

لوئیس لیتهلد



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسہء تحلیلی

جلد اول
(قسمت دوم)

ترجمہ مہدی بہزاد، محسن رزاقی،
سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول
(قسمت دوم)

لوئیس لیتهلد

ترجمه

مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



The Calculus with Analytic Geometry
Louis Leithold
Fourth Edition
Harper & Row, 1981

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی
جلد اول (۲)

تألیف لوئیس لیتهلد

ترجمه دکتر مهدی بهزاد، دکتر محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی
ویراسته دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۵

چاپ پانزدهم ۱۳۸۶

تعداد ۵۰۰۰

لیتوگرافی: بهزاد

چاپ: سحاب

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

لیتهلد، لوئیس
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی / لوئیس لیتهلد؛ ترجمه مهدی بهزاد ...
[و دیگران]. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵ - ۱۳۷۵.
۲ ج. : مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۶۱، ۶۳۱. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۲۴، ۸۳)

ISBN 964-01-8049-1 (دوره)
ISBN 964-01-0261-X (ج. ۱. ق. ۱)
ISBN 964-01-8013-0 (ج. ۱. ق. ۲)
ISBN 964-01-0323-3 (ج. ۲. ق. ۱)
ISBN 964-01-0631-3 (ج. ۲. ق. ۲)

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی: The calculus with analytic geometry.
واژه نامه.
نماینه.

ج. ۱. ق. ۲ (چاپ پانزدهم: ۱۳۸۶).
۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب انتگرال ۳. هندسه تحلیلی. الف. بهزاد، مهدی، ۱۳۱۵ -
مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۵/۱۵ QA۳۰۳/ج۹ ح ۵
۱۳۶۵

۱۸۷ - ۶۶م*

کتابخانه ملی ایران

(قسمت دوم)

انتگرال معین

۱.۶ مساحت

در این فصل با مجموع چند جمله سر و کار داریم، و بنابراین يك نوع نمادگذاری را که نمادگذاری سیگما نامیده می‌شود معرفی می‌کنیم تا نوشتن این مجموعه‌ها راحت‌تر شود. در این نمادگذاری از علامت Σ استفاده می‌شود، که حرف سیگمای بزرگ در الفبای یونانی است و متناظر با حرف S در زبان انگلیسی می‌باشد. مثالهایی از نمادگذاری سیگما در نمونه زیر داده شده است.

○ نمونه ۱

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=-2}^2 (3i+2) &= [3(-2)+2] + [3(-1)+2] + [3 \cdot 0 + 2] \\ &\quad + [3 \cdot 1 + 2] + [3 \cdot 2 + 2] \\ &= (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8. \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n j^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

$$\bigcirc \sum_{k=3}^8 \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}.$$

تعریف رسمی زیر را در مورد نمادگذاری سیگما داریم.

تعریف ۱.۱.۶

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \dots + F(n-1) + F(n) \quad (1)$$

که m و n هر دو عدد صحیح اند و $m \leq n$.

سمت راست فرمول (۱) مرکب از مجموع $(n-m+1)$ جمله می باشد، که جمله اول با قرار دادن m به جای i در $F(i)$ ، جمله دوم با قرار دادن $m+1$ به جای i در $F(i)$ ، و به همین ترتیب، جمله آخر با قرار دادن n به جای i در $F(i)$ به دست می آید. عدد m را حد پایین مجموع، و n را حد بالای آن می نامند. علامت i ، اندیس مجموع گیری نامیده می شود که يك علامت «ظاهری» است چون هر حرف دیگری را برای این منظور می توان به کار برد. مثلاً

$$\sum_{k=3}^5 k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2$$

معادل است با

$$\sum_{i=3}^5 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2.$$

○ نمونه ۲ از تعریف ۱.۱.۶، داریم

$$\bigcirc \sum_{i=3}^6 \frac{i^2}{i+1} = \frac{3^2}{3+1} + \frac{4^2}{4+1} + \frac{5^2}{5+1} + \frac{6^2}{6+1}.$$

بعضی اوقات جملات مجموع هم دارای اندیس هستند، که در نمونه زیر نشان داده شده است.

○ نمونه ۳

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$\sum_{k=4}^9 kb_k = 4b_4 + 5b_5 + 6b_6 + 7b_7 + 8b_8 + 9b_9$$

$$\sum_{i=1}^5 f(x_i) \Delta x = f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + f(x_4) \Delta x + f(x_5) \Delta x.$$

○

قضایای زیر در مورد نمادگذاری سیگما، برای محاسبات مفیدند و به سادگی اثبات می‌شوند.

۲.۱.۶ قضیه $\sum_{i=1}^n c = nc$ که c عدد ثابت دلخواهی است.

اثبات

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c \quad (n \text{ جمله})$$

□

$$= cn.$$

۳.۱.۶ قضیه $\sum_{i=1}^n c \cdot F(i) = c \sum_{i=1}^n F(i)$ که c عدد ثابت دلخواهی است.

اثبات

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c \cdot F(i) &= c \cdot F(1) + c \cdot F(2) + \dots + c \cdot F(n) \\ &= c[F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(n)] \\ &= c \sum_{i=1}^n F(i). \end{aligned}$$

□

۴.۱.۶ قضیه $\sum_{i=1}^n [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^n F(i) + \sum_{i=1}^n G(i)$.

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار شده است (تمرین ۴۵ را ببینید). قضیه ۴.۱.۶ را می‌توان به مجموع هر تعداد از توابع عمومیت داد.

۵.۱.۶ قضیه

$$\sum_{i=a}^b F(i) = \sum_{i=a+c}^{b+c} F(i-c) \quad (2)$$

و

$$\sum_{i=a}^b F(i) = \sum_{i=a-c}^{b-c} F(i+c). \quad (3)$$

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار شده است (تمرین ۴۶ را ببینید). نمونه زیر کاربرد این قضیه را نشان می‌دهد.

○ نمونه ۴ از معادله (۲) در قضیه ۵.۱.۶، داریم

$$\sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=7}^{12} (i-1)^2 \quad \text{و} \quad \sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=5}^{12} F(i-2)$$

از معادله (۳) و قضیه ۵.۱.۶،

$$\circ \quad \sum_{i=6}^{11} i^2 = \sum_{i=1}^6 (i+5)^2 \quad \text{و} \quad \sum_{i=3}^{10} F(i) = \sum_{i=1}^8 F(i+2)$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0) \quad \text{قضیه ۶.۱.۶}$$

اثبات

$$\sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] = \sum_{i=1}^n F(i) - \sum_{i=1}^n F(i-1).$$

در طرف راست این معادله، مجموع اول را به صورت دیگری می‌نویسیم و برای مجموع دوم از معادله (۳) در قضیه ۵.۱.۶ با $c=1$ ، استفاده می‌کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [F(i) - F(i-1)] &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) \right) - \sum_{i=1-1}^{n-1} F[(i+1)-1] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \sum_{i=0}^{n-1} F(i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} F(i) + F(n) - \left(F(0) + \sum_{i=1}^{n-1} F(i) \right) \\ &= F(n) - F(0). \end{aligned}$$

□

مثال ۱ $\sum_{i=1}^n (2^i - 2^{i-1})$ را محاسبه کنید.

حل از قضیه ۶.۱.۶، وقتی که $F(i) = 2^i$ ، نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^n (2^i - 2^{i-1}) = 2^n - 2^0$$

$$\blacktriangle \quad = 2^n - 1.$$

در قضیه زیر، φ فرمول معرفی می‌شود که در محاسبات با علامت سیگما مفیدند. این

فرمولها جهت مراجعات بعدی شماره گذاری شده اند.

۷۰۱.۶ قضیه اگر n يك عدد صحيح و مثبت باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{فرمول ۱})$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{فرمول ۲})$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\text{فرمول ۳})$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}. \quad (\text{فرمول ۴})$$

اثبات فرمول ۱ را ثابت می کنیم و اثبات فرمولهای ۲، ۳، و ۴ را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۹، ۱۰، و ۱۱ را ببینید).

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n$$

و

$$\sum_{i=1}^n i = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1.$$

اگر این دو معادله را جمله به جمله باهم جمع کنیم، سمت چپ عبارت است از

$$2 \sum_{i=1}^n i$$

و سمت راست دارای n جمله است که مقدار هر جمله برابر $(n+1)$ می باشد. پس

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n i &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \quad (n \text{ جمله}) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\square \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

چهار فرمول قضیه ۷۰۱.۶ را با استفاده از استقرای ریاضی نیز می توان ثابت کرد.

مثال ۲ $\sum_{i=1}^n i(3i-2)$ را محاسبه کنید.

حل

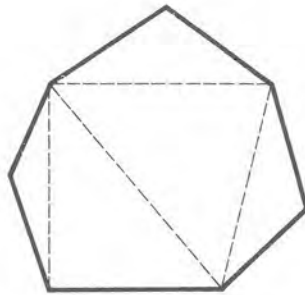
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i(3i-2) &= \sum_{i=1}^n (3i^2 - 2i) \\ &= \sum_{i=1}^n 3i^2 + \sum_{i=1}^n (-2i) \quad (\text{بنا به قضیه ۴.۱.۶}) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i \quad (\text{بنا به قضیه ۳.۱.۶}) \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{بنا به فرمول ۲.۱}) \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n}{2} \\ &= \frac{2n^3 + n^2 - n}{2}.\end{aligned}$$

□

کلمه اندازه را در این کتاب زیاد به کار می‌بریم. اندازه به عدد (بدون واحد) اطلاق می‌شود. مثلاً، اگر مساحت یک مثلث ۲۰ سانتیمتر مربع باشد، می‌گوییم اندازه مساحت مثلث، بر حسب سانتیمتر مربع، ۲۰ است. احتمالاً یک ایده شهودی از اندازه مساحت یک شکل هندسی دارید؛ اندازه مساحت یک شکل هندسی عبارت است از عددی که به نحوی ناحیه محصور شده به وسیله آن شکل هندسی را به دست می‌دهد، و مساحت یک مثلث برابر با نصف حاصلضرب طول قاعده در ارتفاع متناظر آن می‌باشد.

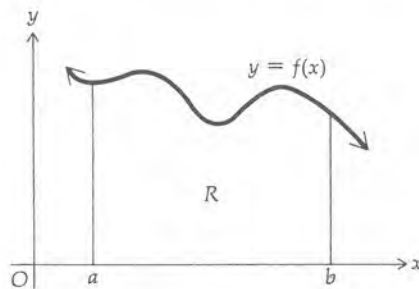
مساحت یک چند ضلعی را می‌توان به عنوان مجموع مساحت مثلثهایی که چند ضلعی به آن مثلثها تجزیه می‌شود تعریف کرد، و می‌توان ثابت نمود که مساحت حاصل مستقل از چگونگی تجزیه چند ضلعی به مثلثها می‌باشد (شکل ۱.۱.۶ را ببینید). با این وجود، این سؤال پیش می‌آید که چگونه می‌توان اندازه مساحت ناحیه‌ای از صفحه را که به وسیله یک منحنی محصور شده است، به دست آورد؟ اصولاً آیا می‌توان مطمئن بود که چنین ناحیه‌ای دارای مساحت است؟

یک ناحیه R در صفحه را که در شکل ۲.۱.۶ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ناحیه R به وسیله محور x ها، خطوط $x=a$ و $x=b$ ، و منحنی $y=f(x)$ محصور شده است که f تابعی پیوسته در بازه بسته $[a, b]$ می‌باشد. برای سادگی، فرض می‌کنیم به ازای تمام x های در بازه $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. می‌خواهیم عددی مانند A را به عنوان اندازه مساحت ناحیه R به دست آوریم؛ برای این کار از یک فرایند حدی مشابه آنچه که



شکل ۱.۱.۶

برای تعریف مساحت دایره به کار می‌رود، استفاده می‌کنیم؛ مساحت یک دایره بنا به تعریف، حد مساحت چندضلعیهای منتظم محاط در دایره است وقتی که تعداد اضلاع چندضلعی محاطی به طور بی‌کران زیاد شود. به طور شهودی تشخیص می‌دهیم که هر عددی به عنوان A اختیار کنیم، آن عدد باید از مساحت هر چندضلعی که در ناحیه R محاط^۱ است بیشتر، و از مساحت هر چندضلعی که بر ناحیه R محیط^۲ است، کمتر باشد.



شکل ۲.۱.۶

ابتدا یک چندضلعی محاط در ناحیه R را تعریف می‌کنیم. بازه بسته $[a, b]$ را به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم. برای سادگی، طول این زیر بازه‌ها را مساوی، و برابر با Δx می‌گیریم. بنابراین $\Delta x = (b - a)/n$. نقاط انتهایی این زیر بازه‌ها را با $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ نشان می‌دهیم، به طوری که

$$x_n = b, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_1 = a + \Delta x, x_0 = a$$

فرض کنید زیر بازه i م با $[x_{i-1}, x_i]$ نشان داده شود. چون f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است،

۱ و ۲. توجه کنید که از این به بعد، معنای اصطلاحات «محاطی» و «محیطی» در این فصل با معنای هندسی معمول آنها اندکی تفاوت دارد. -م.

پس برهريك از زیر بازه‌ها نیز پیوسته می‌باشد. با توجه به قضیهٔ اکسترمم (۹.۲.۴)، درهريك از این زیر بازه‌ها عددی وجود دارد که f به‌ازای آن دارای مقدار مینیمم مطلق است. فرض کنید در زیر بازهٔ i م این عدد برابر با c_i باشد، بنابراین $f(c_i)$ مقدار مینیمم مطلق f بر زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ است. n مستطیل در نظر می‌گیریم که هريك دارای طول قاعدهٔ Δx واحد و ارتفاع $f(c_i)$ واحد باشد (شکل ۳.۱.۶ را ببینید). فرض کنید مجموع مساحت‌های این n مستطیل S_n واحد مربع باشد؛ پس

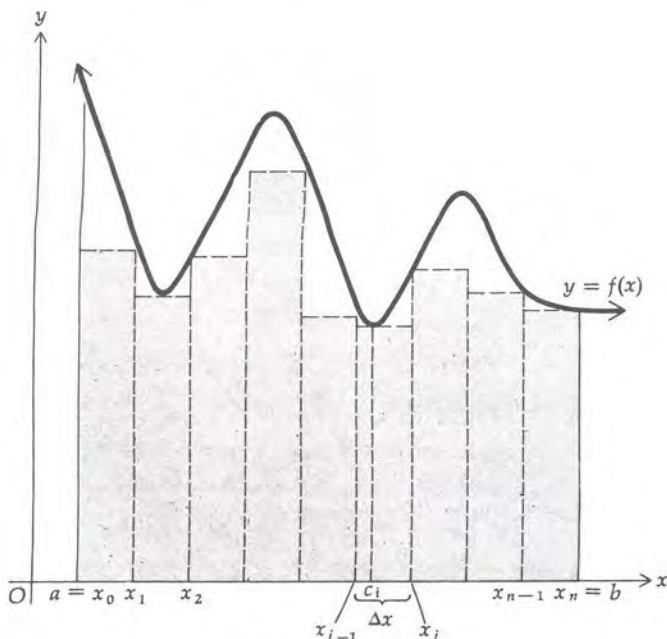
$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_i)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$$

و یا با نمادگذاری سیگما،

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x. \quad (۴)$$

سمت راست (۴) مجموع اندازهٔ مساحت‌های n مستطیل محاطی را می‌دهد. پس، A باید دارای خاصیت زیر باشد

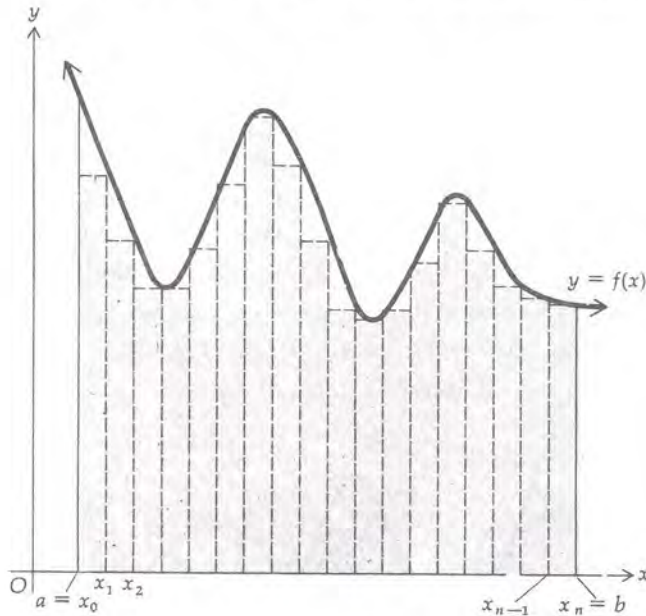
$$A \geq S_n.$$



شکل ۳.۱.۶

در شکل ۳.۱.۶ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار برابر با S_n واحد مربع است. حال، فرض کنید n افزایش یابد؛ مثلاً، n را در دو ضرب کنیم؛ در این صورت، تعداد مستطیل‌ها

دو برابر و طول قاعده هر مستطیل نصف می گردد که این امر در شکل ۴.۱.۶ نشان داده شده است. ملاحظه می شود که تعداد مستطیلهای در این شکل دو برابر تعداد مستطیلهای در شکل ۳.۱.۶ است. با مقایسه دو شکل واضح است که ناحیه سایه دار در شکل ۴.۱.۶ به ناحیه R نزدیکتر است، تا ناحیه سایه دار در شکل ۳.۱.۶. بنابراین، مجموع اندازه مساحت مستطیلهای شکل ۴.۱.۶ به عددی که می خواهیم به عنوان مساحت R در نظر بگیریم، نزدیکتر است.



شکل ۴.۱.۶

همچنانکه n افزایش می یابد مقدار S_n که از معادله (۴) به دست می آید افزایش می یابد و اختلاف بین مقادیر S_n های متوالی به تدریج کمتر می شود. این موضوع در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است، زیرا در آنجا قضیه ای داریم که می گوید اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت وقتی n به طور بی کران افزایش یابد، مقدار S_n که از معادله (۴) به دست می آید به یک حد میل می کند. همین حد است که آن را به عنوان تعریف اندازه مساحت ناحیه R می گیریم.

۸.۱.۶. تعریف فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و برای تمام x های در بازه $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$ ، R ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد. بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه، هر یک به طول $\Delta x = (b - a)/n$ تقسیم می کنیم، و زیر بازه i ام را با $[x_{i-1}, x_i]$ نشان می دهیم. در

این صورت، اگر $f(c_i)$ مقدار مینیمم مطلق تابع بر زیربازه Δx باشد، اندازه مساحت R به صورت زیر به دست می آید

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x. \quad (5)$$

معنی معادله (۵) این است که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $N > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x - A \right| < \varepsilon, \quad n > N$$

که n عددی مثبت و صحیح است.

می توان به جای مستطیلهای محاطی، مستطیلهای محیطی را در نظر گرفت. در این حالت، مقدار ماکسیمم مطلق تابع f را بر هر زیربازه به عنوان ارتفاع مستطیل اختیار می کنیم. وجود مقدار ماکسیمم مطلق f بر هر زیربازه به وسیله قضیه اکسترمم تضمین شده است. مجموع اندازه مساحت مستطیلهای محیطی مربوطه، حداقل به بزرگی اندازه مساحت ناحیه R است، و می توان نشان داد که حد این مجموعهها وقتی n به طور بیکران افزایش می یابد دقیقاً برابر با حد مجموع اندازه مساحت مستطیلهای محاطی است. این موضوع نیز در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است. بنابراین، اندازه مساحت ناحیه R را می توانیم با فرمول زیر تعریف کنیم

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(d_i) \Delta x. \quad (6)$$

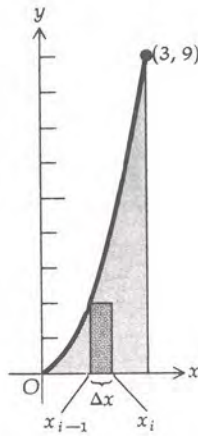
که $f(d_i)$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع f بر $[x_{i-1}, x_i]$ است.

در واقع، اندازه ارتفاع مستطیل بر زیربازه Δx را می توان برابر با مقدار تابع به ازای هر عدد واقع در این زیربازه گرفت، و صرف نظر از اینکه چه اعدادی انتخاب شده اند مجموع اندازه مساحت مستطیلهای یکی خواهد بود. در بخش ۲.۶، تعریف اندازه مساحت یک ناحیه را به حد چنین مجموعی گسترش خواهیم داد.

مثال ۳ مساحت ناحیه ای را که محدود به منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خط $x = 3$ است، با استفاده از مستطیلهای محاطی حساب کنید.

حل شکل ۵.۱.۶ ناحیه خواسته شده و زمین مستطیل محاطی را نشان می دهد. برای استفاده از تعریف ۸.۱.۶، بازه بسته $[0, 3]$ را به n زیربازه، هر یک به طول Δx ، تقسیم می کنیم: $x_0 = 0$ ، $x_1 = \Delta x$ ، $x_2 = 2\Delta x$ ، $\dots$ ، $x_i = i\Delta x$ ، $\dots$ ، $x_{n-1} = (n-1)\Delta x$ ، $x_n = 3$. پس

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \quad f(x) = x^2$$



شکل ۵.۱۰۶

چون تابع f بر بازه $[0, 3]$ صعودی است، بنا براین، مقدار مینیمم مطلق تابع f بر زیر بازه i م یعنی روی زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، برابر با $f(x_{i-1})$ می باشد. در نتیجه، از معادله (۵)، داریم

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x. \quad (۷)$$

چون $x_{i-1} = (i-1)\Delta x$ و $f(x) = x^2$

$$f(x_{i-1}) = [(i-1)\Delta x]^2.$$

بنا بر این

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = \sum_{i=1}^n (i-1)^2 (\Delta x)^3.$$

اما $\Delta x = 3/n$ ؛ در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x &= \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \frac{27}{n^3} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \\ &= \frac{27}{n^3} \left[\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right]. \end{aligned}$$

و با استفاده از فرمولهای ۱ و ۲ و همچنین قضیه ۲.۱۰۶، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x &= \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\ &= \frac{27}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2 - 6n + 6n}{6} \\ &= \frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2}.\end{aligned}$$

حال با توجه به (۷) داریم

$$\begin{aligned}A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \right] \\ &= \frac{9}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{9}{2} (2 - 0 + 0) \\ &= 9.\end{aligned}$$

بنابراین، مساحت ناحیه برابر با ۹ واحد مربع است. ▲

مثال ۴ مساحت ناحیه مثال ۳ را با در نظر گرفتن مستطیلهای محیطی حساب کنید.

حل اندازه ارتفاع زمین مستطیل را مقدار ماکسیمم مطلق f بر زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ در نظر می‌گیریم؛ این مقدار برابر با $f(x_i)$ می‌باشد و از معادله (۶) داریم

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x. \quad (۸)$$

چون $x_i = i \Delta x$ ، در نتیجه $f(x_i) = (i \Delta x)^2$ و بنابراین

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \sum_{i=1}^n i^2 (\Delta x)^3 = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\ &= \frac{9}{2} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}.\end{aligned}$$

در نتیجه، از معادله (۸) خواهیم داشت

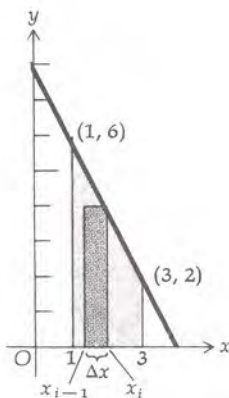
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} = \frac{9}{2} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

▲ $= 9$ (که همان نتیجه مثال ۳ است)

مثال ۵ مساحت يك ناحیه ذوزنقه‌ای را که محدود به خط $2x + y = 8$ ، محور x ها، و خطوط $x = 1$ و $x = 3$ است، با استفاده از مستطیلهای محاطی به دست آورید.

حل ناحیه مورد نظر و زمین مستطیل محاطی در شکل ۶.۱.۶ نشان داده شده‌اند. بازه بسته $[1, 3]$ را به n زیربازه، هر يك به طول Δx ، تقسیم می‌کنیم: $x_0 = 1 + \Delta x$ ، $x_1 = 1 + 2\Delta x$ ، $\dots$ ، $x_i = 1 + i\Delta x$ ، $\dots$ ، $x_{n-1} = 1 + (n-1)\Delta x$ ، $x_n = 3$. پس

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}.$$



شکل ۶.۱.۶

معادله خط را نسبت به y حل می‌کنیم، نتیجه می‌شود $y = -2x + 8$. بنابراین، $f(x) = -2x + 8$ ، و چون f بر بازه $[1, 3]$ نزولی است، مقدار مینیمم مطلق f بر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ برابر با $f(x_i)$ است. چون $x_i = 1 + i\Delta x$ و $f(x) = -2x + 8$ پس $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8 = 6 - 2i\Delta x$ داریم

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (\epsilon - 2i \Delta x) \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n [\epsilon \Delta x - 2i (\Delta x)^2] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left[\epsilon \left(\frac{1}{n} \right) - 2i \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right].
 \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۲.۱.۶ و فرمول ۱،

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot n - \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

پنا بر این، مساحت برابر با ۸ واحد مربع است. با استفاده از فرمول مساحت ذوزنقه در هندسه مسطحه، $A = h(b_1 + b_2)/2$ ، که h ، b_1 و b_2 به ترتیب طول ارتفاع و طول دو قاعده ذوزنقه بر حسب واحد طول می باشند، پس $A = (2)(6+2)/2 = 8$ ، که با نتیجه فوق مطابقت دارد. ▲

تمرینهای ۱.۶

در تمرینهای ۱ تا ۸، مجموع خواسته شده را به دست آورید.

$$1. \sum_{i=1}^6 (3i - 2) \quad 2. \sum_{i=1}^5 (i + 1)^2$$

$$3. \sum_{i=2}^5 \frac{i}{i-1} \quad 4. \sum_{j=2}^6 \frac{2}{j(j-2)}$$

$$5. \sum_{i=-2}^3 2^i \quad 6. \sum_{i=0}^3 \frac{1}{1+i^2}$$

$$\sum_{k=-2}^7 \frac{k}{k+3} \cdot ۸ \quad \sum_{k=1}^6 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot ۷$$

۹. فرمول ۲ قضیه ۷.۱.۶ را ثابت کنید. (راهنمایی: $i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$ ؛ بنابراین، $\sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 - 3i + 1)$. درست چپ این معادله، قضیه ۶.۱.۶، و درست راست آن، قضایای ۲.۱.۶، ۳.۱.۶، ۴.۱.۶، و فرمول ۱ را به کار برید.)

۱۰. فرمول ۳ قضیه ۷.۱.۶ را ثابت کنید. (راهنمایی:

$$i^4 - (i-1)^4 = 4i^3 - 6i^2 + 4i - 1$$

و از روشی مشابه روش تمرین ۹ استفاده کنید.)

۱۱. فرمول ۴ قضیه ۷.۱.۶ را ثابت کنید. (راهنمایی: تمرینهای ۹ و ۱۰ بالا را ببینید.)

در تمرینهای ۱۲ تا ۲۰، به کمک قضایای ۲.۱.۶ تا ۷.۱.۶، مجموعه‌های نشان داده شده را به دست آورید.

$$\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1) \cdot ۱۳ \quad \sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2) \cdot ۱۲$$

$$\sum_{i=1}^n (10^{i+1} - 10^i) \cdot ۱۵ \quad \sum_{k=1}^n (2^{k-1} - 2^k) \cdot ۱۴$$

$$\sum_{k=1}^{100} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \cdot ۱۷ \quad \sum_{i=1}^{40} [\sqrt{2i+1} - \sqrt{2i-1}] \cdot ۱۶$$

$$\sum_{i=1}^n 4i^2(i-2) \cdot ۱۹ \quad \sum_{i=1}^n 2i(1+i^2) \cdot ۱۸$$

$$\sum_{k=1}^n [(3^{-k} - 3^k)^2 - (3^{k-1} + 3^{-k-1})^2] \cdot ۲۰$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۳۶، با استفاده از روش این بخش مساحت ناحیه خواسته شده را حساب کنید؛ از مستطیلهای محاطی و محیطی استفاده کنید. همچنین، در هر تمرین شکل ناحیه و زمین مستطیل را رسم کنید.

۳۹. ناحیه محدود به $y = x^2$ ، محور x ها و خط $x = 2$ ؛ با در نظر گرفتن مستطیلهای محاطی.

۲۲. ناحیه تمرین ۲۱؛ با در نظر گرفتن مستطیلهای محیطی.
۲۳. ناحیه محدود به $y = 2x$ ، محور x ها و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ ؛ با در نظر گرفتن مستطیلهای محیطی.
۲۴. ناحیه تمرین ۲۳؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۲۵. ناحیه بالای محور x ها و سمت راست خط $x = 1$ ، محدود به محور x ها، خط $x = 1$ و منحنی $y = 4 - x^2$ ؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۲۶. ناحیه تمرین ۲۵؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۲۷. ناحیه‌ای که در سمت چپ خط $x = 1$ قرار گرفته و محدود به منحنی و خطوط تمرین ۲۵ می‌باشد؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۲۸. ناحیه تمرین ۲۷؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۲۹. ناحیه محدود به $y = 3x^4$ ، محور x ها و خط $x = 1$ ؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۳۰. ناحیه تمرین ۲۹؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۳۱. ناحیه محدود به $y = x^3$ ، محور x ها و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ ؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۳۲. ناحیه تمرین ۳۱؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۳۳. ناحیه محدود به منحنی $y = x^3 + x$ ، محور x ها، و خطوط $x = -2$ و $x = 1$ ؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۳۴. ناحیه تمرین ۳۳؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۳۵. ناحیه محدود به $y = mx$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ وقتی که $m > 0$ و $b > a > 0$ ؛ با استفاده از مستطیلهای محیطی.
۳۶. ناحیه تمرین ۳۵؛ با استفاده از مستطیلهای محاطی.
۳۷. از روش این بخش استفاده کرده و مساحت ذوزنقه متساوی الساقینی را به دست آورید که دارای قاعده‌های b_1 و b_2 و ارتفاع h می‌باشد.
۳۸. منحنی $y = 4 - |x|$ ، و محور x ها از $x = -4$ تا $x = 4$ يك مثلث می‌سازند؛ با استفاده از روش این بخش مساحت این مثلث را پیدا کنید.

در تمرینهای ۳۹ تا ۴۴، مساحت ناحیه خواسته شده را با در نظر گرفتن $f(m_i)$ به عنوان ارتفاع i مین مستطیل، که دآن m_i وسط زیر بازه i م است، پیدا کنید. (داهنمایی: $m_i = (x_i + x_{i-1})/2$)

۳۹. ناحیه مثال ۳.

۴۰. ناحیه تمرین ۲۱.

۴۱. ناحیه تمرین ۲۳.

۴۲. ناحیه تمرین ۲۵.

۴۳. ناحیه تمرین ۲۷.

۴۴. ناحیه تمرین ۲۹.

۴۵. قضیه ۴۰.۶ را ثابت کنید.

۴۶. قضیه ۵۰.۶ را ثابت کنید.

۲.۶ انتگرال معین

در بخش قبل، اندازه مساحت يك ناحیه مفروض را به صورت حد زیر تعریف کردیم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x. \quad (1)$$

برای رسیدن به این تعریف، بازه بسته $[a, b]$ را به زیر بازه‌هایی با طول مساوی تقسیم کردیم و c_i را به عنوان نقطه‌ای در زیر بازه i م در نظر گرفتیم که به ازای آن f دارای مقدار مینیمم مطلق باشد. همچنین، مقادیر تابع $f(x)$ را محدود به اعداد غیر منفی بر بازه $[a, b]$ نمودیم و به علاوه، گفتیم که f باید بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد.

برای تعریف انتگرال معین به بررسی نوع جدیدی از فرایندهای احتیاج داریم که فرمول (۱) حالت خاصی از آن است. فرض می‌کنیم f تابعی است که بر بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده است. این بازه را به n زیر بازه، با انتخاب $(n-1)$ نقطه دلخواه بین نقاط a و b ، تقسیم می‌کنیم. و نیز فرض می‌کنیم $x_0 = a$ و $x_n = b$ ، و نقاط $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ نقاط میانی به صورت زیر باشند

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ لزوماً از یکدیگر به يك فاصله نیستند. فرض می‌کنیم $\Delta_1 x$ طول اولین زیربازه باشد به‌طوری که $\Delta_1 x = x_1 - x_0$ ، و $\Delta_2 x$ طول دومین زیربازه باشد به‌طوری که $\Delta_2 x = x_2 - x_1$ ، و به‌همین ترتیب، $\Delta_i x$ طول i مین زیربازه باشد، و

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}.$$

مجموعه‌ای از همه این زیربازه‌های بازه $[a, b]$ ، يك افراز از بازه $[a, b]$ نامیده می‌شود. فرض کنید Δ چنین افرازی باشد. شکل ۱۰۲.۶ يك چنین افراز Δ از $[a, b]$ را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۲.۶

افراز Δ شامل n زیربازه است. یکی از این زیربازه‌ها طولتین زیربازه است؛ ولی، ممکن است بیش از يك طولتین زیربازه وجود داشته باشد. طول طولتین زیربازه از افراز Δ ، **نورم** افراز نامیده می‌شود و با علامت $\|\Delta\|$ نشان داده می‌شود. در هر يك از این زیربازه‌های افراز Δ نقطه‌ای انتخاب کنید. فرض کنید ξ_1 نقطه انتخابی در بازه $[x_0, x_1]$ باشد، به‌طوری که $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$ ، همچنین ξ_2 نقطه انتخابی در بازه $[x_1, x_2]$ باشد به‌طوری که $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2$ ، والی آخر؛ بنا براین ξ_i نقطه انتخابی در $[x_{i-1}, x_i]$ بوده و $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. مجموع زیر را تشکیل دهید

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + \dots + f(\xi_i)\Delta_i x + \dots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

یا

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x.$$

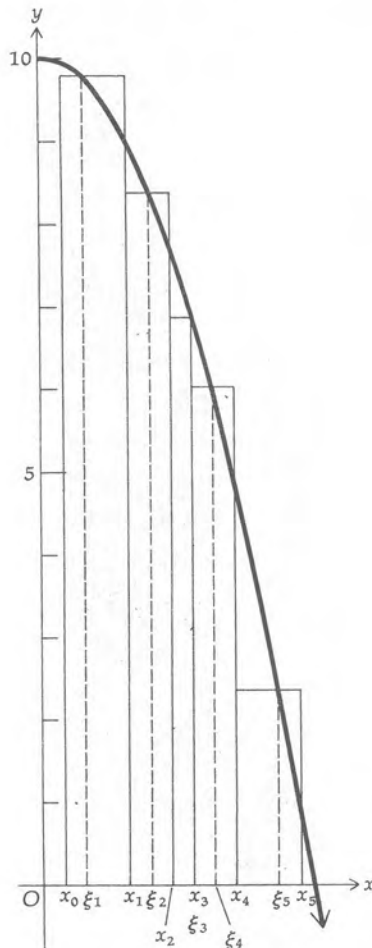
چنین مجموعی را **مجموع ریمانی** می‌نامند که منسوب به گئورگ فریدریش ریمان (۱۸۲۶-۱۸۶۶) می‌باشد.

○ نمونه ۱ فرض کنید $f(x) = 10 - x^2$ ، که $3 \leq x \leq 1/4$. می‌خواهیم مجموع ریمانی برای تابع f را بر بازه $[1/4, 3]$ برای افراز Δ که به‌صورت زیر است، به‌دست آوریم: $x_0 = 1/4$ ، $x_1 = 1$ ، $x_2 = 1/2$ ، $x_3 = 1/4$ ، $x_4 = 3/4$ ، $x_5 = 3$ ، و $\xi_1 = 1/2$.

۱. این اصطلاح در برخی از شاخه‌های ریاضی، چون نظریه مجموعه‌ها و جبر، به‌معنایی به‌کار می‌رود که دقیقاً منطبق بر این تعریف نیست. م.

$$\xi_5 = 2\frac{3}{4}, \xi_4 = 2, \xi_3 = 1\frac{3}{4}, \xi_2 = 1\frac{1}{4}, \xi_1 = 1$$

شکل ۲.۲.۶ نمودار منحنی f را روی بازه $[1/4, 3]$ و همچنین پنج مستطیل را نشان می‌دهد که اندازه مساحت‌های آنها جملات مجموع ریمانی را خواهد داد.

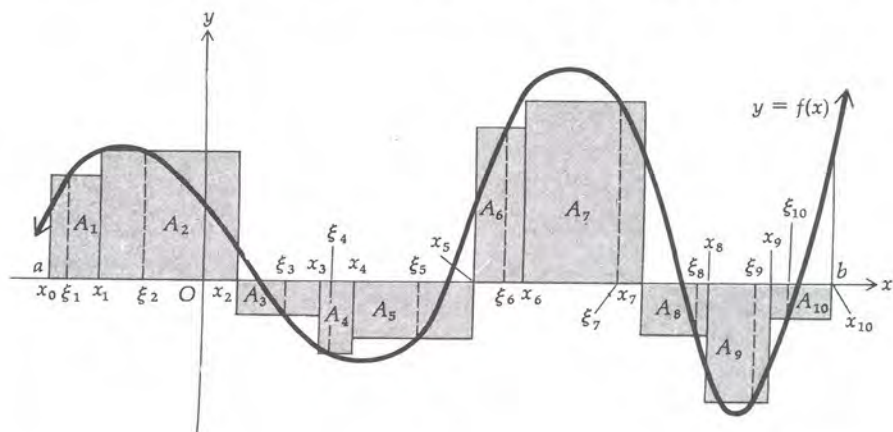


شکل ۲.۲.۶

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^5 f(\xi_i) \Delta_i x &= f(\xi_1) \Delta_1 x + f(\xi_2) \Delta_2 x + f(\xi_3) \Delta_3 x \\
 &\quad + f(\xi_4) \Delta_4 x + f(\xi_5) \Delta_5 x \\
 &= f\left(\frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right) + f\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
 &\quad + f(2)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right)\left(3 - \frac{1}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{81}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + (6)\left(\frac{1}{4}\right) \\
 &\quad + \left(\frac{121}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \\
 &= 18\frac{3}{4} .
 \end{aligned}$$

○ نورم Δ طول طولترین زیر بازه است، بنابراین $\|\Delta\| = 3/4$.

چون مقادیر تابع f مقید به نامنفی بودن نیستند، لذا بعضی از $f(\xi_i)$ ها ممکن است منفی باشند؛ در چنین مواقعی تعبیر هندسی مجموع ریمانی عبارت است از مجموع اندازه مساحت مستطیلهایی که بالای محور x ها قرار می گیرند و قرینه اندازه مساحت مستطیلهایی که زیر محور x ها واقع اند. این مطلب در شکل ۳.۲.۶ نشان داده شده است.



شکل ۳.۲.۶

در این حالت، چون $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), f(\xi_4), f(\xi_5), f(\xi_6), f(\xi_7), f(\xi_8), f(\xi_9), f(\xi_{10})$ اعدادی منفی می باشند، بنابراین

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i) \Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}.$$

فرض کنید f تابعی است که قلمرو آن شامل بازه بسته $[a, b]$ است. تصور کنید عددی مانند L وجود دارد به طوری که برای تمام افرازهای Δ که نورمهای آنها به اندازه کافی کوچک هستند، و برای هر ξ_i دلخواه در بازه بسته $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ،

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right|$$

بتواند به اندازه دلخواه کوچک باشد. در چنین حالتی f را بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر گویند. تعریف رسمی زیر، تعریف انتگرال پذیری تابع f بر یک بازه بسته است که در آن، از نمادهای ε و δ استفاده می شود.

۱۰.۲.۶ تعریف فرض کنید f تابعی است که قلمرو آن شامل بازه بسته $[a, b]$ است. در این صورت گوییم f بر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد مثبت δ موجود باشد به طوری که برای هر افراز Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ ، و هر ξ_i در بازه بسته $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, \dots, n$ ، عددی مانند L وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right| < \varepsilon.$$

در چنین حالتی می نویسیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = L. \quad (2)$$

تعریف ۱۰.۲.۶ گویای این مطلب است که، برای یک تابع داده شده f که بر بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده است، می توان مقادیر مجموع ریمانی را به اندازه دلخواه به L نزدیک کرد اگر نورمهای $\|\Delta\|$ از افرازهای Δ بازه $[a, b]$ را برای تمام انتخابهای ممکن اعداد ξ_i که $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، به اندازه کافی کوچک اختیار کنیم.

فرایند حدی (۲) با آنچه که در فصل ۲ مورد بحث قرار گرفت، تفاوت دارد. از تعریف ۱۰.۲.۶ نتیجه می شود که عدد L در (۲) وجود دارد اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر افراز Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ و هر ξ_i دلخواه در بازه بسته $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1, \dots, n$ ، داشته باشیم

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - L \right| < \varepsilon.$$

در تعریف ۱۰.۱.۲ داشتیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (۳)$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد كه

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \text{ } 0 < |f(x) - L| < \varepsilon.$$

در فرایند حدی (۲)، برای هر $\delta > 0$ خاص، بینهایت افراز Δ بسا نورم $\|\Delta\| < \delta$ وجود دارد. این مطلب مشابه این حقیقت است كه در فرایند حدی (۳)، برای هر $\delta > 0$ خاص، بینهایت مقدار x وجود دارند كه $|x - a| < \delta$ و $|f(x) - L| < \varepsilon$. معهذ، در فرایند حدی (۲)، برای هر افراز Δ بینهایت امکان برای انتخاب ξ وجود دارد. از این جهت است كه این دو فرایند حدی با یکدیگر فرق می کنند.

در فصل ۲ (قضیه ۲.۱.۲) نشان دادیم كه اگر عدد L در فرایند حدی (۳) موجود باشد، یكتاست. با روشی مشابه می توان نشان داد كه اگر عددی مانند L وجود داشته باشد كه در تعریف ۱۰.۲.۶ صدق كند، آنگاه یكتا خواهد بود. حال می توان انتگرال معین را تعریف كرد.

۲.۲.۶ تعریف اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد، آنگاه انتگرال معین

$$f \text{ از } a \text{ تا } b \text{ با } \int_a^b f(x) dx \text{ نشان داده و به صورت زیر معین می شود}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \quad (۴)$$

به شرطی كه حد فوق وجود داشته باشد.

توجه كنید كه عبارت «تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر است» با عبارت «انتگرال معین f از a تا b موجود است» مترادف می باشد.

در نماد انتگرال معین، $\int_a^b f(x) dx$ ، نماد $f(x)$ را انتگران، a و b را

به ترتیب حد بالا و حد پایین انتگرال و $\int$ را علامت انتگرال نامیده اند. علامت

انتگرال شبیه حرف بزرگ S است، و برای این انتخاب شده كه انتگرال معین، حد يك مجموع می باشد؛ این همان علامتی است كه در فصل پنجم برای عمل ضد دیفرانسیل گیری به كار بردیم. علت این است كه قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضیه ۲.۵.۶) كه بعداً خواهیم دید ما را قادر می سازد با پیدا كردن ضد مشتق كه انتگرال نامعین هم نامیده می شود، انتگرال معین را حساب كنیم.

حال این سؤال پیش می آید كه تحت چه شرایطی يك عدد L كه در تعریف ۱۰.۲.۶

صدق کند، موجود است؟ یعنی، تحت چه شرایطی تابع دارای انتگرال می‌باشد؟ به وسیله قضیه زیر جوابی به این سؤال داده شده است.

۳.۲.۶ قضیه اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع f روی بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

اثبات این قضیه خارج از قلمرو بحث این کتاب است و در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته می‌آید. این شرط که f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، درحالی که کافی است تا تضمین کند که f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است، شرط لازم برای وجود $\int_a^b f(x) dx$ نیست. یعنی، اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه قضیه ۳.۲.۶ به ما اطمینان می‌دهد که $\int_a^b f(x) dx$ موجود است؛ ولی امکان دارد که انتگرال موجود باشد حتی اگر تابع مربوطه در بعضی از اعداد متعلق به $[a, b]$ پیوسته نباشد. مثال زیر، تابعی به دست می‌دهد که بر بازه بسته‌ای ناپیوسته است ولی بر آن بازه، انتگرال پذیر است.

مثال ۱ فرض کنید تابع f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

همچنین، فرض کنید $[a, b]$ چنان بازه دلخواهی باشد که $a < 0 < b$. نشان دهید که f روی $[a, b]$ ناپیوسته است ولی روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است.

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ ، بنابراین f در 0 ناپیوسته و در نتیجه، بر بازه $[a, b]$ ناپیوسته است.

برای اینکه ثابت کنیم f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، نشان می‌دهیم که تعریف ۱۰.۲.۶ برقرار است. مجموع ریمانی زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

اگر هیچکدام از اعداد $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ صفر نباشد، در این صورت مجموع ریمانی صفر است. تصور کنید $\xi_j = 0$. آنگاه

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = 1 \cdot \Delta_j x$$

و در هر حالت،

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \right| \leq \| \Delta \|.$$

بنابراین

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - 0 \right| < \varepsilon, \quad \| \Delta \| < \varepsilon$$

از مقایسه مطلب بالا با تعریف ۱۰.۲.۶ وقتی که $\delta = \varepsilon$ و $L = 0$ ، می بینیم که f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است. $\blacktriangle$

در ابتدای این بخش، گفتیم که حد به کار رفته در تعریف ۹.۱.۶ برای پیدا کردن مساحت يك ناحیه و—ژه، حالت خاصی از حد تعریف ۲.۲.۶ برای به دست آوردن انتگرال معین می باشد. برای تعیین مساحت، بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه با طول مساوی تقسیم کردیم. چنین افرازی از بازه $[a, b]$ ، يك افراز منظم نامیده می شود. اگر Δx طول هريك از این زیر بازه ها در يك افراز منظم باشد، در این صورت $\Delta_i x = \Delta x$ ، و نورم افراز نیز برابر Δx می باشد. با جانشینی این مقادیر در معادله (۴)، داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (5)$$

به علاوه

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (6)$$

و

$$n = \frac{b-a}{\Delta x}. \quad (7)$$

بنابراین از (۶) نتیجه می شود

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta x = 0 \quad (8)$$

و از (۷)، چون $b > a$ ، و Δx با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کند (به علت اینکه $\Delta x > 0$) خواهیم داشت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} n = +\infty. \quad (9)$$

از حدهای (۸) و (۹) نتیجه می گیریم

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ معادل است با } n \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

بنابراین، از معادله (۵) و عبارت (۱۰) داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x. \quad (11)$$

باید در نظر داشت که ξ_i می‌تواند هر نقطه دلخواه در زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ باشد. در کاربردهای انتگرال معین، اغلب افراز منظم به کار می‌رود؛ بنابراین فرمولهای (۵) و (۱۱) اهمیت خاصی دارند. اگر حد به کار رفته در تعریف ۸.۱.۶ را که اندازه مساحت یک ناحیه را می‌دهد، با حد سمت راست (۱۱) مقایسه کنیم، در حالت اول داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (12)$$

که در آن $f(c_i)$ مقدار مینیمم مطلق تابع بر $[x_{i-1}, x_i]$ می‌باشد. در حالت دوم داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x \quad (13)$$

که در آن ξ_i عددی دلخواه در $[x_{i-1}, x_i]$ است.

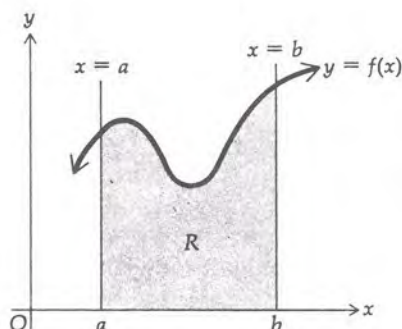
چون تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است، با توجه به قضیه ۳.۲.۶، $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد؛ بنابراین، این انتگرال معین، حد تمام مجموعه‌های ریمانی تابع f بر بازه $[a, b]$ ، از جمله عبارات (۱۲) و (۱۳) است. به این دلیل، مساحت یک ناحیه را به شکل کلیتری تعریف می‌کنیم.

۴.۲.۶ تعریف فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و برای تمام x های در این بازه، $f(x) \geq 0$. همچنین فرض کنید R ناحیه‌ای محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد. در این صورت، اندازه مساحت ناحیه R عبارت است از

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

تعریف فوق می‌گوید که اگر برای تمام x های در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ را می‌توان از نظر هندسی به عنوان اندازه مساحت ناحیه R در شکل ۴.۲.۶ (صفحه بعد) تعبیر کرد.

از معادله (۱۱) می‌توان برای یافتن مقدار دقیق انتگرال معین استفاده کرد؛ این موضوع در مثال زیر نشان داده شده است.



شکل ۴.۲.۶

مثال ۲ مقدار دقیق انتگرال معین $\int_1^3 x^2 dx$ را حساب کنید و نتیجه را به طور هندسی تعبیر کنید.

حل يك افراز منظم از بازه بسته $[1, 3]$ به n زیربازه مساوی را در نظر می گیریم؛ به این ترتیب، $\Delta x = 2/n$. اگر ξ_i نقطه انتهایی طرف راست هریک از این زیربازه ها باشد، داریم

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \dots,$$

$$\xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \dots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right).$$

چون $f(x) = x^2$

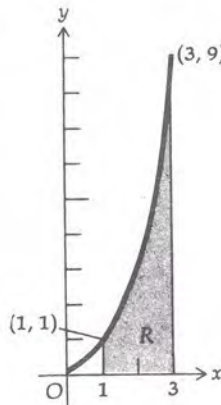
$$f(\xi_i) = \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 = \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2.$$

پس، با استفاده از (۱۱) و با به کار بردن قضایای بخش ۱.۶، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n + 2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^n (n^2 + 4ni + 4i^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^n 1 + 4n \sum_{i=1}^n i + 4 \sum_{i=1}^n i^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \left[n^2 n + 2n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} \left[n^3 + 2n^2 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2 + 3n + 1)}{3} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2}{n} + \frac{4n^2 + 12n + 2}{3n^3} \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{3} + \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} \right] \\
 &= 1 + 0 + \frac{4}{3} + 0 + 0 \\
 &= \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

این نتیجه را از نظر هندسی می‌توان چنین تعبیر کرد که چون برای تمام x های در بازه $[1, 3]$ ، $x^2 \geq 0$ ، پس ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خطوط $x=1$ و $x=3$ ، $\frac{7}{3}$ واحد مربع مساحت دارد. ناحیه مورد نظر در شکل ۵.۲.۶ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲.۶

در تعریف ۲.۲.۶، بازه بسته $[a, b]$ داده شده است، ولذا فرض بر این است که $a < b$ ، با در نظر گرفتن انتگرال معین يك تابع f از a تا b وقتی که $a > b$ و یا

$a=b$ ، تعاریف زیر را داریم.

۵.۲.۶ تعریف اگر $a > b$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

به شرطی که $\int_b^a f(x) dx$ وجود داشته باشد.

○ نمونه ۲ در مثال ۲ نشان دادیم که $\int_1^3 x^2 dx = \frac{2}{3}$ ؛ پس، از تعریف ۵.۲.۶ داریم

$$\int_3^1 x^2 dx = - \int_1^3 x^2 dx = -\frac{2}{3}.$$

۶.۲.۶ تعریف اگر $f(a)$ وجود داشته باشد،

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

○ نمونه ۳ بنابه تعریف ۶.۲.۶،

$$\int_1^1 x^2 dx = 0.$$

تمرینهای ۲.۶

در هریک از تمرینهای ۱ تا ۹، مجموع ریمانی را برای تابع مورد نظر در بازه مفروض بیابید؛ به این منظور، از افراز داده شده Δ و مقادیر مفروض ξ_i استفاده کنید. نمودار تابع بر بازه مورد نظر را رسم کنید، و مستطیلهایی را که اندازه مساحتهای آنها جملات مجموع ریمانی اند، مشخص کنید. (نمونه ۱ و شکل ۲.۲.۶ را ببینید.)

۱. $f(x) = x^2$ ، $0 \leq x \leq 3$ ؛ برای $\Delta: x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1\frac{1}{4}, x_3 = 2\frac{1}{4}$ ،

$$x_4 = 3, \xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1\frac{1}{4}, \xi_4 = 2\frac{1}{4}.$$

۲. $f(x) = x^2$ ، $0 \leq x \leq 3$ ؛ برای $\Delta: x_0 = 0, x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = 1\frac{3}{4}, x_3 = 2\frac{3}{4}, x_4 = 3$ ،

$$\xi_0 = \frac{3}{4}, \xi_1 = 1, \xi_2 = 1\frac{3}{4}, \xi_3 = 2\frac{3}{4}, \xi_4 = 3.$$

$$۳. \quad , x_7 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{2}{3}, x_0 = 1 : \Delta \text{ برای } ; 1 \leq x \leq 3, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$. \xi_7 = \frac{2}{4}, \xi_7 = \frac{1}{4}, \xi_7 = 2, \xi_1 = \frac{1}{4} ; x_7 = 3, x_7 = \frac{2}{3}$$

$$۴. \quad , x_7 = \frac{1}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}, x_0 = -1 : \Delta \text{ برای } ; -1 \leq x \leq 2, f(x) = x^2$$

$$, \xi_7 = 1, \xi_7 = \frac{2}{3}, \xi_7 = 0, \xi_1 = -\frac{1}{4} ; x_0 = 2, x_7 = \frac{1}{4}, x_7 = 1$$

$$. \xi_0 = 1 \frac{1}{4}$$

$$۵. \quad , x_7 = 0.95, x_1 = 0.92, x_0 = 0 : \Delta \text{ برای } ; 0 \leq x \leq 1, f(x) = x^2 - x + 1$$

$$. \xi_7 = 0.99, \xi_7 = 0.96, \xi_7 = 0.94, \xi_1 = 0.91 ; x_7 = 1, x_7 = 0.97$$

$$۶. \quad , x_7 = 0, x_1 = -\frac{1}{4}, x_0 = -1 : \Delta \text{ برای } ; -1 \leq x \leq 3, f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$, \xi_1 = -\frac{3}{4} ; x_1 = 3, x_7 = \frac{3}{4}, x_7 = \frac{1}{4}, x_0 = 2, x_7 = \frac{1}{4}, x_7 = \frac{1}{4}$$

$$. \xi_1 = 3, \xi_7 = \frac{1}{4}, \xi_7 = 2, \xi_0 = 1 \frac{1}{4}, \xi_7 = 1, x_7 = \frac{1}{4}, \xi_7 = 0$$

$$۷. \quad , x_7 = \frac{2\pi}{3}, x_7 = \frac{\pi}{4}, x_1 = \frac{\pi}{4}, x_0 = 0 : \Delta \text{ برای } ; 0 \leq x \leq \pi, f(x) = \sin x$$

$$. \xi_0 = \frac{5\pi}{6}, \xi_7 = \frac{3\pi}{4}, \xi_7 = \frac{\pi}{4}, \xi_7 = \frac{\pi}{3}, \xi_1 = \frac{\pi}{6} ; x_0 = \pi, x_7 = \frac{3}{4}\pi$$

$$۸. \quad , x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_0 = -\pi : \Delta \text{ برای } ; -\pi \leq x \leq \pi, f(x) = 3 \cos \frac{x}{4}$$

$$, \xi_7 = 0, \xi_7 = -\frac{\pi}{3}, \xi_1 = -\frac{2\pi}{3} ; x_0 = \pi, x_7 = \frac{5\pi}{12}, x_7 = \frac{\pi}{3}, x_7 = -\frac{\pi}{3}$$

$$. \xi_0 = \frac{2\pi}{3}, \xi_7 = \frac{\pi}{4}$$

$$۹. \quad , x_7 = 0, x_1 = -1, x_0 = -3 : \Delta \text{ برای } ; -3 \leq x \leq 3, f(x) = [x] + 2$$

$$\xi_4 = 2.5, \xi_3 = 1, \xi_2 = -0.5, \xi_1 = -2.5; x_4 = 3, x_3 = 2$$

در تمرینهای ۱۰ تا ۱۸، مقدار دقیق انتگرال معین را به دست آورید؛ از روش مثال ۲ این بخش استفاده کنید.

$$\int_2^3 x^3 dx \quad 10. \quad \int_0^2 x^2 dx \quad 11.$$

$$\int_2^4 x^2 dx \quad 12. \quad \int_1^2 x^3 dx \quad 13.$$

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx \quad 15. \quad \int_0^5 (x^2 - 1) dx \quad 14.$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx \quad 17. \quad \int_0^4 (x^2 + x - 6) dx \quad 16.$$

$$\int_{-2}^1 x^4 dx \quad 18.$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۸، مساحت دقیق ناحیه را به طریق زیر پیدا کنید. (الف) اندازه مساحت را به صورت حد یک مجموع ریسمانی با افرازیهای منظم بیان کنید؛ (ب) این حد را با استفاده از نماد انتگرال معین بنویسید؛ (پ) مقدار انتگرال معین را با استفاده از روش این بخش و با انتخاب مناسب ξ_i محاسبه کنید. نموداری برای نمایش ناحیه رسم کنید.

$$19. \text{ ناحیه محصور بین خط } y = 2x - 1, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = 1 \text{ و } x = 5.$$

$$20. \text{ ناحیه محصور بین خط } y = 2x - 6, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = 4 \text{ و } x = 7.$$

$$21. \text{ ناحیه محصور بین خط } y = -3x + 2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = -5 \text{ و } x = -1.$$

$$22. \text{ ناحیه محصور بین خط } y = 3x + 2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = -4 \text{ و } x = -1.$$

$$23. \text{ ناحیه محصور بین منحنی } y = 4 - x^2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = 1 \text{ و } x = 2.$$

$$24. \text{ ناحیه محصور بین منحنی } y = (x + 3)^2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = -3 \text{ و } x = 0.$$

$$25. \text{ ناحیه محصور بین منحنی } y = 12 - x - x^2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = -3 \text{ و } x = 2.$$

$$26. \text{ ناحیه محصور بین منحنی } y = 10 + x - x^2, \text{ محور } x \text{ ها، و خطوط } x = -2 \text{ و } x = 3.$$

۲۷. ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2 - 4$ ، محور x ها، و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ ناحیه محصور بین منحنی $y = 6x + x^2 - x^3$ ، محور x ها، و خطوط $x = -1$ و $x = 3$.

۲۹. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (\lambda i^2 / n^3)$ را به صورت يك انتگرال معین بنویسید. (داهنمایی: تابع f را به صورت $f(x) = x^2$ در نظر بگیرید.)

۳۰. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 1/(n+i)$ را به صورت يك انتگرال معین بنویسید. (داهنمایی: تابع f را بر بازه $[1, 2]$ به صورت $f(x) = 1/x$ در نظر بگیرید.)

۳۱. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (n/i^2)$ را به صورت يك انتگرال معین بنویسید. (داهنمایی: تابع f را به صورت $f(x) = 1/x^2$ در نظر بگیرید.)

۳۲. فرض کنید $[a, b]$ بازه دلخواهی باشد که $a < 0 < b$. ثابت کنید که گرچه تابع پله‌ای واحد (تمرین ۳۱ از سری تمرینهای ۶۰۱) بر بازه $[a, b]$ ناپیوسته است، ولی بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است و $\int_a^b U(x) dx = b$.

۳۳. ثابت کنید که تابع علامت بر بازه $[-1, 1]$ ناپیوسته است ولی بر این بازه انتگرال پذیر می باشد. همچنین نشان دهید $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx = 0$.

۳۴. ثابت کنید که تابع بزرگترین عدد صحیح بر بازه $[0, 3/2]$ ناپیوسته است ولی بر این بازه انتگرال پذیر است. همچنین نشان دهید $\int_0^{3/2} [x] dx = 1/2$.

۳.۶ خواص انتگرال معین

محاسبه انتگرال معین با استفاده از تعریف یعنی اینکه عملاً حد يك مجموع را پیدا کنیم، چنانکه در بخش ۲.۶ کردیم، معمولاً بسیار خسته کننده و تقریباً غیر ممکن است. برای رسیدن به روشهای بسیار ساده تر، ابتدا لازم است بعضی از خواص انتگرال معین را شرح دهیم. پیش از همه، دو قضیه زیر درباره مجموع ریمانی مورد نیازند.

۱.۳.۶ قضیه اگر Δ افراز دلخواهی از بازه بسته $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i x = b - a.$$

اثبات

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i x - (b-a) = (b-a) - (b-a) = 0.$$

بنابراین، برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر انتخاب دلخواه $\delta > 0$ برقراری نامساوی زیر را تضمین می‌کند

$$\left| \sum_{i=1}^n \Delta_i x - (b-a) \right| < \varepsilon, \quad \|\Delta\| < \delta$$

پس بنا به قضیه ۱.۲.۶،

$$\square \quad \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i x = b-a.$$

۲.۳.۶ قضیه اگر f بر بازه بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد، و حد زیر موجود باشد

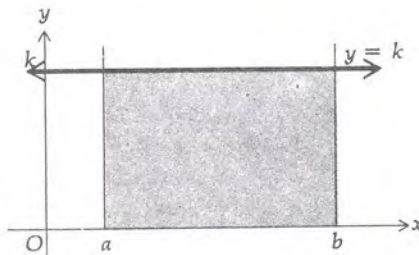
$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

که در آن Δ افرازدلخواهی از بازه $[a, b]$ است، آنگاه اگر k ثابت دلخواهی باشد، داریم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

اثبات این قضیه به عنوان تمرین واگذار شده است (تمرین ۴۳ را ببینید).

○ **نمونه ۱** به شکل ۱.۳.۶ رجوع کنید. اگر $k > 0$ ، انتگرال معین $\int_a^b k dx$ اندازه



شکل ۱.۳.۶

مساحت ناحیه سایه‌دار را بدست می‌دهد که مستطیلی است به‌ابعاد k واحد و $(b-a)$ واحد. این امر، تعبیری هندسی از قضیه زیر برای $k > 0$ است.

○

۳.۳.۶ قضیه اگر k ثابت دلخواهی باشد، آنگاه

$$\int_a^b k \, dx = k(b-a).$$

اثبات بنابه تعریف ۲.۲.۶

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

اگر برای تمام x ‌های در $[a, b]$ ، $f(x) = k$ ، آنگاه از این معادله خواهیم داشت

$$\int_a^b k \, dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k \Delta_i x$$

$$= k \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i x \quad (\text{بنابه قضیه ۲.۳.۶})$$

□

$$= k(b-a). \quad (\text{بنابه قضیه ۱.۳.۶})$$

مثال ۱ $\int_{-3}^5 4 \, dx$ را محاسبه کنید.

حل قضیه ۳.۳.۶ را به‌کار می‌بریم و داریم

$$\int_{-3}^5 4 \, dx = 4[5 - (-3)]$$

$$= 4(8)$$

▲

$$= 32.$$

۴.۳.۶ قضیه اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال‌پذیر بوده و k ثابتی دلخواه باشد، آنگاه

$$\int_a^b k f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx.$$

اثبات چون f بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر است، $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\xi_i) \Delta_i x$ موجود

می‌باشد؛ پس، بنابه قضیه ۲.۳.۶ داریم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(\xi_i) \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

بنابر این

$$\square \quad \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

به تشابه قضیه زیر با قضیه حدی ۴ (۴.۲.۲) که درباره حد مجموع دوتابع است، توجه کنید. همچنین دقت کنید که اثبات دوقضیه شبیه یکدیگر است.

۵.۳.۶ قضیه اگر توابع f و g بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند، آنگاه $f + g$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است، و داریم

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

اثبات توابع f و g بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیرند؛ پس فرض می کنیم

$$\int_a^b f(x) dx = M \quad \text{و} \quad \int_a^b g(x) dx = N$$

برای اینکه ثابت کنیم $f + g$ روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است و

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = M + N$$

باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که برای تمام افرازه های Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ و به ازای هر ξ_i دلخواه در $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \varepsilon.$$

چون

$$N = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x \quad \text{و} \quad M = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

پس، برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta_1 > 0$ و يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای تمام افرازه های Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta_1$ و $\|\Delta\| < \delta_2$ ، و برای هر ξ_i در $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

پس اگر $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و برای تمام افرازهای Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ و به ازای هر ξ_i دلخواه در $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (۱)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی داریم

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right) \right| \quad (۲)$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x - N \right|.$$

از نامساویهای (۱) و (۲) داریم

$$\left| \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x \right) - (M + N) \right| < \varepsilon. \quad (۳)$$

همچنین از قضیه ۴.۱.۶ داریم

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta_i x = \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x. \quad (۴)$$

بنابراین، با قرار دادن مقدار از (۴) در (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که برای هر $\varepsilon > 0$ و برای تمام افرازهای Δ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ و با انتخاب $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ و به ازای هر ξ_i در $[x_{i-1}, x_i]$ داریم

$$\left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \varepsilon.$$

و بدین ترتیب ثابت می‌شود که $f + g$ بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است. همچنین

$$\square \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

به عنوان نتیجه‌ای از کاربرد قضیه ۴.۳.۶ برای $k = -1$ ، در صورت قضیه ۵.۳.۶ می‌توان علامت منها را جانشین علامت به علاوه کرد.

قضیه ۵.۳.۶ را می‌توان برای هر تعداد از توابع عمومیت داد. یعنی اگر توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ همگی روی بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند، آنگاه

$$(f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n)$$

نیز روی بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است و داریم

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx$$

$$= \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x) dx$$

مثال ۲ از نتیجه مثال ۲ در بخش ۲.۶، و این واقعیت که $\int_1^3 x dx = 4$ ، استفاده

کنید و $\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2) dx$ را به دست آورید.

حل در مثال ۲ از بخش ۲.۶، نتیجه زیر را داشتیم

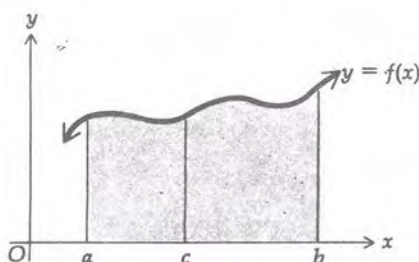
$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

با توجه به خواص انتگرال معین داریم

$$\begin{aligned} \int_1^3 (3x^2 - 5x + 2) dx &= \int_1^3 3x^2 dx - \int_1^3 5x dx + \int_1^3 2 dx \\ &= 3 \int_1^3 x^2 dx - 5 \int_1^3 x dx + 2(3-1) \\ &= 3\left(\frac{26}{3}\right) - 5(4) + 4 \\ &= 26 - 20 + 4 \\ &= 10. \end{aligned}$$

▲

○ نمونه ۲ يك تعبير هندسی از قضیه ۲.۳.۶ كه در زیر بیان می شود، در شكل ۲.۳.۶ نشان داده شده است كه در آن $f(x) \geq 0$. برای تمام x های در $[a, b]$ ، اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ و محور x ها از a تا b ، مساوی با مجموع اندازه مساحت های نواحی از a تا c و از c تا b است.



شكل ۲.۳.۶

○

۶.۳.۶ قضیه اگر تابع f روی بازه‌های بسته $[a, b]$ ، $[a, c]$ ، و $[c, b]$ انتگرال پذیر باشد و $a < c < b$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

اثبات فرض کنید Δ افرازی از $[a, b]$ باشد. افراز Δ' از بازه $[a, b]$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم. اگر c یکی از نقاط افراز Δ باشد (مثلاً، $c = x_i$ برای يك i)، آنگاه Δ' دقیقاً با Δ یکسان است. اگر c یکی از نقاط افراز Δ نباشد، اما در زیر-بازه $[x_{i-1}, x_i]$ قرار داشته باشد، آنگاه افراز Δ' شامل تمام نقاط افراز Δ و به علاوه شامل نقطه c می‌باشد. بنابراین، زیربازه‌های افراز Δ' با زیربازه‌های Δ یکسان هستند؛ با این استثنای که زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ از افراز Δ به دو زیربازه $[x_{i-1}, c]$ و $[c, x_i]$ تقسیم می‌شود.

اگر $\|\Delta'\|$ نورم Δ' و $\|\Delta\|$ نورم Δ باشد. آنگاه

$$\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|.$$

اگر در افراز Δ' بازه $[a, c]$ را به r زیربازه و بازه $[c, b]$ را به $(n-r)$ زیربازه تقسیم کنیم، آنگاه قسمتی از افراز Δ' ، از a تا c ، مجموع ریمانی زیر را می‌دهد

$$\sum_{i=1}^r f(\xi_i) \Delta_i x$$

و قسمت دیگر افراز Δ' ، از c تا b ، مجموع ریمانی زیر را می‌دهد

$$\sum_{i=r+1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

با استفاده از تعریف انتگرال معین و خواص نماد سیگما داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^r f(\xi_i) \Delta_i x + \sum_{i=r+1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \right] \\ &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(\xi_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(\xi_i) \Delta_i x. \end{aligned}$$

چون $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$ ، می‌توانیم به جای $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ، $\|\Delta'\| \rightarrow 0$ قرار دهیم؛ نتیجه می‌شود

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta'\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(\xi_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\| \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

اگر تعریف انتگرال معین را برای طرف راست معادله فوق به کار ببریم، خواهیم داشت

$$\square \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

نتیجه قضیه ۶.۳.۶ برای هر ترتیبی از a, b و c درست است. این مطلب در قضیه زیر بیان شده است.

۷.۳.۶ قضیه اگر تابع f بر بازه بسته‌ای که شامل اعداد a, b ، و c است انتگرال پذیر باشد، آنگاه بدون توجه به ترتیب a, b ، و c داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (5)$$

اثبات اگر a, b و c متمایز از هم باشند، شش ترتیب ممکن برای این سه عدد وجود دارد: $b < c < a$ ، $b < a < c$ ، $a < c < b$ ، $a < b < c$ ، $c < a < b$ و $c < b < a$. حالت دوم، $a < c < b$ ، در قضیه ۶.۳.۶ آمده است. از این قضیه استفاده کرده و ثابت می‌کنیم که معادله (۵) برای سایر ترتیبهای a, b و c نیز برقرار است.

فرض می‌کنیم $a < b < c$ ؛ در این صورت، از قضیه ۶.۳.۶ داریم

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (6)$$

و با استفاده از تعریف ۵.۲.۶ می‌توان نوشت

$$\int_b^c f(x) dx = - \int_c^b f(x) dx. \quad (7)$$

از (۷) در (۶) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

پس

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

که نتیجه مطلوب است.

اثبات برای چهار ترتیب دیگر به طور مشابه انجام می‌گیرد و به عنوان تمرین واگذار شده است (به تمرینهای ۴۴ تا ۴۷ مراجعه کنید).

همچنین امکان تساوی دو عدد از سه عدد فوق نیز وجود دارد، مثلاً اینکه

$a = c < b$ در این صورت، داریم

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (\text{بنابه تعریف ۶.۲.۶})$$

و چون $a = c$ ، پس

$$\int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

بنابراین

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = 0 + \int_a^b f(x) dx$$

□

که همان نتیجه مطلوب است.

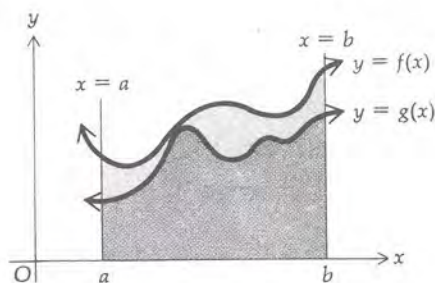
○ نمونه ۳ در شکل ۳.۳.۶، برای تمام x های در $[a, b]$ ، داریم

$$f(x) \geq g(x) \geq 0.$$

انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ اندازه مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها،

و خطوط $x = a$ و $x = b$ را به دست می دهد؛ و $\int_a^b g(x) dx$ اندازه مساحت ناحیه محدود

به منحنی $y = g(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ را به دست می دهد. در شکل مشاهده می کنیم که مساحت اولی از مساحت دومی بزرگتر است. به این ترتیب، یک تعبیر هندسی از قضیه زیر در حالتی که $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه $[a, b]$ غیرمنفی باشند، ارائه داده ایم.



○

شکل ۳.۳.۶

۸.۳.۶ قضیه اگر توابع f و g روی بازه بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر باشند، واگر برای تمام x های در $[a, b]$ ، $f(x) \geq g(x)$ ، در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

اثبات چون f و g روی بازه $[a, b]$ انتگرال پذیرند، $\int_a^b f(x) dx$ و $\int_a^b g(x) dx$ هر دو وجود دارند. بنابراین، با استفاده از قضیه ۴.۳.۶،

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b [-g(x)] dx \\ &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{بنابه قضیه ۵.۳.۶}) \end{aligned}$$

فرض کنید تابع h به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

در این صورت، چون برای تمام x های در $[a, b]$ ، $f(x) \geq g(x)$ ، پس برای تمام x های در $[a, b]$ ، $h(x) \geq 0$.

می خواهیم ثابت کنیم که $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0$.

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b h(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x \quad (۸)$$

فرض کنید که

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x = L < 0 \quad (۹)$$

در این صورت، با توجه به تعریف ۱.۲.۶، با فرض $\varepsilon = -L$ ، يك عدد $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\left| \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x - L \right| < -L, \quad \|\Delta\| < \delta \quad \text{وقتی} \quad (۱۰)$$

اما چون

$$\sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x - L \leq \left| \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x - L \right|$$

از نامساوی (۱۰) داریم

$$\sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x - L < -L, \quad \|\Delta\| < \delta \quad \text{وقتی}$$

یا

$$\sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x < 0, \quad \|\Delta\| < \delta \quad \text{وقتی} \quad (۱۱)$$

ولی عبارت (۱۱) غیرممکن است، چون هر $h(\xi_i)$ غیر منفی و هر $\Delta_i x$ مثبت است؛ پس به تناقضی با فرض (۹) رسیده‌ایم و بنابراین (۹) غلط است، و

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) \Delta_i x \geq 0. \quad (12)$$

از (۸) و (۱۲) داریم

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx \geq 0$$

پس

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$$

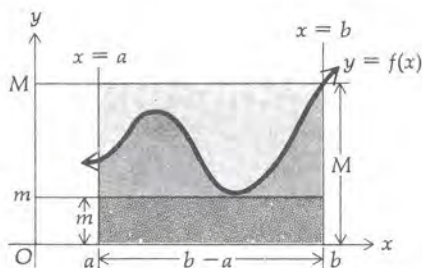
و بنابراین

$$\square \quad \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

○ نمونه ۴ در شکل ۴.۳.۶، برای تمام x ‌های در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، M و m به ترتیب

مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ می‌باشند. انتگرال $\int_a^b f(x) dx$

اندازهٔ مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ‌ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ را به دست می‌دهد. این مساحت از مساحت مستطیلی به ابعاد m و $(b-a)$ بزرگتر و از مساحت مستطیلی به ابعاد M و $(b-a)$ کوچکتر است. پس اگر برای تمام x ‌های در $[a, b]$ ، داشته باشیم $f(x) \geq 0$ ، این نمونه تعبیری هندسی از قضیهٔ زیر است.



○

شکل ۴.۳.۶

۹.۳.۶ قضیه فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. اگر m و M ، به ترتیب، مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ باشند، یعنی اگر داشته باشیم

به ازای $m \leq f(x) \leq M, a \leq x \leq b$

آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

اثبات چون f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است، قضیه اکسٹرمم (۹.۲.۴) وجود m و

M را تضمین می‌کند.
بنابراین قضیه ۳.۳.۶،

$$\int_a^b m dx = m(b-a) \quad (۱۳)$$

و

$$\int_a^b M dx = M(b-a). \quad (۱۴)$$

چون f بر $[a, b]$ پیوسته است، از قضیه ۳.۲.۶ نتیجه می‌شود که f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است. از طرفی چون برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq m$ ، از قضیه ۸.۳.۶ خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx$$

که با توجه به (۱۳) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a). \quad (۱۵)$$

به طور مشابه، چون برای تمام x های در $[a, b]$ ، $M \geq f(x)$ ، از قضیه ۸.۳.۶ داریم

$$\int_a^b M dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

و از رابطه (۱۴) نتیجه زیر به دست می‌آید

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x) dx. \quad (۱۶)$$

از ترکیب نامساویهای (۱۵) و (۱۶) داریم

$$\square \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

مثال ۳ با استفاده از قضیه ۹.۳.۶ بازه بسته‌ای را که شامل مقدار $\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx$ باشد پیدا کنید. از نتایج مثال ۱ در بخش ۵.۴ استفاده کنید.

حل اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ، با توجه به مثال ۱ در بخش ۵.۴، f دارای یک مقدار مینیمم نسبی ۱ در $x = 3$ و یک مقدار ماکسیمم نسبی ۵ در $x = 1$ می‌باشد. $f(4) = 5$ و $f(1/2) = 33/8$. بنابراین، روی بازه $[1/2, 4]$ مقدار مینیمم مطلق f برابر با ۱ و مقدار ماکسیمم مطلق آن برابر با ۵ است. با قراردادن $m = 1$ و $M = 5$ در قضیه ۹.۳.۶ داریم

$$1\left(4 - \frac{1}{2}\right) \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq 5\left(4 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{7}{2} \leq \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx \leq \frac{35}{2}$$

بنابراین، بازه بسته $[7/2, 35/2]$ شامل مقدار انتگرال معین می‌باشد. در مثال ۲ از بخش ۵.۶، نشان می‌دهیم که مقدار دقیق این انتگرال معین برابر با $\frac{39}{64}$ است. ▲

مثال ۴ با استفاده از قضیه ۹.۳.۶، بازه بسته‌ای را که شامل مقدار $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\sin x} dx$ است، به دست آورید.

حل اگر $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ، آنگاه

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

برای x در $[\pi/4, 3\pi/4]$ ، وقتی که $x = \pi/2$ ، داریم $f'(x) = 0$. چون، وقتی که $\pi/4 < x < \pi/2$ ، $f'(x) > 0$ و وقتی که $\pi/2 < x < 3\pi/4$ ، $f'(x) < 0$ ، نتیجه می‌شود که f دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی در $\pi/2$ است؛ و $f(\pi/2) = 1$. به علاوه، $f(\pi/4) = \sqrt{2}/\sqrt{2} \approx 0.707$ و $f(3\pi/4) \approx 0.707$. پس، بر بازه $[\pi/4, 3\pi/4]$ مقدار مینیمم مطلق f برابر با ۰.۷۰۷ و مقدار ماکسیمم مطلق f برابر با ۱ می‌باشد. بنابراین، با قراردادن $m = 0.707$ و $M = 1$ در قضیه ۹.۳.۶، داریم

$$0.707 \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\sin x} dx \leq 1 \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right]$$

$$0.707 \pi \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\sin x} dx \leq 0.5\pi$$

$$0.418 \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\sin x} dx \leq 1.571.$$

▲ پس، مقدار انتگرال معین در بازه بسته $[0.418, 1.571]$ قرار دارد.

تمرینهای ۳.۶

در تمرینهای ۱ تا ۶، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} 1. \int_2^5 x dx & 2. \int_{-2}^4 x dx & 3. \int_{-2}^2 \sqrt{x} dx \\ 4. \int_5^{-1} x dx & 5. \int_{-5}^{-1} x dx & 6. \int_2^2 x dx \end{array}$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۸، با استفاده از نتایج زیر، انتگرال معین مفروض را به دست آورید.

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = 3, \int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2}, \int_0^{\pi} \sin x dx = 2,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^{\pi} \cos x dx = 0.$$

$$7. \int_{-1}^2 (2x^2 - 4x + 5) dx \quad 8. \int_{-1}^2 (\lambda - x^2) dx$$

$$9. \int_{-1}^2 (2 - 5x + \frac{1}{2}x^2) dx \quad 10. \int_{-1}^2 (3x^2 - 4x - 1) dx$$

$$11. \int_2^{-1} (2x + 1)^2 dx \quad 12. \int_{-1}^2 (\delta x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}) dx$$

$$13. \int_{-1}^2 (x - 1)(2x + 3) dx \quad 14. \int_2^{-1} 3x(x - 4) dx$$

$$15. \int_0^{\pi} (2 \sin x + 3 \cos x + 1) dx \quad 16. \int_0^{\pi} 3 \cos^2 x dx$$

$$17. \int_0^{\pi} (\cos x + 4)^2 dx \quad 18. \int_{\pi}^0 (\sin x - 2)^2 dx$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۳۴، با استفاده از قضیه ۹.۳.۶ بازه بسته‌ای را که شامل مقدار انتگرال معین مفروض باشد، پیدا کنید.

$$\begin{array}{lll}
 \int_0^4 x^2 dx \quad .21 & \int_2^5 3x dx \quad .20 & \int_2^7 2x dx \quad .19 \\
 \int_{-2}^1 (x+1)^{2/3} dx \quad .24 & \int_{-2}^6 \sqrt{3+x} dx \quad .23 & \int_{-2}^1 x^2 dx \quad .22 \\
 \int_{-1}^4 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \quad .26 & \int_{-4}^0 (x^4 - 8x^2 + 16) dx \quad .25 & \\
 \int_1^4 |x-2| dx \quad .29 & \int_{-\pi/3}^{2\pi/3} \cos x dx \quad .28 & \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx \quad .27 \\
 \int_{-5}^2 \frac{x+5}{x-3} dx \quad .32 & \int_{-1}^2 \frac{x}{x+2} dx \quad .31 & \int_{-1}^2 \sqrt{x^2+5} dx \quad .30 \\
 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \sin^2 x dx \quad .34 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 \cos^2 x - 9 \cos x) dx \quad .33 &
 \end{array}$$

در هریک از تمرینهای ۳۵ تا ۳۸، با استفاده از قضیه ۸.۳.۶ تعیین کنید که کدامیک از علائم $\geq$ یا $\leq$ را باید در جای خالی قرار داد تا نامساوی درست باشد.

$$\begin{array}{l}
 \int_{-1}^2 (2x^2 - 4) dx \quad \text{---} \quad \int_{-1}^2 (x^2 - 6) dx \quad .35 \\
 \int_4^5 \sqrt{6-x} dx \quad \text{---} \quad \int_4^5 \sqrt{x-2} dx \quad .36 \\
 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \sin^2 x dx \quad \text{---} \quad \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos^2 x dx \quad .37 \\
 \int_0^{\pi/4} \cos x dx \quad \text{---} \quad \int_0^{\pi/4} \sin x dx \quad .38
 \end{array}$$

۳۹. نشان دهید که اگر f بر بازه $[4, -3]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_3^{-1} f(x) dx + \int_4^3 f(x) dx + \int_{-3}^{-4} f(x) dx + \int_{-1}^{-3} f(x) dx = 0.$$

۴۰. نشان دهید که اگر f بر بازه $[2, -1]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{-1} f(x) dx = 0.$$

۴۱. بدون محاسبه انتگرالهای معین نشان دهید که

$$\int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx$$

ولی

$$\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx.$$

۴۲. اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، ثابت کنید که

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(داهنمایی: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.)

۴۳. قضیه ۲۰.۳.۶ را ثابت کنید.

در تمرینهای ۴۴ تا ۴۹، ثابت کنید که قضیه ۷.۳.۶ برای ترتیب مفروض a, b, c برقرار است؛ در هر مورد، از نتیجه قضیه ۶.۳.۶ استفاده کنید.

$$c < a < b. \quad ۴۶$$

$$b < c < a. \quad ۴۵$$

$$b < a < c. \quad ۴۴$$

$$a = b < c. \quad ۴۹$$

$$a < c = b. \quad ۴۸$$

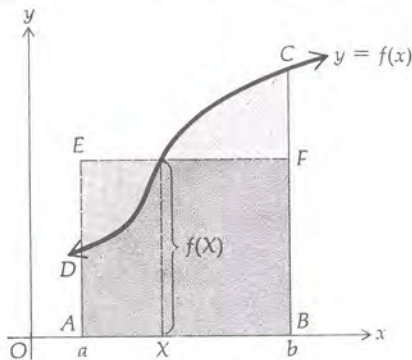
$$c < b < a. \quad ۴۷$$

۴.۶ قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها

اکنون آماده بیان و اثبات قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها هستیم. این قضیه در اثبات بسیاری از قضایای مهم به کار می رود که یکی از برجسته ترین آنها، قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال است که در بخش ۵.۶ می آید. قبل از بیان قضیه میانگین برای انتگرالها، نمونه ای را که تعبیر هندسی این قضیه می باشد، ارائه می دهیم.

○ نمونه ۱ فرض کنید برای تمام مقادیر x در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$. پس $\int_a^b f(x) dx$ اندازه مساحت ناحیه محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ را می دهد. شکل ۱.۴.۶ را ببینید. قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها می گوید که عددی مانند $\bar{X}$ در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که مساحت مستطیل $AEFB$ به ارتفاع $f(\bar{X})$

واحد و قاعده $(b-a)$ واحد مساوی با مساحت ناحیه $ADCB$ است.



شکل ۱۰.۴.۶

۱۰.۴.۶ قضیه (قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها) اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه عددی مانند X در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x) dx = f(X)(b-a).$$

اثبات چون f روی $[a, b]$ پیوسته است، با توجه به قضیه اکسترمم (۹.۲.۴) تابع f روی $[a, b]$ دارای مقدار مینیمم مطلق و مقدار ماکسیمم مطلق است. فرض کنید m مقدار مینیمم مطلق باشد که در $x = x_m$ به دست می آید. پس

$$f(x_m) = m \quad a \leq x_m \leq b \quad (1)$$

همچنین فرض کنید M مقدار ماکسیمم مطلق در $x = x_M$ باشد. پس

$$f(x_M) = M \quad a \leq x_M \leq b \quad (2)$$

بنابراین، داریم

$$m \leq f(x) \leq M, \quad [a, b]$$

با استفاده از قضیه ۹.۳.۶ نتیجه می گیریم

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

چون $b > a$ ، $b-a$ مثبت است؛ طرفین را بر $(b-a)$ تقسیم می کنیم و خواهیم داشت

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

اما با توجه به فرمول (۱) و (۲)، $m = f(x_m)$ و $M = f(x_M)$ ؛ بنا بر این داریم

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq f(x_M) \quad (۳)$$

از نامساویهای (۳) و قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود که عددی مانند X در بازه بسته‌ای که شامل x_m و x_M می‌باشد وجود دارد به طوری که

$$f(X) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

و یا

$$\square \quad \int_a^b f(x) dx = f(X)(b-a), \quad a \leq X \leq b.$$

مقدار X در قضیه ۱۰۴.۶ لزوماً یکتا نیست. این قضیه روشی برای یافتن X ارائه نمی‌دهد، اما می‌گوید که مقداری از X موجود است، و از این مطلب برای اثبات قضایای دیگری استفاده می‌شود. در بعضی حالت‌های خاص، می‌توان مقدار X را که وجودش به وسیله قضیه فوق تضمین شده است پیدا کرد، همچنانکه در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۱ اگر $f(x) = x^2$ ، مقداری برای X بیابید که

$$\int_1^3 f(x) dx = f(X)(3-1).$$

از نتیجه مثال ۲ در بخش ۲۰.۶ استفاده کنید.

حل در مثال ۲ از بخش ۲۰.۶، به دست آوردیم

$$\int_1^3 x^2 dx = 8\frac{2}{3}.$$

بنا بر این، می‌خواهیم X را طوری تعیین کنیم که

$$f(X) \cdot (2) = \frac{26}{3}$$

یعنی

$$X^2 = \frac{13}{3}.$$

پس

$$X = \pm \frac{1}{3} \sqrt{39}.$$

اما چون $\sqrt{39}/3 -$ در بازه $[1, 3]$ نیست، آن را رد می‌کنیم و داریم

$$\triangle \int_1^3 f(x) dx = f\left(\frac{1}{3}\sqrt{39}\right)(3-1).$$

مقدار $f(X)$ می‌باشد که به وسیله قضیه ۱۰۴.۶ داده می‌شود، مقدار میانگین (یا مقدار متوسط) تابع f بر بازه $[a, b]$ نامیده می‌شود و تعمیمی از میانگین حسابی یک مجموعه متناهی از اعداد است. یعنی، اگر $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ مجموعه‌ای از n عدد باشد، میانگین حسابی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}.$$

برای تعمیم این تعریف، یک افراز منظم از بازه بسته $[a, b]$ را در نظر می‌گیریم، و این بازه را به n زیر بازه با طول مساوی $\Delta x = (b-a)/n$ تقسیم می‌کنیم. فرض می‌کنیم ξ_i نقطه دلخواهی در زیر بازه i م است. مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{n}. \quad (4)$$

خارج قسمت (۴) مشابه با میانگین حسابی n عدد است. چون $\Delta x = (b-a)/n$ ، داریم

$$n = \frac{b-a}{\Delta x}. \quad (5)$$

از قرارداد (۵) در (۴) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a} \quad \text{و یا} \quad \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}}$$

با گرفتن حد وقتی که $n \rightarrow +\infty$ (یا $\Delta x \rightarrow 0$)، اگر حد موجود باشد، داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

که ما را به تعریف زیر می‌رساند.

۲.۴.۶ تعریف اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد، مقدار متوسط f بر $[a, b]$ به صورت زیر است

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}.$$

مثال ۲ (الف) اگر $f(x) = x^2$ ، مقدار متوسط تابع f روی بازه $[1, 3]$ را به دست آورید؛ (ب) تعبیری هندسی برای نتیجه قسمت (الف) بیاورید.

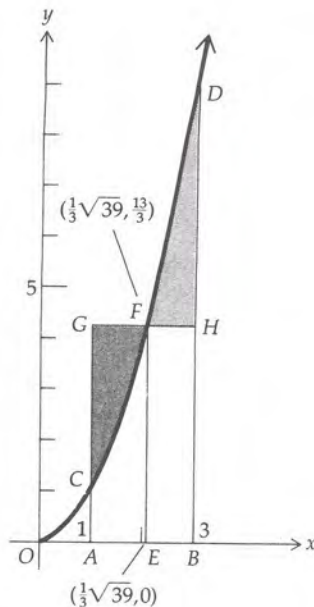
حل

(الف) در مثال ۲، از بخش ۲.۴.۶، به دست آوردیم

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

بنابراین، اگر مقدار متوسط f روی $[1, 3]$ را با A.V. نشان دهیم، داریم

$$A.V. = \frac{\frac{26}{3}}{3-1} = \frac{13}{3}.$$



شکل ۲.۴.۶

(ب) در مثال ۱ برای این تابع مقدار زیر را به دست آوریم

$$f\left(\frac{1}{3}\sqrt{39}\right) = \frac{13}{3}.$$

بنا بر این، مقدار متوسط تابع f در $\sqrt{39}/3$ به دست می آید. در شکل ۲۰۴۰۶ (صفحه قبل) نمودار f بر بازه $[1, 3]$ و پاره خط از نقطه $E(\sqrt{39}/3, 0)$ روی محور x ها تا نقطه $F(\sqrt{39}/3, 13/3)$ روی نمودار f نشان داده شده اند. مساحت مستطیل $AGHB$ به ارتفاع $13/3$ و قاعده ۲ مساوی با مساحت ناحیه $ACDB$ می باشد. در نتیجه، مساحت ناحیه سایه خورده CGF مساوی با مساحت ناحیه سایه خورده FDH است. ▲

يك کاربرد مهم مقدار متوسط تابع، در فیزیک و مهندسی و در رابطه با مفهوم مرکز جرم پیش می آید. در مورد این مطلب در فصل ۱۱ بحث شده است. در اقتصاد، تعریف ۲۰۴۰۶ را می توان برای پیدا کردن متوسط هزینه کل یا متوسط درآمد کل به کار برد.

○ نمونه ۲ اگر تابع هزینه کل، C ، به صورت $C(x) = x^2$ داده شود که $C(x)$ ، بر حسب هزار تومان، هزینه کل تولید x ۱۵۰ واحد از يك كالای خاصی باشد، آنگاه متوسط هزینه کل بر حسب هزار تومان وقتی که تعداد واحدهای تولید شده تمام مقادیر از ۱۵۰ تا ۳۵۰ را اختیار کند، برابر با مقدار متوسط C روی بازه $[1, 3]$ است. با توجه به مثال ۲، این مقدار برابر با $13/3 = 4333$ می باشد. بنا بر این، متوسط هزینه کل ۴۳۳۳ تومان است. ○

تمرینهای ۴.۶

در تمرینهای ۱ تا ۸، مقداری برای X بیابید که در قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها صدق کند. برای مقدار انتگرال معین، از نتیجه تمرین مشخص شده از تمرینهای ۲.۶ استفاده کنید. شکلی بکشید که کاربرد این قضیه را نشان دهد.

$$1. \int_0^2 x^2 dx \quad \text{تمرین ۱۱} \quad 2. \int_2^4 x^2 dx \quad \text{تمرین ۱۲}$$

$$3. \int_1^2 x^3 dx \quad \text{تمرین ۱۳} \quad 4. \int_0^5 (x^2 - 1) dx \quad \text{تمرین ۱۴}$$

$$5. \int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx \quad \text{تمرین ۱۵} \quad 6. \int_0^4 (x^2 + x - 6) dx \quad \text{تمرین ۱۶}$$

$$۷. \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx \quad ; \text{ تمرین ۱۷} \quad ۸. \int_{-2}^1 x^4 dx \quad ; \text{ تمرین ۱۸}$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها، نامساویهای زیر را ثابت کنید.

$$۹. \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx \leq \frac{1}{2} \quad ۱۰. \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 6} dx \leq 1$$

$$۱۱. \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos x^2 dx \leq \frac{\pi}{3} \quad ۱۲. \int_0^{\pi} \sin \sqrt{x} dx \leq \pi$$

در هر یک از تمرینهای ۱۳ تا ۱۶، قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها و قضیه ۸.۳.۶ را برای اثبات نامساوی داده شده به کار ببرید.

$$۱۳. 0 \leq \int_2^5 \frac{1}{x^3 + 1} dx \leq \frac{1}{3} \quad ۱۴. 0 \leq \int_5^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \leq 2$$

$$۱۵. 0 \leq \int_0^2 \sin \frac{\pi}{2} x dx \leq 2 \quad ۱۶. 0 \leq \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x dx \leq 1$$

۱۷. فرض کنید $\int_{-1}^2 x dx = 3/2$ ؛ مقدار متوسط تابع همانی روی بازه $[-1, 2]$ را بیابید. همچنین، مقداری برای x بیابید که به ازای آن، مقدار متوسط تابع به دست می آید. تعبیری هندسی برای نتایج بیاورید.

۱۸. مقدار متوسط تابع f را که روی بازه $[-1, 2]$ با ضابطه $f(x) = x^2$ تعریف شده، با فرض $\int_{-1}^2 x^2 dx = 3$ به دست آورید. همچنین، مقداری از x را بیابید که این مقدار متوسط به ازای آن حاصل می شود. تعبیری هندسی برای نتایج بیاورید.

۱۹. فرض کنید $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$ ؛ مقدار متوسط تابع سینوسی بر بازه $[0, \pi]$ را به دست آورید.

۲۰. فرض کنید $C(x) = x^2$ معادله هزینه کل تولید کالای خاصی باشد که در آن $C(x)$ ، بر حسب صد دلار، هزینه کل تولید $10x$ واحد از آن کالا است. متوسط هزینه کل تولید کالا را وقتی که تعداد واحدهای تولید شده تمام مقادیر بین ۰ تا ۲۰ را اختیار کند، به دست آورید. از نتیجه تمرین ۱۱ در بخش ۲.۶ برای مقدار انتگرال معین استفاده کنید.

۲۱. فرض کنید توپی از حالت سکون رها شده و بعد از t ثانیه سرعتش v فوت در ثانیه است. از مقاومت هوا صرف نظر کنید، و v را بر حسب t به صورت $v = f(t)$ بنویسید، سپس مقدار متوسط f بر $[0, 2]$ را پیدا کنید. (دانهمایی: با تعبیر انتگرال معین به عنوان اندازه مساحت ناحیه محدود به یک مثلث، مقدار انتگرال معین را به دست آورید.)

۲۲. مقدار متوسط تابع f را که به صورت $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ بر بازه $[0, 7]$ تعریف شده است، به دست آورید. نمودار تابع را رسم کنید. (دانهمایی: با تعبیر انتگرال معین به عنوان اندازه مساحت ناحیه محدود به یک ربع دایره، مقدار انتگرال معین را به دست آورید.)

۲۳. مقدار متوسط تابع f را که بر بازه $[-4, 4]$ به صورت $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ تعریف شده است، به دست آورید. نمودار تابع را رسم کنید. (دانهمایی: با تعبیر انتگرال معین به عنوان اندازه مساحت ناحیه محدود به یک نیمدایره، مقدار انتگرال معین را پیدا کنید.)

۲۴. فرض کنید تابع f بر $[-4, 7]$ انتگرال پذیر است. اگر مقدار متوسط f بر بازه $[-4, 7]$ برابر با $17/4$ باشد، $\int_{-4}^7 f(x) dx$ را به دست آورید.

۲۵. اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $\int_a^b f(x) dx = 0$ ، ثابت کنید حداقل یک عدد c در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که $f(c) = 0$.

۲۶. قضیه زیر تعمیمی از قضیه ۱۰.۴.۶ است: اگر توابع f و g بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند و برای تمام مقادیر x در بازه باز (a, b) ، داشته باشیم $g(x) > 0$ ، آنگاه عددی مانند X در $[a, b]$ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(X) \int_a^b g(x) dx$$

این قضیه را با روشی مشابه اثبات قضیه ۱۰.۴.۶ ثابت کنید: نامساوی $m \leq f(x) \leq M$ و سپس $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ را به دست آورید و قضیه ۸.۳.۶ را به کار ببرید.

۲۷. نشان دهید که وقتی $g(x) = 1$ ، قضیه تمرین ۲۶ همان قضیه ۱۰.۴.۶ خواهد بود.

در تمرینهای ۲۸ تا ۳۲، قضیه تمرین ۲۶ را برای اثبات نامساویها به کار ببرید.

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}} < \int_{-1}^1 x^2 dx \quad ۲۹ \qquad \int_0^4 \frac{x dx}{x^2+2} < \int_0^4 x dx \quad ۲۸$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx \leq \int_0^{\pi} e^x dx \quad ۳۰$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \pi x \cos \pi x dx \leq \int_{-1/2}^{1/2} \cos \pi x dx \quad ۳۱$$

$$\int_0^1 \frac{x \cos x}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x dx \quad ۳۲$$

۵.۶ قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

از نظر تاریخی، مفهوم انتگرال معین به صورت ابتدایی آن بیش از ۲۰۰۰ سال قبل، یعنی بسیار پیش از کشف حساب دیفرانسیل، توسط یونانیان باستان و به ویژه ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد) به کار رفته است.

در قرن هفدهم میلادی نیوتن و لایبنیتز، تقریباً همزمان باهم ولی مستقل از یکدیگر، نشان دادند که چگونه می توان با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال، مساحت یک ناحیه محدود به یک یا چند منحنی را با محاسبه انتگرال معین از طریق ضد مشتق گیری، به دست آورد. این روش با قضیه ای سروکار دارد که به قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال معروف است. قبل از بیان و اثبات این قضیه مهم، انتگرالهای معینی را که دارای یک حد بالای متغیر هستند مورد بحث قرار می دهیم و یک قضیه مقدماتی ارائه می کنیم.

فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. در این صورت، مقدار انتگرال

معین $\int_a^b f(x) dx$ تنها به تابع f و اعداد a و b بستگی دارد و به علامت x ، که در اینجا

به عنوان متغیر مستقل به کار می رود بستگی ندارد. در مثال ۲ از بخش ۲.۶، مقدار

$\int_1^3 x^2 dx$ را برابر با $\frac{8}{3}$ یافتیم. هر علامت دیگری را به جای x می توان به کار برد؛

به عنوان مثال،

$$\int_1^3 t^2 dt = \int_1^3 u^2 du = \int_1^3 r^2 dr = \frac{8}{3}.$$

اگر f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، در این صورت بنا به قضیه ۳.۲.۶، انتگرال معین

$\int_a^b f(t) dt$ وجود دارد. قبلاً گفتیم که اگر انتگرال معین موجود باشد، یک عدد یکتا است.

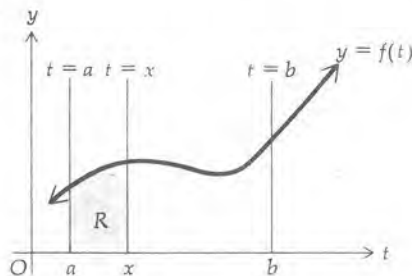
اگر x عددی در بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه f بر $[a, x]$ پیوسته است چون بر $[a, b]$ پیوسته

می‌باشد. در نتیجه، $\int_a^x f(t) dt$ موجود و عددی یکتاست که مقدارش بستگی به x دارد. بنابراین، $\int_a^x f(t) dt$ تابعی مانند F را تعریف می‌کند که قلمروش همه اعداد بازه بسته $[a, b]$ است و مقدار تابع در هر عددی مانند x در $[a, b]$ ، به صورت زیر می‌باشد

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (۱)$$

این نکته را در نمادگذاری به یاد داشته باشید که اگر حدود انتگرال معین متغیر باشند، علائم متفاوتی برای این حدود و برای متغیر مستقل انتگرال به کار برده می‌شود. از اینرو در (۱)، چون x حد بالای انتگرال است، حرف t را به عنوان متغیر مستقل انتگرال به کار بردیم.

اگر در معادله (۱)، برای تمام مقادیر t در بازه $[a, b]$ ، $f(t) \geq 0$ ، آنگاه مقدار تابع $F(x)$ را می‌توان از نظرهندسی به عنوان اندازه مساحت ناحیه محدود به منحنی با معادله $y = f(t)$ ، محور t ها، و خطوط $t = a$ و $t = x$ تعبیر کرد. (شکل ۱۰۵.۶ را ببینید). توجه کنید که $F(a) = \int_a^a f(t) dt$ ، که مقدارش بنا به تعریف ۰.۲۰۶ برابر با ۰ است.



شکل ۱۰۵.۶

اکنون به بیان و اثبات قضیه مهمی می‌پردازیم که به وسیله آن می‌توان مشتق تابعی مانند F را که به صورت یک انتگرال معین با یک حد بالای متغیر تعریف شده است، پیدا کرد. این قضیه بعضی اوقات «اولین قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال» نامیده می‌شود، و در این حالت، قضیه ۲.۵.۶ «دومین قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال» نام دارد.

۱۰۵.۶ قضیه فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و x عدد دلخواهی در $[a, b]$ باشد. اگر تابع F به صورت زیر تعریف شده باشد

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

آنگاه

$$F'(x) = f(x). \quad (۲)$$

اگر $x = a$ ، مشتق موجود در رابطه (۲) را مشتق راست در نظر می گیریم، و اگر $x = b$ ، مشتق موجود در (۲) را مشتق چپ می گیریم.

اثبات دودعد x_1 و $x_1 + \Delta x$ را در $[a, b]$ در نظر بگیرید. در این صورت

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t) dt$$

و

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt.$$

بنابراین

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt. \quad (۳)$$

بنا به قضیه ۷.۳.۶، داریم

$$\int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt$$

و یا

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt. \quad (۴)$$

با قراردادن مقدار از (۴) در (۳) خواهیم داشت

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt. \quad (۵)$$

بنا به قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (۱.۴.۶)، عددی مانند X در بازه بسته ای که محدود به x_1 و $x_1 + \Delta x$ است، وجود دارد به طوری که

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t) dt = f(X) \Delta x. \quad (۶)$$

از (۵) و (۶) به دست می آید

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(X) \Delta x.$$

یا، اگر طرفین را بر Δx تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(X).$$

با گرفتن حد وقتی که Δx به سمت صفر میل می کند، داریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(X). \quad (۷)$$

سمت چپ معادله (۷) برابر با $F'(x_1)$ است. برای تعیین $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(X)$ ، به یاد آورید که X

در بازه بسته ای قرار دارد که محدود به x_1 و $x_1 + \Delta x$ می باشد و چون

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_1 + \Delta x) = x_1 \quad \text{و} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 = x_1$$

از قضیه افشردگی (۱.۹.۲) نتیجه می شود که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} X = x_1$. چون f در x_1 پیوسته

است، پس داریم $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(X) = \lim_{x \rightarrow x_1} f(X) = f(x_1)$ ؛ بنابراین، از (۷) به دست می آوریم

$$F'(x_1) = f(x_1). \quad (۸)$$

اگر تابع f برای مقادیر x کوچکتر از a تعریف نشده باشد اما از طرف راست در a پیوسته باشد، آنگاه در استدلال بالا اگر در (۷)، $x_1 = a$ ، Δx بایستی از راست به سمت صفر میل کند. پس طرف چپ (۸)، $F'_+(x_1)$ خواهد بود. به طور مشابه، اگر f برای مقادیر x بزرگتر از b تعریف نشده باشد اما از طرف چپ در b پیوسته باشد، آنگاه اگر در (۷)، $x_1 = b$ ، Δx بایستی از چپ به سمت صفر میل کند. پس در طرف چپ (۸)، $F'_-(x_1)$ را خواهیم داشت.

چون x_1 عددی دلخواه در $[a, b]$ است، معادله (۸) آنچه را که می خواهیم ثابت کنیم، بیان می کند. $\square$

قضیه ۱.۵.۶ می گوید که انتگرال معین $\int_a^x f(t) dt$ با حد بالای متغیر، x ، یک ضد مشتق f می باشد.

مثال ۱ با به کارگیری قضیه ۱.۵.۶، $D_x \int_1^x \sqrt{2+t} dt$ را به دست آورید.

حل با استفاده از نمادهای صورت قضیه ۱.۵.۶ داریم

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t+2} dt \quad f(t) = \sqrt{t+2}$$

و $a=1$. پس، بنا به قضیه

$$F'(x) = f(x).$$

بنابراین

$$\blacktriangle D_x \int_1^x \sqrt{t+2} dt = \sqrt{x+2}$$

اکنون قضیه ۱۰.۵.۶ را برای اثبات قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار می‌بریم.

۲.۵.۶ قضیه (قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و g چنان تابعی باشد که به ازای هر x در $[a, b]$

$$g'(x) = f(x). \quad (9)$$

در این صورت

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

(اگر $x=a$ یا $x=b$ ، آنگاه مشتق موجود در (۹) به ترتیب مشتق راست یا مشتق چپ در نظر گرفته می‌شود.)

اثبات اگر f به ازای تمام اعداد واقع در $[a, b]$ پیوسته باشد، بنا به قضیه ۱.۵.۶ می‌دانیم که انتگرال معین $\int_a^x f(t) dt$ با حد بالای متغیر، x ، تابعی مانند F را تعریف می‌کند که مشتق آن بر $[a, b]$ ، تابع f است، زیرا با فرض $g'(x) = f(x)$ ، از قضیه ۲.۲.۵ نتیجه می‌شود

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt + k \quad (10)$$

که k عددی ثابت است.

با قرار دادن $x=a$ و $x=b$ ، به ترتیب، در (۱۰) به دست می‌آوریم

$$g(b) = \int_a^b f(t) dt + k \quad (11)$$

و

$$g(a) = \int_a^a f(t) dt + k. \quad (۱۲)$$

از (۱۱) و (۱۲) داریم

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt.$$

اما، با توجه به تعریف ۶.۲.۶، می‌دانیم $\int_a^a f(t) dt = 0$ ؛ بنابراین

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر f برای مقادیر x بزرگتر از b تعریف نشده باشد اما از طرف چپ در b پیوسته باشد، در این صورت مشتق در (۹) مشتق چپ است، و داریم $g'_-(b) = F'_-(b)$ که (۱۱) از آن نتیجه می‌شود. به‌طور مشابه، اگر f برای مقادیر x کوچکتر از a تعریف نشود ولی از راست در a پیوسته باشد، در این صورت مشتق در (۹) مشتق راست است، و داریم $g'_+(a) = F'_+(a)$ ، که از آن رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود. $\square$

اکنون در موقعیتی هستیم که مقدار دقیق يك انتگرال معین را با استفاده از قضیه ۲.۵.۶ به‌دست آوریم. هنگام استفاده از این قضیه، $[g(b) - g(a)]$ را با $\int_a^b g(x)$ نشان می‌دهیم.

○ نمونه ۱ قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای محاسبه انتگرال معین زیر به‌کار می‌بریم

$$\int_1^3 x^2 dx.$$

در اینجا $f(x) = x^2$. يك ضد مشتق x^2 برابر با $x^3/3$ است. از اینرو، انتخاب زیر را انجام می‌دهیم

$$g(x) = \frac{x^3}{3}.$$

بنابراین، با توجه به قضیه ۲.۵.۶،

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 dx &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} \\ &= 8\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

این نتیجه را با نتیجه مثال ۲ از بخش ۲.۶ مقایسه کنید.

به علت ارتباط انتگرال معین و ضد مشتق، علامت انتگرال $\int$ را در نماد $\int f(x) dx$ برای ضد مشتق به کار بردیم. اکنون، اصطلاحات ضد مشتق و ضد مشتق گیری را کنار می گذاریم و $\int f(x) dx$ را **انتگرال نامعین** «ایف ایکس، دی ایکس» می خوانیم. فرایند محاسبه یک انتگرال معین یا نامعین، **انتگرال گیری** نامیده می شود. باید بر تفاوت بین انتگرال نامعین و انتگرال معین تأکید کرد. انتگرال نامعین $\int f(x) dx$ به عنوان تابعی چون g تعریف می شود، به طوری که $D_x[g(x)] = f(x)$. ولی، انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ عددی است که مقدارش بستگی به تابع f و اعداد a و b دارد، و به صورت حد یک مجموع ریمانی تعریف می شود. در تعریف انتگرال معین، هیچ ارجاعی به مشتق گیری نمی شود.

صورت کلی انتگرال نامعین دارای یک ثابت اختیاری است؛ به عنوان مثال

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

این ثابت اختیاری، یک ثابت **انتگرال گیری** نامیده می شود. در به کار بردن قضیه بنیادی برای محاسبه انتگرال معین، احتیاجی به گنجاندن ثابت اختیاری C در عبارت مربوط به $g(x)$ نداریم، چون قضیه بنیادی اجازه انتخاب هر ضد مشتق، از جمله ضد مشتقی که برای آن $C = 0$ ، را می دهد.

مثال ۲ $\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx &= \int_{1/2}^4 x^3 dx - 6 \int_{1/2}^4 x^2 dx \\ &\quad + 9 \int_{1/2}^4 x dx + \int_{1/2}^4 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 9 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_{1/2}^4 \\ &= (64 - 128 + 72 + 4) - \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{679}{64}. \end{aligned}$$

مثال ۳ $\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx$ را محاسبه کنید

حل

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx &= \left[\frac{3}{5} x^{7/3} + 4 \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{3}{5} + 3 - \left(-\frac{3}{5} + 3 \right) \\ &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

مثال ۴ $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{2}{3} \int_0^2 \sqrt{x^2 + 1} (3x^2 dx) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 \\ &= \frac{4}{9} (8 + 1)^{3/2} - \frac{4}{9} (0 + 1)^{3/2} \\ &= \frac{4}{9} (27 - 1) = \frac{104}{9}. \end{aligned}$$

مثال ۵ $\int_0^3 x \sqrt{1+x} dx$ را محاسبه کنید.

حل برای محاسبه انتگرال نامعین $\int x \sqrt{x+1} dx$ فرض می کنیم

$$u = \sqrt{1+x} \quad u^2 = 1+x \quad x = u^2 - 1 \quad dx = 2u du$$

با منظور کردن این جانشینیها،

$$\begin{aligned}
 \int x\sqrt{1+x} dx &= \int (u^2 - 1)u(2u du) \\
 &= 2 \int (u^4 - u^2) du \\
 &= \frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 + C \\
 &= \frac{2}{5} (1+x)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

بنابراین برای انتگرال معین داریم

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x\sqrt{1+x} dx &= \left[\frac{2}{5} (1+x)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \right]_0^3 \\
 &= \frac{2}{5} (4)^{5/2} - \frac{2}{3} (4)^{3/2} - \frac{2}{5} (1)^{5/2} + \frac{2}{3} (1)^{3/2} \\
 &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{116}{15}.
 \end{aligned}$$

▲

روش دیگر محاسبه انتگرال معین در مثال ۵، شامل تغییر حدود انتگرال به مقادیر u است. طرز کار در نمونه زیر نشان داده شده است. غالباً این روش دوم کوتاهتر است و توجیه آن بلافاصله از قضایای ۹.۲.۵ و ۲.۵.۶ نتیجه می‌شود.

○ نمونه ۲ چون $u = \sqrt{1+x}$ ، مشاهده می‌شود که وقتی $x=0$ ، $u=1$ ؛ و وقتی $x=3$ ، $u=2$. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x\sqrt{1+x} dx &= 2 \int_1^2 (u^4 - u^2) du \\
 &= \left[\frac{2}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 \right]_1^2 \\
 &= \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{116}{15}.
 \end{aligned}$$

○

مثال ۶ $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x (\cos x \, dx) \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x) (\cos x \, dx) .\end{aligned}$$

فرض کنید $u = \sin x$ ؛ پس $du = \cos x \, dx$. وقتی $x = 0$ ، $u = 0$ ؛ و وقتی $x = \pi/2$ ، $u = 1$. بنابراین

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx &= \int_0^1 (1 - u^2) \, du \\ &= \left[u - \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} .\end{aligned}$$

▲

مثال ۷ $\int_{-3}^4 |x+2| \, dx$ را محاسبه کنید.

حل اگر $f(x) = |x+2|$ ، به جای پیدا کردن ضد مشتق f به طور مستقیم، $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x \leq -2 \end{cases}$$

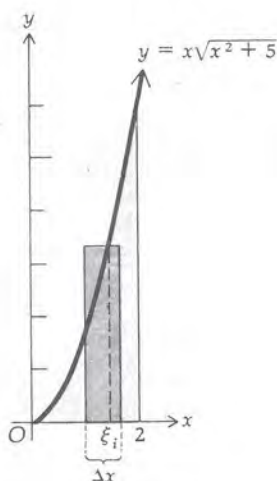
از قضیه ۷.۳.۶ داریم

$$\begin{aligned}\int_{-3}^4 |x+2| \, dx &= \int_{-3}^{-2} (-x-2) \, dx + \int_{-2}^4 (x+2) \, dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^4 \\ &= \frac{1}{2} + 18 \\ &= \frac{37}{2} .\end{aligned}$$

▲

مثال ۸ مساحت ناحیه‌ای در ربع اول را که محصور بین منحنی $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ ، محور x ها، و خط $x = 2$ است، به دست آورید. نمودار را رسم کنید.

حل شکل ۲۰۵.۶ را ببینید. ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲۰۵.۶

افراز منظمی از بازه $[0, 2]$ را در نظر می‌گیریم. طول قاعده هر مستطیل برابر با Δx واحد و ارتفاع زمین مستطیل برابر با $\xi_i \sqrt{\xi_i^2 + 5}$ واحد است که ξ_i عددی دلخواه در زمین زیربازه است. بنابراین، اندازه مساحت این جزء مستطیلی برابر با $\xi_i \sqrt{\xi_i^2 + 5} \Delta x$ است. مجموع اندازه مساحت‌های n تا از این مستطیلها برابر مجموع ریمانی زیر است:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{\xi_i^2 + 5} \Delta x.$$

حد این مجموع وقتی که Δx به سمت صفر میل می‌کند (یا $n \rightarrow +\infty$) اندازه مساحت مورد نظر را می‌دهد. حد مجموع ریمانی یک انتگرال معین است که به وسیله قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، آن را به دست می‌آوریم. فرض کنید A واحد مربع، مساحت ناحیه باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \sqrt{\xi_i^2 + 5} \Delta x \\
 &= \int_0^2 x \sqrt{x^2 + 5} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{x^2 + 5} (2x dx) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2 + 5)^{3/2} \Big|_0^2 \\
 &= \frac{1}{3} [(9)^{3/2} - (5)^{3/2}] \\
 &= \frac{1}{3} (27 - 5\sqrt{5}).
 \end{aligned}$$

▲ پس، مساحت، برابر با $(27 - 5\sqrt{5})/3$ واحد مربع است.

مثال ۹ تابع $f(x) = \sin^2 x$ داده شده است؛ مقدار متوسط تابع f بر بازه $[-\pi/2, \pi/2]$ را به دست آورید.

حل فرض کنید مقدار متوسط تابع f بر $[-\pi/2, \pi/2]$ ، برابر با $A \cdot V$ باشد. بنا به تعریف ۲.۴.۶ داریم

$$\begin{aligned}
 A \cdot V &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx - \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x (2 dx) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin(-\pi) \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{4} + 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۵.۶

در تمرینهای ۱ تا ۳۶، با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$۱. \int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx \quad ۲. \int_0^4 (x^3 - x^2 + 1) dx$$

$$۳. \int_2^9 (x^2 - 2x) dx \quad ۴. \int_{-1}^2 (3x^2 + 5x - 1) dx$$

$$۵. \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x^2} dx \quad ۶. \int_{-2}^5 (y^3 - 4y) dy$$

$$۷. \int_0^1 \frac{z}{(z^2 + 1)^2} dz \quad ۸. \int_1^4 \sqrt{x}(2+x) dx$$

$$۹. \int_1^{10} \sqrt{5x-1} dx \quad ۱۰. \int_0^{\sqrt{5}} t \sqrt{t^2+1} dt$$

$$۱۱. \int_{-2}^0 3w \sqrt{4-w^2} dw \quad ۱۲. \int_{-1}^2 \frac{dy}{(y+2)^2}$$

$$۱۳. \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx \quad ۱۴. \int_0^{\pi} \cos^2 x dx$$

$$۱۵. \int_1^2 t^2 \sqrt{t^2+1} dt \quad ۱۶. \int_1^2 \frac{x dx}{(3x^2-1)^2}$$

$$۱۷. \int_0^1 \frac{(y^2+2y) dy}{\sqrt{y^3+3y^2+2y}} \quad ۱۸. \int_2^4 \frac{w^4 - w}{w^2} dw$$

$$۱۹. \int_0^{10} \frac{w dw}{(1+w)^{7/4}} \quad ۲۰. \int_4^5 x^2 \sqrt{x-4} dx$$

$$۲۱. \int_{-2}^5 |x-3| dx \quad ۲۲. \int_{-4}^4 |x-2| dx$$

$$۲۳. \int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x} dx \quad ۲۴. \int_{-2}^2 \sqrt{3+|x|} dx$$

$$\int_{-2}^1 (x+1)\sqrt{x+3} dx \quad ۲۶ \qquad \int_0^2 (x+2)\sqrt{x+1} dx \quad ۲۵$$

$$\int_1^4 \frac{x^5 - x}{x^3} dx \quad ۲۸ \qquad \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x+1} dx \quad ۲۷$$

(دانهمایی برای ۲۷: صورت را برمخرج تقسیم کنید.)

$$\int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1+x} \sqrt{x} dx \quad ۳۰ \qquad \int_1^{16} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) dt \quad ۲۹$$

$$\int_{-2}^2 \frac{3x^3 - 24x^2 + 48x + 5}{x^2 - 8x + 16} dx \quad ۳۲ \qquad \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{(x+1)^2} dx \quad ۳۱$$

(دانهمایی برای تمرینهای ۳۱ و ۳۲: صورت را برمخرج تقسیم کنید.)

$$\int_0^1 \sin^2 \frac{1}{4} \pi t dt \quad ۳۴ \qquad \int_0^1 \sin^2 \pi x \cos^2 \pi x dx \quad ۳۳$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin 2x \cos 4x dx \quad ۳۶ \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt \quad ۳۵$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۲، با استفاده از قضیه ۱۰.۵.۶ مشتق را بیابید.

$$D_x \int_2^x \frac{dt}{t^4 + 4} \quad ۳۸ \qquad D_x \int_0^x \sqrt{4+t^2} dt \quad ۳۷$$

$$D_x \int_x^5 \sqrt{1+t^2} dt \quad ۴۰ \qquad D_x \int_x^2 \sqrt{\sin t} dt \quad ۳۹$$

$$D_x \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \quad ۴۲ \qquad D_x \int_{-x}^x \frac{dt}{3+t^2} \quad ۴۱$$

در تمرینهای ۴۳ تا ۴۸، مساحت ناحیه محدود به منحنی و خطوط مفروض را پیدا کنید. شکلی رسم کنید که ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح را نشان دهد. همچنین، اندازه مساحت ناحیه را به صورت حد یک مجموع (یمانی، و سپس با استفاده از نماد انتگرال معین بنویسید. انتگرال معین را با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آورید.

$$۴۳. y = 4 - x^2: \text{محور } x \text{ ها}$$

$$۴۴. y = x^2 - 2x + 3: \text{محور } x \text{ ها}; x = -2: x = 1$$

۴۵. $y = 4x - x^2$ ؛ محور x ها؛ $x = 1$ ؛ $x = 3$

۴۶. $y = 6 - x - x^2$ ؛ محور x ها

۴۷. $y = \sqrt{x+1}$ ؛ محور x ها؛ محور y ها؛ $x = 8$

۴۸. $y = \frac{1}{x^2} - x$ ؛ محور x ها؛ $x = 2$ ؛ $x = 3$

۴۹. مساحت ناحیه محدود به يك قوس از منحنی سینوسی را به دست آورید.

در تمرینهای ۵۰ تا ۵۳، مقدار متوسط تابع f بر بازه داده شده $[a, b]$ را به دست آورید. در تمرینهای ۵۰ و ۵۱، مقداری از x را بیابید که به ازای آن، مقدار متوسط تابع f به دست می آید، و نموداری رسم کنید.

۵۰. $f(x) = 9 - x^2$ ؛ $[a, b] = [0, 3]$

۵۱. $f(x) = 8x - x^2$ ؛ $[a, b] = [0, 4]$

۵۲. $f(x) = 3x\sqrt{x^2 - 16}$ ؛ $[a, b] = [4, 5]$

۵۳. $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$ ؛ $[a, b] = [7, 12]$

۵۴. معادله تقاضا برای کالایی معین به صورت $x^2 + p^2 = 100$ است که در آن، p دلار قیمت يك واحد کالا است. وقتی که تقاضا $100x$ واحد باشد، متوسط درآمد کل را وقتی که تعداد واحدهای مورد تقاضا تمام مقادیر بین ۶۰۰ تا ۸۰۰ را اختیار کند به دست آورید.

۵۵. در يك مدار الکتریکی، فرض کنید نیروی محرکه الکتریکی در ثانیه t ، E ولت باشد و $E = 2 \sin 3t$. مقدار متوسط E از $t = 0$ تا $t = \pi/3$ را پیدا کنید.

۵۶. برای مدار الکتریکی تمرین ۵۵، ریشه دوم مقدار متوسط E^2 از $t = 0$ تا $t = \pi/3$ را به دست آورید.

۵۷. تویی از حالت سکون رها می شود و بعد از t ثانیه سرعت آن v فوت در ثانیه است. از مقاومت هوا صرف نظر کرده، نشان دهید که سرعت متوسط توپ در خلال $T/2$ ثانیه اول، يك سوم سرعت متوسط آن در خلال $T/2$ ثانیه بعدی است.

۵۸. سنگی را با سرعت اولیه v_0 فوت در ثانیه به طرف پایین پرتاب می کنیم. از مقاومت

هوا صرف نظر کرده و (الف) نشان دهید که اگر سرعت سنگ بعد از طی s فوت برابر v فوت در ثانیه باشد، در این صورت $v = \sqrt{v_0^2 + 2gs}$ ؛ (ب) سرعت متوسط سنگ را در خلال ۱۰۰ فوت اول در صورتی که سرعت اولیه آن ۶۰ فوت در ثانیه باشد، به دست آورید. (فرض کنید $g = ۳۲$ ، و سمت پایین را جهت مثبت محسوب کنید.)

$$۵۹. \int_4^{16} \left[D_x \int_0^x (2\sqrt{t} - 1) dt \right] dx \text{ را به دست آورید.}$$

۶۰. فرض کنید f تابعی است که مشتق آن، f' ، بر $[a, b]$ پیوسته است. مقدار متوسط ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f روی بازه $[a, b]$ را به دست آورید و یک تعبیر هندسی از نتیجه را بیان کنید.

در تمرینهای ۶۱ تا ۶۳، m و n اعداد صحیح دلخواهی بجز صفر هستند؛ درستی فرمولهای داده شده را نشان دهید.

$$۶۱. \int_{-1}^1 \cos n\pi x \cos m\pi x dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

$$۶۲. \int_{-1}^1 \cos n\pi x \sin m\pi x dx = 0$$

$$۶۳. \int_{-1}^1 \sin n\pi x \sin m\pi x dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

$$۶۴. \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx \text{ را به دست آورید.}$$

۶.۶ انتگرال گیری تقریبی

در محاسبه انتگرال معین با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، ضروری است که انتگرال نامعین محاسبه شود. در بخش ۵.۶ انتگرال نامعین را با استفاده از تکنیکهای ارائه شده در بخشهای ۲.۵ و ۳.۵ به دست آوردیم. اگرچه در فصل ۱۰ روشهای دیگری را برای به دست آوردن انتگرال نامعین یاد خواهیم گرفت، اما باز هم توابع زیادی باقی می ماند که برای آنها نمی توان انتگرال معین را با استفاده از توابع مقدماتی دقیقاً

به دست آورد. انتگرالهای $\int_0^{\pi/2} \sin x^2 dx$ و $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ مثالهایی از چنین انتگرالهای معینی هستند. مثالهای دیگری در تمرینهای ۲۹ تا ۳۴ داده شده است. در این بخش، دو روش برای محاسبه مقدار تقریبی انتگرال معین توابعی که بزرگ بازه بسته پیوسته اند، می آموزیم. این روشها غالباً می توانند جوابهایی به دست دهند که در حد قابل قبولی دقیق باشند و می توان از آنها برای به دست آوردن انتگرال معین با محاسبات عددی استفاده کرد. اولین روش به عنوان قاعده ذوزنقه ای شناخته می شود.

فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ باشد. انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ برابر است با حد يك مجموع ریمانی، به صورت زیر

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x.$$

تعبیر هندسی مجموع ریمانی، یعنی

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

این است که این مجموع برابر است با مجموع اندازه مساحت مستطیلهایی که بالای محور x ها واقع اند، به علاوه قرینه اندازه مساحت مستطیلهایی که زیر محور x ها قرار دارند (شکل ۳۰.۲.۶ را ببینید).

برای پیدا کردن اندازه تقریبی مساحت يك ناحیه، به جای مستطیلهای ذوزنقه ها استفاده می کنیم؛ و همچنین افرازهای منظم و مقادیر تابع در نقاط مساوی الفاصله را به کار می بریم.

بنابراین، برای انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ ، بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه مساوی به طول $\Delta x = (b-a)/n$ تقسیم می کنیم. در این صورت، $(n+1)$ نقطه زیر را خواهیم داشت:

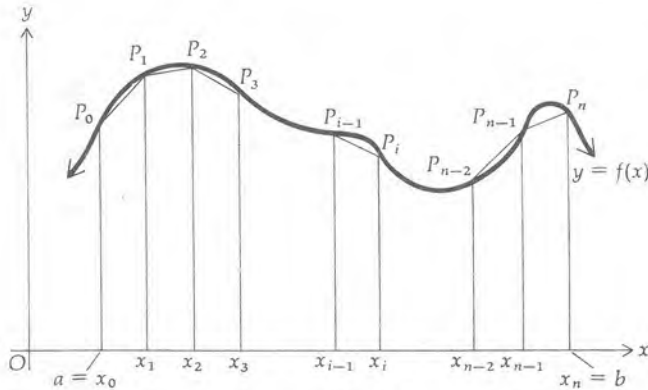
$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

پس، انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ را می توان به صورت مجموع n انتگرال معین زیر نوشت

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \\ &+ \dots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x) dx \quad (1) \end{aligned}$$

برای تعبیر هندسی رابطه (۱) به شکل ۱۰.۶.۶ مراجعه کنید، که در آن برای تمام x های

در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq 0$ ؛ ولی، رابطه (۱) برای هر تابع پیوسته بر بازه $[a, b]$ ، برقرار است.



شکل ۱۰۶.۶

پس، انتگرال $\int_a^{x_1} f(x) dx$ برابر است با اندازه مساحت ناحیه محصور بین محور x ها، خطوط $x = a$ و $x = x_1$ و آن قسمت از منحنی $y = f(x)$ که از P_0 تا P_1 امتداد دارد. مقدار این انتگرال را می توان به طور تقریبی و بدعنوان اندازه مساحت ذوزنقه ای که از خطوط $x = a$ ، $x = x_1$ ، P_0P_1 ، و محور x ها تشکیل می شود، به دست آورد. اندازه مساحت این ذوزنقه برابر است با

$$\frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \Delta x.$$

به طریق مشابه، سایر انتگرالهای طرف راست رابطه (۱) را می توان به طور تقریبی به وسیله اندازه مساحت ذوزنقه ها پیدا نمود. برای انتگرال i م داریم

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \frac{1}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \Delta x. \quad (2)$$

بنابراین، اگر برای هر کدام از انتگرالهای طرف راست (۱) از رابطه (۲) استفاده کنیم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \Delta x + \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \Delta x + \dots \\ &+ \frac{1}{2} [f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] \Delta x + \frac{1}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \Delta x. \end{aligned}$$

پس

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{4} \Delta x [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (3)$$

فرمول (۳) قاعده ذوزنقه‌ای نامیده می‌شود و در قضیه زیر به‌طور رسمی بیان می‌شود.

۱۰.۶.۶ قضیه (قاعده ذوزنقه‌ای) اگر f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و اعداد $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ افراز منظمی از $[a, b]$ تشکیل دهند، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

مثال ۱ انتگرال معین $\int_0^3 dx/(16+x^2)$ را با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای با $n=6$ محاسبه کنید. نتیجه را با سه رقم اعشار بیان کنید.

حل چون $[a, b] = [0, 3]$ و $n=6$

$$\frac{b-a}{2n} = 0.25 \text{ و } \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \\ & \approx 0.25 [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + \\ & \quad 2f(x_5) + f(x_6)] \end{aligned}$$

که در آن $f(x) = 1/(16+x^2)$. محاسبه مجموع داخل کروشه فوق در جدول ۱۰.۶.۶ نشان داده شده است. بنابراین

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.25 (0.6427)$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.1607$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2} \approx 0.161$$

جدول ۱۰.۶.۶

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
۰	۰	۰.۰۰۶۲۵	۱	۰.۰۰۶۲۵
۱	۰.۵	۰.۰۰۶۱۵	۲	۰.۰۱۲۳۰
۲	۱	۰.۰۰۵۸۸	۲	۰.۰۱۱۷۶
۳	۱.۵	۰.۰۰۵۴۸	۲	۰.۰۱۰۹۶
۴	۲	۰.۰۰۵۰۰	۲	۰.۰۱۰۰۰
۵	۲.۵	۰.۰۰۴۵۰	۲	۰.۰۰۹۰۰
۶	۳	۰.۰۰۴۰۰	۱	۰.۰۰۴۰۰

$$\sum_{i=0}^6 k_i f(x_i) = ۰.۰۶۴۲۷$$

مقدار دقیق این انتگرال معین را می‌توان با استفاده از تابع تانژانتی معکوس به دست آورد. این تکنیک را در بخش ۵.۹ بررسی خواهیم کرد. مقدار دقیق انتگرال با چهار رقم اعشار برابر با ۰.۱۶۰۹ می‌باشد. ▲

برای بررسی دقت تقریب يك انتگرال معین با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای، ابتدا ثابت می‌کنیم که حد تقریب در قاعده ذوزنقه‌ای، وقتی Δx به سمت صفر میل کند و n به طور ییکران افزایش یابد، برابر با مقدار دقیق انتگرال معین خواهد بود. فرض کنید

$$T = \frac{1}{4} \Delta x [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

در این صورت

$$T = [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \Delta x + \frac{1}{4} [f(x_0) - f(x_n)] \Delta x$$

و یا

$$T = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \frac{1}{4} [f(a) - f(b)] \Delta x.$$

بنابراین، اگر $n \rightarrow +\infty$ ، $\Delta x \rightarrow 0$ ، و داریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{4} [f(a) - f(b)] \Delta x$$

$$= \int_a^b f(x) dx + o.$$

پس، تفاضل بین T و مقدار انتگرال معین را به قدر دلخواه می توان کوچک کرد، اگر n را به اندازه کافی بزرگ (و در نتیجه Δx را به اندازه کافی کوچک) انتخاب کنیم. قضیه زیر که در آنالیز عددی اثبات می شود، روشی برای بر آورد کردن مقدار خطا در استفاده از قاعده ذوزنقه ای ارائه می دهد. خطا را با ε_T نشان می دهیم.

۲.۶۰۶ قضیه فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است و f' و f'' هر دو بر $[a, b]$ موجودند. اگر

$$\varepsilon_T = \int_a^b f(x) dx - T$$

که T مقدار تقریبی $\int_a^b f(x) dx$ است که از قاعده ذوزنقه ای به دست می آید، آنگاه عددی مانند η در بازه $[a, b]$ وجود دارد که

$$\varepsilon_T = -\frac{1}{12} (b-a) f''(\eta) (\Delta x)^2. \quad (4)$$

مثال ۲ کرانه های خطا در نتیجه مثال ۱ را پیدا کنید.

حل ابتدا مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $f''(x)$ بر $[0, 3]$ را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= (16+x^2)^{-1} \\ f'(x) &= -2x(16+x^2)^{-2} \\ f''(x) &= 8x^2(16+x^2)^{-3} - 2(16+x^2)^{-2} = (6x^2-32)(16+x^2)^{-3} \\ f'''(x) &= -6x(6x^2-32)(16+x^2)^{-4} + 12x(16+x^2)^{-3} \\ &= 24x(16-x^2)(16+x^2)^{-4}. \end{aligned}$$

چون برای تمام x های در بازه باز $(0, 3)$ داریم $f'''(x) > 0$ ، پس f'' بر بازه باز $(0, 3)$ صعودی است. بنابراین، مقدار مینیمم مطلق f'' روی $[0, 3]$ ، $f''(0)$ است، و مقدار ماکسیمم مطلق f'' روی $[0, 3]$ ، $f''(3)$ است. داریم

$$f''(3) = \frac{22}{15625} \text{ و } f''(0) = -\frac{1}{128}$$

اگر در طرف راست (۴) فرض کنیم $\eta = 0$ ، به دست می آید

$$-\frac{3}{12} \left(-\frac{1}{128} \right) \frac{1}{4} = \frac{1}{2048}.$$

اگر در طرف راست (۴) فرض کنیم $\eta = 3$ ، داریم

$$-\frac{3}{12} \left(\frac{22}{15625} \right) \frac{1}{4} = -\frac{11}{125000}.$$

بنابراین، اگر ε_T خطا در نتیجه مثال ۱ باشد، خواهیم داشت

$$-\frac{11}{125000} \leq \varepsilon_T \leq \frac{1}{2048}$$

$$\blacktriangle \quad -0.00001 \leq \varepsilon_T \leq 0.00005.$$

اگر در قضیه ۲.۶.۶، $f(x) = mx + b$ ، آنگاه برای تمام x ها داریم $f''(x) = 0$. بنابراین $\varepsilon_T = 0$ ؛ پس قاعده ذوزنقه‌ای مقدار دقیق انتگرال معین یک تابع خطی را می‌دهد. روش دیگر تقریب کردن مقدار یک انتگرال معین با استفاده از قاعده سیمپسون فراهم می‌آید (که گاهی قاعده سهموی نیز نامیده می‌شود). برای یک افراز داده شده از بازه بسته $[a, b]$ ، قاعده سیمپسون معمولاً تقریب بهتری می‌دهد تا قاعده ذوزنقه‌ای. در قاعده ذوزنقه‌ای نقاط متوالی روی نمودار $y = f(x)$ را به وسیله قطعه‌هایی از خطوط مستقیم به هم وصل می‌کردیم، درحالی که در قاعده سیمپسون نقاط را به وسیله قطعاتی از سهمی به هم وصل می‌کنیم. قبل از بحث بیشتر درباره قاعده سیمپسون، قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم که به آن نیاز خواهیم داشت.

۳.۶.۶ قضیه فرض کنید $P_0(x_0, y_0)$ ، $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ سه نقطه ناهمخط روی سهمی به معادله $y = Ax^2 + Bx + C$ باشند که در آن $y_0 \geq 0$ ، $y_1 \geq 0$ ، $y_2 \geq 0$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ و $x_1 = x_0 + h$. در این صورت، اندازه مساحت ناحیه محصور بین سهمی، محور x ها، و خطوط $x = x_0$ و $x = x_2$ برابر است با

$$\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

اثبات سهمی به معادله $y = Ax^2 + Bx + C$ دارای یک محور قائم است. شکل ۲.۶.۶ نشان‌دهنده ناحیه محصور بین سهمی، محور x ها، و خطوط $x = x_0$ و $x = x_2$ است. چون نقاط P_0 ، P_1 و P_2 نقاطی روی سهمی هستند، پس مختصات آنها در معادله سهمی صدق می‌کنند. بنابراین، با قراردادن $x_0 + h$ به جای x_1 و $x_0 + 2h$ به جای x_2 ، داریم

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C$$

$$y_1 = A(x_0 + h)^2 + B(x_0 + h) + C$$

$$= A(x_0^2 + 2hx_0 + h^2) + B(x_0 + h) + C$$

$$y_2 = A(x_0 + 2h)^2 + B(x_0 + 2h) + C$$

$$= A(x_0^2 + 4hx_0 + 4h^2) + B(x_0 + 2h) + C.$$

بنا بر این

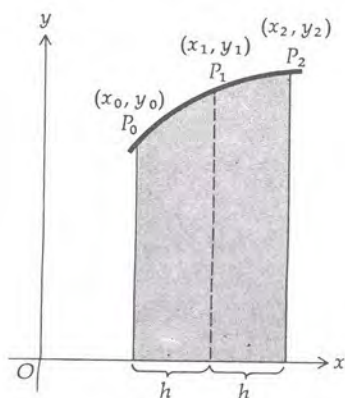
$$y_0 + \frac{1}{2}y_1 + y_2 = A(x_0^2 + \frac{1}{2}hx_0 + \frac{1}{8}h^2) + B(x_0 + \frac{1}{2}h) + \frac{1}{6}C. \quad (5)$$

حال اگر مساحت ناحیه را K واحد مربع فرض کنیم، آنگاه K به وسیله حد یک مجموع ریمانی، به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (A\xi_i^2 + B\xi_i + C) \Delta x \\ &= \int_{x_0}^{x_0 + 2h} (Ax^2 + Bx + C) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \right]_{x_0}^{x_0 + 2h} \\ &= \frac{1}{3}A(x_0 + 2h)^3 + \frac{1}{2}B(x_0 + 2h)^2 + C(x_0 + 2h) \\ &\quad - \left(\frac{1}{3}Ax_0^3 + \frac{1}{2}Bx_0^2 + Cx_0 \right) \\ &= \frac{1}{3}h[A(x_0^2 + \frac{1}{2}hx_0 + \frac{1}{8}h^2) + B(x_0 + \frac{1}{2}h) + \frac{1}{6}C]. \quad (6) \end{aligned}$$

از (۵) در (۶) قرار می دهیم

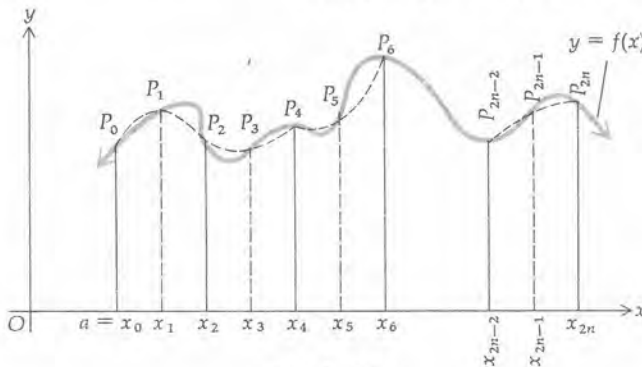
$$K = \frac{1}{3}h[y_0 + \frac{1}{2}y_1 + y_2].$$



شکل ۲۰.۶.۶

□

فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد. افراز منظمی از بازه $[a, b]$ را که دارای $2n$ زیر بازه است، در نظر بگیرید (به این علت $2n$ را به جای n به کار می‌بریم که می‌خواهیم تعداد زیر بازه‌ها زوج باشد). طول هر زیر بازه برابر است با $\Delta x = (b-a)/2n$. فرض کنید نقاطی از منحنی $y = f(x)$ که طولشان این نقاط افرازه‌ستند، با $P_0(x_0, y_0)$ ، $P_1(x_1, y_1)$ ، $\dots$ ، $P_{2n}(x_{2n}, y_{2n})$ نشان داده شوند؛ شکل ۳.۶.۶ را ببینید که در آن، برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq 0$.



شکل ۳.۶.۶

حال، قطعه‌ای از منحنی $y = f(x)$ از نقطه P_0 تا نقطه P_4 را به وسیله قطعه‌ای از سهمی با محور قائم که از نقاط P_0 ، P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 می‌گذرد، تقریب می‌کنیم. بنابه قضیه ۳.۶.۶، اندازه مساحت ناحیه محصور بین این سهمی، محور x ها، و خطوط $x = x_0$ و $x = x_4$ ، به صورت زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3} \Delta x (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

به‌طور مشابه، قطعه‌ای از منحنی $y = f(x)$ از P_4 تا P_6 را با قطعه‌ای از سهمی با محور قائم که از نقاط P_4 ، P_5 ، P_6 و P_4 می‌گذرد، تقریب می‌کنیم. اندازه مساحت ناحیه محصور بین این سهمی، محور x ها، و خطوط $x = x_4$ و $x = x_6$ برابر است با

$$\frac{1}{3} \Delta x [f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)] \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3} \Delta x (y_4 + 4y_5 + y_6)$$

این فرایند برای n تا از این گونه ناحیه‌ها ادامه می‌یابد، و اندازه مساحت ناحیه آخر به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{1}{3} \Delta x [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3} \Delta x (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

مجموع اندازه مساحت این ناحیه‌ها، اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ را تقریب می‌کند. اندازه مساحت این ناحیه به صورت انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ است. بنابراین، مقداری تقریبی برای انتگرال معین به صورت زیر داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \\ & + \frac{1}{3} \Delta x [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + \\ & \frac{1}{3} \Delta x [f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + f(x_{2n-2})] \\ & + \frac{1}{3} \Delta x [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]. \end{aligned}$$

پس، با $\Delta x = (b-a)/2n$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx & \approx \frac{1}{3} \Delta x [f(x_0) + 4f(x_1) \\ & + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\ & + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]. \end{aligned} \quad (7)$$

فرمول (۷) به عنوان قاعدهٔ سیمپسون شناخته می‌شود و در قضیهٔ زیر به صورت رسمی بیان می‌شود.

۴.۶.۶ قضیه (قاعدهٔ سیمپسون) اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، و $2n$ عددی صحیح و زوج باشد، و اعداد $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = b$ تشکیل یک افراز منظم از بازهٔ $[a, b]$ را بدهند، آنگاه

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx & \approx \frac{b-a}{6n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \\ & + 2f(x_4) + \dots + 2f(x_{2n-2}) \\ & + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]. \end{aligned}$$

مثال ۳ با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون، مقدار $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ را با در نظر گرفتن $2n=4$ تقریب کنید. نتیجه را با چهار رقم اعشار بنویسید.

حل با به کار بردن قاعدهٔ سیمپسون با $2n=4$ داریم

$$\Delta x = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \frac{b-a}{6n} = \frac{1}{12}$$

بنابراین، اگر $f(x) = 1/(x+1)$ داریم

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \quad (۸)$$

جدول ۲.۶.۶ محاسبهٔ عبارت داخل کروشهٔ طرف راست (۸) را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۶.۶

i	x_i	$f(x_i)$	k_i	$k_i \cdot f(x_i)$
۰	۰	۱٫۰۰۰۰۰۰	۱	۱٫۰۰۰۰۰۰
۱	۰٫۲۵	۰٫۸۰۰۰۰۰	۴	۳٫۲۰۰۰۰۰
۲	۰٫۵	۰٫۶۶۶۶۶۷	۲	۱٫۳۳۳۳۳۴
۳	۰٫۷۵	۰٫۵۷۱۴۳	۴	۲٫۲۸۵۷۲
۴	۱	۰٫۵۰۰۰۰۰	۱	۰٫۵۰۰۰۰۰
				$\sum_{i=0}^4 k_i f(x_i) = ۸٫۳۱۹۰۶$

با قراردادن مجموع به دست آمده از جدول فوق در رابطه (۸)، به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx \frac{1}{12} (۸٫۳۱۹۰۶) \approx ۰٫۶۹۳۲۵^+$$

نتیجهٔ به دست آمده را تا چهار رقم اعشار گرد می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+1} \approx ۰٫۶۹۳۳$$

مقدار دقیق این انتگرال معین با چهار رقم اعشار، ۰۰۶۹۳۱ است که تا سه رقم اول اعشار با نتیجه محاسبه تقریبی ما مطابقت دارد؛ و خطای تقریب فوق برابر با ۰۰۰۰۰۲- است. عملیات محاسبه مقدار دقیق $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ را در بخش ۱۰.۸ یاد خواهیم گرفت. ▲

در به کار بردن قاعده سیمپسون، هر چه مقدار Δx را بزرگتر بگیریم، مقدار Δx کوچکتر خواهد بود؛ و از لحاظ هندسی واضح است که دقت محاسبه تقریبی نیز بیشتر خواهد بود، زیرا یک سهمی که از سه نقطه نزدیک به هم یک منحنی می گذرد، در سراسر بازه به طول $2\Delta x$ ، به منحنی نزدیک است. قضیه زیر، که در آن لیز عددی اثبات می شود، روشی را برای تعیین مقدار خطا در استفاده از قاعده سیمپسون به دست می دهد. خطا را با ϵ_s نشان می دهیم.

۵.۶.۶ قضیه فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a, b]$ باشد، و f' ، f'' ، f''' و $f^{(iv)}$ همگی بر بازه $[a, b]$ موجود باشند. اگر

$$\epsilon_s = \int_a^b f(x) dx - S$$

که S مقداری تقریبی برای $\int_a^b f(x) dx$ است که از قاعده سیمپسون به دست می آید، آنگاه عددی مانند η در بازه $[a, b]$ وجود دارد که

$$\epsilon_s = -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(\eta)(\Delta x)^4. \quad (9)$$

مثال ۴ کرانه های خطا در مثال ۳ را پیدا کنید.

حل

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^{-1} \\ f'(x) &= -1(x+1)^{-2} \\ f''(x) &= 2(x+1)^{-3} \\ f'''(x) &= -6(x+1)^{-4} \\ f^{(iv)}(x) &= 24(x+1)^{-5} \\ f^{(v)}(x) &= -120(x+1)^{-6} \end{aligned}$$

چون برای تمام x های در بازه $[0, 1]$ ، $f^{(v)}(x) < 0$ ، $f^{(iv)}$ روی $[0, 1]$ نزولی است. پس، مقدار مینیمم مطلق $f^{(iv)}$ روی $[0, 1]$ در نقطه انتهایی راست یعنی ۱، و مقدار ماکسیمم مطلق $f^{(iv)}$ روی $[0, 1]$ در نقطه انتهایی چپ یعنی ۰ است و داریم

$$f^{(iv)}(1) = \frac{3}{4} \text{ و } f^{(iv)}(0) = 22$$

با قراردادن ۰ به جای η در طرف راست (۹)، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(0)(\Delta x)^4 &= -\frac{1}{180}(22)\left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= -\frac{1}{1920} = -0.000052 \end{aligned}$$

و با قراردادن ۱ به جای η در طرف راست (۹) داریم

$$\begin{aligned} -\frac{1}{180}(b-a)f^{(iv)}(1)(\Delta x)^4 &= -\frac{1}{180} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= -\frac{1}{61440} = -0.000002. \end{aligned}$$

بنابراین

$$-0.000052 \leq \varepsilon_S \leq -0.000002. \quad (10)$$

نامساوی (۱۰) با بحثی که در مثال ۳ در مورد خطای تقریب $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ در قاعده

سیمپسون انجام شد، مطابقت دارد زیرا

$$\blacktriangle \quad -0.000052 < -0.00002 < -0.000002.$$

اگر $f(x)$ يك چندجمله‌ای از درجه نایبتر از ۳ باشد، آنگاه $f^{(iv)}(x) \equiv 0$ و بنابراین $\varepsilon_S = 0$. به عبارت دیگر، قاعده سیمپسون برای يك چندجمله‌ای از درجه نایبتر از ۳ مقدار دقیقی می‌دهد. اگر $f(x)$ از درجه ۲ یا از درجه يك باشد، ادعای فوق‌الز نظر هندسی واضح است، زیرا در حالت اول نمودار $y = f(x)$ يك سهمی، و در حالت دوم نمودار آن يك خط راست (يك سهمی تباهیده) است.

قاعده سیمپسون را برای انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ به کار می‌بریم که در آن،

$f(x)$ يك چندجمله‌ای از درجه ۳ است، و فرض می‌کنیم $2n = 2$. در اینجا، قاعده سیمپسون مقداری دقیق برای انتگرال معین به دست می‌دهد. چون

$$\Delta x = \frac{1}{4}(b-a) \text{ و } x_2 = b \text{ و } x_1 = \frac{1}{4}(a+b), x_0 = a, 2n = 2$$

داریم

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{4}\right) + f(b) \right]. \quad (11)$$

فرمول (۱۱) به عنوان فرمول منشوروارای شناخته می‌شود، و در بخش ۴.۷ خواهیم دید که چگونه برای پیدا کردن حجم بعضی از اجسام به کار می‌رود.

مثال ۵ $\int_{-2}^1 (x^2 + 2x - 1) dx$ را با دورش زیر محاسبه کنید. (الف) با استفاده از فرمول منشوروارای؛ (ب) با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

حل

(الف) اگر $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ، تابعی از درجه سوم است، پس فرمول منشوروارای مقدار دقیق انتگرال معین را می‌دهد. این فرمول را با $a = -2$ ، $b = 1$ و $(a+b)/2 = -1/2$ به کار می‌بریم؛ داریم

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x^2 + 2x - 1) dx &= \frac{3}{6} \left[f(-2) + 4f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-13 - \frac{17}{2} + 2 \right] \\ &= -\frac{39}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (x^2 + 2x - 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x \right]_{-2}^1 \quad (\text{ب}) \\ &= \frac{1}{3} + 1 - 1 - \left(-\frac{8}{3} + 4 + 2 \right) \\ &= -\frac{39}{4}. \end{aligned}$$

تمرینهای ۶.۶

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، مقدار تقریبی انتگرال معین داده شده را به وسیله قاعده دوزنقه‌ای برای مقدار n مفروض، محاسبه کنید؛ نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید. در تمرینهای ۱، ۲، ۵، و ۶ مقدار دقیق انتگرال معین را حساب کرده، و با مقدار تقریبی مقایسه کنید.

$$1. \int_0^2 x^2 dx; n=4 \quad 2. \int_0^2 x \sqrt{4-x^2} dx; n=8$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{x}; n=5 \quad 4. \int_2^{10} \frac{dx}{1+x}; n=8$$

$$\begin{array}{ll}
 ۵. \int_0^{\pi} \cos x \, dx ; n=۴ & ۶. \int_0^{\pi} \sin x \, dx ; n=۶ \\
 ۷. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} ; n=۵ & ۸. \int_1^2 \sqrt{1+x^2} \, dx ; n=۶ \\
 ۹. \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx ; n=۶ & ۱۰. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx ; n=۴ \\
 ۱۱. \int_0^2 \sqrt{1+x^2} \, dx ; n=۶ & ۱۲. \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+x} \, dx ; n=۶
 \end{array}$$

در هر يك از تمرینهای ۱۳ تا ۱۸، کرانهای خطا در محاسبه مقدار تقریبی، در تمرین مشخص شده، را پیدا کنید.

$$\begin{array}{ll}
 ۱۳. \text{تمرین ۱} & ۱۴. \text{تمرین ۵} \\
 ۱۵. \text{تمرین ۳} & ۱۶. \text{تمرین ۴} \\
 ۱۷. \text{تمرین ۶} & ۱۸. \text{تمرین ۸}
 \end{array}$$

۱۹. (الف) $\int_0^2 x^2 \, dx$ را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون و با فرض $2n=4$ تقریب کنید، و نتیجه به دست آمده را با نتیجهٔ تمرین ۱ مقایسه کنید؛ (ب) مقدار دقیق انتگرال معین قسمت (الف) را به دست آورید.

۲۰. (الف) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون و با فرض $2n=6$ تقریب کنید، و نتیجه را با نتیجهٔ تمرین ۶ مقایسه کنید؛ (ب) مقدار دقیق انتگرال معین قسمت (الف) را به دست آورید.

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، مقدار انتگرال معین را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون و مقدار داده شدهٔ $2n$ تقریب کنید. جواب را با سه رقم اعشار بنویسید.

$$\begin{array}{ll}
 ۲۱. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1-x} ; 2n=۴ & ۲۲. \int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} ; 2n=۴ \\
 ۲۳. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} ; 2n=۴ & ۲۴. \int_1^2 \frac{dx}{x+1} ; 2n=۸
 \end{array}$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸، کرانهای خطا در تمرینهای مشخص شده را پیدا کنید.

۲۵. تمرین ۱۹ (الف)

۲۶. تمرین ۲۰ (الف)

۲۷. تمرین ۲۱

۲۸. تمرین ۲۲

هیچیک از انتگرالهای معین در تمرینهای ۲۹ تا ۳۴ را نمی‌توان دقیقاً برحسب توابع مقدماتی محاسبه کرد. قاعدهٔ سیمپسون را با مقدار $2n$ مفروض برای پیدا کردن مقدار تقریبی انتگرال معین به‌کار ببرید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید.

$$29. \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx; 2n=6 \quad 30. \int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx; 2n=6$$

$$31. \int_1^4 \sqrt{1+x^2} dx; 2n=4 \quad 32. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; 2n=4$$

$$33. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}; 2n=8 \quad 34. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx; 2n=6$$

۳۵. با تعبیر انتگرال معین $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ به عنوان اندازهٔ مساحت يك ناحیه، نشان دهید که مقدار دقیق $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ برابر با π می‌باشد. سپس انتگرال معین فوق را با استفاده از قاعدهٔ دوزنقه‌ای با فرض $n=8$ تقریب کنید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید، و مقدار به‌دست آمده را با مقدار دقیق مقایسه کنید.

۳۶. با تعبیر $\int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx$ به عنوان اندازهٔ مساحت يك ناحیه، نشان دهید که مقدار دقیق $\int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx$ برابر با π می‌باشد. سپس مقدار تقریبی انتگرال معین فوق را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون و $2n=6$ به‌دست آورید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید. نتایج را مقایسه کنید.

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۰، انتگرال معین را با دزدوش محاسبه کنید: (الف) با استفاده از فرمول منشوداری؛ (ب) با استفاده از قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

$$37. \int_1^2 (4x^2 - 3x^2 + 1) dx \quad 38. \int_2^6 (2x^2 - 2x - 3) dx$$

$$39. \int_{-1}^5 (x^2 + 3x^2 - 2x - 6) dx \quad 40. \int_{-2}^2 (x^2 + x^2 - 4x - 2) dx$$

۴۱. فرض کنید f تابعی پیوسته بر بازهٔ بسته $[a, b]$ باشد. همچنین، فرض کنید T و S مقادیر

تقریبی $\int_a^b f(x) dx$ باشند که، به ترتیب، با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای و قاعده سیمپسون به دست می‌آیند، و برای هر دو تقریب، افراز یکسانی از بازه $[a, b]$ به کار رفته است. نشان دهید

$$S = \frac{2}{3} [T + \Delta x (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}))]$$

که n عددی زوج است.

تمرینهای مروری فصل ۶

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۴، با استفاده از تعریف انتگرال معین، مقدار دقیق انتگرال معین را به دست آورید؛ از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده نکنید.

$$1. \int_0^2 (3x^2 - 1) dx \quad 2. \int_0^1 (2x^2 + 4x + 1) dx$$

$$3. \int_{-2}^1 (x^2 + 2x) dx \quad 4. \int_{-1}^2 (x^2 - 1)^2 dx$$

در هر یک از تمرینهای ۵ تا ۱۸، با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، مقدار انتگرال معین را به دست آورید.

$$5. \int_{-2}^2 (t^2 - 3t) dt \quad 6. \int_2^4 \frac{4}{5x^4} dx$$

$$7. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-1}} \quad 8. \int_{-5}^5 2x \sqrt{x^2 + 2} dx$$

$$9. \int_0^{\pi/6} \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} \quad 10. \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{1}{2} x \cos^2 \frac{1}{2} x dx$$

$$11. \int_0^2 x \sqrt{3x+2} dx \quad 12. \int_1^2 \frac{y dy}{\sqrt{5-y}}$$

$$13. \int_{-1}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+2}} \quad 14. \int_0^1 (x^2 + 4x) \sqrt{x^2 + 6x^2 + 1} dx$$

$$15. \int_{-2}^2 |x-2|^2 dx \quad 16. \int_{-2}^2 x|x-2| dx$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \sin 5x \cos 3x dx \quad 18. \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^4 2x - 2 \sin^2 x) dx$$

در تمرینهای ۱۹ و ۲۰، با استفاده از قضیه بنیادی، انتگرال معین را به دست آورید. سپس مقداری از X را که در قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها صدق می کند، پیدا کنید.

$$19. \int_0^2 (x^2 + 1) dx \quad 20. \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

در هر یک از تمرینهای ۲۱ و ۲۲، مجموع خواسته شده را پیدا کنید.

$$21. \sum_{i=1}^{100} 2i(i^3 - 1) \quad 22. \sum_{i=1}^{41} (\sqrt[3]{3i-1} - \sqrt[3]{3i+2})$$

۲۳. ثابت کنید که $\sum_{i=1}^n i^2 = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2$ ، وصحت فرمول را برای $n = 1, 2, 3$ بررسی کنید.

۲۴. حد زیر را به صورت یک انتگرال معین بیان کرده و مقدار آن را محاسبه کنید
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (\sqrt[n]{i} / n^{3/2})$. (اذهمایی: تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید.)

$$25. \text{ نشان دهید که هر یک از نامساویهای زیر برقرار است. (الف) } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-3} \geq \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} ;$$

$$\text{(ب) } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \geq \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-3} ; \text{ (پ) } \int_{-4}^5 \frac{dx}{x-3} \geq \int_{-4}^5 \frac{dx}{x}$$

۲۶. اگر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < c \\ k & x = c \\ 1 & c < x \leq b \end{cases}$$

ثابت کنید f بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است و بدون توجه به مقدار k ،

$$\int_a^b f(x) dx = b - c$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۰، با استفاده از قضیه ۹.۳.۶ بازه بسته ای را که شامل مقدار انتگرال

معین مفروض است، به دست آورید.

$$27. \int_1^4 \sqrt{5+4x-x^2} dx \quad 28. \int_{-2}^1 \sqrt{2x^2-3x^3+1} dx$$

$$29. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos t} dt \quad 30. \int_0^{\pi/6} \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$31. \int_x^4 (3t^2-4)^{3/2} dt \quad D_x \text{ را به دست آورید.}$$

$$32. \int_{-x}^x \frac{4}{1+t^2} dt \quad D_x \text{ را به دست آورید.}$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۸، مساحت ناحیه محصور بین منحنی و خطوط داده شده را پیدا کنید. شکل ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح را رسم کنید. همچنین، اندازه مساحت را به صورت حد یک مجموع ریمانی، و سپس با استفاده از انتگرال معین بیان کنید. انتگرال معین را با استفاده از قضیه بنیادی محاسبه کنید.

$$33. \text{ منحنی } y=9-x^2 \text{؛ محور } x \text{ ها؛ محور } y \text{ ها؛ خط } x=3$$

$$34. \text{ منحنی } y=3 \cos x/2 \text{؛ محور } x \text{ ها؛ خطوط } x=\pi/2 \text{ و } x=-\pi/2$$

$$35. \text{ منحنی } y=2\sqrt{x-1} \text{؛ محور } x \text{ ها؛ خطوط } x=5 \text{ و } x=17$$

$$36. \text{ منحنی } y=16-x^2 \text{؛ محور } x \text{ ها}$$

$$37. \text{ منحنی } y=x\sqrt{x+5} \text{؛ محور } x \text{ ها؛ خطوط } x=-1 \text{ و } x=4$$

$$38. \text{ منحنی } y=(4/x^2)-x \text{؛ محور } x \text{ ها؛ خطوط } x=-2 \text{ و } x=-1$$

$$39. \text{ مقدار متوسط تابع کسینوسی بر بازه بسته } [a, a+2\pi] \text{ را به دست آورید.}$$

$$40. \text{ قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (۱۰.۴.۶) را بر حسب مقدار متوسط تابع تغییر کنید.}$$

$$41. \text{ اگر } f(x)=x^2\sqrt{x-3} \text{، مقدار متوسط } f \text{ بر بازه } [7, 12] \text{ را پیدا کنید.}$$

$$42. \text{ فرض کنید که } C(x) \text{، هزینه کل تولید } 100x \text{ واحد از کالای خاصی بر حسب صد دلار است و } C(x)=2x^2+5 \text{. هزینه متوسط را، اگر تعداد واحدهای تولید شده تمام مقادیر بین 0 تا 400 را اختیار کند، به دست آورید.}$$

۴۳. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و مسافت s فوت را قبل از برخورد با زمین طی می‌کند. اگر تنها نیروی مؤثر نیروی ثقل زمین باشد که شتابی معادل g فوت برمجدور ثانیه به‌سوی زمین به‌جسم می‌دهد، نشان دهید که مقدار متوسط سرعت به‌عنوان تابعی از مسافت، در حین پیمودن این مسافت برابر با $\frac{2}{3}\sqrt{2gs}$ فوت در ثانیه می‌باشد، و این سرعت متوسط، $\frac{2}{3}$ سرعت نهایی است.

۴۴. فرض کنید تویی از حالت سکون رها می‌شود و بعد از t ثانیه فاصله جهت‌دارش از نقطه شروع، s فوت و سرعتش v فوت در ثانیه است. از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. وقتی که $t = t_1$ ، $s = s_1$ ، $v = v_1$ ، (الف) v را به‌عنوان تابعی از t به‌صورت $v = f(t)$ بیان کرده و مقدار متوسط f بر $[0, t_1]$ را به‌دست آورید؛ (ب) v را به‌عنوان تابعی از s به‌صورت $v = h(s)$ بیان کرده و مقدار متوسط h بر $[0, s_1]$ را به‌دست آورید؛ (پ) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را برحسب t_1 بنویسید، و معین کنید که کدام سرعت متوسط بیشتر است.

۴۵. معادله تقاضای کالایی به‌صورت $p^2 + x - 10 = 0$ است که در آن، p برحسب دلار قیمت یک واحد از کالا است و وقتی که تقاضا x ۱۰۰ واحد باشد. متوسط درآمد کل را اگر تعداد واحدهای مورد تقاضا همه مقادیر ۶۰۰ تا ۸۰۰ را اختیار کند، به‌دست آورید.

دهریک از تمرینهای ۴۶ و ۴۷، با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای با $n = 4$ ، مقداری تقریبی برای انتگرال معین داده شده به‌دست آورید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید.

$$46. \int_1^{9/5} \sqrt{1+x^2} dx \quad 47. \int_{1/10}^{1/2} \frac{\cos x}{x} dx$$

۴۸. مقداری تقریبی برای انتگرال تمرین ۴۶ با استفاده از قاعده سیمپسون با فرض $2n = 4$ به‌دست آورید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید.

۴۹. مقداری تقریبی برای انتگرال تمرین ۴۷ با استفاده از قاعده سیمپسون با فرض $2n = 4$ به‌دست آورید. نتیجه را با سه رقم اعشار بنویسید.

۵۰. انتگرال $\int_d^{d+6} (x^2 + bx + c) dx$ داده شده است که در آن، c ، b ، و d ثابت هستند. فرض کنید این انتگرال با استفاده از قاعده ذوزنقه‌ای با ضابطه $n = k$ تقریب شده است. (الف) نشان دهید که خطای تقریب دقیقاً برابر با $36/k^2 -$ است؛ (ب) کوچکترین مقدار k به‌طوری که تقریب تا یک رقم اعشار دقیق باشد، کدام است؟

$$۵۱. \int_0^{\pi} \left| \cos x + \frac{1}{4} \right| dx \text{ را محاسبه کنید.}$$

$$۵۲. \text{ اگر } n \text{ عدد مثبت و صحیح دلخواهی باشد، ثابت کنید که } \int_0^{\pi} \sin^n nx \, dx = \pi/2.$$

۵۳. (الف) مقدار متوسط تابع f را که به صورت $f(x) = 1/x^2$ بر بازه $[1, r]$ تعریف می شود به دست آورید؛ (ب) اگر A مقدار متوسط پیدا شده در قسمت (الف) باشد، $\lim_{r \rightarrow +\infty} A$ را پیدا کنید.

۵۴. فرض کنید $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$ و $x > 0$. با نشان دادن اینکه $F'(x) = 0$ ، ثابت کنید F یک تابع ثابت است. (داهنمایی: بعد از نوشتن انتگرال داده شده به صورت تفاضل دو انتگرال، از قضیه ۱۰.۵.۶ استفاده کنید.)

۵۵. فرض کنید f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $\int_a^b f(t) dt \neq 0$. نشان دهید برای هر عددی مانند k در بازه $(0, 1)$ عددی مانند c در (a, b) وجود دارد، به طوری که $\int_a^c f(t) dt = k \int_a^b f(t) dt$. (داهنمایی: تابع F را به صورت $F(x) = \int_a^x f(t) dt / \int_a^b f(t) dt$ در نظر گرفته و قضیه مقدار میانی را به کار ببرید.)

۵۶. یک تابع ناپیوسته مثال بزنید که در مورد آن قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (الف) برقرار نباشد؛ و (ب) برقرار باشد.



کاربردهای انتگرال معین

۱.۲ مساحت يك ناحیه دريك صفحه

بنابه تعریف ۴.۲.۶، اگر تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و اگر برای تمام x های در $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، آنگاه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ ، بر حسب واحد مربع برابر است با

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x$$

که انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ است.

در فصل ۶، مساحت يك ناحیه را که در آن، روی $[a, b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، بررسی کردیم؛ مثلاً، مثال ۸ از بخش ۵.۶ را ببینید. حال، فرض کنید برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) < 0$. بنا براین، هر $f(\xi_i)$ عددی منفی است؛ ولذا مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ را بر حسب واحد مربع به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\xi_i)] \Delta_i x$$

که مساوی است با

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

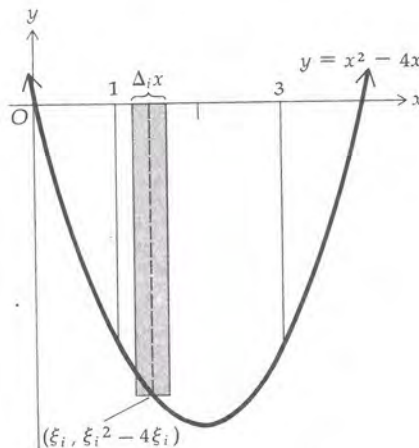
مثال ۱ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2 - 4x$ ، محور x ها، و خطوط $x = 1$ و $x = 3$ را به دست آورید.

حل ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح در شکل ۱۰۱۰۷ نشان داده شده است. یک افراز از بازه $[1, 3]$ در نظر می گیریم؛ طول قاعده مستطیل i م برابر با $\Delta_i x$ است. چون بر بازه $[1, 3]$ ، $x^2 - 4x < 0$ ، پس ارتفاع مستطیل i م برابر است با $-(\xi_i^2 - 4\xi_i) = 4\xi_i - \xi_i^2$. از اینرو، مجموع اندازه مساحت های n مستطیل به صورت زیر است

$$\sum_{i=1}^n (4\xi_i - \xi_i^2) \Delta_i x.$$

اندازه مساحت ناحیه خواسته شده عبارت است از حد این مجموع وقتی که $\|\Delta\| \rightarrow 0$ به سمت ۰ میل می کند؛ بنابراین، اگر مساحت ناحیه A واحد مربع باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (4\xi_i - \xi_i^2) \Delta_i x \\ &= \int_1^3 (4x - x^2) dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{22}{3}. \end{aligned}$$



شکل ۱۰۱۰۷

پس، مساحت ناحیه برابر با $\frac{22}{3}$ واحد مربع است. ▲

مثال ۲ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ ، محور x ها، و خطوط $x = -1$ و $x = 2$ را به دست آورید.

حل ناحیه در شکل ۲۰۱.۷ نشان داده شده است. فرض کنید $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. چون $f(x) \geq 0$ وقتی که x در بازه بسته $[-1, 1]$ است و $f(x) \leq 0$ وقتی که x در بازه بسته $[1, 2]$ است، پس ناحیه را به دو قسمت تفکیک می کنیم. فرض کنید وقتی x در $[-1, 1]$ است، مساحت ناحیه A_1 واحد مربع باشد و وقتی x در $[1, 2]$ است، مساحت ناحیه A_2 واحد مربع باشد. در این صورت

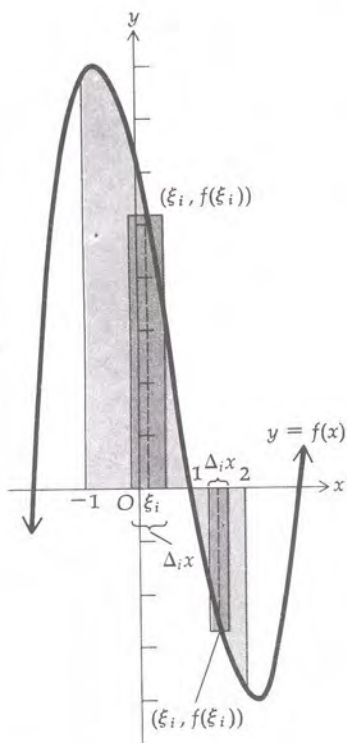
$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \end{aligned}$$

و

$$A_2 = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [-f(\xi_i)] \Delta_i x = \int_1^2 -(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx.$$

اگر مساحت تمام ناحیه A واحد مربع باشد، آنگاه

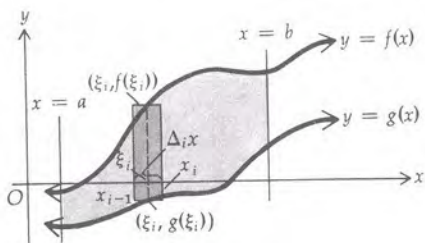
$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_1^2 \\ &= \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 6 \right) \right] \\ &\quad - \left[\left(4 - \frac{16}{3} - 10 + 12 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) \right] \\ &= \frac{32}{3} - \left(-\frac{29}{12} \right) \\ &= \frac{157}{12}. \end{aligned}$$



شکل ۲.۱.۷

▲ بنابراین، مساحت ناحیه برابر با $۱۵۷/۱۲$ واحد مربع است.

حال دو تابع f و g را در نظر بگیرید که هر دو روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته هستند به طوری که برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq g(x)$. می خواهیم مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، و دو خط $x = a$ و $x = b$ را پیدا کنیم. چنین وضعیتی در شکل ۳.۱.۷ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱.۷

يك افراز از بازه $[a, b]$ ، که در آن زمین زیر بازه دارای طول $\Delta_i x$ باشد، در نظر می گیریم. در هر زیر بازه يك نقطه ξ_i انتخاب می کنیم. مستطیلی را که ارتفاع آن $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ واحد و قاعده آن $\Delta_i x$ واحد است، ملاحظه کنید. يك مستطیل در شکل ۳.۱.۷ نشان داده شده است. n تا از این گونه مستطیلهای، هر يك متناظر با يك زیر بازه، وجود دارند. مجموع اندازه مساحت های این n مستطیل از مجموع ریمانی زیر به دست می آید

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x.$$

این مجموع ریمانی، تقریبی است از عددی که به طور شهودی آن را معرف «اندازه مساحت» ناحیه می دانیم. هر چه مقدار $\|\Delta\|$ کوچکتر باشد، تقریب بهتری به دست می آید. اگر مساحت ناحیه A واحد مربع باشد، A را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x. \quad (1)$$

چون f و g روی $[a, b]$ پیوسته هستند، پس $(f - g)$ نیز پیوسته است؛ بنابراین، حد مذکور در (۱) وجود دارد و برابر با انتگرال معین زیر می باشد

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

مثال ۳ مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را به دست آورید.

حل برای یافتن نقاط تقاطع دو منحنی، دو معادله را با هم حل کرده و نقاط $(0, 0)$ و $(4, 4)$ را به دست می آوریم. ناحیه در شکل ۴.۱.۷ نشان داده شده است.

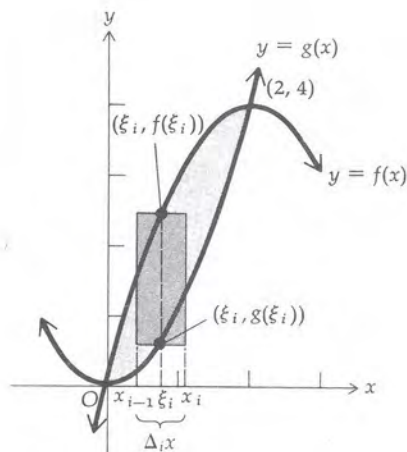
فرض کنید $f(x) = -x^2 + 4x$ و $g(x) = x^2$. بنابراین، در بازه $[0, 4]$ ، منحنی $y = f(x)$ بالای منحنی $y = g(x)$ قرار دارد. جزء مستطیلی قائمی از سطح را، که ارتفاع آن $[f(\xi_i) - g(\xi_i)]$ واحد و طول قاعده آن $\Delta_i x$ واحد است، رسم می کنیم. پس، اندازه مساحت این مستطیل برابر با $[f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x$ است. مجموع اندازه مساحت های n تا از این گونه مستطیلهای، از مجموع ریمانی زیر به دست می آید

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x.$$

اگر مساحت ناحیه، A واحد مربع باشد،

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x.$$

وحد مجموع ریمانی، يك انتگرال معین است. بنابراین



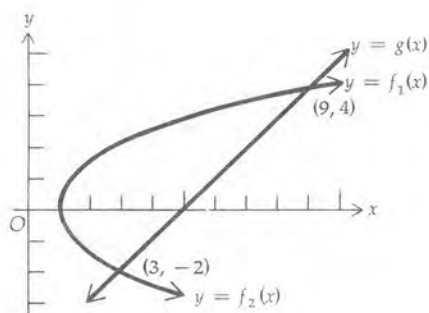
شکل ۴.۱۰۷

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - x^2] dx \\
 &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\
 &= -\frac{16}{3} + 8 - 0 = \frac{8}{3}.
 \end{aligned}$$

▲ پس، مساحت ناحیه برابر با $8/3$ واحد مربع است.

مثال ۴ مساحت ناحیه محصور بین سهمی $y^2 = 2x - 2$ و خط $y = x - 5$ را به دست آورید.

حل دو منحنی در نقاط $(3, -2)$ و $(9, 4)$ یکدیگر را قطع می کنند. ناحیه مورد نظر در شکل ۵.۱۰۷ نشان داده شده است.



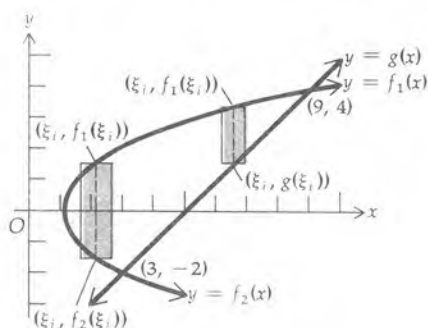
شکل ۵.۱.۷

معادله $y^2 = 2x - 2$ هم ارز با دو معادله زیر است

$$y = -\sqrt{2x-2} \text{ و } y = \sqrt{2x-2}$$

که معادله اول نیمه بالایی سهمی و معادله دوم نیمه پایینی آن را می دهد. اگر فرض کنیم $y = f_1(x)$ سهمی $y = \sqrt{2x-2}$ و معادله نیمه پایینی آن $y = f_2(x)$ است. اگر فرض کنیم $g(x) = x - 5$ آنگاه معادله خط، $y = g(x)$ خواهد بود.

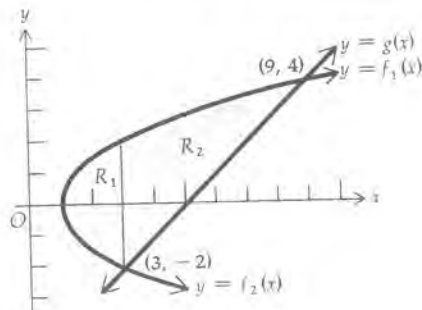
در شکل ۵.۱.۷ دو جزء مستطیلی قائم از سطح را مشاهده می کنیم. قاعده بالایی



شکل ۶.۱.۷

هر دو مستطیل روی منحنی $y = f_1(x)$ قرار دارند. چون قاعده مستطیل اول روی منحنی $y = f_2(x)$ قرار دارد، ارتفاع آن $[f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)]$ واحد است؛ و چون قاعده مستطیل دوم روی منحنی $y = g(x)$ قرار دارد، ارتفاعش $[f_1(\xi_i) - g(\xi_i)]$ واحد است.

اگر بخواهیم این مسئله را با استفاده از اجزاء مستطیلی قائم سطح حل کنیم، باید ناحیه را به دو قسمت جداگانه، مثلاً R_1 و R_2 تقسیم کنیم، که R_1 ناحیه محصور بین منحنیهای $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ و خط $x = 3$ ، و R_2 ناحیه محصور بین منحنیهای $y = f_1(x)$ و $y = g(x)$ و خط $x = 3$ باشد. (شکل ۷.۱.۷ را ببینید.)



شکل ۷.۱.۷

اگر مساحت ناحیه R_1 برابر با A_1 واحد مربع باشد، داریم

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)] \Delta_i x \\ &= \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)] dx \\ &= \int_1^3 [\sqrt{2x-2} + \sqrt{2x-2}] dx \\ &= 2 \int_1^3 \sqrt{2x-2} dx \\ &= \frac{2}{3} (2x-2)^{3/2} \Big|_1^3 \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

و اگر مساحت ناحیه R_2 برابر با A_2 واحد مربع باشد، داریم

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f_2(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x \\
 &= \int_7^9 [f_2(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_7^9 [\sqrt{2x-2} - (x-5)] dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} (2x-2)^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 + 5x \right]_7^9 \\
 &= \left[\frac{64}{3} - \frac{81}{2} + 45 \right] - \left[\frac{8}{3} - \frac{49}{2} + 35 \right] \\
 &= \frac{38}{3}.
 \end{aligned}$$

پس

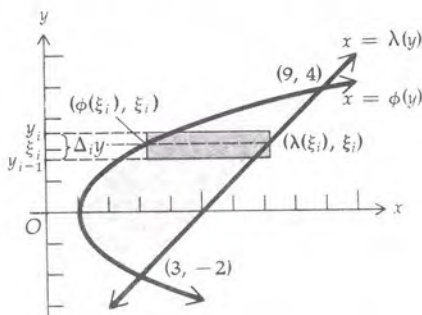
$$A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = 18.$$

بنابراین، مساحت تمام ناحیه برابر با ۱۸ واحد مربع است. ▲

مثال ۵ مساحت ناحیه مثال ۲ را با در نظر گرفتن اجزاء مستطیلی افقی سطح، به دست آورید.

حل شکل ۸.۱۰.۷ ناحیه را با يك جزء مستطیلی افقی از سطح نشان می‌دهد. اگر معادلات سهمی و خط را نسبت به x حل کنیم، داریم

$$x = y + 5 \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{4}(y^2 + 2)$$



شکل ۸.۱۰.۷

فرض کنید $\phi(y) = (y^2 + 2)/2$ و $\lambda(y) = y + 5$ ؛ می‌توان معادله سهمی را به صورت $x = \phi(y)$ و معادله خط را به صورت $x = \lambda(y)$ نوشت. بازه بسته $[-2, 4]$ را روی محور y ها در نظر می‌گیریم، و یک افراز از این بازه اختیار می‌کنیم. طول زیر بازه i م، $\Delta_i y$ خواهد بود. در زیر بازه i م یعنی $[y_{i-1}, y_i]$ ، یک نقطه ξ_i انتخاب می‌کنیم. طول جزء مستطیلی i م برابر با $[\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)]$ واحد و عرض آن، $\Delta_i y$ واحد است. اندازه مساحت ناحیه را با مجموع ریمانی زیر می‌توان تقریب کرد

$$\sum_{i=1}^n [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)] \Delta_i y.$$

اگر مساحت ناحیه، A واحد مربع باشد،

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\lambda(\xi_i) - \phi(\xi_i)] \Delta_i y.$$

چون λ و ϕ روی $[-2, 4]$ پیوسته هستند، پس تابع $(\lambda - \phi)$ نیز چنیسن است، و حد مجموع ریمانی برابر با انتگرال معین زیر است

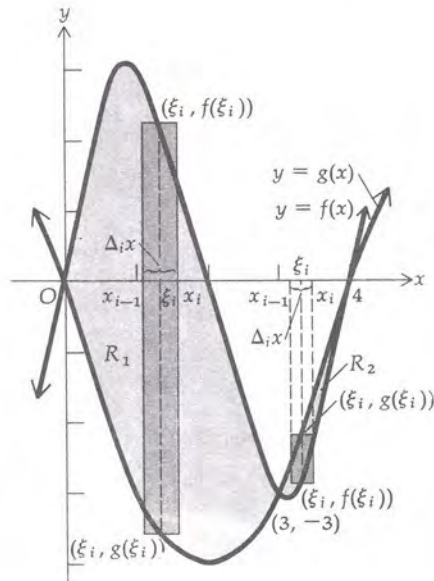
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^4 [\lambda(y) - \phi(y)] dy \\ &= \int_{-2}^4 [(y+5) - \frac{1}{2}(y^2+2)] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 (-y^2 + 2y + 8) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}y^3 + y^2 + 8y \right]_{-2}^4 \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{64}{3} + 16 + 32 \right) - \left(\frac{8}{3} + 4 - 16 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\triangleq 18.$$

اگر راه‌حل مثالهای ۴ و ۵ را باهم مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که در مورد اول احتیاج به محاسبه دو انتگرال معین داریم، در حالی که در مورد دوم فقط یک انتگرال معین را باید محاسبه کرد. به‌طور کلی، در صورت امکان، اجزاء مستطیلی سطح را بایستی طوری بسازیم که تنها یک انتگرال معین به‌دست آید. مثال زیر موردی را نشان می‌دهد که دو انتگرال معین لازم است.

مثال ۶ مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ و $y = x^2 - 4x$ را به‌دست آورید.

حل نقاط تقاطع دومانحنی عبارت‌اند از $(0, 0)$ ، $(3, -3)$ و $(4, 0)$. ناحیه در شکل ۹.۱۰۷ نشان داده شده است.



شکل ۹.۱۰۷

فرض کنید $f(x) = x^2 - 6x^2 + 8x$ و $g(x) = x^2 - 4x$. در بازه $[0, 3]$ منحنی $y = f(x)$ بالای منحنی $y = g(x)$ و در بازه $[3, 4]$ منحنی $y = g(x)$ بالای منحنی $y = f(x)$ قرار دارد. پس ناحیه را باید به دو قسمت جداگانه R_1 و R_2 تقسیم کنیم، که R_1 ناحیه محصور بین دو منحنی در بازه $[0, 3]$ و R_2 ناحیه محصور بین دو منحنی در بازه $[3, 4]$ باشد. اگر A_1 واحد مربع مساحت R_1 و A_2 واحد مربع مساحت R_2 باشد،

$$A_1 = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - g(\xi_i)] \Delta_i x$$

و

$$A_2 = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [g(\xi_i) - f(\xi_i)] \Delta_i x.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_2 &= \int_0^2 [(x^2 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)] dx \\
 &\quad + \int_2^4 [(x^2 - 4x) - (x^2 - 6x^2 + 8x)] dx \\
 &= \int_0^2 (x^2 - 7x^2 + 12x) dx + \int_2^4 (-x^2 + 7x^2 - 12x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 6x^2 \right]_2^4 \\
 &= \frac{45}{4} + \frac{7}{12} \\
 &= \frac{71}{6}.
 \end{aligned}$$

▲ پس، مساحت ناحیه خواسته شده برابر با $71/6$ واحد مربع است.

تمرینهای ۱.۷

در تمرینهای ۱ تا ۲۶، مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای داده شده را به دست آورید. در هر مسئله عملیات زیر را انجام دهید. (الف) نمودار ناحیه مورد نظر و یک جزء مستطیلی از سطح را رسم کنید؛ (ب) مساحت ناحیه را به صورت حد یک مجموع ریمانی بنویسید؛ (پ) حد قسمت (ب) را از طریق محاسبه یک انتگرال معین با استفاده از قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آورید.

۱. $x^2 = -y$; $y = -4$. ۲. $y^2 = -x$; $x = -2$; $x = -4$.

۳. $x^2 + y + 4 = 0$; $y = -8$. اجزاء سطح را عمود بر محور y ها بگیرید.

۴. همان ناحیه تمرین ۳. اجزاء سطح را موازی با محور y ها بگیرید.

۵. $x^2 - y + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$. اجزاء سطح را عمود بر محور x ها بگیرید.

۶. همان ناحیه تمرین ۵. اجزاء سطح را موازی با محور x ها بگیرید.

۷. $x^2 = 2y^2$; $x = 0$; $y = -2$. ۸. $y^2 = 4x$; $x = 0$; $y = -2$.

۹. $y = 2 - x^2$; $y = -x$. ۱۰. $y = x^2$; $y = x^4$.

۱۱. $y^2 = x - 1$; $x = 3$. ۱۲. $y = x^2$; $x^2 = 18 - y$.

$$x = 4 - y^2; x = 4 - 4y \quad ۱۴ \quad y = \sqrt{x}; y = x^2 \quad ۱۳$$

$$y^2 = x^2; x - 3y + 4 = 0 \quad ۱۵$$

$$xy^2 = y^2 - 1; x = 1; y = 1; y = 4 \quad ۱۶$$

$$x = y^2 - y; x = y - y^2 \quad ۱۸ \quad x = y^2 - 2; x = 6 - y^2 \quad ۱۷$$

$$y = 2x^2 - 3x^2 - 9x; y = x^2 - 2x^2 - 3x \quad ۱۹$$

$$3y = x^2 - 2x^2 - 15x; y = x^2 - 4x^2 - 11x + 30 \quad ۲۰$$

$$y = x^2 + 3x^2 + 2x; y = 2x^2 + 4x \quad ۲۱$$

$$y = |x - 1| + 3; y = 0; x = -2; x = 4 \quad ۲۲$$

$$y = \cos x - \sin x; x = 0; y = 0 \quad ۲۳$$

$$y = \sin x; y = -\sin x; x = -\pi/2; x = \pi/2 \quad ۲۴$$

$$y = |x|; y = x^2 - 1; x = -1; x = 1 \quad ۲۵$$

$$y = |x + 1| + |x|; y = 0; x = -2; x = 3 \quad ۲۶$$

۲۷. مساحت مثلثی به رتوس $(5, 1)$ ، $(1, 3)$ ، و $(-1, -2)$ را با انتگرال گیری به دست آورید.

۲۸. مساحت مثلثی به رتوس $(3, 4)$ ، $(2, 0)$ ، و $(0, 1)$ را با انتگرال گیری به دست آورید.

۲۹. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$ و خط $x = 4$ را به دست آورید. (داهنجایی: معادله درجه سوم را نسبت به y حل کرده و y را به صورت دو تابع از x بنویسید.)

۳۰. مساحت ناحیه محصور بین سه منحنی $y = x^2$ ، $y = x^3$ ، و $x + y = 2$ را به دست آورید.

۳۱. مساحت ناحیه محصور بین سه منحنی $y = x^2$ ، $y = 8 - x^2$ ، و $4x - y + 12 = 0$ را به دست آورید.

۳۲. مساحت ذوزنقه ای به رتوس $(-1, -1)$ ، $(2, 2)$ ، $(6, 2)$ ، و $(7, -1)$ را با انتگرال گیری به دست آورید.

۳۳. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \sin x$ ، خط $y = 1$ ، و محور y ها را به دست آورید.

۳۴. مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، بین دو نقطه تقاطع متوالی را به دست آورید.

۳۵. مساحت ناحیه محصور بین دو سهمی $y^2 = 4px$ و $x^2 = 4py$ را به دست آورید.

۳۶. مطلوب است مساحت ناحیه بالای سهمی $y^2 = 4px$ و داخل مثلثی که به وسیله محور x ها و خطوط $y = x + 8p$ و $y = -x + 8p$ تشکیل می شود.

۳۷. مطلوب است آهنگ تغییر اندازه مساحت در تمرین ۳۵ نسبت به p وقتی که $p = 3$.

۳۸. مطلوب است آهنگ تغییر اندازه مساحت در تمرین ۳۶ نسبت به p وقتی که $p = 3/8$.

۳۹. اگر مساحت ناحیه محصور بین سهمی $y^2 = 4x$ و خط $y = mx$ ($m > 0$)، برابر با A واحد مربع باشد، آهنگ تغییر A نسبت به m را پیدا کنید.

۴۰. m را طوری پیدا کنید که ناحیه واقع در بالای خط $y = mx$ و پایین سهمی $y^2 = 2x - x^2$ دارای مساحتی برابر با ۳۶ واحد مربع باشد.

۴۱. m را طوری معین کنید که ناحیه واقع در بالای منحنی $y = mx^2$ ($m > 0$)، طرف راست محور y ها، و پایین خط $y = m$ دارای مساحتی برابر با K واحد مربع باشد که $K > 0$.

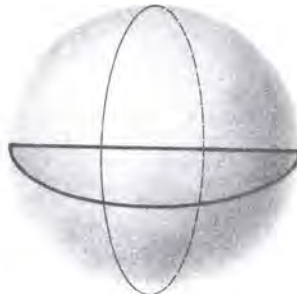
۲۰۷ حجم يك جسم دوار: روشهای قرص مستدیری و حلقه مستدیری

تاکنون روشی برای محاسبه مساحت يك ناحیه در صفحه ارائه داده ایم. حال این فرایند را برای یافتن حجم يك جسم دوار گسترش می دهیم، که جسمی است حاصل ازدوران ناحیه ای از صفحه حول خطی در آن صفحه؛ این خط را محور دوران می نامند، که یا با مرز ناحیه در تماس است و یا اصلاً ناحیه را قطع نمی کند. به عنوان مثال، اگر ناحیه محصور بین يك نیمدایره و قطرش را حول قطر دوران دهیم، يك کره تولید می شود (شکل ۱۰۲۰۷ را ببینید). يك مخروط مستدیر قائم از دوران ناحیه محدود به يك مثلث قائم الزویه حول یکی از دو ضلع مجاور زاویه قائمه به وجود می آید (شکل ۲۰۲۰۷ را ببینید).

ابتدا باید تعریف کنیم که منظورمان ازحجم يك جسم دوار چیست؛ ما می خواهیم يك عدد، مثلاً V را به آن چیزی که به طور شهودی فکر می کنیم اندازه حجم يك چنین جسمی است، نسبت دهیم. اندازه حجم يك استوانه مستدیر قائم را به صورت $\pi r^2 h$ تعریف می کنیم که r واحد و h واحد، به ترتیب، شعاع قاعده و ارتفاع استوانه هستند.



شکل ۲۰۲۰۷



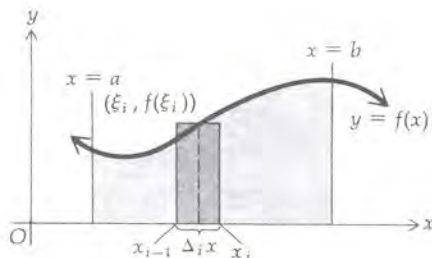
شکل ۱۰۲۰۷

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که محور دوران، يك مرز ناحیه‌ای است که دوران می‌کند. فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ باشد و برای تمام x های در $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$. و نیز فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد. همچنین تصور کنید که S جسم دوار حاصل از دوران ناحیه R حول محور x هاست. می‌خواهیم يك تعریف مناسب برای عدد V که برابر با اندازه حجم S باشد، پیدا کنیم.

فرض کنید Δ يك افراز از بازه بسته $[a, b]$ باشد، که به صورت زیر داده شده است

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

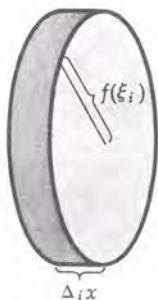
در این صورت، n زیربازه به شکل $[x_{i-1}, x_i]$ ، به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ ، به دست می‌آید، که طول زیربازه i م برابر است با $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. در هر زیربازه، نقطه دلخواه ξ_i را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، و مستطیلهایی را که دارای قاعده $\Delta_i x$ واحد و ارتفاع $f(\xi_i)$ واحد هستند رسم می‌کنیم. شکل ۳۰۲۰۷ ناحیه R را همراه با مستطیل i م نشان می‌دهد.



شکل ۳۰۲۰۷

وقتی که مستطیل i م حول محور x ها دوران کند، یک قرص مستدیر به شکل یک استوانه مستدیر قائم به دست می آید که شعاع قاعده اش $f(\xi_i)$ واحد و ارتفاعش $\Delta_i x$ واحد است، همان طور که در شکل ۴.۲.۷ نشان داده شده است. اندازه حجم این قرص مستدیر، که آن را با $\Delta_i V$ نشان می دهیم، برابر است با

$$\Delta_i V = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x. \quad (1)$$



شکل ۴.۲.۷

چون n مستطیل داریم، بدین طریق n قرص مستدیر به وجود می آید و مجموع اندازه حجمهای این n قرص مستدیر برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x \quad (2)$$

که یک مجموع ریمانی است.

مجموع ریمانی در (۲)، تقریبی است از عددی که به طور شهودی فکر می کنیم حجم جسم دوار بر حسب واحد مکعب باشد. هرچه نورم افراز یعنی $\|\Delta\|$ را کوچکتر بگیریم، n بزرگتر است و این مقدار تقریبی به عددی مانند V که می خواهیم به اندازه حجم جسم دوار نسبت دهیم نزدیکتر است. بنابراین، V را به عنوان حد مجموع ریمانی (۲) وقتی که $\|\Delta\|$ به سمت صفر میل کند، تعریف می کنیم. چون به علت پیوستگی تابع f بر $[a, b]$ ، f^2 نیز روی $[a, b]$ پیوسته است، این حد وجود دارد. از این رو، تعریف زیر را داریم.

۱۰.۲.۷ تعریف فرض کنید تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است، و برای تمام x های در $[a, b]$ ، داریم $f(x) \geq 0$. اگر S جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها باشد، و اگر V حجم S بر حسب واحد مکعب باشد، در این صورت

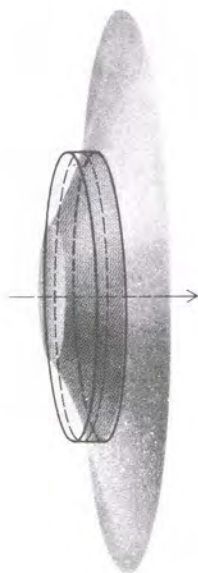
$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx. \quad (3)$$

○ نمونه ۱ حجم جسم دواری را که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خطوط $x = 1$ و $x = 2$ ، حول محور x ها به وجود می آید، پیدا می کنیم. به شکل ۵.۲۰۷ مراجعه کنید؛ این شکل، ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح را نشان می دهد. و شکل ۶.۲۰۷ جزئی از حجم و جسم دوار را نشان می دهد. اندازه حجم قرص مستدیر به صورت زیر است

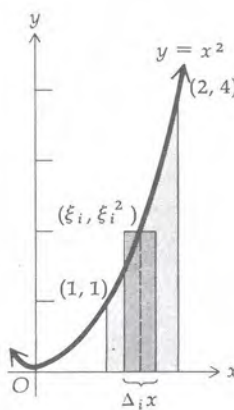
$$\Delta_i V = \pi (\xi_i^*)^2 \Delta_i x = \pi \xi_i^{*4} \Delta_i x .$$

بنابراین

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \xi_i^{*4} \Delta_i x \\ &= \pi \int_1^2 x^4 dx \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{31}{5} \pi . \end{aligned}$$



شکل ۶.۲۰۷



شکل ۵.۲۰۷

○

پس، حجم جسم دوار برابر با $31\pi/5$ واحد مکعب است.

برای مواردی که هم محور دوران و هم يك مرکز ناحیه دوران یافته، محور y ها یا هر خط موازی با محور x ها یا محور y ها باشد، تعریفی مشابه با تعریف ۱۰۲۰۷ به کار می رود.

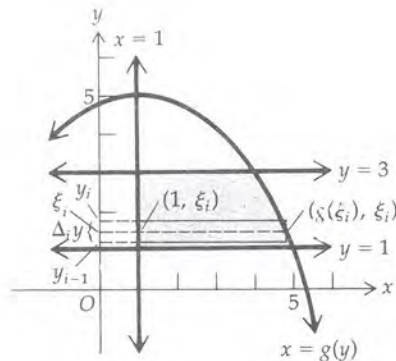
مثال ۱ ناحیه محدود به منحنی $y = 20 - 4x^2$ ، و خطوط $x = 1$ ، $y = 1$ ، و $y = 3$ در طرف راست $x = 1$ را حول خط $x = 1$ دوران می دهیم، حجم جسم دوار تولید شده را به دست آورید.

حل ناحیه و يك جزء مستطیلی از سطح در شکل ۷۰۲۰۷ نشان داده شده اند. جزئی از حجم و جسم دوار در شکل ۸۰۲۰۷ دیده می شود. معادله منحنی داده شده را نسبت به x حل می کنیم و داریم

$$x = \sqrt{20 - 4y} + 1$$



شکل ۸۰۲۰۷



شکل ۷۰۲۰۷

فرض کنید $g(y) = \sqrt{20 - 4y} + 1$. يك افراز از بازه $[1, 3]$ روی محور y ها در نظر می گیریم. پس اگر حجم i مین قرص مستدیر $\Delta_i V$ واحد مکعب باشد،

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi [g(\xi_i) - 1]^2 \Delta_i y \\ &= \pi [(\sqrt{20 - 4\xi_i} + 1) - 1]^2 \Delta_i y \\ &= \pi (20 - 4\xi_i) \Delta_i y. \end{aligned}$$

اگر حجم جسم دوار V واحد مکعب باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi (20 - 4\xi_i) \Delta_i y \\ &= \pi \int_1^3 (20 - 4y) dy \end{aligned}$$

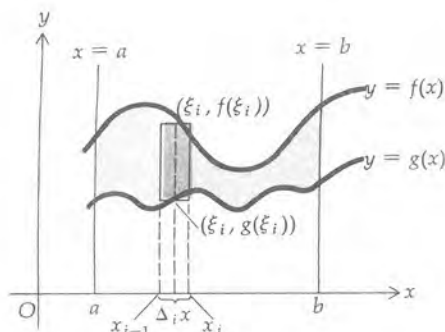
$$= \pi \left[20y - 2y^2 \right]_1^2 = \pi \left[(60 - 18) - (20 - 2) \right] = 24\pi.$$

بنابراین، حجم جسم دوار برابر با 24π واحد مکعب است. ▲

حال تصور کنید که محور دوران، يك مرز ناحیه دوران یافته نباشد. فرض کنید f و g دو تابع پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ باشند، و برای تمام x های در $[a, b]$ ، داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq 0$. فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد. اگر S جسم دوار حاصل از دوران ناحیه R حول محور x ها باشد و اگر V واحد مکعب حجم S باشد، می‌خواهیم يك مقدار برای V به دست آوریم. فرض کنید Δ افزای از بازه $[a, b]$ باشد که به صورت زیر است

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

و طول زیر بازه i م یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ برابر با $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ است. در زیر بازه i م، ξ_i دلخواهی انتخاب می‌کنیم که $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. جزء مستطیلی از سطح برای ناحیه R در نظر بگیرد. شکل ۹.۲.۷ ناحیه i مین مستطیل، و شکل ۱۰.۲.۷ جسم دوار را نشان می‌دهد.

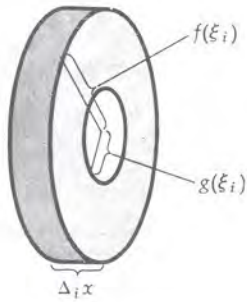


شکل ۹.۲.۷

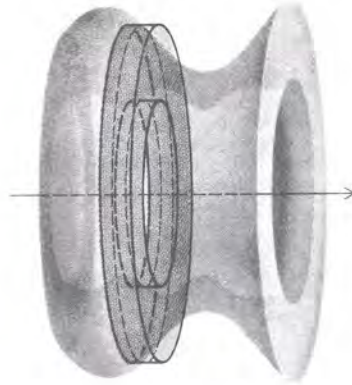
وقتی که مستطیل i م حول محور x ها دوران کند، يك حلقه مستدیر (یا «واشر») به دست می‌آید، که در شکل ۱۱.۲.۷ نشان داده شده است. عددی که تفاضل اندازه مساحت‌های دو ناحیه مستدیر را می‌دهد، برابر با $\pi[f(\xi_i)]^2 - \pi[g(\xi_i)]^2$ و ضخامت، $\Delta_i x$ واحد است. بنابراین اندازه حجم حلقه مستدیر از رابطه زیر معین می‌شود

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x.$$

مجموع اندازه حجم‌های n حلقه مستدیر که از دوران n جزء مستطیلی سطح حول محور x ها



شکل ۱۱۰۲۰۷



شکل ۱۰۰۲۰۷

به دست می آید، برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x. \quad (۴)$$

پس، حجم جسم دوار بر حسب واحد مکعب، به صورت حد مجموع ریمانی (۴)، وقتی که $\|\Delta\| \rightarrow 0$ به سمت صفر میل کند، تعریف می شود. به علت پیوسته بودن f و g ، توابع f^2 و g^2 نیز روی $[a, b]$ پیوسته هستند، پس حد فوق وجود دارد.

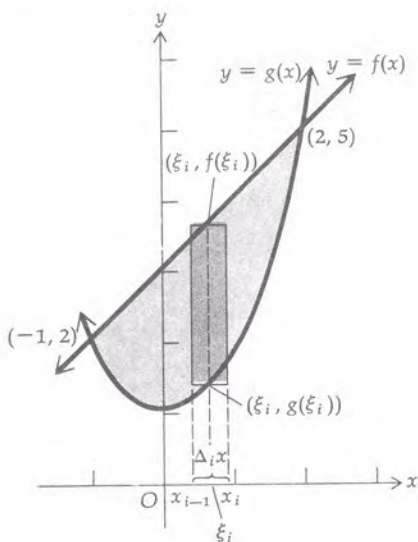
۲.۲.۷ تعریف فرض کنید توابع f و g روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند، و برای تمام x های در $[a, b]$ داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq 0$. در این صورت، اگر حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها برابر با V واحد مکعب باشد، داریم

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx. \quad (۵)$$

مانند حالت قبل، وقتی که محور دوران، محور y ها یا هر خط موازی با محور x ها یا محور y ها باشد، تعریف مشابهی به کار می رود.

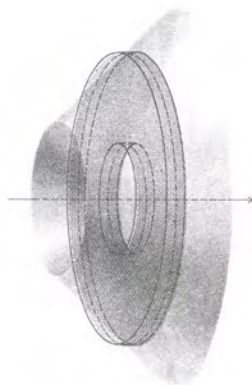
مثال ۲ حجم جسمی را به دست آورید که از دوران ناحیه محصور بین سهمی $y = x^2 + 1$ و خط $y = x + 3$ حول محور x ها تولید می شود.

حل نقاط تقاطع، $(-1, 2)$ و $(2, 5)$ هستند. شکل ۱۲۰۲۰۷ ناحیه و یک جزء



شکل ۱۲.۲۰۷

مستطیلی از سطح را نشان می‌دهد. جزئی از حجم، و جسم دوار در شکل ۱۳.۲۰۷ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۲۰۷

اگر $f(x) = x + 3$ و $g(x) = x^2 + 1$ ، اندازه حجم حلقه مستدیر برابر است با

$$\Delta_i V = \pi([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x.$$

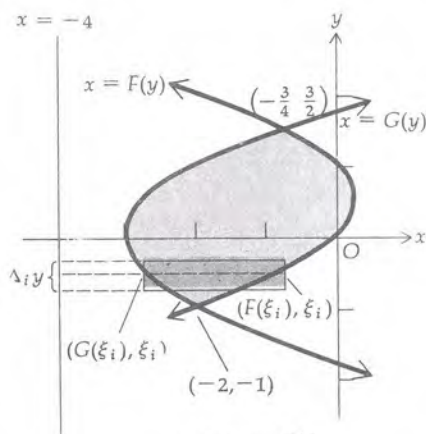
اگر حجم جسم V واحد مکعب باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi ([f(\xi_i)]^2 - [g(\xi_i)]^2) \Delta_i x \\
 &= \pi \int_{-1}^2 ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \\
 &= \pi \int_{-1}^2 [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] dx \\
 &= \pi \int_{-1}^2 [-x^4 - x^2 + 6x + 8] dx \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^2 \\
 &= \pi \left[\left(-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16 \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8 \right) \right] \\
 &= \frac{117}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

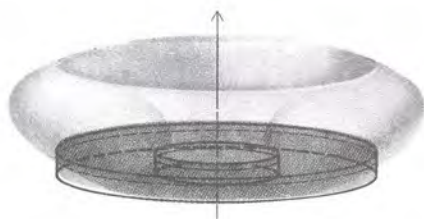
▲ بنابراین، حجم جسم دوار برابر با $117\pi/5$ واحد مکعب است.

مثال ۳ ناحیه محصور بین دو سهمی $x = y^2 - 3$ و $x = y - y^2$ حول خط $x = -4$ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

حل منحنیها در نقاط $(-2, -1)$ و $(-3/4, 3/2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح، در شکل ۱۴.۲۰۷، و جسم دوار با جزئی از حجم، که یک حلقه مستدیر است، در شکل ۱۵.۲۰۷ نشان داده شده است.



شکل ۱۴.۲۰۷



شکل ۱۵.۲۰۷

حجم يك جسم دوار: روشهای... ۶۲۱

فرض کنید $F(y) = y - y^2$ و $G(y) = y^2 - 3$. حجم حلقهٔ مستدیر برحسب واحد مکعب برابراست با

$$\Delta_i V = \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2) \Delta_i y.$$

پس

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi([4 + F(\xi_i)]^2 - [4 + G(\xi_i)]^2) \Delta_i y \\ &= \pi \int_{-1}^{3/2} [(4 + y - y^2)^2 - (4 + y^2 - 3)^2] dy \\ &= \pi \int_{-1}^{3/2} (-2y^3 - 9y^2 + 8y + 15) dy \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2}y^4 - 3y^3 + 4y^2 + 15y \right]_{-1}^{3/2} \\ &= \frac{875}{32} \pi. \end{aligned}$$

▲

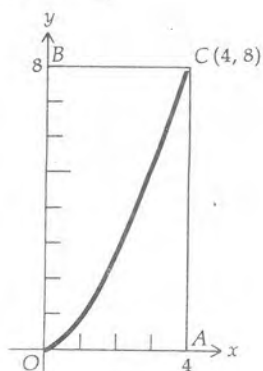
بنابراین، حجم جسم دوار $\frac{875\pi}{32}$ واحد مکعب است.

تمرینهای ۲.۷

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۸، حجم جسم دوار حاصل را پیدا کنید اگر ناحیه مشخص شده از شکل ۱۶.۲.۷، حول خط داده شده دوران کند. معادلهٔ منحنی شکل ۱۶.۲.۷ به صورت $y^2 = x^3$ است.

۲. OAC حول خط AC

۱. OAC حول محور x ها



شکل ۱۶.۲.۷

۳. OAC حول خط BC ۴. OAC حول محور y ها

۵. OBC حول محور y ها ۶. OBC حول خط BC

۷. OBC حول خط AC ۸. OBC حول محور x ها

در هر يك از تمرینهای ۹ تا ۱۲، حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها، و خط $x = 4$ حول خط داده شده پدید می‌آید.

۹. خط $x = 4$ ۱۰. محور x ها ۱۱. محور y ها ۱۲. خط $y = 2$

۱۳. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^3$ ، محور x ها، و خط $x = 2$ حول محور x ها پدید می‌آید.

۱۴. مطلوب است حجم جسم دوار تولید شده از دوران ناحیه مذکور در تمرین ۱۳، حول محور y ها.

۱۵. حجم کره‌ای را پیدا کنید که از دوران ناحیه محدود به دایره $x^2 + y^2 = r^2$ حول يك قطر پدید می‌آید.

۱۶. با انتگرال گیری، حجم مخروط مستدیر قائمی به ارتفاع h واحد و شعاع قاعده a واحد را به دست آورید.

۱۷. اگر ناحیه محدود به يك قوس از منحنی سینوسی حول محور x ها دوران کند، حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

۱۸. ناحیه محصور بین منحنی $y = \sin^2 x$ و محور x ها از $x = 0$ تا $x = \pi$ حول محور x ها دوران می‌کند؛ حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

۱۹. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تمرین ۱۸ حول خط $y = 1$ را به دست آورید.

۲۰. ناحیه محصور بین محور y ها و منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ به ازای $0 \leq x \leq \pi/4$ ، حول محور x ها دوران می‌کند؛ حجم جسم دوار تولید شده را به دست آورید.

۲۱. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین خط $x = -4$ و سهمی $x = 4 + 6y - 2y^2$ حول خط $x = -4$ را به دست آورید.

۲۲. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین سهمی $y^2 = 4x$ و خط $y = x$ ، حول محور x ها.

۲۳. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه مذکور در تمرین ۲۲ حول خط $x=4$ را به دست آورید.

۲۴. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین خط مار بر $(1, 3)$ و $(3, 7)$ ، و خطوط $y=3$ ، $y=7$ ، و $x=0$ حول محور y ها را به دست آورید.

۲۵. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین دوسهمی $y=x^2$ و $y=1+x-x^2$ حول خط $y=-3$ را به دست آورید.

۲۶. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین نمودار $y=|x-3|$ ، و خطوط $x=1$ ، $x=4$ ، و $y=0$ حول محور x ها را به دست آورید.

۲۷. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین خطوط $y=[\sqrt{x+1}]$ ، $y=0$ ، $x=7$ ، $x=3$ حول محور x ها را به دست آورید.

۲۸. قطر مخزن نفت کره شکلی ۵ فوت است. اگر عمق نفت موجود در مخزن ۲۵ فوت باشد، مقدار نفت موجود در آن چقدر است؟

۲۹. یک سهمیوار دوار از دوران سهمی $y^2=4px$ حول محور x ها تولید شده است. این سهمیوار را با صفحه‌ای عمود بر محور آن و به فاصله ۱۵ سانتیمتر از رأس آن قطع می‌کنیم، اگر مقطع مسطح صفحه با سهمیوار، دایره‌ای به شعاع ۶ سانتیمتر باشد، حجم جسم محصور بین سهمیوار دوار و این صفحه را به دست آورید.

۳۰. ناحیه محدود به طوق منحنی با معادله $x(x^2-4)=y^2$ ، حول محور x ها دوران داده می‌شود. حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

۳۱. ناحیه محدود به یک طوق منحنی به معادله $(1-x^2)(x^2-9)=x^2y^2$ حول محور x ها دوران داده می‌شود. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

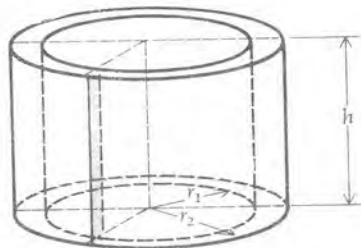
۳۲. ناحیه محصور بین یک پنج ضلعی با رئوس $(-4, 4)$ ، $(-2, 0)$ ، $(0, 8)$ ، $(2, 0)$ ، و $(4, 4)$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم؛ حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

۳۳. یک جسم دوار از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y=\sqrt{2x+4}$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x=c$ ($c>0$) حول محور x ها تشکیل می‌شود. به ازای چه مقداری از c ، حجم برابر با 12π واحد مکعب خواهد بود؟

۳۴. ناحیه محصور بین منحنی $y=\cos x$ و خطوط $y=1$ و $x=\pi/2$ واقع در ربع اول را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۳.۰۷ حجم يك جسم دوار: روش پوسته استوانه‌ای

در بخش قبل، برای یافتن حجم يك جسم دوار، اجزاء مستطیلی سطح را عمود بر محور دوران در نظر گرفتیم، و در آنجا، جزء حجم یا يك قرص مستدیر و یا يك حلقه مستدیر بود. اگر يك جزء مستطیلی از سطح موازی با محور دوران باشد، در این صورت وقتی که این جزء مستطیلی حول محور دوران، دوران کند، يك پوسته استوانه‌ای به دست می‌آید. يك پوسته استوانه‌ای عبارت است از جسمی که بین دو استوانه با مرکز و محور مشترك قرار دارد. در شکل ۱.۳.۷ يك چنین پوسته استوانه‌ای نشان داده شده است.

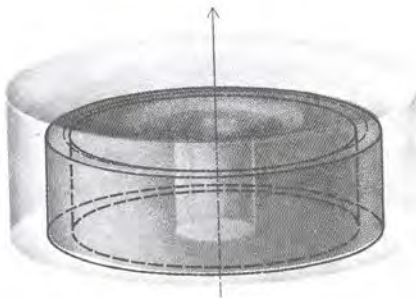


شکل ۱.۳.۷

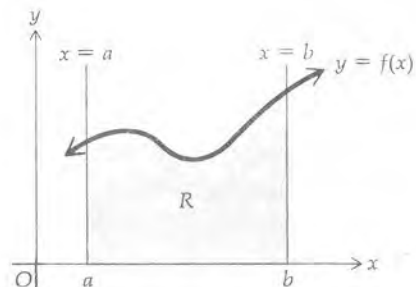
در يك پوسته استوانه‌ای، اگر شعاع داخلی r_1 واحد و شعاع خارجی r_2 واحد و ارتفاع h واحد باشد، حجم پوسته که V واحد مکعب است از رابطه زیر به دست می‌آید

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h.$$

فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد، که f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است و برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq 0$ ؛ همچنین فرض کنید که $a \geq 0$. چنین ناحیه‌ای را در شکل ۲.۳.۷ مشاهده می‌کنید. اگر ناحیه R حول محور y ها دوران کند، جسم دواری مانند S تولید می‌شود. چنین جسم دواری در شکل ۳.۳.۷ نشان داده شده است. اگر اجزاء مستطیلی سطح



شکل ۳.۳.۷



شکل ۲.۳.۷

را موازی با محور γ ها بگیریم، برای محاسبه حجم S به طریق زیر عمل می کنیم.
فرض کنید Δ افرازی از بازه بسته $[a, b]$ به صورت زیر است

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

و تصور کنید m_i نقطه وسط i مین زیربازه، یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ است. در این صورت،
 $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. مستطیلی را که ارتفاع آن $f(m_i)$ واحد و قاعده آن $\Delta_i x$ واحد
است، در نظر بگیرید. اگر این مستطیل حول محور γ ها دوران کند، يك پوسته استوانه ای
به دست می آید. شکل ۳.۳.۷ پوسته استوانه ای تولید شده به وسیله این جزء مستطیلی سطح
را نشان می دهد.

اگر $\Delta_i V$ اندازه حجم این پوسته استوانه ای باشد، از فرمول (۱) با قراردادن
 $r_2 = x_i$ ، $r_1 = x_{i-1}$ و $h = f(m_i)$ داریم

$$\begin{aligned} \Delta_i V &= \pi x_i^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}^2 f(m_i) \\ &= \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) f(m_i) \\ \Delta_i V &= \pi (x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i). \end{aligned} \quad (2)$$

چون $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ و چون $x_i + x_{i-1} = 2m_i$ ، پس، از (۲) داریم

$$\Delta_i V = 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x. \quad (3)$$

اگر n جزء مستطیلی سطح حول محور γ ها دوران کنند، n پوسته استوانه ای به دست
می آیند. مجموع اندازه حجمهای آنها برابر است با

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i V = \sum_{i=1}^n 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x \quad (4)$$

که يك مجموع ریمانی است.

پس، اندازه حجم جسم دوار را به عنوان حد مجموع ریمانی (۴)، وقتی که $\|\Delta\|$
به سمت صفر میل کند، تعریف می کنیم. این حد وجود دارد، چون اگر f روی $[a, b]$
پیوسته باشد، تابعی با مقادیر $2\pi x f(x)$ نیز چنین است.

۱.۳.۷ تعریف فرض کنید تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، که در آن $a \geq 0$ و
فرض کنید برای تمام x های در $[a, b]$ داریم $f(x) \geq 0$. اگر R ناحیه محصور بین
منحنی $y = f(x)$ ، محور x ها، و خطوط $x = a$ و $x = b$ باشد، واگر S جسم دوار حاصل
از دوران ناحیه R حول محور γ ها، و حجم آن V واحد مکعب باشد،

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i f(m_i) \Delta_i x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (5)$$

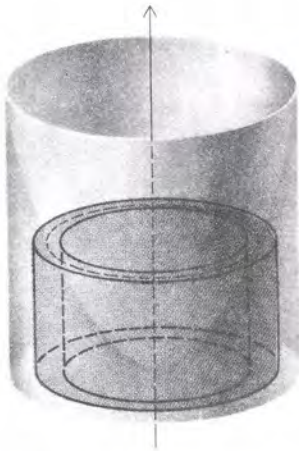
تعریف ۱.۳.۷ با تعاریف ۱.۲.۷ و ۲.۲.۷ برای اندازه حجم يك جسم دوار
سازگار است.

فرمول اندازه حجم پوسته را می توان به آسانی به خاطر سپرد؛ به این صورت که

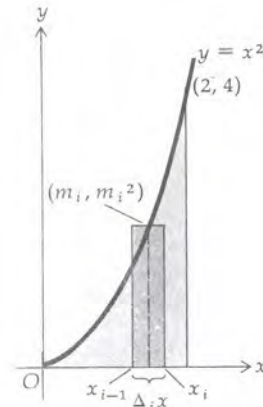
شعاعهای داخلی و خارجی پوسته است، ارتفاع پوسته، و ضخامت پوسته. $2\pi m_i$ ، $f(m_i)$ ، و Δx به ترتیب عبارت اند از محیط دایره‌ای که شعاع آن میانگین

مثال ۱ ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ ، محور x ها و خط $x = 2$ حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم تولید شده را به دست آورید. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.

حل شکل ۴.۳.۷ ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح را نشان می‌دهد؛ و در شکل ۵.۳.۷، جسم دوار و پوسته استوانه‌ای حاصل از دوران جزء مستطیلی سطح حول محور y ها دیده می‌شود.



شکل ۵.۳.۷



شکل ۴.۳.۷

جزء حجم، یک پوسته استوانه‌ای است که اندازه حجمش برابر است با

$$\Delta_i V = 2\pi m_i(m_i^2) \Delta_i x = 2\pi m_i^3 \Delta_i x$$

پس

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi m_i^3 \Delta_i x \\ &= 2\pi \int_0^2 x^3 dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

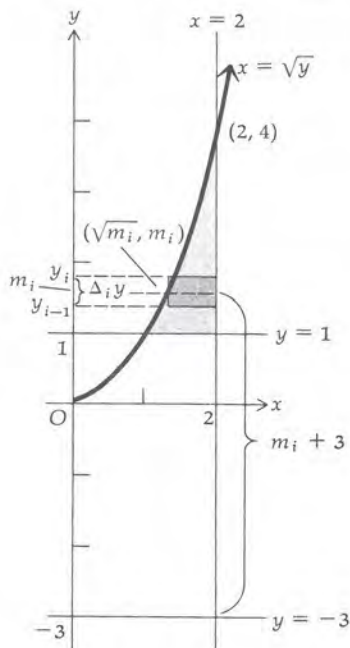
بنابراین، حجم جسم دوار 8π واحد مکعب می باشد. ▲

مثال ۲ ناحیه محصور بین منحنی $y = x^2$ و خطوط $y = 1$ و $x = 2$ حول خط $y = -3$ دوران می کند. اجزاء مستطیلی سطح را به موازات محور دوران بگیریید و حجم جسم تولید شده را پیدا کنید.

حل ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح در شکل ۶.۳.۷ نشان داده شده است. معادله منحنی به صورت $y = x^2$ است. اگر آن را نسبت به x حل کنیم، داریم $x = \pm\sqrt{y}$. چون برای ناحیه داده شده داریم $x > 0$ ، پس $x = \sqrt{y}$.



شکل ۷.۳.۷



شکل ۶.۳.۷

جسم دوار و یک جزء پوسته استوانه‌ای از حجم در شکل ۷.۳.۷ نشان داده شده است. شعاع خارجی پوسته استوانه‌ای $(y_i + 3)$ واحد و شعاع داخلی آن $(y_{i-1} + 3)$ واحد است. پس، میانگین شعاع داخلی و خارجی $(m_i + 3)$ واحد است. چون ارتفاع و ضخامت پوسته استوانه‌ای به ترتیب برابر با $(2 - \sqrt{m_i})$ واحد و Δy_i واحدند، پس

$$\Delta_i V = 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i}) \Delta y_i.$$

بنابراین، اگر حجم جسم دوار V واحد مکعب باشد، داریم

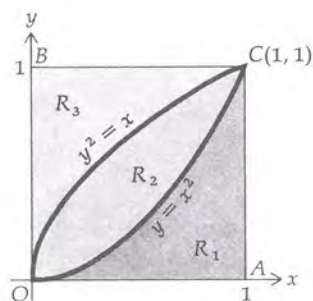
$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi(m_i + 3)(2 - \sqrt{m_i}) \Delta_i y \\
 &= \int_1^4 2\pi(y + 3)(2 - \sqrt{y}) dy \\
 &= 2\pi \int_1^4 (-y^{3/2} + 2y - 3y^{1/2} + 6) dy \\
 &= 2\pi \left[-\frac{2}{5}y^{5/2} + y^2 - 2y^{3/2} + 6y \right]_1^4 \\
 &= \frac{66}{5}\pi.
 \end{aligned}$$

▲ بنابراین، حجم برابر با $66\pi/5$ واحد مکعب است.

تمرینهای ۳.۲

۱۴-۱. تمرینهای ۱ تا ۱۲ در بخش ۲.۲ را با استفاده از دوش پوسته‌استوانه‌ای حل کنید.

در شکل ۸.۳.۷، ناحیه محصور بین محور x ها، خط $x=1$ و منحنی $y=x^2$ با R_1 ، ناحیه محصور بین دو منحنی $y=x^2$ و $y^2=x$ با R_2 ، و ناحیه محصور بین محور y ها، خط $y=1$ و منحنی $y^2=x$ با R_3 نشان داده شده است. در تمرینهای ۱۳ تا ۲۵، حجم جسم دوارى را که از دوران ناحیه مفروض حول خط داده شده به دست می‌آید، پیدا کند.



شکل ۸.۳.۷

۱۳. R_1 حول محور y ها دوران می‌کند؛ اجزاء مستطیلی موازی با محور دوران هستند.

۱۴. همانند تمرین ۱۳، اما اجزاء مستطیلی عمود بر محور دوران هستند.
۱۵. R_2 حول محور x ها دوران می‌کند؛ اجزاء مستطیلی موازی با محور دوران هستند.
۱۶. همانند تمرین ۱۵، اما اجزاء مستطیلی عمود بر محور دوران هستند.
۱۷. R_3 حول خط $y = 2$ دوران می‌کند؛ اجزاء مستطیلی موازی با محور دوران هستند.
۱۸. همانند تمرین ۱۷، اما اجزاء مستطیلی عمود بر محور دوران هستند.
۱۹. R_2 حول خط $x = -2$ دوران می‌کند؛ اجزاء مستطیلی موازی با محور دوران هستند.
۴۰. همانند تمرین ۱۹، اما اجزاء مستطیلی عمود بر محور دوران هستند.
- دو تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، ناحیهٔ تمرین ۱۷ از تمرینهای ۱۰۷ حول محدود داده شده دوران می‌کند. حجم جسم دوار حاصل را پیدا کنید.
۲۱. محور x ها ۲۲. محور y ها ۲۳. خط $x = 2$ ۲۴. خط $y = 2$.
۲۵. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیهٔ محصور بین سهمی $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) و خط $x = a$ حول خط $x = a$ تولید می‌شود.
۲۶. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیهٔ محصور بین منحنیهای $y = x^3$ و $x = y^3$ حول محور x ها به دست می‌آید. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.
۲۷. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیهٔ محصور بین سهمی $x^2 = 4y$ و خط $y = 1$ حول خط $y = 1$ به دست می‌آید. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.
۲۸. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ حول محور y ها را به دست آورید.
۲۹. حجم جسم دواری را پیدا کنید که از دوران ناحیهٔ محصور بین منحنی $y = \sin x^2$ ، محور x ها، و خطوط $x = \sqrt{\pi}/2$ و $x = \sqrt{\pi}$ حول محور y ها به دست می‌آید.
۳۰. ناحیهٔ محصور بین محور y ها و منحنی $x = \cos y^2$ در بازهٔ $[0, 1]$ روی محور x ها، حول محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.
۳۱. ناحیهٔ خارج از منحنی $y = x^2$ و بین خطوط $y = 2x - 1$ و $y = x + 2$ ، حول

محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

۳۳. در یک جسم کروی شکل به شعاع ۶ سانتیمتر، حفره ای به شعاع ۲ سانتیمتر ایجاد می کنیم؛ محور حفره یک قطر کره است. حجم قسمت باقی مانده جسم را به دست آورید.

۳۴. در یک جسم کروی شکل به شعاع ۴ اینچ، حفره ای به شعاع $2\sqrt{3}$ اینچ در امتداد مرکز کره ایجاد می کنیم. حجم قسمت بریده شده را به دست آورید.

۳۵. ناحیه محصور بین سهمی $y^2 = 4px$ و خط $x = p$ ، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۳۶. ناحیه محصور بین نمودار $y = |x - 3|$ و خطوط $x = 1$ ، $x = 5$ و $y = 0$ ، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.

۳۷. ناحیه محصور بین منحنی $y = \cos x$ و خطوط $y = 1$ و $x = \pi/2$ در ربع اول حول خط $x = \pi/2$ دوران می کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۳۸. جسم دوار از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = \sqrt{x}$ ، محور x ها و خط $x = c$ ($c > 0$) حول محور y ها تشکیل می شود. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید، و مقداری برای c به دست آورید که حجم جسم برابر با 12π واحد مکعب باشد.

۳۹. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محصور بین محور x ها و خطوط $y = [1 + \sqrt{2x}]$ ، $x = 4$ و $x = 7$ را حول محور x ها به دست آورید. اجزاء مستطیلی سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.

۲۰۷ حجم جسمی که دارای مقاطع مسطح متوازی معلوم است

فرض کنید S یک جسم باشد. منظور از مقطع مسطح S ناحیه مسطحی است که از تقاطع یک صفحه با S به وجود می آید. در بخش ۲۰۷ آموختیم که چگونه می توان حجم جسم دوار را که تمام مقاطع مسطح عمود بر محور دوران آن، دایره هستند، به دست آورد. در این بخش، این روش را برای محاسبه حجم جسمی تعمیم می دهیم که در مورد آن بتوان مساحت هر مقطع مسطح عمود بر یک خط ثابت را بر حسب فاصله عمودی آن مقطع از یک نقطه ثابت بیان کرد. ابتدا استوانه را تعریف می کنیم.

۱۰۴۰۷ تعریف جسمی را استوانه قائم گویند که محصور بین دو ناحیه مسطح قابل انطباق

R_1 و R_2 در صفحاتی متوازی و یک رویه جانبی باشد. بد قسمی که این رویه از حرکت چنان پاره خطی به وجود آمده باشد که نقاط انتهایی آن بر مرزهای R_1 و R_2 واقع بوده و همواره عمود بر صفحات R_1 و R_2 باشد.

در شکل ۱۰۴۰۷ یک استوانه قائم را مشاهده می کنید. ارتفاع استوانه، فاصله عمودی بین صفحات R_1 و R_2 است، و هر کدام از R_1 و R_2 را قاعده استوانه گویند. اگر قاعده استوانه قائمی ناحیه محدود به یک دایره باشد، آن را یک استوانه مستدیر قائم گویند (شکل ۲۰۴۰۷ را ببینید)؛ و اگر ناحیه قاعده توسط یک مستطیل محصور شده باشد، آن را یک مکعب مستطیل می نامند (شکل ۳۰۴۰۷ را ببینید).



شکل ۳۰۴۰۷



شکل ۲۰۴۰۷



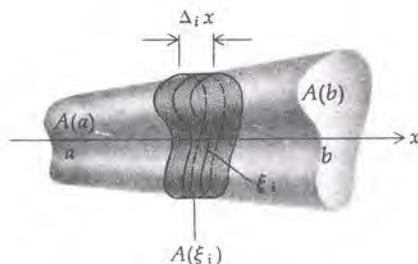
شکل ۱۰۴۰۷

اگر مساحت قاعده استوانه قائمی برابر با A واحد مربع، و ارتفاع آن h واحد باشد، آنگاه بنابه تعریف، حجم استوانه قائم برابر با حاصلضرب A و h است. همان طور که در بالا اشاره شد، در اینجا اجسامی را در نظر می گیریم که مساحت هر مقطع سطحی از آنها که بر خطی ثابت عمود است، تابعی است از فاصله عمودی آن مقطع سطح از یک نقطه ثابت. جسم S که در شکل ۲۰۴۰۷ نشان داده شده است، چنین جسمی است که بین صفحات عمود بر محور x ها در a و b قرار دارد. مساحت مقطع سطح جسم S با صفحه عمود بر محور x ها در x را با $A(x)$ واحد مربع نمایش می دهیم، که A تابعی پیوسته روی $[a, b]$ است. فرض کنید Δ افرازی از بازه بسته $[a, b]$ باشد که به صورت زیر است

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

در این صورت، n زیر بازه به شکل $[x_{i-1}, x_i]$ به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ وجود دارد، که طول زیر بازه i م برابر است با $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. عدد دلخواه ξ_i را در هر زیر بازه طوری انتخاب می کنیم که $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ و در هر زیر بازه، استوانه قائمی با ارتفاع $\Delta_i x$ واحد و با مساحت مقطع سطح $A(\xi_i)$ واحد مربع می سازیم. حجم استوانه i م برابر با $\Delta_i x \cdot A(\xi_i)$ واحد مکعب است. بدین ترتیب، n استوانه قائم به دست می آید، و مجموع اندازه حجمهای این n استوانه برابر با مجموع ریمانی زیرمی باشد

$$\sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x. \quad (1)$$



شکل ۴.۴.۷

این مجموع ریمانی، تقریبی است برای چیزی که به‌طور شهودی فکر می‌کنیم اندازه حجم S است. هرچه نرم $\|\Delta\|$ از افراز Δ را کوچکتر بگیریم، n بزرگتر است و در نتیجه، این مقدار تقریبی به‌عددی که می‌خواهیم به‌اندازه حجم نسبت دهیم نزدیکتر خواهد بود. پس، تعریف زیر را داریم.

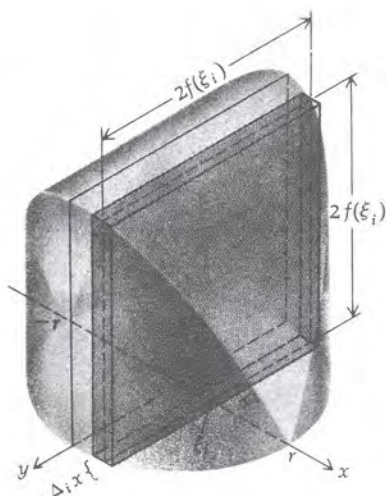
۲.۴.۷ تعریف فرض کنید جسم S بین صفحات عمود بر محور x ها در a و b قرار دارد. اگر اندازه مساحت مقطع مسطح S با صفحات عمود بر محور x ها در x برابر با $A(x)$ باشد، که A تابعی پیوسته روی $[a, b]$ است، در این صورت، اندازه حجم S برابر است با

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b A(x) dx. \quad (۲)$$

تعریفهای ۱.۲.۷ و ۲.۲.۷ حالت‌های خاصی از تعریف ۲.۴.۷ هستند. اگر در معادله (۲) به‌جای $A(x)$ مقادیر $\pi[f(x)]^2$ و $\pi[g(x)]^2 - \pi[f(x)]^2$ را قرار دهیم، آنگاه به‌ترتیب معادلات (۳) و (۵) از بخش ۲.۷ به‌دست خواهند آمد.

مثال ۱ اگر قاعده جسمی ناحیه محدود به دایره‌ای به شعاع r واحد باشد، و اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده به شکل مربع باشند، حجم جسم را به‌دست آورید.

حل دایره را در صفحه xy ، مرکزش را مبدأ مختصات، و قطر ثابت مذکور را روی محور x ها در نظر می‌گیریم. بنابراین، معادله دایره به‌صورت $x^2 + y^2 = r^2$ خواهد بود. شکل ۵.۴.۷ جسم را با جزئی از حجم، که یک مکعب مستطیل به ارتفاع $\Delta_i x$ واحد و مساحت قاعده $[2f(\xi_i)]^2$ واحد مربع می‌باشد نشان می‌دهد؛ $f(x)$ از حل معادله دایره نسبت به y و قرار دادن $y = f(x)$ به‌دست می‌آید. از این محاسبه نتیجه می‌شود $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. بنابراین، اگر حجم جسم V واحد مکعب باشد، داریم



شکل ۵.۴.۷

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [2f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$$

$$= 4 \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

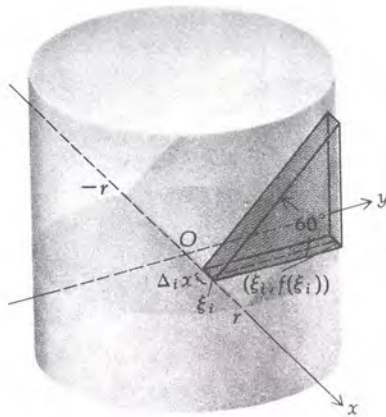
$$= 4 \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r$$

$$\triangleq \frac{16}{3} r^3.$$

مثال ۲ يك گوه از استوانه مستدیر قائمی به شعاع r سانتیمتر توسط دو صفحه بریده می‌شود، که صفحه اول عمود بر محور استوانه است و صفحه دوم، اولی را با زاویه 60° درجه در امتداد قطری از مقطع سطح مستدیر قطع می‌کند. حجم گوه به دست آمده را پیدا کنید.

حل گوه در شکل ۵.۴.۷ نشان داده شده است. صفحه xy را صفحه عمود بر محور استوانه در نظر می‌گیریم، و مبدأ را نقطه تعامد این صفحه و محور استوانه انتخاب می‌کنیم. در این صورت، معادله مقطع سطح مستدیر به صورت $r^2 = x^2 + y^2$ می‌باشد. هر مقطع سطح گوه که بر محور x ها عمود باشد، يك مثلث قائم‌الزاویه است؛ و جزئی از حجم،

استوانه قائمی با ارتفاع $\Delta_i x$ سانتیمتر و مساحت قاعده $\sqrt{3}[f(\xi_i)]^2/2$ سانتیمتر مربع است، که $f(x)$ از حل معادله دایره نسبت به y و قرارداد $y = f(x)$ به دست می آید که نتیجه می شود $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. بنابراین، اگر حجم گوه V سانتیمتر مکعب باشد، داریم



شکل ۶.۴.۷

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \sqrt{3} (r^2 - \xi_i^2) \Delta_i x \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{3} r^3. \end{aligned}$$

پس، حجم گوه $2\sqrt{3}r^3/3$ سانتیمتر مکعب است.

در بخش ۶.۶ فرمول منشور واری زیر را به دست آوردیم

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

که f یک چند جمله ای از درجه نایبتر از ۳ است. در مثال زیر، فرمول منشور واری

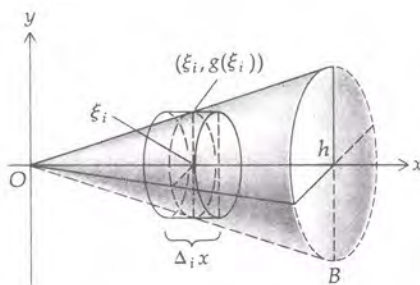
حجم جسمی که دارای ... ۳۵

برای محاسبه يك انتگرال معين كه اندازه حجم جسمی را به دست می دهد، مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۳ حجم مخروط مستدیر قائمی به ارتفاع h و شعاع قاعده r را با استفاده از فرمول منشوروارى به دست آورید.

حل شکل ۷.۴.۷ مخروط مستدیر قائمی را که رأس آن در مبدأ مختصات و محور در امتداد طرف مثبت محور x قرار دارد، نشان می دهد. مساحت مقطع سطحی که به فاصله ξ_i واحد از مبدأ قرار دارد، برابر با $\pi[g(\xi_i)]^2$ واحد مربع است، که $g(x) = (r/h)x$ و $g(x)$ از معادله خط OA در صفحه xy به دست می آید. پس اگر حجم مخروط مستدیر قائم V واحد مکعب باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi[g(\xi_i)]^2 \Delta_i x \\ &= \int_0^h \pi[g(x)]^2 dx \\ &= \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx. \end{aligned}$$



شکل ۷.۴.۷

برای محاسبه $\int_0^h x^2 dx$ از فرمول منشوروارى با قرارداد $f(x) = x^2$ ، $a = 0$ ، $b = h$ ، و $(a+b)/2 = h/2$ استفاده می کنیم و خواهیم داشت

$$\blacktriangle \quad V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h}{6} \left(0 + 4 \cdot \frac{h^2}{4} + h^2 \right) = \frac{\pi r^2}{6h} (2h^2) = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

تمرینهای ۴.۷

۱. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به يك بیضی با معادلهٔ $x^2 + y^2 = ۳۶$ است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر محور xy ها به شکل مربع باشند، حجم جسم را به دست آورید.
۲. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به هذلولی $۱۰۰ = ۴y^2 - ۲۵x^2$ و خط $x = ۴$ است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر محور xy ها مربع باشند، حجم جسم را به دست آورید.
۳. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به يك دایره به شعاع ۷ سانتیمتر است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده، مثلثهای متساوی الاضلاع باشند، حجم جسم را به دست آورید.
۴. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ توصیف شده در تمرین ۲ است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر محور xy ، مثلثهای متساوی الاضلاع باشند، حجم جسم را به دست آورید.
۵. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ تمرین ۳ است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده، مثلثهای متساوی الساقینی با ارتفاعهای مساوی با فاصلهٔ مقطع مسطح از مرکز دایره باشند، حجم جسم را به دست آورید.
۶. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به دایره‌ای به شعاع r واحد است و تمام مقاطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده، مثلثهای متساوی الساقین قائم‌الزاویه‌ای هستند که وترشان در صفحهٔ قاعده است. حجم جسم را به دست آورید.
۷. تمرین ۶ را با این تغییر حل کنید که یکی از ساقهای مثلثهای متساوی الساقین قائم‌الزاویه در صفحهٔ قاعده باشد.
۸. حجم يك هرم قائم به ارتفاع h واحد و با قاعده‌ای به شکل مربع با طول ضلع a واحد را به دست آورید.
۹. مطلوب است محاسبهٔ حجم يك چهاروجهی که سه وجه آن دایره برهم عمودند و سه یال آن نیز دایره برهم عمودند و طول آنها ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴

دایره است. حجم جسم را به دست آورید.

۱۳. قاعده جسمی ناحیه محدود به دایره ای به شعاع ۹ سانتیمتر است؛ و هر مقطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده به شکل مربعی است که یک قطرش وتری از دایره می باشد. حجم جسم را پیدا کنید.

۱۴. قاعده جسمی ناحیه محدود به دایره ای به شعاع ۳ واحد است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده، مستطیلهایی باشند به ارتفاع $1/2$ طول وتری از دایره که قاعده مستطیل را تشکیل می دهد، حجم جسم را به دست آورید.

۱۵. قاعده جسمی ناحیه محصور بین منحنی $x = 2\sqrt{y}$ و خطوط $x + y = 0$ و $y = 9$ است. اگر تمام مقاطع مسطح عمود بر محور y ها، مربعهایی باشند که نقطه انتهایی یک قطر آنها روی خط $x + y = 0$ و نقطه انتهایی دیگرش روی منحنی $x = 2\sqrt{y}$ باشد، حجم جسم را به دست آورید.

۱۶. دو استوانه مستدیر قائم، که شعاع قاعده هر یک از آنها ۳ واحد است، دارای محورهای متعامد هستند. حجم جسم مشترک بین دو استوانه را به دست آورید.

۱۷. از جسمی به شکل استوانه مستدیر قائم به شعاع قاعده ۳ سانتیمتر، به وسیله صفحه ای که از یکی از قطرهای قاعده می گذرد و با صفحه قاعده زاویه 45° می سازد، گوه ای بریده می شود. حجم گوه را به دست آورید.

۱۸. از جسمی به شکل یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعده ۵ فوت و ارتفاع ۲۰ فوت، گوه ای را با گذراندن دو نیم صفحه از محور مخروط، جدا می کنیم. اگر زاویه بین دو نیم صفحه 30° باشد، حجم گوه جدا شده را به دست آورید.

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، حجم جسم مفروض را با استفاده از فرمول منشوداری پیدا کنید.

۱۹. یک استوانه مستدیر قائم به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع h .

۲۰. کره ای به شعاع ۳.

۲۱. مخروط مستدیر قائم ناقصی به ارتفاع h و شعاعهای قاعده r_1 و r_2 .

۲۲. هرمی قائم به ارتفاع h با قاعده مربع شکلی به طول ضلع s .

کاز ۵۰۷

در فیزیک، کاز انجام شده توسط نیروی وارد بر یک شیئی را به صورت «حاصلضرب نیرو

در تغییر مکان» تعریف می کنند. مثلاً، فرض کنید شیئی در امتداد محور x ها از نقطه a به طرف نقطه b به سمت راست حرکت می کند، و نیروی ثابتی برابر با F پوند در جهت حرکت جسم، به آن وارد می شود. در این صورت، اگر تغییر مکان بر حسب قوت اندازه گیری شود، برابر با $(b-a)$ فوت خواهد بود. و اگر کار انجام شده توسط نیرو برابر با W فوت-پوند باشد، به صورت زیر تعریف می شود

$$W = F(b-a) . \quad (۱)$$

○ نمونه ۱ اگر کار لازم برای بالا بردن جسمی به وزن ۷۰ پوند تا ارتفاع ۳ فوت برابر با W فوت-پوند باشد، آنگاه

$$○ \quad W = 70 \times 3 = 210 .$$

واحد اندازه گیری کار بستگی به واحدهای نیرو و مسافت دارد. در سیستم واحدهای انگلیسی، که نیرو بر حسب پوند و مسافت بر حسب فوت اندازه گیری می شود، کار بر حسب فوت-پوند اندازه گیری می گردد. در سیستم متری، اگر واحد جرم کیلوگرم باشد و مسافت بر حسب متر اندازه گیری شود، آنگاه واحد نیرو نیوتن است، و واحد کار نیوتن-متر می باشد که آن را ژول می نامند. اگر در سیستم متری، واحد جرم گرم باشد و مسافت بر حسب سانتیمتر اندازه گیری شود، آنگاه واحد نیرو دین است، و واحد کار دین-سانتیمتر می باشد که آن را اگ است. در تبدیل واحدها، ۱ نیوتن برابر با ۱۰۵ دین و ۱ ژول برابر با ۱۰^۷ اگ است. نمونه زیر محاسبه ای از کار را با استفاده از واحدهای سیستم متری نشان می دهد.

○ نمونه ۲ سنگی به جرم ۸ کیلوگرم را ۴ متر بالا می کشیم، می خواهیم کار انجام شده را به دست آوریم. فرمول $F = Ma$ را به کار می بریم که در آن، F نیوتن (nt) نیرویی است که لازم است تا به جرم M کیلوگرم شتابی معادل a متر بر مجذور ثانیه بدهد. در این حالت، نیروی وارد بر جرم نیروی ثقل، و شتاب، ناشی از ثقل است که برابر با ۹٫۸۱ متر بر مجذور ثانیه می باشد. جرم سنگ ۸ کیلوگرم است. بنا بر این $M = 8$ ، $a = 9.81$ ، و داریم

$$F = 8(9.81)$$

$$= 78.48 .$$

پس، می خواهیم کار انجام شده در تغییر مکان جسمی به اندازه ۴ متر توسط نیرویی معادل ۷۸٫۴۸ نیوتن را پیدا کنیم. اگر W ژول کار انجام شده باشد، داریم

$$W = (78.48)(4)$$

$$= 313.92 .$$

○ بنا بر این، کار انجام شده ۳۱۳٫۹۲ ژول است.

اکنون کار انجام شده توسط يك نیروی متغیر را که تابعی از موقعیت شیئی است که نیرو بر آن وارد می‌شود، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم معنی اصطلاح کار را در چنین حالتی تعریف کنیم.

تصور کنید $f(x)$ که f تابعی پیوسته روی $[a, b]$ است، نیروی وارد بر يك شیء بر حسب واحد نیرو در جهت حرکت آن است وقتی که شیء به سمت راست ذراتداد محور x ها از نقطه a به سوی نقطه b حرکت می‌کند. و فرض کنید Δ افزای از بازه بسته $[a, b]$ به صورت زیر باشد

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

زیر بازه i م، $[x_{i-1}, x_i]$ است؛ و اگر x_{i-1} نزدیک به x_i باشد، نیرو در این زیر بازه تقریباً ثابت است. اگر فرض کنیم نیرو در زیر بازه i م ثابت و ξ_i نقطه دلخواهی باشد که $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ، آنگاه چنانچه $\Delta_i W$ کار انجام شده روی شیء بر حسب واحد کار باشد وقتی که شیء از نقطه x_{i-1} تا نقطه x_i حرکت می‌کند، از فرمول (۱) داریم

$$\Delta_i W = f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}).$$

با قرار دادن $\Delta_i x$ به جای $x_i - x_{i-1}$ خواهیم داشت

$$\Delta_i W = f(\xi_i) \Delta_i x$$

و

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i W = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x. \quad (2)$$

هرچه نورم افزاز Δ را کوچکتر بگیریم، n بزرگتر خواهد بود و مجموع ریمانی (۲) به آنچه که به طور شهودی فکر می‌کنیم اندازه کل کار انجام شده باشد، نزدیکتر خواهد شد. بنابراین، اندازه کل کار انجام شده را به صورت حد مجموع ریمانی (۲) تعریف می‌کنیم.

۱۰۵.۷ تعریف فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ ، و $f(x)$ بر حسب واحد نیرو، نیروی وارد بر يك شیء در نقطه x روی محور x ها باشد. بنابراین اگر W ، کار انجام شده بر حسب واحد کار توسط نیرو بر شیء باشد وقتی که شیء از a به b تغییر مکان می‌دهد، W را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx. \quad (3)$$

مثال ۱ ذره‌ای در امتداد محور x ها تحت تأثیر نیروی $f(x)$ پوند، وقتی که x فوت از مبدأ فاصله دارد، حرکت می‌کند. اگر $f(x) = x^2 + 4$ ، کار انجام شده را وقتی که ذره از نقطه به طول $x = 2$ به نقطه به طول $x = 4$ تغییر مکان می‌دهد به دست آورید.

حل افرازی از بازه بسته $[۲, ۴]$ در نظر می‌گیریم. ذره از نقطه به طول $x = ۲$ به نقطه به طول $x = ۴$ حرکت می‌کند. اگر W بر حسب فوت-پوند، کار انجام شده باشد، آنگاه از تعریف ۱۰.۵.۷ داریم

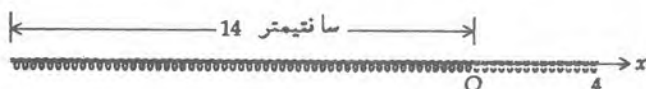
$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_2^4 (x^2 + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 4x \right]_2^4 \\ &= \frac{64}{3} + 16 - \left(\frac{8}{3} + 8 \right) \\ &= 26 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده برابر با $26 \frac{2}{3}$ فوت-پوند است. $\blacktriangle$

در مثال زیر از **قانون هوک** استفاده شده است، که می‌گوید اگر فنری کشیده شود به اندازه x واحد به طول طبیعی‌اش اضافه گردد، با نیرویی برابر با kx واحد به حالت اول باز می‌گردد، که k ثابتی وابسته به جنس و طول فنر است.

مثال ۲ طول طبیعی فنری ۱۴ سانتیمتر است. اگر نیرویی برابر با ۵۰ دین برای کشیدن فنر به اندازه ۲ سانتیمتر لازم باشد، کار لازم برای کشیدن فنر به طوری که طولش ۱۸ سانتیمتر شود، چقدر است؟

حل فنر را در امتداد محور x ها و مبدأ را در نقطه‌ای که کشیدن فنر شروع می‌شود، قرار می‌دهیم. شکل ۱۰.۵.۷ را ببینید. فرض کنید $f(x)$ بر حسب دین نیروی وارد بر فنر باشد و فنر به اندازه x سانتیمتر



شکل ۱۰.۵.۷

از حالت طبیعی کشیده شود. پس، از قانون هوک داریم

$$f(x) = kx.$$

چون $f(2) = 50$ ، داریم

$$50 = k \cdot 2$$

$$k = 25.$$

بنابراین

$$f(x) = 25x.$$

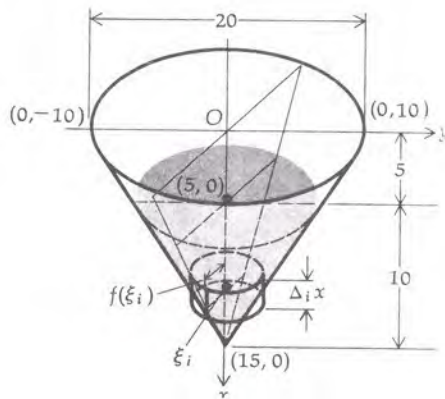
اگر W بر حسب ارگ (دین-سانتیمتر) کار انجام شده برای کشیدن فنر از حالت طبیعی ۱۴ سانتیمتر تا طولی برابر با ۱۸ سانتیمتر باشد،

$$\begin{aligned} W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i x \\ &= \int_0^4 f(x) dx \\ &= \int_0^4 25x dx \\ &= \left. \frac{25}{2} x^2 \right|_0^4 \\ &= 200. \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده برای کشیدن فنر برابر با ۲۰۰ ارگ است. ▲

مثال ۳ يك مخزن آب به شكل مخروط مستدير قائم واروندهای است كه قطر قاعده آن كه در بالا قرار دارد ۲۰ فوت و عمق آن ۱۵ فوت می باشد. اگر سطح آب مخزن ۵ فوت پایینتر از قاعده مخزن باشد، كار لازم برای انتقال دادن آب مخزن به قاعده آن چقدر است؟

حل به شكل ۲۰.۵.۷ رجوع كنید. چون حرکت عمودی است، جهت مثبت محور x ها را به طرف پایین انتخاب می كنیم. مبدأ را در قاعده مخزن قرار می دهیم. افرازی از بازه بسته $[5, 15]$ روی محور x ها در نظر گرفته و فرض می كنیم ξ_i نقطه دلخواهی در زیر بازه Δx یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ باشد. جزئی از حجم، قرص مستدیری به ضخامت Δx فوت و به شعاع $f(\xi_i)$ فوت می باشد كه تابع f توسط معادله خطی كه از نقاط $(0, 15)$ و $(15, 0)$ می گذرد و به صورت $y = f(x)$ است، تعیین می شود. حجم این جزء، بر حسب



شکل ۲۰۵۰۷

فوت مکعب برابر است با $\Delta_i V = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$. اگر وزن يك فوت مكعب آب (وزن مخصوص آب) w پوند باشد، وزن جزء حجم فوق برحسب پوند برابر است با $w\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x$ ، که نیروی وارد بر جزء حجم است. اگر x_{i-1} نزدیک به x_i باشد، آنگاه تغییر مکان جزء حجم آب تقریباً ξ_i فوت است. پس، اگر کار انجام شده برای انتقال جزئی از آب به بالای مخزن $\Delta_i W$ فوت-پوند باشد، $\Delta_i W$ تقریباً برابر با $w\pi [f(\xi_i)]^2 \Delta_i x \cdot \xi_i$ خواهد بود؛ لذا، اگر کار انجام شده W فوت-پوند باشد، داریم

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w\pi [f(\xi_i)]^2 \cdot \xi_i \Delta_i x$$

$$= w\pi \int_0^{15} [f(x)]^2 x \, dx.$$

برای تعیین $f(x)$ ، معادله خطی را که از نقاط $(0, 10)$ و $(15, 0)$ می‌گذرد، با استفاده از صورت طول و عرض از مبدأ معادله خط، به دست می‌آوریم

$$y = -\frac{2}{3}x + 10 \quad \text{یا} \quad \frac{x}{15} + \frac{y}{10} = 1$$

بنابراین، $f(x) = -\frac{2}{3}x + 10$ ، و

$$W = w\pi \int_0^{15} \left(-\frac{2}{3}x + 10\right)^2 x \, dx$$

$$= w\pi \int_0^{15} \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{3}x + 100x\right) dx$$

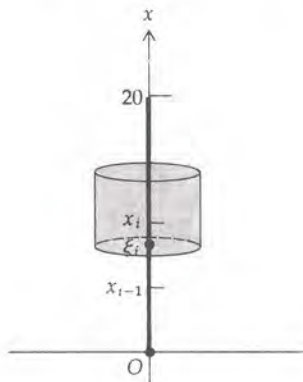
$$= w\pi \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{40}{9}x^2 + 50x \right]_0^{15}$$

$$= \frac{10000}{9} \pi w.$$

پس کار انجام شده، $\frac{10000}{9} \pi w$ فوت-پوند است. ▲

مثال ۴ می‌خواهیم مخزن آبی را تا ارتفاع ۲۰ فوت بالا ببریم. همچنانکه مخزن بالا کشیده می‌شود، آب با آهنگی ثابت برابر با ۲ فوت مکعب در هر فوتی که مخزن بالا می‌رود، از آن می‌ریزد. اگر وزن مخزن در ابتدا ۲۰۰ پوند و مخزن در ابتدا ۱۰۰۰۰ گالون فوت مکعب آب باشد، کار لازم برای بالا بردن مخزن را به دست آورید.

حل به شکل ۳۰۵.۷ مراجعه کنید. در اینجا نقطه شروع بالا رفتن ته مخزن را مبدأ و جهت مثبت x ها را به طرف بالا در نظر می‌گیریم، چون حرکت از نقطه O به طور عمودی به طرف بالا انجام می‌گیرد. افزای از بازه بسته $[0, 20]$ روی محورهای می‌گیریم. فرض کنید ξ_i نقطه دلخواهی در i مین زیر بازه، $[x_{i-1}, x_i]$ باشد. وقتی که ته مخزن در ξ_i است، حجم آب داخل مخزن بر حسب فوت مکعب برابر است با $\xi_i - 2$. اگر وزن ۱ فوت مکعب آب w پوند باشد، آنگاه وزن مخزن و محتویات آن، وقتی که مخزن در ξ_i است، بر حسب پوند برابر با $(\xi_i - 2)(10000 + w)$ می‌باشد که این مقدار، نیروی وارد بر مخزن است. اگر کار انجام شده در طول i مین زیر بازه $\Delta_i W$ فوت-پوند باشد، $\Delta_i W$ تقریباً برابر با $\Delta_i x (\xi_i - 2)(10000 + w)$ است. در اینجا، اصطلاح «تقریباً» را به کار می‌بریم چون فرض می‌کنیم که در سراسر این زیر بازه، مقدار آب داخل مخزن ثابت است. اگر کار انجام شده برای بالا کشیدن مخزن به اندازه ۲۰ فوت، برابر با W فوت-پوند باشد، داریم



شکل ۳۰۵.۷

$$\begin{aligned}
 W &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [200 + w(1000 - 2\xi_i)] \Delta_i x \\
 &= \int_0^{20} [200 + w(1000 - 2x)] dx \\
 &= \left[200x + w(1000x - x^2) \right]_0^{20} \\
 &= 4000 + 19600w.
 \end{aligned}$$

بنابراین، کار انجام شده برابر با $(4000 + 19600w)$ فوت-پوند می باشد.

تمرینهای ۵.۲

در تمرینهای ۱ و ۲، ذره‌ای در امتداد محور x ها تحت تأثیر نیروی $f(x)$ پوند، وقتی که ذره به فاصله x فوت از مبدأ قرار دارد، در حرکت است. کار انجام شده را وقتی که ذره از نقطه $x=a$ به طول $x=b$ به نقطه به طول $x=b$ حرکت می کند، به دست آورید.

۱. $f(x) = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$; $a=0$; $b=2$. ۲. $f(x) = (2x+1)^2$; $a=1$; $b=3$.

در تمرینهای ۳ و ۴، ذره‌ای در امتداد محور x ها تحت تأثیر نیروی $f(x)$ نیوتن، وقتی که ذره x متر از مبدأ فاصله دارد، در حرکت است. کار انجام شده را به دست آورید چنانچه ذره از نقطه‌ای به طول $x=a$ به نقطه‌ای به طول $x=b$ حرکت کند.

۳. $f(x) = x\sqrt{x+1}$; $a=3$; $b=8$. ۴. $f(x) = (4x-1)^2$; $a=1$; $b=4$.

۵. شیئی در امتداد محور x ها تحت تأثیر نیروی $f(x)$ دین، وقتی که ذره x سانتیمتر از مبدأ فاصله دارد، در حرکت است. اگر کار انجام شده برای انتقال شیء از مبدأ به نقطه‌ای به طول $x=K$ ، ۹۶ ارگ باشد و داشته باشیم $f(x) = 2x - 3$ ، واگر $K, K > 0$ را به دست آورید.

۶. تمرین ۵ را با این تغییر حل کنید که، کار انجام شده برابر با ۹۰ ارگ باشد و $f(x) = 4x - 3$.

۷. طول طبیعی فنری ۸ اینچ است. اگر نیروی ۲۰ نیوتن طول فنر را $1/2$ اینچ افزایش دهد، کار انجام شده را برای اینکه طول فنر را از ۸ اینچ به ۱۱ اینچ برسانیم، به دست آورید.

۸. طول طبیعی فنری ۱۰ اینچ است، و یک نیروی ۳۰ نیوتنی آن را به $1/4$ اینچ می رساند.

- مطلوب است (الف) کارانجام شده برای اینکه طول فنر را از ۱۰ اینچ به ۱۲ اینچ برسانیم؛ (ب) کارانجام شده برای اینکه طول فنر را از ۱۲ اینچ به ۱۴ اینچ برسانیم.
۹. با تأثیر نیروی ۸ نیوتن، فنری که طول طبیعی اش ۴ متر است، ۵۰ سانتیمتر افزایش طول می‌یابد. کارانجام شده برای کشیدن فنر از طول طبیعی به طول ۵ متر را به دست آورید.
۱۰. یک نیروی ۵۰۰ دینی، فنری را که طول طبیعی آن ۲۰ سانتیمتر است، به ۲۴ سانتیمتر می‌رساند. مطلوب است کار انجام شده برای اینکه طول فنر از ۲۰ سانتیمتر به ۲۸ سانتیمتر برسد.
۱۱. طول طبیعی فنری ۱۲ سانتیمتر است. یک نیروی ۶۰۰ دینی آن را تا طول ۱۰ سانتیمتر می‌فشارد. مطلوب است کارانجام شده برای اینکه طول فنر را از ۱۲ سانتیمتر به ۹ سانتیمتر برسانیم. قانون هوک همان طور که برای کشیدن فنر برقرار است، برای فشردن آن نیز صادق است.
۱۲. طول طبیعی فنری ۶ اینچ است. نیروی ۱۲۰۰ پوند آن را تا طول $15\frac{1}{4}$ اینچ می‌فشارد. مطلوب است محاسبه کار انجام شده برای اینکه طول فنر از ۶ اینچ به $4\frac{1}{4}$ اینچ کاهش یابد.
۱۳. مخزن پرازآبی به شکل یک مکعب مستطیل به عمق ۵ فوت، عرض ۱۵ فوت، و طول ۲۵ فوت است. کار لازم برای انتقال آب مخزن به فاصله ۱ فوتی بالای سطح مخزن را به دست آورید.
۱۴. طول مخزن پرازآبی ۱۰ فوت و مقطع عرضی مخزن به شکل مثلث متساوی الساقین وارونه‌ای است که قاعده اش ۲ فوت و ارتفاع آن ۲ فوت است. اگر تمام آب مخزن را از بالای آن خارج کنیم، چقدر کار انجام می‌شود؟
۱۵. مخزنی به شکل نیمکره با شعاع ۶ فوت را تا ارتفاع ۴ فوت از آب پرمی‌کنیم. کار لازم برای انتقال آب مخزن به بالای آن را به دست آورید.
۱۶. مخزنی به شکل یک استوانه مستدیر قائم به عمق ۱۲ فوت و شعاع قاعده ۴ فوت را تا نیمه آن از روغنی به وزن ۶۰ پوند بر فوت مکعب پرمی‌کنیم. کار لازم برای انتقال روغن تا ارتفاع ۶ فوت بالاتر از مخزن را به دست آورید.
۱۷. کابلی به طول ۲۰۰ فوت و وزن ۴ پوند بر فوت را به طور قائم در داخل چاهی آویزان کرده‌ایم. اگر وزنه‌ای ۱۰۰ پوندی به انتهای کابل بیاویزیم، کارانجام شده برای بالا کشیدن کابل و وزنه به بالای چاه را به دست آورید.

۱۸. سطلی به وزن ۲۰ پوند را که حاوی ۶۰ پوند ماسه است، به انتهای زنجیری به وزن ۱۵ پوند و طول ۱۰۰ فوت وصل کرده و از چاه عمیقی آویزان کرده ایم. کار لازم برای کشیدن سطل به بالای چاه را به دست آورید.

۱۹. تمرین ۱۸ را با این تغییر حل کنید که ماسه داخل سطل هنگام بالا بردن سطل با آهنگی ثابت طوری از آن بریزد که وقتی سطل به بالای چاه می‌رسد، کاملاً خالی شده باشد.

۲۰. همچنانکه کیسه آردی به اندازه ۹ فوت بالا کشیده می‌شود، آرد با چنان آهنگی از کیسه می‌ریزد که وزن آرد ریخته شده بر حسب پوند مستقیماً متناسب با ریشه دوم فاصله طی شده است. اگر کیسه در ابتدا شامل ۶۰ پوند آرد باشد و در طی ۹ فوت مسافت طی شده کلاً ۱۲ پوند آن بریزد، کار لازم برای بالا کشیدن کیسه آرد را به دست آورید.

۲۱. مخزنی به شکل یک مخروط مستدیر قائم وارونه است که قطر قاعده آن که در بالا قرار دارد، ۸ متر و عمق آن ۱۰ متر است. این مخزن را تا ارتفاع ۸ متری با روغنی به وزن ۹۵۰ کیلوگرم بر متر مکعب پر می‌کنیم. کار لازم برای انتقال روغن به بالای مخزن را به دست آورید. (راهنمایی: نیروی لازم برای بالا بردن یک جزء، بر حسب نیوتن، برابر است با حاصلضرب جرم بر حسب کیلوگرم (که بدون در نظر گرفتن واحد با وزن مساوی است) در ۹۸۱ که شتاب ثقل بر حسب متر بر مجذور ثانیه است.)

۲۲. اگر مخزن تمرین ۲۱ را تا ارتفاع ۹ متری از آب پر کنیم، کار لازم برای انتقال آب به بالای مخزن را به دست آورید. وزن یک متر مکعب آب در ۵ درجه سانتیگراد ۱۰۰۰ کیلوگرم است. (راهنمایی تمرین ۲۱ را ببینید.)

۲۳. در مخزنی به شکل یک استوانه مستدیر قائم به عمق ۱۰ متر و شعاع قاعده ۵ متر تا نیمه آب می‌ریزیم. کار لازم برای انتقال آب به بالای مخزن را به دست آورید. وزن ۱ متر مکعب آب در ۵ درجه سانتیگراد ۱۰۰۰ کیلوگرم است (راهنمایی تمرین ۲۱ را ببینید.)

۲۴. اگر در تمرین ۲۲ فقط نصف آب موجود را به بالای مخزن انتقال دهیم، کار را به دست آورید.

۲۵. یک موتور با قدرت یک اسب می‌تواند در هر ثانیه ۵۵۰ فوت-پوند کار انجام دهد. مخزن مکعب مستطیل شکلی به عمق ۲ فوت، و عرض ۲ فوت، و طول ۶ فوت پر از آب است، و می‌خواهیم تمام آب مخزن را به ۵ فوتی بالای آن منتقل کنیم. اگر موتور با قدرت ۱ اسب کار کند، در چه مدت زمانی این عمل انجام می‌شود؟

طول قوس يك منحنی مسطح ۶۴۷

۲۶. يك سنگ آسمانی به فاصله a ميل از مرکز زمین، به سطح زمین سقوط می کند. نیروی ثقل بامربع فاصله جسم از مرکز زمین تناسب معکوس دارد. اگر وزن سنگ آسمانی در سطح زمین w پوند باشد، کار انجام شده به وسیله نیروی ثقل را به دست آورید. فرض کنید شعاع کره زمین R ميل است.

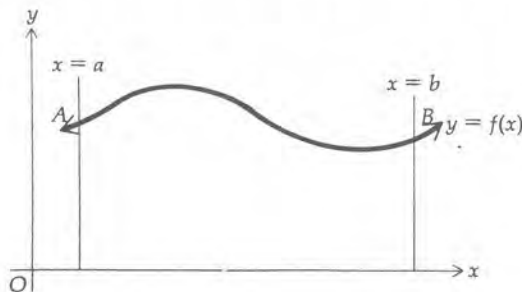
۲۷. مخزنی به شکل مکعب مستطیل دارای عمق ۶ فوت، عرض ۴ فوت، و طول ۱۲ فوت می باشد، که پراز روغنی به وزن ۵۰ پوند بر فوت مکعب است. اگر $\frac{1}{3}$ کار لازم برای انتقال تمام روغن به بالای مخزن را انجام داده باشیم، سطح روغن داخل مخزن چقدر پایینتر آمده است ؟

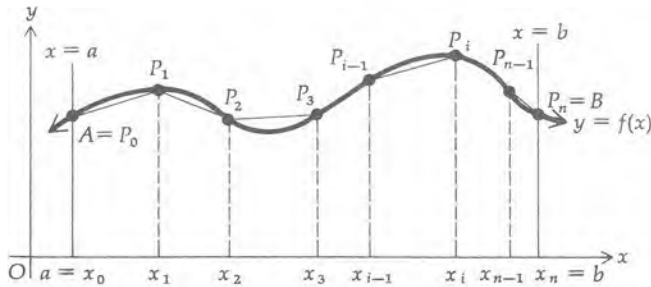
۲۸. مخزن استوانه شکلی به ارتفاع ۱۰ فوت و شعاع قاعده ۵ فوت روی سکویی به ارتفاع ۵۰ فوت نصب شده است. اگر نصف کار لازم برای پراز آب کردن مخزن توسط لوله ای که به انتهای آن از سطح زمین وصل شده، انجام شده باشد، عمق آب را به دست آورید.

۶.۷ طول قوس يك منحنی مسطح

فرض کنید تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است. نمودار معادله $y = f(x)$ را که در شکل ۱۰۶.۷ رسم شده در نظر بگیرید.

قسمتی از منحنی که بین نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ قرار دارد، يك قوس از منحنی نامیده می شود. می خواهیم به چیزی که آن را به طور شهودی طول چنین قوسی می دانیم، عددی نسبت دهیم. اگر قوس به صورت پاره خطی از نقطه (x_1, y_1) تا نقطه (x_2, y_2) باشد، طول آن با توجه به فرمول فاصله بین دو نقطه برابر است با $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. از این فرمول برای تعریف طول قوس يك منحنی در حالت کلی استفاده می کنیم. در هندسه، محیط يك دایره را به عنوان حد محیط چند ضلعیهای منتظم محاط در دایره تعریف می کنند. برای منحنیهای دیگر نیز فرایند مشابهی را به کار می بریم.





شکل ۲.۶.۷

فرض کنید Δ افزای از بازه بسته $[a, b]$ باشد که از تقسیم این بازه به n زیربازه با انتخاب دلخواه $(n-1)$ عدد میانی بین a, b تشکیل می‌شود. و فرض کنید $x_0 = a$ و $x_n = b$ و $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ اعداد میانی باشند به طوری که

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

در این صورت، زیربازه i ، $[x_{i-1}, x_i]$ است که طول آن را با $\Delta_i x$ نشان می‌دهیم و برای $i = 1, \dots, n$ برابر است با $x_i - x_{i-1}$. پس، اگر $\|\Delta\|$ نورم افزای Δ باشد، به ازای هر i داریم $\Delta_i x \leq \|\Delta\|$.

به ازای هر نقطه $(x_i, 0)$ روی محور x ها، نقطه‌ای مانند $P_i(x_i, f(x_i))$ روی منحنی وجود دارد. پاره‌خطی از هر نقطه P_{i-1} به نقطه بعدی P_i رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل ۲.۶.۷ نشان داده شده است. طول پاره‌خط بین P_i و P_{i-1} را با $|P_{i-1}P_i|$ نشان داده و از فرمول فاصله بین دو نقطه داریم

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (1)$$

مجموع طول این پاره‌خطها برابر است با

$$|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \dots + |P_{i-1}P_i| + \dots + |P_{n-1}P_n|$$

که می‌توان آن را با نماد سیگما به صورت زیر نوشت

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|. \quad (2)$$

واضح است که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، مجموع (۲) به آنچه که به طور شهودی فکر می‌کنیم طول قوس AB باشد، «نزدیک» خواهد بود. پس طول قوس را به عنوان حد مجموع (۲) وقتی که نورم Δ به سمت صفر میل می‌کند، که در این صورت n به طور بیکران افزایش می‌یابد، تعریف می‌کنیم. لذا، تعریف زیر را داریم.

۱۰۶۰۷ تعریف اگر تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر عددی مانند L با این خاصیت موجود باشد که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر افراز Δ از بازه $[a, b]$ با شرط $\|\Delta\| < \delta$ ،

$$\left| \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \varepsilon$$

آنگاه می‌نویسیم

$$L = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| \quad (3)$$

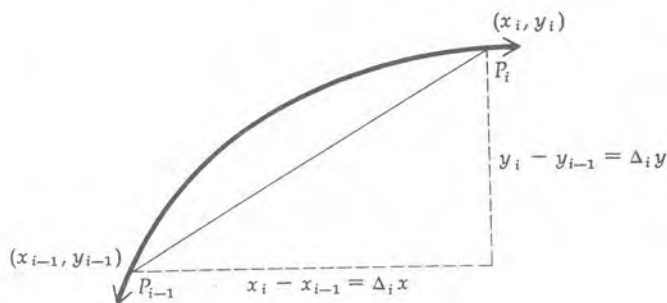
و L را طول قوس منحنی $y = f(x)$ از نقطه $A(a, f(a))$ تا نقطه $B(b, f(b))$ می‌نامیم.

اگر حد (۳) وجود داشته باشد، قوس را راستیدنی گویند.

فرمولی برای طول قوسی چون L که راستیدنی است، به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن چنین فرمولی لازم است که مشتق تابع f روی $[a, b]$ ، پیوسته باشد؛ چنین تابعی را تابع هموار روی $[a, b]$ گویند.

۲۰۶۰۷ تعریف تابعی مانند f را روی يك بازه I هموار گویند اگر f' روی I پیوسته باشد.

حال به شکل ۳۰۶۰۷ مراجعه کنید. اگر مختصات P_{i-1} و P_i به ترتیب (x_{i-1}, y_{i-1}) و (x_i, y_i) باشند، آنگاه طول وتر $P_{i-1}P_i$ از فرمول (۱) به دست می‌آید.



شکل ۳۰۶۰۷

با فرض $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$ و $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ داریم

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} \quad (4)$$

و یا، چون $\Delta_i x \neq 0$ ،

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2} (\Delta_i x). \quad (5)$$

چون لازم است که f' روی $[a, b]$ پیوسته باشد، تابع f در شرط قضیه مقدار میانگین (۲.۴.۴) صدق می‌کند؛ پس عددی مانند z_i درباره بازه (x_{i-1}, x_i) موجود است به طوری که

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(z_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (۶)$$

چون $\Delta_i y = f(x_i) - f(x_{i-1})$ و $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ ، از (۶) داریم

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(z_i). \quad (۷)$$

از (۷) در (۵) مقدار قرار می‌دهیم

$$|\overline{P_{i-1} P_i}| = \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x \quad (۸)$$

که در آن $x_{i-1} < z_i < x_i$.
برای هر i از ۱ تا n ، معادله‌ای به صورت (۸) وجود دارد. پس

$$\sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1} P_i}| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x. \quad (۹)$$

با گرفتن حد از دوطرف (۹) وقتی که $\|\Delta\|$ به سمت صفر میل کند، در صورت وجود حد، خواهیم داشت

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1} P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x. \quad (۱۰)$$

برای اینکه نشان دهیم حد طرف راست (۱۰) وجود دارد، فرض کنید تابع g به صورت زیر تعریف شود

$$g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

چون f' روی $[a, b]$ پیوسته است، g نیز روی $[a, b]$ پیوسته خواهد بود. و چون $x_{i-1} < z_i < x_i$ ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، پس

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(z_i) \Delta_i x$$

و یا

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x = \int_a^b g(x) dx. \quad (۱۱)$$

چون $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ ، از (۱۱) داریم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \Delta_i x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (۱۲)$$

از (۱۲) در (۱۵) قرار می‌دهیم

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\overline{P_{i-1}P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (13)$$

پس، از (۳) و (۱۳) نتیجه می‌گیریم

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (14)$$

و بدین ترتیب، قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

۳.۶.۷ قضیه اگر تابع f و مشتق آن f' روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس منحنی $y = f(x)$ از نقطه $(a, f(a))$ تا نقطه $(b, f(b))$ به صورت زیر است

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

همچنین، قضیه زیر را برای محاسبه طول قوس يك منحنی وقتی که x به عنوان تابعی از y بیان شده باشد، داریم.

۴.۶.۷ قضیه اگر تابع F و مشتق آن F' روی بازه بسته $[c, d]$ پیوسته باشند، آنگاه طول قوس منحنی $x = F(y)$ از نقطه $(F(c), c)$ تا نقطه $(F(d), d)$ به صورت زیر است

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(y)]^2} dy$$

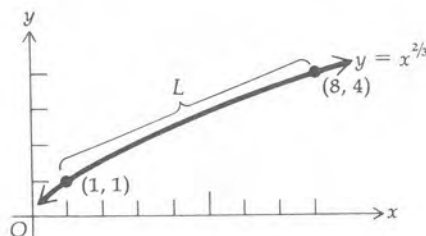
اثبات قضیه ۴.۶.۷ مانند اثبات قضیه ۳.۶.۷ است؛ فقط x را با y و توابع f و F را با یکدیگر عوض کرده‌ایم.

اغلب محاسبه انتگرال معینی که در هنگام استفاده از قضایای ۳.۶.۷ یا ۴.۶.۷ به دست می‌آید، مشکل است. چون تکنیکهای انتگرال گیری ما تا کنون محدود به انتگرال گیری از توابع توانی بوده است، برای یافتن معادلات منحنیها و در نتیجه، طول يك قوس دچار محدودیت هستیم و فقط معادلات منحنیهایی را در نظر می‌گیریم که انتگرالهای معین حاصل را بتوانیم محاسبه کنیم.

مثال ۱ با استفاده از قضیه ۳.۶.۷، طول قوس منحنی $y = x^{2/3}$ از نقطه $(1, 1)$ تا نقطه $(8, 4)$ را به دست آورید.

حل شکل ۴.۶.۷ را ببینید. چون $f(x) = x^{2/3}$ ، $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ ، از قضیه ۳.۶.۷ داریم

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx.
 \end{aligned}$$



شکل ۴.۶.۷

برای محاسبه این انتگرال معین، فرض کنید $u = 9x^{2/3} + 4$ ؛ پس $du = 6x^{-1/3} dx$. وقتی $x = 1$ ، $u = 13$ ؛ و وقتی $x = 8$ ، $u = 40$. بنابراین

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{18} \int_{13}^{40} u^{1/2} du \\
 &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{13}^{40} \\
 &= \frac{1}{27} (40^{3/2} - 13^{3/2})
 \end{aligned}$$

▲ ≈ 7.6 .

مثال ۲ با استفاده از قضیه ۴.۶.۷، طول قوس منحنی مثال ۱ را به دست آورید.

حل چون $y = x^{2/3}$ و $x > 0$ ، معادله را نسبت به x حل می‌کنیم، به دست می‌آید: $x = y^{3/2}$. فرض کنید $F(y) = y^{3/2}$ ؛ داریم

$$F'(y) = \frac{3}{2} y^{1/2}$$

در این صورت، با استفاده از قضیه ۴.۶.۷ داریم

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{4 + 9y} dy \\
 &= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} (4 + 9y)^{3/2} \right]_1^4 \\
 &= \frac{1}{27} (40^{3/2} - 13^{3/2}) \\
 &\approx 7.6.
 \end{aligned}$$

اگر تابع f' روی $[a, b]$ پیوسته باشد، انتگرال معین $\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$ تابعی از x است؛ و طول قوس منحنی $y = f(x)$ از نقطه $(a, f(a))$ تا نقطه $(x, f(x))$ را به دست می‌دهد، که x عددی دلخواه در بازه بسته $[a, b]$ است. فرض کنید s نشان‌دهنده طول این قوس باشد؛ پس s تابعی از x است، و

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

از قضیه ۱۰۵.۶ داریم

$$s'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

یا، چون $s'(x) = ds/dx$ و $f'(x) = dy/dx$ ، داریم

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

اگر طرفین را در dx ضرب کنیم، به دست می‌آوریم

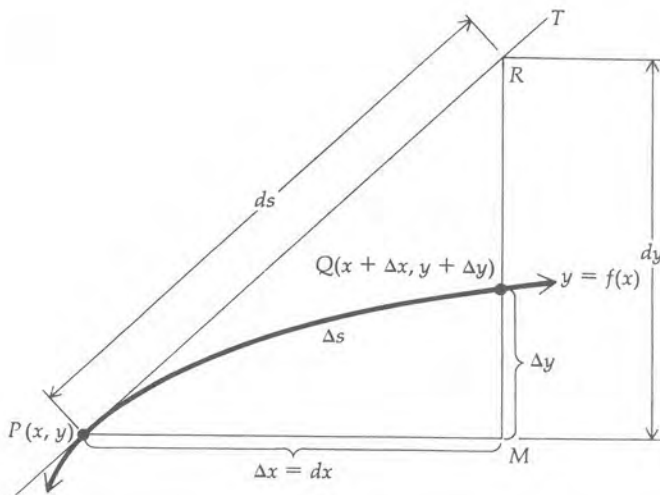
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (15)$$

به طور مشابه، برای طول قوس منحنی $x = g(y)$ از $(g(c), c)$ تا $(g(y), y)$ داریم

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy. \quad (16)$$

طرفین (۱۵) را به توان دو می‌رسانیم، نتیجه می‌شود

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (17)$$



شکل ۵.۶.۷

از (۱۷) تعبیر هندسی ds به دست می آید، که در شکل ۵.۶.۷ نشان داده شده است. در شکل ۵.۶.۷، خط T بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه P مماس است. داریم $|PR| = ds$ ؛ $|MR| = dy$ ؛ $|MQ| = \Delta y$ ؛ $|PM| = \Delta x = dx$ و طول قوس $PQ = \Delta s$ برابر است با PQ .

تمرینهای ۶.۷

۱. طول قوس منحنی $9y^2 = 4x^3$ از مبدأ تا نقطه $(3, 2\sqrt{3})$ را به دست آورید.
۲. طول قوس منحنی $x^2 = (2y + 3)^3$ از $(1, -1)$ تا $(7\sqrt{7}, 2)$ را به دست آورید.
۳. طول قوس منحنی $8y = x^4 + 2x^{-2}$ از نقطه به طول $x = 1$ تا نقطه به طول $x = 2$ را به دست آورید.
۴. با استفاده از قضیه ۳.۶.۷، طول قوس منحنی $8x^2 = y^3$ از نقطه $(1, 2)$ تا نقطه $(27, 18)$ را به دست آورید.
۵. با استفاده از قضیه ۴.۶.۷، تمرین ۴ را حل کنید.
۶. طول قوس منحنی $y = 2(x - 5)^{3/2} / 3$ از نقطه به طول $x = 6$ تا نقطه به طول $x = 8$ را به دست آورید.

۷. طول قوس منحنی $y = (x^2 + 2)^{3/2} / 3$ از نقطه به طول $x = 0$ تا نقطه به طول $x = 3$ را به دست آورید.

۸. طول قوس منحنی $xy = 3 + y^4$ از نقطه به عرض $y = 1$ تا نقطه به عرض $y = 2$ را به دست آورید.

۹. طول قوس منحنی $y = \sqrt{x(3x - 1)}$ از نقطه ای که $x = 1$ تا نقطه ای که $x = 4$ را به دست آورید.

۱۰. طول قوس منحنی $y = x^{3/6} + x^{-1/2}$ از نقطه $(2, 19/12)$ تا نقطه $(5, 314/15)$ را به دست آورید.

۱۱. طول قوس منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ از نقطه ای که $x = 1/8$ تا نقطه ای که $x = 1$ را به دست آورید.

۱۲. طول قوس منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (a یک عدد ثابت است، و $a > 1$) از نقطه ای که $x = 1$ تا نقطه ای که $x = a$ را به دست آورید.

۱۳. مطلوب است طول قوس منحنی $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$ در ربع اول، از نقطه ای که $x = a/8$ تا نقطه ای که $x = a$.

۱۴. طول قوس منحنی $9y^2 = x^2(2x + 3)$ در ربع دوم را از نقطه ای که $x = -1$ تا نقطه ای که $x = 0$ ، به دست آورید.

۱۵. مطلوب است طول قوس منحنی $9y^2 = x(x - 3)^2$ در ربع اول، از نقطه ای که $x = 1$ تا نقطه ای که $x = 3$.

۱۶. مطلوب است طول قوس منحنی $9y^2 = 4(1 + x^2)^3$ در ربع اول، از نقطه ای که $x = 0$ تا نقطه ای که $x = 2\sqrt{2}$.

۱۷. اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cos t} dt$ ، طول قوس نمودار f را از نقطه ای که $x = 0$ تا نقطه ای که $x = \pi$ ، به دست آورید. (داهنمایی: از قضیه ۱۰.۵.۶ و اتحاد $\cos^2 x/2 = (1 + \cos x)/2$ استفاده کنید.)

۱۸. اگر $f(x) = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt$ ، مطلوب است طول قوس نمودار f ، از نقطه ای که $x = 0$ تا نقطه ای که $x = \pi/2$ ، (داهنمایی: از راهنمایی تمرین ۱۷ و اتحاد $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ استفاده کنید.)

۱۹. طول يك قوس از منحنی سینوسی را به صورت يك انتگرال معین بنویسید. از قاعدهٔ سیمپسون با $n=4$ استفاده کنید و مقدار انتگرال معین را تقریب کنید.

۲۰. طول قوس سهمی $y=x^2$ از مبدأ تا نقطهٔ $(1, 1)$ را به صورت يك انتگرال معین بنویسید. از قاعدهٔ سیمپسون با $n=4$ استفاده کنید و مقدار انتگرال معین را تقریب کنید.

تمرینهای مروری فصل ۷

۱. مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنیهای $x=y^2$ و $x=y^3$ را به دست آورید.
۲. مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنی $y=x^2-7x$ ، محور x ها، و خطوط $x=2$ و $x=4$ را به دست آورید.
۳. مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنی $x^2+y-5=0$ و خط $y=-4$ را به دست آورید. اجزاء سطح را عمود بر محور y ها در نظر بگیرید.
۴. مساحت ناحیهٔ محدود بد توسط منحنی $y^2=x^2(4-x)$ را به دست آورید.
۵. مساحت ناحیهٔ محصور بین منحنیهای $y=x^3+3x^2+2x$ و $y=2x^2+4x$ را به دست آورید.
۶. ناحیهٔ محصور بین منحنیهای $x=y^2$ و $x=y^4$ در ربع اول، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.
۷. ناحیهٔ محصور بین سهمی $x=y^2+2$ و خط $x=y+8$ ، حول محور y ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را بیابید.
۸. ناحیهٔ محصور بین سهمی $y^2=x$ ، محور x ها، و خط $x=4$ ، حول خط $x=4$ دوران می کند، حجم جسم حاصل را به دست آورید. اجزاء سطح را موازی با محور دوران در نظر بگیرید.
۹. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محصور بین سهمی $y^2=8x$ و خط $x=8$ است. حجم جسم را به دست آورید اگر هر مقطع مسطح عمود بر محور قاعدهٔ جسم، يك مربع باشد.
۱۰. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به دایره ای به شعاع r واحد است، و هر مقطع مسطح عمود بر قطر ثابتی از قاعده، يك مربع است، که وترى از دایره يك قطر آن می باشد. حجم جسم را به دست آورید.

۱۱. مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $y = |x - 1|$ ، $y = x^2 - 2x$ ، محور y ها، و خط $x = 2$ را به دست آورید.

۱۲. مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $y = |x| + |x - 1|$ و $y = x + 1$ را به دست آورید.

۱۳. ناحیه محصور بین منحنی $y = |x - 2|$ ، محور x ها، و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ ، حول محور x ها دوران می کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۱۴. طول قوس منحنی $ay^2 = x^3$ از مبدأ تا نقطه $(4a, 8a)$ را به دست آورید.

۱۵. طول منحنی $y^2 = x(x - 2)^2$ از $(2, 0)$ تا $(8, 4\sqrt{3})$ را به دست آورید.

۱۶. با استفاده از انتگرال گیری، حجم قطعه ای به ارتفاع h واحد از کره ای به شعاع r واحد را به دست آورید.

۱۷. ناحیه بالای محور x ها و محصور بین خط $2y = x + 3$ و منحنیهای $y^2 + x = 0$ و $5x = 4y^2$ از $x = -1$ تا $x = 1$ را حول خط $y = -1$ دوران می دهیم. حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

۱۸. مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \sin 2x$ از $x = 0$ تا $x = \pi/3$ را به دست آورید.

۱۹. مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از $x = \pi/4$ تا $x = 5\pi/4$ را به دست آورید.

۲۰. نیرویی برابر با ۵۰۰ پوند لازم است تا فنری که طول طبیعی اش ۱۰ اینچ است فشرده شود و به ۱۹ اینچ برسد. مطلوب است کار لازم برای آنکه طول فنر به ۸ اینچ برسد.

۲۱. فنری را که طول طبیعی آن ۳۰ سانتیمتر است با یک نیروی ۶۰۰ دینی می کشیم، طول فنر ۳۵ سانتیمتری گردد. کار لازم برای کشیدن فنر از حالت طبیعی تا طول ۴۰ سانتیمتر را به دست آورید.

۲۲. طول یک مخزن پر از آب ۶ فوت، و مقطع عرضی آن به شکل نیم دایره ای به قطر ۲ فوت است. چقدر کار لازم است تا آب آن را از بالای مخزن تخلیه کنیم؟

۲۳. کابلی به طول ۲۰ فوت و به وزن ۲ پوند بر فوت به طور قائم از بالای تیری آویزان است. کار لازم برای کشیدن تمام کابل به بالای تیر را به دست آورید.

۲۴. کار لازم برای کشیدن فنری از طول ۹ اینچ تا ۱۰ اینچ، $3/2$ کار لازم برای کشیدن

آن از طول ۸ اینچ تا ۹ اینچ می باشد. طول طبیعی فنر را به دست آورید.

۲۵. مخزن پر از آبی به شکل يك مكعب مستطیل به عمق ۴ متر، عرض ۱۵ متر، و طول ۳۰ متر است. کار لازم برای انتقال آب مخزن به ۵۰ سانتیمتری بالای مخزن را به دست آورید. وزن ۱ متر مکعب آب در ۵ درجه سانتیگراد برابر با ۱۰۰۰ کیلوگرم است. (راهنمایی: راهنمایی تمرین ۲۱ از تمرینهای ۵.۷ را ببینید.)

۲۶. يك مخزن نیمکره‌ای شکل به قطر ۱۰ متر را تا ارتفاع ۳ متری از آب پر می کنیم. کار لازم برای انتقال آب به بالای مخزن را به دست آورید. وزن ۱ متر مکعب آب در ۵ درجه سانتیگراد برابر با ۱۰۰۰ کیلوگرم است. (راهنمایی: راهنمایی تمرین ۲۱ از تمرینهای ۵.۷ را ببینید.)

۲۷. يك مخزن آب به شکل نیمکره‌ای است که به وسیله استوانه مستدیر قائمی احاطه شده است. شعاع نیمکره و استوانه هر دو ۴ فوت، و ارتفاع استوانه ۸ فوت است. اگر مخزن پر از آب باشد، کار لازم برای خالی کردن آب مخزن به وسیله يك پمپ از مجرای در بالای مخزن را به دست آورید.

۲۸. شکل و ابعاد ظرفی با شکل و ابعاد جسم دواری که از دوران ناحیه واقع در ربع اول و محصور بین سهمی $x^2 = 4py$ ، محور y ها، و خط $y = p$ حول محور y ها تشکیل می شود، یکسان است. اگر ظرف پر از آب باشد، کار لازم را برای انتقال تمام آب مخزن به فاصله $3p$ فوتی بالای مخزن به دست آورید.

۲۹. رویه مخزنی با رویه سهمیوار دواری که از دوران سهمی $x^2 = y$ حول محور y ها به دست می آید، یکسان است. رأس سهمی در ته مخزن قرار دارد، و ارتفاع مخزن ۳۶ فوت است. اگر مخزن را تا ارتفاع ۲۰ فوت آب کنیم، کار لازم برای تخلیه تمام آب از بالای مخزن را به دست آورید.

۳۰. گوه‌ای از استوانه مستدیر قائمی به شعاع r واحد توسط دو صفحه بریده می شود، که صفحه اول عمود بر محور استوانه است و صفحه دیگر صفحه اول را در امتداد قطری از مقطع مسطح مستدیر با زاویه‌ای به اندازه 30° قطع می کند. حجم گوه را به دست آورید.

۳۱. ارتفاع برج کلیسایی ۳۰ فوت، و هر مقطع مسطح افقی آن يك مربع است که طول هر ضلع آن برابر با یک‌دهم فاصله مقطع مسطح از بالای برج است. حجم برج را پیدا کنید.

۳۲. کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را دو صفحه متوازی در يك طرف مرکز کره قطع می کنند. فاصله مرکز کره تا یکی از این صفحات ۱ سانتیمتر، و فاصله دو صفحه از هم ۶ سانتیمتر

است. حجم جسم به دست آمده را، که قسمتی از کره است که بین دو صفحه قرار دارد، به دست آورید.

۳۳. تمرین ۳۲ را با این تغییر حل کنید که دو صفحه در طرفین مرکز کره قرار داشته باشند.

۳۴. ناحیه محصور بین منحنی $y = \sin^2 x$ و محور x ها از $x = 0$ تا $x = \pi$ حول محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم دوار حاصل را به دست آورید.

۳۵. جسمی از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = x^3$ ، محور x ها، و خط $x = c$ ، که $c > 0$ ، حول محور y ها تشکیل می‌شود. به ازای چه مقداری از c ، حجم جسم برابر با 12π واحد مکعب خواهد بود؟

۳۶. مطلوب است طول قوس منحنی $y = (x^2 - 2)^{3/2}$ از نقطه‌ای که $x = 3$ تا نقطه‌ای که $x = 6$.

۳۷. مطلوب است طول منحنی $y^{2/3} + 4x^{2/3} = 36$ در ربع دوم، از نقطه‌ای که $x = -1$ تا نقطه‌ای که $x = -1/8$.

۳۸. حجم مخروط مستدیر قائمی به ارتفاع ۵ واحد و شعاع قاعده ۷ واحد را با استفاده از فرمول منشور واری به دست آورید.

۳۹. ناحیه محصور بین منحنی $y = \sin x$ ، خط $y = 1$ ، و محور y ها از $x = 0$ تا $x = \pi/2$ حول محور x ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را به دست آورید.

۴۰. طول قوس منحنی $y = x^3/3$ را از نقطه‌ای که $x = 0$ تا نقطه‌ای که $x = 1$ ، به صورت یک انتگرال معین بنویسید. از قاعده سیمپسون با $n = 4$ استفاده کنید و مقدار انتگرال معین را تقریب کنید.



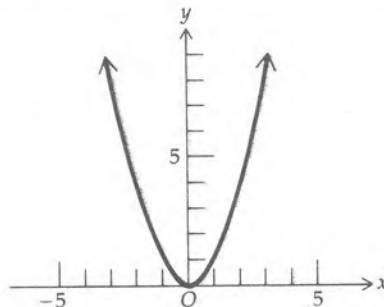
توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

۱۰۸ معکوس يك تابع

تابع f با ضابطه

$$f(x) = x^2$$

را در نظر بگیرید. نمودار f در شکل ۱۰۱۰۸ نشان داده شده است. قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی، R ، است و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است. به ازای هر مقدار x از قلمرو، يك و تنها يك عدد از برد متناظر می گردد. مثلاً، چون $f(2) = 4$ ، آن عدد از برد که



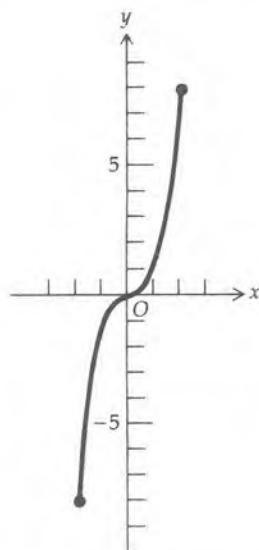
شکل ۱۰۱۰۸

با عدد ۲ از قلمرو متناظر می‌شود ۴ است. اما، چون $f(-2) = 4$ ، عدد متناظر با عدد ۲ — در قلمرو بازهم عدد ۴ از برد است. پس ۴، مقدار تابع است به‌ازای دو عدد متمایز در قلمرو. علاوه بر این، هر عدد بجز ۵ از برد این تابع، مقدار تابع است به‌ازای دو عدد متمایز در قلمرو. به‌ویژه، $25/4$ ، مقدار تابع هم به‌ازای $5/2$ و هم به‌ازای $-5/2$ است؛ ۱، مقدار تابع هم به‌ازای ۱ و هم به‌ازای -1 است؛ و ۹، مقدار تابع به‌ازای هر دوی ۳ و -3 است.

در مورد تابع g با ضابطه

$$g(x) = x^3 \quad -2 \leq x \leq 2$$

وضع متفاوت است. قلمرو g بازه بسته $[-2, 2]$ و برد آن $[-8, 8]$ است. نمودار g در شکل ۲۰۱۰۸ رسم شده است. این تابع چنان است که هر عدد متعلق به برد آن، مقدار تابع به‌ازای يك و تنها يك عدد از قلمرو آن است. چنین تابعی موسوم است به يك به يك.



شکل ۲۰۱۰۸

۱۰۱۰۸ تعریف تابعی چون f يك به يك نام دارد اگر و تنها اگر وقتی که x_1 و x_2 دو عدد متمایز از قلمرو f باشند، آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$.

○ نمونه ۱ همان‌طور که در نخستین پاراگراف این بخش گفته شد، در مورد تابع f که با ضابطه

$$f(x) = x^2$$

تعریف می‌شود، هر عدد بجز ۰ در برد f ، مقدار تابع به ازای دو عدد متمایز از قلمرو آن است. بنابراین، طبق تعریف ۱۰.۱۰۸ این تابع یک به یک نیست. ○

قبلاً دیده‌ایم که هر خط قائم می‌تواند نمودار یک تابع را در فقط یک نقطه قطع کند. این وضع را در شکل ۱۰.۱۰۸ در مورد هر خط قائم و تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ ، و در شکل ۲۰.۱۰۸ در مورد هر خط $x = a$ ، $-2 \leq a \leq 2$ ، و تابع با ضابطه $g(x) = x^3$ ، $-2 \leq x \leq 2$ ، مشاهده می‌کنید. در مورد یک تابع یک به یک این نیز درست است که هر خط افقی می‌تواند نمودار را در فقط یک نقطه قطع کند. این واقعیت را می‌توان در مورد تابع یک به یکی که نمودارش در شکل ۲۰.۱۰۸ رسم شده است بررسی کرد. علاوه بر این، در مورد تابع شکل ۱۰.۱۰۸ توجه کنید که خط $y = b$ ، $b > 0$ ، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، و لذا این تابع یک به یک نیست.

مثال ۱ الف) اگر $f(x) = 4x - 3$ ، ثابت کنید که f یک به یک است. نمودار f را رسم کنید؛ ب) اگر $h(x) = 4 - x^2$ ، ثابت کنید که h یک به یک نیست. نمودار h را رسم کنید.

حل

الف) قلمرو f ، مجموعه اعداد حقیقی، R ، است. اگر x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند و $x_1 \neq x_2$ ، آنگاه

$$4x_1 \neq 4x_2$$

$$4x_1 - 3 \neq 4x_2 - 3$$

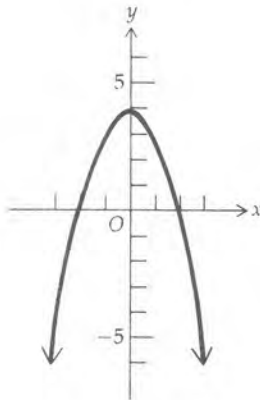
$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

بنابراین، طبق تعریف ۱۰.۱۰۸، f یک به یک است. نمودار f در شکل ۳۰.۱۰۸ رسم شده است. مشاهده کنید که هر خط افقی نمودار را تنها در یک نقطه قطع می‌کند.

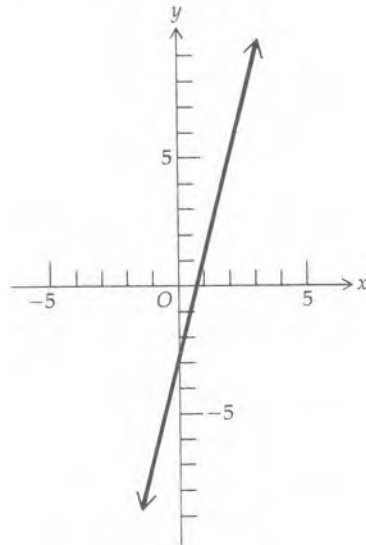
ب) قلمرو h ، مجموعه اعداد حقیقی، R ، است. اعداد ۱ و -۱ در قلمرو h هستند، و

$$h(1) = 3 \text{ و } h(-1) = 3.$$

چون $1 \neq -1$ و $h(1) = h(-1)$ ، از تعریف ۱۰.۱۰۸ نتیجه می‌شود که h یک به یک نیست. نمودار h در شکل ۴۰.۱۰۸ رسم شده است. توجه کنید که یک خط افقی $y = b$ ، $b < 4$ ، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.



شکل ۴۰۱۰۸



شکل ۳۰۱۰۸

استفاده از تعریف ۱۰۱۰۸ برای اثبات يك به يك بودن يك تابع، همیشه کار ساده‌ای نیست. قضیه زیر آزمون‌ی را به دست می‌دهد که اغلب قابل استفاده است.

۲۰۱۰۸ قضیه تابعی که بر بازه‌ای یا صعودی است و یا نزولی، بر آن بازه يك به يك است.

اثبات فرض کنید تابع f بر بازه‌ای صعودی باشد. اگر x_1 و x_2 دو عدد در این بازه باشند و $x_1 \neq x_2$ ، آنگاه $x_1 < x_2$ یا $x_2 < x_1$. اگر $x_1 < x_2$ ، از تعریف تابع صعودی (تعریف ۱۰۵۰۴) نتیجه می‌گیریم که $f(x_1) < f(x_2)$ ، لذا $f(x_1) \neq f(x_2)$. اگر $x_2 < x_1$ ، آنگاه $f(x_2) < f(x_1)$ ، و باز هم $f(x_1) \neq f(x_2)$. بنابراین، از تعریف ۱۰۱۰۸ نتیجه می‌شود که f بر این بازه يك به يك است. اگر f بر بازه‌ای نزولی باشد، اثبات مشابه است. $\square$

برای استفاده از قضیه ۲۰۱۰۸ ابتدا لازم است معین کنیم که آیا تابع بر بازه‌ای یکنوا (صعودی یا نزولی) است یا نه. برای این منظور معمولاً می‌توان قضیه ۳۰۵۰۴ را به کار برد.

مثال ۲ اگر

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

۶۶۴ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

ثابت کنید که f یک به یک است. نمودار f را رسم کنید.

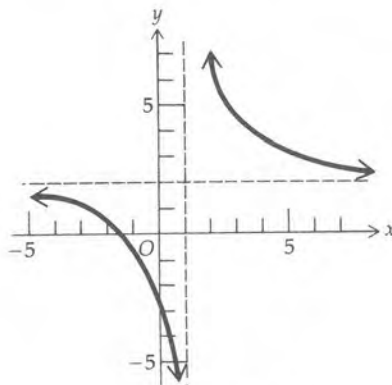
حل قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز ۱ است. فرض این است که

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}.$$

پس

$$f'(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}.$$

چون به ازای هر $x \neq 1$ ، $f'(x) < 0$ ، می‌توانیم از قضیه ۳.۵.۴ استنتاج کنیم که f بر هر بازه از قلمروش نزولی است. پس، بنا بر قضیه ۲.۱.۸، f یک به یک است. نمودار f در شکل ۵.۱.۸ رسم شده است.



شکل ۵.۱.۸

○ نمونه ۲ معادله

$$y = x^2 \quad -2 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

را در نظر بگیرید. این معادله، تعریف کننده تابع یک به یک g است که قبل از تعریف ۱.۱.۸ مورد بحث قرار گرفت:

$$g(x) = x^2 \quad -2 \leq x \leq 2 \quad (2)$$

تابع g مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) است که در (۱) صدق می‌کنند. اگر از معادله (۱)، x را محاسبه کنیم، داریم

$$x = \sqrt[7]{y} \quad -8 \leq y \leq 8 \quad (3)$$

که ضابطه تعریف تابعی چون G است:

$$G(y) = \sqrt[7]{y} \quad -8 \leq y \leq 8. \quad (4)$$

تابع G مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) است که در (۳) صدق می کنند. ○

تابع G در نمونه ۲ موسوم به معکوس تابع g است. نماد g^{-1} ، معکوس g را نمایش می دهد و خوانده می شود «جی معکوس». ترجمه کنید: ۱- که معکوس يك تابع را نمایش می دهد نباید به عنوان نما تلقی شود. تعریف رسمی معکوس يك تابع به شرح زیر است.

۳۰۱۰۸ تعریف اگر f يك تابع يك به يك، متشکل از زوجهای مرتب (x, y) باشد، آنگاه تابعی چون f^{-1} ، موسوم به معکوس f ، وجود دارد که مجموعه زوجهای مرتب (y, x) است و با ضابطه

$$y = f(x) \text{ اگر و تنها اگر } x = f^{-1}(y) \quad (5)$$

تعریف می شود. قلمرو f^{-1} برد f و برد آن قلمرو f است.

با نوشتن

$$f^{-1}(y) = x$$

و با قراردادن $f(x)$ به جای y ، نتیجه می شود

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (6)$$

که x در قلمرو f است. و بدین ترتیب بین معادلات (۵)، y را حذف کرده ایم. حال بین همین دو معادله، x را حذف می کنیم. برای این کار می نویسیم

$$f(x) = y$$

و $f^{-1}(y)$ را جانشین x می کنیم. داریم

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (7)$$

که y در قلمرو f^{-1} است. چون علامتی که برای متغیر مستقل به کار می رود دلخواه است، می توانیم در (۷) به جای y بنویسیم x و به دست آوریم

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad (8)$$

که x در قلمرو f^{-1} است.

از (۶) و (۸) می بینیم که اگر معکوس تابع f تابع f^{-1} باشد، آنگاه معکوس

۶۶۶ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

f^{-1} ، f است. این نتیجه و نیز نتایج (۶) و (۸) را به‌طور رسمی به صورت قضیه زیر می‌نویسیم.

۴۱۰۸ قضیه اگر f یک تابع یک‌به‌یک، و f^{-1} معکوس آن باشد، آنگاه f^{-1} نیز یک تابع یک‌به‌یک است و معکوس آن f می‌باشد. علاوه بر این

$$\text{اگر } x \text{ در قلمرو } f \text{ باشد،} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

و

$$\text{اگر } x \text{ در قلمرو } f^{-1} \text{ باشد،} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

وقتی بخواهیم دربارهٔ یک تابع و معکوسش صحبت کنیم، اصطلاح توابع معکوس را به کار می‌بریم.

○ نمونه ۳ چون توابع g و G در نمونه ۲ که با (۲) و (۴) تعریف شدند، توابع معکوس هم هستند، به جای G می‌توان نوشت g^{-1} . از (۲) داریم

$$g(x) = x^3 \quad -2 \leq x \leq 2$$

و از (۴) داریم

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \quad -8 \leq y \leq 8$$

که اگر x را جانشین y کنیم عبارتی معادل با آن به دست می‌آید

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad -8 \leq x \leq 8$$

مشاهده کنید که قلمرو g ، $[-2, 2]$ است که برد g^{-1} است؛ و برد g ، $[-8, 8]$ است که قلمرو g^{-1} است. ○

اگر تابعی چون f با معادله

$$y = f(x)$$

تعریف شود، و اگر f معکوس داشته باشد، آنگاه f^{-1} را می‌توان از معادله فوق با محاسبهٔ x بر حسب y به دست آورد

$$x = f^{-1}(y).$$

حال اگر در این معادله x و y را تعویض کنیم، داریم

$$y = f^{-1}(x).$$

این دستورالعمل را در مثال زیر به کار می‌بریم.

مثال ۳ $f^{-1}(x)$ را برای تابع f از مثال ۱ (الف) بیابید. در مورد f و f^{-1} ، معادلات قضیه ۴.۱۰.۸ را آزمایش کنید. نمودار f^{-1} را رسم کنید.

حل در مثال ۱ (الف) نشان دادیم که تابع f با ضابطه

$$f(x) = 4x - 3$$

یک به یک است. بنابراین f^{-1} وجود دارد. برای یافتن $f^{-1}(x)$ ، معادله

$$y = 4x - 3$$

را می نویسیم و از آن x را محاسبه می کنیم. نتیجه اینکه

$$x = \frac{y+3}{4}.$$

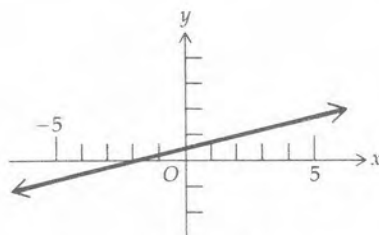
بنابراین

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{4} \quad \text{یا معادلش} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}.$$

حال معادلات قضیه ۴.۱۰.۸ را آزمایش می کنیم.

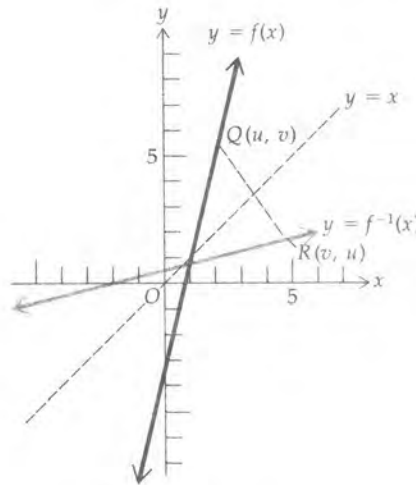
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(4x-3) & f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+3}{4}\right) \\ &= \frac{(4x-3)+3}{4} & &= 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3 \\ &= \frac{4x}{4} & &= (x+3) - 3 \\ &= x. & &= x. \end{aligned}$$

نمودار f^{-1} در شکل ۶.۱۰.۸ رسم شده است.



شکل ۶.۱۰.۸

در شکل ۳.۱۰.۸ نمودار تابع f از مثال ۳، و در شکل ۶.۱۰.۸ نمودار f^{-1} رسم شده است. در شکل ۷.۱۰.۸ نمودارهای f و f^{-1} نسبت به يك دستگاه مختصات نشان داده شده‌اند. در این شکل به‌طور شهودی درست به نظر می‌رسد که اگر نقطه $Q(u, v)$ روی نمودار f باشد، آنگاه نقطه $R(v, u)$ روی نمودار f^{-1} است. اینکه چنین وضعیتی در واقع هم پیش می‌آید، در پاراگراف ذیل تشریح می‌شود.



شکل ۷.۱۰.۸

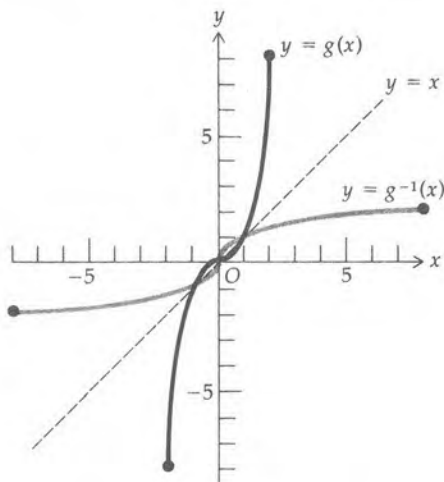
به‌طور کلی، اگر نقطه $Q(u, v)$ و $R(v, u)$ نقطه R باشد، پاره خط QR بر خط $y = x$ عمود است و به‌وسیله آن نصف می‌شود. می‌گوییم که نقطه Q يك انعكاس نقطه R نسبت به خط $y = x$ است، و نقطه R يك انعكاس نقطه Q نسبت به خط $y = x$ است. اگر در معادله $y = f(x)$ جای x و y را باهم عوض کنیم، معادله $x = f(y)$ به‌دست می‌آید؛ و لذا می‌گوییم نمودار معادله $x = f(y)$ يك انعكاس نمودار معادله $y = f(x)$ نسبت به خط $y = x$ است. چون معادله $x = f(y)$ با معادله $y = f^{-1}(x)$ هم‌ارز است، نتیجه می‌گیریم که نمودار معادله $y = f^{-1}(x)$ يك انعكاس نمودار معادله $y = f(x)$ نسبت به خط $y = x$ است. بنابراین، اگر تابعی معکوس داشته باشد، نمودارهای آنها نسبت به خط $y = x$ انعکاسهای یکدیگرند.

○ نمونه ۴ توابع g و g^{-1} در نمونه ۳ با ضابطه

$$g(x) = x^2 \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad -8 \leq x \leq 8$$

تعریف شدند. شکل ۸.۱۰.۸ نمودارهای g و g^{-1} را نسبت به يك دستگاه مختصات نشان می‌دهد. مشاهده کنید که این نمودارها نسبت به خط $y = x$ انعکاسهای یکدیگرند.



شکل ۸.۱۰.۸

مثال ۴ درمورد تابع f در مثال ۲، $f^{-1}(x)$ را بیابید. معادلات قضیه ۴.۱.۸ را درمورد f و f^{-1} بررسی کنید. نمودارهای f و f^{-1} را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل تابع f در مثال ۲ با ضابطه

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

تعریف شده است. در مثال ۲ نشان دادیم که f به يك به يك است. بنابراین f ، معکوسی چون f^{-1} دارد. برای یافتن $f^{-1}(x)$ ، می‌نویسیم $y = f(x)$ و x را محاسبه می‌کنیم تا $x = f^{-1}(y)$ به دست آید. بنابراین، داریم

$$y = \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\begin{aligned} xy - y &= 2x + 3 \\ x(y - 2) &= y + 3 \\ x &= \frac{y + 3}{y - 2} \end{aligned}$$

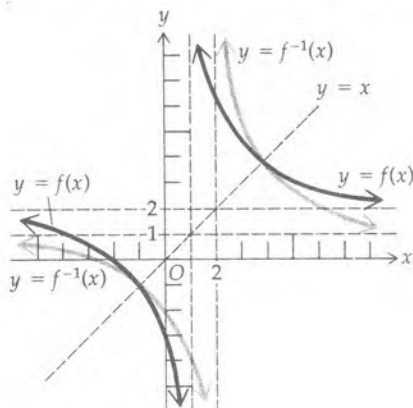
پس

$$f^{-1}(y) = \frac{y + 3}{y - 2}, \text{ یا به عبارت دیگر, } f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$$

قلمرو f^{-1} مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز ۲ است. حال معادلات قضیه ۴.۱.۸ را آزمایش می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) & f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+3}{x-2}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) + 3}{\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) - 2} & &= \frac{2\left(\frac{x+3}{x-2}\right) + 3}{\left(\frac{x+3}{x-2}\right) - 1} \\ &= \frac{(2x+3) + 3(x-1)}{(2x+3) - 2(x-1)} & &= \frac{2(x+3) + 3(x-2)}{(x+3) - (x-2)} \\ &= \frac{5x}{5} & &= \frac{5x}{5} \\ &= x. & &= x. \end{aligned}$$

نمودارهای f و f^{-1} نسبت به يك دستگاه مختصات در شکل ۹.۱.۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۹.۱.۸

اگر تابعی بر بازه بسته‌ای پیوسته و یکنوا باشد، قضیه زیر را درباره معکوسش داریم.

- ۵۰۱۰۸ قضیه فرض کنید قلمرو تابعی چون f ، بازه بسته $[a, b]$ باشد. آنگاه
- (i) اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و صعودی باشد، f دارای معکوس f^{-1} است و قلمروش $[f(a), f(b)]$ است.
 - (ii) اگر f بر $[a, b]$ پیوسته و نزولی باشد، f دارای معکوس f^{-1} است و قلمروش $[f(b), f(a)]$ است.

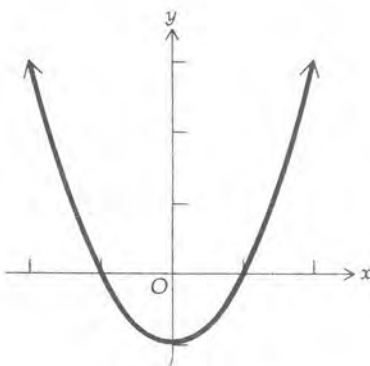
اثبات در مورد قسمت (i)، اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و اگر k عدد دلخواهی باشد که $f(a) < k < f(b)$ ، آنگاه بنا بر قضیه مقدار میانی (۶۰۸۰۲)، عددی مانند c در (a, b) وجود دارد که $f(c) = k$. پس، برد f بازه بسته $[f(a), f(b)]$ است. چون f بر $[a, b]$ صعودی است، f یک به یک است و لذا معکوس دارد. چون قلمرو f^{-1} همان برد f است، f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ تعریف می‌شود.

اثبات قسمت (ii) مشابه همین است. اما، چون f بر $[a, b]$ نزولی است، $f(a) > f(b)$ ؛ لذا برد f ، $[f(b), f(a)]$ است. بنابراین، f^{-1} بر $[f(b), f(a)]$ تعریف می‌شود. $\square$

○ نمونه ۵ فرض کنید تابعی چون f با ضابطه

$$f(x) = x^2 - 1$$

تعریف شود. نمودار f در شکل ۱۰۱۰۸ رسم شده است. چون f یک به یک نیست، معکوس ندارد.



شکل ۱۰۱۰۸

حال، قلمرو را به بازه بسته $[0, c]$ محدود می‌کنیم و تابع f را با ضابطه

$$(۹) \quad f_1(x) = x^2 - 1 \quad \text{که } x \text{ در } [0, c] \text{ است}$$

در نظر می گیریم. و نیز تابع f_2 را، که قلمروش محدود به بازه بسته $[-c, 0]$ است، با ضابطه

$$(۱۰) \quad f_2(x) = x^2 - 1 \quad \text{که } x \text{ در } [-c, 0] \text{ است}$$

در نظر می گیریم. توابع f_1 و f_2 که با (۹) و (۱۰) تعریف شدند، توابعی متمایزند، زیرا قلمروهای مختلف دارند. مشتقهای f_1 و f_2 را می یابیم؛ لذا

$$f_1'(x) = 2x \quad \text{که } x \text{ در } [0, c] \text{ است}$$

و

$$f_2'(x) = 2x \quad \text{که } x \text{ در } [-c, 0] \text{ است.}$$

چون f_1 بر $[0, c]$ پیوسته است و به ازای تمام مقادیر x در $(0, c)$ ، $f_1'(x) > 0$ ، بنا بر قضیه ۳.۵.۴ (i)، f_1 بر $[0, c]$ صعودی است. پس طبق قضیه ۵.۱۰.۸، f_1 دارای معکوس f_1^{-1} است که بر $[f_1(0), f_1(c)]$ ، یعنی $[-1, c^2 - 1]$ ، تعریف می شود. برای پیدا کردن $f_1^{-1}(x)$ ، در (۹) به جای $f_1(x)$ می نویسیم y ، و x را که نامنفی است محاسبه می کنیم. داریم

$$y = x^2 - 1$$

$$x^2 = y + 1$$

$$x = \sqrt{y + 1}.$$

بنابراین $f_1^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$ ، و اگر x را به جای y قرار دهیم، داریم

$$(۱۱) \quad f_1^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} \quad \text{که } x \text{ در } [-1, c^2 - 1] \text{ است.}$$

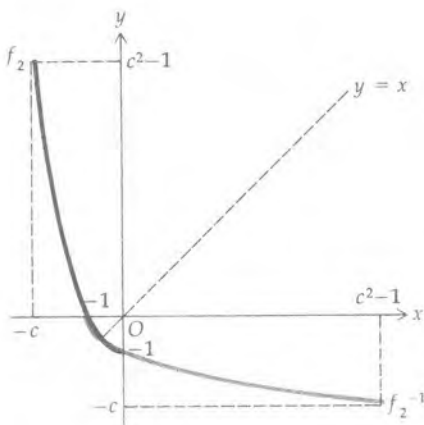
چون f_2 بر $[-c, 0]$ پیوسته است و چون به ازای جمیع مقادیر x در $(-c, 0)$ ، $f_2'(x) < 0$ ، بنا بر قضیه ۳.۵.۴ (ii)، f_2 بر $[-c, 0]$ نزولی است. پس، طبق قضیه ۵.۱۰.۸ (ii)، f_2 دارای معکوس f_2^{-1} است که بر $[f_2(0), f_2(-c)]$ ، یعنی $[-1, c^2 - 1]$ ، تعریف می شود. اگر در (۱۰) به جای $f_2(x)$ بنویسیم y ، و x را که نامثبت است محاسبه کنیم، به دست می آوریم

$$x = -\sqrt{y + 1}.$$

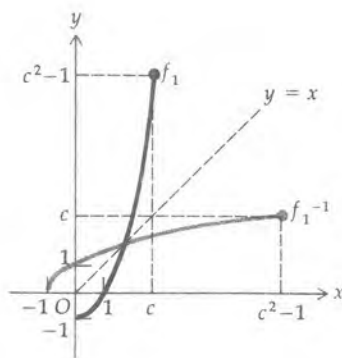
بنابراین $f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y + 1}$ ، و

$$(۱۲) \quad f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1} \quad \text{که } x \text{ در } [-1, c^2 - 1] \text{ است.}$$

در شکل ۱۱.۱۰.۸ نمودارهای f_1 و معکوسش f_1^{-1} ، که با (۹) و (۱۱) تعریف شدند، نسبت به يك دستگاه مختصات رسم شده‌اند. نمودارهای f_2 و معکوسش f_2^{-1} ، که با (۱۵) و (۱۲) تعریف شدند، نسبت به يك دستگاه مختصات در شکل ۱۲.۱۰.۸ نشان داده شده‌اند. در هر دو شکل مشاهده می‌کنید که نمودارهای تابع و معکوسش نسبت به خط $y=x$ ، انعکاسهای یکدیگرند.



○ شکل ۱۲.۱۰.۸



شکل ۱۱.۱۰.۸

توابعی وجود دارند که دارای معکوس هستند، ولی در مورد آنها نمی‌توان معادله‌ای به‌دست آورد که تابع معکوس را به‌صورت صریح تعریف کند. برای مثال، اگر

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4 \quad (۱۳)$$

آنگاه

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2.$$

چون به‌ازای تمام مقادیر x ، $f'(x) > 0$ ، f تابعی صعودی است، و لذا f معکوس دارد. اما، اگر در (۱۳)، y را جانشین $f(x)$ کنیم، يك معادله درجه پنجم برحسب x به‌دست می‌آوریم. در حالت کلی، معادلات درجه پنجم و بالاتر جوابهایی ندارند که با يك فرمول قابل بیان باشند. با این وجود، می‌توان به‌ویژگیهایی از تابع معکوس دست یافت. در باره این ویژگیها در بخش ۲.۸ بحث خواهیم کرد.

تمرینهای ۱۰.۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، تعیین کنید که تابع مفروض یک به یک است یا نه. نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = 2x + 3 \quad ۰.۱ \quad g(x) = 8 - 4x \quad ۰.۲$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \quad ۰.۳ \quad f(x) = 3 - x^2 \quad ۰.۴$$

$$g(x) = 4 - x^2 \quad ۰.۵ \quad h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad ۰.۶$$

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad ۰.۷ \quad g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad ۰.۸$$

$$h(x) = 2 \sin x, -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \quad ۰.۹$$

$$f(x) = 1 - \cos x, 0 \leq x \leq \pi \quad ۰.۱۰$$

$$f(x) = \frac{2}{x+3} \quad ۰.۱۱ \quad g(x) = 5 \quad ۰.۱۲$$

$$g(x) = |x-2| \quad ۰.۱۳ \quad f(x) = \frac{1}{2x-4} \quad ۰.۱۴$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۳۶، تعیین کنید که تابع داده شده معکوس دارد یا نه. اگر معکوس دارد، اعمال زیر را انجام دهید. (الف) آن را بیابید، و قلمرو و بردش را تعیین کنید؛ (ب) نمودار تابع و نمودار معکوسش را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید. اگر تابع معکوس نداشته باشد، نشان دهید که خطی افقی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x) = 5x - 7 \quad ۰.۱۵ \quad f(x) = 3x + 6 \quad ۰.۱۶$$

$$g(x) = 1 - x^2 \quad ۰.۱۷ \quad g(x) = x^5 \quad ۰.۱۸$$

$$f(x) = (4-x)^2 \quad ۰.۱۹ \quad F(x) = 2(x^2+1) \quad ۰.۲۰$$

$$h(x) = \sqrt{2x-6} \quad ۰.۲۱ \quad g(x) = \sqrt{1-x^2} \quad ۰.۲۲$$

$$F(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad ۰.۲۳ \quad f(x) = |x| + x \quad ۰.۲۴$$

$$g(x) = 2\sqrt[3]{x+1} \quad .۲۶$$

$$f(x) = (x+2)^4 \quad .۲۵$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x} \quad .۲۸$$

$$f(x) = 2\sqrt[5]{x} \quad .۲۷$$

$$g(x) = \frac{8}{x^2+1} \quad .۳۰$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1} \quad .۲۹$$

$$f(x) = (2x-1)^2, x \leq \frac{1}{2} \quad .۳۲$$

$$g(x) = x^2 + 5, x \geq 0 \quad .۳۱$$

$$f(x) = (2x+1)^2, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad .۳۳$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2, -1 \leq x \leq 1 \quad .۳۴$$

$$G(x) = \sqrt{4x^2-9}, x \geq \frac{3}{2} \quad .۳۶ \quad F(x) = \sqrt{9-x^2}, 0 \leq x \leq 3 \quad .۳۵$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۲، (الف) ثابت کنید که تابع داده شده f معکوس دارد؛ (ب) $f^{-1}(x)$ را بیابید؛ و (پ) معادلات قضیه ۴.۱.۸ را در مورد f و f^{-1} آزمایش کنید.

$$f(x) = 5x+2 \quad .۳۸$$

$$f(x) = 4x-3 \quad .۳۷$$

$$f(x) = (x+2)^3 \quad .۴۰$$

$$f(x) = x^2+2 \quad .۳۹$$

$$f(x) = \frac{x-3}{3x-6} \quad .۴۲$$

$$f(x) = \frac{3x+1}{2x+2} \quad .۴۱$$

در تمرینهای ۴۳ تا ۴۶، کارهای زیر را انجام دهید. (الف) نشان دهید که تابع مفروض f یک به یک نیست و لذا معکوس ندارد؛ (ب) با محدود کردن قلمرو، دو تابع یک به یک f_1 و f_2 به دست آورید که بردشان همان برد f باشد؛ (پ) $f_1^{-1}(x)$ و $f_2^{-1}(x)$ را بیابید و قلمروهای f_1^{-1} و f_2^{-1} را مشخص کنید؛ (ت) نمودارهای f_1 و f_2^{-1} را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ (ث) نمودارهای f_2 و f_2^{-1} را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = 2x^2-6 \quad .۴۴$$

$$f(x) = x^2+4 \quad .۴۳$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 16} \quad .۴۶$$

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad .۴۵$$

اگر .۴۷

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x \leq 9 \\ 2\sqrt{x} & 9 < x \end{cases}$$

ثابت کنید که f معکوس دارد و $f^{-1}(x)$ را بیابید.

.۴۸ مقدار ثابت k چه باشد تا تابع با ضابطه زیر

$$f(x) = \frac{x+5}{x+k}$$

معکوس خودش باشد؟

۲.۸ قضیه‌های تابع معکوس و مشتق معکوس يك تابع

در نتیجه گیری بخش ۱.۸ گفتیم که تابعی چون f می‌تواند دارای معکوس f^{-1} باشد ولی این معکوس به طور صریح با يك معادله تعریف نشود. اما، از ویژگیهای f می‌توان اطلاعاتی در باب پیوستگی و مشتق پذیری f^{-1} به دست آورد.

○ نمونه ۱ در مثال ۳ از بخش ۱.۸، تابع f با ضابطه

$$f(x) = 4x - 3$$

و معکوسش f^{-1} با ضابطه

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$$

را دیدیم. در شکل ۲.۱۰۸ نمودارهای f و f^{-1} نسبت به يك دستگاه مختصات رسم شده‌اند. می‌بینیم که f و f^{-1} هر دو بر قلمروشان پیوسته و صعودی هستند. ○

○ نمونه ۲ در نمونه ۴ از بخش ۱.۸، تابع g و معکوسش g^{-1} با ضابطه‌های

$$g(x) = x^2 \quad -2 \leq x \leq 2$$

و

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad -8 \leq x \leq 8$$

تعریف می‌شوند. نمودارهای g و g^{-1} در شکل ۸.۱۰.۸ نشان داده شده‌اند. هریک از این دو تابع بوقلمروش پیوسته و صعودی است.

○

در نمونه‌های ۱ و ۲ مثالهایی از يك تابع و معکوسش را می‌بینیم که در شرایط قضیه زیر، موسوم به قضیه تابع معکوس برای توابع صعودی، صدق می‌کنند. وجود تابع معکوس ذکر شده در صورت این قضیه توسط قضیه ۵.۱۰.۸ تضمین می‌شود.

۱.۲.۸ قضیه (قضیه تابع معکوس) فرض کنید تابعی چون f بر يك بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و صعودی باشد. آنگاه اگر f^{-1} که بر $[f(a), f(b)]$ تعریف می‌شود معکوس f باشد،
 (i) f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ صعودی است.
 (ii) f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ پیوسته است.

اثبات (i) برای اینکه ثابت کنیم f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ صعودی است، باید نشان دهیم که اگر $y_1 < y_2$ دو عدد در $[f(a), f(b)]$ باشند و $y_1 < y_2$ ، آنگاه $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. چون f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ تعریف می‌شود، اعدادی چون x_1 و x_2 در $[a, b]$ وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. بنابراین

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1 \quad (1)$$

و

$$f^{-1}(y_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2. \quad (2)$$

اگر $x_2 < x_1$ ، آنگاه چون f بر $[a, b]$ صعودی است، $f(x_2) < f(x_1)$ ، یا معادلش $y_1 < y_2$. اما چون $y_1 < y_2$ ، پس x_2 نمی‌تواند کمتر از x_1 باشد. اگر $x_2 = x_1$ ، آنگاه چون f يك تابع است، $f(x_1) = f(x_2)$ ، یا معادلش $y_1 = y_2$. اما این نیز متناقض با این واقعیت است که $y_1 < y_2$. بنابراین $x_2 \neq x_1$. پس اگر x_2 کمتر از x_1 نباشد و $x_2 \neq x_1$ ، باید $x_2 < x_1$. نتیجه اینکه از (۱) و (۲) داریم $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. بنابراین ثابت کردیم که f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ صعودی است. □

اثبات (ii) برای اینکه ثابت کنیم f^{-1} بر بازه بسته $[f(a), f(b)]$ پیوسته است، باید نشان دهیم که اگر r عدد دلخواهی از بازه باز $(f(a), f(b))$ باشد، آنگاه f^{-1} در r پیوسته است، و f^{-1} از راست در $f(a)$ پیوسته است و f^{-1} از چپ در $f(b)$ پیوسته است.

برای اینکه ثابت کنیم f^{-1} در عدد دلخواه r از بازه باز $(f(a), f(b))$ پیوسته است نشان می‌دهیم که در r ، قضیه ۵.۷.۲ برقرار است. پس می‌خواهیم نشان دهیم به ازای هر $\varepsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک که $f^{-1}(r) - \varepsilon$ و $f^{-1}(r) + \varepsilon$ هر دو در $[a, b]$

باشند، يك $\delta > 0$ وجود دارد كه

$$\text{وقتي } |y-r| < \delta, \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \varepsilon.$$

فرض كنيد $s = f^{-1}(r)$ ، آنگاه $f(s) = r$. چون بنا بر (ii)، f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ صعودی است، نتیجه می گیریم كه $a < s < b$. بنا بر این

$$a \leq s - \varepsilon < s < s + \varepsilon \leq b.$$

چون f بر $[a, b]$ صعودی است،

$$f(a) \leq f(s - \varepsilon) < r < f(s + \varepsilon) \leq f(b). \quad (3)$$

فرض كنيد δ كوچكترین عدد ازدو عدد $r - f(s - \varepsilon)$ و $f(s + \varepsilon) - r$ باشد؛ لذا $\delta \leq r - f(s - \varepsilon)$ و $\delta \leq f(s + \varepsilon) - r$ ، یا

$$f(s - \varepsilon) \leq r - \delta \quad (4)$$

و

$$r + \delta \leq f(s + \varepsilon). \quad (5)$$

وقتي كه $|y-r| < \delta$ ، داریم $-\delta < y-r < \delta$ ، یا معادلش

$$r - \delta < y < r + \delta. \quad (6)$$

وقتي $|y-r| < \delta$ ، از (3)، (4)، (5)، و (6) داریم

$$f(a) \leq f(s - \varepsilon) < y < f(s + \varepsilon) \leq f(b).$$

از آنجا كه f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ صعودی است، نتیجه می گیریم

$$\text{وقتي } |y-r| < \delta, \quad |f^{-1}(f(s + \varepsilon)) - f^{-1}(f(s - \varepsilon))| < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(s + \varepsilon))$$

یا معادلش

$$\text{وقتي } |y-r| < \delta, \quad s - \varepsilon < f^{-1}(y) < s + \varepsilon$$

یا معادلش

$$\text{وقتي } |y-r| < \delta, \quad -\varepsilon < f^{-1}(y) - s < \varepsilon$$

یا معادلش

$$\text{وقتي } |y-r| < \delta, \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \varepsilon.$$

پس f^{-1} بر بازه باز $(f(a), f(b))$ پیوسته است.

اثبات اینکه f^{-1} از راست در $f(a)$ پیوسته است و از چپ در $f(b)$ پیوسته است به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۳۷ را ببینید). $\square$

حالا قضیه تابع معکوس برای توابع نزولی را ذکر می کنیم. اثبات آن شبیه اثبات

قضیه ۱۰۲۰۸ است و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرینهای ۳۸ و ۳۹ را ببینید).

۲۰۲۰۸ قضیه (قضیه تابع معکوس) فرض کنید که تابعی چون f بزرگ بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و نزولی باشد. آنگاه f^{-1} که بر $[f(b), f(a)]$ تعریف می‌شود معکوس f است، و

(i) f^{-1} بر $[f(b), f(a)]$ نزولی است.

(ii) f^{-1} بر $[f(b), f(a)]$ پیوسته است.

قضیه زیر يك رابطه موجود بین مشتق يك تابع و مشتق معکوس آن را، در صورت وجود تابع معکوس، بیان می‌کند؛ برای اثبات این قضیه از قضیه‌های تابع معکوس استفاده می‌شود.

۳۰۲۰۸ قضیه فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و یکنوا باشد، و فرض کنید $y = f(x)$. اگر f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشد و به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $f'(x) \neq 0$ ، آنگاه مشتق تابع معکوس f^{-1} ، که با ضابطه $x = f^{-1}(y)$ تعریف می‌شود، از

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}$$

به‌دست می‌آید.

اثبات چون f بر $[a, b]$ پیوسته و یکنواست، بنا بر قضایای ۱۰۲۰۸ و ۲۰۲۰۸، f معکوس دارد و این معکوس بر $[f(a), f(b)]$ (یا بر $[f(b), f(a)]$ اگر $f(b) < f(a)$) پیوسته و یکنواست.

عددی چون x از $[a, b]$ را اختیار، و فرض می‌کنیم $\Delta x \neq 0$ ، نمودی از x باشد به‌طوری‌که $x + \Delta x$ نیز در $[a, b]$ باشد. آنگاه، نمودناظر y از

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (۷)$$

به‌دست می‌آید. داریم $\Delta y \neq 0$ زیرا $\Delta x \neq 0$ و f بر $[a, b]$ یکنواست؛ و لذا بر $[a, b]$ داریم

$$f(x + \Delta x) > f(x) \quad \text{یا} \quad f(x + \Delta x) < f(x)$$

اگر x در $[a, b]$ باشد و $y = f(x)$ ، آنگاه y در $[f(a), f(b)]$ (یا در $[f(b), f(a)]$) است. همچنین اگر $x + \Delta x$ در $[a, b]$ باشد، آنگاه $y + \Delta y$ در $[f(a), f(b)]$ (یا در $[f(b), f(a)]$) است؛ زیرا بنا به (۷)، $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

پس

$$x = f^{-1}(y) \quad (۸)$$

و

$$x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y). \quad (۹)$$

۶۸۰ توابع معکوس. توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

از (۸) و (۹) دیده می شود که

$$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y). \quad (10)$$

بنابر تعریف مشتق

$$D_y x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y}.$$

اگر از (۷) و (۱۰) در معادله بالا قرار دهیم، داریم

$$D_y x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{f(x + \Delta x) - f(x)}$$

و چون $\Delta x \neq 0$ ، داریم

$$D_y x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}. \quad (11)$$

پیش از یافتن حد مذکور در (۱۱) نشان می دهیم که بنا بر فرض این قضیه، $\Delta x \rightarrow 0$ معادل است با $\Delta y \rightarrow 0$. نخست نشان می دهیم که $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$. بنا بر (۱۰)،

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)].$$

چون f^{-1} بر $[f(a), f(b)]$ (یا بر $[f(b), f(a)]$) پیوسته است، حد طرف راست معادله بالا صفر است. پس

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0. \quad (12)$$

حال نشان می دهیم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. بنا بر (۷)،

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)].$$

چون f بر $[a, b]$ پیوسته است، حد طرف راست معادله بالا صفر است، ولذا

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (13)$$

از (۱۲) و (۱۳) نتیجه می گیریم که

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ اگر و تنها اگر } \Delta y \rightarrow 0. \quad (14)$$

پس، اگر در (۱۱) قضیه حدی (مربوط به حد خارج قسمت) را به کار بگیریم و از (۱۴) هم استفاده کنیم، داریم

$$D_y x = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}.$$

چون f بر $[a, b]$ مشتق‌پذیر است، حد مخرج کسر بالا $f'(x)$ ، یا معادلش $D_x y$ ، است؛
ولذا

$$\square \quad D_y x = \frac{1}{D_x y}.$$

○ نمونه ۳ قضیه ۳.۲.۸ را در مورد تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ آزمایش می‌کنیم.
اگر بنویسیم $y = f(x)$ ، معادله

$$y = \sqrt{x} \quad x \geq 0, y \geq 0 \quad (15)$$

به‌دست می‌آید. چون f يك به يك است، f^{-1} وجود دارد و به‌صورت $f^{-1}(y) = y^2$ تعریف می‌شود. اگر بنویسیم $x = f^{-1}(y)$ ، معادله

$$x = y^2 \quad y \geq 0, x \geq 0 \quad (16)$$

به‌دست می‌آید.

از (۱۵) داریم

$$D_x y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

و بنابه (۱۶)،

$$D_y x = 2y. \quad (17)$$

اگر از (۱۵) در (۱۷) قراردهیم، داریم

$$\begin{aligned} D_y x &= 2\sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1}{D_x y}. \end{aligned} \quad (18)$$

وقتی که $x = 0$ ، $D_x y$ وجود ندارد؛ پس به‌ازای این مقدار از x ، (۱۸) برقرار نیست.
چون قلمرو f بازه بسته $[0, +\infty)$ است، قضیه به‌ازای هر x در بازه باز $(0, +\infty)$

○

درست است.

مثال ۱ نشان دهید که در مورد تابع f در مثالهای ۲ و ۴ از بخش ۱۰.۸، قضیه ۳.۲.۸ برقرار است.

حل تابع f با $(2x+3)/(x-1)$ تعریف می‌شود. اگر بنویسیم $y=f(x)$ ، داریم

$$y = \frac{2x+3}{x-1} \quad (19)$$

$$D_x y = -\frac{5}{(x-1)^2}.$$

در حل مثال ۴ از بخش ۱۰.۸ نشان دادیم که

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}.$$

از این معادله، $D_y x$ را محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$D_y x = (f^{-1})'(y) = -\frac{5}{(y-2)^2}.$$

اگر به جای y در معادله بالا مقدارش از (۱۹) قرار گیرد، حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} D_y x &= -\frac{5}{\left(\frac{2x+3}{x-1}-2\right)^2} \\ &= -\frac{5(x-1)^2}{(2x+3-2x+2)^2} \\ &= -\frac{5}{25}(x-1)^2 \\ &= -\frac{1}{5}(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{D_x y}. \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + x$ داده شده است. تعیین کنید که f معکوس دارد یا نه. اگر دارد، مشتق تابع معکوس را بیابید.

حل چون $f(x) = x^2 + x$ ،

$$f'(x) = 2x + 1.$$

بنابراین، به‌ازای تمام اعداد حقیقی، $f'(x) > 0$ ؛ لذا f بر قلمروش صعودی است. پس، f تابعی است يك به يك، و در نتیجه معکوس وجود دارد. اگر بنویسیم $y = f(x)$ ، آنگاه $x = f^{-1}(y)$. بنابراین قضیه ۳.۲.۸،

$$D_y x = \frac{1}{D_x y} \\ = \frac{1}{2x + 1}.$$

در هنگام استفاده از قضیه ۳.۲.۸ برای محاسبه مقدار مشتق معکوس يك تابع در يك عدد مشخص، راحت‌تر است که آن را با نمادهای f' و $(f^{-1})'$ به‌کار ببریم. زیرا این قضیه را با این نمادها و به‌عنوان قضیه ۴.۲.۸ بیان می‌کنیم.

۴.۲.۸ قضیه فرض کنید تابعی چون f بر يك بازه بسته $[a, b]$ ، که عددی چون c را دربر دارد، پیوسته و یکنوا باشد. و نیز فرض کنید $f(c) = d$. اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد و اگر $f'(c) \neq 0$ ، آنگاه $(f^{-1})'(d)$ وجود دارد و

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}.$$

○ نمونه ۴ نشان می‌دهیم که قضیه ۴.۲.۸ در مورد تابعی خاص و مقادیر خاصی از c و d برقرار است. اگر f تابع نمونه ۳ باشد،

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f^{-1}(x) = x^2 \quad \text{و} \quad (f^{-1})'(x) = 2x, \quad x \geq 0.$$

تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ ، که $0 \leq a < b$ ، پیوسته و یکنواست. می‌نویسیم $c = 9$ و لذا $d = f(9) = 3$. قضیه ۴.۲.۸ حاکی است که

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(9)}. \quad (20)$$

○ چون $(f^{-1})'(3) = 6$ و $f'(9) = 1/6$ ، معادله (۲۰) برقرار است.

○ نمونه ۵ تابع f مذکور در نتیجه‌گیری بخش ۱.۸، با ضابطه

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4 \quad (21)$$

تعریف شد. در آنجا گفتیم که f دارای معکوس f^{-1} است؛ اما، معادله‌ای که مقادیر تابع f^{-1} را به‌طور صریح تعریف کند وجود ندارد. با این حال، می‌توانیم مشتق f^{-1} را در عدد خاصی که طول نقطه‌ای از نمودار $y = f^{-1}(x)$ است، محاسبه کنیم. مثلاً، چون $(1, 4)$ روی نمودار $y = f(x)$ است، نقطه $(4, 1)$ روی نمودار $y = f^{-1}(x)$ است. مقدار $(f^{-1})'(4)$ را با استفاده از قضیه ۳.۲.۸ محاسبه می‌کنیم که حاکی است

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)}.$$

نخست از (۲۱)، $f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2$ را می‌یابیم

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 2.$$

پس

$$f'(1) = 22.$$

بنابراین

$$\circ \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{22}.$$

مثال ۳ (الف) نمودارهای توابع f و f^{-1} در مثال ۲ را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ (ب) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f در نقطه $(1, 2)$ را بیابید؛ (پ) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f^{-1} در نقطه $(2, 1)$ را محاسبه کنید.

حل

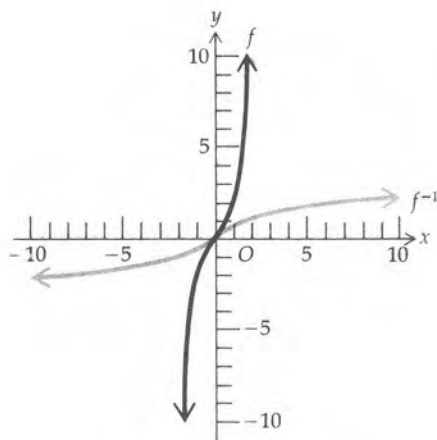
(الف) در مورد تابع f داریم

$$f(x) = x^3 + x$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f''(x) = 6x.$$

تابع بر قلمروش صعودی است. چون $f''(0) = 0$ و $f''(x) > 0$ در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد، نمودار f در مبدأ یک نقطه عطف دارد. ضریب زاویه مماس عطفی در مبدأ، $f'(0) = 1$ است. از این اطلاعات برای رسم نمودار f در شکل ۱۰.۲.۸ استفاده شده است. در این شکل نمودار f^{-1} نیز، که انعکاس نمودار f نسبت به خط $y = x$ است، رسم شده است. مشاهده کنید که برای یافتن معادله‌ای که $f^{-1}(x)$ را به‌طور صریح تعریف کند لازم است معادله درجه سوم $y = x^3 + x$ را حل کنیم.



شکل ۱۰۲۰۸

- (ب) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f در نقطه $(1, 4)$ ، $f'(1) = 4$ است.
 (پ) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f^{-1} در نقطه $(4, 1)$ ، $(f^{-1})'(4) = 1/4$ است.
 بنا بر قضیه ۴۰۲۰۸،

$$\Delta \quad (f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}.$$

تمرینهای ۲۰۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، با فرض اینکه $y = f(x)$ و $x = f^{-1}(y)$ ، نشان دهید که

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}.$$

۲. $f(x) = 7 - 2x$

۱. $f(x) = 4x - 3$

۴. $f(x) = 8x^3$

۳. $f(x) = \sqrt{x+1}$

۶. $f(x) = \sqrt{4-3x}$

۵. $f(x) = \frac{1}{5}x^5$

۸. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

۷. $f(x) = \sqrt[7]{x-8}$

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x+6} \quad .10 \qquad f(x) = \frac{2x-3}{x+2} \quad .9$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۲۴، برای f د d ی مفروض، $(f^{-1})'(d)$ را بیابید.

$$f(x) = x^5 + 2; d = 1 \quad .12 \qquad f(x) = \sqrt{3x+1}; d = 1 \quad .11$$

$$f(x) = \sqrt{4-x}; d = 3 \quad .14 \qquad f(x) = x^2 - 16, x \geq 0; d = 9 \quad .13$$

$$f(x) = 4x^2 + 2x; d = 6 \quad .16 \qquad f(x) = x^2 + 5; d = -3 \quad .15$$

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2; d = 5 \quad .17$$

$$f(x) = \sin x, -\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{1}{4}\pi; d = \frac{1}{4} \quad .18$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cos^2 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; d = \frac{1}{4} \quad .19$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 7, x \leq 3; d = 0 \quad .20$$

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 7, x \leq -2; d = 1 \quad .21$$

$$f(x) = 2x^3 + x + 20; d = 2 \quad .22$$

$$f(x) = \int_{-2}^x \sqrt{t+3} dt, x > -3; d = 18 \quad .23$$

$$f(x) = \int_x^2 t dt, x < 0; d = -6 \quad .24$$

۲۵. تابع $f(x) = \int_1^x \sqrt{16-t^4} dt$ ، $-2 \leq x \leq 2$ ، داده شده است. ثابت کنید که f معکوس دارد، و $(f^{-1})'(0)$ را به دست آورید.

۲۶. $f(x) = \int_{\frac{1}{4}}^x \sqrt{9+t^4} dt$ مفروض است. ثابت کنید که f معکوس دارد، و $(f^{-1})'(0)$ را محاسبه کنید.

۲۷. (الف) نمودارهای توابع f و f^{-1} را $f(x) = x^3 + 3x - 1$ داده شده است. (ب) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید؛ (ب) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f

در نقطه $(۱, ۳)$ را بیابید؛ (پ) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه $(۳, ۱)$ را محاسبه کنید.

۲۸. $f(x) = ۶ - x - x^۳$ داده شده است. (الف) نمودارهای توابع f و $f^{-۱}$ را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید؛ (ب) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f در نقطه $(۲, -۴)$ را بیابید؛ (پ) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $f^{-۱}$ در نقطه $(-۴, ۲)$ را محاسبه کنید.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۴، کارهای زیر را انجام دهید. (الف) با محاسبه y بر حسب x معادله را حل، و y را به صورت يك یا چند تابع از x بیان کنید؛ (ب) در مورد هر يك از توابع به دست آمده در (الف) تعیین کنید که تابع معکوس دارد یا نه، و اگر دارد، قلمرو تابع معکوس را بیابید؛ (پ) برای یافتن $D_x y$ و $D_y x$ از مشتق گیری ضمنی استفاده کنید، و مقادیری از x و y را بیابید که به ازای آنها $D_y x$ و $D_x y$ عکس یکدیگر باشند.

$$۲۹. x^۲ + y^۲ = ۹ \quad ۳۰. x^۲ - ۴y^۲ = ۱۶$$

$$۳۱. xy = ۴ \quad ۳۲. ۹y^۲ - ۸x^۳ = ۰$$

$$۳۳. ۲x^۲ - ۳xy + ۱ = ۰ \quad ۳۴. ۲x^۲ + ۲y + ۱ = ۰$$

۳۵. نشان دهید که فرمول قضیه ۳.۲.۸ را می توان به صورت زیر هم نوشت

$$(f^{-۱})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-۱}(x))}.$$

۳۶. با استفاده از فرمول تمرین ۳۵ نشان دهید که

$$(f^{-۱})''(x) = -\frac{f''(f^{-۱}(x))}{[f'(f^{-۱}(x))]^۳}.$$

۳۷. فرض کنید تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و صعودی باشد. با قبول قضیه ۱۰.۲.۸ (i)، ثابت کنید که $f^{-۱}$ از راست در $f(a)$ و از چپ در $f(b)$ پیوسته است.

۳۸. قضیه ۲.۲.۸ (i) را ثابت کنید.

۳۹. قضیه ۲.۲.۸ (ii) را ثابت کنید.

۳۰۸ تابع لگاریتمی طبیعی

تعریف تابع لگاریتمی که در جبر با آن مواجه می‌شوید براساس نماست. در آنجا ویژگیهای لگاریتم براساس ویژگیهای متناظر نما اثبات می‌شوند. یکی از ویژگیهای نما

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (1)$$

است.

اگر نماها، x و y ، اعداد صحیح مثبتی باشند و a يك عدد حقیقی دلخواه باشد، رابطه (۱) از تعریف يك نمای صحیح مثبت و استقرای ریاضی به دست می‌آید. اگر نماها مجاز باشند که هر عدد صحیحی، مثبت، منفی، یا صفر باشند، و $a \neq 0$ ، آنگاه (۱) برقرار خواهد بود اگر نمای صفر و نمای صحیح منفی به صورت زیر تعریف بشوند

$$a^0 = 1$$

و

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n > 0$$

اگر نماها اعدادی گویا باشند و $a \geq 0$ ، آنگاه (۱) برقرار است اگر $a^{m/n}$ با ضابطه

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

تعریف بشود.

وقتی که x يك عدد گنگ باشد، به این سادگی نمی‌توان a^x را تعریف کرد. برای مثال، معنی $2^{1/3}$ چیست؟ تعریف تابع لگاریتمی که در درس جبر مقدماتی عرضه می‌شود براساس این فرض است که وقتی a يك عدد مثبت، و x يك عدد حقیقی دلخواه باشد، a^x وجود دارد. این تعریف به این شرح است که معادله

$$a^x = N$$

وقتی که a يك عدد مثبت بجز ۱ و N يك عدد مثبت دلخواه باشد، قابل حل است، و x را می‌توان به طور یکتا به صورت

$$x = \log_a N$$

تعیین کرد.

وقتی از لگاریتم عمده‌تاً به عنوان يك ابزار محاسبه استفاده می‌شود، عدد a (موسوم به پایه) را ۱۰ فرض می‌کنند. اثبات برخی از ویژگیهای لگاریتم که در زیر می‌آیند، براساس ویژگیهای متناظر نماست.

$$\log_a 1 = 0 \quad (2)$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (۳)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (۴)$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (۵)$$

$$\log_a a = ۱. \quad (۶)$$

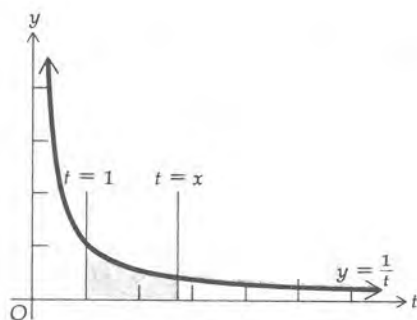
در این فصل تابع لگاریتمی را با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف، و ویژگیهای لگاریتم را با استفاده از این تعریف اثبات می‌کنیم. آنگاه تابع نمایی را برحسب تابع لگاریتمی تعریف می‌نماییم. این تعریف ما را قادر می‌سازد وقتی که x يك عدد حقیقی دلخواه باشد و $a > 0$ ، a^x را تعریف کنیم؛ و براین اساس، ویژگیهای نما را، با این شرط که نما يك عدد حقیقی دلخواه باشد، اثبات نماییم.

فرمول

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

را به‌خاطر آورید.

این فرمول برای $n = -1$ برقرار نیست. تابع تعریف‌شده با معادله $y = t^{-1}$ را، که در آن t مثبت است، در نظر بگیرید. نمودار این معادله در شکل ۱۰.۳۰۸ رسم شده است.



شکل ۱۰.۳۰۸

فرض کنید R ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/t$ ، محور t ها، خط $t = 1$ درست چپ، و خط $t = x$ درست راست باشد، که در آن، x بزرگتر از ۱ است. این ناحیه R در شکل ۱۰.۳۰۸ نشان داده شده است. اندازه مساحت R تابعی از x است؛ آن را با $A(x)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت انتگرال معین زیر

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad (۷)$$

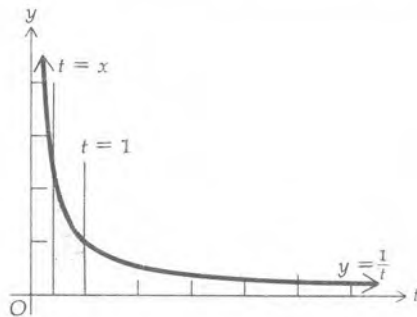
تعریف می‌کنیم.

حال به انتگرال (۷) وقتی که $0 < x < 1$ ، توجه کنید. از تعریف ۵.۲.۶،

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt.$$

پس، انتگرال $\int_x^1 (1/t) dt$ اندازه مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/t$ ، محور t ها،

خط $t = x$ در چپ و خط $t = 1$ در راست را نشان می‌دهد. در نتیجه، انتگرال $\int_1^x (1/t) dt$ قرینه اندازه مساحت ناحیه نشان داده شده در شکل ۲.۳.۸ است.



شکل ۲.۳.۸

اگر $x = 1$ ، انتگرال $\int_1^x (1/t) dt$ به صورت $\int_1^1 (1/t) dt$ در می‌آید که بنابر تعریف ۵.۲.۶ برابر با ۰ است. در این حالت، مرزهای چپ و راست ناحیه یکی هستند و مساحت ۰ است.

بنابراین، به ازای $x > 0$ ، انتگرال $\int_1^x (1/t) dt$ را می‌توان برحسب اندازه مساحت یک ناحیه تعبیر کرد. مقدار آن به x بستگی دارد و لذا تابعی از x است. از این انتگرال برای تعریف تابع لگاریتمی طبیعی استفاده می‌کنیم.

۱.۳.۸ تعریف تابع با ضابطه

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$$

را تابع لگاریتمی طبیعی می‌نامند.

قلمرو تابع لگاریتمی طبیعی مجموعه تمام اعداد مثبت است. $\ln x$ خوانده می‌شود «لگاریتم طبیعی اکس».

تابع لگاریتمی طبیعی مشتق‌پذیر است، زیرا بنا به قضیه ۱۰.۵.۶،

$$D_x(\ln x) = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{x}.$$

از این نتیجه و از قاعده زنجیری قضیه زیر به دست می‌آید.

۲۰.۳.۸ قضیه اگر u یک تابع مشتق‌پذیر از x باشد و $u(x) > 0$ ، آنگاه

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot D_x u.$$

مثال ۱ $y = \ln(3x^2 - 6x + 8)$ مفروض است. مطلوب است dy/dx .

حل بنا بر قضیه ۲۰.۳.۸.

$$\Delta \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 6x + 8} \cdot (6x - 6) = \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 8}.$$

مثال ۲ $y = \ln[(4x^2 + 3)(2x - 1)]$ مفروض است. مطلوب است $D_x y$.

حل با استفاده از قضیه ۲۰.۳.۸ داریم

$$\begin{aligned} D_x y &= \frac{1}{(4x^2 + 3)(2x - 1)} \cdot [8x(2x - 1) + 2(4x^2 + 3)] \\ &= \frac{24x^2 - 8x + 6}{(4x^2 + 3)(2x - 1)}. \end{aligned} \quad (۸)$$

مثال ۳ فرض کنید

$$y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

مطلوب است dy/dx .

حل بنا بر قضیه ۲۰.۳.۸، داریم

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)}.\end{aligned}$$

باید تأکید کنیم که هنگام استفاده از قضیه ۲.۳.۸، $u(x)$ باید مثبت باشد؛ یعنی، عددی که در قلمرو مشتق است، باید در قلمرو تابع مفروض $\ln u$ هم باشد.

○ نمونه ۱ در مثال ۱، قلمرو تابع مفروض مجموعه تمام اعداد حقیقی است، زیرا به ازای هر x ، $3x^2 - 6x + 8 > 0$. این نکته را از این واقعیت می توان دریافت که رأس سهمی با معادله $y = 3x^2 - 6x + 8$ ، نقطه $(1, 5)$ است و دهانه این سهمی روبه بالا است. پس مشتق به ازای تمام مقادیر x ، $(3x^2 - 6x + 8)/(3x^2 - 6x + 8)$ است.

در مثال ۲، چون تنها وقتی $x > 1/2$ داریم $(2x-1)(4x^2+3) > 0$ ، قلمرو تابع مفروض، بازه $(1/2, +\infty)$ است. پس باید در نظر داشت که کسر (8) تنها وقتی مشتق است که $x > 1/2$.

چون وقتی $x/(x+1)$ مثبت است که $x < -1$ یا $x > 0$ ، قلمرو تابع در مثال ۳ عبارت است از $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ ؛ لذا $1/x(x+1)$ وقتی مشتق است که $x < -1$ یا $x > 0$. ○

حال نشان می دهیم که تابع لگاریتمی طبیعی نیز همان ویژگیهای لگاریتم را که قبلاً بیان کردیم، دارد.

$$\ln 1 = 0 \quad \text{قضیه ۳.۳.۸}$$

اثبات اگر در تعریف ۱.۳.۸، $x = 1$

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt.$$

طرف راست معادله بالا بنا به تعریف ۶.۲.۶ صفر است. پس

$$\square \quad \ln 1 = 0.$$

قضیه ۳.۳.۸ متناظر با ویژگی (۲) از لگاریتم است. سه قضیه بعدی متناظر با ویژگیهای (۳)، (۴)، و (۵) از لگاریتم هستند.

۴.۳.۸ قضیه اگر a و b دو عدد مثبت دلخواه باشند، آنگاه

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

اثبات اگر $a > 0$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۲.۳.۸،

$$D_x(\ln ax) = \frac{1}{ax} D_x(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x}.$$

بنابراین، مشتق توابع $\ln x$ و $\ln ax$ یکی است. پس طبق قضیه ۲.۲.۵ ثابتی چون k وجود دارد که

$$\ln ax = \ln x + K \quad , x > 0 \quad (۹)$$

برای تعیین K ، در (۹) قرار می‌دهیم $x = 1$ و به دست می‌آوریم

$$\ln a = \ln 1 + K.$$

چون $\ln 1 = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $K = \ln a$. اگر در (۹)، $\ln a$ را جانشین K کنیم، داریم

$$\ln ax = \ln x + \ln a.$$

حال در این معادله b را جانشین x می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\square \quad \ln ab = \ln a + \ln b.$$

۵.۳.۸ قضیه اگر a و b دو عدد مثبت دلخواه باشند، آنگاه

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

اثبات چون $a = (a/b) \cdot b$ ، داریم

$$\ln a = \ln \left(\frac{a}{b} \cdot b \right).$$

قضیه ۴.۳.۸ را در مورد طرف راست معادله بالا به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

$$\square \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

۶۰۳.۸ قضیه اگر a عدد مثبت دلخواهی، و r عدد گویای دلخواهی باشد، آنگاه

$$\ln a^r = r \ln a.$$

اثبات بنا بر قضیه ۲.۳۰۸، اگر r عدد گویای دلخواهی باشد و $x > 0$ ،

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot r x^{r-1} = \frac{r}{x}$$

و

$$D_x(r \ln x) = \frac{r}{x}$$

بنابراین

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x).$$

طبق معادله بالا مشتقهای $\ln x^r$ و $r \ln x$ باهم مساوی‌اند؛ لذا از قضیه ۲.۲۰۵ نتیجه می‌شود که ثابتی چون K وجود دارد که

$$\ln x^r = r \ln x + K \quad \text{به‌ازای هر } x > 0 \quad (۱۰)$$

برای تعیین K ، در (۱۰)، x را جانشین 1 می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\ln 1^r = r \ln 1 + K.$$

اما، $\ln 1 = 0$ ؛ پس $K = 0$. اگر در (۱۰)، x را جانشین K کنیم، داریم

$$\ln x^r = r \ln x \quad \text{به‌ازای هر } x > 0.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که اگر $x = a$ ، و a عدد مثبت دلخواهی باشد، آنگاه

$$\square \quad \ln a^r = r \ln a.$$

○ نمونه ۲ در مثال ۲، اگر قبل از محاسبه مشتق از قضیه ۴.۳۰۸ استفاده کنیم، داریم

$$y = \ln(4x^2 + 3) + \ln(2x - 1). \quad (۱۱)$$

قلمرو تابع تعریف شده توسط معادله بالا بازه $(1/2, +\infty)$ است که همان قلمرو تابع مفروض است. بنا بر (۱۱)،

$$D_x y = \frac{8x}{4x^2 + 3} + \frac{2}{2x - 1}.$$

با محاسبه مخارج مشترك و جمع کردن كسرها داریم

$$D_x y = \frac{8x(2x-1) + 2(4x^2+3)}{(4x^2+3)(2x-1)}$$

○ و این چیزی نیست جز همان سطر اول حل مثال ۲.

○ نمونه ۳ در مثال ۳، اگر قبل از محاسبه مشتق از قضیه ۵.۳۰۸ استفاده کنیم، داریم

$$\ln y = \ln x - \ln(x+1). \quad (12)$$

$\ln x$ تنها وقتی معین است که $x > 0$ و $\ln(x+1)$ تنها وقتی معین است که $x > -1$. بنابراین، قلمرو تابع تعریف شده توسط (۱۲) بازه $(0, +\infty)$ است. اما، قلمرو تابع داده شده در مثال ۳ متشکل از دو بازه $(-\infty, -1)$ و $(0, +\infty)$ است. اگر از (۱۲)، $D_x y$ را محاسبه کنیم، داریم

$$D_x y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

ولی به خاطر داشته باشید که در اینجا x باید از ۰ بزرگتر باشد؛ حال آنکه، در حل مثال ۳، مقادیر x مجاز بودند کوچکتر از ۱- نیز باشند.

○ نمونه ۳ نشان می‌دهد که هنگام استفاده از قضایای ۴.۳۰۸، ۵.۳۰۸ و ۶.۳۰۸ در مورد توابع مربوط به لگاریتم طبیعی باید محتاط بود.

مثال ۴ $y = \ln(2x-1)^2$ مفروض است. مطلوب است $D_x y$.

حل بنا بر قضیه ۶.۳۰۸، داریم

$$y = \ln(2x-1)^2 = 2 \ln(2x-1).$$

توجه کنید که قلمرو $\ln(2x-1)^2$ با قلمرو $2 \ln(2x-1)$ یکسان، و عبارت از $x > 1/2$ است. با استفاده از قضیه ۲.۳۰۸ داریم

$$\Delta \quad D_x y = 2 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 = \frac{4}{2x-1}.$$

برای رسم نمودار تابع لگاریتمی طبیعی، نخست باید برخی از ویژگی‌های این تابع را بررسی کنیم.

فرض کنید f تابعی با ضابطه

$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$$

باشد. قلمرو f مجموعه تمام اعداد مثبت است. این تابع به‌ازای تمام x ‌های واقع در قلمروش مشتق‌پذیر است، و

$$f'(x) = \frac{1}{x}. \quad (۱۳)$$

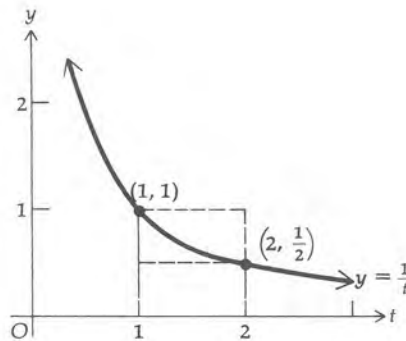
چون f به‌ازای هر $x > 0$ مشتق‌پذیر است، به‌ازای هر $x > 0$ پیوسته هم هست. بنابر (۱۳)، به‌ازای هر $x > 0$ ، $f'(x) > 0$ ، و لذا f تابعی است صعودی.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}. \quad (۱۴)$$

بنابراین (۱۴) وقتی $x > 0$ ، $f''(x) < 0$ پس تقعر نمودار $y = f(x)$ در هر نقطه‌ای روبه‌پایین است. از آنجاکه $f(1) = \ln 1 = 0$ ، طول از مبدأ نمودار ۱ است.

$$f(2) = \ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt.$$

برای تعیین يك مقدار عددی تقریبی برای $\ln 2$ ، انتگرال معین $\int_1^2 (1/t) dt$ را به‌عنوان مساحت ناحیه نشان‌داده شده در شکل ۳.۳۰۸، بر حسب واحد مربع، تعبیر می‌کنیم.



شکل ۳.۳۰۸

از شکل ۳.۳۰۸ دیده می‌شود که مقدار $\ln 2$ بین اندازه‌های مساحتی دو مستطیل است که طول قاعده هر يك ۱ واحد و ارتفاع آنها $1/2$ واحد و ۱ واحد است؛ یعنی،

$$0.5 < \ln 2 < 1. \quad (۱۵)$$

حال به‌طور تحلیلی، با استفاده از قضیه ۸.۳.۶ و اعمال زیسر، برای $\ln 2$ يك چنین

نامساوی به دست می آوریم. می نویسیم $f(t) = 1/t$ و $g(t) = 1/2$. آنگاه به ازای هر t در $[1, 2]$ داریم $f(t) \geq g(t)$. چون f و g بر $[1, 2]$ پیوسته اند، بر این بازه انتگرال پذیر هم هستند، و بنا بر قضیه ۸.۳.۶،

$$\int_1^2 \frac{1}{t} dt \geq \int_1^2 \frac{1}{2} dt$$

یا معادلش

$$\ln 2 \geq \frac{1}{2}. \quad (16)$$

به طور مشابه، اگر $f(t) = 1/t$ و $h(t) = 1$ ، آنگاه به ازای هر t در $[1, 2]$ ، $h(t) \geq f(t)$. چون h و f بر $[1, 2]$ پیوسته اند، بر این بازه انتگرال پذیر هم هستند؛ و باز هم با استفاده از قضیه ۸.۳.۶ داریم

$$\int_1^2 1 dt \geq \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

یا معادلش

$$1 \geq \ln 2. \quad (17)$$

از ترکیب (۱۶) و (۱۷) داریم

$$0.5 \leq \ln 2 \leq 1. \quad (18)$$

عدد ۵ رده یک کران پایین $\ln 2$ و ۱ یک کران بالای $\ln 2$ است. به روشی مشابه می توانیم یک کران پایین و یک کران بالا برای لگاریتم طبیعی هر عدد حقیقی مثبت به دست آوریم. بعداً با استفاده از سریهای نامتناهی، چگونگی محاسبه لگاریتم طبیعی هر عدد حقیقی مثبت تا هر تعداد رقم اعشاری را خواهیم آموخت. مقدار $\ln 2$ تا پنج رقم اعشار به صورت زیر است

$$\ln 2 \approx 0.69315.$$

با استفاده از این مقدار $\ln 2$ و با به کار بردن قضیه ۶.۳.۸ می توانیم یک مقدار تقریبی برای لگاریتم طبیعی تمام توانهای ۲ به دست آوریم. مثلاً

$$\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 \approx 1.38630.$$

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 \approx 2.07945.$$

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -1 \ln 2 \approx -0.69315.$$

$$\ln \frac{1}{4} = \ln 2^{-2} = -2 \ln 2 \approx -1.38630.$$

در پیوست، جدولی از لگاریتمهای طبیعی وجود دارد که مقادیر را با چهار رقم اعشاری به دست می‌دهد.

حال با بررسی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ ، رفتار تابع لگاریتمی طبیعی را به ازای مقادیر بزرگ x تعیین می‌کنیم.

چون تابع لگاریتمی طبیعی تابعی صعودی است، اگر p يك عدد مثبت دلخواه فرض شود، داریم

$$\ln x > \ln 2^p \quad \text{وقتی } x > 2^p \quad (19)$$

بنابرقضیه ۵.۳.۸ داریم

$$\ln 2^p = p \ln 2. \quad (20)$$

اگر از (۲۰) در (۱۹) قرار دهیم، داریم

$$\ln x > p \ln 2 \quad \text{وقتی } x > 2^p$$

چون بنابر (۱۸)، $\ln 2 \geq 1/2$ ، از معادله بالا نتیجه می‌شود

$$\ln x > \frac{1}{2} p \quad \text{وقتی } x > 2^p$$

اگر $p = 2n$ ، و $n > 0$ فرض شود،

$$\ln x > n \quad \text{وقتی } x > 2^{2n} \quad (21)$$

بافرض $N = 2^{2n}$ از (۲۱) نتیجه می‌شود که به ازای هر $n > 0$

$$\ln x > n \quad \text{وقتی } x > N$$

پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty. \quad (22)$$

برای تعیین رفتار تابع لگاریتمی طبیعی به ازای مقادیر مثبت x نزدیک صفر،

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ را بررسی می‌کنیم. چون $\ln x = \ln(x^{-1})^{-1}$ ، داریم

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x}. \quad (23)$$

عبارت « $x \rightarrow 0^+$ » معادل است با « $1/x \rightarrow +\infty$ »؛ لذا از (۲۳) داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\lim_{1/x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x}. \quad (24)$$

از (۲۲) داریم

$$\lim_{1/x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{x} = +\infty. \quad (25)$$

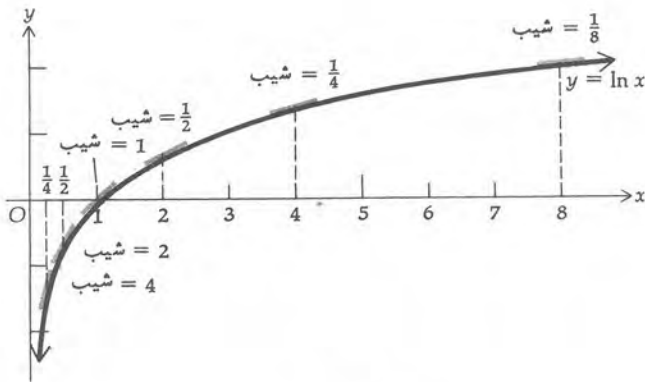
پس، از (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty. \quad (26)$$

از (۲۶)، (۲۲)، و قضیه مقدارمیان (۶.۸.۲)، استنتاج می‌شود که برد تابع لگاریتمی طبیعی مجموعه تمام اعداد حقیقی است. از (۲۶) نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع لگاریتمی طبیعی در ربع چهارم با قسمت منفی محور y ها مجانب است. ویژگیهای تابع لگاریتمی طبیعی را به شرح زیر خلاصه می‌کنیم:

- (i) قلمرو آن مجموعه تمام اعداد مثبت است.
- (ii) برد آن مجموعه تمام اعداد حقیقی است.
- (iii) تابع بر کل قلمروش صعودی است.
- (iv) تابع در هر عدد متعلق به قلمروش پیوسته است.
- (v) تفرع نمودار تابع در تمام نقاط y به پایین است.
- (vi) نمودار تابع در ربع چهارم با قسمت منفی محور y ها مجانب است.

با استفاده از این ویژگیها، رسم چند نقطه، و رسم قطعه‌ای از خط مماس بر این چند نقطه، می‌توانیم نمودار تابع لگاریتمی طبیعی را رسم کنیم. در شکل ۴.۳.۸ چند نقطه با طولهای $1/4$ ، $1/2$ ، 1 ، 2 ، 4 ، و 8 رسم شده‌اند. ضریب زاویه خط مماس از رابطه $D_x(\ln x) = 1/x$ به دست آمده است.



شکل ۴۰۳۰۸

تمرینهای ۳۰۸

در تمرینهای ۱ تا ۲۲، از تابع مفروض مشتق بگیرید و نتیجه را ساده کنید.

$$g(x) = \ln(1 + 4x^2) \quad ۲ \quad f(x) = \ln(4 + 5x) \quad ۱$$

$$f(x) = \ln(8 - 2x) \quad ۴ \quad h(x) = \ln \sqrt{4 + 5x} \quad ۳$$

$$h(x) = \ln(8 - 2x)^5 \quad ۶ \quad f(t) = \ln(3t + 1)^2 \quad ۵$$

$$G(x) = \ln \sqrt{1 + 4x^2} \quad ۸ \quad g(t) = \ln^2(3t + 1) \quad ۷$$

$$g(y) = \ln(\ln y) \quad ۱۰ \quad f(x) = \ln \sqrt[4]{4 - x^2} \quad ۹$$

$$f(x) = x \ln x \quad ۱۲ \quad F(y) = \ln(\sin 5y) \quad ۱۱$$

$$f(t) = \ln \sqrt[4]{\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}} \quad ۱۴ \quad f(x) = \cos(\ln x) \quad ۱۳$$

$$f(x) = \ln[(5x - 3)^4(2x^2 + 7)^3] \quad ۱۶ \quad f(w) = \ln \sqrt{\frac{3w + 1}{2w - 5}} \quad ۱۵$$

$$g(x) = \ln(\cos 2x + \sin 2x) \quad ۱۸ \quad h(x) = \frac{x}{\ln x} \quad ۱۷$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\ln x^2} \cdot 20 \quad g(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{x+1}{x^2+1}} \cdot 19$$

$$F(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}) \cdot 21$$

$$G(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \cdot 22$$

دو تمرینهای ۲۳ تا ۲۸، با مشتق‌گیری ضمنی، $D_x y$ را بیابید.

$$\ln \frac{y}{x} + xy = 1 \cdot 24 \quad \ln xy + x + y = 2 \cdot 23$$

$$\ln(x+y) - \ln(x-y) = 4 \cdot 26 \quad x = \ln(x+y+1) \cdot 25$$

$$x \ln y + y \ln x = xy \cdot 28 \quad x + \ln x^2 y + 3y^2 = 2x^2 - 1 \cdot 27$$

۲۹. با رسم نقاطی با طولهای $1/9, 1/3, 1, 3, 9$ ، و با استفاده از $\ln 3 \approx 1.09861$ ، نمودار $y = \ln x$ را رسم کنید. ضریب زاویه خط مماس در هر یک از این نقاط را بیابید و یک قطعه از هر خط مماس را بکشید.

دو تمرینهای ۳۰ تا ۳۷، نمودار تابع با معادله مفروض را رسم کنید.

$$y = \ln(-x) \cdot 31 \quad x = \ln y \cdot 30$$

$$y = \ln(x+1) \cdot 33 \quad y = \ln|x| \cdot 32$$

$$y = x - \ln x \cdot 35 \quad y = \ln \frac{1}{x-1} \cdot 34$$

$$y = \ln \sin x \cdot 37 \quad y = x \ln x \cdot 36$$

۳۸. معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی $y = \ln x$ در نقطه به طول ۲ بنویسید.

۳۹. معادله‌ای برای یک خط قائم بر منحنی $y = \ln x$ بنویسید که با خط $x + 2y - 1 = 0$ موازی باشد.

۴۰. معادله‌ای برای خط قائم بر نمودار $y = x \ln x$ بنویسید که بر خط به معادله $x - y + 7 = 0$ عمود باشد.

۴۱. معادله‌ای برای خط مماس بر نمودار $y = \ln(4x^2 - 3)^5$ در نقطه به طول ۱ بنویسید.

۴۲. ذره‌ای بر خطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = (t+1)^2 \ln(t+1)$ ، که در آن s فاصله جهت دار ذره از نقطه آغاز در ثانیه t است، در حرکت است. سرعت و شتاب ذره در $t = 3$ را بیابید.

۴۳. در یک کابل تلگراف، مقدار سرعت سیگنال متناسب است با $x^2 \ln(1/x)$ ، که در آن x نسبت اندازه شعاع مغز کابل به اندازه ضخامت تاب کابل است. به ازای چه مقدار $\ln x$ ، مقدار سرعت سیگنال حداکثر ممکن است؟

۴۴. یک سازنده مرلد الکتریکی کار خود را در اول ژانویه ۱۹۷۱ آغاز کرده است. چون شرکت در سال اول مشغول گسترش فراورده‌ها و پژوهش بوده، هیچ فروشی نداشته است. بعد از سال اول، فروش طبق معادله $y = x \ln x$ ، که در آن x تعداد سالهایی است که شرکت مشغول فعالیت است، و y مقدار فروش بر حسب میلیون دلار است، دائماً در حال افزایش است. (الف) نمودار معادله را رسم کنید. آهنگ ازدیاد فروش، (ب) در اول ژانویه ۱۹۷۵ چقدر است، و (پ) در اول ژانویه ۱۹۸۱ چقدر است؟

۴۵. شرکت خاصی تعیین کرده است که اگر مخارج هفتگی آگهیهای تجارتي شرکت x دلار باشد، و اگر درآمد کل حاصل از فروش در هفته S دلار باشد، آنگاه $S = 4000 \ln x$. (الف) آهنگ تغییر درآمد حاصل از فروش به نسبت مخارج آگهی، وقتی که بودجه هفتگی آگهی ۸۰۰ دلار باشد، چقدر است؟ (ب) اگر بودجه هفتگی آگهی به ۹۵۰ دلار افزایش یابد، ازدیاد تقریبی درآمد کل حاصل از فروش در هفته چقدر است؟

۴۶. ثابت کنید که به ازای هر $x > 0$ و $x \neq 1$ داریم $x - 1 - \ln x > 0$ و $0 < (1/x) - \ln x - 1$ ، از اینها نتیجه بگیرید که به ازای هر $x > 0$ و $x \neq 1$ ،

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

(دانهمایی: فرض کنید $f(x) = x - 1 - \ln x$ و $g(x) = 1 - \ln x - 1/x$ ؛ و در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ علامتهای $f'(x)$ و $g'(x)$ را تعیین کنید.)

۴۷. نمودارهای توابع f ، g ، و h را که توسط معادلات زیر تعریف می‌شوند، در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad g(x) = \ln x \quad h(x) = x - 1$$

و به این وسیله نامساوی مذکور در تمرین ۴۶ را به‌طور هندسی تعبیر کنید.

۴۸. با استفاده از نتیجه تمرین ۴۶ ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

۴۹. فرض کنید تابع F با ضابطه $F(x) = \ln(1+x)$ تعریف شده باشد. با استفاده از تعریف مشتق برای محاسبه $F'(0)$ ، حد تمرین ۲۸ را به‌دست آورید.

۴.۸ مشتق‌گیری لگاریتمی، و انتگرالهایی که تابع لگاریتمی طبیعی را به‌دست می‌دهند

در بحث زیر، نیاز داریم که از $D_x(\ln|x|)$ استفاده کنیم. برای یافتن آن از قضیه ۲.۳.۸ استفاده، و $\sqrt{x^2}$ را جانشین $|x|$ می‌کنیم. لذا داریم

$$\begin{aligned} D_x(\ln|x|) &= D_x(\ln\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot D_x(\sqrt{x^2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x}{x^2}. \end{aligned}$$

پس

$$D_x(\ln|x|) = \frac{1}{x}. \quad (۱)$$

از فرمول (۱) و قاعده زنجیری، قضیه زیر به‌دست می‌آید.

۱۰۴.۸ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\ln|u|) = \frac{1}{u} \cdot D_x u.$$

مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه می‌توان برای مشتق‌گرفتن از عبارتهای پیچیده شامل حاصلضرب، خارج قسمت، و توان، با استفاده از ویژگیهای تابع لگاریتمی طبیعی مذکور در قضایای ۴.۳.۸، ۵.۳.۸، و ۶.۳.۸، کار را ساده کرد.

مثال ۱ با فرض اینکه

۷۰۴ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

$$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$$

مطلوب است $D_x y$.

حل از معادله مفروض داریم

$$|y| = \left| \frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}} \right| = \frac{|\sqrt[3]{x+1}|}{|x+2||\sqrt{x+3}|}.$$

از طرفین لگاریتم طبیعی می‌گیریم، از ویژگیهای لگاریتم استفاده می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\ln|y| = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x+3|.$$

اگر از دو طرف به‌طور ضمنی نسبت به x مشتق بگیریم، و از قضیه ۱۰.۴.۸ استفاده کنیم، داریم

$$\frac{1}{y} D_x y = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}.$$

طرفین را در y ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$D_x y = y \cdot \frac{2(x+2)(x+3) - 6(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{6(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

اگر به جای y مقدارش را قرار دهیم، $D_x y$ مساوی خواهد بود با

$$\frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}} \cdot \frac{2x^2 + 10x + 12 - 6x^2 - 24x - 18 - 3x^2 - 9x - 6}{6(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

و لذا

$$\Delta \quad D_x y = \frac{-7x^2 - 23x - 12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}.$$

فرایندی که در مثال ۱ مورد استفاده قرار گرفت، به مشتق‌گیری لگاریتمی موسوم است. این فرایند در سال ۱۶۹۷ توسط یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) ارائه شد. قضیه زیر در مورد انتگرال‌گیری نامعین است و از قضیه ۱۰.۴.۸ به دست می‌آید.

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C \quad \text{قضیه ۲.۴.۸}$$

مشتق گیری تکراریمی، و... ۷۰۵

اگر n عدد حقیقی دلخواهی باشد، از قضایای ۲۰۴۰۸ و ۸۰۲۰۵ داریم

$$\int u^n du = \begin{cases} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & n \neq -1 \\ \ln |u| + C & n = -1 \end{cases} \quad (2)$$

مثال ۲ مطلوب است

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}.$$

حل

$$\Delta \quad \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{3} \ln |x^2 + 1| + C.$$

مثال ۳ مطلوب است

$$\int_0^2 \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx.$$

حل چون $(x^2 + 2)/(x + 1)$ يك كسر نامتعارف است، صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم و به دست می آوریم

$$\frac{x^2 + 2}{x + 1} = x - 1 + \frac{3}{x + 1}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx &= \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{3}{x + 1} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - x + 3 \ln |x + 1| \right]_0^2 \\ &= 2 - 2 + 3 \ln 3 - 3 \ln 1 \\ &= 3 \ln 3 - 3 \cdot 0 \\ \Delta \quad &= 3 \ln 3. \end{aligned}$$

جواب مثال ۳ را به صورت $\ln 27$ هم می توان نوشت، زیرا بنا به قضیه ۶۰۳۰۸،

$$3 \ln 3 = \ln 3^3$$

مثال ۴ مطلوب است

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

حل می‌نویسیم $u = \ln x$ ؛ آنگاه $du = dx/x$ پس

$$\Delta \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

تمرینهای ۴.۸

در تمرینهای ۱ تا ۴، برای محاسبه $D_x y$ از قضیه ۱۰.۴.۸ استفاده کنید.

$$y = \ln \left| \frac{3x}{x^2 + 4} \right| \quad .2 \qquad y = \ln |x^2 + 1| \quad .1$$

$$y = \sin(\ln |x^2 + 1|) \quad .4 \qquad y = \ln |\cos 3x| \quad .3$$

در تمرینهای ۵ تا ۱۴، $D_x y$ را با مشتق‌گیری لگاریتمی بیابید.

$$y = \frac{x^5(x+2)}{x-3} \quad .6 \qquad y = x^2(x^2-1)^3(x+1)^4 \quad .5$$

$$y = (\ln x - 2)(x^2 + 3)(3x^2 - 5) \quad .8 \qquad y = \frac{x(x-1)(x+2)}{(x-4)^2} \quad .7$$

$$y = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \quad .10 \qquad y = \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad .9$$

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}} \quad .12 \qquad y = \frac{3x}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} \quad .11$$

$$y = \frac{x\sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{3+2x}} \quad .14 \qquad y = \sqrt{x^2+1} \ln(x^2-1) \quad .13$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۳۵، انتگرال نامعین مفروض را محاسبه کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+10}} \quad .16 \qquad \int \frac{dx}{3-2x} \quad .15$$

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x}{2-x^2} dx \cdot 18 & \int \frac{3x}{x^2+2} dx \cdot 17 \\ \int \frac{2x-1}{x(x-1)} dx \cdot 20 & \int \frac{3x^2}{5x^2-1} dx \cdot 19 \\ \int \frac{\sin 3t}{\cos 3t-1} dt \cdot 22 & \int \frac{\cos t}{1+2 \sin t} dt \cdot 21 \\ \int \frac{5-4y^2}{3+2y} dy \cdot 24 & \int \frac{2x^2}{x^2-4} dx \cdot 23 \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \cdot 26 & \int \frac{dx}{x \ln x} \cdot 25 \\ \int \frac{(2+\ln^2 x)}{x(1-\ln x)} dx \cdot 28 & \int \frac{\ln^2 3x}{x} dx \cdot 27 \\ \int \frac{3x^5-2x^2+5x^2-2}{x^2+1} dx \cdot 30 & \int \frac{2 \ln x+1}{x[(\ln x)^2+\ln x]} dx \cdot 29 \end{array}$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۶، انتگرال معین مفروض را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \int_4^5 \frac{x}{4-x^2} dx \cdot 32 & \int_2^5 \frac{2x}{x^2-5} dx \cdot 31 \\ \int_1^5 \frac{4z^2-1}{2z-1} dz \cdot 34 & \int_1^2 \frac{2t+2}{t+1} dt \cdot 33 \\ \int_2^4 \frac{\ln x}{x} dx \cdot 36 & \int_2^4 \frac{dx}{x \ln^2 x} \cdot 35 \end{array}$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۳، مقدار دقیق عدد مطلوب را به دست آورید و سپس با استفاده از جدول لگاریتم طبیعی درپيوست، يك مقدار تقریبی با سه رقم اعشار برای آن عدد بیابید.

۳۷. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 2/(x-3)$ ، محور x ها، و خطوط $x=4$ و $x=5$ را بیابید.

۳۸. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = x/(2x^2+4)$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x=4$ را بیابید.

۳۹. اگر $f(x) = 1/x$ ، مقدار متوسط f بر بازه $[1, 5]$ را بیابید.

۴۰. اگر $f(x) = (x+2)/(x-3)$ ، مقدار متوسط f بر بازه $[4, 6]$ را بیابید.

۴۱. با استفاده از قانون بویل برای انبساط گاز (تمرین ۳۰ از تمرینهای ۵.۳ را ببینید) مطلوب است فشار متوسط نسبت به حجم، وقتی که حجم از ۴ فوت مکعب به ۸ فوت مکعب افزایش یابد. می‌دانیم وقتی که حجم ۴ فوت مکعب است، فشار ۲۰۰۰ پوند بر فوت مربع می‌باشد.

۴۲. ناحیه محصور بین منحنی $y = 1 - (3/x)$ ، محور x ها، و خط $x = 1$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم دوار حاصل را بیابید.

۴۳. ناحیه محصور بین منحنی $y = 1 + (2/\sqrt{x})$ ، محور x ها، و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم جسم دوار حاصل را بیابید.

۴۴. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (داهنمایی: نخست با استفاده از قضیه ۸.۳.۶ ثابت

$$\text{کنید که } \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt \geq \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

۵.۸ تابع نمایی

چون تابع لگاریتمی طبیعی بر کل قلمروش صعودی است، بنا بر قضایای ۵.۱۰.۸ و ۱.۲۰.۸ معکوس دارد و معکوس آن هم يك تابع صعودی است. معکوس تابع لگاریتمی طبیعی به تابع نمایی موسوم است که ذیلاً تعریف می‌شود.

۱۰.۵.۸ تعریف معکوس تابع لگاریتمی طبیعی تابع نمایی نام دارد و با ضابطه

$$\exp(x) = y \text{ اگر و تنها اگر } x = \ln y \quad (1)$$

تعریف می‌شود.

نماد $\exp(x)$ خوانده می‌شود «مقدار تابع نمایی در اکس».

چون برد تابع لگاریتمی طبیعی مجموعه تمام اعداد حقیقی است، قلمرو تابع نمایی نیز مجموعه تمام اعداد حقیقی است. برد تابع نمایی، مجموعه اعداد مثبت است، زیرا این مجموعه، قلمرو تابع لگاریتمی طبیعی است. چون تابع لگاریتمی طبیعی و تابع نمایی معکوس یکدیگرند، از قضیه ۴.۱۰.۸ نتیجه می‌شود که

$$\ln(\exp(x)) = x \quad (2)$$

و

$$\exp(\ln x) = x. \quad (۳)$$

حال می‌خواهیم a^* را، که در آن a يك عدد مثبت و x يك عدد گنگ است، تعريف كنيم. برای اینکه به يك تعريف معقول دست يابيم، مورد a^r را كه در آن r و $a > 0$ عددی گویاست در نظر می‌گیریم. اگر در (۳)، a^r را جانشین x کنیم، داریم

$$a^r = \exp[\ln(a^r)]. \quad (۴)$$

اما، بنا بر قضیه ۵.۳.۸، $\ln a^r = r \ln a$ ؛ لذا از (۴) داریم

$$a^r = \exp(r \ln a). \quad (۵)$$

چون طرف راست (۵) وقتی که r يك عدد حقیقی دلخواه باشد معنی دارد، از آن در تعريف زیر استفاده می‌کنیم.

۲.۵.۸ تعريف اگر a يك عدد مثبت دلخواه و x يك عدد حقیقی دلخواه باشد، تعريف می‌کنیم

$$a^x = \exp(x \ln a). \quad (۶)$$

قضیه ۶.۳.۸ حاکی است که اگر a يك عدد مثبت دلخواه، و r يك عدد گویای دلخواه باشد، آنگاه $\ln a^r = r \ln a$. بنا بر تعريف ۲.۵.۸، این معادله وقتی هم که r يك عدد حقیقی دلخواه باشد درست است، و ما این واقعیت را به صورت قضیه ذیل بیان می‌کنیم.

۳.۵.۸ قضیه اگر a يك عدد مثبت دلخواه، و x يك عدد حقیقی دلخواه باشد،

$$\ln a^x = x \ln a.$$

اثبات بنا بر تعريف ۲.۵.۸ داریم

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

پس، بنا بر تعريف ۱.۵.۸،

$$\square \quad \ln a^x = x \ln a$$

تعريف يکی از مهمترين اعدادی که در ریاضی به آن برمی‌خوریم به شرح زیر است.

۴.۵.۸ تعريف عدد e با فرمول

$$e = \exp 1$$

تعريف می‌شود.

حرف e به این خاطر انتخاب شده که حرف اول نام خانوادگی ریاضی‌دان وفیزیک‌دان سوییسی لئونهارت اویلر (۱۷۵۷-۱۷۸۳) است.

عدد e يك عدد متعالی است؛ یعنی، ریشه يك چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نیست. عدد π مثال دیگری از اعداد متعالی است. برای نخستین بار شارل ارمیت در سال ۱۸۷۳ ثابت کرد که e متعالی است، و مقدار آن می‌تواند تا هر درجه دقت مطلوب به دست آید. در فصل ۱۵ روشی برای انجام این کار ارائه خواهیم کرد. مقدار e تا هفت رقم اعشار، ۲۷۱۸۲۸۱۸ است. پس

$$e \approx 27182818.$$

در پیوست جدولی وجود دارد که توانهای e را به دست می‌دهد. اهمیت عدد e با مطالعه مطالب این فصل روشن خواهد شد.

۵.۵.۸ قضیه $\ln e = 1$.

اثبات بنا به تعریف ۴.۵.۸ داریم

$$e = \exp 1.$$

پس

$$\ln e = \ln(\exp 1).$$

چون تابع لگاریتمی طبیعی و تابع نمایی معکوس یکدیگرند، نتیجه می‌گیریم که طرف راست این معادله ۱ است. لذا

$$\square \quad \ln e = 1.$$

۶.۵.۸ قضیه به‌ازای جميع مقادیر x ,

$$\exp(x) = e^x.$$

اثبات بنا به تعریف ۲.۵.۸ با انتخاب $a = e$ ، داریم

$$e^x = \exp(x \ln e). \quad (7)$$

اما، بنا بر قضیه ۵.۵.۸، $\ln e = 1$. اگر این را در (۷) قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$\square \quad e^x = \exp(x).$$

از این پس به جای $\exp(x)$ می‌نویسیم e^x ؛ و لذا از تعریف ۱.۵.۸ داریم

$$e^x = y \text{ اگر و تنها اگر } x = \ln y. \quad (8)$$

اگر e^x را جانشین $\exp(x)$ کنیم، (۲) و (۳) به صورت

$$\ln e^x = x \quad (9)$$

و

$$e^{\ln x} = x \quad (10)$$

درمی آیند. اگر در معادله (۶) تعریف ۲.۵۰۸، $e^{x \ln a}$ را جانشین $\exp(x \ln a)$ کنیم، داریم

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0 \quad (11)$$

اگر x عدد گنگ دلخواهی باشد، برای محاسبه a^x می توان از معادله (۱۱) و جدولی از توانهای e استفاده کرد. مثال زیر دستورالعمل را نشان می دهد.

مثال ۱ مقدار $2^{\sqrt{3}}$ را تا دورقم اعشار محاسبه کنید.

حل از (۱۱)

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{3}} &= e^{\sqrt{3} \ln 2} \\ &= e^{1.732(0.6931)} \\ &= e^{1.200} \\ &\approx 3.32. \end{aligned}$$

▲

چون $0 = \ln 1$ ، از حکم (۸) داریم

$$e^0 = 1.$$

حال برخی از ویژگیهای تابع نمایی را به صورت قضیه بیان می کنیم.

۷.۵۰۸ قضیه اگر a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

اثبات می نویسیم $A = e^a$ و $B = e^b$. آنگاه از حکم (۸)،

$$\ln A = a \quad (12)$$

و

$$\ln B = b. \quad (13)$$

بنابراین قضیه ۴.۳۰۸

$$\ln AB = \ln A + \ln B. \quad (14)$$

۷۱۲ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

از (۱۲) و (۱۳) در (۱۴) قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$\ln AB = a + b.$$

پس

$$e^{\ln AB} = e^{a+b}. \quad (15)$$

از (۱۵) نتیجه می‌گیریم که طرف چپ (۱۵)، AB است؛ لذا

$$AB = e^{a+b}.$$

به‌جای A و B مقادیرشان را قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$\square \quad e^a \cdot e^b = e^{a+b}.$$

۸۰۵۰۸ قضیه اگر a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$e^a \div e^b = e^{a-b}.$$

اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیه ۷۰۵۰۸ است؛ اما، به‌جای قضیه ۴۰۳۰۸ باید از

قضیه ۵۰۳۰۸ استفاده کرد.

۹۰۵۰۸ قضیه اگر a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$(e^a)^b = e^{ab}.$$

اثبات اگر در (۱۰) بنویسیم $x = (e^a)^b$ ، داریم

$$(e^a)^b = e^{\ln(e^a)^b}.$$

قضیه ۳۰۵۰۸ را درمورد نمای طرف راست این معادله به‌کار می‌بندیم و نتیجه می‌گیریم

$$(e^a)^b = e^{b \ln e^a}.$$

اما، بنابر (۹)، $\ln e^a = a$ ، و لذا

$$\square \quad (e^a)^b = e^{ab}.$$

حال قضیه مربوط به مشتق تابع نمایی را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید

$$y = e^x.$$

آنگاه بنا بر عبارت (۸) داریم

$$x = \ln y.$$

اگر از دو طرف این معادله به طور ضمنی نسبت به x مشتق بگیریم، داریم

$$1 = \frac{1}{y} \cdot D_x y$$

پس

$$D_x y = y.$$

حال e^x را جانشین y می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$D_x(e^x) = e^x. \quad (۱۶)$$

قضیه بعد، از (۱۶) و قاعده زنجیری نتیجه می‌شود.

۱۰.۵.۰۸ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(e^u) = e^u D_x u.$$

مشاهده کنید که مشتق تابع با ضابطه $f(x) = ke^x$ ، که در آن k عددی ثابت است، با خودش مساوی است. تنها تابع دیگری که قبلاً دیده‌ایم و واجد این ویژگی است، تابع ثابت صفر است که عملاً حالت خاص $f(x) = ke^x$ با شرط $k = 0$ است. می‌توان ثابت کرد که فرمول کلی تابعی که مشتق خودش است از $f(x) = ke^x$ به دست می‌آید (تمرین ۴۸ را ببینید).

مثال ۲ $y = e^{1/x^2}$ مفروض است؛ مطلوب است dy/dx .

حل بنا بر قضیه ۱۰.۵.۰۸

$$\Delta \quad \frac{dy}{dx} = e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3} \right) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3}.$$

فرمول انتگرال نامعین داده شده در قضیه زیر، نتیجه‌ای از قضیه ۱۰.۵.۰۸ است.

$$\int e^u du = e^u + C \quad \text{قضیه ۱۱.۵.۰۸}$$

مثال ۳ مطلوب است $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

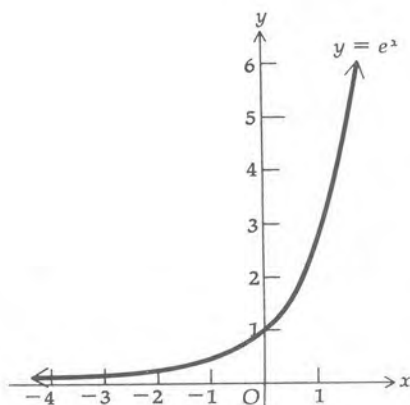
حل فرض کنید $u = \sqrt{x}$ ؛ آنگاه $du = (x^{-1/2}/2) dx$. لذا

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du$$

$$= 2e^u + C$$

▲
$$= 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

چون بنا بر (۸)، $e^x = y$ اگر و تنها اگر $x = \ln y$ ، نمودار $y = e^x$ با نمودار $x = \ln y$ یکی است. پس، برای به دست آوردن نمودار $y = e^x$ می‌توانیم محور x ها و محور y های شکل ۴.۳۰۸ را تعویض کنیم (شکل ۱۰۵۰۸ را ببینید).



شکل ۱۰۵۰۸

نمودار $y = e^x$ را می‌توان بدون رجوع به نمودار تابع لگاریتمی طبیعی هم به دست آورد. چون برد تابع نمایی مجموعه تمام اعداد مثبت است، نتیجه می‌گیریم که به ازای تمام مقادیر x ، $e^x > 0$. پس، نمودار کلاً بالای محور x ها قرار می‌گیرد. به ازای هر x ، $D_x y = e^x > 0$ ؛ لذا به ازای تمام مقادیر x ، تابع صعودی است. به ازای هر x ، $D_x^2 y = e^x > 0$ ؛ پس تقعر نمودار در تمام نقاط رو به بالاست. دو حد زیر را هم داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (۱۷)$$

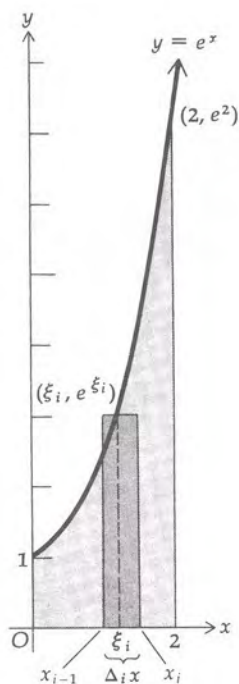
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \quad (۸)$$

اثبات (۱۷) و (۱۸) به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرینهای ۵۶ و ۵۷ را ببینید). برای رسم چند نقطه، از جدول توانهای e ، درپوست استفاده کنید.

مثال ۴ مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = e^x$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 2$ را بیابید.

حل ناحیه در شکل ۲۰۵۰۸ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n e^{\xi_i} \Delta_i x \\ &= \int_0^2 e^x dx \end{aligned}$$



شکل ۲۰۵۰۸

$$\begin{aligned} &= e^x \Big|_0^2 \\ &= e^2 - e^0 \\ &= e^2 - 1. \end{aligned}$$

از جدول توانهای e می بینیم که مقدار e^2 تا دو رقم اعشار ۷۳۹ است. پس، مساحت ناحیه مفروض تقریباً ۶۳۹ واحد مربع است. ▲

مثال ۵ $y = e^{2x+\ln x}$ مفروض است؛ مطلوب است $D_x y$.

حل چون $e^{2x+\ln x} = e^{2x} e^{\ln x} = e^{2x}(x)$ ، پس

$$y = x e^{2x}.$$

بنا بر این

$$\blacktriangle \quad D_x y = e^{2x} + 2x e^{2x}.$$

در تعریف ۴.۵.۸ عدد e به صورت مقدار تابع نمایی به ازای ۱ تعریف شد؛ یعنی، $e = \exp 1$. برای اینکه از راهی دیگر به تعریف e دست یابیم، تابع لگاریتمی طبیعی

$$f(x) = \ln x$$

را در نظر می گیریم.

می دانیم که مشتق f از $f(x) = 1/x$ به دست می آید؛ پس $f'(1) = 1$ ، ولی، بیایید از تعریف مشتق برای محاسبه $f'(1)$ استفاده کنیم. داریم

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\Delta x) - \ln 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1+\Delta x). \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(1+\Delta x) = 1.$$

اگر h را جانشین Δx کنیم، از معادله بالا و قضیه ۳.۵.۸، رابطه

$$\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} = 1 \quad (19)$$

به دست می آید.

حال، چون تابع نمایی و تابع لگاریتمی طبعی معکوس یکدیگرند، داریم

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp[\ln(1+h)^{1/h}]. \quad (20)$$

چون تابع نمایی پیوسته است و چون $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ بنا بر (۱۹) وجود دارد و مساوی با ۱ است، قضیه ۷.۲ را در مورد طرف راست (۲۰) مورد استفاده قرار می دهیم و نتیجه می گیریم

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \exp[\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h}] = \exp 1$$

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e. \quad (21)$$

گاه برای تعریف e از معادله (۲۱) هم استفاده می شود؛ اما، برای استفاده از آن به عنوان تعریف، اثبات وجود حد الزامی است.
تابع F را که با ضابطه

$$F(h) = (1+h)^{1/h} \quad (22)$$

تعریف می شود در نظر می گیریم، و مقادیر تابع را به ازای چند مقدار h نزدیک به صفر تعیین می کنیم. این مقادیر در جدول ۱۰.۵.۸ داده شده اند.

h	۱۰۵	۰۰۵	۰۰۱	۰۰۰۱	۰۰۰۰۱	۰۰۰۰۰۱	۰۰۰۰۰۰۱	۰۰۰۰۰۰۰۱
$F(h) = (1+h)^{1/h}$	۲	۲٫۲۵	۲٫۲۶۵	۲٫۲۷۰	۲٫۲۷۱۶۹	۲٫۲۷۱۹۶	۲٫۲۷۳	۲٫۲۷۹

جدول ۱۰.۵.۸

جدول ۱۰.۵.۸ ما را راهنمایی می کند که حدس بزنیم $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}$ احتمالاً

عددی است که بین ۲٫۲۷۱۶۹ و ۲٫۲۷۱۹۶ قرار دارد. همان طور که قبلاً هم تذکر دادیم، در فصل ۱۵ روشی جهت تعیین مقدار e ، تا هر چند رقم اعشار که مطلوب باشد، پیدا خواهیم کرد.

تمرینهای ۵.۸

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، مطلوب است dy/dx .

$$y = e^{\delta x} \quad ۱. \quad y = e^{-\gamma x} \quad ۲.$$

$$y = e^{-\tau x^2} \quad ۳. \quad y = e^{x^2 - \tau} \quad ۴.$$

$$y = e^{\cos x} \quad ۵. \quad y = e^{\tau \sin \tau x} \quad ۶.$$

$$y = e^x \sin e^x \quad ۷. \quad y = \frac{e^x}{x} \quad ۸.$$

$$y = \frac{e^{\tau x}}{x^2} \quad ۹. \quad y = e^{e^x} \quad ۱۰.$$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad ۱۱. \quad y = \ln \frac{e^{\tau x} - 1}{e^{\tau x} + 1} \quad ۱۲.$$

$$y = x^{\delta} e^{-\tau \ln x} \quad ۱۳. \quad y = \ln(e^x + e^{-x}) \quad ۱۴.$$

$$y = e^{x/\sqrt{4+x^2}} \quad ۱۵. \quad y = e^{x/\sqrt{4+x^2}} \quad ۱۶.$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۰، $D_x y$ را با مشتق‌گیری ضمنی بیابید.

$$e^x + e^y = e^{x+y} \quad ۱۷. \quad e^y = \ln(x^{\tau} + \tau y) \quad ۱۸.$$

$$y^{\tau} e^{\tau x} + x y^{\tau} = 1 \quad ۱۹. \quad y e^{\tau x} + x e^{\tau y} = 1 \quad ۲۰.$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۲۸، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$\int e^{\tau x + 1} dx \quad ۲۲. \quad \int e^{\gamma - \delta x} dx \quad ۲۱.$$

$$\int e^{\tau x} e^{\tau x} dx \quad ۲۴. \quad \int \frac{1 + e^{\tau x}}{e^x} dx \quad ۲۳.$$

$$\int x^{\tau} e^{\tau x^{\tau}} dx \quad ۲۶. \quad \int \frac{e^{\tau x}}{(1 - \tau e^{\tau x})^2} dx \quad ۲۵.$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^x} \quad ۲۸. \quad \int \frac{e^{\tau x}}{e^x + \tau} dx \quad ۲۷.$$

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۶، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 e^x dx \quad ۲۹ \quad \int_1^{e^2} \frac{dx}{x} \quad ۳۰$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} \quad ۳۱ \quad \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad ۳۲$$

$$\int_0^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad ۳۳ \quad \int_0^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \quad ۳۴$$

$$\int_0^2 x e^{4-x^2} dx \quad ۳۵ \quad \int_1^2 \frac{e^x}{e^x + e} dx \quad ۳۶$$

۳۷. نمودار $y = e^{-x}$ را رسم کنید. ۳۸. نمودار $y = e^{|x|}$ را رسم کنید.

در تمرینهای ۳۹ و ۴۰، مطلوب است: اکستریمهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه‌هایی که بر آنها f صعودی است؛ بازه‌هایی که بر آنها f نزولی است؛ بازه‌هایی که بر آنها f تقعر نمودار رو به بالا است؛ بازه‌هایی که بر آنها f تقعر نمودار رو به پایین است؛ و ضریب زائیه هر مماس عطفی. نمودار f را هم رسم کنید.

$$f(x) = xe^{-x} \quad ۳۹ \quad f(x) = e^{-x^2} \quad ۴۰$$

در تمرینهای ۴۱ تا ۴۴، مقدار مطلوب را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

$$2^{1/2} \quad ۴۱ \quad (\sqrt{2})^{1/2} \quad ۴۲$$

$$(1/2)^e \quad ۴۳ \quad e^e \quad ۴۴$$

۴۵. معادله‌ای برای خطی مماس بر منحنی $y = e^{-x}$ که بر خط $5 - y = 2x$ عمود باشد بیابید.

۴۶. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = e^x$ و خط مار بر نقاط $(0, 1)$ و $(1, e)$ را بیابید.

۴۷. قاعده جسمی ناحیه محصور بین منحنیهای $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ و خط $x = 1$ است. اگر مقطع هر صفحه عمود بر محور x ها با جسم يك مربع باشد، حجم آن را بیابید.

۴۸. ثابت کنید فرمول کلی تابعی که با مشتقش مساوی باشد به صورت $f(x) = Ke^x$ است (دانهمایی: $y = f(x)$ را در نظر بگیرید و معادله دیفرانسیل $dy/dx = y$ را حل کنید.)

۴۹. اگر فشار هوا در ارتفاع h فوتی بالای سطح دریا p پوند بر فوت مربع باشد، آنگاه $p = 2116e^{-0.0003188h}$ مطلوب است آهنگ زمانی تغییر فشار هوای خارج هواپیمایی که در ارتفاع ۵۰۰۰ فوتی است و با آهنگ ۱۶۰ فوت بر ثانیه در حال صعود است.

۵۰. در ارتفاع معینی عقربه هواپیمایی نشان می‌دهد که فشار هوا ۱۵۰۰ پوند بر فوت مربع است. با استفاده از فرمول تمرین ۴۹ و دیفرانسیل، تقریباً بزنید که هواپیما چه مقدار دیگر باید صعود کند تا فشار هوا ۱۴۸۰ پوند بر فوت مربع باشد.

۵۱. اگر وقتی که دمای یک میله آهنی t درجه است طول میله l فوت باشد، آنگاه $l = 60e^{0.00001t}$. با استفاده از دیفرانسیل، وقتی که t از ۰ به ۱۰ افزایش می‌یابد، افزایش تقریبی l را بیابید.

۵۲. مدار الکتریکی ساده‌ای که حاوی هیچ خازنی نیست ولی یک مقاومت R اهمی، و یک القاگر L هنری دارد، مفروض است. وقتی که شدت جریان به I_0 آمپر برسد، نیروی محرکه الکتریکی مدار قطع می‌شود. شدت جریان چنان ضعیف می‌شود که در ثانیه t شدت جریان i آمپر است و $i = I_0 e^{-(R/L)t}$. نشان دهید که آهنگ تغییر شدت جریان، با شدت جریان متناسب است.

۵۳. ذره‌ای در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند. سرعت آن در ثانیه t v فوت بر ثانیه است و $v = e^3 - e^{2t}$. مطلوب است فاصله پیموده شده توسط ذره اگر بعد از $t = 1$ داشته باشیم $v > 0$.

۵۴. یک مؤسسه تبلیغات تجاری از روی آمار تعیین کرده است که اگر سازنده یک ماده غذایی بودجه تبلیغات تلویزیونی خود را به اندازه x هزار دلار افزایش دهد، سود کل به اندازه $25x^2 e^{-0.2x}$ صد دلار افزایش می‌یابد. برای اینکه بالاترین سود عاید سازنده شود، افزایش بودجه تبلیغات وی چقدر باید باشد؟ و در نتیجه افزایش سود شرکت چه خواهد بود؟

۵۵. مخزنی به شکل جسم دوار است که ازدوران ناحیه محصور بین منحنی $y^2 x = e^{-2x}$ و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ ، حول محور x ها به وجود می‌آید. اگر مخزن پر از آب باشد، و تمام آب مخزن را با پمپ به ارتفاع یک فوتی بالای مخزن انتقال دهیم، کار انجام شده را بیابید. فاصله‌ها بر حسب فوت اندازه‌گیری شده‌اند.

۵۶. نشان دهید به ازای هر $N > 0$ عددی چون $M > 0$ وجود دارد که اگر $x > M$ ، آنگاه $e^x > N$ ؛ و از آنجا ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

۵۷. نشان دهید به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $N < 0$ وجود دارد که اگر $x < N$ ،

آنگاه $\varepsilon < e^x$ ؛ و از آنجا ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

۵۸. اگر $F(h) = (1+h)^{1/h}$ ، نمودار F را رسم کنید.

۵۹. اگر $f(x) = e^{-x} \sin x$ ، نمودار تابع f را رسم کنید. نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ولی خط $y = 0$ مجانب افقی نمودار f نیست. چرا تعریف

۴.۵.۲ (i) در مورد این تابع صادق نیست؟

۶۰. يك تابع مهم در علم آمار، تابع چگالی احتمال است که با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

تعریف می‌شود؛ در اینجا σ و μ ثابت‌هایی هستند که $\sigma > 0$ و μ يك عدد حقیقی دلخواه است. مطلوب است: (الف) اکستریم‌های نسبی f ؛ (ب) نقاط عطف نمودار f ؛ (پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ (ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ (ث) نمودار f را رسم کنید.

۶.۸ توابع نمایی و لگاریتمی دیگر

بنابه تعریف ۲.۵.۸، اگر $a > 0$ ،

$$a^x = e^{x \ln a}. \quad (1)$$

عبارت طرف چپ (۱) موسوم است به تابع نمایی در پایه a .

۱۰.۶.۸ تعریف اگر a عددی مثبت، و x عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه تابع f با ضابطه

$$f(x) = a^x$$

تابع نمایی در پایه a نامیده می‌شود.

تابع نمایی در پایه a دارای همان ویژگی‌هایی است که تابع نمایی در پایه e .

○ نمونه ۱ اگر x و y اعداد حقیقی دلخواهی باشند و a عددی مثبت باشد، آنگاه بنابر (۱)

$$\begin{aligned} a^x a^y &= e^{x \ln a} e^{y \ln a} \\ &= e^{x \ln a + y \ln a} \\ &= e^{(x+y) \ln a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

○

۷۲۲ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

از نمونه ۱ ویژگی زیر به دست می آید

$$a^x a^y = a^{x+y} . \quad (۲)$$

ویژگیهای زیر را هم داریم

$$a^x \div a^y = a^{x-y} \quad (۳)$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (۴)$$

$$(ab)^x = a^x b^x \quad (۵)$$

$$a^0 = ۱ . \quad (۶)$$

اثبات (۳) تا (۶) را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۳۷ تا ۴۰ را ببینید).

برای محاسبه مشتق تابع نمایی در پایه a ، می نویسیم $a^x = e^{x \ln a}$ و قاعده زنجیری را به کار می بریم.

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$D_x(a^x) = e^{x \ln a} D_x(x \ln a)$$

$$= e^{x \ln a} (\ln a)$$

$$= a^x \ln a .$$

بنابراین، قضیه زیر به دست می آید.

۲۰۶۰۸ قضیه اگر a عدد مثبت دلخواهی باشد و u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u .$$

○ نمونه ۲ اگر $y = 3^{x^2}$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۲۰۶۰۸،

$$○ \quad D_x y = 3^{x^2} \ln 3 (2x) = 2(\ln 3)x 3^{x^2} .$$

قضیه بعد که فرمول انتگرال نامعین تابع نمایی در پایه a را به دست می دهد، از قضیه ۲۰۶۰۸ نتیجه می شود.

۳۰۶۰۸ قضیه اگر a عدد مثبت دلخواهی بجز ۱ باشد،

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C .$$

مثال ۱ مطلوب است محاسبه $\int \sqrt{10^{3x}} dx$.

توابع نمایی و لگاریتمی دیگر ۷۲۳

حل $\int \sqrt{10^{3x}} dx = \int 10^{3x/2} dx$ فرض می‌کنیم $u = 3x/2$ ؛ آنگاه $du = 3dx/2$ پس $2du/3 = dx$ بنابراین

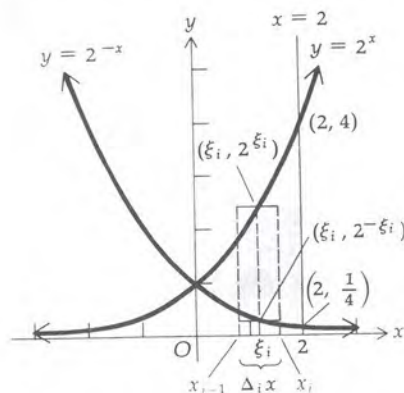
$$\int 10^{3x/2} dx = \int 10^u \left(\frac{2}{3} du\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10^u}{\ln 10} + C$$

$$\triangle \quad = \frac{2 \cdot 10^{3x/2}}{3 \ln 10} + C.$$

مثال ۲ نمودارهای $y = 2^x$ و $y = 2^{-x}$ را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید. مساحت ناحیه محصور بین این نمودارها و خط $x = 2$ را بیابید.

حل نمودارهای مطلوب در شکل ۱۰۶۰۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰۶۰۸

در این شکل ناحیه مفروض سایه‌دار است، اگر مساحت مورد نظر A واحد مربع باشد، داریم

$$A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [2^{\xi_i} - 2^{-\xi_i}] \Delta_i x$$

$$= \int_0^2 (2^x - 2^{-x}) dx$$

$$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \frac{9}{4 \ln 2}$$

$$\triangle \approx 3.25.$$

حال اگر a عدد مثبت دلخواهی بجز ۱ باشد، می‌توانیم تابع لگاریتمی در پایه a را تعریف کنیم.

۴.۶.۸ تعریف اگر a عدد مثبت دلخواهی بجز ۱ باشد، تابع لگاریتمی در پایه a معکوس تابع نمایی در پایه a است؛ می‌نویسیم

$$y = \log_a x \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a^y = x \quad (۷)$$

معمولاً در جبر مقدماتی تعریف تابع لگاریتمی در پایه a به صورت بالا داده می‌شود؛ اما، عبارت (۷) به ازای هر عدد حقیقی y با معنی است، زیرا تعریف دقیق a^y مشخص است. توجه کنید که اگر $a = e$ ، تابع لگاریتمی در پایه e به دست می‌آید و این چیزی جز تابع لگاریتمی طبیعی نیست.

$\log_a x$ خوانده می‌شود «لگاریتم x در پایه a ».

تابع لگاریتمی در پایه a از همان قوانین تابع لگاریتمی طبیعی تبعیت می‌کند و فهرست آنها به شرح زیر است.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (۸)$$

$$\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y \quad (۹)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (۱۰)$$

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (۱۱)$$

اثباتهای (۸) تا (۱۱) به عنوان تمرین واگذار می‌شوند (تمرینهای ۴۱ تا ۴۴ را ببینید).

ارتباط بین لگاریتم در پایه a و لگاریتم طبیعی به سهولت به دست می‌آید. فرض کنید

$$y = \log_a x.$$

آنگاه

$$a^y = x$$

$$\ln a^y = \ln x$$

$$y \ln a = \ln x$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

اگر $\log_a x$ را جانشین y کنیم داریم

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (۱۲)$$

گاهی معادله (۱۲) را به عنوان تعریف تابع لگاریتمی در پایه a به کار می‌برند. چون تابع لگاریتمی طبیعی به ازای هر $x > 0$ پیوسته است، از (۱۲) نتیجه می‌گیریم که تابع لگاریتمی در پایه a نیز به ازای هر $x > 0$ پیوسته است. اگر در (۱۲)، $x = e$ ، داریم

$$\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a}$$

یا معادلش

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a} \quad (۱۳)$$

حال به محاسبه مشتق تابع لگاریتمی در پایه a می‌پردازیم. اگر از دو طرف (۱۲) نسبت به x مشتق بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} D_x(\log_a x) &= \frac{1}{\ln a} D_x(\ln x) \\ D_x(\log_a x) &= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned} \quad (۱۴)$$

از (۱۳) در (۱۴) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$D_x(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x} \quad (۱۵)$$

از (۱۵) وقاعدۀ زنجیری، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

۵۰۶۰۸ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u} D_x u.$$

اگر در قضیه ۵۰۶۰۸، $a = e$ ، آنگاه داریم

$$D_x(\log_e u) = \frac{\log_e e}{u} D_x u$$

یا معادلش

$$D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$$

که همان قضیه ۲۰۳.۸ برای مشتق تابع لگاریتمی طبیعی است.

مثال ۳ اگر

$$y = \log_{10} \frac{x+1}{x^2+1}$$

مطلوب است dy/dx .

حل با استفاده از (۹) می نویسیم

$$y = \log_{10}(x+1) - \log_{10}(x^2+1).$$

بنابر قضیه ۵۰۶.۸

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\log_{10} e}{x+1} - \frac{\log_{10} e}{x^2+1} \cdot 2x \\ &= \log_{10} e \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{\log_{10} e (1 - 2x - x^2)}{(x+1)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

حال، چون x^n به ازای هر عدد حقیقی n تعریف شده است، می توانیم به اثبات فرمول محاسبه مشتق تابع توانی پردازیم، با این شرط که n یک عدد حقیقی باشد.

۶۰۶.۸ قضیه اگر n یک عدد حقیقی دلخواه باشد و تابع f با ضابطه

$$f(x) = x^n \quad x > 0$$

تعریف شود، آنگاه

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

اثبات فرض کنید $y = x^n$. آنگاه بنا بر (۱)

$$y = e^{n \ln x}.$$

پس

$$D_x y = e^{n \ln x} D_x (n \ln x)$$

$$= e^{n \ln x} \left(\frac{n}{x} \right)$$

$$= x^n \cdot \frac{n}{x}$$

$$\square \quad = nx^{n-1}.$$

قضیه ۶.۶.۸ به ما امکان می‌دهد که مشتق یک متغیر به توان عددی ثابت را محاسبه کنیم. قبلاً در همین بخش، چگونگی محاسبه مشتق یک عدد ثابت به توان یک متغیر را هم آموختیم. حال مشتق تابعی را بررسی می‌کنیم که مقدارش به صورت یک متغیر به توان یک متغیر است.

مثال ۴ اگر $y = x^x$ ، و $x > 0$ ، مطلوب است dy/dx .

حل اگر $x > 0$ ، بنا بر تعریف ۲.۵.۸ داریم $x^x = e^{x \ln x}$ پس

$$y = e^{x \ln x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x \ln x} D_x(x \ln x)$$

$$= e^{x \ln x} \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right)$$

$$\blacktriangle \quad = x^x(1 + \ln x).$$

برای محاسبه مشتق تابعی که مقدارش به صورت یک متغیر به توان یک متغیر است، از روش مشتق گیری لگاریتمی نیز می‌توان استفاده کرد. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۵ با استفاده از مشتق گیری لگاریتمی، dy/dx را در مثال ۴ بیابید.

حل رابطه $y = x^x$ با $x > 0$ به ما داده شده است. اگر از دوطرف این معادله لگاریتم طبیعی بگیریم، داریم

$$\ln y = \ln x^x$$

$$\ln y = x \ln x.$$

از دوطرف معادله بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + \ln x)$$

$$\blacktriangle \quad = x^x(1 + \ln x).$$

تمرینهای ۶.۸

در تمرینهای ۱ تا ۲۴، مشتق تابع داده شده را بیابید.

$$۱. f(x) = ۳^{5x} \quad ۲. f(x) = e^{-2x}$$

$$۳. f(t) = ۲^{3t^2} \quad ۴. g(x) = ۱0^{x^2-2x}$$

$$۵. f(x) = ۴^{\sin 2x} \quad ۶. f(z) = 2^z \cos z$$

$$۷. g(x) = 2^{5x} 3^{4x^2} \quad ۸. f(x) = (x^2 + 3)^{2-7x}$$

$$۹. h(x) = \frac{\log_{10} x}{x} \quad ۱۰. f(t) = \log_{10} \frac{t}{t+1}$$

$$۱۱. f(x) = \sqrt{\log_a x} \quad ۱۲. f(x) = \log_a [\log_a (\log_a x)]$$

$$۱۳. f(x) = \log_{10} [\log_{10} (x+1)] \quad ۱۴. g(w) = \sin 2^{rw}$$

$$۱۵. f(t) = \cos 3^{t^2} \quad ۱۶. f(x) = x^{x^2}; x > 0$$

$$۱۷. f(x) = x^{\sqrt{x}}; x > 0 \quad ۱۸. f(x) = x^{\ln x}; x > 0$$

$$۱۹. g(z) = z^{\sin z}; z > 0 \quad ۲۰. g(t) = (\cos t)^t; \cos t > 0$$

$$۲۱. h(x) = (\cos x)^{\sin x}; \cos x > 0 \quad ۲۲. f(x) = (x)^{x^x}; x > 0$$

$$۲۳. f(x) = x^{e^x}; x > 0 \quad ۲۴. f(x) = (\ln x)^{\ln x}; x > 1$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۲، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$۲۵. \int 3^{2x} dx \quad ۲۶. \int a^{nx} dx$$

$$۲۷. \int a^t e^t dt \quad ۲۸. \int 5^{x^4+2x} (2x^2 + 1) dx$$

$$۲۹. \int x^2 10^{x^2} dx \quad ۳۰. \int a^{z \ln z} (\ln z + 1) dz$$

$$۳۱. \int e^{xy} 2^{e^y} 3^{e^y} dy \quad ۳۲. \int \frac{e^{\ln(1/x)}}{x} dx$$

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، مقدار لگاریتم مفروض را حساب کنید.

$$\log_e e \quad .33 \qquad \log_2 10 \quad .34$$

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، برای محاسبه مقدار تقریبی لگاریتم مفروض از دیفرانسیل استفاده، و جواب را با سه رقم اعشار بیان کنید.

$$\log_{10} 997 \quad .35 \qquad \log_{10} 11015 \quad .36$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۰، اگر a و b اعدادی مثبت دلخواه، و x و y اعداد حقیقی دلخواهی باشند، ویژگی داده شده را ثابت کنید.

$$a^0 = 1 \quad .37 \qquad a^x \div a^y = a^{x-y} \quad .38$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad .39 \qquad (ab)^x = a^x b^x \quad .40$$

در تمرینهای ۴۱ تا ۴۴، اگر a عدد مثبت دلخواهی بجز ۱، و x و y اعداد مثبت دلخواهی باشند، ویژگی داده شده را ثابت کنید.

$$\log_a 1 = 0 \quad .41 \qquad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad .42$$

$$\log_a(x \div y) = \log_a x - \log_a y \quad .43 \qquad \log_a x^y = y \log_a x \quad .44$$

۴۵. ذره‌ای در امتداد خطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = At^{k_1} + Bt^{-k_2}$ ، که در آن s فوت، فاصله جهت‌دار ذره از نقطه آغاز در ثانیه t م است، حرکت می‌کند. ثابت کنید که اگر شتاب در ثانیه t م برابر با a فوت بر مجذور ثانیه باشد، آنگاه a با s متناسب است.

$$.46 \quad \text{معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی } y^{2/3} = x^{2/3} \text{ در } (4, 2) \text{ بیابید.}$$

۴۷. شرکتی می‌داند که وقتی یک سری تبلیغات تازه برای فروش آغاز کند، تعداد فروش روزانه افزایش می‌یابد. اما، همچنان که اثر تبلیغات کم می‌شود، فروش اضافی روزانه هم تقلیل می‌یابد. در مورد برنامه تبلیغاتی خاصی، شرکت می‌داند که اگر تعداد فروش اضافی روزانه S و تعداد روزهایی که از پایان تبلیغ می‌گذرد x باشد، آنگاه

$$S = 1000 \cdot 3^{-x/2}.$$

وقتی (الف) $x = 4$ ؛ و (ب) $x = 10$ ، آهنگ تقلیل فروش اضافی روزانه را بیابید.

۴۸. ذره‌ای در امتداد خطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = t^{1/2}$ حرکت می‌کند که در آن

د فوٹ فاصلہ جهت دار ذره از نقطه آغاز در ثانیه t م است. سرعت و شتاب ذره در ثانیه دوم را بیابید.

۴۹. تابلو ابستره‌ای که اهمیت تاریخی دارد در سال ۱۹۲۰ به مبلغ ۲۰۰ دلار خریداری شد؛ از تاریخ خریداری، ارزش تابلو در هر ۱۰ سال دو برابر شده است. اگر ارزش تابلو t سال پس از خرید آن y دلار باشد، (الف) y را بر حسب t تعریف کنید؛ (ب) ارزش تابلو در سال ۱۹۸۰ چه بوده است؟ (پ) آهنگ افزایش ارزش تابلو در سال ۱۹۸۰ را بیابید.

۵۰. نمودارهای $y = \ln x$ و $y = \log_{10} x$ را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۵۱. نمودارهای $y = e^x$ و $y = 2^x$ را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید. مساحت ناحیه محصور بین این دو نمودار و خط $x = 1$ را بیابید.

۵۲. مساحت ناحیه محصور بین نمودار $y = 3^x$ و خطوط $x = 1$ و $y = 1$ را بیابید.

۵۳. حجم جسم تولید شده از دوران ناحیه تمرین ۵۲، حول محور x ها را بیابید.

۵۴. f با ضابطه $f(x) = (a^x + a^{-x})/2$ داده شده است. ثابت کنید که

$$f(b+c) + f(b-c) = 2f(b)f(c).$$

۷.۸ قوانین رشد و زوال

قوانین رشد و زوال، در رشته‌هایی چون شیمی، فیزیک، زیست‌شناسی، بازرگانی، اقتصاد، کاربردهایی برای تابع نمایی فراهم می‌کنند. زمینه این کاربردها وقتی حاصل می‌شود که در هر لحظه مفروض، آهنگ تغییر اندازه کمی نسبت به زمان متناسب باشد با اندازه کمیت موجود. برای مثال، ممکن است آهنگ رشد جمعیت جامعه‌ای متناسب با جمعیت واقعی در هر زمان مفروض باشد. در زیست‌شناسی، تحت شرایط معینی، در هر زمان مشخص، آهنگ رشد کشت باکتری متناسب است با مقدار باکتری موجود. در یک واکنش شیمیایی، غالباً چنین است که آهنگ واکنش متناسب است با کمیت ماده شیمیایی موجود؛ مثلاً، با تجربه معلوم شده است که در هر لحظه مفروض آهنگ واپاشی (زوال) رادیوم متناسب است با مقدار رادیوم موجود. کاربرد جالب این مطلب در تجارت وقتی پیش می‌آید که بخواهیم بهره مرکب را به‌طور پیوسته محاسبه کنیم.

در چنین موقعیتهایی، اگر زمان با t واحد نمایش داده شود، و اندازه کمیت موجود در هر زمان، A واحد باشد، آنگاه با فرض اینکه k عدد ثابتی باشد، داریم

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

اگر درحالی که t افزایش می‌یابد، به A افزوده شود، آنگاه $k > 0$ ، و قانون رشد طبیعی حاکم است. اگر درحالی که t افزایش می‌یابد، A کاهش یابد، آنگاه $k < 0$ ، و قانون زوال طبیعی حاکم است.

اگر بنا به تعریف، A یک عدد صحیح نامنفی باشد (مثلاً، اگر A جمعیت جامعه معینی باشد)، برای اینکه A بتواند تابع پیوسته‌ای از t تلقی شود، فرض می‌کنیم که بتواند هر عدد نامنفی دلخواهی باشد.

مثال ۱ آهنگ افزایش جمعیت شهر معینی متناسب با جمعیت شهر است. اگر جمعیت در سال ۱۹۳۰، ۵۰۰۰۰ نفر، و در سال ۱۹۶۰، ۷۵۰۰۰ نفر بوده باشد، جمعیت مورد انتظار در سال ۱۹۹۰ چند نفر است؟

حل فرض کنید t ، تعداد سالهای بعد از ۱۹۳۰ را نشان دهد، و جمعیت در سال t ، A نفر باشد. شرایط اولیه در جدول ۱۰۷۰۸ داده شده است.

جدول ۱۰۷۰۸

t	۰	۳۰	۶۰
A	۵۰۰۰۰	۷۵۰۰۰	$A_{۶۰}$

معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

اگر متغیرها را از هم جدا کنیم، داریم

$$\frac{dA}{A} = k dt.$$

از دو طرف انتگرال می‌گیریم

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt$$

$$\ln |A| = kt + c$$

$$|A| = e^{kt + \bar{c}} = e^{\bar{c}} \cdot e^{kt}.$$

با فرض $e^{\bar{c}} = C$ ، داریم $|A| = Ce^{kt}$ ، و چون A نامنفی است می‌توانیم از علامت قدرمطلق صرف‌نظر کنیم و بنویسیم

$$A = Ce^{kt}.$$

چون وقتی $t = 0$ ، $A = 50000$ ، نتیجه می‌گیریم $C = 50000$. پس

$$A = 50000e^{kt}. \quad (1)$$

می‌دانیم که وقتی $t = 30$ ، داریم $A = 75000$ ؛ لذا

$$75000 = 50000e^{30k}$$

$$e^{30k} = \frac{3}{2}. \quad (2)$$

وقتی $t = 60$ ، $A = A_{60}$. بنابراین

$$A_{60} = 50000e^{60k}$$

$$A_{60} = 50000(e^{30k})^2. \quad (3)$$

از (2) در (3) قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$A_{60} = 50000 \left(\frac{3}{2} \right)^2$$

$$= 112500.$$

بنابراین، انتظار می‌رود جمعیت شهر در سال ۱۹۹۰، ۱۱۲۵۰۰ نفر باشد. ▲

مثال ۲ درکشت معینی آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب با تعداد باکتری موجود است. اگر در آغاز ۱۰۰۰ باکتری وجود داشته باشد، و تعداد باکتریها در هر ۱۲ دقیقه دو برابر شود، پس از چه مدت تعداد باکتریها به ۱۰۰۰۰۰۰ می‌رسد؟

حل فرض کنید فاصله زمانی از آغاز، t دقیقه باشد، و تعداد باکتریهای موجود در دقیقه t با A نمایش داده شود. شرایط اولیه در جدول ۲.۷.۸ مشخص شده است. معادله دیفرانسیل به‌صورت زیر است

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

جدول ۲۰۷۰۸

t	۰	۱۲	T
A	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰

این معادله دیفرانسیل همان است که در مثال ۱ داشتیم؛ لذا، مثل بالا، جواب عمومی چنین است

$$A = Ce^{kt}.$$

وقتی $t = 0$ ، $A = 1000$ ؛ پس $C = 1000$ و لذا

$$A = 1000e^{kt}.$$

از این شرط که وقتی $t = 12$ ، $A = 2000$ ، داریم

$$e^{12k} = 2$$

و لذا

$$k = \frac{1}{12} \ln 2 = 0.05776.$$

پس داریم

$$A = 1000e^{0.05776t}.$$

اگر به جای t ، T و به جای A ، 1000000 را قرار دهیم، نتیجه می گیریم که

$$1000000 = 1000e^{0.05776T}$$

$$e^{0.05776T} = 1000$$

$$0.05776T = \ln 1000$$

$$T = \frac{\ln 1000}{0.05776} = 1196.$$

بنابراین، پس از ۱ ساعت و ۵۹ دقیقه و ۳۶ ثانیه، 1000000 باکتری خواهیم داشت. ▲

در مسائل مربوط به قانون واپاشی طبیعی، نیم عمر يك ماده، زمان لازم برای واپاشی نصف آن است.

مثال ۳ در هر زمان آهنگ واپاشی رادیوم متناسب است با مقدار موجود آن. اگر

۷۳۴ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

اکنون ۶۰ میلیگرم رادیوم داشته باشیم و نیم عمر آن ۱۶۹۰ سال باشد، ۱۰۰ سال دیگر چقدر رادیوم خواهیم داشت؟

حل فرض کنید فاصله زمانی از زمان حال بر حسب سال با t نمایش داده شود، و مقدار رادیوم موجود در t سال دیگر A میلیگرم باشد. شرایط اولیه در جدول ۳۰۷۰۸ مشخص شده‌اند. معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

جدول ۳۰۷۰۸

t	۰	۱۶۹۰	۱۰۰
A	۶۰	۳۰	A_{100}

مانند مثال ۱، جواب عمومی عبارت است از

$$A = Ce^{kt}.$$

چون وقتی $t = 0$ ، $A = 60$ ، داریم $C = 60$. بنابراین

$$A = 60e^{kt}. \quad (4)$$

چون وقتی $t = 1690$ ، $A = 30$ ، داریم $30 = 60e^{1690k}$ یا

$$0.5 = e^{1690k}.$$

پس

$$\ln 0.5 = 1690k.$$

و

$$k = \frac{\ln 0.5}{1690} = \frac{-0.6931}{1690} = -0.00041.$$

اگر این مقدار k را در (۴) قرار دهیم، به دست می آوریم

$$A = 60e^{-0.00041t}.$$

وقتی $t = 100$ ، $A = A_{100}$ ، و لذا

$$A_{100} = 60e^{-0.041} = 57.6.$$

بنابراین، ۱۰۰ سال دیگر ۵۷۶ میلیگرم رادیوم خواهیم داشت. ▲

مثال ۴ درمخزن آب شهری، ۱۰۰ میلیون لیتر آب فلورایددار وجود دارد، و مقدار فلوراید موجود در آب ۷۰۰ کیلوگرم است. برای اینکه مقدار فلوراید آب را تقلیل دهیم، با آهنگ ۳ میلیون لیتر در روز آب خالص را به مخزن وارد، و مخلوط را یکنواخت می‌کنیم و با همان آهنگ، مخلوط آب و فلوراید را از مخزن خارج می‌کنیم. ۶۰ روز پس از آغاز افزودن آب خالص به مخزن، چند کیلوگرم فلوراید درمخزن موجود است؟

حل فرض کنید فاصله زمانی از موقعی که افزودن آب خالص به مخزن آغاز شده است، برحسب روز t باشد. و فرض کنید مقدار فلوراید موجود در مخزن در روز t x کیلوگرم باشد.

چون در هر زمان، ۱۰۰ میلیون لیتر آب فلورایددار در مخزن موجود است، در روز t مقدار فلوراید موجود در هر میلیون لیتر آب $x/100$ کیلوگرم است. در هر روز سه میلیون لیتر آب فلورایددار از مخزن خارج می‌شود؛ لذا مخزن در هر روز $3(x/100)$ کیلوگرم فلوراید از دست می‌دهد. چون آهنگ تغییر x نسبت به t ، $D_t x$ است، معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3x}{100}.$$

شرایط اولیه نیز در جدول ۴.۷.۸ داده شده‌اند. اگر متغیرها را از هم جدا کنیم و انتگرال بگیریم، داریم

$$\int \frac{dx}{x} = -0.03 \int dt$$

$$\ln |x| = -0.03t + C$$

$$x = Ce^{-0.03t}$$

جدول ۴.۷.۸

t	۰	۶۰
x	۷۰۰	x_{60}

وقتی $t=0$ ، $x=700$ ؛ لذا $C=700$. فرض می‌کنیم $t=60$ و $x=x_{60}$. پس

$$x_{60} = 700 e^{-1.8}$$

$$= 700(0.1653)$$

۷۳۶ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی

$$= ۱۱۵۷۱۰.$$

بنابراین، ۶۰ روز پس از اینکه افزودن آب خالص به مخزن آغاز شود، مقدار فلوراید مخزن ۱۱۵۷۱ کیلوگرم خواهد بود. ▲

مثال ۵ قانون نیوتن برای سرد شدن حاکی است که آهنگ تغییر دمای هر جسم متناسب است با اختلاف دمای جسم و دمای محیط اطراف آن. اگر جسمی در هوای با دمای ۳۵° باشد و در طی ۴۰ دقیقه دمای جسم از ۱۲۰° به ۶۰° برسد، دمای آن پس از ۱۰۰ دقیقه چقدر است؟

حل فرض کنید از وقتی که جسم آغاز به سرد شدن می‌کند t دقیقه گذشته باشد. و فرض کنید دمای جسم در دقیقه t ، x درجه باشد. جدول ۵.۷.۸ شرایط اولیه را نشان می‌دهد. از قانون نیوتن برای سرد شدن جسم داریم

$$\frac{dx}{dt} = k(x - ۳۵).$$

جدول ۵.۷.۸

t	۰	۴۰	۱۰۰
x	۱۲۰	۶۰	$x_{۱۰۰}$

متغیرها را از هم جدا می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dx}{x - ۳۵} = k dt.$$

پس

$$\int \frac{dx}{x - ۳۵} = k \int dt$$

$$\ln|x - ۳۵| = kt + c$$

$$x - ۳۵ = e^{kt+c}$$

$$x = e^c e^{kt} + ۳۵$$

$$= Ce^{kt} + ۳۵.$$

وقتی $t = ۰$ ، $x = ۱۲۰$ ؛ لذا $C = ۸۵$. بنابراین

$$x = 85 e^{kt} + 35.$$

وقتی $t = 40$ ، $x = 60$ ، و لذا

$$60 = 85 e^{40k} + 35$$

$$40k = \ln \frac{5}{17}$$

$$k = \frac{1}{40} (\ln 5 - \ln 17)$$

$$= \frac{1}{40} (1.6094 - 2.8332)$$

$$= -0.0306.$$

پس

$$x = 85 e^{-0.0306t} + 35.$$

بنابراین

$$x_{100} = 85 e^{-3.06} + 35 = 39.$$

▲

یعنی، بعد از ۱۰۰ دقیقه دمای جسم 39° است.

برای ارزیابی تصمیمات معینی در بازرگانی، غالباً اقتصاددانان از حساب دیفرانسیل و انتگرال بهره فراوان می‌برند. اما، برای استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال باید با توابع پیوسته کار شود. برای مثال، فرمول زیر را در نظر بگیرید. طبق این فرمول، P تومان با نرخ سالانه i درصد به بانک سپرده می‌شود؛ سود آن m دفعه در سال محاسبه، و در پایان t سال کلاً A تومان بازپرداخت می‌شود

$$A = P \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt}. \quad (5)$$

حال وضعیتی را تصور می‌کنیم که سود به‌طور پیوسته محاسبه می‌شود؛ یعنی، در فرمول (۵) اجازه می‌دهیم که تعداد دفعات محاسبه سود در سال به‌طور بی‌کران افزایش یابد. آنگاه، در فرمول (۵) حد می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$A = P \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mt}.$$

این معادله را به‌صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم

$$A = P \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{m/i} \right]^{it}. \quad (6)$$

حال

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i}$$

را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $h = i/m$. آنگاه، $m/i = 1/h$ ؛ و چون $m \rightarrow +\infty$ معادل با $h \rightarrow 0^+$ است، داریم

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h)^{1/h} = e.$$

پس، با استفاده از قضیه ۶.۷.۲ داریم

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} \right]^{it} = \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m/i} \right]^{it} = e^{it}.$$

و لذا (۶) به صورت زیر در می آید

$$A = Pe^{it}. \quad (7)$$

حال، اگر t مجاز باشد از مجموعه اعداد حقیقی نامنفی مقدار انتخاب کند، می بینیم که مقدار A در (۷) به صورت تابع پیوسته ای از t است.

راه دیگر بررسی این وضعیت این است که P تومان را به بانک سپاریم و حالتی را در نظر بگیریم که سپرده با آهنگ متناسب با مقدارش افزایش یابد. این همان قانون رشد طبیعی است. پس، اگر کل مبلغ بعد از t سال A تومان باشد، داریم

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\int \frac{dA}{A} = k \int dt$$

$$\ln|A| = kt + c$$

$$A = Ce^{kt}.$$

وقتی که $t = 0$ ، $A = P$ ؛ لذا $C = P$. بنابراین، داریم

$$A = Pe^{kt}. \quad (8)$$

با مقایسه (۸) و (۷) می بینیم که اگر $k = i$ ، این دو معادله یکی هستند. پس اگر سپرده با آهنگی متناسب با مبلغ آن افزایش یابد، می گوئیم که سود به طور پیوسته محاسبه می شود، و نرخ سود سالانه همان ثابت تناسب است.

○ نمونه ۱ اگر P تومان با نرخ ۸ درصد در سال به بانک سپرده شود، و سود آن

به طور پیوسته محاسبه گردد، و پس از t سال کل سپرده A تومان شود، داریم

$$\frac{dA}{dt} = 0.008 A$$

و

$$\bigcirc \quad A = P e^{0.008 t}.$$

اگر در (۷) فرض کنیم $P = 1$ ، $i = 1$ ، و $t = 1$ ، داریم $A = e$ ، و لذا این تعبیر اقتصاددانان توجیه می شود که اگر یک تومان برای مدت یک سال با نرخ ۱۰۰ درصد به بانک سپرده شود و سود آن به طور پیوسته محاسبه گردد، کل مبلغ در پایان سال e تومان خواهد بود.

در مثال زیر از اصطلاح نرخ مؤثر سود استفاده می کنیم، و آن نرخ است که سود حاصل از آن مساوی با مقدار سودی باشد که یک مرتبه در سال محاسبه می شود.

مثال ۶ شخصی از بانکی با سود ۱۲ درصد در سال که به طور پیوسته محاسبه می شود، ۵۰۰۰ تومان وام می گیرد. در پایان سال باید وام در یک قسط بازپرداخت شود. وام گیرنده چه مبلغ باید بازپرداخت کند؟ و نرخ مؤثر سالانه سود بانک چقدر است؟

حل فرض کنید مبلغ بازپرداخت A تومان باشد. چون $P = 5000$ ، $i = 0.12$ ، و $t = 1$ از (۷) نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} A &= 5000 e^{0.12} \\ &= 5000 (1.1275) \\ &= 5637.5. \end{aligned}$$

پس، وام گیرنده باید ۵۶۳۷.۵ تومان بازپرداخت کند. اگر نرخ مؤثر سالانه سود j فرض شود، داریم

$$\begin{aligned} 5000(1+j) &= 5000 e^{0.12} \\ 1+j &= e^{0.12} \\ j &= 1.1275 - 1 \\ &= 0.1275 \\ &= 12.75\%. \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۷.۸

۱. آهنگ افزایش طبیعی جمعیت شهر معینی متناسب با جمعیت آن شهر است. اگر در

طی ۴۰ سال جمعیت از ۴۰۰۰۰۰ نفر به ۶۰۰۰۰۰ نفر افزایش یابد، چه موقع جمعیت به ۸۰۰۰۰۰ نفر می‌رسد؟

۲. جمعیت شهر معینی در ۶۰ سال، از ۱۸۹۰ تا ۱۹۵۰، دو برابر شده است. اگر در هر زمان آهنگ افزایش طبیعی جمعیت متناسب با جمعیت در آن زمان باشد، و جمعیت در سال ۱۹۵۰، ۶۰۰۰۰۰ نفر باشد، جمعیت در سال ۲۰۰۰ را تخمین بزنید.

۳. بعد از اینکه اتومبیل يك سال کار کند، در هر زمان آهنگ استهلاك آن متناسب با بهای اتومبیل در آن زمان است. اگر اتومبیلی در اول ماه ژوئن ۱۹۷۹ خریداری شود و بهای آن در اول ژوئن ۱۹۸۰، ۷۰۰۰ دلار و در اول ژوئن ۱۹۸۱، ۵۸۰۰ دلار باشد، بهای مورد انتظار اتومبیل در اول ماه ژوئن ۱۹۸۵ چقدر است؟

۴. آهنگ حل شدن شکر در آب متناسب است با مقدار شکر حل نشده در آب. اگر شکر موجود در آب در آغاز ۵۰ پوند، و پس از ۵ ساعت، ۲۰ پوند باشد، پس از چند ساعت ۹۰٪ شکر در آب حل می‌شود؟

۵. در کشت معینی، آهنگ ازدیاد تعداد باکتری متناسب است با تعداد باکتری موجود؛ اگر در آغاز ۱۰۰۰ باکتری داشته باشیم و تعداد آنها در يك ساعت دو برابر شود، پس از $3\frac{1}{p}$ ساعت چند باکتری وجود خواهد داشت؟

۶. در کشت معینی، آهنگ رشد تعداد باکتری متناسب است با تعداد باکتری موجود؛ تعداد در ۳ ساعت سه برابر می‌شود. اگر در پایان ۱۲ ساعت تعداد باکتری ۱۰ میلیون باشد، در آغاز چند باکتری داشته‌ایم؟

۷. در واکنش شیمیایی معینی، آهنگ تبدیل ماده‌ای متناسب است با مقدار ماده تبدیل نشده در آن زمان. پس از ۱۰ دقیقه يك سوم مقدار اولیه ماده تبدیل می‌شود، و پس از ۱۵ دقیقه ۲۰ گرم ماده تبدیل می‌گردد. مقدار اولیه ماده چقدر است؟

۸. در مخزنی ۱۰۰ گالن آب نمك كه در آن ۷۰ پوند نمك حل شده است، موجود است. آب خالص با آهنگ ۳ گالن در دقیقه به مخزن وارد، و ضمن اینکه مخلوط با تكان خوردن همگن می‌ماند، با همان آهنگ از مخزن خارج می‌شود. در پایان ۱ ساعت، چند پوند نمك در مخزن وجود دارد؟

۹. فرض کنید بهای كلكسیون عتیقه معینی با قدمت آن افزایش می‌یابد، و آهنگ ترقی بهای آن در هر زمان متناسب است با بهای آن در همان زمان. اگر بهای كلكسیون در ده سال پیش ۲۵۰۰۰ دلار و بهای آن در حال حاضر ۳۵۰۰۰ دلار باشد، انتظار می‌رود در چند سال بهای آن به ۵۰۰۰۰ دلار برسد؟

۱۰. اگر دمای جسمی در هوایی که دمای آن 50° درجه است در طی 40 دقیقه از 200° به 100° برسد، با استفاده از قانون نیوتن برای سرد شدن (مثال ۵ را ببینید) تعیین کنید که پس از چند دقیقه دمای دیگر دمای آن به 50° می‌رسد.

۱۱. تحت شرایط مثال ۵، بعد از چند دقیقه دمای جسم به 45° خواهد رسید؟

۱۲. مدار الکتریکی ساده‌ای، که در آن خازن وجود ندارد ولی القاگر و مقاومت وجود دارد، مفروض است. وقتی نیروی محرکه الکتریکی آن قطع شود، آهنگ تقلیل شدت جریان متناسب با شدت جریان است؛ i ثانیه پس از قطع، شدت جریان i آمپر است، و وقتی $t = 0$ ، $i = 40$. اگر در 0.1 ثانیه شدت جریان به 15 آمپر برسد، i را بر حسب t بیابید.

۱۳. اگر دماسنجی را از اتاقی که دمای آن 75° است به فضای بازی که دمای آن 35° است انتقال دهیم، و پس از 30 ثانیه آن را بخوانیم 65° را نشان می‌دهد. (الف) چه مدت پس از انتقال، دماسنج 50° را نشان می‌دهد؟ (ب) 3 دقیقه بعد از انتقال، دماسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ از قانون نیوتن برای سرد شدن (مثال ۵ را ببینید) استفاده کنید.

۱۴. سی درصد از مادهٔ رادیو اکتیوی در 15 سال ناپدید می‌شود. نیم عمر ماده را بیابید.

۱۵. اگر نیم عمر رادیوم 1690 سال باشد، چند درصد از مقدار موجود در زمان حال بعد از (الف) 100 سال؛ و (ب) 1000 سال باقی خواهد ماند؟

۱۶. مخزنی حاوی 200 لیتر آب نمک است که در هر لیتر آن 3 کیلو گرم نمک وجود دارد. می‌خواهیم با افزودن آب نمکی که در هر لیتر آن 1 کیلو گرم نمک وجود دارد، و با آهنگ 4 لیتر در دقیقه وارد مخزن می‌شود و با همان آهنگ از مخزن خارج می‌شود، آب نمک اول را رقیق کنیم. چه موقع، هر لیتر محلول مخزن حاوی $1\frac{1}{4}$ کیلو-گرم نمک خواهد بود؟

۱۷. مخزنی حاوی 100 لیتر آب خالص است. آب نمکی که در هر لیتر آن 3 کیلو گرم نمک وجود دارد با آهنگ 3 لیتر در دقیقه وارد مخزن می‌شود، مخلوط با تکان خوردن یکنواخت می‌گردد، و با همان آهنگ از مخزن خارج می‌شود. پس از 30 دقیقه چند کیلو گرم نمک در مخزن وجود دارد؟

۱۸. یک وام 100 دلاری را در آخر سال در یک قسط می‌پردازیم. اگر سود بانسرخ 8% و به‌طور پیوسته محاسبه شود، مطلوب است: (الف) مبلغ کل بازپرداخت؛ و (ب) نرخ مؤثر سود.

۱۹. (الف) مطلوب است سود حاصل از يك سپرده ۵۰۰ دلاری در پایان يك سال، با این شرط که نرخ سود سالانه ۱۰٪ باشد و به طور پیوسته محاسبه شود؛ (ب) نرخ مؤثر سالانه سود چقدر است؟

۴۰. اگر توان خرید دلار با آهنگ ۱۰٪ در سال تقلیل یابد، و محاسبه به طور پیوسته انجام شود، پس از چه مدت توان خرید به ۵۰ دلار می‌رسد؟

۴۱. اگر سود به طور پیوسته محاسبه شود و مبلغ سپرده پس از ۱۰ سال دو برابر شود، پس از چه مدت مبلغ اولیه سه برابر می‌شود؟

۴۲. اگر سود با نرخ سالانه ۸ درصد و به طور پیوسته محاسبه شود، پس از چه مدت ۵۰۰ دلار سپرده به ۱۰۰۰ دلار افزایش می‌یابد؟

۴۳. به پروفیسور ویلارد لیبی از دانشگاه کالیفرنیا در لوس آنجلس، به خاطر کشف روشی جهت تعیین تاریخ مرگ شیمی که زمانی موجود زنده‌ای بوده است، جایزه نوبل در شیمی اعطا شد. پروفیسور لیبی در کشف خود از این واقعیت استفاده کرد که بافت يك موجود زنده از دو نوع کربن ترکیب می‌شود؛ يك نوع کربن رادیواکتیو A و يك نوع کربن پایدار B ، که نسبت مقدار A به مقدار B تقریباً ثابت است. وقتی که موجود می‌میرد، در مورد A قانون واپاشی طبیعی صادق است. در مورد يك تکه زغال تعیین شده است که از کربن A ی آن تنها ۱۵٪ مقدار اولیه باقی مانده و نیم عمر آن، ۵۵۰۰ سال است. در چه زمانی درخت مربوط به این زغال خشک شده است؟

تمرینهای مروری فصل ۸

در تمرینهای ۱ تا ۶، آیا تابع مفروض معکوس دارد؟ اگر معکوس وجود دارد، کارهای زیر را انجام دهید. (الف) آن را تعریف، و قلمرو و برد آن را مشخص کنید؛ (ب) نمودارهای تابع و معکوسش را در يك دستگاه مختصات رسم کنید. اگر تابع معکوس نداشته باشد، نشان دهید که خطی افقی نمودار تابع را در بیش از يك نقطه قطع می‌کند.

$$1. f(x) = x^2 - 4 \quad 2. f(x) = 2\sqrt{x} - 1$$

$$3. f(x) = 9 - x^2 \quad 4. f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$5. f(x) = \frac{3x - 4}{x} \quad 6. f(x) = |2x - 3|$$

در تمرینهای (۷) و (۸)، (الف) ثابت کنید که تابع مفروض f معکوس دارد؛ (ب) $f^{-1}(x)$

دا بیابید؛ د (پ) معادلات قضیه ۴.۱.۸ را در مورد f و f^{-1} آزمایش کنید.

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad ۷. \quad f(x) = \frac{2x-1}{2x+1} \quad ۸.$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، $(f^{-1})'(d)$ را برای f و d ی مفروض بیابید.

$$f(x) = x^2 - 6x + 8, x \geq 3; d = 3 \quad ۹.$$

$$f(x) = 8x^2 + 6x; d = 4 \quad ۱۱. \quad f(x) = \sqrt{3x+2}; d = 5 \quad ۱۰.$$

$$f(x) = x^5 + x - 22; d = 12 \quad ۱۲.$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۴، از تابع مفروض مشتق بگیرید.

$$f(t) = 3 \sin(e^{4t}) \quad ۱۳. \quad f(x) = (\ln x^2)^2 \quad ۱۴.$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + e^{-x})^2} \quad ۱۶. \quad g(x) = 2^{\cos 4x} \quad ۱۵.$$

$$f(x) = 10^{-5x^2} \quad ۱۸. \quad f(x) = e^{x/(2+x^2)} \quad ۱۷.$$

$$g(x) = \ln \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}} \quad ۲۰. \quad f(x) = \sqrt{\log_{10} \frac{1+x}{1-x}} \quad ۱۹.$$

$$F(x) = \log_{10}(x^2 2^{x^2+1}) \quad ۲۲. \quad f(t) = t^{7/\ln t} \quad ۲۱.$$

$$f(x) = 3^{x^{x^2}} \quad ۲۴. \quad f(x) = (x)^{x^{e^x}}; x > 0 \quad ۲۳.$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۲، انتگرال نامعین مفروض را محاسبه کنید.

$$\int e^{2x^2-4x}(x-1) dx \quad ۲۶. \quad \int \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \quad ۲۵.$$

$$\int \frac{10^{\ln x}}{x} dx \quad ۲۸. \quad \int (e^{7x} + 2^{7x}) dx \quad ۲۷.$$

$$\int (x+1)e^{x\sqrt{x}e^x} dx \quad ۳۰. \quad \int \frac{xe^{6x^2}}{\sqrt{1+e^{6x^2}}} dx \quad ۲۹.$$

$$\int \frac{10^x + 1}{10^x - 1} dx \quad .۳۲ \qquad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3 \cdot 2^x + 4}} \quad .۳۱$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۸، انتگرال معین مفروضی را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 x^2 e^{x^2} dx \quad .۳۳ \qquad \int_0^1 (e^{2x} + 1)^2 dx \quad .۳۴$$

$$\int_{1/2}^{1/2} \frac{2x^{-2} + 2}{x^{-2} - x} dx \quad .۳۶ \qquad \int_1^8 \frac{x^{1/2}}{x^{2/3} + 4} dx \quad .۳۵$$

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)} \quad .۳۸ \qquad \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x - 5} dx \quad .۳۷$$

۳۹. اگر $ye^x + xe^x + x + y = 0$ ، $D_x y$ را بیابید.

۴۰. اگر $f(x) = \log_{(e^x)}(x+1)$ ، $f'(x)$ را بیابید.

۴۱. با از دیفرانسیل، يك مقدار تقریبی با سه رقم اعشار برای $\log_{10} 100937$ بیابید. از این واقعیت استفاده کنید که با دقت سه رقم اعشار، $\log_{10} e = 0.434$.

۴۲. معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی $y = x^{x-1}$ در $(2, 2)$ بیابید.

۴۳. ذره‌ای بر خط مستقیمی در حرکت است. s فورت فاصله جهت دار ذره از مبدأ، v فوت بر ثانیه سرعت ذره، و a فوت بر مربع ثانیه شتاب ذره در ثانیه t است. اگر $a = e^t + e^{-t}$ ، و وقتی $t = 0$ داشته باشیم $v = 1$ و $s = 2$ ، v و s را بر حسب t بیابید.

۴۴. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = e^{-x}$ ، محاورهای مختصات، و خط $x = b$ ($b > 0$)، تابعی از b است. اگر f این تابع باشد، $f(b)$ را بیابید. همچنین $\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b)$ را پیدا کنید.

۴۵. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه تمرین ۴۴ حول محور x ها تابعی از b است. اگر g این تابع باشد، $g(b)$ را بیابید. همچنین $\lim_{b \rightarrow +\infty} g(b)$ را محاسبه کنید.

۴۶. آهنگ ازدیاد طبیعی جمعیت شهر معینی متناسب با جمعیت آن شهر است. اگر جمعیت در ۶۰ سال دو برابر شود، و اگر جمعیت در سال ۱۹۵۰، ۶۰۰۰۰ بوده باشد، جمعیت شهر در سال ۲۰۰۰ را تخمین بزنید.

۴۷. آهنگ واپاشی ماده رادیواکتیوی، متناسب با مقدار موجود آن است. اگر در ۱۹۰۰

سال نصف ذخیره مفروضی از این ماده از بین برود، پس از چه مدت ۹۵٪ ذخیره از بین خواهد رفت؟

۴۸. ثابت کنید که اگر قرار باشد قاعده مستطیلی روی محور x ها باشد و دوتا از رئوسش بر منحنی $y = e^{-x^2}$ باشند، آنگاه مساحت مستطیل بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت، وقتی که دو رأس مستطیل بر نقاط عطف نمودار باشند.

۴۹. $f(x) = \ln |x|$ ، $x < 0$ ، داده شده است. نشان دهید که f معکوس دارد. اگر g تابع معکوس آن باشد، $g(x)$ و قلمرو g را بیابید.

۵۰. ثابت کنید که اگر $x < 1$ ، آنگاه $\ln x < x$. (دانهمایی: فرض کنید $f(x) = x - \ln x$ ، و نشان دهید که f بر $(0, 1)$ نزولی است، و سپس $f(1)$ را بیابید.)

۵۱. وقتی که گازی تحت شرایط انبساط یا انقباض آدیاباتیك (نه حرارت بدهد و نه بگیرد) قرار می گیرد، آنگاه آهنگ تغییر فشار نسبت به حجم به طور مستقیم با فشار، و به طور معکوس با حجم تغییر می کند. اگر وقتی که حجم v اینچ مکعب است، فشار p پوند بر اینچ مربع باشد، و اگر فشار و حجم اولیه به ترتیب p_0 پوند بر اینچ مربع و v_0 اینچ مکعب باشند، نشان دهید که $p v^k = p_0 v_0^k$.

۵۲. اگر کار انجام شده توسط انبساط گاز در پشت پیستون واقع در يك سیلندر، W اینچ-پوند باشد، و اگر فشار گاز وقتی که حجم آن V اینچ مکعب است، P پوند بر اینچ مربع باشد، و اگر حجمهای اولیه و نهایی به ترتیب V_1 و V_2 اینچ مکعب باشند، آنگاه نشان دهید که

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

۵۳. فرض کنید پیستونی، گاز موجود در سیلندری را از حجم اولیه ۶۰ اینچ مکعب به حجمی مساوی با ۴۰ اینچ مکعب متراکم می کند. اگر قانون بویل (تمرین ۳۰ از تمرینهای ۵.۳) برقرار، و فشار اولیه ۵۰ پوند بر اینچ مربع باشد، کار انجام شده توسط پیستون را بیابید. (از نتیجه تمرین ۵۲ استفاده کنید.)

۵۴. بار الکتریکی بر رویه ای کروی با آهنگی که متناسب با بار است نشت می کند. در آغاز، بار الکتریکی ۸ کولن بوده ولی در طی ۱۵ دقیقه يك چهارم آن نشت کرده؛ چه موقع تنها ۲ کولن باقی می ماند؟

۵۵. اگر نرخ سود پرداختی ۸٪ در سال باشد و سود به طور پیوسته محاسبه شود، چه مدت طول می کشد تا سپرده ای دو برابر شود؟

۵۶. درمخزنی ۵۶ گالن آب نمک وجود دارد که ۱۲۰ پوند نمک در آن حل شده است. آب نمکی که در هر گالن آن ۳ پوند نمک حل شده است با آهنگ ۲ گالن بر دقیقه به مخزن وارد، و مخلوط که باتکان خوردن یکنواخت باقی می ماند، با همان آهنگ از مخزن خارج می شود. پس از چه مدت ۲۰۰ پوند نمک در مخزن وجود خواهد داشت؟

۵۷. مطلوب است نقطه ای از نمودار $f(x) = e^x$ که اگر از آن نقطه خط مماس بر نمودار رسم شود، از مبدأ مختصات بگذرد.

۵۸. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = 2^{-x}$ و خطوط $x = 1$ و $x = 4$ حول محور x ها را بیابید.

۵۹. اگر t يك عدد حقیقی دلخواه باشد، $\int_0^t e^{-|x|} dx$ را بیابید.

۶۰. ثابت کنید که اگر $x > 0$ ، و $\int_1^x t^{h-1} dt = 1$ ، آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = \lim_{h \rightarrow 0} x = 1$.

۶۱. ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

(توجه: نتیجه با تمرین ۴۸ از تمرینهای ۳۰۸ مقایسه شود.)

۶۲. ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

(دانهمایی: فرض کنید $y = a^x - 1$ و $x = (a^y - 1)/a^y$ را به صورت تابعی از y ، فرضاً $g(y)$ بنویسید. آنگاه نشان دهید که وقتی $x \rightarrow 0$ ، $y \rightarrow 0$ و سپس $\lim_{y \rightarrow 0} g(y)$ را بیابید.)

۶۳. با استفاده از نتایج تمرینهای ۶۱ و ۶۲ ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - 1}{x - 1} = b.$$

(دانهمایی: بنویسید $\frac{b \ln x}{x - 1} \cdot \frac{e^{b \ln x} - 1}{b \ln x} = \frac{x^b - 1}{x - 1}$. آنگاه فرض کنید $t = x - 1$ و $s = b \ln x$.)

۶۴. ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a.$$

(دانهمایی: فرض کنید $f(x) = e^{ax}$ ، و $f'(0)$ را با دورش محاسبه کنید.)

۶۵. اگر قلمرو f ، مجموعه تمام اعداد حقیقی باشد و اگر به ازای تمام مقادیر x ، $f'(x) = cf(x)$ ، که در آن c مقدار ثابتی است، ثابت کنید که عدد ثابتی چون k وجود دارد که به ازای تمام مقادیر x ، $f(x) = ke^{cx}$. (دانهمایی: تابع g با ضابطه $g(x) = f(x)e^{-cx}$ را در نظر بگیرید و $g'(x)$ را بیابید.)

۶۶. ثابت کنید که

$$D_x^n(\ln x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

(دانهمایی: از استقرای ریاضی استفاده کنید.)

۶۷. تمرین ۲۵ از تمرینهای مروری فصل ۶ را با محاسبه هر يك از انتگرالها حل کنید.

توابع مثلثاتی و هیپربولیک

۱۰.۹ توابع تانژانسی، کتانژانسی، سکانتی، و کسکانتی

در بخش ۷.۱ با توابع سینوسی و کسینوسی آشنا شدید، و در بخشهای بعدی، درباره مشتق و ضد مشتق آنها بحث کردیم. حال توابع مثلثاتی دیگر: تانژانسی، کتانژانسی، سکانتی، و کسکانتی را بررسی می‌کنیم. این توابع بر حسب سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند.

۱۰.۹.۱ تعریف به ازای هر عدد حقیقی x که برای آن $\cos x \neq 0$ ، توابع تانژانسی و سکانتی با

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

تعریف می‌شوند.

به ازای هر عدد حقیقی x که برای آن $\sin x \neq 0$ ، توابع کتانژانسی و کسکانتی با

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

تعریف می‌شوند.

توابع تانژانسی و سکانتی وقتی که $\cos x = 0$ ، یعنی وقتی که x برابر با $\pi/2$ ، $3\pi/2$ ، یا به طور کلی $(\pi/2) + n\pi$ باشد، که در آن n هر عدد صحیح دلخواه مثبت، منفی، یا

صفر است، تعریف نمی‌شوند. بنابراین، قلمرو توابع تانژانتی و سکانتی مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز اعداد به صورت $(\pi/2) + n\pi$ است که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. به طور مشابه، چون $\cot x$ و $\csc x$ وقتی که $\sin x = 0$ تعریف نمی‌شوند، قلمرو توابع کتانژانتی و کسکانتی مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز اعداد به صورت $n\pi$ است که در آن n عدد صحیح دلخواهی است.

بنابر قضیه ۱۰۷.۲ (iv)، اگر توابع f و g در عدد a پیوسته باشند، آنگاه با این شرط که $g(a) \neq 0$ ، f/g در a پیوسته است. چون توابع سینوسی و کسینوسی به ازای تمام اعداد حقیقی پیوسته هستند، نتیجه می‌گیریم که توابع تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی، و کسکانتی به ازای هر عدد متعلق به قلمروشان پیوسته هستند. با استفاده از اتحاد

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (1)$$

و تعریف ۱۰۱.۹، دو اتحاد مهم دیگر زیر به دست می‌آیند. وقتی که $\cos x \neq 0$ ، اگر دو طرف (۱) را بر $\cos^2 x$ تقسیم کنیم، داریم

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و چون $\sin x / \cos x = \tan x$ و $1 / \cos x = \sec x$ ، اتحاد زیر به دست می‌آید

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x. \quad (2)$$

وقتی که $\sin x \neq 0$ ، اگر دو طرف (۱) را بر $\sin^2 x$ تقسیم کنیم، به طریق مشابه به اتحاد

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x. \quad (3)$$

دست می‌یابیم.

سه فرمول مهم دیگری که بلافاصله از تعریف ۱۰۱.۹ نتیجه می‌شوند عبارت‌اند از

$$\sin x \csc x = 1 \quad (4)$$

$$\cos x \sec x = 1 \quad (5)$$

و

$$\tan x \cot x = 1. \quad (6)$$

فرمولهای (۴)، (۵)، و (۶) برای تمام مقادیری از x که به ازای آنها توابع مربوط تعریف می‌شوند برقرارند، و لذا اتحاد هستند.

فرمول دیگری که به آن نیازمندیم فرمولی است که تانژانت اختلاف دو عدد را بر حسب تانژانت‌های آن اعداد بیان کند. با استفاده از فرمولهای (۱۳) و (۱۰) از بخش ۷.۱ داریم

$$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}.$$

اگر صورت و مخرج را بر $\cos a \cos b$ تقسیم کنیم، داریم

$$\tan(a-b) = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}}.$$

از اینجا اتحاد زیر به دست می آید

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}. \quad (۷)$$

اگر در فرمول (۷)، $a = 0$ فرض شود، داریم

$$\tan(0-b) = \frac{\tan 0 - \tan b}{1 + \tan 0 \tan b}.$$

چون $\tan 0 = 0$ ، از معادله فوق نتیجه می شود که

$$\tan(-b) = -\tan b. \quad (۸)$$

لذا تانژانت، يك تابع فرد است.

اگر در فرمول (۷)، $b = -b$ فرض شود، داریم

$$\tan(a - (-b)) = \frac{\tan a - \tan(-b)}{1 + \tan a \tan(-b)}.$$

و اگر به جای $\tan(-b)$ قرار دهیم $-\tan b$ ، اتحاد زیر به دست می آید

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}. \quad (۹)$$

مشتقهای توابع تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی، و کسکانتی را می توان از مشتقهای توابع سینوسی و کسینوسی و قضایای مربوط به مشتق گیری به دست آورد.

$$\begin{aligned} D_x(\tan x) &= D_x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot D_x(\sin x) - \sin x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
 &= \sec^2 x. \quad (10)
 \end{aligned}$$

از (۱۰) وقاعدۀ زنجیری، قضیۀ زیر به دست می آید.

۲.۱۰.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\tan u) = \sec^2 u D_x u.$$

مثال ۱ اگر $f(x) = 2 \tan(x/2) - x$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حل $f'(x) = 2(\sec^2 x/2)(1/2) - 1 = (\sec^2 x/2) - 1$ با استفاده از اتحاد (۲)، این را به صورت زیر ساده می کنیم

$$\blacktriangle f'(x) = \tan^2 \frac{1}{2} x.$$

مشتق تابع کتانژانتي، با روشی شبیه مشتق تابع تانژانتي به دست می آید. نتیجه چنین است

$$D_x(\cot x) = -\csc^2 x. \quad (11)$$

استنتاج (۱۱) را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۱ را ببینید).
قضیه زیر از (۱۱) وقاعدۀ زنجیری نتیجه می شود.

۳.۱۰.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\cot u) = -\csc^2 u D_x u.$$

حال به محاسبۀ مشتق تابع سکانتی می پردازیم.

$$\begin{aligned}
 D_x(\sec x) &= D_x[(\cos x)^{-1}] \\
 &= -1(\cos x)^{-2}(-\sin x) \\
 &= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x \\
 &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \sec x \tan x. \quad (12)
 \end{aligned}$$

با استفاده از (۱۲) وقاعدۀ زنجیری، قضیۀ زیر به دست می آید.

۴.۱۰۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\sec u) = \sec u \tan u D_x u .$$

مثال ۲ اگر $f(x) = \sec^4 3x$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \sec^3 3x \cdot D_x(\sec 3x) \\ &= 4 \sec^3 3x (\sec 3x \tan 3x)(3) \\ &= 12 \sec^4 3x \tan 3x . \end{aligned}$$

به روشی شبیه روش مربوط به سکانت می توان به فرمول مشتق تابع کسکانتی رسید، و نتیجه زیر را به دست آورد

$$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x . \quad (13)$$

استنتاج (۱۳) را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرین ۲ را ببینید). از (۱۳) و قاعدۀ زنجیری، قضیۀ زیر نتیجه می شود.

۵.۱۰۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\csc u) = -\csc u \cot u D_x u .$$

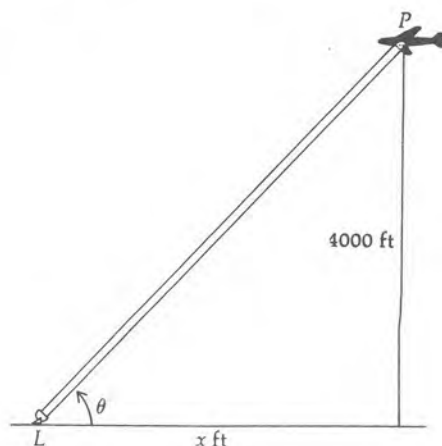
مثال ۳ اگر $f(x) = \cot x \csc x$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cot x \cdot D_x(\csc x) + \csc x \cdot D_x(\cot x) \\ &= \cot x (-\csc x \cot x) + \csc x (-\csc^2 x) \\ &= -\csc x \cot^2 x - \csc^3 x . \end{aligned}$$

مثال ۴ هواپیمایی در ارتفاع ۴۰۰۰ فوتی با سرعت ۵۰۰ فوت در ثانیه به طرف غرب در حال پرواز است. هواپیما و یک چراغ جستجو که روی زمین است يك صفحه قائم تشکیل می دهند. اگر نور مجبور باشد در این صفحه باقی بماند، وقتی که هواپیما در شرق چراغ جستجو است، و تصویر قائم آن در فاصلۀ ۲۰۰۰ فوتی چراغ است، چراغ با چه تندی می چرخد؟

حل به شکل ۱۰.۱۰۹ رجوع کنید. چراغ جستجو در نقطۀ L ، و هواپیما در لحظۀ



شکل ۱۰۱۰۹

خاصی از زمان در نقطه P است.

فرض کنید t زمان بر حسب ثانیه، x فاصله چراغ تا تصویر قائم هواپیما که در شرق چراغ است، در ثانیه t م بر حسب فوت، و θ رادیان زاویه فراز هواپیما از چراغ جستجو در ثانیه t م باشد.

$D_t x = -500$ به ما داده شده است، و می‌خواهیم وقتی که $x = 2000$ ، $D_t \theta$ را بیابیم.

$$\tan \theta = \frac{4000}{x} \quad (14)$$

اگر از دوطرف (۱۴) نسبت به t مشتق بگیریم، به دست می‌آید

$$\sec^2 \theta D_t \theta = -\frac{4000}{x^2} D_t x.$$

در معادله بالا از $D_t x = -500$ استفاده می‌کنیم، دوطرف را بر $\sec^2 \theta$ تقسیم می‌نماییم و نتیجه می‌گیریم که

$$D_t \theta = \frac{2000000}{x^2 \sec^2 \theta}. \quad (15)$$

وقتی $x = 2000$ ، $\tan \theta = 2$. پس $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 5$. با قراردادن این مقادیر در (۱۵) می‌بینیم که وقتی $x = 2000$ ، داریم

$$D_t \theta = \frac{2000000}{4000000 (5)} = \frac{1}{10}.$$

نتیجه اینکه در لحظه مفروض، اندازه زاویه با آهنگ $1/10$ رادیان بر ثانیه در حال افزایش است، و لذا چراغ جستجو به همین تندی در حال چرخش است. ▲

حال نمودار تابع تانژانتی را بررسی می‌کنیم. چون بنا به (۸)، $\tan(-x) = -\tan x$ ، نمودار نسبت به مبدأ متقارن است. علاوه بر این،

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \\ &= \frac{\sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi}{\cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi} \\ &= \frac{\sin x(-1) + \cos x(0)}{\cos x(-1) - \sin x(0)} \\ &= \frac{-\sin x}{-\cos x} \\ &= \tan x.\end{aligned}$$

و لذا بنا بر تعریف ۳.۷.۱، تابع تانژانتی تابعی تناوبی با دوره تناوب π است. تابع تانژانتی در تمام اعداد قلمروش، یعنی در مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز اعداد به صورت $(\pi/2) + n\pi$ که n عدد صحیح دلخواهی است، پیوسته است. اما

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2 + n\pi)^+} \tan x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2 + n\pi)^-} \tan x = +\infty$$

و لذا خطوط با معادلات $x = (\pi/2) + n\pi$ مجانبهای قائم نمودار هستند. اگر n عدد صحیح دلخواهی باشد، $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = 1$ یا -1 است؛ و لذا $\tan n\pi = 0$. بنابراین نمودار، محور x ها را در نقاط $(n\pi, 0)$ قطع می‌کند. برای یافتن اکسترمهای نسبی تابع تانژانتی و نقاط عطف نمودارش، مشتقهای اول و دوم را بررسی می‌کنیم. پس اگر $f(x) = \tan x$ ، آنگاه $f'(x) = \sec^2 x$ و $f''(x) = 2 \sec^2 x \tan x$.

قراری می‌دهیم $f'(x) = 0$ و به دست می‌آوریم $\sec^2 x = 0$. چون به ازای هر x ، $\sec^2 x \geq 1$ ، نتیجه می‌گیریم که اکسترم نسبی وجود ندارد. می‌نویسیم $f''(x) = 0$ و به دست می‌آوریم $2 \sec^2 x \tan x = 0$. چون $\sec^2 x \neq 0$ پس $\tan x = 0$. لذا $f''(x) = 0$ وقتی که $x = n\pi$ و n یک عدد صحیح دلخواه باشد. با این مقادیر x ، $f'''(x)$ تغییر علامت می‌دهد؛ پس نقاط عطف نقاط $(n\pi, 0)$ ، یعنی همان نقاط تقاطع نمودار با محور x ها، هستند. چون $f'(n\pi) = \sec^2 n\pi = 1$ ، ضریب زاویه‌های مماسهای عطفی برابر با ۱ هستند.

حال بازه باز $(-\pi/2, \pi/2)$ را که روی آن در همه جا تابع تانژانتی تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. چون به ازای تمام مقادیر x ، $f'(x) = \sec^2 x > 0$ ، نتیجه می‌گیریم که برای بازه تانژانت تابعی صعودی است. وقتی که $-\pi/2 < x < 0$ ، $f''(x) = 2\sec^2 x \tan x < 0$ ؛ پس بر بازه باز $(-\pi/2, 0)$ تقعر نمودار رو به پایین است. وقتی که $0 < x < \pi/2$ ، $f''(x) > 0$ ؛ لذا بر بازه باز $(0, \pi/2)$ تقعر نمودار رو به بالاست.

جدول ۱۰۱.۹

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$y = \tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.58$	1	$\sqrt{3} \approx 1.73$

در جدول ۱۰۱.۹ چند مقدار متناظر x و y که در معادله $y = \tan x$ صدق می‌کنند داده شده است. با رسم نقاطی که مختصاتشان زوجهای عددی (x, y) هستند و با استفاده از اطلاعات فوق می‌توان نمودار تابع تانژانتی را رسم کرد. این نمودار در شکل ۲۰۱.۹ نشان داده شده است.

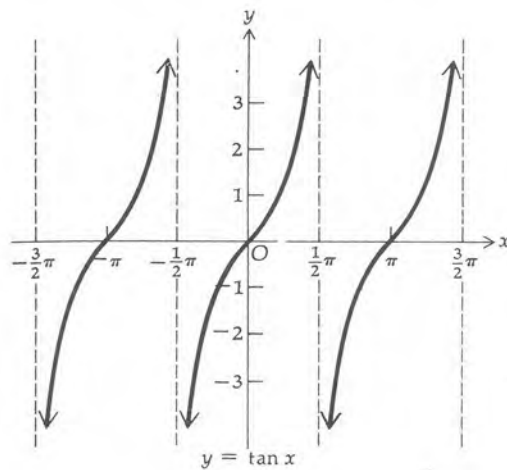
نمودار تابع کتانژانتی را می‌توان از نمودار تابع تانژانتی به دست آورد. برای این کار اتحادی که هم‌اکنون اثبات می‌شود مورد نیاز است.

$$\begin{aligned}
 \tan\left(\frac{1}{4}\pi + x\right) &= \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)}{\cos\left(\frac{1}{4}\pi + x\right)} \\
 &= \frac{\sin \frac{1}{4}\pi \cos x + \cos \frac{1}{4}\pi \sin x}{\cos \frac{1}{4}\pi \cos x - \sin \frac{1}{4}\pi \sin x} \\
 &= \frac{(1) \cos x + (0) \sin x}{(0) \cos x - (1) \sin x} \\
 &= \frac{\cos x}{-\sin x} \\
 &= -\cot x
 \end{aligned}$$

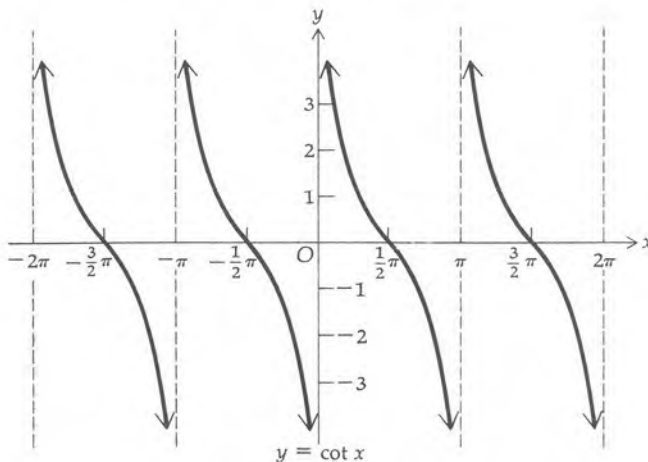
بنابراین

$$\cot x = -\tan\left(\frac{1}{4}\pi + x\right).$$

از اتحاد فوق نتیجه می‌شود که نمودار تابع کتانژانتی را می‌توان با رسم نمودار تابع تانژانتی، انتقال محورهای به اندازه $\pi/2$ واحد به سمت راست، و سپس پیدا کردن انعکاس نمودار نسبت به محور x ها، به دست آورد. نمودار تابع کتانژانتی در شکل ۳۰۱۰۹ رسم شده است.



شکل ۲۰۱۰۹



شکل ۳۰۱۰۹

تابع سکانتی تابعی تناوبی با دوره تناوب 2π است، زیرا

$$\sec(x + 2\pi) = \frac{1}{\cos(x + 2\pi)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x.$$

قلمرو تابع سکانتی مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز اعداد به صورت $(\pi/2) + n\pi$ ، و تابع بر قلمروش پیوسته است. چون $\lim_{x \rightarrow \pi/2 + n\pi} \sec x = \pm \infty$ ، خطوط $x = (\pi/2) + n\pi$

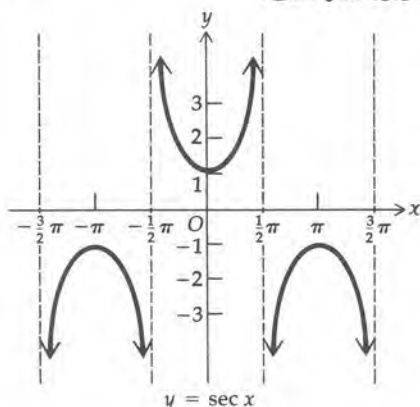
مجانبه‌ای قائم نمودار تابع سکانتی هستند. نمودار با محور x ها هیچ نقطه تقاطعی ندارد زیرا $\sec x$ هرگز صفر نمی‌شود. تابع سکانتی زوج است، زیرا

$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

و لذا نمودار تابع سکانتی نسبت به محور y ها متقارن است.

اگر $f(x) = \sec x$ ، نتیجه می‌گیریم که $f'(x) = \sec x \tan x$ و $f''(x) = \sec x (2 \tan^2 x + 1)$. می‌نویسیم $f'(x) = 0$ و به دست می‌آوریم $\sec x \tan x = 0$. چون $\sec x \neq 0$ ، وقتی که $\tan x = 0$ ؛ و این موقعی برقرار است که $x = n\pi$ و n عدد صحیح دلخواهی باشد. همچنین $f''(n\pi) = \sec n\pi [2 \tan^2 n\pi + 1]$. اگر n يك عدد صحیح زوج باشد، $f''(n\pi) = 1 \cdot (0 + 1) = 1$ ؛ و اگر n يك عدد صحیح فرد باشد، $f''(n\pi) = (-1) \cdot (0 + 1) = -1$. بنابراین وقتی $x = n\pi$ و n يك عدد صحیح زوج باشد، f يك مقدار مینیمم نسبی دارد؛ و وقتی $x = n\pi$ و n يك عدد صحیح فرد باشد، f يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد. هیچ نقطه عطفی وجود ندارد زیرا به ازای هر x ، $f''(x) \neq 0$.

با استفاده از اطلاعات فوق و رسم چند نقطه، نمودار تابع سکانتی به دست می‌آید که در شکل ۴.۱.۹ نشان داده شده است.



شکل ۴.۱.۹

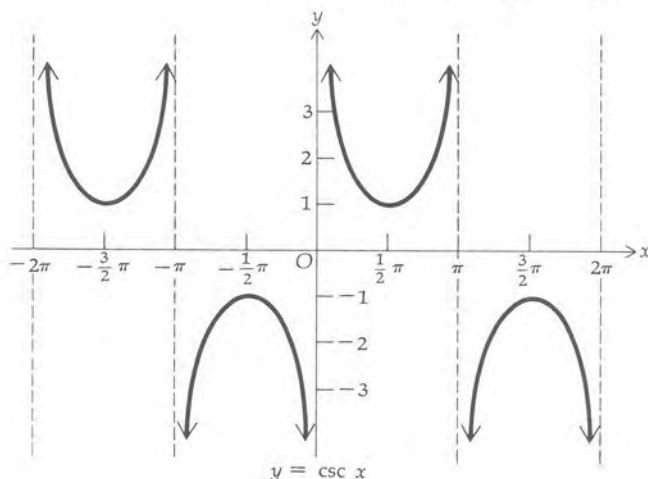
چون

$$\sec\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{-\sin x} = -\csc x.$$

پس

$$\csc x = -\sec\left(x + \frac{1}{2}\pi\right).$$

لذا نمودار تابع کسکانتی با رسم نمودار تابع سکانتی، انتقال محور y ها به اندازه $\pi/2$ واحد به سمت راست، و سپس پیدا کردن انعکاس نمودار نسبت به محور x ها، به دست می آید. نمودار تابع کسکانتی در شکل ۵.۱.۹ نشان داده است.



شکل ۵.۱.۹

تمرینهای ۱.۹

۱. فرمول $D_x(\cot x) = -\csc^2 x$ را به دست آورید.

۲. فرمول $D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$ را به دست آورید.

در تمرینهای ۳ تا ۳۰، مشتق تابع مفروض را بیابید.

۴. $g(x) = 3 \cot 4x$

۳. $f(x) = \csc 4x$

۶. $f(x) = \sqrt{\sec x}$

۵. $h(x) = \tan^2 x$

۸. $g(x) = \ln \csc^2 x$

۷. $f(x) = \sec x^2$

$$f(w) = r \tan(w^r - 1) \cdot 10$$

$$g(x) = r \cot e^x \cdot 9$$

$$h(x) = \ln \left| \cot \frac{1}{r} x \right| \cdot 12$$

$$F(x) = \ln |\sec r x| \cdot 11$$

$$f(x) = \sin x \tan x \cdot 13$$

$$G(r) = \sqrt{\cot r r} \cdot 13$$

$$h(t) = \sec^r r t - \tan^r r t \cdot 16$$

$$g(x) = \sec^r x \tan^r x \cdot 15$$

$$f(x) = e^{\sec \Delta x} \cdot 18$$

$$f(t) = \csc(t^r + 1) \cdot 17$$

$$g(t) = r \sec \sqrt{t} \cdot 20$$

$$f(x) = r^{\csc r x} \cdot 19$$

$$F(x) = \frac{\cot^r r x}{1 + x^r} \cdot 22$$

$$H(t) = \cot^r t - \csc^r t \cdot 21$$

$$f(x) = \frac{1}{r} \sec^r r x - \sec r x \cdot 24$$

$$f(x) = \ln |\sec \Delta x + \tan \Delta x| \cdot 23$$

$$g(x) = r^x \sec x \cdot 26$$

$$g(z) = \cot^r z \cdot \csc z \cdot 25$$

$$G(x) = (\tan x)^r; \tan x > 0 \cdot 28$$

$$f(x) = \frac{\tan x}{\cos x - r} \cdot 27$$

$$G(x) = \log_{10} |\csc x - \cot x| \cdot 30 \quad F(x) = (\sin x)^{\tan x}; \sin x > 0 \cdot 29$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۳، $D_x y$ را با استفاده از مشتق‌گیری لگاریتمی بیابید.

$$y = \frac{\tan^r x}{\sqrt{1 + \sec^r x}} \cdot 32$$

$$y = \frac{\sec x \sqrt{1 - \cot^r x}}{\csc^r x} \cdot 31$$

$$y = \frac{\sec^{\Delta x} \sqrt[3]{\tan x + 1}}{\sqrt{\csc^r x - r}} \cdot 33$$

در تمرینهای ۳۴ تا ۳۸، $D_x y$ را با مشتق‌گیری ضمنی بیابید.

$$\sec^r x + \csc^r y = r \cdot 35$$

$$y = \tan(x + y) \cdot 34$$

$$\sec^r y + \cot(x - y) = \tan^r x \cdot 37$$

$$\cot xy + xy = 0 \cdot 36$$

$$\csc(x - y) + \sec(x + y) = x \cdot 38$$

در تمرینهای ۳۹ تا ۴۲، نمودار تابع مفروض را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1}{4} \sec 2x \quad .۴۰$$

$$f(x) = 3 \tan 2x \quad .۴۱$$

$$f(x) = \frac{1}{4} |\cot 2x| \quad .۴۲$$

$$f(x) = 2 \left| \csc \frac{1}{4}x \right| \quad .۴۱$$

۴۳. معادله خط مماس بر منحنی $y = \sec x$ در نقطه $(\pi/4, \sqrt{2})$ را بیابید.

۴۴. معادلات خط مماس و خط قائم بر نمودار $f(x) = \sec 4x \cdot \csc 2x$ در نقطه $(\pi/4, -1)$ را بیابید.

۴۵. هواپیمایی با سرعت ثابتی در ارتفاع ۱۰۰۰۰ فوتی بر خط مستقیم، که درست بالای سرب یک ناظر روی زمین است، در حال پرواز است. در لحظه مفروضی ناظر متوجه می شود که زاویه فراز هواپیما $\pi/3$ رادیان است و با آهنگ $1/60$ رادیان بر ثانیه در حال افزایش است. سرعت هواپیما را بیابید.

۴۶. آنتن راداری که بزرگ کشتی نصب شده است در هر دقیقه ۳۲ دور می چرخد. کشتی در ۴ میلی ساحل مستقیمی قرار دارد. وقتی که پرتو رادار با ساحل یک زاویه 45° می سازد، پرتو در امتداد خط ساحل با چه تندی در حال حرکت است؟

۴۷. تیرآهنی که ۲۷ فوت طول دارد به طور افقی از گذرگاهی که ۸ فوت پهنا دارد به راهرویی که عمود بر گذرگاه است برده می شود. برای اینکه تیرآهن از گوشه عبور کند پهنای راهرو چقدر باید باشد؟ از پهنای افقی تیرآهن صرف نظر کنید.

۴۸. اگر پهنای دو راهرو عمود بر هم ۱۰ فوت و ۱۵ فوت باشند، طول بلندترین تیرآهنی را که می توان به طور افقی از گوشه عبور داد بیابید. از پهنای افقی تیرآهن صرف نظر کنید.

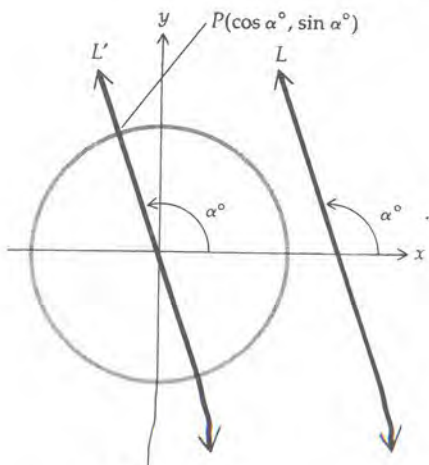
۲.۹ کاربرد ی از تابع تانژانتی در محاسبه ضریب زاویه یک خط

در ارتباط با ضریب زاویه یک خط مستقیم می توان از تابع تانژانتی استفاده کرد. ابتدا زاویه میل یک خط را تعریف می کنیم.

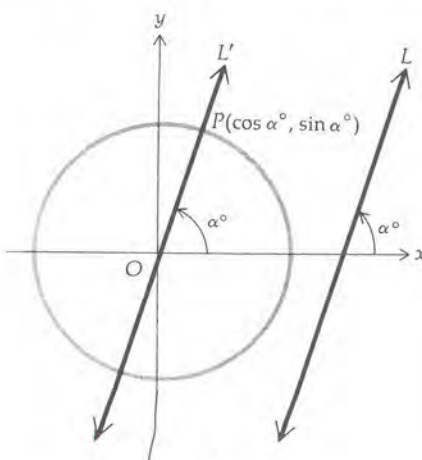
۲.۹.۱ تعریف زاویه میل خطی که موازی با محور x ها نباشد، کوچکترین زاویه ای است که از قسمت مثبت محور x ها تا خط مفروض، در خلاف جهت ساعت، اندازه گرفته می شود. اندازه زاویه میل یک خط موازی با محور x ها برابر با صفر تعریف می شود.

اگر α اندازه درجه ای زاویه میل یک خط باشد، α می تواند هر عددی از بازه

باشد. شکل ۱.۲.۹ خطی مانند L را نشان می‌دهد که در مورد آن $0 \leq \alpha < 180$ و شکل ۲.۲.۹ خطی را نشان می‌دهد که برای آن $0 < \alpha < 90$.



شکل ۲.۲.۹



شکل ۱.۲.۹

۲.۲.۹ قضیه اگر α اندازه درجه‌ای زاویه میل خطی چون L ، که موازی با محور y ها نیست، باشد، آنگاه ضریب زاویه L ، یعنی m ، با فرمول زیر به دست می‌آید

$$m = \tan \alpha^\circ.$$

اثبات به شکل‌های ۱.۲.۹ و ۲.۲.۹ رجوع کنید که خط L مفروضی را نشان می‌دهند که اندازه درجه‌ای زاویه میل آن α ، و ضریب زاویه‌اش m است. خط L' نیز که از مبدأ می‌گذرد موازی با L است ضریب زاویه‌اش m و اندازه درجه‌ای زاویه میلش α است. نقطه $P(\cos \alpha^\circ, \sin \alpha^\circ)$ ، که محل تقاطع خط L و دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ است، بر L' قرار دارد و چون نقطه $(0, 0)$ نیز بر L' قرار دارد از تعریف ۱.۴.۱ نتیجه می‌گیریم که

$$\square \quad m = \frac{\sin \alpha^\circ - 0}{\cos \alpha^\circ - 0} = \frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} = \tan \alpha^\circ.$$

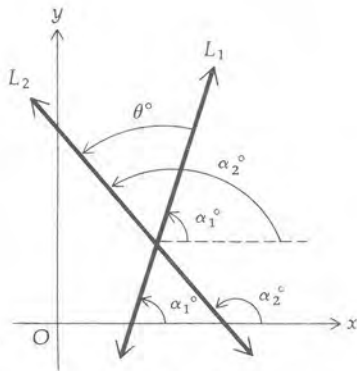
اگر خط L موازی با محور y ها باشد، اندازه زاویه میل L بر حسب درجه، 90 است و $\tan 90^\circ$ وجود ندارد. این نکته با این واقعیت که خط قائم، ضریب زاویه ندارد سازگار است.

با استفاده از قضیه ۲.۲.۹ می‌توان فرمولی برای یافتن زاویه بین دو خط متقاطع غیر قائم به دست آورد. اگر دو خط متقاطع باشند، در نقطه تقاطع آنها دو زاویه مکمل تشکیل می‌شوند. برای تمیز این دو زاویه فرض کنید اندازه درجه‌ای زاویه میل دو خط L_1 و L_2

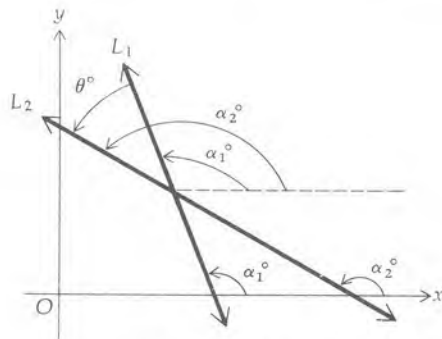
به ترتیب α_1 و α_2 باشند و α_2 بزرگتر از α_1 باشد. اندازه درجه‌ای زاویه بین این دو خط را با

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم. اگر L_1 و L_2 متوازی باشند، آنگاه $\alpha_1 = \alpha_2$ و اندازه زاویه بین دو خط بر حسب درجه ۰ است. پس اگر L_1 و L_2 دو خط متمایز باشند، $0^\circ < \theta < 180^\circ$. به شکل‌های ۳۰۲.۹ و ۴۰۲.۹ رجوع کنید.



شکل ۴۰۲.۹



شکل ۳۰۲.۹

وقتی که ضریب زاویه‌های L_1 و L_2 معلوم باشند با کمک قضیه زیر می‌توانیم θ را بیابیم.

۳۰۲.۹ قضیه فرض کنید L_1 و L_2 (با زاویه میل بزرگتر) دو خط غیر قائم باشند که برهم عمود نیستند ولی یکدیگر را قطع می‌کنند. آنگاه با فرض اینکه m_1 ضریب زاویه L_1 ، m_2 ضریب زاویه L_2 ، و θ اندازه درجه‌ای زاویه بین L_1 و L_2 باشند، داریم

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

اثبات اگر α_1 و α_2 به ترتیب اندازه‌های زوایای میل L_1 و L_2 بر حسب درجه باشند، از معادله (۱)،

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

و لذا

$$\tan \theta = \tan (\alpha_2 - \alpha_1).$$

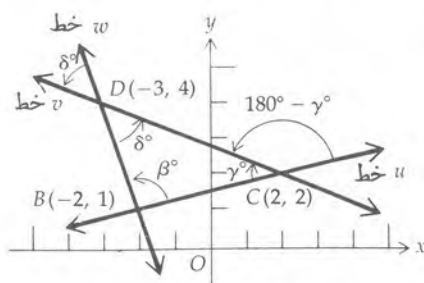
فرمول (۷) از بخش ۱۰.۹ را در مورد طرف راست تساوی فوق به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\tan \theta^\circ = \frac{\tan \alpha_2^\circ - \tan \alpha_1^\circ}{1 + \tan \alpha_1^\circ \tan \alpha_2^\circ}$$

$$\square \quad = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad (2)$$

مثال ۱ اندازه‌های زوایای داخلی مثلث با رئوس $C(2, 2)$ ، $B(-2, 1)$ ، $D(-3, 4)$ را به نزدیکترین درجه بیابید.

حل فرض کنید β ، γ ، و δ اندازه‌های درجه‌ای زوایای داخلی، به ترتیب، در رئوس B ، C و D باشند. فرض کنید u خط مار بر نقاط B و C ، v خط مار بر نقاط C و D ، و w خط مار بر نقاط D و B را نمایش دهند؛ و ضریب زوایه‌های متناظر آنها m_u ، m_v ، و m_w باشند. به شکل ۵.۲.۹ رجوع کنید.



شکل ۵.۲.۹

با استفاده از فرمول ضریب زاویه خط مار بر دو نقطه مفروض داریم

$$m_u = \frac{1}{4} \quad m_v = -\frac{2}{5} \quad m_w = -3.$$

برای تعیین β ، ملاحظه کنید که زاویه میل خط w از زاویه میل خط u بیشتر است و لذا در فرمول (۲)، $m_1 = m_u = 1/4$ و $m_2 = m_w = -3$. اندازه درجه‌ای زاویه بین خطوط u و w ، β است. پس، بنا بر قضیه ۳.۲.۹،

$$\tan \beta^\circ = \frac{-3 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}(-3)} = -13.$$

بنابراین، $\beta = 94$.

در تعیین γ ، چون زاویهٔ میل خط v از زاویهٔ میل خط u بیشتر است،
 $m_v = m_u = 1/4$ و $m_\gamma = m_v = -2/5$. اندازهٔ زاویهٔ بین خطوط u و v بر حسب
 درجه، بنا به تعریف، $\gamma - 180$ است. از قضیهٔ ۳۰.۲.۹،

$$\tan(180^\circ - \gamma^\circ) = \frac{-\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{5}\right)} = -\frac{13}{18}.$$

پس

$$\begin{aligned} 180 - \gamma &= 144 \\ \gamma &= 36. \end{aligned}$$

در تعیین δ ، چون زاویهٔ میل خط v بزرگتر از زاویهٔ میل خط w است،
 $m_v = m_w = -3$ و $m_\delta = m_v = -2/5$. اندازهٔ زاویهٔ بین خطوط v و w بر حسب
 درجه δ است. از قضیهٔ ۳۰.۲.۹،

$$\tan \delta^\circ = \frac{-\frac{2}{5} - (-3)}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)(-3)} = \frac{13}{11}.$$

بنابراین، $\delta = 50$.

مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث بر حسب درجه باید 180 باشد. با استفاده از این حکم
 نتایج حاصل را می‌آزماییم

$$\triangle \quad \beta + \gamma + \delta = 94 + 36 + 50 = 180.$$

۴.۲.۹ تعریف زاویهٔ بین دو منحنی در يك نقطهٔ تقاطع آنها، زاویهٔ بین خطوط مماس
 بر منحنیها در آن نقطه است.

مثال ۲ مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ بین منحنیهای $y = x^2 - 2$ و $y = -2x^2 + 10$ در
 نقاط تقاطعشان، به نزدیکترین درجه.

حل اگر دو معادله را با هم حل کنیم نقاط $(2, 2)$ و $(-2, 2)$ به عنوان نقاط
 تقاطع به دست می‌آیند. در شکل ۴.۲.۹ دو منحنی مفروض، و نیز خطوط مماس بر یکی از
 نقاط تقاطع آنها، نشان داده شده‌اند. به خاطر تقارن دو منحنی نسبت به محور y ها، اندازهٔ
 زاویهٔ بین دو منحنی در $(2, 2)$ مساوی با اندازهٔ زاویهٔ بین دو منحنی در نقطهٔ $(-2, 2)$
 است. فرض کنید نقطهٔ $(2, 2)$ با P ، خط مماس بر $y = x^2 - 2$ در P با T_1 و خط

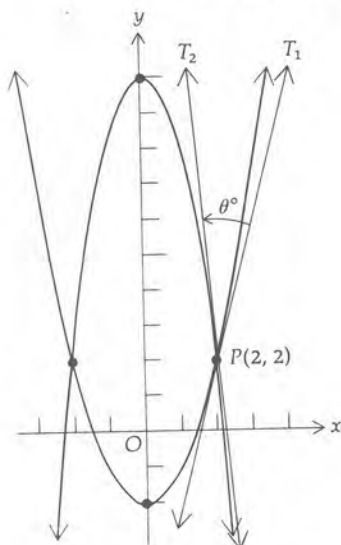
مماس بر $y = -2x^2 + 10$ در P با T_2 نمایش داده شوند. زاویهٔ میل خط T_2 از زاویهٔ میل خط T_1 بزرگتر است. پس اگر θ اندازهٔ زاویهٔ بین T_2 و T_1 برحسب درجه باشد،

$$\tan \theta^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

که در آن m_2 ضریب زاویهٔ T_2 و m_1 ضریب زاویهٔ T_1 است. از معادلهٔ $y = x^2 - 2$ داریم $D_x y = 2x$ ، لذا $m_1 = 4$. از معادلهٔ $y = -2x^2 + 10$ داریم $D_x y = -4x$ ؛ پس $m_2 = -8$ در نتیجه

$$\tan \theta^\circ = \frac{-8 - 4}{1 + (4)(-8)} = \frac{12}{31} \approx 0.387.$$

بنابراین، θ° به نزدیکترین درجه برابر است با 21° .



شکل ۶.۲.۹

تمرینهای ۲.۹

۱. مطلوب است $\tan \theta^\circ$ وقتی که θ° اندازهٔ زاویهٔ بین خطوطی است که ضریب زاویه‌هایشان: (الف) ۱ و $1/3$ ؛ (ب) $5/3$ و -5 ؛ (پ) $-2/3$ و $1/2$ (ت) $1/3$ و $-1/5$ ؛ (ث) $4/3$ و $-5/2$ هستند.
۲. اندازهٔ زاویهٔ بین خطوطی که ضریب زاویه‌هایشان: (الف) 5 و $-7/9$ ؛ (ب) -3 و 2 ؛ (پ) $3/2$ و $1/4$ ؛ (ت) $3/2$ و $-1/4$ هستند، به نزدیکترین درجه چیست؟

۳. اندازه‌های زوایای داخلی مثلث تشکیل شده از خطوط با معادلات $2x + y - 6 = 0$ ، $3x - y - 4 = 0$ و $3x + 4y + 8 = 0$ را به نزدیکترین درجه پیدا کنید.
۴. اندازه‌های زوایای داخلی مثلث با رئوس $(1, 0)$ ، $(-3, 2)$ و $(2, 3)$ را به نزدیکترین درجه بیابید.
۵. معادله‌ای برای يك خط مار بر نقطه $(-1, 4)$ بیابید که با خط به معادله $2x + y - 5 = 0$ يك زاویه به اندازه $\pi/4$ رادیان بسازد (دو جواب).
۶. معادله‌ای برای يك خط مار بر نقطه $(-3, -2)$ بیابید که با خط به معادله $3x - 2y - 7 = 0$ يك زاویه به اندازه $\pi/3$ رادیان بسازد.
۷. با استفاده از قضیه ۳.۲.۹ ثابت کنید که مثلث با رئوس $(2, 3)$ ، $(6, 2)$ و $(3, -1)$ متساوی الساقین است.
۸. با استفاده از قضیه ۳.۲.۹ ثابت کنید که مثلث با رئوس $(-3, 0)$ ، $(-1, 0)$ و $(-2, \sqrt{3})$ متساوی الاضلاع است.
۹. ضریب زاویه نیمساز زاویه A از مثلث با رئوس $A(4, 1)$ ، $B(6, 5)$ و $C(-1, 8)$ را بیابید.
۱۰. ضریب زاویه نیمساز زاویه A از مثلث با رئوس $A(-3, 5)$ ، $B(2, -4)$ و $C(-1, 7)$ را بیابید.
۱۱. فرض کنید A ، B ، و C رئوس يك مثلث مایل (بدون زاویه قائمه) باشند، و فرض کنید α ، β ، و γ به ترتیب اندازه‌های زوایای داخلی در رئوس A ، B ، و C بر حسب رادیان باشند. ثابت کنید که $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$ (داهنمایی: نخست نشان دهید که $\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma$).
۱۲. تانژانتهای اندازه‌های زوایای داخلی مثلث با رئوس $(-3, -2)$ ، $(-6, 3)$ ، و $(5, 1)$ را بیابید، و با استفاده از نتیجه تمرین ۱۱ جواب خود را بیازمایید.
۱۳. نقاط تقاطع نمودارهای توابع سینوسی و کسینوسی را بیابید، و اندازه زاویه بین خطوط مماس بر این نمودارها در نقاط تقاطع را محاسبه کنید.
۱۴. مطلوب است اندازه زاویه بین منحنیهای $y = 2x^2 - 11$ و $y = x^2 - 2$ در نقاط تقاطعشان، به نزدیکترین مضرب ۱۰ دقیقه.

۱۵. اگر θ° اندازه زاویه بین منحنیهای $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ، با شرط $a > 1$ ، در نقطه تقاطعشان باشد، مطلوب است $\tan \theta$.

۱۶. به ازای چه مقدار از a ، منحنیهای تمرین ۱۵ متعامند؟

۳.۹ انتگرالهای متضمن تانژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت

فرمولی برای انتگرال نامعین تابع تانژانتی به صورت زیر به دست می آید. چون

$$\int \tan u \, du = \int \frac{\sin u}{\cos u} \, du$$

فرض می کنیم $v = \cos u$ ؛ آنگاه $dv = -\sin u \, du$ ، و داریم

$$\int \tan u \, du = - \int \frac{dv}{v} = -\ln|v| + C.$$

پس

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C. \quad (1)$$

چون $-\ln|\cos u| = \ln|(\cos u)^{-1}| = \ln|\sec u|$ ، قضیه زیر به دست می آید.

$$\int \tan u \, du = \ln|\sec u| + C \quad \text{قضیه ۱.۳.۹}$$

○ نمونه ۱

$$\int \tan 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \tan 3x (3 \, dx)$$

$$\quad = \frac{1}{3} \ln|\sec 3x| + C.$$

با روشی مشابه با اثبات قضیه ۱.۳.۹، قضیه مربوط به انتگرال نامعین تابع کتانژانتی به اثبات می رسد. تمرین ۴۱ را ببینید.

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C \quad \text{قضیه ۲.۳.۹}$$

برای به دست آوردن فرمول مربوط به $\int \sec u \, du$ ، صورت و مخرج انتگرال را

در $(\sec u + \tan u)$ ضرب می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\int \sec u \, du &= \int \frac{\sec u (\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} \, du \\ &= \int \frac{(\sec^2 u + \sec u \tan u)}{\sec u + \tan u} \, du.\end{aligned}$$

فرض کنید $v = \sec u + \tan u$. آنگاه $dv = (\sec u \tan u + \sec^2 u) \, du$ ؛ لذا

$$\int \sec u \, du = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C.$$

پس، قضیه زیر به اثبات رسیده است.

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \quad \text{قضیه ۳.۳.۹}$$

به منظور یافتن فرمولی برای $\int \csc u \, du$ ، اول صورت و مخارج انتگران را در $(\csc u - \cot u)$ ضرب، و سپس طبق روش فوق محاسبه را ادامه می‌دهیم. کسب نتیجه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۴۲ را ببینید). این فرمول در قضیه زیر آمده است.

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C \quad \text{قضیه ۴.۳.۹}$$

○ نمونه ۲

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int \csc^2 x (2 \, dx)$$

$$\circ \quad = \frac{1}{2} \ln|\csc^2 x - \cot^2 x| + C.$$

فرمولهای انتگرال نامعین در دو قضیه بعد، بلافاصله از فرمولهای مشتق‌گیری متناظر نتیجه می‌شوند.

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C \quad \text{قضیه ۵.۳.۹}$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad \text{قضیه ۶.۳.۹}$$

بسیاری از انتگرالهایی را که متضمن توانهایی از تانژانت و سکانت هستند، می‌توان با به‌کار بردن این دو قضیه، و اتحاد داده شده توسط فرمول (۲) از بخش ۱.۹ که عبارت است از

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u \quad (۲)$$

به‌دست آورد.

قضایای مشابهی نیز در مورد کتانژانت و کسکانت داریم.

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C \quad \text{قضیه ۷.۳.۹}$$

$$\square \quad D_u(-\cot u) = -(-\csc^2 u) = \csc^2 u \quad \text{اثبات}$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \quad \text{قضیه ۸.۳.۹}$$

$$\square \quad D_u(-\csc u) = -(-\csc u \cot u) = \csc u \cot u \quad \text{اثبات}$$

○ نمونه ۳

$$\int \frac{2 + 3 \cos u}{\sin^2 u} \, du = 2 \int \frac{1}{\sin^2 u} \, du + 3 \int \frac{1}{\sin u} \cdot \frac{\cos u}{\sin u} \, du$$

$$= 2 \int \csc^2 u \, du + 3 \int \csc u \cot u \, du$$

$$\circ \quad = -2 \cot u - 3 \csc u + C.$$

فرمول (۳) از بخش ۱.۹، اتحاد زیر است

$$1 + \cot^2 u = \csc^2 u \quad (۳)$$

برای محاسبه انتگرالهایی به‌صورت

$$\int \tan^m u \sec^n u \, du$$

از قضایای ۵.۳.۹ و ۶.۳.۹ و فرمول (۲) استفاده می‌شود؛ و برای محاسبه انتگرالهایی به‌صورت

$$\int \cot^m u \csc^n u du$$

از قضایای ۷.۳.۹ و ۸.۳.۹ و فرمول (۳) استفاده می‌شود. m و n اعداد صحیح مثبت اند برای اثبات چندین حالت در نظر گرفته می‌شوند.

حالت ۱: $\int \tan^n u du$ یا $\int \cot^n u du$ ، که در آن n يك عدد صحیح مثبت است. می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\tan^n u &= \tan^{n-1} u \tan^1 u \\ &= \tan^{n-1} u (\sec^2 u - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot^n u &= \cot^{n-1} u \cot^1 u \\ &= \cot^{n-1} u (\csc^2 u - 1).\end{aligned}$$

مثال ۱ مطلوب است $\int \tan^3 x dx$.

حل

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \tan x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

▲

مثال ۲ مطلوب است $\int \cot^3 x dx$.

حل

$$\begin{aligned}\int \cot^3 x dx &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) dx \\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx \\ &= \frac{1}{9} (-\cot^3 x) - \int (\csc^2 x - 1) dx\end{aligned}$$

$$\triangle = -\frac{1}{9} \cot^3 x + \frac{1}{3} \cot x + x + C.$$

حالت ۲: $\int \sec^n u \, du$ یا $\int \csc^n u \, du$ ، که در آن n يك عدد صحيح زوج مثبت است.

می نویسیم

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\tan^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u$$

$$\csc^n u = \csc^{n-2} u \csc^2 u = (\cot^2 u + 1)^{(n-2)/2} \csc^2 u.$$

مثال ۳ مطلوب است $\int \csc^6 x \, dx$.

حل

$$\begin{aligned} \int \csc^6 x \, dx &= \int (\cot^2 x + 1)^2 \csc^2 x \, dx \\ &= \int \cot^4 x \csc^2 x \, dx + 2 \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx + \int \csc^2 x \, dx \end{aligned}$$

$$\triangle = -\frac{1}{5} \cot^5 x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \cot x + C.$$

برای محاسبه $\int \sec^n u \, du$ یا $\int \csc^n u \, du$ وقتی که n يك عدد صحيح فرد باشد، باید از انتگرال گیری جزء به جزء استفاده کنیم که در بخش ۲.۱۰ مورد بحث قرار می گیرد.

حالت ۳: $\int \tan^m u \sec^n u \, du$ یا $\int \cot^m u \csc^n u \, du$ ، که در آن n يك عدد صحيح زوج مثبت است.
این حالت را با مثال زیر روشن می کنیم.

مثال ۴ $\int \tan^5 x \sec^4 x \, dx$ را بیابید.

حل

$$\int \tan^5 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^3 x (\tan^2 x + 1) \sec^4 x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \tan^y x \sec^x x dx + \int \tan^{\delta} x \sec^x x dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \tan^{\lambda} x + \frac{1}{\epsilon} \tan^{\epsilon} x + C.
 \end{aligned}$$

حالت ۴: $\int \tan^m u \sec^n u du$ یا $\int \cot^m u \csc^n u du$ ، که در آن m يك عدد صحيح فرد مثبت است. مثال زیر این حالت را روشن می کند.

مثال ۵ $\int \tan^{\delta} x \sec^y x dx$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned}
 \int \tan^{\delta} x \sec^y x dx &= \int \tan^{\epsilon} x \sec^{\epsilon} x \sec x \tan x dx \\
 &= \int (\sec^{\epsilon} x - 1)^{\epsilon} \sec^{\epsilon} x (\sec x \tan x dx) \\
 &= \int \sec^{\epsilon} x (\sec x \tan x dx) \\
 &\quad - \int \sec^{\lambda} x (\sec x \tan x dx) \\
 &\quad + \int \sec^{\epsilon} x (\sec x \tan x dx) \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sec^{\lambda} x - \frac{\epsilon}{\lambda} \sec^{\lambda} x + \frac{1}{\epsilon} \sec^{\epsilon} x + C.
 \end{aligned}$$

وقتی که m يك عدد صحيح زوج مثبت و n يك عدد صحيح فرد مثبت باشند، برای محاسبه $\int \tan^m u \sec^n u du$ و $\int \cot^m u \csc^n u du$ از انتگرال گیری جزء به جزء (بخش ۲۰۱۰) استفاده می کنیم.

تمرینهای ۳.۹

در تمرینهای ۱ تا ۳۴، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$\int \cot (3x+1) dx \quad .2$$

$$\int \csc^5 t dt \quad .4$$

$$\int \sec^3 y dy \quad .6$$

$$\int e^x \csc^5 e^x dx \quad .8$$

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad .10$$

$$\int \sec x \tan x \tan(\sec x) dx \quad .12$$

$$\int t^5 \sec^5 t^7 dt \quad .14$$

$$\int \csc^6 x dx \quad .16$$

$$\int \frac{\tan^5(\ln x)}{x} dx \quad .18$$

$$\int \tan^5 x \sec^7 x dx \quad .20$$

$$\int (\sec 5x + \csc 5x)^5 dx \quad .22$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} \quad .24$$

$$\int \tan^6 \frac{1}{t} t dt \quad .26$$

$$\int \frac{\tan^6 y}{\sec^5 y} dy \quad .28$$

$$\int \sec^5 5x dx \quad .1$$

$$\int \tan^2 w dw \quad .3$$

$$\int \csc^3 x \cot^3 x dx \quad .5$$

$$\int \csc^5 10t dt \quad .7$$

$$\int x \csc^5 5x^5 dx \quad .9$$

$$\int e^t \cot e^t dt \quad .11$$

$$\int y \sec^3 y^5 dy \quad .13$$

$$\int \cot^7 x dx \quad .15$$

$$\int \cot^5 r r dr \quad .17$$

$$\int \tan^6 x \sec^6 x dx \quad .19$$

$$\int \cot^5 3x \csc^6 3x dx \quad .21$$

$$\int (\tan^2 x + \cot^2 x)^5 dx \quad .23$$

$$\int \frac{2 \sin w - 1}{\cos^5 w} dw \quad .25$$

$$\int \tan^5 3x dx \quad .27$$

$$\int \frac{\csc^r x}{\cot^r x} dx \quad ۳۰ \qquad \int \frac{du}{1 + \sec \frac{1}{r} u} \quad ۳۹$$

$$\int \frac{\sin^r \pi x}{\cos^r \pi x} dx \quad ۳۲ \qquad \int \frac{\sec^r x}{\tan^r x} dx \quad ۳۱$$

$$\int \frac{\sec^r w}{\sqrt{\tan w}} dw \quad ۳۴ \qquad \int \frac{\tan^r(\ln x) \sec^r(\ln x)}{x} dx \quad ۳۳$$

در تمرینهای ۳۵ تا ۴۰، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \csc^2 x dx \quad ۳۶ \qquad \int_{\pi/16}^{\pi/12} \tan^2 x dx \quad ۳۵$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^r x}{\sec x} dx \quad ۳۸ \qquad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^r x dx \quad ۳۷$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \cot^r w dw \quad ۴۰ \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^r t \sin^r t dt \quad ۳۹$$

۴۱. فرمول $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$ را به دست آورید.

۴۲. فرمول $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$ را به دست آورید.

۴۳. ثابت کنید که $\int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$.

۴۴. ثابت کنید که اگر $n \neq 0$ ، $\int \cot x \csc^n x dx = \frac{-\csc^n x}{n} + C$.

۴۵. ثابت کنید که اگر n یک عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ باشد، داریم

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx.$$

۴۶. برای $\int \tan x \sec^n x dx$ وقتی که $n \neq 0$ ، فرمولی شبیه فرمول تمرین ۴۴ به دست آورید.

۴۷. برای $\int \cot^* x \, dx$ وقتی که n يك عدد صحيح مثبت بزرگتر از ۱ باشد فرمولی شبیه فرمول تمرین ۴۵ به دست آورید.

۴۸. انتگرال $\int \sec^2 x \tan x \, dx$ را از دوره زیر می توان محاسبه کرد:

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \tan x (\sec^2 x \, dx) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

و

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \sec x (\sec x \tan x \, dx) = \frac{1}{2} \sec^2 x + C.$$

اختلاف ظاهری دوجواب را توجیه کنید.

۴۹. طول قوس منحنی $y = \ln \csc x$ از $x = \pi/6$ تا $x = \pi/2$ را بیابید.

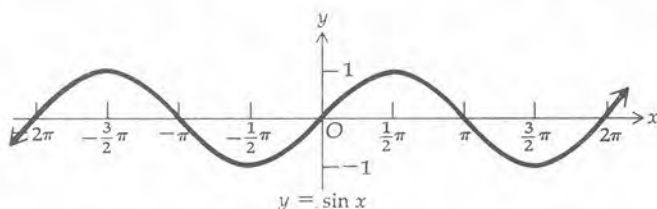
۵۰. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = \tan^2 x$ ، محور x ها، و خط $x = \pi/4$ را بیابید.

۵۱. حجم جسم دوار تولید شده ازدوران ناحیه محصور بین منحنی $y = \sec^2 x$ ، محور x ها، و خط $x = \pi/4$ حول محور x ها را بیابید.

۵۲. حجم جسم دوار تولید شده از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = 3 \csc^3 x$ ، محور x ها، و خطوط $x = \pi/6$ و $x = \pi/2$ حول محور x ها را بیابید.

۴.۹ توابع مثلثاتی معکوس

شکل ۱۰.۴.۹ نمودار تابع سینوسی را نشان می دهد. این تابع يك به يك نیست زیرا هر عدد در بردآن، مقدار تابع به ازای بیش از يك عدد از قلمرو آن است. بنابراین، تابع سینوسی معکوس ندارد. با این وجود از شکل ۱۰.۴.۹ ملاحظه کنید که سینوس بر بازه $[-\pi/2, \pi/2]$

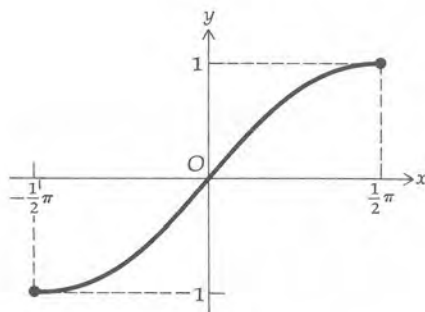


شکل ۱۰.۴.۹

صعودی است. این حکم از قضیه ۳.۵.۴ نتیجه می‌شود زیرا اگر $f(x) = \sin x$ ، آنگاه به ازای هر x در $(-\pi/2, \pi/2)$ ، $f'(x) = \cos x > 0$ ، پس، گرچه تابع سینوسی معکوس ندارد، ولی بنابر قضیه ۵.۱.۸، تابع F با تعریف زیر

$$-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi \text{ و } F(x) = \sin x \quad (۱)$$

حتماً تابع معکوس دارد. قلمرو F ، $[-\pi/2, \pi/2]$ و بردش $[-1, 1]$ است. نمودار F در شکل ۲.۴.۹ رسم شده است. معکوس تابع تعریف شده با (۱)، به تابع سینوسی معکوس موسوم است و با علامت $\sin^{-1}$ نمایش داده می‌شود. تعریف رسمی آن به صورت زیر است.



شکل ۲.۴.۹

تعریف ۱.۴.۹ تابع سینوسی معکوس که با $\sin^{-1}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

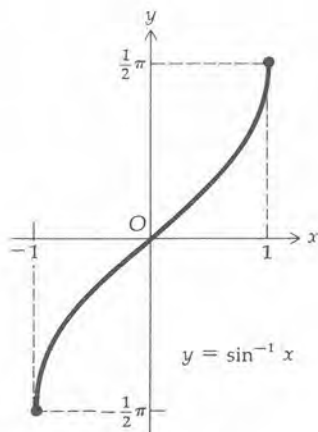
$$y = \sin^{-1} x \text{ اگر و تنها اگر } x = \sin y \text{ و } -\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$$

قلمرو $\sin^{-1}$ بازه بسته $[-1, 1]$ ، و بردش بازه بسته $[-\pi/2, \pi/2]$ است. نمودار آن در شکل ۳.۴.۹ نشان داده شده است. از تعریف ۱.۴.۹ نتیجه می‌شود که

$$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } [-1, 1] \quad (۲)$$

پس

$$\sin^{-1}(\sin y) = y \quad \text{به ازای هر } y \text{ در } [-\pi/2, \pi/2] \quad (۳)$$



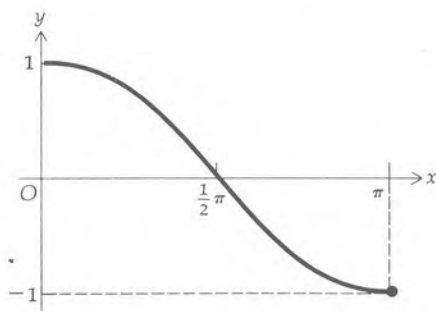
شکل ۳۰۴.۹

در (۱)، قلمرو F به بازه بسته $[-\pi/2, \pi/2]$ محدود شده است، لذا F بر قلمروش یکنواست و در نتیجه تابع معکوس دارد. اما، دوره تناوب تابع سینوسی 2π است و بر بازه‌های دیگری چون $[-5\pi/2, -3\pi/2]$ و $[3\pi/2, 5\pi/2]$ هم صعودی است. همچنین، این تابع بر بازه‌های بسته معینی نظیر $[-3\pi/2, -\pi/2]$ و $[\pi/2, 3\pi/2]$ نزولی است. می‌توانستیم هریک از این بازه‌ها را هم به‌عنوان قلمرو تابع F در معادله (۱) انتخاب کنیم. با این وجود، انتخاب بازه $[-\pi/2, \pi/2]$ معمول است زیرا این بازه بزرگترین بازه شامل ۰ است که بر آن، تابع یکنواست.

تابع کسینوسی تابع معکوس ندارد زیرا این نیز يك به يك نیست. برای تعریف تابع کسینوسی معکوس، کسینوس را به بازه‌ای که تابع روی آن یکنواست محدود می‌کنیم. بازه $[0, \pi]$ را انتخاب می‌کنیم که کسینوس بر آن نزولی است. لذا تابع G با ضابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$G(x) = \cos x \quad \text{که} \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (۴)$$

برد این تابع G ، بازه بسته $[0, \pi]$ ، و قلمروش بازه بسته $[0, \pi]$ است. نمودار G در شکل ۴۰۴.۹ نشان داده شده است. چون این تابع بر قلمروش پیوسته و نزولی است، معکوس دارد. این معکوس که با $\cos^{-1}$ نمایش داده می‌شود به تابع کسینوسی معکوس موسوم است.



شکل ۴.۴.۹

تعریف ۲.۴.۹ تابع کسینوسی معکوس که با $\cos^{-1}$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

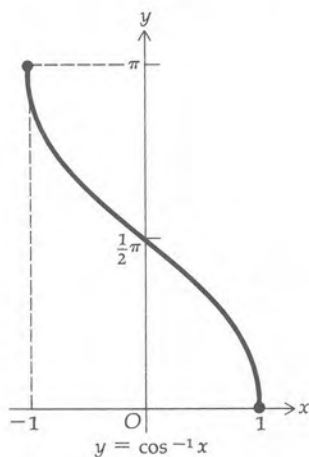
$$y = \cos^{-1}x \text{ اگر و تنها اگر } x = \cos y \text{ و } 0 \leq y \leq \pi$$

قلمرو $\cos^{-1}$ بازه بسته $[-1, 1]$ و بردش بازه بسته $[0, \pi]$ است. نمودارش در

شکل ۵.۴.۹ رسم شده است.

از تعریف ۲.۴.۹ نتیجه می‌شود که

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{به ازای هر } x \text{ در } [-1, 1] \quad (۵)$$



شکل ۵.۴.۹

و

$$\cos^{-1}(\cos y) = y, \quad y \text{ در } [0, \pi] \quad (۶)$$

معادله جالبی که $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ را به هم مربوط می سازد در مثال زیر داده شده است.

$$\text{مثال ۱} \quad \text{ثابت کنید که اگر } |x| \leq 1, \quad \cos^{-1} x = (\pi/2) - \sin^{-1} x$$

$$\text{حل} \quad \text{فرض کنید } x \text{ در } [-1, 1] \text{ است و } w = (\pi/2) - \sin^{-1} x \text{ آنگاه}$$

$$\sin^{-1} x = \frac{1}{2} \pi - w$$

و لذا

$$\sin(\sin^{-1} x) = \sin\left(\frac{1}{2} \pi - w\right).$$

با استفاده از (۲) به دست می آوریم

$$x = \sin\left(\frac{1}{2} \pi - w\right).$$

اگر فرمول (۱۱) از بخش ۷.۱ را در طرف راست معادله بالا به کار ببریم، نتیجه می گیریم

$$x = \cos w. \quad (۷)$$

چون $-\pi/2 < \sin^{-1} x \leq \pi/2$ ، به همه اعضای این نامساوی، $-\pi/2$ را می افزاییم و به دست می آوریم

$$-\pi \leq -\frac{1}{2} \pi + \sin^{-1} x \leq 0.$$

همه اعضای نامساویهای فوق را در -1 ضرب و جهت نامساویها را عوض می کنیم. نتیجه می گیریم

$$0 \leq \frac{1}{2} \pi - \sin^{-1} x \leq \pi.$$

به جای $\sin^{-1} x - (\pi/2)$ می نویسیم w و به دست می آوریم

$$0 \leq w \leq \pi. \quad (۸)$$

از (۷)، (۸)، و تعریف ۲.۴.۹ نتیجه می شود که

$$w = \cos^{-1} x, \quad |x| \leq 1$$

حال به جای w می نویسیم $(\pi/2) - \sin^{-1} x$ تا به دست آید

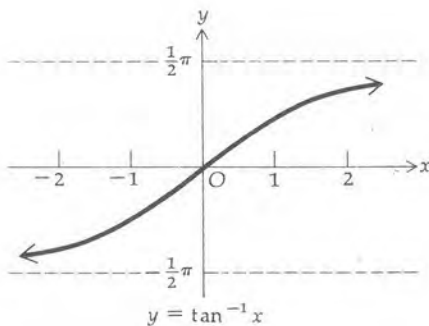
$$\frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x = \cos^{-1} x, \quad |x| \leq 1 \quad \text{اگر} \quad (9)$$

که نتیجه مطلوب است. ▲

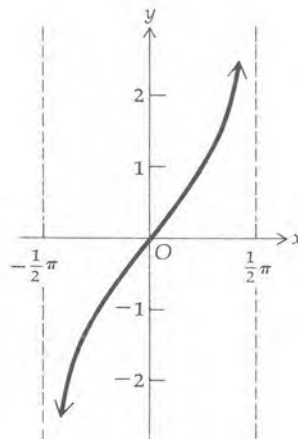
در راه حل فوق توجه کنید که رابطه داده شده در (۹)، بستگی به انتخاب برد تابع کسینوسی معکوس دارد که $[0, \pi]$ در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن تسایع تانژانسی معکوس، نخست تابع تانژانسی را به بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ که، تابع روی آن پیوسته و صعودی است محدود می کنیم. فرض کنید H تابعی با ضابطه زیر باشد

$$H(x) = \tan x \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi \quad (10)$$

قلمرو H ، بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ ، و برد آن مجموعه تمام اعداد حقیقی است. نمودار تابع در شکل ۶.۴.۹ نشان داده شده است. چون تابع H بر قلمروش پیوسته و صعودی است، تابع معکوس دارد؛ این تابع معکوس با $\tan^{-1}$ نمایش داده می شود و به قابع قانژانسی معکوس موسوم است.



شکل ۷.۴.۹



شکل ۶.۴.۹

۳.۴.۹ تعریف تابع تانژانته معکوس که با $\tan^{-1}$ نمایش داده می‌شود دارای تعریف زیر است

$$y = \tan^{-1} x \text{ اگر و تنها اگر } x = \tan y \text{ و } -\frac{1}{4}\pi < y < \frac{1}{4}\pi$$

قلمرو $\tan^{-1}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی، و بردش بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ است. نمودار در شکل ۷.۴.۹ نمایش داده شده است.

قبل از تعریف تابع کتانژانته معکوس، به مثال ۱ رجوع می‌کنیم که در آن، ارتباط مفروض در (۹) بین $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$ به اثبات رسید. از این معادله می‌توانیم برای تعریف تابع کسینوسی معکوس استفاده کنیم، و بر آن اساس ثابت کنیم که برد $\cos^{-1}$ بازه $[0, \pi]$ است. در بحث تابع کتانژانته معکوس از چنین روشی استفاده خواهیم کرد.

۴.۴.۹ تعریف تابع کتانژانته معکوس که با $\cot^{-1}$ نمایش داده می‌شود با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$(11) \quad \text{وقتی که } x \text{ عدد حقیقی دلخواهی باشد، } \cot^{-1} x = \frac{1}{4}\pi - \tan^{-1} x$$

از این تعریف نتیجه می‌شود که قلمرو $\cot^{-1}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی است. برای به دست آوردن برد، (۱۱) را به صورت

$$(12) \quad \tan^{-1} x = \frac{1}{4}\pi - \cot^{-1} x$$

می‌نویسیم. چون

$$-\frac{1}{4}\pi < \tan^{-1} x < \frac{1}{4}\pi$$

از (۱۲) در این نامساوی قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$-\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{4}\pi - \cot^{-1} x < \frac{1}{4}\pi$$

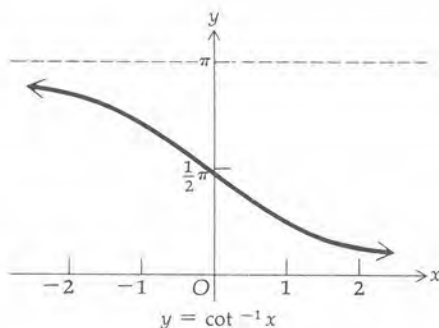
از همه اعضای نامساوی، $\pi/2$ را می‌کاهیم و نتیجه می‌گیریم

$$-\pi < -\cot^{-1} x < 0$$

حال همه اعضا را در -1 ضرب، و جهت‌های نامساویها را عوض می‌کنیم. نتیجه اینکه

$$0 < \cot^{-1} x < \pi$$

پس، برد تابع کتانژانتی معکوس، بازه باز $(0, \pi)$ است. نمودار تابع در شکل ۸.۴.۹ رسم شده است.
توابع سکانتی معکوس و کسکانتی معکوس به ترتیب برحسب $\cos^{-1}$ و $\sin^{-1}$ تعریف می‌شوند.



شکل ۸.۴.۹

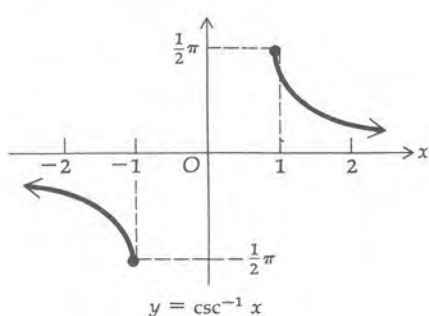
۵.۴.۹ تعریف تابع سکانتی معکوس که با $\sec^{-1}$ نمایش داده می‌شود، با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad |x| \geq 1 \quad \text{وقتی}$$

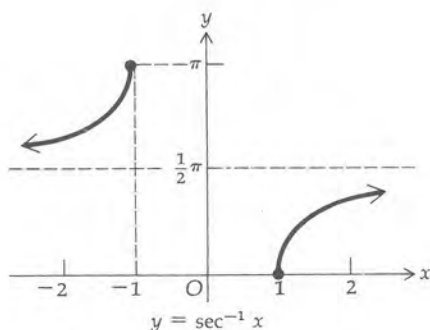
۶.۴.۹ تعریف تابع کسکانتی معکوس که با $\csc^{-1}$ نمایش داده می‌شود، با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad |x| \geq 1 \quad \text{وقتی}$$

از تعریف ۵.۴.۹ نتیجه می‌شود که قلمرو $\sec^{-1}$ ، $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ و برد آن $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ است. توجه کنید که عدد $\pi/2$ به برد تعلق ندارد زیرا $\sec(\pi/2)$ معین نیست. نمودار $\sec^{-1}$ در شکل ۹.۴.۹ نشان داده شده است.
از تعریف ۶.۴.۹ نتیجه می‌شود که قلمرو $\csc^{-1}$ ، $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ و بردش $(-\pi/2, 0] \cup (0, \pi/2]$ است. عدد ۰ به برد تعلق ندارد زیرا $\csc 0$ معین نیست. نمودار $\csc^{-1}$ در شکل ۱۰.۴.۹ رسم شده است.



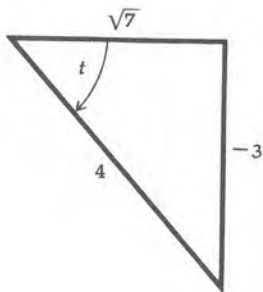
شکل ۱۰.۴.۹



شکل ۹.۴.۹

مثال ۲ مقدار دقیق $\sec[\sin^{-1}(-3/4)]$ را بیابید.

حل فرض کنید $t = \sin^{-1}(-3/4)$. آنگاه $\sin t = -3/4$ چون $\sin t$ منفی است، نتیجه می‌شود که $-\pi/2 < t < 0$. شکل ۱۱.۴.۹ زاویه‌ای را نشان می‌دهد که اندازه آن بر حسب رادیان t است در این شرایط صدق می‌کند. از شکل دیده می‌شود که $\sec t = 4\sqrt{7}/7$ ؛ لذا نتیجه می‌گیریم که $\sec[\sin^{-1}(-3/4)] = 4\sqrt{7}/7$.



شکل ۱۱.۴.۹

مثال ۳ مقدار دقیق $\sin[2 \cos^{-1}(-3/5)]$ را بیابید.

حل فرض کنید $t = \cos^{-1}(-3/5)$. لذا می‌خواهیم مقدار دقیق $\sin 2t$ را بیابیم. بنا بر فرمول (۱۴) از بخش ۷.۱،

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t. \quad (۱۳)$$

چون $t = \cos^{-1}(-3/5)$ ، نتیجه می‌گیریم که $\cos t = -3/5$ و $\pi/2 < t < \pi$

از اتحاد $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ و این واقعیت که $\sin t > 0$ چون t در $(\pi/2, \pi)$ است، داریم

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

لذا، بنا بر فرمول (۱۳)،

$$\sin 2t = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

نتیجه اینکه

$$\Delta \quad \sin\left[2 \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = -\frac{24}{25}.$$

تمرینهای ۴.۹

در تمرینهای ۱ تا ۴، مقدار تابع را بیابید.

$$1. \quad \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (ب)}$$

$$2. \quad \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (ب)} \quad \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ (ت)}$$

$$3. \quad \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (ب)}$$

$$4. \quad \sin^{-1} (-1) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} (-1) \text{ (ب)}$$

$$5. \quad \sin^{-1} (1/2) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} (1/2) \text{ (ب)}$$

$$6. \quad \sin^{-1} (-1/2) \text{ (ب)} \quad \cos^{-1} (-1/2) \text{ (ت)}$$

$$7. \quad \sin^{-1} (-1) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} (-1) \text{ (ب)}$$

$$8. \quad \sin^{-1} (1/2) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} (1/2) \text{ (ب)}$$

$$9. \quad \sin^{-1} (-1/2) \text{ (ب)} \quad \cos^{-1} (-1/2) \text{ (ت)}$$

$$10. \quad \sin^{-1} (1/2) \text{ (الف)} \quad \cos^{-1} (1/2) \text{ (ب)}$$

$$\begin{array}{ll} \cos^{-1}(-1/2) \text{ (ت)} & \cos^{-1}(1/2) \text{ (پ)} \\ \csc^{-1}(-2) \text{ (ج)} & \sec^{-1}2 \text{ (ث)} \end{array}$$

۵. $y = \sin^{-1}(1/3)$ مفروض است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \cos y & \text{(ب)} \tan y & \text{(پ)} \cot y \\ \text{(ت)} \sec y & \text{(ث)} \csc y & \end{array}$$

۶. $y = \cos^{-1}(-2/3)$ مفروض است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \sin y & \text{(ب)} \tan y & \text{(پ)} \cot y \\ \text{(ت)} \sec y & \text{(ث)} \csc y & \end{array}$$

۷. $y = \tan^{-1}(-2)$ مفروض است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \sin y & \text{(ب)} \cos y & \text{(پ)} \cot y \\ \text{(ت)} \sec y & \text{(ث)} \csc y & \end{array}$$

۸. $y = \cot^{-1}(-1/2)$ داده شده است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \sin y & \text{(ب)} \cos y & \text{(پ)} \tan y \\ \text{(ت)} \sec y & \text{(ث)} \csc y & \end{array}$$

۹. $y = \csc^{-1}(-3/2)$ مفروض است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \sin y & \text{(ب)} \cos y & \text{(پ)} \tan y \\ \text{(ت)} \cot y & \text{(ث)} \sec y & \end{array}$$

۱۰. $y = \sec^{-1}3$ مفروض است. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیایید

$$\begin{array}{lll} \text{(الف)} \sin y & \text{(ب)} \cos y & \text{(پ)} \tan y \\ \text{(ت)} \cot y & \text{(ث)} \csc y & \end{array}$$

دو تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، مقدار دقیق کمیت داده شده را بیایید.

۱۱. $\sin\left[\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (الف) $\tan\left[\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ (ب)

۱۲. $\tan[\sec^{-1}(-3)]$ (الف) $\cos[\tan^{-1}(-3)]$ (ب)

۱۳. $\sin\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (الف) $\cos\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (ب)

۱۴. $\cot[\tan^{-1}(-1)]$ (الف) $\tan[\cot^{-1}(-1)]$ (ب)

۱۵. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیابید

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \sin^{-1} \left[\tan \left(\frac{1}{4} \pi \right) \right] \quad ; \quad \text{(ب)} \quad \tan^{-1} \left[\sin \left(-\frac{1}{4} \pi \right) \right] \\ & \text{(پ)} \quad \sec^{-1} \left[\tan \left(-\frac{1}{4} \pi \right) \right] \quad ; \quad \text{(ت)} \quad \cot^{-1} \left[\csc \left(-\frac{1}{4} \pi \right) \right] \end{aligned}$$

۱۶. مقدار دقیق هر يك از كمیتهای زیر را بیابید

$$\begin{aligned} & \text{(الف)} \quad \cos^{-1} \left[\sin \left(-\frac{1}{6} \pi \right) \right] \quad ; \quad \text{(ب)} \quad \sin^{-1} \left[\cos \left(-\frac{1}{6} \pi \right) \right] \\ & \text{(پ)} \quad \cos^{-1} \left[\sin \frac{2}{3} \pi \right] \quad ; \quad \text{(ت)} \quad \sin^{-1} \left[\cos \frac{2}{3} \pi \right] \end{aligned}$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۶، مقدار دقیق کمیت مفروض را بیابید.

$$\begin{aligned} & ۱۷. \quad \cos \left[2 \sin^{-1} \left(-\frac{5}{13} \right) \right] \quad ۱۸. \quad \tan \left[2 \sec^{-1} \left(-\frac{5}{4} \right) \right] \\ & ۱۹. \quad \sin \left[\sin^{-1} \frac{2}{3} + \cos^{-1} \frac{1}{3} \right] \quad ۲۰. \quad \cos \left[\sin^{-1} \left(-\frac{1}{4} \right) + \sin^{-1} \frac{1}{4} \right] \\ & ۲۱. \quad \cos \left[\sin^{-1} \frac{2}{3} + 2 \sin^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \\ & ۲۲. \quad \tan \left[\tan^{-1} \left(-\frac{2}{5} \right) + \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] \\ & ۲۳. \quad \tan \left(\tan^{-1} \frac{3}{4} - \sin^{-1} \frac{1}{4} \right) \quad ۲۴. \quad \tan \left[\sec^{-1} \frac{5}{3} + \csc^{-1} \left(-\frac{13}{12} \right) \right] \\ & ۲۵. \quad \cos \left(\sin^{-1} \frac{1}{3} - \tan^{-1} \frac{1}{4} \right) \\ & ۲۶. \quad \sin \left[\cos^{-1} \left(-\frac{2}{3} \right) + 2 \sin^{-1} \left(-\frac{1}{3} \right) \right] \\ & ۲۷. \quad \text{ثابت کنید که } \cos^{-1}(3/\sqrt{10}) + \cos^{-1}(2/\sqrt{5}) = \pi/4 \\ & ۲۸. \quad \text{ثابت کنید که } 2 \tan^{-1}(1/3) - \tan^{-1}(-1/7) = \pi/4 \end{aligned}$$

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۶، نمودار معادله مفروض را رسم کنید.

$$y = \sin^{-1} \frac{1}{4} x \quad ۳۰ \qquad y = \frac{1}{4} \sin^{-1} x \quad ۲۹$$

$$y = 2 \tan^{-1} x \quad ۳۲ \qquad y = \tan^{-1} 2x \quad ۳۱$$

$$y = \frac{1}{4} \sec^{-1} 2x \quad ۳۴ \qquad y = \cos^{-1} 3x \quad ۳۳$$

$$y = \frac{1}{4} \csc^{-1} \frac{1}{4} x \quad ۳۶ \qquad y = 2 \cot^{-1} \frac{1}{4} x \quad ۳۵$$

$$۳۷ \quad \cot A = \tan\left(\frac{1}{4}\pi - A\right) \text{ مفروض است. نشان دهید که اگر } x > 0, \text{ داریم}$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\pi.$$

۵.۹ مشتقهای توابع مثلثاتی معکوس

چون توابع مثلثاتی معکوس بر قلمروشان پیوسته و یکنوا هستند، از قضیه ۳.۲.۸ نتیجه می‌شود که مشتق دارند. برای به دست آوردن فرمول مشتق تابع سینوسی معکوس، فرض کنید

$$y = \sin^{-1} x.$$

این معادل است با

$$(۱) \quad x = \sin y \quad \text{که } y \text{ در } \left[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] \text{ است.}$$

از دو طرف (۱) نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$(۲) \quad D_y x = \cos y \quad \text{که } y \text{ در } \left[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] \text{ است.}$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ، و با قراردادن x به جای $\sin y$ داریم

$$(۳) \quad \cos^2 y = 1 - x^2.$$

اگر y در $[-\pi/2, \pi/2]$ باشد، $\cos y$ نامنفی است؛ لذا از (۳) نتیجه می‌شود که

$$(۴) \quad \cos y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{اگر } y \text{ در } \left[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right] \text{ باشد،}$$

از (۴) در (۲) قرار می‌دهیم تا

$$D_y x = \sqrt{1-x^2}$$

به دست آید. بنابر قضیه ۳۰۲۰۸، $D_x y = 1/D_y x$ ؛ لذا

$$D_x(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5)$$

قلمرو مشتق تابع سینوسی معکوس، بازه باز $(-1, 1)$ است. از (۵) وقاعدۀ زنجیری، قضیه زیر به دست می‌آید.

۱۰۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u.$$

○ نمونه ۱ اگر $y = \sin^{-1} x^2$ ، آنگاه

$$\circ \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} (2x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

برای به دست آوردن فرمول مشتق تابع کسینوسی معکوس از رابطه (۹) در بخش ۴.۹ که عبارت است از

$$\cos^{-1} x = \frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x$$

استفاده می‌کنیم. اگر نسبت به x مشتق بگیریم، داریم

$$D_x(\cos^{-1} x) = D_x\left(\frac{1}{2}\pi - \sin^{-1} x\right)$$

ولذا

$$D_x(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (6)$$

با این شرط که x در $(-1, 1)$ باشد.

قضیه زیر از (۶) وقاعدۀ زنجیری به دست می‌آید.

۲۰۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\cos^{-1} u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u.$$

حال به محاسبه فرمول مشتق تابع تانژانتی معکوس می پردازیم. اگر

$$y = \tan^{-1} x$$

آنگاه

$$x = \tan y \text{ که } y \text{ در } \left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right) \text{ است.}$$

از دو طرف معادله فوق نسبت به y مشتق می گیریم و به دست می آوریم

$$D_y x = \sec^2 y \text{ که } y \text{ در } \left(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right) \text{ است.} \quad (7)$$

از اتحاد $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ و از قرار دادن x به جای $\tan y$ نتیجه می شود

$$\sec^2 y = 1 + x^2. \quad (8)$$

از (۸) در (۷) قرار می دهیم و

$$D_y x = 1 + x^2$$

را به دست می آوریم. لذا بنا بر قضیه ۳.۲.۸

$$D_x(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (9)$$

قلمرو مشتق تابع تانژانتی معکوس، مجموعه تمام اعداد حقیقی است.

از (۹) وقاعده زنجیری، قضیه بعد حاصل می شود.

۳.۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u.$$

○ نمونه ۲ اگر $f(x) = \tan^{-1}(1/(x+1))$ ، آنگاه

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{(x+1)^2}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2 + 1}$$

○

$$= \frac{-1}{x^2 + 2x + 2}.$$

بنابر تعریف ۴۰.۴.۹،

$$\cot^{-1} x = \frac{1}{4} \pi - \tan^{-1} x.$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم تا فرمول

$$D_x(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

به دست آید. از این فرمول وقاعدۀ زنجیری، قضیۀ زیر به اثبات می‌رسد.

۴.۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\cot^{-1} u) = -\frac{1}{1+u^2} D_x u.$$

مثال ۱ $y = x^3 \cot^{-1}(x/3)$ مفروض است. dy/dx را بیابید.

حل

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \cot^{-1} \frac{1}{3} x + x^3 \cdot \frac{-1}{1+\frac{1}{9}x^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\triangle \quad = 3x^2 \cot^{-1} \frac{1}{3} x - \frac{3x^3}{9+x^2}.$$

مثال ۲ $\ln(x+y) = \tan^{-1}(x/y)$ مفروض است. $D_x y$ را بیابید.

حل از دوطرف معادلۀ مفروض نسبت به x به‌طور ضمنی مشتق می‌گیریم؛ داریم

$$\frac{1}{x+y} (1 + D_x y) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y-x D_x y}{y^2}$$

$$\frac{1 + D_x y}{x+y} = \frac{y-x D_x y}{y^2+x^2}$$

$$y^2+x^2+(y^2+x^2) D_x y = xy+y^2-(x^2+xy) D_x y$$

$$\triangle \quad D_x y = \frac{xy-x^2}{2x^2+xy+y^2}.$$

برای یافتن فرمول مشتق تابع سکانتی معکوس، از تعریف ۵.۴.۹ و قضیه ۲.۵.۹ استفاده می‌کنیم. بنا بر تعریف ۵.۴.۹،

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad |x| \geq 1$$

لذا

$$\begin{aligned} D_x(\sec^{-1} x) &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر $|x| > 1$ ، داریم

$$D_x(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}. \quad (۱۵)$$

از (۱۵) و قاعده زنجیری، قضیه بعد نتیجه می‌شود.

۵.۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد،

$$D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2 - 1}} D_x u.$$

○ نمونه ۳ اگر $f(x) = \sec^{-1} 3x$ ، آنگاه

$$○ \quad f'(x) = \frac{1}{|3x| \sqrt{(3x)^2 - 1}} \cdot 3 = \frac{1}{|x| \sqrt{9x^2 - 1}}.$$

بنابر (۹) از بخش ۴.۹ داریم

$$\sin^{-1} x = \frac{1}{2} \pi - \cos^{-1} x, \quad |x| \leq 1$$

در معادله بالا به جای x ، $1/x$ قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\sin^{-1} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{x} \right), \quad |x| \geq 1$$

از معادله فوق و تعاریف ۵.۴.۹ و ۶.۴.۹ نتیجه می شود که

$$\text{اگر } |x| \geq 1, \quad \text{csc}^{-1} x = \frac{1}{2} \pi - \sec^{-1} x \quad (11)$$

برای یافتن مشتق تابع کسکانتی معکوس از معادلات (۱۱) و (۱۰) استفاده می کنیم. از دو طرف (۱۱) نسبت به x مشتق می گیریم. نتیجه اینکه اگر $|x| > 1$ ،

$$D_x(\text{csc}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}. \quad (12)$$

قضیه زیر از (۱۲) وقاعده زنجیری حاصل می شود.

۶.۵.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\text{csc}^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} D_x u.$$

مثال ۳ تابلویی که ۷ فوت بلندی دارد، بردیواری نصب شده است. پایین تابلو ۹ فوت بالاتراز سطح تراز چشم يك ناظر است. برای اینکه زاویه ای که در چشم ناظر توسط تابلو تشکیل می شود حداکثر باشد، ناظر باید در چه فاصله از دیوار بایستد؟

حل فرض کنید فاصله ناظر از دیوار x فوت، اندازه زاویه ای که در چشم ناظر توسط تابلو تشکیل می شود θ رادیان، و اندازه زاویه ای که در چشم ناظر توسط قسمتی از دیوار واقع در بالای سطح تراز چشم ناظر و زیر تابلو، تشکیل می شود α رادیان باشد. فرض کنید $\beta = \alpha + \theta$. به شکل ۱۰.۵.۹ رجوع کنید. می خواهیم مقدار x چنان باشد که θ يك ماكسيم مطلق شود. چون x در بازه $(0, +\infty)$ است، مقدار ماكسيم مطلق θ يك مقدار ماكسيم نسبی خواهد بود. از شکل پیداست که

$$\cot \alpha = \frac{x}{9} \quad \text{و} \quad \cot \beta = \frac{x}{16}$$

چون $0 < \beta < \pi/2$ و $0 < \alpha < \pi/2$ ، داریم

$$\alpha = \cot^{-1} \frac{x}{9} \quad \text{و} \quad \beta = \cot^{-1} \frac{x}{16}$$

این مقادیر β و α را در معادله $\theta = \beta - \alpha$ قرار می دهیم و به دست می آوریم

$$\theta = \cot^{-1} \frac{x}{16} - \cot^{-1} \frac{x}{9}.$$

نسبت به x مشتق می گیریم. نتیجه اینکه

$$D_x \theta = \frac{\frac{1}{16}}{1 + \left(\frac{x}{16}\right)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{1 + \left(\frac{x}{9}\right)^2}$$

$$= -\frac{16}{16^2 + x^2} + \frac{9}{9^2 + x^2}.$$

می‌نویسیم $D_x \theta = 0$ و به‌دست می‌آوریم

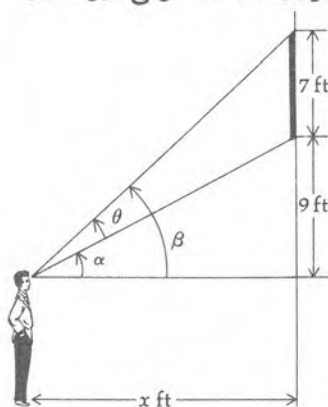
$$9(16^2 + x^2) - 16(9^2 + x^2) = 0$$

$$-7x^2 + 9 \cdot 16(16 - 9) = 0$$

$$x^2 = 9 \cdot 16$$

$$x = 12.$$

۱۲- را نمی‌پذیریم زیرا این عدد در بازه $(0, +\infty)$ نیست. نتایج آزمون مشتق اول در جدول ۱۰.۵.۹ نشان داده شده‌اند. چون مقدار ماکسیمم نسبی θ مقدار ماکسیمم مطلق است، نتیجه می‌گیریم که ناظر باید در ۱۲ فوتی دیوار بایستد.



شکل ۱۰.۵.۹

جدول ۱۰.۵.۹

نتیجه	$D_x \theta$
	$0 < x < 12$ +
θ يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد	$x = 12$ ۰
	$12 < x < +\infty$ -

تمرینهای ۵.۹

دو تمرینهای ۱ تا ۲۶، مشتق تابع مفروض را بیابید.

$$f(x) = \cos^{-1} 2x \quad .۲ \qquad f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{y} x \quad .۱$$

$$f(x) = \csc^{-1} 2x \quad .۴ \qquad g(x) = \tan^{-1} 2x \quad .۳$$

$$g(x) = \frac{1}{y} \sin^{-1} x^y \quad .۶ \qquad F(x) = 2 \cos^{-1} \sqrt{x} \quad .۵$$

$$f(y) = \cot^{-1} e^y \quad .۸ \qquad g(t) = \sec^{-1} 5t \quad .۷$$

$$f(w) = 2 \tan^{-1} \frac{1}{w} \quad .۱۰ \qquad f(x) = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} \quad .۹$$

$$f(x) = \ln(\tan^{-1} 2x) \quad .۱۲ \qquad F(x) = \cot^{-1} \frac{y}{x} + \tan^{-1} \frac{x}{y} \quad .۱۱$$

$$f(t) = t^x \cos^{-1} t \quad .۱۴ \qquad h(y) = y \sin^{-1} 2y \quad .۱۳$$

$$g(s) = \cos^{-1} s + \frac{s}{1-s^2} \quad .۱۶ \qquad g(x) = x \csc^{-1} \frac{1}{x} \quad .۱۵$$

$$h(x) = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} \quad .۱۸ \qquad f(x) = \cos^{-1}(\sin x) \quad .۱۷$$

$$F(x) = \sec^{-1} \sqrt{x^2+4} \quad .۲۰ \qquad F(x) = \ln(\tan^{-1} x^2) \quad .۱۹$$

$$f(x) = 2 \sin^{-1} \frac{1}{y} x + x \sqrt{4-x^2} \quad .۲۱$$

$$h(x) = \sec^{-1} x + \csc^{-1} x \quad .۲۳ \qquad f(t) = a \sin^{-1} \frac{t}{a} + \sqrt{a^2-t^2} \quad .۲۲$$

$$f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x \quad .۲۴$$

$$G(x) = x \cot^{-1} x + \ln \sqrt{1+x^2} \quad .۲۵$$

$$f(t) = \sin^{-1} \frac{t-1}{t+1} \quad .۲۶$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۰، $D_x y$ را با مشتق‌گیری ضمنی بیابید.

$$e^x + y = \cos^{-1} x \quad ۲۷ \quad e^x + \cot^{-1} y = \ln(\sin^2 x) \quad ۲۸$$

$$x \sin y + x^3 = \tan^{-1} y \quad ۲۹ \quad \sin^{-1}(xy) = \cos^{-1}(x+y) \quad ۳۰$$

۳۱. چراغی در ۳ کیلومتری ساحل مستقیمی قرار دارد و در هر دقیقه ۲ دور می‌چرخد. اگر نقطه‌ای از نور چراغ ۲ کیلومتر از نزدیکترین نقطه ساحل به چراغ فاصله داشته باشد، مقدار سرعت آن در امتداد ساحل چقدر است؟

۳۲. نردبانی به طول ۲۵ فوت بر دیواری عمودی تکیه دارد. اگر پای نردبان را به‌طور افقی چنان از دیوار دور کنیم که سر آن با آهنگ ۳ فوت بر ثانیه به پایین بلغزد، وقتی که پای نردبان به ۱۵ فوتی دیوار برسد، اندازه زاویه بین نردبان و زمین با چه تندی تغییر می‌کند؟

۳۳. تابلویی که ۴۰ سانتیمتر ارتفاع دارد بر دیواری چنان نصب شده است که پایین تابلو ۳۰ سانتیمتر بالاتر از سطح تراز چشم یک ناظر است. اگر ناظر با آهنگ ۴۰ سانتیمتر بر ثانیه به دیوار نزدیک شود، وقتی که به یک متری دیوار برسد اندازه زاویه‌ای که تابلو در چشم ناظر تشکیل می‌دهد با چه تندی تغییر می‌کند؟

۳۴. مردی از اسکله‌ای به وسیله طنابی با آهنگ ۲ فوت بر ثانیه باقی را می‌کشد. دستهای مرد ۲۰ فوت بالاتر از سطح تراز نقطه‌ای که طناب را به قایق وصل می‌کند قرار دارند. در موقعی که طول طناب باقیمانده ۵۲ فوت می‌شود، اندازه زاویه‌ای که طناب با سطح آب تشکیل می‌دهد با چه تندی تغییر می‌کند؟

۳۵. زنی با آهنگ ۵ فوت بر ثانیه در امتداد قطر حیاط مستدیری قدم می‌زند. در یک انتهای قطری که عمود بر مسیر زن است چراغی نصب شده است، و این چراغ سایه وی را بر دیوار مستدیر می‌اندازد. اگر شعاع حیاط ۲ فوت باشد، وقتی که زن به $r/2$ فوتی مرکز حیاط می‌رسد سایه وی در روی دیوار با چه تندی حرکت می‌کند؟

۳۶. در تمرین ۳۵، وقتی که سرعت سایه زن در روی دیوار ۹ فوت بر ثانیه باشد، فاصله وی تا مرکز حیاط چقدر است؟

۳۷. با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی $\sin^{-1} ۰.۵۲$ را تا سه رقم اعشار بیابید.

۳۸. معادلات خط مماس و خط قائم بر نمودار با معادله $y = \sec^{-1}(2x+1)$ در نقطه $(1/2, \pi/3)$ را بیابید.

۳۹. به وزنه‌ای طنابی وصل کرده و آن را از قلابی که در ۸ فوتی بالای زمین است گذرانیده‌ایم. با آهنگ $3/4$ فوت بر ثانیه طناب را از روی قلاب می کشیم و وزنه هم بر سطح زمین کشیده می شود. اگر طول طناب بین وزنه و قلاب x فوت باشد، وقتی که اندازه زاویه بین طناب و زمین به θ رادیان برسد، آهنگ زمانی تغییر θ بر حسب x چقدر است؟

۴۰. $f(x) = \tan^{-1}(1/x) - \cot^{-1}x$ مفروض است. (الف) نشان دهید که به ازای هر x در قلمرو f ، $f'(x) = 0$ ؛ (ب) ثابت کنید که عدد ثابتی چون C وجود ندارد که به ازای تمام مقادیر x در قلمرو f ، $f(x) = C$ ؛ (پ) چرا حکم مذکور در قسمت (ب)، قضیه ۲۰۲.۵ را نقض نمی کند؟

۴۱. مثال ۱ از بخش ۴.۹ را با این روش حل کنید که نشان دهید اختلاف بین $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ عددی ثابت است و سپس مقدار ثابت را محاسبه کنید.

۴۲. تمرین ۳۷ از تمرینهای ۴.۹ را با این روش حل کنید که نشان دهید اختلاف بین $\tan^{-1}x$ و $\tan^{-1}(1/x)$ يك مقدار ثابت است و سپس مقدار ثابت را بیابید.

۶.۹ انتگرالهایی که توابع مثلثاتی معکوس را به دست می دهند

از فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی معکوس، قضیه زیر به دست می آید که شامل چند فرمول انتگرال نامعین است.

۱۰.۶.۹ قضیه

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1}u + C \quad (1)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u + C \quad (2)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}|u| + C. \quad (3)$$

اثبات فرمولهای (۱) و (۲) مستقیماً از فرمولهای مربوط به مشتق $\sin^{-1}u$ و $\tan^{-1}u$ نتیجه می شوند. فرمول (۳) به توضیح نیاز دارد.

اگر $u > 0$ ، آنگاه $u = |u|$ و

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}u + C = \sec^{-1}|u| + C.$$

اگر $u < 0$ ، آنگاه $u = -|u|$ و

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} &= \int \frac{du}{-|u|\sqrt{u^2-1}} \\ &= \int \frac{-du}{|u|\sqrt{u^2-1}} \\ &= \int \frac{d(-u)}{|-u|\sqrt{(-u)^2-1}} \\ &= \sec^{-1}(-u) + C \\ &= \sec^{-1}|u| + C.\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $u > 0$ یا $u < 0$ ، (۳) به دست می آید. $\square$

فرمولهای دیگری هم داریم که در قضیه زیر می آیند.

۲۰۶.۹ قضیه

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C \quad a > 0 \quad (۴)$$

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad a \neq 0 \quad (۵)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad a > 0 \quad (۶)$$

اثبات این فرمولها را می توان با محاسبه مشتق طرف راست و به دست آوردن انتگران اثبات کرد. اینک فرمول (۴) را اثبات می کنیم، اثبات (۵) و (۶) را به عنوان تمرین واگذار می نماییم (تمرینهای ۳۸ و ۳۹ را ببینید).

$$\begin{aligned}D_u\left(\sin^{-1} \frac{u}{a}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}} D_u\left(\frac{u}{a}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot \frac{1}{a} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot \frac{1}{a} \quad a > 0\end{aligned}$$

$$\square \quad = \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad a > 0$$

مثال ۱ مطلوب است

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}.$$

حل

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} &= \frac{1}{3} \int \frac{d(3x)}{\sqrt{4 - (3x)^2}} \\ &= \frac{1}{3} \sin^{-1} \frac{3x}{2} + C. \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ مطلوب است

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}.$$

حل

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} = \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 5}.$$

برای اینکه $x^2 - (2x/3) - (2x/3) + 1/9$ را به صورت مربع کامل در آوریم $1/9$ به آن می افزاییم، و چون $1/9$ باید در ۳ ضرب شود، عملاً $1/3$ به مخرج افزوده می شود، و لذا $1/3$ را از مخرج کم می کنیم. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} &= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 5 - \frac{1}{3}} \\ &= \int \frac{dx}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{9}} \end{aligned}$$

انتهای که توابع مثلثاتی. ۷۹۹۰۰

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{14}} \tan^{-1} \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} \sqrt[3]{14}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{14}} \tan^{-1} \left(\frac{3x^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{14}} \right) + C.$$

مثال ۳ مطلوب است

$$\int \frac{(2x+7) dx}{x^2+2x+5}.$$

حل چون $d(x^2+2x+5) = (2x+2) dx$ صورت کسر را به صورت $(2x+2) dx + 5 dx$ و انتگرال مورد نظر را به صورت مجموع دو انتگرال می نویسیم.

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x+7) dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{(2x+2) dx}{x^2+2x+5} + 5 \int \frac{dx}{x^2+2x+5} \\ &= \ln|x^2+2x+5| + 5 \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} \\ &= \ln(x^2+2x+5) + \frac{5}{4} \tan^{-1} \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

توجه: چون به ازای جمیع مقادیر x ، $x^2+2x+5 > 0$ داریم
 $|x^2+2x+5| = x^2+2x+5$

مثال ۴ مطلوب است

$$\int \frac{3 dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

حل

$$\begin{aligned} \int \frac{3 dx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}} &= \int \frac{3 dx}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}} \\ &= 3 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-1}} \\ &= 3 \sec^{-1}|x+2| + C. \end{aligned}$$

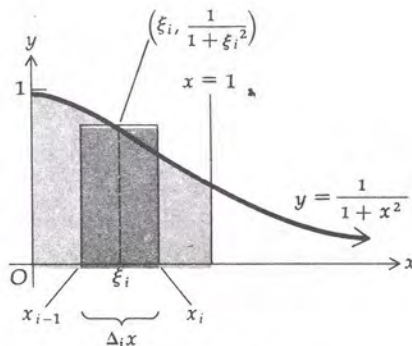
مثال ۵ مساحت ناحیه واقع در ربع اول، محصور بین منحنی

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

محور x ها، محور y ها، و خط $x=1$ را بیابید.

حل شکل ۱۰۶.۹ ناحیه و یک جزء مستطیلی از سطح را نشان می‌دهد. اگر مساحت ناحیه A واحد مربع باشد،

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\xi_i^2} \Delta_i x \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \left[\tan^{-1} x \right]_0^1 \\ &= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 \\ &= \frac{1}{4} \pi - 0 \\ &= \frac{1}{4} \pi. \end{aligned}$$



شکل ۱۰۶.۹

تمرینهای ۶.۹

در تمرینهای ۱ تا ۲۵، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} ۱. & \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \\ ۲. & \int \frac{dx}{x^2+25} \end{aligned}$$

۳. $\int \frac{dx}{9x^2 + 16}$
۴. $\int \frac{dt}{\sqrt{1 - 16t^2}}$
۵. $\int \frac{dx}{4 + (x-1)^2}$
۶. $\int \frac{dx}{9 + (3-x)^2}$
۷. $\int \frac{dx}{4x\sqrt{x^2 - 16}}$
۸. $\int \frac{xdx}{x^2 + 16}$
۹. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x^2}}$
۱۰. $\int \frac{3dx}{x\sqrt{x^2 - 9}}$
۱۱. $\int \frac{r dr}{\sqrt{16 - 9r^2}}$
۱۲. $\int \frac{du}{u\sqrt{16u^2 - 9}}$
۱۳. $\int \frac{e^x dx}{7 + e^{2x}}$
۱۴. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 - \cos^2 x}}$
۱۵. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
۱۶. $\int \frac{ds}{\sqrt{2s - s^2}}$
۱۷. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$
۱۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$
۱۹. $\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$
۲۰. $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 3}$
۲۱. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$
۲۲. $\int \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$
۲۳. $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}$
۲۴. $\int \frac{2dt}{(t-3)\sqrt{t^2 - 6t + 5}}$
۲۵. $\int \frac{2x^2 dx}{2x^2 - 4x + 3}$

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx \quad .۳۷ \qquad \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad .۳۶$$

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-6t-5}} \quad .۳۹ \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad .۳۸$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad .۳۱ \qquad \int_2^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 13} \quad .۳۰$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x[1+(\ln x)^2]} \quad .۳۳ \qquad \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}} \quad .۳۲$$

۳۴. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 8/(x^2 + 4)$ ، محور x ها، محور y ها، و خط $x = 2$ را بیابید.

۳۵. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 1/\sqrt{5-4x-x^2}$ ، محور x ها، و خطوط $x = -1/2$ و $x = -7/2$ را بیابید.

۳۶. مساحت ناحیه محصور بین منحنیهای $x^2 = 4ay$ و $x^2 = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$ را بیابید.

۳۷. با انتگرال گیری، محیط دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را بیابید.

در تمرینهای ۳۸ تا ۴۲، فرمول داده شده را اثبات کنید؛ برای این کار، نشان دهید که مشتق طرف راست برابر با انتگرال است.

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \quad .۳۸$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad .۳۹$$

که $a > 0$ ، دو حالت در نظر بگیرید:
 $u < 0$ و $u > 0$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\cos^{-1} u + C \quad .۴۰$$

آیا این فرمول با فرمول (۱) معادل است؟ چرا؟

$$\int \frac{du}{1+u^2} = -\cot^{-1} u + C \quad .۴۱$$

آیا این فرمول با فرمول (۲) معادل است؟ چرا؟

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}} = -\csc^{-1} |u| + C \quad .۴۲$$

دو حالت در نظر بگیرید: $u < 0$ و $u > 0$

آیا این فرمول با فرمول (۳) معادل است؟ چرا؟

۴۳. گفته می‌شود ذره‌ای که بر خط مستقیمی در حرکت است، حرکت هماهنگ ساده دارد اگر همواره اندازه شتابش متناسب باشد با اندازه تغییر مکانش از نقطه ثابتی از خط، و شتاب و تغییر مکانش در دو جهت مخالف باشند. لذا اگر در ثانیه m فاصله جهت دار ذره از مبدأ s سانتیمتر و سرعت آن v سانتیمتر بر ثانیه باشد، آنگاه یک معادله دیفرانسیل برای حرکت هماهنگ ساده عبارت است از

$$\frac{dv}{dt} = -k^2 s \quad (۷)$$

که در آن k^2 ثابت تناسب است و علامت منها مبین این است که جهت شتاب مخالف با جهت تغییر مکان است. چون $(dv/dt) = v(ds/dt) = v(dv/ds)$ ، (۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$v \frac{dv}{ds} = -k^2 s. \quad (۸)$$

(الف) از (۸)، v را محاسبه کنید تا $v = \pm k\sqrt{a^2 - s^2}$ به دست آید. توجه: ثابت دلخواه انتگرال گیری را $a^2 k^2$ بگیرید و این انتخاب را توجیه کنید؛ (ب) اگر در جواب قسمت (الف) به جای v بنویسیم ds/dt ، معادله دیفرانسیل

$$\frac{ds}{dt} = \pm k\sqrt{a^2 - s^2} \quad (۹)$$

به دست می‌آید. اگر در لحظه‌ای که $v = 0$ ، فرض شود $t = 0$ (و لذا $s = a$)، (۹) را حل کنید و

$$s = a \cos kt \quad (۱۰)$$

را بیابید؛ (پ) نشان دهید که بزرگترین مقدار برای $|s|$ ، a است. عدد a به دامنه حرکت موسوم است؛ (ت) ذره بین نقاط $s = a$ و $s = -a$ نوسان خواهد کرد. اگر مدت زمانی که ذره از a به $-a$ می‌رود و برمی‌گردد T ثانیه باشد، نشان دهید که $T = 2\pi/k$. عدد T را دوره تناوب حرکت می‌نامند.

۴۴. ذره‌ای بر خط مستقیمی طبق معادله حرکت $s = 5 - 10 \sin^2 2t$ ، که در آن فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه m ، s سانتیمتر است، در حرکت است. از نتیجه قسمت (ب) از تمرین ۴۳ استفاده کنید و نشان دهید که حرکت هماهنگ ساده است. دامنه و دوره تناوب این حرکت را بیابید.

۴۵. نشان دهید که حرکت تمرین ۴۴ هماهنگ ساده است؛ برای این کار نشان دهید که معادله دیفرانسیل (۷) برقرار است.

۲.۹ توابع هیپر بولیک

ترکیبهای معینی از e^x و e^{-x} آنقدر در کاربردهای ریاضیات ظاهر می‌شوند که به آنها نامهای خاصی داده شده است. دو تا از این توابع، تابع سینوس هیپر بولیک و تابع کسینوس هیپر بولیک هستند. همان گونه که مقادیر توابع مثلثاتی با مختصات نقاط يك دایره در ارتباط اند، مقادیر توابع متناظر هیپر بولیک نیز با مختصات نقاط يك هذلولی متساوی الساقین در ارتباط اند. (بخش ۴.۱۶ را ببینید.) تعاریف توابع سینوس هیپر بولیک و کسینوس هیپر بولیک در ذیل داده شده‌اند.

۱۰۷.۹ تعریف تابع سینوس هیپر بولیک با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

قلمرو و برد آن، مجموعه تمام اعداد حقیقی هستند.

۲۰۷.۹ تعریف تابع کسینوس هیپر بولیک با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

قلمرو آن، مجموعه تمام اعداد حقیقی است و برد آن، مجموعه تمام اعداد در بازه $[1, +\infty)$ است.

چون

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

نتیجه می‌گیریم که تابع سینوس هیپر بولیک يك تابع فرد است. و چون

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

پس تابع کسینوس هیپر بولیک زوج است.

با به کار بردن تعاریف ۱۰۷.۹ و ۲۰۷.۹ و مشتق‌گیری از عبارتهای شامل توابع نمایی، فرمولهای مشتق توابع سینوس هیپر بولیک و کسینوس هیپر بولیک را می‌توان به دست آورد. پس

$$D_x(\sinh x) = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D_x(\cosh x) = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

از این فرمولها و قاعده زنجیری، قضیه زیر به دست می آید.

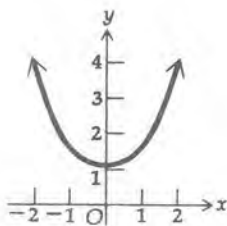
۳.۷.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\sinh u) = \cosh u D_x u$$

$$D_x(\cosh u) = \sinh u D_x u.$$

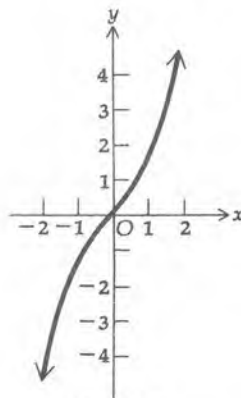
چون برای تمام x ها، $D_x(\sinh x) > 0$ ، تابع سینوس هیپر بولیک بر کل قلمروش صعودی است. با این اطلاع، با علم به اینکه این تابع فرد است، و با چند مقدار که از جدول توابع هیپر بولیک در پیوست به دست می آیند، نمودار تابع سینوس هیپر بولیک را در شکل ۱.۷.۹ رسم کرده ایم.

تابع کسینوس هیپر بولیک بر بازه $(-\infty, 0]$ نزولی است چون اگر $x < 0$ ، $D_x(\cosh x) < 0$ ؛ و بر بازه $[0, +\infty)$ صعودی است چون اگر $x > 0$ ، $D_x(\cosh x) > 0$. علاوه بر این، کسینوس هیپر بولیک يك تابع زوج است. با توجه به این واقعیتهای و با چند مقدار $\cosh x$ از جدول پیوست، نمودار تابع کسینوس هیپر بولیک را که در شکل ۲.۷.۹ نشان داده شده است به دست می آوریم.



$$y = \cosh x$$

شکل ۲.۷.۹



$$y = \sinh x$$

شکل ۱.۷.۹

چهار تابع هیپر بولیک باقیمانده را می توان برحسب توابع سینوس هیپر بولیک و کسینوس هیپر بولیک تعریف کرد. باید دقت کنید که هر يك در رابطه ای صدق می کند که مشابه است با رابطه ای که تابع مثلثاتی متناظر در آن صدق می کند.

۴.۷.۹ تعریف تابع تانژانت هیپر بولیک، تابع کتانژانت هیپر بولیک، تابع سکانت هیپر بولیک، و تابع کسکانت هیپر بولیک به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

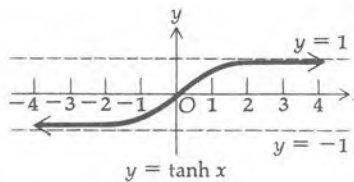
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (۱)$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (۲)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (۳)$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \quad (۴)$$

نمودار تابع تانژانت هیپر بولیک در شکل ۳.۷.۹ رسم شده است. از شکل‌های ۱.۷.۹، ۲.۷.۹ و ۳.۷.۹ دیده می‌شود که هیچکدام از این توابع تناوبی نیستند، حال آنکه تابع مثلثاتی متناظر هر یک از آنها تناوبی است.



شکل ۳.۷.۹

اتحادهایی وجود دارند که توابع هیپر بولیک در آنها صادق‌اند و شبیه اتحادهایی هستند که توابع مثلثاتی در آنها صدق می‌کنند. چهار تا از اتحادهای اصلی را در تعریف ۴.۷.۹ ذکر کردیم. چهار اتحاد اصلی دیگر به صورت زیرند

$$\tanh x = \frac{1}{\coth x} \quad (۵)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (۶)$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (۷)$$

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x. \quad (۸)$$

معادله (۵) مستقیماً از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. اثبات (۶) به شرح زیر است.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x})$$

$$= 1$$

معادله (۷) را می‌توان به صورت فوق با استفاده از تعریفهای $\tanh x$ و $\operatorname{sech} x$ برحسب e^x و e^{-x} اثبات کرد. با استفاده از اتحادهای دیگری می‌توان اثبات متفاوتی برای (۷) به دست داد:

$$1 - \tanh^2 x = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$$

اثبات (۸) را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین ۱ را ببینید). از این هشت اتحاد اصلی می‌توان اتحادهای دیگری هم به دست آورد. بعضی از اینها را در تمرینهای آتی خواهید دید. اتحادهای دیگر مانند توابع هیپر بولیک مجموع یا تفاضل دو عدد، و توابع هیپر بولیک دو برابر یک عدد یا نصف یک عدد، شبیه اتحادهای مثلثاتی متناظرشان هستند. گاه استفاده از دو رابطه زیر که از تعاریف ۱۰۷.۹ و ۲۰۷.۹ نتیجه می‌شوند مفید واقع می‌شود.

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad (9)$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} \quad (10)$$

حال برای اثبات اتحاد زیر از اینها استفاده می‌کنیم

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \quad (11)$$

بنا بر تعریف ۱۰۷.۹

$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

(۹) و (۱۰) را در طرف راست معادله بالا به کار می‌بریم، تا

$$\sinh(x+y) = \frac{1}{2} [(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)]$$

حاصل شود. پس از بسط طرف راست معادله بالا و ترکیب جملات، فرمول (۱۱) به دست می‌آید.

به طریقی مشابه می توان ثابت کرد که

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \quad (12)$$

اگر در (۱۱) و (۱۲)، x را به جای y قرار دهیم، دو فرمول زیر به دست می آیند

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad (13)$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x. \quad (14)$$

از ترکیب فرمول (۱۴) با اتحاد (۶)، دو فرمول دیگر برای $\cosh 2x$ به دست می آید که این دو فرمول عبارت اند از

$$\cosh 2x = 2 \sinh^2 x + 1 \quad (15)$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1. \quad (16)$$

اگر از (۱۵) و (۱۶) به ترتیب $\sinh x$ و $\cosh x$ را بیابیم و $x/2$ را به جای x قرار دهیم، داریم

$$\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad (17)$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}. \quad (18)$$

در طرف راست (۱۸)، علامت $\pm$ وجود ندارد، زیرا برد تابع کسینوس هیپر بولیک $[1, +\infty)$ است. جزئیات اثبات (۱۲) تا (۱۸) را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۲، ۴، ۵ را ببینید).

برای محاسبه مشتق تابع تانژانت هیپر بولیک از چند اتحاد استفاده می کنیم.

$$D_x(\tanh x) = D_x\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$$

فرمولهای مشتق دیگر توابع هیپر بولیک به صورت زیر هستند:

$$D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x; \quad D_x(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$D_x(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x.$$

می کنیم (تمرینهای ۱۵ و ۱۶ را ببینید).

از این فرمولها وقاعدۀ زنجیری، قضیۀ زیر به دست می آید.

۵.۷.۹ قضیه اگر u تابعی مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u D_x u$$

$$D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u D_x u$$

$$D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$$

$$D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u D_x u .$$

توجه کنید که فرمولهای مشتق سینوس، کسینوس، و تانژانت هیپر بولیک همه علامت به علاوه دارند، حال آنکه علامت همه فرمولهای مشتق کتانژانت، سکانت و کسکانت هیپر بولیک منهاست. به جز این مورد، این فرمولها شبیه فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی متناظرشان هستند.

مثال ۱ اگر $y = \tanh(1 - x^2)$ ، $D_x y$ را بیابید.

▲ حل $D_x y = -2x \operatorname{sech}^2(1 - x^2)$.

مثال ۲ اگر $y = \ln \sinh x$ ، dy/dx را بیابید.

▲ حل $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh x} \cdot \cosh x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$.

فرمولهای مربوط به مشتق در قضایای ۳۰۷۰۹ و ۵۰۷۰۹، در قضیه زیر به فرمولهای مربوط به انتگرال نامعین منجر می شوند.

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C \quad \text{قضیه ۶۰۷۰۹}$$

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C .$$

روشهای مورد استفاده برای یافتن انتگرال توانهای توابع هیپر بولیک شبیه روشهایی هستند که در مورد توانهای توابع مثلثاتی به کار گرفته شدند. دو مثال زیر روش محاسبه را نشان می دهند.

مثال ۳ $\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\begin{aligned} \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx &= \int \sinh^2 x \cosh^2 x (\sinh x dx) \\ &= \int (\cosh^2 x - 1) \cosh^2 x (\sinh x dx) \\ &= \int \cosh^4 x (\sinh x dx) - \int \cosh^2 x (\sinh x dx) \\ &= \frac{1}{5} \cosh^5 x - \frac{1}{3} \cosh^3 x + C. \end{aligned}$$

مثال ۴ $\int \operatorname{sech}^4 x dx$ را محاسبه کنید.

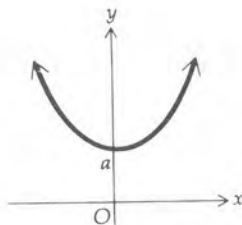
حل

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sech}^4 x dx &= \int \operatorname{sech}^2 x (\operatorname{sech}^2 x dx) \\ &= \int (1 - \tanh^2 x) (\operatorname{sech}^2 x dx) \\ &= \int \operatorname{sech}^2 x dx - \int \tanh^2 x (\operatorname{sech}^2 x dx) \\ &= \tanh x - \frac{1}{3} \tanh^3 x + C. \end{aligned}$$

منحنی تشکیل شده توسط کابل نرم همگنی که از دو نقطه آویزان شده و تحت وزن خودش است، منحنی زنجیری نام دارد. اگر پایینترین نقطه يك منحنی زنجیری نقطه $(0, a)$ باشد، می توان نشان داد که معادله ای از آن به صورت زیر است

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \quad a > 0 \quad (19)$$

نمودار معادله (۱۹) در شکل ۴.۷.۹ رسم شده است.



شکل ۴۰۷.۹

مثال ۵ مطلوب است طول قوس يك منحنی زنجیری به معادله (۱۹)، از نقطه $(0, a)$ تا نقطه (x_1, y_1) با این شرط که $x_1 > 0$.

حل اگر

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

آنگاه

$$f'(x) = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

اگر طول قوس مورد نظر L واحد باشد، با استفاده از قضیه ۳.۶.۷ داریم

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

بنابر فرمول (۶)، $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$ ، و چون $\cosh(x/a) \geq 1$ ، نتیجه می گیریم که

$$\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

اگر از معادله فوق در (۲۰) قرار دهیم نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &= a \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_0^{x_1} \end{aligned}$$

$$= a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right) - a \sinh 0$$

$$\triangleq = a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right).$$

تمرینهای ۷.۹

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، اتحادهای داده شده را اثبات کنید.

$$1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x \quad ۱.$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad ۲.$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \quad ۳.$$

$$\begin{aligned} & \sinh^2 x = 2 \sinh x \cosh x \quad (\text{الف}) \\ \cosh^2 x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \sinh^2 x + 1 = 2 \cosh^2 x - 1 \quad (\text{ب}) \end{aligned} \quad ۴.$$

$$\sinh \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad (\text{ب}); \quad \cosh \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \quad (\text{الف}) \quad ۵.$$

$$\operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \operatorname{csch} x \quad ۶.$$

$$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x \quad (\text{ب}); \quad \tanh(-x) = -\tanh x \quad (\text{الف}) \quad ۷.$$

$$\sinh^3 x = 3 \sinh x + 2 \sinh^3 x \quad ۸.$$

$$\cosh^3 x = 2 \cosh^3 x - \cosh x \quad ۹.$$

$$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x+y) \sinh(x-y) \quad ۱۰.$$

۱۱. اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، ثابت کنید

$$(\sinh x + \cosh x)^n = \cosh nx + \sinh nx.$$

(دانشجوی: از فرمول (۹) استفاده کنید.)

۱۲. ثابت کنید که تابع تانژانت هیپر بولیک فرد، و تابع سکانت هیپر بولیک زوج است.

۱۳. ثابت کنید که $\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

۱۴. ثابت کنید که $\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}$.

۱۵. ثابت کنید که (الف) $D_x(\sinh x) = \cosh x$ ؛ (ب) $D_x(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$.

۱۶. ثابت کنید که (الف) $D_x(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$ ؛

(ب) $D_x(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$.

در تمرینهای ۱۷ تا ۳۰، مشتق تابع داده شده را بیابید.

۱۸. $g(t) = \cosh t^2$

۱۷. $f(x) = \tanh \frac{x^2 + 1}{5}$

۲۰. $f(x) = \coth(\ln x)$

۱۹. $f(y) = \sinh e^{y^2}$

۲۲. $g(x) = \ln(\sinh x^2)$

۲۱. $f(w) = \operatorname{sech}^2 w$

۲۴. $h(x) = \coth \frac{1}{x}$

۲۳. $f(x) = e^x \cosh x$

۲۶. $F(x) = \tan^{-1}(\sinh x^2)$

۲۵. $h(t) = \ln(\tanh t)$

۲۸. $f(x) = \ln(\coth 3x - \operatorname{csch} 3x)$

۲۷. $G(x) = \sin^{-1}(\tanh x^2)$

۳۰. $g(x) = (\cosh x)^x$

۲۹. $f(x) = x^{\sinh x}; x > 0$

۳۱. ثابت کنید که (الف) $\int \tanh u \, du = \ln|\cosh u| + C$ ؛

(ب) $\int \coth u \, du = \ln|\sinh u| + C$.

۳۲. ثابت کنید که $\int \operatorname{sech} u \, du = 2 \tan^{-1} e^u + C$.

۳۳. ثابت کنید که $\int \operatorname{csch} u \, du = \ln|\tanh \frac{1}{2}u| + C$.

در تمرینهای ۳۴ تا ۴۳، انتگرال نامعین را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad ۳۵ \qquad \int e^x \operatorname{csch}^2 e^x dx \quad ۳۴$$

$$\int \cosh^2 \sqrt{t} dt \quad ۳۷ \qquad \int \tanh^2 x dx \quad ۳۶$$

$$\int \tanh x \ln (\cosh x) dx \quad ۳۹ \qquad \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx \quad ۳۸$$

$$\int \frac{e^{\cosh t}}{\operatorname{csch} t} dt \quad ۴۱ \qquad \int x \sinh^2 x^2 dx \quad ۴۰$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x dx \quad ۴۳ \qquad \int \operatorname{sech} x \tanh^2 x dx \quad ۴۲$$

در تمرینهای ۴۴ تا ۴۷، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\ln 2} \operatorname{sech}^2 t dt \quad ۴۵ \qquad \int_0^{\ln 2} \tanh z dz \quad ۴۴$$

$$\int_0^2 \sinh^2 x dx \quad ۴۷ \qquad \int_{-1}^1 \cosh^2 x dx \quad ۴۶$$

۴۸. نمودار تابع کتانژانت هیپربولیک را رسم کنید. معادلات مجانبها را بیابید.

۴۹. نمودار تابع سکانت هیپربولیک را رسم کنید. مطلوب است: اکستریمهای نسبی تابع، نقاط عطف نمودار، بازه‌هایی که بر آنها تفرع نمودار رو به بالاست، و بازه‌هایی که بر آنها تفرع نمودار رو به پایین است.

۵۰. ثابت کنید که تفرع منحنی زنجیری در تمام نقاط روبه بالاست.

۵۱. مساحت ناحیه محصور بین منحنی زنجیری مثال ۵، محور y ها، محور x ها، و خط $x = x_1$ ، که $x_1 > 0$ را بیابید.

۵۲. حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه تمرین ۵۱ حول محور x ها را بیابید.

۵۳. ذره‌ای برخطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = e^{-ct/2}(A \sinh t + B \cosh t)$ که در آن، فاصله جهت‌دار ذره از مبدأ در ثانیه t برابر با s سانتیمتر است، در حرکت است. اگر سرعت و شتاب ذره در ثانیه t به ترتیب v سانتیمتر بر ثانیه و a سانتیمتر بر مربع ثانیه باشند، v و a را بیابید. همچنین نشان دهید که a برابر با مجموع دو عدد

است که یکی از آنها با y و دیگری با x متناسب است.

۵۴. ثابت کنید که تابع سینوس هیپربولیک بر کل قلمروش پیوسته و صعودی است.

۵۵. ثابت کنید که تابع تانژانت هیپربولیک بر کل قلمروش پیوسته و صعودی است.

۵۶. ثابت کنید که تابع کسینوس هیپربولیک بر کل قلمروش پیوسته است، اما بر کل قلمروش یکنوا نیست. بازه‌هایی را که تابع بر آنها صعودی است و بازه‌هایی را که تابع بر آنها نزولی است، بیابید.

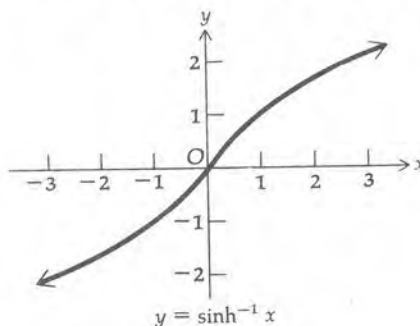
۸.۹ توابع هیپربولیک معکوس

از نمودار تابع سینوس هیپربولیک (شکل ۱۰۷.۹) دیده می‌شود که هر خط افقی نمودار را در یک و تنها یک نقطه قطع می‌کند؛ بنابراین تابع سینوس هیپربولیک یک به یک است. علاوه بر این، تابع سینوس هیپربولیک بر قلمروش پیوسته و صعودی هم هست (تمرین ۵۴ از تمرینهای ۷.۹ را ببینید). لذا، بنا بر قضیه ۵.۱۰۸، تابع معکوس دارد.

۱۰۸.۹ تعریف تابع سینوس هیپربولیک معکوس که نمادش $\sinh^{-1}$ است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$y = \sinh^{-1} x \text{ اگر و تنها اگر } x = \sinh y.$$

نمودار تابع سینوس هیپربولیک معکوس در شکل ۱۰۸.۹ رسم شده است. قلمروش مجموعه تمام اعداد حقیقی، R ، و بردش نیز مجموعه R است.



شکل ۱۰۸.۹

از تعریف ۱۰۸.۹ نتیجه می‌شود که

$$\sinh(\sinh^{-1} x) = x \quad (۱)$$

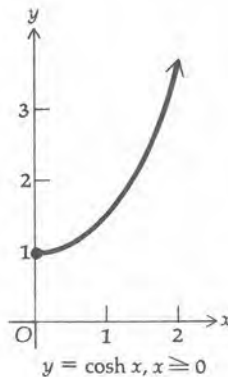
و

$$\sinh^{-1}(\sinh y) = y. \quad (۲)$$

از شکل ۲۰۷.۹ متوجه می‌شویم که هر خط $y = k$ ، که $k > ۱$ ، نمودار تابع کسینوس هیپربولیک را در دو نقطه قطع می‌کند. پس، به ازای هر عدد بزرگتر از ۱ در برد این تابع، دو عدد از قلمرو متناظر می‌شوند. لذا تابع کسینوس هیپربولیک یک به یک نیست و معکوس ندارد. حال، تابعی چون F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(x) = \cosh x \quad x \geq 0 \quad (۳)$$

قلمرو F بازه $[0, +\infty)$ ، و برد آن بازه $[1, +\infty)$ است. نمودار F در شکل ۲۰۸.۹ رسم شده است. تابع F بر قلمروش پیوسته و صعودی است (تمرین ۱ را ببینید)، و لذا بنا بر قضیه ۵.۱۰.۸، تابع F معکوس دارد؛ معکوس F به تابع کسینوس هیپربولیک معکوس موسوم است.



شکل ۲۰۸.۹

۲۰۸.۹ تعریف تابع کسینوس هیپربولیک معکوس که نمادش $\cosh^{-1}$ است، به صورت زیر تعریف می‌شود

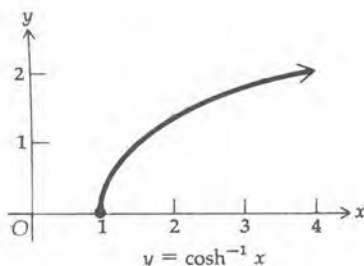
$$y = \cosh^{-1} x \text{ اگر و تنها اگر } x = \cosh y \text{ و } y \geq 0.$$

نمودار تابع کسینوس هیپربولیک معکوس در شکل ۲۰۸.۹ رسم شده است. قلمرو این تابع بازه $[1, +\infty)$ و برد آن بازه $[0, +\infty)$ است. بنا بر تعریف ۲۰۸.۹

$$\cosh(\cosh^{-1} x) = x \quad x \geq 1 \quad (۴)$$

و

$$\cosh^{-1}(\cosh y) = y \quad y \geq 0 \quad (۵)$$



شکل ۳۰۸۰۹

نظیر آنچه در مورد تابع سینوس هیپر بولیک دیدیم، هر خط افقی هر يك از نمودارهای توابع تانژانت، کتانژانت، و کسکانت هیپر بولیک را در يك و تنها يك نقطه قطع می‌کند. در مورد تابع تانژانت هیپر بولیک این نکته را می‌توان در شکل ۳۰۷۰۹ دید. لذا هر يك از این سه تابع يك به يك است؛ علاوه بر این، هر يك بر قلمروش پیوسته و یکنوا هم هست. بنابراین، هر سه تابع معکوس دارند.

۳۰۸۰۹ تعریف تابع تانژانت هیپر بولیک معکوس، تابع کتانژانت هیپر بولیک معکوس، و تابع کسکانت هیپر بولیک معکوس که به ترتیب با $\tanh^{-1}$ ، $\coth^{-1}$ ، و csch^{-1} نمایش داده می‌شوند، توسط ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند.

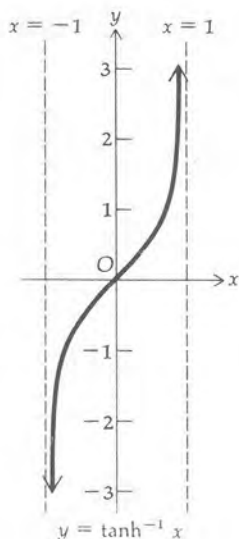
$$x = \tanh y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y = \tanh^{-1} x$$

$$x = \coth y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y = \coth^{-1} x$$

$$x = \operatorname{csch} y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad y = \operatorname{csch}^{-1} x$$

نمودار تابع تانژانت هیپر بولیک معکوس در شکل ۳۰۸۰۹ رسم شده است. چون $\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$ و تابع کسینوس هیپر بولیک يك به يك نیست، نتیجه می‌گیریم که تابع سکانت هیپر بولیک هم يك به يك نیست. لذا این تابع معکوس ندارد. با این وجود، به همان ترتیب که در مورد تابع کسینوس هیپر بولیک انجام شد، تابع جدیدی تعریف می‌کنیم که معکوس داشته باشد. فرض کنید G با ضابطه زیر

$$G(x) = \operatorname{sech} x \quad x \geq 0 \quad (۶)$$



شکل ۴۰۸.۹

تعریف بشود. می‌توان نشان داد که G بر قلمروش پیوسته و یک‌نواست (تمرین ۲ را ببینید)؛ بنا بر این G معکوس دارد؛ معکوس G را تابع سکانت هیپربولیک معکوس می‌نامند.

۴۰۸.۹ تعریف تابع سکانت هیپربولیک معکوس که نمادش sech^{-1} است، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x \text{ اگر و تنها اگر } x = \operatorname{sech} y \text{ و } y \geq 0. \quad (۷)$$

توابع هیپربولیک معکوس را می‌توان بر حسب لگاریتمهای طبیعی هم بیان کرد. این نکته نباید شگفت‌انگیز باشد زیرا توابع هیپربولیک را بر حسب تابع نمایی تعریف کردیم، و تابع لگاریتمی طبیعی هم معکوس تابع نمایی است. ذیلاً عبارتهای مربوط به $\sinh^{-1}$ ، $\cosh^{-1}$ ، $\tanh^{-1}$ و $\coth^{-1}$ را می‌آوریم.

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbb{R} \quad (۸)$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1 \quad (۹)$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad |x| < 1 \quad (۱۰)$$

$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad |x| > 1 \quad (11)$$

(۹) را به اثبات می‌رسانیم و اثبات سه فرمول دیگر را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرینهای ۳ تا ۵ را ببینید).

برای اثبات (۹)، فرض کنید $x \geq 1$ ، $y = \cosh^{-1} x$ ، آنگاه، بنا بر تعریف ۲.۸.۹، $x = \cosh y$ ، $y \geq 0$ ، تعریف ۲.۷.۹ را در مورد $\cosh y$ به کار می‌بندیم و نتیجه می‌گیریم که

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad y \geq 0$$

از اینجا داریم

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \quad y \geq 0$$

با استفاده از فرمول ریشه‌های معادله درجه دوم، e^y را محاسبه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad y \geq 0 \quad (12)$$

می‌دانیم که $y \geq 0$ و $x \geq 1$ پس $e^y \geq 1$ وقتی که $x = 1$ ،

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = x - \sqrt{x^2 - 1} = 1.$$

علاوه بر این، وقتی که $x > 1$ ، $x - 1 < x + 1$ ؛ لذا $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$ بنا بر این

$$\sqrt{x-1}\sqrt{x-1} < \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}.$$

از اینجا $x - 1 < \sqrt{x^2 - 1}$ پس وقتی $x > 1$ ، $x - \sqrt{x^2 - 1} < 1$ در نتیجه بدون هیچ مشکلی می‌توانیم در (۱۲) علامت منها را رد کنیم. و چون $y = \cosh^{-1} x$ داریم

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

که همان (۹) است.

مثال ۱ هر يك از کمیت‌های زیر را بر حسب لگاریتم طبیعی بیان کنید

$$\sin^{-1} \frac{2}{5} \quad (\text{ب}) \quad \tanh^{-1} \left(-\frac{4}{5} \right) \quad (\text{الف})$$

حل

(الف) بنا بر (۱۰)

$$\tanh^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{9} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{9} = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3.$$

(ب) بنا بر (۸)

$$\triangle \quad \sinh^{-1} 2 = \ln(2 + \sqrt{5}).$$

برای اینکه فرمول مشتق تابع سینوس هیپربولیک معکوس را بیابیم، فرض می‌کنیم $y = \sinh^{-1} x$. آنگاه $x = \sinh y$. پس نظر به اینکه $D_y x = \cosh y$ و $D_x y = 1/D_y x$

$$D_x y = \frac{1}{\cosh y}. \quad (۱۳)$$

از اتحاد $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ نتیجه می‌شود که

$$\cosh y = \sqrt{\sinh^2 y + 1}.$$

(توجه: هنگام گرفتن ریشه دوم علامت منها رد می‌شود زیرا $\cosh y \geq 1$.) بنا بر این، چون $x = \sinh y$ داریم $\cosh y = \sqrt{x^2 + 1}$. این را در (۱۳) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$D_x(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (۱۴)$$

فرمول (۱۴) را می‌توان به صورت زیر از (۸) هم به دست آورد

$$\begin{aligned} D_x(\sinh^{-1} x) &= D_x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

با روشی شبیه به همان روشی که مشتق تابع سینوس هیپر بولیک معکوس را به دست آوردیم، فرمولهای مشتق پنج تابع هیپر بولیک معکوس دیگر هم به دست می آیند. پیدا کردن آنها را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (تمرینهای ۶ تا ۱۰ را ببینید). از این فرمولها و قاعده زنجیری، قضیه بعد نتیجه می شود.

۵.۸.۹ قضیه اگر u تابع مشتق پذیری از x باشد،

$$D_x(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} D_x u \quad (15)$$

$$D_x(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u \quad u > 1 \quad (16)$$

$$D_x(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \quad |u| < 1 \quad (17)$$

$$D_x(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1 - u^2} D_x u \quad |u| > 1 \quad (18)$$

$$D_x(\operatorname{sech}^{-1} u) = -\frac{1}{u\sqrt{1 - u^2}} D_x u \quad 0 < u < 1 \quad (19)$$

$$D_x(\operatorname{csch}^{-1} u) = -\frac{1}{|u|\sqrt{1 + u^2}} D_x u \quad u \neq 0 \quad (20)$$

مثال ۲ اگر $f(x) = \tanh^{-1}(\cos 2x)$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حل بنا بر فرمول (۱۷)

$$\blacktriangle f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{1 - \cos^2 2x} = \frac{-2 \sin 2x}{\sin^2 2x} = -2 \csc 2x.$$

مثال ۳ نشان دهید که $D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) = \cosh^{-1} x$

حل

$$\begin{aligned} D_x(x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \cosh^{-1} x + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \cosh^{-1} x. \end{aligned}$$

▲

کاربرد عمده توابع هیپربولیک معکوس در ارتباط با انتگرال گیری است. بحث درباره این موضوع را تا بخش ۶.۱۰ به تعویق می اندازیم.

تمرینهای ۸.۹

۱. اگر $F(x) = \cosh x$ و $x \geq 0$ ، ثابت کنید که F بر قلمروش پیوسته و صعودی است.

۲. اگر $G(x) = \operatorname{sech} x$ و $x \geq 0$ ، ثابت کنید که G بر قلمروش پیوسته و یکنواست.

در تمرینهای ۳ تا ۱۰، فرمولی از این بخش را که خواسته شده، اثبات کنید.

$$۳. \text{ فرمول (۸)} \quad ۴. \text{ فرمول (۱۰)}$$

$$۵. \text{ فرمول (۱۱)} \quad ۶. \text{ فرمول (۱۶)}$$

$$۷. \text{ فرمول (۱۷)} \quad ۸. \text{ فرمول (۱۸)}$$

$$۹. \text{ فرمول (۱۹)} \quad ۱۰. \text{ فرمول (۲۰)}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۴، کمیت داده شده را برحسب لگاریتم طبیعی بیان کنید.

$$۱۱. \sinh^{-1} \frac{1}{4} \quad ۱۲. \cosh^{-1} 3$$

$$۱۳. \tanh^{-1} \frac{1}{4} \quad ۱۴. \coth^{-1}(-2)$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۳۲، مشتق تابع داده شده را بیابید.

$$۱۵. f(x) = \sinh^{-1} x^2 \quad ۱۶. G(x) = \coth^{-1} \frac{1}{3} x$$

$$۱۷. F(x) = \tanh^{-1} 4x \quad ۱۸. h(w) = \tanh^{-1} w^2$$

$$۱۹. g(x) = \coth^{-1}(3x+1) \quad ۲۰. f(r) = \operatorname{csch}^{-1} \frac{1}{4} r^2$$

$$۲۱. f(x) = x^2 \cosh^{-1} x^2 \quad ۲۲. h(x) = (\operatorname{sech}^{-1} x)^2$$

$$۲۳. f(x) = \sinh^{-1}(\tan x) \quad ۲۴. g(x) = \tanh^{-1}(\sin 3x)$$

$$۲۵. h(x) = \cosh^{-1}(\csc x) \quad ۲۶. F(x) = \coth^{-1}(\cosh x)$$

$$f(t) = \sinh^{-1} e^{2t} \quad ۲۸ \quad f(z) = (\coth^{-1} z^2)^2 \quad ۲۷$$

$$h(x) = \cosh^{-1}(\ln x) \quad ۳۰ \quad g(x) = \tanh^{-1}(\sec e^x) \quad ۲۹$$

$$G(x) = x \sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} \quad ۳۱$$

$$H(x) = \ln \sqrt{x^2+1} - x \tanh^{-1} x \quad ۳۲$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۶، نمودار تابع مشخص شده را رسم کنید.

۳۳. تابع تانژانت هیپر بولیک معکوس

۳۴. تابع کتانژانت هیپر بولیک معکوس

۳۵. تابع سکانت هیپر بولیک معکوس

۳۶. تابع کسکانت هیپر بولیک معکوس

تمرینهای مروری فصل ۹

در تمرینهای ۱ تا ۲۷، مشتق تابع داده شده را بیابید.

$$g(x) = \sqrt{\csc 3x} \quad ۲ \quad f(x) = \tan^2 3x \quad ۱$$

$$f(w) = w \tan \frac{1}{w} \quad ۴ \quad h(x) = \ln |\cot x| \quad ۳$$

$$G(x) = 4^{\csc 2x} \quad ۶ \quad g(x) = e^{\tan x} + \sec^2 x \quad ۵$$

$$g(x) = \cot 3x \sqrt{\sin 2x} \quad ۸ \quad F(x) = \tan^{-1} 2^x \quad ۷$$

$$g(t) = \ln \operatorname{sech} t^2 \quad ۱۰ \quad f(x) = \cosh^2 2x \quad ۹$$

$$f(x) = \log_{10} |\sec 5x + \tan 5x| \quad ۱۱$$

$$h(x) = e^x (\cosh x + \sinh x) \quad ۱۲$$

$$g(x) = x^2 \sin^{-1} 2x \quad ۱۳ \quad h(w) = w^2 \sinh^{-1} 2w \quad ۱۴$$

$$f(t) = \sec^2 t + 3^{\sec t} \quad ۱۶ \quad f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 + \tan x} \quad ۱۵$$

$$f(x) = \frac{\cot^2 x}{x^4} \quad .18$$

$$g(x) = \frac{\cot^2 x}{1+x^2} \quad .17$$

$$F(x) = \cot^2 x \cdot \csc x \quad .20$$

$$G(w) = \tan^{-1} \left(\frac{w-3}{3w+1} \right) \quad .19$$

$$h(x) = \tan(\cosh 3x) \quad .22$$

$$g(x) = \tan^{-1}(\tanh \sqrt{x}) \quad .21$$

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan^{-1} x) \quad .24$$

$$f(x) = \tanh^{-1}(\sec e^x) \quad .23$$

$$h(x) = (\sec x)^{e^x}; \sec x > 0 \quad .26$$

$$f(t) = \frac{\ln t}{\csc t} \quad .25$$

$$f(x) = (\tan x)^{1/x^2}; \tan x > 0 \quad .27$$

۲۸. گودرمانی، تابعی است که با ضابطه $\operatorname{gd} x = \tan^{-1}(\sinh x)$ تعریف می‌شود.

نشان دهید که $D_x(\operatorname{gd} x) = \operatorname{sech} x$.

۲۹. اندازه چهار زاویه داخلی يك چهار ضلعی با رئوس $(-2, 4)$ ، $(5, 6)$ ، $(-2, 4)$ ، و $(-2, 1)$ ، و $(3, 1)$ را به نزدیکترین درجه بیابید؛ و بررسی کنید که مجموع آنها 360° است.

در تمرینهای ۳۰ تا ۳۲، حد مفروض (۱)، در صورت وجود، محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{4x^4} \quad .31$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{2x} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc 3x}{\cot x} \quad .32$$

در تمرینهای ۳۳ تا ۳۶، با مشتق‌گیری ضمنی (۱) بیابید.

$$\sec(x+y) - \sec(x-y) = 1 \quad .34$$

$$\tan(x+y) = xy \quad .33$$

$$\tan^{-1}(x+3y) = \ln y \quad .36$$

$$\cot^{-1} \frac{x^2}{3y} + xy^2 = 0 \quad .35$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۵۲، انتگرال نامعین (۱) محاسبه کنید.

$$\int \frac{\sec(1/x)}{x^2} dx \quad .38$$

$$\int x \tan 3x^2 dx \quad .37$$

$$\int (\csc^2 t - \cot^2 t) dt \quad ۴۰ \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad ۴۹$$

$$\int \tan^2 x \sec^2 x dx \quad ۴۲ \quad \int e^x \cot^2 e^x \csc^2 e^x dx \quad ۴۱$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+5x-2x^2}} \quad ۴۴ \quad \int \frac{dx}{2x^2+3x+5} \quad ۴۳$$

$$\int x \coth \frac{1}{x} dx \quad ۴۶ \quad \int \tanh^2 x dx \quad ۴۵$$

$$\int x^2 \sec^2 x^2 dx \quad ۴۸ \quad \int \frac{x \sin w - 1}{\cos^2 w} dw \quad ۴۷$$

$$\int \frac{e^y}{\sqrt{e^{2y}+9}} dy \quad ۵۰ \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-8}} \quad ۴۹$$

$$\int \frac{\cosh^2 x}{\sqrt{\sinh x}} dx \quad ۵۲ \quad \int \frac{\sec^2 \sqrt{t} dt}{\sqrt{t}} \quad ۵۱$$

در تمرینهای ۵۳ تا ۵۸، انتگرال معین را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx \quad ۵۴ \quad \int_0^{\pi/2} \sec^2 x \tan^5 x dx \quad ۵۳$$

$$\int_{-1}^1 \frac{2x+6}{x^2+2x+5} dx \quad ۵۶ \quad \int_1^2 \frac{(t+2) dt}{\sqrt{4t-t^2}} \quad ۵۵$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cosh y} dy \quad ۵۸ \quad \int_0^1 \operatorname{sech}^2 x dx \quad ۵۷$$

$$۵۹. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\tan x + 1| dx \quad \text{مطلوب است محاسبه}$$

$$۶۰. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} |\sec x - 2| dx \quad \text{مطلوب است محاسبه}$$

$$۶۱. \text{طول قوس منحنی } y = \ln \sec x \text{ از مبدأ تا نقطه } (\pi/3, \ln 2) \text{ را بیابید.}$$

$$۶۲. \text{مقدار متوسط تابع تانژانتی بر بازه بسته } [0, \pi/4] \text{ را بیابید.}$$

۶۳. مساحت ناحیه واقع در ربع اول محصور بین محور y ها، و منحنیهای $y = \sec^2 x$ و $y = 2 \tan^2 x$ را بیابید.

۶۴. مساحت ناحیه محصور بین منحنی $y = 9/\sqrt{9-x^2}$ ، دو محور مختصات، و خط $x = 2\sqrt{2}$ را بیابید.

۶۵. معادله ای برای خط قائم بر منحنی $y = \sec x$ در نقطه $(2\pi/3, -2)$ به دست آورید.

۶۶. طول منحنی زنجیری $y = \cosh x$ از $(\ln 2, 5/4)$ تا $(\ln 3, 5/3)$ را بیابید.

۶۷. نشان دهید که $\cosh(\ln x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$.

۶۸. ثابت کنید که (الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \coth x = 1$ ؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{csch} x = 0$.

۶۹. مطلوب است حجم جسم دوار حاصل از دوران ناحیه محصور بین منحنی $y = \sinh x$ ، محور x ها، و خطهای $x = \ln 2$ و $x = 0$ حول محور x ها.

۷۰. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4} \sin^{-1} 3x$ را رسم کنید.

۷۱. يك چراغ جستجو در $1/2$ کیلومتری جاده مستقیمی قرار دارد و با نور اتومبیلی را که با سرعت ثابت ۶۰ کیلومتر در ساعت در حرکت است تعقیب می کند. مطلوب است آهنگ تغییر جهت پرتو نور، (الف) وقتی که اتومبیل به نقطه ای می رسد که فاصله آن تا چراغ جستجو حداقل است؛ (ب) وقتی که اتومبیل $1/2$ کیلومتر از این نقطه دور می شود.

۷۲. هلیکوپتری از نقطه ای که ۸۰۰ فوت با ناظری فاصله دارد از زمین بلند می شود و با آهنگ ۲۵ فوت بر ثانیه به طور قائم ارتفاع می گیرد. وقتی که هلیکوپتر به ۶۰۰ فوتی زمین می رسد، آهنگ زمانی تغییر اندازه زاویه فراز هلیکوپتر از چشم ناظر چقدر است؟

۷۳. هواپیمایی با سرعت ۳۰۰ میل بر ساعت در ارتفاع ۴ میلی در پرواز است و ناظری از زمین به آن نگاه می کند. وقتی که هواپیما درست بالای نقطه ای از زمین می رسد که ۲ میل از ناظر فاصله دارد، آهنگ زمانی تغییر اندازه زاویه فراز هواپیما از چشم ناظر چقدر است؟

۷۴. تابلویی که ۵ فوت ارتفاع دارد بر دیواری به گونه ای نصب شده است که پایین آن

۷ فوت بالاتر از سطح تراز چشم يك ناظر است. ناظر با آهنگ ۳ فوت بر ثانیه به دیوار نزدیک می شود. وقتی که ناظر به ۱۵ فوتی دیوار می رسد اندازه زاویه ای که تابلودر چشمش تشکیل می دهد با چه تندی تغییر می کند؟

۷۵. ذره ای در امتداد خط مستقیمی در حرکت است و داریم

$$s = \sin\left(4t + \frac{1}{3}\pi\right) + \sin\left(4t + \frac{1}{6}\pi\right)$$

که s فاصله جهت دار ذره از مبدأ بر حسب سانتیمتر در ثانیه t م است. نشان دهید که حرکت هماهنگ ساده است. دامنه حرکت را هم بیابید. (تمرین ۴۳ از تمرینهای ۶.۹ را ببینید.)

۷۶. اگر معادله حرکت منحنی کی $s = \cos 2t + 2 \sin 2t$ باشد، ثابت کنید که حرکت هماهنگ ساده است. (تمرین ۴۳ از تمرینهای ۶.۹ را ببینید.)

۷۷. دو نقطه A و B در دوانتهای یکی از اقطار دریاچه مستدیری که طول قطر آن يك کیلومتر است واقع هستند. شخصی می خواهد از نقطه A به نقطه B برود. شخص می تواند با آهنگ $1\frac{1}{2}$ کیلومتر بر ساعت پارو بزند، یا با آهنگ ۵ کیلومتر بر ساعت راه برود. حداقل زمان لازم برای رفتن شخص از A به B چقدر است؟

۷۸. تمرین ۷۷ را با این فرض حل کنید که آهنگ پارو زدن و راه رفتن، به ترتیب، ۲ و ۴ کیلومتر بر ساعت باشند.

۷۹. نمودار معادله $x = a \sinh^{-1} \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} - \sqrt{a^2 - y^2}$ به تراکتریس موسوم است. ثابت کنید که ضریب زاویه منحنی در هر نقطه دلخواه (x, y) برابر با $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$ است.

پیوست |

جدول ۱ توانها و ریشهها

n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n^3	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1.000	1	1.000	51	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	52	2,704	7.211	140,608	3.732
3	9	1.732	27	1.442	53	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	54	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	55	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	56	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	57	3,249	7.550	185,193	3.848
8	64	2.828	512	2.000	58	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	59	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	60	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	61	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	62	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	63	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	64	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	65	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	66	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	67	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	68	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	69	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	70	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	71	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	72	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	73	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	74	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	75	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	76	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	77	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.291	21,952	3.037	78	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	79	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	80	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	81	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	82	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	83	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	84	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	85	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	86	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	87	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	88	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	89	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	90	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	91	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	92	8,464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	93	8,649	9.643	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	94	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	95	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	96	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	97	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	98	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	99	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	100	10,000	10.000	1,000,000	4.642

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0100	0198	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862
1.1	0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740
1.2	1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546
1.3	2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293
1.4	3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988
1.5	4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637
1.6	4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247
1.7	5306	5365	5423	5481	5539	5596	5653	5710	5766	5822
1.8	5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366
1.9	6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881
2.0	6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372
2.1	7419	7467	7514	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839
2.2	7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	8286
2.3	8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713
2.4	8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123
2.5	9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517
2.6	9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895
2.7	9933	9969	*0006	*0043	*0080	*0116	*0152	*0188	*0225	*0260
2.8	1.0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613
2.9	0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953
3.0	1.0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282
3.1	1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600
3.2	1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909
3.3	1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208
3.4	2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499
3.5	1.2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782
3.6	2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056
3.7	3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324
3.8	3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584
3.9	3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838
4.0	1.3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085
4.1	4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327
4.2	4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563
4.3	4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793
4.4	4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019
4.5	1.5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239
4.6	5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454
4.7	5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665
4.8	5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872
4.9	5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074
5.0	1.6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273
5.1	6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467
5.2	6487	6506	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658
5.3	6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6845
5.4	6864	6882	6901	6919	6938	6956	6974	6993	7011	7029

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	1.7047	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7210
5.6	7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387
5.7	7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561
5.8	7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733
5.9	7750	7766	7783	7800	7817	7834	7851	7867	7884	7901
6.0	1.7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066
6.1	8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229
6.2	8245	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390
6.3	8405	8421	8437	8453	8469	8485	8500	8516	8532	8547
6.4	8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8703
6.5	1.8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856
6.6	8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006
6.7	9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155
6.8	9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301
6.9	9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445
7.0	1.9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587
7.1	9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9727
7.2	9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865
7.3	9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	*0001
7.4	2.0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136
7.5	2.0149	0162	0176	0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268
7.6	0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399
7.7	0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528
7.8	0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0630	0643	0656
7.9	0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782
8.0	2.0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906
8.1	0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029
8.2	1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150
8.3	1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270
8.4	1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389
8.5	2.1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506
8.6	1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622
8.7	1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736
8.8	1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849
8.9	1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961
9.0	2.1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072
9.1	2083	2094	2105	2116	2127	2138	2148	2159	2170	2181
9.2	2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289
9.3	2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2386	2396
9.4	2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502
9.5	2.2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607
9.6	2618	2628	2638	2649	2659	2670	2680	2690	2701	2711
9.7	2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814
9.8	2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915
9.9	2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016

برای محاسبه لگاریتم اعداد بزرگتر از ۱۰ یا کوچکتر از ۱ از ۲٫۳۰۲۵۹ = $\ln 10$ استفاده کنید. مثال:

$$\ln 220 = \ln 2.2 \times 10 = 0.7885 + (2.30259) = 3.0913$$

جدول ۳ توابع نمایی

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
0.00	1.0000	0.00000	1.000000	0.50	1.6487	0.21715	0.606531
0.01	1.0101	.00434	0.990050	0.51	1.6653	.22149	.600496
0.02	1.0202	.00869	.980199	0.52	1.6820	.22583	.594521
0.03	1.0305	.01303	.970446	0.53	1.6989	.23018	.588605
0.04	1.0408	.01737	.960789	0.54	1.7160	.23452	.582748
0.05	1.0513	0.02171	0.951229	0.55	1.7333	0.23886	0.576950
0.06	1.0618	.02606	.941765	0.56	1.7507	.24320	.571209
0.07	1.0725	.03040	.932394	0.57	1.7683	.24755	.565525
0.08	1.0833	.03474	.923116	0.58	1.7860	.25189	.559898
0.09	1.0942	.03909	.913931	0.59	1.8040	.25623	.554327
0.10	1.1052	0.04343	0.904837	0.60	1.8221	0.26058	0.548812
0.11	1.1163	.04777	.895834	0.61	1.8404	.26492	.543351
0.12	1.1275	.05212	.886920	0.62	1.8589	.26926	.537944
0.13	1.1388	.05646	.878095	0.63	1.8776	.27361	.532592
0.14	1.1503	.06080	.869358	0.64	1.8965	.27795	.527292
0.15	1.1618	0.06514	0.860708	0.65	1.9155	0.28229	0.522046
0.16	1.1735	.06949	.852144	0.66	1.9348	.28663	.516851
0.17	1.1853	.07383	.843665	0.67	1.9542	.29098	.511709
0.18	1.1972	.07817	.835270	0.68	1.9739	.29532	.506617
0.19	1.2092	.08252	.826959	0.69	1.9937	.29966	.501576
0.20	1.2214	0.08686	0.818731	0.70	2.0138	0.30401	0.496585
0.21	1.2337	.09120	.810584	0.71	2.0340	.30835	.491644
0.22	1.2461	.09554	.802519	0.72	2.0544	.31269	.486752
0.23	1.2586	.09989	.794534	0.73	2.0751	.31703	.481909
0.24	1.2712	.10423	.786628	0.74	2.0959	.32138	.477114
0.25	1.2840	0.10857	0.778801	0.75	2.1170	0.32572	0.472367
0.26	1.2969	.11292	.771052	0.76	2.1383	.33006	.467666
0.27	1.3100	.11726	.763379	0.77	2.1598	.33441	.463013
0.28	1.3231	.12160	.755784	0.78	2.1815	.33875	.458406
0.29	1.3364	.12595	.748264	0.79	2.2034	.34309	.453845
0.30	1.3499	0.13029	0.740818	0.80	2.2255	0.34744	0.449329
0.31	1.3634	.13463	.733447	0.81	2.2479	.35178	.444858
0.32	1.3771	.13897	.726149	0.82	2.2705	.35612	.440432
0.33	1.3910	.14332	.718924	0.83	2.2933	.36046	.436049
0.34	1.4049	.14766	.711770	0.84	2.3164	.36481	.431711
0.35	1.4191	0.15200	0.704688	0.85	2.3396	0.36915	0.427415
0.36	1.4333	.15635	.697676	0.86	2.3632	.37349	.423162
0.37	1.4477	.16069	.690734	0.87	2.3869	.37784	.418952
0.38	1.4623	.16503	.683861	0.88	2.4109	.38218	.414783
0.39	1.4770	.16937	.677057	0.89	2.4351	.38652	.410656
0.40	1.4918	0.17372	0.670320	0.90	2.4596	0.39087	0.406570
0.41	1.5068	.17806	.663650	0.91	2.4843	.39521	.402524
0.42	1.5220	.18240	.657047	0.92	2.5093	.39955	.398519
0.43	1.5373	.18675	.650509	0.93	2.5345	.40389	.394554
0.44	1.5527	.19109	.644036	0.94	2.5600	.40824	.390628
0.45	1.5683	0.19543	0.637628	0.95	2.5857	0.41258	0.386741
0.46	1.5841	.19978	.631284	0.96	2.6117	.41692	.382893
0.47	1.6000	.20412	.625002	0.97	2.6379	.42127	.379083
0.48	1.6161	.20846	.618783	0.98	2.6645	.42561	.375311
0.49	1.6323	.21280	.612626	0.99	2.6912	.42995	.371577
0.50	1.6487	0.21715	0.606531	1.00	2.7183	0.43429	0.367879

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
1.00	2.7183	0.43429	0.367879	1.50	4.4817	0.65144	0.223130
1.01	2.7456	.43864	.364219	1.51	4.5267	.65578	.220910
1.02	2.7732	.44298	.360595	1.52	4.5722	.66013	.218712
1.03	2.8011	.44732	.357007	1.53	4.6182	.66447	.216536
1.04	2.8292	.45167	.353455	1.54	4.6646	.66881	.214381
1.05	2.8577	0.45601	0.349938	1.55	4.7115	0.67316	0.212248
1.06	2.8864	.46035	.346456	1.56	4.7588	.67750	.210136
1.07	2.9154	.46470	.343009	1.57	4.8066	.68184	.208045
1.08	2.9447	.46904	.339596	1.58	4.8550	.68619	.205975
1.09	2.9743	.47338	.336216	1.59	4.9037	.69053	.203926
1.10	3.0042	0.47772	0.332871	1.60	4.9530	0.69487	0.201897
1.11	3.0344	.48207	.329559	1.61	5.0028	.69921	.199888
1.12	3.0649	.48641	.326280	1.62	5.0531	.70356	.197899
1.13	3.0957	.49075	.323033	1.63	5.1039	.70790	.195930
1.14	3.1268	.49510	.319819	1.64	5.1552	.71224	.193980
1.15	3.1582	0.49944	0.316637	1.65	5.2070	0.71659	0.192050
1.16	3.1899	.50378	.313486	1.66	5.2593	.72093	.190139
1.17	3.2220	.50812	.310367	1.67	5.3122	.72527	.188247
1.18	3.2544	.51247	.307279	1.68	5.3656	.72961	.186374
1.19	3.2871	.51681	.304221	1.69	5.4195	.73396	.184520
1.20	3.3201	0.52115	0.301194	1.70	5.4739	0.73830	0.182684
1.21	3.3535	.52550	.298197	1.71	5.5290	.74264	.180866
1.22	3.3872	.52984	.295230	1.72	5.5845	.74699	.179066
1.23	3.4212	.53418	.292293	1.73	5.6407	.75133	.177284
1.24	3.4556	.53853	.289384	1.74	5.6973	.75567	.175520
1.25	3.4903	0.54287	0.286505	1.75	5.7546	0.76002	0.173774
1.26	3.5254	.54721	.283654	1.76	5.8124	.76436	.172045
1.27	3.5609	.55155	.280832	1.77	5.8709	.76870	.170333
1.28	3.5966	.55590	.278037	1.78	5.9299	.77304	.168638
1.29	3.6328	.56024	.275271	1.79	5.9895	.77739	.166960
1.30	3.6693	0.56458	0.272532	1.80	6.0496	0.78173	0.165299
1.31	3.7062	.56893	.269820	1.81	6.1104	.78607	.163654
1.32	3.7434	.57327	.267135	1.82	6.1719	.79042	.162026
1.33	3.7810	.57761	.264477	1.83	6.2339	.79476	.160414
1.34	3.8190	.58195	.261846	1.84	6.2965	.79910	.158817
1.35	3.8574	0.58630	0.259240	1.85	6.3598	0.80344	0.157237
1.36	3.8962	.59064	.256661	1.86	6.4237	.80779	.155673
1.37	3.9354	.59498	.254107	1.87	6.4483	.81213	.154124
1.38	3.9749	.59933	.251579	1.88	6.5535	.81647	.152590
1.39	4.0149	.60367	.249075	1.89	6.6194	.82082	.151072
1.40	4.0552	0.60801	0.246597	1.90	6.6859	0.82516	0.149569
1.41	4.0960	.61236	.244143	1.91	6.7531	.82950	.148080
1.42	4.1371	.61670	.241714	1.92	6.8210	.83385	.146607
1.43	4.1787	.62104	.239309	1.93	6.8895	.83819	.145148
1.44	4.2207	.62538	.236928	1.94	6.9588	.84253	.143704
1.45	4.2631	0.62973	0.234570	1.95	7.0287	0.84687	0.142274
1.46	4.3060	.63407	.232236	1.96	7.0993	.85122	.140858
1.47	4.3492	.63841	.229925	1.97	7.1707	.85556	.139457
1.48	4.3929	.64276	.227638	1.98	7.2427	.85990	.138069
1.49	4.4371	.64710	.225373	1.99	7.3155	.86425	.136695
1.50	4.4817	0.65144	0.223130	2.00	7.3891	0.86859	0.135335

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
2.00	7.3891	0.86859	0.135335	2.50	12.182	1.08574	0.082085
2.01	7.4633	.87293	.133989	2.51	12.305	1.09008	.081268
2.02	7.5383	.87727	.132655	2.52	12.429	1.09442	.080460
2.03	7.6141	.88162	.131336	2.53	12.554	1.09877	.079659
2.04	7.6906	.88596	.130029	2.54	12.680	1.10311	.078866
2.05	7.7679	0.89030	0.128735	2.55	12.807	1.10745	0.078082
2.06	7.8460	.89465	.127454	2.56	12.936	1.11179	.077305
2.07	7.9248	.89899	.126186	2.57	13.066	1.11614	.076536
2.08	8.0045	.90333	.124930	2.58	13.197	1.12048	.075774
2.09	8.0849	.90756	.123687	2.59	13.330	1.12482	.075020
2.10	8.1662	0.91202	0.122456	2.60	13.464	1.12917	0.074274
2.11	8.2482	.91636	.121238	2.61	13.599	1.13351	.073535
2.12	8.3311	.92070	.120032	2.62	13.736	1.13785	.072803
2.13	8.4149	.92505	.118837	2.63	13.874	1.14219	.072078
2.14	8.4994	.92939	.117655	2.64	14.013	1.14654	.071361
2.15	8.5849	0.93373	0.116484	2.65	14.154	1.15088	0.070651
2.16	8.6711	.93808	.115325	2.66	14.296	1.15522	.069948
2.17	8.7583	.94242	.114178	2.67	14.440	1.15957	.069252
2.18	8.8463	.94676	.113042	2.68	14.585	1.16391	.068563
2.19	8.9352	.95110	.111917	2.69	14.732	1.16825	.067881
2.20	9.0250	0.95545	0.110803	2.70	14.880	1.17260	0.067206
2.21	9.1157	.95979	.109701	2.71	15.029	1.17694	.066537
2.22	9.2073	.96413	.108609	2.72	15.180	1.18128	.065875
2.23	9.2999	.96848	.107528	2.73	15.333	1.18562	.065219
2.24	9.3933	.97282	.106459	2.74	15.487	1.18997	.064570
2.25	9.4877	0.97716	0.105399	2.75	15.643	1.19431	0.063928
2.26	9.5831	.98151	.104350	2.76	15.800	1.19865	.063292
2.27	9.6794	.98585	.103312	2.77	15.959	1.20300	.062662
2.28	9.7767	.99019	.102284	2.78	16.119	1.20734	.062039
2.29	9.8749	.99453	.101266	2.79	16.281	1.21168	.061421
2.30	9.9742	0.99888	0.100259	2.80	16.445	1.21602	0.060810
2.31	10.074	1.00322	.099261	2.81	16.610	1.22037	.060205
2.32	10.176	1.00756	.098274	2.82	16.777	1.22471	.059606
2.33	10.278	1.01191	.097296	2.83	16.945	1.22905	.059013
2.34	10.381	1.01625	.096328	2.84	17.116	1.23340	.058426
2.35	10.486	1.02059	0.095369	2.85	17.288	1.23774	0.057844
2.36	10.591	1.02493	.094420	2.86	17.462	1.24208	.057269
2.37	10.697	1.02928	.093481	2.87	17.637	1.24643	.056699
2.38	10.805	1.03362	.092551	2.88	17.814	1.25077	.056135
2.39	10.913	1.03796	.091630	2.89	17.993	1.25511	.055576
2.40	11.023	1.04231	0.090718	2.90	18.174	1.25945	0.055023
2.41	11.134	1.04665	.089815	2.91	18.357	1.26380	.054476
2.42	11.246	1.05099	.088922	2.92	18.541	1.26814	.053934
2.43	11.359	1.05534	.088037	2.93	18.728	1.27248	.053397
2.44	11.473	1.05968	.087161	2.94	18.916	1.27683	.052866
2.45	11.588	1.06402	0.086294	2.95	19.106	1.28117	0.052340
2.46	11.705	1.06836	.085435	2.96	19.298	1.28551	.051819
2.47	11.822	1.07271	.084585	2.97	19.492	1.28985	.051303
2.48	11.941	1.07705	.083743	2.98	19.688	1.29420	.050793
2.49	12.061	1.08139	.082910	2.99	19.886	1.29854	.050287
2.50	12.182	1.08574	0.082085	3.00	20.086	1.30288	0.049787

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
3.00	20.086	1.30288	0.049787	3.50	33.115	1.52003	0.030197
3.01	20.287	1.30723	.049292	3.51	33.448	1.52437	.029897
3.02	20.491	1.31157	.048801	3.52	33.784	1.52872	.029599
3.03	20.697	1.31591	.048316	3.53	34.124	1.53306	.029305
3.04	20.905	1.32026	.047835	3.54	34.467	1.53740	.029013
3.05	21.115	1.32460	0.047359	3.55	34.813	1.54175	0.028725
3.06	21.328	1.32894	.046888	3.56	35.163	1.54609	.028439
3.07	21.542	1.33328	.046421	3.57	35.517	1.55043	.028156
3.08	21.758	1.33763	.045959	3.58	35.874	1.55477	.027876
3.09	21.977	1.34197	.045502	3.59	36.234	1.55912	.027598
3.10	22.198	1.34631	0.045049	3.60	36.598	1.56346	0.027324
3.11	22.421	1.35066	.044601	3.61	36.966	1.56780	.027052
3.12	22.646	1.35500	.044157	3.62	37.338	1.57215	.026783
3.13	22.874	1.35934	.043718	3.63	37.713	1.57649	.026516
3.14	23.104	1.36368	.043283	3.64	38.092	1.58083	.026252
3.15	23.336	1.36803	0.042852	3.65	38.475	1.58517	0.025991
3.16	23.571	1.37237	.042426	3.66	38.861	1.58952	.025733
3.17	23.807	1.36671	.042004	3.67	39.252	1.59386	.025476
3.18	24.047	1.38106	.041586	3.68	39.646	1.59820	.025223
3.19	24.288	1.38540	.041172	3.69	40.045	1.60255	.024972
3.20	24.533	1.38974	0.040764	3.70	40.447	1.60689	0.024724
3.21	24.779	1.39409	.040357	3.71	40.854	1.61123	.024478
3.22	25.028	1.39843	.039955	3.72	41.264	1.61558	.024234
3.23	25.280	1.40277	.039557	3.73	41.679	1.61992	.023993
3.24	25.534	1.40711	.039164	3.74	42.098	1.62426	.023754
3.25	25.790	1.41146	0.038774	3.75	42.521	1.62860	0.023518
3.26	26.050	1.41580	.038388	3.76	42.948	1.63295	.023284
3.27	26.311	1.42014	.038006	3.77	43.380	1.63729	.023052
3.28	26.576	1.42449	.037628	3.78	43.816	1.64163	.022823
3.29	26.843	1.42883	.037254	3.79	44.256	1.64598	.022596
3.30	27.113	1.44317	0.036883	3.80	44.701	1.65032	0.022371
3.31	27.385	1.43751	.036516	3.81	45.150	1.65466	.022148
3.32	27.660	1.44186	.036153	3.82	45.604	1.65900	.021928
3.33	27.938	1.44620	.035793	3.83	46.063	1.66335	.021710
3.34	28.219	1.45054	.035437	3.84	46.525	1.66769	.021494
3.35	28.503	1.45489	0.035084	3.85	46.993	1.67203	0.021280
3.36	28.789	1.45923	.034735	3.86	47.465	1.67638	.021068
3.37	29.079	1.46357	.034390	3.87	47.942	1.68072	.020858
3.38	29.371	1.46792	.034047	3.88	48.424	1.68506	.020651
3.39	29.666	1.47226	.033709	3.89	48.911	1.68941	.020445
3.40	29.964	1.47660	0.033373	3.90	49.402	1.69375	0.020242
3.41	30.265	1.48094	.033041	3.91	49.899	1.69809	.020041
3.42	30.569	1.48529	.032712	3.92	50.400	1.70243	.019840
3.43	30.877	1.48963	.032387	3.93	50.907	1.70678	.019644
3.44	31.187	1.49397	.032065	3.94	51.419	1.71112	.019448
3.45	31.500	1.49832	0.031746	3.95	51.935	1.71546	0.019255
3.46	31.817	1.50266	.031430	3.96	52.457	1.71981	.019063
3.47	32.137	1.50700	.031117	3.97	52.985	1.72415	.018873
3.48	32.460	1.51134	.030807	3.98	53.517	1.72849	.018686
3.49	32.786	1.51569	.030501	3.99	54.055	1.73283	.018500
3.50	33.115	1.52003	0.030197	4.00	54.598	1.73718	0.018316

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
4.00	54.598	1.73718	0.018316	4.50	90.017	1.95433	0.011109
4.01	55.147	1.74152	.018133	4.51	90.922	1.95867	.010998
4.02	55.701	1.74586	.017953	4.52	91.836	1.96301	.010889
4.03	56.261	1.75021	.017774	4.53	92.759	1.96735	.010781
4.04	56.826	1.75455	.017597	4.54	93.691	1.97170	.010673
4.05	57.397	1.75889	0.017422	4.55	94.632	1.97604	0.010567
4.06	57.974	1.76324	.017249	4.56	95.583	1.98038	.010462
4.07	58.577	1.76758	.017077	4.57	96.544	1.98473	.010358
4.08	59.145	1.77192	.016907	4.58	97.514	1.98907	.010255
4.09	59.740	1.77626	.016739	4.59	98.494	1.99341	.010153
4.10	60.340	1.78061	0.016573	4.60	99.484	1.99775	0.010052
4.11	60.947	1.78495	.016408	4.61	100.48	2.00210	.009952
4.12	61.559	1.78929	.016245	4.62	101.49	2.00644	.009853
4.13	62.178	1.79364	.016083	4.63	102.51	2.01078	.009755
4.14	62.803	1.79798	.015923	4.64	103.54	2.01513	.009658
4.15	63.434	1.80232	0.015764	4.65	104.58	2.01947	0.009562
4.16	64.072	1.80667	.015608	4.66	105.64	2.02381	.009466
4.17	64.715	1.81101	.015452	4.67	106.70	2.02816	.009372
4.18	65.366	1.81535	.015299	4.68	107.77	2.03250	.009279
4.19	66.023	1.81969	.015146	4.69	108.85	2.03684	.009187
4.20	66.686	1.82404	0.014996	4.70	109.95	2.04118	0.009095
4.21	67.357	1.82838	.014846	4.71	111.05	2.04553	.009005
4.22	68.033	1.83272	.014699	4.72	112.17	2.04987	.008915
4.23	68.717	1.83707	.014552	4.73	113.30	2.05421	.008826
4.24	69.408	1.84141	.014408	4.74	114.43	2.05856	.008739
4.25	70.105	1.84575	0.014264	4.75	115.58	2.06290	0.008652
4.26	70.810	1.85009	.014122	4.76	116.75	2.06724	.008566
4.27	71.522	1.85444	.013982	4.77	117.92	2.07158	.008480
4.28	72.240	1.85878	.013843	4.78	119.10	2.07593	.008396
4.29	72.966	1.86312	.013705	4.79	120.30	2.08027	.008312
4.30	73.700	1.86747	0.013569	4.80	121.51	2.08461	0.008230
4.31	74.440	1.87181	.013434	4.81	122.73	2.08896	.008148
4.32	75.189	1.87615	.013300	4.82	123.97	2.09330	.008067
4.33	75.944	1.88050	.013168	4.83	125.21	2.09764	.007987
4.34	76.708	1.88484	.013037	4.84	126.47	2.10199	.007907
4.35	77.478	1.88918	0.012907	4.85	127.74	2.10633	0.007828
4.36	78.257	1.89352	.012778	4.86	129.02	2.11067	.007750
4.37	79.044	1.89787	.012651	4.87	130.32	2.11501	.007673
4.38	79.838	1.90221	.012525	4.88	131.63	2.11936	.007597
4.39	80.640	1.90655	.012401	4.89	132.95	2.12370	.007521
4.40	81.451	1.91090	0.012277	4.90	134.29	2.12804	0.007477
4.41	82.269	1.91524	.012155	4.91	135.64	2.13239	.007372
4.42	83.096	1.91958	.012034	4.92	137.00	2.13673	.007299
4.43	83.931	1.92392	.011914	4.93	138.38	2.14107	.007227
4.44	84.775	1.92827	.011796	4.94	139.77	2.14541	.007155
4.45	85.627	1.93261	0.011679	4.95	141.17	2.14976	0.007083
4.46	86.488	1.93695	.011562	4.96	142.59	2.15410	.007013
4.47	87.357	1.94130	.011447	4.97	144.03	2.15844	.006943
4.48	88.235	1.94564	.011333	4.98	145.47	2.16279	.006874
4.49	89.121	1.94998	.011221	4.99	146.94	2.16713	.006806
4.50	90.017	1.95433	0.011109	5.00	148.41	2.17147	0.006738

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
5.00	148.41	2.17147	0.006738	5.50	244.69	2.38862	0.0040868
5.01	149.90	2.17582	.006671	5.55	257.24	2.41033	.0038875
5.02	151.41	2.18016	.006605	5.60	270.43	2.43205	.0036979
5.03	152.93	2.18450	.006539	5.65	284.29	2.45376	.0035175
5.04	154.47	2.18884	.006474	5.70	298.87	2.47548	.0033460
5.05	156.02	2.19319	0.006409	5.75	314.19	2.49719	0.0031828
5.06	157.59	2.19753	.006346	5.80	330.30	2.51891	.0030276
5.07	159.17	2.20187	.006282	5.85	347.23	2.54062	.0028799
5.08	160.77	2.20622	.006220	5.90	365.04	2.56234	.0027394
5.09	162.39	2.21056	.006158	5.95	383.75	2.58405	.0026058
5.10	164.02	2.21490	0.006097	6.00	403.43	2.60577	0.0024788
5.11	165.67	2.21924	.006036	6.05	424.11	2.62748	.0023579
5.12	167.34	2.22359	.005976	6.10	445.86	2.64920	.0022429
5.13	169.02	2.22793	.005917	6.15	468.72	2.67091	.0021335
5.14	170.72	2.23227	.005858	6.20	492.75	2.69263	.0020294
5.15	172.43	2.23662	0.005799	6.25	518.01	2.71434	0.0019305
5.16	174.16	2.24096	.005742	6.30	544.57	2.73606	.0018363
5.17	175.91	2.24530	.005685	6.35	572.49	2.75777	.0017467
5.18	177.68	2.24965	.005628	6.40	601.85	2.77948	.0016616
5.19	179.47	2.25399	.005572	6.45	632.70	2.80120	.0015805
5.20	181.27	2.25833	0.005517	6.50	665.14	2.82291	0.0015034
5.21	183.09	2.26267	.005462	6.55	699.24	2.84463	.0014301
5.22	184.93	2.26702	.005407	6.60	735.10	2.86634	.0013604
5.23	186.79	2.27136	.005354	6.65	772.78	2.88806	.0012940
5.24	188.67	2.27570	.005300	6.70	812.41	2.90977	.0012309
5.25	190.57	2.28005	0.005248	6.75	854.06	2.93149	0.0011709
5.26	192.48	2.28439	.005195	6.80	897.85	2.95320	.0011138
5.27	194.42	2.28873	.005144	6.85	943.88	2.97492	.0010595
5.28	196.37	2.29307	.005092	6.90	992.27	2.99663	.0010078
5.29	198.34	2.29742	.005042	6.95	1043.1	3.01835	.0009586
5.30	200.34	2.30176	0.004992	7.00	1096.6	3.04006	0.0009119
5.31	202.35	2.30610	.004942	7.05	1152.9	3.06178	.0008674
5.32	204.38	2.31045	.004893	7.10	1212.0	3.08349	.0008251
5.33	206.44	2.31479	.004844	7.15	1274.1	3.10521	.0007849
5.34	208.51	2.31913	.004796	7.20	1339.4	3.12692	.0007466
5.35	210.61	2.32348	0.004748	7.25	1408.1	3.14863	0.0007102
5.36	212.72	2.32782	.004701	7.30	1480.3	3.17035	.0006755
5.37	214.86	2.33216	.004654	7.35	1556.2	3.19206	.0006426
5.38	217.02	2.33650	.004608	7.40	1636.0	3.21378	.0006113
5.39	219.20	2.34085	.004562	7.45	1719.9	3.23549	.0005814
5.40	221.41	2.34519	0.004517	7.50	1808.0	3.25721	0.0005531
5.41	223.63	2.34953	.004472	7.55	1900.7	3.27892	.0005261
5.42	225.88	2.35388	.004427	7.60	1998.2	3.30064	.0005005
5.43	228.15	2.35822	.004383	7.65	2100.6	3.32235	.0004760
5.44	230.44	2.36256	.004339	7.70	2208.3	3.34407	.0004528
5.45	232.76	2.36690	0.004296	7.75	2321.6	3.36578	0.0004307
5.46	235.10	2.37125	.004254	7.80	2440.6	3.38750	.0004097
5.47	237.46	2.37559	.004211	7.85	2565.7	3.40921	.0003898
5.48	239.85	2.37993	.004169	7.90	2697.3	3.43093	.0003707
5.49	242.26	2.38428	.004128	7.95	2835.6	3.45264	.0003527
5.50	244.69	2.38862	0.004087	8.00	2981.0	3.47436	0.0003355

جدول ۳ (ادامه)

x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}	x	e^x	$\log_{10}(e^x)$	e^{-x}
8.00	2981.0	3.47436	0.0003355	9.00	8103.1	3.90865	0.0001234
8.05	3133.8	3.49607	.0003191	9.05	8518.5	3.93037	.0001174
8.10	3294.5	3.51779	.0003035	9.10	8955.3	3.95208	.0001117
8.15	3463.4	3.53950	.0002887	9.15	9414.4	3.97379	.0001062
8.20	3641.0	3.56121	.0002747	9.20	9897.1	3.99551	.0001010
8.25	3827.6	3.58293	0.0002613	9.25	10405	4.01722	0.0000961
8.30	4023.9	3.60464	.0002485	9.30	10938	4.03894	.0000914
8.35	4230.2	3.62636	.0002364	9.35	11499	4.06065	.0000870
8.40	4447.1	3.64807	.0002249	9.40	12088	4.08237	.0000827
8.45	4675.1	3.66979	.0002139	9.45	12708	4.10408	.0000787
8.50	4914.8	3.69150	0.0002036	9.50	13360	4.12580	0.0000749
8.55	5166.8	3.71322	.0001935	9.55	14045	4.14751	.0000712
8.60	5431.7	3.73493	.0001841	9.60	14765	4.16923	.0000677
8.65	5710.0	3.75665	.0001751	9.65	15522	4.19094	.0000644
8.70	6002.9	3.77836	.0001666	9.70	16318	4.21266	.0000613
8.75	6310.7	3.80008	0.0001585	9.75	17154	4.23437	0.0000583
8.80	6634.2	3.82179	.0001507	9.80	18034	4.25609	.0000555
8.85	6974.4	3.84351	.0001434	9.85	18958	4.27780	.0000527
8.90	7332.0	3.86522	.0001364	9.90	19930	4.29952	.0000502
8.95	7707.9	3.88694	.0001297	9.95	20952	4.32123	0.0000477
9.00	8103.1	3.90865	0.0001234	10.00	22026	4.34294	0.0000454

جدول ۴ توابع هیپر بولیک

x	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$
0	.00000	1.0000	.00000
0.1	.10017	1.0050	.09967
0.2	.20134	1.0201	.19738
0.3	.30452	1.0453	.29131
0.4	.41075	1.0811	.37995
0.5	.52110	1.1276	.46212
0.6	.63665	1.1855	.53705
0.7	.75858	1.2552	.60437
0.8	.88811	1.3374	.66404
0.9	1.0265	1.4331	.71630
1.0	1.1752	1.5431	.76159
1.1	1.3356	1.6685	.80050
1.2	1.5095	1.8107	.83365
1.3	1.6984	1.9709	.86172
1.4	1.9043	2.1509	.88535
1.5	2.1293	2.3524	.90515
1.6	2.3756	2.5775	.92167
1.7	2.6456	2.8283	.93541
1.8	2.9422	3.1075	.94681
1.9	3.2682	3.4177	.95624
2.0	3.6269	3.7622	.96403
2.1	4.0219	4.1443	.97045
2.2	4.4571	4.5679	.97574
2.3	4.9370	5.0372	.98010
2.4	5.4662	5.5569	.98367
2.5	6.0502	6.1323	.98661
2.6	6.6947	6.7690	.98903
2.7	7.4063	7.4735	.99101
2.8	8.1919	8.2527	.99263
2.9	9.0596	9.1146	.99396
3.0	10.018	10.068	.99505
3.1	11.076	11.122	.99595
3.2	12.246	12.287	.99668
3.3	13.538	13.575	.99728
3.4	14.965	14.999	.99777
3.5	16.543	16.573	.99818
3.6	18.285	18.313	.99851
3.7	20.211	20.236	.99878
3.8	22.339	22.362	.99900
3.9	24.691	24.711	.99918
4.0	27.290	27.308	.99933
4.1	30.162	30.178	.99945
4.2	33.336	33.351	.99955
4.3	36.843	36.857	.99963
4.4	40.719	40.732	.99970
4.5	45.003	45.014	.99975
4.6	49.737	49.747	.99980
4.7	54.969	54.978	.99983
4.8	60.751	60.759	.99986
4.9	67.141	67.149	.99989
5.0	74.203	74.210	.99991

جدول ۵ توابع مثلثاتی

درجه	رادیان	Sin	Cos	Tan	Cot		
0	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000		1.5708	90
1	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	1.5533	89
2	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	1.5359	88
3	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	1.5184	87
4	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	1.5010	86
5	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	1.4835	85
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.4661	84
7	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.4486	83
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.4312	82
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.4137	81
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.3963	80
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.3788	79
12	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.3614	78
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.3439	77
14	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.3265	76
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.3090	75
16	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.2915	74
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.2741	73
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.2566	72
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.2392	71
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.2217	70
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.2043	69
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.1868	68
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.1694	67
24	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.1519	66
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1345	65
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1170	64
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.0996	63
28	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.0821	62
29	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.0647	61
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.0472	60
31	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.0297	59
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.0123	58
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	0.9948	57
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	0.9774	56
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	0.9599	55
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	0.9425	54
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	0.9250	53
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	0.9076	52
39	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	0.8901	51
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	0.8727	50
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	0.8552	49
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	0.8378	48
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	0.8203	47
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	0.8029	46
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	0.7854	45
		Cos	Sin	Cot	Tan	رادیان	درجه

جدول ۸ لگاریتمهای معمولی

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

جدول ٤ (ادامہ)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

جدول ۷ الفبای یونانی

ν	نو	α	آلفا
ξ	کسی	β	بتا
o	اومیکرون	γ	گاما
π	پی	δ	دلتا
ρ	رو	ε	اپسیلون
σ	سیگما	ζ	زتا
τ	تاو	η	اتا
v	اوپسیلون	θ	تتا
ϕ	فی	ι	یوتا
χ	خی	κ	کاپا
ψ	پسی	λ	لاندا
ω	اومگا	μ	مو

جداول واحدهای فیزیکی

طول

	سانتیمتر (cm)	متر (m)	کیلومتر (Km)	اینچ (in)	فوت (ft)	میل (mi)
$1 =$ سانیمتر	۱	10^{-2}	10^{-5}	۰٫۰۲۹۳۷	$۳٫۲۸۱ \times 10^{-2}$	$۶٫۲۱۴ \times 10^{-6}$
$1 =$ متر	۱۰۰	۱	10^{-2}	۳۹٫۳	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴ \times 10^{-4}$
$1 =$ کیلومتر	۱۰۵	۱۰۰۰	۱	۳۹۳۷×10^4	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
$1 =$ اینچ	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰ \times 10^{-2}$	$۲٫۵۴۰ \times 10^{-5}$	۱	$۸٫۳۳۳ \times 10^{-2}$	$۱٫۵۷۸ \times 10^{-5}$
$1 =$ فوت	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸ \times 10^{-4}$	۱۲	۱	$۱٫۵۹۴ \times 10^{-4}$
$1 =$ میل	۱۶۰۹×10^5	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	۶۳۳۶×10^4	۵۲۸۰	۱

۱ یارد = ۳ فوت

۱ میل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱٫۱۵۱ میل = ۶۰۷۶ فوت

مساحت

	متر مربع (m ^۲)	سانتیمتر مربع (cm ^۲)	فوت مربع (ft ^۲)	اینچ مربع (in ^۲)
۱ متر مربع =	۱	۱۰ ^۴	۱۰۷۶	۱۵۵۰
۱ سانتیمتر مربع =	۱۰ ^{-۴}	۱	۱۰۷۶ × ۱۰ ^{-۲}	۰.۱۵۵۰
۱ فوت مربع =	۹۲.۹۰ × ۱۰ ^{-۲}	۹۲۹۰	۱	۱۴۴
۱ اینچ مربع =	۶.۴۵ × ۱۰ ^{-۴}	۶۴۵.۲	۶.۹۴ × ۱۰ ^{-۲}	۱

$$۱ \text{ ایکڑ} = ۴۳۶۰۰ \text{ فوت مربع}$$

$$۱ \text{ میل مربع} = ۲۷۸۸ \times ۱۰^۸ \text{ فوت مربع} = ۶۴۰ \text{ ایکڑ}$$

حجم

اینچ مکعب (in ^۳)	فوت مکعب (ft ^۳)	لیتر (Li)	سانتیمتر مکعب (cm ^۳)	متر مکعب (m ^۳)	
۶۱۰۵۲×۱۰^۴	۳۵۷۳۱	۱۰۰۰	$۱۰^۶$	۱	$۱ =$ متر مکعب
۶۱۰۵۲×۱۰^{-۲}	۳۷۵۳۱×۱۰^{-۵}	۱۰۰۰۰×۱۰^{-۲}	۱	$۱۰^{-۶}$	$۱ =$ سانتیمتر مکعب
۶۱۷۵۲	۳۷۵۳۱×۱۰^{-۲}	۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰×۱۰^{-۳}	$۱ =$ لیتر
۱۷۲۸	۱	۲۸۷۳۲	۲۸۸۳۲×۱۰^۴	۲۸۸۳۲×۱۰^{-۲}	$۱ =$ فوت مکعب
۱	۵۷۷۸۷×۱۰^{-۴}	۱۰۶۳۹×۱۰^{-۲}	۱۶۷۳۹	۱۰۶۳۹×۱۰^{-۵}	$۱ =$ اینچ مکعب

۱ گالون سیال آمریکایی = ۱۲۸ اونس سیال آمریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب
 ۱ گالون سلطنتی انگلیس = ۲۷۷٫۴ اینچ مکعب

جرم

	گرم (gm)	کیلوگرم (kg)	اسلاگ (slug)	اونس (oz)	پوند (lb)	تن (ton)
۱ گرم	۱	۰۰۰۰۱	۶۸۲۵×۱۰^{-۵}	۳۵۲۷×۱۰^{-۲}	۲۲۰۵×۱۰^{-۲}	۱۰۲×۱۰^{-۶}
۱ کیلوگرم	۱۰۰۰	۱	۶۸۵۲×۱۰^{-۲}	۳۵۲۷	۲۲۰۵	۱۰۲×۱۰^{-۲}
۱ اسلاگ	۱۴۵۹×۱۰^۴	۱۴۵۹	۱	۵۱۴۸	۳۲۱۷	۱۶۰۹×۱۰^{-۲}
۱ اونس	۲۸۳۵	۲۸۳۵×۱۰^{-۲}	۱۹۴۳×۱۰^{-۳}	۱	۶۲۵۰×۱۰^{-۲}	۳۱۲۵×۱۰^{-۵}
۱ پوند	۴۵۳۶	۰۴۵۳۶	۳۱۰۸×۱۰^{-۲}	۱۶	۱	۰۰۰۰۵
۱ تن	۹۰۷۲×۱۰^۵	۹۰۷۲	۶۲۱۶	۳۲×۱۰^۴	۲۰۰۰	۱

در این جدول، کمتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند واحدهای جرم نیستند ولی غالباً به این عنوان به کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱ کیلوگرم = ۲۲۰۵ پوند، معنایش این است که ۱ کیلوگرم جرمی است که در شرایط استاندارد (۸۰۶۶۵ g = ۱ متر بر مجذور ثانیه) وزن آن ۲۲۰۵ پوند است.

نیرو

	دین (dyne)	نیوتن (N)	پوند (lb)	گرم نیرو (gf)	کیلو گرم نیرو (kgf)
۱ دین =	۱	10^{-5}	2.2448×10^{-6}	10040×10^{-3}	10040×10^{-6}
۱ نیوتن =	10^5	۱	۰.۲۲۴۸	۱۰۲۰۵	۰.۱۰۲۰۵
۱ پوند =	4.448×10^5	۴.۴۴۸	۱	۴۵۳.۶	۰.۴۵۳۶
۱ گرم نیرو =	۹۸۰.۶۷	9.8067×10^{-3}	2.205×10^{-2}	۱	۰.۰۰۱
۱ کیلو گرم نیرو =	9.8067×10^5	۹۸۰.۶۷	۲.۲۰۵	۱۰۰۰	۱

مقدار سرعت

	فوت بر ثانیه (ft/s)	کیلومتر بر ساعت (km/h)	متر بر ثانیه (m/s)	میل بر ساعت (mi/h)	سانتیمتر بر ثانیه (cm/s)	گره (knot)
۱ فوت در ثانیه	۱	۱۰۹۰۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸	۰٫۵۹۲۵
۱ کیلومتر در ساعت	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸	۰٫۵۴۰۰
۱ متر در ثانیه	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰	۱٫۹۴۴
۱ میل در ساعت	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰	۰٫۸۶۸۹
۱ سانتیمتر در ثانیه	$۳٫۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۰۱	$۲٫۲۳۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۱٫۹۴۴ \times ۱۰^{-۲}$
۱ گره	۱٫۶۸۸	۱٫۸۵۲	۰٫۵۱۴۴	۱٫۱۵۱	۵۱٫۴۴	۱

۱ گره = ۱ میل دریایی بر ساعت
 ۱ میل بر دقیقه = ۸۸۰۰ فوت بر ثانیه = ۶۰۰۰ میل بر ساعت

انورثی، کار، کمرما

کیلو گرم	کیلوارات در ساعت	کالری	ژول	اسب بخار در ساعت	فوت - پوند	ار گت	کیلو گرم
10^{-24} ۱۱۱۳۳ X	10^{-14} ۲۷۷۷۸ X	10^{-8} ۲۳۸۹ X	10^{-7} ۱۰۲۷	10^{-14} ۲۷۷۲۵ X	10^{-8} ۳۳۷۶ X	۱	۱ ار گت
10^{-17} ۱۵۵۰۹ X	10^{-7} ۳۷۶۶۶ X	۵۰۲۲۳۹	۱۳۵۶	10^{-7} ۵۰۵۵۱ X	۱	10^7 ۱۳۵۶ X	۱ = فوت - پوند
10^{-11} ۲۹۸۸ X	۵۷۴۵۷	10^5 ۴۱۴۱۴ X	10^6 ۲۶۸۵ X	۱	10^6 ۹۸۰ X	10^{13} ۲۶۸۵ X	۱ = اسب بخار در ساعت
10^{-17} ۱۱۱۳۳ X	10^{-7} ۲۷۷۷۸ X	۵۰۲۳۸۹	۱	10^{-7} ۳۷۲۲۵ X	۵۰۷۳۷۶	10^7 ۱۰۲۷	۱ = ژول
10^{-17} ۴۶۵۹ X	10^{-6} ۱۶۳۳ X	۱	۲۱۸۶	10^{-6} ۱۵۵۹۹ X	۳۰۵۸۷	10^7 ۲۱۸۶ X	۱ = کالری
10^{-11} ۳۰۵۰۷ X	۱	10^5 ۸۶۰۱ X	10^6 ۳۶ X	۳۳۱	10^6 ۲۶۵۵ X	10^{13} ۳۶ X	۱ = کیلو وات در ساعت
۱	10^{10} ۲۴۹۷ X	10^{16} ۲۱۴۷ X	10^{16} ۸۹۸۷ X	10^{10} ۳۳۴۸ X	10^{16} ۶۶۲۹ X	10^{23} ۸۹۸۷ X	۱ = کیلو گرم

فشار

	دین بر سانتیمتر مربع	پاسکال	پوند بر اینچ مربع	پوند بر فوت مربع
$1 =$ دین بر سانتیمتر مربع	۱	۰.۰۱	1.485×10^{-5}	2.089×10^{-3}
$1 =$ پاسکال	۱۰	۱	1.485×10^{-4}	2.089×10^{-2}
$1 =$ پوند بر اینچ مربع	6.895×10^4	6.895×10^3	۱	۱۴۴
$1 =$ پوند بر فوت مربع	۴۷۸۸	۴۷۸۸	6.944×10^{-2}	۱

جدولی از مشتقها

$$\begin{array}{ll}
 D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u & \cdot ۱ \\
 D_x(u+v) = D_x u + D_x v & \cdot ۲ \\
 D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v D_x u - u D_x v}{v^2} & \cdot ۳ \\
 D_x(uv) = u D_x v + v D_x u & \cdot ۴ \\
 D_x(a^u) = a^u \ln a D_x u & \cdot ۵ \\
 D_x(e^u) = e^u D_x u & \cdot ۶ \\
 D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u & \cdot ۷ \\
 D_x(\sin u) = \cos u D_x u & \cdot ۸ \\
 D_x(\tan u) = \sec^2 u D_x u & \cdot ۹ \\
 D_x(\sec u) = \sec u \tan u D_x u & \cdot ۱۰ \\
 D_x(\cos u) = -\sin u D_x u & \cdot ۱۱ \\
 D_x(\cot u) = -\csc^2 u D_x u & \cdot ۱۲ \\
 D_x(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u & \cdot ۱۳ \\
 D_x(\csc u) = -\csc u \cot u D_x u & \cdot ۱۴ \\
 D_x(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} D_x u & \cdot ۱۵ \\
 D_x(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u & \cdot ۱۶ \\
 D_x(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u| \sqrt{u^2-1}} D_x u & \cdot ۱۷ \\
 D_x(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} D_x u & \cdot ۱۸ \\
 D_x(\sinh u) = \cosh u D_x u & \cdot ۱۹ \\
 D_x(\csc^{-1} u) = \frac{-1}{|u| \sqrt{u^2-1}} D_x u & \cdot ۲۰ \\
 D_x(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u D_x u & \cdot ۲۱ \\
 D_x(\cosh u) = \sinh u D_x u & \cdot ۲۲ \\
 D_x(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u D_x u & \cdot ۲۳ \\
 D_x(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u & \cdot ۲۴ \\
 D_x(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u D_x u & \cdot ۲۵
 \end{array}$$

جدولی از انتگرالها

چند صورت مقدماتی

$$\int du = u + C \quad ۱. \quad \int a du = au + C \quad ۲.$$

$$\int [f(u) + g(u)] du = \int f(u) du + \int g(u) du \quad ۳.$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad ۴. \quad \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad ۵.$$

صورگویای شامل $a + bu$

$$\int \frac{u du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} [a + bu - a \ln|a + bu|] + C \quad ۶.$$

$$\int \frac{u^2 du}{a + bu} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln|a + bu| \right] + C \quad ۷.$$

$$\int \frac{u du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a + bu} + \ln|a + bu| \right] + C \quad ۸.$$

$$\int \frac{u^2 du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[a + bu - \frac{a^2}{a + bu} - 2a \ln|a + bu| \right] + C \quad ۹.$$

$$\int \frac{u du}{(a + bu)^3} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{a}{2(a + bu)^2} - \frac{1}{a + bu} \right] + C \quad ۱۰.$$

$$\int \frac{du}{u(a + bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C \quad ۱۱.$$

$$\int \frac{du}{u^2(a + bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a + bu}{u} \right| + C \quad ۱۲.$$

$$\int \frac{du}{u(a + bu)^2} = \frac{1}{a(a + bu)} + \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{u}{a + bu} \right| + C \quad ۱۳.$$

صور شامل $\sqrt{a + bu}$

$$\int u \sqrt{a + bu} du = \frac{2}{15b^2} (3bu - 2a)(a + bu)^{5/2} + C \quad ۱۴.$$

$$\int u^r \sqrt{a+bu} du = \frac{r}{1 \cdot 5 b^r} (1 \cdot 5 b^r u^r - 1 \cdot 2 abu + \lambda a^r) (a+bu)^{r/2} + C. ۱۵$$

$$\int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{r u^n (a+bu)^{r/2}}{b(rn+r)} - \frac{ran}{b(rn+r)} \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du. ۱۶$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r}{r b^r} (bu - 2a) \sqrt{a+bu} + C. ۱۷$$

$$\int \frac{u^r du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r}{1 \cdot 5 b^r} (r b^r u^r - 2 abu + \lambda a^r) \sqrt{a+bu} + C. ۱۸$$

$$\int \frac{u^n du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{r u^n \sqrt{a+bu}}{b(rn+1)} - \frac{ran}{b(rn+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}. ۱۹$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}} \right| + C & a > 0 \\ \frac{r}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C & a < 0 \end{cases}. ۲۰$$

$$\int \frac{du}{u^n \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(rn-2)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}. ۲۱$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u \sqrt{a+bu}}. ۲۲$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^n} = -\frac{(a+bu)^{r/2}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(rn-2)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bu} du}{u^{n-1}}. ۲۳$$

صور شامل $a^r \pm u^r$

$$\int \frac{du}{a^r + u^r} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C. ۲۴$$

$$\int \frac{du}{a^r - u^r} = \frac{1}{ra} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases}. ۲۵$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C = \begin{cases} -\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| < a \\ -\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{u}{a} + C & |u| > a \end{cases} \quad .۲۶$$

صور شامل $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

در فرمولهای ۲۷ تا ۳۸ ما می‌توانیم تبدیلات زیر را انجام دهیم

$$\cosh^{-1} \frac{u}{a} \quad \text{به} \quad \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| \quad \sinh^{-1} \frac{u}{a} \quad \text{به} \quad \ln (u + \sqrt{u^2 + a^2})$$

$$\sinh^{-1} \frac{a}{u} \quad \text{به} \quad \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right|$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۷$$

$$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۸$$

$$\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{\lambda} (\sqrt{u^2 \pm a^2}) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^2}{\lambda} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۲۹$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C \quad .۳۰$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2} du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad .۳۱$$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2} du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۳۲$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C \quad .۳۳$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C \quad .۳۴$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C \quad .۳۵$$

$$\int \frac{du}{u^r \sqrt{u^r \pm a^r}} = -\frac{\sqrt{u^r \pm a^r}}{\pm a^r u} + C. ۳۶$$

$$\int (u^r \pm a^r)^{r/2} du = \frac{u}{\lambda} (ru^r \pm \delta a^r) \sqrt{u^r \pm a^r} + \frac{ra^r}{\lambda} \ln |u + \sqrt{u^r \pm a^r}| + C. ۳۷$$

$$\int \frac{du}{(u^r \pm a^r)^{r/2}} = \frac{u}{\pm a^r \sqrt{u^r \pm a^r}} + C. ۳۸$$

صور شامل $\sqrt{a^r - u^r}$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^r - u^r}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۳۹$$

$$\int \sqrt{a^r - u^r} du = \frac{u}{r} \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۰$$

$$\int u^r \sqrt{a^r - u^r} du = \frac{u}{\lambda} (ru^r - a^r) \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{\lambda} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۱$$

$$\int \frac{\sqrt{a^r - u^r} du}{u} = \sqrt{a^r - u^r} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^r - u^r}}{u} \right| + C. ۴۲$$

$$= \sqrt{a^r - u^r} - a \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{a^r - u^r} du}{u^r} = -\frac{\sqrt{a^r - u^r}}{u} - \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۳$$

$$\int \frac{u^r du}{\sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{u}{r} \sqrt{a^r - u^r} + \frac{a^r}{r} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C. ۴۴$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^r - u^r}}{u} \right| + C = -\frac{1}{a} \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C. ۴۵$$

$$\int \frac{du}{u^r \sqrt{a^r - u^r}} = -\frac{\sqrt{a^r - u^r}}{a^r u} + C. ۴۶$$

$$\int (a^r - u^r)^{r/r} du = -\frac{u}{\lambda} (ru^r - \delta a^r) \sqrt{a^r - u^r} + \frac{ra^r}{\lambda} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C \quad ۴۷$$

$$\int \frac{du}{(a^r - u^r)^{r/r}} = \frac{u}{a^r \sqrt{a^r - u^r}} + C \quad ۴۸$$

صور شامل $rau - u^r$

$$\int \sqrt{rau - u^r} du = \frac{u-a}{r} \sqrt{rau - u^r} + \frac{a^r}{r} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۴۹$$

$$\int u \sqrt{rau - u^r} du = \frac{ru^r - au - ra^r}{r} \sqrt{rau - u^r} \quad ۵۰$$

$$+ \frac{a^r}{r} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{\sqrt{rau - u^r} du}{u} = \sqrt{rau - u^r} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۵۱$$

$$\int \frac{\sqrt{rau - u^r} du}{u^r} = -\frac{r \sqrt{rau - u^r}}{u} - \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۵۲$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{rau - u^r}} = \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۵۳$$

$$\int \frac{u du}{\sqrt{rau - u^r}} = -\sqrt{rau - u^r} + a \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۵۴$$

$$\int \frac{u^r du}{\sqrt{rau - u^r}} = -\frac{(u+ra)}{r} \sqrt{rau - u^r} + \frac{ra^r}{r} \cos^{-1} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C \quad ۵۵$$

$$\int \frac{du}{u \sqrt{rau - u^r}} = -\frac{\sqrt{rau - u^r}}{au} + C \quad ۵۶$$

$$\int \frac{du}{(rau - u^r)^{r/r}} = \frac{u-a}{a^r \sqrt{rau - u^r}} + C \quad ۵۷$$

$$\int \frac{u du}{(rau - u^r)^{r/r}} = \frac{u}{a \sqrt{rau - u^r}} + C \quad ۵۸$$

صور شامل توابع مثلثاتی

$$\int \cos u \, du = \sin u + C \quad .۶۰ \qquad \int \sin u \, du = -\cos u + C \quad .۵۹$$

$$\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C \quad .۶۲ \qquad \int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C \quad .۶۱$$

$$\int \sec u \, du = \ln \left| \sec u + \tan u \right| + C = \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} u \right) \right| + C \quad .۶۳$$

$$\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C = \ln \left| \tan \frac{1}{2} u \right| + C \quad .۶۴$$

$$\int \csc^x u \, du = -\cot u + C \quad .۶۶ \qquad \int \sec^x u \, du = \tan u + C \quad .۶۵$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad .۶۷$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \quad .۶۸$$

$$\int \sin^x u \, du = \frac{1}{x} u - \frac{1}{x} \sin^2 u + C \quad .۶۹$$

$$\int \cos^x u \, du = \frac{1}{x} u + \frac{1}{x} \sin^2 u + C \quad .۷۰$$

$$\int \tan^x u \, du = \tan u - u + C \quad .۷۱$$

$$\int \cot^x u \, du = -\cot u - u + C \quad .۷۲$$

$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du \quad .۷۳$$

$$\int \cos^n u \, du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u \, du \quad .۷۴$$

$$\int \tan^n u \, du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u \, du \quad .۷۵$$

$$\int \cot^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u \, du \quad .۷۶$$

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du \quad .۷۷$$

$$\int \csc^n u \, du = -\frac{1}{n-1} \csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u \, du \quad .۷۸$$

$$\int \sin mu \sin nu \, du = -\frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .۷۹$$

$$\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .۸۰$$

$$\int \sin mu \cos nu \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C \quad .۸۱$$

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C \quad .۸۲$$

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C \quad .۸۳$$

$$\int u^r \sin u \, du = r u \sin u + (r-1) \cos u + C \quad .۸۴$$

$$\int u^r \cos u \, du = r u \cos u + (u^r - r) \sin u + C \quad .۸۵$$

$$\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du \quad .۸۶$$

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du \quad .۸۷$$

$$\int \sin^m u \cos^n u \, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cos^n u \, du \quad .۸۸$$

$$= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cos^{n-2} u \, du$$

صور شامل توابع مثلثاتی معکوس

$$\int \sin^{-1} u \, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C \quad .۸۹$$

$$\int \cos^{-1} u \, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C \quad .۹۰$$

$$\int \tan^{-1} u \, du = u \tan^{-1} u - \ln \sqrt{1+u^2} + C \quad .۹۱$$

$$\int \cot^{-1} u \, du = u \cot^{-1} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C \quad .92$$

$$\begin{aligned} \int \sec^{-1} u \, du &= u \sec^{-1} u - \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C \quad .93 \\ &= u \sec^{-1} u - \cosh^{-1} u + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \csc^{-1} u \, du &= u \csc^{-1} u + \ln|u + \sqrt{u^2 - 1}| + C \quad .94 \\ &= u \csc^{-1} u + \cosh^{-1} u + C \end{aligned}$$

صور شامل توابع نمایی و لگاریتمی

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad .96 \qquad \int e^u \, du = e^u + C \quad .95$$

$$\int u e^u \, du = e^u (u - 1) + C \quad .97$$

$$\int u^n e^u \, du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u \, du \quad .98$$

$$\int u^n a^u \, du = \frac{u^n a^u}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int u^{n-1} a^u \, du + C \quad .99$$

$$\int \frac{e^u}{u^n} \, du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} \, du \quad .100$$

$$\int \frac{a^u}{u^n} \, du = -\frac{a^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{\ln a}{n-1} \int \frac{a^u}{u^{n-1}} \, du \quad .101$$

$$\int \ln u \, du = u \ln u - u + C \quad .102$$

$$\int u^n \ln u \, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln u - 1] + C \quad .103$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C \quad .104$$

$$\int e^{au} \sin nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \sin nu - n \cos nu) + C \quad .105$$

$$\int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 + n^2} (a \cos nu + n \sin nu) + C. ۱۰۶$$

صور شامل توابع هیپر بولیک

$$\int \cosh u \, du = \sinh u + C. ۱۰۸ \quad \int \sinh u \, du = \cosh u + C. ۱۰۷$$

$$\int \tanh u \, du = \ln |\cosh u| + C. ۱۰۹$$

$$\int \coth u \, du = \ln |\sinh u| + C. ۱۱۰$$

$$\int \operatorname{sech} u \, du = \tan^{-1}(\sinh u) + C. ۱۱۱$$

$$\int \operatorname{csch} u \, du = \ln \left| \tanh \frac{1}{2} u \right| + C. ۱۱۲$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C. ۱۱۳$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C. ۱۱۴$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C. ۱۱۵$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C. ۱۱۶$$

$$\int \sinh^2 u \, du = \frac{1}{2} \sinh 2u - \frac{1}{2} u + C. ۱۱۷$$

$$\int \cosh^2 u \, du = \frac{1}{2} \sinh 2u + \frac{1}{2} u + C. ۱۱۸$$

$$\int \tanh^2 u \, du = u - \tanh u + C. ۱۱۹$$

$$\int \coth^2 u \, du = u - \coth u + C. ۱۲۰$$

$$\int u \sinh u \, du = u \cosh u - \sinh u + C. ۱۲۱$$

$$\int u \cosh u \, du = u \sinh u - \cosh u + C \quad .۱۲۲$$

$$\int e^{au} \sinh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \sinh nu - n \cosh nu) + C \quad .۱۲۳$$

$$\int e^{au} \cosh nu \, du = \frac{e^{au}}{a^2 - n^2} (a \cosh nu - n \sinh nu) + C \quad .۱۲۴$$

پاسخ تمرینهای با شماره فرد

تمرینهای ۱۰۱

$$۱. (-۲, +\infty)$$

$$۵. [۴, ۸]$$

$$۹. (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (0, +\infty)$$

$$۱۳. (-\infty, -۲) \cup (۲, +\infty)$$

$$۱۷. [-۱, \frac{1}{2}]$$

$$۲۱. (\frac{3}{2}, \frac{31}{14}] \cup (\frac{7}{3}, +\infty)$$

$$۲۵. \{-\frac{1}{4}, ۴\}$$

$$۲۹. \{\frac{4}{3}, ۳\}$$

$$۳۳. (\infty, -۲] \cup [۵, +\infty)$$

$$۳۷. (-۱۱, ۳)$$

$$۴۱. (-\infty, ۱) \cup (۴, +\infty)$$

$$۳. (-\infty, \frac{3}{4}]$$

$$۷. (-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}]$$

$$۱۱. (-\infty, -۱) \cup (\frac{1}{3}, ۳)$$

$$۱۵. (-\infty, -۵) \cup (۳, +\infty)$$

$$۱۹. (-۳, \frac{3}{4})$$

$$۲۳. \{-\frac{5}{2}, ۱\}$$

$$۲۷. \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$$

$$۳۱. [\frac{5}{8}, +\infty)$$

$$۳۵. (-\infty, ۱] \cup [۴, +\infty)$$

$$۳۹. [\frac{2}{3}, ۲]$$

$$۴۳. (۱, +\infty)$$

$$(-\infty, \frac{1}{9}) \cup (2, +\infty) \quad .47$$

$$|x-2| > 2.51$$

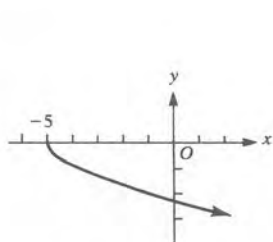
$$\left[-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad .45$$

$$|x| > |a| \quad .49$$

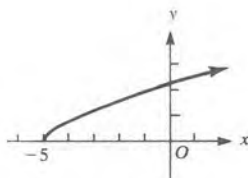
تمرینهای ۲۰۱

۱. (الف) $(1, 2)$ ؛ (ب) $(-1, -2)$ ؛ (پ) $(-1, 2)$ ؛ (ت) $(-2, 1)$
 ۳. (الف) $(2, -2)$ ؛ (ب) $(-2, 2)$ ؛ (پ) $(-2, -2)$ ؛ (ت) موجود نیست.
 ۵. (الف) $(-1, 3)$ ؛ (ب) $(1, -3)$ ؛ (پ) $(1, 3)$ ؛ (ت) $(-3, -1)$
 ۴۳. (الف) $y=0$ ؛ (ب) $x=0$ ؛ (پ) $xy=0$

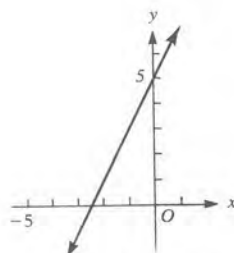
(نمودارهای تمرینهای ۷ تا ۴۱ در شکلهای تمرین ۷-۲۰۱ تا ۴۱-۲۰۱ نشان داده شده‌اند.)



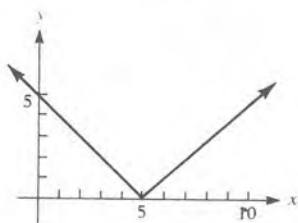
شکل تمرین ۱۱-۲۰۱



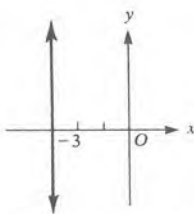
شکل تمرین ۹-۲۰۱



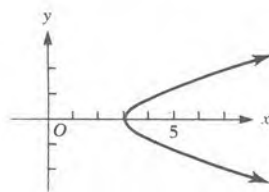
شکل تمرین ۷-۲۰۱



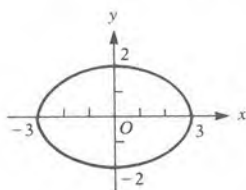
شکل تمرین ۱۷-۲۰۱



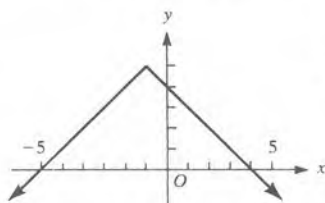
شکل تمرین ۱۵-۲۰۱



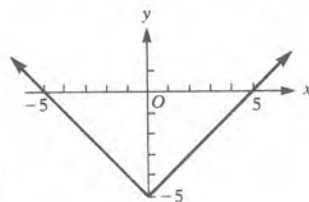
شکل تمرین ۱۳-۲۰۱



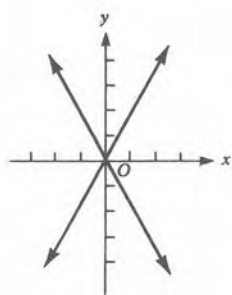
شکل تمرین ۲۳-۲۰۱



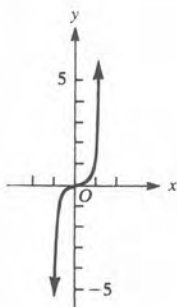
شکل تمرین ۲۱-۲۰۱



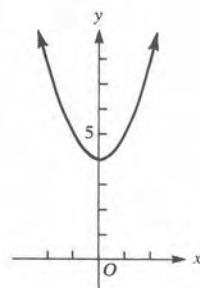
شکل تمرین ۱۹-۲۰۱



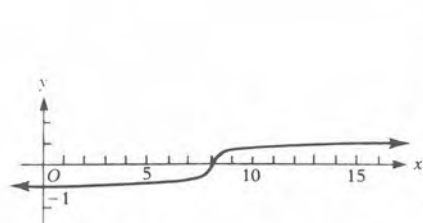
شکل تمرین ۲۹-۲۰۱



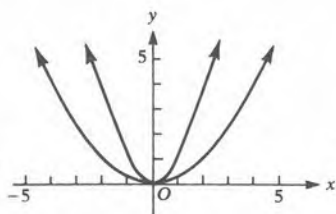
شکل تمرین ۲۷-۲۰۱



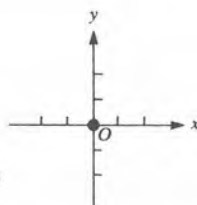
شکل تمرین ۲۵-۲۰۱



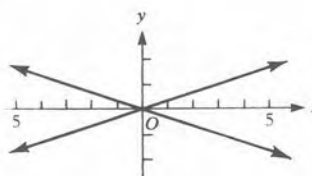
شکل تمرین ۳۵-۲۰۱



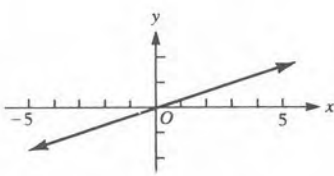
شکل تمرین ۳۳-۲۰۱



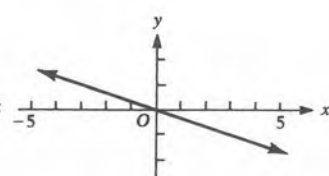
شکل تمرین ۳۱-۲۰۱



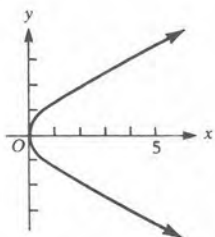
شکل تمرین ۳۷-۲۰۱ (پ)



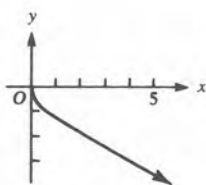
شکل تمرین ۳۷-۲۰۱ (ب)



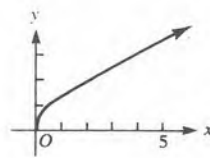
شکل تمرین ۳۷-۲۰۱ (الف)



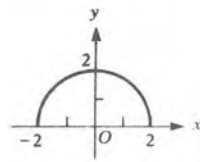
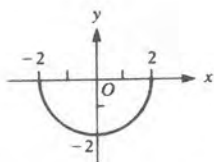
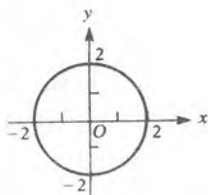
شکل تمرین ۳۹-۲۰۱ (پ)



شکل تمرین ۳۹-۲۰۱ (ب)



شکل تمرین ۳۹-۲۰۱ (الف)



شکل تمرین ۴۱-۲۰۱ (الف) شکل تمرین ۴۱-۲۰۱ (ب) شکل تمرین ۴۱-۲۰۱ (پ)

تمرینهای ۳۰۱

$$0.1 \quad \sqrt{26} : \frac{1}{2}\sqrt{89} \leq \frac{1}{2}\sqrt{53}$$

$$0.3 \quad |\overline{BC}| = \sqrt{82}, |\overline{AC}| = \sqrt{41}, |\overline{AB}| = \sqrt{41} \quad \text{و}$$

$$\frac{41}{2} : |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|^2$$

$$0.9 \quad \sqrt{578} \quad 0.11 \quad (-8, 12)$$

$$0.13 \quad \left(-2 - \frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}\right) \quad \text{و} \quad \left(-2 + \frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4} + 2\sqrt{3}\right)$$

$$0.15 \quad 77x^2 + 90xy + 21y^2 - 122x - 66y - 55 = 0$$

$$0.17 \quad x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$0.19 \quad x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$$

$$0.21 \quad x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0 \quad 0.23 \quad (3, 4) : 4$$

$$0.25 \quad \left(0, -\frac{2}{3}\right) : \frac{5}{3} \quad 0.27 \quad \text{دایره}$$

$$0.29 \quad \text{مجموعه تهی} \quad 0.31 \quad \text{دایره}$$

$$0.37 \quad \left(-\frac{9}{4}, \frac{17}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right), \left(\frac{13}{4}, \frac{27}{4}\right)$$

$$0.39 \quad \left(\frac{9}{4}, \frac{11}{4}\right) \quad 0.41 \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$0.43 \quad (5, -7) \quad 0.45 \quad 2x + y = 5$$

تمرینهای ۴۰۱

$$0.1 \quad -1 \quad 0.3 \quad -\frac{1}{7}$$

$$۴x - ۳y + ۱۲ = ۰ \quad ۷$$

$$۴x - y = ۱۱ \quad ۵$$

$$y = -۷.۱۱$$

$$x + ۲y - ۴ = ۰ \quad ۹$$

$$x + y = ۰.۱۵$$

$$\sqrt{۳}x - y + (۲\sqrt{۳} - ۵) = ۰.۱۳$$

$$۰.۱۹$$

$$\frac{۲}{۳}.۱۷$$

$$۲۵. (الف) همخط؛ (ب) ناهمخط$$

$$\frac{x}{۸/۵} + \frac{y}{۸} = ۱.۲۱$$

$$۲۷. (الف) ناهمخط؛ (ب) همخط$$

$$۲۹. ضریب زاویهٔ هر دو ضلع برابر $۴/۳$ - است.$$

$$۳۱. (الف) $۲x + ۳y + ۷ = ۰$ ؛ (ب) $\sqrt{۱۳}$$$

$$۳۳. (الف) $-\frac{A}{B}$ ؛ (ب) $-\frac{C}{B}$ ؛ (پ) $-\frac{C}{A}$ ؛ (ت) $Bx - Ay = ۰$$$

$$۳۵. $۹x + ۴y - ۱۹ = ۰$ ؛ $y = ۱$ ؛ $۹y - ۴y - ۱۱ = ۰$ ؛ $۵/۳, ۱$ نقطهٔ تقاطع در $(۱, ۵/۳)$ است.$$

$$۳۷. $(۲ + ۲\sqrt{۲})x + (۳ - ۳\sqrt{۲})y = ۱۲$ ؛ $۲x + ۳y - ۱۲ = ۰$ ؛ $(۲ - ۲\sqrt{۲})x + (۳ + ۳\sqrt{۲})y = ۱۲$$$

$$۳۹. (الف) $x = ۱$ ؛ (ب) $y = ۱$ ؛ (پ) $x = ۱$ ؛ (ت) $۲x + y - ۳ = ۰$ ؛ (ث) $x - ۲y + ۱ = ۰$ ؛ (ج) $x + y - ۲ = ۰$$$

$$۴۱. $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۱۰y + ۹ = ۰$ ؛ $۴۳. $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۴y - ۲ = ۰$$$$

$$۴۵. $۳x + ۴y - ۱۹ = ۰$ ؛ $۵۱. $r^۲(m^۲ + ۱) = b^۲$$$$

تمرینهای ۵.۱

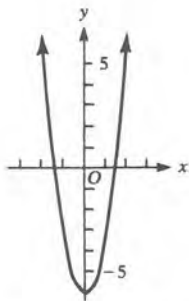
نمودارها در شکلهای تمرین ۵.۱-۱ تا ۵.۱-۳۹ نشان داده شده‌اند.

$$۱. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $(-\infty, +\infty)$$$

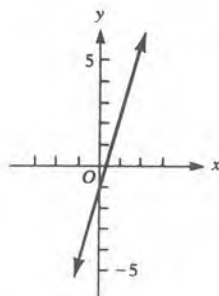
$$۳. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[-۶, +\infty)$$$

$$۵. قلمرو: $[-۱, +\infty)$ ؛ برد: $[۰, +\infty)$$$

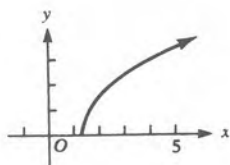
۷. قلمرو: $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ ؛ برد: $[0, +\infty)$
۹. قلمرو: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ؛ برد: $[0, +\infty)$
۱۱. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[0, +\infty)$
۱۳. قلمرو: $\{x | x \neq 1\}$ ؛ برد: $\{y | y \neq -2\}$
۱۵. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $\{-2, 2\}$
۱۷. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $R = \{y | y \neq 3\}$
۱۹. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[-4, +\infty)$
۲۱. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$
۲۳. قلمرو: $\{x | x \neq -5 \text{ و } x \neq -1\}$ ؛ برد: $\{y | y \neq -7 \text{ و } y \neq -3\}$
۲۵. قلمرو: $(-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$ ؛ برد: $[0, +\infty)$
۲۷. قلمرو: $\{x | x \neq 2\}$ ؛ برد: $[0, +\infty)$
۲۹. قلمرو: $\{x | x \neq -5\}$ ؛ برد: $[-6, +\infty)$
۳۱. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[1, +\infty)$
۳۳. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[-1, +\infty)$
۳۵. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $\{\text{اعداد صحیح}\}$
۳۷. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ برد: $[0, 1)$
۳۹. قلمرو: $\{x | x \neq 0\}$ ؛ برد: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup \left(\frac{1}{4}, 1\right]$



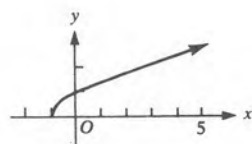
شکل تمرین ۳-۵۰۱



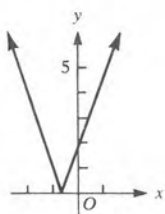
شکل تمرین ۱-۵۰۱



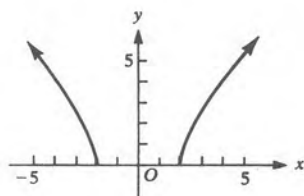
شکل تمرین ۷-۵.۱



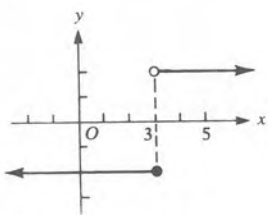
شکل تمرین ۵-۵.۱



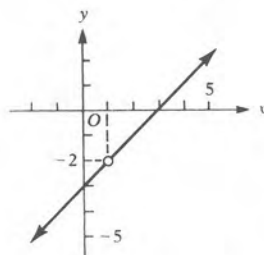
شکل تمرین ۱۱-۵.۱



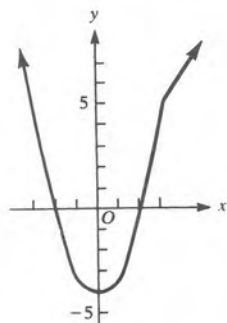
شکل تمرین ۹-۵.۱



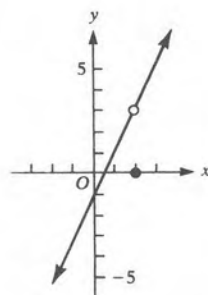
شکل تمرین ۱۵-۵.۱



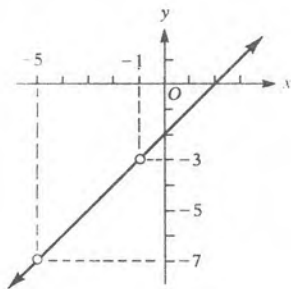
شکل تمرین ۱۳-۵.۱



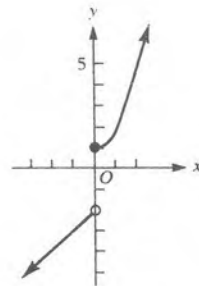
شکل تمرین ۱۹-۵.۱



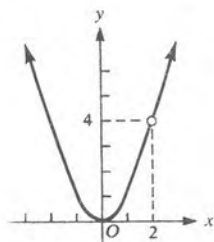
شکل تمرین ۱۷-۵.۱



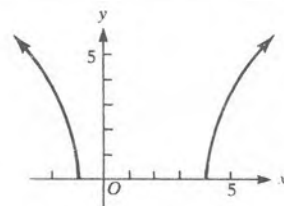
شکل تمرین ۲۳-۵.۱



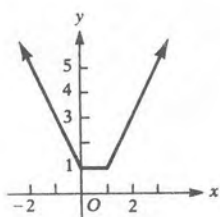
شکل تمرین ۲۱-۵.۱



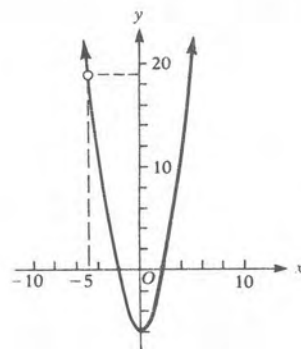
شکل تمرین ۲۷-۵.۱



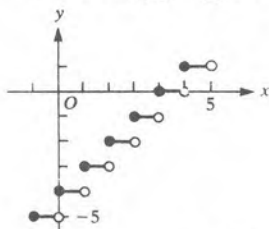
شکل تمرین ۲۵-۵.۱



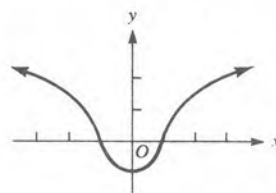
شکل تمرین ۳۱-۵.۱



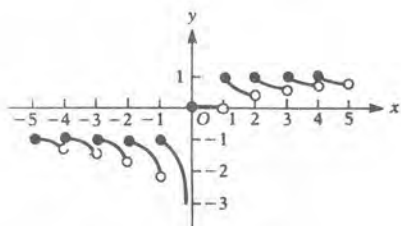
شکل تمرین ۲۹-۵.۱



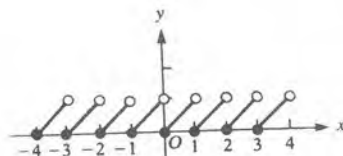
شکل تمرین ۳۵-۵.۱



شکل تمرین ۳۳-۵.۱



شکل تمرین ۵۰۱-۳۹



شکل تمرین ۵۰۱-۳۷

تمرینهای ۶۰۱

۱. (الف) ۵؛ (ب) -۵؛ (پ) -۱؛ (ت) $2a+1$ ؛ (ث) $2x+1$ ؛ (ج) $4x-1$ ؛
(ج) $4x-2$ ؛ (ح) $2x+2h-1$ ؛ (خ) $2x+2h-2$ ؛ (د) ۲

۳. (الف) -۵؛ (ب) -۶؛ (پ) -۳، (ت) ۳۰؛ (ث) $2h^2+9h+4$ ؛
(ج) $8x^4+10x^2-3$ ؛ (ج) $2x^4-7x^2$ ؛
(ح) $2x^2+(4h+5)x+(2h^2+5h-3)$ ؛ (خ) $2x^2+5x+(2h^2+5h-6)$ ؛
(د) $4x+2h+5$

۵. (الف) ۱؛ (ب) $\sqrt{11}$ ؛ (پ) ۲؛ (ت) $3\sqrt{7}$ ؛ (ث) $\sqrt{4x+9}$ ؛
(ج) $2/(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3})$

۷. (الف) ۱؛ (ب) -۱؛ (پ) ۱؛ (ت) -۱؛ (ث) ۱، اگر $x \leq 0$ و -۱، اگر $x > 0$ ؛
(ج) ۱، اگر $x \geq -1$ و -۱، اگر $x < -1$ ؛ (ج) ۱؛
(ح) -۱، اگر $x \neq 0$ و ۱، اگر $x = 0$

۹. (الف) x^2+x-6 ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ (ب) $-x^2+x-4$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛
(پ) x^3-5x^2-x+5 ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛
(ت) $\frac{x-5}{x^2-1}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$ ؛ (ث) $\frac{x^2-1}{x-5}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq 5\}$ ؛
(ج) x^2-6 ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ (ج) $x^2-10x+24$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$

۱۱. (الف) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-x}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$ ؛ (ب) $\frac{x^2+1}{x^2-x}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$

(ت) $\frac{x^2+x}{x-1}$ ؛ (پ) $\frac{x+1}{x^2-x}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq 0, x \neq 1\}$ ؛ (ث) $\frac{x-1}{x^2+x}$ ، قلمرو: $\{x|x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1\}$

$$\text{(ج)} \frac{1+x}{1-x}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq 0, x \neq 1\}; \text{(ج)} \frac{x-1}{x+1}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 1\}$$

$$۱۳. \text{(الف)} \sqrt{x} + x^2 - 1, \text{ قلمرو: } [0, +\infty); \text{(ب)} \sqrt{x} - x^2 + 1, \text{ قلمرو: } [0, +\infty); \text{(ت)} \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}, \text{ قلمرو: } [0, +\infty); \text{(پ)} \sqrt{x}(x^2-1), \text{ قلمرو: } [0, +\infty);$$

$$\text{(ج)} \sqrt{x^2-1}, \text{ قلمرو: } (0, +\infty); \text{(ث)} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}}, \text{ قلمرو: } [0, 1) \cup (1, +\infty); \text{(ج)} x-1, \text{ قلمرو: } [0, +\infty); \text{(پ)} (-\infty, -1) \cup [1, +\infty);$$

$$۱۵. \text{(الف)} x^2 + 3x - 1, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(ب)} x^2 - 3x + 3, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(پ)} 3x^2 - 2x^2 + 3x - 2, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(ت)} \frac{x^2+1}{3x-2}, \text{ قلمرو: } \left\{x | x \neq \frac{2}{3}\right\}; \text{(ث)} \frac{3x-2}{x^2+1}, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(ج)} 9x^2 - 12x + 5, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty);$$

$$۱۷. \text{(الف)} \frac{x^2+2x-2}{x^2-x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 2\}; \text{(ب)} \frac{-x^2-2}{x^2-x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 2\};$$

$$\text{(پ)} \frac{x}{x^2-x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 2\}; \text{(ت)} \frac{x^2+x}{x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2\};$$

$$\text{(ج)} \frac{x-2}{2x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq 1, x \neq 2\}; \text{(ث)} \frac{x^2+x}{x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 2\};$$

$$\text{(ج)} \frac{x-2}{2x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq 1, x \neq 2\}; \text{(پ)} \frac{x}{x^2-x-2}, \text{ قلمرو: } \{x | x \neq -1, x \neq 2\};$$

$$\text{(ج)} \frac{1}{2x+1}, \text{ قلمرو: } \left\{x | x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

$$۱۹. \text{(الف)} 2x^2 - 3, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(ب)} 4x^2 - 12x + 9, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty); \text{(پ)} 4x - 9, \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty);$$

$$۲۱. \text{(الف)} 0; \text{(ب)} 4; \text{(پ)} 4 - 2x$$

$$۲۳. \text{(الف)} \text{زوج}; \text{(ب)} \text{هیچکدام}; \text{(پ)} \text{فرد}; \text{(ت)} \text{زوج}; \text{(ث)} \text{فرد}; \text{(ج)} \text{فرد}; \text{(ج)} \text{هیچکدام}; \text{(ح)} \text{زوج}; \text{(خ)} \text{زوج}; \text{(د)} \text{فرد}$$

$$۲۷. \text{(الف)} -7 + 2x; \text{(ب)} (x^2 + 2) + 0; \text{(پ)} -1 + x^2$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{-2x}{x^2-1} \quad (\text{ج}) ; 0 + \frac{1}{x} \quad (\text{ث}) ; (x^4+3) + (x^2-x) \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{4} [2|x| + |x-1| + |x+1|] + \frac{1}{4} [|x-1| - |x+1|] \quad (\text{ج})$$

۲۹. (الف) زوج؛ (ب) فرد؛ (پ) زوج؛ (ت) زوج

نمودارهای تمرینهای ۳۱ تا ۴۵ در شکلهای تمرین ۶۰۱-۳۱ تا ۶۰۱-۴۵ نشان داده شده‌اند.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad .۳۳ \quad u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \quad .۳۱$$

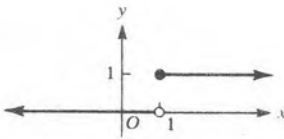
$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \quad .۳۷ \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & x = -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad .۳۵$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad .۴۱ \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases} \quad .۳۹$$

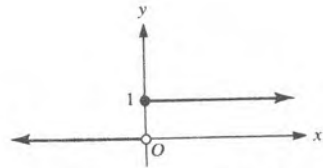
$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases} \quad .۴۵ \quad h(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad .۴۳$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 4x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad .۴۹ \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \quad .۴۷$$

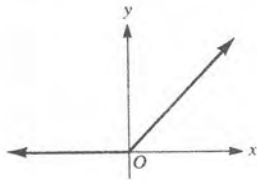
۵۱. $g(x) = 1 - x$ ؛ $g(x) = x - 3$



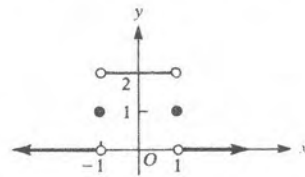
شکل تمرین ۶۰۱-۳۳



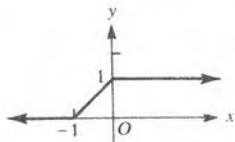
شکل تمرین ۶۰۱-۳۱



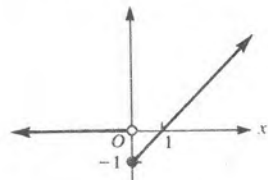
شکل تمرین ۶۰۱-۳۷



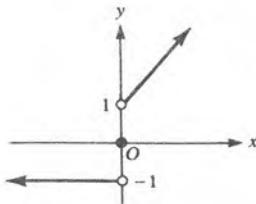
شکل تمرین ۶۰۱-۳۵



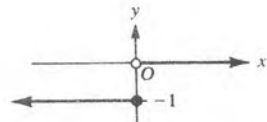
شکل تمرین ۶۰۱-۴۱



شکل تمرین ۶۰۱-۳۹



شکل تمرین ۶۰۱-۴۵



شکل تمرین ۶۰۱-۴۳

تمرینهای ۱۰۷

۱. (الف) $\frac{1}{3}\pi$ ؛ (ب) $\frac{3}{4}\pi$ ؛ (پ) $\frac{7}{6}\pi$ ؛ π (ت) $-\frac{5}{6}\pi$ ؛ (ث) $\frac{1}{9}\pi$ ؛ (ج) $\frac{5}{2}\pi$ ؛

(ج) $-\frac{5}{12}\pi$ ؛ (ح) $\frac{5}{9}\pi$

۳. (الف) ۴۵° ؛ (ب) ۱۲۰° ؛ (پ) ۳۳۰° ؛ (ت) -۹۰° ؛ (ث) $۲۸^\circ ۳۹'$ ؛ (ج)

۵۴۰° ؛ (ج) $-۱۱۴^\circ ۳۶'$ ؛ (ح) ۱۵°

۵. (الف) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ (پ) -۱ ؛ (ت) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۷. (الف) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ (پ) -۱ ؛ (ت) ۰

۹. (الف) $\frac{1}{3}\pi$ ؛ $\frac{2}{3}\pi$ ؛ (ب) $\frac{3}{4}\pi$ ؛ $\frac{5}{4}\pi$

۱۱. (الف) $\frac{1}{2}\pi$ ؛ $\frac{3}{2}\pi$ ؛ (ب) $\frac{7}{6}\pi$ ؛ $\frac{11}{6}\pi$

۱۳. (الف) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ ؛ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

۱۵. (الف) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ؛ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۲۳. $۳\sin t - ۲\sin^3 t$

۲۵. (الف) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ ؛ (ب) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

۲۷. (الف) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ ؛ $-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

۲۹. (الف) $-\cos t$ ؛ (ب) $-\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ ؛ (پ) $-\cos t$ ؛ (ت) $\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$

۳۱. (الف) $\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ ؛ (ب) $-\cos t$ ؛ (پ) $-\cos(\frac{1}{2}\pi - t)$ ؛ (ت) $-\cos t$

۳۳. (الف) $\frac{1}{2}\pi + ۲k\pi$ ، که k عدد صحيح دلخواهى است؛ (ب) $۲k\pi$ ، که k عدد صحيح دلخواهى است.

۳۵. (الف) $\frac{1}{6}\pi + ۲k\pi$ و $t = \frac{5}{6}\pi + ۲k\pi$ ، که k عدد صحيح دلخواهى است؛

(ب) $\pm \frac{1}{3}\pi + ۲k\pi$ ، که k عدد صحيح دلخواهى است.

تمرینهای مروری فصل ۱

$$۱. [۵, +\infty) \quad ۳. (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$$

$$۵. (-\frac{3}{2}, 1) \quad ۷. [-\frac{12}{5}, \frac{6}{5}]$$

$$۹. \{-3, \frac{9}{2}\} \quad ۱۱. \{-2, 2\}$$

۱۳. شکل تمرین مروری ۱-۱۳ را ببینید. ۱۵. شکل تمرین مروری ۱-۱۵ را ببینید.

۱۷. شکل تمرین مروری ۱-۱۷ را ببینید. ۱۹. ۱۴، -۴

$$۲۱. x^2 + y^2 + 6x - 8y + 15 = 0 \quad ۲۵. ۱۵$$

$$۲۷. (-2, -5); (3, -6)$$

$$۳۱. x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0 \quad ۳۳. 1; (\frac{3}{2}, -1)$$

$$۳۵. 5x + 2y - 19 = 0 \quad ۳۷. 0 \leq k \leq 2$$

$$۳۹. 7x^2 + 7y^2 + 11x - 19y - 6 = 0$$

$$۴۱. 12x + 3y - 2 = 0$$

$$۴۳. 3x + 4y = 0; x = 0$$

۴۵. قلمرو: $(-\frac{5}{2}, 0]$ ، برد: $[0, +\infty)$ ؛ شکل تمرین مروری ۱-۴۵ را ببینید.

۴۷. قلمرو: $\{x | x \neq -\frac{5}{2}, x \neq 2\}$ ، برد: $\{y | y \neq \frac{1}{2}, y \neq 5\}$ ؛ شکل تمرین مروری ۱-۴۷ را ببینید.

۴۹. $G(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ x+3 & x \geq -3 \end{cases}$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $[0, +\infty)$ ؛ شکل تمرین مروری ۱-۴۹ را ببینید.

۵۱. قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $[-4, +\infty)$ ؛ شکل تمرین مروری ۱-۵۱ را ببینید.

$$۵۳. (الف) ۳۵؛ (ب) $3x^4 + x^2 + 5$ ؛ (پ) $6x + 3h - 1$$$

۵۵. (الف) فرد؛ (ب) زوج؛ (پ) هیچکدام؛ (ت) فرد

۵۷. (الف) $x^2 + 4x - 7$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ (ب) $x^2 - 4x - 1$ ، قلمرو:

$(-\infty, +\infty)$ ؛ (پ) $4x^3 + 3x^2 - 16x + 12$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛

(ت) $\frac{x^2 - 4}{4x - 3}$ ، قلمرو: $\{x | x \neq \frac{3}{4}\}$ ؛ (ث) $\frac{4x - 3}{x^2 - 4}$ ، قلمرو: $\{x | x \neq \pm 2\}$ ؛ (ج)

۵۹. (الف) $16x^2 - 24x + 5$ ، قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ؛ (ج) $4x^2 - 19$ ، قلمرو:

$(-\infty, +\infty)$ ؛ (ب) $\frac{-x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ ، قلمرو: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$ ؛ (الف) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ ، قلمرو:

قلمرو: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$ ؛ (پ) $\frac{x}{x^2 - 2x - 3}$ ، قلمرو:

قلمرو: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$ ؛ (ت) $\frac{x + 1}{x^2 - 3x}$ ، قلمرو:

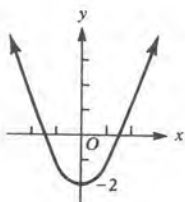
قلمرو: $\{x | x \neq -1, x \neq 0, x \neq 3\}$ ؛ (ث) $\frac{x^2 - 3x}{x + 1}$ ، قلمرو:

قلمرو: $\{x | x \neq -1, x \neq 3\}$ ؛ (ج) $-\frac{x + 1}{2x + 3}$ ، قلمرو:

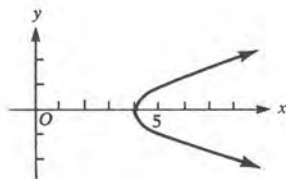
قلمرو $\{x | x \neq -\frac{3}{2}, x \neq -1\}$ ؛ (ج) $\frac{1}{x - 2}$ ، قلمرو: $\{x | x \neq 2, x \neq 3\}$

۶۱. (الف) $\frac{1}{6}\pi$ ، $\frac{5}{6}\pi$ ؛ (ب) π ؛ (پ) 0 ، π

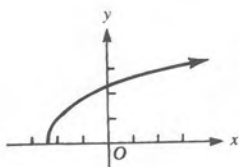
۶۳. (الف) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ؛ (ب) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ (پ) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ (ت) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$



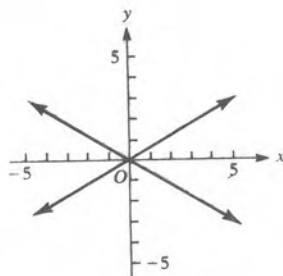
شکل تمرین مروری ۱۵-۱



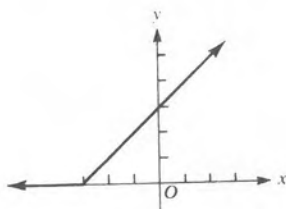
شکل تمرین مروری ۱۳-۱



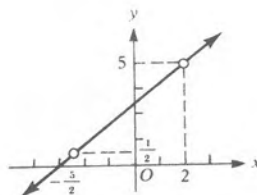
شکل تمرین مروری ۴۵-۱



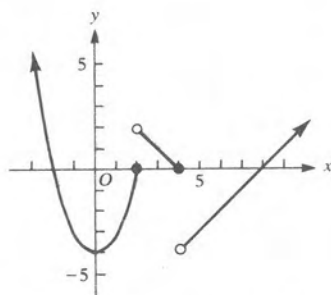
شکل تمرین مروری ۱۷-۱



شکل تمرین مروری ۴۹-۱



شکل تمرین مروری ۴۷-۱



شکل تمرین مروری ۵۱-۱

تمرینهای ۱.۲

$$۰.۵ \quad \frac{1}{1400}$$

$$۰.۳ \quad ۰.۰۰۰۵$$

$$۰.۱ \quad ۰.۰۰۰۵$$

$$۰.۱۱ \quad ۰.۰۰۱$$

$$۰.۹ \quad ۰.۰۰۰۲$$

$$۰.۷ \quad \frac{1}{3000}$$

$$\begin{array}{lll}
 ۱۳. ۰.۰۰۰۶ & ۱۵. \frac{1}{2}\epsilon & ۱۷. \frac{1}{5}\epsilon \\
 ۱۹. \frac{1}{3}\epsilon & ۲۱. \epsilon & ۲۳. \min\left(1, \frac{1}{3}\epsilon\right) \\
 ۲۵. \min\left(1, \frac{1}{8}\epsilon\right) & ۲۷. \min\left(1, \frac{1}{6}\epsilon\right) & ۲۹. \min\left(1, \frac{1}{6}\epsilon\right) \\
 ۳۱. \min\left(1, \frac{1}{7}\epsilon\right) & ۳۳. \min\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\epsilon\right) & ۳۵. \min\left(1, \frac{2}{7}\epsilon\right) \\
 ۳۷. \min\left(1, (2\sqrt{2}+3)\epsilon\right) & ۳۹. \min\left(1, 2\epsilon\right) & \\
 ۴۱. \min\left(1, \frac{1}{7}(9\sqrt{2}+21)\epsilon\right) & ۴۳. \delta = \min(a, \epsilon/2a) & \\
 ۴۵. \delta = \min(a, \sqrt{a}\epsilon) & ۴۷. \delta = \min(-a, \epsilon/\sqrt{a}) &
 \end{array}$$

تمرینهای ۲.۲

$$\begin{array}{llll}
 ۱. ۸ & ۳. ۷ & ۵. ۰ & ۷. \frac{1}{2} \\
 ۹. -\frac{1}{22} & ۱۱. \frac{1}{4} & ۱۳. -۶ & ۱۵. \frac{1}{7} \\
 ۱۷. \frac{16}{7} & ۱۹. ۱۲ & ۲۱. \frac{3}{2} & ۲۳. \frac{2}{3} \\
 ۲۵. \sqrt{\frac{6}{5}} & ۲۷. \frac{1}{6} & ۲۹. \frac{1}{4}\sqrt{2} & ۳۱. \frac{1}{3} \\
 ۳۳. -۱ & ۳۵. \frac{11}{17} & ۴۱. ۰ (الف) &
 \end{array}$$

تمرینهای ۳.۲

$$\begin{array}{l}
 ۱. (الف) ۳-؛ (ب) ۲؛ (پ) موجود نیست چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ \\
 ۳. (الف) ۸؛ (ب) ۵؛ (پ) موجود نیست چون $\lim_{t \rightarrow -4^+} f(t) \neq \lim_{t \rightarrow -4^-} f(t)$ \\
 ۵. (الف) ۴؛ (ب) ۴؛ (پ) ۴ \\
 ۷. (الف) ۵؛ (ب) ۵؛ (پ) ۵
 \end{array}$$

۹. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰ ۱۱. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰

۱۳. (الف) -۴؛ (ب) -۴؛ (پ) -۴

۱۵. (الف) ۱؛ (ب) -۱؛ (پ) موجود نیست چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

۱۷. (الف) ۲؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰؛ (ت) -۲

۱۹. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰

۲۱. (الف) ۰؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰؛ (ت) ۰؛ (ث) ۰؛ (ج) ۰

۲۳. (الف) -۲؛ (ب) ۲؛ (پ) وجود ندارد.

۲۵. (الف) ۲؛ (ب) ۱؛ (پ) وجود ندارد.

۲۷. (الف) -۱؛ (ب) ۱؛ (پ) وجود ندارد.

۲۹. -۶

۳۱. $b=1, a=-\frac{3}{2}$

۳۵.
$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2 & x \leq 1 \\ 2x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

تمرینهای ۴.۲

۱. $+\infty$ ۳. $+\infty$ ۵. $-\infty$ ۷. $-\infty$ ۹. $+\infty$

۱۱. $+\infty$ ۱۳. $+\infty$ ۱۵. $-\infty$ ۱۷. $-\infty$ ۱۹. $+\infty$

۲۱. $-\infty$ ۲۳. $+\infty$ ۲۵. $+\infty$ ۲۷. $-\infty$ ۲۹. $-\infty$

۳۱. $-\infty$ ۳۳. (الف) $x=0$ ؛ (ب) $x=0$ ؛ (پ) $x=0$ ؛ (ت) $x=0$

۳۵. $x=4$ ۳۷. $x=-3$ ۳۹. $x=-3$ ۴۱. $x=-5, x=-3$

۴۳. $x=-\frac{5}{2}, x=\frac{7}{2}$ ۴۵. فرض کنید $\delta = \sqrt{3/N}$

تمرینهای ۵.۲

۱. ۰ ۳. $\frac{2}{5}$ ۵. $-\frac{2}{5}$ ۷. $\frac{7}{3}$ ۹. ۰

$$1.19 \quad -\infty.17 \quad +\infty.15 \quad \frac{1}{2}.13 \quad +\infty.11$$

$$0.27 \quad -\infty.25 \quad 0.23 \quad -1.21$$

$$x=0; y=1.31$$

$$x=3; y=2.29$$

$$x=3; x=-3; y=4.35$$

$$x=2; x=-2; y=0.33$$

$$x=\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}.39$$

$$x=-\frac{5}{2}; x=\frac{2}{3}; y=0.37$$

$$y=-1; y=1.43$$

$$x=\frac{4}{3}; y=\frac{2}{3}.41$$

$$N=1+\frac{1}{\varepsilon}.47 \quad \text{بگیرید.}$$

$$x=3; y=1; y=-1.45$$

$$.49 \quad \text{فرض کنید } N=(\varepsilon-7)/2.$$

۵۱. (الف) f روی بازه بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف می‌شود و برای هر $M < 0$ ، $N > 0$ وجود دارد به طوری که $f(x) < M$ هرگاه $x > N$ ؛ (ب) f روی بازه بازه‌ای مانند $(-\infty, b)$ تعریف می‌شود و برای هر $M > 0$ ، $N < 0$ وجود دارد به طوری که $f(x) > M$ هرگاه $x < N$ ؛ (پ) f روی بازه بازه‌ای مانند $(-\infty, b)$ تعریف می‌شود و برای هر $M < 0$ ، $N < 0$ وجود دارد به طوری که $f(x) < M$ هرگاه $x < N$.

$$+\infty, +\infty \quad (ب) \quad (0, +\infty); C(x) = 16x + 32400x^{-1} \quad (الف) \quad ۵۵$$

$$+\infty, +\infty \quad (ب) \quad (0, +\infty); A(x) = 3x + 30 + 48x^{-1} \quad (الف) \quad ۵۷$$

تمرینهای ۶.۲

$$1. \quad -3; f(-3) \text{ وجود ندارد.}$$

$$3. \quad -3; \lim_{x \rightarrow -3} g(x) \neq g(-3)$$

$$5. \quad -3, 2; h(-3) \text{ و } h(2) \text{ وجود ندارند.}$$

$$7. \quad 4; \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ وجود ندارد.}$$

$$9. \quad -2, 2; F(-2) \text{ و } F(2) \text{ وجود ندارند.}$$

۱۱. ۲، -۲؛ $G(-۲)$ و $G(۲)$ وجود ندارند.

۱۳. ۰؛ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد.

۱۵. ۲؛ $\lim_{t \rightarrow 2} g(t) \neq g(۲)$

۱۷. ۰؛ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ وجود ندارد.

۱۹. ۳؛ $f(۳)$ وجود ندارد.

۲۱. تمام اعداد صحیح؛ اگر k عدد صحیحی باشد، $\lim_{x \rightarrow k} [x]$ وجود ندارد.

۲۳. ۰؛ $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ وجود ندارد.

۲۵. ۰؛ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ وجود ندارد.

۳۱. رفع شدنی؛ ۰

۳۹. اساسی

۴۷. رفع شدنی؛ ۲

۳۷. رفع شدنی؛ $\frac{1}{48}$

۳۵. رفع شدنی؛ $-\frac{1}{6}$

۴۳. اساسی

۳۹. f درهمه جا پیوسته است. $\frac{1}{3a^2}$ ، ۴۱

۴۳. ۵۰ و ۲۰۰؛ $\lim_{x \rightarrow 50} C(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 200} C(x)$ وجود ندارند.

تمرینهای ۷.۲

۳. تمام اعداد حقیقی

۱. تمام اعداد حقیقی

۷. تمام اعداد حقیقی بجز ۱ - ۱

۵. تمام اعداد حقیقی بجز ۳

۹. تمام اعداد حقیقی بجز ۲ - ۲ و ۲

۱۱. تمام اعداد حقیقی بجز ۴ - ، ۳ - ، و ۱

۱۵. تمام اعداد حقیقی

۱۳. $(-\infty, -۴) \cup (۴, +\infty)$

۱۵. ۲۷

۲۵. ۲ -

۲۳. ۱ -

۲۱. $\frac{1}{5}$

۲۹. $(0, +\infty)$ ؛ $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2}$

$$31. (2, +\infty); (f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$33. (0, 2) \cup (2, +\infty); (f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$35. (0, 1) \cup (1, +\infty); (f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$$

$$37. (-3, 3)$$

$$39. (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$$

$$41. (-5, 2)$$

43. تمام اعداد حقیقی

45. تمام اعداد حقیقی بجز ۰

$$47. (0, +\infty)$$

49. تمام اعداد حقیقی بجز ۱، -۱، و ۳

51. تمام اعداد حقیقی بجز $\frac{1}{4}n$ که n عدد صحیح دلخواهی است.

$$53. (-1, 0) \cup (0, 1)$$

تمرینهای ۸.۲

۱. پیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته

۳. پیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته

۵. پیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته

۷. پیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته

۹. پیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته

۱۱. پیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته

۱۳. ناپیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ پیوسته؛ ناپیوسته؛ ناپیوسته؛ پیوسته

$$15. (-\infty, -2); (-2, 2); (2, +\infty)$$

$$۱۷. (-\infty, -3); (4, +\infty)$$

$$۱۹. (-\infty, -1); (-1, 1); (1, +\infty)$$

۲۱. روی $(0, 1)$ و تمام بازه‌هایی مانند $[k, k+1)$ که k عدد صحیحی بجز صفر باشد، پیوسته است.

$$۲۹. ۵ \quad ۳۱. c = -3 \text{ و } k = 4$$

$$۳۷. c = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \quad ۳۹. c = -4$$

۴۱. f در $2 -$ ناپیوسته است. ۴۳. f در 1 ناپیوسته است.

۴۵. نه؛ f روی $[a, c]$ پیوسته خواهد بود اگر $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$ موجود بوده و برابر با $h(b)$ باشد.

$$۴۷. \sqrt{10} - 3$$

تمرینهای ۹.۲

۱. ۴	۳. $\frac{9}{7}$	۵. $\frac{3}{5}$	۷. $\frac{1}{9}$
۹. ۰	۱۱. ۰	۱۳. ۱۲	۱۵. $\frac{1}{2}$
۱۷. ۰	۱۹. $+\infty$	۲۱. ۰	۲۳. -1
۲۵. ۳	۲۷. ۰	۲۹. -4	۳۱. ۱
۳۳. ۰			

تمرینهای ۱۰.۲

۱. هر بازه (a, b) که $-2 < a < 3$ و $b > 3$
۳. هر بازه (a, b) که $0 \leq a < 1$ و $b > 1$
۵. هر بازه (a, b) که $a < -3$ و $-3 < b < 3$
۷. هر بازه (a, b) که $-4 \leq a < 0$ و $b > 0$
۹. (الف) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- (ب) (a, b) که $-1 < a < b \leq k$ یا $0 \leq a < k < b$

۱۱. (الف) تمام اعداد در بازه $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ؛ (ب) (a, b) که $-2 \leq a < b \leq -\frac{7}{2}$

یا $-2 \leq a < b \leq \frac{3}{2}$

تمرینهای مروری فصل ۲

۵. $\sqrt[3]{2}$

۳. -6

۱. ۹

۱۱. $\min\left(1, \frac{1}{9}\varepsilon\right)$

۹. $\frac{1}{2}\varepsilon$

۷. $-\frac{1}{6}$

۱۷. $\min(1, 5\varepsilon)$

۱۵. $\min(1, \varepsilon)$

۱۳. $\min(1, \varepsilon)$

۱۹. $-2, 1$ ؛ $f(-2)$ و $f(1)$ وجود ندارند.

۲۱. -2 ؛ $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ وجود ندارد.

۲۳. f روی $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ و $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ پیوسته است.

۲۵. g روی $(3, 4)$ پیوسته است.

۳۳. $-\infty$

۳۱. $\frac{1}{3}$

۲۷. $-\frac{5}{4}$ ۸. ۲۹

۴۱. $\frac{5}{4}$

۳۹. $-\frac{1}{4}$

۳۵. $+\infty$ ۳۷. $-\infty$

۴۹. (الف) بله؛ (ب) نه

۴۷. $-\frac{1}{4}$

۴۳. ۰ ۴۵. $\frac{2}{3a^{1/3}}$

۵۵. $x = -\frac{7}{4}$ ؛ $y = \frac{5}{4}$

۵۳. اساسی

۵۱. رفیع شدنی؛ $\frac{6}{5}$

۵۹. $x = 2$ ؛ $x = -2$ ؛ $y = 5$

۵۷. $y = \frac{4}{3}$

۶۱. $(1, +\infty)$ ؛ $(f \circ g)(x) = \sqrt{x-1}$

$$۶۳. (f \circ g)(x) = \begin{cases} ۱ & x < -۱ \\ ۰ & x = -۱ \\ -۱ & -۱ < x < ۱ \\ ۰ & x = ۱ \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$$

تمام اعداد حقیقی بجز ۱ و -۱

$$۶۵. c = \sqrt{۷}$$

$$۶۹. a = ۱۰, b = -۲۳$$

۷۱. فرض کنید $\delta = \min\left(1, \frac{1}{3}\epsilon^2\right)$

$$۷۳. N = -\frac{3}{\epsilon}$$

فرض کنید

$$۷۵. (b) \text{ هر بازه } (a, b) \text{ که } -\frac{3}{4} < b \leq \frac{3}{4} < a \leq -۲$$

$$۷۷. (b) \text{ تمام مقادیر } a : (b) \text{ تمام اعداد صحیح نامنفی}$$

$$۷۹. \operatorname{sgn} x$$

$$۸۱. (b) f(x) = \begin{cases} ۱ & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

تمرینهای ۱۰۳

$$۱. -۲x_1 \quad ۳. -۴x_1 + ۴ \quad ۵. ۳x_1^2$$

$$۷. ۳x_1^2 - ۳ \quad ۹. \frac{1}{2\sqrt{4-x_1}} \quad ۱۱. ۳x_1^2 - ۸x_1 + ۴$$

$$۱۳. x - ۸y + ۵۸ = 0 ; ۸x + y + ۹ = 0$$

$$۱۵. x + ۶y - ۵۲ = 0 ; ۶x - y - ۱۶ = 0$$

$$۱۷. ۵x - ۲y + ۳۰ = 0 ; ۲x + ۵y - ۱۷ = 0$$

$$۱۹. ۳x - ۲y - ۵ = 0 ; ۲x + ۳y - ۱۲ = 0$$

$$۲۱. x - ۴y = 0 ; ۴x + y = 0$$

$$۲۳. ۱۲x + y - ۹۸ = 0 ; x - ۱۲y + ۱۶ = 0$$

$$8x - y - 5 = 0 \quad .25$$

$$4x - 4y - 1 = 0 \quad .27$$

$$2x - y - 2 = 0 \quad .29$$

$$: (12 - 2\sqrt{30})x - y - 30 + 2\sqrt{30} = 0 \quad .31$$

$$(12 + 2\sqrt{30})x - y - 30 - 2\sqrt{30} = 0$$

تمرینهای ۲.۳

$$-4x \quad .5$$

$$0 \quad .3$$

$$7 \quad .1$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad .11$$

$$-3x^2 \quad .9$$

$$8x + 5 \quad .7$$

$$-\frac{1}{2(x+1)^{2/3}} \quad .17$$

$$-\frac{2}{x^2} - 1 \quad .15$$

$$-\frac{1}{(x+1)^2} \quad .13$$

$$\frac{5}{4} \quad .23$$

$$-\frac{1}{216} \quad .21$$

$$-6 \quad .19$$

$$-\frac{1}{27} \quad .29$$

$$-12 \quad .27$$

$$3 \quad .25$$

$$-\frac{2}{3(1-2x)^{2/3}} \quad .35$$

$$-\frac{7}{2\sqrt{2-7x}} \quad .33$$

$$-\frac{1}{x^2} + 3 \quad .31$$

$$\text{نه} : \frac{1}{3(x-1)^{2/3}} \quad .29$$

$$g(a) \quad .27$$

$$\frac{2a}{x^2} \quad .43$$

$$\frac{1}{3} : -\frac{1}{(1-3x)^{2/3}} \quad .41$$

تمرینهای ۳.۳

$$1. (ب) \text{ بله} ; (پ) 1, -1 ; (ت) \text{ نه}$$

$$3. (ب) \text{ بله} ; (پ) 1, -1 ; (ت) \text{ نه}$$

$$5. (ب) \text{ بله} ; (پ) 0, 1 ; (ت) \text{ نه}$$

$$7. (ب) \text{ بله} ; (پ) 0, 0 ; (ت) \text{ بله}$$

$$۹. (ب) \text{ بله ؛ } (پ) \text{ وجود ندارد، } ۰ ؛ (ت) \text{ نه}$$

$$۱۱. (ب) \text{ بله ؛ } (پ) ۸ ، ۸ ؛ (ت) \text{ بله}$$

$$۱۳. (ب) \text{ بله ؛ } (پ) \text{ هیچیک وجود ندارد ؛ } (ت) \text{ نه}$$

$$۱۵. (ب) \text{ بله ؛ } (پ) -۶ ، -۶ ؛ (ت) \text{ بله}$$

$$۲۳. f'_{+}(۰) = ۰ \quad ۲۵. (الف) \frac{۷}{۵} ؛ (ب) \text{ نه}$$

$$۲۷. b = -۹ ، a = ۸$$

$$۲۹. (الف) ۰ ؛ (ب) ۱ ؛ (پ) \text{ وجود ندارد.}$$

$$۳۵. (الف) I(x) = \begin{cases} ۱۵x & ۰ \leq x \leq ۱۵۰ \\ ۲۲۵x - ۰.۵x^2 & ۱۵۰ < x \leq ۲۵۰ \end{cases}$$

تمرینهای ۴.۳

$$۱. ۷ \quad ۳. -۲ - ۲x \quad ۵. ۳x^2 - ۶x + ۵$$

$$۷. x^2 - ۴x^2 \quad ۹. t^2 - t \quad ۱۱. ۴\pi r^2$$

$$۱۳. ۲x + ۳ - \frac{۲}{x^2} \quad ۱۵. ۱۶x^2 + \frac{1}{x^5} \quad ۱۷. -\frac{۶}{x^2} - \frac{۲۰}{x^5}$$

$$۱۹. ۳\sqrt{3}s^2 - ۲\sqrt{3}s \quad ۲۱. ۷۰x^6 + ۶۰x^4 - ۱۵x^2 - ۶$$

$$۲۳. -۱۸y^2(7 - 2y^2)$$

$$۲۵. ۱۰x^4 - ۲۴x^2 + ۱۲x^2 + ۲x - ۳$$

$$۲۷. -\frac{1}{(x-1)^2} \quad ۲۹. -\frac{2(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$۳۱. \frac{5(1-2x^2)}{(1+2x^2)^2} \quad ۳۳. \frac{48x^2}{(x^2+8)^2}$$

$$۳۵. \frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2} \quad ۳۷. ۱۲x - y = ۲۰$$

$$۳۹. x + ۲۰y + ۹۶ = ۰ \quad ۴۱. ۲x - y = ۳$$

$$۴۳. x + ۸y - ۲ = ۰ ؛ x + ۸y + ۲ = ۰$$

$$4x - y = 3 : 28x - y = 99. ۴۵$$

$$2(3x+2)(6x^2+2x-3). ۴۹$$

$$3(2x^2+x+1)^2(4x+1). ۵۱$$

تمرینهای ۵.۳

$$-1 : v(t) = -\frac{1}{4t^2} . ۳$$

$$18 : v(t) = 6t . ۱$$

$$\frac{1}{2} : v(t) = \frac{8}{(4+t)^2} . ۷$$

$$8 : v(t) = 6t^2 - 2t . ۵$$

۹. $t < -3$ ، به طرف راست حرکت می کند؛ $-3 < t < 1$ ، به طرف چپ حرکت می کند؛ $t > 1$ ، به طرف راست حرکت می کند؛ وقتی $t = -3$ و $t = 1$ ، تغییر جهت می دهد.

۱۱. $t < -2$ ، به طرف راست حرکت می کند؛ $-\frac{1}{2} < t < -2$ ، به طرف چپ حرکت

می کند؛ $t > \frac{1}{2}$ ، به طرف راست حرکت می کند؛ وقتی $t = -2$ و $t = \frac{1}{2}$ ، تغییر جهت می دهد.

۱۳. $t < -3$ ، به طرف چپ حرکت می کند؛ $-3 < t < 3$ ، به طرف راست حرکت می کند؛ $t > 3$ ، به طرف چپ حرکت می کند؛ وقتی $t = -3$ و $t = 3$ ، تغییر جهت می دهد.

۱۵. (الف) ۳۲- فوت بر ثانیه؛ (ب) ۶۴- فوت بر ثانیه؛ (پ) ۴ ثانیه؛ (ت) ۱۲۸- فوت بر ثانیه

۱۷. ۱۶۰ سانتیمتر بر ثانیه

۱۹. (الف) $(2041 + 24)$ فوت بر ثانیه؛ (ب) $\frac{6}{5}$ ثانیه

۲۱. (الف) ۸۰۶؛ (ب) ۸۰۳؛ (پ) ۸۰۱؛ (ت) ۸

۲۳. (الف) 104π ؛ (ب) 101π ؛ (پ) 1001π ؛ (ت) 100π

۲۵. (الف) $-\frac{1}{16}$ ، $-\frac{1}{4}$ ؛ (ب) $-\frac{1}{100}$ ، $-\frac{1}{10}$

۲۷. (الف) ۲۴- واحد در هر دلار؛ (ب) ۲۳- واحد در هر دلار

۴۹. (الف) ۱۸۷۵۰ لیتر در دقیقه؛ (ب) ۱۷۵۰۰ لیتر در دقیقه

$$D_1 R = -\frac{E}{I^2} \cdot 31$$

۳۳. (الف) ۲۹ - درجه در ساعت؛ (ب) ۳ - درجه در ساعت

۳۵. (الف) ۹۲۰ نفر در سال، (ب) ۱۴۰۰ نفر در سال، (پ) ۱۶٪؛ (ت) ۶۴٪

۳۷. (الف) سودمند است؛ (ب) سودمند نیست؛ (پ) ۹۰

تمرینهای ۶.۳

$$x \cos x \cdot 5 \quad 2(\cos t - t \sin t) \cdot 3 \quad 3 \cos x \cdot 1$$

$$-x^2 \sin x \cdot 9 \quad 4 \cos 2x \cdot 7$$

$$\frac{1}{\cos x - 1} \cdot 13 \quad -\frac{2(z+1) \sin z + 2 \cos z}{(z+1)^2} \cdot 11$$

$$\frac{2 \cos y}{(1 - \sin y)^2} \cdot 15$$

$$(1 - \cos x)(x + \cos x) + (1 - \sin x)(x - \sin x) \cdot 17$$

$$-3\pi \cdot 23 \quad -\frac{2}{\pi} \cdot 21 \quad 1 \cdot 19$$

$$-\frac{10}{3} \cdot 29 \quad \sqrt{2} \cdot 27 \quad 2 \cdot 25$$

$$\frac{-5 \csc t \cot t}{(\csc t + 2)^2} \cdot 27 \quad 2 \sec^2 x + 2 \sec x \tan^2 x \cdot 35$$

$$2w \text{ (ب)}; \frac{\sqrt{2}}{9} w \text{ (الف)} \cdot 43 \quad x + 2y = 6 \cdot 41 \quad x + y = \pi \cdot 39$$

تمرینهای ۷.۳

$$8(x+2)(x^2+2x-5)^2 \cdot 3 \quad 6(2x+1)^2 \cdot 1$$

$$2(2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)(8t^3 - 21t^2 + 2) \cdot 5$$

$$-12(\sin 3x + \cos 4x) \quad ۹ \quad \frac{-4x}{(x^2+4)^2} \quad ۷$$

$$-4t \sin 2t^2 - 2 \sin 2t \quad ۱۱$$

$$36 \cos 4x \cos 3x - 48 \sin 4x \sin 3x \quad ۱۳$$

$$6(3u^2+5)^2(3u-1)(12u^2-3u+5) \quad ۱۵$$

$$-2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-2}(12x-17) \quad ۱۷$$

$$\frac{-2(14x+3)}{(7x^2+3x-1)^2} \quad ۲۱ \quad \frac{18(y-7)}{(y+2)^2} \quad ۱۹$$

$$2(r^2+1)^2(2r+5)(8r^2+15r+2) \quad ۲۳$$

$$\frac{2z(z^2-5)^2(z^2+22)}{(z^2+4)^2} \quad ۲۵$$

$$\frac{4(4x-1)^2(x^2+2)^2(21x^4-3x^2+49x^2-4x+30)}{(3x^2+5)^2} \quad ۲۷$$

$$6t \sin(6t^2-2) \quad ۲۹$$

$$6(\sin^2 x - x^2)^2(\sin x \cos x - x) \quad ۳۱$$

$$-12 \cos 3x \sin(\sin 3x) \quad ۳۵ \quad \frac{6 \cos 2y(\sin^2 2y+2)}{(\cos^2 2y+1)^2} \quad ۳۳$$

$$24x - y - 39 = 1; y = 1; y = 1; y = 0; 24x + y + 39 = 0 \quad ۳۷$$

$$3x - 4y + 5 = 0 \quad ۳۹$$

$$6x - 18\sqrt{3}y = 2\pi + 27\sqrt{3} \quad ۴۱$$

$$\frac{48}{128} \text{ سانتیمتر در ثانیه، } \frac{8t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} \text{ (الف) سانتیمتر در ثانیه؛ (ب) } 0 \text{ سانتیمتر در ثانیه، } \quad ۴۳$$

$$(\text{الف}) (5\pi \cos \pi t - 3\pi \sin \pi t) \text{ سانتیمتر در ثانیه؛ (ب) } \sqrt{2\pi} \text{ سانتیمتر در ثانیه، } 3\pi \text{ سانتیمتر در ثانیه} \quad ۴۵$$

$$6x^5 \text{ (الف) } 3x^4 \text{ (ب) } \quad ۴۷$$

$$۲۷۷ \text{ کیلومتر در دقیقه} \quad ۵۵$$

تمرینهای ۸۰۳

$$x^{-1/2} \left(2 - \frac{5}{2} x^{-1} \right) \quad .1$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+2x^2}} \quad .3$$

$$\frac{-2}{(\delta - 3x)^{1/2}} \quad .5$$

$$\frac{y}{(2\delta - y^2)^{3/2}} \quad .7$$

$$\frac{-\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \quad .9$$

$$-\frac{3 \cos 3x}{2(\sin 3x)^{3/2}} \quad .11$$

$$\frac{17}{2(3x+1)^{3/2}(2x-\delta)^{1/2}} \quad .13$$

$$\frac{6x^2 - 10x + 1}{3\sqrt[3]{(2x^2 - \delta x^2 + x)^2}} \quad .15$$

$$\frac{1}{\sqrt{rt}} \left(1 - \frac{1}{t} \right) \quad .17$$

$$\frac{1}{2} x(\delta - x^2)^{-1/2} (x^2 + 1)^{-3/2} (-7x^2 + 15x - 2) \quad .19$$

$$\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^{3/2} (1 + \sin t)^{1/2}} \quad .23$$

$$\frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad .21$$

$$\frac{x + \delta}{6\sqrt{x-1} \sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad .27$$

$$\frac{-y \sin \sqrt{y^2 + 1}}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad .25$$

$$\frac{-\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^2 2x}} \quad .31$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{9+x} + \sqrt{9-x} \sqrt{9-x}} \quad .29$$

$$2\sqrt[3]{4}x - 3y = \sqrt[3]{4} \quad ; x=1 \quad ; 2\sqrt[3]{4}x + 3y = 3\sqrt[3]{4} \quad ; 2x + 3y = 6 \quad .33$$

$$2x - 3y + 2 = 0$$

$$x + 4y = 0 \quad .37$$

$$4x - 5y + 9 = 0 \quad .35$$

$$.39 \quad \text{الف) } 0 \quad ; \quad \text{ب) } \frac{1}{y} \quad ; \quad \text{پ) هیچ مقداری از } t$$

$$2x|x| \quad .45$$

$$\frac{2x(x^2 - 4)}{|x^2 - 4|} \quad .43$$

$$100 \quad .41$$

$$\frac{4}{3} (3x+2)^2 (x^2-1)^{-1/2} (12x^2+2x-9) \quad .51$$

$$\frac{1}{6}(t^3 - 2t + 1)^{1/2}(t^2 + t + 5)^{-3/2}(31t^4 + 29t^2 + 109t^2 - 18t - 88) \cdot 53$$

تمرینهای ۹.۳

$$-\frac{y^2}{x^2} \cdot 5 \quad \frac{8y - 2x^2}{3y^2 - 8x} \cdot 3 \quad -\frac{x}{y} \cdot 1$$

$$\frac{3x^2 - 4xy - 1}{2x^2 + 2} \cdot 11 \quad \frac{x - xy^2}{x^2y - y} \cdot 9 \quad -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot 7$$

$$\frac{2 + 5x^2 - 4x^{3/2}y}{2x^{1/2}(x^2 + 3)} \cdot 17 \quad \frac{y + 2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - x} \cdot 15 \quad \frac{y^{2/3} + y}{24x^{2/3}y^{5/3} - x} \cdot 13$$

$$\frac{3x^2 - 4y}{4x - 3y^2} \cdot 23 \quad \frac{y \sin x - \sin y}{x \cos y + \cos x} \cdot 21 \quad \frac{\sin(x - y)}{\sin(x + y) - 1} \cdot 19$$

$$2x + y = 4 \cdot 29 \quad \frac{x^2 + 8y^2}{4x^2 - 3x^2y} \cdot 27 \quad \frac{3x^2 - y^2}{x^2 - 6xy} \cdot 25$$

$$(1, 0) \cdot 35 \quad -1 \cdot 33 \quad 5x - 7y + 11 = 0 \cdot 31$$

۳۷. (الف) $f_1(x) = 2\sqrt{x-2}$ ، قلمرو: $x \geq 2$ ؛ $f_2(x) = -2\sqrt{x-2}$ ، قلمرو:

$x \geq 2$ ؛ (ت) $f'_1(x) = (x-2)^{-1/2}$ ، قلمرو: $x > 2$ ؛

$f'_2(x) = -(x-2)^{-1/2}$ ، قلمرو: $x > 2$ ؛ (ث) $\frac{2}{y}$ ،

(ج) $x + y - 1 = 0$ ؛ $x - y - 1 = 0$ ؛

۳۹. (الف) $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ، قلمرو: $|x| \geq 3$ ؛ $f_2(x) = -\sqrt{x^2 - 9}$ ، قلمرو:

$|x| \geq 3$ ؛ (ت) $f'_1(x) = x(x^2 - 9)^{-1/2}$ ، قلمرو: $|x| > 3$ ؛

$f'_2(x) = -x(x^2 - 9)^{-1/2}$ ، قلمرو: $|x| > 3$ ؛ (ث) $\frac{x}{y}$ ؛

(ج) $5x - 4y + 9 = 0$ ، $5x + 4y + 9 = 0$ ؛

۴۱. (الف) $f_1(x) = \sqrt{8 - x^2} + 2x + 2$ ، قلمرو: $-2 \leq x \leq 2$ ؛

$f_2(x) = -\sqrt{8 - x^2} + 2x + 2$ ، قلمرو: $-2 \leq x \leq 2$ ؛

(ت) $f'_1(x) = (1-x)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$ ، قلمرو: $-2 < x < 2$ ؛

$f'_2(x) = (x-1)(8 - x^2 + 2x)^{-1/2}$ ، قلمرو: $-2 < x < 2$ ؛ (ث) $\frac{1-x}{y-2}$ ؛

(ج) $y + 1 = 0$ ، $y - 5 = 0$ ؛

تمرینهای ۱۰.۳

$$f''(x) = 20x^2 - 12x : f'(x) = 5x^3 - 6x^2 + 1 \quad .1$$

$$g''(s) = 24s^2 - 24s : g'(s) = 8s^3 - 12s^2 + 7 \quad .3$$

$$f''(x) = \frac{15}{4}x^{1/2} : f'(x) = \frac{5}{4}x^{3/2} - 5 \quad .5$$

$$f''(x) = (x^2 + 1)^{-3/2} : f'(x) = x(x^2 + 1)^{-1/2} \quad .7$$

$$f''(t) = -16t^2 \cos t^2 - 8 \sin t^2 : f'(t) = -8t \sin t^2 \quad .9$$

$$G''(x) = (8x^2 - 6)(3 + 2x^2)^{-5/2} : G'(x) = -2x(3 + 2x^2)^{-3/2} \quad .11$$

$$g''(x) = \frac{32 - 24x^2}{(x^2 + 4)^3}, \quad g'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 4)^2} \quad .13$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{\sin x + 1} : f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}} \quad .15$$

$$1152(2x - 1)^{-5} \quad .19$$

$$24x \quad .17$$

$$-32(\sin^2 x + \cos^2 x) \quad .23$$

$$\frac{18 + 6x}{(1 - x)^5} \quad .21$$

$$5 : -\frac{7}{4} \quad .31$$

$$-\frac{3a^4 x^2}{y^7} \quad .29$$

$$.33 \quad 15 + 18t - 3t^2 = v; 18 - 6t = a; \text{ وقتی } 0 < t < 1, \text{ ذره در طرف راست مبدأ}$$

است؛ به سمت راست حرکت می کند، سرعت در حال کاهش است، و مقدار سرعت

کاهش می یابد وقتی $\frac{9 - \sqrt{21}}{2} < t < 1$ ، ذره در طرف راست مبدأ است، به

سمت چپ حرکت می کند، سرعت کاهش می یابد، و مقدار سرعت در حال افزایش

است؛ وقتی $\frac{9 - \sqrt{21}}{2} < t < 3$ ، ذره در طرف چپ مبدأ است، به سمت چپ

حرکت می کند، سرعت کاهش می یابد، و مقدار سرعت در حال افزایش است؛ وقتی

$3 < t < 5$ ، ذره در طرف چپ مبدأ است، به سمت چپ حرکت می کند، سرعت

افزایش می یابد، و مقدار سرعت در حال کاهش است؛ وقتی $\frac{9 + \sqrt{21}}{2} < t < 5$ ،

ذره در طرف چپ مبدأ است، به سمت راست حرکت می کند، سرعت افزایش

می یابد، و مقدار سرعت در حال افزایش است؛ وقتی $\frac{9+\sqrt{21}}{2} < t < +\infty$ ذره در طرف راست مبدأ است، به سمت راست حرکت می کند، سرعت افزایش می یابد، و مقدار سرعت در حال افزایش است.

$$۰.۳۵ \quad \frac{3}{4} \text{ ثانیه} ؛ \frac{7}{4} \text{ فوت} ؛ -\frac{1}{4} \text{ فوت در ثانیه}$$

$$۰.۳۷ \quad \frac{1}{4} \text{ ثانیه} ؛ \frac{249}{80} \text{ فوت} ؛ -\frac{11}{8} \text{ فوت در ثانیه}$$

$$۰.۳۹ \quad \frac{3}{4} \text{ ثانیه} ؛ \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \text{ فوت} ، \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \text{ فوت در ثانیه}$$

$$۰.۴۳ \quad f'(x) = 2|x|، \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty) ؛ f''(x) = 2\frac{|x|}{x}، \text{ قلمرو: } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$۰.۴۵ \quad f'(x) = 4|x^2|، \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty) ؛ f''(x) = 8x|x|، \text{ قلمرو: } (-\infty, +\infty)$$

$$۰.۴۷ \quad f'''(x) = 24|x|$$

$$۰.۴۹ \quad h''(x) = (f'' \circ g)(x)(g'(x))^2 + (f' \circ g)(x)g''(x)$$

تمرینهای مروری فصل ۳

$$۰.۱ \quad -\frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^5} \quad ۰.۳ \quad 60t^4 - 39t^2 - 6t - 4$$

$$۰.۵ \quad \frac{-6x^2}{(x^2-1)^2} \quad ۰.۷ \quad 4(2s^2-3s+7)^2(6s^2-3)$$

$$۰.۹ \quad \frac{1-2x^2}{3x^{2/3}(x^2+1)^{4/3}}$$

$$۰.۱۱ \quad x(4x^2-13)(x^2-1)^{1/2}(x^2-4)^{-1/2}$$

$$۰.۱۳ \quad (x+1)\sin x + x\cos x$$

$$۰.۱۵ \quad -3\sin 3w \cos(\cos 3w) + 6\sin 4w$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})} \cdot ۱۹$$

$$\frac{8x}{3y^2-8y} \cdot ۱۷$$

$$\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} \cdot ۲۱$$

$$۲x+3[x^2+(x^4+x)^2][3x^2+2(x^4+x)(4x^3+1)] \cdot ۲۳$$

۲۵. (الف) $t=3$ ، $t=8$ ؛ (ب) وقتی $t=0$ ، $v=24$ ، و ذره به سمت راست حرکت می‌کند؛ وقتی $t=3$ ، $v=-15$ ، و ذره به سمت چپ حرکت می‌کند؛ وقتی $t=8$ ، $v=40$ ، و ذره به سمت راست حرکت می‌کند.

$$a=16-4s؛ v^2=4(5-s)(s-3) \cdot ۲۷$$

۲۹. (الف) ۳۲ فوت در ثانیه؛ (ب) ۲۵۶ فوت؛ (پ) ۷ ثانیه؛ (ت) ۱۲۸ - فوت در ثانیه

$$4x+5y-13=0؛ 5x-4y-6=0 \cdot ۳۱$$

$$(-1, 0) \cdot ۳۵ \quad 12x-6\sqrt{3}y=3\sqrt{3}+8\pi \cdot ۳۳$$

$$x > -1 \text{ یا } x < -3 \cdot ۳۹ \quad -3(3-2x)^{-5/2} \cdot ۳۷$$

$$۸ \text{ (الف) } ۸۰۰۵۵ \text{ (ب) } ۸ \cdot ۴۱$$

$$۳۲۱۲۵ \text{ (ب) } ۳۳۱۲۳ \text{ (الف) } \cdot ۴۳$$

$$-\frac{1}{3} \cdot ۴۷ \quad \frac{2}{\sqrt{4x-3}} \cdot ۴۵$$

$$2(|x+1|-|x|)\left(\frac{x+1}{|x+1|}-\frac{x}{|x|}\right) \cdot ۴۹$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot ۵۱$$

۵۳. (ب) در ۳ پیوسته است؛ (پ) در ۳ مشتق پذیر نیست.

$$0 \text{ (ب) } 0 \text{ (پ) } \cdot ۵۷$$

$$b=\frac{3}{4}؛ a=-\frac{1}{4} \cdot ۵۵$$

$$g(x)=x^2، f(x)=|x| \cdot ۶۵$$

$$(f \circ g)'(0)=2 \cdot ۶۳$$

$$P'(r) \cdot ۶۹$$

تمرینهای ۱۰۴

۱. -3
۲. -2
۳. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
۴. $-\frac{3}{4}$
۵. $\frac{9}{5}$ فوت در ثانیه
۶. $\frac{1}{2\pi}$ فوت در دقیقه
۷. $\frac{5}{8\pi}$ متر در دقیقه
۸. $\frac{25}{3}$ فوت در ثانیه
۹. $\frac{6}{25\pi}$ متر در دقیقه
۱۰. 1800 پوند بر فوت مربع در دقیقه
۱۱. 128π سانتیمتر مربع در ثانیه
۱۲. 14 فوت در ثانیه
۱۳. 875 واحد در ماه
۱۴. با آهنگ 55 پیراهن در هفته کاهش می یابد.
۱۵. 22 متر مکعب در دقیقه
۱۶. $\frac{1}{194}(3\sqrt{97} + 97)$ فوت در ثانیه ≈ 65 فوت در ثانیه
۱۷. با آهنگ $\frac{1}{48}$ رادیان در ثانیه کاهش می یابد.

تمرینهای ۲۰۴

۱. $\frac{1}{3}, -5, 1$
۲. $2, 0, -2$
۳. $1, -1, -3, 3$
۴. $2, 0, 5$
۵. هیچ عدد بحرانی ندارد. 9 هیچ عدد بحرانی ندارد. 11 هیچ عدد بحرانی ندارد.
۶. $\frac{1}{6}K\pi$ ، که K عدد صحیح دلخواهی است.
۷. $\frac{1}{8}(2K+1)\pi$ ، که K عدد صحیح دلخواهی است.
۸. $f(2) = -2$ مینیمم مطلق: 19 اکسترمم مطلق ندارد.
۹. $f\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -1$ ؛ ما کسیمم مطلق: 2 $f(0) = 2$
۱۰. $f(-3) = 0$ مینیمم مطلق: 23 مینیمم مطلق: 1 $h(5) = 1$

۲۹. مینیمم مطلق: $g(0) = 2$ ۳۲. مینیمم مطلق: $F(4) = 1$

۳۱. ما کسیمم مطلق: $f(5) = 2$ ۳۳. مینیمم مطلق: $f(2) = 0$

۳۵. مینیمم مطلق: $g(-3) = -46$ ؛ ما کسیمم مطلق: $g(-1) = -10$

۳۷. مینیمم مطلق: $f(-2) = 0$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(-4) = 144$

۳۹. مینیمم مطلق: $f(2) = 0$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(3) = 25$

۴۱. مینیمم مطلق: $f(-\frac{1}{3}\pi) = -2$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(\frac{1}{3}\pi) = 2$

۴۳. مینیمم مطلق: $f(-1) = -1$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(2) = \frac{1}{3}$

۴۵. مینیمم مطلق: $f(1) = -2$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(0) = -\frac{1}{3}$

۴۷. مینیمم مطلق: $F(-3) = -13$ ؛ ما کسیمم مطلق: $F(3) = 7$

۴۹. مینیمم مطلق: $f(-1) = 0$ ؛ ما کسیمم مطلق: $f(1) = \sqrt[3]{4}$

تمرینهای ۳۰۴

۱. ۲۵۰۰ سانتیمتر مربع $\frac{1}{2} \cdot 3$

۵. $12\sqrt{3}$ واحد مربع $\frac{5}{3} \cdot 7$ اینچ

۹. ۶۰ متر از ۱۲۰ متر

۱۱. از A به P و از P به C ، که P در ۸ کیلومتری B در ساحل قرار دارد.

۱۳. از A به P و از P به C ، که P در ۴ کیلومتری B در ساحل قرار دارد.

۱۵. $\frac{1}{4}\pi$ ۱۷. ۲۲۵ ۱۹. ۴۰۰ ۲۱. ۳۰

۲۳. شعاع $3\sqrt{2}$ اینچ؛ و ارتفاع $6\sqrt{2}$ اینچ است.

۲۵. A ، ۷ ماشین؛ B ، ۸ ماشین ۲۷. (الف) ۳۴ واحد؛ (ب) ۹۴ واحد

۲۹. (الف) شعاع دایره، $\frac{5}{\pi+4}$ فوت و طول يك ضلع مربع، $\frac{10}{\pi+4}$ فوت است؛ (ب)

شعاع دایره $\frac{5}{\pi}$ فوت است و مربعی وجود ندارد.

تمرینهای ۴.۴

$$۰.۱ \quad ۲ \quad ۰.۳ \quad \frac{\pi}{۴} \quad ۰.۵ \quad \frac{۱}{۲}$$

$$۰.۷ \quad \frac{۸}{۲۷} \quad ۰.۹ \quad ۰$$

$$۰.۱۱ \quad (i), (ii), (iii) \text{ برقرارند؛ } (پ) \left(\frac{۳}{۴}, -\frac{۹}{۸}\sqrt[۴]{۶} \right)$$

$$۰.۱۳ \quad (ب) (i) \text{ برقرار نیست.} \quad ۰.۱۵ \quad (ب) (ii) \text{ برقرار نیست.}$$

$$۰.۱۷ \quad ۴ \quad ۰.۱۹ \quad \frac{۲}{\pi} \quad \cos c = \frac{۲}{\pi} ; c \approx ۰.۸۸۰۷$$

$$۰.۲۱ \quad (i) \text{ برقرار نیست.} \quad ۰.۲۳ \quad (ii) \text{ برقرار نیست.}$$

$$۰.۲۹ \quad \frac{۳}{۲}$$

تمرینهای ۵.۴

$$۰.۱ \quad (الف) \text{ و } (ب) f(۲) = -۵, \text{ مینیمم نسبی؛ } (پ) [۲, +\infty) ; (ت) (-\infty, ۲]$$

$$۰.۳ \quad (الف) \text{ و } (ب) f\left(-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۵}{۲۷}, \text{ ماکسیمم نسبی؛ } f(۱) = -۱, \text{ مینیمم نسبی؛ } (پ)$$

$$\left[-\frac{۱}{۳}, ۱\right] (ت) ; [۱, +\infty), \left(-\infty, -\frac{۱}{۳}\right]$$

$$۰.۵ \quad (الف) \text{ و } (ب) f(۰) = ۲, \text{ ماکسیمم نسبی؛ } f(۳) = -۲۵, \text{ مینیمم نسبی؛ } (پ) [۰, ۳] (ت) ; [۳, +\infty), (-\infty, ۰]$$

۰.۷ (الف) و (ب) f دارای مقدار ماکسیمم نسبی ۴ است اگر $x = (۴k + ۱)\pi$ ، که k عددی صحیح و دلخواه است؛ f دارای مینیمم مطلق -۴ است اگر $x = (۴k + ۳)\pi$ ، که k عددی صحیح و دلخواه است؛ (پ) $[(۴k + ۱)\pi, (۴k + ۳)\pi]$ ، که k عددی صحیح و دلخواه است؛ (ت) $[(۴k + ۳)\pi, (۴k + ۱)\pi]$ ، که k عدد صحیح و دلخواهی است.

$$۰.۹ \quad (الف) \text{ و } (ب) f(۰) = ۰, \text{ مینیمم نسبی؛ } f(۱) = \frac{۱}{۴}, \text{ ماکسیمم نسبی؛ } f(۲) = ۰,$$

$$\text{مینیمم نسبی؛ } (پ) [۰, ۱], [۲, +\infty), (ت) (-\infty, ۰], [۱, ۲]$$

۱۱. (الف) و (ب) $f(-2) = -\frac{1}{15}$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(-1) = -\frac{23}{15}$ ، مینیمم

نسبی؛ $f(1) = \frac{53}{15}$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(2) = \frac{31}{15}$ ، مینیمم نسبی؛ (پ)
 $(-\infty, -2)$ ، $[-1, 1]$ ، $[2, +\infty)$ ، $[-2, -1]$ ، $[1, 2]$

۱۳. (الف) و (ب) اکسترمم نسبی موجود نیست؛ (پ) $(0, +\infty)$ ؛ (ت) هیچ جا

۱۵. (الف) و (ب) $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ ، مینیمم نسبی؛ (پ) $(-\infty, 0)$ ، $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ ؛
 (ت) $(0, \sqrt[3]{2})$.

۱۷. (الف) و (ب) $f(\frac{1}{5}) = \frac{3456}{3125}$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(1) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ (پ)
 $(-\infty, \frac{1}{5})$ ، $[1, +\infty)$ ؛ (ت) $[\frac{1}{5}, 1]$

۱۹. (الف) و (ب) $f(2) = 4$ ، ماکسیمم نسبی؛ (پ) $(-\infty, 2)$ ؛ (ت) $[2, 3]$

۲۱. (الف) و (ب) $f(-1) = 2$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(1) = -2$ ، مینیمم نسبی؛ (پ)
 $(-\infty, -1)$ ، $[1, +\infty)$ ؛ (ت) $[-1, 1]$

۲۳. (الف) و (ب) $f(4) = 2$ ، ماکسیمم نسبی؛ (پ) $(-\infty, -2)$ ؛ (ت) $(4, +\infty)$

۲۵. (الف) و (ب) $f(\frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$ ، مینیمم نسبی؛ (پ) $(\frac{1}{8}, +\infty)$ ؛ (ت)
 $(-\infty, \frac{1}{8})$

۲۷. (الف) و (ب) $f(-1) = 0$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(1) = -\sqrt[3]{6}$ ، مینیمم نسبی؛ (پ)
 $(-\infty, -1)$ ، $(1, +\infty)$ ؛ (ت) $[-1, 1]$

۲۹. (الف) و (ب) $f(4) = 9$ ، ماکسیمم نسبی؛ (پ) $(-\infty, 4)$ ؛ (ت) $(4, +\infty)$

۳۱. (الف) و (ب) $f(-2) = 5$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(0) = 1$ ، مینیمم نسبی؛ (پ)
 $(-\infty, -2)$ ، $(0, +\infty)$ ؛ (ت) $[-2, 0]$

۳۳. (الف) و (ب) $f(-1) = 2$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(0) = 1$ ، مینیمم نسبی؛ $f(2) = 5$ ،
 ماکسیمم نسبی؛ (پ) $(-\infty, -1)$ ، $[0, 2]$ ؛ (ت) $[-1, 0]$ ، $[2, +\infty)$.

۳۵. (الف) و (ب) $f(-9) = -8$ ، مینیمم نسبی؛ $f(-4) = -5$ ، مینیمم نسبی؛
 $f(2) = -7$ ، مینیمم نسبی؛ $f(-7) = -4$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(0) = -3$ ،

ما کسیمم نسبی؛ (پ) $[-9, -7]$ ، $[-4, 0]$ ، $[2, +\infty)$ ؛ (ت) $(-\infty, -9]$ ،
 $[0, 2]$ ، $[-7, -4]$

۳۷. (الف) و (ب) اکترمم نسبی موجود نیست؛ (پ) $[0, +\infty)$ ؛ (ت) هیچ جا

۳۹. (الف) و (ب) $f(4) = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4}$ ، ما کسیمم نسبی؛ (پ) $(-4, 4]$ ؛ (ت) $(-\infty, -4]$ ،
 $[4, +\infty)$

۴۳. $b=7$ ، $a=-3$

۴۵. $d=7$ ، $c=-12$ ، $b=9$ ، $a=-2$

تمرینهای ۶.۴

۱. $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ ، مینیمم نسبی

۳. $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{4}$ ، ما کسیمم نسبی؛ $f(-1) = -11$ ، مینیمم نسبی

۵. $g(0) = 3$ ، ما کسیمم نسبی؛ $g(2) = \frac{5}{3}$ ، مینیمم نسبی

۷. $f(4) = 0$ ، مینیمم نسبی

۹. $h\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{99}{256}$ ، مینیمم نسبی؛ $h(0) = 0$ ، ما کسیمم نسبی؛ $h(1) = -\frac{5}{6}$ ،
 مینیمم نسبی

۱۱. F دارای مقدار مینیمم نسبی ۱- است وقتی $x = \frac{1}{3}(2k+1)\pi$ ، که k عدد

صحيح دلخواهی است، F دارای يك مقدار ما کسیمم نسبی ۱ است اگر $x = \frac{2}{3}k\pi$ ، که

در آن k عدد صحيح دلخواهی است.

۱۳. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ ، مینیمم نسبی

۱۵. $f(1) = 8$ ، مینیمم نسبی

۱۷. $h(-2) = -2$ ، مینیمم نسبی

۱۹. اکترمم نسبی ندارد.

۰.۲۱ $F(27) = 9$ ، ماکسیمم نسبی

۰.۲۳ $h(-1) = -2$ ، مینیمم نسبی ؛ $h(1) = 2$ ، ماکسیمم نسبی

۰.۲۵ $f(0) = 0$ ، مینیمم مطلق

۰.۲۷ اکسترمم مطلق ندارد.

۰.۲۹ $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$ ، مینیمم مطلق

۰.۳۱ اکسترمم مطلق ندارد.

۰.۳۳ $f(-2) = -13$ ، مینیمم مطلق

۰.۳۵ $g(-1) = -2$ ، ماکسیمم مطلق

۰.۳۷ $f(0) = 0$ ، مینیمم مطلق ؛ $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{18}\sqrt{3}$ ، ماکسیمم مطلق

۰.۳۹ f دارای يك مقدار مینیمم نسبی در $x = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ و ماکسیمم نسبی در $x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$ می باشد.

تمرینهای ۷.۴

۰.۱ 45×60 متر ۰.۳ عمق ، نصف طول قاعده است.

۰.۵ $2x - y + 1 = 0$ ۰.۷ $\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$

۰.۹ $30(\sqrt{10} + 1)$ فوت در $44(\sqrt{10} + 1)$ فوت

۰.۱۱ نسبت طول مستطیل به شعاع نیمدایره برابر است با $\frac{1}{4}(4 + \pi)$.

۰.۱۳ پهنا برابر با a سانتیمتر و عمق برابر با $\sqrt{3}a$ سانتیمتر است.

۰.۱۵ $10\sqrt{10}$ گره ۰.۱۷ $1\frac{11}{25}$ ثانیه

۰.۲۱ $2\sqrt{2}$ ۰.۱۹ $\sqrt{2}$

۰.۲۳ $\frac{4}{3}a$

تمرینهای ۸۰۴

۱. برای $x < 0$ ، تقعر رو به پایین ؛ برای $x > 0$ تقعر رو به بالا ؛ و $(0, 0)$ نقطه عطف است.

۳. برای $x < -\frac{1}{4}$ ، تقعر رو به پایین ؛ برای $x > -\frac{1}{4}$ تقعر رو به بالا ؛ و $(-\frac{1}{4}, 5)$ نقطه عطف است.

۵. در همه جا تقعر رو به بالاست.

۷. برای $x < -1$ و $0 < x < 1$ ، تقعر رو به پایین ؛ برای $0 < x < 1$ و $x > 1$ ، تقعر رو به بالاست ؛ و $(0, 0)$ نقطه عطف می باشد.

۹. برای $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$ ، $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$ ، و $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ ؛ تقعر رو به

پایین ؛ برای $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ ، $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ ، و $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ ، تقعر رو به بالاست ؛ و

$(-\frac{3}{4}\pi, 0)$ ، $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$ ، $(\frac{1}{4}\pi, 0)$ ، و $(\frac{3}{4}\pi, 0)$ نقاط عطف هستند.

۱۱. برای $x < 2$ ، تقعر رو به بالا ؛ برای $x > 2$ تقعر رو به پایین ، و $(2, 0)$ نقطه عطف است

۱۳. برای $x < 0$ ، تقعر رو به بالا ؛ برای $x > 0$ تقعر رو به پایین ؛ و $(0, 0)$ نقطه عطف است.

۱۵. برای $x < -4$ تقعر رو به بالا ؛ و برای $x > -4$ تقعر رو به پایین است.

۱۷. برای $x < \frac{24 - \sqrt{6}}{10}$ و $3 < x < \frac{24 + \sqrt{6}}{10}$ ، تقعر رو به پایین ؛ برای

$\frac{24 - \sqrt{6}}{10} < x < \frac{24 + \sqrt{6}}{10}$ و $x > 3$ ، تقعر رو به بالاست ؛ $(3, 0)$ نقطه

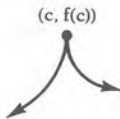
عطف است ؛ و نقطه عطف در $x = \frac{24 \pm \sqrt{6}}{10}$ می باشد.

۱۹. برای $2 < x < 8$ ، تقعر رو به بالا ؛ برای $x > 8$ تقعر رو به پایین ؛ و $(8, \frac{4}{3}\sqrt{6})$ نقطه عطف است.

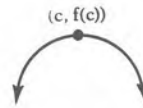
$$b = 3 , a = -1.31$$

$$d=3, c=0, b=-6, a=2.23$$

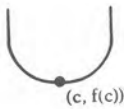
(نمودارهای تمرینهای ۲۵ تا ۳۹ در شکلهای تمرین ۲۵-۸.۴ تا ۳۹-۸.۴ نشان داده شده‌اند.)



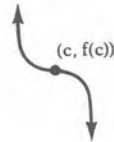
شکل تمرین ۲۷-۸.۴



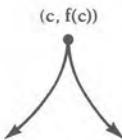
شکل تمرین ۲۵-۸.۴



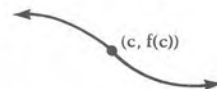
شکل تمرین ۳۱-۸.۴



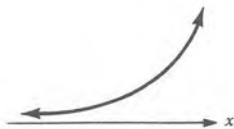
شکل تمرین ۲۹-۸.۴



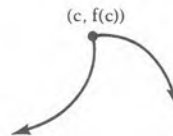
شکل تمرین ۳۵-۸.۴



شکل تمرین ۳۳-۸.۴



شکل تمرین ۳۹-۸.۴



شکل تمرین ۳۷-۸.۴

۴۳.۲۰:۱۰ دقیقه صبح

۴۱. بله

تمرینهای ۹.۴

(نمودارها در شکلهای تمرین ۱-۹.۴ تا ۴۳-۹.۴ نشان داده شده‌اند)

۱. $f(-1) = 5$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(1) = -3$ ، مینیمم نسبی؛ $(0, 1)$ نقطه عطف؛ f روی $(-\infty, -1]$ و $(1, +\infty)$ صعودی است؛ و f روی $[-1, 1]$ نزولی است؛ f تقعر نمودار برای $x < 0$ ، رو به پایین است؛ f تقعر نمودار برای $x > 0$ ، رو به بالاست.

۳. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{16}$ ، مینیمم نسبی؛ $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ ، نقاط عطف؛ f روی

$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ صعودی؛ f روی $(-\infty, \frac{3}{2}]$ نزولی؛ برای $x < 0$ و $x > 1$ f تقعر نمودار رو به بالاست؛ و برای $0 < x < 1$ f تقعر آن رو به پایین است.

۵. $f(-3) = 5$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{121}{27}$ ، مینیمم نسبی؛ $\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{27}\right)$

نقطه عطف؛ f روی $(-\infty, -3]$ و $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ صعودی؛ f روی

$\left[-3, -\frac{1}{3}\right]$ نزولی؛ برای $x < -\frac{5}{3}$ f تقعر نمودار رو به پایین؛ و برای $x > -\frac{5}{3}$ f تقعر نمودار رو به بالاست.

۷. $f(0) = 1$ ، مینیمم نسبی؛ $\left(\frac{1}{4}, \frac{23}{16}\right)$ و $(1, 2)$ نقاط عطف؛ f روی $(-\infty, 0]$

نزولی؛ f روی $(0, +\infty)$ صعودی؛ برای $x < \frac{1}{4}$ و $x > 1$ f تقعر نمودار رو به

بالاست؛ برای $\frac{1}{4} < x < 1$ f تقعر نمودار به طرف پایین است.

۹. $f(-1) = \frac{7}{12}$ ، مینیمم نسبی؛ $f(0) = 1$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(2) = -\frac{5}{3}$ ، مینیمم

نسبی؛ نقاط عطف در $x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$ است؛ f روی $(-\infty, -1)$ و $[0, 2]$

نزولی؛ f روی $[-1, 0]$ و $[2, +\infty)$ صعودی؛ نمودار برای $x < \frac{1}{3}(1 - \sqrt{7})$

و $x > \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$ f تقعرش رو به بالاست؛ و برای $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{7}) < x < \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$ f تقعر آن رو به پایین است.

۱۱. $f(0) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $(-\infty, 0]$ نزولی؛ f روی

$[0, +\infty)$ صعودی؛ در همه جا f تقعر به طرف بالاست.

۱۳. $f(0) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $(-\infty, 0]$ نزولی؛ f روی

$[0, +\infty)$ صعودی؛ در همه جا f تقعر نمودار رو به بالاست.

۱۵. اکستریم نسبی ندارد؛ $(0, 0)$ نقطه عطف بامماس افقی؛ f روی $(-\infty, +\infty)$ نزولی است؛ تفر نمودار روی $(-\infty, 0)$ روبه پایین؛ و روی $(0, +\infty)$ روبه بالاست.

۱۷. اکستریم نسبی ندارد؛ $(2, 0)$ نقطه عطف؛ f روی $(-\infty, +\infty)$ نزولی است؛ تفر نمودار برای $x < 2$ به طرف بالا، و برای $x > 2$ به طرف پایین است.

۱۹. $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{26244}{3125}$ ، ما کسیمم نسبی؛ $f(2) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ نقاط عطف در $(-1, 0)$

و $x = \frac{1}{10}(8 \pm 3\sqrt{6})$ ؛ f روی $(-\infty, \frac{4}{5}]$ و $[2, +\infty)$ صعودی؛ و f روی

$[\frac{4}{5}, 2]$ نزولی است، تفر نمودار برای $x < -1$ و

$\frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$ به طرف پایین، و برای

$x > \frac{1}{10}(8 + 3\sqrt{6})$ و $-1 < x < \frac{1}{10}(8 - 3\sqrt{6})$ به طرف بالاست.

۲۱. $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{256}{81}$ ، ما کسیمم نسبی؛ $f(0) = 0$ ، مینیمم نسبی، $(-1, 2)$ نقطه

عطف؛ f روی $(-\infty, -\frac{4}{3}]$ و $[0, +\infty)$ صعودی؛ و روی $[-\frac{4}{3}, 0]$

نزولی است؛ تفر نمودار برای $x < -1$ روبه پایین، و برای $x > -1$ روبه بالا است.

۲۳. $f\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -3$ ، مینیمم نسبی؛ $f(0) = 3$ ، ما کسیمم نسبی؛ $f\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 0$ ،

مینیمم نسبی؛ $\left(-\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ ، $\left(-\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ ، $\left(\frac{1}{4}\pi, 0\right)$ ، و $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$ نقاط عطف

هستند، f روی $[-\pi, -\frac{1}{4}\pi]$ و $[0, \frac{1}{4}\pi]$ نزولی است؛ f روی

$[-\frac{1}{4}\pi, 0]$ و $[\frac{1}{4}\pi, \pi]$ صعودی است؛ تفر نمودار برای $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$

و $-\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$ ، و $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ و $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{1}{4}\pi$ برای

$\frac{1}{4}\pi < x < \frac{3}{4}\pi$ روبه بالاست.

۲۵. اکسترم نسبی ندارد؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$ و $\left[\frac{1}{4}\pi, \pi\right]$

صعودی است؛ و تفرع نمودار برای $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ و $\frac{1}{4}\pi < x < \pi$ رو به پایین است.

۲۷. $f(0) = 0$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(2) = 4$ ، مینیمم نسبی؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $(-\infty, 0]$ و $[2, +\infty)$ صعودی است؛ f روی $[0, 1]$ و $[1, 2]$ نزولی است؛

تفرع نمودار برای $x < 1$ به طرف پایین، و برای $x > 1$ رو به بالا است.

۲۹. $f(0) = -1$ ، ماکسیمم نسبی؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $(-\infty, -1)$ و $(-1, 0]$ صعودی، و روی $[0, 1]$ و $(1, +\infty)$ نزولی است؛ تفرع نمودار برای

$x < -1$ و $x > 1$ رو به بالا، و برای $-1 < x < 1$ رو به پایین است.

۳۱. $f(-1) = -1$ ، مینیمم نسبی؛ $f(1) = 1$ ، ماکسیمم نسبی؛ و

$\left(-\infty, -1\right)$ و $\left(-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$ نقاط عطف هستند؛ f روی $(-\infty, -1]$

و $[1, +\infty)$ نزولی، و روی $[-1, 1]$ صعودی است، تفرع نمودار برای

$x < -\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3} < x < 0$ رو به پایین؛ و برای $0 < x < \sqrt{3}$ و $x > \sqrt{3}$ رو به بالا است.

۳۳. $f(0) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ $f(1) = 1$ ، ماکسیمم نسبی؛ f روی $(-\infty, 0)$ و

$[1, +\infty)$ نزولی، و روی $(0, 1]$ صعودی است؛ تفرع نمودار برای $x < 0$ و

$x > 0$ رو به پایین است.

۳۵. $f(1) = -1$ ، مینیمم نسبی؛ f روی $(-\infty, 1]$ نزولی؛ و روی $[1, +\infty)$

صعودی است؛ برای تمام x ها تفرع نمودار رو به بالاست.

۳۷. اکسترم نسبی ندارد؛ $(3, 2)$ نقطه عطف؛ و f روی $(-\infty, +\infty)$ صعودی

است؛ تفرع نمودار برای $x > 3$ رو به پایین، و برای $x < 3$ رو به بالاست.

۳۹. اکسترم نسبی ندارد، $(3, 2)$ نقطه عطف می باشد؛ مماس افقی؛ f روی

$(-\infty, +\infty)$ نزولی است؛ تفرع نمودار برای $x < 3$ رو به پایین؛ و برای $x > 3$

رو به بالاست.

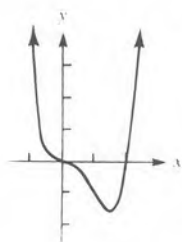
۴۱. $f(0) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ $f\left(\frac{16}{5}\right) = \frac{512}{125}\sqrt{5}$ ، ماکسیمم نسبی؛ نقطه عطف در

$x = \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$ است؛ f روی $(-\infty, 0]$ و $\left[\frac{16}{5}, 4\right]$ نزولی؛ و روی

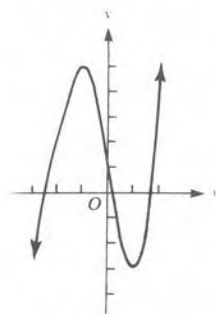
$\left[0, \frac{16}{5}\right]$ صعودی است؛ تفرع نمودار برای $x < \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$ رو به بالا و

برای $4 < x < \frac{1}{15}(48 - 8\sqrt{6})$ رو به پایین است.

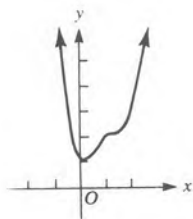
۴۳. $f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}\sqrt{6}$ ، ماکسیم نسبی؛ f روی $(-\infty, \frac{2}{3}]$ صعودی؛ f روی $[\frac{2}{3}, 0]$ نزولی؛ و مقعر نمودار برای $x < 0$ رو به پایین است.



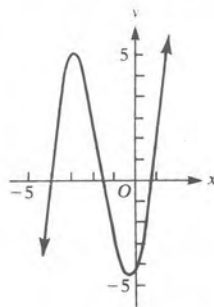
شکل تمرین ۳-۹۰۴



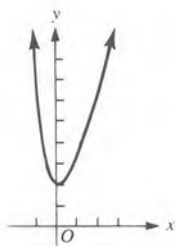
شکل تمرین ۱-۹۰۴



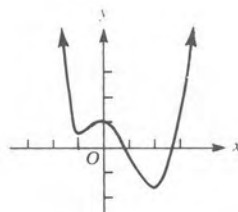
شکل تمرین ۷-۹۰۴



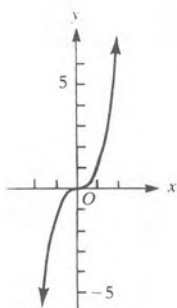
شکل تمرین ۵-۹۰۴



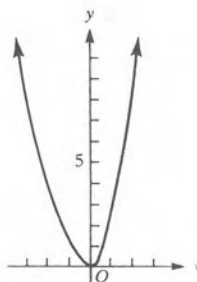
شکل تمرین ۱۱-۹۰۴



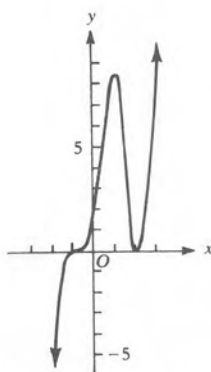
شکل تمرین ۹-۹۰۴



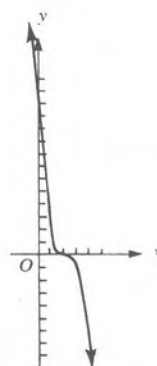
شکل تمرین ۹.۴-۱۵



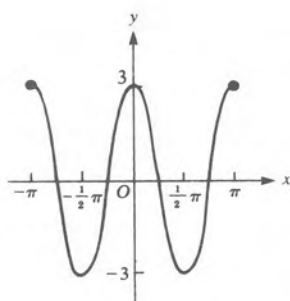
شکل تمرین ۹.۴-۱۳



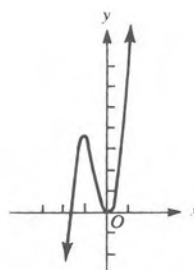
شکل تمرین ۹.۴-۱۹



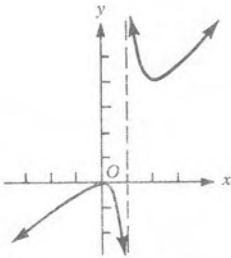
شکل تمرین ۹.۴-۱۷



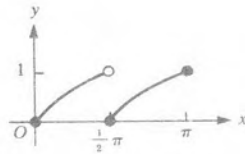
شکل تمرین ۹.۴-۲۳



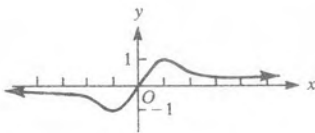
شکل تمرین ۹.۴-۲۱



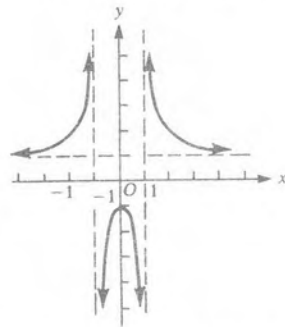
شکل تمرین ۲۷-۹.۴



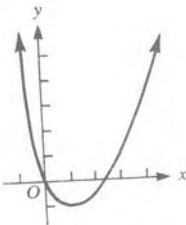
شکل تمرین ۲۵-۹.۴



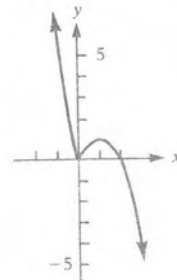
شکل تمرین ۳۱-۹.۴



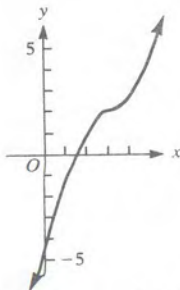
شکل تمرین ۲۹-۹.۴



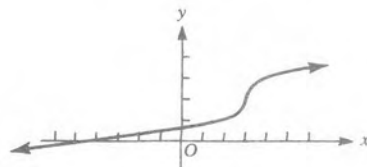
شکل تمرین ۳۵-۹.۴



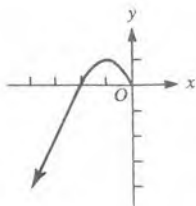
شکل تمرین ۳۳-۹.۴



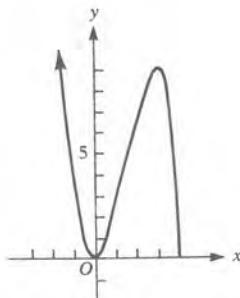
شکل تمرین ۳۹-۹.۴



شکل تمرین ۳۷-۹.۴



شکل تمرین ۴۳-۹.۴



شکل تمرین ۴۱-۹.۴

تمرینهای ۱۰.۴

۱. الف) $c'(x) = 3 + 2x$ ؛ (ب) ۸۳ دلار؛ (پ) ۸۴ دلار

۳. الف) ۵۰ سنت درلیتر؛ (ب) ۲۵

۵. الف) $Q(x) = x + 4 + \frac{A}{x}$ ؛ (ب) $c'(x) = 2x + 4$ ؛ (پ) ۹۶۶ دلار

۷. الف) $Q(x) = 3x - 6 + \frac{4}{x}$ ؛ (ب) $c'(x) = 6x - 6$ ؛ (پ) $(1, +\infty)$ ؛ (ت)

۹۳۰ دلار

۹. الف) $[2, +\infty)$ ؛ (ب) $c'(x) = x^2 - 4x + 5$ ؛ (پ) روی $[0, 2]$ نزولی

و روی $[2, +\infty)$ صعودی است؛ (ت) تقعر نمودار برای $0 < x < 2$ رو به

پایین، و برای $x > 2$ رو به بالا است، نقطه عطف در $(2, \frac{20}{3})$ ، و مماس عطفی

$$3x - 3y + 14 = 0 \text{ است.}$$

۱۱. الف) $C(x) = 3x + 400$ ؛ (ب) $Q(x) = 3 + \frac{400}{x}$ ؛ (پ) $C'(x) = 3$ ؛ (ث)

۹۵۳

۱۳. الف) $R'(x) = 600 - \frac{3}{40}x^2$ ؛ (ب) ۵۴۰ دلار، (پ) ۵۳۶۹۵ دلار

۱۵. الف) $R(x) = 1000x\sqrt{36 - x^2}$ ؛ (ب) $R'(x) = \frac{3600 - 200x^2}{\sqrt{36 - x^2}}$

(پ) ۱۸۰۰ دلار

۱۷. ۸۰، ۳۴۰۰ دلار

۱۹. (الف) $P(x) = -2x^2 + 120x - 300$ ؛ (ب) $R'(x) = 140 - 2x$ ؛
 (ت) $C'(x) = 2x + 20$ ؛

۲۱. (الف) $C'(x) = 2$ ؛ $R'(x) = 6 - \frac{1}{5}\sqrt{x-100} - \frac{x}{10\sqrt{x-100}}$ ؛
 یا ۱۰۰

۲۳. (الف) ۱۸۷۵ ؛ (ب) ۶۲۵ سنت ؛ (پ) ۵۰۳۱۲ دلار

۲۵. (الف) ۱۸۱۲ ؛ (ب) ۶۳۸ سنت ؛ (پ) ۳۹۷۳۰ دلار

۲۷. (الف) ۸۶۷ دلار ؛ (ب) ۹۱۸ دلار

تمرینهای مروری فصل ۴

۱. ماکسیمم مطلق: $f(-5) = 0$

۳. مینیمم مطلق: $f(1) = -\frac{1}{4}$ ؛ ماکسیمم مطلق: $f(2) = 64$

۵. مینیمم مطلق: $f(3) = 0$ ؛ ماکسیمم مطلق: $f(0) = 9$

۷. مینیمم مطلق: $f(\sqrt{6}) = 0$ ؛ ماکسیمم مطلق: $f(5) = 361$

۹. مینیمم مطلق: $f(-\frac{1}{6}\pi) = -2$ ؛ ماکسیمم مطلق: $f(\frac{1}{6}\pi) = 2$

۱۱. $f(-2) = 0$ ، ماکسیمم نسبی: $f(0) = -4$ ، مینیمم نسبی: نقطه عطف

$(-1, -2)$ ؛ f روی $(-\infty, -2)$ و $[0, +\infty)$ صعودی؛ و روی $[-2, 0]$

نزولی است؛ تقعر نمودار برای $x < -1$ روبه پایین، و برای $x > -1$ روبه بالا است.

۱۳. $f(\frac{8}{5}) = \frac{839808}{3125}$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(4) = 0$ ، مینیمم نسبی؛ نقاط عطف در

$x = -2$ و $x = \pm \frac{1}{5}(8 \pm 3\sqrt{6})$ می باشند. f روی $(-\infty, \frac{8}{5}]$ و

$[4, +\infty)$ صعودی؛ و روی $[\frac{8}{5}, 4]$ نزولی است؛ تقعر نمودار برای

$-\frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6}) < x < +\infty$ و $-\frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6}) < x < +\infty$ روبه بالا؛ و

برای $-\infty < x < -2$ و $-\frac{1}{5}(8 - 3\sqrt{6}) < x < \frac{1}{5}(8 + 3\sqrt{6})$ روبه پایین

است.

۱۵. اکسترمم نسبی ندارد؛ نقطه عطف در $x = 3$ است؛ f روی $(-\infty, +\infty)$ صعودی

پاسخ تمرینهای با شماره فرد ۹۱۵

است؛ تقعر نمودار برای $+\infty < x < 3$ روبه بالا؛ و برای $-\infty < x < 3$ روبه پایین است.

۱۷. $f(0) = 0$ ، ماکسیمم نسبی؛ $f(6) = 12$ ، مینیمم نسبی؛ نقطه عطف ندارد؛ f روی $(-\infty, 0]$ و $[6, +\infty)$ صعودی؛ و روی $(0, 3)$ و $[3, 6]$ نزولی است؛ تقعر نمودار برای $x < 3$ روبه پایین؛ و برای $x > 3$ روبه بالا است.

۱۹. $f(-\frac{1}{8}\pi) = -\sqrt{2}$ ، مینیمم نسبی، $f(\frac{3}{8}\pi) = \sqrt{2}$ ، ماکسیمم نسبی؛

نقطه عطف، f روی $[-\frac{3}{8}\pi, -\frac{1}{8}\pi]$ و $[\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi]$ نزولی،

و روی $[-\frac{1}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi]$ صعودی است؛ تقعر نمودار برای $-\frac{3}{8}\pi < x < \frac{1}{8}\pi$

رو به بالا، و برای $\frac{1}{8}\pi < x < \frac{5}{8}\pi$ رو به پایین است.

$$\frac{1}{4}\sqrt{17} \cdot 23$$

۶، ۶، ۲۱

۲۷. $\frac{3}{4}$ ثانیه؛ سرعت ذره‌ای که به طور افقی در حرکت است برابر با ۱ سانتیمتر در ثانیه

است؛ و سرعت ذره‌ای که به طور عمودی در حرکت است برابر با ۳ سانتیمتر در ثانیه است.

۲۹. ۱۰۰۶ گره

$$\frac{512}{625\pi} \approx 0.26 \text{ اینچ در ثانیه}$$

$$-\frac{13}{4} \cdot 35$$

$$\frac{1}{3}(1 - \sqrt{13}) \cdot 33$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cdot 41$$

۴۳. نقطه عطف در $(0, 2)$ ؛ تقعر نمودار برای $x < 0$ رو به پایین؛ و برای $x > 0$ رو به بالاست.

$$c = 3, b = -6, a = 2 \cdot 45$$

۵۱. در ۱۲ کیلومتری نزدیکترین نقطه ساحل به A

۵۳. $(h^{2/3} + w^{2/3})^{3/2}$ متر

۵۵. شعاع برابر $\frac{3}{4}$ سانتیمتر و ارتفاع برابر $3h$ سانتیمتر است.

۵۷. ۹ متر در ۱۸ متر ۵۹. سیم بایستی از وسط نصف گردد.

۶۱. (الف) با آهنگ ۱۰۴۰۰ دلار در سال افزایش می‌یابد؛ (ب) با آهنگ ۸۰۰ دلار در سال افزایش می‌یابد.

۶۳. (الف) $P(x) = \frac{36 - 2x}{x + 3}$ ؛ (ب) $R(x) = \frac{3600x - 400x^2}{x + 3}$

(ب) $R'(x) = -\frac{400(x+9)(x-3)}{(x+3)^2}$ ؛ (ت) ۱۲۰۰ دلار

۶۵. ۱۰۰۰، ۱۱ دلار

تمرینهای ۱۰۵

۳. (الف) $(\Delta x)^2$ ؛ (ب) $2x\Delta x$ ؛ (ج) $2x\Delta x + (\Delta x)^2$

۵. (الف) $(-3-4x)\Delta x - 2(\Delta x)^2$ ؛ (ب) $(-3-4x)\Delta x$ ؛ (ج) $-2(\Delta x)^2$

۷. (الف) $\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$ ؛ (ب) $\frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ ؛ (ج) $-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})^2}{2\sqrt{x}}$

۹. (الف) $\frac{-2\Delta x}{(x-1)(x+\Delta x-1)}$ ؛ (ب) $\frac{-2\Delta x}{(x-1)^2}$

(ب) $\frac{2(\Delta x)^2}{(x-1)^2(x+\Delta x-1)}$

۱۱. (الف) ۰٫۰۳۰۹؛ (ب) ۰٫۰۳؛ (ج) ۰٫۰۰۰۹

۱۳. (الف) $\frac{1}{42} \approx ۰٫۰۲۳۸$ ؛ (ب) $\frac{1}{40} = ۰٫۰۲۵$ ؛ (ج) $\frac{1}{40} \approx -۰٫۰۲۰۰۱۲$

۱۵. (الف) ۰٫۰۸۷۵؛ (ب) ۰٫۱۵؛ (ج) ۰٫۰۶۲۵

۱۷. $3(3x^2 - 2x + 1)^2(6x - 2)dx$

۲۱. $\frac{(1 - 2\sin x + 2\cos x)dx}{(2 - \sin x)^2}$

۱۹. $\frac{(14x^2 + 18x)dx}{3(2x+3)^{2/3}}$

$$-\frac{3x}{4y} \cdot 25$$

$$1.29$$

$$\frac{dx}{(x+1)^{3/2}(x-1)^{1/2}} \cdot 22$$

$$\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot 27$$

$$18t^5 - 56t^3 + 38t \cdot 31$$

$$6t^5 - 4t^3 - 2t - 9t(t^2+1)^{1/2} + 6t(t^2+1)^{-1/2} \cdot 33$$

$$\frac{8t(16t^4 - 8t^2y + 8t^2 - 2y + 1)}{16t^4 + 8t^2 - y^2 + 1} \cdot 35$$

$$\frac{9}{4y} (ب) ; \frac{3}{4t} (ب) ; dy = 3dt, dx = 4tdt \cdot 37 \text{ (الف)}$$

$$-\frac{9x}{4y} (ب) ; -\frac{3\cos t}{2\sin t} (ب) ; dy = 3\cos t dt, dx = -2\sin t dt \cdot 39 \text{ (الف)}$$

$$33009.43$$

$$-0.849.47$$

$$49. (الف) 75 \text{ سانتیمتر مکعب، (ب) } 30 \text{ سانتیمتر مربع}$$

$$51. \frac{12}{5}\pi \text{ متر مکعب} \quad 53. 10 \text{ فوت مکعب} \quad 55. 4\%$$

تمرینهای ۲.۵

$$3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + c \cdot 3$$

$$\frac{2}{5}x^5 + c \cdot 1$$

$$\frac{5}{8}x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + c \cdot 5$$

$$\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^2 + c \cdot 9$$

$$\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + c \cdot 7$$

$$\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{8}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2} + c \cdot 13$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 5x + c \cdot 11$$

$$-\frac{1}{6}(1-4y)^{3/2} + c \cdot 17$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{2x} + \sqrt{2x} + c \cdot 15$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3}(x^2-9)^{3/2} + C. ۲۱ & -\frac{3}{8}(6-2x)^{4/3} + C. ۱۹ \\
 & -\frac{3}{8}(9-2x^2)^{5/2} + C. ۲۵ & \frac{2}{9}(x^2-1)^{3/2} + C. ۲۳ \\
 & \frac{1}{3}\sqrt{3s^2+1} + C. ۲۹ & \frac{1}{32(1-2y^4)^4} + C. ۲۷ \\
 & -2\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3/2} + C. ۳۳ & \frac{2}{3}(t+3)^{3/2} - 6(t+3)^{1/2} + C. ۳۱ \\
 & -\frac{2}{5}(3-x)^{5/2} + \frac{12}{5}(3-x)^{3/2} - 6(3-x)^{1/2} + C. ۳۵ \\
 & & \frac{2}{3}\sqrt{x^2+3x^2+1} + C. ۳۷ \\
 & & -\frac{1}{4(3x^4+2x^2+1)} + C. ۳۹ \\
 & & \frac{3}{4}(3-y)^{4/3} - 18(3-y)^{1/3} + C. ۴۱ \\
 & & \frac{3}{5}(r^{1/2}+2)^5 + C. ۴۳ \\
 & & \sqrt{x^2+4} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} + C. ۴۵ \\
 & \frac{1}{8}(2x+1)^4 + C \text{ (ب)} ; 2x^4 + 4x^2 + 3x^2 + x + C \text{ (الف)}. ۴۷ \\
 & \frac{2}{3}(\sqrt{x}-1)^2 + C \text{ (ب)} ; \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x + 2x^{1/2} + C \text{ (الف)}. ۴۹ \\
 & ۵۱. g \text{ روی } (-1, 1) \text{ مشتق پذیر نیست.}
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۳.۵

$$\begin{aligned}
 & ۸ \sin \frac{1}{2}x + C. ۳ & -\frac{1}{4} \cos 4x + C. ۱ \\
 & \frac{1}{4}(2 + \sin x)^4 + C. ۷ & -3 \cos t + \frac{1}{3} \sin^3 t + C. ۵
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{3}\sqrt{1-2\sin^2 x}+C. ۱۱$$

$$-\frac{2}{y}(1+\cos x)^{4/3}+C. ۹$$

$$-\frac{1}{3}\cos^3 t+C. ۱۵$$

$$\cos(\cos x)+C. ۱۳$$

$$\frac{3}{8}z-\frac{1}{4}\sin^2 z+\frac{1}{32}\sin^4 z+C. ۱۹$$

$$\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C. ۱۷$$

$$\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C. ۲۳$$

$$\frac{1}{y}x+\frac{1}{y}\sin x+C. ۲۱$$

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+C. ۲۵$$

$$\frac{1}{8}t-\frac{1}{96}\sin^4 2t+C. ۲۷$$

$$\frac{1}{y}\sin^{2/3} x-\frac{1}{8}\sin^{4/3} x+C. ۲۹$$

$$\frac{1}{14}\sin^7 x+\frac{1}{y}\sin x+C. ۳۱$$

$$-\frac{1}{16}\cos^8 y+\frac{1}{4}\cos^2 y+C. ۳۳$$

$$t-\sin t-\frac{1}{8}\sin^4 t+\frac{1}{5}\sin^5 t-\frac{1}{12}\sin^6 t+C. ۳۵$$

$$-\frac{1}{y}\cos^2 x+C \text{ (ب)} ; -\cos^2 x+C \text{ (ب)} ; \sin^2 x+C \text{ (الف)}. ۳۷$$

تمرینهای ۴.۵

$$y=x^3+x^5-7x+C. ۳$$

$$y=2x^5-5x+C. ۱$$

$$y=-\frac{3}{y}\cos^2 x+C. ۷$$

$$u=2v+\frac{3}{v}+C. ۵$$

$$2\sqrt{1+y^2}=3x^5+C. ۱۱$$

$$3x^5 y+C y+2=0. ۹$$

$$12y=5x^4+6x^5+C_1 x+C_2. ۱۵$$

$$2y-\sin^2 y=4\sin x+C. ۱۳$$

$$u = \frac{4}{135} (3v+1)^{5/2} + C_1 v + C_2 \cdot 17$$

$$3y = -6 \sin x - \sin^2 x + 2 \cos x + C_1 x + C_2 \cdot 19$$

$$3y = x^2 - 3x^2 - 12x + 18 \cdot 21$$

$$x^2 = 4y^2 \cdot 22$$

$$4 \sin^3 x + 6 \cos^2 y + 7 = 0 \cdot 25$$

$$12y = x^4 + 6x^2 - 10x + 27 \cdot 27$$

$$u = 3v^4 + 4v^2 + 2v^5 + 2v \cdot 29$$

$$y = x^2 - 3x + 2 \cdot 31$$

$$3y = -2x^2 + 3x^2 + 2x + 6 \cdot 33$$

$$12y = -x^4 + 6x^2 - 20x + 27 \cdot 35$$

$$117\pi \cdot 39 \text{ مترمکعب}$$

$$325 \text{ دلار}$$

$$x^2 + 2y^2 = C \cdot 41$$

تمرینهای ۵.۵

$$v = \frac{1}{3} (2t+2)^{3/2} - \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$s = 2t + \frac{5}{2} t^2 - \frac{1}{3} t^3, v = 2 + 5t - t^2 \cdot 3$$

$$s = \frac{1}{12} t^4 + \frac{1}{3} t^2 - 4t + 1, v = \frac{1}{3} t^3 + t^2 - 4 \cdot 5$$

$$s = \sqrt{2} \cos \left(2t - \frac{1}{4} \pi \right), v = -2\sqrt{2} \sin \left(2t - \frac{1}{4} \pi \right) \cdot 7$$

$$1600s = v^2 + 1200 \cdot 9$$

$$5s^2 + 4s = v^2 + 12 \cdot 11$$

۱۳. (الف) $\frac{5}{4}$ ثانیه ؛ (ب) ۲۰ فوت در ثانیه ؛ (پ) $\frac{5}{8}$ ثانیه ؛ (ت) $\frac{25}{4}$ فوت

۱۵. (الف) $\frac{1}{4}\sqrt{555}$ ثانیه ؛ (ب) $8\sqrt{555}$ فوت در ثانیه

۱۷. (الف) ۳٫۴ ثانیه ؛ (ب) ۹۹ فوت در ثانیه

۱۹. (الف) $v^2 = -64s + 1600$ ؛ (ب) ۲۴ فوت در ثانیه

۲۱. ۱٫۶۲ متر بر مجذور ثانیه

۲۳. (الف) ۳٫۴۷ ثانیه ؛ (ب) ۴۸٫۲۲ متر

۲۵. ۲۰ متر در ثانیه یا ۷۲ کیلومتر در ساعت

۲۷. (الف) ۳ متر در ثانیه ؛ (ب) ۹ متر در ثانیه ؛ (پ) ۲ ثانیه

تمرینهای ۶.۵

۱. (الف) $R(x) = 12x - \frac{3}{4}x^2$ ؛ (ب) $p = 12 - \frac{3}{4}x$

۳. $C(x) = x^2 + x + 6$

۵. $C(x) = \frac{6}{5}\sqrt{5x+4} + \frac{38}{5}$

۷. $p(x+5) = 4x + 22$

۹. $C(x) = 3x^2 - 17x + 47$

۱۱. (الف) $R(x) = 16x - x^2$ ؛ (ب) $p = 16 - x^2$

۱۳. $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 6$

۱۵. ۳۳۷۵ دلار

۱۷. (الف) ۲٫۵ دلار ؛ (ب) ۳ دلار

۱۹. ۵ دلار

۲۱. ۳٫۲۵ میلیون دلار

تمرینهای مروری فصل ۵

۱. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 3x + C$

۳. $2y^2 + 4y^{3/2} + C$

$$-\frac{1}{3}\cos^3 x + C \quad .۷ \qquad -\frac{1}{3}\cos^3 t + C \quad .۵$$

$$\frac{5}{9}(2+3x^2)^{3/2} + C \quad .۱۱ \qquad -\frac{2}{3x^2} + \frac{5}{x} + C \quad .۹$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x^2} + C \quad .۱۵ \qquad \frac{2}{3}x\sqrt{3x} + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + C \quad .۱۳$$

$$\frac{1}{6}(2s+3)^{3/2} - \frac{2}{3}(2s+3)^{1/2} + C \quad .۱۷$$

$$\frac{3}{8}t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{16}\sin 2t + C \quad .۱۹$$

$$\frac{1}{16}\cos^4 2x - \frac{1}{12}\cos^2 2x + C \quad .۲۱$$

$$\frac{1}{420}(2x+3)^{3/2}(30x^2-18x+79) + C \quad .۲۳$$

$$\frac{1}{2}(y^2-1)^{-1} = x^{-1} + C \quad .۲۵$$

$$y + y^{-1} = -x + C \quad .۲۷$$

$$y = \frac{1}{15}(2x-1)^{5/2} + C_1 x + C_2 \quad .۲۹$$

$$-۰.۰۶۴ \quad (ب) \quad -۰.۰۱۶ \quad (الف) \quad .۳۱$$

$$۲\pi \quad .۳۵ \quad \text{اینج مکعب} \qquad ۰.۴۱۲۵ \quad .۳۳$$

$$x^4 - 24x^2 + 36x + 12y - 1 = 0 \quad .۳۷$$

$$۰ \quad .۳۹$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{2y - 24x^2}{81y^2 - 4x} \right) \left(\frac{3t^2 + 2tx}{3x^2 - t^2} \right) \quad .۴۱$$

$$\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^2 + C \quad (ب) \quad ; \quad \frac{1}{9}(x^2+1)^2 + C \quad (الف) \quad .۴۳$$

$$y = \frac{4}{15}(x+4)^{5/2} + \frac{1}{3}(6-32\sqrt{2})x - \frac{1}{15}(75-128\sqrt{2}) \quad .۴۵$$

$$s = -\frac{3}{4}\cos 2t + 3t + \frac{1}{4}(\delta - 3\pi), \quad v = 3\sin 2t + 3. \quad ۴۷$$

$$\frac{25\sqrt{817} - 625}{8} \approx 1172.49 \text{ ثانیه}$$

$$۵۱. \text{ (الف) } 1 \text{ ثانیه؛ (ب) } 80 - \text{ فوت در ثانیه}$$

$$۵۳. 4738 \text{ واحد}$$

$$۵۵. \text{ خطای مجاز } \frac{5}{24} \text{ اینچ است.}$$

$$۵۷. \text{ خطا تقریباً } \frac{\pi^2}{16104} \text{ ثانیه است}$$

$$C(x) = \frac{8}{3}\sqrt{3x+1} + \frac{28}{3}. \quad ۶۱$$

تمرینهای ۱.۶

$$۵. \frac{63}{4}$$

$$۳. \frac{73}{12}$$

$$۱. 51$$

$$۱۵. 10(10^n - 1)$$

$$۱۳. 10400$$

$$۷. \frac{7}{12}$$

$$۲۱. \frac{8}{3} \text{ واحد مربع} \quad ۱۹. n^4 - \frac{2}{3}n^3 - 3n^2 - \frac{4}{3}n$$

$$۱۷. \frac{100}{101}$$

$$۲۷. 9 \text{ واحد مربع}$$

$$۲۵. \frac{5}{3} \text{ واحد مربع}$$

$$۲۳. 15 \text{ واحد مربع}$$

$$۳۳. \frac{27}{4} \text{ واحد مربع}$$

$$۳۱. \frac{17}{4} \text{ واحد مربع}$$

$$۲۹. \frac{3}{5} \text{ واحد مربع}$$

$$۳۷. \frac{1}{4}h(b_1 + b_2) \text{ واحد مربع}$$

$$۳۵. \frac{1}{4}m(b^2 - a^2) \text{ واحد مربع}$$

تمرینهای ۲.۶

$$۷. \frac{1}{24}(10 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3})\pi$$

$$۵. 835$$

$$۳. \frac{1469}{1320}$$

$$۱. \frac{247}{32}$$

$$۱۵. 66$$

$$۱۳. \frac{15}{4}$$

$$۱۱. \frac{8}{3}$$

$$۹. 9$$

۴۰.۱۷	۱۹.۲۰ واحد مربع	۲۱.۴۴ واحد مربع
۲۳.۵۳	۲۵.۳۰۵ واحد مربع	۲۷.۳۱ واحد مربع
۲۹.۴۲	۳۱.۱	

تمرینهای ۳.۶

۱۲.۰۱	۳.۲/۵	۰.۵-۵
۱۵.۰۷	۰.۹	۰.۱۱-۲۱
۱۳.۳-۲	۱۵.۴+π	۱۷.۳۳π
۱۹.۲۴, ۵۶	۲۱.۰, ۶۴	۲۳.۰, ۲۷
۲۵.۰, ۵۷۶	۲۷. [1/12 π, 1/12 √3 π]	۲۹.۰, ۶
۳۱. [-۳, ۳/۲]	۳۳. [-۵π, ۰]	۳۵. ≥
۳۷. ≤		

تمرینهای ۴.۶

۰.۱	۳. 1/3 √30
۰.۵	۰.۷

۱۷. در $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ مقدار متوسط برابر با $\frac{1}{\sqrt{2}}$ است.

۱۹. ۲/π	۲۱. ۳۲؛ v=۳۲۲
۲۳. π	

تمرینهای ۵.۶

$$\begin{array}{llll}
 ۱. \quad ۱۲ & ۳. \quad ۳۶ & ۵. \quad \frac{۳}{۲} & ۷. \quad \frac{۳}{۱۶} \\
 ۹. \quad \frac{۱۳۴}{۳} & ۱۱. \quad -۸ & ۱۳. \quad ۱ & ۱۵. \quad \frac{۲}{۹}(۲۷ - ۲\sqrt{۲}) \\
 ۱۷. \quad ۲ - \sqrt{۲} & ۱۹. \quad \frac{۱۰۴}{۵} & ۲۱. \quad \frac{۲۹}{۲} & ۲۳. \quad \frac{۲}{۳}\sqrt{۲} \\
 ۲۵. \quad \frac{۲۵۶}{۱۵} & ۲۷. \quad \frac{۵}{۶} & ۲۹. \quad \frac{۶۲۱۵}{۱۲} & ۳۱. \quad \frac{۱۱}{۶} \\
 ۳۳. \quad \frac{۱}{۸} & ۳۵. \quad \frac{۴۷}{۴۸۰} & ۳۷. \quad \sqrt{۲+x^۶} & ۳۹. \quad -\sqrt{\sin x} \\
 ۴۱. \quad \frac{۲}{۳+x^۲} & ۴۳. \quad \frac{۳۲}{۳} \text{ واحد مربع} & ۴۵. \quad \frac{۲۲}{۳} \text{ واحد مربع} & ۴۷. \quad \frac{۵۲}{۳} \text{ واحد مربع} \\
 & & & ۴۹. \quad ۲
 \end{array}$$

۵۱. در $x = \frac{۴}{۳}(۳ - \sqrt{۳})$ ، مقدار متوسط برابر $\frac{۳۲}{۳}$ است.

$$\begin{array}{lll}
 ۵۳. \quad \frac{۴۲۳۰۴}{۱۷۵} & ۵۵. \quad \frac{۴}{\pi} & ۵۹. \quad \frac{۱۸۸}{۳}
 \end{array}$$

تمرینهای ۶.۶

$$\begin{array}{ll}
 ۱. \quad \text{تقریبی: } ۴۲۵۰ ; \text{ دقیق: } ۴ & ۳. \quad ۰.۶۹۶ \\
 ۵. \quad \text{تقریبی: } ۰ ; \text{ دقیق: } ۰ & ۷. \quad ۰.۸۸۰ \\
 ۹. \quad ۰.۲۴۸ & ۱۱. \quad ۳۶۸۹ \\
 ۱۳. \quad -۰.۵ \leq \varepsilon_T \leq ۰ & ۱۵. \quad -۰.۰۰۰۷ \leq \varepsilon_T \leq -۰.۰۰۰۱ \\
 ۱۷. \quad ۰ \leq \varepsilon_T \leq ۰.۰۷۲ & ۱۹. \quad \text{(الف) } ۴ ; \text{ (ب) } ۴ \\
 ۲۱. \quad ۰.۶۹۳ & ۲۳. \quad ۰.۶۰۴۵ \\
 ۲۵. \quad ۰ & ۲۷. \quad -۰.۰۰۰۰۵ \leq \varepsilon_s \leq ۰ \\
 ۲۹. \quad ۰.۲۳۷ & ۳۱. \quad ۱.۵۶۸
 \end{array}$$

۹۲۶ پاسخ تمرینهای باشماره فرد

۳۵. ۳۰۹۰

۳۳. ۱۳۴۰۲

۳۹. (الف) ۲۲۲ ؛ (ب) ۲۲۲

۳۷. (الف) ۵۶ ؛ (ب) ۵۶

تمرینهای مروری فصل ۶

۵. ۰

۳. $-\frac{27}{4}$

۱. ۶

۱۱. $\frac{2}{27}(20\sqrt{10} + \frac{64}{5})$

۷. $\frac{2}{3}(\sqrt{14} - \sqrt{2})$ ۹. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$

۱۷. $\frac{1}{2}$

۱۵. $\frac{313}{2}$

۱۳. $\frac{652}{15}$

۲۷. $[3\sqrt{5}, 9]$

۲۱. ۴۱۰۰۶۵۶۵۶۰

۱۹. $\sqrt{3} ; 12$

۳۳. ۱۸ واحد مربع

۳۱. $-(3x^2 - 4)^{3/2}$

۲۹. $[0, \pi]$

۳۷. $\frac{1}{3}(40\sqrt{5} - 20)$ واحد مربع

۳۵. $\frac{224}{3}$ واحد مربع

۴۱. $\frac{42302}{175}$

۳۹. ۰

۴۷. ۱۶۲۴

۴۵. ۱۱۹۷ دلار

۵۱. $\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi$

۴۹. ۱۵۶۳

۵۳. (الف) $\frac{1}{r}$ ؛ (ب) ۰

تمرینهای ۱۰۷

۵. $\frac{1}{6}$ واحد مربع

۳. $\frac{32}{3}$ واحد مربع

۱. $\frac{32}{3}$ واحد مربع

۱۱. $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ واحد مربع

۹. $\frac{9}{2}$ واحد مربع

۷. $\frac{12}{5}$ واحد مربع

۱۷. $\frac{64}{3}$ واحد مربع

۱۵. $\frac{27}{10}$ واحد مربع

۱۳. $\frac{5}{12}$ واحد مربع

باسخ تمرینهای با شماره فرد ۹۲۷

$$\begin{array}{lll}
 ۱۹. \frac{۲۵۳}{۱۲} \text{ واحد مربع} & ۲۱. \frac{۳۷}{۱۲} \text{ واحد مربع} & ۲۳. (۱ - \sqrt{۲}) \text{ واحد مربع} \\
 ۲۵. \frac{۷}{۳} \text{ واحد مربع} & ۲۷. ۱۲ \text{ واحد مربع} & ۲۹. \frac{۱۲۸}{۵} \text{ واحد مربع} \\
 ۳۱. ۶۲ \text{ واحد مربع} & ۳۳. \left(\frac{\pi}{۲} - ۱\right) \text{ واحد مربع} & ۳۵. \frac{۱۶}{۳} p^2 \text{ واحد مربع} \\
 ۳۷. ۳۲ & ۳۹. -\frac{۸}{m^4} & ۴۱. \frac{۳}{۲} K
 \end{array}$$

تمرینهای ۲۰۷

$$\begin{array}{lll}
 ۱. ۶۴\pi \text{ واحد مکعب} & ۳. \frac{۷۰۴}{۵}\pi \text{ واحد مکعب} & ۵. \frac{۳۸۴}{۷}\pi \text{ واحد مکعب} \\
 ۷. \frac{۳۴۵۶}{۳۵}\pi \text{ واحد مکعب} & ۹. \frac{۲۵۶}{۱۵}\pi \text{ واحد مکعب} & ۱۱. \frac{۱۲۸}{۵}\pi \text{ واحد مکعب} \\
 ۱۳. \frac{۱۲۸}{۷}\pi \text{ واحد مکعب} & ۱۵. \frac{۴}{۳}\pi r^2 \text{ واحد مکعب} & ۱۷. \frac{۱}{۲}\pi^2 \text{ واحد مکعب} \\
 ۱۹. \frac{۵}{۸}\pi^2 \text{ واحد مکعب} & ۲۱. \frac{۱۲۵۱}{۳}\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۳. \frac{۶۴}{۵}\pi \text{ واحد مکعب} \\
 ۲۵. \frac{۲۶۱}{۳۲}\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۷. ۱۶\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۹. ۱۸۰\pi \text{ سانتیمتر مکعب} \\
 ۳۱. \frac{۱۶}{۳}\pi \text{ واحد مکعب} & ۳۳. ۲
 \end{array}$$

تمرینهای ۳۰۷

$$\begin{array}{lll}
 ۱۳. \frac{۱}{۲}\pi \text{ واحد مکعب} & ۱۵. \frac{۳}{۱۰}\pi \text{ واحد مکعب} & ۱۷. \frac{۵}{۶}\pi \text{ واحد مکعب} \\
 ۱۹. \frac{۴۹}{۳۰}\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۱. ۱۶\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۳. \frac{۵۱۲}{۱۵}\pi \text{ واحد مکعب} \\
 ۲۵. \frac{۳۲}{۱۵}\pi a^2 \text{ واحد مکعب} & ۲۷. \frac{۳۲}{۱۵}\pi \text{ واحد مکعب} & ۲۹. \frac{۱}{۲}(۲ + \sqrt{۲})\pi \text{ واحد مکعب}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ۰.۳۱ \pi \cdot \frac{7}{2} \text{ واحد مکعب} & ۰.۳۳ \pi \cdot \frac{224}{3} \text{ واحد مکعب} & ۰.۳۵ 24\pi \text{ واحد مکعب} \\ & & \sqrt[3]{2744} \cdot ۰.۳۷ \end{array}$$

تمرینهای ۴.۷

$$\begin{array}{lll} ۰.۱ \sqrt[3]{2} \cdot 32 \text{ واحد مکعب} & ۰.۳ \sqrt[3]{3} \cdot 1272 \text{ سانتیمتر مکعب} & ۰.۵ \frac{686}{3} \text{ سانتیمتر مکعب} \\ ۰.۷ r^2 \cdot \frac{1}{3} \text{ واحد مکعب} & ۰.۹ \cdot 14 \text{ اینچ مکعب} & ۰.۱۱ \cdot \frac{128}{3} \text{ واحد مکعب} \\ ۰.۱۳ 1944 \text{ سانتیمتر مکعب} & ۰.۱۵ \frac{3969}{10} \text{ واحد مکعب} & ۰.۱۷ \frac{2}{3} r^2 \text{ سانتیمتر مکعب} \\ ۰.۱۹ \pi r^2 h \text{ واحد مکعب} & ۰.۲۱ \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \text{ واحد مکعب} & \end{array}$$

تمرینهای ۵.۷

$$\begin{array}{lll} ۰.۱ \frac{158}{3} \text{ فوت-پوند} & ۰.۳ \frac{1076}{15} \text{ ژول} & ۰.۵ \frac{1}{2} (3 + \sqrt{393}) \\ ۰.۷ 180 \text{ اینچ-پوند} & ۰.۹ 8 \text{ ژول} & ۰.۱۱ 1350 \text{ ارگ} \\ ۰.۱۳ 6562 r \Delta w \text{ فوت-پوند} & ۰.۱۵ 256\pi w \text{ فوت-پوند} & ۰.۱۷ 1000000 \text{ فوت-پوند} \\ ۰.۱۹ 5500 \text{ فوت-پوند} & ۰.۲۱ 1017938\pi \text{ ژول} & ۰.۲۳ 9196875\pi \text{ ژول} \\ ۰.۲۵ w \frac{144}{55} \text{ ثانیه} & ۰.۲۷ 2\sqrt{3} \text{ فوت} & \end{array}$$

تمرینهای ۶.۷

$$\begin{array}{lll} ۰.۱ \frac{14}{3} & ۰.۳ \frac{33}{16} & ۰.۵ \frac{1}{27} (97^{2/3} - 125) \\ ۰.۷ 12 & ۰.۹ \frac{22}{3} & ۰.۱۱ \frac{9}{8} \\ ۰.۱۳ \frac{8a^2 - (a^2 + 2b^2)^{2/3}}{8(a^2 - b^2)} & ۰.۱۵ \frac{4}{3} \cdot 2\sqrt{3} & ۰.۱۷ 2\sqrt{2} \end{array}$$

$$19. \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx : \approx 3.829 ; \frac{1}{6} \pi (2\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1)$$

تمرینهای مروری فصل ۷

۱. $\frac{1}{12}$ واحد مربع
۳. ۳۶ واحد مربع
۵. $\frac{37}{12}$ واحد مربع
۷. 250π واحد مکعب
۹. ۱۰۲۴ واحد مکعب
۱۱. $\frac{7}{3}$ واحد مربع
۱۳. 3π واحد مکعب
۱۵. $\frac{16}{3}\sqrt{4}$
۱۷. $\frac{25}{6}\pi$ واحد مکعب
۱۹. $2\sqrt{2}$ واحد مربع
۲۱. ۶۰۰۰ ارگ
۲۳. ۴۰۰ فوت-پوند
۲۵. ۴۲۱۴۵۰۰۰ ژول
۲۷. $\frac{2752}{3}w\pi$ فوت-پوند
۲۹. $\frac{13600}{3}w\pi$ فوت-پوند
۳۱. ۹۰ فوت مکعب
۳۳. 558π سانتیمتر مکعب
۳۵. $\sqrt[7]{2744}$
۳۷. $\frac{1}{5320} \left[(2251)^{3/2} - \frac{1}{8} (10999)^{3/2} \right]$
۳۹. $\frac{1}{4}\pi^2$ واحد مکعب

تمرینهای ۱۰.۸

۱. يك به يك است.
۳. يك به يك نیست.
۵. يك به يك است.
۷. يك به يك است.
۹. يك به يك است.
۱۱. يك به يك است.
۱۳. يك به يك نیست.
۱۵. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x+7)$ ؛ قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $(-\infty, +\infty)$
۱۷. معکوس ندارد.

۱۹. $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt[3]{x}$ ؛ قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $(-\infty, +\infty)$

۲۱. $h^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$ ؛ قلمرو: $[0, +\infty)$ ، برد: $[3, +\infty)$

۲۳. $F^{-1}(x) = x^3 - 1$ ؛ قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $(-\infty, +\infty)$

۲۵. معکوس ندارد.

۲۷. $f^{-1}(x) = \frac{1}{34}x^5$ ؛ قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $(-\infty, +\infty)$

۲۹. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$ ؛ قلمرو: $\{x | x \neq -1\}$ ، برد: $\{y | y \neq -1\}$

۳۱. $g^{-1}(x) = \sqrt{x-5}$ ؛ قلمرو: $[5, +\infty)$ ، برد: $[0, +\infty)$

۳۳. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(\sqrt[3]{x} - 1)$ ؛ قلمرو: $[0, 8]$ ، برد: $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

۳۵. $F^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$ ؛ قلمرو: $[0, 3]$ ، برد: $[0, 3]$

۳۷. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x+3)$ (ب).

۳۹. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ (ب).

۴۱. $f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{3-2x}$ (ب).

۴۳. (ب) $f_1(x) = x^2 + 4$ ؛ $x \geq 0$ ؛ $f_2(x) = x^2 + 4$ ؛ $x \leq 0$ ؛
(ب) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$ ؛ قلمرو: $[4, +\infty)$ ؛ $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}$ ؛ قلمرو: $[4, +\infty)$

۴۵. (ب) $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}$ ؛ $0 \leq x \leq 3$ ؛ $f_2(x) = \sqrt{9-x^2}$ ؛ $-3 \leq x \leq 0$ ؛
(ب) $f_1^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$ ؛ قلمرو: $[0, 3]$ ؛ $f_2^{-1}(x) = -\sqrt{9-x^2}$ ؛ قلمرو: $[0, 3]$

۴۷.
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \leq 81 \\ \frac{1}{\sqrt{249}}x^2 & x > 81 \end{cases}$$

تمرینهای ۲۰.۸

$$\frac{1}{12} \cdot ۱۵$$

$$\frac{1}{10} \cdot ۱۳$$

$$\frac{2}{3} \cdot ۱۱$$

$$-\frac{1}{4} \cdot ۲۱$$

$$-۲ \cdot ۱۹$$

$$\frac{1}{21} \cdot ۱۷$$

$$\frac{1}{6} (ب)؛ ۲۷ (ب)$$

$$\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot ۲۵$$

$$\frac{1}{3} \cdot ۲۳$$

۲۹. (الف) $f_1(x) = \sqrt{9-x^2}$ ؛ $f_2(x) = -\sqrt{9-x^2}$ ؛ (ب) هیچکدام معکوس

$$D_y x = -\frac{y}{x}؛ D_x y = -\frac{x}{y} (ب)$$

۳۱. (الف) $f(x) = \frac{x}{x}$ ؛ (ب) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x}$ ؛ قلمرو: $\{x | x \neq 0\}$

$$D_y x = -\frac{x}{y}؛ D_x y = -\frac{y}{x} (ب)$$

۳۳. (الف) $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x}$ ؛ (ب) معکوس ندارد؛ (ب) $D_x y = \frac{4x-3y}{3x}$

$$D_y x = \frac{3x}{4x-3y}$$

تمرینهای ۳۰.۸

$$\frac{6}{2t+1} \cdot ۵$$

$$\frac{5}{8+10x} \cdot ۳$$

$$\frac{5}{4+5x} \cdot ۱$$

$$\frac{5 \cos 5y}{\sin 5y} \cdot ۱۱$$

$$-\frac{2x}{12-3x^2} \cdot ۹$$

$$\frac{6 \ln(2t+1)}{2t+1} \cdot ۷$$

$$-\frac{17}{2(2w-5)(3w+1)} \cdot ۱۵$$

$$-\frac{\sin(\ln x)}{x} \cdot ۳$$

$$\frac{1-2x-x^2}{3(x+1)(x^2+1)} \cdot ۱۹$$

$$\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \cdot ۱۷$$

$$-\frac{xy+y}{xy+x} \cdot ۲۳$$

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{x+1})} \cdot ۲۱$$

$$\frac{4x^2y - xy - 2y}{6xy^2 + x} \cdot 27 \quad x + y \cdot 25$$

$$40x - y = 40 \cdot 41 \quad 2x + 4y + 2 \ln 2 - 1 = 0 \cdot 39$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 43$$

۴۵. الف) درآمد ۵ دلار در ۱ دلار تغییری کند؛ (ب) ۶۸۸ دلار

تمرینهای ۴.۸

$$-\frac{3 \sin 3x}{\cos 3x} \cdot 3 \quad \frac{3x^2}{x^2 + 1} \cdot 1$$

$$2x(x+1)^6(x-1)^2(6x^2 - 2x - 1) \cdot 5$$

$$\frac{8x^4 - 4x^2 + 15x^2 + 10}{5(x^2 + 1)^{5/2}} \cdot 9 \quad \frac{-13x^2 - 4x + 8}{(x-4)^4} \cdot 7$$

$$\frac{x \ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{2x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1} \cdot 13 \quad \frac{3(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}(x+2)^{3/2}} \cdot 11$$

$$\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + C \cdot 17 \quad -\frac{1}{2} \ln|3 - 2x| + C \cdot 15$$

$$\frac{1}{2} \ln|1 + 2 \sin t| + C \cdot 21 \quad \frac{1}{5} \ln|5x^2 - 1| + C \cdot 19$$

$$\ln|\ln x| + C \cdot 25 \quad x^2 + 4 \ln|x^2 - 4| + C \cdot 23$$

$$\ln|(\ln x)^2 + \ln x| + C \cdot 29 \quad \frac{1}{3} \ln^3 3x + C \cdot 27$$

$$4 + \ln 2 \cdot 33 \quad \ln 5 \cdot 31$$

$$\ln 2 \approx 0.693147 \cdot 37 \quad \frac{1}{\ln 4} \cdot 35$$

$$2000 \ln 2 \approx 1386 \cdot 41 \quad \frac{1}{4} \ln 5 \approx 0.402 \cdot 39$$

$$\pi(11 + 8 \ln 2) \approx 51977 \cdot 43$$

تمرینهای ۵.۸

$$-e \cos x \sin x \quad .۵ \quad -6xe^{-3x^2} \quad .۳ \quad 5e^{5x} \quad .۱$$

$$\frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3} \quad .۹ \quad e^{2x} \cos e^x + e^x \sin e^x \quad .۷$$

$$2x \quad .۱۳ \quad \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \quad .۱۱$$

$$\frac{e^x(1-e^y)}{e^y(e^x-1)} \quad .۱۷ \quad x^x(1+\ln x) \quad .۱۵$$

$$-\frac{1}{5}e^{2-5x} + C \quad .۲۱ \quad -\frac{y^2 + 2ye^{2x}}{2e^{2x} + 3xy} \quad .۱۹$$

$$\frac{1}{6(1-2e^{3x})} + C \quad .۲۵ \quad e^x - e^{-x} + C \quad .۲۳$$

$$e^x \quad .۲۹ \quad e^x - 3 \ln(e^x + 3) + C \quad .۲۷$$

$$\frac{1}{2} \quad .۳۳ \quad 2 \quad .۳۱$$

$$\frac{1}{2}(e^4 - 1) \quad .۳۵$$

$$f(1) = \frac{1}{e} \quad .۳۹ \quad \text{ما کسیمم نسبی؛ } (2, 2e^{-2}), \text{ نقطه عطف؛ } f \text{ روی }]-\infty, 1] \text{ صعودی است؛}$$

$$f \text{ روی بازه } [1, +\infty) \text{ نزولی است؛ برای } x < 2 \text{ تفرع نمودار رو به پایین است؛}$$

$$\text{برای } x > 2 \text{ تفرع نمودار رو به بالاست.}$$

$$256 \quad .۴۳ \quad 266 \quad .۴۱$$

$$x + 2y = 1 + \ln 2 \quad .۴۵ \quad \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2} - 4) \approx 1.627 \quad .۴۷$$

مکعب

$$917 - \text{پوند فوت مربع در ثانیه} \quad .۴۹ \quad 506 \quad .۵۱$$

$$\frac{1}{2} \pi w(e^{-2} - e^{-8}) \quad .۵۵ \quad (e^2 + \frac{1}{2}) \approx 20586 \quad .۵۳ \quad \text{فوت} \quad \frac{1}{2} \pi w \quad \text{فوت-پوند}$$

تمرینهای ۶.۸

۱. $(\delta \ln 3)^{3\delta x}$
۲. $2^{5x} 3^{4x^2} (\delta \ln 2 + 8x \ln 3)$
۳. $4^{3x^2} (\ln 4)^{6x}$
۴. $\frac{\log_e e}{2x \sqrt{\log_e x}}$
۵. $4^{\sin 2x} (2 \ln 4) \cos 2x$
۶. $\frac{1}{x^2} \log_{10} \frac{e}{x}$
۷. $\frac{(\log_{10} e)^2}{(x+1) \log_{10}(x+1)}$
۸. $x^{\sqrt{x} - (1/\sqrt{x})} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\right)$
۹. $z^{\sin z - 1} [z(\ln z) \cos z + \sin z]$
۱۰. $(\cos x)^{\sin x - 1} (\cos^2 x \ln(\cos x) - \sin^2 x)$
۱۱. $\frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C$
۱۲. $\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C$
۱۳. $x^{e^x - 1} e^x (x \ln x + 1)$
۱۴. $\frac{6e^x}{\ln 6} + C$
۱۵. $\frac{10^{x^2}}{2 \ln 10} + C$
۱۶. 22999.35
۱۷. 21.60
۱۸. 47 (الف) فروش روزانه ۶۱ عدد؛ (ب) فروش روزانه ۲۲۶ عدد
۱۹. 49 (الف) $y = 20002^{1/10}$ ؛ (ب) ۱۲۸۰۰ دلار؛ (پ) ۸۷۷ دلار در سال
۲۰. 51 ≈ 0.276 $\left(e - 1 - \frac{1}{\ln 2}\right)$ واحد مربع
۲۱. 53 ≈ 8.297 $\left(\frac{4}{\ln 3} - 1\right) \pi$ واحد مکعب

تمرینهای ۷.۸

۱. ۶۸۲ سال
۲. ۲۷۳۴ دلار
۳. ۸۰۰۰ $\sqrt[3]{2} \approx 11300$
۴. ۴۳۹ گرم
۵. ۱۰۶ سال
۶. ۶۹۹.۱۱
۷. ۱۳ (الف) ۱۰۲ ثانیه؛ (ب) 42.1°
۸. ۱۹ (الف) ۵۲۵۹ دلار؛ (ب) ۱۰۵۲٪
۹. ۱۱۸۷.۱۷

۲۳. ۱۵۱۰۰ سال

۲۱. ۱۵۰۹ سال

تمرینهای مروری فصل ۸

۱. (الف) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+4}$ ؛ قلمرو: $(-\infty, +\infty)$ ، برد: $(-\infty + \infty)$

۳. معکوس ندارد.

۵. $f^{-1}(x) = \frac{4}{3-x}$ ؛ قلمرو: $\{x | x \neq 3\}$ ؛ برد: $\{y | y \neq 0\}$

۷. (ب) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$

۱۱. $\frac{1}{12}$

۹. $\frac{1}{4}$

۱۵. $(-4 \ln 2)^2 \cos 4x \sin 4x$

۱۳. $\frac{4 \ln x}{x}$

۱۹. $\frac{\log_{10} e}{(1-x^2) \sqrt{\log_{10} \frac{1+x}{1-x}}}$

۱۷. $\frac{(4-x^2)e^{x/(4+x^2)}}{(4+x^2)^2}$

۲۳. $x^x e^{x+e^{x-1}} (x e^x \ln^2 x + e^x \ln x + 1)$

۲۱. ۰

۲۷. $\frac{1}{3} \left(e^{2x} + \frac{2^{2x}}{\ln 2} + C \right)$

۲۵. $\frac{2}{3} \ln(1+e^{2x}) + C$

۳۱. $\frac{2}{3 \ln 2} \sqrt{3 \cdot 2^x + 4} + C$

۲۹. $\frac{1}{6} \sqrt{1+e^{6/5x}} + C$

۳۵. $\frac{2}{3} \ln 2$

۳۳. $\frac{1}{3} (e^4 - 1)$

۳۹. $-\frac{ye^x + e^y + 1}{e^x + xe^y + 1}$

۳۷. $1 + 5 \ln \frac{2}{3}$

۴۳. $s = e^t + e^{-t} + t$ ؛ $v = e^t - e^{-t} + 1$

۴۱. ۵۰۰۰۴

۴۷. ۸۲۱۲ سال

۴۵. $\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2} \pi (1 - e^{-2b})$

۴۹. $g(x) = -e^x$ ؛ قلمرو: $(-\infty + \infty)$

۵۵. ۸۶۶ سال

۵۳. $\ln \frac{3}{4}$ اینج-پوند

۵۹. $\operatorname{sgn} t(1 - e^{-|t|})$

۵۷. $(1, e)$

تمرینهای ۱.۹

۵. $2 \tan x \sec^3 x$

۳. $-4 \csc^4 x \cot^4 x$

۹. $-3e^x \csc^2 e^x$

۷. $2x \sec x^2 \tan x^2$

۱۳. $-\frac{3 \csc^3 r}{2\sqrt{\cot^3 r}}$

۱۱. $2 \tan 2x$

۱۵. $4 \tan^5 x + 6 \tan^3 x + 2 \tan x$

۱۷. $-3t^2 \csc(t^2 + 1) \cot(t^2 + 1)$

۱۹. $(-3 \ln 2) 2^{\csc^2 x} \csc^3 x \cot^3 x$

۲۱. $4 \cot t \csc^2 t$

۲۵. $-\cot^2 z \csc z (4 \cot^2 z + 3)$

۲۳. $\Delta \sec \Delta x$

۲۹. $(\sin x)^{\tan x} (\sec^2 x \ln(\sin x) + 1)$

۲۷. $\frac{\sin^2 x \cos x + \cos x - 4}{\cos^2 x (\cos x - 4)^2}$

۳۱. $\frac{1}{\sqrt{1 - \cot^2 x}} (\sec^2 x + \sin^2 x - 3 \cos^2 x)$

۳۳. $\frac{\sec^2 x \sqrt{\tan x + 1}}{\sqrt{\csc^2 x - 4}} \left(\Delta \tan x + \frac{\sec^2 x}{3(\tan x + 1)} + \frac{3 \csc^2 x \cot x}{2(\csc^2 x - 4)} \right)$

۳۵. $\sec^2 x \tan x \sin^2 y \tan y$

۳۷. $\frac{2 \tan x \sec^2 x + \csc^2(x - y)}{2 \sec^2 y \tan y + \csc^2(x - y)}$

۴۳. $y = \sqrt{2} \left(x + 1 - \frac{\pi}{4} \right)$

۴۵. $\frac{2000}{9}$ فوت در ثانیه

۴۷. $5\sqrt{5}$ فوت

تمرینهای ۲.۹

$$۱. \quad \frac{۷}{۲۶} \text{ (ث)} ؛ \frac{۷}{۳۱} \text{ (ت)} ؛ -\frac{۷}{۴} \text{ (پ)} ؛ \frac{۱۰}{۱۱} \text{ (ب)} ؛ \frac{۱}{۲} \text{ (الف)}$$

$$۳. \quad ۱۰۸^\circ, ۴۵^\circ, ۲۷^\circ$$

$$۵. \quad x + ۳y - ۱۱ = 0 ؛ ۳x - y + ۷ = 0$$

$$۹. \quad -\frac{۱۹}{۳} - \frac{۱}{۳}\sqrt{۳۷۰}$$

$$۱۳. \quad \left(\frac{۱}{۴}(1+۲n)\pi, \frac{۱}{۴}\sqrt{۲}\right), \text{ که } n \text{ عددی صحیح زوج است؛}$$

$$\left(\frac{۱}{۴}(1+۲n)\pi, -\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}\right), \text{ که } n \text{ عددی صحیح فرد است؛ } ۱۰۹^\circ ۳۰'$$

$$۱۵. \quad \frac{-۲ \ln a}{1 - \ln^2 a}$$

تمرینهای ۳.۹

$$۳. \quad \frac{۱}{۴} \ln |\sec ۲w| + C$$

$$۱. \quad \frac{۱}{۵} \tan ۵x + C$$

$$۷. \quad \frac{۱}{۱۰} \ln |\csc ۱۰t - \cot ۱۰t| + C$$

$$۵. \quad -\frac{۱}{۳} \csc ۳x + C$$

$$۱۱. \quad \ln |\sin e^t| + C$$

$$۹. \quad -\frac{۱}{۱۰} \cot ۵x^2 + C$$

$$۱۳. \quad \frac{۱}{۶} \ln |\sec ۳y^2 + \tan ۳y^2| + C$$

$$۱۵. \quad -\frac{۱}{۴} \csc^2 x - \ln |\sin x| + C$$

$$۱۹. \quad \frac{۱}{۷} \tan^7 x + \frac{۱}{۹} \tan^9 x + C$$

$$۱۷. \quad -\frac{۱}{۶} \cot ۶r - r + C$$

$$۲۱. \quad -\frac{۱}{۹} \cot^3 x - \frac{۱}{۱۵} \cot^5 x + C$$

$$۲۳. \quad \frac{۱}{۴} (\tan ۲x - \cot ۲x) + C$$

$$۲۵. \quad ۲ \sec w - \tan w + C$$

$$۲۷. \quad \frac{۱}{۱۲} \tan^4 ۳x - \frac{۱}{۶} \tan^2 ۳x + \frac{۱}{۳} \ln |\sec ۳x| + C$$

$$-\frac{1}{3} \csc^2 x + C \quad .۳۱$$

$$u - 2 \tan \frac{u}{4} + C \quad .۳۹$$

$$\frac{1}{4} \tan^2(\ln x) + \frac{1}{3} \tan^3(\ln x) + \frac{1}{8} \tan^4(\ln x) + C \quad .۳۳$$

$$\frac{56}{15} \quad .۳۷$$

$$\frac{1}{8} \ln 2 \quad .۳۵$$

$$\ln(2 + \sqrt{3}) \quad .۴۹$$

$$\frac{1}{5} \quad .۳۹$$

$$\frac{4}{3} \pi \quad \text{واحد مکعب} \quad .۵۱$$

تمرینهای ۴.۹

$$- \frac{\pi}{4} (\text{ج}) ; \frac{\pi}{4} (\text{ث}) ; \frac{3\pi}{4} (\text{ت}) ; - \frac{\pi}{4} (\text{ب}) ; \frac{\pi}{4} (\text{ب}) ; \frac{\pi}{4} (\text{الف}) \quad .۱$$

$$- \frac{\pi}{4} (\text{ج}) ; \pi (\text{ث}) ; \frac{3\pi}{4} (\text{ت}) ; - \frac{\pi}{4} (\text{ب}) ; \pi (\text{ب}) ; - \frac{\pi}{4} (\text{الف}) \quad .۳$$

$$3 (\text{ث}) ; \frac{3}{4} \sqrt{2} (\text{ت}) ; 2\sqrt{2} (\text{ب}) ; \frac{1}{4} \sqrt{2} (\text{ب}) ; \frac{2}{3} \sqrt{2} (\text{الف}) \quad .۵$$

$$- \frac{1}{4} \sqrt{5} (\text{ث}) ; \sqrt{5} (\text{ت}) ; - \frac{1}{4} (\text{ب}) ; \frac{1}{5} \sqrt{5} (\text{ب}) ; - \frac{2}{5} \sqrt{5} (\text{الف}) \quad .۷$$

$$\frac{3}{5} \sqrt{5} (\text{ث}) ; - \frac{1}{4} \sqrt{5} (\text{ت}) ; - \frac{2}{5} \sqrt{5} (\text{ب}) ; \frac{1}{3} \sqrt{5} (\text{ب}) ; - \frac{2}{3} (\text{الف}) \quad .۹$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{3} (\text{ب}) ; \frac{1}{4} \sqrt{3} (\text{الف}) \quad .۱۳$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{21} (\text{ب}) ; \sqrt{3} (\text{الف}) \quad .۱۱$$

$$\frac{3\pi}{4} (\text{ت}) ; \pi (\text{ب}) ; - \frac{\pi}{4} (\text{ب}) ; \frac{\pi}{4} (\text{الف}) \quad .۱۵$$

$$\frac{2}{9} (1 + \sqrt{10}) \quad .۱۹$$

$$\frac{119}{169} \quad .۱۷$$

$$\frac{1}{39} (28 - 25\sqrt{3}) \quad .۲۳$$

$$\frac{1}{27} (\sqrt{5} + 8\sqrt{2}) \quad .۲۱$$

$$\frac{1}{15} (2\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot 25$$

تمرینهای ۵.۹

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot 1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \cdot 5$$

$$-\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \cdot 9$$

$$\sin^{-1} y + \frac{2y}{\sqrt{1-4y^2}} \cdot 13$$

$$-\frac{\cos x}{|\cos x|} \cdot 17$$

$$2\sqrt{4-x^2} \cdot 21$$

$$\cot^{-1} x \cdot 25$$

$$\frac{(1+y^2)(3x^2 + \sin y)}{1-x \cos y(1+y^2)} \cdot 29$$

$$0.78 \text{ رادین در ثانیه} \cdot 33$$

$$0.547 \cdot 37$$

تمرینهای ۶.۹

$$\frac{1}{y} \sin^{-1} 2x + C \cdot 1$$

$$\frac{1}{y} \tan^{-1} \frac{x-1}{y} + C \cdot 5$$

$$\frac{2}{1+4x^2} \cdot 3$$

$$\frac{1}{|t|\sqrt{25t^2-1}} \cdot 7$$

$$\frac{4}{4+x^2} \cdot 11$$

$$\csc^{-1} \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 15$$

$$\frac{2x}{(1+x^4) \tan^{-1} x^2} \cdot 19$$

$$0 \cdot 23$$

$$-e^x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 27$$

$$\frac{52}{3} \pi \text{ کیلومتر در دقیقه} \cdot 31$$

$$8 \text{ فوت در ثانیه} \cdot 35$$

$$\frac{6}{x\sqrt{x^2-64}} \cdot 39$$

$$\frac{1}{9} \sin^{-1} \frac{3r^2}{4} + C. ۱۱ \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \sin^{-1} \frac{\sqrt{10}}{2} x + C. ۹$$

$$2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C. ۱۵ \quad \frac{1}{\sqrt{v}} \tan^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{v}} + C. ۱۳$$

$$\cos^{-1} \frac{1-x}{2} + C. ۱۹ \quad \frac{2}{\sqrt{v}} \tan^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{v}} + C. ۱۷$$

$$\cos^{-1} \frac{1+x}{2} - \sqrt{3-2x-x^2} + C. ۲۱$$

$$\sin^{-1} \frac{1+x}{\sqrt{5}} - \sqrt{4-2x-x^2} + C. ۲۳$$

$$\frac{1}{2} x^2 + 2x + \frac{5}{2} \ln(2x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{2} \sqrt{2} \tan^{-1} \sqrt{2}(x-1) + C. ۲۵$$

$$\frac{\pi}{3}. ۲۹ \quad \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln 2. ۲۷$$

$$\frac{\pi}{4}. ۳۳ \quad \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}. ۳۱$$

$$2\pi r. ۳۷ \quad \frac{\pi}{3} \text{ واحد مربع}. ۳۵$$

تمرینهای ۷.۹

$$2e^{2y} \cosh e^{2y}. ۱۹ \quad \frac{2}{5} \operatorname{sech}^2 \frac{2x+1}{5}. ۱۷$$

$$e^{2x}. ۲۳ \quad -\lambda \operatorname{sech}^2 w \tanh 2w. ۲۱$$

$$2x \operatorname{sech} x^2. ۲۷ \quad 2 \csc h 2t. ۲۵$$

$$x^{\sinh x - 1} (x \cosh x \ln x + \sinh x). ۲۹$$

$$2 \cosh \sqrt{x} + C. ۳۵$$

$$\frac{1}{224} \sinh 28t + \frac{1}{28} \sinh 14t + \frac{7}{8} t + C. ۳۷$$

$$e^{\cosh t} + C \quad .۴۱ \qquad \frac{1}{\gamma} \ln^{\gamma} \cosh x + C \quad .۳۹$$

$$\frac{\gamma}{5} \cdot .۴۵ \qquad \frac{1}{3} \tanh^3 x - \frac{1}{9} \tanh^{\gamma 3} x + C \quad .۴۳$$

$$\frac{1}{3} \cosh^{\gamma 2} - \cosh^2 + \frac{\gamma}{3} \cdot .۴۷$$

.۴۹. $\operatorname{sech}(0) = 1$ ، ماکسیمم نسبی؛ نقاط عطف در $x = \pm \ln(1 + \sqrt{\gamma})$ است؛ نمودار روی $(-\infty, 0]$ صعودی است؛ نمودار روی $(0, +\infty)$ نزولی است؛ برای $x > \ln(1 + \sqrt{\gamma})$ و $x < -\ln(1 + \sqrt{\gamma})$ نقر نمودار رو به بالاست؛ و برای $-\ln(1 + \sqrt{\gamma}) < x < \ln(1 + \sqrt{\gamma})$ نقر نمودار رو به پایین است.

$$a^{\gamma} \sinh \frac{x_1}{a} \quad .۵۱ \quad \text{واحد مربع}$$

$$;v = e^{-ct/\gamma} \left[\left(B - \frac{1}{\gamma} cA \right) \sinh t + \left(A - \frac{1}{\gamma} cB \right) \cosh t \right] \quad .۵۳$$

$$;a = e^{-ct/\gamma} \left[\left(A - cB + \frac{1}{\gamma} c^{\gamma} A \right) \sinh t + \left(B - cA - \frac{1}{\gamma} c^{\gamma} B \right) \cosh t \right]$$

$$.K_{\gamma} = -c \text{ و } K_1 = 1 - \frac{1}{\gamma} c^{\gamma} \text{ که } a = K_1 s + K_{\gamma} v$$

تمرینهای ۸.۹

$$\frac{1}{\gamma} \ln^{\gamma} \quad .۱۳ \qquad \ln \frac{1}{\gamma} (1 + \sqrt{1\gamma}) \quad .۱۱$$

$$\frac{\gamma}{1 - 16x^{\gamma}} \cdot .۱۷ \qquad \frac{\gamma x}{\sqrt{x^{\gamma} + 1}} \cdot .۱۵$$

$$\gamma x \left(\cosh^{-1} x^{\gamma} + \frac{x^{\gamma}}{\sqrt{x^{\gamma} - 1}} \right) \cdot .۲۱ \qquad \frac{1}{\gamma x + 3x^{\gamma}} \cdot .۱۹$$

$$-\frac{\csc x \cot x}{|\cot x|} \cdot .۲۵ \qquad |\sec x| \cdot .۲۳$$

$$-e^{\gamma} \csc e^x \cdot .۲۹ \qquad \frac{e z (\coth^{-1} z^{\gamma})^{\gamma}}{1 - z^{\gamma}} \cdot .۲۷$$

$$\sinh^{-1} x \cdot ۳۱$$

تمرینهای مروری فصل ۹

$$-\sec x \csc x \cdot ۳ \quad ۶ \tan^2 x \sec^2 x \cdot ۱$$

$$\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} \cdot ۷ \quad \sec^2 x (e^{\tan x} + 2 \tan x) \cdot ۵$$

$$\Delta(\log_{10} e) \sec \Delta x \cdot ۱۱ \quad ۶ \cosh^2 x \sinh^2 x \cdot ۹$$

$$\frac{\sin x - \cos x - 1}{1 + \sin^2 x} \cdot ۱۵ \quad 2w \sinh^{-1} 2w + \frac{2w^2}{\sqrt{4w^2 + 1}} \cdot ۱۳$$

$$-\frac{2 \cot x (x^2 \csc^2 x - x \cot x + \csc^2 x)}{(1+x^2)^2} \cdot ۱۷$$

$$\frac{\operatorname{sech} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+\tanh \sqrt{x})} \cdot ۲۱ \quad \frac{1}{w^2+1} \cdot ۱۹$$

$$\frac{1}{t} \sin t + (\ln t) \cos t \cdot ۲۵ \quad -e^x \csc e^x \cdot ۲۳$$

$$\frac{(\tan x)^{1/2} (x \sec^2 x - 2 \tan x \ln \tan x)}{x^2 \tan x} \cdot ۲۷$$

$$۲ \cdot ۳۱ \quad \Delta 2^\circ, 112^\circ, 90^\circ, 106^\circ \cdot ۲۹$$

$$\frac{6xy - 9y^2 - x^2 y^2}{3x^2 + 18xy^2 + 2x^2 y} \cdot ۳۵ \quad \frac{y - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x} \cdot ۳۳$$

$$\frac{3}{2} \sin^{-1} x^2 + C \cdot ۳۹ \quad \frac{1}{6} \ln |\sec^2 x^2| + C \cdot ۴۷$$

$$\frac{2}{\sqrt{31}} \tan^{-1} \frac{2x+3}{\sqrt{31}} + C \cdot ۴۳ \quad -\frac{1}{4} \cot^4 e^x - \frac{1}{6} \cot^6 e^x + C \cdot ۴۱$$

$$2 \sec w - \tan w + C \cdot ۴۷ \quad \ln |\cosh x| + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 x + C \cdot ۴۵$$

$$2 \tan \sqrt{t} + \frac{2}{3} \tan^3 \sqrt{t} + C \cdot ۵۱ \quad \frac{\sqrt{r}}{4} \sec^{-1} \frac{\sqrt{r} e^x}{4} + C \cdot ۴۹$$

$$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2.55$$

$$\frac{848}{105}.53$$

$$\frac{1}{2}\pi.59$$

$$\tanh 1.52$$

$$\frac{1}{2}\pi - 1.63$$

$$\ln(2 + \sqrt{3}).61$$

$$\pi\left(\frac{15}{32} - \frac{1}{2}\ln 2\right).69 \quad 3x + 6\sqrt{3}y = 2\pi - 12\sqrt{3}.65$$

۷۱. (الف) ۱۲۰ رادیان در ساعت؛ (ب) ۶۰ رادیان در ساعت

۷۳. با آهنگ ۶۰ رادیان در ساعت نزولی است.

۷۵. دامنه حرکت برابر $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})$ است.

۷۷. $\frac{\pi}{10}$ ساعت؛ او تمام راه را قدم می زند.

واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

abscissa	طول
absolute	مطلق
– extremum	اکسترمم مطلق
– maximum	ماکسیمم مطلق
– value	مقدار ماکسیمم مطلق
– minimum	مینیمم مطلق
– value	مقدار مینیمم مطلق
– value	قدر مطلق
acceleration	شتاب
addition	جمع
algebraic function	تابع جبری
analytic geometry	هندسه تحلیلی
angle	زاویه
– of inclination	زاویه میل
antiderivative	ضد مشتق
antidifferentiation	ضد مشتق‌گیری، ضد دیفرانسیل‌گیری
approximate	تقریب کردن
– integration	انتگرال‌گیری تقریبی
arc	قوس
asymptote	مجاانب

average	متوسط
— cost	هزینه متوسط
— function	تابع هزینه متوسط
— value	مقدار متوسط
axiom	اصل موضوع
axis	محور
— of revolution	محور دوران
boundary	مرز
— conditions	شرایط مرزی
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
catenary	منحنی زنجیری
center	مرکز
center-radius form	صورت شعاع - مرکزی
chain rule	قاعده زنجیری
circle	دایره
circular-disk method	روش قرص مستدیری
circular-ring method	روش حلقه مستدیری
closed interval	بازه بسته
complete solution	جواب عمومی
completeness	کمال
composite function	تابع مرکب
concave	مقعر
concavity	تقعر
conclusion	حکم
constant	ثابت

– function	تابع ثابت
– of integration	ثابت انتگرال گیری
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
– function	تابع پیوسته
coordinate	مختص
– axes	محورهای مختصات
corollary	نتیجه
cosecant function	تابع کسکانتی
cosine function	تابع کسینوسی
cotangent function	تابع کتانژانتی
critical number	عدد بحرانی
cubic function	تابع درجه سوم
curve	منحنی [خم]
cylinder	استوانه
cylindrical shell method	روش پوسته استوانه‌ای
decimal	عدد اعشاری
decreasing	نزولی
definite integral	انتگرال معین
degenerate	تباهیده
demand	تقاضا
– curve	منحنی تقاضا
– equation	معادله تقاضا
dependent	وابسته
– variable	متغیر وابسته

derivative	مشتق
– from the left	مشتق چپ
– from the right	مشتق راست
difference	تفاضل
differentiable	مشتق پذیر
differential	دifferانسیل
– equation	معادله differانسیل
differentiation	مشتق گیری، differانسیل گیری
discontinuous	ناپیوسته
distance	فاصله
domain	قلمرو
downward	رو به پایین
effective rate	نرخ مؤثر
element	عنصر، جزء
empty	تهی
– set	مجموعه تهی
endpoint	نقطه انتهایی
equal	متساوی
equation	معادله
– of a graph	معادله يك نمودار
essential discontinuity	ناپیوستگی اساسی
even	زوج
– function	تابع زوج
example	مثال
exercise	تمرین
exponential function	تابع نمایی

form	صورت
formula	فرمول
fraction	کسر
function	تابع
fundamental theorem of calculus	قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال
graph	نمودار
gravity	ثقل
greatest integer function	تابع بزرگترین عدد صحیح
half - life	نیم عمر
height	ارتفاع
hooke's law	قانون هوک
horizontal	افقی
– asymptote	مجاانب افقی
hyperbolic cosine function	تابع کسینوس هیپر بولیک
hyperbolic function	تابع هیپر بولیک
hypothesis	فرض
identity	اتحاد، همانی
– function	تابع همانی
if and only if	اگر و تنها اگر
illustration	نمونه
implicit	ضمنی
– defferentiation	مشتق گیری ضمنی
increasing	صعودی
independent	مستقل

– variable	متغیر مستقل
indefinite	نامعین
– integral	انتگرال نامعین
index	اندیس
– of summation	اندیس مجموع‌گیری
inequality	نامساوی
infinite	بینهایت، نامتناهی
– limit	حد بینهایت
– set	مجموعه نامتناهی
initial	اولیه، اول
– conditions	شرایط اولیه
– side of an angle	ضلع اول زاویه
instantaneous	لحظه‌ای
– acceleration	شتاب لحظه‌ای
– rate of change	آهنگ لحظه‌ای تغییر
– velocity	سرعت لحظه‌ای
integer	عدد صحیح
integrable	انتگرال‌پذیر
integral	انتگرال
– sign	علامت انتگرال
integrand	انتگران
integration	انتگرال‌گیری
intercept form	صورت طول و عرض از مبدأ
intermediate	میانی
– value	مقدار میانی
– theorem	قضیه مقدار میانی
intersection	اشتراک

interval	بازه
inverse	معکوس
– cosine function	تابع کسینوسی معکوس
– function	تابع معکوس
– theorem	قضیه تابع معکوس
– hyperbolic cosine function	تابع کسینوس هیپر بولیک معکوس
– trigonometric function	تابع مثلثاتی معکوس
irrational	گنگ
left - hand continuity	پیوستگی از طرف چپ
left - hand limit	حد چپ
length	طول
limit	حد
– at infinity	حد در بینهایت
line	خط
linear	خطی
– equation	معادله خطی
– function	تابع خطی
locus	مکان هندسی
logarithmic	لگاریتمی
– differentiation	مشتق گیری لگاریتمی
– function	تابع لگاریتمی
loop	طوق
lower limit	حد پایین
marginal	نهایی
– cost function	تابع هزینه نهایی

- profit function	تابع سود نهایی
- revenue	درآمد نهایی
- curve	منحنی درآمد نهایی
mean value theorem	قضیه مقدار میانگین
measure	اندازه
monopolist	صاحب انحصار
monopoly	انحصار
monotonic	یکنوا
multiplication	ضرب
natural logarithmic function	تابع لگاریتمی طبیعی
negative	منفی، قرینه
newton	نیوتن
non negative	نامنفی
norm	نورم
normal line	خط قائم
notation	نماد [علامت]
n th derivative	مشتق n م
number plane	صفحه اعداد
odd	فرد
- function	تابع فرد
one - parameter family	خانواده یک پارامتری
one - sided derivative	مشتق یک طرفه
one - sided limit	حد یک طرفه
one - to - one	یک به یک
open interval	بازه باز

order	مرتبه
ordered pair	زوج مرتب
ordinate	عرض
origin	مبدأ
overhead cost	هزینه عمومی
pair	زوج
parabola	سهمی
paraboloid of revolution	سهمیوار دوار
partition	افراز
perfect competition	رقابت کامل
period	دوره تناوب
periodic	تناوبی
periodicity	تناوب
plane	صفحه
- curve	منحنی سطح
- section	مقطع سطح
point	نقطه
point - circle	دایره - نقطه
point of inflection	نقطه عطف
point-slope form	صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای
polynomial	چند جمله‌ای
- function	تابع چند جمله‌ای
positive	مثبت
- infinity	بینهایت مثبت
power	توان
- function	تابع توانی

price function	تابع بها
product	حاصل ضرب
proof	اثبات
quadrant	ربع
quadratic function	تابع درجه دوم
quotient	خارج قسمت
radian	رادیان
– measure	اندازه برحسب رادیان [اندازه رادیانی]
radius	شعاع
range	برد
rate of change	آهنگ تغییر
rational	گویا
– exponent	نمای گویا
– function	تابع گویا
real	حقیقی
– numbers	اعداد حقیقی
– line	خط اعداد حقیقی [محور حقیقی]
– system	دستگاه اعداد حقیقی
reciprocal	عکس
rectangular	مستطیلی، قائم
– cartesian coordinates	مختصات دکارتی قائم
– system	دستگاه مختصات دکارتی قائم
– element of area	جزء مستطیلی سطح
– parallelepiped	مکعب مستطیل
rectifiable arc	قوس راستیدنی

rectilinear	مستقیم الخط
– motion	حرکت مستقیم الخط
reflection	انعکاس
regular partition	افراز منظم
regular polygon	چند ضلعی منتظم
related rates	آهنگهای وابسته
relative	نسبی
– extremum	اکسترمم نسبی
– maximum value	مقدار ماکسیمم نسبی
– minimum value	مقدار مینیمم نسبی
– rate of change	آهنگ نسبی تغییر
removable discontinuity	ناپیوستگی رفع شدنی
review exercises	تمرینهای مروری
riemann sum	مجموع ریمانی
right - circular cylinder	استوانه مستدیر قائم
right cylinder	استوانه قائم
right - hand continuity	پیوستگی از طرف راست
right - hand limit	حد راست
rolle's theorem	قضیه رول
secant	سکانت، قاطع
– function	تابع سکانتی
– line	خط قاطع
section	مقطع
set	مجموعه
set - builder notation	علامت مجموعه ساز
sigma notation	نماد گذاری سیگما

simpson's rule	قاعدهٔ سیمپسون
sine function	تابع سینوسی
slope	ضریب زاویه [شیب]
slope - intercept form	صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ
smooth	هموار
solid	جسم
- of revolution	جسم دوار
solution	جواب، حل
- set	مجموعه جواب
speed	سرعت، مقدار سرعت
squeeze theorem	قضیهٔ افشردگی
standard position	وضعیت استاندارد
subset	زیر مجموعه
subtraction	تفریق
sum	مجموع
symmetric	متقارن
symmetry	تقارن
tangent function	تابع تانژانتی
tangent line	خط مماس
terminal side of an angle	ضلع دوم زاویه
terminating decimal	عدد اعشاری پایان‌دار
theorem	قضیه
third derivative	مشتق سوم
total	کل
- cost function	تابع هزینهٔ کل
- profit function	تابع سود کل

– revenue curve	منحنی درآمد کل
– revenue function	تابع درآمد کل
tractrix	تراکتريس
transcendental	متعالی
– function	تابع متعالی
trapezoidal rule	قاعده ذوزنقه‌ای
triangle	مثلث
– inequality	نامساوی مثلثی
trigonometric function	تابع مثلثاتی
two - parameter family	خانواده دو پارامتری
two - point form	صورت دوقطه‌ای
two - sided limit	حد دوطرفه
undirected distance	فاصله غیر جهت دار
undirected limit	حد بدون جهت
union	اجتماع
uniqueness	یکتایی
– theorem	قضیه یکتایی
upper limit	حد بالا
upward	رو به بالا
variable	متغیر
variables separable	متغیرهای جداشدنی
vertex	رأس
vertical	قائم
– asymptote	مجاانب قائم
volume	حجم

work

کار

x axis

محور x ها

x coordinate

مختص x

x intercept

طول از مبدأ

y axis

محور y ها

y coordinate

مختص y

y intancept

عرض از مبدأ

واژه‌نامه فارسی - انگلیسی

rate	آهنگ
rate of change	- تغییر
instantaneous rate of change	- لحظه‌ای تغییر
relative rate of change	- نسبی تغییر
related rates	آهنگهای وابسته
identity	اتحاد (← همانی)
proof	اثبات
union	اجتماع
height	ارتفاع
erg	ارگ
cylinder	استوانه
right cylinder	- قائم
right circular cylinder	- مستدیر قائم
intersection	اشتراک
axiom	اصل موضوع
real numbers	اعداد حقیقی
partition	افراز
regular partition	- منظم
horizontal	افقی

absolute extremum	اکسترمم مطلق
relative extremum	اکسترمم نسبی
if and only if	اگر و تنها اگر
integral	انتگرال
definite integral	- معین
indefinite integral	- نامعین
integrable	انتگرال پذیر
integration	انتگرال گیری
approximate integration	- تقریبی
integrand	انتگران
monopoly	انحصار
measure	اندازه
radian measure	- برحسب رادیان [اندازه رادیانی]
index	اندیس
index of summation	- مجموع گیری
reflection	انعکاس
initial	اول (← اولیه)
initial	اولیه (← اول)
interval	بازه
open interval	- باز
closed interval	- بسته
range	برد
infinite	بینهایت (← نامتناهی)
positive infinite	- مثبت
cylindrical shell	پوسته استوانه‌ای

continuity	پیوستگی
left - hand continuity	- از طرف چپ
right - hand continuity	- از طرف راست
continuous	پیوسته
function	تابع
greatest integer function	- بزرگترین عدد صحیح
price function	- بها
continuous function	- پیوسته
tangent function	- تانژانتی
power function	- توانی
constant function	- ثابت
algebraic function	- جبری
polynomial function	- چند جمله ای
linear function	- خطی
total revenue function	- درآمد کل
quadratic function	- درجه دوم
cubic function	- درجه سوم
even function	- زوج
secant function	- سکانتی
total profit function	- سود کل
marginal profit function	- سود نهایی
sine function	- سینوسی
odd function	- فرد
cotangent function	- کتانژانتی
cosecant function	- کسکانتی
cosine function	- کسینوسی

inverse cosine function	- کسینوسی معکوس
inverse hyperbolic cosine function	- کسینوس هیپر بولیک معکوس
rational function	- گویا
logarithmic function	- لگاریتمی
natural logarithmic function	- لگاریتمی طبیعی
transcendental function	- متعالی
trigonometric function	- مثلثاتی
inverse trigonometric function	- مثلثاتی معکوس
composite function	- مرکب
inverse function	- معکوس
exponential function	- نمایی
total cost function	- هزینه کل
average cost function	- هزینه متوسط
marginal cost function	- هزینه نهایی
identity function	- همانی
hyperbolic function	- هیپر بولیک
tractrix	تراکتریس
difference	تفاضل
subtraction	تفریق
symmetry	تقارن
demand	تقاضا
approximate	تقریب کردن
concavity	تقعر
exercise	تمرین
review exercises	تمرینهای مروری
periodicity	تناوب
periodic	تناوبی

power	توان
empty	تهی
constant	ثابت
constant of integration	- انتگرال گیری
gravity	ثقل
element	جزء (← عنصر)
rectangular element of area	جزء مستطیلی سطح
solid	جسم
solid of revolution	- دوار
addition	جمع
solution	جواب (← حل)
complete solution	- عمومی
polynomial	چند جمله‌ای
product	حاصلضرب
volume	حجم
limit	حد
upper limit	- بالا
undirected limit	- بدون جهت
infinite limit	- بینهایت
lower limit	- پایین
left-hand limit	- چپ
limit at infinity	- در بینهایت
two-sided limit	- دوطرفه

right-hand limit	— راست
one-sided limit	— يك طرفه
rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط
calculus	حساب دیفرانسیل و انتگرال
real	حقیقی
conclusion	حکم
solution	حل (← جواب)
quotient	خارج قسمت
two-parameter family	خانواده دو پارامتری
one-parameter family	خانواده يك پارامتری
line	خط
real numbers line	— اعداد حقیقی
secant line	— قاطع
normal line	— قائم
tangent line	— مماس
linear	خطی
circle	دایره
point-circle	دایره - نقطه
marginal revenue	درآمد نهایی
real numbers system	دستگاه اعداد حقیقی
rectangular cartesian coordinates system	دستگاه مختصات دکارتی قائم
period	دوره تناوب
differential	دیفرانسیل
differentiation	— گیری (← مشتق گیری)

vertex	رأس
quadrant	ربع
perfect competition	رقابت کامل
upward	رو به بالا
downward	رو به پایین
method	روش
cylindrical shell method	- پوسته استوانه‌ای
circular ring method	- حلقه مستدیری
circular disk method	- قرص مستدیری
angle	زاویه
angle of inclination	- میل
even , pair	زوج
ordered pair	- مرتب
subset	زیر مجموعه
speed , velocity	سرعت (← مقدار سرعت)
instantaneous velocity	- لحظه‌ای
parabola	سهمی
paraboliod of revolution	سهمیوار دوار
accelaration	شتاب
inslantaneous accelaration	- لحظه‌ای
initial conditions	شرایط اولیه
boundary conditions	شرایط مرزی

monopolist	صاحب انحصار
increasing	صعودی
plane	صفحه
number plane	- اعداد
form	صورت
two-point form	- دو نقطه‌ای
center - radius form	- شعاع - مرکزی
slop - intercept form	- ضریب زاویه - عرض از مبدأ
intercept form	- طول و عرض از مبدأ
point - slope form	- نقطه - ضریب زاویه‌ای
antiderivative	ضد مشتق
antidifferentiation	ضد مشتق گیری ، ضد دیفرانسیل گیری
multiplication	ضرب
slope	ضریب زاویه [شیب]
inilial side of an angle	ضلع اول زاویه
terminal side of an angle	ضلع دوم زاویه
loop	طوق
abcsissa	طول
x - intercept of a line	- از مبدأ خط
terminating decimal	عدد اعشاری پایاندار
critical number	عدد بحرانی
integer number	عدد صحیح
ordinate	عرض
y.- intercept	- از مبدأ

reciprocal	عکس
integral sign	علامت انتگرال
set - builder notation	علامت مجموعه ساز
element	عنصر (← جزء)
distance	فاصله
odd	فرد
hypothesis	فرض
formula	فرمول
secant	قاطع
rule	قاعده
trapezoidal rule	- دوزنقه ای
chain rule	- زنجیری
simpson's rule	- سیمپسون
hooke's law	قانون هوک
vertical, rectangular	قائم (← مستطیلی)
absolute value	قدر مطلق
negative	قرینه (← منفی)
theorem	قضیه
squeeze theorem	- افشردگی
fundamental theorem of calculus	- بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال
inverse function theorem	- تابع معکوس
rolle's theorem	- رول
mean value theorem	- مقدار میانگین
intermediate value theorem	- مقدار میانی
uniqueness theorem	- یکتایی

domain	قلمرو
arc	قوس
rectifiable arc	- راستیدنی
work	کار
fraction	کسر
total	کل
completeness	کمال
irrational	گنگ
rational	گویا
instantaneous	لحظه‌ای
logarithmic	لگاریتمی
absolute maximum	ماکسیم مطلق
origin	مبدأ
equal	متساوی
transcendental	متعالی
variable	متغیر
variables separable	- های جداشدنی
independent variable	- وابسته
dependent variable	- مستقل
symmetric	متقارن
average	متوسط
example	مثال
positive	مثبت

triangle	مثلث
asymptote	مجانِب
horizontal asymptote	- افقی
vertical asymptote	- قائم
sum	مجموع
riemann sum	- ریمانی
set	مجموعه
empty set	- تهی
solution set	- جواب
axis	محور
x axis	- x ها
y axis	- y ها
axis of revolution	- دوران
coordinate axes	- های مختصات
x coordinate	مختص x
y coordinate	مختص y
coordinates	مختصات
rectangular cartesian coordinates	- دکارتی قائم
boundary	مرز
center	مرکز
rectangular	مستطیلی (← قائم)
independent	مستقل
rectilinear	مستقیم الخط
derivative	مشتق
n th derivative	- n م
differentiable	- پذیر
derivative from the left	- چپ

derivative from the right	- راست
third derivative	- سوم
differentiation	مشتق گیری (← دیفرانسیل گیری)
implicit defferentiation	- ضمنی
logarithmic deffentiation	- لگاریتمی
absolute	مطلق
equation	معادله
linear equation	- خطی
defferential equation	- دیفرانسیل
equation of a graph	- يك نمودار
inverse	معکوس
value	مقدار
speed	- سرعت
absolute maximum value	- ماكسیمم مطلق
relative maximum value	- ماكسیمم نسبی
average value	- متوسط
absolute minimum value	- مینیمم مطلق
relative minimum value	- مینیمم نسبی
concave	مقعر
section	مقطع
plane section	- مسطح
rectangular parallelepiped	مکعب مستطیل
curve	منحنی [خم]
total revenue curve	- درآمد کل
marginal revenue curve	- درآمد نهایی
plane curve	- مسطح
catenary	- زنجیری

negative	منفی (← قرینه)
intermediate	میانی
absolute minimum	مینیمم مطلق
essential discontinuity	ناپیوستگی اساسی
removable discontinuity	ناپیوستگی رفع شدنی
discontinuous	ناپیوسته
infinite	نامتناهی (← بینهایت)
inequality	نامساوی
triangle inequality	— مثلثی
indefinite	نامعین
nonnegative	نامنفی
corrollary	نتیجه
effective rate	نرخ مؤثر
decreasing	نزولی
relative	نسبی
point	نقطه
endpoint	— انتهایی
point of inflection	— عطف
notation	نماد [علامت]
sigma notation	نماد گذاری سیگما
rational exponent	نمای گویا
graph	نمودار
illustration	نمونه
norm	نورم
marginal	نهای
half - life	نیم عمر

dependent	وابسته
standard position	وضعیت استاندارد
overhead cost	هزینه عمومی
average cost	هزینه متوسط
identity	همانی (← اتحاد)
smooth	هموار
analytic geometry	هندسه تحلیلی
one - to - one	یک به یک
uniqueness	یکتایی
monotonic	یکنوا

فهرست راهنما

آزمون	اعداد
— مشتق اول برای اکستریمهای نسبی ۳۷۲ — مشتق دوم برای اکستریمهای نسبی ۳۸۵ آزمونهایی برای تقارن ۲۷ آهنگ لحظه‌ای تغییر ۲۷۳ آهنگ نسبی تغییر ۲۷۶	— حقیقی و نامساویها ۱ — صحیح ۲ — گنگ ۲ — گویا ۲ اصل — موضوع ۱ — کمال ۶ افراز ۵۲۷ — منظم ۵۳۳ اکستریم نسبی ۳۳۷ انتگرال — پذیری روی يك بازه بسته ۵۳۰ — گیری ۵۶۹ — تقریبی ۵۷۸ — معین ۵۲۶، ۵۳۱ — نامعین ۵۳۱، ۵۶۹ انتگران ۵۳۱ انحصار ۴۳۳
اتحاد ۹۰ اثبات — قاعده زنجیری ۲۸۹ — قضیه ۲ ارتفاع استوانه ۶۳۱ استوانه قائم ۶۳۰ استوانه مستدیر قائم ۶۳۱ اضلاع زاویه ۸۶ اعداد اعشاری — بی‌پایان با جزء تکراری ۲ — بی‌پایان بدون جزء تکراری ۲ — پایاندار ۲	

- اندازه ۵۱۵
- مساحت يك ناحیه ۵۱۸
- اندیس مجموع گیری ۵۱۱
- انعکاس نمودار ۶۶۸
- انعکاس يك نقطه ۶۶۸
- بازه
- باز ۷
- بسته ۷
- نیمه باز ازطرف چپ ۷
- نیمه باز ازطرف راست ۷
- بینهایت مثبت ۱۴۲
- بینهایت منفی ۱۴۳
- پیوستگی
- ازطرف چپ دريك عدد ۱۹۵
- ازطرف راست دريك عدد ۱۹۵
- دريك عدد ۱۷۴
- روی يك بازه ۱۹۴
- تابع ۶۳
- بزرگترین عدد صحیح ۷۱
- بها ۴۲۶
- تانژانت هیپر بوليك ۸۰۵
- معكوس ۸۱۷
- تانژانتی ۷۴۸
- معكوس ۷۸۰
- تناوبی ۹۱
- ثابت ۸۰
- خطی ۸۱
- درآمد كل ۴۲۸
- درآمد نهایی ۴۲۸
- درجه سوم ۸۱
- زوج ۷۹
- سکانت هیپر بوليك ۸۰۵
- معكوس ۸۱۸
- سکانتی ۷۴۸
- معكوس ۷۸۲
- سود كل ۴۳۰
- سود نهایی ۴۳۰
- سینوس هیپر بوليك ۸۰۴
- معكوس ۸۱۵
- سینوسی ۸۶، ۸۹
- معكوس ۷۷۶
- صعودی ۳۷۰
- فرد ۷۹
- کتانژانت هیپر بوليك ۸۰۵
- معكوس ۸۱۷
- کتانژانتی ۷۴۸
- معكوس ۷۸۱
- کسکانت هیپر بوليك ۸۰۵
- معكوس ۸۱۷
- کسکانتی ۷۴۸
- معكوس ۷۸۱

- تفریق دو عدد حقیقی ۱
- تقارن
- دو نقطه نسبت به يك خط ۲۶
- دو نقطه نسبت به نقطه سوم ۲۶
- تقسیم دو عدد حقیقی ۱
- تقریر نمودار ۳۹۹، ۴۰۰
- تناوب ۹۱
- توابع
- مثلاثی معکوس ۷۷۵
- و نمودار آنها ۶۳
- هیپر بولیک ۸۰۴
- معکوس ۸۱۵
- ثابت انتگرال گیری ۵۶۹
- جمع دو عدد حقیقی ۱
- جواب عمومی ۴۸۴
- چند قضیه در مورد مشتق گیری از توابع جبری
- ۲۵۷ - ۲۶۴
- حاصلضرب دو تابع ۷۷
- حاصلضرب دو عدد حقیقی ۱
- حجم جسم دوار ۶۱۲
- حجم جسمی که دارای مقاطع مسطح متوازی
- معلوم است ۶۳۰
- حد
- بالای انتگرال ۵۳۱
- بالای مجموع ۵۱۱
- کسینوس هیپر بولیک ۸۰۴
- معکوس ۸۱۶
- کسینوسی ۸۹
- معکوس ۷۷۷
- گویا ۸۱
- لگاریتمی درباره a ۷۲۴
- لگاریتمی طبیعی ۶۸۸، ۶۹۰
- متعالی ۸۱
- مرکب ۷۸
- نزولی ۳۷۱
- نمایی ۷۰۸
- نمایی درباره a ۷۲۱
- هزینه کل ۴۲۰
- هزینه متوسط ۴۲۰
- هزینه نهایی ۴۲۰
- همانی ۸۱
- هموار ۶۴۹
- يك به يك ۶۶۱
- يكنوا ۳۷۱
- تراکتريس ۸۲۷
- تساوی مجموعه ها ۳
- تعریف
- مقدار ما کسیمم نسبی ۳۳۶
- مقدار متوسط تابع بريك بازه ۵۵۹
- مقدار مینیمم نسبی ۳۳۶
- نقطه عطف ۴۰۴
- تفاضل توابع ۷۷

- دیفرانسیل ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸
- رقابت کامل ۴۳۱
- روش
- پوسته استوانه‌ای ۶۲۴
- حلقه مسدیری ۶۱۲
- قرص مستدیری ۶۱۲
- زاویه ۸۶
- بین دو منحنی ۷۶۴
- میل ۷۶۰
- زیر مجموعه ۲
- سرعت لحظه‌ای ۲۶۹
- سهمی ۲۲
- رأس - ۲۲
- محور - ۲۲
- شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل ۴۸۶
- شرایط مرزی معادلات دیفرانسیل ۴۸۶
- شعاع دایره ۳۴
- صاحب انحصار ۴۳۳
- صورت
- دو نقطه‌ای معادله خط ۵۰
- ضریب زاویه - عرض از مبدأ معادله خط ۵۱
- طول و عرض از مبدأ معادله خط ۵۲
- نقطه - ضریب زاویه‌ای معادله خط ۵۰
- بایین انتگرال ۵۳۱
- بایین مجموع ۵۱۱
- تابع ۱۰۴
- در بینهایت ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸
- دو طرفه (حد بدون جهت) ۱۳۳
- های بینهایت ۱۴۰
- های يك طرفه ۱۳۲
- يك طرفه از چپ (یا حد چپ) ۱۳۳
- يك طرفه از راست (یا حد راست) ۱۳۲
- حرکت هماهنگ ساده ۸۰۳، ۳۱۸
- حکم قضیه ۲
- خانواده دو پارامتری از توابع ۴۸۷
- خانواده يك پارامتری از توابع ۴۸۴
- خارج قسمت توابع ۷۷
- خط
- اعداد حقیقی ۶
- قاطع ۲۲۹
- ماس ۲۲۸، ۲۳۰
- خواص انتگرال معین ۵۴۰
- دایره ۳۸
- دایره - نقطه ۳۸
- درآمد نهایی ۴۲۸
- دستگاه اعداد حقیقی ۱
- دستگاه مختصات دکارتی قائم ۲۰
- دوره تناوب ۹۱

— فاصله، دایره، و نقطه وسط يك پاره خط

۳۰ - ۳۳

قاعده

— استوانه ۶۳۱

— ذوزنقه ای ۵۸۱

— زنجیری برای مشتق گیری ۲۸۸

— زنجیری برای ضد مشتق گیری ۴۶۶

— سیمپسون (قاعده سهموی) ۵۸۴، ۵۸۷

قانون

— آدیاباتیک ۷۴۵

— بویل ۲۸۵، ۷۴۵

— رشد طبیعی ۷۳۱

— زوال طبیعی ۷۳۱

— هوك ۶۴۰

قدر مطلق ۱۱

قرینه ۱

قضایای درباره پیوستگی ۱۸۲، ۱۹۲

قضایای مربوط به حد توابع ۱۱۷، ۱۲۱

قضیه ۲

— افشودگی و $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ ۲۰۴

— اکسترم ۳۴۵

— باقیمانده درجبر ۳۲۴

— بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۵۵۶، ۵۶۴، ۵۶۷

— رول ۳۶۱، ۳۶۰

— مقدار میانگین ۳۶۰، ۳۶۳

— برای انتگرالها ۵۵۶

— شعاع - مرکزی معادله دایره ۳۷

— کلی معادله دایره ۳۷

ضد دیفرانسیل گیری ۴۶۳

ضد مشتق گیری ۴۶۱

— از توانهای سینوس و کسینوس ۴۷۵

— و حرکت مستقیم الخط ۴۹۲

ضرب دو عدد حقیقی ۱

ضرب زائویه خط ۴۷

ضلع

— اول زائویه ۸۶

— دوم زائویه ۸۶

طول از مبدأ ۵۱

طول (مختص x) ۲۰

طول قوس يك منحنی مسطح ۶۴۷

عدد بحرانی ۳۳۹

عدد متعالی ۷۱۰

عرض (مختص y) ۲۰

عرض از مبدأ ۵۱

علامت انتگرال ۵۳۱

علامت مجموعه ساز ۳

عمل ضد مشتق گیری ۴۶۱

عناصر مجموعه ۲

فرض قضیه ۲

فرمول

— منشور واری ۵۹۱

- مقدار میانی ۱۹۷
- های تابع معکوس ۶۷۷، ۶۷۹
- یکتایی حد ۱۱۴
- قلمرو ۶۳
- قوس راستیدنی ۶۴۹
- کار ۶۳۷
- کاربرد مشتق در علم اقتصاد ۴۲۰
- کاربردهایی از اکستریم مطلق بزرگ بازه
- بسته ۳۵۵، ۳۵۷
- کسر ۲
- متغیر ۶۳
- مستقل ۶۳
- وابسته ۶۳
- مجانبات افقی نمودار تابع ۱۶۴
- مجانبات قائم نمودار تابع ۱۵۳
- مجموع
- توابع ۷۷
- دو عدد حقیقی ۱
- ریمانی ۵۲۷
- مجموعه ۲
- تهی ۳
- جواب ۸
- محاسبه سود به طور پیوسته ۷۳۸
- محور
- x ها ۱۹
- y ها ۱۹
- دوران ۶۱۲
- های مختصات ۲۱
- مختصات دکارتی قائم ۲۰
- مساحت ۵۱۰
- یک ناحیه در یک صفحه ۵۹۹
- مشتق ۲۳۶
- n ۳۱۱
- اول ۳۱۱
- به عنوان آهنگ تغییر ۲۶۷
- پذیرد در یک عدد ۲۴۲
- پذیرد روی یک بازه ۲۴۲
- پذیرد و پیوستگی ۲۴۵
- تابع توانی ۲۶۴
- برای نمای گویا ۲۹۷
- تابع مرکب ۲۸۸
- توابع سینوسی و کسینوسی ۲۸۱
- حاصلضرب دو تابع ۲۶۲
- حاصلضرب یک عدد ثابت در یک تابع ۲۵۹
- خارج قسمت دو تابع ۲۶۳
- دوم ۳۱۱
- راست تابع در یک عدد ۲۴۸
- عدد ثابت ۲۵۸
- مجموع دو تابع ۲۶۰
- یک طرفه ۲۴۸
- مشتق گیری ۲۵۷
- ضمنی ۳۰۴

- لگاریتمی ۷۰۴
- زنجیری ۸۱۰
- مشتقهای توابع مثلثاتی ۷۸۷
- مشتقهای مراتب بالاتر ۳۱۱
- معادلات خط ۴۶
- معادلات دیفرانسیل بامتغیرهای جدا شدنی ۴۸۳
- معادله ۴۸۳
- تقاضا ۴۲۶
- خطی ۵۳
- دیفرانسیل ۴۸۳
- یک نمودار ۲۶
- معکوس یک تابع ۶۶۰
- مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع ۳۳۵
- مقدار ۵۵۸
- ماکسیمم مطلق روی قلمرو ۳۴۴
- ماکسیمم مطلق روی یک بازه ۳۴۰
- میانگین (مقدار متوسط) تابع بر یک بازه ۵۵۸
- مینیمم مطلق روی قلمرو ۳۴۴
- مینیمم مطلق روی یک بازه ۳۴۰
- مقطع مسطح ۶۳۰
- مکان هندسی ۲۱
- مکعب مستطیل ۶۳۱
- منحنی ۴۲۷
- تقاضا ۴۲۷
- در آمدکل ۴۳۹
- در آمدنهایی ۴۲۹
- ناپیوستگی
- اساسی ۱۷۸
- تابع در یک عدد ۱۷۴
- رفع شدنی ۱۷۷
- نامساوی ۴
- مثلثی ۱۶
- نرخ مؤثر ۷۳۹
- نقاط
- انتهایی بازه ۸
- عطف نمودار ۳۹۹
- نماد گذاری سیگما ۵۱۰
- نمودار تابع ۶۴
- نمودار یک معادله در R^2 ۲۲
- نورم افراز ۵۲۷
- نیمممر ۷۳۳
- وضعیت استاندارد ۸۶
- هزینه
- عمومی ۴۲۱
- متوسط ۴۲۰
- نهایی ۴۲۰
- یک زوج مرتب از اعداد حقیقی ۱۹
- یک نقطه از صفحه ۱۹

مرکز نشر دانشگاهی

www.iup.ir

شابک: ۹۶۴-۰۱-۸۰۱۳-۰

۴۳۰۰ تومان