

لوئیس لیتهلد



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد دوم

(قسمت اول)

ترجمہ مہدی بہزاد، محسن رزاقی،
سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد دوم
(قسمت اول)

لویس لیتهد

ترجمه

مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



The Calculus with Analytic Geometry
Louis Leithold
Fourth Edition
Harper & Row, 1981

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی
جلد دوم (۱)

تألیف لوئیس لیتهلد

ترجمه دکتر مهدی بهزاد، دکتر محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی
ویراسته دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۶

چاپ نهم ۱۳۸۶

تعداد ۸۰۰۰

لیتوگرافی: بهزاد

چاپ: قنبری

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Leithold, Louis

لیتهلد، لوئیس

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی / لوئیس لیتهلد؛ ترجمه مهدی بهزاد ...
[و دیگران]. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵ - ۱۳۷۵.

۲ ج. : مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۶۱، ۳۲۳. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۲۴، ۳۶)

ISBN 964-01-8049-1 (دوره)

ISBN 964-01-0261-X (ج. ۱. ق. ۱)

ISBN 964-01-8013-0 (ج. ۱. ق. ۲)

ISBN 964-01-0323-3 (ج. ۲. ق. ۱)

ISBN 964-01-0631-3 (ج. ۲. ق. ۲)

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

The calculus with analytic geometry.

عنوان اصلی:

واژه‌نامه.

نمایه.

ج. ۲. ق. ۱ (چاپ نهم: ۱۳۸۶).

۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب انتگرال. ۳. هندسه تحلیلی. الف. بهزاد، مهدی، ۱۳۱۵ -

، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۵/۱۵

Q4303/J9ح۵

۱۳۶۵

۱۸۷ - ۳۶۶*

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
	۱۰ تکنیکهای انتگرال گیری
۱	۱۰۱۰ مقدمه
۲	۲۰۱۰ انتگرال گیری جزء به جزء
۱۲	۳۰۱۰ انتگرال گیری، با جانشین کردن توابع مثلثاتی
۲۲	۴۰۱۰ انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله کسرهای جزئی، وقتی که مخرج فقط عوامل خطی دارد
۳۴	۵۰۱۰ انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله کسرهای جزئی، وقتی مخرج شامل عوامل درجه دوم است
۴۱	۶۰۱۰ انتگرالهایی که توابع هیپر بولیک معکوس را به دست می دهند
۴۸	۷۰۱۰ انتگرال گیری از توابع گویای سینوس و کسینوس
۵۳	۸۰۱۰ جانشینیهای دیگر
۵۷	تمرینهای مروری فصل ۱۰، و مروری بر انتگرال گیری
	۱۱ کاربردهای دیگری از انتگرال گیری
۶۳	۱۰۱۱ مرکز جرم يك میله
۷۳	۲۰۱۱ مرکزوار يك ناحیه مسطح
۸۷	۳۰۱۱ مرکزوار جسم دوار
۹۹	۴۰۱۱ فشارمایعات
۱۰۹	تمرینهای مروری فصل ۱۱
	۱۲ مختصات قطبی
۱۱۲	۱۰۱۲ دستگاه مختصات قطبی

صفحه	عنوان
۱۲۱	۲۰۱۲ نمودار معادلات در دستگاه مختصات قطبی
۱۳۲	۳۰۱۲ تقاطع نمودارها در دستگاه مختصات قطبی
۱۳۸	۴۰۱۲ خطوط مماس بر منحنیهای قطبی
۱۴۴	۵۰۱۲ مساحت ناحیه در دستگاه مختصات قطبی
۱۵۱	تمرینهای مروری فصل ۱۲

۱۳ مقاطع مخروطی

۱۵۴	۱۰۱۳ سهمی
۱۶۲	۲۰۱۳ انتقال محورها
۱۷۱	۳۰۱۳ بعضی از ویژگیهای مقاطع مخروطی
۱۷۸	۴۰۱۳ معادلات قطبی مقاطع مخروطی
۱۹۱	۵۰۱۳ معادلات دکارتی مقاطع مخروطی
۲۰۱	۶۰۱۳ بیضی
۲۱۱	۷۰۱۳ هذلولی
۲۲۳	۸۰۱۳ دوران محورها
۲۳۱	تمرینهای مروری فصل ۱۳

۱۴ صور مبهم، انتگرالهای نامتعارف، و فرمول تیلر

۲۳۵	۱۰۱۴ صورت مبهم ۰/۰
۲۴۶	۲۰۱۴ صور مبهم دیگر
۲۵۴	۳۰۱۴ انتگرالهای نامتعارف، وقتی که حدود انتگرال گیری بینهایت اند
۲۶۲	۴۰۱۴ انتگرالهای نامتعارف دیگر
۲۶۸	۵۰۱۴ فرمول تیلر
۲۷۷	تمرینهای مروری فصل ۱۴

۱۵ سریهای نامتناهی

۲۸۱	۱۰۱۵ دنباله‌ها
۲۹۱	۲۰۱۵ دنباله‌های یکنوا و کراندار
۳۰۰	۳۰۱۵ سری نامتناهی با جمله‌های ثابت
۳۱۴	۴۰۱۵ سری نامتناهی با جمله‌های مثبت
۳۲۶	۵۰۱۵ آزمون انتگرال
۳۳۲	۶۰۱۵ سری نامتناهی با جمله‌های مثبت و منفی
۳۴۳	۷۰۱۵ سری توانی
۳۵۳	۸۰۱۵ مشتق‌گیری از سری توانی

صفحه	عنوان
۳۶۵	۹.۱۵ انتگرال گیری از سری توانی
۳۷۶	۱۰.۱۵ سری تیلر
۳۸۹	۱۱.۱۵ سری دو جمله ای
۳۹۵	تمرینهای مروری فصل ۱۵
	۱۶ بردارها در صفحه، و معادلات پارامتری
۴۰۰	۱۰.۱۶ بردارها در صفحه
۴۰۹	۲۰.۱۶ ویژگیهای جمع برداری و ضرب اسکالر
۴۱۸	۳.۱۶ حاصلضرب نقطه ای
۴۲۹	۴.۱۶ توابع با مقادیر برداری، و معادلات پارامتری
۴۴۱	۵.۱۶ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری
۴۵۲	۶.۱۶ طول قوس
۴۶۱	۷.۱۶ حرکت در صفحه
۴۷۲	۸.۱۶ بردارهای مماس واحد و قائم واحد، و طول قوس به عنوان یک پارامتر
۴۸۰	۹.۱۶ انحنای
۴۹۲	۱۰.۱۶ مؤلفه های مماسی و قائم شتاب
۴۹۸	تمرینهای مروری فصل ۱۶

تکنیکهای انتگرال گیری

۱.۱۰ مقدمه

در فصل ۶، انتگرال معین تابعی مانند f از a تا b به صورت حد يك مجموع ریمانی تعریف شد:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \quad (۱)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد. همچنین قضیه‌ای را بیان کردیم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته اثبات می‌شود و می‌گوید که حد طرف راست (۱) موجود است اگر f تابعی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ باشد.

مقدار دقیق انتگرال معین را می‌توان با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه کرد، به شرط اینکه بتوان ضد مشتقی برای انتگران به دست آورد. فرایند به دست آوردن کلیترین ضد مشتق يك انتگران مفروض، محاسبه انتگرال نامعین نامیده می‌شود. اصطلاح **انتگرال نامعین** را به معنی کلیترین ضد مشتق يك انتگران مفروض به کار می‌بریم. در عمل، یافتن انتگرال نامعین همیشه امکان پذیر نیست، یعنی، ممکن است انتگرال معین وجود داشته باشد ولی تابع انتگران، ضد مشتقی که بتوان آن را بر حسب توابع مقدماتی نوشت، نداشته باشد. مثالی از این مورد، $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ است (در بخش ۹.۱۵،

روشی برای محاسبه مقدار این انتگرال معین با سردرجه دقت مطلوب ارائه شده که در آن روش، از سریهای نامتناهی استفاده می شود). معهذاً، بسیاری از انتگرالهای معینی را که در عمل پیش می آیند می توان با پیدا کردن ضد مشتق انتگران محاسبه کرد. چند روش محاسبه این گونه انتگرالها را قبلاً ارائه کردیم، و روشهای دیگری را نیز در این فصل ارائه خواهیم کرد. غالباً می توانید به جای انجام محاسبات انتگرال گیری پیچیده، از جدول انتگرالها استفاده کنید. (جدول کوچکی از انتگرالها در پیوست جلد اول آمده است.) باین حال، ممکن است استفاده از بعضی از تکنیکهای انتگرال گیری برای بیان انتگران به صورتی که در جدول آمده است، لازم باشد. از اینرو، باید مهارت لازم را کسب کرد تا بتوان تشخیص داد که برای يك انتگرال مفروض، چه تکنیکی را باید به کار برد. به علاوه، باید توجه داشت که مهارت در محاسبه، در تمام شاخه های ریاضیات دارای اهمیت بسیار است، و تمرینهای این فصل زمینه مناسبی برای پرورش و رشد این نوع مهارت فراهم می کنند. به این دلایل توصیه می شود که فقط بعد از کسب تسلط بر انتگرال گیری از جدول انتگرالها استفاده کنید. فرمولهای استاندارد انتگرالهای نامعین، که آنها را در فصلهای قبل یاد گرفتید و مکرراً مورد استفاده قرار می گیرند، در فهرست زیر آمده اند.

$$\int du = u + C$$

$$\int a du = au + C \quad (a \text{ عدد ثابتی است})$$

$$\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0 \text{ و } a \neq 1)$$

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$$

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C \quad a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad a > 0$$

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

۲.۱۰ انتگرال گیری جزء به جزء

یکی از روشهایی که در انتگرال گیری بسیار مفید واقع می شود، انتگرال گیری جزء به جزء است. این روش وابسته است به فرمول دیفرانسیل حاصلضرب

$$d(uv) = u dv + v du$$

و یا

$$u dv = d(uv) - v du. \quad (۱)$$

اگر از دوطرف (۱) انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (۲)$$

فرمول (۲) را فرمول انتگرال گیری جزء به جزء می نامند. این فرمول، انتگرال $\int u dv$

را بر حسب انتگرال دیگری مانند $\int v du$ بیان می کند. با انتخاب مناسب u و dv ، ممکن

است انتگرال گرفتن از $\int v du$ آسانتر از $\int u dv$ باشد. موقع انتخاب جانشین برای u و

dv ، معمولاً می خواهیم که dv پیچیده ترین عامل انتگرال باشد که مستقیماً قابل انتگرال گیری است و u تابعی باشد که مشتق آن تابع ساده تری است. این روش در نمونه ها و مثالهای زیر نشان داده شده است.

○ نمونه ۱ می خواهیم انتگرال زیر را محاسبه کنیم

$$\int x^2 e^{x^2} dx.$$

در تعیین جانشین برای u و dv ، در نظر داریم که برای پیدا کردن v بایستی بتوانیم از

dv انتگرال بگیریم. با توجه به این نکته، قرار می دهیم $dv = x e^{x^2} dx$ ، و سپس $u = x^2$ اگر از dv انتگرال بگیریم، داریم

$$v = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_1$$

و همچنین

$$du = 2x dx.$$

با توجه به فرمول (۲)

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{x^2} dx &= x^2 \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C_1 \right) 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \int x e^{x^2} dx - 2C_1 \int x dx \end{aligned}$$

انTEGRال گیری جزء به جزء ۵

$$= \frac{1}{4} x^2 e^{x^2} + C_1 x^2 - \frac{1}{4} e^{x^2} - C_1 x^2 + C_2$$

$$\bigcirc \quad = \frac{1}{4} e^{x^2} (x^2 - 1) + C_2.$$

در نمونه ۱، ملاحظه می کنید که اولین ثابت انتگرال گیری یعنی C_1 در نتیجه نهایی دیده نمی شود؛ در حالت کلی نیز چنین است، و این موضوع را به صورت زیر ثابت می کنیم: اگر به جای v در فرمول (۲)، $v + C_1$ را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int u dv &= u(v + C_1) - \int (v + C_1) du \\ &= uv + C_1 u - \int v du - C_1 \int du \\ &= uv + C_1 u - \int v du - C_1 u \\ &= uv - \int v du. \end{aligned}$$

بنابراین، وقتی v را از dv به دست می آوریم، لازم نیست C_1 را بنویسیم.

مثال ۱ $\int x \ln x dx$ را به دست آورید.

حل فرض کنید $u = \ln x$ و $dv = x dx$. در این صورت

$$du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ \blacktriangle \quad &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

مثال ۲ $\int x \sin x dx$ را پیدا کنید.

حل فرض کنید $u = x$ و $dv = \sin x \, dx$ در این صورت

$$du = dx \quad \text{و} \quad v = -\cos x$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

○ نمونه ۲ اگر به جای انتخابهایی که از u و dv در مثال ۲ به عمل آوردیم، قرار دهیم

$$u = \sin x \quad \text{و} \quad dv = x \, dx$$

خواهیم داشت

$$du = \cos x \, dx \quad \text{و} \quad v = \frac{1}{2} x^2$$

بنابراین

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx.$$

انتگرال طرف راست فوق به مراتب پیچیده تر از انتگرال اولیه است، و از اینجا دیده می شود که اینها انتخابهای مناسبی برای u و dv نیستند. ○

ممکن است برای محاسبه انتگرالهای خاصی مجبور شویم فرمول انتگرال گیری جزء به جزء را چندین بار به کار ببریم. این مورد در مثال زیر نشان داده شده است.

$$\text{مثال ۳} \quad \int x^2 e^x \, dx \quad \text{را به دست آورید.}$$

حل فرض کنید $u = x^2$ و $dv = e^x \, dx$ در این صورت

$$du = 2x \, dx \quad \text{و} \quad v = e^x$$

پس، داریم

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

اکنون انتگرال گیری جزء به جزء را برای انتگرال طرف راست به کار می بریم. فرض کنید

$$\bar{u} = x \quad \text{و} \quad d\bar{v} = e^x \, dx$$

انتگرال گیری جزء به جزء ۷

بنابراین

$$\bar{v} = e^x \text{ و } d\bar{u} = dx$$

پس داریم

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C$$

$$\triangleq = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

انتگرال گیری جزء به جزء غالباً وقتی به کار می رود که انتگرال شامل لگاریتم، توابع مثلثاتی معکوس، و حاصلضرب توابع باشد.

مثال ۴ $\int \tan^{-1} x dx$ را به دست آورید.

حل فرض کنید $u = \tan^{-1} x$ و $dv = dx$. در این صورت

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad v = x$$

پس

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x dx}{1+x^2}$$

$$\triangleq = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

وقتی که از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم، گاهی وضعیتی پیش می آید که در مثال ۵ نشان داده شده است.

مثال ۵ $\int e^x \sin x dx$ را به دست آورید.

حل فرض کنید $u = e^x$ و $dv = \sin x dx$. در این صورت

$$du = e^x dx \quad v = -\cos x$$

بنا بر این

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

انتگرال طرف راست شبیه انتگرال طرف چپ است، با این تفاوت که $\cos x$ به جای $\sin x$ آمده است. دوباره انتگرال گیری جزء به جزء را به کار می بریم؛ فرض کنید

$$d\bar{v} = \cos x \, dx \quad \text{و} \quad \bar{u} = e^x$$

پس

$$d\bar{v} = \sin x \quad \text{و} \quad d\bar{u} = e^x \, dx$$

بنا بر این

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \right).$$

می بینیم که در طرف راست تساوی، همان انتگرال طرف چپ به وجود آمده است.

بنابر این $\int e^x \sin x \, dx$ را به دو طرف معادله فوق اضافه می کنیم و خواهیم داشت

$$2 \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C$$

و با تقسیم طرفین بر ۲، داریم

$$\Delta \quad \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

وقتی انتگرال گیری جزء به جزء را برای انتگرال خاصی به کار می بریم، ممکن است انتخابی از u و dv به محاسبه انتگرال بیانجامد، و انتخاب دیگری از u و dv هیچ کمکی به حل مسئله نکند. این را در نمونه ۲ دیدیم، و مورد دیگری را هم در نمونه ۳ نشان می دهیم.

○ نمونه ۳ در مثال ۵، در مرحله ای که رابطه زیر را داشتیم

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

اگر برای محاسبه انتگرال طرف راست، فرض کنیم

$$d\bar{v} = e^x \, dx \quad \text{و} \quad \bar{u} = \cos x$$

$$\bar{v} = e^x \quad \text{و} \quad d\bar{u} = -\sin x \, dx$$

داریم

پس

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + (e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx)$$

$$\circ \quad \int e^x \sin x \, dx = \int e^x \sin x \, dx.$$

در بخش ۲۰۹ گفتیم که برای انتگرال گیری از توانهای فرد سکانت و کسکانت، از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می کنیم. این فرایند در مثال ۶ نشان داده شده است.

مثال ۶ $\int \sec^3 x \, dx$ را به دست آورید.

حل فرض کنید $u = \sec x$ و $dv = \sec^2 x \, dx$. در این صورت

$$v = \tan x \quad \text{و} \quad du = \sec x \tan x \, dx$$

بنابراین

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$\int \sec^3 x \, dx$ را به دو طرف اضافه می کنیم و به دست می آوریم

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C$$

پس

$$\blacktriangle \quad \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

تمرینهای ۲۰۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۲۴، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$۱. \int x e^{x^2} \, dx \quad ۲. \int x \cos^2 x \, dx$$

$$۳. \int x \sec x \tan x \, dx \quad ۴. \int x^{3^x} \, dx$$

$$\begin{array}{ll}
 \int \sin^{-1} w \, dw \cdot ۶ & \int \ln x \, dx \cdot ۵ \\
 \int x \sec^x x \, dx \cdot ۸ & \int (\ln x)^x \, dx \cdot ۷ \\
 \int x^x \ln x \, dx \cdot ۱۰ & \int x \tan^{-1} x \, dx \cdot ۹ \\
 \int x^x \sin^x x \, dx \cdot ۱۲ & \int \frac{x e^x}{(x+1)^x} \, dx \cdot ۱۱ \\
 \int \sin(\ln x) \, dx \cdot ۱۳ & \int \sin x \ln(\cos x) \, dx \cdot ۱۳ \\
 \int x^x e^{x^x} \, dx \cdot ۱۶ & \int e^x \cos x \, dx \cdot ۱۵ \\
 \int \frac{\sin^x x}{e^x} \, dx \cdot ۱۸ & \int \frac{x^x \, dx}{\sqrt{1-x^x}} \cdot ۱۷ \\
 \int \frac{e^{xx}}{\sqrt{1-e^x}} \, dx \cdot ۲۰ & \int x^x \sinh x \, dx \cdot ۱۹ \\
 \int \csc^x t \, dt \cdot ۲۲ & \int \sec^x x \, dx \cdot ۲۱ \\
 \int \tanh^{-1} x \, dx \cdot ۲۴ & \int \frac{\cot^{-1} \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \, dz \cdot ۲۳
 \end{array}$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۴، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \int_{-1}^x \ln(x+2) \, dx \cdot ۲۶ & \int_0^x x^x 2^x \, dx \cdot ۲۵ \\
 \int_0^{\frac{\pi}{x}} \cos \sqrt{x} \, dx \cdot ۲۸ & \int_0^{\pi/x} \sin^x x \cos x \, dx \cdot ۲۷ \\
 \int_{-\pi}^{\pi} z^x \cos^x z \, dz \cdot ۳۰ & \int_0^x x e^{xx} \, dx \cdot ۲۹ \\
 \int_0^1 x \sin^{-1} x \, dx \cdot ۳۲ & \int_0^{\pi/4} e^{xx} \sin^x x \, dx \cdot ۳۱
 \end{array}$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x \cot x \csc x \, dx \quad ۳۴ \qquad \int_1^4 \sec^{-1} \sqrt{t} \, dt \quad ۳۳$$

۳۵. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \ln x$ ، محور x ها، و خط $x = e^2$ را به دست آورید.

۳۶. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تمرین ۳۵ حول محور x ها.

۳۷. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تمرین ۳۵ حول محور y ها.

۳۸. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x \csc^2 x$ ، محور x ها، و خطوط $x = \pi/6$ و $x = \pi/4$ را به دست آورید.

۳۹. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 2xe^{-x/2}$ ، محور x ها، و خط $x = 4$ را به دست آورید.

۴۰. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تمرین ۳۹ حول محور x ها.

۴۱. يك مخزن پر از آب به شکل جسم دواری است که از چرخش ناحیه محصور بین منحنی $y = e^{-x}$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 4$ حول محور x ها تشکیل شده است. کار لازم برای انتقال تمام آب مخزن به بالای مخزن را به دست آورید. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود. جهت مثبت محور x ها را به طور قائم به طرف پایین در نظر بگیرید.

۴۲. تابع هزینه نهایی C' است و $C'(x) = \ln x$ به صورت می باشد، که $x \geq 1$. تابع هزینه کل را به دست آورید، اگر $C(x)$ هزینه کل تولید x واحد کالا بر حسب دلار باشد و $C(1) = 5$.

۴۳. تولیدکننده ای به این نتیجه رسیده است که اگر در هفته، $100x$ واحد از جنس خاصی را تولید کند، هزینه نهایی برابر با $x \cdot 2^{x/2}$ و درآمد نهایی وی برابر با $8 \cdot 2^{-x/2}$ خواهد بود، که هم هزینه تولید و هم درآمد بر حسب هزار دلار است. اگر هزینه ثابت هفتگی برابر ۲۰۰۰ دلار باشد، ما کسب سود هفتگی وی را به دست آورید.

۴۴. ذره ای در امتداد خطی مستقیم در حال حرکت است و فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t برابر با s فوت است. اگر سرعت ذره در ثانیه t برابر با v فوت بر ثانیه باشد، داریم $s = 0$ وقتی $t = 0$ و $s = t \sin t$. s را بر حسب t بیابید و وقتی که $t = \pi/2$ ، مقدار s را پیدا کنید.

۴۵. (الف) نشان دهید که

$$\int \sec^m x \, dx = \frac{\sec^{m-2} x \tan x}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x \, dx.$$

(ب) فرمول قسمت (الف) را به کار ببرید و $\int \sec^r x dx$ را به دست آورید.

۴۶. (الف) فرمول زیر را، وقتی که r عدد حقیقی دلخواهی باشد، استنتاج کنید.

$$\int x^r \ln x dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + C & r \neq -1 \\ \frac{1}{r} (\ln x)^r + C & r = -1 \end{cases}$$

(ب) با استفاده از فرمول قسمت (الف)، $\int x^3 \ln x dx$ را به دست آورید.

۴۷. (الف) فرمول زیر را، وقتی که r و q اعداد حقیقی دلخواهی باشند، استنتاج کنید.

$$\int x^r (\ln x)^q dx = \begin{cases} \frac{x^{r+1} (\ln x)^q}{r+1} - \frac{q}{r+1} \int x^r (\ln x)^{q-1} dx & r \neq -1 \\ \frac{(\ln x)^{q+1}}{q+1} + C & q \neq -1, r = -1 \end{cases}$$

(ب) با استفاده از فرمول قسمت (الف)، $\int x^4 (\ln x)^4 dx$ را به دست آورید.

۴۸. (الف) فرمول زیر را، وقتی که r عدد حقیقی دلخواهی باشد، نتیجه بگیرید

$$\int x^r e^x dx = x^r e^x - r \int x^{r-1} e^x dx.$$

(ب) با استفاده از فرمول قسمت (الف)، $\int x^4 e^x dx$ را به دست آورید.

۳.۱۰ انتگرال گیری، با جانشین کردن توابع مثلثاتی

اگر انتگران شامل عبارتی به صورت $\sqrt{a^2 - u^2}$ ، $\sqrt{a^2 + u^2}$ یا $\sqrt{u^2 - a^2}$ باشد که $a > 0$ ، اغلب ممکن است با جانشین کردن توابع مثلثاتی، انتگرالی به دست آورد که شامل توابع مثلثاتی باشد و از این طریق انتگرال گیری را انجام داد. هر یک از این صورتها را جداگانه بررسی می کنیم.

حالت ۱: انتگران شامل عبارتی به صورت $\sqrt{a^2 - u^2}$ است، که $a > 0$.

متغیر جدید θ را با فرض $u = a \sin \theta$ معرفی می کنیم که

$$u \leq 0 \text{ اگر } -\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0 \text{ و } u \geq 0 \text{ اگر } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

انتگرال گیری، با جانشین کردن توابع مثلثاتی ۱۳

در این صورت، $du = a \cos \theta d\theta$ ، و

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} = a \sqrt{\cos^2 \theta}.$$

چون $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، $\cos \theta \geq 0$ ، از اینرو، $\sqrt{\cos^2 \theta} = \cos \theta$ ، و

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta.$$

چون $\sin \theta = u/a$ و $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، نتیجه می شود

$$\theta = \sin^{-1} \frac{u}{a}.$$

مثال ۱ $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$ را به دست آورید.

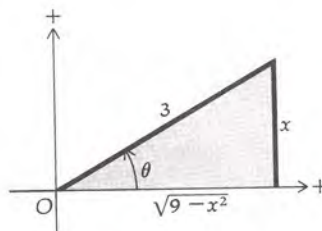
حل فرض کنید $x = 3 \sin \theta$ ، که $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ اگر $x > 0$ و اگر $x < 0$ پس $dx = 3 \cos \theta d\theta$ و

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9 \sin^2 \theta} = 3 \sqrt{\cos^2 \theta} = 3 \cos \theta.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \sin^2 \theta} (3 \cos \theta d\theta) \\ &= \int \cot^2 \theta d\theta \\ &= \int (\csc^2 \theta - 1) d\theta \\ &= -\cot \theta - \theta + C. \end{aligned}$$

چون $\sin \theta = x/3$ و $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، به دست می آید $\theta = \sin^{-1}(x/3)$ برای

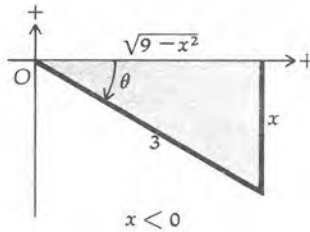


$x > 0$

شکل ۱۰.۳۰

پیدا کردن $\cot \theta$ ، به شکل ۱۰.۳۰۱ (برای $x > 0$) و ۲۰.۳۰۱۰ (برای $x < 0$) مراجعه کنید. می بینید که $\cot \theta = \sqrt{9-x^2}/x$. بنا براین

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{3} + C.$$



شکل ۲۰.۳۰۱۰

حالت ۲: انتگران شامل عبارتی به صورت $\sqrt{a^2+u^2}$ است، که $a > 0$. متغیر جدید θ را با فرض $u = a \tan \theta$ معرفی می کنیم، که

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ اگر } u \geq 0 \text{ و } -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \text{ اگر } u < 0.$$

پس $du = a \sec^2 \theta d\theta$ و

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2 \tan^2 \theta} = a\sqrt{1+\tan^2 \theta} = a\sqrt{\sec^2 \theta}.$$

چون $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، داریم $\sec \theta \geq 1$. پس $\sqrt{\sec^2 \theta} = \sec \theta$ و

$$\sqrt{a^2+u^2} = a \sec \theta$$

و چون $\tan \theta = u/a$ و $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، نتیجه می گیریم

$$\theta = \tan^{-1} \frac{u}{a}.$$

مثال ۲ $\int \sqrt{x^2+5} dx$ را محاسبه کنید.

حل قرار می دهیم $x = \sqrt{5} \tan \theta$ ، که $0 \leq \theta < \pi/2$ اگر $x \geq 0$ و $-\pi/2 < \theta < 0$ اگر $x < 0$. در این صورت $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta d\theta$

انتگرال گیری، با جانشین کردن توابع مثلثاتی ۱۵

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5 \tan^2 \theta + 5} = \sqrt{5} \sqrt{\sec^2 \theta} = \sqrt{5} \sec \theta.$$

بنابراین

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \int \sqrt{5} \sec \theta (\sqrt{5} \sec^2 \theta d\theta) = 5 \int \sec^3 \theta d\theta.$$

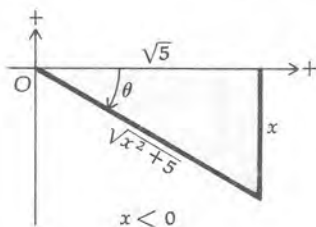
با استفاده از نتیجه مثال ۶ در بخش ۲۰.۱۰ داریم

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \frac{5}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{5}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C.$$

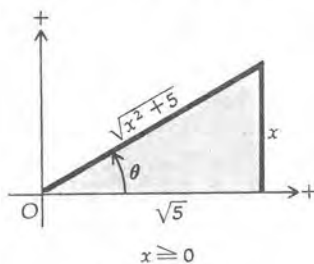
$\sec \theta$ را از شکل ۳.۳.۱۰ (برای $x \geq 0$) و از شکل ۴.۳.۱۰ (برای $x < 0$) به دست می آوریم، که ملاحظه می شود $\tan \theta = x/\sqrt{5}$ می بینیم که $\sec \theta = \sqrt{x^2+5}/\sqrt{5}$. پس

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+5} dx &= \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \ln |\sqrt{x^2+5} + x| - \frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \ln (\sqrt{x^2+5} + x) + C_1. \end{aligned}$$

توجه کنید که به جای $-\frac{5}{2} \ln \sqrt{5} + C$ ثابت اختیاری C_1 را قرار داده ایم. به علاوه، چون $\sqrt{x^2+5} + x > 0$ علامت قدر مطلق را برداشته ایم.



شکل ۴.۳.۱۰



شکل ۳.۳.۱۰

حالت ۳: انتگران شامل عبارتی به صورت $\sqrt{u^2-a^2}$ است، که $a > 0$. متغیر جدیدی را با فرض $u = a \sec \theta$ معرفی می کنیم که

$$u \leq -a \text{ اگر } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \text{ و } u \geq a \text{ اگر } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

در این صورت $du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$ و

$$\sqrt{u^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = a \sqrt{\tan^2 \theta}.$$

چون $0 \leq \theta < \pi/2$ و $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ ، پس $\tan \theta \geq 0$. از اینرو $\sqrt{\tan^2 \theta} = \tan \theta$ و داریم

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta.$$

در شکل ۵.۳.۱۰ ملاحظه کنید که

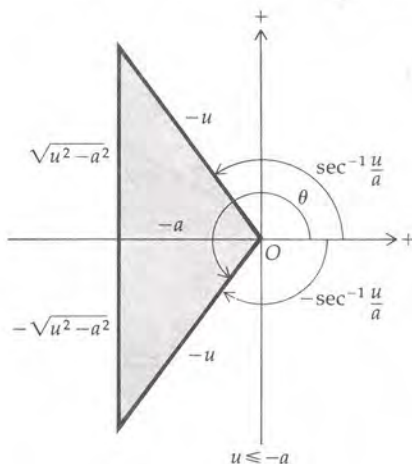
$$u \geq a \quad \sec \theta = \frac{u}{a} \geq 1 \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین

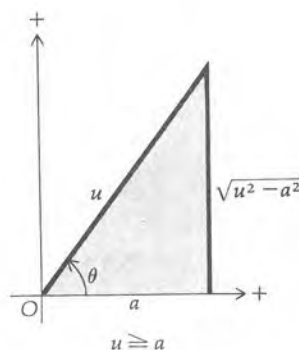
$$\theta = \sec^{-1} \frac{u}{a} \text{ وقتی } u \geq a$$

چون تابع سکانتی معکوس دارای برد $(\pi/2, \pi] \cup [0, \pi/2)$ است، پس $\theta \neq \sec^{-1}(u/a)$ وقتی $u \leq -a$. برای تعیین ارتباط بین θ و $\sec^{-1}(u/a)$ وقتی که $u \leq -a$ در شکل ۶.۳.۱۰ ملاحظه کنید که

$$u \leq -a \quad \sec \theta = \frac{u}{a} \leq -1 \quad \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$



شکل ۶.۳.۱۰



شکل ۵.۳.۱۰

انتگرال گیری، با جانین کردن توابع مثلثاتی ۱۷

چون وقتی $u \leq -a$ ، داریم $\pi/2 < \sec^{-1}(u/a) \leq \pi$ ، نتیجه می شود که

$$\theta = \pi - \sec^{-1} \frac{u}{a} \quad , \quad u \leq -a \quad \text{وقتی}$$

$$\text{مثال ۳} \quad \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} \quad \text{را محاسبه کنید.}$$

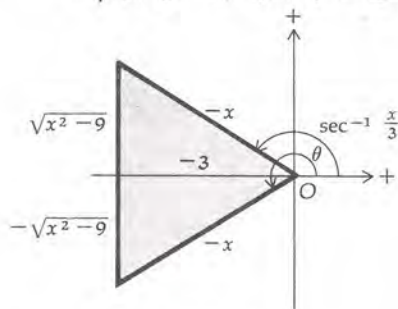
حل فرض کنید $x = 3 \sec \theta$ ، که $0 < \theta < \pi/2$ اگر $x > 3$ ، و $\pi < \theta < 3\pi/2$ اگر $x < -3$. در این صورت $dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta$ و

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 \sec^2 \theta - 9} = 3 \sqrt{\tan^2 \theta} = 3 \tan \theta$$

پس

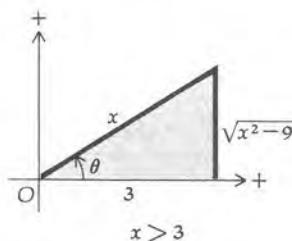
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 9}} &= \int \frac{3 \sec \theta \tan \theta d\theta}{27 \sec^3 \theta \cdot 3 \tan \theta} = \frac{1}{27} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{54} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{54} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C \\ &= \frac{1}{54} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C. \end{aligned}$$

وقتی $x > 3$ ، داریم $0 < \theta < \pi/2$ ؛ و $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را از شکل ۷.۳.۱۰ به دست می آوریم. وقتی $x < -3$ ، داریم $\pi < \theta < 3\pi/2$ ؛ و $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را از شکل ۸.۳.۱۰ به دست می آوریم. در هر دو حالت فوق، $\sin \theta = \sqrt{x^2 - 9}/x$ و $\cos \theta = 3/x$. برای بیان θ بر حسب x بایستی بین دو حالت $x > 3$ و $x < -3$ تمیز قائل شویم. وقتی که $x > 3$ ؛ داریم $\theta = \sec^{-1}(x/3)$ ؛ وای وقتی که $x < -3$ ، داریم $\theta = 2\pi - \sec^{-1}(x/3)$ (به شکل ۸.۳.۱۰ رجوع کنید). پس نتیجه می گیریم که



$$x < -3$$

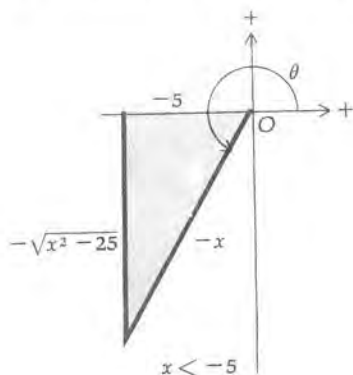
شکل ۸.۳.۱۰



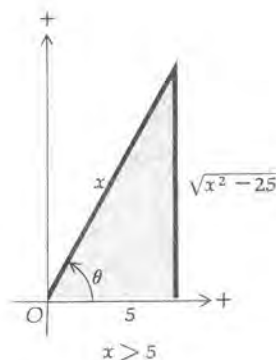
$$x > 3$$

شکل ۷.۳.۱۰

انتگرال گیری، با جانشین کردن توابع مثلثاتی ۱۹



شکل ۱۰.۳.۱۰



شکل ۹.۳.۱۰

مثال ۵ $\int_1^2 \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}}$ را محاسبه کنید.

حل ابتدا انتگرال نامعین را می‌یابیم؛ قرار می‌دهیم $x = \sqrt{6} \sin \theta$. در این حالت می‌توانیم θ را به بازه $0 < \theta < \pi/2$ محدود کنیم چون می‌خواهیم انتگرال معینی را محاسبه کنیم کس در آن $x > 0$ ؛ زیرا x در $[1, 2]$ قرار دارد. بنابراین داریم $x = \sqrt{6} \sin \theta$ ، $0 < \theta < \pi/2$ و $dx = \sqrt{6} \cos \theta d\theta$. همچنین،

$$\begin{aligned} (6-x^2)^{3/2} &= (6-6\sin^2 \theta)^{3/2} \\ &= \sqrt{6} (1-\sin^2 \theta)^{3/2} \\ &= \sqrt{6} (\cos^2 \theta)^{3/2} \\ &= \sqrt{6} \cos^3 \theta \end{aligned}$$

پس

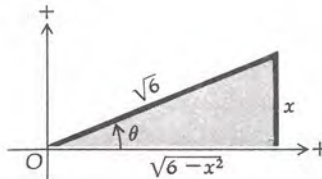
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6} \cos \theta d\theta}{\sqrt{6} \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \tan \theta + C. \end{aligned}$$

$\tan \theta$ را از شکل ۱۱.۳.۱۰ به دست می آوریم، که در آن $\sin \theta = x/\sqrt{6}$ و $0 < \theta < \pi/2$.
بنابراین $\tan \theta = x/\sqrt{6-x^2}$ ، ولذا

$$\int \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6-x^2}} + C$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{(6-x^2)^{3/2}} &= \left[\frac{x}{6\sqrt{6-x^2}} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{6\sqrt{10}} \end{aligned}$$



شکل ۱۱.۳.۱۰

تمرینهای ۳.۱۰

دز تمرینهای ۱ تا ۲۴، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

۲. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$

۱. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

۴. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}$

۳. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

۶. $\int \sqrt{1-u^2} du$

۵. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

۸. $\int \frac{dw}{w^2\sqrt{w^2-7}}$

۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$$\begin{array}{ll}
 \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^{3/2}} \quad .10 & \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)^2} \quad .9 \\
 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{16 + x^2}} \quad .12 & \int \frac{dx}{(x^2 - 9)^{3/2}} \quad .11 \\
 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(25 - x^2)^3}} \quad .14 & \int \frac{2 dt}{t \sqrt{t^2 + 25}} \quad .13 \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} \quad .16 & \int \frac{dx}{\sqrt{4x + x^2}} \quad .15 \\
 \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}} \quad .18 & \int \frac{dx}{(\Delta - 4x - x^2)^{3/2}} \quad .17 \\
 \int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{3/2}} \quad .20 & \int \frac{\sec^2 x dx}{(4 - \tan^2 x)^{3/2}} \quad .19 \\
 \int \frac{dz}{(z^2 - 6z + 18)^{3/2}} \quad .22 & \int \frac{\ln^2 w dw}{w \sqrt{\ln^2 w - 4}} \quad .21 \\
 \int \frac{\sqrt{16 - e^{2x}}}{e^x} dx \quad .24 & \int \frac{e^t dt}{(e^{2t} + 8e^t + 7)^{3/2}} \quad .23
 \end{array}$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۲، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \int_0^4 \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}} \quad .26 & \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} \quad .25 \\
 \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}} \quad .28 & \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} \quad .27 \\
 \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 + 3}} \quad .30 & \int_4^6 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}} \quad .29 \\
 \int_4^8 \frac{dw}{w^2 (w^2 - 4)^{3/2}} \quad .32 & \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx \quad .31
 \end{array}$$

۳۳. با استفاده از روشهای قبل از این بخش (یعنی، بدون جانشین کردن توابع مثلثاتی) انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{5x dx}{\sqrt{3-2x^2}} \quad (\text{ب}) \qquad \int \frac{3 dx}{x\sqrt{4x^2-9}} \quad (\text{الف})$$

۳۴. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \sqrt{x^2 - 9}/x^2$ ، محور x ها، و خط $x = 5$ را به دست آورید.

۳۵. طول قوس منحنی $y = \ln x$ از $x = 1$ تا $x = 3$ را به دست آورید.

۳۶. مطلوب است حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه تمرین ۳۴ حول محور y ها.

۳۷. ناحیه واقع در طرف راست محور y ها و محصور بین منحنی $y = x\sqrt{9-x^2}$ و محور x ها را حول محور x ها دوران می دهیم؛ حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

۳۸. با استفاده از انتگرال گیری ثابت کنید که مساحت ناحیه محدود به دایره ای به شعاع r برابر است با $\frac{2}{3}\pi r^3$.

۳۹. تولیدکننده ای که از چهار سال پیش فعالیتهای خود را شروع کرده، تعیین نموده است که درآمد حاصل از فروش به طور مداوم با آهنگ $(t^3 + 3t^2 + 2t + 7)/(t^2 + 3t + 2)$ (ت میلیون دلار در سال افزایش داشته که t بر حسب سال، مدتی است که کارخانه فعالیت کرده است. برآورد می شود که درآمد کل حاصل از فروش با همین آهنگ در دو سال آینده افزایش خواهد داشت. اگر درآمد کل حاصل از فروش برای سالی که هم اکنون به پایان می رسد ۶ میلیون دلار باشد، درآمد کل حاصل از فروش مورد انتظار در یک دوره یکساله از حالا چقدر است؟ جواب را به نزدیکترین مضرب ۱۰۰ دلار بیان کنید.

۴.۱۰ انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله کسره های جزئی، وقتی که مخرج فقط عوامل خطی دارد

در بخش ۴.۱ تابع گویا را به عنوان تابعی تعریف کردیم که می توان آن را به صورت خارج-قسمت دو تابع چندجمله ای نوشت. یعنی، تابع H تابعی گویا است اگر $H(x) = P(x)/Q(x)$ ، که $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله ای هستند. قبلاً دیدیم که اگر درجه صورت کسر کمتر از درجه مخرج کسر نباشد، کسری نامتعارف داریم، و در این حالت صورت کسر را به مخرج آن تقسیم می کنیم تا کسری متعارف به دست آید، که درجه صورتش کمتر از درجه مخرجش است. به عنوان مثال،

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}.$$

بنابراین، اگر بخواهیم انتگرال زیر را بگیریم

$$\int \frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} dx$$

کافی است انتگرالهای زیر را محاسبه کنیم

$$\int (x^2 - 4) dx + \int \frac{3x - 23}{x^2 - 4} dx.$$

پس، به طور کلی با انتگرال گیری از عباراتی به صورت زیر سروکار داریم

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

که درجه $P(x)$ کمتر از درجه $Q(x)$ است.

برای انجام این کار، اغلب لازم است که $P(x)/Q(x)$ را به صورت مجموع کسرهایی جزئی بنویسیم. مخرج کسرهایی جزئی را با تجزیه $Q(x)$ به حاصلضرب عوامل خطی و درجه دوم به دست می آوریم. گاهی تجزیه $Q(x)$ ممکن است مشکل باشد؛ معهذ، قضیه ای در جبر پیشرفته وجود دارد که می گوید این عمل از لحاظ نظری همیشه امکان پذیر است. این قضیه را بدون اثبات بیان می کنیم.

۱۰۴.۱۰ قضیه هر چند جمله ای با ضرایب حقیقی را می توان به صورت حاصلضربی از عوامل خطی و درجه دوم تجزیه کرد به طوری که هر کدام از این عوامل دارای ضرایب حقیقی باشد.

بعد از تجزیه $Q(x)$ به حاصلضرب عوامل خطی و درجه دوم، روش یافتن کسرهایی جزئی بستگی به طبیعت این عوامل دارد. حالات مختلف را جداگانه بررسی می کنیم. نتایجی از جبر پیشرفته که در اینجا اثبات نمی شوند، شکل کسرهایی جزئی را در هر حالت تعیین می کنند.

حالت ۱: عوامل $Q(x)$ همگی خطی هستند و هیچ کدام تکرار نشده است. یعنی

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$$

که در آن هیچ دو عاملی یکسان نیستند. در این حالت می نویسیم

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n} \quad (1)$$

که در آن $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند.

توجه کنید که در (۱) به جای = نوشته ایم $\equiv$ (که خوانده می شود «متحد است با»). علت آن است که (۱) به ازای مقدار هریک از A_i ها يك اتحاد است. نمونه زیر نشان می دهد که A_i ها چگونه پیدا می شوند.

○ نمونه ۱ برای محاسبه انتگرال

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^3-x^2-2x}$$

مخرج را تجزیه می کنیم و داریم

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} \equiv \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}.$$

پس

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}. \quad (2)$$

معادله (۲) برای تمام x ها يك اتحاد است (بجز برای $x=0, 2, -1$). از (۲)

داریم

$$x-1 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2). \quad (3)$$

معادله (۳) نیز يك اتحاد است که برای تمام مقادیر x از جمله برای $0, 2, -1$ برقرار است. می خواهیم ثابتهای A, B, C را به دست آوریم. اگر در (۳) عدد 0 را جانشین x کنیم، به دست می آوریم

$$A = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad -1 = -2A$$

و اگر در (۳)، عدد 2 را جانشین x کنیم، داریم

$$B = \frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad 1 = 6B$$

و بالاخره اگر در (۳) عدد -1 را جانشین x کنیم، نتیجه می شود

$$C = -\frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad -2 = 3C$$

روش دیگری نیز برای پیدا کردن مقادیر A, B, C وجود دارد. اگر در طرف راست (۳) جملات را ترکیب و دسته بندی کنیم، داریم

$$x-1 \equiv (A+B+C)x^2 + (-A+B-2C)x - 2A. \quad (۴)$$

برای آنکه (۴) يك اتحاد باشد، باید ضرایب طرف چپ برابر با ضرایب متناظر طرف راست باشند. پس

$$A+B+C=0$$

$$-A+B-2C=1$$

$$-2A=-1.$$

اگر معادلات را با هم حل کنیم، به دست می آوریم $A=1/2$ ، $B=1/6$ ، و $C=-2/3$. با جانشینی این مقادیر در (۲) نتیجه می گیریم

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \equiv \frac{1/2}{x} + \frac{1/6}{x-2} + \frac{-2/3}{x+1}.$$

پس، انتگرال داده شده را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2-x^2-2x} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln C \\ &= \frac{1}{6} (2 \ln|x| + \ln|x-2| - 4 \ln|x+1| + \ln C) \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{Cx^2(x-2)}{(x+1)^4} \right|. \end{aligned}$$

○

حالت ۲: عوامل $Q(x)$ همگی خطی هستند، و بعضی از آنها تکرار شده اند. فرض کنید $(a_i x + b_i)$ يك عامل p گانه است. در این صورت، متناظر با این عامل، مجموع p کسر جزئی وجود دارد

$$\frac{A_1}{(a_i x + b_i)^p} + \frac{A_2}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^2} + \frac{A_p}{a_i x + b_i}$$

که $A_1, \dots, A_p$ ثابتهایی هستند که باید تعیین شوند. مثال ۱ این حالت و روش محاسبه هریک از A_i ها را روشن می سازد.

مثال ۱ انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2(x-2)^3}$$

حل تابع کسری انتگرال به صورت مجموعی از کسرهایی جزئی نوشته می شود:

$$\frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{x-2}. \quad (5)$$

رابطه (۵) برای تمام x ها (بجز ۰، ۲) يك اتحاد است. اگر دو طرف (۵) را در کوچکترین مخرج مشترك ضرب کنیم به دست می آوریم

$$x^3-1 \equiv A(x-2)^3 + Bx(x-2)^3 + Cx^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x-2)^2. \quad (6)$$

عدد ۲ را در (۶) جانشین x می کنیم و خواهیم داشت

$$C = \frac{7}{4} \text{ یا } 7 = 4C$$

و اگر ۰ را جانشین x در (۶) کنیم، داریم

$$A = \frac{1}{8} \text{ یا } -1 = -8A$$

این مقادیر A و C را در (۶) قرار داده و دو جمله ایها را به توان می رسانیم

$$\begin{aligned} x^3-1 &\equiv \frac{1}{8}(x^3-6x^2+12x-8) + Bx(x^3-6x^2+12x-8) + \frac{7}{4}x^2 \\ &\quad + Dx^2-2Dx^2+Ex^2(x^2-2x+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3-1 &\equiv (B+E)x^4 + \left(\frac{1}{8}-6B+D-2E\right)x^3 \\ &\quad + \left(-\frac{3}{4}+12B+\frac{7}{4}-2D+2E\right)x^2 + \left(\frac{3}{4}-8B\right)x - 1. \end{aligned}$$

اگر ضرایب توانهای مشابه x را مساوی هم قرار دهیم، به دست می آید

$$B+E=0$$

$$\frac{1}{8}-6B+D-2E=1$$

انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله... ۲۷

$$-\frac{3}{4} + 12B + \frac{7}{4} - 2D + 4E = 0$$

$$\frac{3}{2} - 8B = 0.$$

با حل معادلات فوق، نتیجه می شود

$$B = \frac{3}{16} \quad D = \frac{5}{4} \quad E = -\frac{3}{16}.$$

بنابراین، از (۵) داریم

$$\frac{x^2-1}{x^2(x-2)^2} \equiv \frac{1/8}{x^2} + \frac{3/16}{x} + \frac{7/4}{(x-2)^2} + \frac{5/4}{(x-2)^2} + \frac{-3/16}{x-2}.$$

پس

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2-1}{x^2(x-2)^2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x} + \frac{7}{4} \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x-2} \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{3}{16} \ln|x| - \frac{7}{4(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)^2} - \frac{3}{16} \ln|x-2| + C \\ \triangle &= \frac{-11x^2 + 17x - 4}{8x(x-2)^2} + \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x}{x-2} \right| + C. \end{aligned}$$

مثال ۲ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2}.$$

حل

$$\frac{1}{u^2 - a^2} \equiv \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u+a}.$$

اگر طرفین را در $(u-a)(u+a)$ ضرب کنیم، به دست می آید

$$1 \equiv A(u+a) + B(u-a)$$

$$1 \equiv (A+B)u + Aa - Ba.$$

اگر ضرایب را مساوی هم قرار دهیم، خواهیم داشت

$$A+B=0$$

$$Aa-Ba=1.$$

معادلات فوق را باهم حل می کنیم و به دست می آوریم

$$B = -\frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad A = \frac{1}{2a}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{du}{u+a} \\ &= \frac{1}{2a} \ln|u-a| - \frac{1}{2a} \ln|u+a| + C \end{aligned}$$

و یا

$$\blacktriangle \quad \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

انتگرالی از نوع مثال فوق مکرراً در مسائل پیش می آید، از اینرو آن را به صورت يك فرمول می آوریم؛ اما به خاطر سپردن این فرمول لازم نیست چون انتگرال گیری به وسیله کسرهای جزئی نسبتاً آسان است.

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.} \quad (۷)$$

اگر داشته باشیم $\int du/(a^2-u^2)$ ، می نویسیم

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{a^2-u^2} &= - \int \frac{du}{u^2-a^2} \\ &= -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C. \end{aligned}$$

این را نیز به صورت يك فرمول می آوریم

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C. \quad (۸)$$

در علم شیمی، یکی از کاربردهای انتگرال گیری به وسیله کسرهای جزئی ناشی از قانون اثر جرم است. بنا به این قانون، تحت شرایط معینی، از فعل و انفعال جسم شیمیایی A با جسم شیمیایی B ، جسم شیمیایی سوئی مانند C به وجود می آید به طوری که آهنگ تغییر مقدار C در هر لحظه مفروض از زمان، متناسب با حاصلضرب مقادیر باقیمانده A و B می باشد.

فرض کنید که در ابتدا α گرم از A و β گرم از B موجود است و r گرم از A با s گرم از B ترکیب می شود تا $(r+s)$ گرم از C به دست آید. اگر x مقدار جسم شیمیایی C بر حسب گرم باشد که در t واحد زمان تولید می شود، در این صورت C شامل $rx/(r+s)$ گرم از A و $sx/(r+s)$ گرم از B می باشد. پس، مقدار باقیمانده A بر حسب گرم برابر با $\alpha - rx/(r+s)$ و مقدار باقیمانده B بر حسب گرم برابر با $\beta - sx/(r+s)$ است. بنا بر این، از قانون اثر جرم داریم

$$\frac{dx}{dt} = K \left(\alpha - \frac{rx}{r+s} \right) \left(\beta - \frac{sx}{r+s} \right)$$

که در آن K ثابت تناسب است. این معادله را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Krs}{(r+s)^2} \left(\frac{r+s}{r} \alpha - x \right) \left(\frac{r+s}{s} \beta - x \right). \quad (۹)$$

اگر فرض کنیم

$$k = \frac{Krs}{(r+s)^2} \quad a = \frac{r+s}{r} \alpha \quad b = \frac{r+s}{s} \beta$$

معادله (۹) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x). \quad (۱۰)$$

متغیرها را در (۱۰) می توانیم از هم جدا کنیم و به دست آوریم

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt.$$

اگر $a=b$ ، آنگاه از طرف چپ معادله بالا می توان با استفاده از فرمول توانی انتگرال گرفت؛ و اگر $a \neq b$ ، می توان کسرهای جزئی را برای انتگرال گیری به کار برد.

مثال ۳ در يك فعل وانفعال شیمیایی، جسم A با جسم B ترکیب شده و جسم C طوری تولید می شود که قانون اثر جرم برقرار است. اگر در معادله (۱۰) ، $a=۸$ و $b=۶$ ، و ۲ گرم از جسم C در ۱۰ دقیقه تولید شده باشد، چند گرم از C در ۱۵ دقیقه تولید می شود؟

حل اگر فرض کنیم مقدار موجود جسم C در دقیقه t برابر x گرم باشد، در این صورت شرایط اولیه ای داریم که در جدول $۱۰.۴.۱۰$ نشان داده شده است. معادله (۱۰) به صورت زیر درمی آید

$$\frac{dx}{dt} = k(۸-x)(۶-x).$$

اگر متغیرها را از هم جدا کنیم، خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(۸-x)(۶-x)} = k \int dt. \quad (۱۱)$$

انتگران را به صورت مجموع کسره ای جزئی می نویسیم

$$\frac{1}{(۸-x)(۶-x)} \equiv \frac{A}{۸-x} + \frac{B}{۶-x}$$

$$1 \equiv A(۶-x) + B(۸-x).$$

اگر ۶ را جانشین x کنیم، به دست می آید $B=۱/۲$ ، و اگر ۸ را جانشین x نماییم، داریم $A=-۱/۲$. پس (۱۱) به صورت زیر نوشته می شود

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dx}{۸-x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{۶-x} = k \int dt.$$

اگر از طرفین انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2} \ln |۸-x| - \frac{1}{2} \ln |۶-x| + \frac{1}{2} \ln |C| = kt$$

جدول $۱۰.۴.۱۰$

t	۰	۱۰	۱۵
x	۰	۲	$x_{۱۵}$

$$\ln \left| \frac{6-x}{C(8-x)} \right| = -2kt$$

$$\frac{6-x}{8-x} = Ce^{-2kt}. \quad (12)$$

اگر در (۱۲) قرار دهیم $x=0$ ، $t=0$ ، خواهیم داشت $C=3/4$. پس

$$\frac{6-x}{8-x} = \frac{3}{4}e^{-2kt} \quad (13)$$

وچنانچه در (۱۳) قرار دهیم $x=2$ ، $t=10$ ، خواهیم داشت

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{4}e^{-20k}$$

$$e^{-20k} = \frac{8}{9}$$

و اگر در (۱۳) قرار دهیم $x=x_{15}$ ، $t=15$ ، داریم

$$\frac{6-x_{15}}{8-x_{15}} = \frac{3}{4}e^{-30k}$$

$$4(6-x_{15}) = 3(e^{-20k})^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = 3\left(\frac{8}{9}\right)^{3/2}(8-x_{15})$$

$$24 - 4x_{15} = \frac{16\sqrt{2}}{9}(8-x_{15})$$

$$x_{15} = \frac{54 - 32\sqrt{2}}{9 - 4\sqrt{2}}$$

$$\approx 26.$$

▲

بنابراین، عَرَم ۲ گرم از جسم C در ۱۵ دقیقه تولید خواهد شد.

تمرینهای ۲.۱۰

دو تمرینهای ۱ تا ۲۰، انتگرال نامعین را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll}
 \int \frac{x^2 dx}{x^2 + x - 6} \cdot 2 & \int \frac{dx}{x^2 - 4} \cdot 1 \\
 \int \frac{(4x - 2) dx}{x^2 - x^2 - 2x} \cdot 4 & \int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx \cdot 3 \\
 \int \frac{9t^2 - 26t - 5}{2t^2 - 5t - 2} dt \cdot 6 & \int \frac{4w - 11}{2w^2 + 7w - 4} dw \cdot 5 \\
 \int \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} dx \cdot 8 & \int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^2 - x} dx \cdot 7 \\
 \int \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - x} dx \cdot 10 & \int \frac{dx}{x^2 + 3x^2} \cdot 9 \\
 \int \frac{3x^2 - x + 1}{x^2 - x^2} dx \cdot 12 & \int \frac{dx}{x^2(x+1)^2} \cdot 11 \\
 \int \frac{dt}{(t+2)^2(t+1)} \cdot 14 & \int \frac{x^2 - 3x - 7}{(2x+3)(x+1)^2} dx \cdot 13 \\
 \int \frac{(\Delta x^2 - 11x + 5) dx}{x^2 - 4x^2 + 5x - 2} \cdot 16 & \int \frac{2z + 1}{(z^2 - 4)^2} dz \cdot 15 \\
 \int \frac{2x^4 - 2x + 1}{2x^5 - x^4} dx \cdot 18 & \int \frac{x^4 + 3x^2 - 5x^2 - 4x + 17}{x^2 + x^2 - 5x + 3} dx \cdot 17 \\
 & \int \frac{-24x^3 + 30x^2 + 52x + 17}{9x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 4x + 4} dx \cdot 19 \\
 & \int \frac{dx}{16x^4 - 8x^2 + 1} \cdot 20
 \end{array}$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، انتگرال معین را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll}
 \int_0^4 \frac{(x-2)dx}{2x^2 + 7x + 3} \cdot 22 & \int_1^2 \frac{x-3}{x^3 + x^2} dx \cdot 21 \\
 \int_1^4 \frac{(2x^2 + 13x + 18) dx}{x^2 + 6x^2 + 9x} \cdot 24 & \int_1^2 \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x+1)^2} dx \cdot 23 \\
 \int_0^1 \frac{(3x^2 + 7x) dx}{x^2 + 6x^2 + 11x + 6} \cdot 26 & \int_1^2 \frac{5x^2 - 3x + 18}{9x - x^2} dx \cdot 25
 \end{array}$$

$$\int_0^4 \frac{x^2 dx}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4} \cdot 28 \quad \int_0^5 \frac{(x^2 - 3) dx}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \cdot 27$$

۲۹. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = (x-1)/(x^2 - 5x + 6)$ ، محور x ها، و خطهای $x = 4$ و $x = 6$ را به دست آورید.

۳۰. مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = 4 - x(x+2)$ در ربع اول را به دست آورید.

۳۱. مطلوب است حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه تمرین ۲۹ حول محور y ها.

۳۲. اگر ناحیه تمرین ۳۰ حول محور x ها دوران کند، حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

۳۳. در مثال ۳ فرض کنید $a = 5$ و $b = 4$ ، و ۱ گرم از جسم C در ۵ دقیقه تولید شود. چند گرم از C در ۱۰ دقیقه تولید می شود؟

۳۴. در مثال ۳ فرض کنید $a = 6$ و $b = 3$ ، و ۱ گرم از جسم C در ۴ دقیقه تولید شود. چه مدت طول می کشد تا ۲ گرم از جسم C تولید شود؟

۳۵. در هر لحظه، آهنگ حل شدن یک جسم شیمیایی در یک محلول، متناسب است با حاصلضرب مقدار جسم شیمیایی موجود در آن لحظه و تفاضل غلظت آن جسم شیمیایی در محلول در آن لحظه و غلظت آن در یک محلول اشباع شده. مقداری از یک ماده انحلال ناپذیر را ابتدا با ۱۰ پوند نمک مخلوط کرده و نمک را در بشکه ای که حاوی ۲۰ گالن آب است، حل می کنیم. اگر در مدت ۱۰ دقیقه ۵ پوند نمک حل شود و غلظت نمک در یک محلول اشباع شده برابر با ۳ پوند در یک گالن باشد، چه مقدار نمک در مدت ۲۰ دقیقه حل خواهد شد؟

۳۶. دزه ای در امتداد خطی مستقیم در حال حرکت است به طوری که اگر سرعت دزه در ثانیه t برابر با v فوت در ثانیه باشد، آنگاه

$$v = \frac{t+3}{t^2+3t+2}.$$

مسافت طی شده توسط دزه را از لحظه ای که $t = 0$ تا لحظه ای که $t = 2$ ، پیدا کنید.

۳۷. در قانون رشد منطقی فرض می شود که در t واحد زمان، آهنگ رشد کمیته مانند $f(t)$ از رابطه $f'(t) = Af(t)[B - f(t)]$ به دست می آید که $f'(t)$ آهنگ رشد است و A و B مقادیر ثابتی هستند. اگر $f(0) = k$ ، نشان دهید که

$$f(t) = \frac{Bk}{k + (B-k)e^{-ABt}}.$$

۵.۱۰ انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله کسرهای جزئی، وقتی مخرج شامل عوامل درجه دوم است

بحث انتگرال گیری از توابع گویا به وسیله کسرهای جزئی را ادامه می دهیم و دوحالتی را در نظر می گیریم که در آنها، مخرج شامل عوامل درجه دوم است.

حالت ۳: عوامل $Q(x)$ خطی و درجه دوم هستند، و هیچیک از عوامل درجه دوم تکرار نشده است.

متناظر با عامل درجه دوم ax^2+bx+c در مخرج، کسر جزئی زیر را داریم

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

مثال ۱ انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int \frac{(x^2-2x-3)dx}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

حل تابع کسری انتگران به صورت مجموع کسرهای جزئی زیر نوشته می شود

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-1}. \quad (1)$$

دوطرف (۱) را در کوچکترین مخرج مشترک ضرب می کنیم و داریم

$$x^2-2x-3 \equiv (Ax+B)(x-1) + C(x^2+2x+2). \quad (2)$$

می توانیم C را با قراردادن ۱ به جای x در (۲) به دست آوریم

$$C = -\frac{4}{5} \quad \text{یا} \quad -4 = 5C$$

مقدار $-4/5$ را به جای C در (۲) قرارداده و ضرب طرف راست (۲) را انجام

می دهیم

$$x^2-2x-3 \equiv \left(A-\frac{4}{5}\right)x^2 + \left(B-A-\frac{4}{5}\right)x + \left(-\frac{4}{5}-B\right).$$

ضرایب توانهای مشابه x را مساوی هم قرار می دهیم

$$A-\frac{4}{5}=1$$

$$B - A - \frac{\lambda}{\delta} = -2$$

$$-\frac{\lambda}{\delta} - B = -3$$

بنابراین

$$B = \frac{7}{\delta} \quad \text{و} \quad A = \frac{9}{\delta}$$

با قرار دادن مقادیر A ، B ، و C در (۱)، به دست می آید

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} \equiv \frac{(9/\delta)x + (7/\delta)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{-4/\delta}{x-1}$$

پس

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} dx \\ &= \frac{9}{\delta} \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{7}{\delta} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{4}{\delta} \int \frac{dx}{x-1} \end{aligned} \quad (3)$$

برای محاسبه $\int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2}$ ، مشاهده می کنیم که دیفرانسیل مخرج برابر با $2(x+1)dx$ است؛ پس عدد ۱ را در صورت کسراضافه و کم می کنیم، و به دست می آوریم

$$\frac{9}{\delta} \int \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{9}{\delta} \int \frac{(x+1) dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{9}{\delta} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad (4)$$

از (۴) در (۳) قرار می دهیم و جملات را ترکیب می کنیم

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} dx \\ &= \frac{9}{\delta} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2(x+1) dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{7}{\delta} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \frac{4}{\delta} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{9}{10} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{7}{\delta} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} - \frac{4}{\delta} \ln|x-1| \\ &= \frac{9}{10} \ln|x^2 + 2x + 2| - \frac{7}{\delta} \tan^{-1}(x+1) - \frac{\lambda}{10} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln C \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{C(x^2+2x+2)^9}{(x-1)^8} \right| - \frac{2}{5} \tan^{-1}(x+1).$$

○ نمونه ۱ در مثال ۱ اگر کسر اولیه به صورت زیر تجزیه گردد، از بعضی از مراحل عملیات اجتناب می شود

$$\frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)} \equiv \frac{D(2x+2)+E}{x^2+2x+2} + \frac{F}{x-1}.$$

توجه: به جای $Ax+B$ عبارت $D(2x+2)+E$ را می نویسیم، چون

$$2x+2 = D_x(x^2+2x+2).$$

حال اگر D, E ، و F را محاسبه کنیم، داریم

$$D = \frac{9}{10} \quad E = -\frac{2}{5} \quad F = -\frac{2}{5}$$

○ که مستقیماً (۵) را نتیجه می دهند.

حالت ۴: عوامل $Q(x)$ خطی و درجه دوم هستند، و بعضی از عوامل درجه دوم تکرار شده اند.

اگر ax^2+bx+c یک عامل p گانه درجه دوم $Q(x)$ باشد، آنگاه، متناظر با عامل $(ax^2+bx+c)^p$ ، مجموع p کسر جزئی زیر را خواهیم داشت

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^p} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{p-1}} + \dots + \frac{A_px+B_p}{ax^2+bx+c}.$$

○ نمونه ۲ اگر مخرج شامل عامل $(x^2-5x+2)^3$ باشد، متناظر با این عامل، مجموع کسرهای جزئی زیر را داریم

$$\frac{Ax+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2-5x+2}$$

که آن را می توان به شکل مناسبتر زیر نوشت

$$\circ \quad \frac{A(2x-5)+B}{(x^2-5x+2)^3} + \frac{C(2x-5)+D}{(x^2-5x+2)^2} + \frac{E(2x-5)+F}{x^2-5x+2}.$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{(x-2) dx}{x(x^2-4x+5)^2}.$$

حل

$$\frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B(2x-4)+C}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{D(2x-4)+E}{x^2-4x+5}. \quad (6)$$

اگر دو طرف (۶) را در کوچکترین مخرج مشترك ضرب كنيم، داريم

$$\begin{aligned} x-2 &\equiv A(x^2-4x+5)^2 + x(2Bx-4B+C) \\ &\quad + x(x^2-4x+5)(2Dx-4D+E) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x-2 &\equiv Ax^4 + 16Ax^3 + 25A - 8Ax^2 + 10Ax - 40A + 2Bx^3 - 4Bx \\ &\quad + Cx + 2Dx^3 - 12Dx^2 + Ex^2 + 26Dx - 4Ex - 20Dx + 5Ex \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2 &\equiv (A+2D)x^4 + (-8A-12D+E)x^3 \\ &\quad + (26A+2B+26D-4E)x^2 \\ &\quad + (-40A-4B+C-20D+5E)x + 25A. \end{aligned} \quad (8)$$

مقدار A را می توان با قرار دادن ۰ به جای x در (۷) به دست آورد. اگر ضرایب توانهای مشابه x را در طرفین (۸) مساوی هم قرار دهیم و معادلات به دست آمده را باهم حل کنیم، نتیجه می گیریم

$$A = -\frac{2}{25} \quad B = \frac{1}{5} \quad C = \frac{1}{5} \quad D = \frac{1}{25} \quad E = -\frac{4}{25}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &\int \frac{(x-2) dx}{x(x^2-4x+5)^2} \\ &= -\frac{2}{25} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{5} \int \frac{(2x-4) dx}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2} \\ &\quad + \frac{1}{25} \int \frac{(2x-4) dx}{x^2-4x+5} - \frac{4}{25} \int \frac{dx}{x^2-4x+5} \\ &= -\frac{2}{25} \ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{[(x^2-4x+4)+1]^2} \\ &\quad + \frac{1}{25} \ln|x^2-4x+5| - \frac{4}{25} \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

انتگرالهای موجود در جملات سوم و پنجم طرف راست (۹) را جداگانه محاسبه می‌کنیم

$$\int \frac{dx}{[(x^2 - 4x + 4) + 1]^2} = \int \frac{dx}{[(x-2)^2 + 1]^2}$$

فرض کنید $x-2 = \tan \theta$ ، که $0 \leq \theta < \pi/2$ اگر $x \geq 2$ و $-\pi/2 < \theta < 0$ اگر $x < 2$. در این صورت

$$(x-2)^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \text{ و } dx = \sec^2 \theta d\theta$$

پس

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{[(x-2)^2 + 1]^2} &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} \\ &= \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\ &= \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C_1 \\ &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta + C_1. \end{aligned}$$

چون $\tan \theta = x-2$ و $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، داریم $\theta = \tan^{-1}(x-2)$. همچنین $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را از شکل‌های ۱۰.۵.۱۰ (اگر $x \geq 2$) و ۲.۵.۱۰ (اگر $x < 2$) به دست می‌آوریم. در هر دو حالت داریم

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

پس

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}(x-2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}} + C_1$$

بنابراین

$$\int \frac{dx}{[(x-2)^2+1]^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{2(x^2-4x+5)} + C_1 \quad (10)$$

اکنون، انتگرال دیگر موجود در طرف راست (۹) را در نظر می گیریم؛ داریم

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \tan^{-1}(x-2) + C_2 \quad (11)$$

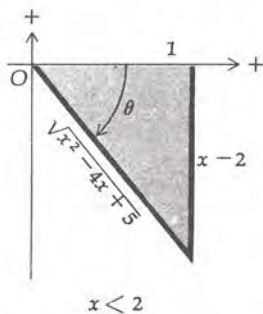
اگر از (۱۰) و (۱۱) در (۹) قرار دهیم، به دست می آید

$$\int \frac{(x-2) dx}{x(x^2-4x+5)^2}$$

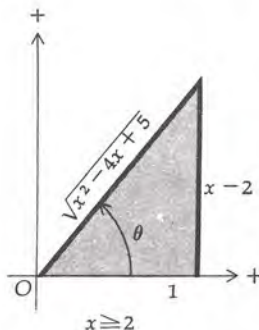
$$= -\frac{2}{25} \ln|x| - \frac{1}{5(x^2-4x+5)} + \frac{1}{10} \tan^{-1}(x-2)$$

$$+ \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)} + \frac{1}{25} \ln|x^2-4x+5| - \frac{2}{25} \tan^{-1}(x-2) + C$$

$$= \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x^2-4x+5}{x^2} \right| - \frac{2}{50} \tan^{-1}(x-2) + \frac{x-2}{10(x^2-4x+5)} + C.$$



شکل ۲۰.۱۰



شکل ۱۰.۱۰

تمرینهای ۵.۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۲۰، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

۱. $\int \frac{dx}{2x^2+x}$
۲. $\int \frac{(x+4)dx}{x(x^2+4)}$
۳. $\int \frac{dx}{16x^4-1}$
۴. $\int \frac{(x^2-4x-2)dx}{x^3-2x^2+4x-8}$
۵. $\int \frac{(t^2+t+1)dt}{(2t+1)(t^2+1)}$
۶. $\int \frac{3w^2+13w+4}{w^3+4w}dw$
۷. $\int \frac{(x^2+x)dx}{x^3-x^2+x-1}$
۸. $\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$
۹. $\int \frac{dx}{x^2+x^2+x}$
۱۰. $\int \frac{(x+3)dx}{4x^4+4x^2+x^2}$
۱۱. $\int \frac{(2x^2-x+2)dx}{x^5+2x^3+x}$
۱۲. $\int \frac{(2x^2+9x)dx}{(x^2+3)(x^2-2x+3)}$
۱۳. $\int \frac{(\Delta z^3-z^2+15z-10)dz}{(z^2-2z+5)^2}$
۱۴. $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$
۱۵. $\int \frac{(x^2+2x-1)dx}{27x^3-1}$
۱۶. $\int \frac{e^{\Delta x}dx}{(e^{2x}+1)^2}$
۱۷. $\int \frac{18dx}{(4x^2+9)^2}$
۱۸. $\int \frac{(2x^2+3x+2)dx}{x^3+4x^2+6x+4}$
۱۹. $\int \frac{(\sec^2 x+1)\sec^2 x dx}{1+\tan^2 x}$
۲۰. $\int \frac{(6w^4+4w^2+9w^2+24w+32)dw}{(w^2+8)(w^2+3)}$

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۹، انتگرال معین را به دست آورید.

۲۱. $\int_1^4 \frac{(4+\Delta x^2)dx}{x^2+4x}$
۲۲. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+2x^2+x+2}$

$$\int_0^1 \frac{9 dx}{8x^3 + 1} \quad .24 \qquad \int_2^4 \frac{(5x^3 - 4x)dx}{x^4 - 16} \quad .23$$

$$\int_0^{1/2} \frac{(x+1) dx}{x^3 - 1} \quad .26 \qquad \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{(2x^2 + 2x + 1)^2} \quad .25$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sin x + \sin^3 x} \quad .28 \qquad \int_0^1 \frac{(x^2 + 3x + 3)dx}{x^3 + x^2 + x + 1} \quad .27$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{12 dt}{e^{2t} + 16} \quad .29$$

۳۰. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y(x^2 + 1)^3 = x^3$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = 1$ را به دست آورید.

۳۱. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y(x^3 + 8) = 4$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = 1$ را به دست آورید.

۳۲. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه تمرین ۳۱ حول محور y ها را به دست آورید.

۳۳. ذره‌ای در امتداد خطی مستقیم در حال حرکت است، به طوری که اگر سرعت ذره در ثانیه t برابر با v سانتیمتر در ثانیه باشد، آنگاه

$$v = \frac{t^2 - t + 1}{(t + 2)^2(t^2 + 1)}.$$

فرمولی برای مسافت طی شده توسط ذره از زمانی که $t = 0$ تا زمانی که $t = t_1$ ، به دست آورید.

۳۴. انتگرالهای زیر را با استفاده از روشهای قبل از این بخش (یعنی، بدون استفاده از کسره‌های جزئی) به دست آورید:

$$\int \frac{3x+1}{(x+2)^4} dx \quad (\text{ب}) \qquad \int \frac{(x^2 - 4x + 6)dx}{x^3 - 6x^2 + 18x} \quad (\text{الف})$$

۶.۱۰ انتگرالهایی که توابع هیپربولیک معکوس را به دست می‌دهند

توابع هیپربولیک معکوس را می‌توان در انتگرال‌گیری به کار برد، وگاهی استفاده از این توابع محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای کوتاه می‌کند. با این حال، هیچ نوع جدیدی از

انتگرال به وسیله این فرایندها محاسبه نمی شود، و فقط صورت های جدیدی از نتایج به دست می آیند.

با توجه به فرمول (۱۵) در بخش ۸.۹ داریم

$$D_x(\sinh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} D_x u$$

که فرمول انتگرال گیری زیر را از آن به دست می آوریم

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \sinh^{-1}u + C.$$

اگر فرمول (۸) در بخش ۸.۹ برای بیان $\sinh^{-1}u$ به صورت لگاریتم طبیعی به کار رود، قضیه زیر به دست می آید.

۱۰۶.۱۰ قضیه

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \sinh^{-1}u + C = \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C.$$

فرمول (۱۶) در بخش ۸.۹ به صورت زیر بود

$$D_x(\cosh^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u \quad u > 1$$

که از آن نتیجه می شود

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}u + C \quad u > 1$$

از ترکیب این فرمول با فرمول (۹) در بخش ۸.۹، قضیه زیر به دست می آید.

۲۰۶.۱۰ قضیه اگر $u > 1$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1}u + C = \ln(u + \sqrt{u^2-1}) + C.$$

فرمولهای (۱۷) و (۱۸) در بخش ۸.۹، به ترتیب، به صورت زیر بودند

$$D_x(\tanh^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad |u| < 1$$

$$D_x(\coth^{-1}u) = \frac{1}{1-u^2} D_x u \quad |u| > 1$$

از دو فرمول فوق به دست می آید

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1}u + C & |u| < 1 \\ \coth^{-1}u + C & |u| > 1 \end{cases}$$

با توجه به این فرمول و فرمولهای (۱۵) و (۱۱) در بخش ۸.۹، قضیه زیر را داریم.

۳.۶.۱۰ قضیه اگر $u \neq 1$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \tanh^{-1}u + C & |u| < 1 \\ \coth^{-1}u + C & |u| > 1 \end{cases} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C.$$

همچنین سه فرمولی را که در قضیه زیر آمده است، به دست می آوریم

۴.۶.۱۰ قضیه

(۱) اگر $a > 0$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2}) + C$$

(۲) اگر $u > a > 0$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C = \ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C$$

(۳) اگر $u \neq a$ و $a \neq 0$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

اثبات فرمولهای فوق را می توان با مشتق گرفتن از طرف راست و به دست آوردن انتگران، و یا به طور مستقیم با جانشین کردن توابع هیپر بولیک، ثابت کرد. اثبات فرمول (۱) با مشتق گیری از طرف راست به صورت زیر است:

$$D_u \left(\sinh^{-1} \frac{u}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

و چون $a > 0$ ، داریم $\sqrt{a^2} = a$ ؛ پس

$$D_u \left(\sinh^{-1} \frac{u}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

برای نمایش عبارت حاصل از انتگرال گیری به صورت لگاریتم طبیعی، از فرمول (۸) دربخش ۸.۹ استفاده می کنیم و داریم

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} \frac{u}{a} &= \ln \left(\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2 + 1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a} \right) \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sinh^{-1} \frac{u}{a} + C &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) - \ln a + C \\ &= \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C_1 \end{aligned}$$

که $C_1 = C - \ln a$.

برای اثبات (۲) به وسیله جانشین کردن تابع هیپربولیک، از اتحاد $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ استفاده می کنیم. فرض کنید $u = a \cosh x$ که $x > 0$ ؛ پس $du = a \sinh x dx$ و $x = \cosh^{-1}(u/a)$. با قرار دادن این مقادیر درانتگرال، به دست می آید

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sinh x dx}{\sqrt{a^2 \cosh^2 x - a^2}} \\ &= \int \frac{a \sinh x dx}{\sqrt{a^2} \sqrt{\cosh^2 x - 1}} \\ &= \int \frac{a \sinh x dx}{\sqrt{a^2} \sqrt{\sinh^2 x}}. \end{aligned}$$

چون $a > 0$ داریم $\sqrt{a^2} = a$. به علاوه، چون $x > 0$ ، $\sinh x > 0$ ؛ پس $\sqrt{\sinh^2 x} = \sinh x$. بنا براین، داریم

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sinh x \, dx}{a \sinh x} \\ &= \int dx \\ &= x + C \\ &= \cosh^{-1} \frac{u}{a} + C.\end{aligned}$$

به همان ترتیبی که برای فرمول (۱) عبارت حاصل را به صورت لگاریتم طبیعی نیز به دست آوردیم، در اینجا هم می‌توانیم نمایش لگاریتمی را به دست آوریم. اثبات فرمول (۳) به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۲۳ را ببینید). $\square$

فرمولهای قضایای ۱۰۶۰ تا ۴۰۶۰۱۰ دو نمایش برای انتگرالهای مورد نظر ارائه می‌دهند. در محاسبه انتگرال معین، وقتی یکی از این صورتهای پیش می‌آید و جدولی از توابع هیپر بولیک نیز در دسترس است، استفاده از توابع هیپر بولیک معکوس ساده تر خواهد بود. و نیز نوشتن این صورت برای انتگرال نامعین، زحمت کمتری دارد. توجه کنید که صورت لگاریتم طبیعی فرمول (۳) در بخش ۴۰۱۰ با استفاده از کسرهایی جزئی به دست آمد.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}.$$

حل فرمول (۱) را پس از باز نویسی مخرج به کار می‌بریم

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 4}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} \\ &= \sinh^{-1} \left(\frac{x-3}{2} \right) + C \\ &= \ln(x-3 + \sqrt{x^2 - 6x + 13}) + C.\end{aligned}$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبه

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}.$$

حل از فرمول (۲) داریم

$$\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} = \cosh^{-1} \frac{x}{5} \Big|_6^{10} = \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} 1.2.$$

اگر از جدول ۴ پیوست جلد اول استفاده کنیم، به دست می آوریم

$$\blacktriangle \quad \cosh^{-1} 2 - \cosh^{-1} (1.2) = 1.32 - 0.62 = 0.70.$$

برای محاسبه انواع انتگرالهایی که در قضایای ۱۰۶.۱۵ تا ۴۰۶.۱۵ آمده اند، به جای استفاده از فرمولها می توان از جانشینی توابع هیپر بولیک استفاده کرد و با روشی مشابه با روش جانشینی توابع مثلثاتی، انتگرال را محاسبه کرد.

مثال ۳ انتگرال مثال ۱ را بدون استفاده از فرمول و با جانشین کردن توابع هیپر بولیک به دست آورید.

حل در حل مثال ۱، انتگرال مفروض را به صورت زیر نوشتیم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}}.$$

اگر فرض کنیم $x-3 = 2 \sinh u$ ، آنگاه

$$u = \sinh^{-1} \frac{1}{2}(x-3) \quad \text{و} \quad dx = 2 \cosh u \, du$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 + 4}} &= \int \frac{2 \cosh u \, du}{\sqrt{4 \sinh^2 u + 4}} \\ &= \int \frac{2 \cosh u \, du}{2 \sqrt{\sinh^2 u + 1}} \\ &= \int \frac{\cosh u \, du}{\sqrt{\cosh^2 u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\cosh u \, du}{\cosh u} \\
 &= \int du \\
 &= u + C \\
 &= \sinh^{-1} \left(\frac{x-3}{2} \right) + C.
 \end{aligned}$$

▲

که با نتیجه مثال ۱ مطابقت دارد.

تمرینهای ۶.۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، انتگرال نامعین مفروض را بر حسب يك تابع هیپربوليك معكوس و نیز به صورت يك لگاریتم طبیعی بنویسید.

- | | |
|--|---|
| ۱. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$ | ۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$ |
| ۳. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^4-1}}$ | ۴. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ |
| ۵. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$ | ۶. $\int \frac{dx}{4e^x - e^{-x}}$ |
| ۷. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$ | ۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$ |
| ۹. $\int \frac{dt}{\sqrt{5-e^{-2t}}}$ | ۱۰. $\int \frac{dw}{4w-w^2-3}$ |
| ۱۱. $\int \frac{dx}{2-4x-x^2}$ | ۱۲. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$ |
| ۱۳. $\int \frac{dx}{x^2+10x+24}$ | ۱۴. $\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-6z-8}}$ |
| ۱۵. $\int \frac{3 \, dw}{w\sqrt{4\ln^2 w+9}}$ | ۱۶. $\int \frac{3x \, dx}{\sqrt{x^4+6x^2+5}}$ |

دترمینهای ۱۷ تا ۲۲، انتگرال معین را به دست آورید و جواب را بر حسب لگاریتم طبیعی بنویسید.

$$.۱۷ \quad \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$.۱۸ \quad \int_{-4}^{-3} \frac{dx}{1-x^2}$$

$$.۱۹ \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x^2}$$

$$.۲۰ \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$.۲۱ \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x-5}}$$

$$.۲۲ \quad \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$$

.۲۳ با استفاده از جانشینی يك تابع هیپر بوليك، فرمول (۳) را ثابت کنید.

.۲۴ منحنیی از نقطه $(0, a)$ ، $a > 0$ ، می گذرد، و ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه برابر $\sqrt{(y^2/a^2)-1}$ است. ثابت کنید این منحنی يك منحنی زنجیری است.

.۲۵ چتر بازی از هواپیمایی به خارج می پرسد و وقتی چترش باز می شود سرعتش ۲۰۰ فوت در ثانیه است. اگر سرعت او t ثانیه بعد از باز شدن چتر، v فوت در ثانیه باشد، در این صورت

$$\frac{324}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = 324 - v^2.$$

این معادله دیفرانسیل را حل کنید و نشان دهید که

$$t = \frac{18}{g} \left(\coth^{-1} \frac{v}{18} - \coth^{-1} \frac{100}{9} \right).$$

.۲۶ با استفاده از جانشینی مثلثاتی، نشان دهید $\sinh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$ ، و

$$\text{انتگرال} \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} \text{ را به دست آورید.}$$

.۲۷ ناحیه محصور بین منحنی $y = (16-x^2)^{-1/2}$ ، محور x ها، و خطوط $x = -2$ و $x = 3$ حول محور x ها دوران می کند. نشان دهید که حجم جسم حاصل برابر است با $(\pi/4)[\tanh^{-1}(3/4) - \tanh^{-1}(-1/2)]$.

۷.۱۰ انتگرال گیری از توابع گویای سینوس و کسینوس

اگر تابع انتگرال تابع گویایی از $\sin x$ و $\cos x$ باشد، می توان با جانشینی زیر آن را

به يك تابع گویا از z تبدیل کرد

$$z = \tan \frac{1}{2} x. \quad (۱)$$

این موضوع با ذکر يك مثال روشن خواهد شد. از اتحاد $\cos 2y \equiv 2\cos^2 y - 1$ با فرض $y = x/2$ داریم

$$\begin{aligned} \cos x &= 2\cos^2 \frac{1}{2} x - 1 = \frac{2}{\sec^2(x/2)} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{2}{1 + z^2} - 1. \end{aligned}$$

پس

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}. \quad (۲)$$

به طور مشابه، از اتحاد $\sin 2y \equiv 2\sin y \cos y$ با فرض $y = x/2$ داریم

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = 2 \cdot \frac{\sin(x/2) \cos^2(x/2)}{\cos(x/2)} \\ &= 2 \tan(x/2) \cdot \frac{1}{\sec^2(x/2)} = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}. \end{aligned}$$

پس

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2}. \quad (۳)$$

چون $z = \tan(x/2)$ ، داریم

$$dz = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{1}{2} x) dx.$$

بنابراین

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2}. \quad (۴)$$

مثال ۱ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x}.$$

حل فرض می کنیم $z = \tan(x/2)$ و از (۲)، (۳)، و (۴) استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1 - \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \\ &= 2 \int \frac{dz}{(1+z^2) - 2z + (1-z^2)} \\ &= 2 \int \frac{dz}{2-2z} \\ &= \int \frac{dz}{1-z} \\ &= -\ln|1-z| + C \\ &= -\ln\left|1 - \tan \frac{1}{2}x\right| + C. \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ انتگرال $\int \sec x \, dx$ را با استفاده از جانشینی مذکور در این بخش به دست

آورید.

حل

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x}.$$

اگر فرض کنیم $z = \tan(x/2)$ و (۲) و (۴) را به کار ببریم، نتیجه می گیریم

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{1-z^2} = 2 \int \frac{dz}{1-z^2}.$$

با استفاده از فرمول (۸) در بخش ۴.۱۰، داریم

$$2 \int \frac{dz}{1-z^2} = \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C.$$

بنابراین

$$\Delta \quad \int \sec x \, dx = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{1}{4}x}{1 - \tan \frac{1}{4}x} \right| + C. \quad (۵)$$

معادله (۵) را با توجه به اینکه $1 = \tan(\pi/4)$ و با استفاده از اتحاد $\tan(\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta) / (1 - \tan \alpha \tan \beta)$ می توان به صورت دیگری نوشت. داریم

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{x}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{x}{4}} \right| + C$$

یا، معادلش

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| + C. \quad (۶)$$

فرمول (۶) صورت دیگری از فرمول زیر است

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

که با ضرب کردن صورت و مخرج انتگرال در $\sec x + \tan x$ به دست می آید.
شایان تذکر است که بازهم صورت دیگری از $\int \sec x \, dx$ را می توان به دست آورد

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}.$$

با قراردادن $u = \sin x$ و $du = \cos x \, dx$ داریم

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|^{1/2} + C.$$

چون برای تمام x ها، $-1 \leq \sin x \leq 1$ ، پس $1 + \sin x$ و $1 - \sin x$ غیر منفی هستند؛ بنا بر این، علامت قدرمطلق را می توان برداشت

$$\int \sec x \, dx = \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)^{1/2} + C = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C. \quad (۷)$$

تمرینهای ۷.۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۸، انتگرال نامعین را به دست آورید.

۱. $\int \frac{3dx}{8 + 7\cos x}$
۲. $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$
۳. $\int \frac{3dx}{7 + 8\cos x}$
۴. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$
۵. $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$
۶. $\int \frac{dx}{5 + 7\cos x}$
۷. $\int \frac{dx}{3 - 5\sin x}$
۸. $\int \frac{dx}{\tan x - 1}$
۹. $\int \frac{dx}{4\sin x - 3\cos x}$
۱۰. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x + 3}$
۱۱. $\int \frac{8dx}{3\cos 2x + 1}$
۱۲. $\int \frac{\cos x dx}{3\cos x - 5}$
۱۳. $\int \frac{\cos x dx}{1 + 2\cos x}$
۱۴. $\int \frac{dx}{\sin x - \tan x}$
۱۵. $\int \frac{dx}{\cot x(6 + 7\cos 2x)}$
۱۶. $\int \frac{dx}{\cot 2x(1 - \cos 2x)}$
۱۷. $\int \frac{dx}{2\sin x + 2\cos x + 3}$
۱۸. $\int \frac{5dx}{6 + 7\sec x}$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۴، انتگرال معین را به دست آورید.

۱۹. $\int_0^{\pi/4} \frac{8dx}{\tan x + 1}$
۲۰. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5\sin x + 3}$
۲۱. $\int_{-\pi/3}^{\pi/2} \frac{3dx}{2\cos x + 1}$
۲۲. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos 2x}$
۲۳. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3dx}{2\sin 2x + 1}$
۲۴. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x dx}{2 + \cos x}$

۲۵. نشان دهید که فرمول (۷) این بخش معادل فرمول

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

است. (داهنمایی: صورت ومخرج کسر زیررادیکال را در $(1 + \sin x)$ ضرب کنید.)

۲۶. با استفاده از جانشینی $z = \tan(x/2)$ ، ثابت کنید که

$$\int \csc x \, dx = \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C.$$

۲۷. نشان دهید که نتیجه تمرین ۲۶ معادل فرمول $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$

است. (داهنمایی: از روشی مشابه باروش پیشنهاد شده در راهنمایی تمرین ۲۵ استفاده کنید.)

۲۸. مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{\tan(x/2)}{\sin x} \, dx.$$

با دو روش: (الف) با فرض $z = \tan(x/2)$ ؛ (ب) با فرض $u = x/2$ و به دست آوردن انتگرالی که شامل توابع مثلثاتی بر حسب u باشد.

۲۹. با استفاده از $z = \tan(x/2)$ ، نشان دهید که $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

۸.۱۰ جانشینیهای دیگر

اگر انتگران شامل توانهای کسری از متغیری مانند x باشد، می توان آن را با جانشینی زیر ساده کرد

$$x = z^n$$

که n کوچکترین مخرج مشترك نماهاست. مثال زیر این مورد را روشن می کند.

مثال ۱ مطلوب است محاسبه

$$\int \frac{\sqrt{x} \, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

حل فرض می کنیم $x = z^6$ ؛ در این صورت $dx = 6z^5 dz$. پس

$$\int \frac{x^{1/2} \, dx}{1 + x^{1/3}} = \int \frac{z^3 (6z^5 dz)}{1 + z^2} = 6 \int \frac{z^8}{z^2 + 1} \, dz.$$

اگر صورت را برمخرج تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/2} dx}{1+x^{1/2}} &= \int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1} \right) dz \\ &= \int \left(\frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{3} z^3 - z + \tan^{-1} z \right) + C \\ &= \frac{6}{7} x^{7/6} - \frac{6}{5} x^{5/6} + \frac{2}{3} x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6 \tan^{-1} x^{1/6} + C.\end{aligned}$$

هیچ قاعده کلی برای یافتن يك جانشینی که انتگران ساده تری نتیجه بدهد، نمی توان ارائه داد. گاهی يك جانشینی انتگران مفروض را گویا نمی کند ولی درعین حال، ممکن است آنرا ساده تر سازد.

مثال ۲ مطلوب است محاسبه $\int x^5 \sqrt{x^2+4} dx$

حل فرض کنید $z = \sqrt{x^2+4}$. آنگاه $z^2 = x^2+4$ و $2z dz = 2x dx$ پس

$$\begin{aligned}\int x^5 \sqrt{x^2+4} dx &= \int (x^2)^2 \sqrt{x^2+4} x dx = \int (z^2-4)^2 z (z dz) \\ &= \int (z^6 - 8z^4 + 16z^2) dz = \frac{1}{7} z^7 - \frac{8}{5} z^5 + \frac{16}{3} z^3 + C \\ &= \frac{1}{105} z^7 [15z^2 - 168z^2 + 560] + C \\ &= \frac{1}{105} (x^2+4)^{7/2} [15(x^2+4)^2 \\ &\quad - 168(x^2+4) + 560] + C \\ &= \frac{1}{105} (x^2+4)^{7/2} [15x^4 - 48x^2 + 128] + C.\end{aligned}$$

مثال ۳ با استفاده از جانشینی عکس، یعنی $x = 1/z$ ، انتگرال زیر را به دست آورید

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{27x^2 + 6x - 1}}.$$

حل اگر $x = 1/z$ آنگاه $dx = -dz/z^2$ بنابراین

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2\gamma x^2 + \epsilon x - 1}} &= \int \frac{\frac{-dz}{z^2}}{\left(\frac{1}{z^2}\right) \sqrt{\frac{2\gamma}{z^2} + \frac{\epsilon}{z} - 1}} \\
 &= - \int \frac{\sqrt{z^2} dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} \\
 &= - \int \frac{|z| dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} \\
 &= \begin{cases} - \int \frac{z dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} & z > 0 \\ \int \frac{z dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} & z < 0 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

حال، $\int \frac{z dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{z dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(-2z + \epsilon) dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} + 3 \int \frac{dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2}} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2} + 3 \int \frac{dz}{\sqrt{2\gamma + \epsilon z - (z^2 - \epsilon z + 9)}} \\
 &= -\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2} + 3 \int \frac{dz}{\sqrt{2\epsilon - (z - 3)^2}} \\
 &= -\sqrt{2\gamma + \epsilon z - z^2} + 3 \sin^{-1} \frac{z - 3}{\epsilon} + C \\
 &= -\sqrt{2\gamma + \frac{\epsilon}{x} - \frac{1}{x^2}} + 3 \sin^{-1} \frac{(1/x) - 3}{\epsilon} + C \\
 &= -\frac{\sqrt{2\gamma x^2 + \epsilon x - 1}}{\sqrt{x^2}} + 3 \sin^{-1} \frac{1 - 3x}{\epsilon x} + C \\
 &= -\frac{\sqrt{2\gamma x^2 + \epsilon x - 1}}{|x|} + 3 \sin^{-1} \frac{1 - 3x}{\epsilon x} + C. \quad (2)
 \end{aligned}$$

از (۲) در (۱) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{27x^2 + 6x - 1}} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{27x^2 + 6x - 1}}{|x|} - 3 \sin^{-1} \frac{1-3x}{6x} + C & x > 0 \\ \frac{\sqrt{27x^2 + 6x - 1}}{|x|} + 3 \sin^{-1} \frac{1-3x}{6x} + C & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\sqrt{27x^2 + 6x - 1}}{x} - 3 \sin^{-1} \frac{1-3x}{6x} + C & x > 0 \\ \frac{\sqrt{27x^2 + 6x - 1}}{x} + 3 \sin^{-1} \frac{1-3x}{6x} + C & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

تمرینهای ۸.۱۰

در تمرینهای ۱ تا ۱۹، انتگرال نامعین را محاسبه کنید. در تمرینهای ۱۴ تا ۱۹ انتگرال نامعین را با استفاده از جانشینی عکس، یعنی $x = 1/z$ ، به دست آورید.

$$۱. \int \frac{x dx}{3 + \sqrt{x}} \quad ۲. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-x}}$$

$$۳. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+2x}} \quad ۴. \int x(1+x)^{2/3} dx$$

$$۵. \int \frac{\sqrt{1+x}}{1-x} dx \quad ۶. \int \frac{dx}{3 + \sqrt{x+2}}$$

$$۷. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x-2}} \quad ۸. \int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$$

$$۹. \int \frac{dx}{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}} \quad ۱۰. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{5x^2 + 4}}$$

$$۱۱. \int \frac{(2x^5 + 3x^2) dx}{\sqrt{1+2x^3}} \quad ۱۲. \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} \quad ۱۴$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x(1+\sqrt{x})^2}} \quad ۱۳$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}} \quad ۱۶$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} \quad ۱۵$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} \quad ۱۸$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4x-1}} \quad ۱۷$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5x^2+8x-1}} \quad ۱۹$$

۲۰. انتگرال مذکور در تمرین ۱۸ را با جانشینی $\sqrt{x^2+2x-1}=z-x$ پیدا کنید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، انتگرال معین را به دست آورید.

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{x+1} dx \quad ۲۲$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad ۲۱$$

$$\int_{1/6}^{1/8} \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}} \quad ۲۴$$

$$\int_{1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x}+9)} \quad ۲۳$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} \quad ۲۶$$

$$\int_{1/2}^2 \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4} dx \quad ۲۵$$

$$\int_2^{11} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^2+4}} \quad ۲۸$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \quad ۲۷$$

۲۹. انتگرال $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ را با دو روش پیدا کنید: (الف) فرض کنید $x=z^2$ ؛

(ب) بنویسید $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$ و فرض کنید $u=\sqrt{x}-1$.

تمرینهای مروری فصل ۱۰، و مروری بر انتگرال گیری

در تمرینهای ۱ تا ۶۲، انتگرال نامعین را به دست آورید.

$$\int \frac{5x^2-3}{x^2-x} dx \quad ۲$$

$$\int \tan^2 4x \cos^4 4x dx \quad ۱$$

- $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \quad .۴$$
- $$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4 - e^x}} \quad .۳$$
- $$\int \frac{dt}{t^2 + 1} \quad .۶$$
- $$\int \tan^{-1} \sqrt{x} dx \quad .۵$$
- $$\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx \quad .۸$$
- $$\int \cos^2 \frac{1}{3} x dx \quad .۷$$
- $$\int \frac{dy}{\sqrt{y+1}} \quad .۱۰$$
- $$\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2} dx \quad .۹$$
- $$\int \cos \theta \cos 2\theta d\theta \quad .۱۲$$
- $$\int \sin x \sin 3x dx \quad .۱۱$$
- $$\int t \sqrt{2t - t^2} dt \quad .۱۴$$
- $$\int \frac{dx}{x + x^{2/3}} \quad .۱۳$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \quad .۱۶$$
- $$\int (\sec 3x + \csc 3x)^2 dx \quad .۱۵$$
- $$\int x^2 e^{x^2} dx \quad .۱۸$$
- $$\int \frac{2t^2 + 11t + 8}{t^2 + 4t + 4} dt \quad .۱۷$$
- $$\int \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{x^2} dx \quad .۲۰$$
- $$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx \quad .۱۹$$
- $$\int t \sin^2 2t dt \quad .۲۲$$
- $$\int \sin^2 3x \cos^2 3x dx \quad .۲۱$$
- $$\int \frac{4x^2 + x - 2}{x^2 - 5x^2 + 8x - 4} dx \quad .۲۴$$
- $$\int \frac{dr}{\sqrt{3 - 4r - r^2}} \quad .۲۳$$
- $$\int \frac{y dy}{9 + 16y^2} \quad .۲۶$$
- $$\int x^2 \cos x^2 dx \quad .۲۵$$
- $$\int \frac{du}{u^{3/4} - u^{1/4}} \quad .۲۸$$
- $$\int e^{t/2} \cos 2t dt \quad .۲۷$$
- $$\int \frac{\sqrt{w-a}}{w} dw, a > 0 \quad .۳۰$$
- $$\int \frac{\sin x \cos x}{2 + \sin^2 x} dx \quad .۲۹$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x (\ln x - 1)} \quad .۳۲$$

$$\int \frac{dx}{\Delta + \epsilon \sec x} \quad .۳۳$$

$$\int \frac{x^\Delta dx}{(x^\epsilon - a^\epsilon)^\epsilon} \quad .۳۴$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^\epsilon + x + 1}} \quad .۳۸$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x + \epsilon x^\epsilon}} \quad .۴۰$$

$$\int \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} dt \quad .۴۲$$

$$\int \frac{dx}{\Delta + \epsilon \cos \epsilon x} \quad .۴۳$$

$$\int \frac{\cot x dx}{\epsilon + \epsilon \sin x} \quad .۴۴$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{\Delta x - \epsilon - x^\epsilon}} \quad .۴۸$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx \quad .۵۰$$

$$\int \frac{dx}{(x^\epsilon + \epsilon x + \epsilon \epsilon)^\epsilon} \quad .۵۲$$

$$\int \tan x \sin x dx \quad .۵۳$$

$$\int \ln(x^\epsilon + 1) dx \quad .۵۴$$

$$\int \frac{dx}{\epsilon + \epsilon \sin x + \cos x} \quad .۵۸$$

$$\int \sin^\Delta nx dx \quad .۳۱$$

$$\int \csc^\Delta x dx \quad .۳۳$$

$$\int \frac{\epsilon y^\epsilon + 1}{y^\epsilon - \epsilon y^\epsilon + \epsilon y - \Delta} dy \quad .۳۵$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^\epsilon x} \quad .۳۷$$

$$\int \sqrt{\epsilon t - t^\epsilon} dt \quad .۳۹$$

$$\int \frac{x dx}{x^\epsilon - x} \quad .۴۱$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{\epsilon - \epsilon e^{\epsilon x}}} \quad .۴۳$$

$$\int \cot^\epsilon \epsilon x \csc^\epsilon \epsilon x dx \quad .۴۵$$

$$\int x^\epsilon \sin^{-1} x dx \quad .۴۷$$

$$\int \frac{dx}{\sin x - \epsilon \csc x} \quad .۴۹$$

$$\int \frac{\cos \epsilon t dt}{\sin \epsilon t \sqrt{\sin^\epsilon \epsilon t - (1/\epsilon)}} \quad .۵۱$$

$$\int \frac{\sqrt{x^\epsilon + a^\epsilon}}{x^\epsilon} dx \quad .۵۳$$

$$\int \frac{\sin^{-1} \sqrt{\epsilon t}}{\sqrt{1 - \epsilon t}} dt \quad .۵۵$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\epsilon + \sqrt{x - 1}}} \quad .۵۷$$

$$\begin{array}{ll} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} & .۶۰ \\ \int \sqrt{\tan x} dx & .۵۹ \\ \int \tan^n x \sec^r x dx, n > 0 & .۶۲ \\ \int x^n \ln x dx & .۶۱ \end{array}$$

دترمینهای ۶۳ تا ۹۴، انتگرال معین را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx & .۶۴ \\ \int_0^{\pi} \sqrt{2+\cos x} dx & .۶۳ \\ \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} & .۶۶ \\ \int_1^2 \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x^2} dx & .۶۵ \\ \int_0^{\pi/2} \sin^r t \cos^r t dt & .۶۸ \\ \int_0^2 \frac{t^r dt}{\sqrt{4+t^2}} & .۶۷ \\ \int_0^1 \frac{xe^x dx}{(1+x)^r} & .۷۰ \\ \int_{-2}^{2/\sqrt{r}} \frac{x^r dx}{(16-x^2)^{r/2}} & .۶۹ \\ \int_0^2 \frac{(1-x)dx}{x^2+3x+2} & .۷۲ \\ \int_0^{\pi/4} \sec^r x dx & .۷۱ \\ \int_0^2 (2^x + x^2) dx & .۷۴ \\ \int_{\pi/12}^{\pi/8} \cot^2 y dy & .۷۳ \\ \int_1^2 (\ln x)^r dx & .۷۶ \\ \int_a^{a/2} \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^r}}{x^2} dx & .۷۵ \\ \int_1^2 \frac{x^r dx}{\sqrt{2/r} \sqrt{2-x^r}} & .۷۸ \\ \int_{\sqrt{2/r}}^1 \frac{(2x^2-2x+1)dx}{x^r+x} & .۷۷ \\ \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx & .۸۰ \\ \int_0^{\sqrt{\pi/2}} xe^{x^2} \cos x^2 dx & .۸۲ \\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan^2 x| dx & .۸۴ \\ \int_1^2 \log_2 \sqrt{ex} dx & .۷۹ \\ \int_1^2 \frac{x+2}{(x+1)^2} dx & .۸۱ \\ \int_0^{\pi} |\cos^r x| dx & .۸۳ \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} dx \quad .86 & \int_0^{1/2} \frac{2x dx}{x^2 - x^2 - x + 1} \quad .85 \\
 & \int_0^{\pi/12} \frac{dx}{\cos^2 3x} \quad .88 & \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} \quad .87 \\
 & \int_0^4 \frac{x^2 dx}{x^2 + 4x^2 + 5x + 2} \quad .90 & \int_0^1 \sqrt{2y+y^2} dy \quad .89 \\
 & \int_0^3 \frac{dr}{(r+2)\sqrt{r+1}} \quad .92 & \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{12+13 \cos t} \quad .91 \\
 & \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(t/2)}{1+\cos(t/2)} dt \quad .94 & \int_0^{1/2} \sqrt{4-Vx} dx \quad .93
 \end{aligned}$$

در تمرینهای ۹۵ و ۹۶، با جانشین کردن تابع هیپربولیک، نتیجه خواسته شده را به دست آورید.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a^2} \coth\left(\sinh^{-1} \frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0. \quad .95$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \sinh\left(\tanh^{-1} \frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0. \quad .96$$

.۹۷ طول قوس سهمی $x^2 = 6y$ از $x=6$ تا $x=12$ را به دست آورید.

.۹۸ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \sin^{-1} 2x$ ، خط $y = \sqrt{3}/4$ ، x ، و محور x ها را به دست آورید.

.۹۹ مساحت ناحیه محدود به یک طوق از منحنی $x^2 = y^4(1-y^2)$ را به دست آورید.

.۱۰۰ طول قوس منحنی $y = \ln x$ از $x=1$ تا $x=e$ را به دست آورید.

.۱۰۱ ناحیه محصور بین منحنی $y = \ln 2x$ ، محور x ها، و خط $x=e$ ، حول محور y ها دوران می کنند. حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

.۱۰۲ ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین منحنی $y = (5-x)/(x+1)^2$ ، محور x ها، و محور y ها را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

.۱۰۳ دو جسم A و B در یک واکنش شیمیایی جسم C را تولید می کنند، و آهنگ تغییر مقدار C متناسب با حاصلضرب مقادیر باقیمانده A و B در هر زمان مفروض است.

در ابتدا ۵۰ پوند از A و ۶۰ پوند از B موجود است، و برای تولید ۵ پوند از C ، ۳ پوند از A و ۲ پوند از B لازم است. بعد از ۱ ساعت، ۱۵ پوند از C تولید شده است. (الف) اگر x پوند از C در t ساعت تولید شود، عبارتی برای x بر حسب t به دست آورید. (ب) مقدار C را بعد از ۳ ساعت به دست آورید.

۱۰۴. مخزنی به شکل يك جسم دوار است که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = \ln x$ ، محور x ها، و خطوط $x = e$ و $x = e^2$ حول محور x ها به وجود آمده است. اگر این مخزن پر از آب باشد، کار لازم برای انتقال تمام آب آن به بالای مخزن را به دست آورید. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود. جهت مثبت محور x ها را عمودی و به طرف پایین در نظر بگیرید.

کاربردهای دیگری از انتگرال گیری

۱.۱۱ مرکز جرم يك میله

در بخش ۴.۶ آموختیم که اگر تابعی چون f بر بازه بستهای مانند $[a, b]$ پیوسته باشد، مقدار متوسط f بر $[a, b]$ از

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

به دست می آید. يك کاربرد مهم مقدار متوسط تابع، در فیزیک و در ارتباط با مفهوم مرکز جرم پیش می آید.

برای رسیدن به تعریفی از جرم، ذره ای را در نظر بگیرید که به وسیله نیرویی که بر آن وارد می شود در امتداد محوری به حرکت درمی آید. فرض کنید که تمام سرعتها در مقایسه با سرعت نور ناچیز باشند. تا زمانی که نیرو بر ذره وارد می آید، سرعت آن افزایش می یابد؛ یعنی، ذره شتاب می گیرد. نسبت نیرو به شتاب، صرف نظر از بزرگی نیرو، ثابت است؛ و این نسبت ثابت را جرم ذره می نامند. بنابراین، اگر نیرو F واحد، شتاب a واحد، و جرم M واحد باشد، آنگاه

$$M = \frac{F}{a}.$$

در اینجا، نیرو، جرم، و شتاب را هم بر حسب سیستم واحدهای انگلیسی و هم بر حسب سیستم متری در نظر می گیریم. حال به بحث درباره این واحدها می پردازیم.

در سیستم واحدهای انگلیسی، واحد نیرو، پوند و واحد شتاب، فوت بر مجذور ثانیه است. پس جرم ذره ای که شتابش ۱ فوت بر مجذور ثانیه باشد وقتی که بر آن نیرویی برابر یک پوند وارد شود، به عنوان واحد جرم تعریف می شود. این واحد جرم، اسلاگ (*slug*) نامیده می شود. بنا بر این

$$1 \text{ فوت بر مجذور ثانیه} = \frac{1 \text{ پوند}}{1 \text{ اسلاگ}}$$

○ نمونه ۱ شتاب ذره معینی که تحت نیروی ۳۰ پوند برخلافی در حرکت است، ۱۰ فوت بر مجذور ثانیه است. لذا، جرم ذره عبارت است از

$$1 \text{ فوت بر مجذور ثانیه} = \frac{30 \text{ پوند}}{10 \text{ فوت بر مجذور ثانیه}}$$

بنابراین، به ازای هر ۱ فوت بر مجذور ثانیه از شتاب، باید ۳ پوند نیرو بر ذره وارد آید. ○ پس جرم ذره ۳ اسلاگ است.

در سیستم متر-کیلوگرم-ثانیه (*mks*) واحد استاندارد جرم کیلوگرم است. واحد شتاب در سیستم *mks* عبارت است از متر بر مجذور ثانیه. بنا بر این واحد نیرو نیرویی است که اگر بر یک جرم ۱ کیلوگرمی وارد شود به آن شتابی برابر با ۱ متر بر مجذور ثانیه بدهد. این نیرو به، نیوتن (*nt*) موسوم است.

○ نمونه ۲ به ذره ای که جرم آن ۶ کیلوگرم است یک نیروی افقی ثابت ۳ نیوتنی وارد می شود. شتاب ذره با تقسیم نیرو بر جرم به دست می آید و لذا برابر است با

$$0.5 \text{ متر بر مجذور ثانیه} = \frac{3 \text{ نیوتن}}{6 \text{ کیلوگرم}}$$

اگر جرم M کیلوگرم، نیرو F نیوتن، و شتاب a متر بر مجذور ثانیه باشد، آنگاه

$$○ \quad a = \frac{F}{M} = \frac{3}{6} = 0.5.$$

در سیستم *mks*، شتاب ناشی از ثقل در نزدیکی سطح زمین ۹.۸۱ متر بر مجذور ثانیه است. اگر جرم جسمی M کیلوگرم باشد، و اگر در نزدیکی سطح زمین نیروی ناشی از ثقل بر جسم F نیوتن باشد، آنگاه

$$F = 9.81 M.$$

در سیستم سانتیمتر-گرم-ثانیه (cgs)، واحد استاندارد جرم گرم، و ۱ گرم برابر با ۱۰۰۰ کیلوگرم است. واحد شتاب در سیستم cgs، سانتیمتر بر مجذور ثانیه است، بنا براین واحد نیرو، نیروی است که چون بر ذره‌ای با جرم يك گرم وارد شود به آن شتابی برابر با ۱ سانتیمتر بر مجذور ثانیه بدهد. این نیرو را دین (dyne) می‌نامند؛ چون

$$\frac{10^2 \text{ سانتیمتر}}{\text{مجدور ثانیه}} = \frac{1 \text{ متر}}{\text{مجدور ثانیه}} = 10^3 \text{ گرم} = 1 \text{ کیلوگرم}$$

پس

$$10^5 \text{ دین} = 1 \text{ نیوتن}$$

بحث واحدهای سیستم انگلیسی و سیستم متری را در جدول ۱.۱.۱۱ خلاصه می‌کنیم. این جدول واحدهای نیرو، جرم، و شتاب را در هر يك از سیستمها نشان می‌دهد.

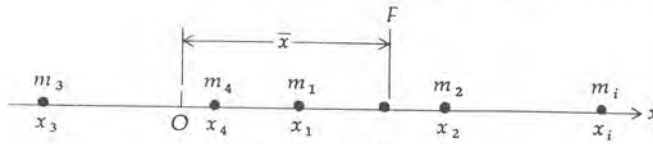
جدول ۱.۱.۱۱

شتاب	جرم	نیرو	سیستم واحدها
فوت بر مجذور ثانیه	اسلاگ	پوند	انگلیسی
متر بر مجذور ثانیه	کیلوگرم	نیوتن	mks
سانتیمتر بر مجذور ثانیه	گرم	دین	cgs

حال میل‌های افقی را در نظر بگیرید که وزن و قطر آن قابل اغماض است و بر محور x ها قرار دارد. دستگاهی متشکل از n ذره در نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ روی میل قرار گرفته است. فاصله جهت‌دار ذره i م ($i = 1, 2, \dots, n$) از مبدأ x_i متر و جرم آن m_i کیلوگرم است. شکل ۱.۱.۱۱ را ببینید. جرم کل دستگاه $\sum_{i=1}^n m_i$ کیلوگرم است. گشتاد در جرم ذره i م نسبت به مبدأ را به صورت $m_i \cdot x_i$ کیلوگرم-متر تعریف می‌کنیم. گشتاور جرم دستگاه را به صورت مجموع گشتاورهای جرم تمام ذرات آن تعریف می‌کنیم. بنا براین، اگر گشتاور جرم دستگاه نسبت به مبدأ M_0 کیلوگرم-متر باشد، آنگاه

$$M_0 = \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

اگر اندازه فاصله بر حسب فوت و اندازه جرم بر حسب اسلاگ باشد، آنگاه اندازه گشتاور جرم بر حسب اسلاگ-فوت است.



شکل ۱۰.۱۰.۱۱

می‌خواهیم نقطه‌ای چون $\bar{x}$ بیابیم که اگر جرم کل دستگاه را در آنجا متمرکز کنیم، گشتاور جرمش نسبت به مبدأ برابر با گشتاور جرم دستگاه نسبت به مبدأ باشد. بنابراین $\bar{x}$ باید در معادله

$$\bar{x} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

صدق کند، ولذا

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (1)$$

نقطه $\bar{x}$ به مرکز جرم دستگاه موسوم است، و نقطه‌ای است که در آنجا دستگاه تعادل دارد. جای مرکز جرم مستقل از جای مبدأ است؛ یعنی، اگر مبدأ تغییر کند، مکان مرکز جرم نسبت به مکانهای ذرات تغییر نمی‌کند. مرکز جرم اهمیت دارد زیرا رفتار کل یک دستگاه ذرات را می‌توان بر اساس رفتار مرکز جرم دستگاه توصیف کرد.

مثال ۱ چهار ذره با جرمهای ۲، ۳، ۱ و ۵ کیلوگرم، به ترتیب، در نقاطی با مختصات ۵، ۲، -۳، -۴، بر محور x ها قرار دارند. اندازه فواصل بر حسب متر است. مرکز جرم این دستگاه را بیابید.

حل اگر $\bar{x}$ مختص مرکز جرم باشد، از فرمول (۱) داریم

$$\bar{x} = \frac{2(5) + 3(2) + (1)(-3) + 5(-4)}{2 + 3 + 1 + 5} = -\frac{7}{11}.$$

بنابراین، مرکز جرم در $7/11$ متری طرف چپ مبدأ است. ▲

حال بحث قبل را به میله افقی صلبی که جرمش به طور پیوسته توزیع شده است می‌کشانیم. گوییم میله همگن است هرگاه دارای چگالی خطی ثابت باشد؛ یعنی، اگر جرمش مستقیماً متناسب با طولش باشد. به عبارت دیگر، اگر در مورد قسمتی از میله که طولش Δx_i متر است و جرمش $\Delta_i m$ کیلوگرم است، داشته باشیم $\Delta_i m = k \Delta_i x$ ، آنگاه میله را

همگن می‌نامیم. عدد k مقداری ثابت است، و k کیلوگرم بر متر را چگالی خطی می‌نامند.

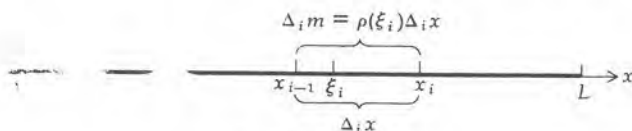
حال فرض کنید میله‌ای ناهمگن داشته باشیم؛ در این حالت چگالی خطی در طول میله تغییر می‌کند. فرض کنید طول میله L متر باشد. میله را طوری روی محور x ها قرار می‌دهیم که انتهای چپ آن در مبدأ و انتهای راست آن در L باشد. شکل ۲.۱.۱۱ را ببینید. چگالی خطی در هر نقطه x از میله $\rho(x)$ کیلوگرم بر متر است و ρ بر $[0, L]$ پیوسته است. برای یافتن جرم کل میله، بازه بسته $[0, L]$ را به n زیربازه افراز می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. زیربازه i م، $[x_{i-1}, x_i]$ و طول آن $\Delta_i x$ متر است. اگر ξ_i نقطه‌ای از $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، مقدار تقریبی جرم آن قسمت از میله که در زیربازه i م قرار دارد $\Delta_i m$ کیلوگرم است، و

$$\Delta_i m = \rho(\xi_i) \Delta_i x.$$

جرم کل میله برحسب کیلوگرم با معادله زیر تقریب می‌شود

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i m = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta_i x. \quad (2)$$

هرچه نورم افراز Δ کوچکتر باشد، مجموع ریمانی (۲) به آنچه که به‌طور شهودی فکر می‌کنیم جرم میله است نزدیکتر خواهد بود؛ و لذا اندازه جرم میله را به‌صورت حد مجموع ریمانی (۲) تعریف می‌کنیم.



شکل ۲.۱.۱۱

۱.۱.۱۱ تعریف انتهای چپ میله‌ای به‌طول L متر در مبدأ قرار دارد. اگر چگالی خطی در نقطه‌ای که x متر از مبدأ فاصله دارد برحسب کیلوگرم بر متر برابر با $\rho(x)$ ، و ρ بر $[0, L]$ پیوسته باشد، آنگاه جرم کل میله M کیلوگرم است که

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta_i x = \int_0^L \rho(x) dx. \quad (3)$$

در تعریف ۱.۱.۱۱ اگر فاصله برحسب فوت و جرم برحسب اسلاگ اندازه‌گیری شود، آنگاه چگالی برحسب اسلاگ بر فوت اندازه‌گیری می‌شود.

مثال ۲ چگالی در هر نقطه از میله‌ای که ۴ متر طول دارد مستقیماً متناسب است با

فاصله آن نقطه تا نقطه‌ای خارجی که بر راستای میله، و در ۲ متری يك انتهای آن قرار دارد، و چگالی این نقطه انتهای ۵ کیلو گرم بر متر است. جرم کل میله را بیابید.

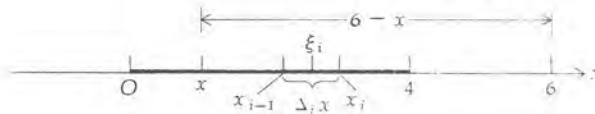
حل شکل ۳.۱۰۱۱ میله‌ای را که بر محور x ها قرار گرفته است نشان می‌دهد. فرض کنیم $\rho(x)$ ، بر حسب کیلو گرم بر متر، چگالی در نقطه‌ای از میله باشد که فاصله آن تا انتهای که چگالی بیشتری دارد x متر است. در این صورت،

$$\rho(x) = c(6 - x).$$

که در آن c مقدار ثابت تناسب است. چون $\rho(4) = 5$ ، پس $5 = 2c$ یا $c = 5/2$. لذا $\rho(x) = 5(6 - x)/2$. بنا بر این، اگر جرم کل میله M کیلو گرم باشد، بنا به تعریف ۱.۱۰.۱۱،

$$\begin{aligned} M &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{5}{2}(6 - \xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^4 \frac{5}{2}(6 - x) dx = \frac{5}{2} \left[6x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= 40. \end{aligned}$$

در نتیجه، جرم کل میله ۴۰ کیلو گرم است.



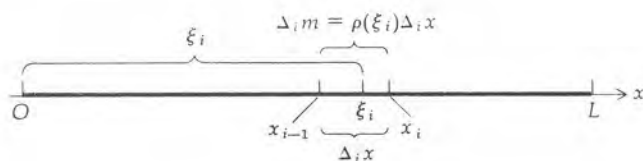
شکل ۳.۱۰۱۱

حال به تعریف مرکز جرم میله مذکور در تعریف ۱.۱۰.۱۱ می‌پردازیم. اما، نخست باید گشتاور جرم میله نسبت به مبدأ را تعریف کنیم.

مانند قبل، میله را بر محور x ها طوری قرار می‌دهیم که انتهای چپش در مبدأ و انتهای راستش در L باشد. شکل ۴.۱۰۱۱ را ببینید. فرض کنید Δ افزای از $[0, L]$ به n زیر-بازه باشد، و طول $[x_{i-1}, x_i]$ ، یعنی طول زیربازه i م آن، $\Delta_i x$ متر باشد. اگر ξ_i نقطه دلخواهی از $[x_{i-1}, x_i]$ فرض شود، مقداری تقریبی از گشتاور جرم آن قسمت از میله که در زیربازه i م واقع است نسبت به مبدأ برابر با $\xi_i \Delta_i m$ کیلو گرم-متر می‌باشد؛ در اینجا $\Delta_i m = \rho(\xi_i) \Delta_i x$ ، گشتاور جرم کل میله بر حسب کیلو گرم-متر، به صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \Delta_i m = \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i) \Delta_i x. \quad (4)$$

هرچه نورم افران Δ کوچکتر گرفته شود، مجموع ریمانی در (۴) به آنچه که به طور



شکل ۴.۱.۱۱

شهودی فکرمی کنیم اندازه گشتاور جرم میله نسبت به مبدأ باشد نزدیکتر است. لذا تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲.۱.۱۱ انتهای چپ میله ای به طول L متر بر مبدأ واقع است و چگالی خطی در نقطه ای که x متر از مبدأ فاصله دارد بر حسب کیلوگرم بر متر، $\rho(x)$ است؛ و ρ بر $[0, L]$ پیوسته است. گشتاور جرم میله نسبت به مبدأ M_0 کیلوگرم-متر است که

$$M_0 = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i) \Delta_i x = \int_0^L x \rho(x) dx. \quad (5)$$

مرکز جرم میله نقطه ای چون $\bar{x}$ است که اگر جرم کل میله M کیلوگرم باشد، داشته باشیم $\bar{x}M = M_0$. لذا، بنا بر (۳) و (۵)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L x \rho(x) dx}{\int_0^L \rho(x) dx}. \quad (6)$$

مثال ۳ مرکز جرم میله مذکور در مثال ۲ را بیابید.

حل در مثال ۲، $M = 40$. چون $\rho(x) = 5(6-x)/2$ ، بنا بر (۶) داریم

$$\bar{x} = \frac{\int_0^4 \frac{5}{2} x(6-x) dx}{40} = \frac{1}{16} \left[3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^4 = \frac{5}{3}.$$

پس، مرکز جرم از انتهایی که دارای چگالی بیشتر است $5/3$ متر فاصله دارد. ▲

○ **نمونه ۳** اگر میله ای دارای چگالی یکنواخت k کیلوگرم بر متر باشد (k عدد ثابتی است)، آنگاه بنا بر فرمول (۶)

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L xk dx}{\int_0^L k dx} = \frac{\left[\frac{kx^2}{2} \right]_0^L}{\left[kx \right]_0^L} = \frac{\frac{kL^2}{2}}{kL} = \frac{L}{2}.$$

○ لذا همان گونه که انتظار می‌رود، مرکز جرم در وسط میله است.

مثال ۴ مطلوب است مرکز جرم میله‌ای به طول ۲ فوت، اگر چگالی در نقطه‌ای به فاصله x فوت از انتهای چپ آن $\rho(x)$ اسلاگ بر فوت باشد و $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

حل میله را طوری روی محور x ‌ها قرار می‌دهیم که انتهای چپش در مبدأ باشد. آنگاه اگر $\bar{x}$ مرکز جرم باشد، بنابر فرمول (۶) داریم

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x\sqrt{x^2+5} dx}{\int_0^2 \sqrt{x^2+5} dx}. \quad (7)$$

در مثال ۲ از بخش ۳۰۱۰ با استفاده از یک جانشینی مثلثاتی دیدیم که

$$\int \sqrt{x^2+5} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2+5}+x) + C.$$

این نتیجه را برای محاسبه انتگرال در مخرج (۷) به کار می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{x^2+5} dx &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2} \ln(\sqrt{x^2+5}+x) \right]_0^2 \\ &= \sqrt{9} + \frac{5}{2} \ln(\sqrt{9}+2) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{5}{2} \ln \sqrt{5} \right) \\ &= 3 + \frac{5}{2} \ln 5 - \frac{5}{2} \ln 5 \\ &= 3 + \frac{5}{2} \ln 5. \end{aligned} \quad (8)$$

حال انتگرال موجود در صورت کسر (۷) را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_0^2 x\sqrt{x^2+5} dx &= \frac{1}{3}(x^2+5)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3}(2^2+5)^{3/2} - \frac{1}{3}(5)^{3/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

از (۸) و (۹) در (۷) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{27 - 5\sqrt{5}}{3 + (5/4) \ln 5} \approx 105.$$

پس مرکز جرم ۱۰۵ فوت از انتهای چپ میله فاصله دارد؛ این نقطه فقط اندکی از وسط میله به دور است. ▲

تمرینهای ۱.۱۱

در تمرینهای ۱ تا ۴، ذره‌ای بر خطی افقی در حرکت است. با توجه به جرم و شتاب داده شده، نیروی دارد بر ذره را بیابید.

۱. جرم ۵۰ اسلاگ، و شتاب ۵ فوت بر مجذور ثانیه است.
۲. جرم ۱۰ کیلوگرم، و شتاب ۶ متر بر مجذور ثانیه است.
۳. جرم ۸۰ گرم، و شتاب ۵۰ سانتیمتر بر مجذور ثانیه است.
۴. جرم ۲۲ اسلاگ، و شتاب ۴ فوت بر مجذور ثانیه است.

در تمرینهای ۵ تا ۸، بر ذره‌ای نیروی افقی مفروض وارد می‌شود؛ جرم یا شتاب ذره داده شده است. کمیت دیگر را بیابید.

۵. نیرو ۶ نیوتن، و جرم ۴ کیلوگرم است.
۶. نیرو ۳۲ پوند، و جرم ۸ اسلاگ است.
۷. نیرو ۲۴ پوند، و شتاب ۹ فوت بر مجذور ثانیه است.
۸. نیرو ۷۰۰ دین، و شتاب ۸۰ سانتیمتر بر مجذور ثانیه است.

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، دستگاهی از ذرات بر محدودتها قرار دارد. جرم هر ذره بر حسب کیلوگرم، و مختص محل آن داده شده‌اند. فاصله بر حسب متر اندازه گیری می‌شود. مرکز جرم هر دستگاه را بیابید.

۹. در ۲، ۵؛ $m_1 = 5$ ؛ در ۳، ۶؛ $m_2 = 6$ ؛ در ۵، ۴؛ $m_3 = 4$ ؛ در ۸، ۳؛ $m_4 = 3$.
۱۰. در ۴، ۲؛ $m_1 = 2$ ؛ در ۱، ۸؛ $m_2 = 8$ ؛ در ۲، ۴؛ $m_3 = 4$ ؛ در ۳، ۲؛ $m_4 = 2$.
۱۱. در ۳، ۲؛ $m_1 = 2$ ؛ در ۲، ۴؛ $m_2 = 4$ ؛ در ۴، ۲۰؛ $m_3 = 20$ ؛ در ۶، ۱۰؛ $m_4 = 10$ ؛ در ۹، ۳۰؛ $m_5 = 30$.

۱۲. در $-۷, m_1 = ۵$ ؛ در $-۲, m_2 = ۳$ ؛ در $۵, m_3 = ۵$ ؛ در $۲, m_4 = ۱$ ؛ در $۱۰, m_5 = ۸$.

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۱، جرم کل میله مفروض و مرکز جرم آن را بیابید.

۱۳. طول میله‌ای ۶ متر و چگالی خطی میله در نقطه‌ای که x متر از يك انتها فاصله دارد $(۲x+۳)$ کیلوگرم بر متر است.

۱۴. طول میله‌ای ۲۵ سانتیمتر و چگالی خطی میله در نقطه‌ای که x سانتیمتر از يك انتها فاصله دارد، $(۳x+۲)$ گرم بر سانتیمتر است.

۱۵. طول میله‌ای ۱۹ اینچ و چگالی خطی میله در نقطه‌ای که x اینچ از يك انتها فاصله دارد $(۴x+۱)$ اسلاگ بر اینچ است.

۱۶. طول میله‌ای ۳ فوت و چگالی خطی میله در نقطه‌ای که x فوت از يك انتها فاصله دارد $(۵+۲x)$ اسلاگ بر فوت است.

۱۷. طول میله‌ای ۱۲ سانتیمتر، و اندازه چگالی خطی در هر نقطه آن، تابعی خطی از اندازه فاصله نقطه تا انتهای چپ میله است. چگالی خطی در انتهای چپ ۳ گرم بر سانتیمتر و در انتهای راست آن ۴ گرم بر سانتیمتر است.

۱۸. طول میله‌ای ۱۰ متر، و اندازه چگالی خطی در هر نقطه، تابعی خطی از اندازه فاصله نقطه تا انتهای چپ میله است. چگالی خطی در انتهای چپ ۲ کیلوگرم بر متر و در انتهای راست آن ۳ کیلوگرم بر متر است.

۱۹. اندازه چگالی خطی در هر نقطه يك میله ۶ متری با فاصله آن نقطه تا نقطه‌ای که در فاصله ۴ متری خارج يك انتهای میله و در همان راستا واقع است، برابر است. چگالی این انتها ۳ کیلوگرم بر متر است.

۲۰. میله‌ای ۱۰ فوت طول دارد، و اندازه چگالی خطی در هر نقطه آن تابعی خطی از اندازه فاصله نقطه تا وسط میله است. چگالی خطی در هر يك از دو انتهای میله ۵ اسلاگ بر فوت و چگالی خطی در وسط آن ۳٫۵ اسلاگ بر فوت است.

۲۱. اندازه چگالی خطی در هر نقطه از میله‌ای دقیقاً به صورت توان سوم اندازه فاصله نقطه تا يك سر آن است. طول میله ۴ فوت و چگالی خطی وسط آن ۲ اسلاگ بر فوت است.

۲۲. چگالی خطی در هر نقطه يك میله ۵ متری دقیقاً با فاصله نقطه تا نقطه‌ای واقع بر راستای میله و در خارج آن که ۲ متر از يك سر میله فاصله دارد، و چگالی این انتها K کیلوگرم بر متر است، برابر است. اگر جرم کل میله ۱۳۵ کیلوگرم باشد، K را بیابید.

۲۳. چگالی خطی در هر نقطه يك میله ۳ متری به صورت فاصله آن نقطه تا يك نقطه واقع بر راستای میله و در خارج آن که ۱ متر از يك سر میله فاصله دارد و چگالی در این سر میله ۲ کیلوگرم بر متر است، معین می شود. اگر جرم کل میله ۱۵ کیلوگرم باشد، مرکز جرم آن را بیابید.

۲۴. اندازه چگالی خطی در هر نقطه میله ای به صورت توان چهارم اندازه فاصله آن نقطه تا يك سر میله است. طول میله ۲ متر و چگالی خطی در وسط آن ۲ کیلوگرم بر متر است. اگر جرم کل میله $\frac{64}{5}$ کیلوگرم باشد، مرکز جرم میله را بیابید.

۲۵. اگر چگالی خطی در نقطه ای از يك میله ۸ سانتیمتری که x سانتیمتر از انتهای چپ میله فاصله دارد $\rho(x)$ گرم بر سانتیمتر باشد، و $\rho(x) = \sqrt{x^2 + 36}$ ، مرکز جرم میله را بیابید.

۲۶. اگر چگالی خطی در نقطه ای از يك میله ۳ متری که x متر از يك انتهای آن فاصله دارد، $\sqrt{9 + x^2}$ کیلوگرم بر متر باشد، جرم و مرکز جرم میله را بیابید.

۲۷. چگالی خطی میله ای در نقطه ای از آن که x متر از يك سرش فاصله دارد $2e^{-x}$ کیلوگرم بر متر است. اگر طول میله ۶ متر باشد، جرم و مرکز جرم آن را بیابید.

۲۸. جرم کل میله ای که L فوت طول دارد M اسلاگ است؛ و اندازه چگالی خطی در نقطه ای از آن که x فوت از انتهای چپش فاصله دارد متناسب با اندازه فاصله نقطه تا انتهای راست میله است. نشان دهید چگالی خطی نقطه ای از میله که x فوت از انتهای چپ فاصله دارد، $\frac{2M(L-x)}{L^2}$ اسلاگ بر فوت است.

۲۹. چگالی خطی میله ای در نقطه ای از آن که x سانتیمتر از يك سرش فاصله دارد $\frac{2}{(1+x)}$ گرم بر سانتیمتر است. اگر طول میله ۱۵ سانتیمتر باشد، جرم و مرکز جرم آن را بیابید.

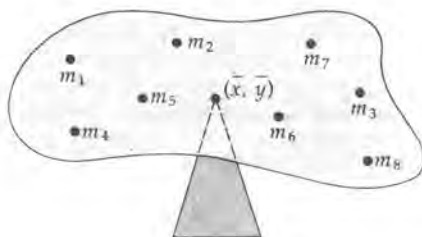
۳۰. طول میله ای ۶ متر و جرم آن ۲۴ کیلوگرم است. اگر اندازه چگالی خطی در هر نقطه از میله دقیقاً با مربع فاصله نقطه تا يك سر میله برابر باشد، بزرگترین مقدار این چگالی خطی را بیابید.

۳۱. طول میله ای L فوت است و مرکز جرم آن در نقطه ای است که $(\frac{3}{4})L$ از انتهای چپش فاصله دارد. اگر اندازه چگالی خطی در هر نقطه متناسب با توانی از اندازه فاصله آن نقطه تا انتهای چپ میله، و چگالی خطی در انتهای راست آن ۲۰ اسلاگ بر فوت باشد، چگالی خطی را در نقطه ای که x فوت از انتهای چپ فاصله دارد بیابید. جرم بر حسب اسلاگ است.

۲۰۱۱ مرکز وار يك ناحیه مسطح

فرض کنید اندازه جرمهای n ذره که در نقاط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ در

صفحه xy قرار دارند $m_1, m_2, \dots, m_n$ باشند؛ می خواهیم نحوه یافتن مرکز جرم این دستگاه را بررسی کنیم. می توان تصور کرد که ذرات بر ورقه که وزن وضخامت آن قابل اغماض است قرار دارند و نیز می توان فرض کرد که جای هر ذره درست در یک نقطه است. مرکز جرم نقطه ای است که ورق را در حال تعادل نگه می دارد. به شکل ۱۰۲۰۱۱ رجوع کنید که هشت ذره واقع بر ورقه را نشان می دهد. در شکل ذره i م با m_i نشان داده شده است که اندازه جرم آن است. ورق بر یک نقطه اتکا که محل آن مرکز جرم است و با $(\bar{x}, \bar{y})$ نمایش داده می شود در حال تعادل خواهد بود و برای تعیین مرکز جرم ابتدا گشتاور جرم یک دستگاه از ذرات را نسبت به یک محور تعریف می کنیم.



شکل ۱۰۲۰۱۱

فرض کنید جرم ذره ای که d متر از محوری فاصله دارد، m کیلو گرم باشد. اگر گشتاور جرم ذره نسبت به محور M_1 کیلو گرم-متر باشد، آنگاه

$$M_1 = md. \quad (1)$$

اگر ذره i م که جرم آن m_i کیلو گرم است در نقطه (x_i, y_i) واقع باشد، فاصله اش تا محور yx متر است؛ لذا، بنا بر فرمول (۱)، گشتاور جرم این ذره نسبت به محور yx ها $m_i x_i$ کیلو گرم-متر است. به طور مشابه، گشتاور جرم ذره نسبت به محور xy ها $m_i y_i$ کیلو گرم-متر است. گشتاور دستگاه متشکل از n ذره نسبت به محور y ها، M_y کیلو گرم-متر است که

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (2)$$

و گشتاور دستگاه نسبت به محور yx ها، M_x کیلو گرم-متر است که

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i. \quad (3)$$

جرم کل دستگاه M کیلو گرم است که

$$M = \sum_{i=1}^n m_i. \quad (4)$$

مرکز جرم دستگاه در نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ واقع است که

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad (۵)$$

و

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad (۶)$$

نقطه $(\bar{x}, \bar{y})$ را می‌توان به عنوان نقطه‌ای تعبیر کرد که اگر جرم کل دستگاه، یعنی M کیلوگرم، را در آنجا متمرکز کنیم گشتاور جرمش نسبت به محور y ها، M_y کیلوگرم-متر، از رابطه $M_y = M\bar{x}$ ، و گشتاور جرمش نسبت به محور x ها، M_x کیلوگرم-متر، از رابطه $M_x = M\bar{y}$ به دست می‌آید.

مثال ۱ مرکز جرم چهار ذره با جرمهای ۲، ۶، ۴، و ۱ کیلوگرم را که به ترتیب در نقاط $(۲, -۱)$ ، $(۰, ۳)$ ، $(-۲, ۱)$ ، و $(۴, -۱)$ قرار دارند، بیابید.

حل

$$M_y = \sum_{i=1}^4 m_i x_i = ۲(۵) + ۶(-۲) + ۴(۰) + ۱(۴) = ۲$$

$$M_x = \sum_{i=1}^4 m_i y_i = ۲(-۲) + ۶(۱) + ۴(۳) + ۱(-۱) = ۱۳$$

$$M = \sum_{i=1}^4 m_i = ۲ + ۶ + ۴ + ۱ = ۱۳.$$

بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{۱۳}{۱۳} = ۱ \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{۲}{۱۳}$$

▲

پس مرکز جرم در $(۲/۱۳, ۱)$ است.

حال ورق نازکی، مانند یک تکه کاغذ یا یک نوار مسطح حلبی را که جرم آن به طور پیوسته توزیع شده است در نظر بگیرید؛ این گونه ورقها را دوبعدی تلقی می‌کنیم و چنین ناحیه سطحی را ورقه می‌نامیم. در این بخش بحث خود را به ورقه‌های همگن، یعنی ورقه‌هایی که چگالی سطحی آنها ثابت اند، محدود می‌کنیم. ورقه‌هایی که چگالی سطحی آنها متغیرند، در ارتباط با کاربردهای انتگرالهای چندگانه و در فصل ۲۰ مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فرض کنید جرم یک ورقه همگن با مساحت A مترمربع، M کیلوگرم باشد. در این صورت، اگر چگالی سطحی ورقه مقدار ثابت k کیلوگرم بر مترمربع باشد، $M = kA$. اگر ورقه همگن یک مستطیل باشد، مرکز جرمش بنا بر تعریف، مرکز مستطیل است. از این

تعریف برای تعریف مرکز جرم ورقه‌های همگن در حالت عام استفاده می‌کنیم. فرض کنید L ورقه همگنی باشد که چگالی سطحی آن مقدار ثابت k کیلو-گرم بر متر مربع است، و بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور است. تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است و به‌ازای جمیع مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. شکل ۲۰۲۰۱۱ را ببینید. فرض کنید Δ یک افراز از بازه $[a, b]$ به n زیر-بازه باشد. زیر بازه i م، $[x_{i-1}, x_i]$ است و $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. نقطه وسط γ_i ، $[x_{i-1}, x_i]$ است. متناظر با هر زیر بازه، ورقه مستطیل شکلی داریم که قاعده (پهنای)، ارتفاع، و چگالی سطحی آن، به ترتیب، عبارت انداز $\Delta_i x$ متر، $f(\gamma_i)$ متر، و k کیلو گرم بر متر مربع؛ مرکز جرم این ورقه در نقطه $(\gamma_i, (1/2)f(\gamma_i))$ است؛ مساحت این ورقه مستطیلی $f(\gamma_i)\Delta_i x$ متر مربع، و لذا جرمش $kf(\gamma_i)\Delta_i x$ کیلو گرم است. در نتیجه، اگر گشتاور جرم این جزء مستطیلی نسبت به محور y ها، برابر با $\Delta_i M_y$ کیلو گرم-متر باشد، داریم

$$\Delta_i M_y = \gamma_i k f(\gamma_i) \Delta_i x.$$

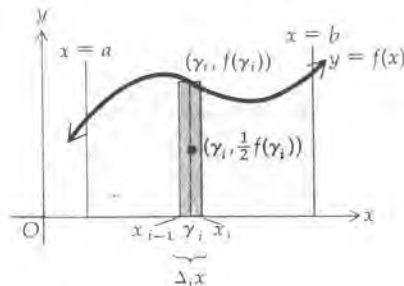
مجموع اندازه گشتاورهای جرم n تا از این ورقه‌های مستطیلی نسبت به محور y ها به صورت مجموع ریمانی

$$\sum_{i=1}^n k \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x$$

معین می‌شود. ما گشتاور جرم L نسبت به محور y ها را به عنوان حد این مجموع تعریف می‌کنیم. این مطلب به طور رسمی در تعریف ۲۰۲۰۱۱ خواهد آمد. به طور مشابه، اگر گشتاور جرم ورقه مستطیلی i م نسبت به محور x ها $\Delta_i M_x$ کیلو-گرم-متر باشد، داریم

$$\Delta_i M_x = \frac{1}{2} f(\gamma_i) k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

و مجموع اندازه گشتاورهای جرم n تا از این ورقه‌های مستطیلی نسبت به محور x ها با مجموع ریمانی زیر داده می‌شود



شکل ۲۰۲۰۱۱

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x.$$

حد این مجموع ریمانی وقتی که $||\Delta|| \rightarrow 0$ ، در تعریف ۱۰۲.۱۱ به عنوان گشتاور جرم L نسبت به محور x ها تعریف می شود.

جرم ورقه مستطیلی i ، $k f(\gamma_i) \Delta_i x$ کیلو گرم است؛ لذا مجموع اندازه جرمهای n ورقه مستطیلی با

$$\sum_{i=1}^n k f(\gamma_i) \Delta_i x$$

معین می شود. در تعریف ۱۰۲.۱۱ حد این مجموع ریمانی به عنوان جرم کل L تعریف می شود.

۱۰۲.۱۱ تعریف فرض کنید L ورقه همگنی باشد که چگالی سطحی ثابتش k کیلو گرم بر متر مربع است، و محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. تابع f بر $[a, b]$ پیوسته است و به ازای جمیع مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. اگر گشتاور جرم ورقه L نسبت به محور y ها M_y کیلو گرم-متر باشد، آنگاه

$$M_y = \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x = k \int_a^b x f(x) dx. \quad (7)$$

اگر گشتاور جرم ورقه L نسبت به محور x ها M_x کیلو گرم-متر باشد، آنگاه

$$M_x = \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x = \frac{1}{2} k \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (8)$$

اگر جرم کل ورقه L ، M کیلو گرم باشد، آنگاه

$$M = \lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\gamma_i) \Delta_i x = k \int_a^b f(x) dx. \quad (9)$$

اگر $(\bar{x}, \bar{y})$ مرکز جرم ورقه L باشد، آنگاه

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad (10)$$

اگر از (۷)، (۸)، و (۹) در (۱۰) قرار دهیم، داریم

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} k \int_a^b [f(x)]^2 dx}{k \int_a^b f(x) dx} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{k \int_a^b x f(x) dx}{k \int_a^b f(x) dx}$$

هم صورت وهم مخرج را بر k تقسیم می کنیم و به دست می آوریم

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (11)$$

و

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{4} \int_a^b [f(x)]^4 dx}{\int_a^b f(x) dx}. \quad (12)$$

در فرمولهای (۱۱) و (۱۲)، مخرج کسر، مساحت ناحیه بر حسب واحد مربع است؛ لذا مسئله‌ای فیزیکی را به مسئله‌ای هندسی تبدیل کرده‌ایم. یعنی، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را می توان به ترتیب به عنوان طول متوسط و عرض متوسط يك ناحیه هندسی تلقی کرد. در چنین حالتی $\bar{x}$ و $\bar{y}$ صرفاً به ناحیه بستگی دارند و نه به جرم ورقه. لذا به جای مرکز جرم يك ورقه همگن، با مرکز جرم يك ناحیه مسطح سروکار داریم. در این حالت، مرکز جرم را مرکز داد ناحیه می نامیم و به جای گشتاورهای جرم، گشتاورهای ناحیه را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۲.۱۱ تعریف فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y=f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x=a$ و $x=b$ باشد. تابع f بر $[a, b]$ پیوسته است و به ازای تمام مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. اگر M_x گشتاور R نسبت به محور x ها و M_y گشتاور R نسبت به محور y ها را نمایش دهد، آنگاه

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} [f(\gamma_i)]^4 \Delta_i x = \frac{1}{4} \int_a^b [f(x)]^4 dx$$

$$M_y = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x = \int_a^b x f(x) dx.$$

اگر $(\bar{x}, \bar{y})$ مرکزوار ناحیه مسطح R با مساحت A واحد مربع باشد و M_x و M_y به صورت بالا تعریف شوند، داریم

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A}$$

مثال ۲ مرکز وار ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین منحنی $y^2 = 4x$ ، محور x ها، و خطوط $x=1$ و $x=4$ را بیابید.

حل فرض کنید $f(x) = 2x^{1/2}$. آنگاه معادله منحنی $y = f(x)$ است. در شکل ۳.۲.۱۱ ناحیه همراه با جزء مستطیلی z نشان داده شده است. مرکز وار مستطیل در $(\gamma_i, (1/2)f(\gamma_i))$ واقع است. مساحت ناحیه بر حسب واحد مربع از فرمول زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\gamma_i) \Delta_i x \\ &= \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 2x^{1/2} dx \\ &= \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_1^4 \\ &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

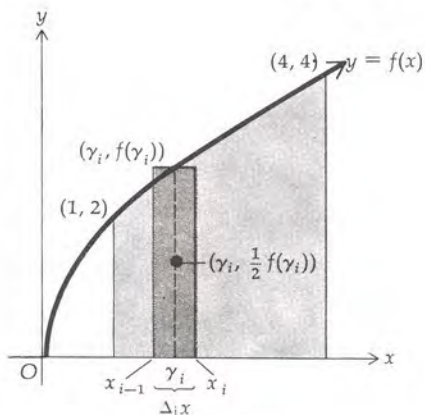
حال M_x و M_y را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x & M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(\gamma_i) \cdot f(\gamma_i) \Delta_i x \\ &= \int_1^4 x f(x) dx & &= \frac{1}{2} \int_1^4 [f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 x (2x^{1/2}) dx & &= \frac{1}{2} \int_1^4 4x dx \\ &= 2 \int_1^4 x^{3/2} dx & &= x^2 \Big|_1^4 \\ &= \frac{4}{5} x^{5/2} \Big|_1^4 & &= 15. \\ &= \frac{124}{5}. \end{aligned}$$

لذا

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{15}{28/3} = \frac{45}{28} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{124/5}{28/3} = \frac{93}{35}$$

در نتیجه، مرکز وار ناحیه در نقطه $(93/35, 45/28)$ است.



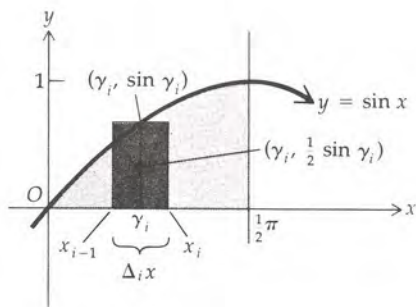
▲

شکل ۳.۲.۱۱

مثال ۳ مرکز وار ناحیه واقع در ربع اول ومحصور بین منحنی $y = \sin x$ ، محور x ها وطرف چپ خط $x = \pi/2$ را بیابید.

حل ناحیه وجزاء مستطیلی i م در شکل ۴.۲.۱۱ نشان داده شده اند. نخست مساحت ناحیه را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sin \gamma_i \Delta_i x \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\
 &= -\cos x \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$



شکل ۴.۲.۱۱

حال M_x و M_y را حساب می‌کنیم. برای محاسبه انتگرال مربوط به M_y از انتگرال گیری جزء به جزء با ضوابط $u = x$ و $dv = \sin x \, dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\sin \gamma_i]^2 \Delta_i x & M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \sin \gamma_i \Delta_i x \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx & &= \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx & &= -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} & &= -x \cos x + \sin x \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \pi \right] & &= -\frac{1}{2} \pi \cos \frac{1}{2} \pi + \sin \frac{1}{2} \pi \\
 &= \frac{1}{8} \pi. & &= 1.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\pi/8}{1} = \frac{1}{8} \pi \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{1} = 1$$

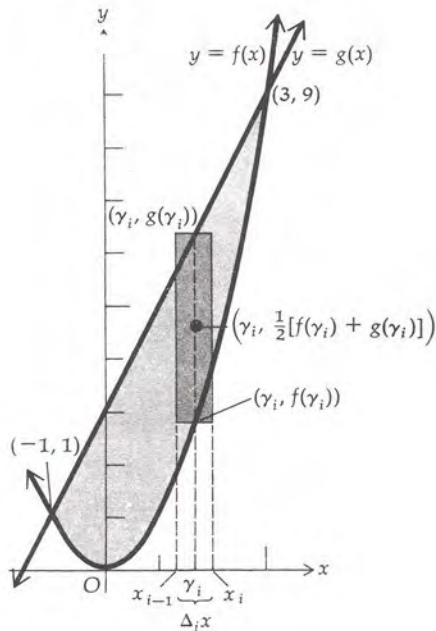
در نتیجه، مرکزوار ناحیه در نقطه $(1, \pi/8)$ است. ▲

در مثال زیر، ناحیه مورد نظر به جای اینکه بین يك منحنی و یکی از محورهای مختصات محصور باشد، بین دو منحنی محصور است. روش یافتن مرکزوار مثل سابق است، اما حالا معادلات مربوط به M_x و M_y به معادلاتی وابسته اند که دو منحنی را تعریف می‌کنند. شیوه کار در مثال نشان داده شده است.

مثال ۴ مرکزوار ناحیه محصور بین منحنیهای $y = x^2$ و $y = 2x + 3$ را بیابید.

حل نقاط تقاطع دو منحنی، $(-1, 1)$ و $(3, 9)$ هستند. ناحیه همراه با جزء مستطیلی z در شکل ۵.۲.۱۱ نشان داده شده است.

فرض کنید $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2x + 3$. با این فرض که γ_i نقطه وسط زیر بازه z ، $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، نقطه $(\gamma_i, [f(\gamma_i) + g(\gamma_i)]/2)$ مرکزوار جزء مستطیلی z است. اندازه مساحت ناحیه به صورت زیر به دست می‌آید



شکل ۵.۲.۱۱

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x \\
 &= \int_{-1}^3 [g(x) - f(x)] dx \\
 &= \int_{-1}^3 [2x + 3 - x^2] dx \\
 &= \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

حال M_x و M_y را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 M_y &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x \\
 &= \int_{-1}^3 x [g(x) - f(x)] dx
 \end{aligned}$$

مرکزوار يك ناحیه مسطح ۸۳

$$= \int_{-1}^2 x[2x+3-x^2] dx$$

$$= \frac{32}{3}.$$

$$M_x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [g(\gamma_i) + f(\gamma_i)] [g(\gamma_i) - f(\gamma_i)] \Delta_i x$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [g(x) + f(x)] [g(x) - f(x)] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [2x+3+x^2] [2x+3-x^2] dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 [4x^2 + 12x + 9 - x^4] dx$$

$$= \frac{544}{15}.$$

بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{544/15}{32/3} = \frac{17}{5} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{32/3}{32/3} = 1$$

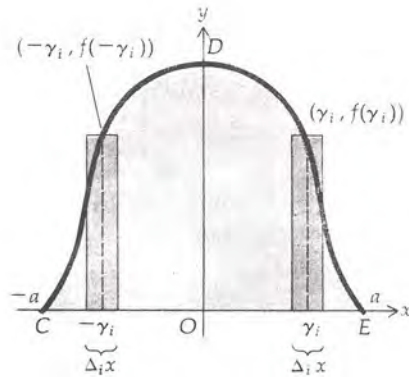
▲ لذا، مرکز وار در نقطه $(1, 17/5)$ واقع است.

اگر ناحیه مسطح محور تقارن داشته باشد، مرکزوار ناحیه روی محور تقارن واقع است. اینک این نکته را به صورت يك قضیه بیان، و آن را اثبات می کنیم.

۳.۲.۱۱ قضیه اگر خطی چون L محور تقارن يك ناحیه مسطح R باشد، مرکزوار R بر L واقع است.

اثبات محورهای مختصات را طوری انتخاب می کنیم که L بر محور y ها و مبدأ در داخل ناحیه R قرار گیرد. شکل ۳.۲.۱۱ نمونه ای از این وضعیت را نشان می دهد. در این شکل، R ناحیه CDE ، نقطه $C(-a, 0)$ ، نقطه $E(a, 0)$ ، و معادله ای از منحنی CDE ، عبارت از $y = f(x)$ است.

افرازی از بازه $[0, a]$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم γ_i نقطه وسط زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، m_i باشد. گشتاور جزء مستطیلی m_i با ارتفاع $f(\gamma_i)$ و پهنای $\Delta_i x$ ، نسبت به محور y ها، $\gamma_i [f(\gamma_i) \Delta_i x]$ است. به خاطر تقارن، به ازای افراز مشابهی از بازه $[-a, 0]$



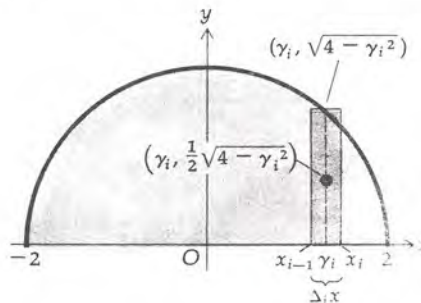
شکل ۶.۲.۱۱

جزء متناظری وجود دارد که گشتاورش نسبت به محور y ها، $\gamma_i f(\gamma_i) \Delta x_i$ است. مجموع این دو گشتاور ۰ است؛ بنا بر این $M_y = 0$. چون $M_y = A \bar{x}$ ، نتیجه می گیریم که $\bar{x} = 0$. پس مرکزوار ناحیه بر محور y ها قرار دارد و این همان حکم است که باید اثبات می شد. $\square$

با استفاده از این قضیه می توانیم محاسبه مرکزوار ناحیه مسطحی را که به چند ناحیه دارای محور تقارن قابل تقسیم است، ساده کنیم.

مثال ۵ مرکزوار ناحیه داخل نیمدایره $y = \sqrt{4 - x^2}$ و محور x ها را بیابید.

حل ناحیه در شکل ۷.۲.۱۱ نشان داده شده است. چون محور y ها یک محور تقارن ناحیه است، مرکزوار ناحیه بر محور y ها واقع است؛ و لذا $\bar{x} = 0$. گشتاور ناحیه نسبت به محور x ها به صورت زیر به دست می آید



شکل ۷.۲.۱۱

$$\begin{aligned}
 M_x &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [\sqrt{4-x_i^2}]^2 \Delta_i x \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (4-x^2) dx \\
 &= 4x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 \\
 &= \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

مساحت ناحیه 2π واحد مربع است؛ لذا

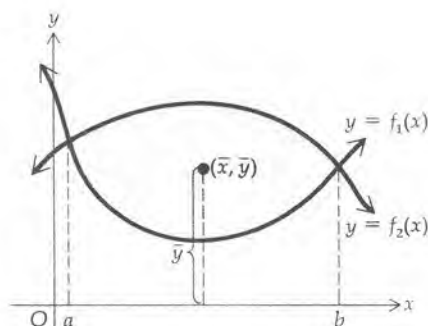
$$\bar{y} = \frac{16/3}{2\pi} = \frac{8}{3\pi}.$$

▲ پس مرکز وار ناحیه در نقطه $(0, 8/3\pi)$ واقع است.

تمرینهای ۲.۱۱

۱. مرکز جرم سه ذره با جرمهای ۲، ۱، ۳ و ۳ کیلوگرم را که به ترتیب در نقاط $(-1, 3)$ ، $(2, 1)$ ، $(3, -1)$ واقع اند، بیابید.
 ۲. مرکز جرم چهار ذره با جرمهای ۲، ۳، ۳ و ۴ کیلوگرم را که به ترتیب در نقاط $(-2, -1)$ ، $(1, 3)$ ، $(0, 5)$ و $(2, 1)$ واقع اند، بیابید.
 ۳. مختص γ مرکز جرم چهار ذره ۵ است. ذرات دارای جرمهای ۲، ۵، ۴ و m اسلاگ هستند و به ترتیب در نقاط $(3, 2)$ ، $(-1, 0)$ ، $(0, 20)$ و $(2, -2)$ واقع اند. m را بیابید.
 ۴. مرکز جرم سه ذره با جرمهای ۳، ۷ و ۲ اسلاگ را که به ترتیب در نقاط $(2, 3)$ ، $(-1, 4)$ و $(0, 2)$ واقع اند، بیابید.
 ۵. مرکز جرم سه ذره با جرمهای متساوی را که در نقاط $(4, -2)$ ، $(-3, 0)$ و $(1, 5)$ واقع اند، بیابید.
 ۶. ثابت کنید که مرکز جرم سه ذره با جرمهای متساوی، نقطه تقاطع میانه‌های مثلثی است که رئوس آن، مکانهای ذرات هستند.
- دز تمرینهای ۷ تا ۱۹، مرکزوار ناحیه موردنظر با مرزهای مفروض γ بیابید.
۷. سهمی $y = 4 - x^2$ و محور x ها. ۸. سهمی $x = 2y - y^2$ و محور y ها.

۹. سهمی $y = x^2$ و خط $y = 4$.
۱۰. سهمی $y^2 = 4x$ ، محور y ها، و خط $y = 4$.
۱۱. منحنیهای $y = x^3$ و $y = 4x$ ؛ واقع در ربع اول.
۱۲. خطوط $x + y = 7$ ، $y = 2x + 1$ ، $x = 8$.
۱۳. منحنیهای $y = x^2 - 4$ و $y = 2x - x^2$. ۱۴. منحنیهای $y = x^2$ و $y = x^3$.
۱۵. منحنی $y = e^x$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 3$.
۱۶. منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، و محور y ها؛ واقع در ربع اول.
۱۷. منحنی $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$ ، محور x ها، و خط $x = 5$.
۱۸. منحنی $y = (x - 1)/(x^2 - 5x + 6)$ ، محور x ها، و خطوط $x = 4$ و $x = 6$.
۱۹. منحنی $x - y = (x + 2)^2$ ؛ واقع در ربع اول.
۲۰. طول مرکزوار ناحیه محصور بین منحنی $y = 4/(x^3 + 8)$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = 2$ را بیابید.
۲۱. اگر مرکزوار ناحیه محصور بین سهمی $4px = y^2$ و خط $x = a$ در نقطه $(p, 0)$ باشد، مقدار a را بیابید.
۲۲. ثابت کنید که فاصله مرکزوار يك مثلث تا هر ضلع آن مساوی با يك سوم طول ارتفاع وارد بر آن ضلع است.
۲۳. مطلوب است مرکز جرم ورقه محصور بین سهمی $3x - 18 = y^2$ و محور y ها، با این شرط که چگالی سطحی در نقطه (x, y) برابر با $\sqrt{6 - x}$ کیلوگرم بر متر مربع باشد.
۲۴. در تمرین ۲۳ اگر چگالی سطحی در نقطه (x, y) ، x کیلوگرم بر متر مربع فرض شود، مرکز جرم ورقه را بیابید.
۲۵. جرم ورقه‌ای را که به شکل ناحیه مذکور در تمرین ۲۰ است و چگالی سطحی آن در نقطه (x, y) برابر با kx^2 کیلوگرم بر متر مربع است، بیابید.
۲۶. ناحیه محصور بین منحنیهای $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ است (شکل ۸.۲.۱۱ را ببینید). اگر A اندازه مساحت R ، و $\bar{x}$ عرض مرکزوار R باشد، ثابت کنید که، V ، اندازه حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه حول محور x ها از رابطه $V = 2\pi \bar{x} A$ به دست می آید. تفسیر این معادله به شرح زیر است:
اگر ناحیه مسطحی را حول خطی، که ناحیه را قطع نمی کند اما در صفحه آن واقع است، دوران دهیم، آنگاه اندازه حجم جسم دوار حاصل، برابر است با



شکل ۸.۲۰۱۱

حاصلضرب اندازه مساحت ناحیه در اندازه فاصله‌ای که توسط مرکزوار ناحیه پیموده می‌شود.

حکم فوق به قضیه پاپوس در مورد حجم اجسام دوار معروف است.

۲۷. با استفاده از قضیه پاپوس، مرکزوار ناحیه محصور بین يك نیم‌دایره و قطرش را پیدا کنید.

۲۸. با استفاده از قضیه پاپوس، حجم چنبره‌ای را به‌دست آورید که از دوران دایره‌ای به‌شعاع r واحد حول خطی واقع در صفحه دایره و به فاصله b واحد از مرکز آن ($b > r$) پدید آمده است (چنبره به‌شکل حلقه است).

۲۹. با به‌کارگیری قضیه پاپوس، حجم مخروط مستدیر قائمی به‌شعاع قاعده r واحد و ارتفاع h واحد را به‌دست آورید.

۳۰. با استفاده از قضیه پاپوس، حجم کره‌ای را که شعاعش r واحد است، پیدا کنید.

۳۱. فرض کنید R ناحیه محصور بین نیم‌دایره $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ و محور x ها باشد. با استفاده از قضیه پاپوس، گشتاور R نسبت به خط $y = -r$ را بیابید.

۳۲. اگر R ناحیه مذکور در تمرین ۳۱ باشد، با استفاده از قضیه پاپوس، حجم جسم دوار حاصل از دوران R حول خط $y = r - x$ را بیابید. (دانه‌مایی: نتیجه تمرین ۲۲ از تمرینهای ۷.۴ را به‌کار ببرید.)

۳.۱۱ مرکزوار جسم دوار

برای یافتن مرکز جرم يك جسم، در حالت کلی باید از انتگرال‌گیری چند گانه استفاده کنیم. این شیوه در فصل ۲۰ به‌عنوان کاربرد از انتگرالهای چند گانه مورد بحث قرار خواهد گرفت. اما، اگر جسم به‌شکل يك جسم دوار، و چگالی حجمی آن ثابت باشد، مرکز جرم

را با روشی می یابیم که شبیه نحوه یافتن مرکز جرم يك ورقه همگن است. با این فرض که مرکز جرم بر محور دوران واقع باشد، شیوه یافتن مرکز جرم يك جسم دوار همگن به شرح زیر است.

نخست يك دستگاه مختصات سه بعدی تشکیل می دهیم. محور x ها و محور y ها را نظیر حالت دو بعدی در نظر می گیریم، و محور سوم، یعنی محور z ها، را از مبدأ عمود بر آنها رسم می کنیم. لذا، هر نقطه در دستگاه سه بعدی با (x, y, z) معین می شود. صفحه شامل محور x ها و محور y ها را صفحه xy می نامیم؛ صفحه xz ، و صفحه yz را به طور مشابه تعریف می کنیم.

فرض کنید که محور x ها محور دوران باشد. پس، بنا به این فرض ما که مرکز جرم بر محور دوران واقع است، مختصات y و z در مرکز جرم هر دو صفرند، لذا فقط لازم است به مختص x که آن را $\bar{x}$ می نامیم دست یابیم. جهت یافتن $\bar{x}$ از گشتاور جسم دوار نسبت به صفحه yz استفاده می کنیم.

فرض کنید f تابعی است که بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است، و به ازای تمام مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ است. S جسم دوار همگنی است که چگالی حجمی آن k کیلو گرم بر متر مکعب است و از دوران ناحیه R حول محور x ها تولید می شود؛ در اینجا k يك عدد ثابت است. افزای چون Δ از بازه بسته $[a, b]$ را در نظر می گیریم و زیر بازه Δ آن را با $[x_{i-1}, x_i]$ نمایش می دهیم ($i = 1, 2, \dots, n$). فرض کنید γ_i نقطه وسط $[x_{i-1}, x_i]$ باشد. n مستطیل با ارتفاع $f(\gamma_i)$ متر و قاعده $\Delta_i x$ متر تشکیل می دهیم. به شکل ۱۰.۳.۱۱ رجوع کنید که ناحیه R و مستطیل Δ_i را نشان می دهد. اگر هر يك از این n مستطیل را حول محور x ها دوران دهیم n قرص مستدیر پدید می آید. مستطیل Δ_i قرص مستدیری را تولید می کند که شعاعش $f(\gamma_i)$ متر و ضخامتش $\Delta_i x$ متر است؛ لذا حجم این قرص $\pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$ متر مکعب و جرمش $k\pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$ کیلو گرم است. شکل ۱۰.۳.۱۱ جسم دوار S و قرص مستدیر Δ_i را نشان می دهد.

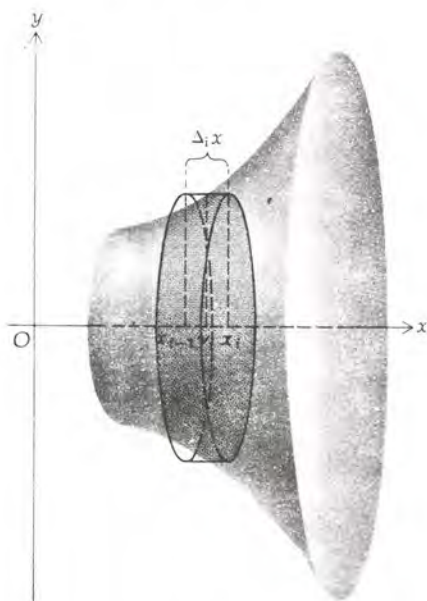
مرکز جرم قرص مستدیر بر محور دوران گذرنده از مرکز قرص، $(\gamma_i, 0, 0)$ قرار دارد. در این صورت گشتاور جرم قرص نسبت به صفحه yz ، $\Delta_i M_{yz}$ کیلو گرام-متر است که

$$\Delta_i M_{yz} = \gamma_i (k\pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x).$$

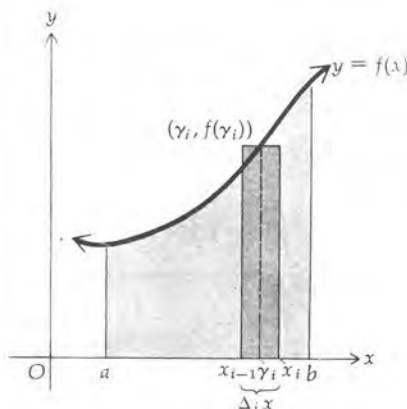
مجموع اندازه گشتاورهای جرم n قرص مستدیر نسبت به صفحه yz با مجموع ریمانی

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i k\pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x$$

مشخص می شود. حد این مجموع وقتی که $\|\Delta\|$ به سمت صفر میل می کند به عنوان گشتاور جرم S نسبت به صفحه yz تعریف می شود. این مطلب را به طور رسمی در تعریف ۱۰.۳.۱۱ ذکر می کنیم.



شکل ۲.۳.۱۱



شکل ۱.۳.۱۱

در بخش ۲.۷ حجم S را که V مترمکعب است به صورت زیر تعریف کردیم

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (1)$$

جرم S به صورت kV تعریف می شود.

۱.۳.۱۱ تعریف ناحیه R بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور است؛ تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است، و به ازای تمام مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. جسم دوار همگن S که چگالی حجمی آن k کیلوگرم بر مترمکعب (k عددی ثابت) است، از دوران ناحیه R حول محور x ها پدید می آید. گشتاور جرم S نسبت به صفحه yz با M_{yz} ، بر حسب کیلوگرم-متر، نمایش داده می شود، و

$$M_{yz} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i k \pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x = k \pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx. \quad (2)$$

جرم جسم S ، M کیلوگرم، با ضابطه

$$M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x = k \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (3)$$

تعریف می شود. مرکز جرم S نقطه $(\bar{x}, 0, 0)$ است که

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad (۴)$$

اگر از (۲) و (۳) در (۴) قرار دهیم، داریم

$$\bar{x} = \frac{k\pi \int_a^b x[f(x)]^2 dx}{k\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

یا معادل آن

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x)]^2 dx}{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \quad (۵)$$

از (۵) مشاهده می شود که مرکز جرم يك جسم دوار همگن صرفاً به شکل جسم بستگی دارد و نه به جنس آن. بنابراین، همان گونه که در مورد ورقه های همگن هم گفتیم، به جای مرکز جرم، از مرکز دایره دوار جسم دوار سخن می گوییم؛ و نیز وقتی که يك جسم دوار همگن داشته باشیم، به جای گشتاور جرم، گشتاد جسم دوار را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۳.۱۱ تعریف اگر S جسم دوار مذکور در تعریف ۱.۳.۱۱ باشد، آنگاه گشتاور جسم دوار S نسبت به صفحه yz با ضابطه

$$M_{yz} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi [f(\gamma_i)]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b x[f(x)]^2 dx \quad (۶)$$

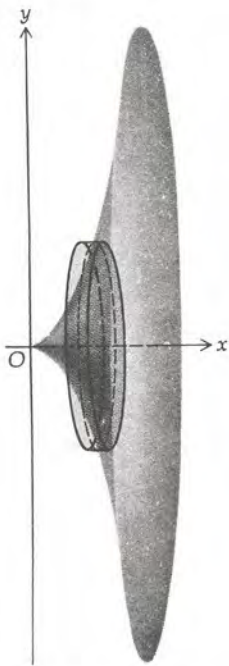
تعیین می شود. مرکز دوار S که حجم آن V متر مکعب است، $(\bar{x}, 0, 0)$ است که

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} \quad (۷)$$

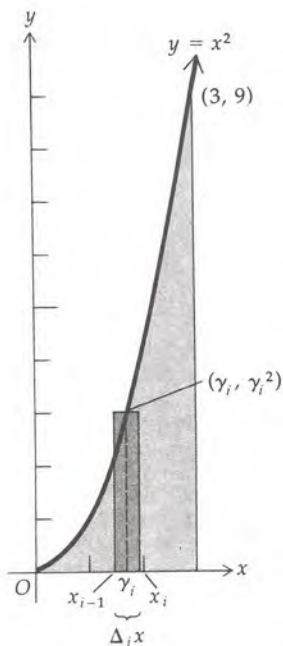
معادله (۷) از (۱)، (۵)، و (۶) به دست می آید.

مثال ۱ مطلوب است مرکز دوار جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خط $x = 3$ ، حول محور x ها.

حل ناحیه و يك جزء مستطیلی از سطح در شکل ۳.۳.۱۱ نشان داده شده اند. جسم دوار و يك جزء از حجم را در شکل ۴.۳.۱۱ می بینید.



شکل ۴.۳.۱۱



شکل ۳.۳.۱۱

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi (\gamma_i^2) \Delta_i x \\ &= \pi \int_0^3 x^3 dx \\ &= \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi (\gamma_i^2) \Delta_i x \\ &= \pi \int_0^3 x^2 dx \\ &= \frac{243}{\Delta} \pi. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{243\pi/2}{243\pi/\Delta} = \frac{\Delta}{2}.$$

▲

در نتیجه، مرکزوار در نقطه $(\Delta/2, 0, 0)$ است.

در بحث قبل و در مثال ۱، جزء حجم يك قرص مستدير بود. وقتی كه جزء حجم يك حلقه مستدير باشد، مفاهيم مربوط تغيير نمی كنند؛ اما، معادلات لازم جهت تعريف گشتاور جسم و حجم جسم را بايد با بررسی مجموع ريما نی حجم حلقه های مستدير به دست آورد.

حال به یافتن این معادلات می پردازیم.

توابعی چون f و g بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته اند، و به ازای تمام مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq g(x) \geq 0$. فرض کنید R ناحیه ای باشد که از بالا به منحنی $y = f(x)$ ، از پایین به منحنی $y = g(x)$ ، و از دو طرف به خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود است. اجزاء مستطیلی سطح را عمود بر محور x ها می گیریم؛ لذا جزء يك حجم يك حلقه مستدیر است. شکل ۵.۳.۱۱ ناحیه R و يك جزء مستطیلی سطح را نشان می دهد. پهنای مستطیل $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ ، و نقطه وسط بازه $[\gamma_i, x_i]$ است. مرکزوار حلقه مستدیر حاصل از دوران جزء مستطیلی سطح حول محور x ها در مرکز حلقه است که نقطه $(\gamma_i, 0, 0)$ است. فرض کنید جسم دوار حاصل از دوران R حول محور x ها S باشد. شکل ۶.۳.۱۱، S و حلقه مستدیر i را نشان می دهد. گشتاور S نسبت به صفحه yz ، M_{yz} ، با ضابطه

$$M_{yz} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi ([f(\gamma_i)]^2 - [g(\gamma_i)]^2) \Delta_i x$$

$$= \pi \int_a^b x ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \quad (۸)$$

به دست می آید.

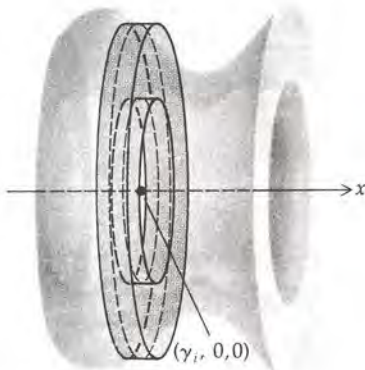
اگر حجم S ، V واحد مکعب باشد، آنگاه

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi ([f(\gamma_i)]^2 - [g(\gamma_i)]^2) \Delta_i x$$

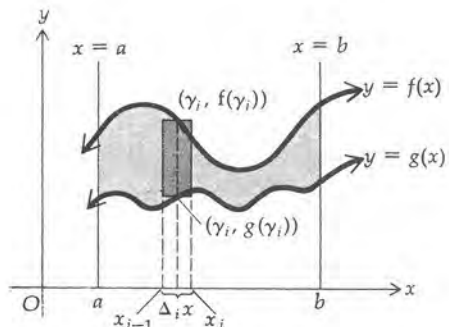
$$= \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx. \quad (۹)$$

اگر مرکزوار S در نقطه $(\bar{x}, 0, 0)$ باشد، آنگاه

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V}.$$



شکل ۶.۳.۱۱



شکل ۵.۳.۱۱

مثال ۲ مرکزوار جسم دوار حاصل ازدوران ناحیه محصور بین منحنی $y = e^x$ و خطوط $x = 1$ و $y = 1$ را بیابید.

حل شکل ۷.۳.۱۱ ناحیه و یک جزء مستطیلی سطح، و شکل ۸.۳.۱۱ جسم دوار و جزئی از حجم را که یک حلقه مستدیر است، نشان می‌دهد. بنا بر (۸)،

$$M_{yz} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma_i \pi [(e^{\gamma_i})^2 - 1^2] \Delta_i x$$

$$= \pi \int_0^1 x e^{2x} dx - \pi \int_0^1 x dx.$$

برای محاسبه انتگرال نخست، از انتگرال گیری جزء به جزء با ضوابط $u = x$ و $dv = e^{2x} dx$ استفاده می‌کنیم.

$$M_{yz} = \pi \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right]_0^1 - \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

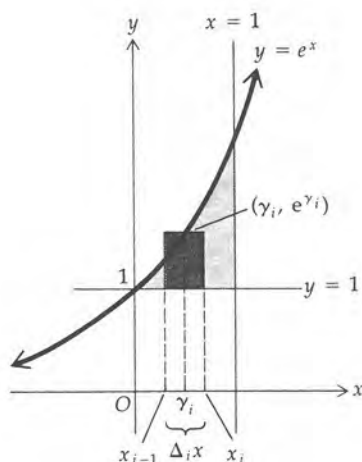
$$= \pi \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 - \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right] - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^2 - 1).$$



شکل ۸.۳.۱۱



شکل ۷.۳.۱۱

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi[(e^{\gamma_i})^2 - 1] \Delta_i x \\
 &= \pi \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} - x \right]_0^1 \\
 &= \pi \left[\left(\frac{1}{2} e^2 - 1 \right) - \frac{1}{2} \right] = \pi \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} (e^2 - 3).
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{(\pi/4)(e^2 - 1)}{(\pi/2)(e^2 - 3)} \approx 0.694.$$

▲ مرکز واریجسم در نقطه $(0.694, 0, 0)$ است.

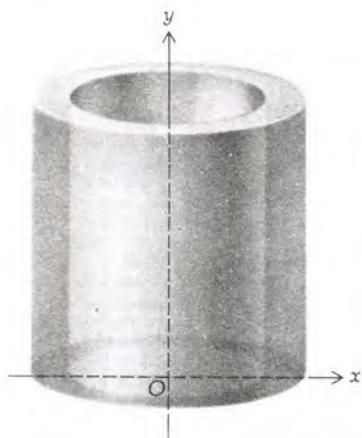
مرکز واریجسم دوار را می‌توان با روش پوسته استوانه‌ای هم یافت. فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، که f بر $[a, b]$ پیوسته است و $f(x) \geq 0$ ، و نیز محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد. همچنین فرض کنید S جسم دوار حاصل از دوران ناحیه R حول محور y ها باشد. اگر اجزاء مستطیلی موازی با محور y ها گرفته شوند، آنگاه جزء حجم یک پوسته استوانه‌ای است. فرض کنید پهنای مستطیل i م، $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ ، و نقطه وسط بازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، γ_i باشد. مرکز واریجسم استوانه‌ای حاصل از دوران این مستطیل حول محور y ها در مرکز پوسته استوانه‌ای است که نقطه $(0, f(\gamma_i)/2, 0)$ است. شکل ۹.۳.۱۱ ناحیه R و یک جزء مستطیلی سطح، و شکل ۱۰.۳.۱۱ پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. M_{yz} ، گشتاور S نسبت به صفحه xz ، یا ضابطه

$$M_{xz} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(\gamma_i)^2 \pi \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x = \pi \int_a^b x [f(x)]^2 dx$$

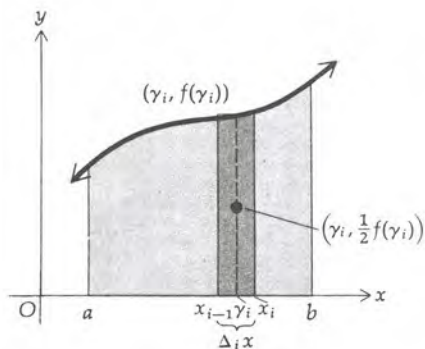
به دست می‌آید.

اگر حجم S برابر V واحد مکعب باشد،

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \gamma_i f(\gamma_i) \Delta_i x \\
 &= \pi \int_a^b x f(x) dx.
 \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۳.۱۱



شکل ۹.۳.۱۱

بنابراین مرکز وار S در نقطه $(0, \bar{y}, 0)$ است که

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{V}.$$

مثال ۳ با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای، مرکز وار جسم دوار حاصل از دوران ناحیه مذکور در مثال ۱ حول محور y را بیابید.

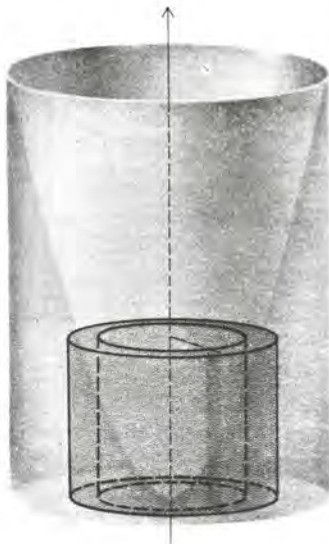
حل شکل ۱۱.۳.۱۱ ناحیه و یک جزء مستطیلی سطح را نشان می‌دهد. جسم دوار و یک جزء پوسته استوانه‌ای حجم را در شکل ۱۲.۳.۱۱ می‌بینید.

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \gamma_i^2 \pi \gamma_i \gamma_i^2 \Delta_i x & V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \pi \gamma_i^2 \gamma_i^2 \Delta_i x \\ &= \pi \int_0^3 x^5 dx & &= \frac{1}{2} \pi \int_0^3 x^5 dx \\ &= \frac{243}{2} \pi & &= \frac{81}{2} \pi. \end{aligned}$$

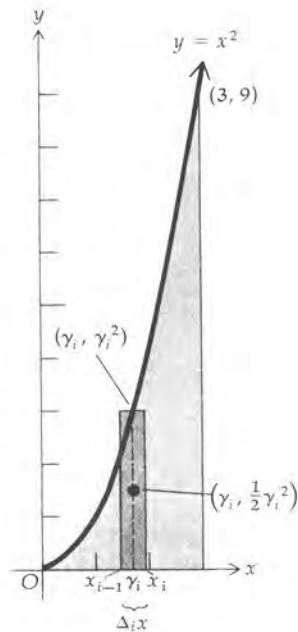
بنابراین

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{243\pi/2}{81\pi/2} = 3.$$

پس مرکز وار جسم در نقطه $(0, 3, 0)$ است.



شکل ۱۲.۳.۱۱

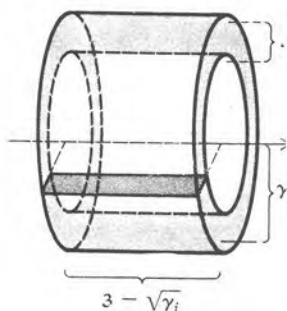


شکل ۱۱.۳.۱۱

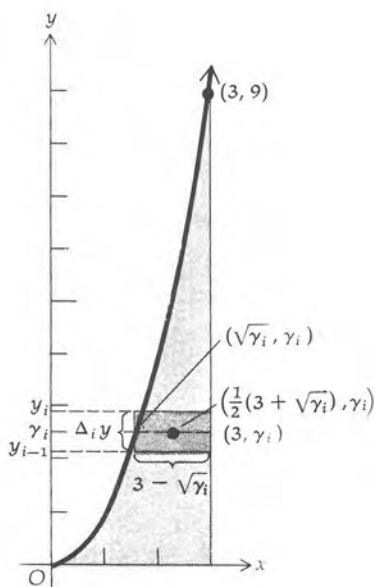
مثال ۴ مثال ۱ را با روش پوسته استوانه‌ای حل کنید.

حل شکل ۱۳.۳.۱۱ ناحیه و یک جزء مستطیلی سطح را، و شکل ۱۴.۳.۱۱ جزء پوسته استوانه‌ای حجم حاصل از دوران مستطیل حول محور x ها را نشان می‌دهد. مرکز-وار پوسته استوانه‌ای در مرکز آن، یعنی در نقطه $((3 + \sqrt{\gamma_i})/2, 0, 0)$ است. مرکزوار جسم دوار در $(\bar{x}, 0, 0)$ است.

$$\begin{aligned}
 M_{yz} &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (3 + \sqrt{\gamma_i}) 2\pi \gamma_i (3 - \sqrt{\gamma_i}) \Delta_i x \\
 &= \pi \int_0^9 y (3 + \sqrt{y}) (3 - \sqrt{y}) dy \\
 &= \pi \int_0^9 (9y - y^2) dy \\
 &= \frac{243}{2} \pi.
 \end{aligned}$$



شکل ۱۴.۳.۱۱



شکل ۱۳.۳.۱۱

برای محاسبه V با روش پوسته استوانه‌ای داریم

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi \gamma_i (3 - \sqrt{\gamma_i}) \Delta y_i \\ &= 2\pi \int_0^9 y(3 - y^{1/2}) dy \\ &= \frac{243}{5} \pi. \end{aligned}$$

پس

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{5}{2}.$$

▲ و مرکز وار در $(5/2, 0, 0)$ است. این نتیجه با نتیجه مثال ۱ سازگار است.

تمرینهای ۳.۱۱

در تمرینهای ۱ تا ۲۰، مرکز وار جسم دوار حاصل از دوران ناحیه داده شده حول خط

مفروض را بیابید.

۱. ناحیه محصور بین $y = 4x - x^2$ و محور x ها، حول محور y ها. جزء مستطیلی را موازی با محور دوران بگیرید.

۲. نظیر تمرین ۱، اما جزء مستطیلی را عمود بر محور دوران بگیرید.

۳. ناحیه محصور بین $2y = x + 2$ ، محور x ها و محور y ها، حول محور x ها. جزء مستطیلی را عمود بر محور دوران بگیرید.

۴. نظیر تمرین ۳، اما جزء مستطیلی را موازی با محور دوران بگیرید.

۵. ناحیه محصور بین $x^3 = y^2$ و $x = 4$ ، حول محور x ها. جزء مستطیلی را موازی با محور دوران بگیرید.

۶. نظیر تمرین ۵، اما جزء مستطیلی را عمود بر محور دوران بگیرید.

۷. ناحیه محصور بین $y = x^3$ ، $y = 2$ ، $x = 2$ و محور x ها، حول خط $x = 2$. جزء مستطیلی را عمود بر محور دوران بگیرید.

۸. نظیر تمرین ۷، اما جزء مستطیلی را موازی با محور دوران بگیرید.

۹. ناحیه محصور بین $x^4 y = 1$ ، $y = 1$ و $y = 4$ ، حول محور y ها.

۱۰. ناحیه مذکور در تمرین ۹، حول محور x ها.

۱۱. ناحیه محصور بین خطوط $y = x$ ، $y = 2x$ و $x + y = 6$ ، حول محور y ها.

۱۲. ناحیه محصور بین بخشی از دایره $x^2 + y^2 = 4$ که در ربع اول است، بخشی از خط $2x - y = 4$ که در ربع چهارم است، و محور y ها، حول محور y ها.

۱۳. ناحیه محصور بین $y = x^2$ و $y = x + 2$ ، حول خط $y = 4$.

۱۴. ناحیه محصور بین $y^2 = 4x$ و $y^2 = 16 - 4x$ ، حول محور x ها.

۱۵. ناحیه محصور بین $y = \sqrt{4px}$ ، محور x ها، و خط $x = p$ ، حول خط $x = p$.

۱۶. ناحیه مذکور در تمرین ۱۵، حول خط $y = 2p$.

۱۷. ناحیه محصور بین $y = \sin x$ ، محور x ها، و خط $x = \pi/2$ ، حول محور x ها.

۱۸. ناحیه محصور بین $yx^2 = \sqrt{x^2 - 9}$ ، محور x ها، و خط $x = 5$ ، حول محور y ها.

۱۹. ناحیه محصور بین $y = e^{-x}$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 1$ ، حول محور x ها.

۲۰. ناحیه مذکور در تمرین ۱۹، حول محور y ها.

۲۱. مرکز وار مخروط مستدیر قائمی بهدارتفاع h واحد وشعاع قاعده r واحد را بیابید.
۲۲. ناحیه واقع در ربع اول محصور بین خطی که از مبدأ می گذرد و ضریب زاویه اش مثبت است، محور x ها، و خط $x = c$ ($c > 0$) را حول محور x ها دوران می دهیم. نشان دهید که مرکز وار جسم دوار در نقطه $(\frac{3c}{4}, 0, 0)$ است.
۲۳. ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خط $x = b$ ($b > 0$) را حول محور x ها دوران می دهیم. گشتاور جرم نسبت به صفحه yz ، $\frac{32}{3}k\pi$ کیلو-گرم-متر، و چگالی حجمی جسم k کیلو گرم بر متر مکعب است. مقدار b را بیابید.
۲۴. فرض کنید یک حفره استوانه ای با شعاع r واحد در یک نیمکره چوبی با شعاع $2r$ واحد چنان ایجاد کرده باشیم که محور استوانه و محور نیمکره یکی باشند. مرکز-وار جسم باقیمانده را بیابید.
۲۵. مطلوب است مرکز جرم جسم دوار مذکور در تمرین ۳، با این شرط که اندازه چگالی حجمی آن در هر نقطه برابر با حاصلضرب مقداری ثابت چون k در اندازه فاصله آن نقطه تا صفحه yz باشد.
۲۶. مطلوب است مرکز جرم جسم دوار مذکور در تمرین ۵، با این شرط که اندازه چگالی حجمی آن در هر نقطه برابر با حاصلضرب مقدار ثابتی چون k در اندازه فاصله نقطه تا صفحه yz باشد.
۲۷. ناحیه محصور بین $y = x^{5/2}$ ، محور x ها، و خط $x = 1$ را حول محور x ها دوران داده ایم. مطلوب است مرکز جرم جسم دوار، با این شرط که اندازه چگالی حجمی جسم در هر نقطه برابر با حاصلضرب مقدار ثابت k در مجذور اندازه فاصله نقطه تا صفحه yz باشد.

۴.۱۱ فشار مایعات

کاربرد دیگر انتگرال معین در فیزیک، عبارت است از یافتن نیروی ناشی از فشار مایع بر ورقه ای که در مایع فرو رفته است، یا بر بدنه ظرفی که مایع در آن قرار دارد. نخست فرض کنید که ورق صافی را به طور افقی در ظرف حاوی مایعی قرار داده باشیم. وزن مایع نیرویی بر ورق وارد می کند. نیرویی که مایع بر هر واحد مربع سطح ورق وارد می کند به فشار مایع موسوم است.

فرض کنید چگالی وزنی مایع P پوند بر فوت مکعب، و عمق نقطه ای که زیر سطح مایع است h فوت باشد. اگر فشار ناشی از مایع در این نقطه P پوند بر فوت مربع باشد، آنگاه

$$P = \rho h. \quad (1)$$

اگر مساحت ورق صافی که به طور افقی در مایع فروبرده شده است A فوت مربع، و نیروی ناشی از فشار مایع بروجه بالایی ورق F پوند باشد، آنگاه

$$F = PA. \quad (2)$$

از (۱) در (۲) جایگزین می کنیم و به دست می آوریم

$$F = \rho h A. \quad (3)$$

از (۱) نتیجه می گیریم که فشار مایع به اندازه ظرف بستگی ندارد. مثلاً، فشار در عمق ۵ فوتی استخر شنائی که با آب نمک پر شده است، همان قدر است که در عمق ۵ فوتی اقیانوس آرام؛ با این شرط که چگالی آب در هر دو یکسان باشد.

○ نمونه ۱ يك ورق حلبی مستطیلی ۸ فوت در ۱۲ فوت را در عمق ۱۰ فوتی مخزن آبی فرو می بریم. اگر فشار وارد بر نقطه ای از وجه بالایی ورق حلبی P پوند بر فوت مربع باشد،

$$P = 10\rho. \quad (4)$$

مساحت این ورق حلبی ۹۶ فوت مربع است. اگر نیروی ناشی از فشار مایع بروجه بالایی ورق حلبی F پوند باشد، داریم

$$F = 96P. \quad (5)$$

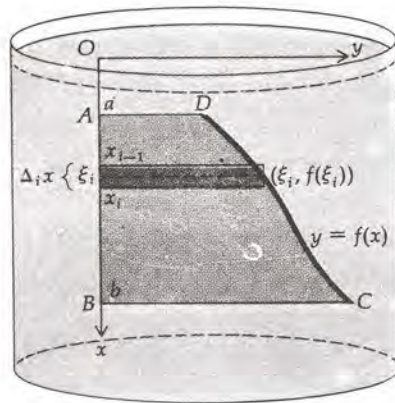
از (۴) در (۵) قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$F = 960\rho.$$

فرض می کنیم $\rho = 62.5$. لذا $F = 60000$. بنابراین، نیروی ناشی از فشار آب بروجه بالایی ورق حلبی ۶۰۰۰۰ پوند است. ○

حال فرض کنید که ورق را به طور قائم در مایع فروبرده باشیم. در این حالت، فشار روی ورق در عمقهای مختلف، که با فرمول (۱) محاسبه می شود، متفاوت خواهد بود و فشار در پایین ورق بیشتر از فشار در بالای آن است. حال به تعریف نیروی ناشی از فشار مایع، وقتی که ورق به طور قائم در مایع فرو رفته باشد، می پردازیم. اصل پاسکال را به کار می بریم: در هر نقطه از مایع فشار در تمام جهات یکسان است.

در شکل ۱۰۴-۱۱ فرض کنید $ABCD$ ناحیه محصور بین محور x ها، خطوط $x=a$ و $x=b$ ، و منحنی $y=f(x)$ باشد که بر بازه $[a, b]$ ، تابع f پیوسته است و $f(x) \geq 0$. محورهای مختصات را طوری انتخاب می کنیم که محور y ها در سطح مایع قرار گیرد، و محور x ها قائم و جهت مثبت آن رو به پایین باشد. طول ورق در عمق x فوتی با $f(x)$ فوت معین می شود.



شکل ۱۰۴.۱۱

فرض کنید Δ افزای از بازه بسته $[a, b]$ باشد که بازه را به n زیر بازه تقسیم می کند. نقطه ای چون ξ_i در زیر بازه i م، با شرط $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، انتخاب می کنیم. سپس n مستطیل افقی رسم می کنیم. طول مستطیل i م، $f(\xi_i)$ فوت و پهنای آن $\Delta_i x$ فوت است (شکل ۱۰۴.۱۱ را ببینید).

اگر هر جزء مستطیلی را به اندازه یک زاویه 90° دوران دهیم، هر جزء به صورت ورقه در خواهد آمد که تا ξ_i فوتی زیر سطح مایع فرو برده شده، و عمود بر ناحیه $ABCD$ است. در این صورت نیروی وارد بر جزء مستطیلی i م از $\rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x$ بر حسب پوند به دست می آید. تقریبی از نیروی کل وارد شده بر ورق قائم، بر حسب پوند، برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x \quad (۶)$$

که یک مجموع ریمانی است.

هر چه $\|\Delta\|$ کوچکتر گرفته شود، n بزرگتر خواهد بود، و تقریب مذکور در (۶) به چیزی که مایلیم اندازه نیروی کل باشد، نزدیکتر است. لذا تعریف زیر به دست می آید.

۱۰۴.۱۱ تعریف فرض کنید ورق صافی را به طور قائم در مایعی که وزن هر واحد مکعب آن ρ پوند است فرو برده باشیم. طول ورق در عمق x واحدی زیر سطح مایع $f(x)$ واحد است که بازه بسته $[a, b]$ ، f پیوسته است و نیزه $f(x) \geq 0$. در این صورت، نیروی ناشی از فشار مایع بر ورق بر حسب پوند که با F نمایش داده می شود از رابطه

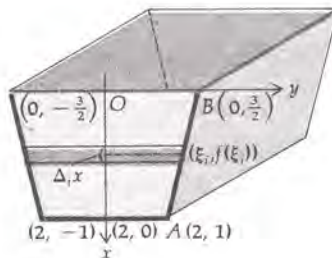
$$F = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b \rho x f(x) dx \quad (۷)$$

به دست می آید.

مثال ۱ ظرفی را که مقطع عرضی آن يك دوزنقه است از آب پر کرده ایم. اگر طول قاعده بالایی این دوزنقه ۳ فوت، طول قاعده پایینی آن ۲ فوت، و عمق آن ۲ فوت باشد، نیروی کل ناشی از فشار آب بر یکی از دو انتهای ظرف را به دست آورید.

حل شکل ۲.۴.۱۱ یکی از دو انتهای ظرف همراه با يك جزء مستطیلی سطح آن را نشان می دهد. معادله ای از خط AB به صورت $y = (3/2) - (x/4)$ است. فرض کنید $f(x) = (3/2) - (x/4)$. اگر جزء مستطیلی را به اندازه 90° دوران دهیم، نیروی وارد بر این جزء برابر است با $2\rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x$ چونند. اگر نیروی کل وارد بر سطح مذکور F شوند باشد،

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= 2\rho \int_0^2 x f(x) dx \\ &= 2\rho \int_0^2 x \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x \right) dx \\ &= 2\rho \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{14}{3} \rho. \end{aligned}$$



شکل ۲.۴.۱۱

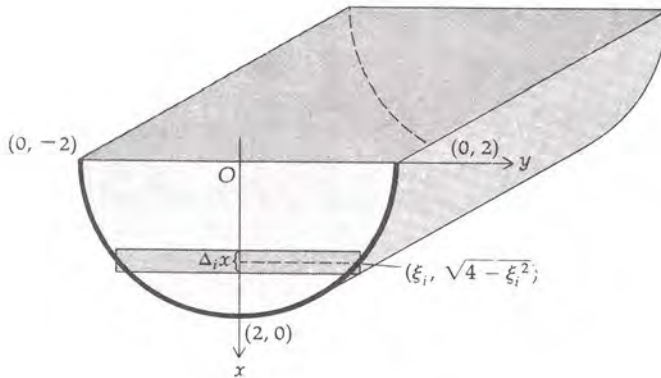
▲ اگر $\rho = 62.5$ ، می بینیم که نیروی کل ۲۹۱.۲۲ پوند است.

مثال ۲ دو انتهای ظرفی دو سطح نیمه مستدیرند که شعاع هریک از آنها ۲ فوت است. اگر ظرف پر از آب باشد، نیروی ناشی از فشار مایع بر یکی از این دو انتهای ظرف چقدر است؟

حل شکل ۳.۴.۱۱ يك انتهای ظرف همراه با يك جزء مستطیلی سطح را نشان می‌دهد. معادله این نیم‌دایره، $x^2 + y^2 = 4$ است. اگر y را محاسبه کنیم، داریم $y = \sqrt{4 - x^2}$. نیروی وارد بر جزء مستطیلی برابر است با $2\rho \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2} \Delta_i x$ ؛ لذا اگر نیروی کل وارد بر يك انتهای ظرف F پوند باشد، داریم

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\rho \xi_i \sqrt{4 - \xi_i^2} \Delta_i x \\ &= 2\rho \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx \\ &= -\frac{2}{3} \rho (4 - x^2)^{3/2} \Big|_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \rho. \end{aligned}$$

بنابراین نیروی کل، $16\rho/3$ پوند است.



شکل ۳.۴.۱۱

رابطه مفیدی بین نیروی ناشی از فشار مایع بر يك ناحیه مسطح و محل مرکزوار ناحیه وجود دارد. به شکل ۱.۴.۱۱ رجوع کنید که در آن ناحیه محصور بین محور x ها، خطوط $x=a$ و $x=b$ ، و منحنی $y=f(x)$ است که f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است و $f(x) \geq 0$. ناحیه $ABCD$ را به عنوان يك ورق قائم در نظر می‌گیریم که درمایعی با چگالی وزنی ρ پوند برواحد مکعب فروبرده باشیم. اگر نیروی ناشی از فشار مایع بر ورق قائم F پوند باشد، بنا بر (y) ،

$$F = \rho \int_a^b x f(x) dx. \quad (8)$$

اگر $\bar{x}$ طول مرکزوار ناحیه $ABCD$ باشد، آنگاه $\bar{x} = M_y / A$. چون

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx, \text{ داریم}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{A}.$$

لذا

$$\int_a^b x f(x) dx = \bar{x} A. \quad (۹)$$

از (۹) در (۸) قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$F = \rho \bar{x} A. \quad (۱۰)$$

از (۱۰) نتیجه می شود که نیروی کل ناشی از فشار مایع وارد بر يك ناحیه مسطح قائم همان قدر است که اگر ناحیه را به طور افقی در عمق $\bar{x}$ واحدی زیر سطح مایع قرار می دادیم، بر آن وارد می شد.

○ نمونه ۲ ظرف پر از آبی را در نظر بگیرید که هر يك از دو انتهای آن ناحیه نیمه مستدیری به شعاع ۲ فوت است. با استفاده از نتیجه مثال ۵ در بخش ۲۰۱، می بینیم که مرکزوار ناحیه در عمق $(۳\pi)/۸$ فوتی است. بنا بر این، اگر نیروی وارد بر یکی از دو انتهای ظرف F پوند باشد، با استفاده از (۱۰) می بینیم که

$$F = \rho \cdot \frac{۸}{۳\pi} \cdot ۲\pi = \frac{۱۶}{۳} \pi.$$

○ این نتیجه با نتیجه مثال ۲ سازگار است.

مرکزوار بسیاری از نواحی مسطح ساده را می توان از جدول به دست آورد. وقتی که هم مساحت ناحیه و هم مرکزوار آن را بتوان مستقیماً به دست آورد، به کار بردن (۱۰) آسان است؛ و در این موارد مهندسان برای یافتن نیروی ناشی از فشار مایع از این فرمول استفاده می کنند.

اگر جرم بر حسب کیلوگرم محاسبه شود، فشار بر حسب نیوتن بر متر مربع و نیرو بر حسب نیوتن اندازه گرفته می شود. اگر فشار P نیوتن بر متر مربع، عمق نقطه ای زیر سطح مایع h متر و چگالی مایع ρ کیلوگرم بر متر مکعب باشد، آنگاه به جای معادله (۱) داریم

$$P = \rho h (۹.۸۱) \quad (۱۱)$$

که در آن ۹۸۱ متر بر مجذور ثانیه همان شتاب ناشی از ثقل است. اگر مساحت ورق صافی که به طور افقی درون مایعی برده شده است A متر مربع، و نیروی ناشی از فشار مایع کسره بر وجه بالایی ورق وارد می شود F نیوتن باشد، آنگاه بنا به (۲) داریم

$$F = PA. \quad (۱۲)$$

از (۱۱) در (۱۲) قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$F = ۹۸۱ \rho h A. \quad (۱۳)$$

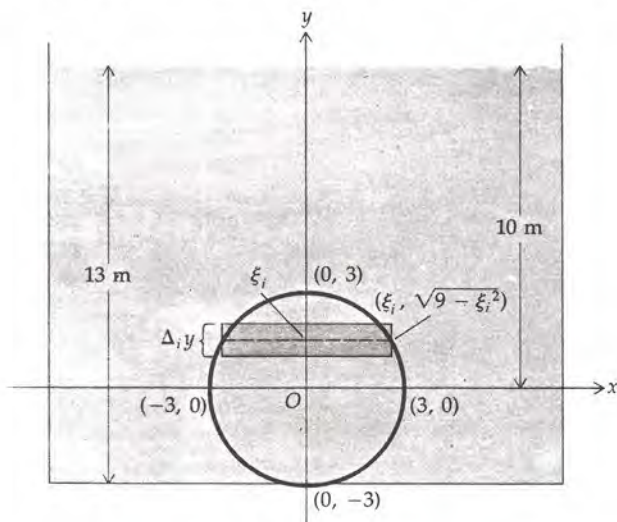
بنابراین در سیستم mks، معادله (۷) در تعریف ۴۰۱۱ به صورت زیر در می آید که در آن، طول ورق در x متری زیر سطح مایع $f(x)$ متر است

$$F = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n ۹۸۱ \rho \xi_i f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b ۹۸۱ \rho x f(x) dx.$$

چگالی آب تقریباً ۱۰۰۰ کیلو گرم بر متر مکعب است. بنابراین اگر عامل فشار، آب باشد، می نویسیم $\rho = ۱۰۰۰$.

مثال ۳ شعاع قاعده مخزنی به شکل يك استوانه مستدیر قائم، ۳ متر است. این مخزن که پر از آب است بر سطح جانبی خود قرار دارد. عمق مخزن ۱۳ متر است. نیروی کل ناشی از فشار آب بر يك انتهای مخزن چقدر است؟

حل شکل ۴۰۴۱۱ يك انتهای ظرف، و يك جزء مستطیلی سطح را نشان می دهد.



شکل ۴۰۴۱۱

دستگاه مختصات چنان انتخاب شده است که مبدأ در مرکز دایره قرار دارد. معادله‌ای از این دایره، $x^2 + y^2 = 9$ است. x را محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم $x = \sqrt{9 - y^2}$. نیروی وارد بر جزء مستطیلی از ضابطه زیر به دست می‌آید

$$9.81 \rho (10 - \xi_i) [2\sqrt{9 - \xi_i^2}] \Delta_i y.$$

بنابراین، اگر نیروی کل وارد بر این انتهای ظرف F نیوتن باشد،

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 9.81 \rho (10 - \xi_i) [2\sqrt{9 - \xi_i^2}] \Delta_i y \\ &= 19.62 \rho \int_{-3}^3 (10 - y) \sqrt{9 - y^2} dy. \end{aligned}$$

چون $\rho = 1000$ ، داریم

$$F = 196200 \int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy - 19620 \int_{-3}^3 y \sqrt{9 - y^2} dy. \quad (14)$$

برای محاسبه $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy$ از جانشینی مثلثاتی $y = 3 \sin \theta$ استفاده می‌کنیم، یا

$\int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy$ را به عنوان اندازه مساحت ناحیه داخل يك نیمدایره به شعاع ۳ تلقی

می‌کنیم. در هر حال، $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - y^2} dy = (\pi/2)(3)^2 = 9\pi/2$. این مقدار را در (۱۴)

قرار می‌دهیم، و انتگرال دوم را هم محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F &= 196200 \left(\frac{9}{2} \pi \right) + 19620 \left[\frac{1}{3} (9 - y^2)^{3/2} \right]_{-3}^3 \\ &= 882900\pi \end{aligned}$$

▲

پس نیروی کل 882900π نیوتن است.

تمرینهای ۴.۱۱

۱. يك ورق مستطیلی شکل را به طور قائم آن قدر در يك مخزن آب فرو می‌بریم که لبه بالایی آن بر سطح آب قرار گیرد. اگر عرض ورق ۱۰ فوت و ارتفاع آن ۸ فوت باشد، نیروی ناشی از فشار مایع بر يك طرف ورق را بیابید.

۲. يك ورق مربعی شکل به طول ضلع ۴ فوت را به طور قائم آن قدر در يك ظرف آب فرو می‌بریم که مركزش در ۲ فوتی زیر سطح آب قرار گیرد. نیروی ناشی از فشار مایع به يك طرف ورق را بیابید.

۳. تمرین ۲ را در حالتی که مرکز ورق ۴ فوت به زیر سطح آب برود حل کنید.
۴. ورقی به شکل مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را به طور قائم در یک ظرف آب چنان فرو می بریم که یکی از ساقهایش بر سطح آب قرار گیرد. طول هر ساق ۴ فوت است. نیروی ناشی از فشار مایع بر یک طرف ورق را بیابید.
۵. مخزنی به شکل مکعب مستطیل، پراز آب است. طول هر ضلع قاعده مخزن ۲ فوت و عمق آن ۱۸ اینچ است. نیروی ناشی از فشار مایع بر یکی از سطوح جانبی آن را بیابید.
۶. هر یک از دو انتهای ظرفی به شکل مثلث متساوی الاضلاعی است که طول هر ضلعش ۲ فوت است. اگر عمق آب ظرف ۱ فوت باشد، نیروی ناشی از فشار مایع بر یک انتهای ظرف را بیابید.
۷. در ریچه سدی به شکل مثلث متساوی الساقینی است که طول قاعده آن که در بالاست ۴ متر و ارتفاع آن ۳ متر است. اگر ضلع بالایی در ریچه در ۱۵ متری زیر سطح آب باشد، نیروی کل ناشی از فشار آب بر در ریچه چقدر است؟
۸. در ریچه سدی که به طور قائم قرار دارد به شکل دوزنقه متساوی الساقینی است که طول ضلع بالایی آن ۳ متر، طول ضلع پایینی آن ۴ متر، و ارتفاع آن ۳ متر است. اگر قاعده بالایی در ۲۰ متری زیر سطح آب باشد، نیروی کل ناشی از فشار آب بر در ریچه را بیابید.
۹. آن طرف یک سد که با آب مجاور است، قائم و به شکل مثلث متساوی الساقینی است که طول قاعده آن که در بالا قرار دارد ۲۵۰ متر و ارتفاع وارد بر آن ۱۰۰ متر است. اگر عمق آب در وسط ۱۰ متر باشد، مطلوب است نیروی کل ناشی از فشار آب بر سد.
۱۰. یک مخزن نفت به شکل استوانه مستدیر قائمی است که ۴ متر قطر دارد، و محورش افقی است. اگر نیمی از مخزن حاوی نفت با چگالی ۷۵۰ کیلوگرم بر متر مکعب باشد، نیروی کل ناشی از فشار مایع بر یک انتهای مخزن را بیابید.
۱۱. تخته ای به شکل ناحیه محصور بین یک خط مستقیم و یک طاق از منحنی سینوسی است. اگر تخته را به طور قائم چنان در آب فرو ببریم که خط مستقیم مزبور در پایین و در ۲ فوتی زیر سطح آب قرار گیرد، نیروی ناشی از فشار آب بر تخته چقدر است؟
۱۲. بدنه سدی به شکل یک طاق از منحنی $y = 100 \cos(\pi x / 200)$ است، و سطح آب در بالای سد است. اگر فواصل بر حسب فوت اندازه گیری شوند، نیروی ناشی از فشار آب بر بدنه سد چقدر است؟

۱۳. قطر داخلی يك لوله استوانه‌ای افقی ۴ فوت است. يك طرف لوله را با دریچه مستدیری که کاملاً آن را می پوشاند بسته ایم. اگر ارتفاع آب لوله ۳ فوت باشد، نیروی ناشی از فشار آب بردرچه چقدر است؟

۱۴. يك بنزین اتومبیلی به شکل استوانه مستدیر قائمی است که محور آن افقی و شعاع قاعده آن ۸ اینچ است. اگر ارتفاع بنزین موجود در يك ۱۲ اینچ و چگالی وزنی بنزین ρ اونس بر اینچ مکعب باشد، نیروی کل وارد بر يك انتهای يك را بیابید.

۱۵. يك مخزن نفت به شکل استوانه مستدیر قائمی است که محور آن افقی و شعاع آن r متر است. اگر نصف مخزن پر از نفت با چگالی ۷۵۰ کیلوگرم بر متر مکعب، و نیروی کل ناشی از فشار مایع بر يك انتهای مخزن ۸۰۰۰۰ نیوتن باشد، r را بیابید.

۱۶. دریچه يك کانال آبیاری به شکل قطعه‌ای از يك دایره به شعاع ۴ فوت است. بالای دریچه افقی است و ۳ فوت بالاتر از پایینترین نقطه آن است. اگر سطح آب ۲ فوت بالاتر از بالای دریچه باشد، نیروی ناشی از فشار آب بردرچه چقدر است؟

۱۷. زاویه میل آن وجه يك سد که با آب مجاور است با سطح قائم برابر با 30° است. شکل وجه سد مستطیلی به عرض ۵۰ فوت و به ارتفاع مایل ۳۰ فوت است. اگر تا بالای سد پر از آب باشد، نیروی کل ناشی از فشار آب بروجه سد چقدر است؟

۱۸. تمرین ۱۷ را با این شرط حل کنید که وجه سد دوزنقه متساوی الساقینی باشد که طول قاعده بالایی آن ۱۲۰ فوت، طول قاعده پایینی آن ۸۰ فوت، و ارتفاع مایل آن ۴۰ فوت است.

۱۹. كف استخری يك سطح شیب دار است. عمق يك طرف استخر ۲ فوت و عمق طرف دیگر آن ۸ فوت است. اگر عرض استخر ۲۵ فوت و طول آن ۴۰ فوت باشد، نیروی کل حاصل از فشار آب بر كف استخر چقدر است؟

۲۰. اگر ته يك مخزن آب به شکل يك مستطیل، و مخزن از آب پر باشد، نشان دهید که اندازه نیروی ناشی از فشار آب بر ته مخزن برابر است با حاصل ضرب اندازه مساحت ته مخزن در اندازه نیروی وارد بر مرکز هندسی آن.

۲۱. تمرین ۵ را با استفاده از معادله (۱۰) حل کنید.

۲۲. تمرین ۴ را با استفاده از معادله (۱۰) حل کنید.

۲۳. تمرین ۶ را با استفاده از معادله (۱۰) حل کنید.

۲۴. آن طرف از يك سد که با آب مجاور است قائم و به شکل دوزنقه متساوی الساقینی است که طول قاعده بالایی آن ۹۰ فوت و طول قاعده پایینی آن ۶۰ فوت، و ارتفاع آن ۲۰ فوت است. با استفاده از معادله (۱۰) نیروی کل ناشی از فشار آب بر سد را بیابید.

۲۵. مطلوب است گشتاور نیروی مذکور در تمرین ۲۴، حول قاعده پایینی ذوزنقه.

تمرینهای مروری فصل ۱۱

۱. سه ذره با جرمهای ۳، ۲، و ۷ کیلوگرم به ترتیب با مختص ۵-، ۴، و ۲ بر محور x ها قرار دارند. اندازه‌های فواصل بر حسب مترند. مرکز جرم دستگاه را بیابید.
۲. سه ذره با جرمهای ۵، ۲، و ۸ اسلاگ به ترتیب در نقاط $(-۱, ۳)$ ، $(۱, -۲)$ ، و $(۵, ۲)$ قرار دارند؛ اگر فواصل بر حسب متر باشند، مرکز جرم را بیابید.
۳. مختصات مرکز جرم چهار ذره با جرمهای مساوی واقع در نقاط $(۳, ۰)$ ، $(۲, ۲)$ ، $(۲, ۴)$ ، و $(-۱, ۲)$ را بیابید.
۴. سه ذره با جرمهای مساوی به ترتیب با مختص ۴-، ۱، و ۵ بر محور x ها قرار دارند؛ فاصله‌ها بر حسب مترند. مختصات مرکز جرم دستگاه را بیابید.
۵. طول میله‌ای ۸ اینچ و چگالی خطی در نقطه‌ای از میله که x اینچ از انتهای چپ آن فاصله دارد $2\sqrt{x+1}$ اسلاگ بر اینچ است. جرم کل میله و مرکز جرم آن را بیابید.
۶. طول میله‌ای ۴ متر و چگالی خطی آن در نقطه‌ای که x متر از انتهای چپ میله فاصله دارد $(3x+1)$ کیلوگرم بر متر است. جرم کل میله و مرکز جرم آن را بیابید.
۷. چگالی خطی میله‌ای که ۳ متر طول دارد در نقطه‌ای که x متر از یک سر آن فاصله دارد ke^{-3x} کیلوگرم بر متر است. جرم و مرکز میله را بیابید.
۸. طول میله‌ای ۴ متر و چگالی خطی آن در نقطه‌ای به فاصله x متر از انتهای چپ، $\sqrt{9+x^2}$ کیلوگرم بر متر است. مرکز جرم میله را به دست آورید.
۹. مرکزوار ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین محوره‌های مختصات و سهمی $y = 9 - x^2$ را بیابید.
۱۰. مرکزوار ناحیه محصور بین سهمی $y^2 = x$ و خط $y = x - 2$ را بیابید.
۱۱. مرکزوار ناحیه محصور بین منحنی $y = x \ln x$ ، محور x ها، و خط $x = e$ را بیابید.
۱۲. مرکزوار ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین محوره‌های مختصات و منحنی $y = \cos x$ را بیابید.
۱۳. مطلوب است مرکزوار ناحیه محصور بین محور y ها و منحنیهای $y = \sin x - \cos x$ و $y = \sin x + \cos x$ از $x = 0$ تا $x = \pi/2$.
۱۴. مطلوب است مرکزوار ناحیه محدود به طوق منحنی $y^2 = x^2 - x^3$.

۱۵. مطلوب است مرکزوار ناحیه محدود به يك طوق منحنی $x^2 = y^4(1 - y^2)$.
۱۶. با يك مثال نشان دهید که مرکزوار يك ناحیه مسطح الزاماً يك نقطه داخلی ناحیه نیست.
۱۷. مطلوب است مرکزوار ناحیه‌ای که از بالا به سهمی $y = 9 - 3x^2$ و از پایین به محور x ها محدود شده است.
۱۸. مطلوب است مرکز جرم ناحیه مذکور در تمرین ۱۷، با این شرط که چگالی سطحی در يك نقطه دلخواه (x, y) ، $\sqrt{4 - y}$ باشد.
۱۹. با استفاده از قضیه پاپوس حجم کره‌ای به شعاع قاعده ۴ متر را بیابید.
۲۰. با استفاده از قضیه پاپوس حجم يك مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعده ۲ متر و ارتفاع ۳ متر را بیابید.
۲۱. مطلوب است مرکزوار جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = e^x$ ، محوره‌ای مختصات و خط $x = 1$ حول محور y ها.
۲۲. ناحیه محصور بین سهمی $x^2 = 4y$ ، محور x ها و خط $x = 4$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. مرکزوار جسم دوار حاصل را بیابید.
۲۳. مرکز جرم جسم دوار مذکور در تمرین ۲۲ را وقتی که چگالی حجمی جسم در هر نقطه برابر با اندازه فاصله آن نقطه تا صفحه xz باشد، بیابید.
۲۴. ناحیه محصور بین منحنی $x = \sqrt{y}$ ، محور y ها، و خط $y = 4$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. مرکزوار جسم دوار حاصل را بیابید.
۲۵. مطلوب است مرکزوار جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = \cos x$ و محوره‌ای مختصات در ربع اول، حول محور x ها.
۲۶. اگر ناحیه مذکور در تمرین ۲۵ را حول محور y ها دوران دهیم، مرکزوار جسم دوار حاصل را بیابید.
۲۷. ورق به شکل ناحیه محصور بین سهمی $x^2 = 6y$ و خط $y = 3$ را در يك ظرف آب چنان قرار می‌دهیم که رأس آن روبه پایین و خط مزبور در سطح آب باشد. فاصله بر حسب فوت اندازه گرفته می‌شود. نیروی ناشی از فشار آب بريك طرف ورق را بیابید.
۲۸. ورق نیمه مستدیری را که شعاع آن ۳ فوت است به طور قائم در يك ظرف آب طوری فرو می‌بریم که قطر آن بر سطح آب قرار گیرد. با استفاده از معادله (۱۰) در بخش ۴.۱۱، نیروی ناشی از فشار آب بريك طرف ورق را بیابید.

۲۹. نصف يك مخزن استوانه‌ای شکل را با بنزینی به‌چگالی وزنی ۴۲ پوند بر فوت مکعب پر کرده‌ایم. اگر محور مخزن افقی و قطر آن ۶ فوت باشد، نیروی ناشی از فشار مایع بر يك انتهای مخزن را بیابید.

۳۰. وجهی از يك سد که مجاور آب است با سطح قائم زاویه 45° می‌سازد. این وجه مستطیلی است که طول آن ۸۰ و ارتفاع مایل آن ۴۰ فوت است. اگر پشت سد بر از آب باشد، نیروی کل ناشی از فشار آب بر این وجه چقدر است؟

۳۱. انتهای قائم يك ظرف آب به‌شکل ناحیه محصور بین محور y ها و يك طاق از منحنی $y = 2 \sin(\pi x/3)$ است. قطردانه این وجه ۳ فوت و عمق آن ۲ فوت است. اگر ظرف بر از آب باشد، نیروی ناشی از فشار آب بر این انتها چقدر است؟

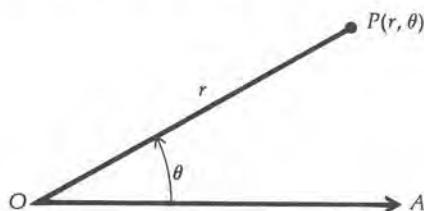
مختصات قطبی

۱.۱۲ دستگاه مختصات قطبی

تا اینجا محل نقطه در صفحه را با مختصات دکارتی قائم آن مشخص کرده ایم. دستگاههای مختصات دیگری هم وجود دارند که می توانند مورد استفاده قرار گیرند. احتمالاً مهمترین دستگاه بعد از دستگاه مختصات دکارتی، دستگاه مختصات قطبی است. در دستگاه مختصات دکارتی، مختصات عددند؛ این اعداد که به طول و عرض موسوم اند فاصله های جهت دار از دو خط ثابت هستند. در دستگاه مختصات قطبی، مختصات عبارت اند از يك فاصله جهت دار، اندازه يك زاویه نسبت به يك نقطه ثابت، و يك پرتو (یا نیمخط) ثابت.

نقطه ثابت را قطب (یا مبدأ) می نامند و آن را با حرف O مشخص می کنند. پرتو ثابت به محور قطبی (یا خط قطبی) موسوم است و با OA نمایش داده می شود. پرتو OA معمولاً به طور افقی و به سمت راست رسم می شود و می تواند به طور نامحدود امتداد یابد (شکل ۱.۱۰۱۲ را ببینید).

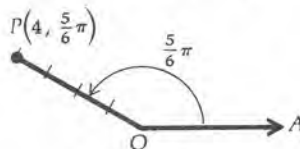
فرض کنید P نقطه دلخواهی از صفحه، بجز O ، باشد؛ و θ اندازه زاویه جهت دار



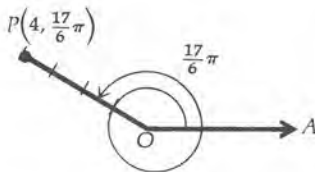
شکل ۱.۱۰۱۲

AOP برحسب رادیان باشد — که مثبت است اگر در خلاف جهت ساعت اندازه گیری شود و منفی است اگر در جهت ساعت اندازه گیری شود — ضلع اول این زاویه پرتو OA و ضلع دوم آن پرتو OP باشد. در این صورت اگر r فاصله غیرجهت دار O تا P (یعنی، $r = |OP|$) باشد، با r و θ يك مجموعه مختصات قطبی P معین می شود و این مختصات به صورت (r, θ) نوشته می شوند.

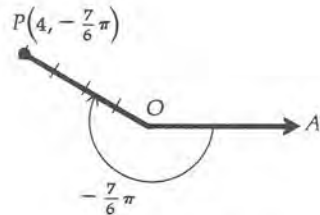
○ نمونه ۱ برای تعیین نقطه $P(4, 5\pi/6)$ ابتدا زاویه ای به اندازه $5\pi/6$ رادیان را چنان رسم می کنیم که رأس آن در قطب و ضلع اولش منطبق بر محور قطبی باشد. حال آن نقطه از ضلع دوم که فاصله اش تا قطب چهار واحد است نقطه P است (شکل ۲۰۱۰۱۲ را ببینید). يك مجموعه مختصات قطبی دیگر این نقطه، $(4, -7\pi/6)$ است؛ شکل ۳۰۱۰۱۲ را ببینید. علاوه بر این، مختصات قطبی $(4, 17\pi/6)$ نیز، همان طور که در شکل ۴۰۱۰۱۲ نشان داده شده است، همین نقطه را مشخص می کنند.



شکل ۲۰۱۰۱۲



شکل ۴۰۱۰۱۲



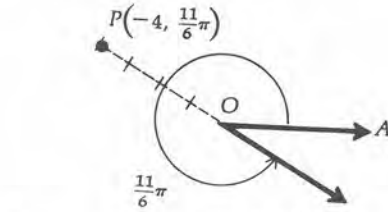
شکل ۳۰۱۰۱۲

درواقع، مختصات $(4, (5\pi/6) + 2n\pi)$ ؛ وقتی که n يك عدد صحیح دلخواه باشد، همه همان نقطه $P(4, 5\pi/6)$ را به دست می دهند. لذا هر نقطه مفروض، تعداد نامحدودی مجموعه مختصات قطبی دارد. این موضوع برخلاف دستگاه مختصات دکارتی قائم است، زیرا بین مختصات دکارتی قائم و محل نقاط در صفحه يك تناظر يك به يك وجود دارد؛ حال آنکه، هیچ تناظر يك به يکی بین مختصات قطبی و محل نقاط در صفحه وجود ندارد. مثال دیگر، با بررسی مجموعه های مختصات قطبی خود قطب به دست می آید. اگر $r = 0$ و θ عدد حقیقی دلخواهی باشد، قطب را داریم که با $(0, \theta)$ مشخص می شود.

حال به بررسی مختصات قطبی در حالتی می پردازیم که r منفی است. در این حالت، به جای اینکه نقطه واقع بر ضلع دوم زاویه باشد، بر امتداد ضلع دوم، یعنی بر آن پرتو که از قطب آغاز می شود و در راستای ضلع دوم، اما در خلاف جهت آن امتداد می یابد، قرار دارد. لذا اگر P بر امتداد ضلع دوم زاویه ای با اندازه θ رادیان باشد، يك مجموعه

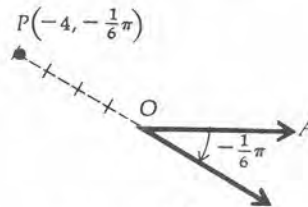
مختصات قطبی P ، (r, θ) است که در آن $r = -|OP|$.

○ نمونه ۲ نقطه $(-4, -\pi/6)$ که در شکل ۵.۱۰۱۲ نمایش داده شده، با نقاط $(4, 17\pi/6)$ و $(4, -7\pi/6)$ یکی است. بجز اینها، یک مجموعه مختصات قطبی دیگر این نقطه، $(-4, 11\pi/6)$ است؛ شکل ۶.۱۰۱۲ را ببینید.



○

شکل ۶.۱۰۱۲

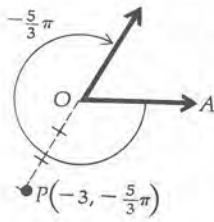


شکل ۵.۱۰۱۲

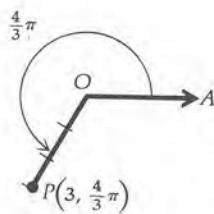
زاویه معمولاً برحسب رادیان اندازه گرفته می‌شود؛ لذا هر مجموعه مختصات قطبی یک نقطه، زوج مرتبی از اعداد حقیقی است. به ازای هر زوج مرتب از اعداد حقیقی یک نقطه یکتا وجود دارد که این زوج، یک مجموعه از مختصات قطبی آن است. با این وجود، دیدیم که هر نقطه خاصی را می‌توان با تعداد نامحدودی زوج مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد. اگر نقطه P قطب نباشد، و اگر r و θ را چنان محدود کنیم که $0 \leq \theta < 2\pi$ و $r > 0$ ، آنگاه یک مجموعه مختصات قطبی یکتا برای P وجود دارد.

مثال ۱ (الف) نقطه‌ای با مختصات قطبی $(3, -2\pi/3)$ رسم کنید. یک مجموعه مختصات قطبی دیگر برای این نقطه بیابید که در آن: (ب) $r < 0$ و $0 < \theta < 2\pi$ ؛ (پ) $0 < \theta < 2\pi$ و $r > 0$ ؛ (ت) $-2\pi < \theta < 0$ و $r < 0$.

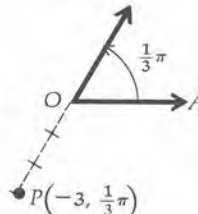
حل (الف) برای رسم این نقطه، از محور قطبی زاویه‌ای در جهت ساعت به اندازه $-2\pi/3$ رادیان رسم می‌کنیم. چون $r > 0$ ، P برضلع دوم زاویه، به فاصله سه واحد از قطب قرار دارد؛ شکل ۷.۱۰۱۲ (الف) را ببینید.



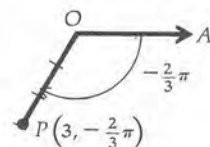
(ت)



(پ)



(ب)



(الف)

شکل ۷.۱۰۱۲

پاسخهای (ب)، (پ)، و (ت)، به ترتیب عبارت‌اند از $(-3, \pi/3)$ ، $(3, 4\pi/3)$ ، و $(-3, -5\pi/3)$. این نقاط در شکل ۷.۱۰۱۲ (ب)، (پ)، و (ت) نشان داده شده‌اند. ▲

غالباً می‌خواهیم هم از مختصات دکارتی قائلیم و هم از مختصات قطبی يك نقطه استفاده کنیم. برای انجام این کار، مبدأ دستگاه اول و قطب دستگاه دوم را منطبق بر هم، محور قطبی را به عنوان قسمت مثبت محور x ‌ها، و پرتوی را که در مورد آن $\theta = \pi/2$ ، به عنوان قسمت مثبت محور y ‌ها اختیار می‌کنیم.

فرض کنید P نقطه‌ای باشد که نمایش آن در دستگاه مختصات دکارتی قائلیم (x, y) و يك نمایش آن در دستگاه مختصات قطبی (r, θ) باشد. دو حالت را بررسی می‌کنیم: $r > 0$ و $r < 0$. در حالت اول که $r > 0$ ، نقطه P واقع بر ضلع دوم زاویه θ رادیان است، و $r = |\overline{OP}|$. چنین حالتی را در شکل ۸.۱۰۱۲ نمایش داده‌ایم. در این صورت
لذا $\sin \theta = y/|\overline{OP}| = y/r$ و $\cos \theta = x/|\overline{OP}| = x/r$
 $y = r \sin \theta$ و $x = r \cos \theta$ (۱)

در حالت دوم که $r < 0$ ، نقطه P بر امتداد ضلع دوم قرار دارد و $r = -|\overline{OP}|$ (شکل ۹.۱۰۱۲ را ببینید). در این صورت اگر نقطه Q نقطه $(-x, -y)$ باشد، داریم

$$\cos \theta = \frac{-x}{|\overline{OQ}|} = \frac{-x}{|\overline{OP}|} = \frac{-x}{-r} = \frac{x}{r}.$$

لذا

$$x = r \cos \theta \quad (۲)$$

همچنین

$$\sin \theta = \frac{-y}{|\overline{OQ}|} = \frac{-y}{|\overline{OP}|} = \frac{-y}{-r} = \frac{y}{r}.$$

بنابراین

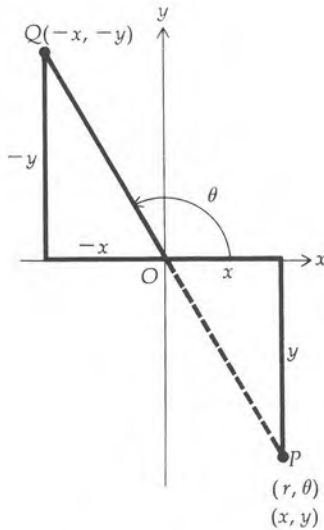
$$y = r \sin \theta. \quad (۳)$$

معادلات (۲) و (۳) مثل معادلات مذکور در (۱) هستند؛ پس معادلات (۱) در همه حالاتها برقرارند.

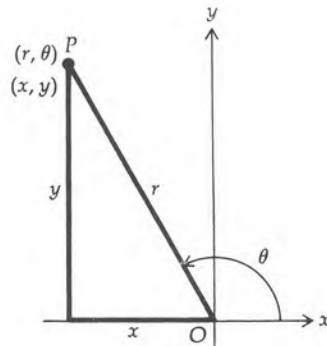
با استفاده از معادلات (۱) می‌توانیم مختصات دکارتی قائلیم نقطه‌ای را که مختصات قطبی آن معلوم‌اند به دست آوریم. همچنین، اگر معادله دکارتی قائلیم يك منحنی معلوم باشد، از این معادلات می‌توانیم يك معادله قطبی برای منحنی بیابیم.

اگر مختصات دکارتی قائلیم نقطه‌ای معلوم باشند، برای یافتن معادلاتی که يك مجموعه مختصات قطبی آن را به دست دهند، دو طرف هر يك از معادلات مذکور در (۱) را مجذور می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta \quad \text{و} \quad y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$



شکل ۹.۱۰.۱۲



شکل ۸.۱۰.۱۲

مجموع اعضای طرف چپ و مجموع اعضای طرف راست معادلات بالا را با هم مساوی قرار می‌دهیم

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

و لذا

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad (۴)$$

اگر معادلات مذکور در (۱) را برهم تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$$

یا معادلش

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (۵)$$

○ نمونه ۳ نقطه‌ای را که مختصات قطبیش $(-۶, ۷\pi/۴)$ هستند، در شکل ۱۰.۱۰.۱۲ رسم کرده‌ایم. مختصات دکارتی قائم آن را از (۱) محاسبه می‌کنیم.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$= -۶ \cos \frac{۷}{۴} \pi$$

$$= -۶ \sin \frac{۷}{۴} \pi$$

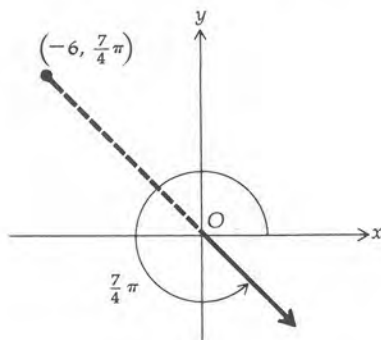
$$= -۶ \cdot \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= -۶ \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} \right)$$

$$= -۳\sqrt{۲}$$

$$= ۳\sqrt{۲}$$

پس نقطه، $(-۳\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲})$ است.



○

شکل ۱۰.۱۰.۱۲

نمودار معادله‌ای در مختصات قطبی r و θ ، متشکل است از تمام آن نقاط P ، فقط آن نقاط P ، که دست کم یک زوج از مختصاتشان در معادله صدق کند. اگر معادله نموداری در مختصات قطبی داده شده باشد، برای تمایز آن از معادله دکارتی، که اصطلاح رایج برای معادلاتی است که بر حسب مختصات دکارتی قائم هستند، آن را یک معادله قطبی می‌نامیم.

مثال ۲ معادله قطبی نموداری $r^2 = ۴ \sin ۲\theta$ است. معادله دکارتی آن را بیابید.

حل چون $r^2 = x^2 + y^2$ و $\sin ۲\theta = ۲ \sin \theta \cos \theta = ۲(y/r)(x/r)$ ، با جانشینیهایی که در معادله قطبی مفروض برقرار می‌کنیم، داریم

$$x^2 + y^2 = ۴(۲) \frac{y}{r} \cdot \frac{x}{r}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

▲ $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

مثال ۳ برای نقطه‌ای که نمایش مختصات دکارتی قائم آن $(-\sqrt{3}, -1)$ است، با این شرایط که $r > 0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ را بیابید.

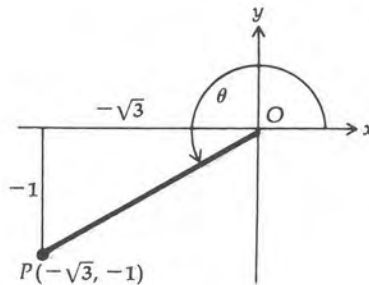
حل نقطه $(-\sqrt{3}, -1)$ در شکل ۱۱۰۱۲ رسم شده است. چون $r > 0$ ، از (۴) داریم

$$r = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

بنابر (۵)، $\tan \theta = -1/(-\sqrt{3})$ ، و چون $\pi < \theta < 3\pi/2$ ،

$$\theta = \frac{7}{6}\pi.$$

لذا، مختصات قطبی نقطه $(2, 7\pi/6)$ است.



شکل ۱۱۰۱۲

▲

مثال ۴ معادله دکارتی نموداری $x^2 + y^2 - 4x = 0$ است. معادله قطبی آن را بیابید.

حل $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ را در

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4r \cos \theta = 0$$

$$r^2 - 4r \cos \theta = 0$$

$$r(r - 4 \cos \theta) = 0$$

بنابراین

$$r = 0 \quad \text{یا} \quad r - 4 \cos \theta = 0$$

نمودار $r = 0$ قطب است. اما، قطب بر نمودار $r - 4 \cos \theta = 0$ هم واقع است زیرا وقتی که $\theta = \pi/2$ ، $r = 0$. بنابراین، معادله قطبی نمودار به صورت زیر است

$$r = 4 \cos \theta.$$

نمودار $x^2 + y^2 - 4x = 0$ یک دایره است. این معادله را می توان به صورت

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

هم نوشت که معادله دایره ای با مرکز $(2, 0)$ و شعاع ۲ است. ▲

تمرینهای ۱۰۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۶، یک مجموعه از مختصات قطبی نقطه ای داده شده است؛ آن نقطه را نمایش دهید. سپس مجموعه دیگری از مختصات قطبی همان نقطه را بیابید که در آن: (الف) $0 < \theta < 2\pi$ و $r < 0$ ؛ (ب) $0 < r < 2\pi$ و $-\pi < \theta < 0$ ؛ (پ) $r < 0$ و $-\pi < \theta < 0$.

$$۲. \left(3, \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$۱. \left(4, \frac{1}{4}\pi \right)$$

$$۴. \left(3, \frac{3}{4}\pi \right)$$

$$۳. \left(2, \frac{1}{4}\pi \right)$$

$$۶. \left(2, \frac{4}{3}\pi \right)$$

$$۵. \left(\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi \right)$$

۷. نقطه با مختصات قطبی $(2, -\pi/4)$ را نمایش دهید. یک مجموعه دیگر از مختصات قطبی این نقطه را بیابید که در آن: (الف) $0 < r < 2\pi$ و $0 \leq \theta < \pi$ ؛ (ب) $r < 0$ و $-\pi < \theta < 0$ ؛ (پ) $0 < r < 2\pi$ و $2\pi \leq \theta < 4\pi$.

۸. نقطه با مختصات قطبی $(-3, -2\pi/3)$ را نمایش دهید. یک مجموعه دیگر از مختصات قطبی این نقطه را بیابید که در آن: (الف) $0 < r < 2\pi$ و $0 \leq \theta < \pi$ ؛ (ب) $r > 0$ و $-\pi < \theta < 0$ ؛ (پ) $r < 0$ و $2\pi \leq \theta < 4\pi$.

در تمرینهای ۹ تا ۱۶، يك مجموعه از مختصات قطبی نقطه‌ای داده شده است؛ آن نقطه را نمایش دهید. سپس دو مجموعه دیگر از مختصات قطبی همان نقطه را بیابید که یکی همان مقدار r را داشته باشد و دیگری مقدار قرینه r را.

$$۹. \left(۳, -\frac{۲}{۳}\pi \right) \quad ۱۰. \left(\sqrt{۲}, -\frac{۱}{۴}\pi \right)$$

$$۱۱. \left(-۲, \frac{۵}{۶}\pi \right) \quad ۱۲. \left(-۲, \frac{۴}{۳}\pi \right)$$

$$۱۳. \left(-۲, -\frac{۵}{۴}\pi \right) \quad ۱۴. (-۳, -\pi)$$

$$۱۵. (۲, ۶) \quad ۱۶. \left(۵, \frac{۱}{۶}\pi \right)$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۱۸، مختصات دکارتی قائم نقطه‌ای را که مختصات قطبی آن داده شده‌اند، بیابید.

$$۱۷. (الف) (۳, \pi)؛ (ب) \left(\sqrt{۲}, -\frac{۳}{۴}\pi \right)؛ (پ) \left(-۲, \frac{۲}{۳}\pi \right)؛ (ت) \left(-۱, -\frac{۷}{۶}\pi \right)$$

$$۱۸. (الف) \left(-۲, -\frac{۱}{۴}\pi \right)؛ (ب) \left(-۱, \frac{۱}{۴}\pi \right)؛ (پ) \left(۲, -\frac{۷}{۶}\pi \right)؛$$

$$(ت) \left(۲, \frac{۷}{۴}\pi \right)$$

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، يك مجموعه مختصات قطبی با شرایط $0 \leq \theta < 2\pi$ و $r > 0$ برای نقطه‌ای که مختصات دکارتی قائم آن داده شده‌اند، بیابید.

$$۱۹. (الف) (۱, -۱)؛ (ب) $(-\sqrt{۳}, ۱)$ ؛ (پ) $(۲, ۲)$ ؛ (ت) $(-۵, ۰)$.$$

$$۲۰. (الف) (۳, -۳)؛ (ب) $(-۱, \sqrt{۳})$ ؛ (پ) $(۰, -۲)$ ؛ (ت) $(-۲, -۲\sqrt{۳})$.$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۳۰، يك معادله قطبی برای نموداری که معادله دکارتی آن داده شده، بیابید.

$$۲۲. x + y = ۱$$

$$۲۱. x^2 + y^2 = a^2$$

$$۲۴. x^2 = ۴y^2$$

$$۲۳. y^2 = ۴(x + ۱)$$

$$x^2 - y^2 = 16 \quad ۲۶$$

$$x^2 = 6y - y^2 \quad ۲۵$$

$$2xy = a^2 \quad ۲۸$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \quad ۲۷$$

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad ۳۰$$

$$x^2 + y^2 - 3axy = 0 \quad ۲۹$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۴۰، يك معادله دکارتی برای نموداری با معادله قطبی مفروض بیايد.

$$r^2 \cos 2\theta = 10 \quad ۳۲$$

$$r^2 = 2 \sin 2\theta \quad ۳۱$$

$$r^2 = 4 \cos 2\theta \quad ۳۴$$

$$r^2 = \cos \theta \quad ۳۳$$

$$r = 2 \sin 3\theta \quad ۳۶$$

$$r^2 = \theta \quad ۳۵$$

$$r^6 = r^2 \cos^2 \theta \quad ۳۸$$

$$r \cos \theta = -1 \quad ۳۷$$

$$r = \frac{4}{3 - 2 \cos \theta} \quad ۴۰$$

$$r = \frac{6}{2 - 3 \sin \theta} \quad ۳۹$$

۲.۱۲ نمودار معادلات در دستگاه مختصات قطبی

فرض کنید $r = f(\theta)$ معادله قطبی يك منحنی باشد. نخست فرمولی برای محاسبه ضریب زاویه خط مماس بر يك منحنی قطبی در نقطه‌ای چون (r, θ) بر منحنی به دست می‌آوریم. يك دستگاه مختصات دکارتی قائم و يك دستگاه مختصات قطبی در يك صفحه در نظر می‌گیریم و قسمت مثبت محور x ها را بر محور قطبی منطبق می‌کنیم. در بخش ۱.۱۲ دیدیم که این دو دستگاه مختصات با معادلات زیر به هم مربوط اند

$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta$$

چون $r = f(\theta)$ ، می‌توان x و y را توابعی از θ تلقی کرد. اگر از دو طرف این معادلات نسبت به θ مشتق بگیریم، و از قاعده زنجیری استفاده کنیم، داریم

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta \quad (۱)$$

و

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta \quad (۲)$$

اگر اندازه زاویه میل خط مماس α رادیان باشد، آنگاه

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

و اگر $dx/d\theta \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad (3)$$

از (۱) و (۲) در (۳) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta}{\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta} \quad (4)$$

اگر $\cos \theta \neq 0$ ، صورت و مخرج طرف راست (۴) را بر $\cos \theta$ تقسیم کرده، و $\tan \alpha$ را جانشین dy/dx می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\tan \alpha = \frac{\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta} \quad (5)$$

مثال ۱. مطلوب است ضریب زاویه خط مماس بر منحنیی که معادله آن $r = 1 - \cos \theta$ است، در نقطه $(1 - \sqrt{2}/2, \pi/4)$.

حل چون $r = 1 - \cos \theta$ ، $dr/d\theta = \sin \theta$. پس در نقطه $(1 - \sqrt{2}/2, \pi/4)$ ، $\tan \theta = 1$ و $dr/d\theta = \sqrt{2}/2$ لذا بنا بر (۵)

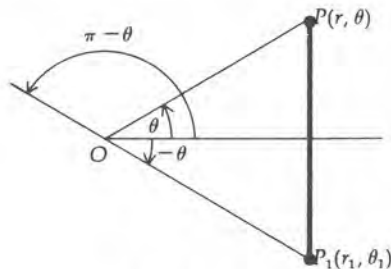
$$\Delta \quad \tan \alpha = \frac{(1) \frac{1}{2} \sqrt{2} + (1 - \frac{1}{2} \sqrt{2})}{\frac{1}{2} \sqrt{2} - (1 - \frac{1}{2} \sqrt{2})(1)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

اگر بخواهیم نمودار يك معادله قطبی را رسم کنیم، بررسی ویژگیهای تقارن نمودار کار را آسان خواهد کرد. در بخش ۲۰.۱ (تعریف ۴۰.۲.۱) آموختیم که دو نقطه P و Q نسبت به يك خط متقارن اند اگر و تنها اگر آن خط، عمود منصف پاره خط PQ باشد؛ و دو نقطه P و Q نسبت به نقطه ثانی متقارن اند اگر و تنها اگر آن نقطه ثالث وسط پاره خط PQ باشد. بنا بر این نقاط $(2, \pi/3)$ و $(2, 2\pi/3)$ نسبت به محور $\pi/2$ و نقاط $(2, \pi/3)$ و $(2, -2\pi/3)$

نسبت به قطب متقارن اند. همچنین آموختیم (تعریف ۵.۲.۱) که نمودار معادله نسبت به خطی چون l متقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر نقطه P روی نمودار، نقطه‌ای چون Q واقع بر نمودار وجود داشته باشد که P و Q نسبت به l متقارن باشند. به طور مشابه، نمودار معادله نسبت به نقطه‌ای مانند R متقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر نقطه P بر نمودار، نقطه‌ای چون S واقع بر نمودار، وجود داشته باشد که P و S نسبت به R متقارن باشند. برای آزمودن تقارن نمودارهای معادلات قطبی، سه قضیه زیر را داریم.

۱۰.۲.۱۲ قضیه هر گاه در معادله‌ای در مختصات قطبی، به جای (r, θ) ، $(r, -\theta + 2n\pi)$ یا $(-r, \pi - \theta + 2n\pi)$ قرار گیرد که n یک عدد صحیح دلخواه است، و معادله‌ای هم‌ارز با معادله اول به دست آید، آنگاه نمودار معادله نسبت به محور قطبی متقارن است.

اثبات اگر نقطه $P(r, \theta)$ یک نقطه واقع بر نمودار معادله‌ای باشد، آنگاه نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است هر گاه روی نمودار نقطه‌ای چون $P_1(r_1, \theta_1)$ وجود داشته باشد به طوری که محور قطبی عمود منصف پاره خط PP_1 باشد (شکل ۱۰.۲.۱۲ را ببینید). لذا اگر $r_1 = r$ ، آنگاه θ_1 باید به ازای عدد صحیحی چون n مساوی با $-\theta + 2n\pi$ باشد. و اگر $r_1 = -r$ ، آنگاه θ_1 باید $\pi - \theta + 2n\pi$ باشد.



□

شکل ۱۰.۲.۱۲

۲.۲.۱۲ قضیه هر گاه در معادله‌ای در مختصات قطبی، به جای (r, θ) ، $(r, \pi - \theta + 2n\pi)$ یا $(-r, -\theta + 2n\pi)$ قرار گیرد که n یک عدد صحیح دلخواه است، و معادله‌ای هم‌ارز با معادله اول به دست آید، آنگاه نمودار معادله نسبت به محور $\pi/2$ متقارن است.

۳.۲.۱۲ قضیه هر گاه در معادله‌ای در مختصات قطبی، به جای (r, θ) ، $(-r, \theta + 2n\pi)$ یا $(r, \pi + \theta + 2n\pi)$ قرار گیرد که n یک عدد صحیح دلخواه است، و معادله‌ای هم‌ارز با معادله اول به دست آید، آنگاه نمودار معادله نسبت به قطب متقارن است.

اثباتهای قضایای ۲.۲.۱۲ و ۳.۲.۱۲ با اثبات قضیه ۱.۲.۱۲ مشابه‌اند و به عنوان

تمرین واگذار می‌شوند (تمرینهای ۴۵ و ۴۶ را ببینید).

○ نمونه ۱ تقارن نمودار معادله $r = 4 \cos 2\theta$ نسبت به محور قطبی، محور $\pi/2$ ، و قطب را می‌آزماییم.

با استفاده از قضیه ۱۰.۲.۱۲ برای آزمودن تقارن نسبت به محور قطبی، $(r, -\theta)$ را به جای (r, θ) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم $r = 4 \cos(-2\theta)$ که هم‌ارز با $r = 4 \cos 2\theta$ است. لذا نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است.

با استفاده از قضیه ۱۰.۲.۱۲ برای آزمودن تقارن نسبت به محور $\pi/2$ ، $(r, \pi - \theta)$ را به جای (r, θ) قرار می‌دهیم و $r = 4 \cos(2(\pi - \theta))$ یا معادله $r = 4 \cos(2\pi - 2\theta)$ را که هم‌ارز با معادله $r = 4 \cos 2\theta$ است، به دست می‌آوریم. لذا نمودار نسبت به محور $\pi/2$ متقارن است.

برای آزمودن تقارن نسبت به قطب، $(-r, \theta)$ را به جای (r, θ) قرار می‌دهیم و معادله $-r = 4 \cos 2\theta$ را که هم‌ارز با معادله داده شده نیست به دست می‌آوریم. اما، باید ببینیم مجموعه دیگر مختصات در شرط قضیه مربوطه صدق می‌کند یا نه. لذا $(r, \pi + \theta)$ را به جای (r, θ) قرار می‌دهیم و $r = 4 \cos(2(\pi + \theta))$ یا معادله $r = 4 \cos(2\pi + 2\theta)$ را به دست می‌آوریم که با معادله $r = 4 \cos 2\theta$ هم‌ارز است. ○ بنابراین، نمودار نسبت به قطب هم متقارن است.

هنگام رسم نمودار، شایسته است تعیین کنیم که قطب بر نمودار واقع است یا نه. این کار با قراردادن θ به جای r و یافتن θ انجام می‌شود. رسم نقاطی نیز که به ازای آنها r دارای ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی می‌شود سودمند است. به عنوان کمک دیگری به ترسیم نمودار، در مواردی که منحنی شامل قطب باشد، گاه مفید است که معادلات خطوط مماس بر نمودار در قطب را هم بیابیم.

برای یافتن ضریب زاویه خط مماس در قطب، از (۵) با فرض $r = 0$ استفاده می‌کنیم. اگر $dr/d\theta \neq 0$ ،

$$\tan \alpha = \tan \theta. \quad (۶)$$

از (۶) نتیجه می‌گیریم که مقادیری از θ ، $0 \leq \theta < \pi$ ، که در يك معادله قطبی منحنی به ازای $r = 0$ صدق می‌کنند زاویه‌های میل خطهای مماس بر منحنی در قطب هستند. پس اگر $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ این مقادیر از θ باشند، آنگاه معادلات خطوط مماس بر منحنی در قطب عبارت‌اند از

$$\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots, \theta = \theta_k.$$

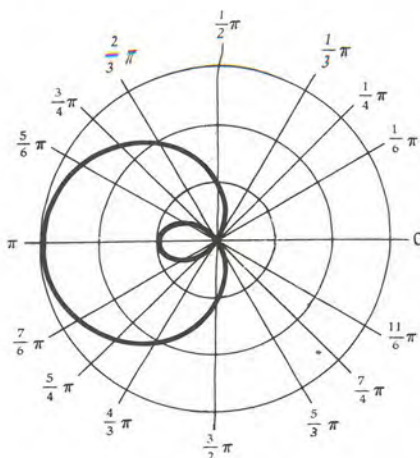
مثال ۲ نمودار $r = 1 - 2 \cos \theta$ را رسم کنید.

حل $(r, -\theta)$ را به جای (r, θ) قرار می‌دهیم و یک معادله هم‌ارز به دست می‌آوریم. پس نمودار نسبت به محور قطبی متقارن است. مختصات چند نقطه از نمودار در جدول ۱۰۲۰۱۲ آمده‌اند. با این نقاط نصف نمودار را رسم می‌کنیم؛ باقیمانده نمودار با توجه به تقارنش نسبت به محور قطبی به دست می‌آید.

جدول ۱۰۲۰۱۲

θ	۰	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r	-۱	$1-\sqrt{3}$	۰	۱	۲	$1+\sqrt{3}$	۳

اگر $r=0$ ، داریم $\cos \theta = 1/2$ ، و اگر $0 \leq \theta < \pi$ ، آنگاه $\theta = \pi/3$. بنابراین، نقطه $(0, \pi/3)$ روی نمودار است، و معادله خط مماس در این نقطه، $\theta = \pi/3$ است. نمودار در شکل ۲۰۲۰۱۲ رسم شده است، و نام آن حلزونی است.



شکل ۲۰۲۰۱۲

نمودار معادله‌ای به صورت

$$r = a \pm b \cos \theta$$

یا

$$r = a \pm b \sin \theta$$

يك حلزونی است. اگر مانند مثال ۲، $b > a$ ، حلزونی يك طوق دارد. اگر $a = b$ ، حلزونی دئوار نامیده می شود که به شکل قلب است. اگر $a > b$ ، حلزونی شکلی شبیه نمودار رسم شده در مثال ۳ دارد.

مثال ۳ نمودار $r = 3 + 2 \sin \theta$ را رسم کنید.

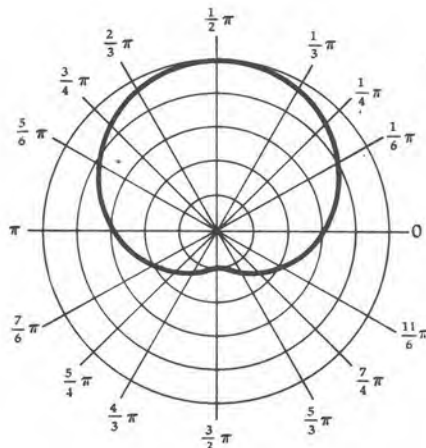
حل این نمودار نسبت به محور $\pi/2$ متقارن است زیرا اگر $(r, \pi - \theta)$ به جای (r, θ) قرار گیرد، يك معادله هم ارز به دست می آید.

جدول ۲۰۲.۱۲ مختصات چند نقطه از نمودار را نشان می دهد. این نمودار در شکل

۳.۲.۱۲ رسم شده است. برای رسم آن ابتدا نقاطی را که مختصاتشان در جدول ۲۰۲.۱۲ داده شده اند رسم می کنیم و سپس از ویژگی تقارن استفاده می کنیم.

جدول ۲۰۲.۱۲

θ	۰	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
r	۳	۴	$3 + \sqrt{3}$	۵	۳	۲	$3 - \sqrt{3}$	۱



شکل ۳.۲.۱۲

نمودار معادله‌ای به صورت

$$r = a \sin n\theta \quad \text{یا} \quad r = a \cos n\theta$$

یک گل است که n پر دارد اگر n فرد باشد، و $2n$ پر دارد اگر n زوج باشد.

مثال ۴ نمودار گل چهار پر $r = 4 \cos 2\theta$ را رسم کنید.

حل در نمونه ۱ ثابت کردیم که این نمودار نسبت به محور قطبی، محور $\pi/2$ ، و قطب متقارن است. اگر در معادله مفروض θ را به جای r قرار دهیم، خواهیم داشت

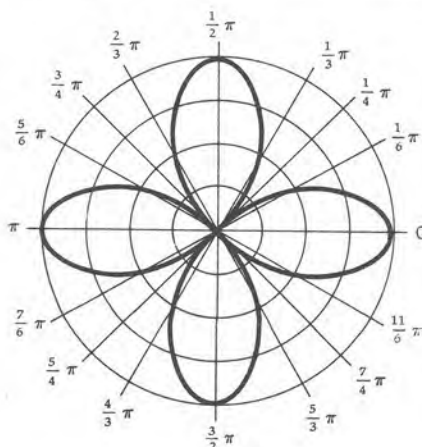
$$\cos 2\theta = 0$$

که با شرط $0 \leq \theta < 2\pi$ ، از آن نتیجه می‌گیریم که θ برابر است با $\pi/4$ ، $3\pi/4$ ، $5\pi/4$ ، $7\pi/4$ و $9\pi/4$.

جدول ۳.۲.۱۲، به ازای چند مقدار θ از 0 تا $\pi/2$ ، مقادیر متناظر r را نشان می‌دهد. با استفاده از این مقادیر و ویژگیهای تقارن، نمودار را در شکل ۴.۲.۱۲ رسم کرده‌ایم.

جدول ۳.۲.۱۲

θ	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
r	۴	$2\sqrt{3}$	۲	۰	-۲	$-2\sqrt{3}$	-۴



شکل ۴.۲.۱۲

نمودار معادله زیر، که در آن C ثابت دلخواهی است، خط مستقیمی است که از قطب می‌گذرد و با محور قطبی زاویه C رادیان می‌سازد

$$\theta = C.$$

همین خط با معادله

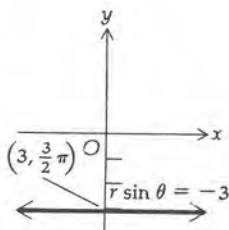
$$\theta = C \pm n\pi$$

نیز که در آن n عدد صحیح دلخواهی است، معین می‌شود. به‌طور کلی، صورت قطبی معادله خط به‌همان سادگی صورت دکارتی آن نیست. ولی، اگر خط با محور قطبی یا با محور $\pi/2$ موازی باشد معادله آن ساده است. اگر خطی موازی با محور قطبی و شامل نقطه B باشد که مختصات دکارتی آن $(0, b)$ ، و مختصات قطبی آن $(b, \pi/2)$ هستند، آنگاه معادله دکارتی خط $y = b$ است. اگر به‌جای y ، قرار دهیم $r \sin \theta$ داریم

$$r \sin \theta = b$$

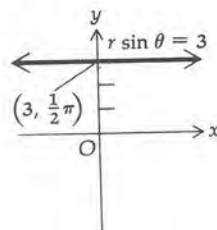
که معادله قطبی یک خط دلخواه موازی با محور قطبی است. اگر b مثبت باشد، خط در بالای محور قطبی است؛ و اگر b منفی باشد، خط زیر محور قطبی قرار دارد.

○ نمونه ۲ در شکل ۵.۲۰۱۲ نمودار معادله $r \sin \theta = 3$ ، و در شکل ۶.۲۰۱۲ نمودار معادله $r \sin \theta = -3$ را می‌بینید.



شکل ۶.۲۰۱۲

○



شکل ۵.۲۰۱۲

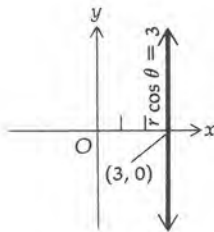
اگر خطی موازی با محور $\pi/2$ ، یعنی، عمود بر محور قطبی باشد، و از نقطه‌ای چون A که مختصات دکارتی آن $(a, 0)$ و مختصات قطبی آن $(a, 0)$ هستند بگذرد، آنگاه معادله دکارتی خط $x = a$ است. به‌جای x می‌نویسیم $r \cos \theta$ و

$$r \cos \theta = a$$

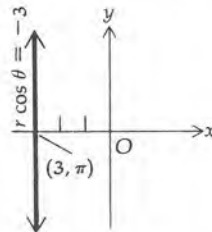
را بدست می‌آوریم که معادله هر خط دلخواه عمود بر محور قطبی است. اگر a مثبت باشد،

خط در طرف راست محور $\pi/2$ است؛ و اگر a منفی باشد، خط در طرف چپ محور $\pi/2$ است.

○ نمونه ۳ شکل ۷.۲.۱۲ نمودار معادله $r \cos \theta = 3$ و شکل ۸.۲.۱۲ نمودار معادله $r \cos \theta = -3$ را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۲.۱۲



شکل ۷.۲.۱۲

نمودار معادله

$$r = C$$

که در آن C ثابت دلخواهی است، دایره‌ای است که مرکزش در قطب و شعاعش $|C|$ است. همین دایره با معادله زیر نیز به دست می‌آید

$$r = -C.$$

همان‌طور که در مورد خط مستقیم دیدیم، معادله قطبی دایره نیز در حالت کلی به سادگی صورت دکارتی آن نیست. با این وجود، حالت‌های خاصی از معادله دایره وجود دارند که شکل قطبی آنها شایان بررسی است.

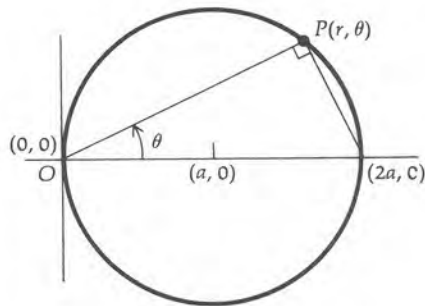
اگر مرکز دایره‌ای بر محور قطبی و در نقطه‌ای به مختصات $(a, 0)$ واقع باشد، و دایره بر محور $\pi/2$ مماس باشد، آنگاه شعاع دایره $|a|$ است. نقاط تقاطع محور قطبی با چنین دایره‌ای قطب، $(0, 0)$ ، و نقطه $(2a, 0)$ هستند (شکل ۹.۲.۱۲ را ببینید). در این صورت، اگر $P(r, \theta)$ یک نقطه دلخواه روی دایره باشد، زاویه محاطی P در دایره، قائمه است. بنابراین $\cos \theta = r/2a$ ، یا

$$r = 2a \cos \theta$$

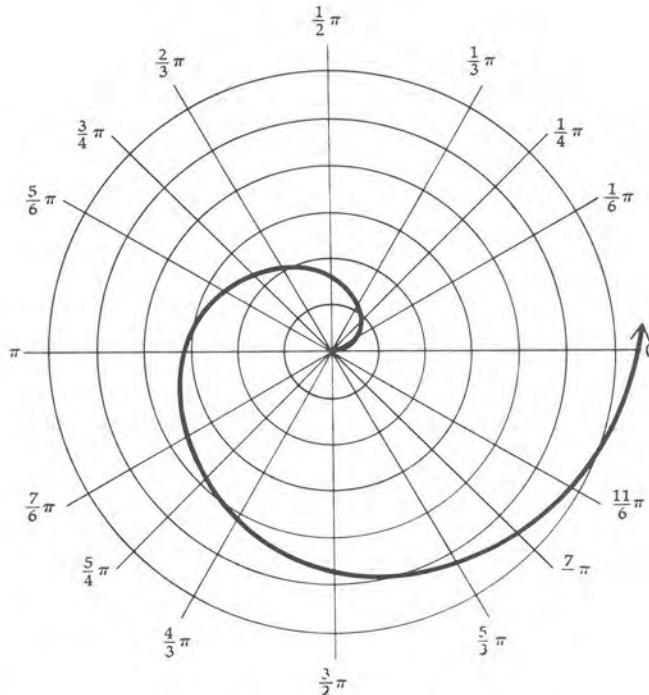
که خود معادله قطبی دایره‌ای است که بر محور $\pi/2$ مماس است و مرکزش روی محور قطبی یا بر امتداد این محور است. اگر a یک عدد مثبت باشد، دایره در سمت راست قطب، و اگر این عدد منفی باشد، دایره در سمت چپ قطب است. با روشی مشابه می‌توان نشان داد که

$$r = 2b \sin \theta$$

معادله قطبی دایره‌ای است که بر محور قطبی مماس است و مرکزش بر محور $\pi/2$ یا بر امتداد این محور قرار دارد. اگر b مثبت باشد، دایره بالای قطب است؛ و اگر b منفی باشد، دایره زیر قطب است.



شکل ۹.۲.۱۲



شکل ۱۰.۲.۱۲ (مربوط به مثال ۵)

مثال ۵ منحنی $r = \theta$ ، $\theta \geq 0$ را رسم کنید.

حل وقتی که $\theta = n\pi$ و n يك عدد صحيح دلخواه باشد، نمودار، محور قطبی یا امتداد آن را قطع می‌کند؛ و وقتی که $\theta = n\pi/2$ و n يك عدد صحيح فرد دلخواه باشد، نمودار، محور $\pi/2$ یا امتداد آن را قطع می‌کند. وقتی که $r = 0$ داریم $\theta = 0$ ؛ لذا خط مماس بر منحنی در قطب، محور قطبی است. نمودار در شکل ۱۰.۲۰۱۲ نشان داده شده است. این منحنی را يك هارپیچ ارشمیدس می‌نامند. ▲

تمرینهای ۲.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۴۰، نمودار معادله داده شده را رسم کنید.

$$r \cos \theta = 4 \quad ۰۱. \quad r \sin \theta = 2 \quad ۰۲.$$

$$r = 2 \sin \theta \quad ۰۴. \quad r = 2 \cos \theta \quad ۰۳.$$

$$\theta = -4 \quad ۰۶. \quad \theta = 5 \quad ۰۵.$$

$$r = -4 \quad ۰۸. \quad r = 5 \quad ۰۷.$$

$$r \cos \theta = -5 \quad ۰۱۰. \quad r \sin \theta = -4 \quad ۰۹.$$

$$r = -5 \cos \theta \quad ۰۱۲. \quad r = -2 \sin \theta \quad ۰۱۱.$$

$$r = e^{\theta/2} \quad ۰۱۴. \quad (مارپیچ لگاریتمی) \quad r = e^{\theta} \quad ۰۱۳.$$

$$r = 2\theta \quad ۰۱۶. \quad (مارپیچ عکس) \quad r = \frac{1}{\theta} \quad ۰۱۵.$$

$$r = 3 \cos 2\theta \quad ۰۱۸. \quad (گل سه پر) \quad r = 2 \sin 3\theta \quad ۰۱۷.$$

$$r = 4 \sin 5\theta \quad ۰۲۰. \quad (گل هشت پر) \quad r = 2 \cos 4\theta \quad ۰۱۹.$$

$$r = 3 \cos 3\theta \quad ۰۲۲. \quad (گل چهار پر) \quad r = 4 \sin 2\theta \quad ۰۲۱.$$

$$r = 3 + 3 \cos \theta \quad ۰۲۴. \quad (دلوار) \quad r = 2 + 2 \sin \theta \quad ۰۲۳.$$

$$r = 3 - 3 \sin \theta \quad ۰۲۶. \quad (دلوار) \quad r = 4 - 4 \cos \theta \quad ۰۲۵.$$

$$r = 3 - 4 \cos \theta \quad ۰۲۸. \quad (حلزونی) \quad r = 4 - 3 \cos \theta \quad ۰۲۷.$$

$$r = 2 - 3 \sin \theta \quad ۰۳۰. \quad (حلزونی) \quad r = 4 + 2 \sin \theta \quad ۰۲۹.$$

$$r^2 = -4 \sin 2\theta \quad ۰۳۲. \quad (پروانه) \quad r^2 = 9 \sin 2\theta \quad ۰۳۱.$$

$$r^2 = -25 \cos 2\theta \quad (پروانه) \quad ۰.۳۳$$

$$r^2 = 16 \cos 2\theta \quad (پروانه) \quad ۰.۳۴$$

$$r = 2 \sin \theta \tan \theta \quad (بیچکوار) \quad ۰.۳۵$$

$$(r-2)^2 = 8\theta \quad (مارپیچ سهموی) \quad ۰.۳۶$$

$$r = 2 \sec \theta - 1 \quad (صد فوار نیکومد) \quad ۰.۳۷$$

$$r = 2 \csc \theta + 3 \quad (صد فوار نیکومد) \quad ۰.۳۸$$

$$r = |\sin 2\theta| \quad ۰.۳۹$$

$$r = 2 |\cos \theta| \quad ۰.۴۰$$

در تمرینهای ۴۱ تا ۴۴، معادله‌ای قطبی برای هریک از خطوط مماس بر منحنی مفروض در قطب بیابید.

$$r = 2 \cos \theta + 2 \quad ۰.۴۱$$

$$r = 2 \sin 3\theta \quad ۰.۴۲$$

$$r^2 = 2 \cos 2\theta \quad ۰.۴۳$$

$$r^2 = 9 \sin 2\theta \quad ۰.۴۴$$

$$۰.۴۵ \quad \text{قضیه } ۲.۲.۱۲ \text{ را ثابت کنید.} \quad ۰.۴۶ \quad \text{قضیه } ۳.۲.۱۲ \text{ را ثابت کنید.}$$

$$۰.۴۷ \quad \text{ضرب زوایه خط مماس بر منحنی } r=4 \text{ در } (4, \pi/4) \text{ را بیابید.}$$

$$۰.۴۸ \quad \text{معادله قطبی خط مماس بر منحنی } r = -6 \sin \theta \text{ در نقطه } (6, 3\pi/2) \text{ را بیابید.}$$

۳.۱۲ تقاطع نمودارها در دستگاه مختصات قطبی

برای یافتن نقاط تقاطع دو منحنی که معادلاتشان بر حسب مختصات دکارتی هستند، دو معادله را با هم حل می‌کنیم. جوابهای مشترک، تمام نقاط تقاطع را به دست می‌دهند. ولی، چون هر نقطه بینهایت مجموعه مختصات قطبی دارد، ممکن است نقطه تقاطع دو منحنی نقطه‌ای باشد که بیش از یک زوج از مختصات قطبی آن در هر دو معادله صدق کنند. این وضعیت را با مثال زیر روشن می‌کنیم.

مثال ۱ نمودارهای $r = 1$ و $r = 2 \sin 2\theta$ را رسم کنید و نقاط تقاطع آنها را بیابید.

حل نمودار $r = 2 \sin 2\theta$ یک گل چهار پر است. نمودار $r = 1$ دایره‌ای است که مرکزش در قطب و شعاعش ۱ است. این نمودارها در شکل ۱۰.۳.۱۲ رسم شده‌اند. اگر این دو معادله را با هم حل کنیم، داریم $1 = 2 \sin 2\theta$ یا $\sin 2\theta = 1/2$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

تقاطع نمودارها در دستگاه مختصات قطبی ۱۳۳

$$2\theta = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi$$

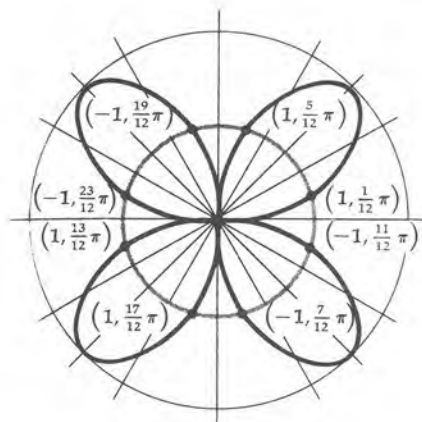
$$\theta = \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi$$

پس نقاط تقاطع $(1, \pi/12)$ ، $(1, 5\pi/12)$ ، $(1, 13\pi/12)$ ، و $(1, 17\pi/12)$ هستند. توجه کنید که در شکل ۱۳.۱۲ هشت نقطه تقاطع نشان داده شده‌اند. چهار نقطه دیگر با انتخاب صورت دیگر معادله دایره $r=1$ ، یعنی با انتخاب معادله $r=-1$ که همان دایره اول است، به دست می‌آیند. حال این معادله و معادله گل چهار پر را باهم حل می‌کنیم و به دست می‌آوریم $\sin 2\theta = -1/2$. لذا داریم

$$2\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi$$

$$\theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi$$

پس چهار نقطه $(-1, 19\pi/12)$ ، $(-1, 11\pi/12)$ ، $(-1, 7\pi/12)$ ، و $(-1, 23\pi/12)$ را هم داریم. ضمناً، می‌توان $(-1, 7\pi/12)$ را به صورت $(1, 19\pi/12)$ ، و $(-1, 11\pi/12)$ را به صورت $(1, 23\pi/12)$ ، و $(-1, 19\pi/12)$ را به صورت $(1, 7\pi/12)$ ، و $(-1, 23\pi/12)$ را به صورت $(1, 11\pi/12)$ نیز نوشت.



شکل ۱۳.۱۲

چون به ازای هر θ ، $(0, \theta)$ قطب را نمایش می‌دهد، برای اینکه تعیین کنیم قطب يك نقطه تقاطع هست یا نه، در هریک از معادلات قرار می‌دهیم $r = 0$ و θ را محاسبه می‌کنیم.

غالباً، مختصات نقاط تقاطع دو منحنی را می‌توان مستقیماً از نمودارهایشان یافت. با این حال، روش کلی زیر نیز وجود دارد. اگر معادله‌ای از يك منحنی در مختصات قطبی به صورت

$$r = f(\theta) \quad (1)$$

باشد، آنگاه این منحنی با معادله

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi) \quad (2)$$

نیز، که در آن n يك عدد صحیح دلخواه است، معین می‌شود.

○ نمونه ۱ منحنیهای مذکور در مثال ۱ را در نظر بگیرید. نمودار $r = 2 \sin 2\theta$ معادله زیر (با انتخاب $n = 1$ در (۲)) را نیز دارد

$$-r = 2 \sin 2\theta \quad \text{یا} \quad (-1)r = 2 \sin 2(\theta + \pi)$$

اگر در (۲) فرض کنیم $n = 2$ ، برای نمودار $r = 2 \sin 2\theta$ معادله

$$r = 2 \sin 2\theta \quad \text{یا} \quad (-1)^2 r = 2 \sin 2(\theta + 2\pi)$$

نیز به دست می‌آید که همان معادله اصلی است. با انتخاب هر عدد صحیح دیگری برای n ، $r = 2 \sin 2\theta$ به دست می‌آید یا $r = -2 \sin 2\theta$. نمودار معادله $r = 1$ ، معادله زیر را نیز دارد (با انتخاب $n = 1$ در (۲))

$$(-1)r = 1 \quad \text{یا} \quad معادلش \quad r = -1.$$

اگر (۲) را در مورد معادله $r = 1$ به کار ببریم، هر عدد صحیح دیگری را به جای n قرار دهیم یا $r = 1$ حاصل می‌شود یا $r = -1$. ○

اگر دو معادله $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ داده شده باشند، تمام نقاط تقاطع نمودارهای این معادلات را به شیوه زیر می‌یابیم.

(الف) برای تعیین تمام معادلات متمایز دو منحنی از (۲) استفاده می‌کنیم

$$r = f_1(\theta), r = f_2(\theta), r = f_3(\theta), \dots \quad (3)$$

$$r = g_1(\theta), r = g_2(\theta), r = g_3(\theta), \dots \quad (4)$$

(ب) هر معادله موجود در (۳) را با هریک از معادلات موجود در (۴) حل می‌کنیم.

(پ) در هریک از معادلات، با قرار دادن $r = 0$ و در نتیجه، به دست آوردن روابط زیر

$$g(\theta) = 0 \quad \text{و} \quad f(\theta) = 0 \quad (۵)$$

آزمایش می کنیم که قطب يك نقطه تقاطع هست یا نه.
اگر هریک از معادلات مذکور در (۵) برای θ جوابی، نه لزوماً یکسان، داشته باشد، آنگاه قطب بر هر دو منحنی قرار دارد.

مثال ۲ نقاط تقاطع دو منحنی $r = 2 - 2\cos\theta$ و $r = 2\cos\theta$ را بیابید.
نمودارهای آنها را رسم کنید.

حل برای یافتن معادلات دیگری که منحنی $r = 2 - 2\cos\theta$ را به دست می دهند، می نویسیم

$$(-1)r = 2 - 2\cos(\theta + \pi)$$

$$-r = 2 + 2\cos\theta$$

و

$$(-1)^2 r = 2 - 2\cos(\theta + 2\pi)$$

$$r = 2 - 2\cos\theta$$

که همان معادله اصلی است.

با روشی مشابه، معادلات دیگر منحنی $r = 2\cos\theta$ را می یابیم.

$$(-1)r = 2\cos(\theta + \pi)$$

$$-r = -2\cos\theta$$

$$r = 2\cos\theta$$

که همان معادله اصلی است.

لذا برای منحنی اول دو معادله وجود دارد: $r = 2 - 2\cos\theta$ و $-r = 2 + 2\cos\theta$ ؛
و برای منحنی دوم يك معادله: $r = 2\cos\theta$. اگر $r = 2 - 2\cos\theta$ و $r = 2\cos\theta$ را با هم حل کنیم، به دست می آوریم

$$2\cos\theta = 2 - 2\cos\theta$$

$$4\cos\theta = 2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}.$$

لذا θ برابر است با $\pi/3$ و $5\pi/3$ که نقاط $(1, \pi/3)$ و $(1, 5\pi/3)$ را به دست می دهند. اگر $r = 2 + 2 \cos \theta$ و $-r = 2 + 2 \cos \theta$ را با هم حل کنیم به دست می آوریم

$$2 + 2 \cos \theta = -2 \cos \theta$$

$$4 \cos \theta = -2$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

پس θ مساوی است با $2\pi/3$ و $4\pi/3$ که از آنها نقاط $(-1, 2\pi/3)$ و $(-1, 4\pi/3)$ به دست می آیند. اما، $(-1, 2\pi/3)$ همان نقطه $(1, 5\pi/3)$ و $(-1, 4\pi/3)$ هم همان نقطه $(1, \pi/3)$ است.

برای اینکه ببینیم آیا قطب بر منحنی اول واقع است یا نه، در معادله $r = 2 - 2 \cos \theta$ قرار می دهیم $r = 0$ و به دست می آوریم

$$0 = 2 - 2 \cos \theta$$

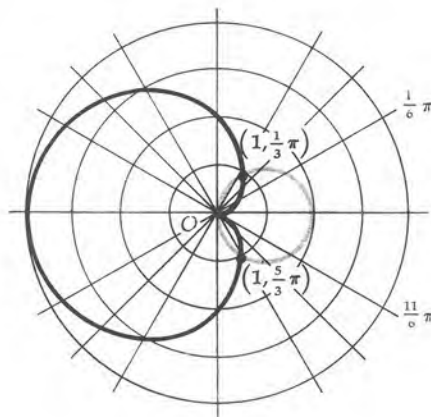
$$\cos \theta = 1$$

$$\theta = 0.$$

لذا قطب بر منحنی اول قرار دارد. با روشی مشابه، یعنی با قرار دادن $r = 0$ در $r = 2 \cos \theta$ نتیجه می گیریم که

$$0 = 2 \cos \theta$$

$$\cos \theta = 0$$



شکل ۲.۳.۱۲

$$\theta = \frac{1}{4}\pi \quad \text{یا} \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

پس، قطب بر منحنی دوم هم قرار دارد.
 بنابراین نقاط تقاطع دو منحنی عبارت‌اند از $(1, \pi/3)$ ، $(1, 5\pi/3)$ ، و قطب.
 نمودارهای دو منحنی را در شکل ۲۰۳۰۱۲ نشان داده‌ایم. ▲

تمرینهای ۳.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۲۱، نقاط تقاطع نمودارهای هر زوج از معادلات داده شده را بیابید.
 هر زوج از نمودارها را در یک دستگاه مختصات قطبی رسم کنید.

$$\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases} \quad .2$$

$$\begin{cases} 2r = 3 \\ r = 3 \sin \theta \end{cases} \quad .1$$

$$\begin{cases} r = 2 \cos 2\theta \\ r = 2 \sin \theta \end{cases} \quad .4$$

$$\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 \sin \theta \end{cases} \quad .3$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{1}{6}\pi \\ r = 2 \end{cases} \quad .6$$

$$\begin{cases} r = 4\theta \\ r = \frac{1}{4}\pi \end{cases} \quad .5$$

$$\begin{cases} r = 1 - \sin \theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases} \quad .8$$

$$\begin{cases} r = \cos \theta - 1 \\ r = \cos 2\theta \end{cases} \quad .7$$

$$\begin{cases} r^2 = 2 \cos \theta \\ r = 1 \end{cases} \quad .10$$

$$\begin{cases} r = \sin 2\theta \\ r = \cos 2\theta \end{cases} \quad .9$$

$$\begin{cases} r = 4 \tan \theta \sin \theta \\ r = 4 \cos \theta \end{cases} \quad .12$$

$$\begin{cases} r = \tan \theta \\ r = 4 \sin \theta \end{cases} \quad .11$$

$$\begin{cases} r = 4 \cos \theta \\ \theta = \frac{1}{3}\pi \end{cases} \quad .14$$

$$\begin{cases} r \sin \theta = 4 \\ r \cos \theta = 4 \end{cases} \quad .13$$

$$\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2\sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \quad .16$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ r\theta = 4 \end{cases} \quad .15$$

$$\begin{cases} r = 4 \sin 2\theta \\ r = -2 \end{cases} \quad .18$$

$$\begin{cases} r = 3 \\ r = 2(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad .17$$

$$\begin{cases} r = 4(1 + \sin \theta) \\ r(1 - \sin \theta) = 3 \end{cases} \quad .20$$

$$\begin{cases} r = \sin \theta \\ r = \sin 2\theta \end{cases} \quad .19$$

$$\begin{cases} r^2 \sin 2\theta = 8 \\ r \cos \theta = 2 \end{cases} \quad .21$$

۲۲. درمورد هر زوج از معادلات زیر، تعداد نقاط تقاطع را بنویسید:

(الف) $r \cos \theta = -2$ ، $r \sin \theta = 3$ (ب) $r = 4$ ، $r = -3$ ؛

(پ) $r = 5$ ، $r = -4 \cos \theta$ (ت) $r = 2$ ، $r = 4 \sin 2\theta$ ؛

(ث) $r = 4(1 - \cos \theta)$ ، $r = 4 \cos \theta$.

در تمرینهای ۲۳ و ۲۴، نمودار معادله داده شده خودش را قطع می‌کند. نقاط تقاطع را بیابید.

$$r = 1 + 2 \cos 2\theta \quad .24$$

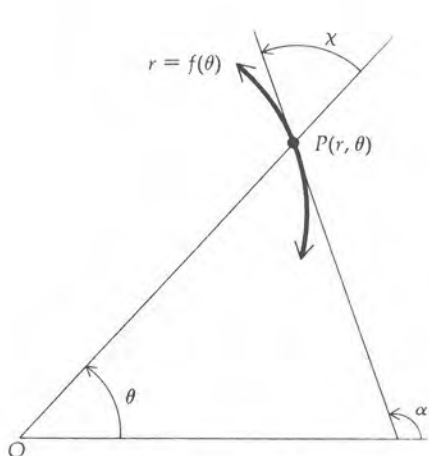
$$r = \sin \frac{3}{2} \theta \quad .23$$

۲.۱۲ خطوط مماس بر منحنیهای قطبی

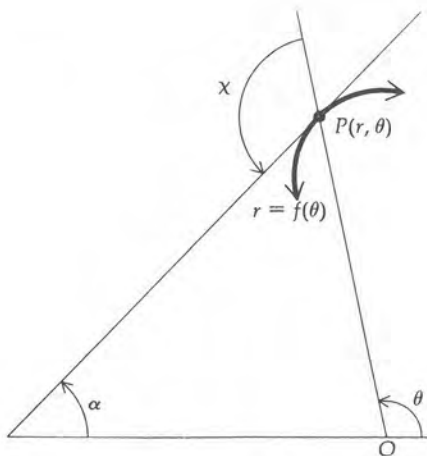
در بخش ۲.۱۲ فرمولی برای محاسبه ضریب زاویه خط مماس بر يك منحنی قطبی که معادله‌اش $r = f(\theta)$ است به دست آوردیم. اگر اندازه زاویه میل خط مماس بر منحنی در نقطه (r, θ) برابر با α رادیان باشد،

$$\tan \alpha = \frac{\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta} \quad (1)$$

به کار بردن فرمول (۱) در حالت کلی مشکل است. بسا در نظر گرفتن زاویه بین خط OP و خط مماس فرمول ساده تری به دست می‌آید. اندازه این زاویه که از خط OP تا خط مماس در خلاف جهت ساعت اندازه گیری می‌شود χ رادیان است که $0 \leq \chi < \pi$. دو حالت می‌تواند پیش آید: $\alpha \geq \theta$ و $\alpha < \theta$. این دو حالت را در شکل‌های ۱.۴.۱۲ و ۲.۴.۱۲ نشان داده ایم. در شکل ۱.۴.۱۲، $\chi = \alpha - \theta$ و در شکل ۲.۴.۱۲، $\chi = \pi - (\theta - \alpha)$ و $\alpha < \theta$ در هر حالت.



شکل ۲۰۴۰۱۲



شکل ۱۰۴۰۱۲

$$\tan \chi = \tan(\alpha - \theta)$$

$$\tan \chi = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \quad (2)$$

مقدار $\tan \alpha$ را از (۱) در (۲) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم *

$$\tan \chi = \frac{\left(\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r \right) / \left(\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta \right) - \tan \theta}{1 + \left[\left(\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r \right) / \left(\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta \right) \right] (\tan \theta)}$$

$$= \frac{\tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r - \tan \theta \frac{dr}{d\theta} + r \tan^2 \theta}{\frac{dr}{d\theta} - r \tan \theta + \tan^2 \theta \frac{dr}{d\theta} + r \tan \theta}$$

$$= \frac{r(1 + \tan^2 \theta)}{(1 + \tan^2 \theta) \frac{dr}{d\theta}}$$

$$= \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

پس، قضیه زیر را به اثبات رسانده ایم.

۱۰۴.۱۲ قضیه فرض کنید اندازه زاویه خط OP و خط مماس بر نمودار $r = f(\theta)$ در نقطه $P(r, \theta)$ برابر با χ رادیان باشد که $0 \leq \chi < \pi$ ؛ زاویه از OP تا خط مماس در خلاف جهت ساعت اندازه گیری شده است. در این صورت،

$$\tan \chi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}. \quad (3)$$

با مقایسه (۳) با (۱) می توان دید که چرا هنگام کار با مختصات قطبی بهتر است به جای α ، χ را در نظر بگیریم.

مثال ۱ برای دوار $r = a + a \sin \theta$ در نقطه $(\frac{3}{2}a, \frac{1}{6}\pi)$ ، مقدار χ را بیابید.

حل شکل ۳.۴.۱۲ را ملاحظه کنید. چون $r = a + a \sin \theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = a \cos \theta.$$

بنابر قضیه ۱۰۴.۱۲

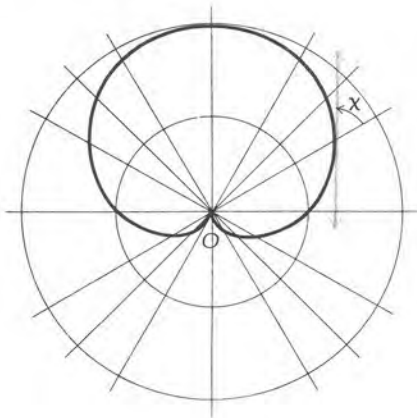
$$\tan \chi = \frac{a + a \sin \theta}{a \cos \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

پس، در نقطه $(\frac{3}{2}a, \pi/6)$

$$\tan \chi = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

و لذا

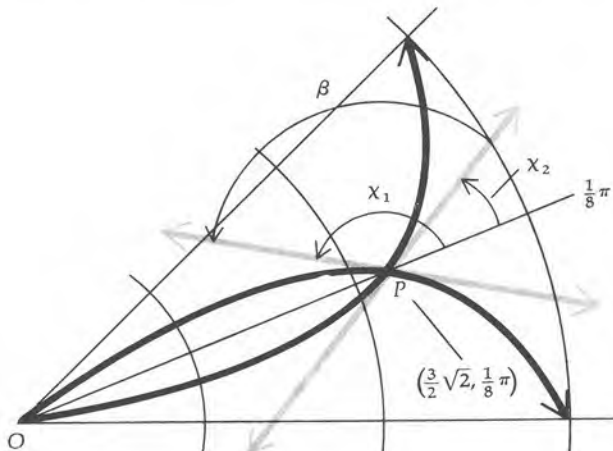
$$\chi = \frac{1}{3}\pi.$$



شکل ۳.۴.۱۲

مثال ۲ اندازه زاویه کوچکتر بین خطهای مماس بر منحنیهای $r = 3 \cos 2\theta$ و $r = 3 \sin 2\theta$ در نقطه $P(3\sqrt{2}/2, \pi/8)$ را بد نزدیکترین مضرب ۱۰ دقیقه بیابید.

حل فرض کنید اندازه زاویه بین خط OP و خط مماس بر منحنی $r = 3 \cos 2\theta$ ، χ_1 رادیان، و اندازه زاویه بین خط OP و خط مماس بر منحنی $r = 3 \sin 2\theta$ ، χ_2 رادیان باشد. نمودار هر یک از معادلات یک گل چهار پر است (شکل ۴.۴.۱۲ را ببینید). اگر اندازه زاویه بین خطوط مماس در $P(3\sqrt{2}/2, \pi/8)$ ، β رادیان باشد، آنگاه



شکل ۴.۴.۱۲

$$\beta = \chi_1 - \chi_2$$

لذا

$$\tan \beta = \tan(\chi_1 - \chi_2)$$

و یا معادلش

$$\tan \beta = \frac{\tan \chi_1 - \tan \chi_2}{1 + \tan \chi_1 \tan \chi_2} \quad (۴)$$

$\tan \chi_1$ و $\tan \chi_2$ از قضیه ۱۰۴۰۱۲ به دست می‌آیند. در مورد $\tan \chi_1$ ، داریم
 $r = 3 \cos 2\theta$ و $dr/d\theta = -6 \sin 2\theta$ ؛ لذا

$$\tan \chi_1 = \frac{3 \cos 2\theta}{-6 \sin 2\theta} = -\frac{1}{2} \cot 2\theta.$$

وقتی که $\theta = \pi/8$ ، داریم $\tan \chi_1 = -\frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

در مورد $\tan \chi_2$ ، داریم $r = 3 \sin 2\theta$ و $dr/d\theta = 6 \cos 2\theta$ ؛ پس

$$\tan \chi_2 = \frac{3 \sin 2\theta}{6 \cos 2\theta} = \frac{1}{2} \tan 2\theta.$$

وقتی که $\theta = \frac{\pi}{8}$ ، $\tan \chi_2 = \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

در (۴) قرار می‌دهیم: $\tan \chi_1 = -1/2$ و $\tan \chi_2 = 1/2$ ، و به دست می‌آوریم

$$\tan \beta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

پس اندازه زاویه β بر حسب درجه به نزدیکترین مضرب ۱۰ دقیقه برابر است با
 $180^\circ - 126^\circ 50' = 53^\circ 10'$ ، بنابراین اندازه زاویه کوچکترین دو خط مماس،
 است. ▲

تمرینهای ۴۰۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۹، مقدار χ در نقطه مشخص شده را بیابید.

$$r\theta = a; (a, 1) \quad ۱.$$

$$r = a\theta; \left(\frac{5}{3}\pi a, \frac{5}{3}\pi\right) \quad ۲.$$

$$r = a \sec \varphi \theta; \left(\sqrt{2}a, -\frac{1}{8}\pi\right) \quad ۳.$$

$$r = a \sin \frac{1}{3}\theta; \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}\pi\right) \quad ۴.$$

$$r = \theta^2; \left(\frac{1}{3}\pi^2, \frac{1}{3}\pi\right) \quad ۵.$$

$$r = \cos \varphi \theta; \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{12}\pi\right) \quad ۶.$$

$$r^2 = a^2 \cos \varphi \theta; \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right) \quad ۷.$$

$$r = a(1 - \sin \theta); (a, \pi) \quad ۸.$$

$$r = a(\sqrt{3} - \cos \theta); \left(\sqrt{3}a, \frac{1}{3}\pi\right) \quad ۹.$$

در تمرینهای ۱۰ تا ۱۴، مطلوب است اندازه زاویه کوچکتر بین خطهای مماس بر هر زوج از منحنیهای مفروض، در نقطه تقاطع مشخص شده.

$$\begin{cases} r = a \\ r = 2a \sin \theta \end{cases}; \left(a, \frac{1}{6}\pi\right) \quad ۱۰.$$

$$\begin{cases} r = a \cos \theta \\ r = a \sin \theta \end{cases}; \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}a, \frac{1}{3}\pi\right) \quad ۱۱.$$

$$\begin{cases} r = -a \sin \theta \\ r = a \cos \varphi \theta \end{cases}; \text{قطب} \quad ۱۲.$$

$$\begin{cases} r = 2 \cos \theta \\ r = 2 \cos^2 \theta - 1 \end{cases}; \left(-2, \frac{2}{3}\pi\right) \quad ۱۳.$$

$$\begin{cases} r = 2(1 - \cos \theta) \\ r = 2 \cos \theta \end{cases}; \left(1, \frac{1}{3}\pi\right) \quad ۱۴.$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸، مطلوب است اندازه زاویه بین خطهای مماس بر هر زوج از منحنیهای داده شده، در تمام نقاط تقاطعشان.

$$\begin{cases} r = 3 \cos \theta \\ r = 1 + \cos \theta \end{cases} \quad ۱۶.$$

$$\begin{cases} r = 1 - \sin \theta \\ r = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad ۱۵.$$

$$\begin{cases} r = 2 \sec \theta \\ r = \csc^2 \frac{1}{4} \theta \end{cases} \quad ۱۸$$

$$\begin{cases} r = \cos \theta \\ r = \sin 2\theta \end{cases} \quad ۱۷$$

۱۹. يك عدد ثابت ناصفر k و منحنی $r = k$ داده شده‌اند. α زاویه میل خط مماس بر منحنی در نقطه (r, θ) بر حسب رادیان است. نشان دهید که به ازای هر θ ، که $\tan \theta \neq 0$ ، داریم $\tan \alpha \tan \theta = -1$.

۲۰. در مورد منحنی $r \cos \theta = 4$ ، مطلوب است $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \chi$.

۲۱. ثابت کنید که در تمام نقاط دلواری $r = 2(1 - \cos \theta)$ داریم $\tan \chi = \tan(\theta/2)$.

۲۲. ثابت کنید که در هر نقطه مارپیچ لگاریتمی $r = be^{a\theta}$ ، مقدار χ ثابت است.

۲۳. ثابت کنید که به ازای همه مقادیر a و b ، خط‌های مماس در هر يك از نقاط تقاطع دلواری‌های $r = a(1 + \sin \theta)$ و $r = b(1 - \sin \theta)$ متعامدند.

۲۴. ثابت کنید که خط‌های مماس در هر يك از نقاط تقاطع دو منحنی $r = a \sec^2(\theta/2)$ و $r = b \csc^2(\theta/2)$ متعامدند.

۵.۱۲ مساحت ناحیه در دستگاه مختصات قطبی

حال روشی برای یافتن مساحت ناحیه محصور بین دو خط گذرنده از قطب و يك منحنی که معادله‌اش در مختصات قطبی داده شده است، به دست می‌دهیم.

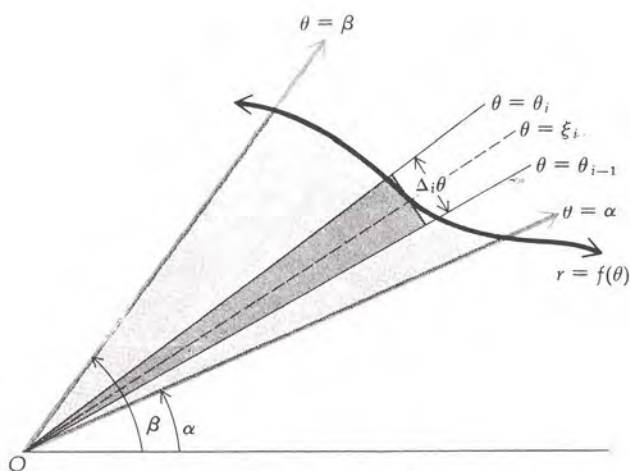
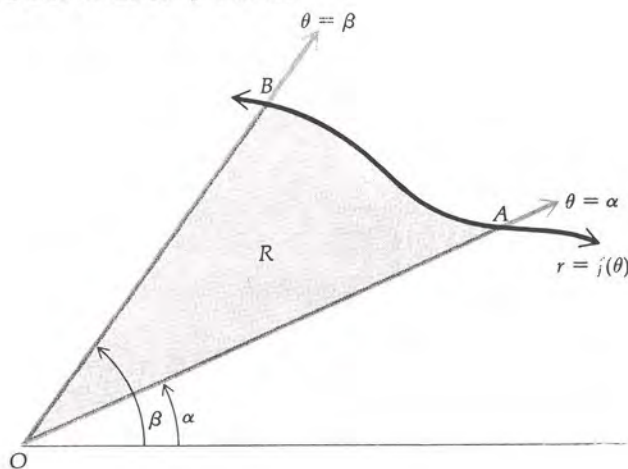
فرض کنید تابعی چون f بر بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته و نامنفی باشد و نیز فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی که معادله‌اش $r = f(\theta)$ است و خط‌های $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ باشد. در این صورت، ناحیه R ناحیه‌ای چون AOB است که در شکل ۱۰۵.۱۲ نشان داده شده است.

افزای مانند Δ از $[\alpha, \beta]$ را که با

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{i-1} < \theta_i < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. n زیربازه به صورت $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ داریم که $i = 1, 2, \dots, n$. فرض کنید ξ_i يك مقدار از θ واقع در زیربازه i ، $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ، باشد. شکل ۲۰۵.۱۲ را ملاحظه کنید که در آن زیربازه i م همراه با $\xi_i = \theta$ نشان داده شده است. اندازه زاویه بین خطوط $\theta = \theta_{i-1}$ و $\theta = \theta_i$ با $\Delta_i \theta$ نمایش داده می‌شود. مساحت قطاع مستدیری به شعاع $f(\xi_i)$ واحد و به زاویه $\Delta_i \theta$ رادیان بر حسب واحد مربع برابر است با

$$\frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta$$



شکل ۲.۵.۱۲

چنین قطاع مستدیزی برای هر يك از n زیر بازه فوق وجود دارد. مجموع اندازه مساحت‌های این n قطاع مستدیر برابر است با

$$\frac{1}{2} [f(\xi_1)]^2 \Delta_1 \theta + \frac{1}{2} [f(\xi_2)]^2 \Delta_2 \theta + \dots + \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta + \dots + \frac{1}{2} [f(\xi_n)]^2 \Delta_n \theta$$

که با استفاده از نمادگذاری سیکما به صورت زیر نوشته می شود

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta. \quad (۱)$$

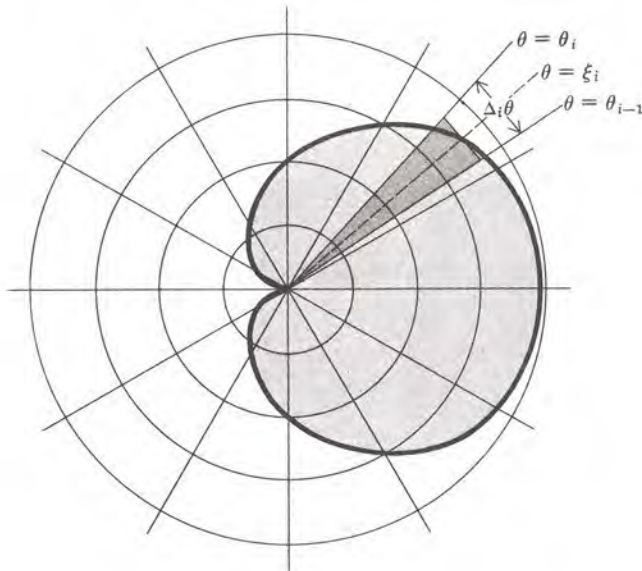
فرض می‌کنیم $\|\Delta\|$ نورم افراز Δ باشد؛ لذا، $\|\Delta\|$ اندازه بزرگترین $\Delta_i \theta$ است. پس اگر مساحت ناحیه R ، A واحد مربع فرض شود، A را به صورت حد مجموع ریسمانی (۱) تعریف می‌کنیم، وقتی که $\|\Delta\|$ به ۰ میل می‌کند؛ این حد يك انتگرال معین است. حال این تعریف را به صورت رسمی بیان می‌کنیم.

۱۰۵.۱۲ تعریف فرض کنید R ناحیه محصور بین خطهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ و منحنی باشد که معادله اش $r = f(\theta)$ است و f بر بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته و نامنفی است. در این صورت، اگر مساحت ناحیه R ، A واحد مربع باشد، داریم

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta.$$

مثال ۱ مساحت ناحیه محدود به نمودار $r = 2 + 2 \cos \theta$ را بیابید.

حل این ناحیه همراه با يك جزء سطح در شکل ۳.۵.۱۲ نشان داده شده است. چون منحنی نسبت به محور قطبی متقارن است، حدود θ را ۰ و π در نظر می‌گیریم که مساحت آن قسمت از ناحیه محدود به منحنی را مشخص می‌کنند که در بالای محور قطبی قرار



شکل ۳.۵.۱۲

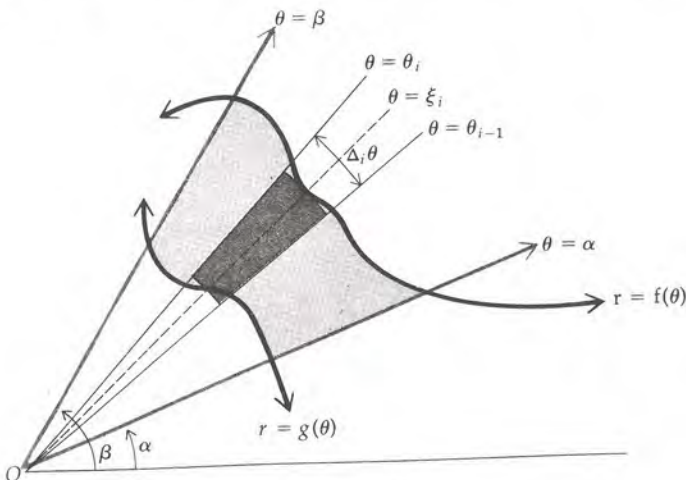
مساحت ناحیه در دستگاه مختصات قطبی ۱۴۷

دارد. حال، مساحت کل ناحیه با ضرب این مساحت در ۲ به دست می آید. لذا، اگر مساحت مورد نظر A واحد مربع باشد، داریم

$$\begin{aligned} A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (r + r \cos \xi_i)^2 \Delta_i \theta \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} (r + r \cos \theta)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 2 \left[\theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^\pi \\ &= 2 \left(\pi + 0 + \frac{1}{2} \pi + 0 - 0 \right) \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

پس، مساحت 6π واحد مربع است.

▲ حال ناحیه محصور بین خطهای $\theta = \alpha$ و $\theta = \beta$ و دو منحنی را که معادلاتشان $r = g(\theta)$ و $r = f(\theta)$ هستند، در نظر می گیریم؛ f و g بر بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته فرض می شوند و بر $[\alpha, \beta]$ ، $f(\theta) \geq g(\theta)$. شکل ۴.۵.۱۲ را ببینید. می خواهیم مساحت این



شکل ۴.۵.۱۲

ناحیه را بیابیم. افرازی از $[\alpha, \beta]$ انتخاب می‌کنیم، و یک مقدار از θ را که به زیر بازه $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ ، تعلق داشته باشد ξ_i می‌نامیم. اندازه مساحت یک جزء سطح، تفاضل اندازه مساحت‌های دوقطاع مستدیر است، یعنی

$$\frac{1}{4} [f(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta - \frac{1}{4} [g(\xi_i)]^2 \Delta_i \theta = \frac{1}{4} ([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i \theta.$$

مجموع اندازه مساحت‌های n جزء سطح برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4} ([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i \theta.$$

لذا، اگر مساحت ناحیه مطلوب A واحد مربع باشد، داریم

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} ([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i \theta. \quad (2)$$

چون f و g بر $[\alpha, \beta]$ پیوسته‌اند، $(f - g)$ نیز چنین است؛ بنابراین حد مذکور در (۲) وجود دارد و برابر با یک انتگرال معین است. پس

$$A = \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) d\theta.$$

مثال ۲ مساحت ناحیه درون دایره $r = 3 \sin \theta$ و بیرون حلزونی $r = 2 - \sin \theta$ را بیابید.

حل برای یافتن نقاط تقاطع می‌نویسیم

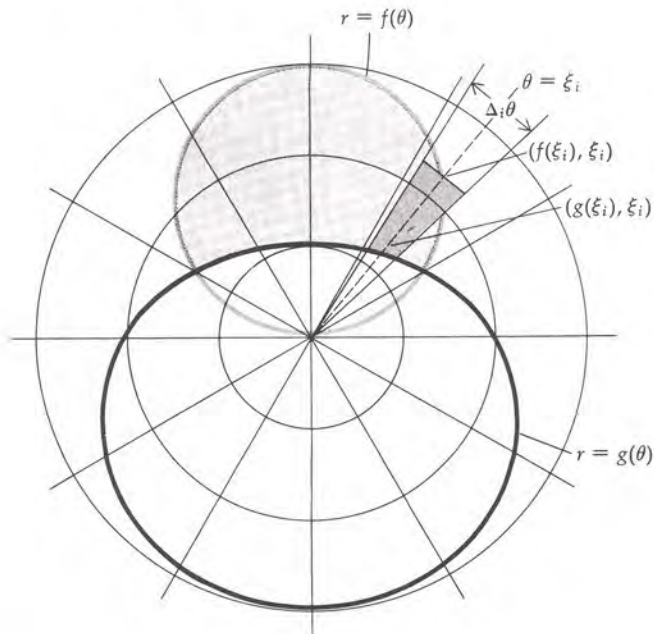
$$3 \sin \theta = 2 - \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

لذا

$$\theta = \frac{1}{6}\pi \quad \text{و} \quad \theta = \frac{5}{6}\pi.$$

در شکل ۵.۵۰۱۲ منحنیها رسم شده، و ناحیه همراه با یک جزء سطح نشان داده شده‌اند. اگر فرض کنیم $f(\theta) = 3 \sin \theta$ و $g(\theta) = 2 - \sin \theta$ ، آنگاه معادله دایره $r = f(\theta)$ ، و معادله حلزونی $r = g(\theta)$ است. به‌جای اینکه حدود را $\pi/6$ و $5\pi/6$ بگیریم، از ویژگی تقارن نسبت به محور



شکل ۵.۵.۱۲

$\pi/2$ استفاده می‌کنیم؛ حدود را $\pi/6$ و $\pi/2$ می‌گیریم و مساحت را در ۲ ضرب می‌کنیم. لذا اگر مساحت ناحیه مفروض A واحد مربع باشد،

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} ([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i \theta \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) d\theta \\
 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} [4 \sin^2 \theta - (2 - \sin \theta)^2] d\theta \\
 &= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta + 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \theta d\theta - 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \\
 &= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta) d\theta + \left[-2 \cos \theta - 2\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
 &= 2\theta - 2 \sin 2\theta - 2 \cos \theta - 2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \sin 2\theta - 4 \cos \theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &= \left(-2 \sin \pi - 4 \cos \frac{1}{4}\pi \right) - \left(-2 \sin \frac{1}{4}\pi - 4 \cos \frac{1}{4}\pi \right) \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} \\
 &= 3\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

بنابراین، مساحت ناحیه $3\sqrt{3}$ واحد مربع است. ▲

تمرینهای ۵.۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۶، مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله داده شده را بیابید.

$$1. \quad r = 3 \cos \theta \quad 2. \quad r = 2 - \sin \theta$$

$$3. \quad r = 4 \cos 3\theta \quad 4. \quad r = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$5. \quad r^2 = 4 \sin 2\theta \quad 6. \quad r = 4 \sin^2 \theta \cos \theta$$

۷. مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله $r = \theta$ از $\theta = 0$ تا $\theta = 3\pi/2$ را بیابید.

۸. مساحت ناحیه محصور بین نمودار $r = e^\theta$ و خطوط $\theta = 0$ و $\theta = 1$ را بیابید.

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، مساحت ناحیه محدود به یک طوق از نمودار معادله داده شده را بیابید.

$$9. \quad r = 3 \cos 2\theta \quad 10. \quad r = a(1 - 2 \cos \theta)$$

$$11. \quad r = 1 + 3 \sin \theta \quad 12. \quad r = a \sin 3\theta$$

در هر یک از تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، مساحت قسمت مشترک ناحیه‌های محدود به دو منحنی داده شده را بیابید.

$$13. \quad \begin{cases} r = 2 \\ r = 3 - 2 \cos \theta \end{cases} \quad 14. \quad \begin{cases} r = 4 \sin \theta \\ r = 4 \cos \theta \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} r = 3 \sin 2\theta \\ r = 3 \cos 2\theta \end{cases} \quad 16. \quad \begin{cases} r^2 = 2 \cos 2\theta \\ r = 1 \end{cases}$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۱، مساحت ناحیه‌ای را بیابید که درون نمودار معادله اول و بیرون نمودار معادله دوم است.

$$\begin{cases} r^2 = 4 \sin 2\theta \\ r = \sqrt{2} \end{cases} \quad ۱۸. \quad \begin{cases} r = a \\ r = a(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad ۱۷.$$

$$\begin{cases} r = 2a \sin \theta \\ r = a \end{cases} \quad ۲۰. \quad \begin{cases} r = 2 \sin \theta \\ r = \sin \theta + \cos \theta \end{cases} \quad ۱۹.$$

$$\begin{cases} r = a(1 + \cos \theta) \\ r = 2a \cos \theta \end{cases} \quad ۲۱.$$

۲۲. مطلوب است مقدار a به‌طوری‌که مساحت ناحیه درون دلواری $r = a(1 - \cos \theta)$ برابر با 9π واحد مربع باشد.

۲۳. وجه يك پايون [به‌شکل پروانه] ناحیه محدود به نمودار معادله $r^2 = 4 \cos 2\theta$ است. چقدر پارچه برای پوشاندن وجه پايون لازم است؟

۲۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که توسط بردار شعاعی مارپیچ $r = a\theta$ در دور اول دوران پیموده نشده، ولی در دور دوم دوران پیموده شده است.

۲۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که توسط بردار شعاعی منحنی مذکور در تمرین ۲۴ در دور دوم دوران پیموده نشده، ولی در دور سوم دوران پیموده شده است.

تمرینهای مروری فصل ۱۲

در تمرینهای ۱ تا ۴، معادله قطبی نموداری را که معادله دکارتی آن داده شده است بیابید.

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \quad ۱. \quad 2xy = 1 \quad ۲.$$

$$x^2 + y^2 - 9x + 8y = 0 \quad ۳. \quad y^4 = x^2(a^2 - y^2) \quad ۴.$$

در تمرینهای ۵ تا ۸، معادله دکارتی نموداری را بیابید که معادله قطبی آن داده شده است.

$$r = 9 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \quad ۵. \quad r(1 - \cos \theta) = 2 \quad ۶.$$

$$r = 4 \cos 2\theta \quad ۷. \quad r = a \tan^2 \theta \quad ۸.$$

۹. نمودار (الف) $r\theta = 3$ (مارپیچ عکس)، و (ب) $3r = \theta$ (مارپیچ ارشمیدس) را رسم کنید.

۱۰. نشان دهید که نمودارهای معادلات $r = 1 + \sin \theta$ و $r = \sin \theta - 1$ یکسان هستند.

۱۱. نمودار $r = \sqrt{|\cos \theta|}$ را رسم کنید.

۱۲. نمودار $r = \sqrt{|\cos 2\theta|}$ را رسم کنید.

۱۳. نمودار $r = 2(1 + \cos \theta)$ را رسم کنید.

۱۴. نمودار $r^2 = 16 \cos \theta$ را رسم کنید.

۱۵. ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $r = (1/2) + \sin \theta$ در نقطه $(1, \pi/6)$ را بیابید.

۱۶. معادله‌ای برای هریک از خطوط مماس بر گل چهارپر $r = 4 \cos 2\theta$ در قطب بیابید.

۱۷. معادله هریک از خطوط مماس در قطب بر دلووار $r = 3 - 3 \cos \theta$ را به دست آورید.

۱۸. مساحت یک پر از گل $r = 2 \sin 3\theta$ را بیابید.

۱۹. مساحت ناحیه درون نمودار $r = 2a \sin \theta$ و بیرون نمودار $r = a$ را بیابید.

۲۰. مساحت ناحیه درون نمودار پروانه $r^2 = 2 \sin 2\theta$ و بیرون نمودار دایره $r = 1$ را به دست آورید.

۲۱. مطلوب است مساحت ناحیه پیموده شده توسط بردار شعاعی مارپیچ لگاریتمی $r = e^{k\theta}$ ($k > 0$) وقتی که θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند.

۲۲. مساحت قسمت مشترک نواحی درون نمودارهای دو معادله $r = a \cos \theta$ و $r = a(1 - \cos \theta)$ ، $a > 0$ را بیابید.

۲۳. معادله قطبی خط مماس بر منحنی $r = \theta$ در نقطه (π, π) را بیابید.

دتمرینهای ۲۴ و ۲۵، تمام نقاط تقاطع نمودارهای معادلات داده شده را بیابید.

$$\begin{cases} r = 2(1 + \cos \theta) \\ r^2 = 2 \cos \theta \end{cases} \quad ۲۵$$

$$\begin{cases} r \cos \theta = 1 \\ r = 1 + 2 \cos \theta \end{cases} \quad ۲۴$$

۲۶. ثابت کنید که تعداد نقاط تقاطع نمودارهای $r = a\theta$ و $r\theta = a$ نامتناهی است. همچنین ثابت کنید که تنها در دو تا از این نقاط تقاطع خطوط مماس برهم عمودند؛ این دو نقطه را بیابید.

۲۷. اندازه زاویه بین خطوط مماس در هریک از نقاط تقاطع نمودارهای معادلات $r = -6 \cos \theta$ و $r = 2(1 - \cos \theta)$ را بر حسب رادیان بیابید.

۲۸. ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $r = 6 \cos \theta - 2$ در نقطه $(1, 5\pi/3)$ را بیابید.

۲۹. مساحت ناحیه محدود به طوق حلزونی $r = 4(1 + 2 \cos \theta)$ و نیز مساحت ناحیه درون محیط خارجی حلزونی را بیابید.

۳۰. مساحت درون يك طوق از منحنی $r = a \sin n\theta$ را که در آن n يك عدد صحیح مثبت است بیابید.

۳۱. ثابت کنید که فاصله بین دو نقطه $P_1(r_1, \theta_1)$ و $P_2(r_2, \theta_2)$ عبارت است از $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

۳۲. نقاط تقاطع نمودارهای معادلات $r = \tan \theta$ و $r = \cot \theta$ را بیابید.

۳۳. معادله ای قطبی برای دایره ای که مرکزش (r_0, θ_0) و شعاعش a واحد است بنویسید (داهنمایی: قانون کسینوسها را در مورد مثلثی که رئوسش قطب، (r_0, θ_0) و (r, θ) هستند، به کار برید).

مقاطع مخروطی

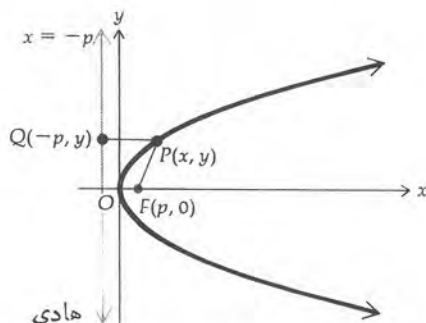
۱۰۱۳ سهمی

مقطع مخروطی، منحنیی است که از تقاطع يك صفحه با يك مخروط مستدیر قائم به دست می آید. از این طریق سه نوع منحنی به دست می آید: سهمی، بیضی (که دایره حالت خاصی از آن است)، و هذلولی. منحنی حاصل بستگی به زاویه محور مخروط با صفحه قاطع دارد. در مورد هندسه مقاطع مخروطی در بخش ۳۰۱۳ بحث خواهیم کرد. در این بخش سهمی را مطالعه می کنیم.

۱۰۱۳ تعریف سهمی مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از يك نقطه ثابت و يك خط ثابت برابر است. نقطه ثابت را **کانون**، و خط ثابت را **هادی** می نامند.

حال، با استفاده از تعریف بالا، معادله سهمی را به دست می آوریم. برای اینکه این معادله ساده تر باشد، محور x ها را عمود بر هادی و شامل کانون در نظر می گیریم. مبدأ مختصات را در نقطه ای روی محور x ها که در نیمه راه بین کانون و هادی قرار دارد، انتخاب می کنیم. دقت کنید که به این ترتیب، محورها (و نه سهمی) را به صورت خاصی انتخاب کرده ایم. شکل ۱۰۱۳ را ببینید.

فرض کنید p فاصله جهت دار OF باشد. کانون نقطه $F(p, 0)$ ، و معادله هادی $x = -p$ است. نقطه $P(x, y)$ روی سهمی است اگر و تنها اگر P از F و هادی به يك



شکل ۱۰۱۰۱۳

فاصله باشد، یعنی، چنانچه $Q(-p, y)$ پای خط عمود از P بر هادی باشد، P روی سهمی است اگر و تنها اگر

$$|FP| = |QP|.$$

چون

$$|FP| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

و

$$|QP| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$$

P روی سهمی است اگر و تنها اگر

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}.$$

دوطرف معادله فوق را به توان دو می‌رسانیم و به دست می‌آوریم

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px.$$

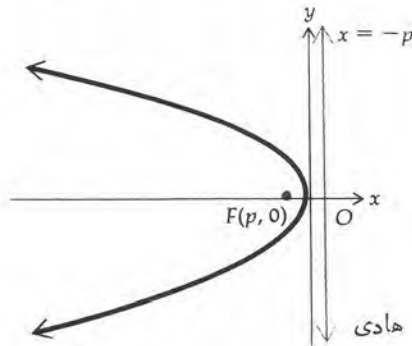
این نتیجه به صورت يك قضیه بیان می‌شود.

۲۰۱۰۱۳ قضیه معادله سهمی که کانون آن در $(p, 0)$ و هادی آن خط $x = -p$ باشد، به صورت زیر است

$$y^2 = 4px. \quad (۱)$$

در شکل ۱۰۱۰۱۳، p مثبت است؛ البته p ممکن است منفی باشد، چون فاصله جهت‌دار OF است. شکل ۲۰۱۰۱۳ برای $p < 0$ يك سهمی را نشان می‌دهد.

درشکلهای ۱۰۱۳ و ۲۰۱۳ می‌بینیم که دهانه سهمی با معادله $y^2 = 4px$ به طرف راست است اگر $p > 0$ ، و به طرف چپ است اگر $p < 0$. نقطه‌ای که در نیمه راه بین کانون و هادی روی سهمی قرار دارد، رأس سهمی نامیده می‌شود. رأس سهمی در شکلهای ۱۰۱۳ و ۲۰۱۳ در مبدأ قرار دارد. خطی که از رأس و کانون سهمی می‌گذرد، محور سهمی نامیده می‌شود. محور سهمی درشکلهای ۱۰۱۳ و ۲۰۱۳، محور x هاست. اگر در استنتاج فوق جای محور x ها و محور y ها را با هم عوض کنیم، آنگاه کانون در نقطه $F(0, p)$ قرار می‌گیرد، و هادی خطی است با معادله $y = -p$. معادله این سهمی به صورت $x^2 = 4py$ است، و این نتیجه به صورت قضیه‌ای بیان می‌شود.

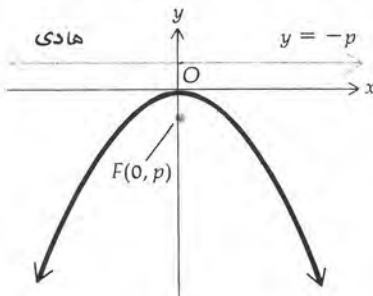


شکل ۲۰۱۳

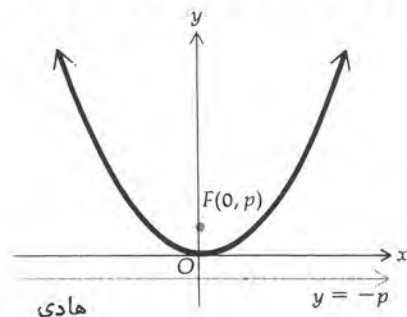
۳۰۱۳ قضیه معادله سهمی که کانون آن در $(0, p)$ و هادی آن خط $y = -p$ باشد، به صورت زیر است

$$x^2 = 4py. \quad (۲)$$

اگر $p > 0$ ، دهانه سهمی به طرف بالا است، همان طور که در شکل ۳۰۱۳ نشان داده شده است؛ و اگر $p < 0$ ، دهانه سهمی به طرف پایین است، که در شکل ۴۰۱۳



شکل ۴۰۱۳



شکل ۳۰۱۳

دیده می‌شود. در هر دو حالت رأس سهمی مبدأ، و محور سهمی محور y ‌هاست. وقتی نموداریک سهمی را رسم می‌کنیم، استفاده از وترى که از کانون سهمی می‌گذرد و عمود بر محور سهمی است، مفید واقع می‌شود، چون نقاط انتهایی این وتر دو نقطه روی سهمی را به دست می‌دهند. چنین وترى را ضلع قائم سهمی [یا پارامتر سهمی] می‌نامند. طول ضلع قائم سهمی $|4p|$ است. (تمرین ۲۰ را ببینید.)

مثال ۱ معادله سهمی را که کانون آن در $(-3, 0)$ و هادی آن خط $y=3$ است، به دست آورید. نمودار سهمی را رسم کنید.

حل چون کانون روی محور y ‌ها و همچنین زیرهادی قرار دارد، پس دهانه سهمی به طرف پایین است و $p = -3$. بنابراین، معادله سهمی به صورت زیر است

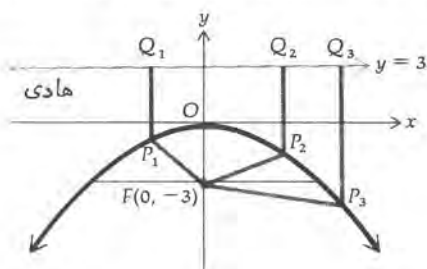
$$x^2 = -12y.$$

طول ضلع قائم سهمی برابر است با

$$|4(-3)| = 12.$$

نمودار سهمی در شکل ۵.۱۰۱۳ رسم شده است. هر نقطه روی سهمی از کانون و هادی به یک فاصله است. در شکل ۵.۱۰۱۳، سه تا از این گونه نقاط: (p_1, p_1) ، (p_2, p_2) و (p_3, p_3) نشان داده شده‌اند، و داریم

$$|FP_1| = |P_1Q_1| \quad |FP_2| = |P_2Q_2| \quad |FP_3| = |P_3Q_3|$$



شکل ۵.۱۰۱۳

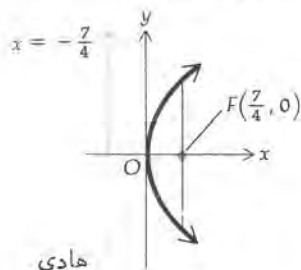
مثال ۲ سهمی با معادله $y^2 = 7x$ مفروض است. مختصات کانون، معادله هادی، و طول ضلع قائم آن را به دست آورید. نمودار سهمی را رسم کنید.

حل معادله داده شده به صورت (۱) است؛ پس

$$4p = 7$$

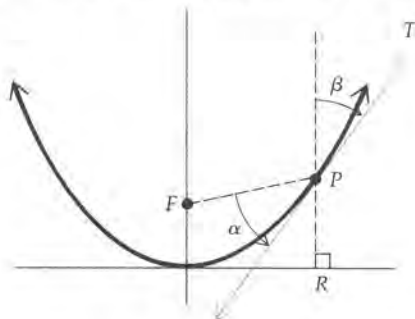
$$p = \frac{7}{4}$$

چون $p > 0$ ، دهانه سهمی به طرف راست است. کانون در نقطه $F(7/4, 0)$ قرار دارد. معادله هادی سهمی $x = -7/4$ است. طول ضلع قائم سهمی برابر ۷ می باشد. نمودار سهمی نیز در شکل ۶.۱۰۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۶.۱۰۱۳

سهمیها ویژگی جالبی دارند که در ساختن چراغهای جستجو، چراغهای جلو اتومبیلها، و تلسکوپها از آن استفاده می شود. در شکل ۷.۱۰۱۳، خط مماس PT خط مماس بر نمودار سهمی در نقطه P است. نقطه F کانون سهمی، و α اندازه زاویه بین پاره خط FP و خط مماس PT است. خط PR موازی محور سهمی، و β اندازه زاویه بین PR و PT است. در تمرین ۳۲ از شما خواسته شده است که ثابت کنید $\alpha = \beta$. به علت برقراری این تساوی، در آینه سهمی چراغ جستجو، پرتوهای نور که از منبعی در کانون می تابند، در امتداد خطی موازی محور سهمی منعکس می شوند. اصل مشابهی نیز در مورد منعکس کننده سهمی در چراغهای جلو اتومبیل به کار رفته است. در آینه سهمی تلسکوپ انعکاسی،



شکل ۷.۱۰۱۳

عکس چنین وضعیتی پیش می آید، بدین معنی که وقتی پرتوهای نور از شیئی در آسمان، به طرف آینه و به موازات محور می روند، به وسیله آینه منعکس شده و از کانون می گذرند.

مثال ۳ عمق يك آینه سهموی در مرکز آن ۱۲ سانتیمتر و قطر قاعده آن (در بالای آینه) ۳۲ سانتیمتر است. فاصله رأس تا کانون را به دست آورید.

حل شکل ۸۰۱۰۱۳ را ببینید. محورهای مختصات طوری انتخاب شده اند که رأس سهمی در مبدأ و محور سهمی در امتداد محور y ها، و دهانه سهمی به طرف بالا است. بنابراین معادله سهمی به صورت زیر است

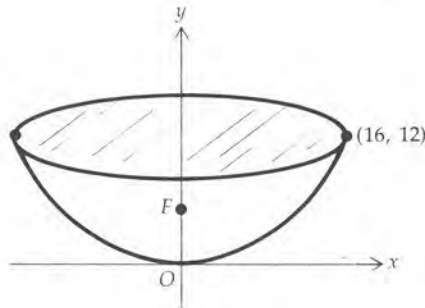
$$x^2 = 4py$$

که p سانتیمتر، فاصله رأس تا کانون سهمی می باشد. چون نقطه $(12, 16)$ روی سهمی است، مختصاتش در معادله سهمی صدق می کنند، و داریم

$$16^2 = 4p(12)$$

$$p = \frac{16}{3}$$

بنابراین، فاصله رأس سهمی تا کانونش برابر با $5\frac{1}{3}$ سانتیمتر است.



شکل ۸۰۱۰۱۳

سهمیها کاربردهای عملی دیگری نیز دارند. مسیر پرتاب گلوله، اگر فرض کنیم حرکت در يك صفحه انجام می شود و از مقاومت هوا صرف نظر کنیم، يك سهمی است. گاهی اوقات طاقها سهموی شکل هستند، و کابل پل معلق نیز به شکل سهمی آویزان است.

تمرینهای ۱۰۱۳

برای هر يك از سهمیهای تمرینهای ۱ تا ۸، مختصات كانون، معادله هادی، و طول ضلع قائم سهمی را به دست آورید. نمودار منحنی را رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} ۱. & x^2 = 4y \\ ۲. & y^2 = 6x \\ ۳. & y^2 = -8x \\ ۴. & x^2 = -16y \\ ۵. & x^2 + y = 0 \\ ۶. & y^2 + 5x = 0 \\ ۷. & 2y^2 - 9x = 0 \\ ۸. & 3x^2 + 4y = 0 \end{array}$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۷، معادله سهمی را به دست آورید که دارای ویژگیهای مفروض است.

۹. كانون $(5, 0)$ ؛ هادی $x = -5$.
۱۰. كانون $(0, 4)$ ؛ هادی $y = -4$.
۱۱. كانون $(0, -2)$ ؛ هادی $y - 2 = 0$.
۱۲. كانون $(-5/3, 0)$ ؛ هادی $5 - 3x = 0$.
۱۳. كانون $(1/2, 0)$ ؛ هادی $2x + 1 = 0$.
۱۴. كانون $(0, 3/2)$ ؛ هادی $3y + 2 = 0$.
۱۵. رأس $(0, 0)$ ؛ دهانه به طرف چپ است؛ طول ضلع قائم آن ۶ است.
۱۶. رأس $(0, 0)$ ؛ دهانه به طرف بالاست؛ طول ضلع قائم آن ۳ است.
۱۷. رأس $(0, 0)$ ؛ هادی $2x = -5$.
۱۸. معادله سهمی را بیابید که رأس آن در مبدأ، و محورش محور x ها باشد و از نقطه $(2, -4)$ بگذرد.
۱۹. معادله ای برای يك سهمی بیابید که رأس آن در مبدأ، و محورش محور y ها باشد و از نقطه $(-2, -4)$ بگذرد.

۲۰. ثابت کنید که طول ضلع قائم سهمی برابر است با $|4p|$.

۲۱. نقاط انتهایی ضلع قائم سهمی $(5, k)$ و $(-5, k)$ هستند. اگر رأس سهمی در مبدأ و دهانه سهمی به طرف پایین باشد، مطلوب است (الف) تعیین مقدار k ؛ (ب) معادله سهمی.

۲۲. فرض کنید آب از انتهای يك لوله افقی که در ۲۵ فوتی سطح زمین قرار دارد،

جاری می‌شود و جریان آب يك منحنی سهموی رسم می‌کند که رأس این سهمی در انتهای لوله آب قرار دارد. اگر در نقطه‌ای واقع در ۸ فوتی پایین خط لوله، جریان آب ۱۰ فوت باخط قائمی که از انتهای لوله آب می‌گذرد فاصله داشته باشد، فاصله نقطه برخورد آب با زمین از این خط قائم چقدر است؟

۲۳. کابل يك پل معلق، با این فرض که بار پل به‌طور یکنواخت و افقی توزیع شده است، به‌شکل سهمی قرار می‌گیرد. فاصله بین دو برج پل ۱۵۰ متر، و نقاط تکیه‌گاه کابل روی برجها در ۲۲ متری بالای پل قرار دارند، و پایینترین نقطه کابل ۷ متر باپسل فاصله دارد. مطلوب است فاصله عمودی کابل از نقطه‌ای روی پل که ۱۵ متر دورتر از پای برج قرار دارد.

۲۴. ارتفاع يك طاق سهموی، ۲۰ متر و عرض پایین (قاعده) طاق ۳۶ متر است (رأس سهمی در بالای طاق قرار دارد). عرض طاق در چه ارتفاعی از قاعده ۱۸ متر است؟

۲۵. ثابت کنید نزدیکترین نقطه روی سهمی به‌کانون آن، رأس سهمی است.

۲۶. مدار ستاره دنباله داری يك سهمی است که خورشید در کانون این سهمی قرار دارد. وقتی که ستاره دنباله‌دار ۱۰۰ میلیون کیلومتر از خورشید فاصله دارد، زاویه بین محور سهمی و خط بین خورشید و ستاره دنباله‌دار، 45° است. با استفاده از نتیجه تمرین ۲۵ کوتاهترین فاصله بین خورشید و ستاره دنباله‌دار را تعیین کنید.

۲۷. يك تلسکوپ انعکاسی دارای آینه‌ای سهموی است که فاصله رأس آن تا کانونش ۳۰ فوت می‌باشد. اگر قطر قاعده آینه ۶۴ اینچ باشد، عمق آینه در مرکز آن چقدر است؟

۲۸. با استفاده از تعریف ۱۰.۱.۱۳، معادله سهمی را بیابید که هادی آن خط $y = 4$ و کانون آن نقطه $(8, -3)$ است.

۲۹. با استفاده از تعریف ۱۰.۱.۱۳، معادله سهمی را بیابید که هادی آن خط $x = -3$ و کانونش نقطه $(5, 2)$ است.

۳۰. تمام نقاطی از سهمی $8x = y^2$ را به‌دست آورید که دارای این ویژگی باشند: پای عمود وارد از نقطه به‌هادی، کانون، و خود نقطه، رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع باشند.

۳۱. معادله دایره‌ای را که از رأس و نقاط انتهایی ضلع قائم سهمی $8y = -x^2$ می‌گذرد، به‌دست آورید.

۳۲. در شکل ۷.۱.۱۳ ثابت کنید $\alpha = \beta$. (دانه‌مایی: محورهای مختصات را طوری انتخاب کنید که رأس سهمی در مبدأ و محورش در امتداد محور y ها، و دهانه‌اش به‌طرف بالا باشد. فرض کنید نقطه تقاطع خط مماس PT با محور y هاست. با

نشان دادن اینکه مثلث QPF متساوی الساقین است، ثابت کنید $(\alpha = \beta)$.

۳۳. معادله هادی يك سهمی $x + y = 0$ و کانون آن در نقطه $(1, 1)$ است. مطلوب است (الف) معادله محور سهمی؛ (ب) مختصات رأس؛ و (پ) طول ضلع قائم سهمی.

۳۴. به طور تحلیلی ثابت کنید که دایره‌ای که قطرش ضلع قائم يك سهمی است، مماس بر هادی این سهمی است.

۳۵. وتر کانونی سهمی، پاره خطی است که از کانون می‌گذرد و نقاط انتهایی آن روی سهمی هستند. اگر A و B نقاط انتهایی وتری کانونی از يك سهمی باشند، و اگر C نقطه تقاطع هادی با خطی که از رأس و نقطه A می‌گذرد باشد، ثابت کنید خطی که از C و B می‌گذرد موازی با محور سهمی است.

۳۶. ثابت کنید که فاصله نقطه وسط هر وتر کانونی (تمرین ۳۵ را ببینید) سهمی از هادی، برابر نصف طول آن وتر کانونی است.

۲.۱۳ انتقال محورها

وضعیت محورهای مختصات تأثیری بر شکل يك منحنی ندارد؛ ولی بر معادله منحنی اثر دارد.

○ نمونه ۱ اگر شعاع دایره‌ای برابر با ۳ و مرکزش در نقطه $(-1, 4)$ باشد، معادله‌ای از این دایره به صورت زیر است

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$$

ولی اگر مبدأ در مرکز دایره باشد، همین دایره، معادله ساده‌تری خواهد داشت:

$$○ \quad x^2 + y^2 = 9.$$

اگر بتوانیم محورهای مختصات را به دلخواه اختیار کنیم، معمولاً آنها را طوری انتخاب می‌کنیم که معادلات تا حد امکان ساده باشند. ولی اگر محورهای مختصات مفروض باشند، غالباً سعی می‌کنیم معادله ساده‌تری از منحنی داده شده را در مجموعه محورهای مختصات دیگری به دست آوریم.

به طور کلی اگر در صفحه‌ای که دارای محورهای x و y است محورهای مختصات جدیدی موازی با محورهای مفروض انتخاب شوند، گوییم که يك انتقال محورها در صفحه انجام شده است.

مثلاً، فرض کنید محورهای x و y به محورهای x' و y' انتقال یابند، و (h, k) مبدأ مختصات نسبت به محورهای مفروض باشد؛ همچنین فرض کنید که اعداد مثبت در همان

سمت مبدأ روی محورهای x' و y' باشند که روی محورهای x و y قرار دارند (شکل ۱۰۲۰۱۳ را ببینید).

نقطه‌ای از صفحه مانند P که نسبت به محورهای مختصات مفروض دارای مختصات (x, y) می‌باشد، نسبت به محورهای جدید دارای مختصات (x', y') است. برای به دست آوردن رابطه بین این دو مجموعه مختصات، خطی از P موازی محور y ها و محور y' ها، همچنین خطی از P موازی محور x ها و محور x' ها رسم می‌کنیم. فرض کنید خط اول، محور x ها را در نقطه A و محور x' ها را در نقطه A' ، و خط دوم، محور y ها را در نقطه B و محور y' ها را در نقطه B' قطع کند.

نسبت به محورهای x و y ، مختصات P برابر با (x, y) ، مختصات A برابر با $(x, 0)$ ، و مختصات A' برابر با (x', k) است. چون $\overline{A'P} = \overline{AP} - \overline{AA'}$ داریم

$$y' = y - k$$

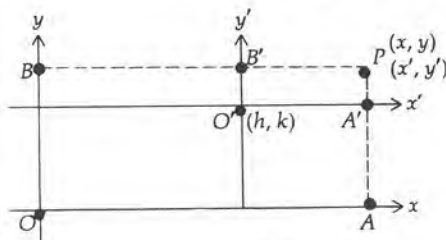
$$y = y' + k.$$

نسبت به محورهای x' و y' ، مختصات B برابر با $(0, y)$ ، و مختصات B' برابر با (h, y) است. چون $\overline{B'P} = \overline{BP} - \overline{BB'}$ داریم

$$x' = x - h$$

$$x = x' + h.$$

این نتایج به صورت قضیه‌ای بیان شده‌اند.



شکل ۱۰۲۰۱۳

۱۰۲۰۱۳ قضیه اگر (x, y) نشان دهنده نقطه P نسبت به مجموعه مفروضی از محورها باشد، و (x', y') نماینده P بعد از انتقال محورها به مبدأ جدیدی با مختصات (h, k) نسبت به محورهای مفروض باشد، آنگاه

$$y = y' + k \quad \text{و} \quad x = x' + h \quad (۱)$$

یا

$$y' = y - k \quad \text{و} \quad x' = x - h \quad (۲)$$

معادلات (۱) یا (۲)، معادلات انتقال محورها نامیده می‌شوند.

اگر معادلهٔ يك منحنی بر حسب x و y داده شده باشد، با قراردادن $(x' + h)$ به جای x و $(y' + k)$ به جای y معادلهٔ منحنی بر حسب x' و y' به دست می‌آید. نمودار معادله‌ای بر حسب x و y نسبت به محوره‌های x و y ، دقیقاً همان نقاطی را دربردارد که نمودار معادلهٔ متناظر بر حسب x' و y' نسبت به محوره‌های x' و y' .

مثال ۱ معادلهٔ $x^2 + 10x + 6y + 19 = 0$ مفروض است؛ بعد از انتقال محورها به مبدأ جدیدی با مختصات $(-5, 1)$ ، معادلهٔ نمودار را نسبت به محوره‌های x' و y' به دست آورید.

حل نقطهٔ P نسبت به محوره‌های قدیم نماینده‌ای به صورت (x, y) دارد، و (x', y') نمایندهٔ P نسبت به محوره‌های جدید است. پس با توجه به (۱) و با ضوابط $k = 1$ و $h = -5$ داریم

$$x = x' - 5 \quad \text{و} \quad y = y' + 1$$

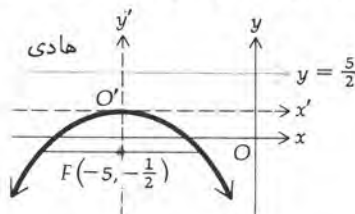
با قراردادن این مقادیر x و y در معادلهٔ مفروض، به دست می‌آید

$$(x' - 5)^2 + 10(x' - 5) + 6(y' + 1) + 19 = 0$$

$$x'^2 - 10x' + 25 + 10x' - 50 + 6y' + 6 + 19 = 0$$

$$x'^2 = -6y'.$$

نمودار این معادله نسبت به محوره‌های x' و y' يك سهمی است که رأس آن در مبدأ است، دهانه‌اش روبه پایین است و نیز $p = -6/4$. نمودار این معادله نسبت به محوره‌های x و y نیز يك سهمی است که رأس آن در $(-5, 1)$ ، کانونش در $(-5, 1/2)$ ، و هادی آن خط $y = 5/2$ می‌باشد (شکل ۲۰۲۰۱۳ را ببینید).



شکل ۲۰۲۰۱۳

مثال فوق نشان می‌دهد که چگونه معادله‌ای با انتقال مناسب محورها به صورت ساده‌تر درمی‌آید. به طور کلی، معادلات درجهٔ دومی را که در آنها هیچ جملهٔ شامل xy

انتقال محورها ۱۶۵

وجود ندارد، می‌توان با انتقال محورها ساده‌تر کرد. این امر در مثال زیر روشن شده است.

مثال ۲ معادله $9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0$ مفروض است؛ محورها را طوری انتقال دهید که معادله نمودار نسبت به محوره‌های x' و y' شامل جملات درجه اول نباشد.

حل معادله مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 8y) = -37.$$

با اضافه کردن ۹ و ۱۶ به دو طرف معادله فوق، جملات داخل پرانتزها را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم

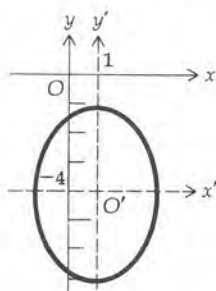
$$9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 8y + 16) = -37 + 9 + 64$$

$$9(x-1)^2 + 4(y+4)^2 = 36.$$

حال، اگر فرض کنیم $x' = x - 1$ و $y' = y + 4$ ، خواهیم داشت

$$9x'^2 + 4y'^2 = 36.$$

با توجه به (۲) می‌بینیم که با قراردادن $x' = x - 1$ و $y' = y + 4$ ، انتقال محورها به مبدأ جدید $(1, -4)$ انجام می‌شود. در شکل ۳۰۲۰۱۳ نمودار معادله بر حسب x' و y' نسبت به محوره‌های x' و y' نشان داده شده است.



شکل ۳۰۲۰۱۳

اکنون انتقال محورها را برای به دست آوردن معادله کلی یک سهمی به کار می‌بریم، که هادی آن موازی یک محور مختصات است و رأس آن در نقطه (h, k) قرار دارد. در حالت خاص، فرض کنید هادی موازی محور y هاست. اگر رأس سهمی در نقطه‌ای مانند $V(h, k)$ باشد، آنگاه معادله هادی $x = h - p$ ، و کانون در نقطه $F(h + p, k)$ است.

فرض کنید محورهای x' و y' طوری باشند که مبدأ O' در $V(h, k)$ قرار گیرد (شکل ۴.۲.۱۳ را ببینید).

معادله سهمی شکل ۴.۲.۱۳ نسبت به محورهای x' و y' به صورت زیر است

$$y'^2 = 4px'.$$

برای اینکه معادله این سهمی را نسبت به محورهای x و y به دست آوریم، با توجه به (۲)، $(x-h)$ را به جای x' و $(y-k)$ را به جای y' قرار می‌دهیم، که نتیجه می‌شود

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

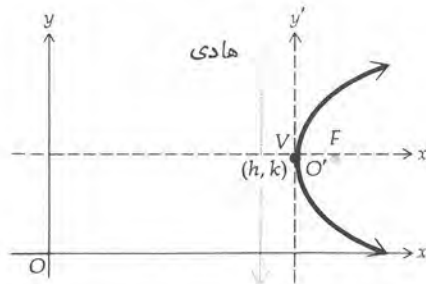
محور این سهمی موازی محور x هاست.

به همین نحو، اگر هادی يك سهمی موازی محور y ها و رأس آن در $V(h, k)$ باشد،

آنگاه کانون سهمی $F(h, k+p)$ و معادله هادیش $y = k - p$ است، و معادله سهمی نسبت به محورهای x و y به صورت زیر نوشته می‌شود

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

محور این سهمی موازی محور y هاست. بنابراین، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.



شکل ۴.۲.۱۳

۴.۲.۱۳ قضیه اگر p فاصله جهت‌دار رأس سهمی تا کانون آن باشد، معادله يك سهمی که رأس آن در (h, k) و محورش موازی محور x هاست، به صورت زیر می‌باشد

$$(y-k)^2 = 4p(x-h). \quad (۳)$$

سهمی با همان رأس و با محوری موازی محور y ها معادله‌ای به صورت زیر خواهد داشت

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \quad (۴)$$

مثال ۳ خط هادی يك سهمی $y = ۱$ و کانونش نقطه $F(-۳, ۷)$ است؛ معادله سهمی را به دست آورید.

حل چون هادی سهمی موازی محور x هاست، پس محور سهمی موازی محور y خواهد بود، و معادله به صورت (۴) است.

چون رأس V در نیمه راه بین هادی و کانون است، پس مختصات V برابر است با $(-۳, ۴)$. فاصله جهت دار رأس تا کانون p است و لذا

$$p = ۷ - ۴ = ۳.$$

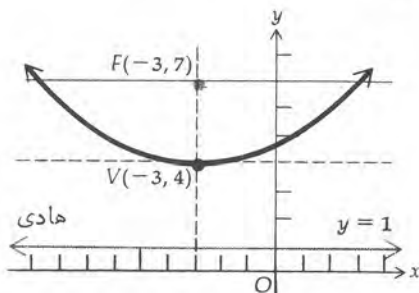
بنابراین، معادله سهمی به صورت زیر است

$$(x+۳)^2 = ۱۲(y-۴).$$

اگر رابطه بالا را ساده کنیم، داریم

$$x^2 + 6x - ۱۲y + ۵۷ = 0.$$

نمودار این سهمی در شکل ۵.۲۰۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲۰۱۳

مثال ۴ معادله سهمی مفروضی به صورت $y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ است؛ رأس، کانون، معادله هادی، معادله محور سهمی، و طول ضلع قائم سهمی را به دست آورید، و نمودار را رسم کنید.

حل معادله داده شده را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$y^2 + 8y = -6x - 1.$$

با اضافه کردن ۱۶ به دو طرف معادله فوق، جملاتی که شامل y در طرف چپ این معادله هستند، به صورت یک مربع کامل درمی آیند و خواهیم داشت

$$y^2 + 8y + 16 = -6x + 15$$

$$(y+۴)^2 = -6\left(x - \frac{۵}{۲}\right).$$

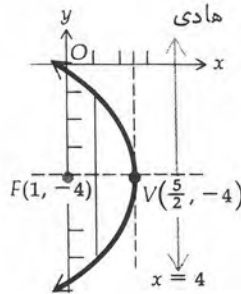
اگر این معادله را با (۳) مقایسه کنیم، داریم

$$k = -4 \quad h = \frac{5}{2}$$

و

$$p = -\frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad 4p = -6$$

بنابراین، رأس در $(\frac{5}{2}, -4)$ ، معادله محور سهمی $y = -4$ ، کانون در $(1, -4)$ ، معادله هادی $x = 4$ ، و طول ضلع قائم سهمی ۶ است. نمودار سهمی در شکل ۶.۲۰.۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۶.۲۰.۱۳

تمرینهای ۲۰.۱۳

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، معادله جدید نمودار معادله داده شده را بعد از انتقال محورها به مبدأ مفروض جدید به دست آورید. محورهای قدیم و جدید، و نمودار را رسم کنید.

۱. $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$; $(-3, -2)$

۲. $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 13 = 0$; $(5, -2)$

۳. $y^2 - 6x + 9 = 0$; $(\frac{3}{2}, 0)$

۴. $y^2 + 3x - 2y + 7 = 0$; $(-2, 1)$

۵. $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$; $(-2, -1)$

۶. $25x^2 + y^2 - 50x + 20y - 500 = 0$; $(1, -10)$

$$y - 4 = 2(x - 1)^2; (1, 4) \quad ۷$$

$$y = \ln(x - 5) - 2; (5, -2) \quad ۹ \quad (y + 1)^2 = 2(x - 2)^2; (2, -1) \quad ۸$$

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3; \left(-\frac{\pi}{4}, 3\right) \quad ۱۰$$

$$2e^{x-2} = y + 2; (1, -2) \quad ۱۲ \quad \cosh(x - 2) = y + 1; (2, -1) \quad ۱۱$$

دترمینهای ۱۳ تا ۱۶، محورها را طوری انتقال دهید که معادله نمودار نسبت به محوره‌های جدید شامل جملات درجه اول نباشد. محوره‌های قدیم و جدید، و نمودار را رسم کنید.

$$x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 84 = 0 \quad ۱۳$$

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0 \quad ۱۴$$

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 11 = 0 \quad ۱۵$$

$$x^2 - y^2 + 14x - 8y - 35 = 0 \quad ۱۶$$

دترمینهای ۱۷ تا ۲۲، رأس، کانون، معادله محور، و معادله هادی سهمی مفروض را به دست آورید. نمودار سهمی را رسم کنید.

$$4x^2 - 8x + 3y - 2 = 0 \quad ۱۸$$

$$x^2 + 6x + 4y + 8 = 0 \quad ۱۷$$

$$3y^2 - 8x - 12y - 4 = 0 \quad ۲۰$$

$$y^2 + 6x + 10y + 19 = 0 \quad ۱۹$$

$$y = 3x^2 - 3x + 3 \quad ۲۲$$

$$2y^2 = 4y - 3x \quad ۲۱$$

دترمینهای ۲۳ تا ۳۲، معادله سهمی را بیابید که دارای ویژگیهای مفروض باشد. نمودار سهمی را رسم کنید.

$$۲۳ \quad \text{رأس در } (2, 4); \text{ کانون در } (-3, 4). \quad ۲۴ \quad \text{رأس در } (1, -3); \text{ هادی } y = ۱$$

$$۲۵ \quad \text{کانون در } (-1, 7); \text{ هادی } y = 3$$

$$۲۶ \quad \text{کانون در } (-3/4, 4); \text{ هادی } x = -5/4$$

$$۲۷ \quad \text{رأس در } (3, -2); \text{ محور } x = 3; \text{ طول ضلع قائم سهمی } 6 \text{ باشد.}$$

$$۲۸ \quad \text{محور موازی محور } x\text{ها؛ گذرنده از نقاط } (1, 2), (5, 3), \text{ و } (11, 4).$$

$$۲۹ \quad \text{رأس در } (-4, 2); \text{ محور } y = 2; \text{ از نقطه } (0, 6) \text{ بگذرد.}$$

$$۳۰ \quad \text{هادی } x = -2; \text{ محور } y = 4; \text{ طول ضلع قائم سهمی } 8 \text{ باشد.}$$

۳۱. هادی $x=4$ ؛ محور $y=4$ ؛ از نقطه $(9, 7)$ بگذرد.

۳۲. نقاط انتهایی ضلع قائم سهمی $(1, 3)$ و $(7, 3)$ باشند.

۳۳. معادله يك سهمی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$ داده شده است؛ مختصات رأس سهمی را به دست آورید.

۳۴. مختصات کانون سهمی تمرین ۲۵ را به دست آورید.

۳۵. مطلوب است معادله هر سهمی که شامل نقاط $A(-3, -4)$ و $B(5, -4)$ باشد به طوری که هریک از نقاط A و B ، 5 واحد از کانون فاصله داشته باشد.

۳۶. معادله $0 = 10 - 3y - 12x + 12x^2 - 4x^3$ مفروض است؛ محورها را طوری انتقال دهید که معادله نمودار نسبت به محوره‌های جدید شامل جمله درجه دوم و جمله ثابت نباشد. نمودار و دو مجموعه محورها را رسم کنید. (راهنمایی: فرض کنید در معادله داده شده، $x = x' + h$ و $y = y' + k$.)

۳۷. معادله $0 = 3 - 4y + 3x + y^2 + 3x^2 - x^3$ مفروض است؛ محورها را طوری انتقال دهید که معادله نمودار نسبت به محوره‌های جدید شامل جمله اول و جمله ثابت نباشد. نمودار و دو مجموعه محورها را رسم کنید (راهنمایی تمرین ۳۶ را ببینید).

۳۸. اگر کانون يك سهمی در مبدأ و محور x ها باشد، ثابت کنید که معادله این سهمی بایستی به صورت $y^2 = 4kx + 4k^2$ ، $k \neq 0$ باشد.

۳۹. اگر محوره‌های مختصات به مبدأ جدیدی یا مختصات (h, k) انتقال یابند، نشان دهید که معادله $y = \sin x$ بعد از انتقال به صورت $y' = A \sin x' + B \cos x' + C$ در می آید که در آن A ، B ، و C اعدادی ثابت هستند. A ، B ، و C را بر حسب h و k به دست آورید و نشان دهید که $A^2 + B^2 = 1$.

۴۰. نشان دهید که بعد از انتقال محوره‌های مختصات به مبدأ جدید $(1, \pi/4)$ ، معادله $y = ((\sin x + \cos x)/\sqrt{2}) + 1$ به صورت $y' = \sin x'$ در می آید.

۴۱. به نتایج تمرینهای ۳۹ و ۴۰ مراجعه کنید و انتقال محورها را طوری تعیین کنید که معادله

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x) - 3$$

به صورت $y' = \sin x'$ در آید.

۴۲. به نتایج تمرینهای ۳۹ و ۴۰ مراجعه کنید و انتقال محورها را طوری تعیین کنید که معادله

$$y = \frac{1}{4}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) + 2$$

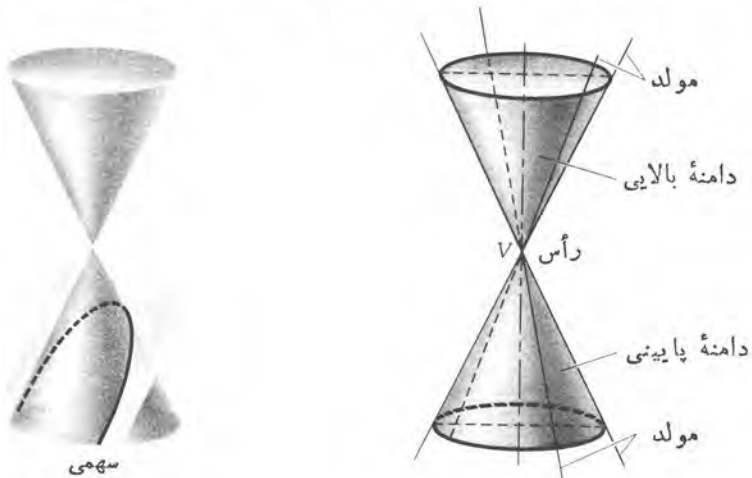
به صورت $y' = \sin x'$ در آید.

۳.۱۳ بعضی از ویژگیهای مقاطع مخروطی

در بخش ۱.۱۳ گفتیم که مقطع مخروطی منحنیی است که از تقاطع يك صفحه با يك مخروط مستدیر قائم به دست می آید، و سه نوع منحنی حاصل، سهمی، بیضی و هذلولی هستند. ریاضیدان یونانی آپولونیوس مقاطع مخروطی را از دیدگاه هندسی و با استفاده از این ایده مورد مطالعه قرار داده است. ما سهمی را در بخش ۱.۱۳ بررسی کردیم، که در آنجا تعریفی تحلیلی (۱.۱۰۱۳) از سهمی نیز ارائه شد. در این بخش، تعریفی تحلیلی از مقطع مخروطی داده می شود که سه نوع منحنی نامبرده به عنوان حالت های خاصی از این تعریف به دست می آیند.

در هندسه مقاطع مخروطی، مخروط را متشکل از دو دامنه در نظر می گیرند که به طور نامتناهی در دو طرف امتداد دارند. قسمتی از يك مخروط مستدیر قائم با دو دامنه در شکل ۱.۳.۱۳ نشان داده شده است. مولد مخروط، خطی است روی مخروط و تمام مولدهای مخروط شامل نقطه V ، که رأس مخروط نامیده می شود، هستند.

در شکل ۲.۳.۱۳ يك مخروط و يك صفحه قاطع که موازی يك و تنها يك مولد مخروط است، نشان داده شده اند. مقطع حاصل يك سهمی است. اگر صفحه قاطع موازی دو تا از مولدها باشد، هر دو دامنۀ مخروط را قطع می کند و يك هذلولی خواهیم داشت که در شکل



شکل ۲.۳.۱۳

شکل ۳.۱۳.۱

۳.۳.۱۳ نشان داده شده است. اگر صفحه قاطع موازی هیچ مولدی نباشد، که در این حالت صفحه قاطع هر يك از مولدها را قطع می کند، يك بیضی حاصل می شود، همچنانکه در شکل ۴.۳.۱۳ نشان داده شده است.

حالت خاصی از بیضی دایره است، که در شکل ۵.۳.۱۳ نشان داده شده است؛ دایره وقتی به دست می آید که صفحه قاطع هر يك از مولدها را قطع کند و نیز عمود بر محور مخروط باشد. حالت های تباهیده مقاطع مخروطی عبارت از نقطه، خط راست، و دو خط راست متقاطع می باشند. اگر صفحه قاطع شامل رأس مخروط باشد اما شامل هیچ مولدی نباشد، يك نقطه به دست می آید که در شکل ۶.۳.۱۳ نشان داده شده است. این نقطه، يك بیضی تباهیده است. اگر صفحه قاطع شامل رأس و فقط یکی از مولدهای مخروط باشد، همچنانکه در شکل ۷.۳.۱۳ دیده می شود، يك خط راست به دست می آید، و این خط يك سهمی تباهیده است. و بالاخره، هذلولی تباهیده وقتی به دست می آید که صفحه قاطع شامل رأس و دو مولد مخروط باشد، که در نتیجه دو خط مستقیم متقاطع حاصل می شود، همچنانکه در شکل ۸.۳.۱۳ نشان داده شده است.

مقاطع مخروطی هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی موارد استفاده زیادی دارند. در بخش ۱۰.۱۳ بعضی از کاربردهای سهمی را ذکر کردیم و اکنون برخی از کاربردهای بیضی و هذلولی را متذکر می شویم. مدار سیارات و ماهواره ها به شکل بیضی هستند. در ساختن دنده های ماشین از بیضی استفاده می شود. گاهی طاق پلها بیضوی شکل هستند. در بعضی سیستم های دریانوردی از هذلولیها برای تعیین وضعیت ترافیک دریایی استفاده می شود که این کار را با توجه به سیگنالهای رادیویی که از شبکه ای از جفت فرستنده ها صادر می شود (هر جفت از آنها فاصله مشخصی از هم دارند) انجام می دهند. از هذلولیها همچنین در جنگها برای «تعیین برد صدا» به منظور تعیین محل توپخانه دشمن از طریق



دایره

شکل ۵.۳.۱۳



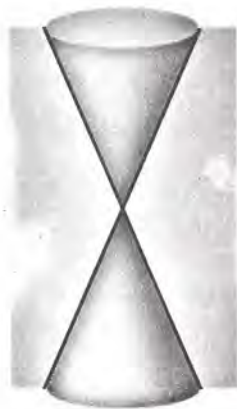
بیضی

شکل ۴.۳.۱۳



هذلولی

شکل ۳.۳.۱۳



دو خط متقاطع

شکل ۸.۳.۱۳



خط

شکل ۷.۳.۱۳



نقطه

شکل ۶.۳.۱۳

شنیدن صدای شلیک توپخانه استفاده می شود. اگر کمیتی به طور معکوس نسبت به کمیت دیگر تغییر کند، نمودار مربوطه هذلولی شکل است، همچون فشار و حجم در قانون بویل برای گازهای کامل در دمای ثابت.

مقاطع مخروطی به عنوان منحنیهای مسطح خواصی دارند که مطالعه آنها اساس بحث ما را تشکیل می دهد. با تعریفی که ویژگی مشترک تمام مقاطع مخروطی را به دست می دهد، بحث را شروع می کنیم.

تعریف ۱۰.۳.۱۳ مقطع مخروطی مجموعه تمام نقاطی است مانند P از یک صفحه، به طوری که نسبت فاصله غیر جهت دار P از یک نقطه ثابت به فاصله غیر جهت دار P از خطی ثابت که از آن نقطه ثابت نمی گذرد، مقداری ثابت باشد.

نسبت ثابت در تعریف فوق، خروج از مرکز مقطع مخروطی نامیده و با e نمایش داده می شود. خروج از مرکز، e ، عددی غیر منفی است چون نسبت دو فاصله غیر جهت دار است. در حقیقت برای مقاطع مخروطی ناتبه ایده، $e > 0$. (بعداً خواهیم دید که وقتی $e = 0$ ، یک نقطه داریم.) اگر $e = 1$ ، با مقایسه تعاریف ۱.۳.۱۳ و ۱۰.۱.۱۳ می بینیم که مقطع مخروطی یک سهمی است؛ اگر $e < 1$ ، مقطع مخروطی یک بیضی است؛ و اگر $e > 1$ ، مقطع مخروطی یک هذلولی است.

نقطه ثابتی که در تعریف ۱۰.۳.۱۳ عنوان شد، کانون مقطع مخروطی نامیده می شود و خط ثابت را هادی متناظر آن می نامند. در بخش ۱۰.۱۳ آموختیم که سهمی یک کانون و یک هادی دارد. بعداً خواهیم دید که بیضی و هذلولی هر کدام دو کانون و دو هادی دارند، که هر کانون متناظر با یک هادی خاص است.

خطی که از يك كانون مقطع مخروطی گذشته و بر هادی آن عمود باشد، محور اصلی مقطع مخروطی نامیده می‌شود. نقاط تقاطع مقطع مخروطی با محور اصلی را رأسهای مقطع مخروطی می‌نامند. در مطالعه سهمی دیدیم که سهمی يك رأس دارد. ولی هم بیضی و هم هذلولی دو رأس دارند. که این امر در قضیه زیر ثابت شده است.

۲.۳.۱۳ قضیه اگر e خروج از مرکز يك مقطع مخروطی ناتباهیده باشد، آنگاه چنانچه $e \neq 1$ ، مقطع مخروطی دو رأس دارد و چنانچه $e = 1$ ، مقطع مخروطی فقط يك رأس دارد.

اثبات فرض کنید F نشان دهنده كانون مقطع مخروطی و D نقطه تقاطع هادی با محور اصلی آن باشد. و نیز فرض کنید d فاصله غیرجهت دار بین كانون و هادی آن باشد. در شکل ۹.۳.۱۳، F در طرف راست هادی، و در شکل ۱۰.۳.۱۳، F در طرف چپ هادی قرار دارد. فرض کنید V نشان دهنده يك رأس مقطع مخروطی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $e \neq 1$ ، دو رأس V و اگر $e = 1$ ، فقط يك رأس V وجود دارد. بنا به تعریف ۱.۳.۱۳

$$|\overline{FV}| = e|\overline{DV}|.$$

اگر علامتهای قدرمطلق را برداریم، به دست می‌آوریم

$$\overline{FV} = \pm e(\overline{DV}). \quad (1)$$

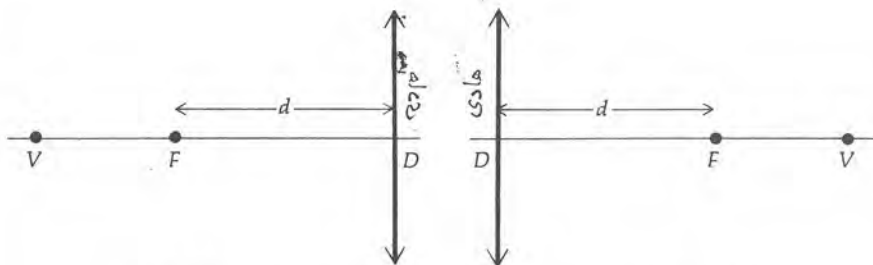
چون D ، F ، و V همگی روی محور اصلی قرار دارند، پس

$$\overline{DV} = \overline{DF} + \overline{FV}.$$

اگر F در طرف راست D باشد، $\overline{DF} = d$ ، پس، از رابطه بالا داریم

$$\overline{DV} = d + \overline{FV}. \quad (2)$$

از (۱) در (۲) قرار می‌دهیم



شکل ۱۰.۳.۱۳

شکل ۹.۳.۱۳

$$\overline{DV} = d \pm e(\overline{DV})$$

که از آن نتیجه می شود

$$\overline{DV} = \frac{d}{1 \pm e} \quad (۳)$$

اگر $e = ۱$ ، علامت منها در معادله بالا قابل قبول نیست چون با تقسیم بر صفر سروکار خواهیم داشت. اگر $e \neq ۱$ ، دو نقطه V به دست می آید؛ و اگر $e = ۱$ ، فقط يك نقطه V حاصل می شود.
اگر F در طرف چپ D باشد، $\overline{DF} = -d$. در این صورت به جای (۳) نتیجه زیر به دست می آید

$$\overline{DV} = \frac{-d}{1 + e}$$

□ که از این هم نتیجه مشابهی حاصل می شود. بنابراین، قضیه ثابت شده است.

نقطه ای که روی محور اصلی بیضی یا هذلولی به يك فاصله از دو رأس قرار دارد، مرکز مقطع مخروطی نامیده می شود. پس بیضی و هذلولی در مقایسه با سهمی که هیچ مرکزی ندارد چون فقط دارای يك رأس است، مقاطع مخروطی مرکزدار نامیده می شوند.

۳.۳.۱۳ قضیه مقطع مخروطی نسبت به محور اصلیش متقارن است.

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۱۸ را ببینید).

مثال ۱ با استفاده از تعریف ۱.۳.۱۳، معادله يك مقطع مخروطی را به دست آورید که خروج از مرکزش $۴/۵$ و کانون آن در نقطه $F(۱, -۲)$ و هادی متناظر F خط $۴y + ۱۷ = ۰$ باشد.

حل در شکل ۱۱.۳.۱۳ کانون، هادی، و نقطه $P(x, y)$ که نشان دهنده نقطه دلخواهی روی مقطع مخروطی است، دیده می شوند. فرض کنید نقطه D پای عمود از P بر هادی باشد. با استفاده از تعریف ۱.۳.۱۳،

$$\frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PD}|} = \frac{۴}{۵}$$

$$|\overline{PF}| = \frac{۴}{۵} |\overline{PD}|.$$

به كمك فرمول فاصله بين دو نقطه، $|PF|$ و $|PD|$ را به دست می آوریم و در معادله بالا قرار می دهیم؛ خواهیم داشت

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \frac{4}{5} \left| y + \frac{17}{4} \right|.$$

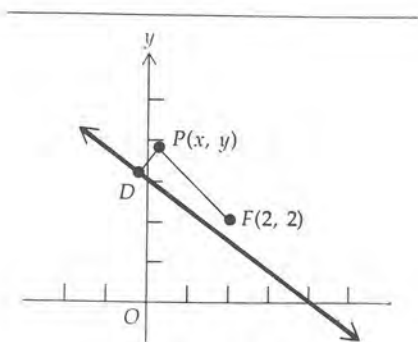
دو طرف معادله فوق را به توان دو می رسانیم و ساده می کنیم

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = \frac{16}{25} \left(y^2 + \frac{17}{2}y + \frac{289}{16} \right)$$

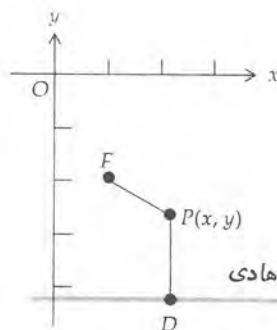
$$25x^2 - 50x + 25y^2 + 100y + 125 = 16y^2 + 136y + 289$$

$$25x^2 + 9y^2 - 50x - 36y = 164.$$

چون $e = (4/5) < 1$ ، پس معادله به دست آمده معادله بیضی است. ▲



شکل ۱۲.۳.۱۳



شکل ۱۱.۳.۱۳

مثال ۲ از تعریف ۱۰.۳.۱۳ و فرمول تمرین ۲۲ از تمرینهای ۷.۴ استفاده کنید، و معادله ای برای يك مقطع مخروطی كه خروج از مركزش ۳، كانون آن در $(2, 2)$ و هادی متناظر این كانون خط $3x + 4y = 12$ است، به دست آورید.

حل كانون، هادی، و نقطه $P(x, y)$ كه نشان دهنده نقطه دلخواهی روی مقطع مخروطی است، در شكل ۱۲.۳.۱۳ نشان داده شده اند. در این شكل، نقطه D پای عمود وارد از P بر هادی است.

باتوجه به تمرین ۲۲ از تمرینهای ۷.۴، فاصله نقطه $P_1(x_1, y_1)$ از خطی با معادله $Ax + By + C = 0$ به صورت زیر است

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بنابراین، فاصله $P(x, y)$ از هادی را با $|PD|$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر به دست می‌آید

$$|PD| = \frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5}.$$

با توجه به تعریف ۱.۳.۱۳،

$$|PF| = 3|PD|$$

پس

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 3 \left| \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{12}{5} \right|.$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$= \frac{9}{25}(9x^2 + 24xy + 16y^2 - 72x - 96y + 144)$$

$$25x^2 + 25y^2 - 100x - 100y + 400$$

$$= 81x^2 + 216xy + 144y^2 - 648x - 864y + 1296$$

$$56x^2 + 216xy + 119y^2 - 548x - 764y + 896 = 0.$$

چون $e = 3 > 1$ ، معادله فوق معادله يك هذلولی است. ▲

تمرینهای ۳.۱۳

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، تعریف ۱.۳.۱۳ و فرمول تمرین ۲۲ از تمرینهای ۷.۴ را به کار ببرید و معادله مقطع مخروطی را که دارای کانون، هادی متناظر، و خروج از مرکز مفروض است، به دست آورید. معین کنید که مقطع مخروطی، سهمی، بیضی، یا هذلولی است.

۱. کانون در $(2, 0)$ ؛ هادی $x = -4$ ؛ $e = 1/2$.

۲. کانون در $(0, -4)$ ؛ هادی $y = -2$ ؛ $e = 3/4$.

۳. کانون در $(0, -3)$ ؛ هادی $y = 3$ ؛ $e = 2$.

۴. کانون در $(3/2, 0)$ ؛ هادی $x = 0$ ؛ $e = 4/3$.

۵. کانون در $(-3, 2)$ ؛ هادی $x = 1$ ؛ $e = 3$.

۶. کانون در $(1, 3)$ ؛ هادی $y = 8$ ؛ $e = 3/2$.

$$۷. \text{ کانون در } (-4, -1/2)؛ \text{ هادی } y = -2؛ e = 1.$$

$$۸. \text{ کانون در } (2, -5)؛ \text{ هادی } x = -5/3؛ e = 1.$$

$$۹. \text{ کانون در } (1, 1)؛ \text{ هادی } 3x + y = 0؛ e = 5.$$

$$۱۰. \text{ کانون در } (2, -3)؛ \text{ هادی } x + y = 0؛ e = 1/4.$$

$$۱۱. \text{ کانون در } (4, -3)؛ \text{ هادی } 2x - y - 2 = 0؛ e = 1/2.$$

$$۱۲. \text{ کانون در } (-1, 4)؛ \text{ هادی } 2x - y + 3 = 0؛ e = 2.$$

در هر يك از تمرینهای ۱۳ تا ۱۷، نقطه P روی مقطع مخروطی است و کانون و هادی متناظر آن نیز داده شده‌اند. خروج از مرکز مقطع مخروطی را به دست آورید.

$$۱۳. \text{ کانون در } (3, 0)؛ \text{ هادی } 3x = 25؛ P = (0, 4).$$

$$۱۴. \text{ کانون در } (2, 0)؛ \text{ هادی } x = -4؛ P = (8, 0).$$

$$۱۵. \text{ کانون در } (4, -2)؛ \text{ هادی } 3x - 4y = 4؛ P = (2, -2).$$

$$۱۶. \text{ کانون در } (2, -3)؛ \text{ هادی } 2x - 2y - 1 = 0؛ P = (1, -2).$$

$$۱۷. \text{ کانون در } (-1, 0)؛ \text{ هادی } x + y + 1 = 0؛ P = (2, 3).$$

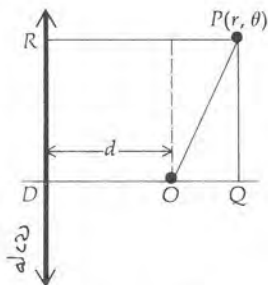
$$۱۸. \text{ قضیه } ۳.۳.۱۳ \text{ را ثابت کنید.}$$

۱۹. معادله‌ای به دست آورید که نمودارش شامل همه نقاطی مانند P از يك صفحه باشد، به طوری که نسبت فاصله غیر جهت دار P از نقطه $(ae, 0)$ به فاصله غیر جهت دار P از خط $x = a/e$ ، مقدار ثابتی باشد. فرض کنید $a^2(1 - e^2) = \pm b^2$ ، و سه حالت زیر را در نظر بگیرید: $e < 1$ ، $e = 1$ ، و $e > 1$.

۲۰. تمرین ۱۹ را در حالتی حل کنید که نقطه، $(-ae, 0)$ باشد و خط، $x = -a/e$.

۴.۱۳ معادلات قطبی مقاطع مخروطی

برای یافتن معادلات قطبی نسبتاً ساده‌ای از مقاطع مخروطی، قطب را در يك کانون و محور قطبی و امتدادش را روی محور اصلی در نظر می‌گیریم. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد، طرف چپ کانون باشد. فرض کنید D نقطه تقاطع این هادی با محور اصلی، و d نشان دهنده فاصله غیر جهت دار بین کانون و هادیش باشد (به شکل ۱۰۴.۱۳ رجوع کنید). همچنین فرض کنید $P(r, \theta)$ نقطه دلخواهی روی مقطع مخروطی در طرف راست هادی و روی ضلع دوم زاویه‌ای به اندازه θ باشد. عمودهای PQ و PR را به ترتیب بر محور اصلی و هادی رسم می‌کنیم. بنا به تعریف ۱۰۳.۱۳، نقطه



شکل ۱۰۴۰۱۳

P روی مقطع مخروطی است اگر و تنها اگر

$$|\overline{OP}| = e|\overline{RP}|. \quad (۱)$$

چون P در طرف راست هادی قرار دارد، $\overline{RP} > ۰$ ؛ لذا $|\overline{RP}| = \overline{RP}$. و چون $r > ۰$ ، پس $|\overline{OP}| = r$. بنابراین از (۱) داریم

$$r = e(\overline{RP}). \quad (۲)$$

از طرفی، $\overline{RP} = \overline{DQ} = \overline{DO} + \overline{OQ} = d + r \cos \theta$ ، اگر این عبارت را به جای $\overline{RP}$ در (۲) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$r = e(d + r \cos \theta)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}. \quad (۳)$$

اگر هادی متناظر با کانونی که در قطب است، در سمت راست کانون باشد، می توانیم معادله مقطع مخروطی را به صورت مشابهی به دست آوریم

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}. \quad (۴)$$

به دست آوردن (۴) به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۲۵ را ببینید).
اگر يك کانون مقطع مخروطی در قطب و محور قطبی موازی هادی متناظر باشد، آنگاه محور $\pi/۲$ و امتدادش روی محور اصلی است و معادله زیر را به دست می آوریم

$$r = \frac{ed}{1 \pm e \sin \theta} \quad (۵)$$

که e و d به ترتیب خروج از مرکز و فاصله غیر جهت دار بین کانون و هادی متناظرش هستند.

علامت $+$ وقتی در نظر گرفته می‌شود که هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد، بالای کانون باشد و علامت $-$ وقتی در نظر گرفته می‌شود که هادی زیر کانون باشد. به دست آوردن (۵) به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرینهای ۲۶ و ۲۷ را ببینید).
حال در مورد نمودار معادله (۳) در هر يك از سه حالت $e = 1$ ، $e < 1$ ، و $e > 1$ بحث می‌کنیم. در مسورد نمودار معادلات (۴) و (۵) نیز به صورت مشابهی می‌توان استدلال کرد.

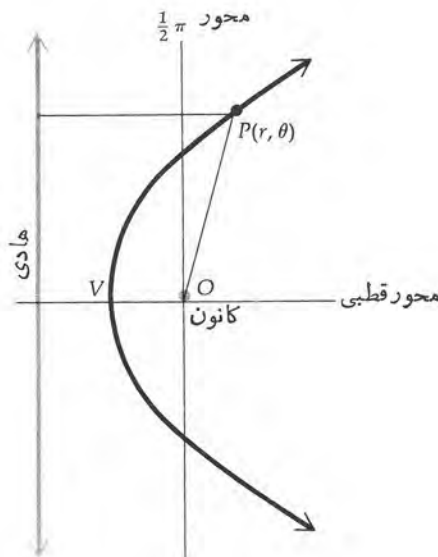
حالت ۱: $e = 1$. مقطع مخروطی، سهمی است.
معادله (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$r = \frac{d}{1 - \cos \theta}. \quad (۶)$$

وقتی که $\theta = 0$ ، r معین نیست؛ ولی، برای تمام مقادیر دیگر θ که $0 < \theta < 2\pi$ ، r معین است. با مشتق گیری از (۶) به دست می‌آوریم

$$D_{\theta}r = \frac{-d \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

با قراردادن $D_{\theta}r = 0$ ، برای مقادیر θ در بازه $(0, 2\pi)$ به دست می‌آوریم $\theta = \pi$. چون وقتی که $0 < \theta < \pi$ ، داریم $D_{\theta}r < 0$ ، و وقتی که $\pi < \theta < 2\pi$ ، داریم $D_{\theta}r > 0$ ،



شکل ۲۰۴۰۱۳

پس r مقدار مینیمم مطلقی در $\theta = \pi$ دارد. وقتی که $\theta = \pi$ ، $r = d/2$ ، و نقطه $(d/2, \pi)$ رأس سهمی است. بنا براین، وقتی که نقطه‌ای روی سهمی، رأس سهمی باشد، فاصله غیر جهت‌دار کانون از این نقطه کوتاهترین فاصله است.

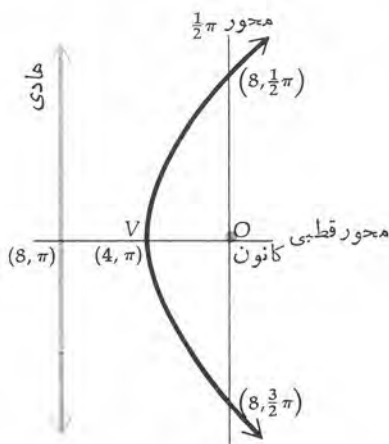
بنا به قضیه ۳.۳.۱۳، سهمی نسبت به محور اصلیش متقارن است؛ و بنا به قضیه ۲.۳.۱۳ سهمی یک رأس دارد. دقت کنید که منحنی شامل قطب نیست چون هیچ مقداری از θ وجود ندارد که مقدار h را به r نسبت دهد. نمودار سهمی در شکل ۲.۴.۱۳ نشان داده شده است.

مثال ۱ کانون سهمی در قطب و رأس آن در نقطه $(4, \pi)$ است. معادله سهمی و معادله هادی آن را به دست آورید. نمودار سهمی و هادی آن را رسم کنید.

حل چون کانون در قطب و رأس در $(4, \pi)$ است، پس محور قطبی و امتدادش روی محور اصلی سهمی است. همچنین رأس در طرف چپ کانون قرار دارد؛ پس هادی نیز در طرف چپ کانون است. بنا براین معادله این سهمی به صورت (3) می‌باشد. چون رأس در $(4, \pi)$ است، داریم $d/2 = 4$ ؛ و $d = 8$. خروج از مرکز برابر است با $e = 1$ ، و بنا براین معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$r = \frac{8}{1 - \cos \theta}.$$

معادله هادی از $r \cos \theta = -d$ به دست می‌آید، و چون $d = 8$ ، پس $r \cos \theta = -8$. شکل ۳.۴.۱۳ نموداری از سهمی و هادی آن را نشان می‌دهد.



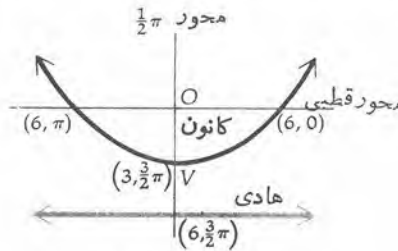
شکل ۳.۴.۱۳

مثال ۲ درحالتی که کانون سهمی در قطب و رأس آن در نقطه $(۳, ۳\pi/۲)$ باشد، مثال ۱ را حل کنید.

حل رأس سهمی در پایین کانون، و محور $\pi/۲$ و امتدادش روی محور اصلی سهمی است. بنا بر این هادی نیز در پایین کانون است، و معادله سهمی به صورت معادله (۵) با علامت منفی است. فاصله غیر جهت دار کانون تا رأس برابر است با $d/۲ = ۳$ ؛ پس $d = ۶$. بنا بر این، با توجه به (۵) معادله سهمی به صورت زیر است

$$r = \frac{۶}{۱ - \sin \theta}.$$

معادله هادی از $r \sin \theta = -d$ به دست می آید. چون $d = ۶$ ، پس $r \sin \theta = -۶$ معادله هادی در شکل ۴.۴.۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۴.۴.۱۳

▲

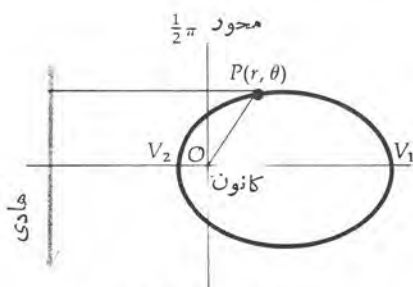
حالت ۲: $e < ۱$. مقطع مخروطی، بیضی است.

وقتی $e < ۱$ ، مخروط کسر (۳) هرگز صفر نمی شود؛ پس r به ازای تمام مقادیر θ وجود دارد. برای پیدا کردن اکستریمهای مطلق r بر بازه $[۰, ۲\pi]$ ، $D_\theta r$ را به دست می آوریم

$$D_\theta r = \frac{-e^2 d \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2} \quad (۷)$$

به ازای θ در بازه $[۰, ۲\pi]$ ، وقتی $\theta = ۰$ و $\theta = \pi$ ، داریم $D_\theta r = ۰$. وقتی $-\pi/۲ < \theta < \pi/۲$ ، $D_\theta r > ۰$ ؛ و وقتی $\pi/۲ < \theta < ۳\pi/۲$ ، $D_\theta r < ۰$ ؛ و وقتی $\theta = ۰$ ، r دارای مقدار ماکسیمم مطلق برابر با $ed/(1 - e)$ است. وقتی $\pi/۲ < \theta < \pi$ ، داریم $D_\theta r < ۰$ ؛ و وقتی $\pi < \theta < ۳\pi/۲$ ، داریم $D_\theta r > ۰$. پس r مینیمم مطلق برابر با $ed/(1 + e)$ به ازای $\theta = \pi$ دارد. نقاط $(ed/(1 - e), ۰)$ و $(ed/(1 + e), \pi)$ رأسهای بیضی هستند. آنها را به ترتیب با $V_۱$ و $V_۲$ نشان می دهیم. از اینرو، فاصله غیر جهت دار کانون $(۰, ۰)$ تا نقطه ای روی بیضی بزرگترین فاصله است

وقتی آن نقطه، V_1 باشد و کوچکترین فاصله است وقتی آن نقطه، V_2 باشد. بنا به قضیه ۳.۳.۱۳، بیضی نسبت به محور اصلیش متقارن است. هیچ مقداری از θ وجود ندارد که مقدار صفر را به r نسبت دهد؛ پس منحنی شامل قطب نیست. نمودار این بیضی را در شکل ۵.۴.۱۳ می بینید.



شکل ۵.۴.۱۳

مثال ۳ معادله بیضی را به دست آورید که یک کانون آن در قطب و رأسهایش در $(\pi, 2)$ و $(0, 5)$ باشند. معادله ای برای هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد بنویسید. نمودار بیضی را رسم کنید.

حل چون رأسها در $(\pi, 2)$ و $(0, 5)$ قرار دارند، محور قطبی و امتدادش روی محور اصلی بیضی است. هادی متناظر با کانونی که در قطب است در طرف چپ کانون می باشد چون نزدیکترین رأس به این کانون $(\pi, 2)$ است. بنابراین معادله خواسته شده به صورت معادله (۳) خواهد بود. رأس V_1 در $(0, 5)$ و V_2 در $(\pi, 2)$ است. از بحث حالت ۲ نتیجه می شود که

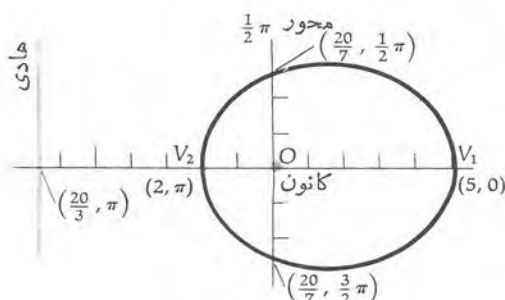
$$\frac{ed}{1+e} = 2 \quad \text{و} \quad \frac{ed}{1-e} = 5$$

دو معادله را با هم حل می کنیم و به دست می آید $e = 3/4$ و $d = 20/3$. پس، با توجه به (۳) معادله بیضی به صورت زیر خواهد بود

$$r = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{20}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cos \theta}$$

$$r = \frac{20}{4 - 3 \cos \theta}$$

چون $d = 20/3$ ، معادله هادی متناظر با کانونی که در قطب می باشد، به صورت $r \cos \theta = -20/3$ و یا $3r \cos \theta = -20$ است. نمودار بیضی در شکل ۶.۴.۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۶.۴.۱۳

مثال ۴ معادله يك مقطع مخروطی به صورت زیر است

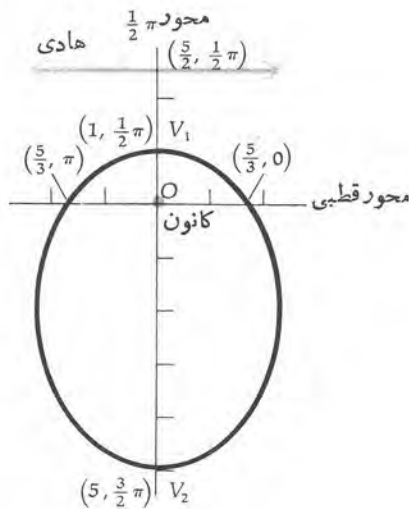
$$r = \frac{5}{3 + 2 \sin \theta}.$$

مطلوب است تعیین خروج از مرکز، نوع مقطع مخروطی، معادله هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد، رأسها؛ وترسیم نمودار.

حل صورت ومخرج کسر معادله داده شده را بر ۳ تقسیم می کنیم ونتیجه می شود

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{2}{3} \sin \theta}.$$

که این معادله به صورت معادله (۵) با علامت + می باشد. خروج از مرکز برابر است با $e = 2/3 < 1$ ؛ پس مقطع مخروطی بیضی است. چون $ed = 5/3$ ، $d = (5/3) \div (2/3) = 5/2$. محور $\pi/2$ و امتدادش روی محور اصلی بیضی است. هادی متناظر با کانونی که در قطب است، بالای کانون، و معادله آن به صورت $r \sin \theta = 5/2$ است. وقتی $\theta = \pi/2$ ، $r = 1$ ؛ و وقتی $\theta = 3\pi/2$ ، $r = 5$. بنابراین رئوس در نقاط $(1, \pi/2)$ و $(5, 3\pi/2)$ قرار دارند. نمودار بیضی در شکل ۶.۴.۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۷۰۴۰۱۳

حالت ۳: $e > 1$. مقطع مخروطی، هذلولی است. در به دست آوردن (۳) فرض کردیم که نقطه P روی مقطع مخروطی در طرف راست هادی مفروض و واقع بر ضلع دوم زاویه θ رادیان است که r در این صورت مثبت است. در دو حالت قبلی، وقتی که مقطع مخروطی بیضی یا سهمی بود، کل منحنی را با این فرضها به دست آوردیم. ولی، وقتی $e > 1$ ، خواهیم دید که فقط یکی از دو شاخه هذلولی به ازای $r > 0$ به دست می آید، و این شاخه در طرف راست هادی است. همچنین شاخه دیگری در طرف چپ هادی مفروض وجود دارد؛ برای به دست آمدن این شاخه، بایستی درحین آنکه θ مقداری را در بازه $[0, 2\pi)$ اختیار می کند، r بتواند هم مقادیر منفی و هم مقادیر مثبت را بگیرد.

اگر در (۳) داشته باشیم $e > 1$ ، وقتی که $\cos \theta = 1/e$ ، r نامعین است. دو مقدار θ از $[0, 2\pi)$ در این معادله صدق می کنند که عبارت اند از

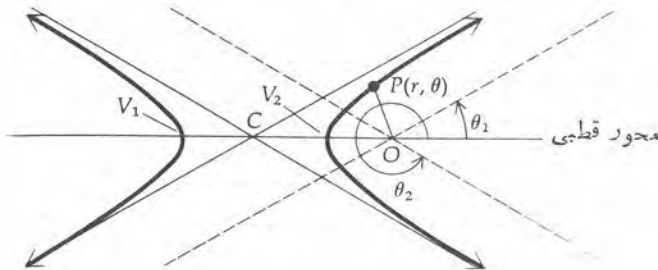
$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{1}{e} \quad \text{و} \quad \theta_2 = 2\pi - \cos^{-1} \frac{1}{e}$$

همچنانکه θ از ۰ تا θ_1 افزایش می یابد، مقادیر r را بررسی می کنیم. وقتی $\theta = 0$ ، داریم $r = ed/(1-e)$ ، و چون $e > 1$ ، $r < 0$. پس نقطه $(ed/(1-e), 0)$ رأس چپ هذلولی است. تابع کسینوسی در بازه $(0, \theta_1)$ نزولی است؛ بنابراین به ازای $0 < \theta < \theta_1$ ، $\cos \theta > \cos \theta_1 = 1/e$ ، یا معادلش $0 < 1 - e \cos \theta$. پس به ازای مقادیر θ در بازه $(0, \theta_1)$ ، داریم $r = ed/(1 - e \cos \theta) < 0$ ، وقتی که $\theta = \theta_1$ ، r

نامعین است؛ معیناً،

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} r = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \frac{ed}{1 - e \cos \theta} = -\infty.$$

پس، نتیجه می‌گیریم همچنانکه θ از ۰ تا θ_1 افزایش می‌یابد، $r < 0$ و $|r|$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد. از این مقادیر θ نیمه پایینی شاخهٔ چپ منحنی را به‌دست می‌آوریم. شکل ۸.۴.۱۳ را ببینید. بعداً نشان می‌دهیم که هذلولی دوجانب دارد. برای این هذلولی یکی از مجانبها موازی خط $\theta = \theta_1$ است.



شکل ۸.۴.۱۳

حال نقاط روی هذلولی را وقتی θ با اتخاذ مقادیر بین θ_1 و θ_2 افزایش می‌یابد، در نظر می‌گیریم. وقتی $\theta_1 < \theta < \theta_2$ داریم $\cos \theta < \cos \theta_1 = 1/e$ و یا معادلش $1 - e \cos \theta > 0$. بنابراین، به‌ازای مقادیر θ در بازهٔ (θ_1, θ_2) داریم $r > 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} r = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^+} \frac{ed}{1 - e \cos \theta} = +\infty$$

وقتی $\theta = \pi$ ، $r = ed/(1+e)$ ؛ پس نقطهٔ $(ed/(1+e), \pi)$ رأس راست هذلولی است. اگر $D_\theta r$ را از (۳) به‌دست آوریم، داریم

$$D_\theta r = -\frac{e^2 d \sin \theta}{(1 - e \cos \theta)^2}. \quad (۸)$$

وقتی $\theta_1 < \theta < \pi$ ، داریم $\sin \theta > 0$ ؛ پس $D_\theta r < 0$ ، که از آن نتیجه می‌گیریم وقتی θ در بازهٔ (θ_1, π) باشد، r نزولی است. بنابراین، به‌ازای مقادیر θ در بازهٔ (θ_1, π) نیمه بالایی شاخهٔ راست هذلولی به‌دست می‌آید که در شکل ۸.۴.۱۳ نشان داده شده‌است. وقتی $\pi < \theta < \theta_2$ ، داریم $\sin \theta < 0$ ؛ پس بنابه (۸)، $D_\theta r > 0$. بنابراین وقتی θ در بازهٔ (π, θ_2) باشد، r صعودی است. به‌علاوه،

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^-} r = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^-} \frac{ed}{1 - e \cos \theta} = +\infty.$$

به همین ترتیب، نیمه پایینی شاخه راست هذلولی را به ازای مقادیر θ در بازه (π, θ_2) به دست می آوریم. مجانب دیگر هذلولی موازی با خط $\theta = \theta_2$ است.

تابع کسینوسی در بازه $(\theta_2, 2\pi)$ صعودی است. پس وقتی $\theta_2 < \theta < 2\pi$ داریم $\cos \theta > \cos \theta_2 = 1/e$ ، و یا $1 - e \cos \theta < 0$. بنابراین از (۳) به ازای مقادیر θ در بازه $(\theta_2, 2\pi)$ داریم $r < 0$. همچنین

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} r = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{ed}{1 - e \cos \theta} = -\infty$$

که بنا به (۸) نتیجه می شود $D_\theta r > 0$ ؛ پس وقتی $\theta_2 < \theta < 2\pi$ ، r صعودی است. وقتی $r < 0$ و r صعودی باشد، $|r|$ نزولی است. لذا، به ازای مقادیر θ در بازه $(\theta_2, 2\pi)$ ، نیمه بالایی شاخه چپ هذلولی به دست می آید؛ بنابراین، منحنی شکل ۸۰۴۰۱۳ کامل می شود.

مثال ۵ محور قطبی و امتدادش روی محور اصلی هذلولی است که يك كانون آن در قطب می باشد. هادی متناظر نیز در طرف چپ كانون قرار دارد. اگر هذلولی شامل نقطه $(1, 2\pi/3)$ باشد و $e = 2$ ، مطلوب است (الف) معادله هذلولی؛ (ب) رئوس آن، (پ) مرکز آن، (ت) معادله هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد. نمودار هذلولی را رسم کنید.

حل معادله هذلولی به صورت (۳) با $e = 2$ است؛ پس داریم

$$r = \frac{2d}{1 - 2 \cos \theta}.$$

چون نقطه $(1, 2\pi/3)$ روی هذلولی قرار دارد، مختصاتش در معادله صدق می کنند، بنابراین

$$1 = \frac{2d}{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

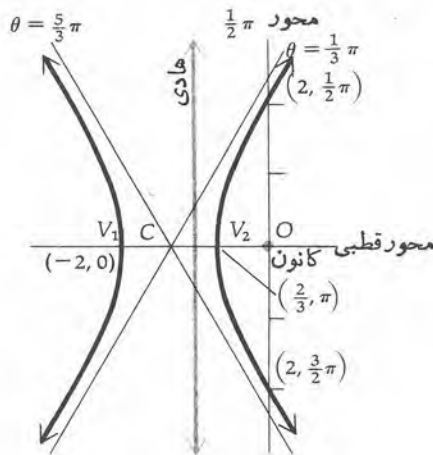
که از آن $d = 1$ نتیجه می شود. پس معادله هذلولی به صورت زیر است

$$r = \frac{2}{1 - 2 \cos \theta}. \quad (9)$$

رئوس، نقاطی روی هذلولی هستند که به ازای آنها $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ در (۹)، وقتی $\theta = 0$ ، $r = -2$ ؛ و وقتی $\theta = \pi$ ، $r = 2/3$. بدین ترتیب، رأس چپ، V_1 ، در نقطه

$(-2, 0)$ و رأس راست، V_2 ، در نقطه $(2/3, \pi)$ قرار دارند. مرکز هذلولی روی محور اصلی آن در وسط دو رأس قرار دارد؛ و نقطه $(2/3, \pi)$ است.

معادله هادی متناظر با کانونی که در قطب می باشد، عبارت است از $r \cos \theta = -d$. چون $d=1$ ، این معادله به صورت $r \cos \theta = -1$ در می آید. برای کمک به ترسیم هذلولی، ابتدا دو مجانب آن را رسم می کنیم. در بحث حالت ۳ گفتیم که این خطوط از مرکز هذلولی می گذرند و با خطوط $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ موازی اند، که θ_1 و θ_2 مقادیری از θ در بازه $[0, 2\pi)$ هستند که به ازای آنها r نامعین است. بنا بر (۹) اگر $1 - 2 \cos \theta = 0$ آنگاه r نامعین است. بنابراین نتیجه می شود $\theta_1 = \pi/3$ و $\theta_2 = 5\pi/3$. شکل ۹.۴.۱۳ نمودار هذلولی را همراه با دو مجانب آن، و هادی متناظر با کانونی را که در قطب می باشد، نشان می دهد.



شکل ۹.۴.۱۳

مثال ۶ اگر هادی متناظر با کانونی که در قطب قرار دارد، خط $r \cos \theta = 4$ باشد و داشته باشیم $e = 3/2$ ، معادله قطبی هذلولی را به دست آورید.

حل هادی داده شده عمود بر محور قطبی است و به فاصله ۴ واحد در طرف راست کانونی که در قطب می باشد، قرار دارد. بنابراین، معادله هذلولی به صورت (۴) است:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

چون $d = 4$ و $e = 3/2$ ، معادله به صورت زیر درمی آید

$$r = \frac{\frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2} \cos \theta}$$

$$\blacktriangle \quad r = \frac{12}{2 + 3 \cos \theta}$$

تمرینهای ۴.۱۳

دو تمرینهای ۱ و ۲، هر کدام از معادلات قطبی نشان دهنده یک مقطع مخروطی است که یک قانون آن در قطب است. مقطع مخروطی را مشخص کنید.

$$1. \text{ (الف) } r = \frac{3}{1 - \cos \theta} \quad \text{(ب) } r = \frac{6}{4 + 5 \sin \theta}$$

$$\text{(ب) } r = \frac{5}{4 - \cos \theta} \quad \text{(ت) } r = \frac{4}{1 + \sin \pi}$$

$$2. \text{ (الف) } r = \frac{1}{1 - \sin \theta} \quad \text{(ب) } r = \frac{2}{3 + \sin \theta}$$

$$\text{(ب) } r = \frac{3}{2 + 4 \cos \theta} \quad \text{(ت) } r = \frac{5}{1 - \cos \pi}$$

دو تمرینهای ۳ تا ۱۴، معادله مقطبی مخروطی که قانونی در قطب دارد، داده شده است. در هر تمرین، مطلوب است به دست آوردن (الف) خروج از مرکز؛ (ب) نوع مقطع مخروطی؛ (پ) معادله هادی متناظر با قانونی که در قطب قرار دارد؛ (ت) نمودار منحنی.

$$3. \quad r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \quad 4. \quad r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$$

$$5. \quad r = \frac{5}{2 + \sin \theta} \quad 6. \quad r = \frac{4}{1 - 3 \cos \theta}$$

$$7. \quad r = \frac{6}{3 - 2 \cos \theta} \quad 8. \quad r = \frac{1}{2 + \sin \theta}$$

$$9. \quad r = \frac{9}{5 - 6 \sin \theta} \quad 10. \quad r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}$$

$$r = \frac{7}{3 + 4 \cos \theta} \quad ۱۲$$

$$r = \frac{10}{7 - 2 \sin \theta} \quad ۱۱$$

$$r = \frac{1}{5 - 3 \sin \theta} \quad ۱۴$$

$$r = \frac{10}{4 + 5 \cos \theta} \quad ۱۳$$

د تمرینهای ۱۵ تا ۲۰، مطلوب است معادله قطبی مقطعی مخروطی که يك كانون آن در قطب باشد و در شرایط داده شده صدق کند.

۱۵. سهمی؛ رأس در $(4, 3\pi/2)$.

۱۶. بیضی؛ $e = 1/2$ ؛ يك رأس در $(4, \pi)$.

۱۷. هذلولی؛ $e = 4/3$ ؛ و $r \cos \theta = 9$ هادی متناظر با کانونی است که در قطب قرار دارد.

۱۸. هذلولی؛ رئوس در $(1, \pi/2)$ و $(3, \pi/2)$.

۱۹. بیضی؛ رئوس در $(3, 0)$ و $(1, \pi)$.

۲۰. سهمی؛ رأس در $(6, \pi/2)$.

۲۱. (الف) مطلوب است معادله قطبی هذلولی که يك كانون آن در قطب و هادی متناظر با اين كانون در طرف چپ كانون باشد، با اين فرض که نقطه $(2, 4\pi/3)$ روی هذلولی باشد و $e = 3$ ؛ (ب) مطلوب است معادله هادی متناظر با کانونی از هذلولی که در قطب قرار دارد.

۲۲. (الف) معادله قطبی هذلولی را به دست آورید که برای آن، $e = 3$ ، و خط $r \sin \theta = 3$ هادی متناظر با کانون منطبق بر قطب باشد؛ (ب) معادلات قطبی دو خط را بنویسید که از قطب می گذرند و موازی با مجانبهای هذلولی هستند.

۲۳. مساحت ناحیه داخل بیضی $r = 6/(2 - \sin \theta)$ و بالای سهمی $r = 3/(1 + \sin \theta)$ را به دست آورید.

۲۴. برای بیضی و سهمی تمرین ۲۳، مساحت ناحیه داخل بیضی و پایین سهمی را به دست آورید.

۲۵. نشان دهید معادله يك مقطع مخروطی که محور اصلی آن روی محور قطبی و امتدادش، کانونی از آن در قطب، و هادی متناظر با اين كانون واقع در طرف راست آن باشد، به صورت زیر است

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

۲۶. نشان دهید معادلهٔ يك مقطع مخروطی که محور اصلی آن روی محور $\pi/2$ و امتدادش، کانونی از آن در قطب، و هادی متناظر با این کانون بالای آن باشد، دارای معادله‌ای به صورت $r = ed/(1 + e \sin \theta)$ می‌باشد.

۲۷. محور اصلی يك مقطع مخروطی روی محور $\pi/2$ و امتدادش، کانونی از آن در قطب، و هادی متناظر با این کانون در زیر آن است. نشان دهید که معادلهٔ اين مقطع مخروطی عبارت است از

$$r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}.$$

۲۸. نشان دهید معادلهٔ $r = k \csc^2(\theta/2)$ ، که در آن k يك مقدار ثابت است، معادلهٔ قطبی يك سهمی است.

۲۹. ستارهٔ دنباله‌داری در يك مدار سهموی حول خورشید که در کانون سهمی قرار دارد، حرکت می‌کند. وقتی که ستارهٔ دنباله‌دار در ۸۵ میلیون میلی خورشید می‌باشد، پاره خط بین خورشید و ستاره با محور مدار زاویهٔ $\pi/3$ رادیان را می‌سازد. (الف) معادلهٔ مدار ستارهٔ دنباله‌دار را به دست آورید؛ (ب) این ستاره چقدر به خورشید نزدیک می‌شود؟

۳۰. مدار سیاره‌ای به شکل يك بیضی با معادلهٔ $r = p/(1 + e \cos \theta)$ است که قطب آن در خورشید می‌باشد. اندازهٔ متوسط فاصلهٔ سیاره از خورشید را نسبت به θ به دست آورید.

۳۱. با استفاده از تعریف ۱.۳.۱۳، معادلهٔ قطبی يك مقطع مخروطی مرکزدار را به دست آورید که مرکز آن در قطب، محور اصلیش روی محور قطبی و امتدادش، و فاصلهٔ قطب تا هادی برابر a/e باشد.

۳۲. نشان دهید که در نقاط تقاطع سهمیهای $r = a/(1 + \cos \theta)$ و $r = b/(1 - \cos \theta)$ خطوط مماس برهم عمود هستند.

۵.۱۳ معادلات دکارتی مقاطع مخروطی

در بخش ۴.۱۳ آموختیم که معادلهٔ قطبی مقطع مخروطی به صورت زیر است

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

یا معادلش

$$r = e(r \cos \theta + d). \quad (۱)$$

می توان با قراردادن $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ به جای r و x به جای $r \cos \theta$ ، نمایشی دکارتی از (۱) را به دست آورد. با این جانشینها خواهیم داشت

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = e(x + d).$$

دو طرف معادله فوق را به توان دو می رسانیم و به دست می آوریم

$$x^2 + y^2 = e^2 x^2 + 2e^2 dx + e^2 d^2$$

$$y^2 + x^2(1 - e^2) = 2e^2 dx + e^2 d^2. \quad (2)$$

اگر $e = 1$ ، (۲) به صورت زیر درمی آید

$$y^2 = 2d\left(x + \frac{1}{2}d\right). \quad (3)$$

اگر مبدأ را به نقطه $(-d/2, 0)$ منتقل کنیم، با قراردادن $\bar{x} = x - (d/2)$ به جای x و $\bar{y}$ به جای y در (۳) داریم

$$\bar{y}^2 = 2d\bar{x}. \quad (4)$$

معادله (۴) شبیه معادله (۱) در بخش ۱۰.۱۳ است که عبارت بود از

$$y^2 = 4px$$

که معادله سهمی است و کانون آن در $(p, 0)$ و هادی آن خط $x = -p$ است. بنابراین، نسبت به محور $\bar{x}$ ها و $\bar{y}$ ها، (۴) معادله يك سهمی است که کانون آن در $(d/2, 0)$ است، که این نقطه نسبت به محور $\bar{x}$ ها و $\bar{y}$ ها مبدأ می باشد. این سهمی شامل محوری موازی یکی از محورهاى مختصات است که قبلاً به تفصیل در مورد آن در بخشهای ۱۰.۱۳ و ۲۰.۱۳ بحث کردیم.

اگر $e \neq 1$ ، دوطرف (۲) را بر $1 - e^2$ تقسیم می کنیم و به دست می آوریم

$$x^2 - \frac{2e^2 d}{1 - e^2} x + \frac{1}{1 - e^2} y^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}.$$

جملات شامل x را با اضافه کردن $e^2 d^2 / (1 - e^2)^2$ در دوطرف معادله به صورت يك مربع کامل در می آوریم

$$\left(x - \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2} y^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (5)$$

اگر مبدأ به نقطه $(e^2 d / (1 - e^2), 0)$ منتقل شود، (۵) به صورت زیر درمی آید

$$\bar{x}^2 + \frac{1}{1-e^2} \bar{y}^2 = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1. \quad (۶)$$

حال فرض كنيد $a^2 = e^2 d^2 / (1-e^2)^2$ كه $a > 0$. در اين صورت

$$a = \begin{cases} \frac{ed}{1-e^2} & 0 < e < 1 \\ \frac{ed}{e^2-1} & e > 1 \end{cases} \quad (۷)$$

پس (۶) را مى توان به صورت زير نوشت

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$$

با قرار دادن x و y به جاي $\bar{x}$ و $\bar{y}$ داريم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1. \quad (۸)$$

معادله (۸) صورتى متعارف از معادله دكارتى مقطع مخروطى مركزدارى است كه محور اصليش روى محور xx هاست. چون (۵) معادله يك مقطع مخروطى است كه كانونى در مبدأ (قطب) دارد، و (۸) از (۵) با انتقال مبدأ به نقطه $(0, e^2 d / (1-e^2))$ به دست مى آيد. نتيجه مى شود كه مقطع مخروطى مركزدارى به معادله (۸)، كانونى در نقطه $(0, -e^2 d / (1-e^2))$ دارد. با اين وجود از (۷) نتيجه مى شود كه

$$\frac{-e^2 d}{1-e^2} = \begin{cases} -ae & 0 < e < 1 \\ ae & e > 1 \end{cases}$$

بنابراين، نتيجه مى گيريم كه اگر (۸) معادله يك بيضى باشد ($0 < e < 1$)، اين بيضى كانونى در نقطه $(-ae, 0)$ دارد. اگر (۸) معادله يك هذلولى باشد ($e > 1$)، اين هذلولى كانونى در $(ae, 0)$ دارد. در هر حالت هادى متناظر به فاصله d واحد در طرف چپ كانون واقع است. پس اگر نمودار (۸) بيضى باشد، هادى متناظر با كانونى كه در $(-ae, 0)$ قرار دارد، داراى معادله زير است

$$x = -ae - d.$$

چون وقتی $0 < e < 1$ ، داریم $d = a(1 - e^2)/e$ ، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$x = -ae - \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}.$$

به طور مشابه، اگر نمودار (۸) هذلولی باشد، هادی متناظر با کانونی که در $(ae, 0)$ قرار دارد، دارای معادله زیر است

$$x = ae - d.$$

وقتی $e > 1$ ، داریم $d = a(e^2 - 1)/e$ ؛ پس معادله هادی فوق را می توان به صورت زیر نوشت

$$x = \frac{a}{e}.$$

پس، نشان داده ایم که اگر (۸) معادله بیضی باشد، یک کانون و هادی متناظر آن $(-ae, 0)$ و $x = -a/e$ هستند؛ و اگر (۸) معادله هذلولی باشد، یک کانون و هادی متناظر این کانون $(ae, 0)$ و $x = a/e$ می باشند.

چون (۸) فقط شامل توانهای زوج x و y می باشد، نمودار آن نسبت به هر دو محور x و y متقارن است. بنابراین، اگر کانونی در $(-ae, 0)$ موجود باشد که دارای هادی متناظر $x = -a/e$ باشد به خاطر وجود تقارن، کانونی نیز در $(ae, 0)$ وجود دارد که دارای هادی متناظر $x = a/e$ است. به همین ترتیب، به ازای کانونی در $(ae, 0)$ با هادی متناظر $x = a/e$ ، کانونی در $(-ae, 0)$ با هادی متناظر $x = -a/e$ وجود خواهد داشت. این نتایج در قضیه زیر خلاصه شده اند.

۱۰۵.۱۳ قضیه مقطع مخروطی مرکز داری با معادله زیر

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1 \quad (9)$$

که در آن $a > 0$ ، کانونی در $(-ae, 0)$ دارد که هادی متناظرش $x = -a/e$ است، و همچنین کانونی در $(ae, 0)$ دارد که هادی متناظرش $x = a/e$ است.

شکلهای ۱۰۵.۱۳ و ۲۰۵.۱۳ نمودار (۹) را همراه با کانونها و هادیها در حالت های مربوط به بیضی و هذلولی نشان می دهند.

تصور کنید که در معادله (۹)، $0 < e < 1$. آنگاه مقطع مخروطی یک بیضی است.

چون در این حالت $1 - e^2 > 0$ ، نتیجه می گیریم که $\sqrt{1 - e^2}$ يك عدد حقیقی است. بنا بر این فرض می کنیم

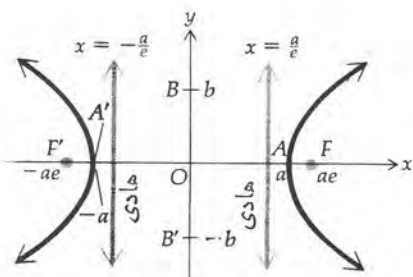
$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (10)$$

چون $a > 0$ ، نتیجه می شود که $b > 0$. با استفاده از (۱۰) و (۹) به دست می آوریم

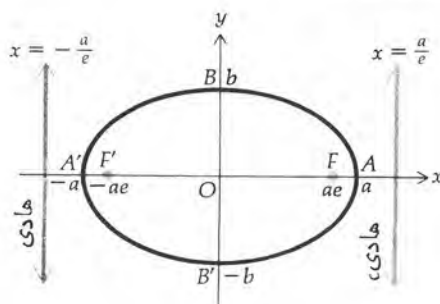
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

معادله (۱۱) معادله بیضی است که محور اصلی آن روی محور x هاست. چون رأسها، نقاط تقاطع بیضی با محور اصلی آن هستند، عبارت اند از $(-a, 0)$ و $(a, 0)$. مرکز بیضی در مبدأ است چون نقطه وسط بین رأسهاست. شکل ۱۰۵.۱۳ نمودار این بیضی را نشان می دهد. همچنانکه دو پاراگراف بعدی را می خوانید به این شکل مراجعه کنید.

اگر رأسهای $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ را به ترتیب با A' و A نمایش دهیم، پاره خط AA' از محور اصلی را قطر بزرگ بیضی می نامیم، که طولش $2a$ واحد است. پس می گوئیم که a ، طول نصف قطر بزرگ بیضی بر حسب واحد طول است. بیضی با معادله (۱۱)، محور y ها را در نقاط $(0, b)$ و $(0, -b)$ قطع می کند، که این نقاط را به ترتیب با B و B' نمایش می دهیم. پاره خط BB' قطر کوچک بیضی نامیده می شود. طول آن $2b$ واحد است. پس b ، طول نصف قطر کوچک بیضی بر حسب واحد طول است. چون a و b اعداد مثبتی هستند و $0 < e < 1$ ، از (۱۰) نتیجه می شود که $b < a$.



شکل ۲۰۵.۱۳



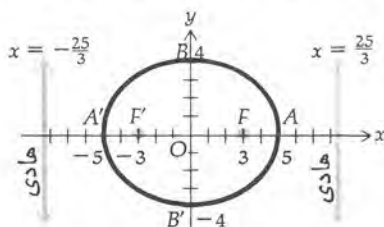
شکل ۱۰۵.۱۳

مثال ۱ بیضی با معادله زیر مقروض است

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

مطلوب است یافتن رأسها، کانونها، هادیها، خروج از مرکز و دوانتهای قطر کوچک. نمودار بیضی را رسم کنید، و کانونها و هادیها را نشان دهید.

حل از معادله بیضی داریم $a^2 = 25$ و $b^2 = 16$ ؛ پس $a = 5$ و $b = 4$. بنابراین رأسها در نقاط $A'(5, 0)$ و $A'(-5, 0)$ و دوانتهای قطر کوچک در نقاط $B'(0, 4)$ و $B(0, -4)$ هستند. با توجه به (۱۰) داریم $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5}$ ، که از آن به دست می آید $e = \frac{3}{5}$. کانونها و رأسهای بیضی را با استفاده از قضیه ۱۰.۵.۱۳ به دست می آوریم. چون $ae = 3$ و $a/e = 25/3$ ، نتیجه می گیریم که یک کانون F در $(3, 0)$ ، و هادی متناظرش $x = 25/3$ است؛ کانون دیگر F' در $(-3, 0)$ است و هادی متناظر آن دارای معادله $x = -25/3$ است. نمودار بیضی، کانونهای F و F' و هادیها در شکل ۳.۵.۱۳ نشان داده شده اند. بنا به تعریف مقطع مخروطی (۱۰.۳.۱۳) نتیجه می گیریم که اگر P نقطه دلخواهی روی این بیضی باشد، نسبت فاصله غیرجهت دار P از یک کانون به فاصله غیرجهت دار P از هادی متناظر، برابر با خروج از مرکز یعنی $3/5$ است.



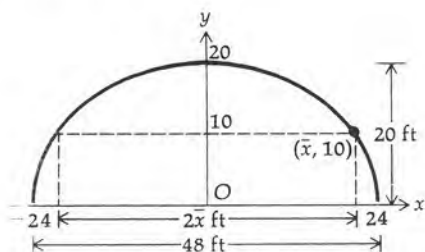
▲ شکل ۳.۵.۱۳

مثال ۲ طاقی به شکل یک نیمبیضی است. پهنای قاعده طاق ۴۸ فوت و ارتفاعش ۲۵ فوت می باشد. پهنای طاق در ارتفاع ۱۰ فوتی از قاعده چقدر است؟

حل شکل ۴.۵.۱۳ نمودار طاق را نشان می دهد و محورهای مختصات طوری انتخاب شده اند که محور x ها در امتداد قاعده و مبدأ در وسط قاعده قرار دارد. پس محور اصلی بیضی روی محور x هاست، و مرکزش در مبدأ است، و داریم $a = 24$ ، و $b = 20$. معادله بیضی به صورت معادله (۱۱) است:

$$\frac{x^2}{476} + \frac{y^2}{400} = 1.$$

فرض می کنیم پهنای طاق در ارتفاع ۱۰ فوتی بالای قاعده، $2\bar{x}$ فوت باشد. بنا بر این نقطه



شکل ۴.۵.۱۳

$(\bar{x}, 10)$ روی بیضی است. پس

$$\frac{\bar{x}^2}{576} + \frac{100}{400} = 1$$

و لذا

$$\bar{x}^2 = 432$$

$$x = 12\sqrt{3}.$$

▲ بنابراین، در ارتفاع ۱۰ فوتی بالای قاعده، پهنای طاق $24\sqrt{3}$ فوت است.

حال مقطع مخروطی مرکزدار قضیه ۴.۵.۱۳ را وقتی $e > 1$ ، یعنی، وقتی که مقطع مخروطی، هذلولی است، در نظر می گیریم. چون $e > 1$ ، داریم $0 < e^2 - 1$ ؛ پس $0 < e^2 - 1$. بنابراین، برای هذلولی فرض می کنیم

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad (12)$$

که از (۱۲) نتیجه می شود b عدد مثبتی است. همچنین، با توجه به (۱۲) داریم $b < a$ اگر $\sqrt{2} < e < \sqrt{2}$ ؛ و $b = a$ اگر $e = \sqrt{2}$ ؛ و $b > a$ اگر $e > \sqrt{2}$. از (۱۲) در (۹) قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (13)$$

معادله (۱۳) معادله يك هذلولی است که محور اصلی آن روی محور x ها، رئوس آن در نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ ، و مرکزش در مبدأ است. نمودار این هذلولی در شکل ۲.۵.۱۳ رسم شده است. اگر رئوس $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ را با A' و A نشان دهیم، پاره خط AA' ، محور [قطر] قاطع هذلولی نامیده می شود. طول محور قاطع $2a$ واحد

است؛ پس a ، نصف طول محور قاطع بر حسب واحد طول است. با قرار دادن o به جای x در (۱۳) به دست می آید $y^2 = -b^2$ ، که هیچ ریشه حقیقی ندارد. در نتیجه، هذلولی محور y ها را قطع نمی کند. معیناً، پاره خطی که دو انتهای آن در نقاط $(0, b)$ و $(0, -b)$ هستند، محور [قطر] مزدوج نامیده می شود، و طولش $2b$ واحد است. پس b ، نصف طول محور مزدوج بر حسب واحد طول است. با حل (۱۳) بر حسب x به دست می آوریم

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (14)$$

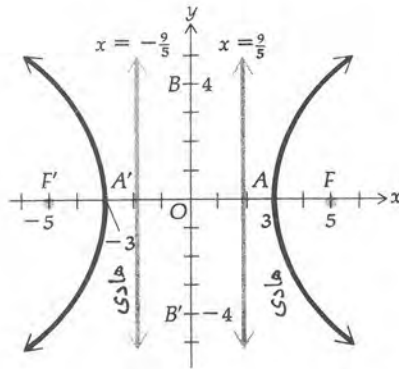
از (۱۴) نتیجه می گیریم که اگر $|x| < a$ ، هیچ مقدار حقیقی برای y وجود ندارد. بنا براین، هیچ نقطه ای مانند (x, y) روی هذلولی وجود ندارد که برای آن $-a < x < a$ - همچنین از (۱۴) دیده می شود که اگر $|x| \geq a$ ، y دارای دو مقدار حقیقی است. همچنانکه قبلاً آموختیم، هذلولی دو شاخه دارد. یک شاخه شامل رأس $A(a, 0)$ است و در طرف راست A به طور نامتناهی ادامه می یابد. شاخه دیگر شامل رأس $A'(-a, 0)$ است و در طرف چپ A' به طور نامتناهی ادامه می یابد.

مثال ۳ هذلولی زیر داده شده است

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

مطلوب است مختصات رأسها، کانونها، هادیها، خروج از مرکز، و طول محورهای قاطع و مزدوج. نمودار هذلولی را رسم کنید، و کانونها و هادیها را نشان دهید.

حل معادله داده شده به صورت (۱۳) است؛ پس $a=3$ و $b=4$. بنا براین رأسها در نقاط $A(3, 0)$ و $A'(-3, 0)$ هستند. طول محور قاطع بر حسب واحد طول برابر است با $2a=6$ ، و طول محور مزدوج بر حسب واحد طول برابر با $2b=8$ است. چون از (۱۲) داریم $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ ، پس $4 = 3\sqrt{e^2 - 1}$ ؛ لذا $e = 5/3$. بنا بر این $ae = 5$ و $a/e = 9/5$. پس کانونها در نقاط $F(5, 0)$ و $F'(-5, 0)$ قرار دارند. معادلات هادیهای متناظر به ترتیب عبارت اند از $x = 9/5$ و $x = -9/5$. نمودار هذلولی و کانونها و هادیها در شکل ۵۰۵.۱۳ رسم شده اند. از تعریف ۱۰۳.۱۳ نتیجه می شود که اگر P نقطه دلخواهی روی این هذلولی باشد، آنگاه نسبت فاصله غیرجهت دار P از یک کانون به فاصله غیرجهت دار P از هادی متناظر، مساوی است با خروج از مرکز $5/3$ یعنی $5/3$.



شکل ۵.۵۰۱۳

مثال ۴ اگر دو انتهای محور مزدوج يك هذلولی در نقاط $(0, 2)$ و $(0, -2)$ باشند و خروج از مرکز برابر با $3\sqrt{5}/5$ باشد، معادله هذلولی را به دست آورید.

حل چون دو انتهای محور مزدوج هذلولی در $(0, 2)$ و $(0, -2)$ هستند، پس $b = 2$ ، محور قاطع در امتداد محور y ها، و مرکز در مبدأ مختصات است. بنابراین، معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

برای به دست آوردن a ، از معادله $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ استفاده می کنیم، و قرار می دهیم $b = 2$ و $e = 3\sqrt{5}/5$ ؛ در نتیجه، $2 = a\sqrt{(9/5) - 1}$ به دست می آید. بنا بر این $a = \sqrt{5}$ ، و معادله هذلولی به صورت

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

است.

تمرینهای ۵.۱۳

دو تمرینهای ۱ تا ۴، رأسها، کانونها، هادیها، خروج از مرکز، و دو انتهای قطر کوچک بیضی داده شده را به دست آورید. نمودار منحنی را رسم کنید، و کانونها و هادیها را نشان دهید.

۲. $4x^2 + 9y^2 = 4$

۱. $4x^2 + 9y^2 = 36$

$$۳. \quad 2x^2 + 3y^2 = 18 \quad ۴. \quad 3x^2 + 4y^2 = 9$$

در تمرینهای ۵ تا ۸، رأسها، کانونها، هادیها، خروج از مرکز، و طول محوره‌های قاطع و مزدوج هذلولی داده شده را به دست آورید. نمودار منحنی را رسم کنید، و کانونها و هادیها را نشان دهید.

$$۵. \quad 9x^2 - 4y^2 = 36 \quad ۶. \quad x^2 - 9y^2 = 9$$

$$۷. \quad 9x^2 - 16y^2 = 1 \quad ۸. \quad 25x^2 - 25y^2 = 1$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۴، معادله‌ای برای مقطع مخروطی مفروض به دست آورید که در شرایط داده شده صدق کند، و نمودار آن را رسم کنید.

۹. هذلولی با رئوس $(0, 2)$ و $(0, -2)$ و با محور مزدوجی به طول ۶.
۱۰. بیضی با کانونهای $(5, 0)$ و $(-5, 0)$ که یک هادی آن خط $x = -20$ باشد.
۱۱. بیضی با رئوس $(5/2, 0)$ و $(-5/2, 0)$ که یک کانون آن در $(3/2, 0)$ باشد.
۱۲. هذلولی که دو انتهای محور مزدوجش در $(0, 3)$ و $(0, -3)$ باشند، و $e = 2$.
۱۳. هذلولی که مرکزش در مبدأ و کانونهای آن روی محور x ها باشد و از نقاط $(4, -2)$ و $(7, -6)$ بگذرد.
۱۴. بیضی که مرکزش در مبدأ، کانونهای آن روی محور x ها و طول قطر بزرگش سه برابر طول قطر کوچک آن باشد و از نقطه $(3, 3)$ بگذرد.
۱۵. معادله خط مماس بر بیضی $4x^2 + 9y^2 = 72$ در نقطه $(3, 2)$ را به دست آورید.
۱۶. معادله خط قائم بر هذلولی $4x^2 - 3y^2 = 24$ در نقطه $(3, 2)$ را به دست آورید.
۱۷. مطلوب است معادله خط مماس بر هذلولی $k^2x^2 - y^2 = -1$ در نقطه $(1/k, \sqrt{2})$ که $k \neq 0$.
۱۸. (الف) مطلوب است معادله دکارتی سهمی که دارای معادله قطبی $r = 4/(1 + \sin \theta)$ است. (ب) مختصات دکارتی رأس و کانون را به دست آورید.
۱۹. مطلوب است معادله هذلولی که کانونهایش، رئوس بیضی $7x^2 + 11y^2 = 77$ و رئوسش، کانونهای این بیضی است.
۲۰. مطلوب است معادله بیضی که کانونهایش، رئوس هذلولی $11x^2 - 7y^2 = 77$ و رئوسش کانونهای این هذلولی است.
۲۱. سقف دالانی که ۱۰ متر پهنا دارد، به شکل یک نیمبیضی است که ارتفاع آن در

مرکز ۹ متر و ارتفاع دیوارهای جانبی آن ۶ متر است. ارتفاع سقف را به فاصله دو متر از هر دیوار به دست آورید.

۲۲. يك توپ فوتبال آمریکایی ۱۲ اینچ طول دارد و مقطع مسطحی از آن که شیاری از توپ را در بر دارد به شکل يك بیضی است که طول قطر کوچکش ۷ اینچ است. اگر چرم توپ طوری سفت باشد که هر مقطع عرضی توپ به شکل مربع باشد، حجم آن را به دست آورید.

۲۳. تمرین ۲۲ را در حالتی حل کنید که مقطع عرضی به شکل دایره باشد.

۲۴. مدار زمین به دور خورشید، بیضوی شکل است؛ خورشید در يك کانون این بیضی قرار دارد، طول نصف قطر بزرگ ۹۲۹ میلیون میل است، و خروج از مرکز برابر ۰.۰۱۷۵ است. تعیین کنید که (الف) زمین چقدر به خورشید نزدیک می شود و (ب) بیشترین فاصله ممکن بین زمین و خورشید چقدر است.

۲۵. هزینه تولید کالایی در نقطه A ، ۱۲ دلار کمتر از هزینه تولید آن در نقطه B است و فاصله بین A و B ، ۱۰۰ کیلومتر است. با فرض اینکه مسیر ارسال کالا در امتداد يك خط مستقیم است و هزینه حمل و نقل آن ۲۰ سنت در هر کیلومتر برای هر واحد از کالا است، مطلوب است منحنیی که در هر نقطه آن بتوان کالا را با هزینه کل یکسان از هر يك از دو نقطه A یا B تهیه کرد.

۲۶. ثابت کنید هیچ خط مماسی بر هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ وجود ندارد که از مبدأ بگذرد.

۲۷. حجم جسم دواری را که از دوران ناحیه محصور بین هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ و خط $x = 2a$ حول محور x ها پدید می آید، محاسبه کنید.

۲۸. مرکز و محور جسم دوار تمرین ۲۷ را بیابید.

۲۹. مخزنی دارای محوری افقی به طول ۲۰ فوت است و دو انتهای آن به شکل نیمبیضی هستند. پهنای بالای مخزن ۱۰ فوت و عمق آن ۶ فوت است. اگر مخزن پر از آب باشد، مقدار کار لازم برای رساندن تمام آب آن به بالای مخزن چقدر است؟

۳۰. فرض کنید مدار سیاره ای به شکل يك بیضی است که خروج از مرکز ۸.۰۵ و طول قطر بزرگش ۵۰۰ میلیون کیلومتر است. معادله مدار را بیابید.

۶.۱۳ بیضی

در بخش ۵.۱۳ بیضیهایی را بررسی کردیم که مرکزشان در مبدأ و محور اصلی آنها روی

محور x ها بود. حال معادلات بیضیها را به صورت کلیتری مورد بحث قرار می دهیم.
اگر مرکز يك بیضی در مبدأ و محور اصلی آن روی محور y ها باشد، معادله بیضی به صورت زیر است

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

که معادله فوق با جا به جایی x و y در فرمول (۱۱) از بخش ۵.۱۳ به دست آمده است.

○ نمونه ۱ چون در مورد بیضی داریم $a > b$ ، نتیجه می شود که کانونهای بیضی با معادله

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

روی محور y هاست. شکل این بیضی مشابه شکل بیضی مثال ۱ در بخش ۵.۱۳ است. رأسها در $(0, 5)$ و $(0, -5)$ و کانونها در $(0, 3)$ و $(0, -3)$ می باشند، و معادلات هادیهای متناظر با کانونها به ترتیب $y = 25/3$ و $y = -25/3$ هستند. ○

اگر مرکز بیضی به جای مبدأ در نقطه (h, k) باشد، و محور اصلی آن موازی یکی از محورهای مختصات باشد، آنگاه با انتقال محورها به مبدأ جدید (h, k) ، معادله بیضی به صورت $(\bar{x}^2/a^2) + (\bar{y}^2/b^2) = 1$ خواهد بود اگر محور اصلی بیضی افقی باشد، و معادله آن $(\bar{y}^2/a^2) + (\bar{x}^2/b^2) = 1$ خواهد بود اگر محور اصلی آن قائم باشد. چون $\bar{x} = x - h$ و $\bar{y} = y - k$ ، این معادلات بر حسب x و y به صورت زیر خواهند بود:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

اگر محور اصلی افقی باشد و

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

اگر محور اصلی قائم باشد.

در بخش ۳.۱، درباره معادله درجه دوم کلی دو متغیره بحث کردیم:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4)$$

که $A = C$ و $B = 0$. در چنین حالتی، نمودار (۴) یا يك دایره است و یا حالت تباهیده ای

از دایره، که یا يك دایره-نقطه و یا مجموعه تهی است. اگر مخرجها را حذف و عبارتهای (۲) و (۳) را باهم ترکیب کنیم، معادله‌ای به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (5)$$

که $A \neq C$ اگر $a \neq b$ و $AC > 0$. اگر جملات مربوط به x و y را به صورت مربعات کامل در آوریم، می‌توان نشان داد که معادله (۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{(x-h)^2}{\frac{1}{A}} + \frac{(y-k)^2}{\frac{1}{C}} = G. \quad (6)$$

اگر $AC > 0$ ، آنگاه A و C همعلامت هستند. اگر G همعلامت با A و C باشد، (۶) می‌تواند به صورت (۲) یا (۳) نوشته شود. پس نمودار (۵) يك بیضی است.

○ نمونه ۲ فرض کنید معادله زیر داده شده است

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$$

که می‌توان آن را به صورت

$$6(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 6y) = -51$$

نوشت. جملات مربوط به x و y را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم

$$6(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) = -51 + 24 + 81$$

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 54$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 54.$$

این معادله به صورت (۶) است. با تقسیم دو طرف بر ۵۴ داریم

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{6} = 1$$

○ که به صورت (۲) است.

اگر در (۶)، G علامتی مخالف علامت A و C داشته باشد، آنگاه (۶) به ازای هیچ مقدار حقیقی x و y برقرار نیست. پس نمودار (۵) مجموعه تهی است.

○ نمونه ۳ تصور کنید که (۵) به صورت زیر است

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 115 = 0$$

جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی آوریم

$$6(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = -115 + 24 + 81$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = -10. \quad (7)$$

این معادله نیز به صورت (۶) است که در آن، $G = -10$ ، $A = 6$ ، $C = 9$. به ازای تمام مقادیر x و y طرف چپ (۷) نامنفی است؛ پس نمودار (۷) مجموعه تهی است. ○

اگر در (۶)، $G = 0$ ، آنگاه معادله فقط به ازای نقطه (h, k) برقرار است. بنابراین نمودار (۵) يك نقطه منفرد است، که آن را بیضی-نقطه می نامند.

○ نمونه ۴ چون معادله

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 105 = 0$$

را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{6}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{1}{9}} = 0$$

○ پس نمودارش نقطه $(2, 3)$ است.

اگر نمودار (۵)، بیضی-نقطه یا مجموعه تهی باشد، نمودار را تباهیده گویند. اگر در (۵)، $A = C$ ، همان طور که در بالا متذکر شدیم، یا يك دایره و یا يك دایره تباهیده داریم. دایره، صورت حدی بیضی است. این مطلب را می توان با در نظر گرفتن رابطه بین a ، b ، و e در بیضی، نشان داد.

$$b^2 = a^2(1 - e^2).$$

با توجه به این فرمول دیده می شود که وقتی e به سمت صفر میل کند، b^2 به سمت a^2 میل می کند. اگر $b^2 = a^2$ ، (۲) و (۳) به صورت زیر درمی آیند

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

که معادله دایره ای است به مرکز (h, k) و شعاع a . نتایج بخش ۳.۱ در مورد دایره

مشابه نتایجی است که در (۵) برای بیضی به دست آمد.
نتایج بحث بالا در قضیه زیر خلاصه شده است.

۱۰۶.۱۳ قضیه اگر در معادله درجه دوم (۴) کلی داشته باشیم $B=0$ و $AC > 0$ ، آنگاه نمودار معادله یا بیضی است یا بیضی-نقطه، و یا مجموعه تهی. همچنین، اگر $A=C$ ، آنگاه نمودار معادله یا دایره است یا دایره-نقطه، و یا مجموعه تهی.

مثال ۱ نمودار معادله $25x^2 + 16y^2 + 150x - 128y - 1119 = 0$ را معین کنید.

حل بنا به قضیه ۱۰۶.۱۳، چون $B=0$ و $AC = (25)(16) = 400 > 0$ ، نمودار یا بیضی است و یا بیضی تباهیده. جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی آوریم

$$\begin{aligned} 25(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 8y + 16) &= 1119 + 225 + 256 \\ 25(x+3)^2 + 16(y-4)^2 &= 1600 \\ \frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-4)^2}{100} &= 1. \end{aligned} \quad (۸)$$

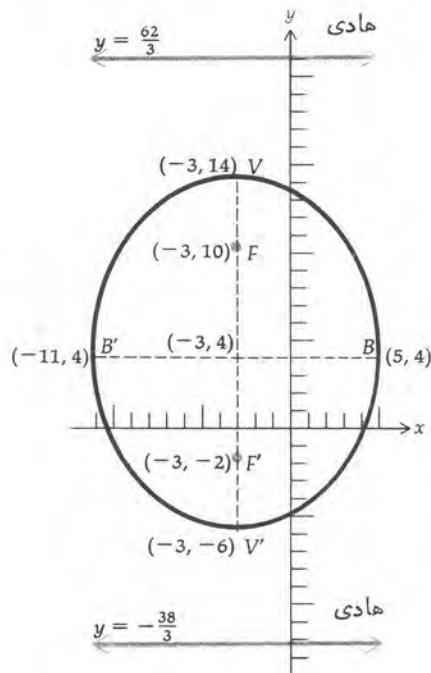
معادله (۸) به صورت (۳) است؛ پس نمودار آن يك بیضی است که محور اصلیش موازی محور y هاست و مرکزش در $(-3, 4)$ است. ▲

مثال ۲ برای بیضی مثال ۱، رأسها، کانونها، هادیها، خروج از مرکز، و دوانتهای قطر کوچک را تعیین کنید. نمودار بیضی را رسم کنید، و کانونها و هادیها را نشان دهید.

حل از (۸) نتیجه می شود که $a=10$ و $b=8$. چون مرکز بیضی در $(-3, 4)$ و محور اصلی آن قائم است، رئوس در نقاط $V'(-3, -6)$ و $V(-3, 14)$ هستند. دوانتهای قطر کوچک در نقاط $B'(11, 4)$ و $B(5, 4)$ می باشند. چون $b = a\sqrt{1-e^2}$ داریم

$$8 = 10\sqrt{1-e^2}$$

و با حل آن، داریم $e = 3/5$. در نتیجه $ae = 6$ و $a/e = 50/3$. بنابراین کانونها در نقاط $F(-3, 10)$ و $F'(-3, -2)$ هستند. معادلات هادیهای متناظر با کانونها، به ترتیب، عبارت اند از $y = -38/3$ و $y = 62/3$. نمودار بیضی، کانونها، و هادیها در شکل ۱۰۶.۱۳ رسم شده است.



شکل ۱۰۶.۱۳

مثال ۳ اگر کانونهای يك بیضی $(-۸, ۲)$ و $(۴, ۲)$ باشند و خروج از مرکز $۲/۳$ باشد، معادله آن را به دست آورید و نمودار بیضی را رسم کنید.

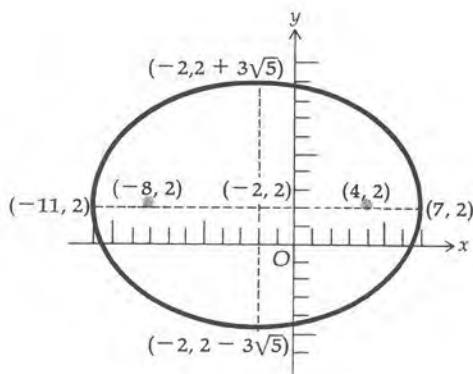
حل مرکز بیضی وسط کانونها و در نقطه $(-۲, ۲)$ است. فاصله بین کانونها در هر بیضی $2ae$ ، و فاصله بین $(-۸, ۲)$ و $(۴, ۲)$ برابر است با ۱۲. بنابراین، معادله $2ae = ۱۲$ را داریم. با قراردادن $۲/۳$ به جای e در این معادله به دست می آوریم $2a(۲/۳) = ۱۲$ ؛ پس $a = ۹$. چون $b = a\sqrt{1 - e^2}$ ،

$$b = 9\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 9\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = 3\sqrt{5}.$$

محور اصلی موازی محور x هاست؛ پس معادله بیضی به صورت (۲) خواهد بود. چون $(h, k) = (-۲, ۲)$ ، $a = ۹$ ، و $b = 3\sqrt{5}$ ، معادله خواسته شده عبارت است از

$$\frac{(x+2)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{45} = 1.$$

نمودار این بیضی در شکل ۲۰۶.۱۳ نشان داده شده است.



▲

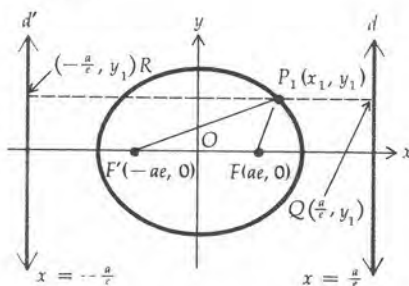
شکل ۲۰۶.۱۳

قضیه زیر، تعریف دیگری از بیضی به دست می‌دهد که مبتنی بر یک خاصیت ویژه بیضی است.

۲۰۶.۱۳ قضیه بیضی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط تعریف کرد که مجموعه فواصل هر یک از آن نقاط از دو نقطه مفروض (کانونها) عدد ثابتی باشد.

اثبات اثبات شامل دو قسمت است. در قسمت اول نشان می‌دهیم که مجموعه نقاط تعریف شده در قضیه، یک بیضی است. و در قسمت دوم ثابت می‌کنیم که هر بیضی مجموعه چنین نقاطی است. در هر دو قسمت اثبات به شکل ۳۰۶.۱۳ رجوع کنید. فرض کنید نقطه $P_1(x_1, y_1)$ نقطه دلخواهی از مجموعه داده شده باشد. و نیز فرض کنید کانونها در نقاط $F(ae, 0)$ و $F'(-ae, 0)$ ، و مجموع ثابت فواصل $2a$ باشد. در این صورت

$$|FP_1| + |F'P_1| = 2a.$$



شکل ۳۰۶.۱۳

با توجه به فرمول فاصله بین دو نقطه داریم

$$\sqrt{(x_1 - ae)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_1 + ae)^2 + y_1^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x_1 - ae)^2 + y_1^2} = 2a - \sqrt{(x_1 + ae)^2 + y_1^2}.$$

طرفین معادله بالا را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2aex_1 + a^2e^2 + y_1^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 + ae)^2 + y_1^2} \\ &\quad + x_1^2 + 2aex_1 + a^2e^2 + y_1^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x_1 + ae)^2 + y_1^2} = a + ex_1$$

مجدداً دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم

$$x_1^2 + 2aex_1 + a^2e^2 + y_1^2 = a^2 + 2aex_1 + e^2x_1^2$$

$$(1 - e^2)x_1^2 + y_1^2 = a^2(1 - e^2)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2(1 - e^2)} = 1.$$

چون $b^2 = a^2(1 - e^2)$ ، با قراردادن x و y ، به ترتیب به جای x_1 و y_1 ، به دست می‌آید

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

که صورت خواسته شده معادله بیضی است.

حال بیضی شکل ۳.۶.۱۳ را در نظر بگیرید؛ $P_1(x_1, y_1)$ نقطه دلخواهی روی

این بیضی است. از P_1 خطی موازی محور x ها رسم می‌کنیم تا هادیهای d و d' را به ترتیب در نقاط Q و R قطع کند. با توجه به تعریف ۱.۳.۱۳

$$|\overline{FP_1}| = e|\overline{P_1Q}| \quad \text{و} \quad |\overline{F'P_1}| = e|\overline{RP_1}|$$

بنابراین

$$|\overline{F'P_1}| + |\overline{FP_1}| = e(|\overline{RP_1}| + |\overline{P_1Q}|). \quad (9)$$

چون بیضی بین هادیهایش قرار دارد، $\overline{RP_1}$ و $\overline{P_1Q}$ هر دو مثبت‌اند. پس

$$|\overline{RP_1}| + |\overline{P_1Q}| = \overline{RP_1} + \overline{P_1Q} = \overline{RQ} = \frac{a}{e} - \left(-\frac{a}{e}\right) = \frac{2a}{e}. \quad (10)$$

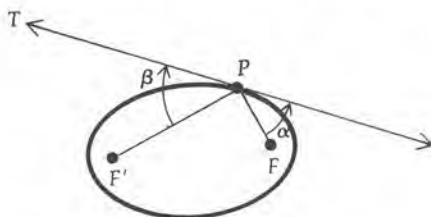
از (۱۰) در (۹) قرار می‌دهیم

$$|F'P| + |FP| = 2a$$

□ که ثابت می‌کند بیضی، مجموعه نقاط ذکر شده در قضیه است.

○ نمونه ۵ در بیضی مثال ۱ کانونها در نقاط $(-3, -2)$ و $(-3, 10)$ هستند، و $2a = 20$. بنا به قضیه ۴.۶.۱۳، این بیضی می‌تواند به‌عنوان مجموعه نقاطی تعریف شود که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو نقطه $(-3, -2)$ و $(-3, 10)$ برابر با ۲۰ باشد. به‌طور مشابه، بیضی مثال ۳ را نیز می‌توان به‌عنوان مجموعه نقاطی که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو نقطه $(-8, 2)$ و $(4, 2)$ برابر با ۱۸ است، تعریف کرد. ○

خاصیتی انعکاسی در بیضی وجود دارد که مشابه خاصیتی است که در شکل ۷.۱۰.۱۳ برای سهمی نشان داده شد. به‌شکل ۴.۶.۱۳ مراجعه کنید. خط PT خط مماس در نقطه P بر نمودار بیضی است که کانونهایش F و F' هستند. اندازه زاویه بین پاره خط FP و خط مماس PT برابر با α ، و اندازه زاویه بین پاره خط $F'P$ و خط مماس PT برابر با β است. در تمرین ۲۶ از شما خواسته شده است که ثابت کنید $\alpha = \beta$. بنا بر این در یک آینه بیضی پرتو نوری که از منبعی در یک کانون بر آینه می‌تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر آن می‌گذرد منعکس می‌شود. از این خاصیت بیضیها در بعضی از تماشاخانه‌ها استفاده می‌شود که سقف آنها دارای مقاطعی به‌شکل قوسهای بیضی با کانونهای مشترک است. شخصی که در کانون F قرار دارد، می‌تواند صدای شخص دیگری را که در کانون F' صحبت می‌کند بشنود، چون امواج صدای شخص صحبت‌کننده در کانون F' ، به‌سقف برخورد می‌کنند و به‌وسیله سقف منعکس شده و به‌شنونده در کانون F می‌رسند.



شکل ۴.۶.۱۳

تمرینهای ۶.۱۳

در تمرینهای ۱ تا ۸، خروج از مرکز، مرکز، کانونها، و هادیهای بیضی داده شده را به دست آورید. نمودار را رسم کنید.

$$6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0 \quad ۱.$$

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0 \quad ۲.$$

$$5x^2 + 3y^2 - 3y - 12 = 0 \quad ۳.$$

$$۴. ۲x^2 + ۲y^2 - ۲x + ۱۸y + ۳۳ = 0$$

$$۵. ۴x^2 + ۴y^2 + ۲۰x - ۳۲y + ۸۹ = 0$$

$$۶. ۳x^2 + ۴y^2 - ۳۰x + ۱۶y + ۱۰۰ = 0$$

$$۷. ۳x^2 + ۵y^2 - ۶x - ۱۲ = 0$$

$$۸. ۲x^2 + ۳y^2 - ۴x + ۱۲y + ۲ = 0$$

در تمرینهای ۹ و ۱۰، معین کنید که نمودار معادله داده شده بیضی، بیضی-نقطه، یا مجموعه تهی است.

$$۹. ۴x^2 + y^2 - ۸x + ۲y + ۵ = 0$$

$$۱۰. ۲x^2 + ۳y^2 + ۸x - ۶y + ۲۰ = 0$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، معادله بیضی را به دست آورید که در شرایط داده شده صدق می‌کند، و نمودار آن را رسم کنید.

۱۱. کانونها در $(۵, ۰)$ و $(-۵, ۰)$ ، و یکی از هادیها خط $x = -۲۰$ باشد.

۱۲. رئوس در $(۰, ۵)$ و $(۰, -۵)$ ، و از نقطه $(۲, (-۵\sqrt{۵})/۳)$ بگذرد.

۱۳. رئوس در $(۲, ۰)$ و $(-۲, ۰)$ ، و از نقطه $(-۱, \sqrt{۳}/۲)$ بگذرد.

۱۴. کانونها در $(۰, ۳)$ و $(۰, -۳)$ ، و یکی از هادیها خط $y = ۹$ باشد.

۱۵. مرکز در $(۴, -۲)$ ، یک رأس در $(۹, -۲)$ ، و یک کانون در $(۰, -۲)$ باشد.

۱۶. کانونها در $(۲, ۳)$ و $(۲, -۷)$ ، و خروج از مرکز $۲/۳$ باشد.

۱۷. کانونها در $(-۱, -۱)$ و $(-۱, ۷)$ ، و طول نصف قطر بزرگ ۸ واحد باشد.

۱۸. هادیها خطوط $y = ۳ \pm ۱۶۹/۱۲$ و یک کانون در $(۰, -۲)$ باشد.

۱۹. قضیه ۲۰۶.۱۳ شیوه‌ای برای رسم نمودار بیضی به دست می‌دهد. این روش را برای بیضی $۴x^2 + ۹y^2 = ۳۶$ به کار ببرید. ابتدا نقاط تقاطع بیضی با محورها را مشخصات را معین کنید. کانونها را روی محور x ها، با پرکاری که نوکش در یکی از نقاط تقاطع بیضی با محور y ها قرار گرفته و فرجه‌اش ۳ باشد، به دست آورید. سپس در هر یک از کانونها یک پونز بچسبانید. دوسر نخ به طول ۶ (که $2a$ است) را به پونزها ببندید. قلمی را پشت نخ قرار داده و آن را بکشید. قلم را پشت نخ کشیده حرکت دهید و منحنی رسم کنید. این منحنی یک بیضی است، چون نوک قلم مجموعه نقاطی را رسم می‌کند که مجموع فواصل از آنها از دو پونز، مقدار ثابت ۶ است.

۲۵. با استفاده از قضیه ۲.۶.۱۳ معادله بیضی را به دست آورید که مجموع فواصل هر نقطه روی آن از $(۴, -۱)$ و $(۴, ۷)$ برابر با ۱۲ باشد.

۲۱. تمرین ۲۵ را در حالتی حل کنید که مجموع فواصل از $(-۴, -۵)$ و $(۶, -۵)$ برابر با ۱۶ باشد.

۲۲. اگر يك قانون بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = ۱$ در نقطه $(c, ۰)$ باشد، نشان دهید که $a^2 + b^2 = c^2$.

۲۳. معادله يك بیضی به صورت زیر است

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = ۱$$

که در آن $a > b > ۰$. مختصات کانونها را بر حسب a, b, h, k و به دست آورید.

۲۴. بشقابی به شکل ناحیه محدود به يك بیضی است که طول نصف قطر بزرگ آن ۳ فوت و طول نصف قطر کوچک آن ۲ فوت است. اگر بشقاب را به صورت عمودی در مخزن آبی فرو بریم به طوری که قطر کوچک آن روی سطح آب قرار گیرد، نیروی ناشی از فشار آب بر يك طرف قسمت فرو رفته در آب را به دست آورید.

۲۵. اگر در تمرین ۲۴ بشقاب را طوری در آب فرو بریم که مرکز آن در ۳ فوتی زیر سطح آب قرار گیرد، نیروی ناشی از فشار آب بر يك طرف بشقاب را به دست آورید. در اینجا هم قطر کوچک افقی است.

۲۶. در شکل ۴.۶.۱۳ ثابت کنید که $\alpha = \beta$. (دانهمایی: محورهای مختصات را طوری انتخاب کنید که مرکز بیضی در مبدأ و قطرهای بیضی روی محورهای مختصات باشند. سپس از قضیه ۳.۲.۹ استفاده کنید.)

۷.۱۳ هذلولی

در بخش ۴.۱۳ آموختیم که اگر مرکز هذلولی در مبدأ و محور اصلی آن روی محور x ها باشد، معادله اش به صورت $x^2/a^2 - y^2/b^2 = ۱$ است. با تعویض x و y در این معادله به دست می آوریم

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = ۱. \quad (۱)$$

این معادله يك هذلولی است که مرکزش در مبدأ و محور اصلی آن روی محور y هاست.

○ نمونه ۱ اگر معادله هذلولی به صورت زیر باشد

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

○ کانونهایش روی محور y ها هستند چون این معادله به صورت (۱) است.

در مورد هذلولی، هیچ نامساوی کلی شامل a و b وجود ندارد که متناظر با نامساوی $a > b$ در مورد بیضی باشد. بدین معنی که، برای يك هذلولی ممکن است داشته باشیم $a < b$ ، همان طور که در نمونه ۱ داشتیم $a = 3$ و $b = 4$ ؛ یا ممکن است $a > b$ ، چنانکه در هذلولی به معادله $1 = x^2/16 - y^2/25$ داریم $a = 5$ و $b = 4$. اگر در يك هذلولی $a = b$ ، آنگاه هذلولی را متساوی الساقین گویند.

در بخش ۳.۱۳ گفتیم که هذلولی مجانبهایی دارد، و اکنون چگونگی به دست آوردن معادلات این مجانبها را نشان می دهیم. در بخش ۴.۲ و ۵.۲ مجانبهای افقی و قائم نمودار تابع را تعریف کردیم. مطلبی که در زیر می آید تعریف کلیتری است که تعاریف بخشهای ۴.۲ و ۵.۲ حالت های خاصی از آن هستند.

۱۰۷.۱۳ تعریف مجانب نمودار معادله $y = f(x)$ ، خط $y = mx + b$ است اگر یکی از حکمهای زیر درست باشد

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ ، و برای عددی مانند $M > 0$ ، وقتی

$$f(x) \neq mx + b \quad x > M$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ ، و برای عددی مانند $M < 0$ ، وقتی

$$f(x) \neq mx + b \quad x < M$$

حکم (i) به این معنی است که برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $N > 0$ موجود است به طوری که

$$|f(x) - (mx + b)| < \varepsilon \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

یعنی، می توانیم مقدار تابع، $f(x)$ را به اندازه دلخواه به مقدار $mx + b$ نزدیک کنیم اگر x را به اندازه کافی بزرگ بگیریم. این مطلب با تصور شهودی ما از مجانب يك نمودار سازگار است. مطلب مشابهی را نیز برای قسمت (ii) تعریف ۱۰۷.۱۳ می توان بیان کرد. برای هذلولی $1 = x^2/a^2 - y^2/b^2$ ، با حل معادله نسبت به y خواهیم داشت

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

پس اگر

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{b}{a}x \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right] \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

پس بنا به تعریف ۱۰۷.۱۳، خط $y = bx/a$ مجانب نمودار $y = b\sqrt{x^2 - a^2}/a$ است. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که خط $y = bx/a$ همچنین مجانب نمودار $y = -b\sqrt{x^2 - a^2}/a$ است. در نتیجه، خط $y = bx/a$ مجانب هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ خواهد بود. با روش مشابهی می‌توان ثابت کرد که خط $y = -bx/a$ نیز مجانب همین هذلولی است. بنابراین، قضیه زیر را داریم.

۲۰۷.۱۳ قضیه خطوط

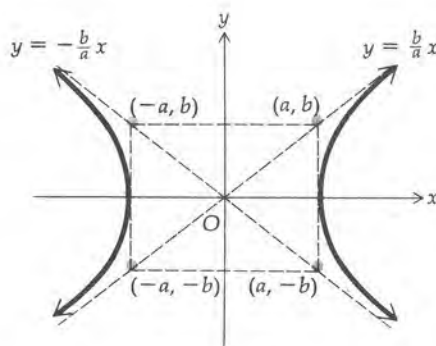
$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad y = \frac{b}{a}x$$

مجانبهای هذلولی زیر هستند

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

شکل ۱۰۷.۱۳ نمودار هذلولی مذکور در قضیه ۲۰۷.۱۳ را همراه با مجانبهایش نشان می‌دهد. دقت کنید که در این شکل قطرهای مستطیلی به رئوس (a, b) ، $(a, -b)$ ، $(-a, b)$ و $(-a, -b)$ روی مجانبهای هذلولی می‌باشند. این مستطیل را مستطیل کمکی هذلولی می‌نامند. رئوس هذلولی نقاط تقاطع محور اصلی و مستطیل کمکی هستند. نمودار نسبتاً خوبی از هذلولی را به این طریق می‌توان به دست آورد که ابتدا مستطیل کمکی را رسم کنیم و سپس هر شاخه از هذلولی را از رأس مربوطه و مماس بر ضلع مربوطه از مستطیل کمکی رسم کنیم و ادامه دهیم تا به طور مجانبی به خطی که قطر مستطیل روی آن قرار دارد، نزدیک شود.

شیوه‌ای برای یافتن مجانبهای هذلولی وجود دارد که یادسپاری آن آسان است. به عنوان مثال، برای هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ، اگر در طرف راست معادله صفر قرار



شکل ۱۰۷.۱۳

دهیم، به دست می آوریم $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. با تجزیه به عوامل، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$$

که هم ارز با دو معادله $x/a - y/b = 0$ و $x/a + y/b = 0$ می باشد، و اینها طبق قضیه ۲۰۷.۱۳ معادلات مجانبهای هذلولی داده شده هستند. با استفاده از این شیوه برای هذلولی به معادله (۱)، می بینیم که مجانبهای آن، خطوط $y/a - x/b = 0$ و $y/a + x/b = 0$ هستند، که با مجانبهای هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ یکسان می باشند. این دو هذلولی را **هذلولیهای مزدوج می نامند**.

مجانبهای هذلولی متساوی الساقین ($a = b$) برهم عمودند. و مستطیل کمکی برای یک چنین هذلولی، مربع است، و طول محورهای قاطع و مزدوج در این هذلولی مساوی است. اگر مرکز هذلولی در نقطه (h, k) و محور اصلی آن موازی محور x ها باشد، آنگاه چنانچه محورها را طوری انتقال دهیم که نقطه (h, k) مبدأ جدید باشد، معادله هذلولی در دستگاه مختصات جدید به صورت $\bar{x}^2/a^2 - \bar{y}^2/b^2 = 1$ خواهد بود. اگر $x - h$ را به جای $\bar{x}$ و $y - k$ را به جای $\bar{y}$ قرار دهیم، این معادله به صورت زیر درمی آید

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

به طور مشابه، معادله یک هذلولی که مرکزش در (h, k) و محورش موازی محور

y هاست، به صورت زیر است

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1. \quad (3)$$

مثال ۱ رئوس يك هذلولی در $(-۵, -۳)$ و $(-۵, -۱)$ هستند و خروج از مرکز آن $\sqrt{۵}$ است. معادله هذلولی و معادلات مجانبهای آن را به دست آورید. نمودار هذلولی و مجانبهای آن را رسم کنید.

حل فاصله بین رئوس $2a$ است؛ پس $a=۱$. در هذلولی داریم $b=a\sqrt{e^2-1}$ و بنا بر این $2=\sqrt{۵-1}=b$. چون محور اصلی هذلولی موازی محور y هاست، پس معادله هذلولی به صورت (۳) خواهد بود. مرکز (h, k) در وسط دو رأس قرار دارد و بنا بر این در نقطه $(-۵, -۲)$ است. پس، معادله هذلولی به صورت زیر است.

$$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{4} = 1.$$

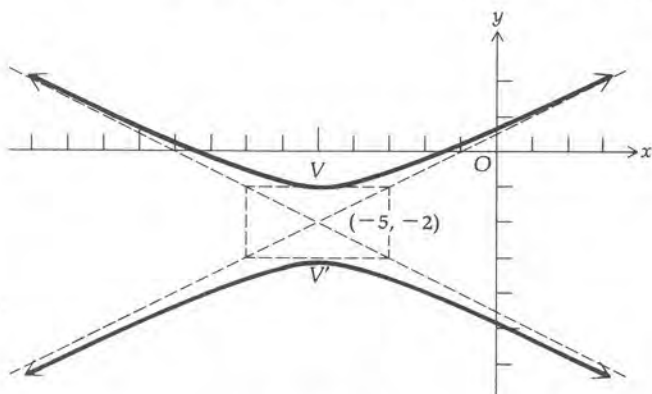
از شیوه پیشگفته برای به دست آوردن معادلات مجانبها استفاده می کنیم

$$\left(\frac{y+2}{1} - \frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{y+2}{1} + \frac{x+5}{2}\right) = 0$$

که نتیجه می دهد

$$y+2 = -\frac{1}{2}(x+5) \quad \text{و} \quad y+2 = \frac{1}{2}(x+5)$$

نمودار هذلولی و مجانبها در شکل ۲۰۷۰۱۳ نشان داده شده اند.



شکل ۲۰۷۰۱۳

اگر در (۲) و (۳) کسرها را حذف کنیم و جملات را با هم ترکیب کنیم، معادلات حاصل به صورت زیر خواهند بود

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (۴)$$

که A و C مختلف‌العلامه هستند؛ یعنی $AC < 0$. حال می‌خواهیم نشان دهیم که نمودار معادله‌ای به صورت (۴)، که در آن $AC < 0$ ، یا هذلولی است و یا هذلولی تباهیده. در رابطه (۴)، که در آن داریم $AC < 0$ ، جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی‌آوریم. معادله زیر حاصل می‌شود

$$\alpha^2(x-h)^2 - \beta^2(y-k)^2 = H. \quad (۵)$$

اگر $H > 0$ ، می‌توان (۵) را به صورت زیر نوشت

$$\frac{(x-h)^2}{\frac{H}{\alpha^2}} - \frac{(y-k)^2}{\frac{H}{\beta^2}} = 1$$

که به صورت (۲) است.

○ نمونه ۲ معادله

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 181 = 0$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$4(x^2 + 6x) - 12(y^2 - 8y) = 181$$

جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی‌آوریم

$$4(x^2 + 6x + 9) - 12(y^2 - 8y + 16) = 181 + 36 - 192$$

$$4(x+3)^2 - 12(y-4)^2 = 25.$$

این صورتی از (۵) است، که در آن $H = 25 > 0$. این معادله را می‌توان به شکل (۲) نوشت

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(y-4)^2}{\frac{25}{12}} = 1. \quad \circ$$

اگر در (۵)، $H < 0$ ، آنگاه (۵) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\frac{(y-k)^2}{\frac{|H|}{\alpha^2}} - \frac{(x-h)^2}{\frac{|H|}{\beta^2}} = 1$$

که به صورت (۳) است.

○ نمونه ۳ فرض کنید که (۴) به صورت

$$4x^2 - 12y^2 + 24x + 96y - 131 = 0$$

باشد. جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی آوریم

$$4(x+3)^2 - 12(y-4)^2 = -25$$

این معادله به صورت معادله (۵) است، که در آن $0 < -25 = H$ ، می توان آن را به شکل (۳) هم نوشت

$$\bigcirc \quad \frac{(y-4)^2}{\frac{25}{12}} - \frac{(x+3)^2}{\frac{25}{4}} = 1.$$

اگر در (۵)، $H = 0$ ، آنگاه (۵) هم ارز با دو معادله زیر است

$$\alpha(x-h) + \beta(y-k) = 0 \quad \text{و} \quad \alpha(x-h) - \beta(y-k) = 0$$

که معادلات دو خط راستی هستند که از نقطه (h, k) می گذرند. این حالت تباهیده هذلولی است.

در قضیه زیر، نتایج بحث فوق خلاصه شده است.

۳۰۷۰۱۳ قضیه اگر در معادله درجه دوم کلی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

داشته باشیم $B = 0$ و $AC < 0$ ، آنگاه نمودار معادله یا هذلولی است و یا دو خط راست متقاطع.

مثال ۲ نمودار معادله $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$ را معین کنید.

حل بنا به قضیه ۳۰۷۰۱۳، چون $B = 0$ و $AC = (9)(-4) = -36 < 0$ ، نمودار یا يك هذلولی است و یا دو خط راست متقاطع. جملات شامل x و y را به صورت مربعهای کامل درمی آوریم و خواهیم داشت

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$

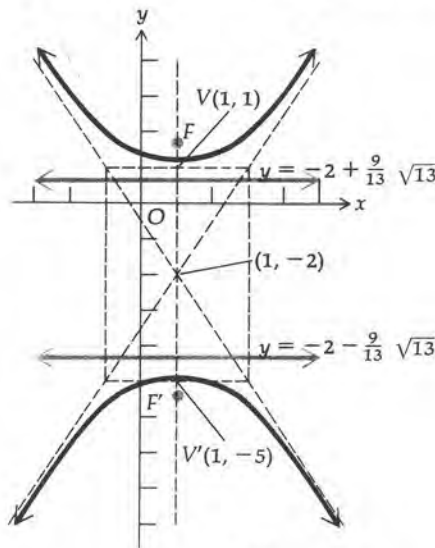
$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1. \quad (6)$$

معادله (۶) به صورت (۳) است؛ پس نمودار آن يك هذلولی است که محور اصلی موازی محور y ها و مرکزش در $(1, -2)$ است. ▲

مثال ۳ برای هذلولی مثال ۲، مطلوب است تعیین خروج از مرکز، رأسها، کانونها، و هادیه‌ها. نمودار هذلولی را رسم کنید و کانونها و هادیه‌ها را نشان دهید.

حل در (۶) می‌بینیم که $a=3$ و $b=2$. در هذلولی داریم $b=a\sqrt{e^2-1}$ ؛ پس $2=3\sqrt{e^2-1}$ و با حل آن e به دست می‌آید: $e=\sqrt{13}/3$. چون مرکز در $(1, -2)$ است، محور اصلی قائم است، و $a=3$ ، نتیجه می‌شود که رئوس در نقاط $V(1, 1)$ و $V'(1, -5)$ هستند. چون $ae=\sqrt{13}$ ، پس کانونها در نقاط $F(1, -2+\sqrt{13})$ و $F'(1, -2-\sqrt{13})$ می‌باشند. به علاوه $a/e=9\sqrt{13}/13$ ، پس هادی متناظر با کانون F دارای معادله $y=-2+(9\sqrt{13}/13)$ است. شکل ۳.۷.۱۳ هذلولی و کانونها و هادیه‌ها را نشان می‌دهد.



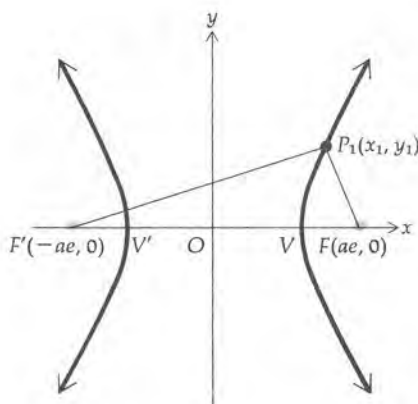
شکل ۳.۷.۱۳

مانند قضیه ۲.۶.۱۳ که تعریف دیگری از بیضی را به دست می‌دهد، قضیه زیر نیز تعریف دیگری از هذلولی را ارائه می‌کند.

قضیه ۳.۷.۱۳ هذلولی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط تعریف کرد که قدر مطلق تفاضل فواصل هریک از آن نقاط از دو نقطه مفروض (کانونها) مقداری ثابت باشد.

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه ۲.۶.۱۳ است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرینهای ۱۹ و ۲۰ را ببینید). در اثبات این قضیه کانونها را در نقاط $F'(-ae, 0)$ و

$F(ae, 0)$ در نظر بگیرید، و فرض کنید قدرمطلق ثابت تفاضل فاصله‌ها برابر با $2a$ باشد. شکل ۴.۷.۱۳ را ببینید.



شکل ۴.۷.۱۳

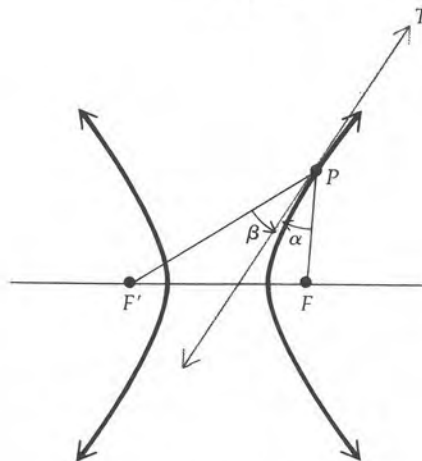
○ نمونه ۴ چون هذلولی مثال ۲ دارای کانونهایی در $(1, -2 - \sqrt{13})$ و $(1, -2 + \sqrt{13})$ است و $2a = 6$ ، از قضیه ۴.۷.۱۳ نتیجه می‌شود که این هذلولی می‌تواند به صورت مجموعه نقاطی تعریف شود، که قدرمطلق تفاضل فواصل هر یک از آن نقاط از دو نقطه $(1, -2 - \sqrt{13})$ و $(1, -2 + \sqrt{13})$ برابر با ۶ باشد. ○

خاصیتی از هذلولی که در قضیه ۴.۷.۱۳ ذکر شد، اساس چندین سیستم مهم دریانوردی را تشکیل می‌دهد. این سیستمها شامل شبکه‌ای از چند جفت فرستنده رادیویی هستند که هر جفت از آنها در مواضع معینی و به فاصله معلومی از یکدیگر قرار دارند. فرستنده‌ها سیگنالهای رادیویی ارسال می‌کنند و دریانوردان آنها را دریافت می‌کنند. اختلاف زمانی رسیدن دوسیگنال، تفاضل فواصل از دریانورد، یعنی $2a$ ، را مشخص می‌کند. پس موضع دریانورد در امتداد قوسی از یک هذلولی است که کانونهای آن در محل‌های استقرار دوفرستنده‌اند. یکی از دو قوس هذلولی، و نه هر دوی آنها، با توجه به اختلاف زمانی رسیدن سیگنالهای فرستنده‌ها، معین می‌شود. این فرایند با یک جفت فرستنده رادیویی دیگر تکرار می‌شود، و قوس دیگری از یک هذلولی که شامل موضع دریانورد است، به دست می‌آید. نقاط تقاطع این دو قوس هذلولوی موضع واقعی دریانورد را نشان خواهد داد. به عنوان مثال، در شکل ۵.۷.۱۳ تصور کنید یک جفت فرستنده در نقاط T_1 و S_1 مستقرند و سیگنالهای این دوفرستنده قوس هذلولوی A_1 را مشخص می‌کنند. یک جفت فرستنده دیگر نیز در نقاط T_2 و S_2 مستقرند و قوس هذلولوی A_2 را سیگنالهای آنها معین می‌کنند. پس موضع دریانورد در نقاط تقاطع A_1 و A_2 خواهد بود.



شکل ۵.۷.۱۳

هذلولی يك خاصیت انعکاسی دارد که در طراحی برخی از تلسکوپها به کار می رود. در شکل ۶.۷.۱۳ خط PT خط مماس در نقطه P بر نمودار يك هذلولی است که کانونهای آن در F و F' می باشند. اندازه زاویه بین پاره خط $F'P$ و خط مماس PT برابر α و اندازه زاویه بین پاره خط $F'P$ و خط مماس PT برابر β است. در تمرین ۲۵ از شما خواسته می شود که ثابت کنید $\alpha = \beta$. از این تساوی نتیجه می شود که پرتو نوری که از منبعی در يك کانون آيينه هذلولوی (آيينه ای که مقاطع هذلولوی دارد) می تابد، در امتداد خطی که از کانون دیگر می گذرد منعکس می شود.



شکل ۶.۷.۱۳

درمورد نمودار معادله درجه دوم کلی

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (۷)$$

که در آن $B = 0$ و $AC > 0$ ، در بخش ۶.۱۳ بحث شد. در این بخش نیز این معادله را در حالتی که $B = 0$ و $AC < 0$ ، بررسی کرده ایم. حال اگر در معادله (۷)، $B = 0$ و $AC = 0$ ، آنگاه $A = 0$ یا $C = 0$ (یا $A = B = C = 0$) را در نظر نمی گیریم چون در این صورت معادله (۷) معادله درجه دوم نخواهد بود. فرض کنید در (۷) داریم $B = 0$ ، $A = 0$ و $C \neq 0$. این معادله به صورت زیر درمی آید

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (۸)$$

اگر $D \neq 0$ ، رابطه (۸) معادله یک سهمی است. اگر $D = 0$ ، نمودار (۸) ممکن است دو خط موازی باهم، یک خط، یا مجموعه تهی باشد. که اینها حالت های تباهیده سهمی هستند.

○ نمونه ۵ نمودار معادله $4y^2 - 9 = 0$ دو خط متوازی است؛ $9y^2 + 6y + 1 = 0$ معادله یک خط است؛ و $2y^2 + y + 1 = 0$ به ازای هیچ مقدار حقیقی y برقرار نیست. ○

در صورتی که $B = 0$ ، $C = 0$ و $A \neq 0$ ، موقعیت مشابهی برقرار است. این نتایج در قضیه زیر خلاصه شده اند.

۵.۷.۱۳ قضیه اگر در معادله درجه دوم کلی (۷) داشته باشیم $B = 0$ و یکی از دو حالت $A = 0$ و $C \neq 0$ ، یا $C = 0$ و $A \neq 0$ برقرار باشد، آنگاه نمودار به یکی از صورت های زیر است: یک سهمی، دو خط متوازی، یک خط، یا مجموعه تهی.

می توان از قضایای ۱.۶.۱۳، ۳.۷.۱۳ و ۵.۷.۱۳ نتیجه گرفت که نمودار معادله درجه دوم کلی دو مجهولی، اگر $B = 0$ ، مقطع مخروطی و یا مقطع مخروطی تباهیده است. نوع مقطع مخروطی را می توان با توجه به حاصل ضرب A در C معین کرد. قضیه زیر را در این باره داریم.

۶.۷.۱۳ قضیه نمودار معادله $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، که A و C هر دو باهم صفر نیستند، یا مقطع مخروطی و یا مقطع مخروطی تباهیده است؛ اگر مقطع مخروطی باشد، آنگاه

- (i) سهمی است اگر $A = 0$ یا $C = 0$ ، یعنی اگر $AC = 0$ ؛
- (ii) بیضی است اگر A و C هم علامت باشند، یعنی اگر $AC > 0$ ؛
- (iii) هذلولی است اگر A و C مختلف علامه باشند، یعنی اگر $AC < 0$.

در مورد نمودار معادله درجه دوم کلی در حالت $B \neq 0$ ، در بخش ۸.۱۳ بحث شده است.

تمرینهای ۲.۱۳

در تمرینهای ۱ تا ۸، مطلوب است تعیین خروج از مرکز، مرکز، کانونها، هادیها، و معادلات مجانبهای هذلولی داده شده. نمودار هذلولی را نیز رسم کنید.

$$۱. \quad x^2 - y^2 + 8x - 2y - 21 = 0$$

$$۲. \quad 4x^2 - y^2 - 8x - 12 = 0$$

$$۳. \quad 9x^2 - 18y^2 + 54x - 36y + 79 = 0$$

$$۴. \quad x^2 - y^2 + 6x + 10y - 4 = 0$$

$$۵. \quad 3y^2 - 4x^2 - 8x - 24y - 40 = 0$$

$$۶. \quad 4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$$

$$۷. \quad 4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$$

$$۸. \quad y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۵، معادله هذلولی را که دشرایط داده شده صدق می کند به دست آورید، و نمودار آن را رسم کنید.

$$۹. \quad \text{يك كانون در } (0, 26) \text{ و مجانبها، خطوط } 5x = \pm 12y.$$

$$۱۰. \quad \text{مرکز در } (-5, 3)، \text{ يك رأس در } (-5, 7)، \text{ و يك كانون در } (-5, 8).$$

$$۱۱. \quad \text{مرکز در } (-1, -2)، \text{ يك كانون در } (14, -2)، \text{ و يك هادی، خط } 5y = -53.$$

$$۱۲. \quad \text{كانونها در } (6, 3) \text{ و } (0, 3)، \text{ و از نقطه } (5, 3 + 6/\sqrt{5}) \text{ بگذرد.}$$

$$۱۳. \quad \text{يك كانون در } (1, 3 - 2\sqrt{13})، \text{ تقاطع مجانبها در } (1, -3)، \text{ و يك مجانب از نقطه } (7, 1) \text{ بگذرد.}$$

$$۱۴. \quad \text{كانونها در } (4, -1) \text{ و } (4, 7)، \text{ و خروج از مرکز } 3.$$

$$۱۵. \quad \text{يك كانون در } (1, 2 + \sqrt{13})، \text{ و خط } y = -2 + (9\sqrt{13}/13) \text{ هادی متناظر این كانون، و مرکز در } (1, -2).$$

$$۱۶. \quad \text{رأسهای يك هذلولی در } (7, 2) \text{ و } (-1, 2) \text{ هستند و خروج از مرکز آن } \sqrt{3}$$

است. مطلوب است (الف) معادله هذلولی؛ (ب) معادلات مجانبها.

۱۷. رأسهای يك هذلولی در $(-۱, -۱)$ و $(۱, -۱)$ هستند، و خروج از مرکز آن $\sqrt{۵}$ است. مطلوب است تعیین (الف) معادله هذلولی؛ (ب) معادلات مجانبها.

۱۸. مرکز يك هذلولی متساوی الساقین در (h, k) و محور اصلی آن موازی با محور x هاست؛ ثابت کنید که مجانبهایش برهم عمودند.

۱۹. ثابت کنید مجموعه نقاطی که قدرمطلق تفاضل فواصل هریک از آنها از دو نقطه معلوم (کانونها) مقدار ثابتی باشد، هذلولی است.

۳۵. ثابت کنید هذلولی مجموعه نقاطی است که قدرمطلق تفاضل فواصل هریک از آنها از دو نقطه معلوم (کانونها) متداری ثابت است.

۲۱. با استفاده از قضیه ۴.۷.۱۳ معادله هذلولی را به دست آورید که تفاضل فواصل هر نقطه روی آن از $(۲, ۱)$ و $(۲, ۹)$ برابر با ۴ باشد.

۲۲. تمرین ۲۱ را برای حالتی حل کنید که تفاضل فواصل هر نقطه روی هذلولی از $(-۴, -۸)$ و $(۲, -۴)$ برابر با ۶ باشد.

۲۳. سه پست گیرنده در نقاط $A(۵, ۵)$ ، $B(۵, ۲۱/۴)$ ، و $C(۲۵/۳, ۵)$ مستقرند، واحد کیلومتر است. میکروفونهای مستقر در این نقاط نشان می دهند که آتشباری به اندازه $۵/۳$ کیلومتر به A نزدیکتر از C و به اندازه $۷/۴$ کیلومتر به B نزدیکتر از A می باشد. با استفاده از قضیه ۴.۷.۱۳ محل استقرار آتشبار را تعیین کنید.

۲۴. ثابت کنید خروج از مرکز هر هذلولی متساوی الساقین برابر $\sqrt{۲}$ است.

۲۵. در شکل ۴.۷.۱۳ ثابت کنید $\alpha = \beta$. (دانهایی: محورهای مختصات را طوری انتخاب کنید که مرکز هذلولی در مبدأ و محورهای هذلولی روی محورهای مختصات باشد. آنگاه ثابت کنید که خط مماس PT نیمساز زاویه بین FP و $F'P$ است.)

۸.۱۳ دوران محورها

نشان دادیم که چگونه انتقال محورها می تواند برخی از معادلات را به شکل ساده تری در آورد. انتقال محورها، دستگاه مختصات جدیدی پدید می آورد که محورهای موازی محورهای دستگاه اولیه اند. اکنون دوران محورهای مختصات را در نظر می گیریم که به ما امکان می دهد معادله درجه دومی را که شامل جمله xy است به معادله ای که شامل چنین جمله ای نباشد، تبدیل کنیم.

تصور کنید دو دستگاه مختصات دکارتی قائم با يك مبدأ داریم. فرض کنید یکی از دو دستگاه، xy و دستگاه دیگر $\bar{x}\bar{y}$ باشد. همچنین فرض کنید که محور $\bar{x}$ ها زاویه ای

به اندازه α رادیان با محور x ها بسازد. در این صورت، زاویه بین محور $\bar{x}$ ها و محور y ها نیز به اندازه α رادیان است. در چنین حالتی می‌گوییم که دستگاه مختصات $\bar{x}\bar{y}$ با زاویه‌ای به اندازه α رادیان دوران کرده و دستگاه مختصات $\bar{x}\bar{y}$ را تشکیل داده است. نقطه P که دارای مختصات (x, y) در دستگاه مختصات اولیه است، دارای مختصات $(\bar{x}, \bar{y})$ در دستگاه جدید خواهد بود. جال روابط بین این دو مجموعه مختصات را به دست می‌آوریم. برای انجام این کار، دو دستگاه مختصات قطبی را معرفی می‌کنیم، که قطب هر دو در مبدأ است. در دستگاه مختصات قطبی اول جهت مثبت محور قطبی را جهت مثبت محور x ها در نظر می‌گیریم؛ در دستگاه مختصات قطبی دوم جهت مثبت محور قطبی را جهت مثبت محور $\bar{x}$ ها انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۰۸.۱۳ را ببینید). نقطه P دارای دو مجموعه مختصات قطبی به صورت (r, θ) و $(\bar{r}, \bar{\theta})$ است، که

$$\bar{\theta} = \theta - \alpha \quad \text{و} \quad \bar{r} = r \quad (۱)$$

معادلات زیر برقرارند:

$$\bar{y} = \bar{r} \sin \bar{\theta} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \bar{r} \cos \bar{\theta} \quad (۲)$$

از (۱) در (۲) قرار می‌دهیم

$$\bar{y} = r \sin(\theta - \alpha) \quad \text{و} \quad \bar{x} = r \cos(\theta - \alpha) \quad (۳)$$

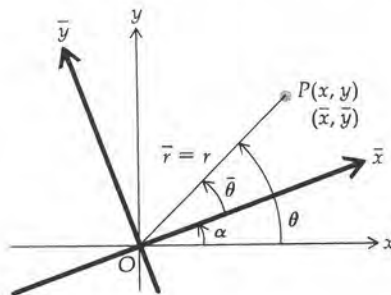
با استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای سینوس و کسینوس تفاضل دو عدد، معادلات (۳) به صورت زیر درمی‌آیند

$$\bar{x} = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha$$

و

$$\bar{y} = r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha.$$

چون $r \cos \theta = x$ و $r \sin \theta = y$ ، از دو معادله بالا به دست می‌آوریم



شکل ۱۰۸.۱۳

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad (۴)$$

و

$$\bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \quad (۵)$$

(۴) و (۵) را همراه با هم نسبت به x و y و بر حسب $\bar{x}$ و $\bar{y}$ حل می‌کنیم

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \quad (۶)$$

و

$$y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha \quad (۷)$$

طی مراحل رسیدن از (۴) و (۵) به (۶) و (۷) به عنوان تمرین واگذار می‌شود.
(تمرین ۳ را ببینید.) نتایج حاصل در قضیه زیر بیان شده‌اند.

۱۰۸.۱۳ قضیه اگر (x, y) نشان‌دهنده نقطه P نسبت به مجموعه مفروضی از محورها باشد، و $(\bar{x}, \bar{y})$ نماینده‌ای از نقطه P بعد از دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه α رادیان باشد، آنگاه

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha \quad \text{و} \quad y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$$

مثال ۱ معادله $xy = ۱$ مفروض است؛ معادله نمودار را نسبت به محورهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، بعد از دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه $\pi/۴$ رادیان، به دست آورید.

حل با فرض $\alpha = \pi/۴$ در قضیه ۱۰۸.۱۳ به دست می‌آوریم

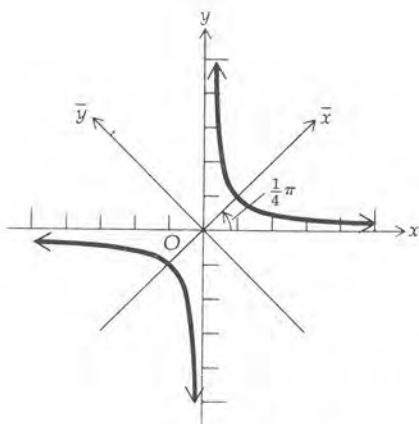
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y} \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y}$$

با قرار دادن این عبارات به جای x و y در معادله $xy = ۱$ داریم

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{y} \right) = ۱$$

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = ۱.$$

این معادله، معادله هذلولی متساوی‌الساقینی است که مجانبهای نیمسازهای ربعها در دستگاه $\bar{x}\bar{y}$ می‌باشند. پس نمودار معادله $xy = ۱$ يك هذلولی متساوی‌الساقین است که در ربع اول و سوم قرار دارد و مجانبهای محوره‌های x و y هستند (شکل ۲۰۸.۱۳ را ببینید).



شکل ۲۰۸۰۱۳

در بخش ۷۰۱۳ نشان دادیم که وقتی $B=0$ ، A و C هردو باهم صفر نباشند، نمودار معادله درجه دوم دو مجهولی کلی زیر

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (۸)$$

یا يك مقطع مخروطی یا يك مقطع مخروطی تپاھیده است. حال نشان می‌دهیم که اگر $B \neq 0$ ، هر معادله‌ای به صورت (۸) را می‌توان با دوران مناسب محورها به معادله‌ای به صورت زیر تبدیل کرد

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \quad (۹)$$

که $\bar{A}$ و $\bar{C}$ هردو باهم صفر نیستند.

اگر دستگاه xy با زاویه‌ای به اندازه α رادیان دوران کند، آنگاه برای به دست آوردن معادله‌ای از نمودار (۸) نسبت به دستگاه $\bar{x}\bar{y}$ ، $\bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha$ را به جای x و $\bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$ را به جای y قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0 \quad (۱۰)$$

که

$$\bar{A} = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$$

$$\bar{B} = -2A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2C \sin \alpha \cos \alpha \quad (۱۱)$$

$$\bar{C} = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

می‌خواهیم α را طوری پیدا کنیم که دوران محورها معادله (۸) را به معادله (۹)

تبدیل کند. $\bar{B}$ را در (۱۱) برابر صفر قرار می‌دهیم

$$B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (C - A)(2 \sin \alpha \cos \alpha) = 0$$

و اتحادهای مثلثاتی را به کار می‌گیریم

$$B \cos 2\alpha + (C - A) \sin 2\alpha = 0$$

چون $B \neq 0$ ، نتیجه می‌شود

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \quad (12)$$

پس، نشان داده‌ایم که معادله‌ای به صورت (۸)، که در آن $B \neq 0$ ، را می‌توان به وسیله دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه α که در (۱۲) صدق می‌کند، به معادله‌ای به صورت (۹) تبدیل کرد. می‌خواهیم نشان دهیم که $\bar{A}$ و $\bar{C}$ در (۹) هردو باهم صفر نیستند. برای اثبات این مطلب، توجه کنید که (۱۰) از (۸) به وسیله دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه α رادیان به دست آمده است. همچنین (۸) را می‌توان از (۱۰) به وسیله دوران محورها در جهت عکس با زاویه‌ای به اندازه $(-\alpha)$ رادیان به دست آورد. اگر $\bar{A}$ و $\bar{C}$ در (۱۰) هردو صفر باشند، آنگاه با قرار دادن

$$\bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha \quad \text{و} \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

در (۱۰) معادله زیر نتیجه می‌شود

$$\bar{D}(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \bar{E}(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + \bar{F} = 0$$

که معادله‌ای از درجه اول است و لذا با (۸) تفاوت دارد چون فرض کرده بودیم که حداقل $B \neq 0$. بنابراین قضیه زیر اثبات شده است.

۲۰۸.۱۳ قضیه اگر $B \neq 0$ ، معادله $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ را می‌توان به وسیله دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه α رادیان که $\cot 2\alpha = (A - C)/B$ ، به معادله $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0$ که در آن $\bar{A}$ و $\bar{C}$ هر دو باهم صفر نیستند، تبدیل کرد.

از قضایای ۲۰۸.۱۳ و ۶.۷.۱۳ نتیجه می‌شود که نمودار معادله‌ای به صورت (۸) یا یک مقطع مخروطی، و یا یک مقطع مخروطی تباهیده است. برای تعیین اینکه نمودار معادله خاصی چه نوع مقطع مخروطی است، از این واقعیت که A ، B ، و C از (۸) و $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، و $\bar{C}$ از (۱۰) با رابطه زیر به هم مربوط اند، استفاده می‌کنیم

$$B^2 - 4AC = \bar{B}^2 - 4\bar{A}\bar{C}. \quad (13)$$

برای اثبات این تساوی، می‌توان عبارات مربوط به $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، و $\bar{C}$ را از معادلات (۱۱) در

طرف راست (۱۳) قرار داد. این کار به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۱۹ را ببینید). عبارت $B^2 - 4AC$ مبین (۸) نامیده می شود. معادله (۱۳) حاکی از آن است که مبین معادله درجه دوم دوجوهولی کلی، تحت دوران محورها ناوددا [نامتغیر] است. اگر زاویه دوران طوری انتخاب شود که $\bar{B} = 0$ ، آنگاه (۱۳) به صورت زیر درمی آید

$$B^2 - 4AC = -4\bar{A}\bar{C}. \quad (14)$$

از قضیه ۶.۷.۱۳ نتیجه می شود که چنانچه نمودار (۹) تباهیده نباشد، سهمی است اگر $\bar{A}\bar{C} = 0$ ، بیضی است اگر $\bar{A}\bar{C} > 0$ ، و هذلولی است اگر $\bar{A}\bar{C} < 0$. بنا بر این نتیجه می گیریم که نمودار (۹) سهمی، بیضی، یا هذلولی است بر حسب اینکه $4\bar{A}\bar{C} -$ صفر، منفی، یا مثبت باشد. چون نمودار (۸) مشابه نمودار (۹) است، از (۱۴) نتیجه می شود که اگر نمودار (۸) تباهیده نباشد، سهمی، بیضی، یا هذلولی است بر حسب اینکه مبین $B^2 - 4AC$ صفر، منفی، یا مثبت باشد. به این ترتیب قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

۳.۸.۱۳ قضیه نمودار معادله

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

یا يك مقطع مخروطی است، یا يك مقطع مخروطی تباهیده. اگر يك مقطع مخروطی باشد، آنگاه

- (i) سهمی است اگر $B^2 - 4AC = 0$ ؛
- (ii) بیضی است اگر $B^2 - 4AC < 0$ ؛
- (iii) هذلولی است اگر $B^2 - 4AC > 0$.

مثال ۲ معادله $0 = 17x^2 - 12xy + 8y^2 - 8x + 5y - 1$ مفروض است. این معادله را به وسیله دوران محورها ساده کنید. نمودار معادله و هر دو دستگاه محورها را رسم کنید.

حل $0 < B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4(17)(8) = -400$. پس، بنا به قضیه ۳.۸.۱۳ نمودار آن يك بیضی یا يك بیضی تباهیده است. برای حذف جمله xy به وسیله دوران محورها باید α را طوری انتخاب کنیم که

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} = \frac{17-8}{-12} = -\frac{3}{4}.$$

2α ای در بازه $(0, \pi)$ وجود دارد که به ازای آن داریم $\cot 2\alpha = -3/4$. بنابراین α در بازه $(0, \pi/2)$ خواهد بود. در استفاده از قضیه ۱.۸.۱۳، لازم نیست α را به دست آوریم به شرط اینکه $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ را پیدا کنیم. این توابع را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی از مقدار $\cot 2\alpha$ می توان به دست آورد. داریم

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

چون $\cot 2\alpha = -3/4$ و $0 < \alpha < \pi/2$ ، نتیجه می‌شود که $\cos 2\alpha = -3/5$. پس

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 + (3/5)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1 - (3/5)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

با قراردادن $x = \bar{x}/\sqrt{5} - 2\bar{y}/\sqrt{5}$ و $y = 2\bar{x}/\sqrt{5} + \bar{y}/\sqrt{5}$ در معادله داده شده به دست می‌آوریم

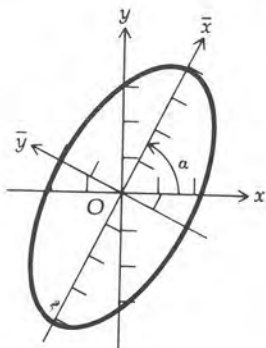
$$\begin{aligned} & 17\left(\frac{\bar{x}^2 - 4\bar{x}\bar{y} + 4\bar{y}^2}{5}\right) - 12\left(\frac{2\bar{x}^2 - 3\bar{x}\bar{y} - 2\bar{y}^2}{5}\right) \\ & + 8\left(\frac{4\bar{x}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}{5}\right) - 80 = 0 \end{aligned}$$

این معادله با ساده‌سازی به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 16$$

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1.$$

پس، نمودار معادله یک بیضی است که طول قطر بزرگ آن ۸ واحد و طول قطر کوچکش ۴ واحد می‌باشد. نمودار بیضی با هر دو مجموعه محورها در شکل ۳۰۸.۱۳ نشان داده شده است.



شکل ۳۰۸.۱۳

تمرینهای ۸.۱۳

درهریک از تمرینهای ۱ و ۲، معادله‌ای داده شده است. معادله نمودار را نسبت به محورهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، بعد از دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه $\pi/4$ رادیان، به دست آورید.

$$1. \quad xy = -4 \quad 2. \quad x^2 - y^2 = 8$$

۳. با حل معادلات (۴) و (۵) این بخش نسبت به x و y و بر حسب $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، روابط (۶) و (۷) را به دست آورید.

در هر یک از تمرینهای ۴ تا ۱۰، با دوران محورها جمله xy را از معادله داده شده حذف کنید. نمودار را رسم کنید و هر دو مجموعه محورها را نیز نشان دهید.

$$4. \quad x^2 + xy + y^2 = 3 \quad 5. \quad 24xy - 7y^2 + 36 = 0$$

$$6. \quad 4xy + 3x^2 = 4 \quad 7. \quad xy = 8$$

$$8. \quad 6x^2 + 20\sqrt{3}xy + 26y^2 = 324$$

$$9. \quad 31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 144$$

$$10. \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 9$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۸، معادلات داده شده را به وسیله دوران و انتقال محورها ساده کنید. نمودار را رسم کنید و هر سه مجموعه محورها را نشان دهید.

$$11. \quad x^2 + xy + y^2 - 3y - 6 = 0$$

$$12. \quad x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

$$13. \quad 17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y - 12 = 0$$

$$14. \quad 19x^2 + 6xy + 11y^2 - 26x + 38y + 31 = 0$$

$$15. \quad x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 4 = 0$$

$$16. \quad 3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$$

$$17. \quad 11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0$$

$$18. \quad 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 400 = 0$$

۱۹. نشان دهید که در معادله درجه دوم دومتغیری کلی، مبین $B^2 - 4AC$ تحت دوران محورها ناورداست.

۲۰. معادله $(a^2 + b^2)xy = 1$ داده شده است که در آن $a > 0$ و $b > 0$ ؛ معادله

نمودار را نسبت به محورهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، بعد از دوران محورها با زاویه‌ای به اندازه $\tan^{-1}(b/a)$ رادیان، به دست آورید.

تمرینهای مروری فصل ۱۳

دتمرینهای ۱ و ۲، معادله سهمی را به دست آورید که دارای کانون و هادی مفروض باشد. همچنین طول ضلع قائم سهمی را پیدا کنید، و نمودار را رسم کنید.

۱. کانون در $(-3, 0)$ ؛ هادی $y = 3$. ۲. کانون در $(6, 0)$ ؛ هادی $x = -6$.

۳. سهمی با معادله $y^2 + 8x - 6y - 7 = 0$ مفروض است. مطلوب است تعیین (الف) رأس؛ (ب) کانون؛ (پ) معادله محور سهمی؛ و (ت) معادله هادی.

۴. اگر رأس یک سهمی در $(-3, 5)$ و کانونش در $(-3, -1)$ باشد، معادله سهمی را به دست آورید.

دتمرینهای ۵ تا ۷، از تعریف مقطع مخروطی (تعریف ۱۳.۱۳) استفاده کنید، و معادله یک مقطع مخروطی را پیدا کنید که دارای خروج از مرکز، کانون، و هادی متناظر مفروض باشد. همچنین نوع مقطع مخروطی را مشخص کنید.

۵. $e = 2$ ؛ کانون در $(1, -4)$ ؛ هادی $y = -3$.

۶. $e = 1$ ؛ کانون در $(3, -2)$ ؛ هادی $x = 0$.

۷. $e = 2/3$ ؛ کانون در $(5, 3)$ ؛ هادی $2x - 3 = 0$.

۸. کانون سهمی را که دارای معادله $y = ax^2 + bx$ است، به دست آورید.

دتمرینهای ۹ تا ۱۴، معادله دکارتی یک مقطع مخروطی را که در شرایط داده شده صدق کند، به دست آورید، و نمودار آن را رسم کنید.

۹. رأسها در $(1, 8)$ و $(1, -4)$ ؛ $e = 2/3$.

۱۰. رأس در $(4, 2)$ ، کانون در $(4, -3)$ ؛ $e = 1$.

۱۱. مرکز در مبدأ؛ کانونها روی محور x ها، $e = 2$ ؛ شامل نقطه $(2, 3)$.

۱۲. کانونها در $(-5, 1)$ و $(1, 1)$ ؛ یک رأس در $(-4, 1)$.

۱۳. یک کانون در $(-5, 3)$ ؛ هادی $x = -3$ ؛ $e = 3/4$.

۱۴. یک کانون در $(4, -2)$ ؛ هادی $y = 2$ ؛ $e = 3/2$.

دتمرینهای ۱۵ تا ۱۸، معادله قطبی یک مقطع مخروطی را که در شرایط داده شده صدق

کند، به دست آورید، و نمودار آن را رسم کنید.

۱۵. يك كانون در قطب؛ رأسها در $(2, \pi)$ و $(4, \pi)$.

۱۶. يك كانون در قطب؛ يك رأس در $(6, \pi/2)$ ؛ $e = 3/4$.

۱۷. يك كانون در قطب؛ يك رأس در $(3, 3\pi/2)$ ؛ $e = 1$.

۱۸. خط $r \sin \theta = 6$ هادی متناظر با کانونی در قطب است و $e = 5/3$.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، معادله يك مقطع مخروطی که دارای کانونی در قطب است، داده شده است. در هریک، (الف) خروج از مرکز را به دست آورید؛ (ب) نوع مقطع مخروطی را مشخص کنید؛ (پ) معادله هادی متناظر با کانونی را که در قطب است بنویسید؛ (ت) منحنی را رسم کنید.

$$r = \frac{5}{3 + 3 \sin \theta} \quad ۲۰$$

$$r = \frac{2}{2 - \sin \theta} \quad ۱۹$$

$$r = \frac{4}{3 - 2 \cos \theta} \quad ۲۲$$

$$r = \frac{4}{2 + 3 \cos \theta} \quad ۲۱$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، معادله داده شده یا بیضی و یا هذلولی است. مطلوب است خروج از مرکز، مرکز، کانونها، و هادیها. نمودار را رسم کنید. اگر این نمودار هذلولی است، معادلات مجانبها را نیز به دست آورید.

$$4x^2 + y^2 + 24x - 16y + 84 = 0 \quad ۲۳$$

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y + 11 = 0 \quad ۲۴$$

$$25x^2 - y^2 + 50x + 6y - 9 = 0 \quad ۲۵$$

$$4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0 \quad ۲۶$$

در تمرینهای ۲۷ و ۲۸، معادله داده شده را به وسیله دوران و انتقال محورها ساده کنید. نمودار را رسم کنید و هر سه مجموعه محورها را نشان دهید.

$$3x^2 - 3xy - y^2 - 6y = 0 \quad ۲۷$$

$$4x^2 + 3xy + y^2 - 6x + 12y = 0 \quad ۲۸$$

۲۹. معادله قطبی سهمی را بنویسید که شامل نقطه $(2, \pi/3)$ بوده، و کانونش در قطب و رأس آن در امتداد محور قطبی باشد.

۳۰. اگر فاصله بین دو هادی بیضی سه برابر فاصله کانونهای آن باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

۳۱. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیهٔ محصور بین هذلولی $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ و خط $x = 2a$ حول محور y ها پدید می‌آید.

۳۲. نشان دهید که کانونهای هذلولی $x^2 - y^2 = 4$ ، کانونهای بیضی $x^2 + 9y^2 = 9$ نیز هستند.

۳۳. معادلهٔ سهمی را به‌دست آورید که رأس آن در $(1, 5)$ ، و محورش موازی محور y ها باشد، و از نقطهٔ $(3, 9)$ بگذرد.

۳۴. نشان دهید که هر معادلهٔ به‌صورت $xy + ax + by + C = 0$ را همیشه می‌توان به‌وسیلهٔ انتقال محورها به‌صورت $x'y' = k$ نوشت، و مقدار k را به‌دست آورید.

۳۵. هر مقطعی از يك آيينهٔ سهموی که با عبور صفحه‌ای از محور آيينه پديد می‌آيد، قسمتی از يك سهمی است. ارتفاع اين قسمت ۱۲ سانتیمتر و طول قاعدهٔ آن ۱۸ سانتیمتر است. مقطعی از آيينه که توسط صفحه‌ای عمود بر محور آن ايجاد می‌شود، يك دایره است. محیط مقطع مسطح مستدیری را به‌دست آورید که اگر صفحهٔ عمود بر محور آيينه ۳ سانتیمتر از رأس فاصله داشته باشد، به‌وجود می‌آيد.

۳۶. هادی سهمی $px^2 = 4y$ مماس بر يك دایره است، که کانون سهمی در مرکز آن است. معادلهٔ دایره را به‌دست آورده و نقاط تقاطع دو منحنی را تعیین کنید.

۳۷. ماهواره‌ای دور زمین در يك مدار بیضوی شکل که زمین در يك کانون آن است و $e = 1/3$ ، در حال حرکت است. نزدیکترین فاصله‌ای که ماهواره با زمین پیدا می‌کند ۳۵۰ میل است. دورترین فاصلهٔ ماهواره از زمین را به‌دست آورید.

۳۸. مدار حرکت سیارهٔ مریخ به‌دور خورشید بیضوی شکل است و خورشید در يك کانون آن قرار دارد. طول نصف قطر بزرگ بیضی ۳۶ میلیون میل، و خروج از مرکز آن ۰٫۲۵۶۰۲۵ است. مطلوب است تعیین (الف) نزدیکترین فاصلهٔ مریخ از خورشید؛ و (ب) دورترین فاصلهٔ ممکن بین مریخ و خورشید.

۳۹. ستارهٔ دنباله‌داری در مسداری سهموی به‌دور خورشید می‌گردد و خورشید در کانون F سهمی است. ستارهٔ دنباله‌دار برای اولین بار در نقطهٔ P_1 که ۱۵ میلیون میل با خورشید فاصله دارد و برای دومین بار در P_2 که ۵ میلیون میل از خورشید فاصله دارد، دیده شده است. پاره خطهای FP_1 و FP_2 برهم عمودند. با این اطلاعات دو مدار ممکن برای ستارهٔ دنباله‌دار وجود دارد. در هر مدار نزدیکترین فاصلهٔ ستارهٔ دنباله‌دار تا خورشید را به‌دست آورید.

۴۰. طاق پلی که به‌شکل يك نیم‌بیضی است، دارای دهانهٔ افقی ۴۰ متر و ارتفاع ۱۶ متر در مرکز است. ارتفاع طاق در ۹ متری طرف چپ یا راست مرکز چقدر است؟

۴۱. نقاط A و B ، از هم ۱۰۰۰ متر فاصله دارند. با شنیدن صدای انفجاری در این دو نقطه و در زمانهای مختلف، معین شده که محل انفجار به نقطه A ، ۶۰۰ متر نزدیکتر است تا به نقطه B . نشان دهید که محل انفجار محدود به منحنی خاصی است، و معادله منحنی را به دست آورید.

۴۲. مساحت ناحیه محصور بین دو سهمی $r = 2/(1 - \cos \theta)$ و $r = 2/(1 + \cos \theta)$ را به دست آورید.

۴۳. ثابت کنید که خط $y = 2x$ مجانب نمودار تابعی مانند f است که $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$.

۴۴. هر وتر کانونی مقطع مخروطی توسط کانون به دو پاره خط تقسیم می شود. ثابت کنید که هر وتری در نظر گرفته شود، مجموع عکس اندازه طولهای این دو پاره خط یکسان است. (دانهمایی: از مختصات قطبی استفاده کنید.)

۴۵. هر وتر کانونی مقطع مخروطی پاره خطی است که از کانونی می گذرد و نقاط انتهایی آن روی مقطع مخروطی اند. ثابت کنید که اگر دو وتر کانونی يك سهمی برهم عمود باشند، مجموع عکس اندازه طولهایشان مقداری ثابت است. (دانهمایی: از مختصات قطبی استفاده کنید.)

۴۶. ثابت کنید که نقاط وسط تمام وترهای سهمی که موازی وتر ثابتی از آن باشند، روی خطی که موازی محور سهمی است قرار دارند.

۴۷. نشان دهید که $Vx \pm Vy = \pm Va$ نشان دهنده خانواده ای يك پارامتری از مقاطع مخروطی است، و نوع این مقاطع مخروطی را معین کنید. نمودار این مقاطع را به ازای $a = 1$ ، $a = 2$ ، و $a = 4$ رسم کنید.

۴۸. نمودار معادله $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0$ يك مقطع مخروطی مرکزدار است که دارای خروج از مرکز e و کانونی در $(p, 0)$ می باشد. این معادله را با انتقال محورها ساده کنید. مبدأ جدید را نسبت به محوره های x و y به دست آورده و نوع مقطع مخروطی را معین کنید.

صور مبهم، انتگرالهای نامتعارف، و فرمول تیلر

۱.۱۴ صورت مبهم ۰/۰

قضیه حدی ۹ (۹.۲.۲) حاکی است که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو وجود داشته باشند، آنگاه با این شرط که $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

در بسیاری از موارد، این قضیه را نمی توان به کار برد. به ویژه، اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ که k يك عدد ثابت مخالف با ۰ است، آنگاه قضیه حدی ۱۲ (۴.۴.۲) را می توان به کار برد. حالتی را در نظر بگیرید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ، و نیز $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در مورد برخی از این گونه حدها قبلاً بحث کرده ایم.

○ نمونه ۱ می خواهیم

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$$

را بیاییم. در اینجا $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - x - 12) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$ اما، می‌توانیم صورت و مخرج را تجزیه کنیم و به دست آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)}.$$

چون $x \neq 4$ ، صورت و مخرج را می‌توان بر $(x-4)$ تقسیم کرد و نتیجه گرفت که

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+3}{x+1} = \frac{7}{5}$$

$\circ$ نمونه ۲ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ؛ اما، بنا بر قضیه ۲.۹.۲،

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

۱۰.۱۴ تعریف اگر f و g دو تابع باشند به طوری که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه تابع f/g در a به صورت مبهم $0/0$ است.

$\circ$ نمونه ۳ بنا بر تعریف ۱۰.۱۴، $(x^2 - x - 12)/(x^2 - 3x - 4)$ در 4 به صورت مبهم $0/0$ است؛ اما، در نمونه ۱ دیدیم که

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{7}{5}.$$

همچنین، $(\sin x/x)$ در 0 به صورت مبهم $0/0$ است، حال آنکه بنا بر نمونه ۲،

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$$

حال به مطالعه روشی کلی می‌پردازیم که با استفاده از آن می‌توان حد تابع را، در صورت وجود، در عددی که به ازای آن به صورت مبهم $0/0$ است، به دست آورد. این روش به ریاضیدان فرانسوی، گیوم فرانسوا دولوپیتال [درفارسی، معروف به هوییتال] (۱۶۶۱-۱۷۰۷) منسوب است که نخستین کتاب درسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال را نوشت. کتابی که در سال ۱۶۹۶ میلادی به چاپ رسید، و آن را قاعده هوییتال می‌نامند.

۲.۱۰۱۴ قضیه (قاعده هوییتال) فرض کنید f و g توابعی باشند که بر بازه‌ی بازی چون I ، بجز احتمالاً در عددی مانند a از I ، مشتق پذیرند. و فرض کنید به ازای هر $x \neq a$ از I ، $g'(x) \neq 0$. در این صورت اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، و اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اگر تمام این حدها حدهای چپ، و یا تمام آنها حدهای راست باشند، باز هم قضیه برقرار است.

قبل از ارائه اثبات قضیه ۲۰۱.۱۴، موارد استفاده قضیه را با یک نمونه و دو مثال نشان می دهیم.

○ نمونه ۴ با استفاده از قاعده هوییتال، حدهای مذکور در نمونه های ۱ و ۲ را محاسبه می کنیم. در نمونه ۱، چون $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - x - 12) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x - 4) = 0$ ، می توانیم قاعده هوییتال را به کار ببریم و به دست آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 1}{2x - 3} = \frac{7}{5}.$$

قاعده هوییتال در مورد نمونه ۲ نیز به کار می رود زیرا $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

○
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

مثال ۱ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^x}.$$

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ، از قاعده هوییتال می توان استفاده

کرد. لذا

▲
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

مثال ۲ حد زیر، را در صورت وجود بیابید

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}.$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x+\ln x) = 1-1+0 = 0$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3-3x+2) = 1-3+2 = 0.$$

لذا از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3}.$$

حال، چون $\lim_{x \rightarrow 1} (-1+1/x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2-3) = 0$ ، باز هم از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1+\frac{1}{x}}{3x^2-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

بنابراین

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2} = -\frac{1}{6}.$$

برای اثبات قضیه ۲۰.۱۰۴، لازم است از قضیه معروف به قضیه مقدار میانگین کوشی استفاده کنیم که قضیه مقدار میانگین (۲.۴.۴) در مورد یک تابع را به دو تابع تعمیم می‌دهد. این قضیه به ریاضیدان فرانسوی اوگوستن ل. کوشی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) منسوب است.

۳۰.۱۰۴ قضیه (قضیه مقدار میانگین کوشی) اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری‌که

- (i) f و g بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند؛
- (ii) f و g بر بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر باشند؛
- (iii) به‌ازای هر x در بازه باز (a, b) ، $g'(x) \neq 0$ ؛

آنگاه عددی چون z در بازه باز (a, b) وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

اثبات ابتدا نشان می‌دهیم که $g(b) \neq g(a)$. فرض کنید $g(b) = g(a)$. چون g در دو شرط فرض قضیه مقدار میانگین (۲.۴.۴) صدق می‌کند، عددی مانند c در (a, b) وجود دارد که $g'(c) = [g(b) - g(a)] / (b - a)$. اما، اگر $g(b) = g(a)$ ، آنگاه عددی چون c ، در (a, b) هست که $g'(c) = 0$. حال آنکه شرط (iii) از فرض این قضیه حاکی از آن است که به ازای هر x در (a, b) ، $g'(x) \neq 0$. پس، تناقضی وجود دارد. لذا این فرض که $g(b) = g(a)$ ، غلط است. بنابراین $g(b) \neq g(a)$ و در نتیجه $g(b) - g(a) \neq 0$.
حال تابع h با ضابطه

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(x) - g(a)]$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$h'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] g'(x). \quad (۱)$$

بنابراین، h بر (a, b) مشتق پذیر است زیرا f و g بر (a, b) مشتق پذیرند؛ و h بر $[a, b]$ پیوسته است زیرا f و g بر $[a, b]$ پیوسته‌اند.

$$h(a) = f(a) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(a) - g(a)] = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right] [g(b) - g(a)] = 0.$$

پس شرایط فرض قضیه رول توسط تابع h برآورده می‌شوند. در نتیجه عددی مانند z در بازه باز (a, b) وجود دارد که $h'(z) = 0$. لذا، بنابر (۱)

$$f'(z) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(z) = 0. \quad (۲)$$

چون بر (a, b) ، $g'(z) \neq 0$ ، بنابر (۲) به ازای عددی چون z در (a, b) داریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

□

و به این ترتیب، قضیه اثبات شده است.

اگر g چنان تابعی باشد که $g(x) = x$ ، آنگاه حکم قضیه مقدار میانگین کوشی به حکم قضیه مقدار میانگین قبل تبدیل می‌شود زیرا $g'(z) = 1$. لذا قضیه مقدار میانگین قبل حالت خاصی است از قضیه مقدار میانگین کوشی.

تعبیری هندسی از قضیه مقدار میانگین کوشی در بخش ۴.۱۶ داده شده است؛ علت به تعویق انداختن این موضوع آن است که برای بیان آن به معادلات پارامتری نیاز داریم.

○ نمونه ۵ فرض کنید $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$ و $g(x) = x^3 - 4x + 2$ عدد z در $(0, 1)$ را که وجود آن در قضیه ۳.۱۰۱۴ پیش بینی شده است، می یابیم.

$$f'(x) = 6x + 3 \quad g'(x) = 3x^2 - 4.$$

پس f و g همه جا پیوسته و مشتق پذیرند، و به ازای هر x در $(0, 1)$ ، $g'(x) \neq 0$. لذا بنا بر قضیه ۳.۱۰۱۴، عددی مانند z در $(0, 1)$ وجود دارد که

$$\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{6z + 3}{3z^2 - 4}.$$

قرار می دهیم $f(1) = 5$ ، $f(0) = -1$ ، $g(1) = -1$ ، $g(0) = 2$ ، و z را محاسبه می کنیم

$$\frac{5 - (-1)}{-1 - 2} = \frac{6z + 3}{3z^2 - 4}$$

$$6z^2 + 6z - 5 = 0$$

$$z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 120}}{12}$$

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{39}}{12}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{39}}{6}.$$

○ تنها یکی از این اعداد به $(0, 1)$ تعلق دارد، و آن $z = (-3 + \sqrt{39})/6$ است.

حال در موقعیتی هستیم که قضیه ۲.۱۰۱۴ را اثبات کنیم. سه حالت تمیز می دهیم:

$$(i) \ x \rightarrow a^+; (ii) \ x \rightarrow a^-; (iii) \ x \rightarrow a.$$

اثبات قضیه ۲.۱۰۱۴ (i) چون در فرض گفته نشده است که f و g در a معین هستند،

دو تابع جدید F و G را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$F(a) = 0 \text{ اگر } x \neq a \quad F(x) = f(x) \quad (3)$$

$$G(a) = 0 \text{ اگر } x \neq a \quad G(x) = g(x)$$

فرض کنید b نقطه انتهایی سمت راست بازه I باشد که در فرض ذکر شده است. چون f و g هر دو بر I ، بجز احتمالاً در a ، مشتق پذیرند، نتیجه می گیریم که G و F هر دو بر بازه $(a, x]$ ، که $a < x < b$ ، مشتق پذیرند. بنابراین G و F هر دو بر $(a, x]$ پیوسته اند. و نیز توابع G و F هر دو در a از راست پیوسته اند زیرا

$$\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 = G(a) \text{ و } \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 = F(a)$$

بنابراین G و F بر بازه بسته $[a, x]$ پیوسته اند. لذا G و F در سه شرط فرض قضیه مقدار میانگین کوشی (قضیه ۳.۱۰۱۴) بر بازه $[a, x]$ صدق می کنند. پس به ازای عددی مانند z ، که $a < z < x$ داریم

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}. \quad (۴)$$

با توجه به (۳) و (۴) داریم

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (۵)$$

چون $a < z < x$ ، نتیجه می گیریم که وقتی $x \rightarrow a^+$ ، $z \rightarrow a^+$ ؛ لذا

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \rightarrow a^+} \frac{f'(z)}{g'(z)}. \quad (۶)$$

اما، بنا بر فرض، حد طرف راست (۶) برابر با L است. بنابراین

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اثبات حالت (ii) مشابه با اثبات حالت (i) است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۳۴ را ببینید). اثبات حالت (iii) مبتنی بر نتایج حالت های (i) و (ii) است و این نیز به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۳۵ را ببینید). طبق قضیه زیر، قاعده هوییتال در حالتی نیز که x به طور بیکران افزایش یا کاهش یابد، برقرار است.

۴.۱۰۱۴ قضیه (قاعده هوییتال) فرض کنید f و g توابعی باشند که به ازای هر $x > N$ ، $g'(x) \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ اگر N يك مقدار ثابت مثبت است، مشتق پذیرند؛ و فرض کنید به ازای هر $x > N$ ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اگر به جای $x \rightarrow +\infty$ قرار دهیم $x \rightarrow -\infty$ ، باز هم قضیه برقرار است.

اثبات قضیه را به ازای $x \rightarrow +\infty$ ثابت می‌کنیم. اثبات حالت $x \rightarrow -\infty$ به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۳۷ را ببینید).

فرض کنید به ازای هر $x > N$ داریم $x = 1/t$. در این صورت $t = 1/x$ و نیز فرض کنید F و G توابعی با ضابطه‌های $F(t) = f(1/t)$ و $G(t) = g(1/t)$ ، $t \neq 0$ ، باشند. در این صورت، $f(x) = F(t)$ و $g(x) = G(t)$ ، که $0 < t < 1/N$ و $x > N$ بنا بر تعاریف ۱۰۵.۲ و ۱۰۳.۲ می‌توان نشان داد که معنی عبارتهای

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = M$$

یکی است. اثبات این ادعا به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۳۶ را ببینید). چون بنا بر فرض داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(t) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 0. \quad (۷)$$

خارج قسمت $F'(t)/G'(t)$ را در نظر می‌گیریم. قاعده زنجیری را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

چون بنا بر فرض $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)/g'(x) = L$ ، از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = L. \quad (۸)$$

اما، به ازای هر $x > N$ ، $g'(x) \neq 0$ پس

$$G'(t) \neq 0, \quad 0 < t < \frac{1}{N} \quad \text{به ازای هر} \quad (۹)$$

از (۷)، (۸)، و (۹) قضیه ۲.۱۰.۱۴ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = L.$$

حال نظر به اینکه به ازای هر $x > N$ و $t \neq 0$ ، $F(t)/G(t) = f(x)/g(x)$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

و لذا قضیه اثبات شده است. $\square$

اگر به جای L ، $+\infty$ یا $-\infty$ را قرار دهیم باز هم قضایای ۲۰.۱۰۱۴ و ۴۰.۱۰۱۴ برقرارند. اثبات این حالات را نمی آوریم.

مثال ۳ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)}.$$

حل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(1/x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(1/x) = 0$. لذا بنابر قاعده

هوپیتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\tan^{-1} \left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2 + 1}}.$$

چون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

نتیجه می گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2 + 1}} = 1.$$

بنابراین، حد مطلوب برابر با ۱ است. $\blacktriangle$

تمرینهای ۱۰۱۴

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۵، تمام مقادیر x در بازه مفروض (a, b) را كه در حکم قضیه ۳.۱.۱۴ به ازای دوقابح داده شده صدق می کنند، به دست آورید.

۱. $f(x) = x^3, g(x) = x^2; (a, b) = (0, 2)$

۲. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}; (a, b) = (0, 2)$

۳. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x; (a, b) = (0, \pi)$

۴. $f(x) = \cos 2x, g(x) = \sin x; (a, b) = (0, \pi/2)$

۵. $f(x) = \sqrt{x+5}, g(x) = x+3; (a, b) = (-4, -1)$

در تمرینهای ۶ تا ۳۰، حد را، در صورت وجود، محاسبه کنید.

۷. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

۹. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2 \cos x}{2x - \pi}$

۱۰. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$

۱۱. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

۱۲. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{e^x}$

۱۳. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

۱۴. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x \sin x}$

۱۵. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

۱۶. $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^n - 2^n}{t - 2}$

۱۷. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin \theta}{\tan^2 \theta}$

۱۸. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\sin^2 x}$

۱۹. $\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{1/z}}{-\frac{3}{z}}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\ln(2e^t - 1)} \quad .21$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{\sin t^2} \quad .23$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/5} - (1-x)^{1/5}}{(1+x)^{1/3} - (1-x)^{1/3}} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x}{x^2} \quad .29$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{1 - \cosh y} \quad .20$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta^2 z - e^z} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh 2x}{\tanh x} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 10^x}{x} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\sin^2 x} \quad .30$$

۳۱. یک مدار الکتریکی متشکل از یک مقاومت R اهمی، و یک القاگر L هنری، و یک نیروی محرکه الکتریکی E ولتی است؛ L ، R ، و E مثبت هستند. اگر t ثانیه پس از وصل شدن کلید جریان موجود در مدار I آمپر باشد، آنگاه

$$I = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

با فرض اینکه t ، E ، و L ثابت باشند، $\lim_{R \rightarrow 0^+} I$ را محاسبه کنید.

۳۲. در یک تصاعد هندسی، اگر a نخستین جمله، r قدر نسبت، و S مجموع n جمله اول تصاعد باشد، آنگاه، با فرض اینکه $r \neq 1$ ، داریم

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}.$$

$\lim_{r \rightarrow 1} S$ را بیابید. آیا این نتیجه با مجموع n جمله اول با شرط $r = 1$ سازگار است؟

۳۳. به ازای چه مقادیری از a و b رابطه زیر برقرار است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^2}{x^3} = 0.$$

۳۴. قضیه ۲.۱۰۱۴ (ii) را ثابت کنید.

۳۵. قضیه ۲.۱۰۱۴ (iii) را ثابت کنید.

۳۶. فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر $x > N$ ، که N يك ثابت مثبت است، تعریف شده است. اگر $t = 1/x$ و $F(t) = f(1/t)$ ، که در آن $t \neq 0$ ، ثابت کنید که عبارتهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = M$ به يك معنی هستند.

۳۷. قضیه ۴.۱۰۱۴ را درحالتی که $x \rightarrow -\infty$ ، ثابت کنید.

۲.۱۴ صور مبهم دیگر

فرض کنید بخواهیم بدانیم که $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec^2 x / \sec^2 3x)$ وجود دارد یا نه. در اینجا

قضیه مربوط به حد خارج قسمت را نمی توان به کار برد زیرا $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec^2 x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec^2 3x = +\infty$. در این حالت می گوییم تابعی که با ضابطه $\sec^2 x / \sec^2 3x$

تعریف می شود در $x = \pi/2$ به صورت مبهم $(+\infty / +\infty)$ است. قاعده هوییتال رانیز در مورد این نوع صورت مبهم، و نیز در مورد صور $(-\infty / -\infty)$ ، $(-\infty / +\infty)$ ، و $(+\infty / -\infty)$ می توان به کار برد. این مطالب را بدون ذکر اثبات در قضایای زیر بیان می کنیم، زیرا اثبات آنها از حیطه این کتاب خارج است.

۱.۲.۱۴ قضیه (قاعده هوییتال) فرض کنید f و g توابعی باشند که بر بازه بازی چون I ، بجز احتمالاً در عددی مانند a متعلق به I ، مشتق پذیرند، و فرض کنید که به ازای هر $x \neq a$ در I ، $g'(x) \neq 0$. در این صورت اگر، $-\infty$ یا $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، و

$-\infty$ یا $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اگر تمام این حدها حدهای راست، و یا تمام آنها حدهای چپ باشند، باز هم این حکم برقرار است.

مثال ۱ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) = +\infty$ ، قاعده هوییتال را به کار می بریم و بدست می آوریم

$$\Delta \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

۲.۲.۱۴ قضیه (قاعده هوییتال) فرض کنید f و g توابعی باشند که به ازای هر $x > N$ ، $g'(x) \neq 0$ در این صورت اگر،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ یا } -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ یا } -\infty$$

و اگر

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

اگر به جای $x \rightarrow +\infty$ قرار دهیم $x \rightarrow -\infty$ ، باز هم این قضیه برقرار است.

اگر به جای L قرار دهیم $+\infty$ یا $-\infty$ ، قضایای ۱.۲.۱۴ و ۲.۲.۱۴ باز هم برقرار خواهند بود. اثبات این حالات را نیز نمی آوریم.

مثال ۲ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x}.$$

حل چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2+e^x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$ ، با به کار بردن

قاعده هوییتال به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2+e^x} \cdot e^x}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6+3e^x}.\end{aligned}$$

حال چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (6+3e^x) = +\infty$ ، دوباره قاعده هوییتال را به کار می‌بریم و نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6+3e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

پس

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۳ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x}.$$

حل $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec^2 x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sec^2 3x = +\infty$. لذا بنا بر قاعده

هوییتال داریم

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6\sec^2 3x \tan 3x}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} 6\sec^2 3x \tan 3x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} 2\sec^2 x \tan x = +\infty$$

می‌توان دید که استفاده مجدد از قاعده هوییتال به ما کمک نخواهد کرد. اما خارج قسمت اصلی را می‌توان به صورت دیگری هم نوشت و به دست آورد

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

حال، چون $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos^2 3x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos^2 x = 0$ ، می‌توانیم از قاعده

هوییتال استفاده کنیم و نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{-6 \cos 3x \sin 3x}{-2 \cos x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{3(2 \cos 3x \sin 3x)}{(2 \cos x \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{3 \sin 6x}{\sin 2x}.\end{aligned}$$

چون $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} 3 \sin 6x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \sin 2x = 0$ ، دوباره قاعده هوییتال را به کار می بریم . داریم

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{3 \sin 6x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{18 \cos 6x}{2 \cos 2x} = \frac{18(-1)}{2(-1)} = 9.$$

پس

$$\blacktriangle \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec^2 x}{\sec^2 3x} = 9.$$

حد مذکور در مثال ۳ را می توان بدون استفاده از قاعده هوییتال، با به کار بردن معادلات (۱۱) در بخش ۷.۱ و قضیه ۲.۹.۲، محاسبه کرد. این را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۳۸ را ببینید).
علاوه بر $0/0$ و $\pm\infty/\pm\infty$ ، صور مبهم دیگر عبارت اند از $(+\infty) \cdot 0$ ، $(+\infty) - (+\infty)$ ، 0° ، $(\pm\infty)^\circ$ ، و $1^{\pm\infty}$. این صور مبهم را می توان به طور مشابه با دو صورت دیگر تعریف کرد. مثلاً، اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آنگاه تابعی با ضابطه $f(x)^{g(x)}$ در a به صورت مبهم $(+\infty)^\circ$ است. برای یافتن حد تابعی که یکی از این صورتهای مبهم را داشته باشد، قبل از اینکه قاعده هوییتال را بتوان مورد استفاده قرار داد، باید تابع را به صورت $0/0$ یا $\pm\infty/\pm\infty$ در آورد. مثالهای زیر روش کار را نشان می دهند.

مثال ۴ مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1} x \csc x$ را، در صورت وجود، محاسبه کنید.

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \csc x = +\infty$ ، تابعی که با ضابطه $\sin^{-1} x \csc x$ تعریف می شود، در 0 به صورت مبهم $(+\infty) \cdot 0$ است. برای اینکه بتوانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم، $\sin^{-1} x \csc x$ را به صورت $\sin^{-1} x / \sin x$

می‌نویسیم و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin^{-1} x / \sin x)$ را بررسی می‌کنیم. حال که $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0$ ، صورت مبهم $0/0$ را داریم. بنا بر این از قاعده هسپیتال نتیجه می‌شود

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^{-1} x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

مثال ۵ حد زیر را، در صورت وجود، بیابید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right).$$

حل چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \sec x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

صورت مبهم $(+\infty) - (+\infty)$ را داریم. با گرفتن مخرج مشترک داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x}.$$

و به‌دست می‌آوریم $\lim_{x \rightarrow 0} (\sec x - 1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sec x) = 0$ ؛ لذا قاعده هسپیتال را به‌کار می‌گیریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x^2 \sec x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x \tan x}{2x \sec x + x^2 \sec x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x + x^2 \tan x}. \end{aligned}$$

چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + x^2 \tan x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

قاعده را دوباره به‌کار می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x + x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{2 + 2x \tan x + x^2 \sec^2 x} = \frac{1}{2}.$$

بنا بر این

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right) = \frac{1}{2}.$$

درمورد هریک از صور مبهم 0^0 ، $(\pm\infty)^0$ ، و $1^{\pm\infty}$ شیوه محاسبه حد در مثال ۶ نشان داده شده است.

مثال ۶ مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\cot x}$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$ ، صورت مبهم $1^{+\infty}$ را

داریم. فرض کنید

$$y = (x+1)^{\cot x}. \quad (1)$$

پس

$$\begin{aligned} \ln y &= \cot x \ln(x+1) \\ \ln y &= \frac{\ln(x+1)}{\tan x}. \end{aligned}$$

لذا

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\tan x}. \quad (2)$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$ ، در طرف راست (۲) قاعده

هوپیتال را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\sec^2 x} = 1.$$

بنابراین، اگر ۱ را در طرف راست (۲) قرار دهیم، داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 1. \quad (3)$$

نظر به اینکه تابع نمایی بر کل قلمروش، که مجموعه تمام اعداد حقیقی است، پیوسته است می‌توانیم قضیه ۶.۷.۲ را به کار ببریم؛ و لذا داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(\ln y) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y\right). \quad (4)$$

بنابراین از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^1.$$

اما، بنا بر (1) ، $y = (x+1)^{\cot x}$ ، ولذا

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\cot x} = e.$$

تمرینهای ۲۰۱۴

در تمرینهای ۱ تا ۳۴، حد را، دذصورت وجود، بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(\tan x)} \quad .۲$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad .۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^r}{x} \quad .۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan \pi x} \quad .۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2^+} (2x-1) \tan \pi x \quad .۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \csc x \quad .۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan^{-1} x \cot x \quad .۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad .۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \quad .۱۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x (\ln x) \quad .۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sinh x)^{\tan x} \quad .۱۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad .۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^{2x})^{1/x} \quad .۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad .۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x^2 + x - 6} - \frac{1}{x-2} \right) \quad .۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 2}) \quad .۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} \quad .۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} \quad .۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/\ln x} \quad .۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x)^{2/x} \quad .۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{e^{2x} - 1} \quad .۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x}; a \neq 0 \quad .۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{x^2} \quad .۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{x^2} \quad .۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \tan \frac{1}{4} \pi x. ۲۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sinh x)^{1/x}. ۲۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}. ۲۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(\cos x) e^{x^2/2}]^{1/x^2}. ۲۷$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{3x}. ۳۰$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 3x^5 + 4)^{1/5} - x]. ۲۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}. ۳۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}. ۳۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x}). ۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. ۳۳$$

۲۵. اگر

$$f(x) = \begin{cases} (1 - e^{kx})^x & x < 0 \\ k & 0 \leq x \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه k به طوری که f در $x=0$ پیوسته باشد.

$$۳۶. \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{nx+1}{nx-1} \right)^x = 9, \text{ } n \text{ را بیابید.}$$

$$۳۷. \text{ (الف) ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n, \lim_{x \rightarrow 0} (e^{-1/x^2} / x^n) = 0,$$

(ب) اگر $f(x) = e^{-1/x^2}$ ، با استفاده از نتیجه مذکور در (الف) ثابت کنید که حد f و تمام مشتقاتش وقتی که x به 0 میل می کند، برابر 0 است.

۳۸. بدون استفاده از قاعده هسپیتال، ولی با استفاده از معادلات (۱۱) مذکور در بخش ۷.۱ و قضیه ۲.۹.۲، حد مذکور در مثال ۳ را محاسبه کنید.

$$۳۹. \text{ فرض کنید } f(x) = \int_1^x e^{t^2} \sqrt{9t^2 + 1} dt \text{ و } g(x) = x^n e^{3x} \text{ اگر}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right] = 1$$

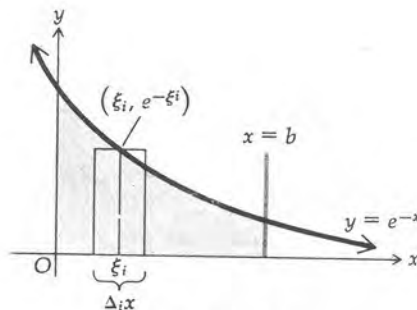
n را بیابید.

۳.۱۴ انتگرالهای نامتعارف، وقتی که حدود انتگرال گیری بینهایت اند

در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ ، فرض کردیم که تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ معین باشد. حال با در نظر گرفتن يك بازه نامتناهی انتگرال گیری تعریف انتگرال معین را تعمیم می دهیم، و چنین انتگرالی را يك انتگرال نامتعارف می نامیم. در بخش ۴.۱۴ نوع دیگری از انتگرال نامتعارف مورد بحث قرار خواهد گرفت.

○ نمونه ۱ مسئله یافتن مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = e^{-x}$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = b$ ، را در نظر بگیرید. این ناحیه در شکل ۱.۳.۱۴ نشان داده شده است. اگر مساحت ناحیه A واحد مربع باشد، داریم

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{-\xi_i} \Delta_i x \\ &= \int_0^b e^{-x} dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b}. \end{aligned}$$



شکل ۱.۳.۱۴

اگر b به طور بیکران افزایش یابد،

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) \\ \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx &= 1. \end{aligned} \quad (1)$$

از (۱) نتیجه می گیریم که بدون توجه به بزرگی مقداری که برای b انتخاب شود،

○ مساحت ناحیه نشان داده شده در شکل ۱.۳.۱۴ همواره کمتر از ۱ واحد مربع است.

معادله (۱) حاکی است که اگر $b > 0$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\left| \int_0^b e^{-x} dx - 1 \right| < \varepsilon, \quad b > N \text{ وقتی}$$

به جای عبارت (۱) می نویسیم

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

در حالت کلی، تعریف زیر را داریم.

۱.۳.۱۴ تعریف اگر تابع f به ازای هر $x \geq a$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

اگر حد پایین انتگرال گیری بینهایت باشد، تعریف زیر را داریم.

۲.۳.۱۴ تعریف اگر تابع f به ازای هر $x \leq b$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

بالاخره، موردی پیش می آید که هر دو حد انتگرال گیری بینهایت اند.

۳.۳.۱۴ تعریف اگر به ازای همه مقادیر x ، f پیوسته و c عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه، در صورت وجود حدهای زیر، می نویسیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

هنگام استفاده از تعریف ۳.۳.۱۴، معمولاً c را ۰ می گیریم.

در تعریفهای ۱.۳.۱۴، ۲.۳.۱۴ و ۳.۳.۱۴، در صورت وجود حدهای مورد نظر، می گوئیم که انتگرال نامتعارف همگراست. اما اگر حدها وجود نداشته باشند، می گوئیم

که انتگرال نامتعارف واکراست.

مثال ۱ انتگرال زیر را، در صورت همگرا بودن، محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}.$$

حل

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4-x} \right]_a^2 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4-a} \right) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

مثال ۲ مقدار عبارات زیر را، در صورت وجود، محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \quad (\text{الف}) ; \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r x dx \quad (\text{ب})$$

حل

(الف) از تعریف ۳.۳.۱۴ و با ضابطه $c=0$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} a^2 \right) + \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} b^2. \end{aligned}$$

چون هیچیک از این دو حد وجود ندارد، انتگرال نامتعارف واکراست.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} x \, dx &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-r}^r \quad (\text{ب}) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ نشان می‌دهد که چرا از حد مذکور در (ب) برای تعیین همگرایی انتگرال نامتعارف، وقتی هر دو حد انتگرال گیری بینهایت‌اند، استفاده نمی‌کنیم. توجه کنید که انتگرال نامتعارف در (الف) واگراست، اما حد مذکور در (ب) وجود دارد و مقدار آن صفر است.

مثال ۳ انتگرال زیر را، در صورت همگرا بودن، محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}.$$

حل

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{(x+3)^2 + 3} \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}} \right]_a^0 \\
 &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{3}} \right]_0^b \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}} \right) \\
 &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\tan^{-1} \frac{a+3}{\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \lim_{b \rightarrow +\infty} \tan^{-1} \frac{b+3}{\sqrt{3}} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

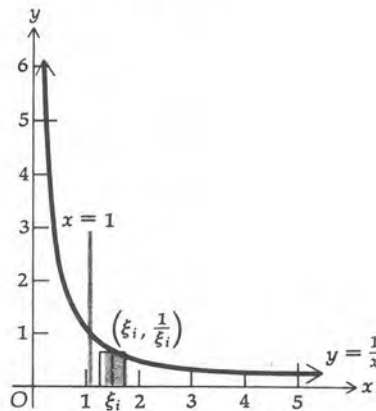
▲

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

مثال ۴ آیا می‌توان عددی^۱ تعیین کرد که اندازه مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای معادلات $y = 1/x$ ، $y = 0$ ، و $x = 1$ را نشان دهد؟

حل ناحیه در شکل ۲.۳.۱۴ نشان داده شده است. فرض کنید می‌خواهیم عدد L را، در صورت امکان، به اندازه مساحت مزبور تخصیص دهیم. فرض کنید A اندازه مساحت ناحیه محصور بین نمودارهای معادلات $y = 1/x$ ، $y = 0$ ، $x = 1$ ، و $x = b$ ، $b > 1$ باشد. در این صورت

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i} \Delta_i x = \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$



شکل ۲.۳.۱۴

لذا می‌نویسیم $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} A$ ، با این شرط که این حد وجود داشته باشد. اما

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} A = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

۱. مؤلف در این گونه موارد عبارت **a finite number** یعنی «عددی که بینهایت نیست» را به کار برده است؛ اما چون طبق توضیح مندرج در بخشهای ۱.۱ و ۴.۲ «بینهایت را اصولاً» به عنوان عدد حقیقی در نظر نمی‌گیریم، کلمه **finite** را ترجمه نمی‌کنیم. - م.

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln b - \ln 1] \\ = +\infty.$$

▲ بنابراین، تعیین عددی برای نشان دادن اندازه مساحت ناحیه ممکن نیست.

مثال ۵ آیا می توان عددی تعیین کرد که اندازه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه مذکور در مثال ۴ حول محور x ها را نشان دهد؟

حل جزء حجم قرص مستدیری است که ضخامتش $\Delta_i x$ و شعاع قاعده اش $1/\xi_i$ است. فرض کنید L عددی باشد که می خواهیم به اندازه حجم تخصیص دهیم، و فرض کنید V اندازه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین نمودارهای معادلات $y=1/x$ ، $y=0$ ، $x=1$ و $x=b$ ، $b > 1$ ، حول محور x ها باشد. در این صورت،

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \left(\frac{1}{\xi_i} \right)^2 \Delta_i x = \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx.$$

می نویسیم $L = \lim_{b \rightarrow +\infty} V$ ، با این شرط که این حد وجود داشته باشد.

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} V = \lim_{b \rightarrow +\infty} \pi \int_1^b \frac{dx}{x^2} \\ = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) \\ = \pi.$$

▲ بنابراین، برای نشان دادن اندازه حجم جسم عدد π را تخصیص می دهیم.

مثال ۶ تعیین کنید که $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ همگراست یا واگرا.

حل

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx \\ = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\cos x \right]_0^b \\ = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + 1).$$

به ازای هر عدد صحیح n ، وقتی که b تمام مقادیر از $n\pi$ تا $2n\pi$ را اختیار می‌کند، $\cos b$ تمام مقادیر از -1 تا 1 را به خود می‌گیرد. لذا $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ وجود ندارد. پس انتگرال نامتعارف فوق واگراست. ▲

مثال ۶ نمونه‌ای از يك انتگرال نامتعارف را نشان می‌دهد که واگراست، و حد هم بینهایت نیست.

تمرینهای ۳.۱۴

دز تمرینهای ۱ تا ۱۸، تعیین کنید که انتگرال نامتعارف همگراست یا واگرا؛ و اگر همگراست، آن را محاسبه کنید.

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \quad 2. \int_{-\infty}^1 e^x dx$$

$$3. \int_{-\infty}^0 x 5^{-x^2} dx \quad 4. \int_1^{+\infty} 2^{-x} dx$$

$$5. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \quad 6. \int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} x \cosh x dx \quad 8. \int_{-\infty}^0 x^5 e^x dx$$

$$9. \int_5^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}} \quad 10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3x dx}{(3x^2+2)^2}$$

$$11. \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{3 dx}{x^2+9} \quad 12. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$13. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \quad 14. \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$15. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad 16. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{16+x^2}$$

$$17. \int_1^{+\infty} \ln x dx \quad 18. \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$$

$$19. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx \quad \text{۱۹ عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید: (الف)}$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \sin x \, dx \quad (\text{ب})$$

۲۰. ثابت کنید که اگر $\int_{-\infty}^b f(x) \, dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{-b}^{+\infty} f(-x) \, dx$ نیز همگراست و مقدار این دو انتگرال یکسان است.

۲۱. نشان دهید که انتگرال نامتعارف $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2} \, dx$ همگراست و انتگرال نامتعارف $\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1} \, dx$ واگراست.

۲۲. ثابت کنید که انتگرال نامتعارف $\int_1^{+\infty} dx/x^n$ همگراست اگر و تنها اگر $n > 1$.

۲۳. تعیین کنید که آیا می‌توان عددی به اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/(e^x + e^{-x})$ و محور x ها تخصیص داد یا خیر. اگر می‌توان عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

۲۴. تعیین کنید که آیا می‌توان عددی به اندازه مساحت ناحیه محصور بین محور x ها، خط $x=2$ ، و منحنی $y = 1/(x^2 - 1)$ تخصیص داد یا خیر. اگر می‌توان چنین عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

۲۵. تعیین کنید که آیا می‌توان عددی به اندازه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه سمت راست خط $x=1$ و محصور بین منحنی $y = 1/x^{3/2}$ و محور x ها، حول محور x ها تخصیص داد یا خیر. اگر می‌توان عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

۲۶. تعیین کنید که آیا می‌توان عددی به اندازه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین محور x ها، محور y ها، و منحنی $y = e^{-2x}$ حول محور x ها تخصیص داد یا خیر. اگر می‌توان چنین عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

تمرینهای ۲۷ و ۲۸، و ۲۹ مربوط به کاربرد جالبی از انتگرالهای نامتعارف در رشته اقتصاد هستند. فرض کنید جریان درآمد پیوسته‌ای وجود دارد که در مورد آن، سود بانرخ سالانه ۱۰۰٪ درصد به‌طور پیوسته محاسبه می‌شود، و $f(t)$ دلار، درآمد سالانه در هر زمان t برحسب سال است. اگر این درآمد همواره ادامه داشته باشد، ارزش فعلی کل درآمد در آینده، V دلار، با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$V = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-it} \, dt.$$

۲۷. جریان پیوسته‌ای از درآمد، با زمان کاهش می‌یابد و پس از t سال، درآمد سالانه $2^{-t} \cdot 1000$ دلار است. اگر این جریان همواره ادامه داشته باشد با استفاده از نرخ سود ۸ درصد که به‌طور پیوسته محاسبه می‌شود، ارزش فعلی این درآمد را بیابید.

۲۸. جریان پیوسته سود شرکتی با زمان افزایش می‌یابد و پس از t سال، سود سالانه برحسب دلار متناسب با t است. نشان دهید که ارزش فعلی درآمد شرکت به‌طور معکوس متناسب با t^2 است؛ که $100i$ درصد نرخ سود است که به‌طور پیوسته محاسبه می‌شود.

۲۹. سهام قرضه دولت بریتانیا به صورت سند بهاداری است که سررسید پرداخت ندارد و دارنده آن را به پرداخت مبلغی به‌طور سالانه و یکجا ملزم می‌کند. با یافتن ارزش فعلی يك جریان پرداخت سالانه R دلاری و با استفاده از نرخ سود جاری $100i$ درصد که به‌طور پیوسته محاسبه می‌شود، نشان دهید که بهای منصفانه فروش این سهام R/i دلار است.

۳۰. مقادیر n ی را بیابید که به‌ازای آنها انتگرال نامتعارف زیر همگرا باشد

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^n}.$$

۳۱. مقداری برای n تعیین کنید که به‌ازای آن انتگرال نامتعارف

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{n}{x+1} - \frac{3x}{2x^2+n} \right) dx$$

را محاسبه کنید.

۳۲. مقداری برای n تعیین کنید که به‌ازای آن انتگرال نامتعارف

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{nx^2}{x^3+1} - \frac{1}{3x+1} \right) dx$$

را محاسبه کنید.

۴.۱۴ انتگرالهای نامتعارف دیگر

شکل ۱.۴.۱۴، ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = 4$ را نشان می‌دهد. اگر تخصیص يك عدد به‌اندازه مساحت این ناحیه امکان‌پذیر باشد، این عدد باید به صورت

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\xi_i}} \Delta_i x$$

تعیین شود. اگر این حد وجود داشته باشد، انتگرال معینی به شکل زیر است

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (۱)$$

ولی، این انتگرال در حد پایین، یعنی در صفر، ناپیوسته است. علاوه بر این، $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/\sqrt{x} = +\infty$ ، و لذا می‌گوییم که انتگرال در حد پایین یک ناپیوستگی بینهایت دارد. چنین انتگرالی نامتعارف است، و وجود آن با تعریف زیر معین می‌شود.

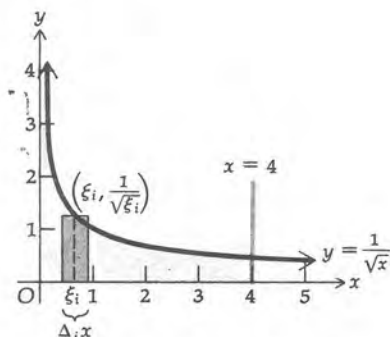
۱۰۴.۱۴ تعریف اگر f به ازای تمام مقادیر x در بازه نیمه باز از چپ $(a, b]$ پیوسته باشد و اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

با این شرط که این حد وجود داشته باشد.

○ **نمونه ۱** معلوم می‌کنیم که آیا می‌توان عددی به اندازه مساحت ناحیه نشان داده شده در شکل ۱۰۴.۱۴ تخصیص داد یا خیر. طبق بحثی که قبل از تعریف ۱۰۴.۱۴ داشتیم، اندازه مساحت ناحیه داده شده عبارت از انتگرال نامتعارف (۱)، در صورت وجود، خواهد بود. طبق تعریف ۱۰۴.۱۴

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2x^{1/2} \right]_{\varepsilon}^4 \end{aligned}$$



شکل ۱۰۴.۱۴

۲۶۴ صور مبهم، انتگرالهای نامتعارف، وفرمول تیلر

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [4 - 2\sqrt{\varepsilon}] \\ &= 4 - 0 \\ &= 4. \end{aligned}$$

○ بنا بر این، به اندازۀ مساحت ناحیۀ مفروض عدد ۴ را تخصیص می‌دهیم.

اگر انتگران در حد بالای انتگرال گیری يك ناپیوستگی بینهایت داشته باشد، برای تعیین وجود انتگرال نامتعارف از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

۲.۴.۱۴ تعریف اگر f به‌ازای هر x در بازۀ نیمه‌باز از راست $[a, b)$ پیوسته باشد، و اگر $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

به‌شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر در يك نقطۀ داخلی بازۀ انتگرال گیری يك ناپیوستگی بینهایت وجود داشته باشد، وجود انتگرال نامتعارف بر اساس تعریف زیر معین می‌شود.

۳.۴.۱۴ تعریف اگر f به‌ازای هر x در بازۀ $[a, b]$ ، بجز در c که $a < c < b$ ، پیوسته باشد، و اگر $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$

به‌شرطی که این حدها وجود داشته باشند.

چنانچه $\int_a^b f(x) dx$ يك انتگرال نامتعارف باشد، این انتگرال همگراست هرگاه حد مربوط وجود داشته باشد؛ و در غیر این صورت واگراست.

مثال ۱ انتگرال زیر را، در صورت همگرا بودن، محاسبه کنید

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

حل انتگران در ۱ دارای ناپیوستگی بینهایت است. اگر از تعریف ۳.۴.۱۴ استفاده کنیم داریم

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{1+\delta}^2 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\delta} \right].\end{aligned}$$

چون هیچیک از این حدها وجود ندارد، انتگرال نامتعارف واگر است. ▲

○ **نمونه ۲** فرض کنید درموقع محاسبه انتگرال مذکور درمثال ۱ به ناپیوستگی بینهایت انتگران در ۱ توجه نمی کردیم. در این صورت به دست می آوردیم

$$\left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^2 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2.$$

این نتیجه آشکارا غلط است، چون انتگران، $1/(x-1)^2$ ، هرگز منفی نیست، لذا انتگرال از ۰ تا ۲ نمی تواند يك عدد منفی باشد. ○

مثال ۲ $\int_0^1 x \ln x \, dx$ را، در صورت همگرا بودن، محاسبه کنید.

حل انتگران در حد پایین يك ناپیوستگی دارد. بنا بر تعریف ۱.۴.۱۴

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \ln x \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x \ln x \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \right]_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \ln \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right].\end{aligned}$$

لذا

$$\int_0^1 x \ln x \, dx = 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^2 \ln \varepsilon - 0. \quad (2)$$

برای محاسبه

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^\gamma \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^\gamma}}.$$

از قاعده هوییتال استفاده می‌کنیم زیرا $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \varepsilon = -\infty$ و $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1/\varepsilon^\gamma = +\infty$ داریم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^\gamma}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{\gamma}{\varepsilon^{\gamma+1}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\varepsilon^\gamma}{\gamma} \right] = 0.$$

پس، بنابر (۲)

$$\blacktriangle \quad \int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}.$$

مثال ۳ انتگرال زیر را در صورتی که همگرا باشد، محاسبه کنید

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

حل در مورد این انتگرال، هم يك حد بالای بینهایت وجود دارد هم انتگرال در حد پایین دارای ناپیوستگی بینهایت است. به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^+} \left[\sec^{-1} x \right]_a^2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\sec^{-1} x \right]_2^b \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^+} (\sec^{-1} 2 - \sec^{-1} a) \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sec^{-1} b - \sec^{-1} 2) \\ &= -\lim_{a \rightarrow 1^+} \sec^{-1} a + \lim_{b \rightarrow +\infty} \sec^{-1} b \\ &= 0 + \frac{1}{4}\pi \\ &= \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۴۰۱۴

در تمرینهای ۱ تا ۲۵، تعیین کنید که آیا انتگرال نامتعارف همگراست یا واگرا؛ و اگر همگراست، آن را محاسبه کنید.

$$۱. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$۲. \int_0^{16} \frac{dx}{x^{7/4}}$$

$$۳. \int_{-5}^{-2} \frac{x dx}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$۴. \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$۵. \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$$

$$۶. \int_{-4}^1 \frac{dz}{(z+3)^2}$$

$$۷. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec \theta d\theta$$

$$۸. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$۹. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$۱۰. \int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta$$

$$۱۱. \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-\sin t}$$

$$۱۲. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$۱۳. \int_0^4 \frac{dx}{x^2-2x-3}$$

$$۱۴. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$$

$$۱۵. \int_0^{+\infty} \ln x dx$$

$$۱۶. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$۱۷. \int_{-2}^0 \frac{dt}{(t+1)^{1/3}}$$

$$۱۸. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

$$۱۹. \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$$

$$۲۰. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$۲۱. \int_{1/2}^2 \frac{dt}{t(\ln t)^{1/2}}$$

$$۲۲. \int_0^2 \frac{x dx}{1-x}$$

$$۲۳. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$۲۴. \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y-2}} \quad ۲۵$$

۲۶. مقادیر عبارات زیر را، در صورت وجود، حساب کنید: (الف) $\int_{-1}^1 dx/x$ ؛

$$(ب) \lim_{r \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{-r} dx/x + \int_r^1 dx/x \right]$$

د تدریجیهای ۲۷ تا ۲۹، مقادیر n را بیابید که به ازای آنها انتگرال نامتعرف همگرا باشد، و به ازای این مقادیر n ، انتگرال را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 x^n dx \quad ۲۷ \quad \int_0^1 x^n \ln x dx \quad ۲۸$$

$$\int_0^1 x^n \ln^2 x dx \quad ۲۹$$

۳۰. نشان دهید که می توان عددی به اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ ، خط $x = 1$ ، و محور x ها، و محور y ها تخصیص داد؛ اما، نمی توان عددی به اندازه حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x ها تخصیص داد.

۳۱. تعیین کنید که آیا می توان عددی به اندازه حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^{-1/3}$ ، خط $x = 8$ ، محور x ها، و محور y ها حول محور x ها تخصیص داد یا خیر.

۳۲. انتگرال نامتعرف $\int_a^b dx/(x-a)^n$ ، که در آن $b > a$ ، مفروض است. تعیین کنید که در هر يك از حالت های زیر این انتگرال همگراست یا واگرا: (الف) $0 < n < 1$ ؛ (ب) $n = 1$ ؛ (پ) $n > 1$. اگر انتگرال همگراست، آن را محاسبه کنید.

۳۳. با استفاده از انتگرال گیری ثابت کنید که محیط دایره $x^2 + y^2 = a^2$ برابر است با $2\pi a$.

۵.۱۴ فرمول تیلر

مقادیر توابع چند جمله ای را می توان با انجام تعدادی متناهی از اعمال جمع و ضرب به دست آورد. اما، توابع دیگری چون توابع لگاریتمی، نمایی، و مثلثاتی هم وجود دارند که به این سادگی قابل محاسبه نیستند. در این بخش نشان می دهیم که بسیاری از توابع را می توان با چند جمله ایها تقریب کرد، و در محاسبات می توان از چند جمله ای به جای تابع اصلی استفاده کرد با این شرط که اختلاف بین مقدار تابع اصلی و تقریب چند جمله ای آن

به اندازه کافی کوچک باشد.

روشهای متعددی برای تقریب کردن يك تابع مفروض با چند جمله‌ایها وجود دارد. یکی از رایجترین آنها روشی است متضمن فرمول تیلر که به افتخار ریاضیدان انگلیسی بروک تیلر (۱۶۸۵-۱۷۳۱) به این نام نامیده شده است. قضیه زیر که می‌توان آن را به عنوان تعمیمی از قضیه مقدار میانگین (۲۰۴۰۴) تلقی کرد، فرمول تیلر را به دست می‌دهد.

۱۰۵۰۱۴ قضیه فرض کنید f تابعی باشد که خود و n مشتق اولش بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته‌اند. علاوه بر این، فرض کنید $f^{(n+1)}(x)$ به ازای هر x در بازه باز (a, b) وجود داشته باشد. آنگاه عددی چون ξ در بازه باز (a, b) وجود دارد که

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (1)$$

معادله (۱) در حالتی نیز که $b < a$ ، برقرار است؛ در این حالت $[b, a]$ به جای $[a, b]$ قرار می‌گیرد و (b, a) به جای (a, b) .

قبل از اثبات این قضیه، توجه کنید که وقتی $n=0$ ، (۱) به صورت

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

در می‌آید که ξ بین a و b است. این همان قضیه مقدار میانگین (۲۰۴۰۴) است. برای قضیه ۱۰۵۰۱۴ چندین اثبات ارائه شده است، اما هیچیک جذابیت چندانی ندارد. در اثبات زیر از قضیه مقدار میانگین کوشی (۳۰۱۰۱۴) استفاده می‌شود.

اثبات قضیه ۱۰۵۰۱۴ فرض کنید F و G دو تابع با ضابطه‌های زیر باشند

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n \quad (2)$$

و

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (3)$$

نتیجه اینکه $F(b) = 0$ و $G(b) = 0$. با مشتق گرفتن از (۲) داریم

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + \frac{2f''(x)(b-x)}{2!}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f'''(x)(b-x)^2}{2!} + \frac{f^{(4)}(x)(b-x)^3}{3!} - \frac{f^{(5)}(x)(b-x)^4}{4!} + \dots \\
& + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} - \frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \\
& + \frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

هنگام جمع کردن جملات، می بینیم که مجموع هر جمله شماره فرد با جمله شماره زوج بعد از آن صفر است؛ لذا تنها آخرین جمله باقی می ماند. بنابراین

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n. \quad (4)$$

با مشتق گرفتن از (۳) داریم

$$G'(x) = -\frac{1}{n!}(b-x)^n. \quad (5)$$

با بررسی فرض قضیه ۳.۱۰۱۴ می بینیم که

(i) F و G بر $[a, b]$ پیوسته اند؛

(ii) F و G بر (a, b) مشتق پذیرند؛

(iii) به ازای هر x در (a, b) ، $G'(x) \neq 0$ ؛

لذا بنا بر حکم قضیه ۳.۱۰۱۴، به ازای عددی چون ξ در (a, b) داریم

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}.$$

اما $F(b) = 0$ و $G(b) = 0$. پس به ازای عددی چون ξ در (a, b) ،

$$F(a) = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} G(a). \quad (6)$$

فرض می کنیم در (۳)، $x = a$ ، در (۴)، $x = \xi$ ، و در (۵)، $x = \xi$ ؛ با قراردادن این مقادیر در (۶)، به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
F(a) &= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n \left[-\frac{n!}{(b-\xi)^n} \right] \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\
F(a) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (7)
\end{aligned}$$

اگر در (۲)، $x = a$ ، داریم

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n. \quad (۸)$$

حال از (۷) در (۸) قرار می‌دهیم؛ به‌دست می‌آید

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

که نتیجه مطلوب است. در حالتی نیز که $b < a$ ، حکم برقرار است زیرا حکم قضیه ۳۰.۱۰۴ وقتی که a و b باهم عوض شوند تغییر نمی‌کند. $\square$

اگر در (۱)، x را به‌جای b قرار دهیم فرمول تیلر به‌دست می‌آید

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (۹)$$

که ξ بین a و x است.

شرطی که فرمول (۹) تحت آن برقرار است این است که f ، و n مشتق اول آن بر بازه بسته‌ای که شامل a و x است پیوسته باشند، و مشتق $f^{(n+1)}$ در تمام نقاط بازه باز مربوط وجود داشته باشد. فرمول (۹) را به‌صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (۱۰)$$

که در آن

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (۱۱)$$

$$(12) \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{که } \xi \text{ بین } a \text{ و } x \text{ است.}$$

$P_n(x)$ را چند جمله‌ای تیلر درجه n تابع f در عدد a می‌نامند و $R_n(x)$ را باقیمانده آن می‌خوانند. جمله $R_n(x)$ به شکلی که در (۱۲) آمده است صورت لاگرانژی باقیمانده نامیده می‌شود؛ این نامگذاری به افتخار ریاضیدان فرانسوی ژوزف ل. لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) انجام شده است.

مثال ۱ چند جمله‌ای تیلر درجه سوم تابع کسینوسی در $\pi/4$ ، و نیز صورت لاگرانژی باقیمانده را به دست آورید.

حل فرض کنید $f(x) = \cos x$ بنا بر (۱۱)

$$P_3(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

چون

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}/2, f'(x) = -\sin x; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}/2, f(x) = \cos x$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}/2, f'''(x) = \sin x; f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}/2, f''(x) = -\cos x$$

پس

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3.$$

چون $f^{(iv)}(x) = \cos x$ بنا بر (۱۲) داریم

$$R_3(x) = \frac{1}{4}(\cos \xi)\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^4 \quad \text{که } \xi \text{ بین } \frac{1}{4}\pi \text{ و } x \text{ است.}$$

چون $|\cos \xi| \leq 1$ ، می‌توانیم نتیجه بگیریم که به ازای هر x ،
 $|R_3(x)| \leq (x - \pi/4)^4 / 24$ ▲

برای تقریب کردن یک تابع با یک چند جمله‌ای تیلر، می‌توان از فرمول تیلر استفاده کرد. بنا بر (۱۵)

$$(13) \quad |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

اگر برای تقریب کردن $f(x)$ از $P_n(x)$ استفاده کنیم، می‌توانیم کران بالایی برای خطای این تقریب به‌دست آوریم با این شرط که بتوانیم عددی چون $E > 0$ بیابیم به‌طوری که $|f(x) - P_n(x)| \leq E$ یا، با در نظر گرفتن (۱۳)، به‌طوری که داشته باشیم $|f(x) - P_n(x)| \leq E$ و یا معادلش

$$P_n(x) - E \leq f(x) \leq P_n(x) + E.$$

مثال ۲ برای محاسبه مقدار تقریبی $\cos 47^\circ$ از نتیجه مثال ۱ استفاده کنید و دقت نتیجه را نیز تعیین کنید.

حل 47° معادل $47\pi/180$ رادیان است. پس در حل مثال ۱ فرض می‌کنیم $x = 47\pi/180$ و $x - (\pi/4) = \pi/90$ ، ولذا

$$\cos 47^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left[1 - \frac{1}{90} \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{90} \pi \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{90} \pi \right)^3 \right] + R_4 \left(\frac{47}{180} \pi \right)$$

که

$$\frac{1}{4} \pi < \xi < \frac{47}{180} \pi \quad \text{و} \quad R_4 \left(\frac{47}{180} \pi \right) = \frac{1}{24} \cos \xi \left(\frac{1}{90} \pi \right)^4$$

چون $0 < \cos \xi < 1$

$$0 < R_4 \left(\frac{47}{180} \pi \right) < \frac{1}{24} \left(\frac{1}{90} \pi \right)^4 < 0.0000000007.$$

با فرض $\pi/90 \approx 0.00349066$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\cos 47^\circ \approx 0.681998$$

▲ که تا ۶ رقم اعشار دقت دارد.

مثال ۳ با استفاده از یک چندجمله‌ای تیلر در صفر، مقدار $\sqrt{e}$ را با دقت چهار رقم اعشار بیابید.

حل اگر $f(x) = e^x$ ، تمام مشتق‌های f در x ، e^x هستند و مقدار هر مشتق به‌ازای صفر، ۱ است. لذا، بنابر (۱۱)

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

و بنابر (۱۲)

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{که } \xi \text{ بین } 0 \text{ و } x \text{ است.}$$

می‌خواهیم $|R_n(1/2)|$ کمتر از ۰۰۰۰۰۵ره باشد. در عبارت فوق قرار می‌دهیم $x=1/2$ ؛
و چون $e^{1/2} < 2$ داریم

$$\left| R_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

اگر ۰۰۰۰۰۵ره $< 1/2^n(n+1)!$ ، آنگاه $|R_n(1/2)|$ کمتر از ۰۰۰۰۰۵ره خواهد بود. اما وقتی که $n=5$ ،

$$\frac{1}{2^n(n+1)!} = \frac{1}{(32)(720)} = 0.000004 < 0.000005$$

لذا

$$\sqrt{e} \approx P_5\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840}$$

که از آن نتیجه می‌شود $\sqrt{e} \approx 1.64870$. ▲

با انتخاب $a=0$ در (۹) حالت خاصی از فرمول تیلر به دست می‌آید، و آن عبارت است از

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (14)$$

که ξ در اینجا بین ۰ و x است. فرمول (۱۴)، فرمول ماکلورن نامیده می‌شود؛ این نامگذاری به افتخار ریاضیدان اسکا تلندی کالین ماکلورن (۱۶۹۸-۱۷۴۶) انجام شده است، هر چند که این فرمول قبل از ماکلورن توسط تیلر و ریاضیدان انگلیسی دیگر، جیمز استرلینگ (۱۶۹۲-۱۷۷۰)، به دست آمده بود.

جمله باقیمانده در فرمول تیلر، صورتهای دیگری نیز دارد. بسته به نوع تابع، ممکن است صورتی از باقیمانده مطلوبتر از صورت دیگر باشد. قضیه زیر باقیمانده را به صورت يك انتگرال بیان می‌کند، و به قضیه فرمول تیلر با صورت انتگرالی باقیمانده معروف است.

۲۰۵.۱۴ قضیه اگر f تابعی باشد که $n+1$ مشتق اول آن بر بازه بسته‌ای که شامل a و x است پیوسته باشند، آنگاه $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ، که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلر درجه n f در a است، و $R_n(x)$ باقیمانده است که با ضابطه

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (15)$$

معین می شود.

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۳۰ را ببینید).

تمرینهای ۵.۱۴

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۱۴، برای تابعی که با معادله مفروض تعریف می شود، چندجمله ای تیلر درجه n در عدد a را با صورت لاگرانژی باقیمانده اش بنویسید.

$$1. \quad f(x) = 1/(x-2); a=1; n=3 \quad 2. \quad f(x) = e^{-x}; a=0; n=4$$

$$3. \quad f(x) = x^{7/2}; a=4; n=3 \quad 4. \quad f(x) = \tan x; a=0; n=3$$

$$5. \quad f(x) = \sin x; a=\pi/6; n=3 \quad 6. \quad f(x) = \cosh x; a=0; n=4$$

$$7. \quad f(x) = \sinh x; a=0; n=4 \quad 8. \quad f(x) = \sqrt{x}; a=4; n=4$$

$$9. \quad f(x) = \ln x; a=1; n=3$$

$$10. \quad f(x) = \ln(x+2); a=-1; n=3$$

$$11. \quad f(x) = \ln \cos x; a=\pi/3; n=3$$

$$12. \quad f(x) = e^{-x^2}; a=0; n=3 \quad 13. \quad f(x) = (1+x)^{7/2}; a=0; n=3$$

$$14. \quad f(x) = (1-x)^{-1/2}; a=0; n=3$$

۱۵. مقدار e را چنان محاسبه کنید که تا ۵ رقم اعشار صحیح باشد، و ثابت کنید که جوابتان دقت خواسته شده را دارد.

۱۶. چندجمله ای تیلر را در مورد تمرین ۸ به کار ببرید و $\sqrt{5}$ را تا هر چند رقم اعشار که برای صرف نظر کردن از R_n لازم باشد، محاسبه کنید.

۱۷. خطای ناشی از قراردادن $1 - (x^2/2)$ به جای $\cos x$ را وقتی که $|x| < 0.1$ برآورد کنید.

۱۸. خطای ناشی از قراردادن $1 + (x/2)$ به جای $\sqrt{1+x}$ را وقتی که $0.1 < x < 0.5$ برآورد کنید.

۱۹. چندجمله ای تیلر را در مورد تمرین ۵ در $\pi/6$ به کار ببرید و $\sin 31^\circ$ را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید. (از تقریب $\pi/180 \approx 0.0175$ استفاده کنید.)

۲۵. با استفاده از يك چندجمله‌ای تیلر در h برای تابعی با ضابطه $f(x) = \ln(1+x)$ ، مقدار $\ln ۱.۲$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۱. با استفاده از يك چندجمله‌ای تیلر در h برای تابعی با ضابطه

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

مقدار $\ln ۱.۲$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید. این محاسبه را با محاسبه مربوط به تمرین ۲۵ مقایسه کنید.

۲۲. نشان دهید که اگر $۱/۲ \leq x \leq ۰.۵$ ،

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R(x)$$

که در آن $|R(x)| < ۱/۳۸۴۰$.

۲۳. جهت یافتن مقداری تقریبی برای $\int_0^{1/\sqrt{2}} \sin x^2 dx$ ، از نتیجه تمرین ۲۲ استفاده کنید و خطا را برآورد کنید.

۲۴. نشان دهید که اگر $۰ \leq x \leq ۰.۳۵$ ، فرمول $(1+x)^{3/2} \approx 1 + (3x/2)$ تا سه رقم اعشار دقیق است.

۲۵. نشان دهید که اگر $۰ \leq x \leq ۰.۱۵$ ، فرمول $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - (x/2)$ تا دو رقم اعشار دقیق است.

۲۶. نمودارهای $y = \sin x$ و $y = mx$ را در يك دستگاه مختصات رسم کنید. توجه کنید که اگر m مثبت و نزدیک صفر باشد، نمودارها در نقطه‌ای که طولش نزدیک π است یکدیگر را قطع می‌کنند. با یافتن چند جمله‌ای تیلر درجه دوم در π برای تابع f با ضابطه $f(x) = \sin x - mx$ ، نشان دهید که يك جواب تقریبی معادله $\sin x = mx$ وقتی که m مثبت و نزدیک صفر باشد، عبارت است از $x \approx \pi/(1+m)$.

۲۷. روش مذکور در تمرین ۲۶ را برای یافتن جوابی تقریبی از معادله $\cot x = mx$ در حالتی که m مثبت و نزدیک صفر باشد به کار ببرید.

۲۸. (الف) با استفاده از چندجمله‌ای تیلر درجه اول در h ، e^k را تقریب کنید، با این شرط که $۰ < k < ۰.۱$. (ب) خطا را برحسب k برآورد کنید.

۲۹. فرمول تیلر را به کار ببرید و چندجمله‌ای $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ را به صورت يك چندجمله‌ای برحسب توانهای $(x-1)$ بنویسید.

۳۰. قضیه ۲۰.۵۰۱۴ را اثبات کنید. (دانهمایی: $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ را در نظر بگیرید. $f(x)$ را محاسبه کنید، و $\int_a^x f'(t)dt$ را با روش جزء به جزء و با انتخاب $u = f'(x)$ و $dv = dt$ به دست آورید. این فرایند را تکرار کنید؛ نتیجه مطلوب با استقرای ریاضی به دست می آید.)

تمرینهای مروری فصل ۱۴

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۱۸، حد را، در صورت وجود، بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{1 - \sin x} - \frac{2}{\cos^2 x} \right) \quad ۲ \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tanh 2x}{\sinh^2 x} \quad ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x} \quad ۴ \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2}) \quad ۳$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1} \quad ۶ \qquad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{t/2})}{t^{1/2}} \quad ۵$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{100}}{e^t} \quad ۸ \qquad \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin^2 x)^{\tan x} \quad ۷$$

$$\lim_{z \rightarrow \pi/2^-} \frac{z \cos^3 z}{\cos^2 z} \quad ۱۰ \qquad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y - \sin y} \quad ۹$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + e^{2/y})^{-2/y} \quad ۱۲ \qquad \lim_{t \rightarrow 0^-} (1 + 2t)^{2/t} \quad ۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{2x^2} \quad ۱۴ \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x - \ln x)} \quad ۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x} \quad ۱۶ \qquad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{\tan \theta + 2}{\sec \theta - 1} \quad ۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} \quad ۱۸ \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)^{1/x} \quad ۱۷$$

در هر يك از تمرینهای ۱۹ تا ۳۲، تعیین کنید که انتگرال نامتناهی همگراست یا واگرا؛ اگر همگراست، آن را محاسبه کنید.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x}} \quad ۲۰ \qquad \int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3} \quad ۱۹$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^2} \cdot ۲۱$$

$$\int_2^4 \frac{x dx}{\sqrt{x-2}} \cdot ۲۲$$

$$\int_0^{\pi/4} \cot^2 \theta d\theta \cdot ۲۳$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + t^2} \cdot ۲۴$$

$$\int_{-\infty}^2 x^2 dx \cdot ۲۵$$

$$\int_{-\infty}^0 x e^x dx \cdot ۲۶$$

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x} dx \cdot ۲۷$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{3^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \cdot ۲۸$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} \cdot ۲۹$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx \cdot ۳۰$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2} \cdot ۳۱$$

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \cdot ۳۲$$

۳۳ داریم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) ثابت کنید که f در 0 پیوسته است. (ب) ثابت کنید که f در 0 مشتق پذیر است و $f'(0)$ را بیابید.

۳۴. برای تابع مذکور در تمرین ۳۳، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

۳۵ داریم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} - e^{-2x}} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) آیا f در 0 پیوسته است؟ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را در صورت وجود محاسبه کنید.

۳۶. اگر خط قائم بر منحنی $y = \ln x$ در نقطه $(x_1, \ln x_1)$ محور x ها را در نقطه‌ای

به طول a قطع کند، ثابت کنید که $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} (a - x_1) = 0$.

۳۷. عبارات زیر را، در صورت وجود، محاسبه کنید: (الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sinh x \, dx$ ،

(ب) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \sinh x \, dx$

۳۸. (الف) ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت n داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n / e^x) = 0$

(ب) اگر $x > 0$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، با فرض $x = 1/t$ استفاده از نتیجه قسمت (الف)، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-1/x} / x^n)$ را بیابید.

دهریک از تمرینهای ۳۹ تا ۴۱، برای تابعی که با معادله مفروض تعریف می شود، چندجمله ای تیلر درجه n در عدد a را با صورت لاگرانژی باقیمانده اش بنویسید.

۳۹. $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $n = 6$

۴۰. $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$; $a = 1$; $n = 3$

۴۱. $f(x) = x^{-1/2}$; $a = 9$; $n = 4$

۴۲. هم e^{x^2} و هم $\cos x$ را به صورت یک چندجمله ای تیلر درجه ۴ در ۰ بنویسید، و با استفاده از آنها حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^4}.$$

۴۳. حد مذکور در تمرین ۴۲ را با قاعده هوییتال محاسبه کنید.

۴۴. با به کارگیری فرمول تیلر، چندجمله ای $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ را به صورت یک چندجمله ای بر حسب توانهای $(x+2)$ بنویسید.

۴۵. تعیین کنید که آیا می توان عددی به اندازه مساحت ناحیه واقع در سمت راست محور y ها و محصور بین منحنی $0 = x^2 - xy^2 - 4y^2$ و مجانبش تخصیص داد یا خیر. اگر می توان چنین عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

۴۶. تعیین کنید که آیا می توان عددی به اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $1 = y - 2xy$ ، محور x ها، و خط $x = 1$ تخصیص داد یا خیر. اگر می توان چنین عددی تخصیص داد، آن را بیابید.

۴۷. تعیین کنید که آیا می توان عددی به اندازه مساحت ناحیه واقع در ربع اول و زیر منحنی $y = e^{-x}$ تخصیص داد یا خیر. اگر پاسخ مثبت است، عدد را بیابید.

۴۸. مقادیری از n را که به ازای آنها انتگرال نامتناهی $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} \, dx$ همگراست

بیابید، و به ازای این مقادیر m ، انتگرال را محاسبه کنید.

۴۹. فرض کنید که برای کسب و کار خاصی، جریان پیوسته‌ای از درآمد وجود دارد و پس از t سال از زمان حال، درآمد سالانه برحسب دلار برابر است با $300 - 0.0005t$. اگر سود با نرخ ۸٪ به‌طور پیوسته محاسبه شود، ارزش فعلی تمام درآمدهای آتی چقدر است؟ (دانه‌مایی: پاراگراف قبل از تمرین ۲۷ از بخش ۳.۱۴ را ببینید.)

۵۰. اگر برای تقریب کردن مقدار $\sqrt{e}$ از چهار جمله اول چندجمله‌ای تیلر در e استفاده شود، دقت نتیجه چقدر است؟

۱۵

سریهای نامتناهی

۱۰۱۵ دنباله‌ها

بدون شك قبلاً در مطالعه ریاضیات با دنباله‌هایی از اعداد مواجه شده‌اید. مثلاً، اعداد ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵ دنباله‌ای را تعریف می‌کنند. این دنباله را **ممتناهی** می‌نامند زیرا اولین و آخرین عدد آن مشخص است. اگر مجموعه‌ای از اعداد که دنباله را تعریف می‌کند، دارای اولین و یا آخرین عدد نباشد، دنباله را **ناممتناهی** می‌نامند. برای مثال، دنباله‌ای که به صورت

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots \quad (۱)$$

تعریف می‌شود ناممتناهی است زیرا علامت سه نقطه که پس از آن عددی نباشد، نشان دهنده این است که آخرین عدد وجود ندارد. در این مبحث سروکار ما با دنباله‌های ناممتناهی است، و لذا هرگاه از کلمه «دنباله» استفاده می‌کنیم، منظورمان يك دنباله ناممتناهی است. دنباله را به صورت نوع خاصی از تابع تعریف می‌کنیم.

۱۰۱۵ تعریف دنباله تابعی است که قلمروش مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد.

در این کتاب اعداد واقع در دنباله را، که به جمله‌های دنباله موسوم‌اند، به اعداد

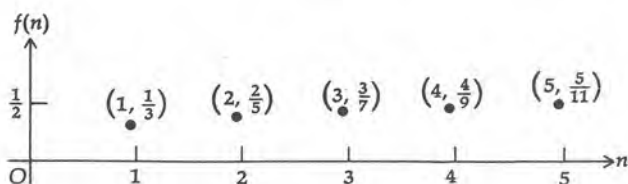
حقیقی محدود می‌کنیم.

اگر جمله n دنباله با $f(n)$ مشخص شود، دنباله عبارت است از مجموعه زوجهای مرتبی به صورت $(n, f(n))$ ، که در آن n يك عدد صحیح مثبت است.

○ نمونه ۱ اگر $f(n) = n/(2n+1)$ ، آنگاه

$$f(1) = \frac{1}{3} \quad f(2) = \frac{2}{5} \quad f(3) = \frac{3}{7} \quad f(4) = \frac{4}{9}$$

و غیره. برد f متشکل است از جمله‌های دنباله (۱). چند تا از زوجهای مرتب دنباله f عبارت‌اند از $(1, 1/3)$ ، $(2, 2/5)$ ، $(3, 3/7)$ ، $(4, 4/9)$ ، و $(5, 5/11)$. نمودار این دنباله در شکل ۱۰۱۰۱۵ نشان داده شده است.



○

شکل ۱۰۱۰۱۵

معمولاً وقتی که جمله‌های دنباله را به ترتیب فهرست می‌کنیم، جمله n آن یعنی $f(n)$ را نیز می‌نویسیم. لذا جملات دنباله (۱) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$$

چون قلمرو همه دنباله‌ها یکی است، برای نمایش دنباله از نماد $\{f(n)\}$ هم می‌توان استفاده کرد. پس دنباله (۱) را می‌توان به صورت $\{n/(2n+1)\}$ نمایش داد. برای دنباله‌ای که در آن $f(n) = a_n$ ، نماد اندیسی $\{a_n\}$ را نیز می‌توان به کار برد. همان گونه که در نمونه زیر نشان داده شده است، باید بین جملات يك دنباله و خود دنباله تمیز قائل شویم.

○ نمونه ۲ جمله‌های دنباله $\{1/n\}$ عکس اعداد صحیح مثبت‌اند

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (2)$$

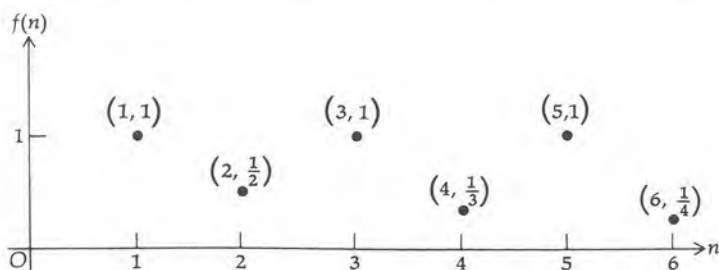
دنباله

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ \frac{2}{n+2} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

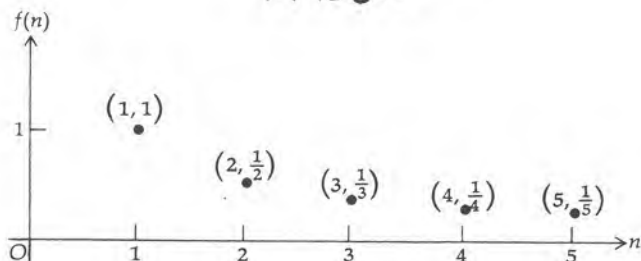
دارای جمله‌هایی به صورت زیر است

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots \quad (۳)$$

جملات دنباله‌های (۲) و (۳) یکسان هستند؛ اما این دنباله‌ها با هم متفاوت‌اند. نمودار دنباله‌های (۲) و (۳) را به ترتیب در شکل‌های ۲۰۱۰۱۵ و ۳۰۱۰۱۵ نشان داده‌ایم.

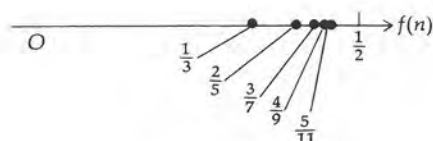


شکل ۲۰۱۰۱۵



شکل ۳۰۱۰۱۵

حال نقاط متناظر با جمله‌های متوالی یک دنباله را روی یک محور افقی مشخص می‌کنیم. این کار را برای دنباله (۱) که $\{n/(2n+1)\}$ است در شکل ۴۰۱۰۱۵ انجام داده‌ایم. ملاحظه کنید که هر چند هیچ‌یک از جملات دنباله مقدار $1/2$ را ندارد، جملات متوالی به $1/2$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. به طور شهودی می‌بینیم که اگر شماره جمله را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم، جمله به اندازه دلخواه به $1/2$ نزدیک است. به عبارت دیگر، اگر n را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم، می‌توانیم $|n/(2n+1) - 1/2|$ را از هر عدد مثبت دلخواهی چون ε کوچکتر سازیم. بدین لحاظ



شکل ۴.۱۰۱۵

می‌گوییم که حد دنباله $\{n/(2n+1)\}$ برابر با $1/2$ است. در حالت کلی، اگر عددی مانند L وجود داشته باشد به طوری که به ازای n به اندازه کافی بزرگ، $|a_n - L|$ به اندازه دلخواه کوچک باشد، گوییم حد دنباله $\{a_n\}$ برابر با L است. ذیلاً تعریف دقیق حد دنباله را بیان می‌کنیم.

۲.۱۰۱۵ تعریف حد يك دنباله $\{a_n\}$ برابر با L است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $N > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر عدد صحیح $n > N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ در این صورت، می‌نویسیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L.$$

مثال ۱ با استفاده از تعریف ۲.۱۰۱۵ ثابت کنید که حد دنباله زیر $1/2$ است

$$\left\{ \frac{n}{2n+1} \right\}.$$

حل باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $N > 0$ وجود دارد که

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \quad n > N$$

داریم

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{4n+2} \right| = \frac{1}{4n+2}.$$

لذا باید عددی چون $N > 0$ بیابیم که

$$\frac{1}{4n+2} < \varepsilon, \quad n > N$$

اما

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{با معادل است} \quad \frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

که خود معادل است با

$$n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}.$$

پس، نتیجه می‌گیریم که

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \quad n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} \quad \text{به ازای هر عدد صحیح}$$

بنابراین، اگر $N = (1-2\varepsilon)/4\varepsilon$ ، تعریف ۲.۱.۱۵ برقرار است.
در حالت خاصی، اگر $\varepsilon = 1/8$ ، $N = (1-1/4)/(1/2) = 3/2$ ، پس

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{8}, \quad n > \frac{3}{2}$$

به عنوان مثال، اگر $n = 4$ ،

$$\Delta \quad \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{18} \right| = \frac{1}{18} < \frac{1}{8}.$$

○ نمونه ۳ دنباله $\{(-1)^{n+1}/n\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که جمله n م این دنباله $(-1)^{n+1}/n$ است و $(-1)^{n+1}$ برابر با $+1$ است وقتی که n فرد باشد و برابر با -1 است وقتی که n زوج باشد. پس جمله‌های دنباله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots$$

در شکل ۵.۱.۱۵ نقاط متناظر با جمله‌های متوالی این دنباله را نشان داده‌ایم. در این شکل، $a_1 = 1$ ، $a_2 = -1/2$ ، $a_3 = 1/3$ ، $a_4 = -1/4$ ، $a_5 = 1/5$ ، $a_6 = -1/6$ ، $a_7 = 1/7$ ، $a_8 = -1/8$ ، $a_9 = 1/9$ ، $a_{10} = -1/10$ ، $a_{11} = 1/11$ ، $a_{12} = -1/12$ ، $a_{13} = 1/13$ ، $a_{14} = -1/14$ ، $a_{15} = 1/15$ ، $a_{16} = -1/16$ ، $a_{17} = 1/17$ ، $a_{18} = -1/18$ ، $a_{19} = 1/19$ ، $a_{20} = -1/20$ ، $a_{21} = 1/21$ ، $a_{22} = -1/22$ ، $a_{23} = 1/23$ ، $a_{24} = -1/24$ ، $a_{25} = 1/25$ ، $a_{26} = -1/26$ ، $a_{27} = 1/27$ ، $a_{28} = -1/28$ ، $a_{29} = 1/29$ ، $a_{30} = -1/30$ ، $a_{31} = 1/31$ ، $a_{32} = -1/32$ ، $a_{33} = 1/33$ ، $a_{34} = -1/34$ ، $a_{35} = 1/35$ ، $a_{36} = -1/36$ ، $a_{37} = 1/37$ ، $a_{38} = -1/38$ ، $a_{39} = 1/39$ ، $a_{40} = -1/40$ ، $a_{41} = 1/41$ ، $a_{42} = -1/42$ ، $a_{43} = 1/43$ ، $a_{44} = -1/44$ ، $a_{45} = 1/45$ ، $a_{46} = -1/46$ ، $a_{47} = 1/47$ ، $a_{48} = -1/48$ ، $a_{49} = 1/49$ ، $a_{50} = -1/50$ ، $a_{51} = 1/51$ ، $a_{52} = -1/52$ ، $a_{53} = 1/53$ ، $a_{54} = -1/54$ ، $a_{55} = 1/55$ ، $a_{56} = -1/56$ ، $a_{57} = 1/57$ ، $a_{58} = -1/58$ ، $a_{59} = 1/59$ ، $a_{60} = -1/60$ ، $a_{61} = 1/61$ ، $a_{62} = -1/62$ ، $a_{63} = 1/63$ ، $a_{64} = -1/64$ ، $a_{65} = 1/65$ ، $a_{66} = -1/66$ ، $a_{67} = 1/67$ ، $a_{68} = -1/68$ ، $a_{69} = 1/69$ ، $a_{70} = -1/70$ ، $a_{71} = 1/71$ ، $a_{72} = -1/72$ ، $a_{73} = 1/73$ ، $a_{74} = -1/74$ ، $a_{75} = 1/75$ ، $a_{76} = -1/76$ ، $a_{77} = 1/77$ ، $a_{78} = -1/78$ ، $a_{79} = 1/79$ ، $a_{80} = -1/80$ ، $a_{81} = 1/81$ ، $a_{82} = -1/82$ ، $a_{83} = 1/83$ ، $a_{84} = -1/84$ ، $a_{85} = 1/85$ ، $a_{86} = -1/86$ ، $a_{87} = 1/87$ ، $a_{88} = -1/88$ ، $a_{89} = 1/89$ ، $a_{90} = -1/90$ ، $a_{91} = 1/91$ ، $a_{92} = -1/92$ ، $a_{93} = 1/93$ ، $a_{94} = -1/94$ ، $a_{95} = 1/95$ ، $a_{96} = -1/96$ ، $a_{97} = 1/97$ ، $a_{98} = -1/98$ ، $a_{99} = 1/99$ ، $a_{100} = -1/100$ ، $a_{101} = 1/101$ ، $a_{102} = -1/102$ ، $a_{103} = 1/103$ ، $a_{104} = -1/104$ ، $a_{105} = 1/105$ ، $a_{106} = -1/106$ ، $a_{107} = 1/107$ ، $a_{108} = -1/108$ ، $a_{109} = 1/109$ ، $a_{110} = -1/110$ ، $a_{111} = 1/111$ ، $a_{112} = -1/112$ ، $a_{113} = 1/113$ ، $a_{114} = -1/114$ ، $a_{115} = 1/115$ ، $a_{116} = -1/116$ ، $a_{117} = 1/117$ ، $a_{118} = -1/118$ ، $a_{119} = 1/119$ ، $a_{120} = -1/120$ ، $a_{121} = 1/121$ ، $a_{122} = -1/122$ ، $a_{123} = 1/123$ ، $a_{124} = -1/124$ ، $a_{125} = 1/125$ ، $a_{126} = -1/126$ ، $a_{127} = 1/127$ ، $a_{128} = -1/128$ ، $a_{129} = 1/129$ ، $a_{130} = -1/130$ ، $a_{131} = 1/131$ ، $a_{132} = -1/132$ ، $a_{133} = 1/133$ ، $a_{134} = -1/134$ ، $a_{135} = 1/135$ ، $a_{136} = -1/136$ ، $a_{137} = 1/137$ ، $a_{138} = -1/138$ ، $a_{139} = 1/139$ ، $a_{140} = -1/140$ ، $a_{141} = 1/141$ ، $a_{142} = -1/142$ ، $a_{143} = 1/143$ ، $a_{144} = -1/144$ ، $a_{145} = 1/145$ ، $a_{146} = -1/146$ ، $a_{147} = 1/147$ ، $a_{148} = -1/148$ ، $a_{149} = 1/149$ ، $a_{150} = -1/150$ ، $a_{151} = 1/151$ ، $a_{152} = -1/152$ ، $a_{153} = 1/153$ ، $a_{154} = -1/154$ ، $a_{155} = 1/155$ ، $a_{156} = -1/156$ ، $a_{157} = 1/157$ ، $a_{158} = -1/158$ ، $a_{159} = 1/159$ ، $a_{160} = -1/160$ ، $a_{161} = 1/161$ ، $a_{162} = -1/162$ ، $a_{163} = 1/163$ ، $a_{164} = -1/164$ ، $a_{165} = 1/165$ ، $a_{166} = -1/166$ ، $a_{167} = 1/167$ ، $a_{168} = -1/168$ ، $a_{169} = 1/169$ ، $a_{170} = -1/170$ ، $a_{171} = 1/171$ ، $a_{172} = -1/172$ ، $a_{173} = 1/173$ ، $a_{174} = -1/174$ ، $a_{175} = 1/175$ ، $a_{176} = -1/176$ ، $a_{177} = 1/177$ ، $a_{178} = -1/178$ ، $a_{179} = 1/179$ ، $a_{180} = -1/180$ ، $a_{181} = 1/181$ ، $a_{182} = -1/182$ ، $a_{183} = 1/183$ ، $a_{184} = -1/184$ ، $a_{185} = 1/185$ ، $a_{186} = -1/186$ ، $a_{187} = 1/187$ ، $a_{188} = -1/188$ ، $a_{189} = 1/189$ ، $a_{190} = -1/190$ ، $a_{191} = 1/191$ ، $a_{192} = -1/192$ ، $a_{193} = 1/193$ ، $a_{194} = -1/194$ ، $a_{195} = 1/195$ ، $a_{196} = -1/196$ ، $a_{197} = 1/197$ ، $a_{198} = -1/198$ ، $a_{199} = 1/199$ ، $a_{200} = -1/200$ ، $a_{201} = 1/201$ ، $a_{202} = -1/202$ ، $a_{203} = 1/203$ ، $a_{204} = -1/204$ ، $a_{205} = 1/205$ ، $a_{206} = -1/206$ ، $a_{207} = 1/207$ ، $a_{208} = -1/208$ ، $a_{209} = 1/209$ ، $a_{210} = -1/210$ ، $a_{211} = 1/211$ ، $a_{212} = -1/212$ ، $a_{213} = 1/213$ ، $a_{214} = -1/214$ ، $a_{215} = 1/215$ ، $a_{216} = -1/216$ ، $a_{217} = 1/217$ ، $a_{218} = -1/218$ ، $a_{219} = 1/219$ ، $a_{220} = -1/220$ ، $a_{221} = 1/221$ ، $a_{222} = -1/222$ ، $a_{223} = 1/223$ ، $a_{224} = -1/224$ ، $a_{225} = 1/225$ ، $a_{226} = -1/226$ ، $a_{227} = 1/227$ ، $a_{228} = -1/228$ ، $a_{229} = 1/229$ ، $a_{230} = -1/230$ ، $a_{231} = 1/231$ ، $a_{232} = -1/232$ ، $a_{233} = 1/233$ ، $a_{234} = -1/234$ ، $a_{235} = 1/235$ ، $a_{236} = -1/236$ ، $a_{237} = 1/237$ ، $a_{238} = -1/238$ ، $a_{239} = 1/239$ ، $a_{240} = -1/240$ ، $a_{241} = 1/241$ ، $a_{242} = -1/242$ ، $a_{243} = 1/243$ ، $a_{244} = -1/244$ ، $a_{245} = 1/245$ ، $a_{246} = -1/246$ ، $a_{247} = 1/247$ ، $a_{248} = -1/248$ ، $a_{249} = 1/249$ ، $a_{250} = -1/250$ ، $a_{251} = 1/251$ ، $a_{252} = -1/252$ ، $a_{253} = 1/253$ ، $a_{254} = -1/254$ ، $a_{255} = 1/255$ ، $a_{256} = -1/256$ ، $a_{257} = 1/257$ ، $a_{258} = -1/258$ ، $a_{259} = 1/259$ ، $a_{260} = -1/260$ ، $a_{261} = 1/261$ ، $a_{262} = -1/262$ ، $a_{263} = 1/263$ ، $a_{264} = -1/264$ ، $a_{265} = 1/265$ ، $a_{266} = -1/266$ ، $a_{267} = 1/267$ ، $a_{268} = -1/268$ ، $a_{269} = 1/269$ ، $a_{270} = -1/270$ ، $a_{271} = 1/271$ ، $a_{272} = -1/272$ ، $a_{273} = 1/273$ ، $a_{274} = -1/274$ ، $a_{275} = 1/275$ ، $a_{276} = -1/276$ ، $a_{277} = 1/277$ ، $a_{278} = -1/278$ ، $a_{279} = 1/279$ ، $a_{280} = -1/280$ ، $a_{281} = 1/281$ ، $a_{282} = -1/282$ ، $a_{283} = 1/283$ ، $a_{284} = -1/284$ ، $a_{285} = 1/285$ ، $a_{286} = -1/286$ ، $a_{287} = 1/287$ ، $a_{288} = -1/288$ ، $a_{289} = 1/289$ ، $a_{290} = -1/290$ ، $a_{291} = 1/291$ ، $a_{292} = -1/292$ ، $a_{293} = 1/293$ ، $a_{294} = -1/294$ ، $a_{295} = 1/295$ ، $a_{296} = -1/296$ ، $a_{297} = 1/297$ ، $a_{298} = -1/298$ ، $a_{299} = 1/299$ ، $a_{300} = -1/300$ ، $a_{301} = 1/301$ ، $a_{302} = -1/302$ ، $a_{303} = 1/303$ ، $a_{304} = -1/304$ ، $a_{305} = 1/305$ ، $a_{306} = -1/306$ ، $a_{307} = 1/307$ ، $a_{308} = -1/308$ ، $a_{309} = 1/309$ ، $a_{310} = -1/310$ ، $a_{311} = 1/311$ ، $a_{312} = -1/312$ ، $a_{313} = 1/313$ ، $a_{314} = -1/314$ ، $a_{315} = 1/315$ ، $a_{316} = -1/316$ ، $a_{317} = 1/317$ ، $a_{318} = -1/318$ ، $a_{319} = 1/319$ ، $a_{320} = -1/320$ ، $a_{321} = 1/321$ ، $a_{322} = -1/322$ ، $a_{323} = 1/323$ ، $a_{324} = -1/324$ ، $a_{325} = 1/325$ ، $a_{326} = -1/326$ ، $a_{327} = 1/327$ ، $a_{328} = -1/328$ ، $a_{329} = 1/329$ ، $a_{330} = -1/330$ ، $a_{331} = 1/331$ ، $a_{332} = -1/332$ ، $a_{333} = 1/333$ ، $a_{334} = -1/334$ ، $a_{335} = 1/335$ ، $a_{336} = -1/336$ ، $a_{337} = 1/337$ ، $a_{338} = -1/338$ ، $a_{339} = 1/339$ ، $a_{340} = -1/340$ ، $a_{341} = 1/341$ ، $a_{342} = -1/342$ ، $a_{343} = 1/343$ ، $a_{344} = -1/344$ ، $a_{345} = 1/345$ ، $a_{346} = -1/346$ ، $a_{347} = 1/347$ ، $a_{348} = -1/348$ ، $a_{349} = 1/349$ ، $a_{350} = -1/350$ ، $a_{351} = 1/351$ ، $a_{352} = -1/352$ ، $a_{353} = 1/353$ ، $a_{354} = -1/354$ ، $a_{355} = 1/355$ ، $a_{356} = -1/356$ ، $a_{357} = 1/357$ ، $a_{358} = -1/358$ ، $a_{359} = 1/359$ ، $a_{360} = -1/360$ ، $a_{361} = 1/361$ ، $a_{362} = -1/362$ ، $a_{363} = 1/363$ ، $a_{364} = -1/364$ ، $a_{365} = 1/365$ ، $a_{366} = -1/366$ ، $a_{367} = 1/367$ ، $a_{368} = -1/368$ ، $a_{369} = 1/369$ ، $a_{370} = -1/370$ ، $a_{371} = 1/371$ ، $a_{372} = -1/372$ ، $a_{373} = 1/373$ ، $a_{374} = -1/374$ ، $a_{375} = 1/375$ ، $a_{376} = -1/376$ ، $a_{377} = 1/377$ ، $a_{378} = -1/378$ ، $a_{379} = 1/379$ ، $a_{380} = -1/380$ ، $a_{381} = 1/381$ ، $a_{382} = -1/382$ ، $a_{383} = 1/383$ ، $a_{384} = -1/384$ ، $a_{385} = 1/385$ ، $a_{386} = -1/386$ ، $a_{387} = 1/387$ ، $a_{388} = -1/388$ ، $a_{389} = 1/389$ ، $a_{390} = -1/390$ ، $a_{391} = 1/391$ ، $a_{392} = -1/392$ ، $a_{393} = 1/393$ ، $a_{394} = -1/394$ ، $a_{395} = 1/395$ ، $a_{396} = -1/396$ ، $a_{397} = 1/397$ ، $a_{398} = -1/398$ ، $a_{399} = 1/399$ ، $a_{400} = -1/400$ ، $a_{401} = 1/401$ ، $a_{402} = -1/402$ ، $a_{403} = 1/403$ ، $a_{404} = -1/404$ ، $a_{405} = 1/405$ ، $a_{406} = -1/406$ ، $a_{407} = 1/407$ ، $a_{408} = -1/408$ ، $a_{409} = 1/409$ ، $a_{410} = -1/410$ ، $a_{411} = 1/411$ ، $a_{412} = -1/412$ ، $a_{413} = 1/413$ ، $a_{414} = -1/414$ ، $a_{415} = 1/415$ ، $a_{416} = -1/416$ ، $a_{417} = 1/417$ ، $a_{418} = -1/418$ ، $a_{419} = 1/419$ ، $a_{420} = -1/420$ ، $a_{421} = 1/421$ ، $a_{422} = -1/422$ ، $a_{423} = 1/423$ ، $a_{424} = -1/424$ ، $a_{425} = 1/425$ ، $a_{426} = -1/426$ ، $a_{427} = 1/427$ ، $a_{428} = -1/428$ ، $a_{429} = 1/429$ ، $a_{430} = -1/430$ ، $a_{431} = 1/431$ ، $a_{432} = -1/432$ ، $a_{433} = 1/433$ ، $a_{434} = -1/434$ ، $a_{435} = 1/435$ ، $a_{436} = -1/436$ ، $a_{437} = 1/437$ ، $a_{438} = -1/438$ ، $a_{439} = 1/439$ ، $a_{440} = -1/440$ ، $a_{441} = 1/441$ ، $a_{442} = -1/442$ ، $a_{443} = 1/443$ ، $a_{444} = -1/444$ ، $a_{445} = 1/445$ ، $a_{446} = -1/446$ ، $a_{447} = 1/447$ ، $a_{448} = -1/448$ ، $a_{449} = 1/449$ ، $a_{450} = -1/450$ ، $a_{451} = 1/451$ ، $a_{452} = -1/452$ ، $a_{453} = 1/453$ ، $a_{454} = -1/454$ ، $a_{455} = 1/455$ ، $a_{456} = -1/456$ ، $a_{457} = 1/457$ ، $a_{458} = -1/458$ ، $a_{459} = 1/459$ ، $a_{460} = -1/460$ ، $a_{461} = 1/461$ ، $a_{462} = -1/462$ ، $a_{463} = 1/463$ ، $a_{464} = -1/464$ ، $a_{465} = 1/465$ ، $a_{466} = -1/466$ ، $a_{467} = 1/467$ ، $a_{468} = -1/468$ ، $a_{469} = 1/469$ ، $a_{470} = -1/470$ ، $a_{471} = 1/471$ ، $a_{472} = -1/472$ ، $a_{473} = 1/473$ ، $a_{474} = -1/474$ ، $a_{475} = 1/475$ ، $a_{476} = -1/476$ ، $a_{477} = 1/477$ ، $a_{478} = -1/478$ ، $a_{479} = 1/479$ ، $a_{480} = -1/480$ ، $a_{481} = 1/481$ ، $a_{482} = -1/482$ ، $a_{483} = 1/483$ ، $a_{484} = -1/484$ ، $a_{485} = 1/485$ ، $a_{486} = -1/486$ ، $a_{487} = 1/487$ ، $a_{488} = -1/488$ ، $a_{489} = 1/489$ ، $a_{490} = -1/490$ ، $a_{491} = 1/491$ ، $a_{492} = -1/492$ ، $a_{493} = 1/493$ ، $a_{494} = -1/494$ ، $a_{495} = 1/495$ ، $a_{496} = -1/496$ ، $a_{497} = 1/497$ ، $a_{498} = -1/498$ ، $a_{499} = 1/499$ ، $a_{500} = -1/500$ ، $a_{501} = 1/501$ ، $a_{502} = -1/502$ ، $a_{503} = 1/503$ ، $a_{504} = -1/504$ ، $a_{505} = 1/505$ ، $a_{506} = -1/506$ ، $a_{507} = 1/507$ ، $a_{508} = -1/508$ ، $a_{509} = 1/509$ ، $a_{510} = -1/510$ ، $a_{511} = 1/511$ ، $a_{512} = -1/512$ ، $a_{513} = 1/513$ ، $a_{514} = -1/514$ ، $a_{515} = 1/515$ ، $a_{516} = -1/516$ ، $a_{517} = 1/517$ ، $a_{518} = -1/518$ ، $a_{519} = 1/519$ ، $a_{520} = -1/520$ ، $a_{521} = 1/521$ ، $a_{522} = -1/522$ ، $a_{523} = 1/523$ ، $a_{524} = -1/524$ ، $a_{525} = 1/525$ ، $a_{526} = -1/526$ ، $a_{527} = 1/527$ ، $a_{528} = -1/528$ ، $a_{529} = 1/529$ ، $a_{530} = -1/530$ ، $a_{531} = 1/531$ ، $a_{532} = -1/532$ ، $a_{533} = 1/533$ ، $a_{534} = -1/534$ ، $a_{535} = 1/535$ ، $a_{536} = -1/536$ ، $a_{537} = 1/537$ ، $a_{538} = -1/538$ ، $a_{539} = 1/539$ ، $a_{540} = -1/540$ ، $a_{541} = 1/541$ ، $a_{542} = -1/542$ ، $a_{543} = 1/543$ ، $a_{544} = -1/544$ ، $a_{545} = 1/545$ ، $a_{546} = -1/546$ ، $a_{547} = 1/547$ ، $a_{548} = -1/548$ ، $a_{549} = 1/549$ ، $a_{550} = -1/550$ ، $a_{551} = 1/551$ ، $a_{552} = -1/552$ ، $a_{553} = 1/553$ ، $a_{554} = -1/554$ ، $a_{555} = 1/555$ ، $a_{556} = -1/556$ ، $a_{557} = 1/557$ ، $a_{558} = -1/558$ ، $a_{559} = 1/559$ ، $a_{560} = -1/560$ ، $a_{561} = 1/561$ ، $a_{562} = -1/562$ ، $a_{563} = 1/563$ ، $a_{564} = -1/564$ ، $a_{565} = 1/565$ ، $a_{566} = -1/566$ ، $a_{567} = 1/567$ ، $a_{568} = -1/568$ ، $a_{569} = 1/569$ ، $a_{570} = -1/570$ ، $a_{571} = 1/571$ ، $a_{572} = -1/572$ ، $a_{573} = 1/573$ ، $a_{574} = -1/574$ ، $a_{575} = 1/575$ ، $a_{576} = -1/576$ ، $a_{577} = 1/577$ ، $a_{578} = -1/578$ ، $a_{579} = 1/579$ ، $a_{580} = -1/580$ ، $a_{581} = 1/581$ ، $a_{582} = -1/582$ ، $a_{583} = 1/583$ ، $a_{584} = -1/584$ ، $a_{585} = 1/585$ ، $a_{586} = -1/586$ ، $a_{587} = 1/587$ ، $a_{588} = -1/588$ ، $a_{589} = 1/589$ ، $a_{590} = -1/590$ ، $a_{591} = 1/591$ ، $a_{592} = -1/592$ ، $a_{593} = 1/593$ ، $a_{594} = -1/594$ ، $a_{595} = 1/595$ ، $a_{596} = -1/596$ ، $a_{597} = 1/597$ ، $a_{598} = -1/598$ ، $a_{599} = 1/599$ ، $a_{600} = -1/600$ ، $a_{601} = 1/601$ ، $a_{602} = -1/602$ ، $a_{603} = 1/603$ ، $a_{604} = -1/604$ ، $a_{605} = 1/605</$

جمالات حول ۰ نوسان می کنند. $a_7 = 1/7$ ، $a_8 = -1/8$ ، $a_9 = 1/9$ ، $a_{10} = -1/10$. حد دنباله ۰ است و

تعریف ۲.۱۰۱۵ را با تعریف ۱.۵.۲ در مورد حد $f(x)$ وقتی که x به طور بیکران افزایش می یابد، مقایسه کنید. این دو تعریف تقریباً مثل هم هستند؛ اما، وقتی می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ، تابع f به ازای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از عددی حقیقی چون R معین است؛ حال آنکه، وقتی $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ را در نظر می گیریم، n را به اعداد صحیح مثبت محدود می کنیم. با این وجود، قضیه زیر را داریم که بلافاصله از تعریف ۱.۵.۲ به دست می آید.

۳.۱.۱۵ قضیه اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ، و f به ازای هر عدد صحیح مثبت تعریف شده باشد، آنگاه وقتی که n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = L$.

اثبات به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۲۶ را ببینید).

○ **نمونه ۴** قضیه ۳.۱.۱۵ را در مورد دنباله مثال ۱ بررسی می کنیم. برای آن دنباله داریم $f(n) = n/(2n+1)$. پس $f(x) = x/(2x+1)$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

لذا از قضیه ۳.۱.۱۵ نتیجه می گیریم که وقتی n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1/2$. این جواب با جواب مثال ۱ سازگار است.

۴.۱.۱۵ تعریف اگر دنباله ای چون $\{a_n\}$ حد داشته باشد، می گوییم دنباله همگراست و a_n به آن حد می گراید. اگر دنباله همگرا نباشد، واگراست.

مثال ۲ تعیین کنید که دنباله زیر همگراست یا واگرا

$$\left\{ \frac{4n^2}{2n^2+1} \right\}.$$

حل می خواهیم معلوم کنیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2/(2n^2+1)$ وجود دارد یا نه. می نویسیم $f(x) = 4x^2/(2x^2+1)$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{4x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{4 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

بنابراین، طبق قضیه ۳.۱.۱۵ داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 1$. پس دنباله مفروض همگراست و $\triangle$

مثال ۳ ثابت کنید که اگر $|r| < 1$ ، دنباله $\{r^n\}$ همگراست و r^n به صفر می‌گراید.

حل قبل از هر چیز، اگر $r = 0$ ، دنباله به صورت $\{0\}$ است و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$. لذا

دنباله همگراست و جمله n م به صفر می‌گراید.

اگر $0 < |r| < 1$ ، تابعی چون f با ضابطه $f(x) = r^x$ را در نظر می‌گیریم که در آن، x عدد مثبت دلخواهی است، و نشان می‌دهیم که $\lim_{x \rightarrow +\infty} r^x = 0$. آنگاه از قضیه

۳.۱.۱۵ نتیجه می‌شود که اگر n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد، داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$.

برای اینکه ثابت کنیم $(0 < |r| < 1)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} r^x = 0$ ، نشان خواهیم داد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $N > 0$ وجود دارد که

$$|r^x - 0| < \varepsilon, \quad x > N \quad \text{وقتی} \quad (2)$$

عبارت (۴) معادل است با اینکه

$$|r|^x < \varepsilon, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

و این درست است اگر و تنها اگر

$$\ln |r|^x < \ln \varepsilon, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

یا معادلش

$$x \ln |r| < \ln \varepsilon, \quad x > N \quad \text{وقتی} \quad (5)$$

چون $0 < |r| < 1$ ، $\ln |r| < 0$. پس (۵) معادل است با اینکه

$$x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |r|}, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

بنابراین اگر $N = \ln \varepsilon / \ln |r|$ ، می‌توانیم (۴) را نتیجه بگیریم. پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} r^x = 0$ و

لذا اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$. از اینرو، بنا بر تعریفهای ۲.۱.۱۵ و

۴.۱.۱۵، $\{r^n\}$ همگراست و r^n به صفر می‌گراید. $\triangle$

مثال ۴ تعیین کنید که دنباله $\{(-1)^n + 1\}$ همگراست یا واگرا.

حل جمله‌های این دنباله عبارت‌اند از $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots, (-1)^n + 1, \dots$ چون وقتی n فرد است $a_n = 0$ و وقتی n زوج است $a_n = 2$ ، به نظر می‌رسد که دنباله واگرا باشد. برای اثبات این موضوع فرض می‌کنیم که دنباله همگرا باشد و نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. اگر حد دنباله L باشد، آنگاه طبق تعریف ۲.۱۰.۱۵ به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $N > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر عدد صحیح $n > N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ ، به ویژه، وقتی $\varepsilon = 1/2$ ، عددی مانند $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|a_n - L| < \frac{1}{2} \quad n > N \text{ به ازای هر عدد صحیح}$$

یا معادلش

$$-\frac{1}{2} < a_n - L < \frac{1}{2} \quad n > N \text{ به ازای هر عدد صحیح} \quad (۶)$$

چون $a_n = 0$ اگر n فرد باشد و $a_n = 2$ اگر n زوج باشد، از (۶) نتیجه می‌گیریم که

$$-\frac{1}{2} < -L < \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2} < 2 - L < \frac{1}{2}$$

اما اگر $-L > -1/2$ ، آنگاه $2 - L > 3/2$ ؛ لذا $2 - L$ نمی‌تواند از $1/2$ کوچکتر باشد. پس تناقضی وجود دارد، و بنا بر این دنباله مفروض واگراست. ▲

مثال ۵ تعیین کنید که دنباله زیر همگراست یا واگرا

$$\left\{ n \sin \frac{\pi}{n} \right\}.$$

حل می‌خواهیم معلوم کنیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(\pi/n)$ وجود دارد یا خیر. می‌نویسیم $f(x) = x \sin(\pi/x)$ و درباره $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ تحقیق می‌کنیم. چون $f(x)$ را می‌توان به صورت $[\sin(\pi/x)]/(1/x)$ هم نوشت و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\pi/x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x) = 0$ ، قاعده هسپیتال را به کار می‌گیریم. و به دست می‌آوریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \cos \frac{\pi}{x} = \pi.$$

پس وقتی n يك عدد صحيح مثبت باشد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \pi$ پس دنباله مفروض همگراست و $n \sin(\pi/n)$ به π می‌گراید. ▲

برای حد دنباله‌ها هم قضایایی داریم که نظیر قضایای حدی در مورد توابع، مذکور در فصل ۲، هستند. در این قضایا از اصطلاحات مربوط به دنباله‌ها استفاده می‌شود. اثبات آنها را نمی‌آوریم زیرا مشابه با اثبات قضایای متناظر در فصل ۲ است.

۵.۱۰۱۵ قضیه اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند و c عددی ثابت باشد، آنگاه

(i) حد دنباله ثابت $\{c\}$ برابر با c است؛

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (\text{ii})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad (\text{iii})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \right) \quad (\text{iv})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0 \quad \text{اگر} \quad (\text{v})$$

مثال ۶ به کمک قضیه ۵.۱۰۱۵ ثابت کنید که دنباله

$$\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \sin \frac{\pi}{n} \right\}$$

همگراست، و حد دنباله را بیابید.

حل

$$\frac{n^2}{2n+1} \sin \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2n+1} \cdot n \sin \frac{\pi}{n}.$$

در مثال ۱ نشان دادیم که دنباله $\{n/(2n+1)\}$ همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n/(2n+1)] = 1/2$

در مثال ۵ نشان دادیم که دنباله $\{n \sin(\pi/n)\}$ همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n \sin(\pi/n)] = \pi$

پس، بنابر قضیه ۵.۱۰۱۵ (iv)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2n+1} \cdot n \sin \frac{\pi}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \cdot \pi$$

پس دنباله مفروض همگراست، و حدش $\pi/2$ است. ▲

تمرینهای ۱۰۱۵

دتمرینهای ۱ تا ۱۹، چهار جمله اول دنباله را بنویسید و تعیین کنید که دنباله همگراست یا واگرا؛ اگر همگراست، حد آن را بیابید.

۱. $\left\{ \frac{n+1}{2n-1} \right\}$
۲. $\left\{ \frac{2n^2+1}{3n^2-n} \right\}$
۳. $\left\{ \frac{n^2+1}{n} \right\}$
۴. $\left\{ \frac{3n^2+1}{2n^2+n} \right\}$
۵. $\left\{ \frac{3-2n^2}{n^2-1} \right\}$
۶. $\left\{ \frac{e^n}{n} \right\}$
۷. $\left\{ \frac{\ln n}{n^2} \right\}$
۸. $\left\{ \frac{\log_b n}{n} \right\}, b > 1$
۹. $\{\tanh n\}$
۱۰. $\{\sinh n\}$
۱۱. $\left\{ \frac{n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$
۱۲. $\left\{ \frac{\sinh n}{\sin n} \right\}$
۱۳. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} \right\}$
۱۴. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$
۱۵. $\left\{ \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n \right\}$ (راهنمایی: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ را به کار ببرید.)
۱۶. $\left\{ \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right\}$ (راهنمایی تمرین ۱۵ را ببینید.)
۱۷. $\{r^{1/n}\}$ و $r > 0$ (راهنمایی: دو حالت در نظر بگیرید: $r \leq 1$ و $r > 1$.)
۱۸. $\{\cos n\pi\}$
۱۹. $\left\{ \frac{n}{c^n} \right\}, c > 1$

دتمرینهای ۲۰ تا ۲۵، با استفاده از تعریف ۲۰.۱.۱۵ ثابت کنید که حد دنباله مفروض L است.

۲۰. $\left\{ \frac{4}{2n-1} \right\}; L=0$
۲۱. $\left\{ \frac{3}{n-1} \right\}; L=0$
۲۲. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}; L=0$
۲۳. $\left\{ \frac{\lambda n}{2n+3} \right\}; L=2$

$$\left\{ \frac{2n^2}{5n^2+1} \right\}; L = \frac{2}{5} \cdot 25 \qquad \left\{ \frac{5-n}{2+3n} \right\}; L = -\frac{1}{3} \cdot 24$$

۲۶. قضیه ۳.۱.۱۵ را اثبات کنید.

۲۷. نشان دهید که دنباله‌های $\{n^2/(n-3)\}$ و $\{n^2/(n+4)\}$ هر دو واگرا هستند؛ اما، دنباله $\{n^2/(n-3) - n^2/(n+4)\}$ همگراست.

۲۸. دنباله زیر مفروض است

$$. b \neq 0 \text{ که } a \text{ و } b \text{ ثابت هستند و } \left\{ \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^b} \right\}$$

تعیین کنید که این دنباله همگراست یا واگرا. اگر همگراست، حد آن را بیابید.

۲۹. ثابت کنید که اگر $|r| < 1$ ، دنباله $\{nr^n\}$ همگراست و nr^n به صفر می‌گراید.

۳۰. ثابت کنید که اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ یکتاست. (دانهمایی:

فرض کنید $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ دو مقدار مختلف L و M را داشته باشد، و با استفاده از تعریف

۲.۱.۱۵ و انتخاب $\varepsilon = |L - M|/2$ نشان دهید که این غیرممکن است.)

۳۱. ثابت کنید که اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ، آنگاه دنباله $\{a_n^2\}$ نیز

همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = L^2$.

۳۲. ثابت کنید که اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ، آنگاه دنباله $\{|a_n|\}$

نیز همگراست و $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = |L|$.

۲.۱۵ دنباله‌های یکنوا و کراندار

برخی از دنباله‌ها نامهای خاصی دارند.

۱۰۲.۱۵ تعریف دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ موسوم است به

(i) صعودی اگر به ازای هر n ، $a_n \leq a_{n+1}$ ؛

(ii) نزولی اگر به ازای هر n ، $a_n \geq a_{n+1}$ ؛

اگر دنباله‌ای صعودی یا نزولی باشد یکنوا نام دارد.

اگر $a_n < a_{n+1}$ (حالت خاصی از $a_n \leq a_{n+1}$)، دنباله اکیداً صعودی است، و اگر $a_n > a_{n+1}$ ، دنباله اکیداً نزولی است.

مثال ۱ معلوم کنید که هر يك از دنباله‌های زیر صعودی است یا نزولی، و یا اینکه یکنوا نیست: (الف) $\{n/(2n+1)\}$; (ب) $\{1/n\}$; (پ) $\{(-1)^{n+1}/n\}$.

حل

(الف) جمله‌های دنباله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \dots$$

توجه کنید که a_{n+1} با قراردادن $n+1$ به جای n از a_n به دست می‌آید. پس، نظر به اینکه $a_n = n/(2n+1)$ داریم

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

به‌چهار جمله اول دنباله نگاه کنید. به‌موازات افزایش n ، جمله‌ها نیز بزرگتر می‌شوند. پس در حالت کلی حدس می‌زنیم که

$$\frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3}. \quad (1)$$

نامساوی (۱) وقتی ثابت می‌شود که بتوانیم يك نامساوی معادل با آن بیابیم که به درستی آن اطمینان داشته باشیم. اگر هر دو طرف نامساوی (۱) را در $(2n+1)(2n+3)$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1). \quad (2)$$

نامساوی (۲) با نامساوی (۱) معادل است زیرا با تقسیم کردن هر دو طرف (۲) بر $(2n+1)(2n+3)$ می‌توان (۱) را به‌دست آورد. نامساوی (۲) معادل است با

$$2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + 1. \quad (3)$$

نامساوی (۳) آشکارا برقرار است زیرا طرف راست آن به‌اندازه ۱ از طرف چپ آن بزرگتر است. بنابراین، نامساوی (۱) برقرار است؛ لذا دنباله مفروض صعودی است. (ب) جمله‌های دنباله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

چون به‌ازای هر n داریم

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

دنباله نزولی است.

(پ) جمله‌های دنباله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}, \dots$$

$a_1 = 1$ و $a_2 = -1/2$ ؛ لذا $a_1 > a_2$. اما $a_3 = 1/3$ ؛ پس $a_2 < a_3$. در حالت کلیتر، سه جمله متوالی $a_n = (-1)^{n+1}/n$ ، $a_{n+1} = (-1)^{n+2}/(n+1)$ ، و $a_{n+2} = (-1)^{n+3}/(n+2)$ را در نظر بگیرید. اگر n فرد باشد، $a_n > a_{n+1}$ و $a_{n+1} < a_{n+2}$ ، و اگر n زوج باشد، $a_n < a_{n+1}$ و $a_{n+1} > a_{n+2}$. پس دنباله نه صعودی است و نه نزولی و لذا یکنوا نیست. ▲

۲۰۲۰۱۵ تعریف عدد C را يك کران پایین دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $C \leq a_n$ ، و عدد D را يك کران بالای دنباله $\{a_n\}$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $a_n \leq D$.

○ نمونه ۱ عدد صفر کران پایینی از دنباله $\{n/(2n+1)\}$ است که جملاتش، عبارت‌اند از

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \dots$$

يك کران پایین دیگر این دنباله $1/3$ است. در واقع هر عددی که نابیشتر از $1/3$ باشد يك کران پایین این دنباله است. ○

○ نمونه ۲ دنباله $\{1/n\}$ را در نظر بگیرید که جمله‌هایش به صورت زیرند

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

عدد ۱، کران بالایی از این دنباله است، و ۰ نیز يك کران بالای آن است. هر عددی که ناکمتر از ۱ باشد کران بالای این دنباله است، و هر عدد نامثبت در حکم کران پایین آن است. ○

با توجه به نمونه‌های ۱ و ۲ می‌بینیم که يك دنباله می‌تواند تعداد زیادی کران بالا و کران پایین داشته باشد.

۳.۲.۱۵ تعریف اگر A يك کران پایین دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ باشد و نیز دارای این ویژگی باشد که به ازای هر کران پایین $\{a_n\}$ ، مانند C ، داشته باشیم $C \leq A$ ، آنگاه A را **بزرگترین کران پایین** این دنباله می‌نامند. همچنین، اگر B يك کران بالای دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ باشد و نیز دارای این ویژگی باشد که به ازای هر کران بالای $\{a\}$ ، مانند D ، داشته باشیم $B \leq D$ ، آنگاه B را **کوچکترین کران بالای** این دنباله می‌نامند. [می‌توان نشان داد که بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا یکتا هستند.]

○ **نمونه ۳** بزرگترین کران پایین دنباله $\{n/(2n+1)\}$ مذکور در نمونه ۱ برابر با $1/3$ است، زیرا هر کران پایین دنباله از $1/3$ کوچکتر و یا با آن مساوی است. علاوه بر این به ازای هر n ،

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$$

و $1/2$ کوچکترین کران بالای دنباله است. در نمونه ۲ دنباله $\{1/n\}$ را داریم که کوچکترین کران بالای آن ۱ است زیرا هر کران بالای این دنباله از ۱ بزرگتر است یا با آن مساوی است. بزرگترین کران پایین این دنباله ۰ است. ○

۴.۲.۱۵ تعریف دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ را **کراندار نامیم** اگر و تنها اگر کران بالا و کران پایین داشته باشد.

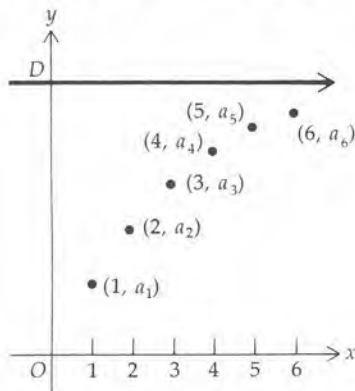
دنباله $\{1/n\}$ چون کران پایین و کران بالا دارد، کراندار است. این دنباله يك دنباله نزولی هم هست و لذا دنباله‌ای کراندار و یکنواست. قضیه‌ای وجود دارد (۴.۲.۱۵) که تضمین می‌کند هر دنباله کراندار یکنوا، همگراست. به‌ویژه، دنباله $\{1/n\}$ همگراست زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) = 0$. دنباله $\{n\}$ که جملاتش

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

هستند یکنواست (زیرا صعودی است) اما کراندار نیست (زیرا هیچ کران بالا ندارد). این دنباله همگرا نیست زیرا $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$. برای اثبات قضیه ۴.۲.۱۵ به يك ویژگی بسیار مهم دستگاه اعداد حقیقی نیاز داریم که اینک آن را بیان می‌کنیم.

۵.۲.۱۵ اصل موضوع کمال هر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که کران پایین داشته باشد، بزرگترین کران پایین هم دارد. همچنین، هر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که کران

بالا داشته باشد، کوچکترین کران بالا نیز دارد. جمله دوم در بیان اصل موضوع کمال لازم نیست زیرا آن را می‌توان از جمله اول استنتاج کرد. جمله دوم را برای سهولت بحث در اصل موضوع گنجانیدیم. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی کراندار است و D یک کران بالای آن است. در این صورت، اگر نقاط (n, a_n) را در یک دستگاه مختصات دکارتی قلم رسم کنیم، همه آنها زیر خط $y = D$ قرار خواهند گرفت. علاوه بر این، چون دنباله صعودی است، وقتی که n افزایش می‌یابد، نقاط به خط $y = D$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. شکل ۱۰۲۰۱۵ را ببینید. پس، وقتی که n افزایش می‌یابد، جمله‌های a_n به طرف D صعود می‌کنند. به‌طور شهودی به نظر می‌رسد که دنباله $\{a_n\}$ حدهای داشته باشد که یا D است یا عددی است کوچکتر از D . در واقع نیز چنین است و ما آن را در قضیه زیر اثبات می‌کنیم.



شکل ۱۰۲۰۱۵

۶.۲۰۱۵ قضیه هر دنباله کراندار یکنوا، همگراست.

اثبات قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم که دنباله یکنوا صعودی است. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله مفروض است.

چون $\{a_n\}$ کراندار است، کران بالا دارد. پس بنا بر اصل موضوع کمال (۵.۲۰۱۵)، $\{a_n\}$ دارای کوچکترین کران بالاست که آن را B می‌نامیم. حال اگر ε عددی مثبت باشد، $B - \varepsilon$ نمی‌تواند کران بالای دنباله باشد زیرا $B - \varepsilon < B$ ، و B کوچکترین کران بالای دنباله است. لذا به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون N داریم

$$B - \varepsilon < a_N. \quad (۴)$$

چون B کوچکترین کران بالای $\{a_n\}$ است، از تعریف ۲.۲۰۱۵ نتیجه می‌گیریم که

$$a_n \leq B, \quad n, \text{ به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت } n. \quad (۵)$$

از آنجا که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است، از تعریف ۱۰۲۰۱۵ (i) نتیجه می‌گیریم که

$$a_n \leq a_{n+1}, n \text{ مثبت و صحیح و}$$

و لذا

$$(۶) \quad \text{وقتی } n \geq N, \quad a_N \leq a_n$$

از (۴)، (۵)، و (۶) نتیجه می‌شود که

$$\text{وقتی } n \geq N, \quad B - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq B < B + \varepsilon$$

که از آن به‌دست می‌آید

$$\text{وقتی } n \geq N, \quad B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon$$

$$\text{وقتی } n \geq N, \quad -\varepsilon < a_n - B < \varepsilon$$

و این را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$(۷) \quad \text{وقتی } n \geq N, \quad |a_n - B| < \varepsilon$$

بنابر تعریف ۲۰۱۰۱۵، حکم (۷) عبارت از این شرط است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = B$ پس دنباله

$\{a_n\}$ همگراست.

برای اثبات قضیه درحالتی که دنباله $\{a_n\}$ نزولی است، دنباله $\{-a_n\}$ را که صعودی است در نظر می‌گیریم، و نتایج بالا را به‌کار می‌بندیم. کامل کردن مراحل اثبات را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱۷ را ببینید). $\square$

قضیه ۶۰۲۰۱۵ حاکی است که اگر $\{a_n\}$ یک دنباله کراندار یکنوا باشد، عددی مانند L وجود دارد که $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ؛ اما این قضیه راه یافتن L را نشان نمی‌دهد. بدین سبب

قضیه ۶۰۲۰۱۵ را یک قضیه وجودی می‌نامند. در ریاضیات، بسیاری از مفاهیم مهم بر مبنای قضایای وجودی قرار دارند. به‌ویژه، دنباله‌های زیادی هستند که حد آنها را با استفاده مستقیم از تعریف یا با استفاده از قضایای حدی نمی‌توان به‌دست آورد، ولی اطلاع از وجود چنین حدی ممکن است برای ریاضیدان ذیقیمت باشد.

در اثبات قضیه ۶۰۲۰۱۵، حد دنباله کراندار صعودی، کوچکترین کران بالای دنباله، B است. پس، اگر D یک کران بالای این دنباله باشد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = B \leq D$. لذا قضیه زیر را داریم.

۷۰۲۰۱۵ قضیه فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و D یک کران بالای این دنباله باشد. در این صورت، $\{a_n\}$ همگراست، و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq D.$$

دنباله‌های یکنوا و کراندار ۲۹۷

در اثبات قضیه ۶.۲۰۱۵ برای حالتی که دنباله کراندار یکنوا نزولی است، حد دنباله بزرگترین کران پایین آن است. قضیه زیر با روشی مشابه با شیوه استنتاج قضیه ۷.۲۰۱۵ به‌دست می‌آید.

۸.۲۰۱۵ **قضیه** فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی، و C يك کران پایین آن باشد. در این صورت، $\{a_n\}$ همگراست، و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq C.$$

مثال ۲ با استفاده از قضیه ۶.۲۰۱۵ ثابت کنید که دنباله زیر همگراست

$$\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}.$$

حل جملات دنباله مفروض عبارت‌اند از

$$\frac{2^1}{1!}, \frac{2^2}{2!}, \frac{2^3}{3!}, \frac{2^4}{4!}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

داریم $1! = 1$ ، $2! = 1 \cdot 2 = 2$ ، $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ، $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ، پس جمله‌های دنباله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$2, 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{2^n}{n!}, \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \dots$$

پس $a_1 = a_2 > a_3 > a_4$ ؛ لذا دنباله مفروض ممکن است نزولی باشد. باید بررسی کنیم که $a_n \geq a_{n+1}$ یا نه؛ یعنی، باید برقراری نامساوی زیر را تحقیق کنیم

$$\frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \quad (۸)$$

این معادل است با

$$2^n(n+1)! \geq 2^{n+1}n!$$

که معادل است با

$$2^n n! (n+1) \geq 2 \cdot 2^n n!$$

که معادل است با

$$n+1 \geq 2. \quad (۹)$$

وقتی که $n=1$ ، نامساوی (۹) به $2=2$ بدل می‌شود، و نامساوی (۹) به‌ازای $n > 2$ آشکارا برقرار است. چون نامساوی (۸) با (۹) معادل است، نتیجه می‌گیریم که دنباله مفروض نزولی، و لذا یکنواست. يك کران بالای دنباله داده شده ۲، و يك کران

پایین آن ۰ است. بنابراین دنباله کراندار است.
 پس دنباله $\{2^n/n!\}$ يك دنباله کراندار یکنواست، و بنا بر قضیه ۶.۲۰۱۵ همگراست. ▲

قضیه ۶.۲۰۱۵ حاکی است که يك شرط کافی برای همگرا بودن دنباله یکنوا، کراندار بودن آن است. این، شرط لازم هم هست و قضیه زیر آن را بیان می کند.

۹.۲۰۱۵ قضیه هر دنباله یکنوای همگرا، کراندار است.

اثبات قضیه را برای حالتی ثابت می کنیم که دنباله یکنوا صعودی است. فرض کنید دنباله مفروض، $\{a_n\}$ باشد.

برای اینکه ثابت کنیم $\{a_n\}$ کراندار است، باید نشان دهیم که کران پایین و کران بالا دارد. چون $\{a_n\}$ دنباله ای صعودی است، اولین جمله آن در حکم يك کران پایین است. حال باید يك کران بالا پیدا کنیم.

از آنجا که $\{a_n\}$ همگراست، دنباله حد دارد؛ این حد را L می نامیم. بنابراین $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ، و لذا طبق تعریف ۲.۱۰۱۵، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad n > N$$

یا معادلش

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \quad n > N$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad n > N$$

چون $\{a_n\}$ صعودی است،

$$a_n < L + \varepsilon, \quad n > N$$

بنابراین $L + \varepsilon$ در حکم کران بالای دنباله $\{a_n\}$ است.

برای اثبات قضیه وقتی که $\{a_n\}$ نزولی است، همان کاری را انجام می دهیم که در اثبات قضیه ۶.۲۰۱۵ پیشنهاد شد: دنباله $\{-a_n\}$ را که صعودی است در نظر می گیریم، و نتایج بالا را به کار می بندیم. در تمرین ۱۸ از شما خواسته شده است که این اثبات را بنویسید. □

تمرینهای ۲.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، تعیین کنید که دنباله مفروض صعودی است یا نزولی، و یا اینکه یکنوا نیست.

$$\left\{ \frac{2n-1}{4n-1} \right\} \cdot 2$$

$$\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\} \cdot 1$$

$$\{\sin n\pi\} \cdot ۴$$

$$\left\{ \frac{1-2n^2}{n^2} \right\} \cdot ۳$$

$$\left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} \cdot ۶$$

$$\left\{ \cos \frac{1}{3} n\pi \right\} \cdot ۵$$

$$\left\{ \frac{2^n}{1+2^n} \right\} \cdot ۸$$

$$\left\{ \frac{1}{n+\sin n^2} \right\} \cdot ۷$$

$$\left\{ \frac{(2n)!}{5^n} \right\} \cdot ۱۰$$

$$\left\{ \frac{5^n}{1+5^{2n}} \right\} \cdot ۹$$

$$\left\{ \frac{n}{2^n} \right\} \cdot ۱۲$$

$$\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\} \cdot ۱۱$$

$$\{n^2 + (-1)^n n\} \cdot ۱۴$$

$$\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\} \cdot ۱۳$$

$$\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \right\} \cdot ۱۶$$

$$\left\{ \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right\} \cdot ۱۵$$

۱۷. به کمک این نکته که قضیه ۶.۲.۱۵ برای دنباله‌های صعودی برقرار است، ثابت کنید که اگر $\{a_n\}$ يك دنباله نزولی نیز باشد، این قضیه برقرار است. (دانه‌پایی: دنباله $\{-a_n\}$ را در نظر بگیرید.)

۱۸. با روشی نظیر آنچه در تمرین ۱۷ به کار بردید، قضیه ۹.۲.۱۵ را در حالتی که $\{a_n\}$ يك دنباله نزولی باشد ثابت کنید.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، تعیین کنید که دنباله مفروض کراندار است یا نه.

$$\left\{ \frac{n^2+3}{n+1} \right\} \cdot ۱۹$$

$$\{3 - (-1)^{n-1}\} \cdot ۲۰$$

دتمرینهای ۲۱ تا ۳۰، با استفاده از قضیه ۶.۲.۱۵، ثابت کنید که دنباله مفروض همگراست.

$$\left\{ \frac{n}{3^{n+1}} \right\} \cdot ۲۲$$

۲۱. دنباله مذکور در تمرین ۱.

۲۴. دنباله مذکور در تمرین ۸.

$$\left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right\} \cdot ۲۳$$

۲۶. دنباله مذکور در تمرین ۱۲.

۲۵. دنباله مذکور در تمرین ۹.

۲۷. دنباله مذکور در تمرین ۱۵. ۲۸. دنباله مذکور در تمرین ۱۶.

$$\{k^{1/n}\}, k > 1.30 \quad \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}. 29$$

۳۱. دنباله‌ای مثال بنویسید که کراندار و همگرا باشد ولی یکنوا نباشد.

۳۲. دنباله $\{a_n\}$ که در آن به ازای هر n ، $a_n > 0$ و به ازای $1 < k < \infty$ ، $a_{n+1} < ka_n$ مفروض است. ثابت کنید که $\{a_n\}$ همگراست.

۳.۱۵ سری نامتناهی با جمله‌های ثابت

عمل آشنای جمع صرفاً در مورد مجموعه‌های متناهی از اعداد به کار می‌رود؛ برای اینکه جمع را به تعداد نامتناهی از اعداد گسترش دهیم لازم است که معنای چنین مجموعی را تعریف کنیم. برای انجام این کار با در نظر گرفتن دنباله‌ها به بحث در باره یک فرایند حدگیری می‌پردازیم.

۱.۳.۱۵ تعریف اگر $\{u_n\}$ دنباله‌ای باشد و

$$s_n = \sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

آنگاه دنباله $\{s_n\}$ را یک سری نامتناهی می‌نامیم.

اعداد $u_1, u_2, u_3, \dots$ جمله‌های سری نامتناهی نام دارند. علامتگذاری زیر را برای نمایش سری نامتناهی به کار می‌بریم

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

اگر سری نامتناهی به صورت (۱) نمایش داده شده باشد، داریم $s_1 = u_1$ ، $s_2 = u_1 + u_2$ ، $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ و به طور کلی

$$s_k = \sum_{i=1}^k u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k. \quad (2)$$

s_k که توسط رابطه (۲) تعریف می‌شود، مجموع جزئی k م سری مفروض نام دارد و دنباله $\{s_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های جزئی است. پس تعریف ۱.۳.۱۵ حاکی است که سری نامتناهی، دنباله‌ای از مجموعه‌های جزئی است.

چون $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$ و $s_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

پس

$$s_n = s_{n-1} + u_n. \quad (3)$$

مثال ۱ سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

داده شده است. چهار جمله اول دنباله مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ را بیابید، و فرمولی برای s_n بر حسب n به دست آورید.

حل بنا بر فرمول (۳)

$$s_1 = u_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = s_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = s_3 + u_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

می‌دانیم

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

پس

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

لذا، چون $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$ داریم

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

بعد از حذف پرانتزها و ترکیب جملات داریم

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

با قرار دادن ۱، ۲، ۳، و ۴ به جای n ، می بینیم که همان نتایج قبلی به دست می آیند. ▲
روش حل مثال فوق صرفاً درحالتهای خاصی قابل کاربرد است. درحالت کلی، امکان ندارد که چنین عبارتی برای s_n به دست آید.
حال به تعریف مجموع سری نامتناهی می پردازیم.

۲.۳.۱۵ تعریف اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ سری نامتناهی مفروضی باشد، و $\{s_n\}$ دنباله ای از مجموعهای جزئی باشد که این سری نامتناهی را تعریف می کند، آنگاه چنانچه $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود داشته و برابر با S باشد، می گوئیم سری مفروض همگراست و S مجموع این سری نامتناهی است. اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود نداشته باشد، سری واگراست و مجموع ندارد.

تعریف ۲.۳.۱۵ حاکی از آن است که يك سری نامتناهی همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزئی متناظر آن همگرا باشد.
اگر مجموع يك سری نامتناهی S باشد، می گوئیم که سری به S می گراید.
ملاحظه کنید که مجموع يك سری همگرا حد دنباله ای از مجموعهای جزئی است و با عمل جمع معمولی به دست نمی آید. درمورد سری همگرا، علامت زیر

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

هم برای نمایش سری و هم برای نشان دادن مجموع سری به کار می رود. استفاده از يك علامت برای هر دو مفهوم نباید گیج کننده باشد چون تعبیر درست را با توجه به متنی که این علامت در آن به کار رفته، می توان تشخیص داد.

مثال ۲ تعیین کنید که سری نامتناهی مذکور در مثال ۱ مجموع دارد یا نه.

حل درحل مثال ۱ نشان دادیم که دنباله مجموعهای جزئی سری مفروض عبارت است از $\{s_n\} = \{n/(n+1)\}$. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

پس مجموع سری نامتناهی مساوی با ۱ است، و می نویسیم

سری نامتناهی با جمله‌های ثابت ۳۰۳

$$\Delta \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = 1.$$

همان‌طور که در بالا ذکر شد، در بیشتر موارد نمی‌توان عبارتی برای s_n بر حسب n به دست آورد؛ لذا برای تعیین اینکه یک سری نامتناهی مجموع دارد یا نه، و به عبارت دیگر برای اینکه بینیم یک سری نامتناهی همگراست یا واگرا، باید روشهای دیگری در دست داشته باشیم.

$$۳.۳.۱۵ \quad \text{قضیه} \quad \text{اگر سری نامتناهی} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ همگرا باشد، آنگاه} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

اثبات فرض می‌کنیم $\{s_n\}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری مفروض باشد، و مجموع سری را با S نمایش می‌دهیم. بنا بر تعریف ۲.۳.۱۵، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$. پس، به ازای هر

$\varepsilon > 0$ عددی چون $N > 0$ وجود دارد که برای هر عدد صحیح $n > N$ ، $|S - s_n| < \varepsilon/2$. همچنین، به ازای این اعداد صحیح $n > N$ ، $|S - s_{n+1}| < \varepsilon/2$. لذا

$$|u_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |S - s_n + s_{n+1} - S| \leq |S - s_n| + |s_{n+1} - S|.$$

بنابراین

$$|u_{n+1}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \quad n > N$$

به ازای هر عدد صحیح $n > N$

□

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \text{ پس}$$

از قضیهٔ ۳.۳.۱۵ نتیجه می‌شود که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ ، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

مثال ۳ ثابت کنید که دو سری زیر واگرا هستند.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \dots \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} 3 = 3 - 3 + 3 - 3 + \dots \quad (\text{ب})$$

حل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \quad (\text{الف})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1} = 1 \neq 0.$$

لذا، بنا بر قضیه ۳.۳.۱۵ این سری واگراست.

(ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} 3$ که حد طرف راست وجود ندارد. پس،

طبق قضیه ۳.۳.۱۵ این سری واگراست. ▲

عکس قضیه ۳.۳.۱۵ غلط است. یعنی، اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، نتیجه نمی شود که سری

لزوماً همگراست. به عبارت دیگر، ممکن است در مورد يك سری واگرا داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. مثالی از این نوع سری، سری همساز است که عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (۲)$$

آشکار است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$. در نمونه ۱ ثابت می شود که سری همساز واگراست؛

برای این کار از قضیه زیر استفاده می کنیم که می گوید اختلاف بین دو مجموع جزئی s_R و s_T از يك سری همگرا را، با این شرط که R و T به اندازه کافی بزرگ اختیار شوند، می توان به قدر دلخواه کوچک کرد.

۴.۳.۱۵ قضیه فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری همگرای مفروضی چون

$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ باشد. در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند N وجود دارد که

$$|s_R - s_T| < \varepsilon, \quad T > N \text{ و } R > N \text{ وقتی}$$

اثبات چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست، مجموعش را S می نامیم. حال به ازای هر

$\varepsilon > 0$ يك $N > 0$ وجود دارد که وقتی $n > N$ ، $|S - s_n| < \varepsilon/2$ ، بنا بر این، اگر $T > N$ و $R > N$

$$|s_R - s_T| = |s_R - S + S - s_T| \leq |s_R - S| + |S - s_T| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

از اینرو

$$\square \quad |s_R - s_T| < \varepsilon, \quad T > N \text{ و } R > N \text{ وقتی}$$

○ نمونه ۱ ثابت می‌کنیم که سری همساز (۴) واگراست. برای این سری داریم

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

و

$$s_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

پس

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}. \quad (5)$$

اگر $n > 1$ ،

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}. \quad (6)$$

در هر طرف علامت نامساوی (۶)، n جمله وجود دارد؛ لذا طرف راست برابر است با $n(1/2n) = 1/2$ ، پس، بنا بر (۵) و (۶) داریم

$$s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}, \quad \text{وقتی } n > 1 \quad (7)$$

اما. قضیه ۳۰۱۵.۴ حاکی از آن است که اگر دنباله مقروضی همگرا باشد، با انتخاب n به اندازه کافی بزرگ، می‌توان $s_{2n} - s_n$ را به قدر دلخواه کوچک کرد؛ یعنی، اگر $\varepsilon = 1/2$ ، عددی مانند N وجود دارد که وقتی $2n > N$ و $n > N$ ، داریم $s_{2n} - s_n < 1/2$. ولی این (۷) را نقض می‌کند. بنابراین سری همساز واگراست، هر چند که $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$. ○

سری که به شکل زیر باشد، سری هندسی نامیده می‌شود

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots. \quad (8)$$

مجموع جزئی n م این سری از رابطه

$$s_n = a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) \quad (9)$$

به دست می‌آید. r را قدر نسبت این سری هندسی می‌نامند. بنا بر اتحاد زیر

$$1 - r^n = (1 - r)(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})$$

(۹) را می توان به صورت زیر نوشت

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{اگر } r \neq 1 \quad (10)$$

قضیه ۵.۳.۱۵ اگر $|r| < 1$ ، سری هندسی به مجموع $a/(1-r)$ می گراید، و اگر $|r| \geq 1$ ، سری هندسی واگراست.

اثبات در مثال ۳، بخش ۱.۱۵، نشان دادیم که اگر $|r| < 1$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$ ، بنابراین، از (۱۰) نتیجه می گیریم که اگر $|r| < 1$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{a}{1-r}.$$

پس چنانچه $|r| < 1$ ، سری هندسی همگراست و مجموعش $a/(1-r)$ است. اگر $r = 1$ ، $s_n = na$ ، پس اگر $a > 0$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ ، و اگر $a < 0$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$$

اگر $r = -1$ ، آنگاه سری هندسی به صورت $a - a + a - \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$ درمی آید؛ لذا وقتی n زوج باشد، $s_n = 0$ ، و وقتی n فرد باشد، $s_n = a$. بنابراین $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

وجود ندارد. پس وقتی $|r| = 1$ ، سری هندسی واگراست.

اگر $|r| > 1$ ، داریم $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1} = a \lim_{n \rightarrow +\infty} ar^{n-1}$ و آشکار است که $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^{n-1} \neq 0$ ؛ زیرا با انتخاب n به اندازه کافی بزرگ، می توان $|r^{n-1}|$ را به قدر دلخواه بزرگ کرد. در نتیجه، بنا بر قضیه ۳.۳.۱۵ سری واگراست؛ و به این ترتیب، اثبات به انجام می رسد. $\square$

○ نمونه ۲ سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

يك سری هندسی با ضوابط $a = 1$ و $r = 1/2$ است. بنابراین، طبق قضیه ۵.۳.۱۵، همگراست. چون $2 = 1/(1 - 1/2) = a/(1-r)$ ، مجموع سری ۲ است. $\circ$

مثال زیر نشان می دهد که چگونه می توان با استفاده از قضیه ۵.۳.۱۵ يك عدد اعشاری بی پایان با جزء تکراری را به صورت يك کسر معمولی نوشت.

مثال ۴ عدد اعشاری $0.3333\dots$ را به صورت يك کسر معمولی بنویسید.

حل

$$0.3333\dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots$$

این يك سری هندسی است که در آن $a = 3/10$ و $r = 1/10$. چون $|r| < 1$ ، از قضیه ۵.۳.۱۵ نتیجه می‌گیریم که این سری همگراست و مجموعش $a/(1-r)$ است. بنابراین

$$\blacktriangle \quad 0.3333\dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

قضیه زیر حاکی است که همگرایی یا واگرایی يك سری نامتناهی با تغییر تعدادی متناهی از جملات آن تغییر نمی‌کند.

۶.۳.۱۵ قضیه اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ دو سری نامتناهی باشند که اختلاف آنها تنها در m جمله اول آنهاست (یعنی وقتی $k > m$ ، $a_k = b_k$)، آنگاه یا هر دو سری همگرا هستند و یا هر دو واگرايند.

اثبات فرض کنید $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ ، به ترتیب، دنباله‌های مجموعهای جزئی دوسری باشند. در این صورت $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

و

$$t_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n.$$

چون وقتی $k > m$ ، داریم $a_k = b_k$ ، پس اگر $n \geq m$ ، داریم

$$s_n - t_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (b_1 + b_2 + \dots + b_m).$$

لذا

$$(11) \quad s_n - t_n = s_m - t_m \quad \text{وقتی } n \geq m.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که یا $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ هر دو وجود دارند و یا هیچکدام

وجود ندارد.

فرض کنید که $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ وجود داشته باشد. در این صورت، بنا بر (۱۱)

$$s_n = t_n + (s_m - t_m) \quad n \geq m \text{ وقتی}$$

ولذا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n + (s_m - t_m).$$

پس، وقتی که $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ وجود دارد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ نیز وجود دارد و هر دو سری همگرا هستند. حال تصور کنید که $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ وجود نداشته باشد ولی $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ موجود باشد بنا بر (۱۱)

$$t_n = s_n + (t_m - s_m) \quad n \geq m \text{ وقتی}$$

چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود دارد، نتیجه می گیریم که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n + (t_m - s_m)$$

و از اینرو $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ باید موجود باشد، که يك تناقض است. پس، اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$ وجود نداشته باشد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ هم وجود ندارد و هر دو سری واگرا هستند. □

مثال ۵ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+4}.$$

حل سری مفروض عبارت است از

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n+4} + \dots$$

که می تواند به صورت زیر هم نوشته شود

$$0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (12)$$

اما سری همساز که واگرا بودنش معلوم است، عبارت است از

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (13)$$

اختلاف سری (۱۲) و سری (۱۳) تنها در چهار جمله اول است. پس، بنا بر قضیه ۶.۳.۱۵ سری (۱۲) نیز واگراست. ▲

مثال ۶ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\cos \frac{3}{n} \pi + 2]}{3^n}.$$

حل سری مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \frac{[\cos 3\pi + 2]}{3} + \frac{[\cos \frac{3}{2}\pi + 2]}{3^2} + \frac{[\cos \pi + 2]}{3^3} + \frac{[\cos \frac{3}{4}\pi + 2]}{3^4} \\ & + \frac{[\cos \frac{3}{5}\pi + 2]}{3^5} + \frac{[\cos \frac{1}{2}\pi + 2]}{3^6} + \frac{[\cos \frac{3}{7}\pi + 2]}{3^7} + \dots \\ & = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

يك سری هندسی با ضوابط $a = 2/3$ و $r = 1/3$ در نظر می‌گیریم

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \quad (15)$$

بنابر قضیه ۵.۳.۱۵ این سری همگراست. چون اختلاف سری (۱۴) و سری (۱۵) تنها در پنج جمله اول است، از قضیه ۶.۳.۱۵ نتیجه می‌شود که سری (۱۴) هم همگراست. ▲

پیامدی از قضیه ۶.۳.۱۵ این است که می‌توان تعدادی متناهی جمله به يك سری نامتناهی مفروض افزود یا از آن کم کرد، بدون اینکه تغییری در همگرایی یا واگرایی سری پدید آید. به عنوان مثال، می‌توان تصور کرد که سری مذکور در مثال ۵، از سری همساز با کم کردن چهار جمله اولش به دست آمده است. و چون سری همساز واگراست، سری مفروض نیز واگراست. در مثال ۶ می‌توانستیم سری هندسی همگرایی

$$\frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \dots \quad (16)$$

را در نظر گیریم و با افزودن پنج جمله به آن، سری (۱۴) را به دست آوریم. چون سری (۱۶) همگراست، نتیجه می‌گیریم که سری (۱۴) همگراست. قضیه زیر حاکی است که اگر تمام جملات يك سری نامتناهی را در مقدار ثابت ناصفری ضرب کنیم، در همگرایی یا واگرایی تأثیری ندارد.

۷.۳.۱۵ قضیه فرض کنید c ثابت ناصفر دلخواهی باشد.

(i) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا و مجموعش S باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ نیز همگراست و مجموعش $c \cdot S$ است.

(ii) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ نیز واگراست.

اثبات فرض کنید مجموع جزئی n م سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ برابر با s_n باشد. در این صورت
 $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ مجموع جزئی n م سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ عبارت است از
 $c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = cs_n$

اثبات (i) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود دارد و مقدارش S است. پس

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n = c \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = c \cdot S.$$

لذا سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ همگراست و مجموعش $c \cdot S$ است.

اثبات (ii) اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود ندارد. حال فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ همگرا باشد. در این صورت $\lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n$ وجود دارد. اما $s_n = cs_n/c$ ؛
 لذا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{c}(cs_n) = \frac{1}{c} \lim_{n \rightarrow +\infty} cs_n.$$

پس $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ باید وجود داشته باشد که این تناقض است. بنابراین، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} cu_n$ واگراست. $\square$

مثال ۷ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}.$$

حل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ سری همساز است که واگراست، پس بنا بر قضیه ۷.۳.۱۵ (ii) با شرط $c = 1/4$ ، سری مفروض واگراست. ▲

قضیه ۷.۳.۱۵ (i) در واقع ویژگی زیر را که مجموعه‌ای متناهی دارند به سریهای نامتناهی همگرا تعمیم می‌دهد

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

ویژگی دیگر مجموعه‌ای متناهی عبارت است از

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

و تعمیم آن به سریهای نامتناهی همگرا در قضیه زیر آمده است.

۸.۳.۱۵ قضیه اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ سریهای نامتناهی همگرایی باشند که مجموعه‌ای آنها به ترتیب S و R هستند، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \quad \text{یک سری همگراست و مجموعه‌اش } S+R \text{ است؛} \quad \text{(i)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) \quad \text{یک سری همگراست و مجموعه‌اش } S-R \text{ است.} \quad \text{(ii)}$$

اثبات این قضیه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۳۵ را ببینید).
قضیه زیر نتیجه‌ای از قضیه بالا است و گاه برای اثبات واگرایی یک سری به کار می‌رود.

۹.۳.۱۵ قضیه اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا و سری $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ واگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ واگراست.

اثبات فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ همگرا و مجموعه‌اش S باشد. و نیز فرض کنید مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ برابر R باشد. در این صورت، چون

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n + b_n) - a_n]$$

از قضیه ۸.۳.۱۵ (ii) نتیجه می گیریم که $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ همگراست و مجموعش $S - R$ است. اما

این نتیجه با این فرض که $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ واگراست، در تناقض است. پس $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ واگراست. $\square$

مثال ۸ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right).$$

حل در مثال ۷ ثابت شد که $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/4^n$ واگراست. چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/4^n$ يك سری

هندسی با ضابطه $|r| = 1/4 < 1$ است، لذا همگراست. پس، بنا بر قضیه ۹.۳.۱۵، سری مفروض واگراست. $\blacktriangle$

اگر سریهای $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ هر دو واگرا باشند، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ ممکن است همگرا باشد یا نباشد. مثلاً، اگر $a_n = 1/n$ و $b_n = 1/n$ ، آنگاه $a_n + b_n = 2/n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} 2/n$ واگراست. اما اگر $a_n = 1/n$ و $b_n = -1/n$ ، آنگاه $a_n + b_n = 0$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} 0$ همگراست.

تمرینهای ۳.۱۵

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۸، چهار جمله اول دنباله مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ را بیابید، و فرمولی برای s_n بر حسب n به دست آورید. همچنین تعیین کنید که سری نامتناهی همگراست یا واگرا؛ اگر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$۲. \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

$$۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$۴. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$$

$$۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{(3n+1)(3n-2)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad .6$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad .8$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n}{n+1} \quad .5$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}} \quad .7$$

در هر يك از تمرینهای ۹ تا ۱۳، دنباله مجموعهای جزئی يك سری نامتناهی داده شده است؛ سری را بیابید. همچنین تعیین کنید که سری نامتناهی همگراست یا واگرا؛ اگر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\{s_n\} = \left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\} \quad .10$$

$$\{s_n\} = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \right\} \quad .9$$

$$\{s_n\} = \{3^n\} \quad .12$$

$$\{s_n\} = \left\{ \frac{1}{4^n} \right\} \quad .11$$

$$\{s_n\} = \{\ln(2n+1)\} \quad .13$$

در هر يك از تمرینهای ۱۴ تا ۲۹، چهار جمله اول سری نامتناهی مفروض را بنویسید، و تعیین کنید که سری همگراست یا واگرا. اگر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad .17$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} \quad .16$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{1}{n} \quad .19$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} \quad .18$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{4^n} \quad .21$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4^{n-1}} \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \quad .23$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tan^n \frac{\pi}{6} \quad .22$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \pi n \quad .25$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{n} \quad .24$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2^{-n} + 3^{-n}) \quad .27$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \pi n \quad .26$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} \right) \quad .29$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [1 + (-1)^n] \quad .28$$

۳۱۴ سریهای نامتناهی

۳۰. قضیه ۸.۳.۱۵ را ثابت کنید.

در هر يك از تمرینهای ۳۱ تا ۳۴، عدد مفروض يك عدد اعشاری بی پایان با جزء تکراری است. آن را به صورت يك کسر معمولی بنویسید.

۳۱. $۰.۲۷۲۷۲۷۲۷\dots$

۳۲. $۰.۴۵۴۵۴۵\dots$

۳۳. $۰.۲۳۴۲۳۴۲۳۴\dots$

۳۴. $۰.۴۶۵۳۴۶۵۳۴۶۵\dots$

۳۵. طول مسیر هر نوسان وزنه يك آونگ (پس از اولین نوسان) به اندازه ۹۳٪ طول مسیر نوسان قبلی است. اگر طول مسیر اولین نوسان ۵ سانتیمتر باشد و مقاومت هوا، نهایتاً پاندول را به سکون در آورد، قبل از سکون، وزنه چه مسافتی را طی می کند؟

۳۶. تویی را از ارتفاع ۱۲ متری رها می کنیم و هر بار که توپ به زمین می خورد به اندازه سه چهارم مسافتی که تا زمین پیموده، به بالا برمی گردد. مسافت کل پیموده شده توسط توپ قبل از سکون آن چقدر است؟

۳۷. با يك مثال نشان دهید که حتی اگر سریهای $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ هر دو واگرا باشند،

ممکن است سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ همگرا باشد.

۴.۱۵ سری نامتناهی با جمله های مثبت

اگر تمام جمله های يك سری نامتناهی مثبت باشند [که در این صورت آن را سری نامتناهی مثبت می نامیم] دنباله مجموعهای جزئی صعودی است. پس، قضیه زیر، بلافاصله از قضایای ۹.۲.۱۵ و ۶.۲.۱۵ به دست می آید.

۱۰۴.۱۵ قضیه سری نامتناهی مثبت، همگراست اگر و تنها اگر دنباله مجموعهای جزئی دارای کران بالا باشد.

اثبات عدد ۵، کران پایینی از دنباله مجموعهای جزئی هر سری نامتناهی مثبت است. اگر دنباله مجموعهای جزئی کران بالایی نیز داشته باشد، کراندار است. علاوه بر این، دنباله مجموعهای جزئی هر سری نامتناهی مثبت، صعودی است. لذا از قضیه ۹.۲.۱۵ نتیجه می شود که دنباله مجموعهای جزئی همگراست. و بنابراین سری نامتناهی همگراست. حال فرض کنید يك سری نامتناهی مثبت، همگرا باشد. در این صورت، دنباله مجموعهای جزئی نیز همگراست. از قضیه ۹.۲.۱۵ نتیجه می گیریم که دنباله مجموعهای جزئی کراندار است و لذا کران بالا دارد. $\square$

مثال ۱ با استفاده از قضیه ۱۰۴۰۱۵ ثابت کنید که سری زیر همگراست

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

حل باید يك کران بالا برای دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n!$ پیدا کنیم.

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}, s_3 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots,$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}. \quad (1)$$

حال n جمله اول يك سری هندسی با $a=1$ و $r=1/2$ را در نظر می گیریم

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (2)$$

بنابر قضیه ۵۰۳۰۱۵، مجموع این سری هندسی با $a=1$ و $r=1/2$ عبارت است از $a/(1-r) = 1/(1-1/2) = 2$. لذا مجموع (۲) از ۲ کوچکتر است. توجه کنید که هر جمله در مجموع (۱) نایبتر از جمله متناظر در مجموع (۲) است؛ یعنی

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

این رابطه برقرار است زیرا $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ ، که علاوه بر عامل ۱، $k-1$ عامل دیگر دارد که هیچکدام از ۲ کوچکتر نیست. پس

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2.$$

بنابر این نامساوی، عدد ۲ يك کران بالای s_n است. لذا، طبق قضیه ۱۰۴۰۱۵، سری مفروض همگراست. ▲

در مثال فوق جمله‌های سری مفروض را با جمله‌های يك سری همگرای معلوم مقایسه کردیم. این حالت خاصی است از قضیه زیر موسوم به آزمون مقایسه.

۲۰۴۰۱۵ قضیه (آزمون مقایسه) فرض کنید سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ يك سری مثبت باشد.

(i) اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ سری مثبتی باشد که می‌دانیم همگراست، و به‌ازای تمام اعداد

صحیح و مثبت n ، $u_n \leq v_n$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.

(ii) اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ سری مثبتی باشد که می‌دانیم واگراست، و به‌ازای تمام اعداد

صحیح و مثبت n ، $u_n \geq w_n$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

اثبات (i) فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ، و $\{t_n\}$ دنباله

مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ باشد. چون $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ سری مثبتی است که همگراست، از قضیه

۱.۴.۱۵ نتیجه می‌گیریم که دنباله $\{t_n\}$ کران بالایی دارد و آن را B می‌نامیم. چون

به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $u_n \leq v_n$ ، می‌توانیم نتیجه بگیریم که به‌ازای جميع اعداد صحیح و مثبت n ، $s_n \leq t_n \leq B$. پس B يك کران بالای دنباله $\{s_n\}$ است. و چون

جملات سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همه مثبت‌اند، از قضیه ۱.۴.۱۵ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.

اثبات (ii) فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا باشد. آنگاه چون $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ هر دو

سری نامتناهی مثبت هستند و به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $w_n \leq u_n$ ، از قسمت (i)

نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ همگراست. اما، این با فرض قضیه متناقض است؛ لذا فرض ما غلط

است. پس $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست. $\square$

همان‌گونه که در بخش ۳.۱۵ به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۶.۳.۱۵ گفتیم، کنار گذاشتن

تعدادی متناهی از جمله‌ها، و همگرایی یا واگرایی يك سری نامتناهی را تغییر نمی‌دهد. پس،

وقتی که آزمون مقایسه را به‌کار می‌بریم، با فرض $i > m$ ، اگر $u_i \leq v_i$ یا $u_i \geq w_i$ ، بدون توجه به نتیجه مقایسه m جمله اول دوسری، آزمون معتبر است.

مثال ۲ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{3^n + 1}.$$

حل سری مفروض عبارت است از

سری نامتناهی با جمله‌های مثبت ۳۱۷

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{10} + \frac{4}{28} + \frac{4}{82} + \dots + \frac{4}{3^n + 1} + \dots$$

با مقایسه جمله n م این سری با جمله n م سری هندسی همگرای

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \dots + \frac{4}{3^n} + \dots \quad r = \frac{1}{3} < 1$$

می‌بینیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\frac{4}{3^n + 1} \leq \frac{4}{3^n}.$$

▲ بنا بر این، طبق آزمون مقایسه، یعنی قضیه ۲۰۴.۱۵ (i)، سری مفروض همگراست.

مثال ۳ تعیین کنید که سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n}$ همگراست یا واگرا.

حل سری مفروض عبارت است از

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

با مقایسه جمله n م این سری با جمله n م سری همساز واگرا دیده می‌شود که

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad n, \text{ به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n$$

▲ پس، بنا بر قضیه ۲۰۴.۱۵ (ii) سری مفروض $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n}$ واگراست.

قضیه زیر، معروف به آزمون مقایسه حد، پیامدی از قضیه ۲۰۴.۱۵ است و استفاده از آن، غالباً آسانتر است.

۳۰۴.۱۵ قضیه (آزمون مقایسه حد) فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ دوسری مثبت باشند.

(i) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = c > 0$ ، آنگاه یا هردو سری همگرا هستند یا هردو واگرايند.

(ii) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = 0$ ، واگرا $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.

(iii) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = +\infty$ ، و اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

اثبات (i) چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = c$ ، نتیجه می گیریم که يك $N > 0$ وجود دارد که

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - c \right| < \frac{c}{2}, \quad n > N$$

یا معادلش

$$-\frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} - c < \frac{c}{2}, \quad n > N$$

$$\frac{c}{2} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{3c}{2}, \quad n > N \quad (3)$$

از نامساوی دوم (۳) داریم

$$u_n < \frac{3}{2} c v_n. \quad (4)$$

اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2} c v_n$ نیز همگراست. از نامساوی (۴) و آزمون مقایسه نتیجه می شود که $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.
بنابراین نامساوی اول (۳) داریم

$$v_n < \frac{2}{c} u_n. \quad (5)$$

اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{c} u_n$ نیز همگراست. از نامساوی (۵) و آزمون مقایسه نتیجه می گیریم که $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ همگراست.

اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ واگرا باشد، با فرض اینکه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست و به کمک نامساوی (۵) و آزمون مقایسه می توان به تناقضی رسید و به این ترتیب، نشان داد که $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ هم واگراست.
به همین روش، اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگرا باشد، نتیجه می گیریم که $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ نیز واگراست.

زیرا اگر فرض شود که $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ همگراست، از نامساوی (۴) و آزمون مقایسه، يك تناقض به دست می آید.

پس قسمت (i) را ثابت کرده ایم. اثبات قسمت‌های (ii) و (iii) به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرینهای ۳۰ و ۳۱ را ببینید). $\square$

در مورد قسمت (ii) قضیه ۳.۴.۱۵ هشدار می دهیم. توجه کنید که وقتی $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n/v_n) = 0$ ، از واگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ نتیجه نمی شود که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ واگراست.

مثال ۴ مثال ۲ را با استفاده از آزمون مقایسه حد حل کنید.

حل فرض کنید u_n جمله n سری مقروض $\sum_{n=1}^{+\infty} 4/(3^n + 1)$ و v_n جمله n سری هندسی و همگرای $\sum_{n=1}^{+\infty} 4/3^n$ باشد. پس

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{3^n + 1}}{\frac{4}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 3^{-n}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

لذا، بنا بر قسمت (i) آزمون مقایسه حد نتیجه می گیریم که سری مقروض همگراست. $\blacktriangle$

مثال ۵ مثال ۳ را با استفاده از آزمون مقایسه حد حل کنید.

حل فرض کنید u_n جمله n سری مقروض $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/\sqrt{n}$ و v_n جمله n سری همساز واگرا باشد. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

بنابراین، نظر به قسمت (iii) از آزمون مقایسه حد، سری مفروض واگراست. ▲

مثال ۶ تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3/n!$ همگراست یا واگرا.

حل در مثال ۱ ثابت کردیم که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n!$ همگراست. بنا بر آزمون مقایسه حد، با فرض $v_n = 1/n!$ و $u_n = n^3/n!$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3}{n!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty.$$

قسمت (iii) از آزمون مقایسه حد قابل کاربرد نیست زیرا $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ همگراست. اما، راهی وجود دارد که آزمون مقایسه حد را قابل استفاده می‌سازد. سری مفروض به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \dots + \frac{n^3}{n!} + \dots$$

چون قضیه ۶.۳.۱۵ به ما اجازه می‌دهد که تعدادی متناهی از جملات سری را حذف کنیم، بدون اینکه در رفتار (همگرایی یا واگرایی) سری تغییری ایجاد شود، سه جمله اول آن را حذف می‌کنیم، و به دست می‌آوریم

$$\frac{4^3}{4!} + \frac{5^3}{5!} + \frac{6^3}{6!} + \dots + \frac{(n+3)^3}{(n+3)!} + \dots$$

حال می‌نویسیم $u_n = (n+3)^3/(n+3)!$ و مانند قبل فرض می‌کنیم $v_n = 1/n!$. داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+3)^3}{(n+3)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{(n+3)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^3 n!}{n!(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

سری نامتناهی با جمله‌های مثبت ۳۲۱

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^2}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 6n + 9}{n^2 + 3n + 2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

از قسمت (i) آزمون مقایسه حد نتیجه می‌گیریم که سری مفروض همگراست. ▲

○ نمونه ۱ سری هندسی زیر را در نظر بگیرید

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots \quad (6)$$

این سری همان گونه که در نمونه ۲ از بخش ۳.۱۵ نشان داده شد، به ۲ می‌گراید. جملات این سری را دسته‌بندی می‌کنیم و

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{32}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}}\right) + \dots$$

را به دست می‌آوریم که سری زیر را نتیجه می‌دهد

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \dots + \frac{3}{2 \cdot 2^{n-1}} + \dots \quad (7)$$

سری (۷) یک سری هندسی با ضوابط $a = 3/2$ و $r = 1/4$ است. پس، بنا بر قضیه ۵.۳.۱۵ همگراست و مجموعش عبارت است از

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = 2.$$

بنابراین سری (۷) که از سری همگرای (۶)، با دسته‌بندی جملات، به دست می‌آید نیز همگراست. مجموع آن هم با مجموع سری (۶) یکی است. ○

نمونه ۱ حالت خاصی از قضیه زیر را ارائه می‌دهد.

۴.۴.۱۵ قضیه اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ سری مثبت همگرایی باشد، جمله‌های این سری را به هر طریقی

دسته‌بندی کنیم، سری حاصل نیز همگراست، و مجموعش همان مجموع سری مفروض است.

اثبات گیریم $\{s_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری مثبت همگرای مفروض باشد. در این صورت، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ وجود دارد؛ این حد را S می‌نامیم. یک سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ را در نظر می‌گیریم که جمله‌هایش از دسته‌بندی جمله‌های $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ به‌طریقی به‌دست آمده‌اند. مثلاً،

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ ممکن است سری}$$

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8 + u_9 + u_{10}) + \dots$$

یا سری

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6) + (u_7 + u_8) + \dots$$

و یا نظیر اینها باشد. فرض کنید $\{t_m\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ باشد. هر مجموع جزئی از دنباله $\{t_m\}$ مجموعی جزئی از دنباله $\{s_n\}$ هم هست. بنابراین، وقتی که m به‌طور بی‌کمران افزایش می‌یابد، n هم به‌طور بی‌کمران زیاد می‌شود. چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ ، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{m \rightarrow +\infty} t_m = S$. و به‌این ترتیب، اثبات به‌انجام می‌رسد. $\square$

قضیه ۴.۴.۱۵ و قضیه زیر، برخی از ویژگیهای مجموع سری مثبت همگرا را که مشابه با ویژگیهای متناظر مجموع تعدادی متناهی از جمله‌ها هستند، توضیح می‌دهند.

۵.۴.۱۵ قضیه اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ سری مثبت همگرایی باشد، ترتیب جملات این سری را به‌هر نحو که تغییردهیم، سری حاصل نیز همگراست، و مجموعش همان مجموع سری مفروض است.

اثبات گیریم $\{s_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری مثبت همگرای مفروض باشد، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$. و نیز فرض کنیم $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ یک سری باشد که از تغییر ترتیب جمله‌های $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ به‌دست آمده است. مثلاً، ممکن است سری زیر باشد

$$u_4 + u_3 + u_7 + u_1 + u_9 + u_5 + \dots$$

حال اگر $\{t_n\}$ دنباله مجموعهای جزئی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ باشد، هر مجموع جزئی از دنباله

سری نامتناهی با جمله‌های مثبت ۳۲۳

$\{t_n\}$ از S کوچکتر است زیرا این مجموعه جزئی، مجموع n جمله از سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ است. بنابراین، S کرانی بالایی از دنباله $\{t_n\}$ است. علاوه بر این، چون تمام جملات سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ مثبت اند، دنباله $\{t_n\}$ يك دنباله صعودی یکنواست؛ پس، بنا بر قضیه ۲۰۴.۱۵، $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = T \leq S$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ را می توان از سری $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ با تغییر ترتیب جملاتش به دست آورد، می توانیم از همین استدلال استفاده، و استنتاج کنیم که $S \leq T$. اگر هر دو نامساوی $T \leq S$ و $S \leq T$ برقرار باشند، نتیجه این می شود که $S = T$ ، و قضیه اثبات شده است. $\square$

یکی از سریهایی که غالباً در آزمون مقایسه به کار می رود سری معروف به p -سری، یا سری ابرهمساز است، که عبارت است از

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (8)$$

در نمونه زیر ثابت می کنیم که اگر $p \leq 1$ ، p -سری واگراست و اگر $p > 1$ ، p -سری همگراست.

○ نمونه ۲ اگر $p = 1$ ، p -سری همان سری همساز است که واگراست. اگر $p < 1$ ، آنگاه $n^p \leq n$ ؛ لذا

$$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}, \quad \text{به ازای هر عدد صحیح مثبت } n.$$

پس، بنا بر قضیه ۲۰۴.۱۵ (ii)، اگر $p < 1$ ، p -سری واگراست. برای حالت $p > 1$ ، جملات را به صورت زیر دسته بندی می کنیم

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \dots + \frac{1}{15^p}\right) + \dots \quad (9)$$

حال سری زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \dots + \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1})^p} + \dots \quad (10)$$

این يك سری هندسی با قدر نسبت $2/2^p = 1/2^{p-1}$ است که عددی است مثبت و کوچکتر از ۱. پس سری (۱۰) همگراست. اکنون جملات سری (۱۰) را به صورت زیر

بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{4^p}\right) + \dots \quad (11)$$

با مقایسهٔ سریهای (۹) و (۱۱) دیده می‌شود که صرفنظر از جملهٔ اول، مجموع جملات داخل هر پرانتز از سری (۹) کوچکتر از مجموع جملات داخل پرانتز متناظر از سری (۱۱) است. بنا بر این، طبق آزمون مقایسه، سری (۹) همگراست. چون سری (۹) حاصل از دسته‌بندی جملات p -سری، به‌ازای $p > 1$ ، می‌باشد، از قضیهٔ ۴.۴.۱۵ نتیجه می‌شود که اگر $p > 1$ ، p -سری همگراست. $\circ$

توجه کنید که سری مذکور در مثال ۳، p -سری با ضابطهٔ $p = 1/2 < 1$ است؛ و بنا بر این واگراست.

مثال ۷ تعیین کنید که سری نامتناهی زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}.$$

حل چون به‌ازای مقادیر بزرگ n ، عدد n^2+2 به‌عدد n^2 نزدیک است، لذا عدد $1/(n^2+2)^{1/3}$ هم به‌عدد $1/n^{2/3}$ نزدیک است. اما سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{2/3}$ واگراست زیرا یک p -سری با ضابطهٔ $p = 2/3 < 1$ است. بنا بر آزمون مقایسهٔ حد با ضوابط $u_n = 1/(n^2+2)^{1/3}$ و $v_n = 1/n^{2/3}$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2/3}}{(n^2+2)^{1/3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n^2+2} \right)^{1/3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} \right)^{1/3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

بنا بر این، سری مفروض واگراست. $\blacktriangle$

تمرینهای ۴۰۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۲۶، تعیین کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا.

$$۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} \quad ۲. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \quad ۴. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4n^2+1}$$

$$۵. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5} \quad ۶. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$۷. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} \quad ۸. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$۹. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} \quad ۱۰. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$$

$$۱۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!} \quad ۱۲. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$۱۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5n^2+3} \quad ۱۴. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$$

$$۱۵. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \quad ۱۶. \sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$۱۷. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\csc n|}{n} \quad ۱۸. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$$۱۹. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} \quad ۲۰. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$۲۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}} \quad ۲۲. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$$

$$۲۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2+2} \quad ۲۴. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - \cos n}$$

$$۲۵. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} \quad ۲۶. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}$$

۲۷. با استفاده از سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$ نشان دهید که قضیه ۱۰.۴.۱۵ رانمی توان درمورد
 يك سری نامتناهی که هم جملات مثبت و هم جملات منفی داشته باشد؛ صادق دانست؛
 یعنی، نشان دهید که دنباله مجموعهای جزئی کران بالا دارد، اما سری داده شده
 همگرا نیست.

۲۸. فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، $f(n) > 0$ و علاوه
 بر این، فرض کنید که اگر p عدد مثبت دلخواهی باشد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p f(n)$ وجود دارد و
 مثبت است. ثابت کنید که اگر $p > 1$ ، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ همگراست و اگر
 $0 < p \leq 1$ ، این سری واگراست.

۲۹. اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ دوسری مثبت همگرا باشند، به کمک آزمون مقایسه حد، ثابت کنید
 که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ نیز همگراست.

۳۰. قضیه ۳.۴.۱۵ (ii) را ثابت کنید.

۳۱. قضیه ۳.۴.۱۵ (iii) را ثابت کنید.

۵.۱۵ آزمون انتگرال

در قضیه موسوم به آزمون انتگرال، از نظریه انتگرالهای نامتعارف برای آزمایش همگرایی
 سریهای نامتناهی مثبت بهره برداری می شود.

۱۰.۵.۱۵ قضیه (آزمون انتگرال) فرض کنید f تابعی باشد که پیوسته، نزولی، و مقدارش
 به ازای هر $x \geq 1$ مثبت است. در این صورت، سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots$$

همگراست وقتی که انتگرال نامتعارف

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

وجود داشته باشد، و واگراست وقتی که $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$

اثبات اگر i يك عدد صحيح مثبت باشد و $i \geq 2$ ، آنگاه بنا بر قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (۱۰۴.۶) عددی چون X وجود دارد که $i-1 \leq X \leq i$ و

$$\int_{i-1}^i f(x) dx = f(X) \cdot 1 \quad (۱)$$

چون f يك تابع نزولی است،

$$f(i-1) \geq f(X) \geq f(i)$$

و لذا بنا بر (۱)

$$f(i-1) \geq \int_{i-1}^i f(x) dx \geq f(i).$$

بنابراین، اگر n يك عدد صحيح مثبت باشد و $n \geq 2$ ، داریم

$$\sum_{i=2}^n f(i-1) \geq \sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i f(x) dx \geq \sum_{i=2}^n f(i)$$

یا معادلش

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{i=1}^n f(i) - f(1). \quad (۲)$$

شکلهای ۱۰۵.۱۵ و ۲۰۵.۱۵ تغییر هندسی بحث فوق را در مورد $n=6$ نشان می‌دهند. در شکل ۱۰۵.۱۵ نمودار تابعی چون f که در فرض صدق می‌کند، نشان داده شده است. مجموع اندازه مساحت مستطیلهای سایه‌دار برابر

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$$

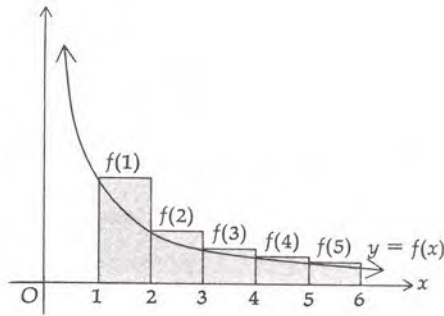
است که مساوی با عبارت طرف چپ نامساویهای (۲) به‌ازای $n=6$ است. مجموع اندازه مساحت این مستطیلهای از اندازه مساحتی که توسط انتگرال معین به‌ازای $n=6$ داده می‌شود، آشکارا بزرگتر است. در شکل ۲۰۵.۱۵ مجموع اندازه مساحت مستطیلهای سایه‌دار برابر با $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$ است که طرف راست نامساوی دوم (۲) به‌ازای $n=6$ است. این مجموع از مقدار انتگرال معین به‌ازای $n=6$ کمتر است. اگر انتگرال نامتعارف مفروض وجود داشته باشد، مقدارش را L می‌گیریم و داریم

$$\int_1^n f(x) dx \leq L. \quad (۳)$$

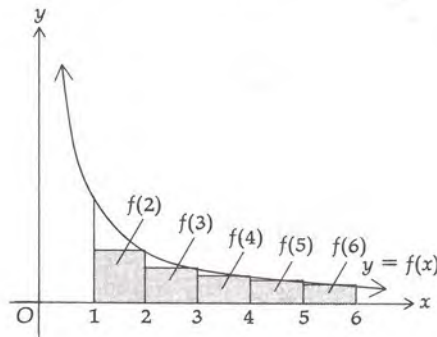
از نامساوی دوم (۲) و با توجه به (۳) داریم

$$\sum_{i=1}^n f(i) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \leq f(1) + L. \quad (۴)$$

حال سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید دنباله مجموعهای



شکل ۱.۵.۱۵



شکل ۲.۵.۱۵

جزئی این سری $\{s_n\}$ باشد که در آن، $s_n = \sum_{i=1}^n f(i)$ بنا بر (۴)، یک کران بالای $\{s_n\}$

$f(1) + L$ است. پس، بنا بر قضیه ۱.۴.۱۵، $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ همگراست.

فرض کنید $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx = +\infty$ بنا بر (۲) به ازای هر عدد صحیح و مثبت

n داریم

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \geq \int_1^n f(x) dx.$$

بنابراین، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(i) = +\infty$ پس $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ واگراست. $\square$

مثال ۱ با استفاده از آزمون انتگرال نشان دهید که اگر $p \leq 1$ ، p -سری واگراست، و اگر $p > 1$ ، p -سری همگراست.

حل p -سری، $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^p$ است. اگر $f(x) = 1/x^p$ ، آنگاه f پیوسته، و به ازای هر $x \geq 1$ مقدارش مثبت است. علاوه بر این، اگر $x_1 < x_2$ ، $1 \leq x_1$ ، آنگاه $1/x_1^p > 1/x_2^p$ ، و لذا f به ازای هر $x \geq 1$ نزولی است. بنابراین، فرض قضیه ۱۵.۱۵ توسط تابع f برآورده می شود. انتگرال نامتعارف زیر را در نظر می گیریم و داریم

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}.$$

اگر $p = 1$ ، از انتگرال بالا به دست می آوریم

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty.$$

اگر $p \neq 1$ ، از انتگرال بالا نتیجه می گیریم

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-p} - 1}{1-p}.$$

وقتی که $p < 1$ ، این حد $+\infty$ است؛ و وقتی که $p > 1$ ، مقدار آن $-1/(1-p)$ است. پس، بنا بر آزمون انتگرال، p -سری به ازای $p > 1$ همگراست و به ازای $p \leq 1$ واگراست. ▲

مثال ۲ تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ همگراست یا واگرا.

حل فرض کنید $f(x) = xe^{-x}$. در این صورت

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

چون اگر $x > 1$ ، $f'(x) < 0$ ، از قضیه ۳.۵.۴ نتیجه می شود که اگر $x \geq 1$ ، f نزولی است. علاوه بر این، به ازای هر $x \geq 1$ ، f پیوسته و مقدارش مثبت است. پس فرض آزمون انتگرال برآورده می شود. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\int xe^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C.$$

پس

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x}(x+1) \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{b+1}{e^b} + \frac{2}{e} \right].$$

چون $\lim_{b \rightarrow +\infty} (b+1) = +\infty$ و $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^b = +\infty$ ، می‌توانیم از قاعده هویتمال استفاده کنیم

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b+1}{e^b} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^b} = 0.$$

بنابراین

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{2}{e}$$

و لذا سری مفروض همگراست. ▲

مثال ۳ تعیین کنید که سری زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}.$$

حل تابع f با ضابطه زیر به ازای هر $x \geq 1$ پیوسته و مقدارش مثبت است

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}.$$

همچنین، اگر $x_1 < x_2$ ، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$ ؛ لذا f به ازای هر $x \geq 1$ نزولی است. بنابراین از آزمون انتگرال می‌توان استفاده کرد.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b [\ln(x+1)]^{-1/2} \frac{dx}{x+1} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2\sqrt{\ln(x+1)} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [2\sqrt{\ln(b+1)} - 2\sqrt{\ln 2}] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

پس، سری مفروض واگراست. ▲

تمرینهای ۵.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۸، با استفاده از آزمون انتگرال تعیین کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا.

$$۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \quad ۲. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(3n+5)^2}$$

$$۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{3/2}} \quad ۴. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-2}$$

$$۵. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{n^2-4} \quad ۶. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$$

$$۷. \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-5n} \quad ۸. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^4+1}$$

در تمرینهای ۹ تا ۲۲، تعیین کنید که سری همگراست یا واگرا.

$$۹. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \quad ۱۰. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$۱۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1} \quad ۱۲. \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$$

$$۱۳. \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n} \quad ۱۴. \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n}$$

$$۱۵. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3} \quad ۱۶. \sum_{n=1}^{+\infty} \cot^{-1} n$$

$$۱۷. \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{csch} n \quad ۱۸. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}$$

$$۱۹. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2} \quad ۲۰. \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 n$$

$$۲۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n+3}{n} \right) \quad ۲۲. \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2}$$

$$۲۳. \text{ ثابت کنید که سری } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p} \text{ همگراست اگر و تنها اگر } p > ۱.$$

$$۲۴. \text{ ثابت کنید که سری } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n) [\ln (\ln n)]^p} \text{ همگراست اگر و تنها اگر } p > ۱.$$

$$۲۵. \text{ ثابت کنید که سری } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p} \text{ همگراست اگر و تنها اگر } p > ۱.$$

۲۶. اگر s_k مجموع جزئی k م سری همساز باشد، ثابت کنید که

$$\ln(k+1) < s_k < 1 + \ln k.$$

(دانهمایی: اگر $0 < m \leq x \leq m+1$ ، $1/(m+1) \leq 1/x \leq 1/m$ ، از عبارات نامساویها از m تا $m+1$ انتگرال بگیرد؛ m را بهطور متوالی برابر با مقادیر $1, 2, \dots, n-1$ اختیار کنید، و نتیجهها را باهم جمع کنید.)

۲۷. با استفاده از نتیجه تمرین ۲۶، مجموع $\sum_{m=50}^{\infty} \frac{1}{m} = \frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{100}$ را برآورد کنید.

۶.۱۵ سری نامتناهی با جملههای مثبت و منفی

در این بخش، آن دسته از سریهای نامتناهی را مطالعه می‌کنیم که هم جملات مثبت دارند و هم جملات منفی. ابتدا نوعی از این سریها را مورد بحث قرار می‌دهیم که جملههایشان به تناوب مثبت و منفی‌اند و به سریهای متناوب موسوم‌اند.

۱۰۶.۱۵ تعریف اگر به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $a_n > 0$ ، آنگاه سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

و سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots$$

را سری متناوب می‌نامیم.

قضیه زیر آزمونی برای همگرایی سریهای متناوب به‌دست می‌دهد.

۲۰۶.۱۵ قضیه (آزمون سریهای متناوب) اگر اعداد $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ به‌تناوب مثبت و منفی باشند، و به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $|u_{n+1}| < |u_n|$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، آنگاه سری متناوب $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.

اثبات فرض کنید که در سری داده شده، جملاتی که اندیس فرد دارند مثبت، و جملاتی که اندیس زوج دارند منفی باشند. این فرض ازعمومیت مسئله نمی‌کاهد زیرا اگر چنین حالتی برقرار نباشد، آنگاه يك سری در نظر می‌گیریم که جمله اولش u_1 باشد چون

کنار گذاشتن تعدادی متناهی از جمله‌ها در همگرایی سری تأثیر ندارد. پس به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، $u_{2n-1} > 0$ و $u_{2n} < 0$. مجموع جزئی زیر را در نظر بگیرید

$$s_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \dots + (u_{2n-1} + u_{2n}) \quad (1)$$

نخستین جمله عبارت داخل هر یک از پرانتزهای (۱)، مثبت و دومین جمله آن منفی است. چون بنا بر فرض، $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، پس عبارت داخل هر پرانتز مثبت است. بنابراین

$$0 < s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < \dots \quad (2)$$

s_{2n} را به صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم

$$s_{2n} = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + \dots + (u_{2n-2} + u_{2n-1}) + u_{2n}. \quad (3)$$

چون $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، کمیت داخل هر یک از پرانتزهای (۳) منفی است، و u_{2n} هم منفی است، بنابراین

$$s_{2n} < u_1, \quad \text{به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n. \quad (4)$$

با توجه به (۲) و (۴)

$$0 < s_{2n} < u_1, \quad \text{به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n.$$

لذا دنباله $\{s_{2n}\}$ کراندار است. علاوه بر این، بنا بر (۲)، دنباله $\{s_{2n}\}$ یکنواست. پس، طبق قضیه ۶.۲.۱۵ دنباله $\{s_{2n}\}$ همگراست. فرض کنید $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = S$ ؛ بنا بر قضیه

$$S \leq u_1, \quad ۷.۲.۱۵.$$

$$\text{چون } s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}, \text{ داریم}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}.$$

اما، بنا بر فرض، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$ ؛ لذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n}$. بنا بر این، دنباله مجموعهای جزئی جملات با اندیس زوج و دنباله مجموعهای جزئی جملات با اندیس فرد، دارای حد یکسان S هستند.

حال نشان می‌دهیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$. چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n} = S$ ، پس به ازای هر

$$\varepsilon > 0 \text{ عددی صحیح چون } N_1 > 0 \text{ وجود دارد که}$$

$$\text{وقتی } 2n \geq N_1, \quad |s_{2n} - S| < \varepsilon.$$

$$\text{و چون } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = S, \text{ عددی صحیح چون } N_2 > 0 \text{ وجود دارد که}$$

$$\text{وقتی } 2n+1 \geq N_2, \quad |s_{2n+1} - S| < \varepsilon.$$

چنانچه N بزرگترین عدد از بین دو عدد صحیح N_1 و N_2 باشد، نتیجه می گیریم که اگر n عدد صحیح دلخواهی، فرد یا زوج، باشد آنگاه

$$|s_n - S| < \varepsilon, \quad n \geq N \quad \text{وقتی}$$

□

بنابراین، $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ ؛ لذا سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست.

مثال ۱ ثابت کنید که سری متناوب زیر همگراست

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

حل سری مفروض به صورت زیر است

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + \dots.$$

چون به ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $1/(n+1) < 1/n$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) = 0$ ، از قضیه ۲۰۶.۱۵ نتیجه می گیریم که سری متناوب مفروض همگراست. ▲

مثال ۲ تعیین کنید که سری زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

حل سری مفروض، سری متناوبی است که در آن

$$u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \quad \text{و} \quad u_n = (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$$

داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 0.$$

قبل از اینکه بتوانیم آزمون سریهای متناوب را به کار ببریم، باید نشان دهیم که $|u_{n+1}| < |u_n|$ یا معادلش $|u_{n+1}|/|u_n| < 1$.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{n+2} = \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n^2+3n}{n^2+4n+4} < 1.$$

لذا از قضیه ۲.۶.۱۵ نتیجه می‌گیریم که سری داده شده همگرا است. ▲

۳.۶.۱۵ تعریف اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگرا و مجموعش S باشد، آنگاه باقیمانده حاصل از تقریب کردن مجموع سری با مجموع جزئی k م آن، s_k ، را با R_k نمایش می‌دهیم و داریم

$$R_k = S - s_k.$$

۴.۶.۱۵ قضیه فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ یک سری متناوب باشد، $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، در این صورت، اگر R_k باقیمانده حاصل از تقریب کردن مجموع سری با مجموع k جمله اول باشد، $|R_k| < |u_{k+1}|$.

اثبات فرض کنید در سری داده شده، جملاتی که اندیس فرد دارند مثبت، و جملاتی که اندیس زوج دارند منفی باشند. در این صورت، بنا بر رابطه (۲) در اثبات قضیه ۲.۶.۱۵، دنباله $\{s_{2n}\}$ صعودی است. پس اگر S مجموع سری داده شده باشد، داریم

$$s_{2k} < s_{2k+2} < S, \quad k \geq 1 \quad (5)$$

برای اینکه نشان دهیم دنباله $\{s_{2n-1}\}$ نزولی است می‌نویسیم

$$s_{2n-1} = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5) + \dots + (u_{2n-2} + u_{2n-1}) \quad (6)$$

جمله اول عبارت داخل هر یک از پرانتزهای (۶) منفی است و جمله دومشان مثبت است، و چون $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، نتیجه می‌گیریم که کمیت داخل هر پرانتز منفی است. بنابراین، چون $u_1 > 0$ ، نتیجه می‌شود که $s_{2n-1} > \dots > s_{2n-3} > \dots > s_1$ ؛ و لذا دنباله $\{s_{2n-1}\}$ نزولی است. پس

$$S < s_{2k+1} < s_{2k-1}, \quad k \geq 1 \quad (7)$$

بنابر (۷)، $s_{2k+1} - s_{2k} = u_{2k+1}$ ، و بنا بر (۵)، $0 < S - s_{2k}$. پس

$$0 < S - s_{2k} < u_{2k+1}, \quad k \geq 1 \quad (8)$$

بنا بر (۵)، $-S < -s_{2k}$ ؛ لذا $-s_{2k} - S = -u_{2k}$ ؛ لذا $s_{2k-1} - S < s_{2k-1} - s_{2k} = -u_{2k}$. چون از (۷) نتیجه می‌شود که $s_{2k-1} - S < 0$ ، پس

$$0 < s_{2k-1} - S < -u_{2k}, \quad k \geq 1 \quad (9)$$

از آنجا که طبق تعریف ۳.۶.۱۵، $R_k = S - s_k$ ، لذا (۸) را به صورت $|R_{2k}| < |u_{2k+1}|$ و (۹) را به صورت $|R_{2k-1}| < |u_{2k}|$ می‌نویسیم. پس به ازای هر $k \geq 1$

□ $|R_k| < |u_{k+1}|$ ، و قضیه اثبات می‌شود.

مثال ۳ اگر x در بازه $(-1, 1)$ باشد، می‌توان از سری زیر برای محاسبه $\ln(1-x)$ استفاده کرد

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{x^n}{n}\right).$$

چنانچه برای تقریب کردن مقدار $\ln 1/1$ از سه جمله اول این سری استفاده شود، خطا را برآورد کنید.

حل سری مفروض را به ازای $x = -0.1$ به کار می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$\ln 1.1 = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{3} - \frac{(0.1)^4}{4} + \dots$$

این سری در شرایط قضیه ۴.۶.۱۵ صدق می‌کند؛ لذا اگر R_3 اختلاف بین مقدار واقعی $\ln 1.1$ و مجموع سه جمله اول باشد، داریم

$$|R_3| < |u_4| = 0.0000025.$$

پس، مجموع سه جمله اول مقداری برای $\ln 1.1$ به دست می‌دهد که دست کم تا چهار رقم اعشار دقیق است. اگر از سه جمله اول استفاده کنیم، داریم

$$\blacktriangle \quad \ln 1.1 \approx 0.0953.$$

متناظر با بهر سری نامتناهی یک سری وجود دارد که جملاتش قدرمطلقهای جملات سری مفروض‌اند.

۵.۶.۱۵ تعریف می‌گوییم سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگراست اگر سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ همگرا باشد.

○ نمونه ۱ سری زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{3^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} + \dots (10)$$

این سری مطلقاً همگراست هرگاه سری

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$$

سریهای نامتناهی با جمله‌های مثبت و منفی ۳۳۷

همگرا باشد. چون این سری، يك سری هندسی با ضابطه $1/3 < r$ است، همگراست. بنا بر این سری (۱۵) مطلقاً همگراست. ○

○ نمونه ۲ يك سری همگرا که مطلقاً همگرا نیست، سری زیر است

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

در مثال ۱ ثابت کردیم که این سری همگراست؛ اما مطلقاً همگرا نیست زیرا سری متشکل از قدرمطلقها سری همساز است که واگراست. ○

سری مذکور در نمونه ۲، مثالی است از يك سری که به‌طور مشروط همگراست.

۶.۶.۱۵ تعریف اگر يك سری همگرا باشد ولی مطلقاً همگرا نباشد، گفته می‌شود که آن سری به‌طور مشروط همگراست.

پس ممکن است سری همگرا باشد ولی مطلقاً همگرا نباشد. اما اگر سری مطلقاً همگرا باشد، باید همگرا هم باشد؛ این را در قضیه زیر بیان می‌کنیم.

۷.۶.۱۵ قضیه اگر سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگرا باشد، همگرا هم هست و

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

اثبات سه سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دنباله‌های مجموعهای جزئی آنها، به‌ترتیب، $\{s_n\}$ ، $\{t_n\}$ و $\{r_n\}$ باشند؛ لذا نامساوی زیر را داریم

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|. \quad (۱۱)$$

چون $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ همگراست، مجموع دارد، و ما آن را با T نمایش می‌دهیم. $\{t_n\}$ دنباله‌ای صعودی با جملات مثبت است؛ پس به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت m ، $t_n \leq T$. از (۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leq r_n \leq 2t_n \leq 2T.$$

بنابراین، $2T$ يك کران بالای دنباله $\{r_n\}$ است. پس، طبق قضیه ۱.۴.۱۵ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ همگراست. مجموع آن را R می‌گیریم. چون بنا بر (۱۱)، $\{r_n\}$

دنباله‌ای صعودی است، از قضیه ۷.۲.۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که $R \leq 2T$.
 سریهای $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$ و $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ هر دو همگرا هستند؛ لذا، بنا بر قضیه ۸.۳.۱۵
 سری زیر نیز همگراست

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(u_n + |u_n|) - |u_n|] = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ را S می‌گیریم. در این صورت بنا بر قضیه ۸.۳.۱۵ داریم
 $S = R - T$. و چون $R \leq 2T$ ، $S \leq 2T - T = T$.

از آنجا که $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ همگراست و مجموعش S است، از قضیه ۷.۳.۱۵ نتیجه می‌شود
 که $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$ همگراست و مجموعش $-S$ است. چون $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = T$ ،
 در بحث فوق می‌توانیم به جای $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ، $\sum_{n=1}^{+\infty} (-u_n)$ را قرار دهیم و نتیجه بگیریم که
 $-S \leq T$. از آنجا که $S \leq T$ و $-S \leq T$ ، داریم $|S| \leq T$ ؛ بنا بر این
 $\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۴ تعیین کنید که سری زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{3} n\pi}{n^2}.$$

حل سری مفروض را با $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ نمایش می‌دهیم. بنا بر این

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \dots + \frac{\cos \frac{1}{3} n\pi}{n^2} + \dots \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \dots \end{aligned}$$

این سری دارای جملات مثبت و منفی است. اگر نشان دهیم که مطلقاً همگراست، ثابت
 کرده‌ایم که همگرا هم هست.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left| \cos \frac{1}{3} n\pi \right|}{n^2}$$

چون

$$\left| \cos \frac{1}{3} n\pi \right| \leq 1 \quad \text{به‌ازای هر } n,$$

پس

$$\frac{\left| \cos \frac{1}{3} n\pi \right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت } n,$$

سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ ، p -سری با ضابطه $p=2$ است، و لذا همگراست. پس بنا بر آزمون مقایسه،

$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ همگراست. بنابراین، سری مفروض مطلقاً همگراست؛ پس، طبق قضیه ۷.۶.۱۵ این سری همگراست.

مشاهده می‌کنید که جملات سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ نه به‌طور یکنوا صعودی‌اند و نه به‌طور یکنوا نزولی. مثلاً $|u_4| = 1/32$ ، $|u_5| = 1/50$ ، $|u_6| = 1/36$ ؛ و لذا $|u_5| < |u_4|$ ، اما $|u_6| > |u_5|$. ▲

آزمون نسبت که در قضیه زیر بیان می‌شود، غالباً برای تعیین اینکه یک سری مفروض مطلقاً همگراست یا نه، به‌کار می‌رود.

۸.۶.۱۵ قضیه (آزمون نسبت) فرض کنید $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ یک سری نامتناهی باشد که در آن هر

u_n ناصفر است. در این صورت

(i) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L < 1$ ، سری مفروض مطلقاً همگراست.

(ii) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L > 1$ یا اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = +\infty$ ، سری

واگراست.

(iii) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = 1$ ، از این آزمون در مورد همگرایی سری نتیجه‌ای

به‌دست نمی‌آید.

اثبات (i) فرض شده است که $L < 1$ را عددی می‌گیریم که در رابطه $L < R < 1$ صدق کند. قرار می‌دهیم $1 - L = \varepsilon$. از آنجا که

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L$ ، عدد صحیحی چون $N > 0$ وجود دارد که

$$\left| \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| - L \right| < \varepsilon \quad n \geq N \quad \text{وقتی}$$

بنابراین

$$0 < \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < L + \varepsilon = R \quad n \geq N \quad \text{وقتی} \quad (۱۲)$$

n را برابر با مقادیر متوالی $N, N+1, N+2, \dots$ ، و غیره می گیریم. از (۱۲) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} |u_{N+1}| &< R|u_N| \\ |u_{N+2}| &< R|u_{N+1}| < R^2|u_N| \\ |u_{N+3}| &< R|u_{N+2}| < R^3|u_N|. \\ &\vdots \end{aligned}$$

در حالت کلی

$$|u_{N+k}| < R^k|u_N| \quad \text{به ازای هر عدد صحیح و مثبت } k. \quad (۱۳)$$

سری

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_N|R^k = |u_N|R + |u_N|R^2 + \dots + |u_N|R^n + \dots$$

همگراست زیرا يك سری هندسی است که قدرنسبتش از ۱ کوچکتر است. لذا از (۱۳) و

آزمون مقایسه نتیجه می گیریم که سری $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$ همگراست. اختلاف سری $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{N+k}|$

و سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ تنها در N جمله اول است. بنابراین $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ همگراست؛ لذا سری مفروض مطلقاً همگراست.

اثبات (ii) اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = L > 1$ یا $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = +\infty$ ، آنگاه

در هر حالت يك عدد صحیح $N > 0$ وجود دارد که به ازای هر $n \geq N$ ، $|u_{n+1}/u_n| > 1$.
 n را مقادیر متوالی $N, N+1, N+2, \dots$ ، و غیره می گیریم. داریم

$$\begin{aligned} |u_{N+1}| &> |u_N| \\ |u_{N+2}| &> |u_{N+1}| > |u_N| \\ |u_{N+3}| &> |u_{N+2}| > |u_N| \\ &\vdots \end{aligned}$$

سریهای نامتناهی با جمله‌های مثبت و منفی ۳۴۱

پس به ازای هر $n > N$ ، $|u_n| > |u_N|$ ، لذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ ؛ در نتیجه سری مفروض واگراست.

اثبات (iii) اگر آزمون نسبت را در مورد p -سری به کار ببریم، داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^p \right| = 1.$$

از آنجا که p -سری واگراست اگر $p \leq 1$ و همگراست اگر $p > 1$ ، نشان داده‌ایم که ممکن است هم سری همگرا و هم سری واگرایی داشته باشیم که در مورد هر دو، $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n| = 1$ ، پس، قسمت (iii) اثبات شده است. $\square$

مثال ۵ تعیین کنید که سری زیر همگراست یا واگرا

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}.$$

حل $u_n = (-1)^{n+1} n / 2^n$ و $u_{n+1} = (-1)^{n+2} (n+1) / 2^{n+1}$ بنا براین

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

لذا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

پس، بنا بر آزمون نسبت، سری مفروض مطلقاً همگراست و لذا، بنا بر قضیه ۷۰.۶.۱۵، همگرا هم هست. $\blacktriangle$

مثال ۶ در مثال ۲ نشان دادیم که سری زیر همگراست

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

آیا این سری مطلقاً همگراست و یا همگراییش مشروط است؟

حل برای آزمایش همگرایی مطلق از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. در حل مثال

۲ نشان داده شد که داریم $|u_{n+1}|/|u_n| = (n^2 + 3n)/(n^2 + 4n + 4)$ پس

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}} = 1.$$

لذا، آزمون نسبت نتیجه نمی‌دهد. چون

$$|u_n| = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

آزمون مقایسه را می‌توان به‌کاربرد. و چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ سری همساز است که واگراست، نتیجه می‌گیریم که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ واگراست و بنا بر این، $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگرا نیست. در نتیجه این سری به‌طور مشروط همگراست. ▲

باید توجه کرد که آزمون نسبت تمام امکانات را در مورد $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_{n+1}/u_n|$ شامل نمی‌شود، زیرا ممکن است این حد وجود نداشته باشد و $+\infty$ هم نباشد. بحث در چنین مواردی از حیطه این کتاب خارج است.

در پایان بحث سربهای نامتناهی با جملات ثابت، شیوه‌ای مناسب برای تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری مفروض پیشنهاد می‌کنیم. قبل از هر چیز، اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ ، سری واگراست. اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ، و سری یک سری متناوب باشد، آنگاه به‌سراغ

آزمون سربهای متناوب بروید. اگر این آزمون نتیجه نداد، آزمون نسبت را بی‌سازمایید. اگر هنگام استفاده از آزمون نسبت، $L = 1$ ، آنگاه آزمون دیگری را باید به‌کار بگیرید. هنگامی که آزمون نسبت مؤثر واقع نمی‌شود، آزمون انتگرال ممکن است مؤثر باشد؛ این را در مورد p -سریها نشان دادیم. همچنین، آزمون مقایسه را هم می‌توان بررسی کرد.

تمرینهای ۶.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، تعیین کنید که سری متناوب مفروض همگراست یا واگرا.

$$1. \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \quad 2. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^2 + 2} \quad 4. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

$$۵. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n^{\gamma}}$$

$$۶. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n}$$

$$۷. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^{\gamma}}$$

$$۸. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-1}$$

$$۹. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\gamma^n}$$

$$۱۰. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، اگر مجموع چهار جمله اول به عنوان تقریبی از مجموع سری نامتناهی داده شده به کار رود، مقدار خطا چقدر است؟

$$۱۱. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$۱۲. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n}$$

$$۱۳. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$۱۴. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۱۸، مجموع سری نامتناهی مفروض را با دقت سه رقم اعشار بیابید.

$$۱۵. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$$

$$۱۶. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}$$

$$۱۷. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 2^n}$$

$$۱۸. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۳۲، تعیین کنید که سری مفروض مطلقاً همگرا، یا به طور مشروط همگرا، و یا واگراست. پاسخ خود را اثبات کنید.

$$۱۹. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$$

$$۲۰. \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$۲۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\gamma}}{n!}$$

$$۲۲. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!}$$

$$۲۳. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{\gamma^{n+1}}$$

$$۲۴. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+2)}$$

$$۲۵. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-2 \sin n}{n^{\gamma}}$$

$$۲۶. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^{\gamma}}$$

$$۲۷. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$$

$$۲۸. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^{\gamma}+1}{n^{\gamma}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos n}{n^2} \quad .30$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(\ln n)^2} \quad .29$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)} \quad .32$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \quad .31$$

۳۳. اگر $|r| < 1$ ، ثابت کنید که سری $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin nt$ به ازای جمیع مقادیر t ، مطلقاً همگراست.

۳۴. ثابت کنید که اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگرا باشد و به ازای هر n ، $u_n \neq 0$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/|u_n|$ واگراست.

۳۵. ثابت کنید که اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ همگراست.

۳۶. با يك مثال نشان دهید که عکس تمرین ۳۵ درست نیست.

۳۷. با استقرای ریاضی ثابت کنید که $1/n! \leq 1/2^{n-1}$.

۷.۱۵ سری توانی

در میان سریهایی که جملات متغیر دارند، سری توانی اهمیت خاصی دارد که اینک به معرفی آن می پردازیم.

۱۰۷۰۱۵ تعریف سری توانی بر حسب $(x-a)$ ، سری به صورت زیر است

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

برای نمایش سری (۱) از نمادگذاری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n$ استفاده می کنیم. (توجه

کنید که برای سهولت در نوشتن جمله عمومی، حتی وقتی که $x=a$ ، قرار می گذاریم که $(x-a)^0 = 1$.) اگر x عدد معینی باشد، سری توانی (۱) به صورت يك سری نامتناهی با جملات ثابت درمی آید که موضوع بحث بخشهای قبلی بود. حالت خاصی از (۱) وقتی به دست می آید که $a=0$ و در این صورت سری به صورت يك سری توانی بر حسب x در می آید که عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (2)$$

علاوه بر سریهای توانی بر حسب $(x-a)$ و x ، سریهای توانی دیگری به شکل

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n [\phi(x)]^n = c_0 + c_1 \phi(x) + c_2 [\phi(x)]^2 + \dots + c_n [\phi(x)]^n + \dots$$

وجود دارند که در آنها، ϕ تابعی از x است. یک چنین سری به سری توانی بر حسب $\phi(x)$ موسوم است. در این کتاب منحصرأ بسا سریهای توانی به صورتهای (۱) و (۲) سروکار داریم، و وقتی اصطلاح «سری توانی» را به کار می بریم، منظورمان یکی از این دو صورت است. بحث درباره نظریه سریهای توانی را به سری (۲) محدود می کنیم. سری توانی عمومیت (۱) را می توان از (۲) با انتقال $a = \bar{x} - x$ به دست آورد؛ لذا نتایج حاصل را می توان در مورد سری (۱) هم به کار برد.

وقتی سریهای نامتناهی دارای جملات ثابت هستند، با مسئله همگرایی یا واگرایی سریها سروکار داریم. در بررسی سریهای توانی این پرسش مطرح می شود: به ازای چه مقادیری از x سری توانی همگراست؟ به ازای هر مقدار از x که سری توانی همگرا باشد، سری عددی را نمایش می دهد که همان مجموع سری است. بنابراین، هر سری توانی تابعی را تعریف می کند. قلمرو تابع f که با ضابطه زیر معین می شود

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (3)$$

تمام مقادیری از x است که به ازای آنها سری توانی (۳) همگراست. واضح است که هر سری توانی به شکل (۲) به ازای $x=0$ همگراست. سریهایی وجود دارند (مثال ۳ را ببینید) که به ازای هیچ مقدار دیگر x همگرا نیستند، و همچنین سریهایی وجود دارند که به ازای همه مقادیر x همگرا هستند (مثال ۲ را ببینید).

سه مثال زیر، شیوه استفاده از آزمون نسبت را برای تعیین مقادیری از x که به ازای آنها سری توانی همگراست، نشان می دهند. وقتی برای نشان دادن جمله m یک سری توانی از $n!$ استفاده می کنیم (نظیر مثال ۲) قرار می گذاریم که $1 \neq 0!$ ، تا عبارت مربوط به جمله m برای $n=0$ نیز برقرار باشد.

مثال ۱ به ازای چه مقادیری از x سری توانی زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}.$$

حل در مورد سری مفروض داریم

$$u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} \quad \text{و} \quad u_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n 3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{2^n x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} |x| \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} |x|.$$

بنابراین، اگر $|x| < 3/2$ ، یا به عبارت دیگر، اگر $|x| < 3/2$ ، سری توانی مطلقاً همگراست. وقتی که $|x| > 3/2$ ، یا به عبارت دیگر، وقتی که $|x| > 3/2$ ، سری واگراست. اگر $|x| = 3/2$ (یعنی، اگر $x = \pm 3/2$) آزمون نسبت نتیجه ندارد. به ازای $x = 3/2$ ، سری توانی مفروض به صورت

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

درمی آید که همان گونه که در مثال ۱ از بخش ۶.۱۵ نشان داده شد، همگراست. به ازای $x = -3/2$ داریم

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n} - \dots$$

که بنا بر قضیه ۷.۳.۱۵ واگراست. پس، نتیجه می گیریم که سری توانی مفروض به ازای $-3/2 < x \leq 3/2$ همگراست. وقتی که $-3/2 < x < 3/2$ ، این سری مطلقاً همگراست، و وقتی که $x = 3/2$ ، به طور مشروط همگراست. اگر $x \leq -3/2$ یا $x > 3/2$ ، سری واگراست. ▲

مثال ۲ به ازای چه مقادیری از x سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ همگراست؟

حل در مورد سری مفروض داریم $u_n = x^n/n!$ و $u_{n+1} = x^{n+1}/(n+1)!$. از اینرو با استفاده از آزمون نسبت داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

بنابراین، سری توانی داده شده به ازای همه مقادیر x مطلقاً همگراست. ▲

مثال ۳ به ازای چه مقادیری از x سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ همگراست؟

حل در مورد سری مفروض داریم $u_n = n! x^n$ و $u_{n+1} = (n+1)! x^{n+1}$. به کمک

آزمون نسبت به دست می آوریم

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} |(n+1)x| \\ &= \begin{cases} 0 & x=0 \\ +\infty & x \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

▲ نتیجه می شود که این سری به ازای تمام مقادیر x بجز 0 واگراست.

۲۰۷.۱۵ قضیه اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ به ازای $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$) همگرا باشد، آنگاه به ازای همه مقادیر x با شرط $|x| < |x_1|$ مطلقاً همگراست.

اثبات اگر $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$. بنا براین اگر $\varepsilon = 1$ فرض شود $N > 0$ عددی صحیح چون وجود خواهد داشت که

$$|c_n x_1^n| < 1 \quad n \geq N$$

وقتی $n \geq N$ حال اگر x عددی دلخواه باشد به طوری که $|x| < |x_1|$ داریم

$$|c_n x^n| = \left| c_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad n \geq N \quad (۴)$$

سری

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \quad (۵)$$

همگراست زیرا یک سری هندسی با ضابطه $r = |x/x_1| < 1$ است (زیرا $|x| < |x_1|$). به ازای $|x| < |x_1|$ ، سری $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$ را با سری (۵) مقایسه می کنیم. از (۴) و آزمون

مقایسه نتیجه می شود که وقتی $|x| < |x_1|$ ، $\sum_{n=N}^{+\infty} |c_n x^n|$ همگراست. پس سری توانی مفروض به ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < |x_1|$ صدق کنند، مطلقاً همگراست. □

○ نمونه ۱ شاهدهی از قضیه ۲۰۷.۱۵ در مثال ۱ ارائه شد. سری توانی مذکور به ازای $x = 3/2$ همگرا و به ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < 3/2$ صدق کنند، مطلقاً همگراست.

○

قضیه زیر نتیجه‌ای از قضیه ۲۰۷.۱۵ است.

۳۰۷.۱۵ قضیه اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ به‌ازای $x = x_0$ واگرا باشد، به‌ازای تمام مقادیری از x نیز که در ضابطه $|x| > |x_0|$ صدق کنند واگراست.

اثبات فرض کنید به‌ازای مقداری از x که در $|x| > |x_0|$ صادق است، سری مفروض همگرا باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۲۰۷.۱۵ این سری باید به‌ازای $x = x_0$ همگرا باشد. اما این، فرض قضیه را نقض می‌کند. بنابراین سری توانی مفروض به‌ازای تمام مقادیری از x که $|x| > |x_0|$ ، واگراست. $\square$

○ **نمونه ۲** برای اینکه قضیه ۳۰۷.۱۵ را روشن سازیم، مجدداً سری توانی مذکور در مثال ۱ را در نظر می‌گیریم. این سری به‌ازای $x = -3/2$ واگراست و به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| > |-3/2|$ صدق کنند نیز واگراست. ○

قضیه مهم زیر را می‌توان از قضایای ۲۰۷.۱۵ و ۳۰۷.۱۵ نتیجه گرفت.

۴۰۷.۱۵ قضیه اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ داده شده باشد، دقیقاً یکی از شرایط زیر برقرار است:

- (i) سری همگراست تنها وقتی که $x = 0$.
- (ii) سری به‌ازای همه مقادیر x مطلقاً همگراست.
- (iii) عددی چون $R > 0$ وجود دارد که سری به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < R$ صادق‌اند، مطلقاً همگراست و به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| > R$ صدق می‌کنند، واگراست.

اثبات اگر در سری توانی مفروض عدد صفر را به‌جای x قرار دهیم، داریم $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0 + 0 + 0 + \dots$ که آشکارا همگراست. بنابراین، هر سری توانی به‌صورت $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ به‌ازای $x = 0$ همگراست. اگر صفر تنها مقداری از x باشد که به‌ازای آن سری همگراست، آنگاه شرط (i) برقرار است.

فرض کنید که سری مفروض به‌ازای $x = x_1$ ، $x_1 \neq 0$ ، همگرا باشد. در این صورت، از قضیه ۲۰۷.۱۵ نتیجه می‌گیریم که به‌ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < |x_1|$ صادق‌اند، سری مطلقاً همگراست. حال اگر هیچ مقداری از x وجود نداشته باشد که سری مفروض به‌ازای آن واگرا باشد، آنگاه سری به‌ازای همه مقادیر x مطلقاً همگراست. این همان شرط (ii) است.

اگر سری مفروض به‌ازای $x = x_1$ ، $x_1 \neq 0$ ، همگرا و به‌ازای $x = x_0$ ،

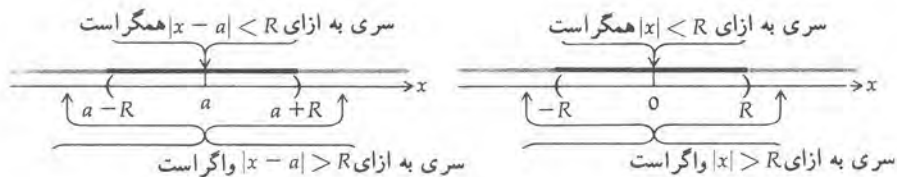
$|x_1| > |x_2|$ ، و اگر باشد، از قضیه ۳.۷.۱۵ نتیجه می گیریم که به ازای تمام مقادیری از x که $|x| > |x_2|$ ، این سری واگراست. لذا $|x_2|$ يك کران بالا برای مجموعه تمام مقادیری از x است که به ازای آنها سری مطلقاً همگراست. بنا براین، طبق اصل موضوع کمال (۵.۲.۱۵) این مجموعه از اعداد دارای کوچکترین کران بالاست که همان عدد R مذکور در شرط (iii) است؛ و به این ترتیب اثبات می شود که دقیقاً یکی از سه شرط برقرار است. $\square$

قضیه ۴.۷.۱۵ (iii) را می توان روی خط اعداد توضیح داد. شکل ۱.۷.۱۵ را ببینید.

اگر به جای سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ، سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ را داشته باشیم، در شرایط (i) و (iii) قضیه ۴.۷.۱۵ به جای x ، $x-a$ قرار می گیرد؛ و این شرایط به صورت زیر در می آیند

(i) سری همگراست تنها وقتی که $x=a$.

(iii) عددی چون $R > 0$ وجود دارد که سری به ازای تمام مقادیری از x که در $|x-a| < R$ صادق اند مطلقاً همگراست و به ازای تمام مقادیری از x که در $|x-a| > R$ صدق می کنند، واگراست. (برای ملاحظه این مطلب روی خط اعداد، شکل ۲.۷.۱۵ را ببینید.)



شکل ۲.۷.۱۵

شکل ۱.۷.۱۵

مجموعه تمام مقادیری از x که به ازای آنها يك سری توانی مفروض همگراست بازه همگرایی سری توانی نام دارد. عدد R مذکور در شرط (iii) قضیه ۴.۷.۱۵ را شعاع همگرایی این سری توانی می نامند. اگر شرط (i) برقرار باشد، $R=0$ ؛ و اگر شرط (ii) برقرار باشد، می نویسیم $R=+\infty$.

○ نمونه ۳ برای سری توانی مذکور در مثال ۱، $R=3/2$ و بازه همگرایی $(-3/2, 3/2]$ است. در مثال ۲، $R=+\infty$ ، و بازه همگرایی به صورت $(-\infty, +\infty)$ نوشته می شود.

اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ برابر R باشد، بازه همگرایی یکی از بازه‌های زیر است: $(-R, R)$ ، $[-R, R]$ ، $(-R, R]$ ، یا $[-R, R)$. برای سری توانی عمومیتر $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ بازه همگرایی یکی از بازه‌های $(a-R, a+R)$ ، $[a-R, a+R]$ ، $(a-R, a+R]$ ، یا $[a-R, a+R)$ است.

هر سری توانی مفروض، تابعی تعریف می‌کند که بازه همگرایی قلمرو آن است. مفیدترین روشی که برای تعیین بازه همگرایی سری توانی در اختیار ماست، آزمون نسبت است. اما، آزمون نسبت چیزی درباره همگرایی یا واگرایی سری توانی در نقاط انتهایی بازه همگرایی نمی‌گوید. در هر نقطه انتهایی، سری توانی ممکن است مطلقاً همگرا، یا به‌طور مشروط همگرا و یا واگرا باشد. اگر یک سری توانی در یک نقطه انتهایی مطلقاً همگرا باشد، از تعریف همگرایی مطلق نتیجه می‌شود که سری در هر دو نقطه انتهایی مطلقاً همگراست (تمرین ۳۳ را ببینید). اگر یک سری توانی در یک نقطه انتهایی همگرا و در نقطه انتهایی دیگر واگرا باشد، این سری در آن نقطه انتهایی که همگراست، همگرایی مشروط است (تمرین ۳۴ را ببینید). در مواردی با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نمی‌توان همگرایی یا واگرایی یک سری توانی در نقاط انتهایی را تعیین کرد.

مثال ۴ بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-2)^n$ را تعیین کنید.

حل سری مفروض عبارت است از

$$(x-2) + 2(x-2)^2 + \dots + n(x-2)^n + (n+1)(x-2)^{n+1} + \dots$$

با استفاده از آزمون نسبت داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)(x-2)^{n+1}}{n(x-2)^n} \right| \\ &= |x-2| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= |x-2|. \end{aligned}$$

لذا، سری مفروض مطلقاً همگرا خواهد بود هرگاه $|x-2| < 1$ ، یا معادلش $-1 < x-2 < 1$ ، و به عبارت دیگر، $1 < x < 3$.

وقتی که $x=1$ ، سری عبارت از $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$ است که واگراست زیرا

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$. وقتی که $x=3$ ، سری عبارت از $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ است که این هم واگراست زیرا

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$. بنابراین بازه همگرایی $(1, 3)$ است. لذا سری توانی مفروض تابعی

تعریف می‌کند که قلمروش $(1, 3)$ است. ▲

مثال ۵ بازه همگرایی سری توانی زیر را تعیین کنید

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2+n^2}.$$

حل سری مفروض عبارت است از

$$\frac{x}{2+1^2} + \frac{x^2}{2+2^2} + \frac{x^3}{2+3^2} + \dots + \frac{x^n}{2+n^2} + \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} + \dots.$$

یا استفاده از آزمون نسبت داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{2+(n+1)^2} \cdot \frac{2+n^2}{x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n^2}{2+n^2+2n+1} \\ &= |x|. \end{aligned}$$

لذا سری مفروض مطلقاً همگرا خواهد بود هرگاه $|x| < 1$ ، یا معادلش $-1 < x < 1$. به‌ازای $x = 1$ ، سری عبارت است از

$$\frac{1}{2+1^2} + \frac{1}{2+2^2} + \frac{1}{2+3^2} + \dots + \frac{1}{2+n^2} + \dots.$$

چون به‌ازای تمام اعداد صحیح و مثبت n ، $1/n^2 < 1/(2+n^2)$ ، و چون $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ يك p -سری همگراست، از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود که سری توانی مفروض به‌ازای $x = 1$ همگراست. وقتی $x = -1$ ، سری به‌صورت $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/(2+n^2)$ است که همگراست زیرا هم‌اکنون دیدیم که مطلقاً همگراست. پس، بازه همگرایی سری توانی مفروض، $[-1, 1]$ است. ▲

تمرینهای ۲.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۲۸، بازه همگرایی سری توانی مفروض را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2+1} \cdot 2 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \cdot 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n} \cdot 4 & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-2} \cdot 3 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}} \cdot 6 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2} \cdot 5 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot 8 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{2^n} \cdot 7 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2n}} x^n \cdot 10 & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot 9 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1) \delta^n} \cdot 12 & \sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n \cdot 11 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)x}{n!} \cdot 14 & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1) 2^{2n-1}} \cdot 13 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1) 2^n} \cdot 16 & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} \cdot 15 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)} \cdot 18 & \sum_{n=0}^{+\infty} (\sinh 2n) x^n \cdot 17 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+\phi)^{n-1}}{n^2} \cdot 20 & \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(\ln n)^2} \cdot 19 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1} x^{2n}}{n+2} \cdot 22 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\delta^n} (x-1)^n \cdot 21 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n} \cdot 24 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n (x-\delta)^n}{n+1} \cdot 23 \\ & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot 25 \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{n^n} \cdot 27 & \sum_{n=1}^{+\infty} n^n (x-2)^n \cdot 26 \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} x^n \quad ۲۸$$

۲۹. اگر a و b دو عدد صحیح مثبت باشند، شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+a)!}{n!(n+b)!} x^n$ را بیابید.

۳۰. اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ یک سری همگرایی مطلق باشد، ثابت کنید که سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ مطلقاً همگراست هرگاه $|x| \leq 1$.

۳۱. ثابت کنید که اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ برابر r باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{2n}$ برابر $\sqrt{r}$ است.

۳۲. ثابت کنید که اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = L (L \neq 0)$ ، آنگاه شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ برابر $1/L$ است.

۳۳. ثابت کنید که اگر یک سری توانی در یکی از نقاط انتهایی بازه همگراییش مطلقاً همگرا باشد، در هر دو نقطه انتهایی مطلقاً همگراست.

۳۴. ثابت کنید که اگر یک سری توانی در یکی از نقاط انتهایی بازه همگراییش همگرا و در نقطه انتهایی دیگر واگرا باشد، در آن نقطه انتهایی کسه همگراست، همگراییش مشروط است.

۸.۱۵ مشتق گیری از سری توانی

سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ تابعی را تعریف می کند که قلمروش بازه همگرایی سری است.

○ نمونه ۱ سری هندسی با ضوابط $a=1$ و $r=x$ ، که سری $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ است، در نظر بگیرید. بنا بر قضیه ۵.۳.۱۵ این سری به مجموع $1/(1-x)$ می گراید هرگاه $|x| < 1$. بنا بر این سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ تابع f با ضابطه $f(x) = 1/(1-x)$ ، و $|x| < 1$ را تعریف می کند. لذا

$$(۱) \quad \text{اگر } |x| < 1, \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

می‌توان سری مذکور در (۱) را به‌کار گرفت و سریهای توانی دیگری تشکیل داد که مجموعهایشان قابل محاسبه باشند.

○ نمونه ۲ چنانچه در (۱) به‌جای x ، $-x$ را قرار دهیم، داریم

$$(۲) \quad \text{اگر } |x| < 1, \quad 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \frac{1}{1+x}$$

در (۱) قرار می‌دهیم $x = x^2$ و به‌دست می‌آوریم

$$(۳) \quad \text{اگر } |x| < 1, \quad 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

چنانچه در (۱) به‌جای x ، $-x^2$ گذاشته شود، به‌دست می‌آید

$$(۴) \quad \text{اگر } |x| < 1, \quad 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

در این بخش و در بخش بعد، با مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سریهایی نظیر سریهای فوق، سریهای جالب دیگری به‌دست می‌آوریم. ثابت می‌کنیم که اگر R (با شرط $R \neq 0$) شعاع همگرایی یک سری توانی باشد که تابعی چون f را تعریف می‌کند، آنگاه f بر بازه $(-R, R)$ مشتق‌پذیر است، و مشتق f را می‌توان با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری توانی به‌دست آورد. علاوه بر این، نشان می‌دهیم که f بر هر زیر بازه بسته از $(-R, R)$ انتگرال‌پذیر است، و انتگرال f با انتگرال‌گیری جمله به‌جمله از سری توانی به‌دست می‌آید. ابتدا به‌چند قضیه مقدماتی نیازمندیم.

۱۰۸۰۱۵ قضیه اگر $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ نیز R است.

این قضیه حاکی است که شعاع همگرایی سری حاصل از مشتق‌گیری جمله به‌جمله از یک سری توانی مفروض، همان شعاع همگرایی سری مفروض است.

اثبات فرض کنید x عدد دلخواهی در بازه $(-R, R)$ باشد. در این صورت $|x| < R$. عددی مانند x_1 انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $|x_1| < |x| < R$. چون

مشتق‌گیری از سری توانی ۳۵۵

همگراست. لذا $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n x_1^n = 0$. پس در تعریف ۱۰.۵.۲ اگر فرض کنیم $\varepsilon = 1$ ، عددی چون $N > 0$ وجود دارد که

$$|c_n x_1^n| < 1, \quad n > N$$

وقتی

بزرگترین عدد در بین اعداد $|c_1 x_1|, |c_2 x_1^2|, \dots, |c_N x_1^N|$ و ۱ را با M نمایش می‌دهیم. پس

$$|c_n x_1^n| \leq M, \quad n \text{ مثبت و صحیح} \quad (۵)$$

حال

$$|nc_n x_1^{n-1}| = \left| nc_n \cdot \frac{x_1^{n-1}}{x_1^n} \cdot x_1^n \right| = n \frac{|c_n x_1^n|}{|x_1|} \left| \frac{x_1}{x_1} \right|^{n-1}.$$

با توجه به (۵) و معادله بالا داریم

$$|nc_n x_1^{n-1}| \leq n \frac{M}{|x_1|} \left| \frac{x_1}{x_1} \right|^{n-1}. \quad (۶)$$

آزمون نسبت را در مورد سری

$$\frac{M}{|x_1|} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left| \frac{x_1}{x_1} \right|^{n-1} \quad (۷)$$

به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{|x|^{n+1}} \cdot \frac{|x_1|^{n-1}}{n|x|^{n-1}} \right| \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1. \end{aligned}$$

بنابراین، سری (۷) مطلقاً همگراست؛ لذا بنابر (۶) و آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x_1^{n-1}$ نیز مطلقاً همگراست. چون x عدد دلخواهی از $(-R, R)$ است، نتیجه می‌گیریم که اگر

$$R' \geq R \text{ باشد، آنگاه } R' \text{ برابر } \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n x_1^{n-1} \text{ همگرایی}$$

برای اینکه اثبات کامل شود باید نشان دهیم که R' نمی‌تواند از R بزرگتر باشد.

فرض کنید $R' > R$ ، و x_p عددی باشد که در $R' > |x_p| > R$ صدق کند. چون $|x_p| > R$ ، نتیجه می گیریم که

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_p^n \quad (۸)$$

همگراست.

چون $|x_p| < R'$ ، پس $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x_p^{n-1}$ مطلقاً همگراست. علاوه بر این

$$|x_p| \sum_{n=1}^{+\infty} |n c_n x_p^{n-1}| = \sum_{n=1}^{+\infty} |n c_n x_p^n|$$

و لذا بنا بر قضیه ۷.۳.۱۵

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n c_n x_p^n| \quad (۹)$$

همگراست.

اگر n عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد،

$$|c_n x_p^n| \leq n |c_n x_p^n| = |n c_n x_p^n|. \quad (۱۰)$$

از عبارت (۹)، نامساوی (۱۰)، و آزمون مقایسه نتیجه می گیریم که $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n x_p^n|$ همگراست.

بنابراین سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_p^n$ نیز همگراست، لذا حکم (۸) نقض می شود. پس این فرض که $R' > R$ ، غلط است. از اینرو R' نمی تواند بزرگتر از R باشد؛ و چون نشان دادیم که $R' \geq R$ ، نتیجه می شود که $R' = R$ ، و لذا قضیه اثبات می شود. $\square$

○ نمونه ۳ درستی قضیه ۱۰.۸.۱۵ را در مورد سری توانی زیر تحقیق می کنیم

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots$$

شعاع همگرایی با استفاده از آزمون نسبت به دست می آید

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+2}}{(n+2)^2 x^{n+1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 4n + 4} \right| = |x|.$$

پس سری توانی به ازای $|x| < ۱$ همگراست؛ لذا شعاع همگراییش، R ، برابر ۱ است. با مشتق گیری جمله به جمله از سری مفروض، سری توانی زیر حاصل می شود

مشتق گیری از سری توانی ۳۵۷

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots + \frac{x^n}{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+2} + \dots\end{aligned}$$

آزمون نسبت را در مورد این سری توانی به کار می بریم و به دست می آوریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = |x|.$$

این سری توانی هم به ازای $|x| < 1$ همگراست؛ لذا شعاع همگراییش، R' برابر ۱ است. چون $R = R'$ ، درستی قضیه ۱۰.۸.۱۵ تأیید می شود.

○
۲۰.۸.۱۵ قضیه اگر شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ برابر $R > 0$ باشد، شعاع همگرایی سری $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ نیز برابر R است.

اثبات اگر قضیه ۱۰.۸.۱۵ را در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}$ به کار ببریم نتیجه مطلوب به دست می آید.

□
حال در موقعیتی هستیم که قضیه مربوط به مشتق گیری جمله به جمله از سری توانی را به اثبات برسانیم.

۳۰.۸.۱۵ قضیه گیریم $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ یک سری توانی باشد که شعاع همگراییش $R > 0$ است. آنگاه اگر f تابعی با ضابطه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (11)$$

باشد، به ازای هر x در بازه باز $(-R, R)$ ، $f'(x)$ وجود دارد و به صورت زیر معین می شود

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}.$$

اثبات فرض کنید x و a دو عدد متمایز در بازه باز $(-R, R)$ باشند. فرمول تیلر (فرمول (۹) از بخش ۵.۱۴)، به ازای $n = 1$ ، عبارت است از

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2.$$

از این فرمول با فرض $f(x) = x^n$ نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n

$$x^n = a^n + na^{n-1}(x-a) + \frac{1}{2}n(n-1)(\xi_n)^{n-2}(x-a)^2 \quad (12)$$

که در آن به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، ξ_n بین a و x است. بنابر (۱۱) داریم

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a^n \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n - c_0 - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n a^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x^n - a^n). \end{aligned}$$

اگر دوطرف را بر $x-a$ (چون $x \neq a$) تقسیم، و از (۱۲) استفاده کنیم، با توجه به معادله بالا داریم

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [na^{n-1}(x-a) + \frac{1}{2}n(n-1)(\xi_n)^{n-2}(x-a)^2].$$

لذا

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} + \frac{1}{2}(x-a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n (\xi_n)^{n-2}. \quad (13)$$

چون a در $(-R, R)$ است از قضیه ۱.۸.۱۵ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$ مطلقاً همگراست.

چون a و x هر دو در $(-R, R)$ هستند، عددی مانند $K > 0$ وجود دارد به طوری که $|a| < K < R$ و $|x| < K < R$ از قضیه ۲.۸.۱۵ نتیجه گرفته می‌شود که

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n K^{n-2}$$

مطلقاً همگراست. حال چون به ازای هر ξ_n رابطه زیر برقرار است

$$|n(n-1)c_n (\xi_n)^{n-2}| < |n(n-1)c_n K^{n-2}| \quad (14)$$

از آزمون مقایسه نتیجه گرفته می‌شود که

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2}$$

مطلقاً همگراست.

با استفاده از (۱۳) داریم

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| = \left| \frac{1}{\gamma} (x-a) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n(\xi_n)^{n-2} \right|. \quad (15)$$

اما، بنابر قضیه ۷.۶.۱۵، اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

این نامساوی را در طرف راست (۱۵) به کار می‌بریم

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{\gamma} |x-a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n| |\xi_n|^{n-2}. \quad (16)$$

از (۱۴) و (۱۶) داریم

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1} \right| \leq \frac{1}{\gamma} |x-a| \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|c_n| K^{n-2}. \quad (17)$$

در اینجا $0 < K < R$. چون سری طرف راست (۱۷) مطلقاً همگراست، حد طرف راست وقتی که x به a میل کند، صفر است. پس، بنابر (۱۷) و قضیه افشردگی (۱۰.۹.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

یا معادلش

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n a^{n-1}$$

و چون a می‌تواند هر عدد دلخواهی از بازه باز $(-R, R)$ باشد، قضیه به اثبات می‌رسد. $\square$

مثال ۱ فرض کنید f تابعی باشد که توسط سری توانی مذکور در نمونه ۳ تعریف می‌شود. (الف) قلمرو f را بیابید؛ (ب) آن سری توانی را که معرف تابع f' است، بنویسید و قلمرو f' را بیابید.

حل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \quad (\text{الف})$$

قلمرو f بازه همگرایی سری توانی است. در نمونه ۳ نشان دادیم که شعاع همگرایی سری توانی ۱ است؛ یعنی، وقتی که $|x| < 1$ ، سری همگراست. حال سری توانی را وقتی که $|x| = 1$ در نظر بگیرید. اگر $x = 1$ ، سری عبارت است از

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

که همگراست زیرا p -سری به ازای $p = 2$ است. وقتی که $x = -1$ ، سری $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} / (n+1)^2$ را داریم که همگراست زیرا مطلقاً همگراست. پس قلمرو f بازه $[-1, 1]$ است.

(ب) از قضیه ۳۰۸.۱۵ نتیجه می گیریم که f' با ضابطه

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (۱۸)$$

تعریف می شود و نیز اینکه به ازای هر x در بازه باز $(-1, 1)$ ، $f'(x)$ وجود دارد. در نمونه ۳ نشان دادیم که شعاع همگرایی سری توانی مذکور در (۱۸)، ۱ است. حال سری توانی (۱۸) را به ازای $x = \pm 1$ در نظر می گیریم. اگر $x = 1$ ، سری عبارت است از

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

که سری همساز است و لذا واگراست. اگر $x = -1$ ، سری عبارت است از

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \dots$$

که يك سری متناوب همگراست. بنابراین قلمرو f' بازه $(-1, 1)$ است. ▲

مثال ۱ این واقعیت را روشن می سازد که اگر تابعی چون f با يك سری توانی تعریف شود و از این سری توانی جمله به جمله مشتق بگیریم، سری توانی حاصل که f' را تعریف می کند، دارای همان شعاع همگرایی است ولی لزوماً دارای همان بازه همگرایی نیست.

مثال ۲ يك سری توانی به دست آورید که

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

را نمایش دهد.

حل بنا بر (۱)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

اگر قضیه ۳.۸.۱۵ را به کار ببریم و از دو طرف رابطه بالا مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots, \quad |x| < 1$$

مثال ۳ نشان دهید که به ازای هر مقدار حقیقی x داریم

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

حل در مثال ۲ از بخش ۷.۱۵ نشان دادیم که سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ به ازای همه

مقادیر حقیقی x مطلقاً همگراست. بنا بر این، اگر f تابعی باشد که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (۱۹)$$

آنگاه قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی است؛ یعنی، بازه همگرایی $(-\infty, +\infty)$ است. از قضیه ۳.۸.۱۵ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر عدد حقیقی x ،

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} \quad (۲۰)$$

چون $n/n! = 1/(n-1)!$ را می‌توان به صورت

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

یا معادلش

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (۲۱)$$

هم نوشت. از (۱۹) و (۲۱) نتیجه می‌گیریم که به ازای تمام اعداد حقیقی x ،

$f'(x) = f(x)$. بنا بر این تابع f در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = y$$

صدق می کند که جواب عمومی آن $y = Ce^x$ است. لذا به ازای ثابتی چون C ، $f(x) = Ce^x$. بنا بر (19) ، $f(0) = 1$ (به خاطر بیاورید که برای سهولت در نوشتن جمله عمومی حتی وقتی که $x = 0$ ، قرار می دهیم $x^0 = 1$). بنا بر این $C = 1$ ؛ لذا $f(x) = e^x$ و نتیجه مطلوب به دست می آید. ▲

مثال ۴ با استفاده از نتیجه مثال ۳ یک سری توانی بیابید که e^{-x} را نمایش دهد.

حل اگر در سری e^x به جای x ، $-x$ را قرار دهیم به ازای هر مقدار حقیقی x داریم

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots. \quad \blacktriangle$$

مثال ۵ با استفاده از سری مذکور در مثال ۴ مقدار e^{-1} را طوری بیابید که تا پنج رقم اعشار صحیح باشد.

حل اگر در سری مربوط به e^{-x} فرض کنیم $x = 1$ ، داریم

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \dots \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} - \frac{1}{362880} \\ &\quad + \frac{1}{3628800} - \dots \\ &\approx 1 - 1 + 0.5 - 0.166667 + 0.041667 - 0.008333 + 0.001389 \\ &\quad - 0.000198 + 0.000025 - 0.000003 + 0.0000003 - \dots. \end{aligned}$$

این یک سری متناوب همگراست که در آن، $|u_{n+1}| < |u_n|$. پس اگر برای تقریب کردن مجموع از ده جمله اول استفاده کنیم، طبق قضیه ۴.۶.۱۵، خطا کمتر از قدر مطلق جمله یازدهم است. اگر ده جمله اول را با هم جمع کنیم به دست می آوریم: 0.367880 . اگر این عدد را تا پنج رقم اعشار گرد کنیم، خواهیم داشت

$$\blacktriangle \quad e^{-1} \approx 0.367880.$$

هنگام محاسبه با سریهای نامتناهی دو نوع خطا رخ می دهد. یکی خطای مربوط به

باقیمانده بعد از n جمله اول است. خطای دیگر، خطای گرد کردن است که هنگامی که هر جمله سری را با يك عدد اعشاری با تعدادی متناهی رقم تقریب می کنیم پیش می آید. به عنوان نمونه، در مثال ۵ نتیجه را با دقت پنج رقم اعشار می خواستیم؛ لذا هر جمله را تا شش رقم اعشار گرد کردیم. بعد از محاسبه مجموع، این نتیجه را هم تا پنج رقم اعشار گرد کردیم. البته خطای مربوط به باقیمانده را می توان با در نظر گرفتن جملات بیشتری از سری تقلیل داد؛ و خطای گرد کردن را می توان با به کار بردن ارقام اعشاری بیشتر کم کرد.

تمرینهای ۸.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، يك تابع f با يك سری توانی تعریف شده است. در هر تمرین کارهای زیر را انجام دهید: (الف) شعاع همگرایی سری توانی مفروض و قلمرو f را بیابید؛ (ب) آن سری توانی را که معرف تابع f است بنویسید، و با استفاده از روش مذکور در بخش ۷.۱۵ شعاع همگرایی آن را بیابید (یعنی، دزستی قضیه ۱.۸.۱۵ را تحقیق کنید)؛ (پ) قلمرو f' را بیابید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad ۲.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad ۱.$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n-1}} \quad ۴.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad ۳.$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} \quad ۶.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad ۵.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \quad ۸.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)(3x-1)^n \quad ۷.$$

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n(n-1)} \quad ۱۰.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n} \quad ۹.$$

۱۱. به کمک نتیجه مثال ۲، يك سری توانی بیابید که $1/(1-x)^3$ را نمایش دهد.

۱۲. به کمک نتیجه مثال ۳، يك سری توانی بیابید که $e^{\sqrt{x}}$ را نمایش دهد.

۱۳. با مشتق گیری جمله به جمله از سری (۲)، يك سری توانی به دست آورید که به ازای $|x| < 1/(1+x)^2$ را نمایش دهد.

۱۴. با مشتق گیری جمله به جمله از سری (۴)، يك سری توانی به دست آورید که به ازای $|x| < 1/(1+x^2)^2$ را نمایش دهد.

۱۵. (الف) با استفاده از سری (۱)، يك سری توانی بیابید که $1/(1-2x)$ را نمایش

دهد. (ب) با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری حاصل از قسمت (الف)، يك سری توانی بیابید که $2/(1-2x)^2$ را نمایش دهد.

۱۶. (الف) با استفاده از سری (۲)، يك سری توانی بیابید که $1/(1+x^3)$ را نمایش دهد. (ب) با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری حاصل از قسمت (الف)، يك سری توانی بیابید که $3x^2/(1+x^3)^2$ را نمایش دهد.

۱۷. (الف) به‌کمک نتیجه مثال ۳، يك سری توانی بیابید که e^{x^2} را نمایش دهد. (ب) با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری حاصل از قسمت (الف)، يك سری توانی بیابید که xe^{x^2} را نمایش دهد.

۱۸. فرض کنید f تابعی باشد که توسط $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n(n+2)}$ تعریف می‌شود. (الف) قلمرو f را بیابید. (ب) $f'(x)$ و قلمرو f' را بیابید.

۱۹. با استفاده از نتیجه مثال ۴، مقدار $1/\sqrt{e}$ را طوری بیابید که تا پنج رقم اعشار درست باشد.

۲۰. اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n}$ ، مقدار $f'(1/2)$ را طوری بیابید که تا چهار رقم اعشار درست باشد.

۲۱. به‌کمک نتیجه مثالهای ۳ و ۴، يك سری توانی بیابید که $\sinh x$ (الف) و $\cosh x$ (ب) را نمایش دهد.

۲۲. نشان دهید که هریک از سریهای مذکور در قسمت‌های (الف) و (ب) تمرین ۲۱ را می‌توان از دیگری با مشتق‌گیری جمله به‌جمله به‌دست آورد.

۲۳. به‌کمک نتیجه مثال ۲، مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ را محاسبه کنید.

۲۴. (الف) يك سری توانی بیابید که $(e^x - 1)/x$ را نمایش دهد. (ب) با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری توانی قسمت (الف) نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

۲۵. (الف) يك سری توانی بیابید که xe^{-x} را نمایش دهد. (ب) با مشتق‌گیری جمله به‌جمله از سری توانی قسمت (الف) نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n+1} \frac{n+2}{n!} = 4$.

۲۶. (الف) يك سری توانی بیابید که e^{-x^2} را نمایش دهد. (ب) با دوبار مشتق‌گیری

جمله به جمله از سری توانی قسمت (الف)، نشان دهید که $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^n n!} = 1$

۲۷. فرض کنید تابعی چون f با سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ نمایش داده می شود که شعاع همگراییش $R > 0$ است. اگر $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ ، صرفاً با استفاده از ویژگیهای سریهای توانی، ونه ویژگیهای تابع نمایی، این سری توانی را بیابید.

۲۸. (الف) صرفاً با استفاده از ویژگیهای سریهای توانی، یک سری توانی بیابید که تابعی چون f را نمایش دهد به طوری که به ازای هر x ، $f(x) > 0$ و $f'(x) = 2xf(x)$ ، و $f(0) = 1$. (ب) با حل معادله دیفرانسیل $D_x y = 2xy$ و با این شرط اولیه که وقتی $x = 0$ ، $y = 1$ ، نتیجه حاصل از قسمت (الف) را تأیید کنید.

۲۹. فرض کنید تابعی چون f با سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ نمایش داده می شود. اگر f یک تابع زوج باشد، نشان دهید وقتی که n فرد است، $c_n = 0$.

۳۰. فرض کنید ثابت 0 با سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ که شعاع همگراییش $R > 0$ است، نمایش داده می شود. ثابت کنید که به ازای هر n ، $c_n = 0$.

۹.۱۵ انتگرال گیری از سری توانی

قضیه مربوط به انتگرال گیری جمله به جمله از سری توانی، پیامدی از قضیه ۳.۸.۱۵ است.

۹.۱۵ قضیه فرض کنید $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ یک سری توانی باشد که شعاع همگراییش $R > 0$ است. در این صورت، اگر f تابعی با ضابطه

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

باشد، این تابع بر هر زیر بازه بسته از $(-R, R)$ انتگرال پذیر است، و انتگرال f با انتگرال گیری جمله به جمله از سری توانی مفروض بدست می آید؛ یعنی، اگر x در $(-R, R)$ باشد، آنگاه

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

علاوه بر این، شعاع همگرایی سری حاصل R است.

اثبات فرض کنید g تابعی با ضابطه

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

باشد. چون جملات سری توانی که $f(x)$ را نمایش می‌دهد مشتقهای جملات سری توانی هستند که $g(x)$ را نمایش می‌دهد، با توجه به قضیه ۱۰.۸.۱۵، شعاع همگرایی این دوسری یکسان است. بنابراین قضیه ۳.۸.۱۵

$$g'(x) = f(x), \quad (-R, R) \text{ در } x \text{ به‌ازای هر } x$$

از قضیه ۲.۸.۱۵ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر x در $(-R, R)$ ، $f'(x) = g'(x)$. چون f بر $(-R, R)$ مشتق‌پذیر است، این تابع بر $(-R, R)$ پیوسته است؛ در نتیجه، f بر هر زیر بازه بسته از $(-R, R)$ پیوسته است. بنابراین قضیه ۲.۵.۶ اگر x در $(-R, R)$ باشد، آنگاه

$$\int_0^x f(t) dt = g(x) - g(0) = g(x)$$

یا معادلش

$$\square \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

اگر نتوانیم انتگرال معینی را مستقیماً بسا یافتن ضد مشتق انتگرال محاسبه کنیم، غالباً قضیه ۱۰.۹.۱۵ را به‌کار می‌بریم. مثالهای ۱ و ۲ تکنیک کار را نشان می‌دهند. انتگرال معین $\int_0^x e^{-t^2} dt$ که در این دو مثال دیده می‌شود شبیه انتگرال معینی است که اندازه مساحت يك ناحیه زیر «منحنی احتمال نورمال» را نشان می‌دهد.

مثال ۱ سری توانی به‌دست آورید که $\int_0^x e^{-t^2} dt$ را نمایش دهد.

حل بنابر مثال ۴ در بخش ۸.۱۵، به‌ازای هر مقدار x ،

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

اگر به‌جای x ، t^2 را قرار دهیم، داریم

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \dots$$

به‌ازای هر مقدار t ، جمله به‌جمله انتگرال می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

انتگرال گیری از سری توانی ۳۶۷

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} + \dots\end{aligned}$$

این سری توانی، انتگرال را به ازای تمام مقادیر x نمایش می‌دهد. ▲

مثال ۲ با استفاده از نتیجه مثال ۱، مقدار $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$ را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

حل در سری توانی که در مثال ۱ به دست آمد، به جای x ، $1/2$ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \dots \\ &\approx 0.5 - 0.0417 + 0.0031 - 0.0002 + \dots\end{aligned}$$

این یک سری متناوب همگراست که در آن، $|u_{n+1}| < |u_n|$. پس، اگر برای تقریب کردن مجموع از سه جمله اول استفاده کنیم، بنا بر قضیه ۴.۶.۱۵، خطا از قدر مطلق جمله چهارم کمتر خواهد بود. از سه جمله اول داریم

▲ $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt \approx 0.461.$

مثال ۳ سری توانی به دست آورید که $\ln(1+x)$ را نمایش دهد.

حل تابع f را که به صورت $f(t) = 1/(1+t)$ تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. نمایشی از این تابع به صورت سری توانی، سری مذکور در (۲) از بخش ۸.۱۵ است، که عبارت است از

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \dots, \quad |t| < 1$$

با استفاده از قضیه ۱.۹.۱۵، جمله به جمله را انتگرال می‌گیریم و به دست می‌آوریم

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt, \quad |x| < 1$$

بنابراین

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad |x| < 1$$

یا معادلش

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1 \quad (1)$$

چون $|x| < 1$ داریم $|1+x| = (1+x)$. لذا هنگام نوشتن $\ln(1+x)$ به علامت قدرمطلق نیازی نیست. ▲

در مثال ۳، قضیه ۱۰۹.۱۵ به ما اجازه می‌دهد نتیجه بگیریم که سری توانی مذکور در (۱)، صرفاً به‌ازای مقادیری از x که در بازه باز $(-1, 1)$ هستند، تابع را نمایش می‌دهد. اما، همان‌گونه که در مثال ۱ از بخش ۶.۱۵ نشان دادیم، این سری در ۱، نقطه انتهایی راست، همگراست. وقتی که $x = -1$ ، سری توانی به‌صورت منفی سری همساز درمی‌آید که واگراست. لذا، بازه همگرایی سری توانی مذکور در (۱)، $[-1, 1)$ است.

در نمونه زیر، ثابت می‌کنیم که مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}/n$ برابر $\ln 2$ است و از این طریق، نشان می‌دهیم که سری توانی مذکور در (۱)، $\ln(1+x)$ را در $x=1$ نمایش می‌دهد.

○ نمونه ۱ مجموع جزئی n م سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}/n$ عبارت است از

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \quad (2)$$

از تعریف ۲.۳.۱۵ نتیجه می‌شود که اگر نشان دهیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2$ ، آنگاه ثابت کرده‌ایم که مجموع سری $\ln 2$ است.

در درس جبر دیده‌ایم که فرمول مجموع تصاعد هندسی به‌صورت زیر است

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1-r}.$$

و این فرمول، با $a=1$ و $r=-t$ ، به‌شکل زیر درمی‌آید

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-t)^{n-1} = \frac{1 - (-t)^n}{1+t}$$

که به‌صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} = \frac{1}{1+t} + (-1)^{n+1} \frac{t^n}{1+t}.$$

از ۰ تا ۱ انتگرال می گیریم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 [1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1}] dt \\ = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \end{aligned}$$

و نتیجه می گیریم که

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt. \quad (3)$$

با مراجعه به (۲)، می بینیم که طرف چپ (۳)، s_n است. با فرض

$$R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

(۳) را می توان به صورت زیر نوشت

$$s_n = \ln 2 + R_n. \quad (4)$$

چون به ازای هر t در $[0, 1]$ ، $t^n/(1+t) \leq t^n$ ، بنا به قضیه ۸.۳.۶ لازم می آید که

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt.$$

از اینرو

$$0 \leq |R_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/(n+1) = 0$ ، از نامساوی فوق، و قضیه افسردگی (۱۰.۹.۲) نتیجه می شود

که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. لذا بنا بر (۴)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \ln 2 + \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$$

$$= \ln 2.$$

$$\circ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2. \quad (5)$$

حل مثال ۳ نشان می‌دهد که اگر $|x| < 1$ ، سری توانی مذکور در (۱) نمایشگر $\ln(x+1)$ است. پس با توجه به نتیجه نمونه ۱ می‌توان استنتاج کرد که به ازای هر x در بازه $[-1, 1]$ ، که بازه همگرایی سری توانی (۱) است، این سری توانی $\ln(x+1)$ را نمایش می‌دهد.

هرچند این نکته جالب است که مجموع سری مذکور در (۵) برابر $\ln 2$ است؛ اما، همگرایی این سری کندتر از آن است که بتواند برای محاسبه $\ln 2$ به کار رود. حال می‌پردازیم به یافتن یک سری توانی جهت محاسبه لگاریتمهای طبیعی. بنا بر (۱)، به ازای هر x در $[-1, 1]$ ،

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots. \quad (6)$$

اگر در این سری به جای x ، $-x$ را قرار دهیم، به ازای هر x در $(-1, 1]$ داریم

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots. \quad (7)$$

(۷) را از (۶) جمله به جمله کم می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\cdot \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad |x| < 1 \quad (8)$$

سری (۸) را می‌توان برای محاسبه لگاریتم طبیعی هر عدد مثبت دلخواه به کار برد.

○ نمونه ۲ اگر y عدد مثبت دلخواهی باشد، می‌نویسیم

$$y = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{و} \quad x = \frac{y-1}{y+1} \quad \text{و} \quad |x| < 1$$

مثلاً، اگر $y=2$ ، آنگاه $x=1/3$ بنا بر (۸)

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \dots \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} + \frac{1}{1948617} + \dots \right) \\ &\approx 2(0.33333333 + 0.0123456 + 0.0000823 + 0.0000065 \\ &\quad + 0.0000006 + 0.0000001 + \dots) \end{aligned}$$

انتگرال گیری از سری توانی ۳۷۱

با استفاده از شش جمله اول داخل پرانتز، ضرب مجموع آنها در ۲، و گرد کردن نتیجه تا پنج رقم اعشار، به دست می آوریم

$$\circ \quad \ln 2 \approx 0.69315.$$

مثال ۴ يك سری توانی بیابید که $\tan^{-1}x$ را نمایش دهد.

حل بنا بر (۴) در بخش ۸.۱۵ داریم

$$\cdot \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad |x| < 1$$

به کمک قضیه ۱.۹.۱۵ و با انتگرال گیری جمله به جمله به دست می آوریم

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots.$$

بنابراین

$$\blacktriangle \quad \cdot \tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1 \quad \text{اگر} \quad (9)$$

گرچه قضیه ۱.۹.۱۵ به ما اجازه می دهد نتیجه بگیریم که سری توانی (۹) تنها به ازای مقادیری از x که در $|x| < 1$ صدق کنند، $\tan^{-1}x$ را نمایش می دهد، اما می توان نشان داد که بازه همگرایی این سری توانی $[-1, 1]$ است و این سری به ازای تمام مقادیر x در بازه همگراییش، نمایشی از $\tan^{-1}x$ را به دست می دهد (در تمرین ۲۸ از شما خواسته می شود که این مطلب را نشان دهید). بنابراین

$$\cdot \tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad |x| \leq 1 \quad \text{اگر} \quad (10)$$

$\circ$ نمونه ۳ اگر در (۱۰) قرار دهیم $x=1$ ، داریم

$$\circ \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots.$$

سری مذکور در نمونه ۳ برای محاسبه π مناسب نیست زیرا همگرایی آن بسیار کند است. مثال زیر روش بهتری را ارائه می دهد.

مثال ۵ ثابت کنید که $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1/2) + \tan^{-1}(1/3)$ از این فرمول

وسری توانی مربوط به $\tan^{-1} x$ ، مذکور در مثال ۴، استفاده کنید و مقدار π را با دقت چهار رقم اعشار به دست آورید.

حل فرض کنید $\alpha = \tan^{-1}(1/2)$ و $\beta = \tan^{-1}(1/3)$. در این صورت

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3 + 2}{6 - 1} \\ &= 1 \\ &= \tan \frac{1}{4} \pi.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{1}{4} \pi = \alpha + \beta = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}. \quad (11)$$

از فرمول (۱۰) با $x = 1/2$ ، داریم

$$\begin{aligned}\tan^{-1} \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \\ &\quad - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2}\right)^{13} - \frac{1}{15} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \frac{1}{896} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{22528} \\ &\quad + \frac{1}{106492} - \frac{1}{491520} + \dots \\ &\approx 0.5 - 0.04167 + 0.00625 - 0.00112 + 0.00022 \\ &\quad - 0.00004 + 0.00001 - 0.000002 + \dots\end{aligned}$$

چون سری متناوب است و $|u_{n+1}| < |u_n|$ ، از قضیه ۴.۶.۱۵ نتیجه می گیریم که گر برای تقریب کردن مجموع این سری از هفت جمله اول استفاده کنیم، خطا از قدر مطلق $\frac{1}{4}$ هفتم کمتر است. بنابراین

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} \approx 0.333333. \quad (12)$$

از فرمول (۱۰) با $x = 1/3$ ، داریم

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} \right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^9 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{3} \right)^{11} + \dots \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} - \frac{1}{15309} + \frac{1}{177147} - \frac{1}{1948617} + \dots \\ &\approx 0.333333 - 0.012345 + 0.000082 - 0.000007 \\ &\quad + 0.000001 - 0.0000001 + \dots. \end{aligned}$$

اگر برای تقریب کردن مجموع از پنج جمله اول استفاده کنیم، داریم

$$\tan^{-1} \frac{1}{3} \approx 0.32174. \quad (13)$$

چنانچه از (۱۲) و (۱۳) در (۱۱) قرار دهیم به دست می آوریم

$$\frac{1}{4} \pi \approx 0.333333 + 0.32174 = 0.655073.$$

این را در ۴ ضرب، و تا چهار رقم اعشار گرد می کنیم و به دست می آوریم: $\pi \approx 2.62029$.

تمرینهای ۹.۱۵

دو تمرینهای ۱ تا ۴، مقدار انتگرال معین را تا سه رقم اعشار با دوش محاسبه کنید:
(الف) از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کنید؛ (ب) یک سری توانی را به کار ببرید. نتایج را با هم مقایسه کنید.

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$1. \int_{1/2}^{1/2} \frac{dx}{1-x}$$

$$4. \int_0^{1/2} \ln(1+x) dx$$

$$3. \int_0^1 e^x dx$$

دترمینهای ۵ تا ۱۶، به کمک سریها، مقدار انتگرال مفروض را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} ۵. \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \quad ۶. \int_0^{1/2} e^{-x^2} dx \\ ۷. \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad ۸. \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \\ ۹. \int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2 dx \quad ۱۰. \int_0^{1/2} \cosh x^2 dx \\ ۱۱. \int_0^1 x \sinh \sqrt{x} dx \end{aligned}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \int_0^1 h(x) dx \quad ۱۲ \quad \text{که در آن}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\tan^{-1} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \int_0^{1/2} g(x) dx \quad ۱۳ \quad \text{که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \int_0^{1/2} f(x) dx \quad ۱۴ \quad \text{که در آن}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \int_0^1 f(x) dx \quad ۱۵ \quad \text{که در آن}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \int_0^1 g(x) dx \quad ۱۶ \quad \text{که در آن}$$

$$۱۷. \text{ فرض کنید به ازای هر } x \text{ داشته باشیم } \cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{با انتگرال گیری}$$

جمله به جمله از سری داده شده از ۰ تا x ، یک سری توانی برای نمایش $\sinh x$ به دست آورید.

۱۸. با انتگرال گیری جمله به جمله از سری توانی نمایشگر $1/(1+at)$ ، از ۰ تا x ، يك سری توانی به دست آورید كه $\ln(1+ax)$ را نمایش دهد.

۱۹. از سری توانی مذکور در معادله (۹) استفاده، و $\tan^{-1}(1/۴)$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۰. با استفاده از سری توانی مذکور در معادله (۸)، $\ln ۳$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۱. اگر $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!}$ ، $f'(x)$ را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۲. اگر $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2+۳}$ ، $g(1)$ را با دقت دو رقم اعشار محاسبه کنید.

۲۳. با انتگرال گیری جمله به جمله از يك سری توانی نمایشگر $(1-t^2)^{-1}$ ، از ۰ تا x ، يك سری توانی برای نمایش $\tanh^{-1} x$ به دست آورید.

۲۴. با ضرب سری نمایشگر e^x در x ، يك سری توانی به دست آورید كه xe^x را نمایش دهد و سپس با انتگرال گیری جمله به جمله از سری حاصل، از ۰ تا ۱، نشان دهید كه

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}$$

۲۵. با انتگرال گیری جمله به جمله از يك سری توانی نمایشگر $\ln(1-t)$ ، از ۰ تا x ، نشان دهید كه

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)n} = x + (1-x) \ln(1-x).$$

۲۶. با انتگرال گیری جمله به جمله از يك سری توانی نمایشگر $\ln(1+t)$ ، از ۰ تا x ، نشان دهید كه

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = 2 \ln 2 - 1.$$

۲۷. با انتگرال گیری جمله به جمله از يك سری توانی نمایشگر $t \tan^{-1} t$ ، از ۰ تا x ، نشان دهید كه

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} [(x^2+1) \tan^{-1} x - x].$$

۲۸. نشان دهید كه بازه همگرایی سری توانی مذکور در معادله (۹)، $[-1, 1]$ است، و

نیز نشان دهید که این سری توانی به ازای هر x در بازه همگرایی، نمایشی از $\tan^{-1} x$ به دست می دهد.

۲۹. اگر $f''(x) = -f(x)$ ، $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ ، یک سری توانی بر حسب x برای $f(x)$ به دست آورید. همچنین، شعاع همگرایی سری توانی حاصل را بیابید.

۳۰. با انتگرال گیری جمله به جمله از یک سری توانی نمایشگر $(1-t^2)^{-1}$ ، از 0 تا x ، سری توانی مذکور در معادله (۸) برای نمایش $\ln[(1+x)/(1-x)]$ را به دست آورید.

۱۰.۱۵ سری تیلر

اگر تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (1)$$

که شعاع همگراییش $R > 0$ است، با استفاده متوالی از قضیه ۳۰.۸.۱۵ نتیجه می گیریم که f بر $(-R, R)$ دارای مشتقهای تمام مراتب است. گوییم چنین تابعی بر $(-R, R)$ بینهایت بادمشتق پذیر است. اگر از تابع مذکور در (۱) به طور متوالی مشتق بگیریم، داریم

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots \quad (2)$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + 3 \cdot 4c_4 x^2 + \dots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \dots \quad (3)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 x + \dots + (n-2)(n-1)nc_n x^{n-3} + \dots \quad (4)$$

$$f^{(iv)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 + \dots + (n-3)(n-2)(n-1)nc_n x^{n-4} + \dots \quad (5)$$

و غیره. اگر در (۱) قرار دهیم $x=0$ ، داریم

$$f(0) = c_0.$$

اگر در (۲) قرار دهیم $x=0$ ، داریم

$$f'(0) = c_1.$$

اگر در (۳) قرار دهیم $x=0$ ، خواهیم داشت

$$f''(0) = 2c_2 \quad \text{و لذا} \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

از (۴) با فرض $x=0$ نتیجه می شود

$$c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \quad \text{و لذا} \quad f'''(0) = 2 \cdot 3 c_3$$

با روشی مشابه، از (۵) با فرض $x = 0$ به دست می آوریم

$$c_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{4!} \quad \text{و لذا} \quad f^{(iv)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 c_4$$

به طور کلی

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{به ازای هر عدد صحیح و مثبت } n, \quad (6)$$

فرمول (۶) حتی وقتی که $n = 0$ ، برقرار است با این شرط که قرار بگذاریم $f^{(0)}(0) = f(0)$ باشد و $0! = 1$. پس، بنابر (۱) و (۶)، سری توانی f بر حسب x را می توان به صورت زیر نوشت

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (7)$$

در حالت کلیتر، تابع f را به صورت یک سری توانی بر حسب $x - a$ در نظر بگیریم؛ یعنی، فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$$

$$= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (8)$$

اگر شعاع همگرایی این سری R باشد، آنگاه f بر $(a-R, a+R)$ بینهایت بار مشتق پذیر است. مشتق گیرهای متوالی از تابع مذکور در (۸) نتیجه می دهد

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

$$+ nc_n(x-a)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \dots$$

$$+ (n-1)nc_n(x-a)^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + \dots$$

$$+ (n-2)(n-1)nc_n(x-a)^{n-3} + \dots$$

و غیره. اگر در سریهای توانی نمایشگر f و مشتقهایش قرار دهیم $x = a$ ، به دست می آوریم

$$c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

و به‌طور کلی

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (9)$$

بنابر (۸) و (۹)، می‌توانیم سری توانی f بر حسب $x - a$ را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots. \quad (10)$$

سری مذکور در (۱۰) به سری تیلر f در a موسوم است. حالت ویژه (۱۰)، وقتی که $a = 0$ ، همان (۷) است که سری ماکلورن نامیده می‌شود.

مثال ۱ سری ماکلورن مربوط به e^x را بیابید.

حل اگر $f(x) = e^x$ ، به‌ازای هر x داریم $f^{(n)}(x) = e^x$ ؛ بنابراین به‌ازای تمام مقادیر n ، $f^{(n)}(0) = 1$. لذا از (۷) سری ماکلورن مربوط به e^x به‌دست می‌آید

$$\blacktriangle \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots. \quad (11)$$

سری (۱۱) با سری به‌دست آمده در مثال ۳ از بخش ۸.۱۵ یکسان است.

مثال ۲ سری تیلر مربوط به $\sin x$ در a را بیابید.

حل اگر $f(x) = \sin x$ ، آنگاه $f'(x) = \cos x$ ، $f''(x) = -\sin x$ ، $f'''(x) = -\cos x$ ، $f^{(iv)}(x) = \sin x$ و غیره. پس، بنابر فرمول (۹)، $c_0 = \sin a$ ، $c_1 = \cos a$ ، $c_2 = (-\sin a)/2!$ ، $c_3 = (-\cos a)/3!$ ، $c_4 = (\sin a)/4!$ و غیره. سری تیلر مطلوب از (۱۰) به‌دست می‌آید که عبارت است از

$$\begin{aligned} & \sin a + \cos a(x-a) - \sin a \frac{(x-a)^2}{2!} - \cos a \frac{(x-a)^3}{3!} \\ & \blacktriangle \quad + \sin a \frac{(x-a)^4}{4!} + \dots. \end{aligned}$$

می‌توان استنتاج کرد که نمایش یک تابع به‌صورت سری توانی، یکناست. یعنی، اگر دو تابع در بازه‌ای که شامل عدد a است به‌ازای هر عضو این بازه دارای مقادیر

یکسانی باشند، و اگر هر دو تابع، سریهایی توانی برحسب $x - a$ داشته باشند که آن دو تابع را نمایش دهند، آنگاه این سریها باید یکسان باشند زیرا ضرایب موجود در این سریها از مقادیر توابع و مشتقهایشان در a به دست می آیند. بنابراین، اگر تابعی یک سری توانی برحسب $x - a$ داشته باشد که آن را نمایش دهد، این سری باید سری تیلر آن در a باشد. لذا مجبور نیستیم سری تیلر یک تابع مفروض را بیا استفاده از فرمول (۱۰) به دست آوریم. به هر روشی یک سری توانی برحسب $x - a$ به دست آوریم که نمایشگر تابع باشد، آن سری، سری تیلر تابع در a خواهد بود.

○ نمونه ۱ برای یافتن سری تیلر مربوط به e^x در a ، می نویسیم $e^x = e^a e^{x-a}$ ، سپس در سری (۱۱) به جای x ، $x - a$ را قرار می دهیم و از آن استفاده می کنیم. داریم

$$e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} + \dots \right].$$

○ نمونه ۲ برای یافتن سری تیلر مربوط به $\ln x$ در a ($a > 0$) می توان از سری مربوط به $\ln(1+x)$ که در مثال ۳ از بخش ۹.۱۵ به دست آمد، استفاده کرد و نوشت

$$\ln x = \ln[a + (x-a)] = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right). \quad (12)$$

چون

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}, \quad -1 < t \leq 1$$
 اگر

پس

$$\ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots.$$

بنابراین، از (۱۲) نتیجه می شود

$$\ln x = \ln a + \frac{x-a}{a} - \frac{(x-a)^2}{2a^2} + \frac{(x-a)^3}{3a^3} - \dots$$

و این سری $\ln x$ را نمایش می دهد با این شرط که $-1 < (x-a)/a \leq 1$ ، یا معادلش $0 < x \leq 2a$.

○

در اینجا يك پرسش طبیعی مطرح می‌شود: اگر تابعی يك سری تیلر بر حسب $x-a$ داشته باشد که شعاع همگرایی آن $R > 0$ باشد، آیا این سری به ازای همه مقادیر x در بازه $(a-R, a+R)$ تابع را نمایش می‌دهد؟ در مورد اغلب توابع مقدماتی جواب مثبت است. توابعی هم وجود دارند که در مورد آنها پاسخ منفی است. مثال زیر این نکته را نشان می‌دهد.

مثال ۳ فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

سری ماکلورن مربوط به f را بیابید، و نشان دهید که این سری به ازای همه مقادیر x همگراست، اما $f(x)$ را تنها در $x=0$ نمایش می‌دهد.

حل برای یافتن $f'(0)$ ، از تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}}.$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = +\infty$ ، قاعده هوییتال را می‌توان به کار برد. بنابراین

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0.$$

با روشی مشابه، با استفاده از تعریف مشتق و قاعده هوییتال، برای همه مشتقها مقدار ۰ به دست می‌آید. لذا به ازای هر n ، $f^{(n)}(0) = 0$. پس سری ماکلورن تابع مفروض، $0 + 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + \dots$ است. این سری به ازای تمام مقادیر x به ۰ می‌گراید؛ اما، اگر $x \neq 0$ ، $f(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$. ▲

قضیه زیر آزموننی به دست می‌دهد که به کمک آن می‌توان تعیین کرد که يك تابع با سری تیلرش نمایش داده می‌شود یا نه.

۱۰۱۰۱۵ قضیه فرض کنید f تابعی باشد که خود و تمام مشتقهایش در بازه ای چون $(a-r, a+r)$ وجود دارند. در این صورت، به ازای همه مقادیری چون x که در

$|x-a| < r$ صدق کنند، این تابع توسط سری تیلرش

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

نمایش داده می‌شود اگر و تنها اگر

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(1+n)!} (x-a)^{n+1} = 0.$$

در اینجا به ازای هر n ، ξ_n بین x و a است.

اثبات در بازه $(a-r, a+r)$ تابع f در فرض قضیه ۱۰۵۰۱۴ صدق می‌کند و داریم

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (۱۳)$$

که در آن، $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلر درجه n در a ، و $R_n(x)$ باقیمانده است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \quad (۱۴)$$

در اینجا، به ازای هر n ، ξ_n بین x و a است.

می‌دانیم که $P_n(x)$ ، مجموع جزئی n م سری تیلر f در a است. لذا اگر نشان دهیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$ وجود دارد و برابر است با $f(x)$ اگر و تنها اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ ، قضیه اثبات خواهد شد. بنا بر (۱۳)

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x). \quad (۱۵)$$

اگر $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ ، از (۱۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) \\ &= f(x) - 0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

حال با این فرض که $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = f(x)$ ، می‌خواهیم نشان دهیم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

با توجه به (۱۳) داریم

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

و لذا

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) &= f(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

و در اینجا، اثبات به انجام رسیده است. $\square$

قضیه ۱۰۱۵.۱۰ نه تنها در مورد صورت لاگرانژی، بلکه در مورد سایر صورتهای باقیمانده R_n نیز برقرار است. به کار بردن قضیه ۱۰۱۵.۱۰ در عمل غالباً دشوار است زیرا مقادیر ξ_n دلخواه اند. اما، گاه می توان یک کران بالا برای $R_n(x)$ یافت، و ثابت کرد که حد این کران بالا وقتی که $n \rightarrow +\infty$ ، صفر است. آگاهی از حد زیر در برخی از موارد مفید است

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \text{به ازای هر } x$$

این حد از مثال ۲ در بخش ۷.۱۵ به دست می آید؛ در آنجا نشان دادیم که سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ به ازای تمام مقادیر x همگراست و لذا حد جمله n م آن باید صفر باشد.

به همین منوال، چون $\sum_{n=0}^{+\infty} (x-a)^n/n!$ به ازای تمام مقادیر x همگراست،

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} = 0, \quad \text{به ازای هر } x$$

مثال ۴ با استفاده از قضیه ۱۰۱۵.۱۰ نشان دهید که سری ماکلورن e^x که در مثال ۱ به دست آمد، به ازای تمام مقادیر x تابع را نمایش می دهد.

حل سری ماکلورن e^x ، سری مذکور در (۱۱) است؛ و با این شرط که هر ξ_n بین ۰ و x باشد، داریم

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

باید نشان دهیم که به ازای هر x ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. سه حالت پیش می آید: $x > 0$ ، $x = 0$ و $x < 0$. اگر $x > 0$ ، آنگاه $0 < \xi_n < x$ ؛ لذا $e^{\xi_n} < e^x$. پس

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} . \quad (18)$$

از (۱۶) نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1}/(n+1)! = 0$ ، پس

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 .$$

بنابراین، از (۱۸) و قضیهٔ افشردگی (۱۰.۹.۲) نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$. اگر $x < 0$ ، آنگاه $0 < \xi_n < x$ و $0 < e^{\xi_n} < 1$. بنابراین، اگر $x^{n+1} > 0$

$$0 < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

و اگر $x^{n+1} < 0$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0 .$$

در هر حالت، چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1}/(n+1)! = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. بالاخره، اگر $x = 0$ ، مجموع سری ۱ است که همان e^0 است. بنابراین به‌ازای همهٔ مقادیر x ، سری (۱۱)، e^x را نمایش می‌دهد. ▲

بنا بر نتایج مثال بالا می‌توان نوشت

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots , \quad \text{به‌ازای هر } x \quad (19)$$

و این با مثال ۳ از بخش ۸.۱۵ سازگار است.

مثال ۵ نشان دهید که سری تیلر $\sin x$ در a که در مثال ۲ به‌دست آمد، تابع را به‌ازای تمام مقادیر x نمایش می‌دهد.

حل از قضیهٔ ۱۰.۱۵.۱ استفاده می‌کنیم؛ پس باید نشان دهیم که

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} = 0 .$$

چون $f(x) = \sin x$ ، $f^{(n+1)}(\xi_n)$ یکی از اعداد زیر خواهد بود: $\sin \xi_n$ ، $\cos \xi_n$

$\xi_n \cos -$ ، یا $\xi_n \sin -$. در هر حالت، $|f^{(n+1)}(\xi_n)| \leq 1$. پس

$$0 < |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (20)$$

بنابر (۱۷)، $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x-a|^{n+1}/(n+1)! = 0$. پس، طبق قضیهٔ افشردگی (۱.۹.۲) و

▲ (۲۰) نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

مثال ۶ مقدار $\sin 47^\circ$ را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

حل در مثالهای ۲ و ۵، سری تیلر مربوط به $\sin x$ در a را به دست آوردیم. این سری به ازای تمام مقادیر x ، تابع را نمایش می‌دهد. سری عبارت است از

$$\sin x = \sin a + \cos a(x-a) - \sin a \frac{(x-a)^2}{2!} - \cos a \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots$$

برای اینکه $(x-a)$ کوچک باشد، باید مقداری برای a در نظر گرفت که نزدیک آن مقدار از x باشد که به ازای آن، مقدار تابع را محاسبه می‌کنیم؛ سینوس و کسینوس a نیز باید معلوم باشند. لذا می‌گیریم $a = \pi/4$ و داریم

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \frac{1}{4}\pi + \cos \frac{1}{4}\pi \left(x - \frac{1}{4}\pi\right) - \sin \frac{1}{4}\pi \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^2}{2!} \\ &\quad - \cos \frac{1}{4}\pi \frac{\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

چون 47° معادل است با $47\pi/180$ رادیان که برابر است با $((\pi/4) + (\pi/90))$ رادیان، بنابر معادله (۲۱) داریم

$$\begin{aligned} \sin \frac{47}{180}\pi &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{90}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{90}\pi\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{1}{90}\pi\right)^3 + \dots \\ &\approx \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + 0.003490 - 0.000061 - 0.0000002 + \dots). \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\sqrt{2} = ۱.۴۱۴۲۱$ و از سه جمله اول سری استفاده کنیم، به دست می آوریم

$$\sin \frac{۴۷}{۱۸۰} \pi \approx (۰.۷۰۷۱۱)(۱.۰۳۴۲۹) = ۰.۷۳۱۳۶.$$

اگر جواب را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، داریم $\sin ۴۷^\circ \approx ۰.۷۳۱۴$. خطای حاصل از به کار بردن سه جمله اول $R_3(۴۷\pi/۱۸۰)$ است، و بنا بر (۲۰)،

$$\left| R_3 \left(\frac{۴۷}{۱۸۰} \pi \right) \right| \leq \frac{\left(\frac{۱}{۹۰} \pi \right)^3}{3!} \approx ۰.۰۰۰۰۰۱۰.$$

بنابراین، نتیجه حاصل تا چهار رقم اعشار دقیق است. ▲

هر يك از سریهای ماکلورن زیر، تابع مفروض را به ازای تمام مقادیر x نمایش می دهد.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (۲۲)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (۲۳)$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (۲۴)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (۲۵)$$

سری (۲۲) نتیجه مستقیم مثالهای ۲ و ۵ با $a=0$ است. در تمرینهای ۱، ۲، و ۳ از شما خواسته می شود تساویهای (۲۳)، (۲۴)، و (۲۵) را تحقیق کنید.

مثال ۷ انتگرال زیر را با دقت شش رقم اعشار محاسبه کنید

$$\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

حل بر حسب توابع مقدماتی نمی توان ضد مشتقی برای انتگرال به دست آورد. اما، بنا بر سری (۲۲)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x} \cdot \sin x \\ &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots\end{aligned}$$

که به ازای تمام مقادیر $x \neq 0$ درست است. با انتگرال گیری جمله به جمله داریم

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \dots \Big|_{1/2}^1 \\ &\approx (1 - 0.0555555 + 0.00166667 - 0.0000283 + 0.0000003 - \dots) \\ &\quad - (0.5 - 0.0694444 + 0.0000521 - 0.0000002 + \dots).\end{aligned}$$

در داخل هر یک از پرانتزها یک سری متناوب همگرا، با $|u_{n+1}| < |u_n|$ وجود دارد. در پرانتز اول، چهار جمله اول را بدکار می بریم زیرا خطای حاصل از 0.0000003 کمتر است. در پرانتز دوم از سه جمله اول استفاده می کنیم که خطای حاصل از 0.0000002 کمتر است. پس از محاسبات لازم و گرد کردن نتیجه تا شش رقم اعشار، به دست می آوریم

$$\Delta \quad \int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.452975.$$

تمرینهای ۱۰.۱۵

۱. ثابت کنید که سری زیر به ازای همه مقادیر x ، $\cos x$ را نمایش می دهد

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

۲. ثابت کنید که سری زیر به ازای تمام مقادیر x ، $\sinh x$ را نمایش می دهد

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

۳. ثابت کنید که سری زیر به ازای تمام مقادیر x ، $\cosh x$ را نمایش می دهد

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

۴. با مشتق‌گیری از سری ماکلورن مربوط به تابع سینوسی، سری ماکلورن مربوط به تابع کسینوسی را به دست آورید. همچنین، با مشتق‌گیری از سری ماکلورن مربوط به تابع کسینوسی، سری ماکلورن تابع سینوسی را بیابید.

۵. با مشتق‌گیری از سری ماکلورن تابع کسینوس هیپر بولیک، سری ماکلورن مربوط به تابع سینوس هیپر بولیک را به دست آورید. همچنین، از سری ماکلورن تابع سینوس هیپر بولیک مشتق بگیرید و سری ماکلورن مربوط به تابع کسینوس هیپر بولیک را به دست آورید.

۶. با استفاده از سری ماکلورن e^x ، سری تیلر e^x در ۳ را بیابید.

۷. به کمک سری ماکلورن $\ln(1+x)$ ، سری تیلر $\ln x$ در ۲ را بیابید.

۸. می‌دانیم که $\ln 2 = 0.6931$. سری به دست آمده در تمرین ۷ را به کار ببرید و $\ln 3$ را با دقت چهار رقم اعشار بیابید.

در تمرینهای ۹ تا ۱۴، یک سری توانی برای نمایش تابع مفروضه در عدد a بیابید، و شعاع همگراییش را تعیین کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; a = 1.10 \quad f(x) = \ln(x+1); a = 1.9$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; a = 1.12 \quad f(x) = \sqrt{x}; a = 4.11$$

$$f(x) = 2^x; a = 0.14 \quad f(x) = \cos x; a = \frac{\pi}{3}.13$$

۱۵. سری ماکلورن $\sin^2 x$ را بیابید (دانهمایی: از $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ استفاده کنید).

۱۶. سری ماکلورن $\cos^2 x$ را بیابید (دانهمایی: از $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ استفاده کنید).

۱۷. (الف) اولین سه جمله ناصفر سری ماکلورن $\tan x$ را بیابید. (ب) از نتیجه قسمت (الف) و مشتق‌گیری جمله به جمله استفاده کنید و اولین سه جمله ناصفر سری ماکلورن $\sec^2 x$ را پیدا کنید. (پ) نتیجه قسمت (الف) و انتگرال‌گیری جمله به جمله را به کار گیرید و اولین سه جمله ناصفر سری ماکلورن $\ln |\sec x|$ را بیابید.

۱۸. (الف) اولین سه جمله ناصفر سری تیلر $\cot x$ در $\pi/2$ را بیابید. (ب) از نتیجه قسمت (الف) و انتگرال‌گیری جمله به جمله استفاده کنید و اولین سه جمله ناصفر سری تیلر $\ln \sin x$ در $\pi/2$ را پیدا کنید.

دترمینهای ۱۹ تا ۲۴، با استفاده از يك سری توانی، مقدار کمیت داده شده را با دقت خواسته شده محاسبه کنید.

$$۱۹. \cos 58^\circ; \text{چهار رقم اعشار} \quad ۲۰. \sqrt[5]{e}; \text{چهار رقم اعشار}$$

$$۲۱. \sqrt[5]{30}; \text{پنج رقم اعشار} \quad ۲۲. \sinh \frac{1}{4}; \text{پنج رقم اعشار}$$

$$۲۳. \ln(0.8); \text{چهار رقم اعشار} \quad ۲۴. \sqrt[3]{29}; \text{سه رقم اعشار}$$

۲۵. مقدار e را طوری محاسبه کنید که تا هفت رقم اعشار درست باشد، و ثابت کنید که پاسختان دقت خواسته شده را دارد.

دترمینهای ۲۶ تا ۳۱، مقدار انتگرال معین را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

$$۲۶. \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx \quad ۲۷. \int_0^{1/2} \sin x^2 dx$$

$$۲۸. \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx \quad ۲۹. \int_0^{0.1} \ln(1 + \sin x) dx$$

$$۳۰. \int_0^{1/2} f(x) dx; \text{که در آن } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$۳۱. \int_0^1 g(x) dx; \text{که در آن } g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

۳۲. تابع E با ضابطه

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

تابع خطا نام دارد، و در آمار ریاضی واجد اهمیت است. سری ماکلورن تابع خطا را بیابید.

۳۳. مطلوب است مقادیر a_n ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) به طوری که چندجمله‌ای

$$f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17$$

را بتوان به صورت زیر نوشت

$$f(x) = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

۳۳. مطلوب است مقادیر a_n ($n = 0, 1, 2, 3$) به طوری که چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ را بتوان به صورت

$$f(x) = a_3(x+2)^3 + a_2(x+2)^2 + a_1(x+2) + a_0$$

نوشت.

۱۱.۱۵ سری دو جمله‌ای

در جبر مقدماتی آموخته‌اید که قضیه دو جمله‌ای، عبارت $(a+b)^m$ را، که در آن m يك عدد صحیح و مثبت است، به صورت مجموعی از توانهای a و b به شرح زیر بیان می‌کند

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}b^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1)}{k!} a^{m-k}b^k + \dots + b^m.$$

حال فرض می‌کنیم $a=1$ و $b=x$ و قضیه دو جمله‌ای را در مورد عبارت $(1+x)^m$ ، که m لزوماً يك عدد صحیح مثبت نیست، به کار می‌بریم و سری توانی زیر را به دست می‌آوریم

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \\ + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (1)$$

سری (۱) همان سری ماکلورن $(1+x)^m$ است، که به سری دو جمله‌ای موسوم است. برای یافتن شعاع همگرایی سری (۱) آزمون نسبت را به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n} \right| \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| |x| \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{m}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} \right| |x| \\ = |x|.$$

لذا، اگر $|x| < 1$ ، این سری همگراست. حال ثابت می‌کنیم که اگر x در بازهٔ باز $(-1, 1)$ باشد، به‌ازای تمام اعداد حقیقی m ، سری $(1+x)^m$ عبارت $(1+x)^m$ را نمایش می‌دهد؛ این کار را با محاسبهٔ $R_n(x)$ و اثبات اینکه حدش صفر است انجام نمی‌دهیم زیرا کار دشواری است. به‌جای آن از روش زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنید

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n \quad |x| < 1 \quad (2)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که وقتی $|x| < 1$ ، $f(x) = (1+x)^m$. بنا بر قضیهٔ ۸.۳.۱۵

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \quad |x| < 1 \quad (3)$$

دوطرف (۳) را در x ضرب می‌کنیم و از قضیهٔ ۸.۳.۱۵ به‌دست می‌آوریم

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{(n-1)!} x^n. \quad (4)$$

طرف راست (۳) را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت

$$f'(x) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}. \quad (5)$$

در رابطهٔ (۵)، عبارت مربوط به‌نماد سیگما را، با تقلیل حد پایین به‌اندازهٔ ۱ و قراردادن $n+1$ به‌جای n ، دوباره می‌نویسیم و به‌دست می‌آوریم

$$f'(x) = m + \sum_{n=1}^{+\infty} (m-n) \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n. \quad (6)$$

در (۴) صورت و مخرج را در n ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n. \quad (7)$$

چون سریهای مذکور در (۶) و (۷) به‌ازای $|x| < 1$ همگرایی مطلقاً دارند، پس بنا بر قضیهٔ ۸.۳.۱۵ آنها را جمله به‌جمله می‌توان با هم جمع کرد؛ و سری حاصل هم به‌ازای $|x| < 1$ همگرایی مطلقاً است. بنابراین، با انجام عمل جمع داریم

$$(1+x)f'(x) = m \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n \right].$$

چون بنا بر (۲) عبارت داخل کروشه $f(x)$ است،

$$(1+x)f'(x) = m f(x)$$

یا معادلش

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{1+x}.$$

طرف چپ معادله بالا $D_x [\ln f(x)]$ است؛ پس

$$D_x [\ln f(x)] = \frac{m}{1+x}.$$

اما، علاوه بر این می‌دانیم که

$$D_x [\ln (1+x)^m] = \frac{m}{1+x}.$$

چون $\ln f(x)$ و $\ln (1+x)^m$ مشتق یکسانی دارند، اختلافشان يك عدد ثابت است. لذا

$$\ln f(x) = \ln (1+x)^m + C.$$

بنابر (۲)، $f(0) = 1$ ، پس $C = 0$ ؛ لذا

$$f(x) = (1+x)^m.$$

به این ترتیب، قضیه دوجمله‌ای را درحالت کلی ثابت کرده‌ایم و اکنون صورت قضیه را بیان می‌کنیم.

۱۰۱۱۰۱۵ قضیه (قضیه دوجمله‌ای). اگر m عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه به ازای تمام مقادیری از x که در $|x| < 1$ صادق باشند،

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)}{n!} x^n. \quad (۸)$$

اگر m يك عدد صحیح مثبت باشد، سری دوجمله‌ای بعد از تعدادی متناهی جمله خاتمه می‌یابد.

مثال ۱ عبارت زیر را به صورت يك سری توانی برحسب x بیان کنید

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

حل بنا بر قضیه ۱۰۱۱۰۱۵، وقتی که $|x| < 1$ ، داریم

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 \\
 &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 \\
 &\quad + \dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \dots \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots \\
 &\quad + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}x^n + \dots.
 \end{aligned}$$

مثال ۲ از نتیجه مثال ۱ يك سری دوجمله‌ای برای $(1-x^2)^{-1/2}$ به دست آورید، و به کمک آن، يك سری توانی برای $\sin^{-1} x$ پیدا کنید.

حل در سری مربوط به $(1+x)^{-1/2}$ به جای x ، $-x^2$ را قرار می‌دهیم، و برای $|x| < 1$ داریم

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6 + \dots \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \dots.
 \end{aligned}$$

قضیه ۱۰۹.۱۵ را به کار می‌بریم و جمله به جمله انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots.
 \end{aligned}$$

بنابراین

به ازای $|x| < 1$ ، $\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ▲

مثال ۳ با استفاده از سری دوجمله‌ای مربوط به $(1+x)^{1/3}$ ، مقدار $\sqrt[3]{25}$ را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

حل از معادله (۸)، با فرض اینکه $|x| < 1$ ، نتیجه می‌شود

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \dots \quad (9)$$

می‌توان نوشت

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{27}} = 3 \sqrt[3]{1 - \frac{2}{27}} = 3 \left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3}. \quad (10)$$

بنابر معادله (۹) به ازای $x = -2/27$ داریم

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{27}\right)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{2}{3^2 \cdot 2!}\left(-\frac{2}{27}\right)^2 \\ &\quad + \frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 + \dots \\ &\approx 1 - 0.0247 - 0.0006 - 0.00003 - \dots \quad (11) \end{aligned}$$

اگر سه جمله اول سری فوق را به کار ببریم، با توجه به (۱۴) در بخش ۱۰.۱۵، نتیجه می‌گیریم که باقیمانده عبارت است از

$$\begin{aligned} R_3\left(-\frac{2}{27}\right) &= \frac{f'''(\xi_2)}{3!}\left(-\frac{2}{27}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{3!}\right)(1+\xi_2)^{(1/3)-3}\left(-\frac{2}{27}\right)^3. \end{aligned}$$

در اینجا، $0 < \xi_2 < -2/27$. بنابراین

$$\left|R_3\left(-\frac{2}{27}\right)\right| = \left(\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}\right) \frac{(1+\xi_2)^{1/3}}{(1+\xi_2)^3} \left(\frac{2}{27}\right)^3. \quad (12)$$

چون $0 < \xi_2 < -2/27$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{(1+\xi_2)^3} < \frac{1}{\left(\frac{25}{27}\right)^3} \quad \text{و} \quad (1+\xi_2)^{1/3} < 1^{1/3} = 1 \quad (13)$$

علاوه بر این

$$\frac{2.5}{3^3.3!} = \frac{2.5}{3.3.3.1.2.3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{9} < \frac{1}{9}. \quad (14)$$

پس با توجه به نامساویهای (۱۳) و (۱۴)، از (۱۲) نتیجه زیر حاصل می‌شود

$$\left| R_7 \left(-\frac{2}{27} \right) \right| < \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(\frac{25}{27} \right)^3} \cdot \left(\frac{2}{27} \right)^3 = \frac{8}{140625} < 0.000006.$$

پس، با استفاده از سه‌جمله اول سری (۱۱)، با خطایی کمتر از ۰.۰۰۰۰۰۶، داریم

$$\left(1 - \frac{2}{27} \right)^{1/3} \approx 0.97747.$$

حال از (۱۰)، با خطایی کمتر از ۰.۰۰۰۰۱۸، مقدار زیر را به دست می‌آوریم

$$\sqrt[3]{25} \approx 3(0.97747) = 2.93241.$$

با گرد کردن این مقدار تا سه رقم اعشار، داریم $\sqrt[3]{25} \approx 2.932$. ▲

تمرینهای ۱۱.۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، به کمک سری دو جمله‌ای، سری ماکلورن تابع مفروض را بیابید. شعاع همگرایی سری حاصل را نیز تعیین کنید.

$$1. \quad f(x) = \sqrt{1+x} \quad 2. \quad f(x) = (3-x)^{-2}$$

$$3. \quad f(x) = (4+x)^{-1/2} \quad 4. \quad f(x) = \sqrt[3]{8+x}$$

$$5. \quad f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} \quad 6. \quad f(x) = (4+x^2)^{-1}$$

$$7. \quad f(x) = (9+x^4)^{-1/2} \quad 8. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \quad 10. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

دتمرینهای ۱۱ تا ۱۶، به کمک سری دوجمله‌ای، مقدار کمیت مفروض را با دقت سه رقم اعشار محاسبه کنید.

$$\sqrt{24}.11 \qquad \sqrt{51}.12$$

$$\sqrt[4]{630}.13 \qquad \sqrt[3]{66}.14$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{128}}.15 \qquad \frac{1}{\sqrt[5]{31}}.16$$

۱۷. از سری دوجمله‌ای مربوط به $(1+t^2)^{-1/2}$ جمله به جمله، از 0 تا x ، انتگرال بگیرید و سری ماکلورن $\sinh^{-1} x$ را به دست آورید. شعاع همگرایی را نیز تعیین کنید.

۱۸. با استفاده از روشی نظیر آنچه که در تمرین ۱۷ به کار بردید، سری ماکلورن $\tanh^{-1} x$ را بیابید. شعاع همگرایی را نیز تعیین کنید.

دتمرینهای ۱۹ تا ۲۴، مقدار انتگرال معین را با دقت چهار رقم اعشار محاسبه کنید.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.19 \qquad \int_0^1 \sqrt[3]{8+x^2} dx.20$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.21 \qquad \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}.22$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.23$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^{-1} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{که در آن} \quad \int_0^{1/2} f(x) dx.24$$

۲۵. اگر $p \geq 0$ ، سری ماکلورن مربوط به $\int_0^x \frac{t^p}{\sqrt{1-t^2}} dt$ را بیابید. شعاع همگرایی سری را تعیین کنید.

تمرینهای مروری فصل ۱۵

در تمرینهای ۱ تا ۸، چهار عدد نخست دنباله را بنویسید، و حد دنباله را، در صورت

وجود، بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱. \left\{ \frac{3n}{n+2} \right\} & ۲. \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2} \right\} \\
 ۳. \left\{ \frac{n^2-1}{n^2+1} \right\} & ۴. \left\{ \frac{n+3n^2}{4+2n^2} \right\} \\
 ۵. \{2+(-1)^n\} & ۶. \left\{ \frac{n^2}{\ln(n+1)} \right\} \\
 ۷. \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \right\} & ۸. \left\{ \frac{(n+2)^2}{n+4} - \frac{(n+2)^2}{n} \right\}
 \end{array}$$

در تمرینهای ۹ و ۱۰، چهار جمله نخست دنباله مجموعهای جزئی s_n را بیابید، و فرمولی برحسب n برای s_n پیدا کنید. همچنین تعیین کنید که سری نامتناهی همگراست یا واگرا؛ اگر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 ۹. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4^{n+1}} & ۱۰. \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)
 \end{array}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۷، تعیین کنید که سری همگراست یا واگرا. اگر همگراست، مجموع آن را بیابید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱۱. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n & ۱۲. \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n} \\
 ۱۳. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} & ۱۴. \sum_{n=0}^{+\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] \\
 ۱۵. \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n \frac{1}{3} \pi & ۱۶. \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n \frac{1}{3} \pi
 \end{array}$$

۱۷. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ (اذهنمایی: برای یافتن مجموع، ابتدا دنباله مجموعهای جزئی را بیابید.)

در تمرینهای ۱۸ تا ۳۲، تعیین کنید که سری همگراست یا واگرا.

$$\begin{array}{ll}
 ۱۸. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^7} & ۱۹. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+6n}
 \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n^2-1}\right). ۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}. ۲۳$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{1}{n}. ۲۵$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}. ۲۷$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5n} - \frac{3}{2n}\right). ۲۹$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2\ln n}. ۳۱$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}. ۲۰$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{2n+2}}. ۲۲$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n}}. ۲۴$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}. ۲۶$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{10^n}. ۲۸$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sec n|}{n^{2/5}}. ۳۰$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2-n^2}. ۳۲$$

۳۳. عدد $۱۳۲۴۲۴۲۴ \dots$ را که اعشاری بی پایان با جزء تکراری است، به صورت يك كسر معمولی بنویسید.

۳۴. تویی را از ارتفاع ۱۸ متری رها می کنیم. توپ هر بار که به زمین می خورد، به اندازه دو سوم مسافتی که تا زمین پیموده، به بالا برمی گردد. قبل از اینکه توپ به حالت سکون برسد، مسافت کلی که پیموده چقدر است؟

در تشرینهای ۳۵ تا ۴۲، تعیین کنید که سری مفروض مطلقاً همگرا، یا به طور مشروط همگرا و یا واگراست. جواب خود را اثبات کنید.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!}. ۳۶$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{6^n}{5^{n+1}}. ۳۸$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{2n-1}}{n}. ۴۰$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}. ۳۵$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n+1)^{2/5}}. ۳۷$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{10^n}. ۳۹$$

$$c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ يك مربع كامل باشد} \\ \frac{1}{n^2} & \text{اگر } n \text{ يك مربع كامل نباشد} \end{cases} \quad \text{که در آن} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot ۴۱$$

$$c_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{اگر } n/۴ \text{ يك عدد صحيح باشد} \\ \frac{1}{n^2} & \text{اگر } n/۴ \text{ يك عدد صحيح نباشد} \end{cases} \quad \text{که در آن} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cdot ۴۲$$

دترمینهای ۴۳ تا ۵۲، بازه همگرایی سری توانی مفروض را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-۲)^n}{n} \cdot ۴۴ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \cdot ۴۳$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{۲^n} \cdot ۴۶ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{۳^n(n^2+n)} \cdot ۴۵$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot ۴۸ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{۲^n} (x-۳)^n \cdot ۴۷$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(2x-1)^n \cdot ۵۰ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{۶^n} (x+1)^n \cdot ۴۹$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n \cdot ۵۲ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (x-1)^n}{n 2^n} \cdot ۵۱$$

دترمینهای ۵۳ تا ۶۲، به کمک يك سری توانی، مقدار کمیت مفروض را با دقت چهار رقم اعشار بیابید.

$$\sin ۰.۳ \cdot ۵۴ \quad \tan^{-1} \frac{1}{۵} \cdot ۵۳$$

$$\sin^{-1} ۱ \cdot ۵۶ \quad \sqrt[۳]{۱۳۰} \cdot ۵۵$$

$$\sqrt[۴]{e} \cdot ۵۸ \quad \cos ۳^\circ \cdot ۵۷$$

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \cdot ۶۰ \quad \ln ۵ \cdot ۵۹$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^5} \quad ۶۲ \quad \int_0^{1/4} \sqrt{x} \sin x \, dx \quad ۶۱$$

در تمرینهای ۶۳ تا ۶۵، سری ماکلورن تابع مفروض را بیابید، و بازه همگراییش را تعیین کنید.

$$f(x) = \frac{1}{2-x} \quad ۶۴ \quad f(x) = a^x (a > 0) \quad ۶۳$$

$$f(x) = \sin^x x \quad ۶۵$$

در تمرینهای ۶۶ تا ۶۹، سری تیلر تابع مفروض، در عدد داده شده، را بیابید.

$$-\frac{\pi}{3} \quad f(x) = \sin^3 x \quad ۶۷ \quad f(x) = e^{x-2} \quad \text{در } ۲ \quad ۶۶$$

$$-۱ \quad f(x) = \ln|x| \quad ۶۹ \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{در } ۲ \quad ۶۸$$

تمرینهای ۷۰ تا ۷۴، مربوط اند به توابع J_0 و J_1 که به صورت زیر توسط سری توانی تعریف می شوند.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n! n! 2^{2n}} \quad J_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (n+1)! 2^{2n+1}}$$

توابع J_0 و J_1 را توابع بسل از نوع اول، به ترتیب، از مرتبه صفر و یک می نامند.

۷۰. نشان دهید که J_0 و J_1 هر دو به ازای تمام مقادیر حقیقی x همگرا هستند.

۷۱. نشان دهید که $J_0'(x) = -J_1(x)$.

۷۲. نشان دهید که $y = J_0(x)$ يك جواب معادله دیفرانسیل زیر است

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

۷۳. نشان دهید که $y = J_1(x)$ يك جواب معادله دیفرانسیل زیر است

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0.$$

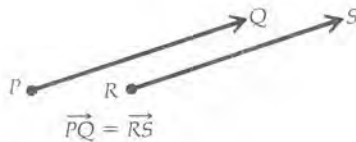
۷۴. نشان دهید که $D_x(xJ_1(x)) = xJ_0(x)$.

بردارها در صفحه، و معادلات پارامتری

۱۰.۱۶ بردارها در صفحه

کاربردهای ریاضیات در فیزیک و مهندسی اغلب به کمیت‌هایی مربوط اند که شامل بزرگی و جهت هستند؛ مثالهایی از این کمیت‌ها عبارتند از نیرو، سرعت، شتاب، و تغییر مکان. چنین کمیت‌هایی را می‌توان به‌طور هندسی توسط یک پاره خط جهت‌دار نشان داد. فیزیکدانان و مهندسان، به پاره خط جهت‌دار بردار می‌گویند، و کمیت‌هایی را که هم بزرگی و هم جهت دارند، کمیت‌های برداری می‌نامند. مطالعه بردارها نیز آنالیز برداری نامیده می‌شود.

به آنالیز برداری می‌توان از طریق هندسی و یا تحلیلی راه یافت. اگر رهیافت هندسی را در پیش بگیریم، ابتدا یک پاره خط جهت‌دار را به‌عنوان پاره خطی از نقطه P به نقطه Q تعریف می‌کنیم و این پاره خط جهت‌دار را با $\overrightarrow{PQ}$ نشان می‌دهیم. نقطه P ، ابتدای بردار و نقطه Q ، انتهای بردار نامیده می‌شود. حال دو پاره خط جهت‌دار $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ را متساوی گوئیم اگر دارای طول و جهت یکسانی باشند، و می‌نویسیم $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ (شکل ۱۰.۱۶). پاره خط جهت‌دار $\overrightarrow{PQ}$ را برداری از P به Q می‌نامیم. بردار را با یک حرف سیاه پررنگ مانند $\mathbf{A}$ نشان می‌دهیم. در بعضی از کتابها، از حرف معمولی با خطی در بالای آن، مانند $\vec{A}$ ، برای نشان دادن بردار استفاده می‌شود.



شکل ۱۰۱۶

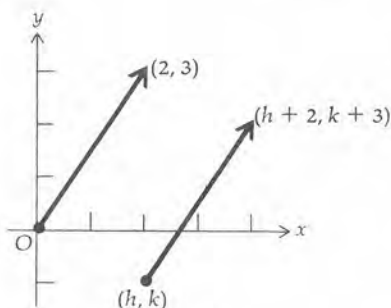
در ادامهٔ آنالیز برداری از طریق هندسی، توجه کنید که اگر پاره خط جهت دار $\vec{PQ}$ بردار A باشد، و $\vec{PQ} = \vec{RS}$ ، آنگاه پاره خط جهت دار $\vec{RS}$ نیز بردار A خواهد بود. پس، اگر بردار موازی با خودش حرکت کند، بی تغییر می ماند. با این تعبیر از بردار، می توانیم برای سهولت بحث فرض کنیم که ابتدای هر بردار در نقطهٔ مرجع ثابتی قرار دارد. اگر فرض کنیم این نقطه، مبدأ دستگاه مختصات دکارتی قائم است، می توانیم بردار را به طور تحلیلی بر حسب اعداد حقیقی تعریف کنیم. چنین تعریفی، مطالعهٔ آنالیز برداری از دیدگاه صرفاً ریاضی را امکان پذیر می سازد.

در این کتاب، از رهیافت تحلیلی استفاده می کنیم؛ ولی، برای روشن سازی مطلب از تعبیر هندسی نیز بهره می گیریم. بردار در صفحه را با زوج مرتبی از اعداد حقیقی نشان می دهیم و برای اینکه نماد بردار با نماد نقطه اشتباه نشود، برای نمایش بردار از نماد $\langle x, y \rangle$ به جای (x, y) استفاده می کنیم. V_2 مجموعهٔ تمام چنین زوجهای مرتبی است. تعریف رسمی به صورت زیر است.

۱۰۱۶ تعریف هر بردار در صفحه، زوج مرتبی از اعداد حقیقی به صورت $\langle x, y \rangle$ است. اعداد x و y مؤلفه های بردار $\langle x, y \rangle$ نامیده می شوند.

يك تناظر يك به يك بين بردارهای $\langle x, y \rangle$ و نقاط (x, y) در صفحه وجود دارد. فرض کنید بردار A زوج مرتب اعداد $\langle a_1, a_2 \rangle$ است. اگر نقطهٔ $A(a_1, a_2)$ باشد، بردار A را می توان به طور هندسی با پاره خط جهت دار $\vec{OA}$ نشان داد. چنین پاره خط جهت داری را يك نمایش بردار A می نامند. هر پاره خط جهت داری نیز که مساوی $\vec{OA}$ باشد، نمایش بردار A است. نمایش خاصی از يك بردار که ابتدای آن در مبدأ باشد، نمایش موضع بردار نامیده می شود.

○ نمونهٔ ۱ نمایش موضع بردار $\langle 2, 3 \rangle$ پاره خط جهت داری است از مبدأ تا نقطهٔ $(2, 3)$. نمایشی از بردار $\langle 2, 3 \rangle$ که ابتدای آن (h, k) است، انتهایش $(h+2, k+3)$ است؛ به شکل ۲۰۱۶ مراجعه کنید.



شکل ۲۰۱۰۱۶

○

برداری $\langle 0, 0 \rangle$ را بردار صفر می‌نامیم، و با $\mathbf{o}$ نشان می‌دهیم؛ یعنی

$$\mathbf{o} = \langle 0, 0 \rangle.$$

هر نقطه، یک نمایش بردار صفر است.

۲۰۱۰۱۶ تعریف بزرگی یک بردار عبارت است از طول هر نمایش آن، و جهت یک بردار ناصفر عبارت است از جهت هر نمایش آن.

بزرگی بردار A با $|A|$ نشان داده می‌شود.

۳۰۱۰۱۶ تعریف اگر A بردار $\langle a_1, a_2 \rangle$ باشد، آنگاه $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

اثبات چون بنا به تعریف ۲۰۱۰۱۶ طول هر نمایش A برابر با $|A|$ است، پس $|A|$ طول نمایش موضع A خواهد بود، که عبارت است از فاصله مبدأ تا نقطه (a_1, a_2) . بنابراین، از فرمول فاصله بین دو نقطه داریم

$$\square \quad |A| = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

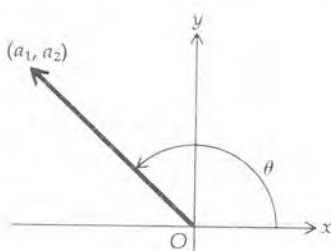
توجه کنید که $|A|$ عددی نامنفی است و یک بردار نیست. از قضیه ۳۰۱۰۱۶ نتیجه می‌شود که $|\mathbf{o}| = 0$.

○ نمونه ۲ اگر $A = \langle -3, 5 \rangle$ ، آنگاه

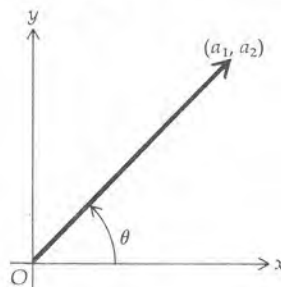
$$\circ \quad |A| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

جهت هر بردار ناصفر به وسیله θ مشخص می‌شود که θ (برحسب رادیان) اندازه

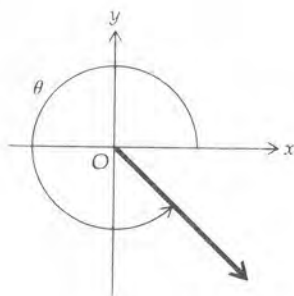
زاویه‌ای است که قسمت مثبت محور x ها با نمایش موضع بردار، درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، می‌سازد [این زاویه را زاویه هادی نیز می‌گوییم]. بدیهی است که $0 \leq \theta < 2\pi$. فرض کنیم $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ ؛ در این صورت اگر $a_1 \neq 0$ ، $\tan \theta = a_2/a_1$. اگر $a_1 = 0$ و $a_2 > 0$ ، آنگاه $\theta = \pi/2$. و اگر $a_1 = 0$ و $a_2 < 0$ ، آنگاه $\theta = 3\pi/2$. شکل‌های ۳.۱.۱۶، ۴.۱.۱۶ و ۵.۱.۱۶ زاویه θ رادیان را برای بردارهای مشخص $\langle a_1, a_2 \rangle$ که نمایش موضع آنها رسم شده است، نشان می‌دهند.



شکل ۴.۱.۱۶



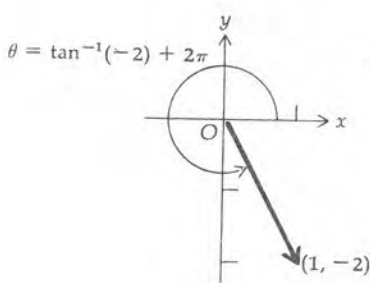
شکل ۳.۱.۱۶



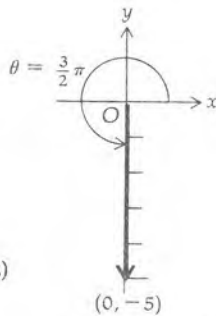
شکل ۵.۱.۱۶

مثال ۱ اندازه زاویه هادی هر يك از بردارهای زیر را برحسب رادیان به دست آورید. (الف) $\langle -1, 1 \rangle$ ؛ (ب) $\langle 0, -5 \rangle$ ؛ (پ) $\langle -1, 2 \rangle$.

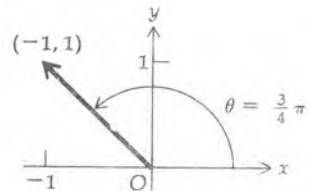
حل نمایش موضع هر يك از بردارهای قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) به ترتیب در شکل‌های ۶.۱.۱۶، ۷.۱.۱۶ و ۸.۱.۱۶ آمده است. (الف) $\tan \theta = -1$ ؛ پس $\theta = 3\pi/4$ ؛ (ب) $\tan \theta$ موجود نیست و $a_2 < 0$ ؛ پس $\theta = 3\pi/2$ ؛ (پ) $\tan \theta = -2$ ؛ $\theta = \tan^{-1}(-2) + 2\pi$.



▲ شکل ۸.۱.۱۶

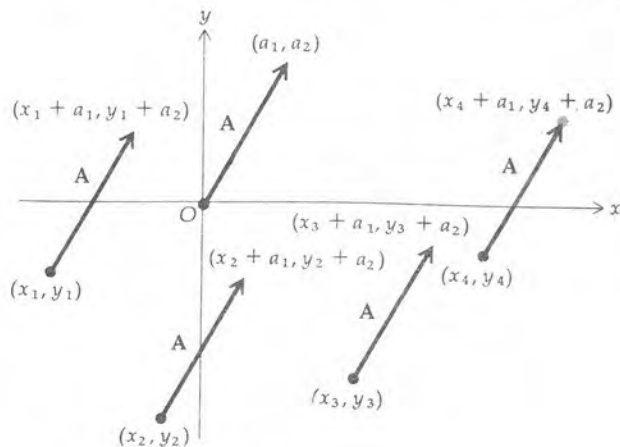


شکل ۷.۱.۱۶



شکل ۶.۱.۱۶

اگر بردار A به صورت $\langle a_1, a_2 \rangle$ باشد، آنگاه نمایشی از A که ابتدای آن (x, y) است، انتهایش $(x + a_1, y + a_2)$ می باشد. به این طریق، بردار را می توان به عنوان انتقالی از یک صفحه بروی خودش در نظر گرفت. در شکل ۹.۱.۱۶ پنج نمایش بردار $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ را می بینید. در هر حالت، نقطه (x_i, y_i) را به نقطه $(x_i + a_1, y_i + a_2)$ انتقال می دهد.



شکل ۹.۱.۱۶

تعریف زیر روش جمع دو بردار را به دست می دهد.

۴.۱.۱۶ تعریف مجموع دو بردار $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ ، بردار $A + B$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$A + B = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle.$$

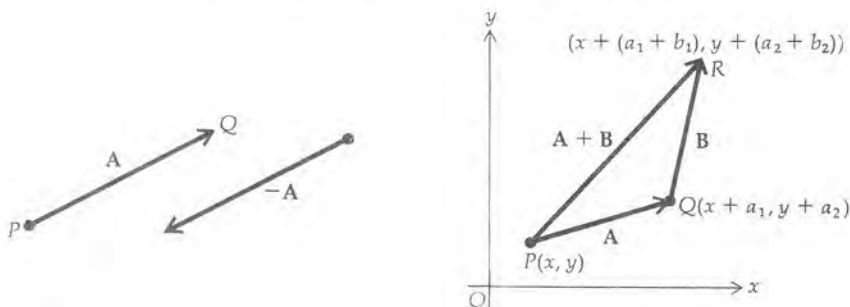
○ نمونه ۳ اگر $A = \langle 3, -1 \rangle$ و $B = \langle -4, 5 \rangle$ ، آنگاه

○ $A+B = \langle 3+(-4), -1+5 \rangle = \langle -1, 4 \rangle$.

تعبیر هندسی مجموع دو بردار در شکل ۱۰.۱۰.۱۶ نشان داده شده است. فرض کنید $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ ، و P نقطه (x, y) باشد. در این صورت A نقطه P را به نقطه $Q(x+a_1, y+a_2)$ انتقال می‌دهد؛ و بردار B نقطه Q را به نقطه $R(x+(a_1+b_1), y+(a_2+b_2))$ یعنی نقطه $((x+a_1)+b_1, (y+a_2)+b_2)$ منتقل می‌کند. به علاوه داریم $A+B = \langle a_1+b_1, a_2+b_2 \rangle$. بنابراین بردار $A+B$ نقطه P را به نقطه $R(x+(a_1+b_1), y+(a_2+b_2))$ انتقال می‌دهد. پس، در شکل ۱۰.۱۰.۱۶، $\vec{PQ}$ نمایش بردار A و $\vec{QR}$ نمایش بردار B ، و $\vec{PR}$ نمایش بردار $A+B$ است. نمایشهای بردارهای A و B اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع هستند، و نمایش بردار $A+B$ قطر متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، گاهی قاعده جمع بردارها را قاعده متوازی‌الاضلاع گویند.

۵.۱۰.۱۶ تعریف اگر $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، آنگاه بردار $\langle -a_1, -a_2 \rangle$ را به عنوان قرینه A تعریف کرده، و با $-A$ نشان می‌دهند.

اگر پاره خط جهت‌دار $\vec{PQ}$ نمایشی از بردار A باشد، آنگاه پاره خط جهت‌دار $\vec{QP}$ نمایشی از $-A$ است. هر پاره خط جهت‌داری که موازی $\vec{PQ}$ باشد، طولش با طول $\vec{PQ}$ یکی باشد، و جهتی مخالف جهت $\vec{PQ}$ داشته باشد، نمایشی از $-A$ است (شکل ۱۱.۱۰.۱۶ را ببینید). حال تفاضل دو بردار را تعریف می‌کنیم.



شکل ۱۰.۱۰.۱۶

شکل ۱۱.۱۰.۱۶

۶.۱۰.۱۶ تعریف تفاضل دو بردار A و B با $A-B$ نشان داده می‌شود، و برداری است

که از جمع A با قرینه B به دست می آید؛ یعنی

$$A - B = A + (-B).$$

پس اگر $A = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $B = \langle b_1, b_2 \rangle$ ، آنگاه $-B = \langle -b_1, -b_2 \rangle$ ، و داریم

$$A - B = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle.$$

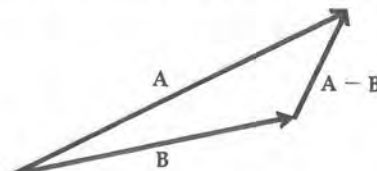
○ نمونه ۴ اگر $A = \langle 4, -2 \rangle$ و $B = \langle 6, -3 \rangle$ ، آنگاه

$$A - B = \langle 4, -2 \rangle - \langle 6, -3 \rangle$$

$$= \langle 4, -2 \rangle + \langle -6, 3 \rangle$$

$$\circ = \langle -2, 1 \rangle.$$

برای تعبیر هندسی تفاضل دو بردار، فرض کنید ابتدای نمایشهای دو بردار A و B یکی باشد. در این صورت، پاره خط جهت داری که از انتهای نمایش B به انتهای نمایش A وصل می شود، نمایشی از بردار $A - B$ است. این تفاضل نیز از قاعده متوازی الاضلاع یعنی $B + (A - B) = A$ پیروی می کند (شکل ۱۲.۱۰.۱۶ را ببینید).



شکل ۱۲.۱۰.۱۶

عمل دیگری که روی بردارها انجام می شود، ضرب اسکالر^۱ است. منظور از اسکالر، عدد حقیقی است. تعریف ضرب اسکالر در بردار، به شرح زیر است.

۷.۱۰.۱۶ تعریف اگر c یک اسکالر و A بردار $\langle a_1, a_2 \rangle$ باشد، آنگاه حاصل ضرب c و A که با cA نشان داده می شود، برداری است که به صورت زیر معین می گردد

$$cA = c\langle a_1, a_2 \rangle = \langle ca_1, ca_2 \rangle.$$

○ نمونه ۵ اگر $A = \langle 4, -5 \rangle$ ، آنگاه

۱. حاصل این ضرب، یک بردار است؛ دقت کنید که این نوع ضرب با ضرب نقطه ای (داخلی) دو بردار که حاصلش یک عدد است و آن را نیز در بعضی از کتب به ضرب اسکالر می نامند، اشتباه نشود. م.

$$\circ \quad 3A = 3\langle 4, -5 \rangle = \langle 12, -15 \rangle.$$

مثال ۲ اگر A برداری دلخواه و c اسکالری دلخواه باشد، نشان دهید که
 $\circ(A) = \circ$ و $\circ(\circ) = \circ$.

حل بنا به تعریف ۷.۱۰.۱۶ داریم

$$\circ(A) = \circ\langle a_1, a_2 \rangle = \langle \circ, \circ \rangle = \circ$$

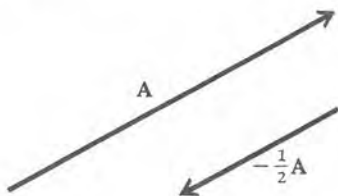
و

$$\blacktriangle \quad c(\circ) = c\langle \circ, \circ \rangle = \langle \circ, \circ \rangle = \circ.$$

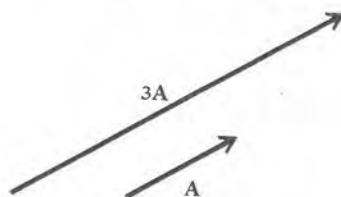
بزرگی بردار cA به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} |cA| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)} \\ &= \sqrt{c^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &= |c| |A|. \end{aligned}$$

بنابراین، بزرگی cA برابر است با حاصلضرب قدرمطلق c در بزرگی A .
 تعبیر هندسی بردار cA در شکل‌های ۱۳.۱۰.۱۶ و ۱۴.۱۰.۱۶ داده شده است. اگر $c > 0$ ، آنگاه cA برداری است که نمایش آن همجهت با A و طول نمایش، c برابر بزرگی A است. مثالی از این مورد در شکل ۱۳.۱۰.۱۶ برای $c = 3$ نشان داده شده است. اگر $c < 0$ ، آنگاه cA برداری است که نمایش آن دارای جهتی مخالف با جهت A و طول نمایش $|c|$ برابر بزرگی A می باشد. این مورد را نیز در شکل ۱۴.۱۰.۱۶ برای $c = -1/2$ نشان داده ایم.



شکل ۱۴.۱۰.۱۶



شکل ۱۳.۱۰.۱۶

تمرینهای ۱.۱۶

دتمرینهای ۱ تا ۶، نمایش موضع بردار مفروض A همچنین نمایش خاصی را که از نقطه داده شده P می گذرد رسم کنید؛ بزرگی A را نیز به دست آورید.

$$A = \langle -2, 5 \rangle; P = (3, -4) \quad ۲. \quad A = \langle 3, 4 \rangle; P = (2, 1) \quad ۱.$$

$$A = \langle 4, 0 \rangle; P = (2, 6) \quad ۴. \quad A = \langle 0, -2 \rangle; P = (-3, 4) \quad ۳.$$

$$A = \langle 3, \sqrt{2} \rangle; P = (4, -\sqrt{2}) \quad ۵.$$

$$A = \langle e, -1/2 \rangle; P = (-2, -e) \quad ۶.$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، بردار A بی‌بی‌دا که نمایش آن $\overrightarrow{PQ}$ است، به دست آورید. $\overrightarrow{PQ}$ و نمایش موضع A را رسم کنید.

$$P = (5, 4); Q = (3, 7) \quad ۸. \quad P = (3, 7); Q = (5, 4) \quad ۷.$$

$$P = (-3, 5); Q = (-5, -2) \quad ۹.$$

$$P = (-5, -3); Q = (0, 3) \quad ۱۱. \quad P = (0, \sqrt{3}); Q = (2, 2\sqrt{3}) \quad ۱۰.$$

$$P = (-\sqrt{2}, 0); Q = (0, 0) \quad ۱۲.$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، نقطه S را طوری به دست آورید که هر دوی $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{RS}$ نمایش يك بردار باشند.

$$P = (2, 5); Q = (1, 6); R = (-3, 2) \quad ۱۳.$$

$$P = (-1, 4); Q = (2, -3); R = (-5, -2) \quad ۱۴.$$

$$P = (0, 3); Q = (5, -2); R = (7, 0) \quad ۱۵.$$

$$P = (-2, 0); Q = (-3, -4); R = (4, 2) \quad ۱۶.$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، مجموع دو بردار داده شده را به دست آورید و آن را به طور هندسی نشان دهید.

$$\langle 0, 3 \rangle; \langle -2, 3 \rangle \quad ۱۸. \quad \langle 2, 4 \rangle; \langle -3, 5 \rangle \quad ۱۷.$$

$$\langle 2, 3 \rangle; \langle -\sqrt{2}, -1 \rangle \quad ۲۰. \quad \langle -3, 0 \rangle; \langle 4, -5 \rangle \quad ۱۹.$$

$$\langle 2, 5 \rangle; \langle 2, 5 \rangle \quad ۲۲. \quad \langle 0, 0 \rangle; \langle -2, 2 \rangle \quad ۲۱.$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۸، بردار دوم را از بردار اول تفريق کنید و نتیجه را به طور هندسی نشان دهید.

$$\langle 0, 5 \rangle; \langle 2, 8 \rangle \quad ۲۴. \quad \langle 4, 5 \rangle; \langle -3, 2 \rangle \quad ۲۳.$$

$$25. \langle 6, 0 \rangle; \langle -3, -4 \rangle \quad 26. \langle 1, e \rangle; \langle -3, 2e \rangle$$

$$27. \langle 0, \sqrt{3} \rangle; \langle -\sqrt{2}, 0 \rangle \quad 28. \langle 3, 7 \rangle; \langle 3, 7 \rangle$$

۲۹. بردارهای $A = \langle 2, -5 \rangle$ ، $B = \langle 3, 1 \rangle$ و $C = \langle -4, 2 \rangle$ مفروض‌اند. (الف) $A + (B + C)$ را به دست آورید و تعبیر هندسی آن را ارائه دهید؛ (ب) $(A + B) + C$ را به دست آورید و آن را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۵، فرض کنید $A = \langle 2, 4 \rangle$ ، $B = \langle 4, -3 \rangle$ و $C = \langle -3, 2 \rangle$ ؛ مطلوب است:

$$30. A + B \quad 31. A - B$$

$$32. |C| \quad 33. |C - B|$$

$$34. 2A + 3B \quad 35. |7A - B|$$

۳۶. بردارهای $A = \langle 3, 2 \rangle$ ، $C = \langle 8, 8 \rangle$ و $A + B = C$ مفروض‌اند؛ $|B|$ را به دست آورید.

۳۷. بردارهای $A = \langle 6, -9 \rangle$ ، $C = \langle 10, -8 \rangle$ و $2A - B = C$ مفروض‌اند؛ $|B|$ را به دست آورید.

۳۸. بردارهای $A = \langle -3, 2 \rangle$ ، $B = \langle 4, -1 \rangle$ ، $C = \langle 8, 3 \rangle$ داده شده‌اند؛ اعداد h و k را طوری بیابید که داشته باشیم $hA + kB = C$.

۳۹. بردارهای $A = \langle 5, -2 \rangle$ ، $B = \langle -4, 3 \rangle$ ، $C = \langle -6, 8 \rangle$ داده شده‌اند؛ اعداد h و k را طوری بیابید که داشته باشیم $B = hC - kA$.

۴۰. نامساوی مثلثی را برای بردارها به‌طور تحلیلی ثابت کنید؛ یعنی نشان دهید $|A + B| \leq |A| + |B|$.

۴۱. فرض کنید $\vec{PQ}$ نمایش بردار A ، $\vec{QR}$ نمایش بردار B و $\vec{RS}$ نمایش بردار C باشد. ثابت کنید که اگر $\vec{PQ}$ ، $\vec{QR}$ و $\vec{RS}$ اضلاع يك مثلث باشند، آنگاه $A + B + C = 0$.

۲.۱۶ ویژگیهای جمع برداری و ضرب اسکالر

قضیه زیر قوانینی را به دست می‌دهد که اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر، روی تمام بردارهای موجود در V ، در آنها صادق می‌کنند.

۱۰۲۰۱۶ قضیه اگر A, B, C بردارهای دلخواهی در V_2 ، و c و d اسکالرهای دلخواهی باشند، آنگاه اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر دارای ویژگیهای زیرند:

$$(i) \quad A+B=B+A \quad (\text{قانون تعویض پذیری})$$

$$(ii) \quad A+(B+C)=(A+B)+C \quad (\text{قانون شرکت پذیری})$$

$$(iii) \quad \text{يك بردار } 0 \text{ در } V_2 \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$A+0=A \quad (\text{وجود همانی در جمع})$$

$$(iv) \quad \text{يك بردار } -A \text{ در } V_2 \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$A+(-A)=0 \quad (\text{وجود قرینه})$$

$$(v) \quad (cd)A=c(dA) \quad (\text{قانون شرکت پذیری})$$

$$(vi) \quad c(A+B)=cA+cB \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$(vii) \quad (c+d)A=cA+dA \quad (\text{قانون توزیع پذیری})$$

$$(viii) \quad 1(A)=A \quad (\text{وجود همانی در ضرب اسکالر})$$

اثبات اثبات (i)، (iv)، و (vi) را می آوریم و باقی را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۳۲ تا ۳۵ را ببینید). فرض کنید $A=\langle a_1, a_2 \rangle$ و $B=\langle b_1, b_2 \rangle$.

اثبات (i) بنا به قانون تعویض پذیری اعداد حقیقی داریم $a_1+b_1=b_1+a_1$ و $a_2+b_2=b_2+a_2$ پس

$$A+B=\langle a_1, a_2 \rangle+\langle b_1, b_2 \rangle$$

$$=\langle a_1+b_1, a_2+b_2 \rangle$$

$$=\langle b_1+a_1, b_2+a_2 \rangle$$

$$=\langle b_1, b_2 \rangle+\langle a_1, a_2 \rangle$$

$$=B+A.$$

اثبات (iv) بردار $-A$ در تعریف ۵.۱.۱۶ داده شده است و داریم

$$A+(-A)=\langle a_1, a_2 \rangle+\langle -a_1, -a_2 \rangle$$

$$=\langle a_1+(-a_1), a_2+(-a_2) \rangle$$

$$=\langle 0, 0 \rangle$$

$$=0.$$

اثبات (vi)

$$\begin{aligned}
 c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c(\langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle) \\
 &= c(\langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle) \\
 &= \langle c(a_1 + b_1), c(a_2 + b_2) \rangle \\
 &= \langle ca_1 + cb_1, ca_2 + cb_2 \rangle \\
 &= \langle ca_1, ca_2 \rangle + \langle cb_1, cb_2 \rangle \\
 &= c\langle a_1, a_2 \rangle + c\langle b_1, b_2 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\square \quad = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}.$$

مثال ۱ اگر داشته باشیم $\mathbf{C} = \langle 5, -3 \rangle$, $\mathbf{B} = \langle -2, 1 \rangle$, $\mathbf{A} = \langle 3, 4 \rangle$ و $c = 2$ و $d = -6$ ، درستی قسمتهای (ii)، (iii)، (v)، (vii) و (viii) از قضیه ۱۰.۲۰.۱۷ را تحقیق کنید.

حل

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \langle 3, 4 \rangle + (\langle -2, 1 \rangle + \langle 5, -3 \rangle) \\
 &= \langle 3, 4 \rangle + \langle 3, -2 \rangle \\
 &= \langle 6, 2 \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= (\langle 3, 4 \rangle + \langle -2, 1 \rangle) + \langle 5, -3 \rangle \\
 &= \langle 1, 5 \rangle + \langle 5, -3 \rangle \\
 &= \langle 6, 2 \rangle.
 \end{aligned}$$

بنابراین، $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ ؛ پس (ii) برقرار است.

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \langle 3, 4 \rangle + \langle 0, 0 \rangle = \langle 3, 4 \rangle = \mathbf{A}$$

پس (iii) برقرار است.

$$\begin{aligned}
 (cd)\mathbf{A} &= [(2)(-6)]\langle 3, 4 \rangle \\
 &= (-12)\langle 3, 4 \rangle \\
 &= \langle -36, -48 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(dA) &= 2(-6\langle 3, 4 \rangle) \\ &= 2\langle -18, -24 \rangle \\ &= \langle -36, -48 \rangle. \end{aligned}$$

در نتیجه، $(cd)A = c(dA)$ و (v) برقرار است.

$$(c+d)A = [2+(-6)]\langle 3, 4 \rangle = (-4)\langle 3, 4 \rangle = \langle -12, -16 \rangle$$

$$\begin{aligned} cA + dA &= 2\langle 3, 4 \rangle + (-6)\langle 3, 4 \rangle \\ &= \langle 6, 8 \rangle + \langle -18, -24 \rangle = \langle -12, -16 \rangle \end{aligned}$$

پنا بر این، $(c+d)A = cA + dA$ و (vii) برقرار است.

$$1A = 1\langle 3, 4 \rangle = \langle (1)(3), (1)(4) \rangle = \langle 3, 4 \rangle = A$$

▲

پس (viii) برقرار است.

قضیه ۱۰.۲۰۱۶ مهم است زیرا از هشت ویژگی مذکور در این قضیه می توان هر قانون جبری برای جمع برداری و ضرب اسکالر بردارها در V_p را نتیجه گرفت. این قوانین مشابه قوانین چهارعمل اصلی روی اعداد حقیقی هستند. به علاوه در جبر خطی، يك فضای برداری حقیقی به عنوان مجموعه ای از بردارها همراه با مجموعه ای از اعداد حقیقی (اسکالرها) و دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر تعریف می شود که هشت ویژگی قضیه ۱۰.۲۰۱۶ را دارا هستند. تعریف رسمی این مطلب در زیر آمده است.

۲.۲.۱۶ تعریف يك فضای برداری حقیقی V ، مجموعه ای است از عناصری به نام بردار همراه با مجموعه ای از اعداد حقیقی به نام اسکالر، با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر، به طوری که برای هر جفت بردار A و B در V ، و هر اسکالر دلخواه c ، بردارهای $A+B$ و cA چنان تعریف شوند که قسمتهای (i) تا (viii) قضیه ۱۰.۲۰۱۶ برقرار باشند.

از تعریف ۲.۲.۱۶ و قضیه ۱۰.۲۰۱۶ نتیجه می شود که V_p يك فضای برداری حقیقی است.

حال برداری اختیاری در V_p در نظر می گیریم و آن را به صورت خاص زیر می نویسیم

$$A = \langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1 \langle 1, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1 \rangle.$$

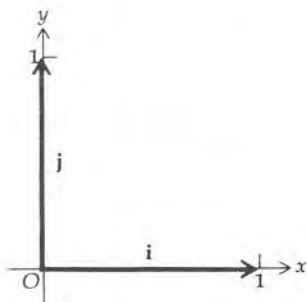
چون بزرگی هر يك از بردارهای $\langle 1, 0 \rangle$ و $\langle 0, 1 \rangle$ برابر يك واحد است، آنها را بردارهای واحد می نامند. نمادهای زیر را برای این دو بردار واحد معرفی می کنیم

$$\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle \quad \text{و} \quad \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$$

نمایش موضع هردو بردار در شکل ۱۰.۲۰.۱۶ آمده است. چون

$$\langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \langle 1, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1 \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$$

نتیجه می شود که هر بردار دلخواهی در V_2 را می توان به عنوان ترکیبی خطی از دو بردار $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ نوشت. به همین دلیل گفته می شود که بردارهای $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ پایه ای برای فضای برداری V_2 تشکیل می دهند. تعداد عناصر موجود در پایه یک فضای برداری را بعد آن فضای برداری می نامند. پس V_2 یک فضای برداری دوبعدی است.

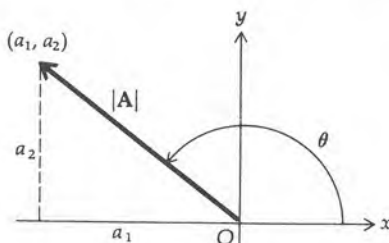


شکل ۱۰.۲۰.۱۶

○ نمونه ۱ بردار $\langle 3, -4 \rangle$ را بر حسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ می نویسیم

$$\circ \quad \langle 3, -4 \rangle = 3\langle 1, 0 \rangle + (-4)\langle 0, 1 \rangle = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}.$$

فرض کنید A بردار $\langle a_1, a_2 \rangle$ و θ اندازه زاویه هادی A بر حسب رادیان باشد. (شکل ۲۰.۲۰.۱۶ را ببینید، که در آن (a_1, a_2) در ربع دوم است). در این صورت $a_1 = |A|\cos\theta$ و $a_2 = |A|\sin\theta$. چون $A = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ می توانیم بنویسیم



شکل ۲۰.۲۰.۱۶

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cos \theta \mathbf{i} + |\mathbf{A}| \sin \theta \mathbf{j}$$

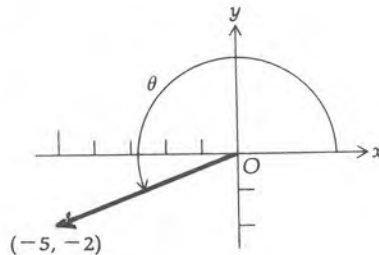
یا

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}). \quad (۱)$$

معادله (۱) بردار $\mathbf{A}$ را بر حسب بزرگی آن، کسینوس و سینوس زاویه هادی $\mathbf{A}$ بر حسب رادیان، و بردارهای واحد $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان می‌کند.

مثال ۲ بردار $\langle -۵, -۲ \rangle$ را به صورت معادله (۱) بنویسید.

حل به شکل ۳.۲.۱۶ نگاه کنید؛ در این شکل نمایش موضع بردار $\langle -۵, -۲ \rangle$ آمده است.



شکل ۳.۲.۱۶

داریم

$$|\langle -۵, -۲ \rangle| = \sqrt{(-۵)^2 + (-۲)^2} = \sqrt{۲۵ + ۴} = \sqrt{۲۹}$$

$$\cos \theta = -\frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \text{ و } \sin \theta = -\frac{۲}{\sqrt{۲۹}}$$

پس، از (۱) خواهیم داشت

$$\mathbf{A} = \langle -۵, -۲ \rangle = \sqrt{۲۹} \left(-\frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \mathbf{i} - \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} \mathbf{j} \right).$$

۳.۲.۱۶ قضیه اگر بردار ناصفر $\mathbf{A}$ به صورت $\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ باشد، آنگاه بردار واحد $\mathbf{U}$ که همجهت با $\mathbf{A}$ است به شکل زیر معین می‌شود

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{A}|} \mathbf{j}. \quad (۲)$$

اثبات بنا بر (۲) داریم

$$\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} (\mathbf{A}).$$

پس، $\mathbf{U}$ عبارت از حاصلضرب اسکالر مثبتی در بردار $\mathbf{A}$ است؛ بنابراین، $\mathbf{U}$ همجهت با $\mathbf{A}$ است. به علاوه داریم

$$\begin{aligned} |\mathbf{U}| &= \sqrt{\left(\frac{a_1}{|\mathbf{A}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\mathbf{A}|}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{|\mathbf{A}|} \\ &= \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

لذا، $\mathbf{U}$ بردار واحدی است که همجهت با $\mathbf{A}$ است، و قضیه اثبات شده است. $\square$

مثال ۳ بردارهای $\mathbf{A} = \langle 3, 1 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -2, 4 \rangle$ مفروض‌اند؛ بردار واحدی به دست آورید که همجهت با بردار $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ باشد.

حل $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \langle 3, 1 \rangle - \langle -2, 4 \rangle = \langle 5, -3 \rangle$ بنا بر این

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$$

پس

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}.$$

با توجه به قضیه ۳۰.۲.۱۶، بردار واحد خواسته شده به صورت زیر است

$$\blacktriangle \quad \mathbf{U} = \frac{5}{\sqrt{34}} \mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{34}} \mathbf{j}.$$

تمرینهای ۲.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، اگر $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، بردار یما اسکالر مفروض λ به دست آورید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱. ۵A & ۲. -۲A \\
 ۳. -۶B & ۴. ۳B \\
 ۵. A+B & ۶. A-B \\
 ۷. |A+B| & ۸. |A-B| \\
 ۹. |A|+|B| & ۱۰. |A|-|B| \\
 ۱۱. ۵A-۶B & ۱۲. ۳B-۲A \\
 ۱۳. |۵A-۶B| & ۱۴. |۳B-۲A| \\
 ۱۵. |۵A|-|۶B| & ۱۶. |۳B|-|۲A|
 \end{array}$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۱۸، $A = -۲i + ۲j$ ، $B = -i + ۳j$ ، و $C = ۵i - j$ ؛ مطلوب است

۱۷. (الف) $۵A - ۲B - ۲C$ ؛ و (ب) $|۵A - ۲B - ۲C|$.

۱۸. (الف) $۳B - ۲A - C$ ؛ و (ب) $|۳B - ۲A - C|$.

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، $A = ۸i + ۵j$ ، $B = ۳i - j$ ، و

۱۹. بردار واحدی به دست آورید که همجهت با بردار $A+B$ باشد.

۲۰. بردار واحدی به دست آورید که همجهت با بردار $A-B$ باشد.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، (الف) بردار داده شده را به صورت $r(\cos \theta i + \sin \theta j)$ بنویسید، که در آن r بزرگی بردار و θ زاویه هادی بردار مفروض برحسب رادیان باشد؛ و (ب) بردار واحدی به دست آورید که همجهت با بردار مفروض باشد.

۲۱. $۳i - ۴j$

۲۲. $۸i + ۶j$

۲۳. $۲i + ۲j$

۲۴. $۳i - ۲j$

۲۵. $-۲i + ۴/\sqrt{۳}j$

۲۶. $۲\sqrt{۵}i + ۴j$

۲۷. $-۱۶i$

۲۸. $۲j$

۲۹. بردارهای $A = -۲i + j$ ، $B = ۳i - ۲j$ ، و $C = ۵i - ۴j$ مفروض اند؛ اسکالرهایی h و k را طوری به دست آورید که $C = hA + kB$.

۳۰. بردارهای $A = ۲i - ۵j$ ، $B = i + ۳j$ ، و $C = ۲i - j$ مفروض اند؛ اسکالرهایی h و k را طوری به دست آورید که $C = hA + kB$.

۳۱. بردارهای $A = i - 2j$ ، $B = -2i + 3j$ ، و $C = 7i - 5j$ داده شده‌اند؛ نشان دهید که نمی‌توان C را به صورت $hA + kB$ ، که h و k اسکالر هستند، نوشت.

۳۲. قضیه ۱۰.۲.۱۶ (ii) را ثابت کنید.

۳۳. قضیه ۱۰.۲.۱۶ (v) را ثابت کنید.

۳۴. قضیه ۱۰.۲.۱۶ (vii) را ثابت کنید.

۳۵. قضیه ۱۰.۲.۱۶ (iii) و (viii) را ثابت کنید.

۳۶. دو بردار را مستقل گویند اگر و تنها اگر نمایشهای موضعی آنها همخط نباشند. به علاوه، گویند دو بردار A و B پایه‌ای برای فضای برداری V_2 تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر هر بردار دلخواهی در V_2 را بتوان به صورت ترکیبی خطی از A و B نوشت. می‌توان قضیه‌ای را ثابت کرد که می‌گوید، دو بردار پایه‌ای برای فضای برداری V_2 تشکیل می‌دهند اگر آن دو بردار مستقل باشند. با انجام اعمال زیر نشان دهید که این قضیه در مورد دو بردار $\langle 2, 5 \rangle$ و $\langle 3, -1 \rangle$ برقرار است: (الف) با نشان دادن اینکه نمایشهای مواضع دو بردار همخط نیستند، تحقیق کنید که بردارها مستقل هستند؛ (ب) با نشان دادن اینکه هر بردار $a_1i + a_2j$ را می‌توان به صورت $c(2i + 5j) + d(3i - j)$ نوشت، که در آن c و d اسکالر هستند، تحقیق کنید که این دو بردار تشکیل یک پایه می‌دهند. (دانهمایی: c و d را برحسب a_1 و a_2 به دست آورید).

۳۷. به دو جمله اول تمرین ۳۶ رجوع کنید. می‌توان قضیه‌ای را ثابت کرد که می‌گوید، دو بردار پایه‌ای برای فضای برداری V_2 تشکیل می‌دهند، تنها اگر آن دو بردار مستقل باشند. با انجام اعمال زیر نشان دهید که این قضیه برای دو بردار $\langle 3, -2 \rangle$ و $\langle 4, -6 \rangle$ برقرار است: (الف) با نشان دادن اینکه نمایشهای مواضع آنها همخط‌اند، ثابت کنید که بردارها وابسته (نامستقل) هستند؛ (ب) ثابت کنید که این بردارها تشکیل پایه نمی‌دهند. به این منظور، برداری خاص را در نظر بگیرید و نشان دهید که این بردار را نمی‌توان به صورت $c(3i - 2j) + d(-6i + 4j)$ نوشت، که در آن c و d اسکالر هستند.

۳۸. مجموعه‌ای از بردارهای $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ را وابسته خطی گویند اگر و تنها اگر اسکالرهایی $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به طوری که

$$k_1V_1 + k_2V_2 + k_3V_3 + \dots + k_nV_n = 0.$$

نشان دهید که اگر $V_1 = 3i - 2j$ ، $V_2 = i + 4j$ ، و $V_3 = 2i + 5j$ ، آنگاه V_1, V_2 و V_3 وابسته خطی هستند.

۳.۱۶ حاصلضرب نقطه‌ای

در بخش ۱.۱۶ جمع و تفریق بردارها و ضرب اسکالر در بردار را تعریف کردیم. ولی ضرب دو بردار مورد بررسی قرار نگرفت. حال يك عمل ضرب روی دو بردار تعریف می‌کنیم که حاصل آن حاصلضرب نقطه‌ای نامیده می‌شود.

۱.۳.۱۶ تعریف اگر $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle b_1, b_2 \rangle$ دو بردار در V_2 باشند، آنگاه حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ، که با $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر است

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار، يك عدد حقیقی (اسکالر) است و بردار نیست؛ گاهی آن را حاصلضرب عددی یا حاصلضرب داخلی نیز می‌نامند.

○ نمونه ۱ اگر $\mathbf{A} = \langle 2, -3 \rangle$ و $\mathbf{B} = \langle -1/2, 4 \rangle$ ، آنگاه

$$\text{○ } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \langle 2, -3 \rangle \cdot \langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle = (2)\left(-\frac{1}{2}\right) + (-3)(4) = -13.$$

حاصلضربهای نقطه‌ای زیر مفید هستند و به سادگی به دست می‌آیند (تمرین ۵ را ببینید).

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \quad (1)$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1 \quad (2)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3)$$

قضیه زیر می‌گوید که ضرب نقطه‌ای نسبت به عمل جمع برداری، تعویض پذیر و توزیع پذیر است.

۲.۳.۱۶ قضیه اگر $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ بردارهای دلخواهی در V_2 باشند، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{i}) \quad (\text{قانون تعویض پذیری})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{ii}) \quad (\text{قانون توزیع پذیری}).$$

اثبات (i) و (ii) به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرینهای ۶ و ۷ را ببینید). چون $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ يك اسکالر است، عبارت $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ بی معنی است. پس شرکت پذیری در ضرب نقطه‌ای مطرح نیست. بعضی از قوانین دیگر ضرب نقطه‌ای در قضیه زیر داده شده است.

۳.۳.۱۶ قضیه اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای دلخواهی در V_2 باشند و c اسکالر دلخواهی باشد، آنگاه

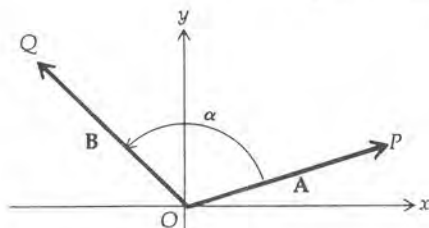
$$c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{i})$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\text{ii})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \quad (\text{iii})$$

اثبات به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرینهای ۸ تا ۱۵ را ببینید).
حال معنی زاویهٔ دو بردار را بررسی می‌کنیم؛ و از این طریق، عبارت دیگری برای حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار به دست خواهیم آورد.

۴.۳.۱۶ تعریف فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار ناصفر باشند، به طوری که $\mathbf{A}$ مضرب اسکالر $\mathbf{B}$ نباشد. اگر $\vec{OP}$ نمایش موضع $\mathbf{A}$ و $\vec{OQ}$ نمایش موضع $\mathbf{B}$ باشد، آنگاه زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زاویه‌ای است با اندازهٔ مثبت بین $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ ، در داخل مثلی که با رئوس O ، P ، و Q معین می‌شود. اگر $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ ، که c یک اسکالر است، آنگاه چنانچه $c > 0$ ، اندازهٔ زاویهٔ بین بردارها برحسب رادیان برابر است؛ و چنانچه $c < 0$ ، اندازهٔ زاویهٔ بین بردارها برحسب رادیان برابر π خواهد بود.
از تعریف ۴.۳.۱۶ نتیجه می‌شود که اگر α اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار برحسب رادیان باشد، آنگاه $0 \leq \alpha \leq \pi$. شکل ۱۰.۳.۱۶ زاویهٔ بین دو بردار را در حالتی که $\mathbf{A}$ مضرب اسکالر $\mathbf{B}$ نیست، نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۳.۱۶

قضیهٔ زیر، شاید مهمترین نکته در مورد حاصلضرب دو بردار باشد.

۵.۳.۱۶ قضیه اگر α اندازهٔ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \alpha. \quad (۴)$$

اثبات فرض کنید $\mathbf{A} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$. و نیز فرض کنید $\vec{OP}$ نمایش موضع $\mathbf{A}$ و $\vec{OQ}$ نمایش موضع $\mathbf{B}$ باشد. در این صورت، زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ زاویه‌ای واقع در مبدأ و داخل مثلث POQ است (شکل ۲۰.۳.۱۶ را ببینید)؛ P نقطهٔ

(a_1, a_2) و Q نقطه (b_1, b_2) است. در مثلث POQ ، $|A|$ طول ضلع OP و $|B|$ طول ضلع OQ می باشد. پس بنا به قانون کسینوسها داریم

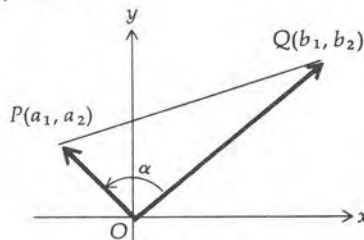
$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{|A|^2 + |B|^2 - |PQ|^2}{2|A||B|} \\ &= \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]}{2|A||B|} \\ &= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2|A||B|} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|A||B|}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}$$

که از آن به دست می آوریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \alpha.$$



شکل ۲.۳.۱۶

□

قضیه ۵.۳.۱۶ می گوید که حاصلضرب نقطه ای دو بردار عبارت است از حاصلضرب بزرگی دو بردار در کسینوس اندازه زاویه بین آن دو بردار (برحسب رادیان).

○ نمونه ۲ اگر $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ، $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، و اندازه زاویه بین این دو بردار α رادیان باشد، با استفاده از قضیه ۵.۳.۱۶ داریم

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} \\ &= \frac{(3)(2) + (-2)(1)}{\sqrt{9+4} \sqrt{4+1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{6-2}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

$$\circ \quad = \frac{4}{\sqrt{65}}.$$

در بخش ۲.۱۶ آموختیم که اگر دو بردار ناصفر مضارب اسکالر یکدیگر باشند، آن دو بردار یا همجهت و یا درجهت مخالف هم هستند. پس، تعریف زیر را داریم.

۶.۳.۱۶ تعریف دو بردار را متوازی گویند اگر و تنها اگر یکی از آنها مضرب اسکالر بردار دیگر باشد.

$\circ$ **نمونه ۳** بردارهای $\langle 3, -4 \rangle$ و $\langle 3/4, -1 \rangle$ متوازی هستند، چون $\langle 3, -4 \rangle = 4 \langle 3/4, -1 \rangle$.

اگر $\mathbf{A}$ بردار دلخواهی باشد، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0$ ؛ بنا بر تعریف ۶.۳.۱۶ نتیجه می‌گیریم که بردار صفر با هر برداری موازی است.

بدعنوان تمرین از شما خواسته می‌شود که نشان دهید دو بردار ناصفر متوازی اند اگر و تنها اگر اندازه زاویه بین دو بردار بر حسب رادیان، 0 یا π باشد (تمرین ۳۷ را ببینید). اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار ناصفر باشند، آنگاه بنا به (۴)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \cos \alpha = 0$$

چون $0 \leq \alpha \leq \pi$ ، از این نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \alpha = \frac{1}{2}\pi$$

پس تعریف زیر را داریم

۷.۳.۱۶ تعریف دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را متعامد (عمود برهم) گویند اگر و تنها اگر $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

$\circ$ **نمونه ۴** بردارهای $\langle -4, 5 \rangle$ و $\langle 10, 8 \rangle$ متعامد هستند چون

$$\langle -4, 5 \rangle \cdot \langle 10, 8 \rangle = (-4)(10) + (5)(8)$$

$$\circ \quad = 0.$$

اگر $\mathbf{A}$ بردار دلخواهی باشد، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0$ ، و بنا بر این از تعریف ۷.۳.۱۶ نتیجه می‌گیریم که بردار صفر بر هر برداری عمود است.

مثال ۱ داریم $A = 2i + 3j$ و $B = 2i + kj$ ، که k يك اسكالر است. مطلوب است (الف) مقدار k به طوری که A و B متعامد باشند؛ (ب) مقدار k به طوری که A و B متوازی باشند.

حل

(الف) بنا به تعریف ۷.۳.۱۶ می دانیم A و B متعامدند اگر و تنها اگر $A \cdot B = 0$ ؛

یعنی

$$(3)(2) + 2(k) = 0$$

پس

$$k = -3.$$

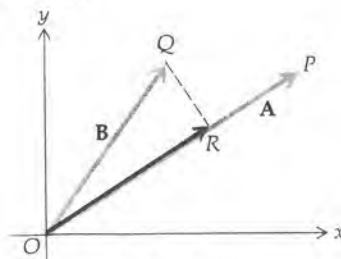
(ب) بنا به تعریف ۶.۳.۱۶ می دانیم A و B متوازی اند اگر و تنها اگر اسكالری مانند c وجود داشته باشد به طوری که $\langle 2, k \rangle = c \langle 3, 2 \rangle$ ؛ یعنی

$$2 = ck \quad \text{و} \quad 3 = 2c$$

دو معادله را با هم حل می کنیم و به دست می آوریم $k = 2/3$. ▲

با در نظر گرفتن تصویر يك بردار روی بردار دیگر، تعبیری هندسی از حاصلضرب نقطه ای به دست می آید. فرض کنید $\vec{OP}$ و $\vec{OQ}$ به ترتیب نمایشهای بردارهای A و B باشند. شکل ۳.۳.۱۶ را ببینید. تصویر $\vec{OQ}$ در امتداد $\vec{OP}$ ، پاره خط جهت دار $\vec{OR}$ است که R پای خط عمود از Q بر خطی است که شامل $\vec{OP}$ می باشد. برداری که $\vec{OR}$ نمایشی از آن است، تصویر برداری بردار B روی بردار A نامیده می شود. تصویر اسكالر B روی A به صورت $|B| \cos \alpha$ تعریف می شود، که در آن α اندازه زاویه بین دو بردار A و B بر حسب رادیان است. توجه کنید که $|B| \cos \alpha$ ممکن است مثبت یا منفی باشد زیرا به بستگی دارد. چون $A \cdot B = |A||B| \cos \alpha$ ، نتیجه می شود که

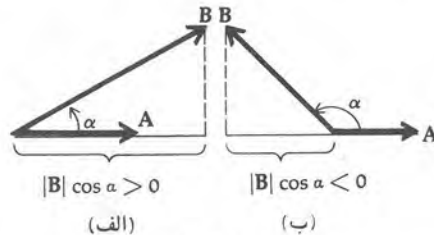
$$A \cdot B = |A|(|B| \cos \alpha). \quad (5)$$



شکل ۳.۳.۱۶

حاصلضرب نقطه‌ای ۴۲۳

پس حاصلضرب نقطه‌ای A و B برابر است با حاصلضرب بزرگی A در تصویر اسکالر B روی A . شکل ۴.۳.۱۶ (الف) و (ب) را ببینید. و نیز چون عمل ضرب نقطه‌ای تعویض پذیر است، $A \cdot B$ برابر است با حاصلضرب بزرگی B در تصویر اسکالر A روی B .

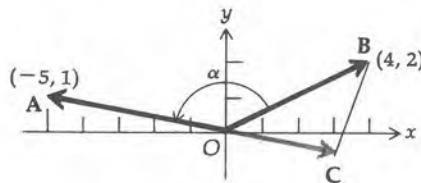


شکل ۴.۳.۱۶

مثال ۲ فرض کنید $A = -5i + j$ و $B = 4i + 2j$ ؛ تصویر برداری B روی A را به دست آورید.

حل در شکل ۵.۳.۱۶ نمایش موضع بردارهای A و B و همچنین C را، که تصویر برداری B روی A است، نشان می‌دهد. از (۵) داریم

$$|B| \cos \alpha = \frac{A \cdot B}{|A|} = \frac{(-5)(4) + (1)(2)}{\sqrt{26}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}.$$



شکل ۵.۳.۱۶

بنابراین $|C| = 18/\sqrt{26}$. چون $\cos \alpha < 0$ ، داریم $\pi/2 < \alpha < \pi$ ؛ پس جهت C مخالف جهت A است. لذا $C = cA$ ، و $c < 0$. از اینرو

$$C = -5ci + cj.$$

چون $|C| = 18/\sqrt{26}$ ، داریم

$$\frac{18}{\sqrt{26}} = \sqrt{25c^2 + c^2}.$$

بنابراین $c = -9/13$ ، که از آن نتیجه می‌شود

$$\Delta \quad \mathbf{C} = \frac{45}{13}\mathbf{i} - \frac{9}{13}\mathbf{j}.$$

اگر $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = a_2 \quad \text{و} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = a_1$$

پس حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{i}$ ، مؤلفه $\mathbf{A}$ در امتداد $\mathbf{i}$ را به دست می‌دهد و حاصلضرب نقطه‌ای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{j}$ ، مؤلفه $\mathbf{A}$ در امتداد $\mathbf{j}$ را. برای تعمیم این نتیجه، فرض کنید $\mathbf{U}$ بردار واحد دلخواهی باشد. در این صورت، بنا به (۵) داریم

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = |\mathbf{A}|(|\mathbf{U}| \cos \alpha) = |\mathbf{A}| \cos \alpha.$$

و از اینرو، $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}$ تصویر اسکالر $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{U}$ است، که مؤلفه بردار $\mathbf{A}$ در امتداد $\mathbf{U}$ نامیده می‌شود. به طور کلی، مؤلفه برداری مانند $\mathbf{A}$ در امتداد برداری چون $\mathbf{B}$ ، عبارت است از تصویر اسکالر $\mathbf{A}$ روی بردار واحدی در امتداد $\mathbf{B}$.

در بخش ۵.۷ گفتیم که اگر یک نیروی ثابت F پوندی شیئی را به مسافت d فوت در امتداد یک خط مستقیم حرکت دهد و نیروی وارد برشیء در جهت حرکت شیء باشد، آنگاه چنانچه کار انجام شده توسط نیروی F برابر W فوت-پوند باشد، داریم $W = Fd$. حال فرض کنیم نیروی ثابت وارد برشیء در جهت خط حرکت نباشد. در این حالت، فیزیکدانها کار انجام شده را به عنوان حاصلضرب مؤلفه نیرو در امتداد خط حرکت، در تغییر مکان تعریف می‌کنند. اگر شیء از نقطه A به نقطه B حرکت کند، برداری را که دارای نمایش $\overrightarrow{AB}$ است، بردار تغییر مکان می‌نامیم و آن را با $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ نشان می‌دهیم. پس اگر بزرگی بردار نیروی ثابت $\mathbf{F}$ بر حسب پوند، و فاصله A تا B بر حسب فوت بیان شود، و α اندازه زاویه بین بردارهای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})$ بر حسب رادیان باشد، آنگاه چنانچه کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ در حرکت دادن شیء از A تا B برابر W فوت-پوند باشد، داریم

$$\begin{aligned} W &= (|\mathbf{F}| \cos \alpha) |\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})| \\ &= |\mathbf{F}| |\mathbf{V}(\overrightarrow{AB})| \cos \alpha \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}(\overrightarrow{AB}). \end{aligned}$$

مثال ۳ فرض کنید بزرگی نیروی $\mathbf{F}$ برابر ۶ پوند و زاویه هادی آن بر حسب رادیان برابر $\pi/6$ باشد؛ مطلوب است محاسبه کاری که نیروی $\mathbf{F}$ برای حرکت دادن شیئی

در امتداد يك خط مستقيم از مبدأ تا نقطه $P(7, 1)$ انجام می‌دهد؛ فاصله بر حسب فوت اندازه‌گیری می‌شود.

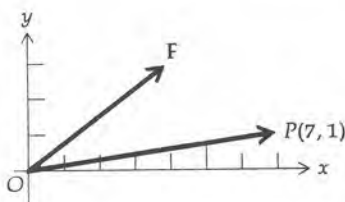
حل در شکل ۶.۳۰۱۶ نمایش موضع F و نمایش موضع $V(\overrightarrow{OP})$ را می‌بینید. اگر کار انجام شده برابر W فوت-پوند باشد، داریم

$$W = F \cdot V(\overrightarrow{OP}).$$

$$F = \langle 6 \cos(\pi/6), 6 \sin(\pi/6) \rangle = \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle \text{ و } V(\overrightarrow{OP}) = \langle 7, 1 \rangle \text{ پس}$$

$$W = \langle 3\sqrt{3}, 3 \rangle \cdot \langle 7, 1 \rangle = 21\sqrt{3} + 3 \approx 39.37.$$

بنابراین، کار انجام شده ۳۹٫۳۷ فوت-پوند است.



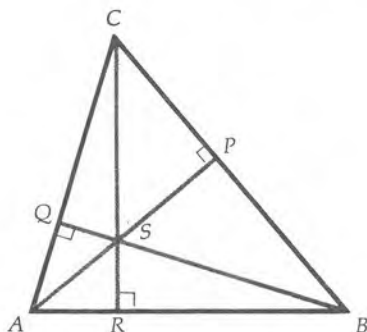
شکل ۶.۳۰۱۶

بردارها نمایشی هندسی دارند که از دستگاه مختصات به کار رفته، مستقل است. به این دلیل، آنالیز برداری را می‌توان برای اثبات بعضی از قضایای هندسه مسطحه به کار برد. این موضوع در مثال زیر نشان داده شده است.

مثال ۴ با استفاده از آنالیز برداری ثابت کنید که ارتفاعهای مثلث در يك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

حل فرض کنید ABC مثلثی باشد که ارتفاعهای AP و BQ آن یکدیگر را در نقطه S قطع می‌کنند. خطی از C و S می‌گذرانیم تا ضلع AB را در نقطه R قطع کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که RC بر AB عمود است (شکل ۷.۳۰۱۶ را ببینید).

فرض کنید $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}$ نمایشهای بردارها باشند. و فرض کنید $V(\overrightarrow{AB})$ برداری باشد که پاره خط جهت دار $\overrightarrow{AB}$ نمایش آن است. به همین نحو تصور کنید که هر يك از $V(\overrightarrow{BC}), V(\overrightarrow{AC}), V(\overrightarrow{AS}), V(\overrightarrow{BS}), V(\overrightarrow{CS})$ برداری باشد که



شکل ۷.۳.۱۶

پاره خط جهت‌دار داخل پُرانتز مربوطه، نمایش آن است.
چون AP ارتفاعی از مثلث است،

$$\vec{V}(\vec{AS}) \cdot \vec{V}(\vec{BC}) = 0. \quad (۶)$$

همچنین، چون BQ يك ارتفاع مثلث است،

$$\vec{V}(\vec{BS}) \cdot \vec{V}(\vec{AC}) = 0. \quad (۷)$$

برای اینکه ثابت کنیم RC عمود بر AB است، نشان می‌دهیم که

$$\vec{V}(\vec{CS}) \cdot \vec{V}(\vec{AB}) = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{CS}) \cdot \vec{V}(\vec{AB}) &= \vec{V}(\vec{CS}) \cdot [\vec{V}(\vec{AC}) + \vec{V}(\vec{CB})] \\ &= \vec{V}(\vec{CS}) \cdot \vec{V}(\vec{AC}) + \vec{V}(\vec{CS}) \cdot \vec{V}(\vec{CB}) \\ &= [\vec{V}(\vec{CB}) + \vec{V}(\vec{BS})] \cdot \vec{V}(\vec{AC}) \\ &\quad + [\vec{V}(\vec{CA}) + \vec{V}(\vec{AS})] \cdot \vec{V}(\vec{CB}) \\ &= \vec{V}(\vec{CB}) \cdot \vec{V}(\vec{AC}) + \vec{V}(\vec{BS}) \cdot \vec{V}(\vec{AC}) \\ &\quad + \vec{V}(\vec{CA}) \cdot \vec{V}(\vec{CB}) + \vec{V}(\vec{AS}) \cdot \vec{V}(\vec{CB}). \end{aligned}$$

با قرار دادن $\vec{V}(\vec{AC}) - \vec{V}(\vec{CA})$ به جای $\vec{V}(\vec{CA})$ و استفاده از (۶) و (۷)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \vec{V}(\overrightarrow{CS}) \cdot \vec{V}(\overrightarrow{AB}) &= \vec{V}(\overrightarrow{CB}) \cdot \vec{V}(\overrightarrow{AC}) + 0 + [-\vec{V}(\overrightarrow{AC})] \cdot \vec{V}(\overrightarrow{CB}) + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

▲ بنابراین ارتفاعهای AP ، BQ ، و RC از يك نقطه می گذرند.

تمرینهای ۳۰۱۶

دو تمرینهای ۱ تا ۴، A ، B را به دست آورید.

$$A = \langle \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \rangle; B = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3} \rangle \quad ۲. \quad A = \langle -1, 2 \rangle; B = \langle -2, 3 \rangle \quad ۱.$$

$$A = -2i; B = -i + j \quad ۴. \quad A = 2i - j; B = i + 3j \quad ۳.$$

$$۵. \quad \text{نشان دهید که } i \cdot j = 0; j \cdot j = 1; i \cdot i = 1.$$

$$۶. \quad \text{قضیه } ۲.۳.۱۶ \text{ (i) را ثابت کنید.}$$

$$۷. \quad \text{قضیه } ۲.۳.۱۶ \text{ (ii) را ثابت کنید.}$$

$$۸. \quad \text{قضیه } ۳.۳.۱۶ \text{ (i) را ثابت کنید.}$$

$$۹. \quad \text{قضیه } ۳.۳.۱۶ \text{ (ii) را ثابت کنید.}$$

$$۱۰. \quad \text{قضیه } ۳.۳.۱۶ \text{ (iii) را ثابت کنید.}$$

دو تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، اگر α اندازه زاویه بین بردارهای A و B بر حسب رادیان باشد، $\cos \alpha$ را به دست آورید.

$$A = \langle -2, -3 \rangle; B = \langle 3, 2 \rangle \quad ۱۲. \quad A = \langle 4, 3 \rangle; B = \langle 1, -1 \rangle \quad ۱۱.$$

$$A = 2i + 4j; B = -5j \quad ۱۴. \quad A = 5i - 12j; B = 4i + 3j \quad ۱۳.$$

۱۵. مقدار k را طوری پیدا کنید که در مثال ۱ همین بخش، اندازه زاویه بین دو بردار $\pi/4$ رادیان باشد.

۱۶. فرض کنید $A = ki - 2j$ و $B = ki + 6j$ ، که k يك اسکالر است. k را طوری بیابید که A و B متعامد باشند.

۱۷. فرض کنید $A = 5i - kz$ و $B = ki + 6j$ ، که k يك اسکالر است. مطلوب است (الف) مقدار k به طوری که A و B متعامد باشند؛ (ب) مقدار k به طوری که A و B متوازی باشند.

۱۸. k را طوری پیدا کنید که در تمرین ۱۶، جهت بردارهای داده شده مخالف هم باشد.

۱۹. فرض کنید $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$ ، که k يك اسكالر است. k را طوری به دست آورید که اندازه زاویه بین $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برابر $\pi/3$ رادیان باشد.

۲۰. دوبردار واحد بیابید که هریک دارای نمایشی باشد که ابتدایش نقطه $(4, 2)$ است و در این نقطه، بر سهی $y = x^2$ مماس است.

۲۱. دوبردار واحد بیابید که هریک دارای نمایشی باشد که ابتدایش نقطه $(4, 2)$ است و در این نقطه، قائم بر سهی $y = x^2$ است.

۲۲. اگر $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ ، بردارهای واحدی بیابید که عمود بر $\mathbf{A}$ باشند.

۲۳. اگر $\mathbf{A}$ بردار $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ باشد، بردارهای واحد عمود بر $\mathbf{A}$ را به دست آورید.

۲۴. اگر $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 9c\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 4c\mathbf{j}$ ، نشان دهید که به ازای هیچ مقدار حقیقی از c ، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ متعامد نیستند.

۲۵. اگر $\mathbf{A} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ ، تصویر برداری $\mathbf{A}$ روی $\mathbf{B}$ را به دست آورید.

۲۶. بردارهای تمرین ۲۵ را در نظر بگیرید و تصویر برداری $\mathbf{B}$ روی $\mathbf{A}$ را به دست آورید.

۲۷. مؤلفه بردار $\mathbf{A} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ در امتداد بردار $\mathbf{B} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j}$ را به دست آورید.

۲۸. بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در تمرین ۲۷ را در نظر بگیرید و مؤلفه بردار $\mathbf{B}$ در امتداد بردار $\mathbf{A}$ را به دست آورید.

۲۹. بردار $\mathbf{F}$ نیرویی را نشان می دهد که بزرگی آن ۸ پوند و اندازه زاویه هادی آن $\pi/3$ رادیان است. مطلوب است محاسبه کاری که این نیرو انجام می دهد تا شیء را (الف) در امتداد محور x ها از مبدأ تا نقطه $(6, 0)$ ، و (ب) در امتداد محور y ها از مبدأ تا نقطه $(0, 6)$ ، به حرکت در آورد. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود.

۳۰. بردار $\mathbf{F}$ نیرویی را نشان می دهد که بزرگی آن ۱۰ پوند و اندازه زاویه هادیش $\pi/4$ رادیان است. مطلوب است محاسبه کاری که این نیرو انجام می دهد تا شیء را در امتداد محور y ها از نقطه $(2, -5)$ تا نقطه $(5, 0)$ به حرکت در آورد. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود.

۳۱. بردار $\mathbf{F}$ نیرویی را نشان می دهد که بزرگی آن ۹ پوند و اندازه زاویه هادی آن $\pi/3$ رادیان است. مطلوب است محاسبه کاری که این نیرو انجام می دهد تا شیئی را از مبدأ به نقطه $(-2, -4)$ حرکت دهد. فاصله بر حسب فوت اندازه گیری می شود.

۳۲. دوبردار $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نماینده دو نیرو هستند که روی يك ذره اثر می کنند، و ذره در امتداد

يك خط مستقیم از نقطه $(۲, ۵)$ به نقطه $(۷, ۳)$ حرکت می کند. اگر $\mathbf{F}_1 = ۳\mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2 = -۲\mathbf{i} + ۵\mathbf{j}$ ، و بزرگی نیروها برحسب پوند و فاصله برحسب فوت اندازه گیری شوند، کار انجام شده توسط دونیرو را که با هم اثر می کنند، به دست آورید.

۳۳. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار باشند، ثابت کنید که

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + ۲\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

۳۴. با استفاده از آنالیز برداری ثابت کنید که میانه های يك مثلث در يك نقطه یکدیگر را قطع می کنند.

۳۵. با آنالیز برداری ثابت کنید که پاره خطی که وسط دو ضلع يك مثلث را به هم وصل می کند، با ضلع سوم موازی و طولش نصف طول ضلع سوم است.

۳۶. با آنالیز برداری ثابت کنید که پاره خطی که وسط دو ضلع غیرموازی يك ذوزنقه را به هم وصل می کند، با دو ضلع دیگر ذوزنقه موازی است و طولش نصف مجموع طول دو ضلع موازی است.

۳۷. ثابت کنید دو بردار ناصفر متوازی اند اگر و تنها اگر اندازه زاویه هادی بین آن دو ۰ یا π رادیان باشد.

۴.۱۶ توابع با مقادیر برداری، و معادلات پارامتری

حال تابعی را در نظر می گیریم که قلمرو آن مجموعه ای از اعداد حقیقی و بردش مجموعه ای از بردارهاست. چنین تابعی را تابعی با مقادیر برداری گویند.

۱۴.۱۶ تعریف فرض کنید f و g توابعی با مقادیر حقیقی از يك متغیر حقیقی t باشند. در این صورت، برای هر عدد t در قلمرو مشترک f و g يك بردار $\mathbf{R}$ وجود دارد که به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}. \quad (۱)$$

$\mathbf{R}$ را يك تابع با مقادیر برداری می نامند. [در این کتاب، چنین تابعی را به اختصار تابع برداری می گوئیم.]

○ نمونه ۱ تصور کنید

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{t-۲})\mathbf{i} + (t-۳)^{-۱}\mathbf{j}$$

و فرض کنید

$$f(t) = \sqrt{t-۲} \quad \text{و} \quad g(t) = (t-۳)^{-۱}$$

قلمرو R مجموعه مقادیری از t است که به ازای آنها، هردوی $f(t)$ و $g(t)$ تعریف شده اند. مقادیر $f(t)$ به ازای $t \geq 2$ ، و $g(t)$ به ازای تمام اعداد حقیقی بجز ۳ تعریف شده اند. بنابراین، قلمرو R عبارت است از $\{t | t \geq 2, t \neq 3\}$. $\circ$

اگر R تابعی برداری باشد که با ضابطه (۱) تعریف می شود، آنگاه هم چنانکه تمام مقادیر قلمرو R را اختیار می کند، انتهای نمایش موضع بردار $R(t)$ ، منحنی C را پدید می آورد. به ازای هر مقدار t ، نقطه ای مانند (x, y) روی C وجود دارد، که برای آن داریم

$$(2) \quad x = f(t) \quad \text{و} \quad y = g(t)$$

منحنی C را می توان توسط (۱) یا (۲) تعریف کرد. معادله (۱) را معادله برداری C ، و معادلات (۲) را معادلات پارامتری C می نامند. متغیر t یک پارامتر است. همچنین منحنی C یک نمودار نام دارد، یعنی، مجموعه تمام نقاط (x, y) که در (۲) صدق می کنند، نمودار تابع برداری R است.

معادله برداری یک منحنی، همچون معادلات پارامتری آن، در هر نقطه جهتی به منحنی می دهد. یعنی، اگر فکر کنیم که منحنی در اثر حرکت یک ذره به وجود آمده است، می توانیم جهت مثبت در امتداد منحنی را همان جهت حرکت ذره وقتی که t افزایش می یابد، در نظر بگیریم. در چنین حالتی، t را می توان اندازه زمان فرض کرد. $R(t)$ بردار موضع نامیده می شود. گاهی $R(t)$ را بردار شعاعی نیز می نامند.

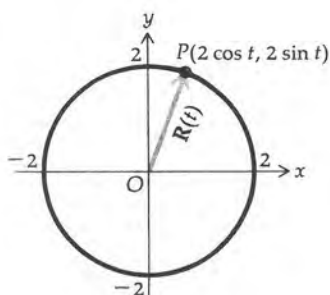
اگر پارامتر t را از معادلات (۲) حذف کنیم، معادله ای بر حسب x و y به دست می آید که آن را معادله دکارتی C می نامند. ممکن است حذف پارامتر به یک معادله دکارتی بینجامد که نمودارش نسبت به نمودار تعریف شده توسط معادله برداری و یا معادلات پارامتری، نقاط بیشتری را دربر داشته باشد. این وضعیت در مثال ۴ دیده می شود.

مثال ۱ معادله برداری $R(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$ داده شده است. (الف) نمودار این معادله را رسم کنید؛ و (ب) معادله دکارتی نمودار را به دست آورید.

حل قلمرو R مجموعه تمام اعداد حقیقی است. می توان مقادیر t و y را به ازای مقادیر خاصی از t فهرست کرد. بزرگی بردار موضع را به دست می آوریم. به ازای هر t داریم

$$|R(t)| = \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = 2 \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2.$$

بنابراین، انتهای نمایش موضع هر بردار $R(t)$ به فاصله ۲ واحد از مبدأ قرار دارد. اگر t تمام اعداد واقع در بازه بسته $[0, 2\pi]$ را اختیار کند، دایره ای به دست می آوریم که مرکزش در مبدأ و شعاع آن ۲ است. این دایره، کل نمودار است چون هر مقدار t نقطه ای را دایره از به دست می دهد. نمودار دایره در شکل ۱۰.۴.۱۶ نشان داده شده است. معادلات پارامتری نمودار به صورت زیر هستند



شکل ۱۰۴۰۱۶

$$x = 2 \cos t \quad \text{و} \quad y = 2 \sin t$$

معادلهٔ دکارتی نمودار را می‌توان با حذف t از دو معادلهٔ پارامتری به‌دست آورد؛ به‌این منظور، دو طرف این معادلات را به توان ۲ می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم که به‌دست می‌آید

$$\blacktriangle \quad x^2 + y^2 = 4.$$

همچنانکه قبلاً گفتیم، با حذف t از معادلات پارامتری (۲) یک معادلهٔ دکارتی به‌دست می‌آوریم. معادلهٔ دکارتی یا به‌طور ضمنی و یا به‌طور صریح y را به عنوان یک یا چند تابع از x تعریف می‌کند. یعنی، اگر $x = f(t)$ و $y = g(t)$ ، آنگاه $y = h(x)$. اگر h تابع مشتق‌پذیری از x و f تابع مشتق‌پذیری از t باشد، از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌شود که

$$D_t y = (D_x y)(D_t x)$$

یا

$$g'(t) = (h'(x))(f'(t))$$

و یا، با استفاده از نماد دیفرانسیل، داریم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

اگر $dx/dt \neq 0$ ، می‌توانیم دو طرف معادلهٔ فوق را بر dx/dt تقسیم کنیم و به‌دست آوریم

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \quad (۳)$$

معادله (۳) به ما امکان می‌دهد که مشتق y نسبت به x را مستقیماً از معادلات پارامتری به دست آوریم.

چون $d^2y/dx^2 = d(y')/dx$ ، پس

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (۴)$$

مثال ۲ فرض کنید $x = 3t^2$ و $y = 4t^3$. بدون حذف t ، مطلوب است dy/dx و d^2y/dx^2 .

حل از (۳) به دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t^2}{6t} = 2t.$$

چون $y' = 2t$ ، $d(y')/dt = 2$ پس بنا به (۴) داریم

$$\Delta \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}.$$

مثال ۳ (الف) نمودار منحنیی را که با معادلات پارامتری مثال ۲ تعریف می‌شود رسم کنید؛ و (ب) معادلهٔ دکارتی نمودار قسمت (الف) را بیابید.

حل چون $x = 3t^2$ ، پس x هیچگاه منفی نیست. جدول ۱۰۴.۱۶ مقادیر x و y برای مقادیر خاصی از t را نشان می‌دهد. چون $D_x y = 2t$ ، وقتی $t = 0$ ، داریم $D_x y = 0$ ؛ پس خط مماس در نقطهٔ $(0, 0)$ افقی است. نمودار در شکل ۲۰۴.۱۶ رسم شده است. از دو معادلهٔ پارامتری $x = 3t^2$ و $y = 4t^3$ به دست می‌آوریم $x^3 = 27t^6$ و

توابع با مقادیر برداری، و... ۴۳۳

$$y^2 = 16t^2 \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{x^2}{27} = \frac{y^2}{16}$$

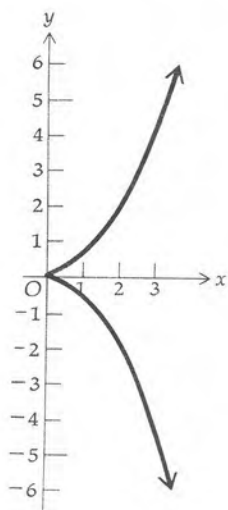
و یا

$$16x^2 = 27y^2 \quad (5)$$

که معادلهٔ دکاریتی خواسته شده می باشد.

جدول ۱۰۴۰۱۶

t	x	y
۰	۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
۱	۳	۴
۲	۱۲	۳۲
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
-۱	-۳	-۴
-۲	-۱۲	-۳۲



▲ شکل ۲۰۴۰۱۶

○ نمونه ۲ اگر در معادله (۵) به طور ضمنی مشتق بگیریم، داریم

$$48x^2 = 54y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^2}{9y}$$

با قراردادن مقادیر x و y بر حسب t از معادلات پارامتری داده شده، خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8(3t^2)^2}{9(4t^3)} = 2t$$

○ که با مقدار به دست آمده در مثال ۲ مطابقت دارد.

مثال ۴ نمودار منحنی را که با معادلات پارامتری زیر تعریف می شود، رسم کنید

$$x = \cosh t \quad \text{و} \quad y = \sinh t \quad (۴)$$

همچنین معادله دکارتی منحنی را به دست آورید.

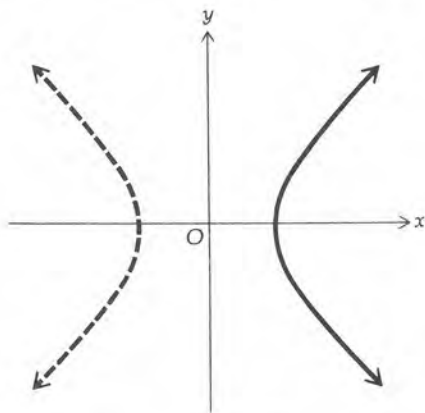
حل دوطرف معادلات داده شده را به توان ۲ رسانده از هم کم می کنیم

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t.$$

این معادله با استفاده از اتحاد $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ به صورت زیر درمی آید

$$x^2 - y^2 = 1$$

که معادله یک هذلولی متساوی الساقین است. دقت کنید که به ازای هر عدد حقیقی t ، $\cosh t$ هیچگاه کمتر از ۱ نیست. پس منحنی تعریف شده توسط معادلات پارامتری (۴) فقط شامل نقاط روی شاخه راست هذلولی است. نمودار این منحنی در شکل ۳.۴.۱۶ نشان داده شده است. معادله $x^2 - y^2 = 1$ که در آن $x \geq 1$ ، معادله دکارتی نمودار است.



▲ شکل ۳.۴.۱۶

با استفاده از نتایج مثال (۴) می توان نشان داد که مقادیر توابع سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک همان رابطه را با هذلولی متساوی الساقین دارند که مقادیر توابع

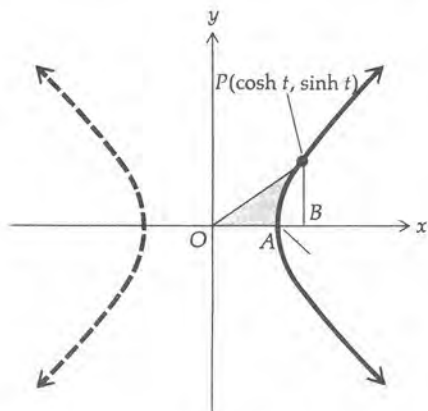
مثلثاتی سینوسی و کسینوسی با دایره دارند. معادلات

$$y = \sin t \quad \text{و} \quad x = \cos t \quad (۷)$$

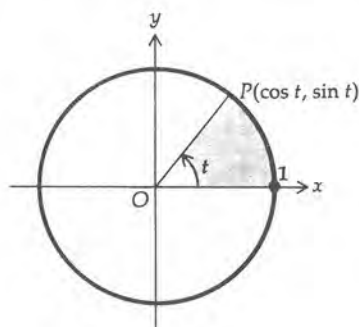
مجموعه‌ای از معادلات پارامتری دایره واحد می‌باشند، چون اگر t را با به توان ۲ رساندن دوطرف این معادلات و جمع آنها حذف کنیم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

پارامتر t در معادلات (۷) را می‌توان به عنوان اندازه زاویه بین محور x ها و خطی از مبدأ به نقطه $P(\cos t, \sin t)$ روی دایره واحد، تعبیر کرد. شکل ۴.۴.۱۶ را ببینید. چون مساحت قطاعی از دایره، وقتی شعاع دایره r واحد و زاویه قطاع t رادیان است، برابر با $\frac{r^2 t}{2}$ واحد مربع است، پس در شکل ۴.۴.۱۶ مساحت قطاع $t/2$ واحد مربع خواهد بود زیرا $r = 1$.



شکل ۵.۴.۱۶



شکل ۴.۴.۱۶

در مثال ۴ نشان دادیم که معادلات پارامتری (۶) مجموعه معادلات پارامتری شاخه راست هذلولی متساوی الساقین $x^2 - y^2 = 1$ هستند. این هذلولی را هذلولی واحد می‌نامند. فرض کنید نقطه‌ای روی این منحنی باشد، و بخواهیم مساحت قطاع AOP را که در شکل ۵.۴.۱۶ نشان داده شده، محاسبه کنیم. قطاع AOP ناحیه محدود به محور x ها، خط OP ، و قوس AP از هذلولی واحد است. اگر مساحت قطاع AOP برابر A_1 واحد مربع، مساحت مثلث OBP برابر A_2 واحد مربع، و مساحت ناحیه ABP برابر A_3 واحد مربع باشد، داریم

$$A_1 = A_2 - A_3. \quad (۸)$$

بنا بر فرمولی که مساحت مثلث را به دست می‌دهد، داریم

$$A_2 = \frac{1}{2} \cosh t \sinh t \quad (9)$$

و A_3 را با انتگرال گیری به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^t \sinh u \, d(\cosh u) \\ &= \int_0^t \sinh u \, du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cosh 2u - 1) \, du \\ &= \left[\frac{1}{4} \sinh 2u - \frac{1}{2} u \right]_0^t \end{aligned}$$

و لذا

$$A_3 = \frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \frac{1}{2} t. \quad (10)$$

از (۹) و (۱۰) در (۸) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \left(\frac{1}{2} \cosh t \sinh t - \frac{1}{2} t \right) \\ &= \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

بنا بر این، مساحت قطاع مستدیر AOP در شکل ۴.۴.۱۶ بر حسب واحد مربع، و مساحت قطاع AOP در شکل ۵.۴.۱۶ بر حسب واحد مربع، در هر حالت برابر است با نصف مقدار پارامتر مربوط به نقطه P . در دایره واحد، پارامتر t اندازه زاویه AOP بر حسب رادیان است. و در هذلولی واحد، پارامتر t به عنوان اندازه زاویه تعبیر نمی‌شود؛ معینا گاهی عبارت دادیان هذلولوی در ارتباط با t مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در بخش ۱۰.۱۴، که قضیه مقدار میانگین کوشی (۳.۱.۱۴) را بیان و اثبات کردیم، خاطر نشان کردیم که تعبیری هندسی در بخش حاضر ارائه خواهیم کرد چون احتیاج به معادلات پارامتری داشتیم. به یاد آورید که آن قضیه چنین می‌گوید که اگر f و g دو تابع باشند به طوری که (i) f و g روی $[a, b]$ پیوسته باشند، (ii) f و g روی (a, b) مشتق پذیر باشند، و (iii) برای هر x در (a, b) داشته باشیم $g'(x) \neq 0$ ، آنگاه يك

عدد z در بازه باز (a, b) وجود دارد، به طوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

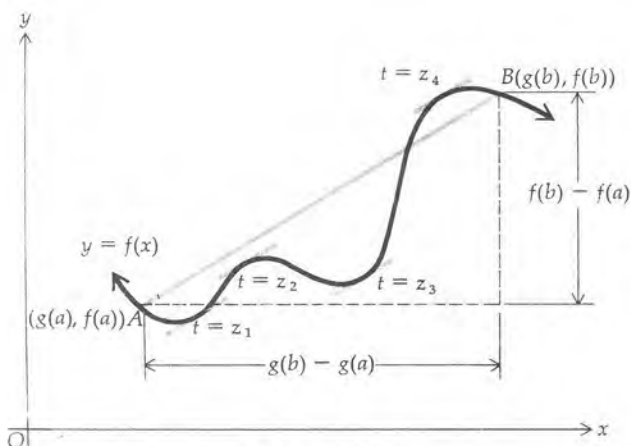
شکل ۶.۴.۱۶ يك منحنی را نشان می‌دهد که دارای معادلات پارامتری $x = g(t)$ و $y = f(t)$ ، $a \leq t \leq b$ است. ضریب زاویه منحنی در يك نقطه خاص به صورت زیر است

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

و ضریب زاویه پاره خطی که از نقاط $A(g(a), f(a))$ و $B(g(b), f(b))$ می‌گذرد، به صورت

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

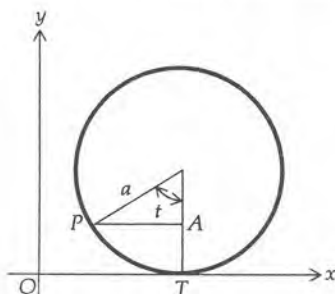
می‌باشد. قضیه مقدار میانگین حاکی است که این ضریب زاویه‌ها حداقل برای يك مقدار از t ، بین a و b ، متساوی‌اند. برای منحنی شکل ۶.۴.۱۶ چهار مقدار t وجود دارد که در حکم قضیه صدق می‌کنند: $t = z_1$ ، $t = z_2$ ، $t = z_3$ ، و $t = z_4$.



شکل ۶.۴.۱۶

حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از معادلات پارامتری برای تعریف يك منحنی که توسط يك حرکت فیزیکی توصیف می‌شود، استفاده کرد. منحنیی که در نظر می‌گیریم چرخزاد است، که این منحنی توسط يك نقطه از محیط دایره‌ای که آن دایره بريك خط

مستقیم می‌غلند، به وجود می‌آید. فرض کنید شعاع دایره a است، و خط مستقیم ثابتی که دایره روی آن می‌غلند، محور x هاست، و تصور کنید مبدأ یکی از نقاطی باشد که نقطه مفروض در آنجا روی محور x ها واقع می‌شود. شکل ۷.۴.۱۶ را ببینید که دایره را بعد از چرخش با زاویه t رادیان نشان می‌دهد.



شکل ۷.۴.۱۶

با توجه به شکل ۷.۴.۱۶ داریم

$$\vec{V}(\vec{OT}) + \vec{V}(\vec{TA}) + \vec{V}(\vec{AP}) = \vec{V}(\vec{OP}). \quad (11)$$

اما $|\vec{V}(\vec{OT})|$ برابر طول قوس $\vec{PT}$ یعنی مساوی at است. چون جهت $\vec{V}(\vec{OT})$ جهت مثبت محور x هاست، پس

$$\vec{V}(\vec{OT}) = at\mathbf{i}. \quad (12)$$

همچنین، $|\vec{V}(\vec{TA})| = a - a \cos t$ ؛ و چون $\vec{V}(\vec{TA})$ و $\mathbf{j}$ همجهت هستند، پس

$$\vec{V}(\vec{TA}) = a(1 - \cos t)\mathbf{j}. \quad (13)$$

داریم $|\vec{V}(\vec{AP})| = a \sin t$ ، و چون $\vec{V}(\vec{AP})$ و $-\mathbf{i}$ همجهت می‌باشند، پس

$$\vec{V}(\vec{AP}) = -a \sin t\mathbf{i}. \quad (14)$$

از (۱۲)، (۱۳)، و (۱۴) در (۱۱) قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آید

$$at\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j} - a \sin t\mathbf{i} = \vec{V}(\vec{OP})$$

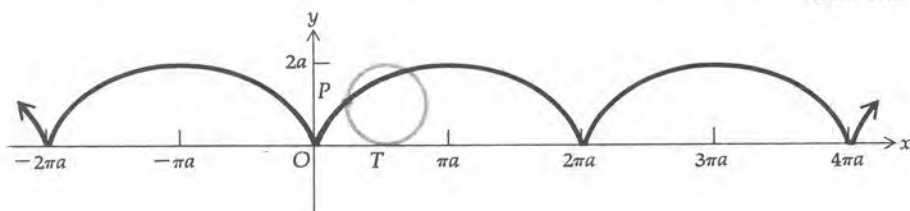
یا،

$$\vec{V}(\vec{OP}) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}. \quad (15)$$

معادله (۱۵)، يك معادله برداری چرخزاد است. پس معادلات پارامتری چرخزاد به صورت زیر هستند

$$y = a(1 - \cos t) \quad \text{و} \quad x = a(t - \sin t) \quad (۱۶)$$

که t عدد حقیقی دلخواهی است. نمودار قسمتی از چرخزاد در شکل ۸۰۴۰۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۸۰۴۰۱۶

تمرینهای ۴.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۶، قلمرو تابع برداری $\mathbf{R}$ را به دست آورید.

۱. $\mathbf{R}(t) = (1/t)\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$ ۲. $\mathbf{R}(t) = (t^2+3)\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$

۳. $\mathbf{R}(t) = (\sin^{-1} t)\mathbf{i} + (\cos^{-1} t)\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{R}(t) = \ln(t+1)\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j}$

۵. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t^2-9}\mathbf{i} + \sqrt{t^2+2t-8}\mathbf{j}$

۶. $\mathbf{R}(t) = \sqrt{t-4}\mathbf{i} + \sqrt{4-t}\mathbf{j}$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، بدون حذف پارامتر، dy/dx و d^2y/dx^2 را به دست آورید.

۷. $x=3t, y=2t^2$ ۸. $x=1-t^2, y=1+t$

۹. $x=t^2e^t, y=t \ln t$ ۱۰. $x=e^{2t}, y=1+\cos t$

۱۱. $x=a \cos t, y=b \sin t$ ۱۲. $x=a \cosh t, y=b \sinh t$

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۹، نمودار معادله برداری داده شده را رسم کنید و معادله دکارتی نمودار را بیابید.

۱۳. $\mathbf{R}(t) = t^2\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$ ۱۴. $\mathbf{R}(t) = (t-2)\mathbf{i} + (t^2+4)\mathbf{j}$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{4}{t^2} \mathbf{i} + \frac{4}{t} \mathbf{j} \quad .16 \quad \mathbf{R}(t) = 3 \cosh t \mathbf{i} + 5 \sinh t \mathbf{j} \quad .15$$

$$(-\pi/2, \pi/2) \text{ در } t: \mathbf{R}(t) = \sec t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} \quad .17$$

$$[0, \pi/2] \text{ در } t: \mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad .18$$

$$[0, 2\pi] \text{ در } t: \mathbf{R}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} \quad .19$$

۲۰. مطلوب است معادله خط مماس بر منحنی $x = 1 + 3 \sin t$ ، $y = 2 - 5 \cos t$ در نقطه‌ای که $t = \pi/6$.

۲۱. مطلوب است معادله خط مماس بر منحنی $x = 2 \sin t$ ، $y = 5 \cos t$ در نقطه‌ای که $t = \pi/3$.

دترمینای ۲۲ تا ۲۴، مطلوب است معادلات خطوط مماس افقی، از طریق یافتن مقادیری از t که برای آنها $dy/dt = 0$ ؛ و معادلات خطوط مماس قائم، از طریق یافتن مقادیری از t که برای آنها $dx/dt = 0$. سپس نمودار هر جفت از معادلات پارامتری داده شده را رسم کنید.

$$x = t^2 + t, y = t^2 - t \quad .22 \quad x = 4t^2 - 4t, y = 1 - 4t^2 \quad .23$$

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3} \quad .24$$

۲۵. معادلات پارامتری چرخکواد به صورت زیر است

$$x = at - b \sin t \quad \text{و} \quad y = a - b \cos t$$

نشان دهید که اگر $a > b > 0$ ، چرخکوار هیچ خط مماس قائمی ندارد.

۲۶. يك پرتابه طوری حرکت می کند که مختصات موقعیتش در هر زمان t از معادلات $x = 60t$ و $y = 80t - 16t^2$ به دست می آید. نمودار مسیر پرتابه را رسم کنید.

۲۷. مطلوب است محاسبه dy/dx ، d^2y/dx^2 ، و d^3y/dx^3 در نقطه‌ای روی چرخزادی با معادلات (۱۶)، که در آن وقتی x در بازه بسته $[0, 2\pi a]$ باشد، y بزرگترین مقدار را دارد.

۲۸. نشان دهید که ضریب زاویه خط مماس بر چرخزادی با معادلات (۱۶) در $t = t_1$ برابر است با $\cot(t_1/2)$. سپس نتیجه بگیرید که خط مماس، قائم است وقتی $t = 2n\pi$ ، که n عدد صحیح دلخواهی است.

۲۹. شبه چرخزاد منحنیی است که به وسیله نقطه‌ای چون P روی دایره‌ای به شعاع b که

در داخل دایره ثابتی به شعاع $a > b$ ، می‌غلند، رسم می‌شود. اگر مبدأ در مرکز دایره ثابت باشد، $A(a, 0)$ یکی از نقاطی است که نقطه P در آنجا روی دایره ثابت قرار می‌گیرد، B نقطه متحرک مماس دو دایره است، و پارامتر t اندازه زاویه AOB بر حسب رادیان است. ثابت کنید معادلات پارامتری شبه چرخزاد به صورت زیر هستند

$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a-b}{b} t$$

و

$$y = (a - b) \sin t - b \sin \frac{a-b}{b} t.$$

۳۰. اگر در تمرین ۲۹ داشته باشیم $a = 4b$ ، یک شبه چرخزاد با چهار نقطه بازگشت داریم. نشان دهید که معادلات پارامتری این منحنی $x = a \cos^3 t$ و $y = a \sin^3 t$ هستند.

۳۱. از معادلات پارامتری تمرین ۳۰ استفاده کنید، و یک معادله دکارتی برای شبه چرخزادی با چهار نقطه بازگشت به دست آورید، و نمودار معادله حاصل را رسم کنید.

۳۲. معادلات پارامتری تراکتریس به صورت زیرند

$$x = t - a \tanh \frac{t}{a} \quad \text{و} \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

نمودار منحنی را به ازای $a = 4$ رسم کنید.

۳۳. ثابت کنید که پارامتر t در معادلات پارامتری یک تراکتریس (تمرین ۳۲ را ببینید) طول از مبدأ خط مماس است.

۳۴. نشان دهید که تراکتریس مذکور در تمرین ۳۲، منحنیی است که طول قطعه‌ای از هر خط مماس بر آن، از نقطه تماس تا نقطه تقاطع با محور x ها، عدد ثابتی است مساوی با a .

۳۵. مساحت ناحیه محدود به محور x ها و یک طاق از چرخزادی با معادلات (۱۶) را به دست آورید.

۳۶. مرکزوار ناحیه تمرین ۳۵ را به دست آورید.

۵.۱۶ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری

اکنون در مورد حد، پیوستگی، و مشتق توابع برداری بحث می‌کنیم.

۱۰۵.۱۶ تعریف فرض کنید R تابعی برداری باشد که مقادیرش از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}.$$

در این صورت، حد $\mathbf{R}(t)$ وقتی t به سمت t_1 میل کند، به صورت زیر تعریف می شود

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = [\lim_{t \rightarrow t_1} f(t)]\mathbf{i} + [\lim_{t \rightarrow t_1} g(t)]\mathbf{j}$$

به شرطی که $\lim_{t \rightarrow t_1} f(t)$ و $\lim_{t \rightarrow t_1} g(t)$ هر دو وجود داشته باشند.

○ نمونه ۱ اگر $\mathbf{R}(t) = \cos t \mathbf{i} + 2e^t \mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\circ \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{R}(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} \cos t)\mathbf{i} + (\lim_{t \rightarrow 0} 2e^t)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

۲.۵.۱۶ تعریف تابع برداری $\mathbf{R}$ در t_1 پیوسته است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند:

(i) $\mathbf{R}(t_1)$ وجود داشته باشد؛

(ii) $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t)$ وجود داشته باشد؛

(iii) $\lim_{t \rightarrow t_1} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_1)$

از تعاریف ۱.۵.۱۶ و ۲.۵.۱۶ نتیجه می گیریم که تابع برداری $\mathbf{R}$ ، که با ضابطه $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ تعریف می شود، در t_1 پیوسته است اگر و تنها اگر f و g در آنجا پیوسته باشند.

در تعریف زیر عبارت

$$\frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

برای نشان دادن تقسیم یک بردار بزرگ اسکالر به کار می رود که معادل این عبارت است:

$$\frac{1}{\Delta t} [\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)].$$

۳.۵.۱۶ تعریف اگر $\mathbf{R}$ یک تابع برداری باشد، آنگاه مشتق $\mathbf{R}$ یک تابع برداری است که با $\mathbf{R}'$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathbf{R}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

گاهی نماد $D_t \mathbf{R}(t)$ به جای $\mathbf{R}'(t)$ به کار می رود.
قضیه زیر از تعریف ۳.۵.۱۶ و تعریف مشتق تابعی با مقادیر حقیقی، نتیجه می شود.

۴.۵.۱۶ قضیه اگر $\mathbf{R}$ تابع برداری باشد که به صورت زیر تعریف شود

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (۱)$$

آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

به شرطی که $f'(t)$ و $g'(t)$ وجود داشته باشند.

اثبات از تعریف ۳.۵.۱۶ داریم

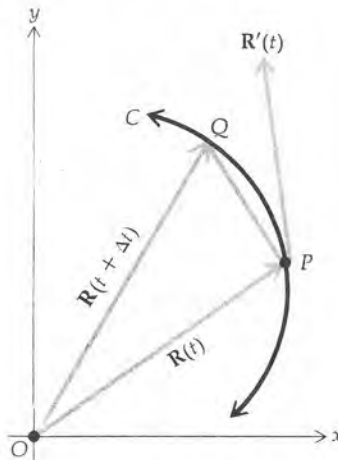
$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t+\Delta t)\mathbf{i} + g(t+\Delta t)\mathbf{j}] - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[f(t+\Delta t) - f(t)]}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t+\Delta t) - g(t)]}{\Delta t} \mathbf{j} \\ \square \quad &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

امتداد $\mathbf{R}'(t)$ روی خط مماس بر نمودار $\mathbf{R}(t)$ در نقطه $(f(t), g(t))$ است که دارای معادله برداری (۱) می باشد. یعنی، جهت $\mathbf{R}'(t)$ با زاویه θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) معین می شود که داریم

$$\tan \theta = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}.$$

تعبیری هندسی از تعریف ۳.۵.۱۶ با در نظر گرفتن نمایشهای بردارهای $\mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ و $\mathbf{R}'(t)$ به دست می آید. به شکل ۱۰.۵.۱۶ مراجعه کنید. منحنی C توسط انتهای نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ وقتی که t تمام مقادیر در قلمرو $\mathbf{R}$ را اختیار کند، به وجود می آید. فرض کنید $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ و $\overrightarrow{OQ}$ نمایش موضع $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ باشد. در این صورت $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ برداری است که $\overrightarrow{PQ}$ نمایش آن می باشد. اگر بردار $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ را در اسکالر $1/\Delta t$ ضرب کنیم، برداری به دست می آوریم که

همجهت با این بردار است و بزرگی آن برابر با حاصلضرب $1/|\Delta t|$ در بزرگی $\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$ است. همچنانکه Δt به سمت صفر میل می‌کند، بردار $[\mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)]/\Delta t$ به سمت برداری میل می‌کند که یکی از نمایشهای در نقطه P بر منحنی C مماس است.



شکل ۱۰۵.۱۶

○ نمونه ۲ اگر $\mathbf{R}(t) = (2 + \sin t)\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$ ، آنگاه

○ $\mathbf{R}'(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$.

مشتقات مراتب بالاتر توابع برداری مانند مشتقات مراتب بالاتر تابعی با مقادیر حقیقی

تعریف می‌شوند. پس اگر $\mathbf{R}$ يك تابع برداری باشد که به صورت $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ تعریف شود، مشتق دوم $\mathbf{R}$ را با $\mathbf{R}''(t)$ نشان داده و به صورت زیر مشخص می‌کنند

$$\mathbf{R}''(t) = D_t[\mathbf{R}'(t)].$$

نماد $D_t[\mathbf{R}(t)]$ را می‌توان به جای $\mathbf{R}''(t)$ نیز به کار برد. با به کار گیری قضیه

۴.۵.۱۶ در مورد $\mathbf{R}'(t)$ داریم

$$\mathbf{R}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j}$$

به شرطی که $f''(t)$ و $g''(t)$ وجود داشته باشند.

○ نمونه ۳ اگر $\mathbf{R}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (1/t)\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\mathbf{R}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \frac{1}{t^2}\mathbf{j}$$

و

$$\circ \quad \mathbf{R}''(t) = -\frac{1}{t^2} \mathbf{i} + \frac{2}{t^3} \mathbf{j}.$$

۵.۵.۱۶ تعریف تابع برداری $\mathbf{R}$ را بر بازه‌ای مشتق‌پذیر گویند اگر $\mathbf{R}'(t)$ به ازای تمام مقادیر واقع در آن بازه، موجود باشد.

قضایای زیر فرمولهای مربوط به مشتق‌گیری از توابع برداری را به دست می‌دهند. اثبات این قضایا مبتنی است بر قضیه ۴.۵.۱۶ و قضایای مشتق‌گیری از توابع با مقادیر حقیقی.

۶.۵.۱۶ قضیه اگر توابع برداری $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ بر بازه‌ای مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $\mathbf{R} + \mathbf{Q}$ نیز بر آن بازه مشتق‌پذیر است، و داریم

$$D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t \mathbf{R}(t) + D_t \mathbf{Q}(t).$$

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۲۱ را ببینید).

مثال ۱ اگر $\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + (t-1) \mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$ ، درستی قضیه ۶.۵.۱۶ را تحقیق کنید.

حل

$$\begin{aligned} D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] &= D_t[(t^2 \mathbf{i} + (t-1) \mathbf{j}) + (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j})] \\ &= D_t[(t^2 + \sin t) \mathbf{i} + (t-1 + \cos t) \mathbf{j}] \\ &= (2t + \cos t) \mathbf{i} + (1 - \sin t) \mathbf{j} \\ D_t \mathbf{R}(t) + D_t \mathbf{Q}(t) &= D_t[t^2 \mathbf{i} + (t-1) \mathbf{j}] + D_t(\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) \\ &= (2t \mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) \\ &= (2t + \cos t) \mathbf{i} + (1 - \sin t) \mathbf{j} \end{aligned}$$

▲

$$\cdot D_t[\mathbf{R}(t) + \mathbf{Q}(t)] = D_t \mathbf{R}(t) + D_t \mathbf{Q}(t) \text{ پس،}$$

۷.۵.۱۶ قضیه اگر توابع برداری $\mathbf{R}$ و $\mathbf{Q}$ بر بازه‌ای مشتق‌پذیر باشند، آنگاه $\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$ نیز بر آن بازه مشتق‌پذیر است، و داریم

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)].$$

اثبات فرض کنید $\mathbf{R}(t) = f_1(t) \mathbf{i} + g_1(t) \mathbf{j}$ و $\mathbf{Q}(t) = f_2(t) \mathbf{i} + g_2(t) \mathbf{j}$ در

این صورت با استفاده از قضیه ۴.۵.۱۶ داریم

$$D_t \mathbf{Q}(t) = f'_v(t)\mathbf{i} + g'_v(t)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad D_t \mathbf{R}(t) = f'_\lambda(t)\mathbf{i} + g'_\lambda(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = [f_\lambda(t)][f_v(t)] + [g_\lambda(t)][g_v(t)].$$

پس

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)]$$

$$= [f'_\lambda(t)][f_v(t)] + [f_\lambda(t)][f'_v(t)] + [g'_\lambda(t)][g_v(t)] + [g_\lambda(t)][g'_v(t)]$$

$$= \{[f'_\lambda(t)][f_v(t)] + [g'_\lambda(t)][g_v(t)]\} + \{[f_\lambda(t)][f'_v(t)] + [g_\lambda(t)][g'_v(t)]\}$$

$$= [D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)].$$

□

مثال ۲ درستی قضیه ۴.۵.۱۶ را در مورد بردارهای مثال ۱ تحقیق کنید.

حل داریم $\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = t^\lambda \sin t + (t-1) \cos t$ بنابراین

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = \lambda t \sin t + t^\lambda \cos t + \cos t + (t-1)(-\sin t)$$

$$D_t[\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)] = (t+1) \sin t + (t^\lambda + 1) \cos t \quad (2)$$

داریم

$$D_t \mathbf{R}(t) = D_t[t^\lambda \mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] = \lambda t^{\lambda-1} \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$[D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) = (\lambda t^{\lambda-1} \mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j})$$

$$= \lambda t^{\lambda-1} \sin t + \cos t$$

و نیز

$$D_t \mathbf{Q}(t) = D_t[\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}] = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)] = [t^\lambda \mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}] \cdot (\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j})$$

$$= t^\lambda \cos t - (t-1) \sin t$$

بنابراین

$$[D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)] = (\lambda t \sin t + \cos t)$$

$$+ [t^\lambda \cos t - (t-1) \sin t]$$

پس

$$[D_t \mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t \mathbf{Q}(t)] = (t+1) \sin t + (t^2+1) \cos t. \quad (3)$$

با مقایسه (۲) و (۳) مشاهده می‌کنیم که قضیه ۷۰۵.۱۶ برقرار است. ▲

۸۰۵.۱۶ قضیه اگر $\mathbf{R}$ یک تابع برداری مشتق‌پذیر روی یک بازه باشد و f تابعی با مقادیر حقیقی باشد که روی آن بازه مشتق‌پذیر است، آنگاه

$$D_t\{[f(t)][\mathbf{R}(t)]\} = [D_t f(t)]\mathbf{R}(t) + f(t)D_t \mathbf{R}(t).$$

اثبات به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۲۲ را ببینید).

قضیه زیر قاعده زنجیری برای توابع برداری است. اثبات آن که به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۲۳ را ببینید)، مبتنی بر قضایای ۷۰۷.۲ و ۱۰۷.۳ می‌باشد، که با نتایج مشابهی در مورد توابع با مقادیر حقیقی سروکار دارند.

۹۰۵.۱۶ قضیه فرض کنید $\mathbf{F}$ یک تابع برداری، و h یک تابع با مقادیر حقیقی باشد به‌طوری که $\phi = h(t)$ ، و $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(h(t))$. اگر h در t در $\mathbf{F}$ در $h(t)$ پیوسته باشد، آنگاه $\mathbf{G}$ در t پیوسته است. به‌علاوه، اگر $D_t \phi$ و $D_t \mathbf{G}(t)$ موجود باشند، $D_t \mathbf{G}(t)$ موجود و به‌صورت زیر است

$$D_t \mathbf{G}(t) = [D_t \phi \mathbf{G}(t)] D_t \phi.$$

حال انتگرال نامعین (یا ضد مشتق) تابع برداری را تعریف می‌کنیم.

۱۰۰۵.۱۶ تعریف اگر $\mathbf{Q}$ تابعی برداری به‌صورت زیر باشد

$$\mathbf{Q}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

آنگاه انتگرال نامعین $\mathbf{Q}(t)$ به‌شکل زیر تعریف می‌شود

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} \int f(t) dt + \mathbf{j} \int g(t) dt. \quad (4)$$

این تعریف با تعریف انتگرال نامعین تابع با مقادیر حقیقی سازگار است چون اگر از دو طرف (۴) نسبت به t مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$D_t \int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} D_t \int f(t) dt + \mathbf{j} D_t \int g(t) dt$$

که نتیجه می‌دهد

$$D_t \int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{i} f(t) + \mathbf{j} g(t).$$

برای هر يك از انتگرالهای نامعین در طرف راست (۴) يك اسكالر ثابت اختیاری موجود است. وقتی هر يك از این اسكالرها را در $\mathbf{i}$ یا $\mathbf{j}$ ضرب کنیم، در مجموع يك بردار ثابت اختیاری حاصل می‌شود. پس

$$\int \mathbf{Q}(t) dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$$

که $D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ ، و $\mathbf{C}$ يك بردار ثابت اختیاری است.

مثال ۳ کلیرین تابع برداری را بیابید که مشتق آن برابر $\mathbf{Q}(t) = \sin t \mathbf{i} - 3 \cos t \mathbf{j}$ است.

حل اگر $D_t \mathbf{R}(t) = \mathbf{Q}(t)$ ، آنگاه $\mathbf{R}(t) = \int \mathbf{Q}(t) dt$ ، یا

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{i} \int \sin t dt - 3 \mathbf{j} \int \cos t dt \\ &= \mathbf{i}(-\cos t + C_1) - 3 \mathbf{j}(\sin t + C_2) \\ &= -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + (C_1 \mathbf{j} - 3 C_2 \mathbf{j}) \\ \blacktriangle & \quad = -\cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j} + \mathbf{C}. \end{aligned}$$

مثال ۴ فرض کنید $D_t \mathbf{R}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}$ و $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ؛ مطلوب است $\mathbf{R}(t)$.

حل

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} \int e^{-t} dt + \mathbf{j} \int e^t dt$$

پس

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}(-e^{-t} + C_1) + \mathbf{j}(e^t + C_2).$$

چون $\mathbf{R}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، پس

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{i}(-1 + C_1) + \mathbf{j}(1 + C_2)$$

بنابراین

$$C_2 + 1 = 1 \quad \text{و} \quad C_1 - 1 = 1$$

یا

$$C_2 = 0 \quad \text{و} \quad C_1 = 2$$

پس

$$\blacktriangle \quad \mathbf{R}(t) = (-e^{-t} + 2)\mathbf{i} + e^t \mathbf{j}.$$

قضیه زیر بعداً مفید واقع می‌شود.

۱۱.۵.۱۶ قضیه اگر $\mathbf{R}$ یک تابع برداری مشتق‌پذیر روی یک بازه باشد و $|\mathbf{R}(t)|$ به ازای تمام t های واقع در آن بازه ثابت باشد، آنگاه بردارهای $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ متعامد هستند.

اثبات فرض کنید $|\mathbf{R}(t)| = k$. پس بنا به قضیه ۳.۳.۱۶ (iii) داریم

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t) = k^2.$$

اگر از دو طرف نسبت به t مشتق بگیریم و قضیه ۷.۵.۱۶ را به کار ببریم، به دست می‌آوریم

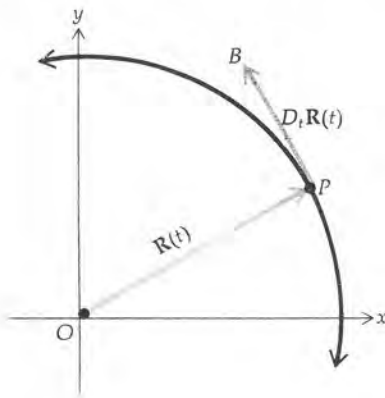
$$[D_t\mathbf{R}(t)] \cdot \mathbf{R}(t) + \mathbf{R}(t) \cdot [D_t\mathbf{R}(t)] = 0.$$

بنابراین

$$2\mathbf{R}(t) \cdot D_t\mathbf{R}(t) = 0.$$

چون حاصلضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ صفر است، از تعریف ۷.۳.۱۶ نتیجه می‌شود که $\mathbf{R}(t)$ و $D_t\mathbf{R}(t)$ متعامدند. $\square$

تعبیر هندسی قضیه ۱۱.۵.۱۶ آشکار است. اگر بردار $\mathbf{R}(t)$ بزرگی ثابتی داشته باشد، آنگاه نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ ، یعنی $\overrightarrow{OP}$ ، انتهایش نقطه P بر روی دایره‌ای است که مرکز آن در مبدأ و شعاع آن k است؛ پس نمودار $\mathbf{R}$ این دایره است. چون $D_t\mathbf{R}(t)$ و $\mathbf{R}(t)$ متعامد هستند، پس $\overrightarrow{OP}$ عمود بر نمایش بردار $D_t\mathbf{R}(t)$ است. شکل ۲.۵.۱۶ نمودار یک ربع دایره را نشان می‌دهد؛ در این شکل $\overrightarrow{OP}$ نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ ، و $\overrightarrow{PB}$ نمایش $D_t\mathbf{R}(t)$ است.



شکل ۲.۵.۱۶

تمرینهای ۵.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۵، حد نشان داده شده را، در صورت وجود، به دست آورید.

$$1. \mathbf{R}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$$

$$2. \mathbf{R}(t) = (t - 2)\mathbf{i} + \frac{t^2 - 4}{t - 2}\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 2} \mathbf{R}(t)$$

$$3. \mathbf{R}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow \pi/2} \mathbf{R}(t)$$

$$4. \mathbf{R}(t) = \frac{t^2 - 2t - 3}{t - 3}\mathbf{i} + \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3}\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow 3} \mathbf{R}(t)$$

$$5. \mathbf{R}(t) = e^{t+1}\mathbf{i} + |t+1|\mathbf{j}; \lim_{t \rightarrow -1} \mathbf{R}(t)$$

در تمرینهای ۶ تا ۱۴، $\mathbf{R}'(t)$ و $\mathbf{R}''(t)$ را به دست آورید.

$$6. \mathbf{R}(t) = (t^2 - 3)\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} \quad 7. \mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + \ln t \mathbf{j}$$

$$8. \mathbf{R}(t) = \cos 2t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} \quad 9. \mathbf{R}(t) = \tan^{-1} t \mathbf{i} + 2^t \mathbf{j}$$

$$10. \mathbf{R}(t) = \frac{t-1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t-2}{t}\mathbf{j}$$

$$11. \mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)^{-1}\mathbf{i} + \sqrt{1 - 5t}\mathbf{j}$$

$$12. \mathbf{R}(t) = \sqrt{2t+1}\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j} \quad 13. \mathbf{R}(t) = 5 \sin 2t \mathbf{i} - \sec 2t \mathbf{j}$$

$$14. \mathbf{R}(t) = (e^{2t} + 2)\mathbf{i} + 2e^{2t}\mathbf{j}$$

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، $|D_t \mathbf{R}(t)|$ را بیابید.

$$15. \mathbf{R}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j} \quad 16. \mathbf{R}(t) = (e^t + 1)\mathbf{i} + (e^t - 1)\mathbf{j}$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰، $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$ را به دست آورید.

$$17. \mathbf{R}(t) = (2t^2 - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 3)\mathbf{j} \quad 18. \mathbf{R}(t) = \ln(t-1)\mathbf{i} - 3t^{-1}\mathbf{j}$$

$$19. \mathbf{R}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j} \quad 20. \mathbf{R}(t) = -\cos 2t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j}$$

$$21. \text{قضیه ۵.۵۰۱۶ را ثابت کنید.} \quad 22. \text{قضیه ۵.۵۰۱۶ را ثابت کنید.}$$

$$23. \text{قضیه ۵.۵۰۱۶ را ثابت کنید.}$$

دترمینهای ۲۴ تا ۲۹، کلیترین برداری را به دست آورید که مشتق آن داده شده است.

$$\tan ti - \frac{1}{t}j \cdot ۲۵ \quad (t^2 - 9)i + (2t - 5)j \cdot ۲۴$$

$$e^{2t}i + \frac{1}{t-1}j \cdot ۲۷ \quad 3'i - 2'j \cdot ۲۶$$

$$\ln ti + t^2j \cdot ۲۹ \quad \frac{1}{4+t^2}i - \frac{4}{1-t^2}j \cdot ۲۸$$

۳۰. اگر $R'(t) = t^2i + \frac{1}{t-2}j$ و $R(3) = 2i - 5j$ ، مطلوب است $R(t)$.

۳۱. اگر $R'(t) = \sin^2 ti + 2 \cos^2 tj$ و $R(\pi) = 0$ ، مطلوب است $R(t)$.

۳۲. اگر $R'(t) = e^t \sin ti + e^t \cos tj$ و $R(0) = i - j$ ، مطلوب است $R(t)$.

دترمینهای ۳۳ و ۳۴، با توجه به معادله برداری داده شده معادله دکارتی منحنی را بیابید که به وسیله انتهای نمایش موضع $R'(t)$ رسم می شود. $R(t) \cdot R'(t)$ را پیدا کنید. نتیجه را به طود هندسی تعبیر کنید.

$$R(t) = \cosh ti - \sinh tj \cdot ۳۴ \quad R(t) = \cos ti + \sin tj \cdot ۳۳$$

دترمینهای ۳۵ و ۳۶، اگر $\alpha(t)$ اندازه زاویه بین دو بردار $R(t)$ و $Q(t)$ بر حسب رادیان باشد، $D_t \alpha(t)$ را به دست آورید.

$$Q(t) = 6e^{2t}j \text{ و } R(t) = 3e^{2t}i - 4e^{2t}j \cdot ۳۵$$

$$Q(t) = 3ti \text{ و } R(t) = 2ti + (t^2 - 1)j \cdot ۳۶$$

۳۷. فرض کنید R و R' توابعی برداری باشند که بر بازه ای تعریف شده اند و R' روی آن بازه مشتق پذیر است. ثابت کنید

$$D_t[R'(t) \cdot R(t)] = |R'(t)|^2 + R(t) \cdot R''(t).$$

۳۸. اگر $|R(t)| = h(t)$ ، ثابت کنید $[h(t)][h'(t)] = R(t) \cdot R'(t)$.

۳۹. اگر تابع برداری R و تابع با مقادیر حقیقی f روی بازه ای مشتق پذیر باشند و روی آن بازه، $f(t) \neq 0$ ، ثابت کنید که R/f نیز روی آن بازه مشتق پذیر است، و

$$D_t \left[\frac{R(t)}{f(t)} \right] = \frac{f(t)R'(t) - f'(t)R(t)}{[f(t)]^2}.$$

۴۰. ثابت کنید که اگر A و B بردارهایی ثابت و f و g توابعی انتگرال پذیر باشند، آنگاه

$$\int [A f(t) + B g(t)] dt = A \int f(t) dt + B \int g(t) dt.$$

(داهنمایی: A و B را بر حسب i و j بنویسید.)

۶.۱۶ طول قوس

در بخش ۶.۷ فرمولی برای پیدا کردن طول قوس يك منحنی كه معادله ای به صورت $y = f(x)$ دارد، به دست آوردیم. این نوع خاصی از منحنی است، چون يك خط قائم، نمودار تابعی مانند f را نمی تواند در بیشتر از يك نقطه قطع كند. حال روشی برای پیدا کردن طول قوس بعضی از انواع دیگر منحنی به دست می دهیم. فرض كنید منحنی C دارای معادلات پارامتری زیر است

$$x = f(t) \quad \text{و} \quad y = g(t) \quad (۱)$$

همچنین فرض كنید كه f و g روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند. می خواهیم عددی مانند L تعیین كنیم كه نشان دهنده طول قوس C بر حسب واحد طول از $t = a$ تا $t = b$ باشد. مانند بخش ۶.۷ عمل می كنیم.

فرض كنید Δ افزای از بازه بسته $[a, b]$ باشد كه از تقسیم این بازه به n زیر بازه، با انتخاب $n-1$ عدد بین a و b ، تشكيل می شود، و فرض كنید $t_0 = a$ و $t_n = b$ و $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ اعداد میانی باشند به طوری كه

$$t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n.$$

طول زیر بازه i م، یعنی $[t_{i-1}, t_i]$ را با $\Delta_i t$ واحد نشان می دهیم كه به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ برابر است با $t_i - t_{i-1}$. فرض می كنیم $\|\Delta\|$ نورم افزای Δ باشد؛ به طوری كه برای هر i ، $\Delta_i t \leq \|\Delta\|$.

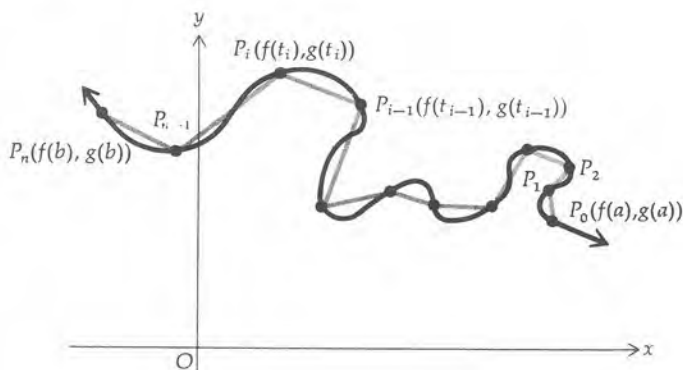
متناظر با هر عدد t_i ، نقطه ای مانند $P_i(f(t_i), g(t_i))$ روی C وجود دارد. از هر نقطه P_{i-1} پاره خطی تا نقطه P_i رسم می كنیم (شكل ۱۶.۱۶ را ببینید). طول پاره خط از P_{i-1} تا P_i ، بر حسب واحد طول، را با $|P_{i-1}P_i|$ نمایش می دهیم. از فرمول فاصله بین دو نقطه داریم

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2} \quad (۲)$$

مجموع طول n پاره خط بر حسب واحد طول برابر است با

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|. \quad (۳)$$

ایده شهودی ما در مورد طول قوس از $t = a$ تا $t = b$ ، به ما الهام می دهد كه طول



شکل ۱۰۶.۱۶

قوس بر حسب واحد طول را به عنوان حد مجموع (۳) وقتی $\|\Delta\|$ به سمت صفر میل کند، تعریف کنیم.

۱۰۶.۱۶ تعریف فرض کنید منحنی C دارای معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد. در این صورت اگر عددی مانند L با این خاصیت موجود باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك عدد $\delta > 0$ یافت شود به طوری که برای هر افراز Δ از بازه $[a, b]$ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ داشته باشیم

$$\left| \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \varepsilon$$

آنگاه می نویسیم

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (۴)$$

و L واحد را طول قوس منحنی C از نقطه $(f(a), g(a))$ تا نقطه $(f(b), g(b))$ می نامیم.

قوس منحنی، راستیذنی است اگر حد مذکور در (۴) وجود داشته باشد. اگر f' و g' روی $[a, b]$ پیوسته باشند، برای پیدا کردن فرمولی که حد مذکور در (۴) را به دست دهد، به صورت زیر عمل می کنیم.

چون f' و g' بر $[a, b]$ پیوسته هستند، بر هر زیر بازه از افراز Δ نیز پیوسته اند. پس f و g روی هر $[t_{i-1}, t_i]$ در فرض قضیه مقدار میانگین (۲.۴.۴) صدق می کنند؛ بنابراین اعداد z_i و w_i در بازه باز (t_{i-1}, t_i) وجود دارند، به طوری که

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(z_i) \Delta_i t \quad (۵)$$

و

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(w_i) \Delta_i t. \quad (۶)$$

از (۵) و (۶) در (۲) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[f'(z_i)\Delta_i t]^2 + [g'(w_i)\Delta_i t]^2}$$

یا به عبارت دیگر

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2} \Delta_i t \quad (۷)$$

که z_i و w_i در بازه (t_{i-1}, t_i) قرار دارند. پس با توجه به (۴) و (۷)، به شرطی که حد زیرموجود باشد، خواهیم داشت

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(z_i)]^2 + [g'(w_i)]^2} \Delta_i t. \quad (۸)$$

مجموع مذکور در (۸) یک مجموع ریمانی نیست، چون w_i و z_i لزوماً اعداد یکسانی نیستند. پس نمی‌توانیم تعریف انتگرال معین را برای محاسبه حد مذکور در (۸) به کار ببریم. ولی، قضیه‌ای وجود دارد که می‌توان آن را برای محاسبه این حد به کار برده این قضیه را بیان می‌کنیم ولی اثبات آن را ارائه نمی‌دهیم چون خارج از قلمرو این کتاب است. می‌توانید اثبات آن را در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته بیابید.

۲.۶.۱۶ قضیه اگر F و G توابعی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ باشند، آنگاه تابع $\sqrt{F^2 + G^2}$ نیز بر $[a, b]$ پیوسته است، و اگر Δ افرازی از بازه $[a, b]$ باشد در (t_{i-1}, t_i) باشند، آنگاه

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[F(z_i)]^2 + [G(w_i)]^2} \Delta_i t = \int_a^b \sqrt{[F(t)]^2 + [G(t)]^2} dt. \quad (۹)$$

با به کار بردن (۹) در مورد (۸)، که در آن F همان f' و G همان g' است، داریم

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

این نتیجه را به عنوان قضیه‌ای بیان می‌کنیم.

۳.۶.۱۶ قضیه فرض کنید منحنی C دارای معادلات پارامتری $x=f(t)$ و $y=g(t)$ باشد و نیز فرض کنید f' و g' توابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشند. در این صورت L

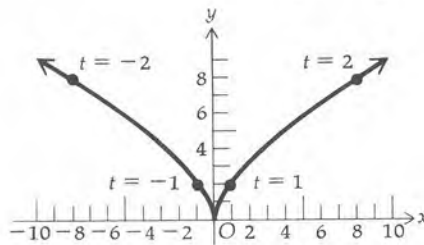
طول قوس ۴۵۵

طول قوس منحنی از نقطه $(f(a), g(a))$ تا نقطه $(f(b), g(b))$ بر حسب واحد طول، به صورت زیر معین می شود

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt. \quad (۱۰)$$

مثال ۱ معادلات پارامتری يك منحنی عبارت اند از $x = t^3$ و $y = 2t^2$. در هر يك از حالت های زیر طول قوس منحنی را به دست آورید. (الف) از $t = 0$ تا $t = 1$ ؛ (ب) از $t = -2$ تا $t = 0$.

حل نمودار منحنی در شکل ۲۰۶.۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۲۰۶.۱۶

(الف) فرض کنید $x = f(t)$ ؛ پس $x' = D_t x = 3t^2$ ؛ و نیز فرض کنید $y = g(t)$ ؛ پس $y' = D_t y = 4t$. بنا به قضیه ۲۰۶.۳، اگر طول قوس منحنی از $t = 0$ تا $t = 1$ بر حسب واحد طول برابر با L باشد، داریم

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt \\ &= \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 16} dt \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} (9t^2 + 16)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{27} [(25)^{3/2} - (16)^{3/2}] \\ &= \frac{1}{27} (125 - 64) \\ &= \frac{61}{27}. \end{aligned}$$

(ب) و اگر طول قوس منحنی از $t = -2$ تا $t = 0$ بر حسب واحد طول برابر با L باشد، بنا به قضیه ۳.۶.۱۶ داریم

$$L = \int_{-2}^0 \sqrt{9t^4 + 16t^2} dt = \int_{-2}^0 \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 16} dt.$$

چون $0 \leq t \leq -2$ ، داریم $\sqrt{t^2} = -t$ بنا بر این

$$\begin{aligned} L &= \int_{-2}^0 -t \sqrt{9t^2 + 16} dt \\ &= -\frac{1}{27} (9t^2 + 16)^{3/2} \Big|_{-2}^0 \\ &= -\frac{1}{27} [(16)^{3/2} - (52)^{3/2}] \\ &= \frac{1}{27} (104\sqrt{13} - 64) \end{aligned}$$

▲ ≈ 11.5 .

منحنی C دارای معادلات پارامتری (۱) است. فرض کنید طول قوس منحنی C از نقطه $(f(t_0), g(t_0))$ تا نقطه $(f(t), g(t))$ برابر با s واحد باشد و به موازات افزایش t ، s نیز افزایش یابد. در این صورت s تابعی از t است و به صورت زیر تعریف می شود

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{[f'(u)]^2 + [g'(u)]^2} du. \quad (11)$$

بنا به قضیه ۱.۶.۷ داریم

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}. \quad (12)$$

يك معادله برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}. \quad (13)$$

چون

$$\mathbf{R}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

پس

$$|\mathbf{R}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}. \quad (14)$$

از (۱۴) در (۱۲) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$|\mathbf{R}'(t)| = \frac{ds}{dt}. \quad (15)$$

از (۱۵) نتیجه می‌شود که اگر طول قوس منحنی C با معادله برداری (۱۳)، برابر s واحد باشد که از نقطه ثابتی تا نقطه $(f(t), g(t))$ اندازه گیری شود، و همچنانکه t افزایش می‌یابد s نیز افزایش یابد؛ آنگاه مشتق s نسبت به t عبارت است از بزرگی مشتق بردار موضع در نقطه $(f(t), g(t))$.
از (۱۴) در (۱۰) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$L = \int_a^b |\mathbf{R}'(t)| dt.$$

پس قضیه ۳.۶.۱۶ را می‌توان برحسب بردارها به صورت زیر بیان کرد.

۴.۶.۱۶ قضیه فرض کنید منحنی C دارای معادله برداری $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ باشد، و نیز فرض کنید f' و g' توابعی پیوسته بر بازه بسته $[a, b]$ باشند. در این صورت طول قوس C ، که به موازات افزایش t از a تا b ، توسط انتهای نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ رسم می‌شود، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L = \int_a^b |\mathbf{R}'(t)| dt. \quad (16)$$

مثال ۲ اگر $\mathbf{R}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j}$ ، طول قوسی را که به وسیله انتهای نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ ، به موازات افزایش t از ۱ تا ۴، رسم می‌شود بیابید.

حل

$$\mathbf{R}'(t) = (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{j}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}'(t)| &= e^t \sqrt{\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t} \\ &= e^t \sqrt{2}. \end{aligned}$$

از (۱۶) داریم

$$\blacktriangle \quad L = \int_1^4 \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_1^4 = \sqrt{2} (e^4 - e).$$

صورت دیگری از فرمول (۱۰) برای طول قوس منحنی C با معادلات پارامتری $x=f(t)$ و $y=g(t)$ ، با قراردادن dx/dt به جای $f'(t)$ و dy/dt به جای $g'(t)$ به دست می آید. این صورت چنین است

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (17)$$

حال تصور کنید که می خواهیم طول قوس منحنی C با معادله قطبی $r=F(\theta)$ را به دست آوریم. اگر (x, y) نمایش دکارتی نقطه P روی C ، و (r, θ) نمایش قطبی نقطه P باشد، آنگاه

$$x = r \cos \theta \quad \text{و} \quad y = r \sin \theta \quad (18)$$

با قراردادن $F(\theta)$ به جای r در معادلات (۱۸) داریم

$$x = F(\theta) \cos \theta \quad \text{و} \quad y = F(\theta) \sin \theta \quad (19)$$

معادلات (۱۹) را می توان به عنوان معادلات پارامتری C در نظر گرفت، که در آنها θ به جای پارامتر t قرار دارد. بنابراین اگر F' بر بازه بسته $[\alpha, \beta]$ پیوسته باشد، فرمول طول قوس منحنی C با معادله قطبی $r=F(\theta)$ ، از (۱۷) با فرض $t=\theta$ به دست می آید. پس

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (20)$$

از (۱۸) داریم

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta \quad \text{و} \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\cos \theta \frac{dr}{d\theta} - r \sin \theta\right)^2 + \left(\sin \theta \frac{dr}{d\theta} + r \cos \theta\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta} + r^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 2r \sin \theta \cos \theta \frac{dr}{d\theta} + r^2 \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) r^2}$$

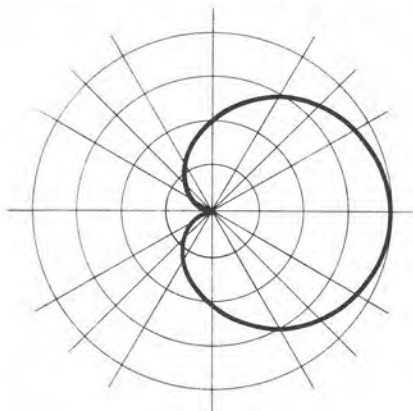
$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}.$$

این را در (۲۰) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta. \quad (21)$$

مثال ۳ طول دلواری $r = 2(1 + \cos \theta)$ را به دست آورید.

حل نمودار منحنی در شکل ۳.۶.۱۶ نشان داده شده است. برای به دست آوردن طول تمام منحنی می‌توانیم بگذاریم θ مقادیر ۰ تا 2π را اختیار کند یا از تقارن منحنی استفاده کنیم و نصف طول را با در نظر گرفتن θ از ۰ تا π به دست آوریم.



شکل ۳.۶.۱۶

چون $r = 2(1 + \cos \theta)$ ، پس $dr/d\theta = -2\sin \theta$. با قراردادن این مقدار در (۲۱) و انتگرال‌گیری از ۰ تا π ، و با ضرب در عدد ۲، داریم

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-2\sin \theta)^2 + 2(1 + \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \theta + 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta.$$

برای محاسبه این انتگرال، از اتحاد $\cos^2(\theta/2) = (1 + \cos \theta)/2$ استفاده می‌کنیم، که نتیجه می‌دهد $|\cos(\theta/2)| = \sqrt{(1 + \cos \theta)/2}$. چون $0 \leq \theta \leq \pi$ ، پس $0 \leq \theta/2 \leq \pi/2$ ؛ بنابراین، $\cos(\theta/2) \geq 0$ ؛ پس $\sqrt{1 + \cos \theta} = \sqrt{2} \cos(\theta/2)$ ؛ پس

$$\Delta \quad L = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos \frac{1}{2} \theta d\theta = 16 \left[\sin \frac{1}{2} \theta \right]_0^{\pi} = 16.$$

تمرینهای ۶.۱۶

طول قوس α در هر یک از تمرینهای زیر بیابید. هر جا a دیده می‌شود، آن را مثبت بگیرید.

$$1. \quad x = \frac{1}{4}t^2 + t, \quad y = \frac{1}{4}t^2 - t \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=1$$

$$2. \quad x = t^3, \quad y = 3t^2 \quad \text{از } t=-2 \text{ تا } t=0$$

$$3. \quad x = t^2 + 2t, \quad y = t^2 - 2t \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=2$$

$$4. \quad \mathbf{R}(t) = (t^2 + 3)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} \quad \text{از } t=1 \text{ تا } t=4$$

$$5. \quad \mathbf{R}(t) = 2t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j} \quad \text{از } t=1 \text{ تا } t=2$$

$$6. \quad \mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j} \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=3$$

$$7. \quad \mathbf{R}(t) = 3e^{2t}\mathbf{i} - 4e^{2t}\mathbf{j} \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=\ln 5$$

$$8. \quad \mathbf{R}(t) = a(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + a(\sin t - t \cos t)\mathbf{j} \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=\frac{\pi}{3}$$

$$9. \quad \text{تمام شبه چرخزاد با چهار نقطه بازگشت: } x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

$$10. \quad x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=\pi$$

$$11. \quad x = 4 \sin 2t, \quad y = 4 \cos 2t \quad \text{از } t=0 \text{ تا } t=\pi$$

$$12. \quad \text{یک طاق از چرخزاد: } x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

$$13. \quad \text{تراکتربس } x = t - a \tanh \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a} \quad \text{از } t=-a \text{ تا } t=2a$$

۱۴. محیط دایره: $R(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$

۱۵. محیط دایره: $r = a \cos \theta$

۱۶. محیط دایره: $r = a \sin \theta$

۱۷. محیط دایره: $r = a$

۱۸. تمام منحنی: $r = 1 - \sin \theta$

۱۹. تمام منحنی: $r = 3 \cos^2 \frac{1}{2} \theta$

۲۰. $r = a\theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$

۲۱. $r = e^{\theta}$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = 4$

۲۲. $r = a\theta^2$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$

۲۳. $r = a \sin^3 \frac{1}{3} \theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \theta_1$

۲۴. $r = \sin^2 \frac{1}{2} \theta$ ؛ از $\theta = 0$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$

۲۵. پونزی را روی لاستیک دوچرخه‌ای می‌چسبانیم. اگر شعاع لاستیک دوچرخه ۴۵ سانتیمتر باشد و دوچرخه مسافتی معادل 50π متر را طی کند، فاصله طی شده توسط پونز را به دست آورید. (دانه‌مایی: مسیر حرکت پونز يك چرخزاد است.)

۷.۱۶ حرکت در صفحه

بحث قبلی حرکت ذره، محدود به حرکت مستقیم الخط بود. در همین ارتباط، سرعت و شتاب ذره‌ای را که در امتداد يك خط مستقیم حرکت می‌کند، تعریف کردیم. اکنون حرکت ذره را روی يك منحنی در صفحه در نظر می‌گیریم.

فرض کنید C منحنی مسطحی با معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد، که t زمان را بر حسب واحد آن نشان می‌دهد. در این صورت

$$R(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$$

يك معادله برداری C است. همچنانکه t تغییر می‌کند، نقطه $P(f(t), g(t))$ که انتهای $\overrightarrow{OP}$ است در امتداد منحنی C حرکت می‌کند. نقطه $P(f(t), g(t))$ موضع ذره در

حرکتش بر امتداد C در لحظه t (بر حسب واحد زمان) است. بردار سرعت ذره در لحظه t واحد زمان را با $\mathbf{R}'(t)$ تعریف می‌کنیم و با علامت $\mathbf{V}(t)$ نشان می‌دهیم.

۱۰۷.۱۶ تعریف فرض کنید منحنی C دارای معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ باشد. اگر ذره‌ای در امتداد C طوری حرکت کند که در هر لحظه t (بر حسب واحد زمان) موضع آن نقطه (x, y) باشد، در این صورت سرعت لحظه‌ای ذره در لحظه t واحد زمان به وسیله بردار سرعت زیر معین می‌شود

$$\mathbf{V}(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}$$

به شرطی که $f'(t)$ و $g'(t)$ موجود باشند.

در بخش ۵.۱۶ آموختیم که امتداد جهت‌دار $\mathbf{R}'(t)$ در نقطه $P(f(t), g(t))$ روی خط مماس بر منحنی C در P است. بنابراین بردار سرعت $\mathbf{V}(t)$ نیز در P دارای همین جهت است.

بزرگی بردار سرعت برابر است با اندازه مقدار سرعت ذره در لحظه t ، که به صورت زیر معین می‌شود

$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}. \quad (۱)$$

دقت کنید که سرعت، بردار است و مقدار سرعت، اسکالر است. همچنانکه در بخش ۶.۱۶ نشان دادیم، عبارت طرف راست (۱)، همان ds/dt می‌باشد. پس مقدار سرعت، آهنگ تغییر s نسبت به تغییر t است، و می‌نویسیم

$$|\mathbf{V}(t)| = \frac{ds}{dt}. \quad (۲)$$

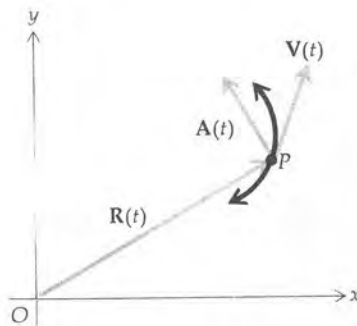
بردار شتاب ذره در لحظه t واحد زمان با $\mathbf{A}(t)$ نشان داده می‌شود، و به عنوان مشتق بردار سرعت یا، به عبارت دیگر، مشتق دوم بردار موضع، تعریف می‌شود.

۲۰۷.۱۶ تعریف شتاب لحظه‌ای یک ذره که در امتداد منحنی C با معادلات پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ ، حرکت می‌کند در لحظه t واحد زمان به وسیله بردار شتاب زیر معین می‌شود

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = \mathbf{R}''(t)$$

که در آن $\mathbf{R}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ و $\mathbf{R}''(t)$ وجود دارد.

در شکل ۱۰۷.۱۶ نمایشهایی از بردار سرعت و بردار شتاب آمده‌اند که ابتدای آنها نقطه P روی C است.



شکل ۱۰۷۰۱۶

مثال ۱ ذره‌ای در امتداد منحنی C با معادلات پارامتری $x = 4 \cos(t/2)$ و $y = 4 \sin(t/2)$ در حال حرکت است. اگر t برحسب ثانیه و x و y برحسب سانتیمتر باشند، مقدار سرعت و بزرگی بردار شتاب ذره را در ثانیه t ام به دست آورید. مسیر حرکت ذره را رسم کنید، و همچنین نمایشهایی از بردارهای سرعت و شتاب رسم کنید که ابتدای آنها درجایی باشد که $t = \pi/3$.

حل يك معادله برداری C عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 4 \cos \frac{1}{2} t \mathbf{i} + 4 \sin \frac{1}{2} t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t) = -4 \sin \frac{1}{2} t \mathbf{i} + 4 \cos \frac{1}{2} t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t) = -\cos \frac{1}{2} t \mathbf{i} - \sin \frac{1}{2} t \mathbf{j}$$

$$|\mathbf{V}(t)| = \sqrt{\left(-4 \sin \frac{1}{2} t\right)^2 + \left(4 \cos \frac{1}{2} t\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 \frac{1}{2} t + 4 \cos^2 \frac{1}{2} t}$$

$$= 4$$

$$|\mathbf{A}(t)| = \sqrt{\left(-\cos \frac{1}{2} t\right)^2 + \left(-\sin \frac{1}{2} t\right)^2} = 1.$$

بنابراین، مقدار سرعت ذره، ثابت و برابر با ۴ سانتیمتر در ثانیه است. همچنین بزرگی بردار شتاب نیز ثابت و برابر با ۱ سانتیمتر بر مجذور ثانیه است.

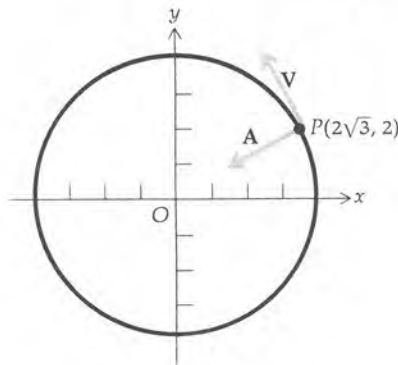
با حذف t بین معادلات پارامتری C ، معادلهٔ دکارتی $x^2 + y^2 = 16$ به دست می آید، که دایره‌ای است به شعاع ۴ و مرکزش در o است.
وقتی $t = \pi/3$ ، جهت $V(t)$ به وسیلهٔ $\pi/2 < \theta < \pi$ داده می شود و

$$\tan \theta = -\frac{\cos \frac{1}{6}\pi}{\sin \frac{1}{6}\pi} = -\cot \frac{1}{6}\pi = -\sqrt{3}.$$

وقتی $t = \pi/3$ ، جهت $A(t)$ به وسیلهٔ $\pi < \theta < 3\pi/2$ داده می شود و

$$\tan \theta = \frac{\sin \frac{1}{6}\pi}{\cos \frac{1}{6}\pi} = \tan \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

شکل ۲۰۷.۱۶ نمایشهایی از بردارهای سرعت و شتاب را نشان می دهد که ابتدای آنها درجایی با ضابطهٔ $t = \pi/3$ است.



شکل ۲۰۷.۱۶

مثال ۲ موضع يك ذره متحرك در لحظهٔ t واحد زمان به وسیلهٔ معادلهٔ برداری $R(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$ معین می شود. مطلوب است $A(t)$ ، $V(t)$ ، $|A(t)|$ و $|V(t)|$.
نمودار مسیر حرکت ذره، و نمایشهایی از بردارهای سرعت و شتاب را رسم کنید که ابتدای آنها درجایی باشد که $t = 1/2$.

حل

$$V(t) = R'(t) = -2e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$$

$$A(t) = V'(t) = 4e^{-2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}$$

$$|V(t)| = \sqrt{4e^{-4t} + 9e^{2t}}$$

$$|A(t)| = \sqrt{16e^{-4t} + 9e^{2t}}$$

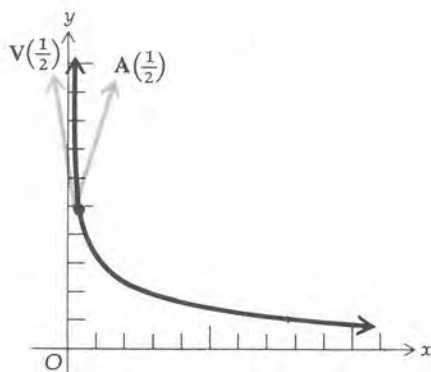
$$\left|V\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{4e^{-2} + 9e} \approx 5.00$$

$$\left|A\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \sqrt{16e^{-2} + 9e} \approx 5.16$$

معادلات پارامتری مسیر ذره، $x = e^{-2t}$ و $y = 3e^t$ هستند. با حذف t بین این معادلات به دست می آوریم

$$xy^2 = 9.$$

چون $x > 0$ و $y > 0$ ، مسیره ذره قسمتی از منحنی $xy^2 = 9$ واقع در ربع اول، است. شکل ۳۰۷.۱۶ نمودار مسیر ذره و بردارهای سرعت و شتاب را در نقطه ای که $t = 1/2$ ، نشان می دهد. ضریب زاویه $V(1/2)$ برابر است با $-6.7 \approx -3e^{3/2}/2$ ، و ضریب زاویه $A(1/2)$ برابر است با $3.4 \approx 3e^{3/2}/4$.



شکل ۳۰۷.۱۶

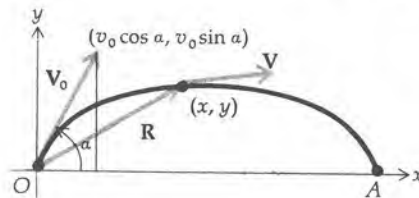
حال معادلات حرکت یک پرتابه را با فرض اینکه پرتابه در یک صفحه قائم حرکت می کند، به دست می آوریم. همچنین فرض می کنیم که تنها نیروی مؤثر بر پرتابه، وزن آن است که جهتش روبه پایین، و بزرگی آن mg پوند است؛ m جرم پرتابه بر حسب اسلاگ و g شتاب ناشی از ثقل زمین بر حسب فوت بر مجذور ثانیه است. از نیروی ناشی از مقاومت هوا صرف نظر می کنیم (که در حرکت جسمهای سبک با مقدار سرعت کم، تأثیر

قابل توجهی ندارد). جهت مثبت را به طور قائم رو به بالا و به طور افقی به طرف راست در نظر می گیریم.

مثلاً فرض کنید گلوله ای از تفنگی شلیک می شود که زاویه فراز آن α رادیان است و مقدار سرعت اولیه یا مقدار سرعت دهانه ای بر حسب فوت در ثانیه را با v_0 نشان می دهیم. محورهای مختصات طوری انتخاب شده اند که تفنگ در مبدأ قرار دارد. به شکل ۴.۷.۱۶ رجوع کنید. بردار سرعت اولیه گلوله، V_0 ، به صورت زیر معین می شود

$$V_0 = v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j}. \quad (3)$$

فرض کنید زمان سپری شده از موقع شلیک گلوله t ثانیه، فاصله افقی گلوله از نقطه شروع در ثانیه t x فوت، و فاصله عمودی گلوله از نقطه شروع در ثانیه t ، y فوت باشد. $R(t)$ بردار موضع گلوله در ثانیه t ، $V(t)$ بردار سرعت آن در ثانیه t ، و $A(t)$ بردار شتاب گلوله در ثانیه t می باشد.



شکل ۴.۷.۱۶

چون x تابعی از t است، می نویسیم $x(t)$. به همین ترتیب، چون y تابعی از t است، می نویسیم $y(t)$. بنابراین داریم

$$R(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (4)$$

$$V(t) = R'(t) \quad (5)$$

$$A(t) = V'(t). \quad (6)$$

چون تنها نیروی مؤثر بر گلوله، وزن آن است که بزرگی آن mg پوند و جهت آن رو به پایین است، پس اگر F این نیرو را نشان دهد، داریم

$$F = -mg\mathbf{j}. \quad (7)$$

دومین قانون حرکت نیوتن می گوید که نیروی خالص مؤثر بر جسمی برابر است با «حاصلضرب جرم در شتاب آن». پس

$$F = mA. \quad (8)$$

از (۷) و (۸) داریم

$$m\mathbf{A} = -mg\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A} = -g\mathbf{j}. \quad (۹)$$

چون $\mathbf{A}(t) = \mathbf{V}'(t)$ ، از (۹) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{V}'(t) = -g\mathbf{j}. \quad (۱۰)$$

با انتگرال‌گیری از دوطرف (۱۰) نسبت به t به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \quad (۱۱)$$

که $\mathbf{C}_1$ يك بردار ثابت انتگرال‌گیری است.وقتی $t=0$ ، داریم $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$. پس $\mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_0$. بنا براین از (۱۱) به‌دست می‌آید

$$\mathbf{V}(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0.$$

یا، چون $\mathbf{V}(t) = \mathbf{R}'(t)$ ،

$$\mathbf{R}'(t) = -gt\mathbf{j} + \mathbf{V}_0. \quad (۱۲)$$

با انتگرال‌گیری از دوطرف معادله برداری (۱۲) نسبت به t خواهیم داشت

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0t + \mathbf{C}_2$$

که $\mathbf{C}_2$ يك بردار ثابت انتگرال‌گیری است.وقتی $t=0$ ، داریم $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ چون گلوله در نقطه شروع، در مبدأ قرار دارد. پس $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$. بنا براین

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{V}_0t. \quad (۱۳)$$

با قراردادن مقدار $\mathbf{V}_0$ از (۳) در (۱۳) به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{R}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + (v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j})t$$

$$\mathbf{R}(t) = tv_0 \cos \alpha \mathbf{i} + \left(tv_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \right) \mathbf{j}. \quad (۱۴)$$

معادله (۱۴) بردار موضع گلوله را در لحظه t (ثانیه) می‌دهد. با استفاده از این

معادله می‌توانیم در مورد حرکت گلوله بحث کنیم. معمولاً با سؤالات زیر روبرو هستیم:

۱. برد گلوله چقدر است؟ برد عبارت است از فاصله $|\overline{OA}|$ روی محور x ها (شکل ۴.۷۰.۱۶) را ببینید.

۲. کل زمان پرواز، یعنی زمانی که طول می‌کشد تا گلوله از O به A برود چقدر است؟

۳. ما کسیم ارتفاع گلوله چقدر است؟

۴. معادله دکارتی منحنی حرکت گلوله چیست؟

۵. بردار سرعت گلوله موقع اصابت چیست؟

به این سؤالات در مثال زیر جواب داده می‌شود.

مثال ۳ گلوله‌ای با زاویهٔ فراز $\pi/6$ رادیان از تفنگی شلیک می‌شود. سرعت دهانه‌ای آن 480 فوت در ثانیه است. مطلوب است (الف) بردار موضع گلوله در هر لحظه از زمان؛ (ب) مدت پرواز؛ (پ) برد گلوله؛ (ت) ما کسیم ارتفاع سوله؛ (ث) بردار سرعت گلوله موقع اصابت؛ (ج) بردار موضع و بردار سرعت در ثانیهٔ ۲؛ (چ) مقدار سرعت در ثانیهٔ ۲؛ (ح) معادلهٔ دکارتی منحنی حرکت گلوله.

حل $v_0 = 480$ ، و $\alpha = \pi/6$ پس

$$\mathbf{V}_0 = 480 \cos \frac{1}{6} \pi \mathbf{i} + 480 \sin \frac{1}{6} \pi \mathbf{j}$$

$$= 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 240\mathbf{j}.$$

(الف) بردار موضع در ثانیهٔ t از معادلهٔ (۱۴) به دست می‌آید، که در این حالت عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + \left(240t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}. \quad (15)$$

پس اگر (x, y) موضع گلوله در ثانیهٔ t باشد، داریم $x = 240\sqrt{3}t$ و $y = 240t - (1/2)gt^2$.

(ب) برای به دست آوردن زمان پرواز، مقدار t را به ازای $y = 0$ به دست می‌آوریم. در قسمت (الف)، اگر $y = 0$ ، داریم

$$240t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t\left(240 - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$t = \frac{480}{g} \quad \text{و} \quad t = 0$$

لحظه $t = 0$ زمان شلیک گلوله است چون در این زمان، $y = 0$. اگر $g = 32$ ، زمان پرواز از رابطه $15 = 480/g = 480/32$ به دست می آید. پس زمان پرواز ۱۵ ثانیه است.

(پ) برای به دست آوردن برد، x را به ازای $t = 15$ معین می کنیم. از قسمت (الف) داریم $x = 240\sqrt{3}t$ پس وقتی $t = 15$ ، $x = 3600\sqrt{3}$. بنابراین برد ۶۲۳۵ فوت است (به طور تقریبی).

(ت) ما کسیمم ارتفاع به ازای $D_t y = 0$ حاصل می شود، یعنی وقتی که مؤلفه قائم بردار سرعت ۰ باشد. چون

$$y = 240t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$D_t y = 240 - gt.$$

پس وقتی $t = 240/g$ داریم $D_t y = 0$. اگر $g = 32$ ، ما کسیمم ارتفاع به ازای $t = \frac{1}{2}$ پس

یعنی نصف زمان کل پرواز حاصل می شود. لذا وقتی $t = \frac{1}{2}$ ، داریم $y = 900$. پس ما کسیمم ارتفاع برابر با ۹۰۰ فوت است.

(ث) چون زمان پرواز ۱۵ ثانیه است، بردار سرعت موقع اصابت گلوله $V(15)$ می باشد. با استفاده از (۱۵)، $V(t)$ را به دست می آوریم

$$V(t) = D_t R(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - gt)\mathbf{j}.$$

اگر $g = 32$ ،

$$V(15) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} - 240\mathbf{j}.$$

(ج) اگر در معادله (۱۵) قرار دهیم $t = 2$ ، داریم

$$R(2) = 480\sqrt{3}\mathbf{i} + 416\mathbf{j}$$

چون $V(t) = R'(t)$ ،

$$V(t) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + (240 - gt)\mathbf{j}.$$

پس

$$V(2) = 240\sqrt{3}\mathbf{i} + 176\mathbf{j}.$$

(ج) مقدار سرعت به ازای $t = ۲$ به صورت زیر به دست می آید

$$|V(۲)| = \sqrt{(۲۴۰\sqrt{۳})^2 + (۱۷۶)^2} \\ = ۳۲\sqrt{۱۹۹۰}.$$

پس، در ثانیه ۲ مقدار سرعت تقریباً برابر با ۴۵۱۴ فوت در ثانیه است.

(ح) برای یافتن معادله دکارتی، t را بین معادلات پارامتری زیر حذف می کنیم

$$x = ۲۴۰\sqrt{۳}t$$

$$y = ۲۴۰t - \frac{1}{۲}gt^2$$

معادله اول را نسبت به t حل کرده و نتیجه را در معادله دوم قرار می دهیم، به دست می آید

$$y = \frac{1}{\sqrt{۳}}x - \frac{1}{۱۵۸۰۰}x^2$$

▲

که معادله يك سهمی است.

تمرینهای ۲.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۸، ذره ای در امتداد منحنی که معادلات پارامتری آن داده شده، در حال حرکت است؛ در این معادلات، t زمان بر حسب ثانیه است. مطلوب است (الف) بردار سرعت $V(t)$ ؛ (ب) بردار شتاب $A(t)$ ؛ (پ) مقدار سرعت در $t = t_1$ ؛ (ت) بزرگی بردار شتاب در $t = t_1$. نمودار مسیر ذره، و نمایشهای بردار سرعت و بردار شتاب در $t = t_1$ را رسم کنید.

۱. $x = t^2 + ۴, y = t - ۲; t_1 = ۳$

۲. $x = \ln(t - ۲), y = t^3 - ۱; t_1 = ۳$

۳. $x = ۵ \cos ۲t, y = ۳ \sin ۲t; t_1 = \frac{1}{۴}\pi$

۴. $x = \frac{۲}{t}, y = -\frac{1}{۴}t; t_1 = ۴$ ۵. $x = t, y = \ln \sec t; t_1 = \frac{1}{۴}\pi$

۶. $x = ۲ \cos t, y = ۳ \sin t; t_1 = \frac{1}{۳}\pi$

۷. $x = \sin t, y = \tan t; t_1 = \frac{1}{۶}\pi$ ۸. $x = e^{۲t}, y = e^{۳t}; t_1 = ۰$

در تمرینهای ۹ تا ۱۶، موضع ذره متحرك در ثانیه t با يك معادله برداری معین می‌شود. مطلوب است (الف) $V(t_1)$ ؛ (ب) $A(t_1)$ ؛ (پ) $|V(t_1)|$ ؛ (ت) $|A(t_1)|$. نمودار قسمتی از مسیر ذره را که شامل موضع ذره در $t = t_1$ باشد رسم کنید و همچنین نمایشهای $V(t_1)$ و $A(t_1)$ را با ابتدای $t = t_1$ رسم کنید.

$$R(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; t_1 = 3 \quad ۹.$$

$$R(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; t_1 = -1 \quad ۱۰.$$

$$R(t) = e^t \mathbf{i} + e^{t^2} \mathbf{j}; t_1 = \ln 2 \quad ۱۱.$$

$$R(t) = (t^2 + 3t)\mathbf{i} + (1 - 3t^2)\mathbf{j}; t_1 = \frac{1}{2} \quad ۱۲.$$

$$R(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^{t^2} \mathbf{j}; t_1 = \ln 2 \quad ۱۳. \quad R(t) = \cos 2t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}; t_1 = \pi$$

$$R(t) = 2(1 - \cos t)\mathbf{i} + 2(1 - \sin t)\mathbf{j}; t_1 = \frac{5}{6}\pi \quad ۱۵.$$

$$R(t) = \ln(t + 2)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2 \mathbf{j}; t_1 = 1 \quad ۱۶.$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰، بردار موضع $R(t)$ را بیابید.

$$R(0) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \quad \text{و} \quad V(t) = \frac{1}{(t-1)^2} \mathbf{i} - (t+1)\mathbf{j} \quad ۱۷.$$

$$R(1) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \quad \text{و} \quad V(t) = (2t-1)\mathbf{i} + 3t^2 \mathbf{j} \quad ۱۸.$$

$$R(0) = 3\mathbf{j} \quad \text{و} \quad V(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, A(t) = e^{-t} \mathbf{i} + 2e^{t^2} \mathbf{j} \quad ۱۹.$$

$$R(0) = \frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j} \quad \text{و} \quad V(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}, A(t) = 2 \cos 2t \mathbf{i} + 2 \sin 2t \mathbf{j} \quad ۲۰.$$

۲۱. گلوله‌ای با زاویه فراز 45° و مقدار سرعت دهانه‌ای ۲۵۰۰ فوت در ثانیه از تفنگی شلیک می‌شود. مطلوب است (الف) برد گلوله؛ (ب) ماکسیمم ارتفاعی که گلوله به آن می‌رسد؛ (پ) سرعت در موقع اصابت.

۲۲. گلوله‌ای با زاویه فراز 60° از تفنگی شلیک می‌شود. مقدار سرعت دهانه‌ای ۱۶۰ فوت در ثانیه است. مطلوب است (الف) بردار موضع در ثانیه t ؛ (ب) زمان پرواز؛ (پ) برد؛ (ت) ماکسیمم ارتفاعی که گلوله به آن می‌رسد؛ (ث) سرعت در موقع اصابت؛ (ج) مقدار سرعت در ثانیه ۴.

۲۳. گلوله‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۹۶ فوت با زاویه 30° با افق، از تفنگی

شلیک می‌شود. اگر مقدار سرعت دهانه‌ای ۱۶۰۰ فوت در ثانیه باشد، مطلوب است زمان پرواز، و فاصله از پای ساختمان تا نقطه‌ای که گلوله به زمین می‌رسد.

۲۴. مقدار سرعت دهانه‌ای تفنگی ۱۶۰ فوت در ثانیه است. با چه زاویه‌ی فرازی بایستی گلوله از تفنگ شلیک شود تا به هدفی همسطح با تفنگ در فاصله ۴۰۰ فوتی از آن اصابت کند؟

۲۵. اگر گلوله‌ای از تفنگی شلیک شود و بردی برابر ۲۰۰۰ فوت داشته باشد و ماکسیمم ارتفاعی که به آن می‌رسد ۱۰۰۰ فوت باشد، مقدار سرعت دهانه‌ای تفنگ چقدر است؟

۲۶. پسر بچه‌ای توپی را از بالای پرتگاهی به ارتفاع ۲۵۶ فوت به‌طور افقی با مقدار سرعت اولیه ۵۰ فوت در ثانیه پرتاب می‌کند. مطلوب است زمان پرواز توپ، و فاصله پای پرتگاه از نقطه برخورد توپ با زمین.

۲۷. پسر بچه‌ای توپی را با مقدار سرعت اولیه ۶۰ فوت در ثانیه و با زاویه‌ی فراز 60° به‌طرف ساختمان‌نی بلند که ۲۵ فوت با او فاصله دارد، پرتاب می‌کند. اگر دسته‌ای پسر بچه ۵ فوت از زمین فاصله داشته باشد، نشان دهید که توپ با ساختمان برخورد می‌کند، و جهت حرکت توپ را وقتی توپ به ساختمان می‌خورد پیدا کنید.

۸.۱۶ بردارهای مماس واحد وقائم واحد،

و طول قوس به عنوان یک پارامتر

بردار واحد برداری است که بزرگی آن ۱ باشد. مثالهایی از چنین برداری، دو بردار واحد i و j هستند. به هر نقطه‌ی روی یک منحنی مسطح، دو بردار واحد دیگر مربوط می‌سازیم، بردار مماس واحد و بردار قائم واحد.

۱۰۸.۱۶ تعریف اگر $\mathbf{R}(t)$ بردار موضع منحنی C در نقطه‌ی P روی C باشد، آنگاه بردار مماس واحد بر C در P که با $\mathbf{T}(t)$ نشان داده می‌شود بردار واحد در جهت $D_t \mathbf{R}(t)$ است اگر $D_t \mathbf{R}(t) \neq 0$.

بردار واحد در جهت $D_t \mathbf{R}(t)$ از $|D_t \mathbf{R}(t)|$ به‌دست می‌آید؛ پس

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|}. \quad (1)$$

چون $\mathbf{T}(t)$ یک بردار واحد است، از قضیه ۱۱.۵.۱۶ نتیجه می‌گیریم که باید $D_t \mathbf{T}(t)$ بر $\mathbf{T}(t)$ عمود باشد. $D_t \mathbf{T}(t)$ لزوماً یک بردار واحد نیست. ولی بردار $D_t \mathbf{T}(t) / |D_t \mathbf{T}(t)|$ دارای بزرگی واحد و در جهت $D_t \mathbf{T}(t)$ است. بنابراین $D_t \mathbf{T}(t) / |D_t \mathbf{T}(t)|$ یک بردار واحد است که بر $\mathbf{T}(t)$ عمود است، و آن را بردار قائم واحد می‌نامند.

بردارهای مماس واحد وقائم واحد، و... ۴۷۳

۲۰۸.۱۶ تعریف اگر $\mathbf{T}(t)$ بردار مماس واحد بر منحنی C در نقطه P روی C باشد، آنگاه بردار قائم واحد که با $\mathbf{N}(t)$ نشان داده می شود بردار واحد در جهت $D_t\mathbf{T}(t)$ است.

از تعریف ۲۰۸.۱۶ و بحث قبلی نتیجه می شود

$$\mathbf{N}(t) = \frac{D_t\mathbf{T}(t)}{|D_t\mathbf{T}(t)|} \quad (2)$$

مثال ۱ معادلات پارامتری منحنیی به صورت $x = t^3 - 3t$ و $y = 3t^2$ داده شده اند. مطلوب است تعیین $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$. نمودار قسمتی از منحنی را در $t = 2$ ، و نمایشهایی از $\mathbf{T}(2)$ و $\mathbf{N}(2)$ را که ابتدای آنها در $t = 2$ باشد، رسم کنید.

حل يك معادله برداری منحنی به صورت زیر است

$$\mathbf{R}(t) = (t^3 - 3t)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

پس

$$D_t\mathbf{R}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}$$

در این صورت

$$|D_t\mathbf{R}(t)| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} = \sqrt{9(t^4 + 2t^2 + 1)} = 3(t^2 + 1).$$

از (۱) به دست می آوریم

$$\mathbf{T}(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}.$$

با مشتق گیری از $\mathbf{T}(t)$ نسبت به t به دست می آوریم

$$D_t\mathbf{T}(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{i} + \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}\mathbf{j}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |D_t\mathbf{T}(t)| &= \sqrt{\frac{16t^2}{(t^2 + 1)^4} + \frac{4 - 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 8t^2 + 4t^4}{(t^2 + 1)^4}} \\ &= \sqrt{\frac{4(t^2 + 1)^2}{(t^2 + 1)^4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{t^2 + 1}.$$

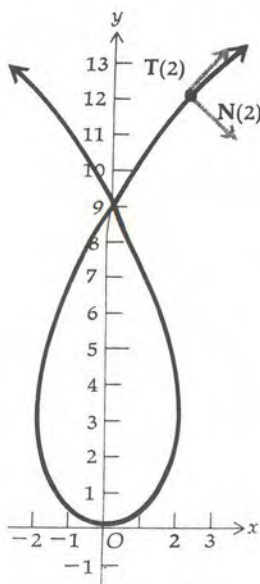
با توجه به (۲)

$$\mathbf{N}(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} \mathbf{j}.$$

$\mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را به ازای $t = 2$ به دست می آوریم

$$\mathbf{R}(2) = 2\mathbf{i} + 12\mathbf{j} \quad \mathbf{T}(2) = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} \quad \mathbf{N}(2) = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

نمودار خواسته شده در شکل ۱۰.۸.۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۸.۱۶

از (۱) به دست می آوریم

$$D_t \mathbf{R}(t) = |D_t \mathbf{R}(t)| \mathbf{T}(t). \quad (3)$$

طرف راست (۳) حاصلضرب يك اسكالر ويك بردار است. برای مشتق گیری از این حاصلضرب، قضیه ۸.۵.۱۶ را به کار می بریم.

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = [D_t |D_t \mathbf{R}(t)|] \mathbf{T}(t) + |D_t \mathbf{R}(t)| [D_t \mathbf{T}(t)]. \quad (4)$$

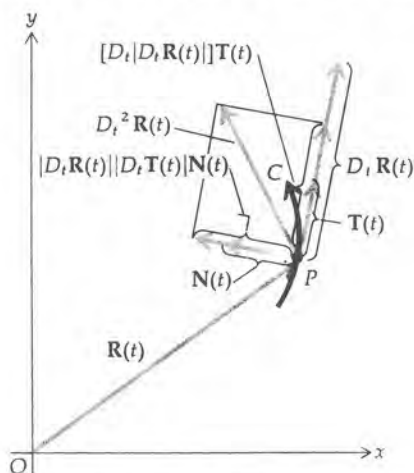
با توجه به (۲)

$$D_t \mathbf{T}(t) = |D_t \mathbf{T}(t)| \mathbf{N}(t). \quad (۵)$$

با قراردادن مقدار از (۵) در (۴) به دست می آوریم

$$D_t^2 \mathbf{R}(t) = [D_t |D_t \mathbf{R}(t)|] \mathbf{T}(t) + |D_t \mathbf{R}(t)| |D_t \mathbf{T}(t)| \mathbf{N}(t). \quad (۶)$$

معادله (۳) بردار $D_t \mathbf{R}(t)$ را به عنوان حاصلضرب یک اسکالر در بردار مماس واحد و معادله (۶) بردار $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ را به عنوان حاصلضرب یک اسکالر در بردار مماس واحد به علاوه حاصلضرب یک اسکالر در بردار قائم واحد، بیان می کند. ضرب $\mathbf{T}(t)$ در طرف راست (۶) مؤلفه بردار $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ در جهت بردار مماس واحد است. و ضرب $\mathbf{N}(t)$ در طرف راست (۶) نیز مؤلفه دیگر $D_t^2 \mathbf{R}(t)$ در جهت بردار قائم واحد می باشد. شکل ۲۰۸۰۱۶ قسمتی از منحنی C ، نمایش موضع $\mathbf{R}(t)$ و نمایشهایی از $D_t \mathbf{R}(t)$ ، $\mathbf{N}(t)$ ، $\mathbf{T}(t)$ ، $|D_t \mathbf{R}(t)| |D_t \mathbf{T}(t)| \mathbf{N}(t)$ و $[D_t |D_t \mathbf{R}(t)|] \mathbf{T}(t)$ را نشان می دهد که ابتدای همه نمایشها در نقطه P روی C قرار دارد. توجه کنید که نمایش بردار قائم واحد $\mathbf{N}$ در طرف مقعر منحنی است. این مطلب در بخش ۹۰۱۶ در حالت کلی ثابت شده است.



شکل ۲۰۸۰۱۶

گاهی ما یلیم به جای پارامتر t ، از s به عنوان پارامتر استفاده کنیم که عبارت است از طول قوس از نقطه انتخابی دلخواه $P_0(x_0, y_0)$ روی منحنی C تا نقطه $P(x, y)$ روی این منحنی برحسب واحد طول. فرض کنید به موازات افزایش t ، s نیز افزایش یابد، به طوری که اگر طول قوس در جهت افزایش t اندازه گیری شود، s مثبت؛ و اگر طول قوس در جهت مخالف افزایش t اندازه گیری شود، s منفی باشد. بنابراین s برحسب واحد

طول، يك فاصله جهت دار است. همچنین $D_t s > 0$. متناظر با هر مقدار s يك نقطه يكتای P روی منحنی C وجود دارد. در نتیجه، مختصات P توابعی از s هستند، و s تابعی از t است. در بخش ۱۶.۶ نشان دادیم که

$$|D_t \mathbf{R}(t)| = D_t s. \quad (۷)$$

از (۷) در (۱) مقدار قرار می دهیم

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{D_t s}.$$

$$D_t \mathbf{R}(t) = D_t s \mathbf{T}(t).$$

اگر پارامتر s به جای t قرار گیرد، از معادله بالا با در نظر گرفتن $t = s$ و توجه به اینکه $D_s s = 1$ ، خواهیم داشت

$$D_s \mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s).$$

این نتیجه، به صورت يك قضیه بیان می شود.

۳۰.۸.۱۶ قضیه اگر معادله برداری منحنی C به صورت $\mathbf{R}(s) = f(s)\mathbf{i} + g(s)\mathbf{j}$ باشد که s واحد، طول قوس منحنی C از يك نقطه خاص P_0 روی C تا نقطه P است، در این صورت بردار مماس واحد C در P به صورت زیر داده می شود

$$\mathbf{T}(s) = D_s \mathbf{R}(s)$$

به شرطی که این مشتق وجود داشته باشد.

حال فرض کنید معادلات پارامتری منحنی C شامل پارامتر t باشند، و بخواهیم معادلاتی پارامتری برای C پیدا کنیم به طوری که s پارامتر آنها باشد و s واحد، طول قوس باشد که از نقطه ثابتی اندازه گیری می شود. غالباً، عملیات مربوطه بسیار پیچیده اند. با این وجود، روشی که به کار می رود در مثال زیر روشن می شود.

مثال ۲ فرض کنید معادلات پارامتری منحنی C عبارت اند از $x = t^3$ و $y = t^2$ که $t \geq 0$. معادلاتی پارامتری برای C بیابید که s را به عنوان پارامتر در بر داشته باشند و s بر حسب واحد طول، طول قوس اندازه گیری شده از نقطه ای باشد که در آن، $t = 0$.

حل اگر P_0 نقطه ای باشد که در آن $t = 0$ ، مبدأ است. يك معادله برداری C به صورت زیر است

$$\mathbf{R}(t) = t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}.$$

چون $D_t s = |D_t \mathbf{R}(t)|$ ، از بردار فوق مشتق می گیریم

$$D_t \mathbf{R}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j}.$$

پس

$$|D_t \mathbf{R}(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2} \sqrt{9t^2 + 4}.$$

چون $t \geq 0$ ، داریم $\sqrt{t^2} = t$. لذا

$$|D_t \mathbf{R}(t)| = t \sqrt{9t^2 + 4}$$

بنابراین

$$D_t s = t \sqrt{9t^2 + 4}$$

پس

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t u \sqrt{9u^2 + 4} du \\ &= \frac{1}{18} \int_0^t 18u \sqrt{9u^2 + 4} du \\ &= \frac{1}{27} (9u^2 + 4)^{3/2} \Big|_0^t \end{aligned}$$

ازاینرو

$$s = \frac{1}{27} (9t^2 + 4)^{3/2} - \frac{8}{27}. \quad (8)$$

با حل (۸) نسبت به t برحسب s ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (9t^2 + 4)^{3/2} &= 27s + 8 \\ 9t^2 + 4 &= (27s + 8)^{2/3}. \end{aligned}$$

چون $t \geq 0$ ،

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{(27s + 8)^{2/3} - 4}.$$

اگر این مقدار t را در معادلات پارامتری C قرار دهیم، به دست می آوریم

$$x = \frac{1}{27} [(27s + 8)^{2/3} - 4]^{3/2} \quad \text{و} \quad y = \frac{1}{9} [(27s + 8)^{2/3} - 4] \quad (9)$$

حال چون $D_s \mathbf{R}(s) = \mathbf{T}(s)$ ، نتیجه می‌شود که اگر $\mathbf{R}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$ ، آنگاه $\mathbf{T}(s) = (D_s x)\mathbf{i} + (D_s y)\mathbf{j}$. و چون $\mathbf{T}(s)$ يك بردار واحد است، پس

$$(D_s x)^2 + (D_s y)^2 = 1. \quad (10)$$

از معادله (۱۰) برای بررسی صحت معادلات (۹) می‌توان استفاده کرد. این بررسی به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. (تمرین ۱۷ را ببینید). ▲

تمرینهای ۸.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، برای منحنی داده شده، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید؛ و در $t = t_1$ نمودار قسمتی از منحنی را رسم کنید و نیز نمایشهایی از $\mathbf{T}(t_1)$ و $\mathbf{N}(t_1)$ را که ابتدای آنها در $t = t_1$ باشد، رسم کنید.

$$1. \quad x = \frac{1}{3}t^3 - t, \quad y = t^2; \quad t_1 = 2$$

$$2. \quad x = \frac{1}{2}t^2, \quad y = \frac{1}{3}t^3; \quad t_1 = 1$$

$$3. \quad \mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}; \quad t_1 = 0$$

$$4. \quad \mathbf{R}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j}; \quad t_1 = 0$$

$$5. \quad \mathbf{R}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}; \quad t_1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$6. \quad x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t; \quad t_1 = 0$$

$$7. \quad x = \cos kt, \quad y = \sin kt, \quad k > 0; \quad t_1 = \frac{\pi}{k}$$

$$8. \quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t; \quad t_1 = \pi$$

$$9. \quad \mathbf{R}(t) = \ln \cos t \mathbf{i} + \ln \sin t \mathbf{j}, \quad 0 < t < \frac{1}{2}\pi; \quad t_1 = \frac{1}{4}\pi$$

$$10. \quad \mathbf{R}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j}; \quad t_1 = 0$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۳، برای منحنیی که معادله برداری آن داده شده، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را به‌دست آورید.

$$\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} \quad ۱۱$$

$$\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + \cosh t \mathbf{j}; \quad t \geq 0 \quad ۱۲$$

$$\mathbf{R}(t) = \sin^3 t \mathbf{i} + \cos^3 t \mathbf{j}; \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi \quad ۱۳$$

۱۴. اگر معادله برداری منحنی C به صورت $\mathbf{R}(t) = 2 \sin t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j}$ باشد، کسینوس زاویه بین بردارهای $\mathbf{R}(\pi/6)$ و $\mathbf{T}(\pi/6)$ را به دست آورید.

۱۵. اگر معادله برداری منحنی C به صورت $\mathbf{R}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + (t^3 - 3t) \mathbf{j}$ باشد، کسینوس زاویه بین بردارهای $\mathbf{R}(2)$ و $\mathbf{T}(2)$ را بیابید.

۱۶. اگر معادله برداری منحنی C به صورت $\mathbf{R}(t) = (4 - 3t^2) \mathbf{i} + (t^3 - 3t) \mathbf{j}$ باشد، اندازه زاویه بین بردارهای $\mathbf{N}(1)$ و $D_t \mathbf{R}(1)$ را بر حسب رادیان به دست آورید.

۱۷. صحت معادلات (۹) در حل مثال ۲ را با استفاده از معادله (۱۰) بررسی کنید.

در تمرینهای ۱۸ تا ۲۳، مطلوب است معادلات پارامتری منحنی به طوری که طول قوس s پارامتر آنها باشد و s از نقطه‌ای که در آن $t=0$ ، اندازه گیری شود. درستی نتیجه خود را با استفاده از معادله (۱۰) تحقیق کنید.

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad ۱۸$$

$$x = 2 + \cos t, \quad y = 3 + \sin t \quad ۱۹$$

$$x = 2(\cos t + t \sin t), \quad y = 2(\sin t - t \cos t) \quad ۲۰$$

$$y = x^{3/2} \quad ۲۱$$

$$x = t^2 - 1, \quad y = \frac{1}{3}t^3 \quad ۲۲$$

۲۳. يك نقطة بازگشت از شبه چرخزادی با چهار نقطه بازگشت:

$$\mathbf{R}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$$

۲۴. چرخزاد $x = 2(t - \sin t)$ ، $y = 2(1 - \cos t)$ مفروض است. طول قوس s را به عنوان تابعی از t بیان کنید؛ s از نقطه‌ای که $t=0$ ، اندازه گیری می‌شود.

۲۵. برای منحنی با معادلات پارامتری $x = e^t \cos t$ و $y = e^t \sin t$ ، طول قوس s را به عنوان تابعی از t بیان کنید؛ s از نقطه $t=0$ اندازه گیری می‌شود.

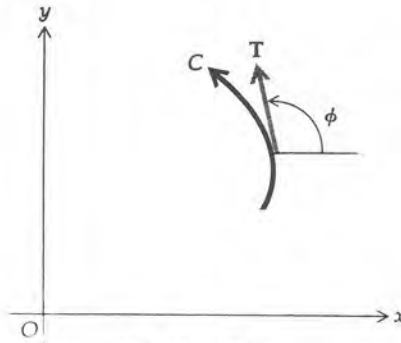
۲۶. ثابت کنید معادلات پارامتری منحنی زنجیری $y = a \cosh(x/a)$ ، به صورت زیرند

$$y = \sqrt{a^2 + s^2} \quad \text{و} \quad x = a \sinh^{-1} \frac{s}{a}$$

که در آن، پارامتر s طول قوس از نقطه $(0, a)$ تا نقطه (x, y) بر حسب واحد طول است، که وقتی $x \geq 0$ داریم $s \geq 0$ ؛ و وقتی $x < 0$ داریم $s < 0$.

۹.۱۶ انحنا

فرض کنید ϕ اندازه زاویه هادی بردار مماس واحد مربوط به منحنی C بر حسب رادیان باشد. بنابراین، ϕ اندازه زاویه بین جهت مثبت محور x ها و جهت بردار مماس واحد $T(t)$ ، در خلاف جهت ساعت، بر حسب رادیان است. شکل ۱۰.۹.۱۶ را ببینید.



شکل ۱۰.۹.۱۶

چون $|T(t)| = 1$ ، از معادله (۱) در بخش ۲.۱۶ نتیجه می‌شود که

$$T(t) = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}. \quad (۱)$$

با مشتق‌گیری نسبت به ϕ به دست می‌آوریم

$$D_\phi T(t) = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}. \quad (۲)$$

چون $|D_\phi T(t)| = \sqrt{(-\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2} = 1$ ، پس $D_\phi T(t)$ یک بردار واحد است. چون $T(t)$ بزرگی ثابتی دارد، از قضیه ۱۱.۵.۱۶ نتیجه می‌شود که بردارهای $T(t)$ و $D_\phi T(t)$ متعامدند.

با قراردادن $\cos(\pi/2 + \phi)$ به جای $-\sin \phi$ و $\sin(\pi/2 + \phi)$ به جای $\cos \phi$ ، (۲) را به صورت زیر می نویسیم

$$D_\phi T(t) = \cos\left(\frac{1}{\rho}\pi + \phi\right) \mathbf{i} + \sin\left(\frac{1}{\rho}\pi + \phi\right) \mathbf{j}. \quad (3)$$

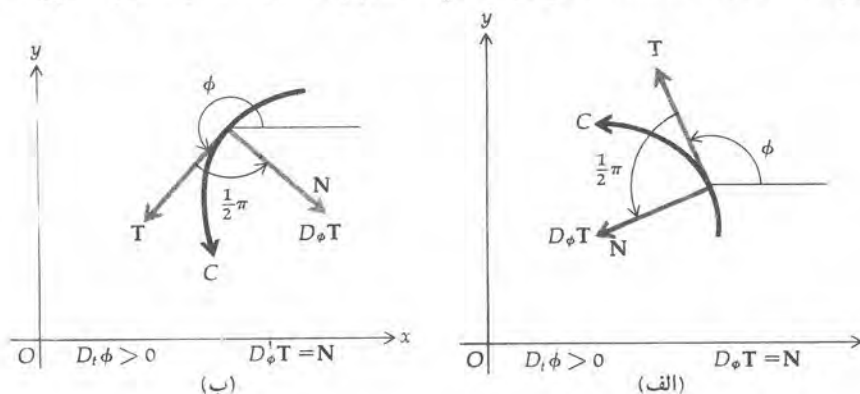
از (۳) و بحث قبلی نتیجه می شود که بردار $D_\phi T(t)$ يك بردار واحد عمود بر $T(t)$ است و بردار $T(t)$ زاویه ای برابر $\pi/2$ در خلاف جهت ساعت با آن می سارد. بردار قائم واحد $N(t)$ نیز بر $T(t)$ عمود است. با استفاده از قاعده زنجیری (قضیه ۹.۵۰۱۶)،

$$D_t T(t) = [D_\phi T(t)] D_t \phi. \quad (4)$$

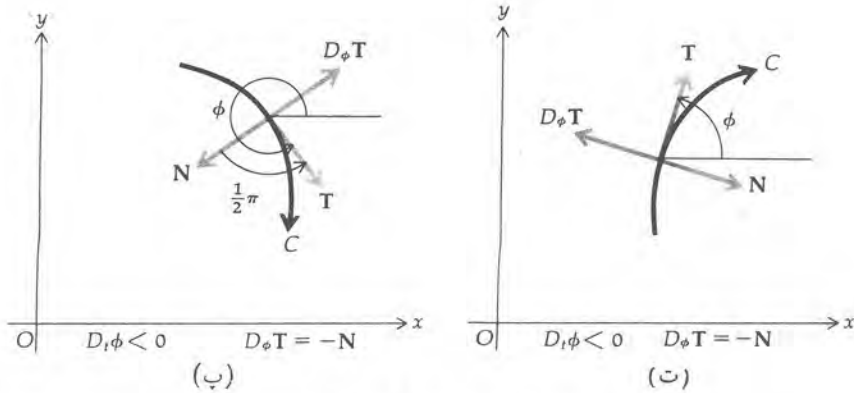
چون $N(t)$ و $D_t T(t)$ همجهت هستند، از (۴) نتیجه می گیریم که $N(t)$ با $D_\phi T(t)$ همجهت است، به شرط اینکه $D_t \phi > 0$ (یعنی، همچنانکه t افزایش می یابد، $T(t)$ در خلاف جهت ساعت بچرخد)، و $N(t)$ و $D_\phi T(t)$ در جهت مخالف هم هستند به شرط اینکه $D_t \phi < 0$ (یعنی، همچنانکه t افزایش می یابد، $T(t)$ در جهت ساعت بچرخد). چون هر دو بردار $N(t)$ و $D_\phi T(t)$ بردارهای واحد هستند، نتیجه می گیریم که

$$D_\phi T(t) = \begin{cases} N(t) & D_t \phi > 0 \\ -N(t) & D_t \phi < 0 \end{cases} \quad (5)$$

○ نمونه ۱ در شکل ۲.۹.۱۶ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) حالت های گوناگونی نشان داده شده است؛ در (الف) و (ب)، داریم $D_t \phi > 0$ ؛ و در (پ) و (ت) داریم $D_t \phi < 0$. جهت مثبت در امتداد منحنی C را با پیکانی روی منحنی مشخص کرده ایم. در هر شکل زاویه ای با اندازه ϕ برحسب رادیان و نمایش های بردارهای $T(t)$ ، $D_\phi T(t)$ ، و $N(t)$ نشان داده شده اند. نمایش بردار قائم واحد $N(t)$ همواره در طرف مقعر منحنی است.



شکل ۲.۹.۱۶



○ شکل ۲۰۹.۱۶ (ادامه)

حال $D_s T(t)$ را در نظر می‌گیریم که در آن، s واحد، طول قوس منحنی از هر نقطه انتخابی دلخواه روی C تا نقطه P است، و همچنانکه t زیاد می‌شود s نیز افزایش می‌یابد. بنا بر قاعده زنجیری،

$$D_s T(t) = D_\phi T(t) D_s \phi$$

پس

$$|D_s T(t)| = |D_\phi T(t) D_s \phi| = |D_\phi T(t)| |D_s \phi|.$$

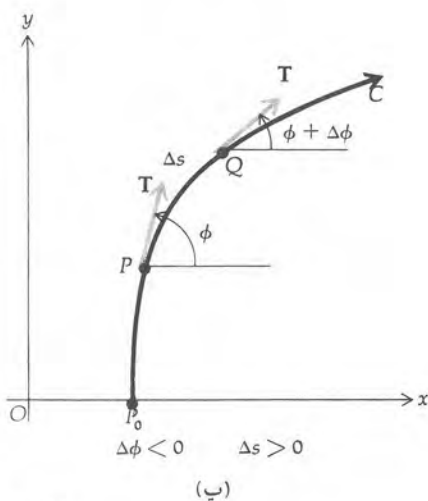
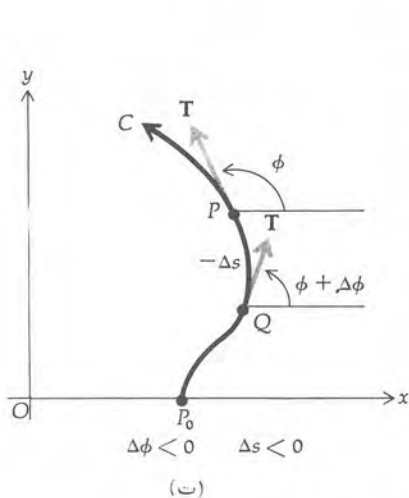
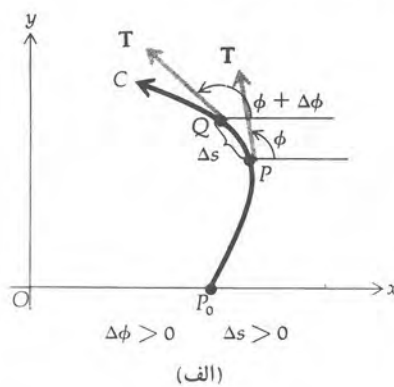
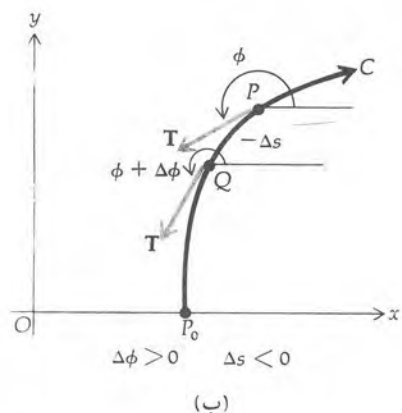
اما چون $D_\phi T(t)$ برداری واحد است، داریم $|D_\phi T(t)| = 1$ ؛ پس

$$|D_s T(t)| = |D_s \phi|. \quad (۶)$$

عدد $|D_s \phi|$ قدرمطلق آهنگ تغییر اندازه زاویه هادی بردار مماس واحد $T(t)$ در يك نقطه روی يك منحنی نسبت به اندازه طول قوس در امتداد منحنی است. این عدد را انحنا منحنی در آن نقطه می‌نامند. قبل از ارائه تعریف رسمی انحنا، نشان می‌دهیم که در نظر گرفتن این مفهوم به صورت این عدد، با تصور شهودی ما از انحنا سازگار است. به عنوان مثال، در نقطه P روی C ، ϕ اندازه زاویه هادی بردار $T(t)$ بر حسب رادیان و s واحد، طول قوس منحنی از نقطه P_0 روی C تا P است. فرض کنید Q نقطه‌ای روی C باشد که برای آن، اندازه زاویه هادی $T(t + \Delta t)$ در Q برابر $\phi + \Delta \phi$ و طول قوس منحنی از P_0 تا Q برابر با $s + \Delta s$ واحد است. در این صورت، طول قوس منحنی از P تا Q برابر با Δs واحد می‌باشد و به نظر می‌رسد که نسبت $\Delta \phi / \Delta s$ معیار

عددی خوبی از آن چیزی باشد که طبق تصور شهودی ما متوسط انحنای در امتداد قوس PQ است.

○ نمونه ۲ شکل ۳.۹.۱۶ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) را ببینید: در (الف) $\Delta\phi > 0$ و $\Delta s > 0$ ؛ در (ب) $\Delta\phi > 0$ و $\Delta s < 0$ ؛ در (پ) $\Delta\phi < 0$ و $\Delta s > 0$ ؛ در (ت) $\Delta\phi < 0$ و $\Delta s < 0$.



○

شکل ۳.۹.۱۶

۱۰.۹.۱۶ تعریف اگر $T(t)$ بردار مماس واحد بر منحنی C در نقطه P ، و s طول قوس اندازه گیری شده از یک نقطه انتخابی اختیاری روی C تا P باشد، و همچنانکه t زیاد

می شود S نیز افزایش یابد، آنگاه بردار انحنا C در P ، با $K(t)$ نمایانده می شود، و به صورت زیر معین می شود

$$K(t) = D_s T(t). \quad (۷)$$

انحنای C در P که با $K(t)$ نشان داده می شود، برابر است با بزرگی بردار انحنا.

برای به دست آوردن بردار انحنا و انحنا κ منحنی خاص، بهتر است فرمولی داشته باشیم که بردار انحنا را بر حسب مشتقاتی نسبت به t بیان کند. بنا به قاعده زنجیری داریم

$$D_t T(t) = [D_s T(t)] D_t s.$$

با قراردادن $|D_t R(t)|$ به جای $D_t s$ ، به دست می آید

$$D_s T(t) = \frac{D_t T(t)}{|D_t R(t)|}.$$

پس، بنا به (۷) داریم

$$K(t) = \frac{D_t T(t)}{|D_t R(t)|} \quad (۸)$$

چون $K(t) = |K(t)|$ ، انحنا برابر است با

$$K(t) = \left| \frac{D_t T(t)}{|D_t R(t)|} \right|. \quad (۹)$$

مثال ۱ دایره $x = a \cos t$ ، $y = a \sin t$ که در آن $a > 0$ ، مفروض است؛ بردار انحنا و انحنا را در هر t به دست آورید.

حل معادله برداری دایره به صورت زیر است

$$R(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}.$$

پس

$$D_t R(t) = -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}$$

$$|D_t R(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} = a.$$

بنابراین

$$T(t) = \frac{D_t R(t)}{|D_t R(t)|} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

$$D_t \mathbf{T}(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

$$\frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} = -\frac{\cos t}{a} \mathbf{i} - \frac{\sin t}{a} \mathbf{j}.$$

پس بردار انحنا به صورت زیر است

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{a} \cos t \mathbf{i} - \frac{1}{a} \sin t \mathbf{j}$$

و انحنا برابر است با

$$\blacktriangle \quad K(t) = |\mathbf{K}(t)| = \frac{1}{a}.$$

نتیجه مثال ۱ حاکی از آن است که انحناى يك دایره ثابت، و برابر عكس شعاع دایره است.

فرض کنید منحنی C داده شده است و در يك نقطه خاص P انحنا وجود دارد و برابر با $K(t)$ است که $K(t) \neq 0$. دایره‌ای را در نظر بگیرید که بر منحنی C در P مماس است و انحناى آن در P برابر $K(t)$ می باشد. از مثال ۱، می دانیم که شعاع آن $1/K(t)$ و مرکزش روی خطی عمود بر خط مماس در جهت $\mathbf{N}(t)$ است. این دایره را دایره انحنا می نامند، که شعاع آن شعاع انحناى C در P است. گاهی به دایره انحنا، دایره بوسان نیز اطلاق می کنند.

۲۰۹۰۱۶ تعریف اگر $K(t)$ انحناى منحنی C در نقطه P باشد و $K(t) \neq 0$ ، آنگاه شعاع انحناى C در P را با $\rho(t)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\rho(t) = \frac{1}{K(t)}.$$

مثال ۲ معادله برداری منحنی C عبارت است از $\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$ انحنا و شعاع انحنا در $t = 1$ را به دست آورید. نمودار قسمتی از منحنی، بردار مماس واحد، و دایره انحنا در $t = 1$ را رسم کنید.

حل

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

$$D_t \mathbf{R}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$|D_t \mathbf{R}(t)| = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{D_t \mathbf{R}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathbf{j}$$

$$D_t \mathbf{T}(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \mathbf{j}$$

$$\frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} = -\frac{t}{2(1+t^2)^2} \mathbf{i} + \frac{1}{2(1+t^2)^2} \mathbf{j}$$

$$K(t) = \left| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{|D_t \mathbf{R}(t)|} \right| = \sqrt{\frac{t^2}{4(1+t^2)^4} + \frac{1}{4(1+t^2)^4}}$$

$$K(t) = \frac{1}{2(1+t^2)^{3/2}}$$

پس

$$K(1) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \rho(1) = 4\sqrt{2}$$

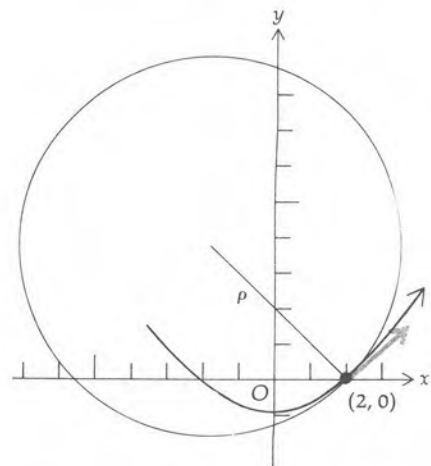
و

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j}.$$

شکل ۴.۹.۱۶ نمودارهای خواسته شده را نشان می‌دهد. جدول ۱.۹.۱۶ نیز مقادیر متناظر

جدول ۱.۹.۱۶

t	x	y
-۲	-۴	۳
-۱	-۲	۰
۰	۰	-۱
۱	۲	۰
۲	۴	۳



شکل ۴.۹.۱۶

▲ x و y به ازای $t = -2, -1, 0, 1, 2$ را به دست می‌دهد.

حال فرمولی برای محاسبه مستقیم انحنا از معادلات پارامتری منحنی، $x = f(t)$ و $y = g(t)$ به دست می‌آوریم. از معادله (۶) داریم $|D_s T(t)| = |D_s \phi|$ ؛ پس

$$K(t) = |D_s \phi|.$$

با فرض اینکه s و t باهم افزایش می‌یابند، داریم

$$D_s \phi = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}}.$$

پس

$$D_s \phi = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}. \quad (10)$$

برای پیدا کردن $d\phi/dt$ ، مشاهده می‌کنیم که چون ϕ اندازه زاویه هادی بردار مماس واحد بر حسب رادیان است، پس

$$\tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \quad (11)$$

با مشتق‌گیری ضمنی نسبت به t از دو طرف (۱۱)، به دست می‌آوریم

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

پنا برای

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\right)}{\sec^2 \phi \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \quad (12)$$

اما

$$\sec^2 \phi = 1 + \tan^2 \phi = 1 + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

اگر این مقدار $\sec^2 \phi$ را در (۱۲) قرار دهیم، به دست می آوریم

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (13)$$

با قراردادن مقدار از (۱۳) در (۱۰)، و چون $K(t) = |D_s \phi|$ خواهیم داشت

$$K(t) = \frac{\left| \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (14)$$

مثال ۳ انحنای منحنی مذکور در مثال ۲ را با استفاده از فرمول (۱۴) به دست آورید.

حل معادلات پارامتری C عبارت اند از $x = 2t$ و $y = t^2 - 1$. پس

$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

بنابراین، از (۱۴) به دست می آوریم

$$\blacktriangle \quad K(t) = \frac{|2(2) - 2t(0)|}{[(2)^2 + (2t)^2]^{3/2}} = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}.$$

فرض کنید معادله دکارتی به یکی از دو صورت $y = F(x)$ یا $x = G(y)$ باشد. در چنین وضعیتی، می توان از حالت های ویژه ای از فرمول (۱۴) برای به دست آوردن انحنای یک منحنی استفاده کرد.

اگر $y = F(x)$ معادله منحنی C باشد، یک مجموعه از معادلات پارامتری C عبارت است از $x = t$ و $y = F(t)$. در این صورت $dx/dt = 1$ ، $d^2x/dt^2 = 0$ ، $dy/dt = d^2y/dx^2$ و $d^2y/dt^2 = d^2y/dx^2$. با قرار دادن مقادیر در (۱۴) به دست می آوریم

$$K = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (۱۵)$$

به همین ترتیب، اگر معادله یک منحنی C به صورت $x = G(y)$ باشد، داریم

$$K = \frac{\left| \frac{d^2 x}{dy^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (۱۶)$$

مثال ۴ اگر $xy = 1$ معادله منحنی C باشد، شعاع انحنای C در نقطه $(1, 1)$ را به دست آورید و نمودار منحنی و دایره انحنا در $(1, 1)$ را رسم کنید.

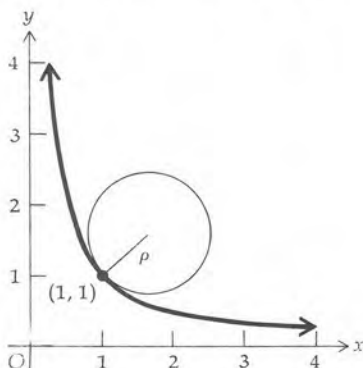
حل با حل معادله نسبت به y داریم $y = 1/x$. پس $dy/dx = -1/x^2$ و $d^2 y/dx^2 = 2/x^3$ از فرمول (۱۵) به دست می آوریم

$$K = \frac{\left| \frac{2}{x^3} \right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{x^2} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{2x^6}{|x^3|(x^4 + 1)^{3/2}} = \frac{2x^4}{|x|(x^4 + 1)^{3/2}}.$$

چون $\rho = 1/K$ ،

$$\rho = \frac{|x|(x^4 + 1)^{3/2}}{2x^4}.$$

پس در $(1, 1)$ ، $\rho = \sqrt{2}$. نمودار خواسته شده در شکل ۵.۹.۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۵.۹.۱۶

تمرینهای ۹.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۴، انحنا (K) و شعاع انحنا (ρ) را در نقطه‌ای که $t = t_1$ ، به دست آورید. از فرمول (۹) برای پیدا کردن K استفاده کنید. نموداری رسم کنید که قسمتی از منحنی، بردار مماس واحد، و دایره انحنا در $t = t_1$ را نشان دهد.

$$\mathbf{R}(t) = t^2 \mathbf{i} + (2t + 1) \mathbf{j}; \quad t_1 = 1 \quad .1$$

$$\mathbf{R}(t) = (t^2 - 2t) \mathbf{i} + (t^3 - t) \mathbf{j}; \quad t_1 = 1 \quad .2$$

$$\mathbf{R}(t) = 2e^t \mathbf{i} + 2e^{-t} \mathbf{j}; \quad t_1 = 0 \quad .3$$

$$\mathbf{R}(t) = \sin t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j}; \quad t_1 = \frac{1}{2} \pi \quad .4$$

در تمرینهای ۵ و ۶، با استفاده از فرمول (۱۴) انحنا (K) را به دست آورید. سپس K و ρ را در نقطه‌ای که $t = t_1$ بیابید، و نموداری رسم کنید که قسمتی از منحنی، بردار مماس واحد، و دایره انحنا در $t = t_1$ را نشان دهد.

$$x = \frac{1}{1+t}, \quad y = \frac{1}{1-t}; \quad t_1 = 0 \quad .5$$

$$x = e^t + e^{-t}, \quad y = e^t - e^{-t}; \quad t_1 = 0 \quad .6$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۴، انحنا (K) و شعاع انحنا (ρ) در نقطه داده شده را به دست آورید. نموداری رسم کنید که قسمتی از منحنی، قطعه‌ای از خط مماس، و دایره انحنا در نقطه مفروض را نشان دهد.

$$y^2 = x^2; \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) \quad .8 \quad x = 2\sqrt{x}; \quad (0, 0) \quad .7$$

$$y = \ln x; \quad (e, 1) \quad .10 \quad y = e^x; \quad (0, 1) \quad .9$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36; \quad (0, 2) \quad .12 \quad x = \sin y; \quad \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\pi\right) \quad .11$$

$$x = \tan y; \quad \left(1, \frac{1}{4}\pi\right) \quad .14 \quad x = \sqrt{y-1}; \quad (2, 5) \quad .13$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۲، شعاع انحنا در هر نقطه روی منحنی مفروض را به دست آورید.

$$y = \ln \sec x \quad .16 \quad x = \sin^{-1} x \quad .15$$

$$x = \tan^{-1} y \quad .18 \quad 4x^2 - 9y^2 = 16 \quad .17$$

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2} \quad ۱۹. \quad R(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} \quad ۲۰.$$

$$y = a(1 - \cos t), \quad x = a(t - \sin t) \quad \text{چرخزاد} \quad ۲۱.$$

$$y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}, \quad x = t - a \tanh \frac{t}{a} \quad \text{تراکتريس} \quad ۲۲.$$

۲۳. نشان دهید که انحناى منحنى زنجيرى $y = a \cosh(x/a)$ در هر نقطه (x, y) روى منحنى برابر با a/y^2 است. دایره انحنا در $(0, a)$ را رسم کنید. همچنین نشان دهید که انحنا (K) بدون توجه به $K'(x)$ در نقطه $(0, a)$ ماکسیمم مطلق است.

در تمرینهای ۲۴ تا ۲۸، نقطه‌ای روى منحنى داده شده به دست آورید که انحنا در آن نقطه ماکسیمم مطلق باشد.

$$y = e^x \quad ۲۴. \quad y = e^x - x^2 \quad ۲۵.$$

$$y = \sin x \quad ۲۶. \quad R(t) = (2t - 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} \quad ۲۷.$$

$$y = x^2 - 2x + 3 \quad ۲۸.$$

۲۹. معادله دایره انحنا را برای $y = e^x$ در نقطه $(0, 1)$ به دست آورید.

۳۰. اگر معادله قطبى يك منحنى به صورت $r = F(\theta)$ باشد، ثابت کنید انحنا (K) توسط فرمول زیر به دست مى آید

$$K = \frac{|r^2 + 2(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2)|}{[r^2 + (dr/d\theta)^2]^{3/2}}.$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۴، انحنا (K) و شعاع انحنا (ρ) را در نقطه نشان داده شده به دست آورید. فرمول تمرین ۳۰ را برای به دست آوردن K به کار ببرید.

$$r = 1 - \sin \theta; \quad \theta = 0 \quad ۳۲. \quad r = 4 \cos 2\theta; \quad \theta = \frac{1}{12}\pi \quad ۳۱.$$

$$r = a\theta; \quad \theta = 1 \quad ۳۴. \quad r = a \sec^2 \frac{1}{3}\theta; \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \quad ۳۳.$$

۳۵. مرکز دایره انحناى منحنى C در يك نقطه P ، مرکز انحنا در P نامیده مى شود. ثابت کنید مختصات مرکز انحناى يك منحنى در $P(x, y)$ به صورت زیر مى باشد

$$x_c = x - \frac{(dy/dx)[1 + (dy/dx)^2]}{d^2y/dx^2}$$

$$y_c = y + \frac{(dy/dx)^2 + 1}{d^2y/dx^2}.$$

در تمرینهای ۳۶ تا ۳۸، انحنا (K)، شعاع انحنا (ρ)، و مرکز انحنا در نقطه مفروضی را به دست آورید. نمودار منحنی و دایره انحنا را رسم کنید.

$$y = \ln x; (1, 0) \quad ۳۶ \quad y = x^4 - x^2; (0, 0) \quad ۳۷$$

$$y = \cos x; \left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\right) \quad ۳۸$$

در تمرینهای ۳۹ تا ۴۲، مختصات مرکز انحنا در هر نقطه دلخواه را به دست آورید.

$$y^2 = 4px \quad ۳۹ \quad y^3 = a^2x \quad ۴۰$$

$$R(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j} \quad ۴۲ \quad R(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} \quad ۴۱$$

۴۳ نشان دهید که انحنای يك خط مستقیم در هر نقطه، صفر است.

۱۰.۱۶ مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب

اگر ذره‌ای در امتداد منحنی C که دارای معادله برداری

$$R(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad (۱)$$

است حرکت کند، بنا به تعریف ۱۰.۷.۱۶، بردار سرعت در P به صورت زیر است

$$V(t) = D_t R(t). \quad (۲)$$

در بخش ۸.۱۶ دیدیم که اگر $T(t)$ بردار مماس واحد در P باشد، s طول قوس C از يك نقطه ثابت P_0 تا P است، و همچنانکه t زیاد می‌شود، s نیز افزایش می‌یابد. داریم

$$D_t R(t) = D_t s [T(t)]. \quad (۳)$$

از (۳) در (۲) قرار می‌دهیم

$$V(t) = D_t s [T(t)]. \quad (۴)$$

معادله (۴) بردار سرعت در يك نقطه را به عنوان حاصلضرب يك اسکالر در بردار مماس واحد در آن نقطه بیان می‌کند. حال می‌خواهیم بردار شتاب در يك نقطه را بر حسب بردارهای مماس واحد و قائم واحد در آن نقطه بیان کنیم. از تعریف ۲۰.۷.۱۶ می‌دانیم که بردار شتاب در P به صورت زیر است

$$A(t) = D_t^\vee \mathbf{R}(t) . \quad (5)$$

از (۶) در بخش ۸.۱۶ به دست می آوریم

$$D_t^\vee \mathbf{R}(t) = [D_t | D_t \mathbf{R}(t)]^\vee \mathbf{T}(t) + | D_t \mathbf{R}(t) | | D_t \mathbf{T}(t) | \mathbf{N}(t) . \quad (6)$$

چون

$$D_t s = | D_t \mathbf{R}(t) | \quad (7)$$

نسبت به t مشتق می گیریم؛ به دست می آید

$$D_t^\vee s = D_t | D_t \mathbf{R}(t) | \quad (8)$$

به علاوه

$$| D_t \mathbf{R}(t) | | D_t \mathbf{T}(t) | = | D_t \mathbf{R}(t) |^2 \left| \frac{D_t \mathbf{T}(t)}{| D_t \mathbf{R}(t) |} \right| . \quad (9)$$

با به کار بردن معادله (۷) فوق و معادله (۹) از بخش ۹.۱۶ در طرف راست (۹)، خواهیم داشت

$$| D_t \mathbf{R}(t) | | D_t \mathbf{T}(t) | = (D_t s)^\vee K(t) . \quad (10)$$

از (۵)، (۸)، و (۱۰) در (۶) قرار می دهیم

$$A(t) = (D_t^\vee s) \mathbf{T}(t) + (D_t s)^\vee K(t) \mathbf{N}(t) . \quad (11)$$

معادله (۱۱)، بردار شتاب را به عنوان مجموع حاصلضرب يك اسکالر در بردار مماس واحد و حاصلضرب يك اسکالر در بردار قائم واحد بیان می کند. ضریب $\mathbf{T}(t)$ را مؤلفه مماسی بردار شتاب می نامند و با $A_T(t)$ نشان می دهند، و ضریب $\mathbf{N}(t)$ مؤلفه قائم بردار شتاب نامیده و با $A_N(t)$ نشان داده می شود. پس

$$A_T(t) = D_t^\vee s \quad (12)$$

و

$$A_N(t) = (D_t s)^\vee K(t) . \quad (13)$$

یا به عبارت دیگر

$$A_N(t) = \frac{(D_t s)^\vee}{\rho(t)} . \quad (14)$$

چون مقدار سرعت ذره در لحظه t واحد زمان، برابر با $| \mathbf{V}(t) | = D_t s$ بر حسب

واحد مربوطه است، پس $A_T(t)$ مشتق اندازه مقدار سرعت ذره، و $A_N(t)$ مربع اندازه مقدار سرعت تقسیم بر شعاع انحنا می باشد.

بنا به قانون دوم نیوتون در مورد حرکت داریم

$$\mathbf{F} = m\mathbf{A}$$

که $\mathbf{F}$ ، بردار نیروی مؤثر در حرکت شیء، m اندازه جرم شیء، و $\mathbf{A}$ بردار شتاب شیء است. در حرکت منحنی الخط، مؤلفه قائم $\mathbf{F}$ نیروی قائم بر منحنی است که برای نگاهداشتن شیء روی منحنی لازم است. به عنوان مثال، اگر اتومبیلی روی یک منحنی با سرعت زیاد حرکت کند، آنگاه نیروی قائم بایستی دارای بزرگی زیادی باشد تا اتومبیل را روی جاده نگه دارد. همچنین، اگر منحنی تیز باشد، شعاع انحنا عددی کوچک است؛ پس بایستی بزرگی نیروی قائم عددی بزرگ باشد.

معادله (۴) نشان می دهد که مؤلفه مماسی بردار سرعت برابر با $D_t s$ است، و مؤلفه قائم بردار سرعت صفر می باشد.

از (۱۲) و (۱۳) در (۱۱) مقدار قرار می دهیم

$$\mathbf{A}(t) = A_T(t)\mathbf{T}(t) + A_N(t)\mathbf{N}(t) \quad (15)$$

که از آن به دست می آید

$$|\mathbf{A}(t)| = \sqrt{[A_T(t)]^2 + [A_N(t)]^2}.$$

با توجه به (۱۳) که در آن $A_N(t)$ نامنفی است، با حل معادله فوق نسبت به $A_N(t)$ خواهیم داشت

$$A_N(t) = \sqrt{|\mathbf{A}(t)|^2 - [A_T(t)]^2}. \quad (16)$$

مثال ۱ يك ذره در امتداد منحنی با معادله برداری $\mathbf{R}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + ((t^3/3) - t)\mathbf{j}$ در حال حرکت است. هر کدام از بردارهای زیر را به دست آورید: $\mathbf{T}(t)$ ، $\mathbf{A}(t)$ ، $\mathbf{V}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$. همچنین، اسکارهای زیر را بیابید: $|\mathbf{V}(t)|$ ، $A_T(t)$ ، $A_N(t)$ و $K(t)$. مقادیر خاص به ازای $t = 2$ را به دست آورید. نموداری رسم کنید که قسمتی از منحنی را در نقطه ای که $t = 2$ ، و نمایشهایی از $\mathbf{V}(2)$ ، $\mathbf{A}(2)$ ، $\mathbf{T}(2)$ ، $A_T(2)$ و $A_N(2)\mathbf{N}(2)$ را که ابتدای آنها در $t = 2$ باشد، نشان دهد.

حل

$$\mathbf{V}(t) = D_t \mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{A}(t) = D_t \mathbf{V}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

$$|V(t)| = \sqrt{4t^x + t^x - 2t^x + 1} = \sqrt{t^x + 2t^x + 1} = t^x + 1$$

$$|A(t)| = \sqrt{4 + 4t^x} = 2\sqrt{1 + t^x}$$

$$D_t s = |V(t)| = t^x + 1$$

$$A_T(t) = D_t^x s = 2t.$$

از (۱۶) داریم

$$A_N(t) = \sqrt{|A(t)|^x - [A_T(t)]^x} = \sqrt{4 + 4t^x - 4t^x} = 2$$

$$T(t) = \frac{V(t)}{|V(t)|} = \frac{2t}{t^x + 1} \mathbf{i} + \frac{t^x - 1}{t^x + 1} \mathbf{j}.$$

برای پیدا کردن $N(t)$ ، فرمول زیر را که از (۱۱) به دست می آید، به کار می بریم

$$N(t) = \frac{1}{(D_t s)^x K(t)} [A(t) - (D_t^x s) T(t)] \quad (17)$$

$$A(t) - (D_t^x s) T(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2t \left(\frac{2t}{t^x + 1} \mathbf{i} + \frac{t^x - 1}{t^x + 1} \mathbf{j} \right)$$

$$A(t) - (D_t^x s) T(t) = \frac{2}{t^x + 1} [(1 - t^x)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}]. \quad (18)$$

با توجه به (۱۷)، می بینیم که $N(t)$ برابر است با حاصلضرب يك اسکالر در بردار مذکور در (۱۸). چون $N(t)$ يك بردار واحد است، می توان آن را با تقسیم بردار مذکور در (۱۸) بر بزرگیش به دست آورد. پس

$$N(t) = \frac{(1 - t^x)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(1 - t^x)^x + (2t)^x}} = \frac{1 - t^x}{1 + t^x} \mathbf{i} + \frac{2t}{1 + t^x} \mathbf{j}.$$

$K(t)$ از (۱۳) به دست می آید

$$K(t) = \frac{A_N(t)}{(D_t s)^x} = \frac{2}{(t^x + 1)^x}.$$

وقتی $t = 2$ ، خواهیم داشت

$$V(2) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$A(2) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

$$|V(2)| = 5$$

$$A_T(2) = 4$$

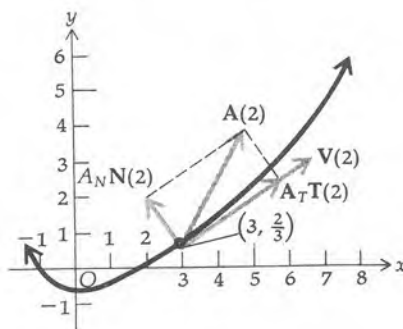
$$A_N(2) = 2$$

$$T(2) = \frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$$

$$N(2) = -\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$$

$$K(2) = \frac{2}{25}.$$

نمودار خواسته شده در شکل ۱۰۱۰۱۶ نشان داده شده است.



شکل ۱۰۱۰۱۶

تمرینهای ۱۰.۱۶

در تمرینهای ۱ تا ۳، یک ذره در امتداد منحنیی با معادله برداری مفروض حرکت می‌کند. در هر تمرین، بردارهای $V(t)$ و $A(t)$ و اسکالرهای $A_T(t)$ و $A_N(t)$ را بیابید.

$$1. \quad R(t) = (t^3 - 3t)i + 3t^2j$$

$$2. \quad R(t) = 2\sin 4t i + 2\cos 4t j$$

$$3. \quad R(t) = (\cos t + t \sin t)i + (\sin t - t \cos t)j; \quad t \geq 0$$

در تمرینهای ۴ و ۵، یک ذره در امتداد منحنیی با معادله برداری مفروض در حرکت است. در هر تمرین، $V(t_1)$ ، $A(t_1)$ ، $A_T(t_1)$ و $A_N(t_1)$ را به ازای مقدار داده شده t_1 به دست آورید.

$$\mathbf{R}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}; \quad t_1 = \ln 2 \quad .۴$$

$$\mathbf{R}(t) = \sin^3 t \mathbf{i} + \cos^3 t \mathbf{j}; \quad t_1 = \frac{1}{4}\pi \quad .۵$$

۶. اگر $\mathbf{R}(t) = (t^2 + 4)\mathbf{i} + (2t - 5)\mathbf{j}$ ، اسکالرهای $A_N(t)$ ، $A_T(t)$ و $K(t)$ را به دست آورید.

دترمینهای ۷ تا ۱۲، یک ذره در امتداد منحنی با معادله برداری داده شده، در حرکت است. در هر تمرین بردارهای $\mathbf{V}(t)$ ، $\mathbf{A}(t)$ ، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ ، و اسکالرهای $|\mathbf{V}(t)|$ ، $A_T(t)$ ، $A_N(t)$ و $K(t)$ را برای یک مقدار اختیاری t به دست آورید. همچنین مقادیر خاص را وقتی که $t = t_1$ ، بیابید. در $t = t_1$ ، نمودار قسمتی از منحنی و نمایشهای بردارهای $\mathbf{V}(t_1)$ ، $\mathbf{A}(t_1)$ ، $\mathbf{T}(t_1)$ و $\mathbf{N}(t_1)$ را رسم کنید.

$$\mathbf{R}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}; \quad t_1 = 2 \quad .۷$$

$$\mathbf{R}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}; \quad t_1 = 1 \quad .۸$$

$$\mathbf{R}(t) = \Delta \cos 3t \mathbf{i} + \Delta \sin 3t \mathbf{j}; \quad t_1 = \frac{1}{3}\pi \quad .۹$$

$$\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + 2t^3\mathbf{j}; \quad t_1 = 1 \quad .۱۰$$

$$\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}; \quad t_1 = 0 \quad .۱۱$$

$$\mathbf{R}(t) = \cos t^2 \mathbf{i} + \sin t^2 \mathbf{j}; \quad t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \quad .۱۲$$

دترمینهای ۱۳ و ۱۴، یک ذره در امتداد منحنی با معادله دکارتی داده شده، در حرکت است. مطلوب است تعیین موارد زیر در نقطه مفروض: (الف) بردار موضع؛ (ب) بردار سرعت؛ (پ) بردار شتاب؛ (ت) A_T و (ث) A_N .

$$y^2 = 4x^2; \quad (1, 2) \quad .۱۳ \quad \quad y^2 = x^3; \quad (4, 8) \quad .۱۴$$

۱۵. ذره‌ای در امتداد سهمی $y^2 = 8x$ حرکت می‌کند، و مقدار سرعتش ثابت است. مطلوب است تعیین موارد زیر، وقتی که ذره در $(2, 4)$ است: بردار موضع، بردار سرعت، بردار شتاب، بردار مماس واحد، بردار قائم واحد، A_T و A_N .

۱۶. ذره‌ای در امتداد شاخه بالایی هذلولی $y^2 - x^2 = 9$ حرکت می‌کند، به طوری که $D_t x$ ثابت مثبتی است. مطلوب است تعیین موارد زیر، وقتی که ذره در $(4, 5)$ است: بردار موضع، بردار سرعت، بردار شتاب، بردار مماس واحد، بردار قائم واحد، A_T و A_N .

تمرینهای مروری فصل ۱۶

دترمینهای ۱ تا ۱۴، $A = 4i - 6j$ ، $B = i + 7j$ ، $C = 9i - 5j$.

۱. $3B - 7A$ را بیابید. ۲. $5B - 3C$ را پیدا کنید.

۳. $|3B - 7A|$ را بیابید. ۴. $|5B - 3C|$ را پیدا کنید.

۵. $|3B| - |7A|$ را بیابید. ۶. $|5B| - |3C|$ را پیدا کنید.

۷. $(A - B) \cdot C$ را بیابید. ۸. $(A \cdot B)C$ را پیدا کنید.

۹. بردار واحدی همجهت با بردار $2A + B$ بیابید.

۱۰. بردارهای واحدی را که بر B عمودند، پیدا کنید.

۱۱. اسکلرهای h و k را بیابید به طوری که $A = hB + kC$.

۱۲. تصویر برداری C روی A را پیدا کنید.

۱۳. مؤلفه A در امتداد B را بیابید.

۱۴. اگر α اندازه زاویه بین A و C بر حسب رادیان باشد، $\cos \alpha$ را پیدا کنید.

دترمینهای ۱۵ و ۱۶، برای تابع برداری داده شده، مطلوب است (الف) قلمرو R ؛
(ب) $\lim_{t \rightarrow 1} R(t)$ ؛ (پ) $D_t R(t)$.

۱۵. $R(t) = \frac{1}{t+1}i + \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}j$

۱۶. $R(t) = |t-1|i + \ln t j$

دترمینهای ۱۷ و ۱۸، بدون حذف پارامتر، dy/dx و d^2y/dx^2 را به دست آورید.

۱۷. $x = 9t^2 - 1$ ، $y = 3t + 1$

۱۸. $x = e^{2t}$ ، $y = e^{-2t}$

دترمینهای ۱۹ و ۲۰، معادلات خطوط مماس افقی و قائم را به دست آورید، و سپس نمودار معادلات پارامتری را رسم کنید.

۱۹. $x = 12 - t^2$ ، $y = 12t - t^3$

۲۰. $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$ ، $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$ ، $a > 0$ (پیچکوار دیوکلس)

۲۱. اگر $\mathbf{R}(t) = \ln(t^2 - 1)\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j}$ ، مطلوب است $\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)$.

۲۲. طول قوس منحنیی بەا معادلات پارامتری $x = t^2$ ، $y = t^3$ از $t = 1$ تا $t = 2$ را بەدست آورید.

۲۳. طول قوس منحنی $\mathbf{R}(t) = (2-t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ از $t = 0$ تا $t = 3$ را بەدست آورید.

۲۴. طول قوس منحنی $r = 3 \sec \theta$ از $\theta = 0$ تا $\theta = \pi/4$ را بەدست آورید.

۲۵. (الف) نشان دهید کہ منحنی تعریف شەو تەوسط معادلات پارامتری $x = a \sin t$

$y = b \cos t$ ، یک بیضی است؛ (ب) اگر s اندازە طول قوس بیضی قسمت (الف) باشد، نشان دهید

$$s = 4 \int_0^{\pi/2} a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

کہ در آن $1 < k^2 = [(a^2 - b^2)/a^2]$. این انتگرال را انتگرال بیضوی می نامند و نمی توان آن را دقیقاً برحسب توابع مقدماتی محاسبه کرد. جدولهایی در دسترس هستند کہ مقدار انتگرال را برحسب k بەدست می دهند.

۲۶. نمودار معادله برداری $\mathbf{R}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$ را رسم کنید، و معادله دکارتی نمودار را بەدست آورید.

۲۷. نشان دهید کہ انحنای منحنی $y = \ln x$ در هر نقطه (x, y) برابر با $x/(x^2 + 1)^{3/2}$ است. همچنین نشان دهید کہ ما کسیمم مطلق انحنای $y = \ln x$ را در $x = 2/3$ می باشد، کہ در نقطه $(\sqrt{2}/2, -\ln 2/2)$ بەدست می آید.

۲۸. انحنای را در هر نقطه از شاخه یک هذلولی کہ بە صورت $x = a \cosh t$ ، $y = b \sinh t$ تعریف می شود، پیدا کنید. و نشان دهید کہ ما کسیمم مطلق انحنای را در رأس است.

۲۹. شعاع انحنای در هر نقطه روی منحنی

$$y = a(\sin t - t \cos t) \quad , \quad x = a(\cos t + t \sin t)$$

را بەدست آورید.

۳۰. مطلوب است تعیین انحنای شعاع انحنای و مرکز انحنای منحنی $y = e^{-x}$ در نقطه $(0, 1)$.

۳۱. انحنای و شعاع انحنای منحنی $\mathbf{R}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$ را در نقطه ای کہ $t = 2$ ، بەدست آورید.

۳۲. اگر $\mathbf{R}(t) = e^{\lambda^2 t} \mathbf{i} - \frac{1}{2} e^{-\lambda^2 t} \mathbf{j}$ ، که λ يك ثابت است، نشان دهید که $\mathbf{R}(t)$ در معادله $\mathbf{R}''(t) - \lambda^2 \mathbf{R}(t) = \mathbf{0}$ صادق می‌کند.

۳۳. برای شبه چرخزادی با چهار نقطه بازگشت که به صورت $x = a \cos^3 t$ و $y = a \sin^3 t$ تعریف می‌شود، بدون حذف پارامتر، dy/dx و d^2y/dx^2 را پیدا کنید.

۳۴. ذره‌ای در امتداد يك منحنی با معادله برداری $\mathbf{R}(t) = 3t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}$ حرکت می‌کند. معادله دکارتی مسیر ذره را به دست آورید. همچنین بردار سرعت و بردار شتاب در $t = 1$ را بیابید.

۳۵. مؤلفه مماسی و قائم بردار شتاب را برای ذره تمرین ۳۴ بیابید.

۳۶. اگر ذره‌ای در امتداد يك منحنی حرکت کند، تحت چه شرایطی بردارهای شتاب و مماس واحد همجهت یا درجهت مخالف هم هستند؟

دترمینهای ۳۷ و ۳۸، برای منحنی داده شده، $\mathbf{T}(t)$ و $\mathbf{N}(t)$ را بیابید و در $t = t_1$ ، نمودار قسمتی از منحنی را رسم کنید و نیز نمایشهایی از $\mathbf{T}(t_1)$ و $\mathbf{N}(t_1)$ را که ابتدای آنها در $t = t_1$ باشد، رسم کنید.

$$\mathbf{R}(t) = (e^t + e^{-t})\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}; \quad t_1 = 2. \quad ۳۷$$

$$\mathbf{R}(t) = 3(\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + 3(\sin t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0; \quad t_1 = \frac{1}{4}\pi. \quad ۳۸$$

۳۹. منحنیی با معادلات پارامتری $x = 4t$ ، $y = (2t + 1)^{3/2}/3$ ، $t \geq 0$ مفروض است. معادلاتی پارامتری به دست آورید که اندازه طول قوس (s) را به عنوان پارامتر برداشته باشند، و طول قوس از $t = 0$ اندازه گرفته شده باشد. با استفاده از معادله (۱۰) در بخش ۸.۱۶ نتیجه خود را امتحان کنید.

۴۰. مقدار سرعت دهانه‌ای تفنگی مفروض است؛ برای اینکه گلوله شلیک شده از تفنگ ما کسیمم برد را داشته باشد، اندازه زاویه فراز تفنگ را بر حسب رادیان تعیین کنید.

۴۱. مقدار سرعت دهانه‌ای تفنگی v_0 فوت در ثانیه و اندازه زاویه فراز آن α رادیان است. فرمولی بیابید که ما کسیمم ارتفاع گلوله شلیک شده را به دست دهد.

۴۲. دختر بچه‌ای توپی را از بالای بام ساختمانی به ارتفاع ۲۸۸ فوت با مقدار سرعت اولیه ۳۲ فوت در ثانیه به طور افقی پرتاب می‌کند. مطلوب است (الف) مدت پرواز؛ و (ب) فاصله پای ساختمان تا نقطه برخورد توپ با زمین.

۴۳. با آنالیز برداری ثابت کنید که قطرهای يك متوازی الاضلاع متصف یکدیگرند.

۴۴. اگر بردار شتاب عبارت از $A(t) = t^2 \mathbf{i} - (1/t^2) \mathbf{j}$ باشد و $V(1) = \mathbf{j}$ و $R(1) = (-\mathbf{i}/4) + (\mathbf{j}/2)$ بردار موضع $R(t)$ را به دست آورید.

۴۵. چون چرخزاد منحنیی است که توسط يك نقطه P روی محیط دایره ای به شعاع b ، که در بیرون يك دایره ثابت به شعاع a می‌غلتد، رسم می‌شود. اگر مبدأ در مرکز دایره ثابت باشد، $A(a, 0)$ یکی از نقاطی است که نقطه P در آنجا روی دایره ثابت قرار می‌گیرد؛ B نقطه متحرك تماس دو دایره، و پارامتر t اندازه زاویه AOB برحسب رادیان است؛ ثابت کنید معادلات پارامتری این برون چرخزاد به صورت زیر هستند

$$x = (a+b) \cos t - b \cos \frac{a+b}{b} t$$

و

$$y = (a+b) \sin t - b \sin \frac{a+b}{b} t.$$

۴۶. مثلث ABC و نقاط D ، E ، و F به ترتیب روی اضلاع AB ، BC ، و AC مفروض‌اند؛ و

$$\vec{V}(\vec{CF}) = \frac{1}{3} \vec{V}(\vec{CA}) ; \vec{V}(\vec{BE}) = \frac{1}{3} \vec{V}(\vec{BC}) ; \vec{V}(\vec{AD}) = \frac{1}{3} \vec{V}(\vec{AB})$$

$$\vec{V}(\vec{AE}) + \vec{V}(\vec{BF}) + \vec{V}(\vec{CD}) = 0 \quad \text{ثابت کنید}$$

دترمینهای ۴۷ و ۴۸، مطلوب است بردارهای سرعت و شتاب، مقدار سرعت، و مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب.

$$R(t) = \cosh 2t \mathbf{i} + \sinh 2t \mathbf{j} \quad ۴۷$$

$$R(t) = (2 \tan^{-1} t - t) \mathbf{i} + \ln(1+t^2) \mathbf{j} \quad ۴۸$$

مرکز نشر دانشگاهی

www.iup.ir

۴۹۰۰ تومان

شابک: ۹۶۴-۰۱-۰۳۲۳-۳