

لوئیس لیتهلد



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی

جلد اول
(قسمت اول)

ترجمہ مہدی بہزاد، محسن رزاقی،
سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول
(قسمت اول)

لویس لیتهد

ترجمه

مهدی بهزاد، محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی



The Calculus with Analytic Geometry

Louis Leithold

Fourth Edition

Harper & Row, 1981

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول قسمت اول

تألیف لوئیس لیتهلد

ترجمه دکتر مهدی بهزاد، دکتر محسن رزاقی، سیامک کاظمی، اسلام ناظمی

ویراسته دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی

مرکز نشر دانشگاهی

چاپ اول ۱۳۶۵

چاپ بیست و چهارم ۱۳۸۶

تعداد ۱۵۰۰۰

لیتوگرافی: بهزاد

چاپ و صحافی: وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، سازمان چاپ و انتشارات

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Leithold, Louis

لیتهلد، لوئیس

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی / لوئیس لیتهلد؛ ترجمه مهدی بهزاد ... [و دیگران]. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵ - ۱۳۷۵.

۲ ج. مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۲۶۱، ۶۳۱. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۲۴، ۸۳)

ISBN 978-964-01-8049-5 (دوره)

ISBN 978-964-01-0261-9 (ج. ۱ ق. ۱)

ISBN 978-964-01-8013-6 (ج. ۱ ق. ۲)

ISBN 978-964-01-0323-4 (ج. ۲ ق. ۱)

ISBN 978-964-01-0631-0 (ج. ۲ ق. ۲)

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

The calculus with analytic geometry.

عنوان اصلی:

واژه نامه.

نمایه.

ج. ۱ ق. ۱ (چاپ بیست و چهارم: ۱۳۸۶).

۱. حساب دیفرانسیل. ۲. حساب انتگرال ۳. هندسه تحلیلی. الف. بهزاد، مهدی، ۱۳۱۵ -

، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.

۵۱۵/۱۵

QA۳۰۳/۹ ح ۵

۱۳۶۵

*۱۸۷ - ۶۶۶

کتابخانه ملی ایران

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار مترجمان	۴
پیشگفتار مؤلف	۵
۱ اعداد حقیقی، آشنایی با هندسه تحلیلی، و توابع	
۱.۱ اعداد حقیقی و نامساویها	۱
۲.۱ صفحه اعداد و نمودار معادلات	۱۹
۳.۱ فرمول فاصله و فرمولهای دایره و نقطه وسط يك پاره خط	۳۵
۴.۱ معادلات خط	۴۶
۵.۱ توابع و نمودار آنها	۶۳
۶.۱ نماد تابع، اعمال روی توابع، انواع توابع	۷۵
۷.۱ توابع سینوسی و کسینوسی	۸۶
تمرینهای مروری فصل ۱	۹۹
۲ حد و پیوستگی	
۱.۲ حد تابع	۱۰۴
۲.۲ قضایای مربوط به حد توابع	۱۱۷
۳.۲ حدهای يك طرفه	۱۳۲
۴.۲ حدهای بینهایت	۱۴۵

صفحه	عنوان
۱۵۶	۵.۲ حد در بینهایت
۱۷۳	۶.۲ پیوستگی تابع در يك عدد [نقطه]
۱۸۲	۷.۲ قضایای درباره پیوستگی
۱۹۲	۸.۲ پیوستگی روی يك بازه
۲۰۲	۹.۲ قضیه افشردگی و $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t}$
۲۱۵	۱۰.۲ قضایای دیگری درباره حد
۲۲۲	تمرینهای مروری فصل ۲
	۳ مشتق
۲۲۸	۱.۳ خط مماس
۲۳۶	۲.۳ مشتق
۲۴۵	۳.۳ مشتق پذیری و پیوستگی
۲۵۷	۴.۳ چند قضیه در مورد مشتق گیری از توابع جبری
۲۶۷	۵.۳ مشتق به عنوان آهنگ تغییر
۲۸۱	۶.۳ مشتق توابع سینوسی و کسینوسی
۲۸۸	۷.۳ مشتق تابع مرکب
۲۹۷	۸.۳ مشتق تابع توانی، برای نمای گویا
۳۰۴	۹.۳ مشتق گیری ضمنی
۳۱۱	۱۰.۳ مشتقهای مرتبه بالاتر
۳۱۹	تمرینهای مروری فصل ۳
	۴ کاربردهای مشتق
۳۲۶	۱.۴ آهنگهای وابسته
۳۳۵	۲.۴ مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع
۳۵۰	۳.۴ کاربردهای از اکستریم مطلق بر يك بازه بسته
۳۶۰	۴.۴ قضیه رول و قضیه مقدار میانگین
۳۷۰	۵.۴ توابع صعودی و نزولی و آزمون مشتق اول

۳۷۹	۶.۴ آزمون مشتق دوم برای اکستریمهای نسبی و بررسی بیشتر اکستریمهای مطلق
۳۹۰	۷.۴ کاربردهای دیگری از اکستریمهای مطلق
۳۹۹	۸.۴ تقعر و نقاط عطف
۴۱۳	۹.۴ کاربرد در رسم نمودار تابع
۴۲۰	۱۰.۴ کاربرد مشتق در علم اقتصاد
۴۳۹	تمرینهای مروری فصل ۴

۵ دیفرانسیل و ضد مشتق گیری

۴۴۶	۱۰.۵ دیفرانسیل
۴۶۱	۲۰.۵ عمل ضد مشتق گیری
۴۷۵	۳۰.۵ ضد مشتق گیری از توانهای سینوس و کسینوس
۴۸۳	۴۰.۵ معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا شدنی
۴۹۲	۵۰.۵ ضد مشتق گیری و حرکت مستقیم الخط
۴۹۸	۶۰.۵ کاربردهای از ضد مشتق گیری در علم اقتصاد
	تمرینهای مروری فصل ۵

۶ انتگرال معین

۵۱۰	۱۰.۶ مساحت
۵۲۶	۲۰.۶ انتگرال معین
۵۴۰	۳۰.۶ خواص انتگرال معین
۵۵۵	۴۰.۶ قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها
۵۶۳	۵۰.۶ قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۵۷۸	۶۰.۶ انتگرال گیری تقریبی
۵۹۲	تمرینهای مروری فصل ۶

۷ کاربردهای انتگرال معین

۵۹۹	۱۰.۷ مساحت يك ناحیه در يك صفحه
-----	--------------------------------

صفحه	عنوان
۶۱۲	۲.۷ حجم يك جسم دوار : روشهای قرص مستدیری و حلقه مستدیری
۶۲۴	۳.۷ حجم يك جسم دوار : روش پوسته استوانه‌ای
۶۳۰	۴.۷ حجم جسمی که دارای مقاطع مسطح متوازی معلوم است
۶۳۷	۵.۷ کار
۶۴۷	۶.۷ طول قوس يك منحنی مسطح
۶۵۶	تمرینهای مروری فصل ۷
	۸ توابع معکوس، توابع لگاریتمی، و توابع نمایی
۶۶۰	۱.۸ معکوس يك تابع
۶۷۶	۲.۸ قضیه‌های تابع معکوس و مشتق معکوس يك تابع
۶۸۸	۳.۸ تابع لگاریتمی طبیعی
۷۰۳	۴.۸ مشتق گیری لگاریتمی، و انتگرالهایی که تابع لگاریتمی طبیعی را به دست می‌دهند
۷۰۸	۵.۸ تابع نمایی
۷۲۱	۶.۸ توابع نمایی و لگاریتمی دیگر
۷۳۰	۷.۸ قوانین رشد و زوال
۷۴۲	تمرینهای مروری فصل ۸
	۹ توابع مثلثاتی و هیپربولیک
۷۴۸	۱.۹ توابع تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی، و کسکانتی
۷۶۰	۲.۹ کاربرد از تابع تانژانتی در محاسبه ضریب زاویه يك خط
۷۶۷	۳.۹ انتگرالهای متضمن تانژانت، کتانژانت، سکانت، و کسکانت
۷۷۵	۴.۹ توابع مثلثاتی معکوس
۷۸۷	۵.۹ مشتقهای توابع مثلثاتی معکوس
۷۹۶	۶.۹ انتگرالهایی که توابع مثلثاتی معکوس را به دست می‌دهند
۸۰۴	۷.۹ توابع هیپربولیک
۸۱۵	۸.۹ توابع هیپربولیک معکوس
۸۲۳	تمرینهای مروری فصل ۹

۸۳۱	جدول ۱ توانها وریشه‌ها
۸۳۲	جدول ۲ لگاریتمهای طبیعی
۸۳۴	جدول ۳ توابع نمایی
۸۴۱	جدول ۴ توابع هیپر بولیک
۸۴۲	جدول ۵ توابع مثلثاتی
۸۴۳	جدول ۶ لگاریتمهای معمولی
۸۴۵	جدول ۷ القبای یونانی
۸۴۶	جداول واحدهای فیزیکی
۸۵۴	جدولی از مشتقها
۸۵۵	جدولی از انتگرالها
۸۶۵	پاسخ تمرینهای با شماره فرد
۹۴۴	واژه‌نامه انگلیسی - فارسی
۹۵۸	واژه‌نامه فارسی - انگلیسی
۹۷۲	فهرست راهنما

بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مترجمان

ترجمه ویرایش چهارم کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی تألیف لوئیس لیتل در دو جلد تقدیم خوانندگان فارسی زبان می‌شود. جلد نخست که شامل نه فصل اول کتاب است، تقریباً تمام مواد مصوب ریاضیات عمومی ۱ برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی را دربردارد و به صورت کتابی کامل همراه با واژه‌نامه‌ها، جدول‌ها، پاسخ تمرین‌ها و فهرست راهنما ارائه شده است. جلد دوم که آماده چاپ است، یازده فصل باقیمانده کتاب را دربر دارد و آن هم ملحقات ضروری را به طور جداگانه خواهد داشت.

در زمینه حساب دیفرانسیل و انتگرال، به زبانهای مختلف و با سبکها و دیدگاههای گوناگون، کتابهای متعددی نوشته شده است. کتاب لیتل به دلایلی بسیار، از جمله تنوع مسائل کاربردی و درعین حال دقت ریاضی آن، یکی از بهترین کتابها در این زمینه است. در ترجمه، تأکید ما بر دقت، وضوح، و حفظ سبک نویسنده بوده است و بنا بر این ممکن است در مواردی زیبایی بیان را فدای این اهداف کرده باشیم، و گساره نیز جملات کلیشه‌ای متداول را به کار گرفته‌ایم.

با اعتقاد به لزوم یکسان‌سازی واژه‌های ریاضی، اصطلاحات را عمدتاً از واژه‌نامه انجمن ریاضی ایران گرفته‌ایم. در متن، واحدهای فیزیکی را همراه با نام کامل آنها با حروف فارسی نوشته‌ایم و در شکلها، به دلایل فنی، نام اختصاری آنها را به حروف لاتین ذکر کرده‌ایم. چند جدول تبدیل واحدها نیز در پیوست آمده‌اند.

در پایان، از همه کسانی که در به ثمر رسیدن این کار ما را یاری داده‌اند صمیمانه تشکر می‌کنیم و از استادان، دانشجویان و همه اهل فن انتظار داریم جهت ارائه هر چه بهتر چاپهای بعدی، کاستیها و نارساییها را مستقیماً، و یا از طریق مرکز نشر دانشگاهی، به ما اطلاع دهند.

پیشگفتار مؤلف

ویرایش چهارم کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، مانند سه ویرایش پیشین آن، هم برای دانشجویانی که رشته اصلی آنها ریاضیات است و هم برای دانشجویانی که علاقه آنان به مهندسی، علوم طبیعی و اجتماعی و یا رشته‌های غیر فنی است تدوین شده است؛ پیشنهاد آن احاطه بر جبر و هندسه دبیرستانی است.

این متن هم در یک جلد و هم در دو قسمت عرضه شده است. قسمت I شامل ۱۵ فصل اول و قسمت II متضمن فصل‌های ۱۵ تا ۲۰ است. فصل پانزدهم، در باره سریهای متناهی، در هر دو قسمت آمده است تا جلد دوم از مجموعه دوجلدی بیشتر قابل استفاده باشد. مطالب قسمت I مرکب از حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیری و هندسه تحلیلی مسطحه است که می‌تواند در یک نظام نیمسال، ۹ یا ۱۰ واحد، و در یک نظام کوادرتی، ۱۲ واحد درسی، برای یک سال باشد. قسمت II برای ۵ یا ۶ واحد در نظام نیمسال یا ۸ واحد در نظام کوادرتی مناسب است و شامل حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیری و بحثی از بردارهای واقع در صفحه و در فضای سه بعدی، و نیز هندسه تحلیلی فضایی با روش برداری است.

هدفهای ویرایشهای قبلی در این ویرایش نیز مد نظر بوده‌اند. کوشیده‌ام در عرضه حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بین نگرش دقیق و نگرش قدیمی، کسه شهودی و محاسباتی است، تعادل سالمی برقرار کنم. با در نظر داشتن این نکته که کتاب درسی را باید برای دانشجو نوشت، سعی کرده‌ام مطالب را در سطح تجربه و رشد فکری دانشجو ارائه دهم و هیچ مرحله‌ای را بدون توضیح نگذارم یا حذف نکنم. مایلم خواننده بداند که اثبات قضایا لازم‌اند. در مورد اثباتها باید انگیزش ذهنی کافی ایجاد شود و توضیح دقیق عرضه گردد تا برای دانشجویانی که مطالب بخشهای قبلی کتاب را در حد متوسطی فرا گرفته‌اند، قابل درک باشند. در مواردی که قضیه‌ای بدون اثبات ارائه شده، بحث را معمولاً هم با شکل و هم با مثال همراه کرده‌ام؛ در این گونه موارد همواره تأکید شده است که آنچه عرضه شده، تجسمی از محتوای قضیه است و نه یک اثبات.

دگرگونیهای این ویرایش نسبت به ویرایشهای قبلی را در سراسر متن می توان دید و در پاراگرافهای بعدی آنها را شرح می دهیم. اینک در کتاب بیش از ۶۸۰۰ تمرین وجود دارد که تجدید نظر و درجه بندی شده اند تا انبوهی از انواع گوناگون تمرینها - از محاسباتی تا مسائل کاربردی و نظری - فراهم آید. در میان بیش از ۲۰۰۰ تمرین تازه، هم تمرینهای مقدماتی اضافی و هم تمرینهای مربوط به واحدهای اندازه گیری متری آورده شده اند.

فصل ۱، مطالب اساسی درباره دستگاه اعداد حقیقی را دربر دارد و در مقایسه با ویرایشهای قبلی از تفصیل کمتری برخوردار است. بخش آشنایی با هندسه تحلیلی این فصل، شامل مطالب سنتی مربوط به خطوط مستقیم و دایره است. مفهوم تابع در بخش ۵.۱ عرضه شده است. تابع را به صورت مجموعه ای از زوجهای مرتب تعریف کرده و از این ایده برای اشاره به مفهوم یک تابع به عنوان یک تناظر بین مجموعه های اعداد حقیقی، سود برده ام. تعاریف توابع سینوسی و کسینوسی را جلو تر آورده و به بخش ۷.۱ منتقل کرده ام. این معرفی زودتر، امکان داده است که از آنها در فصلهای ۳ و ۵ جهت ارائه مثالهایی از مشتق گیری و ضد مشتق گیری توابع غیر جبری استفاده کنم.

بحث حد و پیوستگی را در فصل ۲ مطرح کرده ام و اکنون در همین یک فصل، این بحث کامل است. این مباحث به عنوان هسته اصلی نخستین درس در حساب دیفرانسیل و انتگرال محسوب می شوند؛ تصور حد یک تابع به طور گام به گام در ذهن خواننده به وجود می آید؛ از طریق تعبیر شهودی فرایند حد گیری، بحث از محاسبه مقدار یک تابع در نزدیکی یک عدد آغاز، و به یک تعریف دقیق اپسیلون-دلتای منجر می شود.

یک رشته مثال که به تدریج پیچیده تر می شوند، به این فصل منضم شده است. تمام قضایای حدی ذکر، بعضی از اثباتها در متن ارائه شده اند، و رؤوس بقیه اثباتها در تمرینها آمده اند. در بحث پیوستگی، مثالها و مثالهای ناقص را از توابع معمولی روزانه گرفته ام و از مثالهایی که تعبیر شهودی ضعیفی دارند، پرهیز کرده ام.

در فصل ۳، پیش از ارائه تعریف رسمی مشتق، مماس بر یک منحنی را تعریف کرده ام تا کاربرد هندسی مشتق را پیشاپیش نشان داده باشم. کاربرد فیزیکی سرعت لحظه ای در حرکت مستقیم الخط، پس از اثبات قضایای مشتق گیری آورده شده است. قاعده زنجیری در بخش ۷.۳ بیان و اثبات شده است و در آنجا، توابع سینوسی و کسینوسی به عنوان مثالهای این قاعده برای توابع غیر جبری به کار رفته اند. در فصل ۴، کاربردهای سنتی مشتق در مسائل مربوط به آهنگهای وابسته، ماکسیمها، مینیمها، و رسم نمودار، و نیز مسائل بازرگانی و اقتصاد، مطرح می شود.

ضد مشتق در فصل ۵ مورد بررسی قرار می گیرد. اصطلاح ضد مشتق گیری را به جای محاسبه انتگرال نامعین به کار برده ام ولی نماد استاندارد $\int f(x) dx$ را حفظ کرده ام. این نماد یادآور این نکته است که باید رابطه ای بین انتگرالهای معین، که در فصل ۶ معرفی می شوند، و ضد مشتقها وجود داشته باشد. ولی اگر نحوه عرضه مطلب طوری باشد که برداشت نظری صحیحی از انتگرال معین به عنوان حد مجموع القا شود، من عیبی

در آن نمی بینم. در فصل ۵، موضوع معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا شدنی بازنویسی شده و مثالهای تازه ای آورده شده اند.

در فصل ۶، تمرینهایی در مورد محاسبه انتگرالهای معین از طریق یافتن حد مجموع ارائه شده اند تا تأکید شود که این، راه محاسبه آنهاست. معرفی انتگرال معین پس از تعریف مساحت سطح زیر یک منحنی به عنوان حد یک مجموع آمده است. ویژگیهای مقدماتی انتگرال معین استخراج شده اند و قضیه بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال به اثبات رسیده است. در اینجا، تأکید شده است که این قضیه بسیار مهم است زیرا وسیله دیگری برای محاسبه حد مجموع در اختیار ما می گذارد. انتگرال گیری تقریبی بلافاصله پس از قضیه بنیادی عرضه می شود. این مبحث، صورت قضایای مربوط به محاسبه کرانه های خطای موجود در این تقریبات را هم شامل می شود.

در این ویرایش، کاربردهای انتگرال معین در دو فصل آورده شده اند. آنهایی که در فصل ۷ می آیند، شامل مساحت، حجم، طول قوس، و کار هستند. بخش مربوط به کار بازنویسی شده تا بحثی از واحدهای متری را دربرگیرد و مثالها و تمرینهای جدیدی گنجانده شده اند که این واحدها در آنها به کار رفته اند.

مبحث توابع معکوس در فصل ۸، با استفاده از مفهوم تابع یک به یک بازنویسی شده و اکنون به جای یک بخش، در دو بخش قرار گرفته است. در این فصل، توابع لگاریتمی و نمایی از دیدگاه جدید بررسی می شوند. لگاریتم طبیعی به عنوان انتگرال، و تابع نمایی به عنوان معکوس تابع لگاریتمی تعریف می گردد. سپس توان گنگ یک عدد حقیقی تعریف می شود.

توابع تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی و کسکانتی در فصل ۹ تعریف شده اند. اتحادهای مهم مثلثاتی در این فصل استخراج می شوند و برای به دست آوردن فرمولهای مشتق و انتگرال این توابع به کار می روند. بحث مربوط به توابع مثلثاتی در ویرایشهای قبلی حک و اصلاح شده و مبحث توابع هپربولیک به این فصل آورده شده است.

فصل ۱۰، درباره تکنیکهای انتگرال گیری، یکی از مهمترین جنبه های محاسباتی حساب دیفرانسیل و انتگرال را دربر دارد. زمینه نظری هر یک از روشهای گوناگون را پس از یک توجیه مقدماتی، شرح داده ام. تسلط بر تکنیکهای انتگرال گیری به مثال وابسته است، و به عنوان نمونه از مسائلی استفاده کرده ام که دانشجوی مسلماً در عمل با آنها روبرو می شود و حلشان مستلزم شکیبایی و پشتکار است.

بخشهای مربوط به انتگرال معین در فصل ۱۱ بازنویسی شده اند و شامل مثالها و تمرینهای تازه ای درباره تکنیکهای انتگرال گیری هستند که در فصل ۱۰ آموخته می شوند. یک مبحث اضافی در باب واحدهای اندازه گیری متری نیز آمده است.

مختصات قطبی و بعضی از کاربردهای آنها در فصل ۱۲ مطرح شده اند. در فصل ۱۳، مقاطع مخروطی به صورت یک موضوع یکپارچه مورد بحث قرار گرفته اند تا بر ارتباط طبیعی و نزدیکی آنها با یکدیگر تأکید شده باشد. درباره سهمی در دو بخش اول بحث کرده ام. سپس معادلات مقاطع مخروطی در مختصات قطبی آمده اند و معادلات دکارتی بیضی و

هذلولی از معادلات قطبی استنتاج شده‌اند. در این ویرایش، کاربردهای دیگری از سهمی بیضی، و هذلولی اضافه شده است.

مباحث صور مهم، انتگرالهای نامتعارف، فرمول تیلور، و تکنیکهای محاسباتی مربوط به آنها در فصل ۱۴ مطرح می‌شوند. در فصل ۱۵، سهمی کرده‌ام تا آنجا که در یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ممکن است، دربارهٔ سریهای نامتناهی بحث کاملی عرضه کنم. علاوه بر مطالب محاسباتی مرسوم، اثبات هم‌ارزی همگرایی و کرانداری دنباله‌های یکنوا بر اساس ویژگی کمال اعداد حقیقی، و اثبات فرایندهای محاسباتی مربوط به مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سریهای توانی، نیز درج شده‌اند.

اگر استادی بخواهد بر دارها را زودتر معرفی کند، می‌تواند پنج‌بخش اول فصل ۱۶ دربارهٔ بردارهای واقع در صفحه را بعد از فصل ۴ تدریس کند. بردارها را با نگرش جدیدی مطرح کرده‌ام که هم می‌تواند مقدمه‌ای بر نظرگاه جبر خطی باشد و هم مدخلی بر آنالیز برداری کلاسیک. کاربردها در ارتباط با فیزیک و هندسه‌اند. فصل ۱۷ به بردارها در فضای سه بعدی می‌پردازد و در صورت تمایل، مباحث سه‌بخش اول این فصل را می‌توان هم‌زمان با مباحث متناظر در فصل ۱۶ مطالعه کرد.

حد، پیوستگی، و مشتق‌پذیری توابع چند متغیری در فصل ۱۸ بررسی می‌شوند. بحث و مثالها عمدتاً به توابع دو و سه متغیری مربوط‌اند؛ اما صورت بیشتر قضایا و تعاریف، کلی و مربوط به توابع n متغیری هستند.

در فصل ۱۹، بخشی به مشتقات جهتی و گرادیان اختصاص دارد، و پس از آن بخشی می‌آید که کاربرد گرادیان را در پیدا کردن معادلهٔ صفحه مماس بر یک رویه نشان می‌دهد. کاربردهای مشتقهای جزئی در حل مسائل اکسترمم عرضه شده‌اند و بحث مبسوطی از ضرایب لاگرانژ شامل مثالهای تازه و بررسی نظریهٔ این روش آمده است. سه بخش هم به انتگرال منحنی الخط و مباحث مربوط اختصاص دارد.

انتگرال دو گانهٔ توابع دو متغیری و انتگرال سه گانهٔ توابع سه متغیری را همراه با کاربردهایی از آنها در فیزیک، مهندسی، و هندسه، در فصل ۲۰ می‌خوانید. در این ویرایش بخش ۶.۲۰ جدید است. این بخش، شامل مطالبی در باب قضیهٔ گرین و قضیهٔ استوکس در صفحه است.

لوئیس لیتهلد

اعداد حقیقی، آشنایی با هندسه تحلیلی، و توابع

۱.۱ اعداد حقیقی و نامساویها

دستگاه اعداد حقیقی متشکل از مجموعه‌ای از عناصر موسوم به اعداد حقیقی و دو عمل موسوم به جمع و ضرب است. مجموعه اعداد حقیقی با R^1 نشان داده می‌شود. عمل جمع با علامت $+$ و عمل ضرب با علامت $\cdot$ نمایانده می‌شود. اگر a و b عناصر مجموعه R^1 باشند، $a+b$ نشان دهنده مجموع a و b ، و $a \cdot b$ (یا ab) نشان دهنده حاصلضرب آنهاست. عمل تفریق با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$a - b = a + (-b)$$

که در آن $-b$ نمایانگر قرینه b است؛ یعنی $b + (-b) = 0$. عمل تقسیم با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$a \div b = a \cdot b^{-1}$$

که در آن b^{-1} نمایانگر عکس b است؛ یعنی، $b \cdot b^{-1} = 1$.

دستگاه اعداد حقیقی را می‌توان با مجموعه‌ای از اصول موضوع به طور کامل مشخص کرد. (واژه اصل موضوع به یک گزاره صوری اطلاق می‌شود که بدون اثبات، فرض می‌کنیم درست است). با این اصول موضوع، می‌توان خواص اعداد حقیقی را به دست آورد که عملیات آشنای جبری مانند جمع و تفریق و ضرب و تقسیم، و همچنین مفاهیم جبری حل معادلات، تجزیه به عوامل و غیره از آنها نتیجه می‌شوند.

خواصی را که می‌توان نشان داد پیامدهای منطقی اصول موضوع اند، قضیه می‌نامند.

در صورت بیشتر قضا یا دو قسمت وجود دارد: قسمت «اگر»، موسوم به فرض و قسمت «آنگاه» موسوم به حکم. استدلالی که برای درستی قضیه می‌شود، اثبات است. اثبات، عبارت است از اینکه نشان داده شود با قبول درست بودن فرض، حکم از آن نتیجه می‌شود. عدد حقیقی یا مثبت است یا منفی و یا صفر؛ و هر عدد حقیقی را می‌توان در یکی از رده‌های گویا یا گنگ جای داد. عدد گویا، عددی است که به صورت نسبت دو عدد صحیح قابل بیان باشد. به عبارت دیگر، عدد گویا عددی است به صورت p/q که در آن p و q اعدادی صحیح‌اند و $q \neq 0$. اعداد گویا عبارت‌اند از اعداد صحیح (مثبت، منفی، و صفر)

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

کسرهای مثبت و منفی، مانند

$$\frac{2}{7}, -\frac{4}{5}, \frac{83}{5}$$

اعداد اعشاری پایان‌دار مثبت و منفی، مانند

$$2736 = \frac{2736}{100}, -0.003251 = -\frac{3251}{1000000}$$

اعداد اعشاری بی‌پایان با جزء تکراری، مثبت و منفی، مانند

$$0.333\dots = \frac{1}{3}, -0.549549549\dots = -\frac{61}{111}$$

آن اعداد حقیقی که گویا نباشند، اعداد گنگ خوانده می‌شوند. اعداد گنگ عبارت‌اند از اعداد اعشاری بی‌پایان بدون جزء تکراری، مثبت و منفی، مانند

$$\sqrt{3} = 1.732\dots, \pi = 3.14159\dots$$

در بحثی که به دنبال می‌آید، چند نماد و اصطلاح مربوط به مجموعه‌ها را به کار می‌گیریم. مفهوم «مجموعه» در ریاضیات مورد استفاده فراوان دارد، و این مفهوم چنان بنیادی است که تعریفی رسمی برای آن ارائه نمی‌شود. می‌توانیم بگوییم که مجموعه، عبارت است از گردآورده‌ای از اشیاء، و اشیاء واقع در یک مجموعه را عناصر آن مجموعه می‌نامند. اگر هر عنصر مجموعه S عنصری از مجموعه T نیز باشد، S را زیرمجموعه‌ای از T می‌نامیم. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، با مجموعه‌ای اعداد حقیقی، R^1 ، سروکار داریم. دو زیرمجموعه از R^1 عبارت‌اند از مجموعه‌ای اعداد طبیعی، N ، و مجموعه‌ای اعداد صحیح، Z . برای نشان دادن اینکه عنصر مشخصی به یک مجموعه تعلق دارد، از علامت $\in$ استفاده می‌کنیم. از این رو می‌توان نوشت $8 \in N$ ، که خوانده می‌شود «۸ عنصری از N است».

نماد $a, b \in S$ نشان می‌دهد که هر دوی a و b عناصر S هستند. علامت $\notin$ خوانده می‌شود «عنصری از ... نیست». بنابراین $1/2 \notin N$ را به صورت « $1/2$ عنصری از N نیست» می‌خوانیم.

علامت $\{ \}$ همراه با کلمات یا علامات، می‌تواند مجموعه را توصیف کند. اگر S مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۶ باشد، می‌توانیم S را به صورت

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

نمایش دهیم. همچنین می‌توانیم S را به صورت زیر بنویسیم

$$\{x \mid x \text{ يك عدد طبيعي کوچکتر از } 6 \text{ است}\}$$

علامت x در بالا، متغیر نامیده می‌شود. متغیر علامتی است که برای نشان دادن هر کدام از اعضای x مجموعه داده شده به کار می‌رود. راه دیگر نوشتن مجموعه فوق‌الذکر استفاده از علامتی است به نام علامت مجموعه ساز که عبارت است از $\{ \}$ قطعه خط عمودی که از آن به جای کلمه «به طوری که» استفاده می‌کنند. اگر از علامت مجموعه ساز برای توصیف مجموعه S استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\{x \mid x \text{ يك عدد طبيعي کوچکتر از } 6 \text{ است}\}$$

که خوانده می‌شود «مجموعه تمام x ها، به طوری که x يك عدد طبیعی کوچکتر از ۶ است». دو مجموعه A و B را متساوی گویند و نویسند $A = B$ ، اگر و تنها اگر عناصر آنها یکسان باشند. اجتماع دو مجموعه A و B که با $A \cup B$ نشان داده می‌شود و به صورت «اجتماع B » خوانده می‌شود، مجموعه همه عناصری است که یا در A یا در B و یا در هر دوی A و B هستند. اشتراک A و B که با $A \cap B$ نشان داده می‌شود و به صورت «اشتراک B » خوانده می‌شود، مجموعه همه عناصری است که در هر دوی A و B هستند. مجموعه‌ای که شامل هیچ عنصری نباشد، مجموعه تهی نامیده و با $\emptyset$ نشان داده می‌شود.

○ نمونه ۱ فرض کنید $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ ، $B = \{1, 4, 9, 16\}$ ، و $C = \{2, 10\}$. در این صورت

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16\} \quad A \cap B = \{4\}$$

$$\text{○} \quad B \cup C = \{1, 2, 4, 9, 10, 16\} \quad B \cap C = \emptyset$$

۱۰.۱ تعریف اگر $a, b \in R$ آنگاه a کوچکتر از b است (نوشته می‌شود $a < b$) اگر و تنها اگر $b - a$ مثبت باشد.

○ نمونه ۲ (الف) $3 < 8$ زیرا $8 - 3 = 5$ ، و ۵ مثبت است. (ب) $-6 < -10$ زیرا $4 = -(-10) - (-6)$ ، و ۴ مثبت است.

۲.۱.۱ تعریف اگر $a, b \in R^1$ ، آنگاه a بزرگتر از b است (نوشته می‌شود $a > b$) اگر و تنها اگر b کوچکتر از a باشد؛ با استفاده از علائم می‌نویسیم

$$a > b \text{ اگر و تنها اگر } b < a.$$

۳.۱.۱ تعریف علامتهای $\leq$ (کوچکتر است از، یا مساوی است با) $\geq$ و $\gg$ («بزرگتر است از، یا مساوی است با») به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(i) a \leq b \text{ اگر و تنها اگر } a < b \text{ یا } a = b,$$

$$(ii) a \geq b \text{ اگر و تنها اگر } a > b \text{ یا } a = b.$$

هر یک از عبارتهای $a < b$ ، $a > b$ ، $a \leq b$ ، و $a \geq b$ را نامساوی می‌نامیم. چند مثال از نامساویها ذیلا داده شده است

$$2 < 7, -5 < 6, -5 < -4, 14 > 8, 2 > -4, -3 > -6,$$

$$5 \geq 3, -10 \leq -7.$$

روابط $a < b$ و $a > b$ را نامساویهای اکید و روابط $a \leq b$ و $a \geq b$ را نامساویهای غیر اکید می‌نامیم.

با استفاده از اصول موضوع مربوط به مجموعه R^1 و مطالب ۱.۱.۱ تا ۳.۱.۱، می‌توان قضایای زیر را ثابت کرد.

$$۴.۱.۱ قضیه (i) $a > 0$ اگر و تنها اگر a مثبت باشد.$$

$$(ii) $a < 0$ اگر و تنها اگر a منفی باشد.$$

$$(iii) $a > 0$ اگر و تنها اگر $-a < 0$.$$

$$(iv) $a < 0$ اگر و تنها اگر $-a > 0$.$$

$$۵.۱.۱ قضیه اگر $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.$$

○ نمونه ۳ چون $0 < -6$ ، اگر $x < 0$ ، از قضیه ۵.۱.۱ نتیجه می‌شود که $-6 < x$.

$$۶.۱.۱ قضیه اگر $a < b$ ، آنگاه برای هر عدد حقیقی c داریم$$

$$a - c < b - c \text{ و } a + c < b + c$$

$$○ \text{ نمونه ۴ چون } 4 < 7: 4 + 5 < 7 + 5 \text{ و } 4 - 5 < 7 - 5.$$

۲.۱ برای رعایت اختصار، این دو علامت را به ترتیب «نابیشتر است از» و «ناکمتر است از» هم می‌خوانند. - م.

۷.۱.۱ قضیه اگر $a < b$ و $c < d$ ، آنگاه $a + c < b + d$.

○ نمونه ۵ چون $2 < 6$ و $-3 < 1$ ، داریم $2 + (-3) < 6 + 1$.

۸.۱.۱ قضیه اگر $a < b$ ، آنگاه برای هر عدد مثبت c داریم $ac < bc$.

○ نمونه ۶ $2 < 5$ ؛ بنابراین داریم $2 \cdot 4 < 5 \cdot 4$.

۹.۱.۱ قضیه اگر $a < b$ ، آنگاه به ازای هر عدد منفی c داریم $ac > bc$.

○ نمونه ۷ $2 < 5$ ؛ بنابراین داریم، $2(-4) > 5(-4)$.

۱۰.۱.۱ قضیه اگر $0 < a < b$ و $0 < c < d$ ، آنگاه داریم $ac < bd$.

○ نمونه ۸ داریم $0 < 4 < 7$ و $0 < 8 < 9$ ؛ بنابراین، $4(8) < 7(9)$.

قضیه ۸.۱.۱ حاکی است که اگر هر دو طرف يك نامساوی را در يك عدد مثبت ضرب کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند؛ و قضیه ۹.۱.۱ حاکی است که اگر هر دو طرف يك نامساوی را در يك عدد منفی ضرب کنیم جهت نامساوی معکوس می شود. قضایای ۸.۱.۱ و ۹.۱.۱ برای عمل تقسیم نیز برقرارند، زیرا تقسیم دو طرف يك نامساوی بر عدد d معادل است با ضرب دو طرف در $1/d$.

قضایای زیر همانند قضایای ۵.۱.۱ تا ۱۰.۱.۱ هستند، بجز اینکه در آنها جهت نامساویها عوض می شود.

۱۱.۱.۱ قضیه اگر $a > b$ و $b > c$ ، آنگاه $a > c$.

○ نمونه ۹ چون $8 > 4$ و $4 > -2$ ، داریم $8 > -2$.

۱۲.۱.۱ قضیه اگر $a > b$ ، به ازای هر عدد حقیقی c داریم

$$a - c > b - c \text{ و } a + c > b + c$$

○ نمونه ۱۰ چون $3 > -5$ ، داریم $3 - 4 > -5 - 4$.

۱۳.۱.۱ قضیه اگر $a > b$ و $c > d$ ، آنگاه $a + c > b + d$.

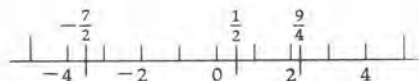
○ نمونه ۱۱ چون $7 > 2$ و $3 > -5$ ، داریم $7 + 3 > 2 + (-5)$.

۱۴.۱.۱ قضیه اگر $a > b$ ، به ازای هر عدد مثبت c داریم $ac > bc$.

- نمونه ۱۲ داریم $-7 > -3$ ، بنابراین $4(-7) > 4(-3)$. ○
- ۱۵.۱.۱ قضیه اگر $a > b$ ، آنگاه برای هر عدد منفی c داریم $ac < bc$.
- نمونه ۱۳ داریم $-7 > -3$ ، بنابراین $(-4)(-7) < (-4)(-3)$. ○
- ۱۶.۱.۱ قضیه اگر $a > b > 0$ و $c > d > 0$ ، آنگاه داریم $ac > bd$.
- نمونه ۱۴ داریم $3 > 4$ و $6 > 7$ ، بنابراین $3(6) > 4(7)$. ○

ما شرطی روی مجموعه R^1 می‌گذاریم که اصل موضوع کمال نامیده می‌شود. (اصل موضوع ۵.۲.۱۵). بیان این اصل موضوع را به بخش ۲.۱۵ محول می‌کنیم، زیرا برای این کار به اصطلاحاتی نیازمندیم که بعداً به نحو شایسته‌ای معرفی می‌شوند و مورد بحث قرار می‌گیرند. با این وجود، اکنون یک تعبیر هندسی برای مجموعه اعداد حقیقی می‌آوریم؛ و آن اینکه به این اعداد، نقاط یک خط افقی موسوم به محور را نسبت می‌دهیم. اصل کمال تضمین می‌کند که یک تناظر یک به یک بین مجموعه R^1 و مجموعه نقاط واقع بر یک محور وجود دارد.

به شکل ۱.۱.۱ مراجعه کنید. یک نقطه روی محور انتخاب شده که نماینده عدد صفر است. این نقطه را مبدأ می‌نامیم. واحدی هم برای فاصله انتخاب می‌کنیم. نقطه‌ای که به فاصله x واحد در طرف راست مبدأ قرار دارد به نمایندگی عدد مثبت x و، نقطه‌ای که به فاصله $-x$ واحد در طرف چپ مبدأ قرار دارد به نمایندگی عدد منفی x انتخاب می‌شود (توجه کنید که اگر x منفی باشد آنگاه $-x$ مثبت است). بدین ترتیب، به هر عدد حقیقی یک نقطه یکتا از محور نسبت داده می‌شود، و هر نقطه روی محور تنها به یک عدد حقیقی مربوط می‌شود. از این رو یک تناظر یک به یک بین R^1 و نقاط محور وجود دارد. بنابراین نقاط محور با اعدادی که آن نقاط نماینده‌شان هستند مشخص می‌شوند، و ما برای عدد و نقطه نماینده آن علامت یکسان به کار می‌بریم. مجموعه R^1 را با محور یکی می‌گیریم و R^1 را خط اعداد حقیقی می‌نامیم.^۱



شکل ۱.۱.۱

ملاحظه می‌شود که، $a < b$ ، اگر و تنها اگر نقطه‌ای که نماینده a است در طرف چپ نقطه‌ای باشد که نماینده b است. به طریق مشابه، داریم $a > b$ ، اگر و تنها اگر نقطه

۱. R^1 را گاهی محور حقیقی هم می‌نامیم. - م.

نماینده a در طرف راست نقطه نماینده b قرار داشته باشد. به عنوان مثال، عدد ۲ کوچکتر از عدد ۵ است، بنابراین نقطه ۲ در طرف چپ نقطه ۵ قرار دارد. همچنین می توان نوشت $5 > 2$ و گفت که نقطه ۵ در طرف راست نقطه ۲ قرار دارد. گوییم عدد حقیقی x بین a و b است اگر $a < x$ و $x < b$ ، که در این صورت می نویسیم

$$a < x < b. \quad (1)$$

مجموعه تمام اعدادی چون x را که در نامساوی (۱) صدق می کنند، یک بازه باز می نامند و با (a, b) نشان می دهند. بنابراین

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

بازه بسته از a تا b عبارت است از بازه $[a, b]$ همراه با دو نقطه انتهایی آن یعنی a و b ، و با $[a, b]$ نشان داده می شود. بنابراین

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

شکل ۲.۱.۱ بازه باز (a, b) و شکل ۳.۱.۱ بازه بسته $[a, b]$ را نمایش می دهد.



شکل ۳.۱.۱



شکل ۲.۱.۱

بازه نیمه باز از طرف چپ تشکیل می شود از بازه (a, b) همراه با نقطه انتهایی راست آن یعنی b ، و با $[a, b)$ نشان داده می شود. بنابراین

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

بازه نیمه باز از طرف راست نیز به طریق مشابه تعریف، و با $(a, b]$ نشان داده می شود. بنابراین

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

شکل ۴.۱.۱ بازه $[a, b)$ و شکل ۵.۱.۱ بازه $(a, b]$ را نمایش می دهد.



شکل ۵.۱.۱



شکل ۴.۱.۱

ما از علامت $+\infty$ (بینهایت مثبت) و علامت $-\infty$ (بینهایت منفی) استفاده خواهیم کرد، اما باید مواظب باشید که این علامتها را با اعداد حقیقی اشتباه نکنید، زیرا آنها از

خواص اعداد حقیقی تبعیت نمی کنند. با این توضیحات، بازه های زیر را داریم

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = R^1.$$

شکل ۶.۱.۱ بازه $(a, +\infty)$ و شکل ۷.۱.۱ بازه $(-\infty, b)$ را نمایش می دهد. دقت کنید که $(-\infty, +\infty)$ مجموعه همه اعداد حقیقی را نشان می دهد.



شکل ۷.۱.۱



شکل ۶.۱.۱

در هر کدام از بازه های (a, b) ، $[a, b]$ ، $(a, b]$ و $[a, b)$ ، اعداد a و b را نقاط - انتهایی بازه می نامند. بازه بسته $[a, b]$ شامل هر دو نقطه انتهایی خود می باشد ولی بازه باز (a, b) شامل هیچکدام از نقاط انتهایی نیست. بازه $[a, b)$ شامل نقطه انتهایی چپ خود، و بازه $(a, b]$ شامل نقطه انتهایی راست خود هست. بازه باز را می توان بازه ای دانست که شامل هیچکدام از نقاط انتهایی خود نیست، و بازه بسته را باید بسته پنداشت که شامل تمام نقاط انتهایی خود هست، در نتیجه بازه $[a, +\infty)$ را باید بسته دانست زیرا شامل تنها نقطه انتهایی خود یعنی a است. به طریق مشابه، بازه $(-\infty, b]$ بسته است، در حالی که $(a, +\infty)$ و $(-\infty, b)$ باز هستند. بازه های $[a, b)$ و $(a, b]$ نه باز هستند و نه بسته. بازه $(-\infty, +\infty)$ دارای هیچ نقطه انتهایی نیست و از اینرو هم باز و هم بسته محسوب می شود.

از نامساویها، برای نمایش «مجموعه جواب» نامساویهای بایک متغیر استفاده می شود. مجموعه جواب یک چنین نامساوی عبارت است از مجموعه تمام اعدادی که در نامساوی صدق می کنند.

مثال ۱ مجموعه جواب نامساوی $5x + 8 < 3x + 2$ را بیابید و آن را روی محور حقیقی نمایش دهید.

حل اگر x عددی باشد که در نامساوی صدق کند، یعنی برای آن داشته باشیم

$$2 + 3x < 5x + 8$$

آنگاه

$$2 + 3x - 2 < 5x + 8 - 2$$

$$3x < 5x + 6$$

$$-2x < 6$$

$$x > -3.$$

چیزی که تا کنون ثابت کرده ایم آن است که اگر $2 + 3x < 5x + 8$ ، آنگاه $x > -3$. تمام مراحل برگشت پذیر هستند، به این معنی که اگر با $x > -3$ شروع کنیم، آنگاه داریم

$$-2x < 6$$

$$2 + 3x < 5x + 8.$$

پس نتیجه می گیریم که

$$2 + 3x < 5x + 8 \text{ اگر و تنها اگر } x > -3.$$

بنابراین مجموعه جواب نامساوی داده شده، بازه $(-3, +\infty)$ است که در شکل ۸.۱.۱ نشان داده شده است.



شکل ۸.۱.۱

▲

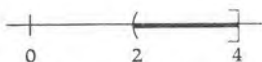
مثال ۲ مجموعه جواب نامساوی $4 < 3x - 2 \leq 10$ را پیدا کنید و آن را روی محور حقیقی نمایش دهید.

حل اگر ۲ را به هر دو طرف نامساوی اضافه کنیم، به دست می آوریم

$$6 < 3x \leq 12$$

$$2 < x \leq 4.$$

چون هر مرحله برگشت پذیر است، پس مجموعه جواب، بازه $(2, 4]$ است که در شکل ۹.۱.۱ نشان داده شده.



شکل ۹.۱.۱

▲

مثال ۳ مجموعه جواب نامساوی

$$\frac{7}{x} > 2$$

را بیابید و آن را روی محور حقیقی نشان دهید.

حل ابتدا باید طرفین نامساوی را در x ضرب کنیم؛ اما، جهت نامساوی حاصل بستگی به مثبت یا منفی بودن x دارد.
توجه کنید که اگر $x < 0$ ، آنگاه

$$\frac{7}{x} < 0$$

که با نامساوی مورد نظر تعارض دارد. بنابراین کافی است $x > 0$ را در نظر بگیریم. دو طرف نامساوی مفروض را در x ضرب می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$7 > 2x$$

$$\frac{7}{2} > x$$

$$x < \frac{7}{2}$$

چون مراحل بالا برگشت‌پذیرند، مجموعه جواب نامساوی عبارت است از

$$\{x | 0 < x < \frac{7}{2}\} \text{ یا } \{x | x > 0\} \cap \{x < \frac{7}{2}\}$$

که همچنانکه در شکل ۱۰.۱۰.۱ نشان داده شده، بازه $(0, 7/2)$ است.



شکل ۱۰.۱۰.۱

مثال ۴ مجموعه جواب نامساوی زیر را بیابید و آن را روی محور حقیقی نمایش دهید

$$\frac{x}{x-3} < 4$$

حل اگر بخواهیم دو طرف نامساوی را در $x-3$ ضرب کنیم، باید دو حالت در نظر بگیریم.

حالت ۱: $x - 3 > 0$ ؛ یعنی $x > 3$.
دو طرف نامساوی مفروض را در $x - 3$ ضرب می‌کنیم

$$x < 4x - 12$$

$$-3x < -12$$

$$x > 4.$$

بنابراین مجموعه جواب حالت ۱ عبارت است از: $\{x | x > 3\} \cap \{x | x > 4\}$ و یا، $\{x | x > 4\}$ که همان بازه $(4, +\infty)$ است.

حالت ۲: $x - 3 < 0$ ؛ یعنی $x < 3$.
دو طرف را در $x - 3$ ضرب می‌کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند و داریم

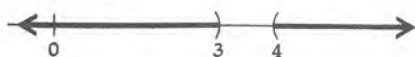
$$x > 4x - 12$$

$$-3x > -12$$

$$x < 4.$$

بنابراین x باید کوچکتر از ۴ و بزرگتر از ۳ باشد. پس، مجموعه جواب حالت ۲ برابر است با $(-\infty, 3)$.

اگر مجموعه جوابهای حالات ۱ و ۲ را با هم ترکیب کنیم، مجموعه $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ به دست می‌آید، که در شکل ۱۱.۱.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱۱.۱.۱

مفهوم قدر مطلق يك عدد حقیقی، در بعضی از تعریفهای مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار می‌رود.

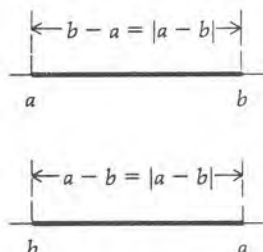
۱۷.۱.۱ تعریف قدر مطلق x که با علامت $|x|$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

○ نمونه ۱۵ داریم

$$○ \quad |8 - 14| = |-6| = -(-6) = 6, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |3| = 3$$

با توجه به تعریف، قدرمطلق يك عدد یا مثبت است یا صفر، یعنی غیرمنفی است. از نظر هندسی، قدرمطلق عدد x ، برابر با فاصله آن تا عدد صفر، بدون در نظر گرفتن جهت است. به طور کلی $|a - b|$ ، برابر با فاصله بین a و b ، بدون در نظر گرفتن جهت است، یعنی بدون در نظر گرفتن این نکته که کدامیک از دیگری بزرگتر است. به شکل ۱۲.۱.۱ مراجعه کنید.



شکل ۱۲.۱.۱

ذیلا چند خاصیت قدرمطلق را می آوریم

۱۸.۱.۱ قضیه $|x| < a$ اگر و تنها اگر $-a < x < a$ ، با این شرط که $a > 0$.

اثبات چون قضیه دارای قید و قنایا اگر است، اثبات شامل دو قسمت است.

قسمت ۱: ثابت می کنیم $|x| < a$ اگر $-a < x < a$ ، با این شرط که $a > 0$.
در اینجا دو حالت در نظر می گیریم: $x \geq 0$ و $x < 0$.

حالت ۱: $x \geq 0$

در این حالت $|x| = x$. چون $x < a$ ، نتیجه می گیریم که $|x| < a$.

حالت ۲: $x < 0$

در این حالت $|x| = -x$. چون $-a < x$ ، بنابه قضیه ۹.۱.۱ داریم $a > -x$ و یا $-x < a$. اما چون $-x = |x|$ ، داریم $|x| < a$. پس، در هر دو حالت داریم

$|x| < a$ اگر $-a < x < a$ ، با این شرط که $a > 0$

قسمت ۲: ثابت می کنیم $|x| < a$ ، تنها اگر $-a < x < a$ ، با این شرط که $a > 0$. در اینجا باید نشان دهیم که هرگاه نامساوی $|x| < a$ برقرار باشد، نامساوی $-a < x < a$ نیز برقرار است. فرض می کنیم $|x| < a$ ، و دو حالت $x \geq 0$ و $x < 0$ را در نظر می گیریم.

حالت ۱: $x \geq 0$

در این حالت، $|x| = x$. چون $|x| < a$ ، پس $x < a$ و چون $a > 0$ ، از قضیه

۱۵.۱.۱ نتیجه می شود که $-a < 0$ و داریم $-a < 0 \leq x < a$ و یا $-a < x < a$.

حالت ۲: $x < 0$.

در این حالت، $x = -|x|$ و چون $|x| < a$ ، نتیجه می گیریم $-x < a$. در این حالت $x < 0$ و بنابه قضیه ۹.۱.۱ داریم $-x > 0$ ، و از اینرو داریم

$$-a < 0 < -x < a$$

$$-a < -x < a.$$

اگر قضیه ۹.۱.۱ را دوباره به کار ببریم، نامساوی اخیر معادل است با $-a < x < a$. در هر دو حالت داریم

$$\square \quad |x| < a \text{ تنها اگر } -a < x < a, \text{ با این شرط که } a > 0$$

۱۹.۱.۱ نتیجه $|x| \leq a$ ، اگر و تنها اگر $-a \leq x \leq a$ ، با این شرط که $-a < 0$.

۲۰.۱.۱ قضیه $|x| > a$ ، اگر و تنها اگر $x > a$ یا $x < -a$ ، با این شرط که $a > 0$.

اثبات قضیه ۲۰.۱.۱ به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۵۷ را ببینید).

۲۱.۱.۱ نتیجه $|x| \geq a$ ، اگر و تنها اگر $x \geq a$ یا $x \leq -a$ ، با این شرط که $a > 0$.

مثالهای زیر، راه حل معادلات و نامساویهای شامل قدر مطلق را نشان می دهند.

مثال ۵ هر یک از معادلات زیر را نسبت به x حل کنید: (الف) $|3x+2|=5$ ، (ب) $|4x+3|=|2x-1|$ ، (پ) $|5x+4|=-3$.

حل

$$|3x+2|=5 \text{ (الف)}$$

این معادله برقرار خواهد بود اگر داشته باشیم

$$3x+2=5 \text{ و یا } -(3x+2)=5$$

اگر هر معادله را جداگانه حل کنیم، به دست می آوریم

$$x=1 \text{ و } x=-\frac{7}{3}$$

که جوابهای معادله داده شده هستند.

$$|2x-1|=|4x+3| \text{ (ب)}$$

این معادله برقرار خواهد بود اگر داشته باشیم

$$۲x - ۱ = ۳ + (۴x + ۳) \text{ یا } ۲x - ۱ = ۴x + ۳$$

اگر هر معادله را جداگانه حل کنیم، به دست می آوریم $x = -۱/۳$ و $x = -۲$ که جوابهای معادله داده شده می باشند.

$$(پ) |۵x + ۴| = -۳$$

چون قدرمطلق يك عدد هرگز نمی تواند منفی باشد، پس این معادله دارای جواب نیست. ▲

مثال ۶ مجموعه جواب نامساوی زیر را به دست آورید و آن را روی محور حقیقی نمایش دهید

$$|x - ۵| < ۴.$$

حل اگر x عددی باشد که در $|x - ۵| < ۴$ صدق کند، آنگاه

$$-۴ < x - ۵ < ۴$$

(بنابه قضیه ۱۸.۱۰.۱)

$$۱ < x < ۹.$$

چون هر مرحله برگشت پذیر است، پس داریم

$$|x - ۵| < ۴ \text{ اگر و تنها اگر } ۱ < x < ۹.$$

بنابراین مجموعه جواب نامساوی داده شده، بازه $(۱, ۹)$ است که در شکل ۱۳.۱۰.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۳.۱۰.۱

مثال ۷ مجموعه جواب نامساوی زیر را به دست آورید

$$|۳x + ۲| > ۵.$$

حل بنابه قضیه ۲۰.۱۰.۱، نامساوی داده شده معادل است با

$$(۲) \quad ۳x + ۲ > ۵ \text{ یا } ۳x + ۲ < -۵$$

یعنی، نامساوی داده شده برقرار خواهد بود اگر یکی از نامساویهای بالا برقرار باشد. در نامساوی اول داریم $۳x + ۲ > ۵$ یا $x > ۱$ ، پس هر عدد در بازه $(۱, +\infty)$ يك جواب است.

در نامساوی دوم داریم $-5 < 3x + 2$ و یا $x < -7/3$ ، از اینرو هر عدد در بازه $(-\infty, -7/3)$ يك جواب است. پس، مجموعه جواب نامساوی داده شده عبارت است از $(-\infty, -7/3) \cup (1, +\infty)$. ▲

از درس جبر به یاد آورید که مفهوم علامت $\sqrt{a}$ ، برای $a \geq 0$ ، عبارت است از عددی نا منفی و یکتا مانند x به طوری که $x^2 = a$. علامت $\sqrt{a}$ را «ریشه دوم اصلی a » می خوانیم. به عنوان مثال، داریم

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

توجه: دقت کنید که گرچه $(-2)^2 = 4$ ، ولی $\sqrt{4} \neq -2$ زیرا $\sqrt{4}$ ریشه دوم مثبت ۴ را نشان می دهد. چون در این کتاب فقط با اعداد حقیقی سروکار داریم، $\sqrt{a}$ را برای $a < 0$ تعریف نمی کنیم.

مثال ۸ تمام مقادیری از x را بیابید که به ازای آنها $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ حقیقی باشد.

حل $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$. در صورتی يك عدد حقیقی است که $(x+3)(x+4) \geq 0$. مجموعه جواب این نامساوی را می یابیم. نامساوی در صورتی صادق است که هر دو عامل نامنفی و یا هر دو عامل نامثبت باشند؛ یعنی، داشته باشیم $x+3 \geq 0$ و $x+4 \geq 0$ ، و یا $x+3 \leq 0$ و $x+4 \leq 0$. دو حالت در نظر می گیریم.

حالت ۱: $x+3 \geq 0$ و $x+4 \geq 0$ ، یعنی،

$$x \geq -3 \quad \text{و} \quad x \geq -4.$$

هر دو نامساوی برقرارند اگر $x \geq -3$ که عبارت است از بازه $[-3, +\infty)$.

حالت ۲: $x+3 \leq 0$ و $x+4 \leq 0$ ، یعنی،

$$x \leq -3 \quad \text{و} \quad x \leq -4.$$

هر دو نامساوی برقرارند اگر $x \leq -4$ که عبارت است از بازه $(-\infty, -4]$. اگر مجموعه جوابهای حالات ۱ و ۲ را با هم ترکیب کنیم، خواهیم داشت

▲ $(-\infty, -4] \cup [-3, +\infty).$

از تعریف $\sqrt{a}$ نتیجه می شود که

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

مثلا، $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ و $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.
قضایای زیر در مورد قدر مطلق، در آینده مورد استفاده قرار می گیرند.

۲۲.۱.۱ قضیه اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، آنگاه

$$|ab| = |a| \cdot |b| .$$

اثبات

$$\begin{aligned} |ab| &= \sqrt{(ab)^2} \\ &= \sqrt{a^2 b^2} \\ &= \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \end{aligned}$$

$$\square \quad = |a| \cdot |b| .$$

۲۳.۱.۱ قضیه اگر a يك عدد دلخواه و b يك عدد دلخواه مخالف صفر باشد، داریم

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} .$$

اثبات قضیه ۲۳.۱.۱ را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (به تمرین ۵۸ مراجعه کنید).

۲۴.۱.۱ قضیه (نامساوی مثلثی) اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، آنگاه داریم

$$|a+b| \leq |a| + |b| .$$

اثبات بنا به تعریف ۱۷.۱.۱، یا $|a| = a$ و یا $|a| = -a$. بنابراین داریم

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad (۳)$$

$$-|b| \leq b \leq |b| . \quad (۴)$$

از نامساویهای (۳) و (۴) و قضیه ۷.۱.۱ نتیجه می شود

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| .$$

و بنا به نتیجه ۱۹.۱.۱ می توان نوشت

$$\square \quad |a+b| \leq |a| + |b| .$$

تمرین ۱۷

قضیه ۲۴.۱.۱ دارای دو نتیجه مهم است که اکنون آنها را بیان و اثبات می‌کنیم.

۲۵.۱.۱ نتیجه اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، آنگاه

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

اثبات

$$\square \quad |a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |(-b)| = |a| + |b|.$$

۲۶.۱.۱ نتیجه اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، آنگاه

$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

اثبات

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|.$$

و اگر $|b|$ را از دو طرف نامساوی کم کنیم، خواهیم داشت

$$\square \quad |a| - |b| \leq |a-b|.$$

تمرینهای ۱.۱

در تمرینهای ۱ تا ۲۲، مجموعه جواب نامساوی داده شده را بیابید و آن را روی خط اعداد حقیقی نشان دهید.

$$۳ - x < ۵ + ۳x \quad ۴.$$

$$۵x + ۲ > x - ۶ \quad ۱.$$

$$۳ - ۲x \geq ۹ + ۴x \quad ۴.$$

$$\frac{۲}{۳}x - \frac{۱}{۲} \leq ۰ \quad ۳.$$

$$-۲ < ۶ - ۴x \leq ۸ \quad ۶.$$

$$۱۳ \geq ۲x - ۳ \geq ۵ \quad ۵.$$

$$۲ \leq ۵ - ۳x < ۱۱ \quad ۸.$$

$$۲ > -۳ - ۳x \geq -۷ \quad ۷.$$

$$\frac{۵}{x} < \frac{۳}{۴} \quad ۱۰.$$

$$\frac{۴}{x} - ۳ > \frac{۲}{x} - ۷ \quad ۹.$$

$$\frac{x+۱}{۲-x} < \frac{x}{۳+x} \quad ۱۲.$$

$$\frac{۱}{x+۱} < \frac{۲}{۳x-۱} \quad ۱۱.$$

$$x^2 \leq ۹ \quad ۱۴.$$

$$x^2 > ۴ \quad ۱۳.$$

$$\begin{array}{ll}
 ۱۵. (x-3)(x+5) > 0 & ۱۶. x^2 - 3x + 2 > 0 \\
 ۱۷. 1 - x - 2x^2 \geq 0 & ۱۸. x^2 + 3x + 1 > 0 \\
 ۱۹. 4x^2 + 9x < 9 & ۲۰. 2x^2 - 6x + 3 < 0 \\
 ۲۱. \frac{1}{3x-7} \geq \frac{4}{3-2x} & ۲۲. x^2 + 1 > x^2 + x
 \end{array}$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۳۰، معادله را نسبت به x حل کنید.

$$\begin{array}{ll}
 ۲۳. |4x+3|=7 & ۲۴. |3x+8|=4 \\
 ۲۵. |5x-3|=|3x+5| & ۲۶. |x-2|=|3-2x| \\
 ۲۷. |7x|=4-x & ۲۸. 2x+3=|4x+5| \\
 ۲۹. \left| \frac{x+2}{x-2} \right| = 5 & ۳۰. \left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4
 \end{array}$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۶، مقادیری برای x تعیین کنید که به ازای آنها عدد، حقیقی باشد.

$$\begin{array}{lll}
 ۳۱. \sqrt{8x-5} & ۳۲. \sqrt{x^2-16} & ۳۳. \sqrt{x^2-3x-10} \\
 ۳۴. \sqrt{2x^2+5x-3} & ۳۵. \sqrt{x^2-5x+4} & ۳۶. \sqrt{x^2+2x-1}
 \end{array}$$

در هر يك از تمرینهای ۳۷ تا ۴۸، مجموعه جواب نامساوی داده شده را بیابید و آن را روی خط اعداد حقیقی نشان دهید.

$$\begin{array}{ll}
 ۳۷. |x+4| < 7 & ۳۸. |2x-5| < 3 \\
 ۳۹. |3x-4| \leq 2 & ۴۰. |6-2x| \geq 7 \\
 ۴۱. |2x-5| > 3 & ۴۲. |x+4| \leq |2x-6| \\
 ۴۳. |3x| > |6-2x| & ۴۴. |3+2x| < |4-x| \\
 ۴۵. |9-2x| \geq |4x| & ۴۶. |5-2x| \geq 7 \\
 ۴۷. \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 4 & ۴۸. \left| \frac{6-5x}{3+x} \right| \leq \frac{1}{2}
 \end{array}$$

در تمرینهای ۴۹ تا ۵۲، نامساوی را نسبت به x حل کنید و جواب را با استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$\frac{a-x}{a+x} \geq 0 \quad .50$$

$$\frac{x-a}{x+a} > 0 \quad .49$$

$$\frac{x+5}{x+3} < \frac{x+1}{x-1} \quad .52$$

$$\frac{x-2}{x-4} > \frac{x+2}{x} \quad .51$$

.53 قضیه ۵.۱.۱ را ثابت کنید.

.54 قضیه ۶.۱.۱ را ثابت کنید.

.55 قضایای ۸.۱.۱ و ۹.۱.۱ را ثابت کنید.

.56 ثابت کنید که اگر $x < y$ ، آنگاه $y < (x+y)/2 < x$.

.57 قضیه ۲۰.۱.۱ را ثابت کنید.

.58 قضیه ۲۳.۱.۱ را ثابت کنید.

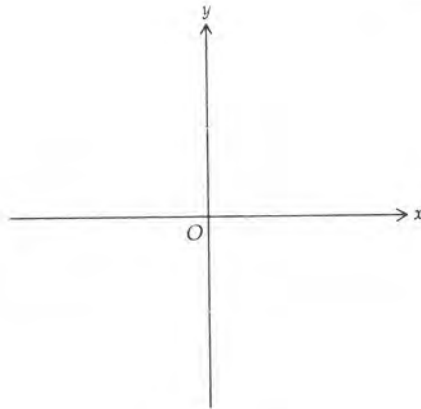
۲.۱ صفحه اعداد و نمودار معادلات

اکنون زوجهای مرتب از اعداد حقیقی را در نظر می گیریم. هر دو عدد حقیقی تشکیل يك زوج می دهند، و اگر ترتیب يك زوج از اعداد حقیقی مشخص شده باشد، آن را يك زوج مرتب از اعداد حقیقی می نامیم. اگر x اولین عدد حقیقی و y دومین عدد حقیقی باشد، این زوج مرتب را با نوشتن آنها در يك پرانتز و جدا کردن آنها به وسیله علامت « , » به صورت (x, y) نمایش می دهیم. توجه کنید که زوج مرتب $(3, 7)$ با زوج مرتب $(7, 3)$ فرق دارد.

۱۰۲۰۱ تعریف مجموعه تمام زوجهای مرتب از اعداد حقیقی را صفحه اعداد، و هر زوج مرتب (x, y) را يك نقطه از این صفحه می نامیم. صفحه اعداد را با علامت R^2 نمایش می دهیم.

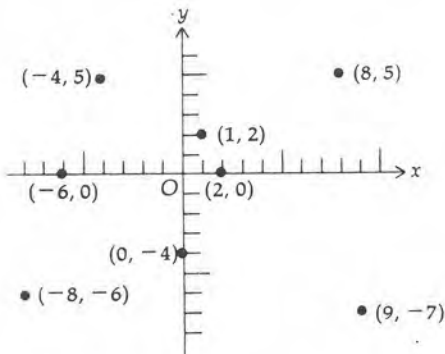
همان طور که R^1 را با نقاط روی يك محور (فضای يك بعدی) مشخص می کنیم، می توانیم R^2 را با نقاط واقع در يك صفحه هندسی (فضای دوبعدی) مشخص کنیم. روشی که برای R^2 به کار می بریم، منسوب به رنه دکارت (۱۵۹۶-۱۶۵۰) ریاضیدان فرانسوی است که ابداع هندسه تحلیلی در سال ۱۶۳۷ نیز کار او است.

يك خط افقی در صفحه هندسی انتخاب می کنیم و آن را محور x ها می نامیم، خطی قائم نیز به نام محور y ها انتخاب می کنیم. نقطه برخورد محور x ها و محور y ها را مبدأ می نامیم و با حرف O نشان می دهیم. واحدی برای طول انتخاب می کنیم (معمولاً واحد طول برای هر دو محور یکسان است). فرض می کنیم جهت مثبت روی محور x ها در طرف راست مبدأ و جهت مثبت روی محور y ها در طرف بالای مبدأ باشد. به شکل ۱۰.۲.۱ مراجعه کنید.

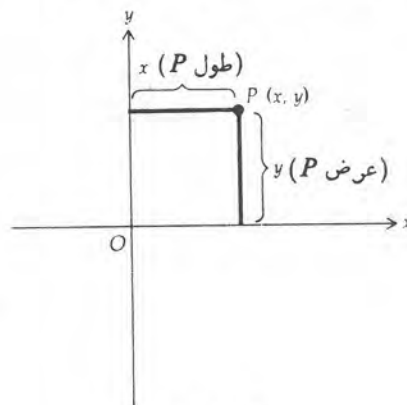


شکل ۱۰۲۰۱

به زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی نقطه‌ای مانند P روی صفحه هندسی نسبت می‌دهیم که دارای مشخصات زیر است (به شکل ۲۰۲۰۱ مراجعه کنید): فاصله P از محور y ها برابر x است که اگر P در طرف راست محور y ها واقع شده باشد x مثبت و اگر در طرف چپ باشد x منفی است. x را طول (مختص x) نقطه P می‌نامیم. فاصله P از محور x ها برابر y است که اگر P بالای محور x ها باشد، y مثبت است و اگر پایین محور x ها باشد y منفی است. y را عرض (مختص y) نقطه P می‌نامیم. طول و عرض يك نقطه را مختصات دکارتی قائم آن نقطه می‌نامیم. يك تناظر يك به يك بين نقاط يك صفحه هندسی و R^2 وجود دارد، بدین معنی که، به هر نقطه يك زوج مرتب یکتای (x, y) ، و به هر زوج مرتب (x, y) تنها يك نقطه نسبت داده می‌شود. این تناظر يك به يك را دستگاه مختصات دکارتی قائم می‌نامیم. شکل ۳۰۲۰۱ يك دستگاه مختصات دکارتی قائم و چند نقطه را در این دستگاه نشان می‌دهد.

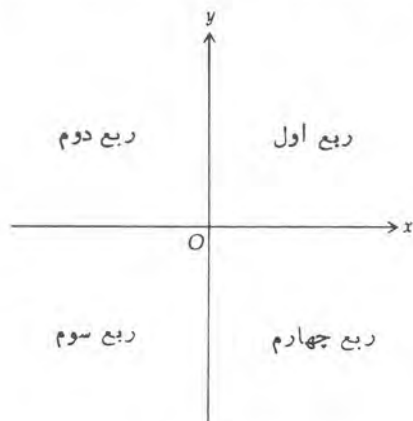


شکل ۳۰۲۰۱



شکل ۲۰۲۰۱

محور x ها و y ها را محاورهای مختصات می نامیم. این محورها صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کنند که هر قسمت را يك ربع می خوانیم. ربع اول ربعی است که در آن، طول و عرض نقاط هر دو مثبت هستند، یعنی ربع بالای محور x و سمت راست محور y ؛ ربعهای دیگر را در جهت عکس گردش عقربه های ساعت شماره گذاری می کنیم. در این صورت، مثلاً، ربع چهارم، ربع پایین سمت راست است. به شکل ۴.۲.۱ مراجعه کنید.



شکل ۴.۲.۱

بدانست وجود تناظر يك به يك فوق، R^2 را با صفحه هندسی یکی می گیریم. به این دلیل زوج مرتب (x, y) را يك نقطه می نامیم. به طریق مشابه، منظور ما از يك خط در R^2 مجموعه تمام نقاطی است که با يك خط در صفحه هندسی مربوط می شود و اصطلاحات هندسی دیگری هم برای مجموعه های نقاط در R^2 به کار می بریم. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$y = x^2 - 2 \quad (۱)$$

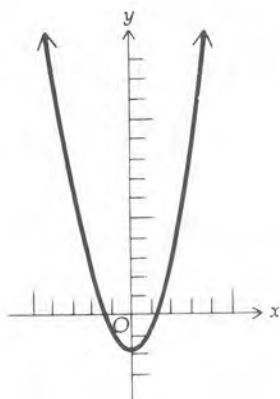
که در آن، (x, y) نقطه ای از R^2 است؛ این عبارت، يك معادله در R^2 است. منظور از يك جواب این معادله، زوج مرتبی است از اعداد به صورت (x, y) به طوری که اعداد x و y در معادله (۱) صدق کنند. به عنوان مثال، اگر در معادله (۱) به جای x عدد ۳ را قرار دهیم، خواهیم دید که $y = 7$. بدین ترتیب $x = 3$ و $y = 7$ يك جواب این معادله را تشکیل می دهند. اگر در طرف راست معادله (۱) به جای x عددی قرار گیرد، مقداری متناظر برای y به دست می آید. ملاحظه می شود که معادله (۱)، دارای تعداد نامحدودی جواب است، در جدول ۱.۲.۱ چند جواب معادله نوشته شده است.

اگر نقاطی از صفحه مختصات را مشخص کنیم که مختصاتشان (x, y) ، در معادله (۱) صدق کنند، طرحی از نمودار معادله به دست می آید. در شکل ۵.۲.۱ نقاطی را که مختصات

جدول ۱۰۲۰۱

x	۰	۱	۲	۳	۴	-۱	-۲	-۳	-۴
$y = x^2 - 2$	-۲	-۱	۲	۷	۱۴	-۱	۲	۷	۱۴

آنها در جدول ۱۰۲۰۱ نوشته شده است، به وسیله یک منحنی هموار به هم وصل کرده ایم. هر نقطه (x, y) واقع بر این منحنی دارای مختصاتی است که در معادله (۱) صدق می کند. همچنین، مختصات هر نقطه که روی این منحنی نباشد در معادله (۱) صدق نمی کند.



شکل ۵۰۲۰۱

۲۰۲۰۱ تعریف نمودار یک معادله در R^2 عبارت است از مجموعه تمام نقاط (x, y) در R^2 که مختصات آنها اعدادی هستند که در معادله صدق می کنند.

گاهی نمودار یک معادله را **مکان هندسی** معادله می نامند. نمودار یک معادله در R^2 یک منحنی [خم] نیز نامیده می شود. از این به بعد، هر معادله با دو مجهول x و y یک معادله در R^2 در نظر گرفته می شود، مگر آن که خلاف آن تصریح شده باشد. نمودار شکل ۵۰۲۰۱، یک سهمی است. پایینترین نقطه نمودار، $(0, -2)$ است و رأس سهمی نامیده می شود. دهانه این سهمی به سمت بالاست. محور y ها محور سهمی خوانده می شود. بحث کاملی از سهمیها در فصل ۱۳ خواهد آمد؛ در آنجا نشان خواهیم داد که نمودار معادله ای به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) یک سهمی است که دارای محور قائم است و دهانه اش به سمت بالاست اگر $a > 0$ ، و به سمت پایین است اگر $a < 0$. در مثال زیر، نمودار معادله داده شده، یک سهمی است که محورش افقی است.

مثال ۱ طرحی از نمودار معادله زیر را رسم کنید

$$y^2 - x - 2 = 0.$$

حل اگر معادله داده شده را نسبت به y حل کنیم، خواهیم داشت

$$y = \pm \sqrt{x+2}. \quad (2)$$

معادله (۲) را می توان به صورت دو معادله زیر نوشت

$$y = \sqrt{x+2} \quad (3)$$

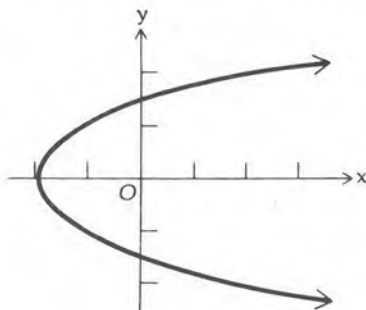
$$y = -\sqrt{x+2}. \quad (4)$$

مختصات تمام نقاطی که در معادله (۲) صدق می کنند، در معادلات (۳) یا (۴) نیز صدق می کنند، و مختصات هر نقطه ای که در یکی از معادلات (۳) یا (۴) صدق کند در معادله (۲) نیز صادق است. جدول ۲.۲.۱ شامل بعضی از این مقادیر x و y است.

جدول ۲.۲.۱

x	۰	۰	۱	۱	۲	۲	۳	۳	-۱	-۱	-۲
y	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	۲	-۲	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	۱	-۱	۰

دقت کنید که به ازای هر مقدار $x < -2$ ، هیچ مقدار حقیقی برای y وجود ندارد. همچنین، به ازای هر مقدار $x > -2$ ، دو مقدار برای y وجود دارد. طرحی از نمودار معادله مفروض در شکل ۶.۲.۱ نمایش داده شده، که نمودار یک سهمی است. ▲



شکل ۶.۲.۱

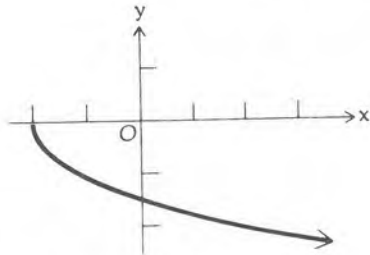
مثال ۲ طرحی از نمودار معادله های زیر رسم کنید

$$y = \sqrt{x+2}$$

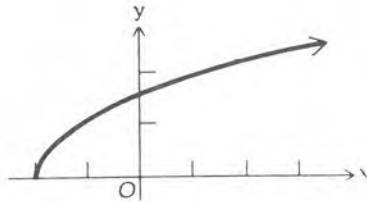
$$y = -\sqrt{x+2}.$$

حل معادله $y = \sqrt{x+2}$ همان معادله (۳) است. مقدار y غیر منفی است، بنابراین نمودار این معادله نیمه بالایی نمودار معادله (۲) می باشد. طرحی از این نمودار در شکل ۷.۲.۱ نشان داده شده است.

به طریق مشابه، نمودار معادله $y = -\sqrt{x+2}$ که طرحی از آن در شکل ۸.۲.۱ نشان داده شده، عبارت است از نیمه پایینی سهمی شکل ۶.۲.۱.



▲ شکل ۸.۲.۱



شکل ۷.۲.۱

مثال ۳ طرحی از نمودار معادله زیر رسم کنید

$$y = |x+3|.$$

حل با استفاده از تعریف قدر مطلق يك عدد حقیقی داریم

$$y = \begin{cases} x+3 & x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & x+3 < 0 \end{cases}$$

یا، به عبارت دیگر،

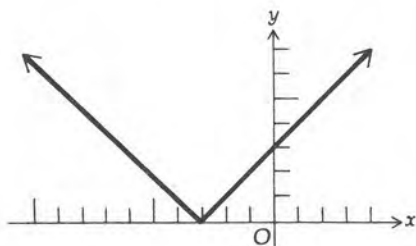
$$y = \begin{cases} x+3 & x \geq -3 \\ -(x+3) & x < -3 \end{cases}$$

جدول ۳.۲.۱ شامل مقادیری از x و y است که در معادله داده شده صدق می کنند.

جدول ۳.۲.۱

x	۰	۱	۲	۳	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	-۷	-۸	-۹
y	۳	۴	۵	۶	۲	۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

طرحی از نمودار معادله مفروض در شکل ۹.۲.۱ نشان داده شده است.



شکل ۹.۲.۱

مثال ۴ طرحی از نمودار معادله زیر رسم کنید

$$(x - 2y + 3)(y - x^2) = 0 \quad (5)$$

حل طبق این خاصیت اعداد حقیقی که $ab = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$ یا $b = 0$ ، از معادله (۵) داریم

$$x - 2y + 3 = 0 \quad (6)$$

یا

$$y - x^2 = 0 \quad (7)$$

مختصات تمام نقاطی که در معادله (۵) صدق می کنند، در یکی از معادله های (۶) یا (۷) نیز صادق هستند، و مختصات هر نقطه ای که در یکی از معادلات (۶) یا (۷) صادق باشد، در معادله (۵) هم صادق است. در نتیجه نمودار معادله (۵) شامل نمودارهای معادلات (۶) و (۷) خواهد بود. در جدول های ۴.۲.۱ و ۵.۲.۱ مقادیری از x و y که به ترتیب در

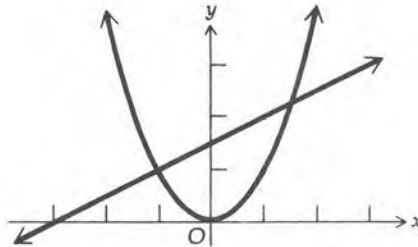
جدول ۴.۲.۱

x	۰	۱	۲	۳	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
y	$\frac{3}{2}$	۲	$\frac{5}{2}$	۳	۱	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱

جدول ۵.۲.۱

x	۰	۱	۲	۳	-۱	-۲	-۳
y	۰	۱	۴	۹	۱	۴	۹

معادله‌های (۶) و (۷) صدق می‌کنند، داده شده است، همچنین طرحی از نمودار معادله (۵) در شکل ۱۰.۲.۱ رسم شده است.



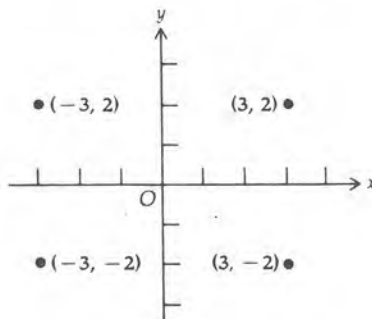
شکل ۱۰.۲.۱

تعریف ۳.۲.۱ معادله یک نمودار، عبارت است از معادله‌ای که مختصات نقاط روی نمودار، و فقط مختصات این نقاط، در آن صدق می‌کنند.

○ نمونه ۱ معادله $y = 8$ در R^2 ، معادله‌ای است که نمودار آن شامل نقاط با عرض ۸ است، ولذا نمودار آن خطی است به موازات محور x ها و ۸ واحد بالای آن محور. در رسم طرحی از نمودار یک معادله، در نظر گرفتن خواص تقارن نمودار غالباً مفید واقع می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ گوئیم دو نقطه P و Q نسبت به یک خط متقارن هستند اگر و تنها اگر آن خط عمود منصف پاره خط PQ باشد. دو نقطه P و Q نسبت به یک نقطه سوم متقارن هستند اگر و تنها اگر آن نقطه سوم وسط پاره خط PQ باشد.

○ نمونه ۲ نقاط $(3, 2)$ و $(3, -2)$ نسبت به محور x ها، و نقاط $(3, 2)$ و $(-3, 2)$ نسبت به محور y ها متقارن و نقاط $(3, 2)$ و $(-3, -2)$ نسبت به مبدأ متقارن هستند. (به شکل ۱۱.۲.۱ مراجعه کنید).



شکل ۱۱.۲.۱

به طور کلی نقاط (x, y) و $(x, -y)$ نسبت به محور x ها، (x, y) و $(-x, y)$ نسبت به محور y ها، و (x, y) و $(-x, -y)$ نسبت به مبدأ متقارن هستند.

۵.۲.۱ تعریف نمودار يك معادله نسبت به خطی مانند l متقارن است اگر و تنها اگر برای هر نقطه مانند P روی نمودار، نقطه دیگری مانند Q روی نمودار وجود داشته باشد، که P و Q نسبت به خط l متقارن باشند. نمودار يك معادله نسبت به نقطه ای مانند R متقارن است اگر و تنها اگر برای هر نقطه S روی نمودار، نقطه ای مانند P روی نمودار وجود داشته باشد که P و S نسبت به نقطه R متقارن باشند.

از تعریف ۵.۲.۱ نتیجه می شود که اگر (x, y) نقطه ای از نموداری باشد که نسبت به محور x ها متقارن است، آنگاه نقطه $(x, -y)$ نیز روی نمودار است. و اگر نقاط (x, y) و $(x, -y)$ هر دو روی نموداری باشند، آن نمودار نسبت به محور x ها متقارن است. و از این دو مختصات نقاط (x, y) و $(x, -y)$ باید در معادله نمودار صدق کنند. پس می توانیم نتیجه بگیریم که: نمودار يك معادله از x و y نسبت به محور x ها متقارن است اگر و تنها اگر وقتی در معادله، y را به $-y$ تبدیل کنیم يك معادله هم ارز با معادله اولی به دست آید. به این ترتیب، قسمت (i) قضیه بعدی ثابت شد؛ اثبات قسمتهای (ii) و (iii) شبیه اثبات قسمت (i) هستند.

۶.۲.۱ قضیه (آزمونهای برای تقارن) نمودار يك معادله از x و y

- (i) نسبت به محور x ها متقارن است اگر و تنها اگر تبدیل y به $-y$ معادله دیگری هم ارز با آن معادله به وجود آورد.
- (ii) نسبت به محور y ها متقارن است اگر و تنها اگر تبدیل x به $-x$ معادله دیگری هم ارز با آن معادله به وجود آورد.
- (iii) نسبت به مبدأ مختصات متقارن است اگر و تنها اگر تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ معادله دیگری هم ارز با آن معادله به وجود آورد.

نمودار شکل ۵.۲.۱ نسبت به محور y ها متقارن است و در معادله (۱)، اگر x به $-x$ تبدیل شود يك معادله هم ارز به وجود می آید. در مثال ۱ معادله $0 = x^2 - x - 2$ را داریم که اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم يك معادله هم ارز به دست می آید؛ در شکل ۶.۲.۱ نیز مشاهده می شود که نمودار این معادله نسبت به محور x ها متقارن است. مثال زیر نموداری را به دست می دهد که نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

مثال ۵ طرحی از نمودار معادله $xy = 1$ رسم کنید.

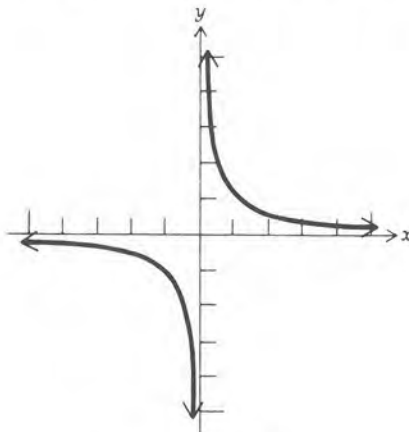
۱. از این پس، برای رعایت اختصار، در عبارت «طرحی از نمودار...»، تسامحاً «طرحی از» را حذف می کنیم. - م.

حل اگر در این معادله، x به $-x$ و y به $-y$ تبدیل شود، یک معادله هم‌ارز به وجود می‌آید؛ پس بنا به قضیه ۶.۲.۱ (iii) نمودار آن نسبت به مبدأ متقارن است. چند مقدار از x و y که در معادله مفروض صدق می‌کنند، در جدول ۶.۲.۱ نشان داده شده است.

جدول ۶.۲.۱

x	۱	۲	۳	۴	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	-۱	-۲	-۳	-۴	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
y	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	۲	۳	۴	-۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	-۲	-۳	-۴

از معادله مفروض، داریم $y = 1/x$. حال، وقتی x با مقادیر مثبت افزایش یابد y با مقادیر مثبت کاهش می‌یابد و به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. از طرف دیگر، وقتی x با مقادیر مثبت کاهش یابد، y با مقادیر مثبت افزایش می‌یابد و بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود. همچنین وقتی x با مقادیر منفی افزایش یابد (یعنی مقادیر -۱ ، -۲ ، -۳ ، -۴ و غیره را بپذیرد)، قدر مطلق y بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود. نمودار معادله در شکل ۱۲.۲.۱ رسم شده است.



شکل ۱۲.۲.۱

تمرینهای ۲.۱

در تمرینهای ۱ تا ۶ ابتدا نقطه مفروض P را نمایش دهید و سپس نقاط با مشخصات داده شده زیر را در صورتی که مصداق داشته باشند به دست آورید.

(الف) نقطه Q به طوری که خطی که از Q و P می‌گذرد، عمود بر محور x ها باشد و به

وسیله آن نصف شود. مختصات Q را بیابید.

(ب) نقطه R به طوری که خطی که از RP می‌گذرد عمود بر محور y ها باشد و به وسیله آن نصف شود. مختصات R را پیدا کنید.

(پ) نقطه S به طوری که خطی که از P و S می‌گذرد به وسیله مبدأ نصف شود. مختصات S را بیابید.

(ث) نقطه T به طوری که خطی که از P و T می‌گذرد عمود بر نیمساز ربع اول و سوم باشد و به وسیله آن نصف شود. مختصات نقطه T را پیدا کنید.

$$P(2, 2) \quad ۳. \quad P(-2, 2) \quad ۲. \quad P(1, -2) \quad ۱.$$

$$P(0, -3) \quad ۶. \quad P(-1, -3) \quad ۵. \quad P(-2, -2) \quad ۴.$$

در تمرینهای ۷ تا ۳۶، نمودار معادلات داده شده را رسم کنید.

$$y = 2x + 5 \quad ۷. \quad y = 2x - 3 \quad ۸.$$

$$y = \sqrt{x+5} \quad ۹. \quad y = \sqrt{x-3} \quad ۱۰.$$

$$y = -\sqrt{x+5} \quad ۱۱. \quad y = -\sqrt{x-3} \quad ۱۲.$$

$$y^2 = x - 3 \quad ۱۳. \quad y = 5 \quad ۱۴.$$

$$x = -3 \quad ۱۵. \quad x = y^2 + 1 \quad ۱۶.$$

$$y = |x - 5| \quad ۱۷. \quad y = -|x + 2| \quad ۱۸.$$

$$y = |x| - 5 \quad ۱۹. \quad y = -|x| + 2 \quad ۲۰.$$

$$y = 5 - |x + 1| \quad ۲۱. \quad y = 3 - x^2 \quad ۲۲.$$

$$2x^2 + 9y^2 = 36 \quad ۲۳. \quad 4x^2 - 9y^2 = 36 \quad ۲۴.$$

$$y = 4 + x^2 \quad ۲۵. \quad 2y = -x^2 \quad ۲۶.$$

$$y = 4x^2 \quad ۲۷. \quad y^2 = 4x^2 \quad ۲۸.$$

$$4x^2 - y^2 = 0 \quad ۲۹. \quad y = \sqrt[3]{x} \quad ۳۰.$$

$$4x^2 + y^2 = 0 \quad ۳۱. \quad 3x^2 - 13xy - 10y^2 = 0 \quad ۳۲.$$

$$x^4 - 5x^2y + 4y^2 = 0 \quad ۳۳. \quad (2x + y - 1)(4y + x^2) = 0 \quad ۳۴.$$

$$2y = \sqrt{x-4} \quad ۳۵. \quad (y^2 - x + 2)(y + \sqrt{x-4}) = 0 \quad ۳۶.$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۲، نمودار هر یک از معادلات را رسم کنید.

۳۷. (الف) $x+3y=0$ ؛ (ب) $x-3y=0$ ؛ (پ) $x^2-9y^2=0$

۳۸. (الف) $2x-5y=0$ ؛ (ب) $2x+5y=0$ ؛ (پ) $4x^2-25y^2=0$

۳۹. (الف) $y=\sqrt{2x}$ ؛ (ب) $y=-\sqrt{2x}$ ؛ (پ) $y^2=2x$

۴۰. (الف) $y=\sqrt{-2x}$ ؛ (ب) $y=-\sqrt{-2x}$ ؛ (پ) $y^2=-2x$

۴۱. (الف) $y=\sqrt{4-x^2}$ ؛ (ب) $y=-\sqrt{4-x^2}$ ؛ (پ) $x^2+y^2=4$

۴۲. (الف) $y=\sqrt{x^2-4}$ ؛ (ب) $y=-\sqrt{x^2-4}$ ؛ (پ) $x^2-y^2=4$

۴۳. معادله‌ای بنویسید که

(الف) نمودار آن محور x ها باشد.

(ب) نمودار آن محور y ها باشد.

(پ) نمودار آن مجموعه نقاط واقع بر محور x ها و یا محور y ها باشد.

۴۴. معادله‌ای بنویسید که

(الف) نمودار آن شامل تمام نقاطی باشد که طول آنها برابر ۴ است.

(ب) نمودار آن شامل تمام نقاطی باشد که عرض آنها برابر ۳ است.

۴۵. ثابت کنید که اگر نموداری نسبت به هر دو محور مختصات متقارن باشد، آنگاه نسبت به مبدأ نیز متقارن است.

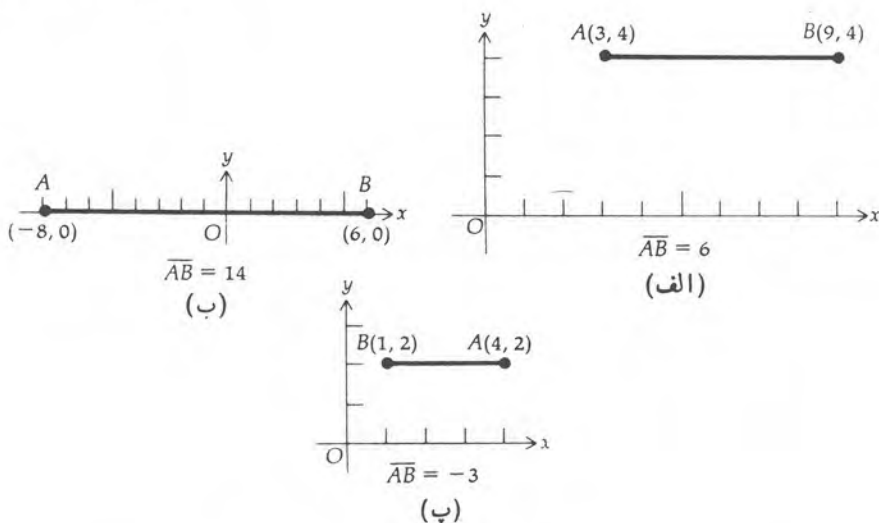
۴۶. نمودار معادله‌ای از x و y نسبت به خط با معادله $y=x$ متقارن است اگر و تنها اگر، هرگاه به جای x ، y و به جای y ، x قرار گیرد، یک معادله هم‌ارز به دست آید. نشان دهید که نمودار معادله $ax^2+by^2=c$ نسبت به این خط متقارن است اگر و تنها اگر $a=b$.

۴۷. ثابت کنید که اگر نموداری نسبت به دو خط متعامد متقارن باشد، آنگاه نسبت به نقطه محل تقاطع آن دو خط نیز متقارن است.

۳.۱ فرمول فاصله و فرمولهای دایره و نقطه وسط یک پاره خط

حال، مسئله یافتن فاصله بین دو نقطه از R^2 را بررسی می‌کنیم. اگر A نقطه (x_1, y_1) و B نقطه (x_2, y_2) باشد A و B دارای عرضهای یکسان و لسی طولهای مختلف هستند، آنگاه فاصله جهت‌دار از A تا B با علامت $\overline{AB}$ نمایش داده و با مقدار $x_2 - x_1$ تعریف می‌شود.

○ نمونه ۱ به شکلهای ۱.۳.۱ (الف)، (ب)، و (پ) رجوع کنید.

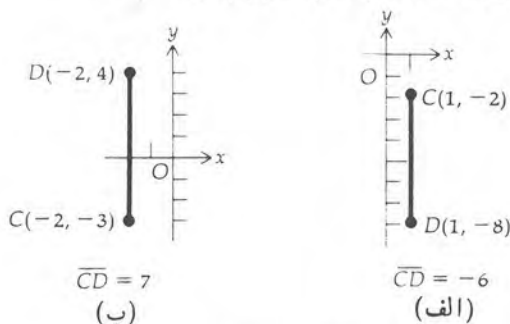


شکل ۱.۳.۱

اگر A نقطه $(3, 4)$ و B نقطه $(9, 4)$ باشد، آنگاه $\overline{AB} = 9 - 3 = 6$.
 اگر A نقطه $(-8, 0)$ و B نقطه $(6, 0)$ باشد، آنگاه $\overline{AB} = 6 - (-8) = 14$.
 اگر A نقطه $(4, 2)$ و B نقطه $(1, 2)$ باشد، آنگاه $\overline{AB} = 1 - 4 = -3$.
 می بینیم که $\overline{AB}$ مثبت است اگر B در طرف راست A و منفی است اگر B در طرف چپ A باشد.

اگر C نقطه (x_1, y_1) و D نقطه (x_2, y_2) باشد، آنگاه فاصله جهت دار از C تا D با علامت $\overline{CD}$ نمایش داده و بامقدار $y_2 - y_1$ مشخص می شود.

○ نمونه ۲ به شکل های ۲.۳.۱ (الف)، و (ب) مراجعه کنید.



شکل ۲.۳.۱

اگر C نقطه $(1, -2)$ و D نقطه $(1, -8)$ باشد، آنگاه $\overline{CD} = -8 - (-2) = -6$.

اگر نقطه $C(-2, -3)$ و $D(-2, 4)$ باشد، آنگاه $\overline{CD} = 4 - (-3) = 7$ ، عدد $\overline{CD}$ مثبت است اگر D بالای C ، و منفی است اگر D پایین C باشد. $\circ$

ما فاصله جهت دار $\overline{AB}$ را به عنوان فاصله علامت داری که یک ذره متحرک از $A(x_1, y_1)$ تا $B(x_2, y_2)$ می‌پیماید، در نظر می‌گیریم. در چنین موردی، طول ذره متحرک از x_1 به x_2 تغییر می‌کند، و نماد Δx «دلتا ایکس» برای نمایش این تغییر به کار می‌رود؛ یعنی،

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

بنابراین $\overline{AB} = \Delta x$.

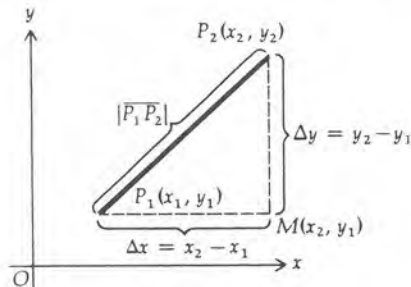
به این نکته مهم توجه کنید که نماد Δx تفاضل بین طول B و طول A را نشان می‌دهد، و معنی آن « Δ ضرب در x » نیست.

به طریق مشابه، اگر ذره متحرکی را در نظر بگیریم که در امتداد خطی به موازات محور y ها، از نقطه $C(x_1, y_1)$ حرکت خود را آغاز کند و به طرف نقطه $D(x_2, y_2)$ برود، آنگاه عرض ذره متحرک از y_1 به y_2 تغییر می‌کند. این تغییر را با Δy نشان می‌دهیم؛ یعنی،

$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

بنابراین $\overline{CD} = \Delta y$.

اکنون فرض کنید $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه صفحه باشند. می‌خواهیم فرمولی برای فاصله غیرمنفی بین این دو نقطه پیدا کنیم. این فاصله را با $|P_1P_2|$ نشان می‌دهیم. علامت قدر مطلق را به این خاطر به کار می‌بریم که صرفاً می‌خواهیم طول پاره خط بین دو نقطه P_1 و P_2 را که عددی غیرمنفی است به دست آوریم. برای یافتن فرمول، توجه کنید که $|P_1P_2|$ برابر با طول وتر مثلث قائم الزاویه P_1MP_2 است. این موضوع در شکل ۳.۳.۱، برای دو نقطه P_1 و P_2 که هر دو در ربع اول واقع هستند، نشان داده شده است.



شکل ۳.۳.۱

با استفاده از قضیه فیثاغورث،

$$|P_1P_2|^2 = |\Delta x|^2 + |\Delta y|^2.$$

بنابراین

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}.$$

یعنی

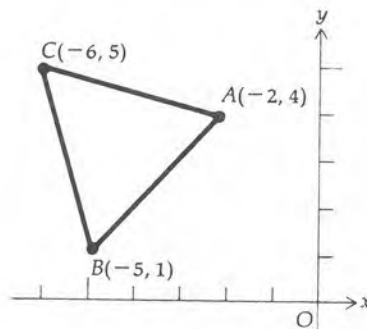
$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (۱)$$

فرمول (۱) برای همه نقاط P_1 و P_2 ، در هر ربع که باشند، برقرار است. طول وتر مثلث قائم الزاویه همیشه برابر با $|\overline{P_1 P_2}|$ ، و طول اضلاع آن همیشه برابر با $|\Delta x|$ و $|\Delta y|$ هستند (تمرینهای ۳۳ و ۳۴ را ببینید). این نتیجه را به عنوان یک قضیه بیان می‌کنیم.

۱.۳.۱ قضیه فاصله غیر جهت دار بین دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ از فرمول زیر به دست می‌آید

$$|\overline{P_1 P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

مثال ۱ نشان دهید مثلثی که رئوس آن نقاط $A(-2, 4)$ ، $B(-5, 1)$ ، $C(-6, 5)$ هستند، یک مثلث متساوی الساقین است.



شکل ۴.۳.۱

حل مثلث در شکل ۴.۳.۱ نشان داده شده است.

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6 + 5)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

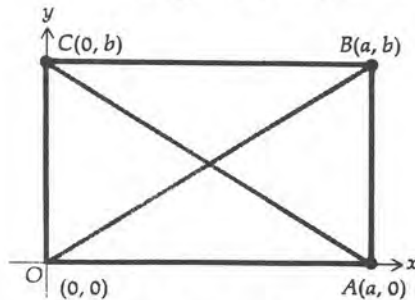
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(-2 + 5)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

پس $|\overline{BC}| = |\overline{AC}|$. لذا مثلث متساوی الساقین است. ▲

مثال ۲ باروش تحلیلی ثابت کنید که طول اقطار یک مستطیل باهم مساوی هستند.

حل در شکل ۵.۳.۱ نموداری از يك مستطیل رسم شده است. چون محورهای مختصات را در هر مکانی از صفحه می‌توانیم اختیار کنیم و انتخاب محل محورها تأثیری بر درستی قضیه ندارد، مبدأ مختصات را بر یکی از رئوس، محور x ها را در امتداد يك ضلع، و محور y ها را در امتداد ضلع دیگر، انتخاب می‌کنیم. این عمل مختصات رئوس واقع بر دو محور را ساده می‌کند. به شکل ۵.۳.۱ رجوع کنید.



شکل ۵.۳.۱

حال می‌توانیم فرض و حکم را بیان کنیم.
فرض: $OABC$ يك مستطیل با اقطار OB و AC است.
حکم: $|\overline{OB}| = |\overline{AC}|$.

اثبات

$$|\overline{OB}| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(0-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

□

بنابراین، $|\overline{OB}| = |\overline{AC}|$.

یکی از ساده‌ترین منحنیهایی که نمودار يك معادله درجه دوم با دو متغیر است، دایره می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود. برای به دست آوردن معادله يك دایره از فرمول فاصله استفاده می‌کنیم.

۲.۳.۱ تعریف يك دایره عبارت است از مجموعه تمام نقاطی از صفحه که از يك نقطه ثابت، فاصله یکسان دارند. نقطه ثابت را مرکز دایره، و اندازه فاصله مذکور را شعاع دایره می‌نامند.

۳.۳.۱ قضیه معادله دایره به مرکز $C(h, k)$ و به شعاع r به صورت زیر است

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \quad (2)$$

اثبات نقطه $P(x, y)$ روی دایره قرارداد اگر داشته باشیم

$$|PC| = r$$

یعنی، اگر و تنها اگر

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

این رابطه درست است اگر و تنها اگر

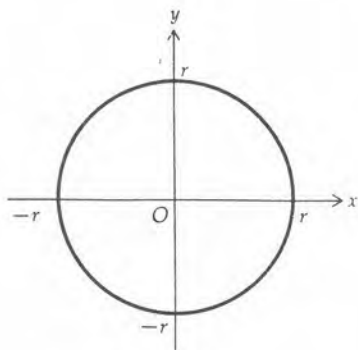
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

که همان معادله (۲) است. مختصات نقاطی که روی دایره هستند، فقط مختصات این نقاط، در این معادله صدق می کنند. پس (۲) یک معادله دایره است. $\square$

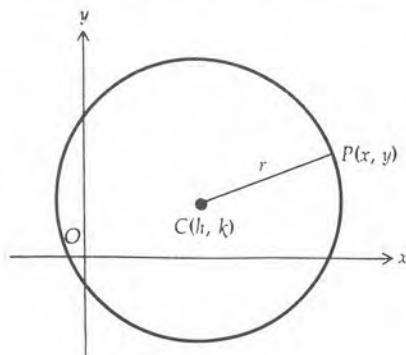
شکل ۶.۳.۱، دایره به مرکز (h, k) و به شعاع r را نشان می دهد. اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد، آنگاه $h = k = 0$ و لذا معادله دایره به صورت زیر است

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

شکل ۷.۳.۱ چنین دایره ای را نشان می دهد.



شکل ۷.۳.۱



شکل ۶.۳.۱

اگر مرکز و اندازه شعاع يك دایره معلوم باشد، دایره را می توان به وسیله پرگار رسم کرد.

○ نمونه ۳ معادله

$$x^2 + y^2 = 9$$

○

معادله دایره ای است که مرکز آن در مبدأ واقع، و شعاع آن ۳ است.

مثال ۳ معادلهٔ دایرهٔ به مرکز $(-۲, ۴)$ و شعاع ۵ را بیابید. این دایره را رسم کنید.

حل دایره در شکل ۸.۳.۱ نشان داده شده است. معادلهٔ دایره به صورت (۲) است که در آن، $h = ۴$ ، $k = -۲$ ، و $r = ۵$. با قرار دادن این مقادیر در (۲) داریم

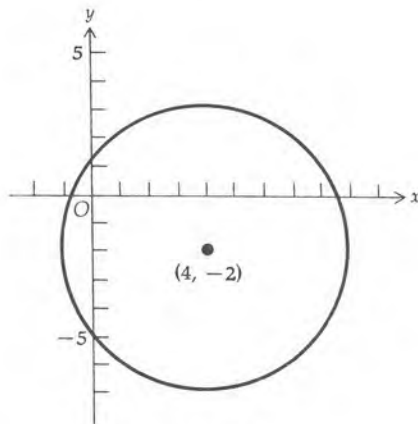
$$(x-4)^2 + [y-(-2)]^2 = 5^2$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

اگر توانها را محاسبه کنیم داریم

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 4y + 4 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0.$$



شکل ۸.۳.۱

مثال ۴ نشان دهید که نمودار معادلهٔ $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ يك دایره است؛ مرکز و شعاع آن را پیدا کنید.

حل معادلهٔ داده شده را می توان به صورت زیر نوشت

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = 15.$$

۱. در این گونه موارد، که صحت از معادلهٔ خط، دایره، و نظایر اینهاست، باید به صورت نکره گفت «معادله ای برای ...» ولی در این کتاب، بنابه سنت مرسوم در بیشتر کتابهای ریاضی فارسی -و حتی کتابهای دبیرستانی- اغلب آن را به صورت معرفی می نویسیم که خواننده باید به این نکته توجه داشته باشد. - م.

اگر با اضافه کردن ۹ و ۱ به دو طرف معادله، عبارات داخل پرانتز را به صورت مربع کامل در آوریم، داریم

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25 = 5^2.$$

از مقایسه این معادله با معادله (۲)، ملاحظه می شود که این معادله، معادله ای است برای دایره به شعاع ۵ و مرکز $(-3, 1)$. $\blacktriangle$

اگر در معادله (۲) پرانتزها را برداریم، و جملات را با هم ترکیب کنیم، داریم

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0. \quad (3)$$

معادله (۳) را به صورت زیر نیز می توان نوشت

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4)$$

که در آن، $D = -2h$ ، $E = -2k$ ، و $F = h^2 + k^2 - r^2$. معادله (۴) صورت کلی معادله یک دایره نامیده می شود، حال آنکه معادله (۲) صورت شعاع - مرکزی نام دارد. چون هر دایره هم یک مرکز دارد و هم یک شعاع، معادله اش را می توان به صورت شعاع-مرکزی و از آنجا به صورت کلی نوشت. حال این مسأله را بررسی می کنیم که آیا نمودار هر معادله به صورت

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

یک دایره است یا خیر. برای تعیین جواب، اگر معادله فوق را به صورت شعاع-مرکزی بنویسیم داریم

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = -F.$$

سپس، با اضافه کردن $\frac{1}{4}D^2$ و $\frac{1}{4}E^2$ به دو طرف، مربعات کاملی ایجاد می کنیم، و

$$(x^2 + Dx + \frac{1}{4}D^2) + (y^2 + Ey + \frac{1}{4}E^2) = -F + \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{4}E^2$$

یا

$$(x + \frac{1}{2}D)^2 + (y + \frac{1}{2}E)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F) \quad (5)$$

را به دست می آوریم. معادله (۵) به صورت معادله (۲) است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F) = r^2.$$

اکنون بر حسب مثبت، منفی، یا صفر بودن $(D^2 + E^2 - 4F)$ سه حالت در نظر می گیریم.

$$\text{حالت ۱: } (D^2 + E^2 - 4F) > 0.$$

در این صورت $r^2 = (D^2 + E^2 - 4F)/4$ ، و لذا (δ) معادله دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}/2$ و به مرکز $(-D/2, -E/2)$.

$$\text{حالت ۲: } D^2 + E^2 - 4F = 0.$$

در این صورت معادله (δ) به صورت زیر است

$$\left(x + \frac{1}{2}D\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}E\right)^2 = 0. \quad (6)$$

چون تنها مقادیر حقیقی x و y که در (6) صدق می کنند، مقادیر $x = -D/2$ ، و $y = -E/2$ هستند، نمودار آن نقطه $(-D/2, -E/2)$ است. از مقایسه (6) با (2) ملاحظه می شود که $h = -D/2$ ، $k = -E/2$ ، و $r = 0$. پس نقطه $(-D/2, -E/2)$ را می توان يك دایره - نقطه نامید.

$$\text{حالت ۳: } (D^2 + E^2 - 4F) < 0.$$

در این حالت، در طرف راست معادله (δ) يك عدد منفی وجود دارد، و در طرف چپ آن مجموع مربعات دو عدد حقیقی. هیچ مقدار حقیقی x و y نمی تواند در چنین معادله‌ای صدق کند؛ و در نتیجه، نمودار، مجموعه تهی است. قبل از این که نتیجه این سه حالت را به عنوان يك قضیه بیان کنیم، مشاهده می کنیم که طرفین هر معادله به صورت

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{با شرط } A \neq 0 \quad (7)$$

را می توان بر A تقسیم کرد و به صورت معادله (4) نوشت، و

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

را به دست آورد. معادله (7) حالت خاصی از صورت کلی معادله درجه دوم،

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

است که در آن، ضرایب x^2 و y^2 مساوی هستند و جمله xy وجود ندارد. قضیه زیر نتیجه‌ای از بحث بالاست.

۴.۳.۱ قضیه اگر در يك معادله درجه دوم بر حسب x و y در R^2 ، ضرایب x^2 و y^2 برابر باشند، و جمله xy وجود نداشته باشد، آنگاه نمودار آن يك دایره، يك دایره-نقطه، و یا مجموعه تهی است.

○ نمونه ۴ معادله

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 31 = 0$$

به صورت معادله (۷) است، پس نمودار آن يك دایره، يك دایره - نقطه، و یا مجموعه تهی است. اگر آن را به صورت معادله (۲) بنویسیم، خواهیم داشت

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + \frac{31}{2} = 0$$

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 4y) = -\frac{31}{2}$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -\frac{31}{2} + 9 + 4$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = -\frac{5}{2}.$$

○ بنابراین نمودار آن مجموعه تهی است.

مثال ۵ معادله ای برای دایره مار بر سه نقطه $A(4, 5)$ ، $B(3, -2)$ ، و $C(1, -4)$ بنویسید.

حل صورت کلی معادله دایره عبارت است از

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

چون نقاط A ، B ، و C باید روی این دایره باشند، مختصات آنها باید در معادله فوق صمدق کنند. پس

$$16 + 25 + 4D + 5E + F = 0$$

$$9 + 4 + 3D - 2E + F = 0$$

$$1 + 16 + D - 4E + F = 0$$

و یا

$$4D + 5E + F = -41$$

$$3D - 2E + F = -13$$

$$D - 4E + F = -17.$$

از حل دستگاه سه معادله سه مجهولی فوق، داریم

$$F = -44, E = -5, D = 7$$

پس معادله دایره به صورت زیر است

$$\Delta \quad x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0.$$

فرض کنید $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقاط انتهایی يك پاره خط هستند. این پاره خط را P_1P_2 نمایش می‌دهیم. این نماد را با نماد $\overline{P_1P_2}$ که فاصله جهت‌دار از P_1 تا P_2 را نمایش می‌دهد اشتباه نگیرید؛ $\overline{P_1P_2}$ يك عدد را نمایش می‌دهد، درحالی‌که P_1P_2 يك پاره‌خط است. فرض کنید $P(x, y)$ نقطه وسط پاره‌خط P_1P_2 است؛ به شکل ۹.۳.۱ رجوع کنید.

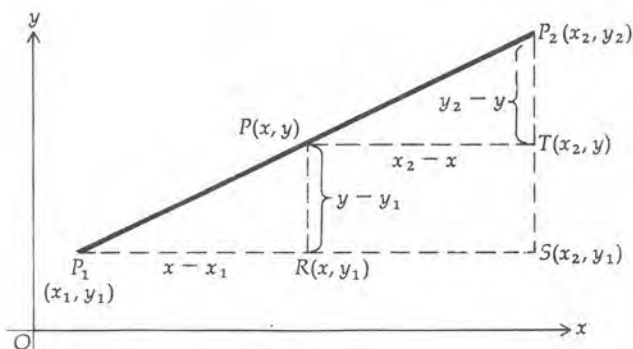
در شکل ۹.۳.۱ مثلث‌های P_1RP و PTP_2 قابل انطباق هستند. بنابراین $|\overline{P_1R}| = |\overline{PT}|$ ، و در نتیجه $x - x_1 = x_2 - x$ ؛ ولذا

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (۸)$$

به طریق مشابه، $|\overline{RP}| = |\overline{TP_2}|$. پس $y - y_1 = y_2 - y$ و بنابراین

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (۹)$$

پس، مختصات نقطه وسط يك پاره خط، به ترتیب، برابر با متوسط طولها و متوسط عرضهای نقاط انتهایی آن پاره خط است.



شکل ۹.۳.۱

برای به دست آوردن فرمولهای (۸) و (۹)، فرض شده بود که $x_2 > x_1$ و $y_2 > y_1$. این فرمولها را با هر ترتیب دیگری برای این اعداد هم می‌توان به دست آورد (به تمرینهای ۳۵ و ۳۶ مراجعه کنید).

مثال ۶ معادله دایره‌ای را بیابید که دو انتهای یکی از اقطارش نقاط $A(-2, 3)$ و $B(4, 5)$ هستند.

حل چون دو انتهای یکی از قطرهای نقاط A و B هستند، نقطه وسط پاره خط AB مرکز دایره است. شکل ۱۰.۳.۱ را ببینید. اگر $C(h, k)$ مرکز دایره باشد، آنگاه

$$h = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad k = \frac{3+5}{2} = 4.$$

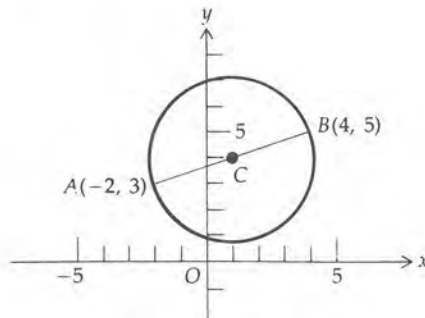
مرکز در $C(1, 4)$ است. شعاع دایره را می‌توان به عنوان $|CA|$ یا $|CB|$ محاسبه کرد. اگر $r = |CA|$ ، آنگاه

$$r = \sqrt{(1+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}.$$

پس، معادله دایره عبارت است از

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 7 = 0.$$

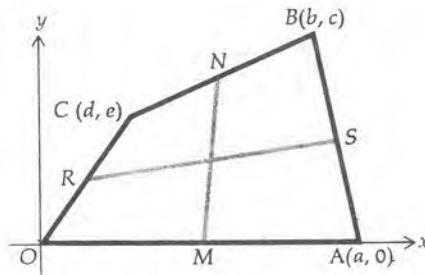


شکل ۱۰.۳.۱

مثال ۷ باروش تحلیلی ثابت کنید که پاره‌خطهایی که نقاط وسط اضلاع مقابل یک چهارضلعی دلخواه را به هم وصل می‌کنند، منصف یکدیگرند.

حل یک چهارضلعی دلخواه رسم می‌کنیم. مبدأ را روی یکی از رئوس و محور x ها را در امتداد یکی از اضلاع انتخاب می‌کنیم. این روش، پیدا کردن مختصات دو رأس واقع بر محور x ها را ساده می‌کند. شکل ۱۱.۳.۱ را ببینید.

فرض: $OABC$ یک چهارضلعی است؛ M نقطه وسط OA ، N نقطه وسط CB ، R نقطه وسط OC و S نقطه وسط AB است.



شکل ۱۱.۳.۱

حکم: MN و RS منصف یکدیگرند.

اثبات برای اینکه نشان دهیم دو پاره خط منصف یکدیگرند، نشان می‌دهیم که نقطه وسط آنها یکی است. با استفاده از فرمولهای (۸) و (۹)، مختصات نقاط N ، M ، R و S را به دست می‌آوریم. مختصات این نقاط به ترتیب برابرند با $M(a/2, 0)$ ، $S((a+b)/2, c/2)$ ، $R(d/2, e/2)$ ، $N((b+d)/2, (c+e)/2)$.
 طول نقطه وسط MN برابر است با $(a+b+d)/4$ ، $[a/2 + (b+d)/2]/2 = (a+b+d)/4$.
 عرض نقطه وسط MN برابر است با $(c+e)/4$ ، $[0 + (c+e)/2]/2 = (c+e)/4$.
 بنابراین نقطه وسط MN نقطه $((a+b+d)/4, (c+e)/4)$ است.
 طول نقطه وسط RS برابر است با $(a+b+d)/4$ ، $[d/2 + (a+b)/2]/2 = (a+b+d)/4$.
 عرض نقطه وسط RS برابر است با $(c+e)/4$ ، $[(e+c)/2]/2 = (c+e)/4$.
 بنابراین نقطه وسط RS نقطه $((a+b+d)/4, (c+e)/4)$ است.
 پس، نقطه وسط MN و نقطه وسط RS یکی هستند، و از اینرو این دو پاره خط منصف یکدیگرند. $\square$

تمرینهای ۳.۱

۱. میانه یک مثلث پاره خطی است که يك رأس مثلث را به نقطه وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند. طول میانه‌های مثلثی با رئوس $A(2, 3)$ ، $B(3, -3)$ ، و $C(-1, -1)$ را به دست آورید.
۲. طول میانه‌های مثلثی با رئوس $A(-3, 5)$ ، $B(2, 4)$ ، و $C(-1, -4)$ را به دست آورید.
۳. ثابت کنید مثلث با رئوس $A(3, -6)$ ، $B(8, -2)$ ، و $C(-1, -1)$ قائم‌الزاویه است. مساحت مثلث را پیدا کنید (راهنمایی: عکس قضیه فیثاغورث را به کار ببرید).

۴. نقاط وسط اقطار چهارضلعی بارئوس $(0,0)$ ، $(0,4)$ ، $(3,5)$ ، و $(3,1)$ را به دست آورید.
۵. ثابت کنید که نقاط $A(-7,2)$ ، $B(3,-4)$ ، و $C(1,4)$ رئوس یک مثلث متساوی الساقین هستند.
۶. ثابت کنید که نقاط $A(-4,-1)$ ، $B(-2,-3)$ ، $C(4,3)$ ، و $D(2,5)$ رئوس یک مستطیل هستند.
۷. با استفاده از فرمول فاصله (1) ، ثابت کنید که نقاط $(-3,2)$ ، $(1,-2)$ ، و $(9,-10)$ روی یک خط قرار دارند.
۸. با استفاده از فرمول فاصله (1) ، مشخص کنید که آیا نقاط $(14,7)$ ، $(2,2)$ ، و $(-4,-1)$ روی یک خط قرار دارند یا خیر.
۹. ثابت کنید نقاط $A(6,-13)$ ، $B(-2,2)$ ، $C(13,10)$ ، و $D(21,-5)$ رئوس یک مربع هستند و طول یک قطر آن را پیدا کنید.
۱۰. اگر یکی از نقاط انتهایی پاره خطی نقطه $(-4,2)$ ، و نقطه وسط آن $(3,-1)$ باشد، مختصات نقطه انتهایی دیگر پاره خط را به دست آورید.
۱۱. اگر یک انتهای پاره خطی نقطه $(2,-6)$ ، و نقطه وسط آن $(5,-1)$ باشد، مختصات انتهای دیگر پاره خط را پیدا کنید.
۱۲. طول نقطه ای E — و فاصله آن از نقطه $(1,3)$ برابر با $\sqrt{74}$ است. عرض آن نقطه را به دست آورید.
۱۳. اگر دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع نقاط $(-4,3)$ و $(0,0)$ باشند، رأس سوم را به دست آورید.
۱۴. معادله ای پیدا کنید که مختصات نقطه ای که فاصله اش از نقاط $(-3,2)$ و $(4,6)$ برابر است، در آن صدق کنند.
۱۵. معادله ای پیدا کنید که مختصات نقطه ای که فاصله اش از نقطه $(5,3)$ همواره ۲ واحد بیشتر از فاصله اش از نقطه $(-4,-2)$ است، در آن صدق کنند.
۱۶. دو نقطه $A(-3,4)$ و $B(2,5)$ داده شده اند. مختصات نقطه P روی خط ماربر AB را پیدا کنید به طوری که
 - (الف) فاصله P از A دو برابر فاصله آن از B باشد.
 - (ب) فاصله P از B دو برابر فاصله آن از A باشد.

دز تمرینهای ۱۷ تا ۲۰ معادله دایره به شعاع r و به مرکز C را به صورت شعاع-مرکزی، د

۴۴ اعداد حقیقی، آشنایی با...

به صورت کلی، بنویسید.

$$C(0,0), r=8 \quad ۱۸.$$

$$C(4,-3), r=5 \quad ۱۷.$$

$$C(-1,1), r=2 \quad ۲۰.$$

$$C(-5,-12), r=3 \quad ۱۹.$$

در تمرینهای ۲۱ و ۲۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که شرایط داده شده را دارا باشد.

۲۱. مرکز آن در $(1,2)$ باشد و از نقطه $(3,-1)$ بگذرد.

۲۲. از سه نقطه $(2,8)$ ، $(7,3)$ ، و $(-2,0)$ بگذرد.

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، مرکز و شعاع هر دایره را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0 \quad ۲۳.$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \quad ۲۴.$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0 \quad ۲۵.$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \quad ۲۶.$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۲ معین کنید که نمودار معادله داده شده، یک دایره، یک دایره-نقطه یا مجموعه تهی است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 19 = 0 \quad ۲۷.$$

$$4x^2 + 4y^2 + 24x - 4y + 1 = 0 \quad ۲۸.$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 36 = 0 \quad ۲۹.$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0 \quad ۳۰.$$

$$36x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 119 = 0 \quad ۳۱.$$

$$9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 5 = 0 \quad ۳۲.$$

۳۳. فرمول فاصله (۱) را، اگر P_1 در ربع سوم و P_4 در ربع دوم باشد، به دست آورید و شکلی برای آن رسم کنید.

۳۴. فرمول فاصله (۱) را، اگر P_1 در ربع دوم و P_4 در ربع چهارم باشد، به دست آورید و شکلی برای آن رسم کنید.

۳۵. فرمولهای نقطه وسط (۸) و (۹) را، اگر P_1 در ربع اول و P_4 در ربع سوم باشد، به دست آورید.

۳۶. فرمولهای نقطه وسط (۸) و (۹) را، اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هر دو در ربع دوم باشند و داشته باشیم $x_2 > x_1$ و $y_2 > y_1$ ، به دست آورید.

۳۷. دو نقطه $A(-5, 3)$ و $B(6, 8)$ داده شده اند. مطلوب است مختصات سه نقطه ای که پاره خط AB را به چهار قسمت متساوی تقسیم می کنند.

۳۸. اگر نقطه $P(x, y)$ روی خطی باشد که از $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ می گذرد، و $|P_1P|/|P_1P_2| = k$ ، ثابت کنید که مختصات P از روابط زیر به دست می آیند:

$$y = y_1 + k(y_2 - y_1) \text{ و } x = x_1 + k(x_2 - x_1)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} 0 < k < 1 & \text{ اگر } P \text{ بین } P_1 \text{ و } P_2 \text{ باشد،} \\ k > 1 & \text{ اگر } P \text{ بین } P_1 \text{ نباشد و به } P_2 \text{ نزدیکتر باشد،} \\ k < 0 & \text{ اگر } P \text{ بین } P_1 \text{ نباشد و به } P_2 \text{ نزدیکتر باشد.} \end{aligned}$$

در تمرینهای ۳۹ تا ۴۳، با استفاده از فرمولهای تمرین ۳۸، مختصات نقطه P را به دست آورید.

۳۹. نقطه P روی پاره خط بین نقاط $P_1(1, 3)$ و $P_2(6, 2)$ قرار دارد و فاصله آن از P_2 سه برابر فاصله آن تا P_1 است.

۴۰. نقطه P روی پاره خط بین نقاط $P_1(1, 3)$ و $P_2(6, 2)$ قرار دارد، و فاصله آن از P_1 سه برابر فاصله آن تا P_2 است.

۴۱. نقطه P روی خطی که از P_1 و P_2 می گذرد قرار دارد، و فاصله اش از $P_2(6, 2)$ سه برابر فاصله آن از $P_1(1, 3)$ است، اما بین P_1 و P_2 قرار ندارد.

۴۲. نقطه P روی خطی که از P_1 و P_2 می گذرد قرار دارد، و فاصله اش از $P_1(1, 3)$ سه برابر فاصله آن تا $P_2(6, 2)$ است، اما بین P_1 و P_2 قرار ندارد.

۴۳. نقطه P روی خطی که از $P_1(-3, 5)$ و $P_2(-1, 2)$ می گذرد در جایی واقع است که $PP_1 = 4 \cdot P_1P_2$.

۴۴. وترهای دایره $x^2 + y^2 + 4x = 0$ از مبدأ مختصات رسم شده اند. ثابت کنید که مجموعه نقاط وسط این وترها یک دایره است.

۴۵. معادله ای پیدا کنید که تمام نقاط نمودار آن معادله، از نقاط $(-1, 2)$ و $(3, 4)$ به یک فاصله باشند. نمودار این معادله را رسم کنید.

۴۶. معادله ای پیدا کنید که مختصات هر نقطه ای که مجموع فاصله هایش از $(0, -3)$ و $(0, 3)$ برابر ۹ باشد، در آن صدق کنند؛ نمودار این معادله را رسم کنید.

۴۷. باروش تحلیلی ثابت کنید که مجموع مربعات فواصل هر نقطه از دو رأس مقابل يك مستطیل برابر است با مجموع مربعات فواصل آن نقطه از دو رأس دیگر.

۴۸. باروش تحلیلی ثابت کنید که نقطه وسط وتر يك مثلث قائم الزاویه از سه رأس آن دارای يك فاصله است.

۴۹. باروش تحلیلی ثابت کنید که پاره خطی که نقاط وسط دو ضلع مقابل يك چهارضلعی را به هم وصل می کند، و پاره خطی که نقاط وسط اقطار رابه هم وصل می کند، منصف یکدیگرند.

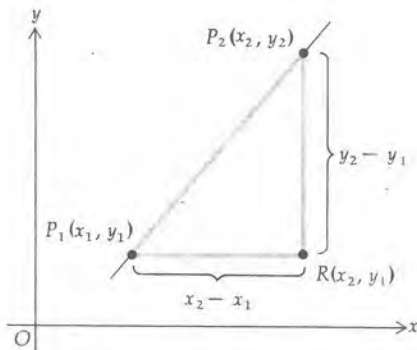
۵۰. باروش تحلیلی ثابت کنید که اگر طول دو میانه يك مثلث باهم مساوی باشند، آن مثلث متساوی الساقین است.

۴.۱ معادلات خط

فرض کنید l يك خط غیر قائم باشد و $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایز روی l باشند. شکل ۱۰۴.۱ چنین خطی را نشان می دهد. در این شکل، R نقطه (x_2, y_1) است و نقاط P_1 ، P_2 ، و R رؤوس يك مثلث قائم الزاویه هستند؛ به علاوه، $P_1R = x_2 - x_1$ و $RP_2 = y_2 - y_1$. عدد $y_2 - y_1$ اندازه تغییر عرض از P_1 تا P_2 است و ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد. عدد $x_2 - x_1$ اندازه تغییر طول از P_1 تا P_2 است و ممکن است مثبت یا منفی باشد؛ این عدد ممکن نیست برابر با صفر باشد زیرا همواره داریم $x_2 \neq x_1$ (چون خط l غیر قائم است). فرض کنید

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (۱)$$

مقدار m که از این معادله محاسبه می شود، مستقل از انتخاب دو نقطه P_1 و P_2 روی l



شکل ۱۰۴.۱

است. برای نشان دادن این موضوع، فرض کنید دو نقطه متمایز $\bar{P}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ و $\bar{P}_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ را انتخاب، و عدد $\bar{m}$ را از معادله (۱) محاسبه کنیم.

$$\bar{m} = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}.$$

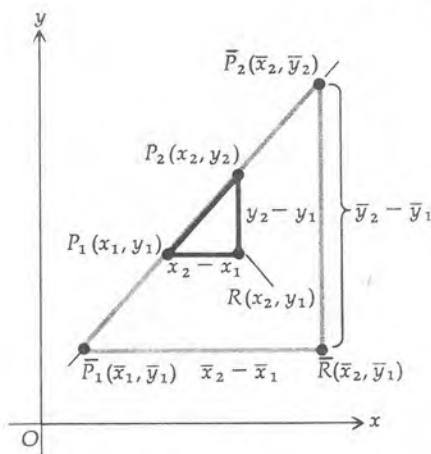
نشان خواهیم داد که $\bar{m} = m$. به شکل ۲.۴.۱ مراجعه کنید. مثلثهای P_1RP_2 و $\bar{P}_1\bar{R}\bar{P}_2$ متشابه‌اند؛ پس، طول اضلاع متناظر، متناسب هستند. بنا بر این

$$\frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا

$$\bar{m} = m.$$

پس، مقدار m می‌که از (۱) محاسبه می‌شود، صرف‌نظر از اینکه کدام دو نقطه روی l انتخاب شوند، عدد یکسانی است. این عدد m ، ضریب زاویه [شیب] خط نامیده می‌شود. تعریف رسمی آن به شرح زیر است.



شکل ۲.۴.۱

تعریف ۱.۴.۱ اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایز اختیاری از خط l باشند و خط l موازی با محور y ها نباشد، آنگاه ضریب زاویه خط l که آن را با m نشان می‌دهیم، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

در بخش ۳.۱ تعریف کردیم که $\Delta y = y_2 - y_1$ و $\Delta x = x_2 - x_1$ اگر این مقادیر

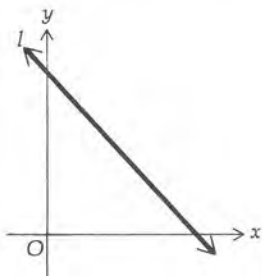
رادر (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

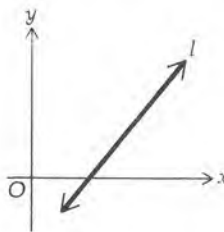
$$\Delta y = m \Delta x.$$

(۲)

از معادله (۲) مشاهده می‌شود که اگر ذره‌ای روی خط l حرکت کند، تغییر عرض آن متناسب با تغییر طول، و ضریب تناسب برابر ضریب زاویه خط l است. اگر ضریب زاویه خطی مثبت باشد، چنانچه طول نقطه‌ای از خط افزایش یابد، عرض آن نیز افزایش می‌یابد. چنین خطی در شکل ۳.۴.۱ نشان داده شده است. در شکل ۴.۴.۱ خطی با ضریب زاویه منفی رسم شده است. در مورد این خط، چنانچه طول يك نقطه واقع بر آن افزایش یابد، عرض آن کاهش می‌یابد. توجه کنید که اگر خط موازی با محور x ها باشد، آنگاه $y_2 = y_1$ و در نتیجه $m = 0$.



شکل ۴.۴.۱



شکل ۳.۴.۱

اگر خط موازی با محور y ها باشد، $x_2 = x_1$ و در نتیجه معادله (۱) بی‌معنی است، زیرا نمی‌توانیم عددی را بر صفر تقسیم کنیم. به این دلیل، در تعریف ۱.۴.۱، خطوط قائم یعنی خطوط موازی با محور y ها را حذف کرده‌ایم. بنابراین، يك خط قائم ضریب زاویه ندارد.

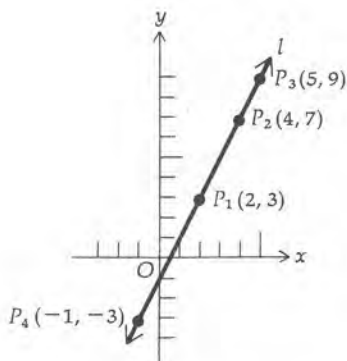
○ نمونه ۱ فرض کنید l خطی باشد که از نقاط $P_1(2, 3)$ و $P_2(4, 7)$ می‌گذرد. در این صورت، بنا به تعریف ۱.۴.۱، ضریب زاویه l برابر است با

$$m = \frac{7-3}{4-2} = 2.$$

به شکل ۵.۴.۱ مراجعه کنید. اگر $P(x, y)$ و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ دو نقطه دلخواه روی l باشند، آنگاه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

$$\Delta y = 2 \Delta x.$$



شکل ۵.۴.۱

بدین ترتیب اگر ذره‌ای در امتداد l حرکت کند، تغییر عرض آن دو برابر تغییر طولش خواهد بود. یعنی، اگر ذره در $P_2(4, 7)$ باشد و طول آن یک واحد افزایش یابد، عرض آن دو واحد افزایش می‌یابد، و ذره به $P_3(5, 9)$ منتقل می‌شود. به طریق مشابه، اگر ذره در $P_1(2, 3)$ باشد و طول آن سه واحد کاهش یابد، عرض آن ۶ واحد کاهش می‌یابد و ذره در نقطه $P_4(-1, -3)$ واقع می‌شود. ○

چون دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ ، یک خط یکتا به وجود می‌آورند، می‌توانیم معادله‌ای برای خطی که از این دو نقطه می‌گذرد به دست آوریم. فرض کنید $P(x, y)$ یک نقطه دلخواه روی خط باشد. می‌خواهیم معادله‌ای به دست آوریم که مختصات نقطه $P(x, y)$ در آن صدق کند اگر و تنها اگر این نقطه روی خط P_1P_2 واقع باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $x_2 = x_1$.

در این حالت خطی که از P_1 و P_2 می‌گذرد، موازی با محور y ‌هاست، و طول تمام نقاط این خط یکسان است. بنابراین $P(x, y)$ نقطه‌ای از خط خواهد بود اگر و تنها اگر

$$x = x_1. \quad (۳)$$

معادله (۳) معادله خطی است که موازی با محور y ‌ها می‌باشد. دقت کنید که این معادله مستقل از y است؛ یعنی، عرض این نقطه می‌تواند دارای هر مقداری باشد و مادامی که طول برابر با x_1 باشد، $P(x, y)$ روی خط قرار می‌گیرد.

حالت ۲: $x_2 \neq x_1$.

در این حالت ضریب زاویه خطی که از P_1 و P_2 می‌گذرد، برابر است با

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (۴)$$

اگر $P(x, y)$ هر نقطه دلخواه روی خط، بجز نقطه (x_1, y_1) باشد، ضریب زاویه از رابطه زیر نیز به دست می آید

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad (5)$$

نقطه P روی خطی که از P_1 و P_2 می گذرد قرار دارد اگر و تنها اگر مقدار m از معادله (۴) برابر با مقدار m از معادله (۵) باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

اگر دو طرف این معادله را در $(x - x_1)$ ضرب کنیم، رابطه زیر را به دست می آوریم

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1). \quad (6)$$

در معادله (۶)، مختصات P_1 و مختصات هر نقطه دیگر روی خط مار بر P_1 و P_2 صدق می کنند.

معادله (۶) را صورت دو نقطه ای معادله خط می نامند. اگر دو نقطه متمایز از خط معلوم باشند، معادله خط از (۶) به دست می آید.

○ نمونه ۲ معادله خطی که از دو نقطه $(-3, 6)$ و $(3, -2)$ می گذرد عبارت است از

$$y - (-3) = \frac{3 - (-3)}{-2 - 6} (x - 6)$$

$$y + 3 = -\frac{3}{4} (x - 6)$$

$$\circ \quad 3x + 4y = 6.$$

اگر در معادله (۶) به جای $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ ، m را قرار دهیم، به دست می آوریم

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad (7)$$

معادله (۷) را صورت نقطه - ضریب زاویه ای معادله خط می نامند، زیرا معادله خطی را که دارای ضریب زاویه m باشد و از نقطه ای مانند $P_1(x_1, y_1)$ بگذرد، می توان از (۷) به دست آورد.

○ نمونه ۳ معادله خط با ضریب زاویه ۲ و مار بر نقطه $(-5, -4)$ عبارت است از

$$y - (-5) = 2[-x - (-4)]$$

$$\circ \quad 2x - y + 3 = 0.$$

اگر در معادله (۷)، به جای نقطه (x_1, y_1) ، نقطه خاص $(0, b)$ (یعنی محل برخورد خط با محور y ها) را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$y - b = m(x - 0)$$

یا

$$y = mx + b.$$

(۸)

عدد b که عرض نقطه تقاطع خط با محور y ها است، عرض از مبدأ نامیده می شود؛ در نتیجه، معادله (۸) را صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ معادله خط می نامند. این صورت فوق العاده مهم است زیرا با کمک آن می توان ضریب زاویه خط را از معادله اش به دست آورد. فایده دیگر این صورت در این است که به طور صریح مختص y را بر حسب مختص x مشخص می کند.

مثال ۱ ضریب زاویه خط با معادله $3x + 4y = 7$ را پیدا کنید.

حل y را بر حسب x به دست می آوریم

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}.$$

اگر معادله فوق را با معادله (۸) مقایسه کنیم، می بینیم که $m = -3/4$ ، و $b = 7/4$.
▲ بنابراین، ضریب زاویه $-3/4$ است.

صورت دیگری از معادله خط، شامل طول و عرض نقاط تقاطع آن با محورها است. طول نقطه تقاطع یک خط با محور x را طول از مبدأ آن خط می نامیم و آن را با a نمایش می دهیم. اگر a و b یعنی طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی داده شده باشند، دو نقطه $(a, 0)$ و $(0, b)$ از خط معلوم اند. با استفاده از صورت دو نقطه ای (۶) داریم

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab.$$

اگر طرفین را با شرط $a \neq 0$ و $b \neq 0$ ، بر ab تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (9)$$

معادله (۹) را صورت طول و عرض از مبدأ معادله خط می نامند. واضح است که این فرمول برای خطوطی که از مبدأ می گذرند قابل استفاده نیست، زیرا برای چنین خطوطی a و b هر دو صفر هستند.

مثال ۲ قطعه خطی را که يك طرف آن روی محور y ها و طرف دیگر آن روی محور x هاست، در نظر بگیرید و فرض کنید نقطه $(2, 3)$ وسط این قطعه خط باشد. معادله خط را پیدا کنید.

حل به شکل ۶.۴.۱ مراجعه کنید. اگر a و b به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط مفروض باشند، آنگاه نقطه $(2, 3)$ وسط خطی است که از نقاط $(a, 0)$ و $(0, b)$ می گذرد. با استفاده از فرمول نقطه وسط، داریم

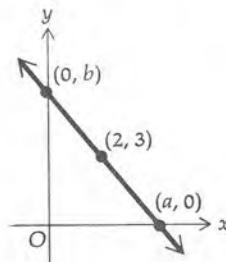
$$3 = \frac{0+b}{2} \quad \text{و} \quad 2 = \frac{a+0}{2}$$

بنابراین $a=4$ و $b=6$.

با استفاده از فرمول (۹)، صورت طول و عرض از مبدأ، داریم

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

$$3x + 2y = 12.$$



شکل ۶.۴.۱

۲.۴.۱ قضیه نمودار معادله

$$Ax + By + C = 0 \quad (10)$$

که در آن A ، B و C اعداد ثابتی هستند، و A و B هر دو صفر نیستند، يك خط مستقیم است.

اثبات دو حالت $B \neq 0$ و $B = 0$ را در نظر می گیریم.

حالت ۱: $B \neq 0$.

چون $B \neq 0$ ، دو طرف معادله (۱۰) را بر B تقسیم می‌کنیم؛ داریم

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (11)$$

معادله (۱۱) معادله يك خط مستقیم است، زیرا به صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ است و داریم $m = -A/B$ ، و $b = -C/B$.

حالت ۲: $B = 0$.

چون $B = 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $A \neq 0$ ، و بنابراین داریم

$$Ax + C = 0$$

$$x = -\frac{C}{A}. \quad (12)$$

چون معادله (۱۲) به صورت معادله (۳) است، نمودار آن خطی است مستقیم به موازات محور y ها. و در اینجا، اثبات به انجام می‌رسد. $\square$

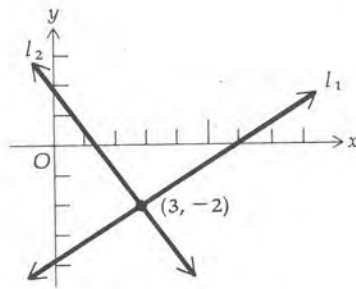
چون نمودار معادله (۱۰) يك خط مستقیم است آن را يك معادله خطی می‌نامند. معادله (۱۰) بر حسب x و y صورت کلی معادله درجه اول است.

چون هر دو نقطه يك خط تعیین می‌کنند، برای رسم نمودار يك خط مستقیم از روی معادله آن، کافی است مختصات دو نقطه آن را به دست آوریم و خط را رسم کنیم. هر دو نقطه‌ای برای این کار کافی است، ولی معمولاً بهتر است نقاط تقاطع خط با محورها را انتخاب کنیم؛ طول و عرض از مبدأ، این نقاط را به دست می‌دهند.

مثال ۳ خطهای l_1 با معادله $2x - 3y = 12$ و l_2 با معادله $4x + 3y = 6$ داده شده‌اند، نمودار آنها را رسم، و مختصات نقطه تقاطع l_1 و l_2 را پیدا کنید.

حل برای رسم نمودار خط l_1 ، طول و عرض از مبدأ آن، a و b ، را پیدا می‌کنیم. در معادله l_1 ، به جای x صفر قرار می‌دهیم و $b = -4$ را به دست می‌آوریم؛ سپس به جای y صفر می‌گذاریم و به دست می‌آوریم $a = 6$. به طریق مشابه، a و b را برای l_2 به دست می‌آوریم که $a = 3/2$ و $b = 2$. این خطها در شکل ۷.۴۰۱ رسم شده‌اند. برای یافتن مختصات نقطه تقاطع l_1 و l_2 ، دو معادله را به طور همزمان حل می‌کنیم. چون نقطه تقاطع باید روی هر دو خط قرار داشته باشد، مختصات آن باید در هر دو معادله صدق کنند. هر دو معادله را به صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ می‌نویسیم.

$$y = -\frac{2}{3}x + 2 \quad \text{و} \quad y = \frac{2}{3}x - 4$$



شکل ۷.۴.۱

از روابط بالا y را حذف می‌کنیم

$$\frac{2}{3}x - 4 = -\frac{4}{3}x + 2$$

$$2x - 12 = -4x + 6$$

$$x = 3$$

پس

$$y = \frac{2}{3}(3) - 4$$

$$= -2.$$

▲

بنابراین، محل تقاطع، نقطه $(3, -2)$ است.

۳.۴.۱ قضیه اگر l_1 و l_2 دو خط غیر قائم متمایز و به ترتیب با ضرایب زاویه‌های m_1 و m_2 باشند، آنگاه l_1 و l_2 باهم موازی هستند اگر و تنها اگر $m_1 = m_2$.

اثبات فرض کنید معادله‌های l_1 و l_2 به ترتیب $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ باشند. به علت قید «اگر و تنها اگر» در صورت قضیه، اثبات شامل دو قسمت است.

قسمت ۱: ثابت می‌کنیم l_1 و l_2 موازی هستند اگر $m_1 = m_2$.

فرض کنید l_1 و l_2 موازی نباشند. می‌خواهیم نشان دهیم که این فرض به تناقض می‌انجامد. اگر l_1 و l_2 موازی نباشند، یکدیگر را در نقطه‌ای مانند $P(x_0, y_0)$ قطع می‌کنند. مختصات P باید در معادلات l_1 و l_2 صدق کنند. بنابراین داریم

$$y_0 = m_2x_0 + b_2 \quad \text{و} \quad y_0 = m_1x_0 + b_1$$

اما، $m_1 = m_2$ ، ولذا

$$y_0 = m_1x_0 + b_2 \quad \text{و} \quad y_0 = m_1x_0 + b_1$$

که از آن نتیجه می‌شود $b_1 = b_2$. بنابراین، چون $m_1 = m_2$ و $b_1 = b_2$ ، هر دو خط دارای

يك معادله به صورت $y = m_1x + b_1$ هستند، و لذا برهم منطبق اند. اما این با فرض قضیه که می گوید l_1 و l_2 متمایزند، تناقض دارد. پس فرض ما غلط است و نتیجه اینکه l_1 و l_2 متوازی هستند.

قسمت ۲: ثابت می کنیم l_1 و l_2 متوازی هستند تنها اگر $m_1 = m_2$. در اینجا باید نشان دهیم که اگر l_1 و l_2 متوازی باشند، آنگاه $m_1 = m_2$. فرض کنید $m_1 \neq m_2$. اگر معادلات l_1 و l_2 را به طور همزمان حل، و y را حذف کنیم، داریم

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$$

که از آن نتیجه می شود

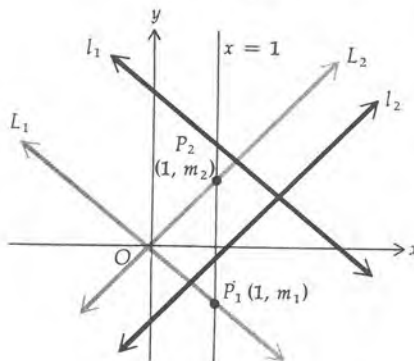
$$(m_1 - m_2)x = b_2 - b_1.$$

چون فرض کرده ایم که $m_1 \neq m_2$ ، از معادله فوق داریم

$$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}.$$

بنابراین l_1 و l_2 دارای يك نقطه تقاطع هستند که فرض ما مبنی بر متوازی بودن آنها را نقض می کند. پس، فرض ما صحیح نیست و داریم $m_1 = m_2$. □

در شکل ۸.۴.۱ خطوط l_1 و l_2 متعامد هستند. در مورد ضریب زاویه های خطوط متعامد قضیه زیر را بیان و اثبات می کنیم.



شکل ۸.۴.۱

۴.۴.۱ قضیه اگر هیچ يك از دو خط l_1 و l_2 قائم نباشند، آنگاه l_1 و l_2 متعامد هستند اگر و تنها اگر حاصلضرب ضریب زاویه های آنها برابر با -1 باشد؛ یعنی، اگر m_1 و m_2 به ترتیب ضریب زاویه های l_1 و l_2 باشند، آنگاه این دو خط متعامدند اگر و تنها اگر $m_1 m_2 = -1$.

اثبات

قسمت ۱: ثابت می‌کنیم که l_1 و l_2 متعامد هستند تنها اگر $m_1 m_2 = -1$.
فرض کنید L_1 و L_2 خطوطی باشند که از مبدأ می‌گذرند و به ترتیب موازی با l_1 و l_2 هستند. به شکل ۸.۴.۱ مراجعه کنید. بنا بر قضیه ۳.۴.۱ ضریب زوایه‌های L_1 و L_2 به ترتیب برابر با m_1 و m_2 خواهند بود. چون L_1 و L_2 هردو غیر قائم هستند، خط $x=1$ را به ترتیب در نقاط P_1 و P_2 قطع می‌کنند. طول هردو نقطه P_1 و P_2 برابر ۱ است. فرض کنید $\bar{y}$ عرض P_1 باشد. چون خط L_1 نقاط $(0,0)$ و $(1, \bar{y})$ را دربردارد و ضریب زوایه اش m_1 است، از تعریف ۱.۴.۱ نتیجه می‌شود که

$$m_1 = \frac{\bar{y} - 0}{1 - 0} = \bar{y}$$

و بنابراین، $\bar{y} = m_1$. به طریق مشابه، می‌توان نشان داد که عرض P_2 برابر با m_2 است. اگر قضیه فیثاغورث را برای مثلث قائم الزاویه $P_1 O P_2$ به کار ببریم، خواهیم داشت

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1 P_2}|^2. \quad (13)$$

با استفاده از فرمول فاصله بین دو نقطه، داریم

$$|\overline{OP_1}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1^2$$

$$|\overline{OP_2}|^2 = (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2 = 1 + m_2^2$$

$$|\overline{P_1 P_2}|^2 = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 = m_2^2 - 2m_1 m_2 + m_1^2.$$

با قراردادن مقادیر فوق در معادله (۱۳) داریم

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) = m_1^2 - 2m_1 m_2 + m_2^2$$

$$2 = -2m_1 m_2$$

$$m_1 m_2 = -1.$$

قسمت ۲: ثابت می‌کنیم که l_1 و l_2 متعامدند اگر $m_1 m_2 = -1$.
از رابطه $m_1 m_2 = -1$ آغاز، و مراحل اثبات قسمت ۱ را در جهت عکس طی می‌کنیم تا به رابطه

$$|\overline{OP_1}|^2 + |\overline{OP_2}|^2 = |\overline{P_1 P_2}|^2$$

برسیم. از این رابطه و عکس قضیه فیثاغورث، نتیجه می‌شود که L_1 و L_2 متعامدند؛ بنابراین خطوط l_1 و l_2 نیز برهم عمود هستند. $\square$

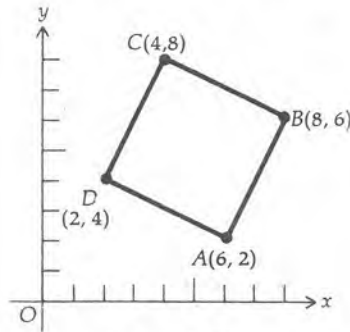
معادلات خط ۵۷

قضیه ۴.۴.۱ حاکی است که اگر دو خط متعامد باشند و هیچیک از آنها قائم نباشد، ضریب زاویه یکی از آن دو خط، قرینه عکس ضریب زاویه دیگری است.

○ نمونه ۴ اگر خط l_1 عمود بر خط l_2 و ضریب زاویه l_1 برابر با $2/3$ باشد، آنگاه ضریب زاویه l_2 برابر با $3/2 -$ است.

مثال ۴ با استفاده از ضریب زاویه نشان دهید که چهار نقطه $A(6, 2)$ ، $B(8, 6)$ ، $C(4, 8)$ و $D(2, 4)$ رؤس یک مستطیل هستند.

حل شکل ۹.۴.۱ را ببینید. فرض کنید ضریب زاویه های خطوط AD و DC ، BC ، AB به ترتیب برابر با m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 باشند؛ بنابراین



شکل ۹.۴.۱

$$m_1 = \frac{6-2}{8-6} = 2$$

$$m_2 = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}$$

$$m_3 = \frac{8-4}{2-6} = 2$$

$$m_4 = \frac{4-2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$

چون

$$m_1 = m_3, AB \parallel DC;$$

$$m_2 = m_4, BC \parallel AD;$$

$$m_1 m_2 = -1, AB \perp BC.$$

بنابراین در چهارضلعی $ABCD$ ، ضلعهای مقابل متوازی و دو ضلع مجاور متعامد هستند؛ در نتیجه این چهارضلعی یک مستطیل است. ▲

مثال ۵ خط l با معادله $2x + 3y = 5$ داده شده است. معادله خطی را بنویسید که بر l عمود باشد و از نقطه $A(-1, 3)$ بگذرد.

حل چون خط موردنظر بر l عمود است، ضریب زاویه‌اش برابر با قرینهٔ عکس ضریب زاویهٔ l است. با نوشتن معادلهٔ l به صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ، ضریب زاویهٔ l را پیدا می‌کنیم. اگر از معادلهٔ مفروض y را محاسبه کنیم داریم

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

پس، ضریب زاویهٔ l برابر با $2/3 -$ است؛ یعنی، ضریب زاویهٔ خط موردنظر برابر با $3/2$ است. چون می‌دانیم که خط موردنظر از نقطهٔ $(-1, 3)$ می‌گذرد، با استفاده از صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای خط داریم

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 1)$$

$$2y - 6 = 3x + 3$$

$$\blacktriangle \quad 3x - 2y + 9 = 0.$$

در مثال زیر، خطی بر دایره‌ای مماس است. تعریف کلی خط مماس بر یک منحنی در یک نقطهٔ مشخص در بخش ۱۰.۳ داده شده است. فعلاً در مورد دایره از تعریف موجود در هندسهٔ مسطحه استفاده می‌کنیم که می‌گویید خط مماس بر دایره در نقطهٔ P روی دایره، خطی است که دایره را فقط در نقطهٔ P قطع می‌کند.

مثال ۶ معادلهٔ دایره‌ای را پیدا کنید که مرکزش نقطهٔ $C(1, 6)$ و بر خط l با معادلهٔ $x - y - 1 = 0$ مماس باشد.

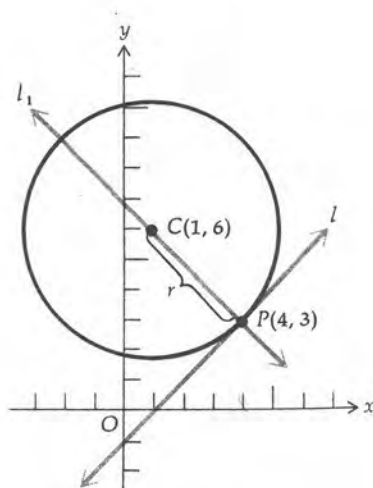
حل به شکل ۱۰.۴.۱ مراجعه کنید. چون $h = 1$ و $k = 6$ ، اگر r را به دست آوریم، می‌توانیم با استفاده از صورت شعاع - مرکزی معادلهٔ دایره را بنویسیم. فرض کنید l_1 خطی است که از نقطهٔ C و نقطهٔ P که محل تماس l با دایره است، می‌گذرد. داریم

$$r = |\overline{PC}|.$$

از اینرو باید مختصات P را پیدا کنیم. این کار را با یافتن معادلهٔ l_1 و سپس با یافتن محل تقاطع l و l_1 انجام می‌دهیم. چون l_1 در امتداد یک قطر دایره، و l خط مماس بر دایره است، پس این دو خط برهم عمودند. چون ضریب زاویهٔ l برابر با ۱ است، ضریب زاویهٔ l_1 برابر با ۱ - خواهد بود. بنابراین با استفاده از صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای معادلهٔ خط، معادلهٔ l_1 را به دست می‌آوریم

$$y - 6 = -1(x - 1)$$

$$x + y - 7 = 0.$$



شکل ۱۰.۴.۱

اگر معادله فوق را به طور همزمان با معادله مفروض l یعنی $x - y - 1 = 0$ حل کنیم، به دست می‌آوریم $x = 4$ و $y = 3$. پس، نقطه $P(4, 3)$ است. چون $r = |PC|$ داریم

$$r = |PC| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18}.$$

پس معادله دایره به صورت زیر است

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = (\sqrt{18})^2$$

$$\blacktriangle \quad x^2 + y^2 - 2x - 12y + 19 = 0.$$

تمرینهای ۴.۱

در تمرینهای ۱ تا ۴، ضریب زاویه خط مار بر نقاط داده شده را بیابید.

$$۱. \quad (2, -3), (-4, 3) \quad ۲. \quad (5, 2), (-2, -3)$$

$$۳. \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) \quad ۴. \quad (-21, 03), (23, 14)$$

در تمرینهای ۵ تا ۱۵، معادله خطی را پیدا کنید که در شرایط داده شده صدق کند.

۵. ضریب زاویه ۴ است و از نقطه $(2, -3)$ می‌گذرد.

۶. از دو نقطه $(3, 1)$ و $(-5, 4)$ می‌گذرد.

۷. طول از مبدأ ۳- و عرض از مبدأ ۴ است.
 ۸. از نقطه (۱, ۴) می‌گذرد و با خط با معادله $2x - 5y + 7 = 0$ موازی است.
 ۹. از نقطه (۲, ۳-) می‌گذرد و بر خط با معادله $2x - y - 2 = 0$ عمود است.
 ۱۰. از نقطه (۴-, ۳-) می‌گذرد و با محور y ها موازی است.
 ۱۱. از نقطه (۷-, ۱) می‌گذرد و با محور x ها موازی است.
 ۱۲. ضریب زاویه ۲- و طول از مبدأ ۴ است.
 ۱۳. از نقطه (۵-, ۲-) می‌گذرد و ضریب زاویه اش $\sqrt{3}$ است.
 ۱۴. از مبدأ می‌گذرد و زاویه بین محورهای ربع اول و سوم را نصف می‌کند.
 ۱۵. از مبدأ می‌گذرد و زاویه بین محورهای ربع دوم و چهارم را نصف می‌کند.
- در تمرینهای ۱۶ تا ۱۹، ضریب زاویه خط داده شده را بیابید.
۱۶. $x + 3y = 7$
 ۱۷. $4x - 6y = 5$
 ۱۸. $3x - 5 = 0$
 ۱۹. $2y + 9 = 0$
۲۰. معادله خط ماربر نقاط (۳-, ۵) و (۱-, ۲) را بیابید و معادله را به صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ بنویسید.
 ۲۱. معادله خط مار بر نقاط (۱, ۳) و (۲-, ۲) را بیابید و معادله را به صورت طول و عرض از مبدأ بنویسید.
 ۲۲. نشان دهید که خطهای با معادلات $3x + 5y + 7 = 0$ و $6x + 10y - 5 = 0$ متوازی اند.
 ۲۳. نشان دهید که خطوط با معادلات $3x + 5y + 7 = 0$ و $5x - 3y - 2 = 0$ متعامدند.
 ۲۴. مقداری برای k بیابید که خطوط با معادلات $3kx + 8y = 5$ و $6y - 4kx = -1$ متعامد باشند.
- در تمرینهای ۲۵، ۲۶، و ۲۷ با استفاده از ضریب زاویه مشخص کنید که آیا هر مجموعه از نقاط داده شده روی یک خط واقع هستند یا خیر.
۲۵. (الف) (۵, ۸)، (۴-, ۷-)، (۲, ۳) (ب) (۳, ۴)، (۱, ۱)، (۲-, ۱)
 ۲۶. (الف) (۴-, ۵-)، (۱, ۲)، (۴, ۶) (ب) (۳, ۲)، (۹-, ۲)، (۳-, ۶-)

۲۷. (الف) $(2, 5), (-1, 4), (3, -2)$ (ب) $(0, 2), (-3, -1), (4, 6)$
۲۸. سه رأس متوالی يك متوازی الاضلاع $(-4, 1), (2, 3), (8, 9)$ و هستند. مختصات رأس چهارم را بیابید.
۲۹. با استفاده از ضریب زاویه نشان دهید که نقاط $(-4, -1), (3, 8/3), (8, -4)$ و $(2, -9)$ رؤوس يك دوزنقه هستند.
۳۰. با استفاده از ضریب زاویه نشان دهید که سه نقطه $A(3, 1), B(6, 0), C(4, 4)$ رؤوس يك مثلث قائم الزاویه هستند؛ مساحت مثلث را بیابید.
۳۱. خط l با معادله $4 - 3x = 2y$ و نقطه $P(1, -3)$ داده شده‌اند. مطلوب است:
(الف) معادله خط مار بر P و عمود بر l ؛ (ب) کوتاهترین فاصله از P تا l .
۳۲. معادله خطی را که از نقطه $(8, -6)$ می‌گذرد و دارای طول از مبدأ و عرض از مبدأ یکسان است بنویسید.
۳۳. خط l با معادله $0 = Ax + By + C$ ، $B \neq 0$ ، داده شده است. مطلوب است:
(الف) ضریب زاویه l ؛ (ب) عرض از مبدأ l ؛ (پ) طول از مبدأ l ؛ (ت) معادله خط مار بر مبدأ و عمود بر l .
۳۴. اگر A, B, C ، و D اعداد ثابتی باشند، نشان دهید که: (الف) خطهای $0 = Ax + By + C$ و $0 = Ax + By + D$ متوازی هستند، و (ب) خطهای $0 = Ax + By + C$ و $0 = Bx - Ay + D$ متعامدند.
۳۵. معادلات میانه‌های مثلث بارئوس $A(3, -2), B(3, 4), C(-1, 1)$ را بیابید، و ثابت کنید که این سه خط از يك نقطه می‌گذرند.
۳۶. معادلات عمود منصفهای اضلاع مثلث بارئوس $A(-1, -3), B(5, -3), C(5, 5)$ را بنویسید و ثابت کنید که این سه خط از يك نقطه می‌گذرند.
۳۷. مطلوب است معادله هریک از خطوطی که از نقطه $(3, 2)$ می‌گذرد و با محورهای مختصات يك مثلث با مساحت ۱۲ می‌سازد.
۳۸. فرض کنید l_1 خط با معادله $0 = A_1x + B_1y + C_1$ و l_2 خط با معادله $0 = A_2x + B_2y + C_2$ باشد. اگر l_1 و l_2 متوازی نباشند، و اگر k ثابت دلخواهی باشد، معادله

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

يك تعداد نامتناهی خط را نمایش می‌دهد. ثابت کنید که هریک از این خطها نقطه تلاقی l_1 و l_2 را دربردارد.

۳۹. با فرض اینکه معادله $2x + 3y - 5 = 0$ ، $7x + 5y - 8 = 0$ باشد و معادله $7x + 5y - 8 = 0$ باشد، با استفاده از تمرین ۳۸ و بدون محاسبه مختصات نقطه تلاقی l_1 و l_2 ، مطلوب است معادله خط مار برای نقطه تلاقی و: (الف) مسار بر نقطه $(1, 3)$ ؛ (ب) موازی بامحور x ها؛ (پ) موازی بامحور y ها؛ (ت) با ضریب زاویه $2 -$ ؛ (ث) عمود برخط بامعادله $2x + y = 7$ ؛ (ج) با این شرط که بامحورهای مختصات يك مثلث متساوی الساقین تشکیل دهد.

۴۰. مطلوب است معادله هریک از خطوط مستقیمی که برخط بامعادله $5x - y = 1$ عمود باشد و بامحورهای مختصات يك مثلث بامساحت ۵ بسازد.

در تمرینهای ۴۱ تا ۴۴، معادله دایره‌ای را بنویسید که در شرایط داده شده صدق می‌کند.

۴۱. مرکز در $(-3, -5)$ ، و برخط $4 = 5y + 12x$ مماس باشد.

۴۲. مرکز در $(5, -2)$ ، و برخط $x = 7$ مماس باشد.

۴۳. در نقطه $(1, -1)$ برخط $0 = 2 + y + 3x$ مماس باشد و از نقطه $(5, 3)$ بگذرد.

۴۴. در $(1, 4)$ برخط $0 = 16 - 4y + 3x$ مماس، و شعاع آن ۱ باشد (دو دایره ممکن).

۴۵. معادله خطی را بنویسید که بردایره $0 = 12 - 4y + 6x - x^2 + y^2$ در نقطه $(1, 5)$ مماس باشد.

۴۶. معادله هریک از دو خطی را بنویسید که ضریب زاویه‌اش $3/4 -$ ، و بردایره $0 = 8 - 8y + 2x + y^2 + x^2$ مماس باشد.

۴۷. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اقطار لوزی برهم عمودند.

۴۸. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اگر نقاط وسط اضلاع يك چهارضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم يك متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود.

۴۹. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اقطار يك متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند.

۵۰. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اگر اقطار يك چهارضلعی منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی يك متوازی‌الاضلاع است.

۵۱. اگر خط $y = mx + b$ بردایره $r^2 = x^2 + y^2$ مماس باشد، مطلوب است معادله‌ای که شامل پارامترهای m ، b ، و r باشد.

۵۲. به‌طور تحلیلی ثابت کنید خطی که از مرکز يك دایره دلخواه بگذرد و يك وتر آن را نصف کند، بر آن وتر عمود است.

۵.۱ توابع و نمودار آنها

به طور شهودی، y را به عنوانی تابعی از x در نظر می گیریم هرگاه قاعده ای وجود داشته باشد که بر طبق آن، به ازای هر مقدار x ، مقدار یکتایی به y نسبت داده شود. مثالهای آشنایی از این گونه روابط، عبارت اند از

$$y = 2x^2 + 5 \quad (۱)$$

و

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \quad (۲)$$

تعریف رسمی تابع، مفهوم آن را دقیق می سازد.

۱.۵.۱ تعریف تابع، مجموعه ای از زوجهای مرتب اعداد به صورت (x, y) است که در بین آنها، هیچ دو زوج مرتب متمایزی که دارای عضوهای اول یکسان باشند، یافت نشود. مجموعه تمام مقادیر ممکن x را قلمرو تابع و مجموعه تمام مقادیر ممکن y را برد تابع می نامند.

در تعریف ۱.۵.۱، این محدودیت که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نمی توانند مؤلفه های اول یکسانی داشته باشند، ما را مطمئن می سازد که به ازای هر مقدار خاص x ، مقدار y یکتاست.

معادله (۱)، معرف يك تابع است. این تابع را f بنامید. این معادله قاعده ای به دست می دهد که طبق آن، اگر x داده شود، مقدار یکتایی برای y به دست می آید؛ بدین ترتیب که x را در خود سپس در عدد ۲ ضرب می کنیم، و ۵ را به آن اضافه می نماییم. تابع f عبارت است از مجموعه زوجهای مرتب (x, y) به طوری که x و y در رابطه (۱) صدق می کنند؛ یعنی

$$f = \{(x, y) | y = 2x^2 + 5\}.$$

اعداد x و y را متغیر می نامیم. چون برای تابع f به x مقادیری نسبت می دهیم و مقدار y بستگی به انتخاب x دارد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می نامیم. قلمرو تابع عبارت است از مجموعه تمام مقادیر ممکن متغیر مستقل، و برد تابع، مجموعه تمام مقادیر ممکن متغیر وابسته است. برای تابع مورد نظر f ، قلمرو، مجموعه تمام اعداد حقیقی است که می توان آن را با نماد بازه به صورت $(-\infty, +\infty)$ نمایش داد. کوچکترین مقداری که y می تواند قبول کند ۵ است (وقتی $x = 0$). پس، برد f مجموعه تمام اعداد نا کمتر از ۵ است، ولذا $[5, +\infty)$.

○ نمونه ۱ فرض کنید g تابعی است متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) که به وسیله معادله (۲) تعریف می شوند؛ یعنی

$$g = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 9}\}.$$

چون صرفاً با اعداد حقیقی سروکار داریم، y فقط به ازای مقادیر $x \geq 3$ یا $x \leq -3$ (و به عبارت دیگر $|x| \geq 3$) تابعی از x است، زیرا به ازای هر x ی که در هر یک از این نامساویها صدق کند، مقدار یکتایی برای y به دست می آید. ولی اگر x در بازه $(-3, 3)$ باشد، ریشه دوم یک عدد منفی به دست می آید و بنابراین هیچ عدد حقیقی y وجود ندارد. از اینرو x را باید محدود کنیم و لذا

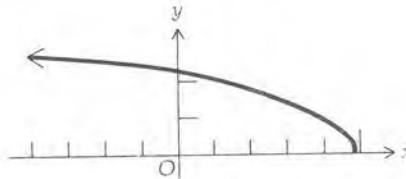
$$g = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2 - 9} \text{ و } |x| \geq 3\}.$$

○ قلمرو g ، $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ و برد آن $[0, +\infty)$ است.

باید تأکید شود که برای آنکه تابع وجود داشته باشد، باید به ازای هر مقدار متغیر مستقل در قلمرو تابع، دقیقاً یک مقدار برای متغیر وابسته به دست آید.

۲.۵.۱ تعریف اگر f یک تابع باشد، نمودار f عبارت است از مجموعه تمام نقاط (x, y) واقع در R^2 ، به طوری که (x, y) زوج مرتبی از f باشد.

○ نمونه ۲ فرض کنید $f = \{(x, y) | y = \sqrt{5 - x}\}$. نمودار f در شکل ۱.۵.۱ رسم شده است. قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی نایبتر از ۵ یعنی بازه $(-\infty, 5]$ ، و برد آن مجموعه تمام اعداد حقیقی نامنفی، یعنی $[0, +\infty)$ است.



○ شکل ۱.۵.۱

در نمونه بعدی، تابع به وسیله بیش از یک معادله تعریف شده است. چنین تعریفی مجاز است به شرط آنکه به ازای هر مقدار x در قلمرو، مقدار یکتایی برای y در برد وجود داشته باشد.

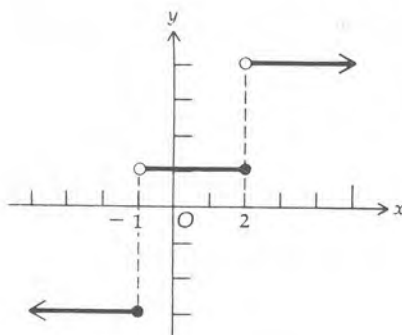
○ نمونه ۳ فرض کنید g تابع متشکل از تمام زوجهای مرتب (x, y) باشد که

$$y = \begin{cases} -3 & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x \leq 2 \\ 4 & 2 < x \end{cases}$$

قلمرو g ، $(-\infty, +\infty)$ است، در حالی که برد آن فقط از سه عدد -3 ، 1 ، و 4 تشکیل

○ می‌شود. نمودار تابع در شکل ۲.۵.۱ نشان داده شده است.

مشاهده کنید که در شکل ۲.۵.۱ يك شکستگی در $x = -1$ و شکستگی دیگری در $x = 2$ وجود دارد. گوییم g در -1 و 2 ناپیوسته است. توابع پیوسته و ناپیوسته را در بخش ۶.۲ بررسی خواهیم کرد.

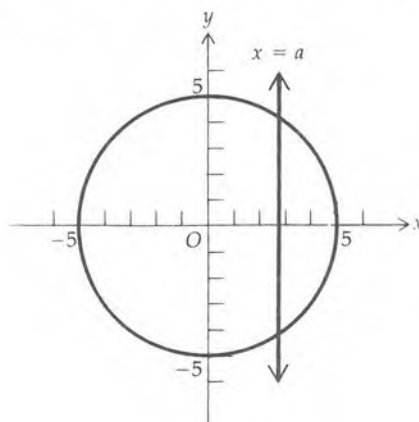


شکل ۲.۵.۱

○ نمونه ۴ مجموعه زیر را در نظر بگیرید

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 25\}.$$

نمودار این مجموعه در شکل ۳.۵.۱ نشان داده شده است. این مجموعه از زوجهای مرتب، تابع نیست زیرا برای هر x در بازه $(-5, 5)$ ، دو زوج مرتب با مولفه اول x وجود دارند. مثلاً زوجهای $(3, 4)$ و $(3, -4)$ هر دو در مجموعه فوق قرار دارند. بعلاوه، توجه کنید که نمودار این مجموعه، دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۵ است، و هر خط قائم

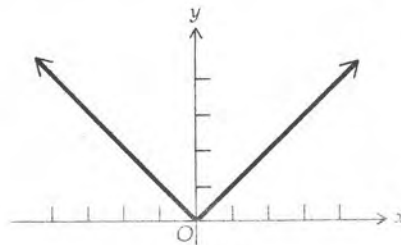


شکل ۳.۵.۱

بامعادله $x=a$ (با شرط $-5 < a < 5$) این نمودار را در دو نقطه قطع می کند. به شکل مراجعه کنید.

مثال ۱ فرض کنید $h = \{(x, y) | y = |x|\}$. قلمرو و برد h را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل قلمرو h بازه $(-\infty, +\infty)$ و برد آن $[0, +\infty)$ است. نمودار h در شکل ۴.۵.۱ رسم شده است.



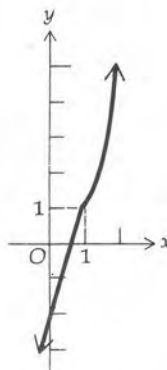
شکل ۴.۵.۱

مثال ۲ فرض کنید F تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

$$y = \begin{cases} 3x - 2 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

قلمرو و برد F را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل نمودار F در شکل ۵.۵.۱ نشان داده شده است. قلمرو F بازه $(-\infty, +\infty)$ و برد آن $(-\infty, +\infty)$ است.



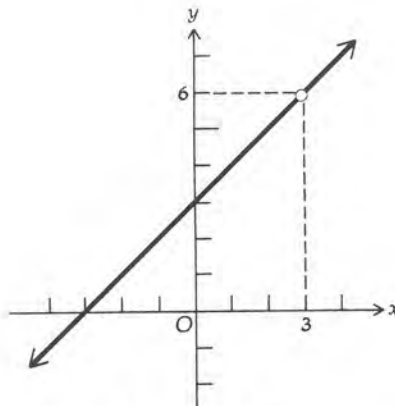
شکل ۵.۵.۱

مثال ۳ فرض کنید G تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

$$y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

قلمرو و برد G را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل شکل ۶.۵۰۱ نمودار G را نشان می‌دهد. چون به ازای هر مقدار x ، بجز $x = 3$ ، مقداری برای y به دست می‌آید، پس قلمرو G عبارت است از تمام اعداد حقیقی بجز عدد ۳؛ وقتی $x = 3$ ، صورت و مخرج هردو برابر صفر هستند و $0/0$ معین نیست.



شکل ۶.۵۰۱

اگر صورت را تجزیه کنیم، داریم

$$y = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$

یا $y = x + 3$ ، به شرطی که $x \neq 3$. به عبارت دیگر، تابع G متشکل از تمام زوجهای مرتب (x, y) است که

$$y = x + 3 \text{ و } x \neq 3$$

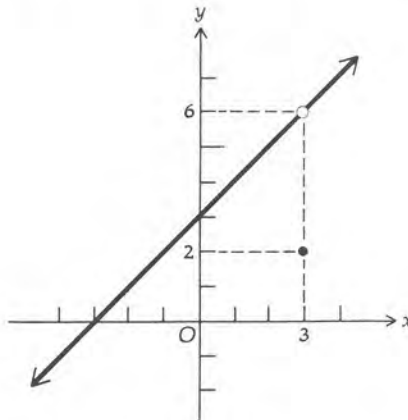
برد G عبارت است از تمام اعداد حقیقی بجز ۶. نمودار تابع عبارت است از تمام نقاط واقع بر خط $y = x + 3$ بجز نقطه $(3, 6)$. ▲

مثال ۴ فرض کنید H تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

$$y = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

قلمرو و برد H را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل شکل ۷.۵.۱ نمودار H را نشان می‌دهد. نمودار تشکیل می‌شود از نقطه $(3, 2)$ و تمام نقاط روی خط $y = x + 3$ بجز نقطه $(3, 6)$. تابع H برای تمام مقادیر x معین است، و بنا بر این، قلمرو H بازه $(-\infty, +\infty)$ است. برد H عبارت است از تمام اعداد حقیقی بجز عدد ۶.



شکل ۷.۵.۱

مثال ۵ فرض کنید ϕ تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

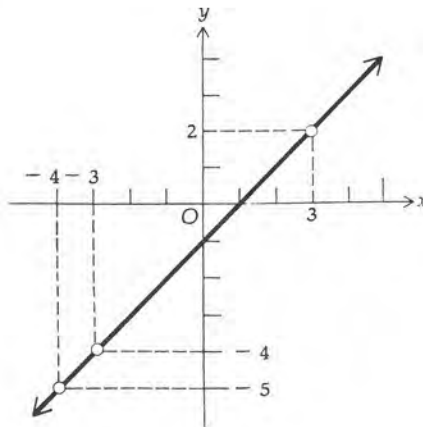
$$y = \frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 9)}{(x^2 + x - 12)(x + 3)}.$$

قلمرو و برد ϕ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل نمودار این تابع در شکل ۸.۵.۱ نشان داده شده است. اگر صورت و مخرج را تجزیه کنیم، داریم

$$y = \frac{(x+4)(x-1)(x-3)(x+3)}{(x+4)(x-3)(x+3)}.$$

مخرج کسرنگامی که x مقادیر $4-$ ، $3-$ ، و 3 را دارا باشد برابر با صفر است؛



شکل ۱۰۵.۱

بنابراین تابع برای این سه مقدار x تعریف نمی‌شود. برای مقادیر $3, -3, -4, x \neq$ می‌توان صورت و مخرج را بر عوامل مشترک تقسیم کرده و رابطه زیر را به دست آورد

$$y = x - 1, \quad x \neq -4, -3, 3 \text{ اگر}$$

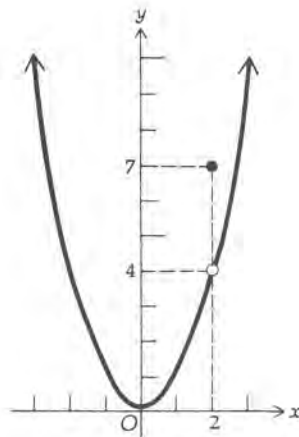
بنابراین، قلمرو ϕ عبارت است از مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز اعداد $-4, -3, 3$. برد ϕ عبارت است از مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز مقادیر حاصل از قرارداد $-4, -3, 3$ یا به جای x در معادله $y = x - 1$ ؛ یعنی تمام اعداد حقیقی بجز اعداد $-5, -4, -2$. نمودار ϕ عبارت است از خط مستقیم $y = x - 1$ ، بجز نقاط $(-4, -5), (-3, -4), (3, 2)$. ▲

مثال ۶ فرض کنید f تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

$$y = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 7 & x = 2 \end{cases}$$

قلمرو و برد f را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل نمودار f در شکل ۹۰۵.۱ رسم شده است. این نمودار از نقطه $(2, 7)$ و تمام نقاط سهمی $y = x^2$ بجز نقطه $(2, 4)$ تشکیل شده است. تابع f برای تمام مقادیر x معین است، پس قلمرو آن $(-\infty, +\infty)$ است. برد f متشکل است از تمام اعداد حقیقی نامنفی.



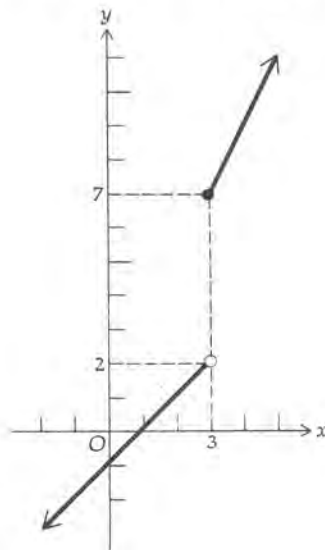
شکل ۹.۵.۱

مثال ۷ فرض کنید h تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (x, y) به طوری که

$$y = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x+1 & x \geq 3 \end{cases}$$

قلمرو و برد h را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل نمودار h در شکل ۱۰.۵.۱ نشان داده شده است. قلمرو h ، $(-\infty, +\infty)$



شکل ۱۰.۵.۱

است. مقادیر y ، یا کمتر از ۲ و یا نا کمتر از ۷ هستند. بنابراین برد h عبارت است از $[-\infty, 2) \cup [7, +\infty)$ ، و یا متشکل از تمام اعدادی حقیقی است که در بازه $[2, 7]$ نباشند. ▲

مثال ۸ فرض کنید $g = \{(x, y) | y = \sqrt{x(x-2)}\}$. قلمرو و برد g را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل چون $\sqrt{x(x-2)}$ هنگامی که $x(x-2) \leq 0$ ، یک عدد حقیقی نیست، قلمرو g متشکل از مقادیری از x است که به ازای آنها $x(x-2) \geq 0$. این نامساوی در هر یک از دو حالت زیر برقرار است: $x \geq 0$ و $x-2 \geq 0$ ؛ یا $x \leq 0$ و $x-2 \leq 0$.

حالت ۱: $x \geq 0$ و $x-2 \geq 0$ ؛ یعنی

$$x \geq 2 \text{ و } x \geq 0$$

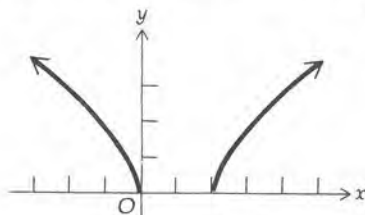
هر دو نامساوی فوق به ازای $x \geq 2$ ، یعنی در بازه $[2, +\infty)$ ، برقرار هستند.

حالت ۲: $x \leq 0$ و $x-2 \leq 0$ ؛ یعنی

$$x \leq 0 \text{ و } x \leq 2$$

هر دو نامساوی فوق به ازای $x \leq 0$ ، یعنی در بازه $(-\infty, 0]$ برقرارند.

جوابهای دو حالت را با هم ترکیب می‌کنیم تا قلمرو g که عبارت است از $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ به دست آید. برد g بازه $[0, +\infty)$ است. شکل ۱۱.۵.۱ نمودار g را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱.۵.۱

در نمونه بعدی علامت $[x]$ را به کار می‌بریم که، بنا به تعریف، عبارت است از بزرگترین عدد صحیح نا کمتر از x ؛ یعنی وقتی n یک عدد صحیح باشد، داریم

$$[x] = n, n \leq x < n+1.$$

این تابع را تابع بزرگترین عدد صحیح می‌نامیم. از تعریف نتیجه می‌شود که

$$[1.3] = 1, [1/2] = 0, [-4.2] = -5, [-8] = -8, [9.8] = 9, \dots$$

○ نمونه ۵ فرض کنید F تابع بزرگترین عدد صحیح باشد؛ یعنی $F = \{(x, y) | y = [x]\}$.

نمودار F در شکل ۱۲.۵.۱ رسم شده است؛ برای رسم آن از مقادیر زیر استفاده شده است.

$$-5 \leq x < -4 \quad [x] = -5$$

$$-4 \leq x < -3 \quad [x] = -4$$

$$-3 \leq x < -2 \quad [x] = -3$$

$$-2 \leq x < -1 \quad [x] = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \quad [x] = -1$$

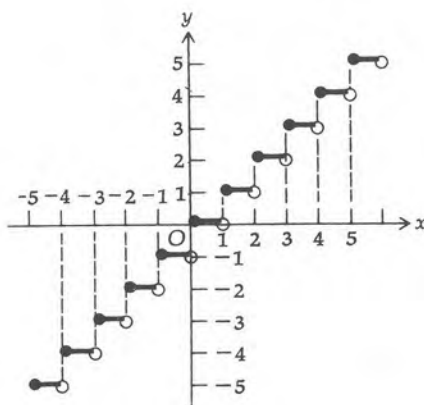
$$0 \leq x < 1 \quad [x] = 0$$

$$1 \leq x < 2 \quad [x] = 1$$

$$2 \leq x < 3 \quad [x] = 2$$

$$3 \leq x < 4 \quad [x] = 3$$

$$4 \leq x < 5 \quad [x] = 4$$



شکل ۱۲.۵.۱

قلمرو F مجموعه تمام اعداد حقیقی و برد آن متشکل از تمام اعداد صحیح است. $\circ$

مثال ۹ فرض کنید $G = \{(x, y) | y = [x] - x\}$. نمودار G را رسم کنید. قلمرو و برد آن را بیابید.

حل

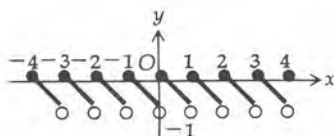
اگر $0 \leq x < 1$ آنگاه $[x] = 0$ ، ولذا $G(x) = -x$

اگر $1 \leq x < 2$ آنگاه $[x] = 1$ ، ولذا $G(x) = 1 - x$

اگر $2 \leq x < 3$ آنگاه $[x] = 2$ ، ولذا $G(x) = 2 - x$

اگر $-1 \leq x < 0$ آنگاه $[x] = -1$ ، ولذا $G(x) = -1 - x$

شکل ۱۳.۵.۱ نمودار G را نشان می‌دهد. قلمرو G مجموعه تمام اعداد حقیقی و برد آن $[-1, 0]$ است.



شکل ۱۳.۵.۱

تمرینهای ۵.۱

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، قلمرو و برد توابع داده شده را بیابید و نمودار آنها را رسم کنید.

$$1. \quad f = \{(x, y) | y = 3x - 1\} \quad 2. \quad g = \{(x, y) | y = x^2 + 2\}$$

$$3. \quad F = \{(x, y) | y = 3x^2 - 6\} \quad 4. \quad G = \{(x, y) | y = 5 - x^2\}$$

$$5. \quad G = \{(x, y) | y = \sqrt{x+1}\} \quad 6. \quad f = \{(x, y) | y = \sqrt{5-3x}\}$$

$$7. \quad h = \{(x, y) | y = \sqrt{3x-4}\} \quad 8. \quad f = \{(x, y) | y = \sqrt{4-x^2}\}$$

$$9. \quad g = \{(x, y) | y = \sqrt{x^2-4}\} \quad 10. \quad H = \{(x, y) | y = |x-3|\}$$

$$11. \quad \phi = \{(x, y) | y = |3x+2|\} \quad 12. \quad F = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{4x^2-1}{2x+1} \right\}$$

$$13. \quad H = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} \right\}$$

$$14. \quad g = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-x-6} \right\}$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۴۰، هر تابع به صورت مجموعه زوجهای مرتب (x, y) که در معادله داده شده صدق می‌کنند، تعریف شده است. قلمرو و برد هر تابع را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

$$h: y = \begin{cases} -۴ & x < -۲ \\ -۱ & -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۳ & x > ۲ \end{cases} \cdot ۱۶$$

$$G: y = \begin{cases} -۲ & x \leq ۳ \\ ۲ & x > ۳ \end{cases} \cdot ۱۵$$

$$f: y = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x \neq -۳ \\ -۲ & x = -۳ \end{cases} \cdot ۱۸$$

$$f: y = \begin{cases} ۲x - ۱ & x \neq ۲ \\ ۰ & x = ۲ \end{cases} \cdot ۱۷$$

$$H: y = \begin{cases} x^۲ - ۴ & x < ۳ \\ ۲x - ۱ & x \geq ۳ \end{cases} \cdot ۱۹$$

$$\phi: y = \begin{cases} x + ۵ & x < -۵ \\ \sqrt{۲۵ - x^۲} & -۵ \leq x \leq ۵ \\ x - ۵ & x > ۵ \end{cases} \cdot ۲۰$$

$$g: y = \begin{cases} ۶x + ۷ & x \leq -۲ \\ ۴ - x & -۲ < x \end{cases} \cdot ۲۲$$

$$F: y = \begin{cases} x - ۲ & x < ۰ \\ x^۲ + ۱ & ۰ \leq x \end{cases} \cdot ۲۱$$

$$F: y = \frac{(x+۱)(x^۲+۳x-۱۰)}{x^۲+۶x+۵} \cdot ۲۳$$

$$G: y = \frac{(x^۲+۳x-۴)(x^۲-۵x+۶)}{(x^۲-۳x+۲)(x-۲)} \cdot ۲۴$$

$$h: y = \sqrt{۶x^۲ - ۵x - ۴} \cdot ۲۶$$

$$f: y = \sqrt{x^۲ - ۳x - ۴} \cdot ۲۵$$

$$f: y = \frac{x^۲ + ۳x^۲ + x + ۳}{x + ۳} \cdot ۲۸$$

$$g: y = \frac{x^۲ - ۲x^۲}{x - ۲} \cdot ۲۷$$

$$F: y = \frac{x^۴ + x^۲ - ۹x^۲ - ۳x + ۱۸}{x^۲ + x - ۶} \cdot ۳۰$$

$$h: y = \frac{x^۲ + ۵x^۲ - ۶x - ۳۰}{x + ۵} \cdot ۲۹$$

$$g: y = |x| \cdot |x - ۱| \cdot ۳۲$$

$$f: y = |x| + |x - ۱| \cdot ۳۱$$

$$F: y = [x + ۲] \cdot ۳۴$$

$$f: y = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱} \cdot ۳۳$$

$$H: y = |x| + [x] \cdot ۳۶$$

$$g: y = [x - ۴] \cdot ۳۵$$

$$h: y = [x^۲] \cdot ۳۸$$

$$G: y = x - [x] \cdot ۳۷$$

$$h: y = \frac{|x|}{[x]} \cdot ۴۰$$

$$g: y = \frac{[x]}{|x|} \cdot ۳۹$$

۶.۱ نماد تابع، اعمال روی توابع، انواع توابع

اگر f تابعی باشد که قلمروش متغیر x و بردش متغیر y باشد، علامت $f(x)$ (که خوانده می‌شود افِ ایکس) مقدار خاصی از y را که متناظر با مقدار x است نمایش می‌دهد.

○ نمونه ۱ در نمونه ۲ از بخش ۵.۱ داشتیم

$$f = \{(x, y) | y = \sqrt{5-x}\}.$$

بنابراین $f(x) = \sqrt{5-x}$. چون برای $x = 1$ داریم $\sqrt{5-x} = 2$ ، پس می‌توانیم بنویسیم $f(1) = 2$. به طریق مشابه، $f(0) = \sqrt{5}$ و $f(-6) = \sqrt{11}$ و غیره. ○

وقتی يك تابع را تعریف می‌کنیم، باید قلمرو آن را صریحاً و یا به طور ضمنی مشخص کنیم. مثلاً اگر تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

معلوم است که x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. ولی اگر f را به صورت زیر تعریف کرده باشیم

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad 1 \leq x \leq 10$$

آنگاه قلمرو f بازه $[1, 10]$ است.

به طریق مشابه، اگر تابع g به وسیله معادله زیر تعریف شود

$$g(x) = \frac{5x-2}{x+4}$$

معلوم است که $x \neq -4$ ، زیرا این خارج قسمت برای $x = -4$ معین نیست؛ بنابراین قلمرو g مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز -4 است. اگر

$$h(x) = \sqrt{9-x^2}$$

معلوم است که x باید در بازه بسته $[-3, 3]$ باشد، زیرا $\sqrt{9-x^2}$ برای $x > 3$ و $x < -3$ معین نیست (یعنی، يك عدد حقیقی نیست). بنابراین قلمرو h ، $[-3, 3]$ ، و برد آن $[0, 3]$ است.

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = x^2 + 3x - 4$. مطلوب است (الف) $f(0)$ ؛ (ب) $f(2)$ ؛ (پ) $f(h)$ ؛ (ت) $f(2h)$ ؛ (ث) $f(2x)$ ؛ (ج) $f(x+h)$ ؛ (چ) $f(x)+f(h)$.

حل

$$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4 \quad (\text{الف})$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6 \quad (\text{ب})$$

$$f(h) = h^2 + 3h - 4 \quad (\text{پ})$$

$$f(2h) = (2h)^2 + 3(2h) - 4 = 4h^2 + 6h - 4 \quad (\text{ت})$$

$$f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) - 4 = 4x^2 + 6x - 4 \quad (\text{ث})$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h) - 4 \quad (\text{ج})$$

$$= x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - 4$$

$$= x^2 + (2h+3)x + (h^2 + 3h - 4)$$

$$f(x) + f(h) = (x^2 + 3x - 4) + (h^2 + 3h - 4) \quad (\text{ج})$$

$$\triangle \quad = x^2 + 3x + (h^2 + 3h - 8).$$

مثال ۲ فرض کنید $g(x) = \sqrt{3x-1}$. مطلوب است

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad h \neq 0$$

حل

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\sqrt{3(x+h)-1} - \sqrt{3x-1}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{3x+3h-1} - \sqrt{3x-1})(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}{h(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}$$

$$= \frac{(3x+3h-1) - (3x-1)}{h(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}$$

$$= \frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}$$

$$= \frac{3}{(\sqrt{3x+3h-1} + \sqrt{3x-1})}.$$

در دومین مرحله از این راه حل، صورت و مخرج کسرها در مزدوج صورت ضرب کردیم تا کسرها گویا کنیم، که با این عمل، عامل مشترک h در صورت و مخرج پدید آمد.

▲

اکنون چند عمل روی توابع تعریف می‌کنیم. در این تعریفها، به وسیلهٔ جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم توابع، توابع جدیدی از توابع مفروض پدید می‌آیند که به همین علت آنها را، مجموع، حاصلضرب، خارج قسمت، و تفاضل توابع می‌نامیم.

۱۰۶۰۱ تعریف توابع f و g داده شده‌اند.

(i) مجموع آنها را با علامت $f + g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

(ii) تفاضل آنها را با علامت $f - g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

(iii) حاصلضرب آنها را با علامت $f \cdot g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

(iv) خارج قسمت آنها را با علامت f/g نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

در هر يك از موارد بالا قلمرو تابع حاصل، متشکل از آن مقادیر x است که در قلمرو توابع f و g مشترك هستند، بجز در حالت (iv) که باید مقادیری از x را که به ازای آنها $g(x) = 0$ ، از قلمرو حذف کرد.

مثال ۳ فرض کنید $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x-4}$. مطلوب است
(الف) $(f+g)(x)$ ؛ (ب) $(f-g)(x)$ ؛ (پ) $(f \cdot g)(x)$ ؛ (ت) $(f/g)(x)$.
همچنین در هر يك از موارد فوق، قلمرو و برد تابع حاصل را معین کنید.

حل

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} \quad (\text{الف})$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} \quad (\text{ب})$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4} \quad (\text{پ})$$

$$(f/g)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}. \quad (\text{ت})$$

قلمرو f بازه $(-1, +\infty)$ و قلمرو g بازه $[4, +\infty)$ است. بنا بر این، در قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ)، قلمرو توابع حاصل برابر $[4, +\infty)$ است. در قسمت (ت) مخرج به ازای $x=4$ برابر با صفر است، بنا بر این باید ۴ را از قلمرو حذف کرد؛ پس قلمرو f/g بازه $(4, +\infty)$ است. ▲

برای نشان دادن حاصل ضرب f در خودش، یعنی $f \cdot f$ ، علامت f^2 را به کار می‌بریم. مثلاً اگر f به صورت $f(x) = 3x$ تعریف شده باشد، آنگاه تابع f^2 به صورت زیر است.

$$f^2(x) = (3x)(3x) = 9x^2.$$

علاوه بر اعمالی که در تعریف ۱.۶.۱ بیان شدند، عمل دیگری بنام ترکیب دو تابع مفروض نیز وجود دارد.

۲.۶.۱ تعریف اگر توابع f و g داده شده باشند، تابع مرکب با نماد $f \circ g$ و با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

و قلمرو $f \circ g$ عبارت است از مجموعه تمام x های واقع در قلمرو g ، به شرطی که $g(x)$ در قلمرو f باشد.

مثال ۴ فرض کنید $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 2x - 3$. اگر $F = f \circ g$ ، $F(x)$ را بیابید و قلمرو آن را به دست آورید.

حل

$$\begin{aligned} F(x) &= (f \circ g)(x) = f(g(x)) \\ &= f(2x - 3) \\ &= \sqrt{2x - 3}. \end{aligned}$$

قلمرو g بازه $(-\infty, +\infty)$ و قلمرو f بازه $[0, +\infty)$ است. بنا بر این قلمرو $f \circ g$ مشکل از اعدادی حقیقی است که به ازای آنها $2x - 3 \geq 0$ ؛ پس قلمرو، $[3/2, +\infty)$ است. ▲

مثال ۵ فرض کنید f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ و g با ضابطه $g(x) = x^2 - 1$ تعریف شده باشد. مطلوب است (الف) $f \circ f$ ؛ (ب) $g \circ g$ ؛ (پ) $f \circ g$ ؛ (ت) $g \circ f$. در هر مورد، قلمرو تابع مرکب را نیز بیابید.

حل قلمرو f بازه $[0, +\infty)$ و قلمرو g بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \quad (\text{الف})$$

پس قلمرو $f \circ f$ بازه $[0, +\infty)$ است.

(ب)

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

پس قلمرو $g \circ g$ بازه $(-\infty, +\infty)$ است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{پ})$$

پس، قلمرو $f \circ g$ عبارت است از $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ، و یا مجموعه تمام اعداد حقیقی بجز بازه $(-1, 1)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1 \quad (\text{ت})$$

قلمرو $g \circ f$ بازه $[0, +\infty)$ است. توجه کنید با وجود آنکه $x - 1$ برای تمام مقادیر x معین است، ولی قلمرو $f \circ g$ ، بنابه تعریف ۲.۶.۱، عبارت است از مجموعه همه x هایی از قلمرو f ، که به ازای آنها $f(x)$ در قلمرو g است. ▲

۳.۶.۱ تعریف

(i) تابعی چون f را تابع زوج گویند هر گاه به ازای هر x در قلمرو f ،

$$f(-x) = f(x).$$

(ii) تابعی چون f را تابع فرد گویند هر گاه به ازای هر x در قلمرو f ،

$$f(-x) = -f(x).$$

در هر دو مورد، واضح است که برای هر x در قلمرو f ، $-x$ نیز باید در قلمرو f باشد.

○ نمونه ۲

(الف) اگر $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ ، داریم

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 2x^2 + 7 = f(x)$$

بنابراین، f یک تابع زوج است.

(ب) اگر $g(x) = 2x^5 + 5x^3 - 8x$ ، داریم

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2(-x)^5 + 5(-x)^3 - 8(-x) = -2x^5 - 5x^3 + 8x \\ &= -(2x^5 + 5x^3 - 8x) = -g(x) \end{aligned}$$

بنابراین، g یک تابع فرد است.

(پ) اگر $h(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 8$ داریم

$$\begin{aligned} h(-x) &= 2(-x)^4 + 5(-x)^3 - (-x)^2 + 8 \\ &= 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 8 \end{aligned}$$

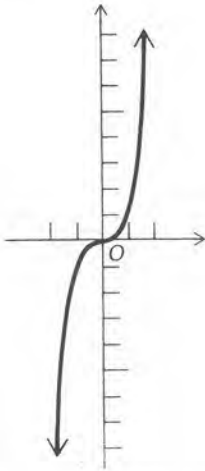
بنابراین، تابع h نه زوج است و نه فرد.

از تعریف تابع زوج و قضیه ۶.۲.۱(ii)، نتیجه می‌شود که نمودار تابع زوج، نسبت به محور y ها متقارن است، و از تعریف تابع فرد و قضیه ۶.۲.۱(iii) نتیجه می‌شود که نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

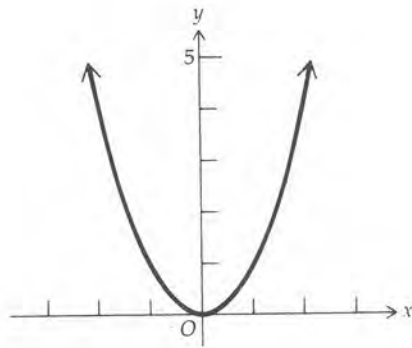
○ نمونه ۳

(الف) اگر $f(x) = x^2$ ، f یک تابع زوج است و نمودارش یک سهمی است که نسبت به محور y ها متقارن است. شکل ۱.۶.۱ را ببینید.

(ب) اگر $g(x) = x^3$ ، g یک تابع فرد است و نمودارش که در شکل ۲.۶.۱ نشان داده شده، نسبت به مبدأ متقارن است.



شکل ۲.۶.۱



شکل ۱.۶.۱

اگر برد یک تابع فقط شامل یک عدد باشد، آن را تابع ثابت می‌نامیم. بنابراین اگر $f(x) = c$ ، و c یک عدد حقیقی دلخواه باشد، آنگاه f یک تابع ثابت است، و نمودار آن خطی است مستقیم به موازات محور x ها و به فاصله c جهت دار c واحد از محور x ها. اگر تابع f به صورت زیر تعریف بشود

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

تمرین ۸۱

که در آن، n يك عدد طبیعی، و $a_0, a_1, \dots, a_n$ و $a_n \neq 0$ اعدادی حقیقی باشند،
آنگاه f را يك تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. بنابراین، تابع f که به صورت
زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$$

يك تابع چند جمله‌ای از درجه ۵ است.

اگر درجه يك تابع چند جمله‌ای ۱ باشد، آن را يك تابع خطی می‌نامند؛ اگر درجه
آن ۲ باشد، آن را يك تابع درجه دوم، و اگر از درجه ۳ باشد، آن را يك تابع درجه سوم
می‌نامند. تابع خطی خاصی با تعریف $f(x) = x$ ، تابع همانی نام دارد.

○ نمونه ۴

تابع f که به صورت $f(x) = 3x + 4$ تعریف شده باشد، يك تابع خطی است.
تابع g که به صورت $g(x) = 5x^2 - 8x + 1$ تعریف شده باشد، يك تابع درجه
دوم است.

تابع h که به صورت $h(x) = 8x^3 - x + 4$ تعریف شده باشد، يك تابع درجه
سوم است.

اگر تابعی به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای قابل بیان باشد، تابع گویا نامیده
می‌شود.

تابع جبری، تابعی است که به وسیله تعدادی متناهی از اعمال جبری روی تابع
همانی و تابع ثابت به دست آید. این اعمال جبری شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان
رساندن و ریشه گرفتن هستند. مثالی از توابع جبری، تابعی است که به صورت

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

تعریف شده باشد.

علاوه بر توابع جبری، توابع متعالی نیز در حساب دیفرانسیل و انتگرال در نظر
گرفته می‌شوند. توابع مثلثاتی، توابع لگاریتمی، توابع نمایی مثالهایی از توابع متعالی
هستند که در فصل‌های آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت.

تمرینهای ۶.۱

۱. اگر $f(x) = 2x - 1$ ، مطلوب است محاسبه (الف) $f(3)$ ؛ (ب) $f(-2)$ ؛
(پ) $f(0)$ ؛ (ت) $f(a+1)$ ؛ (ث) $f(x+1)$ ؛ (ج) $f(2x)$ ؛ (چ) $2f(x)$ ؛
(ح) $f(x+h)$ ؛ (خ) $f(x)+f(h)$ ؛ (د) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۳. اگر $f(x) = \frac{3}{x}$ ، مطلوب است محاسبه (الف) $f(1)$ ؛ (ب) $f(-3)$ ؛ (پ) $f(6)$ ؛

(ت) $f(\frac{1}{3})$ ؛ (ث) $f(\frac{3}{a})$ ؛ (ج) $f(\frac{3}{x})$ ؛ (ج) $\frac{f(3)}{f(x)}$ ؛ (ح) $f(x-3)$ ؛ (خ)
 $f(3) - f(x)$ ؛ (د) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۳. اگر $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ، مطلوب است محاسبه (الف) $f(-2)$ ؛ (ب) $f(-1)$ ؛
 (پ) $f(0)$ ؛ (ت) $f(3)$ ؛ (ث) $f(h+1)$ ؛ (ج) $f(2x^2)$ ؛ (ج) $f(x^2-3)$ ؛
 (ح) $f(x+h)$ ؛ (خ) $f(x) + f(h)$ ؛ (د) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۴. اگر تابع g به صورت $g(x) = 3x^2 - 4$ تعریف شده باشد، مطلوب است محاسبه
 (الف) $g(-4)$ ؛ (ب) $g(\frac{1}{4})$ ؛ (پ) $g(x^2)$ ؛ (ت) $g(3x^2 - 4)$ ؛ (ث) $g(x-h)$ ؛
 (ج) $g(x) - g(h)$ ؛ (ج) $\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۵. اگر $F(x) = \sqrt{2x+3}$ ، مطلوب است محاسبه (الف) $F(-1)$ ؛ (ب) $F(4)$ ؛
 (پ) $F(\frac{1}{4})$ ؛ (ت) $F(30)$ ؛ (ث) $F(2x+3)$ ؛ (ج) $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۶. فرض کنید $G(x) = \sqrt{2x^2+1}$ ، مطلوب است محاسبه (الف) $G(-2)$ ؛ (ب) $G(0)$ ؛
 (پ) $G(\frac{1}{5})$ ؛ (ت) $G(\frac{4}{5})$ ؛ (ث) $G(2x^2-1)$ ؛ (ج) $\frac{G(x+h) - G(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۷. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

مطلوب است محاسبه (الف) $f(1)$ ؛ (ب) $f(-1)$ ؛ (پ) $f(4)$ ؛ (ت) $f(-4)$ ؛
 (ث) $f(-x)$ ؛ (ج) $f(x+1)$ ؛ (ج) $f(x^2)$ ؛ (ح) $f(-x^2)$.

۸. اگر $f(t) = \frac{|3+t| - |t| - 3}{t}$ ، فرمول $f(t)$ را بدون علامت قدرمطلق بنویسید،

به شرط اینکه داشته باشیم: (الف) $t > 0$ ؛ (ب) $-3 \leq t < 0$ ؛ (پ) $t < -3$.

در تمرینهای ۹ تا ۱۸ برای توابع داده شده f و g ، توابع زیر را تعریف کنید و قلمرو آنها
 را نیز بیابید. (الف) $f+g$ ؛ (ب) $f-g$ ؛ (پ) $f \cdot g$ ؛ (ت) f/g ؛ (ث) g/f ؛
 (ج) $f \circ g$ ؛ (ج) $g \circ f$.

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 + 1 \quad ۱۰. \quad f(x) = x - 5; g(x) = x^2 - 1 \quad ۹.$$

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = 4 - x^2 \quad ۱۲. \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1}; g(x) = \frac{1}{x} \quad ۱۱.$$

$$f(x) = |x|; g(x) = |x-3| \quad ۱۴. \quad f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 - 1 \quad ۱۳.$$

$$f(x) = \sqrt{x+4}; g(x) = x^2 - 4 \quad ۱۶. \quad f(x) = x^2 + 1; g(x) = 3x - 2 \quad ۱۵.$$

$$f(x) = x^2; g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ۱۸. \quad f(x) = \frac{1}{x+1}; g(x) = \frac{x}{x-2} \quad ۱۷.$$

در هریک از تمرینهای ۱۹ و ۲۰، یک تابع f تعریف شده است. در هر تمرین، توابع زیر را تعریف کنید و قلمرو توابع حاصل را بیابید: (الف) $f(x^2)$; (ب) $f^2(x)$; (پ) $(f \circ f)(x)$.

$$f(x) = \frac{2}{x-1} \quad ۲۰. \quad f(x) = 2x - 3 \quad ۱۹.$$

۲۱. با فرض $G(x) = |x-2| - |x| + 2$ بدون استفاده از علامت قدرمطلق، $G(x)$ را بیابید هرگاه x در بازه مفروض (الف) $[2, +\infty)$; (ب) $(-\infty, 0)$; (پ) $[0, 2)$ باشد.

در هر قسمت از تمرینهای ۲۲ و ۲۳، تعیین کنید که تابع داده شده زوج است یا فرد و یا هیچکدام.

$$f(x) = 5x^3 - 7x \quad (\text{ب}) \quad f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1 \quad (\text{الف}) \quad ۲۲.$$

$$g(x) = x^6 - 1 \quad (\text{ت}) \quad f(s) = s^2 + 2s + 2 \quad (\text{پ})$$

$$f(x) = |x| \quad (\text{ج}) \quad h(t) = 5t^7 + 1 \quad (\text{ث})$$

$$g(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad (\text{ح}) \quad f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1} \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = x^3 + 1 \quad (\text{ب}) \quad g(x) = 5x^2 - 4 \quad (\text{الف}) \quad ۲۳.$$

$$g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \quad (\text{ت}) \quad f(t) = 4t^5 + 3t^3 - 2t \quad (\text{پ})$$

$$h(x) = \frac{4x^2 - 5}{2x^2 + x} \quad (\text{ج}) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (\text{ث})$$

$$g(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} \quad (\text{ح}) \quad f(z) = (z-1)^2 \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad (\text{د}) \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{خ})$$

۲۴. ثابت کنید که اگر f و g دو تابع فرد باشند، $(f+g)$ و $(f-g)$ نیز توابعی فرد هستند.

۲۵. ثابت کنید که اگر $f \circ g$ دو تابع فرد باشند، $f \circ g$ و f/g توابعی زوج هستند.

۲۶. نشان دهید تابعی که مقدار آن با ضابطه $[f(x) + f(-x)]/2$ به دست آید یک تابع زوج است و تابعی که مقدار آن با ضابطه $[f(x) - f(-x)]/2$ به دست آید یک تابع فرد است. سپس با استفاده از آن و رابطه

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

ثابت کنید که هر تابع دلخواهی را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

در تمرینهای ۲۷ و ۲۸، با استفاده از نتیجه تمرین ۲۶، توابعی را که به وسیله معادلات داده شده تعریف شده اند به صورت مجموع یک تابع فرد و یک تابع زوج بنویسید.

۲۷. (الف) $f(x) = 2x - 7$ ؛ (ب) $f(x) = x^2 + 2$ ؛ (پ) $f(x) = x^3 - 1$ ؛
(ت) $f(x) = x^4 + x^3 - x + 3$ ؛ (ث) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ (ج) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ؛
(ح) $f(x) = |x| + |x-1|$

۲۸. (الف) $f(x) = 3x + 8$ ؛ (ب) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ؛ (پ) $f(x) = 8x^3 + 1$ ؛
(ت) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ؛ (ث) $f(x) = x^4 - 16$ ؛ (ج) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ؛
(ح) $f(x) = |2x + 1|$

۲۹. در هر یک از موارد زیر، درباره فرد یا زوج بودن توابع مرکب $f \circ g$ بحث کنید.
(الف) توابع f و g هر دو زوج هستند. (ب) توابع f و g هر دو فرد هستند. (پ) تابع f زوج و تابع g فرد است. (ت) تابع f فرد و تابع g زوج است.

۳۰. یک تابع وجود دارد که هم زوج است و هم فرد؛ آن تابع را پیدا کنید.

در تمرینهای ۳۱ الی ۴۶ نمودار تابع داده شده را رسم کنید. در تمرینهای ۳۳ الی ۴۶ تابع U تابع پله ای واحد است که در تمرین ۳۱ تعریف شده است، و تابع sgn (تابع علامت) نیز در تمرین ۳۲ تعریف شده است.

۳۱. U تابعی است که به صورت زیر تعریف می شود

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

این تابع، تابع پله ای واحد نامیده می شود.

۳۲. تابع علامت که به صورت sgn نمایش داده می‌شود دارای تعریف زیر است:

$$\text{sgn } x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = U(x) - U(x-1) \quad ۳۴$$

$$f(x) = U(x-1) \quad ۳۳$$

$$f(x) = \text{sgn } x^2 - \text{sgn } x \quad ۳۶ \quad g(x) = \text{sgn}(x+1) - \text{sgn}(x-1) \quad ۳۵$$

$$g(x) = 2 - x \cdot \text{sgn } x \quad ۳۸$$

$$h(x) = x \cdot U(x) \quad ۳۷$$

$$F(x) = (x+1) \cdot U(x+1) \quad ۴۰$$

$$f(x) = (x-1) \cdot U(x) \quad ۳۹$$

$$G(x) = (x+1) \cdot U(x+1) - x \cdot U(x) \quad ۴۱$$

$$h(x) = \text{sgn } x - U(x) \quad ۴۳$$

$$F(x) = x - 2 \text{sgn } x \quad ۴۲$$

$$g(x) = \text{sgn } x + x \cdot U(x) \quad ۴۵$$

$$f(x) = \text{sgn } x \cdot U(x+1) \quad ۴۴$$

$$G(x) = \text{sgn}(U(x)) \quad ۴۶$$

۴۷. اگر f و g به صورت زیر تعریف شده باشند، فرمول $(f \circ g)(x)$ را پیدا کنید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

۴۸. برای توابع تعریف شده در تمرین ۴۷، فرمول $(g \circ f)(x)$ را پیدا کنید.

۴۹. برای توابع تعریف شده زیر، فرمول $(f \circ g)(x)$ را پیدا کنید.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

۵۰. تابع g به صورت $g(x) = x^2$ تعریف شده است. تابع f را طوری تعریف کنید که

$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{به شرطی که داشته باشیم: (الف) } x \geq 0 \text{؛ (ب) } x < 0.$$

۵۱. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ، دو تابع g بیابید که برای آنها داشته باشیم

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5.$$

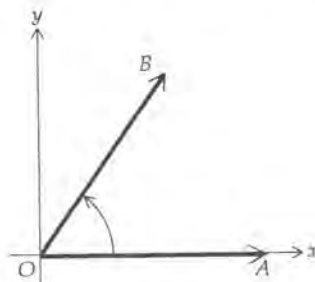
۵۲. اگر $f(x) = x^2$ ، دو تابع چون g بیابید که برای آنها داشته باشیم

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9.$$

۵۳. ثابت کنید که اگر $f \circ g$ توابعی خطی باشند، $f \circ g$ يك تابع خطی است.

۷.۱ توابع سینوسی و کسینوسی

در هندسه، زاویه به عنوان اجتماع دو شعاع به نام اضلاع که دارای يك نقطه انتهایی مشترك به نام رأس هستند، تعریف می شود. هر زاویه دلخواه، معادل است با زاویه ای که رأس آن در مبدأ مختصات، و يك ضلع آن، موسوم به ضلع اول، روی قسمت مثبت محور x ها واقع است. گفته می شود که چنین زاویه ای در وضعیت استاندارد قرار دارد. شکل ۱۰.۷.۱ زاویه AOB را در وضعیت استاندارد نشان می دهد. ضلع اول زاویه OA است. ضلع دیگر، یعنی ضلع دوم نام دارد. زاویه AOB را می توان از دوران ضلع OA تا ضلع OB به وجود آورد؛ تحت این دوران نقطه A روی محیط دایره به شعاع $|OA|$ و به مرکز O ، به طرف نقطه B حرکت می کند.



شکل ۱۰.۷.۱

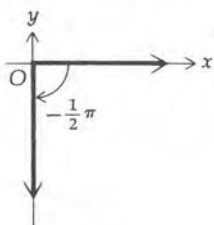
در مطالعه مسائل مربوط به زوایای مثلث، اندازه زاویه معمولاً بر حسب درجه داده می شود؛ اما در حساب دیفرانسیل و انتگرال، ما با توابع مثلثاتی روی اعداد حقیقی سروکار داریم و برای تعریف این توابع از واحد رادیان استفاده می کنیم. در تعریف اندازه يك زاویه بر حسب رادیان طول قوسی از يك دایره به کار گرفته می شود.

۱۰.۷.۱ تعریف فرض کنید AOB زاویه ای است در وضعیت استاندارد به طوری که $|OA| = 1$. ضلع اول یعنی OA را تا ضلع OB دوران می دهیم. اگر طول قوس دایره پیموده شده توسط نقطه A ، برابر با s واحد باشد، اندازه زاویه AOB بر حسب رادیان (rad) که با علامت r نمایش داده می شود، با رابطه زیر تعریف می شود:

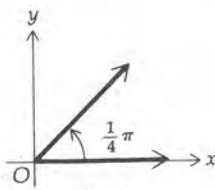
و $t = s$ ، اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد،

$t = -s$ ، اگر دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد.

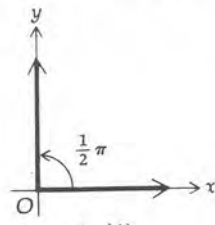
○ نمونه ۱ با توجه به اینکه اندازه طول محیط دایره [به شعاع] واحد برابر با 2π است، اندازه زوایای (الف)، (ب)، (پ)، (ت)، (ث)، و (ج) از شکل ۲۰۷.۱ تعیین می‌شوند. این اعداد به ترتیب عبارت‌اند از: $\pi/2$ ، $\pi/4$ ، $-\pi/2$ ، $3\pi/2$ ، $3\pi/4$ ، $-\pi/4$.



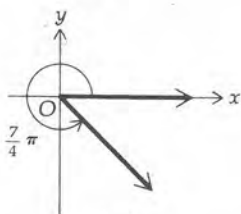
(پ)



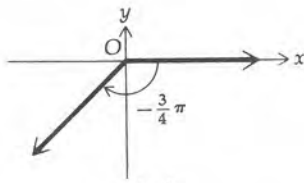
(ب)



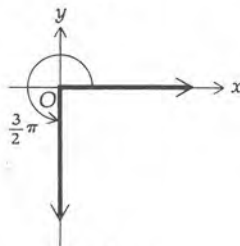
(الف)



(ج)



(ث)

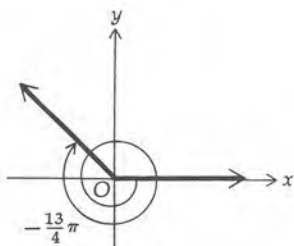


(ت)

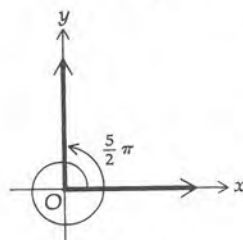
شکل ۲۰۷.۱

در تعریف ۱۰۷.۱ امکان دارد که OA بیش از یک دور کامل دوران کند.

○ نمونه ۲ شکل ۳۰۷.۱ (الف) چنین زاویه‌ای را نشان می‌دهد که اندازه آن بر حسب رادیان $5\pi/2$ است، و شکل ۳۰۷.۱ (ب) زاویه‌ای را نشان می‌دهد که اندازه‌اش $13\pi/4 -$ رادیان است.



(ب)



(الف)

شکل ۳۰۷.۱

زاویه‌ای که از دوران OA به اندازه یک دور کامل به دست آید، و لذا OA بر OB منطبق باشد، دارای اندازه 2π رادیان یا 360 درجه است. از اینرو تناظر زیرین اندازه برحسب درجه و اندازه برحسب رادیان وجود دارد (در اینجا، علامت $\sim$ نشان می‌دهد که اندازه‌های داده شده متعلق به زاویه‌های یکسان یا معادل هستند).

$$360^\circ \sim 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ \sim \pi \text{ rad}.$$

از این تناظر نتیجه می‌گیریم که

$$1^\circ \sim \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

و

$$1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ 18'.$$

با استفاده از این تناظر می‌توان اندازه‌های یک زاویه را از یک سیستم به سیستم دیگر تبدیل کرد.

○ نمونه ۳

$$162^\circ \sim 162 \cdot \frac{1}{180} \pi = \frac{9}{10} \pi \text{ rad}$$

و

$$\text{○ } \frac{5}{12} \pi \text{ rad} \sim \frac{5}{12} \pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ.$$

جدول ۱۰۷.۱ اندازه چند زاویه را برحسب درجه و رادیان به دست می‌دهد.

جدول ۱۰۷.۱

اندازه برحسب درجه	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵	۱۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
اندازه برحسب رادیان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

اکنون توابع سینوسی و کسینوسی یک عدد حقیقی را تعریف می‌کنیم.

۴.۷.۱ تعریف فرض کنید t يك عدد حقیقی باشد. زاویه‌ای به اندازه t رادیان را در وضعیت استاندارد قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم P در نقطه تقاطع ضلع دوم زاویه با دایره واحد به مرکز مبدأ باشد. اگر P نقطه (x, y) باشد، آنگاه **تابع کسینوسی** به صورت زیر تعریف می‌شود

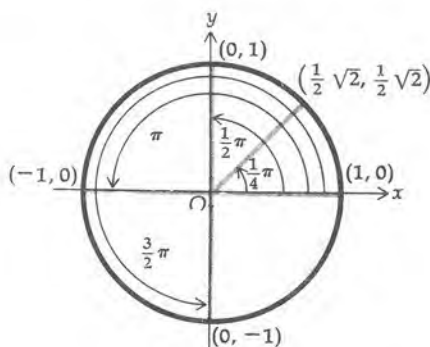
$$\cos t = x$$

و **تابع سینوسی** باضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\sin t = y.$$

از تعریف فوق برمی‌آید که $\cos t$ و $\sin t$ به ازای هر عدد حقیقی t تعریف می‌شوند. بنابراین قلمرو توابع سینوسی و کسینوسی مجموعه تمام اعداد حقیقی است. بزرگترین مقداری که هر کدام از این توابع می‌توانند داشته باشند برابر با ۱، و کوچکترین مقدار آنها -۱ است. بعداً نشان خواهیم داد که توابع سینوسی و کسینوسی تمام مقادیر بین -۱ و ۱ را اختیار می‌کنند و از این موضوع نتیجه می‌شود که برد این دو تابع، بازه $[-1, 1]$ است.

برای بعضی از مقادیر t ، با استفاده از شکل می‌توان کسینوس و سینوس را به سادگی به دست آورد. از شکل ۴.۷.۱ مشاهده می‌شود که $\cos 0 = 1$ و $\sin 0 = 0$ ، $\cos(\pi/2) = 0$ و $\sin(\pi/2) = 1$ ، $\cos(\pi) = -1$ و $\sin(\pi) = 0$ ، $\cos(3\pi/2) = 0$ و $\sin(3\pi/2) = -1$. این مقادیر و بعضی از مقادیر دیگری که به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرند، در جدول ۴.۷.۱ (صفحه بعد) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴.۷.۱

معادله دایره واحدی که مرکزش مبدأ مختصات باشد، به صورت $x^2 + y^2 = 1$ است. اما چون داریم $x = \cos t$ و $y = \sin t$ ، نتیجه می‌شود که

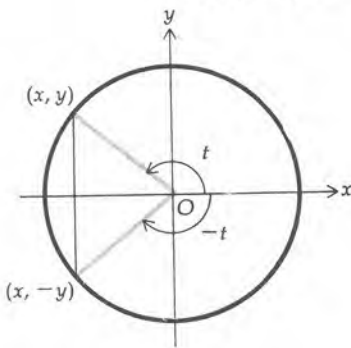
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1. \quad (۱)$$

جدول ۲.۷.۱

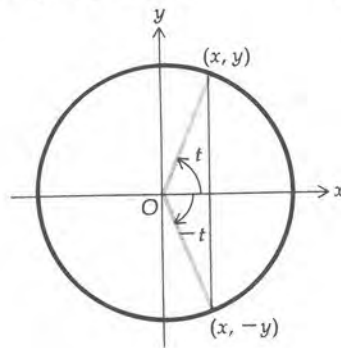
x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰
$\cos x$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-۱	۰	۱

دقت کنید که $\sin^2 t$ و $\cos^2 t$ را به ترتیب به جای $(\sin t)^2$ و $(\cos t)^2$ نوشته ایم. معادله (۱) يك اتحاد نام دارد، زیرا به ازای هر عدد حقیقی t برقرار است. شکل‌های ۵.۷.۱ و ۶.۷.۱ هر کدام دو زاویه را نشان می‌دهند. یکی با اندازه t - رادیان و دیگری زاویه‌ای متناظر با اولی و با اندازه t رادیان. از بررسی این شکل‌ها دیده می‌شود که

$$\sin(-t) = -\sin t \quad \text{و} \quad \cos(-t) = \cos t \quad (2)$$



شکل ۶.۷.۱



شکل ۵.۷.۱

این معادلات برای هر عدد حقیقی t برقرارند. زیرا طولهای نقاط تقاطع ضلع دوم زاویه‌هایی (که اندازه آنها t - و t رادیان است) با دایره به شعاع واحد، باهم برابر هستند و عرضهای این نقاط نیز باهم برابرند ولی فقط در علامت باهم تفاوت دارند. از این دو معادلات (۲) اتحاد هستند. از این معادلات نتیجه می‌شود که تابع کسینوسی تابعی زوج، و تابع سینوسی تابعی فرد است.

از تعریف ۲.۷.۱، اتحادهای زیر به دست می‌آیند.

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \text{ و } \cos(t + 2\pi) = \cos t \quad (۳)$$

معادلات (۳) خاصیتی از توابع کسینوسی و سینوسی را توصیف می کنند که به خاصیت تناوب موسوم است و تعریف آن به شرح زیر می باشد.

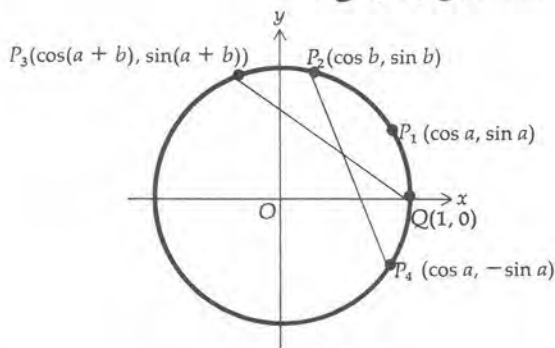
۳.۷.۱ تعریف تابعی چون f را تناوبی با دوره تناوب $p \neq 0$ می نامیم هر گاه برای هر x واقع در قلمرو f عدد $x + p$ نیز در قلمرو f باشد و

$$f(x + p) = f(x).$$

با توجه به تعریف فوق و معادلات (۳) دیده می شود که توابع سینوسی و کسینوسی، توابع تناوبی با دوره تناوب 2π هستند؛ یعنی: هر گاه مقدار متغیر مستقل t را به اندازه 2π افزایش دهیم، مقدار هر یک از آن توابع تکرار می شود. به خاطر همین خاصیت تناوبی است که توابع سینوسی و کسینوسی در فیزیک و مهندسی، در ارتباط با پدیده هایی که متناوباً تکرار می شوند، مانند حرکات موجی و ارتعاشات، دارای کاربردهای مهمی هستند. اکنون به اثبات فرمول مفیدی می پردازیم که اتحادهای مهم دیگری را می توان از آن نتیجه گرفت؛ و آن فرمول به صورت زیر است

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (۴)$$

که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواهی هستند.



شکل ۷.۷.۱

به شکل ۷.۷.۱ مراجعه کنید. در این شکل یک دایره واحد و نقاط زیر دیده می شوند.

$P_1(\cos a, \sin a)$ ، $P_2(\cos b, \sin b)$ ، $P_3(\cos(a+b), \sin(a+b))$ و $Q(1, 0)$ به کار رود، داریم $\widehat{QP_1} = a$ ، $\widehat{QP_2} = b$ ، $\widehat{P_2P_3} = a$ ، و $\widehat{P_3Q} = |-a| = a$ چون $\widehat{QP_3} = \widehat{QP_2} + \widehat{P_2P_3}$ پس

$$\widehat{QP}_\gamma = b + a. \quad (5)$$

و چون $\widehat{P}_\gamma P_\gamma = \widehat{P}_\gamma Q + \widehat{QP}_\gamma$ داریم

$$\widehat{P}_\gamma P_\gamma = a + b.$$

از معادلات (5) و (6) نتیجه می شود $\widehat{QP}_\gamma = \widehat{P}_\gamma P_\gamma$ ؛ و از این و طول وتری که نقاط Q و P_γ را به هم وصل می کند با طول وتری که نقاط P_γ و P_γ را به هم وصل می کند برابر است. اگر طول این وترها را مربع کنیم، داریم

$$|\widehat{QP}_\gamma|^2 = |\widehat{P}_\gamma P_\gamma|^2. \quad (7)$$

با استفاده از فرمول فاصله بین دو نقطه، داریم

$$\begin{aligned} |\widehat{QP}_\gamma|^2 &= [\cos(a+b) - 1]^2 + [\sin(a+b) - 0]^2 \\ &= \cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \sin^2(a+b). \end{aligned}$$

و چون $\cos^2(a+b) + \sin^2(a+b) = 1$ ، رابطه بالا را به صورت زیر می توان نوشت

$$|\widehat{QP}_\gamma|^2 = 2 - 2\cos(a+b). \quad (8)$$

دوباره از فرمول فاصله استفاده می کنیم

$$\begin{aligned} |\widehat{P}_\gamma P_\gamma|^2 &= (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b + \sin a)^2 \\ &= \cos^2 b - 2\cos a \cos b + \cos^2 a + \sin^2 b \\ &\quad + 2\sin a \sin b + \sin^2 a. \end{aligned}$$

و با توجه به $\cos^2 b + \sin^2 b = 1$ و $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ ، فرمول فوق به صورت زیر درمی آید

$$|\widehat{P}_\gamma P_\gamma|^2 = 2 - 2\cos a \cos b + 2\sin a \sin b. \quad (9)$$

اگر از معادلات (8) و (9) مقادیر مربوط را در (7) قرار دهیم به دست می آوریم

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2\cos a \cos b + 2\sin a \sin b$$

که از آن نتیجه می شود

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

که همان فرمول (4) است.

از قرار دادن $-b$ به جای b در فرمول (4)، فرمولی برای $\cos(a-b)$ به دست می آید

$$\cos(a + (-b)) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b).$$

اما $\cos(-b) = \cos b$ و $\sin(-b) = -\sin b$ ؛ بنابراین، برای همه اعداد حقیقی a و b داریم

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (10)$$

در فرمول (10) با فرض $a = \pi/2$ داریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(\pi/2) \cos b + \sin(\pi/2) \sin b$$

و چون $\cos(\pi/2) = 0$ و $\sin(\pi/2) = 1$ ، پس $\cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin b$. حال اگر در این

معادله فرض کنیم $b = c$ ، داریم $(\pi/2) - b = c$ ، و لذا $b = (\pi/2) - c$ ، و لذا $\cos c = \sin(\frac{\pi}{2} - c)$. بنا بر این دو اتحاد زیر را ثابت کرده ایم:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - t\right) = \cos t \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{1}{2}\pi - t\right) = \sin t \quad (11)$$

برای سینوس مجموع و تفاضل دو عدد حقیقی، فرمولهایی نظیر (4) و (10) به آسانی به دست می آید. فرمولی برای سینوس مجموع دو عدد با استفاده از (10) و (11) به دست می آید. از فرمول (11) نتیجه می شود

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) - b\right).$$

با استفاده از (10) داریم

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{1}{2}\pi - a\right) \sin b.$$

برای همه اعداد حقیقی a و b ، از فرمول (11) داریم

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (12)$$

برای به دست آوردن فرمولی برای سینوس تفاضل دو عدد حقیقی، $a - b$ را به صورت $a + (-b)$ می نویسیم و در فرمول (12) قرار می دهیم؛ لذا

$$\sin(a + (-b)) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b).$$

اما چون $\cos(-b) = \cos b$ و $\sin(-b) = -\sin b$ ، داریم

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \quad (13)$$

که برای تمام اعداد حقیقی a و b برقرار است.

اگر در فرمولهای (12) و (13) فرض کنیم $a = b = t$ ، به ترتیب، فرمولهای زیر نتیجه

می شوند

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \quad (۱۴)$$

و

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t. \quad (۱۵)$$

با استفاده از اتحاد $\sin^2 t + \cos^2 t = ۱$ فرمول (۱۵) را می توان به صورت

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - ۱ \quad (۱۶)$$

و یا به صورت

$$\cos 2t = ۱ - 2 \sin^2 t \quad (۱۷)$$

نوشت.

با قرار دادن $t/2$ به جای t در فرمولهای (۱۶) و (۱۷) و انجام چند عمل جبری، به ترتیب داریم

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1 + \cos t}{2} \quad (۱۸)$$

و

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2}. \quad (۱۹)$$

هر يك از فرمولهای (۱۴) تا (۱۹) يك اتحاد است، زیرا برای تمام اعداد حقیقی t برقرار است.

اگر جملات فرمول (۴) را از جملات نظیر در فرمول (۱۰) کم کنیم، فرمول زیر به دست می آید

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [-\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \quad (۲۰)$$

از جمع کردن جملات متناظر در فرمولهای (۴) و (۱۰) داریم

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \quad (۲۱)$$

و از جمع کردن جملات متناظر در فرمولهای (۱۲) و (۱۳) داریم

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \quad (۲۲)$$

اگر در فرمولهای (۲۲)، (۲۱)، و (۲۰) فرض کنیم $c = a+b$ و $d = a-b$ ، به ترتیب فرمولهای زیر به دست می آیند.

$$\sin c + \sin d = 2 \sin \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (23)$$

$$\cos c + \cos d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} \quad (24)$$

و

$$\cos c - \cos d = -2 \sin \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2}. \quad (25)$$

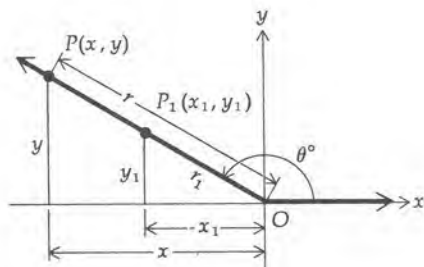
اگر جملات فرمول (۱۳) را از جملات نظیر در فرمول (۱۲) کم کنیم و به جای $a+b$ و $a-b$ به ترتیب c و d را قرار دهیم، داریم

$$\sin c - \sin d = 2 \cos \frac{c+d}{2} \sin \frac{c-d}{2}. \quad (26)$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۲، انجام اعمال مربوط به استنتاج بعضی از فرمولهای فوق از شما خواسته شده است.

هنگامی که با توابع مثلثاتی کار می‌کنیم، اگر قلمرو آنها متشکل از اندازه‌های زاویه‌ای باشد، نماد θ° را برای نمایش زاویه‌ای که اندازه‌اش بر حسب درجه برابر با θ است، به کار می‌بریم. مثلاً 45° ، اندازه زاویه‌ای است که بر حسب درجه برابر با ۴۵ است، یا بر حسب رادیان برابر با $\pi/4$ است.

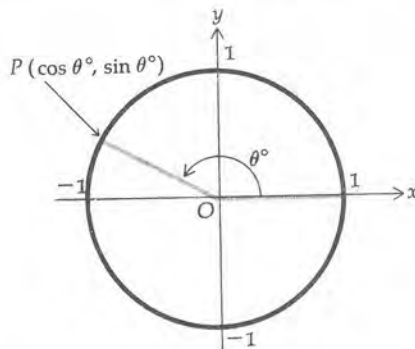
زاویه θ° را در یک دستگاه مختصات دکارتی قائم در وضعیت استاندارد قرار می‌دهیم. فرض کنید P یک نقطه دلخواه، بجز رأس، روی ضلع دوم این زاویه، با طول x و با عرض y ، باشد، و فرض کنید $|OP| = r$. به شکل ۸.۷.۱ رجوع کنید. نسبتهای x/y و y/r مستقل از انتخاب P هستند، زیرا اگر P_1 را به جای P انتخاب کنیم، شکل ۸.۷.۱ نشان می‌دهد که $x/r = x_1/r_1$ و $y/r = y_1/r_1$. چون وضعیت ضلع دوم بستگی به زاویه دارد، این نسبتها توابعی از اندازه زاویه هستند، ولذا تعریف می‌کنیم



شکل ۸.۷.۱

$$\sin \theta^\circ = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad \cos \theta^\circ = \frac{x}{r} \quad (27)$$

چون P می تواند هر نقطه (بجز مبدأ مختصات) از ضلع دوم باشد، نقطه ای را انتخاب می کنیم که برای آن $r = 1$ ؛ این نقطه محل تقاطع ضلع دوم با دایره واحد به معادله $x^2 + y^2 = 1$ است (به شکل ۹.۷.۱ مراجعه کنید). در این صورت، $\cos \theta^\circ$ برابر با طول این نقطه و $\sin \theta^\circ$ برابر با عرض آن خواهد بود. این استدلال، تناظر کسینوس و سینوس اعداد حقیقی و کسینوس و سینوس اندازه های مربوط بر حسب درجه را نشان می دهد که در تعریف زیر بیان می شود.



شکل ۹.۷.۱

۴.۷.۱ تعریف اگر α درجه و x رادیان، اندازه های يك زاویه مفروض باشند، آنگاه

$$\cos \alpha^\circ = \cos x \quad \text{و} \quad \sin \alpha^\circ = \sin x$$

در باره نمودار توابع سینوسی و کسینوسی در بخش ۶.۳، بحث مفصلتری خواهیم کرد.

تمرینهای ۷.۱

در تمرینهای ۱ و ۲، اندازه معادل بر حسب رادیان را به دست آورید.

۱. (الف) 60° ؛ (ب) 135° ؛ (پ) 210° ؛ (ت) -150° ؛ (ث) 20° ؛ (ج) 45° ؛
(ج) -75° ؛ (ح) 100°

۲. (الف) 45° ؛ (ب) 120° ؛ (پ) 240° ؛ (ت) -225° ؛ (ث) 15° ؛ (ج) 540° ؛
(ج) -48° ؛ (ح) 2°

در تمرینهای ۳ و ۴، اندازه معادل بر حسب درجه را به دست آورید.

۳. (الف) $\pi/4$ رادیان؛ (ب) $2\pi/3$ رادیان. ۴. (الف) $\pi/6$ رادیان؛ (ب) $4\pi/3$ رادیان.

در تمرینهای ۵ تا ۸ ، مقدار خواسته شده را بیابید.

۵. (الف) $\sin \frac{1}{6} \pi$ ؛ (ب) $\cos \frac{1}{4} \pi$ ؛ (پ) $\sin \left(-\frac{3}{2} \pi \right)$ ؛ (ت) $\cos \left(-\frac{2}{3} \pi \right)$.

۶. (الف) $\cos \frac{1}{3} \pi$ ؛ (ب) $\sin \frac{1}{4} \pi$ ؛ (پ) $\cos \left(-\frac{1}{2} \pi \right)$ ؛ (ت) $\sin (-2\pi)$.

۷. (الف) $\cos \frac{5}{6} \pi$ ؛ (ب) $\sin \left(-\frac{5}{4} \pi \right)$ ؛ (پ) $\cos 3\pi$ ؛ (ت) $\sin (-5\pi)$.

۸. (الف) $\sin \frac{4}{3} \pi$ ؛ (ب) $\cos \left(-\frac{1}{6} \pi \right)$ ؛ (پ) $\sin 7\pi$ ؛ (ت) $\cos \left(-\frac{5}{2} \pi \right)$.

در تمرینهای ۹ تا ۱۲، تمام آن مقادیر t در بازه $[0, 2\pi)$ را که در معادله داده شده صدق می کنند، بیابید.

۹. (الف) $\sin t = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ؛ (ب) $\cos t = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$.

۱۰. (الف) $\cos t = -\frac{1}{2}$ ؛ (ب) $\sin t = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

۱۱. (الف) $\cos t = 0$ ؛ (ب) $\sin t = -\frac{1}{2}$.

۱۲. (الف) $\sin t = -1$ ؛ (ب) $\cos t = -\frac{1}{2} \sqrt{3}$.

در تمرینهای ۱۳ و ۱۴، مقدار نشان داده شده را با استفاده از فرمول (۴) یا (۱۲) بیابید.

۱۳. (الف) $\sin \frac{11}{12} \pi$ ؛ (داهنمایی: $\frac{11}{12} \pi = \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{4} \pi$) ؛ (ب) $\cos \frac{7}{12} \pi$.

۱۴. (الف) $\cos \frac{11}{12} \pi$ ؛ (ب) $\sin \frac{7}{12} \pi$.

در تمرینهای ۱۵ و ۱۶، مقدار نشان داده شده را با استفاده از فرمول (۱۸) یا (۱۹) بیابید.

۱۵. (الف) $\cos \frac{1}{8} \pi$ ؛ (ب) $\sin \frac{1}{8} \pi$. ۱۶. (الف) $\sin \frac{1}{12} \pi$ ؛ (ب) $\cos \frac{1}{8} \pi$.

۱۷. فرمول (۲۰) را با کم کردن جملات فرمول (۴) از جملات نظیر در فرمول (۱۰)، به دست آورید.

۱۸. فرمول (۲۱) را با روشی مشابه با روش پیشنهاد شده در تمرین ۱۷ به دست آورید.
۱۹. فرمول (۲۲) را با روشی مشابه با روش پیشنهاد شده در تمرین ۱۷ به دست آورید.
۲۰. فرمول (۲۳) را با استفاده از فرمول (۲۲) به دست آورید.
۲۱. فرمول (۲۴) را با استفاده از فرمول (۲۱) به دست آورید.
۲۲. فرمول (۲۵) را با استفاده از فرمول (۲۰) به دست آورید.
۲۳. با استفاده از فرمولهای (۱۲)، (۱۴)، (۱۵)، و (۱) فرمولی برای $\sin 3t$ بر حسب $\sin t$ به دست آورید.
۲۴. فرمولی برای $\cos 3t$ بر حسب $\cos t$ به دست آورید. از روشی مشابه روش پیشنهاد شده در تمرین ۲۳ استفاده کنید.

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۷، مقدار نشان داده شده را بدون استفاده از جدول به دست آورید.

۲۵. (الف) $\sin \frac{5}{12} \pi$ ؛ (ب) $\cos \left(-\frac{11}{12} \pi \right)$.

۲۶. (الف) $\cos \frac{5}{12} \pi$ ؛ (ب) $\sin \left(-\frac{11}{12} \pi \right)$.

۲۷. (الف) $\cos \frac{19}{12} \pi$ ؛ (ب) $\sin \left(-\frac{5}{8} \pi \right)$.

۲۸. هر يك از عبارات زیر را بر حسب $\sin t$ یا $\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$ بنویسید:

(الف) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - t \right)$ ؛ (ب) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - t \right)$ ؛ (پ) $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + t \right)$ ؛

(ت) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + t \right)$.

۲۹. عبارات تمرین ۲۸ را بر حسب $\cos t$ یا $\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$ به دست آورید.

۳۰. هر يك از عبارات زیر را بر حسب $\sin t$ یا $\sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$ بنویسید: (الف) $\sin(\pi - t)$ ؛

(ب) $\cos(\pi - t)$ ؛ (پ) $\sin(\pi + t)$ ؛ (ت) $\cos(\pi + t)$.

۳۱. عبارات تمرین ۳۰ را بر حسب $\cos t$ یا $\cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right)$ بنویسید.

۳۲. مطلوب است محاسبه تمام آن مقادیر t که در معادلات زیر صدق می کنند

(الف) $\sin t = 0$ ؛ (ب) $\cos t = 0$.

۳۳. مطلوب است محاسبه تمام آن مقادیر t که در معادلات زیر صدق می کنند

(الف) $\sin t = 1$ ؛ (ب) $\cos t = 1$.

۳۴. مطلوب است محاسبه تمام آن مقادیر t که در معادلات زیر صدق می کنند
(الف) $\sin t = -1$ ؛ (ب) $\cos t = -1$.

۳۵. مطلوب است محاسبه تمام آن مقادیر t که در معادلات زیر صدق می کنند
(الف) $\sin t = 1/2$ ؛ (ب) $\cos t = 1/2$.

۳۶. مطلوب است محاسبه تمام آن مقادیر t که در معادلات زیر صدق می کنند
(الف) $\sin t = -\sqrt{2}/2$ ؛ (ب) $\cos t = -\sqrt{2}/2$.

۳۷. فرض کنید f تابعی است تناوبی با دوره تناوب 2π که قلمرو آن مجموعه تمام اعداد حقیقی است. ثابت کنید که f تابعی تناوبی با دوره تناوب $2\pi -$ نیز هست.

۳۸. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۳۷ يك تابع تناوبی با دوره تناوب $2n\pi$ است که در آن n عددی صحیح و دلخواه است. (داهنمایی: از استقرای ریاضی استفاده کنید.)

۳۹. اگر تابع f به صورت $f(x) = x - [x]$ تعریف شده باشد، ثابت کنید f تناوبی است. کوچکترین دوره تناوب مثبت f چیست؟

تمرینهای مروری فصل ۱

در تمرینهای ۱ تا ۸، مجموعه جواب نامساوی داده شده را بیابید و آن را روی محور حقیقی نشان دهید.

$$۱. \quad 3x - 7 \leq 5x - 17 \quad ۲. \quad 8 < 5x + 4 \leq 10 \quad ۳. \quad \frac{x}{x-1} > \frac{1}{4}$$

$$۴. \quad \frac{3}{x+4} < \frac{2}{x-5} \quad ۵. \quad 2x^2 + x < 3 \quad ۶. \quad |2x - 5| > 7$$

$$۷. \quad |3 + 5x| \leq 9 \quad ۸. \quad \left| \frac{2-3x}{3+x} \right| \geq \frac{1}{4}$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۱، معادلات داده شده را نسبت به x حل کنید.

$$۹. \quad |3 - 4x| = 15 \quad ۱۰. \quad \left| \frac{2x-1}{x+3} \right| = 4 \quad ۱۱. \quad |3x - 4| = |6 - 2x|$$

۱۲. تمام مقادیر x را بیابید که به ازای آنها، $\sqrt{x^2 + 2x - 15}$ يك عدد حقیقی باشد.

در تمرینهای ۱۳ تا ۱۸، نمودار معادله داده شده را رسم کنید.

۱۳. $y^2 = x - 4$. ۱۴. $y = |x - 4|$. ۱۵. $y = x^2 - 2$
۱۶. $x^2 + 4y^2 = 16$. ۱۷. $9x^2 - 25y^2 = 0$. ۱۸. $4x^2 - y^2 = 16$
۱۹. طول نقاطی به عرض ۴ رابعا پیدا که به فاصله $\sqrt{117}$ از نقطه $(2, -5)$ باشند.
۲۰. معادله‌ای بنویسید که مختصات هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از $(2, -1)$ دو برابر فاصله‌اش از $(4, -3)$ باشد، در آن صدق کنند.
۲۱. معادله‌ای بنویسید که مختصات هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از $(4, -3)$ برابر با $\sqrt{10}$ باشد، در آن صدق کنند.
۲۲. مجموعه‌های نقاط زیر را، یا به وسیله یک معادله و یا به وسیله یک نامساوی، تعریف کنید: (الف) دایره - نقطه $(5, -3)$ ؛ (ب) مجموعه همه نقاطی که فاصله آنها از نقطه $(5, -3)$ کمتر از ۴ باشد؛ (پ) مجموعه همه نقاطی که فاصله آنها از نقطه $(5, -3)$ حداقل برابر ۵ باشد.
۲۳. ثابت کنید یک چهارضلعی که رئوس آن در $(2, 1)$ ، $(1, -5)$ ، $(7, 11)$ ، و $(10, 7)$ باشد، مستطیل است.
۲۴. ثابت کنید مثلث به رئوس $(1, -8)$ ، $(6, -1)$ ، و $(4, 2)$ متساوی‌الساقین است، و مساحت آن را بیابید.
۲۵. ثابت کنید که نقاط $(4, 2)$ ، $(4, -1)$ ، و $(2, -5)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند، و مساحت مثلث را بیابید.
۲۶. از دو طریق ثابت کنید که $(1, -1)$ ، $(2, 3)$ ، و $(8, 7)$ روی یک خط قرار دارند: (الف) با استفاده از فرمول فاصله؛ (ب) با استفاده از ضریب زاویه.
۲۷. دو رأس یک متوازی‌الاضلاع در $(4, -3)$ و $(3, 2)$ قرار دارند و مرکزش در $(1, 0)$ است. دورأس دیگر را پیدا کنید.
۲۸. دورأس متقابل یک مربع در $(4, -3)$ و $(4, -9)$ واقع‌اند. دورأس دیگر را بیابید.
۲۹. ثابت کنید که نقاط $(13, 2)$ ، $(5, -2)$ ، $(1, -3)$ ، و $(7, 7)$ رئوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.
۳۰. معادله دایره به مرکز $(4, -2)$ و به شعاع $\sqrt{5}$ را بیابید. معادله را به صورت کلی بنویسید.
۳۱. معادله دایره‌ای را که دو انتهای یک قطر آن $(2, -3)$ ، و $(6, 5)$ هستند، بیابید.
۳۲. معادله دایره‌ای را که از نقاط $(1, -3)$ ، $(2, 2)$ ، و $(5, -4)$ می‌گذرد، پیدا کنید.

۳۳. مرکز و شعاع دایره به معادله $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 9 = 0$ را بیابید.

۳۴. معادله خطی را که از نقاط $(4, -2)$ و $(3, 7)$ می‌گذرد، بیابید؛ و معادله را به صورت طول و عرض از مبدأ بنویسید.

۳۵. معادله خطی را که از نقطه $(3, -5)$ می‌گذرد و عمود بر خط به معادله $2x - 5y = 1$ است، پیدا کنید.

۳۶. معادله خطی را بنویسید که عمود منصف پاره خط از $(5, -1)$ تا $(2, 3)$ است.

۳۷. همه مقادیر k را که به ازای آنها نمودار دو معادله $x^2 + y^2 = k$ و $x + y = k$ یکدیگر را قطع می‌کنند، معین کنید.

۳۸. معادله دایره‌ای را که قطر آن و وتر مشترک دو دایره $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ و $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$ است، بیابید.

۳۹. معادله دایره‌ای را بیابید که محیط بر مثلثی است که اضلاع آن روی خطوط $x - 3y + 2 = 0$ ، $x - 3y + 6 = 0$ ، و $2x + y - 3 = 0$ واقع هستند.

۴۰. کوتاهترین فاصله از نقطه $(5, -2)$ تا خط به معادله $3x + y = 2$ را پیدا کنید.

۴۱. معادله خطی را بیابید که از نقطه تقاطع خطوط $5x + 6x - 4 = 0$ و $x - 3y + 2 = 0$ می‌گذرد و عمود بر خط $x - 4y - 20 = 0$ است - بدون اینکه نقطه تقاطع دو خط را پیدا کنید. (دانهجایی: تمرین ۳۸ از تمرینهای ۴۰۱ را ببینید.)

۴۲. اضلاع یک متوازی‌الاضلاع خطوط $x + 2y - 10 = 0$ ، $3x - y + 20 = 0$ ، $x + 2y - 15 = 0$ و $3x - y + 10 = 0$ هستند. بدون اینکه رئوس متوازی-الاضلاع را بیابید، معادلات قطرهای آن را پیدا کنید. (دانهجایی: تمرین ۳۸ از تمرینهای ۴۰۱ را ببینید.)

۴۳. معادلات خطوطی را بیابید که از مبدأ می‌گذرند و بردایره به مرکز $(1, 2)$ و شعاع ۲ مماس هستند.

۴۴. اگر $3x + ky + 2 = 0$ و $5x - y + h = 0$ معادلات یک خط باشند، مقادیر k و h را معین کنید.

در تمرینهای ۴۵ تا ۵۲، تابع عبارت است از مجموعه همه زوجهای مرتب (x, y) که در معادله داده شده صدق می‌کنند. قلمرو و برد تابع را پیدا کنید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g: y = \frac{x^2 - 16}{x + 4} \quad ۴۶$$

$$f: y = \sqrt{2x + 5} \quad ۴۵$$

$$h: y = \frac{(x-2)(2x^2+11x+15)}{2x^2+x-10}. \quad ۴۷$$

$$F: y = \begin{cases} x+3 & x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & -3 \leq x \leq 3 \\ 3-x & 3 < x \end{cases}. \quad ۴۸$$

۴۹. $G: y = (x+3) \cdot U(x+3)$ ، که در آن U تابع پله‌ای واحد است که در تمرین ۳۱ از تمرینهای ۶۰.۱ تعریف شده است.

۵۰. $H: y = 2x - \operatorname{sgn} x$ ، که در آن sgn تابع علامت است که در تمرین ۳۲ از تمرینهای ۶۰.۱ تعریف شده است.

$$g: y = \begin{cases} x^2-4 & x \leq 2 \\ 4-x & 2 < x \leq 4 \\ x-8 & 4 < x \end{cases}. \quad ۵۱$$

$$f: y = x + [x+1]. \quad ۵۲$$

۵۳. با فرض $f(x) = 3x^2 - x + 5$ ، مطلوب است محاسبهٔ (الف) $f(-3)$ ؛ (ب) $f(-x^2)$ ؛ (پ) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۵۴. با فرض $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ ، مطلوب است محاسبهٔ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ، $h \neq 0$.

۵۵. تعیین کنید که هر یک از تابعهای زیر زوج است یا فرد و یا هیچکدام.

(الف) $f(x) = 2x^3 - 3x$ ؛ (ب) $g(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$ ؛

(پ) $h(x) = 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x$ ؛ (ث) $F(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x}$.

در تمرینهای ۵۶ تا ۶۰، برای توابع داده شدهٔ f و g ، توابع زیر را تعریف کنید و قلمرو آنها را معین کنید: (الف) $f+g$ ؛ (ب) $f-g$ ؛ (پ) $f \cdot g$ ؛ (ت) f/g ؛ (ث) g/f ؛ (ج) $f \circ g$ ؛ (چ) $g \circ f$.

$$g(x) = x^2 + 4 \text{ و } f(x) = \sqrt{x+2}. \quad ۵۶$$

$$g(x) = 4x - 3 \text{ و } f(x) = x^2 - 4. \quad ۵۷$$

$$g(x) = \sqrt{x+5} \text{ و } f(x) = x^2 - 9. \quad ۵۸$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ و } f(x) = \sqrt{x} \quad ۶۰. \quad g(x) = \frac{x}{x+1} \text{ و } f(x) = \frac{1}{x-3} \quad ۵۹.$$

در تمرینهای ۶۱ و ۶۲، مطلوب است محاسبه تمام مقادیر t در بازه $[0, 2\pi)$ که در معادله داده شده صدق می‌کنند.

$$۶۱. \text{ (الف) } \sin t = \frac{1}{4} \quad \text{ (ب) } \cos t = -1 \quad \text{ (پ) } \sin t = 0$$

$$۶۲. \text{ (الف) } \cos t = 1 \quad \text{ (ب) } \sin t = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \quad \text{ (پ) } \cos t = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

در تمرینهای ۶۳ و ۶۴، بدون استفاده از جدول، مقدار نشان داده شده را بیابید.

$$۶۳. \text{ (الف) } \sin \frac{2}{3}\pi \quad \text{ (ب) } \cos \frac{5}{4}\pi \quad \text{ (پ) } \sin \left(-\frac{5}{6}\pi\right) \quad \text{ (ت) } \cos \frac{13}{12}\pi$$

$$۶۴. \text{ (الف) } \cos \frac{7}{6}\pi \quad \text{ (ب) } \sin \left(-\frac{7}{4}\pi\right) \quad \text{ (پ) } \cos \frac{5}{3}\pi \quad \text{ (ت) } \sin \frac{5}{8}\pi$$

۶۵. ثابت کنید $x \operatorname{sgn} x = |x|$ که در آن، sgn تابع علامت است که در تمرین ۳۲ از تمرینهای ۶.۱ تعریف شده است.

۶۶. ثابت کنید که اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، $|x| < x^2 + 1$.

۶۷. به روش تحلیلی ثابت کنید که سه میانه هر مثلث در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۶۸. ثابت کنید که دو خط $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ و $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ با هم موازی اند اگر و تنها اگر $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

۶۹. به روش تحلیلی ثابت کنید که اگر اقطار یک مستطیل برهم عمود باشند، آن مستطیل مربع است.

۷۰. به روش تحلیلی ثابت کنید که پاره خط واصل نقاط وسط هر دو ضلع مثلث، موازی با ضلع سوم است و طول آن، نصف طول ضلع سوم است.

۷۱. نقطه تقاطع میانه‌ها، نقطه تقاطع ارتفاعها و مرکز دایره محیطی مثلث، روی یک خط قرار دارند. برای مثلث به رؤوس $(2, 8)$ ، $(5, -1)$ و $(6, 6)$ این نقاط را پیدا کنید و ثابت کنید روی یک خط واقع اند.

۷۲. به روش تحلیلی ثابت کنید که مجموعه نقاط هم فاصله از دو نقطه مفروض، عبارت است از عمود منصف پاره خط واصل آن دو نقطه.

حد و پیوستگی

۱.۲ حد تابع

تابع f را که به صورت معادله

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \quad (1)$$

تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. f برای تمام مقادیر x بجز $x = 1$ تعریف می‌شود. مقادیر تابع، $f(x)$ ، را وقتی که x نزدیک به ۱ اما مخالف با ۱ است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا فرض کنید x مقادیر ۰، ۰۲۵، ۰۷۵، ۰۹، ۰۹۹، ۰۹۹۹، ۰۹۹۹۹ و غیره را می‌پذیرد. مقادیر x را نزدیک و نزدیکتر به ۱، ولی همواره کمتر از ۱ می‌گیریم؛ به عبارت دیگر، متغیر x با مقادیر کمتر از ۱ به سمت ۱ میل می‌کند. این موضوع در جدول ۱.۱.۲ نمایش داده شده است. حال، فرض کنید متغیر x با مقادیر بیشتر از ۱ به سمت ۱ میل کند؛ یعنی، فرض کنید x مقادیر ۲، ۱.۷۵، ۱.۵، ۱.۲۵، ۱.۱، ۱.۰۱، ۱.۰۰۱، ۱.۰۰۰۱ و غیره را بپذیرد. به جدول ۲.۱.۲ رجوع کنید.

از بررسی هر دو جدول مشاهده می‌کنیم که وقتی x به ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، $f(x)$ هم به عدد ۵ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، و هر چه x به ۱ نزدیکتر باشد، $f(x)$ هم به ۵ نزدیکتر است. مثلاً، از جدول ۱.۱.۲ وقتی $x = ۰.۹$ داریم $f(x) = ۴.۸$ ؛ یعنی، وقتی x به اندازه ۰.۱ کمتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۰.۲ کمتر از ۵ است. و وقتی $x = ۰.۹۹۹$ داریم $f(x) = ۴.۹۹۸$ ؛ یعنی، وقتی x به اندازه ۰.۰۰۱ کمتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۰.۰۰۲ کمتر از ۵ است. همچنین، برای $x = ۰.۹۹۹۹$ ، داریم

جدول ۱۰۱۰۲

x	۰ ۵۲۵ ۵۵ ۵۷۵ ۵۹ ۵۹۹ ۵۹۹۹ ۵۹۹۹۹ ۵۹۹۹۹۹
$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$	۳ ۳۲۵ ۴ ۴۲۵ ۴۲۸ ۴۲۹۸ ۴۲۹۹۸ ۴۲۹۹۹۸

جدول ۲۰۱۰۲

x	۲ ۱۲۷۵ ۱۵ ۱۲۵ ۱۱ ۱۲۰۱ ۱۲۰۰۱ ۱۲۰۰۰۱ ۱۲۰۰۰۰۱
$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$	۷ ۶۲۵ ۶۲۰ ۵۲۵ ۵۲۲ ۵۲۰۲ ۵۲۰۰۲ ۵۲۰۰۰۲ ۵۲۰۰۰۰۲

$f(x) = ۴۲۹۹۹۸$ ؛ یعنی، وقتی x به اندازه ۵۰۰۰۱ کمتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۵۰۰۰۰۲ کمتر از ۵ است.

جدول ۲۰۱۰۲ نشان می‌دهد که وقتی $x = ۱۱$ ، $f(x) = ۵۲۲$ ؛ یعنی، وقتی x به اندازه ۱۰ بیشتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۵۰۲ بیشتر از ۵ است. برای $x = ۱۲۰۰۱$ ، داریم $f(x) = ۵۲۰۰۲$ ؛ یعنی، وقتی x به اندازه ۱۲۰۰۰۱ بزرگتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۵۲۰۰۰۲ بزرگتر از ۵ است. و برای $x = ۱۲۰۰۰۰۱$ ، داریم $f(x) = ۵۲۰۰۰۰۲$ ؛ یعنی، وقتی که x به اندازه ۱۲۰۰۰۰۱ بزرگتر از ۱ باشد، $f(x)$ به اندازه ۵۲۰۰۰۰۲ بزرگتر از ۵ است.

بنابراین از بررسی جدولها مشاهده می‌کنیم که اگر x با ۱ به اندازه ± ۵۰۰۰۱ اختلاف داشته باشد (یعنی، وقتی $x = ۵۹۹۹$ یا $x = ۱۲۰۰۱$)، اختلاف $f(x)$ و ۵ به اندازه ± ۵۰۰۰۲ است (یعنی، $f(x) = ۴۲۹۹۸$ یا $f(x) = ۵۲۰۰۲$) و وقتی که اختلاف x برابر با ± ۵۰۰۰۰۱ باشد، اختلاف $f(x)$ و ۵ برابر با ± ۵۰۰۰۰۲ است.

اکنون، برای بررسی این وضعیت ازدیدی دیگر، ابتدا مقادیر $f(x)$ را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک بگیریم، می‌توانیم مقدار $f(x)$ را به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۵ نزدیک کنیم. روش دیگر بیان این مطلب این است که، می‌توانیم قدرمطلق اختلاف بین $f(x)$ و ۵ را به هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم، به شرطی که قدرمطلق تفاوت بین x و ۱ را به اندازه کافی کوچک بگیریم. یعنی، اگر $|x - ۱|$ به اندازه کافی کوچک اختیار شود، $|f(x) - ۵|$ می‌تواند به هر اندازه دلخواه کوچک شود. ولی به خاطر داشته باشید که $f(x)$ هیچگاه ۵ نمی‌شود. با استفاده از دو علامت به جای این دو اختلاف کوچک، می‌توان مطلب را دقیقتر بیان کرد.

علائمی که معمولاً به کار برده می‌شوند، عبارت‌اند از ε (اپسیلون) و δ (دلتا). بدین ترتیب می‌گوییم، $|f(x) - 5|$ از هر عدد مثبت مفروض ε کوچکتر می‌شود، به شرطی که $|x - 1|$ از عدد مثبتی چون δ که به‌طور مناسب اختیار می‌شود کوچکتر باشد و به شرطی که $|x - 1| \neq 0$ (چون که $x \neq 1$). توجه به این نکته مهم است که اندازه δ به اندازه ε بستگی دارد. باز هم یک راه دیگر بیان مطلب چنین است: به ازای هر عدد مثبت ε ، با به اندازه کافی کوچک گرفتن $|x - 1|$ می‌توانیم داشته باشیم $|f(x) - 5| < \varepsilon$ ؛ یعنی، عدد مثبت به اندازه کافی کوچکی چون δ وجود دارد که

$$(۲) \quad \text{وقتی که } 0 < |x - 1| < \delta, \quad |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

توجه کنید که طبق دو جدول فوق، هرگاه $|x - 1| = 0.۰۱$ ، داریم $|f(x) - 5| = 0.۰۲$. بنابراین، اگر $\varepsilon = 0.۰۲$ ، می‌توانیم δ را برابر با 0.۰۱ بگیریم و بنویسیم

$$\text{وقتی که } 0 < |x - 1| < 0.۰۱, \quad |f(x) - 5| < 0.۰۲.$$

این همان عبارت (۲) با $\varepsilon = 0.۰۲$ و $\delta = 0.۰۱$ است.

همچنین، وقتی که $|x - 1| = 0.۰۰۱$ ، $|f(x) - 5| = 0.۰۰۲$. پس، برای $\varepsilon = 0.۰۰۲$ ، δ را برابر با 0.۰۰۱ می‌گیریم و لذا داریم

$$\text{وقتی که } 0 < |x - 1| < 0.۰۰۱, \quad |f(x) - 5| < 0.۰۰۲.$$

این همان عبارت (۲) با $\varepsilon = 0.۰۰۲$ و $\delta = 0.۰۰۱$ است.

به طریق مشابه، اگر $\varepsilon = 0.۰۰۰۲$ ، می‌توانیم δ را برابر با 0.۰۰۰۱ بگیریم و بنویسیم

$$\text{وقتی که } 0 < |x - 1| < 0.۰۰۰۱, \quad |f(x) - 5| < 0.۰۰۰۲.$$

این همان عبارت (۲) است که در آن $\varepsilon = 0.۰۰۰۲$ و $\delta = 0.۰۰۰۱$.

می‌توانیم عمل بالا را تکرار کنیم، و به جای ε هر مقدار مثبت کوچکی قرار دهیم و سپس مقدار مناسبی برای δ پیدا کنیم که اگر $|x - 1|$ کوچکتر از δ باشد و $x \neq 1$ (یا $|x - 1| > 0$)، آنگاه $|f(x) - 5|$ از ε کوچکتر شود. حال، چون به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توانیم $\delta > 0$ بی‌پیدا کنیم که وقتی $0 < |x - 1| < \delta$ ، $|f(x) - 5| < \varepsilon$ ؛ می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت ۱ میل می‌کند، برابر با ۵ است، و با استفاده از علائم می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5.$$

مشاهده کنید که صورت کسر موجود در (۱) را می‌توان تجزیه کرد که

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}.$$

اگر $x \neq 1$ ، صورت ومخرج را می توان بر $x-1$ تقسیم کرد و

$$f(x) = 2x + 3 \quad x \neq 1 \quad (3)$$

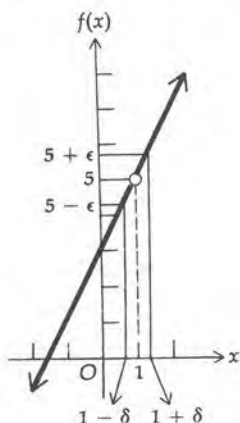
را به دست آورد. با این قرارداد که $x \neq 1$ ، برای تعریف $f(x)$ هم معادله (۳) مناسب است و هم معادله (۱). از (۳) به وضوح دیده می شود که با انتخاب هر x به اندازه کافی نزدیک به ۱، می توانیم $f(x)$ را به قدر دلخواه به ۵ نزدیک کنیم، و این ویژگی تابع f ، به تعریف آن در $x=1$ بستگی ندارد. این واقعیت تمایز بین $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و مقدار تابع در ۱ را نشان می دهد؛ یعنی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ولی $f(1)$ وجود ندارد. در نتیجه، در عبارت (۲)؛ $|x-1| < \delta$ ، زیرا مقادیر $f(x)$ به ازای x های نزدیک به ۱ و نه به ازای $x=1$ مورد توجه ما هستند.

حال ببینیم معنی هندسی بحث فوق در مورد تابع خاص تعریف شده توسط (۱) یا (۳) چیست. شکل ۱.۱.۲ نقش هندسی ϵ و δ را نشان می دهد. ملاحظه کنید وقتی که x روی محور افقی بین $1-\delta$ و $1+\delta$ قرار داشته باشد، $f(x)$ روی محور قائم بین $5-\epsilon$ و $5+\epsilon$ قرار می گیرد؛ یا

$$\text{وقتی } 0 < |x-1| < \delta, \quad 0 < |f(x)-5| < \epsilon.$$

طریقه دیگر بیان مطلب آن است که، اگر x را طوری محدود کنیم که روی محور افقی بین $1-\delta$ و $1+\delta$ قرار گیرد، $f(x)$ روی محور قائم بین $5-\epsilon$ و $5+\epsilon$ قرار می گیرد.

دقت کنید که مقادیر ϵ اختیاری هستند و می توانند به اندازه دلخواه کوچک انتخاب شوند؛ همچنین، مقدار δ بستگی به ϵ انتخاب شده دارد؛ و نیز باید خاطر نشان شود که هرچه ϵ کوچکتر باشد، مقدار δ ی مربوط نیز کوچکتر خواهد بود.



شکل ۱.۱.۲

به طور خلاصه، در مورد این مثال می نویسیم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ، زیرا برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x - 1| < \delta, \text{ } 0 < |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

حال تعریف حد يك تابع در حالت کلی را ارائه می دهیم.

تعریف ۱۰۱.۲ فرض کنید f تابعی باشد که در تمام نقاط يك بازه با زمانند I که شامل عدد a است، بجز احتمالا در خود a ، تعریف بشود. حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند، برابر با L است، می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

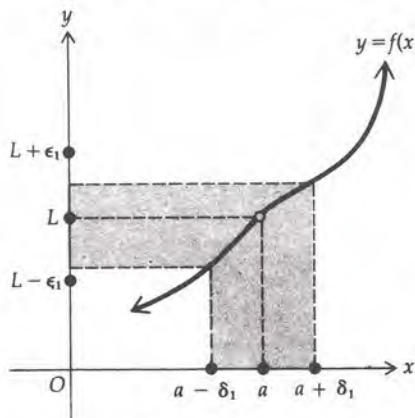
اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، عدد مثبتی چون δ وجود داشته باشد که

$$(۴) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \text{ } 0 < |f(x) - L| < \varepsilon.$$

تعریف ۱۰۱.۲ حاکی است که وقتی x به سمت عددی مانند a میل کند، مقادیر $f(x)$ به سمت حدی چون L میل می کنند، اگر با انتخاب x به اندازه کافی نزدیک به a ، با شرط اینکه $x \neq a$ ، بتوان قدر مطلق اختلاف بین $f(x)$ و L را به قدر دلخواه کوچک کرد.

توجه به این نکته مهم است که در تعریف فوق، از مقدار تابع f برای $x = a$ چیزی گفته نشده است. یعنی؛ برای وجود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ حتی لازم نیست که تابع برای $x = a$ تعریف بشود.

يك تعبیر هندسی تعریف ۱۰۱.۲ برای تابعی چون f در شکل ۲۰۱.۲ نمایش داده شده



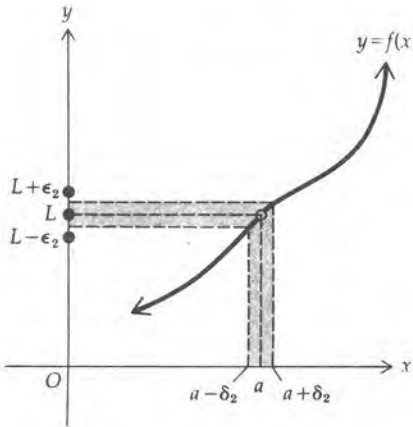
شکل ۲۰۱.۲

است. تنها بخشی از نمودار تابع که نزدیک نقطه به طول $x=a$ است در شکل نشان داده شده است. چون f لزوماً در a تعریف نمی‌شود، نقطه به طول a روی نمودار وجود ندارد. مشاهده کنید که وقتی x روی محور افقی بین $a-\delta_1$ و $a+\delta_1$ قرار داشته باشد، $f(x)$ روی محور قائم بین $L-\epsilon_1$ و $L+\epsilon_1$ واقع می‌شود. به عبارت دیگر، با محدود کردن x روی محور افقی، بین $a-\delta_1$ و $a+\delta_1$ ، می‌توان $f(x)$ را روی محور قائم بین $L-\epsilon_1$ و $L+\epsilon_1$ محدود کرد. پس

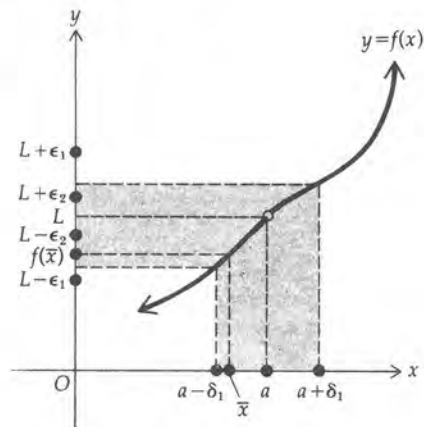
$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ } |f(x)-L| < \epsilon_1$$

شکل ۳.۱.۲ نشان می‌دهد که چگونه یک مقدار کوچکتر برای ϵ می‌تواند به انتخاب متفاوتی از δ منجر شود. در این شکل دیده می‌شود که برای $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ، مقدار δ_1 خیلی بزرگ است؛ یعنی، مقادیری برای x وجود دارند که $0 < |x-a| < \delta_1$ ولی $|f(x)-L|$ از ϵ_2 کوچکتر نیست. مثلاً $0 < |\bar{x}-a| < \delta_1$ ، اما $|f(\bar{x})-L| > \epsilon_2$. لذا باید مقدار کوچکتری چون δ_2 را که در شکل ۴.۱.۲ نشان داده شده است انتخاب کنیم به طوری که

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ } |f(x)-L| < \epsilon_2$$



شکل ۴.۱.۲



شکل ۳.۱.۲

با این وجود، به ازای هر انتخاب $\epsilon > 0$ ، هر قدر هم که کوچک باشد، یک $\delta > 0$ وجود دارد که عبارت (۴) برقرار است. پس $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

مثال ۱ فرض کنید تابع f با معادله $f(x) = 4x - 1$ تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 11$ ، بی برای $\epsilon = 0.01$ پیدا کنید که

$$\text{وقتی } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } |f(x)-11| < 0.01$$

حل

$$\begin{aligned}|f(x) - 11| &= |(4x - 1) - 11| \\ &= |4x - 12| \\ &= 4|x - 3|.\end{aligned}$$

بنابراین مایلیم

$$\text{وقتی که } \delta < |x - 3| < 0.001, \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

به عبارت دیگر،

$$\text{وقتی که } \delta < |x - 3| < 0.0025, \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

اگر فرض کنیم $\delta = 0.0025$ ، داریم

$$(5) \quad \text{وقتی که } \delta < |x - 3| < 0.0025, \quad 0 < |(4x - 1) - 11| < 0.01,$$

در این مثال به عنوان δ ی مورد نظر، می‌توانیم به جای 0.0025 هر عدد مثبت کوچکتر از 0.0025 را هم انتخاب کنیم. یعنی، اگر $0 < \delta < 0.0025$ ، عبارت (5) برقرار باشد، آنگاه

$$\text{وقتی که } \delta < |x - 3| < 0.001, \quad 0 < |(4x - 1) - 11| < 0.01,$$

زیرا اگر x در نامساوی $\delta < |x - 3| < 0.001$ صدق کند، آنگاه در نامساوی $\delta < |x - 3| < 0.0025$ نیز صدق می‌کند. ▲

حل مثال ۱ عبارت بود از یافتن يك δ برای يك ε خاص. اگر برای هر ε دلخواه بتوانیم يك δ پیدا کنیم که مؤثر واقع شود، آنگاه ثابت می‌شود که مقدار حد ۱۱ است. این کار را در مثال بعد انجام می‌دهیم.

$$\text{مثال ۲} \quad \text{با استفاده از تعریف ۱.۱.۲ ثابت کنید که } \lim_{x \rightarrow 3} (4x - 1) = 11$$

حل نخستین شرط تعریف این است که به ازای هر عدد متعلق به يك بازه I که شامل ۳ باشد، بجز احتمالاً به ازای ۳، $4x - 1$ معین باشد. چون $4x - 1$ به ازای همه مقادیر x معین است، هر بازه I باز شامل ۳ این شرط را برآورده می‌کند. حال، باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی که } \delta < |x - 3| < \varepsilon, \quad 0 < |(4x - 1) - 11| < \varepsilon.$$

از مثال ۱ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}|(4x - 1) - 11| &= |4x - 12| \\ &= 4|x - 3|.\end{aligned}$$

بنابراین می‌خواهیم

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } 4|x-3| < \varepsilon,$$

یا

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } 4|x-3| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

لذا اگر فرض کنیم $\delta = \varepsilon/4$ ، داریم

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } 4|x-3| < 4\delta,$$

به عبارت دیگر،

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } 4|x-3| < 4 \cdot \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } 4|x-3| < \varepsilon$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\text{وقتی که } 0 < |x-3| < \delta, \text{ } |(4x-1)-11| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x-1) = 11 \text{ و این ثابت می‌کند که } \delta = \varepsilon/4.$$

در حالت خاص، اگر $\varepsilon = 0.01$ ، آنگاه δ را برابر با $0.01/4$ یا 0.0025 در

انتخاب می‌کنیم که همان نتیجه مثال ۱ است.

توجه کنید که به عنوان δ ی مورد نظر در این مثال، می‌توان به جای $\varepsilon/4$ هر عدد

مثبت دیگر چون $\delta' < \varepsilon/4$ را هم انتخاب کرد. ▲

$$\text{مثال ۳ با استفاده از تعریف ۱.۱.۲ ثابت کنید که } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

حل چون به ازای هر مقدار از x ، x^2 معین است، هر بازه باز شامل ۲ نخستین شرط

تعریف ۱.۱.۲ را برآورده می‌کند.

باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta, \text{ } |x^2-4| < \varepsilon, \quad (6)$$

یعنی می‌خواهیم

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta, \text{ } |(x-2)(x+2)| < \varepsilon,$$

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta, \text{ } |(x-2)||x+2| < \varepsilon,$$

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta, \text{ } |x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}, \quad (7)$$

چون می‌خواهیم به ازای تمام مقادیر x در بازهٔ باز I مورد نیاز در تعریف ۱.۱.۲، داشته باشیم $|x-2| < \varepsilon/|x+2|$ ، يك بازهٔ باز خاص برای I اختیار می‌کنیم و با کمک آن يك کران پایین برای $|x+2|/\varepsilon$ به دست می‌آوریم. اگر بازهٔ I ، $(1,3)$ باشد که مرکزش ۲ و شعاعش ۱ است، آنگاه به ازای هر $x \in I$ ، $|x+2| = x+2$ ، به علاوه، به ازای هر $x \in I$ ،

$$\frac{\varepsilon}{x+2} > \frac{\varepsilon}{5}.$$

پس به ازای مقادیر x در I ، $\varepsilon/5$ کران پایینی برای $|x+2|/\varepsilon$ است. در نتیجه، از این کران پایین و شعاع بازهٔ I ، کوچکترین را به عنوان δ اختیار می‌کنیم؛ یعنی، δ را کوچکترین عدد از دو عدد $\varepsilon/5$ و ۱ می‌گیریم و می‌نویسیم $\delta = \min(\varepsilon/5, 1)$. پس

$$(8) \quad \text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta < \frac{\varepsilon}{|x+2|}, \quad 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

به شرطی که $\delta = \min(\varepsilon/5, 1)$. از عبارت (۸) نتیجه می‌شود که به ازای این مقدار از δ ، عبارت (۷) و عبارت معادل آن (۶) برقرارند.

برای اینکه اهمیت δ را نشان دهیم چند مقدار ممکن برای ε را در نظر می‌گیریم. اگر $\varepsilon/5 > 1$ ، یعنی اگر $\varepsilon > 5$ ، می‌نویسیم $\delta = 1$. آنگاه

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta < \frac{\varepsilon}{|x+2|}, \quad 0 < |x-2| < 1 < \frac{\varepsilon}{5}$$

اگر $1 < \varepsilon/5 \leq 5$ ، یعنی، $5 < \varepsilon \leq 25$ ، می‌نویسیم $\delta = \varepsilon/5$. آنگاه

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta < \frac{\varepsilon}{|x+2|}, \quad 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \leq 1, \quad 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ ،

$$\text{وقتی که } 0 < |x-2| < \delta < \frac{\varepsilon}{|x+2|}, \quad 0 < |x-2| < 1, \quad 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$$

عبارت $0 < |x-2| < 1$ ایجاب می‌کند که $x \neq 2$ و $x \in I$. عبارت $|x-2| < \varepsilon/|x+2|$ معادل است با عبارت $|x^2-4| < \varepsilon$. بنابراین تعریف ۱.۱.۲ با $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ برقرار است و

▲

مثال ۴ با استفاده از تعریف ۱.۱.۲ ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = 2.$$

حل چون $(t-3)/8$ به ازای هر مقدار t ، بجز ۳، تعریف می‌شود بازه باز لازم در تعریف ۱۰.۱.۲، می‌تواند هر بازه باز t باشد که شامل ۷ بوده ولی ۳ را در بر نداشته باشد. باید نشان دهیم، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثبت چون δ وجود دارد که

$$(9) \quad \text{وقتی } 0 < |t-7| < \delta, \quad 0 < \left| \frac{8}{t-3} - 2 \right| < \varepsilon$$

چون

$$\begin{aligned} \left| \frac{8}{t-3} - 2 \right| &= \left| \frac{8 - 2(t-3)}{t-3} \right| \\ &= \left| \frac{14 - 2t}{t-3} \right| \\ &= \frac{2 \cdot |7-t|}{|t-3|} \\ &= |t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} \end{aligned}$$

پس، (۹) معادل است با

$$\text{وقتی } 0 < |t-7| < \delta, \quad |t-7| \cdot \frac{2}{|t-3|} < \varepsilon$$

و این خود معادل است با

$$(10) \quad \text{وقتی } 0 < |t-7| < \delta, \quad |t-7| < \frac{|t-3|\varepsilon}{2}$$

چون می‌خواهیم $|t-7| < (1/2)|t-3|\varepsilon$ ، بازه باز I مورد نیاز در تعریف ۱۰.۱.۲ را چنان تعیین می‌کنیم که به ازای مقادیر t در I ، کران پایینی برای $(1/2)|t-3|\varepsilon$ به دست آید. فرض کنید I بازه باز $(6, 8)$ باشد که مرکزش ۷ و شعاعش ۱ است. آنگاه به ازای هر $t \in I$ ، $|t-3| = t-3$ ، و

$$\frac{(t-3)\varepsilon}{2} > \frac{(6-3)\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon.$$

پس $(3\varepsilon/2)$ ، به ازای تمام مقادیر t در I ، یک کران پایین $(1/2)|t-3|\varepsilon$ است. از این کران پایین و شعاع I ، کوچکترین δ می‌گیریم؛ لذا، $\delta = \min\left(\frac{3}{2}\varepsilon, 1\right)$. بنابراین

اگر $\delta = \min\left(\frac{3}{2}\varepsilon, 1\right)$ ، داریم

$$\text{وقتی که } 0 < |t-7| < \delta, \quad 0 < \frac{|t-3|\varepsilon}{2} < \frac{3}{2}\varepsilon < |t-7|$$

برای این مقدار δ ، (۱۰) و معادلش (۹) به ازای هر $t \in I$ برقرارند.
اگر $\varepsilon > 1$ ، $(3/2)\varepsilon > 2/3$ ، یعنی، $\varepsilon > 2/3$ ، قرار می دهیم $\delta = 1$. آنگاه

$$\text{وقتی } 0 < |t - 7| < \delta \text{، } 0 < |t - 7| < 1 < \frac{3}{2}\varepsilon < \frac{|t - 3|\varepsilon}{2} \text{،}$$

اگر $\varepsilon \leq 1$ ، $(3/2)\varepsilon \leq 2/3$ ، یعنی $0 < \varepsilon \leq 2/3$ ، قرار می دهیم $\delta = (3/2)\varepsilon$. آنگاه

$$\text{وقتی } 0 < |t - 7| < \delta \text{، } 0 < |t - 7| < \frac{3}{2}\varepsilon \leq 1 \text{، و } 0 < |t - 7| < \frac{3}{2}\varepsilon < \frac{|t - 3|\varepsilon}{2} \text{،}$$

پس به ازای هر $\varepsilon > 0$

$$\text{وقتی } 0 < |t - 7| < \delta \text{، } 0 < |t - 7| < 1 \text{، و } 0 < |t - 7| < \frac{|t - 3|\varepsilon}{2}$$

عبارت $0 < |t - 7| < 1$ ایجاب می کند که $t \neq 7$ ، و $t \in I$. عبارت
 $|t - 7| < (1/2)|t - 3|\varepsilon$ معادل است با

$$\left| \frac{1}{t - 3} - 2 \right| < \varepsilon.$$

بنابراین تعریف ۱.۱.۲ برقرار است، و $\lim_{t \rightarrow 7} [1/(t - 3)] = 2$. ▲

قضیه زیر نشان می دهد که، یک تابع نمی تواند در یک زمان به سمت دو حد مختلف میل کند. این قضیه را قضیه یکتایی می نامیم، زیرا تضمین می کند که اگر یک تابع حد داشته باشد، آن حد یکتاست.

۲.۱.۲ قضیه اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ ، آنگاه $L_1 = L_2$.

اثبات فرض می کنیم $L_1 \neq L_2$ و نشان می دهیم این فرض به تناقض می انجامد.
چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ ، پس با استفاده از تعریف ۱.۱.۲، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مثبت چون δ_1 وجود دارد که

$$(۱۱) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{، } |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

همچنین چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ ، عددی مثبت چون $\delta_2 > 0$ وجود دارد که

$$(۱۲) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{، } |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

حال، اگر به جای $L_1 - L_2$ بنویسیم $f(x) - f(x) + L_1 - L_2$ و از نامساوی مثلثی

استفاده کنیم، داریم

$$|L_1 - L_2| = |[L_1 - f(x)] + [f(x) - L_2]| \\ \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|. \quad (۱۳)$$

با استفاده از روابط (۱۱)، (۱۲)، و (۱۳) می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر $\varepsilon > 0$ اعداد مثبتی چون $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ وجود دارند که

$$(۱۴) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ و } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{، } |L_1 - L_2| < \varepsilon + \varepsilon،$$

اگر δ کوچکترین عدد ازدو عدد δ_1 و δ_2 باشد، آنگاه $\delta \leq \delta_1$ ، و $\delta \leq \delta_2$ ؛ و از (۱۴) نتیجه می‌شود که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبت δ ی وجود دارد که

$$(۱۵) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta، |L_1 - L_2| < 2\varepsilon،$$

حال اگر $\varepsilon = |L_1 - L_2|/2$ ، آنگاه (۱۵) حاکی است که عددی چون $\delta > 0$ وجود دارد که

$$(۱۶) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta، |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|،$$

چون (۱۶) يك تناقض است، فرض ما صحیح نیست. پس $L_1 = L_2$ ، قضیه ثابت می‌شود. $\square$

تمرینهای ۱۰۲

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، $f(x)$ ، a ، L ، و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ داده شده‌اند. برای ε مفروض، عددی چون δ بیابید که وقتی $0 < |x - a| < \delta$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$۱. \quad \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10; \varepsilon = 0.001 \quad ۲. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3; \varepsilon = 0.0001$$

$$۳. \quad \lim_{x \rightarrow -1} (3 - 4x) = 7; \varepsilon = 0.002$$

$$۴. \quad \lim_{x \rightarrow -2} (2 + 5x) = -8; \varepsilon = 0.0002$$

$$۵. \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9; \varepsilon = 0.0005 \quad ۶. \quad \lim_{x \rightarrow -4} x^2 = 16; \varepsilon = 0.003$$

$$۷. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1; \varepsilon = 0.0001$$

$$۸. \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) = -4; \varepsilon = 0.001$$

$$۹. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1; \varepsilon = 0.0002 \quad ۱۰. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2; \varepsilon = 0.0005$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \varepsilon = 0.01 \quad ۱.۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2; \varepsilon = 0.01 \quad ۱.۱۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}; \varepsilon = 0.02 \quad ۱.۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}; \varepsilon = 0.003 \quad ۱.۱۳$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۴۲، با استفاده از تعریف ۱.۱.۲ حد را بیابید؛ یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ پیدا کنید که اگر $|x - a| < \delta$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x - 5) = 7 \quad ۱.۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 9 \quad ۱.۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (4x + 1) = -3 \quad ۱.۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2 \quad ۱.۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (7 - 2x) = 11 \quad ۱.۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (1 + 3x) = -5 \quad ۱.۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \quad ۱.۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2 \quad ۱.۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4 \quad ۱.۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 \quad ۱.۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 7 \quad ۱.۲۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 3x) = 10 \quad ۱.۲۵$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0 \quad ۱.۲۸$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (5 - x - x^2) = -1 \quad ۱.۲۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{x+2} = \frac{1}{3} \quad ۱.۳۰$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \quad ۱.۲۹$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+3} = -1 \quad ۱.۳۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x-1} = 4 \quad ۱.۳۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-3} = 2 \quad ۱.۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{x-4} = 2 \quad ۱.۳۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3+2x}{5-x} = \frac{8}{9} \quad ۱.۳۶$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{3x+2} = \frac{2}{5} \quad ۱.۳۵$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-3x} = 2 \quad ۱.۳۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5} = 3 \quad ۱.۳۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{5-x}} = \frac{1}{2} \quad ۴۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2} \quad ۳۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4} \quad ۴۲$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{\sqrt{3-2x}} = \frac{1}{3} \quad ۴۱$$

۴۳. برای هر عدد مثبت a ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$

۴۴. برای هر عدد منفی a ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$

۴۵. برای هر عدد مثبت a ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

۴۶. برای هر عدد مثبت a ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$

۴۷. برای هر عدد منفی a ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$

۴۸. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$ (داهنمایی: $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)

۴۹. ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته، و برابر با L باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ نیز وجود دارد و برابر با $|L|$ است.

۵۰. ثابت کنید که اگر برای هر x بجز $x = a$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، آنگاه به شرط وجود حد ها داریم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

۵۱. ثابت کنید که اگر برای هر x بجز $x = a$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، و اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نیز وجود ندارد. (داهنمایی: نشان دهید که فرض وجود $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به تناقض می انجامد.)

۲.۲ قضایای مربوط به حد توابع

برای محاسبه حد توابع به طور سراسر، احتیاج به چند قضیه داریم. اثبات این قضایا متکی به تعریف ۱.۱.۲ است. این قضایا و نیز قضایای دیگر مربوط به حد توابع که در بخشهای بعدی این فصل بیان می شوند، عنوان «قضایای حدی» دارند و هنگام ارائه با همین عنوان مشخص می شوند.

۱.۲.۲ قضیه حدی ۱ اگر m و b اعداد ثابتی باشند

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b.$$

اثبات برای اثبات این قضیه از تعریف ۱۰.۱.۲ استفاده می‌کنیم. برای هر $\varepsilon > 0$ باید ثابت‌کنیم عددی مثبت چون δ وجود دارد که

$$(۱) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < \varepsilon < |(mx + b) - (ma + b)|.$$

حالت ۱: $m \neq 0$.

چون $|x - a| \cdot |m| = |mx - ma| = |(mx + b) - (ma + b)|$ ، باید برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ پیدا کنیم که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < \varepsilon < |m| \cdot |x - a|$$

یا، چون $m \neq 0$

$$(۲) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < \varepsilon < |m| \cdot |x - a|.$$

گزاره (۲) درست است اگر $\delta = \varepsilon / |m|$ ؛ لذا نتیجه می‌گیریم که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < \varepsilon < |(mx + b) - (ma + b)|.$$

پس، قضیه در حالت ۱ ثابت می‌شود.

حالت ۲: $m = 0$.

اگر $m = 0$ ، آنگاه برای تمام مقادیر x ، $|(mx + b) - (ma + b)| = 0$ ، بنابراین می‌توانیم δ را هر عدد مثبت دلخواه انتخاب کنیم، و عبارت (۱) همواره درست است. لذا حالت ۲ نیز اثبات می‌شود. $\square$

○ نمونه ۱ با استفاده از قضیه حدی ۱ داریم

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5) = 3 \cdot 2 + 5 = 11.$$

۲.۲.۲ قضیه حدی ۲ اگر c عدد ثابتی باشد، آنگاه برای هر عدد دلخواه a

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

اثبات با انتخاب $m = 0$ ، و $b = c$ ، این قضیه فوراً از قضیه حدی ۱ نتیجه می‌شود. $\square$

$$۳.۲.۲ \quad \text{قضیه حدی ۳} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

اثبات با انتخاب $m = 1$ ، و $b = 0$ ، این حالت نیز فوراً از قضیه حدی ۱ نتیجه می‌شود. $\square$

○ نمونه ۲ از قضیه حدی ۲ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} v = v$$

و از قضیه حدی ۳ نتیجه می شود که

$$\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

۴.۲.۲ قضیه حدی ۴ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M.$$

اثبات این قضیه را برای علامت + ثابت می کنیم. با فرض

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (۳)$$

و

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \quad (۴)$$

باید ثابت کنیم که

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M. \quad (۵)$$

برای اثبات (۵) از تعریف ۱.۱.۲ استفاده می کنیم؛ یعنی، برای هر $\varepsilon > 0$ باید ثابت کنیم يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$(۶) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \varepsilon,$$

چون (۳) داده شده است، بنا به تعریف حد نتیجه می گیریم که برای عدد مثبت $\varepsilon/2$ ، عددی مثبت چون δ_1 وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2},$$

به طریق مشابه با استفاده از (۴)، برای $\varepsilon/2 > 0$ عددی مثبت چون δ_2 وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

حال فرض کنید δ کوچکترین عدد از دو عدد δ_1 و δ_2 باشد. پس $\delta \leq \delta_1$ و $\delta \leq \delta_2$ ، و لذا

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

و

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنا بر این وقتی که $0 < |x - a| < \delta$ داریم

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

بدین ترتیب عبارت (۶) به دست می آید، و لذا ثابت می شود که

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M.$$

اثبات قضیه حدی ۴ برای علامت — به عنوان تمرین واگذار می شود (به تمرین ۴۲ رجوع کنید). $\square$

قضیه حدی ۴ را می توان به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد.

۵.۲.۲ قضیه حدی ۵ فرض کنید

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \dots \pm L_n.$$

این قضیه را می توان با استفاده از قضیه حدی ۴ و استقرای ریاضی ثابت کرد (تمرین ۴۳ را ببینید).

۶.۲.۲ قضیه حدی ۶ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$$

اثبات این قضیه پیچیده تر از اثبات قضایای قبلی است، و معمولاً در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آورده نمی شود. در تمرینهای ۴۵ و ۴۶ رئوس اثبات داده شده است.

○ نمونه ۳ بنا به قضیه حدی ۳ داریم $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ و از قضیه حدی ۱ داریم $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7$. پس بنا به قضیه حدی ۶

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 3} x(2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 3 \cdot 7 = 21.$$

قضیه حدی ۶ را با استفاده از استقرای ریاضی می توان برای هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد.

۷.۲.۲ قضیه حدی ۷ فرض کنید

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2, \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = L_n$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)] = L_1 L_2 \cdots L_n.$$

اثبات به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۴۷ را ببینید).

۸.۲.۲ قضیه حدی ۸ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n.$$

با فرض $L = L_1 = L_2 = \dots = L_n$ و $f(x) = f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x)$ اثبات فوراً از قضیه حدی ۷ نتیجه می شود.

○ نمونه ۴ بنا به قضیه حدی ۱، $\lim_{x \rightarrow -2} (\Delta x + 7) = -3$ ، پس، بنا به قضیه حدی ۸ داریم

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\Delta x + 7)^4 = [\lim_{x \rightarrow -2} (\Delta x + 7)]^4 = (-3)^4 = 81.$$

۹.۲.۲ قضیه حدی ۹ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ، $M \neq 0$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

اثبات این قضیه که متکی به تعریف ۱.۱.۲ است، و غالباً در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آورده نمی شود، در بخش ۷.۲ عرضه خواهد شد. با وجود به تعویق انداختن اثبات، در موقع لزوم این قضیه را به کار خواهیم برد.

○ نمونه ۵ از قضیه حدی ۳ نتیجه می شود که $\lim_{x \rightarrow 4} x = 4$ ، و از قضیه حدی ۱،

$$\lim_{x \rightarrow 4} (-7x + 1) = -27$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{-7x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} x}{\lim_{x \rightarrow 4} (-7x + 1)}$$

$$= \frac{4}{-27} = -\frac{4}{27}.$$

۱۰.۲.۲ قضیه حدی ۱۰ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

به شرطی که $L > 0$ و n عدد صحیح مثبتی باشد، یا $L \leq 0$ و n عدد صحیح مثبت فردی باشد.

اثبات این قضیه در بخش ۷.۲ ارائه می‌شود، ولی این قضیه هم، مثل قضیه قبل، در مواقع لزوم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

○ نمونه ۶ از نتیجه نمونه ۵ و قضیه حدی ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{-7x+1}} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{4}{27}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{4}{27}}.\end{aligned}$$

○

مثالهای زیر کاربرد قضایای حدی فوق را توضیح می‌دهند. برای نشان دادن قضیه حدی مورد استفاده، علامت اختصاری ق. ح. را به کار می‌بریم؛ به عنوان مثال، ق. ح. ۲ به قضیه حدی ۲ ارجاع می‌دهد.

مثال ۱ $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5)$ را بیابید و در صورت استفاده از قضایای حدی، آنها را مشخص کنید.

حل

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 7x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 \quad (\text{ق. ح. ۵}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 5 \quad (\text{ق. ح. ۶}) \\ &= 3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 \quad (\text{ق. ح. ۳ و ق. ح. ۲}) \\ &= 9 + 21 - 5 \\ &= 25.\end{aligned}$$

▲

در اینجا باید به این نکته مهم توجه کنید که حد موجود در مثال ۱ را با استفاده مستقیم از قضایای مربوط به حد به دست آوردیم. در مورد تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + 7x - 5$ ، توجه کنید که $f(3) = 3^2 + 7 \cdot 3 - 5 = 25$ و این عدد همان $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 7x - 5)$ است. همیشه تساوی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ درست نیست (مثال ۴ را ببینید). در مثال ۱،

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ زیرا تابع f در $x = 3$ پیوسته است. در مورد مفهوم پیوستگی تابع در بخش ۶.۲ بحث خواهیم کرد.

مثال ۲

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

رایباید، و در صورت استفاده از قضایای حدی، آنها را مشخص کنید.

حل

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} \quad (\text{ق. ح. } 10)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)}} \quad (\text{ق. ح. } 9)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 + \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5}} \quad (\text{ق. ح. } 5)$$

$$= \sqrt{\frac{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^3 + \lim_{x \rightarrow 2} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{(\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 5}} \quad (\text{ق. ح. } 6, \text{ و ق. ح. } 8)$$

$$= \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} \quad (\text{ق. ح. } 3, \text{ و ق. ح. } 2)$$

$$= \sqrt{\frac{8 + 4 + 3}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

مثال ۳

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x - 3}$$

رایباید، و در صورت استفاده از قضایای حدی، آنها را مشخص کنید.

حل در اینجا مسئله مشکوکتر است: قضیه حدی ۹ را برای خارج قسمت $(x^3 - 27)/(x - 3)$ نمی توان به کار برد، زیرا $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ با وجود این، اگر صورت را تجزیه کنیم داریم

$$\frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)}.$$

اگر $x \neq 3$ ، این کسر برابر با $(x^2 + 3x + 9)$ است (زیرا اگر $x \neq 3$ ، صورت و مخرج را می توان بر $x - 3$ تقسیم کرد).

وقتی $\lim_{x \rightarrow 3} [(x^3 - 27)/(x - 3)]$ را محاسبه می کنیم، مقادیر x نزدیک به ۳ را در نظر می گیریم و نه مقادیر مساوی با ۳ را. پس تقسیم صورت و مخرج بر $x - 3$ امکان پذیر است، و حل مسئله به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) \quad \text{چون } x \neq 3 \text{، صورت و مخرج را بر } x - 3 \text{ تقسیم می کنیم} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} (3x + 9) \quad \text{(ق. ح. ۴)} \\ &= (\lim_{x \rightarrow 3} x)^2 + 18 \quad \text{(ق. ح. ۸، و ق. ح. ۱۰)} \\ &= 3^2 + 18 \quad \text{(ق. ح. ۳)} \\ &= 27. \end{aligned}$$

دقت کنید که در مثال ۳، تابع $(x^3 - 27)/(x - 3)$ برای $x = 3$ معین نیست، اما $\lim_{x \rightarrow 3} [(x^3 - 27)/(x - 3)]$ وجود دارد، و برابر با ۲۷ است.

مثال ۴ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \neq 4 \\ 5 & x = 4 \end{cases}$$

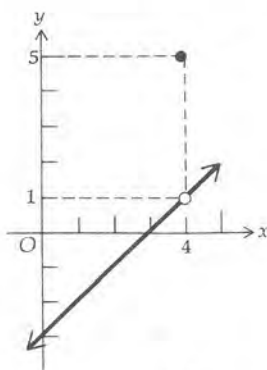
$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را بیابید.

حل وقتی $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را محاسبه می کنیم، مقادیر x نزدیک به ۴ را در نظر می گیریم و نه مقادیر مساوی با ۴ را. پس

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 3)$$

▲ $\quad \quad \quad = 1.$ (ق. ح. ۱۰)

در مثال ۴، $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$ ، اما $f(4) = 5$ ؛ پس $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ این مثالی است از تابعی که در $x = 4$ ناپیوسته است. تغییر هندسی این نکته این است که در نمودار تابع، در نقطه‌ای که $x = 4$ ، يك شکستگی وجود دارد (شکل ۱.۲.۲ را ببینید). نمودار تابع متشکل است از نقطه منفرد $(4, 5)$ و خط مستقیم به معادله $y = x - 3$ که نقطه $(4, 1)$ از روی آن برداشته شده باشد.



شکل ۱.۲.۲

مثال ۵ $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} - 2)/(x - 4)$ را بیابید، و در صورت استفاده از قضایای حدی، آنها را مشخص کنید.

حل نظیر مثال ۳، قضیه حدی ۹ را در مورد کسر $(\sqrt{x} - 2)/(x - 4)$ نمی‌توان به کاربرد زیرا $\lim_{x \rightarrow 4} (x - 4) = 0$. برای ساده کردن کسر، با ضرب کردن صورت و مخرج در $\sqrt{x} + 2$ ، صورت را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}. \end{aligned}$$

چون ما یلیم حد را وقتی که x به سمت ۴ میل می‌کند، محاسبه کنیم، مقادیر x نزدیک به ۴ و نه خود ۴ مورد توجه ما هستند. پس می‌توانیم صورت و مخرج را بر $x - 4$ تقسیم کنیم، و لذا

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}, \quad x \neq 4$$

حل مسئله به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad \begin{array}{l} \text{چون } x \neq 4, \text{ صورت و مخرج را بر} \\ x-4 \text{ تقسیم می کنیم.} \end{array}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 1}{\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)} \quad (\text{ق. ح. ۹})$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 4} 2} \quad (\text{ق. ح. ۲، و ق. ح. ۴})$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} + 2} \quad (\text{ق. ح. ۱۰، و ق. ح. ۲})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \quad (\text{ق. ح. ۳})$$

$$= \frac{1}{4}.$$

برای اثبات قضیه حدی ۹ در بخش ۷.۲ به قضیه زیر نیازمندیم. این قضیه حالت خاصی است از قضیه حدی ۹ که در آن $f(x) = 1$ و $g(x) = x$.

۱۱.۲.۲ قضیه اگر a هر عددی بجز ۰ باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}.$$

اثبات باید دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ را در نظر بگیریم. قضیه را در حالت $a > 0$ ثابت، و حالت $a < 0$ را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (به تمرین ۴۸ رجوع کنید).

چون $1/x$ به ازای هر x بجز صفر تعریف می شود، بازه باز I مورد نیاز در تعریف ۱.۱.۲ را می توان هر بازه باز I که شامل a باشد ولی ۰ را در بر نداشته باشد گرفت.

اگر $a > 0$ ، باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$(۶) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad 0 < \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon$$

حال

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a-x}{ax} \right| = \frac{|x-a|}{|a||x|}$$

و چون $a > 0$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = |x-a| \cdot \frac{1}{a|x|}$$

پس عبارت (۶) معادل است با

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad 0 < |x-a| \cdot \frac{1}{a|x|} < \varepsilon$$

$$(۷) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad 0 < |x-a| < a|x|\varepsilon$$

چون مایلیم $|x-a| < a|x|\varepsilon$ ، بازه I باز I مورد نیاز در تعریف ۱.۱.۲ را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای مقادیر x در I ، کران پایینی برای $a|x|\varepsilon$ به دست آید. از آنجا که I باید a را در بر داشته باشد ولی 0 را شامل نباشد، بازه I را به عنوان $I = (a/2, 3a/2)$ اختیار می‌کنیم که a مرکز و $a/2$ شعاع آن است. به ازای هر $x \in I$ ، $|x| = x$ و

$$ax\varepsilon > a \cdot \frac{1}{4}a \cdot \varepsilon = \frac{1}{4}a^2\varepsilon.$$

پس $a^2\varepsilon/4$ ، برای مقادیر x در I ، یک کران پایین $a|x|\varepsilon$ است. بنابراین δ را برابر با کوچکترین این کران پایین و شعاع I می‌گیریم؛ یعنی، $\delta = \min(a^2\varepsilon/4, a/2)$. آنگاه

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad 0 < |x-a| < \frac{1}{4}a^2\varepsilon < a|x|\varepsilon$$

به شرطی که $\delta = \min(a^2\varepsilon/4, a/2)$. به ازای این مقدار δ ، عبارت (۷) و عبارت معادل آن (۶)، برای هر $x \in I$ ، برقرارند. لذا ثابت کردیم که اگر a عدد مثبت دلخواهی باشد، $\lim_{x \rightarrow a} (1/x) = 1/a$. □

برای اثبات قضیهٔ حدی ۱۰ از بخش ۷.۲، بازم از قضیه‌ای که حالت خاصی از آن است استفاده می‌کنیم. این حالت خاص به صورت قضیهٔ ۱۲.۲.۲ ذکر می‌شود، و اثبات آن با استفاده از فرمول زیر است که در آن n عدد صحیح و مثبت دلخواهی است:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \quad (۸)$$

اثبات (۸) به شرح زیر است:

$$a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \quad (9)$$

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^{n-1}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n. \quad (10)$$

حال اگر جملات (۱۰) را از جملات (۹) کم کنیم (۸) به دست می آید.

۱۲.۲.۲ قضیه اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

به شرط اینکه

(i) a عدد مثبت دلخواهی باشد، یا

(ii) a عددی نابیشتر از صفر و n فرد باشد.

اثبات حالت (i) را ثابت می کنیم و حالت (ii) را به عنوان تمرین و امی گذاریم (تمرین ۴۹ را ببینید).

فرض کنید a عدد مثبت دلخواهی باشد. چون $\sqrt[n]{x}$ به ازای هر عدد نامنفی تعریف می شود، بازه I باز لازم در تعریف ۱۰.۱.۲ می تواند هر بازه ϵ بازای اختیار شود که شامل a باشد و نقطه انتهایی چپش عددی نامنفی باشد.

باید نشان دهیم که به ازای هر $\epsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon \quad (11)$$

برای بیان $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ بر حسب $|x - a|$ از (۸) استفاده می کنیم.

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \left| \frac{(x^{1/n} - a^{1/n})[(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}]}{(x^{1/n})^{n-1} + (x^{1/n})^{n-2}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}(a^{1/n})^{n-2} + (a^{1/n})^{n-1}} \right|$$

اگر در مورد صورت از (۸) استفاده کنیم، داریم

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = |x - a| \cdot \frac{1}{|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|}$$

پس نامساوی $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$ معادل است با

$$|x - a| \cdot \frac{1}{|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}|} < \epsilon$$

$$|x - a| < |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n}a^{1/n} + \dots + x^{1/n}a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}| \cdot \epsilon \quad (12)$$

چون مایلیم نامساوی (۱۲) برقرار باشد، بازه‌ی I مورد نیاز در تعریف ۱۰.۱.۲ را چنان انتخاب می‌کنیم که برای مقادیر x در I ، کران پایینی برای

$$|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n} a^{1/n} + \dots + x^{1/n} a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}| \varepsilon$$

به دست آید. بازه‌ی باز $(0, 2a)$ را که a مرکز و a شعاع آن است به عنوان I برمی‌گزینیم. آنگاه، برای هر $x \in I$

$$|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n} a^{1/n} + \dots + x^{1/n} a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}| \varepsilon > a^{(n-1)/n} \varepsilon$$

پس $a^{(n-1)/n} \varepsilon$ ، به ازای مقادیر x در I ، کران پایینی برای

$$|x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n} a^{1/n} + \dots + x^{1/n} a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}| \varepsilon$$

است. پس، از این کران پایین و شعاع I ، کوچکترین δ می‌گیریم؛ یعنی، $\delta = \min(a^{(n-1)/n} \varepsilon, a)$ آنگاه

$$|x - a| < a^{(n-1)/n} \varepsilon < |x^{(n-1)/n} + x^{(n-2)/n} a^{1/n} + \dots + x^{1/n} a^{(n-2)/n} + a^{(n-1)/n}| \varepsilon$$

وقتی که $|x - a| < \delta$ و با این شرط که $\delta = \min(a^{(n-1)/n} \varepsilon, a)$ برای این مقدار از δ ، نامساوی (۱۲) و در نتیجه عبارت (۱۱) برای همه مقادیر $x \in I$ برقرار است.

پس ثابت شد که اگر a عدد مثبت دلخواهی باشد، $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ، $\square$

○ نمونه ۷ از حالت (i) قضیه ۱۲.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$ و $\lim_{x \rightarrow -16} \sqrt[3]{x} = -2$ ؛ از حالت (ii) نتیجه می‌شود که $\lim_{x \rightarrow -27} \sqrt[3]{x} = -3$. حلدی چون $\lim_{n \rightarrow -4} \sqrt[n]{x}$ نمی‌تواند مورد بررسی قرار گیرد، زیرا $\sqrt[n]{x}$ بر هیچ بازه‌ی باز دلخواهی که شامل ۴ — باشد معین نیست.

○

تمرینهای ۲.۲

در تمرینهای ۱ تا ۳۵ مقدار حد را بیابید، و هنگام استفاده از قضایای حدی آنها را مشخص کنید.

$$۲. \lim_{x \rightarrow -4} (5x + 2)$$

$$۱. \lim_{x \rightarrow 5} (3x - 7)$$

$$۴. \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 4x + 5)$$

$$۳. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1)$$

$$۶. \lim_{y \rightarrow -1} (y^2 - 2y^2 + 3y - 4)$$

$$۵. \lim_{z \rightarrow -2} (z^2 + 8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+4}{8x-1} .8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-5}{5x-1} .7$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} .10$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2-5}{2t^2+6} .9$$

$$\lim_{z \rightarrow -5} \frac{z^2-25}{z+5} .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{3x-1}{9x^2-1} .14$$

$$\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^2-9}{2x+3} .13$$

$$\lim_{t \rightarrow -2} \frac{2-3t-2t^2}{16+6t-t^2} .16$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-12} .15$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36} .18$$

$$\lim_{s \rightarrow 4} \frac{3s^2-18s-16}{2s^2-9s+4} .17$$

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2-1}{s-1} .20$$

$$\lim_{y \rightarrow -2} \frac{y^2+8}{y+2} .19$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{\frac{5+2x}{5-x}} .22$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{\frac{8r+1}{r+3}} .21$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^2+1}} .24$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}} .23$$

$$\lim_{t \rightarrow 2/3} \sqrt{\frac{8t^2-27}{4t^2-9}} .26$$

$$\lim_{y \rightarrow -2} \sqrt{\frac{y^2-9}{2y^2+7y+3}} .25$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-t}}{t} .28$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3-\sqrt{x}}{9-x} .27$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} .30$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} .29$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x^2-x+10}{x^2+3x+2} .32$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h} .31$$

$$\lim_{y \rightarrow 4} \frac{2y^2-11y^2+10y+8}{3y^2-17y^2+16y+16} .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x-3}{x^2+2x^2+6x+5} .33$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3} \quad ۳۵$$

۳۶. اگر $f(x) = x^2 + 5x - 3$ ، نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

۳۷. اگر $F(x) = 2x^2 + 7x - 1$ ، نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow -1} F(x) = F(-1)$

۳۸. اگر $g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ ، نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 8$ ، ولی $g(4)$ معین نیست.

۳۹. اگر $h(x) = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ ، نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{1}{6}$ ، ولی $h(0)$ معین نیست.

۴۰. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید و نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ (ب) نمودار f را رسم کنید.

۴۱. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x \neq -3 \\ 4 & x = -3 \end{cases}$$

(الف) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ را پیدا کنید و نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$ (ب) نمودار f را رسم کنید.

۴۲. با استفاده از تعریف ۱.۱.۲، ثابت کنید که اگر

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

۴۳. با استفاده از قضیه حدی ۴ و استقرای ریاضی، قضیه حدی ۵ را ثابت کنید.

۴۴. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$

۴۵. فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. با استفاده از تعریف ۱.۱.۲ ثابت

کنید که

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

(داهنمایی: برای اینکه ثابت کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ ، باید نشان دهیم که برای هر $\varepsilon > 0$ $\delta > 0$ وجود دارد که وقتی $|x - a| < \delta$ و $0 < \varepsilon < |f(x) \cdot g(x)|$ ابتدا نشان دهید که $\delta_1 > 0$ وجود دارد که وقتی $0 < |x - a| < \delta_1$ ، $|f(x)| < 1 + |L|$ برای این کار از تعریف ۱۰.۱.۲ در مورد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ با $\varepsilon = 1$ و $\delta = \delta_1$ استفاده کنید و سپس نامساوی مثلثی را به کار بندید. پس از آن، با به کار بردن تعریف ۱۰.۱.۲ در مورد $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، نشان دهید که $\delta_2 > 0$ وجود دارد که وقتی $0 < |x - a| < \delta_2$ ، $|g(x)| < \varepsilon / (1 + |L|)$ ، حال با انتخاب δ به صورت کوچکترین عدد از دو عدد δ_1 و δ_2 ، قضیه ثابت می شود).

۴۶. قضیه حدی ε را ثابت کنید: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

(داهنمایی: بنویسید)

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - L]g(x) + L[g(x) - M] + L \cdot M$$

و قضیه حدی ۵ و نتایج تمرینهای ۴۴ و ۴۵ را به کار ببرید.

۴۷. قضیه حدی ۷ را با استفاده از قضیه حدی ε و استقرای ریاضی ثابت کنید.

۴۸. قضیه ۱۱.۲.۲ را برای $a < 0$ ثابت کنید.

۴۹. حالت (ii) قضیه ۱۲.۲.۲ را ثابت کنید.

۳.۲ حدهای یک طرفه

در تعریف $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، x هایی را در نظر می گیریم که در یک بازه باز شامل a ، و نه خود a ، باشند؛ یعنی، مقادیر x نزدیک به a را، چه بزرگتر از a باشند و چه کوچکتر از آن. حال فرض کنید تابعی چون f داریم که $f(x) = \sqrt{x-4}$. چون برای $x < 4$ مقدار $f(x)$ وجود ندارد، بنابراین f در هیچ بازه باز شامل ۴، معین نیست. لذا $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-4}$ بی معنی است. با وجود این، اگر x را به مقادیر بزرگتر از ۴ محدود کنیم، می توانیم مقدار $\sqrt{x-4}$ را به اندازه دلخواه به ۰ نزدیک کنیم، با شرط اینکه x ها را بزرگتر از ۴ ولی به اندازه کافی نزدیک به ۴ بگیریم. در چنین حالتی x را از سمت راست به ۴ میل می دهیم و حد یک طرفه از راست یا حد راست را طبق تعریف زیر داریم.

۱.۳.۲ تعریف فرض کنید تابع f برای هر عدد در بازه بازی چون (a, c) تعریف شده باشد. حد $f(x)$ وقتی x از سمت راست به a میل می کند، برابر با L است و نوشته می شود

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$(1) \quad \text{وقتی } 0 < x - a < \delta, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

توجه کنید که در عبارت (۱)، چون $x > a$ ، در دو طرف $x - a$ علامت قدرمطلق وجود ندارد.

از تعریف ۱.۳.۲ نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow \varphi^+} \sqrt{x - \varphi} = 0.$$

وقتی حد يك تابع را در نظر می گیریم، اگر متغیر مستقل x را به مقادیر کوچکتر از عددی مانند a محدود کنیم، می گوئیم x از سمت چپ به a میل می کند؛ و در این صورت حد را حد يك طرفه از چپ یا حد چپ می نامیم.

۲.۳.۲ تعریف فرض کنید تابع f برای هر عدد واقع در يك بازه باز به صورت (d, a) تعریف شده باشد. حد $f(x)$ وقتی x از سمت چپ به a میل می کند، برابر با L است و نوشته می شود

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

هر گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\text{وقتی } 0 < a - x < \delta, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

جهت تمیز دادن $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ از حدهای يك طرفه، می توانیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ را حد دو طرفه یا حد بدون جهت بنامیم.

اگر در قضا یای حدی ۱ تا ۱۰ از بخش ۲.۲ به جای « $x \rightarrow a$ »، « $x \rightarrow a^+$ »، « $x \rightarrow a^-$ » گذاشته شود در درستی آنها تغییری حاصل نمی شود.

مثال ۱ فرض کنید f با ضابطه زیر تعریف شده باشد

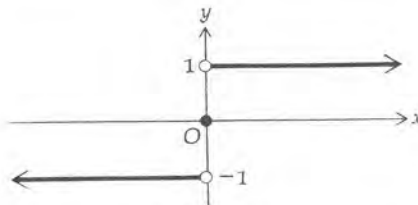
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

(الف) نمودار f را رسم کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ را در صورت وجود بیابید؛

(پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ را در صورت وجود بیابید.

حل نمودار f در شکل ۱.۳.۲ رسم شده است. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ، زیرا اگر x

عددی کوچکتر از ۰ باشد، $f(x)$ دارای مقدار ثابت -1 است. به طریق مشابه، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$



شکل ۱.۳.۲

در مثال فوق، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. چون حد چپ و حد راست با هم برابر

نیستند، حد دوطرفه، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، وجود ندارد. این نتیجه را که حد دوطرفه وجود ندارد زیرا حدهای یک طرفه با هم مساوی نیستند، در قضیه زیر بیان می کنیم.

۳.۳.۲ قضیه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود دارد و برابر با L است اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ هر دو موجود و برابر با L باشند.

اثبات این قضیه را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (به تمرین ۳۴ مراجعه شود).

مثال ۲ فرض کنید تابع g با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$g(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

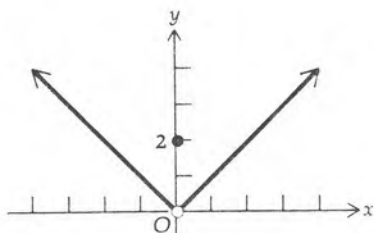
(الف) نمودار g را رسم کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را در صورت وجود بیابید.

حل نمودار g در شکل ۲.۳.۲ رسم شده است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

پس، بنا به قضیه ۳.۳.۲، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ وجود دارد و برابر با ۰ است. توجه کنید که $g(0) = 2$ ،

و هیچ اثری روی $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ندارد.



شکل ۲.۳.۲

مثال ۳ فرض کنید h باضابطه زیر تعریف بشود

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x \leq 1 \\ 2 + x^2 & x > 1 \end{cases}$$

(الف) نمودار h را رسم کنید؛ (ب) حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید :

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$$

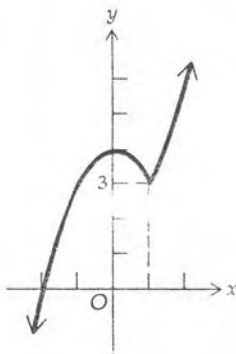
حل شکل ۳.۳.۲ نمودار h را نشان می‌دهد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4 - x^2) = 3.$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 + x^2) = 3.$$

پس، بنا به قضیه ۳.۳.۲، $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ وجود دارد و برابر با ۳ است. توجه کنید که $h(1) = 3$.



شکل ۳.۳.۲

مثال ۴ فرض کنید f باضابطه زیر تعریف بشود

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & x < -3 \\ \sqrt{9-x^2} & -3 \leq x \leq 3 \\ 5-x & 3 < x \end{cases}$$

(الف) نمودار f را رسم کنید؛ (ب) هر يك از حدهای زیر را در صورت وجود بیابید:
 $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

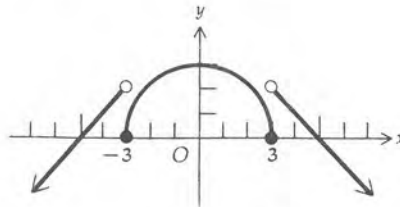
حل نمودار f در شکل ۴.۳.۲ رسم شده است.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x+5) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (5-x) = 2.$$



شکل ۴.۳.۲

تمرینهای ۳.۲

در تمرینهای ۱ تا ۲۲، نمودار تابع را رسم کنید. حدهای مشخص شده را در صورت وجود بیابید؛ اگر حد وجود ندارد دلیل آن را ذکر کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ -1 & x = 1 \\ -3 & 1 < x \end{cases}$$

۱. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (ب)؛ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (ب)؛ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (الف)؛ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \end{cases} \quad .2$$

$$\lim_{t \rightarrow -4} f(t) (\text{ب}) ; \lim_{t \rightarrow -4^-} f(t) (\text{ب}) ; \lim_{t \rightarrow -4^+} f(t) (\text{الف}) ; f(t) = \begin{cases} t+4 & t \leq -4 \\ 4-t & -4 < t \end{cases} \quad .3$$

$$\lim_{s \rightarrow -2} g(s) (\text{ب}) ; \lim_{s \rightarrow -2^-} g(s) (\text{ب}) ; \lim_{s \rightarrow -2^+} g(s) (\text{الف}) ; g(s) = \begin{cases} s+3 & s \leq -2 \\ 3-s & -2 < s \end{cases} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) (\text{الف}) ; F(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ 4-2x & 2 < x \end{cases} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) (\text{الف}) ; h(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 3 \\ 10-x & 3 \leq x \end{cases} \quad .6$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} g(r) (\text{ب}) ; \lim_{r \rightarrow 1^-} g(r) (\text{ب}) ; \lim_{r \rightarrow 1^+} g(r) (\text{الف}) ; g(r) = \begin{cases} 2r+3 & r < 1 \\ 2 & r = 1 \\ 7-2r & 1 < r \end{cases} \quad .7$$

$$\lim_{t \rightarrow -2} g(t) (\text{ب}) ; \lim_{t \rightarrow -2^-} g(t) (\text{ب}) ; \lim_{t \rightarrow -2^+} g(t) (\text{الف}) ; g(t) = \begin{cases} 3+t^2 & t < -2 \\ 0 & t = -2 \\ 11-t^2 & -2 < t \end{cases} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ 4-x^2 & 2 < x \end{cases} \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 1 \\ 4 & x = 1 \\ x^2+2 & 1 < x \end{cases} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 5^-} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 5^+} F(x) (\text{الف}) ; F(x) = |x-5| \quad .11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = 3 + |2x-4| \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow 3/2} G(x) (\text{پ}) ; \lim_{x \rightarrow 3/2^-} G(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 3/2^+} G(x) (\text{الف}) ; G(x) = |2x - 3| - 2. ۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} F(x) (\text{پ}) ; \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) (\text{الف}) ; F(x) = \begin{cases} |x - 1| & x < -1 \\ 0 & x = -1 \\ |1 - x| & -1 < x \end{cases}. ۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) (\text{پ}) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \frac{|x|}{x}. ۱۵$$

$$; \lim_{x \rightarrow 0} S(x) (\text{پ}) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) (\text{الف}) ; S(x) = |\operatorname{sgn} x| \quad \text{از تمرینهای ۳۲ در تمرین ۱.۶ تعریف شده است} ; ۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \begin{cases} 2 & x < -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & -2 \leq x \leq 2 \\ -2 & 2 < x \end{cases}. ۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) (\text{ت}) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) (\text{الف}) ; f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - x & 1 < x \end{cases}. ۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) (\text{ت}) ; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) (\text{ب})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) (\text{پ}) ; \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) (\text{ب}) ; \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) (\text{الف}) ; f(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t} & t < 0 \\ \sqrt{t} & 0 \leq t \end{cases}. ۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) (\text{پ}) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) (\text{الف}) ; g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \end{cases}. ۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} F(x) (\text{ب}) ; \lim_{x \rightarrow -3^-} F(x) (\text{الف}) ; F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & x \leq -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & 3 \leq x \end{cases}. ۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} F(x) (\text{ج}) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) (\text{ث}) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) (\text{ت}) ; \lim_{x \rightarrow 2} F(x) (\text{ب})$$

$$22. \quad G(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{t+1} & t \leq -1 \\ \sqrt{1-t^2} & -1 < t < 1 \\ \sqrt[3]{t-1} & 1 \leq t \end{cases} \quad \begin{matrix} \lim_{t \rightarrow -1^+} G(t) \text{ (ب)} \\ \lim_{t \rightarrow -1^-} G(t) \text{ (الف)} \end{matrix}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} G(t) \text{ (پ)} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} G(t) \text{ (ت)} \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} G(t) \text{ (ث)} \quad \lim_{t \rightarrow 1} G(t) \text{ (ج)}$$

۲۳. فرض کنید F ، تابع مذکور در تمرین ۲۲ از تمرینهای ۱.۶ باشد. حدهای زیر را در صورت

$$\text{وجود بیابید: } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \text{ (الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) \text{ (ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) \text{ (پ)}$$

۲۴. فرض کنید h ، تابع تمرین ۲۳ از تمرینهای ۱.۶ باشد. حدهای زیر را در صورت وجود

$$\text{محاسبه کنید: } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \text{ (الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \text{ (ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ (پ)}$$

۲۵. حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید: $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$ (الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x] \text{ (پ)}$$

۲۶. حدهای زیر را در صورت وجود بیابید: $\lim_{x \rightarrow 4^+} [x-3]$ (الف) $\lim_{x \rightarrow 4^-} [x-3]$ (ب)

$$\lim_{x \rightarrow 4} [x-3] \text{ (پ)}$$

۲۷. فرض کنید $h(x) = (x-1) \operatorname{sgn} x$. نمودار h را رسم کنید. حدهای زیر را در صورت

$$\text{وجود بیابید: } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \text{ (الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \text{ (ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ (پ)}$$

۲۸. فرض کنید $G(x) = [x] + [4-x]$. نمودار G را رسم کنید. حدهای زیر را در صورت

$$\text{وجود بیابید: } \lim_{x \rightarrow 3^+} G(x) \text{ (الف)} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} G(x) \text{ (ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} G(x) \text{ (پ)}$$

$$29. \quad f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x < 4 \\ 5x+k & 4 \leq x \end{cases} \quad f(x) \text{ مفروض است. مطلوب است مقدار } k \text{ به طوری که}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ وجود داشته باشد.}$$

$$30. \quad f(x) = \begin{cases} kx-3 & x \leq -1 \\ x^2+k & -1 < x \end{cases} \quad f(x) \text{ مفروض است. مطلوب است مقدار } k \text{ به طوری که}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ وجود داشته باشد.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ ax+b & -2 < x < 2 \\ 2x-6 & 2 \leq x \end{cases} \quad ۳۱$$

به طوری که $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ هر دو وجود داشته باشند.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-a & x < -3 \\ ax+2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b-5x & 3 < x \end{cases} \quad ۳۲$$

به طوری که $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ هر دو وجود داشته باشند.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad ۳۳$$

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد، ولی $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ وجود دارد.

۳۴. قضیه ۳.۳.۲ را ثابت کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \quad ۳۵$$

فرض کنید

(الف) نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ هر دو وجود دارند اما با هم برابر نیستند، و نتیجه بگیرید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد.

(ب) نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ هر دو وجود دارند اما با هم برابر نیستند، و بنا بر این $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ وجود ندارد.

(پ) فرمول تابع $f(x) \cdot g(x)$ را بنویسید.

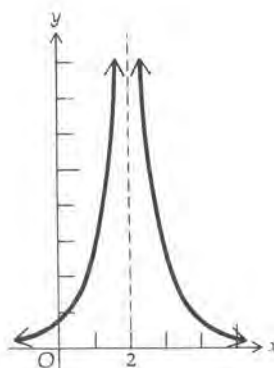
(ت) نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \cdot g(x)$ ، و نتیجه بگیرید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot g(x)$ وجود دارد.

۴.۲ حدهای بینهایت

فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}.$$

نمودار این تابع در شکل ۱.۴.۲ رسم شده است.



شکل ۱۰۴.۲

مقادیر $f(x)$ را وقتی که x نزدیک ۲ باشد، بررسی می‌کنیم. ابتدا x را از سمت راست به ۲ میل می‌دهیم، و مقادیر $f(x)$ را که در جدول ۱۰۴.۲ داده شده است بررسی می‌کنیم. از این جدول، به‌طور شهودی دیده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگتر از ۲ به ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌شود، $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توانیم به ازای تمام x هایی که از ۲ بزرگتر و به اندازه کافی به ۲ نزدیک باشند، $f(x)$ را از هر عدد مثبت از قبل تعیین شده‌ای بزرگتر کنیم (یعنی، $f(x)$ را به اندازه دلخواه بزرگ کنیم).

جدول ۱۰۴.۲

x	۳	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{201}{100}$	$\frac{2001}{1000}$
$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$	۳	۱۲	۲۷	۴۸	۳۰۰	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰۰

برای اینکه نشان دهیم «وقتی x با مقادیر بزرگتر از ۲ به ۲ نزدیک شود، $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد.» می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

حال x را از سمت چپ به ۲ میل می‌دهیم و مقادیر $f(x)$ داده شده در جدول ۱۰۴.۲ را بررسی می‌کنیم. از این جدول به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم، که وقتی x با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیک و نزدیکتر می‌شود $f(x)$ به‌طور بی‌کران افزایش می‌یابد؛ پس

می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

جدول ۲.۴.۲

x	۱	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{199}{100}$	$\frac{1999}{1000}$
$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$	۳	۱۲	۲۷	۴۸	۳۰۰	۳۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰۰

بنابراین، وقتی x از سمت راست یا از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به طور بیکران افزایش می‌یابد و لذا می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

۱.۴.۲ تعریف فرض کنید تابع f به ازای هر عدد واقع در یک بازه باز I که شامل عددی مانند a است، بجز احتمالاً در خود عدد a ، تعریف شده باشد. وقتی x به سمت a میل کند، $f(x)$ به طور بیکران افزایش می‌یابد و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (۱)$$

هرگاه، برای هر $N > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد كه وقتی $0 < |x - a| < \delta$ ، $f(x) > N$.

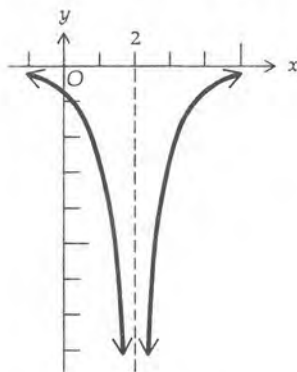
راه دیگر بیان تعریف ۱.۴.۲ به شرح زیر است: وقتی x به سمت عددی چون a میل می‌کند $f(x)$ به طور بیکران افزایش می‌یابد، هرگاه به ازای تمام x هایی که به اندازه کافی نزدیک a باشند و مساوی با a نباشند، بتوانیم $f(x)$ را به اندازه دلخواه بزرگ کنیم (یعنی، آن را از هر عدد مثبت N بزرگتر سازیم).

توجه: دوباره، همچون در بخش ۱.۱ تأکید می‌کنیم که $+\infty$ يك عدد حقیقی نیست؛ بنابراین، وقتی می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ، معنی آن مثل $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ نیست که در آن L يك عدد حقیقی است. معادله (۱) را می‌توان چنین خواند، «حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند، بینهایت مثبت است.» در این مورد حد وجود ندارد، اما نماد $+\infty$ رفتار مقادیر تابع یعنی $f(x)$ را وقتی x به a نزدیک و نزدیکتر می‌شود، مشخص می‌نماید.

به طریق مشابه، می‌توانیم رفتار تابعی را که مقادیر آن به‌طور ییکران کاهش می‌یابند، مشخص کنیم. برای اینکه به این مطلب هدایت شویم، تابع g را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم

$$g(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

نمودار این تابع در شکل ۲۰۴۰۲ رسم شده است.



شکل ۲۰۴۰۲

مقادیر تابع g که از $g(x) = -3/(x-2)^2$ به دست می‌آیند قرینه مقادیر تابع f اند که از $f(x) = 3/(x-2)^2$ حاصل می‌شوند. پس، وقتی x ، چه از سمت راست و چه از سمت چپ، به ۲ میل کند $g(x)$ به‌طور ییکران کاهش می‌یابد، و بنابراین می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(x-2)^2} = -\infty.$$

۲۰۴۰۲ تعریف فرض کنید تابع f به ازای هر عدد واقع در بازه‌ی بازی مانند I که شامل a می‌باشد، بجز احتمالاً در خود a ، تعریف شده باشد. وقتی x به سمت a میل کند، $f(x)$ به‌طور ییکران کاهش می‌یابد و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad (۲)$$

هر گاه برای هر عدد $N < 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad f(x) < N,$$

توجه: معادله (۲) را می‌توان چنین خواند، «حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند، بینهایت منفی است». بازهم مشاهده کنید که حد وجود ندارد و نماد $-\infty$ رفتار

مقادیر تابع را وقتی x به a نزدیک می شود نشان می دهد.

می توانیم حدهای يك طرفه ای را که «بینهایت» باشند، نیز در نظر بگیریم. به ویژه، داریم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ اگر f برای تمام اعداد در بازه بازی چون (a, c) تعریف شده باشد و اگر برای هر عدد $N > 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که وقتی $0 < x - a < \delta$ ، $f(x) > N$. به طریق مشابهی توان حدهای $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ را هم تعریف کرد.

حال فرض کنید h تابعی است که به صورت زیر تعریف می شود

$$h(x) = \frac{2x}{x-1} \quad (3)$$

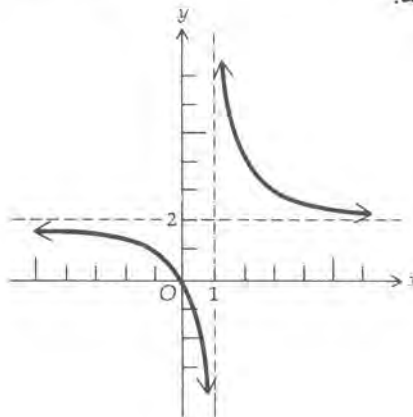
شکل ۳.۴.۲ نمودار این تابع را نشان می دهد. با مراجعه به شکل های ۱.۴.۲، ۲.۴.۲ و ۳.۴.۲ تفاوت بین رفتار تابع رسم شده در شکل ۳.۴.۲ و توابع مربوط به دو شکل دیگر را مورد توجه قرار می دهیم. مشاهده کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty.$$

یعنی، در مورد تابع (۳)، وقتی x با مقادیر کمتر از ۱ به سمت ۱ میل می کند، مقادیر تابع به طور ییکران کاهش می یابند و وقتی x با مقادیر بیشتر از ۱ به سمت ۱ میل می کند، به طور ییکران افزایش می یابند.



شکل ۳.۴.۲

قبل از آوردن چند مثال، به دو قضیه حدی در مورد حدهای « بینهایت » نیازمندیم.

۳.۴.۲ قضیه حدی ۱۱ اگر r يك عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{فرد } r \\ +\infty & \text{زوج } r \end{cases} \quad (ii)$$

اثبات (i) را ثابت می کنیم. اثبات (ii) شبیه اثبات (i) است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۴۷ را ببینید). باید نشان دهیم که برای هر $N > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\frac{1}{x^r} > N, \quad 0 < x < \delta \quad \text{وقتی}$$

یا چون $x > 0$ ، و $N > 0$ ،

$$x^r < \frac{1}{N}, \quad 0 < x < \delta \quad \text{وقتی}$$

یا چون $r > 0$

$$x < \left(\frac{1}{N}\right)^{1/r}, \quad 0 < x < \delta \quad \text{وقتی}$$

عبارت فوق برقرار است اگر $\delta = (1/N)^{1/r}$. پس با شرط اینکه $\delta = (1/N)^{1/r}$ داریم

$$\square \quad \frac{1}{x^r} > N, \quad 0 < x < \delta \quad \text{وقتی}$$

○ نمونه ۱ از قضیه حدی ۱۱ نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

از قضیه حدی ۱۱ (ii)

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

۴.۴.۲ قضیه حدی ۱۲ فرض کنید a يك عدد حقیقی دلخواه، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ،

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و c يك عدد ثابت ناصفر باشد؛ آنگاه

(i) اگر $c > 0$ و اگر از طریق مقادیر مثبت $f(x)$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) اگر $c > 0$ و اگر از طریق مقادیر منفی $f(x)$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) اگر $c < 0$ و اگر از طریق مقادیر مثبت $f(x)$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) اگر $c < 0$ و اگر از طریق مقادیر منفی $f(x)$ ، $f(x) \rightarrow 0$ ، داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$$

اگر به جای $x \rightarrow a$ قرار دهیم « $x \rightarrow a^+$ » یا « $x \rightarrow a^-$ »، این قضیه باز هم برقرار است.

اثبات (i) را ثابت، و اثبات سایر قسمت‌ها را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (به تمرینهای ۴۸ تا ۵۰ مراجعه کنید). برای اثبات

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

باید نشان دهیم برای هر $N > 0$ يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\frac{g(x)}{f(x)} > N, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{وقتی} \quad (4)$$

چون $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c > 0$ ، پس در تعریف ۱.۱.۲ اگر $\varepsilon = c/2$ انتخاب شود، يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد که

$$|g(x) - c| < \frac{1}{4}c, \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{وقتی}$$

حال با استفاده از قضیه ۲.۲.۱ در مورد نامساوی فوق نتیجه می‌گیریم يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \quad -\frac{c}{4} < g(x) - c < \frac{c}{4}$$

یا

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \quad \frac{c}{4} < g(x) < \frac{3c}{4}$$

پس يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد که

$$(5) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \quad g(x) > \frac{c}{4}$$

حال، چون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_2, \quad |f(x)| < \varepsilon$$

از آنجا که $f(x)$ با مقادیر مثبت $f(x)$ به ۰ میل می کند، علامت قدر مطلق دو طرف $f(x)$ را می توان برداشت؛ پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد که

$$(6) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_2, \quad 0 < f(x) < \varepsilon$$

از عبارات (۵) و (۶) نتیجه می شود که برای هر $\varepsilon > 0$ ، اعداد مثبت δ_1 و δ_2 وجود دارند که

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ و } 0 < |x-a| < \delta_2, \quad \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{c/2}{\varepsilon}$$

بنابراین اگر $\varepsilon = c/2N$ و $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، آنگاه

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad \frac{g(x)}{f(x)} > \frac{c/2}{c/2N} = N$$

که همان عبارت (۴) است. لذا (i) ثابت می شود. □

هر چهار قسمت قضیه حدی ۱۲ در نمونه زیر به نمایش گذاشته می شود.

○ نمونه ۲

(الف) برای محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 4+} \frac{2x-1}{x-4}$$

ملاحظه کنید که $\lim_{x \rightarrow 4+} (2x-1) = 7 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4+} (x-4) = 0$. در اینجا $x-4$

از طریق مقادیر مثبت به صفر میل می کند. لذا اگر قضیه حدی ۱۲ (i) را به کار ببریم داریم

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x-1}{x-4} = +\infty.$$

(ب) برای محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-1}{x-4}$$

توجه کنید که وقتی $x-4$ از طریق مقادیر منفی به ۰ میل کند، $\lim_{x \rightarrow 4^-} (2x-1) = 7 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4) = 0$ پس، از قضیه حدی ۱۲ (ii) داریم

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x-1}{x-4} = -\infty.$$

(پ) جهت محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1-2x}{x-4}$$

ملاحظه کنید که وقتی $x-4$ از طریق مقادیر مثبت به ۰ میل کند، $\lim_{x \rightarrow 4^+} (1-2x) = -7 < 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4) = 0$ پس از قضیه حدی ۱۲ (iii) داریم

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1-2x}{x-4} = -\infty.$$

(ت) برای محاسبه

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1-2x}{x-4}$$

توجه کنید که وقتی $x-4$ از طریق مقادیر منفی به ۰ میل کند، $\lim_{x \rightarrow 4^-} (1-2x) = -7 < 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x-4) = 0$ بنا بر این از قضیه حدی ۱۲ (iv) نتیجه می شود که

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1-2x}{x-4} = +\infty.$$

مثال ۱ مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3} \quad (\text{الف})$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)} \quad (\text{الف})$$

به آسانی ثابت می‌شود که حد صورت برابر با ۱۴ است. برای محاسبه حد مخرج داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

حد مخرج برابر با ۰ است و مخرج با مقادیر مثبت به ۰ میل می‌کند. بنابر قضیه حدی ۱۲ (i)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{(x-3)(x+1)} \quad (\text{ب})$$

مانند قسمت (الف) حد صورت کسر ۱۴ است. و

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3)(x+1) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) \cdot \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+1) \\ &= 0 \cdot 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

در این حالت حد مخرج ۰ است ولی مخرج با مقادیر منفی به ۰ میل می‌کند. از قضیه حدی ۱۲ (ii)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} = -\infty.$$

مثال ۲ مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \quad (\text{ب}) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \quad (\text{الف})$$

حل

(الف) $x \rightarrow 2^+$ ، از اینرو $x-2 > 0$ ؛ لذا $x-2 = \sqrt{(x-2)^2}$ پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{(x-2)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}. \end{aligned}$$

حد صورت کسر ۲، وحد مخرج ۰ است ومخرج با مقادیر مثبت به ۰ میل می کند. پس، از قضیه حدی ۱۲ (i) نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} = +\infty.$$

(ب) چون $x \rightarrow 2^-$ ، $x - 2 < 0$ ؛ لذا $x - 2 = -(2 - x) = -\sqrt{(2 - x)^2}$

پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2 - x} \sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x} \sqrt{2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2 + x}}{-\sqrt{2 - x}}. \end{aligned}$$

حد صورت کسر برابر با ۲، وحد مخرج ۰ است، ومخرج با مقادیر منفی به ۰ میل می کند. ازاینرو، بنابر قضیه حدی ۱۲ (ii)

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = -\infty.$$

مثال ۳ مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x - 4}.$$

حل $\lim_{x \rightarrow 4^-} [x] = 3$. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 4^-} ([x] - 4) = -1$. علاوه براین، $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 4) = 0$ ، و $x - 4$ از طریق مقادیر منفی به ۰ میل می کند. پس بنابر قضیه حدی ۱۲ (iv)

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x - 4} = +\infty.$$

یادآوری می کنیم که چون $+\infty$ و $-\infty$ عدد نیستند، قضایای حدی ۱ تا ۱۰ از بخش ۲.۲، برای حدهای بینهایت اعتبار ندارند. با این وجود، درمورد این حدها ویژگیهای زیر برقرارند. اثبات آنها برای تمرین واگذار می شوند (به تمرینهای ۵۱ تا ۵۳ رجوع شود).

قضیه ۵.۴.۲

(i) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و c يك عدد ثابت دلخواه باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

(ii) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و c يك عدد ثابت دلخواه باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

اگر به جای « $x \rightarrow a$ » قراردسیم « $x \rightarrow a^+$ » یا « $x \rightarrow a^-$ »، این قضیه همچنان معتبر است.

○ نمونه ۳ چون $\lim_{x \rightarrow 2^+} 1/(x-2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} 1/(x+2) = 1/4$ ، پس، از قضیه ۵.۴.۲ (i) نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right] = +\infty.$$

قضیه ۶.۴.۲ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و c يك عدد ثابت مخالف با ۰ باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty, c > 0 \text{ (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty, c < 0 \text{ (ii)}$$

این قضیه همچنان برقرار است اگر به جای « $x \rightarrow a$ » بنویسیم « $x \rightarrow a^+$ » یا « $x \rightarrow a^-$ ».

○ نمونه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{(x-3)^2} = +\infty$$

پس بنابر قضیه ۶.۴.۲ (ii) داریم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{5}{(x-3)^2} \cdot \frac{x+2}{x-2} \right] = -\infty.$$

قضیه ۷.۴.۲ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ و c يك عدد ثابت مخالف با ۰ باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty, c > 0 \text{ اگر (i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty, c < 0 \text{ اگر (ii)}$$

این قضیه همچنان برقرار است اگر به جای « $x \rightarrow a$ » داشته باشیم « $x \rightarrow a^+$ » یا « $x \rightarrow a^-$ ».

○ نمونه ۵ در مثال ۲ قسمت (ب) نشان دادیم که

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = -\infty$$

و به علاوه

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

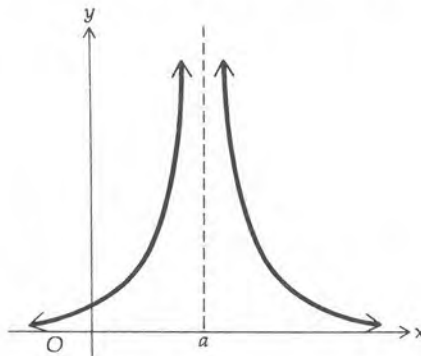
پس بنا بر قضیه ۷.۴.۲ (ii) نتیجه می شود که

$$\circ \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} \right] = +\infty.$$

پیدا کردن مجانبهای نمودار کمکی است به ترسیم نمودار هر تابع. در این بخش دربارهٔ مجانبهای قائم بحث می کنیم، و در بخش ۵.۲ دربارهٔ مجانبهای افقی. فرض کنید تابع f با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \quad (۷)$$

داده شده باشد. نمودار f در شکل ۴.۴.۲ رسم شده است. هر خطی که موازی با محور x ها و در بالای آن باشد نمودار را در دو نقطه قطع می کند: يك نقطه در چپ خط $x=a$ و يك



شکل ۴.۴.۲

نقطه درست راست آن. پس به ازای هر $k > 0$ ، بدون توجه به اندازه آن، خط $y = k$ نمودار f را در دو نقطه قطع می کند؛ هر چه k بزرگتر شود، فاصله ایسن دو نقطه از خط $x = a$ کوچکتر می گردد. خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار f می نامند.

۸.۴.۲ تعریف خط $x = a$ را يك مجانب قائم نمودار تابع f می نامند هر گاه دست کم یکی از عبارتهای زیر درست باشد:

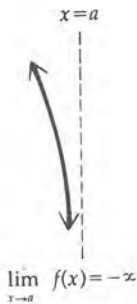
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad (ii)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad (iii)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad (iv)$$

○ نمونه ۶ هريك از شكلهای ۵.۴.۲ تا ۸.۴.۲ بخشی از تابعی را كه خط $x = a$ يك مجانب قائم آن است نشان می دهد. در شكل ۵.۴.۲، قسمت (i) تعریف ۸.۴.۲ به كار می رود؛ در شكل ۶.۴.۲ قسمت (ii) آن؛ و در شكلهای ۷.۴.۲ و ۸.۴.۲ به ترتیب قسمتهای (iii) و (iv) تعریف به كار می روند.



شکل ۸.۴.۲ ○



شکل ۷.۴.۲



شکل ۶.۴.۲



شکل ۵.۴.۲

در مورد تابع تعریف شده توسط (۷)، هر دو قسمت (i) و (iii) تعریف فوق درست اند. به شکل ۴.۴.۲ رجوع کنید. اگر تابع g توسط

$$g(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$$

تعریف شود، آنگاه هر دو قسمت (ii) و (iv) درست اند، و خط $x = a$ يك مجانب قائم نمودار g است. این مطلب در شكل ۹.۴.۲ (صفحه بعد) نشان داده شده است.

مثال ۴ مجانب قائم نمودار تابع تعریف شده توسط معادله

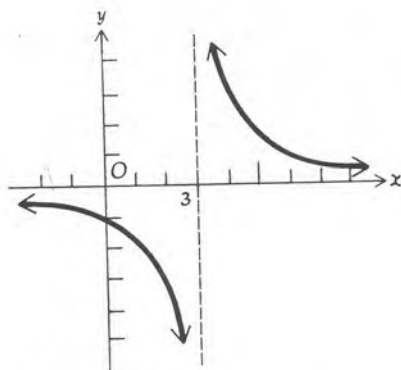
$$f(x) = \frac{3}{x-3}$$

رایباید، و نمودار f را رسم کنید.

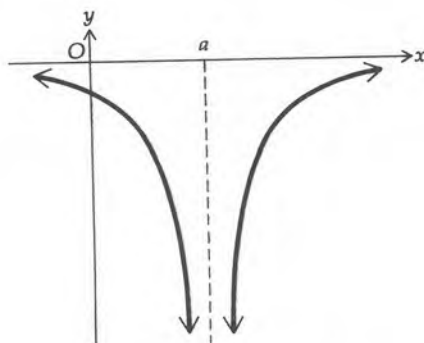
حل

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty$$

از تعریف ۸.۴.۲ نتیجه می شود که خط $x=3$ يك مجانب قائم نمودار f است. نمودار f در شکل ۱۰.۴.۲ نشان داده شده است.



▲ شکل ۱۰.۴.۲



شکل ۹.۴.۲

تمرینهای ۴.۲

در تمرینهای ۱ تا ۳۲، حد خواسته شده را محاسبه کنید.

۳. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{(x-5)^2}$

۲. $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{1}{x-5}$

۱. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x-5}$

۶. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

۵. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{1-x}$

۴. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

۹. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x+4}$

۸. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x+1}$

۷. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{4x^2}{9-x^2} \cdot ۱۲$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{4x}{9-x^2} \cdot ۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+} \frac{x}{x-4} \cdot ۱۰$$

$$\lim_{t \rightarrow -2-} \frac{t+2}{t^2-4} \cdot ۱۵$$

$$\lim_{t \rightarrow -2-} \frac{-t+2}{(t-2)^2} \cdot ۱۴$$

$$\lim_{t \rightarrow 2+} \frac{t+2}{t^2-4} \cdot ۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} \cdot ۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} \cdot ۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} \cdot ۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot ۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} \cdot ۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3} \cdot ۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2-4x^2}{5x^2+3x^2} \cdot ۲۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2-3}{x^2+x^2} \cdot ۲۲$$

$$\lim_{t \rightarrow -4-} \left(\frac{2}{t^2+3t-4} - \frac{3}{t+2} \right) \cdot ۲۵$$

$$\lim_{s \rightarrow -2-} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4} \right) \cdot ۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{[x^2]-1}{x^2-1} \cdot ۲۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{[x]-x}{3-x} \cdot ۲۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x^2-5x^2}{x^2-1} \cdot ۲۶$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{6x^2+x-2}{2x^2+3x-2} \cdot ۳۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2+9x^2+20x}{x^2+x-12} \cdot ۲۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{2-\sqrt{4x-x^2}} \cdot ۳۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1} \cdot ۳۱$$

۳۳. برای هر کدام از توابع داده شده زیر، مجانب قائم نمودار تابع را بیابید، و نمودار تابع را رسم کنید: (الف) $f(x) = 1/x$ ؛ (ب) $g(x) = 1/x^2$ ؛ (پ) $h(x) = 1/x^3$ ؛ (ت) $\phi(x) = 1/x^4$

۳۴. برای هر کدام از توابع داده شده زیر، مجانب قائم نمودار را بیابید، و نمودار تابع را رسم کنید: (الف) $f(x) = -1/x$ ؛ (ب) $g(x) = -1/x^2$ ؛ (پ) $h(x) = -1/x^3$ ؛ (ت) $\phi(x) = -1/x^4$

در تمرینهای ۳۵ تا ۴۳، مجانب قائم نمودار تابع را بیابید، و نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{-2}{x+3} \cdot ۳۷$$

$$f(x) = \frac{3}{x+1} \cdot ۳۶$$

$$f(x) = \frac{2}{x-4} \cdot ۳۵$$

$$f(x) = \frac{4}{(x-5)^2} \cdot ۴۰$$

$$f(x) = \frac{-2}{(x+3)^2} \cdot ۳۹$$

$$f(x) = \frac{-4}{x-5} \cdot ۳۸$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5x-6} \cdot ۴۲$$

$$f(x) = \frac{5}{x^2+8x+15} \cdot ۴۱$$

$$f(x) = \frac{2}{4x^2 - 4x - 35} \quad ۴۳$$

۴۴. از تعریف ۱.۴.۲ استفاده کرده و ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow -3} |(5-x)/(3+x)| = +\infty$

۴۵. با استفاده از تعریف ۱.۴.۲ ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 2} 3/(x-2)^2 = +\infty$

۴۶. با استفاده از تعریف ۲.۴.۲ ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 4} -2/(x-4)^2 = -\infty$

۴۷. قضیه ۳.۴.۲ (ii) را ثابت کنید.

۴۸. قضیه ۴.۴.۲ (ii) را ثابت کنید.

۴۹. قضیه ۴.۴.۲ (iii) را ثابت کنید.

۵۰. قضیه ۴.۴.۲ (iv) را ثابت کنید.

۵۱. قضیه ۵.۴.۲ را ثابت کنید.

۵۲. قضیه ۶.۴.۲ را ثابت کنید.

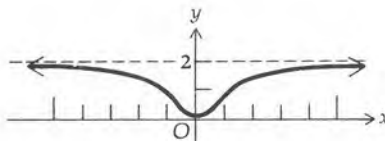
۵۳. قضیه ۷.۴.۲ را ثابت کنید.

۵.۲ حد در بینهایت

تابع f را که با ضابطه زیر تعریف می شود، در نظر بگیرید

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}.$$

نمودار این تابع در شکل ۱.۵.۲ نشان داده شده است. فرض کنید x مقادیر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، و مانند اینها را اختیار کند، و به طور بیکران افزایش یابد. مقادیر متناظر تابع در جدول ۱.۵.۲ داده شده اند. با توجه به این جدول، ملاحظه می شود که در حالی که x با مقادیر مثبت افزایش می یابد، مقادیر تابع $f(x)$ به ۲ نزدیک و نزدیکتر می شوند. بخصوص، وقتی $x = 4$ ،



شکل ۱.۵.۲

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{32}{17} = \frac{2}{17}$$

جدول ۱.۵.۲

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$	۰	۱	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{50}{26}$	$\frac{200}{101}$	$\frac{20000}{10001}$	$\frac{2000000}{1000001}$

بنابراین، وقتی $x=4$ ، تفاضل $f(x)$ و ۲ برابر است با $2/17$ و وقتی $x=100$ ،

داریم

$$2 - \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{20000}{10001} = \frac{2}{10001}$$

از اینجا، برای $x=100$ ، تفاضل بین $f(x)$ و ۲ برابر است با $2/10001$. اگر به این کار ادامه دهیم، به طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که مقادیر $f(x)$ را می‌توانیم به قدر دلخواه به ۲ نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی بزرگ اختیار نماییم. به عبارت دیگر، می‌توان فاصله $f(x)$ و ۲ را به طور دلخواه کوچک کرد، به شرطی که x بزرگتر از یک عدد مثبت به اندازه کافی بزرگ، اختیار شود. و یا، بایک گام پیشروی، برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر که کوچک باشد، می‌توانیم یک عدد $N > 0$ پیدا کنیم که وقتی $x > N$ ، داشته باشیم $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

وقتی یک متغیر مستقل مانند x به طور بی‌کران با مقادیر مثبت افزایش می‌یابد، می‌نویسیم « $x \rightarrow +\infty$ ». بنابراین، با توجه به مثال توضیحی فوق، می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$$

۱.۵.۲ تعریف فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر عدد در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده است. می‌گوییم حد تابع $f(x)$ ، وقتی x به طور بی‌کران افزایش می‌یابد برابر با عدد L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad (1)$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، هر قدر کوچک، یک عدد $N > 0$ وجود داشته باشد که

$$\text{وقتی } x > N, |f(x) - L| < \varepsilon$$

توجه: علامت « $x \rightarrow +\infty$ » دارای همان معنی نیست که مثلاً علامت « $x \rightarrow ۱۰۰۰$ ». علامت « $x \rightarrow +\infty$ » نمایانگر رفتار متغیر x است. معیناً، رابطه (۱) را می‌توان چنین خواند «حد $f(x)$ وقتی x به سمت بینهایت مثبت میل می‌کند، برابر با L است». این تذکر را به خاطر داشته باشید.

حال، همان تابع فوق را در نظر بگیرید و فرض کنید که x مقادیر $۰, -۱, -۲, -۳, -۴, -۵, -۱۰, -۱۰۰, -۱۰۰۰$ و $-۲, -۳, -۴, -۵, -۱۰, -۱۰۰, -۱۰۰۰$ ، و مانند اینها را اختیار کند و با مقادیر منفی به‌طور بیکران کاهش یابد. جدول ۲.۵.۲ مقادیر متناظر تابع $f(x)$ را به دست می‌دهد.

جدول ۲.۵.۲

x	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۱۰	-۱۰۰	-۱۰۰۰
$f(x) = \frac{۲x^۲}{x^۲+۱}$	۰	۱	$\frac{۸}{۵}$	$\frac{۱۸}{۱۰}$	$\frac{۳۲}{۱۷}$	$\frac{۵۰}{۲۶}$	$\frac{۲۰۰}{۱۰۱}$	$\frac{۲۰۰۰۰}{۱۰۰۰۱}$	$\frac{۲۰۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۱}$

دقت کنید که مقادیر این تابع به ازای اعداد منفی با مقادیر آن به ازای اعداد مثبت متناظر برابر است. پس، به‌طور شهودی ملاحظه می‌کنیم که وقتی x به‌طور بیکران کاهش می‌یابد، $f(x)$ به سمت ۲ میل می‌کند؛ یعنی، $|f(x) - ۲|$ را می‌توان به قدر کافی کوچک اختیار کرد، به این طریق که x را عددی کوچکتر از يك عدد منفی بگیریم که قدر مطلق آن به اندازه کافی بزرگ باشد. به‌طور رسمی، می‌گوییم برای هر $\varepsilon > ۰$ ، هر قدر که کوچک باشد، می‌توان يك عدد $N < ۰$ یافت که وقتی $x < N$ ، داشته باشیم $|f(x) - ۲| < \varepsilon$. با استفاده از علامت $x \rightarrow -\infty$ برای نشان دادن این امر که متغیر x به‌طور بیکران کاهش می‌یابد، می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲+۱} = ۲.$$

۲.۵.۲ تعریف فرض کنید f تابعی باشد که به ازای هر عدد در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده است. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به‌طور بیکران کاهش می‌یابد، برابر با L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad (۲)$$

اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ ، هر قدر که کوچک، يك عدد $N < ۰$ وجود داشته باشد که

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad x < N$$

توجه: مانند آنچه که بعد از تعریف ۱.۵.۲ تذکر دادیم، در اینجا نیز علامت $x \rightarrow -\infty$ فقط نمایانگر رفتار متغیر x است. معهذرا رابطه (۲) را می‌توان چنین خواند «حد $f(x)$ وقتی x به سمت بینهایت منفی میل می‌کند برابر با L است».

قضایای حدی ۲، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، و ۱۰ در بخش ۲.۲، و قضایای حدی ۱۱ و ۱۲ در بخش ۴.۲، بدون تغییر خواهند ماند اگر به جای « $x \rightarrow a$ » قرار دهیم « $x \rightarrow +\infty$ » یا « $x \rightarrow -\infty$ ». قضیه حدی اضافی زیر نیز در این مورد وجود دارد.

۳.۵.۲ قضیه حدی ۱۳ اگر r عدد صحیح و مثبتی باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (ii)$$

اثبات (i) باید نشان داد که تعریف ۱.۵.۲ برای $f(x) = 1/x^r$ و $L = 0$ برقرار است؛ یعنی باید نشان داد که برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک عدد $N > 0$ وجود دارد که

$$\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

و به عبارت دیگر،

$$|x|^r > \frac{1}{\varepsilon}, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

یا به عبارت دیگر

$$|x| > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/r}, \quad x > N \quad \text{وقتی}$$

برای آنکه عبارت فوق برقرار باشد، فرض می‌کنیم $N = (1/\varepsilon)^{1/r}$. بنابراین

$$\left| \frac{1}{x^r} - 0 \right| < \varepsilon, \quad x > N, \quad N = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/r} \quad \text{اگر}$$

□

و بدین ترتیب قسمت (i) اثبات می‌شود.

اثبات (ii) مشابه اثبات (i) است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود (به تمرین ۵۴ مراجعه کنید).

مثال ۱ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{2x+5}$$

وهرجا ازقضایای حدی استفاده می کنید، آنها را مشخص کنید.

حل برای استفاده از قضیه حدی شماره ۱۳، صورت و مخرج کسرها بر x تقسیم می کنیم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{2x+5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-3/x}{2+5/x} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4-3/x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2+5/x)} \quad (\text{ق. ح. ۹}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (3/x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (5/x)} \quad (\text{ق. ح. ۴})$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)} \quad (\text{ق. ح. ۶})$$

$$= \frac{4-3 \cdot 0}{2+5 \cdot 0} \quad (\text{ق. ح. ۲ و ق. ح. ۱۳})$$

$$\triangle = 2.$$

مثال ۲ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-x+5}{2x^3-1}$$

وهرجا ازقضایای حدی استفاده می کنید، آنها را مشخص کنید.

حل برای استفاده ازقضیه حدی شماره ۱۳، صورت و مخرج کسرها بر بزرگترین توان x ، خواه در صورت باشد و خواه در مخرج، که در این مثال x^3 است، تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2/x) - (1/x^2) + (5/x^3)}{4 - (1/x^3)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} ((2/x) - (1/x^2) + (5/x^3))}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - (1/x^3))} \quad (\text{ق. ح. ۹}) \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2/x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} (5/x^3)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^3)} \quad (\text{ق. ح. ۵}) \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^3)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^3)} \\
 & \quad (\text{ق. ح. ۶}) \\
 &= \frac{2 \cdot 0 - 0 + 5 \cdot 0}{4 - 0} \quad (\text{ق. ح. ۲ و ق. ح. ۱۳}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

مثال ۳ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

و هر جا که از قضایای حدی استفاده می کنید، آنها را مشخص کنید.

حل صورت و مخرج کسر را بر x تقسیم می کنیم. در مخرج، فرض می کنیم $x = \sqrt{x^2}$ ، زیرا تنها مقادیر مثبت x مورد نظر ما هستند.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + (4/x)}{\sqrt{2x^2 - 5}/\sqrt{x^2}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + (4/x))}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - (5/x^2)}} \quad (\text{ق. ح. ۹}) \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + (4/x))}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - (5/x^2))}} \quad (\text{ق. ح. ۱۰})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (4/x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (\Delta/x^2)}} \quad (\text{ق. ح. ۴})$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)}} \quad (\text{ق. ح. ۶})$$

$$= \frac{3 + 4 \cdot 0}{\sqrt{2 - \Delta \cdot 0}} \quad (\text{ق. ح. ۲ و ق. ح. ۱۳})$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

مثال ۴ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-\Delta}}.$$

حل این تابع، همان تابع مثال ۳ است؛ ولی چون مقادیر منفی x را در نظر داریم، در این مورد $x = -\sqrt{x^2}$ ؛ یا به عبارت دیگر، $-\sqrt{x^2} = x$. از اینرو، در نخستین گام، وقتی که صورت و مخرج بر x تقسیم می‌شوند، در مخرج قرار می‌دهیم $x = -\sqrt{x^2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-\Delta}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+(4/x)}{\sqrt{2x^2-\Delta}/(-\sqrt{x^2})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3+(4/x))}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{2-(\Delta/x^2)})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (4/x)}{-\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-(\Delta/x^2))}}. \end{aligned}$$

گامهای باقیمانده مشابه گامهای حل تمرین ۳ هستند و در مخرج کسر، به جای $\sqrt{2}$ به دست می‌آید $-\sqrt{2}$. از اینرو، حد برابر با $-3/\sqrt{2}$ است. ▲

حدهای «بینهایت» در بینهایت را نیز می‌توان در نظر گرفت. برای هر يك از عبارات زیر تعریف رسمی وجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

به عنوان مثال، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، اگر f روی بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و اگر برای هر عدد $N > 0$ ، $M > 0$ وجود داشته باشد که وقتی $f(x) > N$ ، $x > M$ ، تعریفهای دیگر به عنوان تمرین واگذار می‌شوند (تمرین ۵۱ را ببینید).

مثال ۵ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1}.$$

حل صورت و مخرج کسر را بر x^2 تقسیم می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1/x) + (1/x^2)}.$$

با محاسبه حد مخرج داریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 + 0 = 0$$

بنابراین، حد مخرج صفر است و مخرج با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند. بدین صورت برابر با ۱ است و لذا، بنا به قضیه حدی ۱۲ (i) (۴.۴.۲) نتیجه می‌شود که

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty.$$

مثال ۶ عبارت زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5}.$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2/x) - 1}{(3/x) + (5/x^2)}.$$

حدهای صورت و مخرج را جداگانه حساب می‌کنیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} = 0 + 0 = 0$$

بنابراین، باحد يك كسر سروکار داریم که حد صورت آن ۱- و حد مخرج آن صفر است، و مخرج با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می‌کند. پس، بنا به قضیهٔ حدی ۱۲ (iii) نتیجه می‌شود که

$$\blacktriangle \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x + 5} = -\infty.$$

در بخش ۴.۲، تعریف رسمی مجانب قائم نمودار يك تابع را ارائه دادیم. مجانب افقی يك نمودار، خطی است موازی با محور x ها، و تعریف رسمی آن به صورت زیر است.

۴.۵.۲ تعریف گفته می‌شود خط $y = b$ يك مجانب افقی نمودار تابع f است اگر دست کم یکی از عبارات زیر درست باشد:

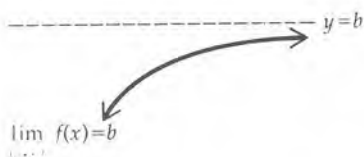
$$f(x) \neq b, x > N \quad \text{وقتی} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (i)$$

$$f(x) \neq b, x < N \quad \text{وقتی} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad (ii)$$

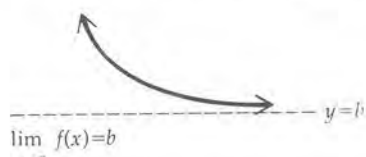
○ نمونه ۱ در هر يك از شکل‌های ۲.۵.۲ تا ۶.۵.۲، قسمتی از نمودار تابعی نشان داده شده که خط $y = b$ برای آن يك مجانب افقی است. در شکل‌های ۲.۵.۲ و ۳.۵.۲، قسمت (i) از تعریف ۴.۵.۲ صادق است، در شکل‌های ۴.۵.۲ و ۵.۵.۲، قسمت (ii) درست است. هر دو قسمت (i) و (ii) برای تابعی که نمودارش در شکل ۶.۵.۲ دیده می‌شود، برقرارند. ○

در شکل ۷.۵.۲، نمودار تابعی دیده می‌شود که برای آن داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ، ولی

هیچ عدد N وجود ندارد که به ازای آن، وقتی $x > N$ ، داشته باشیم $f(x) \neq b$. در نتیجه، خط $y = b$ مجانب افقی نمودار f نیست. مثالی از يك چنین تابعی، در تمرین ۵۹ از تمرین‌های ۵.۸ داده شده است.



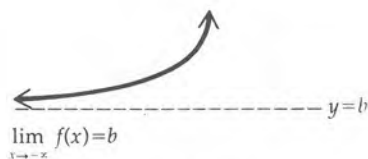
شکل ۳.۵.۲



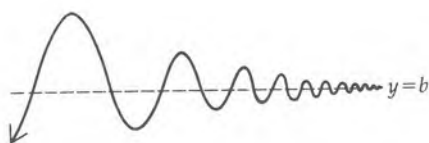
شکل ۲.۵.۲



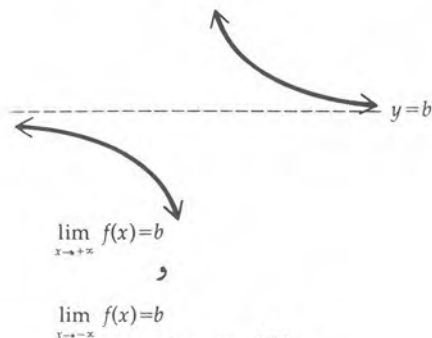
شکل ۵.۵.۲



شکل ۴.۵.۲



شکل ۷.۵.۲



شکل ۶.۵.۲

مثال ۷ مجانبهای افقی نمودار تابع f را که به صورت زیر تعریف می شود، بیابید

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

و نمودار تابع را رسم کنید.

حل ابتدا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را در نظر می گیریم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

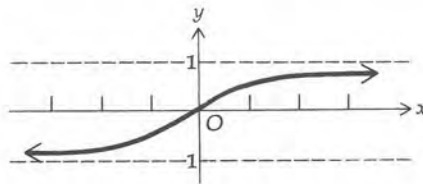
برای محاسبه این حد می نویسیم $x = \sqrt{x^2}$ (زیرا $x > 0$) و سپس صورت و مخرج را بر x^2 تقسیم می کنیم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + (1/x^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

پس بنا به تعریف ۴.۵.۲ (i) خط $y=1$ يك مجانب افقی است.
 اکنون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ را در نظر می گیریم؛ در این حالت، می نویسیم $x = -\sqrt{x^2}$
 زیرا اگر $x < 0$ ، $x \rightarrow -\infty$ ، لذا

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{1}{1+(1/x^2)}} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow -\infty}(1/x^2)}} \\ &= -1.\end{aligned}$$

پس، بنا به تعریف ۴.۵.۲ (ii)، خط $y=-1$ يك مجانب افقی است. نمودار f در شکل ۸.۵.۲ رسم شده است.



شکل ۸.۵.۲

مثال ۸ مجانبهای افقی وقائم نمودار معادله $x^3 - 2y^2 - 4x = 0$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.

حل معادله داده شده را نسبت به y حل کرده به دست می آوریم

$$y = \pm 2\sqrt{\frac{x}{x-2}}. \quad (3)$$

معادله (۳) دو تابع را تعریف می کند :

$y = f_1(x)$ ، که در آن $f_1(x) = +2\sqrt{(x)/(x-2)}$ به صورت $f_1(x)$ تعریف می شود؛

و

$y = f_2(x)$ ، که در آن $f_2(x) = -2\sqrt{(x)/(x-2)}$ به صورت $f_2(x)$ تعریف می شود.

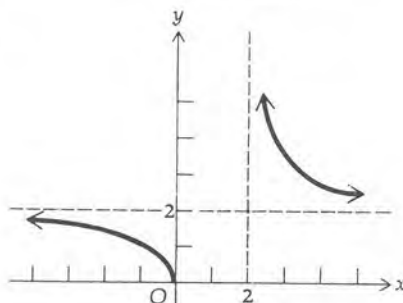
نمودار معادله داده شده، از نمودارهای توابع f_1 و f_2 تشکیل می‌شود. قلمرو این دو تابع عبارت است از مجموعه تمام مقادیری از x که برای آنها داشته باشیم $x/(x-2) \geq 0$. با استفاده از نتیجه مثال ۸ در بخش ۵.۱ و کنار گذاشتن $x=2$ ، مشاهده می‌شود که قلمرو f_1 و f_2 عبارت است از $(-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$. حال f_1 را در نظر می‌گیریم. چون

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} 2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty$$

بنابه تعریف ۸.۴.۲ (i)، خط $x=2$ يك مجانب قائم نمودار f_1 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \sqrt{\frac{1}{1-(2/x)}} = 2$$

پس، بنابه تعریف ۴.۵.۲ (i)، خط $y=2$ يك مجانب افقی نمودار f_1 است. به طریق مشابه، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 2$. نمودار f_1 در شکل ۹.۵.۲ نشان داده شده است.



شکل ۹.۵.۲

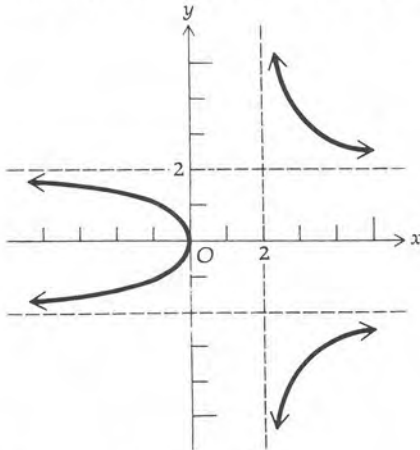
$$\lim_{x \rightarrow 2+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \left[-2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right] = -\infty$$

بنابه تعریف ۸.۴.۲ (ii)، خط $x=2$ يك مجانب قائم نمودار f_2 است.

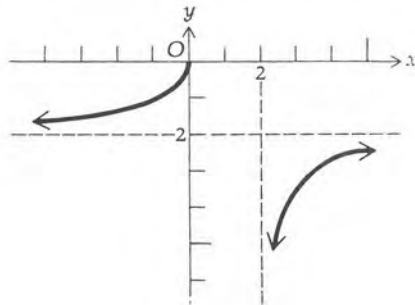
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2 \sqrt{\frac{1}{1-(2/x)}} \right] = -2 \end{aligned}$$

و بنابه تعریف ۴.۵.۲ (i)، خط $y=-2$ يك مجانب افقی نمودار f_2 است.

همچنین، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -2$. نمودار f_2 در شکل ۱۰.۵.۲ رسم شده است، نمودار معادله داده شده عبارت است از اجتماع نمودارهای f_1 و f_2 که در شکل ۱۱.۵.۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۱.۵.۲



شکل ۱۰.۵.۲

مثال ۹ مجانیهای افقی وقائم نمودار تابع f را بیابید اگر

$$f(x) = \frac{8x - 2x^2}{x^2 - 9}.$$

نمودار f را رسم کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8}{x} - 2}{1 - \frac{9}{x^2}} \\ &= \frac{0 - 2}{1 - 0}. \end{aligned}$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

بنابراین

(۴)

همچنین

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2.$$

(۵)

اگر صورت و مخرج کسر را تجزیه کنیم، داریم

$$f(x) = \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)}.$$

چهار حد $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ را در نظر می گیریم. برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ ، ملاحظه کنید که $\lim_{x \rightarrow -3^+} 2x(4-x) = 6 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x-3)(x+3) = 0$ که در آن با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کند. لذا، بنابه قضیه حدی ۱۲ (i)، (۴.۴.۲)، داریم

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = +\infty. \quad (۶)$$

چون $\lim_{x \rightarrow -3^-} 2x(4-x) = 6 > 0$ و $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x-3)(x+3) = 0$ که در آن با مقادیر منفی به سمت صفر میل می کند، از قضیه حدی ۱۲ (ii) نتیجه می شود که

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = -\infty. \quad (۷)$$

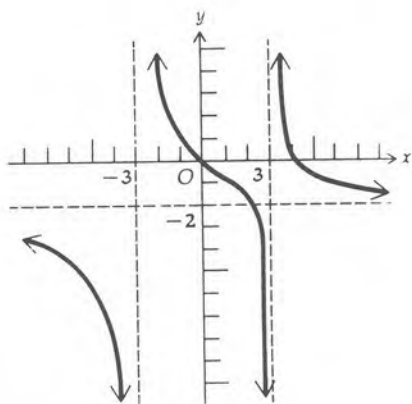
با استفاده از قضیه حدی ۱۲ (iv)، $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ را محاسبه می کنیم. چون $\lim_{x \rightarrow -3^+} 2x(4-x) = -42 < 0$ و $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x-3)(x+3) = 0$ که در آن با مقادیر منفی به صفر میل می کند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = +\infty. \quad (۸)$$

چون $\lim_{x \rightarrow -3^-} 2x(4-x) = -42 < 0$ و $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x-3)(x+3) = 0$ که در آن با مقادیر مثبت به صفر میل می کند، با توجه به قضیه حدی ۱۲ (iii) داریم

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x(4-x)}{(x-3)(x+3)} = -\infty. \quad (۹)$$

از (۴) و (۵) و تعریف ۴.۵.۲، این نتیجه به دست می آید که خط $y = -2$ يك مجانب افقی نمودار f است. از (۶) تا (۹) و تعریف ۸.۴.۲ نتیجه می شود که خطوط $x = 3$ و $x = -3$ مجانبهای قائم نمودار هستند. با توجه به معادله داده شده، نمودار f شامل نقاط $(0, 0)$ و $(4, 0)$ است. معدودی از نقاط دیگر را مشخص می کنیم و از اطلاعاتی که در (۴) تا (۹) نهفته است بهره می گیریم تا نموداری که در شکل ۱۲.۵.۲ نشان داده شده، به دست آید.



شکل ۱۲.۵.۲

تمرینهای ۵.۲

در تمرینهای ۱ تا ۲۸، حد را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^6} \quad .۲$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \quad .۱$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x-4}{3x+1} \quad .۴$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{5t-2} \quad .۳$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+5x}{2-3x} \quad .۶$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+7}{4-5x} \quad .۵$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{4s^2+3}{2s^2-1} \quad .۸$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5} \quad .۷$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{x^3} \quad .۱۰$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{3x^2-5} \quad .۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+5}{7x^2+x+1} \quad .۱۲$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^2-3y}{y+1} \quad .۱۱$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4-7x^2+2}{2x^4+1} \quad .۱۴$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2+2x^2-5}{8x^2+x+2} \quad .۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 12x + 7}{4x^2 - 1} \cdot 16$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2y^2 - 4}{5y + 3} \cdot 15$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{t^2} - 4t \right) \cdot 18$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \frac{1}{x^2} \right) \cdot 17$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4} \cdot 20$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 4} \cdot 19$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{y^2 + 1}}{2y^2 - 3} \cdot 22$$

$$\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{w^2 - 2w + 3}}{w + 5} \cdot 21$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \cdot 28$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot 23$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2 + 1} - x) \cdot 26$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3r^2 + r} - 2r) \cdot 25$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}}{\sqrt{t + 1}} \cdot 28$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^2 + 1}) \cdot 27$$

در هریک از تمرینهای ۲۹ تا ۴۰، مجانبهای افقی و قائم نمودار تابعی را که به وسیله معادله مفروض تعریف می‌شود، بیابید و نمودار را رسم کنید.

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x} \cdot 31 \quad f(x) = \frac{4 - 3x}{x + 1} \cdot 30 \quad f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3} \cdot 29$$

$$F(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2 + 3}} \cdot 38 \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \cdot 33 \quad h(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \cdot 32$$

$$g(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} \cdot 36 \quad G(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 9} \cdot 25$$

$$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}} \cdot 38 \quad h(x) = \frac{2x}{6x^2 + 11x - 10} \cdot 27$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} \quad ۴۰$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} \quad ۳۹$$

در هر يك از تمرینهای ۴۱ تا ۴۶، مجانبهای افقی و قائم نمودار معادله داده شده را بیابید و نمودار را رسم کنید.

$$2xy + 2x - 3y + 6 = 0 \quad ۴۲$$

$$3xy - 2x - 4y - 3 = 0 \quad ۴۱$$

$$xy^2 + 3y^2 - 9x = 0 \quad ۴۴$$

$$x^2y^2 - x^2 + 4y^2 = 0 \quad ۴۳$$

$$2xy^2 + 4y^2 - 3x = 0 \quad ۴۶$$

$$(y^2 - 1)(x - 3) = 6 \quad ۴۵$$

برای توابعی که در تمرینهای ۴۷ و ۴۸ تعریف شده‌اند، با استفاده از تعریف ۱.۵.۲ ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ؛ یعنی، برای هر $\varepsilon > 0$ ، نشان دهید يك عدد $N > 0$ وجود دارد که وقتی $x > N$ داریم، $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \quad ۴۸$$

$$f(x) = \frac{x}{x - 1} \quad ۴۷$$

۴۹. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 3}{2x - 1} = 4$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك عدد

$$N < 0 \text{ وجود دارد که وقتی } x < N \text{ داریم، } \left| \frac{8x + 3}{2x - 1} - 4 \right| < \varepsilon.$$

۵۰. در قسمت (i) از قضیه حدی ۱۲ (۴.۴.۲) به جای « $x \rightarrow a$ » قرار دهید « $x \rightarrow +\infty$ » و این قسمت از قضیه را ثابت کنید.

۵۱. برای هر يك از عبارات زیر تعریفی بیاورید: (الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ؛

$$(ب) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (پ) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

۵۲. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر

$$N > 0 \text{، يك } M > 0 \text{ وجود دارد که وقتی } x > M \text{، داریم } (x^2 - 4) > N.$$

۵۳. با استفاده از تعریف مذکور در تمرین ۵۱ (الف)، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (6 - x - x^2) = -\infty.$$

۵۴. قسمت (ii) از قضیه حدی ۱۳ (۳.۵.۲) را ثابت کنید.

۵۵. می‌خواهیم يك محوطه مستطیل شکل به مساحت ۲۷۰۰ یارد مربع را با دیواره‌ای محصور کنیم و نیز دیواره دیگری بکشیم که محوطه را از وسط به دو قسمت تقسیم کند. هزینه دیواره‌ای که محوطه را تقسیم می‌کند، ۴ دلار در یارد است و دیواره‌ای که به دور محوطه کشیده می‌شود ۶ دلار در یارد هزینه دارد. فرض کنید طول دیواره وسط x یارد است و هزینه دیواره کشی $C(x)$ دلار. (الف) معادله معرف $C(x)$ را بنویسید، و قلمرو تابع C را مشخص کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ را بیابید و این نتایج را به زبان مسئله توضیح دهید؛ (پ) نمودار C را رسم کنید.

۵۶. می‌خواهیم مخزن سر‌بازی به شکل مکعب مستطیل بسازیم که قاعده آن مربع، و حجم آن ۱۲۵ یارد مکعب باشد. هزینه قاعده مخزن، ۸ دلار در هر یارد مربع و هزینه سطوح جانبی ۴ دلار در هر یارد مربع است. فرض کنید طول ضلع قاعده x یارد و هزینه، $C(x)$ دلار باشد. (الف) معادله معرف $C(x)$ را بنویسید، و قلمرو تابع C را مشخص کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ را بیابید، و این نتایج را به زبان مسئله توضیح دهید؛ (پ) نمودار C را رسم کنید.

۵۷. يك صفحه چاپی شامل ۲۴ اینچ مربع متن چاپ شده، در ۱۵ اینچ حاشیه در بالا و پایین متن، و ۱ اینچ حاشیه در طرفین متن است. فرض کنید عرض قسمت چاپ شده صفحه برابر با x اینچ، و کل مساحت صفحه $A(x)$ اینچ مربع باشد. (الف) معادله‌ای بنویسید که معرف $A(x)$ باشد، و قلمرو A را مشخص کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x)$ را بیابید، و این نتایج را به زبان مسئله توضیح دهید؛ (پ) نمودار A را رسم کنید.

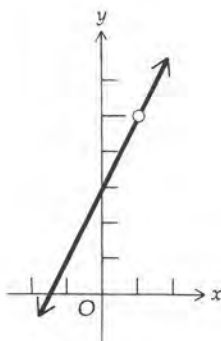
۶.۲ پیوستگی تابع در يك عدد [نقطه]

در بخش ۱.۲ تابع f را که به صورت زیر تعریف شده بود، در نظر گرفتیم

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}.$$

تابع f برای تمام مقادیر x بجز ۱ معین است. شکل ۱.۶.۲ نمودار f را نشان می‌دهد؛ این نمودار از تمام نقاط خط $y = 2x + 3$ بجز نقطه $(1, 5)$ تشکیل شده است. مشاهده می‌شود که در نقطه $(1, 5)$ يك شکستگی در نمودار f وجود دارد و گوییم که تابع f در نقطه به طول ۱ ناپیوسته است.

حال اگر، مثلاً، تعریف کنیم که $f(1) = 5$ ، تابع f برای تمام مقادیر x تعریف شده است ولی باز هم در نمودار تابع يك شکستگی وجود دارد و هنوز هم تابع f در ۱ ناپیوسته



شکل ۱۰.۶.۲

است. ولی، اگر $f(1)$ را برابر با ۵ تعریف کنیم، دیگر در نمودار شکستگی وجود ندارد و گوییم تابع f به ازای تمام مقادیر x پیوسته است.

۱۰.۶.۲ تعریف تابع f را در عدد a پیوسته گوییم اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشند.

(i) $f(a)$ وجود داشته باشد.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد.

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

اگر يك يا چند شرط از شرایط فوق برقرار نباشد، گوییم تابع f در a ناپیوسته است.

اکنون چند نمونه از توابع ناپیوسته را بررسی می‌کنیم. در هر نمونه نمودار تابع را رسم کرده نقاط شکستگی نمودار را معین می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در هر ناپیوستگی، کدامیک از سه شرط تعریف ۱۰.۶.۲ برقرار نیست.

○ نمونه ۱ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

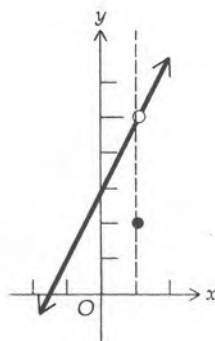
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

شکل ۲.۶.۲ نمودار این تابع را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که يك شکستگی در نمودار f در نقطه $x=1$ وجود دارد؛ حال سه شرط تعریف ۱۰.۶.۲ را بررسی می‌کنیم.

داریم $f(1) = 2$ ؛ بنابراین، شرط (i) برقرار است.

داریم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ؛ بنابراین، شرط (ii) برقرار است.

داریم $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ، اما $f(1) = 2$ ؛ بنابراین، شرط (iii) برقرار نیست.



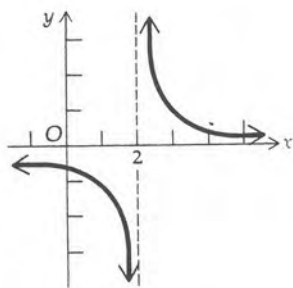
شکل ۲.۶.۲

○ پس، تابع f در نقطه به طول ۱ ناپیوسته است.

دقت کنید که اگر در نمونه ۱، $f(1)$ را برابر با ۵ تعریف کنیم، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ، و تابع f در ۱ پیوسته خواهد بود.

○ نمونه ۲ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$



شکل ۳.۶.۲

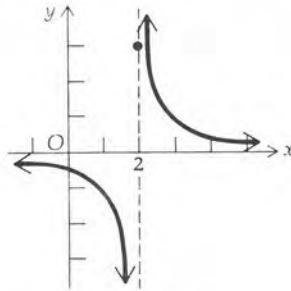
شکل ۳.۶.۲ نمودار f را نشان می‌دهد. در نمودار f در نقطه به طول ۲ يك شکستگی وجود دارد. حال، سه شرط تعریف ۱.۶.۲ را بررسی می‌کنیم. چون $f(2)$ تعریف نشده است، شرط (i) برقرار نیست و بنا براین، تابع f در ۲ ناپیوسته است.

○

○ نمونه ۳ فرض کنید تابع g به صورت زیر تعریف شده است

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

نمودار g در شکل ۴.۶.۲ رسم شده است. سه شرط تعریف ۱.۶.۲ را در عدد ۲ بررسی می‌کنیم. $g(2) = 3$ ؛ لذا شرط (i) برقرار است. $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ ؛ بنا بر این، شرط (ii) برقرار نیست. لذا g در ۲ ناپیوسته است.

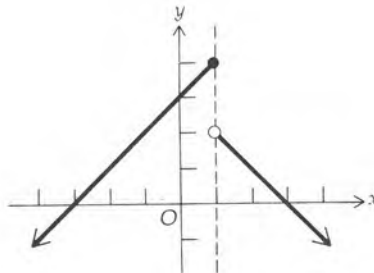


شکل ۴.۶.۲

○ نمونه ۴ فرض کنید h به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 1 \\ 3-x & x > 1 \end{cases}$$

شکل ۵.۶.۲ نمودار h را نشان می‌دهد. چون در نمودار، در نقطه $x = 1$ شکستگی وجود دارد، سه شرط تعریف ۱.۶.۲ را برای $x = 1$ بررسی می‌کنیم. داریم $h(1) = 4$ ؛ بنا بر این، شرط (i) برقرار است.



شکل ۵.۶.۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 + x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x) = 2.$$

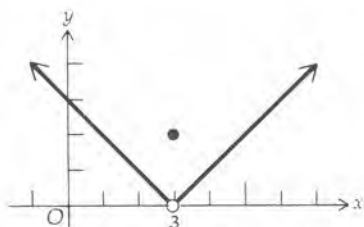
چون $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ ، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ وجود ندارد؛ از اینرو،

شرط (ii) برقرار نیست. بنابراین، تابع h در ۱ ناپیوسته است. ○

○ نمونه ۵ فرض کنید تابع F به صورت زیر تعریف شده است

$$F(x) = \begin{cases} |x-3| & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

شکل ۶.۶.۲، نمودار F را نشان می‌دهد. سه شرط تعریف ۱.۶.۲ را برای نقطهٔ سه طول ۳ بررسی می‌کنیم. داریم $F(3) = 2$ ؛ بنابراین، شرط (i) برقرار است. چون $\lim_{x \rightarrow 3^-} F(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} F(x) = 0$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 3} F(x)$ وجود دارد و برابر با ۰ است؛ بنابراین، شرط (ii) برقرار است. داریم $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 0$ ولی $F(3) = 2$ ؛ لذا شرط (iii) برقرار نیست. پس، F در ۳ ناپیوسته است.



○

شکل ۶.۶.۲

اکنون باید واضح باشد که مفهوم هندسی شکستگی نمودار در یک نقطهٔ معین، معادل است با ناپیوسته بودن یک تابع به‌ازای مقدار معینی از متغیر مستقل. بعد از نمونهٔ ۱ تذکر دادیم که اگر $f(1)$ را برابر با ۵ تعریف کنیم، آنگاه تابع f در عدد ۱ پیوسته خواهد بود. این مطلب مفهوم ناپیوستگی رفع‌شدنی را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، فرض کنید f تابعی است که در عدد a ناپیوسته است ولی $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود دارد. در این صورت، یا $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، و یا، $f(a)$ وجود ندارد. یک چنین ناپیوستگی را ناپیوستگی رفع‌شدنی گوییم، زیرا اگر f را در a طوری تعریف

کنیم که $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ در a پیوسته می‌شود. اگر ناپیوستگی رفع شدنی نباشد، آن را ناپیوستگی اساسی می‌نامیم.

مثال ۱ در هر يك از نمونه‌های ۱ تا ۵، معین کنید که ناپیوستگی رفع شدنی است یا اساسی.

حل در نمونه ۱، تابع در ۱ ناپیوسته است اما $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$. اگر $f(1)$ را برابر با ۵ تعریف کنیم، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ ؛ و بنا براین، ناپیوستگی این تابع رفع شدنی است.

در نمونه ۲، تابع f در ۲ ناپیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد؛ از اینرو ناپیوستگی این تابع اساسی است.

در نمونه ۳، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ وجود ندارد، و بنا براین، ناپیوستگی اساسی است.

در نمونه ۴، تابع h ناپیوسته است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ وجود ندارد؛ لذا، در این مورد هم ناپیوستگی اساسی است.

در نمونه ۵، داریم $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 0$ ، اما $F(3) = 2$ ؛ و بنا براین F در ۳ ناپیوسته است. با وجود این، اگر $F(3)$ را برابر با ۰ تعریف کنیم، تابع در ۳ پیوسته خواهد بود. پس، ناپیوستگی رفع شدنی است. ▲

تمرینهای ۶.۲

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۲۶، نمودار تابع را رسم کنید؛ سپس با ملاحظه اینکه نقاط شکستگی در چه جاهایی از نمودار هستند، مقداری از متغیر مستقل را که به ازای آنها تابع پیوسته است، معین کنید و نشان دهید که چرا تعریف ۱.۶.۲ در نقاط ناپیوستگی صدق نمی‌کند.

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \quad 2. \quad F(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$$

$$3. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3} & x \neq -3 \\ 1 & x = -3 \end{cases}$$

$$4. \quad G(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} & x \neq 4 \\ 2 & x = 4 \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{x-4}{x^2-3x-4} \quad .6$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & x \neq -2 \\ 0 & x = -2 \end{cases} \quad .8$$

$$h(x) = \frac{(x-1)(x^2-x-12)}{x^2-5x+4} \quad .10$$

$$H(x) = \frac{x^2-5x+4}{(x-1)(x^2-x-12)} \quad .12$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 1-x & 1 < x \end{cases} \quad .14$$

$$h(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6} \quad .5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-4} & x \neq 4 \\ 1 & x = 4 \end{cases} \quad .7$$

$$F(x) = \frac{x^4-16}{x^2-4} \quad .9$$

$$G(x) = \frac{x^2-4}{x^4-16} \quad .11$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \end{cases} \quad .13$$

$$g(t) = \begin{cases} t^2-4 & t < 2 \\ 4 & t = 2 \\ 4-t^2 & 2 < t \end{cases} \quad .15$$

$$H(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq -2 \\ 2-x & -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & 2 < x \end{cases} \quad .16$$

$$G(x) = \begin{cases} |2x+5| & x \neq -\frac{5}{2} \\ 3 & x = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad .18$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x+1} & 0 \leq x \end{cases} \quad .17$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x-3|} & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases} \quad .20$$

$$f(x) = \frac{x-3}{|x-3|} \quad .19$$

۲۱. تابع بزرگترین عدد صحیح (نمونه ۵ از بخش ۵.۱ را ببینید).

۲۲. تابع پله‌ای واحد (تمرین ۳۱ از تمرینهای ۶.۱ را ببینید).

۲۳. تابع علامت (تمرین ۳۲ از تمرینهای ۶.۱ را ببینید).

۲۴. تابع مذکور در تمرین ۳۴ از تمرینهای ۶.۱.

۲۵. تابع مذکور در تمرین ۴۵ از تمرینهای ۶.۱.

۲۶. تابع مذکور در تمرین ۴۴ از تمرینهای ۶.۱.

در هر يك از تمرینهای ۲۷ تا ۳۸، ثابت کنید که تابع داده شده در عدد a ناپیوسته است. سپس معین کنید که ناپیوستگی (رفع شدنی است یا اساسی). اگر ناپیوستگی (رفع شدنی است، $f(a)$ را طوری تعریف کنید که ناپیوستگی (رفع شود).

$$f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}; a = \frac{2}{3} \quad ۲۷.$$

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+5} & s \neq -5 \\ 0 & s = -5 \end{cases}; a = -5 \quad ۲۸.$$

$$f(t) = \begin{cases} 9 - t^2 & t \leq 2 \\ 3t + 2 & 2 < t \end{cases}; a = 2 \quad ۲۹.$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}; a = -3 \quad ۳۰.$$

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}; a = 3 \quad ۳۱.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}; a = 3 \quad ۳۲.$$

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - 4 & t \leq 2 \\ t & t > 2 \end{cases}; a = 2 \quad ۳۳.$$

$$f(y) = \frac{\sqrt{y+5} - \sqrt{5}}{y}; a = 0 \quad ۳۴.$$

$$f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+9}}{x}; a = 0 \quad ۳۵.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}; a = 0. \quad ۳۶$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}} - 2}{x-8}; a = 8. \quad ۳۷$$

$$f(x) = [x+2]; a = -1. \quad ۳۸$$

۳۹. فرض کنید f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & \text{زوج } [x] \\ |x - [x+1]| & \text{فرد } [x] \end{cases}$$

نمودار f را رسم کنید. تابع f در چه مقادیری از x ناپیوسته است؟

۴۰. تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nx}{1-nx}.$$

نمودار f را رسم کنید. تابع f در چه مقادیری از x ناپیوسته است؟

$$۴۱. \text{ فرض کنید } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a^3} - a}{x} & x \neq 0 \\ b & x = 0 \end{cases} \quad a \neq 0$$

b را طوری بیابید که f در $x = 0$ پیوسته باشد.

۴۲. فرض کنید که هزینه ارسال نامه با پست داخلی درجه یک به صورت زیر محاسبه می شود: تا یک اونس، ۱۵ دلار؛ بیش از یک اونس تا شش اونس، ۱۳ دلار برای هراونس (یا جزئی از اونس) اضافی؛ و اگر وزن بسته بیشتر از ۷ اونس و نا بیشتر از یک پوند باشد، ۱۶ دلار اضافه بر مبلغ قبلی. اگر وزن نامه یا بسته x اونس باشد، هزینه پست را به عنوان تابعی از x بیان کنید. نمودار این تابع را رسم کنید. تابع در چه جاهایی ناپیوسته است؟ نشان دهید که چرا تعریف ۱۰۶۰۲ در نقاط ناپیوستگی صدق نمی کند.

۴۳. هزینه حمل کالا توسط کشتی، مبتنی بر فرمولی است که طبق آن، هرچه وزن محموله افزایش یابد هزینه در هر پوند از کالا کاهش می یابد. فرض کنید وزن یک محموله x پوند و کل هزینه حمل برابر $C(x)$ دلار باشد، و

$$C(x) = \begin{cases} ۰.۸۵x & ۰ < x \leq ۵۰ \\ ۰.۷۰x & ۵۰ < x \leq ۲۰۰ \\ ۰.۶۵x & ۲۰۰ < x \end{cases}$$

نمودار C را رسم کنید. معین کنید که C در چه جاهایی ناپیوسته است، و نشان دهید که چرا تعریف ۱۰.۶.۲ در نقاط ناپیوستگی صدق نمی کند.

۲.۲ قضایای درباره پیوستگی

با استفاده از تعریف ۱۰.۶.۲ و قضایای حدی، قضیه زیر در مورد توابعی که در یک عدد پیوسته هستند، به دست می آید.

۱۰.۷.۲ قضیه اگر توابع f و g در عدد a پیوسته باشند، آنگاه

- (i) تابع $f+g$ در a پیوسته است.
- (ii) تابع $f-g$ در a پیوسته است.
- (iii) تابع $f \cdot g$ در a پیوسته است.
- (iv) تابع f/g در a پیوسته است، به شرطی که $g(a) \neq 0$.

برای نشان دادن نوع اثباتی که برای هر قسمت این قضیه لازم است، قسمت (i) را ثابت می کنیم.

چون f و g در a پیوسته هستند، بنا به تعریف ۱۰.۶.۲ داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (۱)$$

و

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a). \quad (۲)$$

بنابراین، طبق قضیه حدی ۴، و معادلات (۱) و (۲) داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a). \quad (۳)$$

اما معادله (۳) شرط پیوستگی $f+g$ در a است، و بنابراین اثبات قسمت (i) به انجام می رسد.

اثبات قسمتهای (ii)، (iii)، و (iv) قضیه را به عنوان تمرین واگذار می کنیم (به تمرینهای ۱۷-۱۹ مراجعه شود).

۲.۷.۲ قضیه تابع چند جمله ای در هر عدد پیوسته است.

برای اثبات این قضیه، تابع چند جمله ای f را که تعریفش به صورت زیر است، در

نظرمی گیریم

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n \quad b_0 \neq 0$$

که در آن n يك عدد صحیح غیر منفی است و $b_0, b_1, \dots, b_n$ اعدادی حقیقی هستند. با کاربرد مکرر قضایای حدی، می توانیم نشان دهیم که برای هر عدد حقیقی a داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_0 a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \dots + b_{n-1} a + b_n$$

که از آن نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می شود. تفصیل اثبات به عنوان تمرین واگذار می شود (به تمرین ۲۵ مراجعه کنید).

○ نمونه ۱

(الف) اگر $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ ، آنگاه f يك تابع چند جمله ای است و بنابراین، با استناد به قضیه ۲.۷.۲، در هر عددی پیوسته است.

(ب) اگر $g(x) = (x^2 - 5)^4$ ، آنگاه g يك تابع چند جمله ای است و بنابراین، در همه جا پیوسته است.

(پ) $f(x) \cdot g(x) = (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)(x^2 - 5)^4$ از قسمت (الف) و (ب) و با استفاده از قضیه ۱۰.۷.۲ (iii) نتیجه می شود که $g \cdot f$ در همه جا پیوسته است. دقت کنید که چون $(x^2 - 5)^4 (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)$ خود يك چند جمله ای است، مستقیماً از قضیه ۲.۷.۲ نیز می توان نتیجه گرفت که $g \cdot f$ در همه جا پیوسته است. ○

۳.۷.۲ قضیه تابع گویا در هر عدد از قلمرو خود پیوسته است.

اثبات اگر f يك تابع کسری باشد، می توان آن را به صورت خارج قسمت دو تابع چند جمله ای نوشت. بنابراین f را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

که در آن g و h دو چند جمله ای هستند، و قلمرو تابع f متشکل از تمام اعداد است بجز x هایی که در $h(x) = 0$ صدق می کنند.

اگر a عددی در قلمرو f باشد، داریم $h(a) \neq 0$ و بنابراین، از قضیه حدی ۹ نتیجه می شود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}{\lim_{x \rightarrow a} h(x)}. \quad (۲)$$

چون g و h توابعی چند جمله‌ای هستند، بنا به قضیه ۲.۷.۲ در a پیوسته می‌باشند؛ لذا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$. در نتیجه، از (۴) داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

بنابراین، f در هر عدد از قلمروش پیوسته است، و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۱ فرض کنید

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}.$$

همه مقادیری از x را بیابید که به ازای آنها f پیوسته است. قضایایی را که به کار می‌برید، مشخص کنید.

حل قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی است بجز اعدادی که به ازای آنها $x^2 - 9 = 0$. چون $x^2 - 9 = 0$ وقتی $x = \pm 3$ ، نتیجه می‌شود که قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی بجز ۳ و -۳ است.

تابع f یک تابع گویاست. لذا، بنا به قضیه ۳.۷.۲، f به ازای همه اعداد حقیقی بجز ۳ و -۳ پیوسته است. $\blacktriangle$

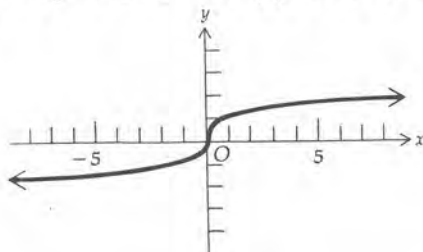
قضیه زیر، بلافاصله از قضیه ۱۲.۲.۲ و تعریف ۱.۶.۲ نتیجه می‌شود.

۴.۷.۲ قضیه فرض کنید $g(x) = \sqrt[n]{x}$ ، که n عدد صحیح مثبت دلخواهی است؛ در این صورت، g در a پیوسته است اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.

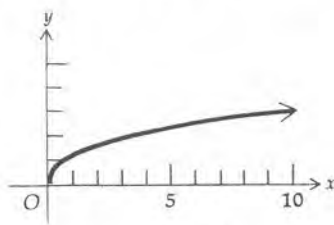
- (i) a عدد مثبت دلخواهی باشد.
- (ii) a عددی منفی یا صفر باشد، و n فرد باشد.

○ نمونه ۲

(الف) اگر $g(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه از قضیه ۴.۷.۲ (i) نتیجه می‌شود که g به ازای



شکل ۲.۷.۲



شکل ۱.۷.۲

هر عدد مثبتی پیوسته است. در شکل ۱۰.۷.۲، نمودار g رسم شده است.
 (ب) اگر $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ، از قضیه ۴.۷.۲ (i) و (ii) نتیجه می شود که h به ازای هر عدد حقیقی پیوسته است. نمودار h در شکل ۲.۷.۲ نشان داده شده است. $\circ$

تعریف ۱۰.۶.۲ می گوید که تابع f در عدد a پیوسته است اگر $f(a)$ موجود باشد،
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد، و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (۵)$$

تعریف ۱۰.۱۰.۲ می گوید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

حال اگر این تعریف را در مورد (۵) به کار ببریم، داریم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (۶)$$

اگر f در a پیوسته باشد، $f(a)$ وجود دارد، بنابراین، در عبارت (۶) لازم نیست که $|x - a| > 0$ ، زیرا وقتی $x = a$ ، (۶) به وضوح برقرار است. و بنابراین، قضیه زیر را داریم که به عنوان تعریف پیوستگی تابع با استفاده از نمادهای ε و δ به کار می رود.

۵.۷.۲ قضیه تابع f در a پیوسته است اگر f در يك بازه باز شامل a تعریف شده باشد، و برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد که

$$\text{وقتی } |x - a| < \delta, \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

این قضیه برای اثبات قضیه مهم زیر در مورد حد تابع مرکب به کار می رود.

۶.۷.۲ قضیه اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، و اگر تابع f در b پیوسته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b)$$

و به عبارت دیگر

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

اثبات چون f در b پیوسته است، عبارت زیر را با استفاده از قضیه ۵.۷.۲ می توان بیان کرد: برای هر $\varepsilon_1 > 0$ ، يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } |y - b| < \delta_1, \quad |f(y) - f(b)| < \varepsilon_1. \quad (۷)$$

چون $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، برای هر $\delta_1 > 0$ ، يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد كه

$$(۸) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |g(x) - b| < \delta_1$$

حال، وقتی $0 < |x - a| < \delta_2$ ، در رابطه (۷) به جای y قرار می‌دهیم $g(x)$ و عبارت زیر را بیان می‌کنیم: برای هر $\varepsilon_1 > 0$ ، يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد كه

$$(۹) \quad \text{وقتی } |g(x) - b| < \delta_1, \quad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1$$

از عبارات (۸) و (۹) نتیجه می‌شود كه برای هر $\varepsilon_1 > 0$ ، يك $\delta_2 > 0$ وجود دارد كه

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1$$

كه از آن نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$$

و به عبارت دیگر،

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)).$$

يك کاربرد مستقیم قضیه ۶.۷.۲ در اثبات قضایای حدی ۹ و ۱۰ است كه اثبات آنها را تا اینجا به تعویق انداخته‌ایم؛ این قضایا را دوباره بیان و اثبات می‌کنیم؛ اما قبل از عرضه صورت هر قضیه، يك حالت خاص را به عنوان مثال می‌آوریم.

مثال ۲ با استفاده از قضیه ۶.۷.۲ و بدون استفاده از قضیه حدی ۹ (در باره حد خارج قسمت)، حد زیر را پیدا کنید

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

حل فرض کنیم توابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند

$$f(x) = 4x - 3 \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 + 2x + 5$$

حال $f(x)/g(x)$ را به صورت حاصلضرب $f(x)$ و $1/g(x)$ در نظر می‌گیریم و قضیه حدی ۶ (در مورد حد حاصلضرب) را به کار می‌بریم. قبل از هر چیز، باید $\lim_{x \rightarrow 2} 1/g(x)$ را

پیدا کنیم؛ برای این کار، $1/g(x)$ را به صورت مقدار يك تابع مرکب در نظر می‌گیریم.

اگر تابع h به صورت $h(x) = 1/x$ تعریف شده باشد، آنگاه تابع مرکب $h \circ g$

به صورت $h(g(x)) = 1/g(x)$ تعریف می‌شود. اما داریم

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 5) = 13.$$

برای استفاده از قضیه ۶.۷.۲، تابع h باید در عدد ۱۳ پیوسته باشد، که درستی این موضوع از قضیه ۱۱.۲.۲ نتیجه می شود. پس

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} h(g(x)) \\ &= h(\lim_{x \rightarrow 2} g(x)) \quad (\text{بنا به قضیه ۶.۷.۲}) \\ &= h(13) \\ &= \frac{1}{13}\end{aligned}$$

بنابراین، از قضیه حدی ۶ نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 3}{x^2 + 2x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 3) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \\ &= 5 \cdot \frac{1}{13} \\ &= \frac{5}{13}.\end{aligned}$$

قضیه حدی ۹ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و اگر $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ و $M \neq 0$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

اثبات فرض می کنیم تابع h به صورت $h(x) = 1/x$ تعریف شده باشد. آنگاه، تابع مرکب $h \circ g$ به صورت $h(g(x)) = 1/g(x)$ تعریف می شود. تابع h همه جا بجز در ۰ پیوسته است (صحت این موضوع از قضیه ۱۱.۲.۲ نتیجه می شود). بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} h(g(x)) \\ &= h(\lim_{x \rightarrow a} (g(x))) \quad (\text{بنا به قضیه ۶.۷.۲}) \\ &= h(M) \\ &= \frac{1}{M}.\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه حدی ۶ و نتیجه بالا، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \\ &= L \cdot \frac{1}{M} \\ &= \frac{L}{M}.\end{aligned}$$

□

مثال ۳ با استفاده از قضیه ۶.۷.۲ و بدون استفاده از قضیه حدی ۱۰، حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[4]{3x-5}.$$

حل فرض کنیم توابع f و h به صورت زیر تعریف شده‌اند

$$h(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{و} \quad f(x) = 3x - 5$$

در این صورت، تابع مرکب $h \circ f$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $h(f(x)) = \sqrt[4]{3x-5}$. داریم $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} (3x-5) = 16$. پس، برای استفاده از قضیه ۶.۷.۲ در مورد تابع مرکب، تابع $h \circ f$ باید در ۱۶ پیوسته باشد که صحت این امر از قضیه ۴.۷.۲ نتیجه می‌شود. پس، راه حل به این صورت است

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[4]{3x-5} &= \lim_{x \rightarrow 7} h(f(x)) \\ &= h(\lim_{x \rightarrow 7} f(x)) && (\text{بنا به قضیه ۶.۷.۲}) \\ &= h(16) \\ &= \sqrt[4]{16} \\ &= 2.\end{aligned}$$

▲

قضیه حدی ۱۰ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

که در آن اگر $L > 0$ ، n هر عدد طبیعی می‌تواند باشد و اگر $L \leq 0$ ، n عدد صحیح فرد مثبتی است.

اثبات فرض کنیم تابع h به صورت $h(x) = \sqrt[n]{x}$ تعریف شده باشد. در این صورت،

تابع مرکب $h \circ f$ به صورت $h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$ تعریف می‌شود. از قضیه ۶.۷.۲ نتیجه می‌شود که h در L پیوسته است، اگر $L > 0$ و n عدد طبیعی دلخواهی باشد یا اگر $L \leq 0$ و n عدد صحیح فرد مثبتی باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) \\ &= h(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) \quad (\text{بنابه قضیه ۶.۷.۲}) \\ &= h(L) \\ \square \quad &= \sqrt[n]{L}. \end{aligned}$$

کاربرد دیگری از قضیه ۶.۷.۲، در اثبات این نکته است که تابع پیوسته‌ای از یک تابع پیوسته، خود پیوسته است. این نتیجه را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

۷.۷.۲ قضیه اگر تابع g در a پیوسته و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ در a پیوسته است.

اثبات چون g در a پیوسته است، داریم

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a). \quad (10)$$

حال، می‌دانیم که f در $g(a)$ پیوسته است؛ از اینرو می‌توانیم قضیه ۶.۷.۲ را برای تابع مرکب $f \circ g$ به کار ببریم و نتیجه بگیریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \\ &= f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) \\ &= f(g(a)) \quad (\text{بنابه معادله ۱۰}) \\ &= (f \circ g)(a) \end{aligned}$$

$\square$ که ثابت می‌کند $f \circ g$ در a پیوسته است.

قضیه ۷.۷.۲ را می‌توان برای یافتن نقاطی که تابع در آن نقاط پیوسته است، به کار برد. مثال زیر چگونگی این امر را نشان می‌دهد.

مثال ۴ فرض کنید

$$h(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

مقادیری از x را که تابع h به ازای آنها پیوسته است، پیدا کنید.

حل اگر فرض کنیم $g(x) = 4 - x^2$ و $f(x) = \sqrt{x}$ ، آنگاه $h(x) = (f \circ g)(x)$. چون g يك تابع چند جمله‌ای است، به ازای همه اعداد پیوسته است. به علاوه، تابع f به ازای هر عدد مثبت پیوسته است (بنابنه قضیه ۴.۷.۲). بنابراین، از قضیه ۷.۷.۲ نتیجه می‌شود که تابع h برای هر x که در رابطه $g(x) > 0$ صدق کند، پیوسته است؛ یعنی این تابع وقتی پیوسته است که $4 - x^2 > 0$. بنابراین h به ازای هر عدد واقع در بازه باز $(-2, 2)$ پیوسته است. ▲

در بخش بعد («پیوستگی روی يك بازه»)، مفهوم پیوستگی را گسترش می‌دهیم تا پیوستگی در نقطه انتهایی يك بازه بسته را دربرگیرد. در آنجا، مفاهیم پیوستگی از طرف راست و پیوستگی از طرف چپ را تعریف خواهیم کرد و به وسیله این تعاریف نشان خواهیم داد که تابع h در مثال ۴، روی بازه بسته $[-2, 2]$ نیز پیوسته است.

مثال ۵ فرض کنید

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}.$$

مقادیری برای x بیابید که به ازای آنها f پیوسته باشد، و قضیه‌ای را که به کار می‌برید مشخص کنید.

حل فرض کنیم g و h توابعی باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{و} \quad h(x) = \frac{2-x}{3+x}.$$

قلمرو g مجموعه اعداد نامنفی است، و قلمرو h مجموعه همه اعداد حقیقی بجز ۳- است.

$$\begin{aligned} (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g\left(\frac{2-x}{3+x}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} \end{aligned}$$

پس،

$$f(x) = (g \circ h)(x).$$

می‌خواهیم قلمرو f را تعیین کنیم. قلمرو f مجموعه همه اعدادی است که به ازای آنها، $h(x)$ نامنفی باشد؛ یعنی همه اعدادی که به ازای آنها داشته باشیم

$$\frac{2-x}{3+x} \geq 0. \quad (11)$$

برای تعیین مقادیری از x که در (۱۱) صدق می کنند، به جدول ۱۰۷۰۲ مراجعه می کنیم. در این جدول، بازه هایی را در نظر می گیریم که برای آنها، $x < -3$ ، $-3 < x < 2$ و $x < 2$ ؛ زیرا صورت کسر به ازای $x = 2$ تغییر علامت می دهد و مخرج کسر به ازای $x = -3$.

جدول ۱۰۷۰۲

	$2-x$	$3+x$	$\frac{2-x}{3+x}$	$f(x)$
$x < -3$	+	-	-	وجود ندارد
$x = -3$	۵	۰	نامعین	وجود ندارد
$-3 < x < 2$	+	+	+	+
$x = 2$	۰	۵	۰	۰
$2 < x$	-	+	-	وجود ندارد

باتوجه به این جدول، ملاحظه می کنیم که $f(x)$ در صورتی وجود دارد که x در بازه نیمباز از طرف چپ $[-3, 2)$ باشد؛ لذا، این بازه قلمرو f است. بنا به قضیه ۳۰۷.۲، h در هر عدد از قلمروش پیوسته است؛ یعنی به ازای همه اعداد بجز ۳- تابع g به ازای همه اعداد مثبت پیوسته است. بنابراین، از قضیه ۴۰۷.۲ نتیجه می شود که f در همه مقادیر x که $x \neq -3$ ، پیوسته است و

$$\frac{2-x}{3+x} > 0. \quad (12)$$

باتوجه به جدول ۱۰۷۰۲، این مقادیر، اعداد واقع در بازه باز $(-3, 2)$ هستند. ▲

در مثال ۳ از بخش ۸.۲، که در آنجا مفهوم پیوستگی گسترش می یابد تا پیوستگی در انتهای يك بازه بسته را در بر گیرد، نشان داده می شود که تابع f مذکور در مثال ۵، در بازه $[-3, 2)$ پیوسته است.

تمرینهای ۷.۲

دتمرینهای ۱ تا ۱۶، همه مقادیری از x را که به ازای آنها تابع داده شده پیوسته است، بیابید. قضایایی را که به کار می برید، مشخص کنید.

$$f(x) = (x^2 - 2)^4 \quad .۲$$

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 1 \quad .۱$$

$$f(x) = (x - 5)^2(x^2 + 4)^5 \quad .۴$$

$$f(x) = x^2(x + 3)^2 \quad .۳$$

$$h(x) = \frac{x+1}{2x+5} \quad .۶$$

$$g(x) = \frac{x}{x-3} \quad .۵$$

$$G(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8} \quad .۸$$

$$F(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad .۷$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \quad .۱۰$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - 4} \quad .۹$$

$$h(x) = \frac{x+2}{x^3 - 7x - 6} \quad .۱۲$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} \quad .۱۱$$

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad .۱۴$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 16} \quad .۱۳$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad .۱۶$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} \quad .۱۵$$

۱۷. قضیه ۱.۷.۲ (ii) را ثابت کنید.

۱۸. قضیه ۱.۷.۲ (iii) را ثابت کنید.

۱۹. قضیه ۱.۷.۲ (iv) را ثابت کنید.

۲۰. قضیه ۲.۷.۲ را ثابت کنید و گام به گام نشان دهید که کدام قضایای حدی به کار می روند.

دتمرینهای ۲۱ تا ۲۸، کاربرد قضیه ۶.۷.۲ را در پیدا کردن حد نشان دهید.

$$\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+4}{t-2} \quad .۲۳$$

$$\lim_{t \rightarrow 3} \frac{2}{t^2 - 4} \quad .۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad .۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} \quad .۲۶$$

$$\lim_{y \rightarrow -4} \sqrt[3]{3y + 4} \quad .۲۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 1} \quad .۲۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{\sqrt[3]{1-x^2}} \quad .۲۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x^2 + 5x - 3}} \quad .۲۷$$

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۶، توابع f و g معرفی شده‌اند. در هر تمرین، $f \circ g$ را معرفی کنید و همهٔ مقادیری از x را بیابید که به‌ازای آنها $f \circ g$ پیوسته است.

$$f(x) = x^2; g(x) = x^2 - 3 \quad ۳۰ \qquad f(x) = x^2; g(x) = \sqrt{x} \quad ۲۹$$

$$f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x + 1 \quad ۳۲ \qquad f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{1}{x-2} \quad ۳۱$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; g(x) = \sqrt{x+1} \quad ۳۴ \qquad f(x) = \frac{1}{x-2}; g(x) = \sqrt{x} \quad ۳۳$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}; g(x) = \sqrt[3]{x} \quad ۳۶ \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-1}; g(x) = \sqrt{x} \quad ۳۵$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۵۴، همهٔ مقادیری از x را بیابید که تابع داده شده به‌ازای آنها پیوسته است.

$$g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-4}} \quad ۳۹ \qquad g(x) = \sqrt{x^2-9} \quad ۳۸ \qquad f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad ۳۷$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{2-x}{5+x}} \quad ۴۱ \qquad f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} \quad ۴۰$$

$$f(x) = |x-5| \quad ۴۳ \qquad F(x) = \sqrt{6x^2-x-2} \quad ۴۲$$

$$h(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \quad ۴۶ \qquad g(x) = \frac{|x|}{x} \quad ۴۵ \qquad f(x) = |9-x^2| \quad ۴۴$$

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x} \right)^{1/2} \quad ۴۸ \qquad f(x) = x^2(x^{-2} + x^{-1/2})^2 \quad ۴۷$$

$$f(x) = (x^{-2} + (x-4)^{-1/2})^2 \quad ۵۰ \qquad g(x) = \left(\frac{2}{x-3} - \frac{x}{x^2-1} \right)^{1/2} \quad ۴۹$$

$$g(x) = \left[\frac{2}{x} \right] \quad ۵۲ \qquad f(x) = [2x-3] \quad ۵۱$$

$$F(x) = 1-x+[x]-[1-x] \quad ۵۴ \qquad g(x) = [\sqrt{1-x^2}] \quad ۵۳$$

۵۵. ثابت کنید که اگر تابع f در t پیوسته باشد، آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} f(t-h) = f(t)$.

۵۶. ثابت کنید که اگر f در a پیوسته باشد و g در a ناپیوسته باشد، آنگاه $f+g$ در

a ناپیوسته است.

۵۷. اگر

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ثابت کنید که f و g هر دو در 0 ناپیوسته اند ولی حاصلضرب $f \cdot g$ در 0 پیوسته است.

۵۸. مثالی از دو تابع بیاورید که هر دو در عددی مانند a ناپیوسته اند ولی مجموع آنها در a پیوسته است.

۵۹. مثالی بیاورید که نشان دهد حاصلضرب دو تابع f و g ممکن است در عددی مانند a پیوسته باشد در حالی که f در a پیوسته، ولی g در a ناپیوسته باشد.

۶۰. اگر تابع g در عددی مانند a پیوسته باشد و تابع f در همین عدد ناپیوسته باشد، آیا ممکن است که خارج قسمت دو تابع، f/g ، در a پیوسته باشد؟ جواب خود را ثابت کنید.

۸.۲ پیوستگی روی يك بازه

در مثال ۴ از بخش ۷.۲، نشان دادیم که تابع h با ضابطه $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، به ازای هر عدد واقع در بازه باز $(-2, 2)$ پیوسته است. به دلیل این واقعیت، گوییم که تابع h ، روی بازه باز $(-2, 2)$ پیوسته است. تعریف کلی پیوستگی روی يك بازه باز به صورت زیر است.

۱۰.۸.۲ تعریف گفته می شود که تابعی روی يك بازه باز پیوسته است اگر و تنها اگر آن تابع به ازای هر عدد واقع در آن بازه باز پیوسته باشد.

مثال ۱ اگر $f(x) = 1/(x-3)$ ، f روی کدام بازه های باز پیوسته است؟

حل تابع f به ازای هر عدد بجز ۳ پیوسته است. پس، بنا به تعریف ۱۰.۸.۲، f روی هر بازه باز a که شامل عدد ۳ نباشد، پیوسته است. ▲

دوباره به تابع h ، با ضابطه $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، مراجعه می کنیم. می دانیم که h روی بازه باز $(-2, 2)$ پیوسته است. ولی چون h روی هیچ بازه باز a که شامل -2 یا 2 باشد، تعریف نشده است، در مورد $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ نمی توان چیزی گفت. از اینرو، برای بحث در مسئله پیوستگی h روی بازه بسته $[-2, 2]$ ، باید مفهوم

پیوستگی را گسترش دهیم تا پیوستگی در نقطه انتهایی يك بازه بسته را در برگیرد. برای این کار، ابتدا پیوستگی از طرف راست و پیوستگی از طرف چپ را تعریف می‌کنیم.

۲.۸.۲ تعریف گفته می‌شود که تابع f از طرف راست در عدد a پیوسته است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

- (i) $f(a)$ وجود داشته باشد
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ وجود داشته باشد
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

۳.۸.۲ تعریف گفته می‌شود که تابع f از طرف چپ در عدد a پیوسته است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

- (i) $f(a)$ وجود داشته باشد
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ وجود داشته باشد
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

۴.۸.۲ تعریف چنانچه قلمرو تابعی شامل بازه بسته $[a, b]$ باشد، گفته می‌شود که آن تابع روی $[a, b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و همچنین، از طرف راست در a و از طرف چپ در b پیوسته باشد.

مثال ۲ تابع h به صورت زیر تعریف شده است: $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$. ثابت کنید که این تابع روی بازه بسته $[-2, 2]$ پیوسته است. نمودار h روی $[-2, 2]$ را رسم کنید.

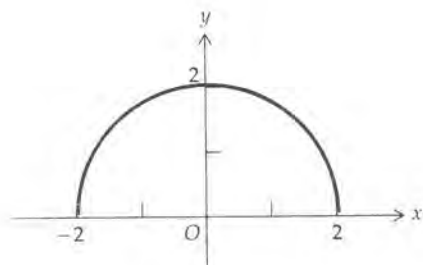
حل تابع h روی بازه باز $(-2, 2)$ پیوسته است و

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = h(-2)$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = h(2).$$

پس، بنا به تعریف ۴.۸.۲، h روی بازه بسته $[-2, 2]$ پیوسته است. نمودار h روی $[-2, 2]$ ، در شکل ۱.۸.۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۰۸-۲

۵۰۸-۲ تعریف

- (i) چنانچه قلمرو تابعی شامل بازه نیمه باز از طرف راست $[a, b]$ باشد، گفته می‌شود که آن تابع روی $[a, b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و از طرف راست نیز در a پیوسته باشد.
- (ii) چنانچه قلمرو تابعی شامل بازه نیمه باز از طرف چپ $(a, b]$ باشد، گفته می‌شود که آن تابع روی $(a, b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر روی بازه باز (a, b) پیوسته باشد و از طرف چپ نیز در b پیوسته باشد.

مثال ۳ فرض کنید f تابعی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}.$$

تعیین کنید که روی هر یک از بازه‌های زیر، تابع f پیوسته است یا ناپیوسته: $(-3, 2)$ ، $[-3, 2]$ ، $(-3, 2]$ ، $[-3, 2)$.

حل در مثال ۵ از بخش ۷۰۲ معلوم شد که قلمرو f ، بازه نیمه باز از طرف چپ $(-3, 2]$ است. همچنین، در آن مثال نشان داده شد که f در هر عدد از بازه باز $(-3, 2)$ ، و بنابراین روی این بازه، پیوسته است. چون

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} &= 0 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که f از طرف چپ در ۲ پیوسته است. ولی f از طرف راست در ۳ پیوسته نیست زیرا تابع در ۳ معین نیست. به علاوه،

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{\frac{2-x}{3+x}} = +\infty$$

پس، f روی $(-3, 2]$ پیوسته و روی $[-3, 2]$ و $[-3, 2]$ ناپیوسته است. ▲

مثال ۱۴ اگر داشته باشیم $g(x) = [x]$ ، و $1 \leq x \leq 3$ ، در مورد پیوستگی g بحث کنید.

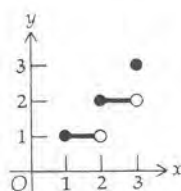
حل شکل ۲۰.۸.۲ نمودار g را نشان می‌دهد. فرض کنید u عددی در بازه $(1, 2)$ باشد. در این صورت، $[u] = 1$ ، و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow u} [x] = 1$. از اینرو اگر $1 < u < 2$ ، $\lim_{x \rightarrow u} g(x) = g(u)$. بنابراین g روی بازه $(1, 2)$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 = g(1)$$

بنابراین، g از طرف راست در ۱ پیوسته است. اما داریم

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$$

و چون $g(2) = 2$ ، پس g از طرف چپ در ۲ پیوسته نیست. بنابراین، تابع g روی بازه نیمه باز از طرف راست $[1, 2)$ پیوسته است.



شکل ۲۰.۸.۲

به طور مشابه دیده می‌شود که g در هر عدد u ، که $2 < u < 3$ ، پیوسته است. در ۲، g از طرف راست پیوسته است زیرا $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = g(2)$ ، ولی g از طرف چپ در ۳ پیوسته نیست زیرا $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 2$ و $g(3) = 3$. از اینرو، g روی بازه $[2, 3)$ نیز پیوسته است. ▲

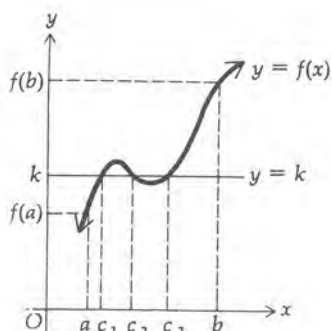
اکنون، قضیه مهمی را درباره تابعی که روی يك بازه بسته پیوسته است، مورد بحث قرار می‌دهیم. این قضیه، قضیه مقدار میانی نامیده می‌شود و در بخشهای بعدی مورد نیاز است.

۶.۸.۲ قضیه (قضیه مقدار میانی) اگر تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، و اگر $f(a) \neq f(b)$ ، آنگاه به ازای هر عدد k بین $f(a)$ و $f(b)$ ، عددی مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که $f(c) = k$.

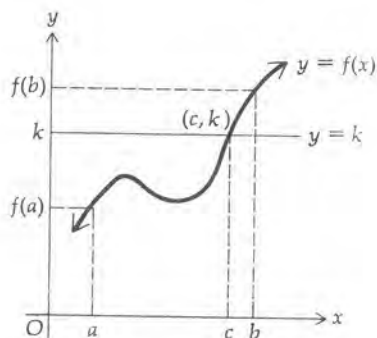
اثبات این قضیه خارج از قلمرو این کتاب است؛ این اثبات را می‌توان در کتابهای

حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته دید. معهذ، تعبیرهندسی این قضیه را مورد بحث قرار می‌دهیم. در شکل ۳.۸.۲، نقطه‌ای دلخواه روی محور y ‌ها بین نقاط $(0, f(a))$ و $(0, f(b))$ است. قضیه ۶.۸.۲ می‌گوید که خط $y = k$ باید منحنی به معادله $y = f(x)$ را در نقطه (c, k) قطع کند، که c بین a و b واقع است. شکل ۳.۸.۲ این تقاطع را نشان می‌دهد.

دقت کنید که ممکن است به ازای بعضی از مقادیر k ، بیش از یک مقدار برای c وجود داشته باشد. قضیه می‌گوید که همیشه، حداقل یک مقدار برای c وجود دارد ولی این مقدار لزوماً یکتا نیست. شکل ۴.۸.۲، سه مقدار ممکن c (c_1, c_2, c_3) به ازای یک مقدار خاص k را نشان می‌دهد. قضیه ۶.۸.۲ می‌گوید که اگر تابع f روی یک بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه وقتی x همه مقادیر بین a و b را اختیار می‌کند، f هر مقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را به خود می‌گیرد. در نمونه زیر، اهمیت پیوستگی f روی $[a, b]$ نشان داده می‌شود.



شکل ۴.۸.۲



شکل ۳.۸.۲

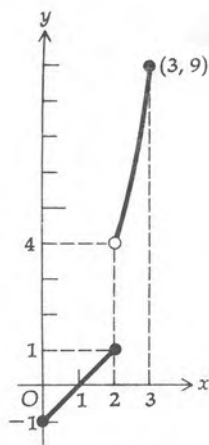
○ نمونه ۱ تابع f را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۵.۸.۲ نشان داده شده است.

تابع f در عدد ۲، که در بازه بسته $[0, 3]$ قرار دارد، ناپیوسته است؛ $f(0) = -1$ و $f(3) = 9$. اگر k عددی دلخواه بین ۴ و ۹ باشد، هیچ مقدار c بی وجود ندارد که $f(c) = k$ ، زیرا هیچ مقداری از تابع بین ۴ و ۹ قرار ندارد. ○

تابع دیگری که قضیه ۶.۸.۲ در مورد آن برقرار نیست، در نمونه بعدی ارائه می‌شود.



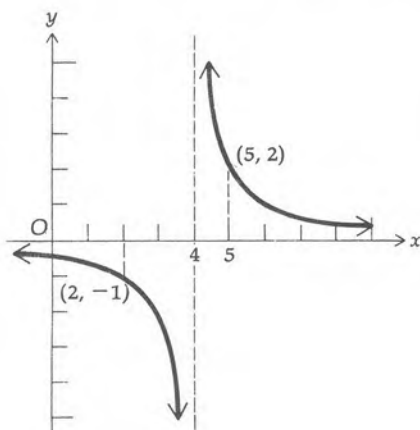
شکل ۵.۸.۲

○ نمونه ۲ فرض کنید تابع g به صورت زیر تعریف شده باشد

$$g(x) = \frac{2}{x-4}.$$

نمودار این تابع در شکل ۶.۸.۲ نشان داده شده است.

تابع g در ۴، که در بازه بسته $[2, 5]$ قرار دارد، ناپیوسته است؛ $g(2) = -1$ و $g(5) = 2$. اگر k عدد دلخواهی بین ۱- و ۲ باشد، هیچ مقداری از c بین ۵ و ۲ وجود ندارد که $g(c) = k$. بخصوص، اگر $k = 1$ ، آنگاه $g(6) = 1$ ، ولی ۶ در بازه $[2, 5]$ قرار ندارد.



شکل ۶.۸.۲

مثال ۵ فرض کنید که تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = 4 + 3x - x^2 \quad 2 \leq x \leq 5$$

درستی قضیه مقدارمیان را به ازای $k = 1$ بررسی کنید.

حل ۶ $f(2) = -6$ ؛ $f(5) = -6$. برای یافتن c ، قراری دهیم $f(c) = k = 1$ ؛ یعنی،

$$4 + 3c - c^2 = 1$$

$$c^2 - 3c - 3 = 0$$

که از اینجا به دست می آید

$$c = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$(3 - \sqrt{21})/2$ را رد می کنیم زیرا این عدد خارج از بازه $[2, 5]$ است. عدد $(3 + \sqrt{21})/2$ در بازه $[2, 5]$ است و

$$\blacktriangle \quad f\left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}\right) = 1.$$

تمرینهای ۸.۲

در تمرینهای ۱ تا ۱۴، تعیین کنید که تابع در هریک از بازه های مشخص شده پیوسته است یا ناپیوسته.

$$1. \quad f(x) = \frac{2}{x+5}; (3, 7), [-6, 4), (-\infty, 0), (-5, +\infty), [-5, +\infty), [-10, -5).$$

$$2. \quad g(x) = \frac{x}{x-2}; (-\infty, 0], [0, +\infty), (0, 2), (0, 2], [2, +\infty), (2, +\infty).$$

$$3. \quad f(t) = \frac{t}{t^2-1}; (0, 1), (-1, 1), [0, 1), (-1, 0], (-\infty, -1), (1, +\infty).$$

$$4. \quad f(r) = \frac{r+3}{r^2-4}; (0, 4], (-2, 2), (-\infty, -2], (2, +\infty), [-4, 4], (-2, 2).$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 9}; (-\infty, -3), (-\infty, -3], (3, +\infty), [3, +\infty), (-3, 3). \quad .5$$

$$f(x) = [x]; \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), (1, 2), [1, 2), (1, 2]. \quad .6$$

$$f(t) = \frac{|t-1|}{t-1}; (-\infty, 1), (-\infty, 1], [-1, 1], (-1, +\infty), (1, +\infty). \quad .7$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < -2 \\ x-5 & -2 \leq x \leq 1; (-\infty, 1), (-2, +\infty), (-2, 1), \\ 3-x & 1 < x \end{cases} \quad .8$$

$$[-2, 1), [-2, 1].$$

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}; (-2, 2), [-2, 2], [-2, 2], (-2, 2), (-\infty, -2], (2, +\infty). \quad .9$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}; (-2, 2), [-2, 2], [-2, 2), (-2, 2], (-\infty, -2), [2, +\infty). \quad .10$$

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{3+2y-y^2}}; (-1, 3), [-1, 3], [-1, 3), (-1, 3]. \quad .11$$

$$f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}; (-1, 3), [-1, 3], [-1, 3), (-1, 3]. \quad .12$$

$$G(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{4-x}}; (-\infty, -3), (-3, 3), [-3, 3], [-3, 3), [3, 4], (3, 4], [4, +\infty), (4, +\infty). \quad .13$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2+x}{25-x^2}}; (-\infty, -5), (-\infty, -5], [-5, -2], [-2, 5], [-2, 5), (-2, 5), (-2, 5), [5, +\infty), (5, +\infty). \quad .14$$

در تمرینهای ۱۵ تا ۲۲، بازه‌هایی را تعیین کنید که تابع داده شده روی آنها پیوسته است.

$$g(y) = \frac{4}{y+1}. \quad .16$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4}. \quad .15$$

$$F(x) = \sqrt{\frac{x-5}{x+6}} \cdot 18 \quad h(x) = \sqrt{x^2 - x - 12} \cdot 17$$

۱۹. تابع مذکور در تمرین ۳۵ از تمرینهای ۶۰۱.

۲۰. تابع مذکور در تمرین ۳۶ از تمرینهای ۶۰۱.

۲۱. تابع مذکور در تمرین ۳۹ از تمرینهای ۵۰۱.

۲۲. تابع مذکور در تمرین ۴۰ از تمرینهای ۵۰۱.

۲۳. ثابت کنید تابع g که با $g(x) = \sqrt{x}$ تعریف می‌شود، روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

۲۴. ثابت کنید که تابع f در مثال ۴ از بخش ۳.۲ روی بازه بسته $[-3, 3]$ پیوسته است.

۲۵. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۱۷ از تمرینهای ۳۰۲، روی بازه بسته $[-2, 2]$ پیوسته است.

۲۶. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۱۸ از تمرینهای ۳۰۲، روی بازه بسته $[-1, 1]$ پیوسته است.

۲۷. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۲۱ از تمرینهای ۳۰۲، روی بازه بسته $[-3, 3]$ پیوسته است.

۲۸. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۲۲ از تمرینهای ۳۰۲، روی بازه بسته $[-1, 1]$ پیوسته است.

در تمرینهای ۲۹ تا ۳۲، مقادیری برای ثابتهای k و c بیابید که تابع f روی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته باشد، و نمودار تابع حاصل را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} kx - 1 & x < 2 \\ kx^2 & 2 \leq x \end{cases} \cdot 30 \quad f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & x \leq 4 \\ kx - 1 & 4 < x \end{cases} \cdot 29$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2c & x < -2 \\ 3cx + k & -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2k & 1 < x \end{cases} \cdot 32 \quad f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ cx + k & 1 < x < 4 \\ -2x & 4 \leq x \end{cases} \cdot 31$$

۳۳. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۵۵ از تمرینهای ۵۰۲ روی قلمروش پیوسته است.

۳۴. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۵۶ از تمرینهای ۵۰۲ روی قلمروش پیوسته است.

۳۵. ثابت کنید که تابع مذکور در تمرین ۵۷ از تمرینهای ۵۰۲ روی قلمروش پیوسته است.

۳۶. اگر $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$ و $k > 0$ ، ثابت کنید که f روی بازه بسته $[-k, k]$ پیوسته است.

در هر یک از تمرینهای ۳۷ تا ۴۴، یک تابع f و یک بازه بسته $[a, b]$ داده می‌شوند. تعیین کنید که قضیه مقدار میانی برای مقدار داده شده k برقرار است یا خیر. اگر این قضیه برقرار است عدد c بیابید که به ازای آن، $f(c) = k$. اگر قضیه برقرار نیست، دلیل آن را ذکر کنید. نمودار منحنی و خط $y = k$ را رسم کنید.

$$f(x) = 2 + x - x^2; [a, b] = [0, 3]; k = 1. \quad ۳۷$$

$$f(x) = x^2 + 5x - 6; [a, b] = [-1, 2]; k = 4. \quad ۳۸$$

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}; [a, b] = [-4, 5, 3]; k = 3. \quad ۳۹$$

$$f(x) = -\sqrt{100 - x^2}; [a, b] = [0, 8]; k = -8. \quad ۴۰$$

$$f(x) = \frac{4}{x+2}; [a, b] = [-3, 1]; k = \frac{1}{4}. \quad ۴۱$$

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -4 \leq x \leq -2 \\ 2-x & -2 < x \leq 1 \end{cases}; [a, b] = [-4, 1]; k = \frac{1}{4}. \quad ۴۲$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}; [a, b] = [-2, 3]; k = -1. \quad ۴۳$$

$$f(x) = \frac{5}{2x-1}; [a, b] = [0, 1]; k = 2. \quad ۴۴$$

۴۵. فرض کنید f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & a \leq x < b \\ h(x) & b \leq x \leq c \end{cases}$$

اگر g روی $[a, b]$ و h روی $[b, c]$ پیوسته باشند، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که f روی $[a, c]$ پیوسته است؟ اگر جواب شما مثبت است، آن را ثابت کنید. اگر جوابتان منفی است، چه شرط یا شرایطی باید اضافه شوند تا پیوستگی f روی $[a, c]$ تضمین شود؟

۴۶. اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ تعریف شود، که m و n اعداد صحیح مثبتی

هستند، ثابت کنید f روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

۴۷. بزرگترین مقداری از k را بیابید که به ازای آن، تابع $f(x) = [x^2 - 2]$ روی بازه $[3, 3+k]$ پیوسته باشد.

۴۸. فرض کنید f تابعی باشد که اگر $0 \leq x \leq 1$ ، داشته باشیم $0 \leq f(x) \leq 1$. ثابت کنید که اگر f روی $[0, 1]$ پیوسته باشد، دست کم یک عدد c در $[0, 1]$ وجود دارد که به ازای آن، $f(c) = c$. (دانهجایی: اگر c هیچیک از ۰ یا ۱ نباشد، آنگاه $0 < f(0) < 1$ و $f(1) < 1$ تابع g را با ضابطه $g(x) = f(x) - x$ در نظر بگیرید و قضیه مقدارمیان را در مورد g روی $[0, 1]$ به کار برید.)

۴۹. نشان دهید که قضیه مقدارمیان تضمین می کند که معادله $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ ریشه ای بین ۲ و ۳ دارد.

۵۰. نشان دهید که قضیه مقدارمیان تضمین می کند که معادله $x^3 + x + 3 = 0$ ریشه ای بین ۲- و ۱- دارد.

۹.۲ قضیه افشردگی و $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$

قضیه زیر را، که گاهی قضیه افشردگی نامیده می شود، در اینجا مطرح می کنیم زیرا برای اثبات یک حد مهم در این بخش و چند قضیه مهم در بخشهای بعدی به کار می رود.

۹.۲.۱ قضیه (قضیه افشردگی) فرض کنید که توابع f ، g ، و h روی بازه باز I شامل a ، احتمالاً بجز در خود a ، تعریف شده باشند، و به ازای هر x در I که $x \neq a$ ، داشته باشیم $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. همچنین، فرض کنید که هر دو $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ موجود و برابر با L باشند. آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود و برابر با L است.

پیش از اثبات قضیه ۹.۲.۱، به نمونه زیر توجه کنید که تعبیری هندسی از قضیه به دست می دهد.

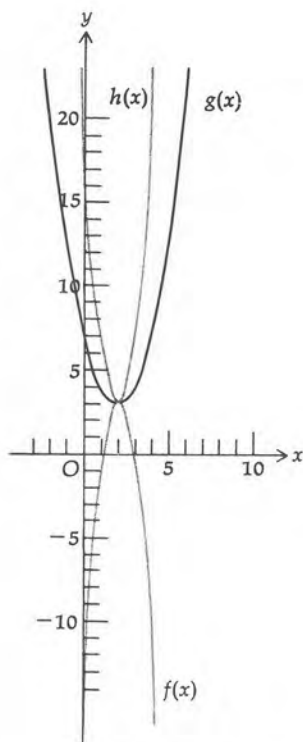
○ نمونه ۱ فرض کنید توابع f ، g ، و h به صورت زیر تعریف شده باشند

$$f(x) = -4(x-2)^2 + 3$$

$$g(x) = \frac{(x-2)(x^2 - 4x + 7)}{x-2}$$

$$h(x) = 4(x-2)^2 + 3.$$

نمودارهای f و h سهمیهایی هستند که رأسشان در $(2, 3)$ است. نمودار g یک سهمی



شکل ۱۰۹.۲

است که رأس آن، $(2, 3)$ ، حذف شده است. این نمودارها در شکل ۱۰۹.۲ نشان داده شده‌اند. تابع g برای $x = 2$ تعریف نشده است؛ ولی برای هر $x \neq 2$ ، $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. به علاوه، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$. پس، فرض قضیه

۱۰۹.۲ برآورده می‌شود، و در نتیجه، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$.

اثبات قضیه ۱۰۹.۲ برای اثبات اینکه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ، باید نشان دهیم که برای

هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد که

$$(1) \quad \text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta, \quad |g(x) - L| < \varepsilon$$

فرض شده است که

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ولذا، برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta_1 > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$(۲) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \quad L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

و يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد كه

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_1, \quad |h(x)-L| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$(۳) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta_2, \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

تصور کنید كه $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، ولذا، $\delta \leq \delta_1$ و $\delta \leq \delta_2$. بنا بر این، از عبارت (۲) نتیجه می شود كه

$$(۴) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad L-\varepsilon < f(x)$$

واز عبارت (۳) نتیجه می شود كه

$$(۵) \quad \text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad h(x) < L+\varepsilon$$

فرض شده است كه

$$(۶) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

از عبارات (۴)، (۵)، و (۶) داریم

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\varepsilon$$

پس،

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$\text{وقتی } 0 < |x-a| < \delta, \quad |g(x)-L| < \varepsilon$$

كه همان عبارت (۱) است. پس،

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

مثال ۱ فرض کنید برای هر x داریم $|g(x)-2| \leq 3(x-1)^2$. با استفاده از قضیه افشردگی، $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ را بیابید.

حل چون برای هر x ، $|g(x)-2| \leq 3(x-1)^2$ ، از قضیه ۱۸.۱.۱ نتیجه می شود كه

$$\text{برای هر } x, -3(x-1)^2 \leq g(x) - 2 \leq 3(x-1)^2$$

$$\text{برای هر } x, -3(x-1)^2 + 2 \leq g(x) \leq 3(x-1)^2 + 2$$

فرض کنید $f(x) = -3(x-1)^2 + 2$ و $h(x) = 3(x-1)^2 + 2$. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 \quad (۷)$$

به علاوه، برای هر x ،

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x). \quad (۸)$$

از (۷)، (۸)، و قضیه افشردگی نتیجه می شود که

$$\blacktriangle \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

مثال ۲ با استفاده از قضیه افشردگی، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0.$$

حل چون برای هر t ، $-1 \leq \sin t \leq 1$ ، پس

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad x \neq 0$$

بنابراین، اگر $x \neq 0$ ،

$$\begin{aligned} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| &= |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |x|. \end{aligned}$$

از اینرو

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \quad x \neq 0 \quad (۹)$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ ، از نامساوی (۹) و قضیه افشردگی نتیجه می شود که

$$\blacktriangle \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0.$$

در بخش ۵.۳،

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

ظاهر می‌شود و لازم است مقدار آن را بدانیم. اگر $f(t) = (\sin t)/t$ ، $f(0)$ تعریف نمی‌شود. معیناً، قضیه زیر می‌گوید که $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ موجود و برابر با ۱ است. در اثبات این قضیه، از قضیه افشردگی استفاده می‌شود.

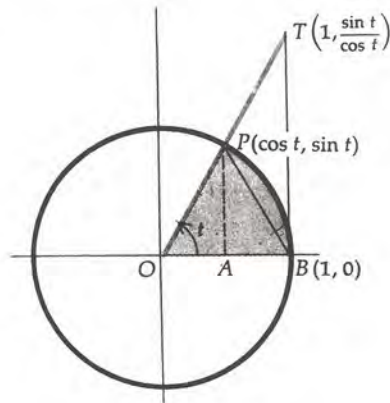
$$\text{قضیه ۲.۹.۲} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

اثبات ابتدا فرض می‌کنیم که $0 < t < \pi/2$. به شکل ۲.۹.۲ مراجعه کنید که دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ و قطاع سایه‌دار BOP را نشان می‌دهد. B نقطه $(1, 0)$ و P نقطه $(\cos t, \sin t)$ است. مساحت قطاعی از دایره که شعاع دایره r و زاویه مرکزی مربوطه t رادیان باشد، برابر $r^2 t/2$ است؛ پس اگر مساحت قطاع BOP برابر S واحد مربع باشد،

$$S = \frac{1}{2} t. \quad (10)$$

حال، مثلث BOP را در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت این مثلث برابر با K_1 واحد مربع باشد. پس،

$$K_1 = \frac{1}{2} |\overline{AP}| \cdot |\overline{OB}| = \frac{1}{2} (\sin t) \cdot (1) = \frac{1}{2} (\sin t). \quad (11)$$



شکل ۲.۹.۲

خطی که از نقاط $O(0, 0)$ و $P(\cot t, \sin t)$ می‌گذرد دارای ضریب زاویه $\sin t / \cos t$ است. بنابراین، معادله آن به صورت زیر است

$$y = \frac{\sin t}{\cos t} x.$$

این خط، خط $x = 1$ را در نقطه $(1, \sin t / \cos t)$ قطع می‌کند که همان نقطه T در شکل است.

اگر K_2 واحد مربع، مساحت مثلث قائم الزاویه BOT باشد،

$$K_2 = \frac{1}{2} |\overline{BT}| \cdot |\overline{OB}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{\cos t}. \quad (12)$$

باتوجه به شکل ۲.۹.۲ دیده می‌شود که

$$K_1 < S < K_2. \quad (13)$$

اگر مقادیر مربوطه را از (۱۰)، (۱۱)، و (۱۲) در نامساوی (۱۳) قرار دهیم، داریم

$$\frac{1}{2} \sin t < \frac{1}{2} t < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{\cos t}.$$

باضرب هر یک از اعضای نامساوی بالا در $2/\sin t$ ، که مثبت است زیرا $0 < t < \pi/2$ داریم

$$1 < \frac{t}{\sin t} < \frac{1}{\cos t}.$$

باعکس کردن هر یک از اعضای نامساوی بالا و معکوس کردن جهت علامات نامساوی داریم

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1. \quad (14)$$

از نامساوی سمت راست بالا داریم

$$\sin t < t \quad (15)$$

و از فرمول (۱۹) در بخش ۷.۱ به دست می‌آید

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} t. \quad (16)$$

اگر در نامساوی (۱۵) به جای t قرار دهیم $t/2$ و طرفین را مجذور کنیم، به دست می‌آوریم

$$\sin^2 \frac{1}{2} t < \frac{1}{4} t^2 \quad (17)$$

بنابراین، از (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1 - \cos t}{2} < \frac{t^2}{4}$$

که معادل است با

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \cos t. \quad (18)$$

باتوجه به (۱۴) و (۱۸) و چون $0 < t < \pi/2$ ،

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\sin t}{t} < 1 \quad 0 < t < \frac{1}{2}\pi \quad (19)$$

اگر $-\pi/2 < t < 0$ ، آنگاه $0 < -t < \pi/2$ ؛ و لذا از (۱۹) داریم

$$1 - \frac{1}{2}(-t)^2 < \frac{\sin(-t)}{-t} < 1 \quad -\frac{1}{2}\pi < t < 0$$

ولی $\sin(-t) = -\sin t$ ؛ پس، عبارت بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\sin t}{t} < 1 \quad -\frac{1}{2}\pi < t < 0 \quad (20)$$

از (۱۹) و (۲۰) نتیجه می‌گیریم که

$$1 - \frac{1}{2}t^2 < \frac{\sin t}{t} < 1 \quad t \neq 0, -\frac{1}{2}\pi < t < \frac{1}{2}\pi \quad (21)$$

چون $\lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$ و $\lim_{t \rightarrow 0} (1 - t^2/2) = 1$ ، از (۲۱) قضیهٔ افشردگی نتیجه می‌شود که

$$\square \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

مثال ۳ حد زیر را، در صورت وجود، محاسبه کنید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}.$$

حل می‌خواهیم خارج قسمت $\sin 3x / \sin 5x$ را به صورتی بنویسیم که قضیهٔ

۲.۹.۲ را بتوان به کار برد. اگر $x \neq 0$ ،

$$\frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}{5\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)}.$$

وقتی x به صفر میل می کند، $3x$ و $5x$ نیز به صفر میل می کنند. از اینرو،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{5x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1.$$

بنابراین

$$\Delta \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right)} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}.$$

با استفاده از قضیه ۲.۹.۲ می توانیم ثابت کنیم که تابع سینوسی و تابع کسینوسی در 0 پیوسته اند.

۳.۹.۲ قضیه تابع سینوسی در 0 پیوسته است.

اثبات نشان می دهیم که سه شرط لازم برای پیوستگی در یک عدد بر آورده می شوند.

$$\sin 0 = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t = 1 \cdot 0 = 0 \quad (ii)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin t = \sin 0 \quad (iii)$$

□

پس تابع سینوسی در 0 پیوسته است.

۴.۹.۲ قضیه تابع کسینوسی در 0 پیوسته است.

اثبات

$$\cos 0 = 1 \quad (i)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= \sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (1 - \sin^2 t)} = \sqrt{1 - 0} = 1. \end{aligned} \quad (ii)$$

توجه: می توانیم به جای $\cos t$ قرار دهیم $\sqrt{1 - \sin^2 t}$ زیرا وقتی $0 < t < \pi/2$ و وقتی $-\pi/2 < t < 0$ داریم $\cos t > 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = \cos 0 \quad (iii)$$

□

پس تابع کسینوسی در ۰ پیوسته است.

حد مذکور در قضیه زیر نیز مهم است. این قضیه، از سه قضیه قبلی و قضایای حدی نتیجه می‌شود.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0 \quad \text{قضیه ۵.۹.۲}$$

اثبات

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 t)}{t(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \cos t} \end{aligned}$$

بنابراین قضیه ۲.۹.۲

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

و چون توابع سینوسی و کسینوسی در ۰ پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{1 + \cos t} &= \frac{0}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 1 \cdot 0$$

□

$$= 0$$

مثال ۴ حد زیر را در صورت وجود بیابید

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

حل چون $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ، قضایای حدی را نمی‌توان در مورد خارج قسمت $(1 - \cos x)/\sin x$ به‌کاربرد. ولی، اگر صورت و مخرج این کسر بر x تقسیم شوند، که این کار مجاز است چون $x \neq 0$ ، می‌توانیم قضایای ۲۰۹.۲ و ۵۰۹.۲ را به‌کار ببریم. پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{0}{1}$$

▲

$$= 0.$$

تمرینهای ۹.۲

در تمرینهای ۱ تا ۲۶، حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\sin 7x} \quad ۳.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 3x} \quad ۲.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad ۱.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad ۶.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin 5y} \quad ۵.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{\sin 6t} \quad ۴.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} \quad ۹.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 2x}{4x^5} \quad ۸.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 3x} \quad ۷.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 z}{2z} \quad ۱۲.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x} \quad ۱۱.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \quad ۱۰.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^2 r + 1}{\sqrt{\cos^2 r + 2}} \quad ۱۵.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2} \quad ۱۴.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos^2 \frac{1}{2}x} \quad ۱۳.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{2}\pi - x}{\cos x} \cdot ۱۸ \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x} \cdot ۱۷ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{2\cos x + 1} \cdot ۱۶$$

(دانهمایی برای تمرینهای ۱۷ و ۱۸: فرض کنید $t = \frac{1}{2}\pi - x$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 3x} \cdot ۲۱ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot ۲۰ \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t^2} \cdot ۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \cdot ۲۴ \quad \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{\sin x}{x - \pi} \cdot ۲۳ \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\sin 2y}{\cos 3y - 1} \cdot ۲۲$$

(دانهمایی ۲۳: فرض کنید $t = x - \pi$) (دانهمایی ۲۴: فرض کنید $t = \frac{1}{x}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x^2 + 2x} \cdot ۲۶ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{\sin x} \cdot ۲۵$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۳۰، با استفاده از قضیهٔ افشردگی حد را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot ۲۸ \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \cdot ۲۷$$

۲۹. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ ، اگر به ازای هر x داشته باشیم $|g(x) - 4| < 2(3 - x)^4$.

۳۰. $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ ، اگر به ازای هر x داشته باشیم $|g(x) - 3| < 5(x + 2)^2$.

در تمرینهای ۳۱ و ۳۲، حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} \cdot ۳۳ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \cdot ۳۱$$

۳۳. فرض کنید به ازای هر x در بازهٔ باز $(-\pi/2, \pi/2)$ ، داریم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را بیابید؛ $1 - \cos^2 x \leq f(x) \leq x^2$.

۳۴. فرض کنید به ازای هر x در بازهٔ باز $(-\pi, 0)$ ، داریم $-\sin x \leq f(x) \leq 2 + \sin x$ ، $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} f(x)$ را بیابید.

۳۵. اگر به ازای هر x ، $|f(x)| \leq M$ و M عدد ثابتی باشد، با استفاده از قضیهٔ افشردگی ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 f(x) = 0$.

۳۶. تصور کنید که به ازای هر x ، $|f(x)| \leq M$ و M عدد ثابتی باشد. به علاوه، فرض کنید که $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = 0$. با استفاده از قضیهٔ افشردگی ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

۳۷. اگر به ازای هر $x \neq a$ ، $|f(x)| \leq k|x-a|$ و k عدد ثابتی باشد، ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

۱۰.۲ قضایای دیگری دربارهٔ حد توابع

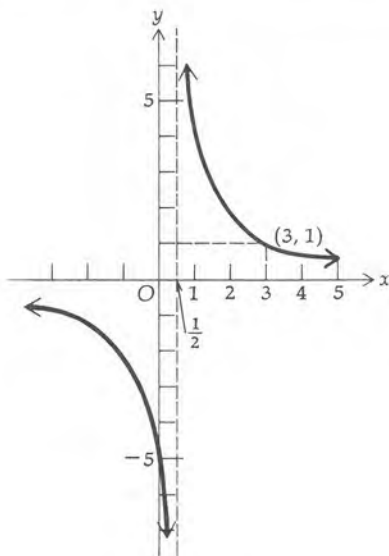
اکنون به بحث دربارهٔ چهار قضیه می‌پردازیم که برای اثبات چند قضیهٔ مهم در بخشهای آینده مورد نیازند. بعد از بیان هر قضیه، یک نمونهٔ ترسیمی می‌آوریم.

۱۰.۱۰.۲ قضیه اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و مثبت باشد، آنگاه یک بازهٔ باز شامل c وجود دارد که برای هر $x \neq c$ واقع در آن بازه، داریم $f(x) > 0$.

○ نمونهٔ ۱ تابع f را که به صورت زیر تعریف می‌شود، در نظر بگیرید

$$f(x) = \frac{5}{2x-1}.$$

نمودار f در شکل ۱۰.۱۰.۲ رسم شده است. چون $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 1$ و $1 > 0$ ، پس بنا به



شکل ۱۰.۱۰.۲

قضیه ۱.۱۰.۲، يك بازهٔ بساز شامل ۳ وجود دارد که برای هر $x \neq 3$ واقع در آن بازه، داریم $f(x) > 0$. مثلاً بازهٔ $(2, 4)$ چنین بازه‌ای است. در واقع، هر بازهٔ باز (a, b) که برای آن داشته باشیم $1/2 \leq a < 3$ و $b > 3$ ، چنین است. $\square$

اثبات قضیه ۱.۱۰.۲ تصور کنید $L = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$. بنا به فرض، داریم $L > 0$. با به کار بردن تعریف ۱.۱.۲ و در نظر گرفتن $\varepsilon = L/2$ ، يك عدد $\delta > 0$ یافت می‌شود که

$$(1) \quad \text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta, \quad 0 < \frac{L}{4} < |f(x) - L|$$

همچنین، $|f(x) - L| < L/2$ معادل است با $-L/2 < f(x) - L < L/2$ (به قضیه ۱.۸.۱ مراجعه کنید) و این نامساوی به نوبهٔ خود معادل است با

$$(2) \quad \frac{1}{4}L < f(x) < \frac{3}{4}L.$$

همچنین، $0 < |x - c| < \delta$ معادل است با $-\delta < x - c < \delta$ ولی $x \neq c$ ، که به نوبهٔ خود معادل است با

$$(3) \quad c - \delta < x < c + \delta, \quad x \neq c.$$

با توجه به عبارات (۲) و (۳)، به جای عبارت (۱) می‌توان عبارت زیر را نوشت:
وقتی x در بازهٔ باز $(c - \delta, c + \delta)$ باشد ولی $x \neq c$ ، داریم $L/4 < f(x) < 3L/4$.
چون $L > 0$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر $x \neq c$ در بازهٔ باز $(c - \delta, c + \delta)$ ،
داریم $f(x) > 0$. $\square$

مثال ۱ فرض کنید

$$f(x) = \frac{-3}{2x-7}.$$

(الف) نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) > 0$ (ب) قضیه ۱.۱۰.۲ را در مورد این تابع بررسی کنید؛ بدین منظور، يك بازهٔ باز شامل ۷ بیابید که برای هر $x \neq 7$ در آن بازه، داشته باشیم $f(x) > 0$.

حل

$$(الف) \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-3x}{2x-7} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} > 0$$

(ب) مقادیر x در بازهٔ باز مورد نیاز باید چنان باشند که

$$\frac{-3x}{2x-7} > 0. \quad (۴)$$

نامساوی (۴) وقتی برقرار است که صورت و مخرج هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: $-3x > 0$ و $2x - 7 > 0$.
یعنی، $0 < x$ و $x > 7/2$. هیچ مقداری از x وجود ندارد که هر دو این نامساویها به‌ازای آن برقرار باشند. بنابراین، مجموعه جواب حالت ۱، مجموعهٔ تهی است.

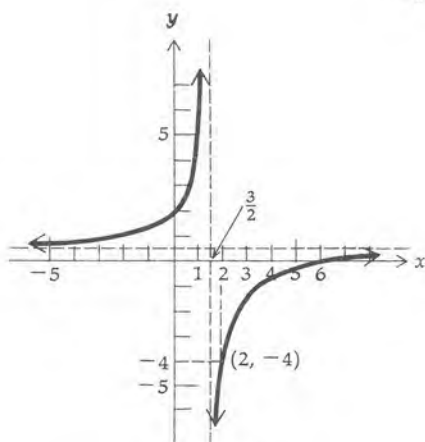
حالت ۲: $-3x < 0$ و $2x - 7 < 0$.
یعنی، $0 < x < 7/2$. مجموعه جواب حالت ۲، بازهٔ $(0, 7/2)$ است.

پس، نامساوی (۴) برقرار است اگر x در بازهٔ باز $(0, 7/2)$ باشد.
نتیجه می‌گیریم که هر بازهٔ باز (a, b) که برای آن داشته باشیم $0 \leq a < 1$ و $1 < b \leq 7/2$ ، بازه‌ای است که شامل ۱ است و برای هر $x \neq 1$ در چنین بازه‌ای، $f(x) > 0$. به‌خصوص، بازهٔ $(1/2, 3/2)$ چنین است. ▲

۲۰۱۰۲ قضیه اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و منفی باشد، آنگاه يك بازهٔ باز شامل c وجود دارد که برای هر $x \neq c$ واقع در این بازه، داریم $f(x) < 0$.

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیهٔ ۱۰۱۰۲ است و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود (تمرین ۱۳ را ببینید).

○ نمونهٔ ۲ فرض کنید



شکل ۲۰۱۰۲

$$g(x) = \frac{6-x}{3-2x}.$$

شکل ۲.۱۰.۲ نمودار g را نشان می‌دهد. داریم $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -4 < 0$ ؛ پس، بنا به قضیه ۲.۱۰.۲، یک بازه باز شامل ۲ وجود دارد که برای هر $x \neq 2$ واقع در آن بازه، $g(x) < 0$. مثلاً، $(3/2, 3)$ چنین بازه‌ای است. به‌طور کلی، هر بازه باز (a, b) که در آن $2 < a < 3/2$ و $2 < b \leq 6$ ، چنین است. $\circ$

مثال زیر نیز به روشن شدن قضیه ۲.۱۰.۲ کمک می‌کند.

مثال ۲ فرض کنید

$$g(x) = \frac{1}{1-2x}.$$

(الف) مقادیری از k را تعیین کنید که به‌ازای آنها، $\lim_{x \rightarrow k} g(x) < 0$ ؛ (ب) همه بازه‌های (a, b) بی‌ی را بیابید که شامل مقدار خاصی از k باشند که در قسمت (الف) صدق کند به قسمی که به‌ازای هر $x \neq k$ در (a, b) ، داشته باشیم $g(x) < 0$ ؛ (پ) نمودار g را رسم کنید و روی نمودار، تعبیر هندسی نتایج قسمت‌های (الف) و (ب) را نشان دهید.

حل

(الف) اگر $k \neq 1/2$ ،

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2k}.$$

می‌خواهیم مقادیری از k را بیابیم که به‌ازای آنها،

$$\frac{1}{1-2k} < 0. \quad (5)$$

نامساوی (۵) برقرار است اگر و تنها اگر مخرج کسر منفی باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر

$$1-2k < 0$$

$$-2k < -1$$

$$k > \frac{1}{2}.$$

بنابراین، وقتی k در بازه $(1/2, +\infty)$ است، $\lim_{x \rightarrow k} g(x) < 0$ ؛

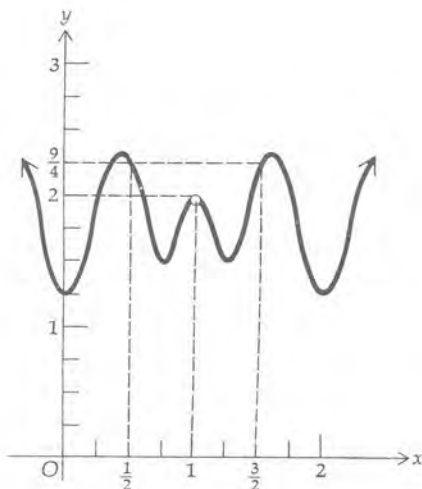
(ب) چون $g(x) < 0$ اگر و تنها اگر $x > 1/2$ ، بازه‌های باز مطلوب، یعنی بازه‌های

(a, b) بی که شامل k باشند به قسمی که $g(x) < 0$ ، آن بازه‌هایی هستند که در آنها داریم $b > k$ و $(1/2) \leq a < k$.

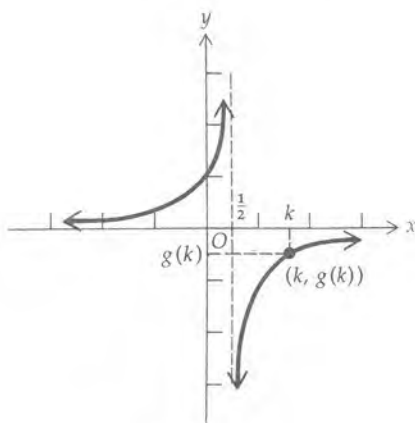
(پ) نمودار g در شکل ۳.۱۰.۲ نشان داده شده است. در این شکل، مقدار $1/2 > k$ انتخاب شده است. توجه کنید که $\lim_{x \rightarrow k} g(x) = g(k)$ ، و لذا، g در k پیوسته است. نقطه $(k, g(k))$ در نمودار نشان داده شده است، و $g(k) < 0$. ملاحظه کنید که برای همهٔ مقادیر x در هر بازهٔ باز (a, b) ، که در آن $(1/2) \leq a < k < b$ ، نمودار در ربع چهارم است، و بنابراین $g(x) < 0$. ▲

۳.۱۰.۲ قضیه فرض کنید تابع f روی بازهٔ باز I که شامل عدد c است، بجز احتمالا در خود c ، تعریف شده است. همچنین فرض کنید عدد M وجود دارد که برای آن يك عدد $\delta > 0$ یافت می‌شود که وقتی $0 < |x - c| < \delta$ ، $f(x) \leq M$. در این صورت، اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و برابر با L باشد، $L \leq M$.

○ نمونه ۳ در شکل ۴.۱۰.۲ نمودار تابعی مانند f نشان داده شده که شرایط قضیه ۳.۱۰.۲ را برآورده می‌کند. از شکل مشاهده می‌شود که $f(1)$ تعریف نشده ولی تابع f روی بازهٔ باز $(1/2, 3/2)$ بجز در $x = 1$ ، تعریف شده است. به علاوه، اگر $1/2 < |x - 1| < 9/4$ ، آنگاه $0 < f(x) \leq 9/4$. از اینرو، از قضیه ۳.۱۰.۲ نتیجه می‌شود که اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود و برابر با L باشد، آنگاه $L \leq 9/4$. در شکل مشاهده می‌شود که L وجود دارد و برابر عدد ۲ است.



○ شکل ۴.۱۰.۲



شکل ۳.۱۰.۲

اثبات قضیه ۳.۱۰.۲ فرض می‌کنیم $L > M$ و نشان می‌دهیم که این فرض به تناقض

می‌انجامد. اگر $L > M$ ، يك عدد $\varepsilon > 0$ وجود دارد كه $M + \varepsilon = L$. چون $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، پس، يك عدد $\delta_1 > 0$ يافت می‌شود كه

$$\text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

و عبارت فوق معادل است با اینکه بگوییم

$$\text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ } L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

با قراردادن $M + \varepsilon$ به جای L نتیجه می‌شود كه يك $\delta_1 > 0$ وجود دارد كه

$$\text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ } (M + \varepsilon) - \varepsilon < f(x).$$

و به عبارت دیگر،

$$(6) \quad \text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta_1, \text{ } M < f(x).$$

اما بنابه فرض، يك عدد $\delta > 0$ وجود دارد كه

$$(7) \quad \text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta, \text{ } f(x) \leq M.$$

عبارات (۶) و (۷) با یکدیگر متناقض‌اند. بنابراین فرض $L > M$ غلط است، و در نتیجه، $L \leq M$. $\square$

۴.۱۰.۲ قضیه فرض کنید تابع f روی بازه باز I كه شامل عدد c است؛ بجز احتمالا در خود c ، تعریف شده‌است. همچنین فرض کنید عدد M می‌وجود دارد كه به ازای آن يك عدد $\delta > 0$ پیدا می‌شود كه وقتی $0 < |x - c| < \delta$ ، $f(x) \geq M$. در این صورت، اگر $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجود و برابر با عدد L باشد، خواهیم داشت $L \geq M$.

اثبات این قضیه را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (به تمرین ۱۴ مراجعه کنید).

○ نمونه ۴ شکل ۴.۱۰.۲ قضیه ۴.۱۰.۲ را نیز روشن می‌سازد. با توجه به این شكل مشاهده می‌شود كه وقتی $1/2 < |x - 1| < 3/2$ ، $f(x) \geq 3/2$. و چون، همان‌طور كه قبلا گفته شد، تابع f روی بازه باز $(1/2, 3/2)$ ، بجز در $x = 1$ ، تعریف شده‌است، قضیه ۴.۱۰.۲ می‌گوید كه اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود و برابر با L باشد، آنگاه $L \geq 3/2$. ○

تمرینهای ۱۰.۲

در تمرینهای ۱ تا ۴، يك تابع f و يك عدد c داده شده‌است. (الف) نشان دهید كه $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$ ؛ و (ب) قضیه ۱.۱۰.۲ را در مورد تابع f بررسی کنید؛ به این منظور،

يك بازه باز شامل c بیابید كه به ازای هر $x \neq c$ در آن بازه، داشته باشیم $f(x) > 0$.

$$\begin{array}{ll} ۱. f(x) = \frac{5}{2x+4}; c=3 & ۲. f(x) = \frac{7}{2x-1}; c=4 \\ ۳. f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}; c=1 & ۴. f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}; c=-1 \end{array}$$

در تمرینهای ۵ تا ۸، یک تابع g و یک عدد c داده شده است. (الف) نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow c} g(x) < 0$ ؛ و (ب) قضیه ۲.۱۰.۲ را در مورد تابع g بررسی کنید؛ به این منظور، یک بازه باز شامل c بیابید که به ازای هر $x \neq c$ در آن بازه، $g(x) < 0$.

$$\begin{array}{ll} ۵. g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}; c=-3 & ۶. g(x) = \frac{2-7x+3x^2}{2-x}; c=2 \\ ۷. g(x) = \frac{2-\sqrt{4+x}}{x}; c=0 & ۸. g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}; c=3 \end{array}$$

در تمرینهای ۹ و ۱۰، یک تابع f داده شده است. (الف) مقادیری از k را تعیین کنید که به ازای آنها $\lim_{x \rightarrow k} f(x) > 0$ ؛ (ب) همه بازه‌های باز (a, b) را بیابید که شامل مقدار خاصی از k باشند که k در قسمت (الف) صدق کند به قسمی که به ازای هر $x \neq k$ در (a, b) ، $f(x) > 0$ ؛ (پ) نمودار f را رسم کنید و روی نمودار، تعبیر هندسی نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را نشان دهید.

$$\begin{array}{ll} ۹. f(x) = \frac{3x}{x+1} & ۱۰. f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x-5} \end{array}$$

در تمرینهای ۱۱ و ۱۲، یک تابع g داده شده است. (الف) مقادیری برای k بیابید که به ازای آنها، $\lim_{x \rightarrow k} g(x) < 0$ ؛ (ب) همه بازه‌های باز (a, b) را بیابید که شامل مقدار خاصی از k باشند که k در قسمت (الف) صدق کند به قسمی که به ازای هر $x \neq k$ در (a, b) ، $g(x) < 0$ ؛ (پ) نمودار g را رسم کنید و روی نمودار، تعبیر هندسی نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را نشان دهید.

$$\begin{array}{ll} ۱۱. g(x) = \frac{2x^2+x-6}{2x^2+11x+14} & ۱۲. g(x) = 2-\sqrt{x-1} \end{array}$$

۱۳. قضیه ۲.۱۰.۲ را ثابت کنید.

۱۴. قضیه ۲.۱۰.۲ را ثابت کنید.

تمرینهای مروری فصل ۲

در تمرینهای ۱ تا ۸، حد را محاسبه کنید و هر جا از قضایای حدی استفاده می‌کنید، آنها را مشخص سازید.

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^2 - 4}{3h^2 + 6} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 4x + 5) \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x - 14} \quad .4$$

$$\lim_{z \rightarrow -2} \frac{z^2 - 9}{z + 3} \quad .3$$

$$\lim_{y \rightarrow -4} \sqrt{\frac{5y + 4}{y - 5}} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \sqrt[3]{\frac{4x^2 + 4x - 3}{4x^2 - 1}} \quad .5$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+t}}{t} \quad .8$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-t} - 3}{t} \quad .7$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۸، با استفاده از تعریف ۱.۱.۲، تساوی داده شده را ثابت کنید؛ یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$ يك $\delta > 0$ بیابید که وقتی $0 < |x - a| < \delta$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\lambda - 3x) = 14 \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7 \quad .9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x - 6) = 9 \quad .12$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} x^2 = 16 \quad .11$$

$$\lim_{y \rightarrow 5} \frac{3}{2y - 1} = \frac{1}{3} \quad .14$$

$$\lim_{r \rightarrow 5} \frac{2}{r - 3} = 1 \quad .13$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8 \quad .16$$

$$\lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{t - 3} = 1 \quad .15$$

$$\lim_{t \rightarrow 4} \sqrt{2t + 1} = 3 \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 + 3x}{2x + 1} = 2 \quad .17$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۲، نمودار تابع را رسم کنید؛ سپس با ملاحظه محل شکستگیها در نمودار، مقادیری از متغیر مستقل را که به ازای آنها تابع ناپیوسته است، معین کنید و نشان دهید که چرا تعریف ۱.۱.۲ در هر نقطه ناپیوستگی صدق نمی‌کند.

$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \quad .20$$

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + x - 2} \quad .19$$

$$F(x) = \begin{cases} |4-x| & x \neq 4 \\ -2 & x = 4 \end{cases} \cdot 22 \quad g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq -2 \\ x-2 & -2 < x \leq 2 \\ 2-x & 2 < x \end{cases} \cdot 21$$

در تمرینهای ۲۳ تا ۲۶، نمودار را رسم کنید، و درباره پیوستگی تابع بحث کنید.

$$F(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x+2} \cdot 24$$

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 9} \cdot 23$$

$$h(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 12} \cdot 26$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-3}{4-x}} \cdot 25$$

در تمرینهای ۲۷ تا ۴۸، حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{\frac{y-3}{y^2-2y}} \cdot 28$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{3x^2 + 8x + 5} \cdot 27$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 3 \\ x + 5 & 3 < x \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \cdot 29$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2\sqrt{x} - 6}{x - 9} \cdot 31$$

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} (|3x - 1| - 5) \cdot 30$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+} \frac{2x}{16 - x^2} \cdot 33$$

$$\lim_{y \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{25 - y^2}}{y - 5} \cdot 32$$

$$\lim_{t \rightarrow 5} \frac{\sqrt{t-4}}{t^2 - 10t + 25} \cdot 35$$

$$\lim_{s \rightarrow 7} \frac{5 - \sqrt{4 + 3s}}{7 - s} \cdot 34$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - 1}{[x] - x} \cdot 37$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 5}{2x^2 - 3x^2} \cdot 36$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{2x - 4} \cdot 39$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x^2 + 7x - 2}{7x^2 + 3x^2 + 5x} \right)^2 \cdot 38$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{\sin 2t} \cdot 41$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sqrt{t^2 + t} - \sqrt{t^2 + 4}) \cdot 40$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot 43$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin 3x} \cdot 42$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{(t+a)^4} - \sqrt[4]{a^4}}{t} \quad .۴۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{7+\sqrt{x}} - 3}{x-8} \quad .۴۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} \quad .۴۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{2 \sin x} \quad .۴۶$$

(دانهمایی ۴۷ : بنویسید)

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{x^2} + \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - 1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 1} \quad .۴۸$$

۴۹. اگر $f(x) = [1 - x^2]$ و $-2 \leq x \leq 2$ ، نمودار f را رسم کنید. (الف) آیا $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود دارد؟ (ب) آیا f در 0 پیوسته است؟

۵۰. اگر $g(x) = (x-1)[x]$ و $0 \leq x \leq 2$ ، نمودار g را رسم کنید. (الف) آیا $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ وجود دارد؟ (ب) آیا g در 1 پیوسته است؟

در تمرینهای ۵۱ تا ۵۴، ثابت کنید که تابع در a ناپیوسته است. سپس تعیین کنید که ناپیوستگی دفع شدنی است یا اساسی. اگر ناپیوستگی دفع شدنی است، $f(a)$ را به صورتی تعریف کنید که ناپیوستگی دفع شود.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 4}; a = -4 \quad .۵۱$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 1 \\ 2x + 3 & 1 \leq x \end{cases}; a = 1 \quad .۵۲$$

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}; a = 0 \quad .۵۴$$

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1}; a = \frac{1}{2} \quad .۵۳$$

در تمرینهای ۵۵ تا ۵۹، مجانبهای افقی و قائم نمودار تابعی را بیابید که به وسیله معادله مفروض تعریف شده است؛ و نمودار را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} \quad .۵۶$$

$$f(x) = \frac{5x}{7 + 4x} \quad .۵۵$$

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^2 - 4} \quad .۵۹$$

$$f(x) = \frac{-2}{x^2 - x - 6} \quad .۵۸$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{3x^2 + 1} \quad .۵۷$$

۶۰. مجانبهای افقی وقائم نمودار معادله $xy + 2 - 3y = 5x$ را بیابید. نمودار را رسم کنید.

در تمرینهای ۶۱ تا ۶۴، توابع f و g تعریف می‌شوند. در هر تمرین، $f \circ g$ را تعریف کنید و همه مقادیر x را که به‌ازای آنها $f \circ g$ پیوسته است، تعیین کنید.

$$۶۱. f(x) = \sqrt{x-3}; g(x) = x+2 \quad ۶۲. f(x) = \operatorname{sgn} x; g(x) = x^2 - x$$

$$۶۳. f(x) = \operatorname{sgn} x; g(x) = x^2 - 1 \quad ۶۴. f(x) = \frac{4}{3x-5}; g(x) = \sqrt{x}$$

در تمرینهای ۶۵ و ۶۶، تابع f و بازه بسته $[a, b]$ داده می‌شوند. بررسی کنید که قضیه مقدار میانی برای مقدار داده شده k برقرار است، و یک عدد c بیابید که داشته باشیم $f(c) = k$. نمودار منحنی و خط $y = k$ را رسم کنید.

$$۶۵. f(x) = x^2 + 3; [a, b] = [2, 4]; k = 10$$

$$۶۶. f(x) = -\sqrt{16 - x^2}; [a, b] = [0, 4]; k = -1$$

در تمرینهای ۶۷ و ۶۸، با استفاده از قضیه افشردگی حد را پیدا کنید.

$$۶۷. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$۶۸. \lim_{x \rightarrow 4} g(x). \text{ اگر به‌ازای هر } x, |g(x) + 5| < 3(4-x)^2$$

در تمرینهای ۶۹ و ۷۰، مقادیری برای ثابتهای a و b پیدا کنید که تابع f دوی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته شود، و نمودار f را رسم کنید.

$$۶۹. f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 3 \\ ax+b & 3 < x < 5 \\ x^2+2 & 5 \leq x \end{cases}$$

$$۷۰. f(x) = \begin{cases} 3x+6a & x < -3 \\ 3ax-7b & -3 \leq x \leq 3 \\ x-12b & 3 < x \end{cases}$$

۷۱. ثابت کنید که $\lim_{t \rightarrow 2} \sqrt{t^2 - 4} = 0$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک

$\delta > 0$ وجود دارد که وقتی $0 < t - 2 < \delta$ ، داریم $\sqrt{t^2 - 4} < \varepsilon$.

۷۲. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow 2} |(x+3)/(x-2)| = +\infty$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر $N > 0$ ، يك $\delta > 0$ وجود دارد که وقتی $0 < |x-2| < \delta$ ، داریم $|(x+3)/(x-2)| > N$.

۷۳. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-2x)/x = -2$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك عدد $N < 0$ وجود دارد که وقتی $x < N$ ، داریم $|(3-2x)/x + 2| < \varepsilon$.

۷۴. ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9x+1)/(3x-2) = 3$ ؛ به این منظور، نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$ ، يك عدد $N > 0$ وجود دارد که وقتی $x > N$ ، داریم $|(9x+1)/(3x-2) - 3| < \varepsilon$.

۷۵. فرض کنید $f(x) = (4x^2 - 9)/(2x^2 + 7x + 6)$. (الف) نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow -3/2} f(x) < 0$ ؛ (ب) قضیه ۲.۱۰.۲ را در مورد تابع f بررسی کنید؛ به این منظور، يك بازه باز شامل $-3/2$ پیدا کنید که به ازای هر $x \neq -3/2$ در آن بازه، داشته باشیم $f(x) < 0$.

۷۶. فرض کنید $f(x) = (x-2)/(x+5)$. (الف) مقادیری برای k بیابید که به ازای آنها، $\lim_{x \rightarrow k} f(x) > 0$ ؛ (ب) همه بازه‌های باز (a, b) را بیابید که شامل مقدار خاصی از k باشند که در قسمت (الف) صدق کند به قسمی که به ازای هر $x \neq k$ در (a, b) ، $f(x) > 0$ ؛ (پ) نمودار f را رسم کنید و روی نمودار، تعبیر هندسی نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را نشان دهید.

۷۷. فرض کنید f تابعی باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ عدد صحیح باشد} \\ 0 & x \text{ عدد صحیح نباشد} \end{cases}$$

(الف) نمودار f را رسم کنید؛ (ب) به ازای چه مقادیری از a ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود دارد؟ (پ) در چه اعدادی f پیوسته است؟

۷۸. اگر تابع g در a ، و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشند، آیا تابع مرکب $f \circ g$ در a پیوسته است؟ چرا؟

۷۹. مثالی از يك تابع بیاورید که برای آن، $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ وجود داشته باشد ولی $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود نداشته باشد.

۸۰. مثالی از يك تابع f بیاورید که در ۱ ناپیوسته باشد و برای آن، $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (الف)

وجود داشته باشد ولی $f(1)$ وجود نداشته باشد؛ (ب) $f(1)$ موجود باشد ولی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود نباشد؛ (پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $f(1)$ هر دو وجود داشته باشند ولی با هم برابر نباشند.

۸۱. (الف) ثابت کنید که اگر $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ ، آنگاه

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h).$$

(ب) نشان دهید که عکس قضیه مذکور در (الف) درست نیست؛ به این منظور، مثالی از یک تابع ارائه دهید که برای آن، $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h)$ ، ولی $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \neq f(x)$.

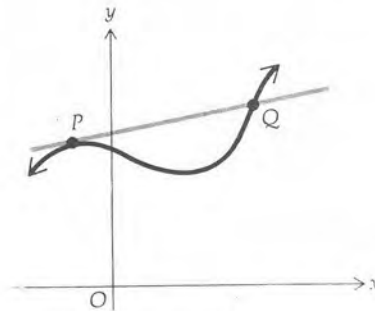
۸۲. اگر قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی باشد، و f در 0 پیوسته باشد، ثابت کنید که اگر به ازای هر a و هر b ، $f(a+b) = f(a)f(b)$ ، آنگاه f در هر عدد پیوسته است.

۸۳. اگر قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی و f در 0 پیوسته باشد، ثابت کنید که اگر به ازای هر a و هر b ، $f(a+b) = f(a) + f(b)$ ، آنگاه f در هر عدد پیوسته است.

۱.۳ خط مماس

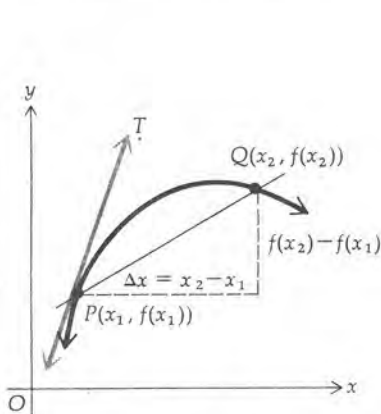
بسیاری از مسائل مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال، به مسئله پیدا کردن خط مماس وارد بر منحنی در يك نقطه معین روی منحنی مربوط می شوند. در هندسه مسطحه اگر منحنی دایره باشد، خط مماس در يك نقطه P روی دایره، به عنوان خطی تعریف می شود که دایره را فقط در يك نقطه قطع می کند. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنیها صادق نیست. به عنوان مثال، در شکل ۱.۱.۳ خطی که می خواهیم در نقطه P بر منحنی مماس باشد، منحنی را در نقطه دیگری مانند Q قطع خواهد کرد.

در این بخش، تعریف مناسبی از خط مماس بر نمودار يك تابع در نقطه ای روی نمودار، ارائه می دهیم. برای این کار، ضریب زاویه خط مماس در يك نقطه را تعریف

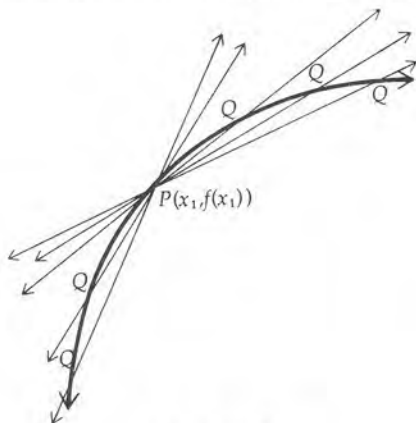


شکل ۱.۱.۳

می‌کنیم، زیرا اگر ضریب زاویه يك خط و نقطه‌ای روی آن معلوم باشند، آن خط معین می‌شود. تصور کنید تابع f در x_1 پیوسته است. می‌خواهیم ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f در نقطه $P(x_1, f(x_1))$ را به دست آوریم. فرض کنید I بازه‌بازی باشد که شامل x_1 است و f بر این بازه تعریف شده است. نقطه دیگر $Q(x_2, f(x_2))$ را روی نمودار f در نظر می‌گیریم به طوری که x_2 نیز در I باشد. خطی را که از P و Q می‌گذرد رسم می‌کنیم. هر خطی که از دو نقطه يك منحنی بگذرد، خط قاطع نامیده می‌شود؛ پس خط گذرنده از P و Q يك خط قاطع است. در شکل ۲.۱.۳، خط قاطع به ازای مقادیر مختلف x_2 رسم شده است. در شکل ۳.۱.۳ يك خط قاطع خاص نشان داده شده است. در این شکل Q در طرف راست P قرار دارد. معهذ، Q می‌تواند در طرف چپ P نیز باشد، همچنانکه در شکل ۲.۱.۳ دیده می‌شود.



شکل ۳.۱.۳



شکل ۲.۱.۳

تفاضل طولهای نقاط P و Q را با Δx نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Δx ممکن است مثبت یا منفی باشد. پس، ضریب زاویه خط قاطع PQ به شرطی که PQ قائم نباشد، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

چون $x_2 = x_1 + \Delta x$ ، معادله فوق را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

حال، فرض کنید نقطه P ثابت باشد، و نقطه Q را در طول منحنی به طرف P حرکت

دهیم، یعنی Q به سمت P میل کند. این عمل معادل است با اینکه Δx را به سمت صفر میل بدهیم. ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول نقطه ثابت P گردش می کند. اگر این خط قاطع دارای يك وضعیت حدی باشد، همین وضعیت حدی است که ما می خواهیم خط مماس بر نمودار در نقطه P باشد. از اینرو، می خواهیم ضریب زاویه خط مماس بر نمودار در P ، برابر با حد m_{PQ} باشد وقتی که Δx به سمت صفر میل می کند، البته چنانچه این حد وجود داشته باشد. اگر $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{PQ} = +\infty$ یا $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{PQ} = -\infty$ ، آنگاه Δx به صفر میل می کند و خط PQ به سمت خطی که از P می گذرد و موازی محور y هاست، میل می کند. در این حالت، می خواهیم خط مماس بر منحنی در P همان خط $x = x_1$ باشد. از بحث فوق به تعریف زیر می رسیم.

۱۰.۱.۳ تعریف فرض کنید تابع f در x_1 پیوسته باشد. خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_1, f(x_1))$ عبارت است از
(i) خطی که از P می گذرد و دارای ضریب زاویه $m(x_1)$ است، که از رابطه زیر به دست می آید

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (1)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد؛

(ii) خط $x = x_1$ ، اگر

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \pm \infty.$$

اگر هیچکدام از حالات (i) و (ii) تعریف ۱۰.۱.۳ برقرار نباشند، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_1, f(x_1))$ وجود ندارد.

مثال ۱ سهمی $y = x^2$ مفروض است. در هر يك از قسمتهای (الف) تا (پ)، ضریب زاویه خط قاطعی را که از دو نقطه داده شده می گذرد، بیابید. (الف) $(2, 4)$ ، $(3, 9)$ ؛ (ب) $(2, 4)$ ، $(4, 16)$ ؛ (پ) $(2, 4)$ ، $(201, 40401)$. (ت) ضریب زاویه خط مماس بر سهمی را در نقطه $(2, 4)$ به دست آورید.

حل فرض کنید m_a ، m_b و m_c ، به ترتیب ضریب زاویه خطوط قاطع در قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) باشند.

$$m_a = \frac{9 - 4}{3 - 2} = 5 \quad (\text{الف})$$

$$m_b = \frac{۴۲۴۱ - ۴}{۲۲۱ - ۲} = \frac{۰۲۴۱}{۰۲۱} = ۴۲۱ \quad (\text{ب})$$

$$m_c = \frac{۴۲۰۴۰۱ - ۴}{۲۲۰۱ - ۲} = \frac{۰۲۰۴۰۱}{۰۲۰۱} = ۴۲۰۱ \quad (\text{پ})$$

(ت) $f(x) = x^2$ با استفاده از (۱) داریم

$$\begin{aligned} m(۲) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(۲ + \Delta x) - f(۲)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(۲ + \Delta x)^2 - ۴}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{۴ + ۴\Delta x + (\Delta x)^2 - ۴}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{۴\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (۴ + \Delta x) \\ &= ۴. \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = x^2 - ۴x + ۳$ در نقطه (x_1, y_1) را پیدا کنید.

حل $f(x) = x^2 - ۴x + ۳$ ؛ بنابراین $f(x_1) = x_1^2 - ۴x_1 + ۳$ و $f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 - ۴(x_1 + \Delta x) + ۳$ ، با توجه به (۱) ،

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x_1 + \Delta x)^2 - ۴(x_1 + \Delta x) + ۳] - [x_1^2 - ۴x_1 + ۳]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_1^2 + ۲x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - ۴x_1 - ۴\Delta x + ۳ - x_1^2 + ۴x_1 - ۳}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{۲x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - ۴\Delta x}{\Delta x} . \end{aligned}$$

چون $\Delta x \neq 0$ ، می‌توانیم صورت و مخرج کسر را بر Δx تقسیم کنیم و به دست آوریم

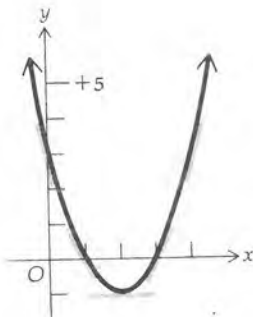
$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_1 + \Delta x - 4)$$

$$\blacktriangle \quad m(x_1) = 2x_1 - 4. \quad (2)$$

برای رسم نمودار معادله مثال ۲، چند نقطه و قطعه‌ای از خط مماس در چند نقطه را رسم می‌کنیم. مقادیر x را به‌طور دلخواه اختیار می‌کنیم و مقدار متناظر y را از معادله داده شده محاسبه می‌کنیم. همچنین مقدار m را از معادله (۲) به دست می‌آوریم. نتایج حاصل در جدول ۱.۱.۳ آمده‌اند و نمودار تابع را در شکل ۴.۱.۳ رسم کرده‌ایم. پیدا کردن نقاطی که در آنها خط مماس بر نمودار افقی است، واجد اهمیت است. چون ضریب زاویه خط افقی صفر است، این نقاط را از معادله $m(x_1) = 0$ می‌توان به دست آورد. اگر این محاسبات را برای این مثال انجام دهیم، داریم $2x_1 - 4 = 0$ که به دست می‌دهد $x_1 = 2$. بنابراین، در نقطه‌ای که طول آن ۲ است، خط مماس موازی محور x ها است.

جدول ۱.۱.۳

x	y	m
۲	-۱	۰
۱	۰	-۲
۰	۳	-۴
-۱	۸	-۶
۳	۰	۲
۴	۳	۴
۵	۸	۶



شکل ۴.۱.۳

مثال ۳ معادله خط مماس بر منحنی مثال ۲ در نقطه (۵, ۸) را به دست آورید.

حل چون ضریب زاویه خط مماس در هر نقطه (x_1, y_1) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$m(x_1) = 2x_1 - 4$$

پس ضریب زاویه خط مماس در نقطه (۵, ۸) عبارت است از

$$m(5) = 2(5) - 4 = 6.$$

بنابراین، معادله خط مطلوب به صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای، عبارت است از

$$y - 8 = 6(x - 5)$$

$$\blacktriangle \quad y = 6x - 22.$$

۲۰.۳ تعریف خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای مفروض، عبارت است از خط عمود بر خط مماس در آن نقطه.

مثال ۴ معادله آن خط قائم بر منحنی $y = \sqrt{x-3}$ را که موازی خط $6x + 3y - 4 = 0$ باشد، پیدا کنید.

حل فرض کنید l خط مفروض باشد. برای یافتن ضریب زاویه l ، معادله آن را به صورت ضریب زاویه - عرض از مبدأ، می‌نویسیم

$$y = -2x + \frac{4}{3}.$$

پس، ضریب زاویه l برابر با -2 است، و ضریب زاویه خط قائم مطلوب، نیز -2 است زیرا دو خط باهم موازی‌اند.

برای یافتن ضریب زاویه خط مماس بر منحنی داده شده در نقطه (x_1, y_1) ، تعریف ۱۰.۳ را با ضابطه $f(x) = \sqrt{x-3}$ به کار می‌بریم.

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} - \sqrt{x_1 - 3}}{\Delta x}$$

برای محاسبه حد فوق، صورت کسرها گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} - \sqrt{x_1 - 3})(\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} + \sqrt{x_1 - 3})}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} + \sqrt{x_1 - 3})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} + \sqrt{x_1 - 3})}. \end{aligned}$$

اگر صورت و مخرج کسرها بر Δx تقسیم کنیم (چون $\Delta x \neq 0$)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_1 + \Delta x - 3} + \sqrt{x_1 - 3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_1 - 3}}. \end{aligned}$$

چون خط قائم در يك نقطه، عمود بر خط مماس در آن نقطه است، حاصلضرب ضریب زاویه‌های آنها برابر ۱- است. بنابراین، ضریب زاویه خط قائم در (x_1, y_1) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$-2\sqrt{x_1-3}.$$

همچنانکه در بالا نشان داده شد، ضریب زاویه خط مطلوب برابر با ۲- است. بنابراین، معادله

$$-2\sqrt{x_1-3} = -2$$

را حل می‌کنیم تا به دست آید

$$x_1 = 4.$$

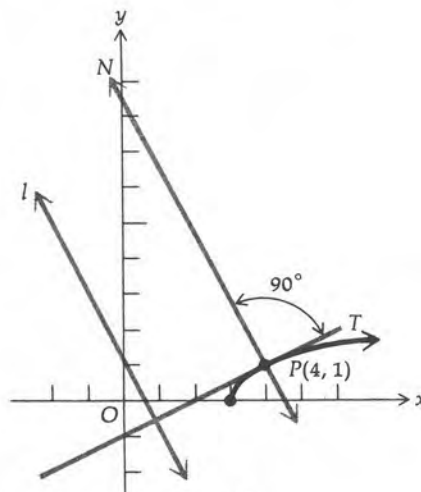
پس، خط مطلوب از نقطه $(4, 1)$ روی منحنی می‌گذرد و ضریب زاویه آن ۲- است. معادله چنین خطی به صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای، عبارت است از

$$y-1 = -2(x-4).$$

و یا

$$2x + y - 9 = 0.$$

به شکل ۵.۱.۳ مراجعه کنید، که نمودار منحنی را همراه با خط l ، خط قائم PN در نقطه $(4, 1)$ ، و خط مماس PT در نقطه $(4, 1)$ نشان می‌دهد.



شکل ۵.۱.۳

تمرینهای ۱.۳

در تمرینهای ۱ تا ۶، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه (x_1, y_1) را به دست آورید. جدولی از مقادیر x ، y و m روی بازه بسته $[a, b]$ بنویسید و دقت کنید تمام نقاطی که در آنها نمودار دارای خط مماس افقی است، در این جدول باشند. نمودار را نیز رسم کنید، و قطعه‌ای از خط مماس را در هر یک از نقاط رسم شده نشان دهید.

$$1. \quad y = 9 - x^2; [a, b] = [-3, 3]$$

$$2. \quad y = x^2 + 4; [a, b] = [-2, 2]$$

$$3. \quad y = -2x^2 + 4x; [a, b] = [-1, 3]$$

$$4. \quad y = x^2 - 6x + 9; [a, b] = [1, 5]$$

$$5. \quad y = x^2 + 1; [a, b] = [-2, 2]$$

$$6. \quad y = 1 - x^2; [a, b] = [-2, 2]$$

در تمرینهای ۷ تا ۱۲، ضریب زاویه خط مماس بر نمودار در نقطه (x_1, y_1) را به دست آورید. جدولی از مقادیر x ، y و m در نقاط مختلف روی نمودار را بنویسید و دقت کنید تمام نقاطی که در آنها، نمودار دارای خط مماس افقی است، در این جدول باشند. نمودار را نیز رسم کنید.

$$7. \quad y = x^3 - 3x$$

$$8. \quad y = 7 - 6x - x^2$$

$$9. \quad y = \sqrt{4 - x}$$

$$10. \quad y = \sqrt{x + 1}$$

$$11. \quad y = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

$$12. \quad y = x^3 - x^2 - x + 10$$

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۴، معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی مفروض در نقطه مشخص شده را به دست آورید. نمودار منحنی و همچنین خطهای مماس و قائم را رسم کنید.

$$13. \quad y = x^2 - 4x - 5; (-2, 7)$$

$$14. \quad y = x^2 - x + 2; (2, 4)$$

$$15. \quad y = x^2 + 2x + 1; (1, 2)$$

$$16. \quad y = \frac{1}{8}x^3; (4, 8)$$

$$17. \quad y = \sqrt{4x - 3}; (3, 3)$$

$$18. \quad y = \sqrt{4x - 3}; (-4, 5)$$

$$19. \quad y = -\frac{8}{\sqrt{x}}; (4, -4)$$

$$20. \quad y = \frac{6}{x}; (3, 2)$$

$$21. \quad y = 2x - x^2; (-2, 4)$$

$$22. \quad y = x^4 - 4x; (0, 0)$$

$$y = \sqrt[3]{5-x}; (-3, 2). ۲۲$$

$$y = \sqrt[3]{x}; (8, 2). ۲۳$$

۲۵. معادله خطی را پیدا کنید که بر منحنی $y = 2x^2 + 3$ مماس و با خط $8x - y + 3 = 0$ موازی باشد.

۲۶. معادله خطی را پیدا کنید که بر منحنی $y = 3x^2 - 4$ مماس و با خط $3x + y = 4$ موازی باشد.

۲۷. معادله خط قائم بر منحنی $y = 2 - (x^2/3)$ را که موازی با خط $x - y = 0$ باشد، به دست آورید.

۲۸. معادله هر خط قائم بر منحنی $y = x^3 - 3x$ و موازی با خط $2x + 18y - 9 = 0$ را به دست آورید.

۲۹. معادله خطی را پیدا کنید که بر منحنی $y = \sqrt{4x - 3} - 1$ مماس و بر خط $x + 2y - 11 = 0$ عمود باشد.

۳۰. معادله هر خط قائم بر منحنی $y = 1/x$ را که عمود بر خط $x + 4y = 0$ باشد، پیدا کنید.

۳۱. معادله خطوطی را پیدا کنید که از نقطه $(2, -6)$ می گذرند و بر منحنی $y = 3x^2 - 8$ مماس هستند.

۳۲. معادله خطوطی را که از نقطه $(3, -2)$ می گذرند و بر منحنی $y = x^2 - 7$ مماس هستند، به دست آورید.

۳۳. اگر $y = 4x^2$ ، برای هر نقطه (x_1, y_1) روی منحنی داریم $m(x_1) = 8x_1$. با روش تحلیلی ثابت کنید که هیچ خطی وجود ندارد که از نقطه $(1, 5)$ بگذرد و بر منحنی $y = 4x^2$ مماس باشد.

۳۴. اگر $y = 4 - x^2$ ، برای هر نقطه (x_1, y_1) روی منحنی داریم $m(x_1) = -2x_1$. با روش تحلیلی ثابت کنید که هیچ خطی وجود ندارد که از نقطه $(1, 2)$ بگذرد و بر منحنی $y = 4 - x^2$ مماس باشد.

۲.۳ مشتق

در بخش ۱.۳، ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه $(x_1, f(x_1))$ را به صورت زیر تعریف کردیم

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (1)$$

به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد.

این نوع حد در مسائل دیگر هم پیش می آید و نام خاصی دارد.

۱۰.۲.۳ تعریف مشتق تابع f تابعی است که با علامت f' نشان داده می‌شود و مقدار آن در هر عدد x واقع در قلمرو f به صورت زیر داده می‌شود

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (۲)$$

به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. علامت دیگری که به جای $f'(x)$ به کار برده می‌شود $D_x f(x)$ است، که خواننده می‌شود « مشتق اف‌اِکس نسبت به اِکس ». اگر x_1 عدد خاصی از قلمرو f باشد، آنگاه داریم

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۳)$$

به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. اگر فرمولهای (۱) و (۳) را با هم مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه $(x_1, f(x_1))$ دقیقاً برابر با مشتق تابع f در x_1 است.

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = 3x^2 + 12$ ؛ مشتق تابع f را پیدا کنید.

حل اگر x عددی در قلمرو f باشد، از فرمول (۲) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x) \\ &= 6x. \end{aligned}$$

بنابراین، مشتق f تابع f' است که به صورت $f'(x) = 6x$ تعریف شده است. قلمرو f' مانند قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی می‌باشد.

▲

فرمول (۳) را در نظر می‌گیریم

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

فرض کنید در این فرمول ،

$$x_1 + \Delta x = x. \quad (۴)$$

پس

$$« \Delta x \rightarrow 0 » \text{ معادل است با } « x \rightarrow x_1 » . \quad (۵)$$

از فرمولهای (۳) ، (۴) ، و (۵) فرمول زیر را برای محاسبه $f'(x_1)$ به دست می آوریم

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۶)$$

به شرطی که حد فوق وجود داشته باشد. بنابراین به جای فرمول (۳) می توان از فرمول (۶) نیز برای محاسبه $f'(x_1)$ استفاده کرد.

مثال ۲ برای تابع f در مثال ۱، مشتق f در ۲ را از سه طریق زیر به دست آورید.
(الف) با استفاده از فرمول (۳)؛ (ب) با استفاده از فرمول (۶)؛ (پ) با قراردادن ۲ به جای x در عبارت $f'(x)$ در مثال ۱.

حل

(الف) $f(x) = 3x^2 + 12$ با استفاده از فرمول (۳) داریم

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(2 + \Delta x)^2 + 12] - [3(2)^2 + 12]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12 + 12\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 12 - 12}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{12\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (12 + 3\Delta x) \\ &= 12. \end{aligned}$$

(ب) از فرمول (۶) به دست می آید

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x^2 + 12) - 24}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \\
 &= 12.
 \end{aligned}$$

▲ (ب) چون از مثال ۱ داریم $f'(x) = 6x$ ، پس $f'(2) = 12$.

اگر $y = f(x)$ ، آنگاه $f'(x)$ عبارت است از مشتق y نسبت به x ؛ و گاهی نماد $D_x y$ به جای $f'(x)$ به کار می‌رود. همچنین نماد y' نیز برای مشتق y نسبت به يك متغیر مستقل (در صورت مشخص بودن متغیر مستقل) به کار برده می‌شود. اگر تابع f به صورت $y = f(x)$ تعریف شده باشد، فرض می‌کنیم

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

بنابراین از فرمول (۲) داریم

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (7)$$

مشتق را گاهی با نماد dy/dx نمایش می‌دهند، اما این علامت را قبل از اینکه dy و dx را تعریف کنیم به کار نخواهیم برد.

مثال ۳ فرض کنید

$$y = \frac{2+x}{3-x}$$

و $D_x y$ را پیدا کنید.

حل

$$D_x y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2+x+\Delta x)/(3-x-\Delta x) - (2+x)/(3-x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3-x)(2+x+\Delta x) - (2+x)(3-x-\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6+x-x^2+3\Delta x-x\Delta x) - (6+x-x^2-2\Delta x-x\Delta x)}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(3-x-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5}{(3-x-\Delta x)(3-x)} \\
&= \frac{5}{(3-x)^2}.
\end{aligned}$$

مثال ۴ تابع $f(x) = 1/\sqrt{x+2}$ مفروض است؛ $f'(x)$ را به دست آورید.

حل

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{(x+\Delta x)+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{(x+\Delta x)+2}}{\Delta x \sqrt{(x+\Delta x)+2} \sqrt{x+2}} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{(x+\Delta x)+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{(x+\Delta x)+2})}{\Delta x \sqrt{(x+\Delta x)+2} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+2} + \sqrt{(x+\Delta x)+2})} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+2) - (x+\Delta x+2)}{\Delta x \sqrt{x+\Delta x+2} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+\Delta x+2})} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \sqrt{x+\Delta x+2} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+\Delta x+2})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{x+\Delta x+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+\Delta x+2})} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2})} \\
 \Delta &= \frac{-1}{2(x+2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

مثال ۵ تابع $f(x) = x^{1/3}$ مفروض است. (الف) $f'(x)$ را به دست آورید؛ (ب) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد حتی اگر f در 0 پیوسته باشد. نمودار تابع f را رسم کنید.

حل

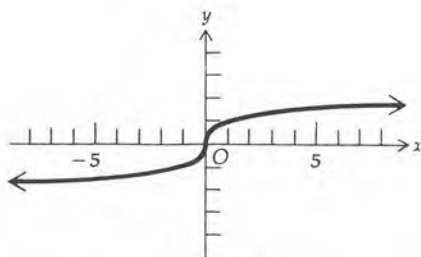
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}}{\Delta x} \quad (\text{الف})$$

صورت کسرفوق را برای به دست آوردن عامل مشترك Δx در صورت ومخرج گویا می کنیم وخواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}{\Delta x [(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x [(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
 &= \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
 &= \frac{1}{3x^{2/3}}.
 \end{aligned}$$

(ب) $f'(0)$ وجود ندارد چون $1/3x^{2/3}$ درصفر تعریف نشده است. معهذا، f در صفر پیوسته است، چون داریم

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/3} \\
 &= 0 \\
 &= f(0).
 \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۲.۳

▲ نمودار f در شکل ۱۰.۲.۳ نمایش داده شده است.

○ نمونه ۱ اگر برای تابع مثال ۵،

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

را در $x_1 = 0$ حساب کنیم، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^{1/3} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

بنابراین تعریف ۱۰.۱.۳ (ii) نتیجه می گیریم که خط مماس بر نمودار تابع f در مبدأ مختصات خط $x = 0$ است. ○

مثال ۵ و نمونه ۱ نشان می دهند که $f'(x)$ می تواند برای بعضی از مقادیر x در قلمرو f وجود داشته باشد و برای مقادیر دیگری از x واقع در قلمرو f ، وجود نداشته باشد.

۲.۲.۳ تعریف تابع f را در x_1 مشتق پذیر گوئیم اگر $f'(x_1)$ وجود داشته باشد.

○ نمونه ۲ از تعریف ۲.۲.۳ نتیجه می شود که تابع مثال ۵ به ازای همه اعداد بجز ۰ مشتق پذیر است. ○

۳.۲.۳ تعریف تابع f را روی بازه ای مشتق پذیر گوئیم اگر f به ازای هر عدد واقع در آن بازه مشتق پذیر باشد.

○ نمونه ۳ در مثال ۱، $f(x) = 3x^2 + 12$ ، و قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی است. چون $f'(x) = 6x$ ، و برای همه اعداد حقیقی موجود است، نتیجه می شود که f در همه جا مشتق پذیر است.

○

تمرینهای ۲۰۳

در تمرینهای ۱ تا ۱۸، با استفاده از فرمول (۲) این بخش، $f'(x)$ را برای تابع داده شده محاسبه کنید.

$$f(x) = 8 - 5x \quad .۲$$

$$f(x) = 7x + 3 \quad .۱$$

$$f(x) = 3x^2 + 4 \quad .۴$$

$$f(x) = -2 \quad .۳$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad .۶$$

$$f(x) = 4 - 2x^2 \quad .۵$$

$$f(x) = 6 - 3x - x^2 \quad .۸$$

$$f(x) = 4x^2 + 5x + 3 \quad .۷$$

$$f(x) = x^3 \quad .۱۰$$

$$f(x) = 8 - x^2 \quad .۹$$

$$f(x) = \sqrt{3x + 5} \quad .۱۲$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad .۱۱$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x}} \quad .۱۴$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad .۱۳$$

$$f(x) = \frac{3}{1+x^2} \quad .۱۶$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - x \quad .۱۵$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x+3} \quad .۱۸$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad .۱۷$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۲۴، با استفاده از فرمول (۳) این بخش، $f'(a)$ را برای a ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x) = \frac{4}{5x}; a = 2 \quad .۲۰$$

$$f(x) = 1 - x^2; a = 3 \quad .۱۹$$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1; a = 4 \quad .۲۲$$

$$f(x) = \frac{2}{x^3}; a = 6 \quad .۲۱$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + x + x^2; a = -3 \quad .۲۴$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}; a = 5 \quad .۲۳$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۰، با استفاده از فرمول (۶) این بخش، $f'(a)$ را برای a ی داده

شده حساب کنید.

$$f(x) = x^2 - x + 4; a = 2.26$$

$$f(x) = 2x + 2; a = -3.25$$

$$f(x) = \sqrt{1+9x}; a = 7.28$$

$$f(x) = 2 - x^2; a = -2.27$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - x; a = -8.30$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}; a = 3.29$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۶، $D_x y$ را به دست آورید.

$$y = \sqrt{2-7x}.33$$

$$y = \frac{4}{2x-5}.32$$

$$y = \frac{4}{x^2} + 3x.31$$

$$y = \sqrt{4-x^2}.36$$

$$y = \sqrt[3]{1-2x}.35$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.34$$

۳۷. اگر تابع g در a پیوسته باشد و $f(x) = (x-a)g(x)$ ، $f'(a)$ را حساب کنید. (داهنمایی: از فرمول (۶) استفاده کنید.)

۳۸. اگر تابع g در a پیوسته باشد و $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$ ، $f'(a)$ را حساب کنید. (داهنمایی: از فرمول (۶) استفاده کنید.)

۳۹. اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید. آیا f در ۱ مشتق پذیر است؟ نمودار f را رسم کنید.

۴۰. اگر $f(x) = \sqrt[3]{(4x-3)^2}$ ، $f'(x)$ را محاسبه کنید. آیا f در $3/4$ مشتق پذیر است؟ نمودار f را رسم کنید.

۴۱. اگر $f(x) = \sqrt[3]{1-3x}$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید. به ازای چه مقدار یا مقادیری از x تابع f مشتق پذیر نیست؟

۴۲. اگر داشته باشیم

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$f''(x)$ را در صورتی که $f(x) = ax^2 + bx$ ، به دست آورید.

۴۳. فرمول مسئله ۴۲ را به کار برده و $f''(x)$ را در صورتی که $f(x) = a/x$ ، به دست آورید.

۴۴. فرض کنید f تابعی است که قلمروش مجموعه تمام اعداد حقیقی است و برای هر

و b داریم $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. به علاوه، فرض کنید $f'(0) = 1$ و $f(0) = 1$ وجود دارد. ثابت کنید $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ برای هر x وجود دارد و داریم

۴۵. اگر f در a مشتق پذیر باشد، ثابت کنید که

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

(داهنمایی :

$$(f(a+\Delta x) - f(a-\Delta x)) = f(a+\Delta x) - f(a) + f(a) - f(a-\Delta x)$$

۳.۳ مشتق پذیری و پیوستگی

تابع مثال ۵ از بخش ۲.۳، درصفر پیوسته است ولی در آنجا مشتق پذیر نیست. ولی، همچنانکه در نمونه ۱ از بخش ۲.۳ نشان دادیم، بر نمودار این تابع در مبدأ، محور y ها مماس است. در نمونه زیر، تابعی داریم که درصفر پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست و بر نمودارش در مبدأ، خطی مماس نمی شود.

○ نمونه ۱ فرض کنید f تابع قدرمطلق باشد. بنابراین

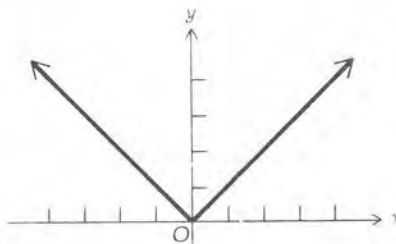
$$f(x) = |x|.$$

نمودار این تابع در مثال ۱ از بخش ۵.۱ به دست آمد. در اینجا، این نمودار در شکل ۱.۳.۳ نشان داده می شود. با توجه به فرمول (۳) از بخش ۲.۳،

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد. چون $f(0+\Delta x) = |\Delta x|$ و $f(0) = 0$ ،

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$



شکل ۱.۳.۳

اگر $\Delta x > 0$ ، داریم $|\Delta x| = \Delta x$ و اگر $\Delta x < 0$ داریم $|\Delta x| = -\Delta x$ ؛ پس باید حدهای یک طرفه در صفر را در نظر بگیریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

و

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

چون $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} |\Delta x|/\Delta x \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} |\Delta x|/\Delta x$ ، نتیجه می‌شود که حد دو طرفه $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x|/\Delta x$ وجود ندارد. بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد و لذا f در صفر مشتق پذیر نیست.

چون $f'(0)$ وجود ندارد و نه $+\infty$ است و نه $-\infty$ ، هیچ خطی بر نمودار تابع $\bigcirc$ قدر مطلق در مبدأ مماس نمی‌شود.

چون توابع مذکور در نمونه فوق و مثال ۵ از بخش ۲.۳، در یک عدد پیوسته‌اند اما در آن عدد مشتق پذیر نیستند، می‌توان نتیجه گرفت که پیوستگی یک تابع در یک عدد، مشتق پذیری آن تابع در آن عدد را ایجاب نمی‌کند. ولی، همان‌طور که در قضیه زیر بیان شده، مشتق پذیری قطعاً مستلزم پیوستگی است.

۱.۳.۳ قضیه اگر تابع f در x_1 مشتق پذیر باشد، آنگاه f در x_1 پیوسته است.

اثبات برای اثبات اینکه f در x_1 پیوسته است، باید نشان دهیم که سه شرط تعریف ۱.۶.۲ در x_1 برقرار است. یعنی باید نشان دهیم

(i) $f(x_1)$ وجود دارد؛

(ii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$ وجود دارد؛

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$.

بناباه فرض، f در x_1 مشتق پذیر است. پس، $f'(x_1)$ وجود دارد. چون با توجه به فرمول (۶) در بخش ۲.۳ داریم

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}. \quad (1)$$

پس $f(x_1)$ موجود است، زیرا در غیر این صورت حد فوق بی‌معنی خواهد بود. بنابراین شرط (i) در x_1 برقرار است. اکنون حد زیر را در نظر می‌گیریم

$$\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)].$$

می توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \rightarrow x_1} \left[(x - x_1) \cdot \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right]. \quad (۲)$$

از طرفی داریم

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) = 0$$

پس، می توان قضیه راجع به حد حاصلضرب (قضیه ۶.۲.۲) را در مورد طرف راست (۲) به کار برد و نتیجه گرفت

$$\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0 \cdot f'(x_1)$$

و بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] = 0.$$

پس

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1) + f(x_1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_1} [f(x) - f(x_1)] + \lim_{x \rightarrow x_1} f(x_1) \\ &= 0 + f(x_1) \end{aligned}$$

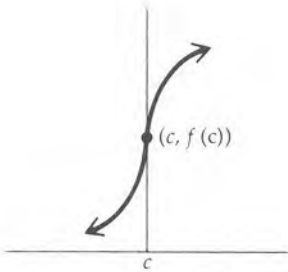
که از آن داریم

$$\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1). \quad (۳)$$

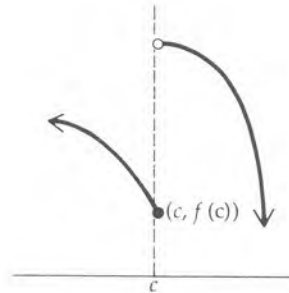
از معادله (۳) نتیجه می شود که شرطهای (ii) و (iii) از تعریف پیوستگی f ، در x_1 برقرارند
□ بنا بر این، قضیه اثبات شده است.

تابعی چون f می تواند به یکی از دلایل زیر در عددی مانند c مشتق پذیر نباشد.

۱. تابع f در c پیوسته نباشد. این موضوع از قضیه ۱.۳.۳ نتیجه می شود. برای دیدن نمودار چنین تابعی، به شکل ۲.۳.۳ مراجعه کنید.
۲. تابع f در c پیوسته باشد، و خط قائمی بر نمودار f در نقطه به طول $x = c$ مماس شود. برای دیدن نمودار تابعی که چنین خاصیتی داشته باشد، به شکل ۳.۳.۳ مراجعه کنید. این وضعیت در مثال ۵ از بخش ۲.۳ نیز پیش آمد.

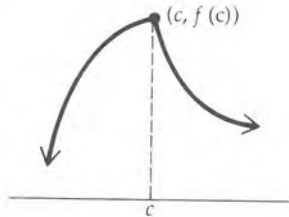


شکل ۳.۳.۳



شکل ۴.۳.۳

۳. تابع f در c پیوسته باشد، و نمودار تابع f در نقطه c به طول $x=c$ خط مماسی نداشته باشد. در شکل ۴.۳.۳ نمودار تابعی آمده است که در این شرط صدق می‌کند. ملاحظه کنید که نمودار در $x=c$ « گوشه‌ای » دارد. در نمونه ۱، مثال دیگری از این گونه توابع آمده است.



شکل ۴.۳.۳

قبل از ارائه مثال دیگری از تابعی که در یک عدد پیوسته است ولی در آن عدد مشتق پذیر نیست، مفهوم مشتق یک طرفه را تعریف می‌کنیم.

۲.۳.۳ تعریف اگر تابع f در x_1 تعریف شده باشد، آنگاه مشتق راست f در x_1 با $f'_+(x_1)$ نمایانده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۴)$$

و به عبارت دیگر

$$f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۵)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

۳.۳.۳ تعریف اگر تابع f در x_1 تعریف شده باشد، آنگاه مشتق چپ f در x_1 با $f'_-(x_1)$ نمایانده می شود و به صورت زیر تعریف می شود

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (۶)$$

و به عبارت دیگر

$$f'_-(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad (۷)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

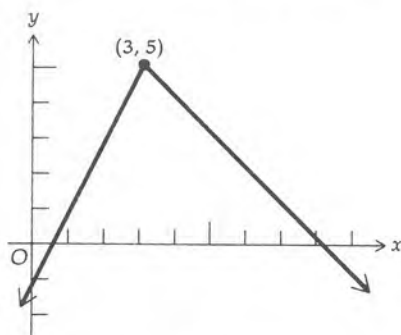
مثال ۱ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ 8 - x & 3 \leq x \end{cases}$$

(الف) نمودار f را رسم کنید؛ (ب) ثابت کنید که f در ۳ پیوسته است؛ (پ) $f'_-(3)$ و $f'_+(3)$ را محاسبه کنید؛ (ت) آیا f در ۳ مشتق پذیر است؟

حل

(الف) نمودار f در شکل ۵.۳.۳ رسم شده است.



شکل ۵.۳.۳

(ب) برای اثبات پیوستگی f در ۳، سه شرط پیوستگی را بررسی می کنیم.

(i) داریم $f(3) = 5$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 1) = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (8 - x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5 \text{، بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ (iii)}$$

چون سه شرط پیوستگی در ۳ برقرار است، پس f در ۳ پیوسته است.
(ب) داریم

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{[2(3 + \Delta x) - 1] - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[8 - (3 + \Delta x)] - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{8 - 3 - \Delta x - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} (-1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

(ت) چون

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

نتیجه می شود که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

وجود ندارد، یعنی f در ۳ مشتق پذیر نیست. معهذ، مشتق چپ و مشتق راست، هر دو، در ۳ وجود دارند.

▲

مثال ۲ فرض کنید f . به صورت زیر تعریف شده است

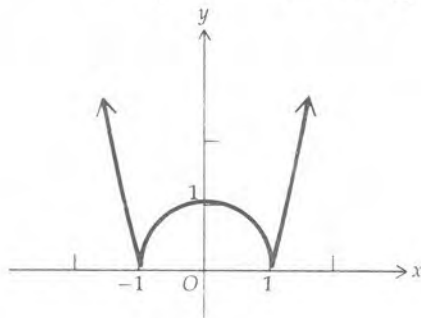
$$f(x) = |1 - x^2|.$$

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید؛ (ب) ثابت کنید که f در ۱ پیوسته است؛ (پ) آیا f در ۱ مشتق پذیر است؟

حل بنا به تعریف قدر مطلق، اگر $x < -1$ یا $x > 1$ ، آنگاه $f(x) = -(1 - x^2)$ ، و اگر $-1 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = 1 - x^2$. پس f را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & 1 < x \end{cases}$$

(الف) نمودار تابع f در شکل ۶.۳.۳ رسم شده است.



شکل ۶.۳.۳

(ب) برای اثبات اینکه f در ۱ پیوسته است، سه شرط پیوستگی را بررسی می کنیم.

$$f(1) = 0 \quad (i)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0 \quad (ii)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \text{ بنا براین،}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (iii)$$

چون شرطهای (i) تا (iii) همگی در ۱ برقرارند، پس f در ۱ پیوسته است.

(ب)

$$\begin{aligned}
 f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} & f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} & &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} & &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) & &= \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(1 + x)] \\
 &= 2. & &= -2.
 \end{aligned}$$

چون $f'_-(1) \neq f'_+(1)$ ، پس $f'(1)$ وجود ندارد و بنا بر این، f در ۱ مشتق پذیر نیست. $\blacktriangle$

بسا استفاده از روشی مشابه، می توان نشان داد که تابع مثال ۲ در $x = -1$ نیز مشتق پذیر نیست.

مثال ۳ فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < b \\ 1 - \frac{1}{4}x & b \leq x \end{cases}$$

(الف) مقداری برای b پیدا کنید که به ازای آن، f پیوسته باشد؛ (ب) آیا f در مقدار به دست آمده برای b در قسمت (الف) مشتق پذیر است؟

حل

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{x} = f(b) \text{ اگر } b \text{ پیوسته است}$$

داریم

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{1}{x} & \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b^+} \left(1 - \frac{1}{4}x\right) \\
 &= \frac{1}{b} & &= 1 - \frac{1}{4}b
 \end{aligned}$$

$f(b) = 1 - (b/4)$ ؛ بنابراین f در b پیوسته است اگر داشته باشیم

$$\frac{1}{b} = 1 - \frac{1}{4}b$$

$$4 = 4b - b^2$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b-2)^2 = 0$$

$$b = 2.$$

بنابراین

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x & 2 \leq x \end{cases}$$

و f در ۲ پیوسته است.

(ب) برای تعیین اینکه f در ۲ مشتق پذیر است یا نه، باید $f'_-(2)$ و $f'_+(2)$ را به دست آوریم. داریم

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\left(1 - \frac{1}{4}x\right) - \frac{1}{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{4(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{2x(x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

چون $f'_+(2) = f'_-(2) = f'(2)$ ، پس $f'(2)$ وجود دارد و در نتیجه، f در ۲ مشتق پذیر است. Δ

تمرینهای ۳.۳

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۱۶، اعمال زیر را انجام دهید: (الف) نمودار تابع را رسم کنید؛ (ب) معین کنید که f در x_1 پیوسته است یا خیر؛ (پ) $f'_-(x_1)$ و $f'_+(x_1)$ را در صورت وجود محاسبه کنید؛ (ت) تعیین کنید که f در x_1 مشتق پذیر است یا خیر.

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & x < 2 \\ 3x-7 & x \geq 2 \end{cases} \quad .2 \quad x_1 = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq -2 \\ -x-6 & x > -2 \end{cases} \quad .1 \quad x_1 = -2$$

$$f(x) = 1 + |x+2|; \quad x_1 = -2 \quad .4$$

$$f(x) = |x-3|; \quad x_1 = 3 \quad .3$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \quad .6 \quad x_1 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases} \quad .5 \quad x_1 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 2 \\ \sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases} \quad .8 \quad x_1 = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases} \quad .7 \quad x_1 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -1-2x & x \geq -1 \end{cases} \quad .10 \quad x_1 = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x < 1 \\ (1-x)^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad .9 \quad x_1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-9 & x < 3 \\ 6x-18 & 3 \leq x \end{cases} \quad .12 \quad x_1 = 3$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & x \leq 2 \\ 8x-11 & 2 < x \end{cases} \quad .11 \quad x_1 = 2$$

$$f(x) = (x-2)^{-2}; \quad x_1 = 2 \quad .14$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1}; \quad x_1 = -1 \quad .13$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^{2/3} & x \leq 0 \\ x^{2/3} & x > 0 \end{cases} \quad .16 \quad x_1 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 5-6x & x \leq 3 \\ -4-x^2 & x > 3 \end{cases} \quad .15 \quad x_1 = 3$$

۱۷. فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-4}$ ؛ ثابت کنید که f از راست در عدد ۴ پیوسته است؛ و نیز ثابت کنید که $f'_+(4)$ وجود ندارد. نمودار f را رسم کنید.

۱۸. فرض کنید $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ؛ ثابت کنید f بر بازه بسته $[-2, 2]$ پیوسته است؛ و ثابت کنید که هیچیک از $f'_+(-2)$ و $f'_-(2)$ وجود ندارد. نمودار f را رسم کنید.

۱۹. فرض کنید $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ ؛ ثابت کنید که f روی $(-\infty, -3]$ و $[3, +\infty)$ پیوسته است؛ و نیز ثابت کنید که هیچیک از $f'_-(3)$ و $f'_+(3)$ وجود ندارد. نمودار f را رسم کنید.

۲۰. فرض کنید $f(x) = \sqrt{8-x^2}$ ؛ ثابت کنید که f از طرف چپ در ۲ پیوسته است. و نیز ثابت کنید که $f'_-(2)$ وجود ندارد. نمودار تابع f را رسم کنید.

۲۱. در نمونه ۱، تابع قدرمطلق را داریم که به صورت $f(x) = |x|$ تعریف می شود و این تابع در ۰ مشتق پذیر نیست. ثابت کنید که به ازای هر $x \neq 0$ ، $f'(x) = |x|/x$.
(دانهایی: فرض کنید $|x| = \sqrt{x^2}$.)

۲۲. اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = -|x|$ ، فرمولی برای $(f+g)(x)$ به دست آورید. ثابت کنید که $f+g$ در صفر مشتق پذیر است درحالی که هیچیک از f و g در صفر مشتق پذیر نیست.

۲۳. با فرض اینکه $f(x) = x^{3/2}$ ، ثابت کنید که f از طرف راست در ۰ پیوسته است؛ و نیز ثابت کنید $f'_+(0)$ وجود دارد، و مقدار آن را به دست آورید. همچنین نمودار f را رسم کنید.

۲۴. فرض کنید $f(x) = (1-x^2)^{3/2}$ ؛ ثابت کنید که f روی بازه بسته $[-1, 1]$ پیوسته است؛ همچنین ثابت کنید که $f'(x)$ برای همه مقادیر x در بازه باز $(-1, 1)$ موجود است و هر دوی $f'_+(-1)$ و $f'_-(1)$ وجود دارند. نمودار f را رسم کنید.

۲۵. تابع f به صورت زیر داده شده است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{3} & x \leq b \\ 2x-1 & b < x \end{cases}$$

(الف) مقداری برای b پیدا کنید که تابع f در آن مقدار پیوسته باشد؛ (ب) آیا تابع f در مقدار b به دست آمده در قسمت (الف) مشتق پذیر است؟

۲۶. اگر تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد، مقادیری برای a و b پیدا کنید که $f'(1)$ به ازای آنها وجود داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$$

۳۷. اگر تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد، مقادیری برای a و b پیدا کنید که به ازای آنها $f'(1)$ وجود داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 2 \\ 2x^2 - 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

۳۸. با فرض اینکه $f(x) = [x]$ ، $f'(x_1)$ را برای هر عدد غیر صحیح x_1 حساب کنید؛ همچنین با استفاده از قضیه ۱.۳.۳ ثابت کنید که اگر x_1 یک عدد صحیح باشد، $f'(x_1)$ وجود ندارد. اگر x_1 عددی صحیح باشد، در مورد $f'_-(x_1)$ و $f'_+(x_1)$ چه می توان گفت؟

۳۹. فرض کنید $f(x) = (x-1)[x]$ ؛ نمودار f را در بازه $[0, 2]$ رسم کنید؛ همچنین مشتقهای زیر را، در صورت وجود، محاسبه کنید: (الف) $f'_-(1)$ ؛ (ب) $f'_+(1)$ ؛ $f'(1)$.

۴۰. تابع $f(x) = (5-x)[x]$ داده شده است. نمودار f را در بازه بسته $[4, 6]$ رسم کنید؛ مشتقهای زیر را، در صورت وجود، به دست آورید. (الف) $f'_-(5)$ ؛ (ب) $f'_+(5)$ ؛ $f'(5)$.

۴۱. تابع $f(x) = (x-a)[x]$ مفروض است. نشان دهید که $f'_+(a) + 1 = f'_-(a)$.
۴۲. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} & x \neq a \\ g'(a) & x = a \end{cases}$$

ثابت کنید که اگر $g'(a)$ وجود داشته باشد، f در a پیوسته است.

۴۳. فرض کنید $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. (الف) ثابت کنید که $f'_+(0) = +\infty$ و $f'_-(0) = +\infty$ ؛ (ب) ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

۴۴. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^n & x > 0 \end{cases}$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی است. (الف) به ازای چه مقادیری از n ، تابع f برای تمام مقادیر x مشتق پذیر است؟ (ب) به ازای چه مقادیری از n ، تابع f' برای تمام مقادیر x پیوسته است؟

۳۵. در یک تور مسافرتی دانش آموزی که حداکثر ۲۵۰ نفر می توانند در آن شرکت کنند، هزینه سفر برای هر دانش آموز ۱۵ دلار است اگر بیش از ۱۵۰ دانش آموز در آن شرکت نکنند؛ ولی به ازای هر نفر بیش از ۱۵۰ نفر، هزینه سفر هر دانش آموز ۵ دلار کاهش می یابد تا وقتی که هزینه برای هر دانش آموز به ۱۰ دلار برسد. (الف) اگر تعداد دانش آموزان شرکت کننده در تور، x باشد، پول دریافتی برگزار کنندگان تور (بر حسب دلار) را به عنوان تابعی از x بیان کنید؛ (ب) چون x تعداد افراد است، پس باید یک عدد حقیقی نامنفی باشد. با این فرض، نشان دهید که تابع قسمت (الف) در ۱۵۰ پیوسته است ولی در این عدد مشتق پذیر نیست.

۳۶. تولید کننده ای می تواند در هر عدد کالا ۲۰ دلار سود ببرد اگر در هر هفته بیش از ۸۰۰ عدد تولید نکند. در صورتی که بیش از این میزان تولید کند، مقدار سود به اندازه ۲۰۰ دلار در هر عدد کالا کاهش می یابد. (الف) اگر تولید کننده در هر هفته x عدد کالا تولید کند، سود هفتگی او را به عنوان تابعی از x تعیین کنید؛ (ب) چون x تعداد کالاهاست، یک عدد صحیح نامنفی است. با این فرض، نشان دهید که تابع قسمت (الف) در ۸۰۰ پیوسته است ولی در این عدد مشتق پذیر نیست.

۴.۳ چند قضیه در مورد مشتق گیری از توابع جبری

عمل یافتن مشتق یک تابع را مشتق گیری می نامند که می تواند با استفاده از تعریف ۱.۲.۳ انجام شود. ولی، اگر بخواهیم فقط از آن تعریف استفاده کنیم، این عمل نسبتاً طولانی خواهد بود؛ لذا اکنون چند قضیه بیان و اثبات می کنیم، که به کمک آنها پیدا کردن مشتق بعضی از توابع آسانتر می شود. این قضایا با استفاده از تعریف ۱.۲.۳ اثبات می شوند. بعد از اثبات هر قضیه، فرمول مشتق گیری مربوطه را ذکر می کنیم.

۱.۴.۳ قضیه اگر c یک عدد ثابت باشد، و برای هر x داشته باشیم $f(x) = c$ ، آنگاه داریم

$$f'(x) = 0.$$

اثبات

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

$$D_x(c) = 0$$

(۱)

بنابراین، مشتق يك عدد ثابت برابر صفر است.

○ نمونه ۱ اگر $f(x) = 5$ ، آنگاه

○ $f'(x) = 0$.

۲۰۴.۳ قضیه اگر n يك عدد صحيح مثبت باشد، و داشته باشیم $f(x) = x^n$ ، آنگاه

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

اثبات

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه دوجمله‌ای در مورد $(x+\Delta x)^n$ داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right] - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

اگر صورت و مخرج را بر Δx تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}(\Delta x) + \dots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right].$$

تمام جملات بجز جمله اول دارای عامل Δx هستند؛ پس اگر Δx به سمت ۰ میل کند، تمام جملات بجز جمله اول به سمت ۰ میل خواهند کرد. بنابراین داریم

□ $f'(x) = nx^{n-1}.$

$$D_x(x^n) = nx^{n-1}.$$

(۲)

○ نمونه ۲

(الف) اگر $f(x) = x^8$ ، آنگاه

$$f'(x) = \lambda x^\gamma.$$

(ب) برای $f(x) = x$ داریم

$$\circ \quad f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

۳.۴.۳ قضیه اگر f یک تابع، و c یک عدد ثابت، و g تابعی باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

آنگاه چنانچه $f'(x)$ موجود باشد،

$$g'(x) = c \cdot f'(x).$$

اثبات

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \square \quad &= cf'(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{D_x[c \cdot f(x)] = c \cdot D_x f(x).} \quad (۳)$$

یعنی، مشتق حاصلضرب یک عدد ثابت در یک تابع، برابر است با حاصلضرب عدد ثابت در مشتق تابع، به شرطی که این مشتق وجود داشته باشد.

از ترکیب قضایای ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ نتیجه زیر به دست می‌آید: اگر $f(x) = cx^n$ که n عددی صحیح مثبت و c یک عدد ثابت است، داریم

$$f'(x) = cnx^{n-1}$$

$$\boxed{D_x(cx^n) = cnx^{n-1}.} \quad (۴)$$

○ نمونه ۳ اگر $f(x) = 5x^7$ ، آنگاه

$$\circ \quad f'(x) = 5 \cdot 7x^6 = 35x^6.$$

۴.۴.۳ قضیه اگر f و g توابع دلخواهی باشند و تابع h به صورت زیر تعریف شده باشد

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

آنگاه، چنانچه $f'(x)$ و $g'(x)$ موجود باشند،

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

اثبات

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

□

$$\boxed{D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x).} \quad (5)$$

یعنی، مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتقهای آن دو، به شرطی که این مشتقها وجود داشته باشند.

نتیجه قضیه قبل را می توان برای هر تعداد متناهی از توابع تعمیم داد؛ کافی است از قضیه قبل واستقرای ریاضی استفاده کنیم. این موضوع در قضیه زیر بیان شده است.

۵.۴.۳ قضیه مشتق مجموع تعدادی متناهی از توابع برابر است با مجموع مشتقهای آن توابع، به شرطی که این مشتقها وجود داشته باشند.

با استفاده از قضیه های قبل می توان مشتق هر تابع چند جمله ای را به سادگی محاسبه کرد.

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$ ؛ مطلوب است محاسبه $f'(x)$.

حل

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) \\ &= D_x(7x^4) + D_x(-2x^3) + D_x(8x) + D_x(5) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8. \end{aligned}$$

▲

۶.۴.۳ قضیه اگر f و g توابعی دلخواه باشند و h تابعی باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = f(x)g(x)$$

آنگاه چنانچه $f'(x)$ و $g'(x)$ موجود باشند،

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

اثبات

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

در صورت کسر، عبارت $f(x+\Delta x) \cdot g(x)$ را اضافه و کم می‌کنیم، و به دست

می‌آوریم

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x) \cdot g(x) + f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x+\Delta x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x+\Delta x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

چون f در x مشتق پذیر است، بنا به قضیه ۱.۳.۳، f در x پیوسته است؛ بنابراین

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) = f(x) \quad \text{همچنین}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) = g(x).$$

پس داریم

$$\square \quad h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$\boxed{D_x[f(x)g(x)] = f(x) \cdot D_x g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)}. \quad (۶)$$

یعنی، مشتق حاصلضرب دو تابع برابر است با تابع اول ضربدر مشتق تابع دوم به علاوه تابع دوم ضربدر مشتق تابع اول، به شرطی که این مشتقها وجود داشته باشند.

مثال ۲ فرض کنید $h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$ ؛ $h'(x)$ را حساب کنید.

حل

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \\ &= (30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3) + (18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3) \\ &= 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3. \end{aligned}$$

توجه کنید که اگر در مثال ۲، ابتدا حاصلضرب عوامل $h(x)$ را بیابیم و سپس از آن مشتق گیری کنیم، همان نتیجه به دست می آید زیرا

$$h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4$$

و بنا بر این

$$h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3.$$

۷.۴.۳ قضیه اگر f و g توابع دلخواهی باشند و h تابعی باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{که در آن } g(x) \neq 0,$$

آنگاه چنانچه $f'(x)$ و $g'(x)$ موجود باشند،

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

اثبات

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)},$$

اگر عبارت $f(x) \cdot g(x)$ را در صورت کسر اضافه و کم کنیم، به دست می آوریم

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left[g(x) \cdot \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \left[f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{g(x) \cdot g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$\square = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

$$\boxed{D_x \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}}. \quad (7)$$

یعنی، مشتق خارج قسمت دو تابع عبارت است از کسری که مخرج آن، مربع مخرج کسر اصلی است و صورت آن، مخرج کسر اصلی ضربدر مشتق صورت منهای صورت کسر ضربدر مشتق مخرج است، به شرطی که این مشتقها وجود داشته باشند.

مثال ۳ فرض کنید

$$h(x) = \frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$$

و $h'(x)$ را حساب کنید.

حل

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}.$$

قضیه ۸.۴.۳ اگر $f(x) = x^{-n}$ ، که در آن $-n$ يك عدد صحیح منفی است و $x \neq 0$ ،
آنگاه

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

اثبات چون $-n$ يك عدد صحیح منفی است، پس n يك عدد صحیح مثبت است.
می نویسیم

$$f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

با استفاده از قضیه ۷.۴.۳ داریم

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n}$$

$$\square \quad = -nx^{-n-1}.$$

مثال ۴ فرض کنید

$$f(x) = \frac{3}{x^5}.$$

مطلوب است محاسبه $f'(x)$.

حل $f(x) = 3x^{-5}$ بنا بر این

$$\Delta \quad f'(x) = 3(-5x^{-6}) = -15x^{-6} = -\frac{15}{x^6}.$$

اگر r يك عدد صحیح مثبت یا منفی باشد، از قضایای ۲.۴.۳ و ۸.۴.۳ نتیجه
می شود که

$$\boxed{D_x(x^r) = rx^{r-1}}. \quad (۸)$$

و از قضایای ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ و ۸.۴.۳ به دست می آوریم

$$\boxed{D_x(cx^r) = crx^{r-1}}. \quad (۹)$$

تمرینهای ۴.۳

در هر يك از تمرینهای ۱ تا ۳۶، با استفاده از قضایای این بخش، از تابع داده شده مشتق بگیرید.

$$f(x) = 7x - 5 \quad ۱. \quad g(x) = 8 - 3x \quad ۲.$$

$$g(x) = 1 - 2x - x^2 \quad ۳. \quad f(x) = 4x^2 + 4x + 1 \quad ۴.$$

$$f(x) = x^2 - 3x^2 + 5x - 2 \quad ۵. \quad f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1 \quad ۶.$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^8 - x^4 \quad ۷. \quad g(x) = x^5 - 2x^5 + 5x^2 - 7x \quad ۸.$$

$$F(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \quad ۹. \quad H(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2 \quad ۱۰.$$

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad ۱۱. \quad G(y) = y^{10} + 7y^5 - y^2 + 1 \quad ۱۲.$$

$$F(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2} \quad ۱۳. \quad f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2} \quad ۱۴.$$

$$g(x) = 4x^4 - \frac{1}{4x^4} \quad ۱۵. \quad f(x) = x^4 - 5 + x^{-2} + 4x^{-4} \quad ۱۶.$$

$$g(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^4} \quad ۱۷. \quad H(x) = \frac{5}{6x^5} \quad ۱۸.$$

$$f(s) = \sqrt{3}(s^2 - s^2) \quad ۱۹. \quad g(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1) \quad ۲۰.$$

$$f(x) = (2x^4 - 1)(5x^2 + 6x) \quad ۲۱. \quad f(x) = (4x^2 + 3)^2 \quad ۲۲.$$

$$G(y) = (7 - 3y^2)^2 \quad ۲۳. \quad F(t) = (t^2 - 2t + 1)(2t^2 + 3t) \quad ۲۴.$$

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 1) \quad ۲۵. \quad g(x) = \frac{2x}{x+3} \quad ۲۶.$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad ۲۷. \quad F(y) = \frac{2y+1}{3y+4} \quad ۲۸.$$

$$H(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad ۲۹. \quad f(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{x - 2} \quad ۳۰.$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4} \quad ۳۲$$

$$h(x) = \frac{5x}{1 + 2x^2} \quad ۳۱$$

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \quad ۳۴$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{x^2 + 8} \quad ۳۳$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3} (x^2 - 2x^{-1} + 1) \quad ۳۶$$

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 5} (3x - 1) \quad ۳۵$$

۳۷. معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی $y = x^2 - 4$ در نقطه $(4, 4)$ بیابید.

۳۸. معادله‌ای برای خط قائم بر منحنی $y = 4x^2 - 8x$ در نقطه $(1, -4)$ پیدا کنید.

۳۹. معادله‌ای برای خط قائم بر منحنی $y = 10/(14 - x^2)$ در نقطه $(4, -5)$ پیدا کنید.

۴۰. معادله‌ای برای خط مماس بر منحنی $y = 8/(x^2 + 4)$ در نقطه $(2, 1)$ پیدا کنید.

۴۱. معادله‌ای برای خطی که مماس بر منحنی $y = 3x^2 - 4x$ و موازی با خط $y - 2x + 3 = 0$ باشد، پیدا کنید.

۴۲. معادله خط قائم بر منحنی $y = x^4 - 6x$ و موازی با خط $x - 2y + 6 = 0$ را پیدا کنید.

۴۳. معادله‌ای برای هر کدام از خطوط قائم بر منحنی $y = x^3 - 4x$ و موازی با خط $x + 8y - 8 = 0$ پیدا کنید.

۴۴. معادله‌ای برای هر کدام از خطهایی که مماس بر منحنی $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$ و موازی با خط $2x - y + 3 = 0$ هستند، پیدا کنید.

۴۵. معادله‌ای برای هر کدام از خطهایی که از نقطه $(4, 13)$ می‌گذرند و بر منحنی $y = 2x^2 - 1$ مماس هستند، پیدا کنید.

۴۶. تابع $f(x) = (x^3/3) + 2x^2 + 5x + 5$ مفروض است. نشان دهید که برای تمام مقادیر x ، $f'(x) \geq 0$.

۴۷. اگر f ، g ، و h توابع دلخواهی باشند و $\phi(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ ، ثابت کنید که چنانچه $f'(x)$ ، $g'(x)$ ، و $h'(x)$ وجود داشته باشند، داریم

$$\phi'(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x).$$

(راهنمایی: از قضیه ۶.۴.۳ دوبار استفاده کنید.)

در تمرینهای ۴۸ تا ۵۱، با استفاده از نتیجه تمرین ۴۷، از توابع داده شده مشتق بگیرید.

$$f(x) = (x^2 + 3)(2x - 5)(2x + 2) \quad ۴۸$$

$$h(x) = (3x + 2)^2(x^2 - 1) \quad ۴۹.$$

$$g(x) = (3x^3 + x^{-3})(x + 3)(x^2 - 5) \quad ۵۰.$$

$$\phi(x) = (2x^2 + x + 1)^3 \quad ۵۱.$$

۵.۳ مشتق به عنوان آهنگ تغییر

ذره‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد يك خط مستقیم در حال حرکت است. يك چنین حرکتی را حرکت مستقیم الخط می‌نامند. یکی از دو جهت را به طور دلخواه مثبت، و جهت مخالف را منفی انتخاب می‌کنیم. به خاطر سادگی فرض می‌کنیم حرکت ذره در امتداد يك خط افقی است، که طرف راست آن جهت مثبت و طرف چپ آن جهت منفی باشد. نقطه‌ای را روی خط انتخاب کرده و آن را با حرف O نشان می‌دهیم. فرض کنید f تابعی باشد که فاصله جهت‌دار ذره را از O در هر لحظه از زمان تعیین می‌کند. به طور مشخص، اگر فاصله جهت‌دار ذره از O در زمان t (ثانیه) برابر s سانتیمتر باشد، در این صورت f تابعی است که با معادله زیر تعریف می‌شود

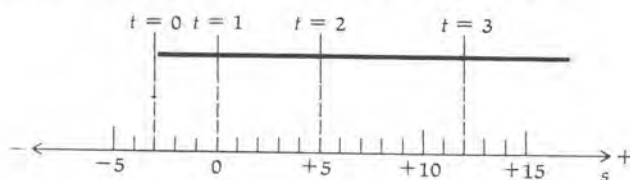
$$s = f(t) \quad (۱)$$

که فاصله جهت‌دار ذره از نقطه O در يك لحظه خاص از زمان را نشان می‌دهد.

○ نمونه ۱ فرض کنید

$$s = t^2 + 2t - 3.$$

آنگاه وقتی که $t = 0$ ، $s = -3$ ؛ بنابراین در لحظه $t = 0$ ذره به فاصله ۳ سانتیمتر در طرف چپ O قرار دارد. همچنین وقتی که $t = 1$ ، $s = 0$ ؛ بنابراین، در ثانیه ۱ ذره در O قرار دارد. وقتی که $t = 2$ ، $s = 5$ ؛ یعنی در ثانیه ۲ ذره به فاصله ۵ سانتیمتر در طرف راست O قرار دارد. همین‌طور، در ثانیه ۳ ذره به فاصله ۱۲ سانتیمتر در طرف راست O است. شکل ۱.۵.۳ وضعیتهای مختلف ذره را برای مقادیر بخصوصی از t نشان می‌دهد. در بازه زمانی $t = 1$ تا $t = 3$ ذره از نقطه به طول $s = 0$ به طرف نقطه به طول $s = 12$ حرکت می‌کند؛ از اینرو در این بازه زمانی ۲ ثانیه، تغییر در فاصله جهت‌دار از O برابر ۱۲ سانتیمتر است. سرعت متوسط ذره، برابر نسبت تغییر فاصله جهت‌دار از يك نقطه ثابت



شکل ۱.۵.۳

به تغییر زمان می باشد. بنابراین سرعت متوسط ذره از لحظه $t = 1$ تا لحظه $t = 3$ برابر $6 = \frac{12}{2}$ سانتیمتر در ثانیه و از $t = 0$ تا $t = 2$ ، تغییر فاصله جهت دار ذره از نقطه O برابر 8 سانتیمتر است، و سرعت متوسط ذره در این بازه ۲ ثانیه ای برابر $4 = \frac{8}{2}$ سانتیمتر در ثانیه است.

○

در نمونه ۱ واضح است که سرعت متوسط ذره ثابت نیست؛ و همچنین سرعت متوسط اطلاع خاصی درباره حرکت ذره در هر لحظه معین به ما نمی دهد. مثلاً، اگر اتومبیلی یک فاصله ۱۰۰ کیلومتری را در یک جهت و در مدت ۲ ساعت طی کند، سرعت متوسط وی برابر ۵۰ کیلومتر در ساعت می باشد. ولی با استفاده از این اطلاع نمی توان وضعیت عقربه سرعت-سنج اتومبیل را در هر لحظه از این بازه زمانی ۲ ساعته مشخص کرد. عددی که سرعت سنج در هر لحظه از زمان نشان می دهد، سرعت لحظه ای است. بحث زیر به ما امکان می دهد تعریفی برای مفهوم « سرعت لحظه ای » ارائه دهیم.

فرض کنید معادله (۱) ، s (فاصله جهت دار ذره از نقطه O بر حسب سانتیمتر) را به عنوان تابعی از t (زمان بر حسب ثانیه) تعریف کنید. وقتی $t = t_1$ ، $s = s_1$. تغییر فاصله جهت دار از O در بازه زمانی $(t - t_1)$ ثانیه ای، برابر با $(s - s_1)$ سانتیمتر می باشد، و سرعت متوسط ذره در این بازه زمانی برابر است با

$$\frac{s - s_1}{t - t_1}$$

و یا، چون $s = f(t)$ و $s_1 = f(t_1)$ ، سرعت متوسط از رابطه زیر به دست می آید

$$\frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \quad (2)$$

حال، هر چه بازه زمانی بین t و t_1 کوتاه تر شود، سرعت متوسط نیز به آنچه که به طور شهودی سرعت لحظه ای در t_1 می دانیم، نزدیک تر خواهد شد.

به عنوان مثال، اگر سرعت سنج اتومبیلی در حال گذشتن از نقطه ای مانند P_1 سرعت ۸۰ کیلومتر در ساعت را نشان دهد و اگر نقطه P مثلاً ۱۰ متر از P_1 فاصله داشته باشد، آنگاه سرعت متوسط اتومبیل وقتی این فاصله ۱۰ متری طی می شود، با احتمال زیاد نزدیک به ۸۰ کیلومتر در ساعت خواهد بود، زیرا تغییرات سرعت اتومبیل در طی این مسافت کوتاه احتمالاً کم است. حال اگر فاصله P_1 تا P را به ۵ متر تقلیل دهیم، سرعت متوسط اتومبیل در این فاصله به عددی که سرعت سنج در لحظه عبور از P_1 نشان می دهد، نزدیک تر خواهد بود. می توانیم این عمل را ادامه دهیم؛ عدد سرعت سنج در لحظه عبور از P_1 می تواند نشان دهنده حد سرعت متوسط بین P و P_1 باشد، وقتی P به سمت P_1 میل کند. بنا بر این، سرعت لحظه ای عبارت است از حد کسر (۲) وقتی که t به سمت t_1 میل کند، به شرطی که این حد وجود داشته باشد. این حد همان مشتق f در لحظه t_1 می باشد. در این مورد تعریف

زیرا داریم.

۱۰.۵.۳ تعریف فرض کنید تابع f به وسیله معادله زیر تعریف شود

$$s = f(t)$$

و ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم طوری حرکت کند که فاصله جهت‌دار آن از نقطه ثابتی واقع بر روی خط، در لحظه t (برحسب واحد زمان) برابر با s (برحسب واحد طول) باشد؛ آنگاه سرعت لحظه‌ای ذره در t (برحسب واحد زمان) برابر $v(t)$ (برحسب واحد سرعت) است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$v(t) = f'(t)$$

به شرطی که $f'(t)$ وجود داشته باشد.

سرعت لحظه‌ای ممکن است مثبت و یا منفی باشد، برحسب اینکه ذره متحرک در جهت مثبت خط حرکت کند یا در جهت منفی آن. اگر سرعت لحظه‌ای صفر باشد، ذره در حال سکون است.

مقدار سرعت ذره در هر لحظه، به عنوان قدر مطلق سرعت لحظه‌ای در آن لحظه تعریف می‌شود. پس مقدار سرعت، يك عدد نامنفی است. اغلب، اصطلاحات «مقدار سرعت» و «سرعت لحظه‌ای» باهم اشتباه می‌شوند؛ باید توجه کرد که مقدار سرعت فقط نشان دهنده این است که ذره با چه تندی حرکت می‌کند؛ درحالی که، سرعت لحظه‌ای جهت حرکت را نیز نشان می‌دهد.

مثال ۱ ذره‌ای در امتداد يك خط افقی طبق معادله زیر حرکت می‌کند

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1.$$

تعیین کنید که در چه بازه زمانی ذره به سمت راست حرکت می‌کند و در چه بازه‌ای به سمت چپ. همچنین لحظه تغییر جهت ذره را تعیین کنید.

$$\text{حل } f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1.$$

پس

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6t^2 - 8t + 2 \\ &= 2(3t^2 - 4t + 1) \\ &= 2(3t - 1)(t - 1). \end{aligned}$$

بنابراین

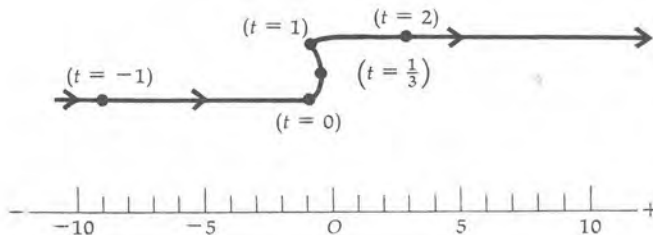
$$v(t) = 2(3t - 1)(t - 1).$$

سرعت لحظه‌ای برای $t = 1$ و $t = 1/3$ برابر صفر است. بنابراین، ذره در این دو لحظه در حال سکون است. اگر $v(t)$ مثبت باشد، ذره به سمت راست، و اگر $v(t)$ منفی باشد، به سمت چپ حرکت می‌کند. علامت $v(t)$ را برای بازه‌های مختلف زمانی t معین کرده، و نتایج را در جدول ۱۰.۵.۳ نشان می‌دهیم.

جدول ۱۰.۵.۳

بازه‌های زمانی	$t = 1$	$t = 1/3$	نتیجه
$t < 1/3$	—	—	$v(t)$ مثبت است، و ذره به سمت راست حرکت می‌کند.
$t = 1/3$	۰	—	$v(t)$ صفر است، و جهت حرکت از راست به چپ تغییر می‌کند.
$1/3 < t < 1$	+	—	$v(t)$ منفی است، و ذره به سمت چپ حرکت می‌کند.
$t = 1$	+	۰	$v(t)$ صفر است، و جهت حرکت از چپ به راست تغییر می‌کند.
$1 < t$	+	+	$v(t)$ مثبت است، و ذره به سمت راست حرکت می‌کند.

حرکت ذره که در شکل ۲۰.۵.۳ نشان داده شده، در امتداد خط افقی است؛ و چگونگی حرکت در بالای خط افقی نشان داده شده است. همچنین جدول ۲۰.۵.۳ (صفحه بعد) مقادیر s و v را به ازای مقادیر معینی از t نشان می‌دهد.



شکل ۲۰.۵.۳

جدول ۲۰۵.۳

t	s	v
-۱	-۹	۱۶
۰	-۱	۲
$\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱۹}{۲۷}$	۰
۱	-۱	۰
۲	۳	۱۰

▲

مثال ۲ توپی را با سرعت اولیه ۶۴ فوت در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرت می کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه شروع حرکت به طرف بالا باشد، معادله حرکت به صورت زیر است

$$s = -16t^2 + 64t$$

که در آن t زمانی است که از لحظه پرتاب توپ سپری شده و s مسافتی است بر حسب فوت که توپ در t ثانیه بعد از پرتاب از نقطه شروع، طی کرده است؛ مطلوب است محاسبه (الف) سرعت لحظه ای توپ در پایان ۱ ثانیه؛ (ب) سرعت لحظه ای در پایان ۳ ثانیه؛ (پ) مدت لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه؛ (ت) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت؛ (ث) مقدار سرعت توپ در پایان ۱ ثانیه و پایان ۳ ثانیه؛ (ج) مدتی که طول می کشد تا توپ به زمین برسد؛ (چ) سرعت لحظه ای توپ وقتی به زمین می رسد؛ در پایان ۱ ثانیه توپ در حال بالا رفتن است یا سقوط کردن؟ در پایان ۳ ثانیه چگونه؟

حل فرض می کنیم $v(t)$ سرعت لحظه ای توپ بر حسب فوت در ثانیه، در لحظه t (بر حسب ثانیه) باشد. داریم

$$s = f(t) \quad \text{که در آن} \quad f(t) = -16t^2 + 64t.$$

$$f'(t) = -32t + 64$$

بنابراین

$$v(t) = -32t + 64.$$

(الف) $v(1) = -32(1) + 64 = 32$ ؛ بنابراین در پایان ۱ ثانیه، توپ با سرعت لحظه ای ۳۲ فوت در ثانیه در حال بالا رفتن است.

(ب) $v(3) = -32(3) + 64 = -32$ ؛ بنابراین در پایان ۳ ثانیه، توپ با

سرعت لحظه‌ای ۳۲ - فوت در ثانیه در حال سقوط است.

(پ) توپ وقتی به بالاترین نقطه می‌رسد که جهت حرکت تغییر کند، یعنی، وقتی که $v(t) = 0$. با قرار دادن $v(t) = 0$ به دست می‌آید $64 - 32t = 0$. پس $t = 2$.
(ت) برای $t = 2$ ، $s = 64$ ؛ بنابراین توپ ۶۴ فوت از نقطه شروع بالا خواهد رفت.

(ث) مقدار سرعت در لحظه t برابر با $|v(t)|$ فوت در ثانیه می‌باشد. پس داریم

$$|v(3)| = 32 \text{ و } |v(1)| = 32$$

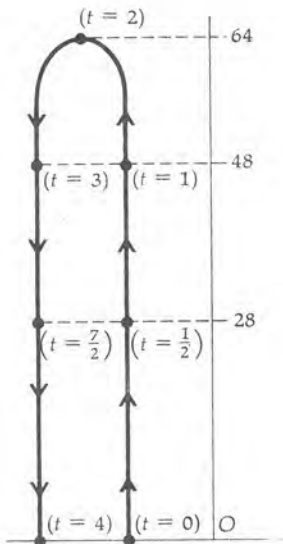
(ج) توپ وقتی به زمین می‌رسد که $s = 0$. با قرار دادن $s = 0$ داریم $64t - 16t^2 = 0$ ، که از حل این معادله $t = 0$ و $t = 4$ به دست می‌آیند. بنابراین توپ در ثانیه ۴ به زمین خواهد رسید.

(ج) $v(4) = -64$ ؛ بنابراین در لحظه برخورد با زمین، سرعت لحظه‌ای توپ برابر با ۶۴ - فوت در ثانیه است.

جدول ۳.۵.۳ مقادیر s و v را به ازای مقادیر معینی از t به دست می‌دهد. حرکت توپ در شکل ۳.۵.۳ نشان داده شده است. فرض شده که حرکت در امتداد یک خط قائم می‌باشد. چگونگی حرکت در طرف چپ خط قائم نمایش داده شده است.

جدول ۳.۵.۳

t	s	v
۰	۰	۶۴
$\frac{1}{2}$	۲۸	۴۸
۱	۴۸	۳۲
۲	۶۴	۰
۳	۴۸	-۳۲
$\frac{7}{2}$	۲۸	-۴۸
۴	۰	-۶۴



شکل ۳.۵.۳

مفهوم سرعت در حرکت مستقیم الخط با مفهوم کلیتر آهنگ لحظه‌ای تغییر ارتباط دارد.

به عنوان مثال، اگر ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم طبق معادله $s = f(t)$ در حال حرکت باشد، سرعت آن ذره در لحظه t بر حسب واحد زمان، به وسیله مشتق s نسبت به t معین می‌شود. چون می‌توان سرعت را به عنوان آهنگ تغییر مسافت در واحد تغییر زمان تعبیر کرد، نتیجه می‌گیریم که مشتق s نسبت به t همان آهنگ تغییر s در واحد تغییر t است. به طریق مشابه، اگر کمیتی مانند y تابعی از کمیت دیگری مانند x باشد، می‌توان آهنگ تغییر y در واحد تغییر x را معین کرد. بحث در این مورد، مشابه بحث‌های مربوط به ضریب زاویه خط مماس بر نمودار، و سرعت لحظه‌ای يك ذره که در امتداد يك خط مستقیم حرکت می‌کند، خواهد بود.

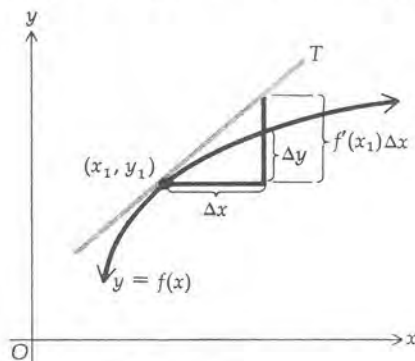
اگر رابطه تابعی بین y و x به صورت $y = f(x)$ تعریف شده باشد، واگر x از مقدار x_1 به $x_1 + \Delta x$ تغییر کند، آنگاه y از $f(x_1)$ به $f(x_1 + \Delta x)$ تغییر می‌کند. بنابراین، وقتی تغییر x برابر با Δx باشد، تغییر y که آن را با علامت Δy نشان می‌دهیم، برابر با $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ خواهد بود. آهنگ متوسط تغییر y در واحد تغییر x ، وقتی x از x_1 به $x_1 + \Delta x$ تغییر می‌کند، برابر است با

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

اگر حد این خارج قسمت، وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ وجود داشته باشد، این حد به چیزی میل می‌کند که به طور شهودی آهنگ لحظه‌ای تغییر y در واحد تغییر x ، در x_1 است. بنا بر این، تعریف زیر را داریم

۴.۵.۳ تعریف اگر $y = f(x)$ ، آهنگ لحظه‌ای تغییر y در واحد تغییر x ، در x_1 ، برابر است با $f'(x_1)$ و به عبارت دیگر، مشتق y نسبت به x در x_1 ، به شرطی که $f'(x_1)$ وجود داشته باشد.

برای اینکه موضوع را به طور هندسی نشان دهیم، فرض کنید $f'(x_1)$ آهنگ لحظه‌ای تغییر y در واحد تغییر x ، در x_1 باشد. آنگاه حاصل ضرب $f'(x_1)$ در Δx (تغییر x) برابر با تغییر y خواهد بود اگر نقطه (x, y) در امتداد خط مماس بر نمودار $y = f(x)$ در نقطه (x_1, y_1)



شکل ۴.۵.۳

حرکت کند. شکل ۴.۵.۳ را ببینید. آهنگ متوسط تغییر y در واحد تغییر x از کسر (۳) به دست می‌آید، و اگر این کسر را در Δx ضرب کنیم، داریم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \Delta y$$

که همان تغییر واقعی y ناشی از تغییر x به اندازه Δx است، وقتی که نقطه (x, y) در امتداد نمودار حرکت می‌کند.

مثال ۳ فرض کنید حجم یک مکعب، که طول یک ضلع آن e سانتیمتر است، برابر با V سانتیمتر مکعب باشد. مطلوب است محاسبه آهنگ متوسط تغییر حجم در هر سانتیمتر تغییر طول ضلع وقتی که تغییر e (الف) از ۳ تا ۳.۲؛ (ب) از ۳ تا ۳.۱؛ (پ) از ۳ تا ۳.۰۱، باشد؛ (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم در هر سانتیمتر تغییر طول ضلع، وقتی $e = ۳$ چند است؟

حل چون فرمول حجم مکعب به صورت $V = e^3$ است، پس فرض کنید تابع f به صورت $e^3 = f(e)$ تعریف شده باشد. در این صورت، آهنگ متوسط تغییر V در واحد تغییر e ، وقتی e از e_1 تا $e_1 + \Delta e$ تغییر کند، برابر است با

$$\frac{f(e_1 + \Delta e) - f(e_1)}{\Delta e}.$$

(الف) ، $e_1 = ۳$ ، $\Delta e = ۰.۲$ و

$$\frac{f(۳.۲) - f(۳)}{۰.۲} = \frac{(۳.۲)^3 - ۳^3}{۰.۲} = \frac{۵۷۷}{۰.۲} = ۲۸۸۵$$

(ب) ، $e_1 = ۳$ ، $\Delta e = ۰.۱$ و

$$\frac{f(۳.۱) - f(۳)}{۰.۱} = \frac{(۳.۱)^3 - ۳^3}{۰.۱} = \frac{۲۷۹}{۰.۱} = ۲۷۹۰$$

(پ) ، $e_1 = ۳$ ، $\Delta e = ۰.۰۱$ و

$$\frac{f(۳.۰۱) - f(۳)}{۰.۰۱} = \frac{(۳.۰۱)^3 - ۳^3}{۰.۰۱} = \frac{۰.۲۷۱}{۰.۰۱} = ۲۷.۱.$$

در قسمت (الف) می‌بینیم که اگر طول ضلع مکعب از ۳ به ۳.۲ سانتیمتر تغییر کند، تغییر حجم برابر با ۵۷۷ سانتیمتر مکعب است، و آهنگ متوسط تغییر حجم برابر با ۲۸۸۵ سانتیمتر مکعب در هر سانتیمتر تغییر طول ضلع است. برای قسمتهای (ب) و (پ) هم تعبیرهای مشابهی می‌توان کرد. (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر V در واحد تغییر e در ۳، عبارت از $f'(۳)$ است.

$$f'(e) = 3e^2.$$

پس

$$f'(3) = 27.$$

بنابراین، وقتی طول ضلع مکعب ۳ سانتیمتر است، آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم برابر با ۲۷ سانتیمتر مکعب در هر سانتیمتر تغییر طول ضلع است. ▲

مثال ۴ شرکتی تخمین می‌زند که اگر x ۱۰۰۰ تومان صرف تبلیغات کند، تعداد y واحد، که $y = 5 + 400x - 2x^2$ ، از محصول خود را خواهد فروخت. (الف) آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x را وقتی که بودجه تبلیغ از ۱۰۰۰۰ تومان به ۱۱۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد، پیدا کنید؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای (پانهای) تغییر y نسبت به x را وقتی که بودجه تبلیغ ۱۰۰۰۰ تومان است، بیابید.

حل فرض کنیم f تابعی باشد که به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = 5 + 400x - 2x^2.$$

پس، آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x ، وقتی x از x_1 به $x_1 + \Delta x$ تغییر می‌کند، عبارت است از

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}. \quad (4)$$

(الف) برای یافتن آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x ، وقتی x از ۱۰ به ۱۰+۱ تغییر می‌کند، خارج قسمت (۴) را با $x_1 = 10$ و $\Delta x = 1$ به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} \frac{f(10+1) - f(10)}{1} &= \frac{f(11) - f(10)}{1} \\ &= [5 + 400(11) - 2(11)^2] - [5 + 400(10) - 2(10)^2] \\ &= 4163 - 3805 \\ &= 358. \end{aligned}$$

بنابراین، وقتی بودجه تبلیغات از ۱۰۰۰۰ تومان به ۱۱۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد، آهنگ متوسط تغییر تعداد واحدهای فروخته شده برابر با ۳۵۸ واحد در ۱۰۰۰ تومان افزایش بودجه تبلیغ است.

(ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر y نسبت به x در ۱۰، عبارت است از $f'(10)$.

$$f'(x) = 400 - 4x$$

بنابراین

$$f'(10) = 360.$$

پس، وقتی بودجه تبلیغ ۱۰۰۰۰ تومان است، آهنگ لحظه‌ای تغییر تعداد واحدهای فروخته شده برابر با ۳۶۰ واحد در ۱۰۰۰ تومان افزایش بودجه تبلیغ است. ▲

مثال ۵ درآمد ناخالص سالانه یک شرکت خاص، t سال پس از اول فروردین ۱۳۵۹، p میلیون تومان است و $p = (2t^2/5) + 2t + 10$. مطلوب است (الف) آهنگی که درآمد ناخالص طبق آن در اول فروردین ۱۳۶۱ در حال رشد بوده است؛ (ب) آهنگی که درآمد ناخالص در اول فروردین ۱۳۶۵ طبق آن در حال رشد بوده است.

حل

(الف) در اول فروردین ۱۳۶۱، $t = 2$ ؛ پس $D_t p$ را وقتی $t = 2$ ، به دست می‌آوریم.

$$D_t p = \frac{4}{5}t + 2 \quad D_t p \Big|_{t=2} = \frac{8}{5} + 2 = 3.6.$$

پس در اول فروردین ۱۳۶۱، درآمد ناخالص با آهنگ ۳٫۶ میلیون تومان در سال، در حال رشد بوده است.

(ب) در اول فروردین ۱۳۶۵، $t = 6$ و

$$D_t p \Big|_{t=6} = \frac{24}{5} + 2 = 6.8.$$

بنابراین، در اول فروردین ۱۳۶۵، درآمد ناخالص با آهنگ ۶٫۸ میلیون تومان در سال، در حال رشد بوده است. ▲

نتایج مثال ۵ فقط وقتی با معنی هستند که با درآمد واقعی شرکت مقایسه شوند. به عنوان مثال، اگر در اول فروردین ۱۳۶۰ معلوم شده باشد که درآمد شرکت در سال ۱۳۵۹ برابر با ۳ میلیون تومان بوده، آنگاه آهنگ رشد در اول فروردین ۱۳۶۱ که ۳٫۶ میلیون تومان در سال بوده، عالی است. ولی، اگر درآمد در سال ۱۳۵۹ برابر ۳۰۰ میلیون تومان بوده باشد، آنگاه آهنگ رشد در اول فروردین ۱۳۶۱ بسیار ناچیز بوده است. برای مقایسه آهنگ تغییر با مقدار کمیتی که در حال تغییر است، معیاری به کار می‌رود که آهنگ نسبی نامیده می‌شود.

۳.۵.۳ تعریف اگر $y = f(x)$ ، آهنگ نسبی تغییر y در واحد تغییر x ، در x_1 برابر است با $f'(x_1)/f(x_1)$ و یا $D_x y/y$ که در $x = x_1$ محاسبه می‌گردد.

اگر آهنگ نسبی در ۱۰۰ ضرب شود، آهنگ درصدی تغییر به دست می‌آید.

مثال ۶ برای شرکت مثال ۵، آهنگ نسبی رشد درآمد ناخالص را در اول فروردین ۱۳۶۱ و اول فروردین ۱۳۶۵ بیابید.

حل

(الف) وقتی $t = 2$ ، $p = (2/5)(4) + 2(2) + 10 = 15.6$. از اینرودر اول فروردین ۱۳۶۱، آهنگ نسبی رشد درآمد ناخالص سالانه شرکت برابر بوده است با

$$\left. \frac{D_t p}{p} \right|_{t=2} = \frac{36}{156} = 0.231 = 23.1\%$$

(ب) وقتی $t=6$ ، $p = (2/5)(36) + 2(6) + 10 = 36.4$ ، آهنگ نسبی رشد درآمد ناخالص سالانه شرکت برابر بوده است با

$$\left. \frac{D_t p}{p} \right|_{t=6} = \frac{68}{36.4} = 0.187 = 18.7\%$$

توجه کنید که آهنگ رشد ۶۸ میلیون تومانی در اول فروردین ۱۳۶۵، بزرگتر از آهنگ ۳۶ میلیونی در اول فروردین ۱۳۶۱ است؛ با این وجود، آهنگ رشد نسبی ۱۸.۷٪ در اول فروردین ۱۳۶۵، کمتر از آهنگ رشد نسبی ۲۳.۱٪ در اول فروردین ۱۳۶۱ است. ▲

تمرینهای ۵.۳

در تمرینهای ۱ تا ۸، ذره‌ای در امتداد يك خط افقی طبق معادله مفروض در حال حرکت است. در این معادلات فاصله جهت‌دار ذره متحرك از نقطه‌ای مانند O پس از t ثانیه برابر با s سانتیمتر است. سرعت لحظه‌ای $v(t)$ سانتیمتر بر ثانیه را در ثانیه t بیابید و سپس $v(t_1)$ را برای مقادیر خاصی از t_1 که داده شده‌اند، به دست آورید.

$$s = 8 - t^2; t_1 = 5 \quad . ۲$$

$$s = 3t^2 + 1; t_1 = 3 \quad . ۱$$

$$s = \frac{3}{t^2}; t_1 = -2 \quad . ۴$$

$$s = \frac{1}{4t}; t_1 = \frac{1}{4} \quad . ۳$$

$$s = 4t^2 + 2t - 1; t_1 = \frac{1}{4} \quad . ۶$$

$$s = 2t^3 - t^2 + 5; t_1 = -1 \quad . ۵$$

$$s = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}; t_1 = 2 \quad . ۸$$

$$s = \frac{2t}{4+t}; t_1 = 0 \quad . ۷$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۴، حرکت ذره در امتداد يك خط افقی و بر طبق معادله مفروض است؛ در هر معادله، s سانتیمتر عبارت است از فاصله جهت‌دار ذره از نقطه O پس از t ثانیه. جهت مثبت به طرف راست است. بازه‌هایی از زمان را تعیین کنید که در آن بازه‌ها ذره به طرف راست حرکت می‌کند و نیز بازه‌هایی را که به طرف چپ در حرکت است. همچنین، تعیین کنید که چه وقتی ذره جهت خود را تغییر می‌دهد. چگونگی حرکت را به وسیله شکلی نظیر شکل ۲.۵.۳ نشان دهید، و مقادیر t را به طور تصادفی انتخاب کنید ولی مقادیری از t را که به ازای آنها ذره تغییر جهت می‌دهد، جزو آنها قرار دهید.

$$s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8 \quad ۱۰.$$

$$s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4 \quad ۹.$$

$$s = \frac{t}{1+t^2} \quad ۱۲.$$

$$s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4 \quad ۱۱.$$

$$s = \frac{t+1}{t^2+4} \quad ۱۴.$$

$$s = \frac{t}{9+t^2} \quad ۱۳.$$

۱۵. شیشی از حالت سکون به پایین سقوط می کند و $s = -16t^2$ ، که s فوت عبارت است از فاصله شیء از نقطه شروع حرکت پس از t ثانیه، و جهت مثبت به طرف بالاست. اگر سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۲۵۶ فوت سقوط کند، مطلوب است محاسبه (الف) سرعت لحظه ای سنگ ۱ ثانیه پس از شروع سقوط آن؛ (ب) سرعت لحظه ای سنگ ۲ ثانیه پس از شروع سقوط آن؛ (پ) زمانی که طول می کشد تا سنگ به زمین برسد؛ (ت) سرعت لحظه ای سنگ وقتی که به زمین می رسد.

۱۶. سنگی از ارتفاع ۶۴ فوتی رها می شود. اگر ارتفاع سنگ t ثانیه پس از شروع سقوط برابر با s فوت باشد، آنگاه $s = -16t^2 + 64$. (الف) چه زمانی طول می کشد تا سنگ به زمین برسد؟ (ب) سرعت لحظه ای سنگ را وقتی که به زمین می رسد حساب کنید.

۱۷. توپ بیلباردی با هر ضرب به درامداد يك خط مستقیم حرکت می کند. اگر مسافتی که توپ از وضعیت اولیه اش طی می کند در t ثانیه برابر با s سانتیمتر باشد، آنگاه $s = 100t^2 + 100t$. اگر توپ در فاصله ۳۹ سانتیمتری از وضعیت اولیه اش به مانعی برخورد کند، سرعت برخورد چقدر است؟

۱۸. سنگی را با سرعت اولیه ۳۲ فوت در ثانیه از زمین به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. معادله حرکت به صورت $s = -16t^2 + 32t$ است که در آن s فوت مسافتی است که سنگ در t ثانیه بعد از پرتاب طی کرده است، و جهت مثبت به طرف بالاست. مطلوب است (الف) سرعت متوسط سقوط سنگ در بازه زمانی $5/4 \leq t \leq 3/4$ ؛ (ب) سرعت لحظه ای سنگ در زمان $3/4$ ثانیه و $5/4$ ثانیه؛ (پ) مقدار سرعت سنگ در $3/4$ و $5/4$ ثانیه؛ (ت) سرعت متوسط در خلال بازه زمانی $3/4 \leq t \leq 1/2$ ؛ (ج) زمانی که طول می کشد تا سنگ به بالاترین نقطه برسد؛ (چ) بیشترین ارتفاع سنگ؛ (ح) زمانی که طول می کشد تا سنگ به زمین برسد؛ (خ) سرعت لحظه ای سنگ در زمان برخورد با زمین. چگونه حرکت را با شکلی شبیه شکل ۳۰۵.۳ نشان دهید.

۱۹. به توپی در بالای يك سطح شیب دار ضربی می زنیم و سرعت اولیه ای برابر ۲۴ فوت در ثانیه به آن می دهیم. سپس $s = 24t + 10t^2$ ، که s فوت فاصله توپ از نقطه شروع حرکت پس از t ثانیه است و جهت مثبت به طرف پایین سطح شیب دار می باشد.

(الف) سرعت لحظه‌ای توپ در لحظه t_1 (ثانیه) چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا سرعت به ۴۸ فوت در ثانیه برسد؟

۳۵. يك موشك را به طور قائم به بالا پرتاب می‌کنیم و t ثانیه بعد از پرتاب، موشك در فاصله y فوت از سطح زمین قرار می‌گیرد که $16t^2 - 560t = y$ ، جهت مثبت به طرف بالاست. مطلوب است (الف) سرعت موشك ۲ ثانیه بعد از پرتاب؛ و (ب) مدتی که طول می‌کشد تا موشك به ماکسیمم ارتفاع خود برسد.

۳۱. فرض کنید مساحت مربعی که طول يك ضلع آن y سانتیمتر است برابر با A سانتیمتر مربع باشد. آهنگ متوسط تغییر A نسبت به y را وقتی که y (الف) از ۴ تا ۴٫۶؛ (ب) از ۴٫۳ تا ۴٫۴؛ (پ) از ۴ تا ۴٫۱؛ تغییر می‌کند، به دست آورید؛ (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر A نسبت به y برای $y = 4$ چقدر است؟

۳۲. طول يك مستطیل ۴ اینچ بیشتر از عرض آن می‌باشد، و وقتی اندازه‌های مستطیل افزایش می‌یابد، این اختلاف ۴ اینچی در ابعاد همچنان باقی می‌ماند. اگر A اینج مربع مساحت مستطیل و w اینج عرض آن باشد، آهنگ متوسط تغییر A نسبت به w را به دست آورید وقتی که w از (الف) ۳ تا ۳٫۲؛ (ب) ۳ تا ۳٫۱؛ (پ) ۳ تا ۳٫۰۱ تغییر کند؛ (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر A نسبت به w وقتی که w برابر ۳ می‌باشد، چیست؟

۳۳. فرض کنید يك استوانه مستدیر قائم دارای ارتفاع ثابتی برابر با ۱۰ سانتیمتر است. اگر شعاع قاعده آن r سانتیمتر و حجم آن V سانتیمتر مکعب باشد، آهنگ متوسط تغییر V نسبت به r را وقتی که r (الف) از ۵ تا ۵٫۴؛ (ب) از ۵ تا ۵٫۱؛ (پ) از ۵ تا ۵٫۰۱؛ تغییر می‌کند، به دست آورید؛ (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر V نسبت به r برای $r = 5$ چقدر است؟

۳۴. يك مخروط مستدیر قائم دارای ارتفاع ۶ اینچ است. اگر حجم آن V اینج مکعب و شعاع قاعده آن r اینج باشد، آهنگ متوسط تغییر V نسبت به r را به دست آورید، وقتی که r (الف) ۲ تا ۲٫۲؛ (ب) ۲ تا ۲٫۱؛ (پ) ۲ تا ۲٫۰۱؛ تغییر می‌کند؛ (ت) آهنگ لحظه‌ای تغییر V نسبت به w وقتی که w برابر ۲ است، چقدر است؟

۳۵. فرض کنید r معکوس عدد n باشد. مطلوب است آهنگ لحظه‌ای تغییر r نسبت به n و آهنگ نسبی تغییر r نسبت به n وقتی که n برابر است با (الف) ۴؛ و (ب) ۱۰.

۳۶. فرض کنید y ریشه دوم اصلی عدد x باشد. مطلوب است آهنگ لحظه‌ای تغییر y نسبت به x و آهنگ نسبی تغییر y نسبت به x وقتی که x برابر است با (الف) ۹؛ و (ب) ۴.

۲۷. معادله تقاضا برای نوع ویژه‌ای از جواهر بدلی به صورت $x = 100 - 3p - 2p^2$ می‌باشد، که در آن x تعداد کالای مورد تقاضا و p دلار، قیمت هر واحد کالا است. (الف) آهنگ متوسط تغییر تقاضا نسبت به قیمت را وقتی که قیمت از ۵ دلار به ۵٫۵ دلار افزایش می‌یابد، به دست آورید؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای (یا نهایی) تغییر تقاضا را نسبت به قیمت، وقتی که قیمت برابر با ۵ دلار است، پیدا کنید.

۲۸. معادله تقاضا برای نوعی قلم به صورت $x = 3p^2 + 2p$ است که در آن p قیمت یک قلم بر حسب سنت است و وقتی که $x = 1000$ قلم تولید می‌شود. (الف) آهنگ متوسط تقاضا نسبت به قیمت را وقتی که قیمت از ۱۰ سنت به ۱۱ سنت افزایش می‌یابد، حساب کنید؛ (ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای (نهایی) تقاضا نسبت به قیمت را وقتی که قیمت برابر با ۱۰ سنت است، حساب کنید.

۲۹. فرض کنید یک استخر شنا در حال تخلیه شدن است و t دقیقه بعد از شروع تخلیه حجم آب داخل استخر برابر V لیتر است، که $(t^2 + 80t - 1600) = V$ مطلوب است. (الف) آهنگ متوسط تخلیه آب استخر در خلال ۵ دقیقه اول؛ و (ب) سرعت تخلیه آب ۵ دقیقه بعد از شروع تخلیه.

۳۰. قانون بویل در مورد انبساط گازها به صورت $PV = C$ است، که در آن P نماینده فشار بر حسب پوند در واحد سطح، V حجم گاز بر حسب واحد مکعب و C یک ثابت است. مطلوب است محاسبه آهنگ لحظه‌ای تغییر حجم نسبت به P ، وقتی که $P = 4$ و $V = 8$.

۳۱. در یک مدار الکتریکی، نیروی محرکه الکتریکی برابر با E ولت، مقاومت برابر با R اهم، و شدت جریان برابر با I آمپر است. قانون اهم می‌گوید که $E = IR$. به فرض اینکه E ثابت باشد، نشان دهید که R با آهنگی متناسب با معکوس مربع I کاهش می‌یابد.

۳۲. یک بالن را باد می‌کنیم تا شکل کره به خود بگیرد. مطلوب است آهنگ تغییر مساحت سطح بالن نسبت به شعاع، وقتی که شعاع برابر با ۲ متر است.

۳۳. یک جبهه هوای سرد به فضای محوطه کالج نزدیک می‌شود. اگر T درجه حرارت در ساعت t بعد از نیمه شب باشد، و

$$T = 0.1(400 - 40t + t^2) \quad 0 \leq t \leq 12$$

(الف) آهنگ متوسط تغییر T نسبت به t در فاصله ساعت ۵ صبح تا ۶ صبح را به دست آورید؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر T نسبت به t در ساعت ۵ صبح را پیدا کنید.

۳۴. نخمین زده می‌شود که یک کارگر در فروشگاه سازنده قاب عکس می‌تواند y قاب را در طی x ساعت بعد از شروع به کار (در ساعت ۸ صبح) رنگ کند، و

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \quad 0 < x \leq 4$$

مطلوب است (الف) آهنگ رنگ کردن قاب توسط کارگر در ساعت ۱۰ صبح؛ (ب) تعداد قابهایی که کارگر بین ساعت ۱۰ صبح تا ۱۱ صبح رنگ می کند.

۳۵. فرض کنید تعداد جمعیت يك شهر خاص، t سال بعد از اول ژانویه ۱۹۸۱، به صورت $10000 + 200t + 40t^2$ باشد. مطلوب است (الف) آهنگ رشد جمعیت در اول ژانویه ۱۹۹۰؛ و (ب) در اول ژانویه ۱۹۹۶؛ (پ) آهنگ نسبی رشد جمعیت در اول ژانویه ۱۹۹۰؛ (ت) آهنگ نسبی رشد جمعیت در اول ژانویه ۱۹۹۶.

۳۶. دو ذره، A و B ، در طول يك خط افقی به طرف راست حرکت می کنند. این دو ذره از نقطه O شروع به حرکت می کنند، فاصله جهت دار ذره از O پس از t ثانیه برابر با s فوت است، و معادلات حرکت ذره ها به صورت زیرند

$$s = 4t^2 + 5t, \text{ برای ذره } A$$

$$s = 7t^2 + 3t, \text{ برای ذره } B$$

اگر در لحظه شروع، $t = 0$ ، برای چه مقادیری از t سرعت ذره A بیشتر از سرعت ذره B است؟

۳۷. در يك مغازه خرده فروشی، اگر روزانه x دلار صرف تبلیغ شود، سودی برابر $1000 - 2x^2 + 36x - 2500$ با استفاده از مشتق، تعیین کنید که آیا برای مغازه دار سودی دارد که بودجه تبلیغ را افزایش دهد اگر این بودجه (الف) ۶۰ دلار؛ و (ب) ۳۰۰ دلار باشد؟ (پ) مقدار ماکسیمم برای x تعیین کنید که کمتر از آن، افزایش بودجه تبلیغ سودمند است.

۳۸. نشان دهید که برای هر تابع خطی f ، آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ وقتی x از x_1 به $x_1 + k$ تغییر می کند، با آهنگ لحظه ای تغییر $f(x)$ در x_1 یکسان است.

۶.۳ مشتق توابع سینوسی و کسینوسی

برای اینکه نشان دهیم تابع سینوسی دارای مشتق است، از فرمول (۱۲) بخش ۷.۱ که به صورت زیر است

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad (۱)$$

استفاده می کنیم و قضایای ۲.۹.۲ و ۵.۹.۲ را به کار می گیریم. فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sin x.$$

از تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول (۱) برای $\sin(x+\Delta x)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos(\Delta x) + \cos x \sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin x \right) + \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2)$$

از قضیه ۵.۹.۲ داریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0. \quad (3)$$

و از قضیه ۲.۹.۲ داریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1. \quad (4)$$

از (۳) و (۴) در (۲) جانشین می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0 \cdot \sin x + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

که در واقع قضیه زیر را اثبات کرده‌ایم.

۱۰.۶.۳ قضیه

$$D_x(\sin x) = \cos x. \quad (5)$$

مثال ۱ تابع $f(x) = x^2 \sin x$ داده شده است؛ $f'(x)$ را بیابید.

حل با استفاده از قضیه ۶.۴.۳ مشتق حاصلضرب دو تابع را می‌یابیم

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 D_x(\sin x) + D_x(x^2) \sin x \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x. \end{aligned}$$

برای پیدا کردن مشتق تابع کسینوسی مانند مشتق تابع سینوسی عمل می‌کنیم. در اینجا از فرمول (۴) در بخش ۷.۱ که به صورت زیر است، استفاده می‌کنیم.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (۶)$$

فرض کنید g به صورت زیر تعریف شده است

$$g(x) = \cos x.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}. \end{aligned}$$

فرمول (۶) را برای $\cos(x+\Delta x)$ به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x \right) - \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin x \right) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (۷)$$

از (۳) و (۴) در فرمول (۷) قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} g'(x) &= -0 \cdot \cos x - \sin x \cdot 1 \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

و بدین ترتیب، قضیه زیر ثابت شده است.

۲.۶.۳ قضیه

$$D_x(\cos x) = -\sin x. \quad (۸)$$

مثال ۲ تابع $y = (\sin x)/(1 - 2\cos x)$ داده شده است؛ $D_x y$ را پیدا کنید.

حل با استفاده از قضیه ۷.۴.۳ داریم

$$D_x y = \frac{(1 - 2\cos x) D_x(\sin x) - \sin x \cdot D_x(1 - 2\cos x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2 \cos x)(\cos x) - \sin x(2 \sin x)}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(1 - 2 \cos x)^2}$$

$$\triangle = \frac{\cos x - 2}{(1 - 2 \cos x)^2}.$$

چون $D_x(\sin x) = \cos x$ و $\cos x$ برای تمام مقادیر x تعریف شده است، پس تابع سینوسی همه جا مشتق پذیر و در نتیجه همه جا پیوسته است. به طور مشابه، تابع کسینوسی نیز همه جا مشتق پذیر و پیوسته است. چون بیشترین مقداری که هر یک از دو تابع می توانند داشته باشند ۱ و کمترین مقدارشان ۱- است، با توجه به قضیه مقدار میانی، برد هر یک از دو تابع $[-1, 1]$ است.

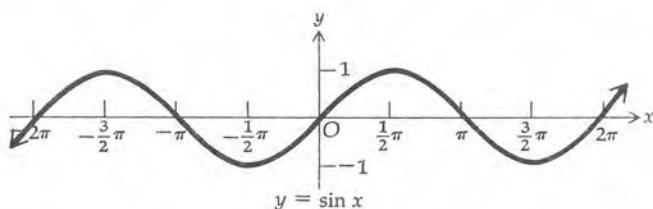
اکنون درباره نمودار تابع سینوسی بحث می کنیم. فرض کنید

$$f(x) = \sin x$$

در این صورت

$$f'(x) = \cos x.$$

برای تعیین نقاطی که در آن نقاط، نمودار مماس افقی دارد، بایستی قرار دهیم $f'(x) = 0$ ، و به دست می آید $x = (\pi/2) + n\pi$ ، که در آن $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. به ازای این مقادیر x ، $\sin x$ یا ۱ یا ۱- است؛ و این دو مقدار بزرگترین و کوچکترین مقادیری هستند که سینوس به خود می گیرد. نمودار محور x ها را در نقاطی که $\sin x = 0$ ، یعنی نقاطی که $x = n\pi$ ، قطع می کند که n عددی صحیح و دلخواه است. با این اطلاعات، نمودار تابع سینوسی در شکل ۱۰۶.۳ رسم شده است.

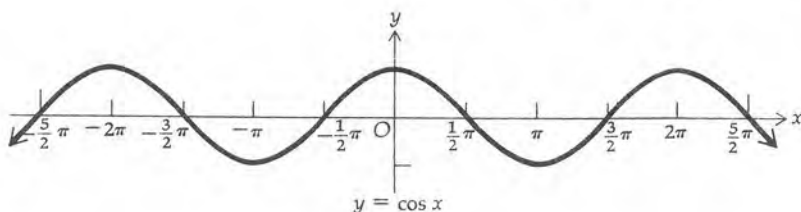


شکل ۱۰۶.۳

برای رسم نمودار تابع کسینوسی، از اتحاد زیر استفاده می کنیم

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

که از فرمول (۱۲) در بخش ۷.۱ نتیجه می‌شود. بنابراین، نمودار تابع کسینوسی را می‌توان از نمودار تابع سینوسی با انتقال محور y ها به اندازه $\pi/2$ به طرف راست به دست آورد (بد شکل ۲.۶.۳ مراجعه کنید).



شکل ۲.۶.۳

مثال ۳ معادله خط مماس بر نمودار تابع کسینوسی در نقطه $(3\pi/2, 0)$ را پیدا کنید.

حل اگر $f(x) = \cos x$ ، آنگاه $f'(x) = -\sin x$. بنابراین

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1.$$

با استفاده از صورت نقطه - ضریب زاویه‌ای، معادله خطی با ضریب زاویه ۱ که از نقطه $(3\pi/2, 0)$ بگذرد، چنین است.

$$y - 0 = 1\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Delta \quad y = x - \frac{3\pi}{2}.$$

تمرینهای ۶.۳

در تمرینهای ۱ تا ۱۸، مشتق توابع داده شده را به دست آورید.

۲. $g(x) = \sin x + \cos x$

۱. $f(x) = 3 \sin x$

۴. $f(x) = 4x^2 \cos x$

۳. $f(t) = 2t \cos t$

۶. $g(y) = 3 \sin y - y \cos y$

۵. $g(x) = x \sin x + \cos x$

۸. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x$

۷. $h(x) = 2 \sin x \cos x$

۹. $f(x) = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

$$h(y) = y^2 - y^2 \cos y + 2y \sin y + 2 \cos y. ۱۰$$

$$h(t) = \frac{\sin t}{t}. ۱۲$$

$$g(z) = \frac{2 \cos z}{z+1}. ۱۱$$

$$g(x) = \frac{x+2}{\cos x}. ۱۴$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}. ۱۳$$

$$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}. ۱۶$$

$$f(y) = \frac{1 + \sin y}{1 - \sin y}. ۱۵$$

$$g(x) = (x - \sin x)(x + \cos x). ۱۷$$

$$f(z) = (z^2 + \cos z)(2z - \sin z). ۱۸$$

در تمرینهای ۱۹ تا ۳۰، $f'(a)$ را برای مقدار داده شده a به دست آورید.

$$f(x) = x \sin x; a = \frac{3\pi}{2}. ۲۰$$

$$f(x) = x \cos x; a = 0. ۱۹$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \cos x}; a = \pi. ۲۲$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}; a = \frac{\pi}{2}. ۲۱$$

$$f(x) = x^2 \cos x - \sin x; a = 0. ۲۴$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x}; a = \frac{3\pi}{2}. ۲۳$$

$$f(x) = \sin x (\cos x - 1); a = \pi. ۲۵$$

$$f(x) = (\cos x + 1)(x \sin x - 1); a = \frac{\pi}{2}. ۲۶$$

$$f(x) = x \cos x + x \sin x; a = \frac{\pi}{2}. ۲۷$$

$$f(x) = \frac{2 \cos x - 1}{\sin x}; a = \frac{2\pi}{3}. ۲۹$$

$$f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}; a = \frac{\pi}{6}. ۲۸$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x - \sin x}; a = \frac{3\pi}{4}. ۳۰$$

در هر يك از تمرینهای ۳۱ تا ۳۴، فرمول مشتق داده شده را استنتاج کنید. برای این کار، به اتحادهای زیر نیاز خواهید داشت.

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D_x(\cot x) = -\csc^2 x \quad ۳۲ \qquad D_x(\tan x) = \sec^2 x \quad ۳۱$$

$$D_x(\csc x) = -\csc x \cot x \quad ۳۴ \qquad D_x(\sec x) = \sec x \tan x \quad ۳۳$$

در هریک از تمرینهای ۳۵ تا ۳۸، مشتق تابع داده شده را با استفاده از فرمولهای تمرینهای ۳۱ تا ۳۴ به دست آورید.

$$g(x) = \cos x \cot x \quad ۳۶ \qquad f(x) = 3 \sec x \tan x \quad ۳۵$$

$$f(z) = \frac{\tan z + 1}{\tan z - 1} \quad ۳۸ \qquad g(t) = \frac{2 \csc t - 1}{\csc t + 2} \quad ۳۷$$

۳۹. معادله خط مماس بر نمودار تابع سینوسی در نقطه $(\pi, 0)$ را به دست آورید.

۴۰. معادله خط قائم بر منحنی $y = 2 \cos x$ در نقطه $(\pi/6, \sqrt{3})$ را به دست آورید.

۴۱. معادله خط قائم بر منحنی $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ در نقطه $(0, 3)$ را پیدا کنید.

۴۲. معادله خط مماس بر منحنی $y = x - 3 \sin x$ را در نقطه (π, π) پیدا کنید.

۴۳. جسمی به وزن W پوند را روی یک سطح افقی به وسیله نیرویی به بزرگی F پوند می کشیم؛ اگر زاویه ای که جهت نیرو با سطح افقی می سازد برابر با θ رادیان باشد، آنگاه F از رابطه زیر به دست می آید.

$$F = \frac{kW}{k \sin \theta + \cos \theta}$$

که k عددی ثابت است و ضریب اصطکاک نامیده می شود. اگر $k = 0.5$ ، آهنگ لحظه ای تغییر F نسبت به θ را وقتی که $\theta = \pi/4$ (الف)؛ $\theta = \pi/2$ (ب)؛ $\theta = \pi$ ، به دست آورید.

۴۴. یک گلوله به وسیله تفنگی که زاویه ای به اندازه $\alpha/2$ رادیان با سطح افق می سازد با سرعت اولیه v_0 فوت در ثانیه پرتاب می شود. اگر برد گلوله R فوت باشد، آنگاه

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

که در آن g فوت بر مجذور ثانیه، شتاب ناشی از ثقل است. (الف) اگر $v_0 = 480$ ، آهنگ تغییر R نسبت به α را وقتی که $\alpha = \pi/2$ به دست آورید (یعنی، زاویه

با سطح افق $\pi/4$ رادیان است). فرض کنید $g = 32$ ؛ (ب) مقادیری از α را که به ازای آنها $D_\alpha R > 0$ ، به دست آورید.

۲.۳ مشتق تابع مرکب

تصور کنید که y تابعی از u ، و u به نوبه خود تابعی از x باشد. مثلاً، فرض کنید

$$y = f(u) = u^{10} \quad (۱)$$

و

$$u = g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4. \quad (۲)$$

معادلات (۱) و (۲)، همراه با هم y را به عنوان تابعی از x تعریف می کنند زیرا اگر در معادله (۱) به جای u ، طرف راست معادله (۲) را قرار دهیم، داریم

$$y = h(x) = f(g(x)) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10} \quad (۳)$$

که در آن h تابع مرکبی است که قبلاً تعریف شده است (به تعریف ۲.۶.۱ مراجعه کنید). يك قضیه مهم در مورد مشتق گیری از توابع مرکب در زیر آمده است که به نام **قاعده زنجیری** معروف است.

۱۰.۷.۳ قضیه (قاعده زنجیری) فرض کنید y تابعی از u است که به صورت $y = f(u)$ تعریف شده است، و $D_u y$ وجود دارد؛ و نیز فرض کنید u تابعی از x است که به صورت $u = g(x)$ تعریف شده است، و $D_x u$ وجود دارد؛ در این صورت، y تابعی از x است و $D_x y$ وجود دارد و از رابطه زیر به دست می آید.

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u.$$

قبل از اثبات قاعده زنجیری، نمونه ای ارائه می دهیم که کاربرد آن را نشان می دهد.

○ **نمونه ۱** قاعده زنجیری را در مورد تابع فرمول ۳ به کار می بریم؛ داریم

$$y = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}.$$

برای به دست آوردن $D_x y$ ، y را تابعی از u در نظر می گیریم که u تابعی از x است. پس

$$y = u^{10} \quad \text{که در آن} \quad u = 2x^3 - 5x^2 + 4.$$

بنابراین، با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u$$

$$= 10u^9(6x^2 - 10x)$$

$$\circ \quad = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x).$$

اثبات قاعده زنجیری فرض کنید نمودی از x مانند Δx که $\Delta x \neq 0$ ، تغییری در u به اندازه Δu ایجاد کند. یعنی

$$u + \Delta u = g(x + \Delta x).$$

بنابراین، چون $u = g(x)$ ،

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

چون Δu به Δx بستگی دارد، ممکن است برای بعضی از مقادیر Δx ، $\Delta u = 0$ (به تمرینهای ۴۹ و ۵۰ مراجعه کنید). دو حالت در نظرمی گیریم: یا برای تمام مقادیر Δx ، $\Delta u \neq 0$ ، یا برای بعضی مقادیر Δx ، $\Delta u = 0$.

حالت ۱: برای تمام مقادیر Δx ، $\Delta u \neq 0$.
چون $y = f(u)$ ، Δu باعث نمو y به اندازه Δy می شود. پس

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \Delta u \neq 0$$

بنابراین

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \Delta u \neq 0 \quad (4)$$

چون $u = g(x)$ ، و g مشتق پذیر است، پس g پیوسته نیز هست. لذا، وقتی که $\Delta x \rightarrow 0$ ، $\Delta u \rightarrow 0$. حال اگر در حد اول طرف راست فرمول (۴)، به جای $\Delta x \rightarrow 0$ ، قرار دهیم $\Delta u \rightarrow 0$ ، خواهیم داشت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \Delta u \neq 0$$

بنابراین

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u.$$

حالت ۲: برای بعضی مقادیر Δx ، $\Delta u = 0$.
با توجه به فرمول (۷) در بخش ۲.۳،

$$D_u y = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

بنابراین، وقتی $|\Delta u|$ کوچک است (نزدیک به صفر اما مخالف با صفر)، تفاضل

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} - D_u y$$

از نظر عددی کوچک خواهد بود. این تفاضل با η نشان داده می‌شود؛ پس

$$\eta = \frac{\Delta y}{\Delta u} - D_u y \quad \Delta u \neq 0$$

معادله فوق، η را به عنوان تابعی از Δu به شرط $\Delta u \neq 0$ تعریف می‌کند. اگر

$$\eta = F(\Delta u),$$

$$F(\Delta u) = \frac{\Delta y}{\Delta u} - D_u y \quad \Delta u \neq 0 \quad (5)$$

برای تعریف $F(\Delta u)$ وقتی $\Delta u = 0$ ، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که در یکی از قسمتهای بعدی این اثبات، می‌خواهیم تابع F در 0 پیوسته باشد. بنابراین بایستی $F(0)$ به عنوان $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} F(\Delta u)$ تعریف شود. با استفاده از (5) برای $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} F(\Delta u)$ داریم

$$F(0) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} F(\Delta u).$$

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} - \lim_{\Delta u \rightarrow 0} D_u y$$

$$= D_u y - D_u y$$

$$= 0.$$

پس

$$F(\Delta u) = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta u} - D_u y & \Delta u \neq 0 \\ 0 & \Delta u = 0 \end{cases}$$

معادله (5) را نسبت به Δy حل می‌کنیم، نتیجه می‌شود

$$\Delta y = D_u y \cdot \Delta u + \Delta u \cdot F(\Delta u) \quad \Delta u \neq 0 \quad (6)$$

دقت کنید که معادله (6) برای $\Delta u = 0$ نیز برقرار است، چون در این صورت، $\Delta y = 0$ به یاد داشته باشید که $(\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u))$.

با فرض $\Delta x \neq 0$ ، دوطرف معادله (6) را بر Δx تقسیم می‌کنیم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = D_u y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot F(\Delta u)$$

حد دوطرف معادله فوق را وقتی که Δx به سمت صفر میل می کند، می گیریم و با استفاده از قضایای حدی به دست می آوریم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} D_u y \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u).$$

بنابراین

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u + D_x u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u) \quad (7)$$

حال بسا استفاده از قضیه ۶.۷.۲ نشان می دهیم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u) = 0$ ابتدا Δu را به صورت تابعی از Δx تعریف می کنیم. چون

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = D_x u$$

نتیجه می گیریم که اگر $|\Delta x|$ کوچک باشد و $\Delta x \neq 0$ ، تفاضل $D_x u$ با $\Delta u / \Delta x$ عدد کوچکی است که بستگی به Δx دارد، و آن را با $\phi(\Delta x)$ نشان می دهیم. پس

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = D_x u + \phi(\Delta x) \quad \Delta x \neq 0$$

دوطرف را در Δx ضرب می کنیم

$$\Delta u = D_x u \cdot \Delta x + \phi(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Delta x \neq 0$$

عبارت فوق، Δu را به صورت تابعی از Δx تعریف می کند. اگر این تابع را با G نشان دهیم، داریم

$$G(\Delta x) = D_x u \cdot \Delta x + \phi(\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Delta x \neq 0$$

پس $F(\Delta u) = F(G(\Delta x))$ ، و

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(G(\Delta x)).$$

چون $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(\Delta x) = 0$ ، و F در صفر پیوسته است (خودمان آن را به این صورت ساختیم)، از قضیه ۶.۷.۲ برای طرف راست معادله فوق استفاده می کنیم، و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u) &= F(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} G(\Delta x)) \\ &= F(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

پس، اگر در معادله (۷) به جای $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} F(\Delta u)$ صفر را قرار دهیم، داریم

$$D_x y = D_u y \cdot D_x u + D_x u \cdot 0$$

پس

$$\square \quad D_x y = D_u y \cdot D_x u.$$

با بستی متذکر شد که اثبات قاعده زنجیری حالت ۲، برای حالت ۱ نیز صادق است. اثبات جداگانه برای حالت ۱ به این دلیل ارائه شد که به شما نشان داده شود وقتی با توابعی سروکار داریم که برای آنها Δu هیچگاه صفر نیست، اثبات ساده می شود. اگر نماد تابع مرکب را به کار ببریم، قاعده زنجیری به صورت زیر نوشته می شود

$$D_x f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (۸)$$

○ نمونه ۲ مشتق تابع نمونه ۱ را با استفاده از قاعده زنجیری و نماد تابع مرکب محاسبه می کنیم. اگر

$$h(x) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$$

فرض کنید $f(u) = u^{10}$ و $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$ ، و آنگاه

$$h(x) = f(g(x)).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} h'(x) &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

چون $f'(u) = 10u^9$ ، پس $f'(g(x)) = 10[g(x)]^9$ و $g'(x) = 6x^2 - 10x$. لذا

$$h'(x) = 10[g(x)]^9 (6x^2 - 10x)$$

$$\square \quad = 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9 (6x^2 - 10x).$$

مثال ۱ با استفاده از قاعده زنجیری مشتق تابع زیر را پیدا کنید

$$f(x) = \frac{1}{4x^3 + 5x^2 - 7x + 8}.$$

حل می نویسیم $f(x) = (4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-1}$ ، و با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} \cdot D_x(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8) \\ &= -1(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^{-2} (12x^2 + 10x - 7) \\ &= \frac{-12x^2 - 10x + 7}{(4x^3 + 5x^2 - 7x + 8)^2}. \end{aligned}$$

▲

مثال ۲ فرض کنید

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^4.$$

$f'(x)$ را پیدا کنید.

حل با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^3 \cdot D_x \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right) \\ &= 4 \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^3 \frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{4(2x+1)^3(-5)}{(3x-1)^5} \\ &= -\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}. \end{aligned}$$

○ نمونه ۳ فرض کنید

$$h(x) = \sin 4x.$$

برای یافتن $h'(x)$ به وسیله قاعده زنجیری، $f(u) = \sin u$ و $g(x) = 4x$ را در نظر می گیریم. در این صورت

$$h(x) = f(g(x))$$

و

$$\begin{aligned} h'(x) &= D_x f(g(x)) \\ &= f'(g(x))g'(x). \end{aligned}$$

چون $f'(u) = \cos u$ ، پس $f'(g(x)) = \cos [g(x)]$. همچنین، $g'(x) = 4$. بنا بر این

$$h'(x) = (\cos 4x)(4)$$

$$\text{○} \quad = 4 \cos 4x.$$

مثال ۳ تابع $F(t) = \cos(3t^2 + 2t)$ داده شده است؛ $F'(t)$ را پیدا کنید.

حل از قاعده زنجیری استفاده می کنیم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} F'(t) &= [-\sin(3t^2 + 2t)] D_t(3t^2 + 2t) \\ &= [-\sin(3t^2 + 2t)] (6t + 2) \\ \blacktriangle &= -2(3t + 1) \sin(3t^2 + 2t). \end{aligned}$$

مثال ۴ تابع $y = \sin(\cos x)$ داده شده است؛ $D_x y$ را به دست آورید.

حل قاعده زنجیری را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} D_x y &= \cos(\cos x) [D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x) [-\sin x] \\ \blacktriangle &= -\sin x [\cos(\cos x)]. \end{aligned}$$

مثال ۵ تابع $f(x) = (3x^2 + 2)^2(x^2 - 5x)^3$ داده شده است؛ $f'(x)$ را بیابید.

حل تابع f را به صورت حاصلضرب دو تابع g و h در نظر می‌گیریم که

$$h(x) = (x^2 - 5x)^3 \quad \text{و} \quad g(x) = (3x^2 + 2)^2$$

با استفاده از قضیه ۶.۴.۳ مشتق حاصلضرب دو تابع داریم

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x).$$

$h'(x)$ و $g'(x)$ را از قاعده زنجیری به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2)^2 [3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)] + (x^2 - 5x)^3 [2(3x^2 + 2)(6x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2 [(3x^2 + 2)(2x - 5) + 4x(x^2 - 5x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2 [6x^3 - 15x^2 + 4x - 10 + 4x^3 - 20x^2] \\ \blacktriangle &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2 (10x^3 - 35x^2 + 4x - 10). \end{aligned}$$

مثال ۶ تابع $\phi(x) = \sin^4 2x^2$ داده شده است؛ $\phi'(x)$ را پیدا کنید.

حل

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= 4 \sin^3 2x^2 [D_x(\sin 2x^2)] \\ &= 4 \sin^3 2x^2 [(\cos 2x^2) D_x(2x^2)] \\ &= 4 \sin^3 2x^2 [(\cos 2x^2)(4x)] \\ \blacktriangle &= 16x \sin^3 2x^2 \cos 2x^2. \end{aligned}$$

تمرینهای ۷.۳

در تمرینهای ۱ تا ۳۶، مشتق تابع داده شده را حساب کنید.

۱. $f(x) = (2x + 1)^2$
۲. $f(x) = (10 - 5x)^4$
۳. $F(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$
۴. $g(r) = (2r^4 + 8r^2 + 1)^5$
۵. $f(t) = (2t^4 - 7t^2 + 2t - 1)^2$
۶. $H(z) = (z^2 - 3z^2 + 1)^{-2}$
۷. $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$
۸. $g(x) = \sin x^2$
۹. $f(x) = 4 \cos 3x - 3 \sin 4x$
۱۰. $G(x) = \sin^2 x$
۱۱. $h(t) = \cos 2t^2 + 2 \cos^2 t$
۱۲. $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$
۱۳. $g(x) = 12 \sin 3x \cos 4x$
۱۴. $f(t) = 2 \sin^2 t \cos^2 t$
۱۵. $h(u) = (3u^2 + 5)^2(3u - 1)^2$
۱۶. $f(x) = (4x^2 + 7)^2(2x^2 + 1)^4$
۱۷. $g(x) = (2x - 5)^{-1}(4x + 3)^{-2}$
۱۸. $f(x) = (x^2 - 4x^{-2})^2(x^2 + 1)^{-1}$
۱۹. $f(y) = \left(\frac{y-7}{y+2}\right)^2$
۲۰. $g(t) = \left(\frac{2t^2+1}{3t^2+1}\right)^2$
۲۱. $f(x) = \frac{2}{2x^2+3x-1}$
۲۲. $h(x) = \left(\frac{x+4}{2x^2-5x+6}\right)^2$
۲۳. $f(r) = (r^2+1)^2(2r+5)^2$
۲۴. $f(y) = (y+3)^2(5y+1)^2(3y^2-4)$
۲۵. $f(z) = \frac{(z^2-5)^2}{(z^2+4)^2}$
۲۶. $g(x) = (2x-9)^2(x^2+4x-5)^2$
۲۷. $G(x) = \frac{(4x-1)^2(x^2+2)^4}{(3x^2+5)^2}$
۲۸. $F(x) = \frac{(5x-8)^{-2}}{(x^2+3)^{-2}}$
۲۹. $g(t) = \sin^2(3t^2-1)$
۳۰. $f(x) = \cos^2 x^2$
۳۱. $f(x) = (\sin^2 x - x^2)^2$
۳۲. $G(x) = (2 \sin x - 3 \cos x)^2$
۳۳. $f(y) = \frac{3 \sin 2y}{\cos^2 y + 1}$
۳۴. $g(x) = \frac{1 + \sin 3x}{3x \cos 3x}$

$$f(x) = \sin^2(\cos 2x). \quad ۳۶$$

$$F(x) = 4 \cos(\sin 3x). \quad ۳۵$$

در تمرینهای ۳۷ و ۳۸، معادله خط مماس بر منحنی دادر هر يك از نقاط داده شده به دست آورید. نمودار منحنی و قطعه‌هایی از خطوط مماس در نقاط داده شده را رسم کنید.

$$y = (x^2 - 1)^2; (-2, 9), (-1, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 9). \quad ۳۷$$

$$y = 2(4 - x)^{-2}; \left(0, \frac{1}{8}\right), \left(1, \frac{2}{9}\right), \left(2, \frac{1}{4}\right), (3, 2), (5, 2), \left(6, \frac{1}{4}\right). \quad ۳۸$$

۳۹. معادله خط مماس بر منحنی $y = (1 - x^3)^{-1}$ را در نقطه‌ای که $x = -1$ ، پیدا کنید.

۴۰. معادله خط قائم بر منحنی $y = (x + 3)^2(2x + 1)^3$ را در نقطه‌ای که $x = -1$ ، پیدا کنید.

۴۱. معادله خط قائم بر منحنی $y = 3 \cos 2x$ را در نقطه‌ای که $x = \pi/3$ ، پیدا کنید.

۴۲. معادله خط مماس بر منحنی $y = (x^2 - 4)^2(3x - 5)^{-2}$ را در نقطه‌ای که $x = 1$ ، پیدا کنید.

در هر يك از تمرینهای ۴۳ تا ۴۶، ذره‌ای در امتداد يك خط افقی طبق معادله حرکت داده شده، در حال حرکت است. در این معادلات، فاصله جهت‌دار ذره از مبدأ، s سانتیمتر در ثانیه t می‌باشد. (الف) سرعت لحظه‌ای ذره در t (ثانیه) چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در t_1 (ثانیه)، برای هر يك از مقادیر داده شده t_1 ، به دست آورید.

$$s = \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}; t \geq 0; t_1 = 1, 2. \quad ۴۳$$

$$s = \left(\frac{3t}{2t + 1}\right)^4; t \geq 0; t_1 = \frac{1}{2}, 1. \quad ۴۴$$

$$s = 5 \sin \pi t + 3 \cos \pi t; t_1 = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}. \quad ۴۵$$

$$s = 2 \cos \pi(t + 1); t_1 = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}. \quad ۴۶$$

۴۷. توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = f(x^2)$ داده شده‌اند. مطلوب است (الف) $f'(x^2)$ ؛ (ب) $g'(x)$.

۴۸. فرض کنید $u^2 + 5u + 5 = f(u)$ و $g(x) = (x + 1)/(x - 1)$. مشتق $f \circ g$ را با دو روش: (الف) محاسبه $(f \circ g)(x)$ و سپس محاسبه $(f \circ g)'(x)$ ؛

(ب) با استفاده از قاعده زنجیری، به دست آورید.

۴۹. نشان دهید که حالت ۱ اثبات قاعده زنجیری برای $f(u) = u^2$ و $g(x) = x^3$ برقرار است، ولی برای $f(u) = u^2$ و $g(x) = \sin 1/x$ برقرار نیست.

۵۰. نشان دهید که حالت ۱ اثبات قاعده زنجیری برای $f(u) = u^2$ و $g(x) = \operatorname{sgn} x$ برقرار نیست.

۵۱. فرض کنید f و g دو تابع هستند به قسمی که $f'(x) = 1/x$ و $f(g(x)) = x$. ثابت کنید که اگر $g'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه $g'(x) = g(x)$.

۵۲. با استفاده از قاعده زنجیری ثابت کنید که (الف) مشتق يك تابع زوج تابعی است فرد؛ و (ب) مشتق يك تابع فرد تابعی است زوج، به شرطی که این مشتقها وجود داشته باشند.

۵۳. از نتیجه تمرین ۵۲ (الف) استفاده کرده و ثابت کنید که اگر g يك تابع زوج باشد و $g'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه در صورتی که $h(x) = (f \circ g)(x)$ و f در همه جا مشتق پذیر باشد، خواهیم داشت $h'(0) = 0$.

۵۴. فرمولی برای مشتق تابع کسینوسی با استفاده از فرمول مشتق تابع سینوسی، قاعده زنجیری، و اتحادهای زیر به دست آورید

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

۵۵. يك هواپیما در ارتفاعی برابر با ۲ کیلومتر و با سرعتی برابر با ۴۵ کیلومتر در دقیقه به موازات زمین در حال پرواز است. اگر هواپیما مستقیماً از بالای مجسمه‌ای پرواز کند، فاصله خط دید بین هواپیما و مجسمه ۲۰ ثانیه بعد با چه آهنگی تغییر می‌کند؟

۵۶. يك کشتی با سرعت ۲۴ گره (میل دریایی در ساعت) به طرف شمال در حرکت است، در ساعت ۸ صبح کشتی در نقطه P است. در ساعت ۱۰ صبح کشتی دیگری که با سرعت ۳۲ گره به طرف شرق حرکت می‌کند در همان نقطه P است. با چه آهنگی فاصله دو کشتی در ساعات زیر تغییر می‌کند. (الف) ۹ صبح و (ب) ۱۱ صبح؟

۸.۳ مشتق تابع توانی، برای نمای گویا

تابع f که به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = x^r \quad (۱)$$

تابع توانی نامیده می‌شود. در بخش ۴.۳، برای حالتی که r عددی صحیح، مثبت یا منفی باشد،

فرمول زیر را برای مشتق این تابع به دست آوردیم

$$f'(x) = rx^{r-1}. \quad (۲)$$

اکنون نشان می‌دهیم که این فرمول برای حالتی که r عددی گویاست برقرار است، به شرط آنکه برای $x = 0$ شرایط خاصی تعیین شود.

ابتدا فرض می‌کنیم $x \neq 0$ و $r = 1/q$ ، که در آن q عددی صحیح و مثبت است. در این صورت معادله (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$f(x) = x^{1/q}.$$

از تعریف ۱.۲.۳ داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}}{\Delta x}. \quad (۳)$$

برای محاسبه حد فوق، باید صورت کسر را گویا کنیم. برای این کار، فرمول (۸) در بخش ۲.۲، یعنی

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (۴)$$

را به کار می‌بریم. پس، برای گویا کردن صورت کسر در معادله (۳)، در معادله (۴) فرض می‌کنیم $a = (x + \Delta x)^{1/q}$ ، $b = x^{1/q}$ و $n = q$. لذا، صورت و مخرج کسر معادله (۳) را در عبارت زیر ضرب می‌کنیم

$$[(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-1)} + [(x + \Delta x)^{1/q}]^{(q-2)} x^{1/q} + \dots + (x + \Delta x)^{1/q} (x^{1/q})^{(q-2)} + (x^{1/q})^{(q-1)}.$$

اکنون با توجه به (۳)، $f'(x)$ مساوی است با

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x + \Delta x)^{1/q} - x^{1/q}][[(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q} x^{1/q} + \dots + x^{(q-1)/q}]]}{\Delta x [(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q} x^{1/q} + \dots + x^{(q-1)/q}]} \quad (۵)$$

حال با استفاده از فرمول (۴) برای صورت کسر فوق به دست می‌آوریم $(x + \Delta x)^{q/q} - x^{q/q}$ ، که برابر با Δx می‌باشد؛ بنا بر این، از رابطه (۵) نتیجه می‌شود

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x [(x + \Delta x)^{(q-1)/q} + (x + \Delta x)^{(q-2)/q} x^{1/q} + \dots + x^{(q-1)/q}]}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{(q-1)/q} + (x+\Delta x)^{(q-2)/q} x^{1/q} + \dots + x^{(q-1)/q}}$$

$$= \frac{1}{x^{(q-1)/q} + x^{(q-1)/q} + \dots + x^{(q-1)/q}}.$$

چون در مخرج کسرفوق تعداد عوامل جمع دقیقاً q جمله است، بنابراین

$$f'(x) = \frac{1}{q} x^{1/q-1}, \quad f'(x) = \frac{1}{qx^{1-(1/q)}} \quad (6)$$

که همان فرمول (۲) به ازای $r = 1/q$ است. اکنون در معادله (۱)، برای $x \neq 0$ فرض کنید $r = p/q$ ، که در آن p یک عدد صحیح غیر صفر دلخواه و q یک عدد صحیح مثبت دلخواه است؛ یعنی r عددی گویا و مخالف با صفر است. معادله (۱) را به صورت زیر می نویسیم

$$f(x) = x^{p/q}, \quad \text{یا، به عبارت دیگر، } f(x) = (x^{1/q})^p.$$

چون p عددی صحیح خواه مثبت و خواه منفی است، از قاعده زنجیری و قضایای ۲.۴.۳ و ۸.۴.۳ نتیجه می شود

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot D_x(x^{1/q}).$$

اگر فرمول (۶) را برای محاسبه $D_x(x^{1/q})$ به کار ببریم، خواهیم داشت

$$f'(x) = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p/q-1/q+1/q-1}$$

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{p/q-1}. \quad (7)$$

فرمول (۷) همان فرمول (۲) با ضابطه $r = p/q$ است.

اگر $r = 0$ و $x \neq 0$ ، معادله (۱) به صورت $f(x) = x^0 = 1$ درمی آید. در این حالت $f'(x) = 0$ ، که آن را به صورت x^{0-1} می توان نوشت. بنابراین فرمول (۲) برقرار است اگر $r = 0$ و $x \neq 0$. پس نشان داده ایم که فرمول (۲) به شرط $x \neq 0$ برای هر عدد گویای r برقرار است.

حال، 0 در قلمرو تابع توانی است اگر و تنها اگر r عددی مثبت باشد، زیرا $f(0) = 0$ برای $r \leq 0$ تعریف نشده است. از اینرو می خواهیم بدانیم که برای کدام مقادیر مثبت r ، می توان $f'(0)$ را از فرمول (۲) به دست آورد. بایستی مقداری از r را که $0 < r \leq 1$ ،

کنار بگذاریم چون برای این مقادیر r ، وقتی که $x = 0$ ، x^{r-1} يك عدد حقیقی نیست. پس، فرض می‌کنیم $r > 1$. با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^r - 0^r}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{r-1}.$$

حد فوق برای $r > 1$ وجود دارد و برابر با ۰ است، به شرطی که r چنان عددی باشد که x^{r-1} بر يك بازهٔ باز شامل ۰ تعریف شده باشد. به عنوان مثال، برای $r = 3/2$ داریم $x^{r-1} = x^{3/2-1} = x^{1/2} = x^{2/4-1} = x^{2/4-1} = x^{1/2}$ که در هیچ بازهٔ باز شامل ۰ تعریف نشده است (زیرا $x^{1/2}$ برای $x < 0$ تعریف نشده) ولی، اگر $r = 5/3$ ، داریم $x^{r-1} = x^{5/3-1} = x^{2/3}$ و $x^{2/3}$ بر هر بازهٔ باز شامل ۰ تعریف شده است. بنابراین مشتق تابع توانی برای $x = 0$ وقتی از فرمول (۲) به دست می‌آید که r چنان عددی باشد x^{r-1} بر يك بازهٔ باز شامل ۰ تعریف شده باشد. بدین ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

۱۰.۸.۳ قضیه اگر f يك تابع توانی باشد که به صورت $f(x) = x^r$ تعریف شده و r عددی گویا باشد، آنگاه

$$f'(x) = r x^{r-1}.$$

برای اینکه فرمول بالا $f'(0)$ را به دست دهد، r باید چنان عددی باشد که x^{r-1} بر يك بازهٔ باز شامل ۰ تعریف شده باشد.

يك نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ فوق وقاعدۀ زنجیری، قضیهٔ زیر است.

۲۰.۸.۳ قضیه فرض کنید f و g چنان توابعی باشند که $f(x) = [g(x)]^r$ که در آن r عددی است گویا، و فرض کنید $g'(x)$ موجود باشد، در این صورت

$$f'(x) = r [g(x)]^{r-1} g'(x).$$

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$ ؛ $f'(x)$ را حساب کنید.

حل $f(x) = 4x^{2/3}$. با استفاده از قضیهٔ ۱۰.۸.۳ داریم

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{2}{3} [x^{2/3-1}]$$

$$= \frac{8}{3} x^{-1/3}$$

$$= \frac{8}{3x^{1/3}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}.$$

مثال ۲ فرض کنید $h(x) = \sqrt{2x^3 - 4x + 5}$ ؛ $h'(x)$ را حساب کنید.

حل $h(x) = (2x^3 - 4x + 5)^{1/2}$ با استفاده از قضیه ۲۰.۸.۳ داریم

$$h'(x) = \frac{1}{2} (2x^3 - 4x + 5)^{-1/2} (6x^2 - 4)$$

$$\triangle \quad = \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{2x^3 - 4x + 5}}.$$

مثال ۳ فرض کنید

$$g(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}.$$

$g'(x)$ را حساب کنید.

حل کسر داده شده را به صورت حاصلضرب دو تابع می‌نویسیم

$$g(x) = x^3 (3x^2 - 1)^{-1/3}.$$

در این صورت، بنابه قضایای ۶.۴.۳ و ۲۰.۸.۳ داریم

$$g'(x) = 3x^2 (3x^2 - 1)^{-1/3} - \frac{1}{3} (3x^2 - 1)^{-4/3} (6x)(x^3)$$

$$= x^2 (3x^2 - 1)^{-4/3} [3(3x^2 - 1) - 2x^2]$$

$$\triangle \quad = \frac{x^2 (7x^2 - 3)}{(3x^2 - 1)^{4/3}}.$$

مثال ۴ تابع $f(r) = \sqrt{4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r}$ داده شده است؛ $f'(r)$ را حساب کنید.

حل $f(r) = (4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r)^{1/2}$. قضیه ۲۰.۸.۳ را به کار می‌گیریم.

$$f'(r) = \frac{1}{2} (4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r)^{-1/2} \cdot D_r(4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r)$$

$$= \frac{8 \sin r \cdot D_r(\sin r) + 18 \cos r \cdot D_r(\cos r)}{2 \sqrt{4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r}}$$

$$= \frac{8 \sin r \cos r + 18 \cos r (-\sin r)}{2 \sqrt{4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-10 \sin r \cos r}{2\sqrt{4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r}} \\
 \triangle \quad &= -\frac{5 \sin r \cos r}{\sqrt{4 \sin^2 r + 9 \cos^2 r}}.
 \end{aligned}$$

تمرینهای ۸.۳

در تمرینهای ۱ تا ۳۲، مشتق تابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = 3x^{2/3} - 6x^{1/3} + x^{-1/3} \quad .۲$$

$$f(s) = \sqrt{2 - 3s^2} \quad .۴$$

$$g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1} \quad .۶$$

$$f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/2} \quad .۸$$

$$g(x) = \sqrt{3 \sin x} \quad .۱۰$$

$$f(y) = 3 \cos \sqrt[3]{2y^2} \quad .۱۲$$

$$h(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} \quad .۱۴$$

$$G(t) = \sqrt{\frac{\Delta t + 6}{\Delta t - 4}} \quad .۱۶$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 5x - 1)^2} \quad .۱۸$$

$$(y) = (y^2 + 3)^{1/2} (y^2 - 1)^{1/2} \quad .۲۰$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5} \cdot \sqrt{x^2 + 3} \quad .۲۲$$

$$f(z) = \sin \sqrt[3]{z} \cos \sqrt[3]{z} \quad .۲۴$$

$$f(x) = 4x^{1/2} + 5x^{-1/2} \quad .۱$$

$$g(x) = \sqrt{1 + 4x^2} \quad .۳$$

$$f(x) = (5 - 3x)^{2/3} \quad .۵$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{25 - y^2}} \quad .۷$$

$$h(t) = 2 \cos \sqrt{t} \quad .۹$$

$$f(x) = (\sin 3x)^{-1/2} \quad .۱۱$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{2x - 5}{3x + 1}} \quad .۱۳$$

$$F(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 5x^2 + x} \quad .۱۵$$

$$g(t) = \sqrt{2t} + \sqrt{\frac{2}{t}} \quad .۱۷$$

$$f(x) = (5 - x^2)^{1/2} (x^2 + 1)^{1/2} \quad .۱۹$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \quad .۲۱$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{\sin t + 1}{1 - \sin t}} \quad .۲۳$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\sin x}} \quad .26$$

$$h(y) = \cos \sqrt{y^2 + 1} \quad .25$$

$$G(x) = \frac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}} \quad .28$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} \quad .27$$

$$g(y) = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1}} \quad .30$$

$$f(x) = \sqrt{9 + \sqrt{9 - x}} \quad .29$$

$$f(x) = \sqrt{x} \sin \sqrt{\frac{1}{x}} \quad .32$$

$$g(x) = \sqrt{1 + \cos^2 2x} \quad .31$$

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، معادله خط مماس بر منحنی در هر یک از نقاط داده شده را به دست آورید. نمودار منحنی و قطعه‌هایی از خطوط مماس در نقاط داده شده را رسم کنید.

$$y = (2x - 2)^{1/3}; (-3, 4), (0, \sqrt[3]{4}), (1, 0), (2, \sqrt[3]{4}), (5, 4) \quad .33$$

$$y = (6 - 2x)^{1/3}; (-1, 2), (1, \sqrt[3]{4}), (3, 0), (5, -\sqrt[3]{4}), (7, -2) \quad .34$$

$$y = \sqrt{x^2 + 9} \quad .35$$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه $(4, 5)$ را به دست آورید.

$$y = (7x - 6)^{-1/3} \quad .36$$

معادله آن خط مماس بر منحنی را که بر خط $12x - 7y + 2 = 0$ عمود است، به دست آورید.

$$y = x\sqrt{16 + x^2} \quad .37$$

معادله خط قائم بر منحنی در مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$y = \sqrt{\sin x + \cos x} \quad .38$$

معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه‌ای که $x = \pi/4$ به دست آورید.

$$s = \sqrt{4t^2 + 3} \quad .39$$

یک شیء در امتداد خطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = \sqrt{4t^2 + 3}$ ، در حرکت است. مقداری از t را به دست آورید که در آن، اندازه سرعت لحظه‌ای برابر با (الف) ۵؛ (ب) ۱؛ (پ) ۲ باشد.

$$s = \sqrt{5 + t^2} \quad .40$$

یک شیء در امتداد خطی مستقیم طبق معادله حرکت $s = \sqrt{5 + t^2}$ در حرکت است. مقداری از t را که در آن، اندازه سرعت لحظه‌ای برابر (الف) ۵؛ (ب) ۱ است، پیدا کنید.

$$p = 15\sqrt{300 - 2x} \quad .41$$

یک شرکت معاملات ملکی هر آپارتمان را p دلار در ماه اجاره می‌دهد؛ به این ترتیب که اگر x آپارتمان اجاره داده شود داریم $p = 15\sqrt{300 - 2x}$. اگر درآمد حاصل از اجاره دادن x آپارتمان برابر با R دلار باشد، آنگاه $R = px$ چند

آپارتمان بایستی اجاره داده شود تا آهنگ تغییر R نسبت به x (درآمد نهایی) صفر شود؟ (توجه: چون x تعداد آپارتمانهای اجاره داده شده می باشد، عددی غیر منفی و صحیح است. معینا، در محاسبات x را یک عدد حقیقی غیر منفی فرض کنید و سپس هر مقدار غیر صحیح x را به نزدیکترین عدد صحیح گرد کنید.)

۴۲. توابع $f(u) = 1/u^2$ و $g(x) = \sqrt{x}/\sqrt{2x^3 - 6x + 1}$ داده شده اند؛ مشتق $f \circ g$ را از دوراه به دست آورید: (الف) با پیدا کردن $(f \circ g)(x)$ و سپس به دست آوردن $(f \circ g)'(x)$ ؛ (ب) با استفاده از قاعده زنجیری.

در تمرینهای ۴۳ تا ۴۶، مشتق تابع داده شده را پیدا کنید. (دانهایی: $|a| = \sqrt{a^2}$.)

$$f(x) = |x^2 - 2|. \quad ۴۳ \quad g(x) = x|x|. \quad ۴۴$$

$$g(x) = |x|^3. \quad ۴۵ \quad h(x) = \sqrt[3]{|x|} + x. \quad ۴۶$$

۴۷. فرض کنید $g(x) = |f(x)|$. ثابت کنید که اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ موجود باشند، $|g'(x)| = |f'(x)|$.

۴۸. فرض کنید $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ و $h(x) = f(g(x))$ که f در ۳ مشتق پذیر است. ثابت کنید $h'(0) = 0$.

۴۹. فرض کنید g و h دو تابع هستند که در x مشتق پذیرند. اگر برای اعداد گویای r و s ، تابع f به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = [g(x)]^r [h(x)]^s$$

ثابت کنید که $f'(x)$ از فرمول زیر به دست می آید

$$f'(x) = [g(x)]^{r-1} [h(x)]^{s-1} [r \cdot h(x)g'(x) + s \cdot g(x)h'(x)].$$

در تمرینهای ۵۰ تا ۵۳ از نتیجه تمرین ۴۹ استفاده کرده و مشتق تابع داده شده را پیدا کنید.

$$g(x) = (4x + 3)^{1/2} (4 - x^2)^{1/3}. \quad ۵۰ \quad f(x) = (3x + 2)^4 (x^2 - 1)^{2/3}. \quad ۵۱$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right)^2 (x^3 + 4)^{1/3}. \quad ۵۲$$

$$F(t) = (t^3 - 2t + 1)^{2/3} (t^2 + t + 5)^{1/3}. \quad ۵۳$$

۹.۳ مشتق گیری ضمنی

اگر $f = \{(x, y) | y = 3x^2 + 5x + 1\}$ ، $\bar{f}$ ، آنگاه معادله

$$y = 3x^2 + 5x + 1 \quad (1)$$

تابع f را به‌طور صریح تعریف می‌کند. ولی، هر تابعی را نمی‌توان به‌طور صریح تعریف کرد. به‌عنوان مثال، در معادله

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \quad (2)$$

نمی‌توانیم y را بر حسب x به‌دست آوریم؛ با وجود این ممکن است یک یا چند تابع f به صورت $y = f(x)$ وجود داشته باشند که در معادله (۲) صدق کنند، یعنی معادله

$$x^6 - 2x = 3[f(x)]^6 + [f(x)]^5 - [f(x)]^2$$

برای تمام مقادیر x واقع در قلمرو f برقرار باشد. در این حالت، معادله (۲) تابع f را به‌طور ضمنی تعریف می‌کند.

با فرض اینکه معادله (۲)، y را به‌عنوان حداقل یک تابع مشتق‌پذیر از x تعریف کند، می‌توانیم مشتق y نسبت به x را با فرایندی موسوم به مشتق‌گیری ضمنی پیدا کنیم، که اکنون این کار را می‌کنیم.

طرف چپ معادله (۲) تابعی از x و طرف راست آن تابعی از y است. فرض کنید F تابعی باشد که به‌وسیله طرف چپ معادله (۲) تعریف می‌شود، و G تابعی باشد که به‌وسیله طرف راست آن تعریف می‌شود. بدین ترتیب داریم

$$F(x) = x^6 - 2x \quad (3)$$

و

$$G(y) = 3y^6 + y^5 - y^2 \quad (4)$$

که در آن y تابعی از x ، مثلاً به‌صورت زیر است

$$y = f(x).$$

بنابراین، معادله (۲) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت

$$F(x) = G(f(x)). \quad (5)$$

معادله (۵) به‌ازای تمام مقادیر x واقع در قلمرو f که برای آنها $G[f(x)]$ وجود داشته باشد، برقرار است.

در این صورت، برای تمام مقادیر x که به‌ازای آنها تابع f مشتق‌پذیر باشد، داریم

$$D_x[x^6 - 2x] = D_x[3y^6 + y^5 - y^2]. \quad (6)$$

مشتق طرف چپ معادله (۶) را به‌آسانی می‌توان پیدا کرد

$$D_x[x^6 - 2x] = 6x^5 - 2. \quad (7)$$

با استفاده از قاعده زنجیری، مشتق طرف راست معادله (۶) را پیدا می‌کنیم

$$D_x[3y^6 + y^5 - y^2] = 18y^5 \cdot D_x y + 5y^4 \cdot D_x y - 2y \cdot D_x y \quad (۸)$$

اگر مقادیر مربوطه را از (۷) و (۸) در معادله (۶) قرار دهیم، داریم

$$6x^5 - 2 = (18y^5 + 5y^4 - 2y)D_x y.$$

$$D_x y = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}.$$

معادله (۲) نوع ویژه‌ای از معادله شامل x و y است زیرا می‌توان آن را طوری نوشت که تمام جملات شامل x در طرف چپ و تمام جملات شامل y در طرف راست معادله قرار داشته باشند.

در نمونه زیر، روش مشتق‌گیری ضمنی را برای محاسبه $D_x y$ از يك نوع معادله کلیتر به کار می‌بریم.

○ نمونه ۹ معادله زیر را در نظر بگیرید

$$3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y \quad (۹)$$

و فرض کنید حداقل يك تابع مشتق‌پذیر f به صورت $y = f(x)$ وجود دارد که در معادله (۹) صدق می‌کند. اگر از دو طرف معادله (۹) مشتق بگیریم (و به خاطر داشته باشیم که y تابع مشتق‌پذیری از x است) با استفاده از قضایای مربوط به مشتق حاصلضرب، مشتق تابع توانی، و قاعده زنجیری به دست می‌آوریم

$$12x^3y^2 + 3x^4(2yD_x y) - 7y^3 - 7x(3y^2D_x y) = 0 - 8D_x y$$

$$D_x y(6x^4y - 21xy^2 + 8) = 7y^3 - 12x^3y^2$$

$$○ \quad D_x y = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}.$$

باید به خاطر داشت که فرض کرده بودیم هر دو معادله (۲) و (۹)، y را به صورت حداقل يك تابع مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کنند. ممکن است يك معادله شامل x و y ، وجود هیچ تابع با مقادیر حقیقی را ایجاب نکند، همان‌طور که معادله زیر نمی‌کند

$$x^2 + y^2 + 4 = 0.$$

معادله فوق به ازای هیچ مقدار حقیقی از x و y برقرار نیست. به علاوه، ممکن است در معادله‌ای از x و y ، توابع مختلفی صدق کنند که بعضی از آنها مشتق‌پذیر باشند و بعضی نباشند. بحث کلی در این مورد، خارج از قلمرو این کتاب است ولی در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته دیده می‌شود. در بحثهای بعدی، وقتی می‌گوییم که يك معادله از x و y ، y را به طور ضمنی به عنوان تابعی از x تعریف می‌کند، فرض بر این است

که يك يا چند تا از اين توابع مشتق پذيرند . مثال ۴ ، که به دنبال می آید، اين واقعيت را نشان می دهد که مشتق گیری ضمنی، مشتق دوتايع مشتق پذير را که به وسیله معادله مفروض تعريف شده اند، به دست می دهد.

مثال ۱ فرض کنید $x^4 + y^4 = (x+y)^2 - (x-y)^2$ ؛ $D_x y$ را پيدا کنید.

حل اگر به طور ضمنی نسبت به x مشتق بگیريم ، داریم

$$2(x+y)(1+D_x y) - 2(x-y)(1-D_x y) = 4x^3 + 4y^3 D_x y$$

$$2x + 2y + (2x + 2y)D_x y - 2x + 2y + (2x - 2y)D_x y = 4x^3 + 4y^3 D_x y$$

$$D_x y(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$$

$$D_x y = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

مثال ۲ معادله خط مماس بر منحنی $x^3 + y^3 = 9$ در نقطه $(1, 2)$ را پيدا کنید.

حل به طور ضمنی نسبت به x مشتق می گیريم

$$3x^2 + 3y^2 D_x y = 0.$$

پس

$$D_x y = -\frac{x^2}{y^2}.$$

بنابراين، در نقطه $(1, 2)$ داریم $D_x y = -1/4$. پس معادله خط مماس به صورت زیر است

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1).$$

مثال ۳ فرض کنید $x \cos y + y \cos x = 1$ ؛ $D_x y$ را به دست آورید.

حل اگر به طور ضمنی نسبت به x مشتق بگیريم، داریم

$$1 \cdot \cos y + x(-\sin y)D_x y + D_x y(\cos x) + y(-\sin x) = 0$$

$$D_x y(\cos x - x \sin y) = y \sin x - \cos y$$

$$D_x y = \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}.$$

مثال ۴ معادله ای به صورت $x^2 + y^2 = 9$ داده شده است. (الف) $D_x y$ را به وسیله مشتق گیری ضمنی پیدا کنید؛ (ب) دو تابع پیدا کنید که به وسیله معادله فوق تعریف شوند؛ (پ) از راه مشتق گیری صریح، مشتق توابع یافته شده در قسمت (ب) را بیابید؛ (ت) تحقیق کنید که نتایج قسمت (الف) و قسمت (پ) با هم مطابقت دارند.

حل

(الف) از مشتق گیری ضمنی به دست می آوریم

$$D_x y = -\frac{x}{y} \quad \text{و بنا بر این} \quad 2x + 2y D_x y = 0$$

(ب) معادله داده شده را نسبت به y حل می کنیم، و به دست می آوریم

$$y = -\sqrt{9 - x^2} \quad \text{و} \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

فرض کنید f_1 و f_2 به صورت زیر تعریف شوند

$$f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2} \quad \text{و} \quad f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

(پ) چون $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ ، با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

به طریق مشابه،

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

(ت) برای $y = f_1(x)$ که به صورت $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$ تعریف شده است، از قسمت (پ) داریم

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

که با جواب قسمت (الف) مطابقت دارد. برای $y = f_2(x)$ که به صورت $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ تعریف می شود، از قسمت (پ) داریم

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{-\sqrt{9-x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

▲

که باز هم با نتیجه قسمت (الف) مطابقت دارد.

تمرینهای ۹.۳

در تمرینهای ۱ تا ۲۴، $D_x y$ را با استفاده از مشتق گیری ضمنی پیدا کنید.

$$x^2 + y^2 = 16 \quad ۱. \quad 4x^2 - 9y^2 = 1 \quad ۲.$$

$$x^2 + y^2 = 7xy \quad ۳. \quad x^2 + y^2 = 8xy \quad ۴.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \quad ۵. \quad \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 2x \quad ۶.$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \quad ۷. \quad 2x^2y + 3xy^2 = 5 \quad ۸.$$

$$x^2y^2 = x^2 + y^2 \quad ۹. \quad (2x+3)^4 = 2y^4 \quad ۱۰.$$

$$x^2 = \frac{x+2y}{x-2y} \quad ۱۱. \quad \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = x \quad ۱۲.$$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} = 2y^2 \quad ۱۳. \quad \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[5]{y} = x \quad ۱۴.$$

$$\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{y} \quad ۱۵. \quad y + \sqrt{xy} = 3x^2 \quad ۱۶.$$

$$\frac{y}{\sqrt{x-y}} = 2 + x^2 \quad ۱۷. \quad x^2y^3 = x^4 - y^4 \quad ۱۸.$$

$$y = \cos(x-y) \quad ۱۹. \quad x = \sin(x+y) \quad ۲۰.$$

$$x \sin y + y \cos x = 1 \quad ۲۱. \quad \cos(x+y) = y \sin x \quad ۲۲.$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^2 + y^2 \quad ۲۳. \quad y\sqrt{2+3x} + x\sqrt{1+y} = x \quad ۲۴.$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۲۸، y را به عنوان متغیر مستقل در نظر بگیرید و $D_y x$ را پیدا کنید.

$$x^4 + y^4 = 12x^2y \quad ۲۵. \quad y = 2x^2 - 5x \quad ۲۶.$$

$$y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 9.28 \quad x^2y + 2y^4 - x^4 = 0.27$$

۲۹. معادله خط مماس بر منحنی $16x^4 + y^4 = 32$ در نقطه $(1, 2)$ را پیدا کنید.

۳۰. معادله خط قائم بر منحنی $9x^3 - y^3 = 1$ در نقطه $(1, 2)$ را بنویسید.

۳۱. معادله خط قائم بر منحنی $10 = x^2 + xy + y^2 - 3y$ در نقطه $(2, 3)$ را بنویسید.

۳۲. معادله خط مماس بر منحنی $14x + y = \sqrt{xy}$ در نقطه $(2, -32)$ را بنویسید.

۳۳. آهنگ تغییر y نسبت به x در نقطه $(3, 2)$ را، اگر $4 = x^3 - y^2$ ، پیدا کنید.

۳۴. نشان دهید که خط مماس بر دایره $x^2 + y^2 = r^2$ در هر نقطه‌ای مانند (x_1, y_1) روی منحنی، عمود بر خطی است که از (x_1, y_1) و مرکز دایره می‌گذرد.

۳۵. در چه نقطه‌ای از منحنی $1 = x + \sqrt{xy} + y$ خط مماس بر منحنی موازی با محور y ‌هاست؟

۳۶. دو خط مماس بر منحنی $0 = x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3$ که از نقطه $(-1, 3)$ می‌گذرند، وجود دارند. معادله هر کدام را پیدا کنید.

در هر یک از تمرینهای ۳۷ تا ۴۲، معادله‌ای داده شده است. اعمال زیر برای هر مسئله انجام دهید.
(الف) دو تابع پیدا کنید که به وسیله معادله داده شده، تعریف شوند، و قلمروهای آنها را نیز معین کنید؛ (ب) نمودار هر یک از توابع به دست آمده در قسمت (الف) را رسم کنید؛ (پ) نمودار معادله داده شده را رسم کنید؛ (ت) مشتق هر یک از توابع به دست آمده در قسمت (الف) را پیدا کنید و قلمرو مشتقها را بیابید؛ (ث) با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی، $D_x y$ را از معادله داده شده به دست آورید، و نشان دهید که با نتیجه قسمت (ت) مطابقت دارد؛ (ج) معادله هر خط مماس در مقدار داده شده x_1 را پیدا کنید.

$$x^2 + y^2 = 25; x_1 = 4.38 \quad y^2 = 4x - 8; x_1 = 3.37$$

$$y^2 - x^2 = 16; x_1 = -3.40 \quad x^2 - y^2 = 9; x_1 = -5.39$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0; x_1 = 1.41$$

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 40y + 93 = 0; x_1 = -2.42$$

۴۳. ثابت کنید که مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر خط مماس بر منحنی

$$x^{1/2} + y^{1/2} = k^{1/2}$$

بامقدار ثابت k است.

۴۴. اگر $x^n y^m = (x + y)^{n+m}$ ، ثابت کنید $x \cdot D_x y = y$.

۱۰.۳ مشتقهای مراتب بالاتر

اگر f' مشتق تابع f باشد، آنگاه f' نیز خود يك تابع است، و مشتق اول f نامیده می‌شود. اگر مشتق f' وجود داشته باشد، آن را مشتق دوم f می‌نامیم و با علامت f'' نمایش می‌دهیم (که خوانده می‌شود اف زی‌گوند). به‌طور مشابه، مشتق سوم f را به عنوان مشتق اول f'' ، در صورت وجود، تعریف کرده و با علامت f''' نشان می‌دهیم (ومی‌خوانیم اف تیرس).

اگر n يك عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ باشد، مشتق n م تابع f را به عنوان مشتق اول مشتق $(n-1)$ م تابع f تعریف می‌کنیم و آن را با علامت $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم. پس می‌توانیم خود تابع f را با $f^{(0)}$ نیز نمایش دهیم. علامت دیگری برای مشتق n م f به صورت $D_x^n f$ است. همچنین، اگر تابع f به وسیله معادله $y = f(x)$ تعریف شده باشد، مشتق n م f را با علامت $D_x^n y$ نیز می‌توان نشان داد.

مثال ۱ اگر تابع f به صورت $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$ تعریف شده باشد، تمام مشتقهای f را پیدا کنید.

حل

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x.$$

$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2.$$

$$f'''(x) = 192x + 30.$$

$$f^{(4)}(x) = 192.$$

$$f^{(5)}(x) = 0.$$

$$\blacktriangle \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad n \geq 5.$$

چون $f'(x)$ آهنگ تغییر $f(x)$ در يك واحد از تغییر x را به دست می‌دهد، $f''(x)$ ، مشتق $f'(x)$ است، آهنگ تغییر $f'(x)$ در يك واحد از تغییر x را به دست می‌دهد. اگر (x, y) نقطه‌ای روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه $D_x y$ ضریب زاویه خط مماس بر نمودار در نقطه (x, y) می‌باشد. بنابراین $D_x^2 y$ آهنگ تغییر ضریب زاویه خط مماس نسبت به x در نقطه (x, y) است.

مثال ۲ فرض کنید $m(x)$ ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = x^3 - 2x^2 + x$ در نقطه (x, y) باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر m در يك واحد از تغییر x در نقطه $(2, 2)$ را پیدا کنید.

حل $m = D_x y = 3x^2 - 4x + 1$. آهنگ لحظه‌ای تغییر m در يك واحد تغییر x برابر با $D_x m$ یا، به عبارت دیگر، $D_x^2 y$ است

$$D_x m = D_x^2 y = 6x - 4.$$

در نقطه $(2, 2)$ ، داریم $D_x^2 y = 8$. بنابراین، در نقطه $(2, 2)$ تغییر m ، ۸ برابر تغییر x است. ▲

مشتق دوم یعنی $f''(x)$ بر حسب واحد $f'(x)$ در واحد x بیان می‌شود، که عبارت است از واحد $f(x)$ در واحد x ، در واحد x (مربع واحد). مثلاً در حرکت مستقیم الخط، اگر در لحظه t (ثانیه) فاصله ذره از مبدأ $f(t)$ سانتیمتر باشد، سرعت ذره در لحظه t ، $f'(t)$ سانتیمتر در ثانیه و آهنگ لحظه‌ای تغییر سرعت در t (ثانیه)، $f''(t)$ سانتیمتر بر مربع ثانیه می‌باشد. در فیزیک، آهنگ لحظه‌ای تغییر سرعت را شتاب لحظه‌ای می‌نامند. بنابراین، اگر ذره‌ای در امتداد یک خط مستقیم طبق معادله $s = f(t)$ در حال حرکت باشد، و در لحظه t (ثانیه)، سرعت لحظه‌ای برابر v سانتیمتر در ثانیه و شتاب لحظه‌ای a سانتیمتر بر مربع ثانیه باشد، آنگاه a برابر با مشتق v نسبت به t و یا مشتق دوم s نسبت به t خواهد بود؛ یعنی

$$a = D_t v = D_t^2 s \quad \text{و} \quad v = D_t s$$

وقتی که $a > 0$ ، v افزایش می‌یابد، و وقتی که $a < 0$ ، v کاهش می‌یابد. وقتی که $a = 0$ ، v تغییر نمی‌کند. چون مقدار سرعت یک ذره در لحظه t (ثانیه) برابر $|v|$ سانتیمتر در ثانیه است، نتایج زیر را داریم

- (i) اگر $v \geq 0$ و $a > 0$ ، مقدار سرعت در حال افزایش است.
- (ii) اگر $v \geq 0$ و $a < 0$ ، مقدار سرعت در حال کاهش است.
- (iii) اگر $v \leq 0$ و $a > 0$ ، مقدار سرعت در حال کاهش است.
- (vi) اگر $v \leq 0$ و $a < 0$ ، مقدار سرعت در حال افزایش است.

○ نمونه ۱ ذره‌ای در امتداد یک خط افقی طبق معادله زیر حرکت می‌کند

$$s = 3t^2 - t^3 \quad t \geq 0 \quad (1)$$

که در آن، s سانتیمتر عبارت است از مسافت طی شده پس از t ثانیه. اگر v سانتیمتر در ثانیه سرعت لحظه‌ای در لحظه t باشد، آنگاه $v = D_t s$. بنابراین

$$v = 6t - 3t^2. \quad (2)$$

اگر a سانتیمتر بر مربع ثانیه، شتاب لحظه‌ای در لحظه t باشد، آنگاه $a = D_t^2 s$. بنابراین

$$a = 6 - 6t. \quad (3)$$

حال مقادیر t را وقتی که مقدار هر یک از کمیت‌های s ، v یا a برابر با صفر است، به دست می‌آوریم. از فرمول (۱)،

$$\text{وقتی که } t = 0 \text{ یا } t = 3, \quad s = 0.$$

از فرمول (۲)،

$$\text{وقتی که } t = 0 \text{ یا } t = 2, \quad v = 0.$$

از فرمول (۳)،

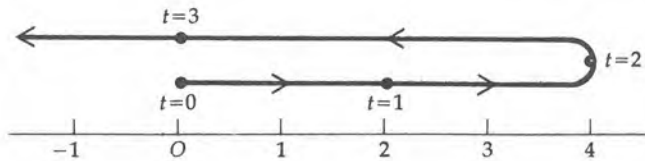
وقتی که $t = 1$ ، داریم $a = 0$.

جدول ۱۰۰.۳

	s	v	a	نتیجه
$t = 0$	۰	۰	۶	ذره در مبدأ قرار دارد. سرعت صفر است و در حال افزایش می باشد. مقدار سرعت افزایش می یابد.
$0 < t < 1$	+	+	+	ذره در طرف راست مبدأ قرار دارد، و به سمت راست حرکت می کند. سرعت در حال افزایش است. مقدار سرعت افزایش می یابد.
$t = 1$	۲	۳	۰	ذره به فاصله ۲ سانتیمتر در طرف راست مبدأ قرار دارد؛ و به طرف راست با سرعت ۳ سانتیمتر در ثانیه حرکت می کند. سرعت تغییر نمی کند؛ بنابراین مقدار سرعت تغییر نمی کند.
$1 < t < 2$	+	+	-	ذره در طرف راست مبدأ، و به طرف راست در حرکت است. سرعت در حال کاهش می باشد. مقدار سرعت کاهش می یابد.
$t = 2$	۴	۰	-۶	ذره به فاصله ۴ سانتیمتر در طرف راست مبدأ قرار دارد، و جهت حرکت خود را از راست به طرف چپ تغییر می دهد. سرعت کاهش می یابد. مقدار سرعت در حال افزایش است.
$2 < t < 3$	+	-	-	ذره در طرف راست مبدأ قرار دارد و به طرف چپ در حرکت است. سرعت در حال کاهش است. مقدار سرعت افزایش می یابد.
$t = 3$	۰	-۹	-۱۲	ذره در مبدأ است، و به طرف چپ با سرعت ۹ سانتیمتر در ثانیه در حرکت می باشد. سرعت در حال کاهش است. مقدار سرعت در حال افزایش است.
$3 < t$	-	-	-	ذره در طرف چپ مبدأ، و به طرف چپ در حال حرکت است. سرعت کاهش می یابد. مقدار سرعت در حال افزایش می باشد.

در جدول ۱۰۱۰۳، مقادیر s ، v ، و a برای این مقادیر t : ۰، ۱، ۲، و ۳، دیده می‌شوند. همچنین علائم کمیت‌های s ، v ، و a در بازه‌هایی از t که شامل ۰، ۱، ۲، و ۳ نیستند، نشان داده شده است. با توجه به موقعیت و حرکت ذره به ازای هر یک از مقادیر گوناگون t يك نتیجه‌گیری انجام شده است.

در شکل ۱۰۱۰۳، حرکت ذره در امتداد خط افقی و چگونگی حرکت در بالای خط افقی نشان داده شده است.



شکل ۱۰۱۰۳

مثال ۳ ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم طبق معادله حرکت زیر حرکت می‌کند

$$s = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4t}{t+1}$$

که در آن s سانتی‌متر، فاصله جهت دار ذره از مبدأ در لحظه t (ثانیه) می‌باشد. اگر v سانتی‌متر در ثانیه، سرعت لحظه‌ای و a سانتی‌متر بر مربع ثانیه، شتاب لحظه‌ای در t (ثانیه) باشد، مقادیر t ، s و v را وقتی که $a = 0$ به دست آورید.

حل

$$v = D_t s = t + \frac{4}{(t+1)^2}$$

$$a = D_t v = D_t^2 s = 1 - \frac{8}{(t+1)^3}$$

با قراردادن $a = 0$ ، نتیجه می‌شود

$$\frac{(t+1)^3 - 8}{(t+1)^3} = 0$$

یا

$$(t+1)^3 = 8.$$

چون تنها مقدار حقیقی t از ریشه سوم ۸ به دست می‌آید، بنابراین

$$t+1=2 \quad \text{یا} \quad t=1.$$

وقتی که $t = ۱$ ،

$$s = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{4 \cdot 1}{1+1} = \frac{5}{2}$$

و

$$v = 1 + \frac{4}{(1+1)^2} = 2.$$

بنابراین، در ثانیه ۱ شتاب صفراست و این موقعی است که ذره از مبدأ ۲٫۵ سانتیمتر فاصله دارد و با سرعت ۲ سانتیمتر در ثانیه به طرف راست در حرکت است. ▲

کاربردهای دیگر مشتق دوم، موارد استفاده آن در پیدا کردن اکسترمم (مینیم یا ماکسیمم) نسبی توابع (بخش ۲۰۴) و رسم نمودار تابع (بخشهای ۸۰۴ و ۹۰۴) است. کاربرد مهمی از مشتقهای مراتب بالاتر، استفاده از آنها در بسط توابع به صورت سری نامتناهی است که در فصل ۱۵ خواهیم دید. مثال زیر، نشان می‌دهد که مشتق دوم توابعی که به طور ضمنی تعریف شده‌اند، چگونه به دست می‌آید.

مثال ۴ فرض کنید $36 = 9y^2 + 4x^2$ ؛ با مشتق‌گیری ضمنی، $D_x^2 y$ را حساب کنید.

حل به طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$8x + 18y D_x y = 0$$

$$D_x y = -\frac{4x}{9y} \quad (۴)$$

برای یافتن $D_x^2 y$ ، مشتق خارج قسمت را پیدای کنیم و به خاطر داریم که y تابعی از x است

$$D_x^2 y = \frac{9y(-4) - (-4x)(9D_x y)}{81y^2} \quad (۵)$$

اگر مقدار $D_x y$ را از معادله (۴) در معادله (۵) قرار دهیم، داریم

$$D_x^2 y = \frac{-36y + (36x)\left(-\frac{4x}{9y}\right)}{81y^2} = \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$

پس

$$D_x^2 y = \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3} \quad (۶)$$

چون هر زوج از مقادیر x و y که در معادله (۶) صدق کند، در معادله اصلی نیز صدق خواهد کرد، می توانیم به جای $4x^2 + 9y^2$ مقدار ۳۶ از معادله اصلی را قرار دهیم

$$\Delta \quad D_x^2 y = \frac{-4(36)}{81y^3} = -\frac{16}{9y^3}.$$

تمرینهای ۱۰.۳

در هر یک از تمرینهای ۱ تا ۱۶، مشتق اول و دوم تابع تعریف شده بسا معادله مفروض را به دست آورید.

$$F(x) = 7x^3 - 8x^2 \quad ۲. \quad f(x) = x^5 - 2x^3 + x \quad ۱.$$

$$G(t) = t^3 - t^2 + t \quad ۴. \quad g(s) = 2s^4 - 4s^3 + 7s - 1 \quad ۳.$$

$$g(r) = \sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \quad ۶. \quad F(x) = x^2 \sqrt{x} - 5x \quad ۵.$$

$$h(y) = \sqrt[3]{2y^3 + 5} \quad ۸. \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad ۷.$$

$$g(t) = 2 \sin^3 t \quad ۱۰. \quad f(t) = 4 \cos t^2 \quad ۹.$$

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \quad ۱۲. \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{3 + 2x^2}} \quad ۱۱.$$

$$g(x) = (2x - 3)^2(x + 4)^3 \quad ۱۴. \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4} \quad ۱۳.$$

$$f(x) = \sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x} \quad ۱۶. \quad f(x) = \sqrt{\sin x + 1} \quad ۱۵.$$

$$۱۷. \text{ اگر } y = x^4 - 2x^2 + x - 5, \quad D_x^2 y \text{ را به دست آورید.}$$

$$۱۸. \text{ اگر } s = \sqrt{4t + 1}, \quad D_t^2 s \text{ را به دست آورید.}$$

$$۱۹. \text{ اگر } y = 3/(2x - 1), \quad D_x^4 y \text{ را به دست آورید.}$$

$$۲۰. \text{ اگر } f(x) = 2/(x - 1), \quad f^{(4)}(x) \text{ را به دست آورید.}$$

$$۲۱. \text{ اگر } f(x) = x/(1 - x)^2, \quad D_x^3 f(x) \text{ را حساب کنید.}$$

$$۲۲. \text{ اگر } f(t) = 3 \sin 2t, \quad D_t^4 f(t) \text{ را به دست آورید.}$$

$$۲۳. \text{ اگر } f(x) = \cos 2x - \sin 2x, \quad f^{(5)}(x) \text{ را به دست آورید.}$$

۲۴. اگر $D_x^3 u$ ، $u = v\sqrt{v-2}$ را به دست آورید.

۲۵. اگر $x^2 + y^2 = 1$ ، نشان دهید که $D_x^2 y = -1/y^3$.

۲۶. $D_x^2 y = -4/25y^3$ ، نشان دهید که $x^2 + 25y^2 = 100$.

۲۷. $D_x^2 y = -2x/y^5$ ، نشان دهید که $x^2 + y^2 = 1$.

۲۸. $D_x^2 y = 1/x^{3/2}$ ، نشان دهید که $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$.

۲۹. $D_x^2 y$ ، $x^4 + y^4 = a^4$ (یک عدد ثابت است) را به ساده ترین صورت به دست آورید.

۳۰. $D_x^2 y$ ، $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ (با a ثابت هستند) را به ساده ترین صورت به دست آورید.

۳۱. ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $y = x^4 + x^3 - 3x^2$ را در هر نقطه روی نمودار، اگر آهنگ تغییر ضریب زاویه صفر باشد، به دست آورید.

۳۲. آهنگ لحظه ای تغییر ضریب زاویه خط مماس بر نمودار $y = 2x^3 - 6x^2 - x + 1$ را در نقطه $(-2, 3)$ به دست آورید.

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، ذره ای در امتداد یک خط افقی طبق معادله حرکت داده شده، در حال حرکت است؛ s سانتیمتر فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t ، v سانتیمتر در ثانیه سرعت و a سانتیمتر بر مربع ثانیه شتاب ذره در ثانیه t است؛ $ad v$ را بر حسب t پیدا کنید. جدولی مشابه جدول ۱۰۱۰۳ تشکیل دهید که وضعیت و حرکت ذره را نشان دهد، به این صورت که شامل بازه های زمانی t بوده و نشان دهد که چه موقع ذره به طرف راست، و چه موقع به طرف چپ حرکت می کند، چه موقع سرعت افزایش و چه موقع کاهش می یابد، چه وقتی مقدار سرعت زیاد و چه وقتی کم می شود، و موقعیت ذره نسبت به مبدأ را در این بازه های زمانی نمایش دهد. چگونگی حرکت ذره را در شکلی مشابه شکل ۱۰۱۰۳ نشان دهید.

$$s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2, t \geq 0. \quad ۳۴$$

$$s = t^3 - 9t^2 + 15, t \geq 0. \quad ۳۳$$

در تمرینهای ۳۵ تا ۳۹، ذره ای در امتداد یک خط مستقیم طبق معادله حرکت داده شده در حرکت است؛ s فوت فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t می باشد. معین کنید در چه زمانی شتاب لحظه ای صفر است، و در این زمان، فاصله جهت دار ذره از مبدأ، و سرعت لحظه ای آن را حساب کنید.

$$s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4, t \geq 0. \quad ۳۶$$

$$s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1, t \geq 0. \quad ۳۵$$

$$s = 9t^2 + 2\sqrt{2t+1}, t \geq 0. ۳۸$$

$$s = \frac{125}{16t+32} - \frac{2}{5}t^5, t \geq 0. ۳۷$$

$$s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2}, t \geq 0. ۳۹$$

۴۰. ذره‌ای در امتداد یک خط مستقیم در حرکت است؛ گوییم این ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است، اگر اندازه شتاب آن همواره متناسب با اندازه فاصله آن از یک نقطه ثابت واقع بر خط، و جهت شتاب و حرکت همواره مخالف یکدیگر باشند. نشان دهید حرکت مستقیم‌الخط یک ذره که طبق معادله $s = A \sin 2\pi kt + B \cos 2\pi kt$ حرکت می‌کند و در آن، s سانتیمتر فاصله جهت‌دار ذره از مبدأ در ثانیه t ، و A ، B ، و k اعدادی ثابت هستند، یک حرکت هماهنگ ساده است.

۴۱. نشان دهید که اگر ذره‌ای در امتداد یک خط مستقیم طبق معادله حرکت $s = a \cos(kt + \theta)$ در حرکت باشد که s سانتیمتر فاصله جهت‌دار ذره از مبدأ در ثانیه t ، و k ، a ، و θ اعدادی ثابت هستند، حرکت ذره هماهنگ ساده است. (تمرین ۴۰ را ببینید.)

در تمرینهای ۴۵ تا ۴۸، فرمول $f'(x)$ و $f''(x)$ را به دست آورید و قلمرو f' و f'' را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}. ۴۳ \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}. ۴۲$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}. ۴۵ \quad f(x) = |x|^2. ۴۴$$

۴۶. برای تابع تمرین ۴۴، $f'''(x)$ را در صورت وجود حساب کنید.

۴۷. برای تابع تمرین ۴۵، $f'''(x)$ را در صورت وجود حساب کنید.

۴۸. نشان دهید که اگر $xy = 1$ ، آنگاه $D_x^2 y \cdot D_y^2 x = 4$.

۴۹. فرض کنید f' ، g' ، f'' و g'' وجود دارند و همچنین $h = f \circ g$ ؛ $h''(x)$ را بر حسب مشتقات f و g حساب کنید.

۵۰. فرض کنید مشتقات اول و دوم توابع f و g وجود دارند و تابع h به صورت $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ تعریف شده است. ثابت کنید که

$$h''(x) = f(x) \cdot g''(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f''(x) \cdot g(x).$$

۵۱. فرض کنید $y = x^n$ ، که n عددی صحیح و مثبت است؛ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید که $D_x^n y = n!$.

۵۲. اگر $y = 1/(1 - 2x)$ ، با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$D_x^n y = \frac{2^n n!}{(1 - 2x)^{n+1}}.$$

۵۳. اگر k عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد، با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$D_x^n(\sin x) = \begin{cases} \sin x & n = 4k \\ \cos x & n = 4k + 1 \\ -\sin x & n = 4k + 2 \\ -\cos x & n = 4k + 3 \end{cases}$$

۵۴. فرمولی مشابه فرمول تمرین ۵۳ برای $D_x^n(\cos x)$ به دست آورید.

تمرینهای مروری فصل ۳

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، مشتق توابع داده شده را پیدا کنید.

$$g(x) = 5(x^4 + 3x^5) \quad ۲. \quad f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^4} \quad ۱.$$

$$f(x) = (x^4 - 2x)(4x^2 + 2x + 5) \quad ۴. \quad G(t) = (3t^2 - 4)(4t^3 + t - 1) \quad ۳.$$

$$h(y) = \frac{y^2}{y^3 + 8} \quad ۶. \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad ۵.$$

$$F(x) = (4x^4 - 4x^5 + 1)^{-1/2} \quad ۸. \quad f(s) = (2s^3 - 3s + 7)^4 \quad ۷.$$

$$g(x) = \left(\frac{3x^2 + 4}{x^5 + 1} \right)^{10} \quad ۱۰. \quad f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 + 1}} \quad ۹.$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3} (x^2 - 4)^{1/2} \quad ۱۱.$$

$$g(x) = (x^4 - x)^{-2} (5 - x^2)^{-1} \quad ۱۲.$$

$$f(x) = (x + 1) \sin x - x \cos x \quad ۱۳.$$

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{x \cos x} \cdot ۱۴$$

$$g(w) = \sin(\cos 3w) - 3 \cos^2 2w \cdot ۱۵$$

$$f(t) = \sin^2 3t \sqrt{\cos 2t} \cdot ۱۶$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۴، $D_x y$ را به دست آورید.

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \cdot ۱۸ \quad 4x^2 + 4y^2 - y^3 = 0 \cdot ۱۷$$

$$xy^2 + 2y^3 = x - 2y \cdot ۲۰ \quad y = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot ۱۹$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \cdot ۲۲ \quad \sin(x+y) + \sin(x-y) = 1 \cdot ۲۱$$

$$y = \frac{x\sqrt{3+2x}}{4x-1} \cdot ۲۴ \quad y = x^2 + [x^2 + (x^4 + x)]^2 \cdot ۲۳$$

۲۵. ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم طبق معادله $s = t^3 - 11t^2 + 24t + 100$ حرکت می‌کند، که s سانتیمتر، فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t است. (الف) در $t = 0$ ، ذره در نقطه شروع است. به ازای چه مقادیر دیگری از t ، ذره به نقطه شروع می‌رسد؟ (ب) سرعت آن در این لحظات چقدر است؟ علامت سرعت را در هر مورد تعبیر کنید.

۲۶. ذره‌ای در امتداد يك خط افقی طبق معادله $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ حرکت می‌کند، که s سانتیمتر، فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t می‌باشد. جهت مثبت حرکت سمت راست است. بازه‌های زمانی را که ذره در آن بازه‌ها به طرف راست و یا به طرف چپ حرکت می‌کند، معین کنید. همچنین زمان تغییر جهت ذره را به دست آورید. شکلی مشابه شکل ۲.۵.۳ که چگونگی حرکت ذره را نشان دهد، بکشید، و مقادیر t را به طور تصادفی انتخاب نمایید ولی این انتخاب باید شامل مقادیری از t نیز باشد که ذره در آنها تغییر جهت می‌دهد.

۲۷. معادله حرکت ذره‌ای در امتداد يك خط افقی به صورت $s = 5 - 2 \cos^2 t$ می‌باشد، که s سانتیمتر فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t است. اگر v سانتیمتر در ثانیه و a سانتیمتر بر مربع ثانیه، به ترتیب، سرعت و شتاب ذره در ثانیه t باشند، v و a را بر حسب s به دست آورید.

۲۸. جسمی از روی يك سطح شیب دار طبق معادله $s = 12t^2 + 6t$ به طرف پایین می‌لغزد، که s متر، فاصله جهت دار جسم از بالای سطح t ثانیه بعد از شروع حرکت می‌باشد. (الف) سرعت جسم را ۳ ثانیه بعد از شروع حرکت به دست آورید؛ (ب) سرعت اولیه را پیدا کنید.

۳۹. توپی را از بام خانه‌ای به ارتفاع ۱۱۲ فوت، به‌طور قائم به‌سمت بالا پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت توپ به‌صورت $s = -16t^2 + 96t$ است که s فوت، فاصله جهت دار توپ از نقطه شروع، t ثانیه بعد از پرتاب می‌باشد. (الف) سرعت لحظه‌ای توپ در ثانیه دوم چقدر است؟ (ب) توپ چقدر بالا می‌رود؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ت) سرعت لحظه‌ای توپ در لحظه برخورد با زمین چقدر است؟

۳۵. معادلات خطهای مماس بر منحنی $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ با ضریب زاویه $1/2$ را بنویسید.

۳۱. معادلات خطهای مماس و قائم بر منحنی $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ در نقطه $(1, 2)$ را پیدا کنید.

۳۲. معادله خط قائم بر منحنی $x - y = \sqrt{x+y}$ در نقطه $(3, 1)$ را بنویسید.

۳۳. معادله خط قائم بر منحنی $y = \cos x$ در نقطه $(\pi/3, 1/2)$ را بنویسید.

۳۴. معادلات خطهای قائم و مماس بر منحنی $y = 8 \sin^3 2x$ در نقطه $(\pi/12, 1)$ را بنویسید.

۳۵. ثابت کنید خط مماس بر منحنی $y = -x^4 + 2x^2 + x$ در نقطه $(1, 2)$ ، در نقطه دیگری نیز بر این منحنی مماس است، و این نقطه را پیدا کنید.

۳۶. ثابت کنید خطهای مماس بر منحنیهای $xy^3 - x^2y - x + 5y = 0$ و $x^4 - 4y^3 + 5x + y = 0$ در مبدأ مختصات برهم عمودند.

۳۷. اگر $y = \sqrt{3-2x}$ ، $D_x^3 y$ را پیدا کنید.

۳۸. فرض کنید $y^k = D_x y$ ، که k یک عدد ثابت و y تابعی از x است. $D_x^3 y$ را بر حسب y و k به‌دست آورید.

۳۹. تابع $f(x) = (x^4/12) + (2x^3/3) + (3x^2/2) + 8x + 2$ مفروض است. برای چه مقادیری از x ، $f''(x) > 0$ ؟

۴۰. اگر $xy = k$ ، که k یک عدد ثابت غیر صفر است، آنگاه نشان دهید $D_x^2 y \cdot D_y^2 x = 4/k$.

۴۱. اگر A واحد مربع، مساحت مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با طول ساق x واحد باشد، مطلوب است (الف) آهنگ متوسط تغییر A نسبت به x ، وقتی که x از ۸ به ۱۰ تغییر می‌کند؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر A نسبت به x وقتی که x برابر با ۸ باشد.

۴۲. قانون استفان می‌گوید که بدن انسان طبق فرمول $R = kT^4$ انرژی تابشی گسیل می‌کند که در این فرمول، R اندازه آهنگ گسیل انرژی تابشی در واحد سطح، T دمای سطحی کلون، و k یک ثابت است. مطلوب است (الف) آهنگ متوسط تغییر R

نسبت به T وقتی T از ۲۰۰ به ۳۰۰ افزایش می‌یابد؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر R نسبت به T وقتی که T برابر با ۲۰۰ است.

۴۳. معادله تقاضا برای نوعی ماشین حساب به صورت $y = m^2 + \sqrt{m}$ است که اگر $y = ۱۰۰$ ماشین حساب مورد تقاضا باشد، قیمت هر واحد برابر m دلار است. مطلوب است (الف) آهنگ متوسط تغییر تقاضا نسبت به قیمت، وقتی که قیمت از ۱۶ به ۱۷ دلار افزایش می‌یابد؛ (ب) آهنگ لحظه‌ای (نهایی) تغییر تقاضا نسبت به قیمت، وقتی که قیمت ۱۶ دلار است.

۴۴. اگر $y = x^{2/3}$ ، آهنگ نسبی تغییر y نسبت به x را وقتی که (الف) $x = ۸$ ؛ و (ب) $x = c$ که c یک ثابت است، به دست آورید.

۴۵. فقط با استفاده از تعریف مشتق، $f'(x)$ را در صورتی که $f(x) = \sqrt{4x-3}$ ، به دست آورید.

۴۶. فقط با استفاده از تعریف مشتق، اگر $f(x) = 2/(\sqrt{3x+1})$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

۴۷. فقط با استفاده از تعریف مشتق، $f'(-5)$ را در صورتی که $f(x) = 3/(x+2)$ ، به دست آورید.

۴۸. فقط با استفاده از تعریف مشتق، $f'(5)$ را در صورتی که $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ ، به دست آورید.

۴۹. $f'(x) = (|x+1| - |x|)^2$ را اگر $f(x) = (|x+1| - |x|)^2$ ، به دست آورید.

۵۰. اگر $f(x) = 3 \sin^2 x - 4 \cos^2 x$ ، $f''(x)$ را به دست آورید.

۵۱. $f'''(\pi)$ را در صورتی که $f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$ ، پیدا کنید.

۵۲. $f'(-3)$ را در صورتی که $f(x) = (|x| - x)\sqrt[3]{9x}$ ، پیدا کنید.

۵۳. تابع f با ضابطه زیر داده شده است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 3 \\ 20 - x^2 & 3 < x \end{cases}$$

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید؛ (ب) معین کنید که f در ۳ پیوسته است یا نه؛

(پ) آیا f در ۳ مشتق پذیر است؟

۵۴. تابع f با ضابطه زیر داده شده است

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & x < 4 \\ 8x - 32 & 4 \leq x \end{cases}$$

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید؛ (ب) آیا f در ۴ پیوسته است؟ (پ) آیا f در ۴ مشتق پذیر است؟

۵۵. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & x > 1 \end{cases}$$

مقادیری برای a و b پیدا کنید که $f'(1)$ وجود داشته باشد.

۵۶. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 1 \end{cases}$$

مقادیری برای a ، b ، و c تعیین کنید که $f''(1)$ وجود داشته باشد.

۵۷. فرض کنید $f(x) = |x|^3$. (الف) نمودار f را رسم کنید؛ (ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید؛ (پ) $f'(0)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۵۸. فرض کنید $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x)$. (الف) در مورد مشتق پذیری f بحث کنید؛ (ب) آیا f' در قلمروش پیوسته است؟

۵۹. ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم طبق معادله

$$s = \sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$$

در حرکت است که s فوت، فاصله جهت دار ذره در ثانیه t از مبدأ می‌باشد. نشان دهید که ذره دارای حرکت هماهنگ ساده است. (تمرین ۴۰ از بخش ۱۰.۳ را ببینید.)

۶۰. راهی طبق معادله حرکت $s = \cos 2t + \cos t$ در امتداد يك خط مستقیم در حال حرکت است؛ ثابت کنید که حرکت این ذره، هماهنگ ساده نیست.

۶۱. ذره‌ای در امتداد يك خط مستقیم بامعادله $s = \sqrt{a + bt^2}$ در حرکت است که در آن، a و b ثابتهای مثبت هستند. ثابت کنید که مقدار شتاب در هر لحظه t با s^3 تناسب

معکوس دارد.

۶۲. اگر توابع f و g در عدد x_1 مشتق پذیر باشند، آیا تابع مرکب $f \circ g$ الزاماً در x_1 مشتق پذیر است؟ اگر جوابتان مثبت است، آن را ثابت کنید و اگر جوابتان منفی است، مثال ناقضی بیاورید.

۶۳. فرض کنید $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = (3x/4) - |x|/4$. ثابت کنید $f'(0)$ و $g'(0)$ هیچکدام وجود ندارند در حالی که $(f \circ g)'(0)$ وجود دارد.

۶۴. مثالی از دو تابع f و g بزنید که f در $g(0)$ مشتق پذیر باشد، و g در 0 مشتق پذیر نباشد، و $f \circ g$ در صفر مشتق پذیر باشد.

۶۵. مثالی از دو تابع f و g بزنید که f در $g(0)$ مشتق پذیر نباشد ولی g و $f \circ g$ در 0 مشتق پذیر باشند.

۶۶. در تمرین ۴۵ از تمرینهای ۲.۳ ثابت کردید که اگر f در a مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

با استفاده از تابع قدر مطلق نشان دهید که ممکن است حد فوق وجود داشته باشد حتی اگر $f'(a)$ موجود نباشد.

۶۷. اگر $f'(x_1)$ وجود داشته باشد، ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{xf(x_1) - x_1f(x)}{x - x_1} = f(x_1) - x_1f'(x_1).$$

۶۸. فرض کنید f و g دو تابع باشند که قلمرو آنها مجموعه همه اعداد حقیقی است. به علاوه، فرض کنید (i) $g(x) = xf(x) + 1$ ؛ (ii) برای هر a و b ، $g(a+b) = g(a) \cdot g(b)$ ؛ (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. ثابت کنید $g'(x) = g(x)$.

۶۹. قضیه باقیمانده در جبر مقدماتی می گوید که اگر $P(x)$ یک چند جمله ای بر حسب x باشد و عدد حقیقی دلخواهی باشد، آنگاه چند جمله ای $Q(x)$ وجود دارد به طوری که $P(x) = Q(x)(x-r) + P(r)$ مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow r} Q(x)$.

۷۰. فرض کنید $g(x) = |f(x)|$. اگر $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد و $f(x) \neq 0$ ، ثابت کنید

$$g^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} f^{(n)}(x).$$

۷۱. ثابت کنید که $D_x^n(\sin x) = \sin(x + n\pi/2)$ (دانهمایی: از استقرای ریاضی)

استفاده کنید و فرمولهای $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ یا $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ را بعد از هر مشتق گیری به کار ببرید.

۷۲. فرض کنید تابع f بر بازه $(0, 1)$ تعریف شده باشد و

$$f(x) = \frac{\sin \pi x}{x(x-1)}.$$

تابع f را در نقاط 0 و 1 طوری تعریف کنید که f بر بازه بسته $[0, 1]$ پیوسته باشد.

کاربردهای مشتق

۱.۴ آهنگهای وابسته

مسائل بسیاری وجود دارند که مربوط به آهنگ تغییر دویا چند متغیر مرتبط، نسبت به زمان هستند و در آنها لازم هم نیست که هر يك از متغیرها مستقیماً به صورت تابعی از زمان بیان شده باشد. به عنوان مثال، فرض کنید معادله‌ای بر حسب متغیرهای x و y در دست داریم که x و y هر دو تابعی از متغیری ثالث مانند t هستند (t نماینده زمان بر حسب واحد زمان است). در این صورت، چون آهنگ تغییر x و y نسبت به t ، به ترتیب، برابر با $D_t x$ و $D_t y$ است، با استفاده از قاعده زنجیری، از دو طرف معادله داده شده نسبت به t مشتق می‌گیریم و مانند مثال زیر عمل می‌کنیم.

مثال ۱ در (الف) و (ب)، x و y توابعی از متغیری ثالث مانند t هستند. (الف) اگر $\Delta x + 3xy = 4$ و $D_t y = 3$ ، مطلوب است $D_t x$ وقتی که $x = 2$ ؛ (ب) اگر $x \cos y = 5$ و $D_t x = -4$ ، مطلوب است $D_t y$ وقتی که $y = \pi/3$.

حل

(الف) معادله مفروض،

$$\Delta x + 3xy = 4 \quad (1)$$

است؛ از دو طرف معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم

$$\Delta D_t x + 3y D_t x + 3x D_t y = 0$$

$$D_t x = -\frac{3x}{3y + 5} \cdot D_t y. \quad (2)$$

برای محاسبه مقدار y وقتی که $x=2$ ، در (۱) به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم $y=-1$. از (۲) با $x=2$ ، $y=-1$ ، و $D_t y=3$ ، داریم

$$D_t x \Big|_{x=2} = -\frac{6}{2}(3) \\ = -9.$$

(ب) از دو طرف معادله

$$x \cos y = 5 \quad (3)$$

نسبت به t مشتق می‌گیریم.

$$(\cos y) D_t x - (x \sin y) D_t y = 0$$

$$D_t y = \frac{\cos y}{x \sin y} \cdot D_t x. \quad (4)$$

از (۳) وقتی که $y=\pi/3$ ، داریم $x=10$. از (۴) وقتی $y=\pi/3$ ، $x=10$ ، و $D_t x=-4$ ، داریم

$$D_t y \Big|_{y=\pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{10 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right)} (-4)$$

$$\triangle \\ = -\frac{2}{15} \sqrt{3}.$$

مثال ۲ نردبانی به طول ۲۵ فوت به دیواری قائم تکیه دارد. اگر پای نردبان را با آهنک ۳ فوت بر ثانیه به طور افقی از دیوار دور کنیم، وقتی پای آن ۱۵ فوت از دیوار دور شده باشد، سر نردبان با چه تندی به طرف پایین دیوار می‌لغزد؟

حل فرض کنید از آغاز لغزیدن نردبان به پایین دیوار، t ثانیه گذشته باشد، و در این زمان فاصله سر آن تا زمین برابر با y فوت و فاصله پای آن تا دیوار برابر با x فوت باشد. به شکل ۱۰۱۴ مراجعه کنید. چون پای نردبان را با سرعت ۳ فوت بر ثانیه به صورت افقی از دیوار دور می‌کنیم، داریم $D_t x=3$. می‌خواهیم $D_t y$ را وقتی $x=15$ ، حساب کنیم. از قضیه فیثاغورث، داریم

$$y^2 = 625 - x^2. \quad (5)$$

چون x و y توابعی از t هستند، از دو طرف (۵) نسبت به t مشتق می‌گیریم و

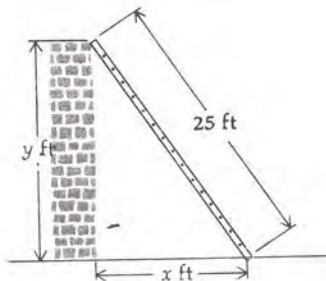
به دست می آوریم

$$2yD_t y = -2xD_t x$$

$$D_t y = -\frac{x}{y} D_t x. \quad (۶)$$

وقتی $x = ۱۵$ ، از (۵) نتیجه می شود که $y = ۲۰$ ؛ و چون $D_t x = ۳$ ، از (۶) داریم

$$D_t y \Big|_{y=20} = -\frac{15}{20} \cdot 3 = -\frac{9}{4}.$$



شکل ۱۰۱۰۴

بنابراین، وقتی پای نردبان ۱۵ فوت از دیوار فاصله داشته باشد، سر نردبان با آهنک ۲/۴ فوت بر ثانیه به پایین دیوار می لغزد. تعبیر علامت منها آن است که y با افزایش t کاهش می یابد. ▲

مثال ۲ نمونه ای است از مسئله آهنک تغییر متغیرهای مرتبط؛ که موسوم است به مسئله ای در آهنکهای وابسته. در این گونه مسائل، متغیرها به ازای مقادیر t که اندازه زمان است ارتباط خاصی باهم دارند. این ارتباط معمولاً به صورت یک معادله، نظیر معادله (۵) در مثال ۲ بیان می شود. مقادیر متغیرها و آهنکهای تغییر متغیرها نسبت به زمان غالباً در یک زمان خاص داده می شوند. در مثال ۲، در زمانی که x برابر با ۱۵ باشد، $y = ۲۰$ و $D_t x = ۳$ ، و می خواهیم $D_t y$ را محاسبه کنیم. گامهای زیر، یک روش ممکن برای حل مسائل مربوط به آهنکهای وابسته را به دست می دهند.

۱. در صورتی که عملی باشد، نموداری رسم کنید.
۲. متغیرها را تعریف کنید. اول t را تعریف کنید، زیرا معمولاً متغیرهای دیگر به t وابسته اند.
۳. مقادیر عددی معلوم متغیرها و مشتقاتشان نسبت به t را یادداشت کنید.

۴. معادله‌ای بر حسب متغیرهای وابسته به t به دست آورید.
۵. از دو طرف معادله به دست آمده در گام ۴ نسبت به t مشتق بگیرید.
۶. در معادله گام ۵ مقادیر کمیتهای معلوم را در جای مربوط قرار دهید، و کمیت مطلوب را محاسبه کنید.

مثال ۳ ارتفاع يك مخزن آب به شكل يك مخروط وارونه، ۱۶ متر و شعاع قاعده آن ۴ متر است. آب با آهنك ۲ متر مكعب بر دقیقه داخل مخزن می شود. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آب با چه تندی بالا می آید؟

حل فرض کنید t دقیقه بعد از شروع جریان آب به داخل مخزن، ارتفاع سطح آب برابر با h متر، شعاع سطح آب برابر با r متر، و حجم آب داخل مخزن برابر با V متر مکعب باشد.

در هر لحظه، حجم آب داخل مخزن را می توان بر حسب حجم مخروط به دست آورد (به شکل ۲۰۱۰۴ رجوع کنید).

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (۷)$$

که در آن V ، r و h همه توابعی از t هستند. چون آب با آهنك ۲ متر مكعب بر دقیقه وارد مخزن می شود، پس $D_t V = ۲$. می خواهیم $D_t h$ را وقتی که $h = ۵$ ، حساب کنیم. برای این کار r را بر حسب h به دست می آوریم. با توجه به مثلثهای متشابه داریم

$$r = \frac{1}{4} h \quad \text{یا} \quad \frac{r}{h} = \frac{۴}{۱۶}$$

اگر این مقدار r را در (۷) قرار دهیم، به دست می آوریم



شکل ۲۰۱۰۴

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{4} h \right)^2 (h) \quad \text{یا} \quad V = \frac{1}{48} \pi h^3 \quad (۸)$$

از دو طرف عبارت (۸) نسبت به t مشتق می گیریم

$$D_t V = \frac{1}{16} \pi h^2 D_t h.$$

به جای $D_t V$ مقدار ۲ را قرار می دهیم و $D_t h$ را حساب می کنیم

$$D_t h = \frac{32}{\pi h^2}.$$

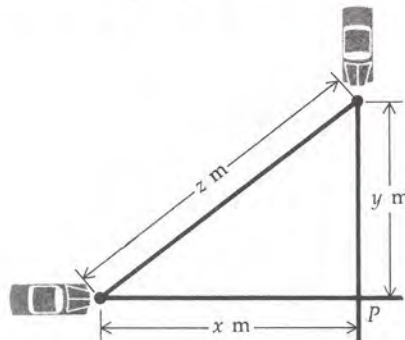
بنا بر این

$$D_t h \Big|_{h=5} = \frac{32}{25\pi}.$$

پس، نتیجه می گیریم که وقتی عمق آب ۵ متر باشد، سطح آب مخزن با آهنگ $32/25\pi$ متر بر دقیقه بالا می آید. ▲

مثال ۴ دو اتومبیل یکی با آهنگ ۹۰ کیلومتر بر ساعت از غرب و دیگری با آهنگ ۶۰ کیلومتر بر ساعت از شمال، به محل تقاطع دو جاده نزدیک می شوند. در لحظه ای که فاصله اتومبیل اول تا محل تقاطع برابر با ۲۰۰ متر و فاصله اتومبیل دیگر تا محل تقاطع برابر با ۱۵۰ متر است، باچه آهنگی دو اتومبیل به یکدیگر نزدیک می شوند؟

حل به شکل ۳۰۱۰۴ رجوع کنید؛ P محل تقاطع جاده هاست.



شکل ۳۰۱۰۴

۱. آهنگ تغییر مسافت نسبت به زمان سرعت نامیده می شود؛ ولی برای درک بهتر مفهوم کلی آهنگ تغییرات، به تعبیت از مؤلف، در بسیاری موارد از واژه سرعت استفاده نخواهیم کرد. -۲.

فرض کنید t ثانیه پس از آغاز حرکت اتومبیلها به طرف P ، فاصله اتومبیل اول از P برابر با x متر، فاصله اتومبیل دوم از P برابر با y متر، و فاصله دو اتومبیل از یکدیگر برابر با z متر باشد.

اتومبیل اول با آهننگ ۹۰ کیلومتر بر ساعت که معادل با $۹۰۰۰۰/۳۶۰۰$ متر بر ثانیه یا ۲۵ متر بر ثانیه است به P نزدیک می شود. چون وقتی t افزایش می یابد x کاهش پیدا می کند، نتیجه می گیریم که $D_t x = -۲۵$. به طور مشابه، چون ۶۰ کیلومتر بر ساعت برابر با $۶۰۰۰۰/۳۶۰۰$ متر بر ثانیه یا $۵۰/۳$ متر بر ثانیه است، $D_t y = -۵۰/۳$ می خواهیم $D_t z$ را وقتی که $x = ۲۰۰$ و $y = ۱۵۰$ ، حساب کنیم. بنابه قضیه فیثاغورث داریم

$$z^2 = x^2 + y^2. \quad (۹)$$

از دو طرف (۹) نسبت به t مشتق می گیریم و سپس $D_t z$ را حساب می کنیم

$$\begin{aligned} 2z D_t z &= 2x D_t x + 2y D_t y \\ D_t z &= \frac{x D_t x + y D_t y}{z}. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

به ازای $x = ۲۰۰$ و $y = ۱۵۰$ از (۹) نتیجه می شود که $z = ۲۵۰$. در (۱۰) فرض می کنیم $D_t x = -۲۵$ ، $D_t y = -۵۰/۳$ ، $x = ۲۰۰$ ، $y = ۱۵۰$ ، و $z = ۲۵۰$ و به دست می آوریم

$$D_t z \Big|_{z=250} = \frac{(۲۰۰)(-۲۵) + (۱۵۰)\left(-\frac{۵۰}{۳}\right)}{۲۵۰} = -۳۰.$$

بنابراین، در لحظه مورد نظر دو اتومبیل با آهننگ ۳۰ متر بر ثانیه به یکدیگر نزدیک می شوند. ▲

مثال ۵ فرض کنید در بازار مشخصی بهای هر سبد پرتقال p تومان باشد، در هر روز $۱۰۰۰x$ سبد پرتقال عرضه شود، و معادله عرضه $px - ۲۰p - ۳x + ۱۰۵ = ۰$ باشد. اگر عرضه پرتقال با آهننگ ۲۵۰ سبد در روز کاهش یابد، وقتی عرضه پرتقال به ۵۰۰۰ سبد در روز برسد، بها باچه آهننگی تغییر می کند؟

حل فرض کنید از زمانی که کاهش عرضه پرتقال آغاز شده است t روز گذشته باشد. لذا p و x هر دو تابعی از t هستند. چون عرضه، با آهننگ ۲۵۰ سبد در روز کاهش می یابد، $D_t x = -۲۵۰/۱۰۰۰ = -۱/۴$ می خواهیم وقتی $x = ۵$ ، $D_t p$ را بیابیم. از معادله عرضه مفروض، به طور ضمنی نسبت به t مشتق می گیریم و بدست می آوریم

$$\begin{aligned} p D_t x + x D_t p - ۲۰ D_t p - ۳ D_t x &= ۰ \\ D_t p &= \frac{۳ - p}{x - ۲۰} D_t x. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

وقتی $x=5$ ، از معادله عرضه نتیجه می‌شود که $p=6$. چون $D_x x = -1/4$ ، از (۱۱) داریم

$$D_x p \Big|_{p=6} = \frac{3-6}{5-20} \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{-15} \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{20}.$$

بنابراین، وقتی عرضه ۵۰۰۰ سبد در روز باشد، بهای يك سبد پرتقال با آهنگ ۰۰۵۰۵ تومان در روز کاهش می‌یابد. ▲

تمرینهای ۱.۴

در تمرینهای ۱ تا ۸، x و y توابعی از يك متغیر ثالث t هستند.

۱. اگر $2x + 3y = 8$ و $D_t y = 2$ ، مطلوب است $D_t x$.
۲. اگر $x/y = 10$ و $D_t x = -5$ ، مطلوب است $D_t y$.
۳. اگر $xy = 20$ ، و $D_t y = 10$ ، مطلوب است $D_t x$ وقتی که $x = 2$.
۴. اگر $2 \sin x + 4 \cos y = 3$ ، و $D_t y = 3$ ، مطلوب است $D_t x$ در $(\pi/6, \pi/3)$.
۵. اگر $\sin^2 x + \cos^2 y = 5/4$ ، و $D_t x = -1$ ، مطلوب است $D_t y$ در $(2\pi/3, 3\pi/4)$.
۶. اگر $x^2 + y^2 = 25$ و $D_t x = 5$ ، مطلوب است $D_t y$ وقتی که $y = 4$.
۷. اگر $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ و $D_t y = 3$ ، مطلوب است $D_t x$ وقتی که $x = 1$.
۸. اگر $y(\sin x + 1) = 4$ و $D_t y = -4$ ، مطلوب است $D_t x$ وقتی که $x = \pi$.
۹. کودکی بادبادك خود را در ارتفاع ۴۰ فوتی طوری حرکت می‌دهد که با آهنگ ۳ فوت بر ثانیه به طوافتی در پرواز است. اگر نخ کاملاً کشیده شده باشد، وقتی طول نخ آزاد شده به ۵۰ فوت برسد، نخ بادبادك با چه آهنگی در حال رهشیدن است؟
۱۰. يك بالن کروی را طوری باد می‌کنیم که حجم آن با آهنگ ۵ متر مکعب بر دقیقه اضافه شود. در لحظه‌ای که قطر بالن به ۱۲ متر می‌رسد، با چه آهنگی قطر آن زیاد می‌شود؟
۱۱. يك گلوله برفی طوری ساخته می‌شود که حجم آن با آهنگ ۸ فوت مکعب بر دقیقه افزایش می‌یابد. مطلوب است آهنگ افزایش شعاع، در لحظه‌ای که قطر گلوله به ۴ فوت می‌رسد.
۱۲. فرض کنید وقتی قطر گلوله برفی تمرین ۱۱ به ۶ فوت برسد، افزایش حجم آن متوقف

شود و با آهنگ $1/4$ فوت مکعب بردقیقه شروع به ذوب شدن کند. مطلوب است آهنگ تغییر شعاع در لحظه‌ای که شعاع آن به ۲ فوت می‌رسد.

۱۳. فرض کنید با آهنگ 10 متر مکعب بردقیقه، روی توده مخروطی شکلی شن ریخته شود. اگر ارتفاع توده‌شن، همواره دو برابر شعاع قاعده آن باشد، وقتی ارتفاع توده به ۸ متر می‌رسد، ارتفاع باجه آهنگی در حال افزایش است؟

۱۴. در یک جاده مستقیم افقی چراغی به فاصله 15 فوت از سطح جاده آویزان شده است. اگر شخصی که ۶ فوت قد دارد با آهنگ 5 فوت بر ثانیه از چراغ دور شود، طول سایه او باجه تندی زیاد می‌شود؟

۱۵. در تمرین ۱۴ نوك سایه شخص، باجه آهنگی حرکت می‌کند؟

۱۶. مردی با ۶ فوت قد با آهنگ 5 فوت بر ثانیه به طرف ساختمانی قدم می‌زند. اگر در فاصله 50 فوتی ساختمان چراغی روی زمین گذاشته شده باشد، وقتی فاصله مسرد از ساختمان ۳۰ فوت است، سایه مسرد روی ساختمان باجه سرعتی کوتاه می‌شود؟

۱۷. يك مخزن آب به شكل يك مخروط وارونه با آهنگ 6 متر مکعب بردقیقه در حال تخلیه شدن است. ارتفاع مخروط 24 متر و شعاع قاعده آن 12 متر است. وقتی عمق آب به 10 متر برسد، سطح آب باجه تندی پایین می‌رود؟

۱۸. يك ظرف آب به طول 12 فوت طوری ساخته شده است که دو انتهای آن به شكل مثلث متساوی الساقین با قاعده 3 فوت و ارتفاع 3 فوت می‌باشد و قاعده‌های این دو مثلث در بالا قرار دارند. آب با آهنگ 2 فوت مکعب بردقیقه وارد ظرف می‌شود. وقتی عمق آب به 1 فوت برسد، سطح آب باجه تندی بالا می‌آید؟

۱۹. قانون بویل برای انبساط گازها به صورت $PV = C$ است که در آن P فشار گاز بر حسب پوند بر واحد مربع، V حجم گاز بر حسب واحد مکعب، و C يك ثابت می‌باشد. در لحظه معینی فشار برابر با 3000 پوند بر فوت مربع و حجم برابر با 5 فوت مکعب می‌باشد، و حجم با آهنگ 3 فوت مکعب بردقیقه در حال افزایش است. آهنگ تغییر فشار در این لحظه چقدر است؟

۲۰. قانون آدیاباتیک برای انبساط هوا (بدون مبادله حرارت با محیط خارج) به صورت $PV^{1.4} = C$ است که در آن P فشار بر حسب پوند بر واحد سطح، V حجم بر حسب واحد حجم و C يك ثابت می‌باشد. در يك لحظه معین فشار برابر با 40 پوند بر اینچ مربع است و در هر ثانیه با آهنگ 8 پوند بر اینچ مربع در حال افزایش است. آهنگ تغییر حجم در این لحظه چقدر است؟

۲۱. سنگی به برکه‌ای آرام انداخته می‌شود و موجهای دایره‌ای شکل هم مرکزی پخش می‌گردد. شعاع ناحیه آشفته با آهنگ 16 سانتیمتر بر ثانیه افزایش می‌یابد. وقتی شعاع ناحیه آشفته به 4 سانتیمتر برسد، مساحت ناحیه آشفته باجه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۲۲. يك مخزن بنزین به شكل يك مخروط وارونه با آهنگ 3π مترمکعب در هر دقیقه در حال پرشدن است. اگر شعاع دهانه مخزن 25 متر و ارتفاع آن 10 متر باشد، وقتی عمق بنزین به 8 متر می‌رسد، عمق بنزین با چه تندی در حال تغییر است؟

۲۳. اتومبیلی با آهنگ 30 فوت بر ثانیه به تقاطع دو جاده نزدیک می‌شود. وقتی اتومبیل 120 فوت با تقاطع فاصله دارد، يك کامیون با آهنگ 40 فوت بر ثانیه از تقاطع می‌گذرد. اگر اتومبیل و کامیون در جاده‌های عمود بر هم در حال حرکت باشند، وقتی که 2 ثانیه از زمان عبور کامیون از تقاطع گذشته باشد، اتومبیل و کامیون با چه تندی از هم فاصله می‌گیرند؟

۲۴. شخصی از روی اسکله‌ای قایقی را به وسیله طنابی که در سطح آب به آن بسته شده است، با آهنگ 50 فوت بر دقیقه به طرف اسکله می‌کشد. اگر دستهای شخص 16 فوت بالاتر از سطح آب باشد، وقتی طول طناب باقیمانده به 20 فوت می‌رسد، قایق با چه تندی به اسکله نزدیک می‌شود؟

۲۵. کارخانه‌ای در هفته جاری 50 واحد از جنس مشخصی را تولید می‌کند و مقدار تولید با آهنگ 2 واحد در هر هفته افزایش می‌یابد. اگر هزینه تولید x واحد برابر با C تومان و $48 + 10x + x^2 - 0.08x^3 = C$ باشد، آهنگ جاری افزایش هزینه تولید را بیابید.

۲۶. در بازار معینی تقاضا برای غله خاصی طبق معادله تقاضای $px + 25p = 4000$ ، که در آن بهای يك جعبه p سنت، و مقدار غله درخواستی در هر هفته x هزار جعبه است، تعیین می‌شود. اگر بهای هر جعبه غله در حال حاضر 80 سنت باشد و بهای هر جعبه در هر هفته 2 سنت افزایش یابد، آهنگ تغییر تقاضا را بیابید.

۲۷. معادله عرضه برای جنس خاصی $p = \sqrt{3p^2 + 20p}$ است؛ x تعداد جنس عرضه شده در هر ماه را نشان می‌دهد و p تومان بهای هر واحد از جنس است. اگر در حال حاضر بهای هر واحد 20 تومان باشد و بها با آهنگ 5 تومان در هر ماه افزایش یابد، مطلوب است آهنگ تغییر عرضه.

۲۸. فرض کنید برای تولید x واحد از جنس معینی y کارگر مورد نیاز باشد، و $x = 4y^2$. اگر تولید در سال جاری 250000 واحد باشد و تولید با آهنگ 18000 واحد در سال افزایش یابد، تعداد کارگران با چه آهنگی باید افزوده شود؟

۲۹. معادله تقاضا برای پیراهن خاصی $2px + 65p - 4950 = 0$ است؛ در هر هفته x صد پیراهن مورد نیاز است و بهای هر پیراهن p دلار است. اگر در هفته جاری بهای هر پیراهن 30 دلار باشد، و بها با آهنگ 2 دلار در هر هفته افزایش یابد، مطلوب است آهنگ تغییر تقاضا.

۳۰. اندازه یکی از زوایای حاده يك مثلث قائم الزاویه با آهنگ $\pi/36$ رادیان بر ثانیه

کاهش می یابد. اگر طول و ترنایت و ۴۰ سانتیمتر باشد، وقتی اندازه زاویه حاده به $\pi/6$ برسد سرعت تغییر مساحت چقدر است؟

۳۱. دو کامیون که یکی به طرف شرق و دیگری به طرف جنوب در حرکت است، به تقاطعی نزدیک می شوند. فرض کنید آهنگ حرکت هر دو کامیون k کیلومتر بر ساعت باشد، نشان دهید وقتی که فاصله هر یک تا تقاطع به m کیلومتر برسد، دو کامیون با آهنگ $k\sqrt{2}$ کیلومتر بر ساعت به هم نزدیک می شوند.

۳۲. یک مخزن افقی آب به طول ۱۶ متر طوری ساخته شده است که دوسر آن دو دوزنقه متساوی الساقین به ارتفاع ۴ متر، و به قاعده پایینی ۴ متر و قاعده بالایی ۶ متر می باشند. آب با آهنگ ۱۰ متر مکعب بر دقیقه داخل مخزن می شود. وقتی عمق آب به ۲ متر می رسد، سطح آب با چه تندی بالا می آید؟

۳۳. در تمرین ۳۲ اگر سطح آب با آهنگ ۲۵ سانتیمتر بر دقیقه پایین بیاید، وقتی که عمق آب مخزن ۳ متر است با چه آهنگی آب از مخزن خارج می شود؟

۳۴. نردبانی به طول ۷ متر به دیواری تکیه دارد. با آهنگ ۱۵ متر بر ثانیه پای نردبان را به طور افقی به طرف دیوار می کشیم. در لحظه ای که پای نردبان به دو متری دیوار برسد، سر آن با چه تندی بر روی دیوار بالایی رود؟

۳۵. نردبانی به طول ۲۰ فوت بر سطحی که با افق زاویه 60° می سازد تکیه دارد. با آهنگ ۱ فوت بر ثانیه پای نردبان را به طور افقی به طرف سطح شیب دار می کشیم. در لحظه ای که پای نردبان به ۴ فوتی سطح شیب دار می رسد، سر نردبان با چه تندی در حرکت است؟

۳۶. حجم بالنی کروی با آهنگی متناسب با مساحت آن کاهش می یابد. نشان دهید که شعاع بالن با آهنگی ثابت متقبض می شود.

۳۷. نردبانی به طول ۳۰ فوت به دیواری تکیه دارد و سر آن با آهنگ $1/2$ فوت بر ثانیه به طرف پایین می لغزد. در لحظه ای که سر نردبان ۱۸ فوت تا زمین فاصله دارد، آهنگ تغییر اندازه زاویه حاده ای که نردبان با زمین می سازد چیست؟

۳۸. آب با آهنگ ۸ فوت مکعب بر دقیقه داخل مخزن مخروطی شکل می شود. ارتفاع مخروط ۲۰ فوت و قطر دهانه آن برابر با ۱۰ فوت است. اگر پایین مخزن سوراخ باشد و سطح آب با آهنگ ۱ اینچ بر دقیقه بالا بیاید، وقتی عمق آب ۱۶ فوت باشد آب با چه تندی از مخزن خارج می شود؟

۲.۴ مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع

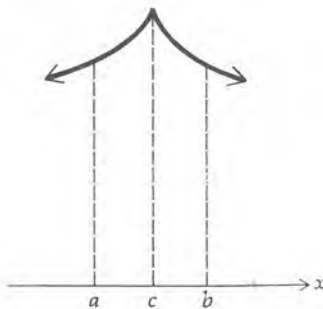
قبلا دیدیم که تعبیر هندسی مشتق يك تابع در يك نقطه عبارت است از ضریب زاویه خط

مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. این مطلب ما را قادر می‌سازد در رسم نمودار از مشتق کمک بگیریم. مثلاً، برای تعیین نقاطی که در آنها خط مماس بر نمودار افقی است از مشتق می‌توان استفاده کرد؛ زیرا مشتق تابع در این گونه نقاط برابر با صفر است. همچنین جهت تعیین بازه‌هایی که در آن بازه‌ها نمودار يك تابع بالای خط مماس است، و بازه‌هایی که در آن بازه‌ها نمودار پایین خط مماس قرار می‌گیرد، می‌توان از مشتق استفاده کرد. قبل از اینکه از مشتق برای رسم نمودار استفاده کنیم، به چند تعریف و قضیه نیاز داریم.

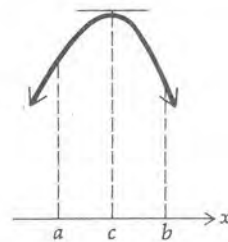
۱.۲.۴ تعریف گوییم تابع f در c دارای يك مقدار ماکسیم نسبی است اگر يك بازه باز شامل c وجود داشته باشد که f روی آن تعریف بشود، و به ازای هر x واقع در آن بازه،

$$f(c) \geq f(x)$$

شکل‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ هر کدام قسمتی از نمودار يك تابع را نشان می‌دهد که در c دارای يك ماکسیم نسبی است.



شکل ۱.۲.۴

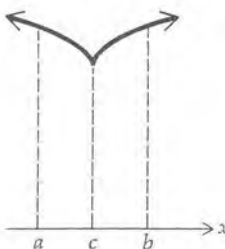


شکل ۲.۲.۴

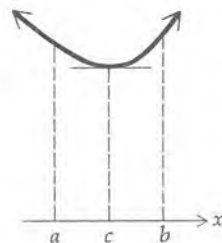
۲.۲.۴ تعریف گوییم تابع f در c دارای يك مقدار مینیمم نسبی است اگر يك بازه باز شامل c وجود داشته باشد که f روی آن تعریف بشود، و به ازای هر x واقع در آن بازه،

$$f(c) \leq f(x)$$

شکل‌های ۳.۲.۴ و ۴.۲.۴ هر کدام قسمتی از نمودار تابعی را نشان می‌دهد که در c



شکل ۳.۲.۴



شکل ۴.۲.۴

دارای يك مینیم نسبی است.

اگر تابع f در c يك مقدار ماکسیم نسبی یا يك مقدار مینیم نسبی داشته باشد، گوئیم f در c دارای يك اکسترمم نسبی است.

جهت پیدا کردن مقادیر ممکن c که به ازای آنها اکسترمم نسبی وجود داشته باشد از قضیه زیر استفاده می شود.

۳.۲.۴ قضیه فرض کنید $f(x)$ به ازای هر x در بازه (a, b) وجود داشته باشد، و $a < c < b$. اگر f در c دارای يك اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.

اثبات قضیه را در حالتی که f در c دارای يك مینیم نسبی است اثبات می کنیم. اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \quad (۱)$$

چون f در c دارای يك مقدار مینیم نسبی است، بنا بر تعریف ۲.۲.۴، يك $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |x - c| < \delta, \quad f(x) - f(c) \geq 0,$$

اگر x از طرف راست به c میل کند، $x - c > 0$ ، و بنابراین

$$\text{وقتی } 0 < x - c < \delta, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

بنا بر قضیه ۴.۱۰.۲، اگر حد وجود داشته باشد،

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0. \quad (۲)$$

به طریق مشابه، اگر x از طرف چپ به c میل کند، $x - c < 0$ ، و داریم

$$\text{وقتی } -\delta < x - c < 0, \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

ولذا بنا بر قضیه ۳.۱۰.۲، به شرط وجود حد داریم

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0. \quad (۳)$$

چون $f'(c)$ وجود دارد، حدها در نامساویهای (۲) و (۳) باید با هم برابر، و مساوی

با $f'(c)$ باشند. پس، از (۲) داریم

$$f'(c) \geq 0 \quad (۴)$$

و از (۳) داریم

$$f'(c) \leq 0. \quad (۵)$$

و چون نامساویهای (۴) و (۵) هر دو برقرار هستند، نتیجه می گیریم

$$f'(c) = 0$$

که همان حکم است.

اثبات قضیه درحالتی که f در c دارای يك ماكسيم نسبی است، مشابه اثبات فوق است و برای تمرین واگذار می شود (تمرین ۵۱ را ببینید). $\square$

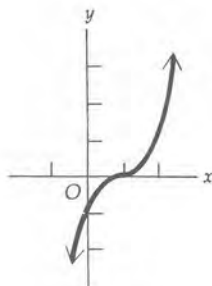
تعبیر هندسی قضیه ۳۰.۲.۴ این است که اگر f در c دارای يك اکسترم نسبی باشد و نیز $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه نمودار $y = f(x)$ در نقطه $(c, f(c))$ دارای يك خط مماس افقی است.

اگر f يك تابع مشتق پذیر باشد، آنگاه تنها به ازای x هایی که $f'(x)$ در آنها مساوی با صفر است تابع f ممکن است اکسترم نسبی داشته باشد؛ با وجود این، ممکن هم هست که به ازای مقدار خاصی از x ، $f'(x) = 0$ و در عین حال f در آنجا دارای اکسترم نباشد. این نکته در نمونه زیر نشان داده شده است.

○ نمونه ۱ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = (x-1)^3.$$

شکل ۵.۲.۴ نمودار این تابع را نشان می دهد. داریم $f'(x) = 3(x-1)^2$ ، و بنابراین $f'(1) = 0$. اما برای $x < 1$ داریم $f(x) < 0$ و برای $x > 1$ داریم $f(x) > 0$. لذا f در ۱ اکسترم نسبی ندارد.



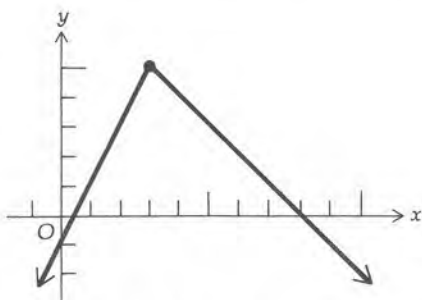
شکل ۵.۲.۴

ممکن است تابعی مانند f در عددی دارای اکسترمم نسبی باشد ولی f' در آن عدد وجود نداشته باشد. این مورد در نمونه ۲ نشان داده شده است.

○ نمونه ۲ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 8 - x & 3 < x \end{cases}$$

شکل ۶.۲.۴ نمودار این تابع را نشان می‌دهد. تابع f در ۳ دارای یک ماکسیمم نسبی است. مشتق چپ در ۳ برابر است با $f'_-(3) = 2$ ، و مشتق راست در ۳ برابر است با $f'_+(3) = -1$. پس نتیجه می‌گیریم که $f'(3)$ وجود ندارد.



○ شکل ۶.۲.۴

نمونه ۲ نشان می‌دهد که چرا شرط « $f'(c)$ وجود داشته باشد» باید یکی از فرضهای قضیه ۳.۲.۴ باشد.

پس به طور خلاصه، اگر f به ازای عددی c معین باشد، یک شرط لازم برای اینکه f در c دارای اکسترمم نسبی باشد این است که یا $f'(c) = 0$ ، و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. اما این شرط کافی نیست.

۴.۲.۴ تعریف اگر c عددی از قلمرو تابع f باشد، گوئیم c یک عدد بحرانی f است هرگاه یا $f'(c) = 0$ ، و یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

طبق این تعریف و بحث قبلی، یک شرط لازم برای اینکه تابعی در عددی c دارای یک اکسترمم نسبی باشد این است که c یک عدد بحرانی f باشد.

مثال ۱ تابع f به صورت $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ داده شده است. اعداد بحرانی f را پیدا کنید.

حل

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3},$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) = \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}}.$$

پس، $f'(x) = 0$ وقتی که $x = -1$ ، و برای $x = 0$ ، $f'(x)$ وجود ندارد. چون ۰ و -۱ هر دو در قلمرو f هستند، پس ۰ و -۱ اعداد بحرانی f می‌باشند. ▲

مثال ۲ اعداد بحرانی تابع g با ضابطه $g(x) = \sin x \cos x$ را بیابید.

حل چون $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ، داریم

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \cos 2x(2) = \cos 2x.$$

$g'(x) = 0$ وقتی که $\cos 2x = 0$ ؛ یعنی، وقتی که

$$2x = \frac{1}{2}\pi + n\pi, \text{ با این شرط که } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

بنابراین اعداد بحرانی g عبارت‌اند از $(\pi/4) + (n\pi/2)$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است. ▲

غالباً، می‌خواهیم بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین مقدار تابعی را که روی یک بازهٔ مقروض تعریف شده است، پیدا کنیم. این بازه‌ها ممکن است باز یا بسته یا از یک طرف باز و از طرف دیگر بسته باشند. بزرگ‌ترین مقدار یک تابع روی یک بازه را مقدار ماکسیمم مطلق و کوچک‌ترین مقدار یک تابع روی یک بازه را مقدار مینیمم مطلق می‌نامیم. تعریف دقیق این مفاهیم بدشرح زیر است.

۵.۲.۴ تعریف گوییم تابع f بر بازه‌ای دارای یک مقدار ماکسیمم مطلق است هرگاه عددی مانند c در آن بازه باشد که به‌ازای هر x متعلق به آن بازه داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این صورت، مقدار ماکسیمم مطلق f روی آن بازه، $f(c)$ است.

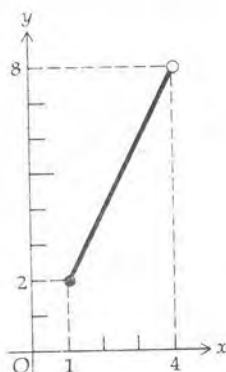
۶.۲.۴ تعریف گوییم تابع f بر بازه‌ای دارای یک مقدار مینیمم مطلق است هرگاه عددی c در آن بازه باشد که به ازای هر x متعلق به آن بازه داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این صورت، مقدار مینیمم مطلق f بر آن بازه، $f(c)$ است.

اکسترمم مطلق يك تابع روی يك بازه، یا ماکسیمم مطلق، و یا مینیمم مطلق آن تابع روی آن بازه است. روی يك بازه داده شده، يك تابع ممکن است دارای اکسترمم مطلق باشد یا نباشد. در نمونه‌های زیر يك تابع و يك بازه داده شده‌اند و ما اکسترممهای مطلق تابع بر آن بازه را، در صورت وجود، تعیین می‌کنیم.

○ نمونه ۳ فرض کنید تابع f به صورت زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = 2x.$$

شکل ۷.۲.۴ نمودار f روی بازه $[1, 4]$ را نمایش می‌دهد. روی $[1, 4]$ تابع مقدار مینیمم مطلق برابر با ۲ دارد. اما f بر $[1, 4]$ مقدار ماکسیمم مطلق ندارد، زیرا $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 8$ ، ولی روی بازه مفروض، $f(x)$ همواره کمتر از ۸ است.



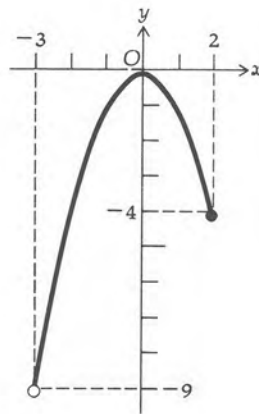
شکل ۷.۲.۴

○

○ نمونه ۴ تابع f با ضابطه

$$f(x) = -x^2$$

را در نظر بگیرید. شکل ۸.۲.۴ نمودار f روی بازه $[-3, 2]$ را نمایش می‌دهد. f روی $[-3, 2]$ دارای مقدار ماکسیمم مطلق برابر با صفر است. اما f بر $[-3, 2]$ مقدار مینیمم مطلق ندارد، زیرا $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -9$ ، ولی $f(x)$ روی بازه مفروض همواره بزرگتر از -9 است.



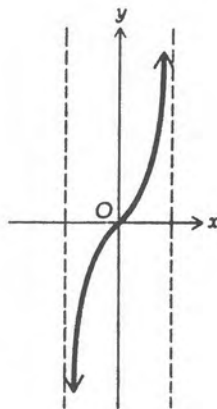
شکل ۸.۲.۴

○ نمونه ۵ تابع f با ضابطه

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

روی بازه $(-1, 1)$ نه دارای مقدار ماکسیمم مطلق است و نه دارای مقدار مینیمم مطلق. نمودار f روی $(-1, 1)$ در شکل ۹.۲.۴ نشان داده شده است. مشاهده کنید که

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

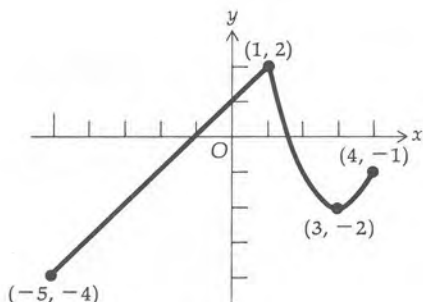


شکل ۹.۲.۴

○ نمونه ۶ تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & x \geq 1 \end{cases}$$

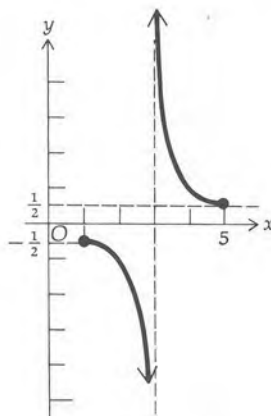
نمودار f بر $[-5, 4]$ در شکل ۱۰.۲.۴ رسم شده است. مقدار ماکسیمم مطلق f روی $[-5, 4]$ به ازای ۱ به دست می آید و $f(1) = 2$ ؛ مقدار مینیمم مطلق f روی $[-5, 4]$ به ازای -5 به دست می آید، و $f(-5) = -4$. دقت کنید که f در ۱ دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی، و در ۳ دارای یک مقدار مینیمم نسبی است. همچنین مشاهده کنید که ۱، یک عدد بحرانی f است زیرا f' در ۱ وجود ندارد؛ و ۳ یک عدد بحرانی f است زیرا $f'(3) = 0$.



شکل ۱۰.۲.۴

○ نمونه ۷ تابع f با ضابطه زیر

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$



شکل ۱۱.۲.۴

روی بازه $[۱, ۵]$ نه دارای مقدار ماکسیمم مطلق است و نه دارای مقدار مینیمم مطلق. در شکل ۱۱.۲.۴ نمودار f را مشاهده کنید. چون $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ ، لذا $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کرد، به شرط اینکه $x - ۳$ مثبت اختیار شود و از عدد مناسب مثبتی چون δ کوچکتر باشد. همچنین، $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ ؛ لذا $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کرد، به شرط اینکه مقدار $x - ۳$ مثبت اختیار شود و از عدد مناسب مثبتی مانند δ کوچکتر باشد.

ممکن است بدون مشخص کردن هیچ بازه ای، از اکسترمم مطلق يك تابع صحبت کنیم. در این گونه موارد، منظور ما اکسترمم مطلق تابع روی تمام قلمرو آن است.

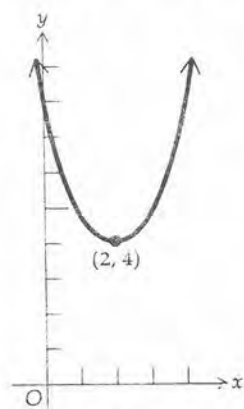
۷.۲.۴ تعریف گوییم $f(c)$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع f است هرگاه c در قلمرو f باشد و به ازای هر x در قلمرو f ، $f(c) \geq f(x)$.

۸.۲.۴ تعریف گوییم $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f است هرگاه c در قلمرو f باشد و به ازای هر x در قلمرو f ، $f(c) \leq f(x)$.

○ نمونه ۸ نمودار تابع f با ضابطه

$$f(x) = x^2 - 4x + ۸$$

يك سهمی است که در شکل ۱۲.۲.۴ رسم شده است. پایینترین نقطه سهمی، $(۲, ۴)$ است، و دهانه آن به طرف بالاست. تابع دارای مقدار مینیمم مطلق برابر با ۴ است که به ازای ۲ به دست می آید. f مقدار ماکسیمم مطلق ندارد.



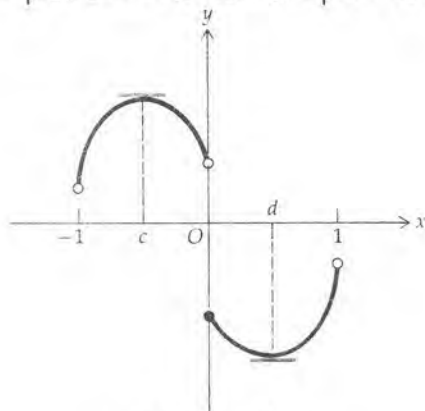
شکل ۱۲.۲.۴

بما رجعه به نمونه های ۳ تا ۸ می بینیم تنها موردی که هم مقدار ماکسیمم مطلق و

و هم مقدار مینیمم مطلق وجود دارد، نمونه ۶ است که در آن تابع روی بازه بسته $[4, 5]$ پیوسته است؛ در نمونه‌های دیگر یا بازه بسته نیست، یا تابع پیوسته نیست. اگر تابعی روی بازه بسته‌ای پیوسته باشد، قضیه‌ای بنام قضیه اکسترمم تضمین می‌کند که روی آن بازه تابع هم یک مقدار ماکسیمم مطلق دارد و هم یک مقدار مینیمم مطلق. اثبات این قضیه از حیطه این کتاب خارج است. برای اثبات می‌توانید به یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته رجوع کنید.

۹.۲.۴ قضیه (قضیه اکسترمم) اگر تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی $[a, b]$ یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق دارد.

قضیه ۹.۲.۴ حاکی از آن است که پیوستگی یک تابع روی یک بازه بسته، شرطی است کافی برای تضمین این نکته که تابع روی آن بازه هم مقدار ماکسیمم مطلق داشته باشد و هم مقدار مینیمم مطلق. با این وجود، این شرط یک شرط لازم نیست. مثلاً، تابعی که نمودارش در شکل ۱۳.۲.۴ رسم شده است، گرچه روی بازه $(-1, 1)$ ناپیوسته است، ولی در $x = c$ یک مقدار ماکسیمم مطلق دارد، و یک مقدار مینیمم مطلق هم در $x = d$ دارد.



شکل ۱۳.۲.۴

اکسترمم مطلق یک تابع که بزرگ‌ترین بازه بسته پیوسته است، باید یا یک اکسترمم نسبی باشد یا مقدار تابع به ازای یکی از نقاط انتهایی بازه. چون یک شرط لازم برای اینکه تابعی در عددی مثل c یک اکسترمم نسبی داشته باشد، این است که c یک عدد بحرانی تابع باشد، پس مقدار ماکسیمم مطلق و مقدار مینیمم مطلق یک تابع پیوسته f روی یک بازه بسته $[a, b]$ را می‌توان با دستورالعمل زیر به دست آورد:

۱. مقادیر تابع را به ازای اعداد بحرانی f روی $[a, b]$ به دست آورید.
۲. مقادیر $f(a)$ و $f(b)$ را بیابید.
۳. بزرگ‌ترین مقدار به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، مقدار ماکسیمم مطلق، و کوچک‌ترین مقدار به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، مقدار مینیمم مطلق است.

مثال ۳ اگر $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ، مطلوب است محاسبهٔ اکسترمهای مطلق f روی بازهٔ $[-2, 1/2]$.

حل چون f روی $[-2, 1/2]$ پیوسته است، قضیهٔ اکسترم را مورد استفاده قرار می‌دهیم. برای محاسبهٔ اعداد بحرانی f ، ابتدا f' را پیدا می‌کنیم

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

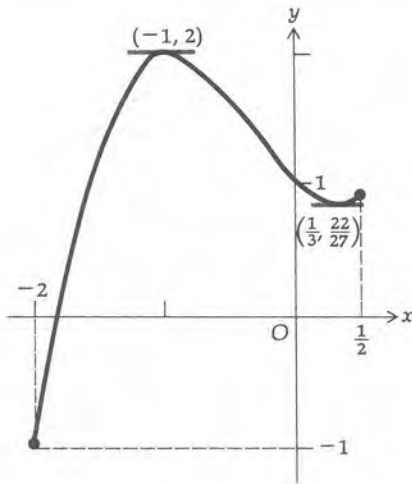
$f'(x)$ برای تمام اعداد حقیقی وجود دارد؛ بنابراین اعداد بحرانی f ، مقادیری از x هستند که به‌ازای آنها $f'(x) = 0$ می‌نویسیم. $f'(x) = 0$

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

آنگاه

$$x = -1 \text{ و } x = 1/3$$

چون -1 و $1/3$ هر دو در بازهٔ $[-2, 1/2]$ قرار دارند، اعداد بحرانی f روی بازهٔ مذکور -1 و $1/3$ هستند. مقادیر تابع در اعداد بحرانی و در نقاط انتهایی بازه در جدول ۱۴.۲.۴ داده شده‌اند.



جدول ۱۴.۲.۴

x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

شکل ۱۴.۲.۴

بنابراین، مقدار ما کسیمم مطلق f بر $[-2, 1/2]$ برابر است با 2 که به‌ازای -1 به‌دست می‌آید. مقدار مینیمم مطلق f روی $[-2, 1/2]$ برابر است با -1 که به‌ازای -2 ، یعنی نقطهٔ انتهایی سمت‌چپ، به‌دست می‌آید. نمودار این تابع روی $[-2, 1/2]$ در شکل ۱۴.۲.۴ رسم شده است. ▲

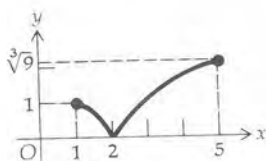
مثال ۴ اگر $f(x) = (x-2)^{2/3}$ ، اکستریمهای مطلق f روی $[1, 5]$ را به دست آورید.

حل چون f بر $[1, 5]$ پیوسته است، قضیه اکستریم را مورد استفاده قرار می دهیم.

$$f(x) = (x-2)^{2/3} \quad f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

هیچ x وجود ندارد که به ازای آن، $f'(x) = 0$. با این وجود، چون $f'(x)$ در 2 وجود ندارد، نتیجه می گیریم که 2 یک عدد بحرانی f است. پس اکستریمهای مطلق یا به ازای 2 ، یا به ازای یکی از نقاط انتهایی بازه به دست می آیند. مقادیر تابع به ازای اعداد فوق در جدول ۲۰۲۴ آمده اند.

با توجه به جدول، نتیجه می گیریم که مقدار مینیمم مطلق f روی $[1, 5]$ برابر با صفر است که به ازای 2 به دست می آید، و مقدار ماکسیمم مطلق f روی $[1, 5]$ برابر با $\sqrt[3]{9}$ است که به ازای 5 به دست می آید. نمودار این تابع بر $[1, 5]$ در شکل ۱۵۰۲۴ رسم شده است.



شکل ۱۵۰۲۴

جدول ۲۰۲۴

x	۱	۲	۵
$f(x)$	۱	۰	$\sqrt[3]{9}$

تمرینهای ۲۰۴

در تمرینهای ۱ تا ۱۶، اعداد بحرانی تابع داده شده را پیدا کنید.

۱. $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$ ۲. $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$

۳. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$ ۴. $f(x) = x^{5/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$

۵. $g(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$

۶. $f(x) = x^4 + 11x^3 + 34x^2 + 15x - 2$

۷. $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$ ۸. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{1/3}$

۹. $h(x) = \frac{x-3}{x+7}$ ۱۰. $f(t) = t^{5/3} - 3t^{2/3}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-5x+4} \cdot ۱۲$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-9} \cdot ۱۱$$

$$f(z) = \cos^2 2z \cdot ۱۴$$

$$f(x) = \sin^2 3x \cdot ۱۳$$

$$f(x) = \sin 2x + \cos 2x \cdot ۱۶$$

$$g(t) = \sin 2t \cos 2t \cdot ۱۵$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۳۴، اکستریمهای مطلق تابع مفروض روی بازه داده شده را، در صورت وجود، بیابید و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x این اکستریمهای مطلق به دست می‌آیند. نمودار تابع روی بازه مفروض را رسم کنید.

$$f(x) = 4 - 3x; (-1, 2) \cdot ۱۷$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 4; (-\infty, +\infty) \cdot ۱۸$$

$$f(x) = \frac{1}{x}; [2, 3] \cdot ۲۰$$

$$g(x) = \frac{1}{x}; [-2, 2] \cdot ۱۹$$

$$G(x) = -3 \sin x; \left[0, \frac{3}{4}\pi\right] \cdot ۲۲ \quad f(x) = 2 \cos x; \left[-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right] \cdot ۲۱$$

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}; (-2, 2) \cdot ۲۴ \quad f(x) = \sqrt{2+x}; [-3, +\infty) \cdot ۲۳$$

$$g(x) = \frac{2x}{4-x^2}; (-3, 2) \cdot ۲۶$$

$$h(x) = \frac{4}{(x-3)^2}; [2, 5] \cdot ۲۵$$

$$F(x) = |x-4| + 1; (0, 6) \cdot ۲۷$$

$$f(x) = |4-x^2|; (-\infty, +\infty) \cdot ۲۸$$

$$g(x) = \sqrt{4+7x}; [0, 4] \cdot ۲۹$$

$$F(x) = U(x) - U(x-1); (-1, 1) \cdot ۳۰$$

(U تابع پله‌ای واحد است)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-5} & x \neq 5 \\ 2 & x = 5 \end{cases}; [3, 5] \cdot ۳۱$$

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}; [-2, 1] \cdot ۳۲$$

$$h(x) = 2x + [2x - 1]; (1, 2) \quad ۳۴ \quad f(x) = x - [x]; (1, 2) \quad ۳۳$$

در تمرینهای ۳۵ تا ۵۰، با روشی که در مثالهای ۳ و ۴ این بخش مورد استفاده قرار گرفت، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع مفروض بر بازه داده شده را محاسبه و نمودار تابع بر آن بازه را رسم کنید.

$$g(x) = x^2 + 5x - 4; [-3, -1] \quad ۳۵$$

$$f(x) = x^2 + 3x^2 - 9x; [-4, 4] \quad ۳۶$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16; [-4, 0] \quad ۳۷$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16; [-3, 2] \quad ۳۸$$

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16; [0, 3] \quad ۳۹$$

$$g(x) = x^4 - 8x^2 + 16; [-1, 2] \quad ۴۰$$

$$f(t) = 2 \sin t; [-\pi, \pi] \quad ۴۱$$

$$f(x) = \frac{x}{x+2}; [-1, 2] \quad ۴۳ \quad f(w) = 3 \cos 2w; \left[\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi \right] \quad ۴۲$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-3}; [0, 1] \quad ۴۵ \quad f(x) = \frac{x+5}{x-3}; [-5, 2] \quad ۴۴$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-7 & -1 \leq x \leq 2 \\ 1-x^2 & 2 < x \leq 4 \end{cases}; [-1, 4] \quad ۴۶$$

$$F(x) = \begin{cases} 3x-4 & -3 \leq x < 1 \\ x^2-2 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}; [-3, 3] \quad ۴۷$$

$$G(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & -6 \leq x \leq -4 \\ 12-(x+1)^2 & -4 < x \leq 0 \end{cases}; [-6, 0] \quad ۴۸$$

$$f(z) = (z+1)^{2/3}; [-2, 1] \quad ۴۹$$

$$f(x) = 1 - (x-3)^{2/3}; [-5, 4] \quad ۵۰$$

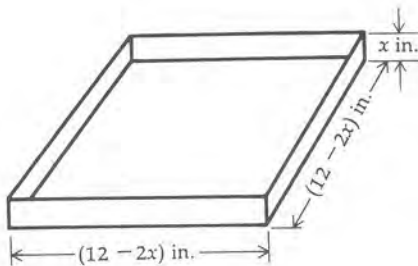
۵۱. قضیه ۳.۲.۴ را در حالتی که f در C يك مقدار ماکسیمم نسبی داشته باشد ثابت کنید.

۳.۴ کاربردهایی از اکسترمم مطلق بر یک بازه بسته

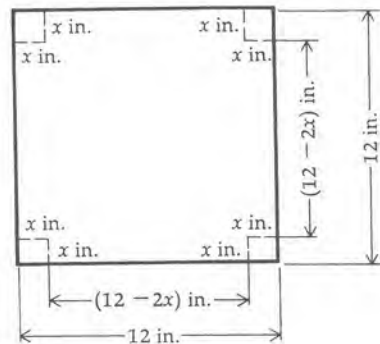
در این مبحث، مسائلی را مورد بحث قرار می‌دهیم که جواب آنها اکسترمم مطلق یک تابع روی یک بازه بسته است. در این مسائل از قضیه اکسترمم استفاده می‌شود که وجود یک مقدار ماکسیمم مطلق و یک مقدار مینیمم مطلق را برای تابعی روی یک بازه بسته تضمین می‌کند، به شرطی که تابع بر آن بازه بسته پیوسته باشد. روش عمل را با چند مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۱ یک سازه جعبه، می‌خواهد از تکه مقوایی به مساحت ۱۲ اینچ مربع با بریدن چهار مربع متساوی از چهار گوشه هر یک، و بالا زدن جوانب آن، جعبه سرباز بسازد. طول ضلع مربعهایی که باید بریده شوند چقدر باشد تا حجم جعبه به حداکثر ممکن برسد؟

حل فرض کنید طول ضلع هر یک از مربعهایی که باید بریده شوند برابر با x اینچ باشد. و نیز فرض کنید حجم جعبه V اینچ مکعب باشد. طول ابعاد جعبه، بر حسب اینچ، برابر است با x ، $(12 - 2x)$ ، و $(12 - 2x)$. شکل ۱۰.۳.۴ یک تکه مقوای داده شده را نشان می‌دهد، و شکل ۲۰.۳.۴ جعبه مطلوب را.



شکل ۲۰.۳.۴



شکل ۱۰.۳.۴

حجم جعبه برابر با حاصلضرب سه بعد آن است؛ لذا

$$V(x) = x(12 - 2x)(12 - 2x). \quad (1)$$

$$V(0) = 0 \text{ و } V(6) = 0$$

مقدار x مورد نظر در بازه بسته $[0, 6]$ قرار دارد. چون V روی بازه بسته $[0, 6]$ پیوسته است، از قضیه اکسترمم نتیجه می‌شود که روی این بازه V دارای یک مقدار ماکسیمم مطلق است. همچنین می‌دانیم که این مقدار ماکسیمم مطلق یا به ازای یک عدد بحرانی به دست می‌آید و یا به ازای یکی از نقاط انتهایی. برای محاسبه اعداد بحرانی V ، ابتدا $V'(x)$ را محاسبه می‌کنیم، و در حالتی که $V'(x) = 0$ یا $V'(x)$ وجود ندارد، مقادیر x را به دست می‌آوریم.

از معادله (۱) داریم

$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3.$$

بنابراین

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2.$$

$V'(x)$ به ازای تمام مقادیر x وجود دارد. اگر $V'(x) = 0$ ،

$$12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

و از آن نتیجه می شود که

$$x = 2 \text{ و } x = 6.$$

اعداد بحرانی V عبارت اند از ۲ و ۶، و هر دو در بازه بسته $[0, 6]$ هستند. مقدار ماکسیمم مطلق V یا به ازای یک عدد بحرانی به دست می آید و یا به ازای یکی از نقاط انتهایی. چون $V(0) = 0$ ، $V(6) = 0$ ، $V(2) = 128$ ، مقدار ماکسیمم مطلق V روی $[0, 6]$ عدد ۱۲۸ است که در ۲ به دست می آید.

پس بیشترین حجم ممکن ۱۲۸ اینچ مکعب است، و این مقدار وقتی به دست می آید که طول ضلع مربعهایی که باید بریده شوند برابر با ۲ اینچ باشد. ▲

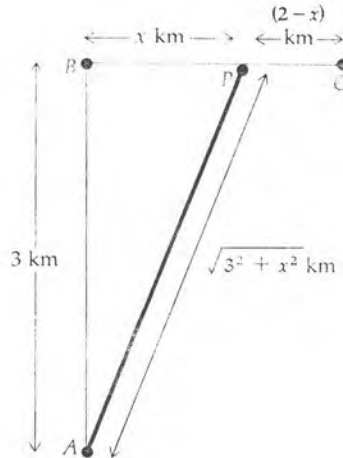
مثال ۲ دو نقطه A و B در دو طرف یک رودخانه مستقیم به عرض ۳ کیلومتر مقابل هم قرار دارند. نقطه C که ۲ کیلومتر از B فاصله دارد، در همان طرف از رودخانه واقع است که نقطه B . یک شرکت تلفن می خواهد از A به C کابل بکشد. اگر هزینه هر کیلومتر کابل در زیر آب ۲۵ درصد بیش از هزینه کابل روی زمین باشد، کدام خط کابل برای شرکت با صرفه تر است؟

حل به شکل ۳.۳.۴ رجوع کنید. فرض کنید نقطه ای چون P ، واقع در ساحل مشترک B و C ، بین B و C درجایی است که کابل از A به P و از آنجا به C می رود. و فرض کنید فاصله بین B تا P ، x کیلومتر باشد. پس، فاصله بین P تا C ، $(2-x)$ کیلومتر است، و $x \in [0, 2]$. فرض کنید هزینه هر کیلومتر کابل روی زمین k تومان و هزینه هر کیلومتر کابل زیر آب $5k/4$ تومان (k مقداری است ثابت) باشد. اگر $C(x)$ تومان کل هزینه کابل از A تا P و از P تا C باشد، داریم

$$C(x) = \frac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2-x).$$

چون C بر $[0, 2]$ پیوسته است، می توانیم از قضیه اکسترمم استفاده کنیم؛ لذا C روی $[0, 2]$ هم مقدار ماکسیمم مطلق دارد و هم مقدار مینیمم مطلق. در اینجا، منظور ما یافتن مقدار مینیمم مطلق است.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k.$$



شکل ۳.۳.۴

$C'(x)$ بدازای همه مقادیر x وجود دارد. اگر بنویسیم $C'(x) = 0$ و معادله را نسبت به x حل کنیم، داریم

$$\frac{\Delta k x}{4\sqrt{9+x^2}} - k = 0.$$

$$\Delta x = 4\sqrt{9+x^2} \quad (2)$$

$$25x^2 = 16(9+x^2)$$

$$9x^2 = 16 \cdot 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4.$$

عدد -4 — يك ریشه اضافی معادله (۲) است و ۴ هم در بازه $[0, 2]$ قرار ندارد. بنابراین C در $[0, 2]$ هیچ عدد بحرانی ندارد. لذا مقدارمینیمم مطلق C بر $[0, 2]$ باید به ازای یکی از نقاط انتهایی بازه به دست آید. حال $C(0)$ و $C(2)$ را محاسبه می کنیم

$$C(2) = \frac{5}{4}k\sqrt{13} \quad \text{و} \quad C(0) = \frac{23}{4}k$$

چون $(23/4)k < (5/4)k\sqrt{13}$ ، مقدارمینیمم مطلق C روی $[0, 2]$ عدد $(5/4)k\sqrt{13}$ است که به ازای $x = 2$ به دست می آید. پس، برای صرف کمترین هزینه، باید کابل در زیر آب و به طور مستقیم از A تا C کشیده شود. ▲

مثال ۳ می‌خواهیم زمینی مستطیل شکل واقع در کنار رودخانه‌ای را نرده بکشیم؛ ضلع مجاور رودخانه نیاز به نرده ندارد. بهای هر دسیمتر نرده برای دوانتهای زمین ۸ تومان، و برای ضلع موازی بارودخانه، ۱۲ تومان است. اگر بخواهیم ۳۶۰۰ تومان بابت بهای نرده بپردازیم، ابعاد زمین چقدر باشد تا بزرگترین مساحت ممکن به دست آید؟

حل فرض کنید طول هر يك از دوانتهای زمین برابر با x دسیمتر، طول ضلع موازی با رودخانه برابر y دسیمتر، و مساحت زمین برابر با A دسیمتر مربع باشند. داریم

$$A = xy. \quad (۳)$$

چون بهای هر دسیمتر نرده برای دوانتهای زمین ۸ تومان و طول يك انتها x دسیمتر است، کل بهای نرده هر يك از دوانتها $8x$ تومان است. به طریق مشابه، کل بهای نرده برای ضلع سوم برابر با $12y$ تومان است. از اینرو

$$8x + 8x + 12y = 3600. \quad (۴)$$

برای اینکه A را بر حسب تنها يك متغیر بنویسیم، از معادله (۴)، y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم و آن را در معادله (۳) قرار می‌دهیم. لذا A به صورت تابعی از x درمی‌آید و داریم

$$A(x) = x(300 - \frac{4}{3}x). \quad (۵)$$

از معادله (۴) به ازای $y = 0$ داریم $x = 225$ ، و به ازای $x = 0$ داریم $y = 300$. چون x و y باید نامنفی باشند، مقادیری از x که A را ماکسیمم مطلق می‌سازند، در بازه $[0, 225]$ قرار دارند. چون A در بازه بسته $[0, 225]$ يك تابع پیوسته است، بنابر قضیه اکسترم، A روی بازه $[0, 225]$ يك مقدار ماکسیمم مطلق دارد. از معادله (۵) داریم

$$A(x) = 300x - \frac{4}{3}x^2$$

بنابراین

$$A'(x) = 300 - \frac{8}{3}x.$$

چون $A'(x)$ به ازای هر x وجود دارد، اعداد بحرانی A جوابهای معادله $A'(x) = 0$ هستند، و داریم

$$x = 112\frac{1}{4}.$$

تنها عدد بحرانی A برابر با $112\frac{1}{4}$ است که در بازه $[0, 225]$ قرار دارد. پس مقدار

ماکسیمم مطلق A باید در 0 ، یا در $112\frac{1}{4}$ ، یا در 225 به دست آید. چون $A(0) = 0$ ، $A(225) = 0$ ،

و $A(112\frac{1}{4}) = 16875$ ، مقدار ماکسیمم مطلق A روی $[0, 225]$ برابر با 16875

است که به ازای $112\frac{1}{4}$ به دست می آید. و باقراردادن این مقدار x در معادله (۴) داریم $y = 150$.

بنابراین بزرگترین مساحتی که با 3600 تومان می توان آن را نرده کشید 16875 دسیمتر مربع است، و این زمانی امکان پذیر است که طول ضلع موازی با رودخانه 150 دسیمتر و طول هر یک از دوانتهای زمین $112\frac{1}{4}$ دسیمتر باشد. ▲

مثال ۴ در طرح ساختمان يك سالن چای خوری تخمین زده می شود که اگر جابرای 40 تا 80 نفر در نظر گرفته شود، سود خالص روزانه، 8 تومان برای هر جا خواهد بود. ولی اگر ظرفیت نشستن بالای 80 باشد سود خالص روزانه برای هر جا به اندازه $400 - 4x$ تومان ضرب در تعداد جاهای بیشتر از 80 ، کاهش می یابد. ظرفیت نشستن چقدر باشد تا بیشترین سود خالص روزانه عاید شود؟

حل فرض کنید ظرفیت نشستن x ، و سود خالص روزانه برابر با $P(x)$ تومان باشد. اگر سود هر جا (بر حسب تومان) را در x ضرب کنیم، $P(x)$ به دست می آید. وقتی $40 \leq x \leq 80$ ، سود هر جا برابر با 8 تومان است؛ و لذا $P(x) = 8x$ و وقتی $x > 80$ ، سود روزانه هر جا بر حسب تومان برابر است با $[8 - 0.04(x - 80)]$ ؛ و در نتیجه $P(x) = x[8 - 0.04(x - 80)] = 1120x - 0.04x^2$.

پس

$$P(x) = \begin{cases} 8x & 40 \leq x \leq 80 \\ 1120x - 0.04x^2 & 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

کران بالای 280 برای x با توجه به این نکته به دست می آید که اگر $x = 280$ ، $1120x - 0.04x^2 = 0$ ، و اگر $x > 280$ ، $1120x - 0.04x^2$ منفی است. با وجودی که بنا به تعریف، x باید يك عدد صحیح باشد، برای اینکه يك تابع پیوسته داشته باشیم، فرض می کنیم x بتواند تمام اعداد حقیقی در بازه $[40, 280]$ را بپذیرد. دقت کنید که تابع P در 80 پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow 80^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 80^-} 8x = 640$$

و

$$\lim_{x \rightarrow 80^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 80^+} (1120x - 0.04x^2) = 640$$

و لذا حد دوطرفه $\lim_{x \rightarrow 80} P(x) = 640 = P(80)$ نتیجه می شود. بنابراین، P روی بازه

بسته $[۲۸۰, ۴۰]$ پیوسته است، و قضیه اکسترمم وجود يك مقدار ماكسيمم مطلق را برای P روی این بازه تضمین می کند.

وقتی $۴۰ < x < ۸۰$ ، $P'(x) = ۸$ ، و وقتی $۸۰ < x < ۲۸۰$ ،

$$P'(x) = ۱۱۲۰ - ۰۰۰۸x.$$

$P'(۸۰)$ وجود ندارد، زیرا $P'_-(۸۰) = ۴۸۰$ و $P'_+(۸۰) = ۰$. می نویسیم $P'(x) = ۰$.

$$۱۱۲۰ - ۰۰۰۸x = ۰$$

$$x = ۱۴۰$$

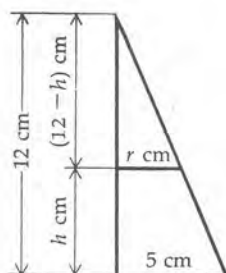
پس، اعداد بحرانی P عبارتند از ۸۰ و ۱۴۰ . به ازای نقاط انتهایی بازه $[۴۰, ۲۸۰]$ و به ازای این اعداد بحرانی، مقدار $P(x)$ را محاسبه می کنیم.

$$P(۴۰) = ۳۲۰ \quad P(۸۰) = ۶۴۰ \quad P(۱۴۰) = ۷۸۴ \quad P(۲۸۰) = ۰$$

لذا، مقدار ماكسيمم مطلق P برابر است با ۷۸۴ که به ازای $x = ۱۴۰$ به دست می آید. پس اگر سالن ۱۴۰ جا برای نشستن داشته باشد، بیشترین سود خالص روزانه ۷۸۴ تومان عاید می شود. ▲

مثال ۵ مطلوب است ابعاد استوانه مستدیر قائم با بیشترین حجم، که بتوان آن را در يك مخروط مستدیر قائم به شعاع ۵ سانتیمتر و ارتفاع ۱۲ سانتیمتر محاط کرد.

حل فرض کنید شعاع استوانه برابر با r سانتیمتر، ارتفاع آن برابر با h سانتیمتر و حجم آن برابر با V سانتیمتر مکعب باشد. شکل ۴.۳.۴ استوانه محاط شده در مخروط را نشان می دهد. در شکل ۵.۳.۴ مقطع مسطح ماربر محور مخروط مشاهده می شود.



شکل ۵.۳.۴



شکل ۴.۳.۴

اگر $r = ۰$ و $h = ۱۲$ ، استوانه بديك خط، یعنی به محور مخروط، تبدیل می شود. اگر $r = ۵$ و $h = ۰$ ، باز هم استوانه تبدیل بديك خط، یعنی یکی از قطره های قاعده مخروط.

می‌شود. r به بازه بسته $[0, 5]$ و h به بازه بسته $[0, 12]$ تعلق دارد.
فرمول حجم استوانه بر حسب r و h عبارت است از

$$V = \pi r^2 h. \quad (6)$$

اگر بخواهیم V را بر حسب تنها یک متغیر بنویسیم، به معادله دیگری بر حسب r و h نیاز داریم. از شکل ۵.۳.۴، و بنا بر تشابه مثلثها،

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60 - 12r}{5}. \quad (7)$$

مقدار h را از معادله (۷) در فرمول (۶) قرار می‌دهیم. به صورت تابعی از r به دست می‌آید

$$V(r) = \frac{12}{5} \pi (5r^2 - r^3) \quad r \in [0, 5]. \quad (8)$$

چون V روی بازه بسته $[0, 5]$ پیوسته است، از قضیه اکسترمم نتیجه می‌شود که روی این بازه یک مقدار ماکسیمم مطلق برای V وجود دارد. می‌خواهیم تعیین کنیم به ازای چه مقداری از r و h این مقدار ماکسیمم برای V حاصل می‌شود.

$$V'(r) = \frac{12}{5} \pi (10r - 3r^2)$$

برای یافتن اعداد بحرانی V ، می‌نویسیم $V'(r) = 0$ و r را محاسبه می‌کنیم

$$r(10 - 3r) = 0.$$

و از آنجا

$$r = \frac{10}{3} \text{ و } r = 0.$$

چون به ازای جميع مقادیر r ، $V'(r)$ وجود دارد، تنها اعداد بحرانی V ، 0 و $10/3$ هستند که در بازه بسته $[0, 5]$ هم قرار دارند. مقدار ماکسیمم مطلق V روی $[0, 5]$ به ازای 0 ، $10/3$ ، یا 5 به دست می‌آیند. از (۸) داریم

$$V(0) = 0 \quad V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400}{9} \pi \quad V(5) = 0$$

لذا مقدار ماکسیمم مطلق V برابر با $400\pi/9$ است که به ازای $r = 10/3$ به دست می‌آید. وقتی $r = 10/3$ ، از (۷) داریم $h = 4$.

بنابراین، بیشترین حجم يك استوانه محاطی در مخروط داده شده برابر است با $400\pi/9$ سانتیمتر مکعب. و این حجم وقتی به دست می آید که شعاع $10/3$ سانتیمتر و ارتفاع 4 سانتیمتر باشد.

▲

تمرینهای ۳.۴

۱. مطلوب است محاسبه مساحت بزرگترین مستطیلی که محیط آن 200 سانتیمتر است.
۲. مطلوب است محاسبه مساحت بزرگترین مثلث متساوی الساقینی که محیط آن 18 متر است.
۳. مطلوب است عددی از بازه $[0, 1]$ که تفاضل بین آن عدد و مربعش ماکسیمم باشد.
۴. مطلوب است عددی از بازه $[2/3, 1]$ که مجموع آن عدد و عکسش ماکسیمم باشد.
۵. مطلوب است مساحت بزرگترین مستطیلی که دو رأس آن روی محور yx باشد، و دو رأس دیگرش هم روی، یا بالای محور yx باشد و هم روی سهمی $y = 9 - x^2$.
۶. مطلوب است مساحت بزرگترین مستطیل قابل محاط در یک دایره به شعاع r .
۷. يك سازنده قوطی حلبی، با بریدن مربعهای متساوی از چهار گوشه ورقهای حلبی به ابعاد 8 اینچ و 15 اینچ و بالا زدن چهار طرف آن، قوطی های سر باز می سازد. مطلوب است طول ضلع مربعهایی که باید بریده شوند، تا حجم قوطی ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد.
۸. می خواهیم اطراف قطعه زمین مستطیل شکلی را نرده بکشیم، و سپس با نرده دیگری آن را از وسط تقسیم کنیم. اگر بهای هر فوت نرده وسطی دو دلار، و بهای هر فوت نرده دیگر 5 دلار باشد، مطلوب است ابعاد قطعه زمینی با بیشترین مساحت ممکن که بتوان آن را با 960 دلار نرده کشی کرد.
۹. می خواهیم سه طرف قطعه زمین مستطیل شکلی را که يك طرف آن رودخانه است و به عنوان حصار طبیعی محسوب می شود، نرده بکشیم. با این شرایط، ابعاد بزرگترین قطعه زمین را بیابید که بتواند با 240 متر نرده محصور شود.
۱۰. برای اینکه بسته ای با پست فرستاده شود، مجموع طول و طول کمر (محیط يك مقطع عرضی) آن نباید از 105 اینچ تجاوز کند. می خواهیم بسته ای به شکل مکعب مستطیل را که مقطع عرضی آن مربع است با پست بفرستیم. با این شرایط، ابعاد بسته ای را که دارای بزرگترین حجم ممکن است بیابید.
۱۱. جزیره ای در نقطه ای چون A واقع است که 6 کیلومتر از B ، نزدیکترین نقطه يك

ساحل مستقیم به A ، فاصله دارد. شخصی که ساکن جزیره است می خواهد به نقطه ای چون C برود که در ساحل قرار دارد و در امتداد ساحل فاصله آن تا B ، ۹ کیلومتر است. این شخص می تواند قایقی بانرخ هر کیلومتر ۲٫۵ دلار کرایه کند و با آن تا نقطه ای چون P ، واقع بین B و C ، برود و از آنجا، از طریق يك جاده مستقیم، بایک تا کسی بانرخ هر کیلومتر ۲ دلار، خود را به C برساند. از A به C ، ارزانترین راه کدام است؟

۱۲. تمرین ۱۱ را در حالتی که فاصله C و B در امتداد ساحل تنها ۷ کیلومتر باشد، حل کنید.

۱۳. مثال ۲ی این بخش را در صورتی که فاصله نقطه C تا B در امتداد رودخانه ۶ کیلومتر باشد، حل کنید.

۱۴. مثال ۲ و تمرینهای ۱۱، ۱۲، و ۱۳ حالت های خاصی از مسئله کلیتر زیرند. فرض کنید $f(x) = u\sqrt{a^2 + x^2} + v(b - x)$ ، که در آن x در $[0, b]$ است و $u > v > 0$. نشان دهید برای اینکه مقدار مینیمم مطلق f به ازای عددی از بازه باز $(0, b)$ به دست آید، نامساوی $av < b\sqrt{u^2 - v^2}$ باید برقرار باشد.

۱۵. اگر بردگلوله ای R فوت باشد، آنگاه

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$$

که در آن v_0 سرعت اولیه بر حسب فوت بر ثانیه، g شتاب ثقل بر حسب فوت بر مربع ثانیه، و θ اندازه زاویه بین لوله تفنگ و افق بر حسب رادیان است. مقدار θ چقدر باشد تا برد ماکسیمم شود؟

۱۶. جسمی به وزن W پوند را در امتداد يك سطح افقی می کشیم. بزرگی نیرویی که به جسم وارد می کنیم F پوند است و جهت آن طوری است که با سطح مزبور زاویه θ رادیان می سازد. باین شرایط F در معادله

$$F = \frac{kW}{k \sin \theta + \cos \theta}$$

که در آن k يك مقدار ثابت، موسوم به ضریب اصطكاك، است و $0 < k < 1$ ، صدق می کند. اگر $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، $\cos \theta$ را وقتی که F حداقل باشد بیابید.

۱۷. مدرسه ای برای دانش آموزان خود مسافرتی ترتیب می دهد، و از هر دانش آموز ۱۵ دلار می گیرد به شرطی که تعداد داوطلبان بیش از ۱۵۰ نفر نباشد. ولی اگر تعداد داوطلبان بیش از ۱۵۰ باشد هزینه هریک به اندازه ۵٫۰۵ دلار به ازای هر نفر مازاد بر ۱۵۰ نفر تقلیل می یابد. برای اینکه مدرسه بیشترین درآمد را به دست آورد، چند دانش آموز باید به این سفر بروند؟

۱۸. فرض کنید در تمرین فوق تقلیل هزینه برای هردانش آموز به اندازه $۰/۰۷$ دلار به ازای هر نفر مازاد بر ۱۵۰ نفر باشد، و آن را حل کنید.

۱۹. حق عضویت سالانه در یک باشگاه خصوصی برای هر نفر ۱۰۰ دلار است به شرطی که تعداد اعضا ۶۰۰ باشد. در صورتی که تعداد اعضا بیش از ۶۰۰ باشد حق عضویت به اندازه ۵ دلار ضرب در تفاضل ۶۰۰ از کل تعداد، کاهش می یابد و چنانچه تعداد اعضا کمتر از ۶۰۰ باشد، حق عضویت به اندازه ۵ دلار ضرب در تفاضل کل تعداد از ۶۰۰، اضافه می شود. تعداد اعضا چند نفر باشد تا بیشترین درآمد سالانه از محل حق عضویت عاید باشگاه گردد؟

۲۰. سازنده کالایی می تواند بابت هر فرآورده خود ۲۰ دلار سود ببرد به شرطی که در هفته بیش از ۸۰۰ عدد از آن را تولید نکند. به ازای هر عدد کالا که مازاد بر ۸۰۰ عدد تولید کند سود وی به اندازه ۲ دلار در هر عدد کاهش می یابد. سازنده در هفته چند عدد کالا بسازد تا بیشترین سود عایدش شود؟

۲۱. در کالیفرنیا بار هر درخت پرتقال در سال ۶۰۰ عدد پرتقال است، به شرطی که در هریک بیش از ۲ درخت کاشته نشود. به ازای هر درخت اضافی که کاشته شود بار هر درخت ۱۵ عدد کاهش می یابد. در هر یک چند درخت بسایند کاشت تا بیشترین تعداد پرتقال به دست آید؟

۲۲. نشان دهید بزرگترین مستطیلی که محیطش p واحد باشد یک مربع است.

۲۳. ابعاد استوانه مستدیر قائمی را بیابید که بزرگترین سطح جانبی را داشته باشد و بتواند در یک کره باشعاع a اینچ محاط شود.

۲۴. ابعاد استوانه مستدیر قائمی را بیابید که بزرگترین حجم را داشته باشد و بتواند در یک کره باشعاع a اینچ محاط شود.

۲۵. در کارخانه خاصی دو کالای A و B تولید می شود. اگر کارخانه ۸ ساعت در روز کار کند و کل هزینه تولید C دلار باشد، آنگاه $C = 3x^2 + 4y^2$ ، که در آن x تعداد ماشینهای است که A را تولید می کنند و y تعداد ماشینهای است که B را می سازند. اگر در هر روز کلاً ۱۵ ماشین کار کنند، برای اینکه کل هزینه به حداقل برسد چند ماشین باید کالای A را تولید کنند و چند ماشین کالای B را؟

۲۶. یک سازنده جعبه می خواهد از صفحات فلزی مربع شکل با طول ضلع k سانتیمتر با بریدن چهار مربع متساوی از چهار گوشه هریک و با لاییدن جوانب، جعبه سر باز بسازد. طول ضلع مربعهایی که باید بریده شوند چقدر باشد تا حجم جعبه به حداکثر ممکن برسد؟

۲۷. دایره با معادله $x^2 + y^2 = 9$ مفروض است. مطلوب است: (الف) کوتاهترین فاصله از نقطه $(4, 5)$ تا نقطه ای از دایره؛ (ب) طولیترین فاصله از نقطه $(4, 5)$ تا نقطه ای از دایره.

۲۸. به وسیله سیمی به شکل Y باید وزنه ای را ۱۰ فوت پایینتر از یک خط افقی AB

بیاویزیم. اگر فاصله بین نقاط A و B برابر با h فوت باشد، طول کوتاهترین سیمی که برای این منظوری تواند به کار گرفته شود چقدر است؟

۲۹. سیمی به طول ۱۰ فوت را دو قسمت می‌کنیم. یک قسمت را به شکل دایره درمی‌آوریم، و قسمت دیگر را به شکل مربع. با چه نسبتی سیم را قطع کنیم که (الف) مجموع مساحت‌های دو شکل به حداقل ممکن برسد؛ (ب) مجموع مساحت‌های دو شکل حداکثر ممکن باشد.

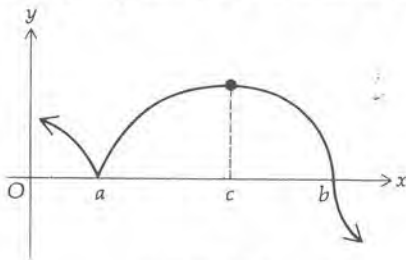
۳۰. تمرین ۲۹ را در حالتی حل کنید که یک قسمت از سیم را به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع درآوریم و با قسمت دیگر مربع بسازیم.

۴.۴ قضیه رول و قضیه مقدار میانگین

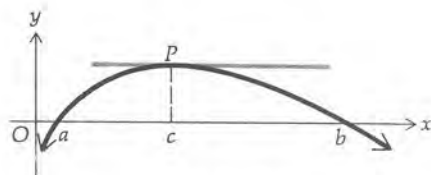
فرض کنید تابعی چون f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته، و روی بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد، و نیز $f(a) = 0$ و $f(b) = 0$. میشل رول ریاضیدان فرانسوی (۱۶۵۲-۱۷۱۹) ثابت کرد که اگر تابعی مانند f دارای سه شرط فوق باشد، آنگاه حداقل یک عدد مانند c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = 0$.

ابتدا تعبیر هندسی این موضوع را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۰.۴.۴ نمودار تابعی را نشان می‌دهد که در شرایط پاراگراف قبل صدق می‌کند. به طور شهودی می‌بینیم که روی منحنی، حداقل یک نقطه بین نقاط $(a, 0)$ و $(b, 0)$ وجود دارد که در آن نقطه، خط مماس موازی با محور x ‌هاست؛ یعنی، ضریب زاویه خط مماس صفر است. شکل ۱۰.۴.۴ این وضعیت را در مورد نقطه P نمایش می‌دهد. بنابراین، اگر c طول نقطه P باشد، $f'(c) = 0$.

تابعی که نمودار آن در شکل ۱۰.۴.۴ رسم شده، نه تنها بر بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر است، بلکه در نقاط انتهایی آن بازه هم مشتق دارد. ولی، برای اینکه نمودار در نقطه‌ای از بازه، یک خط مماس افقی داشته باشد، شرط داشتن مشتق در نقاط انتهایی لازم نیست. شکل ۲۰.۴.۴ این نکته را روشن می‌کند. از این شکل پیداست که تابع در a و b مشتق‌پذیر نیست؛ با وجود این نمودار در نقطه به طول c ، که c بین a و b است، دارای یک مماس افقی است.

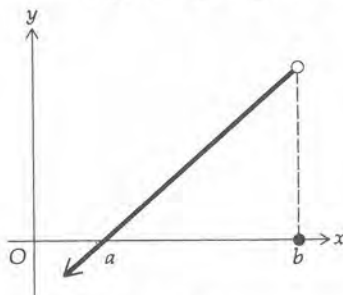


شکل ۲۰.۴.۴



شکل ۱۰.۴.۴

اما، برای وجود يك خط مماس افقی در يك نقطه داخلی، پیوستگی تابع در نقاط انتهایی بازه شرطی لازم است. شکل ۳.۴.۴ نمودار تابعی را نشان می‌دهد که روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، ولی در b پیوسته نیست؛ تابع بر بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر است، و مقادیر تابع در نقاط انتهایی برابر با صفرند. با این وجود، روی نمودار هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که خط مماس ماربر آن افقی باشد.



شکل ۳.۴.۴

حال صورت قضیه رول را می‌نویسیم و آن را ثابت می‌کنیم.

۱.۴.۴ قضیه (قضیه رول) فرض کنید تابعی چون f دارای شرایط زیر باشد

(i) روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد؛

(ii) روی بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد؛

(iii) $f(a) = f(b) = 0$.

آنگاه عددی مانند c واقع در بازه باز (a, b) وجود دارد به طوری که

$$f'(c) = 0.$$

اثبات دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱: به ازای هر x در بازه $[a, b]$ ، داریم $f(x) = 0$.

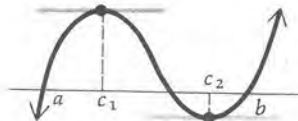
در این صورت، به ازای هر x در بازه (a, b) داریم $f'(x) = 0$ ؛ بنابراین c ، می‌تواند هر عدد دلخواه بین a و b باشد.

حالت ۲: حداقل به ازای يك x در بازه باز (a, b) ، $f(x) \neq 0$.

چون f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، بنا به قضیه ۹.۲.۴، f روی بازه $[a, b]$ دارای يك مقدار ماکسیمم مطلق و يك مقدار مینیمم مطلق است. بنا به فرض، $f(a) = f(b) = 0$. به علاوه، به ازای x از (a, b) ، $f(x) \neq 0$ صفر نیست. پس یا f در عددی مانند c_1 واقع در (a, b) دارای يك مقدار ماکسیمم مطلق مثبت است، یا در عددی مانند c_2 واقع در (a, b) دارای يك مقدار مینیمم مطلق منفی است و یا هر دو. بنا براین، به ازای $c = c_1$ یا $c = c_2$ ، c بسته به مورد، f در يك نقطه داخلی بازه $[a, b]$ يك اکسترمم مطلق دارد و در نتیجه اکسترمم مطلق

$f(c)$ يك اكسترمم نسبی نیز هست، و چون $f'(c)$ بنا به فرض وجود دارد، از قضیه ۳.۲.۴ نتیجه می گیریم که $f'(c) = 0$. به این ترتیب قضیه ثابت می شود. $\square$

ممکن است در بازه (a, b) بیش از يك عدد وجود داشته باشد که به ازای آنها مشتق f صفر باشد. در شکل ۴.۴.۴ این نکته به طور هندسی نشان داده شده است.



شکل ۴.۴.۴

در این شکل، در نقاطی که طول آنها برابر با $x = c_1$ و $x = c_2$ است، مماس يك خط افقی است، و از این رو $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$.

عکس قضیه رول درست نیست. یعنی، اگر تابعی چون f چنان باشد که به ازای يك c ، $a < c < b$ ، داشته باشیم $f'(c) = 0$ ، آنگاه نمی توانیم نتیجه بگیریم که شرایط (i)، (ii) و (iii)، هر سه باید برقرار باشند. (تمرین ۳۲ را ببینید.)

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = 4x^3 - 9x$ ؛ نشان دهید که هر سه شرط (i)، (ii)، و (iii) از فرض قضیه رول برای هر يك از بازه های $[-3/2, 0]$ ، $[0, 3/2]$ ، و $[-3/2, 3/2]$ برقرارند. سپس در هر يك از این بازه ها مقدار مناسبی برای c پیدا کنید که $f'(c) = 0$.

حل $f(x) = 4x^3 - 9x$ و $f'(x) = 12x^2 - 9$ ؛ لذا به ازای همه مقادیر x ، $f'(x)$ وجود دارد. بنابراین f روی $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است و در نتیجه روی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته هم هست. پس، شرایط (i) و (ii) قضیه رول روی هر بازه دلخواهی برقرارند. برای اینکه تعیین کنیم روی چه بازه هایی شرط (iii) برقرار است مقداری از x را می یابیم که به ازای آنها $f(x) = 0$. اگر $f(x) = 0$ ، داریم

$$4x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0$$

که از آن

$$x = -\frac{3}{2} \quad x = 0 \quad x = \frac{3}{2}$$

به دست می آید. پس با $a = -3/2$ و $b = 0$ ، قضیه رول روی $[-3/2, 0]$ برقرار است. به طور مشابه، قضیه رول روی $[0, 3/2]$ و $[-3/2, 3/2]$ نیز برقرار است.

برای یافتن مقادیر مناسب c می نویسیم $f'(x) = 0$ و داریم

$$12x^2 - 9 = 0$$

و از آن نتیجه می گیریم

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{3} \text{ و } x = -\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

بنابراین، در بازه $[-\frac{3}{2}, 0]$ يك مقدار مناسب برای c ، $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. در بازه $[0, \frac{3}{2}]$ ، c را برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می گیریم. در بازه $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ برای c دو مقدار ممکن وجود دارد: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

با استفاده از قضیه رول، یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال را ثابت می کنیم. این قضیه به قضیه مقدار میانگین (یا قانون میانگین) معروف است. از قضیه مقدار میانگین برای اثبات قضایای بسیاری از حساب دیفرانسیل، حساب انتگرال، و از موضوعهای دیگری نظیر آنالیز عددی، استفاده می شود. بنابراین باید با محتوای این قضیه کاملاً آشنا شوید.

۲.۴.۴ قضیه مقدار میانگین فرض کنید f تابعی با شرایط زیر باشد

(i) روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد؛

(ii) روی بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد.

آنگاه عددی مانند c در بازه باز (a, b) وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

قبل از اینکه قضیه را ثابت کنیم، به تعبیر هندسی آن می پردازیم. اگر نموداری برای تابع f رسم کنیم، می بینیم که $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ عبارت است از ضریب زاویه پاره خطی که نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ را به هم وصل می کند. قضیه مقدار میانگین حاکی است که روی منحنی، نقطه ای بین A و B وجود دارد که خط مماس در آن، با خط قاطع مارپیچ A و B موازی است؛ یعنی، در بازه (a, b) عددی مانند c وجود دارد که

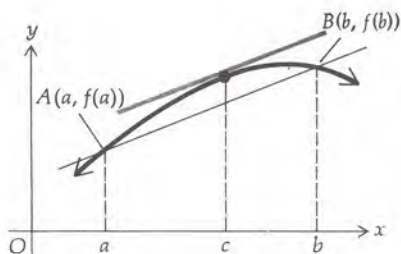
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

به شکل ۵.۴.۴ رجوع کنید.

اگر امتداد پاره خط AB را محور xy ها فرض کنیم، متوجه می شویم که قضیه مقدار میانگین تعمیمی از قضیه رول است که در اثباتش نیز از آن استفاده می شود.

اثبات با توجه به شکل ۵.۴.۴، يك معادله خط مارپیچ A و B عبارت است از

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



شکل ۵.۴.۴

و یا

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a).$$

حال اگر $F(x)$ اندازه فاصله قائم بین نقطه‌ای چون $(x, f(x))$ واقع بر نمودار تابع f ، و نقطه نظیرش باشد که روی خط قاطع‌ما بر A و B واقع است، آنگاه

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a). \quad (۱)$$

نشان می‌دهیم که تابع F در هر سه شرط فرض قضیه رول صدق می‌کند.

تابع F روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته است، زیرا F عبارت است از مجموع f و یک تابع چند جمله‌ای خطی که هر دو بر بازه $[a, b]$ پیوسته هستند. پس F در شرط (i) صدق می‌کند. F در شرط (ii) نیز صدق می‌کند، زیرا روی (a, b) مشتق پذیر است. از (۱) مشاهده می‌شود که $F(a) = 0$ و $F(b) = 0$. پس F در شرط (iii) از فرض قضیه رول نیز صدق می‌کند.

نتیجه قضیه رول این است که عددی مانند c واقع در بازه باز (a, b) وجود دارد که $F'(c) = 0$. اما

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

بنابراین

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

پس، عددی مانند c در بازه (a, b) وجود دارد که

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یا

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

و این همان است که باید ثابت می‌شد.

مثال ۲ فرض کنید $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$. نشان دهید که شرایط فرض قضیه مقدار میانگین به ازای $a = 1$ و $b = 3$ برقرارند. سپس تمام مقادیر c واقع در بازه $(1, 3)$ را پیدا کنید که

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

حل چون f یک تابع چندجمله‌ای است، به ازای تمام مقادیر x پیوسته و مشتق پذیر است. بنابراین به ازای هر a و هر b ، شرایط فرض قضیه مقدار میانگین برقرارند.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x \quad f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(3) = -27 \text{ و } f(1) = -7$$

پس

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10.$$

می‌نویسیم $f'(c) = -10$ و به دست می‌آوریم

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0.$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$c = 1 \text{ و } c = \frac{7}{3}.$$

چون ۱ به بازه باز $(1, 3)$ تعلق ندارد، تنها جواب ممکن برای c ، $7/3$ است. ▲

مثال ۳ فرض کنید $f(x) = x^{2/3}$. نمودار f را رسم کنید. نشان دهید به ازای هیچ مقداری از c که متعلق به بازه باز $(-2, 2)$ باشد معادله

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

برقرار نیست. کدامیک از شرایط فرض قضیه مقدار میانگین وقتی که $a = -2$ و $b = 2$ ،

برآورده نمی‌شود؟

حل شکل ۶.۴.۴ نمودار f را نشان می‌دهد.

$$f(x) = x^{2/3} \qquad f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$$

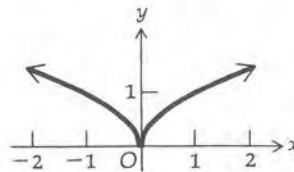
بنا بر این

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

و

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{2^{1/3} - (-2)^{1/3}}{4} = 0.$$

به‌ازای هیچ مقداری از c ، $2/3c^{1/3} = 0$ برقرار نیست.



شکل ۶.۴.۴

تابع f بر بازه بسته $[-2, 2]$ پیوسته است؛ اما، f بر بازه باز $(-2, 2)$ مشتق‌پذیر نیست، چون $f'(0)$ وجود ندارد. از اینرو f در شرط (ii) از فرض قضیه مقدار میانگین، وقتی که $a = -2$ و $b = 2$ ، صدق نمی‌کند. ▲

قبل از بیان صورت قضیه مقدار میانگین خاطر نشان کردیم که این قضیه یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است، زیرا از آن برای اثبات بسیاری از قضایای دیگر استفاده می‌شود. در این گونه موارد یافتن مقدار عدد c ، که وجودش توسط این قضیه تضمین شده است، لازم نیست. در این قضیه امر مهم این است که عددی چون c وجود دارد. برای اینکه قدرت قضیه مقدار میانگین را نشان دهیم، آن را جهت اثبات قضیه زیر، که در فصل ۵ به آن نیاز خواهیم داشت، به کار می‌بریم.

۳.۴.۴ قضیه اگر f تابعی باشد که به‌ازای جميع مقادیر x موجود در بازه‌ای چون I ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه f روی I ثابت است.

اثبات فرض کنید f روی بازه I ثابت نباشد. آنگاه دو عدد متمایز x_1 و x_2 در I وجود دارند که $x_1 < x_2$ و $f(x_1) \neq f(x_2)$. چون بنا به فرض، به‌ازای تمام

x های در I ، $f'(x) = 0$ ، پس، به ازای تمام x های در بازه بسته $[x_1, x_2]$ نیز $f'(x) = 0$.
لذا، به ازای تمام x های متعلق به $[x_1, x_2]$ ، f مشتق پذیر است و در نتیجه روی $[x_1, x_2]$ پیوسته است. بنابراین فرض قضیه مقدار میانگین بر آورده می شود، و لذا عددی چون c ،
 $x_1 < c < x_2$ ، وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

اما چون به ازای هر x در بازه $[x_1, x_2]$ ، $f'(x) = 0$ ، پس $f'(c) = 0$ ، و از (۲) نتیجه می شود که $f(x_1) = f(x_2)$. ولی فرض این بود که $f(x_1) \neq f(x_2)$. این يك تناقض است، و لذا مقدار f روی I ثابت است. $\square$

قضیه مهم دیگری که با استفاده از قضیه مقدار میانگین اثبات می شود، قضیه ۳.۵.۴ است که در بخش بعد ارائه می شود.

تمرینهای ۴.۴

در تمرینهای ۱ تا ۴، نشان دهید که تابع مفروض روی بازه داده شده، در شرایط (i)، (ii) و (iii) فرض قضیه رول صدق می کند. سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که حکم قضیه رول را بر آورده کند.

$$1. \quad f(x) = x^2 - 4x + 3; [1, 3]$$

$$2. \quad f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; [1, 2]$$

$$3. \quad f(x) = \sin 2x; \left[0, \frac{1}{2}\pi\right] \quad 4. \quad f(x) = 3 \cos^2 x; \left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$$

در تمرینهای ۵ تا ۱۰، نشان دهید که تابع مفروض روی بازه داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را بر آورده می کند. سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

$$5. \quad f(x) = x^2 + 2x - 1; [0, 1] \quad 6. \quad f(x) = x^2 + x^2 - x; [-2, 1]$$

$$7. \quad f(x) = x^{2/3}; [0, 1] \quad 8. \quad f(x) = \sqrt{1 - \sin x}; \left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$$

$$9. \quad f(x) = \sqrt{1 + \cos x}; \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad 10. \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 7}; [2, 6]$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۶، (الف) نمودار تابع مفروض روی بازه داده شده را رسم کنید؛

(ب) سه شرط (i)، (ii)، و (iii) فرضی فرضیهٔ دول را بیازمایید و مشخص کنید کدام شرط برقرار است و کدام شرط احتمالاً برقرار نیست؛ و (پ) اگر هر سه شرط در قسمت (ب) برقرار باشند، نقطه‌ای را تعیین کنید که در آن، خط مماس افقی باشد.

$$f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}; [0, 4]. ۱۲ \quad f(x) = x^{4/3} - 3x^{1/3}; [0, 3]. ۱۱$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 3}; [-3, 4]. ۱۳$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \end{cases}; [-2, 4]. ۱۴$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 1 \\ 5x - 8 & 1 \leq x \end{cases}; \left[-2, \frac{8}{5}\right]. ۱۵$$

$$f(x) = 1 - |x|; [-1, 1]. ۱۶$$

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین این است که در بازهٔ باز (a, b) عدد مناسبی چون c وجود دارد که خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ $(c, f(c))$ موازی با قاطع‌مادر بر نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ است. در تمرینهای ۱۲ تا ۲۰، مقداری برای c بیابید که در حکم قضیهٔ مقدار میانگین صدق کند؛ بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ نمودار را رسم کنید؛ و خط مماس و قاطع را نشان دهید.

$$f(x) = x^2; a = 2, b = 4. ۱۸ \quad f(x) = x^2; a = 3, b = 5. ۱۷$$

$$f(x) = 2 \cos x; a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{2\pi}{3}. ۲۰ \quad f(x) = \sin x; a = 0, b = \frac{\pi}{2}. ۱۹$$

برای هر یک از تمرینهای ۲۱ تا ۲۴، در بازهٔ باز (a, b) هیچ عددی چون c وجود ندارد که در حکم قضیهٔ مقدار میانگین صدق کند. در هر تمرین، تعیین کنید کدام قسمت از فرض قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست. نمودار $y = f(x)$ ، و خط‌مادر بر نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}; a = 1, b = 6. ۲۱$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-4}; a = 1, b = 2. ۲۲$$

$$f(x) = 3(x-4)^{2/3}; a = -4, b = 5. 23$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 3 \\ 15-2x & 3 \leq x \end{cases}; a = -1, b = 5. 24$$

۲۵. اگر $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$ ، آنگاه $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$ ، با کمک قضیه رول ثابت کنید که معادله $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$ در بازه باز $(0, 1)$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۲۶. با کمک قضیه رول ثابت کنید که معادله $x^3 + 2x + c = 0$ ، که در آن c یک ثابت دلخواه است، نمی تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

۲۷. با استفاده از قضیه رول ثابت کنید که معادله $4x^5 + 3x^3 + 3x - 2 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد که در بازه $(0, 1)$ قرار می گیرد. (داهنمایی: اول نشان دهید که حداقل یک عدد در بازه $(0, 1)$ وجود دارد که یک ریشه معادله است. سپس فرض کنید معادله در بازه $(0, 1)$ بیش از یک ریشه داشته باشد و نشان دهید که این فرض به یک تناقض می انجامد.)

۲۸. فرض کنید $s = f(t)$ معادله حرکت یک ذره است که روی یک خط مستقیم حرکت می کند، و f فرض قضیه مقدار میانگین را برمی آورد. نشان دهید که حکم قضیه مقدار میانگین به مسا اطمینان می دهد که در هر بازه زمانی، لحظه ای وجود دارد که در آن، سرعت لحظه ای مساوی با سرعت متوسط ذره در طول آن بازه زمانی است.

۲۹. اگر در تمرین ۲۸ معادله حرکت $s = t^2 - t + 4$ و $t \in [0, 3]$ باشد، مطلوب است مقدار t به طوری که سرعت لحظه ای برابر با سرعت متوسط در طول بازه مفروض باشد.

۳۰. اگر $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ ، از قضیه ۳.۴.۴ استفاده کنید و نشان دهید که به ازای تمام x های در $[-2\pi, 2\pi]$ ، $f(x) = 1$.

۳۱. فرض کنید تابعی چون f روی $[a, b]$ پیوسته باشد و به ازای تمام x های در (a, b) ، $f'(x) = 1$. ثابت کنید به ازای هر x در $[a, b]$ ، داریم $f(x) = x - a + f(a)$.

۳۲. عکس قضیه رول درست نیست. تابعی مثال بزنید که در مورد آن حکم قضیه رول درست باشد و (الف) شرط (i) برقرار نباشد ولی شرایط (ii) و (iii) برقرار باشند؛ (ب) شرط (ii) برقرار نباشد ولی شرایط (i) و (iii) برقرار باشند؛ (پ) شرط (iii) برقرار نباشد ولی شرایط (i) و (ii) برقرار باشند. نمودار تابع را رسم کنید و در هر مورد خط مماس افقی را نشان دهید.

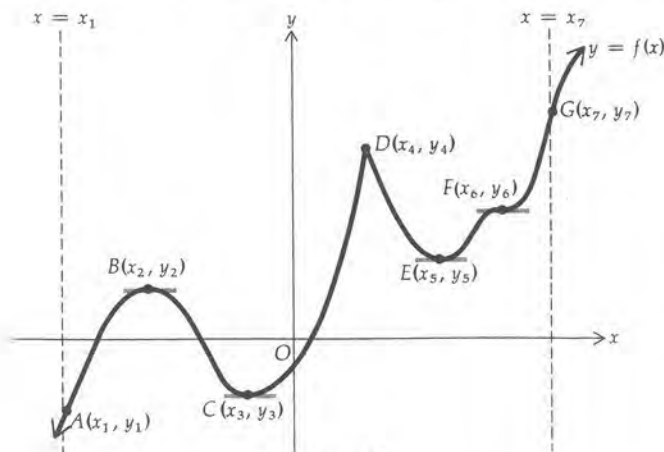
۳۳. از قضیه رول استفاده و ثابت کنید که اگر هر چند جمله ای از درجه چهار، حداکثر چهار ریشه حقیقی داشته باشد، آنگاه هر چند جمله ای از درجه پنج، حداکثر پنج

ریشه حقیقی دارد. (داهنمایی: فرض کنید يك چند جمله‌ای از درجه پنج دارای شش ریشه حقیقی باشد و نشان دهید که این فرض به يك تناقض می‌انجامد.)

۳۴. از روش تمرین ۳۳ و استقرای ریاضی استفاده و ثابت کنید که يك چند جمله‌ای از درجه n حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

۵.۴ توابع صعودی و نزولی و آزمون مشتق اول

فرض کنید شکل ۱.۵.۴ نمایانگر نمودار يك تابع f به ازای جميع مقادیر x در بازه بسته $[x_1, x_7]$ باشد. در این نمودار فرض کرده‌ایم که f روی $[x_1, x_7]$ پیوسته باشد.



شکل ۱.۵.۴

در شکل ۱.۵.۴ مشاهده می‌کنیم که وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از نقطه A به طرف نقطه B حرکت می‌کند، با افزایش طول نقطه، مقادیر تابع هم افزایش می‌یابند؛ و وقتی نقطه در امتداد منحنی از B به طرف C حرکت می‌کند، با افزایش طول نقطه، مقادیر تابع کاهش می‌یابند. بنابراین، می‌گوییم که تابع f روی بازه بسته $[x_1, x_7]$ صعودی، و روی بازه بسته $[x_7, x_7]$ نزولی است. تعریف دقیق تابع صعودی و نزولی بزرگ بازه به صورت زیر است.

۱.۵.۴ تعریف فرض کنید تابع f بر بازه‌ای تعریف شده باشد. گوییم f بر آن بازه صعودی است اگر و تنها اگر برای هر x_1 و x_7 در آن بازه،

$$\text{وقتی } x_1 < x_7, \quad f(x_1) < f(x_7)$$

در شکل ۱.۵.۴ تابع f بر بازه‌های بسته زیر صعودی است:

$$[x_1, x_2]; [x_3, x_4]; [x_5, x_6]; [x_7, x_8]; [x_9, x_{10}].$$

۲.۵.۴ تعریف فرض کنید تابع f روی بازه‌ای تعریف شده باشد. گوئیم f بر آن بازه نزولی است اگر و تنها اگر برای هر x_1 و x_2 متعلق به آن بازه،

$$\text{وقتی } x_1 < x_2, \quad f(x_1) > f(x_2).$$

در شکل ۱.۵.۴ تابع f بر بازه‌های بسته زیر نزولی است: $[x_3, x_4]$ ، $[x_7, x_8]$. گوئیم تابعی چون f روی بازه‌ای یکنواست، هرگاه f بر آن بازه یسا صعودی باشد یا نزولی.

قبل از بیان قضیه‌ای که به عنوان آزمونی برای تعیین یکنوا بودن تابع به کار می‌رود، ابتدا به طور هندسی وضعیت را بررسی می‌کنیم. به شکل ۱.۵.۴ رجوع، و مشاهده کنید که وقتی ضریب زاویه خط مماس مثبت باشد، تابع صعودی است؛ و وقتی ضریب زاویه خط مماس منفی باشد، تابع نزولی است. چون $f'(x)$ همان ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ است، پس f صعودی است هرگاه $f'(x) > 0$ ، و f نزولی است هرگاه $f'(x) < 0$. به علاوه، چون عبارت است از آهنگ تغییر مقادیر تابع f نسبت به x ، اگر $f'(x) > 0$ ، با افزایش x ، مقادیر تابع افزایش می‌یابند؛ و اگر $f'(x) < 0$ ، با افزایش x ، مقادیر تابع کاهش می‌یابند.

۳.۵.۴ قضیه فرض کنید تابع f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته، و روی بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد:

(i) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه f روی $[a, b]$ صعودی است.

(ii) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آنگاه f روی $[a, b]$ نزولی است.

اثبات (i) فرض کنید x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در بازه $[a, b]$ باشند که $x_1 < x_2$. پس f بر $[x_1, x_2]$ پیوسته و بر (x_1, x_2) مشتق پذیر است. از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود که عددی مانند c در بازه (x_1, x_2) وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

چون $x_1 < x_2$ ، پس $x_2 - x_1 > 0$. همچنین بنا به فرض، $f'(c) > 0$. پس $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ، و لذا $f(x_2) > f(x_1)$. پس، ثابت شد که برای هر دو عدد دلخواه x_1 و x_2 در بازه $[a, b]$ ، وقتی $x_1 < x_2$ ، داریم $f(x_1) < f(x_2)$. در نتیجه، بنا به تعریف ۱.۵.۴، f روی $[a, b]$ صعودی است.

اثبات (ii) شبیه اثبات فوق است و آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (تمرین

۴۱ را ببینید).

□

کاربرد مستقیم قضیه ۳.۵.۴ در اثبات قضیه‌ای است موسوم به آزمون مشتق اول برای اکسترممهای نسبی یک تابع.

۴.۵.۴ قضیه (آزمون مشتق اول برای اکسترممهای نسبی) فرض کنید تابع f بر تمام نقاط بازه (a, b) که شامل عددی چون c است پیوسته باشد، و فرض کنید f' بر تمام نقاط (a, b) بجز احتمالاً در عدد c ، وجود داشته باشد.

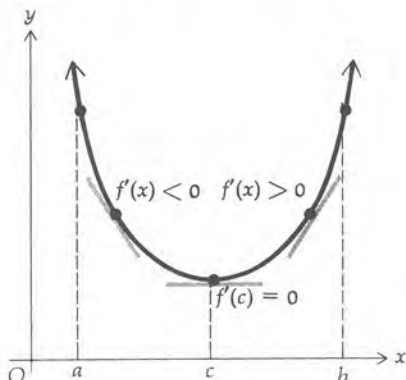
(i) اگر به ازای هر x واقع در بازه باز c نقطه انتهایی سمت راست آن باشد، $f'(x) > 0$ و اگر به ازای هر x واقع در بازه باز c نقطه انتهایی سمت چپ آن باشد، $f'(x) < 0$ ، آنگاه f در c یک ماکسیمم نسبی دارد.
(ii) اگر به ازای هر x واقع در بازه باز c نقطه انتهایی سمت راست آن باشد، $f'(x) < 0$ و اگر به ازای هر x واقع در بازه باز c نقطه انتهایی سمت چپ آن باشد، $f'(x) > 0$ ، آنگاه f در c یک مینیمم نسبی دارد.

اثبات (i) فرض کنید (d, c) بازه باز c باشد که نقطه انتهایی سمت راست آن c است و برای هر x واقع در این بازه، $f'(x) > 0$. بنا به قضیه ۳.۵.۴ (i)، تابع f بر بازه $[d, c]$ صعودی است. اکنون فرض کنید (c, e) بازه باز c باشد که نقطه انتهایی سمت چپ آن است، و برای هر x واقع در آن بازه، $f'(x) < 0$. بنا به قضیه ۳.۵.۴ (ii) تابع f بر بازه $[c, e]$ نزولی است، چون f روی $[d, c]$ صعودی است، از تعریف ۱.۵.۴ نتیجه می‌شود که، برای هر $x_1 \neq c$ واقع در $[d, c]$ داریم $f(x_1) < f(c)$. همچنین، چون f بر $[c, e]$ نزولی است، بنا به تعریف ۲.۵.۴ برای هر $x_2 \neq c$ واقع در $[c, e]$ داریم $f(c) > f(x_2)$. از این رو، از تعریف ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که f در c دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است.

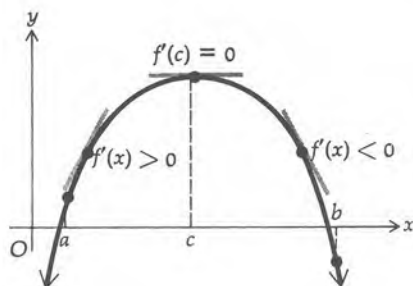
اثبات (ii) مشابه اثبات (i) است و آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم (به تمرین ۴۲ رجوع کنید). □

آزمون مشتق اول برای اکسترممهای نسبی اساساً چنین می‌گوید که چنانچه f در c پیوسته باشد و اگر هنگامی که x در حوالی عدد c افزایش می‌یابد، علامت جبری $f'(x)$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه f در c دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است؛ و اگر هنگامی که x در حوالی c افزایش می‌یابد، علامت جبری $f'(x)$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه f در c دارای یک مقدار مینیمم نسبی است.

شکل‌های ۲.۵.۴ و ۳.۵.۴، به ترتیب، قسمت‌های (i) و (ii) قضیه ۴.۵.۴ را، هنگامی که $f'(c)$ وجود دارد، نشان می‌دهند. شکل ۴.۵.۴ نمودار تابعی f را نشان می‌دهد که در عددی مانند c دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است؛ ولی $f'(c)$ وجود ندارد؛ با وجود این، برای $x < c$ ، $f'(x) > 0$ و برای $x > c$ ، $f'(x) < 0$.

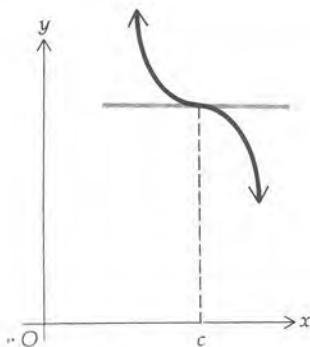


شکل ۳.۵.۴

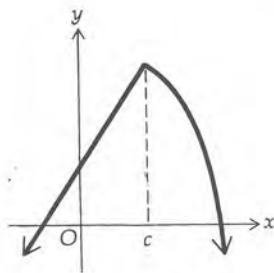


شکل ۲.۵.۴

در شکل ۵.۵.۴ نمودار تابعی چون f را مشاهده می‌کنیم که c یک عدد بحرانی آن است، و برای هر $x < c$ ، $f'(x) < 0$ ، و برای هر $x > c$ ، $f'(x) < 0$ ؛ بنابراین، f در c اکسترم نسبی ندارد.



شکل ۵.۵.۴



شکل ۴.۵.۴

شکل ۱.۵.۴ نکات بیشتری از قضیه ۴.۵.۴ را روشن می‌کند. تابع در x_4 و x_5 یک مقدار ماکسیمم نسبی، و در x_3 و x_6 یک مقدار مینیمم نسبی دارد. با وجودی که x_7 یک عدد بحرانی تابع است، تابع در این عدد هیچ اکسترم نسبی ندارد. به طور خلاصه، برای یافتن اکسترمهای نسبی یک تابع f :

۱. $f'(x)$ را محاسبه کنید.
 ۲. اعداد بحرانی f را بیابید؛ یعنی، x هایی را بیابید که به ازای آنها $f'(x) = 0$ ، و یا $f'(x)$ وجود نداشته باشد.
 ۳. آزمون مشتق اول (قضیه ۴.۵.۴) را مورد استفاده قرار دهید.
- این دستورالعمل را در مثالهای زیر به کار می‌بریم.

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. با استفاده از آزمون مشتق اول، اکسترممهای نسبی f را بیابید. x هایی را بیابید که به ازای آنها اکسترممهای نسبی به دست می آیند. بازه هایی را تعیین کنید که f بر آنها صعودی است و نیز بازه هایی را که f بر آنها نزولی است. نمودار تابع را رسم کنید.

حل $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ و $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
 $f'(x)$ به ازای جميع مقادير x وجود دارد. می نویسیم $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x-3)(x-1) = 0.$$

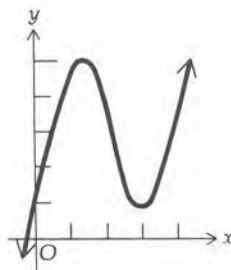
از اینجا نتیجه می شود که

$$x = 1 \text{ و } x = 3$$

پس، اعداد بحرانی f عبارت اند از ۱ و ۳. برای اینکه تعیین کنیم f در هر يك از این اعداد اکسترمم نسبی دارد یا نه، آزمون مشتق اول را به کار می بریم. نتایج در جدول ۱۰.۵.۴ خلاصه شده اند.

جدول ۱۰.۵.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	نتیجه
$x < 1$		+	f صعودی است
$x = 1$	۵	۰	f يك مقدار ماكسيم نسبی دارد
$1 < x < 3$		-	f نزولی است
$x = 3$	۱	۰	f يك مقدار مينيم نسبی دارد
$x > 3$		+	f صعودی است



شکل ۱۰.۵.۴

از جدول مشاهده می‌شود که f در ۱ دارای مقدار ماکسیمم نسبی ۵ و در ۳ دارای مقدار مینیمم نسبی ۱ است. نمودار f در شکل ۶.۵.۴ رسم شده است. ▲

مثال ۲ فرض کنید

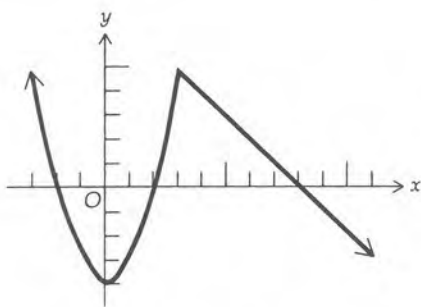
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 3 \\ 8 - x & 3 \leq x \end{cases}$$

با استفاده از آزمون مشتق اول اکسترمهای نسبی f را بیابید. تعیین کنید به ازای چه مقادیری از x ، اکسترمهای نسبی f به دست می‌آیند. روی چه بازه‌هایی f صعودی، و بر چه بازه‌هایی f نزولی است؟ نمودار f را رسم کنید.

حل اگر $x < 3$ ، $f'(x) = 2x$ ، اگر $x > 3$ ، $f'(x) = -1$ ، چون $f'_-(3) = -1$ و $f'_+(3) = -1$ ، پس $f'(3)$ وجود ندارد. بنابراین، ۳ یک عدد بحرانی f است.

جدول ۶.۵.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	نتیجه
$x < 0$		—	f نزولی است
$x = 0$	-4	0	f یک مقدار مینیمم نسبی دارد
$0 < x < 3$		+	f صعودی است
$x = 3$	5	وجود ندارد	f یک مقدار ماکسیمم نسبی دارد
$3 < x$		—	f نزولی است



شکل ۶.۵.۴

چون وقتی $x = 0$ ، $f'(x) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که 0 يك عدد بحرانی f است. با استفاده از آزمون مشتق اول، نتایج را در جدول ۲.۵.۴ خلاصه می‌کنیم. شکل ۷.۵.۴ نمودار تابع f را نشان می‌دهد. ▲

مثال ۳ فرض کنید $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$. اکسترمهای نسبی f را بیابید و تعیین کنید به‌ازای چه مقادیری از x ، این اکسترمها به دست می‌آیند. ونیز تعیین کنید که f برچه بازه‌هایی صعودی و برچه بازه‌هایی نزولی است. نمودار f را رسم کنید.

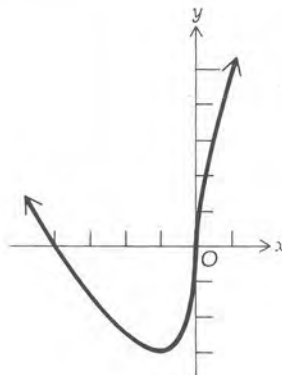
حل $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ و

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1).$$

چون وقتی $x = 0$ ، $f'(x)$ وجود ندارد، و وقتی $x = -1$ ، $f'(x) = 0$ ، اعداد بحرانی

جدول ۳.۵.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	نتیجه
$x < -1$		—	f نزولی است
$x = -1$	-۳	۰	f يك مقدار مینیمم نسبی دارد
$-1 < x < 0$		+	f صعودی است
$x = 0$	۰	وجود ندارد	f در $x = 0$ اکسترم نسبی ندارد
$x > 0$		+	f صعودی است



شکل ۸.۵.۴

f عبارت‌اند از ۱-۰۵. از آزمون مشتق اول استفاده، و نتایج را در جدول ۳.۵.۴ خلاصه کرده‌ایم. شکل ۸.۵.۴ نمودار f را نشان می‌دهد. ▲

تمرینهای ۵.۴

در تمرینهای ۱ تا ۴۰، اعمال زیر را انجام دهید. (الف) با استفاده از آزمون مشتق اول اکسترممهای نسبی f را پیدا کنید؛ (ب) تعیین کنید به‌ازای چه مقادیری از x اکسترممهای نسبی به‌دست می‌آیند؛ (پ) تعیین کنید f روی چه بازه‌هایی صعودی است؛ (ت) تعیین کنید f روی چه بازه‌هایی نزولی است؛ (ث) نمودار f را رسم کنید.

$$f(x) = 3x^2 - 3x + 2 \quad .۲$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 \quad .۱$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5 \quad .۴$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - x \quad .۳$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \quad .۶$$

$$f(x) = 2x^2 - 9x^2 + 2 \quad .۵$$

$$f(x) = x^4 + 4x \quad .۸$$

$$f(x) = 4 \sin \frac{x}{4} \quad .۷$$

$$f(x) = 2 \cos 3x \quad .۱۰$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \quad .۹$$

$$f(x) = x^5 - 5x^2 - 20x - 2 \quad .۱۲$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1 \quad .۱۱$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2} \quad .۱۴$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad .۱۳$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x} \quad .۱۶$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} \quad .۱۵$$

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^2 \quad .۱۸$$

$$f(x) = (1-x)^2(1+x)^2 \quad .۱۷$$

$$f(x) = x\sqrt{5-x^2} \quad .۲۰$$

$$f(x) = 2x\sqrt{3-x} \quad .۱۹$$

$$f(x) = 4x - 6x^{2/3} \quad .۲۲$$

$$f(x) = x - 3x^{1/3} \quad .۲۱$$

$$f(x) = 2 - (x-1)^{1/3} \quad .۲۴$$

$$f(x) = 2 - 3(x-4)^{2/3} \quad .۲۳$$

$$f(x) = x^{2/5} + 1 \quad .۲۶$$

$$f(x) = x^{2/3} - x^{1/3} \quad .۲۵$$

$$f(x) = x^{2/3}(x-1)^2 \quad .۲۸$$

$$f(x) = (x+1)^{2/3}(x-2)^{1/3} \quad .۲۷$$

$$f(x) = \begin{cases} 5-2x & x < 3 \\ 3x-10 & 3 \leq x \end{cases} \cdot 30 \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq 4 \\ 13-x & 4 < x \end{cases} \cdot 39$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+9 & x \leq -2 \\ x^2+1 & -2 < x \end{cases} \cdot 31$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-(x+7)^2} & -12 \leq x \leq -3 \\ 12-x^2 & -3 < x \end{cases} \cdot 32$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & x < -1 \\ x^2+1 & -1 \leq x < 2 \\ 7-x & 2 \leq x \end{cases} \cdot 33$$

$$f(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & x < -4 \\ 12-(x+1)^2 & -4 \leq x \end{cases} \cdot 34$$

$$f(x) = \begin{cases} (x+9)^2-8 & x < -7 \\ -\sqrt{25-(x+4)^2} & -7 \leq x \leq 0 \\ (x-2)^2-7 & 0 < x \end{cases} \cdot 35$$

$$f(x) = \begin{cases} 12-(x+5)^2 & x \leq -3 \\ 5-x & -3 < x \leq -1 \\ \sqrt{100-(x-7)^2} & -1 < x \leq 17 \end{cases} \cdot 36$$

$$f(x) = (x-a)^{2/5} + 1 \cdot 38 \quad f(x) = x^{5/4} + 10x^{1/4} \cdot 37$$

$$f(x) = x^{5/2} - 10x^{3/2} \cdot 40 \quad f(x) = x^{1/2}(x+4)^{-2/3} \cdot 39$$

۴۱. قضیه ۳.۵.۴ (ii) را ثابت کنید.

۴۲. قضیه ۴.۵.۴ (ii) را ثابت کنید.

۴۳. مطلوب است a و b به طوری که تابع باضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(2, 3)$ يك اكسترمم نسبی داشته باشد.

۴۴. مطلوب است a, b, c به طوری که تابع باضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ در 1 دارای مقدار ماکسیمم نسبی 7 باشد و نمودار $y = f(x)$ از نقطه $(2, -2)$ بگذرد.

۴۵. مطلوب است a, b, c, d به طوری که تابع باضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در $(1, 2)$ و $(2, 3)$ اکسترمم نسبی داشته باشد.

۴۶. فرض کنید تابعی چون f به ازای جميع مقادیر x پیوسته باشد؛ و $f(3) = 2$ ؛ و به ازای $x < 3$ ، $f'(x) < 0$ ؛ و به ازای $x > 3$ ، $f'(x) > 0$. در هر يك از حالت های زیر که f باید در شرایطی دیگر نیز صدق کند، يك نمودار ممکن f را رسم کنید. (الف) f' در 3 پیوسته باشد؛ (ب) اگر $x < 3$ ، $f'(x) = -1$ و اگر $x > 3$ ، $f'(x) = 1$ ؛ (پ) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1$ و اگر $a \neq b$ ، $f'(a) \neq f'(b)$.

۴۷. اگر p و q دو عدد صحیح و مثبت بزرگتر از ۱ باشند و $f(x) = x^p(1-x)^q$ ، ثابت کنید که (الف) اگر p زوج باشد، f در 0 يك مقدار مینیمم نسبی دارد؛ (ب) اگر q زوج باشد، f در 1 يك مقدار مینیمم نسبی دارد؛ (پ) صرف نظر از اینکه p و q فرد باشند یا زوج، f در $p/(p+q)$ يك مقدارماکسیمم نسبی دارد.

۴۸. فرض کنید f در هر عدد واقع در بازه بسته $[a, b]$ مشتق پذیر باشد. ثابت کنید که اگر $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ ، در بازه باز (a, b) عددی چون c وجود دارد که $f'(c) = 0$.

۴۹. اگر k يك عدد صحیح و مثبت فرد باشد و $f(x) = x^k$ ، نشان دهید که f هیچ اکسترمم نسبی ندارد.

۵۰. ثابت کنید که اگر f روی $[a, b]$ صعودی و g نیز روی $[f(a), f(b)]$ صعودی باشد، آنگاه $f \circ g$ روی $[a, b]$ وجود دارد، و $f \circ g$ روی $[a, b]$ صعودی است.

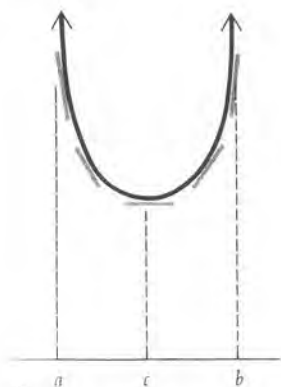
۵۱. تابعی چون f روی يك بازه I صعودی است. ثابت کنید که (الف) اگر $f(x) = -g(x)$ ، آنگاه g روی I نزولی است؛ (ب) اگر روی I ، $h(x) = 1/f(x)$ و $f'(x) > 0$ ، آنگاه h روی I نزولی است.

۶.۴ آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای نسبی و بررسی بیشتر اکسترممهای مطلق

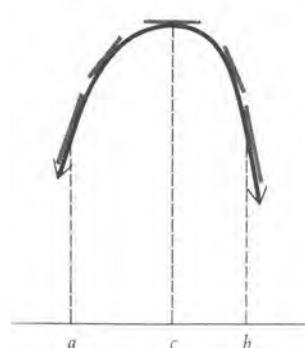
در بخش ۵.۴ آموختیم که با بررسی علامت جبری f' به ازای اعدادی حول يك عدد بحرانی c ، معین کنیم که تابع f در این عدد يك مقدارماکسیمم نسبی یا يك مقدارمینیمم نسبی دارد یا نه. آزمون دیگر برای اکسترمم نسبی، آزمونی است که صرفاً عدد بحرانی c را مورد استفاده قرار می دهد. قبل از اینکه این آزمون را به صورت قضیه بنویسیم، آن را به طور هندسی و غیررسمی تشریح می کنیم تا احساسی شهودی از موضوع به دست آورید. فرض کنید f تابعی باشد که بر بازه باز (a, b) که c را در بردارد، f' و f'' وجود داشته باشند و $f'(c) = 0$ ؛ علاوه بر این، فرض کنید که f'' روی (a, b) منفی

باشد. چون روی (a, b) ، $f''(x) < 0$ ، از قضیه ۳.۵.۴ نتیجه می‌شود که f' روی $[a, b]$ نزولی است. چون ضریب زاویه خط مماس بر نمودار f در يك نقطه، برابر است با مقدار f' به ازای طول این نقطه، نتیجه می‌گیریم که ضریب زاویه خط مماس روی $[a, b]$ نزولی است. شکل ۱.۶.۴ نمودار تابعی با این ویژگی‌ها را نشان می‌دهد. قسمتهایی از چند خط مماس را می‌توان در شکل دید. مشاهده کنید که ضریب زاویه خط مماس روی $[a, b]$ نزولی است، و نیز به این نکته توجه کنید که f در c ، که $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ ، دارای يك مقدار ماکسیمم نسبی است. حال فرض کنید تابعی چون f تمام ویژگی‌های تابع مذکور در پاراگراف قبل را دارا باشد بجز اینکه f'' روی (a, b) مثبت باشد؛ آنگاه، چون روی (a, b) ، $f''(x) > 0$ ، از قضیه ۳.۵.۴ نتیجه می‌شود که تابع f' روی $[a, b]$ صعودی است. پس، ضریب زاویه خط مماس، روی $[a, b]$ صعودی است. نمودار تابعی چون f که دارای این ویژگی‌هاست در شکل ۲.۶.۴ نشان داده شده است. قسمتهایی از چند خط مماس را نیز که ضریب زاویه‌هایشان روی $[a, b]$ صعودی هستند در شکل می‌بینید. در c که $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ ، تابع f دارای يك مقدار مینیمم نسبی است.

نتایج دوبارا گراف قبل، در آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای نسبی به شرح زیر خلاصه می‌شوند.



شکل ۲.۶.۴



شکل ۱.۶.۴

۱.۶.۴ قضیه (آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای نسبی) فرض کنید c يك عدد بحرانی يك تابع f باشد، و $f'(c) = 0$ ؛ و نیز فرض کنید به ازای هر x در يك بازه باز شامل c ، $f'(x)$ وجود داشته باشد. به علاوه، تصور کنید $f''(c)$ نیز وجود دارد. آنگاه داریم

(i) اگر $f''(c) < 0$ ، آنگاه f در c يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد.

(ii) اگر $f''(c) > 0$ ، آنگاه f در c يك مقدار مینیمم نسبی دارد.

اثبات (i) بنا به فرض $f''(c)$ وجود دارد و منفی است؛ پس

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

لذا، بنا به قضیه ۲.۱۵.۲ بازه بازی چون I شامل c وجود دارد که به ازای هر $x \in I$ ،

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0. \quad (۱)$$

فرض کنید I_1 بازه باز متشکل از تمام x های در I باشد که $x < c$ ؛ بنا بر این c نقطه انتهایی راست بازه I_1 است. فرض کنید I_2 بازه باز متشکل از تمام x های در I باشد که $x > c$ ؛ لذا c نقطه انتهایی چپ بازه I_2 است.

پس اگر x در I_1 باشد، $0 < (x - c)$ ، و از نامساوی (۱) نتیجه می شود که $0 < [f'(x) - f'(c)]$ ، یا $f'(x) > f'(c)$. اگر x در I_2 باشد، $0 > (x - c)$ ، و از (۱) نتیجه می شود که $0 > [f'(x) - f'(c)]$ ، یا $f'(x) < f'(c)$.

اما چون $f'(c) = 0$ ، نتیجه می گیریم که اگر x در I_1 باشد، $f'(x) > 0$ ، و اگر x در I_2 باشد، $f'(x) < 0$. بنا بر این وقتی x حول c افزایش می یابد، علامت جبری $f'(x)$ از مثبت به منفی تغییر می کند؛ و لذا بنا بر قضیه ۴.۵.۴، f در c دارای یک مقدار ماکسیمم نسبی است.

اثبات قسمت (ii) شبیه اثبات (i) است و به عنوان تمرین واگذار می شود (تمرین ۴۲ را ببینید). □

مثال ۱ فرض کنید $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$. با استفاده از آزمون مشتق دوم ماکسیممهای نسبی و مینیممهای نسبی f را بیابید.

حل

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

$$f'(x) = 0 \text{ می نویسیم}$$

$$4x(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2 \quad x = 1.$$

پس -2 ، 0 ، و 1 اعداد بحرانی f هستند. با استفاده از علامت مشتق دوم در اعداد بحرانی، تعیین می کنیم که f در هر یک از این اعداد اکسترمم نسبی دارد یا خیر. این نتایج را در جدول ۱.۶.۴ خلاصه می کنیم.

جدول ۱۰۶۰۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x = -۲$	$-\frac{۳۲}{۳}$	$\circ$	$+$	f يك مقدار مینیمم نسبی دارد
$x = ۰$	$\circ$	$\circ$	$-$	f يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد
▲ $x = ۱$	$-\frac{۵}{۳}$	$\circ$	$+$	f يك مقدار مینیمم نسبی دارد

مثال ۲ با استفاده از آزمون مشتق دوم اکسترممهای نسبی تابع سینوسی را بیابید.

حل فرض کنید

$$f(x) = \sin x$$

آنگاه

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x.$$

به ازای هر x ، $f'(x)$ وجود دارد. اعداد بحرانی با حل $f'(x) = ۰$ به دست می آیند.

$$\cos x = ۰$$

نتیجه می دهد

$$x = \frac{1}{4}\pi + n\pi \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \dots$$

با پیدا کردن علامت مشتق دوم در این اعداد بحرانی تعیین می کنیم که آیا به ازای این اعداد اکسترمم نسبی به دست می آید یا نه. اگر n يك عدد صحیح زوج باشد، آنگاه

$$f''\left(\frac{1}{4}\pi + n\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{4}\pi + n\pi\right)$$

$$= -\sin\frac{1}{4}\pi$$

$$= -۱.$$

اگر n يك عدد صحیح فرد باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
 f''\left(\frac{1}{4}\pi + n\pi\right) &= -\sin\left(\frac{1}{4}\pi + n\pi\right) \\
 &= -\sin\left(\frac{3}{4}\pi + (n-1)\pi\right) \\
 &= -\sin\frac{3}{4}\pi \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

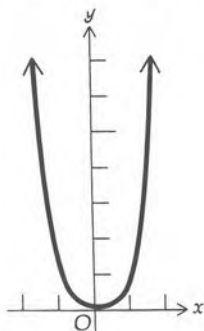
نتایج استفاده از آزمون مشتق دوم را در جدول ۲.۶.۴ خلاصه می کنیم.

جدول ۲.۶.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x = \frac{1}{4}\pi + n\pi$ (n يك عدد صحیح زوج است)	۱	۰	—	f يك مقدار ماكسيم نسبی دارد
$x = \frac{1}{4}\pi + n\pi$ ▲ (n يك عدد صحیح فرد است)	-۱	۰	+	f يك مقدار مينيم نسبی دارد

اگر علاوه بر اینکه $f'(c) = 0$ داشته باشیم $f''(c) = 0$ ، درمورد اکسترمم نسبی f در c هیچ نتیجه ای نمی توان گرفت. نمونه های زیر این گفته را توجیه می کنند.

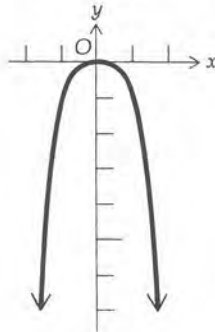
○ نمونه ۱ اگر $f(x) = x^4$ ، آنگاه $f'(x) = 4x^3$ و $f''(x) = 12x^2$. پس $f'(0) = 0$ ،



شکل ۳.۶.۴

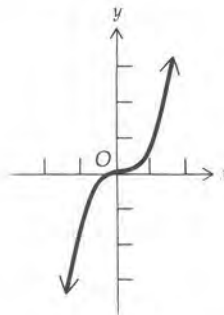
$f'(0)$ و $f''(0)$ همه صفر هستند. یا استفاده از آزمون مشتق اول می بینیم که f در صفر يك مقدار مینیمم نسبی دارد. نمودار f در شکل ۳.۶.۴ رسم شده است.

○ نمونه ۲ اگر $g(x) = -x^4$ ، آنگاه $g'(x) = -4x^3$ و $g''(x) = -12x^2$. بنابراین، $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$. در این مورد، آزمون مشتق اول نشان می دهد که g در صفر دارای يك مقدار ماکسیمم نسبی است. شکل ۴.۶.۴ نمودار g را نشان می دهد.



شکل ۴.۶.۴

○ نمونه ۳ اگر $h(x) = x^3$ ، آنگاه $h'(x) = 3x^2$ و $h''(x) = 6x$ ؛ بنابراین، $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$. تابع h در صفر اکسترمم نسبی ندارد؛ زیرا اگر $x < 0$ ، $h(x) < h(0)$ ؛ و اگر $x > 0$ ، $h(x) > h(0)$. شکل ۵.۶.۴ نمودار h را نشان می دهد.



شکل ۵.۶.۴

در نمونه های ۱، ۲، و ۳ سه تابع مثال زده ایم که مشتق دوم هر سه، به ازای عددی که مشتق اول را صفر می کند، صفر است؛ با این وجود، در آن عدد یکی از توابع دارای يك مقدار ماکسیمم نسبی است، دیگری دارای يك مقدار مینیمم نسبی است، و سومی نه دارای يك مقدار ماکسیمم نسبی است و نه دارای يك مقدار مینیمم نسبی است.

قضیهٔ اکسترمم (قضیهٔ ۹.۲.۴) برای تابعی که روی بازهٔ بسته‌ای پیوسته باشد وجود يك مقدارما کسیمم مطلق و يك مقدارمینیمم مطلق را تضمین می‌کند. حال به بررسی چند تابع می‌پردازیم که بر بازه‌هایی تعریف می‌شوند که قضیهٔ اکسترمم در مورد آن‌ها به کار نمی‌رود، ولی ممکن است اکسترمم مطلق داشته باشند یا نداشته باشند.

مثال ۳ فرض کنید

$$f(x) = \frac{x^2 - 27}{x - 6}.$$

اکسترممهای مطلق f روی بازهٔ $[0, 6]$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل f روی بازهٔ $[0, 6]$ پیوسته است زیرا تنها ناپیوستگی f در 6 است که در بازهٔ مزبور نیست.

$$f'(x) = \frac{2x(x-6) - (x^2 - 27)}{(x-6)^2} = \frac{x^2 - 12x + 27}{(x-6)^2} = \frac{(x-3)(x-9)}{(x-6)^2}.$$

به ازای همهٔ مقادیر x در $[0, 6]$ ، $f'(x)$ وجود دارد، و وقتی $x = 3$ یا $x = 9$ ، $f'(x) = 0$ ؛ لذا تنها عدد بحرانی f در بازهٔ $[0, 6]$ عدد ۳ است. جهت تعیین اکسترمم نسبی f در ۳ از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. خلاصهٔ این نتایج در جدول ۳.۶.۴ آمده است.

جدول ۳.۶.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	نتیجه
$0 \leq x < 3$		+	f صعودی است
$x = 3$	۶	۰	f يك مقدارما کسیمم نسبی دارد
$3 < x < 6$		-	f نزولی است

چون f در ۳ يك مقدارما کسیمم نسبی دارد، f بر بازهٔ $[0, 3]$ صعودی است، و روی بازهٔ $(3, 6]$ نزولی است، در نتیجه f بر $[0, 6]$ يك ما کسیمم مطلق در ۳ دارد که مقدارش $f(3)$ ، یعنی ۶ است. توجه می‌کنیم که $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$ ، و نتیجه می‌گیریم که f روی $[0, 6]$ هیچ مقدارمینیمم مطلق ندارد. ▲

مثال ۴ فرض کنید

$$f(x) = \frac{-x}{(x^2+6)^2}.$$

اکسترمهای مطلق f روی $(0, +\infty)$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل f به ازای جميع مقادیر x پیوسته است.

$$f'(x) = \frac{-1(x^2+6)^2 + 2x^2(x^2+6)}{(x^2+6)^4} = \frac{-(x^2+6) + 2x^2}{(x^2+6)^3} = \frac{3x^2-6}{(x^2+6)^3}.$$

$f'(x)$ به ازای جميع مقادیر x وجود دارد. می نویسیم $f'(x) = 0$ و داریم $x = \pm\sqrt{2}$ ؛ لذا $\sqrt{2}$ تنها عدد بحرانی f در $(0, +\infty)$ است. آزمون مشتق اول را در عدد $\sqrt{2}$ به کار می بریم و نتایج را در جدول ۴.۶.۴ خلاصه می کنیم.

جدول ۴.۶.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	نتیجه
$0 < x < \sqrt{2}$		-	f نزولی است
$x = \sqrt{2}$	$-\frac{1}{64}\sqrt{2}$	0	f يك مقدار مینیمم نسبی دارد
$\sqrt{2} < x$		+	f صعودی است

چون تابع f در $\sqrt{2}$ يك مقدار مینیمم نسبی دارد و روی $(0, \sqrt{2})$ نزولی و روی $(\sqrt{2}, +\infty)$ صعودی است، پس f روی $(0, +\infty)$ در $\sqrt{2}$ يك مقدار مینیمم مطلق دارد. مقدار مینیمم مطلق $-\sqrt{2}/64$ است. f روی $(0, +\infty)$ هیچ مقدار ماکسیمم مطلق نمی ندارد. ▲

در مورد بعضی از توابع برای اینکه تعیین کنیم آیا يك اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق هم هست یا نه، می توانیم قضیه زیر را به کار ببریم.

۴.۶.۴ قضیه فرض کنید تابعی چون f بر بازه ای مانند I که يك عدد c را در بر دارد پیوسته باشد. اگر $f(c)$ يك اکسترمم نسبی f روی I باشد و c تنها عدد در I باشد که به ازای آن f يك اکسترمم نسبی دارد، آنگاه $f(c)$ يك اکسترمم مطلق f روی I هم هست. علاوه بر این

(i) اگر $f(c)$ يك مقدار ماکسیمم نسبی f روی I باشد، آنگاه $f(c)$ يك مقدار

ما کسیمم مطلق f روی I است؛
(ii) اگر $f(c)$ يك مقدار مینیمم نسبی f روی I باشد، آنگاه $f(c)$ يك مقدار مینیمم مطلق f روی I است.

اثبات قسمت (i) را ثابت می کنیم. اثبات قسمت (ii) شبیه آن است.
چون $f(c)$ يك مقدار ماکسیمم نسبی f روی I است، پس بنا بر تعریف ۱۰۲.۴ بازه J بازی چون J ، که شامل c است و $J \subset I$ ، وجود دارد که

$$f(c) \geq f(x), \quad x \in J$$

چون c تنها عدد در I است که به ازای آن f يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد، نتیجه می گیریم که

$$f(c) > f(k), \quad k \neq c \text{ و } k \in J \quad (۲)$$

برای اینکه نشان دهیم $f(c)$ يك مقدار ماکسیمم مطلق f روی I است نشان می دهیم که اگر d عددی از I باشد و $d \neq c$ ، آنگاه $f(c) > f(d)$. فرض می کنیم

$$f(c) \leq f(d) \quad (۳)$$

و نشان می دهیم که این فرض به يك تناقض منجر می شود. چون $d \neq c$ ، آنگاه یا $c < d$ یا $d < c$. اکنون حالت $c < d$ را در نظر می گیریم (اگر $d < c$ ، اثبات شبیه همین حالت است).

چون f روی I پیوسته است، پس این تابع روی بازه بسته $[c, d]$ نیز پیوسته است. لذا بنا بر قضیه ۹۰۲.۴، f روی $[c, d]$ يك مقدار مینیمم مطلق دارد. فرض کنید این مینیمم مطلق به ازای e که $c \leq e \leq d$ ، به دست آید. از نامساوی (۲) نتیجه می گیریم که $e \neq c$ ، و از نامساویهای (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که $e \neq d$. در نتیجه، $c < e < d$ ، و لذا f در e يك مقدار مینیمم نسبی دارد. اما این نتیجه فرض ما را، که c تنها عدد در I است که به ازای آن f يك اکسترمم نسبی دارد، نقض می کند. پس، این فرض که $f(c) \leq f(d)$ ، غلط است. بنابراین اگر $d \in I$ و $d \neq c$ داریم $f(c) > f(d)$ ، و در نتیجه $f(c)$ يك مقدار ماکسیمم مطلق f بر I است. $\square$

مثال ۵ فرض کنید $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 3$. اکسترممهای مطلق f روی $(-\infty, +\infty)$ را، در صورت وجود، بیابید.

حل

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 3$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 12$$

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 24.$$

به ازای جميع مقادیر x ، $f'(x)$ وجود دارد. می نویسیم $f'(x) = 0$ و داریم

$$12(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0. \quad (4)$$

برای اینکه نشان دهیم $x - 1$ يك عامل سمت چپ (۴) است از تقسیم چندجمله‌ایها استفاده می‌کنیم، ولذا

$$12(x - 1)(x^2 - x + 1) = 0. \quad (5)$$

چون معادله $x^2 - x + 1 = 0$ تنها ریشهٔ انگاری دارد، تنها جواب حقیقی (۵)، عدد ۱ است، بنابراین $f'(1) = 0$. برای اینکه ببینیم $f(1)$ يك اکسترمم نسبی هست یا نه، از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم؛ نتایج این آزمون در جدول ۵.۶.۴ خلاصه شده است.

جدول ۵.۶.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x = 1$	-۲	۰	+	f يك مقدارمینیمم نسبی دارد

تابع f روی $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است، و تنها اکسترمم نسبی f روی $(-\infty, +\infty)$ در $x = 1$ است. بنابراین از قضیهٔ ۲.۶.۴ (ii) نتیجه می‌گیریم که -۲ ، یعنی مقدارمینیمم نسبی f ، مقدارمینیمم مطلق f هم هست. ▲

تمرینهای ۶.۴

در تمرینهای ۱ تا ۲۴، با استفاده از آزمون مشتق دوم، در صورتی که استفاده از آن ممکن باشد، اکسترممهای نسبی تابع داده شده را بیابید. اگر آزمون مشتق دوم نتواند مورد استفاده قرارگیرد، آزمون مشتق اول را به‌کار ببندید.

$$1. \quad f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad 2. \quad g(x) = 7 - 6x - 3x^2$$

$$3. \quad f(x) = -4x^2 + 3x^3 + 18x \quad 4. \quad h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 27$$

$$5. \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3 \quad 6. \quad f(y) = y^3 - 5y + 6$$

$$7. \quad f(z) = (4 - z)^4 \quad 8. \quad G(x) = (x + 2)^3$$

$$9. \quad h(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^3 \quad 10. \quad f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^2$$

$$11. \quad F(t) = \cos 3t \quad 12. \quad f(x) = \sin x + \cos x$$

$$g(t) = (t-2)^{1/2}. ۱۴$$

$$f(x) = x(x+2)^2. ۱۳$$

$$f(x) = x(x-1)^2. ۱۶$$

$$f(x) = 4x^{1/2} + 4x^{-1/2}. ۱۵$$

$$f(x) = x\sqrt{8-x^2}. ۱۸$$

$$h(x) = x\sqrt{x+3}. ۱۷$$

$$g(x) = \frac{9}{x} + \frac{x^2}{9}. ۲۰$$

$$f(x) = x - \cos x. ۱۹$$

$$h(x) = (x+2)(x-1)^2. ۲۲$$

$$F(x) = 6x^{1/2} - x^{2/2}. ۲۱$$

$$G(x) = x^{2/2}(x-4)^2. ۲۴$$

$$h(x) = 5x^2 - 3x^5. ۲۳$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۸، اکستریمهای مطلق توابع مفروض روی بازه‌های داده شده را، در صورت وجود، بیابید.

$$f(x) = x^2; (-3, 2]. ۲۵$$

$$g(x) = x^2 + 2x^2 - 4x + 1; (-3, 2). ۲۶$$

$$F(x) = \frac{x+2}{x-2}; [-4, 4]. ۲۷$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x+3}; [-4, -1]. ۲۸$$

$$g(x) = 4x^2 - 2x + 1; (-\infty, +\infty). ۲۹$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5; (-\infty, 0). ۳۰$$

$$f(x) = (x-1)^{1/2}; (-\infty, +\infty). ۳۱$$

$$G(x) = (x-5)^{2/2}; (-\infty, +\infty). ۳۲$$

$$f(x) = x^2 + x^2 - \frac{9}{2}x^2 + 2x + 1; (-\infty, +\infty). ۳۳$$

$$h(x) = 3x^2 - 2x^2 - 12x^2 - 6x - 1; (-\infty, +\infty). ۳۴$$

$$g(x) = \frac{x^2+7}{x-3}; [-3, 3]. ۳۵$$

$$f(x) = \frac{x^2-30}{x-4}; (-\infty, 4). ۳۶$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 4)^{3/2}}; [0, +\infty) \quad ۳۷$$

$$g(x) = \sqrt{x^4 - 4x + 7}; (-\infty, +\infty) \quad ۳۸$$

۳۹. فرض کنید که $\sqrt{2}/2$ و $\sqrt{3}/2$ - اعداد بحرانی تابعی چون f باشند و $f''(x) = x[(x^2/2) + 1]$. در هر يك از این اعداد تعیین کنید که آیا f يك اكسترمم نسبی دارد یا نه؛ و اگر دارد، آیا این اكسترمم نسبی، يك ماكسیمم نسبی است یا يك مینیمم نسبی.

۴۰. با فرض اینکه $r > 0$ و $r \neq 1$ ، تابع $f(x) = x^r - rx + k$ داده شده است. ثابت کنید که (الف) اگر $0 < r < 1$ ، f در يك مقدار ماكسیمم نسبی دارد؛ (ب) اگر $r > 1$ ، f در يك مقدار مینیمم نسبی دارد.

۴۱. $f(x) = x^2 + 3rx + 5$ مفروض است. ثابت کنید که (الف) اگر $r > 0$ ، f هیچ اكسترمم نسبی ندارد؛ (ب) اگر $r < 0$ ، f هم يك مقدار ماكسیمم نسبی دارد و هم يك مقدار مینیمم نسبی.

۴۲. قضیه ۱۰.۶.۴ (ii) را اثبات کنید.

۴۳. $f(x) = x^2 + rx^{-1}$ مفروض است. ثابت کنید که بدون توجه به مقدار r ، f يك مقدار مینیمم نسبی دارد ولی هیچ مقدار ماكسیمم نسبی ندارد.

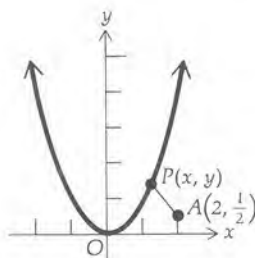
۴۴. اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با استفاده از آزمون مشتق دوم نشان دهید که اگر $a < 0$ ، f يك مقدار ماكسیمم نسبی دارد. عددی را که به ازای آن، مقدار ماكسیمم نسبی به دست می آید بیابید.

۷.۴ کاربردهای دیگری از اكسترممهای مطلق

در بخش ۳.۴ در باره کاربرد اكسترممهای مطلق توابع پیوسته روی يك بازه بسته، بحث کردیم و جهت حل مسائل از قضیه اكسترمم استفاده نمودیم. حال به بحث درباره کاربرد اكسترممهای مطلق، در مواردی که قضیه اكسترمم ثمر بخش نیست، می پردازیم. در این گونه موارد، مثالهای زیر دستور کار را نشان می دهند.

مثال ۱ کوتاهترین فاصله نقطه $A(2, 1/2)$ تا يك نقطه روی سهمی $y = x^2$ را بیابید، و نقطه ای از سهمی را که نزدیکترین نقطه به A است پیدا کنید.

حل فرض کنید فاصله نقطه $A(2, 1/2)$ تا نقطه ای چون $P(x, y)$ روی سهمی، z واحد باشد. به شکل ۱۰.۷.۴ رجوع کنید.



شکل ۱۰۷.۴

$$z = \sqrt{(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

چون $P(x, y)$ روی سهمی است، مختصاتش در معادله $y = x^2$ صدق می کنند. اگر در (۱) به جای y این مقدار را قرار دهیم، z به صورت تابعی از x درمی آید و داریم

$$z(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$z(x) = \sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}. \quad (2)$$

چون P می تواند هر نقطه دلخواهی از سهمی باشد، x يك عدد حقیقی دلخواه است. می خواهیم مقدار مینیمم مطلق z روی $(-\infty, +\infty)$ را بیابیم.

$$z'(x) = \frac{1}{2} (4x^3 - 4) \left(x^4 - 4x + \frac{17}{4}\right)^{-1/2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}}.$$

$z'(x)$ به ازای جميع مقادیر x وجود دارد زیرا مخرج، $z(x)$ است که هرگز صفر نمی شود. در نتیجه، اعداد بحرانی با قرار دادن $z'(x) = 0$ به دست می آیند. تنها ریشه حقیقی ۱ است؛ پس ۱ تنها عدد بحرانی z است. از آزمون مشتق اول استفاده، و نتایج را در جدول ۱۰۷.۴ خلاصه می کنیم.

چون z در ۱ يك مقدار مینیمم نسبی دارد، و چون z روی $(-\infty, 1)$ نزولی است و روی $(1, +\infty)$ صعودی است، پس در ۱ دارای مقدار مینیمم مطلق $\sqrt{5}/2$ است. لذا نزدیکترین نقطه سهمی به A عبارت است از $(1, 1)$.

می توانیم نشان دهیم که نقطه $A(2, 1/2)$ روی خط قائم در $(1, 1)$ بر نمودار سهمی است. چون ضریب زاویه خط مماس در نقطه دلخواه (x, y) از سهمی، $2x$ است، ضریب زاویه خط مماس در $(1, 1)$ ، ۲ است. بنابراین، ضریب زاویه خط قائم در $(1, 1)$ ،

جدول ۱۰۷۰۴

	$z(x)$	$z'(x)$	نتیجه
$x < 1$		-	z نزولی است
$x = 1$	$\frac{1}{3}\sqrt{5}$	۰	z يك مقدار مینیمم نسبی دارد
$1 < x$		+	z صعودی است

۱/۲ - است که باضرب زاویه خط ماربر $A(2, 1/2)$ و $(1, 1)$ برابر است. ▲

مثال ۲ حجم جعبه سر بسته ای که قاعده آن يك مربع است باید ۲۰۰۰ اینچ مکعب باشد. بهای هر اینچ مربع از جنسی که برای سطوح بالا و پایین جعبه به کار می رود، ۳ تومان است و بهای هر اینچ مربع از جنسی که برای بدنه به کار می رود ۱۵ تومان است. اگر بخواهیم بهای کل جنس به کار رفته حداقل باشد، ابعاد جعبه را بیابید.

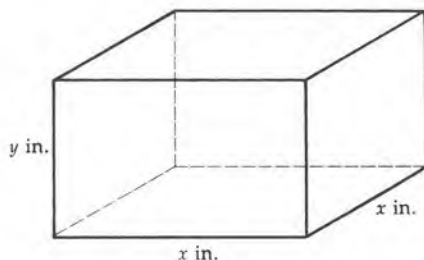
حل فرض کنید طول يك ضلع قاعده x اینچ، ارتفاع جعبه y اینچ، و بهای کل جنس لازم C تومان باشد. شکل ۲۰۷۰۴ را ببینید. مجموع مساحت های بالا و پایین $2x^2$ اینچ مربع، و مساحت بدنه $4xy$ اینچ مربع است؛ لذا

$$C = 3(2x^2) + \frac{3}{4}(4xy). \quad (3)$$

چون حجم جعبه برابر با حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است، داریم

$$x^2 y = 2000. \quad (4)$$

اگر از (۴)، y را بر حسب x محاسبه کنیم و آن را در (۳) قرار دهیم، C به صورت تابعی از x به دست می آید



شکل ۲۰۷۰۴

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x} \quad (5)$$

قلمرو C ، $(0, +\infty)$ است، و C روی قلمروش پیوسته است. از (۵) داریم

$$C'(x) = 12x - \frac{12000}{x^2} \quad (6)$$

وقتی $x=0$ ، $C'(x)$ وجود ندارد، ولی 0 به قلمرو C تعلق ندارد. بنابراین، اعداد بحرانی فقط آنهایی خواهند بود که از $C'(x)=0$ به دست می آیند. تنها جواب حقیقی 10 است؛ لذا 10 تنها عدد بحرانی است. برای اینکه ببینیم آیا از $x=10$ يك مينيمم نسبی حاصل می شود یا نه، از آزمون مشتق دوم استفاده می کنیم. از (۶) نتیجه می شود که

$$C''(x) = 12 + \frac{24000}{x^3}$$

نتایج آزمون مشتق دوم را در جدول ۲.۷.۴ خلاصه می کنیم.

جدول ۲.۷.۴

	$C'(x)$	$C''(x)$	نتیجه
$x=10$	0	$+$	C يك مقدار مينيمم نسبی دارد

چون C روی قلمروش، $(0, +\infty)$ ، پیوسته است، و تنها اکسترمم نسبی C روی $(0, +\infty)$ در $x=10$ است، از قضیه ۲.۶.۴ (ii) نتیجه می گیریم که این مقدارمینیمم نسبی، مقدارمینیمم مطلق C نیز هست. بنابراین، بهای کل جنس لازم حداقل خواهد بود وقتی که طول ضلع قاعده جعبه 10 اینچ و ارتفاع آن 20 اینچ باشد. ▲

در مثالهای فوق و در تمرینهای بخش ۳.۴ متغیری را که می خواستیم يك اکسترمم مطلق برایش بیابیم به صورت تابعی از تنها يك متغیر بیان کردیم. بعضی از اوقات استفاده از این روش یا خیلی مشکل است، یا مستلزم کار زیاد است، و گاهی هم غیر ممکن است. غالباً اطلاعات داده شده ما را قادر می سازند که دو معادله سه مجهولی به دست آوریم. به جای حذف یکی از متغیرها ممکن است سودمندتر باشد که به طور ضمنی مشتق گیری کنیم. مثال زیر این روش را روشن می کند.

مثال ۳ يك قوطی حلبی سر بسته با حجم مشخص باید به شکل يك استوانه مستدیر قائم باشد. اگر بخواهیم در ساخت آن کمترین مقدار جنس مصرف شود، نسبت ارتفاع به

شعاع قاعده‌اش را بیابید.

حل می‌خواهیم ارتباط بین ارتفاع و شعاع قاعده استوانه مستدیر قائمی را، که حجمش عدد مشخصی است و مساحت کل رویه‌اش مینیمم مطلق است، پیدا کنیم. بنا بر این حجم استوانه را یک عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

فرض کنید حجم این استوانه بر حسب واحد مکعب، V (یک مقدار ثابت) باشد. حال متغیرها را تعریف می‌کنیم.

فرض کنید شعاع قاعده استوانه r واحد باشد؛ $r > 0$. و نیز ارتفاع استوانه h واحد باشد؛ $h > 0$. به علاوه، فرض کنید مساحت کل رویه استوانه S واحد مربع باشد. معادلات زیر را داریم

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (7)$$

$$V = \pi r^2 h. \quad (8)$$

چون V یک مقدار ثابت است، از (۸) می‌توانیم r یا h را بر حسب دیگری پیدا کنیم و حاصل را در (۷) قرار دهیم، تا S به صورت تابعی از یک متغیر به دست آید. روش دیگر این است که S را به عنوان تابعی از دو متغیر r و h تلقی کنیم؛ البته r و h از یکدیگر مستقل نیستند. و این بدین معنی است که اگر r را به عنوان متغیر مستقل انتخاب کنیم، آنگاه S به r بستگی دارد؛ و نیز h به r بستگی دارد.

با در نظر گرفتن این نکته که h تابعی از r است، از S و V نسبت به r مشتق می‌گیریم

$$D_r S = 2\pi r + 2\pi h + 2\pi r D_r h \quad (9)$$

و

$$D_r V = 2\pi r h + \pi r^2 D_r h. \quad (10)$$

چون V مقداری ثابت است، $D_r V = 0$ ؛ بنابراین، از معادله (۱۰) داریم

$$2\pi r h + \pi r^2 D_r h = 0$$

که $r \neq 0$. طرفین را بر r تقسیم، و $D_r h$ را محاسبه می‌کنیم؛ داریم

$$D_r h = -\frac{2h}{r}. \quad (11)$$

از (۱۱) در (۹) قرار می‌دهیم. و در نتیجه،

$$D_r S = 2\pi \left[2r + h + r \left(-\frac{2h}{r} \right) \right] \\ D_r S = 2\pi (2r - h). \quad (12)$$

برای اینکه دریابیم چه موقعی S يك مقدار مینیمم نسبی دارد، می نویسیم $D_r S = 0$. در نتیجه $2r - h = 0$ و از اینجا

$$r = \frac{1}{2}h.$$

برای اینکه معلوم کنیم آیا این ارتباط بین r و h ، S را يك مینیمم نسبی می سازد یا نه، آزمون مشتق دوم را به کار می بندیم. در این صورت، از (۱۲) داریم

$$D_r^2 S = 2\pi(2 - D_r h). \quad (13)$$

از (۱۱) در (۱۳) قرار می دهیم و داریم

$$D_r^2 S = 2\pi \left[2 - \left(\frac{-2h}{r} \right) \right] = 2\pi \left(2 + \frac{2h}{r} \right).$$

نتایج آزمون مشتق دوم را در جدول ۳۰۷۰۴ خلاصه می کنیم.

جدول ۳۰۷۰۴

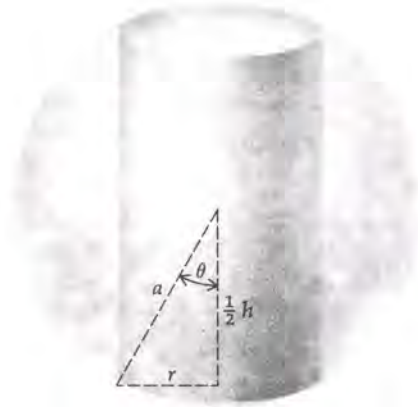
	$D_r S$	$D_r^2 S$	نتیجه
$r = \frac{1}{2}h$	۰	+	S يك مقدار مینیمم نسبی دارد

بنابر (۷) و (۸)، S روی $(0, +\infty)$ يك تابع پیوسته از r است. چون تنها اکسترمم نسبی S روی $(0, +\infty)$ در $r = h/2$ است، از قضیه ۲۰۶۰۴ (ii) نتیجه می گیریم که S در $r = h/2$ يك مقدار مینیمم مطلق دارد. بنابر این مساحت کل رویه قوطی حلبی با حجم مشخص، کمترین مقدار ممکن خواهد بود هر گاه نسبت ارتفاع به شعاع قاعده اش ۲ باشد. ▲

گاه مسائل هندسی مربوط به اکسترمهای مطلق را می توان با استفاده از توابع مثلثاتی ساده تر حل کرد. مثال زیر این واقعیت را روشن می کند.

مثال ۴ می خواهیم يك استوانه مستدیر قائم را در يك کره با شعاع مفروض محاط کنیم. نسبت ارتفاع به شعاع قاعده استوانه چه باشد تا مساحت رویه جانبی حداکثر ممکن باشد؟

حل به شکل ۳۰۷۰۴ رجوع کنید. اندازه شعاع کره را a می گیریم.



شکل ۳.۷.۴

فرض کنید اندازه زاویه‌ای که رأس آن در مرکز کره قرار دارد، و مقابل به يك شعاع استوانه است، θ رادیان، شعاع قاعده استوانه r واحد، ارتفاع استوانه h واحد، و مساحت رویه جانبی آن S واحد مربع باشد. از شکل ۳.۷.۴ دیده می‌شود که

$$h = 2a \cos \theta \quad \text{و} \quad r = a \sin \theta$$

چون $S = 2\pi r h$ ، داریم

$$S = 2\pi(a \sin \theta)(2a \cos \theta) = 2\pi a^2 (2 \sin \theta \cos \theta) = 2\pi a^2 \sin 2\theta.$$

لذا S تابعی از θ ، و قلمروش $(0, +\infty)$ است.

$$D_\theta S = 4\pi a^2 \cos 2\theta \quad \text{و} \quad D_\theta^2 S = -8\pi a^2 \sin 2\theta$$

می‌نویسیم $D_\theta S = 0$

$$\cos 2\theta = 0.$$

چون $0 < \theta < \pi/2$ ، داریم

$$\theta = \frac{1}{4}\pi.$$

برای اکسترممهای نسبی از آزمون مشتق دوم استفاده، و نتایج را در جدول ۴.۷.۴ خلاصه می‌کنیم.

S روی قلمروش پیوسته است، و چون فقط يك اکسترمم نسبی وجود دارد، از قضیه

جدول ۴.۷.۴

	$D_\theta S$	$D_\theta^2 S$	نتیجه
$\theta = \frac{1}{4}\pi$	۰	—	S يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد.

۲۰۶۴ (i) نتیجه می گیریم که مقدار ما کسیمم نسبی S ، مقدار ما کسیمم مطلق S نیز هست. وقتی $\theta = \pi/4$ ، داریم

$$r = a \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \quad h = 2a \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}a$$

لذا برای اینکه استوانه دارای بزرگترین مساحت رویه جانبی باشد، باید $h/r = 2$.

▲

تمرینهای ۷.۴

۱. می خواهیم دور زمین مستطیل شکلی به مساحت ۲۷۰۰ مترمربع را با نرده حصار بکشیم، و نیز بایک نرده اضافی آن را از وسط تقسیم کنیم. هزینه هر متر نرده وسطی ۶ دلار، و هزینه هر متر نرده دور زمین ۹ دلار است. اگر بخواهیم هزینه نرده کشی حداقل ممکن باشد، ابعاد زمین چه باید باشند؟

۲. می خواهیم قاعده مخزن سرباز مکعب مستطیل شکلی یک مربع و حجم آن ۱۲۵ متر مکعب باشد. بهای هر متر مربع جنس به کار رفته، برای قاعده آن ۲۰ دلار و برای جوانب آن ۱۰ دلار است. برای اینکه بهای کل جنس به کار رفته حداقل باشد، ابعاد مخزن چه باید باشند؟

۳. یک سازنده جعبه می خواهد جعبه های سر بسته ای با حجم مشخصی بسازد که قاعده آنها یک مستطیل باشد و طول این مستطیل سه برابر عرض آن باشد. ابعاد ارزاترین جعبه را بیابید.

۴. تمرین ۳ را با این شرط حل کنید که جعبه سرباز باشد.

۵. معادله خط مماس بر منحنی $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ چه باشد تا ضریب زاویه آن حداقل ممکن باشد؟

۶. نزدیکترین نقطه روی منحنی $y^2 - x^2 = 1$ به نقطه $(2, 0)$ را بیابید.

۷. نزدیکترین نقطه روی خط $y = 6 - 3x$ به مبدأ مختصات را بیابید.

۸. یک صفحه مکتوب باید ۲۴ اینچ مربع مطلب داشته باشد، و حاشیه بالا و پایین آن $\frac{1}{4}$ اینچ، و حاشیه راست و چپ آن ۱ اینچ باشد. ابعاد کوچکترین صفحه ای را که حائز این شرایط است بیابید.

۹. می خواهیم یک بنای یک طبقه بسازیم که کف مستطیل شکل آن ۱۳۲۰۰ فوت مربع مساحت داشته باشد؛ در جلو و عقب آن یک راهرو به عرض ۲۲ فوت، و در هر یک از دو پهلو آن یک راهرو به عرض ۱۵ فوت مورد نیاز است. ابعاد زمین با کمترین مساحت را بیابید که روی آن بتوان این بنا را ساخت.

۱۰. پنجره خاصی به شکل يك مستطیل است که در بالای آن يك نیمدایره قرار دارد. اگر بخواهیم با محیط مفروضی بیشترین مقدار نور از پنجره بگذرد، ابعاد این پنجره چه باید باشند؟

۱۱. تمرین ۱۰ را حل کنید با این شرط که نوری که از هر واحد مربع سطح نیمدایره پنجره می‌گذرد نصف نور گذرنده از هر واحد مربع سطح مستطیل باشد.

۱۲. مقاومت يك تیر به شکل مكعب مستطیل، متناسب است با پهنا و با مربع عمق آن. اگر بخواهیم از يك تنه درخت به شکل يك استوانه مستدیر قائم به شعاع a سانتیمتر تیری بتراییم، ابعاد مقاومترین تیر را به دست آورید.

۱۳. سختی يك تیر به شکل مكعب مستطیل متناسب است با پهنا و با مكعب عمق آن. اگر بخواهیم از يك تنه درخت به شکل يك استوانه مستدیر قائم به شعاع a سانتیمتر تیری بتراییم، ابعاد سخت‌ترین تیر را به دست آورید.

۱۴. مشخص شده است که اگر حقوق راننده و كمك راننده در نظر گرفته نشود، هزینه يك کامیون در حال کار $(x/300) + 8$ دلار در کیلومتر است، که در آن x سرعت کامیون بر حسب کیلومتر در ساعت است. اگر مجموع حقوق راننده و كمك راننده ۲۷ دلار در ساعت باشد، برای اینکه هزینه به حداقل برسد، سرعت متوسط کامیون چه باید باشد؟

۱۵. هزینه سوخت يك کشتی باری در ساعت $3/50 v$ دلار است، که در آن v سرعت کشتی بر حسب گره است. اگر هزینه‌های دیگر ۴۰۰ دلار در ساعت باشد، برای اینکه هزینه در هر میل دریایی به حداقل برسد، سرعت متوسط کشتی چه باید باشد؟

۱۶. دو هواپیمای A و B با يك ارتفاع به طور افقی در حال پروازند. هواپیمای B در جنوب شرقی هواپیمای A ، در ۲۰ کیلومتری شرق و در ۲۰ کیلومتری جنوب آن، قرار دارد. اگر هواپیمای A با سرعت ۱۶ کیلومتر در دقیقه مستقیماً به طرف مشرق و هواپیمای B با سرعت $64/3$ کیلومتر در دقیقه مستقیماً به طرف شمال در حال پرواز باشند، (الف) پس از چند ثانیه این دو هواپیما به نزدیکترین موضع نسبت به هم می‌رسند، و (ب) در نزدیکترین موضع، فاصله آنها چقدر است؟

۱۷. اتومبیلی سواری با آهنگ ۳۰ فوت بر ثانیه به يك تقاطع نزدیک می‌شود. وقتی که اتومبیل به ۱۲۰ فوتی تقاطع می‌رسد، کامیونی که با آهنگ ۴۰ فوت بر ثانیه در حرکت است از تقاطع می‌گذرد. اتومبیل و کامیون در جاده‌هایی هستند که برهم عمودند. چه مدت پس از عبور کامیون از تقاطع، این دو وسیله نقلیه در نزدیکترین موضع نسبت به هم هستند؟

۱۸. نیروی محرکه الکتریکی يك مولد جریان الکتریکی مستقیم E ولت، و مقاومت داخلی آن r اهم است؛ E و r ثابت فرض می‌شوند. اگر مقاومت خارجی R اهم باشد، کل مقاومت $(r+R)$ اهم است، و اگر توان P وات باشد، آنگاه

$$P = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}.$$

به ازای چه مقدار مقاومت خارجی، بیشترین توان مصرف خواهد شد؟

۱۹. یک کیف با حجم مشخصی باید به شکل یک مخروط مستدیر قائم باشد. اگر بخواهیم در ساختن کیف کمترین مقدار جنس مصرف شود، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن چه باید باشد؟

۲۰. می‌خواهیم مخروط مستدیر قائمی را در یک کره با شعاع مفروض محاط کنیم. برای اینکه حجم مخروط بیشترین مقدار ممکن باشد، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن را بیابید.

۲۱. می‌خواهیم مخروط مستدیر قائمی را بر یک کره با شعاع مفروض محیط کنیم. برای اینکه حجم مخروط کمترین مقدار ممکن باشد، نسبت ارتفاع به شعاع قاعده آن را بیابید.

۲۲. با استفاده از روش این بخش ثابت کنید که اگر معادله خطی چون l ، $Ax + By + C = 0$ باشد، کوتاهترین فاصله بین نقطه $P_1(x_1, y_1)$ تا خط l برابر است با $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. (دانه‌مایی: اگر فاصله P_1 تا یک نقطه $P(x, y)$ واقع بر l ، s واحد باشد، آنگاه وقتی که s^2 یک مقدار مینیمم مطلق است، s نیز یک مقدار مینیمم مطلق است.)

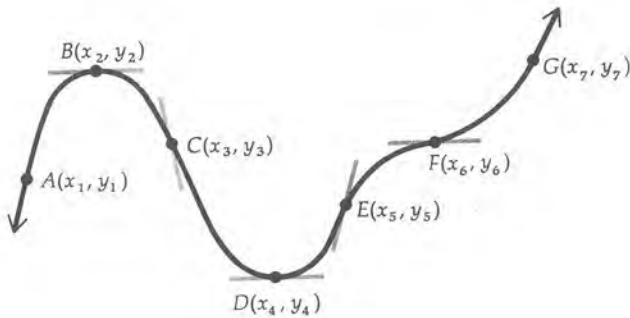
۲۳. مطلوب است ارتفاع مخروط مستدیر قائمی که حجمش حداکثر ممکن باشد و بتواند در یک کره به شعاع a واحد محاط شود. زاویه رأس مخروط را ϑ رادیان بگیرید.

۲۴. مقطع عرضی ظرفی به شکل یک مثلث متساوی الساقین وارونه است. اگر طول اضلاع متساوی ۱۵ اینچ باشد، برای اینکه ظرفیت ظرف به ماکسیمم برسد، اندازه زاویه رأس مثلث چه باید باشد؟

۸.۴ تقریر و نقاط عطف

شکل ۱۰.۸.۴ نمودار تابعی مانند f را نشان می‌دهد که مشتق اول و مشتق دوم آن روی بازه بسته $[x_1, x_7]$ وجود دارند. چون هر دوی f و f' روی بازه مذکور مشتق پذیرند، f و f' روی $[x_1, x_7]$ پیوسته هستند.

اگر نقطه‌ای مانند P روی نمودار شکل ۱۰.۸.۴ از A تا G حرکت کند، در حالی که x از x_1 تا x_7 افزایش می‌یابد، جای نقطه P هم تغییر می‌کند. وقتی P در امتداد نمودار از A تا B حرکت می‌کند، ضریب زاویه خط مماس بر منحنی مثبت است، ولی مرتباً کاهش می‌یابد. در این حالت خط مماس در جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد و نمودار همواره زیر خط مماس قرار دارد. وقتی نقطه P در B است، ضریب زاویه خط مماس صفر است و



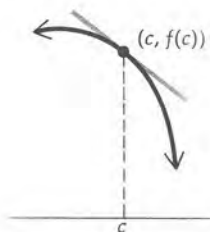
شکل ۱۰.۸.۴

هنوز هم در حال کاهش است. وقتی P در امتداد منحنی از B به طرف C حرکت می‌کند، ضریب زاویه خط مماس منفی است، ولی هنوز هم کاهش می‌یابد. خط مماس باز هم در جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد و نمودار زیر خط مماس است. در این صورت می‌گوییم از A تا C تقعر نمودار رو به پایین است. وقتی P در امتداد نمودار از C به طرف D حرکت می‌کند، ضریب زاویه خط مماس منفی است ولی مرتباً افزایش می‌یابد. در این حالت خط مماس در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد، و نمودار بالای خط مماس واقع است. در نقطه D ضریب زاویه خط مماس صفر، و هنوز هم در حال افزایش است. از D تا E ، ضریب زاویه خط مماس مثبت است و در حال افزایش. خط مماس باز هم در خلاف جهت گردش عقربه‌های ساعت می‌چرخد، و نمودار بالای خط مماس است. در این صورت می‌گوییم از C تا E تقعر نمودار رو به بالاست. پس مشاهده می‌شود که در نقطه C تقعر نمودار از رو به پایین به رو به بالا تغییر می‌یابد. نقطه C را یک نقطه عطف می‌نامیم. تعاریف به شرح زیرند.

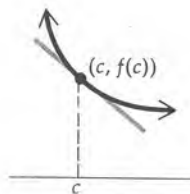
۱۰.۸.۴ تعریف گوییم تقعر نمودار تابعی چون f در نقطه $(c, f(c))$ رو به بالاست هرگاه $f'(c)$ وجود داشته باشد و بازه‌ی بازی چون I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I ، نقطه $(x, f(x))$ روی نمودار، بالای خط مماس بر نمودار در نقطه $(c, f(c))$ باشد.

۲۰.۸.۴ تعریف گوییم تقعر نمودار تابعی چون f در نقطه $(c, f(c))$ رو به پایین است هرگاه $f'(c)$ وجود داشته باشد و بازه‌ی بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I ، نقطه $(x, f(x))$ واقع بر نمودار، پایین خط مماس بر نمودار در نقطه $(c, f(c))$ باشد.

○ نمونه ۱ شکل ۲۰.۸.۴ نمایانگر قسمتی از نمودار تابعی f است که در نقطه $(c, f(c))$ تقعر رو به بالا دارد، و شکل ۳۰.۸.۴ قسمتی از نمودار تابعی f چون f را نشان



شکل ۳.۸.۴



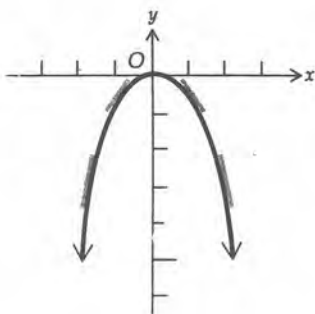
شکل ۲.۸.۴

○ می‌دهد که در نقطه $(c, f(c))$ تقریر روبه پایین دارد.

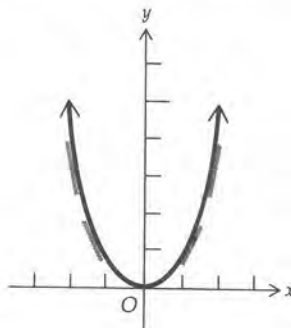
تقریر نمودار تابع f از شکل ۱.۸.۴ در تمام نقاط $(x, f(x))$ که x در هر کدام از بازه‌های باز (x_1, x_2) یا (x_5, x_6) باشد، روبه پایین است، و در همین شکل، تقریر نمودار تابع f در تمام نقاط $(x, f(x))$ به شرطی که x در بازه (x_3, x_4) یا (x_6, x_7) باشد، روبه بالاست.

○ نمونه ۲ اگر f تابعی با ضابطه $f(x) = x^2$ باشد، آنگاه $f'(x) = 2x$ و $f''(x) = 2$. پس به ازای تمام مقادیر x ، $f''(x) > 0$. علاوه بر این، نمودار f ، که در شکل ۴.۸.۴ نشان داده شده است، در بالای تمام خطوط مماس قرار می‌گیرد. بنابراین تقریر نمودار f در تمام نقاط روبه بالاست.

اگر g تابعی با ضابطه $g(x) = -x^2$ باشد، آنگاه $g'(x) = -2x$ و $g''(x) = -2$. پس به ازای همه مقادیر x ، $g''(x) < 0$ ؛ و نمودار g ، که در شکل ۵.۸.۴ نشان داده شده است، زیر تمام خطوط مماس قرار می‌گیرد. پس تقریر نمودار g در تمام نقاط روبه پایین است.



شکل ۵.۸.۴



شکل ۴.۸.۴

○ تابع f در نمونه ۲ چنان است که به ازای تمام x ها، $f''(x) > 0$ ؛ و نمودار f

همه جا تقعرش روبه بالاست. در مورد تابع g از نمونه ۲، به ازای جمیع مقادیر x ، $g''(x) < 0$ و تقعر نمودار g همه جا روبه پایین است. این دو مورد حالت‌های خاصی از قضیه زیر هستند.

۳.۸.۴ قضیه فرض کنید تابعی چون f روی یک بازه باز شامل c مشتق پذیر باشد. آنگاه

(i) اگر $f''(c) > 0$ ، تقعر نمودار f در $(c, f(c))$ روبه بالاست.

(ii) اگر $f''(c) < 0$ ، تقعر نمودار f در $(c, f(c))$ روبه پایین است.

اثبات (i)

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}.$$

چون $f''(c) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0.$$

بنابراین، طبق قضیه ۱.۱۰.۲، بازه‌بازی چون I شامل c وجود دارد که برای هر $x \neq c$ واقع در I ،

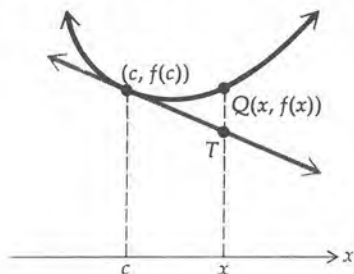
$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0. \quad (1)$$

اکنون خط مماس بر نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ را در نظر می‌گیریم. یک معادله این خط مماس به صورت زیر است

$$y = f(c) + f'(c)(x - c). \quad (2)$$

فرض کنید $c \neq x$ عددی در I ، و Q نقطه به طول x واقع بر نمودار f باشد. از خطی به موازات محور y ‌ها رسم می‌کنیم، و محل تلاقی آن را با خط مماس T می‌نامیم (به شکل ۶.۸.۴ رجوع کنید).

برای اثبات اینکه تقعر نمودار f در $(c, f(c))$ روبه بالاست، باید نشان دهیم که نقطه Q بالای نقطه T قرار دارد و یا، به ازای تمام مقادیر $x \neq c$ در I ، فاصله جهت‌دار



شکل ۶.۸.۴

$\overline{TQ}$ بزرگتر از صفر است. اما $\overline{TQ}$ برابر است با عرض Q منهای عرض T . عرض Q همان $f(x)$ است، و عرض T از (۲) به دست می آید؛ لذا

$$\begin{aligned}\overline{TQ} &= f(x) - [f(c) + f'(c)(x-c)] \\ \overline{TQ} &= [f(x) - f(c)] - f'(c)(x-c).\end{aligned}\quad (۳)$$

بنابه قضیه مقدار میانگین، عددی مانند d بین x و c وجود دارد که

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

یعنی، به ازای یک d بین x و c ،

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c). \quad (۴)$$

اگر از (۴) در (۳) قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned}\overline{TQ} &= f'(d)(x - c) - f'(c)(x - c) \\ \overline{TQ} &= (x - c)[f'(d) - f'(c)].\end{aligned}\quad (۵)$$

چون d بین x و c است، پس d در بازه I قرار دارد. حال اگر در نامساوی (۱)، قرار دهیم $x = d$ ، داریم

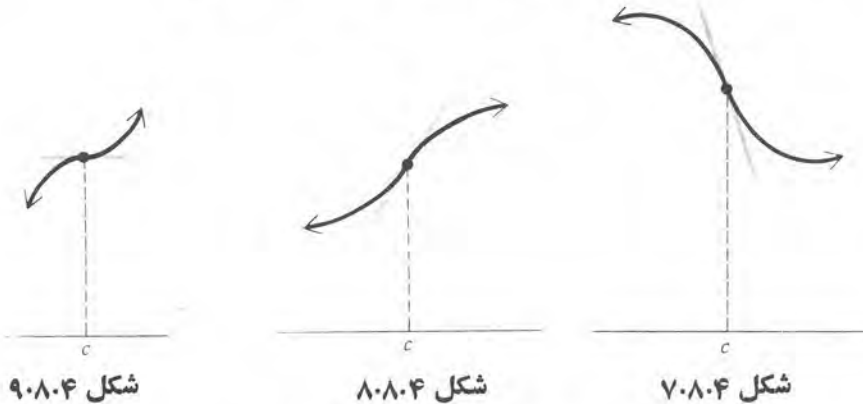
$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0. \quad (۶)$$

برای اینکه ثابت کنیم $\overline{TQ} > 0$ ، نشان می دهیم که علامت هر دو عامل طرف راست (۵) یکی است. اگر $(x - c) > 0$ ، آنگاه $x > c$. و چون d بین x و c قرار دارد، $d > c$ ؛ و لذا از نامساوی (۶) نتیجه می شود که $[f'(d) - f'(c)] > 0$. اگر $x - c < 0$ ، آنگاه $x < c$ و در نتیجه $d < c$ ؛ لذا بنا بر (۶) داریم $[f'(d) - f'(c)] < 0$. پس نتیجه می گیریم که علامت $(x - c)$ و $[f'(d) - f'(c)]$ یکی است، از اینرو $\overline{TQ}$ یک عدد مثبت است. پس تقر نمودار f در $(c, f(c))$ روبه بالا است.

اثبات قسمت (ii) شبیه (i) است و آن را نمی نویسیم. $\square$

عکس قضیه ۳.۸.۴ صحیح نیست. مثلاً، اگر تابع f به صورت $f(x) = x^4$ تعریف شود، تقر نمودار f در نقطه $(0, 0)$ ، روبه بالا است، در حالی که $f''(0) = 0$ (شکل ۳.۶.۴ را ببینید). پس، یک شرط کافی برای اینکه تقر نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ روبه بالا باشد، این است که $f''(c) > 0$ ؛ اما این یک شرط لازم نیست. به طریق مشابه، یک شرط کافی - و نه یک شرط لازم - برای اینکه تقر نمودار تابعی چون f در نقطه $(c, f(c))$ روبه پایین باشد این است که $f''(c) < 0$.

اگر روی نمودار تابعی نقطه‌ای وجود داشته باشد که در آن نقطه تغير جهت دهد، آنگاه نمودار، خط مماس در آن نقطه را قطع می‌کند. این مورد در شکل‌های ۷۰۸.۴، ۸۰۸.۴، ۹۰۸.۴ و ۹۰۸.۴ نشان داده شده است. چنین نقطه‌ای را يك نقطه عطف می‌نامند.



۴۰۸.۴ تعریف نقطه $(c, f(c))$ يك نقطه عطف نمودار تابعی چون f است هرگاه نمودار در این نقطه خط مماس داشته باشد، و بازه‌ی بازی مانند I شامل c وجود داشته باشد که برای هر x در I یکی از دو شرط زیر برقرار باشد

- (i) $f''(x) < 0$ برای $x < c$ و $f''(x) > 0$ برای $x > c$ ، یا
(ii) $f''(x) > 0$ برای $x < c$ و $f''(x) < 0$ برای $x > c$.

○ نمونه ۳ شکل ۷۰۸.۴ نشان دهنده نقطه عطفی است که در مورد آن شرط (i) تعریف ۴۰۸.۴ برقرار است. در این حالت، تغير نمودار در نقاطی که از طرف چپ نزدیک نقطه عطف هستند، روبه پایین است، و تغير نمودار در نقاطی که از طرف راست نزدیک نقطه عطف هستند، روبه بالاست. شکل ۸۰۸.۴ نشان دهنده نقطه عطفی است که در مورد آن شرط (ii) صدق می‌کند، و جهت تغير در این نقطه از روبه بالا، به روبه پایین تغییر می‌یابد. شکل ۹۰۸.۴ هم شرط (i) را نمایش می‌دهد؛ در این نقطه عطف جهت تغير از روبه پایین، به روبه بالا تغییر می‌کند. دقت کنید که در شکل ۹۰۸.۴ خط مماس در نقطه عطف يك خط افقی است. ○

در نمودار شکل ۱۰۸.۴ نقاط F و E ، C نقاط عطف هستند.

○ نمونه ۴ فرض کنید برآورد شده است که کارگر کارخانه‌ای t ساعت پس از اینکه کار خود را در ساعت ۷ صبح آغاز می‌کند، $f(t)$ واحد از کالایی را تولید می‌نماید، و

$$f(t) = 21t + 9t^2 - t^3 \quad 0 \leq t \leq 5 \quad (۷)$$

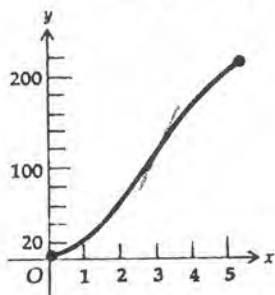
در جدول ۱۰۸.۴، مقادیر تابع به ازای مقادیر صحیح t از ۱ تا ۵ نشان داده شده‌اند، و نمودار

f روی $[0, 5]$ در شکل ۱۰.۸.۴ رسم شده است. از (۷) داریم

$$f'(t) = 21 + 18t - 3t^2$$

و

$$\begin{aligned} f''(t) &= 18 - 6t \\ &= 6(3 - t). \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۸.۴

جدول ۱۰.۸.۴

t	۱	۲	۳	۴	۵
$f(t)$	۲۹	۷۰	۱۱۷	۱۶۴	۲۰۵

مشاهده کنید که اگر $0 < t < 3$ ، $f''(t) > 0$ ، و اگر $3 < t < 5$ ، $f''(t) < 0$.
از تعریف ۴.۸.۴ (ii) برمی آید که نمودار f در $t = 3$ يك نقطه عطف دارد. چون وقتی $0 < t < 3$ ، $f''(t) > 0$ ، بنا بر قضیه ۳.۵.۴، تابع f' بر $[0, 3]$ صعودی است؛ و چون وقتی $3 < t < 5$ ، $f''(t) < 0$ ، تابع f' بر $[3, 5]$ نزولی است. بنابراین، چون $f'(t)$ آهنگ تغییر $f(t)$ نسبت به t است، نتیجه می گیریم که در سه ساعت اول (از ۷ تا ۱۰ صبح) کارگر کار خود را با آهنگ فزاینده انجام می دهد، و در دو ساعت بعد (از ۱۰ صبح تا ظهر) کارگر با آهنگ کاهنده کار می کند. حداکثر کارایی کارگر در $t = 3$ (۱۰ صبح) است، و وقتی $3 < t < 5$ (بعد از ۱۰ صبح) در آهنگ تولید کارگر تقلیل دیده می شود. نقطه ای که در آن نقطه کارگر با حداکثر کارایی مشغول کار است به نقطه نزول بازده موسوم است؛ این نقطه همان نقطه عطف نمودار f است. ○

تعریف ۴.۸.۴ مطلبی در بساطه مقدار مشتق دوم f در يك نقطه عطف نمی گوید. قضیه بعد حاکی از این است که اگر مشتق دوم در يك نقطه عطف وجود داشته باشد، مقدار آن باید صفر باشد.

۵.۸.۴ قضیه فرض کنید تابعی چون f روی يك بازه باز شامل عددی مانند c مشتق پذیر، و $(c, f(c))$ يك نقطه عطف نمودار f باشد. آنگاه، اگر $f''(c)$ وجود داشته باشد، $f''(c) = 0$.

اثبات تابع g را به صورت $g(x) = f'(x)$ تعریف می کنیم؛ پس $g'(x) = f''(x)$. چون $(c, f(c))$ يك نقطه عطف نمودار f است، $f''(x)$ در c تغییر

علامت می‌دهد و لذا علامت $g'(x)$ در c تغییر می‌کند. پس بنا به آزمون مشتق اول (قضیه ۴.۵.۴) تابع g در c يك اكسترمم نسبی دارد، و c يك عدد بحرانی g است. چون $g'(c) = f''(c)$ ، و چون طبق فرض $f''(c)$ وجود دارد، نتیجه می‌گیریم که $g'(c)$ هم وجود دارد. پس، بنا به قضیه ۳.۲.۴، $g'(c) = 0$ ، و لذا $f''(c) = 0$ و این همان حکم است. $\square$

عکس قضیه ۵.۸.۴ صحیح نیست. یعنی، اگر مشتق دوم تابعی در عددی چون c صفر باشد، امکان دارد نقطه‌ای از نمودار که طولش c است يك نقطه عطف نمودار نباشد. نمونه زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

○ نمونه ۵ فرض کنید تابع f به صورت $f(x) = x^3$ تعریف شود. داریم $f'(x) = 3x^2$ ، و $f''(x) = 6x$. علاوه بر این، $f''(0) = 0$ ؛ اما چون به ازای $x < 0$ ، و همچنین به ازای $x > 0$ ، $f''(x) > 0$ ، f' در تمام نقاطی که نزدیک $(0, 0)$ هستند و در طرف چپ یا در طرف راست آن قرار دارند روبه بالاست. در نتیجه $(0, 0)$ يك نقطه عطف نیست. در نمونه ۱ بخش ۶.۴ مشاهده شد که این تابع در صفر دارای يك مقدار مینیمم نسبی است. حال می‌بینیم که تقعر نمودار f در $(0, 0)$ روبه بالاست (شکل ۳.۶.۴ را ببینید). ○

مثال ۱ برای تابع مثال ۱ از بخش ۵.۴، نقاط عطف نمودار تابع را بیابید، و مشخص کنید کجا تقعر نمودار روبه بالاست و کجا تقعر آن روبه پایین است.

حل

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

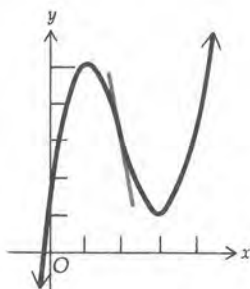
$f''(x)$ به ازای تمام مقادیر x وجود دارد؛ لذا تنها نقاط عطف ممکن آنهایی هستند که طولشان $f''(x)$ را صفر می‌کند، و این در $x = 2$ رخ می‌دهد. برای اینکه ببینیم در $x = 2$

جدول ۲۰.۸.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < 2$			—	تقعر روبه پایین است
$x = 2$	۳	—۳	۰	نمودار يك نقطه عطف دارد
$2 < x$			+	تقعر روبه بالاست

نقطه عطف به دست می آید یا نه، باید بررسی کنیم که آیا $f''(x)$ تغییر علامت می دهد یا نه؛ ضمناً باید در بازه های مربوطه تقر نمودار را نیز تعیین کنیم. این نتایج در جدول ۲۰۸.۴ خلاصه شده اند.

در مثال ۱ بخش ۵.۴ نشان دادیم که f در $x=1$ مقدار ماکسیمم نسبی دارد، و در $x=3$ مقدار مینیمم نسبی. نمودار که قسمتی از خط مماس عطفی را نشان می دهد در شکل ۱۱.۸.۴ رسم شده است.



▲ شکل ۱۱.۸.۴

ممکن است مشتق دوم تابعی مانند f در عددی چون c وجود نداشته باشد، ولی $(c, f(c))$ يك نقطه عطف نمودار f باشد. این مورد را در مثال زیر نشان می دهیم.

مثال ۲ فرض کنید $f(x) = x^{1/3}$. نقاط عطف نمودار f را بیابید، و تعیین کنید کجا تقر نمودار روبه بالاست و کجا تقر آن روبه پایین است. نمودار f را هم رسم کنید.

حل

$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

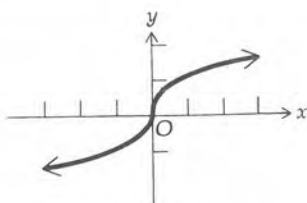
$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}.$$

مشاهده می شود که $f''(0)$ وجود ندارد. ولی، برای $x < 0$ داریم $f''(x) > 0$ و برای $x > 0$ داریم $f''(x) < 0$. از اینرو طبق تعریف ۴۰.۴ (ii)، f در $(0, 0)$ دارای يك نقطه عطف است. تقر نمودار از علامت $f''(x)$ تعیین می شود. نتایج مربوط در جدول ۳۰۸.۴ خلاصه شده اند.

نمودار f در شکل ۱۲.۸.۴ رسم شده است. توجه کنید که در مورد این تابع $f'(0)$ وجود ندارد. خط مماس بر منحنی در نقطه $(0, 0)$ ، محور y است.

جدول ۳۰۸.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < 0$		+	+	f صعودی است؛ تقعر نمودار روبه بالا است
$x = 0$	o	وجود ندارد	وجود ندارد	نمودار يك نقطهٔ عطف دارد
$0 < x$		+	-	f صعودی است؛ تقعر نمودار روبه پایین است



شکل ۱۲۰۸.۴

مثال ۳ اگر $f(x) = (1 - 2x)^3$ ، نقاط عطف نمودار f را بیابید، و تعیین کنید کجا تقعر نمودار روبه بالا است و کجا تقعر آن روبه پایین است. نمودار f را هم رسم کنید.

حل

$$f(x) = (1 - 2x)^3$$

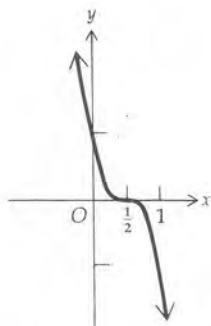
$$f'(x) = -6(1 - 2x)^2$$

$$f''(x) = 24(1 - 2x).$$

جدول ۴۰۸.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < \frac{1}{2}$			+	تقعر نمودار روبه بالا است
$x = \frac{1}{2}$	o	o	o	نمودار يك نقطهٔ عطف دارد
$\frac{1}{2} < x$			-	تقعر نمودار روبه پایین است

چون به ازای جميع مقادير x ، $f''(x)$ وجود دارد، نقطه عطف ممکن وقتی به دست می آید که $f''(x) = 0$ ؛ و آن نقطه به طول $x = 1/2$ است. بنابراین نتایج خلاصه شده در جدول ۴.۸.۴، در $x = 1/2$ ، $f''(x)$ از $+$ به $-$ تغییر علامت می دهد؛ و لذا همین عدد يك نقطه عطف برای نمودار به دست می دهد. همچنین توجه کنید که چون $f'(1/2) = 0$ ، خط مماس بر نمودار در نقطه عطف افقی است. نمودار در شکل ۱۳.۸.۴ رسم شده است.



شکل ۱۳.۸.۴

مثال ۴ نقاط عطف نمودار تابع سینوسی را بیابید. همچنین ضریب زاویه های خطوط مماس عطفی را پیدا کنید. بخشی از نمودار تابع سینوسی را، که در جوار نقطه عطفی است که دارای کوچکترین طول مثبت است، رسم کنید. قسمتی از خط مماس عطفی ماربر این نقطه عطف را نشان دهید.

حل فرض کنید

$$f(x) = \sin x.$$

آنگاه

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x.$$

به ازای جميع مقادير x ، $f''(x)$ وجود دارد. برای تعیین نقاط عطف می نویسیم $f''(x) = 0$. لذا، رابطه

$$-\sin x = 0$$

ایجاب می کند

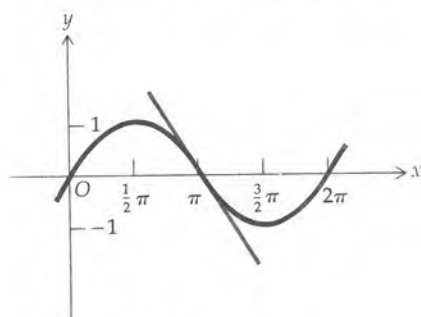
$$x = n\pi, \text{ که } n \text{ يك عدد صحیح دلخواه است.}$$

چون در هر يك از این مقادير x ، $f''(x)$ تغییر علامت می دهد، هر نقطه از نمودار که طولش یکی از این اعداد باشد يك نقطه عطف است. در هر نقطه عطف داریم

$f'(n\pi) = \cos n\pi$ ، که n يك عدد صحيح دلخواه است.

$$f'(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ يك عدد صحيح زوج باشد} \\ -1 & \text{اگر } n \text{ يك عدد صحيح فرد باشد} \end{cases}$$

بنابراین، ضریب زاویه‌های خطوط مماس عطفی عبارت‌اند از 1 یا -1 . — شکل ۱۴.۸.۴
آن قسمت از نمودار تابع سینوسی را نشان می‌دهد که در آن، x در $[0, 2\pi]$ است. در نقطهٔ عطف $(\pi, 0)$ ، قسمتی از خط مماس عطفی رسم شده است.



شکل ۱۴.۸.۴

تمرینهای ۸.۴

در تمرینهای ۱ تا ۲۰، مشخص کنید کجا تقعر نمودار تابع داده شده دو به بالاست و کجا تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز در صورت وجود بیابید.

$$1. \quad f(x) = x^2 + 9x \quad 2. \quad g(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$$

$$3. \quad g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 \quad 4. \quad f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$$

$$5. \quad F(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$$

$$6. \quad f(x) = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 5x - 20$$

$$7. \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad 8. \quad G(x) = \frac{2x}{(x^2 + 4)^{3/2}}$$

$$9. \quad f(x) = \cos 2x; x \in [-\pi, \pi] \quad 10. \quad g(x) = 2 \sin 3x; x \in [-\pi, \pi]$$

$$11. \quad f(x) = (x - 2)^{1/5} \quad 12. \quad F(x) = (2x - 6)^{3/2} + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x^2 & 0 \leq x \end{cases} \quad ۱۳$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x^2 - 4x^2 + 7x - 3 & 1 \leq x \end{cases} \quad ۱۴$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3} \quad ۱۶$$

$$g(x) = \frac{x-2}{x+4} \quad ۱۵$$

$$g(x) = \frac{(1-x)^2}{(4-x)^2} \quad ۱۸$$

$$F(x) = (x-3)^2(2-x)^2 \quad ۱۷$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+4} \quad ۲۰$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}} \quad ۱۹$$

۲۱. اگر $f(x) = ax^3 + bx^2$ ، مطلوب است a و b به طوری که نمودار f در $(1, 2)$ دارای يك نقطه عطف باشد.

۲۲. اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، مطلوب است a, b, c به طوری که نمودار f در $(1, 2)$ دارای يك نقطه عطف باشد، و ضریب زاویه مماس عطفي در این نقطه $2 -$ باشد.

۲۳. اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، مطلوب است a, b, c, d به طوری که f در $(0, 3)$ دارای يك اکسترم نسبی باشد و نمودار f در $(1, -1)$ يك نقطه عطف داشته باشد.

۲۴. اگر $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ، مطلوب است مقادیر a, b, c, d, e به طوری که f در $(1, -1)$ دارای يك نقطه عطف باشد، نمودار f از مبدأ بگذرد، و نسبت به محور y ها متقارن باشد.

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۸، قسمتی از نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که از نقطه $(c, f(c))$ بگذرد و شرایط داده شده نیز برآورده شوند. در این تمرینها، فرض شده است که f روی يك بازه باز شامل c ، پیوسته باشد.

۲۵. $f'(x) > 0$ برای $x < c$ ؛ $f'(x) < 0$ برای $x > c$ ؛ $f''(x) < 0$ برای $x < c$ ؛ $f''(x) < 0$ برای $x > c$.

۲۶. $f'(x) > 0$ برای $x < c$ ؛ $f'(x) > 0$ برای $x > c$ ؛ $f''(x) > 0$ برای $x < c$ ؛ $f''(x) < 0$ برای $x > c$.

$$۲۷. \begin{aligned} & f'(x) > 0 \text{ برای } x < c; f'(x) < 0 \text{ برای } x > c; f''(x) > 0 \text{ برای } x < c; \\ & f''(x) > 0 \text{ برای } x > c. \end{aligned}$$

$$۲۸. \text{ اگر } x < c, f'(x) < 0 \text{ اگر } x > c, f'(x) > 0 \text{ اگر } x < c, f''(x) > 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) < 0.$$

$$۲۹. f''(c) = 0; f'(c) = 0 \text{ اگر } x < c, f''(x) > 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) < 0.$$

$$۳۰. f''(c) = 0 \text{ اگر } x < c, f'(x) > 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) > 0.$$

$$۳۱. f''(c) = 0; f'(c) = 0 \text{ برای } x < c, f''(x) > 0 \text{ برای } x > c, f''(x) > 0.$$

$$۳۲. f''(c) = 0 \text{ اگر } x < c, f'(x) < 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) > 0.$$

$$۳۳. f''(c) = 0, f''(x) = -1 \text{ اگر } x < c, f''(x) < 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) > 0.$$

$$۳۴. f''(c) = 0, f''(x) = 1/2 \text{ اگر } x < c, f''(x) > 0 \text{ اگر } x > c, f''(x) < 0.$$

$$۳۵. f'(c) \text{ وجود نداشته باشد؛ برای } x < c, f''(x) > 0 \text{ برای } x > c, f''(x) > 0.$$

$$۳۶. f'(c) \text{ وجود نداشته باشد؛ } f''(c) \text{ وجود نداشته باشد؛ } f''(x) < 0 \text{ برای } x < c; f''(x) > 0 \text{ برای } x > c.$$

$$۳۷. \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = 0; \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = +\infty; f''(x) < 0 \text{ اگر } x < c, f''(x) > 0 \text{ اگر } x > c.$$

$$۳۸. \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = +\infty; f''(x) > 0 \text{ اگر } x < c, f''(x) > 0 \text{ اگر } x > c.$$

$$۳۹. \text{ نمودار تابعی مانند } f \text{ را رسم کنید که } f(x), f'(x) \text{ و } f''(x) \text{ به ازای جميع مقادير } x \text{ وجود داشته، و مثبت باشند.}$$

$$۴۰. \text{ نمودار تابعی چون } f \text{ را رسم کنید که } f(x), f'(x) \text{ و } f''(x) \text{ به ازای جميع مقادير } x \text{ وجود داشته، و منفی باشند.}$$

$$۴۱. \text{ اگر } f(x) = x^5, \text{ نشان دهید که ه يك عدد بحرانی } f \text{ است ولی } f(0) \text{ يك اكسترمم نسبی نیست. آیا مبدأ يك نقطهٔ بحرانی نمودار } f \text{ هست؟ جواب خود را ثابت کنید.}$$

$$۴۲. \text{ اگر } f(x) = 3x^2 + x|x|, \text{ ثابت کنید که } f''(0) \text{ وجود ندارد ولی } f \text{ تقعر نمودار } f \text{ همه جا روبه بالاست.}$$

$$۴۳. \text{ تخمین زده می شود که کارگری که در مغازه ای قاب عکس می سازد می تواند } x \text{ ساعت بعد از اینکه کار خود را در ساعت ۸ صبح آغاز می کند } y \text{ قاب را رنگ بزند، و}$$

$$y = 3x + 8x^2 - x^3 \quad 0 \leq x \leq 4$$

درجه ساعتی کارایی کارگر حداکثر ممکن است (یعنی، درجه ساعتی کارگر به نقطه نزول بازده می‌رسد؟). (داهنمایی: نمونه ۴ را ببینید.)

۴۴. فرض کنید f تابعی باشد که به ازای جمیع مقادیر x در بازه I بازی چون $f''(x)$ وجود داشته باشد، و در عددی مانند c از I ، $f''(c) = 0$ و $f'''(c) \neq 0$ وجود داشته باشد و صفر نباشد. ثابت کنید که نقطه $(c, f(c))$ يك نقطه عطف نمودار f است. (داهنمایی: اثبات شبیه اثبات آزمون مشتق دوم (قضیه ۱۰.۶.۴) است.)

۹.۴ کاربرد در رسم نمودار تابع

حال از نتایج بخشهای ۵.۴، ۶.۴، و ۸.۴ برای رسم نمودار يك تابع استفاده می‌کنیم. اگر بخواهیم نمودار تابعی مانند f را رسم کنیم به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا $f'(x)$ و $f''(x)$ را محاسبه می‌کنیم. آنگاه اعداد بحرانی f را می‌یابیم؛ این اعداد مقادیری از x متعلق به قلمرو f هستند که به ازای آنها یا $f'(x) = 0$ ، یا $f'(x)$ وجود ندارد. سپس با استفاده از آزمون مشتق اول (قضیه ۴.۵.۴) یا آزمون مشتق دوم (قضیه ۱۰.۶.۴) مشخص می‌کنیم که آیا تابع f در هر عدد بحرانی يك مقدار ماکسیمم نسبی یا يك مقدار مینیمم نسبی دارد یا نه. برای تعیین بازه‌هایی که f بر آنها صعودی است، x هایی را می‌یابیم که به ازای آنها $f'(x)$ مثبت باشد؛ برای تعیین بازه‌هایی که f بر آنها نزولی است، x هایی را می‌یابیم که به ازای آنها $f'(x)$ منفی باشد. برای تعیین بازه‌هایی که f بر آنها یکنواست، اعدادی بحرانی را که به ازای آنها تابع f اکسترمم نسبی ندارد، مشخص می‌کنیم. مقادیری از x که به ازای آنها $f''(x) = 0$ ، یا $f''(x)$ وجود ندارد، نقاط عطف احتمالی را مشخص می‌کنند؛ برای تعیین نقاط عطف، بررسی می‌کنیم که به ازای کدامیک از این مقادیر، $f''(x)$ تغییر علامت می‌دهد. مقادیری از x که به ازای آنها $f''(x)$ مثبت است، و مقادیری از x که به ازای آنها $f''(x)$ منفی است نقاطی را مشخص می‌کنند که در آن نقاط تقعر نمودار، به ترتیب، روبه بالا یا روبه پایین است. یافتن ضریب زاویه‌های مماسهای عطفی نیز مفید است. توصیه می‌کنیم که تمام اطلاعات فوق را، نظیر مثالهای زیر در يك جدول خلاصه کنید.

مثال ۱ اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ ، مطلوب است: اکسترممهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه‌هایی که f بر آنها صعودی است؛ بازه‌هایی که f بر آنها نزولی است؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار روبه بالاست؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار روبه پایین است؛ و ضریب زاویه هر يك از مماسهای عطفی. همچنین نمودار تابع را رسم کنید.

حل $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ ، $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ، و $f''(x) = 6x - 6$. معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم تا $x = 0$ و $x = 2$ به دست آیند. از $f''(x) = 0$ داریم $x = 1$ در

تشکیل جدول، اعداد ۱، ۰، ۲ و بازه‌های

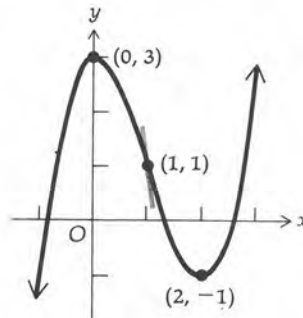
$$x < 0 \quad 0 < x < 1 \quad 1 < x < 2 \quad 2 < x$$

باید ملحوظ شوند. توجه کنید که اعداد فوق در هیچیک از این بازه‌ها نیستند.

جدول ۱۰.۹.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < 0$		+	-	f صعودی است و تقعر نمودار روبه پایین است.
$x = 0$	۳	۰	-	f يك مقدار ماكسيم نسبی دارد و تقعر نمودار روبه پایین است.
$0 < x < 1$		-	-	f نزولی و تقعر نمودار روبه پایین است.
$x = 1$	۱	-۳	۰	f نزولی است و نمودار يك نقطه عطف دارد.
$1 < x < 2$		-	+	f نزولی است و تقعر نمودار روبه بالاست.
$x = 2$	-۱	۰	+	f يك مقدار مینیمم نسبی دارد و تقعر نمودار روبه بالاست.
$2 < x$		+	+	f صعودی است و تقعر نمودار روبه بالاست.

از اطلاعات موجود در جدول ۱۰.۹.۴ و بارسم چند نقطه، نمودار تابع طبق شکل ۱۰.۹.۴ به دست می آید.



شکل ۱۰.۹.۴

مثال ۲ فرض کنید

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

مطلوب است: اکسترممهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه‌هایی که f بر آنها صعودی است؛ بازه‌هایی که f بر آنها نزولی است؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به بالاست؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به پایین است؛ و ضریب زاویهٔ هر يك از مماسهای عطفی. همچنین مطلوب است مجانبهای افقی وقائم. نمودار را هم رسم کنید.

حل

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x[2(x^2 - 4)(2x)]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

می‌نویسیم $f'(x) = 0$ و به دست می‌آوریم $x = 0$ ؛ $f''(x)$ هرگز صفر نمی‌شود. در جدول ۲.۹.۴ عددی را که به ازای آن $f'(x) = 0$ ، و همچنین اعداد $x = \pm 2$ را که در قلمرو f نیستند ملحوظ کرده‌ایم. در این جدول، بازه‌های

$$x < -2 \quad -2 < x < 0 \quad 0 < x < 2 \quad 2 < x$$

نیز، که هیچکدام اعداد فوق را شامل نیستند، ثبت شده‌اند. چون ۲ و -۲ در قلمرو f نیستند؛ حدهای زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$$

بنابراین $x = 2$ و $x = -2$ مجانبهای قائم نمودار هستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1.$$

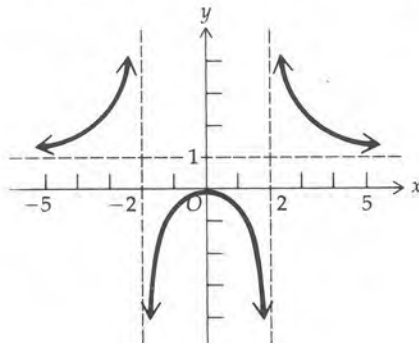
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1.$$

لذا $y = 1$ يك مجانب افقی نمودار است.

جدول ۲.۹.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < -2$		+	+	f صعودی، و تقعر نمودار رو به بالاست
$x = -2$				وجود ندارد وجود ندارد وجود ندارد
$-2 < x < 0$		+	-	f صعودی، و تقعر نمودار رو به پایین است
$x = 0$	۰	۰	-	f يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد
$0 < x < 2$		-	-	f نزولی، و تقعر نمودار رو به پایین است
$x = 2$				وجود ندارد وجود ندارد وجود ندارد
$2 < x$		-	+	f نزولی، و تقعر نمودار رو به بالاست

با توجه به واقعیتهای جدول ۲.۹.۴، با استفاده از مجانیها به عنوان راهنما، و با رسم چند نقطه، نمودار f را که در شکل ۲.۹.۴ رسم شده است به دست می آوریم.



شکل ۲.۹.۴

مثال ۳ فرض کنید $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$. مطلوب است: اکسترممهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه هایی که بر آنها f صعودی است؛ بازه هایی که بر آنها f نزولی

است؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به بالاست؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به پایین است؛ و ضریب زاویه مماسهای عطفی. نمودار را نیز رسم کنید.

حل

$$f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-4/3} - \frac{10}{9}x^{-1/3}.$$

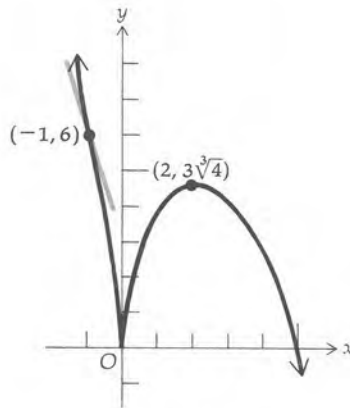
وقتی $x=0$ ، $f'(x)$ وجود ندارد. می‌نویسیم $f'(x)=0$ و $x=2$ را به دست می‌آوریم. پس اعداد بحرانی f ، 0 و 2 هستند. وقتی $x=0$ ، $f''(x)$ وجود ندارد. از $f''(x)=0$ ، $x=-1$ به دست می‌آید. در تشکیل جدول، اعداد $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=2$ و نیز بازه‌های زیر را ملحوظ می‌کنیم:

$$x < -1 \quad -1 < x < 0 \quad 0 < x < 2 \quad 2 < x$$

بر اساس اطلاعات جدول ۳.۹.۴ و با رسم چند نقطه، نمودار f را که در شکل ۳.۹.۴ رسم شده است به دست می‌آوریم.

جدول ۳.۹.۴

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	نتیجه
$x < -1$		—	+	f نزولی، و تقعر نمودار رو به بالاست
$x = -1$	۶	—۵	۰	f نزولی است و نموداریک نقطه عطف دارد
$-1 < x < 0$		—	—	f نزولی، و تقعر نمودار رو به پایین است
$x = 0$	۰	وجود ندارد	وجود ندارد	f یک مقدار مینیمم نسبی دارد
$0 < x < 2$		+	—	f صعودی، و تقعر نمودار رو به پایین است
$x = 2$	$2\sqrt[3]{4} \approx 4.8$	۰	—	f یک مقدار ماکسیمم نسبی دارد و تقعر نمودار رو به پایین است.
$2 < x$		—	—	f نزولی، و تقعر نمودار رو به پایین است



شکل ۳.۹.۴

تمرینهای ۹.۴

توابع زیر مفروض اند. مطلوب است: اکسترممهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه‌هایی که f بر آنها صعودی است؛ بازه‌هایی که f بر آنها نزولی است؛ بازه‌هایی که بر آنها f تقعر نمودار روبه بالا است؛ بازه‌هایی که بر آنها f تقعر نمودار روبه پایین است؛ و ضریب زاویه هریک از مماسهای عطفی. مجانبهای قائم و افقی را، در صورت وجود، بیابید. نمودار f را نیز رسم کنید.

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x \quad ۲.$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1 \quad ۱.$$

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 \quad ۴.$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad ۳.$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 12x + 1 \quad ۶.$$

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 2 \quad ۵.$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x \quad ۸.$$

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1 \quad ۷.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 \quad ۱۰.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 \quad ۹.$$

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4 \quad ۱۲.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2 \quad ۱۱.$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \end{cases} \quad ۱۴.$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2x^2 & 0 \leq x \end{cases} \quad ۱۳.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)^2 & x < 1 \\ (x-1)^4 & 1 \leq x \end{cases} \cdot 16$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & x < 0 \\ x^4 & 0 \leq x \end{cases} \cdot 15$$

$$f(x) = x^2(x+2)^2 \cdot 18$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-2)^2 & x \leq 2 \\ (2-x)^2 & 2 < x \end{cases} \cdot 17$$

$$f(x) = 3x^5 + 5x^2 \cdot 20$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)^2 \cdot 19$$

$$f(x) = |2-x^2| \cdot 22$$

$$f(x) = 3x^5 + 5x^2 \cdot 21$$

$$f(x) = 2 \cos 2x; x \in [-\pi, \pi] \cdot 23$$

$$f(x) = 2 \sin 3x; x \in [-\pi, \pi] \cdot 24$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{1}{2}\pi \\ \sin(x - \frac{1}{2}\pi) & \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi \end{cases} \cdot 25$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \cos(\pi - x) & 0 < x \leq \pi \end{cases} \cdot 26$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} \cdot 28$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot 27$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-3} \cdot 30$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot 29$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9} \cdot 32$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot 31$$

$$f(x) = x^{1/2} + 2x^{2/3} \cdot 34$$

$$f(x) = 2x^{2/3} - 2x \cdot 33$$

$$f(x) = 3x^{1/2} - x \cdot 36$$

$$f(x) = 3x^{2/3} - 2x \cdot 35$$

$$f(x) = 2 + (x-2)^{2/3} \cdot 38$$

$$f(x) = 2 + (x-2)^{1/2} \cdot 37$$

$$f(x) = 2 + (x-2)^{2/3} \cdot 40$$

$$f(x) = 2 + (x-2)^{5/3} \cdot 39$$

$$f(x) = x\sqrt{9-x^2} \cdot 42$$

$$f(x) = x^2\sqrt{4-x} \cdot 41$$

$$f(x) = (x+2)\sqrt{-x} \quad ۴۳ \quad f(x) = \frac{9x}{x^2+9} \quad ۴۴$$

۱۰.۴ کاربرد مشتق در علم اقتصاد

در علم اقتصاد تغییر يك كمیت نسبت به كمیت دیگر را می توان به وسیله مفهوم متوسط و یا مفهوم نهایی توصیف کرد. مفهوم متوسط، تغییر يك كمیت روی دامنه مشخصی از مقادیر كمیت دیگر را بیان می کند. در حالی که مفهوم نهایی عبارت است از تغییر لحظه ای كمیت اول که در اثر تغییر بسیار کوچکی در كمیت دوم حاصل می شود. مثالهای مربوط به علم اقتصاد را با تعریف هزینه متوسط و هزینه نهایی شروع می کنیم. برای تعریف دقیق مفهوم نهایی، مفهوم حد را به کار می بریم که خود به مفهوم مشتق منجر می شود.

فرض کنید هزینه کل تولید x واحد از يك کالا برابر با $C(x)$ تومان باشد. تابع C را يك تابع هزینه کل می نامیم. در شرایط عادی x و $C(x)$ مثبت هستند. چون x تعداد کالا بر حسب واحد مربوط است، پس x معمولاً يك عدد صحیح غیر منفی است. با وجود این، برای اینکه بتوانیم از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال بهره مند شویم، فرض می کنیم x يك عدد حقیقی غیر منفی باشد تا شرایط پیوستگی به تابع C داده شود.

هزینه متوسط تولید هر واحد از يك کالا عبارت است از خارج قسمت هزینه کل به تعداد واحدهای تولید شده. پس اگر هزینه متوسط برابر با $Q(x)$ تومان باشد،

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Q را يك تابع هزینه متوسط می نامیم.

اکنون فرض کنید که تعداد واحدهای کالای تولیدی ویژه ای برابر با x_1 باشد، و این تعداد به اندازه Δx تغییر کند. در این صورت تغییر هزینه کل از $C(x_1) - C(x_1 + \Delta x)$ به دست می آید، و تغییر متوسط هزینه کل نسبت به تغییر تعداد واحدهای تولید شده، به وسیله

$$\frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x} \quad (۱)$$

داده می شود. اقتصاددانان حد کسر (۱) را، وقتی که Δx به سمت صفر میل کند، در صورت وجود، هزینه نهایی می نامند. و چون، این حد عبارت است از مشتق C در x_1 ، تعریف زیر به دست می آید.

۱۰.۴.۱ تعریف اگر هزینه کل تولید x واحد از کالایی $C(x)$ تومان باشد، آنگاه هزینه نهایی وقتی که $x = x_1$ ، برابر است با $C'(x_1)$ ، به شرطی که $C'(x_1)$ وجود داشته باشد. تابع C' به تابع هزینه نهایی موسوم است.

در تعریف ۱۰.۴، $C'(x_1)$ را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که، $C'(x_1)$ آهنگ تغییر هزینه کل است وقتی که x_1 واحد از کالا تولید می‌شود.

○ نمونه ۱ فرض کنید هزینه کل تولید x اسباب بازی $C(x)$ تومان باشد، و

$$C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2.$$

(الف) تابع هزینه نهایی C' است، و

$$C'(x) = 4 + 0.04x.$$

(ب) هزینه نهایی وقتی $x = 50$ ، توسط $C'(50)$ به دست می‌آید، و

$$C'(50) = 4 + 0.04(50) = 6.$$

بنابراین، آهنگ تغییر هزینه کل، وقتی ۵۰ اسباب بازی ساخته می‌شود، به ازای هر اسباب بازی ۶ تومان است.

(پ) هزینه واقعی ساخت پنجاه و یکمین اسباب بازی عبارت است از $C(51) - C(50)$ ، و

$$\begin{aligned} C(51) - C(50) &= [110 + 4(51) + 0.02(51)^2] \\ &\quad - [110 + 4(50) + 0.02(50)^2] \\ &= 366.02 - 360 \\ &= 6.02. \end{aligned}$$

توجه کنید که جوابهای (ب) و (پ) به اندازه ۰.۰۲ تفاوت دارند. علت این اختلاف این است که هزینه نهایی، آهنگ لحظه‌ای تغییر $C(x)$ نسبت به یک واحد تغییر در x است. پس $C'(50)$ بهای تقریبی تولید پنجاه و یکمین اسباب بازی بر حسب تومان است. ○

مشاهده کنید که محاسبه $C'(50)$ در نمونه ۱ از محاسبه $C(51) - C(50)$ ساده‌تر است. عموماً محاسبه یک مقدار از تابع هزینه نهایی از محاسبه دو مقدار از تابع هزینه کل آسانتر است. بدین سبب اقتصاددانان غالباً هزینه تولید یک واحد اضافی کالا را با استفاده از تابع هزینه نهایی تقریب می‌کنند. به طور مشخص، هزینه تقریبی تولید $(k+1)$ مین واحد کالا پس از تولید k واحد اول، برابر با $C'(k)$ تومان است.

در وضعیت عادی، محدودیتهای اقتصادی معینی روی تابع هزینه کل، C ، اعمال می‌شود. این محدودیتها به شرح زیرند:

۱. $C(0) \geq 0$. یعنی، وقتی هیچ کالایی تولید نمی‌شود، هزینه کل باید مثبت یا صفر باشد.

$C(0)$ به هزینه عمومی تولید موسوم است.

۳. به ازای جمیع مقادیر x ، $C'(x) > 0$. یعنی، وقتی تعداد واحدهای تولید کالا افزایش

می‌یابد، هزینه کل هم باید افزایش یابد.
 ۳. به ازای هر x بزرگتر از عددی مثبت چون N ، $C''(x) \geq 0$. وقتی تعداد واحدهای کالای تولید شده زیاد باشد، هزینه نهایی سرانجام افزایش خواهد یافت یا صفر خواهد بود. لذا مگر در حالتی که $C''(x) = 0$ ، تقعر نمودار تابع هزینه کل برای هر $x > N$ روبه بالاست. با این وجود، به ازای مقادیری از x ، هزینه نهایی ممکن است کاهش یابد؛ بنابراین، به ازای این مقادیر از x ، $C''(x) < 0$ ؛ و لذا برای این مقادیر از x تقعر نمودار تابع هزینه کل روبه پایین است (برای ملاحظه این وضعیت مثال ۲ را ببینید).

○ نمونه ۲ يك تابع هزینه کل خطی به صورت

$$C(x) = mx + b$$

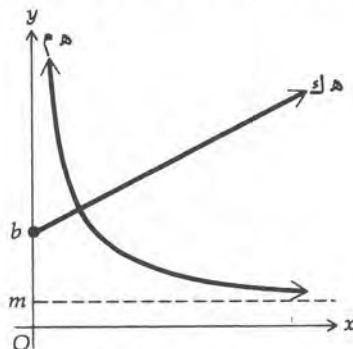
را در نظر بگیرید. دقت کنید که b هزینه عمومی را نشان می‌دهد. هزینه نهایی برابر است با $C'(x) = m$. اگر Q تابع هزینه متوسط باشد، داریم

$$Q(x) = m + \frac{b}{x}$$

و

$$Q'(x) = -\frac{b}{x^2}.$$

به شکل ۱۰۱۰۴ رجوع کنید که منحنی هزینه کل (با علامت $هك$) و منحنی هزینه متوسط (با علامت $ه$) را نشان می‌دهد. منحنی هزینه کل، پاره‌ای از خط مستقیمی است با ضریب زاویه m و عرض از مبدأ b که در ربع اول قرار دارد. منحنی هزینه متوسط شاخه‌ای از يك هذلولی متساوی‌الساقین است که در ربع اول قرار دارد، و خط $y = m$ مجانب افقی آن است. چون $Q'(x)$ همواره منفی است، تابع هزینه متوسط همواره نزولی است، و هرچه x بزرگتر شود مقدار $Q(x)$ به m نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. مفهوم میل کردن هزینه متوسط به سمت يك عدد ثابت غالباً در موقع تولید زیاد، یعنی وقتی که تعداد واحد کالای تولید



شکل ۱۰۱۰۴

○

شده بسیار زیاد باشد، پیش می‌آید.

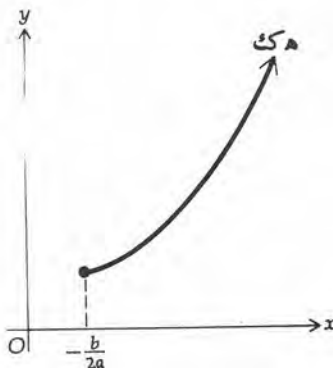
○ نمونه ۳ يك تابع هزینه کل درجه دوم به صورت

$$C(x) = ax^2 + bx + c$$

رادر نظر بگیرید که در آن a و c مثبت هستند. در اینجا c هزینه عمومی بر حسب تومان است. منحنی هزینه کل يك سهمی است که دهانه آن به طرف بالاست. چون $C'(x) = 2ax + b$ ، $-b/2a$ يك عدد بحرانی است که رأس سهمی را به دست می‌دهد. دو حالت در نظر می‌گیریم: $b \geq 0$ و $b < 0$.

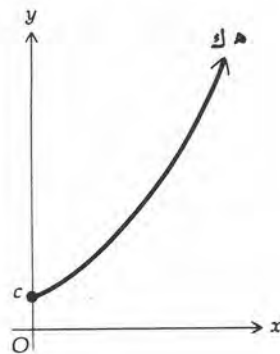
حالت ۱: $b \geq 0$. در این صورت $-b/2a$ یا منفی است، یا صفر است، و رأس سهمی یا در طرف چپ محور y ها و یا روی محور y هاست. پس قلمرو C مجموعه تمام اعداد غیر منفی است. منحنی h ک، برای $b > 0$ ، در شکل ۳.۱۰.۴ نشان داده شده است.

حالت ۲: $b < 0$. پس $-b/2a$ مثبت است؛ بنابراین رأس سهمی در طرف راست محور y هاست، و قلمرو C به اعداد واقع در بازه $[-b/2a, +\infty)$ محدود می‌شود. منحنی h ک، برای $b < 0$ ، در شکل ۳.۱۰.۴ رسم شده است.



○

شکل ۳.۱۰.۴



شکل ۳.۱۰.۴

مثال ۱ فرض کنید هزینه کل تولید $100x$ واحد از يك کالا برابر با $C(x)$ تومان باشد و داشته باشیم $C(x) = (x^2/2) - 2x + 5$. (الف) تابع هزینه متوسط را بیابید؛ (ب) تابع هزینه نهایی را پیدا کنید؛ (پ) مینیمم مطلق هزینه متوسط هر واحد را بیابید؛ (ت) منحنی هزینه کل، منحنی هزینه متوسط، و منحنی هزینه نهایی را در يك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل $C(x) = (x^2/2) - 2x + 5$

(الف) اگر Q تابع هزینه متوسط باشد، داریم

$$Q(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}.$$

(ب) تابع هزینه نهایی C' است، و

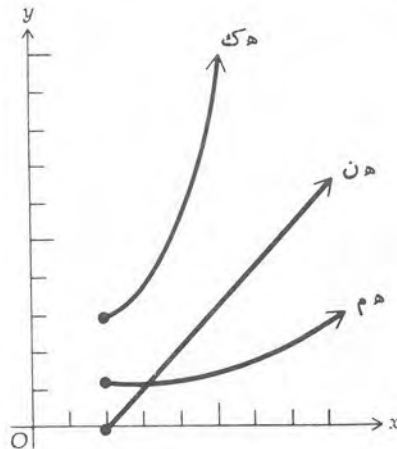
$$C'(x) = x - 2.$$

(پ) $Q'(x)$ و $Q''(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Q'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{x^2} \quad Q''(x) = \frac{10}{x^3}$$

می‌نویسیم $Q'(x) = 0$ و به عنوان يك عدد بحرانی Q ، $\sqrt{10}$ را به دست می‌آوریم و داریم $Q(\sqrt{10}) = \sqrt{10} - 2 \approx 1.16$. چون $Q''(\sqrt{10}) > 0$ ، Q در $x = \sqrt{10}$ يك مقدار مینیمم نسبی تقریباً برابر با ۱.۱۶ دارد. از معادله‌ای که $Q(x)$ را تعریف می‌کند، می‌بینیم که Q بر $(0, +\infty)$ پیوسته است. چون تنها اکسترمم نسبی Q روی $(0, +\infty)$ از $x = \sqrt{10}$ به دست می‌آید، از قضیه ۲.۶.۴ (ii) نتیجه می‌گیریم که مقدار مینیمم نسبی فوق مقدار مینیمم مطلق Q نیز هست. وقتی $x = \sqrt{10} \approx 3.16$ ، $100x = 316$ ؛ لذا نتیجه می‌گیریم که مینیمم مطلق هزینه متوسط هر واحد ۱.۱۶ تومان است، و این برای وقتی است که ۳۱۶ واحد تولید بشود.

منحنیهای هک، هم، و هن (منحنی هزینه نهایی) در شکل ۴.۱۰.۴ رسم شده‌اند.



شکل ۴.۱۰.۴

در شکل ۴.۱۰.۴ دقت کنید که پایینترین نقطه منحنی هم مطابق است بر محل تقاطع

منحنیهای هم و هن و این نقطه‌ای است که در آن هزینه متوسط و هزینه نهایی با هم برابرند. این موضوع در حالت کلی هم صحیح است، و از این واقعیت نتیجه می‌شود که در اینجا $Q'(x) = 0$. چون $Q(x) = C(x)/x$ ، پس

$$Q'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}.$$

بنابر این، $Q'(x) = 0$ وقتی که $xC'(x) - C(x) = 0$ ، یا وقتی که

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

به اهمیت اقتصادی این نکته باید توجه کرد که هرگاه هزینه نهایی و هزینه متوسط با هم مساوی باشند، هر واحد کالا با کمترین هزینه متوسط تولید می‌شود. مثال زیر مربوط به یک تابع هزینه کل درجه سوم است و موردی را نشان می‌دهد که تقعر نمودار تابع هزینه کل تغییر می‌کند.

مثال ۲ نمودار تابع هزینه کل C ، $C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 1$ ، را رسم کنید. تعیین کنید تقعر نمودار کجا روبه بالا، و کجا روبه پایین است. نقاط عطف را بیابید و معادله‌ای برای هر مماس عطفی بنویسید. همچنین قسمتی از مماس عطفی را رسم کنید.

حل

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 1$$

$$C'(x) = 3x^2 - 12x + 13$$

$$C''(x) = 6x - 12.$$

می‌توانیم $C'(x)$ را به صورت $C'(x) = 3(x-2)^2 + 1$ بنویسیم. بنابراین به ازای همه مقادیر x ، $C'(x) > 0$. به ازای $x = 2$ داریم $C''(x) = 0$. برای تعیین تقعر نمودار در بازه‌های $(0, 2)$ و $(2, +\infty)$ و تعیین اینکه نمودار در $x = 2$ یک نقطه عطف دارد یا نه، از نتایج خلاصه شده در جدول ۱۰۱۰۴ استفاده می‌کنیم.

جدول ۱۰۱۰۴

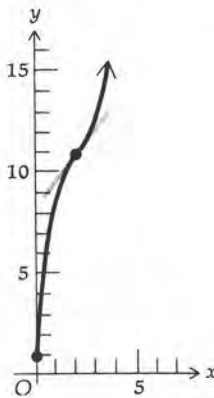
	$C(x)$	$C'(x)$	$C''(x)$	نتیجه
$0 < x < 2$		+	-	C صعودی، و تقعر نمودار روبه پایین است.
$x = 2$	۱۱	۱	۰	نمودار یک نقطه عطف دارد.
$2 < x$		+	+	C صعودی، و تقعر نمودار روبه بالا است.

يك معادله مماس عطفی به صورت زیر است

$$y - 11 = 1(x - 2)$$

$$x - y + 9 = 0.$$

نمودار تابع هزینه کل همراه با قسمتی از مماس عطفی در شکل ۵.۱۰.۴ رسم شده است.



شکل ۵.۱۰.۴

اکنون يك وضعیت اقتصادی را در نظر می گیریم که در آن، متغیرها تنها بها و مقدار کالای مورد تقاضا هستند. فرض کنید بها ی يك واحد از کالای مورد تقاضا p تومان، و تعداد کالا x باشد.

با کمی تأمل، معقول به نظر می رسد که در بازار، مقدار کالای مورد تقاضای مصرف کنندگان بستگی به بهای کالا داشته باشد. وقتی بهای کالا کاهش یابد، معمولاً تقاضای مصرف کنندگان بیشتر می شود؛ و اگر بها بالا رود، حالت عکس پیش می آید: تقاضای مصرف کنندگان کمتر می شود.

معادله تقاضا، معادله ای است که ارتباط بین مقدار کالای مورد تقاضا را، که با x مشخص می شود، با بها، که با p نمایش داده می شود، تعیین می کند. این گونه معادلات با استفاده از روشهای آماری در مورد داده های اقتصادی به دست می آیند. اگر این معادله را نسبت به p حل کنیم، داریم

$$p = f(x). \quad (۲)$$

در این معادله تابع f را تابع بها می نامند و $f(x)$ تومان، بها ی يك واحد کالا است وقتی که تقاضا برای x واحد از کالا باشد. همان طور که انتظار می رود، در شرایط عادی اقتصادی، قلمرو تابع بها از اعداد غیر منفی تشکیل می شود.

نمودار معادله تقاضا را منحنی تقاضا می‌نامند. در علم اقتصاد رسم برای این است که هنگام رسم منحنی تقاضا از محور قائم برای نمایش بها و از محور افقی برای نمایش تقاضا استفاده کنند. چون يك معادله تقاضا فقط به ازای مقادیر معینی از x و p می‌تواند به کار برده شود، اغلب لازم است که آنها را به بازه‌های بسته‌ای محدود کنیم؛ یعنی، بنویسیم $x \in [0, a]$ و $p \in [0, b]$. گرچه، در عمل مقدار و بها معمولاً اعدادی گویا هستند ولی، فرض می‌کنیم که x و p بتوانند هر عدد حقیقی واقع در این بازه‌های بسته را اختیار کنند.

○ نمونه ۴ معادله تقاضا به صورت

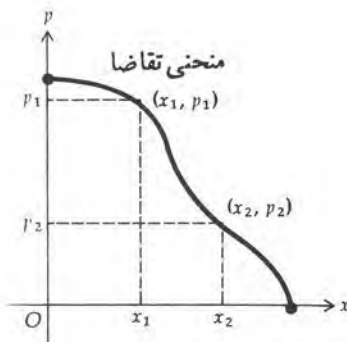
$$p^2 + 2x - 16 = 0 \quad (3)$$

داده شده است. چون در شرایط عادی اقتصادی متغیرهای x و p نامنفی هستند، هنگام حل (۳) نسبت به p ، مقادیر منفی p را نمی‌پذیریم و می‌نویسیم

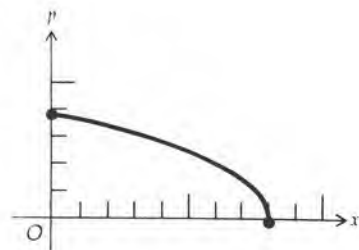
$$p = \sqrt{16 - 2x} \quad (4)$$

که به شکل (۲) است. پس تابع بها، حاصل از معادله تقاضای (۳)، تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{16 - 2x}$ است. منحنی تقاضا در شکل ۶.۱۰.۴ نشان داده شده است. نمودار را به ربع اول محدود کرده‌ایم، زیرا لازم است که x و p نامنفی باشند. از (۴) می‌بینیم که $p \leq 4$ و $16 - 2x \geq 0$ ، یا $x \leq 8$. بنابراین $x \in [0, 8]$ و $p \in [0, 4]$. ○

علاوه بر محدود کردن x و p به اعداد نامنفی، در شرایط عادی، این شرط را نیز اعمال می‌کنیم که هر چه بهای هر واحد کم شود، تقاضا برای کالا بالا می‌رود، و هر چه بهای هر واحد افزایش یابد، تقاضا تقلیل می‌یابد؛ یعنی، اگر بهای x_1 واحد از کالایی p_1 تومان، و بهای x_2 واحد از کالایی p_2 تومان باشد، آنگاه $x_2 > x_1$ اگر و تنها اگر $p_2 < p_1$. این شرط چیزی جز «قاعده معمولی اقتصاد» نیست، و در شکل ۷.۱۰.۴ نشان داده شده است.



شکل ۶.۱۰.۴



شکل ۷.۱۰.۴

تابع مهم دیگر در علم اقتصاد، تابع درآمد کل است که با R نشان داده می‌شود، و

$$R(x) = px.$$

چون p و x در شرایط عادی نامنفی هستند، $R(x)$ هم نامنفی است. وقتی $x \neq 0$ ، از معادله بالا داریم

$$\frac{R(x)}{x} = p.$$

این معادله نشان می‌دهد که درآمد در واحد کالا (درآمد متوسط) و بهای هر واحد با هم مساوی هستند.

۴۰۱۰۴ تعریف اگر درآمد کل به دست آمده، وقتی که x واحد از کالا مورد تقاضا باشد، $R(x)$ تومان باشد، آنگاه درآمد نهایی، وقتی $x = x_1$ ، از $R'(x_1)$ ، در صورت وجود، به دست می‌آید. تابع R' به تابع درآمد نهایی موسوم است.

$R'(x_1)$ ممکن است مثبت، منفی، یا صفر باشد، و می‌توان آن را به عنوان آهنگ تغییر درآمد کل، وقتی که x_1 واحد کالا مورد تقاضا باشد، تعبیر کرد. همچنانکه $C'(k)$ هزینه تقریبی $(k+1)$ مین واحدی است که پس از تولید k واحد اول تولید می‌شود، $R'(k)$ نیز درآمد تقریبی حاصل از فروش $(k+1)$ مین واحدی است که پس از فروش k واحد اول فروخته می‌شود.

○ نمونه ۵ فرض کنید درآمد کل حاصل از فروش x عدد میز، $R(x)$ تومان باشد، و

$$R(x) = 300x - \frac{x^2}{2}.$$

(الف) تابع درآمد نهایی R' است، و

$$R'(x) = 300 - x.$$

(ب) درآمد نهایی وقتی $x = 40$ ، از $R'(40)$ به دست می‌آید، و

$$R'(40) = 300 - 40 = 260.$$

بنابراین، آهنگ تغییر درآمد کل وقتی ۴۰ میز فروخته شود ۲۶۰ تومان در هر میز است.

(پ) درآمد واقعی حاصل از فروش چهل و یکمین میز $R(41) - R(40)$ تومان است، و

$$\begin{aligned} R(41) - R(40) &= \left[300(41) - \frac{(41)^2}{2} \right] - \left[300(40) - \frac{(40)^2}{2} \right] \\ &= [12300 - 8405] - [12000 - 800] \end{aligned}$$

$$= 1145950 - 112000 \\ = 259950.$$

پس، درآمد واقعی حاصل از فروش چهل و یکمین میز ۲۵۹۹۵۰ تومان است. در قسمت (ب) داشتیم $R'(40) = 2600$ ؛ و ۲۶۰۰ تومان مبلغ تقریبی درآمد حاصل از فروش چهل و یکمین میز است. ○

نمودارهای تابع درآمد کل و تابع درآمد نهایی را، به ترتیب، منحنی درآمد کل (با علامت دکت) و منحنی درآمد نهایی (با علامت دن) می‌نامند.

مثال ۳ معادله تقاضا برای کالای ویژه‌ای $12 - x = p^2$ است. مطلوب است محاسبه تابع درآمد کل، و تابع درآمد نهایی. منحنیهای تقاضا، درآمد کل و درآمد نهایی را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل اگر معادله تقاضا را نسبت به p حل کنیم، می‌بینیم که $p = \pm \sqrt{12 - x}$. چون $R(x) = px$ ، و $p \geq 0$ ، داریم

$$R(x) = x\sqrt{12 - x}$$

و

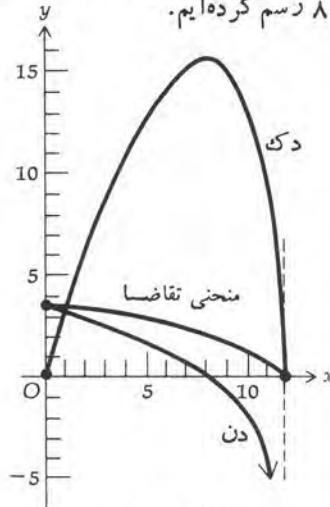
$$R'(x) = \sqrt{12 - x} - \frac{x}{2\sqrt{12 - x}}$$

$$R'(x) = \frac{24 - 3x}{2\sqrt{12 - x}}.$$

جدول ۲۰۱۰.۴

x	p	$R(x)$	$R'(x)$
۰	$\sqrt{12}$	۰	$\sqrt{12}$
۳	۳	۹	$\frac{5}{2}$
۸	۲	۱۶	۰
۱۱	۱	۱۱	$-\frac{9}{2}$
۱۲	۰	۰	وجود ندارد

اگر بنویسیم $R'(x) = 0$ ، داریم $x = 8$. با استفاده از اطلاعات جدول ۲۰۱۰۴، نمودارهای خواسته شده را در شکل ۸۰۱۰۴ رسم کرده ایم.



شکل ۸۰۱۰۴

سود کل حاصل از يك معامله، به عنوان تفاضل بین درآمد کل و هزینه کل تعریف می شود. یعنی، اگر سود کل حاصل از تولید و فروش x واحد از کالایی $P(x)$ تومان باشد، آنگاه

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad (5)$$

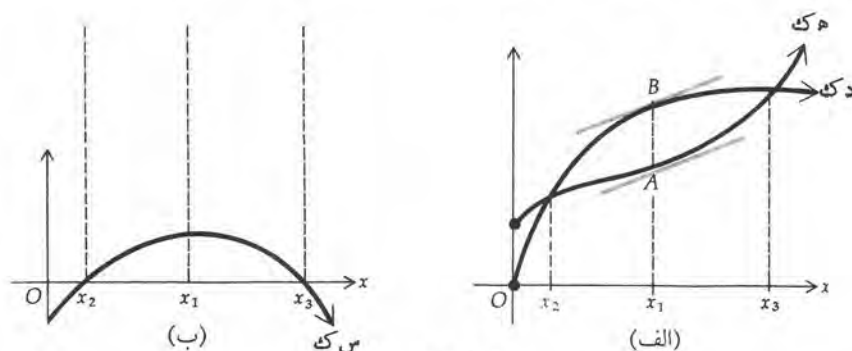
که در آن $R(x)$ تومان درآمد کل و $C(x)$ تومان هزینه کل است. تابع P به تابع سود کل موسوم است. از (۵) داریم

$$P'(x) = R'(x) - C'(x). \quad (6)$$

تابع P' را تابع سود نهایی می نامند، و $P'(k)$ سود تقریبی حاصل از $(k+1)$ مین واحد، پس از تولید و فروش k واحد است. بنابر (۶)، سود نهایی برابر است با درآمد نهایی منهای هزینه نهایی.

در شکل ۹۰۱۰۴ (الف) نمودارهای تابع هزینه کل و تابع درآمد کل يك شرکت خاص رسم شده اند، و در شکل ۹۰۱۰۴ (ب) نمودار تابع سود کل این شرکت (با علامت S_K) دیده می شود. در شکل ۹۰۱۰۴ (الف) مشاهده کنید که وقتی منحنی H_K بالای منحنی D_K (یعنی، وقتی هزینه بیشتر از درآمد) باشد، آنگاه در شکل ۹۰۱۰۴ (ب) منحنی S_K زیر محور x هاست (سود منفی است؛ یعنی شرکت ضرر نشان می دهد)؛ و این هنگامی رخ می دهد که $0 \leq x < x_0$ و وقتی منحنی H_K زیر منحنی D_K (یعنی وقتی هزینه کمتر از درآمد) باشد، منحنی S_K بالای محور x هاست (سود مثبت است؛ یعنی، شرکت سود نشان می دهد)؛ و این

وقتی اتفاق می افتد که $x_2 < x < x_3$ ، در نقاط تقاطع منحنیهای هک و دک (وقتی هزینه مساوی با درآمد باشد)، منحنی س ک محور x ها را قطع می کند (سود صفر است؛ یعنی، دخل و خرج شرکت یکی است)؛ و این در x_2 و x_3 رخ می دهد.



شکل ۹.۱۰.۴

شرکت وقتی سود نشان می دهد که تولید بین x_2 و x_3 باشد. حال سطح تولید لازم برای حصول سود ما کسیم را تعیین می کنیم. در شکل ۹.۱۰.۴ (الف) فاصله قائم بین دو منحنی دک و هک به ازای مقدار مشخصی از x ، $P(x)$ است که سود کل متناظر با آن مقدار x را به دست می دهد. وقتی این فاصله قائم حداکثر باشد، $P(x)$ به ما کسیم مقدار خودش می رسد. از شکل ۹.۱۰.۴ (الف) مشاهده کنید که فاصله AB بزرگترین فاصله قائم بین دو منحنی درباره $[x_2, x_3]$ است، و این از عدد بحرانی x_1 از تابع P به دست می آید. از (۶) می بینیم که $P'(x) = 0$ اگر و تنها اگر $R'(x) = C'(x)$. پس، برای سود ما کسیم، درآمد نهایی باید مساوی با هزینه نهایی باشد. در شکل ۹.۱۰.۴ (الف) توجه کنید که در نقاط A و B روی دو منحنی، خطوط مماس متوازی اند، و در نتیجه $R'(x_1) = C'(x_1)$. از (۶) داریم

$$P''(x) = R''(x) - C''(x). \quad (۷)$$

چون در عددی مانند x که $P'(x) = 0$ و $P''(x) < 0$ ، P یک مقدار ما کسیم نسبی دارد، از (۶) و (۷) نتیجه می گیریم که این مقدار به ازای x ی به دست می آید که $R'(x) = C'(x)$ و $R''(x) < C''(x)$. بنابراین، تابع سود یک مقدار ما کسیم نسبی خواهد داشت، هرگاه درآمد نهایی مساوی با هزینه نهایی باشد و ضریب زاویه نمودار تابع درآمد نهایی کمتر از ضریب زاویه نمودار تابع هزینه نهایی باشد. این مفاهیم را در مثال زیر، که در آن به بررسی رقابت کامل می پردازیم، روشن می کنیم. وقتی شرکتی در رقابت کامل کار می کند که تعداد زیادی کارخانه کوچک وجود داشته باشند و هیچکدام به تنهایی نتواند با افزایش تولید روی بها اثر بگذارد. بنابراین، در رقابت کامل، بهای هر کالایی

ثابت است، و شرکت می‌تواند با این بهای ثابت هر اندازه که بخواهد کالا بفروشد. منحنی تقاضا در چنین مواردی يك خط افقی است؛ خطی است موازی با محور x ها.

مثال ۴ در رقابت کامل، کارخانه‌ای می‌تواند همه کالای خاصی را که تولید می‌کند با بهای هر واحد ۱۰۰ تومان بفروشد. اگر تولید روزانه x واحد باشد، هزینه کل تولید در هر روز $۷۰۰ + ۲۰x + x^2$ تومان است. مطلوب است تعداد تولید روزانه برای اینکه سود کل روزانه کارخانه حداکثر باشد.

حل اگر در آمد کل حاصل از فروش x واحد $R(x)$ تومان باشد، آنگاه

$$R(x) = 100x. \quad (۸)$$

اگر تابع هزینه کل C باشد، آنگاه

$$C(x) = x^2 + 20x + 700. \quad (۹)$$

اگر تابع سود کل P باشد، آنگاه

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 100x - (x^2 + 20x + 700)$$

$$P(x) = -x^2 + 80x - 700. \quad (۱۰)$$

دقت کنید که x به $[0, +\infty)$ تعلق دارد.

از (۸) و (۹) داریم

$$R'(x) = 100 \text{ و } R''(x) = 0$$

$$C'(x) = 2x + 20 \text{ و } C''(x) = 2$$

با مساوی قرار دادن $R'(x)$ و $C'(x)$ داریم

$$2x + 20 = 100$$

$$x = 40.$$

چون به ازای همه x ها، $R''(x) < C''(x)$ ، داریم $R''(x) - C''(x) = P''(x)$. پس $P(40)$ يك مقدار ماکسیمم نسبی است. این مقدار، يك ماکسیمم مطلق نیز هست، زیرا P بر $[0, +\infty)$ پیوسته است و $P(40)$ تنها اکسترمم P به ازای تمام x های در $[0, +\infty)$ است. بنابراین، سود کل روزانه حداکثر است وقتی که در هر روز ۴۰ واحد از کالا تولید شود.

راه دیگر حل مسئله، محاسبه $P'(x)$ و $P''(x)$ از (۱۰)، و استفاده از روال عادی حل

مسائل اکسترمم است.

فرض کنید يك معادله تقاضا داده شده باشد. مقدار تقاضای مصرف کننده، صرفاً بستگی به بهای کالا دارد. در يك شرایط انحصاری، که برای کالای خاصی تنها يك تولید کننده وجود دارد، بها و در نتیجه تقاضا را می توان با تحت نظر گرفتن کمیت تولید، کنترل کرد. معمولاً همین که تولید کننده تولید را افزایش دهد بها کاهش می یابد. در شرایط انحصاری، تولید کننده به صاحب انحصار موسوم است. صاحب انحصار مایل است کمیت کالایی را که تولید می کند، و در نتیجه بهای هر واحد را (که از معادله تقاضا تعیین می شود) کنترل کند تا سودش حتی الامکان زیاد شود.

مثال ۵ فرض کنید در شرایط انحصاری معادله تقاضا برای يك کالای خاص به صورت $p = 4 - 0.00002x$ باشد که در آن x تعداد واحدهای تولید شده در روز و p بهای هر واحد کالا بر حسب تومان است. هزینه کل تولید x واحد کالا، $3x + 600$ تومان می باشد. اگر بخواهیم سود روزانه بیشترین مقدار ممکن باشد، مطلوب است: تعداد واحدهایی که صاحب انحصار باید در هر روز تولید کند؛ بهای هر واحد کالا؛ و سود روزانه.

حل چون معادله تقاضا $p = 4 - 0.00002x$ است، و x و p باید نامنفی باشند، نتیجه می گیریم که x در بازه $[0, 20000]$ قرار دارد. چون $R(x) = xp$ داریم

$$R(x) = 4x - 0.00002x^2 \quad x \in [0, 20000] \quad (11)$$

تابع هزینه کل به صورت زیر است

$$C(x) = 600 + 3x. \quad (12)$$

اگر سود کل $P(x)$ تومان باشد، $P(x) = R(x) - C(x)$ ، لذا

$$P(x) = x - 0.00002x^2 - 600 \quad x \in [0, 20000]$$

از (۱۱) و (۱۲) داریم

$$R'(x) = 4 - 0.00004x \quad \text{و} \quad R''(x) = -0.00004$$

$$C'(x) = 3 \quad \text{و} \quad C''(x) = 0.$$

اگر $R'(x)$ و $C'(x)$ را با هم مساوی بگیریم، داریم

$$4 - 0.00004x = 3$$

$$x = 2500.$$

چون همواره $R''(x)$ کمتر از $C''(x)$ است، $P(2500)$ يك مقدار ماکسیمم مطلق است (توجه کنید که $P(x)$ به ازای $x = 0$ و $x = 20000$ منفی است). $P(2500) = 650$ ، و وقتی $x = 2500$ ، $p = 3.50$.

بنابراین، برای اینکه سود روزانه به حداکثر برسد، باید تولید روزانه ۲۵۰۰ واحد باشد، و هر واحد ۳۷۵۰ تومان فروخته شود تا سود کل ۶۵۰ تومان باشد. ▲

مثال ۶ مثال ۵ را با این فرض حل کنید که دولت برای هر واحد تولید شده ۲۰۰۰ تومان از صاحب انحصار مالیات بخواهد.

حل با مالیات اضافه شده، تابع هزینه کل به صورت زیر درمی آید

$$C(x) = (600 + 3x) + 200x$$

و بنابراین تابع هزینه نهایی عبارت است از

$$C'(x) = 320.$$

بامساوی گرفتن $C'(x)$ و $R'(x)$ داریم

$$4 - 0.0004x = 320$$

$$x = 2000.$$

مانند مثال ۵، نتیجه می شود که وقتی $x = 2000$ ، P بر $[0, 20000]$ یک مقدار ماکسیمم مطلق دارد. از $6000 - 0.0004x^2 + 0.8x = P(x)$ داریم $P(2000) = 2000$. از معادله تقاضای $4 - 0.0004x = p$ ، به دست می آوریم: وقتی $x = 2000$ ، $p = 3.60$. بنابراین، اگر برای هر واحد ۲۰۰۰ تومان مالیات وضع شود، صاحب انحصار باید فقط ۲۰۰۰ واحد در روز تولید کند، و هر یک را با قیمت ۳۶۰۰ تومان بفروشد، تا سود کل روزانه ماکسیمم، ۲۰۰ تومان، عایدش شود. ▲

از مقایسه نتایج مثالهای ۵ و ۶ این نکته جالب مشاهده می شود که برای اینکه تولید کننده بیشترین سود روزانه را به دست آورد، نباید تمام ۲۰۰۰ تومان مالیات را به بهای کالا اضافه کند. یعنی، برای به دست آوردن بیشترین سود، باید به بهای هر واحد فقط ۱۰۰۰ تومان اضافه کند. معنی اقتصادی این مطلب این است که مصرف کنندگان نسبت به تغییرات قیمت حساسیت دارند و بدین جهت است که صاحب انحصار، مالیات را کاملاً به مصرف کننده منتقل نمی کند.

نکته قابل توجه دیگر در مثالهای ۵ و ۶ این است که جهت حصول سود ماکسیمم، هزینه عمومی یک شرکت در تعیین تعداد واحدهایی که باید تولید شود، یا در تعیین بهای هر واحد تأثیری ندارد. بدون توجه به اینکه کالایی تولید بشود یا نشود هزینه عمومی یک شرکت باید پرداخت شود. در مثالهای ۵ و ۶ چون، به ترتیب، $C(x) = 600 + 3x$ و $C(x) = 600 + 320x$ ، هزینه عمومی ۶۰۰ تومان است. اگر در عبارت $C(x)$ به جای ۶۰۰ هر ثابت دلخواه k را بگذاریم، $C'(x)$ تغییر نمی کند؛ بنابراین، این گونه تغییرات اثری روی مقدار x ی که به ازای آن هزینه نهایی برابر است با درآمد نهایی، ندارد. البته، هر تغییری

که در هزینه عمومی داده شود، روی هزینه هر واحد در نتیجه روی سود واقعی اثر می گذارد؛
با این وجود، اگر شرکت به دنبال بیشترین سود ممکن باشد، تغییر هزینه عمومی نه روی
تعداد واحدهایی که باید تولید شود اثر می گذارد و نه روی بهای هر واحد.

تمرینهای ۱۰.۴

۱. هزینه کل ساخت x ساعت در کارگاه معینی بر حسب دلار از $C(x) = 1500 + 3x + x^2$ به دست می آید. مطلوب است: (الف) تابع هزینه نهایی؛ (ب) هزینه نهایی وقتی $x = 40$ ؛ (پ) هزینه واقعی ساخت چهل و یکمین ساعت.

۲. هزینه کل تولید x واحد از وسیله ای $C(x)$ دلار است و

$$C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}.$$

مطلوب است: (الف) تابع هزینه نهایی؛ (ب) هزینه نهایی وقتی که $x = 10$ ؛ (پ) هزینه واقعی ساخت یازدهمین واحد از این وسیله.

۳. فرض کنید به وسیله فعل و انفعال شیمیایی خاصی مایعی تولید بشود، و تابع هزینه کل دارای ضابطه $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$ باشد، که در آن $C(x)$ هزینه کل تولید x لیتر مایع بر حسب دلار است. مطلوب است: (الف) هزینه نهایی وقتی که تولید ۱۶ لیتر است؛ و (ب) مقدار تولید بر حسب لیتر وقتی که هزینه نهایی ۴٫۵ دلار به ازای هر لیتر است.

۴. هزینه کل تولید x واحد از کالای معینی بر حسب دلار از ضابطه $C(x) = 40 + 3x + 9\sqrt{2x}$ به دست می آید. مطلوب است: (الف) هزینه نهایی وقتی که ۵۰ واحد تولید بشود؛ و (ب) تعداد واحدهای تولید شده وقتی که هزینه نهایی هر واحد ۴٫۵ دلار است.

۵. هزینه کل تولید x واحد از کالایی بر حسب دلار با ضابطه $C(x) = x^2 + 4x + 8$ تعیین می شود. مطلوب است: (الف) تابع هزینه متوسط؛ و (ب) تابع هزینه نهایی. (پ) مینیمم مطلق هزینه متوسط هر واحد را بیابید؛ (ت) منحنیهای هزینه کل، هزینه متوسط، و هزینه نهایی را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. دقت کنید که وقتی هزینه متوسط کمترین مقدار خود را دارد، هزینه متوسط و هزینه نهایی با هم مساوی هستند.

۶. تمرین ۵ را در حالتی که $C(x) = 3x^2 + x + 3$ ، حل کنید.

۷. اگر هزینه کل تولید x واحد از کالایی $C(x)$ دلار باشد، و $C(x) = 3x^2 - 6x + 4$ ، مطلوب است: (الف) تابع هزینه متوسط؛ و (ب) تابع هزینه نهایی. (پ) برد C چیست؟ (ت) مینیمم مطلق هزینه متوسط هر واحد را بیابید؛ (ث) منحنیهای هزینه کل، هزینه

متوسط، و هزینه‌نهایی را در يك دستگاه مختصات رسم کنید. مشاهده کنید که هزینه متوسط و هزینه نهایی باهم مساوی هستند وقتی که هزینه متوسط کمترین مقدار خود را داشته باشد.

۸. اگر هزینه کل تولید x واحد از کالایی $C(x)$ دلار باشد، و $C(x) = 2x^2 - 8x + 18$ ، مطلوب است: (الف) قلمرو و برد C ؛ (ب) تابع هزینه متوسط؛ (پ) مینیمم مطلق هزینه متوسط هر واحد؛ و (ت) تابع هزینه نهایی. (ث) منحنیهای هزینه کل، هزینه متوسط، و هزینه نهایی را در يك دستگاه مختصات رسم کنید.

۹. تابع هزینه کل با ضابطه $C(x) = (x^3/3) - 2x^2 + 5x + 2$ داده شده است. (الف) برد C را تعیین کنید؛ (ب) تابع هزینه نهایی را بیابید؛ (پ) بازه‌ای را که بر آن، تابع هزینه نهایی نزولی است، و بازه‌ای را که این تابع روی آن صعودی است بیابید؛ (ت) نمودار تابع هزینه کل را رسم کنید؛ تعیین کنید کجا تقعر نمودار روبه بالاست و کجا تقعر آن روبه پایین است؛ نقاط عطف را بیابید، و معادله‌ای برای هر يك از مماسهای عطفی بنویسید.

۱۰. هزینه کل تولید $100x$ رادیو در هر روز در کارخانه معینی بر حسب ۱۰۰ دلار با ضابطه $C(x) = 4x + 5$ تعیین می‌شود. مطلوب است: (الف) تابع هزینه متوسط؛ و (ب) تابع هزینه نهایی. (پ) نشان دهید که برای هزینه متوسط هر واحد مینیمم مطلق وجود ندارد؛ (ت) کارخانه در هر روز حداقل چند رادیو باید تولید کند تا هزینه متوسط هر رادیو کمتر از ۷ دلار باشد؟ (ث) منحنیهای هزینه کل، هزینه متوسط، و هزینه نهایی را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۱. هزینه عمومی يك سازنده اسباب بازی برای بچه‌ها در هفته ۴۰۰ دلار است، و هزینه‌های دیگر برای تولید هر اسباب بازی به ۳ دلار می‌رسد. مطلوب است: (الف) تابع هزینه کل؛ (ب) تابع هزینه متوسط؛ و (پ) تابع هزینه نهایی. (ت) نشان دهید که برای هزینه متوسط هر واحد مینیمم مطلق وجود ندارد؛ (ث) حداقل چند اسباب بازی باید تولید شود تا هزینه متوسط هر اسباب بازی کمتر از ۳٫۴۲ دلار باشد؟ (ج) نمودارهای توابع مذکور در (الف)، در (ب)، و در (پ) را در يك دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۲. در آمد کل حاصل از فروش x میز تحریر $R(x)$ دلار است، و $R(x) = 200x - (x^2/3)$. مطلوب است: (الف) تابع درآمد نهایی؛ (ب) درآمد نهایی وقتی که $x = 30$ ؛ (پ) درآمد واقعی از فروش سی و یکمین میز تحریر.

۱۳. اگر درآمد کل حاصل از فروش x تلویزیون $R(x)$ دلار باشد، و

$$R(x) = 600x - \frac{1}{40}x^3$$

مطلوب است: (الف) تابع درآمد نهایی؛ (ب) درآمد نهایی وقتی که $x = 20$ ؛ (پ) درآمد واقعی از فروش بیست و یکمین دستگاه تلویزیون.

۱۴. اگر معادله تقاضا برای کالای خاصی $12 = 3x + 4p$ باشد، مطلوب است: (الف) تابع بها؛ (ب) تابع درآمد کل؛ و (پ) تابع درآمد نهایی. منحنیهای تقاضا، درآمد کل، و درآمد نهایی را در يك دستگاه مختصات رسم کنید. نشان دهید که منحنی درآمد نهایی محور x ها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طولش xy است که به ازای آن درآمد کل حداکثر است، و نیز نشان دهید که منحنی تقاضا محور x ها را در نقطه‌ای قطع می‌کند که طولش دو برابر طول نقطه قبلی است.

۱۵. معادله تقاضا برای کالای خاصی $36 = x^2 + p^2$ است که در آن، اگر بهای هر واحد p دلار باشد، تقاضا $100x$ واحد است. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل، و (ب) تابع درآمد نهایی. (پ) ما کسیمم مطلق درآمد کل را بیابید.

۱۶. تمرین ۱۵ را در صورتی که معادله تقاضا $0 = px^2 + 9p - 18$ باشد، حل کنید.

۱۷. شرکتی که میز تحریر می‌سازد و می‌فروشد، در شرایط رقابت کامل کار می‌کند و می‌تواند تمام میز تحریرهایی را که تولید می‌کند با بهای هر واحد ۲۰۰ دلار بفروشد. اگر در هر هفته x میز تحریر تولید شود و به فروش برسد، و هزینه کل تولید هفتگی $C(x)$ دلار باشد، آنگاه $C(x) = x^2 + 40x + 3000$. تعیین کنید در هر هفته چند میز تحریر تولید شود تا بیشترین سود کل هفتگی نصیب شرکت شود. بیشترین سود کل هفتگی چقدر است؟

۱۸. کارخانه‌ای که در شرایط رقابت کامل کار می‌کند رادیوی دستی می‌سازد و می‌فروشد. کارخانه می‌تواند تمام رادیوهای را که تولید می‌کند، از قرار هر رادیو ۷۵ دلار به فروش برساند. اگر تولید کارخانه در هر روز x رادیو، و هزینه کل تولید روزانه $C(x)$ دلار باشد، آنگاه $C(x) = x^2 + 25x + 100$. برای اینکه سود کل روزانه کارخانه حداکثر باشد، در هر روز چند رادیو باید تولید شود؟ حداکثر سود کل روزانه چقدر است؟

۱۹. در يك شرایط انحصاری، معادله تقاضا برای کالای معینی $x + p = 140$ است؛ در اینجا x تعداد واحدهای تولید روزانه، و p بهای هر واحد بر حسب دلار است. هزینه کل تولید x واحد بر حسب دلار با ضابطه $C(x) = x^2 + 20x + 300$ به دست می‌آید، و x به بازه بسته $[0, 140]$ تعلق دارد. (الف) تابع سود کل را بیابید و نمودارش را رسم کنید؛ (ب) در دستگاه مختصاتی که با دستگاه مختصات مربوط به (الف) متفاوت باشد، منحنیهای درآمد کل، و هزینه کل را رسم کنید، و تعبیر هندسی تابع سود کل را مشخص نمایید؛ (پ) توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی را بیابید؛ (ت) سود روزانه ما کسیمم را پیدا کنید؛ (ث) نمودارهای تابع و درآمد نهایی، و تابع هزینه نهایی را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید، و نشان دهید که این دو در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند که به ازای طولش يك ما کسیمم برای سود کل به دست می‌آید.

۲۰. تمرین ۱۹ را با این شرط حل کنید که معادله تقاضا $x^2 + p = ۳۲۰$ ، $C(x) = ۲۰x$ ، و x در بازه بسته $[۰, ۸\sqrt{۵}]$ باشد.

۲۱. فرض کنید در یک شرایط انحصاری، معادله تقاضا برای کالای تجارتنی خاصی $p = ۶ - (Vx - ۱۰۰)/۵$ باشد؛ در اینجا، وقتی مقدار تقاضا x واحد کالا باشد، بهای هر واحد p دلار است، و $x \in [۱۰۰, ۱۰۰۰]$. اگر هزینه کل تولید x واحد کالا، $C(x)$ دلار باشد، آنگاه $C(x) = ۲x + ۱۰۰$. (الف) توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی را بیابید؛ (ب) مقدار x چه باشد تا سود ما کسیم به دست آید؟

۲۲. برای کالای معینی، معادله تقاضا $p = (۸ - x/۱۰۰)^۲$ است؛ در اینجا، وقتی تقاضا برای x واحد کالا باشد، بهای هر واحد آن p دلار است، و $x \in [۰, ۸۰۰]$. اگر هزینه کل تولید x واحد $C(x)$ دلار باشد، تابع هزینه کل دارای ضابطه $C(x) = ۱۸x - (x^2/۱۰۰)$ است. (الف) توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی را بیابید؛ (ب) مقدار x چه باشد تا سود کل ما کسیم به دست آید؟

۲۳. صاحب انحصاری تعیین می کند که اگر هزینه کل تولید x واحد از کالای معینی $C(x)$ سنت باشد، آنگاه $C(x) = ۲۵۰۰۰ + ۲۵x$. معادله تقاضا $p = ۱۰۰ - ۰۰۰۲x$ است؛ در اینجا، وقتی که تقاضا برای x واحد باشد، بهای هر واحد p سنت است. اگر بخواهیم سود کل ما کسیم باشد، مطلوب است: (الف) تعداد واحدهایی که باید تولید شود؛ (ب) بهای هر واحد؛ و (پ) سود کل.

۲۴. تمرین ۲۳ را با این شرط حل کنید که دولت هم مالیاتی برابر با ۱۰ سنت برای هر واحد تولید شده از صاحب انحصار بطلبد.

۲۵. تمرین ۲۳ را با این شرط حل کنید که دولت هم مالیاتی بر اساس ۱۰ درصد بها برای مصرف کنند، از صاحب انحصار بطلبد.

۲۶. در مورد صاحب انحصار تمرین ۲۳، دولت چه مقدار مالیات برای هر واحد تولید شده وضع کند تا درآمدش از محل مالیات دریافتی ما کسیم باشد.

۲۷. در یک شرایط انحصاری، معادله تقاضا برای کالای معینی $۲۴ = x + ۲p$ است؛ در اینجا، وقتی که بهای هر واحد p دلار باشد، تقاضا برای x واحد است. اگر هزینه کل تولید x واحد، $C(x)$ باشد، آنگاه $C(x) = (۳x^2/۱۰) + (x^3/۱۰۰)$. (الف) اگر بخواهیم سود کل ما کسیم باشد، بهای هر واحد کالا را بیابید؛ (ب) قسمت (الف) را با این شرط حل کنید که دولت هم مالیاتی برابر با ۲ دلار برای هر واحد تولید شده از صاحب انحصار بطلبد.

۲۸. فرض کنید، تحت شرایط انحصاری، معادله تقاضا $۷۵ = ۳p + x$ باشد که وقتی تقاضا برای x واحد باشد، بهای هر واحد p دلار است. اگر هزینه کل تولید x واحد

$C(x)$ باشد، آنگاه $C(x) = 3x + 100$. اگر دولت هم به ازای هر واحد تولید شده برای صاحب انحصار مالیاتی وضع کند، ما کسیم درآمد دولت از محل این مالیات چقدر است؟

۳۹. معادله تقاضا برای کالای معینی که توسط صاحب انحصاری تولید می شود، $p = a - bx$ است که در آن، a و b اعداد ثابت مثبت هستند. فرض کنید دولت هم مالیاتی، بر اساس t دلار تولید x واحد که $C(x) = c + dx$ دلار است از $C(x) = c + dx$ به دست می آید. اعداد a ، b ، c ، و d اعداد ثابت مثبت هستند. فرض کنید دولت هم مالیاتی، بر اساس t دلار برای هر واحد تولید شده، از صاحب انحصار بطلبد. نشان دهید برای اینکه سود ما کسیم باشد، صاحب انحصار باید فقط نصف مالیات را به حساب مصرف کننده بگذارد؛ یعنی، صاحب انحصار باید به بهای هر واحد $t/2$ دلار بیفزاید. توجه: معادله تقاضا و تابع هزینه کل مثال ۶ و تمرین ۲۴ حالات خاصی از این وضعیت کلی اند.

۳۵. معادله تقاضا برای یک صاحب انحصار $p = 100 - x$ است که اگر بهای هر واحد p دلار باشد، مقدار تقاضا x واحد است. تابع هزینه کل دارای ضابطه $C(x) = 5x^2/5 - 55x$ است، که در آن $C(x)$ هزینه کل تولید x واحد است. (الف) برای اینکه سود حداکثر باشد، بهایی را که صاحب انحصار باید برای هر واحد تعیین کند بیابید؛ (ب) اگر دولت بر اساس ۹ دلار برای هر واحد تولید شده از صاحب انحصار مالیات بگیرد، برای کسب بیشترین سود کل، بها چه باید باشد؟ (پ) نشان دهید که افزایش بها از (الف) به (ب)، از مالیات وضع شده توسط دولت بیشتر است.

تمرینهای مروری فصل ۴

در تمرینهای ۱ تا ۱۵، اکستریمهای مطلق تابع داده شده بر بازه مفروض را در صورت وجود بیابید، و مقادیری برای x تعیین کنید که به ازای آنها اکستریمهای مطلق به دست آیند. نمودار تابع بر بازه مربوط را رسم کنید.

$$1. f(x) = \sqrt{5+x}; [-5, +\infty)$$

$$2. f(x) = \sqrt{9-x^2}; (-3, 3)$$

$$3. f(x) = \frac{5}{4}x^6 - 3x^5; [-1, 2]$$

$$4. f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [-2, 6]$$

$$5. f(x) = |9 - x^2|; [-2, 3]$$

$$۶. f(x) = \frac{3}{x-2}; [0, 4]$$

$$۷. f(x) = x^4 - 12x^2 + 36; [0, 5]$$

$$۸. f(x) = \begin{cases} 2x+3 & -2 \leq x < 1 \\ x^2+4 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}; [-2, 2]$$

$$۹. f(x) = 2 \sin 3x; \left[-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right]$$

$$۱۰. f(x) = 4 \cos^2 2x; \left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۲۰، مطلوب است: اکسترمهای نسبی f ؛ نقاط عطف نمودار f ؛ بازه‌هایی که بر آنها f صعودی است؛ بازه‌هایی که بر آنها f نزولی است؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به بالا است؛ بازه‌هایی که بر آنها تقعر نمودار رو به پایین است؛ ضریب زاویه‌های مماسهای عطفی. نمودار را رسم کنید.

$$۱۲. f(x) = (x+2)^{4/3}$$

$$۱۱. f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$۱۴. f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x < 2 \\ 6 - x^2 & 2 \leq x \end{cases}$$

$$۱۳. f(x) = (x-4)^2(x+2)^2$$

$$۱۶. f(x) = x\sqrt{25-x^2}$$

$$۱۵. f(x) = (x-3)^{5/3} + 1$$

$$۱۸. f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

$$۱۷. f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

$$۱۹. f(x) = \sin 2x - \cos 2x; x \in \left[-\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi\right]$$

$$۲۰. f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$$

۲۱. دو عدد نامنفی بیابید که مجموعشان ۱۲، و مجموع مربعاتشان مینیمم مطلق باشد.

۲۲. کوتاهترین فاصله از نقطه $A(0, 4)$ تا نقطه‌ای بر هذلولی $16 = x^2 - y^2$ را پیدا کنید، و آن نقطه از هذلولی را که به A نزدیکترین نقطه است بیابید.

۲۳. کوتاهترین فاصله از نقطه $(0, 9/2)$ تا منحنی $y = \sqrt{x}$ را بیابید.

۲۴. در بازاری تقاضا برای نوع خاصی غله با معادله تقاضای $px + 25p - 2000 = 0$ که در آن بهای یک بسته p سنت است و کمیت مورد تقاضا در هر هفته $1000x$ بسته است، تعیین می‌شود. اگر بهای جاری غله ۸۰ سنت برای هر بسته باشد و بهای هر بسته در هر هفته با آهنگ ۴۰۰ سنت ترقی کند، آهنگ تغییر تقاضا را بیابید.

۲۵. ثابت کنید که بین تمام مستطیلهای با محیط مفروض، مساحت مربع از همه بزرگتر است.

۲۶. ثابت کنید که بین تمام مستطیلهای با مساحت مفروض، محیط مربع از همه کوچکتر است.

۲۷. دو ذره حرکت خود را در یک لحظه آغاز می‌کنند. یکی از آنها در امتداد یک خط افقی حرکت می‌کند و معادله حرکتش $x = 2t - t^2$ است، که در آن x بر حسب سانتیمتر، فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t است. حرکت ذره دیگر در امتداد یک خط قائم است که خط افقی را در مبدأ قطع می‌کند، و معادله حرکتش $y = 2t - t^2$ است که y بر حسب سانتیمتر، فاصله جهت دار ذره از مبدأ در ثانیه t است. چه موقع فاصله جهت دار بین دو ذره حداقل است؟ و در این زمان سرعت هر یک چقدر است؟

۲۸. مردی که طول قدش ۶ فوت است با آهنگ ۴ فوت بر ثانیه به طرف ساختمانی در حال حرکت است. اگر روی زمین و در فاصله ۴۰ فوتی ساختمان چراغی باشد، سایه مرد روی ساختمان با چه تندی کوتاه می‌شود، وقتی که او به فاصله ۳۰ فوتی ساختمان می‌رسد؟

۲۹. یک کشتی در ظهر بندری را ترک، و با سرعت ۲۰ گره به طرف شرق حرکت می‌کند. در ظهر روز بعد کشتی دیگری همان بندر را ترک، و با سرعت ۱۵ گره به سمت شمال شرق حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که کشتی دوم ۹۰ میل دریایی از بندر دور شده است، با چه تندی دو کشتی از هم دور می‌شوند؟

۳۰. مخزن آبی ۸۰ متر طول دارد و مقطع عرضی آن دوزنقه متساوی الساقینی است که طول هر یک از ساقهایش ۱۰ متر، قاعده بالایی آن ۱۷ متر، و قاعده پایینی آن ۵ متر است. اگر سطح آب با آهنگ ۱۰ متر بر ساعت پایین برود، در لحظه‌ای که عمق آب به ۵ متر می‌رسد، آهنگ خروج آب از مخزن چقدر است؟

۳۱. قطره‌هائے قیف مخروطی شکلی ۱۰ اینچ و عمق آن ۸ اینچ است. آب با آهنگ ۱۲ اینچ مکعب بر ثانیه به قیف وارد و با آهنگ ۴ اینچ مکعب بر ثانیه از آن خارج می‌شود. وقتی که عمق آب ۵ اینچ است، تندی بالا رفتن سطح آب را بیابید.

۳۲. در لحظه‌ای که آخرین واگن قطاری از زیر پلی خارج می‌شود، اتومبیلی که در یک جاده عمود بر راه آهن در حرکت است از روی پلی می‌گذرد. ارتفاع پل ۳۰ فوت است. آهنگ حرکت قطار ۸ فوت بر ثانیه و آهنگ حرکت اتومبیل ۴۰ فوت بر ثانیه است. بعد از دو ثانیه، با چه تندی قطار و اتومبیل از هم دور می‌شوند؟

در تمرینهای ۳۳ و ۳۴، نشان دهید که سه شرط فرض قضیه رول در مورد تابع داده شده روی بازه مفروض برقرارند. سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که در شرط قضیه رول صدق کند. نمودار f بر بازه مربوط را رسم، و با استفاده از آن تعبیر هندسی قضیه رول را بیان کنید.

$$۳۳. f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4; [-2, 1]$$

$$۳۴. f(x) = 2 \sin 3x; \left[0, \frac{1}{3}\pi\right]$$

در تمرینهای ۳۵ و ۳۶، نشان دهید که فرض قضیه مقدار میانگین در مورد تابع داده شده بر بازه مفروض برقرار است. سپس مقدار مناسبی برای c بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند. نمودار f بر بازه مربوط را رسم، و با استفاده از آن تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین را بیان کنید.

$$۳۵. f(x) = \sqrt{3-x}; [-6, -1] \quad ۳۶. f(x) = x^3; [-2, 2]$$

۳۷. الف) اگر f یک تابع چند جمله‌ای باشد، و اگر $f(a), f(b), f'(a), f'(b)$ و $f'(b)$ همه صفر باشند، ثابت کنید که در بازه باز (a, b) حداقل دو عدد وجود دارند که ریشه معادله $f(x) = 0$ هستند؛ ب) نشان دهید که تابع باضابطه $f(x) = (x^2 - 4)^2$ در قسمت الف) با این شرط که بازه باز، $(-2, 2)$ باشد صدق می‌کند.

۳۸. اگر f تابع تعریف شده به وسیله $f(x) = |2x - 4| - 6$ باشد، آنگاه $f(-1) = 0$ و $f(5) = 0$. با این وجود، مقدار f' هرگز ۰ نیست. نشان دهید که چرا قضیه رول برقرار نیست.

۳۹. فرض کنید f و g دو تابع باشند که در فرض قضیه مقدار میانگین روی $[a, b]$ صدق می‌کنند. علاوه بر این، فرض کنید که به ازای هر x در بازه باز (a, b) ، $f'(x) = g'(x)$. ثابت کنید که به ازای هر x در بازه بسته $[a, b]$ داریم $f(x) - g(x) = f(a) - g(a)$.

۴۰. اگر f یک تابع چند جمله‌ای باشد، نشان دهید که بین هر دو ریشه متوالی معادله $f'(x) = 0$ ، حداکثر یک ریشه از معادله $f(x) = 0$ وجود دارد.

۴۱. اگر $f(x) = A \sin kx + B \cos kx$ ، که در آن A, B ، و k ثابتهای مثبتی هستند، مقدار k را بیابید.

۴۲. نقطه (یا نقاط) عطف نمودار تابع باضابطه $f(x) = x^{1/5}$ را بیابید، و مشخص کنید کجا تقعر نمودار روبه بالا است، و کجا تقعر آن روبه پایین است.

۴۳. نقطه (یا نقاط) عطف نمودار تابع باضابطه

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 0 \\ x^2 + 2 & 0 \leq x \end{cases}$$

را بیابید، و مشخص کنید کجا تفرع نمودار روبه بالاست و کجا تفرع آن روبه پایین است.

۴۴. اگر $f(x) = ax^3 + bx^2$ ، a و b چه عددی باشند تا نمودار f در $(2, 16)$ يك نقطه عطف داشته باشد؟

۴۵. اگر $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، a ، b ، و c چه عددی باشند تا نمودار f در $(-1, 1)$ يك نقطه عطف داشته باشد و ضریب زاویه مماس عطفی در این نقطه -3 باشد؟

۴۶. اگر $f(x) = (x+1)/(x^2+1)$ ، ثابت کنید که نمودار f سه نقطه عطف دارد که همخط هستند. نمودار f را رسم کنید.

۴۷. اگر $f(x) = x|x|$ ، نشان دهید که نمودار f در مبدأ يك نقطه عطف دارد.

۴۸. فرض کنید n يك عدد صحیح مثبت باشد، و $f(x) = x^n$. ثابت کنید که نمودار f در مبدأ يك نقطه عطف دارد اگر و تنها اگر n يك عدد صحیح فرد باشد، و $n > 1$. علاوه بر این، نشان دهید که اگر n زوج باشد، f در 0 يك مقدار مینیمم نسبی دارد.

۴۹. فرض کنید p يك عدد گویا باشد و $p \neq 0$. اگر $f(x) = (x^2 + a^2)^p$ ، ثابت کنید که چنانچه $p < 1/2$ ، نمودار f دو نقطه عطف دارد، و چنانچه $p \geq 1/2$ ، نمودار f هیچ نقطه عطفی ندارد.

۵۰. فرض کنید نمودار تابعی f چون f در $x = c$ يك نقطه عطف داشته باشد. در مورد نکات زیر، در صورت امکان، چه می‌توانید بگویید: (الف) پیوستگی f در c ؛ (ب) پیوستگی f' در c ؛ (پ) پیوستگی f'' در c ؟

۵۱. رودخانه‌ای در يك خط مستقیم جاری است. قرار است دوشهر کوچک A و B که هر دو در يك طرف رودخانه واقع هستند، و فاصله A تا رودخانه ۱۵ کیلومتر و فاصله B تا رودخانه ۱۰ کیلومتر است، از يك منبع آب مشترك استفاده کنند. اگر نزدیکترین نقاط رودخانه به A و B ، ۲۰ کیلومتر از هم دور باشند، منبع آب کجا قرار گیرد تا مقدار لوله کشی حداقل باشد؟

۵۲. سازنده‌ای به مغازه‌داری پیشنهاد می‌کند که ۳۰۰ میز، از قرار هر میز ۹۰ دلار، بپوشد و بهای هر میز از کل سفارش را، به اندازه ۲۵ دلار به‌ازای هر میز مازاد بر ۳۰۰ تا، تقلیل دهد. تحت این شرایط حداکثر پولی (بر حسب دلار) که می‌تواند بین سازنده و مغازه‌دار دست به‌دست شود چقدر است؟

۵۳. نرده‌ای به ارتفاع h متر داریم که در فاصله w متری عقب آن دیواری قرار دارد.

می‌خواهیم نردبانی بسازیم که از روی نرده بگذرد و بر دیوار تکیه کند. طول کوتاه‌ترین نردبان قابل استفاده چقدر است؟

۵۴. مطلوب است حجم بزرگ‌ترین استوانه مستدیر قائمی که بتواند در یک مخروط مستدیر قائم باشعاع ۴ اینچ و ارتفاع ۸ اینچ محاط شود.

۵۵. ابعاد مخروط مستدیر قائمی را بیابید که حجمش حداقل باشد و بتواند بر یک استوانه مستدیر قائم باشعاع r سانتیمتر و ارتفاع h سانتیمتر محیط شود.

۵۶. قرار است چادری به شکل یک مخروط باشد. نسبت اندازه شعاع به اندازه ارتفاع چادری که حجمش مشخص است چه باشد تا برای دوختن آن حداقل جنس مصرف شود؟

۵۷. تابلو بزرگی باید ۵۰ متر مربع نوشته داشته باشد، و حاشیه بالا و پایین آن ۴ متر، و حاشیه هر یک از دو طرف آن ۲ متر باشد. با این شرایط ابعاد کوچک‌ترین تابلو را بیابید.

۵۸. می‌خواهیم قاعده جعبه سر بازی یک مربع، و حجم آن k سانتیمتر مکعب باشد. اگر بخواهیم در ساخت آن حداقل جنس مصرف شود، ابعاد جعبه چه باید باشند؟

۵۹. می‌خواهیم یک سیم ۲۰ سانتیمتری را به دو قسمت تقسیم کنیم، و هر قسمت را به شکل یک مربع درآوریم. چگونه سیم را ببریم تا مساحت کل دو مربع حداقل ممکن باشد؟

۶۰. می‌خواهیم یک سیم ۸۰ سانتیمتری را به شکل یک مربع مستطیل خم کنیم. ابعاد مربع مستطیل چه باشند تا مساحت آن حداکثر ممکن باشد؟

۶۱. فرض کنید کل سرمایه گذاری شرکت معینی C میلیون دلار، و سود سالانه شرکت P میلیون دلار باشد، و $P = 0.05C - 0.0004C^2$. اگر سرمایه گذاری با آهنگ ۴۰۰۰۰۰ دلار در سال افزایش یابد، و اگر سرمایه گذاری سال جاری شرکت، (الف) ۳ میلیون دلار؛ و (ب) ۶ میلیون دلار باشد، آهنگ تغییر سود سالانه شرکت چقدر است؟

۶۲. سازمان مسکنی، وقتی که x آپارتمان را اجاره دهد، اجاره بهای ماهانه را از قرار آپارتمانی p دلار حساب می‌کند، و $p = 30\sqrt{300 - 2x}$. قبل از اینکه درآمد نهایی به صفر برسد، چند آپارتمان باید اجاره داده شود؟

۶۳. معادله تقاضا برای کالای خاصی $(p+4)(x+3) = 48$ است که در آن، وقتی بهای هر واحد p دلار باشد، تقاضا برای x واحد است. مطلوب است: (الف) تابع بهای؛ (ب) تابع درآمد کل؛ و (پ) تابع درآمد نهایی. (ت) ما کسیمم مطلق درآمد کل را بیابید. (ث) منحنیهای تقاضا، درآمد کل، و درآمد نهایی را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۶۴. معادله تقاضا برای کالای معینی $p + 2\sqrt{x-1} = 6$ است، و تابع هزینه کل با ضابطه $C(x) = 2x - 1$ تعیین می‌شود. (الف) مقادیر مجاز x را تعیین کنید؛ (ب) توابع درآمد نهایی و هزینه نهایی را بیابید؛ (پ) مطلوب است مقداری از x که به ازای

آن سود ماکسیمم به دست می آید.

۶۵. معادله تقاضای کالای معینی $10^6 px = 10^9 - 2 \cdot 10^6 x + 18 \cdot 10^3 x^2 - 6x^3$ است؛ در هر هفته x واحد کالاتولید می شود، و بهای هر واحد p دلار است، و $x \geq 1000$. هزینه متوسط تولید هر واحد بر حسب دلار از $Q(x) = (x/50) - 24 + 11 \cdot 10^3 x^{-1}$ به دست می آید. برای اینکه سود هفتگی ماکسیمم باشد مطلوب است تعداد واحدهایی که در هر هفته باید تولید شود، و بهای هر واحد.

۶۶. وقتی که $1000x$ جعبه از جنس خاصی تولید می شود، هزینه کل تولید بر حسب دلار از $C(x) = 135x^{1/3} + 450$ به دست می آید. مطلوب است: (الف) هزینه نهایی وقتی که ۸۰۰۰ جعبه تولید بشود؛ و (ب) تعداد جعبه های تولید شده، وقتی که هزینه نهایی (در هر جعبه) ۲۰ دلار است.

۶۷. (الف) اگر $f(x) = 3|x| + 4|x - 1|$ ، ثابت کنید که مقدار مینیمم مطلق f ، ۳ است؛ (ب) اگر $g(x) = 4|x| + 3|x - 1|$ ، ثابت کنید که مقدار مینیمم مطلق g ، ۳ است؛ (پ) اگر $h(x) = a|x| + b|x - 1|$ ، و $a > 0$ ، و $b > 0$ ، ثابت کنید که مقدار مینیمم مطلق h عددی است مساوی با کوچکترین عدد از دو عدد a و b .

۶۸. اگر $f(x) = |x|^a \cdot |x - 1|^b$ ، که a و b اعداد گویای مثبتی هستند، ثابت کنید که مقدار ماکسیمم نسبی f برابر است با $a^a b^b / (a + b)^{a+b}$.

۶۹. فرض کنید دو تابع f و g به ازای تمام اعداد در بازه بسته $[a, b]$ مشتق پذیر باشند. علاوه بر این فرض کنید که $f(a) = g(a)$ و $f(b) = g(b)$. ثابت کنید عددی چون c متعلق به بازه باز (a, b) وجود دارد که $f'(c) = g'(c)$. (دانهمایی: تابع $f - g$ را در نظر بگیرید.)

۷۰. در هر يك از موارد زیر نمودار تابع f بر بازه I را رسم کنید. (الف) I بازه باز $(0, 2)$ است و f بر I پیوسته است. در a ، f يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد، و لی $f'(1)$ وجود ندارد؛ (ب) I بازه بسته $[0, 2]$ است. تابع f در a يك مقدار مینیمم نسبی دارد، و لی مقدار مینیمم مطلق f در 0 است؛ (پ) I بازه باز $(0, 2)$ است، و f' در 1 يك مقدار ماکسیمم نسبی دارد.

۵

دیفرانسیل و ضد مشتق گیری

۱۰۵ دیفرانسیل

فرض کنید تابع f باضابطه زیر تعریف شده است

$$y = f(x).$$

در این صورت، اگر $f'(x)$ وجود داشته باشد، داریم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (۱)$$

که در آن $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. از معادله (۱) نتیجه می شود که برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ وجود دارد که

$$\text{وقتی } 0 < |\Delta x| < \delta, \quad \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

و این معادل است با

$$\text{وقتی } 0 < |\Delta x| < \delta, \quad \frac{|\Delta y - f'(x)\Delta x|}{|\Delta x|} < \varepsilon,$$

معنی این عبارت چنین است که $|\Delta y - f'(x)\Delta x|$ در مقایسه با $|\Delta x|$ کوچک است. یعنی، اگر $|\Delta x|$ به اندازه کافی کوچک باشد، $f'(x)\Delta x$ تقریب خوبی برای مقدار Δy است. اگر علامت « $\approx$ » را به معنی «تقریباً مساوی است با» به کار ببریم، می توان نوشت

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (۲)$$

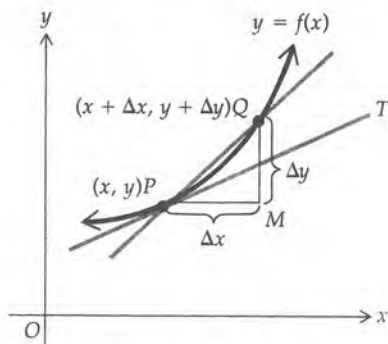
به شرطی که $|\Delta x|$ به اندازه کافی کوچک باشد. برای اینکه ببینید عبارت (۲) به زبان هندسی چه معنایی دارد، به شکل ۱.۱.۵ مراجعه کنید. در این شکل، معادله منحنی عبارت است از $y = f(x)$. خط PT در نقطه $P(x, y)$ بر منحنی مماس است، Q عبارت از نقطه $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ است و فاصله MQ جهت دار Δy است. در این شکل، Δx و Δy هر دو مثبت اند؛ معهذ، این دو می توانستند منفی هم باشند. برای مقدار کوچکی از $|\Delta x|$ ، ضریب زاویه خط قاطع PQ و ضریب زاویه خط مماس در P ، تقریباً با هم برابرند؛ یعنی،

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

یا

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

که همان عبارت (۲) است. طرف راست عبارت (۲) را به عنوان دیفرانسیل y تعریف می کنند.



شکل ۱.۱.۵

۱.۱.۵ تعریف اگر تابع f به صورت $y = f(x)$ تعریف شده باشد، دیفرانسیل y که با dy نشان داده می شود، از رابطه زیر به دست می آید

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (۳)$$

که در آن x در قلمرو f' است و Δx یک نمو دلخواه x است. این مفهوم دیفرانسیل حالت خاصی از تابع دومتغیره است (بررسی مفصل این گونه توابع در فصل ۱۸ صورت می گیرد). نماد df را می توان برای نشان دادن این تابع به کاربرد؛ علامت df به عنوان یک موجود واحد در نظر گرفته می شود. متغیر x می تواند هر عددی

در قلمرو f' باشد و Δx می تواند هر عدد دلخواهی باشد. اینکه بگوییم df تابعی از دو متغیر مستقل x و Δx است، به این معنی است که با هر زوج مرتب $(x, \Delta x)$ واقع در قلمرو df ، يك و تنها يك عدد در برد df متناظر می شود، که می توان آن را با $df(x, \Delta x)$ نمایش داد. از اینرو می توانیم بنویسیم

$$df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x. \quad (۴)$$

بامقایسه معادلات (۳) و (۴) مشاهده می کنیم که اگر $y = f(x)$ و dy و $df(x, \Delta x)$ دو نماد مختلف برای $f'(x)\Delta x$ هستند. نمادگذاری به صورت dy در بحثهای بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

○ نمونه ۱ اگر $y = 3x^2 - x$ ، آنگاه $f(x) = 3x^2 - x$ ؛ لذا $f'(x) = 6x - 1$. پس، از تعریف ۱۰.۱.۵ نتیجه می شود

$$dy = (6x - 1)\Delta x.$$

و به ویژه اگر $x = 2$ ، آنگاه $dy = 11\Delta x$.

وقتی $y = f(x)$ ، تعریف ۱۰.۱.۵ معنی dy ، دیفرانسیل متغیر وابسته، را نشان می دهد. می خواهیم دیفرانسیل متغیر مستقل یعنی dx را نیز تعریف کنیم. برای ارائه تعریف مناسبی از dx که با تعریف dy سازگار باشد، تابع همانی را در نظر می گیریم که با ضابطه $f(x) = x$ تعریف می شود. در این صورت، $f'(x) = 1$ و $y = x$ ؛ بنابراین، $dx = \Delta x$. $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. چون $y = x$ ، می خواهیم که dx با dy برای این تابع خاص برابر باشد؛ یعنی، برای این تابع ما یلیم که $dx = \Delta x$. این استدلال است که به تعریف زیر می انجامد.

۲.۱.۵ تعریف اگر تابع f با ضابطه $y = f(x)$ تعریف شود، دیفرانسیل x با dx نشان داده، و به صورت زیر تعیین می شود

$$dx = \Delta x \quad (۵)$$

که در آن Δx يك نماد اختیاری از x است و x عددی در قلمرو f' می باشد. بنابه معادلات (۳) و (۵)،

$$dy = f'(x)dx. \quad (۶)$$

اگر دو طرف معادله بالا را بر dx تقسیم کنیم، به دست می آید

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad dx \neq 0. \quad (۷)$$

معادله (۷) مشتق رابه صورت خارج قسمت دو دیفرانسیل بیان می‌کند. نماد dy/dx غالباً نشان دهنده مشتق y نسبت به x است؛ ولی ما تاکنون از این نماد استفاده نکرده‌ایم.

مثال ۱ فرض کنید $y = 4x^2 - 3x + 1$. مطلوب است محاسبه Δy و dy برای (الف) هر مقدار x و Δx ؛ (ب) $x = 2$ ، $\Delta x = 0.1$ ؛ (پ) $x = 2$ ، $\Delta x = 0.01$ ؛ (ت) $x = 2$ ، $\Delta x = 0.001$.

حل

(الف) چون $y = 4x^2 - 3x + 1$ ، پس داریم

$$y + \Delta y = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1$$

$$(4x^2 - 3x + 1) + \Delta y = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1$$

$$\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2.$$

همچنین، اگر $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx.$$

پس

$$dy = (8x - 3)dx$$

$$= (8x - 3)\Delta x.$$

$$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2.$$

نتایج قسمتهای (ب)، (پ)، و (ت) در جدول ۱۰.۱۰۵ خلاصه شده‌اند که در آن، $\Delta y = (8x - 3)\Delta x + 4(\Delta x)^2$ و $dy = (8x - 3)\Delta x$.

جدول ۱۰.۱۰۵

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
۲	۰.۱	۱.۳۴	۱.۳	۰.۰۴
۲	۰.۰۱	۰.۱۳۰۴	۰.۱۳	۰.۰۰۰۴
۲	۰.۰۰۱	۰.۰۱۳۰۰۴	۰.۰۱۳	۰.۰۰۰۰۰۴

باتوجه به جدول ۱۰.۱۰۵ دیده می‌شود که هرچه Δx به صفر نزدیکتر باشد، تفاضل

بین Δy و dy کوچکتر است. به علاوه، ملاحظه کنید که برای هر مقدار Δx ، مقدار متناظر $\Delta y - dy$ کوچکتر از مقدار Δx است. به طور کلی، اگر Δx کوچک باشد، dy تقریبی برای Δy است، و خطای این تقریب از اندازه Δx کمتر است. برای مقدار مشخصی از x ، مثلاً x_0 ، داریم

$$dy = f'(x_0)dx. \quad (۸)$$

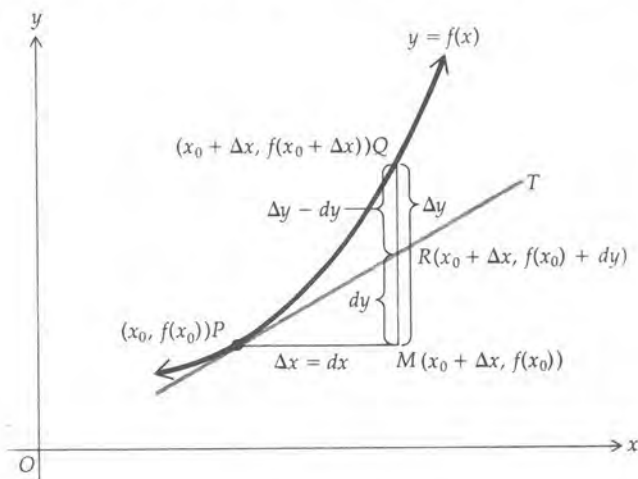
یعنی، dy یک تابع خطی از dx است؛ در نتیجه، محاسبه dy معمولاً آسانتر از محاسبه Δy است (همان طور که در مثال ۱ دیده شد). چون $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ، داریم

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

پس

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy. \quad (۹)$$

نتایج به دست آمده در شکل ۲۰۱۰۵ نشان داده شده‌اند. معادله منحنی در این شکل، $y = f(x)$ ، و تقریر نمودار روبه بالا است. خط PT مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $P(x_0, f(x_0))$ می‌باشد؛ Δx و dx با هم برابرند، و با فاصله جهت دار PM نشان داده شده‌اند که نقطه $M(x_0 + \Delta x, f(x_0))$ است. فرض کنید Q نشان دهنده نقطه $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ ، و فاصله جهت دار MQ برابر با Δy و یا $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ باشد. ضریب زاویه PT برابر است با $f'(x) = dy/dx$. همچنین ضریب زاویه PT برابر با MR/PM می‌باشد، و چون $PM = dx$ ، پس $dy = MR$ و $RQ = \Delta y - dy$. توجه کنید که هر چه مقدار dx کمتر باشد (یعنی، هر چه نقطه Q به نقطه P نزدیکتر باشد)، آنگاه مقدار $\Delta y - dy$ کمتر خواهد بود (یعنی،



شکل ۲۰۱۰۵

طول پاره خط RQ کمتر خواهد بود). معادله خط مماس PT چنین است

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

پس، اگر $\bar{y}$ عرض نقطه R باشد، داریم

$$\bar{y} = f(x_0) + dy. \quad (۱۰)$$

بامقایسه معادلات (۹) و (۱۰)، ملاحظه کنید که هرگاه $f(x_0) + dy$ را برای تقریب کردن مقدار $f(x_0 + \Delta x)$ به کار ببریم، در واقع عرض نقطه $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ روی منحنی را با عرض نقطه $R(x_0 + \Delta x, f(x_0) + dy)$ روی خط مماس بر منحنی در $P(x_0, f(x_0))$ تقریب کرده ایم.

در شکل ۲۰۱.۵، تقعر نمودار روبه بالاست و تابع، صعودی است. در تمرینهای ۲۰۱ از شما خواسته می شود اشکال مشابهی رسم کنید. در تمرین ۱، باید تقعر نمودار روبه پایین و تابع صعودی باشد؛ در حالی که در تمرین ۲، باید تقعر نمودار روبه بالا و تابع نزولی باشد. منظور از محاسبات مثالهای ۳ و ۲ این است که مفهوم دیفرانسیل روشن شود.

مثال ۲ با استفاده از دیفرانسیل، یک مقدار تقریبی برای $\sqrt[3]{28}$ بیابید.

حل تابع f را در نظر می گیریم که با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x}$ تعریف می شود، و فرض می کنیم $y = f(x)$. بنابراین،

$$y = \sqrt[3]{x}$$

و

$$dy = f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{3x^{2/3}} dx.$$

نزدیکترین مکعب کامل به ۲۸، عدد ۲۷ است. پس dy را برای $x = 27$ و $dx = \Delta x = 1$ حساب می کنیم.

$$dy = \frac{1}{3(27)^{2/3}}(1) = \frac{1}{27}.$$

فرمول (۹) را با مقادیر $x_0 = 27$ ، $\Delta x = 1$ و $dy = 1/27$ به کار می بریم و داریم

$$f(27+1) \approx f(27) + \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{27+1} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27}$$

$$\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27}$$

بنابراین، داریم

$$\sqrt[3]{28} \approx 3.037.$$

با استفاده از جدول ۱ پیوست، $\sqrt[3]{28} = 3.037$ ، لذا، این تقریب تا سه رقم اعشار دقت دارد. ▲

مثال ۳ با استفاده از دیفرانسیل، یک مقدار تقریبی برای $\cos 61^\circ$ بیابید.

حل اول معادل 61° را بر حسب رادیان می نویسیم.

$$61^\circ \approx \frac{61}{180} \pi \text{ (رادیان)}$$

تابع باضابطه $y = \cos x$ را در نظر می گیریم. آنگاه

$$dy = -\sin x dx.$$

چون $\frac{61\pi}{180} = \left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{180}\right)$ ، و $\cos(\pi/3) = 0.5$ ، dy را با $x = \pi/3$ ، و $dx = \Delta x = \pi/180$ محاسبه می کنیم.

$$dy = \left(-\sin \frac{1}{3}\pi\right) \left(\frac{1}{180}\pi\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx -0.00151.$$

اگر با در نظر گرفتن $x_0 = \pi/3$ ، $\Delta x = \pi/180$ ، و $dy = -0.00151$ ، از فرمول (۹) استفاده کنیم، داریم

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{180}\pi\right) \approx \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + (-0.00151)$$

$$\cos \frac{61}{180} \pi \approx \cos \frac{1}{3} \pi - 0.00151$$

$$\cos \frac{61}{180} \pi \approx 0.5000 - 0.00151$$

بنابراین $\cos 61^\circ \approx 0.49849$.

از جدول ۵ در پیوست، $\cos 61^\circ = 0.4848$ ، بنابراین، تقریباً تا سه رقم اعشار دقت دارد. ▲

مثال ۴ حجم تقریبی پوسته‌ای کروی را که شعاع داخلی ۴ اینچ و ضخامتش $1/16$ اینچ است، بیابید.

حل حجم پوسته‌ی کروی را به صورت نموی از حجم یک کره در نظر می‌گیریم. فرض کنید r شعاع کره‌ای بر حسب اینچ، V حجم آن بر حسب اینچ مکعب، و ΔV حجم پوسته‌ای از آن بر حسب اینچ مکعب باشد.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

اگر در معادله‌ی اخیر قرار دهیم $r = 4$ ، و $dr = 1/16$ ، داریم

$$dV = 4\pi(4)^2 \frac{1}{16} = 4\pi.$$

بنابراین $\Delta V \approx 4\pi$ ، و نتیجه می‌گیریم که حجم پوسته‌ی کروی تقریباً 4π اینچ مکعب است. ▲

فرض کنید y تابعی از x باشد، و x هم تابعی از یک متغیر دیگر چون t باشد؛ یعنی،

$$x = g(t) \text{ و } y = f(x) \quad (11)$$

دو معادله‌ی (۱۱) با هم y را به صورت تابعی از t تعریف می‌کنند. مثلاً، فرض کنید $y = x^3$ ، و $x = 2t^2 - 1$. اگر این دو معادله را ترکیب کنیم، داریم $y = (2t^2 - 1)^3$. به طور کلی اگر دو معادله‌ی (۱۱) را ترکیب کنیم، داریم

$$y = f(g(t)). \quad (12)$$

مشتق y نسبت به t را با استفاده از قاعده‌ی زنجیری می‌یابیم

$$D_t y = D_x y D_t x. \quad (13)$$

معادله‌ی (۱۳)، $D_t y$ را به صورت تابعی از x و t بیان می‌کند، زیرا $D_x y$ تابعی از x ، و $D_t x$ تابعی از t است.

○ نمونه‌ی ۲ اگر $y = x^3$ ، و $x = 2t^2 - 1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} D_t y &= D_x y D_t x \\ &= 3x^2(4t) \\ &= 12x^2 t. \end{aligned}$$

○

چون معادله (۱۲)، y را به صورت تابعی از متغیر مستقل t تعریف می کند، دیفرانسیل y را از (۶) به دست می آوریم

$$dy = D_t y dt . \quad (۱۴)$$

معادله (۱۴)، dy را به صورت تابعی از t و dt بیان می کند. اگر از (۱۳) در (۱۴) قرار دهیم، داریم

$$dy = D_x y D_t x dt . \quad (۱۵)$$

حال، چون x تابعی از متغیر مستقل t است، می توانیم از (۶) استفاده کنیم و دیفرانسیل x را به دست آوریم؛ داریم

$$dx = D_t x dt . \quad (۱۶)$$

معادله (۱۶)، dx را به صورت تابعی از t و dt بیان می کند. از (۱۵) و (۱۶) داریم

$$dy = D_x y dx . \quad (۱۷)$$

باید در نظر داشته باشید که در (۱۷)، dy تابعی از t و dt است، و dx هم تابعی از t و dt است. اگر در (۱۷) به جای $D_x y$ بنویسیم $f'(x)$ ، داریم

$$dy = f'(x) dx . \quad (۱۸)$$

معادله (۱۸) شبیه (۶) است. با این وجود، در (۶)، x متغیر مستقل است و dy بر حسب x و dx بیان شده است، حال آنکه در (۱۸)، t متغیر مستقل است و dy و dx هر دو بر حسب t و dt بیان می شوند. بنابراین قضیه زیر به دست می آید.

۳.۱.۵ قضیه اگر $y = f(x)$ ، آنگاه وقتی که $f'(x)$ وجود داشته باشد، صرف نظر از اینکه x يك متغیر مستقل هست یا نیست، داریم

$$dy = f'(x) dx .$$

اگر طرفین (۱۸) را بر dx (به شرط $dx \neq 0$) تقسیم کنیم، داریم

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad dx \neq 0 \quad (۱۹)$$

معادله (۱۹) حاکی است که اگر $y = f(x)$ ، آنگاه، حتی اگر x يك متغیر مستقل هم نباشد، $f'(x)$ مساوی با خارج قسمت دو دیفرانسیل dy و dx است.

○ نمونه ۳ فرض کنید $x = \cos t$ ، $y = \sin t$ ، و $0 < t < \pi$. آنگاه

$$dx = -\sin t dt \quad \text{و} \quad dy = \cos t dt$$

بنا بر این

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t \, dt}{-\sin t \, dt} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{y}. \quad (20)$$

چون $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$ پس

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2. \quad (21)$$

علاوه بر این، $y > 0$ زیرا $y = \sin t$ و $0 < t < \pi$. لذا از (۲۱) نتیجه می‌شود

$$y = \sqrt{1 - x^2}. \quad (22)$$

اگر مقدار y را از (۲۲) در (۲۰) قرار دهیم، داریم

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (23)$$

این نتیجه را می‌توان، با یافتن dy/dx از (۲۲) هم به دست آورد.

○ حال، با نوشتن مشتق به صورت خارج قسمت دو دیفرانسیل، قاعده زنجیری برای مشتق‌گیری را دوباره می‌نویسیم. اگر $y = f(u)$ ، و $D_u y$ وجود داشته باشد، و اگر $u = g(x)$ ، $D_x u$ وجود داشته باشد، آنگاه از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود

$$D_x y = D_u y \, D_x u. \quad (24)$$

اما اگر $dx \neq 0$ ، $D_x y = dy/dx$ ؛ و اگر $du \neq 0$ ، $D_u y = dy/du$ ؛ و نیز اگر $dx \neq 0$ ، $D_x u = du/dx$. بنا بر این، از (۲۴) داریم

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right), \quad dx \neq 0 \text{ و } du \neq 0$$

توجه کنید که با این نماد، قاعده زنجیری شکل ساده‌ای به خود می‌گیرد.

ریاضی‌دان آلمانی، گوته‌فرد ویلهلم لایبنیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) نخستین کسی بود که نماد dy/dx را برای مشتق y نسبت به x به کار برد. مفهوم مشتق، در قرن هفدهم میلادی، تقریباً به طور همزمان، توسط لایبنیتز و سر آیزک نیوتن (۱۶۴۲-۱۷۲۷)، که مستقل از هم کار می‌کردند، معرفی شد. احتمالاً لایبنیتز درباره dx و dy به عنوان تغییرات کوچکی در متغیرهای x و y فکری کرده است، و درباره مشتق y نسبت به x به عنوان خارج قسمت dy بر dx وقتی که dx و dy کوچک می‌شوند. لایبنیتز مفهوم حد را به صورتی که در این زمان به ما معرفی می‌شود، نمی‌شناخت.

متناظر با نماد لایبنیتز برای مشتق اول y نسبت به x ، یعنی dy/dx ، برای مشتق دوم

y نسبت به x علامت d^2y/dx^2 را داریم. باین وجود، نباید d^2y/dx^2 را به عنوان خارج قسمت انگاشت، زیرا در این کتاب، دیفرانسیل يك دیفرانسیل را در نظر نمی گیریم. به طور مشابه، $d^n y/dx^n$ نمادی است برای مشتق n م y نسبت به x . علامتهای f' ، f'' ، f''' ، و غیره برای مشتقهای متوالی تابعی چون f ، در قرن هیجدهم میلادی توسط ژوزف لئوئی لاگرانژ (۱۷۳۶-۱۸۱۳) معرفی شد.

در فصل ۳ فرمولهایی برای پیدا کردن مشتق به دست آوردیم. در اینجا، این فرمولها را با استفاده از نماد لاینیتزیان می کنیم. همراه با هر فرمول برای مشتق، فرمول متناظری برای دیفرانسیل هم وجود دارد. در این فرمولها، u و v توابعی از x هستند، و مسلم است که این فرمولها وقتی برقرارند که $D_x u$ و $D_x v$ وجود داشته باشند. هر جا از حرف c استفاده می کنیم، منظورمان يك عدد ثابت است.

$$\text{I} \quad \frac{d(c)}{dx} = 0$$

$$\text{I}' \quad d(c) = 0$$

$$\text{II} \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\text{II}' \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx$$

$$\text{III} \quad \frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$$

$$\text{III}' \quad d(cu) = c du$$

$$\text{IV} \quad \frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\text{IV}' \quad d(u+v) = du + dv$$

$$\text{V} \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\text{V}' \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$\text{VI} \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\text{VI}' \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$\text{VII} \quad \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\text{VII}' \quad d(u^n) = nu^{n-1} du$$

بدین ترتیب، عمل مشتق گیری را تعمیم دادیم تا هم فرایند محاسبه دیفرانسیل را شامل شود و هم فرایند محاسبه مشتق را. اگر $y = f(x)$ ، dy را می توانیم هم با استفاده از فرمولهای I' تا VII' به دست آوریم، و هم با محاسبه $f'(x)$ و ضرب آن در dx .

مثال ۵ اگر داشته باشیم $y = \sqrt{x^2 + 1} / (2x + 1)$ ، مطلوب است محاسبه dy .

حل از فرمول VI' داریم

$$dy = \frac{(2x+1)d(\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}d(2x+1)}{(2x+1)^2}. \quad (25)$$

از فرمول VII'

$$d(\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)^{-1/2} 2x dx = x(x^2+1)^{-3/2} dx \quad (26)$$

و

$$d(2x+1) = 2dx. \quad (27)$$

حال از (۲۶) و (۲۷) در (۲۵) قرار می‌دهیم و داریم

$$dy = \frac{x(2x+1)(x^2+1)^{-3/2} dx - 2(x^2+1)^{1/2} dx}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x^2+x)dx - 2(x^2+1)dx}{(2x+1)^2(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\triangle = \frac{x-2}{(2x+1)^2\sqrt{x^2+1}} dx.$$

مثال ۶ فرض کنید $5 = 4x^2y^2 - 3x^3 + 5y^2 + 6xy^2$ ؛ در اینجا x و y توابعی از یک متغیر سوم هستند. با دیفرانسیل گیری جمله به جمله، dy/dx را محاسبه کنید.

حل این نمونه‌ای از دیفرانسیل گیری ضمنی است. اگر جمله به جمله دیفرانسیل بگیریم، داریم

$$4xy^2dx + 4x^2ydy - 9x^2dx + 10y^2dy + 6y^2dx + 12xydy = 0.$$

اگر $dx \neq 0$ ، طرفین را بر dx تقسیم کنیم، داریم

$$(4x^2y + 10y^2 + 12xy) \frac{dy}{dx} = -4xy^2 + 9x^2 - 6y^2$$

$$\triangle \quad \frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - 6y^2 - 4xy^2}{4x^2y + 10y^2 + 12xy}.$$

تمرینهای ۱.۵

۱. اگر تفر نموداری روبه پایین، و تابع مربوط صعودی باشد، شکلی شبیه شکل ۲.۱.۵ بکشید. باره خط‌هایی را مشخص کنید که طولهایشان کمیت‌های Δx ، Δy ، dx و dy را نمایش دهند.

۲. اگر تقعر نموداری روبه بالا، و تابع مربوط نزولی باشد، و $\Delta x < 0$ ، شکلی شبیه شکل ۲.۱.۵ بکشید. پاره خطهایی را مشخص کنید که طولهایشان کمیت‌های $|\Delta x|$ ، Δy ، $|dx|$ ، و dy را نمایش دهند.

در تمرینهای ۳ تا ۱۰، مطلوب است: (الف) Δy ؛ (ب) dy ؛ (پ) $\Delta y - dy$.

$$۳. \quad y = x^2 \quad ۴. \quad y = 3x^2 - x \quad ۵. \quad y = 6 - 3x - 2x^2$$

$$۶. \quad y = x^2 - x^2 \quad ۷. \quad y = \sqrt{x} \quad ۸. \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$۹. \quad y = \frac{2}{x-1} \quad ۱۰. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۶، به ازای مقادیر داده شده، مطلوب است: (الف) Δy ؛ (ب) dy ؛ (پ) $\Delta y - dy$.

$$۱۱. \quad y = x^2 - 3x; \quad x = 2; \quad \Delta x = 0.03$$

$$۱۲. \quad y = x^2 - 3x; \quad x = -1; \quad \Delta x = 0.02$$

$$۱۳. \quad y = \frac{1}{x}; \quad x = -2; \quad \Delta x = -0.1$$

$$۱۴. \quad y = \frac{1}{x}; \quad x = 3; \quad \Delta x = -0.2$$

$$۱۵. \quad y = x^2 + 1; \quad x = 1; \quad \Delta x = -0.5$$

$$۱۶. \quad y = x^2 + 1; \quad x = -1; \quad \Delta x = 0.1$$

در تمرینهای ۱۷ تا ۲۴، dy را بیابید.

$$۱۷. \quad y = (3x^2 - 2x + 1)^2 \quad ۱۸. \quad y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$۱۹. \quad y = x^2 \sqrt[3]{2x + 3} \quad ۲۰. \quad y = \frac{3x}{x^2 + 2}$$

$$۲۱. \quad y = \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x} \quad ۲۲. \quad y = x^x \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$

$$۲۳. \quad y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ۲۴. \quad y = \sqrt{3x+4} \sqrt[3]{x^2-1}$$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۰، x و y توابعی از یک متغیر سوم هستند. با دیفرانسیل گیری جمله به جمله (مثال ۶ را ببینید) dy/dx را بیابید.

$$8x^2 - y^2 = 32.26 \qquad 3x^2 + 4y^2 = 48.25$$

$$2x^2y - 3xy^2 + 6y^2 = 1.28 \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4.27$$

$$3 \sin^2 x + 4 \cos^2 y = 1.30 \qquad \sin x \cos y - \cos x \sin y = 1.29$$

در تمرینهای ۳۱ تا ۳۶، مطلوب است dy/dt .

$$y = 3x^2 - 5x^2 + 1; x = t^2 - 1.31$$

$$y = \sqrt{5x-1}; x = \sqrt{2t+3}.32$$

$$y = x^2 - 5x + 1; x = s^2 - 2s + 1; s = \sqrt{t^2 + 1}.33$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; x = \frac{2s + 2}{\sqrt{s^2 + 2}}; s = t^2 - 4t + 5.34$$

$$x^2 - 3x^2y + y^2 = 5; x = 4t^2 + 1.35$$

$$3x^2y - 4xy^2 + 7y^2 = 0; 2x^2 - 3xt^2 + t^2 = 1.36$$

در تمرینهای ۳۷ تا ۴۰، کارهای زیر را انجام دهید. (الف) dx و dy را بر حسب dt محاسبه کنید؛ (ب) با استفاده از نتایج قسمت (الف)، dy/dx را بیابید؛ (پ) با حذف t بین دو معادله داده شده، y را بر حسب x بنویسید، و سپس با استفاده از قضایای دیفرانسیل گیری، dy/dx را محاسبه کنید.

$$x = 1 + t, y = 1 - t^2.38 \qquad x = 2t^2, y = 3t.37$$

$$x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, 0 < t < \pi.39$$

$$x = 1 - \cos t, y = 2 + \sin t, 0 < t < \pi.40$$

در تمرینهای ۴۱ تا ۴۸، با استفاده از دیفرانسیل، مقداری تقریبی برای کمیت داده شده، با سه رقم اعشار، بیابید.

$$\sqrt[4]{82}.43 \qquad \sqrt{82}.42 \qquad \sqrt{37.5}.41$$

$$\sin 46^\circ.46 \qquad \sqrt[4]{0.00098}.45 \qquad \sqrt[4]{7.5}.44$$

$$\sqrt{0.042}.48 \qquad \cos 128^\circ.47$$

۴۹. اندازه يك يال مكعبی ۱۵ سانتیمتر به دست آمده، و خطای ممکن در این اندازه گیری ۵۱ دره سانتیمتر است. با استفاده از دیفرانسیل، خطای تقریبی حاصل از به کار بردن این اندازه در تعیین (الف) حجم؛ (ب) مساحت یکی از وجوه، را بیابید.

۵۰. حجم داخلی جعبه فلزی مکعب شکلی باید ۱۰۰۰ سانتیمتر مکعب باشد. هرشش وجه آن را از فلزی با ضخامت $1/2$ سانتیمتری می سازیم. اگر بهای هر سانتیمتر مکعب فلز مورد استفاده ۲۰ دلار باشد، با استفاده از دیفرانسیل، بهای تقریبی فلز به کار برده شده در ساخت جعبه را بیابید.

۵۱. می خواهیم سطح بیرونی يك مخزن سر باز استوانه ای شکل را با يك لایه ۲ سانتیمتری بپوشانیم. اگر شعاع داخلی ۶ متر و ارتفاع ۱۰ متر باشد، با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی جنس لازم برای آبنکاری را بیابید.

۵۲. ارتفاع مخروط مستدیر قائمی دو برابر شعاع قاعده آن است. اندازه ارتفاع ۱۲ اینچ به دست آمده، و خطای ممکن در این اندازه گیری ۵۰۵ دره اینچ است. خطای تقریبی در محاسبه حجم مخروط چقدر است؟

۵۳. اگر خطای ممکن در اندازه گیری حجم گازی ۱ دره فوت مکعب باشد، و خطای مجاز در اندازه گیری فشار ۱۰۵۰۰ دره پوند بر فوت مربع باشد، اندازه کوچکترین ظرفی که در مورد آن قانون بویل برقرار باشد چیست؟ (تمرین ۳۰ از تمرینهای ۵.۳ را ببینید).

۵۴. اگر زمان يك نوسان کامل آونگ ساده ای که طولش l فوت است $1/2$ ثانیه باشد، آنگاه $g = 4\pi^2 l / T^2$ ، که در آن $g = 32$ فوت در هر ثانیه. ساعتی که طول آونگ آن ۱ فوت است در هر روز ۵ دقیقه جلومی افتد. تقریباً چه مقدار به طول آونگ افزوده شود تا ساعت دقیق کار کند؟

۵۵. اندازه مقاومت الکتریکی يك سیم، با طول آن رابطه مستقیم، و با مربع قطرش رابطه معکوس دارد. فرض کنید مقاومت سیمی به طول مقروض، با اندازه گیری قطرش که خطای ممکن ۲ درصد را دارد محاسبه می شود. درصد خطای ممکن در مقدار مقاومت محاسبه شده چقدر است؟

۵۶. مقطعه کاری موافقت می کند و طرف ۱۰۰۰ تا بلودایره شکل را که شعاع هر يك ۳ متر است، رنگ بزند. بعد از دریافت تا بلوها متوجه می شود که شعاع هر يك ۱ سانتیمتر بزرگتر است. با استفاده از دیفرانسیل، درصد تقریبی مقدار رنگ اضافی لازم را بیابید.

۵۷. تمرین ۲۰ از بخش ۱۰.۴ را مرور کنید و در مورد قانون اדיا باتیک برای انبساط هوا ثابت کنید که $dP/P = -\gamma dV/V$.

۲.۵ عمل ضد مشتق گیری

در گذشته با اعمالی که معکوس هم هستند، آشنا شده‌اید. مثلاً، اعمال جمع و تفریق معکوس یکدیگرند، اعمال ضرب و تقسیم هم معکوس یکدیگرند، و همچنین اعمال به توان رساندن و ریشه گرفتن نیز معکوس یکدیگر می‌باشند. در این بخش عمل معکوس مشتق گیری موسوم به ضد مشتق گیری را تشریح می‌کنیم.

۱۰.۲.۵ تعریف گوییم تابعی چون F يك ضد مشتق تابعی مانند f بر يك بازه I است هرگاه به‌ازای هر مقدار x در I ، $F'(x) = f(x)$.

○ نمونه ۱ اگر تابع F به صورت $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$ تعریف شود، آنگاه $F'(x) = 12x^2 + 2x$. بنا بر این اگر تابع f با ضابطه $f(x) = 12x^2 + 2x$ تعریف شود، می‌گوییم که f مشتق F است و F يك ضد مشتق f است. اگر تابع G به صورت $G(x) = 4x^3 + x^2 - 17$ تعریف شده باشد، آنگاه G هم يك ضد مشتق f است، زیرا $G'(x) = 12x^2 + 2x$. درواقع، اگر C يك ثابت دلخواه باشد، هر تابعی که مقادیرش از $4x^3 + x^2 + C$ به‌دست آیند، يك ضد مشتق f است. ○

به‌طور کلی اگر تابعی چون F يك ضد مشتق تابعی مانند f بر يك بازه I باشد، و اگر G با ضابطه

$$G(x) = F(x) + C$$

تعریف شود، که در آن C ثابت دلخواهی است، آنگاه

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

ولذا G نیز يك ضد مشتق f بر بازه I است.

اکنون می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر F ضد مشتق خاصی از f روی بازه‌ای مانند I باشد، آنگاه تمام ضد مشتق‌های ممکن f بر I به‌صورت $F(x) + C$ تعریف می‌شوند، که در آن C يك ثابت دلخواه است. بدو، به يك قضیه مقدماتی نیاز داریم.

۲.۲.۵ قضیه توابع f و g مفروض‌اند. اگر به‌ازای هر مقدار x در بازه‌ای مانند I ، $f'(x) = g'(x)$ ، آنگاه عدد ثابتی مانند K وجود دارد که

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{به‌ازای هر } x \text{ در } I \quad (۱)$$

اثبات تابعی چون h را که بر I با ضابطه

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. به‌ازای تمام مقادیر x در I ،

$$h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

اما، بنا به فرض، به ازای تمام مقادیر x در I داریم $f'(x) = g'(x)$. بنابراین

$$h'(x) = 0 \quad \text{به ازای تمام مقادیر } x \text{ در } I.$$

پس قضیه ۳.۴.۴ را در مورد تابع h به کار می بندیم؛ و لذا ثابتی چون K وجود دارد که

$$h(x) = K \quad \text{به ازای تمام مقادیر } x \text{ در } I.$$

اگر به جای $h(x)$ مقدار $f(x) - g(x)$ را قرار دهیم، داریم

$$f(x) = g(x) + K \quad \text{به ازای تمام مقادیر } x \text{ در } I.$$

□ قضیه ثابت می شود.

قضیه زیر بلافاصله از قضیه ۲.۲.۵ نتیجه می شود.

۳.۲.۵ قضیه اگر F ضد مشتق مشخصی از f بر بازه ای چون I باشد، آنگاه صورت کلی ضد مشتق f بر I عبارت است از

$$F(x) + C \quad (۲)$$

که در آن C يك ثابت اختیاری است و هر ضد مشتق f بر I را می توان با انتساب مقدار خاصی به C به دست آورد.

اثبات فرض کنید G يك ضد مشتق دلخواه f بر I باشد. آنگاه

$$G'(x) = f(x) \quad \text{بر } I \quad (۳)$$

چون F هم يك ضد مشتق f بر I است

$$F'(x) = f(x) \quad \text{بر } I \quad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می شود که

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{بر } I$$

لذا، بنا بر قضیه ۲.۲.۵، عدد ثابتی چون K وجود دارد که

$$G(x) = F(x) + K \quad \text{به ازای تمام } x \text{ های در } I.$$

چون فرض کردیم که G يك ضد مشتق دلخواه f بر I است، نتیجه می گیریم که هر ضد مشتق f را می توان از عبارت $F(x) + C$ ، که در آن C يك ثابت اختیاری است، به دست آورد. بنابراین قضیه ثابت می شود. □

اگر F يك ضد مشتق f باشد، آنگاه $F'(x) = f(x)$ ، ولذا

$$d(F(x)) = f(x) dx. \quad (۵)$$

عمل معکوس یافتن دیفرانسیل يك تابع، پیدا کردن صورت کلی تابعی است که دیفرانسیل آن داده شده است. این عمل معکوس را ضد دیفرانسیل گیری می نامند و با علامت

$$\int$$

نمایش می دهند. می نویسیم

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (۶)$$

با این شرط که F چنان تابعی باشد که $d(F(x)) = f(x) dx$.
اگر از (۵) در طرف چپ (۶) قرار دهیم، داریم

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \quad (۷)$$

اگر از دو طرف (۶) دیفرانسیل بگیریم، داریم

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C)$$

$$d \int f(x) dx = d(F(x)). \quad (۸)$$

از (۵) در طرف راست (۸) قرار می دهیم، نتیجه می شود

$$d \int f(x) dx = f(x) dx. \quad (۹)$$

از (۷) و (۹) مشاهده می کنیم که دو عمل تعریف شده با علامتهاي d و $\int$ معکوس یکدیگرند. اگر $F(x) + C$ صورت کلی تابعی باشد که دیفرانسیل آن $f(x) dx$ است، $F(x) + C$ صورت کلی تابعی نیز هست که مشتق آن $f(x)$ است. بنابراین ضد دیفرانسیل گیری به عنوان عمل یافتن صورت کلی تابعی که مشتق مفروضی دارد نیز تلقی می شود. چون ضد دیفرانسیل گیری عمل معکوس دیفرانسیل گیری است، قضایای مربوط به ضد دیفرانسیل گیری را می توان از قضایای مربوط به دیفرانسیل گیری به دست آورد. بنابراین قضایای زیر را می توان با استفاده از قضایای متناظر مربوط به دیفرانسیل گیری اثبات کرد.

$$\int dx = x + C \quad \text{قضیه ۴.۲.۵}$$

۵.۲.۵ قضیه با فرض اینکه a عدد ثابتی باشد،

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx.$$

قضیه ۵.۲.۵ حاکی است که برای یافتن ضد مشتق حاصل ضرب عددی ثابت در یک تابع، نخست یک ضد مشتق تابع را به دست می آوریم و سپس آن را در عدد ثابت ضرب می کنیم.

۶.۲.۵ قضیه اگر f_1 و f_2 روی بازه یکسانی تعریف شده باشند، آنگاه

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

قضیه ۶.۲.۵ حاکی است که برای یافتن ضد مشتق مجموع دو تابع، به طور جداگانه یک ضد مشتق برای هر یک از آنها می یابیم، و سپس نتایج را با هم جمع می کنیم؛ با این تفاهم که هر دو تابع روی بازه یکسانی تعریف شده باشند. قضیه ۶.۲.۵ را می توان به هر تعداد متناهی از توابع تعمیم داد. از ترکیب قضیه ۶.۲.۵ با قضیه ۵.۲، قضیه زیر به دست می آید.

۷.۲.۵ قضیه اگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ روی بازه یکسانی تعریف شده، و $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعداد ثابتی باشند، داریم

$$\begin{aligned} \int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)] dx \\ = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \text{اگر} \quad ۸.۲.۵ \text{ قضیه}$$

همان طور که قبلاً هم گفتیم، این قضا یا از قضا یای متناظر مربوط به محاسبه مشتق نتیجه می شوند. اثبات قضیه ۸.۲.۵ به شرح زیر است

$$\begin{aligned} D_x \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) &= \frac{(n+1)x^n}{n+1} \\ &= x^n. \end{aligned}$$

در مثالهای زیر کاربرد این قضا یا را روشن می کنیم.

مثال ۱ $\int (3x+5) dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\int (3x + 5) dx = 3 \int x dx + 5 \int dx \quad (\text{بنا به قضیه } 7.2.5)$$

$$= 3 \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) + 5(x + C_2) \quad (\text{بنا به قضایای } 4.2.5 \text{ و } 8.2.5)$$

$$= \frac{3}{2} x^2 + 5x + 3C_1 + 5C_2.$$

چون $3C_1 + 5C_2$ يك ثابت اختیاری است، می توان آن را با C نمایش داد؛ لذا جواب به صورت

$$\frac{3}{2} x^2 + 5x + C$$

است.

جواب را می توان با پیدا کردن مشتق آزمایش کرد.

$$\blacktriangle \quad D_x \left(\frac{3}{2} x^2 + 5x + C \right) = 3x + 5.$$

مثال ۲ $\int \sqrt[5]{x^3} dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\int \sqrt[5]{x^3} dx = \int x^{3/5} dx$$

$$= \frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1} + C \quad (\text{بنا به قضیه } 8.2.5)$$

$$\blacktriangle \quad = \frac{5}{8} x^{8/5} + C.$$

مثال ۳ $\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right) dx$ را محاسبه کنید.

حل

$$\int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right) dx = \int (x^{-4} + x^{-1/5}) dx$$

$$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-1/5+1}}{-\frac{1}{5}+1} + C$$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{3/4}}{\frac{3}{4}} + C$$

$$\Delta \quad = -\frac{1}{3x^3} + \frac{4}{3}x^{3/4} + C.$$

بسیاری از ضد مشتقها را نمی توان مستقیماً با استفاده از قضا یا محاسبه کرد. ولی، گاهی امکان دارد که بعد از تعویض متغیر، با کمک این قضا یا ضد مشتقی به دست آورد.

○ نمونه ۲ فرض کنید می خواهیم

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx \quad (10)$$

را محاسبه کنیم. اگر جانشینی $u = 1 + x^2$ را در نظر بگیریم، داریم $du = 2x dx$ ، و لذا (۱۰) به صورت

$$\int u^{1/2} du$$

درمی آید که مقدارش، بنابر قضیه ۸.۲.۵، عبارت است از

$$\frac{2}{3}u^{3/2} + C.$$

حال اگر $(1+x)$ را به جای u قرار دهیم، جواب به صورت زیر خواهد بود

$$\circ \quad \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C.$$

دستورالعملی را که در نمونه ۲ از آن استفاده کردیم، با قضیه زیر توجیه می کنیم، که شبیه قاعده زنجیری برای مشتق گیری است، و لذا آن را قاعده زنجیری برای ضد مشتق گیری می نامیم.

۹.۲.۵ قضیه (قاعده زنجیری برای ضد مشتق گیری) فرض کنید g تابع مشتق پذیری از x است و برد آن بازه ای مانند I است. و فرض کنید f تابعی است که روی I تعریف شده، و F يك ضد مشتق f بر I است. اگر $u = g(x)$ ، آنگاه

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

اثبات چون $u = g(x)$ ، در I است؛ و چون F يك ضد مشتق f بر I است، نتیجه می گیریم که

$$\frac{dF(u)}{du} = f(u) \quad (11)$$

و

$$\int f(u) du = F(u) + C. \quad (12)$$

همچنین

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (13)$$

حال اگر قاعده زنجیری برای مشتق گیری را در طرف راست (۱۳) به کار ببریم، داریم

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (14)$$

از (۱۱) در (۱۴) قرار می دهیم، و به دست می آوریم

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = f(u) \cdot \frac{du}{dx}. \quad (15)$$

چون $u = g(x)$ ، از (۱۵) نتیجه می گیریم که

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

و از آن داریم

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C. \quad (16)$$

چون $u = g(x)$ ،

$$F(g(x)) + C = F(u) + C. \quad (17)$$

بنابراین، از (۱۲)، (۱۶)، و (۱۷) داریم

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

□

و این همان حکم قضیه است.

به عنوان حالت خاصی از قضیه ۹.۲.۵، تعمیم فرمول توانی برای ضد مشتقها از قضیه ۸.۲.۵ به دست می آید که ذیلا بیان می شود.

۱۰.۲.۵ قضیه اگر g تابع مشتق پذیری از x باشد، و اگر $u = g(x)$ ، آنگاه

$$\int [g(x)]^n g'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

که در آن $n \neq -1$.

مثالهای ۴، ۵، و ۶ کاربرد قضیه ۱۰.۲.۵ را نشان می‌دهند.

مثال ۴ $\int \sqrt{3x+4} dx$ را محاسبه کنید.

حل برای استفاده از قضیه ۱۰.۲.۵ قرار می‌دهیم $u = 3x + 4$ ؛ آنگاه $du = 3dx$ یا $du/3 = dx$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3x+4} dx &= \int u^{1/2} \cdot \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{9} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{9} (3x+4)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۵ $\int t(5+3t^2)^4 dt$ را محاسبه کنید.

حل مشاهده کنید که $d(5+3t^2) = 6t dt$. پس، از جانشینی

$$u = 5 + 3t^2$$

استفاده می‌کنیم. و داریم

$$du = 6t dt$$

$$\frac{1}{6} du = t dt.$$

بنابراین

$$\int t(5+3t^2)^4 dt = \int (5+3t^2)^4 (t dt)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int u^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} du \right) \\
 &= \frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{6}} du \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C \\
 &= \frac{1}{54} (5 + 3t^2)^{\frac{7}{6}} + C.
 \end{aligned}$$

▲

مثال ۶ $\int x^2 \sqrt[5]{7-4x^3} dx$ را محاسبه کنید.

حل چون $d(7-4x^3) = -12x^2 dx$ ، ازجانشینی

$$u = 7 - 4x^3$$

استفاده می کنیم. دراین صورت

$$du = -12x^2 dx$$

$$-\frac{1}{12} du = x^2 dx.$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned}
 \int x^2 \sqrt[5]{7-4x^3} dx &= \int (7-4x^3)^{1/5} (x^2 dx) \\
 &= \int u^{1/5} \left(-\frac{1}{12} du \right) \\
 &= -\frac{1}{12} \int u^{1/5} du \\
 &= -\frac{1}{12} \frac{u^{6/5}}{6/5} + C \\
 &= -\frac{5}{72} (7-4x^3)^{6/5} + C.
 \end{aligned}$$

▲

اگر در مثالهای ۴، ۵ و ۶، جانشینی u تصریح نشود، می توان آنها را با تفصیل کمتری حل کرد. حل مثال ۴ به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{3x+4} \, dx &= \frac{1}{3} \int (3x+4)^{1/2} (3 \, dx) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+4)^{3/2}}{3/2} + C \\
 &= \frac{2}{9} (3x+4)^{3/2} + C.
 \end{aligned}$$

حل مثال ۵ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 \int t(\Delta + 3t^2)^8 \, dt &= \frac{1}{6} \int (\Delta + 3t^2)^8 (6t \, dt) \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{(\Delta + 3t^2)^9}{9} + C \\
 &= \frac{1}{54} (\Delta + 3t^2)^9 + C.
 \end{aligned}$$

حل مثال ۶ را می توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\begin{aligned}
 \int x^5 \sqrt[5]{7-4x^3} \, dx &= -\frac{1}{12} \int (7-4x^3)^{1/5} (-12x^2 \, dx) \\
 &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{(7-4x^3)^{6/5}}{6/5} + C \\
 &= -\frac{5}{72} (7-4x^3)^{6/5} + C.
 \end{aligned}$$

مثال ۷ $\int \frac{4x^2 \, dx}{(1-8x^3)^4}$ را محاسبه کنید.

حل چون $d(1-8x^3) = -24x^2 \, dx$ می نویسیم

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4x^2 \, dx}{(1-8x^3)^4} &= 4 \int (1-8x^3)^{-4} (x^2 \, dx) \\
 &= 4 \left(-\frac{1}{24} \right) \int (1-8x^3)^{-4} (-24x^2 \, dx)
 \end{aligned}$$

عمل ضد مشتق گیری ۴۷۱

$$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{(1-8x^3)^{-3}}{-3} + C$$

$$\blacktriangle = \frac{1}{18(1-8x^3)^3} + C.$$

مثال ۸ $\int x^2 \sqrt{1+x} dx$ را محاسبه کنید.

حل فرض کنید $u = 1+x$. آنگاه $x = u-1$ ، و $dx = du$. باقراردادن این مقادیر داریم

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x} dx &= \int (u-1)^2 u^{1/2} du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1) u^{1/2} du \\ &= \int u^{5/2} du - 2 \int u^{3/2} du + \int u^{1/2} du \\ &= \frac{u^{7/2}}{\frac{7}{2}} - 2 \cdot \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\blacktriangle = \frac{2}{7} (1+x)^{7/2} - \frac{4}{5} (1+x)^{5/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} + C.$$

○ نمونه ۳ راه دیگر حل مثال ۸، استفاده از جانشینی $v = \sqrt{1+x}$ است. در این صورت، $1+x = v^2$ ؛ بنابراین $x = v^2 - 1$ ، و $dx = 2v dv$. با این جانشینیها محاسبه به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x} dx &= \int (v^2 - 1)^2 \cdot v \cdot (2v dv) \\ &= 2 \int v^6 dv - 4 \int v^4 dv + 2 \int v^2 dv \\ &= \frac{2}{7} v^7 - \frac{4}{5} v^5 + \frac{2}{3} v^3 + C \end{aligned}$$

$$\circ = \frac{2}{7} (1+x)^{7/2} - \frac{4}{5} (1+x)^{5/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} + C.$$

نتایج هر يك از مثالهای بالا را می توان با محاسبه مشتق (یا دیفرانسیل) جواب آزمایش کرد.

○ نمونه ۴ در مثال ۵ داریم

$$\int t(5+3t^2)^4 dt = \frac{1}{54} (5+3t^2)^5 + C.$$

اگر با مشتق گیری آزمایش کنیم، داریم

$$D_t \left[\frac{1}{54} (5+3t^2)^5 \right] = \frac{1}{54} \cdot 5(5+3t^2)^4 \cdot 6t$$

$$= t(5+3t^2)^4.$$

○

○ نمونه ۵ در مثال ۸ داریم

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{5} (1+x)^{5/2} - \frac{4}{5} (1+x)^{3/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{1/2} + C.$$

اگر با مشتق گیری آزمایش کنیم، داریم

$$\begin{aligned} D_x \left[\frac{2}{5} (1+x)^{5/2} - \frac{4}{5} (1+x)^{3/2} + \frac{2}{3} (1+x)^{1/2} \right] \\ = (1+x)^{3/2} - 2(1+x)^{1/2} + (1+x)^{-1/2} \\ = (1+x)^{-1/2} [(1+x)^2 - 2(1+x) + 1] \\ = (1+x)^{-1/2} [1+2x+x^2-2-2x+1] \\ = x^2 \sqrt{1+x}. \end{aligned}$$

○

تمرینهای ۲.۵

در تمرینهای ۱ تا ۴۶، صورت کلی ضد مشتق را بیابید. در تمرینهای ۱ تا ۴، ۱۱ تا ۱۴، و ۲۱ تا ۲۴، جواب خود را با محاسبه مشتق بیابید.

$$1. \int 3x^4 dx \quad 2. \int (3x^5 - 2x^2) dx$$

$$3. \int (3 - 2t + t^2) dt \quad 4. \int (4x^2 - 3x^2 + 6x - 1) dx$$

$$\int (\lambda x^r + \mu x^r - \nu x^r - \rho x + \delta) dx \quad .5$$

$$\int \sqrt{x}(x+1) dx \quad .7$$

$$\int (\nu + \mu x^r - \lambda x^r) dx \quad .6$$

$$\int (x^{r/\nu} - x) dx \quad .9$$

$$\int (ax^r + bx + c) dx \quad .8$$

$$\int \left(\frac{\nu}{x^r} + \frac{\mu}{x^r} + \delta \right) dx \quad .11$$

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad .10$$

$$\int \frac{x^r + \mu x - \nu}{\sqrt{x}} dx \quad .13$$

$$\int \left(\nu - \frac{1}{x^r} + \frac{1}{x^r} \right) dx \quad .12$$

$$\int \left(\sqrt{\nu x} - \frac{1}{\sqrt{\nu x}} \right) dx \quad .15$$

$$\int \frac{y^r + \mu y^r - 1}{\sqrt{y}} dy \quad .14$$

$$\int \sqrt{1 - \mu y} dy \quad .17$$

$$\int \frac{\nu \nu t^r - 1}{\sqrt{t}} dt \quad .16$$

$$\int \sqrt{\nu - \mu x} dx \quad .19$$

$$\int \sqrt{\nu x - \mu} dx \quad .18$$

$$\int x \sqrt{x^r - \nu} dx \quad .21$$

$$\int \sqrt{\delta r + 1} dr \quad .20$$

$$\int x^r \sqrt{x^r - 1} dx \quad .23$$

$$\int \nu x \sqrt{\nu - x^r} dx \quad .22$$

$$\int \delta x \sqrt{(\nu - \mu x^r)^r} dx \quad .25$$

$$\int x (\nu x^r + 1)^r dx \quad .24$$

$$\int \frac{y^r}{(1 - \mu y^r)^\delta} dy \quad .27$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^r + 1}} \quad .26$$

$$\int \frac{s ds}{\sqrt{\nu s^r + 1}} \quad .29$$

$$\int (x^r - \mu x + \nu)^{r/\nu} dx \quad .28$$

$$\int \frac{t dt}{\sqrt{t + \nu}} \quad .31$$

$$\int \frac{\nu r dr}{(1 - r)^{r/\nu}} \quad .30$$

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{3x}} \frac{dx}{x^2} \cdot ۳۳$$

$$\int \sqrt{\frac{1}{t} - 1} \frac{dt}{t^2} \cdot ۳۲$$

$$\int \sqrt{3 - x} x^2 dx \cdot ۳۵$$

$$\int x^4 \sqrt{3x^5 - 5} dx \cdot ۳۴$$

$$\int \frac{(x^2 + 2x) dx}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} \cdot ۳۷$$

$$\int (x^2 + 2)^{1/4} x^5 dx \cdot ۳۶$$

$$\int x(x^2 + 1) \sqrt{4 - 2x^2 - x^4} dx \cdot ۳۸$$

$$\int \sqrt{3 + s} (s + 1)^2 ds \cdot ۴۰$$

$$\int \frac{x(3x^2 + 1) dx}{(3x^4 + 2x^2 + 1)^2} \cdot ۳۹$$

$$\int (2t^2 + 1)^{1/2} t^2 dt \cdot ۴۲$$

$$\int \frac{y + 3}{(3 - y)^{1/2}} dy \cdot ۴۱$$

$$\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{2/2} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt \cdot ۴۴$$

$$\int \frac{(r^{1/2} + 2)^4}{\sqrt[3]{r^2}} dr \cdot ۴۳$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx \cdot ۴۶$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{3/2}} dx \cdot ۴۵$$

۴۷ $\int (2x + 1)^2 dx$ را با دو روش محاسبه کنید: (الف) با استفاده از قضیه دو جمله‌ای

$(2x + 1)^2$ را بسط دهید، و قضایای ۴۰۲.۵، ۷۰۲.۵ و ۸۰۲.۵ را به کار بندید؛ (ب) از جانشینی $u = 2x + 1$ استفاده کنید. اختلاف ظاهری جوابهای به دست آمده از (الف) و (ب) را توجیه کنید.

۴۸ $\int x(x^2 + 2)^2 dx$ را با دو روش محاسبه کنید: (الف) $(x^2 + 2)^2$ را بسط دهید،

و نتیجه را در x ضرب کنید، و سپس قضایای ۴۰۲.۵، ۷۰۲.۵ و ۸۰۲.۵ را به کار ببندید؛ (ب) از جانشینی $u = x^2 + 2$ استفاده کنید. اختلاف ظاهری جوابهای به دست آمده از (الف) و (ب) را توجیه کنید.

۴۹ $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} dx$ را با دو روش محاسبه کنید: (الف) $(\sqrt{x} - 1)^2$ را بسط دهید و

نتیجه را در $x^{-1/2}$ ضرب کنید؛ آنگاه قضایای ۴۰۲.۵، ۷۰۲.۵ و ۸۰۲.۵ را به کار بندید؛ (ب) از جانشینی $u = \sqrt{x} - 1$ استفاده کنید. اختلاف ظاهری جوابهای

به دست آمده در (الف) و (ب) را توجیه کنید.

۵۰. با دو روش $\int \sqrt{x-1} x^2 dx$ را حساب کنید: (الف) از جانشینی $u = x-1$ استفاده کنید؛ (ب) از $v = \sqrt{x-1}$ استفاده کنید.

۵۱. فرض کنید به ازای جميع مقادیر x در $(-1, 1)$ ، $f(x) = 1$ و

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

آنگاه به ازای تمام x های در $(-1, 1)$ ، $f'(x) = 0$ ، و وقتی که g' در $(-1, 1)$ وجود داشته باشد، $g'(x) = 0$. با این حال، به ازای هر x در $(-1, 1)$ ، $f(x) \neq g(x) + K$. چرا در اینجا قضیه ۲۰.۲۰۵ برقرار نیست؟

۵۲. نشان دهید که تابع پله‌ای واحد U (تمرین ۳۱ از تمرینهای ۶.۱) بر $(-\infty, +\infty)$ ضد مشتق ندارد. (دانه‌مایی: فرض کنید U بر $(-\infty, +\infty)$ ضد مشتقی چون F داشته باشد. از قضیه مقدار میانگین استفاده کنید و نشان دهید عددی چون k وجود دارد که اگر $x > 0$ ، آنگاه $F(x) = x + k$ ، و اگر $x < 0$ ، آنگاه $F(x) = k$ ، و لذا به يك تناقض دست یابید.)

۵۳. فرض کنید $f(x) = |x|$ ؛ و نیز فرض کنید F با ضابطه

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

تعریف شود. نشان دهید که F يك ضد مشتق f بر $(-\infty, +\infty)$ است.

۵۴. فرض کنید $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ، و $F(x) = |x|$. نشان دهید که اگر $x \neq 0$ ، $F'(x) = f(x)$. آیا F يك ضد مشتق f بر $(-\infty, +\infty)$ است؟ توضیح دهید.

۳.۵ ضد مشتق گیری از توانهای سینوس و کسینوس

قضایای مربوط به ضد مشتق توابع سینوسی و کسینوسی بلافاصله از قضایای متناظر در مورد مشتق گیری به دست می‌آیند.

$$۱۰.۳.۵ \text{ قضیه } \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

□

$$\cdot D_u(-\cos u) = \sin u \quad \text{اثبات}$$

$$\cdot \int \cos u \, du = \sin u + C \quad \text{قضیه ۲۰.۳.۵}$$

□

$$\cdot D_u(\sin u) = \cos u \quad \text{اثبات}$$

$$\text{مثال ۱} \quad \int 3 \sin 2x \, dx \quad \text{رایا یابد.}$$

حل فرض کنید $u = 2x$. آنگاه $du = 2dx$. پس

$$\int 3 \sin 2x \, dx = \frac{3}{2} \int \sin 2x (2dx)$$

$$= \frac{3}{2} \int \sin u \, du$$

$$= \frac{3}{2} (-\cos u) + C$$

▲

$$= -\frac{3}{2} \cos 2x + C.$$

مثال ۲ مطلوب است

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx.$$

حل فرض کنید $u = \sqrt{x}$. آنگاه

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx.$$

بنابراین

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \cos \sqrt{x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \right)$$

$$= 2 \int \cos u \, du$$

$$= 2 \sin u + C$$

▲

$$= 2 \sin \sqrt{x} + C.$$

مثال ۳ $\int \sin x \sqrt{1 - \cos x} dx$ را بیابید.

حل فرض کنید $u = 1 - \cos x$. آنگاه $du = \sin x dx$. پس

$$\int \sin x \sqrt{1 - \cos x} dx = \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$\triangle \quad = \frac{2}{3} (1 - \cos x)^{3/2} + C.$$

حال، برای ضد مشتقهای مربوط به توانهای سینوس و کسینوس چهار حالت در نظر می‌گیریم، و روش مورد استفاده در هر حالت را با یک نمونه مشخص می‌کنیم.

حالت ۱: $\int \sin^n u du$ یا $\int \cos^n u du$ ، وقتی که n یک عدد صحیح فرد باشد.

○ نمونه ۱

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x (\cos x dx)$$

$$= \int (1 - \sin^2 x) (\cos x dx).$$

بنابراین

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x dx. \quad (1)$$

برای محاسبه ضد مشتق دوم در طرف راست (۱)، فرض می‌کنیم $u = \sin x$ ؛ آنگاه $du = \cos x dx$. لذا داریم

$$\int \sin^2 x (\cos x dx) = \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 + C_1$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x + C_1.$$

چون ضد مشتق اول در طرف راست (۱)، عبارت از $\sin x + C$ است، پس

$$\circ \quad \int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

مثال ۴ $\int \sin^5 x \, dx$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int (\sin^3 x) \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx. \end{aligned}$$

بنا بر این

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin x \, dx - 2 \int \cos^2 x \sin x \, dx \\ &\quad + \int \cos^4 x (\sin x \, dx). \end{aligned} \quad (2)$$

برای محاسبه ضد مشتقهای دوم و سوم در (۲)، فرض کنید $u = \cos x$ ، آنگاه $du = -\sin x \, dx$ بنا بر این

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= -\cos x + 2 \int u^2 \, du - \int u^4 \, du \\ &= -\cos x + \frac{2}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C \end{aligned}$$

$$\blacktriangle \quad = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

حالت ۲: $\int \cos^n u \, du$ یا $\int \sin^n u \, du$ ، وقتی که n یک عدد صحیح زوج باشد.

در این حالت روش مورد استفاده در حالت ۱ مؤثر نیست. لذا از فرمولهای زیر استفاده

می کنیم که از فرمولهای (۱۹) و (۱۸) از بخش ۷.۱ با قراردادن x به جای t به دست می آیند.

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

○ نمونه ۲

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

مثال ۵ $\int \cos^4 x \, dx$ را بیابید.

حل

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

حالت ۳: $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$ ، وقتی که حداقل یکی از نماها فرد باشد. روش حل این حالت با روش به کار رفته در حالت ۱ شبیه است.

○ نمونه ۳

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x (\sin x \, dx)$$

$$\begin{aligned}
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (\sin x dx) \\
&= \int \cos^2 x \sin x dx - \int \cos^4 x \sin x dx \\
&= -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

○

حالت ۴: $\int \sin^n x \cos^m x dx$ ، وقتی که m و n هر دو زوج باشند.
روش حل این حالت باروش استفاده شده در حالت ۲ شبیه است.

○ نمونه ۴

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^5 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos^2 x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos^2 x}{2} \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 x dx \\
&\quad - \frac{1}{8} \int \cos^4 x dx - \frac{1}{8} \int \cos^6 x dx \\
&= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin^2 x - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos^4 x}{2} dx \\
&\quad - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 x) \cos^2 x dx \\
&= \frac{x}{8} + \frac{\sin^2 x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\sin^4 x}{64} \\
&\quad - \frac{1}{8} \int \cos^2 x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 x \cos^2 x dx \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\sin^2 x}{16} - \frac{\sin^4 x}{64} - \frac{\sin^2 x}{16} + \frac{\sin^4 x}{48} + C \\
&= \frac{x}{16} + \frac{\sin^2 x}{48} - \frac{\sin^4 x}{64} + C.
\end{aligned}$$

○

مثال ۶ $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$ را بیابید.

حل اگر از فرمول $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$ استفاده کنیم، داریم

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x dx \\ &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{64} \int dx - \frac{1}{32} \int \cos 4x dx + \frac{1}{64} \int \cos^2 4x dx \\ &= \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{1}{64} \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx \\ &= \frac{x}{64} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C \\ &= \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C. \end{aligned}$$

▲

مثال زیر نوع دیگری از ضد مشتق مربوط به حاصلضرب يك سینوس و يك کسینوس را نشان می‌دهد.

مثال ۷ $\int \sin 3x \cos 2x dx$ را بیابید.

حل از فرمول (۲۲) از بخش ۷.۱، یعنی از

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin(a-b) + \frac{1}{2} \sin(a+b)$$

استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 2x dx &= \int \left[\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin 5x \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C. \end{aligned}$$

▲

تمرینهای ۳.۵

در تمرینهای ۱ تا ۳۶، صورت کلی ضد مشتق را بیابید.

۱. $\int \sin^4 x \, dx$
۲. $\int \sin \frac{1}{3} x \, dx$
۳. $\int 4 \cos \frac{1}{3} x \, dx$
۴. $\int \frac{1}{3} \cos^4 x \, dx$
۵. $\int (3 \sin t + \cos^3 t) \, dt$
۶. $\int (3 \cos^2 x - 2 \sin^3 x) \, dx$
۷. $\int \cos x (2 + \sin x)^3 \, dx$
۸. $\int \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2} \, dx$
۹. $\int 2 \sin x \sqrt{1 + \cos x} \, dx$
۱۰. $\int \sin^2 x \sqrt{2 - \cos^2 x} \, dx$
۱۱. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1 - 2 \sin^3 x}} \, dx$
۱۲. $\int \frac{\sin^3 \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$
۱۳. $\int \sin x \cdot \sin(\cos x) \, dx$
۱۴. $\int \frac{\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} x}{\sqrt{\sin \frac{1}{3} x}} \, dx$
۱۵. $\int \cos^3 t \sin t \, dt$
۱۶. $\int \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta$
۱۷. $\int \sin^3 x \, dx$
۱۸. $\int \sin^3 x \, dx$
۱۹. $\int \sin^4 z \, dz$
۲۰. $\int \cos^5 x \, dx$
۲۱. $\int \cos^3 \frac{1}{3} x \, dx$
۲۲. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$
۲۳. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$
۲۴. $\int \cos^3 x \, dx$
۲۵. $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$
۲۶. $\int \sin^3 2t \cos^3 2t \, dt$

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\cos z} \sin^2 z \, dz \quad .28 \\ & \int \sin^2 \frac{1}{y} \cos^2 \frac{1}{y} y \, dy \quad .30 \\ & \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx \quad .32 \\ & \int \cos t \cos^3 t \, dt \quad .34 \\ & \int \sin x \sin^3 x \sin^5 x \, dx \quad .36 \\ & \int \sin^2 \pi t \cos^2 \pi t \, dt \quad .27 \\ & \int \frac{\cos^3 \pi x}{\sqrt{\sin \pi x}} \, dx \quad .29 \\ & \int \cos^4 x \cos^3 x \, dx \quad .31 \\ & \int \sin^2 y \cos^5 y \, dy \quad .33 \\ & \int (\sin^3 t - \sin^2 t)^2 \, dt \quad .35 \end{aligned}$$

۳۷. $\int 2 \sin x \cos x \, dx$ را با سه روش محاسبه کنید: (الف) از جانشینی $u = \sin x$ استفاده کنید؛ (ب) از جانشینی $u = \cos x$ استفاده کنید؛ (پ) از اتحاد $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ استفاده کنید. اختلاف ظاهری جوابهای به دست آمده در (الف)، (ب)، و (پ) را توضیح دهید.

۳۸. اگر بار الکتریکی دریافتی توسط خازنی از یک مدار الکتریکی i آمپری در t ثانیه q کولن باشد، آنگاه $i = D, q$. فرض کنید $i = 5 \sin 60t$ ، و وقتی $t = \pi/2$ ، $q = 0$. حداکثر بار مثبت خازن را بیابید.

۴.۵ معادلات دیفرانسیل با متغیرهای جدا شدنی

معادله‌ای که شامل مشتق باشد معادله دیفرانسیل نام دارد. چند معادله دیفرانسیل ساده عبارت‌اند از

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3} \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4x + 3. \quad (3)$$

مرتبه یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه مشتقات موجود در معادله است. بنابراین، (۱) و (۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول هستند و (۳) از مرتبه دوم است. ساده‌ترین

نوع معادله دیفرانسیل، يك معادله مرتبه اول به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (۴)$$

است که (۱) مثال خاصی است از آن. اگر (۴) را بر حسب دیفرانسیل بنویسیم، داریم

$$dy = f(x) dx. \quad (۵)$$

نوع دیگری از معادله دیفرانسیل مرتبه اول، معادله به صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (۶)$$

است. معادله (۲) مثال خاصی است از این نوع معادله. اگر (۶) را بر حسب دیفرانسیل بنویسیم، داریم

$$h(y) dy = g(x) dx. \quad (۷)$$

هم در (۵) و هم در (۷)، طرف چپ فقط شامل متغیر y ، و طرف راست تنها شامل متغیر x است. بنابراین متغیرها از هم جدا هستند، و می‌گوییم که متغیرهای این معادلات دیفرانسیل جدا شدنی هستند.

حال (۵) را در نظر بگیرید. برای حل این معادله باید تمام توابعی چون G را بیابیم که به ازای آنها $y = G(x)$ در معادله صدق کند. لذا اگر F يك ضد مشتق f باشد، تمام توابع G ، با رابطه $G(x) = F(x) + C$ ، که در آن C ثابت دلخواهی است، تعریف می‌شوند. یعنی، اگر $d(G(x)) = d(F(x) + C) = f(x) dx$ ، آنگاه به اصطلاح جواب عمومی (۵)،

$$y = F(x) + C \quad (۸)$$

است.

معادله (۸) معروف يك خانواده از توابعی است که به يك ثابت دلخواه C وابسته‌اند. این را يك خانواده يك پارامتری می‌نامند. نمودارهای این توابع، يك خانواده يك پارامتری از منحنیهای صفحه را تشکیل می‌دهند، و از هر نقطه خاصی چون (x_1, y_1) دقیقاً يك منحنی از این خانواده می‌گذرد.

○ نمونه ۱ فرض کنید بخواهیم جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$dy = 2x dx \quad (۹)$$

را بیابیم. صورت کلی ضد دیفرانسیل طرف چپ (۹)، $y + C_1$ است و صورت کلی ضد مشتق $2x$ عبارت است از $x^2 + C_2$. لذا

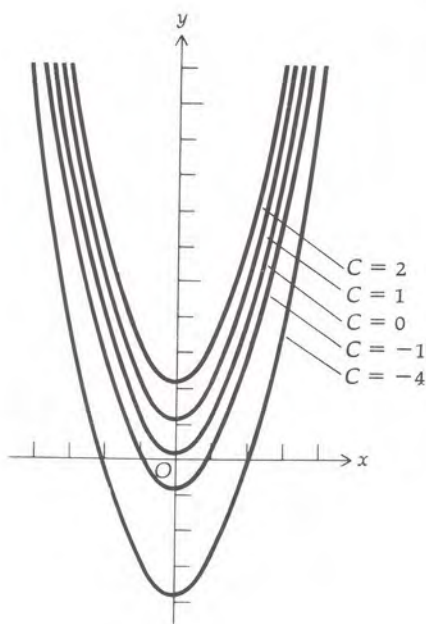
$$y + C_1 = x^2 + C_2.$$

چون C_1 و C_2 اعداد ثابت دلخواهی هستند، $C_2 - C_1$ نیز يك ثابت دلخواه است و ما به جای آن می نویسیم C ، ولذا داریم

$$y = x^2 + C \quad (10)$$

که جواب عمومی معادله دیفرانسیل مفروض است.

معادله (۱۰) معرف يك خانواده يك پارامتری از توابع است. شکل ۱۰.۴.۵ نمودارهای توابع متناظر با $C = -4$ ، $C = -1$ ، $C = 0$ ، $C = 1$ ، و $C = 2$ را نشان می دهد.



شکل ۱۰.۴.۵

○

حال (۷) را در نظر بگیرید

$$h(y) dy = g(x) dx .$$

از دوطرف این معادله ضد دیفرانسیل می گیریم

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx .$$

اگر H يك ضد مشتق h ، و G يك ضد مشتق g باشد، جواب عمومی (۷) به صورت

$$H(y) = G(x) + C$$

درمی آید.

○

مثال ۱ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2}{3y^3}$$

را بیابید.

حل اگر معادله مقروض را بر حسب دیفرانسیل بگیریم، داریم

$$3y^3 dy = 2x^2 dx$$

که متغیرهای آن از هم جدا هستند. از دو طرف این معادله ضد دیفرانسیل می گیریم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int 3y^3 dy &= \int 2x^2 dx \\ \frac{3y^4}{4} &= \frac{2x^3}{3} + \frac{C}{12} \end{aligned} \quad (11)$$

$$9y^3 = 8x^3 + C.$$

و این جواب عمومی است.

در (۱۱) ثابت دلخواه به صورت $C/12$ نوشته شده است، ولی وقتی دو طرف معادله را در ۱۲ ضرب کنیم، ثابت دلخواه C می شود. ▲

غالباً در مسائلی که با معادلات دیفرانسیل ارتباط دارند، لازم است جوابهایی خصوصی بیابیم که در شرایط معینی موسوم به شرایط مرزی یا شرایط اولیه صدق کنند. مثلاً، اگر يك معادله دیفرانسیل مرتبه اول به همراه این شرط مرزی داده شده باشد که وقتی $x = x_1$ ، $y = y_1$ ، آنگاه پس از اینکه جواب عمومی پیدا شد، اگر x_1 و y_1 را در جواب عمومی به جای x و y قرار دهیم، مقداری خاص برای C معین می شود. وقتی این مقدار C مجدداً در جواب عمومی گذاشته شود، يك جواب خصوصی به دست می آید.

○ نمونه ۲ برای یافتن جوابی خصوصی از معادله دیفرانسیل (۹) که در شرط مرزی $y = 6$ وقتی که $x = 2$ صدق کند، این مقادیر را در (۱۰) جانشین می کنیم، و C را به دست می آوریم: $C + 4 = 6$ ، یا $C = 2$. حال این مقدار از C را در (۱۰) قرار می دهیم و

$$y = x^2 + 2$$

○

را به دست می آوریم که جواب خصوصی مطلوب است.

معادله (۳) مثالی است از یک نوع خاص معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، به صورت زیر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x). \quad (12)$$

برای اینکه (۱۲) را حل کنیم، دوزد دیفرانسیل گیری متوالی لازم داریم، ولذا دو ثابت دلخواه در جواب عمومی ظاهر می شوند. بنابراین جواب عمومی (۱۲) معرف يك خانواده دو پارامتری از توابع است، ونمودارهای این توابع يك خانواده دو پارامتری از منحنیهای واقع در صفحه را تشکیل می دهند. مثال زیر روش یافتن جواب عمومی معادله ای از این نوع را نشان می دهد.

مثال ۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 4x + 3$$

را بیابید.

حل چون $d^2 y/dx^2 = dy'/dx$ ، معادله فوق را می توان به صورت

$$\frac{dy'}{dx} = 4x + 3$$

نوشت. اگر این معادله را بر حسب دیفرانسیل بنویسیم، داریم

$$dy' = (4x + 3) dx.$$

از دو طرف ضد دیفرانسیل می گیریم

$$\int dy' = \int (4x + 3) dx$$

و از آن نتیجه می شود

$$y' = 2x^2 + 3x + C_1.$$

چون $y' = dy/dx$ ، در معادله فوق از این جانشینی استفاده می کنیم،

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 3x + C_1$$

و بر حسب دیفرانسیل، داریم

$$dy = (2x^2 + 3x + C_1) dx.$$

از این معادله ضد دیفرانسیل می گیریم و به دست می آوریم

$$\int dy = \int (2x^2 + 3x + C_1) dx.$$

ولذا

$$y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

▲

و این جواب عمومی است

مثال ۳ جوابی خصوصی برای معادله دیفرانسیل مثال ۲ بیابید که وقتی $x = 1$ ، داشته باشیم $y = 2$ و $y' = -3$.

حل چون $y' = 2x^2 + 3x + C_1$ ، $y' = -3$ راجعاً به y' و 1 راجعاً به x می‌کنیم. لذا $2 = 2 + 3 + C_1$ ، یا $C_1 = -8$. اگر این مقدار از C_1 را در جواب عمومی قرار دهیم، داریم

$$y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C_2.$$

چون وقتی $x = 1$ ، داریم $y = 2$ ، این مقدار را در معادله بالا قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم $2 = (2/3) + (3/2) - 8 + C_2$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $C_2 = 47/6$. بنابراین، جواب خصوصی مطلوب عبارت است از

$$y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{47}{6}.$$

مثال ۴ يك مؤسسه تولیدی، تحلیلی از وسایل تولید و کارگران خود به عمل آورده است. این مؤسسه با تجهیزات و با کارگران موجود می‌تواند در هر روز ۳۰۰۰ واحد کالا تولید کند. تخمین زده می‌شود که بدون تغییر سرمایه، آهنگ تغییر تعداد واحدهای تولید شده در هر روز نسبت به تغییر تعداد کارگران اضافی، عبارت است از $80 - 6x^{1/2}$ که x تعداد کارگران اضافی است. اگر به نیروی کار مؤسسه ۲۵ کارگر اضافه شود، تولید روزانه را بیابید.

حل فرض کنید تعداد واحدهای تولید شده در هر روز y باشد. آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = 80 - 6x^{1/2}$$

لذا

$$dy = (80 - 6x^{1/2}) dx$$

و ضد دیفرانسیل گیری نتیجه می‌دهد

$$y = 80x - 4x^{3/2} + C.$$

چون وقتی $x = 0$ ، داریم $y = 3000$ ، پس $C = 3000$. بنابراین

$$y = 80x - 4x^{3/2} + 3000.$$

فرض کنید مقدار y وقتی که $x = 25$ ، با y_{25} نمایش داده شود. پس

$$\begin{aligned} y_{25} &= 2000 - 500 + 3000 \\ &= 4500. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر به نیروی کار ۲۵ کارگرافزوده شود، در هر روز ۴۵۰۰ واحد تولید می‌شود. ▲

مثال ۵ ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای چون (x, y) از منحنی برابر است با $3x^2y^2$. اگر نقطه $(2, 1)$ روی منحنی باشد، معادله‌ای برای منحنی بیابید.

حل چون ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای چون (x, y) برابر با مقدار مشتق در آن نقطه است، داریم

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2y^2.$$

این یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که متغیرهای آن را می‌توان از هم جدا کرد. لذا

$$\frac{dy}{y^2} = 3x^2 dx.$$

ضد دیفرانسیل می‌گیریم

$$\int y^{-2} dy = \int 3x^2 dx$$

و از اینجا

$$-\frac{1}{y} = x^3 + C.$$

این معادله‌ای از یک خانواده یک پارامتری از منحنیهاست. برای یافتن منحنی خاصی از این خانواده که شامل نقطه $(2, 1)$ باشد، ۲ را جانشین x و ۱ را جانشین y می‌کنیم و به دست می‌آوریم: $C = 8 - 1 = 7$. از اینجا داریم $C = -9$. بنابراین معادله منحنی مطلوب،

$$-\frac{1}{y} = x^3 - 9$$

▲

است.

تمرینهای ۴.۵

در تمرینهای ۱ تا ۲۰، جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = 6 - 2x^2 \quad .2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5 \quad .1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^6 + 2x^2 - \frac{1}{x^2} \quad .4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 2x - 7 \quad .3$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^2 \quad .6$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{2v^2 - 2}{v^2} \quad .5$$

$$\frac{ds}{dt} = 5\sqrt{s} \quad .8$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \sin 2x \quad .7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{y} - y} \quad .10$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad .9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 2}}{y^2} \quad .12$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \sqrt{1 + y^2}}{y} \quad .11$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\cos^2 v}{\sin u} \quad .14$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin^2 y} \quad .13$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{2x - 2} \quad .16$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 5x^2 + 1 \quad .15$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \sin 2t + \cos 2t \quad .18$$

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = \sqrt{2v + 1} \quad .17$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos^2 x \quad .20$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \sin^2 x - \cos x \quad .19$$

در تمرینهای ۲۱ تا ۳۰، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل مفروض، تحت شرایط مرزی تعیین شده، را بیابید.

$$x = 3 \text{ وقتی } y = -6; \frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 2 \quad .21$$

$$t = \frac{\pi}{3} \text{ وقتی } s = 2; \frac{ds}{dt} = \cos \frac{1}{2}t \quad .22$$

$$x = 4 \text{ وقتی } y = -2; \frac{dx}{y} = \frac{2dy}{x} \quad .23$$

$$x = -3 \text{ وقتی } y = -\frac{3}{2} : \frac{dy}{dx} = (x+1)(x+2). ۲۴$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ وقتی } y = \frac{\pi}{3} : \frac{dy}{dx} = \frac{\cos 3x}{\sin 2y}. ۲۵$$

$$x = 1 \text{ وقتی } y = 0 : \frac{dy}{dx} = \frac{x}{4\sqrt{(1+x^2)^3}}. ۲۶$$

$$x = 1 \text{ وقتی } y' = 1 \text{ و } y = 2 : \frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 3x. ۲۷$$

$$x = 1 \text{ وقتی } y' = -1 \text{ و } y = \frac{1}{2} : \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3}{x^4}. ۲۸$$

$$v = -1 \text{ وقتی } D_v u = -2 \text{ و } u = -1 : \frac{d^2u}{dv^2} = 4(1+3v)^2. ۲۹$$

$$x = 3 \text{ وقتی } y' = 5 \text{ و } y = 2 : \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[3]{3x-1}. ۳۰$$

۳۱. نقطه $(2, 3)$ بر یک منحنی واقع است، و در هر نقطه دلخواه (x, y) بر این منحنی، ضریب زاویه خط مماس برابر با $2x - 3$ است. معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۲. ضریب زاویه خط مماس در نقطه‌ای چون (x, y) بر یک منحنی، $3\sqrt{x}$ است. اگر نقطه $(4, 9)$ روی این منحنی باشد، معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۳. نقاط $(3, -1)$ و $(2, 0)$ روی یک منحنی هستند، و در هر نقطه دلخواه (x, y) بر این منحنی، $D_x^2 y = 2 - 4x$. معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۴. معادله خط مماس در نقطه $(3, 1)$ بر یک منحنی، $y = x + 2$ است. اگر در یک نقطه دلخواه (x, y) بر منحنی، $D_x^2 y = 6x$ ، معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۵. در هر نقطه (x, y) بر یک منحنی، $D_x^2 y = 1 - x^2$ و یک معادله خط مماس در نقطه $(1, 1)$ بر منحنی، $y = 2 - x$ است. معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۶. در هر نقطه (x, y) بر یک منحنی، $D_x^3 y = 2$ و $(3, 1)$ نقطه عطفی است که در آن، ضریب زاویه مماس عطفی -2 است. معادله‌ای برای این منحنی بیابید.

۳۷. بهای ابزار معینی ۷۰۰ دلار است، و ارزش ابزار با گذشت زمان طبق فرمول زیر کاهش می‌یابد: $D_t V = -500(t+1)^{-2}$ ؛ در اینجا V ، بر حسب دلار، بهای ابزار t سال پس از تاریخ خرید است. سه سال پس از خرید، بهای ابزار چقدر است؟

۳۸. حجم بالنی طبق فرمول $(2t/3) + \sqrt{t+1}$ ، $D_t V$ ، که V حجم بالن بر حسب سانتیمتر مکعب در زمان t بر حسب ثانیه است، افزایش می یابد. وقتی که $t=3$ ، داریم $V=33$. مطلوب است: (الف) فرمولی برای V بر حسب t ؛ (ب) حجم بالن در $t=8$ ثانیه.

۳۹. حجم آب مخزنی وقتی که ارتفاع آن h متر باشد، V متر مکعب است. اگر آهنگ تغییر V نسبت به h با $D_h V = \pi(2h+3)^2$ داده شود، مطلوب است حجم آب در مخزن، وقتی که ارتفاع آب ۳ متر باشد.

۴۰. کارایی يك کارگر در کارخانه ای به صورت درصدی بیان می شود. مثلاً، اگر کارایی کارگر در زمان خاصی به صورت ۷۰ درصد داده شود، آنگاه کارگر با ۷۰ درصد از قدرت کامل خود به کار مشغول است. فرض کنید t ساعت پس از آغاز کار، کارایی کارگر E درصد باشد، و آهنگی که E با آن آهنگ تغییر می کند، $(8t - 35)$ درصد در هر ساعت باشد. اگر کارایی وی پس از ۳ ساعت کار ۸۱ درصد باشد، مطلوب است کارایی کارگر پس از (الف) ۴ ساعت کار؛ (ب) ۸ ساعت کار.

۴۱. معادله $x^2 = 4ay$ معرف يك خانواده يك پارامتری از سهمیها است. معادله ای برای خانواده يك پارامتری دیگری از منحنیها بیابید که در هر نقطه (x, y) ، يك منحنی از هر خانواده وجود داشته باشد که از آن بگذرد و خطوط مماس بر دو منحنی در این نقطه متعامد باشند. (داهنمایی: اول نشان دهید که ضریب زاویه خط مماس مار بر هر نقطه (x, y) که روی محور y ها نباشد و به سهمی خانواده مفروض تعلق داشته باشد، y/x است.)

۴۲. تمرین ۴۱ را با این فرض که معادله خانواده يك پارامتری منحنیها $x^3 + y^3 = a^3$ باشد، حل کنید.

۵.۵ ضد مشتق گیری و حرکت مستقیم الخط

در بخشهای ۵.۳ و ۱۰.۳ آموختیم که هنگام بررسی حرکت يك ذره در امتداد يك خط مستقیم، وقتی که معادله حرکت به صورت $s = f(t)$ داده شده باشد، می توان سرعت لحظه ای و شتاب لحظه ای را از معادلات زیر تعیین کرد

$$v = D_t s = f'(t)$$

و

$$a = D_t v = D_t^2 s = f''(t).$$

بنابراین، اگر v یا a به عنوان تابعی از t ، همراه با شرایطی مرزی، داده شوند، می توان با ضد دیفرانسیل گیری معادله حرکت را تعیین کرد. مثال زیر این نکته را روشن می کند.

مثال ۱ ذره ای بر يك خط مستقیم در حرکت است. فاصله جهت دار ذره از مبدأ، بر حسب

فوت در زمان t ثانیه، برابر با s است؛ سرعت ذره در زمان t ثانیه، v فوت در ثانیه است؛ و شتاب ذره در زمان t ثانیه، a فوت در ثانیه در ثانیه است. اگر وقتی که $t = 1$ ، داشته باشیم $a = 2t - 1$ ، $v = 3$ ، و $s = 4$ ، v و s رابطه صورت تابعی از t بیان کنید.

حل چون $a = D_t v$

$$\frac{dv}{dt} = 2t - 1$$

که اگر آن را بر حسب دیفرانسیل بنویسیم، داریم

$$dv = (2t - 1) dt .$$

ازضد دیفرانسیل گیری نتیجه می شود

$$\int dv = \int (2t - 1) dt$$

$$v = t^2 - t + C_1 . \quad (1)$$

ازجانشینی $v = 3$ و $t = 1$ استفاده می کنیم،

$$3 = 1 - 1 + C_1$$

ولذا $C_1 = 3$. بنابراین، اگر این مقدار از C_1 رادر (۱) قراردهیم،

$$v = t^2 - t + 3 \quad (2)$$

به دست می آید که v رابطه صورت تابعی از t بیان می کند.
حال، اگر در (۲) بنویسیم $v = D_t s$ ، داریم

$$\frac{ds}{dt} = t^2 - t + 3$$

$$ds = (t^2 - t + 3) dt$$

$$\int ds = \int (t^2 - t + 3) dt$$

$$s = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 3t + C_2 . \quad (3)$$

با قراردادن $s = 4$ و $t = 1$ در (۳) و حل آن نسبت به C_2 ، داریم $C_2 = 7/6$. بنابراین اگر در (۳)، $7/6$ را جانشین C_2 کنیم، طبق معادله زیر، s به صورت تابعی از t به دست می آید

$$\Delta \quad s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{6}.$$

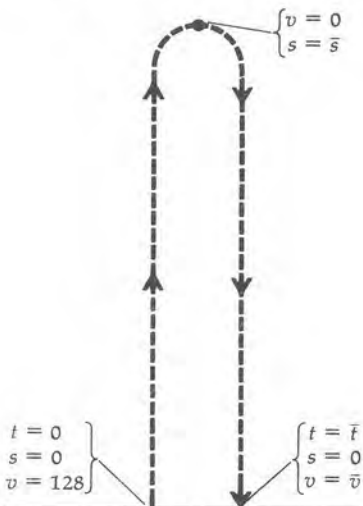
اگر جسمی تحت نیروی ثقل به طرف زمین در حال سقوط آزاد باشد، شتاب ثقل که با g فوت بر مربع ثانیه نمایش داده می شود، با فاصله جسم تا مرکز زمین تغییر می کند. اما، به ازای تغییرات کوچک فاصله، شتاب ثقل تقریباً ثابت است، و اگر جسم نزدیک سطح دریا باشد، مقدار تقریبی g برابر با ۳۲ است.

مثال ۲ سنگی را از زمین، با سرعت اولیه ۱۲۸ فوت بر ثانیه، به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. اگر تنها نیروی مؤثر بر سنگ نیروی ثقل در نظر گرفته شود، سنگ تا چه ارتفاعی بالا می رود، و مقدار سرعت آن هنگام برخورد با زمین چقدر است؟ همچنین، تعیین کنید چه مدت طول می کشد تا سنگ به زمین اصابت کند.

حل شکل ۱۰.۵.۵ حرکت سنگ را نشان می دهد. جهت مثبت روبه بالا انتخاب شده است.

فرض کنید t بر حسب ثانیه، زمان سپری شده از لحظه پرتاب سنگ را نشان دهد؛ s بر حسب فوت، فاصله سنگ تا زمین در زمان t ثانیه باشد، و نیز v سرعت سنگ در زمان t ثانیه بر حسب فوت در ثانیه؛ و $|v|$ مقدار سرعت سنگ در زمان t ثانیه بر حسب فوت در ثانیه، را نمایش دهد.

سنگ وقتی به بالاترین نقطه خود می رسد که سرعت صفر باشد. فرض کنید، وقتی که $v = 0$ ، مقدار s برابر با $\bar{s}$ باشد. وقتی که سنگ به زمین برخورد می کند، $s = 0$. فرض کنید وقتی که $s = 0$ و $t \neq 0$ ، مقادیر t و v ، به ترتیب، $\bar{t}$ و $\bar{v}$ باشند. جدول ۱۰.۵.۵



شکل ۱۰.۵.۵

جدول ۱۰.۵.۵

t	s	v
۰	۰	۱۲۸
	$\bar{s}$	۰
$\bar{t}$	۰	$\bar{v}$

جدولی است از شرایط مرزی این مسئله.

جهت مثبت حرکت از نقطه آغاز روبه بالا انتخاب شده است. چون تنها شتاب موجود ناشی از ثقل است، که جهت آن روبه پایین است، شتاب دارای مقدار ثابت -۳۲ فوت بر مربع ثانیه می باشد. چون شتاب با مشتق v نسبت به t تعیین می شود، داریم

$$\frac{dv}{dt} = -۳۲$$

$$dv = -۳۲ dt$$

$$\int dv = \int -۳۲ dt$$

$$v = -۳۲t + C_1.$$

از آنجا که وقتی $t = 0$ ، $v = ۱۲۸$ ، این مقادیر را در معادله بالا قرار می دهیم و $C_1 = ۱۲۸$ را به دست می آوریم. بنابراین

$$v = -۳۲t + ۱۲۸. \quad (۴)$$

چون v مشتق s نسبت به t است، یعنی $v = ds/dt$ ، داریم

$$\frac{ds}{dt} = -۳۲t + ۱۲۸$$

$$ds = (-۳۲t + ۱۲۸) dt$$

$$\int ds = \int (-۳۲t + ۱۲۸) dt$$

$$s = -۱۶t^2 + ۱۲۸t + C_2.$$

می دانیم که وقتی $t = 0$ ، $s = 0$ ، پس $C_2 = 0$. اگر در معادله بالا 0 را جانشین C_2 کنیم، داریم

$$s = -۱۶t^2 + ۱۲۸t. \quad (۵)$$

حال t را جانشین t و 0 را جانشین s می کنیم، و به دست می آوریم

$$0 = -۱۶\bar{t}(\bar{t} - ۸).$$

لذا $\bar{t} = 0$ یا $\bar{t} = ۸$. اما، مقدار 0 مربوط به وقتی است که سنگ پرتاب می شود؛ لذا ۸ ثانیه طول می کشد تا سنگ به زمین اصابت کند.

برای به دست آوردن $\bar{v}$ ، در (۴)، ۸ را جانشین t و $\bar{v}$ را جانشین v می کنیم. لذا $\bar{v} = (-۳۲)(۸) + ۱۲۸ = -۱۲۸$ ، یعنی $\bar{v} = -۱۲۸$. بنا بر این $|\bar{v}| = ۱۲۸$. پس سنگ با

مقدار سرعت ۱۲۸ فوت بر ثانیه به زمین می‌رسد.
 برای یافتن s ، نخست آن مقدار t را می‌یابیم که به ازای آن v صفر شود. از (۴) وقتی $v=0$ ، داریم $t=4$. در (۵)، ۴ راجانشین t و s راجانشین s می‌کنیم. نتیجه اینکه $s=256$. پس سنگ تا ۲۵۶ فوت بالا می‌رود.



تمرینهای ۵.۵

در تمرینهای ۱ تا ۱۲، ذره‌ای حرکت مستقیم‌الخط دارد؛ فاصله جهت‌دار ذره از مبدأ در t ثانیه s فوت است؛ سرعت ذره در t ثانیه، v فوت بر ثانیه است؛ و شتاب ذره در t ثانیه a فوت بر مربع ثانیه است. (داهنجایی برای تمرینهای ۹ تا ۱۲: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$.)

۱. $v = \sqrt{2t+4}$ ؛ $s=0$ وقتی که $t=0$. s را بر حسب t بیان کنید.
۲. $v = 4-t$ ؛ $s=0$ وقتی که $t=2$. s را بر حسب t بیان کنید.
۳. $a = 5-2t$ ؛ $v=2$ و $s=0$ وقتی که $t=0$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۴. $a = 17$ ؛ $v=0$ و $s=0$ وقتی که $t=0$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۵. $a = t^2 + 2t$ ؛ $s=1$ وقتی که $t=0$ و $s=-3$ وقتی که $t=2$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۶. $a = 3t - t^2$ ؛ $v = \sqrt{6}$ و $s=1$ وقتی که $t=1$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۷. $a = -4\sqrt{2} \cos(2t - \pi/4)$ ؛ $v=2$ و $s=1$ وقتی که $t=0$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۸. $a = 18 \sin 3t$ ؛ $v = -6$ و $s=4$ وقتی که $t=0$. v و s را بر حسب t بیان کنید.
۹. $a = 800$ ؛ $v=20$ وقتی که $s=1$. معادله‌ای شامل v و s بیابید.
۱۰. $a = 500$ ؛ $v=10$ وقتی که $s=5$. معادله‌ای شامل v و s بیابید.
۱۱. $a = 5s + 2$ ؛ $v=4$ وقتی که $s=2$. معادله‌ای شامل v و s بیابید.
۱۲. $a = 2s + 1$ ؛ $v=2$ وقتی که $s=1$. معادله‌ای شامل v و s بیابید.

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۰، تنها نیروی مؤثر نیروی شتاب ثقل است که مقدارش ۳۲ فوت بر مربع ثانیه، و جهتش روبه پایین در نظر گرفته می‌شود.

۱۳. سنگی را از زمین با سرعت اولیه ۲۰ فوت بر ثانیه به‌طور قائم به طرف بالا پرتاب

می کنیم. (الف) چه مدت طول می کشد تاسنگ بازمین برخورد کند؟ (ب) با چه سرعتی سنگ به زمین اصابت می کند؟ (پ) برای چه مدت سنگ رو به بالا می رود؟ (ت) سنگ تاچه ارتفاعی بالا می رود؟

۱۴. سنگی را از زمین با سرعت اولیه ۲۴ فوت بر ثانیه به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. (الف) چه مدت طول می کشد تاسنگ به زمین بخورد؟ (ب) با چه سرعتی سنگ با زمین برخورد می کند؟

۱۵. توپی را از بالای بنای یادبود واشنگتن، که ۵۵۵ فوت ارتفاع دارد، رها می کنیم. (الف) پس از چه مدت توپ به زمین می رسد، و (ب) با چه سرعتی توپ به زمین می خورد؟

۱۶. سنگی را از زمین با سرعت اولیه ۱۶ فوت بر ثانیه به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. (الف) برای چه مدت سنگ روبه بالا می رود، و (ب) سنگ تاچه ارتفاعی بالا می رود؟

۱۷. مردی که سوار بر یک بالن است، وقتی که بالن به ۱۵۰ فوتی بالای زمین می رسد و با آهنگ ۱۰ فوت بر ثانیه در حال صعود است، دوربین خود را رها می کند. (الف) بعد از چه مدت دوربین بازمین برخورد می کند، و (ب) هنگام اصابت به زمین سرعت دوربین چقدر است؟

۱۸. توپی را از پنجره ای که ۸۰ فوت تا زمین فاصله دارد با سرعت اولیه ۶۴ — فوت بر ثانیه به طرف پایین پرتاب می کنیم. (الف) چه موقع توپ به زمین می رسد، و (ب) با چه سرعتی توپ به زمین اصابت می کند؟

۱۹. توپی را از نقطه ای که ۲۰ فوت تا زمین فاصله دارد با سرعت اولیه ۴۰ فوت بر ثانیه به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. (الف) اگر وقتی که توپ ۵ فوت از نقطه پرتاب فاصله دارد سرعتش ۷ فوت بر ثانیه باشد، ۷ را بر حسب ۵ بنویسید. (ب) وقتی که توپ در ۳۶ فوتی زمین، و در حال صعود است سرعت آن چیست؟ (دانهایی: راهنمایی تمرینهای ۹ تا ۱۲ را ببینید.)

۲۰. سنگی را از پشت بام خانه ای که ۶۰ فوت تا زمین فاصله دارد با سرعت اولیه ۴۰ فوت بر ثانیه به طور قائم به بالا پرتاب می کنیم. (الف) در چه زمانی سنگ به بیشترین ارتفاع خود می رسد؟ (ب) بیشترین ارتفاع سنگ چقدر است؟ (پ) پس از چه مدت، سنگ در راه برگشت خود از بام خانه می گذرد، و (ت) در این لحظه سرعت آن چقدر است؟ (ث) پس از چه مدت سنگ به زمین اصابت می کند، و (ج) با چه سرعتی توپ به زمین می رسد؟

۲۱. اگر راننده اتومبیلی بخواهد در طی مسافتی به طول ۲۰۰ متر، سرعت اتومبیل خود را از ۴۰ کیلومتر در ساعت به ۱۰۰ کیلومتر در ساعت افزایش دهد، با چه شتاب ثابتی باید

این کار را انجام دهد؟

۲۲. روی زمین تراز، توپی را با سرعت اولیه ۲۰ فوت بر ثانیه می‌غلطانیم. اگر به سبب اصطکاک، شتاب توپ با آهنگ ۶ فوت بر مربع ثانیه تقلیل یابد، توپ چقدر می‌غلند؟

۲۳. اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت در حرکت است. ترمزهای آن می‌توانند یک شتاب ثابت منفی برابر با ۸ متر بر مربع ثانیه ایجاد کنند. اگر راننده ترمز کند، (الف) بعد از چه مدتی، و (ب) بعد از طی چه مسافتی، اتومبیل توقف خواهد کرد؟

۲۴. راننده‌ای می‌خواهد در طی مسافتی به طول ۱۰۰ متر سرعت اتومبیل خود را از ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت به ۶۰ کیلومتر بر ساعت تقلیل دهد. با چه شتاب ثابت منفی می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۲۵. ترمزهای اتومبیلی می‌توانند یک شتاب ثابت منفی به اندازه ۸ متر بر مربع ثانیه ایجاد کنند. اگر لازم باشد پس از استفاده از ترمز، اتومبیل در فاصله ۲۵ متری توقف کند، حداکثر سرعت آن چقدر می‌تواند باشد؟

۲۶. از پایین سطح شیب‌داری با سرعت اولیه ۶ فوت بر ثانیه توپی را به طرف بالا به حرکت درمی‌آوریم. اگر شتاب روبه پایین برابر با ۴ فوت بر مربع ثانیه باشد، قبل از اینکه توپ به پایین بغلند، روی سطح شیب‌دار چقدر بالا می‌رود؟

۲۷. قالب یخی از ناودانی با شتاب ثابت ۳ متر بر مربع ثانیه به پایین می‌لغزد. طول ناودان ۳۶ متر است، و یخ در مدت ۴ ثانیه به پایین ناودان می‌رسد. (الف) سرعت اولیه یخ چقدر است؟ (ب) سرعت یخ بعد از پیمودن ۱۲ متر چقدر است؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا یخ ۱۲ متر راه پیماید؟

۶.۵ کاربردهایی از ضد مشتق گیری در علم اقتصاد

در نمونه ۱ از بخش ۱۰.۴، $C(x)$ هزینه کل ساخت x اسباب بازی بر حسب تومان است، و

$$C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2.$$

در بخش ۱۰.۴ نشان دادیم که یک مقدار تقریبی برای $C(51) - C(50)$ ، که هزینه تولید پنجاه و یکمین اسباب بازی بر حسب تومان است، از $C'(50)$ ، یعنی مقدار تابع هزینه بهای به ازای ۵۰، به دست می‌آید. این حکم را می‌توان با استفاده از مفهوم دیفرانسیل ثابت کرد. فرض کنید

$$y = C(x).$$

آنگاه

$$\Delta y = C(x + \Delta x) - C(x) \quad (۱)$$

و

$$dy = C'(x) dx. \quad (۲)$$

اگر $x = ۵۰$ ، و $dx = \Delta x = ۱$ ، آنگاه از (۱) نتیجه می‌شود

$$\Delta y = C(۵۱) - C(۵۰)$$

و از (۲) داریم

$$dy = [C'(۵۰)](۱) = C'(۵۰).$$

چون dy تقریبی برای Δy است، $C'(۵۰)$ هم تقریبی برای $C(۵۱) - C(۵۰)$ است. از آنجا که C' ، تابع هزینه نهایی، و R' ، تابع درآمد نهایی، به ترتیب، مشتقات اول C ، تابع هزینه کل، و R ، تابع درآمد کل، هستند، C و R را می‌توان از C' و R' با ضد مشتق‌گیری به دست آورد. هنگام یافتن تابع C از C' ، اگر هزینه عمومی (یعنی، هزینه در حالتی که کالا تولید نمی‌شود) معلوم باشد، یا هزینه تولید تعداد مشخصی از کالا معین باشد، آنگاه می‌توان ثابت دلخواه را به دست آورد. چون عموماً واقعیت دارد که وقتی تعداد واحدهای تولید شده صفر باشد درآمد کل هم صفر است، هنگام یافتن تابع R از R' ، ثابت دلخواه مربوط را می‌توان با کمک این واقعیت به دست آورد.

مثال ۱ تابع هزینه نهایی C' با ضابطه $C'(x) = 4x - 8$ تعیین می‌شود؛ $C(x)$ تومان، هزینه کل تولید x واحد است. اگر هزینه تولید ۵ واحد ۲۰ تومان باشد، تابع هزینه کل را بیابید. منحنی هزینه کل، و منحنی هزینه نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل هزینه نهایی باید نامنفی باشد. پس $4x - 8 \geq 0$ ، و لذا مقادیر مجاز x عبارت‌اند از $x \geq 2$. چون

$$C'(x) = 4x - 8$$

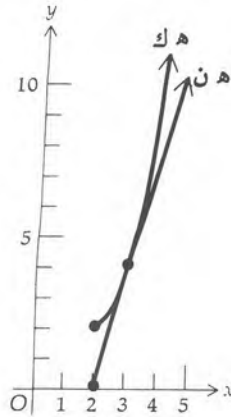
$$C(x) = \int (4x - 8) dx$$

$$= 2x^2 - 8x + k.$$

چون $C(۵) = ۲۰$ ، داریم $k = ۱۰$. لذا

$$C(x) = 2x^2 - 8x + 10 \quad x \geq 2$$

منحنیهای مطلوب در شکل ۱۰.۶.۵ رسم شده‌اند.



شکل ۱۰۶.۵

مثال ۲ اگر درآمد نهایی از ضابطه $R'(x) = ۲۷ - ۱۲x + x^۲$ به دست آید، مطلوب است تابع درآمد کل و معادله تقاضا. منحنیهای تقاضا، درآمد کل، و درآمد نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

حل اگر R تابع درآمد کل باشد، و

$$R'(x) = ۲۷ - ۱۲x + x^۲$$

آنگاه

$$\begin{aligned} R(x) &= \int (۲۷ - ۱۲x + x^۲) dx \\ &= ۲۷x - ۶x^۲ + \frac{1}{۳}x^۳ + C. \end{aligned}$$

چون $R(۰) = ۰$ داریم $C = ۰$. پس

$$R(x) = ۲۷x - ۶x^۲ + \frac{1}{۳}x^۳.$$

اگر f تابع بها باشد، $R(x) = xf(x)$ ؛ بنابراین

$$f(x) = ۲۷ - ۶x + \frac{1}{۳}x^۲.$$

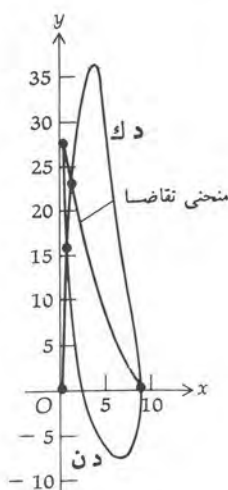
اگر بهای یک واحد از کالا، وقتی که x واحد آن مورد تقاضا باشد، p تومان باشد، آنگاه از آنجا که $p = f(x)$ ، معادله تقاضا به صورت زیر درمی آید

$$۳p = ۸۱ - ۱۸x + x^۲.$$

برای تعیین مقادیر مجاز x از این واقعیتها استفاده می‌کنیم که $x \geq 0$ ، $p \geq 0$ ، و تابعی است نزولی. چون

$$f'(x) = -6 + \frac{2}{3}x$$

تابع f نزولی است وقتی که $x < 9$ (یعنی، وقتی که $f'(x) < 0$) و همچنین وقتی که $x = 9$ ، $p = 0$ ؛ لذا مقادیر مجاز x ، اعداد واقع در بازه بسته $[0, 9]$ هستند. نمودارهای مطلوب در شکل ۲.۶.۵ رسم شده‌اند.



شکل ۲.۶.۵

مثال ۳ بعد از بررسیهایی، تولیدکننده‌ای درمی‌یابد که اگر در هر هفته x واحد از کالای معینی را تولید کند، هزینه نهایی از $C'(x) = 0.3x - 11$ به دست می‌آید؛ در اینجا هزینه کل تولید x واحد، $C(x)$ تومان است. اگر بهای فروش هر واحد کالا روی ۱۹ تومان تثبیت شود و هزینه عمومی در هر هفته ۱۰۰ تومان باشد، ماکسیمم سود کل هفتگی چقدر می‌تواند باشد؟

حل فرض کنید درآمد کل حاصل از فروش x واحد $R(x)$ تومان، و سود کل حاصل از فروش x واحد $P(x)$ تومان باشد. چون با بهای هر واحد ۱۹ تومان، x واحد کالا فروخته می‌شود،

$$R(x) = 19x.$$

پس درآمد نهایی از

$$R'(x) = 19$$

به دست می آید. فرض این است که

$$C'(x) = 0.3x - 11.$$

سود کل ما کسیم خواهد بود هرگاه درآمد نهایی با هزینه نهایی برابر باشد (بخش ۱۰.۴ را ببینید). با مساوی قرار دادن $R'(x)$ و $C'(x)$ ، داریم $x = 100$. بنابراین برای اینکه سود کل ما کسیم شود، تولید هفتگی باید ۱۰۰ واحد باشد.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int (0.3x - 11) dx \\ &= 0.15x^2 - 11x + k. \end{aligned}$$

چون هزینه عمومی ۱۰۰ تومان است، $C(0) = 100$ ، ولذا $k = 100$. بنابراین

$$C(x) = 0.15x^2 - 11x + 100.$$

از آنجا که $P(x) = R(x) - C(x)$ ، داریم

$$\begin{aligned} P(x) &= 19x - (0.15x^2 - 11x + 100) \\ &= -0.15x^2 + 30x - 100. \end{aligned}$$

پس $P(100) = 1400$. بنابراین ما کسیم سود کل هفتگی ۱۴۰۰ تومان است، با این شرط که در هفته ۱۰۰ واحد کالا تولید شود.

تمرینهای ۶.۵

۱. ضریب زاویه منحنی درآمد کل به صورت $3x - 12$ است، و وقتی $x = 4$ ، $p = 6$. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) معادله تقاضا؛ (پ) منحنی درآمد کل و منحنی تقاضا را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.
۲. ضریب زاویه منحنی درآمد کل در هر نقطه‌ای از ضابطه $4x - 15$ به دست می آید، و $R(0) = 0$. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) معادله تقاضا؛ (پ) منحنی درآمد کل و منحنی تقاضا را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.
۳. آهنگ تغییر ضریب زاویه منحنی هزینه کل شرکت خاصی عدد ثابت ۲ است، و منحنی هزینه کل، نقاط $(2, 12)$ و $(3, 18)$ را دربردارد. تابع هزینه کل را بیابید.
۴. تابع هزینه نهایی از ضابطه $C'(x) = 3\sqrt{2x+4}$ به دست می آید. اگر هزینه عمومی صفر باشد، تابع هزینه کل را بیابید.
۵. تابع هزینه نهایی از ضابطه $C'(x) = 3(5x+4)^{-1/2}$ به دست می آید. اگر هزینه

عمومی ۱۰ دلار باشد، تابع هزینه کل را بیابید.

۶. اگر تابع درآمد نهایی کالایی با ضابطه $R'(x) = 14 - 9x + x^2$ به دست آید، تابع بها را بیابید.

۷. اگر تابع درآمد نهایی کالایی از ضابطه $R'(x) = 4 + 10(x+5)^{-2}$ به دست آید، معادله تقاضا را بیابید.

۸. در مورد کالای خاصی، آهنگ تغییر تابع هزینه کل نسبت به یک واحد تغییر در x ، برابر است با $3x$ و منحنی هزینه کل نقطه $(5, 45)$ را در بر دارد. تابع هزینه کل را بیابید.

۹. تابع هزینه نهایی کالای خاصی از ضابطه $C'(x) = 6x - 17$ به دست می آید. اگر هزینه تولید ۲ واحد کالا ۲۵ دلار باشد، تابع هزینه کل چقدر است؟

۱۰. اگر تابع درآمد نهایی از ضابطه $R'(x) = 3x^2 - 12x + 10$ به دست آید، مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) تابع بها.

۱۱. تابع درآمد نهایی از $R'(x) = 16 - 3x^2$ به دست می آید. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) معادله تقاضا؛ (پ) منحنی تقاضا، منحنی درآمد کل، و منحنی درآمد نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۲. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) معادله تقاضا، با این شرط که تابع درآمد نهایی با ضابطه $R'(x) = (3x^2/4) - 10x + 12$ به دست آید؛ (پ) منحنی تقاضا، منحنی درآمد کل، و منحنی درآمد نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۳. تابع درآمد نهایی از $C'(x) = 3x^2 + 8x + 4$ به دست می آید، و هزینه عمومی ۶ دلار است. اگر هزینه کل x واحد $C(x)$ دلار باشد، (الف) تابع هزینه کل را بیابید؛ و (ب) منحنی هزینه کل و منحنی هزینه نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۴. تابع هزینه نهایی از ضابطه $C'(x) = 6x$ ، که در آن $C(x)$ هزینه کل تولید یکصد x واحد از کالای معینی بر حسب یکصد دلار است، تعریف می شود. اگر هزینه ۲۰۰ واحد ۲۰۰۰ دلار باشد، مطلوب است: (الف) تابع هزینه کل، و (ب) هزینه عمومی؛ (پ) منحنی هزینه کل و منحنی هزینه نهایی را نسبت به یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۵. شرکتی مشخص کرده است که تابع هزینه نهایی تولید کالای خاصی از $C'(x) = 125 + 10x + (x^2/9)$ به دست می آید؛ در اینجا $C(x)$ دلار هزینه کل

تولید x واحد از کالا است. اگر هزینه عمومی ۲۵۰ دلار باشد، هزینه تولید ۱۵ واحد چقدر است؟

۱۶. تابع درآمد نهایی از $R'(x) = ab(x+b)^{-2} - c$ به دست می آید. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل؛ و (ب) معادله تقاضا.

۱۷. تابع هزینه نهایی برای ساختن گلدان، $C'(x) = 4 - (9\sqrt{3x})/2x$ است؛ در اینجا هزینه کل تولید x گلدان $C(x)$ دلار است. هزینه عمومی ۵۴ دلار است. اگر ۲۷ گلدان تولید شود، مطلوب است: (الف) هزینه نهایی؛ و (ب) هزینه متوسط هر واحد.

۱۸. تابع هزینه نهایی کالای خاصی $C'(x) = 30x^{1/2}$ است؛ در اینجا $C(x)$ دلار هزینه کل تولید x واحد است. هزینه عمومی ۱۰۰ دلار است. اگر ۲۵ واحد تولید شود، مطلوب است: (الف) هزینه نهایی؛ و (ب) هزینه متوسط هر واحد.

۱۹. يك سازنده اسباب بازی کودکان اسباب بازی تازه ای برای عرضه دارد و می خواهد بهایی برای فروش آن تعیین کند که سود کل ماکسیمم باشد. با بررسی بها و تقاضا برای اسباب بازی مشابهی، پیش بینی می شود که اگر x اسباب بازی مورد تقاضا باشد وقتی که بهای هر يك p دلار است، آنگاه $D_x p = -p^2/30000$ ، و تقاضا ۱۸۰۰ واحد است وقتی که بها ۱۰ دلار باشد. اگر هزینه کل تولید x اسباب بازی $C(x)$ دلار باشد، آنگاه $C(x) = x + 7500$. برای اینکه سود کل سازنده ماکسیمم باشد، بهای فروش چه باید باشد؟

۲۰. فرض کنید شرکت خاصی تخمین می زند که درآمدش از فروش، با فرمول $D_t S = 2(t-1)^{2/3}$ رشد می کند که در آن، درآمد ناخالص حاصل از فروش در t سال دیگر S میلیون دلار است. اگر درآمد ناخالص حاصل از فروش در سال جاری ۸ میلیون دلار باشد، انتظار ما در مورد درآمد ناخالص حاصل از فروش در دو سال دیگر چه باید باشد؟

۲۱. کارخانه داری تخمین می زند که رشد درآمد حاصل از فروش او ظرف ده سال آینده، با فرمول $D_t S = (t+1)^{1/2}/5$ تعیین می شود؛ درآمد ناخالص حاصل از فروش در t سال دیگر S میلیون دلار است، و $0 \leq t \leq 10$. اگر درآمد ناخالص حاصل از فروش در سال جاری ۱ میلیون دلار باشد، انتظار ما در مورد درآمد ناخالص حاصل از فروش در ۷ سال دیگر چه باید باشد؟

۲۲. تولید کننده کالای معینی تعیین می کند که هزینه نهایی با ضابطه

$$C'(x) = 8 + 2 \cos(\pi x / 100)$$

به دست می آید که در آن، هزینه کل تولید x واحد $C(x)$ دلار است. اگر هزینه عمومی ۷۵ دلار باشد، هزینه کل تولید ۵۰ واحد چقدر است؟

تمرینهای مروری فصل ۵

در تمرینهای ۱ تا ۲۴، صورت کلی ضد مشتق را بیابید.

۱. $\int (2x^2 - x^2 + 3) dx$
۲. $\int (5x^4 + 3x - 1) dx$
۳. $\int (4y + 6\sqrt{y}) dy$
۴. $\int 2z^{-2} dz$
۵. $\int \sin 2t dt$
۶. $\int \frac{\cos \sqrt{w}}{\sqrt{w}} dw$
۷. $\int \cos^2 x \sin x dx$
۸. $\int \sqrt{x}(1+x^2) dx$
۹. $\int \left(\frac{2}{x^4} - \frac{5}{x^2}\right) dx$
۱۰. $\int \left(\sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\right) dt$
۱۱. $\int 5x\sqrt{2+3x^2} dx$
۱۲. $\int x^4\sqrt{x^5-1} dx$
۱۳. $\int \left(\sqrt{3x} + \frac{1}{\sqrt{5x}}\right) dx$
۱۴. $\int \sqrt[3]{vw+2} dw$
۱۵. $\int \frac{x^2+x}{\sqrt{x^4+2x^2}} dx$
۱۶. $\int (x^2+x)\sqrt{x^2+3} dx$
۱۷. $\int \frac{s}{\sqrt{2s+3}} ds$
۱۸. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$
۱۹. $\int \sin^4 \frac{1}{2} t dt$
۲۰. $\int \sin^2 4x \cos^2 4x dx$
۲۱. $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$
۲۲. $\int \sin 3y \cos 5y dy$
۲۳. $\int \sqrt{4x+3}(x^2+1) dx$
۲۴. $\int \left(\frac{x^2+2}{x^3}\right) \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} dx$

در تمرینهای ۲۵ تا ۳۰، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \quad ۲۶$$

$$x^2 y \frac{dy}{dx} = (y^2 - 1)^2 \quad ۲۵$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 12x^2 - 30x \quad ۲۸$$

$$y^2 dx + y^2 dy = dy \quad ۲۷$$

$$y\sqrt{2x^2+1} dy = x\sqrt{1-y^2} dx \quad ۳۰$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{2x-1} \quad ۲۹$$

۳۱. $y = 80x - 16x^2$ مفروض است. تفاضل $\Delta y - dy$ را با این شرط بیابید که (الف) $x = 2$ و $\Delta x = 0.01$ ؛ (ب) $x = 4$ و $\Delta x = -0.02$.

۳۲. با استفاده از دیفرانسیل، یک مقدار تقریبی با سه رقم اعشار برای $\sqrt{126}$ پیدا کنید.

۳۳. با استفاده از دیفرانسیل، یک مقدار تقریبی با چهار رقم اعشار برای $\sqrt{0.17}$ بیابید.

۳۴. با استفاده از دیفرانسیل، یک مقدار تقریبی برای $\sin 121^\circ$ بیابید.

۳۵. می‌خواهیم یک توپ لاستیکی بسازیم که شعاع قسمت تو خالی وسط آن ۲ اینچ وضخامت لاستیک آن $1/8$ اینچ باشد. با استفاده از دیفرانسیل، حجم جنس لازم برای تولید آن را تقریب کنید.

۳۶. ضریب زاویه خط مماس در نقطه (x, y) بزرگ منحنی، $4x - 10$ است، و نقطه $(-1, 1)$ بر این منحنی قرار دارد. معادله‌ای برای منحنی بیابید.

۳۷. در هر نقطه (x, y) بزرگ منحنی، $D_x^2 y = 4 - x^2$ ، و معادله خط مماس در نقطه $(-1, 1)$ ، $4x - 3y = 3$ است. معادله‌ای برای منحنی بیابید.

۳۸. نقاط $(2, -3)$ و $(0, 1)$ بزرگ منحنی قرار دارند، و در هر نقطه (x, y) بر این منحنی، $D_x^2 y = -3$. معادله‌ای برای منحنی بیابید.

۳۹. رابطه $1 = x^3 + y^3 - 3xy^2$ داده شده است. اگر $dx = 0.01$ ، dy را در نقطه $(1, 1)$ بیابید.

۴۰. اگر $y = x^3 - 2x + 1$ و $x^3 + t^3 - 3t = 0$ ، dy/dt را بیابید.

۴۱. اگر $8x^3 + 27y^2 - 4xy = 0$ و $t^3 + t^2x - x^3 = 4$ ، dy/dt را بیابید.

۴۲. $\int (x^4)^6 4x^3 dx$ را به دو صورت $\int u^6 du$ و $\int 4x^{27} dx$ محاسبه، و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

۴۳. $\int (x^3 + 1)^2 x^2 dx$ را با دوروش محاسبه کنید: (الف) از جانشینی $u = x^3 + 1$ استفاده

کنید؛ (ب) اول $(x^3 + 1)^2$ را بسط دهید. نتیجه‌ها را باهم مقایسه کنید و دربارهٔ اختلاف ظاهری جوابهای حاصل از (الف) و (ب) توضیح دهید.

۴۴. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $x^2 dy = y^3 dx$ را، با این شرط که وقتی $x = 4$ ، $y = 1$ ، بیابید.

۴۵. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $D_x^2 y = \sqrt{x+4}$ را، با این شرط که وقتی $x = 4$ ، آنگاه $y = 3$ و $y' = 2$ ، بیابید.

در تمرینهای ۴۶ و ۴۷، ذره‌ای بر خطی مستقیم در حرکت است؛ فاصلهٔ جهت‌دار ذره از مبدأ در ثانیهٔ t ، s فوت است؛ سرعت ذره در ثانیهٔ t ، v فوت بر ثانیه است؛ و شتاب ذره در ثانیهٔ t ، a فوت بر مربع ثانیه است.

۴۶. $a = 3t + 4$ ؛ وقتی که $t = 0$ ، داریم $v = 5$ و $s = 0$ ، v و s را بر حسب t بیان کنید.

۴۷. $a = 6 \cos 2t$ ؛ وقتی که $t = \pi/2$ ، داریم $v = 3$ و $s = 4$ ، v و s را بر حسب t بیان کنید.

۴۸. اگر از هواپیمایی که در ارتفاع ۳۰۰۰۰ فوتی بالای اقیانوسی پرواز می‌کند، جسمی را رها و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم، پس از چه مدت جسم به آب اصابت می‌کند؟

۴۹. فرض کنید از هواپیمای مربوط به تمرین ۴۸، گلوله‌ای به‌طور قائم و روبه پایین شلیک بشود. اگر سرعت گلوله هنگام خروج از دهانهٔ تفنگ ۲۵۰۰ فوت بر ثانیه باشد و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، پس از چه مدت گلوله به اقیانوس می‌رسد؟

۵۰. از پشت بام ساختمانی که ۶۴ فوت از زمین فاصله دارد، توپی را به‌طور قائم روبه بالا پرتاب می‌کنیم. سرعت اولیه ۴۸ فوت بر ثانیه است. (الف) پس از چه مدت توپ به بیشترین ارتفاع می‌رسد؛ و (ب) بیشترین ارتفاع آن چقدر است؟ (پ) پس از چه مدت توپ به زمین اصابت می‌کند؛ و (ت) با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟

۵۱. فرض کنید توپ تمرین ۵۰ را با يك سرعت اولیهٔ ۴۸ فوت بر ثانیه به طرف پایین پرتاب کنیم. (الف) پس از چه مدت توپ به زمین اصابت می‌کند؛ و (ب) با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟

۵۲. فرض کنید توپ تمرین ۵۰ را از پشت بام رها کنیم. (الف) پس از چه مدت توپ به زمین می‌رسد؛ و (ب) با چه سرعتی به زمین اصابت می‌کند؟

۵۳. شرکتی تخمین می‌زند که آهنگ تغییر تعداد واحدهای تولید شده در هر روز نسبت به

تغییر تعداد کارگران اضافی، $9x^{1/2} - 100$ است که x تعداد کارگران اضافی است. وقتی که با کارگران موجود تولید روزانه ۳۰۰۰ واحد باشد، اگر ۹ کارگر به نیروی کار اضافه شود، تولید روزانه چقدر است؟

۵۲. بهای ابزار معینی ۹۰۰ دلار است، و ارزش آن با گذشت زمان طبق فرمول $D_t V = -300(1+t)^{-2}$ کاهش می‌یابد؛ t سال پس از خرید، ارزش ابزار V دلار است. (الف) دو سال پس از تاریخ خرید، ارزش ابزار چقدر است؟ (ب) $\lim_{t \rightarrow +\infty} V$ را بیابید.

۵۵. می‌خواهیم با به کار بردن ۶ مربع متساوی، از ورقی که بهای هر اینچ مربع آن ۲۰۰ دلار است، ظرفی به شکل يك مكعب با حجم ۱۰۰۰ اینچ مكعب بسازیم. ضلع هر مربع باجه دقتی ساخته شود تا بهای كل ورق مورد نیاز، با تقریب ۵ دلار صحیح باشد؟

۵۶. اندازه شعاع قاعده مخروط مستدیر قائمی $4/3$ برابر اندازه ارتفاع آن است. اگر بخواهیم خطای محاسبه حجم این مخروط از ۳ درصد تجاوز نکند، ارتفاع آن باجه دقتی باید اندازه گرفته شود؟

۵۷. اگر زمان يك نوسان كامل پاندول ساده‌ای به طول l فوت t ثانیه باشد، آنگاه $gt^2 = 4\pi^2 l$ ، که $g = 32.2$. اگر در اندازه گیری طول پاندول خطایی برابر با ۰.۱ درصد فوت رخ دهد، اثر آن بر زمان نوسان چیست؟

۵۸. اتومبیلی که با سرعت ثابت ۵۰ میل بر ساعت در شاهراه مستقیمی در حال حرکت است از يك چراغ قرمز می‌گذرد. اگر ۳ ثانیه بعد ماشین پلیس راه از محل چراغ راهنما و از حالت سکون باشتاب ثابت ۸ فوت بر مربع ثانیه به تعقیب اتومبیل پردازد، چه مدت طول می‌کشد تا ماشین پلیس از اتومبیل جلو بیفتد، و باجه فاصله از چراغ راهنما این واقعه اتفاق می‌افتد؟ همچنین مطلوب است سرعت ماشین پلیس هنگام پیشی گرفتن.

۵۹. اگر $f(x) = x + |x - 1|$ ، و

$$F(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x^2 - x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

نشان دهید که F يك ضد مشتق f بر $(-\infty, +\infty)$ است.

۶۰. فرض کنید دو تابع f و g چنان باشند که به ازای هر x در $(-\infty, +\infty)$ داشته باشیم $f'(x) = g(x)$ و $g'(x) = -f(x)$. علاوه بر این، فرض کنید که $f(0) = 0$ و $g(0) = 1$. ثابت کنید که $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$. (دانهمایی: دو تابع F با ضابطه $F(x) = [f(x)]^2$ و G با ضابطه $G(x) = -[g(x)]^2$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که به ازای تمام x ها، $F'(x) = G'(x)$).

۶۱. هزینه نهایی کالای خاصی از ضابطه $C'(x) = 4(3x+1)^{-1/2}$ به دست می آید که هزینه کل تولید x واحد کالا، $C(x)$ دلار است. اگر هزینه تولید ۵ واحد ۲۰ دلار باشد، تابع هزینه کل را بیابید.

۶۲. درآمد نهایی کالای خاصی از ضابطه $R'(x) = x^2 - 16x + 55$ به دست می آید که درآمد کل حاصل از فروش x واحد از کالا $R(x)$ دلار است. مطلوب است: (الف) تابع درآمد کل و (ب) معادله تقاضا. (پ) منحنی تقاضا، منحنی درآمد کل، و منحنی درآمد نهایی را نسبت به يك دستگاه مختصات رسم کنید.

مرکز نشر دانشگاهی

www.iup.ir

ISBN:978-964-01-0261-9



9 789640 102619

۵۰۰۰ تومان