب) صعودی؛ (پ) درجهت بردار

$$-\frac{25}{\sqrt{629}}i + \frac{2}{\sqrt{629}}j \quad \text{یا} \quad \frac{25}{\sqrt{629}}i - \frac{2}{\sqrt{629}}j$$

۲۱. $f(-1, -1) = 1$ ، ماکسیمم نسبی

۲۳. $f(\pm\sqrt{5}, 0) = 10$ ، مینیمم نسبی

۲۵. $f(9, 11, 15) = -362$ ، ماکسیمم نسبی

۲۹. $\frac{24}{3} - 3\pi$

۲۷. $\frac{7}{6}\sqrt{6}$

۳۳. $\frac{1568}{15}$ ژول

۳۱. $\frac{27}{10}$

۳۷. $9e^2 - 1$

۳۵. $\frac{23}{6}$ ژول

۴۱. $2\sqrt{3}$ در $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ در $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

۳۹. ۱۳

۴۳. (الف) $-\frac{2\sqrt{3}+2}{11}$ درجه بر سانتیمتر؛ (ب) $\frac{2}{11}\sqrt{13}$ درجه بر سانتیمتر در جهت

بردار $-\frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$

۴۵. $f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ ، ماکسیمم نسبی؛

$f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ ، مینیمم نسبی

۴۷. $\phi(x, y, z) = y^2 e^{3z} + z^2 \tan x + C$

۴۹. قاعده، مربع و ارتفاع، نصف يك ضلع قاعده. ۵۱. $\frac{1}{2}\pi$

تمرینهای ۱۰۲۰

- | | |
|--------------|--|
| ۵۰ .۳ | ۲۵ .۱ |
| ۷۰۴ .۷ | ۱۳۶۸ .۵ |
| ۱۳۷۶ .۱۱ | $\frac{۲۰۳}{۲}$.۹ |
| ۳۸۷۲ .۱۵ | ۶۸۷۶ .۱۳ |
| $[1, e]$.۱۹ | $[0, ۲۴]$.۱۷ |
| | $\left[0, \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}\pi^۲\right]$.۲۱ |

تمرینهای ۲۰۲۰

- | | |
|--|--------------------------------|
| $\frac{۹۸}{۳}$.۳ | ۲۲ .۱ |
| $\frac{۱}{۳}$.۷ | $-\frac{۴۹}{۵}$.۵ |
| ۴۵ .۱۱ | $\frac{۱}{۳}$.۹ |
| $\frac{۳}{۲}\pi$.۱۵ | $\frac{۱۵۲}{۳}$.۱۳ |
| $\frac{۵۱۲}{۳}$ واحد مکعب .۱۹ | $\frac{۸۶۴}{۲}$.۱۷ |
| $\frac{۱۵\pi - ۳۲}{۱۲۰}$ واحد مکعب .۲۳ | $\frac{۱۶}{۳}$ واحد مکعب .۲۱ |
| ۷۲ واحد مربع .۲۷ | $\frac{۱}{۱۲}$ واحد مربع .۲۵ |
| $\frac{c}{ab} \int_{-a}^a \int_{-(b/a)\sqrt{a^2-x^2}}^{(b/a)\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2} dy dx$.۲۹ | |
| | $\frac{۳۳۷}{۳۰}$ واحد مکعب .۳۱ |

$$۳۳. (ب) \frac{2}{3} a^3 ; (پ) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (2x+y) dx dy$$

۰.۳۵

تمرینهای ۳۰۲۰

$$۱. ۱۲ \text{ کیلو گرم}; \left(2, \frac{3}{2}\right) \quad ۳. \frac{27}{2} \text{ کیلو گرم}; \left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

$$۵. \frac{176}{15} \text{ کیلو گرم}; \left(\frac{35}{22}, \frac{102}{77}\right)$$

$$۷. \frac{2}{3} k a^3 \text{ کیلو گرم}; \left(\frac{3}{32} a(2+\pi), \frac{3}{32} a(2+\pi)\right)$$

$$۹. \frac{1}{4} k \pi \text{ کیلو گرم}; \left(\frac{\pi}{2}, \frac{16}{9\pi}\right) \quad ۱۱. \frac{4}{3} \text{ کیلو گرم}; \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$۱۳. ۹\rho \text{ کیلو گرم-متر مربع} \quad ۱۵. \frac{1}{4} \pi \rho a^4 \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

$$۱۷. \frac{96}{35} \rho \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

$$۱۹. (الف) \frac{144}{5} \text{ کیلو گرم-متر مربع}; (ب) ۵۲ \text{ کیلو گرم-متر مربع};$$

$$(پ) \frac{2}{5} \sqrt{15} \text{ متر}; (ت) \frac{414}{5} \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

$$۲۱. (الف) \frac{3}{32} \pi k \text{ کیلو گرم-متر مربع}; (ب) k(2\pi^2 - 3) \frac{1}{24} \pi \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

$$(پ) \frac{1}{4} \sqrt{6} \text{ متر}; (ت) k\left(\frac{1}{12} \pi^3 - \frac{1}{32}\right) \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

$$۲۳. \frac{1}{12} b \sqrt{6} \text{ فوت}$$

$$۲۵. \frac{19904}{315} k \text{ کیلو گرم-متر مربع}$$

تمرینهای ۴۰۲۰

۱. 6π واحد مربع
 ۳. $\frac{1}{4}a^2(8+\pi)$ واحد مربع
 ۵. $(4\pi+12\sqrt{3})$ واحد مربع
 ۷. 4π واحد مکعب
 ۹. $\frac{128}{9}(3\pi-4)$ واحد مکعب
 ۱۱. $\frac{7}{4}\pi$ واحد مکعب
 ۱۳. $\frac{40}{3}\pi k$ کیلو گرم؛ $(0, \frac{21}{10})$
 ۱۵. $\frac{22}{3}k\pi$ کیلو گرم؛ $(-\frac{57}{44}, 0)$
 ۱۷. $\frac{20}{3}k$ کیلو گرم؛ $(\frac{23}{25}, \frac{531}{1280}\pi)$
 ۱۹. $\frac{112}{3}\pi k$ کیلو گرم؛ $(0, -\frac{24}{7})$
 ۲۱. $\frac{5}{64}k\pi$ کیلو گرم-متر مربع
 ۲۳. $\frac{11}{16}k\pi a^4$ کیلو گرم-متر مربع
 ۲۵. $\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ متر
 ۲۷. $\pi e(e^8-1)$

تمرینهای ۵۰۲۰

۱. $\sqrt{6}$ واحد مربع
 ۳. $2\sqrt{1633}$ واحد مربع
 ۵. ۹ واحد مربع
 ۷. $\frac{1}{12}(135\sqrt{10}-13\sqrt{26})$ واحد مربع
 ۹. 8π واحد مربع
 ۱۱. 12π واحد مربع
 ۱۳. $\pi b\sqrt{a^2+b^2}$ واحد مربع
 ۱۵. $2\pi a^2(1-e^{-1})$ واحد مربع
 ۱۷. 12π واحد مربع
 ۱۹. $\frac{72}{5}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$ واحد مربع

تمرینهای ۶۰۲۰

۱. -۱
 ۳. $-\frac{5}{12}$

$$۰.۷ \quad -\frac{1}{2}\pi$$

$$۰.۵ \quad -۲$$

$$۰.۱۱ \quad -\frac{3}{7}$$

$$۰.۹ \quad -\frac{32}{15}$$

$$۰.۱۵ \quad \frac{1}{22}(\pi - 2\sqrt{2})$$

$$۰.۱۳ \quad \frac{1}{5}$$

$$۰.۱۹ \quad -10\pi$$

$$۰.۱۷ \quad 0$$

$$۰.۲۳ \quad \frac{9}{2} \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۲۱ \quad \frac{41}{70}$$

$$۰.۲۷ \quad \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۲۵ \quad \pi a^2 \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۳۱ \quad 24\pi \text{ ذول}$$

$$۰.۲۹ \quad \frac{1}{3} \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۳۳ \quad 0$$

تمرینهای ۷.۲۰

$$۰.۳ \quad \frac{1}{2}\pi - 1$$

$$۰.۱ \quad \frac{1}{10}$$

$$۰.۷ \quad \frac{1}{24}$$

$$۰.۵ \quad \frac{15}{2}$$

$$۰.۱۱ \quad \frac{1}{4} \text{ واحد مکعب}$$

$$۰.۹ \quad \frac{628}{5}$$

$$۰.۱۵ \quad 4\pi \text{ واحد مکعب}$$

$$۰.۱۳ \quad \frac{3}{2}\pi \text{ واحد مکعب}$$

$$۰.۱۹ \quad \frac{80}{3} \rho \text{ کیلو گرم}$$

$$۰.۱۷ \quad \frac{4}{3}\pi abc \text{ واحد مکعب}$$

$$۰.۲۳ \quad \frac{2}{5}(2\sqrt{2} - 1) \text{ کیلو گرم}$$

$$۰.۲۱ \quad \frac{1}{28}k \text{ کیلو گرم}$$

۱۰۲۰ پاسخ تمرینهای با شماره فرد

تمرینهای ۸۰۲۰

$$۰.۱ \quad \frac{1}{3} a^3$$

$$۰.۳ \quad 6\pi(e-1)$$

$$۰.۵ \quad \pi a^3$$

$$۰.۷ \quad \frac{4}{3} \pi a^3$$

$$۰.۹ \quad \frac{4}{5} a^5 \pi k \text{ کیلوگرم}$$

$$۰.۱۱ \quad 1250\pi k \text{ اسلاک - فوت مربع}$$

$$۰.۱۳ \quad (0, 0, \frac{2}{5} a)$$

$$۰.۱۵ \quad \frac{512}{75} k \text{ کیلوگرم-متر مربع}$$

$$۰.۱۷ \quad 8k\pi \text{ کیلوگرم}$$

$$۰.۱۹ \quad (0, 0, \frac{1}{4})$$

$$۰.۲۱ \quad \frac{56}{9} \pi a^3 k \text{ اسلاک - فوت مربع}$$

$$۰.۲۳ \quad 18\pi$$

$$۰.۲۵ \quad \frac{1}{15} \pi (2\sqrt{2} - 1)$$

تمرینهای مروری فصل ۲۰

$$۰.۱ \quad \frac{1}{40}$$

$$۰.۳ \quad \frac{1}{8} \pi$$

$$۰.۵ \quad \frac{1}{8} e^4 - \frac{3}{4} e^2 + e - \frac{3}{8}$$

$$۰.۷ \quad \frac{3}{4} \pi$$

$$۰.۹ \quad \frac{1}{8}$$

$$۰.۱۱ \quad \frac{1}{3}$$

$$۰.۱۳ \quad \frac{1}{2} \pi \ln 2$$

$$۰.۱۵ \quad \frac{1}{2} (1 - \cos 1)$$

$$۰.۱۷ \quad 12\pi$$

$$۰.۱۹ \quad 9\pi$$

$$۰.۲۱ \quad \frac{8}{3} \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۲۳ \quad \frac{9}{2} \text{ واحد مربع}$$

$$۰.۲۵ \quad \frac{1104}{35} \text{ واحد مکعب}$$

$$۰.۲۷ \quad 18 \text{ واحد مربع}$$

$$۳۱. \left(۲, \frac{۳}{۲} \right)$$

$$۲۹. \left(\frac{۱}{۲}\pi - \frac{۲}{۳} \right) \text{ واحد مربع}$$

$$۳۵. \frac{۱۶}{۳} (۸ - ۳\pi) \text{ ژول}$$

$$۳۳. \frac{۱}{۱۰۸} (۳\pi - ۷) \text{ کیلوگرم}$$

$$۴۱. k \left(\pi + \frac{۱}{۳} \right) \text{ کیلوگرم-مترمربع}$$

$$۳۹. \frac{۱}{۶۴} (۷e^۸ + ۱) \text{ کیلوگرم-مترمربع}$$

$$۴۳. ۲k\pi \text{ کیلوگرم-مترمربع؛ } \frac{۱}{۲}\sqrt{۲\pi} \text{ متر}$$

$$۴۵. ۶۵k\pi \text{ کیلوگرم}$$

$$۴۷. \frac{۳۲}{۵} k\pi \text{ کیلوگرم-مترمربع}$$

واژه‌نامه

test	آزمون
integral test	- انتگرال
comparison test	- مقایسه
limit comparison test	- مقایسه حد
ratio test	- نسبت
traces of a plane	اثرهای صفحه
z-intercept	ارتفاع از مبدأ
cylinder	استوانه
elliptic cylinder	- بیضوی
parabolic cylinder	- سهموی
hyperbolic cylinder	- هذلولوی
direction numbers	اعداد هادی
cylindrical partition	افراز استوانه‌ای
free extremum	اکسترمم آزاد
constrained extremum	اکسترمم مقید
integral	انتگرال
elliptic integral	- بیضوی
multiple integral	- چندگانه
double integral	- دوگانه
triple integral	- سه‌گانه
iterated integral	- مکرر
line integral	- منحنی الخط

improper integral	— نامتعارف
curvature	انحناء
interval of convergence	بازه همگرایی
vector	بردار
curvature vector	— انحناء
displacement vector	— تغییر مکان
radius vector	— شعاعی
normal vector	— قائم
unit binormal vector	— قائم دوگانه واحد
unit normal vector	— قائم واحد
gradient vector	— گرادیان
unit tangent vector	— مماس واحد
position vector	— موضع
orthogonal vectors	— های متعامد
parallel vectors	— های متوازی
independent vectors	— های مستقل
epicycloid	برون چرخزاد
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
degenerate ellipse	بیضی تباهیده
ellipsoid	بیضیوار
parameter	پارامتر
lemniscate	پروانه
helix	پیچ
cisoid	پیچکوار
circular helix	پیچ مستدیر
function	تابع
integrable function	— انتگرال پذیر
vector-valued function	— برداری
continuously differentiable function	— پیوسته-مشتق پذیر
function of more than one variable	— چندمتغیری
differentiable function	— مشتق پذیر
isothermal	تکدما

cycloid	چرخزاد
linear density	چگالی خطی
triple scalar product	حاصلضرب اسکالر سه گانه
vector product	حاصلضرب برداری
dot product	حاصلضرب نقطه ای
limacon	حلزونی
logarithmic limacon	حلزونی لگاریتمی
eccentricity	خروج از مرکز
nappes of a cone	دامنه های مخروط
osculating circle	دایره بوسان
cardioid	دلوار
sequence	دنباله
increasing sequence	- صعودی
decreasing sequence	- نزولی
divergent sequence	- واگرا
convergent sequence	- همگرا
monotonic sequence	- یکتوا
exact differential	دیفرانسیل کامل
total differential	دیفرانسیل کلی
divergence	دیورژانس
level surface	رویه تراز
central quadric	رویه درجه دوم مرکز دار
direction angle	زاویه هادی
muzzle speed	سرعت دهانه ای
series	سری
hyperharmonic series	- ایر همساز
conditionally convergent series	- به طور مشروط همگرا
power series	- توانی
binomial series	- دو جمله ای

alternating series	متناوب
absolutely convergent series	مطلقاً همگرا
divergent series	واگرا
harmonic series	همساز
convergent series	همگرا
geometric series	هندسی
ordered triple	سه تایی مرتب
degenerate parabola	سه می تبا هیده
elliptic paraboloid	سه میوار بیضوی
hyperbolic paraboloid	سه میوار هذلولوی
moving trihedral	سه وجهی متحرک
hypocycloid	شبه چرخزاد
radius of gyration	شعاع چرخش
conchoid of Nicomedes	صدفوار نیکومد
orthogonal planes	صفحه‌های متعامد
parallel planes	صفحه‌های متوازی
indeterminate forms	صور مبهم
latus rectum	ضلع قائم [پارامتر] سهمی
x-intercept	طول از مبدأ
y-intercept	عرض از مبدأ
directed distance	فاصله جهت‌دار
parallelogram law	قاعده متوازی‌الاضلاع
commutative law	قانون تعویض پذیری
distributive law	قانون توزیع پذیری
associative law	قانون شرکت پذیری
disk	قرص
pole	قطب
constraint	قید [شرط جنبی]

focus	کانون
spheroid	کره‌وار
partial fraction	کسر جزئی
direction cosine	کسینوس هادی
least upper bound	کوچکترین کران بالا
moment	گشتاور
moment of inertia	گشتاور لختی
ball	گوی
spiral	مارپیچ
spiral of Archimedes	- ارشمیدس
parabolic spiral	- سهموی
reciprocal spiral	- عکس
logarithmic spiral	- لگاریتمی
discriminant	مبین
asymptotes of a hyperbola	مجاانبهای هذلولی
axis	محور
principal axis	- اصلی
axis of symmetry	- تقارن
transverse axis	- [قطر] قاطع
conjugate axis	- [قطر] مزدوج
cylindrical coordinates	مختصات استوانه‌ای
polar coordinates	مختصات قطبی
spherical coordinates	مختصات کروی
cone	مخروط
elliptic cone	مخروط بیضوی
right-circular cone	مخروط مستدیر قائم
center of mass	مرکز جرم
centroid	مرکزوار
auxiliary rectangle	مستطیل کمکی
derivative	مشتق
partial derivative	- جزئی
directional derivative	- جهتی

total derivative	- کلی
ordinary derivative	- معمولی
differentiability	مشتق پذیری
equation	معادله
vector equation	- برداری
linear equation	- خطی
cartesian equation	- دکارتی
polar equation	- قطبی
conic section	مقطع مخروطی
curve	منحنی
closed curve	- بسته
level curve	- تراز
isothermal curve	- تکدما
twisted cubic curve	- درجه سوم نامسطح
sectionally smooth curve	- قطعه قطعه هموار
generating curve	- مولد
equipotential curve	- همپتانسیل
smooth curve	- هموار
conservative vector field	میدان برداری پایستار
homogeneous rod	میله همگن
invariant	ناوردا [نامتغیر]
accumulation point	نقشه تراز
level map	نقطه انباشتگی
critical point	نقطه بحرانی
saddle point	نقطه زینی
vector representation	نمایش بردار
directrix	هادی
degenerate hyperbola	هذلولی تباهیده
equilateral hyperbola	هذلولی متساوی الساقین
elliptic hyperbola	هذلولیوار بیضوی
hyperbola of revolution	هذلولیوار دوار
conjugate hyperbolas	هذلولیهای مزدوج
convergence	همگرایی

فهرست راهنما

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| مختصات - ۶۰۴ تا ۶۱۳ | آپولونیوس ۱۷۱ |
| - و انتگرالهای سه گانه ۸۹۶ تا ۹۰۲ | آزمون مشتق دوم برای اکستریمهای توابع |
| استوکس، جورج ۸۸۰ | دومتغیری ۷۴۹ |
| قضیه - در صفحه ۸۸۰ | آزمون مقایسه ۳۱۵ |
| اسکالر ۴۰۶ | آزمون مقایسه حد ۳۱۷ |
| تاو - ۸۷۹ | آزمون نسبت ۳۳۹ |
| ضرب - در بردار ۴۰۶ تا ۴۱۷، ۵۲۱ | اثرهای صفحه ۵۳۸ |
| اسلاگ ۴ | ارتفاع از مبدأ صفحه ۵۳۶ |
| اصل پاسکال ۱۰۰ | ارشمیدس |
| اصل موضوع کمال ۲۹۴ | مارپیچ - ۱۳۱ |
| اعداد هادی ۵۴۸ | استرلینگ، جیمز ۲۷۴ |
| افراز | استوانه ۵۷۲ |
| - استوانه ای ۸۹۶ | - به عنوان رویه ۵۷۲ |
| نورم - ۸۱۷، ۸۲۹، ۸۸۸ | - بیضوی ۵۷۲ |
| اکستریم | - سهموی ۵۷۲ |
| - آزاد | - مستدیر قائم ۵۷۲ |
| - توابع دومتغیری ۷۴۴ تا ۷۶۴ | - هذلولوی ۵۷۲ |
| - مطلق ۷۵۳ | خط مولد - ۵۷۲ |
| - مقید ۷۶۴ | مولد - ۵۷۲ |
| - نسبی ۷۴۴ | هادی - ۵۷۲ |
| قضیه - برای توابع دومتغیری ۷۵۴ | استوانه ای |
| رتابی مرتب ۶۱۹ | افراز - ۸۹۶ |

- انتقال محورها ۱۶۲ تا ۱۷۱
- معادلات - ۱۶۲
- انتگرال
- آزمون - ۳۲۶ تا ۳۳۲
- بیضوی ۴۹۹
- چند گانه ۸۱۶
- دو گانه ۸۱۶ تا ۸۲۷
- تعریف - ۸۱۸
- درمختصات قطبی ۸۴۹ تا ۸۵۹
- محاسبه - ۸۲۷ تا ۸۳۹
- سه گانه ۸۸۷ تا ۸۹۶
- در مختصات استوانه‌ای ۸۹۶ تا ۹۰۲
- درمختصات کروی ۹۰۲ تا ۹۰۹
- تعریف - ۸۸۸
- مکرر ۸۲۸
- منحنی الخط ۷۸۳ تا ۷۹۷
- مستقل از مسیر ۷۸۳ تا ۸۱۰
- نامتعارف ۲۵۴ تا ۲۶۲
- نامعین ۱
- هایی که توابع هیپر بولیک معکوس را به دست می‌دهند ۴۱ تا ۴۸
- یگانه ۸۱۶
- جدول - ها ۲ و ۳
- فرمولهای استاندارد - های نامعین ۳۰۲
- کاربردهایی از - ۶۳ تا ۱۱۱
- انتگرال گیری
- از توابع گویا به وسیله کسرهای
- جزئی ۲۲ تا ۴۱
- از توابع گویای سینوس و کسینوس ۴۸ تا ۵۳
- از سریهای توانی ۳۶۵ تا ۳۷۶
- با جانشینی مثلثاتی ۱۲ تا ۲۲
- جزء به جزء ۲ تا ۱۲
- چند گانه ۸۱۶ تا ۹۱۳
- نامعین ۱
- تکنیکهای - ۱ تا ۶۲
- جانشینیهای در - ۵۳ تا ۵۷
- جزء بینهایت در - ۲۵۴ تا ۲۶۲
- فرمولهای - ۲
- ناحیه - ۸۱۷
- انتگرالهای نامتعارف ۲۵۴ تا ۲۶۲
- واگرا ۲۵۶ تا ۲۶۴
- وقتی که حدود انتگرال گیری بینهایت اند ۲۵۴ تا ۲۶۲
- همگرا ۲۵۵، ۲۶۴
- انحنای ۴۸۰ تا ۴۹۲، ۵۹۷
- بردار - ۴۸۴، ۵۹۷
- دایره - ۴۸۵
- شعاع - ۴۸۵
- مرکز - ۴۹۱
- بازار کاملاً رقابتی ۷۵۹
- بازه همگرایی سری توانی ۳۴۹
- باقیمانده در سری نامتناهی ۳۳۵
- پس از n جمله ۲۷۲
- صورت انتگرالی - ۲۷۲
- صورت لاگرانژی - ۲۷۲
- بردار ۴۰۱
- آنالیز - ی ۴۰۰
- انحنای ۴۸۴، ۵۹۷
- تغییر مکان ۴۲۴
- سرعت ۴۶۲، ۶۰۰
- شتاب ۴۶۲، ۶۰۰
- مؤلفه قائم - ۴۹۳
- مؤلفه مماسی - ۴۹۳
- شعاعی ۴۳۰
- صفر ۴۰۲، ۵۱۶

- ۵۵۹، ۵۲۲، ۴۱۰
 قرینه- ۴۰۵، ۵۱۹
 کسینوسهای هادی- ۵۱۷
 کمیت‌های- ی ۴۰۰
 مؤلفه‌های- ۴۰۱، ۴۲۴، ۵۱۵، ۵۲۸
 مجموع دو- ۴۰۴، ۵۱۸
 معادله- ی ۴۳۰، ۵۹۱
 نمایش موضع- ۴۰۱، ۵۱۶
 وجود قرینه در جمع- ها ۴۱۰، ۵۲۲
 وجود همانی جمعی برای- ها ۴۱۰، ۵۲۲
 وجود همانی در ضرب اسکالر- ها ۴۱۰، ۵۲۲
 ویژگیهای ضرب اسکالر در- ۴۰۹ تا ۴۱۷
 بردار قائم
 - بر رویه ۷۳۹
 - بر صفحه ۵۳۴
 - دوگانه واحد ۵۹۹
 - قائم واحد ۴۷۳، ۵۹۸
 - واحد ۴۷۲، ۵۹۸
 برد تابع ۶۱۹
 بزون چرخزاد ۵۰۱
 بعد فضای برداری ۴۱۳
 بیضی ۱۷۱، ۱۹۵ تا ۲۰۱، ۲۱۱ تا ۲۱۱
 - تباهیده ۱۷۰
 - نقطه ۲۰۴
 قطر بزرگ- ۱۹۵
 قطر کوچک- ۱۹۵
 بیضیوار ۵۸۰
 - دوار ۵۸۳
 پارامتر ۴۳۰
 پاره خط
 قائم ۵۳۴، ۷۳۹
 قائم دوگانه واحد ۵۹۹
 قائم واحد ۴۷۳، ۵۹۸
 گرادیان ۷۲۸، ۷۳۲
 مماس واحد ۴۷۲، ۵۹۵
 موضع ۴۳۰، ۶۰۰
 واحد ۴۱۲، ۵۱۸
 ها در صفحه ۴۰۰ تا ۴۰۹
 ها در فضای سه بعدی ۵۱۵ تا ۵۲۶
 های متعامد ۴۲۱، ۵۳۱
 های متوازی ۴۲۱، ۵۳۱
 های مستقل ۴۱۷، ۵۲۵
 بزرگی- ۴۰۲
 تصویر- روی- دیگر ۴۲۲، ۵۲۸
 تفاضل دو- ۴۰۵، ۵۱۹
 جمع دو- ۴۰۴، ۵۱۸
 جهت- ۴۰۲، ۵۱۶
 حاصلضرب اسکالر سه گانه- ها ۵۶۳
 حاصلضرب برداری دو- ۵۵۵ تا ۵۷۱
 حاصلضرب نقطه ای دو- ۴۱۸ تا ۴۲۹، ۵۲۶ تا ۵۳۴
 زاویه بین دو- ۴۱۹
 زاویه‌های هادی- ۵۱۶
 ضرب اسکالر در- ۴۰۶، ۵۲۱
 ضرب دو- ۴۰۹ تا ۴۱۸، ۵۲۶ تا ۵۳۴، ۵۵۵ تا ۵۷۱
 فضای- ی ۴۱۲ و ۴۱۳
 بعد- ۴۱۳
 پایه- ۴۱۳
 قانون تعویض پذیری در مورد- ها ۴۱۰، ۴۱۸، ۵۲۲، ۵۲۷
 قانون توزیع پذیری در مورد- ها ۴۱۰، ۴۱۸، ۵۲۲، ۵۲۷، ۵۵۹
 قانون شرکت پذیری در مورد- ها

حساب دیفرانسیل - های چندمتغیری

۶۱۸ تا ۷۲۳

دیفرانسیل کلی - ۶۸۲ تا ۶۸۸

رویه تراز - ۶۲۹

قضیه اکسترمم برای - ۷۵۴

قلمرو - ۶۱۹

گرادیان - ۷۲۸، ۷۳۲

ماکسیمم مطلق - ۷۵۳

ماکسیمم نسبی - ۷۴۴

مشتق کلی - ۶۹۸

مقدار ماکسیمم - ۷۴۴ تا ۷۶۴

مقدار مینیمم - ۷۴۴ تا ۷۶۴

منحنی تراز - ۶۲۶

مینیمم مطلق - ۷۵۳

مینیمم نسبی - ۷۴۴

نمودار - ۶۲۴

تابع برداری ۴۲۹ تا ۴۴۱، ۵۹۱

پیوستگی - ۴۴۲

مشتق پذیر - ۴۴۵

حد - ۴۴۲، ۵۹۴

حساب دیفرانسیل و انتگرال - ۴۴۱

تا ۴۵۲

مشتق - ۴۴۲، ۵۹۴

نمودار - ۴۳۰

تباهیده

بیضی - ۱۷۲

حالات - مقاطع مخروطی ۱۷۲

دایره - ۲۰۴

سهی - ۱۷۲

هذلولی - ۱۷۲

تراکتریس ۴۴۱

تصویر اسکالر یک بردار روی بردار دیگر

۴۲۲

تصویر برداری یک بردار روی بردار

- جهت دار ۴۰۰

وسط - ۵۱۰

پایه فضای برداری ۴۱۳، ۵۲۵

پروانه ۱۳۲

پیچ ۵۹۳

- مستدیر ۵۹۳

پیچکوار ۱۳۲

پیوستگی

- توابع برداری ۴۴۲

- توابع چندمتغیری ۶۵۱ تا ۶۶۰

پیوسته - مشتق پذیری ۶۸۲

تابع

اکسترممهای مطلق - ۷۵۳

اکسترممهای نسبی - ۷۶۴

برد - ۶۱۹

پیوستگی - چندمتغیری ۶۵۱

پیوستگی - روی یک گوی باز ۶۵۵

انتگرال پذیر ۸۱۸

برداری ۴۲۹

حساب دیفرانسیل و انتگرال - ۴۴۱

تا ۴۵۲

پتانسیل ۸۰۲

پیوسته - مشتق پذیر ۶۸۲

تولید ۶۲۸

چندجمله ای ۶۲۴

چندمتغیری ۶۱۸ تا ۶۳۱

حد - ۶۳۲ تا ۶۵۱

مرکب ۶۲۳

مشتق پذیر ۶۷۵

ناپیوسته ۶۵۱

تعیین یک - با استفاده از گرادیانش

۷۷۵ تا ۷۸۳

حد - های چندمتغیری ۶۳۲ تا ۶۵۱

حاصلضرب اسکالر سه گانه بردارها ۵۶۳
حاصلضرب برداری بردارها ۵۵۵ تا ۵۷۱
حاصلضرب نقطه ای بردارها ۴۱۸ تا
۴۲۹، ۵۲۶ تا ۵۳۴

حد

- تابع برداری ۴۴۲، ۵۹۲
- توابع چندمتغیری ۶۳۲ تا ۶۵۱
- دنباله ۲۸۴
حرکت پرتابه ۴۶۵ تا ۴۷۲
سرعت دهانه ای در- ۴۶۶
حرکت در صفحه ۴۶۱ تا ۴۷۲
حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری
۴۴۱ تا ۴۵۲
حلزونی ۱۲۶
- لگاریتمی ۱۳۱

خروج از مرکز مقطع مخروطی ۱۷۳
خط قائم بر رویه ۷۴۰
خط مماس

- بر منحنی قطبی ۱۳۸ تا ۱۴۴
ضریب زاویه- ۱۲۲

دامنه مخروط ۱۷۱

دایره

- انحنای ۴۸۵
- بوسان ۴۸۵
- تابیده ۲۰۲ و ۲۰۳
دستگاه مختصات راستگرد ۵۰۳

دل (∇) ۷۲۸

دلوار ۱۲۶

دنباله ۲۸۱ تا ۲۹۱

بزرگترین کران پایین- ۲۹۴

تعریف- ۲۸۱

- اکیداً صعودی ۲۹۲

دیگر ۴۲۲

تکدما

رویه- ۷۳۳

منحنیهای- ۶۲۷

تناظر يك به يك ۴۰۱، ۵۰۴

توابع گویایی که مخرجشان شامل عوامل
درجه دوم است ۳۴ تا ۴۱

توابع هیپر بولیک

انتگرالهایی که- معکوس را به دست

می دهند ۴۱ تا ۴۸

تیلر، بروك ۲۶۹

چند جمله ای- ۲۷۲

سری- ۳۷۶ تا ۳۹۵

فرمول- ۲۶۸ تا ۲۸۱

- با صورت انتگرالی باقیمانده

۲۷۴

- با صورت لاگرانژی باقیمانده

۲۷۲

ثمن [يك هشتم] فضا ۵۰۵

جانشینی مثلثاتی در انتگرال گیری ۱۲

تا ۲۲

جرم و مرکز جرم ۶۳

تعریف- ۶۳

- ورقه ۷۷، ۸۴۰

- يك جسم دوار ۸۹

- يك ميله ۶۳ تا ۷۳

جزء اصلی تابع ۶۸۴

جهت بردار ۴۰۲، ۵۱۶

چرخزاد ۴۳۷

چگالی خطی ۶۷

- اکیداً نزولی ۲۹۲
 - صعودی ۲۹۱
 - کراندار ۲۹۲
 - متناهی ۲۸۱
 - مجموعه‌های جزئی ۳۰۰
 - نامتناهی ۲۸۱
 - نزولی ۲۹۱
 - واگرا ۲۸۶
 - همگرا ۲۸۶، ۲۹۵
 - یکنوا ۲۹۱ تا ۳۰۰
 - جمله‌های - ۲۸۱
 - حد - ۲۸۴
 - کران بالای - ۲۹۳
 - کران پایین - ۲۹۳
 - کوچکترین کران بالای - ۲۹۴
 دوار
 - استوانه - ۵۷۲
 - بیضیوار - ۵۷۸
 - رویه - ۵۷۵
 - سهمیوار - ۵۷۸
 - مرکز جرم جسم - ۹۰
 - هذلولیوار - ۵۷۸
 - دوران محورها ۲۲۳ تا ۲۳۱
 - دیفرانسیل
 - کامل ۸۰۲
 - کلی ۶۸۴
 - دین ۶۵
 - دیورژانس ۸۷۹
 - قضیه - در صفحه ۸۸۲
 رأس
 - سهمی ۱۵۶
 - مخروط ۱۷۱
 - مستطیل ۸۱۶
 - مقطع مخروطی ۱۷۲
 - رادیان هذلولوی ۴۳۶
 - رویه ۵۱۰، ۵۷۵
 - تراز ۶۲۹
 - تکدما ۷۳۳
 - دوار ۵۷۵
 - های درجه دوم ۵۸۰ تا ۵۹۱
 - همپانسیل ۷۳۳
 - مساحت - ۸۵۹ تا ۸۶۹
 - رویه‌های درجه دوم ۵۸۰ تا ۵۹۱
 - بدون مرکز ۵۸۵
 - مرکزدار ۵۸۳
 زاویه
 - بین دوبردار ۴۱۹، ۵۲۷
 - بین دو صفحه ۵۳۹
 - هادی بردار ۵۱۶
 - زوج مرتب ۴۰۱، ۶۱۸
 سرعت ۴۶۲، ۶۰۰
 - دهانه‌ای ۴۶۶
 - لحظه‌ای ۴۶۲
 - سری (نامتناهی) ۲۸۱ تا ۳۹۹
 - آزمون انتگرال در مورد - ۳۲۶ تا ۳۳۳
 - آزمون - متناوب ۳۳۲
 - آزمون مقایسه حد در مورد - ۳۱۷
 - آزمون مقایسه در مورد - ۳۱۵
 - آزمون نسبت در مورد - ۳۳۹
 - باقیمانده - ۳۳۵
 - تعریف - ۳۰۰
 - جمله‌های - ۳۰۰
 - ابرهمساز (p-سری) ۳۲۳
 - با جمله‌های ثابت ۳۰۰ تا ۳۱۴

- با جمله‌های مثبت ۳۱۴ تا ۳۲۶
— با جمله‌های مثبت و منفی ۳۳۲ تا ۳۴۴
- به‌طور مشروط همگرا ۳۳۷
— توانی ۳۴۴ تا ۳۵۳
— تیلر ۳۷۶ تا ۳۸۹
— دو جمله‌ای ۳۸۹ تا ۳۹۵
— ماکلورن ۳۷۸
— متناوب ۳۳۲
— مطلقاً همگرا ۳۳۶
— واگرا ۳۰۲
— همساز ۳۰۴
— همگرا ۳۰۲
— هندسی ۳۰۵
— مجموع ۳۰۲
— مجموع جزئی ۳۰۰
— سری توانی ۳۴۴ تا ۳۵۳
— انتگرال‌گیری از ۳۶۵ تا ۳۷۶
— بازه همگرایی ۳۴۹
— شعاع همگرایی ۳۴۹
— مشتق‌گیری از ۳۵۳ تا ۳۷۶
— سری متناوب ۳۳۲
— آزمون ۳۳۲
— صه‌تایی مرتب ۵۰۴
— سهمی ۱۵۴ تا ۱۶۲، ۱۷۱
— رأس ۱۵۶
— تباهیده ۱۷۲
— ضلع قائم ۱۵۷
— کانون ۱۵۴
— محور ۱۵۶
— هادی ۱۵۴
— سهمیوار
— بیضوی ۵۸۵
— دوار ۵۷۸
- هذلولوی ۵۸۶
— سه‌وجهی متحرك ۵۹۹
- شبه چرخزاد ۴۴۰
— شتاب
— لحظه‌ای ۴۶۲
— مؤلفه قائم ۴۹۳
— مؤلفه مماسی ۴۹۳
— شعاع
— بردار ۴۳۰
— انحنا ۴۸۵
— چرخش ۸۴۵
— کره ۵۱۰
— همگرایی سری توانی ۳۴۹
- صدقوار نیکومد ۱۳۲
— صفحه ۵۳۴ تا ۵۴۶
— تعریف ۵۳۴
— زاویه بین دو ۵۳۹
— مماس ۷۳۹
— های متعامد ۵۴۰
— های متوازی ۵۴۰
— معادلات دکارتی ۵۳۶
— معادله ۵۳۵
— صور مبهم ۲۳۵ تا ۲۵۳
- ضرب
— اسکالر در بردار ۴۰۶، ۴۱۸ تا ۴۲۹، ۵۲۱
— اسکالر سه‌گانه بردارها ۵۶۳
— برداری ۵۵۵ تا ۵۷۱
— نقطه‌ای (داخلی) ۴۱۸ تا ۴۲۹
— ضلع قائم [پارامتر] سهمی ۱۵۷

- طول از مبدأ صفحه ۵۳۶
 طول قوس منحنی ۴۵۲ تا ۴۶۱، ۵۹۶
 - به عنوان پارامتر ۴۷۵
 عرض از مبدأ صفحه ۵۳۶
 فاصله
 - بین دو نقطه ۵۰۸
 - جهت دار ۵۰۸
 - یک نقطه تا یک خط ۵۲۹
 - یک نقطه تا یک صفحه ۵۴۲
 فشار مایعات ۹۹ تا ۱۰۹
 فضای n بعدی اعداد ۶۱۹
 فضای برداری حقیقی ۴۱۲
 پایه- ۴۱۳
 بعد- ۴۱۳
 فضای سه بعدی، R^3 ۵۰۳ تا ۵۱۵
 خط در- ۵۴۶ تا ۵۵۵
 منحنی در- ۵۹۱ تا ۶۰۴
 نمودار معادلات در- ۵۱۰
 قاعده زنجیری
 صورت کلی- ۶۹۳ تا ۷۰۴
 قاعده متوازی الاضلاع ۴۰۵
 قانون اثر جرم ۲۹
 قانون تعویض پذیری در مورد بردارها
 ۴۱۵، ۴۱۸، ۵۲۲، ۵۲۷
 قانون توزیع پذیری در مورد بردارها
 ۴۱۵، ۴۱۸، ۵۲۲، ۵۲۷، ۵۵۹
 قانون شرکت پذیری در مورد بردارها
 ۴۱۵، ۵۲۲، ۵۵۹
 قانون گاز ایده آل ۶۶۷
 قرص باز ۶۳۳
 قرص بسته ۶۳۳
 قضیه مقدار میانگین کوشی ۲۳۸
 قضیه وجودی ۲۹۶
 قطب ۱۱۲
 قلمرو تابع ۶۲۳
 قوس
 طول- ۴۵۲، ۴۶۰
 طول- به عنوان یک پارامتر ۴۷۲
 طول- یک منحنی در R^2 ۵۹۶
 قید [شرط جنبی] ۷۶۴
 کانون
 - سهمی ۱۵۴
 - مقطع مخروطی ۱۷۳
 کران بالای دنباله ۲۹۳
 کوچکترین- ۲۹۴
 کران پایین دنباله ۲۹۳
 بزرگترین- ۲۹۴
 کره ۵۱۰، ۵۸۱
 شعاع- ۵۱۰
 صورت شعاع- مرکزی معادله- ۵۱۰
 صورت کلی معادله- ۵۱۱
 - نقطه ۵۱۲
 مرکز- ۵۱۰
 کره وار ۵۸۱
 - پنج ۵۸۱
 - کشیده ۵۸۱
 کسرها جزئی
 استفاده از- در انتگرال گیری ۲۲ تا ۳۴
 کسینوس هادی ۵۱۷
 کوشی، اوگوستن ل. ۲۳۸
 گرادیان
 بردار- ۷۲۸
 تعیین تابع با استفاده از- ۷۷۵ تا ۷۸۳

- تابع ۷۲۸ تا ۷۳۲
 میدان- ۸۰۲
 گرین ۸۶۹ تا ۸۷۱
 قضیه- ۸۶۹ تا ۸۸۷
 گشتاور جرم ۶۹، ۷۷، ۸۹
 گشتاور لختی ۸۴۲ و ۸۴۳
 - قطبی ۸۴۳
 گل
 - پنج پر ۱۳۱
 - چهار پر ۱۳۱
 - سه پر ۱۳۱
 - هشت پر ۱۳۱
 گوی باز ۶۳۲
 پیوستگی تابع روی يك- ۶۵۵
 گوی بسته ۶۳۲
 لاگرانژ، ژوزف ل. ۲۷۲، ۷۶۴
 صورت- ی باقیمانده
 ضرایب- ۷۶۴ تا ۷۷۵
 مارپیچ
 - ارشمیدس ۱۳۱
 - سهموی ۱۳۲
 - عکس ۱۳۱
 - لگاریتمی ۱۳۱
 ماکسیمم ۷۴۴ تا ۷۶۴
 - مطلق توابع دومتغیری ۷۵۳
 - نسبی توابع دومتغیری ۷۴۴
 ماکلورن، کالین ۲۷۴
 سری- ۳۷۸
 فرمول- ۲۷۴
 مبدأ ۱۱۲، ۵۰۳
 مین ۲۲۸
 متغیر
 - وابسته ۶۲۲
 - های مستقل ۶۲۲
 مجانبهای هذلولی ۱۸۶، ۲۱۲
 مجموع
 دنباله- های جزئی ۳۰۰
 - دوبردار ۴۰۴، ۵۱۸
 - سری نامتناهی ۳۰۲
 محور
 - اصلی مقطع مخروطی ۱۷۴
 - تقارن ۸۳
 - رویه دوار ۵۷۵
 - سهمی ۱۵۶
 - قطبی ۱۱۲
 - [قطر] قاطع هذلولی ۱۹۷
 - [قطر] مزدوج هذلولی ۱۹۸
 محورهای مختصات
 انتقال- ۱۶۲ تا ۱۷۱
 دوران- ۲۲۳ تا ۲۳۰
 مختص
 - x ۵۰۴
 - y ۵۰۵
 - z ۵۰۵
 مختصات
 دستگاه- راستگرد ۵۰۳
 - استوانه‌ای ۶۰۴ تا ۶۱۳
 - و انتگرالهای سه گانه ۸۹۶ تا ۹۰۲
 - دکارتی قائم ۵۰۵
 - قطبی ۱۱۲، ۱۲۱
 - کروی ۶۰۴ تا ۶۱۳
 - و انتگرالهای سه گانه ۹۰۲ تا ۹۰۹
 مختصات قطبی ۱۱۲ تا ۱۵۴
 انتگرالهای دو گانه در- ۸۴۹ تا ۸۵۹

- توابع برداری ۴۴۵
- و قاعده زنجیری ۶۹۸، ۶۹۷
- مشتق گیری
- از سری توانی ۳۵۳ تا ۳۶۵
- جزئی ۶۶۱
- معادلات
- انتقال محورها ۱۶۴
- پارامتری ۴۳۵، ۴۴۷، ۵۹۱
- پارامتری خط در R^3 ۵۴۷
- خط در R^3 ۵۴۶ تا ۵۵۵
- دکارتی مقاطع مخروطی ۱۹۱ تا ۲۰۱
- دوران محورها ۲۲۴ تا ۲۲۸
- صفحه ۵۳۶
- قطبی مقاطع مخروطی ۱۷۸ تا ۱۹۱
- متقارن خط در R^3 ۵۴۸
- معادلات دکارتی ۱۱۷، ۴۳۵
- در فضای سه بعدی ۵۹۱
- صفحه ۵۳۶
- مقاطع مخروطی ۱۹۱، ۲۰۱
- معادلات دیفرانسیل جزئی ۷۱۲ تا ۷۱۷
- معادلات کوشی-ریمان ۷۱۶
- معادله
- برداری ۴۳۵، ۵۹۱
- خطی ۵۳۶
- دکارتی ۱۱۷، ۴۳۵
- قطبی ۱۱۷
- نمودار- ۵۱۰
- معادله لاپلاس ۷۱۴
- مقاطع مخروطی ۱۵۴ تا ۲۳۴
- حالات تباهیده- ۱۷۲
- خروج از مرکز- ۱۷۳
- رأسهای- ۱۷۴
- کانون- ۱۷۳
- تقاطع نمودارها در- ۱۳۲ تا ۱۳۸
- طول قوس در- ۴۵۸
- مساحت ناحیه در- ۱۴۴ تا ۱۵۱
- نمودار معادلات در- ۱۲۱ تا ۱۳۲
- مخروط
- دامنه- ۱۷۱
- رأس- ۱۷۱
- بیضوی ۵۸۸
- مستدیر قائم ۱۷۱، ۵۷۸
- مولد- ۱۷۱
- مرکز
- انحنا ۴۹۱
- جرم ۶۶، ۸۴۰
- جسم دوار ۸۹
- میله ۶۳ تا ۷۳
- ناحیه سطح ۷۷
- کره ۵۱۰
- مقطع مخروطی ۱۷۵
- مرکزوار ۷۸
- یک ناحیه سطح ۷۸
- مساحت
- رویه ۸۵۹ تا ۸۶۹
- ناحیه در مختصات قطبی ۱۴۲ تا ۱۵۳
- مستطیل باز ۸۱۶
- مستطیل بسته ۸۱۶
- مستطیل کمکی هذلولی ۲۱۳
- مشتق
- جزئی ۶۶۰ تا ۶۷۳
- از مراتب بالاتر ۷۰۴ تا ۷۱۷
- تعریف- ۶۶۰
- جهتی ۷۲۴
- کلی ۶۹۸
- معمولی ۶۶۴
- مشتق پذیری ۶۷۵

- ناپیوستگی
 - اساسی ۶۵۲
 - رفع شدنی ۶۵۲
 - ناوردان [نامتغیر] ۲۲۸
 - نقشه تراز ۶۲۶
 نقطه
 - انباشتگی ۶۳۹
 - بحرانی ۷۴۷
 - در فضای n بعدی ۶۱۹
 - در فضای سه بعدی ۵۰۳
 - زینی ۷۴۷
 - نمایش بردار ۴۰۱
 - نمو توابع دومتغیری ۶۷۲
 نمودار
 - نقاط - ها در مختصات قطبی ۱۳۲ تا ۱۳۸
 - تابع ۶۲۴
 - معادله ۵۱۰
 - در مختصات قطبی ۱۲۱ تا ۱۳۲
 ورقه همگن ۷۵
 هادی
 - استوانه ۵۷۲
 - سهمی ۱۵۲
 - مقطع مخروطی ۱۷۳
 هذلولی ۱۷۱، ۱۹۷، ۲۱۱ تا ۲۲۳
 - مجانبهای ۲۱۲
 - محور [قطر] قاطع - ۱۹۸
 - محور [قطر] مزدوج - ۱۹۷
 - مستطیل کمکی - ۲۱۳
 - تباهیده
 - متساوی الساقین ۲۱۲
 - واحد ۴۳۵
 محور اصلی - ۱۷۴
 محور [قطر] مزدوج - ۱۹۸
 مرکز - ۱۷۵
 معادلات دکارتی - ۱۹۱ تا ۲۱۱
 معادلات قطبی - ۱۷۸ تا ۱۹۱
 - مرکزدار ۱۷۵
 هادی - ۱۷۳
 مقطع رویه با صفحه ۵۷۴
 منحنی ۴۸۰ تا ۴۹۲
 - بسته ۸۷۰
 - تراز تابع ۶۲۶
 - در R^2 ۵۹۱ تا ۶۰۴
 - درجه سوم نامسطح ۵۹۳
 - قطعه قطعه هموار ۷۸۹
 - مولد ۵۷۵
 - های تکدما ۶۲۷
 - های همپتانسیل ۶۲۸
 - هموار ۷۸۹
 مولد
 - استوانه ۵۷۲
 - مخروط ۱۷۱
 میدان
 - برداری ۷۸۴
 - پایستار ۸۰۲
 - گرادیان ۸۰۲
 - نیرو ۷۸۴
 میله
 گشتاور جرم - ۶۹
 مرکز جرم - ۶۶
 - همگن ۶۶
 مینیمم ۷۴۴ تا ۷۶۴
 - مطلق توابع دومتغیری ۷۵۳
 - نسبی توابع دومتغیری ۷۴۴

همگرایی

بازو- ۳۴۹

شعاع- ۳۴۹

هندسهٔ دیفرانسیل ۶۰۰

هویتال [لوپیتال]، گیوم فرانسوا ۲۳۶

قاعدۀ- ۲۳۶، ۲۴۱، ۲۴۶، ۲۴۷

یالهای مستطیل ۸۱۶

- های مزدوج ۲۱۲

هذلولیوار

- بیضوی دوپارچه ۵۸۲

- بیضوی یکپارچه ۵۸۲

- دوار ۵۷۸

همگرا

انتگرال نامتعارف- ۲۶۴، ۲۵۵

دنبالۀ- ۲۹۵، ۲۸۶

صری نامتناهی- ۳۰۲

