



جبر خطی

چارلز کرتیس

ترجمهٔ نوروز ایزددوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس



جبر خطی

چارلز کرتیس

ترجمهٔ نوروز ایزددوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس

مرکز نشر دانشگاهی

۷۷۷

ریاضی، آمار، و کامپیوتر

۱۰۱



Linear Algebra, An Introductory Approach

Charles W. Curtis

Springer-Verlag, 1984

جبر خطی

تألیف چارلز کرتیس

ترجمه دکتر نوروز ایزد دوستدار، دکتر بیژن شمس، دکتر اسدالله کارشناس

ویراسته دکتر محمدهادی شفیعیها

نسخه پرداز: ابوالفضل بیرامی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۷۴

تعداد ۳۰۰۰

حروفچینی: مرکز نشر دانشگاهی

چاپ و صحافی: نوپار

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

Curtis, Charles W.

کرتیس، چارلز

جبر خطی / چارلز کرتیس: ترجمه نوروز ایزد دوستدار، بیژن شمس، اسدالله کارشناس. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.

چهار، ۳۹۱ ص.: مصور. - (مرکز نشر دانشگاهی: ۷۷۷. ریاضی، آمار و کامپیوتر: ۱۰۱)

ISBN 964-01-0777-8

Linear algebra, An introductory approach

عنوان اصلی:

واژه نامه:

کتابنامه: ص. ۳۶۷

۱. جبر خطی. الف. ایزد دوستدار، نوروز، ۱۳۱۵ - مترجم. ب. شمس، بیژن،

۱۳۱۰ - مترجم. ج. کارشناس، اسدالله، ۱۳۱۱ - مترجم. د. مرکز نشر دانشگاهی.

ه. عنوان.

۵۱۲/۵

ق ۲ ک ۴ / ۲۵۱ QA

۱۳۷۴

م ۷۴-۵۶۲۲

کتابخانه ملی ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۳	۱ مقدمه‌ای بر جبر خطی
۳	۱. چند مسأله که به جبر خطی منجر می‌شود
۸	۲. دستگاه‌های اعداد و استقرای ریاضی
۱۹	۲ فضاهای برداری و دستگاه‌های معادلات خطی
۱۹	۳. فضاهای برداری
۳۰	۴. زیر فضاها و وابستگی خطی
۳۹	۵. مفاهیم پایه و بعد
۴۴	۶. هم‌ارزی سطری ماتریسها
۵۷	۷. قضیه‌های کلی در مورد فضاهای برداری متناهی-مولد
۶۲	۸. دستگاه‌های معادله‌های خطی
۷۲	۹. دستگاه‌های معادله‌های همگن
۸۱	۱۰. خمینه‌های خطی
۸۷	۳ تبدیلهای خطی و ماتریسها
۸۷	۱۱. تبدیلهای خطی
۱۰۲	۱۲. جمع و ضرب ماتریسها
۱۱۶	۱۳. تبدیلهای خطی و ماتریسها
۱۲۹	۴ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی
۱۲۹	۱۴. مفهوم تقارن
۱۴۰	۱۵. ضرب داخلی
۱۵۵	۵ دترمینانها
۱۵۵	۱۶. تعریف دترمینانها

۱۶۴	۱۷. وجود و یکتایی دترمینانها
۱۷۲	۱۸. قضیه حاصلضرب دترمینانها
۱۷۷	۱۹. ویژگیهای دیگر دترمینانها
۱۹۱	۶ چندجمله‌یها و عددهای مختلط
۱۹۱	۲۰. چندجمله‌یها
۲۰۶	۲۱. عددهای مختلط
۲۱۵	۷ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها
۲۱۵	۲۲. مفهومیهای اساسی
۲۲۶	۲۳. زیرفضاهای پایا
۲۳۶	۲۴. قضیهٔ شکل مثلثی
۲۵۳	۲۵. صورتیهای گویا و صورتیهای کانونی ژوردان
۲۶۶	۸ فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی
۲۶۶	۲۶. فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان
۲۷۶	۲۷. صورتیهای دوخطی و دوگانی
۲۸۴	۲۸. حاصلجمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری
۳۰۴	۲۹. برهانی برای قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی
۳۱۰	۹ تبدیلیهای متعامد و یکانی
۳۱۰	۳۰. ساختار تبدیلیهای متعامد
۳۱۵	۳۱. قضیهٔ محوریهای اصلی
۳۲۴	۳۲. تبدیلیهای یکانی و قضیهٔ طیفی
۳۳۷	۱۰ برخی از کاربردهای جبر خطی
۳۳۷	۳۳. گروههای متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی
۳۴۷	۳۴. کاربرد در معادله‌های دیفرانسیل
۳۵۶	۳۵. مجموع مربعات و قضیهٔ هورویتز
۳۶۷	مراجع
۳۶۸	جوابیهای تمرینیهای انتخابی
۳۸۷	فهرست قسمتی از نمادهایی که به‌کار رفته‌اند
۳۸۹	فهرست راهنما

پیشگفتار

جبر خطی شاخه‌ای است از ریاضیات که از مطالعه نظری مسأله حل دستگاههای معادلات خطی نشأت گرفته است. مفاهیمی که به این ترتیب بسط یافته‌اند، عملاً بخشی از زبان ریاضیات عالی شده‌اند، و در عین حال چارچوبی برای کاربردهای آنها در اقتصاد ریاضی (برنامه‌ریزی خطی)، دانش کامپیوتر و علوم طبیعی فراهم آورده‌اند.

این کتاب، چاپ چهارم کتابی درسی است که برای درسهایی از سطوح بالاتر در جبر خطی طرح‌ریزی شده است. در عین حال که پیشینازی برای مطالعه آن منظور نشده است، نحوه برداشت و تکیه بر بسط نظری، مطالعه آن را برای دانشجویانی مناسب می‌سازد که یک دوره درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را پایان رسانده باشند.

شاید برای بسیاری از دانشجویان، این نخستین درسی باشد که در آن برهان قضیه‌های اصلی پایه‌ای روشهای حل مسأله‌ها ارائه و نشان داده شده است که مفاهیم نظری طبعاً از تلاش برای درک مسائل خاص پدیدار شده‌اند. این ارتباط تقریباً در هر بخش با نمونه‌های حل شده ارائه شده است.

موضوع جبر خطی به‌ویژه از این نظر ارضاکننده است که در آن براهین قضیه‌های اصلی معمولاً با شیوه‌های محاسباتی لازم برای حل مسأله‌های عددی همراه‌اند. تمرینهای عددی بسیاری گنجانده شده‌اند که در آنها از همه مفاهیم اساسی استفاده می‌شود، و تکنیکهای مهمی برای حل مسائل پدید می‌آورد. تمرینهای نظری نیز در آن وجود دارند که فرصتهایی را برای دانشجویان فراهم می‌کنند تا چیزهای جالبی را خود کشف و صورتهای مختلف استدلالهایی را که در متن آمده، پیدا کنند، و نوشتن مطالب ریاضی را به روشی روشن و منطقی فراگیرند. پاسخها و راهنماییهای مسأله‌های نظری در آخر کتاب آورده شده‌اند. ولی همه پاسخها داده نشده‌اند تا دانشجویان در پروراندن شیوه‌های خود برای بازبینی کارشان تشویق شوند.

یک جنبه خاص این کتاب دارا بودن بخشهایی است که به کاربردهای جبر خطی اختصاص دارند. این بخشها عبارت‌اند از: بخشهای ۸ و ۹ درباره دستگاه معادلات، بخش ۱۰ درباره تعبیر هندسی دستگاههای معادلات خطی، بخشهای ۱۴ و ۳۳ درباره گروههای متقارن متناهی در

فضاهای دو و سه بعدی، بخش ۳۴ دربارهٔ دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول و ماتریس نمایی، و بخش ۳۵ دربارهٔ ترکیب صورتهای درجهٔ دوم. این بخشها شامل یادداشتهای تاریخی از نتایج ژرف مبتنی بر قضیههای متن، همراه با مطالبی بدون احتیاج به پیشنیازند که توان و چند جهتی بودن جبر خطی را نشان می‌دهند. این بخشها در مسیر اصلی گفتار نیستند و می‌توان آنها را ضمن درس مطرح و یا جداگانه مطالعه کرد.

جنبهٔ دیگر کتاب، فراهم کردن مقدمه‌ای برای روشهای اصل موضوعی جبرنویین است. دستگاههای اساسی جبر-گروهها، حلقه‌ها و هیأتها- همه به‌طور طبیعی در جبر خطی ظاهر می‌شوند. تعریفها و ویژگیهای مقدماتی آنها در مبحثی که مطرح می‌شوند، مشخص و ثابت می‌شوند. بر پایهٔ این کتاب می‌توان درسی کامل در گروهها، حلقه‌ها، هیأتها و مدولها، در سطح پیشرفتهٔ کارشناسی تهیه کرد. باید توجه داشت که ویژگیهای اساسی هیأتها در بخش ۲ بیان و در بخش ۳ برای تعریف فضاهای برداری مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ولی اگر با حذف بخش ۲ و توجه به فضاهای برداری فقط روی هیأت اعداد حقیقی F در فصلهای ۲ و ۵، شیوهٔ کمتر مجردی دنبال شود، چیزی از دست نمی‌رود. در این صورت لازم است پیش از شروع فصل ۷ خاطرنشان کنیم که قضیههای فصلهای ۲، ۳، ۵ (با همان برهانها) برای فضاهای برداری روی هیأت اعداد مختلط نیز برقرارند. در صورتی که درسی در یک نیمسال (یا دو ربع سال) داده شود، باید شامل قسمتهای زیر باشد: فصلهای ۲، ۶، بخشهای ۲۲، ۲۴ از فصل ۷، بخشهای ۳۰ و ۳۱ از فصل ۹، با یادآوریهای مقدماتی در آغاز دربارهٔ هیأتها و استقراء ریاضی از بخش ۲.

درس یک‌ساله باید نظریهٔ صورتهای گویا و صورتهای متعارف ژوردان را که از بخش ۲۵ شروع می‌شوند نیز در برگیرد. برهان مقدماتی قضیهٔ مقسوم‌علیه (بخش ۲۹) بر پایهٔ نظریهٔ فضاهای برداری دوگان نهاده شده‌است. ولی الگوریتم تعیین عاملهای پایای یک ماتریس با درایه‌های چندجمله‌یی نیامده‌است. این قسمت به‌نظریهٔ مدولها روی حوزه‌های ایدئال اصلی تعلق دارد و برای درس بعدی گذاشته شده‌است. مباحثهای دیگری که بر پایهٔ این کتاب باید در یک درس برای یک سال گنجانده شوند، حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری، تبدیلهای یکانی و قضیهٔ طیفی و بخشهای مربوط به کاربردهایی هستند که قبلاً خاطرنشان شده‌اند.

وظیفهٔ خود می‌دانم که از تشویق دانشجویانم در مورد این طرح در کلاسهای خود در ویسکانسین و اورگون تشکر کنم. توصیه‌های آنها و نقدهای سنجیدهٔ معلمانی که از روی چاپهای قبلی آن تدریس کرده‌اند، مرا به‌بهبود چاپهای بعدی، از جمله، اصلاحات، تجدیدنظرها و افزودن تمرینهای اضافی به این چاپ جدید رهبری کرده‌اند. از علاقه و پشتیبانی خانواده‌ام نیز سپاسگزارم.

چارلز، کرتیس

یوجین، اورگون
۱۲ فوریه، ۱۹۸۴



مقدمه‌ای بر جبر خطی

نظریه‌های ریاضی به‌خودی خود به‌وجود نیامده‌اند. نظریه‌هایی که سودمندی آنها به ثبوت رسیده، در بیشتر موارد، منبعث از مسائل خاصی هستند، که فهم یا حل آنها بدون درک اصول اساسی دشوار است، این فصل را با دو مسأله از این نوع، که یک مجموعه اصول مشترکی دارند، آغاز می‌کنیم. جبر خطی، که مطالعه فضاها و برداری، تبدیلهای خطی و ماتریسهاست، نتیجه کوششی برای دریافت جنبه‌های مشترک این مسائل و مسائل مشابه است.

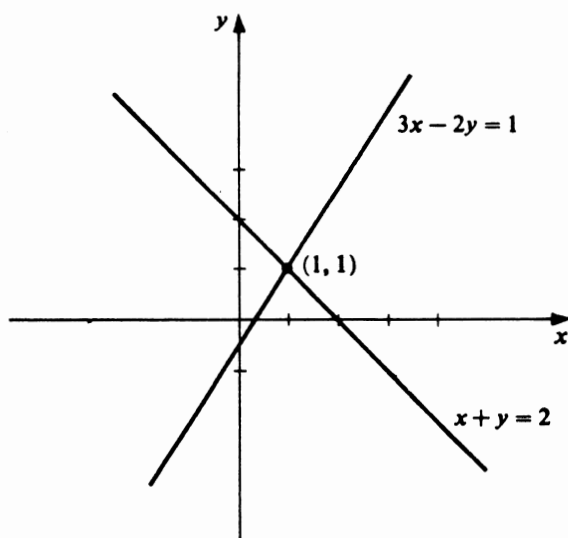
۱. چند مسأله که به جبر خطی منجر می‌شود

این بخش را باید بار اول، نه به‌منظور فهم دقیق جزئیات آن، بلکه برای پی بردن به انگیزه نگارش آن، به‌سرعت مرور کرد.

مسأله الف. هرکسی، از جبر مقدماتی، با مسأله حل دو معادله دو مجهولی خطی، مانند

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

آشناست. چنین دستگاهی را با حذف یک مجهول، مثلاً پس از ضرب معادله دوم در ۲ و افزودن آن به معادله اول، حل می‌کنیم. حاصل آن $5x = 5$ ، یا $x = 1$ است. پس از قراردادن مقدار آن



شکل ۱.۱

در معادله اول، می‌بینیم که

$$3 - 2y = 1$$

یا $y = 1$ ، جواب دستگاه اولیه معادلات زوج اعداد $(1, 1)$ است، و فقط یک جواب وجود دارد. اگر، از دیدگاه هندسی، به مسئله اولیه نگاه کنیم، چیزی که رخ می‌دهد روشن می‌شود. معادلات

$$x + y = 2 \quad \text{و} \quad 3x - 2y = 1$$

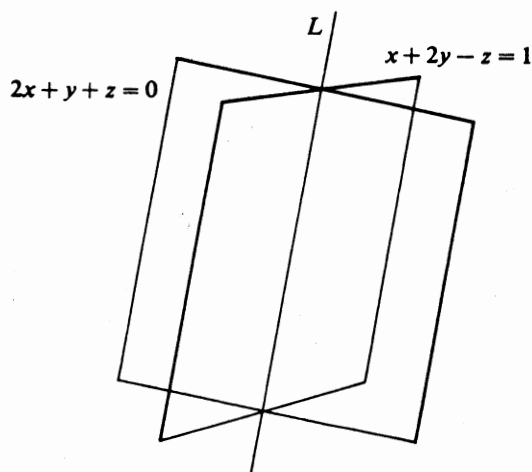
معادله‌های خطوط راستی در صفحه (x, y) هستند (← شکل ۱.۱). جواب بالا، که برای این دستگاه معادلات به دست آمد، مبین این است که دو خط نامبرده در نقطه‌ای یکتا، که در این حالت $(1, 1)$ است، یکدیگر را قطع می‌کنند.

اکنون مسئله مشابهی را، که شامل دو معادله سه مجهولی است، در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

این بار حذف مجهولات چندان آسان نیست. ولی می‌بینیم که اگر به z مقدار خاصی، مثلاً ۰،

چند مسأله که به جبر خطی منجر می شود ۵



شکل ۲.۱

بدهیم، می توانیم دستگاه حاصل:

$$x + 2y = 1$$

$$(z = 0)$$

$$2x + y = 0$$

را حل کنیم و $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ را به دست آوریم؛ از این رو یک جواب دستگاه اولیه (۲.۱) عبارت از $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ است. ولی این بار جوابهای بسیار دیگری نیز وجود دارد؛ مثلاً، اگر قرار دهیم $z = 1$ ، جواب $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 1)$ را به دست می آوریم. درواقع، به ازای هر مقدار z ، می توانیم یک جواب به دست آوریم. باز با یک تعبیر هندسی، پاسخ معمای وجود این همه جواب داده می شود. معادلات (۲.۱) معادله های دو صفحه در مختصات (x, y, z) هستند. (شکل ۲.۱). این بار جوابها، که به صورت نقاطی در مختصات (x, y, z) در نظر گرفته می شوند. متناظر با نقاط واقع بر خط L ، یعنی فصل مشترک دو صفحه نامبرده اند.

مسأله دوم نشان می دهد که برای بیان جوابهای دستگاه (۲.۱) و ارائه روشی برای یافتن همه آنها، کار بیشتری مورد نیاز است. ولی چرا در اینجا متوقف شویم؟ در انواع بسیاری از مسائل، به جوابی برای دستگاه معادلاتی با بیش از دو یا سه مجهول نیازمندیم؛ مثل

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + t &= 1 \\ x + y + z + t &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

در این حالت و حالت های پیچیده تر دیگر، شهود هندسی برای دادن نمونه کاملی از چه بود جواب

۶ مقدمه‌ای بر جبر خطی

(به هر حال، برای بیشتر ما) مهیا نیست. در عین حال، از لحاظ کاربردی، وجود این‌گونه مثالها بعید نیست، مثلاً دستوری که دمای t را در نقطه (x, y, z) می‌دهد، متضمن چهار متغیر است. یکی از وظایف جبر خطی، فراهم آوردن چارچوبی برای بحث در مسائلی است که چنین ماهیتی دارند.

مسئله ب. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، مسأله‌ای که با آن آشنا هستیم یافتن تابعی است مانند $y = f(x)$ که مشتق آن $y' = Df(x)$ معلوم است. مثلاً اگر y' تابع ثابت ۱ باشد، می‌دانیم $y = x + C$ که در آن C مقداری ثابت است. این نوع مسأله را یک معادله دیفرانسیل می‌نامند. هم در مکانیک و هم در مدارهای الکتریکی، مسائلی هستند که به معادلات دیفرانسیلی مانند

$$y'' + m^2 y = 0 \quad (4.1)$$

که در آن m یک ثابت مثبت و y'' مشتق دوم تابع مجهول y است، منجر می‌شوند. این بار جواب موردنظر چندان روشن نیست.

با روش مشتق‌گیری از توابع مقدماتی، دیده می‌شود که $y = A \sin mx$ یا $y = B \cos mx$ که در آنها A و B ثابتهای دلخواه هستند، جوابهایی از این معادله‌اند. ولی در اینجا نیز همانند حالت معادلات (۲.۱) و (۳.۱)، جوابهای بسیار دیگری، مانند $y = C \sin(mx + D)$ وجود دارند که در آن C و D ثابت‌اند. در این حالت، مسأله عبارت است از یافتن بیان روشنی برای همه جوابهای ممکن معادلات دیفرانسیلی مانند (۴.۱).

اکنون بینیم وجه اشتراک این دو نوع مسأله، در صورت وجود، جز این واقعیت که هر دو متضمن حل معادلات هستند در چیست. مثلاً در مورد معادلات (۳.۱)، ما به مجموعه‌های مرتب چهار عددی مانند $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ علاقه‌مندیم که، اگر آنها را، به ترتیب، به جای x, y, z و t قرار دهیم. در معادلات (۳.۱) صدق کنند. $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را یک بردار چهار درایه‌ای خواهیم نامید: بعداً (در فصل ۲)، بردارهای $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$ را با n درایه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ تعریف خواهیم کرد. برداری مانند $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را که در معادلات (۳.۱) صدق می‌کند، یک بردار جواب دستگاه (۳.۱) [یا به‌طور ساده یک جواب (۳.۱)] خواهیم نامید. اکنون می‌توان احکام زیر را درباره جوابهای (۳.۱)، بیان داشت.

(i) اگر $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ و $u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ هر دو، جوابهای (۳.۱) باشند، آنگاه

$$(\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \delta - \delta')$$

یک جواب، دستگاه معادلات همگن زیر است (که از صفر گذاردن طرف راست به‌دست آمده‌اند).

$$x + 2y - 3z + t = 0 \quad (5.1)$$

$$x + y + z + t = 0$$

چند مسأله که به جبر خطی منجر می‌شود ۷

(ii) اگر $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ و $u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ جوابهای دستگاه همگن (۵.۱) باشند، آنگاه

$$(\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

و نیز،

$$(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$$

که λ عددی است دلخواه، جوابهای آن هستند.

(iii) فرض کنیم $u_0 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ یک جواب ثابت دستگاه ناهمگن (۳.۱) باشد. پس v یک جواب دلخواه این دستگاه ناهمگن، به صورت زیر است

$$v = (\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \lambda, \delta + \mu) \quad (۶.۱)$$

که در آن، $(\xi, \eta, \lambda, \mu)$ یک جواب دلخواه دستگاه همگن (۵.۱) است.

درستی احکام (i) و (ii) از قراردادن مستقیم در معادلات تحقیق می‌شوند. برای تحقیق درستی حکم (iii)، نخست فرض می‌کنیم $v = (a, b, c, d)$ یک جواب دلخواه دستگاه (۳.۱) باشد. به موجب حکم (i) با توجه به اینکه $u_0 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ یک جواب ثابت (۳.۱) است، می‌بینیم که

$$(a - \alpha, b - \beta, c - \gamma, d - \delta)$$

یک جواب دستگاه همگن نامبرده است، و اگر قرار دهیم $\xi = a - \alpha$, $\eta = b - \beta$, $\lambda = c - \gamma$, $\mu = d - \delta$ خواهیم داشت،

$$v = (a, b, c, d) = (\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \lambda, \delta + \mu)$$

همان چیزی را که می‌خواستیم. یک استدلال دیگر (که از ذکر آن خودداری می‌کنیم) نشان می‌دهد که هر بردار به صورت (۶.۱) واقعاً یک جواب دستگاه ناهمگن (۳.۱) است. از آنچه که گذشت چه فراگرفتیم؟ نخست آنکه می‌توان مطالب مربوط به جوابهای معادلات را، برحسب اعمال معینی روی بردارها:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

$$\lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta) \quad \text{و}$$

بیان کرد. بدینسان می‌توانیم دو بردار را بر هم بیفزاییم و بردار جدیدی به دست آوریم، و می‌توانیم یک بردار را در یک عدد ضرب کنیم تا بردار جدیدی حاصل شود. بنابراین، برحسب این اعمال، می‌توانیم

مسئله حل دستگاه (۳.۱) را به صورت زیر بیان کنیم: (۱) یک جواب u دستگاه ناهمگن را می‌یابیم؛ (۲) یک جواب دلخواه v دستگاه ناهمگن (که اغلب جواب عمومی نامیده می‌شود) با

$$v = u_* + u$$

بیان می‌شود که در آن، u در مجموعه جوابهای دستگاه همگن تغییر می‌کند؛ (۳) همه جوابهای دستگاه همگن (۵.۱) را می‌یابیم.

حال به معادله دیفرانسیل (۴.۱) برمی‌گردیم. نخست می‌بینیم که اگر توابع f_1 و f_2 جوابهای این معادله باشند (یعنی، $f_1'' + m^2 f_1 = 0$ ، $f_2'' + m^2 f_2 = 0$)، آنگاه $f_1 + f_2$ و λf_1 نیز، که در آن λ یک عدد دلخواه است، جوابهای آنند. ولی این همان وضعیتی است که در گزاره (ii) بالا مشاهده کردیم، در حالی که اکنون، به جای بردار، تابع داریم. کمی جلوتر برویم. فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل ناهمگن (به قیاس با معادلات خطی) مانند

$$y'' + m^2 y = F \quad (۷.۱)$$

که در آن F تابع مشخصی است، داریم. در این صورت می‌بینیم که هر سه حکمی که در مورد مسئله الف داشتیم، برقرارند. تفاضل دو جواب دستگاه ناهمگن (۷.۱) یک جواب این دستگاه همگن است. اگر به جای اعمال جمع توابع و ضرب آنها در ثابتها، اعمال متناظر روی بردارها گذاشته شوند، جوابهای دستگاه همگن در حکم (ii) صدق می‌کنند. سرانجام، یک جواب دلخواه دستگاه ناهمگن، از یک جواب خصوصی f ، آن و افزودن یک جواب دستگاه همگن به f ، به دست می‌آید.

بجاست که بپذیریم رفتار مشابه جوابهای مسائل (الف) و (ب)، یک تصادف محض نیست. با مفهوم فضای برداری، که در فصل ۲ به آن می‌پردازیم، چارچوب مشترکی فراهم می‌سازیم که زیربنای هر دو مسئله فوق‌الذکر خواهد بود. پیش از شروع به مطالعه فضاهای برداری، یک بخش مقدماتی دیگری نیز داریم، که در آن مطالبی را درباره مجموعه‌ها و اعداد مورد نیاز، مرور می‌کنیم.

۲. دستگاههای اعداد و استقرای ریاضی

آشنایی با دستگاه اعداد حقیقی را، که در دروسهای اولیه در جبر مقدماتی، مثلثات یا در حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بحث قرار گرفته است، مسلم فرض می‌کنیم. ولی خواهیم دید که دستگاههای اعداد دیگری به جز اعداد حقیقی (مانند اعداد مختلط) نیز نقش مهمی در جبر خطی دارند. در عین حال، همه جزئیات مطالب مربوط به این دستگاههای اعداد (مانند قدرمطلق و نمایش قطبی اعداد مختلط) تا اواخر این کتاب مورد نیاز نخواهند بود.

برای اینکه سرآغاز کاملاً مشخصی داشته باشیم، مجموعه‌ای از اصول موضوع را برای دستگاهی از اعداد، به نام هیأت، ذکر خواهیم کرد که پایه محکمی است برای نظریه فضاهای برداری، که در

دستگاههای اعداد و استقرای ریاضی ۹

فصل بعد مورد بحث قرار می‌گیرند. دستگاه اعداد حقیقی مثالی است از یک هیأت. نخست باید چند مفهوم اساسی را دربارهٔ مجموعه‌ها یادآوری کنیم.

واژهٔ مجموعه را مترادف با «گردایه» یا «خانواده» ای از اشیاء نوع معینی به‌کار می‌بریم.

فرض کنیم X مجموعه‌ای از اشیاء باشد. به‌ازای شیء مفروض x ، یا x به مجموعهٔ X تعلق دارد یا ندارد. اگر x به X تعلق داشته باشد، می‌نویسیم $x \in X$ (بخوانید « x عنصری از X است» یا « x عضوی از X است»؛ اگر x به X تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم $x \notin X$).

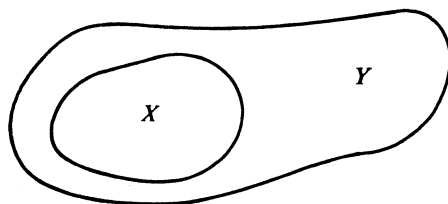
مجموعه‌ای مانند Y را یک زیر مجموعهٔ X می‌نامند، هرگاه به‌ازای همهٔ اشیاء y ، $y \in Y$ مستلزم $y \in X$ باشد. به‌گفتهٔ دیگر، هر عنصر Y یک عنصر X نیز باشد. اگر Y یک زیر مجموعهٔ X باشد، می‌نویسیم $Y \subset X$. اگر $Y \subset X$ و $X \subset Y$ ، آنگاه می‌گوییم که مجموعه‌های X و Y برابرند و می‌نویسیم $X = Y$. بدینسان، دو مجموعه برابرند هرگاه اعضای آنها دقیقاً یکی باشند.

بجاست مجموعه‌ای را که شامل هیچ عنصری نیست، وارد بحث کنیم. آن را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و با $\emptyset$ نشان می‌دهیم. بدینسان، به‌ازای هر شیء x ، $x \notin \emptyset$. مثلاً، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x که، به‌ازای آنها، نامساویهای $x < 0$ و $x > 1$ توأماً برقرارند، مجموعهٔ تهی است. خواننده تحقیق خواهد کرد که، از تعریف زیر مجموعه منطقاً نتیجه می‌شود که مجموعهٔ تهی $\emptyset$ ، زیرمجموعه‌ای از هر مجموعه است (چرا؟)

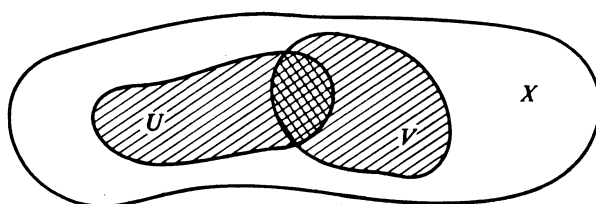
دو ساختمان مهم وجود دارد که می‌توان آنها را در مورد زیرمجموعه‌های یک مجموعه به‌کار برد تا زیرمجموعه‌های جدیدی حاصل شوند. فرض کنیم U و V زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ داده شدهٔ X باشند. $U \cap V$ را زیرمجموعه‌ای مرکب از همهٔ عناصری که هم به U و هم به V تعلق دارند، تعریف می‌کنیم و $U \cap V$ را اشتراک U و V می‌نامیم. پرسش: اشتراک مجموعهٔ اعداد حقیقی x به‌طوری که $x > 0$ با مجموعهٔ اعداد حقیقی y به‌طوری که $y < 5$ ، چیست؟ اگر زیرمجموعه‌های بسیاری از X داشته باشیم، اشتراک آنها را به‌صورت مجموعهٔ همهٔ عناصری که متعلق به همهٔ زیرمجموعه‌های مفروضند، تعریف می‌کنیم.

ساختمان دوم عبارت از اجتماع ($U \cup V$) دو زیرمجموعهٔ U و V است؛ این همان زیرمجموعهٔ X ، مرکب از همهٔ عناصری است که به U یا به V تعلق دارند. (وقتی می‌گوییم «به ... یا به ...» منظور این است که به ... یا به ... یا به هر دو»).

اغلب سودمند است که احکام مربوط به مجموعه‌ها را با رسم نمودارهایی روشن سازیم. اگرچه این نمودارها هیچ‌گونه ارزش ریاضی ندارند، ولی این اطمینان را به‌ما می‌دهند که کاری را که داریم انجام می‌دهیم معقول است، و گاهی الهام‌بخش مراحل مهمی در یک استدلال هستند. مثلاً، حکم $X \subset Y$ در شکل ۳.۱ نشان داده شده است. در شکل ۴.۱ بخش سایه‌دار، $U \cup V$



شکل ۳.۱



شکل ۴.۱

را نشان می‌دهد، در صورتی‌که بخش با پرداز متقاطع $U \cap V$ را.

مثالها و قراردادها

برای نشان دادن مجموعه‌ی اشیاء x واقع در یک مجموعه X ، که دارای ویژگی مشترکی مانند P هستند، اغلب نماد

$$\{x \in X \mid x \text{ دارای ویژگی } P \text{ است}\}$$

را به‌کار خواهیم برد. از این‌رو، اگر R معرف مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد، $\{x \in R \mid x < 5\}$ معرف همه‌ی اعداد حقیقی x است به‌طوری‌که $x < 5$. با استفاده از این نماد، مجموعه‌ی جوابهای دستگاه معادلات (۱.۱) با حکم

$$\{(x, y) \mid 3x - 2y = 1\} \cap \{(x, y) \mid x + y = 2\} = \{(1, 1)\}$$

توصیف می‌شود که در آن، $\{(1, 1)\}$ معرف مجموعه‌ای است که شامل فقط یک نقطه $(1, 1)$ است. به‌طورکلی، برای نشان دادن مجموعه‌هایی که اعضایشان به‌ترتیب a, a, b و a_i و $i = 1, 2, \dots$ هستند، نمادهای $\{a\}$ ، $\{a, b\}$ ، $\{a_i\}$ و غیره را به‌کار خواهیم برد. در هندسه، مثالهای مجموعه‌ها به‌وفور یافت می‌شوند. خطوط و صفحات، مجموعه‌هایی هستند از نقاط؛ اشتراک دو خط در یک صفحه یا مجموعه‌ی تهی است (اگر این دو خط موازی باشند) یا فقط یک نقطه است؛ اشتراک دو صفحه یا $\emptyset$ یا یک خط است.

دستگاههای اعداد و استقرای ریاضی ۱۱

حال نوع دستگاه اعدادی را که در فصل ۲ سرآغاز بحث ما از فضاها برداری خواهد بود، معرفی می‌کنیم.

(۱.۲) تعریف. هیأت عبارت است از یک دستگاه ریاضی مرکب از یک مجموعهٔ ناتهی F همراه با دو عمل جمع و ضرب، که به هر زوج از عناصر $\alpha, \beta \in F$ ، عناصر مشخص $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ (یا $\alpha.\beta$) متعلق به F را چنان نسبت می‌دهند که، به‌ازای $\alpha, \beta, \gamma \in F$ ، شرایط زیر برقرار باشند.

۱. (قوانین تعویضپذیری) $\alpha\beta = \beta\alpha$ ، $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
۲. (قوانین شرکتپذیری) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ، $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
۳. (قوانین توزیعپذیری) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
۴. عنصری مانند 0 در F وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $\alpha \in F$ ، $\alpha + 0 = \alpha$.
۵. به‌ازای هر عنصر $\alpha \in F$ ، عنصری مانند $-\alpha$ در F وجود دارد به‌طوری‌که، $\alpha + (-\alpha) = 0$.
۶. عنصری مانند $1 \in F$ وجود دارد به‌طوری‌که $1 \neq 0$ و به‌طوری‌که، به‌ازای هر $\alpha \in F$ ، $\alpha.1 = \alpha$.
۷. به‌ازای هر عنصر غیرصفر $\alpha \in F$ ، عنصری مانند $\alpha^{-1} \in F$ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha\alpha^{-1} = 1$.

نخستین مثال یک هیأت، دستگاه اعداد حقیقی R مجهز به‌اعمال معمولی جمع و ضرب است.

مجموعهٔ اعداد صحیح $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ، زیرمجموعه‌ای است از R که نسبت به اعمال موجود در R بسته است، به این معنی که اگر m و n متعلق به Z باشند، آنگاه حاصل جمع آنها $m + n$ و حاصلضرب آنها mn (که برحسب اعمال مجموعهٔ بزرگتر R تعریف شده‌اند) نیز به Z تعلق دارند. ولی Z ، نسبت به این اعمال، یک هیأت نیست، زیرا اصل موضوع (۲.۱) $[(7)]$ برقرار نیست، مثلاً، $2 \in Z$ و $2^{-1} \in R$ ، ولی $2^{-1} \notin Z$ و درواقع هیچ عنصری مانند $m \in Z$ وجود ندارد به‌طوری‌که $2m = 1$ ، این مثال الهام‌بخش تعریف زیر است.

(۲.۲) تعریف. زیر هیأت F از یک هیأت F ، زیرمجموعه‌ای است مانند F از F که، نسبت به اعمال تعریف شده در F ، بسته است و در تمام اصول موضوع $[(7)]$ $[(1) - (2)]$ مربوط به این اعمال، صدق می‌کند. (در اینجا بسته به این معناست که اگر $\alpha, \beta \in F$ ، آنگاه $\alpha\beta \in F$ و $\alpha + \beta \in F$).

با وجود آنکه اعداد صحیح Z یک زیرهیأت R نیستند، مجموعهٔ اعداد گویا، Q ، یک زیر هیأت است. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ اعداد گویا یعنی Q مرکب از همهٔ اعداد حقیقی به‌صورت

$$mn^{-1}$$

است که در آن، $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$. اثبات این‌که اعداد گویا زیرهیات R هستند، عملاً نیاز به‌کار دارد بررسی این‌گونه چیزها، بعداً در این بخش مورد بحث قرار خواهد گرفت.

هیاتهای اعداد حقیقی و اعداد گویا هر دو، هیاتهای مرتبی هستند، به‌این معنی که هر یک شامل زیرمجموعه‌ای است مانند P (موسوم به مجموعه عناصر مثبت) با ویژگیهای زیر

۱. اگر $\alpha, \beta \in P$ ، آنگاه $\alpha + \beta \in P$ و $\alpha\beta \in P$.

۲. به‌ازای جمیع مقادیر α واقع در این هیات، یک و فقط یکی از شرایط زیر برقرار است:

$$-\alpha \in P, \alpha = 0, \alpha \in P$$

هیات اعداد مختلط C (که در فصل ۶ مفصلتر مورد بحث قرار خواهد گرفت) یک هیات مرتب نیست. این هیات به‌صورت مجموعه همه جفتهای اعداد حقیقی (α, β) ، $\alpha, \beta \in R$ تعریف می‌شود که در آن، به‌موجب تعریف دو جفت (α, β) و (α', β') را مساوی می‌گیرند اگر، و فقط اگر، $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$. در C ، اعمال به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

$$(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' - \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha')$$

و

اثبات برقراری اصول موضوع یک هیات، در فصل ۶ صورت خواهد گرفت. مجموعه همه اعداد مختلط به‌صورت $\{(\alpha, 0), \alpha \in R\}$ را در نظر می‌گیریم. این اعداد دارای این ویژگی هستند که، به‌ازای هر $\alpha, \beta \in R$

$$\begin{aligned} (\alpha, 0) + (\beta, 0) &= (\alpha + \beta, 0) \\ (\alpha, 0)(\beta, 0) &= (\alpha\beta, 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

می‌توان تحقیق کرد که این اعداد یک زیرهیات C مانند R' تشکیل می‌دهند. به‌علاوه، قاعده یا تناظر $\alpha \mapsto (\alpha, 0)$ که به‌هر $\alpha \in R$ یک عدد مختلط $(\alpha, 0) \in R'$ را نسبت می‌دهد، دارای ویژگیهای زیر است (الف) $(\alpha, 0) = (\alpha', 0)$ اگر و فقط اگر $\alpha = \alpha'$ و (ب) طبق معادلات (۳.۲) بالا، این تناظر اعمال مورد بحث را در دستگاههای اعداد مربوطه حفظ می‌کند. یک تناظر بین دو هیات با ویژگیهای (الف) و (ب) را یکریختی می‌نامند، واژه‌ای که از واژه‌های یونانی می‌آید و معنای آن «ریخت مشابه داشتن» است. وجود یکریختی $\alpha \mapsto (\alpha, 0)$ بین هیاتهای R و R' بدین معنی است که اگر، از همه ویژگیهای دیگری که در تعریف هیات نیامده‌اند، چشم‌پوشی کنیم، آنگاه R و R' غیرقابل تمیز از یکدیگرند. از این‌رو، ما عناصر R را با عناصر متناظر R' یکی خواهیم گرفت، و به‌این معنی، شمولهای زیر را بین دستگاههای اعدادی که تا

اینجا تعریف کردیم، داریم:

$$Z \subset Q \subset R \subset C$$

حال به اصل استقرای ریاضی می‌پردازیم که به عنوان اصل موضوعی برای مجموعه اعداد صحیح مثبت $Z^+ = \{1, 2, \dots\}$ خواهیم گرفت. از اهمیت آن برای جبر خطی هرچه بگوییم کم گفته‌ایم. تقریباً همه نتایج عمیق این کتاب، به نحوی از انحاء به این اصل بستگی پیدا می‌کنند. (۴.۲) اصل استقرای ریاضی. فرض کنیم که برای هر عدد صحیح مثبت n ، حکمی مانند $E(n)$ ، که یا درست است یا نادرست، جاری شود. فرض کنیم (الف) $E(1)$ درست باشد، و (ب) اگر، به ازای هر $n \in Z^+$ حکم $E(n)$ درست باشد $E(n+1)$ نیز درست باشد. در این صورت $E(n)$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n درست است. اغلب شکلهای هم‌ارز این اصل استقراء نیز مفید واقع می‌شوند، در اینجا برخی از آنها را می‌آوریم

(۵.۲) الف. گیریم $\{E(n)\}$ خانواده‌ای از احکام باشد که برای هر عدد صحیح مثبت n تعریف شده است. فرض کنیم (الف) $E(1)$ درست باشد، و (ب) اگر به ازای همه اعداد صحیح مثبت n ، $E(n)$ درست باشد، آنگاه $E(n)$ درست باشد. در این صورت، به ازای همه اعداد صحیح مثبت n ، $E(n)$ درست است. در بحثهایی که متضمن استقرای ریاضی هستند، غالباً حکمی که نقش $E(n)$ را بازی می‌کند، فرض استقرا نامیده می‌شود.

یک صورت هم‌ارز با (۴.۲) را بعداً، به‌ویژه در فصل ۶، مورد استفاده قرار خواهیم داد. برای داشتن بحثی درباره اینکه چگونه می‌توان نشان داد که این صورت با (۴.۲) هم‌ارز است، به کتاب کورانت و رابینز که در کتابنامه آمده است، مراجعه کنید.

(۵.۲) ب. اصل خوشترتیبی. گیریم M مجموعه‌ای ناتهی از اعداد صحیح مثبت باشد. در این صورت M شامل یک کوچکترین عنصر است، یعنی، عنصری مانند m_0 در M وجود دارد که در شرط $m_0 \leq m$ ، به ازای جميع مقادیر $m \in M$ ، صدق می‌کند.

مثالهایی از استقرای ریاضی

مثال الف. به ازای همه اعداد صحیح مثبت n ، دستور

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (۶.۲)$$

را اثبات خواهیم کرد. فرض استقراء، خود حکم (۶.۲) است. به ازای $n = 1$ ، این حکم به صورت $1 = \frac{1(2)}{2}$ درمی‌آید. حال فرض کنیم که حکم (۶.۲)، به ازای عددی مانند n ، برقرار باشد. باید

نشان دهیم که این حکم، به‌ازای $n + ۱$ ، درست است. پس از قراردادن طرف راست (۶.۲) به‌جای $۱ + ۲ + \dots + n$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱ + ۲ + \dots + n + (n + ۱) &= \frac{n(n + ۱)}{۲} + (n + ۱) \\ &= (n + ۱) \left(\frac{n}{۲} + ۱ \right) = \frac{(n + ۱)(n + ۲)}{۲} \end{aligned}$$

که همان حکم (۶.۲) به‌ازای $n + ۱$ است. بنابر اصل استقرای ریاضی، نتیجه می‌گیریم که (۶.۲)، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n ، درست است.

مثال ب. به‌ازای هر عدد حقیقی دلخواه $x \neq ۱$ ،

$$۱ + x + x^۲ + \dots + x^{n-۱} = \frac{۱ - x^n}{۱ - x} \quad (۷.۲)$$

باز قرار می‌گذاریم که (۷.۲) فرض استقرای $E(n)$ باشد. به‌ازای $n = ۱$ ، این حکم به‌صورت

$$۱ = \frac{۱ - x}{۱ - x}$$

درمی‌آید که درست است. فرض کنیم (۷.۲) به‌ازای مقداری مانند n برقرار باشد. آنگاه، با استفاده از (۷.۲)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۱ + x + x^۲ + \dots + x^n &= (۱ + x + \dots + x^{n-۱}) + x^n \\ &= \frac{۱ - x^n}{۱ - x} + x^n \\ &= \frac{۱ - x^n + x^n(۱ - x)}{۱ - x} \\ &= \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x} \end{aligned}$$

و حکم (۷.۲) به‌ازای همهٔ مقادیر n برقرار است.

این فصل را با بیان چند ویژگی هیأت دلخواهی مانند F ، به‌پایان می‌بریم. همهٔ اینها حقایقی آشنا دربارهٔ دستگاه اعداد حقیقی هستند، ولی ممکن است خواننده بخواهد که آنها را با دقت بیشتری مورد مطالعه قرار دهد تا تحقیق کند که این ویژگیها فقط به‌اصول موضوع یک هیأت بستگی دارند. علاوه بر اصول موضوع نامبرده، اصل جایگذاری را به‌کرات به‌کار می‌برند. معنای این اصل به‌طور ساده این است که، در هیأتی مانند F ، می‌توانیم در دستوری که شامل عنصری مانند α متعلق به F است، به‌جای α هر عنصر دیگری مانند $\alpha' \in F$ را، به‌طوری‌که $\alpha' = \alpha$ ، بگذاریم.

دستگاههای اعداد و استقرای ریاضی ۱۵

همچنین از ویژگیهای آشنای رابطه تساوی $\alpha = \beta$ در زیر استفاده خواهیم کرد:

$$\alpha = \alpha$$

$$\alpha = \beta \text{ مستلزم } \beta = \alpha \text{ است}$$

$$\alpha = \beta \text{ و } \beta = \gamma \text{ مستلزم } \alpha = \gamma \text{ است.}$$

همه احکامی که در زیر می‌آیند، به تفصیل اثبات نمی‌شوند. اثبات آنهايي که با شماره‌های ستاره دار [مثل * (۹.۲)] آمده‌اند به عهده خواننده واگذار می‌شود.

$$(۸.۲) \text{ اگر } \alpha + \beta = \alpha + \gamma, \text{ آنگاه } \beta = \gamma \text{ (قانون حذف برای جمع)}$$

برهان. می‌گوییم باید «به دو طرف $-\alpha$ بیفزاییم». این کار را، با استفاده از اصل جایگذاری، به طریق زیر انجام می‌دهیم. با توجه به فرض $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ داریم

$$(-\alpha) + (\alpha + \beta) = (-\alpha) + (\alpha + \gamma)$$

از سوی دیگر، با توجه به اصول موضوع معرف یک هیأت (کدام یک؟) داریم

$$(-\alpha) + (\alpha + \beta) = [(-\alpha) + \alpha] + \beta = 0 + \beta = \beta^*$$

به طریق مشابه،

$$(-\alpha) + (\alpha + \gamma) = \gamma$$

بنابر ویژگیهای رابطه تساوی، داریم $\beta = \gamma$ و نتیجه مطلوب حاصل است.

برهانی نظیر این را نمی‌توان مانند یک مقاله روزنامه خواند؛ خواننده متوجه خواهد شد که باید کاغذ و مداد در اختیار داشته باشد و همه مراحل را بنویسد، ارجاع به اصول موضوع را بررسی کند، تا ببیند چه کاری صورت گرفته است.

$$(۹.۲) \text{ بازای مقادیر دلخواه } \alpha \text{ و } \beta \text{ در } F, \text{ معادله } \alpha + x = \beta \text{ دارای یک جواب یکتاست.}$$

برهان. این قضیه، دو قضیه است در یک قضیه. نخست از ما خواسته شده است تا نشان دهیم دست‌کم یک عنصر مانند x وجود دارد که در این معادله صدق می‌کند، و دوم اینکه حداکثر یک جواب وجود دارد. ولی، هر دو حکم آسانند. نخست، با توجه به اصول موضوع هیأتها، داریم

$$\alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0 + \beta = \beta$$

* درواقع، حکمی به صورت $a = b = c = d$ ، یک نوع خلاصه‌نویسی برای حکمهای مجزای $a = b$ ، $a = c$ ، $b = c$ است. ویژگیهای رابطه تساوی مستلزم این است که از این حکم مجزا می‌توانیم نتیجه بگیریم که همه اشیاء a ، b ، c و d با یکدیگر برابرند، و این معنای حکم خلاصه شده $a = b = c = d$ است.

و به این ترتیب نشان داده‌ایم که دست‌کم یک جواب، یعنی $x = (-\alpha) + \beta$ وجود دارد. حال فرض کنیم γ و γ' جوابهای این معادله باشند. پس، داریم $\alpha + \gamma = \beta$ و $\alpha + \gamma' = \beta$ و بنابراین $\alpha + \gamma = \alpha + \gamma'$ (چرا؟). بنابر قانون حذف (۸.۲) داریم $\gamma = \gamma'$ و به این ترتیب اثبات کردیم که اگر γ یک جواب این معادله باشد، هر جواب دیگر آن با γ برابر است.

(۱۰.۲) تعریف. منظور ما از $\beta - \alpha$ ، جواب یکتای معادله $\alpha + x = \beta$ است. داریم $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$ و $\beta - \alpha$ را نتیجه تفریق α از β می‌نامیم. (خواننده باید توجه کند که مسأله «اثبات» حکمی مانند حکم اخیر، در میان نیست. بررسی دقیق اصول موضوع هیاتها نشان می‌دهد که دستور $\beta - \alpha$ معنی خاصی ندارد؛ باید با آن به صورت یک تعریف برخورد کرد.)

$$-(-\alpha) = \alpha \quad (۱۱.۲)$$

برهان. نتیجه از بررسی معادله $\alpha + (-\alpha) = 0$ از دید دیگری به دست می‌آید. زیرا $0 = (-\alpha) + (-\alpha)$ را نیز داریم؛ بنابر قانون حذف به دست می‌آوریم $0 = -(-\alpha)$. حال می‌رسیم به ویژگیهای ضرب که دقیقاً شبیه ویژگیهای جمع هستند. خاطرنشان می‌کنیم که خواننده باید احکام ستاره‌دار را اثبات کند.

* (۱۲.۲) اگر $\alpha \neq 0$ و $\alpha\beta = \alpha\gamma$ ، آنگاه $\beta = \gamma$.

* (۱۳.۲) معادله $\alpha x = \beta$ ، که در آن $\alpha \neq 0$ ، دارای یک جواب یکتاست.

(۱۴.۲) تعریف. جواب یکتای $\alpha x = \beta$ را با β/α (یا β/α) نمایش می‌دهیم و از β/α یا β/α به عنوان نتیجه تقسیم β بر α نام خواهیم برد.

بدینسان، بنابر اصل موضوع [۱.۲(۶)]، $\frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1}$.

* (۱۵.۲) اگر $\alpha \neq 0$ ، آنگاه $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$.

تاکنون از قانون توزیعپذیری [۱.۲(۳)] استفاده نکرده‌ایم. از لحاظی، این قویترین اصل موضوع است و بیشتر قضایای نسبتاً جالب جبر مقدماتی، مانند $1 = (-1)(-1)$ ، از این قانون توزیعپذیری نتیجه می‌شوند.

(۱۶.۲) به ازای هر α در F ، $\alpha \cdot 0 = 0$.

برهان. داریم $0 + 0 = 0$. بنابر قانون پخش‌پذیری [۱.۲(۳)] داریم $\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0$ و بنابر قانون حذف، $\alpha \cdot 0 = 0$.

(۱۷.۲) به ازای جمیع مقادیر α و β ، $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$.

برهان. بنابر اصل جایگذاری، از $\alpha + (-\alpha) = 0$ نتیجه می‌گیریم $0 \cdot \beta = [\alpha + (-\alpha)]\beta$. با توجه به قانون توزیعپذیری و (۱۶.۲)، نتیجه می‌شود که

$$\alpha\beta + (-\alpha)\beta = 0$$

تمرینها ۱۷

چون $\alpha\beta + [-(\alpha\beta)] = 0$ ، قانون حذف تساوی $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$ را، که می‌خواستیم اثبات کنیم، به ما می‌دهد.

(۱۸.۲) به‌ازای جميع مقادير α و β متعلق به F ، $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$.
برهان. با دوبار به‌کار بستن (۱۷.۲) و با استفاده از قانون تعویضپذیری برای ضرب، داریم

$$(-\alpha)(-\beta) = -[\alpha(-\beta)] = -[-(\alpha\beta)]$$

سرانجام، بنابر (۱۱.۲)، $-[-(\alpha\beta)] = \alpha\beta$.
به‌عنوان نتیجه‌ای از (۱۸.۲)، خواهیم داشت:

$$(-1)(-1) = 1 \quad (۱۹.۲)$$

(جالب است که براساس اصول موضوع اولیه، اثبات مستقیمی از این مطلب اخير ارائه دهيم.)

تمرینها

۱. با استفاده از استقرای ریاضی احکام زیر را اثبات کنید:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad \text{الف)}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{ب)}$$

۲. با استفاده از تعریف α/β به‌عنوان جواب (به‌ازای $\beta \neq 0$) معادله $\beta x = \alpha$ ، نشان دهید که در یک هیأت دلخواه مانند F ، احکام زیر، به‌ازای جميع مقادير $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ، با فرض $\beta, \delta \neq 0$ برقرارند.
الف)

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}.$$

ب)

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}.$$

پ)

$$\frac{\alpha/\beta}{\gamma/\delta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}, \quad \text{اگر } \frac{\gamma}{\delta} \neq 0$$

۳. به‌ازای $n = 1, 2, \dots$ و به‌ازای جميع مقادير n و k ، $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ، ضرایب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ اعداد صحیح مثبت معینی هستند که به‌کمک استقراء، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

۱۸ مقدمه‌ای بر جبر خطی

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. اگر فرض کنیم که به‌ازای مقداری از n و به‌ازای $0, 1, \dots, n-1$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ و $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = 1$ را با $\binom{n}{k}$ جمله‌ی دو ضریب شده باشد، ضریب دو جمله‌ی $\binom{n-1}{k}$ و

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از استقرای ریاضی، نشان دهید که در هر هیأت دلخواه مانند F ، قضیه دو جمله‌ی

$$(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{0} \alpha^n + \binom{n}{1} \alpha^{n-1} \beta + \dots + \binom{n}{n} \beta^n$$

به‌ازای تمام مقادیر α و β در F ، برقرار است، که در آن $2\alpha = \alpha + \alpha$ ، $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ ، و غیره. فرض کنیم F دستگاهی مرکب از دو عنصر $\{0, 1\}$ و دو عمل باشد که به کمک جدولهای زیر تعریف شده‌اند

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

نشان دهید که F یک هیأت است با این ویژگی که، به‌ازای هر $\alpha \in F$ ، $2\alpha = \alpha + \alpha = 0$. با استفاده از تمرین ۲، نشان دهید که مجموعه اعداد گویا، Q ، یک زیرهیأت اعداد حقیقی R است.

فرض کنیم اصول موضوع هیأتها (← تعریف (۱.۲)) شامل 0^{-1} باشد. ثابت کنید که در این حالت، هر عنصر با 0 برابر است.

۲

فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

این فصل شامل تعاریف اساسی و ویژگیهای فضاهای برداری، همراه با بحث کاملی از کاربرد قضایای کلی فضاهای برداری در تعیین جوابهای دستگاههای معادلات خطی است. این فصل با بحثی دربارهٔ تعبیر هندسی نظریهٔ دستگاههای معادلات خطی، که خواندن آن اختیاری است، پایان می‌پذیرد. انگیزهٔ تعریف فضای برداری و قضایایی که بناست در این فصل اثبات شوند، در بخش ۱ ارائه شده بود.

۳. فضاهای برداری

کار خود را با حالتی که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، آغاز می‌کنیم. آنجا مناسب دیدیم که برداری مانند u را به صورت یک چهارتایی مرتب از اعداد حقیقی $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = u$ تعریف کنیم، بدین تعبیر که دو بردار

$$u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta') \quad \text{و} \quad u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

برابرند اگر، و فقط اگر،

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma', \quad \delta = \delta'$$

۲۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

تأکید روی مرتب بودن ضروری است زیرا در مسأله‌ای که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت، چهارتاییهای $(۰, ۰, ۲, ۱)$ و $(۰, ۰, ۱, ۲)$ دارای تعابیری کاملاً متفاوت هستند. لذا حاصل جمع دو بردار u و u' بالا را با

$$u + u' = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma', \delta + \delta')$$

و نیز حاصلضرب بردار $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ را در یک عدد حقیقی λ ، با

$$\lambda u = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma, \lambda\delta)$$

تعریف کردیم. با این تعاریف و با توجه به ویژگیهای هیأت اعداد حقیقی، می‌بینیم که بردارها، نسبت به اعمال $u + u'$ و λu که تعریف کردیم، در قوانین زیر صدق می‌کنند.

$$۱. \text{ (قانون تعویضپذیری) } u + u' = u' + u$$

$$۲. \text{ (قانون شرکتپذیری) } (u + u') + u'' = u + (u' + u'')$$

$$۳. \text{ برداری مانند } \vec{0} \text{ وجود دارد به طوری که، به ازای هر } u, u + \vec{0} = u$$

$$۴. \text{ به ازای هر بردار } u, \text{ برداری مانند } -u \text{ وجود دارد به طوری که، } u + (-u) = \vec{0}$$

$$۵. \text{ به ازای همه بردارهای } u \text{ و همه اعداد حقیقی } \alpha, \beta, \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$$

$$۶. \left. \begin{aligned} (\alpha + \beta)u &= \alpha u + \beta u \\ \alpha(u + u') &= \alpha u + \alpha u' \end{aligned} \right\}$$

$$۷. \text{ (قوانین توزیعپذیری)}$$

$$۸. \text{ به ازای هر بردار } u, ۱ \cdot u = u$$

اثبات این نکات، با توجه به اصول موضوع هیأت اعداد حقیقی و تعریف تساوی دو بردار، بی‌درنگ انجام می‌پذیرد. به عنوان مثال، اثباتی برای (۲) ارائه خواهیم داد. فرض کنیم

$$u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta), u' = (\alpha', \beta', \gamma', \delta'), u'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'')$$

پس

$$\begin{aligned} (u + u') + u'' &= ((\alpha + \alpha') + \alpha'', (\beta + \beta') + \beta'', (\gamma + \gamma') + \gamma'', (\delta + \delta') + \delta'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u + (u' + u'') &= (\alpha + (\alpha' + \alpha''), \beta + (\beta' + \beta''), \gamma + (\gamma' + \gamma''), \delta + (\delta' + \delta'')) \end{aligned}$$

چون داریم $(\alpha + \alpha') + \alpha'' = \alpha + (\alpha' + \alpha'')$ و غیره، بنابر قانون شرکتپذیری در R ، نتیجه می‌شود که بردارهای $(u + u') + u''$ و $u + (u' + u'')$ برابرند و قانون شرکتپذیری برای بردارها به اثبات می‌رسد. می‌توان به طریق مشابهی، درستی گزاره‌های دیگر را تحقیق کرد.

فضاهای برداری ۲۱

حال مسألهٔ دومی را که در بخش ۱ مورد بحث قرار گرفت (مسألهٔ ب) در نظر می‌گیریم. در آن مسأله، توجه ما به توابع معین روی خط حقیقی معطوف بود. اعمال جبری معینی را روی توابع معرفی کردیم، یعنی حاصل جمع $f + g$ و تابع f و g و حاصلضرب یک تابع در یک عدد حقیقی را تعریف کردیم. به‌طور دقیقتر، تعریف حاصل جمع $f + g$ عبارت است از $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ، و به‌ازای $\lambda \in R$ ، تابع λf با $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ ، $x \in R$ ، تعریف می‌شود. بدون تلاش زیاد، می‌توان تحقیق کرد که اعمال $f + g$ و λf در شرایط (۱) تا (۸)، که درستی آنها را هم‌اکنون برای بردارهای $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ دیدیم، صدق می‌کنند. ویژگیهای مشترک این اعمال در دو مثال نامبرده، به‌مفهوم مجرد یک فضای برداری روی یک هیأت که در زیر ارائه می‌کنیم، منجر می‌شود. نکته این است که اگر بنا باشد مسائل بخش ۱ را به‌طور کامل بررسی کنیم، عملاً مجبوریم که مفهوم یک فضای برداری را ابداع کنیم.

(۱.۳) تعریف. فرض کنیم F یک هیأت دلخواه باشد. یک فضای برداری V روی F ، عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند V از اشیاء $\{v\}$ ، که بردار نامیده می‌شوند، همراه با دو عمل، که یکی از آنها به‌هر جفت از بردارهای v و w برداری مانند $v + w$ به‌نام حاصل جمع v و w نسبت می‌دهد و عمل دیگر، به‌هر عنصر $\alpha \in F$ و هر بردار $v \in V$ ، برداری مانند αv به‌نام حاصلضرب v در عنصر $\alpha \in F$ نسبت می‌دهد. فرض بر این است که این اعمال، به‌ازای $\alpha, \beta \in F$ و $u, v, w \in V$ ، در اصول موضوع زیر صدق می‌کنند.

$$u + v = v + u \text{ و } u + (v + w) = (u + v) + w. \quad ۱.$$

$$۲. \text{ برداری مانند } 0 \text{ وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر } u \in V, u + 0 = u.$$

$$۳. \text{ به‌ازای هر بردار } u, \text{ برداری مانند } -u \text{ وجود دارد به‌طوری‌که } u + (-u) = 0.$$

$$۴. \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

$$۵. (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

$$۶. (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$$

$$۷. 1u = u.$$

در این کتاب، حروف رومی $\{x, y, u, v, \dots\}$ را برای نشان‌دادن بردارها و حروف یونانی $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \theta, \lambda, \dots\}$ را برای نشان‌دادن عناصر هیأت مورد بحث به‌کار می‌بریم. عناصر این هیأت را غالباً اسکالر (یا، وقتی‌که این هیأت R باشد، عدد) می‌نامند.

حال می‌توانیم تحقیق کنیم که مثالهای ما حتماً در این اصول موضوع صدق می‌کنند. در مثال نخست، مربوط به بردارهای $u = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ، چیز خاصی در انتخاب چهارتاییها وجود ندارد. می‌توانستیم دوتاییها، سه‌تاییها و غیره را انتخاب کنیم. برای داشتن همهٔ این حالتها، مفهوم یک n -تایی از اعداد حقیقی را، به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند n ، وارد می‌کنیم.

* برای سهولت، همین نماد را برای نشان‌دادن بردار صفر و عنصر صفر هیأت به‌کار می‌بریم. معنای « 0 » همیشه از متن مورد مطالعه روشن خواهد بود.

۲۲ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

(۲.۳) تعریف. فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. یک n تایی از اعداد حقیقی، قاعده‌ای است که به هر عدد صحیح مثبت i (به ازای $i = 1, 2, \dots, n$) یک عدد حقیقی α_i را تخصیص می‌دهد. یک n تایی را با نماد $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$ نشان خواهیم داد. به عبارت دیگر، یک n تایی چیزی نیست جز گردایه‌ای از n عدد که به ترتیب معینی داده شده‌اند، که عدد اول را α_1 ، عدد دوم را α_2 و غیره می‌نامند. دو n تایی $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ و $\langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ را برابر گویند و می‌نویسند

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$$

اگر، و فقط اگر، $\alpha_n = \beta_n, \dots, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_1 = \beta_1$. توجه داشته باشید که درباره متفاوت بودن یا نبودن اعداد حقیقی $\{\alpha_i\}$ در $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ، چیزی گفته نشده است. $\langle 1, 0, 1 \rangle$ و $\langle 0, 0, 0 \rangle$ سه تاییهای کاملاً مجازند. همچنین توجه می‌کنیم که، مثلاً، $\langle 1, 0, 1 \rangle \neq \langle 0, 1, 1 \rangle$.

(۳.۳) تعریف فضای برداری R_n . فضای برداری R_n روی هیأت اعداد حقیقی R عبارت است از دستگاهی جبری مرکب از n تاییهای $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ که در آن $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ، همراه با اعمال جمع n تاییهایی با هم و ضرب n تاییها در اعداد حقیقی، که در زیر تعریف می‌شوند. n تاییهای $a \in R_n$ را بردار و اعداد حقیقی α_i را مؤلفه‌های بردار $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ می‌نامند. دو بردار $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ و $b = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ را برابر گویند و می‌نویسند $a = b$ اگر، و فقط اگر، $i = 1, \dots, n, \alpha_i = \beta_i$. حاصل جمع بردارهای $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ و $b = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ به صورت

$$a + b = \langle \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n \rangle$$

تعریف می‌شود و حاصلضرب بردار a در عدد حقیقی λ با

$$\lambda a = \langle \lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n \rangle$$

تحقیق این امر که R_n ، بنابر تعریف (۱.۳)، یک فضای برداری روی R است، کار ساده‌ای است. به ویژه، بردار $0 = \langle 0, \dots, 0 \rangle$ با تساوی $0 = \langle 0, \dots, 0 \rangle$ مشخص می‌شود، و اگر $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ، آنگاه $-a = \langle -\alpha_1, \dots, -\alpha_n \rangle$.

(۳.۴) تعریف. فضای برداری F_n . فرض کنیم F هیأتی دلخواه باشد. یک n تایی مانند $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ، که در آن α_i در F است، مشابه با آنچه که در (۲.۳) دیدیم تعریف می‌شود. مجموعه همه این n تاییها، با اعمالی که مشابه با (۳.۳) تعریف می‌شوند، فضایی است برداری مانند F_n روی F .

فضاهای برداری ۲۳

(۴.۳) تعریف. فضای برداری توابع روی خط حقیقی. این بار، فرض کنیم $\mathcal{F}(R)$ مجموعه همه توابع حقیقی معین روی مجموعه همه اعداد حقیقی R باشد. آنگاه $\mathcal{F}(R)$ یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی R می شود مشروط بر آنکه تعریف کنیم

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x), & x \in R, f, g \in \mathcal{F}(R) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x), & x \in R, \alpha \in R, f \in \mathcal{F}(R)\end{aligned}$$

آنگاه، همان طور که قبلاً خاطر نشان کردیم، می توان درستی اصول موضوع فضاهای برداری را تحقیق کرد.

حال برمی گردیم به مفهوم کلی یک فضای برداری. نخستین قضیه گویای آن است که بسیاری از خواص هیأتها که در بند ۲ اثبات شدند، در فضاهای برداری نیز برقرارند.

(۵.۳) قضیه. فرض کنیم V فضایی برداری روی یک هیأت F باشد. لذا احکام زیر برقرارند.

- (i) به ازای جميع مقادیر $u, v, w \in V$ ، اگر $u + v = u + w$ ، آنگاه $v = w$.
 - (ii) معادله $u + x = v$ دارای یک جواب یکتاست (که آن را با $v - u$ نمایش می دهیم).
- داریم $v - u = v + (-u)$.
- (iii) به ازای هر $u \in V$ ، $-(-u) = u$.
 - (iv) به ازای هر $u \in V$ ، $0 \cdot u = 0$.
 - (v) به ازای $u \in V, \alpha \in F$ ، $-(\alpha u) = (-\alpha)u = \alpha(-u)$.
 - (vi) $(-\alpha)(-u) = \alpha u$ ، $u \in V, \alpha \in F$.
 - (vii) به ازای هر $u, v \in V$ ، اگر $\alpha u = \alpha v$ ، با فرض $\alpha \neq 0$ متعلق به F ، آنگاه $u = v$.
- برهان (i) تا (vi) با برهان موارد متناظر برای هیأتها، (کلمه به کلمه) همانند است. برهان (vii) را ارائه می کنیم. فرض این است که

$$\alpha u = \alpha v \quad \text{و} \quad \alpha \neq 0$$

آنگاه α^{-1} وجود دارد و اصل جایگذاری (که علاوه بر هیأتها، در مورد فضاهای برداری نیز به کار می رود) مستلزم این است که

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}(\alpha v)$$

بنابر [۱.۳ (۶)] به دست می آوریم

$$(\alpha^{-1}\alpha)u = (\alpha^{-1}\alpha)v,$$

۲۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

و چون $\alpha^{-1}\alpha = 1$ و بنابر [۱.۳] (۷) $1u = u$, $1v = v$, خواهیم داشت $v = u$, همان که می‌خواستیم.

حال به استخراج نتایجی از تعریف می‌پردازیم که در بند بعدی مورد نیاز خواهند بود. قانون شرکتپذیری بیان می‌کند که، به‌ازای a_1, a_2, a_3 در V .

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

اگر چهار بردار a_1, a_2, a_3, a_4 داشته باشیم، حاصل‌جمعهای ممکن زیرین را می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$a_1 + [a_2 + (a_3 + a_4)],$$

$$a_1 + [(a_2 + a_3) + a_4],$$

$$[a_1 + (a_2 + a_3)] + a_4,$$

$$[(a_1 + a_2) + a_3] + a_4.$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که همهٔ این عبارات معترف بردار واحدی هستند. به‌طورکلی، با استفاده از استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که همهٔ طرق ممکن افزودن n بردار $a_1, \dots, a_n$ به یکدیگر برای به‌دست آوردن یک بردار جدید، درواقع به‌پدید آوردن بردار یکتای معینی منجر می‌شوند که آن را با

$$a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

نشان خواهیم داد. قانون تعویضپذیری و این «تعمیم قانون شرکتپذیری» ایجاب می‌کنند که با استفاده از استقرای ریاضی داشته باشیم:

$$(a_1 + \dots + a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$

یا به‌اختصار،

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \quad (۶.۳)$$

قواعد دیگر را نیز می‌توان برای حاصل‌جمعهای بیشتر از دو بردار تعمیم داد:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a$$

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda a_i$$

فضاهای برداری ۲۵

همچنین بنابر (۶.۳) داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n \mu_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) a_i$$

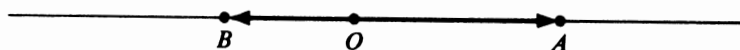
نکته مهم این است که این قواعد به‌برهانی مبتنی بر قواعد اساسی (۱.۳) نیاز دارند، و برای خواننده تمرین جالبی خواهد بود که استقرای ریاضی را برای ارائهٔ برهانی، مثلاً، برای (۶.۳) به‌کار برد.

این بخش مقدماتی دربارهٔ فضاهای برداری را با ذکر چند مثال به‌منظور نشان‌دادن سازگاری تعریف ما از فضای برداری R_n با تعبیری که گاهی در هندسه و فیزیک از بردارها می‌شود، به‌پایان می‌بریم. از مطالعهٔ این مثالها می‌توان، بی‌آنکه به‌پیوستگی بحث از فضاهای برداری خلی وارد آید، صرف‌نظر کرد یا آن را به‌تعویق انداخت.

مثال الف. در اینجا به یک تعبیر هندسی از بردارها، برحسب پاره‌خطهای سودار، می‌پردازیم. مطلب را با خط حقیقی، که آن را با فضای برداری R_1 یکی می‌گیریم، شروع می‌کنیم. بردارهای R_1 را با حروف بزرگ A, B, C و غیره نشان می‌دهیم و آنها را به‌عنوان نقاطی از خط حقیقی تلقی می‌کنیم، که محل آنها با بردارهای مکانشان از مبدأ $O = \langle 0 \rangle$ مشخص می‌شود (← شکل ۱.۲). یک پاره‌خط سودار روی R_1 جفت مرتبی است از نقاط که با $\overrightarrow{AB}$ نمایش داده می‌شود و فقط معرف پاره‌خط بین نقاط A و B همراه با یک سو است، با این فرض که A نقطهٔ آغاز و B نقطهٔ پایان این پاره‌خط خوانده شود. بدینسان $\overrightarrow{BA}$ همان پاره‌خط است که در آن، سو وارون شده‌است. ما می‌خواهیم مفهوم پاره‌خط سودار را فقط بر طول و سو، و نه نقطهٔ آغاز مشخصی استوار کنیم. یک تجزیه و تحلیل مورد به‌مورد نشان می‌دهد که دو پاره‌خط سودار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ دارای یک طول و یک سو هستند اگر، و فقط اگر، $B - A = D - C$. این تساوی گویای این مطلب است که می‌توان تعریف رسمی پاره‌خط سودار $\overrightarrow{AB}$ را به‌صورت

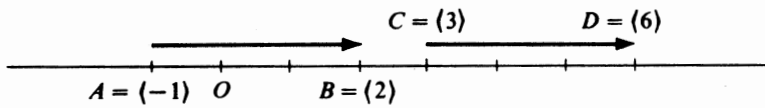
$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

عرضه کرد (فراموش نکنیم که A و B بردارهایی در R_1 اند، و در نتیجه این تفاضل تعریف شده است). مثلاً، پاره‌خطهای سودار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ که در آن، $A = \langle -1 \rangle$ ، $B = \langle 2 \rangle$ ، $C = \langle 3 \rangle$ ، $D = \langle 6 \rangle$ ، باهم برابرند، زیرا $B - A = D - C$ (← شکل ۲.۲).

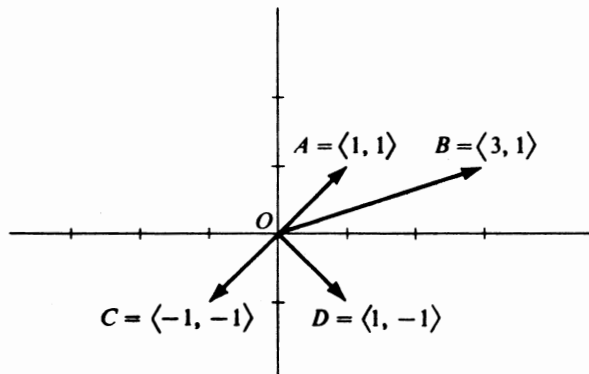


شکل ۱.۲

۲۶ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی



شکل ۲.۲



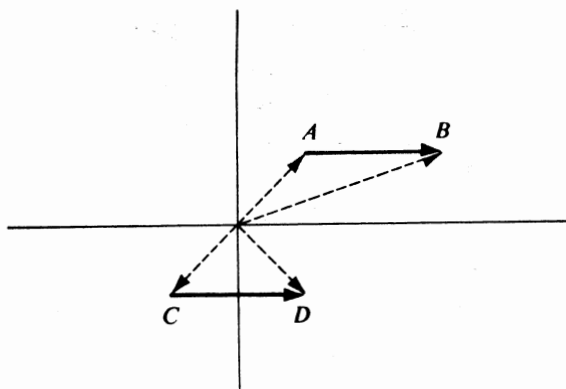
شکل ۳.۲

حال پاره‌خطهای سودار را در صفحه تعریف می‌کنیم. مانند مثال (الف)، با فضای برداری R_2 شروع می‌کنیم، و بردارهای R_2 را با حروف بزرگ $A, B, \dots$ نشان می‌دهیم و آنها را به‌عنوان نقاطی در صفحه تلقی می‌کنیم، که با بردارهای مکان خویش از مبدأ $O = \langle 0, 0 \rangle$ مشخص می‌شوند، (← شکل ۳.۲).

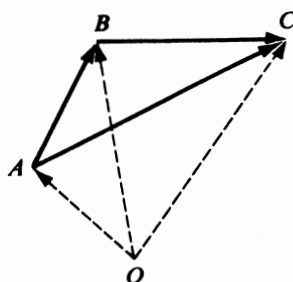
(۷.۳) تعریف. گیریم A و B بردارهایی در R_2 باشند. پاره‌خط سودار $\overrightarrow{AB}$ به‌عنوان بردار $B - A$ در R_2 تعریف می‌شود.

این تعریف از تجزیه و تحلیلی که از پاره‌خطهای سودار در R_1 کردیم به ذهن ما القا شده است. این تعریف، برگردان ریاضی دقیقی از این نظر است که یک «بردار هندسی» (یا پاره‌خط سودار) باید با یک طول و یک سو، بدون اشاره به مکان به‌مکان ویژه آن در صفحه، تعریف شود. در فیزیک گاهی این اشیاء را «بردارهای آزاد» می‌نامند.

ما این پاره‌خطهای سودار را بر صفحه کاغذ مانند شکل ۴.۲ نمایش می‌دهیم (که در آن، پاره‌خطهای سودار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ ، با استفاده از همان نقاط شکل ۳.۲، رسم شده‌اند). توجه داشته باشید که پیکانه‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ یک طول و یک سو دارند، و بنابر تعریف (۷.۳)، یک پاره‌خط سودار را نمایش می‌دهند، زیرا $\overrightarrow{AB} = B - A = \langle 2, 0 \rangle$ و $\overrightarrow{CD} = D - C = \langle 2, 0 \rangle$. در حالت کلی معنای تعریف (۷.۳) اصلاً این است که دو پاره‌خط سودار برابرند مشروط بر



شکل ۴.۲



شکل ۵.۲

آنکه یک طول و یک سو داشته باشند.

حال می‌توانیم نشان دهیم که جمع پاره‌خطهای سودار با «قانون متوازی‌الاضلاع» ارائه می‌شود

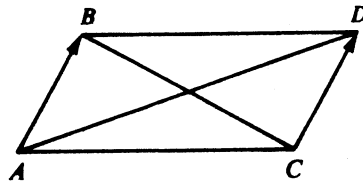
(۸.۳) قضیه. فرض کنیم A, B, C نقاطی در R_2 باشند. آنگاه $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (← شکل ۵.۲).

برهان. بنابر تعریف (۷.۳)، داریم $\vec{AB} = B - A$ ، $\vec{BC} = C - B$ ، و بنابراین، همان‌طور که می‌خواستیم،

$$\vec{AB} + \vec{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \vec{AC}$$

قضیه (۸.۳) نشان می‌دهد که اگر پاره‌خطهای سودار $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ را چنان مرتب کنند که منتهای اولی مبدأ دومی باشد، حاصل جمع آنها پاره‌خط سوداری است که با قطر متوازی‌الاضلاعی که اضلاع مجاورش AB و BC هستند، مشخص می‌شود.

این بحث را با چند کاربرد این مفاهیم در مورد هندسهٔ مسطحه به پایان می‌بریم.



شکل ۶.۲

استفاده از مفاهیمی را که در مثال (الف) وارد کردیم، ادامه می‌دهیم. وانگهی ما به مفهوم یک پاره‌خط (بدون سوی) $\overline{AB}$ ، که با مجموعه نامرتبی از دو نقطه بیان می‌شود، نیز نیاز داریم. دو پاره‌خط را برابر تعریف می‌کنیم اگر، و فقط اگر، مبدأ و منتهای آنها یکی باشند.

(۹.۳) تعریف. نقطه‌ای مانند X را وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ گویند هرگاه پاره‌خطهای سودار $\overrightarrow{AX}$ و $\overrightarrow{XB}$ برابر باشند.

(۱۰.۳) قضیه. X یا نقطه وسط پاره‌خط $\overline{AB}$ با.

$$X = \frac{1}{2}(A + B)$$

داده می‌شود.

برهان. با توجه به تعریف (۹.۳)، داریم $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XB}$. بنابراین

$$X - A = B - X,$$

$$2X = A + B$$

و

پس از ضرب دو طرف در $\frac{1}{2}$ ، نتیجه حاصل می‌شود.

(۱۱.۳) تعریف. چهار نقطه $\{A, B, C, D\}$ را رؤس یک متوازی‌الاضلاع گویند هرگاه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (← شکل ۶.۲). اضلاع این متوازی‌الاضلاع را با پاره‌خطهای $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{CD}$ و $\overline{BD}$ تعریف می‌کنند؛ قطرهای این متوازی‌الاضلاع پاره‌خطهای $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ هستند.

(۱۲.۳) قضیه. قطرهای یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

برهان. نقاط وسط قطرهای متوازی‌الاضلاع شکل ۶.۲، بنابر قضیه (۱۰.۳)، نقاط

$$X = \frac{1}{2}(A + D) \quad , \quad Y = \frac{1}{2}(B + C)$$

هستند. باید نشان دهیم که $X = Y$. چون $\{A, B, C, D\}$ رؤس یک متوازی‌الاضلاع‌اند، داریم $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ و بنابراین $B - A = D - C$. در نتیجه $B + C = A + D$ و، همان‌طور که می‌خواستیم اثبات کنیم، $X = Y$.

تمرینها ۲۹

تمرینها

۱. در فضای برداری R_3 ، بردارهای زیر را که از $a = \langle -1, 2, 1 \rangle$ ، $b = \langle 2, 1, -3 \rangle$ ، $c = \langle 0, 1, 0 \rangle$ تشکیل شده‌اند، محاسبه کنید (یعنی، آنها را به صورت $\langle \lambda, \mu, \nu \rangle$ بیان کنید):

$$a + b + c \text{ (الف)}$$

$$2a - b + c \text{ (ب)}$$

$$-a + 2b \text{ (پ)}$$

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \text{ (ت)}$$

۲. با فرض اینکه a, b, c همان بردارهای تمرین ۱ باشند، مطلوب است حل معادلات زیر در R_3 به ازای $x = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ در R_3 .

$$x + a = b \text{ (الف)}$$

$$2x - 3b = c \text{ (ب)}$$

$$b + x = a - 2c \text{ (پ)}$$

۳. تحقیق کنید که اصول موضوع یک فضای برداری برای فضاهای برداری F_n ، R_n و $\mathcal{F}(R)$ برقرارند.

۴. در R_n قرار می‌دهیم $a = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ، $b = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$. نشان دهید که $b - a = \langle \beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n \rangle$

تمرینهای زیر مبتنی بر مثالهای الف و (۹.۳)–(۱۲.۳) هستند.

۵. فرض کنیم AB پاره‌خطی سودار در R_2 باشد. نشان دهید که $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

۶. نشان دهید که پاره‌خطهای سودار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ برابرند اگر، و فقط اگر، برداری مانند X وجود داشته باشد به طوری که $C = A + X$ و $D = B + X$. (تعبیر این مطلب این است که دو پاره‌خط سودار برابرند اگر، و فقط اگر، بر اثر انتقال، یکی بر دیگری منطبق شود. یک انتقال در R_2 ، قاعده‌ای است که هر بردار A را، به ازای بردار ثابتی مانند X ، به بردار $A + X$ می‌فرستد.)

۷. نقطهٔ وسط پاره‌خط $\overrightarrow{AB}$ را در حالات زیر بیابید.

$$B = \langle 2, 1 \rangle, A = \langle 0, 0 \rangle \text{ (الف)}$$

$$B = \langle 3, 2 \rangle, A = \langle 1, -1 \rangle \text{ (ب)}$$

۸. مجموعه‌های نقاط زیرین را مورد آزمون قرار دهید و تعیین کنید که کدام‌ها رؤوس متوازی‌الاضلاع هستند. مسأله تعیین برقراری شرایط تعریف (۱۱.۳) برای ترتیب معینی از نقاط است.

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \text{ (الف)}$$

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \text{ (ب)}$$

$$\langle 1, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle -1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle \text{ (پ)}$$

۹. فرض کنیم A, B, C, D نقاطی هستند که $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. نشان دهید که $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

۳۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

۱۰. یک چهارضلعی عبارت از مجموعه‌ای از چهار نقطه متمایز $\{A, B, C, D\}$ است؛ اضلاع این چهارضلعی پاره‌خطهای $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ هستند. نشان دهید که وسطهای اضلاع یک چهارضلعی رؤوس یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۴. زیر فضاهای وابستگی خطی

این بخش با مفاهیمی آغاز می‌شود که برای مطالعه مثالهای بخش ۱، مورد نیازند.

(۱.۴) تعریف. یک زیرفضای S از فضای برداری V مجموعه‌ای است ناتهی از بردارهای

V به‌طوری‌که،

۱. اگر a و b در S هستند، آنگاه $a + b \in S$.

۲. اگر $a \in S$ و $\lambda \in F$ ، آنگاه $\lambda a \in S$.

آشکار است که اصول موضوع (۱.۳) فضاهای برداری، برای هر زیرفضای دلخواه S از یک فضای برداری V برقرارند؛ از این رو می‌بینیم که یک زیرفضا، اساساً یک فضای برداری است مشمول در یک فضای برداری بزرگتر، که در آن اعمال جمع و ضرب در اسکالرها، همانند این اعمال در فضای برداری بزرگتر هستند.

مثال الف. دستگاه معادلات همگن

$$x + 2y - 3z + t = 0$$

$$x - y + z + t = 0$$

را که در بخش ۱ مورد بحث قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. یکی از حکمهایی که در آن بخش به‌دست آوردیم این بود که، اگر $u = \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle$ و $u' = \langle \alpha', \beta', \gamma', \delta' \rangle$ جواب دستگاه باشند، $u + u'$ و به‌ازای $\lambda \in F$ ، λu نیز جواب دستگاه هستند به‌عبارت دیگر، مجموعه جوابهای این دستگاه معادلات همگن یک زیر فضای R^4 است، در نتیجه مسأله حل این دستگاه معادلات دادن بیان‌روشنی از زیرفضای جوابهاست.

مثال ب. معادله دیفرانسیل

$$y'' + m^2 y = 0 \quad (2.4)$$

را که در مسأله ب، بخش ۱، مورد مطالعه قرار دادیم، در نظر می‌گیریم. در آنجا ملاحظه کردیم که اگر f و g جوابهای مسأله باشند، $f + g$ و همچنین λf به‌ازای همه اعداد حقیقی λ ، نیز جوابهای آن هستند. این بار، جوابهای معادله دیفرانسیل همگن (۲.۴) یک زیرفضای برداری از فضای برداری $\mathcal{F}(R)$ تشکیل می‌دهند، که در بخش ۳ تعریف شد، و مانند مثال الف، مسأله

زیرفضاها و وابستگی خطی ۳۱

یافتن همه جوابهای این معادله دیفرانسیل به یافتن دقیق اینکه، چه توابعی به این زیرفضای $\mathcal{F}(R)$ تعلق دارند، باز می‌گردد.

مثال پ. ممکن است تا اینجا برای خواننده این تصور پیش آمده باشد که مفهوم زیرفضا، چارچوبی برای مسائل دیگری است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مورد بحث قرار می‌گیرند. مثلاً، بعضی از نتایج استاندارد (کدامها؟) درباره توابع پیوسته و مشتق‌پذیر نشان می‌دهند که زیرمجموعه‌های زیرین از $\mathcal{F}(R)$ در واقع زیرفضا هستند:

(i) مجموعه $C(R)$ از همه توابع حقیقی پیوسته که روی خط حقیقی تعریف شده‌اند.

(ii) مجموعه $D(R)$ مرکب از همه توابع حقیقی مشتق‌پذیر روی R .

یک مثال آشنای دیگر از زیرفضای $\mathcal{F}(R)$ مثال زیرین است:

(iii) مجموعه $P(R)$ از توابع چندجمله‌یی روی R ، که در آن هر تابع چندجمله‌یی تابعی است مانند $f \in \mathcal{F}(R)$ به‌طوری‌که، به‌ازای مجموعه ثابتی از اعداد حقیقی $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ،

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n, x \in R \text{ به‌ازای هر}$$

حال به‌ذکر چند نکته کلی درباره زیرفضاهای یک فضای برداری V روی هیاتی مانند F می‌پردازیم. داشتن تعریفی دیگر را در اینجا مناسب می‌دانیم.

(۳.۴) تعریف. فرض کنیم $\{a_1, \dots, a_m\}$ مجموعه‌ای از بردارهای V باشد. برداری مانند $a \in V$ را یک ترکیب خطی از $\{a_1, \dots, a_m\}$ گویند هرگاه بتوان عناصری مانند $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ در F پیدا کرد به‌طوری‌که

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$$

حال می‌توانیم ملاحظه کنیم که

(۴.۴) اگر S زیرفضایی از V شامل بردارهای $a_1, \dots, a_m$ باشد، هر ترکیب خطی از $a_1, \dots, a_m$ به S تعلق دارد.

برهان. این نتیجه را به‌استقراء روی m اثبات می‌کنیم. اگر $m = 1$ ، این نتیجه بنابر تعریف یک زیرفضا درست است. فرض کنیم هر ترکیب خطی دلخواه از $m - 1$ بردار S ، به S تعلق داشته باشد، و یک ترکیب خطی از m بردار متعلق به S به‌صورت

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$$

در نظر می‌گیریم. اگر قرار دهیم $a' = \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$ ، خواهیم داشت

$$a = \lambda_1 a_1 + a'$$

۳۲ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

که در آن $\lambda_1 a_1 \in S$ و بنابر فرض استقراء، $a'_1 \in S$. بنابر قسمت (۱) تعریف (۱.۴)، $a \in S$ و لذا (۴.۴) اثبات می‌شود.

فرایند تشکیل ترکیبات خطی به روشی برای ساختن زیرفضاهای منجر می‌شود که به قرار زیر است.

(۵.۴) فرض کنیم $\{a_1, \dots, a_m\}$ ، $m \geq 1$ ، مجموعه‌ای از بردارهای V باشد؛ مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای $a_1, \dots, a_m$ یک زیرفضای $S = S(a_1, \dots, a_m)$ می‌سازند. S کوچکترین زیرفضای شامل $\{a_1, \dots, a_m\}$ است، بدین معنی که اگر T زیرفضای دلخواهی شامل $a_1, \dots, a_m$ باشد، آنگاه $S \subset T$.

برهان. فرض کنیم $a = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ و $b = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i$ پس

$$a + b = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) a_i$$

باز ترکیبی خطی از $a_1, \dots, a_m$ است. اگر $\lambda \in F$ ، آنگاه

$$\lambda a = \lambda \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=1}^m \lambda (\lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^m (\lambda \lambda_i) a_i$$

این محاسبات ثابت می‌کنند که S یک زیرفضاست، و این امر که این کوچکترین زیرفضای شامل بردارهای مفروض است، بی‌درنگ از (۴.۴) نتیجه می‌شود.

(۶.۴) تعریف. زیرفضای $S = S(a_1, \dots, a_m)$ را که در (۵.۴) تعریف شد، زیرفضای تولیدشده (یا اغلب تنیده شده) به وسیله $a_1, \dots, a_m$ می‌نامند و $a_1, \dots, a_m$ را مولدهای S می‌خوانند. زیرفضایی مانند S از V را متناهی-مولد گویند اگر بردارهایی مانند $s_1, \dots, s_k$ در S وجود داشته باشند به طوری که $S = S(s_1, \dots, s_k)$.

حال مسأله حل دستگاه معادلات مثال (الف) یا معادله دیفرانسیل مثال (ب) روشنتر می‌شود. اگر، در هر دو حالت، S زیرفضای جوابها باشد، آنگاه بیان رضایت بخشی از جوابها داریم، مشروط بر آن که بتوانیم:

۱. نشان دهیم S (متناهی-مولد) است.

۲. مجموعه‌ای از مولدهای S (به معنای تعریف (۶.۴)) را بیابیم.

این نظر به مفهوم تازه دیگری منجر می‌شود که به استدلال دقیقی نیاز دارد. فرض کنیم S یک زیرفضای متناهی-مولد از فضایی برداری مانند V روی هیأت F ، با مولدهای $\{a_1, \dots, a_m\}$ باشد. بیان S به عنوان مجموعه ترکیبات خطی از $\{a_1, \dots, a_m\}$ به ویژه هنگامی سودمند است که هیچ یک از a_i ها زائد نباشد. معنای این سخن چیست؟ این سخن بدین معناست که هیچ مولد a_i را نتوان به صورت ترکیبی خطی از بقیه مولدها بیان کرد. زیرا، فرض کنیم a_i ترکیبی خطی از

۳۳ زیر فضاها و وابستگی خطی

$\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m\}$ باشد. آنگاه $a_i \in S(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m)$ و نتیجه می‌شود که $S(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m) = S(a_1, \dots, a_m)$ که به عبارت دیگر می‌توانیم، به جای مجموعه مولدهای $a_1, \dots, a_m$ ، مجموعه کوچکتری را قرار دهیم. این حکم که a_i ترکیبی خطی از $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m$ است، به این معناست که اعدادی مانند $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_m$ در F وجود دارند به طوری که

$$a_i = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_m a_m$$

پس از افزودن $a_i = (-1)a_i$ به دو طرف و استفاده از قانون تعویض پذیری، به دست می‌آوریم

$$0 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + (-1)a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_m a_m$$

و به این ترتیب نشان دادیم که عناصری مانند $\mu_1, \dots, \mu_m$ در F ، که همگی صفر نیستند، وجود دارند به طوری که

$$\mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m = 0 \quad (۷.۴)$$

(در این حالت، $\mu_j = \lambda_j$ ، $j \neq i$ و $\mu_i = -1$). برعکس، فرض کنیم دستوری مانند (۷.۴)، که در آن همه μ_i ها، همزمان صفر نیستند، برقرار باشد. در این صورت ثابت خواهیم کرد که یکی از a_j ها ترکیبی خطی از بقیه بردارهای $\{a_i, i \neq j\}$ است. فرض کنیم $\mu_j \neq 0$. لذا با استفاده از قانون تعویض پذیری و پس از افزودن $-\mu_j a_j$ به دو طرف، به دست می‌آوریم

$$-\mu_j a_j = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_{j-1} a_{j-1} + \mu_{j+1} a_{j+1} + \dots + \mu_m a_m$$

اگر دو طرف را در $-\mu_j^{-1}$ (که در F وجود دارد زیرا $\mu_j \neq 0$) ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (-\mu_j^{-1})(-\mu_j a_j) &= (-\mu_j^{-1})\mu_1 a_1 + \dots + (-\mu_j^{-1})\mu_{j-1} a_{j-1} \\ &+ (-\mu_j^{-1})\mu_{j+1} a_{j+1} + \dots + (-\mu_j^{-1})\mu_m a_m \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

با استفاده از قضیه (۵.۳)، برای طرف چپ خواهیم داشت،

$$(-\mu_j^{-1})(-\mu_j a_j) = \mu_j^{-1} \mu_j a_j = 1 a_j = a_j$$

اگر این مقدار را در (۸.۴) بگذاریم، ثابت می‌شود که $a_j \in S(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_m)$. به طور خلاصه، قضیه مهم زیر را ثابت کرده‌ایم.

(۹.۴) قضیه. فرض کنیم $m \geq 1$ ، $\{a_1, \dots, a_m\}$ مجموعه‌ای از بردارها در V باشد. می‌توان برداری مانند a_i را به صورت ترکیبی خطی از بقیه بردارهای

۳۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

$\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m\}$ بیان کرد اگر، و فقط اگر، عناصری مانند $\mu_1, \dots, \mu_m$ در F ، که همگی با هم صفر نیستند، موجود باشند به طوری که

$$\mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m = 0$$

مفهوم جدیدی، که در آغاز برهان قضیه (۹.۴) به آن اشاره کردیم آن شرط نسبتاً ظریف ولی طبیعی دربارهٔ بردارهای $\{a_1, \dots, a_m\}$ است که در جریان این اثبات پدیدار گشته است.

(۱۰.۴) تعریف. فرض کنیم $\{a_1, \dots, a_m\}$ مجموعهٔ متناهی دلخواهی از بردارهای V باشد. مجموعهٔ بردارهای $\{a_1, \dots, a_m\}$ را وابسته خطی گویند هرگاه عناصری مانند $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ در F ، که همزمان همگی صفر نیستند، وجود داشته باشند به طوری که

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0$$

چنین دستوری را یک رابطهٔ وابستگی خطی خواهیم نامید. مجموعه‌ای از بردارها را که وابسته خطی نباشد، نایسته خطی می‌گویند.

بدینسان، مجموعهٔ $\{a_1, \dots, a_m\}$ نایسته خطی است اگر، و فقط اگر، تساوی

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0, \quad \lambda_i \in F$$

مستلزم $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ باشد.

پیش از ادامهٔ بحث، به چند حالت ساده از وابستگی خطی می‌پردازیم. اول از همه، مجموعه‌ای مرکب از بردار صفر $\{0\}$ در V ، همیشه یک مجموعهٔ وابسته خطی تشکیل می‌دهد، زیرا، به‌ازای هر $\lambda \neq 0$ در F ، داریم

$$\lambda 0 = 0$$

ولی اگر در V ، $a \neq 0$ ، آنگاه مجموعهٔ $\{a\}$ به‌تنهایی یک مجموعهٔ نایسته خطی است. برای پی‌بردن به‌علت آن، باید اثبات کنیم که اگر

$$\lambda a = 0, \quad \lambda \in F$$

آنگاه $\lambda = 0$. این حکم با این هم‌ارز است که اثبات کنیم اگر نتیجهٔ $(\lambda = 0)$ نادرست باشد، آنگاه فرض $(\lambda a = 0, a \neq 0)$ نیز نادرست است. اگر $\lambda \neq 0$ ، آنگاه بنابر اصل موضوع ۷ تعریف (۱.۲)، عنصری مانند λ^{-1} وجود دارد به طوری که $\lambda^{-1} \lambda = 1$. چون $\lambda a = 0$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\lambda^{-1}(\lambda a) = (\lambda^{-1} \lambda) a = 0$$

زیر فضاها و وابستگی خطی ۳۵

ولی $\lambda^{-1}\lambda = 1$ ، و بنابراین نشان دادیم که $\lambda a = 0$ با $\lambda \neq 0$ ، مستلزم $a = 0$ است، و این برخلاف فرض $a \neq 0$ است.

حال فرض کنیم $\{a, b\}$ مجموعه‌ای مرکب از دو بردار در V باشد. ثابت خواهیم کرد.
(۱۱.۴) $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است اگر، و فقط اگر، به‌ازای مقادیری مانند λ یا λ' در F ، $a = \lambda b$ یا $b = \lambda' a$.

برهان. نخست فرض می‌کنیم $a = \lambda b$ ، $\lambda \in F$. پس داریم

$$a + [-(\lambda b)] = 0$$

اما بنابر قضیه (۵.۳)،

$$-(\lambda b) = (-\lambda)b$$

لذا خواهیم داشت

$$1 \cdot a + (-\lambda)b = 0$$

چون $1 \neq 0$ ، پس ثابت کردیم که $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است. به‌طریقی مشابه، $b = \lambda' a$ مستلزم این است که $\{a, b\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی باشد. حال فرض می‌کنیم که

$$\alpha a + \beta b = 0, \quad \alpha, \beta \in F \quad (11.4)$$

که در آن α یا β مخالف صفر است. اگر $\alpha \neq 0$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\alpha a = (-\beta)b$$

و

$$a = \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}(-\beta)b = (-\alpha^{-1}\beta)b$$

همان چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم. از طرف دیگر، اگر $\alpha = 0$ و $\beta \neq 0$ ، معادله (۳.۶) به $\beta b = 0$ تبدیل می‌شود، و بنابراین $b = 0$. در این حالت، به‌ازای $\lambda' = 0$ ، داریم $b = \lambda' a$ ، و (۱۱.۴) کاملاً به اثبات می‌رسد.

یکی دو مثال عددی ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. در R_2 فرض کنیم $a = \langle 1, -1 \rangle$ ، پس، اگر $b = \langle 1, 1 \rangle$ یا $b = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\{a, b\}$ یک مجموعه نایسته خطی است و اگر $b = \langle -2, 2 \rangle$ یا $b = \langle 0, 0 \rangle$ ، $\{a, b\}$ یک مجموعه وابسته خطی است. [برای تحقیق درستی این حکمها، (۱۱.۴) را به‌کار ببرید.]

۳۶ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

مثال ۳. در R_2 ، $a = \langle 1, -1 \rangle$ ، $b = \langle 1, 1 \rangle$ و $c = \langle 2, 1 \rangle$ را در نظر می‌گیریم. آیا $\{a, b, c\}$ نابسته خطی است؟ رابطه وابستگی خطی ممکنه مانند $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ را، با α, β, γ اعدادی حقیقی، در نظر می‌گیریم. پس

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \langle \alpha + \beta + 2\gamma, -\alpha + \beta + \gamma \rangle$$

برای اینکه این بردار صفر شود، باید داشته باشیم

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 0$$

$$-\alpha + \beta + \gamma = 0$$

آیا اعدادی مانند α, β, γ وجود دارند که همگی همزمان صفر نباشند و در این معادلات صدق کنند؟ $\gamma = 1$ را آزمایش می‌کنیم؛ پس این معادلات به

$$\alpha + \beta + 2 = 0$$

$$-\alpha + \beta + 1 = 0$$

تبدیل می‌شوند و می‌توانیم آنها را نسبت به α و β حل کنیم تا به دست آوریم

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{3}{4}, \quad \gamma = 1$$

بدینسان این بردارها وابسته خطی هستند. بعداً در این فصل، روش منظمتری برای انجام این نوع آزمون ارائه خواهیم داد.

این بخش را با مثال‌های عددی که بسیاری از نظریات این بخش را به هم پیوند می‌دهد به پایان می‌بریم. وظیفه تحقیق در درستی بعضی از احکامی که در بحث مربوط به این مثال پیش می‌آید، به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

مثال ۴. مجموعه همه جوابهای معادله

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

را مشخص کنید. قبل از همه، یکی از جوابها برداری است مانند $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ در R_3 ، و مجموعه همه جوابها، یک زیرمجموعه S از R_3 است. اگر قرار دهیم $x_3 = 0$ ، می‌بینیم که داریم

$$u_1 = \langle 1, -\frac{1}{2}, 0 \rangle \in S$$

تمرینها ۳۷

به طریق مشابه، اگر قرار دهیم $x_1 = 0$ ، خواهیم داشت

$$u_2 = \langle 0, 1, 2 \rangle \in S$$

نشان خواهیم داد که $S = S(u_1, u_2)$ ؛ به عبارت دیگر، نشان خواهیم داد که u_1 و u_2 مولدهای زیرفضایی متشکل از همه جوابهای معادله مفروض هستند. فرض کنیم $u = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ یک جواب باشد. اگر $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ، آنگاه $u \in S$ ، و جواب روشن است. حال فرض کنیم $\alpha \neq 0$ پس

$$u - \alpha u_1 = \langle 0, \beta + \frac{\alpha}{2}, \gamma \rangle = \langle 0, \frac{\gamma}{2}, \gamma \rangle = \frac{\gamma}{2} u_2$$

که آخرین تساوی طرف دوم با توجه به رابطه $\gamma - 2\beta - \alpha = 0$ که نتیجه قراردادن $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ در معادله اصلی است به دست آمده است. لذا $u \in S$ ، $u \in S$ ، سرانجام، فرض کنیم $\alpha = 0$ ، ولی $\beta \neq 0$ ، آنگاه $2\beta - \gamma = 0$ و بی درنگ حاصل می شود

$$\langle 0, \beta, \gamma \rangle = \beta u_2$$

تا اینجا ثابت کردیم که زیرفضای S متناهی-مولد است، و بردارهای u_1 و u_2 مولدهای آن هستند. بنابر (۱۱.۴) نتیجه می شود که u_1 و u_2 به طور نایسته خطی هستند. بنابراین قضیه (۹.۴) ایجاب می کند که $S = S(u_1, u_2)$ ، و هیچ یک از دو بردار u_1 و u_2 را نتوان از مجموعه مولدهای $\{u_1, u_2\}$ حذف کرد. سرانجام، حکم $S = S(u_1, u_2)$ بدین معناست که هر جواب u از معادله

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

را می توان به صورت ترکیبی خطی از بردارهای

$$u_2 = \langle 0, 1, 2 \rangle \quad \text{و} \quad u_1 = \langle 1, -\frac{1}{2}, 0 \rangle$$

یعنی به صورت $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ بیان کرد.

تمرینها

۱. تعیین کنید که کدام یک از زیرمجموعه های زیرین از R_n زیرفضا هستند.

(الف) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که $\alpha_1 = 1$.

(ب) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که $\alpha_1 = 0$.

(پ) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$.

(ت) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$.

۳۸ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

(ث) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که، به ازای $A_1, \dots, A_n$ ثابت در R ، $A_1\alpha_1 + \dots + A_n\alpha_n = 0$.

(ج) همه بردارهای $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که، به ازای مقادیر ثابت $A_1, \dots, A_n$ ، B در R ، تساوی $A_1\alpha_1 + \dots + A_n\alpha_n = B$ برقرار باشد.

(چ) همه بردارهایی به صورت $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به طوری که $\alpha_1^2 = \alpha_2$.

۲. تحقیق کنید که زیرمجموعه‌های $C(R)$ ، $D(R)$ و $P(R)$ از مجموعه $\mathcal{F}(R)$ که در مثال پ تعریف شدند، زیرفضاهایی از $\mathcal{F}(R)$ هستند.

۳. تعیین کنید که از زیرمجموعه‌های زیرین از $C(R)$ ، کدامها زیرفضایی از $C(R)$ هستند.
الف) مجموعه توابع چندجمله‌ای در $C(R)$.

ب) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که $f(\frac{1}{2})$ عدد گویایی باشد.

پ) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که $f(\frac{1}{2}) = 0$.

ت) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

ث) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

ج) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که $\frac{df}{dt} = 0$.

چ) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که، به ازای $\alpha, \beta, \gamma \in R$

$$\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f = 0$$

ح) مجموعه همه تابعهای $f \in C(R)$ به طوری که، به ازای تابع ثابتی مانند $g \in C(R)$

$$\alpha \frac{d^2 f}{dt^2} + \beta \frac{df}{dt} + \gamma f = g$$

۴. مجموعه بردارهای زیرین در R_2 و R_3 را مورد آزمون قرار دهید و وابسته خطی بودن یا نبودن آنها را تعیین کنید

الف) $\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$

ب) $\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$

پ) $\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$

ت) $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$

ث) $\langle -1, 0, 0 \rangle, \langle 3, 1, 2 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle$

ج) $\langle -2, -2, -2 \rangle, \langle 4, 1, 0 \rangle, \langle 3, -1, 1 \rangle$

چ) $\langle 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle$

۵. مجموعه وابسته خطی از مولدهای زیرفضای R_3 ، مرکب از همه جوابهای معادله

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

مفاهیم پایه و بعد ۳۹

- را بیابید.
۶. نشان دهید که مجموعه توابع چند جمله‌یی $P(R)$ (مثال پ) یک فضای برداری متناهی-مولد نیست.
۷. آیا اشتراک دو زیرفضا همیشه یک زیرفضاست؟ پاسخ خود را اثبات کنید.
۸. آیا اجتماع دو زیرفضا همیشه یک زیرفضاست؟ توضیح دهید.
۹. فرض می‌کنیم بردار a در R_n ترکیبی خطی از بردارهای $b_1, \dots, b_r$ متعلق به R_n باشد، و فرض می‌کنیم هر بردار b_i ، $1 \leq i \leq r$ ، ترکیبی خطی از بردارهای $c_1, \dots, c_s$ باشد. ثابت کنید a ترکیبی خطی از $c_1, \dots, c_s$ است.
۱۰. نشان دهید که مجموعه‌ای از بردارها که شامل یک مجموعه از بردارهای وابسته خطی باشد، وابسته خطی است. حکم مشابه مربوط به بردارهای نایسته خطی چیست؟

۵. مفاهیم پایه و بعد

در مثال ج از بخش ۴، نشان دادیم که زیرفضای جوابهای معادله

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

به وسیله دو بردار $u_1 = \langle 1, -\frac{1}{2}, 0 \rangle$ و $u_2 = \langle 0, 1, 2 \rangle$ تولید شده است. همچنین نشان دادیم که هیچ یک از دو بردار u_1 و u_2 را نمی‌توان از مجموعه مولدهای $\{u_1, u_2\}$ حذف کرد. ولی آیا این نکته نشان می‌دهد که هیچ مجموعه‌ای از مولدهای S ، کمتر از دو بردار ندارد؟ نه لزوماً. ممکن است تصادفاً کسی، از خوش‌شانسی، یک مولد تنها برای S بیابد که کار ما را دریافتن u_1 و u_2 به تلاش بیهوده‌ای مبدل سازد. هدف از این بخش این است که نشان دهیم این امر امکان‌پذیر نیست. در واقع، ثابت خواهیم کرد که اگر S زیرفضایی از یک فضای برداری V دارای m مولد نایسته خطی باشد، آنگاه هر مجموعه دیگری از مولدها شامل حداقل m بردار است. اثبات نتیجه مطلوب در مورد مثال ما در بالا، آسان است. از یک برهان غیرمستقیم استفاده می‌کنیم. فرض کنیم S به وسیله یک بردار تنهای u تولید شده باشد. چون $u_1 \neq 0$ و $u_2 \neq 0$ ، پس خواهیم داشت

$$u_1 = \alpha u, \quad u_2 = \beta u$$

که در آن، α و β مخالف با صفرند. لذا

$$\beta u_1 - \alpha u_2 = 0$$

که نشان می‌دهد u_1 و u_2 وابسته خطی هستند. ولی می‌دانیم که u_1 و u_2 نایسته خطی هستند؛ از این رو به یک تناقض می‌رسیم. بنابراین، فرض اولیه ما، یعنی $S = S(u)$ ، باید نادرست باشد و نتیجه می‌گیریم که هر مجموعه از مولدهای S دارای حداقل دو بردار است.

مفاهیم پایه و بعد ۴۱

می‌کند که $\{b_1, \dots, b_m\}$ به‌طور خطی وابسته باشند، و در این حالت دیگر قضیه اثبات شده است.

حال فرض کنیم که یکی از λ_{i1} ها مخالف صفر باشد؛ با نام‌گذاری مجدد $\{b_i\}$ ها (با قراردادن b_1 به جای b_i)، می‌توانیم فرض کنیم که $\lambda_{11} \neq 0$ ، در این صورت ضریب a_1 در $b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1$ عبارت است از 0 ، $\lambda_{21} - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1} \cdot \lambda_{11} = 0$ ، در نتیجه، به‌ازای ضرایب ثابت جدیدی مانند $\{\lambda'_{22}, \dots, \lambda'_{m2}\}$ در F

$$b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{22}a_2 + \dots + \lambda'_{2n}a_n$$

به‌طریق مشابهی، داریم

$$b_3 - \lambda_{31}\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{32}a_2 + \dots + \lambda'_{3n}a_n$$

.....

$$b_m - \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}b_1 = \lambda'_{m2}a_2 + \dots + \lambda'_{mn}a_n$$

نشان دادیم که $m - 1$ بردار

$$\{b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1, \dots, b_m - \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}b_1\}$$

همگی به‌زیر فضای $S(a_2, \dots, a_n)$ ، که دارای $n - 1$ مولد است، تعلق دارند. چون $m > n$ ، $m - 1 > n - 1$ ، و از فرض استقراء نتیجه می‌شود که عناصری مانند $\mu_2, \dots, \mu_m$ در F ، که همگی همزمان صفر نیستند، وجود دارند به‌طوری که

$$\mu_2(b_2 - \lambda_{21}\lambda_{11}^{-1}b_1) + \dots + \mu_m(b_m - \lambda_{m1}\lambda_{11}^{-1}b_1) = 0$$

اگر این عبارت را دوباره به‌صورت ترکیبی خطی از مجموعه $\{b_1, \dots, b_m\}$ بنویسیم، داریم

$$((- \mu_2 \lambda_{21} \lambda_{11}^{-1}) + \dots + (- \mu_m \lambda_{m1} \lambda_{11}^{-1}))b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_m b_m = 0$$

که در آن، حداقل یکی از ضرایب $\{\mu_2, \dots, \mu_m\}$ مخالف با صفر است. اثبات اینکه $\{b_1, \dots, b_m\}$ نایسته خطی هستند کامل، و بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

مثال الف. فرض کنیم $S = S(a_1, a_2)$ زیرفضایی از یک فضای برداری V روی هیأت اعداد حقیقی باشد، و فرض کنیم

$$b_1 = 2a_1 + a_2$$

$$b_2 = -a_1 + a_2$$

$$b_3 = a_1$$

۴۲ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

سه بردار در S باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که b_1, b_2, b_3 وابسته خطی هستند. قصد ما این است که مضارب b_1 را از b_2 و b_3 کم کنیم تا ضریب a_1 برابر صفر شود. داریم

$$\begin{aligned} b_2 + \left(\frac{1}{2}\right) b_1 &= \left(\frac{3}{2}\right) a_2 \\ b_3 - \left(\frac{1}{2}\right) b_1 &= -\left(\frac{1}{2}\right) a_2 \end{aligned}$$

حال دو بردار متعلق به فضای $S(a_2)$ داریم و

$$b_2 + \frac{1}{2}b_1 + 3\left[b_3 - \left(\frac{1}{2}\right)b_1\right] = 0$$

اگر آن را به صورت ترکیبی خطی از b_1, b_2, b_3 بنویسیم، خواهیم داشت

$$\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)\right] b_1 + b_2 + 3b_3 = 0$$

که همان رابطه مطلوب وابستگی خطی بین $\{b_1, b_2, b_3\}$ است.

این بخش را با قضیه دیگری به پایان می‌بریم که بیانگر نکته مهمی درباره مجموعه‌های مختلف مولدهای یک فضای برداری متناهی-مولد است و با استفاده از آن می‌توانیم مفاهیم پایه و بعد یک فضای برداری متناهی-مولد را وارد کنیم.

(۳.۵) قضیه. فرض کنیم S زیرفضایی برداری از یک فضای برداری V باشد، و فرض کنیم که $\{a_1, \dots, a_m\}$ و $\{b_1, \dots, b_n\}$ هر دو مجموعه‌هایی از مولدهای وابسته خطی S باشند. آنگاه $n = m$.

برهان. نخست، $\{b_1, \dots, b_m\}$ را بردارهایی در $S(a_1, \dots, a_m)$ می‌گیریم. چون فرض بر این است که $b_1, \dots, b_n$ وابسته خطی هستند، قضیه (۱.۵) به ما می‌گوید که $n \leq m$. بعد، با در نظر گرفتن $\{a_1, \dots, a_m\}$ به عنوان بردارهایی در $S(b_1, \dots, b_n)$ با همان استدلال، خواهیم داشت $m \leq n$. از اینجا نتیجه می‌شود که $m = n$ ، و قضیه به اثبات می‌رسد.

(۴.۵) تعریف. مجموعه‌ای متناهی از بردارهای $\{b_1, \dots, b_k\}$ را یک پایه فضای برداری V می‌نامند هرگاه $\{b_1, \dots, b_k\}$ یک مجموعه وابسته خطی از مولدهای V باشد. قضیه (۳.۵) می‌گوید که اگر یک فضای برداری V پایه‌ای مانند $\{b_1, \dots, b_k\}$ داشته باشد، آنگاه هر پایه دیگر V باید شامل دقیقاً k بردار باشد.

(۵.۵) تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با یک پایه $\{b_1, \dots, b_k\}$ باشد. عدد یکتای k را که با تعداد بردارهای پایه معین می‌شود، بعد فضای برداری V می‌نامند (نمادگذاری: $\dim V = k$).

تمرینها ۴۳

مثال ب. فرض کنیم n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. ثابت می‌کنیم که فضای برداری R_n که در بخش ۲ تعریف شد، دارای بعد n است. آنچه در این مورد باید انجام دهیم پیدا کردن پایه‌ای است از R_n که شامل n بردار باشد. گیریم

$$e_1 = \langle 1, 0, 0, \dots, 0 \rangle$$

$$e_2 = \langle 0, 1, 0, \dots, 0 \rangle$$

$$\dots\dots\dots$$

$$e_n = \langle 0, 0, \dots, 0, 1 \rangle$$

نشان خواهیم داد که بردارهای $\{e_i\}$ یک پایه برای R_n می‌سازند. چه چیزی را باید تحقیق کنیم؟ نخست آنکه این بردارها نایسته خطی هستند. این بدان معناست که هرگاه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ عناصری از R باشند به طوری که $\sum \lambda_i e_i = 0$ ، آنگاه همه λ_i ها صفرند. حال داریم

$$\lambda_1 e_1 = \langle \lambda_1, 0, \dots, 0 \rangle, \dots; \lambda_n e_n = \langle 0, \dots, 0, \lambda_n \rangle,$$

در نتیجه

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle = 0$$

که ایجاب می‌کند، بنابر تعریف تساوی دو بردار در R_n . $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. پس از آن باید نشان دهیم که $\{e_1, \dots, e_n\}$ مجموعه‌ای از مولدهای R_n است. همان محاسبات انجام شده در بالا نشان می‌دهد که اگر

$$a = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$$

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \quad \text{آنگاه}$$

و نتیجه مطلوب برقرار می‌شود. گاهی بردارهای $\{e_i\}$ را بردارهای یکه می‌نامند.

تمرینها

۱. فرض کنیم $b_1, \dots, b_r$ پایه‌ای برای یک فضای برداری V باشد. ثابت کنید که، به ازای $b_i \neq 0, i = 1, \dots, r$.

۲. با توجه به تعاریف، ثابت کنید که هر مجموعه دلخواه شامل سه بردار در R_2 ، یک مجموعه وابسته خطی است. (راهنمایی: با استفاده از مثال ب مجموعه‌ای از مولدهای R_2 بیابید، و سپس استدلال مثال الف را دنبال کنید.)

۴۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

۳. فرض کنیم، به ازای عدد صحیح مثبت ثابتی مانند n ، مجموعه همه توابع چندجمله‌ای در $P(R)$ به صورت $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ باشد. نشان دهید که P_n زیرفضایی از $P(R)$ است، و $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ پایه‌ای برای P_n تشکیل می‌دهد.

۴. نشان دهید که مجموعه همه توابع $f \in C(R)$ به طوری که $\frac{df}{dt} = 0$ ، یک زیرفضای یک بعدی $C(R)$ است. آیا می‌توانید این نتیجه را تعمیم دهید؟ مثلاً، بعد زیرفضای مرکب از همه f ها، به طوری که $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$ ، چیست؟

۵. فرض کنیم $a_1, \dots, a_m$ بردارهای نایسته خطی در V باشند. ثابت کنید که $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_m a_m$ و فقط اگر، $\alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_m = \alpha'_m$. به عبارت دیگر، ضرایب برداری که، به صورت ترکیبی خطی از بردارهای نایسته خطی بیان شده‌اند، به طور یکتا تعیین می‌شوند.

۶. هم‌ارزی سطری ماتریسها

در این بخش روش محاسبه مهمی را که به‌ویژه در حل عملی همه مسأله‌های وابستگی خطی و دستگاههای معادله‌های خطی به‌کار می‌رود، ارائه می‌دهیم. بحث را با یک مثال شروع می‌کنیم

مثال الف. می‌خواهیم برای زیر فضای R_4 که به وسیله بردارهای:

$$a = \langle -3, 2, 1, 4 \rangle, \quad b = \langle 4, 1, 0, 2 \rangle, \quad c = \langle -10, 3, 2, 6 \rangle$$

پدید آمده پایه‌ای بیابیم. گیریم بردارهای یکه e_1, e_2, e_3 و یک پایه R_4 باشند:

$$e_1 = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle, \dots, e_4 = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$$

همانند مثال بی بخش ۵ داریم:

$$a = -3e_1 + 2e_2 + e_3 + 4e_4 \quad (*)$$

$$b = 4e_1 + e_2 + 2e_4$$

$$c = -10e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 6e_4$$

نابستگی خطی a, b, c روشن نیست. بهترین روش پی‌بردن به آن همچنین بهترین روش یافتن یک پایه $S(a, b, c)$ ، این است که به هر بردار مضرب بردارهای دیگر را بیفزاییم تا مجموعه جدیدی از مولدهای $S(a, b, c)$ به دست آید به گونه‌ای که روابط $(*)$ تا آنجا که شدنی است ساده گردد. بعضی از عملیهایی که به مجموعه‌های تازه‌ای از مولدها منجر می‌شود به شرح زیرند.

(۱) تعویض یک بردار با دیگری [برای مثال $S(b, a, c) = S(a, b, c)$ ، زیرا هر ترکیب خطی از بردارهای $\{b, a, c\}$ به طور یقین یک ترکیب خطی از بردارهای a, b, c است و به وارون].

هم‌ارزی سطری ماتریسها ۴۵

(۲) تعویض^۱ یک بردار با مجموع آن بردار و یک مضرب عددی از بردار دیگر. برای مثال، $S(a - 2b, b, c) = S(a, b, c)$. برای بررسی درستی این برابری باید تحقیق کنیم که هر ترکیب خطی از $\{a - 2b, b, c\}$ یقیناً یک ترکیب خطی از $\{a, b, c\}$ است (چرا؟). بنابراین $S(a - 2b, b, c) \subset S(a, b, c)$. به‌واریون، فرض کنیم:

$$x = \lambda a + \mu b + \nu c$$

یک ترکیب خطی از $\{a, b, c\}$ است. چون:

$$a = (a - 2b) + 2b$$

داریم:

$$x = \lambda(a - 2b) + (2\lambda + \mu)b + \nu c$$

پس نشان دادیم که:

$$x \in S(a - 2b, b, c)$$

مطلب دیگری که باید در نظر داشت این است که این عملهای روی بردارها، درواقع روی فقط ضربیهای معادله‌های (*) صورت گرفته است. یک راه خوب برای تجسم این عملها ارائه مفهوم ماتریس است.

(۱.۶) تعریف. هر مجموعه مرتب $\{r_1, \dots, r_m\}$ از m بردار R_n را یک ماتریس $m \times n$ می‌نامند. بردارهای $\{r_1, \dots, r_m\}$ را سطرهای ماتریس می‌نامند. برای ماتریسها طرز نمایش زیر را به‌کار می‌بریم. در مثال الف بردارهای

$$r_1 = \langle -3, 2, 1, 4 \rangle, \quad r_2 = \langle 4, 1, 0, 2 \rangle, \quad r_3 = \langle -10, 3, 2, 6 \rangle$$

را در نظر گرفتیم. ماتریس 3×4 با سطرهای r_1, r_2 و r_3 را به‌شکل:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

۱. اگر بخواهیم مشابهت این سطر را با سطری که در صفحه ۴۹، زیر ماتریس اول آمده حفظ کنیم، می‌توانیم چنین بنویسیم: گذاشتن مجموع بردار و مضربی از آن، به‌جای هر بردار-م.

۴۶ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

نشان می‌دهیم. به‌طور کلی سطرهای $\{r_1, r_2, r_3\}$ از یک ماتریس 3×4 را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$r_1 = \langle \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14} \rangle$$

$$r_2 = \langle \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24} \rangle$$

$$r_3 = \langle \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34} \rangle$$

عدهای $\{\alpha_{ij}\}$ را درایه‌های ماتریس می‌نامند. در طرز نمایش ماتریس، عنصر α_{ij} در سطر i ام و ستون j ام قرار دارد. برای مثال، اگر ماتریس (۲.۶) را با این قرارداد بنویسیم خواهیم داشت: $\alpha_{11} = -3, \alpha_{21} = 4, \alpha_{31} = -10, \alpha_{23} = 2, \alpha_{14} = 4$ و غیره.

عمل تعویض دو بردار منجر به تعویض دو سطر ماتریس (۲.۶) می‌گردد و آن را چنین می‌نویسند:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

گذاشتن $a - 2b$ به جای a را با شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} -11 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

این عملها را عملهای مقدماتی سطری از نوع I و II روی ماتریس می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

تا این‌که نشان دهیم ماتریس:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix}$$

از ماتریس $\mathbf{A}$ به‌ترتیب زیر به‌دست آمده است. شماره متناهی از ماتریسها:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_s = \mathbf{A}'$$

هم‌ارزی سطری ماتریسها ۴۷

وجود دارند که همه همان بعد A را دارند به‌گونه‌ای که برای هر i , $2 \leq i \leq s$, A_i با یک عمل مقدماتی* سطری از روی A_{i-1} به‌دست آمده است. چون این عملهای مقدماتی سطری زیر فضای مربوط به سطرها را تغییر نمی‌دهد، نتیجه می‌گیریم که اگر (۳.۶) برقرار باشد، زیرفضای $S(a', b', c')$ با زیرفضای $S(a, b, c)$ برابر است، که در آن:

$$\begin{aligned} a' &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + \alpha_{13}e_3 + \alpha_{14}e_4 \\ b' &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{23}e_3 + \alpha_{24}e_4 \\ c' &= \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 + \alpha_{34}e_4 \end{aligned} \quad (۴.۶)$$

و $\{a, b, c\}$ بردارهایی هستند که با سطرهای ماتریس اصلی بیان شده‌اند:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

این می‌رساند که آنچه برای یافتن یک پایه $S(a, b, c)$ باید انجام دهیم استفاده از عملهای مقدماتی سطری در مورد ماتریس (۲.۶) است تا همانند (۴.۶) بردارهای $\{a', b', c'\}$ را چنان بیابیم که آزمون نایستگی خطی آنها در مورد بردارهای ناصفر یافت‌شده آسان باشد.

یکی از روشهای انجام این کار روش حذف گاوس است. با استفاده از عملهای مقدماتی سطری ضریبهای e_1 را در همه بردارها به‌جز یکی از آنها به صفر تبدیل می‌کنیم. سپس ضریبهای بردار پایه دیگر را حذف می‌کنیم و همین‌طور عمل را ادامه می‌دهیم.

در مثال مورد بحث ضریب e_1 را در سطرهای دوم و سوم حذف می‌کنیم. اگر به‌جای سطر دوم، مجموع آن را با حاصلضرب سطر اول در $\frac{4}{3}$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

در ماتریس سمت راست به‌جای سطر سوم، تفاضل سطر سوم و $\frac{11}{3}$ سطر نخست را می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ -10 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{22}{3} \end{pmatrix}$$

* بعداً عمل مقدماتی نوع سومی ارائه خواهد شد که در اینجا مورد نیاز نیست.

۴۸ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

اکنون به جای سطر سوم، مجموع سطرهای سوم و دوم را می‌گذاریم:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & -\frac{۱۱}{۳} & -\frac{۴}{۳} & -\frac{۲۲}{۳} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

اگر آنچه را که انجام شد به دنبال هم بنویسیم، نتیجه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱۱ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ -۱۰ & ۳ & ۲ & ۶ \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & -\frac{۱۱}{۳} & -\frac{۴}{۳} & -\frac{۲۲}{۳} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} -۳ & ۲ & ۱ & ۴ \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۴}{۳} & \frac{۲۲}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$S(a, b, c) = S(a', b')$$

که در آن

$$\begin{aligned} a' &= -۳e_1 + ۲e_2 + e_3 + ۴e_4 \\ b' &= \frac{۱۱}{۳}e_1 + \frac{۴}{۳}e_2 + \frac{۲۲}{۳}e_4 \end{aligned} \quad (۵.۶)$$

اکنون می‌توان نابسته خطی بودن a' و b' را به آسانی بررسی کرد. زیرا، فرض کنیم:

$$\lambda a' + \mu b' = 0 \quad (۶.۶)$$

در این صورت پس از دسته‌بندی برحسب e_1, e_2, e_3 و e_4 نتیجه می‌شود:

$$-۳\lambda e_1 + (\dots)e_2 + (\dots)e_3 + (\dots)e_4 = 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $\lambda = 0$ ، زیرا $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ نابسته خطی هستند. لذا معادله (۶.۶) چنین می‌شود:

$$\mu b' = 0$$

و چون $b' \neq 0$ پس $\mu = 0$.

از اینجا نتیجه می‌شود که بردارهای a' و b' پایه‌ای برای زیرفضای $S(a, b, c)$ تشکیل می‌دهند زیرا این دو بردار ناسته خطی‌اند.

دومین کاربرد این روش آزمون وابستگی خطی بردارهاست. در این مورد ما، نتیجه می‌شود که بردارهای اصلی یعنی $\{a, b, c\}$ وابسته خطی‌اند. زیرا اگر نابسته خطی بودند، پایهٔ زیرفضای $S(a, b, c)$ متشکل از سه بردار می‌شد و پایه‌ای با دو بردار بنا به قضیهٔ (۳.۵) نشدنی است.

مسئله یافتن یک بستگی خطی بین $\{a, b, c\}$ چندان دشوار نیست، ولی، آن را تا بخش ۹ به تعویق خواهیم انداخت، زیرا این مسئله هم‌ارز مسئله کلی یافتن پاسخهای یک دستگاه معادلات همگن است.

از این مثال نتایج زیادی دربارهٔ چگونگی پدید آمدن زیرفضاهای فضاهای برداری به دست آوردیم. این بخش را با بیان نتیجه‌های خود در حالت کلی پایان می‌دهیم. در مطالعهٔ موضوع این بخش مثالهای (الف) یا (پ) (آخر بخش) محتملاً برای درک نکته‌های گوناگون مورد بحث بسیار مفید خواهند بود.

فرض کنیم V یک فضای برداری با پایه متناهی $\{a_1, \dots, a_n\}$ روی هیأت F است. فرض کنیم $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ بردارهایی متعلق به V باشند به گونه‌ای که:

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda_{11}a_1 + \lambda_{1r}a_r + \cdots + \lambda_{1n}a_n \\ b_r &= \lambda_{r1}a_1 + \lambda_{rr}a_r + \cdots + \lambda_{rn}a_n \\ &\dots\dots\dots \\ b_m &= \lambda_{m1}a_1 + \lambda_{mr}a_r + \cdots + \lambda_{mn}a_n \end{aligned} \tag{V.6}$$

ماتریس:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \quad (A.6)$$

ماتریس ضریبهای دستگاه معادله‌های (۷.۶) است (→ به تعریفی که در ابتدای این بخش انجام شد) که سطرهای آن عبارت‌اند از بردارهای:

$$\begin{aligned} r_1 &= \langle \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n} \rangle \quad (\text{سطر نخست}) \\ &\vdots \\ r_m &= \langle \lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots, \lambda_{mn} \rangle \quad (\text{سطر } m\text{-ام}) \end{aligned}$$

۵۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

ستونهای A مطابق تعریف بردارهایی متعلق به F_m هستند،

$$c_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix}, \dots, c_n = \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \lambda_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

یا می‌توان ستون اول را به شکل،

$$c_1 = \langle \lambda_{11}, \lambda_{21}, \dots, \lambda_{m1} \rangle$$

نوشت. تعریف این m تایی چگونگی نقش ضریبها را نشان می‌دهد. می‌دانیم که ماتریس A را یک ماتریس $m \times n$ و عددهای $\{\lambda_{ij}\}$ را درایه‌های آن می‌نامند. درایه λ_{ij} به سطر i ام و ستون j ام A تعلق دارد و در (۷.۶) معرف ضریب a_j در عبارت b_i به عنوان یک ترکیب خطی از بردارهای پایه می‌باشد. همانند حالت R_n ، $A = 0$ نمایش این است که همه درایه‌های A برابر صفرند.

مثال ب. گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} \end{pmatrix}$$

A یک ماتریس 4×3 با بردارهای سطری زیر است:

$$r_1 = \langle 2, 1, 0 \rangle$$

$$r_2 = \langle -3, 1, 2 \rangle$$

$$r_3 = \langle 1, 1, -1 \rangle$$

$$r_4 = \langle 2, 1, 4 \rangle$$

مثلاً عنصری که در سطر سوم و ستون یکم قرار دارد برابر است با λ_{31} ، λ_{22} ، λ_{13} را معین کنید.

(۹.۶) تعریف. گیریم A یک ماتریس $m \times n$ با ضریبهای $\{\lambda_{ij}\}$ باشد. یک عمل سطری مقدماتی روی ماتریس A قاعده‌ای است که با انجام آن روی A یک ماتریس $m \times n$ دیگر به دست می‌آید. عملهای سطری مقدماتی عبارت‌اند از:

(I) تعویض دو سطر A

هم‌ارزی سطری ماتریسها ۵۱

(II) تعویض سطر i ام A یعنی r_i با $r_i + \lambda r_j$ که در آن r_j ، $i \neq j$ یک سطر دیگر A و λ یک عدد است.

(III) تعویض سطر i ام A یعنی r_i با μr_i ، $\mu \neq 0$.

(۱۰.۶) تعریف. گیریم A یک ماتریس $m \times n$ باشد. ماتریس $m \times n$ بعدی A' را هم‌ارز سطری A گویند هرگاه ماتریسهای $m \times n$ بعدی مانند $A_0, A_1, \dots, A_s$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که:

$$A_0 = A \quad A_s = A'$$

و به‌ازای هر i ، $1 \leq i \leq s$ از A_{i-1} با یکی از سه عمل مقدماتی سطری I، II و III به‌دست آید. اگر A' هم‌ارز سطری A باشد می‌نویسیم $A' \sim A$ رابطه هم‌ارزی سطری دارای ویژگیهای زیر است (به تمرینها مراجعه کنید):

$$A \sim A$$

$$A \sim A' \iff A' \sim A$$

$$A \sim A', A' \sim A'' \implies A \sim A''$$

(۱۱.۶) قضیه. گیریم V یک فضای برداری با پایه متناهی $\{a_1, \dots, a_n\}$ و $\{b_1, \dots, b_m\}$ بردارهایی در آن باشند به‌گونه‌ای که:

$$b_1 = \lambda_{11}a_1 + \dots + \lambda_{1n}a_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_m = \lambda_{m1}a_1 + \dots + \lambda_{mn}a_n$$

فرض می‌کنیم ماتریس $m \times n$:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda'_{11} & \dots & \lambda'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda'_{m1} & \dots & \lambda'_{mn} \end{pmatrix}$$

هم‌ارز سطری ماتریس ضریبهای $\{b_i\}$ ها بر حسب $\{a_j\}$ ها، یعنی:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

هم‌ارزی سطری ماتریسها ۵۳

پله‌یی شکل نیست. موضوع پله‌یی شکل داشتن بردارها یک حقیقت کلی زیر است که در مثال الف پیش‌بینی شده بود.

(۱۴.۶) لم. گیریم A ماتریس ضریبهای یک مجموعه بردار $\{b_1, \dots, b_m\}$ بر حسب یک مجموعه از بردارهای پایه $\{a_1, \dots, a_n\}$ از فضای برداری V همانند (۷.۶) باشد، یعنی:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم که سطرهای $r_1, \dots, r_m$ ماتریس A پله‌یی شکل باشند، در این صورت بردارهای $\{b_1, \dots, b_m\}$ نایسته خطی هستند.

برهان. لم را با روش استقراء روی m ثابت می‌کنیم. اگر $m = 1$ ، آنگاه بنا به تعریف (۱۳.۶)، $b_1 \neq 0$ و $\{b_1\}$ یک مجموعه نایسته خطی است. اکنون مثل فرض استقراء، فرض می‌کنیم که $m > 1$ و لم برای ماتریس با $m - 1$ سطر درست باشد. گیریم A در فرضهای لم صدق می‌کند، و فرض می‌کنیم:

$$\beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m = 0, \quad \beta_i \in F \quad (15.6)$$

نشان می‌دهیم که $\beta_1 = 0$. گیریم λ_{1i} نخستین درایه ناصفر r_1 باشد. در این صورت بنا به تعریف پله‌یی شکل بودن، هنگامی که (۱۵.۶) را به شکل ترکیب خطی از بردارهای پایه $\{a_1, \dots, a_n\}$ بنویسیم، ضریب a_i برابر $\lambda_{1i}\beta_1$ است، که باید برابر ۰ باشد. چون $\lambda_{1i} \neq 0$ ، پس $\beta_1 = 0$. اکنون بردارهای $\{b_2, \dots, b_m\}$ را در نظر می‌گیریم. ماتریس ضریبهای این بردارها، $m - 1$ سطر دارد که پله‌یی شکل است (چرا؟). اما رابطه (۱۵.۶) حالا به شکل زیر است:

$$\beta_2 b_2 + \dots + \beta_m b_m$$

با استفاده از فرض استقراء، نتیجه می‌گیریم:

$$\beta_2 = \dots = \beta_m = 0$$

بدین ترتیب لم ثابت می‌شود.

اکنون به قضیه عمده این بخش می‌پردازیم.

(۱۶.۶) قضیه. گیریم A ماتریس ضریبهای دستگاه معادله‌های (۷.۶) است، که یک مجموعه از بردارهای $\{b_1, \dots, b_m\}$ را به شکل ترکیب خطی از یک مجموعه داده شده از بردارهای پایه یک فضای برداری V بیان می‌کند. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۵۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

(i) یک ماتریس A' وجود دارد که هم‌ارز سطری ماتریس A است به‌گونه‌ای که یا $A' = 0$ یا یک عدد درست و مثبت یکتای k وجود دارد، $1 \leq k \leq m$ ، به‌گونه‌ای که نخستین k سطر A' پله‌یی شکل است و بقیه سطرها صفرند.

(ii) بردارهای $\{b'_1, \dots, b'_k\}$ مربوط به k سطر نخستین A' پایه‌ای برای $S(b_1, \dots, b_k)$ است.

(iii) شرط لازم و کافی برای اینکه بردارهای اصلی $\{b_1, \dots, b_m\}$ نایسته خطی باشند این است که $k = m$.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که اگر $A \neq 0$ ، آنگاه یک ماتریس $A \sim A'$ وجود دارد به‌گونه‌ای که نخستین k سطر A' پله‌یی شکل است و بقیه سطرهای آن صفرند. اثبات را به‌روش استقراء روی شماره سطرهای A انجام می‌دهیم. اگر شماره سطرها یک باشد، در این صورت نتیجه به‌روشنی درست است، زیرا یک بردار ناصفرتها، پله‌یی شکل است. اکنون فرض می‌کنیم که $A \neq 0$ دارای $m > 1$ سطر است. با تعویض دو سطر، می‌توانیم فرض کنیم که r_1 یعنی نخستین سطر A ناصفر است و درایه ناصفر آن در انتهاالیه دست چپ است. با افزودن مضربهای سطر اول به سایر سطرها ماتریسی به‌دست می‌آوریم به‌شکل زیر که هم‌ارز سطری A است:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_{1i} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

و در آن $\lambda_{1i} \neq 0$. بنابر فرض استقراء، می‌توانیم با اعمال عملهای مقدماتی سطری بر ماتریس متشکل از $m - 1$ سطر آخر A_1 ، ماتریس زیر را بیابیم:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_{1i} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

به‌گونه‌ای که همه سطرهای A' به‌جز سطر اول از صفر تشکیل شود، یا اینکه سطرهای A' یعنی $\{r'_1, \dots, r'_k\}$ پله‌یی شکل و بقیه سطرها صفر باشند. بنابر تعریف پله‌یی شکل، روشن است که سطرهای $\{r_1, \dots, r_k\}$ از A' پله‌یی شکل‌اند و نخستین حکم ثابت می‌شود.

گیریم $\{b'_1, \dots, b'_k\}$ بردارهای مربوط به نخستین k سطر A' باشند. بنابر قضیه (۱۱.۶):

$$S(b_1, \dots, b_m) = S(b'_1, \dots, b'_k)$$

و بنابر لم (۱۴.۶) بردارهای $\{b'_1, \dots, b'_k\}$ نایسته خطی هستند. بنابراین $\{b'_1, \dots, b'_k\}$ پایه‌ای است برای $S(b_1, \dots, b_m)$. به‌علاوه، هر ماتریس دیگری که دارای همان شرطهای A' باشد دارای

هم‌ارزی سطری ماتریسها ۵۵

این ویژگی خواهد بود که سطرهای ناصفر آن پایه‌ای برای $S(b_1, \dots, b_m)$ است. از قضیه (۳.۵) نتیجه می‌شود که شماره سطرهای ناصفر A' به‌طور یکتا تعیین می‌شود. تا اینجا احکام (i) و (ii) قضیه را ثابت کردیم. حکم (iii) همان‌گونه که در مثال الف دیدیم با یک کاربرد دیگر قضیه (۳.۵) ثابت می‌شود. زیرا شرط لازم و کافی برای نابستگی خطی بردارهای $\{b_1, \dots, b_m\}$ این است که شماره بردارهای پایه $S(b_1, \dots, b_m)$ برابر m باشد. ولی شماره بردارهای پایه $S(b_1, \dots, b_m)$ برابر است با شماره سطرهای ناصفر A' که برابر k است. به‌این ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد. مثال پ. در این مثال چگونگی استفاده از تکنیکی را که در این بخش گفته شد نشان می‌دهیم. برای زیرفضایی از R_3 که به‌وسیله بردارهای $\langle 1, 3, 4 \rangle$ ، $\langle 4, 0, 1 \rangle$ و $\langle 3, 1, 2 \rangle$ پدید می‌آید، پایه‌ای بیابید. بستگی خطی این بردارها را امتحان کنید. بنابر روشی که گفته شد، این بردارها را برحسب یک پایه R_3 متشکل از بردارهای یک‌تایی $\{e_1, e_2, e_3\}$ بیان می‌کنیم:

$$b_1 = \langle 1, 3, 4 \rangle = e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

$$b_2 = \langle 4, 0, 1 \rangle = 4e_1 + e_3$$

$$b_3 = \langle 3, 1, 2 \rangle = 3e_1 + e_2 + 2e_3$$

ماتریس ضریبها برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

اکنون ماتریسی مانند A' را که هم‌ارز ماتریس A است، به‌گونه‌ای می‌یابیم که k سطر نخست آن پله‌یی شکل باشند.

$$\begin{aligned} A &\stackrel{\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -15 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} \stackrel{\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

باید به‌چگونگی استفاده از عمل سطری نوع III برای تبدیل نخستین درایه سطر دوم به ۱، توجه کرد. این مرحله، بالاینکه اساسی نیست، اغلب برای ساده‌کردن محاسبات به‌کار می‌رود.

۵۶ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

با به کار بردن قضیه (۱۶.۶) نتیجه می‌گیریم که بردارهای:

$$b'_1 = e_1 + 3e_2 + 4e_3$$

$$b'_2 = e_2 + \frac{5}{4}e_3$$

پایه‌ای برای $S(b_1, b_2, b_3)$ هستند، و بردارهای اصلی $\{b_1, b_2, b_3\}$ به‌طور خطی وابسته‌اند.

تمرینها

۱. ماتریسهایی هم‌ارز سطری با ماتریسهای زیر بیابید که سطرهاى هریک پله‌ی شکل باشند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{الف) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ب)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{پ)}$$

۲. بردارهای زیر را از نظر وابستگی خطی بیازمایید. فرض می‌کنیم که این بردارها به‌ازای مقدار مناسبی از n به R_n تعلق دارند:

$$\text{الف) } \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle -1, 1 \rangle$$

$$\text{ب) } \langle -2, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle$$

$$\text{پ) } \langle 4, 1, 2 \rangle, \langle 3, 0, 1 \rangle, \langle 1, 4, 3 \rangle$$

$$\text{ت) } \langle -1, 0, 1 \rangle, \langle 4, 0, -1 \rangle, \langle 2, 1, 3 \rangle, \langle 1, 1, 2 \rangle$$

$$\text{ث) } \langle 1, 0, 3, -1 \rangle, \langle -2, 1, 0, 1 \rangle, \langle 3, 1, 5, 2 \rangle, \langle 0, 1, 1, 2 \rangle$$

$$\text{ج) } \langle 0, -1, -1, -1, 0 \rangle, \langle 2, 1, 0, 1, 1 \rangle, \langle -1, 1, 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 1, 0, 0, 1 \rangle$$

۳. برای فضاهایی که دسته بردارهای تمرین ۲ پدید می‌آورند پایه‌هایی پله‌ی شکل بیابید.

۴. بگیریم f_1, f_2, f_3 توابعی در $\mathcal{F}(R)$ هستند.

الف) برای مجموعه اعداد حقیقی x_3, x_2, x_1 فرض می‌کنیم $(f_i(x_j))$ یک ماتریس ۳ در ۳ است که درایه (i, j) آن $f_i(x_j)$ است، برای $1 \leq i, j \leq 3$. ثابت کنید که توابع f_1, f_2, f_3 هنگامی به‌طور خطی ناپسته‌اند که سطرهاى ماتریس $(f_i(x_j))$ به‌طور خطی ناپسته باشند.

ب) فرض کنید که توابع f_1, f_2, f_3 روی بازه (a, b) دارای مشتقهای مرتبه اول و دوم هستند، W ماتریس 3×3 ای است که درایه (i, j) آن $f_i^{(j-1)}$ است، $1 \leq i, j \leq 3$ است، که در آن برای هر تابع مشتقپذیر f داریم: $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$. ثابت کنید که توابع

قضیه‌های کلی در مورد فضاهای برداری متناهی-مولد ۵۷

f_1, f_2, f_3 روی بازه (a, b) وقتی به طور خطی نایسته‌اند که سطرهای ماتریس $W(x)$ به طور خطی نایسته باشند.

نشان دهید که هریک از مجموعه توابع زیر به طور خطی نایسته‌اند:

$$(پ) \quad f_1(x) = -x^2 + x + 1, f_2(x) = x^2 + 2x, f_3(x) = x^2 - 1$$

$$(ت) \quad f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = x, f_3(x) = e^{2x}$$

$$(ث) \quad f_1(x) = e^x, f_2(x) = \sin x, f_3(x) = \cos x$$

توجه کنید که اگر آزمونهای مذکور در (الف) و (ب) درست از آب درنمایند، تضمینی برای وابستگی خطی توابع وجود ندارد.

۵. نایستگی خطی مجموعه زیر از چندجمله‌یها را آزمون کنید. (راهنمایی از تمرین ۳ صفحه ۴۴ استفاده کنید.)

$$(الف) \quad 1 + 2x + x^2, 1 + 2x, 2x^2 - 2x - 1$$

$$(ب) \quad 1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3$$

۷. قضیه‌های کلی در مورد فضاهای برداری متناهی-مولد

در این بخش چند قضیه دیگر را در مورد فضاهای برداری ثابت می‌کنیم که در نظریه دستگاههای معادله‌های خطی و در سایر کاربردها بعداً مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

(۱.۷) لم. اگر $\{a_1, \dots, a_m\}$ وابسته خطی، و $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ نایسته خطی باشند، آنگاه a_m ترکیبی خطی از $a_1, \dots, a_{m-1}$ است. برهان. بنابر فرض داریم:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$$

که در آن دست‌کم یک $\lambda_i \neq 0$. اگر $\lambda_m = 0$ ، آنگاه به‌ازای $1 \leq i \leq m - 1$ یک $\lambda_i \neq 0$ وجود دارد، و معادله وابستگی خطی چنین می‌شود:

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{m-1} a_{m-1} = 0$$

که خلاف فرض نایستگی خطی $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ است. بنابراین $\lambda_m \neq 0$ و داریم:

$$a_m = \lambda_m^{-1} [(-\lambda_1) a_1 + \dots + (-\lambda_{m-1}) a_{m-1}]$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (-\lambda_m^{-1} \lambda_i) a_i$$

همان چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم.

برای توضیح (۱.۷)، گیریم در R_2 ، $a = \langle 0, 1 \rangle$ ، $b = \langle 1, -1 \rangle$ و $c = \langle -2, 2 \rangle$.

۵۸ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

در این صورت a, b, c وابسته خطی هستند (چرا؟) به علاوه a و b نایسته خطی اند، پس بنابر (۱.۷) c باید ترکیبی خطی از a و b باشد، (نشان دهید که این مطلب درست است). ولی b و c نایسته خطی نیستند، و در این حالت به آسانی ثابت می شود که a ترکیبی از b و c نیست. بنابراین فرض (۱.۷) اساسی است.

(۲.۷) قضیه. هر فضای برداری متناهی-مولد V یک پایه دارد.

برهان. نخست حالتی را که V تنها شامل بردار صفر است در نظر می گیریم. در این صورت بردار صفر V را پدید می آورد ولی نمی تواند پایه ای برای آن باشد (چرا؟). در این حالت می پذیریم که مجموعه تهی یک پایه V است، پس بعد V برابر صفر است. اکنون گیریم $V \neq \{0\}$ فضایی با n مولد باشد. بنابر قضیه (۱.۵) هر مجموعه از $n + 1$ بردار در V وابسته خطی است، و چون هر مجموعه ای با یک بردار ناصفر تنها، نایسته خطی است، پس برای یک عدد درست $m \geq 1$ متضمن بردارهای نایسته خطی $b_1, \dots, b_m$ است به طوری که هر مجموعه متشکل از $m + 1$ بردار V وابسته خطی است. ثابت خواهیم کرد که $\{b_1, \dots, b_m\}$ پایه ای است برای V . برای این منظور کافی است نشان دهیم که هر بردار $b \in V$ به $S(b_1, \dots, b_m)$ نیز تعلق دارد. چون $\{b_1, \dots, b_m, b\}$ نایسته خطی است، پس مجموعه $\{b_1, \dots, b_m, b\}$ وابسته خطی است. چون $\{b_1, \dots, b_m\}$ نایسته خطی است، بنابر لم (۱.۷)، $b \in S(b_1, \dots, b_m)$ ، و قضیه ثابت می شود.

اما می دانیم که هر فضای برداری متناهی-مولد، با داشتن یک پایه معین می شود، -فضا شامل همه ترکیبهای خطی این بردارهای میناست. دو قضیه بعد نشان می دهند که وقتی یک مجموعه از مولدهای فضایی را داشته باشیم چگونه باید یک پایه از آن یا دست کم یک مجموعه نایسته از بردارهای آن را بیابیم.

(۳.۷) قضیه. گیریم $V = S(a_1, \dots, a_m)$ فضای برداری متناهی-مولد با مولدهای $\{a_1, \dots, a_m\}$ باشد. در این صورت می توان از مولد $\{a_1, \dots, a_m\}$ یک پایه برای فضا برگزید. به گفته دیگر، هر مجموعه از مولدهای یک فضای برداری متناهی-مولد همواره متضمن یک پایه است.

برهان. اگر $V = \{0\}$ ، قضیه روشن است. اکنون گیریم $V \neq \{0\}$. به ازای زیرنمایه ای مانند $a_1, \dots, a_m$ ، برای ترتیب مناسبی از بردارهای $a_1, \dots, a_m$ می توان بردارهای $a_1, \dots, a_r$ را نایسته خطی دانست. در این صورت بنابر لم (۱.۷)، بردارهای $a_{r+1}, \dots, a_m$ همه به $S(a_1, \dots, a_r)$ تعلق دارند. بنابراین:

$$S(a_1, \dots, a_m) = S(a_1, \dots, a_r)$$

و چون $\{a_1, \dots, a_r\}$ نایسته خطی است، نتیجه می گیریم که مجموعه اخیر پایه ای است برای V .

قضیه‌های کلی در مورد فضاهای برداری متناهی-مولد ۵۹

(۴.۷) قضیه. گیریم $\{b_1, \dots, b_q\}$ مجموعه‌ای از بردارهای نایسته خطی فضای متناهی-مولد V باشد. اگر $b_1, \dots, b_q$ پایه‌ای برای V نباشد بردارهای دیگری مانند $b_{q+1}, \dots, b_m$ در V وجود دارند به‌طوری‌که $\{b_1, \dots, b_m\}$ پایه‌ای است برای V .
برهان. بنابر قضیه (۲.۷) V پایه‌ای مانند $\{a_1, \dots, a_n\}$ دارد. بنابر قضیه (۱.۵) $q \leq n$. اگر $q = n$ ، آنگاه بنابر قضیه (۱.۵) برای هر i ، مجموعه:

$$\{b_1, \dots, b_n, a_i\}$$

مجموعه‌ای است وابسته خطی. بنابر لم (۱.۷)، $a_i \in S(b_1, \dots, b_n)$ پس:

$$V = S(b_1, \dots, b_n)$$

بنابراین $\{b_1, \dots, b_n\}$ پایه‌ای است برای V ، و در این حالت اثبات قضیه روشن است.
اکنون فرض کنیم $q = n - 1$. در این صورت به‌ازای یک مقدار $a_i \notin S(b_1, \dots, b_q)$ و باز بنابر لم (۱.۷)، مجموعه $\{b_1, \dots, b_q, a_i\}$ یک مجموعه نایسته خطی از n بردار است. بنا به استدلالی که در بالا دیدیم، نتیجه می‌گیریم که $\{b_1, \dots, b_q, a_i\}$ پایه‌ای است برای V و قضیه در این حالت نیز ثابت شده است.

اکنون گیریم $n - q > 1$ ، به‌استقراء می‌توان فرض کرد که وقتی تفاضل بعد V و شماره بردارهای $\{b_1, \dots, b_q\}$ از $n - q$ کوچکتر است قضیه برقرار است. چون $n - q > 1$ ، برای یک مقدار i ، $a_i \notin S(b_1, \dots, b_q)$ همانند پیش $\{b_1, \dots, b_q, a_i\}$ یک مجموعه نایسته خطی از $q + 1$ بردار است. چون داریم $n - (q + 1) = n - q - 1$ ، با استفاده از فرض استقراء می‌توان برای یافتن یک پایه، $\{b_1, \dots, b_q, a_i\}$ را با بردارهای دیگری کامل کرد. به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد.

اکنون روی زیر فضاهای فضای برداری V عملهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بر اثر آنها زیرفضاهای دیگری پدید می‌آیند. اگر S و T دو زیرفضای برداری فضای V باشند، از تعریف فضای برداری بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $S \cup T$ همیشه زیرفضای برداری نیست. به‌عنوان مثال، اگر S و T دو زیرفضای R_2 به‌صورت‌های

$$S = \{ \langle \circ, \beta \rangle, \beta \in R \}, \quad T = \{ \langle \alpha, \circ \rangle, \alpha \in R \}$$

باشند، آنگاه $S \cup T$ یک زیرفضای برداری R_2 نیست. با توجه به این مثال، برای دو زیرفضای S و T از V ، مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$S + T = \{ s + t; s \in S, t \in T \}$$

به‌آسانی می‌توان نشان داد که $S + T$ یک زیرفضای برداری است و درواقع کوچکترین زیرفضایی است که $S \cup T$ را در بردارد. از سوی دیگر اگر S و T دو زیرفضا باشند $S \cap T$ همیشه یک

۶۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

زیرفضاست. اکنون می‌توان این پرسش را پیش کشید که اگر بدهای S و T در دست باشند بدهای $S + T$ و $S \cap T$ چه عددی می‌توانند باشند؟ پاسخ این پرسش با قضیه زیر که نتیجه روش شمارش در مورد مجموعه‌های متناهی است داده می‌شود: اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آنگاه شماره عناصر $A \cup B$ برابر است با مجموع شماره‌های عناصر A و B منهای شماره عناصر $A \cap B$.

(۵.۷) قضیه. گیریم S و T دو زیرفضای متناهی-مولد از فضای V باشند. در این صورت $S + T$ و $S \cap T$ زیرفضاهایی هستند متناهی-مولد و داریم:

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$$

برهان. اثبات این قضیه را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم و جزئیات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم. گرچه واقعاً لازم نیست، ولی نخست فرض می‌کنیم که $S \cap T = \{0\}$. گیریم $\{s_1, \dots, s_d\}$ پایه‌ای برای S و $\{t_1, \dots, t_e\}$ پایه‌ای برای T باشد. در این صورت به‌آسانی دیده می‌شود که بردارهای $s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_e$ فضای $S + T$ را پدید می‌آورند، و در این حالت اگر ثابت کنیم که این بردارها نایسته خطی هستند، (۵.۷) ثابت می‌شود. فرض کنیم:

$$\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_d s_d + \beta_1 t_1 + \dots + \beta_e t_e = 0$$

در این صورت:

$$\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_d s_d = -\beta_1 t_1 - \dots - \beta_e t_e \in S \cap T = \{0\}$$

چون s ها و t ها نایسته خطی هستند. پس:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_d = 0, \beta_1 = \dots = \beta_e = 0$$

اکنون فرض می‌کنیم $S \cap T \neq \{0\}$. در این صورت $S \cap T$ متناهی-مولد است (چرا؟). بنابر قضیه (۲.۷)، $S \cap T$ دارای پایه‌ای است مانند $\{u_1, \dots, u_c\}$ که $c = \dim S \cap T$. بنابر قضیه (۴.۷) می‌توان مجموعه بردارهای $\{v_1, \dots, v_d\}$ و $\{w_1, \dots, w_e\}$ را چنان یافت که:

$$S \text{ پایه‌ای برای } \{u_1, \dots, u_c, v_1, \dots, v_d\}$$

$$T \text{ پایه‌ای برای } \{u_1, \dots, u_c, w_1, \dots, w_e\}$$

باشد. در این صورت $S + T = S(u_1, \dots, u_c, v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_e)$ و اگر نشان دهیم که این بردارها نایسته خطی هستند، قضیه ثابت می‌شود.

مطلوب است تعیین $\dim S$ ، $\dim T$ و $\dim(S + T)$ و تعیین $\dim(S \cap T)$ با استفاده از قضیه (۵.۷).

۶۲ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

۶. گیریم F هیتای دو عنصری و V روی F یک فضای برداری دوبعدی باشد. چند بردار در V وجود دارد؟ V چند زیرفضای یک بعدی دارد؟ V چند پایه متمایز دارد؟

۸. دستگاههای معادله‌های خطی

بقیه این فصل به مسأله حل دستگاههای معادله‌های خطی با ضریبهای حقیقی اختصاص دارد. همان‌گونه که پیش از این نیز خاطرنشان ساختیم این مسأله یکی از مایه‌های جبرخطی است. یک دستگاه m معادله n مجهولی خطی را به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m\end{aligned}\tag{۱.۸}$$

که در آن α_{ij} و β_i عددهای حقیقی مشخص و $x_1, \dots, x_n$ مجهول‌اند، زیرنمایه‌ها به گونه‌ای گزیده شده‌اند که به ازای $1 \leq i \leq m$ معادله i ام برابر است با:

$$\alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n = \beta_i$$

که در آن نخستین زیرنمایه i در α_{ij} نمایانگر معادله‌ای است که α_{ij} در آن ظاهر می‌شود و زیرنمایه دوم j نمایانگر مجهول x_j است که α_{ij} ضریب آن است. به این ترتیب، برای مثال، α_{21} ضریب x_1 در معادله دوم است. ماتریسی که سطرهای آن بردارهای:

$$r_1 = \langle \alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n} \rangle, \dots, r_m = \langle \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn} \rangle$$

می‌باشند، ماتریس ضریبهای دستگاه (۱.۸) نام دارد. (باید یادآور شد که در بخش ۶ ماتریسها اندکی متفاوت با آن عرضه شده است.) همانند بخش ۶ ماتریسی را که سطرهای آن $r_1, \dots, r_m$ است به شکل زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

درایه‌های ماتریس یعنی $\{\alpha_{ij}\}$ طوری مرتب شده‌اند که α_{ij} درایه i ام از سطر j ام باشد. به عنوان مثال α_{13} درایه سوم از سطر نخست، α_{21} درایه نخست از سطر دوم است. اغلب ماتریس را به شکل فشرده‌تری با A یا (α_{ij}) نشان می‌دهیم.

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_n c_n = b \quad (2.1)$$

۶۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

که در آن $b = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$. به این ترتیب می‌توان دستگاه معادله‌های (۱.۸) را به‌طور فشرده‌تر با نماد زیر نشان داد:

$$x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = b \quad (۳.۸)$$

هر دستگاه معادله‌های همگن یا یک دستگاه همگن، دستگاهی است مانند (۳.۸) که در آن $b = 0$. اگر در (۳.۸)، $b \neq 0$ ، آن را دستگاه ناهمگن می‌نامند. بردار صفر $\langle 0, \dots, 0 \rangle$ همواره یک جواب دستگاه همگن:

$$x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = 0 \quad (۴.۸)$$

است. این جواب را جواب بدیهی و هر جواب ناصفر را جواب نابديهی می‌گویند. برای روشن‌شدن این مطالب، دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

ماتریس دستگاه برابر است با

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

بردارهای سطری عبارت‌اند از:

$$r_1 = \langle 3, -1, 1 \rangle, r_2 = \langle 1, 1, -1 \rangle$$

و بردارهای ستونی عبارت‌اند از:

$$c_1 = \langle 3, 1 \rangle, c_2 = \langle -1, 1 \rangle, c_3 = \langle 1, -1 \rangle$$

چنان‌که از جایگذاری دیده می‌شود $\langle \frac{2}{3}, 0, -\frac{5}{3} \rangle$ یک بردار جواب است.

$$3\left(\frac{2}{3}\right) - 0 - \frac{5}{3} = 1$$

$$\frac{2}{3} + 0 + \frac{5}{3} = 2$$

این دستگاه برحسب بردارهای ستونی چنین نوشته می‌شود:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = b$$

دستگاههای معادله‌های خطی ۶۵

که در آن $b = \langle 1, 2 \rangle$ و بردار جواب یعنی $\langle -\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{4} \rangle < \frac{3}{4}, 0, -\frac{5}{4}$ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$b = \frac{3}{4}c_1 - \frac{5}{4}c_2$$

ممکن است خواننده در این لحظه، پیش از مطالعه برهان قضیه زیر، بخواهد که مثالهای آخر این بخش را بررسی کند. در قضیه‌های زیر منظور از جواب یک دستگاه خاص تشریح می‌گردد و در مثالهای بعدی روش یافتن آنها نشان داده می‌شود.

(۵.۸) قضیه. برای اینکه دستگاه $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = b$ دارای جواب باشد لازم و کافی است که شرطهای زیر برقرار باشند:

۱. b به فضای ستونی $S(c_1, \dots, c_n)$ متعلق باشد.

۲. $\dim S(c_1, \dots, c_n) = \dim S(c_1, \dots, c_n, b)$.

برهان. از (۲.۸) فوراً نتیجه می‌شود که نخستین حکم هم‌ارز وجود یک جواب است. برای اثبات اینکه شرط (۲) هم‌ارز با شرط (۱) است، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم. اگر $b \in S(c_1, \dots, c_n)$ ، آنگاه روشن است که $S(c_1, \dots, c_n, b) = S(c_1, \dots, c_n)$ و شرط (۲) برقرار است. به‌عبارت دیگر شرط (۲) برقرار باشد، در این صورت $b \in S(c_1, \dots, c_n)$ ، وگرنه باید b پایه $S(c_1, \dots, c_n)$ یک مجموعه از $\dim S(c_1, \dots, c_n) + 1$ بردار نایسته خطی تشکیل دهند، که مخالف قضیه (۱.۵) است. به این ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد.

با استفاده از تعریفهای زیر می‌توان قضیه (۵.۸) را به روش مناسبتری بیان داشت.

(۶.۸) تعریف. گیریم (α_{ij}) یک ماتریس $m \times n$ با بردارهای ستونی $\{c_1, \dots, c_n\}$ باشد. رتبه این ماتریس، بنابر تعریف برابر است با بعد فضای ستونی $S(c_1, \dots, c_n)$.

(۷.۸) تعریف. اگر $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = b$ دستگاه ناهمگنی باشد که ماتریس ضریبهای آن دارای بردارهای ستونی $c_1, \dots, c_n$ است، آنگاه ماتریس $m \times (n+1)$ بعدی را که بردارهای ستونی آن $\{c_1, \dots, c_n, b\}$ است، ماتریس فزوده دستگاه می‌نامند. اثبات قضیه زیر با توجه به تعریفها و قضیه (۵.۸) آسان است.

(۸.۸) قضیه. یک دستگاه ناهمگن دارای یک جواب است، اگر و تنها اگر رتبه ماتریس ضرایب آن با رتبه ماتریس فزوده برابر باشد.

اکنون به‌طور نظری مسأله جواب داشتن یا نداشتن یک دستگاه ناهمگن را معین کرده‌ایم. در آخر بخش‌پیش روشی برای یافتن ریشه‌های یک دستگاه در بعضی حالت‌های ویژه آوردیم. اگر دستگاهی دارای جواب باشد، باید بتوانیم همه جوابهای آن را بیابیم. روش یافتن جوابهای یک دستگاه در قضیه زیر بیان می‌شود.

(۹.۸) قضیه. فرض کنیم که دستگاه ناهمگن:

$$x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = b \quad (۱۰.۸)$$

دارای جوابی مانند x_* است، در این صورت اگر x یک جواب دلخواه دستگاه همگن

$$x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = 0 \quad (۱۱.۸)$$

باشد، آنگاه $x_* + x$ جواب (۹.۸) است و هر جواب (۱۰.۸) را می‌توان به این شکل نوشت. برهان. نخست فرض کنیم که $x = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ یک جواب دستگاه همگن و $x_* = \langle \alpha_1^{(*)}, \dots, \alpha_n^{(*)} \rangle$ یک جواب (۱۰.۸) باشد. در این صورت داریم:

$$\alpha_1^{(*)} c_1 + \cdots + \alpha_n^{(*)} c_n = b \quad (۱۲.۸)$$

و

$$\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n = 0$$

از جمع این دو معادله به دست می‌آوریم:

$$(\alpha_1^{(*)} + \alpha_1) c_1 + \cdots + (\alpha_n^{(*)} + \alpha_n) c_n = b$$

که یعنی $x_* + x$ یک جواب (۱۰.۸) است.

اکنون گیریم $y = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ یک جواب دلخواه (۱۰.۸) باشد، پس داریم:

$$\beta_1 c_1 + \cdots + \beta_n c_n = b \quad (۱۳.۸)$$

اگر (۱۲.۸) را از (۱۳.۸) کم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$(\beta_1 - \alpha_1^{(*)}) c_1 + \cdots + (\beta_n - \alpha_n^{(*)}) c_n = 0$$

که بیان می‌کند $u = y - x_*$ یک جواب معادله همگن است و همان‌گونه که می‌خواستیم داریم:

$$y = x_* + u$$

و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد.

بنابراین مسأله یافتن همه جوابهای یک دستگاه ناهمگن منجر به یافتن یک جواب دستگاه ناهمگن و حل یک دستگاه همگن می‌گردد. در بخش بعد روش حل یک دستگاه همگن را خواهیم دید.

دستگاههای معادله‌های خطی ۶۷

در خاتمه این بخش چند مثال در مورد یافتن جوابهای دستگاههای ناهمگن، در صورت وجود، می‌آوریم. نخست مثالی را در نظر می‌گیریم که در بخش ۱ دیدیم.
مثال الف. نشان دهید که دستگاه زیر جواب دارد و آن را بیابید:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

ماتریس دستگاه برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و ماتریس فزوده برابر است با:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۴.۸)$$

اگر دستگاه را به شکل (۳.۸) بنویسیم، داریم:

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4 = b$$

که در آن:

$$c_1 = \langle 1, 1 \rangle, c_2 = \langle 2, 1 \rangle, c_3 = \langle -3, 1 \rangle,$$

$$c_4 = \langle 1, 1 \rangle, b = \langle 1, 0 \rangle$$

رتبه این ماتریس برابر است با:

$$\dim S(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

به آسانی دیده می‌شود که این مقدار برابر ۲ است، زیرا همه c_i ها به R_2 تعلق دارند. اکنون اگر ماتریس:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۶۸ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

را به فرم پله‌یی درآوریم داریم:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

پس $S(c_1, c_2, c_3, c_4) = R_2$ ، از این رو $b \in S(c_1, c_2, c_3, c_4)$ پس بنابر قضیه (۵.۸) یک جواب وجود دارد.

برای یافتن جواب بهتر است که روی سطرهای ماتریس فزوده یعنی (۱۴.۸) کار کنیم. نشان می‌دهیم که اگر ماتریس 5×2 :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{15} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{25} \end{pmatrix}$$

هم‌ارز سطری A باشد، در این صورت جوابهای دستگاه:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = \alpha_{15}$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = \alpha_{25}$$

وابسته به ماتریس جدید A' دقیقاً همان جوابهای دستگاه اصلی است و در این صورت این دو دستگاه را هم‌ارز می‌گوییم. کافی است که این حکم را تنها در حالتی که A' از A با یک عمل مقدماتی سطری به دست می‌آید، ثابت کنیم. برای یک عمل مقدماتی سطری نوع I (یعنی تعویض دو سطر) یا نوع III (ضرب یک سطر در یک ثابت ناصفر) نتیجه روشن است. برای تشریح یک عمل مقدماتی سطری از نوع II، نخست معادله‌های اصلی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0$$

که در آن:

$$L_1 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 1, \quad L_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

باید ثابت کنیم که اگر $L'_1 = L_1 + \lambda L_2$ و $L'_2 = L_2$ ، آنگاه جوابهای $L_1 = 0$ و $L_2 = 0$ ، همان جوابهای:

$$L'_1 = L_1 + \lambda L_2 = 0, \quad L'_2 = L_2 = 0$$

دستگاههای معادله‌های خطی ۶۹

هستند، روشن است که از $L_1 = 0$ و $L_2 = 0$ نتیجه می‌شود $L'_1 = 0$ و $L'_2 = 0$. از سوی دیگر اگر $L'_1 = 0$ و $L'_2 = 0$ آنگاه $L_2 = 0$ و $L_1 + \lambda L_2 = 0$ پس، $L_1 = 0$ به این ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

اکنون می‌توانیم دستگاه اصلی را حل کنیم. سعی ما این است که عملهای مقدماتی سطری ماتریس فزوده را (همانند بخش ۶) به شکل پله‌یی بنویسیم. سپس در صورت امکان آخرین معادله مربوط به آخرین سطر ناصفر ماتریس اخیر را نسبت به متغیرهایی که ضمن پله‌یی کردن ماتریس فزوده حذف نشده‌اند حل می‌کنیم. در این صورت مقادیرهای دیگر به سبب شکل پله‌یی ماتریس به آسانی پیدا می‌شوند. در مسئله موردنظر، به جای معادله‌های $L_1 = 0$ و $L_2 = 0$ معادله‌های $L_1 = 0$ و $L_2 - L_1 = 0$ را قرار می‌دهیم. معادله‌های اخیر عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_2 + 4x_3 &= -1\end{aligned}$$

این دستگاه را با پله‌یی کردن ماتریس آن نسبت به x_4 و x_3 و x_2 ، که ضمن عمل حذف نمی‌شوند، حل می‌کنیم. به عنوان مثال داریم $x_2 = 1$ ، $x_3 = 0$ که با جایگذاری در معادله نخست داریم، $1 = 1 + 2 = x_1$ از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که:

$$\langle -1, 1, 0, 0 \rangle$$

یک جواب دستگاه اصلی است.

در مورد این روش محاسبه چند نکته را باید خاطر نشان کرد:

۱. انجام عملهای مقدماتی سطری روی ماتریس فزوده، روشی است ساده که بررسی درستی آن در هر مرحله ساده است. این روش در حل مسأله‌های مفصلتر که با ماشین محاسبه انجام می‌شود به کار می‌رود.

۲. می‌توان با جایگذاری جواب به دست آمده در دستگاه اصلی درستی آن را آزمود.

۳. از این روش می‌توان در مورد هر دستگاهی استفاده کرد. این روش نه تنها وجود یا عدم وجود جواب را نشان می‌دهد بلکه در صورت وجود جواب، آن را به دست می‌دهد.

در خاتمه این بخش دو مثال دیگر می‌آوریم.

مثال ب. حلپذیری دستگاه زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیر بودن جواب آن را بیابید:

$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = -5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$-2x_1 + x_3 = -3$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$$

۷۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

ماتریس فزوده را به پله‌یی تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

دستگاه معادله‌های مربوط به ماتریس اخیر عبارت است از:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_3 = -1$$

که پس از حل جواب زیر به دست می‌آید:

$$\langle 1, 2, -1 \rangle$$

بنابر بحثی که در مثال (الف) انجام شد، این جواب یک جواب دستگاه اصلی نیز هست.

مثال پ. حلپذیری دستگاه زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیر بودن جواب آن را بیابید:

$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$-2x_1 + x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

تمرینها ۷۱

اگر همانند مثال (ب) عمل کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

این بار دستگاه هم‌ارز عبارت است از:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_2 + 3x_3 = -1$$

$$x_3 = 3$$

$$0 \cdot x_3 = 9$$

روشن است که دستگاه جواب ندارد.

تمرینها

۱. حلپذیری دستگاههای زیر را بیازمایید و در صورت حلپذیر بودن جوابهای آنها را بیابید:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad (\text{ب})$$

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad (\text{الف})$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

۷۲ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \quad (پ) \quad x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \quad (ت)$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \quad (ج) \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (ث)$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 = -1$$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(ح) \quad x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_1 + x_3 = 1 \quad (خ)$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

۲. برای چه مقدارهای α دستگاه زیر جواب دارد؟

$$3x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 5$$

۳. ثابت کنید یک دستگاه m معادله n مجهولی ($n > m$) همواره دارای جواب نابدیهی است.

۴. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه دستگاه معادله‌های همگن n مجهولی $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = 0$ دارای جواب ناصفر باشد این است که رتبه ماتریس ضریبها کمتر از n باشد.

۹. دستگاههای معادله‌های همگن

همان‌گونه که در بخشهای قبلی این فصل دیدیم، این بخش را با کلیتاتی درباره جوابهای دستگاه معادله‌های همگن شروع می‌کنیم. هدف این است که از یک سو وسیله‌ای برای بحث دقیق درباره مسأله‌ها پیدا کنیم، و از سوی دیگر قضیه‌هایی بیابیم که به وسیله آنها بتوانیم پیش از اینکه درگیر محاسبات عددی شویم چگونگی جوابهای مسائل را پیش‌بینی کنیم. بعداً در این بخش روش محاسبه کارایی جهت حل بعضی دستگاههای ویژه ارائه خواهیم داد.

(۱.۹) قضیه. مجموعه بردارهای جواب یک دستگاه همگن $x_1c_1 + \dots + x_nc_n = 0$

که آن را با S نشان می‌دهیم، یک زیرفضای R_n است.

۷۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

برهان. بنابر قضیه (۳.۷) می‌توان از میان خود بردارهای $c_1, \dots, c_n$ پایه‌ای برای $S(c_1, \dots, c_n)$ برگزید. ترتیب زیرنمایه‌ها را طوری تغییر می‌دهیم که این بردارهای پایه مواضع $1, \dots, r$ را اشغال کنند و همین تعویض را نیز در ترتیب مؤلفه‌های بردارهای جواب می‌دهیم. چون $\{c_1, \dots, c_r\}$ پایه‌ای است برای $S(c_1, \dots, c_n)$ ، هر بردار c_i که در آن $r+1 \leq i \leq n$ یک ترکیب خطی از بردارهای پایه است، و رابطه وابستگی خطی همان‌گونه که در قضیه گفته شد چنین نوشته می‌شود:

$$\lambda_1^{(i)} c_1 + \dots + \lambda_r^{(i)} c_r - c_i = 0, \quad \lambda_j^{(i)} \in R, \quad r+1 \leq i \leq n$$

بنابراین بردارهای:

$$u_i = \langle \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_r^{(i)}, \dots, -1, \dots, 0 \rangle, \quad r+1 \leq i \leq n$$

که در آنها -1 در جای i ام بردار u_i قرار دارد جوابهای دستگاه‌اند. اکنون باید ثابت کنیم که $\{u_i\}$ به‌طور خطی نایسته‌اند و فضای جواب را پدید می‌آورند. برای اثبات نایستگی خطی آنها، فرض می‌کنیم که یک رابطه خطی بین آنها برقرار است:

$$\mu_{r+1} u_{r+1} + \dots + \mu_n u_n = 0, \quad \mu_i \in R \quad (3.9)$$

طرف چپ برداری است متعلق به R_n که همه مؤلفه‌هایش صفرند. برای هر $r+1 \leq i \leq n$ مؤلفه i ام (۳.۹) برابر $-\mu_i$ است (چرا؟)، پس نتیجه می‌گیریم که $\mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$. اکنون گیریم $x = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ یک جواب دلخواه دستگاه اصلی است. بنابر تعریف داریم:

$$x + \sum_{k=r+1}^m \alpha_k u_k = \langle \xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0 \rangle$$

که در آن عناصر $\xi_1, \dots, \xi_r$ به R تعلق دارند، چون مجموعه جوابها یک زیرفضای R_n است، پس بردار $y = \langle \xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0 \rangle$ یک جواب دستگاه اصلی است و بنابر (۴.۸) داریم:

$$\xi_1 c_1 + \dots + \xi_r c_r + 0 c_{r+1} + \dots + 0 c_n = 0$$

چون $c_1, \dots, c_r$ به‌طور خطی نایسته‌اند، پس $\xi_1 = \dots = \xi_r = 0$ ، از این‌رو:

$$x = \sum_{k=r+1}^m (-\alpha_k) u_k \in S(u_{r+1}, \dots, u_n)$$

به این ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.

(۷.۹) قضیه. رتبهٔ سطری یک ماتریس $m \times n$ بعدی A با رتبهٔ A برابر است.

۷۶ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

برهان. از قراردادی که گذاشتیم استفاده می‌کنیم. اکنون بدون اینکه رتبه ستونی تغییر کند می‌توان فرض کرد که $\{r_1, \dots, r_t\}$ پایه‌ای است برای فضای سطری A ، که در آن t رتبه سطری A است. در این صورت به آسانی دیده می‌شود که دستگاه:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot x &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ r_t \cdot x &= 0 \end{aligned} \tag{۸.۹}$$

دارای همان فضای جوابی است که (۵.۹) دارد. برای اثبات آن کافی است ثابت کنیم که هر جواب (۸.۹) یک جواب (۵.۹) است. برای $1 \leq i \leq m$ داریم:

$$r_i = \xi_1 r_1 + \dots + \xi_t r_t, \quad \xi_j \in R$$

در این صورت، بنابر خواص ضرب داخلی $r \cdot x$ داریم:

$$r_i \cdot x = \sum_{k=1}^t \xi_k (r_k \cdot x) = 0$$

زیرا x یک جواب (۸.۹) است و قضیه ثابت می‌شود.

ستونهای ماتریس A' که دارای سطرهای $r_1, \dots, r_t$ است به R_t متعلق‌اند، از این رو

$$\text{رتبه}(A') \leq t$$

و

$$n - \text{رتبه}(A') \geq n - t$$

چون (۶.۹) و (۸.۹) دارای فضای جواب همانندند، پس بنابر نتیجه (۴.۹):

$$n - (\text{رتبه}(A)) = n - (\text{رتبه}(A')) \geq n - t$$

از این رو رتبه A مساوی با t یا کوچکتر از t است. با تعویض سطرها و ستونهای A ، ماتریس $n \times m$ بعدی A^* به دست می‌آید. با استدلال مشابهی در مورد A^* ، نتیجه می‌گیریم که رتبه A^* مساوی رتبه سطری A^* یا کوچکتر از آن است. ولی رتبه A^* برابر t و رتبه سطری A^* برابر رتبه A است. از ترکیب این نتیجه‌ها داریم:

$$\text{رتبه سطری}(A) = \text{رتبه}(A)$$

و قضیه (۷.۹) ثابت می‌شود.

دستگاههای معادله‌های همگن ۷۷

به عنوان مثال نخست، بحث دستگاه معادله‌های بخش ۱ را تکمیل می‌کنیم.
مثال الف. برای فضای جواب دستگاه معادله‌های همگن زیر پایه‌ای بیابید:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

همانند بخش پیش، دستگاه معادله‌های هم‌ارزی می‌یابیم (یعنی دستگاهی که دارای همان فضای جواب است) که ماتریس ضریبهای آن پله‌یی شکل باشد، این بار لازم نیست با ماتریس فزوده عمل کنیم، زیرا ستون اضافی تنها از ۰ها تشکیل می‌شود. داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین یک دستگاه هم‌ارز عبارت است از:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$$

$$0x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 0 \quad (9.9)$$

چون رتبه ماتریس ضریبها برابر ۲ است [با محاسبه این رتبه مثلاً با استفاده از قضیه (۷.۹)]، می‌دانیم که بعد فضای جواب برابر است با $4 - 2 = 2$. معادله دوم (۹.۹) به عنوان معادله‌ای برحسب $\{x_2, x_3, x_4\}$ دارای دو جواب نایسته خطی است که عبارت‌اند از:

$$\left\langle 1, \frac{1}{4}, 0 \right\rangle, \left\langle 0, 0, 1 \right\rangle$$

با گذاردن این جوابها در معادله نخست، دو جواب نایسته خطی دستگاه اصلی به دست می‌آید:

$$u_1 = \left\langle -\frac{5}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0 \right\rangle, \quad u_2 = \left\langle -1, 0, 0, 1 \right\rangle$$

مثال ب. جواب عمومی (یعنی همه جوابهای) دستگاه معادله‌های ناهمگن زیر را بیابید:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

بنابر قضیه (۹.۸) جواب عمومی برابر است با:

$$u = x_0 + x$$

۷۸ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

که در آن x یک جواب دستگاه ناهمگن و x همه جوابهای دستگاه همگن را می‌پذیرد. با استفاده از نتیجه‌های مثال الف از بخش ۸ و مثال الف از همین بخش، جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$\begin{aligned} u &= \langle -1, 1, 0, 0 \rangle + \lambda \langle -\frac{5}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0 \rangle + \mu \langle -1, 0, 0, 1 \rangle \\ &= \langle -1 - \frac{5}{4}\lambda - \mu, 1 + \lambda, \frac{1}{4}\lambda, \mu \rangle \end{aligned}$$

که در آن λ و μ عددهای حقیقی دلخواه‌اند.

مثال پ. همه جوابهای دستگاه همگن زیر را بیابید:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0$$

اگر طبق معمول عمل کنیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

این بار دستگاه معادله‌های هم‌ارز عبارت است از:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_4 = 0$$

رتبه ماتریس ضریبها (که همیشه می‌توان آن را با روش بخش ۶ یافت) برابر ۳ است، پس بعد فضای جواب برابر $4 - 3 = 1$ است. این بار از معادله آخر نتیجه می‌شود $x_4 = 0$. اگر این مقادیر را در معادله دوم بگذاریم، جواب $x_3 = 0$ به دست می‌آید از معادله نخست پایه‌ای برای فضای جواب به دست می‌آوریم، که عبارت است از بردار پایه:

$$u = \langle 1, -1, 0, 0 \rangle$$

(فراموش نکنید که باید درستی این جواب را با جایگذاری آن در معادله نخست امتحان کرد).

دستگاههای معادله‌های همگن ۷۹

در اینجا باید دانست که روش محاسبه‌ای، به‌طور کلی، مسئله یافتن جوابهای یک دستگاه همگن را به یافتن جوابهای یک معادله چند مجهولی تبدیل می‌کند. این کار را همواره می‌توان با استفاده مستقیم از روش اثبات قضیه (۲.۹) انجام داد. مثال ت. همه جوابهای معادله زیر را بیابید:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

بنابر قضیه (۲.۹) یک پایه فضای جواب عبارت است از:

$$\langle 2, -1, 0, 0, 0 \rangle, \langle -1, 0, -1, 0, 0 \rangle$$

$$\langle 1, 0, 0, -1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 0, 0, -1 \rangle$$

مثال ث. منظور از این مثال این است که نشان دهیم که نظریه فضاهای برداری بسیار ژرفتر و دامنه‌دارتر از بررسی تنها R_n و دستگاه معادله‌های خطی است. مسئله دوم بخش ۱ را بار دیگر در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم همه جوابهای معادله دیفرانسیل:

$$y'' + m^2 y = 0$$

را بیابیم. همان‌طور که دیدیم، مجموعه جوابهای این معادله یک زیر فضای S از $\mathcal{F}(R)$ است. تابعهای:

$$y_1 = \sin mx, \quad y_2 = \cos mx$$

هر دو به S تعلق دارند. به‌علاوه این دو تابع وابسته خطی‌اند، ولی این وابستگی با روشهای محاسبه‌ای هم‌ارزی سطری ماتریسها و غیره معلوم نمی‌شود بلکه به‌کمک تعریف اصلی و نتیجه‌های آن ثابت می‌گردد. تنها هنگامی $\{\sin mx, \cos mx\}$ می‌توانند وابسته خطی باشند که به‌ازای یک مقدار حقیقی λ داشته باشیم $\sin mx = \lambda \cos mx$. ولی چنین چیزی امکان ندارد، زیرا به‌عنوان مثال دو تابع $\sin mx$ و $\cos mx$ هر دو همزمان نمی‌توانند صفر باشند. برای اینکه ثابت کنیم که تابعهای $\sin mx$ و $\cos mx$ تشکیل پایه‌ای برای S می‌دهند، از این قضیه مهم، که معادله دیفرانسیل $y'' + m^2 y = 0$ یک جواب یکتای y دارد که در شرطهای آغازی:

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

با α و β عددهای حقیقی داده شده، صدق می‌کند و اینکه همواره تابعی به‌شکل $\lambda \sin mx + \mu \cos mx$ وجود دارد که در شرطهای آغازی صدق می‌کند، استفاده می‌کنیم. روشن است که اثبات این مطالب تا اندازه‌ای طولانی است (برای برهان آنها به‌بخش ۳۴ مراجعه

۸۰ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

کنید). آنچه که ما می‌خواهیم درباره‌اش بحث کنیم این است که نشان دهیم که گرچه به‌کمک نظریه فضاهای برداری می‌توان جوابهای یک معادله دیفرانسیل را بیان کرد، ولی جزئیات یافتن جواب یک معادله دیفرانسیل (از دیدگاه فضاهای برداری) با حل یک دستگاه معادله خطی بسیار متفاوت است.

تمرینها

۱. پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه زیر بیابید:

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

۲. پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه همگن مربوط به دستگاه تمرین ۱ از بخش ۸ بیابید.

۳. همه جوابهای دستگاه زیر را بیابید:

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

۴. در هر یک از مسأله‌های تمرین ۲ از بخش ۶، در صورت وجود، یک رابطه وابستگی خطی (با ضریبهای ناصفر) بیابید.

۵. در هندسه تحلیلی مسطحه روش یافتن معادله خطی مانند $Ax + By + C = 0$ که دو نقطه مفروض $(3, 1)$ و $(-1, 0)$ جوابهای آن باشند، داده شده است. نشان دهید که این مسأله با حل دستگاه همگن:

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

برای یافتن جوابهای ناصفر آن هم‌ارز است. ثابت کنید که اگر $\langle A', B', C' \rangle$ جواب ناصفر دیگری باشد، آنگاه این جواب مضربی از جواب نخست یعنی $\langle A, B, C \rangle$ است.

۶. با توجه به مسأله ۵، گیریم $\langle \alpha, \beta \rangle$ و $\langle \gamma, \delta \rangle$ دو نقطه متمایز صفحه باشند. نشان دهید که عددهای حقیقی A ، B و C وجود دارند که همه صفر نیستند و هر دو نقطه فوق در معادله:

$$Ax + By + C = 0$$

صدق می‌کنند. اگر این دو نقطه در معادله:

$$A'x + B'y + C' = 0$$

خمینه‌های خطی ۸۱

نیز صدق کنند آنگاه $\lambda \langle A', B', c' \rangle = \lambda \langle A, B, C \rangle$ عددی حقیقی است. در R_2 هر خط بنابر تعریف مجموعه جوابهای معادله $Ax + By + C = 0$ است. ثابت کنید که نتیجه بالا نشان می‌دهد که در R_2 هر دو نقطه متمایز بر یک خط منحصری قرار دارند.

۱۰. خمینه‌های خطی

در این بخش با استفاده از نتیجه‌های بخشهای ۵ تا ۹ مطالب مربوط به خط و صفحه در فضاها دوبعدی و سه‌بعدی را در R_n تعمیم می‌دهیم.

در R_n هر خط به شکل یک زیرفضای یک بعدی $S(a)$ از R_n یا به‌طور کلی به‌شکل انتقال یک زیرفضای یک بعدی $S(a)$ به اندازه بردار b که آن را با $b + S(a)$ نشان می‌دهیم، تعریف می‌شود. بنابراین یک بردار p به خط $b + S(a)$ تعلق دارد، هرگاه برای یک مقدار حقیقی λ (شکل ۷.۲) داشته باشیم:

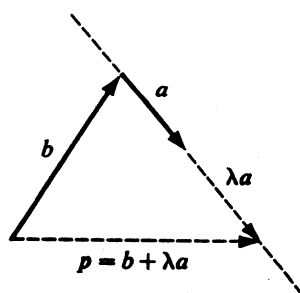
$$p = b + \lambda a$$

به‌همین قیاس می‌توانیم در R_n ، صفحه را به‌شکل یک زیرفضای دوبعدی S از R_n یا به‌طورکلیتر، به شکل انتقال $b + S$ از یک زیرفضای دوبعدی S به اندازه بردار ثابت b ، تعریف کنیم. اگر $\{a_1, a_2\}$ پایه‌ای برای S باشد، آنگاه برای اینکه p به $b + S$ تعلق داشته باشد، لازم و کافی است که (شکل ۸.۲ را ببینید):

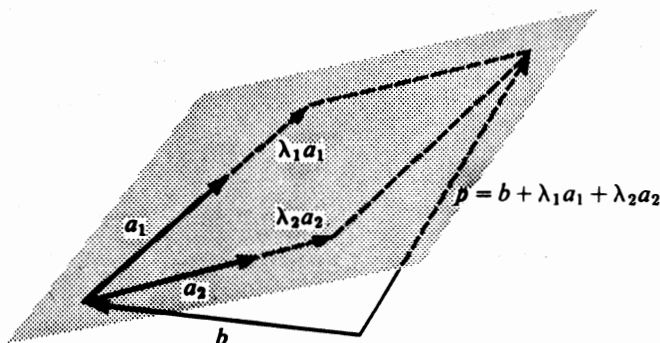
$$p = b + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \quad \lambda_i \in R$$

در تعریف زیر تعمیم مفهوم زیرفضا به حالت کلی آمده است.

(۱.۱۰) تعریف. یک خمینه خطی V از R_n عبارت است از مجموعه همه بردارهای $b + S$ که در آن b برداری ثابت است و S زیرفضایی ثابت از R_n . بنابراین برای اینکه $p \in V$



شکل ۷.۲



شکل ۸.۲

لازم و کافی است که برای یک بردار $a \in S$ داشته باشیم $p = b + a$. زیرفضای S فضای هادی V نامیده می‌شود. بعد V برابر است با بعد زیرفضای S .

(۲.۱۰) قضیه. گیریم $V = b + S$ خمینه‌ای خطی در R_n باشد. در این صورت فضای هادی V مجموعه همه بردارهایی است به شکل $p - q$ که $p, q \in V$ برهان. گیریم $p, q \in V$ ، در این صورت بردارهایی مانند $a, a' \in S$ وجود دارند به گونه‌ای که:

$$p = b + a, \quad q = b + a'$$

پس:

$$p - q = (b + a) - (b + a') = a - a' \in S$$

از سوی دیگر اگر $a \in S$ ، آنگاه $a = b - (b - a)$ پس $a = p - q$ که در آن $p = b$ و $q = b - a$ هر دو به V تعلق دارند. یعنی همان چیزی را که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این قضیه نشان می‌دهد که فضای هادی $V = b + S$ مستقل از b معین می‌شود.

می‌دانیم که در R_2 و R_3 خط و صفحه نیز به شکل مجموعه جوابهای معادله‌هایی خطی تعریف می‌شوند. بنابر تعریف یک خمینه خطی، $V = b + S$ نشان می‌دهد که خمینه خطی را می‌توان در حالت کلی به وسیله معادله‌هایی بیان کرد. بنابر آنچه در بخش ۸ دیدیم هر بردار متعلق به $b + S$ همان شکلی را دارد که ما برای جوابهای یک دستگاه معادله‌های خطی ناهمگن یافته بودیم، که در آن b جواب ویژه و S فضای جواب دستگاه همگن مربوط است.

برای استفاده حداکثر از این برداشت، می‌خواهیم روش نمایش یک زیرفضای S را به وسیله یک دستگاه از معادله‌های خطی نشان دهیم.

۸۳ خمینه‌های خطی

(۳.۱۰) لم. گیریم S یک زیرفضای r بعدی از R_n است. در این صورت مجموعه‌ای از $n - r$ معادله خطی همگن n مجهولی وجود دارد که فضای جواب آن دقیقاً S است. تبصره. هیچ مجموعه‌ای که تعداد معادله‌های آن از $n - r$ کمتر باشد نمی‌تواند فضای جوابش S باشد. چرا؟
برهان لم (۳.۱۰). گیریم $\{b_1, \dots, b_r\}$ یک پایه S است. تنها دستگاه معادله‌هایی که احتمالاً مربوط به مسأله است [با طرز نمایش (۶.۹)] عبارت است از:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot x &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ b_r \cdot x &= 0 \end{aligned} \quad (۴.۱۰)$$

ولی روشن است که این بیان مسأله را حل نمی‌کند، زیرا ممکن است (که معمولاً چنین است) که مثلاً $b_1 \cdot b_1 \neq 0$ پس b_1 در حالت کلی یک بردار جواب (۴.۱۰) نیست. گیریم S^* یک فضای جواب (۴.۱۰) باشد. بنابر (۷.۹) رتبه ماتریسی که سطرهای آن $b_1, \dots, b_r$ هستند برابر r است، از این رو بنابر (۴.۹) بعد S^* برابر $n - r$ است. گیریم $\{c_1, \dots, c_{n-r}\}$ پایه‌ای برای S^* باشد، و دستگاه معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} c_1 \cdot x &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ c_{n-r} \cdot x &= 0 \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه استدلال بالا، فضای جواب S^{**} این دستگاه دارای بعد r است، روشن است که $S \subset S^{**}$ (چرا؟). چون $\dim S = r$ ، از تمرین ۳ی بخش ۷ نتیجه می‌شود $S = S^{**}$ ، و لم ثابت می‌شود.

تبصره. باید توجه داشت که روش محاسبه‌ای بخشهای ۶ تا ۹ را می‌توان در هر یک از مرحله‌های برهان لم (۳.۱۰) به‌کار برد. به‌عنوان مثال، گیریم بخواهیم دستگاه معادله‌هایی را بیابیم که فضای جواب آن در R_4 دارای پایه‌ای متشکل از بردارهای $\langle 1, 1, 0, 1 \rangle$ و $b_1 = \langle 1, 1, 0, 1 \rangle$ باشد. $b_2 = \langle 1, 0, 1, 1 \rangle$ بگیریم $x = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} b_1 \cdot x &= 0 \\ b_2 \cdot x &= 0 \end{aligned} \quad (۵.۱۰)$$

بردارهای ستونی دستگاه عبارت‌اند از:

$$c_1 = \langle 1, 1 \rangle, c_2 = \langle 1, 0 \rangle, c_3 = \langle 0, 1 \rangle, c_4 = \langle 1, 1 \rangle$$

۸۴ فضاهای برداری و دستگاههای معادلات خطی

یک پایه فضای جواب دستگاه (۵.۱۰) عبارت است از:

$$\langle 1, 0, 0, -1 \rangle$$

$$\langle -1, 1, 1, 0 \rangle$$

پس بنابر لم (۳.۱۰) دستگاه معادله‌های مطلوب عبارت است از:

$$x_1 + \quad \quad -x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

با بیان قضیه بعدی تعبیر هندسی دستگاه معادله‌های خطی کامل می‌شود.

(۶.۱۰) قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه یک مجموعه از بردارهای $V \subset R_n$ یک خمینه خطی r بعدی تشکیل دهد، این است که V مجموعه همه جوابهای دستگاهی از $n - r$ معادله ناهمگن مجهولی باشد که رتبه ماتریس ضریبهای آن $n - r$ است. برهان. نخست گیریم:

$$x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = b, \quad c_i \in R_{n-r}$$

دستگاهی از $n - r$ معادله n مجهولی باشد که رتبه ماتریس ضریبهای آن $n - r$ است. بنابر قضیه (۹.۸) مجموعه V ی همه جوابها خمینه‌ای است خطی به شکل $x_0 + S$ که در آن S فضای جواب دستگاه همگن: $x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = 0$ است. بنابر نتیجه (۴.۹)، $\dim S = n - (n - r) = r$ از این رو $\dim V = r$. به‌وارون، گیریم $V = y + S$ یک خمینه خطی r بعدی باشد. بنابر لم (۳.۱۰) یک دستگاه از $n - r$ معادله وجود دارد که فضای جواب آن S است:

$$x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n = 0$$

اگر $y = \langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ ، گیریم:

$$b = \eta_1 c_1 + \cdots + \eta_n c_n$$

پس جوابهای دستگاه ناهمگن فوق درست برابر عناصر مجموعه $y + S = V$ است. و به‌این ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود. برای مثال، گیریم بخواهیم که برای خمینه خطی V یک دستگاه معادله بیابیم که فضای هادی آن S دارای پایه:

$$b_1 = \langle 1, 1, 0, 1 \rangle, \quad b_2 = \langle 1, 0, 1, 1 \rangle$$

تمرینها ۸۵

و متضمن بردار $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ باشد. چنانکه در نخستین مثال این بخش دیدیم، S یک فضای جواب دستگاه زیر است:

$$x_1 - x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

همانگونه که در برهان قضیه (۶.۱۰) دیدیم، بردار $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ را در این دستگاه می‌گذاریم، نتیجه می‌شود:

$$1 - 4 = -3$$

$$-1 + 2 + 3 = 4$$

پس معادله‌هایی که جوابهای آن یک خمینه خطی V تشکیل می‌دهند بنابر قضیه (۶.۱۰) عبارت‌اند از:

$$x_1 - x_4 = -3$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

تمرینها

۱. مجموعه‌ای از معادله‌های خطی همگن بیابید که فضای جواب آن با بردارهای زیر پدید آید:

$$\langle 2, 1, -3 \rangle, \langle 1, -1, 0 \rangle, \langle 1, 3, -4 \rangle \text{ (الف)}$$

$$\langle 2, 1, 1, -1 \rangle, \langle -1, 1, 0, 4 \rangle, \langle 1, 1, 2, 1 \rangle \text{ (ب)}$$

۲. مجموعه‌ای از معادله‌های همگن بیابید که فضای جواب آن S با بردارهای:

$$\langle 3, -1, 1, 2 \rangle, \langle 4, -1, -2, 3 \rangle, \langle 10, -3, 0, 7 \rangle, \langle -1, 1, -7, 0 \rangle$$

پدید آید. دستگاهی از معادله‌های ناهمگن بیابید که مجموعه جوابهای آن یک خمینه خطی با فضای هادی S باشد و از $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ بگذرد.

۳. یک ابر صفحه در R_n یک خمینه خطی $n-1$ بعدی است. ثابت کنید برای اینکه یک خمینه خطی یک ابر صفحه باشد لازم و کافی است که این خمینه مجموعه جوابهای یک معادله خطی $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$ باشد که در آن بعضی از α_i ها ناصفرند. ثابت کنید که هر خمینه خطی r بعدی درست اشتراک $n-r$ ابر صفحه است.

۴. در R_n هر خط به شکل یک خمینه خطی یک بعدی تعریف می شود. ثابت کنید که اگر p و q بردارهایی متمایز از خط L باشند، آنگاه L متضمن همه بردارهایی به شکل زیر است:

$$p + \lambda(q - p), \quad \lambda \in R$$

۵. ثابت کنید که در R_n هر خط فصل مشترک $n - 1$ ابر صفحه است. دستگاهی از معادله های خطی بیابید که مجموعه جوابهای آن خط گذرنده بر نقطه های زیر باشد:

الف) در R_2 $p = \langle 1, 1 \rangle, q = \langle 2, -1 \rangle$

ب) در R_3 $p = \langle 1, 1, 2 \rangle, q = \langle -1, 2, -1 \rangle$

پ) در R_4 $p = \langle 1, -1, 0, 2 \rangle, q = \langle 2, 0, 1, 1 \rangle$

۶. روی خط L ، فصل مشترک ابر صفحه های زیر، دو بردار متمایز بیابید:

در R_3 $x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

در R_4 $x_1 + x_2 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_2 - 2x_4 = 0$

۷. ثابت کنید اگر بردارهای p و q به خمینه خطی V تعلق داشته باشند، آنگاه خط گذرنده از p و q مشمول در V است.

۸. گیریم S و T زیر صفحه هایی از R_n باشند که به ترتیب به صورت فضاهای جواب دستگاههای همگن زیرند:

$$a_1 \cdot x = 0, \dots, a_r \cdot x = 0$$

و

$$b_1 \cdot x = 0, \dots, b_s \cdot x = 0$$

ثابت کنید که $S \cap T$ فضای جواب دستگاه زیر است:

$$a_1 \cdot x = 0, \dots, a_r \cdot x = 0, \quad b_1 \cdot x = 0, \dots, b_s \cdot x = 0$$

با استفاده از آن پایه ای برای $S \cap T$ بیابید، که در آن S و T زیر فضاهای تمرین ۵ از بخش ۷ باشند.

۹. گیریم در R_4 ، $S_1 = S(e_1, e_2, e_3)$ ، که در آن $e_1 = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle, e_2 = \langle 0, 1, 0, 0 \rangle, e_3 = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$ و $S_2 = S(a_1, a_2, a_3)$ که در آن $a_1 = \langle 1, 1, 0, 1 \rangle, a_2 = \langle 2, -1, 3, -1 \rangle, a_3 = \langle -1, 0, 0, 2 \rangle$ مطلوب است تعیین $\dim(S_1 + S_2)$ و $\dim(S_1 \cap S_2)$. پایه ای برای $S_1 \cap S_2$ بیابید.

۱۰. در R_3 محل برخورد خط گذرنده بر نقطه های $\langle 1, -1, 0 \rangle$ و $\langle -2, 1, 1 \rangle$ را با صفحه $3x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ بیابید.

تبدیل‌های خطی و ماتریسها

برای مقایسهٔ دستگاه‌های مختلف ریاضی هم‌نوع، بررسی نگاشتهایی از یک دستگاه به دستگاه دیگر که عملهای دستگاه را حفظ می‌کنند ضروری است. به عنوان مثال در حساب دیفرانسیل و انتگرال تابعهایی مانند f را که حدیابی را حفظ می‌کنند مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یعنی اگر $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$ ، آنگاه $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = f(x)$ در فضاهای برداری، تابعهایی را جستجو می‌کنیم که عملهای فضاهای برداری یعنی جمع و ضرب در یک عدد را حفظ می‌کنند. این تابعها تبدیل‌های خطی نام دارند. در این فصل تبدیل‌های خطی و رابطهٔ آنها را با ماتریسها مورد بحث قرار می‌دهیم. قضیه‌های عمیقتر دربارهٔ تبدیل‌های خطی را بعداً خواهیم دید.

۱۱. تبدیل‌های خطی

تبدیل‌های خطی نوع خاصی از تابعها هستند، پس بجاست در این بخش برخی از تعریفها و اصطلاحاتی را در مورد تابعهایی که روی مجموعه‌ها تعریف شده‌اند، یادآوری کنیم.

(۱.۱۱) تعریف. دو مجموعهٔ X و Y را در نظر می‌گیریم. هر تابع $f: X \rightarrow Y$ (که گاهی نگاشت نامیده می‌شود) قاعده‌ای است که به هر عنصر مجموعهٔ X یک عنصر یکتا از مجموعهٔ Y را مربوط می‌کند. عنصری از Y را که به وسیلهٔ تابع f به x مربوط می‌شود با $f(x)$ نشان

می‌دهیم. مجموعه X را حوزه یا حوزه تعریف f می‌گویند. دو تابع f و f' را برابر گویند و می‌نویسند $f = f'$ ، اگر یک حوزه X داشته باشند و به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = f'(x)$ می‌گویند تابع f یک‌به‌یک است هرگاه از $x_1 \neq x_2$ در X نتیجه شود $f(x_1) \neq f(x_2)$. [باید توجه داشت که این بیان هم‌ارز است با اینکه از $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه می‌شود $x_1 = x_2$]. تابع f از X به Y را پوشا می‌نامند هرگاه به ازای هر $y \in Y$ ، $x \in X$ ای وجود داشته باشد که $y = f(x)$. یک تابع f از X به Y ممکن است پوشا نباشد. هر تابع یک به یک و پوشای f از X به Y را یک تناظر دوسویی بین X و Y می‌نامند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مثالهایی از تابعها آشنا شده‌ایم. در اینجا مثالهایی می‌آوریم که نشان دهیم ویژگیهای یک به یک و پوشا بودن به یکدیگر بستگی ندارند. برای مثال تابع $f: R \rightarrow R$ که با $f(x) = x^2$ ، $x \in R$ ، تعریف می‌شود نه یک‌به‌یک است و نه پوشا (چرا؟). تابع $g: R \rightarrow R$ که با $g(x) = e^x$ تعریف می‌شود یک‌به‌یک است [زیرا به ازای همه مقادیر x ، $g'(x) > 0$ ، پس تابع اکیداً افزایشی است به این معنی که اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $g(x_1) < g(x_2)$] ولی g پوشا نیست زیرا به ازای هر مقدار x داریم $g(x) > 0$. تابع $h: R^* \rightarrow R$ که با:

$$h(x) = \log_e |x|, \quad x \in R^* = \{x \in R, x \neq 0\}$$

تعریف می‌شود پوشاست، ولی یک‌به‌یک نیست، زیرا به ازای هر مقدار x داریم $h(x) = h(-x)$. اکنون می‌پردازیم به تعریف تبدیل خطی از یک فضای برداری به فضای برداری دیگر. در این بخش F نمایش یک هیأت دلخواه است.

(۲.۱۱) تعریف. گیریم V و W دو فضای برداری روی F باشند. هر تبدیل خطی از V به W تابعی است مانند $T: V \rightarrow W$ که به هر بردار $v \in V$ یک بردار یکتای $w = T(v) \in W$ را مربوط می‌کند به گونه‌ای که:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2), \quad v_i \in V$$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v), \quad \alpha \in F, v \in V$$

اغلب به جای $T(v)$ قرار داد Tv را به کار خواهیم برد تا از ازدیاد پرانتزها دوری کنیم. همچنین نمایش پیکانی را در عبارتهایی نظیر «گیریم f تابعی است از V به W یعنی $f: V \rightarrow W$ » یا «تابع $f: V \rightarrow W$ ، v_1 را به w_1 می‌برد یعنی $w_1 \rightarrow v_1$ » زیاد به کار می‌بریم. نخست چند مثال از تبدیلهای خطی می‌آوریم.

مثال الف. تابع $T: R_1 \rightarrow R_1$ که به ازای هر عدد $\alpha \in R$ با ضابطه $T(x) = \alpha x$ تعریف می‌شود یک تبدیل خطی است. که با توجه به تعریف می‌توانیم به آسانی تحقیق کنیم. آنچه روشن نیست این است که اگر $f: R_1 \rightarrow R_1$ تبدیل خطی دلخواهی باشد، آیا f همان شکل

$$I(f_{\downarrow} + f_{\uparrow}) = I(f_{\downarrow}) + I(f_{\uparrow})$$

$$I(\alpha f) = \alpha I(f)$$

برای $\alpha \in R$ و $f_1, f_2, f \in C(R)$

مثال ۴.۱۰. گیریم $P(R)$ فضای برداری تابعهای چندجمله‌یی باشد که روی R تعریف شده‌اند. در این صورت تابع مشتق D ، که به هر تابع چندجمله‌یی مشتق آن را مربوط می‌سازد، یک تبدیل خطی از $P(R) \rightarrow P(R)$ است. باید بررسی کنیم که مشتق یک تابع چندجمله‌یی باز یک تابع چندجمله‌یی است و شرطهای زیر برای تابعهای چندجمله‌یی f, f_1, f_2 و عدد حقیقی α برقرارند:

$$D(f_1 + f_2) = D(f_1) + D(f_2)$$

$$D(\alpha f) = \alpha(Df)$$

این مثالها نشان می‌دهند که بعضی از عملهایی که در نظریهٔ معادله‌های خطی و حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد مطالعه قرار می‌گیرند مثالهایی از تبدیلهای خطی هستند. بخشی از اهمیت تبدیلهای خطی از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان این تبدیلهای را با بعضی از عملهای جبری ترکیب کرد، و دستگاه جبری حاصل دارای خواص بسیاری است که در دستگاههای جبری دیگری که تاکنون مطالعه کرده‌ایم یافت نمی‌شود.

(۴.۱۱) تعریف. گیریم V و W دو فضای برداری روی هیأت دلخواه F ، و S و T دو تبدیل خطی از $V \rightarrow W$ باشند. نگاشت $S + T$ از $V \rightarrow W$ را با دستور زیر تعریف می‌کنیم:

$$(S + T)v = S(v) + T(v), v \in V$$

در این صورت نگاشت $S + T$ از $V \rightarrow W$ را مجموع تبدیلهای خطی S و T می‌نامند.

(۵.۱۱) تعریف. گیریم N, M و P فضاهایی برداری روی F ، و S یک تبدیل خطی از $M \rightarrow N$ و T یک تبدیل خطی از $N \rightarrow P$ باشد. در این صورت نگاشت $TS : M \rightarrow P$ که با:

$$(TS)(m) = T[S(m)]$$

تعریف می‌شود، نگاشتی است از $M \rightarrow P$ که حاصلضرب تبدیلهای خطی T و S نامیده می‌شود. اگر $\alpha \in F$ و $S : M \rightarrow N$ ، آنگاه αS نگاشتی است از $M \rightarrow N$ به‌گونه‌ای که برای هر $m \in M$ با $(\alpha S)(m) = \alpha(S(m))$ تعریف می‌شود.

(۶.۱۱) قضیه. گیریم V و W فضاهایی برداری روی F و $L(V, W)$ نمایش مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای خطی از V در W باشند، در این صورت $L(V, W)$ نسبت به عملهای:

$$S+T, \quad S, T \in L(V, W)$$

$$\alpha S, \quad \alpha \in F, \quad S \in L(V, W)$$

تبدیل‌های خطی ۹۱

یک فضای برداری روی F است. برهان. نخست ثابت می‌کنیم که $S + T$ و αS به $L(V, W)$ تعلق دارند. استدلال بر استفاده کامل از اصلهای فضای برداری مبتنی است. گیریم $v_1, v_2 \in V$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned}(S + T)(v_1 + v_2) &= S(v_1 + v_2) + T(v_1 + v_2) \\ &= [S(v_1) + S(v_2)] + [T(v_1) + T(v_2)] \\ &= [S(v_1) + T(v_1)] + [S(v_2) + T(v_2)] \\ &= (S + T)(v_1) + (S + T)(v_2)\end{aligned}$$

برای $\xi \in F$ داریم:

$$\begin{aligned}(S + T)(\xi v) &= S(\xi v) + T(\xi v) = \xi[S(v)] + \xi[T(v)] \\ &= \xi[S(v) + T(v)] = \xi[(S + T)(v)]\end{aligned}$$

در مورد نگاشت αS داریم:

$$(\alpha S)(v_1 + v_2) = \alpha[S(v_1) + S(v_2)] = \alpha S(v_1) + \alpha S(v_2)$$

و برای $\xi \in F$ ، چون F نسبت به ضرب جابه‌جایی است، پس:

$$\begin{aligned}(\alpha S)(\xi v) &= \alpha[S(\xi v)] = \alpha[\xi S(v)] \\ &= (\alpha \xi)S(v) = (\xi \alpha)S(v) \\ &= \xi[(\alpha S)(v)]\end{aligned}$$

تبدیل خطی $\circ$ ، که به هر $v \in V$ بردار صفر را مربوط می‌کند در شرط زیر صدق می‌کند:

$$T + \circ = T, \quad T \in L(V, W)$$

تبدیل $-T$ که با:

$$(-T)v = -T(v)$$

تعریف می‌شود، دارای ویژگی زیر است:

$$T + (-T) = \circ$$

بررسی سایر اصلها را به عهده متعلم می‌گذاریم.

۹۲ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

در مجموعه همه تبدیلیهای خطی از یک فضای برداری V به خودش سه عمل جمع، ضرب در یک اسکالر، و ضرب تبدیلیهای خطی، راه یافته‌اند. ویژگیهای جبری این عملها در قضیه بعدی آمده است.

(۷.۱۱) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی F ، و $S, T \in L(V, V)$ و $\alpha \in F$. در این صورت:

$$S + T, ST, \alpha S$$

به $L(V, V)$ تعلق دارند. $L(V, V)$ نسبت به دو عمل $S + T$ و αS یک فضای برداری است. به علاوه $L(V, V)$ دارای ویژگی شرکتپذیری، یعنی:

$$S(TU) = (ST)U$$

نیز هست. روی V یک تبدیل خطی $\mathbf{1}$ وجود دارد که تبدیل همانی نام دارد و به گونه‌ای است که:

$$\mathbf{1}v = v, \quad v \in V$$

$$\mathbf{1}T = T\mathbf{1} = T, \quad T \in L(V, V) \quad \text{و}$$

سرانجام $L(V, V)$ دارای ویژگی پخشپذیری است، یعنی:

$$S(T + U) = ST + SU, \quad (S + T)U = SU + TU$$

برهان. چون ویژگیهای عملهای $S + T$ و αS روی $L(V, V)$ ، در قضیه پیش مورد بررسی قرار گرفت، پس کافی است که ویژگیهای ST را مورد بررسی قرار دهیم. نخست ثابت می‌کنیم که ST یک تبدیل خطی است. برای $v_1, v_2 \in V$ و $\alpha \in F$ داریم:

$$\begin{aligned} (ST)(v_1 + v_2) &= S[T(v_1 + v_2)] = S[T(v_1) + T(v_2)] \\ &= S[T(v_1)] + S[T(v_2)] = (ST)v_1 + (ST)v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ST)(\alpha v_1) &= S[T(\alpha v_1)] = S[\alpha T(v_1)] \\ &= \alpha \{S[T(v_1)]\} = \alpha [ST(v_1)] \end{aligned} \quad \text{و}$$

بدین ترتیب ثابت شد که $ST \in L(V, V)$. به همین روش ثابت می‌شود که TS که در (۵.۱۱) تعریف شد یک تبدیل خطی است.

اکنون گیریم S, T و U عنصرهای $L(V, V)$ باشند. برای بررسی ویژگیهای شرکتپذیری و پخشپذیری، ثابت می‌کنیم که، به عنوان مثال اثر $S(TU)$ و $(ST)U$ روی یک عنصر دلخواه v

همانند است. گیریم $v \in V$ ، آنگاه:

$$[S(TU)](v) = S[(TU)(v)] = S\{T[U(v)]\}$$

همچنین:

$$[(ST)U](v) = ST[U(v)] = S\{T[U(v)]\}$$

به همین ترتیب:

$$\begin{aligned} [S(T+U)](v) &= S[(T+U)(v)] = S[T(v) + U(v)] \\ &= S[T(v)] + S[U(v)] = (ST + SU)(v) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} [(S+T)U](v) &= (S+T)U(v) = S[U(v)] + T[U(v)] \\ &= (SU)(v) + (TU)(v) = (SU + TU)(v) \end{aligned}$$

خواص تبدیل همانی ۱ روشن است. به این ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.
از آنچه گذشت مفهوم کلی زیر نتیجه می‌شود:

(۸.۱۱) تعریف. هر حلقه $\mathcal{R}$ یک دستگاه ریاضی متشکل از یک مجموعه $\{a, b, \dots\}$ و دو عمل جمع و ضرب تعریف شده روی آن است. هر یک از این دو عمل به هر جفت از عنصرهای a و b متعلق به $\mathcal{R}$ یک عنصر دیگر متعلق به $\mathcal{R}$ نسبت می‌دهد. این عنصر را در حالت جمع با $a + b$ و در مورد ضرب با ab نشان می‌دهیم. این دو عمل برای هر $a, b, c \in \mathcal{R}$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

$$a + b = b + a \quad ۱.$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad ۲.$$

۳. یک عنصر $0 \in \mathcal{R}$ و یک عنصر $1 \in \mathcal{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای هر $a \in \mathcal{R}$ داریم

$$a1 = 1a = a \text{ و } a + 0 = a$$

۴. برای هر $a \in \mathcal{R}$ یک عنصر $-a \in \mathcal{R}$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $a + (-a) = 0$

$$(ab)c = a(bc) \quad ۵.$$

$$a(b + c) = ab + ac, (a + b)c = ac + bc \quad ۶.$$

۷. اگر قانون تعویضپذیری برای ضرب برقرار باشد (یعنی بازاری $a, b \in \mathcal{R}$ ، $ab = ba$) آنگاه

$\mathcal{R}$ را حلقه تعویضپذیر می‌گویند.

هر هیأت یک حلقه تعویضپذیر است، مجموعه عددهای صحیح Z یک حلقه تعویضپذیر تشکیل می‌دهند که هیأت نیست. در تمرینهای آخرین بخش، نشان داده خواهد شد که در حالت کلی تبدیلهای خطی $L(V, V)$ نسبت به ضرب دارای ویژگی تعویضپذیری نیستند اکنون می‌توان قضیه (۷.۱۱) را به صورت مختصرتری بیان کرد:

(۷.۱۱) قضیه. $L(V, V)$ یک حلقه است.

لازم است درجه صدق اصول حلقه در $L(V, V)$ را، وقتی اعضای آن تبدیلهای خطی فرض می‌شوند، مورد بررسی قرار دهیم. برای اینکه این مسأله را به طور دقیقتری مطرح کنیم، گیریم $M(V, V)$ مجموعه همه تابعهای $T: V \rightarrow V$ باشد و $S + T$ و ST را همانند آنچه در مورد تبدیلهای خطی دیدیم تعریف می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که همه اصلهای حلقه در $M(V, V)$ صدق می‌کنند به استثنای قانون توزیعپذیری:

$$S(T + U) = ST + SU$$

که برای عنصرهای S, T و U متعلق به $M(V, V)$ برقرار نیست. نگاشت $\langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \langle \beta, \alpha \rangle$ برای $\alpha, \beta \in R$ یک تبدیل خطی از R_2 است به گونه‌ای که $T \neq 0$ ولی $T^2 = 0$. برای هر T وارون $\hat{T}$ وجود ندارد به گونه‌ای که $T\hat{T} = 1$ ، زیرا از $T\hat{T} = 1$ نتیجه می‌شود:

$$T(T\hat{T}) = T \cdot 1 = T$$

در حالی که به سبب خاصیت شرکتپذیری:

$$T(T\hat{T}) = T^2\hat{T} = 0 \cdot \hat{T} = 0$$

که منجر به تناقض $T = 0$ می‌شود. به سبب این پدیده تعریف زیر لازم می‌آید:

(۹.۱۱) تعریف. تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ را وارونپذیر (یا عادی) می‌نامیم هرگاه یک تبدیل خطی $T^{-1} \in L(V, V)$ (به نام وارون T) وجود داشته باشد به گونه‌ای که:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = 1$$

همان گونه که در تمرینهای آخر این فصل خواهیم دید از $TU = 1$ همواره نتیجه نمی‌شود $UT = 1$ ، پس اگر T' وارون T باشد باید دو برابری $TT' = 1$ و $T'T = 1$ برقرار باشند. بعضی از ویژگیهای تبدیلهای وارونپذیر از دید تعریف زیر بهتر تفهیم می‌گردد:

(۱۰.۱۱) تعریف. گروه دستگاهی است ریاضی متشکل از یک مجموعه ناتهی G و یک عمل که به هر دو عنصر S و T از G یک عنصر دیگر ST متعلق به G را تخصیص می‌دهد، به گونه‌ای که شرایط زیر برقرارند:

تبدیلهای خطی ۹۵

$$(ST)U = S(TU) \quad S, T, U \in G. ۱$$

۲. یک عنصر $۱ \in G$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $S \in G$ داریم $S۱ = ۱S = S$

۳. برای هر $S \in G$ یک عنصر $S^{-۱} \in G$ وجود دارد به گونه‌ای که $SS^{-۱} = S^{-۱}S = ۱$

(۱۱.۱۱) قضیه. گیریم G معرف مجموعه تبدیلهای وارونپذیر متعلق به $L(V, V)$ باشد؛

در این صورت G نسبت به عمل ضرب که در (۵.۱۱) تعریف شده یک گروه است.

برهان. بنابر تعریف تبدیلهای خطی وارونپذیر و آنچه در مورد $L(V, V)$ ثابت شد، تنها لازم

است ثابت کنیم که اگر $S, T \in G$ ، آنگاه $ST \in G$. داریم:

$$(ST)T^{-۱}S^{-۱} = S \cdot ۱S^{-۱} = ۱$$

$$T^{-۱}S^{-۱}(ST) = T^{-۱} \cdot ۱T = ۱$$

پس $ST \in G$ و $T^{-۱}S^{-۱}$ وارون ST است.

قضیه بعدی در باره یکتایی $T^{-۱}$ در مورد گروههاست که در حالت کلی برقرار است.

(۱۲.۱۱) قضیه. اگر G یک گروه دلخواه باشد، آنگاه معادله‌های:

$$AX = B, XA = B$$

بترتیب دارای جوابهای یکتای $A^{-۱}B$ و $AB^{-۱}$ هستند. به‌ویژه از $XA = ۱$ نتیجه می‌شود

$X = A^{-۱}$. به همین ترتیب از $AX = ۱$ ، نتیجه می‌شود $X = A^{-۱}$.

برهان. داریم:

$$A(A^{-۱}B) = (AA^{-۱})B = ۱B = B$$

$$(BA^{-۱})A = B(A^{-۱}A) = B \cdot ۱ = B$$

و

این رابطه‌ها نشان می‌دهند که جواب معادله‌ها وجود دارند. برای اثبات یکتایی، فرض می‌کنیم

$AX' = B$ در این صورت $A^{-۱}(AX') = A^{-۱}B$ و چون:

$$A^{-۱}(AX') = (A^{-۱}A)X' = ۱ \cdot X' = X'$$

پس $X' = A^{-۱}B$. به همین ترتیب از $X'A = B$ نتیجه می‌شود $X' = BA^{-۱}$. به این ترتیب

برهان قضیه کامل می‌گردد.

در فصل بعد مثالهای مهم دیگری از گروه را خواهیم دید.

اکنون به‌ذکر روشی برای آزمون وارونپذیر بودن یک تبدیل خطی می‌پردازیم.

(۱۳.۱۱) قضیه. شرط لازم و کافی برای وارونپذیر بودن تبدیل $T \in L(V, V)$ این است که T یک‌به‌یک و پوشا باشد.
برهان. نخست فرض می‌کنیم T وارونپذیر است. در این صورت یک تبدیل خطی T^{-1} وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = \mathbf{1}$$

اکنون فرض می‌کنیم برای $v_1, v_2 \in V$ ، $T(v_1) = T(v_2)$. از اینجا نتیجه می‌شود که:

$$T^{-1}(T(v_1)) = T^{-1}(T(v_2))$$

در نتیجه $v_1 = v_2$ زیرا $T^{-1}T = \mathbf{1}$. پس ثابت شد که T یک‌به‌یک است. برای اثبات پوشا بودن T ، گیریم $v \in V$ در این صورت:

$$v = \mathbf{1}(v) = (TT^{-1})v = T(T^{-1}(v))$$

پس $v = T(u)$ که در آن $u = T^{-1}(v)$. بنابراین T پوشاست.
به‌عکس فرض می‌کنیم T یک‌به‌یک و پوشاست. می‌خواهیم نشان دهیم که T وارونپذیر است، برای این منظور باید یک تبدیل خطی T^{-1} تعریف کنیم. گیریم $v \in V$ چون T پوشاست، یک بردار $w \in V$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(w) = v$ ، و چون T یک‌به‌یک است پس بردار w یکتاست. لذا یک تابع $T^{-1}: V \rightarrow V$ باقاعده زیر تعریف می‌شود:

$$T^{-1}(v) = w$$

که در آن $T(w) = v$. نخست باید نشان دهیم که T^{-1} یک تبدیل خطی است. گیریم $v_1, v_2 \in V$ و بردارهای w_1, w_2 را چنان می‌یابیم که:

$$T(w_1) = v_1, T(w_2) = v_2$$

چون T خطی است، پس:

$$T(w_1 + w_2) = v_1 + v_2$$

پس بنابر تعریف T^{-1} :

$$T^{-1}(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2)$$

تبدیل‌های خطی ۹۷

به همین ترتیب، گیریم $T(w) = v$ و $\alpha \in F$. در این صورت $T(\alpha w) = \alpha T(w) = \alpha v$ داریم:

$$T^{-1}(\alpha v) = \alpha w = \alpha T^{-1}(v)$$

به این ترتیب ثابت شد که $T^{-1} \in L(V, V)$. سرانجام برای تحقیق $TT^{-1} = T^{-1}T = \text{id}$ به ازای $v \in V$ یک عنصر w وجود دارد به گونه‌ای که $T(w) = v$:

$$TT^{-1}(v) = T(w) = v = \text{id}v$$

و

$$T^{-1}T(w) = T^{-1}(v) = w = \text{id}w$$

چون این رابطه‌ها برای همه بردارهای v و w برقرار است پس نتیجه می‌گیریم که T وارونپذیر است و قضیه ثابت می‌شود.

(۱۴.۱۱) تعریف. تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$ را یک یکرخی می‌نامند هرگاه T نگاشتی یک‌به‌یک از V روی W باشد. اگر یک یکرخی $T: V \rightarrow W$ وجود داشته باشد، دو فضای برداری V و W را یکرخت می‌گویند.

اگر دو فضای برداری یکرخت باشند، ساختار این دو به عنوان فضای برداری یکی است و هر حقیقتی درباره یکی از دو فضا را می‌توان به حقیقتی درباره دیگری منتقل کرد. در حقیقت این دلیل اصلی به کار بردن کلمه «یکرخت» است. به عنوان مثال، اگر بعد یک فضا ۵ باشد بعد دیگری نیز ۵ است، زیرا یکرختی موجود بین آنها هر پایه یکی را به یک پایه دیگری می‌برد. در حالتی که یک یکرختی $T: V \rightarrow W$ وجود داشته باشد یکرختیهای گوناگون دیگری نیز وجود دارند که با T متفاوت‌اند، و در انتقال ویژگیهای V به W باید نشان دهیم که کدام یکرختی مورد استفاده قرار گرفته است.

مثال ۳. فرض کنیم V روی R یک فضای برداری سه بعدی باشد. ثابت می‌کنیم که یک یکرختی $T: V \rightarrow R_3$ وجود دارد. چون $\dim V = 3$ ، پس V دارای یک پایه $\{v_1, v_2, v_3\}$ است. در این صورت هر بردار $v \in V$ را می‌توان با ضریبهای $\alpha_i \in R$ به شکل:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

نوشت. چون $\{v_1, v_2, v_3\}$ به طور خطی ناپسته‌اند، ضریبهای $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ به طور یکتا با بردار v تعیین می‌شوند (چرا؟) بنابراین، قاعده:

$$T(v) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$$

۹۸ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

معرف یک تابع $T: V \rightarrow R_2$ است. باید نشان دهیم که T خطی، یک به یک و پوشاست. گیریم v به شکل بالا داده شده است و $\alpha \in R$. در این صورت:

$$\alpha v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3) = \alpha \alpha_1 v_1 + \alpha \alpha_2 v_2 + \alpha \alpha_3 v_3$$

بنابراین:

$$T(\alpha v) = \langle \alpha \alpha_1, \alpha \alpha_2, \alpha \alpha_3 \rangle = \alpha \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \alpha T(v)$$

به همین ترتیب $T(v + v') = T(v) + T(v')$ زیرا ضریبهای $v + v'$ نسبت به پایه داده شده به ترتیب مجموع ضریبهای v و v' هستند. چون هر بردار V یک ترکیب خطی از $\{v_1, v_2, v_3\}$ است، پس T پوشاست. سرانجام، فرض کنیم $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = T(v) = T(v')$. در این صورت $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = v'$ و T یک به یک است.

البته، مطلب خاصی درباره بعد ۳ وجود ندارد، با همان استدلال ثابت می شود که هر فضای برداری n بعدی روی R با R_n یکرخت است.

مثال ج. گیریم T و U تبدیلیهای خطی $R_2 \rightarrow R_2$ هستند که با دستگاههای معادله های زیر تعریف شده اند:

$$T: \begin{cases} y_1 = -x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad U: \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$

دستگاههای معادله هایی را که $T + U$ و TU را تعریف می کنند پیدا کنید.
داریم

$$T(\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle) = \langle -\alpha_1 + 2\alpha_2, 0 \rangle$$

$$U(\langle \beta_1, \beta_2 \rangle) = \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \quad \text{و}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} (T + U)(\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle) &= T \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + U \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \\ &= \langle -\alpha_1 + 2\alpha_2, 0 \rangle + \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle \\ &= \langle 2\alpha_2, \alpha_1 \rangle \end{aligned}$$

بنابراین دستگاه معادله هایی که $T + U$ را تعریف می کنند چنین هستند:

$$y_1 = 2x_2$$

$$y_2 = x_1$$

تبدیلهای خطی ۹۹

برای یافتن TU داریم:

$$\begin{aligned} TU < \alpha_1, \alpha_2 > &= T(U < \alpha_1, \alpha_2 >) = T < \alpha_1, \alpha_1 > \\ &= < -\alpha_1 + 2\alpha_1, 0 > = < \alpha_1, 0 > \end{aligned}$$

و دستگاه معادله‌هایی که TU را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از:

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = 0$$

مثال ج. ثابت کنید برای این که تبدیل خطی T که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

تعریف می‌شود یک‌به‌یک باشد، لازم و کافی است که دستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

تنها دارای جواب صفر باشد.

نخست فرض می‌کنیم که تبدیل خطی T یک‌به‌یک است. در این صورت $T(0) = 0$ و اگر $v = < \alpha_1, \dots, \alpha_n >$ یک جواب دستگاه همگن باشد، آنگاه $T(v) = 0$. چون T یک‌به‌یک است، پس $v = 0$ تنها جواب دستگاه همگن است. به وارون فرض کنیم که دستگاه همگن تنها دارای جواب صفر است و گیریم $T(v) = T(v')$ که در آن:

$$v = < \alpha_1, \dots, \alpha_n >, v' = < \alpha'_1, \dots, \alpha'_n >$$

در این صورت $v - v' = 0$ و جواب دستگاه همگن است و

مثال ح. تحقیق کنید که تبدیل خطی $T: R_3 \rightarrow R_2$ که با دستگاه معادله‌های

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_3$$

داده شده است یک‌به‌یک هست یا نیست.

بعد فضای جواب دستگاه همگن:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

برابر است با تفاضل ۳ و رتبه (A)، که در آن A ماتریس ضریبهاست. چون رتبه A برابر ۲ است، پس بعد فضای جواب یک است، در نتیجه دستگاه همگن دارای جواب ناصفر است. پس T یک به یک نیست.

مثال خ. تبدیل خطی $T: R_n \rightarrow R_m$ را که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m$$

تعریف شده است در نظر می‌گیریم. نشان دهید که $w \in R_m$ نگاره $T(v)$ ی یک بردار $v \in R_n$ است اگر و تنها اگر w ترکیبی خطی از بردارهای ستونی ماتریس دستگاه باشد. در فصل ۲ نشان دادیم که اگر $w = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ ، می‌توان دستگاه معادله‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$w = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$$

که در آن $c_1, \dots, c_n$ بردارهای ستونی دستگاه هستند. همین حکم مسأله را حل می‌کند.

مثال د. تحقیق کنید که تبدیل مثال (ح) پوشاست یا نه. بنابراین چه که در مثال (خ) دیدیم T تنها هنگامی پوشاست که هر بردار R_2 یک ترکیب خطی از بردارهای ستونی ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و در این مثال چنین است، زیرا رتبه A برابر ۲ است، پس تبدیل پوشاست.

تمرینها

۱. در نگاشتهای زیر از $R_2 \rightarrow R_2$ ، کدامها تبدیلهای خطی هستند:

(الف) $\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle y_1, y_2 \rangle$ که در آن $y_1 = 3x_1 - x_2 + 1$ و $y_2 = -x_1 + 2x_2$

(ب) $\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle y_1, y_2 \rangle$ که در آن $y_1 = 3x_1 + x_2^2$ و $y_2 = -x_1$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle x_2, x_1 \rangle \quad (\text{پ})$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle \quad (\text{ت})$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle 2x_1, x_2 \rangle \quad (\text{ث})$$

۲. نشان دهید که تابع $T: F_n \rightarrow F_m$ ، مذکور در مثال (ب) یک تبدیل خطی است.

۳. گیریم T یک تبدیل خطی از $F_2 \rightarrow F_2$ است که با دستگاه:

$$y_1 = -3x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

تعریف شده است و U تبدیلی خطی که با دستگاه:

$$y_1 = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1$$

تعریف شده است. دستگاه معادله‌های خطی را که تبدیلهای

$$2T, T - U, T^2, TU, UT, T^2 + 2U$$

را تعریف می‌کنند بیابید: آیا تساوی $TU = UT$ برقرار است؟

۴. گیریم D تبدیلی است خطی از تابعهای چند جمله‌ای $P[R]$ که با «مشتق $Df = f$ » تعریف شده است، و M نگاشتی از $P[R] \rightarrow P[R]$ که با $(Mf)(x) = xf(x)$ تعریف شده است. آیا روی M یک تبدیل خطی است؟ تبدیلهای $DM, M + D$ و MD را بیابید. آیا تساوی $MD = DM$ برقرار است؟

۵. گیریم T یک تبدیل خطی از V به W است. ثابت کنید $T(0) = 0$ و برای هر $v \in V$ ، $T(-v) = -T(v)$. اگر V_1 یک زیر فضای V باشد، ثابت کنید $T(V_1)$ که متشکل از همه بردارهای $\{Ts, s \in V_1\}$ است یک زیر فضای W است.

۶. با استفاده از روشهای مثالهای (ج) و (ح)، تبدیلهای خطی را که با دستگاه معادله‌های زیر تعریف شده‌اند برای یک به یک بودن بیازمایید:

$$y_1 = x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2$$

$$y_3 = -2x_1$$

$$y_1 = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = -x_1 + 2x_3$$

$$y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_3 = x_2 + x_3$$

$$y_1 = 3x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + x_2$$

$$y_3 = -x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

(الف)

(ب)

(پ)

(ت)

(ث)

۱۰۲ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

۷. با استفاده از مثال (خ)، ثابت کنید هر تبدیل خطی که با یک دستگاه از معادله‌های خطی تعریف شده است R_n را به R_m می‌برد اگر و تنها اگر، رتبهٔ ماتریس ضریبهای دستگاه برابر m باشد.

۸. با استفاده از مثال (خ)، تبدیلیهای خطی تمرین ۶ را بیازمایید و تعیین کنید کدام یک R_n را بر روی R_m می‌نگارد.

۹. گیریم T یک تبدیل خطی از R_n به R_n است که با دستگاه معادله‌های:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, n$$

تعریف شده است. ثابت کنید که احکام زیر در مورد T هم‌ارزند:
الف) T یک‌به‌یک است.

ب) T پوشاست.

پ) T یک یکرختی از F_n روی F_n است.

ت) T یک تبدیل خطی وارونپذیر است.

۱۰. گیریم I یک تبدیل خطی از $P[R] \rightarrow P[R]$ است که با:

$$I(f) = \alpha_0 x + \frac{\alpha_1 x^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_k x^{k+1}}{k+1}$$

تعریف شده است که در آن $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ یک تابع چند جمله‌ای است.

گیریم D عمل مشتق‌گیری در $P[R]$ است. نشان دهید که $DI = 1$ ولی D و I هیچ یک یکرختی نیستند. آیا D یک‌به‌یک است؟ پوشاست؟ I چگونه؟

۱۲. جمع و ضرب ماتریسها

در بخش ۱۱، عملهای جمع، ضرب در یک اسکالر و ضرب تبدیلیهای خطی را تعریف کردیم. در این بخش همین عملها را در مورد ماتریسها تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۳ رابطهٔ بین تبدیلیهای خطی فضاهای برداری دلخواه متناهی-بعد و ماتریسها را خواهیم دید. بخش ۱۲ مقدمه‌ای است بر بخش ۱۳. در بدو امر تعریف عملهای فضای برداری روی ماتریسها اشکالی ندارد زیرا هر ماتریس $m \times n$ بعدی را به عنوان یک $m \cdot n$ تایی در نظر می‌گیریم.

(۱.۱۲) تعریف. گیریم $A = (\alpha_{ij})$ و $B = (\beta_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بعدی باشند که ضریبهای آنها به F تعلق دارند. مجموع $A + B$ مطابق تعریف، عبارت است از یک ماتریس $m \times n$ که عنصر (i, j) ام آن $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$ است. اگر αA ، $\alpha \in F$ یک ماتریس $m \times n$ است که عنصر (i, j) ام آن $\alpha \alpha_{ij}$ است.
اکنون می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

جمع و ضرب ماتریسها ۱۰۳

(۲.۱۲) قضیه. مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ که عنصرهایشان به F تعلق دارند نسبت به عملهای مذکور در تعریف (۱.۱۲) روی F یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. برهان این قضیه همانند برهانی است که در مورد فضای برداری بودن F_n انجام شد، به این سبب از تکرار آن خودداری می‌شود. تعریف ضرب ماتریسها چندان ساده نیست. برای شروع، مسأله‌ای همانند آنچه در مسأله‌های بخش ۱۱ دیدیم در نظر می‌گیریم. گیریم $T: R_2 \rightarrow R_3$ تبدیل خطی:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= -x_1 + x_2 \\ y_3 &= x_1 \end{aligned} \quad (۳.۱۲)$$

و $U: R_3 \rightarrow R_3$ تبدیل خطی:

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 + x_3 \\ y_2 &= x_1 + x_2 \\ y_3 &= -x_1 + 2x_3 \end{aligned}$$

است. ماتریسهای مربوط به این تبدیلیها عبارت‌اند از:

$$T \leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U \leftrightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تبدیل خطی UT, R_3 را در R_3 می‌نگارد. دستگاه معادله‌هایی که آن را تعریف می‌کنند در نظر می‌گیریم. اگر:

$$\begin{aligned} T(x) &= y, \quad U(y) = z \\ UT(x) &= U(y) = z \end{aligned} \quad \text{آنگاه}$$

دستگاه مربوط به U که $\{z_1, z_2, z_3\} \rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ می‌برد عبارت است از:

$$\begin{aligned} z_1 &= -y_1 + y_3 \\ U: z_2 &= y_1 + y_2 \\ z_3 &= -y_1 + 2y_3 \end{aligned} \quad (۴.۱۲)$$

۱۰۴ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

اکنون به جای $\{y_1, y_2, y_3\}$ مقدارش را از (۳.۱۲) قرار می‌دهیم و دستگاه زیر را که مربوط به UT است به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} z_1 &= -(x_1 + x_2) + x_1 = -x_2 \\ z_2 &= (x_1 + x_2) + (-x_1 + x_2) = 2x_2 \quad (5.12) \\ z_3 &= -(x_1 + x_2) + 2x_1 = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

که مربوط است به ماتریس:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

تعریف حاصلضرب ماتریسهای B و A با ماتریس C یک امر طبیعی است. در این صورت حاصلضرب UT ی تبدیلیهای خطی، مربوط به حاصلضرب BA ی ماتریسهای متناظر با آنهاست. برای دست یافتن به چگونگی تشکیل حاصلضرب $C = BA$ ، معادله‌های (۳.۱۲) و (۴.۱۲) را به ترتیب به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \\ y_3 &= \alpha_{31}x_1 = \alpha_{32}x_2 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3 \\ z_2 &= \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3 \\ z_3 &= \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3 \end{aligned}$$

در این صورت (۵.۱۲) چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} z_1 &= \beta_{11}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{12}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{13}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \\ z_2 &= \beta_{21}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{22}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{23}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \\ z_3 &= \beta_{31}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2) + \beta_{32}(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2) + \beta_{33}(\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2) \end{aligned}$$

جمع و ضرب ماتریسها ۱۰۵

درایه (۱,۱)ام ماتریس حاصلضرب BA چنین به دست می آید که عناصر سطر نخست B و عناصر ستون نخست A را نظیر به نظیر درهم ضرب می کنیم و نتیجه ها را با هم جمع می کنیم. سایر درایه ها نیز با روش مشابهی به دست آمده اند.

اینک تعریف رسمی حاصلضرب:

(۶.۱۲) تعریف. گیریم $B = (\beta_{ij})$ یک ماتریس $q \times n$ (سطر و n ستون) و $A = (\alpha_{kl})$ یک ماتریس $n \times m$ باشد که عناصری هر دو به F تعلق دارند. در این صورت حاصلضرب $C = BA$ یک ماتریس $q \times m$ است که درایه (i, j) ام آن γ_{ij} برابر است با:

$$\gamma_{ij} = \beta_{i1}\alpha_{1j} + \cdots + \beta_{in}\alpha_{nm} = \sum_{k=1}^n \beta_{ik}\alpha_{kj}$$

$1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq q$. به طور کلی ضرب یک ماتریس B ی $q \times r$ در یک ماتریس A ی $s \times t$ تنها هنگامی تعریف شده است که $r = s$ و در این حالت نتیجه یک ماتریس BA ی $q \times t$ است که طبق قاعده ای که گفته شد به دست می آید.

عمل ضرب دو ماتریس بسیار ساده تر است از آنچه در تعریف آن گفته شد.

برای تعیین حاصلضرب دو ماتریس یعنی BA به ترتیب زیر عمل می کنیم:

۱. باید شماره ستونهای B با شماره سطرهای A برابر باشد، در غیر این صورت حاصلضرب BA تعریف نشده است.

۲. به فرض این که (۱) برقرار باشد، شماره سطرهای BA برابر شماره سطرهای B و شماره ستونهای آن برابر شماره ستونهای A خواهد بود. برای یافتن درایه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس BA ، عناصر سطر اول B را نظیر به نظیر در عناصر ستون اول A ضرب می کنیم و نتیجه ها را جمع می کنیم. (این همان قاعده ای است که در تعریف بیان شد). برای یافتن درایه واقع در سطر اول و ستون دوم BA ، عناصر سطر اول B را نظیر به نظیر در عناصر ستون دوم A ضرب می کنیم و نتیجه ها را جمع می کنیم. به طور کلی، برای یافتن درایه واقع در سطر i ام و ستون j ام BA ، عناصر سطر i ام B را نظیر به نظیر در عناصر ستون j ام A ضرب می کنیم و نتیجه ها را جمع می کنیم.

مثال الف. حاصلضرب ماتریسهای زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \end{pmatrix} \quad (i)$$

که در آن

$$\gamma_{11} = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\gamma_{12} = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\gamma_{21} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\gamma_{22} = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

و غیره. به عنوان مثال، به جای ضرب نظیر به نظیر عناصر و جمع آنها نوشته‌ایم:

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین:

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

در زیر چند مثال دیگر می‌آوریم:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{تعریف نشده است} \quad \text{(ii)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)}$$

$$\mathbf{A}x = b$$

که در آن $A = (\alpha_{ij})$ ، و:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

تبدیل خطی را که با (۸.۱۲) تعریف شده است می‌توان به شکل:

$$T(x) = A \cdot x \quad (9.12)$$

بیان کرد. که در آن x بردار ستونی با درایه‌های $x_1, \dots, x_n$ است که به عنوان یک ماتریس $n \times 1$ در نظر گرفته می‌شود و $A \cdot x$ نمایش ضرب ماتریسی است. با توجه به آنچه گذشت کار با تبدیلیهای خطی که با دستگاه معادله‌ها تعریف می‌شوند آسانتر می‌گردد.

مثال ب. گیریم $T: R_n \rightarrow R_m$ تبدیل خطی است که با دستگاه معادله‌های (۸.۱۲) تعریف شده است و ماتریس ضریبهای آن A است، فرض می‌کنیم $U: R_m \rightarrow R_p$ با دستگاه معادله‌های دیگری تعریف شده است که ماتریس ضریبهای آن B است. در این صورت تبدیل خطی $UT: R_n \rightarrow R_p$ را می‌توان با استفاده از (۹.۱۲) به شرح زیر حساب کرد. گیریم x بردار ستونی نمایانگر یک عنصر R_n است. در این صورت:

$$UT(x) = U(T(x)) = U(Ax) = B(Ax)$$

که در آن همه ضربهای سمت راست ضربهای ماتریسی هستند. بنابر قانون شرکتپذیری ضرب ماتریسی داریم:

$$UT(x) = B(Ax) = (BA)x$$

که نشان می‌دهد حاصلضرب دو تبدیل خطی با دستگاه معادله‌هایی تعریف می‌شود که ماتریس ضریبهای آن حاصلضرب ماتریسهای ضریبهای متناظر دو تبدیل خطی (به همان ترتیب) است. به عنوان یک مثال عددی گیریم T و U با دستگاه معادله‌های زیر تعریف شده‌اند:

$$T: \begin{cases} y_1 = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = -x_1 + x_2 \end{cases} \quad U: \begin{cases} y_1 = -x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$

جمع و ضرب ماتریسها ۱۰۹

در این صورت به فرض $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ داریم:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ UT(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

پس دستگاه معادله‌هایی که UT را تعریف می‌کنند عبارت‌اند از:

$$y_1 = -2x_1$$

$$y_2 = 3x_1 - x_2$$

در بقیه این بخش چند کاربرد دیگر ضرب ماتریس‌ها را بیان می‌کنیم.

(۱۰.۱۲) تعریف. ماتریس یک $n \times n$ عبارت است از ماتریس:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که همه عناصر آن صفرند به‌جز عناصر $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$ که برابر ۱ می‌باشند به آسانی دیده می‌شود که برای هر ماتریس $n \times n$ داریم:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

یک ماتریس $\mathbf{A}$ $n \times n$ را وارونپذیر می‌گویند هرگاه یک ماتریس $\mathbf{B}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

با استفاده از قانون شرکتپذیری ضرب ماتریسها، و به‌کاربردن برهان قضیه (۱۲.۱۱) نکته‌به‌نکته در مورد ماتریسها می‌توان نشان داد که اگر $\mathbf{A}$ وارونپذیر باشد، در این صورت ماتریس $\mathbf{B}$ به‌گونه‌ای که $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ یکتاست. $\mathbf{B}$ را وارون $\mathbf{A}$ می‌نامیم و با $\mathbf{A}^{-1}$ نشان می‌دهیم. اکنون می‌خواهیم روش محاسبه $\mathbf{A}^{-1}$ را بررسی کنیم.

۱۱۰ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

مثال پ. یافتن وارون یک ماتریس با استفاده از عملهای مقدماتی سطری. در زیر از گفتن جزئیات کامل چشم‌پوشی شده است.

گیریم I ماتریس یکه $n \times n$ باشد. یک ماتریس مقدماتی را به یکی از شکلهای P_{ij} ، $D_i(\mu)$ ، $B_{ij}(\lambda)$ ، $i, j = 1, \dots, n$ ، نشان می‌دهیم که در آن $\lambda, \mu \in F$. این ماتریسها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

۱. P_{ij} از I با تعویض سطرهای i ام و j ام به دست می‌آید.
 ۲. $B_{ij}(\lambda)$ از I با افزودن λ برابر سطر j ام به سطر i ام آن به دست می‌آید.
 ۳. $D_i(\mu)$ با ضرب سطر i ام I در μ به دست می‌آید.
- برای مثال، در مجموعه ماتریسهای 2×2 داریم:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

اکنون گیریم A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ است.

۱. $P_{ij}A$ با تعویض سطرهای i ام و j ام A به دست می‌آید.
۲. $B_{ij}(\lambda)A$ با افزودن λ برابر سطر j ام A به سطر i ام آن به دست می‌آید.
۳. $D_i(\mu)A$ از ضرب سطر i ام A در μ به دست می‌آید.

همانند فصل ۲ عملهای روی A که در بالا بیان شدند، عملهای مقدماتی نام دارند و می‌توان آنها را به ترتیب به عنوان عملهای نوع ۱، ۲، و ۳ نامید.

اکنون گیریم A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ است. بنابه قضیه (۱۶.۶) یک دنباله از عملهای مقدماتی نوع ۱، ۲، و ۳ وجود دارند که A را به ماتریسی به صورت نردبانی تبدیل می‌کنند، و شماره سطرهای ناصفر آن برابر رتبه A است.

اکنون گیریم A وارونپذیر است. در این صورت از $A \cdot x = 0$ نتیجه می‌شود $x = 0$. پس بعد فضای جواب دستگاه معادله‌های همگن با ماتریس ضریبهای A برابر صفر است. بنابر نتیجه (۴.۹)، رتبه A برابر n است. بنابراین ماتریسی که سطرهای آن به شکل پله‌ای است و در بخش اول استدلال یافتیم به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

که در آن $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ ناصفرند. با به کار بردن عملهای مقدماتی نوع ۳ می‌توان فرض کرد که همه $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ برابر یک هستند. در این صورت با افزودن مضرب مناسبی از سطر دوم به سطر

جمع و ضرب ماتریسها ۱۱۱

اول، می‌توان بدون تعویض α_{11} ، مقدار α_{12} را به صفر تبدیل کرد. همین‌طور، می‌توان با افزودن مضربهایی از سطر سوم به سطرهاى اول و دوم، α_{13} و α_{23} را به ۰ تبدیل کرد، بدون این‌که α_{11} یا α_{22} تعویض یابد. با ادامهٔ این روش، **A** به ماتریس یکه تبدیل می‌گردد. بحث بالا نشان می‌دهد که ماتریسهای مقدماتی $E_1, E_{s,0}, \dots, E_s$ از نوعهای ۱، ۲ و ۳ وجود دارند به‌گونه‌ای که:

$$E_s E_{s-1} \cdots E_1 A = I$$

به سبب یکتایی وارون یک ماتریس:

$$A^{-1} = E_s E_{s-1} \cdots E_1 I$$

پس اگر عملهای مقدماتی که با $E_1, E_{s,0}, \dots, E_s$ تعریف می‌شوند **A** را به **I** تبدیل کنند، همین تبدیلهای مقدماتی که روی **I** انجام شوند آن را به A^{-1} تبدیل می‌کنند. به‌عنوان مثال عددی، وارونپذیری ماتریس زیر را تحقیق و وارون آن A^{-1} ، را در صورت وجود می‌یابیم:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

این کار را در دو ستون انجام می‌دهیم؛ در ستون اول با تبدیل مقدماتی سطری، **A** را به ماتریس یکه تبدیل می‌کنیم، و در ستون دیگر همان عملهای مقدماتی را روی **I** انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} & I &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & &\sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & &\sim \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

از تعبیر ضرب ماتریسها برحسب دستگاه معادله‌ها، کاربرد ضرب ماتریسها در مشتق‌گیری جزئی نتیجه می‌گردد. این مطلب را در یک حالت خاص بیان می‌کنیم.

مثال ۳. قاعدهٔ زنجیری مشتق‌گیری جزئی. گیریم $T : R_2 \rightarrow R_3$ تابعی باشد که اگر $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ ، آنگاه $T(x) = y = \langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ که در آن:

$$y_1 = F_1(x_1, x_2),$$

$$y_2 = F_2(x_1, x_2),$$

$$y_3 = F_3(x_1, x_2)$$

و F_3, F_2, F_1 توابعی هستند که مشتقهای جزئی

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

وجود دارند و در هر نقطهٔ x به‌ازای $1 \leq j \leq 2$ ، $1 \leq i \leq 3$ پیوسته‌اند. ماتریس ژاکوبی تابع T در نقطهٔ x را به‌شکل ماتریس 3×2 زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(T)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}_x$$

که در آن $(\cdot)_x$ نشان می‌دهد که مشتقها در x حساب شده‌اند. اکنون فرض کنیم تابع $U : R_3 \rightarrow R_3$ به‌گونه‌ای است که $U(y) = z = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ و برای $1 \leq i \leq 3$ ، $z_i = z_i(y_1, y_2, y_3)$. همچنین فرض می‌کنیم که مشتقهای جزئی $\frac{\partial z_i}{\partial y_j}$ وجود دارند و در نقطهٔ y پیوسته‌اند و تشکیل ماتریس ژاکوبی زیر را می‌دهند:

$$J(U)_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z_3}{\partial y_1} & \frac{\partial z_3}{\partial y_2} & \frac{\partial z_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}_y$$

تابع $UT : R_2 \rightarrow R_3$ به‌شکل:

$$(UT)(x) = U(T(x)) = U(y) = z$$

جمع و ضرب ماتریسها ۱۱۳

تعریف می‌شود، و ماتریس ژاکوبی آن برابر است با:

$$\mathbf{J}(UT)_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_x$$

به شرط اینکه مشتقات جزئی وجود داشته باشند. در کتابهای حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره ثابت شده است که مشتقات جزئی $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$ وجود دارند و از قاعده‌های زنجیری مانند:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \frac{\partial y_3}{\partial x_1}$$

به دست می‌آیند. نکته جالب توجه این که همه این قاعده‌های زنجیری را می‌توان به شکل ساده زیر بیان کرد (و به خاطر سپرد):

$$\mathbf{J}(UT)_x = \mathbf{J}(U)_{y=T(x)} \cdot \mathbf{J}(T)_x \quad (11.12)$$

که در آن ضرب همان ضرب ماتریسی ژاکوبی است.
برای مثال گیریم $T: R_1 \rightarrow R_2$ به شکل:

$$y = T(x) = \langle \sin x, \cos x, x \rangle$$

و $U: R_2 \rightarrow R_2$ به شکل $U(y) = z = \langle z_1, z_2 \rangle$ تعریف شده است و در آن $z_1 = y_1 y_2$ و $z_2 = y_2 y_3$ داریم:

$$\mathbf{J}(T)_x \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dx}{dy_2} \\ \frac{dx}{dy_3} \\ \frac{dx}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ 1 \end{pmatrix}$$

به علاوه:

$$\mathbf{J}(U)_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}$$

۱۱۴ تبدیلهای خطی و ماتریسها

با استفاده از دستور (۱۱.۱۲)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(UT)_x &= \begin{pmatrix} y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (y_2 \cos x - y_1 \sin x, -y_2 \sin x + y_1) \\ &= \left(\frac{dz_1}{dx}, \frac{dz_2}{dx} \right) \end{aligned}$$

پس، برای مثال:

$$\frac{dz_1}{dx} = y_2 \cos x - y_1 \sin x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

تمرینها

درهمهٔ مثالهای عددی ماتریسهای مورد بحث ماتریسهایی با عناصر حقیقی هستند.
۱. ضربهای ماتریسی زیر را انجام دهید:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

۲. آیا ضرب ماتریسهای $n \times n$ در قانون جابه‌جایی صدق می‌کند، یعنی $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ؟

۳. گیریم $\mathbf{x}$ معرّف یک ماتریس ستونی با اندازه مناسب باشد. معادلهٔ ماتریسی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ را در هر یک از حالت‌های زیر حل کنید. باید توجه داشت که بنابر (۸.۱۲) تا (۹.۱۲) معادلهٔ ماتریسی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ با یک دستگاه از معادله‌های خطی هم‌ارز است.

تمرینها ۱۱۵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{ت})$$

۴. هر ماتریس قطری D روی F یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌های (i, j) ی آن جز در موارد $i = j$ ، صفرند. معمولاً یک ماتریس قطری را به شکل:

$$D = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$$

می‌نویسیم. تأثیر ضرب یک ماتریس دلخواه را، از سمت چپ و راست در یک ماتریس قطری، تعیین کنید.

۵. دو ماتریس A و B را جابه‌جایی گویند، هرگاه $AB = BA$. ثابت کنید که تنها ماتریسهای $n \times n$ که با همه ماتریسهای قطری $n \times n$ جابه‌جایی هستند خود ماتریسهای قطری هستند.

۶. نتیجه ضرب یک ماتریس A ی $n \times n$ را در ماتریسهای مقدماتی $P_{ij}(\lambda)$ و $B_{ij}(\lambda)$ و $D_i(\mu)$ که در مثال (پ) گفته شد بررسی کنید.

۷. وارون هریک از ماتریسهای زیر را در صورت وجود بیابید:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ت}) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ث})$$

۸. نشان دهید که معادله $Ax = b$ ، که در آن A یک ماتریس $n \times n$ و x و b بردارهای ستونی هستند تنها هنگامی دارای یک جواب یکتاست که ماتریس A وارونپذیر باشد. در این صورت

نشان دهید که جواب معادله برابر است با $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

۱۳. تبدیلیهای خطی و ماتریسها

در بقیه این فصل، V و W معرف فضاهاى بردارى متناهی-بعد روی F هستند. نخستین قضیه ادعا می‌کند که هر تبدیل خطی با معلوم بودن اثرش روی یک مجموعه از عناصر پایه کاملاً تعیین می‌شود، به وارون می‌توان هر تبدیل خطی را با تخصیص نگاره‌های دلخواه برای یک مجموعه از عناصر پایه تعریف کرد.

(۱.۱۳) **قضیه.** گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V روی F باشد. اگر S و T عناصر $L(V, W)$ باشند به‌گونه‌ای که $S(v_i) = T(v_i)$ ، $1 \leq i \leq n$ ، آنگاه $S = T$. به‌علاوه، گیریم $w_1, \dots, w_n$ بردارهایی دلخواه در W باشند. در این صورت یک و تنها یک تبدیل خطی $T \in L(V, W)$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(v_i) = w_i$.
 برهان. گیریم $v = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$. لذا از $S(v_i) = T(v_i)$ ، $1 \leq i \leq n$ ، نتیجه می‌شود که:

$$S(v) = S\left(\sum \xi_i v_i\right) = \sum \xi_i S(v_i) = \sum \xi_i T(v_i) = T(v)$$

چون این تساوی برای هر $v \in V$ برقرار است، پس $S = T$ ، و نخستین بخش قضیه ثابت می‌شود. برای اثبات بخش دوم، گیریم $w_1, \dots, w_n$ داده شده‌اند و نگاشت $T: V \rightarrow W$ را با قرار دادن:

$$T\left(\sum \xi_i v_i\right) = \sum \xi_i w_i, \quad \xi_i \in F$$

تعریف می‌کنیم. چون $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای است برای V ، پس از $\sum \eta_i v_i = \sum \xi_i v_i$ نتیجه می‌شود $\xi_i = \eta_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، و از این رو $T(\sum \xi_i v_i) = T(\sum \eta_i v_i)$ ، یعنی نشان دادیم که T یک تابع است. بنابر تعریف بی‌درنگ نتیجه می‌شود که T یک تبدیل خطی از $V \rightarrow W$ می‌باشد، به‌گونه‌ای که $T(v_i) = w_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، و یکتایی T از بخش اول قضیه نتیجه و بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

اکنون یک پایه ثابت V مانند $\{v_1, \dots, v_n\}$ روی F در نظر می‌گیریم و برای سادگی فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$. در این صورت برای هر i ، $T(v_i)$ یک ترکیب خطی است از $v_1, \dots, v_n$ و می‌توان با استفاده از ضریبهای آنها، سطرها یا ستونهای یک ماتریس $n \times n$ را تعریف کرد که با پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ توأماً تبدیل خطی T را، بنابر قضیه پیش، معین می‌کند. از آنجا که حاصلضرب دو تبدیل خطی با حاصلضرب ماتریسهای مربوط به آنها تعریف می‌شود پس $T(v_i)$ سطرها یا ستونهای ماتریس مربوط به T را می‌دهد.

تبدیل‌های خطی و ماتریسها ۱۱۷

برای مثال، گیریم V یک فضای برداری دوبعدی باشد روی F که پایه آن $\{v_1, v_2\}$ است. گیریم S و T متعلق به $L(V, V)$ چنین تعریف شوند:

$$S(v_1) = -v_1 + 2v_2, \quad T(v_1) = 2v_1 + 3v_2$$

$$S(v_2) = v_1 + v_2, \quad T(v_2) = -v_2$$

در این صورت ST یک تبدیل خطی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$ST(v_1) = S(2v_1 + 3v_2) = 2(-v_1 + 2v_2) + 3(v_1 + v_2) = v_1 + 7v_2$$

$$ST(v_2) = S(-v_2) = -(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$$

اگر فرض کنیم که $S(v_i)$ سطرهاى ماتریس S و غیره هستند، ...، ماتریسهای ST و T, S به ترتیب چنین خواهند شد:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

و داریم:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

اما اگر $S(v_i)$ را ستونهای ماتریس S و غیره بگیریم، ماتریسهای متناظر با ST و T, S به ترتیب چنین می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

و در این صورت برقراری تساوی زیر محرز است:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

و از آنجا تعریف زیر نتیجه می‌شود:

(۲.۱۳) تعریف. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V و $T \in L(V, V)$. ماتریس T نسبت به پایه* $\{v_1, \dots, v_n\}$ از V ماتریسی است $n \times n$ که ستون i ام آن، برای $1 \leq i \leq n$ ، مجموعه*

* ماتریس T نه تنها به مجموعه بردارهای پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ ، بلکه به ترتیب آنها نیز بستگی دارد. معمولاً ترتیب عناصر پایه روشن است ولی در حالت‌های پیچیده‌تر پایه را مرتب می‌گیریم، یعنی برای عناصر پایه ترتیب خاصی اتخاذ می‌کنیم.

۱۱۸ تبدیلهای خطی و ماتریسها

ضریبهایی است که در ترکیب خطی $T(v_i)$ برحسب $v_1, \dots, v_n$ وجود دارند. پس ماتریس (α_{rs}) تبدیل T با معادله‌های زیر بیان می‌شود:

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} v_j = \alpha_{1i} v_1 + \dots + \alpha_{ni} v_n$$

به عنوان مثال دیگر، گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری سه‌بعدی با پایه $\{v_1, v_2, v_3\}$ باشد به‌گونه‌ای که:

$$T(v_1) = 2v_1 - 3v_3$$

$$T(v_2) = v_2 + 5v_3$$

$$T(v_3) = v_1 - v_2$$

در این صورت ماتریس T نسبت به پایه $\{v_1, v_2, v_3\}$ خواهد شد:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

اکنون به بررسی سازگاری تعریف (۲.۱۳) با تعبیری که از ماتریس یک تبدیل خطی، که با یک دستگاه از معادله‌ها داده شده است، می‌پردازیم. به عنوان مثال، گیریم T با دستگاه

$$y_1 = 3x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + 2x_2$$

داده شده است، و فرض می‌کنیم:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

در این صورت پس e_1 و e_2 یک پایه R_2 است و می‌توان ماتریس T را بنا بر تعریف (۲.۱۳) نسبت به این پایه حساب کرد. با استفاده از نتیجه‌های مثال اخیر بخش پیش، داریم:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -e_1 + 2e_2$$

پس ماتریس T عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

به آسانی می‌توان دید که در یک دستگاه کلی n معادله n مجهولی با ماتریس A ، ماتریس تبدیل خطی متناظر نسبت به پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ که در بالا تعریف شد، بنابر تعریف (۲.۱۳) برابر A است.

اکنون به ذکر چند نتیجه کلی درباره رابطه بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ به ترتیب با ضریبهای (α_{ij}) و (β_{ij}) باشند مجموع و حاصلضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$$

$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = (\gamma_{ij}), \quad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

اگر یک ماتریس را به عنوان یک n^2 تایی در نظر بگیریم، آنگاه تعریف زیر طبیعی است:

$$\alpha(\alpha_{ij}) = (\alpha \alpha_{ij}), \quad \alpha \in F$$

اکنون رابطه ساختار جبری $L(V, V)$ را که در بخش پیشین ارائه شد، با ساختار جبری مجموعه $M_n(F)$ ، یعنی مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ با ضریبهای متعلق به F ، بررسی می‌کنیم.

(۳.۱۳) قضیه. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V روی F باشد. نگاشت $T \rightarrow (\alpha_{ij})$ که به هر تبدیل خطی T ماتریس آن (α_{ij}) را نسبت به پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ مربوط می‌کند یک نگاشت یک‌به‌یک از $L(V, V)$ به روی $M_n(F)$ است به گونه‌ای که اگر $T \rightarrow (\alpha_{ij})$ و $S \rightarrow (\beta_{ij})$ آنگاه:

$$T + S \rightarrow (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})$$

$$TS \rightarrow (\alpha_{ij})(\beta_{ij})$$

$$\alpha T \rightarrow \alpha(\alpha_{ij})$$

برهان. بنابر قضیه (۱.۱۳) روشن است که این نگاشت یک‌به‌یک و پوشاست. بنابه تعریف، $T + S$ و αT ماتریسهای مطلوب را به گونه‌ای پوشا می‌نگارند. این نتیجه در مورد TS به سبب تعریف ماتریس متناظر T ، درست است. ولی باید جزئیات آن را بررسی کنیم. داریم:

$$Tv_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} v_j, \quad Sv_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} v_j$$

پس:

$$\begin{aligned}(TS)v_i &= T(Sv_i) = T\left(\sum_{j=1}^n \beta_{ji}v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_{ji}T(v_j) = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{kj}\beta_{ji}\right)v_k\end{aligned}$$

بنابراین درایه (k, i) ام ماتریس TS برابر است با $\sum_{j=1}^n \alpha_{kj}\beta_{ji}$ که همان خود درایه (k, i) ام حاصلضرب $(\alpha_{ij})(\beta_{ij})$ است، و برهان کامل می‌گردد.

(۴.۱۳) فرع. گیریم A و B و C ماتریسهای $n \times n$ با ضریبهایی متعلق به F باشند، در این صورت:

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + BC$$

بنابر قضیه‌های (۳.۱۳) و (۶.۱۱) برهان روشن است و نیازی به هیچ‌گونه محاسبه ندارد.

در اینجا ذکر چند نکته در مورد (۳.۱۳) ضروری است. نخست این که در واقع حکم قضیه (۳.۱۳) این است که، $L(V, V)$ و $M_n(F)$ به عنوان یک حلقه و یک فضای برداری روی F یکریخت‌اند، و همه محاسبه‌ها روی $L(V, V)$ را می‌توان در $M_n(F)$ اجرا کرد. به تجربه ثابت شده است که اغلب کوتاهترین و جالبترین راه‌حلهای مسأله‌ها در $L(V, V)$ پیدا می‌شود. ولی گاهی کار با ماتریسها اجتناب ناپذیر است. بنابر قضیه پیش مشکل تناظر بین $L(V, V)$ و $M_n(F)$ در انتخاب پایه V است. اکنون باید این مشکل را توضیح دهیم. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V روی F باشد و $\{w_1, \dots, w_n\}$ مجموعه‌ای از بردارهای V . پس داریم:

$$w_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji}v_j, \quad 1 \leq i \leq n \quad (۵.۱۳)$$

گوئیم برای این که $\{w_1, \dots, w_n\}$ پایه دیگری برای V باشد لازم و کافی است که ماتریس (μ_{ij}) وارونپذیر باشد [تعریف (۱۰.۱۲)]. برای اثبات آن، نخست فرض می‌کنیم که $\{w_1, \dots, w_n\}$

تبدیل‌های خطی و ماتریسها ۱۲۱

یک پایه است. در این صورت می‌توان نوشت:

$$v_i = \sum_{j=1}^n \eta_{ji} w_j$$

که در آن (η_{ji}) یک ماتریس $n \times n$ است. اگر این مقدار را در (۵.۱۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$w_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} v_j = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \left(\sum_{k=1}^n \eta_{kj} w_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \eta_{kj} \mu_{ji} \right) w_k$$

چون $\{w_1, \dots, w_n\}$ نایسته خطی است، پس:

$$\sum_{j=1}^n \eta_{kj} \mu_{ji} = \begin{cases} 1 & , i = k \quad \text{اگر} \\ 0 & , i \neq k \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پس ثابت شد که $(\eta_{ij})(\mu_{ij}) = \mathbf{I}$. به همین ترتیب $(\mu_{ij})(\eta_{ij}) = \mathbf{I}$ پس ثابت شد که ماتریس (μ_{ij}) وارونپذیر است. می‌توان ثابت کرد که اگر (μ_{ij}) وارونپذیر باشد، آنگاه $\{w_1, \dots, w_n\}$ یک پایه است.

(۶.۱۳) قضیه. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V و $\{w_1, \dots, w_n\}$ پایه دیگری باشد به‌گونه‌ای که:

$$w_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} v_j$$

که در آن (μ_{ji}) یک ماتریس وارونپذیر است. گیریم $T \in L(V, V)$ ، و (α'_{ij}) و (α_{ij}) ماتریسهای T به ترتیب نسبت به پایه‌های $\{v_1, \dots, v_n\}$ و $\{w_1, \dots, w_n\}$ باشند پس داریم:

$$(\mu_{ij})(\alpha'_{ij}) = (\alpha_{ij})(\mu_{ij})$$

یا

$$(\alpha'_{ij}) = (\mu_{ij})^{-1}(\alpha_{ij})(\mu_{ij})$$

۱۲۲ تبدیلیهای خطی و ماتریسها

برهان. داریم:

$$\begin{aligned} T(w_i) &= \sum_{j=1}^n \alpha'_{ji} w_j = \sum_{j=1}^n \alpha'_{ji} \sum_{k=1}^n \mu_{kj} v_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mu_{kj} \alpha'_{ji} \right) v_k \end{aligned}$$

از سوی دیگر داریم:

$$\begin{aligned} T(w_i) &= T \left(\sum_{j=1}^n \mu_{ji} v_j \right) = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} v_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \mu_{ji} \right) v_k \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\sum_{j=1}^n \mu_{kj} \alpha'_{ji} = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \mu_{ji}, \quad 1 \leq i, k \leq n$$

و قضیه ثابت می شود.

(۷.۱۳) تعریف. در $M_n(F)$ دو ماتریس **A** و **B** را متشابه می گویند هرگاه یک ماتریس وارونیذیر **X** متعلق به $M_n(F)$ وجود داشته باشد به گونه ای که:

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X}$$

بنابر قضیه (۶.۱۳) اگر **A** و **B** ماتریسهای $T \in L(V, V)$ نسبت به دو پایه متفاوت باشند، آنگاه **A** و **B** متشابه اند. می توان بررسی کرد که وارون این گفته نیز درست است. بنابراین اگر **A** و **B** ماتریسهای متشابه باشند، آنگاه همواره می توان **A** و **B** را به عنوان ماتریسهای یک تبدیل خطی نسبت به پایه های متفاوت در نظر گرفت. برای این که کاربرد قضیه (۶.۱۳) را در حالت های خاص بدانیم شاید بهتر باشد آن را به شکل دیگری بیان کنیم.

(۶.۱۳) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی F با پایه اولیه:

$$\{v_1, \dots, v_n\}$$

تبدیل‌های خطی و ماتریسها ۱۲۳

باشد، گیریم $T \in L(V, V)$ نسبت به پایهٔ اولیه دارای ماتریس A باشد. اکنون گیریم:

$$\{w_1, \dots, w_n\}$$

پایهٔ جدیدی است برای V و ماتریس T نسبت به این پایه را B می‌نامیم. در این صورت:

$$B = S^{-1}AS$$

که در آن S ماتریسی است که پایهٔ جدید را برحسب پایهٔ اصلی می‌دهد:

$$S = (\mu_{ij}), \quad w_i = \sum_{j=1}^n \mu_{ji} v_j$$

مثال الف. برای روشن ساختن قضیهٔ پیش، گیریم $T \in L(R_2, R_2)$ به شکل زیر تعریف شده باشد:

$$T(e_1) = e_1 - e_2,$$

$$T(e_2) = e_1 + 2e_2$$

که در آن $e_1 = \langle 1, 0 \rangle$ و $e_2 = \langle 0, 1 \rangle$. ماتریس A ی تبدیل T نسبت به پایهٔ $\{e_1, e_2\}$ برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

برای یافتن B ، ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 - e_2\}$ داریم:

$$T(u_1) = T(e_1) + T(e_2) = 2e_1 + e_2$$

$$T(u_2) = T(e_1) - T(e_2) = -3e_2$$

برای اینکه $T(u_1)$ و $T(u_2)$ را به صورت ترکیب‌های خطی از u_1 و u_2 بیان کنیم باید e_1 و e_2 را برحسب u_1 و u_2 بنویسیم. داریم:

$$e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2), \quad e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$$

و

$$T(u_1) = \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2,$$

$$T(u_2) = -\frac{3}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2$$

ماتریس B ی T نسبت به پایه $\{u_1, u_2\}$ برابر است با:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

برای یافتن ماتریس وارونپذیر S به گونه‌ای که $S^{-1}AS = B$ ، از معادله‌هایی که پایه جدید $\{u_1, u_2\}$ را بر حسب پایه اولیه $\{e_1, e_2\}$ بیان کنند استفاده می‌کنیم. S برابر ماتریس زیر است:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

در پایان این بخش، نتیجه‌های اساسی بخش ۷ درباره پایه و بُعد را توأم با نتیجه‌های این بخش به کار می‌بریم تا چند قضیه مفید درباره تبدیلهای خطی به دست آوریم. نخست گیریم V و W فضاهای برداری متناهی-بعد روی F باشند و $T \in L(V, W)$. در این صورت به آسانی می‌توان ثابت کرد که زیر مجموعه‌های:

$$T(V) = \{w \in W | w = T(v), v \in V\}$$

و

$$n(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}$$

به ترتیب زیر فضاهای W و V هستند. (می‌توان اثبات آن را به عنوان تمرین انجام داد.) این زیر فضاها به مقدار زیادی بستگی به رفتار T دارند. نخست تعریف رسمی زیر را بیان می‌کنیم:

(۸.۱۳) تعریف. گیریم $T \in L(V, W)$ و $T(V)$ و $n(T)$ به ترتیب زیر فضاهای W و V هستند که در بالا تعریف شده‌اند. در این صورت زیر فضای $T(V)$ از W را دامنه T و بعد آن را رتبه T می‌نامند. زیر فضای $n(T)$ از V را صفر - فضای T و بعد آن را هیجه T می‌نامند. قضیه بعد یقیناً مفیدترین و مهمترین قضیه تبدیلهای خطی است که تاکنون داشته‌ایم.

(۹.۱۳) قضیه اساسی. گیریم $T \in L(V, W)$. در این صورت:

$$\dim T(V) + \dim n(T) = \dim V$$

به گفته دیگر، بعد V برابر است با مجموع رتبه T و هیجه T .

برهان. گیریم $\{v_1, \dots, v_k\}$ پایه‌ای برای صفر - فضای $n(T)$ باشد [بنا بر قرارداد اگر $n(T) = 0$ ، این مجموعه تهی است]. بنابر قضیه (۴.۷)، در V بردارهای $\{v_k + 1, \dots, v_n\}$

تمرینها ۱۲۵

وجود دارند به گونه ای که $\{v_1, \dots, v_k, \dots, v_n\}$ پایه ای برای V باشد. کافی است ثابت کنیم که $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ پایه ای است برای $T(V)$. نخست داریم:

$$T\left(\sum_{i=1}^n \xi_i v_i\right) = \sum_{i=k+1}^n \xi_i T(v_i), \quad \xi_i \in F$$

زیرا برای $1 \leq i \leq k$, $T(v_i) = 0$. سرانجام فرض کنیم برای یک مقدار $\eta_i \in F$ داریم:

$$\sum_{i=k+1}^n \eta_i T(v_i) = 0$$

در این صورت:

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n \eta_i v_i\right) = 0$$

و $\sum_{i=k+1}^n \eta_i v_i \in n(T)$. به سبب روش انتخاب پایه $\{v_i\}$ برای V , همه $\{\eta_i\}$ ها صفرند، و قضیه ثابت می شود.

آخرین قضیه این بخش کاربرد مهم قضیه اساسی پیشین است.

(۱۰.۱۳) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ که در آن V یک فضای برداری متناهی-بعد روی

F است. در این صورت حکمهای زیر هم ارزند:

۱. T وارونپذیر است.

۲. T یک به یک است.

۳. T پوشاست.

برهان. ثابت می کنیم که (۱) مستلزم (۲) است و (۲) مستلزم (۳) و (۳) مستلزم (۱). نخست گیریم (۱) درست است. در این صورت $T^{-1} \in L(V, V)$ وجود دارد به گونه ای که $TT^{-1} = T^{-1}T = 1$. فرض کنیم $T(v_1) = T(v_2)$. از اثر دادن T^{-1} نتیجه می شود $T^{-1}T(v_1) = T^{-1}T(v_2)$ یا $v_1 = v_2$. پس (۲) از (۱) نتیجه می شود.

اکنون گیریم (۲) درست است. در این صورت $n(T) = 0$. بنابر قضیه (۹.۱۳) داریم $T(V) = n$ پس $T(V) = V$ یعنی T پوشاست.

سرانجام گیریم T پوشاست. بنابر قضیه (۹.۱۳)، T یک به یک است. پس اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه V باشد، آنگاه $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ نیز یک پایه است بنابر قضیه (۱.۱۳). یک تبدیل خطی U وجود دارد به گونه ای که $UT(v_i) = v_i$ ، $i = 1, \dots, n$. باز بنابر (۱.۱۳)، داریم $UT = 1$. از سوی دیگر، $TU(Tv_i) = Tv_i$ ، $i = 1, \dots, n$ و چون $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ یک پایه است، پس $TU = 1$. بنابراین T وارونپذیر است و قضیه ثابت می شود.

تمرینها

در همه تمرینهای زیر همه فضاهای برداری مورد نظر دارای پایههای متناهی اند و می توان هیأت F را در مسألههای عددی، هیأت اعداد حقیقی گرفت.
۱. گیریم $S, T, U \in L(V, V)$ به شکل زیر داده شده باشند:

$$\begin{aligned} S(u_1) &= u_1 - u_2, & T(u_1) &= u_2, & U(u_1) &= 2u_1 \\ S(u_2) &= u_1, & T(u_2) &= u_1, & U(u_2) &= -2u_2 \end{aligned}$$

که در آن $\{u_1, u_2\}$ یک پایه V است. ماتریسهای S و T و U را نسبت به پایه $\{u_1, u_2\}$ و نسبت به پایه جدید $\{w_1, w_2\}$ با:

$$w_1 = 3u_1 - u_2, \quad w_2 = u_1 + u_2$$

بیابید. ماتریس وارونپذیر X را در هر حالت به گونه ای بیابید که $X^{-1}AX = A'$ که در آن A ماتریس تبدیل نسبت به پایه قبلی و A' ماتریس آن نسبت به پایه جدید باشد.
۲. گیریم تبدیلهای خطی S و T و U به گونه ای باشند که:

$$\begin{aligned} S(u_1) &= u_1 + u_2, \\ S(u_2) &= -u_1 - u_2, \\ T(u_1) &= u_1 - u_2, \\ T(u_2) &= 2u_2, \\ U(u_1) &= u_1 + u_2 - u_3, \\ U(u_2) &= u_2 - 3u_3, \\ U(u_3) &= -u_1 - 3u_2 - 2u_3 \end{aligned}$$

(به فرض این که $\{u_1, u_2, u_3\}$ پایه فضاهای برداری باشند)

الف) رتبه و هیچه S, T و U را بیابید.

ب) کدام یک از این تبدیلهای خطی وارونپذیرند؟

پ) پایه صفر-فضاهای S, T و U را پیدا کنید.

ت) پایه فضاهای دامنه S, T و U را به دست آورید.

۳. گیریم V فضای همه چند جمله ییهای به شکل $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ که در آن k ثابت و ضریبهای α_k حقیقی اند، باشد. نشان دهید که تبدیل مشتق یعنی D که در مثال ۱ از بخش ۱۱ تعریف شد، V را در V می نگارد. ماتریس V نسبت به پایه $\{1, x, \dots, x^k\}$ چیست؟ رتبه $D: V \rightarrow V$ چیست؟ هیچه آن را تعیین کنید.

تمرینها ۱۲۷

۴. ثابت کنید رتبه $\dim T(V) = A$ که ماتریس $T \in L(V, V)$ نسبت به یک پایهٔ اختیاری V است.

۵. گیریم V یک فضای برداری n بعدی روی R و $f: V \rightarrow R_1$ یک تبدیل خطی ناصفر از V به فضای یک بعدی R_1 باشد. ثابت کنید که:

$$\dim n(f) = n - 1$$

۶. گیریم V و f همانند تمرین ۵ باشند و α یک عدد حقیقی ثابت باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ:

$$\{v \in V | f(v) = \alpha\}$$

در V یک ابر صفحه، یعنی یک خمینهٔ خطی از بعد $n - 1$ در V است، همانگونه که در بخش ۱۰ تعریف شده است.

۷. گیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید برای این که $T^2 = 0$ ، لازم و کافی است که:

$$T(V) \subset n(T)$$

۸. مثالی از یک تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ بیاورید که نشان دهد:

$$T(V) \cap n(T) \neq 0$$

امکان دارد.

۹. گیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید که یک تبدیل خطی ناصفر $S \in L(V, V)$ وجود دارد بهگونه‌ای که $TS = 0$ ، اگر و تنها اگر یک بردار ناصفر $v \in V$ وجود داشته باشد بهگونه‌ای که $T(v) = 0$.

۱۰. گیریم $T \in L(V, V)$ و S بهگونه‌ای باشند که $ST = 1$. ثابت کنید $TS = 1$ (تمرین ۱۰ از بخش ۱۱ نشان می‌دهد که این نتیجه تنها در موردی که بعد V محدود باشد درست است).

۱۱. بیان کنید که آیا یک تبدیل خطی $T: R_2 \rightarrow R_2$ وجود دارد که تساویهای زیر را بدهد یا نه:

$$T \langle 1, 1, 1, 2 \rangle = \langle 3, 1 \rangle, T \langle 1, 2, 1, 1 \rangle = \langle 1, 2 \rangle, T \langle 0, 1, 1, 1 \rangle = \langle 2, 0 \rangle$$

$$T \langle 2, 1, 0, 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$$

۱۲. گیریم $T \in L(V, W)$ که در آن $\dim V = m$ و $\dim W = n$. گیریم $\{v_1, \dots, v_m\}$ یک پایهٔ V و $\{w_1, \dots, w_n\}$ یک پایهٔ W باشد. ماتریس A ی T نسبت به پایه‌های $\{v_i\}$ و $\{w_j\}$ را به شکل ماتریس $A = (\alpha_{ij}), n \times m$ تعریف می‌کنیم که در آن:

$$Tv_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} w_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

۱۲۸ تبدیلهای خطی و ماتریسها

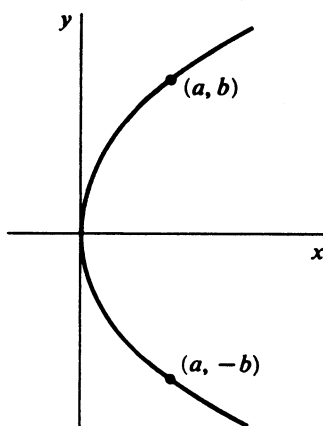
فضاهای برداری V و W توسط پایه‌های $\{v_i\}$ و $\{w_j\}$ به ترتیب با فضاهای F_m و F_n یگريخت‌اند. (بخش ۱۱ تمرین ث.) نشان دهید که اگر $\mathbf{x} \in F_m$ بردار ستونی متناظر با بردار $x \in V$ از راه یگريختی باشد، آنگاه $\mathbf{Ax}$ بردار ستونی F_n متناظر با T_x است. به عبارت دیگر، تناظر بین تبدیلهای خطی و ماتریس به‌گونه‌ای است که عمل T روی بردار x توسط ضرب ماتریسی $\mathbf{Ax}$ تحقق می‌یابد.

فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

این فصل را با بخشی غیر ضروری دربارهٔ تقارن شکل‌های مسطح شروع می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه مسأله‌های طبیعی هندسی به مطالعهٔ مسأله‌هایی در مورد تبدیلهای خطی، که طول را ثابت نگه می‌دارند، منجر می‌گردد. مفهوم طول در یک فضای برداری کلی روی اعداد حقیقی در بخش بعدی ارائه خواهد شد، در آنجا نشان داده می‌شود که چگونه طول به یک ضرب داخلی بستگی دارد. مفهوم پایه‌های یکا قائم و تبدیلهای متعامد با مثالهایی از هندسه و آنالیز شروع و بسط داده می‌شود. علاوه بر این واقعیت که عددهای حقیقی یک هیأت تشکیل می‌دهند، در این بخش از نظریهٔ نابرابریها و قدر مطلق‌ها استفادهٔ فراوانی خواهد شد. همچنین می‌پذیریم که هر عدد حقیقی $a \geq 0$ یک ریشهٔ دوم یکتا دارد که با $\sqrt{a}$ نشان داده می‌شود.

۱۴. مفهوم تقارن

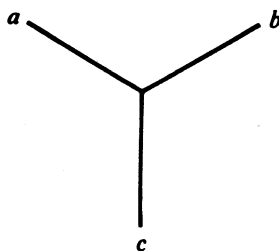
همه کم و بیش با کلمهٔ تقارن آشنایی داریم. هر فرد آشنا با مجسمه‌سازی و نقاشی، از اهمیت تقارن برای هنرمندان آگاه است و می‌داند که چگونه بعضی جنبه‌های متمایز معماری و تزیینات به کمک تقارن ایجاد می‌شوند. زمین‌شناس می‌داند که بلورها بنابر ویژگی تقارن‌شان رده‌بندی شده‌اند، طبیعی‌دان وجود تقارن را در شکل نباتها، صدفها و ماهیها می‌داند. شیمیدان می‌داند که ویژگی تقارن مولکولها به ویژگی شیمیایی آنها بستگی دارد. در این بخش مفهوم ریاضی تقارن را بررسی



شکل ۱.۴

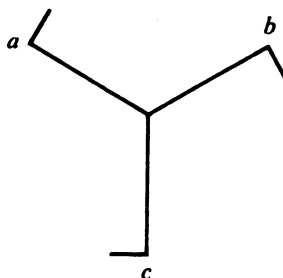
می‌کنیم، که دید جالبی از همهٔ مثالهای پیش به ما می‌دهد. با مثال ساده‌ای از هندسهٔ تحلیلی، شکل ۱.۴ شروع می‌کنیم. معنی این جمله که سهمی $y^2 = x$ نسبت به محور x ها متقارن است چیست؟ یک طریق نگرستن به آن این است که بگوییم اگر صفحه را در حول محور x ها تا کنیم دو نیمهٔ خم $y^2 = x$ روی هم می‌افتند. ولی این مطلب اندکی مبهم است. توصیف دقیقتر از این مشاهده ناشی می‌شود که عمل تا کردن صفحه معرف یک تبدیل T از نقاط صفحه است که به هر نقطهٔ (a, b) نقطهٔ $(a, -b)$ را مربوط می‌کند که پس از تا کردن صفحه روی هم می‌افتند. اکنون تقارن سهمی چنین بیان می‌شود که اگر (a, b) نقطه‌ای روی سهمی باشد نقطهٔ $(a, -b)$ مبدل آن نیز روی سهمی است. این نوع تقارن را تقارن دو سویی می‌گویند.

اکنون مثال یک سه‌راهی، شکل ۲.۴ را در نظر می‌گیریم، این شکل چه نوع تقارنی دارد؟ روشن است که این شکل نسبت به هر یک از سه خط واصل بین مرکز و هر یک از سه نقطهٔ a ، b و c تقارن دوسویی دارد. این سه‌راهی یک نوع تقارن جدید دیگر دارد به نام تقارن دورانی. اگر



شکل ۲.۴

مفهوم تقارن ۱۳۱



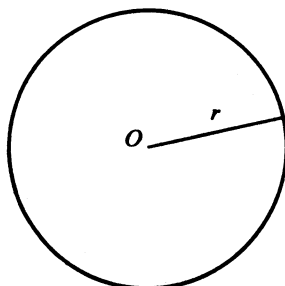
شکل ۳.۴

نقاط صفحه را حول مرکز ثابت به اندازه ۱۲۰° دوران دهیم، یعنی مرکز را ثابت نگهداریم، سه راهی بر خود منطبق می‌گردد. آیا این سه راهی همان ویژگیهای تقارن سه راهی بالدار شکل ۳.۴ را دارد؟ روشن است که چنین نیست؛ سه راهی بالدار تنها دارای تقارن دورانی است و تقارن دوسویی ندارد. به این ترتیب می‌بینیم که می‌توان از ویژگیهای تقارن اشکال جهت تمایز آنها استفاده کرد.

هنوز به تعریف دقیق تقارن نرسیده‌ایم. یک مثال دیگر درونمایهٔ اساسی آن را نشان می‌دهد. دایرهٔ به مرکز O ، شکل ۴.۴ همهٔ انواع تقارنی را که تاکنون نام بردیم دارد. با این همه می‌توان به تقارن دایره از دیدگاه دیگری نگاه کرد. دایره با هر تبدیلی که فاصله را حفظ کند و مرکز را ثابت نگه دارد به روی خودش برده می‌شود. زیرا دایره مکان هندسی نقاطی است مانند p که فاصله‌های آنها از O برابر مقدار ثابت r است، و اگر T تبدیلی باشد که فاصله را حفظ کند و مرکز دایره را ثابت نگه دارد، آنگاه فاصلهٔ $T(p)$ از O باز هم برابر r و در نتیجه $T(p)$ روی دایره واقع خواهد شد. از اینجا تعریف زیر نتیجه می‌شود:

(۱.۱۴) تعریف. هر شکل X مجموعهٔ نقاطی از صفحه است. هر تقارن شکل X تبدیلی است مانند T از صفحه به خودش به گونه‌ای که:

(i) $T(X) = X$ ، یعنی T هر نقطه از X را به نقطهٔ دیگری از X می‌برد و هر نقطهٔ X



شکل ۴.۴

۱۳۲ فضاهاى بردارى مجهز به ضرب داخلى

نگارهٔ يك نقطهٔ ديگر آن بر اثر T است.

(ii) T فاصله را حفظ مى‌کند، يعنى اگر $d(p, q)$ نمايش فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه p و q از X باشد، آنگاه به ازاي هر دو نقطهٔ p و q :

$$d[T(p), T(q)] = d(p, q)$$

(۲.۱۴) قضيه. مجموعهٔ G يكى كليۀ تقارنهای شكل X يك گروه G تشكيل مى‌دهند به نام گروه تقارن شكل [— تعريف ۱۱.۱۰].

برهان. نخست نشان مى‌دهيم كه اگر $S, T \in G$ ، آنگاه حاصلضرب ST كه با:

$$ST(p) = S[T(p)]$$

تعريف مى‌شود به G تعلق دارد. داريم:

$$ST(X) = S[T(X)] = S(X) = X$$

و

$$d(ST(p), ST(q)) = d(S[T(p)], S[T(q)]) = d(T(p), T(q)) = d(p, q)$$

و از اين رو $ST \in G$. همچنين بايد ثابت كنيم كه:

$$S(TU) = (ST)U, \quad S, T, U \in G$$

كه نتيجه‌اى است از اين واقعيت كه هر دو نگاشت نقطهٔ p را به نقطهٔ $S\{T[U(p)]\}$ مى‌برند. روشن است كه تبديل ι به گونه‌اى كه براى هر p ، $\iota(p) = p$ ، به G تعلق دارد و در برابري زير صدق مى‌کند:

$$S \cdot \iota = \iota \cdot S = S, \quad S \in G$$

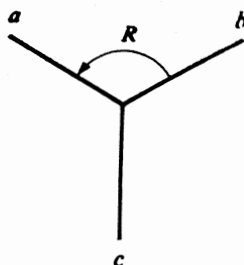
سرانجام، اگر $S \in G$ ، يك تقارن S^{-1} روى X وجود دارد كه عملى در خلاف جهت S انجام مى‌دهد (خواننده مى‌تواند برهان قويترى ارائه دهد) به گونه‌اى كه:

$$SS^{-1} = S^{-1}S = \iota$$

بدین ترتیب برهان قضیه پایان می‌یابد.

اکنون پرسش مبهم «چه نوع تقارنهایی يك شكل مى‌تواند داشته باشد؟» جای خود را به پرسش دقيق رياضی «گروههای تقارن ممکن کدامها هستند؟» مى‌دهد. در اين بخش حالت ساده‌اى از اين مسأله را بررسى مى‌کنيم. نخست مثالهایی از گروههای تقارن مى‌آوريم.

مفهوم تقارن ۱۳۳



شکل ۵.۴

گروه تقارن سه راهی شکل ۵.۴، متشکل از سه تقارن دوسویی نسبت به بازوها و سه دوران به زاویه‌های ۱۲۰° ، ۲۴۰° و ۳۶۰° می‌باشد. به کمک عمل گروهی می‌توان نشان داد که همه تقارنهای سه‌راهی را می‌توان از دو تا از آنها ساخت. به عنوان مثال، گیریم R دورانی به زاویه ۱۲۰° در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت و S یک تقارن دوسویی نسبت به بازوی a باشد. می‌توان تحقیق کرد که گروه تقارن G سه‌راهی متشکل از تقارنهای زیر است:

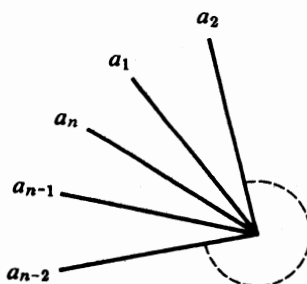
$$\{1, R, R^2, S, SR, SR^2\}$$

همچنین می‌توان نشان داد که $S^2 = 1$ ، $R^3 = 1$ و $SR = R^{-1}S$ و این قاعده‌ها برای ضرب عناصر دلخواه G کافی هستند.

گروه تقارن سه‌راهی بالدار درست متشکل از تقارنهای زیر است:

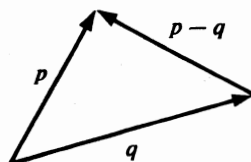
$$\{1, R, R^2\}$$

به طور کلیتر، گیریم X شکلی با n بازو، شکل ۶.۴، S تقارن دوسویی نسبت به بازوی a_1 و R



شکل ۶.۴

۱۳۴ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی



شکل ۷.۴

دورانی باشد که $a_1 \rightarrow a_2$. در این صورت گروه X درست متشکل از تقارنهای زیر است:

$$\{1, R, R^2, \dots, R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\} \quad (3.14)$$

و این تقارنها طبق قاعده‌های زیر ضرب شده‌اند:

$$R^n = 1, S^2 = 1, SR = R^{-1}S$$

گروه تقارن شکل بالدار متناظر، درست متشکل از دورانه‌های زیر است:

$$\{1, R, R^2, \dots, R^{n-1}\} \quad (4.14)$$

گروه (۳.۱۴) را گروه دوجهی D_n ، گروه (۴.۱۴) را گروه دوری C_n می‌نامند. نشان می‌دهیم که این دو گروه تنها گروه‌های متناهی و متقارن شکلهای مسطح هستند.

نخست چند نکته کلی را یادآور می‌شویم. صفحه را از این پس با فضای برداری R_2 متشکل از جفتهای عددی حقیقی $\langle \alpha, \beta \rangle$ یکی می‌گیریم. اگر p نمایش بردار $\langle \alpha, \beta \rangle$ باشد، طول p یعنی $\|p\|$ با $\|p\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ تعریف می‌شود و فاصله p تا q (شکل ۷.۴) با $d(p, q) = \|p - q\|$. همچنین می‌دانیم که برای اینکه بردار $p = \langle \alpha, \beta \rangle$ بر بردار $q = \langle \gamma, \delta \rangle$ عمود باشد (که در این صورت می‌نویسیم: $p \perp q$) لازم و کافی است که $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

(۵.۱۴) هر تبدیل فاصله نگهدار T در R_2 که عنصر صفر را ثابت نگه دارد یک تبدیل

خطی است.

برهان. می‌توان نشان داد که هر نقطه p در صفحه به وسیله فاصله‌اش از 0 ، و بردارهای $e_1 = \langle 1, 0 \rangle$ و $e_2 = \langle 0, 1 \rangle$ کاملاً مشخص می‌شود. بنابراین $T(p)$ کاملاً به وسیله $T(e_1)$ و $T(e_2)$ تعیین می‌گردد، زیرا $T(0) = 0$. بنابر آنچه در فصل ۳ دیدیم می‌توانیم یک تبدیل $\tilde{T}$ به گونه‌ای تعریف کنیم که:

$$T(e_1) = \tilde{T}(e_1), \quad T(e_2) = \tilde{T}(e_2)$$

مفهوم تقارن ۱۳۵

چون T و $\tilde{T}$ هر دو با اثرشان روی e_1 و e_2 تعیین می‌شوند پس $T = \tilde{T}$.
 اکنون به اثبات یک ویژگی مشخصه تبدیلهای فاصله نگهدار می‌پردازیم.
 (۶.۱۴) شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیل T فاصله نگهدار باشد این است که

$$\|T(e_1)\| = \|T(e_2)\| = 1 \text{ و } T(e_1) \perp T(e_2) \quad (۷.۱۴)$$

برهان. اگر T فاصله را حفظ کند، روشن است که (۷.۱۴) برقرار است. به وارون، گیریم T تبدیلی است خطی که برای آن (۷.۱۴) برقرار است. برای اینکه ثابت کنیم T فاصله را حفظ می‌کند، کافی است ثابت کنیم که برای هر بردار p :

$$\|T(p)\| = \|p\|$$

زیرا در این صورت:

$$d[T(p), T(q)] = \|T(p) - T(q)\| = \|T(p - q)\| = \|p - q\| = d(p, q)$$

اکنون گیریم $p = \xi e_1 + \eta e_2$ و $T(e_1) = \langle \alpha, \beta \rangle$ و $T(e_2) = \langle \gamma, \delta \rangle$. پس از (۷.۱۴) نتیجه می‌شود:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0$$

پس:

$$\begin{aligned} \|T(p)\|^2 &= \|\xi T(e_1) + \eta T(e_2)\|^2 = \|\langle \xi\alpha + \eta\gamma, \xi\beta + \eta\delta \rangle\|^2 \\ &= (\xi\alpha + \eta\gamma)^2 + (\xi\beta + \eta\delta)^2 \\ &= \xi^2\alpha^2 + 2\xi\alpha\eta\gamma + \eta^2\gamma^2 + \xi^2\beta^2 + 2\xi\beta\eta\delta + \eta^2\delta^2 \\ &= \xi^2(\alpha^2 + \beta^2) + \eta^2(\gamma^2 + \delta^2) + 2\xi\eta(\alpha\gamma + \beta\delta) \\ &= \xi^2 + \eta^2 = \|p\|^2 \end{aligned}$$

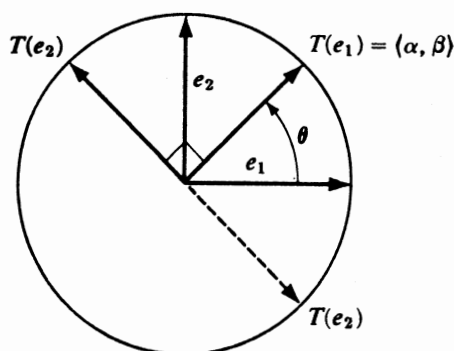
که اثبات (۶.۱۴) پایان می‌پذیرد.

اکنون گیریم T تبدیلی است فاصله نگهدار که مبدأ را ثابت نگه می‌دارد، و فرض می‌کنیم $T(e_1) = \langle \alpha, \beta \rangle$. پس $T(e_2)$ نقطه‌ای است روی دایره‌ایکه که بردار شعاعی آن بر $T(e_1)$ عمود است، شکل ۸.۴. از اینجا نتیجه می‌شود که یکی از دو برابری زیر برقرار است:

$$T(e_2) = \langle -\beta, \alpha \rangle$$

$$T(e_2) = \langle \beta, -\alpha \rangle$$

یا



شکل ۸.۴

در حالت اول ماتریس T نسبت به $\{e_1, e_2\}$ برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

در حالی که در حالت بعدی ماتریس برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

در حالت اول T دورانی است به زاویه θ به گونه‌ای که $\cos \theta = \alpha$ ، در حالی که در حالت دوم T تقارنی است دو سویی نسبت به خطی که با e_1 زاویه‌ای برابر $\frac{1}{2}\theta$ می‌سازد. باید توجه داشت که در حالت دوم ماتریس T^2 برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} = I$$

پس $T^2 = I$. تبدیل نوع دوم را تقارن محوری و نوع اول را دوران می‌نامیم. در قضیه بعدی چگونگی ترکیب تقارن محوری و دوران بیان می‌شود، و می‌توان آن را به عنوان تمرین ثابت کرد.

(۸.۱۴) گیریم S و T تبدیلهای خطی فاصله نگهدار باشند، در این صورت:

۱. اگر S و T دوران باشند، آنگاه ST دوران است.
۲. اگر S و T تقارن محوری باشند، آنگاه ST تقارن محوری است.
۳. اگر یکی از دو تبدیل S و T دوران و دیگری تقارن محوری باشد، آنگاه ST یک تقارن محوری است.

اثبات این قضیه به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته می شود.

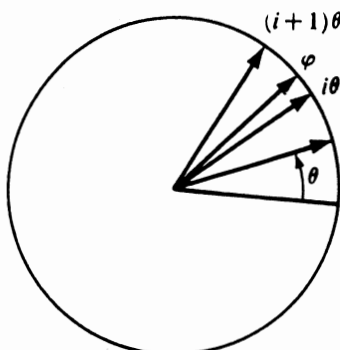
اکنون می توانیم همه گروه های متقارن متناهی شکل های مسطح را پیدا کنیم. این گروه را G می نامیم و همه عناصر آن را تبدیلهای خطی (که مبدأ را ثابت نگه می دارند) فرض می کنیم. تعیین یک گروه به این معنی است که نشان دهیم این گروه با گروهی که قبلاً تعیین شده یکرخت است. بدین معنی بین این دو گروه، یک تناظر یک به یک برقرار است که قانونهای ضرب دو گروه را حفظ می کند.

(۹.۱۴) **قضیه.** گیریم G گروه متناهی تبدیلهای خطی فاصله نگهدار باشد در این صورت G با یکی از گروه های زیر یکرخت است:

۱. گروه دوری $\{1, R, R^2, \dots, R^{n-1}\}$, $C_n = 1$, $R^n = 1$, متشکل از توانهای یک دوران ساده.

۲. گروه دووجهی $\{1, R, \dots, R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\}$ که در آن R یک دوران، S یک تقارن محوری است و $1, R^n = 1$, $SR = R^{-1}S$.

برهان. می توان فرض کرد $G \neq \{1\}$. نخست فرض می کنیم که همه عنصرهای G دوران هستند و R دورانی است متعلق به G با کوچکترین زاویه مثبت ممکن. توانهای R یعنی $\{1, R, R^2, \dots\}$ را در نظر می گیریم. چنانکه خواهیم دید، مجموعه این توانها تمامی G است. برای نشان دادن آن فرض می کنیم $T \in G$ دورانی است متمایز از همه توانهای R . اگر φ و θ به ترتیب زاویه های T و R باشند، آنگاه به ازای یک عدد i داریم $i\theta < \varphi < (i+1)\theta$. شکل ۹.۴. در این صورت G شامل TR^{-i} است که دورانی است متعلق به G به زاویه $\varphi - i\theta$ کوچکتر از θ ، و این مخالف فرض است، بنابراین G متشکل از توانهای R و یک گروه دوری است. اکنون فرض می کنیم G شامل یک تقارن محوری S باشد. گیریم H مجموعه همه دورانهایی باشد که به G تعلق دارند. در این صورت H یک گروه است و بنابر قسمت اول برهان، دورانی مانند



شکل ۹.۴

۱۳۸ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

R متعلق به H وجود دارد به گونه‌ای که:

$$H = \{1, R, R^2, \dots, R^{n-1}\}, \quad R^n = 1$$

اکنون گیریم $X \in G$. در این صورت یا $X \in H$ یا X یک تقارن محوری است. در حالت اخیر SX یک دوران است. از این روی یک مقدار i وجود دارد به گونه‌ای که $SX = R^i$ و چون $S^2 = 1$ پس:

$$X = S(SX) = SR^i$$

و ثابت کردیم که:

$$G = \{1, R, \dots, R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\}$$

سرانجام، SR یک تقارن محوری است، از این رو $(SR)^2 = 1$ یا $SRSR = 1$ و داریم $SR = R^{-1}S$. از اینجا نتیجه می‌شود که G با یک گروه دوجهی یکریخت است، و اثبات قضیه پایان می‌یابد.

گروههای تقارن در فضای ۳ بعدی در بخش ۳۳ بررسی خواهد شد. برای بحث بیشتر در این باره توصیه می‌شود به کتابهای وایل و بنسن‌گروو، که در کتابنامه آمده است، رجوع شود.

تمرینها

همهٔ تمرینهای این مجموعه در مورد فضای برداری R_2 هستند. در بیشتر تمرینها برای روشن شدن موضوع باید شکل مربوطه رسم شود.

۱. برای دو بردار $a = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ و $b = \langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ حاصلضرب داخلی را به صورت $(a, b) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ تعریف می‌کنیم: نشان دهید که حاصلضرب داخلی دارای ویژگیهای زیر است:

$$(a, b) = (b, a) \quad (\text{الف})$$

$$(a, b + c) = (a, b) + (a, c) \quad (\text{ب})$$

$$(\lambda a, b) = \lambda(a, b), \lambda \in R \quad (\text{پ})$$

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} \quad (\text{ت})$$

$$(a, b) = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر, } a \perp b \quad (\text{ث})$$

ج) $a \perp b$ ، اگر و تنها اگر، $\|a + b\| = \|a - b\|$ (شکلی برای نشان دادن این حکم رسم کنید).

۲. در R_2 هر خط L عبارت است از مجموعهٔ همهٔ بردارهایی به شکل $p + x$ که در آن p برداری است ثابت، و x یک زیر فضای یک بعدی S از R_2 را می‌پیماید. پس اگر $S = S(a)$ ، خط L

تمرینها ۱۳۹

متشکل از همه بردارهایی است به شکل $p + \lambda a$ که در آن $\lambda \in R$. خط L را که در بالا شرح دادیم با $p + S$ نشان می‌دهیم.*

الف) گیریم $p + S$ و $q + S$ دو خط در یک زیر فضای یک بعدی S باشند. نشان دهید که $p + S$ و $q + S$ یا بر هم منطبق‌اند یا بردار مشترکی ندارند. در حالت دوم می‌گویند که دو خط موازی‌اند. ب) نشان دهید که تنها یک خط L وجود دارد که شامل دو بردار متمایز p و q است و شامل همه بردارهایی است به شکل $p + \lambda(q - p)$ ، $\lambda \in R$.

پ) نشان دهید برای اینکه سه بردار p ، q و r بر یک خط قرار گیرند لازم و کافی است که $S(q - p) = S(q - r)$.

ت) نشان دهید که دو خط متمایز یا موازی‌اند یا در یک نقطه متقاطع. ۳. گیریم خط L شامل دو بردار متمایز p و q باشد و r برداری غیر واقع بر L . نشان دهید که بردار u واقع بر L به گونه‌ای که $(u - r) \perp (q - p)$ ، یک جواب دستگاه معادله‌های زیر است:

$$(u - r, q - p) = 0$$

$$u = p + \lambda(q - p), \quad \lambda \in R$$

نشان دهید که مقدار یکتایی برای λ وجود دارد که به ازای آن این معادله‌ها برقرارند. دستوری برای فاصله یک نقطه از یک خط بیابید و آن را با چند مثال عددی بیازمایید. ۴. گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

یک ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی باشد. دترمینان A را با $D(A)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$D(A) = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$$

الف) نشان دهید که اگر A ماتریس یک تبدیل خطی فاصله نگهدار T از R_2 باشد، آنگاه $D(A) = \pm 1$ ؛ و $D(A) = +1$ ، اگر و تنها اگر A یک دوران باشد و $D(A) = -1$ ، اگر و تنها اگر A یک تقارن محوری باشد.

ب) برای دو ماتریس 2×2 A و B ، نشان دهید، $D(AB) = D(A)D(B)$ ،
پ) حکمهای (۱)، (۲) و (۳) شماره (۸.۱۴) را نتیجه بگیرید.

* این تعریف خط با تعریفی که در بخش ۱۰ دیدیم یکی است. ولی برای انجام حل این مسأله‌ها به هیچ مطلبی از بخش ۱۰ نیاز نیست.

۱۴۰ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

۱۵. ضرب داخلی

گیریم V فضایی است برداری روی هیأت اعداد حقیقی R .

(۱.۱۵) تعریف. یک ضرب داخلی در V تابعی است که به هر جفت بردار u و v متعلق به V یک عدد حقیقی مانند (u, v) را تخصیص می‌دهد که در شرطهای زیر صدق می‌کند:
(i) (u, v) یک تابع دو خطی است، یعنی به ازای $u, v, w \in V$ و هر $\alpha \in R$ ، داریم:

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$$

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$$

$$(\alpha u, v) = (u, \alpha v) = \alpha(u, v)$$

(ii) تابع (u, v) متقارن است، یعنی:

$$(u, v) = (v, u), \quad u, v \in V$$

(iii) تابع معین مثبت است، یعنی $(u, u) \geq 0$ ، و $(u, u) = 0$ ، اگر و تنها اگر $u = 0$.

مثالها (i) گیریم $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه فضای برداری V روی R باشد و:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$$

که در آن $v = \sum \eta_i e_i$ و $u = \sum \xi_i e_i$

(ii) فرض می‌کنیم V یک زیر فضای برداری $C(R)$ یعنی فضای تابعهای پیوسته روی R باشد و (f, g) را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad f, g \in V$$

در هر یک از این دو مثال می‌توان تحقیق کرد که تابعی که به این صورت تعریف شد یک ضرب داخلی است.

در R_2 ضرب داخلی که در مثال (i) تعریف شد به عنوان زاویه بین دو بردار u و v شناخته شده است. در واقع اگر طولهای دو بردار u و v برابر ۱ باشند، آنگاه $(u, v) = \cos \theta$ ، که در آن θ زاویه بین دو بردار است. بنابراین اگر طولهای u و v برابر ۱ باشند، آنگاه $|(u, v)| \leq 1$. اکنون نشان می‌دهیم که این نامساوی در حالت کلی برقرار است.

ضرب داخلی ۱۴۱

(۲.۱۵) تعریف. گیریم (u, v) یک ضرب داخلی روی V باشد. طول بردار $u \in V$ را با $\|u\|$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

بنابر قسمت (۳) از تعریف (۱.۱۵) داریم:

$$\|u\| \geq 0, \|u\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } u = 0$$

به علاوه، داریم،

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$$

که در آن $|\alpha|$ قدر مطلق $\alpha \in R$ است.

اکنون نامساوی مهمی را ثابت می‌کنیم:

$$(۳.۱۵) \text{ لم. اگر } \|u\| = \|v\| = 1, \text{ آنگاه } |(u, v)| \leq 1. \text{ برهان. داریم}$$

$$(u - v, u - v) \geq 0$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(u, u) + (v, v) - 2(u, v) \geq 0$$

و چون $(u, u) = (v, v) = 1$ ، پس $(u, v) \leq 1$. به همین ترتیب، از $(u + v, u + v) \geq 0$ نتیجه می‌شود $-(u, v) \leq 1$. از این دو نامساوی نتیجه می‌شود $|(u, v)| \leq 1$.

(۴.۱۵) قضیه. (نامساوی کوشی-شوارتس). برای دو بردار دلخواه $u, v \in V$ داریم:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (۵.۱۵)$$

برهان. اگر یکی از دو مقدار $\|u\|$ و $\|v\|$ صفر باشد، قضیه بدیهی است. فرض می‌کنیم $\|u\| \neq 0$ و $\|v\| \neq 0$. در این صورت:

$$\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}$$

بردارهایی به طول ۱ هستند، و بنا بر لم (۳.۱۵) داریم:

$$\left| \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right) \right| \leq 1$$

۱۴۲ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

پس $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ و (۵.۱۵) ثابت می‌شود.
یک نتیجه این لم نامساوی مثلثی است که تعمیم نامساوی زیر است:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \quad \alpha, \beta \in R$$

(۶.۱۵) فرع. (نامساوی مثلثی) برای هر بردار $u, v \in V$ داریم:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

برهان. بنابر نامساوی کوشی-شوارتس و نامساوی مثلثی در R_1 داریم:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= |(u + v, u + v)| = |(u, u) + (v, v) + 2(u, v)| \\ &\leq |(u, u)| + |(v, v)| + 2|(u, v)| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$(\|u\| + \|v\|)^2 - \|u + v\|^2 \geq 0$$

که پس از تجزیه خواهیم داشت

$$(\|u\| + \|v\| - \|u + v\|)(\|u\| + \|v\| + \|u + v\|) \geq 0$$

از اینجا نتیجه می‌شود که یا هر دو عامل نامنفی یا هر دو نامثبت‌اند. اگر هر دو نامنفی باشند، آنگاه:

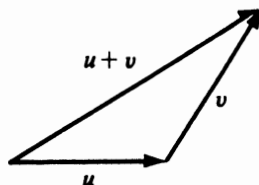
$$\|u\| + \|v\| - \|u + v\| \geq 0$$

اگر هر دو نامثبت باشند، آنگاه به‌ویژه داریم:

$$\|u\| + \|v\| + \|u + v\| \leq 0$$

و چون $\|u\|, \|v\|$ و $\|u + v\|$ همه نامنفی‌اند، پس $\|u\| = \|v\| = \|u + v\| = 0$ لذا بنابر تعریف (۱.۱۵)، $u = v = 0$ و در این حالت نیز فرع برقرار است.

نامساوی مثلثی در یک فضای برداری کلی، تعمیم این واقعیت از هندسهٔ دبیرستانی است که در هر مثلث طول هر ضلع از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است. برای تغییر آن بردارهای u و v را به‌عنوان پاره‌خطهای جهت‌دار در نظر می‌گیریم، پس $u + v$ نمایش ضلع سوم مثلثی است که دو ضلع آن u و v است [← شکل (۱۰.۴)].



شکل ۱۰.۴

با توجه به هندسه مسطحه حقیقت مهم دیگری به ذهن القا می‌شود بنا بر قانون کسینوسها در مثلثات مسطحه، مربع طول یک ضلع در هر مثلث برابر است با مجموع مربعات طولهای دو ضلع دیگر و تفاضل دو برابر حاصلضرب طولهای آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن دو. برای اینکه ببینیم این قضیه در یک فضای برداری کلی چه شکلی پیدا می‌کند شکل ۱۱.۴ را در نظر می‌گیریم.

بنا بر قانون کسینوسها داریم:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \|v\| \cos \theta$$

با توجه به اینکه $\|u\|^2 = (u, u)$ و غیره، این دستور چنین نوشته می‌شود:

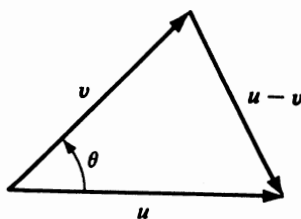
$$(u - v, u - v) = (u, u) + (v, v) - 2\|u\| \|v\| \cos \theta$$

یا پس از ساده کردن آنها:

$$-2(u, v) = -2\|u\| \|v\| \cos \theta$$

بنابراین قانون کسینوسها در صفحه هم‌ارز است با این حکم که کسینوس زاویه بین دو بردار ناصفر u و v برابر است با:

$$\cos \theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|}$$



شکل ۱۱.۴

۱۴۴ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

از اینجا تعریف زیر در مورد بردارهای یک فضای برداری کلی V با یک ضرب داخلی به دست می‌آید.

(۷.۱۵) تعریف. گیریم $u, v \in V$ یعنی زاویه بین u و v را به شکل:

$$\cos \theta = \frac{(u, v)}{\|u\| \|v\|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

تعریف می‌کنیم [باید توجه داشت که بنابر ۵.۱۵، $|\cos \theta| \leq 1$]. بردارهای u و v را متعامد گویند هرگاه $(u, v) = 0$ ، یا به گفته دیگر، اگر کسینوس زاویه بین آنها صفر باشد. هر پایه $\{u_1, \dots, u_n\}$ در یک فضای برداری متناهی-بعد V با یک ضرب داخلی یک پایه یکا قائم نامیده می‌شود هر گاه:

$$\|u_i\| = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$(u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j.$$

یک مجموعه یکا قائم از بردارها، مجموعه‌ای است مانند $\{u_1, \dots, u_k\}$ که در شرطهای (۱) و (۲) صدق می‌کند.

(۸.۱۵) لم. هر مجموعه از بردارهای یکا قائم یک مجموعه نایسته خطی است.

برهان. گیریم $\{u_1, \dots, u_k\}$ یک مجموعه یکا قائم باشد، و فرض می‌کنیم:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0, \quad \lambda_i \in R$$

اگر ضرب داخلی هر دو طرف را در u_1 تشکیل دهیم، با توجه به خواص دو خطی بودن ضرب داخلی، خواهیم داشت:

$$\lambda_1 (u_1, u_1) + \dots + \lambda_k (u_k, u_1) = 0$$

بنابر شرطهای (۱) و (۲) داریم $\lambda_1 = 0$. با تشکیل ضرب داخلی دو طرف به ترتیب در $u_2, \dots, u_k$ نتیجه می‌شود، $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ و به این ترتیب ثابت می‌شود که $\{u_1, \dots, u_k\}$ یک مجموعه نایسته خطی است.

مثال الف. (I) ساده‌ترین مثال از یک مجموعه بردارهای یکا قائم، مجموعه آشنای بردارهای

که در R_n یعنی:

$$e_1 = \langle 1, 0, \dots, 0 \rangle, \quad e_2 = \langle 0, 1, 0, \dots, 0 \rangle, \dots,$$

$$e_n = \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle$$

ضرب داخلی ۱۴۵

است، که در آن ضرب داخلی برای بردارهای $u = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ و $v = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ با $(u, v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ داده شده است. بردارهای یکه نسبت به این ضرب داخلی یک پایه یکه قائم در R_n تشکیل می‌دهند.

(II) ثابت می‌کنیم که تابعهای $f_n(x) = \sin nx$ ، $n = 1, 2, \dots$ در فضای برداری تابعهای حقیقی پیوسته، $C(R)$ ، که در آن ضرب داخلی برای هر دو تابع پیوسته $f, g \in C(R)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

یک مجموعه یکه قائم تشکیل می‌دهند. این حکم که تابعهای $\{f_n\}$ یک مجموعه یکه قائم تشکیل می‌دهند هم ارز با اثبات فرمول زیر است

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

نخست برای $n = m$ با استفاده از اتحاد:

$$\cos 2\theta = (\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2 = 1 - 2(\sin \theta)^2$$

داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2nx) dx$$

پس

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2nx) dx = 1 - \left[\frac{1}{2n\pi} \sin 2nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 1$$

برای $n \neq m$ با استفاده از دستور جمع برای $\cos(A+B)$ و $\cos(A-B)$ ، برای یافتن دستوری برای $\sin A \sin B$ داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] dx$$

نتیجه انتگرالگیری فوق چنین می‌شود

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n-m} \sin(n-m)x \right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{n+m} \sin(n+m)x \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

۱۴۶ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

برای کاربردهای این دستورها در معادله‌های دیفرانسیل و سریهای فوریه به کتاب بویس و دپریم، که در کتابنامه آمده‌اند، رجوع شود.

در قضیه زیر یک روش استقرایی برای ساختن یک پایهٔ یکا قائم از یک مجموعه از بردارهای پایه داده می‌شود.

(۹.۱۵) قضیه. (روش ساختن دستگاه یکاقائم گرام-اشمیت) گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد با یک ضرب داخلی (u, v) باشد و $\{w_1, \dots, w_r\}$ یک پایه. فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_r\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای زیر فضای $S(w_1, \dots, w_r)$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$u_{r+1} = \frac{w}{\|w\|}$$

که در آن

$$w = w_{r+1} - \sum_{i=1}^r (w_{r+1}, u_i) u_i$$

در این صورت $\{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای $S(w_1, \dots, w_{r+1})$ است. برهان. باید سه مطلب را ثابت کنیم: نخست اینکه طول u_{r+1} برابر یک است، دوم اینکه برای $1 \leq i \leq r$ ، $(u_{r+1}, u_i) = 0$ ، و سوم اینکه:

$$S(w_1, \dots, w_{r+1}) = S(u_1, \dots, u_{r+1})$$

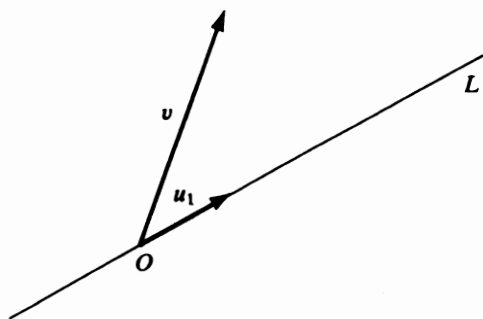
(از حکم اخیر برمی‌آید که $\{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است). چون:

$$S(u_1, \dots, u_r) = S(w_1, \dots, w_r)$$

پس روشن است که $w = w_{r+1} - \sum_{i=1}^r (w_{r+1}, u_i) u_i$ مخالف صفر است. در این صورت طول $u_{r+1} = w / \|w\|$ برابر ۱ است. برای اینکه ثابت کنیم به‌ازای $1 \leq j \leq r$ ، $(u_{r+1}, u_j) = 0$ ، کافی است ثابت کنیم که $(w, u_j) = 0$. داریم:

$$\begin{aligned} (w, u_j) &= \left(w_{r+1} - \sum_{i=1}^r (w_{r+1}, u_i) u_i, u_j \right) \\ &= (w_{r+1}, u_j) - \sum_{i=1}^r (w_{r+1}, u_i) (u_i, u_j) \\ &= (w_{r+1}, u_j) - (w_{r+1}, u_j) = 0 \end{aligned}$$

ضرب داخلی ۱۴۷



شکل ۱۲.۴

سرانجام روشن است که $u_{r+1} \in S(w_1, \dots, w_{r+1})$ و $w_{r+1} \in S(u_1, \dots, u_{r+1})$ چون بنابر فرض $S(w_1, \dots, w_r) = S(u_1, \dots, u_r)$ داریم:

$$S(u_1, \dots, u_{r+1}) = S(w_1, \dots, w_{r+1})$$

یعنی اثبات آنچه که می‌خواستیم.

فرع. هر فضای برداری متناهی-بعد V با یک ضرب داخلی، یک پایهٔ یکا قائم دارد. برهان. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ V باشد. روش گرام-اشمیت با استقرار ریاضی نشان می‌دهد که هر زیر فضای $S(v_1, v_2, \dots, v_r)$ از V یک پایهٔ یکا قائم دارد. به‌ویژه $S(v_1, \dots, v_n) = V$ چنین پایه‌ای دارد.

مثال ب. می‌توان به روش گرام-اشمیت از دیدگاه مسألهٔ یافتن فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، که در تمرین ۳ از بخش ۱۴ در نظر گرفتیم، نگاه کرد. (و نیز به تمرین ۱۳ مراجعه کنید) برای سادگی، فرض می‌کنیم، L در R^2 خطی گذرنده از مبدأ و u_1 بردار یکه‌ای روی آن است [شکل ۱۲.۴]. گیریم v برداری است غیر واقع بر L . نخستین گام روش گرام-اشمیت تعیین بردار $w = v - (v, u_1)u_1$ است، به‌گونه‌ای که $(w, u_1) = 0$. از لحاظ هندسی، با این‌کار v را در امتداد L و خط عمود بر آن تجزیه می‌کنیم [شکل ۱۳.۴]:

$$v = (v, u_1)u_1 + w = (v, u_1)u_1 + (v - (v, u_1)u_1)$$

فاصلهٔ انتهای v تا خط L برابر است با طول تصویر w :

$$\|w\| = \|v - (v, u_1)u_1\|$$

هنگام استفاده این دستور باید به خاطر داشت که u_1 برداری است یکه.

۱۴۸ فضا‌های برداری مجهز به ضرب داخلی

اکنون یک مثال عددی می‌آوریم. می‌خواهیم فاصله نقطه (۵ و ۱) را از خط گذرنده بر (۱ و ۱) و (۰ و ۲) بیابیم. برداریکه خط برابر است با $u_1 = u/\|u\|$ که در آن $u = \langle -3, -1 \rangle$. پس

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \langle -3, -1 \rangle$$

برای استفاده از روش تصویری مذکور که هم اکنون بیان کردیم، نقطه (۱ و ۱) را به عنوان مبدأ می‌گیریم [شکل ۱۴.۴]. در این صورت v برداری است که با پاره خط جهت‌دار از نقطه (۱ و ۱) تا (۵ و ۵) نشان داده می‌شود. از این رو

$$v = \langle 0, 4 \rangle$$

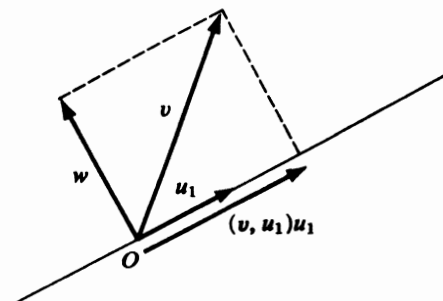
تصویر قائم v بر این خط با بردار زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} w &= v - (v, u_1)u_1 \\ &= \langle 0, 4 \rangle - \frac{1}{\sqrt{10}}(-4) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \langle -3, -1 \rangle \\ &= \langle -\frac{6}{5}, \frac{18}{5} \rangle \end{aligned}$$

پس فاصله مطلوب چنین است:

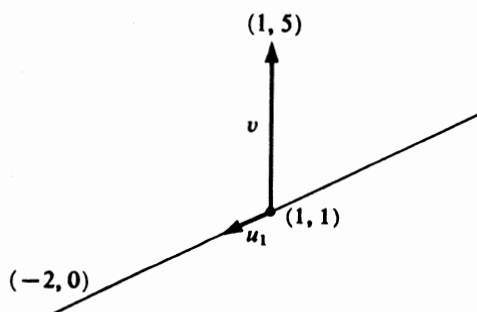
$$\|w\| = \frac{1}{5}(36 + 324)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\sqrt{360}$$

اکنون برمی‌گردیم به مفهوم تبدیلهای طول نگهدار در یک فضای برداری کلی با یک ضرب داخلی. مثالهایی از این تبدیلهای (دورانها و تقارنها در R_2) را در بخش پیش به‌طور مفصل مورد بحث قرار دادیم.



شکل ۱۴.۴

ضرب داخلی ۱۴۹



شکل ۱۴.۴

(۱۰.۱۵) تعریف. گیریم V یک فضای برداری با ضرب داخلی (u, v) باشد. هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ یک تبدیل متعامد نامیده می‌شود، هرگاه T طول نگهدار باشد، یعنی برای هر $u \in V$ $\|T(u)\| = \|u\|$.

(۱۱.۱۵) قضیه. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد و $T \in L(V, V)$ باشد. حکمهای زیر در مورد T هم‌ارزند.
۱. T یک تبدیل متعامد است.

۲. برای هر $u, v \in V$ $(T(u), T(v)) = (u, v)$.

۳. برای یک پایهٔ یکای قائم V مانند $\{u_1, \dots, u_n\}$ بردارهای $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ نیز یک مجموعهٔ یکای قائم است.

۴. A ، ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکا قائم در شرط $A \cdot A^t = I$ صدق می‌کند که در آن A^t ماتریسی است که از A با تعویض جای سطرها و ستونها به‌دست می‌آید و ترانزادهٔ A نامیده می‌شود.

برهان. از (۱) حکم (۲) نتیجه می‌شود. می‌دانیم که به‌ازای هر $u \in V$ داریم $\|T(u)\| = \|u\|$. از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر بردار u $(T(u), T(u)) = (u, u)$. با قرار دادن $u + v$ به جای u داریم:

$$(T(u+v), T(u+v)) = (u+v, u+v)$$

اکنون دو طرف تساوی اخیر را با استفاده از خواص تقارن و دوخطی بودن ضرب داخلی بسط می‌دهیم:

$$(T(u), T(u)) + 2(T(u), T(v)) + (T(v), T(v)) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v)$$

* در ارتباط با این تعریف به مسئله ۱۲، در آخر این بخش مراجعه کنید.

۱۵۰ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

چون $(T(u), T(u)) = (u, u)$ و $(T(v), T(v)) = (v, v)$ ، از معادلهٔ اخیر نتیجه می‌شود که برای هر u و v داریم $(T(u), T(v)) = (u, v)$.

حکم (۲) مستلزم حکم (۳) است. گیریم $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم V باشد؛ در این صورت:

$$(u_i, u_i) = 1, \quad (u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j$$

بنا بر حکم (۲) داریم:

$$(T(u_i), T(u_i)) = 1, \quad (T(u_i), T(u_j)) = 0, \quad i \neq j$$

و $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است. حکم (۳) حکم (۱) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم که برای یک پایهٔ یکا قائم V مانند $\{u_1, \dots, u_n\}$ بردارهای تصویر $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم تشکیل می‌دهند. گیریم:

$$v = \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n$$

یک بردار دلخواه V باشد. در این صورت:

$$\|v\|^2 = (v, v) = (\xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n, \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n) = \sum_1^n \xi_i^2$$

زیرا $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است. به همین ترتیب داریم:

$$\|T(v)\|^2 = (T(v), T(v)) = \left(\sum_1^n \xi_i T(u_i), \sum_1^n \xi_i T(u_i) \right) = \sum_1^n \xi_i^2$$

پس حکم (۱) و همچنین هم‌ارزی سه حکم اول ثابت شد. سرانجام ثابت می‌کنیم که حکمهای (۳) و (۴) هم‌ارزند. فرض کنیم که حکم (۳) برقرار باشد و $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم V باشد. گیریم:

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} u_j$$

چون $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است، داریم:

$$(T(u_i), T(u_i)) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} u_j, \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} u_j \right) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji}^2 = 1$$

و اگر $j \neq i$ ، آنگاه:

$$(T(u_i), T(u_j)) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} u_k, \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} u_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} = 0$$

از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که ${}^tAA = I$ ، زیرا عنصر (i, k) ام A برابر α_{ki} است. به وارون، ${}^tAA = I$ ایجاب می‌کند که معادله‌های بالا برقرار باشند، و از این رو $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ یک مجموعهٔ یکا قائم است. به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(۱۲.۱۵) تعریف. ماتریس $A \in M_n(R)$ را یک ماتریس متعامدگویند هرگاه ${}^tA \cdot A = I$ ؛ در این صورت A صرفاً ماتریس یک تبدیل متعامد نسبت به یک پایهٔ یکا قائم V است.

تمرینها

در همهٔ تمرینها، V نمایش یک فضای برداری متناهی-بعد روی R با یک ضرب داخلی است. ۱. برای زیر فضاهایی از R_4 که با هر یک از مجموعه‌های زیر پدید می‌آیند یک پایهٔ یکا قائم به کمک روش گرام-اشمیت یا روش دیگر بیابید. به فرض اینکه ضرب داخلی R_4 همان ضرب داخلی معمولی باشد، یعنی:

$$(\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle, \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \rangle) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \beta_i$$

$$\langle 1, 1, 1, 0 \rangle, \langle -1, 1, 2, 1 \rangle \text{ (الف)}$$

$$\langle 1, 1, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1, 1 \rangle \text{ (ب)}$$

$$\langle -1, 1, 1, 1 \rangle, \langle 1, -1, 1, 1 \rangle, \langle 1, 1, -1, 1 \rangle \text{ (پ)}$$

۲. برای زیر فضایی از $C(R)$ که با تابعهای $\{1, x, x^2\}$ پدید می‌آیند، پایه‌ای یکا قائم نسبت به ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ بیابید.

۳. به کمک روش گرام-اشمیت در هر یک از حالت‌های زیر همانند مثال (ب) فاصلهٔ هر نقطه را از خط متناظرش بیابید:

(الف) نقطهٔ $(0, 0)$ از خط‌گذرنده بر $(1, 1)$ و $(3, 0)$.

(ب) نقطهٔ $(-1, 0)$ و خط $y = x$.

(پ) نقطهٔ $(1, 1)$ از خط‌گذرنده بر $(-1, -1)$ و $(0, -2)$.

۴. به کمک روش مثال الف نشان دهید که تابعهای $g_n(x) = \cos nx$ ، $n = 1, 2, \dots$ در $C(R)$ نسبت به ضرب داخلی داده شده در مثال (الف):

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

یک مجموعهٔ یکا قائم هستند.

۵. گیریم $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم برای V باشد.

(الف) نشان دهید که اگر $v = \sum \xi_i u_i$ و $w = \sum \eta_i u_i$ ، آنگاه $(v, w) = \sum \xi_i \eta_i$.

(ب) نشان دهید که هر بردار $v \in V$ را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت زیر نوشت:

$$v = \sum_{i=1}^n (v, u_i) u_i$$

۶. گیریم u برداری است متعلق به R_n به‌گونه‌ای که (نسبت به ضرب داخلی معمولی) $\|u\| = 1$.

ثابت کنید که یک ماتریس متعامد $n \times n$ وجود دارد که سطر اولش u است.

۷. گیریم $O(V)$ نمایش مجموعهٔ همهٔ تبدیلهای متعامد روی V است. ثابت کنید که $O(V)$ نسبت به عمل ضرب یک گروه است.

۸. دو فضای برداری V و W ، به ترتیب با دو ضرب داخلی (v_1, v_2) و (w_1, w_2) را طولیای گویند، هرگاه یک تبدیل خطی یک به یک T از V روی W وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که به‌ازای هر مقدار $v_1, v_2 \in V$ ، $[Tv_1, Tv_2] = (v_1, v_2)$. یک چنین تبدیل خطی را طولیای گویند. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد با یک ضرب داخلی (u, v) ، و $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ یکا قائم آن باشد. ثابت کنید که نگاشت:

$$T : \sum_{i=1}^n \xi_i v_i \rightarrow \langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$$

یک طولیایی از V روی R_n است که در آن R_n همانند مثال (i) در آغاز این بخش، به ضرب داخلی معمولی مجهز است.

۹. گیریم V یک فضای برداری با یک ضرب داخلی و W زیر فضایی از آن است. گیریم $W^\perp$ مجموعهٔ بردارهای $v \in V$ است به‌گونه‌ای که برای هر $w \in W$ ، $(v, w) = 0$. ثابت کنید $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$.

۱۰. ثابت کنید که اگر W_1 و W_2 زیر فضاهای V باشند به‌گونه‌ای که $\dim W_1 = \dim W_2$ ، آنگاه یک تبدیل متعامد T وجود دارد به‌گونه‌ای که $T(W_1) = W_2$.

۱۱. همهٔ بردارهای این مسأله به R_3 که به ضرب داخلی معمولی مجهز است تعلق دارند. هر صفحه یک مجموعهٔ P از بردارهایی است به‌شکل $p + w$ ، $w \in W$ ، که در آن W یک زیرفضای دو بعدی است. بنابر فصل ۲ می‌دانیم که هر مجموعهٔ بردارهای R_3 یک صفحه تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر، این مجموعه متشکل از همهٔ جوابهای معادلهٔ خطی:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 = 0, \quad \alpha_i \in R$$

تمرینها ۱۵۳

باشد که در آن همه $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ها همزمان صفر نیستند. زیرفضای دو بعدی W ی مربوط به این صفحه مجموعه جوابهای معادله همگن زیر است:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

باید توجه داشت که اگر $n = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ آنگاه برای هر $w \in W$ ، $(n, w) = 0$ و (n, p) برای هر $p \in P$ یک ثابت است. بردار n را بردار قائم بر صفحه می نامند.

الف) گیریم n بردار ناصفري در R_3 و α یک عدد حقيقي ثابت باشد. نشان دهید که مجموعه بردارهای p به گونه ای که $(p, n) = \alpha$ ، صفحه ای عمود بر بردار n و یک زیرفضای دو بعدی $S(n)^\perp$ است.

ب) یک بردار قائم n و یک پایه برای $S(n)^\perp$ برای صفحه زیر بیابید:

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$$

پ) معادله صفحه ای را بیابید که بر بردار $n = \langle 1, -1, 2 \rangle$ عمود و شامل بردار $p = \langle -1, 1, 0 \rangle$ باشد. معادله این صفحه را به هر یک از دو صورت زیر بنویسید:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta$$

و

$$(n, p) = \alpha$$

ت) نشان دهید برای اینکه بردار x در صفحه عمود بر n و موازی بر p باشد، لازم و کافی است که $(x - p, n) = 0$.

ث) فرض می کنیم $a = \langle 2, 0, 1 \rangle$ و $b = \langle 1, 1, 0 \rangle$. بردار $c \neq 0$ را به گونه ای بیابید که

$$(c, a) = (c, b) = 0$$

[راهنمایی: نشان دهید که c جواب یک دستگاه از معادله های همگن است.]

ج) معادله صفحه ای را بنویسید که بر نقطه های $\langle 2, 0, -1 \rangle$ ، $\langle 1, 1, 1 \rangle$ و $\langle 0, 0, 1 \rangle$ بگذرد. [راهنمایی: به کمک نتیجه جزء ث بردار قائم را بیابید.]

چ) گیریم P یک صفحه و u برداری غیر واقع بر آن باشد. نشان دهید که یک بردار یکتای p روی P وجود دارد به گونه ای که برای هر $x \in P$:

$$(p \cdot -x, p \cdot -u) = 0$$

۱۵۴ فضاهای برداری مجهز به ضرب داخلی

[راهنمایی: فرض کنید که معادله صفحه P چنین است:

$$(x - p, n) = 0$$

که در آن $p \in P$ و n یک بردار قائم است. در این صورت p_0 به ازای مقداری مانند $\lambda \in R$ در معادله‌های:

$$(p_0 - p, n) = 0, \quad p_0 - u = \lambda n$$

صدق می‌کند. در این صورت لازم است λ را بیابیم]

(ح) فاصله نقطه $\langle 1, 1, 2 \rangle$ را از صفحه $0 = x_1 + x_2 - x_3 + 1$ به کمک نتیجه جزء

ج بیابید.

۱۲. تبدیلهای قائم یک فضای برداری متناهی-بعد V روی R با ضرب داخلی، از راه طول تعریف شده است نه از راه تعامد. گیریم T تبدیلی است که تعامد را حفظ می‌کند، به این معنی که هر گاه $(v, w) = 0$ آنگاه $(Tv, Tw) = 0$. ثابت کنید که T ضربی عددی از یک تبدیل متعامد است.

۱۳. گیریم $v_1, \dots, v_m$ یک مجموعهٔ یکا قائم در V ، و v برداری باشد به گونه‌ای که $x \in S(v_1, \dots, v_m)$ نشان دهد که از میان همهٔ بردارهای به شکل $v - x$ بردار $v \notin S(v_1, \dots, v_m)$ بردار $v' = v - \sum_{i=1}^n (v, v_i)v_i$ که با روش گرام-اشمیت داده می‌شود، کوچکترین طول را دارد.



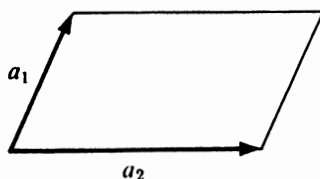
دترمینانها

در حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان رفتار تابع $f: R \rightarrow R$ را در نقطه x با محاسبه مشتق آن $f'(x)$ بررسی کرد. به عنوان مثال اگر f' در یک بازه $[a, b]$ مثبت باشد، تابع f در آن بازه یک به یک است و غیره. دترمینان نقش مشابهی در جبر خطی دارد. دترمینان قاعده‌ای است که به هر تبدیل خطی $T: V \rightarrow V$ عددی را مربوط می‌کند که چیزی در مورد رفتار T بیان می‌کند (بخش ۱۸). می‌توان دترمینان را به عنوان تابعی از بردارهای سطری یک تبدیل T نسبت به یک پایه دانست. اگر ماتریس T دارای ضریبهای حقیقی باشد، دترمینان (با تقریب علامت ± 1) حجم یک چندوجهی است که یالهای آن سطرهاى ماتریس‌اند.

۱۶. تعریف دترمینانها

تابع $A(a_1, a_2)$ را که به یک جفت بردار $a_1, a_2 \in R_2$ مساحت متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a_1 و a_2 را تخصیص می‌دهد، (شکل ۱.۵)، در نظر می‌گیریم. به جای یافتن دستوری برحسب مؤلفه‌های a_1 و a_2 برای این تابع، ویژگیهای کلی تابع A را بررسی می‌کنیم. نخست:

$$A(e_1, e_2) = 1 \quad \text{اگر } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ آنگاه} \quad (1.16)$$



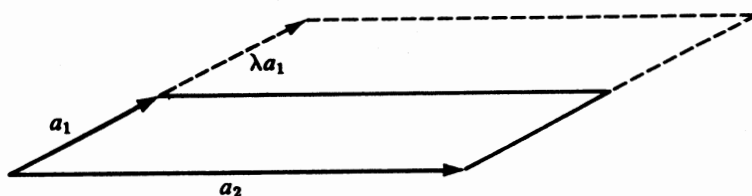
شکل ۱.۵

دوم، اگر یکی از بردارها را در عدد مثبت λ ضرب کنیم A نیز در λ ضرب می‌شود، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب طول قاعده در ارتفاع (شکل ۲.۵) و طول λa_1 برابر است با λ برابر طول a_1 .*
بر حسب تابع A داریم:

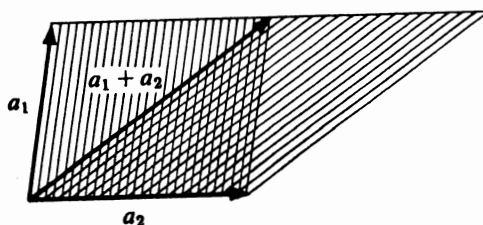
$$A(\lambda a_1, a_2) = A(a_1, \lambda a_2) = \lambda A(a_1, a_2), \quad \lambda > 0 \quad (2.16)$$

سرانجام قاعده و ارتفاع متوازی‌الاضلاعی به اضلاع a_1 و a_2 با قاعده و ارتفاع متوازی‌الاضلاعی به اضلاع $a_1 + a_2$ و a_2 برابر است (شکل ۳.۵)، بنابراین داریم:

$$A(a_1 + a_2, a_2) = A(a_1, a_2) = A(a_1, a_2 + a_1) \quad (3.16)$$



شکل ۲.۵



شکل ۳.۵

* مانند فصل ۴، طول بردار $a = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ را با $\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف دترمینانها ۱۵۷

صبر کنید! ممکن است تصور شود که همه خواص اساسی تابع مساحت ذکر نشده‌اند. ولی، ما ثابت می‌کنیم که تنها یک تابع است که به هر جفت از بردارهای R_2 یک عدد حقیقی نامنفی مربوط می‌کند که در شرطهای (۱.۱۶) و (۲.۱۶) صدق می‌کنند. همچنین باید توجه داشت که تابع A ویژگی دیگری هم دارد:

(۴.۱۶) شرط لازم و کافی برای اینکه $A(a_1, a_2) \neq 0$ این است که a_1 و a_2 وابسته خطی باشند.

حکم (۴.۱۶) شاید یکی از مهمترین و جالب‌توجه‌ترین ویژگیهای تابع مساحت باشد. بنابراین ویژگی، برای اینکه دو بردار وابسته خطی باشند لازم و کافی است که مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی آنها ساخته می‌شود صفر باشد. به عبارت دیگر، محاسبه یک عدد تنها (یعنی مساحت)، آزمونی است برای وابستگی خطی.

به سبب فایده روشن آزمونی از نوع (۴.۱۶) است که تابعی با ویژگیهای مشابه تابع مساحت را در مقامی واحد ممکن کلی، تعریف می‌کنیم.

نخست تابعی روی مجموعه‌ای از بردارهای F_n تعریف می‌کنیم که به ازای یک مقدار دلخواه $\lambda \in F$ در اصلهای (۱.۱۶)، (۲.۱۶) و (۳.۱۶) صدق کند. در این بخش نتایجی از این اصول استخراج می‌کنیم و اثبات وجود چنین تابعی را به بخش بعدی می‌گذاریم. باید توجه داشت که منطقاً هیچ چیز خطایی در این روش وجود ندارد، به عنوان مثال، این کار مشابه کاری است که در هندسه اقلیدسی انجام می‌دهیم یعنی، نتایجی از اصلها پیش از ساختن اشیایی که در آنها صدق کنند، استخراج می‌کنیم. در بخش ۱۹ رابطه این تابع را با مساحت و حجم بررسی می‌کنیم.

(۵.۱۶) تعریف. گیریم F یک هیأت دلخواه باشد. دترمینان، تابعی است که به هر n تایی $\{a_1, \dots, a_n\}$ از بردارهای F_n عنصری از F مانند $D = D(a_1, \dots, a_n)$ را مربوط می‌کند به گونه‌ای که در شرطهای زیر صدق می‌کند:

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n), \quad (i \neq j, 1 \leq i \leq n)$$

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \lambda D(a_1, \dots, a_n), \quad \lambda \in F \quad (\text{ii})$$

$$D(e_1, \dots, e_n) = 1 \quad (\text{iii}) \quad \text{اگر بردار یکه } i\text{ام باشد، } \langle 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \rangle$$

اکنون نتایج این تعریف را بیان می‌کنیم:

(۶.۱۶) قضیه. گیریم D یک تابع دترمینان روی F_n باشد. در این صورت حکمهای زیر

معتبرند:

(الف) اگر جای دو بردار a_i و a_j ($i \neq j$) را عوض کنیم $D(a_1, \dots, a_n)$ در -1 ضرب می‌شود.

(ب) اگر دو بردار a_i و a_j برابر باشند، آنگاه $D(a_1, \dots, a_n) = 0$

پ) اگر به جای a_i مقدار $a_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$ را به ازای یک مقدار دلخواه $\lambda_j \in F$ بگذاریم D تغییر نمی کند.

ت) اگر $\{a_1, \dots, a_n\}$ وابسته خطی باشد، آنگاه $D(a_1, \dots, a_n) = 0$

$$\begin{aligned} & D(a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i + \mu a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (\text{ث}) \\ &= \lambda D(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mu D(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) \end{aligned}$$

به ازای $1 \leq i \leq n$ ، به ازای عناصر λ و μ هیأت دلخواه، و به ازای بردارهای $a_i, a'_i \in F_n$.
برهان. (الف) برای اینکه نشان دهیم عنصر i ام تابع دترمینان، a و j امین عنصر آن b است از طرز نمایش زیر استفاده می کنیم:

$$D(\dots, \underset{i}{a}, \dots, \underset{j}{a}, \dots)$$

در این صورت برای i و j ی دلخواه داریم:

$$D(\dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_j}, \dots)$$

$$= -D(\dots, \underset{i}{-a_i}, \dots, \underset{j}{a_j}, \dots) \quad (\text{ii}) \quad \text{بنابر ویژگی}$$

$$= -D(\dots, \underset{i}{-a_i}, \dots, \underset{j}{-a_i + a_j}, \dots) \quad (\text{i}) \quad \text{بنابر ویژگی}$$

$$= D(\dots, \underset{i}{-a_i}, \dots, \underset{j}{+a_i - a_j}, \dots) \quad (\text{ii}) \quad \text{بنابر ویژگی}$$

$$= D(\dots, \underset{i}{-a_j}, \dots, \underset{j}{a_i - a_j}, \dots) \quad (\text{i}) \quad \text{بنابر ویژگی}$$

$$-a_i + (a_i - a_j) = -a_j \quad \text{چون}$$

$$= -D(\dots, \underset{i}{-a_j}, \dots, \underset{j}{-a_i + a_j}, \dots) \quad (\text{ii}) \quad \text{بنابر ویژگی}$$

$$= -D(\dots, \underset{i}{-a_j}, \dots, \underset{j}{-a_i}, \dots) \quad (\text{ii}) \quad \text{بنابر ویژگیهای (i) و (ii)}$$

$$= -D(\dots, \underset{i}{a_j}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots)$$

تعریف دترمینانها ۱۵۹

(ب) اگر برای $i \neq j$ آنگاه بنابر (الف) داریم:

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= D(\dots, \underset{i}{a_j}, \dots, \underset{j}{a_i}, \dots) \\ &= D(\dots, \Psi a_i, \dots, a_i, \dots) \\ &= -\Psi D(\dots, -a_i, \dots, a_i, \dots) \\ &= -\Psi D(\dots, \circ, \dots, a_i, \dots) = \circ \end{aligned}$$

و حکم (ب) ثابت می‌شود.

(پ) گیریم $i \neq j$ و $\lambda \in F$. می‌توان فرض کرد $\lambda \neq \circ$. در این صورت:

$$\begin{aligned} &D(\dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{a_j}, \dots) \\ &= \lambda^{-1} D(\dots, \underset{i}{a_i}, \dots, \underset{j}{\lambda a_j}, \dots) \quad \text{(ii) بنابر ویژگی} \\ &= \lambda^{-1} D(\dots, \underset{i}{a_i} + \underset{j}{\lambda a_j}, \dots, \underset{j}{\lambda a_j}, \dots) \quad \text{(i) بنابر ویژگی} \\ &= D(\dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots) \end{aligned}$$

با تکرار این استدلال، حکم (پ) ثابت می‌شود.

(ت) اگر $a_1, \dots, a_n$ وابسته خطی باشند، در این صورت یک a_i را می‌توان به‌عنوان ترکیب خطی از بردارهای دیگر بیان کرد:

$$a_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j$$

بنابر گزاره (پ) داریم:

$$\begin{aligned} D(a_1, \dots, a_n) &= D(\dots, a_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j a_j, \dots) \\ &= D(\dots, \underset{i}{\circ}, \dots) \\ &= \circ D(\dots, \underset{i}{\circ}, \dots) \quad \text{(ii) بنابر ویژگی} \\ &= \circ \end{aligned}$$

(ث) بنابر ویژگی (ii)، کافی است، مثلاً، ثابت کنیم که:

$$\begin{aligned} D(a_1 + a'_1, a_2, \dots, a_n) &= D(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (7.16) \\ &\quad + D(a'_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

می‌توان فرض کرد که $\{a_2, \dots, a_n\}$ نایسته خطی است [وگرنه بنابر حکم (ت) هر دو طرف (۷.۱۶) صفرند و چیزی برای اثبات وجود ندارد]. بنابر (۴.۷) مجموعه $\{a_2, \dots, a_n\}$ را می‌توان کامل کرد و یک پایه R_n مانند $\{\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n\}$ از آن به‌دست آورد. در این صورت بنابر حکم (پ) و اصل (ii) داریم:

$$D(\lambda_1 \bar{a}_1 + \sum_{i>1} \lambda_i a_i, a_2, \dots, a_n) = \lambda_1 D(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n) \quad (۸.۱۶)$$

به‌ازای هر انتخاب $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
اینک گیریم:

$$a_1 = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

$$a'_1 = \mu_1 \bar{a}_1 + \mu_2 a_2 + \dots + \mu_n a_n$$

پس:

$$a_1 + a'_1 = (\lambda_1 + \mu_1) \bar{a}_1 + (\lambda_2 + \mu_2) a_2 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) a_n$$

بنابر (۸.۱۶) داریم:

$$D(a_1 + a'_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda_1 + \mu_1) D(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$D(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lambda_1 D(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$D(a'_1, a_2, \dots, a_n) = \mu_1 D(\bar{a}_1, a_2, \dots, a_n)$$

بنابر قانون پخشپذیری در R ، (۷.۱۶) به‌دست می‌آید و برهان قضیه پایان می‌پذیرد.
تبصره. بسیاری از مؤلفان در تعریف دترمینان به‌جای اصل (i) از حکمهای (ث) و (الف) استفاده می‌کنند. نکته‌ای که در تعریف بالا [در استفاده از اصل (i)] وجود دارد این است که حکمهای کمتری داریم و می‌توانیم قانون بنیادی (ث) را با استفاده از نتیجه نسبتاً ژرف (۴.۷) مربوط به مجموعه‌های بردارهای نایسته خطی در F_n ثابت کنیم.

اکنون نشان می‌دهیم که ویژگیهای دترمینانها که هم‌اکنون یافتیم، روش سریع و کارایی برای محاسبه مقدارهای یک تابع دترمینان در حالت‌های ویژه به ما می‌دهد.

منظور ما بیان این نکته است که ویژگیهای $D(a_1, \dots, a_n)$ که در تعریف (۵.۱۶) و قضیه (۶.۱۶) گفتیم رابطه نزدیکی با انجام عملیات سطری در ماتریسی دارد که سطرهای آن $\{a_1, \dots, a_n\}$ است.

برای روشن‌ساختن مطالب بالا، دترمینان $D(a_1, \dots, a_n)$ را با $D(\mathbf{A})$ نشان می‌دهیم که در آن $\{a_1, \dots, a_n\}$ سطرهای ماتریس $\mathbf{A}$ ی $n \times n$ است. اگر:

تعریف دترمینانها ۱۶۱

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

اغلب دترمینان آن را چنین نمایش می‌دهیم:

$$D(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

این طرز نمایش دترمینان برای انجام محاسبات بسیار مناسبتر است، ولی خاطرنشان می‌سازیم که استفاده از آن دارای این نقص است که برای ماتریسها و دترمینانهای مختلف از یک علامت باید استفاده کنیم.

قضیه بعدی کلید محاسبه عملی دترمینانهاست. این قضیه برحسب عملهای مقدماتی سطری مذکور در تعریف (۹.۶) بیان می‌شود.

(۹.۱۶) قضیه. گیریم A یک ماتریس $n \times n$ با سطرها $\{a_1, \dots, a_n\}$ باشد. الف) گیریم A' از روی A با یک عمل مقدماتی سطری از نوع I در تعریف (۹.۶)، (تعویض جای دو سطر) به‌دست آمده باشد. در این صورت

$$D(A') = -D(A)$$

ب) گیریم A از روی A با یک عمل مقدماتی سطری از نوع II (تعویض سطر a_i با $a_i + \lambda a_j$ که در آن $\lambda \in F$ و $i \neq j$) به‌دست آمده باشد. در این صورت $D(A') = D(A)$. پ) گیریم A' از A با یک عمل مقدماتی سطری از نوع III (جانشین کردن μa_i به‌جای a_i که در آن $\mu \neq 0$ به F تعلق دارد) به‌دست آمده باشد. در این صورت

$$D(A') = \mu D(A)$$

برهان. جزء الف) بیان دیگری از قضیه (۶.۱۶) الف) است. جزء ب) صورت دیگری از قضیه (۶.۱۶) پ) است. سرانجام، جزء پ) همان اصل (ii) در تعریف (۵.۱۶) است.

مثال الف. دترمینان زیر را حساب کنید:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

بنابر بخشهای ۶ و ۱۲ می‌دانیم که می‌توانیم نخست با عملهای مقدماتی سطری، ماتریسی مانند A' هم‌ارز سطری ماتریس مفروض:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

به‌دست آوریم به‌گونه‌ای که سطرهای ناصفر A' به‌شکل پله‌یی باشند. از اینجا می‌خواهیم ببینیم که سطرهای A نایسته خطی هستند یا نه. اگر سطرهای A وابسته خطی باشند، آنگاه بنابر قضیه (۶.۱۶) (ت)، $D(A) = 0$. اگر سطرهای A نایسته خطی باشند، آنگاه همه سطرهای A' مخالف صفر خواهند بود و بنابر بخش ۱۲ مثال (پ) می‌توانیم به‌کمک عملهای مقدماتی سطری A' را به ماتریس یک‌ه تبدیل کنیم. بنابر قضیه (۹.۱۶) می‌توانیم در هر مرحله مقدار دترمینان را حفظ کنیم و با توجه به اینکه بنابر تعریف (۵.۱۶) (۳)، دترمینان ماتریس یک‌ه برابر ۱ است محاسبه پایان خواهد یافت.

اگر این نکته‌ها را برای ماتریس خود به‌کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{با قراردادن } a_2 + 2a_1 \text{ به جای } a_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (\text{با قراردادن } a_2 + a_1 \text{ به جای} \\ a_2 \text{ و } a_2 - a_1 \text{ به جای } a_2) \end{matrix}$$

تمرینها ۱۶۳

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 + \frac{8}{3} \end{vmatrix}$$

(دو عمل سطری از نوع II برای
دو سطر آخر به کار بسته شده است)

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix}$$

(اعمال سطری دیگر از نوع II، مثل
بخش ۱۲)

$$= (-1)(-1)6\left(-\frac{7}{3}\right) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(عملیات مقدماتی
سطری از نوع III)

$$= -\frac{42}{3} = -14$$

باید توجه داشت که در این روش یافتن اشتباههای محاسبه‌ی بسیار ساده است.

تمرینها

۱. دترمینان ماتریسهای زیر را حساب کنید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ب) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{الف) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ت) ماتریسهای تمرین ۷ از بخش ۱۲.

۲. گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس مثلی (که عنصرهای زیر قطر آن صفرند)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ 0 & \alpha_2 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $D(\mathbf{A}) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$.

۳. گیریم A ماتریسی است بلوکی-مثلی:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & * \\ \circ & A_2 & \\ \vdots & & \ddots \\ \circ & \dots & A_r \end{pmatrix}$$

که در آن A_i ها ماتریسهایی مربع، احتمالاً با اندازه‌های متفاوت‌اند. ثابت کنید:

$$D(A) = D(A_1)D(A_2) \cdots D(A_r)$$

۴. گیریم $D^*(a_1, \dots, a_n)$ تابعی از بردارهای $a_1, \dots, a_n$ از R_n در R باشد، به‌گونه‌ای که برای هر $a_j, a'_i, a''_i \in R_n$:

الف) $D^*(e_1, \dots, e_n) = 1$ ، که در آن e_i ها بردارهای یکه‌اند.

ب) $D^*(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) = \lambda D^*(a_1, \dots, a_n)$ ، $\lambda \in R$

$$D^*(a_1, \dots, a'_i + a''_i, \dots, a_n) = D^*(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n) + D^*(a_1, \dots, a''_i, \dots, a_n) \quad \text{پ)}$$

ت) $D^*(a_1, \dots, a_n) = 0$ اگر برای $i \neq j$ ، $a_i = a_j$. ثابت کنید که D^* یک تابع دترمینان روی R_n است.

۱۷. وجود و یکتایی دترمینانها

اکنون باید ببینیم یک تابع D که در شرطهای تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کند وجود دارد یا نه. در این بخش نخست ثابت می‌کنیم که حداکثر یک چنین تابعی وجود دارد و سپس روش ساختن آن را بیان می‌کنیم. در جریان این بحث ویژگیهای مفید دیگر دترمینانها را نیز به‌دست می‌آوریم.

(۱.۱۷) قضیه. گیریم D و D' دو تابعی باشند که در شرطهای (i) و (ii) تعریف (۵.۱۶)

صدق می‌کنند، در این صورت برای همه $a_1, \dots, a_n$ متعلق به F_n داریم:

$$D(a_1, \dots, a_n) = D'(a_1, \dots, a_n)$$

برهان. تابع Δ را که به‌شکل زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n) - D'(a_1, \dots, a_n)$$

وجود و یکتایی دترمینانها ۱۶۵

در این صورت، چون هر دو تابع D و D' در شرطهای (۵.۱۶) و (۶.۱۶) صدق می‌کنند، Δ دارای ویژگیهای زیر است:

$$\Delta(e_1, \dots, e_n) = 0 \quad (2.17)$$

(۳.۱۷) مقدار $\Delta(a_1, \dots, a_n)$ با تعویض دو بردار a_i و a_j تغییر علامت می‌دهد، و اگر به‌ازای $a_i = a_j$ ، $i \neq j$ آنگاه $\Delta(a_1, \dots, a_n) = 0$

$$\Delta(\dots, \lambda a_i, \dots) = \lambda \Delta(\dots, a_i, \dots), \lambda \in F \quad (4.17)$$

$$\Delta(\dots, a_i + a'_i, \dots) = \Delta(\dots, a_i, \dots) + \Delta(\dots, a'_i, \dots) \quad (5.17)$$

اکنون گیریم $a_1, \dots, a_n$ بردارهای دلخواهی از F_n باشند. کافی است ثابت کنیم که $\Delta(a_1, \dots, a_n) = 0$ ، و نشان می‌دهیم که این نتیجه‌ای است از ویژگیهای (۲.۱۷) و (۵.۱۷). چون $e_1, \dots, e_n$ یک پایه F_n است می‌توانیم بنویسیم:

$$a_i = \lambda_{i1}e_1 + \dots + \lambda_{in}e_n = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}e_j$$

با استفاده از (۴.۱۷) و (۵.۱۷) در مورد اولین عنصر و سپس در مورد دومین عنصر و غیره، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta(a_1, \dots, a_n) &= \Delta\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j}e_j, a_2, \dots, a_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} \Delta(e_j, a_2, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \lambda_{1j_1} \Delta\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n \lambda_{2j_2}e_{j_2}, a_3, \dots, a_n\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \lambda_{1j_1} \lambda_{2j_2} \Delta(e_{j_1}, e_{j_2}, a_3, \dots, a_n) \\ &= \dots = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \lambda_{1j_1} \lambda_{2j_2} \dots \lambda_{nj_n} \Delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \lambda_{1j_1} \dots \lambda_{nj_n} \Delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \end{aligned}$$

که در آن آخرین مجموع شامل n^n جمله است و با تغییر $j_1, \dots, j_n$ به طور ناپسته از ۱ تا n به دست می آید. از (۲.۱۷) و (۳.۱۷) به آسانی نتیجه می شود که برای هر انتخاب $j_1, \dots, j_n$ داریم $\Delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$. بنابراین $\Delta(a_1, \dots, a_n) = 0$ و بخش یکتایی قضیه ثابت می شود.

اکنون وجود دترمینان را ثابت می کنیم. در حالت کلی برهان ساده ای برای این قسمت وجود ندارد. فهمیدن برهانی که در اینجا می آوریم مستلزم صرف وقت و دقت و احتمالاً شکیبایی است. ولی این جنبه جبران کننده را دارد که گذشته از اثبات وجود دترمینان، خیلی چیزهایی دیگر از جمله دستور مهمی برای بسط ستونی دترمینان به صورت (۷.۱۷) به دست می دهد.

(۶.۱۷) قضیه. یک تابع $D(a_1, \dots, a_n)$ وجود دارد که در شرطهای تعریف (۵.۱۶) صدق می کند.

برهان. برهان را با استقراء روی n انجام می دهیم. * به ازای $n = 1$ تابع $D(\alpha) = \alpha$ برهان $\alpha \in F$ در شرطهای مطلوب صدق می کند. اکنون فرض می کنیم که D تابعی است روی F_{n-1} که در شرطهای تعریف (۵.۱۶) صدق می کند. اندیس $j, 1 \leq j \leq n$ را ثابت می گیریم، و فرض می کنیم بردارهای $a_1, \dots, a_n$ متعلق به F_n به شکل زیر داده شده باشند:

$$a_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}), \quad \alpha_{ik} \in F, \quad 1 \leq i \leq n$$

اکنون D را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$D(a_1, \dots, a_n) = (-1)^{1+j} \alpha_{1j} D_{1j} + \dots + (-1)^{n+j} \alpha_{nj} D_{nj} \quad (7.17)$$

که در آن به ازای $1 \leq i \leq n$ D_{ij} دترمینان بردارهای $a_1^{(i)}, \dots, a_{n-1}^{(i)}$ متعلق به F_{n-1} است که از $n-1$ بردار $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ با حذف مؤلفه j ام در هر حالت به دست آمده است.

ثابت می کنیم که تابع D که با (۷.۱۷) تعریف شده است در اصول دترمینان صدق می کند. بنابر قضیه یکتایی (۱.۱۷)، نتیجه می شود که بسط (۷.۱۷) برای j های گوناگون برابرند، که حقاً نتیجه مهمی است.

اکنون (۷.۱۷) را به دقت مورد بررسی قرار می دهیم. بنابر این دستور $D(a_1, \dots, a_n)$ به این ترتیب به دست آمده است که ضریبهای ستون j ام ماتریس A با سطرهای $a_1, \dots, a_n$ را گرفته ایم و هریک را در توانی از (-1) برابر دترمینان بردارهایی متشکل از سطرهای ماتریسی ضرب کرده ایم که از ماتریس A با حذف ستون j ام و یکی از سطرها به دست آمده است.

* آنچه که باید از راه استقراء ثابت شود این است که یا $\Delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ (اگر دوتا از j ها مساوی باشند) یا $\Delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \pm \Delta(e_1, \dots, e_n)$ (اگر j ها متمایز باشند).

وجود و یکتایی دترمینانها ۱۶۷

نخست گیریم $e_1, \dots, e_n$ بردارهای یکه F_n باشند، پس ماتریس A برابر است با:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن جاهای خالی با ۰ها پر می شوند. در این صورت در ستون j ام تنها یک عنصر مخالف صفر وجود دارد که همان $\alpha_{jj} = 1$ است. ماتریسی که از آن سطرهای D_{jj} حساب می شود، ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

از این رو (۷.۱۷) چنین می شود:

$$D(e_1, \dots, e_n) = (-1)^{j+j} \alpha_{jj} D_{jj} = 1$$

زیرا $\alpha_{jj} = 1$ و چون بنابر اصول دترمینان F_{n-1} ، $D_{jj} = 1$ اکنون به ازای یک مقدار $\lambda \in F$ ، λa_i را جانشین a_i می کنیم. در این صورت ماتریس A' که سطرهای آن $a_1, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n$ هستند عبارت است از:

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i-1,1} & \dots & \alpha_{i-1,j} & \dots & \alpha_{i-1,n} \\ \lambda \alpha_{i1} & \dots & \lambda \alpha_{ij} & \dots & \lambda \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

در این صورت (۷.۱۷) چنین می شود:

$$\begin{aligned} D(\dots, \lambda a_i, \dots) &= (-1)^{1+j} \alpha_{1j} D'_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} \lambda \alpha_{ij} D'_{ij} \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+j} \alpha_{nj} D'_{nj} \end{aligned} \quad (8.17)$$

که در آن D'_{ij} برای $\mathbf{A}'$ همانگونه تعریف شده است که D_{ij} برای $\mathbf{A}$. از این تعریف و ویژگیهای D روی F_{n-1} به ازای $k \neq i$ داریم $D'_{kj} = \lambda D_{kj}$ و $D'_{ij} = D_{ij}$. در این صورت از (۸.۱۷) نتیجه می شود:

$$D(\dots, \lambda a_i \dots) = \lambda D(a_1, \dots, a_n)$$

سرانجام، گیریم $k \neq i$ و دترمینان بردارهای:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_i + a_k, \dots, a_k, \dots, a_n}_i$$

را در نظر می گیریم. در این صورت ماتریس $\mathbf{A}''$ که سطرهايش این بردارها هستند برابر است با:

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ i \alpha_{i1} + \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{in} + \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ k \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

لذا (۷.۱۷) چنین می شود:

$$\begin{aligned} D'' &= D(\dots, \underbrace{a_i + a_k}_i, \dots, \underbrace{a_k}_k, \dots, a_n) & (9.17) \\ &= (-1)^{1+j} \alpha_{1j} D''_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} (\alpha_{ij} + \alpha_{kj}) D''_{ij} \\ &\quad + \dots + (-1)^{k+j} \alpha_{kj} D''_{kj} + \dots + (-1)^{n+j} \alpha_{nj} D''_{nj} \end{aligned}$$

که در آن D''_{ij} ها مانند (۷.۱۷) از برای بردارهایی که سطرهاى $\mathbf{A}''$ را تشکیل می دهند تعریف می شود. بنابر فرض استقراء:

$$D(\dots, \underbrace{a'_i + a'_s}_i, \dots) = D(a'_1, \dots, a'_{n-1}), F_{n-1} \text{ در } i \neq s$$

داریم:

$$s \neq i, k \text{ و } 1 \leq s \leq n, \text{ برای } D''_{sj} = D_{sj} \quad (10.17)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

آنگاه در اثبات قضیه (۱.۱۷) نشان داده‌ایم که:

$$D(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \quad (۱۱.۱۷)$$

که در آن عمل جمع روی n^n انتخاب ممکن $(j_1, \dots, j_n)$ انجام می‌شود. چون وقتی دو درایه برابر باشند، آنگاه $D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = 0$ می‌توان (۱۱.۱۷) را به شکل زیر نوشت:

$$D(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \quad (۱۲.۱۷)$$

که در آن عمل جمع روی $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ انتخاب ممکن $\{j_1, \dots, j_n\}$ است که در آن همه j_i ها متمایزند. دستور (۱۲.۱۷) را بسط کامل دترمینان می‌نامند. اگر دترمینان $D(a_1, \dots, a_n)$ را به عنوان تابع $D(A)$ از ماتریسی که سطرهای آن $a_1, \dots, a_n$ هستند بگیریم، آنگاه بسط کامل نشان می‌دهد که چون $D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ برابر ± 1 است، دترمینان مجموع حاصل ضربهای عنصرهای ماتریس A (با ضریبهای ± 1) است. اگر عنصرهای ماتریس A حقیقی باشند، و آن را به عنوان نقطه‌ای در فضای n^2 بعدی بدانیم، آنگاه (۱۲.۱۷) نشان می‌دهد که $D(A)$ تابع پیوسته‌ای است از A .

اندیشه گرفتن دترمینان $D(a_1, \dots, a_n)$ به عنوان تابعی از ماتریس A با سطرهای $a_1, \dots, a_n$ مسأله دیگری را پیش می‌آورد. بگیریم $c_1, \dots, c_n$ ستونهای A باشند. در این صورت می‌توان $D(c_1, \dots, c_n)$ را تشکیل داد و رابطه آن را با $D(a_1, \dots, a_n)$ بررسی کرد.

(۱۳.۱۷) قضیه. بگیریم A یک ماتریس $n \times n$ با سطرهای $a_1, \dots, a_n$ و ستونهای $c_1, \dots, c_n$ باشد، آنگاه:

$$D(a_1, \dots, a_n) = D(c_1, \dots, c_n)$$

برهان. از بسط کامل (۱۲.۱۷) استفاده می‌کنیم و (۱۲.۱۷) را برای تعریف تابع جدید زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} D^*(c_1, \dots, c_n) &= \sum_{j_1, \dots, j_n} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \quad (۱۴.۱۷) \\ &= D(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم که $D^*(c_1, \dots, c_n)$ در اصلهای تابع دترمینان صدق می‌کند، سپس از قضیه (۱.۱۷) نتیجه می‌شود:

$$D^*(c_1, \dots, c_n) = D(c_1, \dots, c_n)$$

وجود و یکتایی دترمینانها ۱۷۱

نخست $c_1, \dots, c_n$ را بردارهای یکه $e_1, \dots, e_n$ می‌گیریم. در این صورت بردارهای سطری $a_1, \dots, a_n$ نیز بردارهای یکه‌اند و داریم:

$$D^*(e_1, \dots, e_n) = D(e_1, \dots, e_n) = 1$$

از تساوی (۱۴.۱۷) دیده می‌شود که چون هر جمله در مجموع، درست یک درایه از یک ستون مفروض دارد، پس:

$$D^*(\dots, \lambda c_i, \dots) = \lambda D^*(\dots, c_i, \dots)$$

سرانجام، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D^*(\dots, c_i + c_k, \dots), \quad k \neq i$$

این تابع نشان می‌دهد که برای $1 \leq r \leq n$ ، $\alpha_{ri} + \alpha_{rk}$ جانشین α_{ri} شده است. اگر این جایگذاری را در (۱۴.۱۷) انجام دهیم می‌توانیم $D^*(\dots, c_i + c_k, \dots)$ را به صورت یک مجموع:

$$D^*(\dots, c_i + c_k, \dots) = D^*(\dots, c_i, \dots) + D^*(\dots, c_k, \dots)$$

تجزیه کنیم و اگر نشان دهیم که هرگاه به‌ازای $s \neq r$ دو بردار c_s و c_r برابر باشند، آنگاه $D^*(c_1, \dots, c_n) = 0$ اثبات قضیه پایان می‌یابد. در (۱۴.۱۷) جمله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\alpha_{1j_1} \dots \alpha_{kj_k} \dots \alpha_{lj_l} \dots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_l}, \dots, e_{j_n})$$

به‌گونه‌ای که $j_i = s$ و $j_k = r$. در (۱۴.۱۷) جمله‌ای نیز به شکل زیر خواهد بود:

$$\alpha_{1j_1} \dots \alpha_{kj_l} \dots \alpha_{ij_k} \dots \alpha_{nj_n} D(e_{j_1}, \dots, e_{j_l}, \dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_n})$$

و چون $c_r = c_s$ پس مجموع این دو جمله صفر است، و:

$$D(\dots, e_{j_k}, \dots, e_{j_l}, \dots) = -D(\dots, e_{j_l}, \dots, e_{j_k}, \dots)$$

از این رو هر جمله $D^*(c_1, \dots, c_n)$ از یک جمله دیگر حذف شده است و ثابت کرده‌ایم که اگر برای $r \neq s$ ، $c_r = c_s$ ، آنگاه $D^*(c_1, \dots, c_n) = 0$ نشان دادیم که D^* در اصول تابع دترمینان صدق می‌کند. بنابر قضیه (۱.۱۷) نتیجه می‌گیریم که:

$$D(a_1, \dots, a_n) = D(c_1, \dots, c_n)$$

و قضیه (۱۳.۱۷) ثابت می‌شود.

اکنون می‌توان برای هر ماتریس A ی $n \times n$ بدون ابهام از $D(A)$ گفتگو کرد و می‌دانیم که این $D(A)$ به‌عنوان تابعی از هر سطر یا ستون ماتریس در اصلهای تابع دترمینان صدق می‌کند. هرگاه:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

اغلب از طرز نمایش:

$$D(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

استفاده می‌کنیم. قضیه (۱۳.۱۷) را می‌توان به‌شکل زیر نیز بیان کرد:

$$D(A) = D({}^t A) \quad (۱۵.۱۷)$$

که در آن ${}^t A$ را ترانپوذه ماتریس A می‌نامند و از A با تعویض جای سطرها و ستونها به‌دست می‌آید. از این رو اگر α_{ji} عنصر (i, j) ام A باشد آنگاه α_{ji} عنصر (j, i) ام ${}^t A$ است.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر در R , $a_1 = \langle \xi, \eta \rangle$ و $a_2 = \langle \lambda, \mu \rangle$, آنگاه:

$$D(a_1, a_2) = \xi\mu - \eta\lambda$$

۲. ثابت کنید که اگر $a = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$, $b = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ و $c = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$, آنگاه:

$$D(a, b, c) = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$

۱۸. قضیه حاصلضرب دترمینانها

اکنون مهمترین ویژگی دترمینان را که در بخشهای بعدی کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت بررسی می‌کنیم. تعریفی که برای دترمینان دادیم تا حدی بدین سبب بوده است که سهولتی در اثبات این قضیه به‌وجود می‌آورد.

قضیه حاصلضرب دترمینانها ۱۷۳

یک سؤال طبیعی که می‌شود مطرح کرد سؤال زیر است. فرض کنیم $A = (\alpha_{ij})$ و $B = (\beta_{ij})$ ماتریسهای $n \times n$ باشند؛ پس AB یک ماتریس $n \times n$ است. آیا رابطه‌ای بین $D(B)$ ، $D(A)$ ، $D(AB)$ وجود دارد؟ (در مورد ماتریسهای 2×2 در تمرین ۴ از بخش ۱۴ به این سؤال پاسخ داده شد.)
نخست لم زیر را ثابت می‌کنیم:

(۱.۱۸) لم. گیریم $f(a_1, \dots, a_n)$ تابعی از n بردار $a_i \in F_n$ با مقادیر متعلق به F باشد، که در اصلهای (i) و (ii) تعریف (۵.۱۶) تابع دترمینان صدق می‌کند. در این صورت به‌ازای همه بردارهای $a_1, \dots, a_n$ متعلق به F_n داریم:

$$f(a_1, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n) f(e_1, \dots, e_n)$$

که e_i ها بردارهای یکه و D تابع دترمینان روی F_n است.
برهان. اگر $f(e_1, \dots, e_n) \neq 1$ ، آنگاه بنابر قضیه (۱.۱۷)، $f = D$ ، و لم ثابت است.
اکنون فرض کنیم $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ ، و تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$D'(a_1, \dots, a_n) = \frac{D(a_1, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{1 - f(e_1, \dots, e_n)}. \quad (۲.۱۸)$$

روشن است که D' در اصلهای (i)، (ii) و (iii) تعریف (۵.۱۶) صدق می‌کند. از این رو بنابر قضیه (۱.۱۷)، $D' = D$ و از حل (۲.۱۸) نسبت به $f(a_1, \dots, a_n)$ نتیجه به‌دست می‌آید.
پیش از اثبات قضیه اصلی، باید به مطلبی در مورد تبدیلهای خطی روی F_n اشاره کنیم. بخش ۱۲ نشان دادیم که هر ماتریس A ی $n \times n$ ، معرف یک تبدیل خطی U از F_n در F_n است، که در آن اثر U روی یک بردار $x = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ با ضرب ماتریس A در x به‌عنوان یک بردار ستونی، داده شده است:

$$x \rightarrow U(x) = A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

در جریان اثبات قضیه بعد، به‌موجب این تعریف، برای تعریف یک تبدیل خطی روی F_n از یک ماتریس A استفاده شده است.
اکنون می‌توانیم قضیه ضرب را بیان کنیم:

(۳.۱۸) قضیه. گیریم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، در این صورت $D(AB) = D(A)D(B)$.

برهان. گیریم $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ ، $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ و U تبدیل خطی $U(a) = \mathbf{B}a$ باشد، که در آن a به عنوان یک بردار ستونی $1 \times n$ در نظر گرفته می شود. تابع f را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$f(a_1, \dots, a_n) = D[U(a_1), \dots, U(a_n)], a_i \in F_n$$

بنابر اصول (i) و (ii) ی (۵.۱۶) برای D ، روشن است که f در اصلهای (i) و (ii) صدق می کند. بنابر لم (۱.۱۸) داریم:

$$f(a_1, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n)f(e_1, \dots, e_n)$$

از این رو:

$$D[U(a_1), \dots, U(a_n)] = D(a_1, \dots, a_n)D[U(e_1), \dots, U(e_n)] \quad (۴.۱۸)$$

اکنون گیریم $a_1, \dots, a_n$ ستونهای ماتریس $\mathbf{A}$ باشند. در این صورت به ازای $1 \leq i \leq n$ ، $U(a_i)$ را حساب می کنیم.

چون $U(a_i) = \langle \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni} \rangle$ بردار زیر خواهد شد:

$$\left\langle \sum_{k=1}^n \beta_{1k} \alpha_{ki}, \dots, \sum_{k=1}^n \beta_{nk} \alpha_{ki} \right\rangle$$

که ستون i ام ماتریس $\mathbf{BA}$ است. به همین روش:

$$U(e_i) = \langle \beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{ni} \rangle$$

که ستون i ام ماتریس $\mathbf{B}$ است. پس از معادله (۴.۱۸) نتیجه می شود.

$$D(\mathbf{BA}) = D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$$

و چون $D(\mathbf{A})D(\mathbf{B}) = D(\mathbf{B})D(\mathbf{A})$ قضیه ثابت می شود. (برای برهانی نسبتاً ساده تر به تمرین ۴ انتهای این بخش مراجعه کنید).

به عنوان نخستین کاربرد قضیه ضرب، قضیه زیر را ثابت می کنیم:

(۵.۱۸) قضیه. گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت رتبه $\mathbf{A}$ برابر n است، اگر و تنها اگر $D(\mathbf{A}) \neq 0$.

برهان. بنابر بخش (ت) از قضیه (۶.۱۶) اگر رتبه $\mathbf{A}$ کمتر از n باشد، آنگاه $D(\mathbf{A}) = 0$. پس باید ثابت کنیم که اگر رتبه $\mathbf{A}$ برابر n باشد، آنگاه $D(\mathbf{A}) \neq 0$ (برای برهان دیگر $\leftarrow$ تمرین

قضیه حاصلضرب دترمینانها ۱۷۵

۳ از بخش ۸). گیریم $\{a_1, \dots, a_n\}$ بردارهای سطری A باشند. چون رتبه A برابر n است، پس $\{a_1, \dots, a_n\}$ یک پایه F_n است. بنابراین برای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، می‌توان بردار یکه e_i را به صورت ترکیبی خطی از $\{a_1, \dots, a_n\}$ ، یعنی به صورت زیر نوشت:

$$e_i = \beta_{i1}a_1 + \dots + \beta_{in}a_n \quad (۶.۱۸)$$

گیریم B نمایش ماتریس (β_{ij}) باشد، آنگاه از (۶.۱۸) نتیجه می‌شود که ماتریسی که سطرهای آن $\{e_1, \dots, e_n\}$ هستند برابر ماتریس حاصلضرب BA است. چون $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ ، بنابه قضیه (۳.۱۸) داریم:

$$1 = D(BA) = D(B)D(A)$$

و همان‌طور که می‌خواستیم $D(A) \neq 0$. اکنون می‌توانیم تعریف مهم زیر را عرضه کنیم:

(۷.۱۸) تعریف. گیریم T یک تبدیل خطی از یک فضای برداری متناهی-بعد روی یک هیأت دلخواه باشد. در این صورت دترمینان T یعنی $D(T)$ با $D(A)$ تعریف می‌شود، که در آن A ماتریس T نسبت به یک پایه از فضای برداری است. لازم است بررسی کنیم که اگر A' ماتریس T نسبت به یک پایه دیگر باشد، آنگاه $D(A) = D(A')$. بنابر قضیه (۶.۱۳) یک ماتریس وارونپذیر X وجود دارد به گونه‌ای که

$$A' = XAX^{-1}$$

در این صورت بنابر قضیه (۳.۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} D(A') &= D(X)D(A)D(X^{-1}) \\ &= D(X)D(X^{-1})D(A) \\ &= D(XX^{-1})D(A) \\ &= D(I)D(A) \\ &= D(A) \end{aligned}$$

که در آن I یک ماتریس یکه $n \times n$ است. اکنون قضیه (۱۰.۱۳) را به شکل بهتر زیر بیان می‌کنیم:

(۸.۱۸) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ ، که در آن V یک فضای برداری متناهی-بعد روی F است. در این صورت حکمهای زیر هم‌ارزند:

۱. T وارونپذیر است.

۲. T یک به یک است.

۳. T پوشاست.

۴. $D(T) \neq 0$.

برهان. هم‌ارزی (۱)، (۲) و (۳) قبلاً ثابت شد. بنابر تمرین ۴ از بخش ۱۳:

$$\dim T(V) = (\mathbf{A}) \text{ رتبه}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس T نسبت به یک پایه است. اگر $n = \dim V$ ، آنگاه برای آن که $T(V) = V$ لازم و کافی است که رتبه $\mathbf{A}$ برابر n باشد. بنابر قضیه (۵.۱۸)، رتبه $\mathbf{A}$ برابر n است اگر و تنها اگر $D(\mathbf{A}) \neq 0$. از ترکیب این دو حکم، می‌بینیم که (۳) و (۴) هم‌ارزند، و قضیه ثابت است.

تمرینها

۱. $D(\mathbf{AB})$ را از راه ضرب ماتریسها و همچنین با استفاده از قضیه (۳.۱۸) حساب کنید: که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۲. بگیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس وارونپذیر $n \times n$ باشد. نشان دهید که:

$$D(\mathbf{A}^{-1}) = D(\mathbf{A})^{-1}$$

۳. دترمینانهای ماتریسهای مقدماتی $\mathbf{P}_{ij}(\lambda)$ ، $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$ و $\mathbf{D}_i(\mu)$ را که در مثال (پ) از بخش ۱۲ تعریف شده‌اند حساب کنید. نشان دهید که هر ماتریس وارونپذیر $n \times n$ مانند $\mathbf{A}$ حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی است، و بنابراین $D(\mathbf{A}) \neq 0$. به این ترتیب برهان دیگری برای بخشی از قضیه (۸.۱۸) به دست می‌آید.

۴. در زیر مرحله‌های برهان دیگری برای قضیه مهم (۳.۱۸) بیان می‌شود. این مراحل را به تفصیل انجام دهید. باید توجه داشت که در این برهان نیازی به استفاده از لم (۱.۱۸) نیست.

الف) نخست فرض کنیم که $\mathbf{A}$ یا $\mathbf{B}$ وارونپذیر نیستند. ثابت می‌کنیم که $\mathbf{AB}$ وارونپذیر نیست، از این رو $D(\mathbf{AB}) = D(\mathbf{A})D(\mathbf{B})$ زیرا هر دو طرف برابر صفرند.

ب) به کمک تمرین ۳ و ویژگیهای اساسی تابع دترمینان که در بخش ۱۶ بیان شد، نشان دهید که اگر $\mathbf{E}$ یک ماتریس مقدماتی باشد، آنگاه برای هر ماتریس $\mathbf{B}$ داریم $D(\mathbf{EB}) = D(\mathbf{E})D(\mathbf{B})$

ویژگیهای دیگر دترمینانها ۱۷۷

پ) فرض کنیم A وارونپذیر است. A را به شکل حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی به شکل $A = E_1 \cdots E_s$ بنویسید. به کمک بخش ب نشان دهید که:

$$D(A) = D(E_1) \cdots D(E_s)$$

و

$$D(AB) = D(E_1) \cdots D(E_s) D(B) = D(A) D(B)$$

۵. گیریم T یک تبدیل قائم روی یک فضای برداری متناهی-بعد V روی عدهای حقیقی با یک ضرب داخلی باشد. نشان دهید $D(T) = \pm 1$.

۶. نشان دهید که اگر $u_n, \dots, u_1$ بردارهای یکا قائم $(\leftarrow 1.57)$ در R_n باشند، آنگاه $D(u_1, \dots, u_n) = \pm 1$.

۱۹. ویژگیهای دیگر دترمینانها

در این بخش چند موضوع خیلی خاص از نظریه دترمینانها را مورد بررسی قرار می دهیم.

بسطهای سطری و ستونی، و ماتریسهای وارونپذیر

گیریم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. همسازه (i, j) ام یعنی A_{ij} را به شکل $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ تعریف می کنیم، که در آن D_{ij} دترمینان یک ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ است، که از ماتریس A با حذف سطر i ام و ستون j ام به دست می آید. در این صورت می توان دستور (۷.۱۷) را به شکل زیر بیان کرد:

$$D(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} A_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.19)$$

این دستور را بسط $D(A)$ نسبت به ستون j ام می نامیم. یک دستور وابسته به آن عبارت است از:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} A_{kl} = 0, \quad j \neq l \quad (2.19)$$

که از آن (۱.۱۹) به آسانی به شکل زیر به دست می آید. ماتریس A' را که از A با جانشین کردن ستون l ام A با ستون j ام آن $j \neq l$ ، به دست می آید در نظر می گیریم. پس دو ستون A' برابرند، از این رو $D(A') = 0$ زیرا تابع دترمینان بنابر برهان قضیه (۱۳.۱۷) به عنوان تابعی از بردارهای سطری یا ستونی در شرطهای (i)، (ii)، (iii) ی (۵.۱۶) صدق می کند. از بسط $D(A')$ بر حسب ستون l ام رابطه (۲.۱۹) به دست می آید.

گیریم A^t ترانواده A باشد، در این صورت بسط ستونی $D(A^t)$ بسط سطری زیرین $D(A)$ را می‌دهد، چون بنابر (۱۵.۱۷) $D(A) = D(A^t)$.

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} A_{jk} = D(A), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{jk} A_{lk} = 0, \quad j \neq l \quad (4.19)$$

این دستورها به‌خصوص وقتی جالب هستند که آنها را از نظر ضرب ماتریسها در نظر بگیریم. گیریم A^* ماتریسی باشد که عنصر (i, j) ام آن A_{ij} و I ماتریسی باشد که سطر i ام آن بردار یکه e_i است (I ماتریس یکه است). برای هر ماتریس $A = (\alpha_{ij})$ ، λA ماتریسی است که عنصر (i, j) ام آن $\lambda \alpha_{ij}$ است. در این صورت دستورهایی (۱.۱۹) و (۲.۱۹) چنین می‌شوند:

$$A^* A = D(A) I \quad (5.19)$$

در حالی که (۳.۱۹) و (۴.۱۹) چنین خواهند شد:

$$A A^* = D(A) I \quad (6.19)$$

می‌دانیم که ماتریس I همان نقش ۱ را در دستگاه عددهای حقیقی دارد، یعنی برای هر ماتریس A داریم

$$A I = I A = A$$

بار دیگر مسأله وجود وارون ماتریس $A \neq 0$ یعنی A^{-1} را نسبت به ضرب در نظر می‌گیریم، به‌گونه‌ای که $A^{-1} A = A A^{-1} = I$. تعریف زیر را مجدداً یادآوری می‌کنیم:

(۷.۱۹) تعریف. هر ماتریس $n \times n$ مانند A وارونپذیر است، هرگاه یک ماتریس $n \times n$ مانند A^{-1} به‌نام وارون A وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

(۸.۱۹) قضیه. برای اینکه ماتریس A ی $n \times n$ وارونپذیر باشد، لازم و کافی است که $D(A) \neq 0$. اگر $D(A) \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} برابر است با

$$D(A)^{-1} A^*$$

که در آن، $c_1, \dots, c_n$ ستونهای $\mathbf{A}$ ، $b = \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$

برهان. بنابر (۵.۱۸) برای آنکه $D(A) \neq 0$ لازم و کافی است که $c_1, \dots, c_n$ نایسته خطی باشند، بنابراین، حکم مربوط به وجود جواب یکتا از قضیه‌های بخشهای ۸ و ۹ نتیجه می‌شود (چرا؟). سرانجام، گیریم $D(A) \neq 0$ و $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ یک جواب است. در این صورت

$$x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = b$$

و داریم:

$$\begin{aligned} D(c_1, \dots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \dots, c_n) &= D(c_1, \dots, c_{i-1}, \sum_{j=1}^n x_j c_j, c_{i+1}, \dots, c_n) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j D(c_1, \dots, c_{i-1}, c_j, c_{i+1}, \dots, c_n) \\ &= x_i D(c_1, \dots, c_n) = x_i D(A) \end{aligned}$$

که قضیه را ثابت می‌کند.

یک نتیجه مهم این دستور این است که وقتی $D(A) \neq 0$ ، جواب $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ دستگاه (۱۰.۱۹) با ضریبهای حقیقی به‌طور پیوسته به ماتریس ضریبهای A بستگی دارد. در بخشهای ۸ و ۹ رتبه یک ماتریس $m \times n$ را تعریف و ثابت کردیم که رتبه‌های سطری و ستونی برابرند. در (۵.۱۸) نشان دادیم که برای یک ماتریس $n \times n$ نظیر A ، برای اینکه رتبه برابر n باشد، لازم و کافی است که $D(A) \neq 0$. با استفاده از این نتیجه می‌توان رابطه‌ای بین دترمینانها و رتبه ماتریسهای دلخواه به‌دست آورد. نخست دترمینان مینور r سطری A را به‌شکل دترمینان یک ماتریس $r \times r$ تعریف می‌کنیم که از حذف سطرها و ستونهای A به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال مینورهای ماتریس دوسطری:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

برابرند با:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(۱۱.۱۹) قضیه. رتبه یک ماتریس A ی $m \times n$ برابر s است، اگر و تنها اگر، یک مینور ناصفر s سطری وجود داشته باشد و همه مینورهای $(s+k)$ سطری به‌ازای $k = 1, 2, \dots$ برابر صفر باشند.

ویژگیهای دیگر دترمینانها ۱۸۱

برهان. عدد s را که در حکم قضیه تعریف شد رتبه دترمینان A می نامیم. نخست ثابت می کنیم که از برابری رتبه A با r نتیجه می شود که رتبه دترمینان A کوچکتر از r نیست. بنابر بخش ۹، از برابر بودن رتبه A با r نتیجه می شود که یک ماتریس $r \times r$ از رتبه r وجود دارد که از حذف سطرها و ستونهای A به دست می آید. در این صورت از (۵.۱۸) نتیجه می شود رتبه دترمینان A کوچکتر از r نیست یعنی رتبه $A \leq r$.

به وارون اگر رتبه دترمینان A برابر s باشد، آنگاه A دارای s سطر وابسته خطی است، از این رو رتبه A کوچکتر از s نیست یعنی رتبه $A \leq s$. از ترکیب این نابرابریها نتیجه می شود که دترمینان رتبه A برابر رتبه A است، و قضیه ثابت می شود.

دترمینان و حجم

این فصل را با تعبیر دترمینان در فضای n بعدی به عنوان یک تابع حجم پایان می دهیم. هر تابع حجم در V در R_n تابعی است که به هر n تایی از بردارهای $\{a_1, \dots, a_n\}$ متعلق به R_n یک عدد حقیقی $V(a_1, \dots, a_n)$ مربوط می کند به گونه ای که:

$$V(a_1, \dots, a_n) \geq 0$$

$$V(\dots, a_i + a_k, \dots) = V(a_1, \dots, a_n), i \neq k$$

$$V(\dots, \lambda a_i, \dots) = |\lambda| V(a_1, \dots, a_n), \lambda \in R$$

$$V(e_1, \dots, e_n) = 1, \quad e_i = \text{یکه بردارهای}$$

چنین تابعی را می توان به عنوان حجم یک متوازی السطوح n بعدی با یالهای $a_1, \dots, a_n$ دانست، که متشکل از بردارهایی است به شکل $x = \sum \lambda_i a_i$ ، به ازای $0 \leq \lambda_i \leq 1$. در قضیه زیر رابطه بین تابع حجم و دترمینان بیان می شود:

(۱۲.۱۹) قضیه. تنها یک تابع حجم $V(a_1, \dots, a_n)$ در R_n وجود دارد که به شکل زیر تعریف می شود:

$$V(a_1, \dots, a_n) = |D(a_1, \dots, a_n)|$$

برهان. روشن است که $|D(a_1, \dots, a_n)|$ یک تابع حجم است. اکنون گیریم V یک تابع حجم است و تعریف می کنیم:

$$V^*(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \frac{V(a_1, \dots, a_n) D(a_1, \dots, a_n)}{|D(a_1, \dots, a_n)|}, & D \neq 0 \\ 0, & D(a_1, \dots, a_n) = 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

در این صورت به آسانی دیده می شود که V^* در اصلهای مربوط به تابع دترمینان صدق می کند، از این رو به ازای هر $a_1, \dots, a_n$ متعلق به R_n داریم:

$$V^*(a_1, \dots, a_n) = D(a_1, \dots, a_n)$$

در این صورت از تعریف V^* نتیجه می شود که $V(a_1, \dots, a_n) = |D(a_1, \dots, a_n)|$ و قضیه ثابت می شود.

تعریف استقرایی حجم k بعدی یک متوازی السطوح k بعدی در R_n برای مناسبت که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصلضرب قاعده آن در ارتفاعش که در بخش ۳ از فصل ۱۰ کتاب بیرکاف مک لین (← کتابنامه) داده شده است. با استدلال جالبی در این کتاب نشان داده شده است که حجم k بعدی در R_n با یک دترمینان مشخص می شود.

به سبب تعبیر قدرمطلق تابع دترمینان به عنوان یک حجم، نتیجه زیر تقریباً از لحاظ شهودی روشن است، به شرط اینکه بدانیم هندسه n بعدی مشکلتر از هندسه R_2 و R_3 نیست. برهان چندان ساده نیست و برای آن هم به قضیه ضرب نیاز است و هم به نظریه تبدیلیهای متعامد از بخش ۱۵.

(۱۳.۱۹) قضیه. (نابرابری آدامز). گیریم $\{a_1, \dots, a_n\}$ بردارهایی در R_n باشند. در این صورت:

$$|D(a_1, \dots, a_n)| \leq \|a_1\| \cdots \|a_n\|$$

که در آن $\|a_i\|$ طول بردار $a_i = \langle \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in} \rangle$ در R_n با:

$$\|a_i\| = (\alpha_{i1}^2 + \dots + \alpha_{in}^2)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می شود.

تبصره. بنابراین قضیه حجم متوازی السطوحی به یالهای $a_1, \dots, a_n$ بزرگتر از حاصلضرب طولهای یالهای آن است.

برهان. می توان فرض کرد که همه بردارها ناصفرند وگرنه هر دو طرف نابرابری صفر می شود و مطلبی برای اثبات نمی ماند. اکنون نشان می دهیم که کافی است قضیه را در حالت $\|a_i\| = 1$ ، $1 \leq i \leq n$ ثابت کنیم. فرض کنیم که قضیه در این حالت ثابت شده باشد. در این صورت در حالت کلی:

$$\begin{aligned} |D(a_1, \dots, a_n)| &= \|a_1\| \cdots \|a_n\| D\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, \dots, \frac{a_n}{\|a_n\|}\right) \\ &\leq \|a_1\| \cdots \|a_n\| \end{aligned}$$

زیرا به ازای $1 \leq i \leq n$ طول $a_i / \|a_i\|$ برابر یک است.

ویژگیهای دیگر دترمینانها ۱۸۳

اکنون گیریم $u_1, \dots, u_n$ بردارهایی به طول ۱ باشند؛ باید ثابت کنیم که $|D(u_1, \dots, u_n)| \leq 1$. اگر T تبدیل متعامد دلخواهی از R_n باشد، آنگاه دستور (۴.۱۸) در برهان قضیه (۳.۱۸) نشان می دهد که:

$$|D(T(u_1), \dots, T(u_n))| = |D(T)| |D(u_1, \dots, u_n)|$$

چون T یک تبدیل متعامد است، داریم $|D(T)| = 1$ (← تمرین ۵ از بخش ۱۸). پس:

$$|D(T(u_1), \dots, T(u_n))| = |D(u_1, \dots, u_n)|$$

می توان فرض کرد که $\{u_1, \dots, u_n\}$ یک مجموعه نایسته خطی است وگرنه $|D(u_1, \dots, u_n)| = 0$ و نابرابری روشن است. بنابر تمرین ۱۰ از بخش ۱۵ یک تبدیل متعامد T از R_n وجود دارد به گونه ای که به ازای $i = 1, \dots, n$ داریم $T(u_i) \in S(e_1, \dots, e_n)$ که در آن $\{e_1, \dots, e_n\}$ بردارهای یکته R_n اند. در این صورت ماتریسی که سطرهای آن $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ هستند به شکل زیر می باشد:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \circ & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

به علاوه، چون به ازای $1 \leq i \leq n$ ، $|T(u_i)| = 1$ ، می دانیم که مجموع مجذورات عنصرهای هر سطر برابر یک است. از بسط $D(X)$ نسبت به ستون اول داریم:

$$|D(X)| = |\lambda_{11}| \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

می توان به عنوان فرض استقراء فرض کرد که قدرمطلق دترمینان سمت راست بزرگتر از یک است. زیرا سطرهای ماتریس مربوط به شکل ماتریس X در R_{n-1} بردارهایی به طول یک هستند. چون $|\lambda_{11}| \leq 1$ ، پس:

$$|D(u_1, \dots, u_n)| = |D(X)| \leq 1$$

و قضیه ثابت می شود.

جایگشتهای زوج و فرد

در این قسمت از این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از قضیه ضرب دترمینانها نتیجه‌های مهمی درباره جایگشتهای به دست آورد.

(۱۴.۱۹) تعریف. گیریم X مجموعه متشکل از عددهای درست و مثبت $\{1, 2, \dots, n\}$ است. هر جایگشت X نگاشتی است یک به یک و پوشا مانند σ از X در X . مجموعه همه جایگشتهای X را با $P(X)$ نشان می‌دهیم. هر جایگشت σ را اغلب با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

که در آن $\sigma(1) = j_1, \sigma(2) = j_2, \dots, \sigma(n) = j_n$ به عنوان مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نمایش جایگشتی است که در آن $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$.

(۱۵.۱۹) قضیه. مجموعه جایگشتهای $P(X)$ تحت عمل $\sigma\tau$ که با:

$$\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x)), \quad x \in X, \sigma, \tau \in P(X)$$

تعریف می‌شود یک گروه تشکیل می‌دهند.

برهان. تعریف گروه را در بخش ۱۱ [تعریف (۱۰.۱۱)] دیدیم. باید ثابت کنیم که حکمهای زیر درست‌اند:

(الف) $\sigma\tau \in P(X)$ برای هر $\sigma, \tau \in P(X)$

(ب) $(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau)$ برای $\rho, \sigma, \tau \in P(X)$ (قانون شرکتپذیری)

(پ) یک عنصر $1 \in P(X)$ وجود دارد به گونه‌ای که برای هر $\sigma \in P(X)$ داریم $1\sigma = \sigma 1 = \sigma$

(ت) به ازای هر $\sigma \in P(X)$ یک عنصر $\tau \in P(X)$ وجود دارد به گونه‌ای که $\sigma\tau = \tau\sigma = 1$.

اثبات این احکام تقریباً همانند اثباتی است که در مورد گروه بودن مجموعه تبدیلهای خطی روی یک فضای برداری دیدیم. می‌توان جزئیات اثبات از (الف) تا (ت) را با توجه به بحث بخش ۱۱ به عنوان تمرین انجام داد.

ضرب جایگشتهای را می‌توان عملاً با استفاده از طرز نمایش آنها انجام داد. برای مثال جایگشتهای

ویرگیهای دیگر دترمینانها ۱۸۵

$X = \{1, 2, 3\}$ عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بنابر تعریف $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x))$ می‌توان نشان داد که جدول ضرب گروه $P(X)$ برابر است با:

	1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
1	1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	1	σ_5	σ_4		
σ_2						
σ_3						
σ_4						
σ_5						

که در آن درایه‌های جدول به شکل زیر حساب شده‌اند:

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_5 \\ \sigma_1\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_4 \end{aligned}$$

اکنون گیریم V یک فضای برداری روی R باشد که پایه آن $\{v_1, \dots, v_n\}$ است. به ازای هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ یک تبدیل خطی $T_\sigma \in L(V, V)$ را با قاعده زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در این صورت به ازای هر $\sigma, \tau \in P(X)$ خواهیم داشت $T_\sigma T_\tau = T_{\sigma\tau}$. زیرا:

$$\begin{aligned} (T_\sigma T_\tau)v_i &= T_\sigma(v_{\tau(i)}) = T_{\sigma(\tau(i))} = T_{\sigma\tau(i)} \\ &= T_{\sigma\tau}v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

(۱۶.۱۹) تعریف. نشان $\varepsilon(\sigma)$ یک جایگشت σ با دستور $D(T_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ تعریف می‌شود، که در آن T_σ تبدیل خطی تعریف شده در بالاست.

(۱۷.۱۹) قضیه. به ازای هر $\sigma \in (X)$ ، $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$. بعلاوه به ازای هر $\sigma, \tau \in P(X)$:

$$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$$

برهان. گیریم A_σ ماتریس T_σ نسبت به پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\varepsilon(\sigma) = D(T_\sigma) = D(A_\sigma)$$

و از تعریف T_σ نتیجه می شود که ستونهای A_σ اصلاً از تغییر ترتیب ستونهای ماتریس I به دست می آیند. بنابراین، چون تعویض دو ستون A_σ علامت دترمینان را عوض می کند، داریم:

$$D(A_\sigma) = \pm D(I) = \pm 1$$

حکم دوم یعنی $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ از قضیه (۳.۱۸) نتیجه می شود، زیرا:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma\tau) &= D(T_{\sigma\tau}) = D(A_{\sigma\tau}) = D(A_\sigma A_\tau) \\ &= D(A_\sigma)D(A_\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\end{aligned}$$

و به این ترتیب اثبات کامل می شود.

(۱۸.۱۹) تعریف. هر ترانهش $\sigma = (ij)$ تبدیلی است که $\sigma(i) = j$ و $\sigma(j) = i$ ، به ازای

یک جفت عدد درست متمایز i و j ، و $\sigma(x) = x$ به ازای هر x مخالف با i یا j .

(۱۹.۱۹) قضیه. هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ مساوی حاصلضرب چند ترانهش است.

برهان. گیریم $X = \{1, 2, \dots, n\}$. به عنوان فرض استقراء گیریم هر جایگشت

$\{1, 2, \dots, n-1\}$ حاصلضرب چند ترانهش است. بررسی درستی فرض استقراء در حالت های

نخستین بسیار ساده است و از بازگویی آن چشم می پوشیم. گیریم $\sigma \in P(X)$. اگر $\sigma(n) = n$ ،

آنگاه می توان σ را به عنوان یک جایگشت $\{1, 2, \dots, n-1\}$ در نظر گرفت و بنابر فرض استقراء

می توان فرض کرد که σ حاصلضرب چند ترانهش است. اکنون فرض کنیم $\sigma(n) = i \neq n$. در

این صورت:

$$[(in)\sigma](n) = (in)\sigma(n) = (in)(i) = n$$

بنابر فرض استقراء، $(in)\sigma$ حاصلضرب چند ترانهش است. چون

$$(in)[(in)\sigma] = \sigma$$

پس σ نیز حاصلضرب چند ترانهش است.

ویژگیهای دیگر دترمینانها ۱۸۷

به عنوان مثال اگر $X = \{1, 2, 3\}$ ، ترانهشها عبارت خواهند بود از:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

و به آسانی دیده می شود که σ_5 و σ_6 حاصل ضرب دو ترانهش هستند.

(۲۰.۱۹) تعریف. هر جایگشت $\sigma \in P(X)$ زوج است هرگاه $\varepsilon(\sigma) = 1$ ، و فرد است هرگاه $\varepsilon(\sigma) = -1$.

(۲۱.۱۹) قضیه. برای اینکه جایگشت σ زوج باشد، لازم و کافی است که بتوان σ را دست کم به یک طریق به حاصل ضرب عدد زوجی ترانهش تجزیه کرد. اگر σ یک ترانهش باشد، آنگاه σ فرد است. تبدیلهای زوج و فرد به شکل زیر ضرب می شوند:

$$\text{زوج} = (\text{زوج})(\text{زوج})$$

$$\text{فرد} = (\text{فرد})(\text{زوج})$$

$$\text{زوج} = (\text{فرد})(\text{فرد})$$

برهان. نخست می بینیم که اگر σ یک ترانهش $\sigma(ij)$ باشد، آنگاه $\varepsilon(\sigma) = -1$. زیرا اگر $\sigma = (ij)$ ، آنگاه ماتریس A_σ ی تبدیل T_σ از ماتریس یک از تعویض ستونهای i ام و j ام به دست می آید.

اکنون گیریم σ بنابر قضیه (۱۹.۱۹) به حاصل ضرب چند ترانهش تجزیه شده است:

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$$

که در آن τ_i یک ترانهش است، بنابر قضیه (۱۷.۱۹) داریم:

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau_1) \varepsilon(\tau_2) \cdots \varepsilon(\tau_k) = (-1)^k$$

لذا برای این که σ زوج (یعنی $\varepsilon(\sigma) = +1$) باشد لازم و کافی است که k زوج باشد. حکمهای مربوط به چگونگی ضرب جایگشتها از دستور $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ روشن و قضیه ثابت می شود.

ممکن است معرفی نشان $\varepsilon(\sigma)$ برای جایگشتهای زوج و فرد بیجا به نظر آید. ولی اشکال در اینجاست که اگر یک تبدیل زوج σ را به صورت حاصل ضرب شماره زوجی ترانهش تعریف کنیم، آنگاه نمی توان به راحتی مستقیماً نشان داد که σ نمی تواند به صورت حاصل ضرب تعداد فردی ترانهش (به شکل دیگری) باشد. نظریه نشان $\varepsilon(\sigma)$ ناظر به این مسأله است.

سرانجام، می‌توان از نظریهٔ گروه جایگشتی $P(X)$ در یافتن دستوری برای بسط کامل یک دترمینان که در بخش ۱۷ داده شده استفاده کرد.

(۲۲.۱۹) قضیه. گیریم $A = (\alpha_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با عنصرهایی متعلق به هیأت F باشد. در این صورت:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in P(X)} \varepsilon(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \alpha_{2\sigma(2)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$$

برهان. این قضیه با توجه به دستور (۱۲.۱۷) و تعریف $\varepsilon(\sigma)$ بدیهی است. دستور $D(A)$ که در بالا داده شد از این جهت مفید است که می‌توان از آن برای تعریف دترمینان ماتریسی با عنصرهای متعلق به یک حلقهٔ جابه‌جایی استفاده کرد ($\leftarrow$ جیکوبسن، که در کتابنامه آمده است).

تمرینها

۱. روشهایی را که برای یافتن وارون یک ماتریس می‌دانید نام ببرید. ماتریسهای زیر را از نظر وارونپذیری بیازمایید و اگر وارونپذیرند وارون آنها را پیدا کنید:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

۲. جواب دستگاه زیر را از دستور کرامر و روش فصل ۲ بیابید:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

۳. رتبهٔ ماتریسهای زیر را با استفاده از دترمینان بیابید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

۴. نشان دهید که معادلهٔ خط گذرنده بر دو انتهای بردارهای متمایز $\langle \alpha, \beta \rangle$ و $\langle \gamma, \delta \rangle$ در R_2 برابر است با:

تمرینها ۱۸۹

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \gamma & \delta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۵. نشان دهید که معادله صفحه گذرنده بر سه انتهای بردارهای غیرواقع بر یک خط $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ ، $\langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$ و $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ متعلق به R_2 عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۶. نشان دهید که تبدیل خطی $T: a \rightarrow T(a)$ از $R_2 \rightarrow R_2$ که $a = \langle x_1, x_2 \rangle$ را به $T(a) = \langle y_1, y_2 \rangle$ با معادلات:

$$y_1 = 3x_1 - x_2$$

$$y_2 = x_1 + 2x_2$$

می برد، مربع متشکل از نقاط P با شرط $\overrightarrow{OP} = \lambda e_1 + \mu e_2$ ، $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ ، را به یک متوازی الاضلاع تبدیل می کند. نشان دهید مساحت این متوازی الاضلاع برابر است با قدرمطلق دترمینان ماتریس تبدیل T ، یعنی:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

۷. نشان دهید که مساحت مثلث واقع در صفحه به رأسهای (α_1, α_2) ، (β_1, β_2) و (γ_1, γ_2) برابر است با قدرمطلق:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix}$$

۸. نشان دهید که حجم چهاروجهی به رأسهای $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ، $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ، $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ و $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ برابر است با قدرمطلق:

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & 1 \end{vmatrix}$$

۹. گیریم $p_1, \dots, p_n$ بردارهایی از R_n باشند و $p_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ ، $1 \leq i \leq n$. ثابت کنید که $p_1, \dots, p_n$ بر یک خمینه خطی به بعد کوچکتر از $n-1$ واقع است، اگر و تنها اگر به ازای هر $x_1, \dots, x_n$ متعلق به R داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ثابت کنید اگر $p_1, \dots, p_n$ بر خمینه ای خطی از بعد کوچکتر از $n-1$ واقع نباشند، $p_1, \dots, p_n$ بر یک ابرصفحه یکتا واقع اند که معادله آن با دستور بالا داده می شود.
۱۰. دستور زیر را برای دترمینان و اندرموند ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix} = \pm \prod_{i < j} (\xi_i - \xi_j)$$

(راهنمایی: فرض کنید $c_1, c_2, \dots, c_n$ ستونهای ماتریس و اندرموند باشند، نشان دهید که:

$$D(c_1, \dots, c_n) = D(c_1, c_2 - \xi_1 c_1, \dots, c_{n-1} - \xi_1 c_{n-2}, c_n - \xi_1 c_{n-1})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \xi_2 - \xi_1 & \xi_2^2 - \xi_1 \xi_2 & \dots & \xi_2^{n-1} - \xi_1 \xi_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n - \xi_1 & \xi_n^2 - \xi_1 \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} - \xi_1 \xi_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

سپس بسط سطری آن را بر حسب سطر اول بگیرید و آن را به طرز مناسبی فاکتورگیری و از استقراء استفاده نمایید.)

۱۱. نشان دهید که اگر $\{a_1, \dots, a_n\}$ بردارهای ناصفر و دوه دو متعامد متعلق به R_n باشند، آنگاه:

$$|D(a_1, \dots, a_n)| = \|a_1\| \|a_2\| \dots \|a_n\|$$



چندجمله‌یها و عددهای مختلط

یک پیشنهاد مهم، برای درک قضیه‌های سنگین‌تر تبدیلهای خطی، آگاهی از تجزیه چند جمله‌یها به حاصلضرب چندجمله‌یهای اول است. بررسی این موضوع از ابتدا در این فصل با مطالبی درباره عددهای مختلط که در فصلهای بعدی مورد نیاز است، شروع می‌شود.

۲۰. چندجمله‌یها

همه با مفهوم چندجمله‌یهای $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$ که در آن α_i ها عددهای حقیقی هستند آشنایی دارند. ولی پرسشهایی وجود دارند که باید پاسخ گفته شوند. آیا یک چندجمله‌ی یک تابع است، و اگر نیست، چه هست؟ x چیست؟ آیا x یک متغیر، یک عدد نامعین، یا یک عدد است؟

در این بخش نحوه نگرش خود به چندجمله‌یها را با عبارتی بیان می‌کنیم که پاسخگوی پرسشهای بالا باشد و قضیه تجزیه چندجمله‌یها به حاصلضرب عاملهای اول را برای فصل بعد می‌گذاریم.

(۱.۲۰) **تعریف.** گیریم F یک هیأت دلخواه است. هر چندجمله‌ی با ضریبهای متعلق به F بنابر تعریف عبارت است از یک دنباله:

$$f = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}, \quad \alpha_i \in F$$

به گونه‌ای که به ازای یک عدد درست و مثبت M وابسته به f تساویهای $\alpha_M = \alpha_{M+1} = \dots = 0$ برقرار باشند. اکنون به بیان تعریف زیر می‌پردازیم. اگر:

$$g = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots\}$$

آنگاه برای برقراری تساوی $f = g$ ، لازم و کافی است که $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_0 = \beta_0$ جمع چندجمله‌یها را مانند جمع برداری تعریف می‌کنیم:

$$f + g = \{\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots\}$$

ضرب را با دستور $fg = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ تعریف می‌کنیم که در آن به ازای هر k :

$$\gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j = \alpha_0 \beta_k + \alpha_1 \beta_{k-1} + \dots + \alpha_k \beta_0.$$

روشن است که $f + g$ و fg هر دو چندجمله‌ی هستند، یعنی به ازای یک عدد خیلی بزرگ M ، $\alpha_M + \beta_M$ و γ_M صفرند.

برای مثال، گیریم F هیأت عددهای حقیقی، و:

$$f = \{0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$g = \{1, 1, -1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$f + g = \{1, 2, -1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \text{آنگاه:}$$

$$\begin{aligned} f.g &= \{0 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \\ &\quad + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 + 0 \cdot 0, 0, 0, \dots\} \\ &= \{0, 1, 1, -1, 0, 0, \dots\} \end{aligned}$$

محاسبه‌های مورد استفاده در این تعریفها بسیار خسته کننده هستند و پس از قضیه بعد عبارت آشناتر و مناسبتری برای چندجمله‌یها به دست می‌آوریم.

(۲.۲۰) قضیه. چندجمله‌یهایی که ضریبهای آنها متعلق به F هستند در همه اصلهای مربوط به حلقه تعویضپذیر [تعریف (۱۱.۸)] صدق می‌کنند.

چندجمله‌یها ۱۹۳

برهان. چون جمع چندجمله‌یها مانند جمع برداری تعریف شده است، روشن است که همهٔ اصلهای مربوط به جمع صادق‌اند.

قانون تعویضپذیری ضرب بنابر (۱.۲۰) روشن است. برای بررسی شرکتپذیری، گیریم:

$$h = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots\}$$

پس ضریب k ام $(fg)h$ برابر است با:

$$\sum_{r+s=k} \left(\sum_{i+j=r} \alpha_i \beta_j \right) \delta_s = \sum_{i+j+s=k} (\alpha_i \beta_j) \delta_s$$

در حالی که ضریب k ام $f(gh)$ برابر است با:

$$\sum_{i+t=k} \alpha_i \left(\sum_{j+s=t} \beta_j \delta_s \right) = \sum_{i+j+s=k} \alpha_i (\beta_j \delta_s)$$

و به سبب قانون توزیعپذیری در F هر دو عبارت برابرند. سرانجام ثابت می‌کنیم که قانون ضرب توزیعپذیر است. ضریب k ام در $f(g+h)$ برابر است با:

$$\sum_{i+j=k} \alpha_i (\beta_j + \delta_j)$$

در حالی که ضریب k ام در $fg + fh$ برابر است با:

$$\sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j + \sum_{i+j=k} \alpha_i \delta_j$$

و این عبارتها به سبب قانون توزیعپذیری ضرب در F برابرند. بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. روشن است که نگاشت $\alpha \rightarrow \{\alpha, \circ, \circ, \dots\} = \alpha'$ از F در چندجمله‌یها یک به یک است به گونه‌ای که:

$$(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \quad (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

اگر مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌یهای α' را که بدین ترتیب تعریف می‌شوند، با F' نشان دهیم، آنگاه F' هیأتی است یکرخت با F و عنصرهای F را با چند جمله‌یهایی که به آنها مربوطند یکی می‌گیریم، یعنی می‌نویسیم:

$$\alpha = \{\alpha, \circ, \circ, \dots\}$$

اکنون گیریم x یک چندجمله‌ی باشد که با دنباله زیر تعریف می‌شود:

$$x = \{0, 1, 0, \dots\}$$

آنگاه

$$x^2 = \{0, 0, 1, 0, \dots\}$$

و (با توجه به این که اندیس‌گذاری ضریبها را از ۰ شروع می‌کنیم) به‌طور کلی:

$$x^i = \{0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots\}$$

به‌علاوه به آسانی دیده می‌شود که:

$$\alpha x^i = \{\alpha, 0, \dots\} \{0, \dots, \underset{i}{1}, \dots\} = \{0, \dots, \underset{i}{\alpha}, \dots\} \quad \alpha \in F, i = 1, 2, \dots$$

بنابراین یک چندجمله‌ی دلخواه:

$$f = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$$

را می‌توان به‌طور یکتا به‌شکل زیر نوشت:

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_r x^r \quad (۳.۲۰)$$

مجموعه چندجمله‌یهای با ضریبهای متعلق به F را با $F[x]$ نشان می‌دهیم.
مثال الف. مطلوب است محاسبه:

$$(3 - x + x^2)(2 + 2x + x^2 - x^3)$$

دیده می‌شود که بالاترین جمله با ضریب مخالف صفر در این حاصلضرب x^5 است. در این صورت حاصلضرب را با محاسبه ضریبهای $x^0, x^1, \dots, x^5$ می‌یابیم. پس حاصلضرب برابر است با:

$$\begin{aligned} (3 \cdot 2) + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 1)x + (3 - 2 + 2)x^2 + (-3 - 1 + 2)x^3 \\ + (1 + 1)x^4 - x^5 = 6 + 4x + 3x^2 - 2x^3 + 2x^4 - x^5 \end{aligned}$$

(۴.۲۰) تعریف. گیریم $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$ یک چندجمله‌ی متعلق به $F[x]$

باشد. f را از درجه r گویند و می‌نویسند $\deg f = r$ اگر $\alpha_r \neq 0$ و $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = 0$ را چندجمله‌ی بی‌درجه می‌نامند.

چندجمله‌یها ۱۹۵

(۵.۲۰) قضیه. گیریم f و g چندجمله‌یهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند، در این صورت:

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}, \quad f + g \neq 0$$

$$\deg fg = \deg f + \deg g$$

برهان. گیریم:

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r, \quad \alpha_r \neq 0$$

$$g = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s, \quad \beta_s \neq 0$$

در این صورت:

$$f + g = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)x + \cdots + (\alpha_t + \beta_t)x^t$$

که در آن $t = \max\{r, s\}$ ، و حکم اول ثابت می‌شود. برای اثبات حکم دوم، می‌بینیم که به‌ازای جمله‌ی ناصفر fg ، $i > r + s$ ندارد و ضریب x^{r+s} درست $\alpha_r \beta_s$ است که ناصفر است، زیرا حاصلضرب دو عنصر ناصفر یک هیأت، یک عنصر ناصفر است (چرا؟). به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

(۶.۲۰) فرع. اگر $f, g \in F[x]$ ، آنگاه از $fg = 0$ نتیجه می‌شود $f = 0$ یا $g = 0$. اگر $fg = hg$ ، و $g \neq 0$ ، آنگاه $f = h$.
برهان. اگر هم $f \neq 0$ و هم $g \neq 0$ ، آنگاه بنابر (۵.۲۰)، $\deg fg \geq 0$ و از این رو $fg \neq 0$. برای اثبات بخش دوم گیریم $fg = hg$. در این صورت $(f - h)g = 0$ و چون $g \neq 0$ ، پس بنابر بخش نخست $f - h = 0$.

(۷.۲۰) فرع. گیریم $f \neq 0$ یک چندجمله‌ی متعلق به $F[x]$ باشد، در این صورت یک چندجمله‌ی $g \in F[x]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که برای برقراری تساوی $fg = 1$ لازم و کافی است که $\deg f = 0$. در نتیجه $F[x]$ یقیناً یک هیأت نیست.
برهان. اگر $\deg f = 0$ ، آنگاه $f = \alpha \in F$ و بنابر اصلهای یک هیأت داریم $\alpha \alpha^{-1} = 1$. در نتیجه اگر برای یک $g \in F[x]$ ، تساوی $fg = 1$ برقرار باشد، آنگاه بنابر (۵.۲۰) داریم:

$$\deg f + \deg g = \deg 1 = 0$$

چون $\deg f$ یک عدد درست نامنفی است از این معادله نتیجه می‌شود $\deg f = 0$ و (۷.۲۰) ثابت می‌شود.

(۸.۲۰) قضیه. (عمل تقسیم). گیریم f و g چند جمله‌یهای متعلق به $F[x]$ باشند، به‌گونه‌ای که $g \neq 0$. آنگاه چندجمله‌یهای معین و یکتایی مانند Q و R وجود دارند که به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده نامیده می‌شوند به‌گونه‌ای که:

$$f = Qg + R$$

که در آن یا $R = 0$ یا $\deg R < \deg g$.
برهان. اگر $f = 0$ ، آنگاه می‌توان گرفت $Q = R = 0$. اکنون گیریم:

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r, \quad \alpha_r \neq 0, r \geq 0 \quad (9.20)$$

$$g = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s, \quad \beta_s \neq 0, s \geq 0$$

برای اثبات وجود Q و R از استقراء روی r استفاده می‌کنیم. نخست گیریم $r = 0$. اگر $s > 0$ ، آنگاه

$$f = 0 \cdot g + f$$

در شرطهای ما صدق می‌کند، در حالی که اگر $s = 0$ ، آنگاه بنابر (۷.۲۰) خواهیم داشت $gg^{-1} = 1$ و می‌توان نوشت

$$f = (fg^{-1})g + 0$$

اکنون فرض می‌کنیم $r > 0$ و وجود Q و R برای چندجمله‌یهای از درجهٔ نابزرگتر از $r-1$ ثابت شده باشد. f و g را همانند (۹.۲۰) می‌گیریم. اگر $s > r$ ، آنگاه $f = 0 \cdot g + f$ در شرطهای ما صدق می‌کند و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. سرانجام، گیریم $s \leq r$. در این صورت، با استفاده از قانون توزیعپذیری $F[x]$ به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s} g = \beta'_0 + \beta'_1 x + \cdots + \alpha_r x^r + 0 \cdot x^{r+1} + \cdots$$

که در آن $\beta'_r = \alpha_r$ ، با ضریبهای $\beta'_i \in F$. چندجمله‌یی:

$$f_1 = f - \alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s} g \quad (10.20)$$

از درجهٔ نابزرگتر از $r-1$ است، زیرا ضریبهای x^r حذف شده‌اند. بنابر فرض استقراء چندجمله‌یهای مانند Q و R وجود دارند که یا $R = 0$ ، یا $\deg R < \deg g$ به‌گونه‌ای که

$$f_1 = Qg + R$$

با گذاردن (۱۰.۲۰) در این دستور نتیجه می‌شود:

$$f = (Q + \alpha_r \beta_s^{-1} x^{r-s})g + R$$

و بخش وجودی قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات یکتایی، گیریم:

$$f = Qg + R = Q'g + R'$$

که در آن R و R' در شرطهای قضیه صدق می‌کنند. نخست نشان می‌دهیم $R = R'$. اگر چنین نباشد، آنگاه $R - R' \neq 0$ ، و داریم:

$$R - R' = (Q' - Q)g$$

که بنابر (۵.۲۰) داریم $\deg(R - R') < \deg g$ ، در حالی که:

$$(Q' - Q)g = \deg(Q' - Q) + \deg g \geq \deg g$$

که بیانگر یک تناقض است، پس باید $R = R'$. در این صورت داریم

$$g \neq 0, (Q - Q')g = 0$$

و بنابر (۶.۲۰) داریم $Q - Q' = 0$. بدین ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد.

مثال ب. برای روشن ساختن عمل تقسیم، گیریم:

$$f = 3x^2 + x^2 - x + 1$$

$$g = x^2 + 2x - 1$$

در این صورت

$$f - 3xg = -5x^2 + 2x + 1$$

$$-5x^2 + 2x + 1 + 5g = 12x - 4$$

چون $\deg(12x - 4) < \deg g$ ، تقسیم پایان می‌یابد و داریم:

$$f = (3x - 5)g + 12x - 4$$

لذا

$$Q = 3x - 5, R = 12x - 4$$

اکنون به مفهوم اساسی تابع چندجمله‌ی می‌پردازیم.

(۱۱.۲۰) تعریف. گیریم $f = \sum \alpha_i x^i \in F[x]$ و $\xi \in F$. هر عنصر $f(\xi) \in F$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(\xi) = \sum \alpha_i \xi^i$$

$f(\xi)$ را مقدار چندجمله‌ی f به ازای ξ می‌نامیم. به ازای یک چندجمله‌ی ثابت $f \in F[x]$ تابع چندجمله‌ی $f(x)$ دستوری است که به هر $\xi \in F$ عنصر $f(\xi) \in F$ را مربوط می‌کند* صفر یک چندجمله‌ی f ، یک عنصر $\xi \in F$ است به گونه‌ای که $f(\xi) = 0$. هر صفر f را یک جواب یا یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ نیز می‌نامند. دو قضیهٔ بعدی کلید یافتن صفرهای یک چندجمله‌ی و تجزیهٔ آن است. نخست به لم مهم زیر نیازمندیم.

(۱۲.۲۰) لم. گیریم $f, g \in F[x]$ و $\xi \in F$ ؛ پس $(f \pm g)(\xi) = f(\xi) \pm g(\xi)$ و $(fg)(\xi) = f(\xi)g(\xi)$.

برهان. گیریم $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_r x^r$ و $g = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_s x^s$ پس:

$$\begin{aligned}(f + g)(\xi) &= (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\xi + (\alpha_2 + \beta_2)\xi^2 + \dots \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots) + (\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \dots) \\ &= f(\xi) + g(\xi)\end{aligned}$$

به همین ترتیب، $(f - g)(\xi) = f(\xi) - g(\xi)$. بعد داریم:

$$\begin{aligned}(fg)(\xi) &= \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\xi + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\xi^2 + \dots \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \dots)(\beta_0 + \beta_1\xi + \beta_2\xi^2 + \dots) \\ &= f(\xi)g(\xi)\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات لم پایان می‌یابد.

(۱۳.۲۰) قضیهٔ باقیمانده. گیریم $f \in F[x]$ و $\xi \in F$ ؛ در این صورت باقیماندهٔ حاصل از خارج قسمت f بر $x - \xi$ برابر $f(\xi)$ است:

$$f = Q(x - \xi) + f(\xi)$$

* برای نمایش یک چندجمله‌ی f اغلب از نماد $f(x)$ استفاده می‌کنند. این نماد، وجه تمایز بین توابع چندجمله‌ی و چندجمله‌یها را [که دنباله هستند] نشان نمی‌دهد. نیاز به این تمایز از اینجا ناشی می‌شود که برای هیأت‌های متناهی F ، دو چندجمله‌ی متفاوت در $[F(x)]$ ممکن است به یک تابع چندجمله‌ی مربوط باشند. مثلاً فرض کنید F هیأت دو عنصری $\leftarrow$ [بخش ۲، تمرین ۴] باشد. پس $x^2 - x = 0$ و چندجمله‌یهای متمایزی هستند که معرف یک تابع چندجمله‌ی هستند.

برهان. بنابر عمل تقسیم داریم:

$$f = Q(x - \xi) + r$$

که در آن r یا برابر 0 یا عنصری از F است. با گذاردن ξ به جای x از (۱۲.۲۰) نتیجه مطلوب به دست می‌آید: $r = f(\xi)$.

(۱۴.۲۰) قضیهٔ عاملها. گیریم $f \in F[x]$ و $\xi \in F$ ؛ در این صورت تساوی

$$Q(x - \xi)Q = f \text{ برقرار است اگر و فقط اگر به ازای یک مقدار } Q \in F[x], \text{ داشته باشیم } f(\xi) = 0.$$

بنابر قضیهٔ باقیمانده، برهان بدیهی است.

اکنون گیریم A یک حلقهٔ تعویضپذیر باشد (در واقع اینجا منظور ما حلقهٔ مخصوص $A = F[x]$

است). اگر $r, s \in A$ آنگاه گوییم $r|s$ (و می‌خوانیم « r عدد s را می‌شمارد» یا « s مضربی است

از r » یا « r یکی از عاملهای s است») اگر برای یک مقدار $t \in A$ داشته باشیم $s = rt$. عنصر

u متعلق به A را عنصر یکا می‌گویند هرگاه $u|1$. برای اینکه عنصری یکا باشد لازم و کافی است

که این عنصر یکی از عاملهای هر عنصر A باشد، از این رو از نظر تجزیه جالب توجه نیست. چون

هر عنصر ناصفر در یک هیأت یکا است، بررسی تجزیه در یک هیأت جالب نیست. عنصر

$p \in A$ را اول* گویند هرگاه p برابر 0 یا یکا نباشد، و هنگامی که $p = ab$ ، از آن نتیجه شود که

a یا b واحدند. دو عنصر متمایز را نسبت به هم اول گویند هرگاه تنها مقسوم علیه‌های مشترکشان

یک‌ها باشند. عنصر $d \in A$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک $r_1, r_2, \dots, r_k \in A$ می‌نامند

هرگاه برای $1 \leq i \leq k$ و $d|r_i$ ، اگر d' به گونه‌ای باشد که برای $1 \leq i \leq k$ ، $d'|r_i$ ، آنگاه $d'|d$.

اکنون می‌خواهیم این مفاهیم را برای حلقهٔ چندجمله‌یهای $F[x]$ بررسی کنیم. بحث تقریباً

مشابهی در مورد حلقهٔ عددهای درست Z وجود دارد و ذکر تفصیلی این کاربرد مفید است.

نخست دیده می‌شود که مجموعهٔ یکاهای $F[x]$ با چندجمله‌یهای «ثابت» $\alpha \in F$ ، که در آن $\alpha \neq 0$ ، یعنی با چندجمله‌یهای درجهٔ 0 منطبق است.

(۱۵.۲۰) قضیه. گیریم $f_1, \dots, f_k$ چندجمله‌یهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند،

در این صورت:

۱. عنصرهای $f_1, \dots, f_k$ دست کم یک مقسوم علیه مشترک d دارند.
۲. این بزرگترین مقسوم علیه مشترک d ، به طور یکتا با تقریب یک عامل یکا تعیین می‌شود و می‌توان آن را برای چندجمله‌یهای مخصوص $\{h_i\}$ از $F[x]$ چنین نوشت:

$$d = h_1 f_1 + \dots + h_k f_k$$

* چندجمله‌یهای اول در $F, F(x)$ یک هیأت، را اغلب چندجمله‌یهای تحویلناپذیر می‌نامند.

برهان. S یعنی مجموعه چندجمله‌یهای به شکل

$$\sum_{i=1}^k g_i f_i$$

را، که در آن $\{g_i\}$ چندجمله‌یهای دلخواه‌اند، در نظر می‌گیریم، در این صورت S شامل مجموعه چندجمله‌یهای $\{f_1, \dots, f_k\}$ است و دارای این ویژگی است که اگر $p \in S$ و $h \in F[x]$ ، آنگاه $ph \in S$. چون درجه عناصرهای ناصفر S به $N \cup \{0\}$ متعلق است، بنابر اصل خوش ترتیبی (۵.۲ ب) می‌توان یک چندجمله‌ی ناصفری مانند:

$$d = h_1 f_1 + \dots + h_k f_k \in S$$

یافت به گونه‌ای که برای هر عنصر ناصفر $d', d' \in S$ ، $\deg d \leq \deg d'$. نخست ثابت می‌کنیم که برای $1 \leq i \leq k$ ، بنابر عمل تقسیم برای $1 \leq i \leq k$ داریم

$$f_i = dq_i + r_i$$

که در آن یا $r_i = 0$ یا $\deg r_i < \deg d$ و:

$$r_i = f_i - dq_i \in S$$

به سبب گزینش d به عنوان یک چندجمله‌ی با کمترین درجه S ، داریم $r_i = 0$ ، از این رو d هر $1 \leq i \leq k$ را می‌شمارد.

اکنون گیریم d' یک مقسوم علیه مشترک دیگر $f_1, \dots, f_k$ باشد. در این صورت چندجمله‌یهای g_i وجود دارند به گونه‌ای که $1 \leq i \leq k$ ، $f_i = d'g_i$ و:

$$d = \sum h_i f_i = \sum h_i d' g_i = d' (\sum h_i g_i)$$

بنابر این $d|d'$ و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک $\{f_1, \dots, f_k\}$ است. سرانجام، گیریم e یک مقسوم علیه مشترک دیگر $\{f_1, \dots, f_k\}$ باشد. در این صورت $d|e$ و $e|d$. بنابر این چندجمله‌یهای مانند u و v وجود دارند به گونه‌ای که $e = du$ و $d = ev$. در این صورت $e = euv$ و $e(1 - uv) = 0$. بنابر (۶.۲۰) داریم $1 - uv = 0$ ، پس u و v یکا‌اند. به این ترتیب برهان قضیه کامل می‌گردد.

(۱۶.۲۰) فرج. گیریم $r_1, \dots, r_k$ متعلق به $F[x]$ باشند که عامل مشترکی به غیر از یکاها ندارند، در این صورت عناصرهای $x_1, \dots, x_k$ متعلق به $F[x]$ وجود دارند به گونه‌ای که:

$$x_1 r_1 + \dots + x_k r_k = 1$$

چندجمله‌یها ۲۰۱

(۱۷.۲۰) فرع. گیریم p در $F[x]$ اول و $p|ab$ ، در این صورت $p|a$ یا $p|b$.
برهان. اگر p, a را شمارد، آنگاه a و p نسبت به هم اول‌اند و بنابر (۱۵.۲۰) برای $u, v \in F[x]$ داریم، $au + pv = 1$. در این صورت $abu + pvb = b$ و چون $p|ab$ پس بنابر قانون توزیعپذیر در $F[x]$ داریم $p|b$.

(۱۸.۲۰) قضیهٔ یکتایی تجزیه. گیریم $a \neq 0$ یک عنصر $F[x]$ باشد، در این صورت یا a یک یکاست ۰، و یا $a = p_1 \cdots p_s$ ، که در آن $p_1, \dots, p_s$ اول‌اند. بعلاوه:

$$p_1 \cdots p_s = q_1 \cdots q_t \quad (۱۹.۲۰)$$

که در آن $\{p_i\}$ و $\{q_j\}$ اول‌اند، ایجاب می‌کند $s = t$ ، و برای یک اندیس‌گذاری مناسب p ها و q ها داریم:

$$p_1 = \varepsilon_1 q_1, \dots, p_t = \varepsilon_t q_t$$

که در آن ε_i ها یکاهستند.
برهان. وجود دست کم یک تجزیهٔ a به عاملهای اول از راه استقراء روی درجهٔ a روشن است. برای بخش یکتایی، استقراء روی s را به کار می‌بریم. اگر $s = 1$ ، نتیجه درست است. با داشتن (۱۹.۲۰) با استفاده از (۱۷.۲۰) نتیجه می‌شود که p_1 یکی از q_j ها را می‌شمارد و می‌توان فرض کرد $j = 1$. در این صورت برای یک یکای $q_1 = p_1 \varepsilon_1$ ، پس (۱۹.۲۰) چنین می‌شود:

$$p_1 \cdots p_s = \varepsilon_1 p_1 q_2 \cdots q_t$$

بنابر قانون حذف داریم:

$$p_2 \cdots p_s = \varepsilon_1 q_2 \cdots q_t = q'_2 q_3 \cdots q_t$$

که در آن $q'_2 = \varepsilon_1 q_2$. اکنون با استفاده از فرض استقراء، نتیجه به دست می‌آید.
در برخورد با قضیهٔ یکتایی تجزیه، بدین علت نظریهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک را دنبال کرده‌ایم که از این نظریه در فصل ۷ استفاده خواهیم کرد. باید توجه داشت که قضیهٔ یکتایی تجزیه را می‌توان تنها با استفاده از اصل خوشترتیبی مجموعهٔ عددهای طبیعی و ساده‌ترین حقایق دربارهٔ درجهٔ چندجمله‌یها ثابت کرد، بی‌آنکه فرایند تقسیم و یا نظریهٔ بزرگترین مقسوم علیه مشترک هیچیک مورد نیاز باشد.

برهان زیر در ۱۹۶۰ توسط چارلز گیفن هنگامی که در دانشگاه ویسکانسین دانشجوی دورهٔ لیسانس بود کشف گردید.

فرض کنیم که یکتایی تجزیه در $F[x]$ نادرست باشد. در این صورت بنابر اصل خوش ترتیبی یک چندجمله‌ی از کمترین درجه مانند:

$$f = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s \quad (۲۰.۲۰)$$

با دو تجزیه متفاوت، وجود دارد که در آن $\{p_i\}$ و $\{q_j\}$ اول‌اند. می‌توان فرض کرد $r > 1$ و $s > 1$ و هیچ یک از p_i ها با q_j ها برابر نیستند، زیرا در غیر این صورت می‌توان p_i و q_j را حذف کرد و یک چندجمله‌ی از درجه کمتر با دو تجزیه متمایز به دست آورد. همچنین می‌توان فرض کرد که ضریب بزرگترین درجه p_i و q_j برابر یک است. در صورت لزوم با تعویض جای p ها و q ها می‌توان ترتیبی داد که $\deg p_r \leq \deg q_s$. در این صورت به‌ازای توان مناسبی از x مانند x^i ضریب $x^{\deg q_s}$ در چندجمله‌ی $q_s - x^i p_r$ حذف خواهد شد و خواهیم داشت $0 \leq \deg(q_s - x^i p_r) < \deg q_s$. اکنون چندجمله‌ی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f_1 = f - q_1 \cdots q_{s-1}(x^i p_r)$$

بنابر (۲۰.۲۰) داریم:

$$f_1 = q_1 \cdots q_{s-1}(q_s - x^i p_r) \quad (۲۱.۲۰)$$

پس بنابر آنچه گفته شد $f_1 \neq 0$ و $\deg f_1 < \deg f$. ولی با توجه به شکل f_1 ملاحظه می‌کنیم که $p_r | f_1$ ، و چون تجزیه به عاملهای اول برای چندجمله‌یهای از درجه کوچکتر از $\deg f$ یکتاست، بنابر (۲۱.۲۰) نتیجه می‌گیریم که $p_r | (q_s - x^i p_r)$ ، زیرا p_r از همه عاملهای اول $q_1, \dots, q_{s-1}$ متمایز است. در این صورت:

$$q_s - x^i p_r = h p_r$$

$$q_s = p_r(h + x^i)$$

که یک تناقض است و برهان یکتایی تجزیه ثابت می‌شود.*

این بخش را با بیان این حقیقت پایان می‌دهیم که گر چه $F[x]$ یک هیأت نیست ولی می‌توانیم آن را در هیأتی بنشانیم به همان شکلی که عددهای درست را در هیأت عددهای گویا نشانیدیم. از بیان جزئیات خودداری می‌کنیم.

* توجه کنید که همین استدلال، اثبات یکتایی تجزیه در حلقه اعداد صحیح Z نیز هست. با شرح جزئیات، اگر یکتایی تجزیه در Z برقرار نباشد، کوچکترین عدد صحیح مثبتی چون $m = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ موجود خواهد بود که اساساً دو تجزیه متفاوت دارد. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم که هیچ p_i با هیچ q_j منطبق نیست و r و s بزرگتر از یک هستند. همچنین می‌توانیم فرض کنیم که $p_r < q_s$ و تساوی $m_1 = m - q_1 \cdots q_{s-1} p_r$ را تشکیل می‌دهیم. در این صورت $m_1 < m$ و $p_r | m_1$ چون $m_1 = q_1 \cdots q_{s-1}(q_s - p_r)$ ، پس نتیجه می‌شود که $p_r | (q_s - p_r)$ ، که یک تناقض است. این استدلال برای نخستین بار در کتاب کورانت و رابینز تحت عنوان «ریاضیات چیست؟» (← کتابخانه) توجه نویسنده را جلب کرد.

چندجمله‌یها ۲۰۳

همهٔ جفتهای (f, g) را که در آنها $f, g \in F[x]$ و $g \neq 0$ ، در نظر می‌گیریم. می‌گوییم دو جفت (f, g) و (h, k) هم ارزند، هرگاه $fk = gh$ ؛ در این حالت می‌نویسیم $(f, g) \sim (h, k)$. پس رابطهٔ $\sim$ دارای ویژگیهای زیر است:

$$(f, g) \sim (f, g) \quad ۱.$$

$$(f, g) \sim (h, k) \implies (h, k) \sim (f, g) \quad ۲.$$

$$(f, g) \sim (h, k), (h, k) \sim (p, q) \implies (f, g) \sim (p, q) \quad ۳.$$

[برای اثبات ویژگی (۳) به قانون حذف (۶.۲۰) نیازمندیم.] اکنون کسر f/g ، $g \neq 0$ را به شکل، همهٔ جفتهای (h, k) ، $k \neq 0$ تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که $(h, k) \sim (f, g)$. در این صورت می‌توان گفت:

۴. هر جفت (f, g) تنها و تنها به یک کسر f/g تعلق دارد.

۵. برای انطباق دو کسر f/g و r/s لازم و کافی است که $fs = gr$.
حال تعریف می‌کنیم:

$$f/g + r/s = (fs + gr)/gs \quad ۶.$$

$$(f/g)(r/s) = fr/gs \quad ۷.$$

قبل از همه می‌توان ثابت کرد که عملهای جمع و ضرب کسرها مستقل از نماینده‌های کسرها هستند. به عبارت دیگر باید نشان دهیم که اگر $f/g = f_1/g_1$ و $r/s = r_1/s_1$ ، آنگاه:

$$\frac{fs + gr}{gs} = \frac{f_1s_1 + g_1r_1}{g_1s_1}$$

و مشابه این حکمها در مورد ضرب برقرار است.

اکنون قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم و اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم:

(۲۲.۲۰) قضیه. مجموعهٔ کسره‌ای f/g ، $g \neq 0$ نسبت به عملهای جمع و ضرب که

پیش از این تعریف شدند، یک هیأت $F(x)$ می‌سازد. نگاشت $f \rightarrow fg/g = \varphi(f)$ که در آن $f \in F[x]$ ، یک نگاشت یک‌به‌یک از $F[x]$ در $F(x)$ است، به گونه‌ای که به ازای $f, h \in F[x]$ ، $\varphi(fh) = \varphi(f)\varphi(h)$ و $\varphi(f + h) = \varphi(f) + \varphi(h)$.

هیأت $F(x)$ که این گونه ساخته شد هیأت تابعهای گویا از یک متغیر با ضریبهای متعلق به F نامیده می‌شود. این هیأت را هیأت خارج قسمت حلقهٔ چندجمله‌یهای $F[x]$ می‌نامند. اگر چندجمله‌یهای $f \in F[x]$ را با تابع گویای $f/g/g = \varphi(f)$ ، $g \neq 0$ یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بگوییم که هیأت $F(x)$ شامل چندجمله‌یهای هیأت $F[x]$ است.

مثال پ. بزرگترین مقسوم علیه مشترک چندجمله‌یهای:

$$f = x^2 - x - 2, \quad g = x^2 + 1$$

را در $R[x]$ بیابید. با توجه به قضیه (۱۵.۲۰) دیده می‌شود که گرچه وجود بزرگترین مقسوم علیه مشترک d بنابر این قضیه، محرز است ولی در برهان هیچ‌گونه اشاره‌ای به روش یافتن آن نشده است. نشان می‌دهیم چگونه با استفاده از قضیه تجزیه به عاملهای اول f و g در $R[x]$ می‌توان d را یافت. در تمرین ۸ روش دیگری برای محاسبه بزرگترین مقسوم علیه مشترک داده می‌شود که در آن چندجمله‌یهای a و b ارائه می‌شوند، به گونه‌ای که $d = af + bg$.

(۲۳.۲۰) قضیه. گیریم f و g چندجمله‌یهای ناصفر متعلق به $F[x]$ باشند، و:

$$f = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}, \quad g = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$$

که در آن $p_1, \dots, p_r$ عددهای اول و نماهای $a_i, b_i \geq 0$ (با صفر گرفتن نماها، می‌توان f و g را بر حسب یک مجموعه از عددهای اول $\{p_1, \dots, p_r\}$ نوشت). در این صورت بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و g یعنی d (با تقریب یک عامل یکا) برابر است با:

$$d = p_1^{c_1} \cdots p_r^{c_r}$$

که در آن به ازای هر i, c_i آن یک از دو نمای a_i و b_i است که کوچکتر است. برهان. روشن است که $d|f$ و $d|g$. اکنون گیریم $d'|f$ و $d'|g$. بنابر قضیه یکتایی تجزیه، نتیجه می‌شود $d' = \varepsilon p_1^{d_1} \cdots p_r^{d_r}$ که در آن ε یک یکا است، و برای $1 \leq i \leq r$ ، $d_i \leq a_i$ و $d_i \leq b_i$. پس $d'|d$ و قضیه ثابت می‌شود. برای استفاده از این قضیه در مورد مثال بالا، باید f و g را به عاملهای اولشان در $R[x]$ تجزیه کنیم. داریم:

$$f = (x - 2)(x + 1),$$

$$g = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

روشن است که همه چندجمله‌یهای درجه اول در $R[x]$ اول‌اند. چندجمله‌ی $x^2 - x + 1$ ریشه حقیقی ندارد، زیرا $-3 < -4 = 1 - 4$ ، و از این رو، بنابر قضیه تجزیه (۱۴.۲۰)، $x^2 - x + 1$ اول است. اکنون می‌توان قضیه (۲۳.۲۰) را به کار برد و نتیجه گرفت که $x + 1$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک f و g است.

تمرینها ۲۰۵

تمرینها

۱. با استفاده از روش اثبات قضیه (۸.۲۰) خارج قسمت Q و مانده R را چنان بیابید که:

$$f = Qg + R$$

که در آن:

$$f = 2x^4 - x^3 + x - 1,$$

$$g = 3x^3 - x^2 + 3$$

۲. ثابت کنید که تعداد صفرهای متمایز یک چندجمله‌یی $f \in F[x]$ حداکثر برابر $\deg f$ در F است، که در آن F یک هیأت دلخواه است.

۳. گیریم $f = ax^2 + bx + c$ ، که a, b, c اعداد حقیقی و $a \neq 0$. ثابت کنید، برای این که f در $R[x]$ اول باشد، لازم و کافی است که $b^2 - 4ac < 0$. ثابت کنید که اگر $b^2 - 4ac = D \geq 0$.
آنگاه:

$$f = a \left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right)$$

۴. گیریم F یک هیأت و $f \in F[x]$ یک چندجمله‌یی از درجه نابرگتر از ۳ باشد. ثابت کنید که برای اینکه f در $F[x]$ اول باشد، لازم و کافی است که یا دارای درجه ۱ باشد یا این که در F صفری نداشته باشد. آیا این نتیجه برای $\deg f > 3$ درست است؟

۵. ثابت کنید که اگر عدد گویای m/n ، به ازای دو عدد نسبت به هم اول m و n ، ریشه معادله چندجمله‌یی:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_r = 0$$

باشد که، $a_i \in Z$ ، آنگاه $n|a_0$ و $m|a_r$ * با استفاده از این نتیجه ریشه‌های گویای ممکن معادله‌های زیر را بنویسید:

$$2x^3 - 6x^2 + 9 = 0$$

$$x^3 - 8x^2 + 12 = 0$$

۶. ثابت کنید که اگر m عددی درست مثبت که در Z مربع نیست باشد، آنگاه $\sqrt{m}$ گنگ است (از تمرین ۵ استفاده کنید).

* این استدلال دلالت بر این دارد که قانون یکتایی تجزیه برای اعداد درست Z ، چنان‌که در پانوشت برهان گیریم برای یکتایی تجزیه در $F[x]$ اشاره کردیم، نیز صادق است.

۲۰۶ چندجمله‌یها و عددهای مختلط

۷. هر یک از چندجمله‌یهای زیر را در $Q[x]$ و $R[x]$ به عاملهای اول تجزیه کنید:

(الف) $2x^3 - x^2 + x + 1$

(ب) $3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

(پ) $x^6 + 1$

(ت) $x^4 + 16$

۸. گیریم برای $a, b \in F[x], a, b \neq 0$. با استفاده از فرایند تقسیم رابطه‌های زیر را به دست آورید:

$$a = bq_0 + r_0.$$

$$b = r_0q_1 + r_1, \deg r_1 < \deg r_0.$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2, \deg r_2 < \deg r_1$$

...

$$r_i = r_{i+1}q_{i+2} + r_{i+2}, \deg r_{i+2} < \deg r_{i+1}$$

نشان دهید که به ازای مقداری مانند i , $r_i \neq 0$ و $r_{i+1} = 0$. ثابت کنید که (a, b) که (a, b) معرّف بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

۹. بزرگترین مقسوم علیه مشترک هر جفت از چندجمله‌یهای زیر را در حلقه $R[x]$ بیابید و آن را به صورت یک ترکیب خطی مثل جزء ۲ی (۱۵.۲۰) بیان کنید.

(الف) $4x^3 + 2x^2 - 2x - 1, 2x^3 - x^2 + x + 1$

(ب) $x^3 - x + 1, 2x^4 + x^2 + x - 5$

۱۰. گیریم F هیأت دو عنصری که در تمرین ۴ بخش ۲ تعریف شده است باشد. چند جمله‌یهای زیر را در $F[x]$ تجزیه کنید:

(الف) $x^2 + x + 1$

(ب) $x^3 + 1$

(پ) $x^4 + x^2 + 1$

(ت) $x^4 + 1$

۱۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترک:

$$x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{و} \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

را در $F[x]$ بیابید، که F هیأت تمرین ۱۰ است.

۲۱. عددهای مختلط

هیأت عددهای حقیقی R دارای این نقص است که هر معادله درجه دوم با ضریبهای متعلق به R در آن دارای ریشه نیست. این حقیقت را ریاضیدانان سده‌های ۱۸ و ۱۹ با این فرض که معادله

عددهای مختلط ۲۰۷

$x^2 + 1 = 0$ یک جواب i دارد، سرانجامی بخشیدند و ویژگیهای دستگاه جدید اعداد انگاری حاصل از عددهای حقیقی و این عدد جدید i را مورد رسیدگی قرار دادند. گرچه امروز دیگر اعداد مختلط را انگاری تر از عددهای حقیقی نمی دانیم، ولی ریاضیدانانی نظیر اویلر عدد انگاری i را با تردید به کار می بردند، زیرا این عدد از عددهای حقیقی با روش روشنی ساخته نشده بود.

ویژگیهای دستگاه اعداد جدید هر چه بود، ریاضیدانان سدهای ۱۸ و ۱۹ تلاش می کردند که عددهای جدید از قانونهای جبری عددهای حقیقی تبعیت کنند. به ویژه آنها استدلال می کردند که دستگاه عددهای جدید شامل همه عبارتهایی به شکل:

$$\alpha + \beta i + \gamma i^2 + \dots$$

هستند که در آنها $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ عددهای حقیقی اند، چون $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$ و غیره، هر عبارت نظیر آن را می توان به شکل عبارت $\alpha + \beta i$ ، $\alpha, \beta \in R$ ، ساده کرد. به آسانی دیده می شود که قانونهای ترکیب این عددها عبارت اند از:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i) &= (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i \\(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i) &= \alpha\gamma + \beta\delta i^2 + \alpha\delta i + \beta i\gamma \\&= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i\end{aligned}$$

این قانونها هنگامی پدید آمدند که ریاضیدان ایرلندی و. ر. همیلتن در ۱۸۴۰ به عددهای مختلط علاقه مند شد. او نخست دریافت که اگر عددهای انگاری را با روش دقیقی از عددهای حقیقی بسازند این عددها چندان انگاری نیستند. ما نحوه ساختن او را در اینجا می آوریم.

(۱.۲۱) تعریف. دستگاه عددهای مختلط C یک فضای برداری دو بعدی R_2 روی عددهای حقیقی R است که در آن دو عمل جمع و ضرب تعریف شده است. عمل جمع همان جمع برداری در R_2 است و عمل ضرب چنین تعریف می شود:

$$< \alpha, \beta > < \gamma, \delta > = < \alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma >$$

(۲.۲۱) قضیه. عددهای مختلط یک هیأت تشکیل می دهند.

برهان. اصلهای یک هیأت [تعریف (۱.۲)] که تنها جمع را در بردارد برقرارند، زیرا در C ، جمع همان جمع برداری جفتهای اعداد حقیقی است. اکنون باید قانونهای توزیع پذیری و شرکت پذیری، وجود ۱، وجود وارون نسبت به ضرب را بررسی کنیم. می توان قانونهای شرکت پذیری و تعویض پذیری را برای ضرب و قانون توزیع پذیری را به عنوان تمرین انجام داد. عنصر $1 = < 1, 0 >$ دارای این ویژگی است که به ازای هر $z \in C$ ، $z1 = z$ ، $1z = z$ ، سرانجام، گیریم $z \neq < \alpha, \beta >$.

می‌خواهیم نشان دهیم که عنصری مانند $w = \langle x, y \rangle$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $zw = 1$. یعنی باید دستگاه زیر را نسبت به x و y حل کنیم:

$$\alpha x - \beta y = 1$$

$$\beta x + \alpha y = 0$$

ماتریس ضریبها عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

که دترمینان آن برابر است با $\alpha^2 + \beta^2$. چون α و β عددهای حقیقی‌اند، و هر دو صفر نیستند، پس $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ، و می‌توان معادله‌ها را حل کرد. پس z^{-1} وجود دارد و C یک هیأت است. نگاشت $\alpha \rightarrow \langle \alpha, 0 \rangle = \alpha'$ از $R \rightarrow C$ یک به یک است، به‌گونه‌ای که:

$$(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta', \quad (\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$$

بدین تعبیر می‌گوییم R در C گنجیده است و می‌نویسیم $\alpha = \langle \alpha, 0 \rangle$. اکنون دیگر در معادله $x^2 + 1 = 0$ چیز شگفت‌آوری وجود ندارد. با توجه به این که $\langle 1, 0 \rangle = 1$ می‌بینیم که $\langle 0, 1 \rangle = i$ می‌بینیم که $\pm \langle 0, 1 \rangle$ جوابهای معادله‌اند، پس اگر i را با تساوی $\langle 0, 1 \rangle = i$ تعریف کنیم، آنگاه $i^2 = -1$. برای هر $\beta = \langle \beta, 0 \rangle \in R$ داریم $\beta = \langle \beta, 0 \rangle$ و از این رو هر عدد مختلط $z = \langle \alpha, \beta \rangle$ را می‌توان چنین نوشت:

$$z = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle + \langle 0, \beta \rangle = \alpha \cdot 1 + \beta i$$

α را بخش حقیقی و β را بخش انگاری z می‌نامند. بعلاوه برای برقراری تساوی $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$ لازم و کافی است که $\alpha = \gamma$ و $\beta = \delta$.

نکته دیگری که همیلتن یافت این بود که نه تنها i ، بلکه هر عدد مختلط $z = \alpha + \beta i$ نیز ریشه یک معادله درجه دوم با ضریبهای حقیقی است. برای یافتن این معادله، عدد:

$$z^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + (2\alpha\beta)i$$

را با $z = \alpha + \beta i$ مقایسه می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$z^2 - 2\alpha z = -\alpha^2 - \beta^2$$

پس معادله‌ای که $z = \alpha + \beta i$ یک ریشه آن است عبارت است از:

$$z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (3.21)$$

عددهای مختلط ۲۰۹

می‌دانیم که این معادله ریشه دیگری هم دارد که برابر است با

$$\bar{z} = \alpha - \beta i$$

چون به کمک قضیه تجزیه دیده می‌شود که جمله ثابت $z^2 + Az + B$ حاصلضرب صفرهای آن است، پس:

$$z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

اگر قرار دهیم $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ، آنگاه $|z|$ طول بردار $\langle \alpha, \beta \rangle$ است و آن را قدر مطلق z می‌نامند. نشان دادیم که:

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad (۴.۲۱)$$

از این دستور، اگر $z \neq 0$ ، دستور ساده‌ای برای z^{-1} به شکل زیر به دست می‌آید:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (۵.۲۱)$$

عدد مختلط $\bar{z}$ را مزدوج z می‌نامند و آن ریشه دیگر معادله درجه دومی با ضریبهای حقیقی است که z ، ریشه آن است. عمل مزدوج گیری ویژگیهای زیر را دارد:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

بنابر این $z \rightarrow \bar{z}$ یک یکریختی از C روی C است، و می‌گوییم که این یک خودریختی C است. با استفاده از این خودریختی، می‌توان دستور $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ را یافت، زیرا:

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

اگر $z_1 = \alpha + \beta i$ و $z_2 = \gamma + \delta i$ ، آنگاه اتحاد جالب زیر بین عددهای حقیقی به دست می‌آید:

$$(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

که بیان می‌کند حاصلضرب دو مجموع از دو مجذور را می‌توان به شکل مجموع دو مجذور نوشت.* اکنون نمایش قطبی عددهای مختلط را بیان می‌کنیم. گیریم $\langle \alpha, \beta \rangle = z$ آنگاه با قرار دادن $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|$ می‌توان نوشت:

$$\alpha = \rho \cos \theta, \quad \beta = \rho \sin \theta$$

* برای بحث درباره این دستور و دستوره‌های مشابه آن برای مجموعه‌های چهار و هشت مربع، ← بخش ۳۵.

۲۱۰ چندجمله‌یها و عددهای مختلط

که در آن θ زاویه حاصل از وصل مبدأ به نقاط $(1, 0)$ و (α, β) است. بنابراین:

$$z = \alpha + \beta i = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

که در آن:

$$|z| = |\rho|, \quad |\cos \theta + i \sin \theta| = 1$$

اگر $w = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ، آنگاه:

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= |zw|[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)] \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه جمع تابعهای سینوس و کسینوس، این دستور چنین می‌شود:

$$zw = |z||w|[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)] \quad (۶.۲۱)$$

تعبیر هندسی این رابطه این است که برای ضرب دو عدد مختلط باید قدر مطلقهای آنها را در هم ضرب و زاویه‌های آنها با محور حقیقی را با هم جمع کنیم.

یک کاربرد مهم (۶.۲۱) قضیه زیر است:

(۷.۲۱) قضیه دموآور. برای هر عدد مثبت و درست n :

$$(\cos + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

قضیه دموآور کاربردهای مهم فراوانی دارد. اگر برای عدد ثابت n ، $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ را با استفاده از دستور دو جمله‌یی بسط دهیم و بخشهای حقیقی و موهومی دو طرف (۷.۲۱) را مقایسه کنیم آنگاه $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ را بر حسب چندجمله‌یهای $\sin \theta$ و $\cos \theta$ به دست می‌آوریم. کاربرد دیگر آن یافتن ریشه‌های واحد است.

(۸.۲۱) قضیه. به ازای هر عدد مثبت n معادله $x^n = 1$ درست دارای n ریشه متمایز

$z_1, z_2, \dots, z_n$ است، که برابرند با:

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, z_k = z_1^k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$$

$$k = 1, \dots, n$$

برهان آن به عنوان تمرین، به عهده خواننده واگذار می‌شود.

اکنون مهمترین ویژگی هیأت عددهای مختلط را از نظر جبری بیان می‌کنیم.

عدهای مختلط ۲۱۱

(۹.۲۱) تعریف. یک هیأت F را جبری- بسته گوئیم هرگاه هر چندجمله‌یی $f \in F[x]$ از درجه مثبت دست کم یک صفر در F داشته باشد. قضیه بعدی را گاهی قضیه اساسی جبر می‌نامند و در جبر جدید نیز یک قضیه اساسی در هیأت عدهای مختلط است.

(۱۰.۲۱) قضیه. هیأت عدهای مختلط جبری- بسته است. برای این قضیه برهانهای گوناگونی وجود دارد که همه به اصل تمامیت عدهای مختلط یا بعضی ویژگیهای توپولوژیکی عدهای حقیقی که هم از اصل تمامیت هستند متکی می‌باشند. می‌توان برهانی خیلی متناسب با این کتاب در کتاب شرایر و اشپرنر، و براهین دیگری در کتاب بیرکاف و مک‌لین (← کتابنامه) یا در هر کتاب دیگر مربوط به تابعهای یک متغیر مختلط پیدا کرد.

(۱۱.۲۱) قضیه. گیریم هیأت F جبری- بسته باشد. در این صورت هر چندجمله‌یی اول در $F[x]$ (با تقریب یک ضریب یکا) به شکل $x - a$ ، $a \in F$ است. هر چندجمله‌یی $f \in F[x]$ را می‌توان به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\prod_{i=1}^n (x - a_i), \quad a_i \in F$$

برهان. گیریم F جبری- بسته و $p \in F[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد. بنابر تعریف (۹.۲۱) عنصری مانند $a \in F$ وجود دارد به گونه‌ای که $p(a) = 0$. بنابر قضیه تجزیه (۱۴.۲۰)، $x - a$ یک عامل p است. چون p اول است p مضرب ثابتی است از $x - a$ و حکم نخست ثابت می‌شود. بنابر حکم نخست حکم دومی روشن است.

نقص این قضیه این است که گر چه در این قضیه وجود صفرهای یک چندجمله‌یی تأیید می‌شود ولی هیچ‌گونه آگاهی از وابستگی آنها به ضریبهای چندجمله‌یی f داده نمی‌شود. این مسأله به نظریه گالوا (← وان در وردن، جلد I فصل ۵، کتابنامه) مربوط است. این بخش را با کاربردی از قضیه (۱۱.۲۱) در مورد چندجمله‌یها پایان می‌دهیم.

(۱۲.۲۱) قضیه. گیریم $f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \in R[x]$ اگر $u \in C$ یک صفر f باشد، آنگاه $\bar{u}$ نیز صفر f است. اگر $u \neq \bar{u}$ ، آنگاه:

$$(x - u)(x - \bar{u}) = x^2 - (u + \bar{u})x + u\bar{u}$$

یک عامل f است. برهان. اگر u یک صفر f باشد، آنگاه:

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_n u^n = 0$$

۲۱۲ چندجمله‌یها و عددهای مختلط

با گرفتن مزدوج طرف چپ معادله، با توجه به این که $u \rightarrow \bar{u}$ یک خودریختی C است و این که به ازای $\alpha \in R$ تساوی $\bar{\alpha} = \alpha$ برقرار است خواهیم داشت:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \bar{u} + \cdots + \alpha_n \bar{u}^n = 0$$

که برهان حکم نخست قضیه است. حکم دوم فوراً از قضیه تجزیه به دست می‌آید.
یک نتیجه مهم قضیه بالا چنین است:

(۱۳.۲۱) فرع. هر چندجمله‌یی اول در $R[x]$ به شکل (با تقریب یک عامل یکا) زیر است:

$$x - \alpha \quad \text{یا} \quad x^2 + \alpha x + \beta, \quad \alpha^2 - 4\beta < 0$$

برهان. گیریم $f \in R[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد، پس f دارای یک صفر $u \in C$ است. اگر $\alpha \in R$ ، $u = \alpha$ ، آنگاه برای یک مقدار $\xi \in R$ داریم $f = \xi(x - \alpha)$. اگر $u \notin R$ ، آنگاه $u \neq \bar{u}$ و بنابر (۱۲.۲۱) داریم:

$$(x - u)(x - \bar{u}) = x^2 - (u + \bar{u})x + u\bar{u}$$

که یک عامل f است. چون $u + \bar{u}$ و $u\bar{u}$ به R تعلق دارند پس f (با تقریب یک عامل یکا) برابر است با $x^2 + \alpha x + \beta$. شرط $\alpha^2 - 4\beta < 0$ از آنجا ناشی می‌شود که اگر $u = \gamma + \delta i$ ، آنگاه:

$$(u + \bar{u})^2 - 4u\bar{u} = (u - \bar{u})^2 = 4\delta^2 i^2$$

تمرینها

۱. عبارتهای زیر را به شکل $\alpha + \beta i$ بنویسید:

$$(3 + i)(-2 + 4i), \quad \frac{1}{3 + 2i}, \quad \frac{2 + i}{2 - i}$$

۲. $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را بر حسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ بنویسید.

۳. همه جوابهای معادله $x^5 = 2$ را بیابید.

۴. گیریم:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1} + x^r = (x - u_1)(x - u_2) \cdots (x - u_r)$$

تمرینها ۲۱۳

یک چندجمله‌یی در $C[x]$ باشد که ضریب بزرگترین جمله‌اش $a_r = 1$ ، و صفرهای آن $u_1, \dots, u_{r-1}$ در C هستند. ثابت کنید که:

$$a_s = \pm u_1 u_2 \cdots u_r, a_{r-1} = -(u_1 + u_2 + \cdots + u_r)$$

۵. ثابت کنید که هیأت عددهای مختلط C با مجموعهٔ ماتریسهای 2×2 با عنصرهای حقیقی به شکل:

$$\begin{pmatrix} \alpha - \beta & \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in R$$

یکریخت* است. در مجموعهٔ ماتریسها عملها همان جمع و ضرب** ماتریسها هستند.

۶. ثابت کنید که عددهای مختلط با قدر مطلق ۱ نسبت به عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند.

۷. ثابت کنید که نگاشت:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \rightarrow \cos \theta + i \sin \theta$$

یک یکریختی بین گروه دورانه‌های صفحه و گروه ضربی عددهای مختلط با قدر مطلق ۱ است.

۸. گیریم $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r$ یک چندجمله‌یی درجهٔ r با ضریبهای $\alpha_i \in Q$ باشد که در آن Q هیأت عددهای گویاست؛ گیریم $u \in C$ یک صفر f باشد. همچنین گیریم $Q[u]$ مجموعهٔ عددهای مختلط به شکل زیر باشد:

$$z = \beta_0 + \beta_1 u + \cdots + \beta_{r-1} u^{r-1}, \quad \beta_i \in Q$$

ثابت کنید که اگر $z, w \in Q[u]$ آنگاه $z \pm w, zw \in Q[u]$. ثابت کنید که $Q[u]$ یک هیأت است به شرط اینکه f در $Q[x]$ یک چندجمله‌یی اول باشد. [راهنمایی: در حالتی که $f(x)$ اول است مشکل عمده اثبات این است که اگر:

$$z = \beta_0 + \beta_1 u + \cdots + \beta_{r-1} u^{r-1} \neq 0$$

آنگاه یک $w \in Q[u]$ وجود دارد به گونه‌ای که $zw = 1$. چون $z \neq 0$ در $Q[x]$ داریم:

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{r-1} x^{r-1} \neq 0$$

* دو هیأت F و F' یکریخت گفته می‌شوند هرگاه یک نگاشت یک به یک $\alpha \rightarrow \alpha'$ از F به روی F' وجود داشته باشد به طوری که برای همهٔ مقادیر $\beta, \alpha \in F$ و $(\alpha + \beta)' = \alpha' + \beta'$ و $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$.

** برای تعریفها و ویژگیهای جمع و ضرب ماتریسها+ بخش ۱۲.

چون $\deg f(x) = r$ ، پس $f(x)$ و $g(x)$ نسبت به هم اول‌اند. بنابراین چندجمله‌یهای $a(x)$ و $b(x)$ وجود دارند، به‌گونه‌ای که:

$$a(x)g(x) + b(x)f(x) = 1$$

با گذاردن u به جای x ، نتیجه می‌شود:

$$a(u)g(u) = 1$$

و چون $g(u) = z$ ، پس وارونی برای z به دست آوردیم].

۹. با توجه به بخش ۲ که هیأت F را وقتی هیأت مرتب می‌گویند که یک زیر مجموعه P از F (به نام مجموعه عنصرهای مثبت) وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که (الف) مجموع و حاصلضرب عنصرهای P به P تعلق داشته باشند و (ب) به ازای هر α متعلق به F ، تنها و تنها یکی از رابطه‌های $-\alpha \in P, \alpha = 0, \alpha \in P$ برقرار باشند. ثابت کنید که هیأت عددهای مختلط هیأت مرتب نیست.



نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

موضوع عمدهٔ این فصل درآمدی است بر نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها روی یک فضای برداری. هدف یافتن پایه‌ای برای فضای برداری است به‌گونه‌ای که ماتریس تبدیل خطی نسبت به این پایه تا حد امکان ساده باشد. چون نتیجهٔ نهایی هنوز قدری پیچیده است، ریاضیدانان برگردانهای گوناگونی از آنچه که [به زعم آنها] مطلوبترین یا مفیدترین صورتی است که ماتریس آنها باید داشته باشد، به‌دست داده‌اند. در این فصل چند تا از این قضیه‌ها را بیان خواهیم کرد.

۲۲. مفهومیهای اساسی

در این بخش بعضی از مفهومیهای اساسی مورد نیاز برای جستجوی ساختار یک تبدیل خطی تنها را معرفی می‌کنیم. این مفهومیها، چندجمله‌ییهای مینیمال یک تبدیل خطی و مفهومیهای ریشه‌های مشخصه (یا ویژه مقدارها) و بردارهای مشخصه (یا ویژه بردارها) هستند.

در سرتاسر این مبحث، F نمایش یک هیأت دلخواه، و V یک فضای برداری متناهی-بعد روی F است. در بخش ۱۱ دیدیم که $L(V, V)$ روی F یک فضای برداری است. قضیه (۳.۱۳) می‌گوید که اگر یک پایه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ برای V برگزینیم، نگاشتی که به $T \in L(V, V)$ ماتریس آن را نسبت به پایه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تخصیص می‌دهد، یک یکرختی است از فضای برداری $L(V, V)$ به روی فضای برداری $M_n(F)$ از همهٔ ماتریسهای n در n ، که به‌عنوان یک

۲۱۶ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

فضای برداری $n^۲$ تاییها نگریسته می‌شود. بنابر بخش ۵، $M_n(F)$ یک فضای برداری $n^۲$ بعدی است. اگر $\{A_۱, \dots, A_{n^۲}\}$ پایه‌ای برای $M_n(F)$ روی F باشد، تبدیلهای خطی $T_۱, \dots, T_{n^۲}$ که ماتریسهایشان نسبت به $\{v_۱, \dots, v_n\}$ به ترتیب $A_۱, \dots, A_{n^۲}$ هستند، پایه‌ای برای $L(V, V)$ روی F می‌سازند. به ویژه، ماتریسهایی که در یک جا ۱ و در سایر جاها صفر دارند پایه‌ای برای $M_n(F)$ تشکیل می‌دهند، بنابراین تبدیلهای خطی $T_{ij} \in L(V, V)$ که با

$$T_{ij}(v_j) = v_i, \quad T_{ij}(v_k) = 0, \quad k \neq j$$

تعریف می‌شوند پایه‌ای برای $L(V, V)$ روی F تشکیل می‌دهند. در بقیهٔ این بخش T را یک تبدیل خطی مشخص روی V می‌گیریم. چون $L(V, V)$ روی F دارای بعد $n^۲$ است، $n^۲ + ۱$ توان T

$$۱, T, T^۲, \dots, T^{n^۲}$$

وابسته خطی‌اند. این بدان معنی است که عضوهایی از F مانند $\xi_۱, \xi_۲, \dots, \xi_{n^۲}$ که همه صفر نیستند، وجود دارند به گونه‌ای که

$$\xi_۰ \cdot ۱ + \xi_۱ T + \xi_۲ T^۲ + \dots + \xi_{n^۲} T^{n^۲} = 0$$

به عبارت دیگر، چندجمله‌ی ناصفری مانند.

$$f(x) = \xi_۰ + \xi_۱ x + \dots + \xi_{n^۲} x^{n^۲} \in F[x]$$

وجود دارد به گونه‌ای که $f(T) = 0$.

همان‌گونه که خواهیم دید بررسی این معادلهٔ چندجمله‌ی راهگشای بسیاری از ویژگیهای ژرفتر تبدیل T است.

اینک مفهوم جایگذاری یک تبدیل خطی در یک چندجمله‌ی را به طور کاملاً دقیق بررسی می‌کنیم.

(۱.۲۲) تعریف. گیریم $f(x) = \lambda_۰ + \lambda_۱ x + \dots + \lambda_r x^r \in F[x]$ و $T \in L(V, V)$ ؛ در این صورت $f(T)$ نمایش تبدیل خطی

$$f(T) = \lambda_۰ \cdot ۱ + \lambda_۱ T + \dots + \lambda_r T^r$$

است، که در آن ۱ تبدیل همانی روی V است. به روش مشابه می‌توانیم $f(A)$ را که در آن A یک ماتریس n در n روی F است تعریف کنیم و به جای ۱ ماتریس یکه I بگذاریم.

(۲.۲۲) لم. گیریم $f, g \in F[x]$ و $T \in L(V, V)$ ؛ در این صورت

$$f(T)T = Tf(T) \text{ (الف)}$$

$$(f \pm g)(T) = f(T) \pm g(T) \text{ (ب)}$$

$$(fg)(T) = f(T)g(T) \text{ (پ)}$$

البته همین لم برای ماتریسها نیز برقرار است. برهان، همانند برهان (۱۲.۲۰) است که از آوردن آن خودداری می‌شود.

(۳.۲۲) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ در این صورت $T^n, \dots, T^2, T, 1$ در $L(V, V)$ وابسته خطی‌اند. بنابراین یک عدد درستی مانند $n^r \leq r$ وجود دارد که به‌طور یکتا معین می‌شود و به گونه‌ای است که

$$T^{r-1}, \dots, T^2, T, 1 \text{ ناپسته خطی‌اند}$$

$$T^r, T^{r-1}, \dots, T^2, T, 1 \text{ وابسته خطی‌اند}$$

در این صورت داریم

$$T^r = \xi_0 \cdot 1 + \xi_1 T + \dots + \xi_{r-1} T^{r-1}, \quad \xi_i \in F$$

گیریم $m(x) = x^r - \xi_{r-1}x^{r-1} - \dots - \xi_0 \cdot 1 \in F[x]$ در این صورت $m(x)$ دارای ویژگیهای زیر است:

$$m(T) = 0 \text{ و } m(x) \neq 0, f[x] \text{ در } 1.$$

۲. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌یی دلخواه در $F(x)$ باشد به‌گونه‌ای که $f(T) = 0$ ، آنگاه $f(x)|m(x)$ در $F(x)$.

برهان. وجود چندجمله‌یی $m(x)$ و حکم (۱) مربوط به آن، از تبصره‌های مقدماتی این بخش نتیجه می‌شوند. اینک گیریم $F(x)$ چندجمله‌یی دلخواهی در $F(x)$ است به‌گونه‌ای که $f(T) = 0$. به سبب نابستگی خطی $T^{r-1}, \dots, T, 1$ یک چندجمله‌یی $R(x) \neq 0$ از درجه کوچکتر از r وجود ندارد به‌گونه‌ای که $R(T) = 0$. اکنون عمل تقسیم $f(x)$ بر $m(x)$ را در نظر می‌گیریم، و به دست می‌آوریم

$$f(x) = m(x)Q(x) + R(x)$$

که در آن یا $R(x) = 0$ و یا درجه $R(x)$ از درجه $m(x)$ یعنی r ، کوچکتر است. بنابر لم (۲.۲۲) داریم

$$R(T) = (f - mQ)(T) = f(T) - m(T)Q(T) = 0$$

و بنا بر تبصره پیش، در $F(x)$ داریم $R(x) = 0$ که ثابت می‌کند $f(x)|m(x)$ ، و قضیه ثابت می‌شود.

(۴.۲۲) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$. چندجمله‌یی $m(x) \in F[x]$ که در قضیه (۳.۲۲) تعریف شد، چندجمله‌یی مینیمال T نامیده می‌شود؛ $m(x)$ به عنوان چندجمله‌یی ناصفر با کوچکترین درجه به گونه‌ای مشخص می‌شود که $m(T) = 0$ ، و این چندجمله‌یی با تقریب یک ضریب ثابت به طور یکتا تعیین می‌شود.

تبصره‌های مربوط به یکتایی $m(x)$ بنا بر جزء (۲) از قضیه (۳.۲۲) آشکار است. برای روشن کردن آن گیریم $m(x)$ و $m'(x)$ دو چندجمله‌یی ناصفر از درجه r باشند به گونه‌ای که $m(T) = m'(T) = 0$. در این صورت بنابر برهان جزء (۲) از قضیه (۳.۲۲) داریم $m'(x)|m(x)$ و $m(x)|m'(x)$. از بحث مذکور در بخش ۲ نتیجه می‌شود که $m(x)$ و $m'(x)$ در $F[x]$ در یک عامل یکه اختلاف دارند، و چون یکاها در $F[x]$ اصلاً چندجمله‌یهای ثابت هستند، پس یکتایی $m(x)$ ثابت می‌شود.

توجه می‌کنیم که قضیه (۳.۲۲) برای هر ماتریس $A \in M_n(F)$ نیز برقرار است. اگر $T \in L(V, V)$ نسبت به پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ از V دارای ماتریس A باشد، از قضیه (۳.۱۳) چنین برمی‌آید که T و A دارای یک چندجمله‌یی مینیمال هستند.

درک کامل تعریف و ویژگیهای چندجمله‌یی مینیمال برای بقیه این فصل کاملاً ضروری است. مثال الف. اطلاع از وجود چندجمله‌یی مینیمال یک چیز است و محاسبه آن در یک حالت خاص چیزی دیگر. به عنوان نخستین مثال، ماتریس ۲ در ۲

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$$

را در نظر می‌گیریم. داریم

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \gamma\delta & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}$$

بنابر قضیه (۳.۲۲)، باید انتظار داشته باشیم که پس از محاسبه A^2 ، A^4 ، بتوانیم یک رابطه خطی بین $\{A^4, A^3, A^2, A, I\}$ بیابیم. ولی چیز شگفت‌انگیزی رخ می‌دهد. از دستورهای موجود برای A و A^2 داریم

$$A^2 - (\alpha + \delta)A = \begin{pmatrix} \beta\gamma - \alpha\delta & 0 \\ 0 & \beta\gamma - \alpha\delta \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$A^2 - (\alpha + \delta)A - (\beta\gamma - \alpha\delta)I = 0 \quad (5.22)$$

نشان دادیم که A در معادله

$$F(x) = x^2 - (\alpha + \delta)x + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$$

صدق می‌کند. بنابر قضیه (۳.۲۲)، اگر $m(x)$ چندجمله‌ی مینیمال A باشد، داریم،

$$m(x) | F(x)$$

این بدان معنی است که درجه $m(x)$ برابر ۱ یا ۲ است. اگر درجه $m(x)$ برابر ۱ باشد، آنگاه A در معادله

$$A - \alpha I = 0$$

صدق می‌کند، و A اصلاً یک مضرب عددی از ماتریس یکه است. محاسبه ما نشان می‌دهد که در سایر حالتها، چندجمله‌ی مینیمال همان چندجمله‌ی $F(x)$ است که در بالا داده شده است. به‌عنوان مثال تعدادی چندجمله‌ی مینیمال از ماتریسهای ۲ در ۲ با عنصرهای متعلق به R را در زیر می‌نویسیم:

چندجمله‌ی مینیمال	ماتریس
$x - 3$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$x^2 - 9$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
$x^2 - 4x + 5$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

مثال ب. اکنون توجه خود را به ماتریسهای ۳ در ۳ معطوف می‌داریم. برای ماتریسهای مراتب بالاتر، باید کوشش کنیم تا توانهای A را به طریقی روشن، همانگونه که محاسبه زیر نشان می‌دهد، (یا با روشی بهتر!) حساب کنیم. گیریم

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \xi \end{pmatrix}$$

۲۲۰ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

در این صورت

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\delta + \gamma\eta & \alpha\beta + \beta\varepsilon + \gamma\theta & \alpha\gamma + \beta\zeta + \gamma\xi \\ \alpha\delta + \delta\varepsilon + \zeta\eta & \zeta\beta + \varepsilon^2 + \xi\theta & \delta\gamma + \varepsilon\zeta + \xi\zeta \\ \alpha\eta + \theta\delta + \xi\eta & \eta\beta + \varepsilon\theta + \xi\theta & \eta\gamma + \theta\zeta + \xi^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha^2 + \beta\delta + \gamma\eta) + \beta(\alpha\delta + \delta\varepsilon + \zeta\eta) + \gamma(\alpha\eta + \theta\delta + \xi\eta) & , \text{و غیره} \\ \delta(\alpha^2 + \beta\delta + \gamma\eta) + \varepsilon(\alpha\delta + \delta\varepsilon + \zeta\eta) + \zeta(\alpha\eta + \theta\delta + \xi\eta) & , \text{و غیره} \\ \eta(\alpha^2 + \beta\delta + \gamma\eta) + \theta(\alpha\delta + \delta\varepsilon + \zeta\eta) + \xi(\alpha\eta + \theta\delta + \xi\eta) & , \text{و غیره} \end{pmatrix}$$

یک محاسبهٔ مستقیم ولی طولانی نشان می‌دهد که

$$\mathbf{A}^T - (\alpha + \varepsilon + \xi)\mathbf{A}^T + (\varepsilon\alpha + \xi\alpha + \xi\varepsilon - \delta\beta - \gamma\eta - \zeta\theta)\mathbf{A} - D(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (۶.۲۲)$$

از این نتیجه برای محاسبهٔ چندجمله‌یی مینیمال یک ماتریس دلخواه ۳ در ۳ استفاده خواهد شد. یا چندجمله‌یی که توسط (۶.۲۲) داده شده یک چندجمله‌یی مینیمال است، یا $\mathbf{A}$ در یک معادلهٔ چندجمله‌یی از درجهٔ یک یا دو صدق می‌کند. باید توجه داشت که همانند حالت ماتریسهای ۲ در ۲، درجهٔ چندجمله‌یی مینیمال در این حالت نابزرگتر است از شمارهٔ سطرها (یا ستونها)ی $\mathbf{A}$. چند مثال می‌آوریم

ماتریس	چندجمله‌یی مینیمال
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$x^3 - 2x^2 - 2x + 3$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$x^3 - 2x^2$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	x^2

هنگام استفاده از دستورهای از قبیل (۵.۲۲) و (۶.۲۲) برای یافتن چندجمله‌یی مینیمال $\mathbf{A}$ ، باید تحقیق شود که $\mathbf{A}$ در هیچ چندجمله‌یی از درجهٔ کمتر صدق نمی‌کند. در مورد سومین مثال بالا، این تحقیق نشان می‌دهد که x^2 در واقع چندجمله‌یی مینیمال است.

محاسبه‌هایی که به (۶.۲۲) منجر شد، باید خواننده را قانع کرده باشد که به سرحد روش تجربی

مفهومهای اساسی ۲۲۱

رسیده‌ایم، مگر در حالت‌های خاص. یکی از هدف‌های این فصل دستیابی به یک بینش نظری در حالت کلی است.

نخستین مثالی که ممکن است انتظار داشته باشیم اطلاعات بیشتری به ما بدهد، مطالعه نه تنها چندجمله‌یی $f(x)$ است به‌گونه‌ای که $f(T)$ همه فضای برداری V را به صفر ببرد، بلکه بررسی چندجمله‌ییهایی از T است که بردارهای منفردی را نیز به صفر ببرند. ساده‌ترین مورد، حالت چندجمله‌یی $x - \alpha$ است. در این صورت برای یک مقدار مفروض $\alpha \in F$ باید دنبال بردارهای $v \in V$ بگردیم به‌گونه‌ای که $(T - \alpha)v = 0$. این مسأله به تعریف مهم زیر منجر می‌شود.

(۷.۲۲) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$. عنصر $\alpha \in F$ یک ریشه مشخصه (یا ویژه) مقدار یا مقدار ویژه T نامیده می‌شود هرگاه یک بردار $v \neq 0$ در V موجود باشد به‌گونه‌ای که $T(v) = \alpha v$. هر بردار ناصفر v به‌گونه‌ای که $T(v) = \alpha v$ ، یک بردار مشخصه (ویژه) بردار، یا بردار ویژه مربوط به ریشه مشخصه α نامیده می‌شود. ممکن است ویژه بردارهای زیادی مربوط به یک ویژه مقدار موجود باشند. برای مثال، تبدیل خطی همانی 1 روی V دارای تنها ویژه مقدار $1 \in F$ است، ولی هر بردار ناصفر در V یک ویژه بردار مربوط به این ویژه مقدار است.

می‌توانیم ویژه مقدارها و ویژه بردارها را برای ماتریسها تعریف کنیم.

(۷.۲۲)' گیریم A یک ماتریس n در n با عناصر متعلق به F است. عنصر $\alpha \in F$ یک ویژه مقدار A نامیده می‌شود هرگاه یک بردار ستونی ناصفر x در F_n موجود باشد به‌گونه‌ای که $Ax = \alpha x$ ، چنین بردار x یک ویژه بردار متعلق به α نامیده می‌شود. تناظر بین تبدیلهای خطی و ماتریسها نشان می‌دهد که α یک ویژه مقدار $T \in L(V, V)$ است، اگر و تنها اگر α یک ویژه مقدار ماتریس T نسبت به یک پایه دلخواه فضای برداری باشد. مثال پ. اکنون تعبیری از ویژه مقدارها در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا می‌کنیم. گیریم V زیر فضای فضای برداری $\mathcal{F}(R)$ ، از همه تابعهای $f : R \rightarrow R$ متشکل از تابعهای مشتقپذیر باشند. در این صورت عمل مشتقگیری d در زیر، معرف یک تبدیل خطی است

$$d : V \rightarrow \mathcal{F}(R)$$

منظور ما از این که تابع $f \in V$ یک ویژه بردار d^* است چیست؟ معنی آن این است که $f \neq 0$ ، و برای مقداری مانند $\alpha \in R$ تساوی

$$df = \alpha f$$

برقرار است. آیا چنین تابعی را می‌شناسید؟ تابعهای نمایی $\{e^{\alpha t}\}$ همه ویژه بردارهای d هستند، و نظریه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نشان می‌دهد که اینها تنها ویژه بردارهای d هستند (بخش ۳۴).

* در این بخش، d را برای عمل مشتقگیری و D را طبق معمول برای درمیان به کار می‌بریم.

۲۲۲ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

این بخش را با دو قضیهٔ کلیدی، که روشن‌کنندهٔ مثالهای گذشته هستند خاتمه می‌دهیم.

(۸.۲۲) **قضیه.** گیریم $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقدارهای متمایز $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ تبدیل $T \in L(V, V)$ باشند. در این صورت مجموعهٔ $\{v_1, \dots, v_r\}$ بردارهای نابسته خطی‌اند.

برهان. از استقراء روی r استفاده می‌کنیم. برای $r = 1$ نتیجه آشکار است، پس فرض استقراء را می‌پذیریم که هر مجموعهٔ کمتر از r عنصری $\{v_i\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است. فرض می‌کنیم

$$\eta_1 v_1 + \eta_2 v_2 + \dots + \eta_r v_r = 0 \quad \eta_i \in F \quad (9.22)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که همهٔ η_i ها برابر صفرند. فرض می‌کنیم که یک $\eta_i \neq 0$ ثابت می‌کنیم که این ناقض فرض استقراء است. می‌توانیم فرض کنیم همهٔ η_i ها مخالف صفرند، وگرنه با فرض استقراء به تناقض می‌رسیم. با اثردادن T بر (۹.۲۲)، به‌دست می‌آوریم

$$\eta_1 \alpha_1 v_1 + \eta_2 \alpha_2 v_2 + \dots + \eta_r \alpha_r v_r = 0$$

از ضرب (۹.۲۲) در α_1 و کاستن از آن از رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم

$$\eta_1 (\alpha_1 - \alpha_1) v_1 + \eta_2 (\alpha_2 - \alpha_1) v_2 + \dots + \eta_r (\alpha_r - \alpha_1) v_r = 0$$

جملهٔ شامل v_1 حذف می‌شود. چون $\{\alpha_i\}$ ها متمایزند، ضریبهای $\{v_2, \dots, v_r\}$ صفر نیستند، و با فرض استقراء به تناقض می‌رسیم، که پایان بخش اثبات قضیه است.
مثال ۳. تابعهای $\{e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}, \dots, e^{\alpha_n t}\}$ متعلق به $\mathcal{F}(R)$ با α_i های متمایز را از لحاظ بستگی خطی بیازمایید. انجام این کار مستقیماً چندان آسان نیست. ولی فضای برداری پدید آمده از تابعهای

$$V = S(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t})$$

را در نظر می‌گیریم. در این صورت مشتق $d \in L(V, V)$ (چرا؟). به‌علاوه، تابعهای $e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}$ ویژه بردارهای d هستند که بنابر مثال ۲ به‌ویژه مقدارهای متمایز تعلق دارند. لذا، این تابعها بنابر قضیهٔ (۸.۲۲) نابسته خطی‌اند.

قضیهٔ بعدی یکی از کاربردهای مهم دترمینان را در یافتن ویژه مقدارهای تبدیلهای خطی به‌دست می‌دهد.

(۱۰.۲۲) **قضیه.** گیریم T ، تبدیلی خطی بر یک فضای برداری متناهی-بعد روی F باشد و $\alpha \in F$. در این صورت α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر دترمینان $D(T - \alpha I) = 0$ ، که در آن I تبدیل همانی روی V است.

مفهومهای اساسی ۲۲۳

برهان. نخست فرض می‌کنیم α یک ویژه مقدار T باشد. در این صورت بنا بر تعریف، یک بردار ناصفر $v \in V$ وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$Tv = \alpha v$$

$$(T - \alpha I)v = 0 \quad \text{در این صورت}$$

و چون $v \neq 0$ ، $T - \alpha I$ یک‌به‌یک نیست. پس بنابر قضیه (۸.۱۸)، $D(T - \alpha I) = 0$. به وارون، فرض می‌کنیم $D(T - \alpha I) = 0$. بنا بر قضیه (۸.۱۸)، $T - \alpha I$ یک‌به‌یک نیست. پس بردارهایی چون v_1 و v_2 ، با $v_1 \neq v_2$ وجود دارند به‌گونه‌ای که

$$(T - \alpha I)(v_1) = (T - \alpha I)(v_2)$$

در این صورت، با فرض $v = v_1 - v_2$ ، داریم $v \neq 0$ و

$$(T - \alpha I)(v) = 0$$

که ثابت می‌کند α یک ویژه مقدار T است. مثال ۳. برای تبدیل خطی $T: x \rightarrow Ax$ از R_2 ، که در آن

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

یک ویژه مقدار α و یک ویژه بردار مربوط به آن را بیابید. نخست نشان می‌دهیم که A ماتریس T نسبت به پایه

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

از R_2 است. با محاسبه Ae_1 و Ae_2 می‌بینیم که

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3e_1 + 2e_2$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2e_1 + 2e_2$$

بنابراین A ماتریس T نسبت به پایه $\{e_1, e_2\}$ است. بنابر قضیه (۱۰.۲۲)، α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر

$$D(T - \alpha I) = D(A - \alpha I) = 0$$

داریم

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A} - \alpha I) &= \begin{vmatrix} -3 - \alpha & -2 \\ 2 & 2 - \alpha \end{vmatrix} = (-3 - \alpha)(2 - \alpha) + 4 \\ &= \alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha + 2)(\alpha - 1) \end{aligned}$$

بنابراین -2 و 1 ویژه مقدارها هستند.

اکنون برای ویژه مقدار -2 یک ویژه بردار پیدا می‌کنیم. این بدان معنی است که باید معادلهٔ

$$T\mathbf{x} = -2\mathbf{x} \quad (11.22)$$

را حل کنیم. داریم

$$T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

بنابراین بردار x در (11.22) صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$$-3x_1 - 2x_2 = -2x_1$$

$$2x_1 + 2x_2 = -2x_2$$

یا

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

یک ریشهٔ ناصفر برابر $\langle 2, -1 \rangle$ است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

یک ویژه بردار T برای ویژه مقدار -2 است.

تمرینها

۱. گیریم $T \in L(V, V)$ و $f, g \in F[x]$. ثابت کنید $f(T)g(T) = g(T)f(T)$.

۲. گیریم V و W دو فضای برداری روی F به ترتیب با بعدهای m و n هستند. پایه‌ای برای $L(V, W)$ بیابید.

۳. چندجمله‌یهای مینیمال ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

را بیابید.

۴. الف) گیریم $T \in L(V, V)$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V متشکل از ویژه بردارهای T به ترتیب متعلق به ویژه مقدارهای $\xi_1, \dots, \xi_n$ باشند. در این صورت $Tv_i = \xi_i v_i$ ، $i = 1, \dots, n$. ثابت کنید که $f(T) = 0$ که در آن

$$f(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n)$$

ب) ثابت کنید که چندجمله‌ی مینیمال T برابر $\Pi(x - \xi_j)$ است، که در آن ξ_j ها ویژه مقدارهای متمایز T هستند.

پ) نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

چندجمله‌یهای مینیمال واحدی دارند.

۵. ثابت کنید که اگر $T \in L(V, V)$ ، آنگاه T وارونپذیر است اگر و تنها اگر جمله ثابت چندجمله‌ی مینیمال T صفر نباشد. روش محاسبه T^{-1} را از روی چندجمله‌ی مینیمال بیان کنید. به ویژه، نشان دهید که T^{-1} همواره می‌تواند به وسیله یک چندجمله‌ی از T به صورت $f(T)$ بیان شود.

۶. الف) گیریم T روی V یک تبدیل خطی وارونپذیر است. نشان دهید که α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر $\alpha \neq 0$ و α^{-1} یک ویژه مقدار T^{-1} باشد.

ب) گیریم $T \in L(V, V)$ تبدیلی دلخواه باشد. ثابت کنید که برای هر چندجمله‌ی $f \in F[x]$ ، اگر α یک ویژه مقدار T باشد، $f(\alpha)$ یک ویژه مقدار $f(T)$ است.

۷. نشان دهید $0 \neq v$ در V یک ویژه بردار T (متعلق به یک ویژه مقدار) است اگر و تنها اگر $T(W) \subset W$ ، که در آن $W = S(v)$.

۸. نشان دهید که ماتریسهای متشابه دارای یک ویژه مقدارند.

۹. ویژه مقدارها، و ویژه بردارهای متناظر آنها را برای هر یک از ماتریسهای زیر (با عنصرهای در

(R) بیابید.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{الف} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ب} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{پ}$$

۱۰. گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی باشد به گونه‌ای که برای مقداری مانند $m > 0$ ، تساوی $T^m = 0$ برقرار باشد. ثابت کنید که همهٔ ویژه مقادیرهای T صفرند.

۱۱. نشان دهید که یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ حداکثر $n = \dim V$ ویژه مقدار متمایز دارد.

۱۲. نشان دهید که اگر $T \in L(V, V)$ حداکثر دارای تعداد $n = \dim V$ ویژه مقدار متمایز باشد، آنگاه پایه‌ای برای V متشکل از این ویژه بردارها وجود دارد. ماتریس T نسبت به چنین پایه‌ای چه خواهد بود؟

۲۳. زیرفضاهای پایا

گیریم $T \in L(V, V)$. یک بردار ناصفر $v \in V$ یک ویژه بردار T است، اگر و تنها اگر زیرفضای یک بعدی $S = S(v)$ نسبت به T پایا باشد به این معنی که برای هر $s \in S$ ، داشته باشیم $T(s) \in S$ (بخش ۲۲). جستجوی زیرفضاهای پایا راهگشای ویژگیهای ژرفتر یک تبدیل خطی تنهاست.

به عنوان مثالی عملی، گیریم T تبدیلی از R_2 است به گونه‌ای که برای یک پایهٔ $\{v_1, v_2\}$ از R_2 داریم

$$T(v_1) = v_2$$

$$T(v_2) = v_1$$

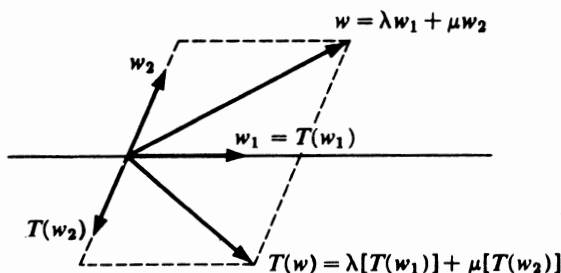
وقتی ویژه بردارهای T را بیابیم، رفتار هندسی T آشکار می‌شود. این بردارها برابرند با $w_1 = v_1 + v_2$ و $w_2 = v_1 - v_2$. ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{w_1, w_2\}$ چنین است:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

اینک می‌توانیم بینیم که T همان قرینه‌یابی نسبت به خط ماربر مبدأ در امتداد بردار w_1 است، این تبدیل هر بردار در $S(w_1)$ را به خودش می‌برد و w_2 را به $-w_2$ یعنی به نگارهٔ آینه‌یی (یا قرینهٔ) آن نسبت به $S(w_1)$ بدل می‌سازد. شکل ۱.۷ نشان می‌دهد که نگارهٔ $T(w)$ یک بردار دلخواه w چگونه می‌تواند به طور هندسی بیان شود.

حقیقتی که در اینجا نشان داده شد، ساده‌ترین مورد مفهوم اساسی زیرین است.

زیرفضاهای پایا ۲۲۷



شکل ۱.۷

(۱.۲۳) **تعریف.** گیریم $T \in L(V, V)$ ، زیرفضای W از V نسبت به T یک زیرفضای پایا (یا به طور ساده یک زیرفضای T -پایا، یا T -زیرفضا) نامیده می شود هرگاه برای همه $w \in W$ ها داشته باشیم $T(w) \in W$.

یادآوری می کنیم که هر مولد $v \neq 0$ از یک زیرفضای یک بعدی T -پایا یک ویژه بردار T نامیده می شود. اگر برای $f \in \mathbb{F}$ ، تساوی $Tv = \xi v$ برقرار باشد، ξ یک ویژه مقدار T و v ویژه بردار متناظر با این ویژه مقدار ξ نامیده می شود.

لم زیر راهی را برای ساختن زیرفضاهای T -پایا در اختیار ما قرار می دهد.

(۲.۲۳) **لم.** گیریم $T \in L(V, V)$ و $f(x) \in F[x]$ ؛ در این صورت مجموعه همه بردارهای $v \in V$ به گونه ای که $f(T)v = 0$ [یعنی، صفر-فضای $f(T)$]، یک زیرفضای T -پایاست که با $n[f(T)]$ نموده می شود.

برهان. چون $f(T) \in L(V, V)$ ، صفر-فضای $n[f(T)]$ یک زیرفضای V است. باید ثابت کنیم که اگر $w \in n[f(T)]$ ، آنگاه $T(w) \in n[f(T)]$ داریم.

$$f(T)[T(w)] = [f(T)T](w) = [Tf(T)](w) = T[f(T)(w)] = 0$$

زیرا در $L(V, V)$ تساوی $f(T)T = Tf(T)$ برقرار است، و لم ثابت می شود.

در مثال قرینه یابی فوق مشاهده می کنیم که بردار پایه w_1 صفر-فضای تبدیل $T - 1$ و w_2 صفر-فضای تبدیل $T + 1$ را پدید می آورد. چندجمله ییهای $x + 1$ و $x - 1$ درست همان عاملهای اول چندجمله یی مینمال $x^2 - 1$ مربوط به تبدیل T هستند. نتیجه مهم این بخش تعمیمی با نتایج زیاد از این مثال است.

(۳.۲۳) **تعریف.** گیریم $V_1, \dots, V_s$ زیرفضاهای V باشند. فضای V را مجموع مستقیم $\{V_1, \dots, V_s\}$ می نامند (با نمادگذاری $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$) هرگاه، اولاً هر بردار $v \in V$

۲۲۸ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

بتواند به صورت یک مجموع

$$v = v_1 + \cdots + v_s, \quad v_i \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s \quad (۴.۲۳)$$

بیان شود، و هرگاه، ثانیاً، عبارت (۴.۲۳) یکتا باشد به این معنی که اگر

$$v_1 + \cdots + v_s = v'_1 + \cdots + v'_s, \quad v_i, v'_i \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

$$v_i = v'_i, \quad 1 \leq i \leq s \quad \text{آنگاه}$$

(۵.۲۳) لم. گیریم $V_s, \dots, V_1$ زیرفضاهایی از V باشند؛ در این صورت V مجموع مستقیم $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ است اگر و تنها اگر:
الف) $V = V_1 + \cdots + V_s$ ، یعنی هر بردار $v \in V$ بتواند دست کم به یک طریق به صورت یک مجموع

$$v = v_1 + \cdots + v_s, \quad v_i \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

بیان شود.

ب) اگر $v_i \in V_i$ ، برای $1 \leq i \leq s$ ، بردارهایی باشند به گونه‌ای که

$$v_1 + \cdots + v_s = 0$$

آنگاه

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_s = 0$$

برهان. اگر V مجموع مستقیم $V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ باشد، آنگاه جزء (الف) برقرار است.

$$v_1 + \cdots + v_s = 0, \quad v_i \in V_i \quad \text{اگر}$$

آنگاه داریم

$$v_1 + \cdots + v_s = 0 + \cdots + 0, \quad v_i, 0 \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

و بنابر جزء دوم تعریف (۳.۲۳) داریم $v_1 = \cdots = v_s = 0$ ، همان گونه که می‌خواستیم.

اکنون فرض می‌کنیم که شرطهای (الف) و (ب)ی لم برقرارند. برای اثبات $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ کافی است که حکم یکتایی تعریف (۳.۲۳) را ثابت کنیم. اگر

$$v_1 + \cdots + v_s = v'_1 + \cdots + v'_s, \quad v_i, v'_i \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

آنگاه می‌توانیم این برابری را به صورت

$$(v_1 - v'_1) + \cdots + (v_s - v'_s) = 0, \quad v_i - v'_i \in V_i, \quad 1 \leq i \leq s$$

بنویسیم. بنابر شرط (ب) برای $1 \leq i \leq s$ داریم $v_i - v'_i = 0$ و از این رو برای همه i ها $v_i = v'_i$ که برهان لم کامل می‌شود.

لم بعد محک مفیدی برای این که یک فضای برداری به صورت یک مجموع مستقیم بیان شود، به دست می‌دهد.

(۶.۲۳) لم. گیریم V یک فضای برداری روی F باشد، و فرض می‌کنیم تبدیلهای خطی ناصفری چون $\{E_1, \dots, E_s\}$ در $L(V, V)$ وجود داشته باشند به گونه‌ای که شرطهای زیر برقرار باشند:

$$1 = E_1 + \cdots + E_s \quad (\text{الف})$$

$$1 \leq i, j \leq s, i \neq j \text{ اگر } E_i E_j = E_j E_i = 0 \quad (\text{ب})$$

در این صورت داریم $E_i^\gamma = E_i$ ، $1 \leq i \leq s$. بعلاوه، V مجموع مستقیم $V = E_1 V \oplus \cdots \oplus E_s V$ است، و هر زیرفضای $E_i V$ صفر نیست.

برهان. بنابر (الف) و (ب) داریم

$$E_i = E_i \cdot 1 = E_i(E_1 + \cdots + E_s) = E_i^\gamma + \sum_{j \neq i} E_i E_j = E_i^\gamma$$

که حکم نخست را ثابت می‌کند. برای اثبات حکم دوم می‌بینیم که برای $1 \leq i \leq s$ یک زیرفضای ناصفر است، زیرا E_i یک تبدیل خطی ناصفر است. گیریم $v \in V$ در این صورت

$$v = 1v = E_1 v + \cdots + E_s v$$

که ثابت می‌کند $V = E_1 V + \cdots + E_s V$. اینک فرض می‌کنیم $v_1 \in E_1 V, \dots, v_s \in E_s V$ و $v_1 + \cdots + v_s = 0$ در این صورت

$$E_i(v_1 + \cdots + v_s) = 0, \quad 1 \leq i \leq s \quad (7.23)$$

بعلاوه، $E_i v_j = 0$ ، اگر $j \neq i$ زیرا $v_j \in E_j V$ ، $E_i E_j = 0$ ، سرانجام $E_i v_i = v_i$ ، زیرا $v_i = E_i v$ برای برداری مانند $v \in V$ ، و با استفاده از این حقیقت که $E_i^\gamma = E_i$ ، $1 \leq i \leq s$ ، داریم $E_i v_i = E_i^\gamma v = E_i v = v_i$ ، $v_1 = \cdots = v_s = 0$ ایجاب می‌کند که (۷.۲۳) برابری $E_i v_i = E_i^\gamma v = E_i v = v_i$ را این لم از لم (۵.۲۳) نتیجه می‌شود.

(۸.۲۳) تعریف. تبدیل خطی $E \in L(V, V)$ که در $E^\gamma = E \neq 0$ صدق می‌کند یک تبدیل خطی خود توان نامیده می‌شود.

۲۳۰ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

سرانجام، برای بیان قضیهٔ اصلی خود آماده‌ایم. این قضیه می‌تواند به شکل شهودی زیر بیان شود. گیریم $T \in L(V, V)$ و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T باشد. بنا بر قضیه‌های بخش ۲۰، $m(x)$ می‌تواند در $F[x]$ به عوامل اول، مانند

$$m(x) = p_1(x)^{e_1} \cdots p_s(x)^{e_s}$$

که در آن $\{p_i\}$ ها عوامل اول متمایز و e_i ها عددهای درست مثبت هستند، تجزیه شود. بنابر لم (۲.۲۳) صفر-فضاهای

$$n(p_i(T)^{e_i}), \quad 1 \leq i \leq s$$

T -زیرفضاهای V هستند. این قضیه اساساً حکم می‌کند که V برابر مجموع مستقیم آنهاست. همان‌گونه که خواهیم دید، گرچه این قضیه به هیچ وجه، بهترین قضیه‌ای نیست که می‌توان در این راستا ثابت کرد، ولی در مسألهٔ یافتن پایه‌ای برای V به‌گونه‌ای که ماتریس T نسبت به این پایه تا حد ممکن ساده باشد کمک مهمی می‌کند. این قضیه اغلب قضیهٔ اصلی تجزیه نامیده می‌شود.

(۹.۲۳) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ و

$$m(x) = p_1(x)^{e_1} \cdots p_s(x)^{e_s}$$

چندجمله‌یی مینیمال T باشد که به توانهای اول متمایز $p_i(x) \in F[x]$ تجزیه شده است. در این صورت چندجمله‌ییهایی مانند $\{f_1(x), \dots, f_s(x)\}$ در $F(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که تبدیل خطی $E_i = f_i(T)$ ، $1 \leq i \leq s$ ، در

$$E_i \neq 0, \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$1 = E_1 + \cdots + E_s,$$

$$E_i E_j = E_j E_i = 0, \quad i \neq j,$$

صدق می‌کند، و $E_i V = n(p_i(T)^{e_i})$ ، صفر-فضای $p_i(T)^{e_i}$ ، $1 \leq i \leq s$ است. زیرفضاهای $n(p_i(T)^{e_i})$ ، $1 \leq i \leq s$ ، پایا هستند، و داریم

$$V = n(p_1(T)^{e_1}) \oplus \cdots \oplus n(p_s(T)^{e_s})$$

برهان. گیریم

$$q_i(x) = \frac{m(x)}{p_i(x)^{e_i}}, \quad 1 \leq i \leq s$$

زیرفضاهای پایا ۲۳۱

پس $\{q_i(x)\}$ ها چندجمله‌ییهایی در $F(x)$ هستند که عامل مشترک ندارند. از این رو بنابر نتیجه (۱۶.۲۰) چندجمله‌ییهایی نظیر $a_i(x)$, $1 \leq i \leq s$ وجود دارند، به گونه‌ای که

$$1 = q_1(x)a_1(x) + \cdots + q_s(x)a_s(x)$$

با گذاردن T به جای x ، بنا بر لم (۲.۲۲) نتیجه زیر را داریم

$$1 = q_1(T)a_1(T) + \cdots + q_s(T)a_s(T)$$

اینک، گیریم $f_i(x) = q_i(x)a_i(x)$, $1 \leq i \leq s$ ، و $E_i = f_i(T)$ ، قبلاً ثابت کردیم که

$$1 = E_1 + \cdots + E_s$$

بعد، می‌بینیم که اگر $j \neq i$ ،

$$E_i E_j = q_i(T)a_i(T)q_j(T)a_j(T) = 0$$

زیرا $m(x)|q_i(x)q_j(x)$ ، اگر $j \neq i$ ، و از این رو $q_i(T)q_j(T) = 0$ برای هر $v \in V$ داریم

$$p_i(T)^{e_i} E_i v = p_i(T)^{e_i} q_i(T)a_i(T)v = m(T)a_i(T)v = 0$$

که ثابت می‌کند $E_i V \subset n(p_i(T)^{e_i})$. بعلاوه باتوجه به آنچه ثابت شده است داریم $V = \sum_{j \neq i} E_j V$ ، آنگاه $E_i V = 0$ ، اگر برای مقداری از i ، $V = E_1 V + \cdots + E_s V$ و $q_i(T)V = \sum_{j \neq i} q_i(T)E_j(V) = 0$ چون $m(x)|q_i(x)q_j(x)$ پس

$$q_i(T)E_j = q_i(T)q_j(T)a_j(T) = 0$$

در این صورت $q_i(T) = 0$ ، که ناقض این فرض است که $m(x)$ چندجمله‌ی مینیمال T است. بنابراین $E_i V \neq 0$ به‌ازای $1 \leq i \leq s$. بنا بر لم (۶.۲۳)، داریم $V = E_1 V \oplus \cdots \oplus E_s V$. بعلاوه، هر زیرفضای $E_i V$ ، T -پایاست، زیرا

$$TE_i V = Tf_i(T)V = f_i(T)TV \subset E_i V, \quad 1 \leq i \leq s$$

تنها حکمی که اثبات آن مانده است این است که $E_i V = n(p_i(T)^{e_i})$. قبلاً نشان دادیم که $E_i V \in n(p_i(T)^{e_i})$. اکنون گیریم $v \in n(p_i(T)^{e_i})$ و v را برای مقداری از $v_i \in V$ به شکل $v = E_1 v_1 + \cdots + E_s v_s$ بیان می‌کنیم. پس

$$p_i(T)^{e_i} v = p_i(T)^{e_i} E_1 v_1 + \cdots + p_i(T)^{e_i} E_s v_s = 0$$

۲۳۲ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

و چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای T -پایای $E_i V$ است، داریم

$$p_i(T)^{e_i} E_1 v_1 = \cdots = p_i(T)^{e_i} E_s v_s = 0$$

برای $i \neq j$ داریم

$$p_i(T)^{e_i} E_j v_j = p_j(T)^{e_j} E_j v_j = 0$$

چون $p_i(x)$ و $p_j(x)$ عاملهای اول متمایزند، چندجمله‌بیهایی چون $a(x)$ و $b(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که

$$1 = a(x)p_i(x)^{e_i} + b(x)p_j(x)^{e_j}$$

با گذاشتن T به جای x و اعمال هر دوطرف بر $E_j v_j$ داریم

$$E_j v_j = a(T)p_i(T)^{e_i} E_j v_j + b(T)p_j(T)^{e_j} E_j v_j = 0$$

بنابراین

$$v = E_1 v_1 + \cdots + E_s v_s = E_i v_i \in E_i V$$

و قضیه ثابت می‌شود.

به‌عنوان نخستین کاربرد این قضیه، این سؤال که چه زمانی می‌توان پایه‌ای برای V متشکل از ویژه بردارهای T برگزید، را در نظر می‌گیریم.

(۱۰.۲۳) تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ قطری شدنی نامیده می‌شود هرگاه برای V پایه‌ای متشکل از ویژه بردارهای T وجود داشته باشد. هر ماتریس T نسبت به یک پایه از ویژه بردارها یک ماتریس قطری نامیده می‌شود. این ماتریس دارای شکل

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in F$$

است که عناصر آن در همه جا صفر است به جز در جاهای (i, i) ، $1 \leq i \leq n$.

(۱۱.۲۳) قضیه. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینمال T دارای شکل

$$m(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_s)$$

زیرفضاهای پایا ۲۳۳

با صفرهای متمایز $\xi_1, \dots, \xi_s$ در F باشد.

برهان. نخست فرض می‌کنیم T قطری شدنی است و $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه T متشکل از ویژه بردارهای مربوط به ویژه مقدارهای $\xi_1, \dots, \xi_n$ در F است. فرض می‌کنیم v_i ها طوری شماره‌گذاری شده‌اند که $\xi_1, \dots, \xi_s$ متمایزند و هر ویژه مقدار ξ_j بر یکی از ξ_i ها منطبق باشد به گونه‌ای که $1 \leq i \leq s$. گیریم

$$m(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_s)$$

چون $T(v_i) = \xi_i v_i$, $1 \leq i \leq s$ داریم

$$(T - \xi_i \cdot 1)v_i = 0$$

و از این رو

$$m(T)v_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

بنابراین $m(T) = 0$ و بنا بر لم (۳.۲۲) چندجمله‌یی مینیمال عاملی است از $m(x)$. ولی آشکار است که اگر هر عامل اول $m(x)$ را حذف کنیم یک چندجمله‌یی $m^*(x)$ به دست می‌آوریم به گونه‌ای که $m^*(T) \neq 0$. به عنوان مثال، اگر $m^*(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{s-1})$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} m^*(T)v_s &= (T - \xi_1) \cdots (T - \xi_{s-1})v_s \\ &= (\xi_s - \xi_1) \cdots (\xi_s - \xi_{s-1})v_s \neq 0 \end{aligned}$$

از اینجا برمی‌آید که $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T است. اکنون فرض می‌کنیم که چندجمله‌یی مینیمال به شکل

$$m(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_s)$$

با $\{\xi_i\}$ های متمایز در F باشند. بنابر قضیه (۹.۲۳) داریم

$$V = n(T - \xi_1 \cdot 1) \oplus \cdots \oplus n(T - \xi_s \cdot 1)$$

گیریم $\{v_{11}, \dots, v_{1d_1}\}$ پایه‌ای برای $n(T - \xi_1 \cdot 1)$ و $\{v_{21}, \dots, v_{2d_2}\}$ پایه‌ای برای $n(T - \xi_2 \cdot 1)$ ، و غیره، باشد. در این صورت چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای $n(T - \xi_i \cdot 1)$ است، نتیجه می‌شود که

$$\{v_{11}, \dots, v_{1d_1}, v_{21}, \dots, v_{2d_2}, \dots\}$$

۲۳۴ نظریه یک تبدیل خطی تنها

پایه‌ای برای V است. سرانجام، $w \in n(T - \xi_i \cdot 1)$ ایجاب می‌کند که $(T - \xi_i \cdot 1)w = 0$ یا $T(w) = \xi_i \cdot w$ پس اگر $w \neq 0$ یک ویژه بردار T است. بنابراین همه بردارهای پایه v_{ij} ویژه بردارهای T هستند. و قضیه ثابت می‌شود. بجاست که قضیه‌های مربوط به تبدیلهای خطی را به قضایای مربوط به ماتریسها ترجمه کنیم. داریم:

(۱۲.۲۳) نتیجه. گیریم $A \in M_n(F)$. در این صورت A با یک ماتریس قطری D مشابه است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینمال A به شکل

$$m(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_s)$$

با ξ_i های متمایز متعلق به F باشد. اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه $D = S^{-1}AS$ ، که در آن D و S به شکل زیر تشریح شده‌اند: D دارای عضوهای $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ است که به وسیله ویژه مقدارهای A و در صورت لزوم مکرر، داده می‌شوند؛ S ماتریس وارونپذیر است که ستونهای آن مجموعه نایسته‌ای از ویژه بردارها هستند که به ترتیب متناظر با $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ هستند $\leftarrow (۶.۱۳)'$.

(۱۳.۲۳) قضیه. گیریم $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ مجموعه‌ای از تبدیلهای خطی قطری شدنی V باشد، به گونه‌ای که $S_i S_j = S_j S_i$ ، برای $1 \leq i, j \leq k$. در این صورت یک پایه V وجود دارد به گونه‌ای که بردارهای پایه، ویژه بردارهای همزمان برای تبدیلهای خطی $S_1, \dots, S_k$ هستند. برهان. از استقراء روی بعد V استفاده می‌کنیم، اگر بعد V برابر ۱ باشد نتیجه آشکار است. نخست فرض می‌کنیم که هر S_i دارای تنها یک ویژه مقدار باشد؛ در این صورت $S_i = \alpha_i \cdot 1$ ، $1 \leq i \leq k$ ، و هر پایه V متشکل از ویژه بردارهای $\{S_1, \dots, S_k\}$ خواهد بود. اکنون می‌توانیم فرض کنیم که مثلاً S_1 بیش از یک ویژه مقدار دارد، و قضیه برای مجموعه‌های تبدیلهای خطی که روی فضاهای برداری با بعد کمتر اثر می‌کنند و در فرض قضیه صادق هستند، درست است. گیریم

$$m(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_r), \quad r > 1$$

چندجمله‌یی مینمال S_1 است. در این صورت بنا بر قضیه (۹.۲۳)

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, \quad V_i = n(S_1 - \alpha_i \cdot 1), \quad 1 \leq i \leq r$$

که در آن، هیچ یک از زیرفضاها صفر نیست و نسبت به S_1 پایاست. ثابت می‌کنیم که چون این $\{S_i\}$ ها تعویضپذیرند، هر زیر فضای V_i نسبت به همه S_i ها، $1 \leq i \leq k$ ، پایاست. بنابر قضیه (۹.۲۳)، داریم $V_i = E_i V$ ، که در آن برای یک چندجمله‌یی $f_i(x) \in F[x]$ داریم $f_i(S_1) = E_i$. در این صورت تساوی $S_i S_j = S_j S_i$ تساوی $S_i E_i = E_i S_j$ را ایجاب می‌کند. و از این رو $S_j V_i = S_j E_i V = E_i S_j V \subset E_i V = V_i$ ، برای $1 \leq j \leq k$ ، $1 \leq i \leq r$.

تمرینها ۲۳۵

هر زیرفضای V_i دارای بعدی کمتر از بعد V است، زیرا $r > 1$ و $V_i \neq 0$ علاوه، هر S_j روی V_i به عنوان یک تبدیل خطی قطری شدنی اثر می‌کند، زیرا چندجمله‌یی مینیمال هر S_j که بر V_i اثر می‌کند چندجمله‌یی مینیمال S_j روی V را عاد می‌کند، پس شرطهای قضیه (۱۱.۲۳) برای تبدیلهای $\{S_j\}$ که بر V_i ، $1 \leq i \leq r$ ، اثر می‌کنند برقرارند. بنابراین فرض استقرار هر زیرفضای $\{V_i\}$ ، $1 \leq i \leq r$ ، دارای پایه‌ای است متشکل از بردارهایی که برای همه $\{S_j\}$ ها ویژه بردارند. این پایه‌ها روی هم پایه‌ای از V را با ویژگی مطلوب تشکیل می‌دهند، و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

۱. ماتریسهای زیر را بیازماید تا تعیین شود که آیا با ماتریسهای قطری در $M_2(R)$ مشابه هستند یا نیستند. در صورت مثبت بودن پاسخ، ماتریسهای D و S مذکور در (۱۲.۲۳) را، بیابید.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

۲. نشان دهید که ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

با ماتریسهای قطری در $M_2(C)$ ، ولی نه در $M_2(R)$ ، مشابهند، C هیأت اعداد مختلط است. در هر حالت، ماتریسهای D و S در $M_2(C)$ را همانند (۱۲.۲۳) بیابید.
۳. نشان دهید که ماتریس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

با یک ماتریس قطری در $M_3(C)$ ، ولی نه در $M_3(R)$ مشابه است.

۴. نشان دهید که تبدیل دیرانسیل‌گیری $D: P_n \rightarrow P_n$ قطری شدنی نیست. (یادآوری می‌شود که برای نمایاندن مجموعه چندجمله‌یهای $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ با $\alpha_i \in R$ ، به کار رفته است.)

۵. گیریم V_1 و V_2 زیرفضاهای ناصفریک فضای برداری V هستند. ثابت کنید $V = V_1 \oplus V_2$ ، اگر و تنها اگر $V = V_1 + V_2$ و $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.

۶. گیریم تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ به گونه‌ای است که $T^2 = 1$. ثابت کنید $V = V_+ \oplus V_-$ ، که در آن $V_+ = \{v \in V | T(v) = v\}$ و $V_- = \{v \in V | T(v) = -v\}$.

۲۳۶ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

۷. نشان دهید که وارون زیر از لم (۶.۲۳) برقرار است. گیریم V یک مجموع مستقیم، $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ از زیرفضاهای ناصفر V_i است. نشان دهید که تبدیلهایی خطی مانند $E_s, \dots, E_1$ وجود دارند به گونه‌ای که $\sum E_i = 1$ ، $E_i E_j = E_j E_i = 0$ ، $i \neq j$ ، و $1 \leq i \leq s$ ، $V_i = E_i V$. (راهنمایی: اگر $v = \sum v_i$ و $v_i \in V_i$ قرار دهید $E_i v = v_i$.)

۸. گیریم $T \in L(V, V)$ دارای چندجمله‌ی مینیمال $m(x) \in F[x]$ است. و $f(x)$ یک چندجمله‌ی دلخواه در $F[x]$ ثابت کنید که

$$n[f(T)] = n[d(T)]$$

که در آن $d(x)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$ و $m(x)$ است.

۲۴. قضیهٔ شکل مثلثی

دو حالت وجود دارد که در آنها یک تبدیل خطی T نمی‌تواند قطری شدنی باشد. یکی حالتی است که چندجمله‌ی مینیمال آن $m(x)$ نمی‌تواند در $F(x)$ به عاملهای خطی تجزیه شود (برای مثال، اگر در $R[x]$ ، R هیأت اعداد حقیقی، $m(x)$ به صورت $m(x) = x^2 + 1$ باشد) دیگری حالتی است که $m(x)$ به ازای $e_i > 1$ ، به صورت $m(x) = (x - \xi_1)^{e_1} \dots (x - \xi_s)^{e_s}$ باشد. در حالت اخیر، مطلوب داشتن قضیه‌ای است که در مورد همهٔ تبدیلهای خطی به کار رود و تا حد امکان به قضیهٔ شکل قطری (۱۱.۲۳) نزدیک باشد.

قضیهٔ اصلی قضیهٔ زیر است.

(۱.۲۴) قضیه. (قضیهٔ شکل مثلثی). گیریم $T \in L(V, V)$ که V فضای برداری متناهی-بعدی

روی یک هیأت دلخواه F است، و فرض کنیم چندجمله‌ی مینیمال T به صورت زیر باشد

$$m(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \dots (x - \alpha_s)^{e_s}$$

که در آن $\{e_i\}$ ها عددهای درست مثبت و $\{\alpha_i\}$ ها عنصرهای متمایز F هستند. در این صورت یک پایهٔ V وجود دارد به گونه‌ای که ماتریس A ی T نسبت به این پایه به شکل

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

است، که در آن هر A_i یک بلوک d_i در d_i به ازای یک عدد درست مثبت $d_i \geq e_i$ است،

قضیه شکل مثلثی ۲۳۷

$1 \leq i \leq s$ و هر A_i می‌تواند به شکل

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

نوشته شود. که در A_i درایه‌های زیر قطر اصلی همه صفرند، و درایه‌های بالای آن ممکن است عنصرهای ناصفر (*) باشند. همه درایه‌های دیگر A که در یکی از بلوکهای $\{A_i\}$ نیستند، صفرند. برای بیان همه این مطالب به صورتی دیگر، وقتی یک ماتریس مربع B با چندجمله‌یی مینیمال $m(x)$ ، داده شده باشد، ماتریس وارونپذیری مانند S وجود دارد که $SBS^{-1} = A$ ، که در آن A دارای شکل داده شده بالاست.

تبصره. یک نکته بسیار مهم این است که فرض قضیه (۱.۲۴) - که چندجمله‌یی مینیمال T می‌تواند به عاملهای خطی تجزیه شود، همواره صادق است به شرط این که F جبری-بسته باشد (بخش ۲۱). عادیترین مثال از یک هیأت جبری-بسته (و تنها مثالی که شرح داده‌ایم) هیأت عددهای مختلط است.

برهان. گیریم V_i صفر-فضای $(T - \alpha_i \cdot 1)^{e_i}$ برای $1 \leq i \leq s$ و d_i بعد V_i باشد. اگر برای هر یک از زیرفضاهای $V_s, \dots, V_2, V_1$ به طور جداگانه پایه‌ای برگزینیم، همان‌گونه که در برهان قضیه (۱۱.۲۳) خاطر نشان ساختیم، همه عنصرهای این پایه‌ها روی هم، پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند زیرا بنا بر قضیه (۹.۲۳)، V مجموع مستقیم زیرفضاهای $\{V_i\}$ است. پس پایه‌ای برای V ترتیب می‌دهیم که نخستین d_1 عنصر آن پایه‌ای برای V_1 ، d_2 عنصر بعدی آن پایه‌ای برای V_2 و قس علی‌هذا تشکیل دهند. چون هر زیرفضای V_i ، نسبت به T پایاست، آشکار است که ماتریس T نسبت به این پایه به شکل

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$

است. اینک تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که بلوکهای A_i می‌توانند طوری انتخاب شوند که شکل مطلوب را داشته باشند و نابرابریهای $d_i \geq e_i$ برای $1 \leq i \leq s$ برقرار باشند.

هر فضای V_i صفر-فضای $(T - \alpha_i \cdot 1)^{e_i}$ است. به دیگر سخن، اگر بگیریم $N_i = T - \alpha_i \cdot 1$ ، آنگاه $N_i^{e_i} = 0$ و داریم

اکنون این نکته مهم را با یک تعریف رسمی بیان می‌کنیم.

تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ صفر-توان نامیده می‌شود هرگاه برای یک عدد درست مثبت k ، تساوی $T^k = 0$ برقرار باشد.

۲۳۸ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

با بازگشت به وضع قبلی خود، نشان داده‌ایم که T از دیدگاه یک تبدیل خطی روی V_i ، مجموع تعداد ثابتی از تبدیلات همانی، $\alpha_i \cdot 1$ ، و یک تبدیل صفر-توان N_i است. اکنون یک حکم کلی دربارهٔ تبدیلهای صفر-توان ذکر می‌کنیم که به مسألهٔ ما سروصورتی می‌دهد.

(۲.۲۴) لم. گیریم N یک تبدیل صفر-توان روی یک فضای برداری متناهی-بعد W باشد؛ در این صورت W دارای یک پایهٔ $\{w_1, \dots, w_t\}$ است به‌گونه‌ای که

$$Nw_1 = 0, \quad N(w_2) \in S(w_1), \dots, N(w_i) \in S(w_1, \dots, w_{i-1})$$

برای $2 \leq i \leq t$.

بعداً برهانی برای لم (۲.۲۴) ارائه می‌دهیم. توجه داریم که ماتریس N نسبت به پایهٔ $\{w_1, \dots, w_t\}$ به شکل زیر (برای $t = 4$) است.

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

پس این لم حالت ویژه‌ای از قضیهٔ شکل مثلثی است. نکتهٔ مهم اینجاست که این حالت ویژه، کل قضیه را ایجاب می‌کند. لم (۲.۲۴) را به استقراء ثابت می‌کنیم. نخست $w_1 \neq 0$ را به‌گونه‌ای می‌یابیم که داشته باشیم $Nw_1 = 0$. هر برداری می‌تواند w_1 باشد، به شرط این که $N = 0$ ، اگر $N^k \neq 0$ و $N^{k+1} = 0$ ، آنگاه می‌گیریم $w_1 = N^k(w) \neq 0$. لذا $N(w_1) = N^{k+1}(w) = 0$. فرض می‌کنیم (به‌عنوان فرض استقراء) که بردارهای نابسته-خطی $\{w_1, \dots, w_i\}$ را یافته‌ایم که در شرطهای لم صدق می‌کنند، و قرار می‌دهیم $S = S(w_1, \dots, w_i)$. اگر $S = W$ ، چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر $S \neq W$ ، $N(W) \subset S$ و $N(W) \not\subset S$ ، آنگاه هر بردار که در S نیست می‌تواند به‌جای w_{i+1} گرفته شود. اینک فرض می‌کنیم $N(W) \not\subset S$. در این صورت یک عدد درست مثبت u وجود دارد به‌گونه‌ای که $N^u(W) \not\subset S$ ، $N^{u+1}(W) \subset S$ ، $w_{i+1} \in N^u(W)$ را می‌یابیم به‌گونه‌ای که $w_{i+1} \notin S$. پس $\{w_1, \dots, w_{i+1}\}$ یک مجموعهٔ نابسته خطی است و $N(w_{i+1}) \in S$ که پایان برهان لم است.

اینک لم (۲.۲۴) را برای گزینش پایه‌ای مناسب برای زیرفضای V_i ی V به‌کار می‌بریم. چون $N_i = T - \alpha_i \cdot 1$ روی V_i صفر-توان است، این لم ایجاب می‌کند که V_i پایه‌ای داشته باشد مانند $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}\}$ به‌گونه‌ای که برای $2 \leq k \leq d_i$

$$N_i(v_{i,1}) = 0, N_i(v_{i,2}) \in S(v_{i,1}), \dots, N_i(v_{i,k}) \in S(v_{i,1}, \dots, v_{i,k-1})$$

قضیه شکل مثلثی ۲۳۹

چون $N_i = T - \alpha_i \cdot 1$ ، از این برابریها، دستورهای زیر نتیجه می‌شوند

$$(T - \alpha_i \cdot 1)v_{i,1} = 0, \dots, (T - \alpha_i \cdot 1)v_{i,k} \in S(v_{i,1}, \dots, v_{i,k-1})$$

که $2 \leq k \leq d_i$ این روابط به نوبه خود، نتیجه می‌دهند

$$\begin{aligned} Tv_{i,1} &= \alpha_{i,1}v_{i,1} \\ Tv_{i,2} &= \alpha_{i,2}v_{i,1} + \alpha_{i,2}v_{i,2} \\ &\dots \\ Tv_{i,k} &= \alpha_{i,k}v_{i,1} + \dots + \alpha_{k-1,k}v_{i,k-1} + \alpha_{i,k}v_{i,k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

و لذا نشان دادیم که، ماتریس T روی فضای V_i نسبت به این پایه دارای شکل مطلوب است. اینک باید نابرابریهای $d_i \geq e_i$ ، $1 \leq i \leq r$ ، را ثابت کنیم. از لم (۲.۲۴) برمی‌آید که $N_i^{d_i} = 0$ ، که بعد d_i بعد V_i است. چون تساوی $N_i = T - \alpha_i \cdot 1 + N_i$ روی V_i برقرار است، پس روی V_i داریم $(T - \alpha_i \cdot 1)^{d_i} = 0$ ، و چون V مجموع مستقیم زیرفضاهای V_i است، داریم

$$(T - \alpha_1 \cdot 1)^{d_1} \dots (T - \alpha_r \cdot 1)^{d_r} = 0 \quad (4.24)$$

بنابراین، چندجمله‌ی مینیمال $m(x) = \Pi(x - \alpha_i)^{e_i}$ چندجمله‌ی $\Pi(x - \alpha_i)^{d_i}$ را عاد می‌کند، و بنابر نظریهٔ یکتایی تجزیه در $F[x]$ داریم $d_i \geq e_i$ ، که پایان برهان قضیه است. این قضیه دارای نتیجه‌های مهم زیادی است. نخستین آنها نشان می‌دهد که درجهٔ چندجمله‌ی مینیمال بزرگتر از بعد V نیست، چنان‌که در مثالهای الف و ب ی بخش ۲۲ به چنین انتظاری رسیدیم.

(۵.۲۴) نتیجه. گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری متناهی-بعد V ، روی یک هیأت جبری-بستهٔ F ، باشد؛ در این صورت درجهٔ $m(x)$ ، یعنی چندجمله‌ی مینیمال T ، از بعد V بیشتر نیست.

یادآور می‌شویم که عنصر $\alpha \in T$ یک ویژه مقدار T نامیده می‌شود اگر بردار ناصفری مانند $v \in V$ موجود باشد به‌گونه‌ای که $Tv = \alpha v$ ، یا به دیگر سخن، اگر $(T - \alpha \cdot 1)v = 0$. بنابر قضیهٔ (۱۰.۲۲)، α ، یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر تساوی $D(A - \alpha I) = 0$ ، که در آن A یک ماتریس T نسبت به یک پایه است، برقرار باشد. این حقیقت ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

(۶.۲۴) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$ و A ماتریس T نسبت به یک پایهٔ V است؛ در این صورت ماتریس $xI - A$ در هیأت خارجی قسمت* (← بخش ۲۰) حلقهٔ چندجمله‌بیهایی $F[x]$ دارد و دترمینان آن $h(x) = D(xI - A)$ چندجمله‌ی مشخصهٔ T نامیده می‌شود.

* ماتریس $xI - A$ در واقع دارای عضوایی در $F[x]$ است؛ این حکم دربارهٔ هیأت خارجی قسمت ضروری است زیرا دترمینان یک ماتریس تنها برای ماتریسهایی با عضوایی در یک هیأت تعریف می‌شود.

نخست چندحکم شامل این تعریف را ثابت می‌کنیم.
 گزاره. چندجمله‌یی مشخصهٔ $h(x)$ به $F[x]$ متعلق، و مستقل از گزینش ماتریس T است.
 مجموعهٔ صفرهای متمایز $h(x)$ با مجموعهٔ ویژهٔ مقادیرهای متمایز T یکی است.
 برهان. گیریم A و B ماتریسهای T نسبت به دو پایهٔ متفاوت باشند. در این صورت برای یک ماتریس وارونپذیر $S = SAS^{-1}$ و داریم:

$$\begin{aligned} D(xI - B) &= D(xI - SAS^{-1}) \\ &= D[S(xI - A)S^{-1}] \\ &= D(S)D(xI - A)D(S)^{-1} \quad \text{[بنابر (۳.۱۸)]} \\ &= D(xI - A) \end{aligned}$$

این حکم دربارهٔ صفرهای چندجمله‌یی مشخصه، بنابر تبصره‌های مقدماتی آشکار است. حقیقت این‌که $D(xI - A) \in F[x]$ از دستور مربوط به بسط کامل $D(xI - A)$ که در بخش ۱۷ داده شده است نتیجه می‌شود.
 اینک فرع اساسی زیر مربوط به قضیهٔ (۱.۲۴) را داریم.

(۷.۲۴) فرع. گیریم V یک فضای برداری روی یک هیأت جبری-بستهٔ F باشد. گیریم $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T و $h(x)$ چندجمله‌یی مشخصهٔ آن باشد؛ در این صورت

$$1. \quad m(x) | h(x).$$

۲. هر صفر $h(x)$ یک صفر $m(x)$ است.

$$3. \quad h(T) = 0.$$

(حکم آخر، قضیهٔ کیلی-همیلتن نامیده می‌شود.)

برهان. گیریم A ماتریس T باشد که در قضیهٔ (۱.۲۴) داده شده است. در این صورت

$$xI - A = \begin{array}{c} \uparrow \\ d_1 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ d_2 \\ \downarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} x - \alpha_1 & * & & \\ & \ddots & & \\ 0 & x - \alpha_1 & & \\ \hline & & x - \alpha_2 & * \\ & & \ddots & \\ & & 0 & x - \alpha_2 \\ \hline & & & \ddots \end{array} \right)$$

قضیه شکل مثلثی ۲۴۱

بنابراین چندجمله‌یی مشخصه برابر است با

$$h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \prod (x - \alpha_i)^{d_i}$$

از سوی دیگر، چندجمله‌یی مینمال برابر است با

$$m(x) = \prod (x - \alpha_i)^{e_i}$$

بنابر قضیه (۱.۲۴)، $d_i \geq e_i$ برای همه i ها. همه حکمهای این نتیجه از این اشاره‌ها نتیجه می‌شوند.

اینک بیان دیگری از قضیه کیلی-همیلتن برای ماتریسها را می‌آوریم.
(۸.۲۴) قضیه (کیلی-همیلتن). گیریم F هیأتی است مشمول در هیأت‌عددهای مختلط C و A یک ماتریس n در n است با ضریبهای در F . در این صورت A در معادله مشخصه خود

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

صدق می‌کند. به دیگر سخن، اگر قرار دهیم $h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ، خواهیم داشت $h(A) = 0$. برهان. چون $F \subset C$ ، A معرف یک تبدیل خطی T روی یک فضای برداری n بعدی روی C است به گونه‌ای که A ماتریس T نسبت به یک پایه این فضای برداری است. چون هیأت‌اعداد مختلط جبری-بسته است، بنابر بخش (۳)ی فرع (۷.۲۴)، $h(T) = 0$. بنابراین $h(A) = 0$ و برهان کامل می‌گردد.

قضیه کیلی-همیلتن در مورد ماتریسها روی یک هیأت دلخواه نیز برقرار است (← تمرین ۳ از بخش ۲۵).

این بخش را با دو کاربرد دیگر قضیه (۱.۲۴) خاتمه می‌دهیم.
(۹.۲۴) قضیه (تجزیه ژوردان). گیریم $T \in L(V, V)$ ، که در آن V یک فضای برداری متناهی-بعد روی یک هیأت جبری-بسته F است. تبدیلهایی خطی مانند D و N روی V وجود دارند به گونه‌ای که

$$T = D + N \quad (\text{الف})$$

(ب) D قطری شدنی و N صفر-توان است.

(پ) چندجمله‌یهای $f(x)$ و $g(x)$ متعلق به $F[X]$ وجود دارند به گونه‌ای که $D = f(T)$ و $N = g(T)$.

تبدیلهای D و N به طور یکتا تعیین می‌شوند، بدین معنی که اگر D' و N' به ترتیب، تبدیلهای قطری شدنی و صفر-توان باشند، به گونه‌ای که $T = D' + N'$ و $D'N' = N'D'$ ، آنگاه $D' = D$ و $N' = N$.

برهان. چون F جبری-بسته است، چندجمله‌یی مینیمال T به شکل زیر است

$$m(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_s)^{e_s}$$

که در آن $\alpha_s, \dots, \alpha_1$ ویژه مقدارهای متمایز هستند. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳) چندجمله‌یهای $f_1(x), \dots, f_s(x)$ وجود دارند به‌گونه‌ای که اگر $E_i = f_i(T)$ ، $1 \leq i \leq s$ ، آنگاه

$$V = E_1 V \oplus \cdots \oplus E_s V$$

و

$$E_i V = n((T - \alpha_i)^{e_i})$$

گیریم

$$D = \alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_s E_s$$

در این صورت به‌ازای یک چندجمله‌یی $f(x)$ داریم $D = f(T)$. بعلاوه D یک تبدیل خطی قطری شدنی است. اگر $v_i \in V_i = E_i V$ ، $1 \leq i \leq s$ ، با قراردادن $v_i = E_i v$ داریم

$$\begin{aligned} Dv_i &= (\alpha_1 E_1 + \cdots + \alpha_s E_s) E_i v \\ &= \alpha_i E_i E_i v = \alpha_i E_i v = \alpha_i v_i \end{aligned}$$

با استفاده از ویژگیهای تبدیلیهای $\{E_i\}$ ، مذکور در قضیهٔ (۹.۲۳)، نتیجه می‌شود که D قطری شدنی است. اینک گیریم

$$N = T - D$$

در این صورت برای چندجمله‌یی $g(x) = x - f(x)$ داریم $N = g(T)$. ثابت می‌کنیم که N صفر-توان است. کافی است ثابت کنیم که برای $v_i \in V_i$ ، $1 \leq i \leq s$ ، و برای یک مقدار بسیار بزرگ k داریم $N^k v_i = 0$. با قرار دادن $v_i = E_i v$ ، برای $v \in V$ ، داریم:

$$Nv_i = (T - D)v_i = (T - \alpha_i)v_i$$

زیرا بنابر محاسبات قبلی $Dv_i = \alpha_i v_i$. در این صورت

$$N^{e_i} v_i = (T - \alpha_i)^{e_i} v_i = 0$$

چون $v_i \in n((T - \alpha_i)^{e_i})$ ، از این رو N صفر-توان است.

قضیه شکل مثلثی ۲۴۳

اینک می‌پردازیم به قسمت یکتایی قضیه. فرض می‌کنیم $T = D' + N'$ و D', N' در فرض آخرین جزء قضیه صدق می‌کنند. چون $D'N' = N'D'$ داریم $TD' = D'T$ و $TN' = N'T$. بنابراین $D'D = DD'$ و $N'N = NN'$ ، چون N و D چندجمله‌یهای در T هستند. از

$$T = D' + N' = D + N$$

به‌دست می‌آوریم

$$D' - D = N - N'$$

چون N و N' تعویضپذیرند، می‌توانیم با استفاده از قضیه دو جمله‌ی نشان دهیم که

$$(N - N')^k = N^k - \binom{k}{1} N^{k-1} N' + \dots + (-1)^k (N')^k$$

یک جمله نمونه از این نوع $N^i (N')^j$ است با $i + j = k$. اگر k به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که یا $N^i = 0$ یا $(N')^j = 0$ ، و از این رو $N - N'$ صفر-توان است. از سوی دیگر، بنابر قضیه (۱۳.۲۳)، یک پایه V متشکل از ویژه بردارهای D و D' ، و بنابر این متشکل از ویژه بردارهای $D - D'$ وجود دارد. ماتریس $D' - D$ نسبت به این پایه دارای شکل زیر است

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \beta_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که چون $D' - D = N - N'$ صفر-توان است، هر توانی از β_i برابر صفر است. بنابراین $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$ ، و $D' - D = N - N' = 0$ که برهان قضیه را کامل می‌سازد.

البته، فرض جبری-بسته بودن F ، عملاً مورد استفاده قرار نگرفت. تنها چیز مورد نیاز، تعلق همه ویژه مقدارهای T به F است.

تجزیه ژوردان یک تبدیل خطی T برای محاسبه توانهای T مفید است. توانهای T را می‌توان با استفاده از قضیه دو جمله‌ی برحسب D و N محاسبه کرد، زیرا تبدیلهای D و N تعویضپذیرند. بنابراین، اگر $T = D + N$

$$T^r = D^r + rND + DN + N^r = D^r + rND + N^r$$

و در حالت کلی

$$T^k = D^k + \binom{k}{1} D^{k-1} N + \cdots + \binom{k}{k-1} D N^{k-1} + N^k$$

توانهای D با محاسبهٔ توانهای عناصر قطری ماتریس متناظر D محاسبه می‌شود، در حالی که همهٔ توانهای N بعد از توان معینی صفرند. از این یادداشتها در بخش ۳۴ در محاسبهٔ توان یک ماتریس استفاده خواهد شد. سرانجام قضیهٔ زیر را داریم.

(۱۰.۲۴) **قضیه.** گیریم T یک تبدیل خطی، روی فضای برداری n بعدی V بر یک هیأت جبری-بستهٔ F ، است. در این صورت $h(x)$ ، چندجمله‌یی مشخصهٔ T ، می‌تواند به شکل زیر تجزیه شود

$$h(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_s)^{d_s}$$

که در آن $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ ویژه مقدارهای متمایز T هستند. گیریم

$$h(x) = x^n - \gamma_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \gamma_n, \quad \gamma_i \in F$$

بسط $h(x)$ برحسب توانهای x باشد، داریم

$$\gamma_1 = d_1 \alpha_1 + \cdots + d_s \alpha_s, \quad \gamma_n = \alpha_1^{d_1} \cdots \alpha_s^{d_s}$$

بعلاوه، اگر $\mathbf{B} = (B_{ij})$ ماتریس T نسبت به پایهٔ دلخواه این فضای برداری باشد، آنگاه

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} \quad \text{و} \quad \gamma_n = D(\mathbf{B})$$

برهان. اثبات تجزیه‌پذیری $h(x)$ به صورت

$$h(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_s)^{d_s}$$

در فرع (۷.۲۴) ثابت شد. دستورهایی

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^s d_i \alpha_i, \quad \gamma_n = \prod_{i=1}^s \alpha_i^{d_i}$$

از بسط طرف راست دستور مربوط به $h(x)$ و مقایسهٔ ضریبها حاصل شده‌اند.

قضیه شکل مثلثی ۲۴۵

اینک گیریم $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ ماتریس T نسبت به یک پایه دلخواه است. نشان داده‌ایم که چندجمله‌یی مشخصه مستقل از انتخاب پایه است. بنابراین

$$h(x) = \begin{vmatrix} x - \beta_{11} & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1n} \\ -\beta_{21} & x - \beta_{22} & \cdots & -\beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\beta_{n1} & \cdots & \cdots & x - \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

جمله ثابت γ_n در $h(x)$ برابر است با $h(0) = (-1)^n D(\mathbf{B})$. یک روش به دست آوردن تساوی $\gamma_{n-1} = \beta_{11} + \cdots + \beta_{nn}$ استفاده از بسط کامل دترمینان است $\leftarrow [(12.17) \text{ یا } (22.19)]$. جملات این بسط کامل حاصل ضرب عناصری از سطر اول، ستون j_1 ام، سطر دوم، ستون j_2 ام، و غیره ضرب در $D(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$ هستند. برای اینکه یک جمله ناصفر داشته باشیم، باید همه ستونها متفاوت باشند. تنها جمله ناصفر در بسط کامل $h(x)$ که می‌تواند در ضریب x^{n-1} شرکت کند، برابر

$$(x - \beta_{11})(x - \beta_{22}) \cdots (x - \beta_{nn})$$

است. علامت مربوط به این جمله برابر ۱ $D(e_1, \dots, e_n) = 1$ است. ضریب x^{n-1} در $(x - \beta_{11}) \cdots (x - \beta_{nn})$ برابر $-(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn})$ است، که برهان قضیه را کامل می‌کند. آخرین جزء قضیه قبل اهمیت تابع عددی-مقدار از یک ماتریس را علاوه بر دترمینان نشان می‌دهد.

(۱۱.۲۴) تعریف. گیریم T یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری متناهی-بعد V است. اثر T ، یعنی $\text{Tr}(T)$ ، با مجموع عناصر قطری یعنی $\sum \beta_{ii}$ از ماتریس $\mathbf{B}$ ی T نسبت به یک پایه دلخواه این فضای برداری تعریف می‌شود. اثر $\text{Tr}(T)$ نایسته به انتخاب ماتریس $\mathbf{B}$ است. اگر $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$ یک ماتریس n در n باشد، آنگاه اثر $\mathbf{B}$ یعنی $\text{Tr}(\mathbf{B})$ با $\text{Tr}(\mathbf{B}) = \sum \beta_{ii}$ تعریف می‌شود.

قضیه پیش نشان می‌دهد که $\text{Tr}(T)$ نایسته به انتخاب ماتریس $\mathbf{B}$ است، زیرا $\text{Tr}(T)$ ضریب توانی از x در چندجمله‌یی مشخصه T است که قبلاً نایستگی آن به ماتریس $\mathbf{B}$ نشان داده شده است. مثال الف. گیریم V یک فضای برداری سه بعدی روی هیأت مختلط C با پایه $\{v_1, v_2, v_3\}$ است و گیریم $T \in L(V, V)$ با معادله‌های زیر تعریف شود

$$Tv_1 = -v_1 + 2v_3$$

$$Tv_2 = 3v_1 + 2v_2 + v_3$$

$$Tv_3 = -v_3$$

ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, v_2, v_3\}$ چنین است

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نشان خواهیم داد که چگونه پایه‌ای برای V بیابیم که ماتریس T نسبت به آن به شکل مذکور در قضیهٔ (۱.۲۴) باشد.

مرحلهٔ ۱. ویژه‌مقدارهای متمایز A را می‌یابیم. این کار را می‌توان یا با یافتن عاملهای اول چندجمله‌یی مشخصه $h(x)$ یا با تعیین چندجمله‌یی مینیمال $m(x)$ و یافتن صفرهای آن انجام داد، زیرا بنابر فرع (۷.۲۴)، $m(x)$ و $h(x)$ دارای یک مجموعه از صفرهای متمایزند. چندجمله‌یی مشخصه $h(x)$ برابر است با

$$h(x) = D(xI - A) = \begin{vmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ -2 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2(x-2)$$

در اینجا با توجه به فرع (۷.۲۴) می‌دانیم که ویژه‌مقدارهای متمایز T برابر $\{-1, 2\}$ و چندجمله‌یی مینیمال T برابر است با

$$(1+x)(2-x) \quad \text{یا} \quad (1+x)^2(2-x)$$

مرحلهٔ ۲. صفر-فضاهای $T+1$ ، $(T+1)^2$ ، و $T-2$ را پیدا می‌کنیم. اگر V برابر مجموع مستقیم صفر-فضاهای $T+1$ ، $T-2$ باشد، آنگاه چندجمله‌یی مینیمال برابر $(x+1)(x-2)$ است (چرا؟) و گرنه چندجمله‌یی مینیمال برابر $(x+1)^2(x-2)$ خواهد بود و باید صفر-فضای $(T+1)^2$ را بیابیم.

داریم

$$(T+1)v_1 = 2v_2$$

$$(T+1)v_2 = 3v_1 + 3v_2 + v_3$$

$$(T+1)v_3 = 0$$

اینک می‌توان رتبهٔ $T+1$ را با تعیین ماکزیمم تعداد بردارهای نابسته خطی بین $\langle 0, 0, 2 \rangle$ ، $\langle 3, 3, 1 \rangle$ ، $\langle 0, 0, 0 \rangle$ ، به دست آورد. در این حالت این تعداد آشکارا برابر دو است، و بنا بر قضیهٔ (۹.۱۳) بعد صفر-فضای $T+1$ برابر $3-2=1$ است.

قضیه شکل مثلثی ۲۴۷

با روش مشابه، داریم

$$(T - 2)v_1 = -3v_1 + 2v_2$$

$$(T - 2)v_2 = 3v_1 + v_2$$

$$(T - 2)v_3 = -3v_3$$

و پیدا می‌کنیم که رتبه $(T - 2)$ برابر ۲ است، پس بعد صفر-فضای $T - 2$ برابر ۱ است. تا اینجا دیدیم که V مجموع مستقیم $n(T + 1)$ و $n(T - 2)$ نیست. می‌توانیم نتیجه بگیریم که چندجمله‌یی مینیمال برابر

$$m(x) = (x + 1)^2(x - 2)$$

است و بنابر قضیه (۱۱.۲۳)، یافتن پایه‌ای برای V که نسبت به آن T دارای ماتریس قطری باشد امکانپذیر نیست.

اکنون صفر-فضاهای $(T + 1)^2$ و $T - 2$ را می‌یابیم. از محاسبات مربوط به $T + 1$ داریم

$$(T + 1)^2 v_1 = (T + 1)(2v_3) = 0$$

$$(T + 1)^2 v_2 = (T + 1)(3v_1 + 3v_2 + v_3) = 9v_1 + 9v_2 + 9v_3$$

$$(T + 1)^2 v_3 = 0$$

بنابراین $\{v_1, v_3\}$ یک پایه صفر-فضای $(T + 1)^2$ است.

برای یافتن صفر-فضای $T - 2$ ، می‌توانیم فرض کنیم $v = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 \in n(T - 2)$ و ξ_1, ξ_2, ξ_3 را بیابیم. داریم

$$(T - 2)v = \xi_1(-3v_1 + 2v_2) + \xi_2(3v_1 + v_2) + \xi_3(-3v_3) = 0$$

و دستگاه معادلات همگن زیر را داریم که باید نسبت به ξ ها حل شوند

$$-3\xi_1 + 3\xi_2 = 0$$

$$2\xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 = 0$$

بردار جواب این دستگاه $\langle 1, 1, 1 \rangle$ است. زیرا با تجسس درمی‌یابیم که $v_1 + v_2 + v_3$ در $n(T - 2)$ است و چون بعد $n(T - 2)$ برابر یک است، پس $v_1 + v_2 + v_3$ فضای $n(T - 2)$ را پدید می‌آورد.

۲۴۸ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

مرحلهٔ ۳. ماتریس T را نسبت به پایهٔ جدید پیدا می‌کنیم. بنابر قضیهٔ (۱.۲۴) باید یک پایهٔ $\{w_1, w_2\}$ برای $n[(T+1)^2]$ بدست آوریم به‌گونه‌ای که $(T+1)w_1 = 0$ و $(T+1)w_2 \in S(w_1)$ ، و فرض می‌کنیم w_3 یک پایهٔ $n(T-2)$ است. دیدیم که باید داشته باشیم

$$w_1 = v_3, \quad w_2 = v_1, \quad w_3 = v_1 + v_2 + v_3$$

$$T(w_1) = -w_1, \quad T(w_2) = -w_2 + 2w_1, \quad T(w_3) = 2w_3$$

ماتریسی که ستونهای آن پایه‌های جدید را برحسب پایه‌های اصلی بیان می‌کند $(\leftarrow (6.13))'$ برابر است با

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

و ماتریس T نسبت به $\{w_1, w_2, w_3\}$ بنابر معادلات بالا چنین است

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

اکنون باید توجه کنیم که $SB = AS$ یا $BS = SA$ (به خاطر سپردن اینکه کدام یک از این دو حالت برقرار است بسیار دشوار است!) با بررسی این ضربها می‌بینیم که

$$SB = AS$$

یا

$$B = S^{-1}AS$$

مثال ب. تجزیهٔ ژوردان تبدیل خطی T مذکور در مثال ج را بیابید.
با توجه به برهان قضیهٔ (۹.۲۴)، فرض می‌کنیم B ماتریس T نسبت به $\{w_1, w_2, w_3\}$ مذکور در بالا باشد. در این صورت

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

با فرض اینکه D و N تبدیلات خطی هستند که ماتریسهایشان نسبت به پایهٔ $\{w_1, w_2, w_3\}$ به

قضیه شکل مثلثی ۲۴۹

ترتیب برابر

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

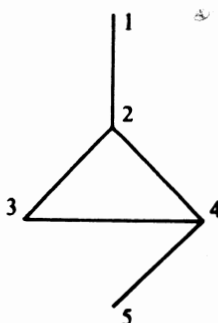
هستند، داریم $T = D + N$ ، که در آن D و N به ترتیب قطری شدنی و صفر-توان هستند، و $DN = ND$. بنابر جزء یکتایی قضیه (۹.۲۴)، D و N تجزیه ژوردان T هستند. اینک دو مثال می آوریم که نشان می دهند چگونه تابع اثر در سایر قسمتهای ریاضیات مورد استفاده قرار می گیرند.

مثال پ. ماتریسهای وقوع و گرافها. هر گراف مجموعه ای است از اشیاء به نام رأس (یا گره)، توأم با یک مجموعه زوجهای E از رأسها $\{(v, v')\}$. فرض می شود که مجموعه E در شرایط زیر صدق می کند

$$\begin{aligned} (v, v') \in E & \text{ ایجاب می کند که } v \neq v' \\ (v, v') \in E & \text{ ایجاب می کند که } (v', v) \in E \end{aligned}$$

زوجهای نقاط در E یالهای گراف نامیده می شوند. یک رأس v و یک یال (v', v'') واقع بر هم خوانده می شوند اگر $v = v'$ یا $v = v''$.

هر گراف را می توان با یک نمودار نشان داد. برای مثال، شکل زیر نمایش یک گراف با ۵ رأس و ۵ یال $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5)\}$ است. (درج سایر زوجهای $(2, 1), (2, 4), (3, 2)$ و غیره غیر ضروری است، زیرا از فرضهای ما چنین بر می آید که $(2, 1) \in E$ اگر و تنها اگر $(1, 2) \in E$)



۲۵۰ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

با هر گراف می‌توان یک ماتریس وقوع $M = (m_{ij})$ به شرح زیر مربوط ساخت. فرض می‌کنیم که رأسها به صورت $\{1, 2, \dots, n\}$ شماره‌گذاری شده‌اند. در این صورت M ماتریسی است n در n که درایهٔ آن در وضع (i, j) برابر ۱ است هرگاه (i, j) یک یال گراف باشد و در غیر این صورت برابر صفر است. ماتریس وقوع برای گراف بالا چنین است

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

به‌عنوان آزمایش چند توان M را حساب می‌کنیم

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

به فرض $M = (m_{ij})$ داریم

$$\text{Tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} m_{ji}$$

$$\text{Tr}(M^3) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ij} m_{jk} m_{ki}$$

با استفاده از تعریف ماتریس وقوع می‌دانیم که

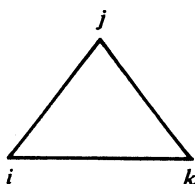
$$m_{ij} m_{ji} \neq 0$$

تمرینها ۲۵۱

اگر و تنها اگر (i, j) یک یال گراف باشد و در این صورت $m_{ij}m_{ji} = ۱$. در حالت $m_{ij}m_{ji} = ۱$ همچنین داریم $m_{ji}m_{ij} = ۱$. بنابراین

$$\text{Tr}(\mathbf{M}^۲) = ۲e$$

که در آن e تعداد یالها در گراف است. در مثال ما $\text{Tr}(\mathbf{M}^۲) = ۱۰$ و ۵ یال وجود دارد. با بررسی $\mathbf{M}^۳$ ، می بینیم که تنها موقعی حکم $m_{ij}m_{jk}m_{ki} \neq ۰$ برقرار است که در گراف مثلثی موجود باشد، که در آن (i, j, k) یک مثلث تشکیل دهند هرگاه (ij) ، (jk) و (ki) همه یالهایی در این گراف باشند. به آسانی می توان بررسی کرد که



برای هر چنین مثلثی باید داشته باشیم $\text{Tr} \mathbf{M}^۳ = ۶$. بنابراین

$$\text{Tr}(\mathbf{M}^۳) = ۶t$$

که در آن t شماره مثلثهاست. در مثال ما

$$\text{Tr}(\mathbf{M}^۳) = ۶$$

و درست یک مثلث وجود دارد.

مثال ۳. بگیریم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی با پایه $\{v_۱, \dots, v_n\}$ است. فرض کنیم σ یک جایگشت از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ و $\mathbf{A}_\sigma$ ماتریس تبدیل خطی T_σ (با تعریف در بخش ۱۹) است،

$$T_\sigma(v_i) = v_{\sigma(i)}$$

این بار $\text{Tr}(\mathbf{A}_\sigma)$ برابر تعداد بردارهای v_i پایه است به گونه ای که $v_{\sigma(i)} = v_i$. به عبارت دیگر، $\text{Tr}(\mathbf{A}_\sigma)$ شماره نقاط ثابت تبدیل σ را تعیین می کند، که در آن یک نقطه ثابت با یک عدد ثابت i ، $۱ \leq i \leq n$ ، تعریف می شود به گونه ای که $\sigma(i) = i$.

مثالهای (پ) و (ت) مفید بودن تابع اثر را برای شمارش در حالاتی نشان می دهند که داده ها می توانند به صورت ماتریس داده شوند.

تمرینها

۱. گیریم T یک تبدیل خطی در یک فضای برداری بر اعداد مختلط است به‌گونه‌ای که

$$T(v_1) = -v_1 - v_2$$

$$T(v_2) = v_1 - 3v_2$$

در آن $\{v_1, v_2\}$ یک پایهٔ فضای برداری است.

الف) چندجمله‌یی مشخصهٔ T کدام است؟

ب) چندجمله‌یی مینیمال T کدام است؟

پ) ویژهٔ مقدارهای T کدامند؟

ت) آیا پایه‌ای برای این فضای برداری وجود دارد به‌گونه‌ای که هر بردار پایه یک ویژه بردار T باشد؟ توضیح دهید.

ث) یک ویژه بردار T را بیابید.

ج) یک ماتریس مثلثی B و یک ماتریس وارونپذیر S بیابید به‌گونه‌ای که $SB = AS$ که در آن A ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{v_1, v_2\}$ باشد.

چ) تجزیهٔ ژوردان T را بیابید.

۲. به پرسشهای مذکور در تمرین ۱ در مورد تبدیل خطی $T \in L(C_2, C_2)$ که با معادلات

$$T(v_1) = v_1 + iv_2$$

$$T(v_2) = -iv_1 + v_2$$

تعریف شده است، پاسخ دهید، $\{v_1, v_2\}$ یک پایهٔ C_2 است.

۳. گیریم V یک فضای برداری دوبعدی روی اعداد حقیقی R است و $T \in L(V, V)$ با

$$T(v_1) = -\alpha v_2$$

$$T(v_2) = \beta v_1$$

تعریف شده است، که α و β اعداد حقیقی مثبت هستند. آیا برای V پایه‌ای متشکل از ویژه بردارهای T وجود دارد؟ توضیح دهید.

توجه: در تمرینهای ۴ تا ۸، V نمایش یک فضای برداری متناهی-بعد روی اعداد مختلط C است.

۴. گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی است که همهٔ ویژهٔ مقدارهای آن برابر صفرند. ثابت کنید که T صفر-توان است، یعنی $T^n = 0$ ، برای مقداری از n .

۵. گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی است به‌گونه‌ای که $T^2 = T$. دربارهٔ وجود یا عدم وجود پایه‌ای برای V متشکل از ویژهٔ بردارهای T بحث کنید.

۲۵۳ صورتهای گویا و صورتهای کانونی ژوردان

۶. به پرسش تمرین ۵ در مورد یک تبدیل T ، به گونه‌ای که تساوی $T^r = 1$ ، برای یک عدد درست مثبت r ، برقرار باشد، پاسخ دهید.

۷. گیریم T یک تبدیل خطی از مرتبه ۱ باشد، یعنی $\dim T(V) = 1$. پس تساوی $T(V) = S(v_0)$ برای برداری مانند $v_0 \neq 0$ برقرار است. به‌ویژه، $T(v_0) = \lambda v_0$ برای یک مقدار $\lambda \in C$. ثابت کنید

$$T^2 = \lambda T$$

آیا برای V پایه‌ای متشکل از ویژه بردارهای T وجود دارد؟ توضیح دهید.

۸. گیریم $T = D + N$ تجزیه ژوردان یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ باشد. ثابت کنید که تبدیل خطی $X \in L(V, V)$ با T تعویضپذیر است، یعنی $XT = TX$ ، اگر و تنها اگر X با D و N تعویضپذیر باشد.

۹. الف) نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس n در n با ضرایب متعلق به یک هیأت دلخواه F باشند، آنگاه

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

ب) با استفاده از الف) نشان دهید که اگر A و B دو ماتریس متشابه باشند، آنگاه $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

پ) نشان دهید که ماتریسهای با اثر صفر یک زیرفضای $M_n(F)$ به بعد $n^2 - 1$ درست می‌کنند. [راهنمایی: نگاشت $\text{Tr} : M_n(F) \rightarrow F$ یک تبدیل خطی است.]

ت) ثابت کنید که زیرفضای $M_n(F)$ مذکور در پ) با ماتریسهای $AB - BA$ ، A ، B متعلق به $M_n(F)$ تولید می‌شوند.

۱۰. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ که در آن V یک فضای برداری متناهی-بعد روی یک هیأت جبری بسته F است، تکتوان نامیده می‌شود اگر $1 - T$ صفر-توان باشد.

الف) نشان دهید که T تکتوان است اگر و تنها اگر 1 تنها ویژه مقدار T باشد.

ب) فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ وارونپذیر باشد. ثابت کنید که تبدیلاتی خطی مانند D و U وجود دارند به‌گونه‌ای که $T = DU$ ، قطری، U تکتوان بوده و هم D و هم U را می‌توان به‌صورت چندجمله‌بیهایی از T بیان کرد.

پ) ثابت کنید که D و U مذکور در ب) به‌طور یکتا تعیین می‌شوند، بدین معنی که اگر $T = D'U'$ ، قطری، U' تکتوان و $D'U' = U'D'$ ، آنگاه $D = D'$ و $U = U'$.

۲۵. صورتهای گویا و صورتهای کانونی ژوردان

یک پرسش اساسی در مورد ماتریسها پرسش زیر است. دو ماتریس n در n ، A و B که ضرایب آنها در F ، هستند داده شده‌اند. چگونه می‌توانیم تعیین کنیم که A با B متشابه است یا نیست؟

مثال الف. مثالهای زیر برخی از مشکلات موجود در این پرسش را نشان می‌دهند.
(i) ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

هر دو دارای یک چندجمله‌یی مینیمال $(x-1)(x-2)$ هستند ولی متشابه نیستند.
(ii) ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هر دو دارای یک چندجمله‌یی مشخصه‌اند ولی متشابه نیستند.

در این بخش راه‌حلی برای مسئلهٔ تعیین متشابه بودن دو ماتریس ارائه می‌دهیم. اثبات قضیهٔ اصلی که قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی نامیده می‌شود، اندکی دشوار است، و آن را تا بخش ۲۹ به تعویق می‌اندازیم. در این بخش توجه خود را به اثبات چند قضیه که به بیان قضیهٔ اصلی و کاربردهای آن در حالات خاص منجر می‌شود، معطوف می‌کنیم.

گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد بر هیأت دلخواه F باشد، و فرض می‌کنیم T یک تبدیل خطی ثابتی در $L(V, V)$ است. به منظور کنار گذاردن حالات بدیهی فرض می‌کنیم $V \neq 0$. همچنین باید تأکید کنیم که دربارهٔ F هیچ فرضی نمی‌کنیم. پس این بحث نه تنها در مورد یک هیأت جبری-بسته همان‌گونه که در ابتدای این فصل گفتیم، بلکه دربارهٔ فضاهای برداری روی اعداد گویای Q یا اعداد حقیقی R نیز به کار می‌رود.

اندیشه‌ای که کل بحث بر آن مبتنی است، مفهوم یک زیرفضای دوری V نسبت به T است.

(۱.۲۵) تعریف. یک زیرفضای T -پایای V_1 از V نسبت به T دوری نامیده می‌شود هرگاه $V_1 \neq 0$ ، و یک بردار $v_1 \in V_1$ موجود باشد به گونه‌ای که V_1 به‌ازای مقداری مانند k ، به‌وسیلهٔ $\{v_1, Tv_1, T^2v_1, \dots, T^kv_1\}$ تولید شود.

(۲.۲۵) لم. یک زیر فضای $V_1 \subset V$ نسبت به T دوری است هر گاه به‌ازای برداری مانند $v_1 \in V_1$ ، $v_1 \neq 0$ ، هر بردار در V_1 بتواند به‌ازای یک چندجمله‌یی $f \in F[x]$ به شکل $f(T)v_1$ بیان شود.

برهان. اگر V_1 دوری باشد، هر بردار $v \in V_1$ می‌تواند به‌صورت ترکیبی خطی به‌صورت

$$\begin{aligned} v &= \alpha_0 v_1 + \alpha_1 (Tv_1) + \dots + \alpha_k (T^k v_1) \\ &= f(T)v_1 \end{aligned}$$

صورت‌های گویا و صورتهای کانونی ژوردان ۲۵۵

بیان شود، که در آن $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k$ به وارون، فرض می‌کنیم $v_1 \in V_1$ به‌گونه‌ای است که هر $v \in V_1$ می‌تواند به‌ازای یک $f \in F[x]$ به شکل $f(T)v_1$ بیان شود، در این صورت V_1 به‌وسیله $\{v_1, Tv_1, T^2 v_1, \dots\}$ بیان می‌شود، و به علت ویژگی تناهی-بعد، یک عدد k وجود دارد به‌گونه‌ای که V_1 به‌وسیله $\{v_1, Tv_1, \dots, T^k v_1\}$ تولید می‌شود، همان‌گونه که می‌خواستیم.

(۳.۲۵) تعریف. گیریم $v \in V, v \neq 0$ ، و فرض کنیم V_1 معرف زیرفضای V متشکل از همه بردارهای $\{f(T)v\}$ باشد، که در آن f یک چندجمله‌یی دلخواه در $F[x]$ است. در این صورت V_1 زیرفضای دوری تولید شده توسط v نامیده شده و با $\langle v \rangle$ نشان داده می‌شود. اشاره می‌کنیم که V_1 یک زیرفضای V است و بنابر لم (۲.۲۵) یک زیرفضای دوری است، و در ضمن کوچکترین زیرفضای T -پایای شامل v است که به‌طور یکتا تعیین می‌شود (چرا؟)

(۴.۲۵) لم. فرض می‌کنیم $v \in V, v \neq 0$. یک چندجمله‌یی ناصفر با ضریب پیشرو ۱ مانند

$$m_v(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0, \quad \alpha_i \in F$$

در $F[x]$ موجود است به‌گونه‌ای که $m_v(T)v = 0$ ، و به‌ازای هر چند جمله‌یی $f \in F[x]$

$$m_v(x) | f(x) \quad f(T)v = 0 \text{ ایجاب می‌کند که}$$

برهان. بنابر ویژگی تناهی-بعد، یک عدد صحیح $d \geq 0$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $\{v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$ وابسته-خطی است (با این توضیح که اگر $d = 0$ ، این مجموعه به $\{v\}$ تبدیل می‌شود)، و $\{v, T(v), \dots, T^d(v)\}$ وابسته-خطی است. در این صورت عناصری مانند $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}$ در F موجودند به‌گونه‌ای که

$$T^d v = \alpha_0 v + \alpha_1 T v + \dots + \alpha_{d-1} T^{d-1} v$$

با فرض

$$m_v(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0.$$

داریم $m_v T(v) = 0$. اینک فرض می‌کنیم $f \in F[x]$ به‌گونه‌ای است که $f(T)v = 0$. بنا بر الگوریتم تقسیم،

$$f(x) = m_v(x)g(x) + r(x)$$

که در آن یا $r(x) = 0$ یا $\deg r(x) < \deg m_v(x)$. در این دستور به جای x ، T قرار می‌دهیم و آن را بر v اثر می‌دهیم تا به‌دست آوریم

$$f(T)v = m_v(T)g(T)v + r(T)v$$

چون $f(T)v = 0$ و $m_v(T)v = 0$ داریم $r(T)v = 0$ اگر $r(x) \neq 0$ معادلهٔ $r(T)v = 0$ ایجاب می‌کند که بردارهای $\{v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$ وابسته خطی باشند که مخالف فرض است و لم ثابت می‌شود.

(۵.۲۵) تعریف. گیریم $v \in V, v \neq 0$. چندجمله‌بی یکتای $m_v(x)$ که در شرایط لم (۴.۲۵) صدق می‌کند مرتبهٔ v نامیده می‌شود. این چندجمله‌بی به گونه‌ای یکتا به صورت چندجمله‌بی $q(x)$ با ضریب پیشرو ۱، با کوچکترین درجه به گونه‌ای تعیین می‌شود که $q(T)v = 0$. اثبات این حقیقت که $m_v(x)$ به صورت یک چندجمله‌بی یکتای $q(x)$ با کوچکترین توان به گونه‌ای تعیین می‌شود که $q(T)v = 0$ ، به شرح زیر است. اگر $q(T)v = 0$ ، آنگاه $m_v(x)|q(x)$. اگر $q(x)$ کوچکترین درجه را بین چندجمله‌بیهای $f(x)$ داشته باشد به گونه‌ای که $f(T)v = 0$ ، آنگاه باید داشته باشیم $m_v(x) = \deg q(x)$. بنابراین به ازای مقداری مانند $\alpha \in F$ ، داریم $q(x) = \alpha m_v(x)$. چون هم $q(x)$ و هم $m_v(x)$ دارای ضریب پیشرو ۱ هستند باید $\alpha = 1$. هم اکنون خواننده ممکن است این احساس نامطلوب را پیدا کرده باشد که مرتبهٔ $m_v(x)$ به نحوی به چندجمله‌بی مینیمال T ، مذکور در بخش ۲۲، بستگی دارد. لم زیر به این پرسش پاسخ می‌دهد.

(۶.۲۵) لم. گیریم $\langle v \rangle$ یک زیرفضای دوری ناصفر V و $T_{\langle v \rangle}$ تحدید T^* به زیرفضای $\langle v \rangle$ باشد. در این صورت $m_v(x)$ مرتبهٔ v ، برابر است با چندجمله‌بی مینیمال $T_{\langle v \rangle}$ (با تقریب یک ضریب ثابت).

برهان. هر چندجمله‌بی $f(x) \in F[x]$ دارای این ویژگی است که $f(T)v = 0$ اگر و تنها اگر $f(T_{\langle v \rangle}) = 0$ ، زیرا $\langle v \rangle$ به وسیلهٔ $\langle v, Tv, T^2v, \dots \rangle$ تولید شده و $f(T)T = Tf(T)$. بعلاوه، $f(T)v = f(T_{\langle v \rangle})v$. به فرض اینکه $q(x)$ چندجمله‌بی مینیمال $T_{\langle v \rangle}$ باشد، روی $\langle v \rangle$ داریم $m_v(T) = 0$ و بنابراین $q(x)|m_v(x)$. به وارون، $q(T)v = 0$ پس $m_v(x)|q(x)$ ، لذا $m_v(x)$ و $q(x)$ در یک ضریب ثابت با هم تفاوت دارند. که برهان لم را کامل می‌سازد. نکتهٔ جالب دیگر نکتهٔ زیر است.

(۷.۲۵) لم. گیریم $m(x)$ چندجمله‌بی مینیمال T روی V باشد. برای هر بردار ناصفر $v \in V$ ، $m_v(x)|m(x)$.

برهان. روی V داریم $m(T) = 0$ ، از این رو $m(T)v = 0$. حالا نتیجه از لم (۴.۲۵) حاصل می‌شود.

اکنون می‌توان مهم‌ترین قضیهٔ این بخش را بیان کرد.

* تحدید T_W یک تبدیل خطی T به یک زیر فضای T -پایای W تبدیل خطی $T_W \in L(W, W)$ است که با $w \in W$ ، $T_W w = Tw$ تعریف می‌شود.

صورت‌های گویا و صورت‌های کانونی ژوردان ۲۵۷

(۸.۲۵) قضیه (قضیه مقسوم علیه مقدماتی). گیریم $T \in L(V, V)$ ، که V یک فضای برداری متناهی-بعد روی یک هیأت دلخواه است، و $V \neq 0$. در این صورت بردارهای ناصفر $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ در V وجود دارند که مرتبه‌های آنها توانهای چند جمله‌یهای اول در $F[x]$ ، یعنی $\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$ بوده و به گونه‌ای هستند که V حاصل جمع مستقیم زیرفضاهای دوری $\{ \langle v_i \rangle, 1 \leq i \leq r \}$ است، یعنی

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_r \rangle$$

شماره عوامل جمع r به‌طور یکتا تعیین می‌شود، و مرتبه‌های $\{p_i(x)^{e_i}\}$ از بردارهای $\{v_i\}$ با تقریب یک ترتیب به‌طور یکتا تعیین می‌شوند.

برهان قضیه در بخش ۲۹ داده خواهد شد. بقیه این بخش را به بیان معنی و مفهوم این قضیه و کاربرد آن تخصیص می‌دهیم.

نخست توجه می‌کنیم که ممکن است مرتبه‌های $\{p_1(x)^{e_1}, p_2(x)^{e_2}, \dots\}$ تکراری باشند. بخش یکتایی قضیه با جزئیات بیشتر، بیان می‌کند که اگر تساوی $V = \langle v'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v'_s \rangle$ با مرتبه‌های توانهای اول $\{q_1(x)^{f_1}, \dots, q_s(x)^{f_s}\}$ برقرار باشد، آنگاه $r = s$ ، و مجموعه‌های توانهای اول

$$\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}, \quad \{q_1(x)^{f_1}, \dots, q_r(x)^{f_r}\}$$

با یک اختلاف آرایش یکی هستند.

(۹.۲۵) تعریف. همانند قضیه بالا، فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$. مجموعه توانهای اول $\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$ ، در صورت لزوم با تکرار، مجموعه مقسوم علیه‌های مقدماتی T نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال، منظور از بیان این که T دارای مقسوم علیه‌های مقدماتی $\{x-1, x+1, x^2+1\}$ روی هیأت R است، این است که برای هر فضای برداری V روی R ، $T \in L(V, V)$ ، و V مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \langle v_2 \rangle \oplus \langle v_3 \rangle \oplus \langle v_4 \rangle$$

است، که در آن مرتبه‌های $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ برابر $\{x-1, x+1, x^2+1, x^2+1\}$ است. همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، مقسوم علیه‌های مقدماتی، ماتریس T نسبت به یک پایه را کامل و بدون ابهام توصیف می‌کنند.

اینک به استخراج شکل ماتریس یک تبدیل خطی T نسبت به یک مجموعه از مقسوم علیه‌های مقدماتی داده شده می‌پردازیم. ماتریس حاصل شکل متعارف گویای T نامیده می‌شود.

(۱۰.۲۵) لم. گیریم $\alpha_i \in F, p(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0$ یک چندجمله‌یی اول در $F[x]$ است، و فرض می‌کنیم که $\langle v \rangle$ یک زیرفضای دوری V ، و $p(x)$ از مرتبهٔ v است. در این صورت ماتریس $T_{\langle v \rangle}$ نسبت به پایهٔ $\{v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$ از $\langle v \rangle$ برابر است با

$$A_{p(x)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{d-1} \end{pmatrix}$$

برهان. بنابر برهان لم (۴.۲۵)، یک پایهٔ $\langle v \rangle$ با $\{v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$ داده می‌شود، و داریم

$$T(T^{d-1}v) = \alpha_0 v + \alpha_1(Tv) + \dots + \alpha_{d-1}(T^{d-1}v)$$

شکل ماتریس از این ملاحظات روشن می‌شود.

(۱۱.۲۵) تعریف. ماتریس $A_{p(x)}$ ماتریس همراه چندجمله‌یی $p(x)$ نامیده می‌شود. مثال ب. ماتریس همراه چندجمله‌یی $x^2 + 1$ ، روی هیأت گویا کدام است؟ $x^2 + 1$ را باید چنین بنویسیم

$$x^2 + 1 = x^2 - 0x - (-1)$$

در این صورت ماتریس همراه برابر است با

$$A_{x^2+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(۱۲.۲۵) لم. گیریم $\alpha_i \in F, p(x) = x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0$ و $\langle v \rangle$ یک زیرفضای دوری است به گونه‌ای که مرتبهٔ v به ازای یک عدد صحیح مثبت e ، برابر $p(x)^e$ است. در این صورت ماتریس $T_{\langle v \rangle}$ نسبت به پایهٔ

$$\{p(T)^{e-1}v, Tp(T)^{e-1}v, \dots, T^{d-1}p(T)^{e-1}v, p(T)^{e-1}v, Tp(T)^{e-1}v, \dots, T^{d-1}p(T)^{e-1}v, \dots, v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$$

عبارت است از

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \text{بلوک } e \\ \downarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \mathbf{B} \\ \circ & & & \dots & \mathbf{A} \end{pmatrix}$$

که در آن $\mathbf{A}$ ماتریس همواره $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p(x)$ و $\mathbf{B}$ ماتریس d در d ی زیر است:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ & 1 \\ \vdots & & & \circ \\ \vdots & & & \vdots \\ \circ & \dots & & \circ \end{pmatrix}$$

برهان. شماره بردارهای مذکور در حکم این لم برای عناصر پایه $\langle v \rangle$ برابر است با $de = \deg p(x)^e$. پس این بردارها وقتی یک پایه برای $\langle v \rangle$ می‌شوند که نشان دهیم نابسته خطی‌اند، ولی هر رابطه نابستگی خطی یک چندجمله‌یی ناصفر $g(x)$ پدید می‌آورد به گونه‌ای که $g(T)v = \circ$ و $\deg g(x) < \deg p(x)^e$ ، که خلاف این فرض است که مرتبه v برابر $p(x)^e$ است، اینک ماتریس $T_{\langle v \rangle}$ را نسبت به این پایه حساب می‌کنیم. می‌بینیم که T هر بردار پایه را بر بردار دیگری می‌نگارد جز برای بردارهای پایه

$$T^{d-1}p(T)^{e-1}v, T^{d-1}p(T)^{e-2}v, \dots, T^{d-1}v$$

برای این بردارها داریم

$$T(T^{d-1}p(T)^{e-1}v) = \alpha_0 p(T)^{e-1}v + \dots + \alpha_{d-1} T^{d-1}p(T)^{e-1}v$$

چون:

$$p(T)p(T)^{e-1}v = \circ$$

پس

$$T(T^{d-1}p(T)^{e-2}v) = \alpha_0 p(T)^{e-2}v + \dots + \alpha_{d-1} T^{d-1}p(T)^{e-2}v + p(T)^{e-1}v$$

زیرا $p(T)p(T)^{e-2}v = p(T)^{e-1}v$ و غیره. بخشی از ماتریس که در سرستونهای آنها

$$p(T)^i v, \dots, T^{d-1}p(T)^i v, p(T)^{i-1} v, \dots, T^{d-1}p(T)^{i-1} v$$

۲۶۰ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

نوشته شده است به تفصیل به شرح زیر است

		$p(T)^i v \dots T^{d-1} p(T)^i v$	$p(T)^{i-1} v \dots T^{d-1} p(T)^{i-1} v$
		$\vdots$	$\vdots$
$p(T)^i v$	$\vdots$	$\begin{matrix} 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \vdots \\ & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ & & 1 & \alpha_{d-1} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}$
$T^{d-1} p(T)^i v$			
$p(T)^{i-1} v$	$\vdots$	$\vdots$	$\begin{matrix} 0 & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \vdots \\ & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ & & 1 & \alpha_{d-1} \end{matrix}$
$T^{d-1} p(T)^{i-1} v$			

که با این جدول برهان لم کامل می‌شود.

(۱۳.۲۵) تعریف. ماتریس de در de مذکور در لم (۱۲.۲۵) ماتریس همراه چندجمله‌یی $p(x)^c$ نامیده می‌شود.

توجه داریم که چندجمله‌یی $p(x)$ باید به شکل

$$x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0.$$

نوشته شود تا فرمولهای مربوط به ماتریسها معتبر باشند.

مثال پ. ماتریس همراه $(x^2 + 1)^2$ روی هیأت گویا کدام است؟ با نوشتن $x^2 + 1$ به شکل مطلوب، داریم

$$x^2 + 1 = x^2 - 0x - (-1)$$

بنابر لم (۱۲.۲۵) ماتریس همراه آن چنین است

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

با قبول درستی قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی، اینک می‌توانیم دومین قضیهٔ مهم این بخش را بیان کنیم. نخست به دو تعریف دیگر نیازمندیم.

صورت‌های گویا و صورت‌های کانونی ژوردان ۲۶۱

(۱۴.۲۵) تعریف. گیریم A یک ماتریس n در n با ضرایب متعلق به F است. مقسوم علیه‌های مقدماتی A به صورت مقسوم علیه‌های مقدماتی یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری n بعدی تعریف می‌شود که ماتریس آن نسبت به یک پایه برابر A است.

(۱۵.۲۵) تعریف. گیریم برای یک فضای برداری n بعدی V روی F ، $T \in L(V, V)$ و فرض می‌کنیم که مقسوم علیه‌های مقدماتی T برابرند با

$$\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$$

(در صورت لزوم با تکرار). فرض می‌کنیم $V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_r \rangle$ ، که در آن مرتبه v_i برابر $p_i(x)^{e_i}$ ، $1 \leq i \leq r$ ، است. برای V پایه‌ای برمی‌گزینیم متشکل از پایه‌های زیرفضاهای $\langle v_i \rangle$ ، $1 \leq i \leq r$ ، همان‌گونه که در لم‌های (۱۰.۲۵) و (۱۲.۲۵) دیدیم. شکل متعارف گویای T برابر ماتریس C ی T نسبت به این پایه است:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & \circ & \circ \\ \circ & C_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \circ \\ \circ & & & C_r \end{pmatrix}$$

که در آن $1 \leq i \leq r$ ، C_i ماتریس همراه مقسوم علیه مقدماتی $p_i(x)^{e_i}$ است. شکل متعارف گویای یک ماتریس n در n ، A روی F با شکل متعارف گویای یک تبدیل خطی T در یک فضای برداری n بعدی روی F تعریف می‌شود، که ماتریس آن نسبت به یک پایه برابر A است. توجه داریم که جز برای ترتیب بردارهای پایه، هر درایه C با اطلاعی از $\{p_i(x)^{e_i}\}$ تعیین می‌شود.

(۱۵.۲۵)' قضیه. دو ماتریس n در n ، A و B با ضرایب واقع در F متشابه‌اند، اگر و تنها اگر دارای یک شکل متعارف گویا (با تقریب یک آرایش از بلوکهای واقع بر قطرها) باشند. برهان. گیریم C شکل متعارف گویای مشترک A و B است. چون A و C ماتریسهای تبدیل خطی نسبت به پایه‌های متفاوت هستند، پس متشابه‌اند. بنابراین برای یک ماتریس n در n وارونپذیر X ،

$$A = XCX^{-1}$$

به روش مشابه برای یک ماتریس n در n وارونپذیر Y ،

$$B = YCY^{-1}$$

در این صورت

$$X^{-1}AX = Y^{-1}BY$$

و

$$A = XY^{-1}B(XY^{-1})^{-1}$$

که متشابه بودن A و B را ثابت می‌کند.

(۱۶.۲۵) قضیه. شکل متعارف گویای هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ با تقریب یک تجدید آرایش از بلوکهای واقع بر قطر، به طور یکتا تعیین می‌شود. برهان. بنا بر قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی، مقسوم علیه‌های مقدماتی T با تقریب یا تجدید آرایش به طور یکتا تعیین می‌شود. براین لم‌های (۱۰.۲۵) و (۱۲.۲۵) نشان می‌دهند که ماتریسهای همراه مقسوم علیه‌های مقدماتی توسط ضرایب چندجمله‌یها به طور یکتا تعیین می‌شوند. بدین ترتیب برهان کامل می‌شود. شاید مفیدترین شکل قضیه‌های قبل شکل زیر است. فرع. دو ماتریس n در n با درایه‌های واقع در F متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای یک مجموعه از مقسوم علیه‌های مقدماتی باشند. اثبات آن بنابر قضیه‌های (۱۵.۲۵) و (۱۶.۲۵) روشن است.

(۱۷.۲۵) تعریف. شکل نرمال زوردان (یا شکل متعارف زوردان) یک تبدیل خطی (یا ماتریس) در حالتی که همهٔ ویژه‌مقادیرها به هیأت F تعلق داشته باشند، مطابق تعریف، شکل متعارف گویای آن است. در این حالت همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی به شکل $(x - \alpha_i)^e$ هستند، که در آن $\alpha_i \in F$ و ماتریس همراه $(x - \alpha_i)^e$ ماتریس e در e زیر است

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_i & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \dots & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

تنها قسمتی از این تعریف که باید تحقیق شود دارا بودن شکل $(x - \alpha_i)^e$ در همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی است. بنابر لم (۷.۲۵) همهٔ مقسوم علیه‌های مقدماتی، چندجمله‌ی مینیمال را عادی می‌کنند، و بنابر بخش ۲۴ عاملهای اول چندجمله‌ی مینیمال به شکل $x - \alpha_i$ هستند که در آن α_i یک ویژه‌مقدار است. لذا حکم، از یکتایی تجزیهٔ چندجمله‌یها نتیجه می‌شود. مثال ت. شکل متعارف گویای ماتریسی با ضرایب گویا و مقسوم علیه‌های مقدماتی

$$(x - 1)^2, \quad x^2 + 1$$

تمرینها ۲۶۳

کدام است؟

شکل متعارف گویا متشکل از دو بلوک قطری است، که به ترتیب ماتریسهای همراه $(x-1)^2$ و x^2+1 هستند. این ماتریس با استفاده از مثال پ برای یافتن ماتریس همراه x^2+1 ، چنین است

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

مثال ث. شکل متعارف گویا یا شکل متعارف ژوردان تبدیل خطی T در فضای برداری سه بعدی روی C را، که در مثال (الف) از بخش ۲۴ داده شده و ماتریس آن نسبت به یک پایه ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

است، به دست آورید. چون C جبری-بسته است، همهٔ ویژه مقادیرها در C قرار دارند، و شکل متعارف ژوردان را در این حالت محاسبه می‌کنیم. در آن مثال نشان داده شده بود که چند جمله‌یی مینیمال A برابر $(x+1)^2(x-2)$ است. همچنین نشان داده شده بود که فضای برداری زیربنایی، مجموع مستقیم صفر-فضاهای $(T+1)^2$ و $T-2$ است. اثبات دوری بودن این دو زیر فضا نسبت به T به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود. از اینجا نتیجه می‌شود که مقسوم‌علیه‌های مقدماتی T عبارت‌اند از

$$x-2 \quad \text{و} \quad (x+1)^2$$

بنابراین شکل متعارف ژوردان چنین است

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

تمرینها

۱. شکلهای متعارف گویای تبدیلات خطی روی یک فضای برداری بر هیأت اعداد گویای Q را بیابید که مقسوم علیه‌های مقدماتی آنها به شرح زیر هستند:

۲۶۴ نظریهٔ یک تبدیل خطی تنها

الف) $x^2 - x + 1, (x - 1)^2$

ب) $(x^2 + x + 1)^2, x + 1$

پ) $x^2, (x + 1)^2$

۲. شکلهای متعارف گویای ماتریسهای

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

را روی هیأت اعداد گویا* بیابید.

۳. شکلهای متعارف گویای ماتریسهای تمرین ۲ را روی هیأت اعداد حقیقی بیابید.

۴. شکلهای متعارف ژوردان ماتریسهای تمرین ۲ را روی هیأت اعداد مختلط به دست آورید.

۵. ثابت کنید که V نسبت به تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ دوری است اگر و تنها اگر چندجمله‌یی مینیمال T برابر چندجمله‌یی مشخصه باشد.

۶. شکلهای متعارف ژوردان ماتریسهای زیر روی C را بیابید. کدام یک از جفت ماتریسهای زیر متشابه‌اند؟

الف) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ب) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

پ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

۷. نشان دهید که دو ماتریس قطری n در n با ضرایب واقع در F متشابه‌اند اگر و تنها اگر عناصر قطری هر ماتریس یک تجدید آرایش عناصر قطری دیگری باشد.

۸. گیریم F یک هیأت دلخواه باشد.

الف) گیریم $\mathbf{A}_{p(x)}$ ماتریس همراه یک چندجمله‌یی اول $p(x) \in F[x]$ است. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_{p(x)}) = p(x)$$

(راهنمایی: این دترمینان را برحسب عناصر آخرین ستون بسط دهید.)

* شکل متعارف گویای یک ماتریس $\mathbf{A}$ روی هیأت F همان شکل متعارف گویای یک تبدیل خطی متناظر $\mathbf{A}$ روی یک فضای برداری بر F است.

تمرینها ۲۶۵

ب) گیریم $\mathbf{A}$ یک ماتریس بلوکی به شکل مثلثی زیر است

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & * \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ \circ & & & \mathbf{A}_r \end{pmatrix}$$

که در آن ماتریسهای $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_r$ ماتریسهای مربعی هستند. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_1) \cdots D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)$$

پ) گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس همراه یک توان اول $p(x)^e \in F[x]$ باشد. ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p(x)^e$$

ت) گیریم $\mathbf{A}$ ماتریسی با مقسوم‌علیه‌های مقدماتی زیر است

$$\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$$

ثابت کنید

$$D(x\mathbf{I} - \mathbf{A}) = p_1(x)^{e_1} \cdots p_r(x)^{e_r}$$

ث) قضیه کیلی-همیلتن را برای ماتریسهایی با ضرایب در F ثابت کنید: اگر

$$h(\mathbf{A}) = \circ, \text{ آنگاه } h(x) = D(x\mathbf{I} - \mathbf{A})$$



فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

این فصل با دو بخش دربارهٔ چند ساختمان مهم روی فضاهای برداری آغاز و به فضاهای خارج قسمت و دوگان منتهی می‌شود. بخش مربوط به فضاهای دوگان بر پایهٔ مفهوم یک صورت دوطبقی که بر یک جفت فضای برداری تعریف شده، مبتنی است. بخش بعدی شامل ساختمان حاصلضرب تانسوری دو فضای برداری است و مقدمه‌ای برای موضوعی خواهد بود که جبر چندخطی نامیده می‌شود. آخرین بخش شامل کاربرد نظریهٔ فضاهای برداری دوگان در اثبات قضیهٔ مقسوم‌علیه مقدماتی است که در بخش ۲۵ بیان شد.

۲۶. فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان

بهتر است بحث خود را با مفاهیمی از نظریهٔ مجموعه‌ها آغاز کنیم. گیریم X یک مجموعه است. هر رابطه روی X مجموعهٔ دلخواهی است از جفتهای مرتب $\{(a, b)\}$ ، $a, b \in X$ ، که منظور از جفت مرتب این است که (a, b) و (a', b') را تنها هنگامی یکی می‌گیریم که $a = a'$ و $b = b'$. برای مثال جفتهای مرتب $(1, 2)$ و $(2, 1)$ برابر نیستند. مثالی از یک رابطه مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد صحیح و مثبت $\{(a, b)\}$ است، که فقط و فقط زمانی $(a, b) \in \mathcal{R}$ که $a < b$. گاهی استفاده از نماد $a\mathcal{R}b$ به معنی $(a, b) \in \mathcal{R}$ مناسبتر است.

(۱.۲۶) تعریف. رابطهٔ $\mathcal{R}$ روی X یک رابطهٔ هم‌ارزی نامیده می‌شود به شرط اینکه

فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان ۲۶۷

(i) aRa برای همه $a \in X$ (ویژگی بازتابی)
 (ii) aRb ایجاب کند bRa (ویژگی تقارنی)
 (iii) aRb و bRc ایجاب کند aRc (ویژگی تراییبی)
 رابطه برابری، $a = b$ ، مثالی از یک رابطه هم‌ارزی است. مثال زیر مثال جالبتری است. گیریم X یک مجموعه و $f: X \rightarrow Y$ نگاشتی از X در Y باشد. بعد روی X رابطه R را به شرح زیر تعریف می‌کنیم

$$f(a) = f(b) \quad \text{اگر} \quad aRb$$

تحقیق رابطه هم‌ارزی بودن R را به خواننده واگذار می‌کنیم. ویژگی عمده یک رابطه هم‌ارزی این است که مجموعه را به زیرمجموعه‌های نامتناخلی به نام رده‌های هم‌ارزی، افراز می‌کند. در بحث خود از این حقیقت و حقایق دیگر مناسب است که برای نشان دادن مجموعه همه عناصر X واجد ویژگی P از قرارداد نمادگذاری (که در بخش ۲ ارائه شد) یعنی

$$\{a \in X \mid a \text{ دارای ویژگی } P \text{ است}\}$$

استفاده کنیم.

(۲.۲۶) قضیه. گیریم X یک مجموعه و R یک رابطه هم‌ارزی روی آن باشد. برای هر $a \in X$ ، گیریم $[a]$ زیرمجموعه‌ای از X باشد که با

$$[a] = \{b \in X \mid bRa\}$$

تعریف شده است. در این صورت مجموعه‌های $\{[a], a \in X\}$ رده‌های هم‌ارزی نامیده می‌شوند، و مجموعه X اجتماع همه رده‌های هم‌ارزی است. به دیگر سخن، هر عضو X دست‌کم به یک رده هم‌ارزی تعلق دارد. بعلاوه اگر دو رده هم‌ارزی $[a]$ و $[a']$ دست‌کم یک عضو مشترک داشته باشند، با هم قابل انطباق‌اند، یعنی $[a] = [a']$.

برهان. ویژگی بازتابی R حکم می‌کند که برای هر $a \in X$ ، aRa . بنابراین $a \in [a]$ ، و نخستین حکم را که X اجتماع رده‌های هم‌ارزی $[a]$ است اثبات کرده‌ایم. اینک فرض می‌کنیم $b \in [a] \cap [a']$. باید ثابت کنیم $[a] = [a']$. نخست گیریم $c \in [a]$. پس cRa . چون $b \in [a]$ ، داریم bRa و از این رو بنابر ویژگی تقارنی، aRb . با استفاده از ویژگی تراییبی، aRb ایجاب می‌کند cRb . سرانجام باردیگر بنابر تراییبی cRb و bRa' ایجاب می‌کند cRa' ، یعنی $c \in [a']$. در نتیجه $[a] \subset [a']$. استدلالی مشابه با تعویض جای a و a' نشان می‌دهد که $[a'] \subset [a]$. بنابراین $[a] = [a']$ ، و قضیه ثابت می‌شود.

برای مثال، اگر $\mathcal{R}$ رابطه تساوی باشد، رده هم‌ارزی $[a]$ از عنصر تنهای a تشکیل می‌شود. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع و $\mathcal{R}$ رده هم‌ارزی تعریف شده در بالا با ضابطه

$$f(a) = f(b), \text{ اگر } a\mathcal{R}b$$

باشد، آنگاه رده هم‌ارزی $[a]$ مجموعه همه $b \in X$ هایی است که به وسیله f بر همان عنصر a نگاشته می‌شوند، یعنی $[a] = \{b \in X | f(b) = f(a)\}$.

(۳.۲۶) تعریف. گیریم $\mathcal{R}$ یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X است. مجموعه رده‌های هم‌ارزی $\{[a]\}, a \in X$ ، را مجموعه خارج قسمت X بر $\mathcal{R}$ نامیده و با $X/\mathcal{R}$ می‌نمایانیم. اینک می‌توانیم از این ساختمان در فضاهای برداری استفاده کنیم.

(۴.۲۶) قضیه. گیریم V یک فضای برداری روی هیأت F ، و Y زیرفضایی از V است. در این صورت رابطه $\mathcal{R}$ روی V ، که با

$$v\mathcal{R}v' \quad \text{اگر} \quad v - v' \in Y$$

تعریف می‌شود یک رده هم‌ارزی است. مجموعه خارج قسمت $V/\mathcal{R}$ متشکل از همه رده‌های هم‌ارزی $\{[v] | v \in V\}$ یک فضای برداری روی F است با جمع و ضرب در اسکالر که به ترتیب زیر تعریف شده‌اند

$$[v] + [v'] = [v + v'], \quad v, v' \in V$$

$$\alpha[v] = [\alpha v], \quad v \in V, \alpha \in F$$

اگر V متناهی-بعد باشد، بعد $V/\mathcal{R}$ نیز متناهی است و داریم

$$\dim V = \dim Y + \dim V/\mathcal{R}$$

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\mathcal{R}$ یک رابطه هم‌ارزی است. $v\mathcal{R}v$ برای هر v برقرار است، زیرا $v - v = 0 \in Y$ ، چون Y یک زیرفضاست. اگر $v\mathcal{R}v'$ ، آنگاه $v - v' \in Y$. چون Y یک زیرفضاست، پس $-(v - v') = v' - v \in Y$ در نتیجه $v'\mathcal{R}v$. سرانجام اگر $v\mathcal{R}v'$ و $v'\mathcal{R}v''$ آنگاه $v - v' \in Y$ و $v' - v'' \in Y$. در این صورت باز با استفاده از زیرفضا بودن Y داریم $v - v'' \in Y$.

نخستین چیزی که برای اثبات زیرفضا بودن $V/\mathcal{R}$ باید تحقیق کنیم، معنی دار بودن تعریف عملهاست. این بدان معنی است که اگر $[v] = [v_1]$ و $[v'] = [v'_1]$ ، آنگاه $[v + v'] = [v_1 + v'_1]$. بنابر فرض داریم $v - v_1 \in Y$ و $v' - v'_1 \in Y$ و از این رو

$$(v - v_1) + (v' - v'_1) = v + v' - (v_1 + v'_1) \in Y$$

فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان ۲۶۹

و $[v + v'] = [v] + [v']$. اینک گیریم $[v] = [v']$ ، و $\alpha \in F$. باید نشان دهیم که $[\alpha v] = [\alpha v']$. در این صورت $v - v' \in Y$ و چون Y یک زیرفضاست، پس $\alpha(v - v') = \alpha v - \alpha v' \in Y$. بنابراین $[\alpha v] = [\alpha v']$. تحقیق درستی اصول فضای برداری با استفاده از تعریفها به آسانی انجام و به عهده خواننده واگذار می شود.

سرانجام، فرض می کنیم V متناهی-بعد است. در این صورت نگاشت

$$T: v \rightarrow [v]$$

یک تبدیل خطی از V بر $V/\mathcal{R}$ است. بنابر قضیه (۹.۱۳)

$$\dim T(V) + \dim n(T) = \dim V$$

که در آن $n(T)$ صفر-فضای T است. داریم $T(V) = V/\mathcal{R}$ و

$$n(T) = \{v | [v] = [0]\} = \{v | v - 0 \in Y\} = Y$$

از قراردادن آن در دستور (۹.۱۳) داریم

$$\dim V/\mathcal{R} + \dim Y = \dim V$$

و قضیه ثابت می شود.

(۵.۲۶) تعریف. گیریم V یک فضای برداری روی F و Y یک زیرفضای آن باشد. فضای برداری $V/\mathcal{R}$ که در قضیه (۴.۲۶) تعریف شد، فضای خارج قسمت V بر Y نام دارد و با V/Y نشان داده می شود.

اینک ببینیم که این ساختمان برحسب تبدیلات خطی و ماتریسها چه معنایی دارد.

(۶.۲۶) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$ ، و Y زیرفضایی از V باشد که نسبت به T ، $T(Y) \subset Y$ پایاست. گیریم

$$T_Y: Y \rightarrow Y$$

نگاشتی باشد که با

$$T_Y(y) = T(y), \quad y \in Y$$

تعریف شده است. گیریم

$$T_{V/Y}: V/Y \rightarrow V/Y$$

با

$$T_{V/Y}([v]) = [Tv]$$

تعريف شود. در اين صورت $T_Y \in L(Y, Y)$ و $T_{V/Y} \in L(V/Y, V/Y)$ تبديل T_Y تحديد I به Y ناميده مى شود، در حالى كه $T_{V/Y}$ تبديل V/Y ناميده مى شود كه بر اثر T القا شده است.

در اين تعريف بايد دو نکته مورد تحقيق قرار گيرد. آشكار است كه $T_Y \in L(Y, Y)$ ، زيرا Y نسبت به T پاياست. اينك بايد نشان دهيم كه تعريف $T_{V/Y}$ قابل توجه است، به ديگر سخن $[v] = [v']$ ايجاب مى كند $[Tv] = [Tv']$ ولى $[v] = [v']$ ايجاب مى كند $v - v' \in Y$ و $T(v - v') \in Y$ در اين صورت $Tv - Tv' \in Y$ و $[Tv] = [Tv']$. براى اثبات $T_{V/Y} \in L(V/Y, V/Y)$ داريم

$$\begin{aligned} T([v_1] + [v_2]) &= T([v_1 + v_2]) = [T(v_1 + v_2)] = [Tv_1 + Tv_2] \\ &= [Tv_1] + [Tv_2] = T[v_1] + T[v_2] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(\alpha[v]) &= T([\alpha v]) = [T(\alpha v)] = [\alpha(Tv)] = \alpha[Tv] \\ &= \alpha(T[v]) \end{aligned}$$

(۷.۲۶) قضيه. گيريم Y يك زيرفضاى ناصفر از يك فضاى بردارى متناهي-بعد V باشد كه نسبت به تبديل خطى $T \in L(V, V)$ پاياست. گيريم $\{v_1, \dots, v_n\}$ پايه اى براى V باشد به گونه اى كه $\{v_1, \dots, v_k\}$ پايه اى براى Y باشد. اگر $Y \neq V$ ، آنگاه $k < n$ و $[v_n], \dots, [v_{k+1}]$ پايه اى براى V/Y است. گيريم $A = (\alpha_{ij})$ ماتريس T نسبت به پايه $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. در اين صورت A به شكل

$$\begin{array}{c} \leftarrow k \longrightarrow \mid \leftarrow n-k \longrightarrow \\ \uparrow k \\ A = \frac{\uparrow k}{\downarrow k} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_r \\ \hline \circ & A_r \end{array} \right) \\ \uparrow n-k \\ \downarrow \end{array}$$

است كه در آن A_1, A_r, A_r به ترتيب ماتريسهاى k در k ، $(n-k)$ در $(n-k)$ و k در $(n-k)$ هستند. در اين صورت A_1 ماتريس T_Y نسبت به پايه $\{v_1, \dots, v_k\}$ و A_r ماتريس $T_{V/Y}$ نسبت به پايه $\{[v_{k+1}], \dots, [v_n]\}$ خواهد بود.

فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان ۲۷۱

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\{[v_{k+1}], \dots, [v_n]\}$ پایه‌ای است برای V/Y . گیریم $[v] \in V/Y$ ؛ در این صورت

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

و

$$\begin{aligned} [v] &= \alpha_1 [v_1] + \dots + \alpha_k [v_k] + \alpha_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \alpha_n [v_n] \\ &= \alpha_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \alpha_k [v_n] \end{aligned}$$

چون در V/Y ، تساویهای $[v_1] = \dots = [v_k] = 0$ برقرارند، بنابراین V/Y به وسیله $\{[v_{k+1}], \dots, [v_n]\}$ تولید می‌شود. اینک فرض کنید:

$$\beta_{k+1} [v_{k+1}] + \dots + \beta_n [v_n] = 0, \quad \beta_i \in F$$

در این صورت

$$\beta_{k+1} v_{k+1} + \dots + \beta_n v_n \in Y$$

و از این رو

$$\beta_{k+1} v_{k+1} + \dots + \beta_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

برای برخی از $\alpha_i \in F$. چون $\{v_1, \dots, v_n\}$ نایسته خطی‌اند، داریم

$$\beta_{n+1} = \dots = \beta_n = 0$$

حال می‌خواهیم ماتریس T را نسبت به پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ حساب کنیم. چون Y نسبت به T پایاست، پس $T(v_i) \in Y$ ، برای $1 \leq i \leq k$. بنابراین داریم

$$T(v_1) = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \dots + \alpha_{k1} v_k$$

$$T(v_k) = \alpha_{1k} v_1 + \alpha_{2k} v_2 + \dots + \alpha_{kk} v_k$$

بقیه معادلات بدین قرارند:

$$T(v_{k+1}) = \alpha_{1,k+1} v_1 + \dots + \alpha_{k,k+1} v_k + \alpha_{k+1,k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_{n,k+1} v_n$$

$$T(v_n) = \alpha_{1n} v_1 + \dots + \alpha_{kn} v_k + \alpha_{k+1,n} v_{k+1} + \dots + \alpha_{nn} v_n$$

در این صورت

$$T_{V/Y}([v_{k+1}]) = \alpha_{k+1,k+1}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_{n,k+1}[v_n]$$

.....

$$T_{V/Y}([v_n]) = \alpha_{k+1,n}[v_{k+1}] + \cdots + \alpha_{nn}[v_n].$$

گیریم

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k,k+1} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}.$$

نشان دادیم که ماتریس $\mathbf{A}$ ی T نسبت به پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ دارای شکل مذکور در قضیه است، و $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_2$ به ترتیب ماتریسهای T_Y و $T_{V/Y}$ هستند. که در نتیجه برهان قضیه کامل می شود. مثال الف. گیریم $\mathbf{A}$ ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

و V یک فضای برداری روی R با پایه $\{v_1, \dots, v_2\}$ باشد. گیریم $T \in L(V, V)$ تبدیلی خطی باشد که ماتریس آن نسبت به این پایه برابر $\mathbf{A}$ است. بنابر قضیه (۷.۲۶)

$$Y = S(v_1, v_2)$$

نسبت به T پایا و ماتریسهای T_Y و $T_{V/Y}$ نسبت به پایه های $\{v_1, v_2\}$ و $\{[v_1], [v_2]\}$ به ترتیب

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

هستند.

اینک به مفهوم مهم فضای برداری دوگان بازمی گردیم. اندیشه ای که در پس این ساختمان نهفته، این است که برای هر فضای برداری V و هر تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ یک فضای

فضاهای خارج قسمت و فضاهای برداری دوگان ۲۷۳

برداری V^* به نام دوگان V وجود دارد که نوعی آینه برای V است، و یک تبدیل خطی T^* روی V^* وجود دارد که رفتار T را منعکس می‌سازد.

(۸.۲۶) تعریف. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد روی F باشد. V^* یعنی فضای دوگان V به صورت فضای برداری $L(V, F)$ تعریف می‌شود، که در آن F با فضای برداری یک-تاییها روی F یکی گرفته می‌شود. عناصر V^* همان توابع f از V در F هستند به گونه‌ای که $\alpha \in F, v \in V, f(\alpha v) = \alpha f(v)$ و $v_1, v_2 \in V, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$. عناصر V^* توابع خطی روی V نامیده می‌شوند.

(۹.۲۶) لم. گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V روی F باشد. در این صورت توابع خطی $\{f_1, \dots, f_n\}$ وجود دارند به گونه‌ای که برای هر i

$$f_i(v_i) = 1, \quad f_i(v_j) = 0, \quad j \neq i$$

توابع خطی $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای V^* روی F تشکیل می‌دهند، که پایه دوگان برای $\{v_1, \dots, v_n\}$ خوانده می‌شود.

برهان. قبل از همه، به موجب قضیه (۱.۱۳) این توابع خطی وجود دارند که به ما اجازه می‌دهند تبدیلاتی خطی را که عناصر پایه یک فضای برداری را بر بردارهای دلخواه در فضای نگاره، می‌نگارند تعریف کنیم. سپس نشان می‌دهیم که $\{f_1, \dots, f_n\}$ نایسته-خطی‌اند. فرض کنیم که

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0, \quad \alpha_i \in F$$

در این صورت از تأثیر دو طرف برابری بر v_1 ، با استفاده از تعریف عملیات روی فضای برداری V^* داریم

$$\alpha_1 f_1(v_1) + \alpha_2 f_2(v_1) + \dots + \alpha_n f_n(v_1) = 0$$

بنابراین $\alpha_1 = 0$ زیرا $f_1(v_1) = 1$ و $f_2(v_1) = \dots = f_n(v_1) = 0$ به روش مشابه ثابت می‌شود $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

سرانجام نشان می‌دهیم که $\{f_1, \dots, f_n\}$ یک مجموعه از مولدهای V^* را تشکیل می‌دهند. گیریم $f \in V^*$ و $f(v_i) = \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$. در این صورت با اثر هر دو طرف تساوی به نوبت بر عناصر پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ به آسانی دیده می‌شود که

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$$

که برهان لم را کامل می‌سازد.

(۱۰.۲۶) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$. نگاشت $T^* : V^* \rightarrow V^*$ را با قاعده

$$(T^*f)(x) = f(Tx), \quad x \in V$$

برای همه $f \in V^*$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T^* \in L(V^*, V^*)$ و ترانهادۀ تبدیل خطی T نامیده می‌شود.

برهان. چندین حکم هستند که باید صحت آنها را تحقیق کنیم. قبل از همه، T^*f یک تابع خطی است، زیرا برای همه $v_1, v_2 \in V$ و $f \in V^*$ داریم

$$\begin{aligned} (T^*f)(v_1 + v_2) &= f[T(v_1 + v_2)] = f[T(v_1)] + f[T(v_2)] \\ &= (T^*f)(v_1) + (T^*f)(v_2) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (T^*f)(\alpha v) &= f[T(\alpha v)] = f[\alpha(Tv)] = \alpha f(Tv) \\ &= \alpha[T^*f(v)], \quad v \in V, \alpha \in F \end{aligned}$$

بعد باید تحقیق کنیم که $T^* \in L(V^*, V^*)$ برای $f_1, f_2 \in V^*$ داریم

$$\begin{aligned} [T^*(f_1 + f_2)](v) &= (f_1 + f_2)(Tv) = f_1(Tv) + f_2(Tv) \\ &= (T^*f_1 + T^*f_2)(v) \end{aligned}$$

بعلاوه برای هر $v \in V$ و هر $\alpha \in F$ داریم

$$\begin{aligned} [T^*(\alpha f)](v) &= (\alpha f)(Tv) = f[\alpha(Tv)] = f[T(\alpha v)] \\ &= (T^*f)(\alpha v) = [\alpha(T^*f)](v) \end{aligned}$$

توجه به چگونگی استفاده از خطی بودن T و f و عملیات فضای برداری روی V^* ، در این بررسی، جالب است.

(۱۱.۲۶) قضیه. گیریم $T \in L(V, V)$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V و $\{f_1, \dots, f_n\}$

پایۀ دوگان برای V^* ، به معنای لم (۹.۲۶) است. گیریم A ماتریس T نسبت به پایۀ $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. در این صورت ماتریس T^* نسبت به پایۀ $\{f_1, \dots, f_n\}$ ترانهادۀ ماتریس A^t است. (یادآوری می‌کنیم که اگر α_{ij} عنصر واقع در سطر i ام و ستون j ام A باشد، آنگاه عنصر واقع در سطر j ام و ستون i ام A^t برابر α_{ji} است).

برهان. داریم

$$Tv_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} v_j$$

فرض کنید

$$T^* f_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} f_j$$

که در آن $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایهٔ دوگان V^* نسبت به پایهٔ $\{v_1, \dots, v_n\}$ از V است. باید نشان دهیم که برای هر i و j داریم $\beta_{ji} = \alpha_{ij}$. از اثر هر دو طرف بر یک بردار پایهٔ دلخواه v_k از V به دست می آوریم

$$T^* f_i(v_k) = \sum_{j=1}^n \beta_{ji} f_j(v_k)$$

سمت چپ برابر است با

$$\begin{aligned} T^* f_i(v_k) &= f_i(Tv_k) = f_i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{jk} v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} f_i(v_j) = \alpha_{ik} \end{aligned}$$

طرف سمت راست برابر است با

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ji} f_j(v_k) = \beta_{ki}$$

و نشان دادیم که برای هر i و k داریم $\alpha_{ik} = \beta_{ki}$ ، که برهان قضیه را کامل می سازد.

تمرینها

۱. نشان دهید که مفهومیهای زیر رابطه های هم ارزی هستند:

- الف) هم ارزی جفت های مرتب نقطه ها در صفحه (← مثالهای الف تا پ از بخش ۳)، یعنی $(A, B) \sim (C, D)$ ، اگر $B - A = D - C$.
- ب) هم ارزی سطری ماتریسها (از بخش ۶)
- پ) تشابه ماتریسها.

۲. گیریم Y زیرفضایی از فضای برداری متناهی-بعد V باشد، و برای یک فضای Y' ، $V = Y \oplus Y'$. ثابت کنید که دو فضای برداری Y' و V/Y یکرخت‌اند [تعریف (۱۴.۱۱)]. با آوردن مثالی نشان دهید که یک زیرفضای داده شده Y از V می‌تواند بیش از یک زیرفضای مکمل Y' داشته باشد به‌گونه‌ای که $V = Y \oplus Y'$.

۳. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد روی F است و $T \in L(V, V)$ ، و فرض می‌کنیم Y یک زیرفضای T -پایاست، با $Y \neq V$ ، $Y \neq 0$.

الف) ثابت کنید که چندجمله‌یهای مینیمال تحدید T_Y و نگاشت القایی $T_{V/Y}$ چندجمله‌ی مینیمال T را عاد می‌کنند.

ب) باتوجه به قسمت الف)، آیا چندجمله‌ی مینیمال T با حاصلضرب چندجمله‌یهای مینیمال T_Y و $T_{V/Y}$ برابرند؟

۴. گیریم V, Y و T همانهایی باشند که در تمرین ۳ آمده‌اند. نشان دهید که اگر تساویهای $T_Y = 0$ و $T_{V/Y} = 0$ هر دو برقرار باشند، آنگاه T صفر-توان است، و در حقیقت $T^2 = 0$.

۵. گیریم V و W دو فضای برداری روی F هستند و $T \in L(V, W)$. اگر Y یک زیرفضای V باشد، نشان دهید که

$$[v] \rightarrow Tv, \quad [v] \in V/Y$$

معرف یک تبدیل خطی از V/Y به W است اگر و تنها اگر $Y \subset n(T)$.

۶. گیریم V, W, T و Y همانهایی هستند که در تمرین ۵ آمده‌اند. نشان دهید که اگر $n(T) = Y$ آنگاه تبدیل خطی القایی $T_{V/Y}$ یک یکرختی از V/Y بر روی برد $T(V)$ از T است.

۷. گیریم $T_1, T_2 \in L(V, V)$. نشان دهید که

$$(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$$

۸. ثابت کنید که چندجمله‌ی مینیمال $T \in L(V, V)$ با چندجمله‌ی مینیمال T^* برابر است.

۲۷. صورتهای دوخطی و دوگانی

این بخش را با نگرشی متفاوت و کلیتر به رابطه بین یک فضای برداری و دوگان آن، آغاز می‌کنیم.

(۱.۲۷) تعریف. هر صورت دوخطی روی یک جفت از فضاهای برداری V و V' روی F ، تابعی است مانند B که به هر جفت مرتب (v, v') ، با $v \in V$ ، $v' \in V'$ ، یک عضو معین و یکتای $B(v, v')$ از F را مربوط می‌سازد، به‌گونه‌ای که شرطهای زیر، برای $v, v_1, v_2 \in V$ و $v', v'_1, v'_2 \in V'$ برقرار باشند

$$B(v_1 + v_2, v') = B(v_1, v') + B(v_2, v')$$

$$B(v, v'_1 + v'_2) = B(v, v'_1) + B(v, v'_2)$$

$$B(\alpha v, v') = B(v, \alpha v') = \alpha B(v, v')$$

مثال الف. گیریم V یک فضای برداری روی F ، و V^* فضای برداری دوگان آن است، $V^* = L(V, F)$ فرض می‌کنیم

$$B(v, f) = f(v), \quad f \in V^*, \quad v \in V$$

در این صورت B یک صورت دوخطی روی دو فضای برداری (V, V^*) است. برهان آن در بخش پیشین آمده است. خواننده باید توجه کند که عملهای فضای برداری روی V^* به‌گونه‌ای تعریف شده‌اند که نگاشت $(v, f) \rightarrow f(v)$ اجباراً یک صورت دوخطی باشد.

مثال ب. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری روی F . به‌ترتیب با پایه‌های متناهی $\{v_1, \dots, v_n\}$ و $\{w_1, \dots, w_m\}$ باشند. فرض کنیم $A = (\alpha_{ij})$ یک ماتریس مشخص m در n با ضرایب متعلق به F است، فرض کنیم

$$v = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_m v_m \in V$$

$$w = \eta_1 w_1 + \dots + \eta_n w_n \in W$$

و تعریف می‌کنیم

$$B(v, w) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$$

در این صورت $B(v, w)$ معرف یک صورت دوخطی روی (V, W) است. تحقیق درستی این حقیقت به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود.

(۲.۲۷) تعریف. هر صورت دوخطی $B : (V, V') \rightarrow F$ ناتبه‌گون نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر $v \in V$ و $v' \in V'$ تساوی $B(v, v') = 0$ را ایجاب کند، و به‌ازای هر $v \in V$ و $v' \in V'$ تساوی $B(v, v') = 0$ را ایجاب کند.

زیرا کاربرد استدلالهای معمولی با استفاده از اصول موضوعه فضاهای برداری در صورتهای دوخطی، نشان می‌دهد که برای هر $v, v' \in V$ به‌ترتیب در V و V' :

$$B(0, v') = B(v, 0) = 0$$

۲۷۸ فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

و شرط ناتبیهگونی حکم می‌کند که معادله $B(v, v') = 0$ برای همه v' ها، فقط در حالت منحصر به فردی که برقراری آن اجباری است، یعنی وقتی $v = 0$ ، برقرار باشد.

(۳.۲۷) قضیه. گیریم (V, W) دو فضای برداری متناهی-بعد، و $B(v, w)$ یک صورت دوخطی ناتبیهگون روی $F \rightarrow (V, W)$ باشند. برای بردار مشخص $w \in W$ نگاشت $\varphi_w : V \rightarrow F$ را با

$$\varphi_w(v) = B(v, w), \quad v \in V$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت نگاشت φ_w به V^* تعلق دارد، و نگاشت

$$\Phi : W \rightarrow V^*$$

که با تساوی

$$\Phi(w) = \varphi_w$$

تعریف می‌شود یک یکرختی است از W به روی V^* . به طریق مشابه V با W^* یکریخت است.

برهان. تعریف یک صورت دوخطی ایجاب می‌کند که برای هر $w \in W$ ، φ_w به فضای دوگان V^* تعلق داشته باشد، و نگاشت

$$w \rightarrow \Phi(w) = \varphi_w$$

یک تبدیل خطی از W در V^* باشد. (جزئیات بررسی درستی این احکام قبلاً چندین بار در سایر مباحث ارائه شده و این بار از ذکر آن خودداری می‌شود). برای اینکه نشان دهیم Φ یکریختی است، باید نشان دهیم که Φ یک به یک و پوشاست. نخست فرض می‌کنیم $\Phi(w) = \Phi(w')$ ؛ در این صورت برای هر $v \in V$

$$B(v, w) = B(v, w')$$

به سبب دوخطی بودن B ، نتیجه می‌شود که برای هر $v \in V$

$$B(v, w - w') = 0$$

و بنابر ناتبیهگونی B ، داریم $w = w'$. پس Φ یک به یک است، و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$\dim V^* \geq \dim W$$

۲۷۹ صورتهای دوخطی و دوگانی

تاکنون تنها از نصف تعریف ناتبه‌گونی استفاده کردیم. با استفاده از نیم دیگر با استدلالی مشابه، یک تبدیل خطی یک به یک از V در W^* به دست می‌آوریم، بنابراین

$$\dim W^* \geq \dim V$$

با استفاده از نتیجه بخش پیش مبنی بر اینکه $\dim W = \dim W^*$ و غیره، داریم

$$\dim V^* \geq \dim W = \dim W^* \geq \dim V$$

از آنجا نتیجه می‌شود

$$\dim V^* = \dim W$$

و چون $\Phi(W) \subset V^*$ و $\dim \Phi(W) = \dim V^*$ ، نتیجه می‌گیریم که Φ پوشاست. بنابراین Φ یک یکریختی است و قضیه ثابت می‌شود.

(۴.۲۷) نتیجه. گیریم V, W ، و B همانهایی باشند که در قضیه آمده بودند. در این صورت $\dim V = \dim W$.

این قضیه تعریف زیر را اندکی طبیعی جلوه‌گر می‌سازد.

(۵.۲۷) تعریف. دو فضای برداری متناهی-بعد V و W ، نسبت به صورت دوخطی $F : (V, W) \rightarrow F$ دوگان نامیده می‌شوند به شرط اینکه B ناتبه‌گون باشد. به عبارت دیگر، V و W نسبت به B دوگان یکدیگرند، هرگاه به موجب قضیه قبل، هر فضای برداری با فضای دوگان دیگری، از راه نگاشتهایی که توسط B تعریف می‌شود، یکریخت باشد.

(۶.۲۷) تعریف. گیریم V و V' فضاهای برداری متناهی-بعدی هستند که نسبت به یک صورت دوخطی B دوگان‌اند. فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ و $T' \in L(V', V')$ ، در این صورت T و T' ترانهادۀ همدیگر نامیده می‌شوند به شرط اینکه برای هر $v \in V$ و $v' \in V'$ ؛

$$B(v, T'(v')) = B(T(v), v')$$

(۷.۲۷) قضیه. گیریم V و V' دو فضای برداری متناهی-بعد باشند که نسبت به صورت دوخطی B دوگان یکدیگرند. اگر $T \in L(V, V)$ ، آنگاه یک تبدیل خطی معین یکتای $T' \in L(V', V')$ وجود دارد به گونه‌ای که T و T' ترانهادۀ یکدیگرند. به همین نحو هر تبدیل خطی $S \in L(V', V')$ در $L(V, V)$ یک ترانهادۀ یکتا دارد.

برهان. به علت تقارن موجود، کافی است تنها حکم نخست را ثابت کنیم. گیریم $T \in L(V, V)$ ؛ باید نشان دهیم که برای هر $v' \in V'$ یک عضو یکتای $v' \in V'$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$B(v, v'_1) = B(T(v), v), \quad v \in V \quad (۸.۲۷)$$

پس می‌توانیم $T'(v')$ را همان v'_1 تعریف کنیم. چون T یک تبدیل خطی است، نگاشت

$$v \rightarrow B(T(v), v')$$

عضوی از فضای دوگان V است. بنابر قضیه (۳.۲۷) یک عضو یکتای $v'_1 \in V'$ وجود دارد به‌گونه‌ای که (۸.۲۷) برقرار است. اینک $T' : V' \rightarrow V'$ را به‌صورت $T'(v') = v'_1$ تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $v \in V$ و $v' \in V'$ داریم:

$$B(v, T'(v')) = B(T(v), v') \quad (۹.۲۷)$$

باید ثابت کنیم که $T' \in L(V', V')$. برهان این حقیقت توضیح خوبی برای چگونگی استفاده از فضاهای برداری دوگان است. باید نشان دهیم که برای هر $\alpha, \beta \in F$ و $v'_1, v'_2 \in V'$

$$T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2) = \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2) \quad (۱۰.۲۷)$$

نحوه تفکر ما برای اثبات، این است که نشان دهیم برای هر $v \in V$

$$B(v, T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2)) = B(v, \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2))$$

و سپس از ناتبهرگونی این صورت برای نتیجه‌گیری (۱۰.۲۷) استفاده کنیم. از (۹.۲۷) داریم

$$\begin{aligned} B(v, T'(\alpha v'_1 + \beta v'_2)) &= B(Tv, \alpha v'_1 + \beta v'_2) \\ &= \alpha B(Tv, v'_1) + \beta B(Tv, v'_2) \\ &= \alpha B(v, T'(v'_1)) + \beta B(v, T'(v'_2)) \\ &= B(v, \alpha T'(v'_1) + \beta T'(v'_2)) \end{aligned}$$

همان‌گونه که می‌خواستیم. اینک که وجود یک ترانهاده را ثابت کردیم، تنها اثبات یکتایی آن باقی می‌ماند. ولی اگر تبدیلهای T' و T'' در $L(V', V')$ موجود باشند چنان‌که برای همه $v \in V$ ها، $v' \in V'$ ها در

$$B(Tv, v') = B(v, T'(v')) = B(v, T''(v'))$$

صدق کنند، آنگاه از ناتبهرگونی B نتیجه می‌شود $T' = T''$ ، که اثبات قضیه را کامل می‌کند.

صورت‌های دوخطی و دوگانی ۲۸۱

به یک معنی، ما در حقیقت از مفهوم دوگان یک فضای برداری و ترانهادهٔ یک تبدیل خطی فراتر نرفته‌ایم. ولی زبان فضاهای دوگان در بعضی کاربردها ساده‌تر و مناسب‌تر است، همان‌گونه که بعداً در این فصل خواهیم دید.

(۱۱.۲۷) **تعریف.** گیریم V و V' ، دو فضای برداری دوگان روی F نسبت به یک صورت دوخطی ناتبه‌گون B باشند. گیریم V_1 و V'_1 به ترتیب زیرفضاهای V و V' باشند. $V_1^\perp$ پوچساز V_1 (نسبت به B) را به صورت زیرفضایی از V' متشکل از همهٔ v' هایی تعریف می‌کنیم که برای هر $v_1 \in V_1$ تساوی، $B(v_1, v') = 0$ یا به طور ساده تساوی $B(V_1, v') = 0$ برقرار باشد. به روش مشابه تعریف می‌کنیم:

$$(V'_1)^\perp = \{v \in V \mid B(v, V'_1) = 0\}$$

توجه می‌کنیم که $V_1^\perp$ و $(V'_1)^\perp$ ، به دلیل این واقعیت که B یک صورت دوخطی است، در حقیقت دو زیرفضا هستند. ناتبه‌گونی B هم‌ارز با حکمهای $V^\perp = 0$ و $(V')^\perp = 0$ است. همچنین توجه می‌کنیم که کاربرد یک نماد $\perp$ برای پوچسازهای زیرفضاهای V و V' هیچ اشتباهی را سبب نمی‌شود، زیرا معنی آن در هر مورد آشکار است. قضیهٔ زیر قضیهٔ عمده‌ای دربارهٔ پوچسازهاست. در صورت آن به فضاهای خارج قسمت و تبدیلیهای خطی القایی (که در بخش ۲۶ معرفی شده) اشاره شده است.

(۱۲.۲۷) **قضیه.** گیریم V و V' فضاهای برداری متناهی-بعد باشند که نسبت به یک صورت دوخطی ناتبه‌گون B دوگان یکدیگرند، و گیریم V_1 و V'_1 به ترتیب زیرفضاهای V و V' باشند.

$$\dim V_1 + \dim V_1^\perp = \dim V, \dim (V'_1)^\perp + \dim V'_1 = \dim V' \quad \text{الف)}$$

$$(V_1^\perp)^\perp = V_1, ((V'_1)^\perp)^\perp = V'_1 \quad \text{ب)}$$

پ) نگاشت $V_1 \rightarrow V_1^\perp$ نگاشتی است یک‌به‌یک از مجموعهٔ زیرفضاهای برداری V بر مجموعهٔ زیرفضاهای برداری V' ، به گونه‌ای که برای همهٔ زیرفضاهای V_1 و V_2 از V شرط $V_1 \subset V_2$ مستلزم برقراری شرط $V_1^\perp \supset V_2^\perp$ است.

$$\text{ت) اگر } V = V_1 \oplus V_2, \text{ آنگاه } V' = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$$

ث) فضاهای برداری V_1 و $V'/V_1^\perp$ ، نسبت به صورت دوخطی ناتبه‌گون B_1 که با

$$B_1(v_1, [v']) = B(v_1, v'), \quad v_1 \in V_1, [v'] \in V'/V_1^\perp$$

تعریف شده، دوگان یکدیگرند.

ج) فرض می‌کنیم $T \in L(V, V)$ و $T' \in L(V', V')$ نسبت به B ترانهادهٔ یکدیگر باشند، و فرض می‌کنیم V_1 یک زیرفضای T -پایای V باشد. در این صورت $V_1^\perp$ نسبت به T' پایاست

۲۸۲ فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

و تحدید T_{V_1} و تبدیل خطی القایی $(T')_{V'/V_1^\perp}$ ، نسبت به صورت دوخطی B_1 که در قسمت (ث) تعریف شده، ترانهادۀ همدیگرند.

برهان. الف) گیریم $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک پایه V_1 است و آن را به یک پایه $\{v_1, \dots, v_n\}$ از V گسترش می‌دهیم. چون V' با فضای دوگان V بنابر (۳.۲۷) یکرخت است، می‌توانیم یک پایه $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ از V' را متناظر با پایه دوگان V^* نسبت به $\{v_1, \dots, v_n\}$ (از بخش ۲۶) بیابیم. به دیگر سخن یک پایه $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ از V' وجود دارد به‌گونه‌ای که:

$$B(v_i, v'_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (۱۳.۲۷)$$

حکم می‌کنیم که $\{v'_{k+1}, \dots, v'_n\}$ پایه‌ای است برای $V_1^\perp$. روشن است که همهٔ این اعضا بنابر (۱۳.۲۷) به $V_1^\perp$ تعلق دارند. اینک گیریم $v' = \xi_1 v'_1 + \dots + \xi_n v'_n \in V_1^\perp$ چون $B(v_1, v') = \dots = B(v_k, v') = 0$ داریم $\xi_1 = \dots = \xi_k = 0$ ، و حکم ثابت می‌شود. ثابت کردیم که $\dim V_1^\perp = \dim V - \dim V_1$. برهان نیمهٔ دیگر (الف) درست به همین روش صورت می‌گیرد و از ذکر آن صرفنظر می‌شود.

ب) از تعریف پوچسازها داریم $V_1 \subset (V_1^\perp)^\perp$. از قسمت (الف) داریم

$$\begin{aligned} \dim(V_1^\perp)^\perp &= \dim V' - \dim(V_1^\perp) \\ &= \dim V' - (\dim V - \dim V_1) \\ &= \dim V_1, \end{aligned}$$

زیرا بنابر نتیجهٔ (۴.۲۷) $\dim V' = \dim V$. چون $V_1 \subset (V_1^\perp)^\perp$ ، پس آنها برابرند. قسمت دوم (ب) درست به روش مشابه ثابت می‌شود.

پ) تعریف پوچساز ایجاب می‌کند که از $V_1 \subset V_2$ نتیجه شود $V_1^\perp \supset V_2^\perp$. برای ویژگی یک‌به‌یک، فرض می‌کنیم $V_1^\perp = V_2^\perp$. بااستفاده از (ب) داریم

$$V_1 = (V_1^\perp)^\perp = ((V_2^\perp)^\perp)^\perp = V_2$$

اثبات اینکه برای یک زیرفضای V_1 از V هر زیرفضای V_1 به شکل $V_1^\perp$ است، به خواننده واگذار می‌شود. [راهنمایی: از حکم دوم (ب) استفاده کنید.]

ت) از (الف) نتیجه می‌شود $\dim V_1^\perp + \dim V_2^\perp = \dim V'$. کافی است ثابت کنیم که $V_1^\perp \cap V_2^\perp = 0$. گیریم $v' \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$. چون $V = V_1 \oplus V_2$ ، بنابر ناتهِگونی B ، داریم $v' \in V^\perp = \{0\}$.

ث) نخست باید نشان دهیم که B_1 به‌خوبی تعریف شده است، به دیگر سخن، اگر در V_1 ، $v_1 = w_1$ و در $V'/V_1^\perp$ ، $[v'] = [w']$ ، آنگاه باید نشان دهیم که $B(v_1, v') = B(w_1, w')$.

تمرینها ۲۸۳

چون $[v'] = [w']$ ، برای $z' \in V_1^\perp$ داریم $v' = w' + z'$. در این صورت

$$B(v_1, v') = B(w_1, w' + z') = B(w_1, w')$$

زیرا $w_1 \in V_1$ و $z' \in V_1^\perp$. اینک دوخطی بودن B_1 بی درنگ از دوخطی بودن B نتیجه می شود، و آوردن برهان این حقیقت را به خواننده واگذار می کنیم. اکنون باید ناتبهگونی B_1 را ثابت کنیم. فرض می کنیم که برای $v_1 \in V_1$ ، $B_1(v_1, V'/V_1^\perp) = 0$. در این صورت بنابر تعریف B_1 ، $B(v_1, V') = 0$ و بنابر ناتبهگونی B ، $v_1 = 0$. اکنون فرض می کنیم که برای $v' \in V'$ داریم $B_1(V_1, [v']) = 0$. در این صورت بنابر تعریف B_1 ، $B(V_1, v') = 0$ و لذا $v' \in V_1^\perp$. بنابراین $[v'] = 0$ در $V'/V_1^\perp$ ، و قسمت (ث) ثابت می شود.

(ج) نخست باید ثابت کنیم $T'(V_1^\perp) \subset V_1^\perp$. گیریم $v_1 \in V_1$ و $v' \in V_1^\perp$. در این صورت

$$B(v_1, T'(v')) = B(T(v_1), v') = 0$$

زیرا $T(V_1) \subset V_1$ و داریم $T'(V_1^\perp) \subset V_1^\perp$. اینک کافی است ثابت کنیم که برای $v_1 \in V_1$ و $v' \in V'$

$$B_1(T_{V_1}(v_1), [v']) = B_1(v_1, T'_{V'/V_1^\perp}([v']))$$

باتوجه به تعریف T_{V_1} و $T'_{V'/V_1^\perp}$ این حکم هم ارز است با

$$B_1(T(v_1), [v']) = B_1(v_1, [T'v']) \quad (۱۴.۲۷)$$

تعریف B_1 می گوید که (۱۴.۲۷) هم ارز است با

$$B(T(v_1), v') = B(v_1, T'v')$$

که به طور دقیق شرط ترانهاده بودن T و T' نسبت به یکدیگر است. در نتیجه برهان قضیه کامل می شود.

تمرینها

۱. درستی حکم مذکور در مثال ب را مبنی بر اینکه

$$B(v, w) = \sum \sum \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$$

معرف یک صورت دوخطی روی یک جفت فضای برداری (V, W) است، بررسی نمایید.

۲. گیریم V و W دو فضای برداری n بعدی روی F هستند، و B یک صورت دوخطی روی (V, W) است که با ماتریس A $n \times n$ ، مذکور در مثال ب، تعریف شده است. نشان دهید که B ناتبهگون است اگر و تنها اگر رتبه A برابر n باشد.

۳. یک صورت دوخطی $F : (V, V) \rightarrow F$ روی فضای برداری V با خودش، متقارن نامیده می شود اگر برای هر v و v' در V ، $B(v, v') = B(v', v)$ ، و متقارن چپ گفته می شود هرگاه برای هر v و v' ، $B(v, v') = -B(v', v)$. ثابت کنید که هر صورت دوخطی B روی (V, V) متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس آن $A = (\alpha_{ij})$ [که در آن $\alpha_{ij} = B(v_i, v_j)$] برای یک پایه ثابت $\{v_i\}$ از V در $A = A^t$ صدق کند، و متقارن چپ است اگر و تنها اگر $A = -A^t$.

۴. گیریم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی، و B یک صورت دوخطی ناتبهگون متقارن چپ روی (V, V) است. ثابت کنید که بعد V زوج است: برای یک عدد درست مثبت $\dim V = 2m$. [راهنمایی: فرض کنید A همانند تمرین ۳، ماتریس B باشد: در این صورت بنابر تمرین ۲، $A = -A^t$ ، و $D(A) \neq 0$. این حکمها چه چیزی را ایجاب می کنند؟]

۵. گیریم B یک صورت دوخطی روی (V, V) است، که در آن V یک فضای برداری روی اعداد حقیقی است. ثابت کنید که B متقارن چپ است اگر و تنها اگر برای همه بردارهای $v \in V$ ، $B(v, v) = 0$.

۶. گیریم V یک فضای برداری، و V^* فضای برداری دوگان آن است. ثابت کنید که برای $v \in V$ ، نگاشت $\lambda_v : f \rightarrow f(v)$ ، $f \in V^*$ ، یک عضو $(V^*)^*$ است. ثابت کنید که اگر V متناهی-بعد باشد، آنگاه $\lambda_v \rightarrow v$ یک یکرختی از V بر $(V^*)^*$ است.

۷. گیریم V و V' فضاهای برداری دوگان نسبت به صورت دوخطی B هستند، و فرض می کنیم T و T' نسبت به B ترانژاده همدیگرند. نشان دهید که T و T' دارای یک رتبه اند.

۸. گیریم V, V', T, T' همانهایی باشند که در تمرین ۷ بودند. نشان دهید که α یک ویژه مقدار T است اگر و تنها اگر α ویژه مقدار T باشد.

۲۸. حاصلجمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری

از فصل ۷ با حاصلجمعهای مستقیم فضاهای برداری آشنا هستیم. در این بخش از دیدگاه متفاوتی به حاصلجمعهای مستقیم می پردازیم، تا روشی برای مفهوم مشکلتر حاصلضرب تانسوری فراهم آوریم.

(۱.۲۸) تعریف. گیریم X و Y دو مجموعه باشند. حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ مجموعه همه زوجهای مرتب (x, y) است، با $x \in X$ و $y \in Y$. دو زوج مرتب (x, y) و (x', y') بنا بر تعریف مساوی هستند اگر و فقط اگر $x = x'$ و $y = y'$.

(۲.۲۸) تعریف. گیریم U و V دو فضای برداری روی F هستند. مجموع مستقیم (خارجی) $U \dot{+} V$ فضایی است برداری که مجموعه زیربنایی آن حاصلضرب دکارتی $U \times V$ است، با عملهای فضای برداری که برای همه بردارها و اسکالرها با

$$(u, v) + (u_1, v_1) = (u + u_1, v + v_1)$$

$$\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$$

تعریف شده است.

به آسانی تحقیق می‌شود (و ما جزئیات را حذف می‌کنیم) که $U \dot{+} V$ فضایی است برداری. زحمت زیادی کشیدیم تا $U \dot{+} V$ را از مفهوم حاصلجمع مستقیم (درونی) $U \oplus V$ ، که در فصل ۷ تعریف شد، از هم متمایز سازیم، گرچه به تعبیری این دو، درست روشهای مختلف نگاه کردن به یک چیز است، چنانکه قضیه زیر نشان می‌دهد.

(۳.۲۸) قضیه. گیریم U و V دو فضای برداری متناهی-بعد با پایه‌های به ترتیب

$$\{u_1, \dots, u_k\}, \{v_1, \dots, v_l\} \text{ باشند. در این صورت}$$

$$\text{الف) } \{(u_1, 0), \dots, (u_k, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_l)\} \text{ پایه‌ای است از } U \dot{+} V$$

$$\text{ب) } \dim(U \dot{+} V) = \dim U + \dim V$$

پ) به فرض اینکه U_1 و V_1 به ترتیب نمایش مجموعه‌های $\{(u, 0) | u \in U\}$ و $\{(0, v) | v \in V\}$ باشند، U_1 و V_1 زیرفضاهای $U \dot{+} V$ هستند و حاصلجمع مستقیم (درونی)، $U_1 \oplus V_1$ است.

ت) گیریم $S \in L(U, U)$ و $T \in L(V, V)$ و A و B به ترتیب ماتریسهای S و T نسبت به پایه‌های $\{u_1, \dots, u_k\}$ و $\{v_1, \dots, v_l\}$ باشند. در این صورت $S \dot{+} T : U \dot{+} V \rightarrow U \dot{+} V$ که با

$$(S \dot{+} T)(u, v) = (S(u), T(v))$$

تعریف می‌شود یک تبدیل خطی از $U \dot{+} V$ است، و ماتریس آن نسبت به پایه مذکور در الف) با

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{B} \end{array} \right)$$

داده می‌شود.

برهان. تنها طرح مختصری از اثبات را ارائه می‌دهیم و شرح جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

الف) نخست، نشان می‌دهیم که این بردارها نایسته خطی‌اند. اگر

$$\alpha_1(u_1, 0) + \dots + \alpha_k(u_k, 0) + \beta_1(0, v_1) + \dots + \beta_l(0, v_l) = 0$$

آنگاه

$$(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l) = 0$$

و

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0, \quad \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_l v_l = 0$$

چون $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ مجموعه‌های نابسته خطی در U و V هستند، داریم $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_l = 0$. اینک گیریم $(u, v) \in U \dot{+} V$. در این صورت $u = \sum \alpha_i u_i$ و $v = \sum \beta_j v_j$ و از این رو $(u, v) = \sum \alpha_i (u_i, v) + \sum \beta_j (u, v_j)$. قسمت (الف) ثابت می‌شود.

(ب) از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

(پ) اثبات زیرفضا بودن U_1 و V_1 حذف می‌شود. برای اینکه نشان دهیم $U \dot{+} V$ حاصلجمع مستقیم آنهاست، باید بررسی کنیم که هر بردار در $U \dot{+} V$ مجموعی از بردارهای U_1 و V_1 است، و $U_1 \cap V_1 = 0$. نخست $U_1 \cap V_1 = 0$. دیگر اینکه $(u, v) \in U_1 \cap V_1$ دیگر اینکه $(u, v) = (u, 0) + (0, v) \in U_1 \dot{+} V_1$. $(u, v) = 0$ و از این رو $(u, v) = 0$.

(ت) اثبات خطی بودن تبدیل $S \dot{+} T$ و دارا بودن ماتریس اشاره شده، به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

با ساختن حاصلجمع مستقیم که هم‌اکنون دیدیم، طبیعی است که خواهان یک فضای برداری باشیم که از U و V ساخته شود و بعد آن برابر حاصلضرب $(\dim U)(\dim V)$ باشد، در صورتی که هر دو عامل متناهی باشند، نخستین چیزی که به نظر ضروری می‌رسد اصلاً در نظر گرفتن فضایی است برداری با پایه‌ای متشکل از همه «حاصلضربهای» $u_i \times v_j$ که در آن u_i و v_j به ترتیب پایه‌های U و V باشند. در این صورت می‌توانیم برای رفتار عناصر پایه، مثلاً چگونگی تعبیر $u_i \times \alpha v_j$ قیدهایی قائل شویم. از لحاظ تاریخی، این نخستین شیوه نزدیک شدن به حاصلضرب تانسوری بود. بعدها ساختمانهای گوناگونی یافت شدند که از گزینش پایه‌های U و V مستقل‌اند. برای مثال، حاصلضرب تانسوری $U \otimes V$ می‌تواند به صورت $L(U^*, V)$ تعریف شود، که در آن U^* فضای دوگان U است، یا به صورت $B(U, V)^*$ ، که فضای دوگان فضای برداری $B(U, V)$ صورتی دوخطی روی U و V است. ثابت می‌شود که همه این تعریفها هم‌ارزند، و یک فضای برداری با همان خواص اساسی فراهم می‌آورند. شیوه تعریف حاصلضرب تانسوری برحسب این خواص اساسی را در نظر می‌گیریم، و ساختمانی از این حاصلضرب تانسوری می‌دهیم که با فضای برداری توابع روی مجموعه حاصلضرب دکارتی $U \times V$ شروع می‌شود. در این صورت تعبیرهای دیگری از فضای حاصلضرب تانسوری، و نیز کاربردهای این مفهوم در تبدیلهای خطی و ماتریسها به آسانی نتیجه می‌شود.

حاصل‌جمع‌های مستقیم و حاصلضرب‌های تانسوری ۲۸۷

براهین قضیه‌های عمده تاندازه‌ای طولانی هستند، و شاید برای خواننده بهتر باشد احکام تعریف‌های (۴.۲۸)، (۹.۲۸)، قضیه (۵.۲۸)، و تبصره (الف) را که پس از تعریف (۹.۲۸) آمده، پیش از پرداختن به اثبات قضیه (۵.۲۸)، مطالعه کند.

(۴.۲۸) تعریف. گیریم U, V, W فضاهاى بردارى روی F هستند. یک تابع دوخطی $\lambda : U \times V \rightarrow W$ نگاشتی است که به هر جفت مرتب $(u, v) \in U \times V$ یک عنصر یکتای $\lambda(u, v)$ در W را نسبت می‌دهد، به‌گونه‌ای که برای همه u ها در U و v ها در V و α ها در F شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\lambda(u_1 + u_2, v) = \lambda(u_1, v) + \lambda(u_2, v), \quad \lambda(u, v_1 + v_2) = \lambda(u, v_1) + \lambda(u, v_2)$$

$$\lambda(\alpha u, v) = \lambda(u, \alpha v) = \alpha \lambda(u, v)$$

مثالهایی از توابع دوخطی را قبلاً دیده‌ایم. صورتهای دوخطی، توابعی دوخطی هستند که در آنها فضای برداری سوم W ، فضای برداری یک‌بعدی F است. مثالهای دیگر به‌قرار زیرند.

مثال الف. گیریم V یک فضای برداری روی F ، و $\lambda : L(V, V) \times L(V, V) \rightarrow L(V, V)$ نگاشت $\lambda(T_1, T_2) = T_1 T_2$ است که در آن $T_1 T_2$ حاصلضرب تبدیلیهای خطی T_1 و T_2 در $L(V, V)$ است. ویژگیهای ضرب تبدیلیهای خطی نشان می‌دهند که λ تابعی است دوخطی.

مثال ب. گیریم V یک فضای برداری و V^* دوگان آن باشد. برای $f \in V^*$ و $v \in V$ نگاشت $f \times v : V \rightarrow V$ را با

$$(f \times v)(u) = f(u)v, \quad u, v \in V, \quad f \in V^*$$

تعریف می‌کنیم. در این‌صورت خواننده می‌تواند نشان دهد که برای هر f و v ، (الف) $f \times v \in L(V, V)$ ؛ و (ب) نگاشت $f \times v \rightarrow (f, v)$ یک نگاشت دوخطی از $V^* \times V \rightarrow L(V, V)$ است.

می‌خواهیم نشان دهیم که برای هر جفت از فضاهاى بردارى U و V ، یک فضای برداری $U \otimes V$ به‌نام حاصلضرب تانسوری آنها وجود دارد با این ویژگی که برای هر نگاشت دوخطی $\lambda : U \times V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \rightarrow W$ وجود دارد که به تعبیری هم‌ارز تابع دوخطی λ است. برای دقیقتر ساختن این اندیشه، قرارداد $f \circ g$ را برای ترکیب دو نگاشت از مجموعه‌های $f : Y \rightarrow Z$ ، $g : X \rightarrow Y$ ، که با

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تعریف شده است وارد می‌کنیم. این همان اندیشه «تابع تابع» معمولی از حساب دیفرانسیل و انتگرال است، و قبلاً در فصل ۳ برای تعریف حاصلضرب تبدیلیها مورد استفاده قرار گرفته است.

(۵.۲۸) قضیه. گیریم U و V دو فضای برداری روی هیأت F هستند. یک فضای برداری روی F به نام $U \otimes V$ ، و یک نگاشت دوخطی $t: U \times V \rightarrow U \otimes V$ موجود است به گونه‌ای که $U \otimes V$ با عناصر $u \in U, v \in V, t(u, v)$ تولید می‌شود. * بعلاوه برای هر نگاشت دوخطی $\lambda: U \times V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی $L: U \otimes V \rightarrow W$ موجود است، به گونه‌ای که

$$\lambda = L \circ t$$

به دیگر سخن، هر نگاشت دوخطی $\lambda: U \times V \rightarrow W$ ، به حاصلضرب یک نگاشت دوخطی ثابت $t: U \times V \rightarrow U \otimes V$ از $U \times V$ در فضای برداری ثابت $U \otimes V$ تجزیه می‌شود، که به دنبال یک تبدیل خطی $L: U \otimes V \rightarrow W$ می‌آید.

برهان. گیریم $\mathcal{F}(U \times V)$ مجموعه همه توابع $f: U \times V \rightarrow F$ است به گونه‌ای که جز برای تعداد متناهی از جفتهای $\{(u, v)\}$ تساوی $f(u, v) = 0$ برقرار است. در این صورت $\mathcal{F}(U \times V)$ یک فضای برداری روی F است، اگر مجموع $f + f'$ و ضرب در اسکالر αf را با قاعده‌های

$$(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$$

$$(\alpha f)(u, v) = \alpha(f(u, v))$$

تعریف کنیم. آشکار است که اگر f و f' هر دو، جز برای تعدادی متناهی از جفتهای (u, v) صفر شوند، آنگاه $f + f'$ و αf نیز صفر خواهند شد.

گیریم $u * v$ نمایش تابعی در $\mathcal{F}(U \times V)$ باشد به گونه‌ای که

$$(u * v)(u_1, v_1) = \begin{cases} 1 & (u_1, v_1) = (u, v) \\ 0 & (u_1, v_1) \neq (u, v) \end{cases} \quad \text{اگر}$$

ثابت می‌کنیم که هر تابع دلخواه f در $\mathcal{F}(U \times V)$ ترکیبی خطی است از توابع $u * v$. فرض می‌کنیم $f(u, v) = 0$ جز برای $\{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)\}$ ؛ در این صورت

$$f = f(u_1, v_1)(u_1 * v_1) + \dots + f(u_k, v_k)(u_k * v_k)$$

همان گونه که از اتردادن هر دو طرف به نوبت بر $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ ، و استفاده از تعریف $u_i * v_i$ دیده می‌شود. بعلاوه ضرایب در چنین ترکیب خطی به طور یکتا تعیین می‌شوند، زیرا اگر

$$\alpha_1(u_1 * v_1) + \dots + \alpha_k(u_k * v_k) = \alpha'_1(u_1 * v_1) + \dots + \alpha'_k(u_k * v_k)$$

* یک فضای برداری به وسیله مجموعه‌ای از بردارهای $T = \{t\}$ ، که ممکن است نامتناهی باشد، تولید می‌شود، هرگاه هر بردار v یک ترکیب خطی به صورت $\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r$ ، برای یک مجموعه متناهی $\{t_i\}$ در T باشد، که به v بستگی دارد.

حاصل‌جمعهای مستقیم و حاصل‌ضربهای تانسوری ۲۸۹

آنگاه از اثر دادن دو طرف بر $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ ، و غیره، می‌بینیم که $\alpha_1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2$ ، و غیره.

اینک آمادهٔ تعریف $U \otimes V$ هستیم. گیریم Y زیرفضای $\mathcal{F}(U \times V)$ باشد که به‌وسیلهٔ همهٔ توابع

$$\begin{aligned} & (u_1 + u_2) * v - u_1 * v - u_2 * v \\ & u * (v_1 + v_2) - u * v_1 - u * v_2 \\ & \alpha u * v - \alpha(u * v) \\ & u * \alpha v - \alpha(u * v) \end{aligned}$$

برای $U \otimes V$ اینک $\alpha \in F$ و $v, v_1, v_2 \in V, u, u_1, u_2 \in U$ را با فضای خارج‌قسمت $\mathcal{F}(U \times V)/Y$ (همان‌گونه که در بخش ۲۶ تعریف شد) تعریف می‌کنیم. در این‌صورت $U \otimes V$ متشکل از همهٔ رده‌های هم‌ارزی $[f]$ است، برای $f \in \mathcal{F}(U \otimes V)$. چون هر f یک ترکیب خطی از توابع $u * v$ است، از اینجا نتیجه می‌شود که هر عضو $U * V$ یک ترکیب خطی

$$\alpha_1[u_1 * v_1] + \cdots + \alpha_k[u_k * v_k]$$

است: با $\alpha_i \in F$ و $u_i \in U$ و $v_i \in V$.

حال یک تابع دوخطی $t: U \times V \rightarrow U \otimes V$ را با قراردادن

$$t(u, v) = [u * v] \quad (۶.۲۸)$$

برای همهٔ بردارهای $u \in U, v \in V$ تعریف می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم t دوخطی است، با این حقیقت آغاز می‌کنیم که چون $U \otimes V = \mathcal{F}(U, V)/Y$ ، برای هر $y \in Y$ در $U \otimes V$ داریم $[y] = 0$. به‌موجب تعریف Y ، برای همهٔ بردارها و اسکالرهای داریم

$$\begin{aligned} & [(u_1 + u_2) * v] - [u_1 * v] - [u_2 * v] = 0 \\ & [u * (v_1 + v_2)] - [u * v_1] - [u * v_2] = 0 \\ & [\alpha u * v] - [\alpha(u * v)] = [u * \alpha v] - [\alpha(u * v)] = 0 \end{aligned}$$

این معادلات به دستورهایی

$$\begin{aligned} t(u_1 + u_2, v) &= t(u_1, v) + t(u_2, v) \\ t(u, v_1 + v_2) &= t(u, v_1) + t(u, v_2) \\ t(\alpha u, v) &= \alpha t(u, v) = t(u, \alpha v) \end{aligned}$$

بدل می‌شوند که دقیقاً بیانگر دوخطی بودن تابع t هستند. علاوه، چون هر $f \in \mathcal{F}(U \times V)$ یک ترکیب خطی از توابع $u * v$ است، نتیجه می‌شود که $U \otimes V$ توسط عناصر $t(u, v)$, $u \in U$, $v \in V$ ، تولید می‌شود. سرانجام باید بررسی کنیم که توابع دوخطی می‌توانند به روش مطلوب تجزیه شوند. گیریم $\lambda : U \times V \rightarrow W$ یک تابع دوخطی دلخواه است. در این صورت می‌توانیم یک تبدیل خطی $\lambda_1 : \mathcal{F}(U \times V) \rightarrow W$ را با قراردادن

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha_1(u_1 * v_1) + \cdots + \alpha_k(u_k * v_k)) \\ = \alpha_1 \lambda(u_1, v_1) + \cdots + \alpha_k \lambda(u_k, v_k) \end{aligned} \quad (۷.۲۸)$$

برای هر $\alpha_i \in F$ و $u_i \in U$, $v_i \in V$ ، تعریف کنیم. تعریف λ_1 قانونی است زیرا نشان دادیم که هر عنصر $\mathcal{F}(U \times V)$ یک ترکیب خطی از توابع $u_i * v_i$ است، و ضرایب در چنین ترکیب خطی به طور یکتا تعیین می‌شوند. بررسی تبدیل خطی بودن λ_1 ، از این پس امری است عادی، و از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم.

نکته مهمی که باید توجه کنیم این است که چون λ دوخطی است، زیرفضای Y مشمول صفر-فضای λ_1 است. برای مثال، با استفاده از تعریف λ_1 داریم

$$\begin{aligned} \lambda_1((u_1 + u_2) * v - u_1 * v - u_2 * v) \\ = \lambda(u_1 + u_2, v) - \lambda(u_1, v) - \lambda(u_2, v) = 0 \end{aligned}$$

زیرا λ دوخطی است. به روش مشابه مولدهای دیگر Y به صفر-فضای λ_1 تعلق دارند. اینک می‌توانیم یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \rightarrow W$ را با قراردادن

$$L([f]) = \lambda_1(f), \quad f \in \mathcal{F}(U \times V) \quad (۸.۲۸)$$

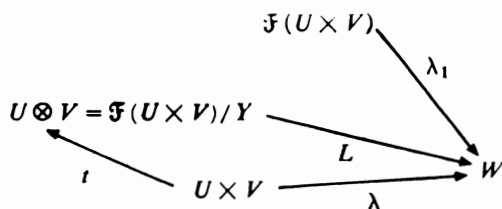
تعریف کنیم. تعریف L به این دلیل توجیه می‌شود که اگر $[f] = [f']$ ، آنگاه $f - f' \in Y$ و از این رو $\lambda_1(f - f') = \lambda_1(f) - \lambda_1(f') = 0$. (بخش ۲۶). اینک باید تحقیق کنیم که

$$L \circ t = \lambda$$

برای $v \in V$, $u \in U$ بنابر (۶.۲۸)، (۷.۲۸) و (۸.۲۸) داریم

$$\begin{aligned} (L \circ t)(u, v) &= L([u * v]) = \lambda_1(u * v) \\ &= \lambda(u, v) \end{aligned}$$

حاصل‌جمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری ۲۹۱



شکل ۱.۸

و قضیه ثابت می‌شود.

شکل ۱.۸ مراحل گوناگون برهان را نشان می‌دهد. این نوع برهان گاهی برهان از راه «کلاً خلاف منطقی» نامیده می‌شود، که بدین معنی است که این برهان کاربردی است از اندیشه‌ها و ساختهای کلی که انجام دادیم و بیان آنها به وسیله مثالهای عددی آسان نیست. اینک به پیدا کردن ضابط ملموستری در $U \otimes V$ می‌پردازیم.

(۹.۲۸) تعریف. هر فضای برداری $U \otimes V$ که در شرطهای قضیه پیش صدق کند، یک حاصلضرب تانسوری U و V نامیده می‌شود. نگاشت دوخطی

$$t: U \times V \rightarrow U \otimes V$$

با

$$t(u, v) = u \otimes v$$

نشان داده خواهد شد.

تبصره. توجه می‌کنیم که حاصلضرب $u \otimes v$ دارای ویژگیهای زیر است، که همه از برهان قضیه استخراج شده‌اند.
الف) $u \otimes v$ دوخطی است:

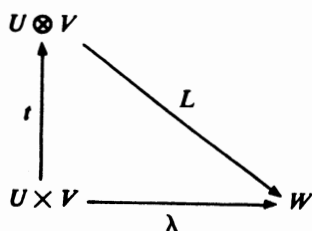
$$(\alpha u + \beta u') \otimes v = \alpha(u \otimes v) + \beta(u' \otimes v)$$

$$u \otimes (\alpha v + \beta v') = \alpha(u \otimes v) + \beta(u \otimes v')$$

برای همه بردارها و اسکالرهایی موجود در آنها.

ب) عناصر $u \otimes v$ فضای $U \otimes V$ را تولید می‌کنند: هر عنصر $U \otimes V$ می‌تواند به صورت یک ترکیب خطی

$$\alpha_1(u_1 \otimes v_1) + \cdots + \alpha_k(u_k \otimes v_k), \quad u_i \in U, v_i \in V$$



شکل ۲.۸

بیان شود.

پ) برای هر تابع دوطرفه $\lambda : U \times V \rightarrow W$ ، یک تبدیل خطی $L : U \otimes V \rightarrow W$ موجود است به گونه‌ای که

$$L(u \otimes v) = \lambda(u, v)$$

برای هر $u \in U$ ، $v \in V$ (شکل ۲.۸)

قضیه بعد ویژگیهای اساسی $U \otimes V$ را در حالتی که U و V فضاهای متناهی-بعد هستند، به دست می‌دهد.

(۱۰.۲۸) قضیه. گیریم U و V دوفضای برداری متناهی-بعد روی F ، به ترتیب با پایه‌های $\{u_1, \dots, u_m\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ هستند.

الف) $\{u_i \otimes v_j\}$ برای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ پایه‌ای است برای $U \otimes V$

ب) $\dim(U \otimes V) = (\dim U)(\dim V)$

پ) گیریم $S \in L(U, U)$ ، و $T \in L(V, V)$ ، و فرض کنیم A و B به ترتیب ماتریسهای S و T نسبت به پایه‌های $\{u_i\}$ و $\{v_j\}$ باشند. در این صورت یک تبدیل خطی

$$S \otimes T : U \otimes V \longrightarrow U \otimes V$$

موجود است، به گونه‌ای که برای هر $u \in U$ و $v \in V$

$$(S \otimes T)(u \otimes v) = S(u) \otimes T(v)$$

ماتریس $S \otimes T$ نسبت به پایه مرتب

$$\{u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \dots, u_2 \otimes v_n, \dots, u_m \otimes v_1, \dots, u_m \otimes v_n\}$$

به شکل زیر داده می‌شود:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \alpha_{1n}B \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & \alpha_{mn}B \end{pmatrix}$$

بنابراین C یک ماتریس mn در mn است که از m سطر و n ستون از بلوکهای n در n تشکیل شده است، که بلوک واقع در بلوک سطر i ام و بلوک ستون j ام با $\alpha_{ij}B$ داده می‌شود. ماتریس C با

$$C = A \times B$$

نشان داده می‌شود و حاصلضرب تانسوری (یا حاصلضرب کرونگرا) A و B نامیده می‌شود. برهان. الف) گیریم $u = \sum \alpha_i u_i \in U, v = \sum \beta_j v_j \in V$ در این صورت، بنابر دو خطی بودن $u \otimes v$

$$u \otimes v = \left(\sum \alpha_i u_i \right) \otimes \left(\sum \beta_j v_j \right) = \sum \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j)$$

و ثابت کردیم که بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$ از $U \otimes V$ را تولید می‌کنند. برای اثبات اینکه بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$ نایسته‌خطی‌اند، کافی است ثابت کنیم که $\dim U \otimes V \geq mn$ (چرا؟). این مطلب وقتی نتیجه می‌شود که بتوانیم یک تبدیل خطی L از $U \otimes V$ بر یک فضای برداری W از بعد mn بیابیم. این شیوه غیرمستقیم به این سبب لازم است که همه آنچه درباره $U \otimes V$ می‌دانیم این است که می‌توانیم تحت شرایطی تبدیلیهایی خطی در $L(U \otimes V, W)$ به‌دست آوریم. در ساختن L توان کامل نظریه فضاهای برداری دوگان، از بخش ۲۷ مورد استفاده قرار می‌گیرد. گیریم U^* فضای دوگان U ، و $B(u, u^*)$ صورت دوخطی ناتبگون روی $U \times U^* \rightarrow F$ است که با رابطه

$$B(u, u^*) = u^*(u), \quad u \in U, u^* \in U^*$$

داده می‌شود. گیریم $u \in U, v \in V$ ، و یک تبدیل خطی $u \times v \in L(U^*, V)$ را با

$$(u \times v)(u^*) = B(u, u^*)v$$

تعریف می‌کنیم. بررسی اینکه $u \times v$ در حقیقت یک تبدیل خطی است، بعلاوه، نگاشت

$$\lambda : (u, v) \rightarrow u \times v$$

یک نگاشت خطی از $U \times V \rightarrow L(U^*, V)$ است، به خواننده واگذار می‌شود. بنا بر قضیه (۵.۲۸) یک تبدیل خطی

$$L : U \otimes V \longrightarrow L(U^*, V)$$

وجود دارد به‌گونه‌ای که

$$L(u \otimes v) = u \times v$$

اینک کافی است ثابت کنیم که $L, U \otimes V$ را بر $L(U^*, V)$ می‌نگارد، زیرا $\dim L(U^*, V) = mn$.
گیریم $T \in L(U^*, V)$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای از V است. در این صورت برای $u^* \in V^*$ داریم

$$T(u^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i,$$

با ضرایب $\xi_i \in F$ که به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. ضریبهای ξ_i تابعهایی از u^* هستند،

$$T(u^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i(u^*) v_i$$

در حقیقت تابعهای خطی روی U^* اند، زیرا برای مثال

$$\begin{aligned} T(u_1^* + u_2^*) &= \sum_{i=1}^n \xi_i(u_1^* + u_2^*) v_i \\ &= T(u_1^*) + T(u_2^*) = \sum \xi_i(u_1^*) v_i + \sum \xi_i(u_2^*) v_i \end{aligned}$$

در این صورت

$$\sum \xi_i(u_1^* + u_2^*) v_i = \sum (\xi_i(u_1^*) + \xi_i(u_2^*)) v_i$$

و از مقایسه ضریبها (چون $\{v_i\}$ ها نایسته-خطی‌اند)، داریم

$$\xi_i(u_1^* + u_2^*) = \xi_i(u_1^*) + \xi_i(u_2^*), \quad 1 \leq i \leq n$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد

$$\xi_i(\alpha u^*) = \alpha \xi_i(u^*), \quad u^* \in U^* \quad \alpha \in F$$

اینک می‌توانیم قضیه (۳.۲۷) را برای به‌دست آوردن عناصر $\{u_1, \dots, u_m\}$ در U به‌گونه‌ای که

$$1 \leq i \leq n \quad \text{برای} \quad B(u_i, u^*) = \xi_i(u^*)$$

به‌کار ببریم و از این رو

$$T(u^*) = \sum_{i=1}^n \xi_i(u^*) v_i = \sum_{i=1}^n B(u_i, u^*) v_i$$

بنابراین

$$T = \sum_{i=1}^n u_i \times v_i$$

پس

$$L(\sum u_i \otimes v_i) = \sum u_i \times v_i = T$$

و ثابت کردیم که L پوشاست. چون $\dim L(U^*, V) = mn$ ، داریم $\dim(U \otimes V) \geq mn$ و نتیجه می‌شود که بردارهای $\{u_i \otimes v_j\}$ نایسته‌خطی‌اند. این برهان قسمت (الف) را کامل می‌کند. (ب) بخش (ب) نتیجهٔ بیدرنگ قسمت (الف) است. (پ) نخست از این حقیقت که S و T خطی هستند و $u \otimes v$ یک تابع دوخطی است، استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که تابع

$$\mu : (u, v) \rightarrow S(u) \otimes T(v), \quad u \in U, \quad v \in V$$

یک نگاشت دوخطی از $U \times V \rightarrow U \otimes V$ است. بنابر قضیهٔ (۵.۲۸) یک تبدیل خطی در $L(U \otimes V, U \otimes V)$ هست که با $S \otimes T$ نشان می‌دهیم، به‌گونه‌ای که

$$(S \otimes T)(u \otimes v) = S(u) \otimes T(v)$$

اینک باید ماتریس $S \otimes T$ را نسبت به پایهٔ داده شده حساب کنیم. داریم

$$S(u_i) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} u_k, \quad T(v_j) = \sum_{l=1}^n \beta_{lj} v_l$$

که در آن $\mathbf{B} = (\beta_{kl})$ ، $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ ماتریسهای S و T نسبت به پایه‌های داده شده هستند. دراین صورت

$$(S \otimes T)(u_i \otimes v_j) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \alpha_{ki} \beta_{lj} (u_k \otimes v_l)$$

برای یافتن ماتریس $S \otimes T$ نسبت به پایهٔ مرتب $U \otimes V$ یعنی

$$\{u_1 \otimes v_1, \dots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \dots, u_2 \otimes v_n, \dots\}$$

به‌طور ساده ستون ماتریس $S \otimes T$ را می‌نویسیم که $(S \otimes T)(u_i \otimes v_j)$ را به‌طور مرتب برحسب پایهٔ انتخابی برای $U \otimes V$ به‌دست می‌دهد. این در شکل (۳.۸) نشان داده شده است.

	$u_i \otimes v_j$
$u_1 \otimes v_1$	$\alpha_{1i} \beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_1 \otimes v_n$	$\alpha_{1i} \beta_{nj}$
$u_2 \otimes v_1$	$\alpha_{2i} \beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_2 \otimes v_n$	$\alpha_{2i} \beta_{nj}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_m \otimes v_1$	$\alpha_{mi} \beta_{1j}$
$\vdots$	$\vdots$
$u_m \otimes v_n$	$\alpha_{mi} \beta_{nj}$

شکل ۳.۸

این یادداشتهای نشان می‌دهند که ماتریس $S \otimes T$ دارای شکل مطلوب است و برهان قضیه کامل می‌شود.

برای استفاده از ضرب تانسوری، لازم نیست که جزئیات برهانهای دو قضیه اخیر را، که بدون شک برای خواننده‌های صبور خسته‌کننده هستند، به تفصیل به‌خاطر آوریم. همه حقایق اصلی در صورتهای این قضیه‌ها و تبصره (الف) پس از قضیه (۵.۲۸) درج شده است. اکنون چند حقیقت ساده ولی مهم، درباره حاصلضرب تانسوری تبدیلات خطی را بیان می‌کنیم.

(۱۱.۲۸) قضیه. فرض می‌کنیم U و V فضاهای برداری متناهی-بعد روی F هستند.

(الف) گیریم $S_1, S_2 \in L(U, U)$ و $T_1, T_2 \in L(V, V)$ پس

$$(S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2) = S_1 S_2 \otimes T_1 T_2$$

(ب) گیریم A_1 و A_2 ماتریسهای m در m و B_1 و B_2 ماتریسهای n در n هستند. در این

صورت

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2$$

حاصلجمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری ۲۹۷

(پ) گیریم $S \in L(U, U)$ و $T \in L(V, V)$. دراین صورت اثر $S \otimes T$ با تساوی

$$\text{Tr}(S \otimes T) = (\text{Tr}S)(\text{Tr}T)$$

داده می شود.

برهان. الف) چون بردارهای $u \otimes v$ ، $U \otimes V$ را پدید می آورند، کافی است ثابت کنیم که وقتی دوطرف تساوی را بر $u \otimes v$ اثر دهیم، معادله برقرار است. با استفاده از تعریفهای $S_1 \otimes T_1$ ، $S_2 \otimes T_2$ از قضیه (۱۰.۲۸)، داریم

$$\begin{aligned} (S_1 \otimes T_1)(S_2 \otimes T_2)(u \otimes v) &= (S_1 \otimes T_1)(S_2(u) \otimes T_2(v)) \\ &= S_1 S_2(u) \otimes T_1 T_2(v) \end{aligned}$$

همان چیزی که می خواستیم.

بخش (ب) از الف) نتیجه می شود، زیرا $A_1 \times B_1$ ، $A_2 \times B_2$ و $A_1 A_2 \times B_1 B_2$ ماتریسهای $S_1 \otimes T_1$ ، $S_2 \otimes T_2$ و $S_1 S_2 \otimes T_1 T_2$ نسبت به یک پایه $U \otimes V$ هستند. (خواننده باید توجه کند که در اینجا یک حقیقت تازه و جالبی را درباره ماتریس حاصلضرب ثابت کرده ایم.) برای اثبات (پ)، از این حقایق استفاده می کنیم که (i) اثر تبدیل خطی $S \otimes T$ همان اثر ماتریس $A \times B$ متناظر با تبدیل خطی نسبت به یک پایه است، و (ii) اثر هر ماتریس، بنابر بخش ۲۴، برابر است با مجموع عناصر قطری. از بخش (پ)ی قضیه (۱۰.۲۸)، بلوکهای قطری $A \times B$ برابرند با

$$\alpha_{11} B, \dots, \alpha_{mm} B$$

بنابراین عناصر قطری $A \times B$ برابرند با

$$\alpha_{11}\beta_{11}, \dots, \alpha_{11}\beta_{nn}, \alpha_{22}\beta_{11}, \dots, \alpha_{22}\beta_{nn}, \dots, \alpha_{mm}\beta_{11}, \dots, \alpha_{mm}\beta_{nn}$$

که مجموع آنها برابر است با

$$(\alpha_{11} + \dots + \alpha_{mm})(\beta_{11} + \dots + \beta_{nn}) = (\text{Tr}A)(\text{Tr}B)$$

همان گونه که می خواستیم، نشان دهیم. لذا برهان قضیه کامل می شود.

مقدمه خود بر حاصلضربهای تانسوری را با یک کاربرد مهم پایان می دهیم. کاربردها و مثالهای دیگر در تمرینها داده شده اند. شرح و تفصیل در بقیه این بخش بسیار متراکمتر از معمول خواهد بود، و چند مرحله از این بحث به عهده خواننده واگذار می شود.

(۱۲.۲۸) قضیه. (شرکتپذیری حاصلضرب تانسوری). گیریم V_1 ، V_2 و V_3 فضاهای برداری متناهی-بعدی روی F هستند. یک یکریختی از فضاهای برداری بین $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4$ و $(V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4)$ وجود دارد، که برای هر $v_1 \in V_1$ ، $v_2 \in V_2$ ، $v_3 \in V_3$ ، $v_4 \in V_4$ داریم:

$$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \rightarrow (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

برهان. گیریم $\{v_{1i}\}$ پایه‌ای است برای V_1 ، $\{v_{2j}\}$ پایه‌ای برای V_2 ، و $\{v_{3k}\}$ پایه‌ای برای V_3 . بنابر قضیه (۱۰.۲۸)، بردارهای $\{v_{1i} \otimes (v_{2j} \otimes v_{3k})\}$ پایه‌ای برای $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ تشکیل می‌دهند، درحالی‌که بردارهای $\{(v_{1i} \otimes v_{2j}) \otimes v_{3k}\}$ پایه‌ای برای $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ تشکیل می‌دهند. یک تبدیل خطی T وجود دارد که $v_{1i} \otimes (v_{2j} \otimes v_{3k}) \rightarrow (v_{1i} \otimes v_{2j}) \otimes v_{3k}$ را، برای هر i, j, k ، به‌رومی $(v_{1i} \otimes v_{2j}) \otimes v_{3k}$ می‌برد، و T یک یکریختی از فضاهای برداری است. این حقیقت که این یکریختی، $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ را، برای هر $v_1 \in V_1$ ، $v_2 \in V_2$ ، $v_3 \in V_3$ ، به‌رومی $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ می‌برد، با بسط v_1 ، v_2 ، v_3 به‌صورت ترکیبهای خطی به‌ترتیب از عناصر پایه‌های $\{v_{1i}\}$ ، $\{v_{2j}\}$ و $\{v_{3k}\}$ به‌آسانی بررسی می‌شود.

ما $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ را با $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ یکی می‌گیریم و آن را فضای برداری $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ (بدون پرانتز) خواهیم نامید. همچنین عناصر $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ متناظر با $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ را به‌صورت $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ خواهیم نوشت. البته درباره ضرب تانسوری سه فضای برداری چیز خاصی وجود ندارد، به‌خوبی می‌توانیم ضرب تانسوری فضای برداری $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ از m فضای برداری $V_1, \dots, V_m$ را تشکیل دهیم. عناصر $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_m$ مجموعه‌ای

$$\sum v_{1i_1} \otimes v_{2i_2} \otimes \dots \otimes v_{mi_m}$$

با

$$v_{1i_1} \in V_1, v_{2i_2} \in V_2, \dots, v_{mi_m} \in V_m$$

هستند.

(۱۳.۲۸) تعریف. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد و k عددی است صحیح مثبت. حاصلضرب تانسوری k -تایی $(V)_k$ (یا فضای برداری تانسورهای k -تایی روی V) فضای برداری $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$ (k عامل) است. عناصر $(V)_k$ تانسورهای k -تایی نامیده می‌شوند و مجموعه‌ای هستند به‌صورت

$$t = \sum_{(i)} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_k}, \quad v_{i_j} \in V$$

که در آن مجموع روی مجموعه‌ای از k -تاییهای $(i) = (i_1, \dots, i_k)$ گرفته می‌شود، که برای فهرست کردن بردارهای V که در تانسور t هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

حاصل‌جمعهای مستقیم و حاصلضربهای تانسوری ۲۹۹

اینک چگونگی تعریف عملهای تقارن را روی فضای تانسوری $\otimes_k(V)$ نشان می‌دهیم. گیریم σ جایگشتی است از مجموعه $\{1, 2, \dots, k\}$ (بخش ۱۹). یک تبدیل خطی $S_\sigma \in L(\otimes_k V, \otimes_k V)$ وجود دارد به گونه‌ای که برای همه مقادیر $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \in V$

$$S_\sigma(v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k}) = v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes v_{i_{\sigma(k)}}$$

توجه کنید که S_σ مجموعه بردارهای $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ را در تانسور $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k}$ عوض نمی‌کند؛ تنها ترتیب آرایش آنها را عوض می‌کند. برای مثال، در $\otimes_2 V$ ، گیریم $\sigma = (12)$ ، در این صورت

$$S_\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$$

برای همه بردارهای $v, w \in V$. به‌ویژه $S_\sigma(v \otimes v) = v \otimes v$ وجود S_σ به‌آسانی با تعریف S_σ روی یک پایه $\otimes_k V$ نشان داده می‌شود.

(۱۴.۲۸) تعریف. تانسور $t \in \otimes_k V$ متقارن نامیده می‌شود اگر برای همه جایگشتهای σ از $\{1, 2, \dots, k\}$ ، $S_\sigma t = t$ ، و متقارن چپ نامیده می‌شود اگر $(\sigma)t = \varepsilon(\sigma)t$ ، که در آن $\varepsilon(\sigma)$ علامت σ است [تعریف (۱۶.۱۹)].

مثال الف. در $\otimes_2 V$ ، تانسورهایی به شکل $\{v \otimes v | v \in V\}$ متقارن هستند، در حالی که تانسورهای به شکل $\{v \otimes w - w \otimes v | v, w \in V, v \neq w\}$ متقارن چپ هستند. هدف ما مطالعه فضای تانسورهای متقارن چپ در $\otimes_k V$ است. خواهیم دید که این تانسورها جنبه‌هایی دارند که بسط‌دهنده مهم‌ترین ویژگیهای تابع درمینان هستند.

(۱۵.۲۸) قضیه. الف) مجموعه تانسورهای متقارن چپ در $\otimes_k V$ زیر فضایی تشکیل می‌دهند، که با $\wedge_k(V)$ (بخوانید: حاصلضرب گوهی k تایی V) نشان داده خواهد شد. ب) گیریم $v_1, \dots, v_k$ بردارهایی در V هستند. در این صورت

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) (v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)})$$

برای همه مقادیر $\{v_i\}$ در V ، عضوی از $\wedge_k(V)$ است.

پ) حاصلضرب گوهی $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ دارای ویژگیهای زیر است:

(i) $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ خطی است، وقتی به‌عنوان تابعی از هر عامل نگریسته شود، برای مثال،

$$\begin{aligned} (\alpha v_1 + \beta v'_1) \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k &= \alpha(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) \\ &+ \beta(v'_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k) \end{aligned}$$

(ii)

$$\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_k}_{i \quad j} = - \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k}_{i \quad j}$$

۳۰۰ فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

(به شباهت با ویژگیهای تابع دترمینان توجه کنید.)

ت) $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$ ، اگر و تنها اگر بردارهای $v_1, \dots, v_k$ نایسته-خطی باشند.

ث) گیریم $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V است. در این صورت بردارهای

$$\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}, i_1 < i_2 < \dots < i_n\}$$

پایه‌ای برای $\wedge_k V$ هستند.

تبصره. پیش از بیان برهان، خاطر نشان می‌سازیم که (ت) موجب توسیع گسترده این مفهوم می‌شود که سرانجام به تابع-ترمینان منجر می‌شود. دترمینان، آزمونی برای نایستگی خطی مجموعه‌ای از n بردار در یک فضای برداری n بعدی به دست می‌دهد. قسمت (ت) آزمون مشابهی به دست می‌دهد که در مورد k بردار، $k = 1, 2, \dots$ ، در یک فضای n بعدی به کار می‌رود.

برهان. الف) این واقعیت که تانسورهای متقارن چپ از $\otimes_k V$ یک زیر فضا تشکیل می‌دهند بی‌درنگ از این حقیقت که عملگرهای متقارن S_σ ، تبدیلیهای خطی هستند نتیجه می‌شود.

ب) گیریم τ جایگشتی از $\{1, 2, \dots, k\}$ است. در این صورت

$$\begin{aligned} S_\tau(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) (v_{\sigma\tau(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= \varepsilon(\tau) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma\tau) (v_{\sigma\tau(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma\tau(k)}) \\ &= \varepsilon(\tau) (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \end{aligned}$$

زیرا بنا بر بخش ۱۹، $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ ، نگاشت $\sigma \rightarrow \sigma\tau$ اصلاً تجدید آرایشی از جایگشتهای $\{1, 2, \dots, k\}$ است.

پ) ویژگی (i) واضح است، و ویژگی (ii) از تأثیر S_σ ، که σ ترانهش (ij) است، بر $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ نتیجه می‌شود.

ت) اگر $v_1, \dots, v_k$ نایسته-خطی باشند، آنگاه بنابر قسمت (پ) و عیناً استدلال مذکور در بخش ۱۶ برای اثبات نتیجه مشابهی در مورد دترمینانها، $v_1 \wedge \dots \wedge v_k = 0$.

اینک فرض می‌کنیم $v_1, \dots, v_k$ نایسته-خطی اند. بردارهای $v_{k+1}, \dots, v_n$ را به گونه‌ای می‌یابیم که $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت بردارهایی که در مجموع معرّف $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ وجود دارند متمایزند و قسمتی از پایه $\otimes_k V$ را تشکیل می‌دهند. از این رو $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$.

ث) بردارهای $\{v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_k} \mid 1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n\}$ پایه‌ای برای $\otimes_k V$ تشکیل می‌دهند. گیریم

$$t = \sum \alpha_{j_1 \dots j_k} (v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_k}), \quad \alpha_{j_1 \dots j_k} \in F$$

تمرینها ۳۰۱

یک تانسور دلخواه متقارن چپ است، و فرض می‌کنیم که برای مجموعه‌ای از اندیسهای $(j_1, \dots, j_k)$ داشته باشیم $\alpha_{j_1, \dots, j_k} \neq 0$. از تعریف تانسورهای متقارن چپ، و مقایسهٔ ضریبها، نتیجه می‌شود که برای همهٔ جایگشتهای σ از $\{1, 2, \dots, k\}$

$$\alpha_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(k)}} = \varepsilon(\sigma) \alpha_{j_1 \dots j_k}$$

بنابراین

$$t \pm \alpha_{j_1 \dots j_k} (v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k})$$

یک تانسور متقارن چپ است با عاملهای جمع ناصفری که تعداد آنها کمتر از t است. از ادامه به روش استقراء، نتیجه می‌شود که t ترکیبی است خطی از بردارهایی به شکل $\{v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}\}$. چون $v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}$ برابر $\pm v'_{j_1} \wedge \dots \wedge v'_{j_k}$ است با $j'_1 < j'_2 < \dots < j'_k$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که بردارهای به شکل مطلوب، $\wedge_k(V)$ را تولید می‌کنند. سرانجام آشکار است که بردارهای $\{v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k} \mid j_1 < \dots < j_k\}$ نایسته-خطی‌اند، زیرا شامل مجموعه‌های متفاوتی از بردارهای پایهٔ $\otimes_k(V)$ هستند. بدین ترتیب برهان قضیه کامل می‌شود.

تمرینها

در همهٔ این تمرینها فضاهاى بردارى موجود متناهی-بعد فرض می‌شوند.

۱. $A_1 \times B_1$ ، $A_2 \times B_2$ و $(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2)$ را حساب کنید، که در آن

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که نتیجهٔ نهایی با $A_1 A_2 \times B_1 B_2$ یکی است.

۲. گیریم $\{u_1, \dots, u_k\}$ بردارهایی نایسته-خطی در U و $\{v_1, \dots, v_k\}$ بردارهایی دلخواه در V هستند. نشان دهید که $\sum u_i \otimes v_i = 0$ در $U \otimes V$ مستلزم تساوی $v_1 = \dots = v_k = 0$ است.

۳. گیریم $S \in L(U, U)$ ، $T \in L(V, V)$ ، و α و β به ترتیب ویژه مقدارهای S و T ، متناظر با ویژه بردارهای $u \in U$ و $v \in V$ باشند. ثابت کنید که در $U \otimes V$ (مثلاً با استفاده از تمرین ۲)، $u \otimes v \neq 0$ و یک ویژه بردار $S \otimes T$ متعلق ویژه مقدار $\alpha\beta$ است.

۵. گیریم $S, T \in L(U, U)$ و فرض می‌کنیم که هیأت پایه جبری-بسته است. ثابت کنید که هر ویژه مقدار $S \otimes T$ را می‌توان به شکل $\alpha\beta$ بیان کرد که در آن α و β به ترتیب ویژه مقدارهای S و T هستند.

۶. الف) ثابت کنید که هر تبدیل خطی $T \in L(U, V)$ می‌تواند به شکل $\sum f_i \times v_i$ با $\{f_i\}$ در U^* و $\{v_i\}$ در V بیان شود، که در آن $f \times v$ تبدیلی است خطی در $L(U, V)$ که با $(f \times v)(u) = f(u)v$ ، $f \in U^*$ ، $u \in U$ ، $v \in V$ تعریف می‌شود. [راهنمایی: برهان قضیه (۲۸.۱) را دنبال کنید].

ب) گیریم $X \in L(U, V)$ بنابر قسمت (الف) به صورت $\sum f_i \times v_i$, $f_i \in U^*$, $v_i \in V$ بیان شود. فرض می‌کنیم $S \in L(U, U)$, $T \in L(V, V)$. نشان دهید که

$$(\sum f_i \times v_i)S = \sum S^* f_i \times v_i$$

که در آن S^* ترانهاده S است. همچنین نشان دهید که

$$T(\sum f_i \times v_i) = \sum f_i \times Tv_i$$

پ) ثابت کنید که $U^* \otimes V$ با $L(U, V)$ یکرخت است، و $\sum f_i \otimes v_i \rightarrow \sum f_i \times v_i$ این یکرختی را می‌دهد. با فرض S, T ، همانگونه که در قسمت (ب) بودند. $S^* \otimes T$ روی $L(U, V)$ از طریق یکرختی $L(U, V)$ با $U^* \otimes V$ به روش زیر عمل می‌کند

$$(S^* \otimes T)(\sum f_i \times v_i) = \sum S^* f_i \times T v_i = T(\sum f_i \times v_i) S$$

ت) ثابت کنید که هر $T \in L(U, V)$ می‌تواند به شکل $\sum f_i \times v_i$ ، که $\{v_i\}$ نایسته خطی است، بیان شود، و در این حالت رتبه T برابر شماره عوامل جمع ناصفر در $\sum f_i \times v_i$ است.

ث) گیریم $T \in L(U, V)$ به شکل $\sum f_i \times v_i$ بیان شود. ثابت کنید که اثر T با $\sum f_i(v_i)$ داده می‌شود.

۷. بگیریم $S \in L(U, U)$ و $T \in L(V, V)$ و فرض می‌کنیم هیأت پایه جبری-سته است و S و T وارونپذیرند. ثابت کنید که در $L(U, V)$ یک تبدیل خطی $X \neq 0$ موجود است به گونه‌ای که $XS = TX$ ، در این حالت S و T ویژه مقدار مشترکی دارند. [راهنمایی با استفاده از تمرین ۶، X را به شکل $X = \sum f_i \times v_i$ ، $f_i \in U^*$ ، $v_i \in V$ بگیرید. در این صورت $XS = TX$ ایجاب می‌کند $T^{-1}XS = X$ ، لذا، بنابر قسمت (ب) از ۵،

$$(S^* \otimes T^{-1})X = X$$

تمرینها ۳۰۳

و $S^* \otimes T^{-1}$ دارای ویژه مقداری برابر ۱ است. با استفاده از تمرین ۵، و ویژگیهای ویژه مقدارهای S^* و T^{-1} ، نشان دهید که ویژه مقدارهای α ئی از S و β ئی از T وجود دارند به گونه‌ای که $[\alpha\beta^{-1} = 1$.

۸. گیریم $V \otimes W$ و $V \otimes' W$ دو فضای برداری هستند که هر دو در تعریف حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری V و W ، به ترتیب نسبت به نگاشت‌های دوخطی $t: V \times W \rightarrow V \otimes W$ و $t': V \times W \rightarrow V \otimes' W$ صدق می‌کنند.

الف) ثابت کنید که تبدیلیهای خطی $S: V \otimes W \rightarrow V \otimes' W$ و $T: V \otimes' W \rightarrow V \otimes W$ موجودند به گونه‌ای که $TS = 1$ و $ST = 1$.

ب) ثابت کنید که S و T هر دو یکریختیهای فضای برداری هستند. (این مسأله نشان می‌دهد که حاصلضرب تانسوری فضای برداری با ویژگیهای معرفش به طور یکتا تعریف می‌شود.)

۹. الف) گیریم V و W دو فضای برداری روی F باشند و $B(V, W)$ مجموعه همه صورت‌های دو خطی به شکل $f: V \times W \rightarrow F$ باشد. نشان دهید که $B(V, W)$ زیر فضایی از فضای برداری تابعهای $\mathcal{F}(V \times W)$ است.

ب) ثابت کنید که فضای دوگان $B(V, W)^*$ ، نسبت به نگاشت دوخطی

$$b: V \times W \rightarrow B(V, W)^*$$

که با تساوی

$$b(v, w)(f) = f(v, w), \quad f \in B(V, W), v \in V, w \in W$$

تعریف می‌شود، در تعریف حاصلضرب تانسوری صدق می‌کند.

۱۰. گیریم $\wedge_k(V)$ حاصلضرب گروهی k تایی از V است و $\dim V = n$. ثابت کنید که $\dim \wedge_k(V) = \binom{n}{k}$ (ضریب دو جمله‌ای).

۱۱. گیریم $T \in L(V, V)$. قضیه (۱۰.۲۸) را تعمیم دهید تا ثابت کنید که یک تبدیل خطی $T^{(k)}$ از $\wedge_k(V)$ وجود دارد به گونه‌ای که برای همه $v_i \in V$ ها

$$T^{(k)}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = T(v_1) \otimes \dots \otimes T(v_k)$$

ثابت کنید که برای هر $T \in L(V_1, V)$ ، $\wedge_k(V)$ یک زیر فضای پایا نسبت به $T^{(k)}$ است.

۱۲. گیریم $\dim V = n$ ، و $(v_1, \dots, v_n)$ پایه‌ای برای V است. ثابت کنید که تانسور $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ پایه‌ای است برای $\wedge_n(V)$. گیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید که برای هر $T \in L(V, V)$

$$T^{(n)}(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = D(T)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$$

(راهنمایی: از یکتایی تابع درمیان، که در بخش ۱۷ ثابت شد، استفاده کنید.)

۲۹. برهانی برای قضیهٔ مقسوم علیه مقدماتی

قضیه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم [قضیهٔ (۸.۲۵)] بیان می‌کند که اگر $T \in L(V, V)$ مخالف صفر و V یک فضای برداری متناهی-بعد روی هیأت دلخواه F باشد، قضیه‌های زیر برقرارند.

(۱.۲۹) بردارهای $\{v_1, \dots, v_r\}$ وجود دارند، که مرتبه‌های آنها توانهای اول $\{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$ در $F[x]$ و به گونه‌ای هستند که V مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری نسبت به T است که توسط $\{v_1, \dots, v_r\}$ تولید شده‌اند.

(۲.۲۹) فرض می‌کنیم

$$V = \langle v_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle v_r \rangle = \langle v'_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle v'_s \rangle$$

که در آن $\{v_i\}$ و $\{v'_i\}$ به ترتیب دارای مرتبه‌های توان اول

$$\{q_1(x)^{f_1}, \dots, q_s(x)^{f_s}\} \quad \text{و} \quad \{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$$

هستند. در این صورت $r = s$ و چندجمله‌یهای

$$\{q_1(x)^{f_1}, \dots, q_s(x)^{f_s}\} \quad \text{و} \quad \{p_1(x)^{e_1}, \dots, p_r(x)^{e_r}\}$$

با تقریب یک تجدید آرایش، یکی هستند.

نخست چند قضیهٔ ابتدایی را که منجر به اثبات (۱.۲۹) می‌شود ثابت می‌کنیم. گیریم

$$m(x) = h_1(x)^{c_1} \dots h_m(x)^{c_m}$$

چندجمله‌ی مینیمال T است، که در $F[x]$ به صورت حاصلضرب توانهای چندجمله‌یهای اول $\{h_1(x)^{c_1}, \dots, h_m(x)^{c_m}\}$ تجزیه شده است. بنابر قضیهٔ (۹.۲۳)

$$V = V_1 \otimes \dots \otimes V_m \quad (۳.۲۹)$$

که در آن هر زیر فضای V_i مخالف صفر و صفر-فضای $h_i(T)^{c_i}$ ، $1 \leq i \leq m$ ، است. بعلاوه، هر V_i نسبت به T پایاست. اگر T_i معرّف تحدید T نسبت به زیر فضای V_i باشد، روی V_i داریم $h_i(T_i)^{c_i} = 0$. بنابراین $h_i(x)^{b_i}$ چندجمله‌ی مینیمال T_i برای $b_i \leq c_i$ است. فرض کنید که بتوانیم (۱.۲۹) را برای هر یک از تبدیلهای خطی T_i ، $1 \leq i \leq m$ ، ثابت کنیم، پس

$$V_i = \langle v_{ij} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{ik} \rangle, \quad 1 \leq i \leq m$$

در این صورت هر T_i -فضای دوری $\langle v_{ij} \rangle$ نیز نسبت به T یک زیر فضای دوری است که مرتبهٔ مولد آن v_{ij} توانی از $h_i(x)$ است. از روی هم گذاردن این قضیه‌ها به نوبهٔ خود برای فضاهای

برهانی برای قضیه مقسوم علیه مقدماتی ۳۰۵

$\{V_1, \dots, V_m\}$ و استفاده از (۳.۲۹) قضیه (۱.۲۹) را به دست می آوریم. نشان داده ایم که کافی است (۱.۲۹) را برای یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ که چندجمله ای مینیمال آن توانی از یک اول است، ثابت کنیم.

(۴.۲۹) تعریف. یک زیرفضای T -پایای ناصفر W از V ، تجزیه ناپذیر نامیده می شود به شرط اینکه بتوان W را به صورت یک مجموع مستقیم زیرفضاهای T -پایا نوشت.

(۵.۲۹) لم. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد مخالف صفر باشد، و $T \in L(V, V)$. در این صورت V یک مجموع مستقیم زیرفضاهای T -پایاست.

برهان. از استقراء روی $\dim(V)$ استفاده می کنیم. اگر V از اول تجزیه ناپذیر باشد که حرفی نداریم. اگر نباشد، پس $V = V_1 \oplus V_2$ ، که در آن V_1 و V_2 زیرفضاهای T -پایای ناصفرند. با فرض اینکه T_1 و T_2 به ترتیب نمایش تحدیدهای T به زیرفضاهای V_1 و V_2 هستند و باتوجه به $\dim(V_1) < \dim(V)$ و $\dim(V_2) < \dim(V)$ ، می توانیم فرض استقراء را به کار برده و نتیجه بگیریم که

$$V_1 = V_{11} \oplus \dots \oplus V_{1k}, \quad V_2 = V_{21} \oplus \dots \oplus V_{2k'},$$

که در آن زیرفضاهای V_{1i} ، $1 \leq i \leq k$ ، تجزیه ناپذیر و نسبت به T_1 پایا و زیرفضاهای V_{2j} ، $1 \leq j \leq k'$ ، تجزیه ناپذیر و نسبت به T_2 پایا هستند. همه زیرفضاهای $\{V_{ij}\}$ تجزیه ناپذیر و نسبت به T پایا بوده و مجموع مستقیم آنها V است، در نتیجه برهان لم کامل می شود. اینک به موجب لم (۵.۲۹) و تبصره های بالا، اثبات (۱.۲۹) به اثبات قضیه زیر تبدیل می شود.

(۶.۲۹) قضیه. گیریم V یک فضای برداری متناهی-بعد، مخالف صفر، روی هیأت دلخواه F است و فرض می کنیم $T \in L(V, V)$ تبدیلی است خطی که چندجمله ای مینیمال آن یک توان اول $p(x)^a$ و به گونه ای است که V نسبت به T تجزیه ناپذیر است. در این صورت V نسبت به T دوری است.

برهان. نخست می گوئیم که یک بردار $v_1 \in V$ وجود دارد که مرتبه آن با چندجمله ای مینیمال $p(x)^a$ از T برابر است. اگر چنین نباشد، آنگاه برای هر $v \neq 0$ در V ، بنابر لم (۷.۲۵)، مرتبه v باید $p(x)^b$ برای $b < a$ باشد، و باید داشته باشیم $V = p(T)^{a-1}V = 0$ ، که مخالف تعریف چندجمله ای مینیمال است.

اثبات قضیه (۶.۲۹) بدین ترتیب صورت می گیرد که نشان می دهیم اگر زیرفضای دوری $v_1 > 0$ نسبت به T برابر V نباشد، آنگاه V مجموع مستقیم زیر است

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus W$$

که W یک زیرفضای T -پایای غیرصفر است، و این مغایر با فرض تجزیه ناپذیر بودن V نسبت به

۳۰۶ فضاهای برداری دوگان و جبر چندخطی

T است. این برهان در واقع، یکی از کاربردهای نظریه فضاهای برداری دوگان است. (بخشهای ۲۶ و ۲۷).

گیریم V^* فضای دوگان V است؛ پس V و V^* فضاهای برداری دوگان نسبت به صورت دوخطی ناتباهیده $B(v, v^*)$ هستند، که در آن $B(v, v^*)$ برابر مقدار تابع خطی $v^* \in V^*$ متناظر با بردار $v \in V$ است، یعنی:

$$B(v, v^*) = v^*(v)$$

گیریم T^* ترانزاده T نسبت به (v, v^*) است. در این صورت برای همه چندجمله‌یهای $f(x) \in F[x]$ و برای هر $v \in V$ و $v^* \in V^*$ داریم:

$$B(f(T)v, v^*) = (v, f(T^*)v^*)$$

بنابراین چندجمله‌ی مینیمال T^* نیز $p(x)^a$ است.

اینک گیریم $\perp < v_1 >$ یک پوچساز $< v_1 >$ در V^* است. بنابر بخش ۲۷، $\perp < v_1 >$ نسبت به T^* پایاست، و فضاهای $< v_1 >$ و $V^*/< v_1 >$ نسبت به صورت دوخطی

$$B_*(v, [v^*]) = B(v, v^*)$$

برای $v \in < v_1 >$ و $[v^*] \in V^*/< v_1 >$ یکدیگرند. علاوه تبدیلیهای خطی $T_{< v_1 >}$ و $T_{V^*/< v_1 >}$ بنابر قضیه (۱۲.۲۷)، نسبت به صورت دوخطی B_* ترانزاده یکدیگرند. چندجمله‌ی مینیمال $T_{< v_1 >}$ بنابر لم (۶.۲۵)، برابر مرتبه v_1 و لذا بنابر گزینش v_1 برابر $p(x)^a$ است. به موجب تبصره‌ای درباره چندجمله‌ی مینیمال یک ترانزاده، تبدیل القایی $T^* = T_{V^*/< v_1 >}$ نیز دارای چندجمله‌ی مینیمال $p(x)^a$ است. بنابر قسمت اول برهان، یک بردار $[v_1^*]$ در $V^*/< v_1 >$ وجود دارد که مرتبه‌اش $p(x)^a$ است. گیریم W^* زیرفضایی در V^* باشد که توسط $\{v_1^*, \dots, (T^*)^{d-1}v_1^*\}$ تولیدشده است،

$$W^* = S(v_1^*, T^*v_1^*, \dots, (T^*)^{d-1}v_1^*)$$

که در آن $d = \deg p(x)^a$. در این صورت W^* دارای ویژگیهای زیر است:

(الف) $\dim W^* = d$

(ب) $W^* \cap \perp < v_1 > = \{0\}$

(پ) $T^*(W^*) \subset W^*$

حکماهای (الف) و (ب) از اینجا نتیجه می‌شوند که رابطه

$$\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 (T^* v_1^*) + \dots + \alpha_{d-1} (T^*)^{d-1} v_1^* \in \perp < v_1 >$$

برهانی برای قضیه مقسوم علیه مقدماتی ۳۰۷

در $V^* / \langle v_1 \rangle^\perp$ ایجاب می‌کند که

$$\alpha_1[v_1^*] + \alpha_2 T_1^*[v_1^*] + \dots + \alpha_{d-1} (T_1^*)^{d-1}[v_1^*] = 0$$

و از این رو $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{d-1} = 0$ زیرا مرتبه $[v_1^*]$ همان مرتبه $p(x)^a$ است. حکم (پ) بدین دلیل برقرار است که T^* دارای چندجمله‌یی مینیمال $p(x)^a$ از درجه d است، و از این رو $v_1^* (T^*)^{d-1}$ ترکیبی است خطی از $\{v_1^*, T^* v_1^*, \dots, (T^*)^{d-1} v_1^*\}$. اما چون $\dim \langle v_1 \rangle^\perp = \dim V^* - d$ ، حکمهای (الف) تا (پ) ایجاب می‌کنند که

$$V^* = W^* \oplus \langle v_1 \rangle^\perp$$

و W^* نسبت به T^* پایا باشد. در این صورت بنابر قضیه (۱۲.۲۷)

$$V = (W^*)^\perp \oplus \langle v_1 \rangle^{\perp\perp} = (W^*)^\perp \oplus \langle v_1 \rangle$$

زیرا $\langle v_1 \rangle^{\perp\perp} = \langle v_1 \rangle$. علاوه $(W^*)^\perp$ نسبت به ترانهاد T^* یعنی T پایاست، و ثابت کرده‌ایم که V مجموع مستقیم دو زیرفضای T -پایاست، که این مطلب، برهان قسمت اول قضیه مقسوم علیه مقدماتی را کامل می‌کند. اینک آماده‌ایم که قسمت یکتایی (۲.۲۹)ی قضیه مقسوم علیه مقدماتی را ثابت کنیم. گیریم

$$m(x) = h_1(x)^{c_1} \dots h_t(x)^{c_t}$$

چندجمله‌یی مینیمال T است، که در آن $\{h_i(x)\}$ اول‌هایی در $F[x]$ هستند، و می‌توانیم فرض کنیم که $m(x)$ و همه $h_i(x)$ ها دارای ضریبهای پیشرو یک هستند. مرتبه‌های عنصرهای v_i و v'_i نیز دارای ضریبهای پیشرو یک هستند، و نتیجه می‌شود که هر $p_i(x)$ یا $q_j(x)$ برابر (نه به‌عنوان مضرب اسکالری از) یکی از $h_i(x)$ هاست. بنابر قضیه (۹.۲۳)

$$V = n(h_1(T)^{c_1}) \oplus \dots \oplus n(h_t(T)^{c_t})$$

و هر v_i یا v'_i که مرتبه آن توانی از $h_j(x)$ است مشمول در $n(h_j(T)^{c_j})$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که برای هر j, t ، $1 \leq j \leq t$

$$n(h_j(T)^{c_j}) = \langle v_{j_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{j_{a_j}} \rangle = \langle v'_{k_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle v'_{k_{b_j}} \rangle$$

که در آن $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{a_j}}\}$ و $\{v'_{k_1}, \dots, v'_{k_{b_j}}\}$ به‌ترتیب مولدهایی از زیرفضاهای دوری در (۲.۲۹) هستند که مرتبه‌های آنها توانهایی از $h_j(x)$ هستند. بنابراین کافی است (۲.۲۹) را برای حالتی ثابت کنیم که در آن V به دو طریق مختلف به‌صورت مجموع مستقیم زیرفضاهای دوری بیان شده است

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_r \rangle = \langle v'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v'_s \rangle,$$

و مرتبه‌های مولدهای $\{v_i\}$ و $\{v'_i\}$ همه توانهایی از اول منفرد هستند که آن را $p(x)$ خواهیم نامید. فرض می‌کنیم که مرتبه‌های $\{v_i\}$ برابر $\{p(x)^{a_1}, \dots, p(x)^{a_r}\}$ با $a_i > 0$ باشند، و مرتبه‌های $\{v'_i\}$ را با $\{p(x)^{b_1}, \dots, p(x)^{b_s}\}$ نشان می‌دهیم با هر $b_j > 0$. برای اثبات جزء یکتایی قضیه، کافی است که نخست ثابت کنیم $r = s$ ، سپس ثابت کنیم که شماره a ها و b های برابر یک برابرند، سپس شماره a ها و b های برابر ۲ برابرند، و همین‌طور الی آخر. با محاسبه $n(p(T))$ ، با استفاده از هر یک از دو تجزیه، آغاز می‌کنیم. گیریم

$$v = f_1(T)v_1 + \dots + f_r(T)v_r \in \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_r \rangle$$

که در آن $f_i(x) \in F[x]$. فرض می‌کنیم $v \in n(p(T))$. پس

$$p(T)f_1(T)v_1 + \dots + p(T)f_r(T)v_r = 0$$

و به سبب مجموع مستقیم داریم

$$p(T)f_1(T)v_1 = \dots = p(T)f_r(T)v_r = 0$$

بنابراین

$$p(x)^{a_1} | p(x)f_1(x), \dots, p(x)^{a_r} | p(x)f_r(x),$$

از یکتایی تجزیه در $F[x]$ داریم

$$p(x)^{a_1-1} | f_1(x), \dots, p(x)^{a_r-1} | f_r(x)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که اگر $a_i = 1$ ، آنگاه با قراردادن $p(T)^{a_i-1} = 1$ داریم

$$n(p(T)) = \langle p(T)^{a_1-1}v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle p(T)^{a_r-1}v_r \rangle,$$

و بُعد $n(p(T))$ برابر rd است، که d درجه $p(x)$ است. محاسبه مشابهی با استفاده از زیرفضاهای

$$\langle v'_i \rangle$$
 نشان می‌دهد که بعد $n(p(T))$ برابر sd است و نتیجه می‌گیریم که $r = s$.

اکنون گیریم x_1 معرف تعداد a_i های برابر یک، x_2 معرف تعداد a_i های برابر دو، و غیره، است.

به روش مشابه گیریم y_1 برابر تعداد b_j های برابر یک، y_2 برابر تعداد b_j های برابر دو و غیره.

اینک به منظور یافتن $n(p(T)^2)$ از همان استدلالی استفاده می‌کنیم که برای محاسبه $n(p(T))$

استفاده کردیم و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} n(p(T)^2) &= \sum_{a_i=1} \langle v_i \rangle + \sum_{a_i \geq 2} \langle p_i(T)^{a_i-2}v_i \rangle && (\text{جمع مستقیم}) \\ &= \sum_{b_j=1} \langle v'_j \rangle + \sum_{b_j \geq 2} p_j(T)^{b_j-2}v'_j && (\text{جمع مستقیم}) \end{aligned}$$

تمرینها ۳۰۹

برای محاسبهٔ بعد $n(p(T^r))$ با استفاده از این حقیقت که بعد $\langle v_i \rangle < d$ است اگر $a_i = 1$ ،
و بعد $\langle p_i(T)^{a_i-2} v_i \rangle < d$ برابر ۲ است اگر $a_i \geq 2$ داریم

$$x_1 d + (r - x_1) 2d = y_1 d + (r - y_1) 2d$$

این معادله ایجاب می‌کند که $x_1 - y_1 = 2(x_1 - y_1)$ و از این رو $x_1 - y_1 = 0$. با ادامهٔ این
روش می‌توانیم نشان دهیم که $x_2 = y_2$ ، و غیره و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس n در n با ضرایبی در یک هیأت دلخواه F باشد، A با
 A^t مشابه است. [راهنمایی: با استفاده از روشهای این فصل ثابت کنید که اگر $T \in L(V, V)$ ،
مقسوم‌علیه‌های مقدماتی T و T^* یکی هستند.]

۲. بگیریم $T \in L(V, V)$. ثابت کنید که V نسبت به T تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر V
دوری و چندجمله‌یی مینیمال T یک توان اول $p(x)^a$ برای یک اول $p(x) \in F[x]$ باشد.
[← قضیهٔ (۶.۲۹)]

۳. بگیریم $V, T \in L(V, V)$ نسبت به T تحویلناپذیر نامیده می‌شود، به شرط اینکه تنها زیرفضاهای
پایا، V و $\{0\}$ باشند. ثابت کنید که هر فضای برداری ناصفر V نسبت به T تحویلناپذیر است
اگر و تنها اگر V دوری باشد و چندجمله‌یی مینیمال T در $F[x]$ اول باشد.

۴. بگیریم $V, T \in L(V, V)$ نسبت به T کاملاً تحویلناپذیر نامیده می‌شود به شرط اینکه V یک
مجموع مستقیم، $V = \sum V_i$ ، از زیرفضاهای پایای V_i باشد، به گونه‌ای که هر زیرفضای V_i نسبت
به تحدید $T|_{V_i}$ از T به V_i تحویلناپذیر باشد. فرض کنید $V \neq \{0\}$. ثابت کنید که گزاره‌های زیر
هم‌ارزند:

الف) V نسبت به T کاملاً تحویلناپذیر است.

ب) چندجمله‌یی مینیمال T حاصلضربی از تک‌جمله‌یهای عاملهای اول متمایز در $F[x]$
است.

پ) همهٔ مقسوم‌علیه‌های ابتدایی T ، چندجمله‌یی هستند. [توجه دارید که این نتیجه تعمیمی
از قضیهٔ (۱۱.۲۳) است.]

ت) برای هر زیرفضای T -پایای V' ، یک زیرفضای T -پایای دیگر V'' هست به گونه‌ای که
 $V = V' \oplus V''$.

۹

تبدیل‌های متعامد و یکانی

در فصل‌های ۷ و ۸ قضیه‌های کلی در مورد ساختار یک تبدیل خطی تنها به انضمام تجزیه ژوردان، قضیه مقسوم علیه مقدماتی، و صورتهای گویا و نرمال ژوردان را ثابت کردیم. برای برخی از انواع تبدیل‌های خطی روی فضاهاى برداری بر هیأت اعداد حقیقی یا مختلط، آگاهی بیشتری از ماهیت ویژه مقدارها، و قضیه‌های دقیقتری درباره ساختار تبدیلها، می‌توان به دست داد. این فصل شامل دو بخش درباره تبدیل‌های متعامد و صورتهای درجه دوم روی فضاهاى برداری بر هیأت عددهای حقیقی است. بخش آخر به فضاهاى برداری بر اعداد مختلط، و نظریه تبدیل‌های نرمال، ارمیتی و یکانی اختصاص داده شده است. این فصل مستقل از فصل ۸ است و می‌تواند بلافاصله پس از فصل ۷ خوانده شود.

۳۰. ساختار تبدیل‌های متعامد (یا قائم)

در بخش ۱۴ نشان دادیم که هر تبدیل قائم در صفحه، یک دوران یا تقارن محوری است. در این بخش می‌خواهیم برای تبدیل‌های متعامد روی یک فضای برداری حقیقی n بعدی V با یک حاصلضرب درونی (u, v) ، یک توصیف هندسی بیابیم. از نقطه نظر فصل ۷، وقتی یک تبدیل متعامد T داده شود، در جستجوی پایه‌ای یکا قائم از V خواهیم بود که ماتریس T نسبت به آن، تا اندازه ممکن ساده باشد.

ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

یک ماتریس متعامد است به گونه‌ای که $A^T = I$. چندجمله‌بی مینیمال آن

$$x^2 + x + 1$$

است که در حلقه چندجمله‌بیهای $R[x]$ یک چندجمله‌بی اول است. پس، بنابر قضیه (۱۱.۲۳)، روی هیأت حقیقی، A نمی‌تواند قطری شود، و حتی نمی‌تواند به شکل مثلثی درآید، زیرا به آسانی می‌توان نشان داد که هر ماتریس متعامد مثلثی 2×2 باید قطری باشد. بنابراین روشهای فصل ۷، حتی در این حالت ساده، اطلاعات تازه کمتری می‌دهند.

اشکال در اینجاست که هیأت حقیقی جبری-بسته نیست. در اینجاست که، به گفته هرمان وایل، اقلیدس وارد صحنه می‌شود و خط‌کش و پرگار خود را پهن می‌کند. مفاهیم لازم برای پرداختن به تبدیلیهای متعامد روی یک فضای برداری حقیقی، مسأله‌های مطرح شده در فصل ۷ را نیز روشنتر می‌سازند. وجود حاصلضرب داخلی موجب می‌شود که اطلاعاتی درباره چندجمله‌بیهای مینیمال، و غیره به دست آوریم، که تنها با روشهای فصل ۷ تقریباً ناممکن به نظر می‌رسید. مطلب را با چند تعریف و قضیه کلی آغاز می‌کنیم.

(۱.۳۰) تعریف. گیریم $T \in L(V, V)$ یک تبدیل خطی روی یک فضای برداری متناهی-بعد V بر هیأت دلخواه F باشد. یک زیر فضای پایای ناصفر $W \subset V$ (نسبت به T) تجزیه‌ناپذیر نامیده می‌شود، هرگاه تنها زیر فضاهای T -پایای مشمول W ، فضاهای $\{0\}$ و W باشند.

(۲.۳۰) قضیه. (الف) اگر V یک فضای برداری روی یک هیأت جبری-بسته F باشد، هر زیر فضای تحویلناپذیر پایای W نسبت به $T \in L(V, V)$ دارای بعد ۱ است. (ب) اگر V یک فضای برداری روی هیأت حقیقی R و W یک زیرفضای تحویلناپذیر پایا نسبت به $T \in L(V, V)$ باشد، بعد W برابر ۱ یا ۲ است. (برهان. الف) گیریم W یک زیر فضای تحویلناپذیر پایا نسبت به T باشد. پس T معرف یک تبدیل خطی T_W از W به خود W است، که در آن

$$T_W(w) = T(w), \quad w \in W$$

بنابر بخش ۲۴، W شامل یک ویژه بردار w نسبت به T است، در این صورت $S(w)$ یک

۳۱۲ تبدیلیهای متعامد و یکانی

زیرفضای پایای مشمول W است، و از این رو $W = S(w)$ ، زیرا W تحویلناپذیر است. پس قسمت (الف) ثابت شد.

ب) گیریم W یک زیرفضای تحویلناپذیر پایا نسبت به T و $m(x)$ چندجمله‌یی مینیمال T_W باشند. به موجب قضیه (۹.۲۳) داریم $m(x) = p(x)^e$ که $p(x)$ یک چندجمله‌یی اول در $R[x]$ است؛ وگرنه W مجموع مستقیم زیر فضاها خواهد بود، که مخالف فرض تحویلناپذیری W است. اگر $m(x) = p(x)^e$ چندجمله‌یی مینیمال T_W باشد، آنگاه $e = 1$ ، وگرنه صفر-فضای $p(T)^{e-1}$ یک زیرفضای پایایی غیر از $\{0\}$ و W خواهد بود. پس بنابر قضیه (۱۳.۲۱) داریم

$$\alpha^2 - 4\beta < 0, \quad m(x) = x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{یا} \quad m(x) = x - \alpha$$

گیریم w برداری ناصفر از W باشد. در این صورت اگر $m(x) = x - \alpha$ ، w بردار مشخصه T است، و همانند بخش (الف) $W = S(w)$. اگر $m(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ برای $\alpha^2 - 4\beta < 0$ ، آنگاه $S[w, T(w)]$ یک زیرفضای پایاست، و از این رو $W = S[w, T(w)]$. بنابراین W دارای بعد ۱ یا ۲ است و قضیه ثابت می‌شود.

اینک این قضیه را به شکل زیر در مورد تبدیلیهای متعامد به کار می‌بریم.

(۳.۳۰) قضیه. فرض می‌کنیم T یک تبدیل متعامد روی یک فضای برداری حقیقی V با یک ضرب داخلی باشد، و W یک زیر فضای برداری پایا و تجزیه‌ناپذیر نسبت به T باشد؛ در این صورت یکی از دو حکم زیر برقرار است،

(الف) $\dim W = 1$ ، و اگر w مخالف صفر در W باشد، آنگاه $T(w) = \pm w$.
(ب) $\dim W = 2$ ، و یک پایهٔ یکاقائم $\{w_1, w_2\}$ برای فضای W وجود دارد به طوری که ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{w_1, w_2\}$ به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

به عبارت دیگر، T_W یک دوران در فضای دو بعدی W است (بخش ۱۴).
برهان. با استفاده از (۲.۳۰) بعد W یا برابر با ۱ و یا برابر با ۲ است. در حالت (الف) قضیه، برای مقداری از $\lambda \in R$ ، $T(w) = \lambda w$ ، رابطه

$$\|T(w)\| = \|w\|$$

ایجاب می‌کند که $|\lambda| = 1$. بنابراین $\lambda = \pm 1$ و $T(w) = \pm w$.
اگر $\dim W = 2$ ، چندجمله‌یی مینیمال T به صورت زیر است

$$x^2 + \alpha x + \beta, \quad \alpha^2 - 4\beta < 0.$$

ساختار تبدیلهای متعامد ۳۱۳

فرض می‌کنیم $\{w_1, w_2\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W باشد و قرار می‌دهیم

$$T(w_1) = \lambda w_1 + \mu w_2.$$

پس $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ ، و چون $(T(w_1), T(w_2)) = 0$ ، پس $T(w_2) = -\mu w_1 + \lambda w_2$ و $T(w_2) = \mu w_1 - \lambda w_2$ در حالت اول ماتریس T چنین است

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

و می‌توانیم زاویهٔ θ را طوری پیدا کنیم که $\cos \theta = \lambda$ ، $\sin \theta = \mu$ ، زیرا $\lambda^2 + \mu^2 = 1$. در حالت دوم ماتریس به صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$$

است که در معادلهٔ $x^2 - 1 = 0$ صدق می‌کند. چون $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ اول نیست، پس این حالت نمی‌تواند پیش آید و اثبات قضیه کامل می‌شود. این قضیه وقتی جالب می‌شود که با قضیهٔ زیر تلفیق شود.

(۴.۳۰) قضیه. فرض می‌کنیم T تبدیلی متعامد در یک فضای برداری حقیقی V مجهز به یک حاصلضرب داخلی باشد؛ در این صورت V جمع مستقیم زیر فضاهای پایای تجزیه‌ناپذیر $\{W_1, \dots, W_s\}$ به‌ازای $s \geq 1$ است، به‌طوری که بردارهای متعلق به زیرفضاهای متمایز W_i و W_j برهم عمودند.

برهان. قضیه را با استقرا روی $\dim V$ اثبات می‌کنیم. قضیه در مورد $\dim V = 1$ آشکار است. فرض می‌کنیم قضیه برای زیر فضاهایی که بعد آنها از $\dim V$ کوچکتر است درست باشد. اگر T تبدیل متعامدی روی V باشد، و W_1 یک زیر فضای غیر صفر پایا با کمترین بعد، آنگاه W_1 زیرفضایی است تجزیه‌ناپذیر. فرض می‌کنیم $W_1^\perp$ زیرفضای متشکل از بردارهای عمود بر W_1 باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$W = W_1 \oplus W_1^\perp$$

آشکار است که $W_1 \cap W_1^\perp = \{0\}$ ، زیرا $(w, w) \neq 0$ اگر $w \neq 0$. اکنون قرار می‌دهیم $w \in W$ و فرض می‌کنیم $\{w_1, \dots, w_s\}$ یک پایهٔ یکاقائم برای W_1 باشد، که در آن یا $s = 1$ یا $s = 2$. پس

$$w = \sum_{i=1}^s (w, w_i) w_i + \left(w - \sum_{i=1}^s (w, w_i) w_i \right)$$

که همه جا صفر است غیر از بلوکهای 1×1 و یا بلوکهای 2×2 بر روی قطر. برهان. اثبات، باتوجه به قضیه (3.3) و (4.3) سراسر است. زیرا می‌توانیم پایه‌های

تمرینها ۳۱۵

یکاقائمی را برای هر یک از زیر فضاهای W_i در قضیه (۴.۳۰) انتخاب کنیم، که وقتی باهم گرفته می شوند یک پایه یکاقائم برای V تشکیل دهند.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر T تبدیل متعامدی در R_2 باشد به گونه ای که $D(T) = -1$ ، یک پایه یکاقائم در R_2 وجود دارد به طوری که ماتریس T در این پایه برابر است با

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۲. یک تبدیل متعامد T در R_2 را یک دوران می نامیم اگر $D(T) = 1$. ثابت کنید که اگر T دورانی در R_2 باشد، یک پایه یکاقائم در R_2 وجود دارد به طوری که ماتریس T در این پایه به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

که θ عددی است حقیقی.

۳. ثابت کنید که یک تبدیل متعامد T در R_m دارای یک ویژه مقدار ۱ است اگر $D(T) = 1$ و m عدد فرد باشد. در موردی که m زوج است چه حکمی می توان کرد؟

۳۱. قضیه محورها اصلی

در هندسه تحلیلی مسأله زیر مطرح می شود. فرض می کنیم

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

یک معادله درجه دوم از x_1 و x_2 باشد. مطلوب یافتن یک دستگاه مختصات جدید

$$X_1 = (\cos \theta)x_1 + (\sin \theta)x_2 + c_1$$

$$X_2 = (-\sin \theta)x_1 + (\cos \theta)x_2 + c_2$$

حاصل از یک دوران و یک انتقال دستگاه اصلی است به طوری که چندجمله ای فوق در دستگاه جدید به یکی از صورتهای زیر تبدیل شود

$$f(X_1, X_2) = AX_1^2 + BX_2^2 + C = 0 \quad (1.31)$$

$$f(X_1, X_2) = AX_1^2 - DX_1 = 0 \quad (2.31)$$

۳۱۶ تبدیلیهای متعامد و یکانی

در این صورت نمودار $f(X_1, X_2) = 0$ را می‌توان به صورت یک دایره، بیضی، هذلولی، سهمی و غیره رده‌بندی کرد. روشن است که اگر در ابتدا بتوانیم دوران محورهای به صورت

$$\begin{aligned} X_1 &= (\cos \theta)x_1 + (\sin \theta)x_2 \\ X_2 &= (-\sin \theta)x_1 + (\cos \theta)x_2 \end{aligned}$$

پیدا کنیم که $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ را به

$$AX_1^2 + BX_2^2 \quad (۳.۳۱)$$

تبدیل کند در این صورت معادله جدید به صورت

$$f(X_1, X_2) = AX_1^2 + BX_2^2 + CX_1 + DX_2 + D = 0$$

در می‌آید، و می‌توانیم به وسیله یک انتقال محورها $X'_1 = X_1 + c_1$ و $X'_2 = X_2 + c_2$ یکی از صورتهای (۱.۳۱) و یا (۲.۳۱) را به دست آوریم.

مسئله‌ای که در این بخش بررسی می‌کنیم تعمیم مسئله پیدا کردن دوران محورهاست به گونه‌ای که معادله درجه دوم $f(x_1, x_2)$ را به صورت (۳.۳۱) درآورد.

(۴.۳۱) تعریف. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی هیات اعداد حقیقی R باشد. یک صورت درجه دوم روی V تابعی است مانند Q که به هر بردار a متعلق به V یک عدد حقیقی $Q(a)$ را نظیر می‌کند که در آن تساوی

$$Q(a) = B(a, a)$$

به ازای یک صورت دوخطی متقارن B روی V برقرار است. یادآوری می‌کنیم که یک صورت دو خطی B روی V به هر یک از بردارهای a, b از V یک عدد حقیقی $B(a, b)$ تخصیص می‌دهد به طوری که:

$$B(a_1 + a_2, b) = B(a_1, b) + B(a_2, b), \quad B(a, b_1 + b_2) = B(a, b_1) + B(a, b_2)$$

و برای هر $a, b \in V$ و $\alpha \in R$ داریم

$$B(\alpha a, b) = B(a, \alpha b) = \alpha B(a, b)$$

صورت دوخطی B متقارن است اگر به ازای هر دو بردار a و b در V تساوی $B(a, b) = B(b, a)$ برقرار باشد.

قضیه محوره‌ای اصلی ۳۱۷

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که یک صورت درجه دوم Q در شرط $Q(\alpha a) = \alpha^2 Q(a)$ به ازای هر $\alpha \in R$ و $a \in V$ صدق می‌کند و یک صورت دو خطی متقارن به وسیله Q به صورت یکتای:

$$B(a, b) = \frac{1}{2}[Q(a+b) - Q(a) - Q(b)], \quad a, b \in V.$$

معین می‌شود.

(۵.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم Q یک صورت درجه دوم روی V باشد و $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه V روی هیأت R . یک ماتریس $n \times n$, $S = (\sigma_{ij})$, را با قرار دادن

$$\sigma_{ij} = B(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

تعریف می‌کنیم، که در آن B یک صورت دو خطی مطابق با تعریف (۴.۳۱) است. در این صورت داریم ${}^tS = S$ و برای هر $a = \sum \alpha_i e_i \in V$ داریم

$$Q(a) = B(a, a) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_{ii} + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} \quad (۶.۳۱)$$

و به وارون، فرض می‌کنیم $S = (\sigma_{ij})$ یک ماتریس حقیقی دلخواه $n \times n$ باشد به طوری که ${}^tS = S$. در این صورت S معرف یک صورت دو خطی متقارن B است به طوری که $B(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$ ، و همین‌طور یک صورت درجه دوم $Q(a) = B(a, a)$ مانند (۴.۳۱) تعریف می‌شود.

تبصره. با فرض درستی قضیه، تابع

$$f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

معرف یک صورت درجه دوم روی R_2 است به طوری که اگر $\{x_1, x_2\}$ مؤلفه‌های یک بردار x نسبت به پایه $\{e_1, e_2\}$ باشد، آنگاه ماتریس f که در قضیه تعریف شده است چنین خواهد شد

$$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$$

برهان قضیه (۵.۳۱). قسمت اول با استفاده از تعریف (۴.۳۱) آشکار است. برای اثبات عکس آن، فرض می‌کنیم که $S = {}^tS$ برقرار است. یک تابع

$$B(a, b) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \sigma_{ij}$$

۳۱۸ تبدیلهای متعامد و یکانی

را به ازای $a = \sum \alpha_i e_i, b = \sum \beta_i e_i$ تعریف می‌کنیم. در این صورت به روشنی می‌توان بررسی کرد که B یک صورت دوخطی متقارن روی V و طوری است که $B(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$ ، و یک صورت درجهٔ دوم همانند تعریف (۴.۳۱)، با $Q(a) = B(a, a)$ تعریف می‌شود.

(۷.۳۱) تعریف. یک ماتریس $S, n \times n$ ، را متقارن می‌نامند اگر ${}^t S = S$. ماتریس $S = (\sigma_{ij})$ یک صورت درجهٔ دوم Q نسبت به پایهٔ $\{e_1, \dots, e_n\}$ چنین تعریف می‌شود

$$\sigma_{ij} = B(e_i, e_j)$$

که در آن

$$B(a, b) = \frac{1}{2}[Q(a+b) - Q(a) - Q(b)]$$

صورت دو خطی وابسته به Q است.

(۸.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد، که ماتریس آن در پایهٔ $\{e_1, \dots, e_n\}$ ماتریس $S = (\sigma_{ij})$ است. فرض می‌کنیم $\{f_1, \dots, f_n\}$ یک پایهٔ دیگر V باشد به طوری که

$$f_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} e_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

در این صورت، ماتریس Q نسبت به پایهٔ $\{f_1, \dots, f_n\}$ با رابطهٔ

$$S' = {}^t C S C$$

داده می‌شود که در آن $C = (\gamma_{ij})$.

برهان. فرض می‌کنیم $S' = (\sigma'_{ij})$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= B(f_i, f_j) = B\left(\sum_{k=1}^n \gamma_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n \gamma_{lj} e_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{ki} \gamma_{lj} B(e_k, e_l) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \gamma_{ki} \sigma_{kl} \gamma_{lj} \end{aligned}$$

و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

حال می‌توانیم قضیهٔ اصلی این بخش را مطرح کنیم.

قضیه محوره‌ای اصلی ۳۱۹

(۹.۳۱) قضیه محوره‌ای اصلی*. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی (a, b) باشد، و فرض می‌کنیم $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یکاکاظم V باشد. فرض می‌کنیم که Q یک صورت درجه دوم روی V باشد که ماتریس آن نسبت به پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ به صورت $S = (\sigma_{ij})$ است. در این صورت یک پایه یکاکاظم $\{f_1, \dots, f_n\}$ وجود دارد به طوری که ماتریس Q در پایه $f_1, \dots, f_n$ چنین است:

$$S' = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

که در آن σ_i ها ویژه مقدارهای S هستند. اگر

$$f_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji} e_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

آنگاه $C = (\gamma_{ij})$ یک ماتریس قائم است. اگر $a \in V$ در پایه جدید $\{f_1, \dots, f_n\}$ با عبارت $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ بیان شود، آنگاه، خواهیم داشت $Q(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i$. بردارهای $f_1, \dots, f_n$ را محوره‌ای اصلی Q می‌نامند.

(۱۰.۳۱) تعریف. یک تبدیل خطی T روی یک فضای برداری حقیقی مجهز به یک ضرب داخلی (a, b) را یک تبدیل متقارن می‌نامند اگر

$$(Ta, b) = (a, Tb), \quad a, b \in V.$$

(۱۱.۳۱) فرض می‌کنیم که $\{e_1, \dots, e_n\}$ یک پایه یکاکاظم V باشد. یک تبدیل T متعلق به $L(V, V)$ ، که ماتریس آن در پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ برابر با $S = (\sigma_{ij})$ است، متقارن است اگر و تنها اگر، ماتریس آن متقارن باشد. اثبات این مطلب شبیه به اثبات قسمت (۴) قضیه (۱۱.۱۵) است که، از دادن آن صرف‌نظر می‌کنیم.

(۱۲.۳۱) قضیه. فرض می‌کنیم که T یک تبدیل متقارن روی فضای برداری حقیقی V باشد؛ در این صورت یک پایه یکاکاظم وجود دارد که از ویژه بردارهای V تشکیل شده است. اول می‌خواهیم ثابت کنیم که قضیه (۱۲.۳۱) مستلزم قضیه (۹.۳۱) است و سپس قضیه (۱۲.۳۱) را اثبات خواهیم کرد.

* برای یک برهان دیگر و کاربرد این قضیه در مکانیک، — کتاب Sygne و Griffith، صفحه ۳۱۸ (که در کتابنامه فهرست شده است).

۳۲۰ تبدیلهای متعامد و یکانی

برهان اینکه قضیه (۱۲.۳۱) مستلزم قضیه (۹.۳۱) است. با در نظر گرفتن نمادگذاریهای قضیه (۹.۳۱) فرض می‌کنیم Q یک صورت درجه دوم روی V و S ماتریس آن در پایه یکاقائم $\{e_1, \dots, e_n\}$ باشد. با استفاده از قضیه‌های (۸.۳۱) و (۵.۳۱) و نتایج بخش ۱۵ کافی است، ماتریس قائمی مانند C به دست آوریم به طوری که

$${}^tCSC = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

که در آن $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ویژه مقدارهای S هستند. در یک ماتریس قائم C داریم ${}^tC = C^{-1}$ و بنابراین کافی است ماتریس قائم C طوری یافت شود که

$$C^{-1}SC = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

این مسأله‌ای است مربوط به تبدیل خطی T که ماتریس آن نسبت به پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ برابر با S است. به موجب (۱۱.۳۱)، تبدیل T متقارن است و بنابر نتایج بخش ۱۵ پیدا کردن C درست منطبق بر مسأله مذکور در قضیه (۱۲.۳۱) است.

برهان قضیه (۱۲.۳۱). نخست ثابت می‌کنیم که V حاصل جمع مستقیم زیرفضاهای پایا و تجزیه‌ناپذیر دو به دو متعامد نسبت به T است. روش اثبات مانند روش اثبات قضیه (۴.۳۰) است؛ فقط باید تحقیق کنیم که اگر W نسبت به T پایا باشد، زیر فضای $W^\perp$ نیز نسبت به T پایاست. فرض می‌کنیم $w' \in W^\perp$ و $w \in W$ ؛ در این صورت

$$(w, Tw') = (Tw, w') = 0$$

زیرا که $Tw \in W$ و $w' \in W^\perp$. حال می‌توانیم نتیجه بگیریم که V حاصل جمع مستقیم زیرفضاهای تجزیه‌ناپذیر دو به دو متعامد $\{W_1, \dots, W_s\}$ است.

اکنون کافی است که نشان دهیم برای هر i ، $1 \leq i \leq s$ ، $\dim W_i = 1$ ، زیرا بعد W_i برابر با ۱ یا ۲ است، و کافی است که ثابت کنیم تبدیل متقارن T در یک فضای برداری حقیقی و دوبعدی همیشه دارای یک ویژه - بردار است. فرض می‌کنیم که $\{w_1, w_2\}$ یک پایه یکاقائم برای W باشد؛ در این صورت تبدیل T نسبت به پایه $\{w_1, w_2\}$ دارای یک ماتریس متقارن به صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda & \xi \\ \xi & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu, \xi \in \mathbb{R}$$

تمرینها ۳۲۱

است. این ماتریس در معادله

$$x^2 - (\lambda + \mu)x + (\lambda\mu - \xi^2) = 0$$

صدق می‌کند.

فرض می‌کنیم که $A = -(\lambda + \mu)$ و $B = \lambda\mu - \xi^2$ ، و برای هر λ, μ, ξ داریم:

$$\begin{aligned} A^2 - 4B &= (\lambda + \mu)^2 - 4(\lambda\mu - \xi^2) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2 + 4\xi^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4\xi^2 \geq 0 \end{aligned}$$

بنابراین چندجمله‌یی $x^2 + Ax + B$ در $R[x]$ به حاصلضرب دو چندجمله‌یی خطی قابل تجزیه است، و از بخش ۲۴ نتیجه می‌شود که W دارای یک ویژه بردار است و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

تمرینها

۱. ماتریس متقارن

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم.

(الف) ویژه مقدارهای X را حساب کنید.

(ب) یک تبدیل متقارن T در R_3 تعریف کنید که ماتریس آن نسبت به پایه یکاقائم $\{e_1, e_2, e_3\}$ ماتریس X باشد. با استفاده از روشهای فصل ۷، یک پایه R_3 متشکل از ویژه بردارهای تبدیل T به دست آورید [می‌دانیم که به موجب قضیه (۱۲.۳۱) می‌توان این کار را کرد]. با تغییر این پایه یک پایه یکاقائم $\{f_1, f_2, f_3\}$ متشکل از ویژه بردارها به دست آورید. فرض می‌کنیم

$$f_i = \sum_{j=1}^3 \mu_{ji} e_j$$

و

$$Tf_i = \alpha_i f_i, \quad \alpha_i \in R, \quad i = 1, 2, 3$$

در این صورت $M = (\mu_{ij})$ یک ماتریس متعامد است، به طوری که $M^{-1}XM$ یک ماتریس قطری است. چون M متعامد است، $M^{-1} = {}^tM$ ، لذا این شیوه محاسباتی را می‌توان برای پیدا کردن محورهای اصلی یک فضای برداری نسبت به یک صورت درجه دوم به کار برد.

۲. پایهٔ یکاقائمی از R_2 به دست آورید که محوره‌های اصلی صورتهای درجهٔ دوم زیر را نشان دهند:

$$8x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2 \quad (\text{الف})$$

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 \quad (\text{ب})$$

۳. یک پایهٔ یکاقائم از R_2 پیدا کنید که محوره‌های اصلی صورت درجه دوم $x_1x_2 + x_2x_3$ را نشان دهند.

۴. یک صورت درجه دوم $Q(x)$ را مثبت معین می‌نامیم اگر برای هر بردار $x \neq 0$ داشته باشیم $Q(x) > 0$. نشان دهید که Q مثبت معین است اگر و تنها اگر همهٔ ویژهٔ مقدارهای ماتریس S مربوط به Q مثبت باشند. صورت درجهٔ دوم منفی معین را تعریف کنید و نتیجهٔ مشابه آن را بیان و ثابت کنید.

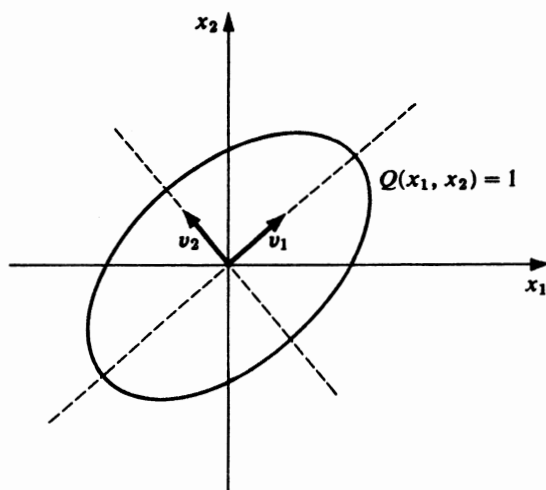
۵. فرض کنیم V یک فضای برداری روی هیأت اعداد حقیقی و Q یک صورت درجهٔ دوم روی V ، و B صورت دو خطی وابسته به Q باشد. نشان دهید که زیر فضاهای V_+ ، V_- ، و V_0 وجود دارند به طوری که $B(V_+, V_-) = B(V_+, V_0) = B(V_-, V_0) = 0$ و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$. و صورتهای درجهٔ دوم Q_+ ، Q_- ، و Q_0 وجود دارند که به ترتیب روی V_+ ، V_- ، و V_0 با قاعدهٔ $Q(x) = Q_+(x) + Q_-(x)$ ، و غیره تعریف می‌شوند و به ترتیب مثبت معین، منفی معین و متحد با صفر هستند. (← مثال ۴ برای تعریف صورتهای درجهٔ دوم مثبت معین و منفی معین).
۶. فرض کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V ، و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ تجزیهٔ V مطابق با تمرین ۵ باشد. نشان دهید که V_0 مجموعهٔ همه بردارهای $v \in V$ است به طوری که $B(v, V) = 0$ ، که در آن B صورت دوخطی وابسته به Q است.

۷. فرض کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد و فرض کنیم $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ و $V = V'_+ \oplus V'_- \oplus V'_0$ دو تجزیهٔ V باشند که در شرطهای تمرین ۵ صدق می‌کنند. نشان دهید که $\dim V_+ = \dim V'_+$ ، $\dim V_- = \dim V'_-$ ، و $V_0 = V'_0$ [راهنمایی: با توجه به تمرین ۶ داریم $V_0 = V'_0$]. یک تبدیل خطی $T: V_+ \rightarrow V'_+$ را به صورت زیر تعریف کنید. برای هر $v \in V_+$ فرض کنید $v = v'_+ + v'_- + v'_0$ تجزیهٔ بردار v در تجزیهٔ فضای برداری v بر طبق تجزیهٔ دوم باشد ($v = v'_+ + v'_- + v'_0$). قرار دهید $T(v) = v'_+$. فرض کنید v به صفر فضای T متعلق باشد. نشان دهید که $Q(v) \geq 0$ و $Q(v) \leq 0$ ، به طوری که $v = 0$ و نتیجه بگیرید که $\dim V_+ \leq \dim V'_+$ و غیره.]

۸. فرض می‌کنیم Q یک صورت درجهٔ دوم روی V باشد و $V = V_+ \oplus V_- \oplus V_0$ تجزیهٔ V باشد که در شرطهای تمرین ۵ صدق می‌کند. نشان دهید که $\dim V_+$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که مثبت هستند، و $\dim V_-$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که منفی هستند، و $\dim V_0$ برابر است با تعداد ویژه مقدارهای ماتریس Q که برابر با صفرند.

۹. *. فرض کنیم Q یک صورت درجه دوم روی V باشد که $Q(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت یک تابع از متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

* حل تمرینهای ۹ و ۱۰ نیاز به حسابان توابع چند متغیره دارد.



شکل ۱.۹

به طوری که $Q(x_1, \dots, x_n) = 1$ معرّف یک سطح در R_n است. فرض می‌کنیم که Q مثبت معین باشد و همه ویژه‌مقدارهای ماتریس Q متمایز باشند. نشان دهید که اگر $(v_1, \dots, v_n)$ یک مجموعه از محورهای اصلی Q باشند، آنگاه هر یک از v_i ها بر سطح $Q(x) = 1$ در نقطه $(Q(v_i))_{v_i}^{-1/2}$ عمودند (← شکل ۱.۹).

[راهنمایی: ابتدا حالت $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum \alpha_i x_i^2$ را در نظر بگیرید. یک بردار $v = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ در نقطه x بر سطح عمود است اگر و تنها اگر برابر با یک مضرب عددی از $\langle \partial Q / \partial x_1, \dots, \partial Q / \partial x_n \rangle$ باشد، که در نقطه x محاسبه شده است. این مطلب را برای تحقیق حکم در حالت مفروض به کار ببرید، و حالت کلی را با تعویض متغیرها به وسیله یک تبدیل متعامد ثابت کنید.]

۱۰. فرض کنیم Q ، مانند تمرین قبلی، تابعی از n متغیر حقیقی در نظر گرفته شود. نشان دهید که اگر $Q(x_1, \dots, x_n)$ یک صورت درجه دوم مثبت و معین با ماتریس S باشد، در این صورت داریم

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q(x_1, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = 2^{-n} \sqrt{\frac{\pi^n}{\det S}}$$

[راهنمایی: ابتدا نشان دهید که اگر $\lambda > 0$ ، خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2}$$

و سپس از قضیهٔ محوروهای اصلی برای یافتن یک ماتریس متعامد C که تبدیل

$$x_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} y_j, \quad C = (\gamma_{ij}),$$

صورت $Q(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت $\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ درمی‌آورد استفاده کنید. بعد با استفاده از تعویض متغیر در انتگرالهای چندگانه (—) S هستند، همان کتاب (R.C. Buck, ... نشان دهید که

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2)} |J| dy_1 \dots dy_n$$

که در آن J عبارت است از ژاکوبین تبدیل و برابر با ± 1 است. و انتگرال را می‌توان با انتگرالگیری به حالت تابع یک متغیره حساب کرد.

۳۲. تبدیلهای یکانی و قضیهٔ طیفی

در این بخش $V = \{u, v, \dots\}$ معرف یک فضای برداری متناهی-بعد روی هیات اعداد مختلط $C = \{a, b, \dots\}$ و $R = \{\alpha, \beta, \dots\}$ معرف هیات اعداد حقیقی است. و هر عدد مختلط a متعلق به C را می‌توان به صورت $a = \alpha + \beta i$ نوشت، $\alpha, \beta \in R$ ، و $i^2 = -1$. برای هر عدد $a = \alpha + \beta i \in C$ قرار می‌دهیم $\bar{a} = \alpha - \beta i$ که مزدوج عدد مختلط a نامیده می‌شود. باتوجه به بخش ۲۱، یادآوری می‌کنیم که هر عدد مختلط a ، برداری است از R_2 که طول آن با عبارت $|a| = \sqrt{a\bar{a}}$ داده می‌شود. ما با استفاده از این قرارداد مفهوم طول یک بردار را در فضاهای برداری مختلط وارد می‌کنیم.

ابتدا فضای برداری روی C متشکل از n -تاییهای مرتب را با $V = C_n$ نشان می‌دهیم.

(۱.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم $u = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ و $v = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ به فضای برداری $V = C_n$ متعلق باشند. حاصلضرب داخلی u و v را چنین تعریف می‌کنیم

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$$

در این صورت ضرب داخلی (u, v) دارای ویژگیهای زیر است
(الف) برای همهٔ بردارهای u, v متعلق به V و $a \in C$

$$(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v),$$

$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2),$$

$$(au, v) = a(u, v), \quad (u, av) = \bar{a}(u, v), \quad (u, v) = \overline{(v, u)},$$

تبدیل‌های یکانی و قضیه طیفی ۳۲۵

ب) برای هر $u \in V$ عدد (u, u) حقیقی و غیرمنفی است. بعلاوه $(u, u) = 0$ ، اگر و تنها اگر $u = 0$. برای هر $u \in V$ طول $\|u\|$ را با عبارت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

برهان. در مورد رفتار (u, v) تا آنجا که مربوط به جمع است هیچ نوع اشکالی وجود ندارد. و داریم

$$(au, v) = \sum (aa_i)\bar{b}_i = a(\sum a_i\bar{b}_i) = a(u, v)$$

و

$$\begin{aligned}(u, av) &= \sum a_i(\bar{a}\bar{b}_i) = \sum a_i\bar{a}\bar{b}_i = \bar{a} \sum a_i\bar{b}_i \\ &= \bar{a}(u, v),\end{aligned}$$

با توجه به بخش ۲۱ می‌دانیم که $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$. بالاخره داریم

$$(v, u) = \sum b_i\bar{a}_i = \overline{(u, v)}$$

زیرا برای هر $a \in C$ داریم $\bar{\bar{a}} = a$. در مورد اثبات (ب) داریم

$$(u, u) = \sum a_i\bar{a}_i$$

و با توجه به بخش ۲۱، $a_i\bar{a}_i$ یک عدد حقیقی و نامنفی است. لذا (u, u) نیز حقیقی و نامنفی است. اگر $(u, u) = 0$ ، آنگاه چون همه $a_i\bar{a}_i \geq 0$ ، داریم $a_i\bar{a}_i = 0$ ، و در نتیجه، برای هر i ، $a_i = 0$. بنابراین $(u, u) = 0$ ، اگر و فقط اگر $u = 0$ ، و قضیه ثابت می‌شود. خواننده باید توجه کند که ویژگی $(u, v) = \bar{a}(u, v)$ نشان می‌دهد که تابع (u, v) روی فضای برداری V دوخطی نیست.

(۲.۳۲) تعریف. فرض می‌کنیم که V یک فضای برداری دلخواه روی C باشد. یک نگاشت (u, v) که به هر جفت بردار $\{u, v\}$ عدد مختلط (u, v) را نظیر می‌کند حاصلضرب داخلی ارمیتی (به افتخار شارل ارمیت، ریاضیدان فرانسوی) نامیده می‌شود اگر (u, v) در شرطهای (الف) و (ب) قضیه (۱.۳۲) صدق کند. یک مجموعه $\{u_1, \dots, u_s\}$ از بردارهای V پایهٔ یکافازم [نسبت به (u, v)] نامیده می‌شود اگر برای هر i تساوی $\|u_i\| = 1$ برقرار باشد، و برای $j \neq i$ تساوی $(u_i, u_j) = 0$. دو بردار u و v متعامد نامیده می‌شوند اگر $(u, v) = 0$.

(۳.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم (u, v) حاصلضرب داخلی ارمیتی روی V باشد. هر زیر فضای $W \neq 0$ از V دارای یک پایه یکاقائم است. اگر $\{u_1, \dots, u_s\}$ یک پایه یکاقائم برای W باشد و $v = \sum a_i v_i$ و $w = \sum b_i v_i$ دو بردار دلخواه از W باشند، در این صورت

$$(v, w) = \sum a_i \bar{b}_i$$

برهان. ما روش گرام-اشمیت را که در فصل ۴ در مورد فضاهای برداری حقیقی با ضرب داخلی گفته شده‌است، دنبال می‌کنیم. اگر $\dim W = 1$ و $W = S(w)$ ، $w \neq 0$ ، آنگاه بردار $w_1 = \|w\|^{-1}w$ دارای طول ۱ است و یک پایه یکاقائم از W است. اکنون قرار می‌دهیم $W = S(w_1, \dots, w_s)$ ، و فرض می‌کنیم مانند فرض استقراء، که $S(w_1, \dots, w_{s-1})$ دارای یک پایه یکاقائم $\{u_1, \dots, u_{s-1}\}$ باشد. فرض می‌کنیم که $w_s \notin S(w_1, \dots, w_{s-1})$ ، و قرار می‌دهیم

$$w = w_s - \sum_{i=1}^{s-1} (w_s, u_i) u_i$$

پس داریم $w \neq 0$ و برای هر $1 \leq j \leq s-1$ ،

$$\begin{aligned} (w, u_j) &= (w_s, u_j) - \sum_{i=1}^{s-1} ((w_s, u_i) u_i, u_j) \\ &= (w_s, u_j) - (w_s, u_j) = 0 \end{aligned}$$

با قرار دادن $w_s = \|w\|^{-1}w$ ، خواهیم داشت $\|u_s\| = 1$ و برای هر $1 \leq j \leq s-1$ ، داریم $(u_s, u_j) = 0$. چون داریم $(u, v) = \overline{(v, u)}$ ، پس برای هر j ، $1 \leq j \leq s-1$ ، داریم $(u_j, u_s) = 0$ و قسمت اول قضیه ثابت می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که $v = \sum a_i u_i$ و $w = \sum b_i u_i$ دو بردار از W باشند، که برحسب مبنای یکاقائم $\{u_1, \dots, u_s\}$ نوشته شده‌اند. در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} (v, w) &= \left(\sum a_i u_i, \sum b_j u_j \right) = \sum a_i \bar{b}_j (u_i, u_j) \\ &= \sum a_i \bar{b}_i \end{aligned}$$

همان چیزی را که می‌خواستیم. بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۴.۳۲) تعریف. گیریم (u, v) یک حاصلضرب داخلی ارمیتی روی V باشد. فرض می‌کنیم W یک زیر فضای برداری V باشد و $W^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0, \forall w \in W\}$ یک زیر فضای برداری V است و فضای متمم قائم W نامیده می‌شود. در این صورت $W^\perp$

تبدیل‌های یکانی و قضیه طیفی ۳۲۷

توجه داریم که چون تساوی $(v, w) = 0$ مستلزم تساوی $(w, v) = 0$ است، تعریف $W^\perp$ می‌تواند به صورت

$$W^\perp = \{v \in V \mid (w, v) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

نیز بیان شود. ویژگی‌های (u, v) ایجاب می‌کنند که $W^\perp$ یک زیرفضا باشد. چون $W^\perp$ به صورت حاصلضرب داخلی ویژه‌ای در V تعریف شده است، خطر اشتباه با پوچسازهای $V_1^\perp$ که در فصل ۸ دربارهٔ صورتهای دوخطی روی یک جفت فضای برداری گفته شده است، وجود ندارد.

(۵.۳۲) **قضیه.** نگاشت $W \rightarrow W^\perp$ از مجموعهٔ زیر فضاهای یک فضای برداری V با حاصلضرب داخلی ارمیتی، دارای ویژگی‌های زیر است.
الف) $W_1 \subset W_2$ ایجاب می‌کند که $W_1^\perp \supset W_2^\perp$.
ب) $W^{\perp\perp} = W$.

پ) $V = W \oplus W^\perp$ ، برای هر زیرفضای W از V .
برهان. باتوجه به تعریف $W^\perp$ حکم (الف) روشن است. حکم (پ) با همان روشی که در اثبات قضیه (۴.۳۰) در مورد قضیهٔ متناظر با همین مطلب دربارهٔ فضاهای حقیقی به‌کار رفته ثابت می‌شود و ما جزئیات آن را تکرار نمی‌کنیم. در مورد قسمت (ب) چنین داریم

$$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$$

و بنابراین

$$\dim W^{\perp\perp} = \dim W$$

چون $W \subset W^{\perp\perp}$ (باتوجه به تعریف $W^\perp$)، نتیجه می‌شود که $W = W^{\perp\perp}$ و قسمت (ب) ثابت، و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۶.۳۲) **تعریف.** فرض می‌کنیم V یک فضای برداری با یک حاصلضرب داخلی ارمیتی (u, v) باشد. یک تبدیل خطی $U \in L(V, V)$ را یک تبدیل یکانی می‌نامیم اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم $\|U(v)\| = \|v\|$.

تبدیل‌های یکانی در فضاهای برداری مختلط با ضرب داخلی ارمیتی همتای تبدیلهای متعامد در فضاهای برداری حقیقی با حاصلضرب داخلی هستند. این تبدیلهای طول نگهدارند

(۷.۳۲) **قضیه.** فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط با حاصلضرب داخلی ارمیتی (u, v) باشد. یک تبدیل خطی $U \in L(V, V)$ تبدیل یکانی است اگر و تنها اگر شرطهای هم ارز زیر برقرار باشند:

$$(U(u), U(v)) = (u, v) \quad u, v \in V \quad \text{الف) برای هر}$$

ب) U پایه‌های یکاقائم V را به پایه‌های یکاقائم تبدیل کند، به عبارت دیگر چنانچه $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه یکاقائم باشد، $\{U(v_1), \dots, U(v_n)\}$ نیز یک پایه یکاقائم باشد.
پ) فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریس U نسبت به پایه یکاقائم $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد. پس داریم $Uv_i = \sum a_{ji}v_j$. در این صورت A دارای ویژگی زیر است

$$A \cdot \overline{A}^t = I$$

که در آن $\overline{A}^t$ ماتریسی است که در آن درایه (i, j) ام برابر با $\overline{a_{ji}}$ است. هر ماتریس A را که در شرط (پ) صدق کند ماتریس یکانی می‌نامند.
برهان. باز اثبات ما شبیه به قضیه نظیر به آن در مورد تبدیلات متعامد است. ابتدا فرض می‌کنیم که U یکانی باشد. استفاده از شرط $\|Uv\| = \|v\|$ در مورد بردارهای $v + iw$ و $v + w$ به دست می‌دهد که

$$(Uv, Uw) + (Uw, Uv) = (v, w) + (w, v)$$

و

$$(iU(w), U(v)) + (Uv, iU(w)) = (iw, v) + (v, iw).$$

با توجه به $\bar{i} = -i$ معادله دوم نتیجه می‌دهد که

$$i(U(w), U(v)) - i(U(v), U(w)) = i(w, v) - i(v, w)$$

پس از حذف i ، می‌توانیم معادلات را جمع کنیم و به دست آوریم

$$(U(v), U(w)) = (v, w).$$

که همان شرط (الف) است.

اکنون فرض می‌کنیم که (الف) برقرار باشد. اگر $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه یکاقائم V فرض شود، آنگاه (الف) ایجاب می‌کند که $\{U(v_1), \dots, U(v_n)\}$ یک مجموعه یکاقائم، و در نتیجه یک پایه یکاقائم باشد، زیرا بردارهای یک مجموعه یکاقائم نایسته خطی‌اند. بنابراین (الف) مستلزم (ب) است.

اکنون فرض می‌کنیم که (ب) برقرار باشد و فرض می‌کنیم که $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایه یکاقائم

تبدیل‌های یکانی و قضیهٔ طیفی ۳۲۹

باشد. اگر فرض کنیم که $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ماتریس U نسبت به این پایه باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}(U(v_i), U(v_j)) &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} v_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} \overline{a_{lj}} (v_k, v_l) \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ki} \overline{a_{kj}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که ماتریس $\mathbf{A}$ در شرط (پ) صدق می‌کند. و سرانجام اگر معادله‌های مربوط به $(U(v_i), U(v_j))$ را برحسب ضریب‌های $\mathbf{A}$ در نظر بگیریم این معادلات نشان می‌دهند که اگر تساوی $\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{I}$ برقرار باشد، بردارهای $\{U(v_1), \dots, U(v_n)\}$ یک پایهٔ یکاقائم‌اند و بنابراین U یکانی است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۸.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم $U \in L(V, V)$ یک تبدیل یکانی باشد. در این صورت ویژه‌مقدارهای U دارای قدرمطلق برابر با ۱ هستند. بعلاوه یک پایهٔ یکاقائم وجود دارد که از ویژه بردارها تشکیل شده است.

برهان. نخست فرض می‌کنیم v یک ویژه بردار متناظر به ویژه مقدار a از U باشد. در این صورت $Uv = av$ نتیجه می‌دهد که

$$(Uv, Uv) = (v, v) = a\bar{a}(v, v)$$

و بنابراین $a\bar{a} = 1$ ، که ثابت می‌کند $|a| = 1$. قسمت دوم قضیه را با استقراء روی بعد V ثابت می‌کنیم، نتیجه برای حالت $\dim V = 1$ آشکار است. فرض می‌کنیم که $\dim V > 1$. چون هیأت C جبری-بسته است، یک ویژه بردار v_1 متناظر به یکی از ویژه مقدارهای U وجود دارد، و می‌توانیم فرض کنیم که $\|v_1\| = 1$. قرار می‌دهیم $W = S(v_1)$ ؛ در این صورت باتوجه به قضیهٔ (۵.۳۲) داریم $V = W \oplus W^\perp$ و $\dim W^\perp = \dim V - 1$. اگر بتوانیم نشان دهیم که $W^\perp$ نسبت به U پایاست، در این صورت تحدید U به $W^\perp$ یک تبدیل یکانی خواهد شد و قضیه از فرض استقرا نتیجه خواهد شد. فرض می‌کنیم که $(v_1, w) = 0$ ، و باید نشان دهیم که $(v_1, U(w)) = 0$. چون تساوی $Uv_1 = av_1$ برای مقداری از $a \neq 0$ برقرار است، خواهیم داشت

$$0 = (v_1, w) = (U(v_1), U(w)) = (av_1, U(w)) = a(v_1, U(w))$$

و $(v_1, U(w)) = 0$ همان چیزی را که می‌خواستیم.

(۹.۳۲) فرع. فرض کنیم A یک ماتریس یکانی $n \times n$ باشد یعنی $A^t \bar{A} = I$. در این صورت یک ماتریس یکانی B وجود دارد به طوری که BAB^{-1} ماتریس قطری است که درایه‌های واقع در روی قطر آن اعداد مختلط با قدرمطلق ۱ هستند.

برهان. فرض می‌کنیم که V یک فضای n بعدی با حاصلضرب داخلی ارمیتی (به عنوان مثال C_n) باشد و فرض می‌کنیم که $\{v_1, \dots, v_n\}$ یک پایهٔ یکاقائم V باشد و U تبدیلی که ماتریس آن نسبت به پایهٔ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ماتریس A باشد. به موجب قضیهٔ (۷.۳۲)، U یک تبدیل یکانی است. قضیهٔ (۸.۳۲) را برای به دست آوردن یک پایهٔ یکاقائم $\{w_1, \dots, w_n\}$ به کار می‌بریم به طوری که ماتریس مربوطه اش قطری و درایه‌های واقع بر قطر دارای قدرمطلق برابر ۱ باشند. پس این ماتریس قطری برابر با BAB^{-1} است که در آن B ماتریسی است که یک پایهٔ یکاقائم را بر پایهٔ یکاقائم دیگری تبدیل می‌کند. و باز هم بنابر قضیهٔ (۷.۳۲) B یک ماتریس یکانی است و فرع ثابت می‌شود.

اکنون می‌خواهیم مشابه ترانهاذهٔ یک تبدیل خطی را در مورد فضاها برداری با حاصلضرب داخلی ارمیتی معرفی کنیم ($\leftarrow$ (۶.۲۷)).

(۱۰.۳۲) تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با یک حاصلضرب داخلی ارمیتی (u, v) باشد. قرار می‌دهیم $T \in L(V, V)$. یک تبدیل خطی $T' \in L(V, V)$ را الحاقی T می‌نامیم اگر برای هر u, v متعلق به V داشته باشیم

$$(Tu, v) = (u, T'v)$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که این الحاقی همواره وجود دارد و یکتاست.

(۱۱.۳۲) قضیه. فرض می‌کنیم که $T \in L(V, V)$. در این صورت T دارای یک الحاقی یکتای T' است. اگر A ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکاقائم باشد، آنگاه ماتریس T' برابر با $\bar{A}^t$ است و تساویهای

$$\begin{aligned} (aT)' &= \bar{a}T', & (T_1 + T_2)' &= T_1' + T_2' \\ (T_1 T_2)' &= T_2' T_1', & T'' &= T \end{aligned}$$

برای همهٔ تبدیلیهای خطی T_1, T_2, T و $a \in C$ برقرار است.

برهان. اثبات وجود T' را به وسیلهٔ روشهای بخش ۲۷ می‌توان نشان داد. به جای آن، ما با استفاده از ماتریسها یک روش عملی‌تری به دست می‌دهیم. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکاقائم $\{v_1, \dots, v_n\}$ باشد و T' تبدیل خطی باشد که ماتریس آن نسبت

تبدیلهای یکانی و قضیه طیفی ۳۳۱

به این پایه ${}^t\bar{A}$ باشد. در این صورت

$$Tv_i = \sum_k a_{ki} v_k, \quad T'v_j = \sum_k \bar{a}_{jk} v_k,$$

و

$$(Tv_i, v_j) = \left(\sum_k a_{ki} v_k, v_j \right) = \sum_k a_{ki} (v_k, v_j) = a_{ji}$$

در حالی که داریم

$$(v_i, T'v_j) = (v_i, \sum_k \bar{a}_{jk} v_k) = \sum_k a_{jk} (v_i, v_k) = a_{ji}.$$

بنابراین T' الحاقی T است و دارای ماتریس ${}^t\bar{A}$ نسبت به پایه داده شده است. یکتایی T' از اینجا نتیجه می شود که اگر T'' الحاقی دیگری باشد، برای همه بردارهای v و w خواهیم داشت

$$(v, (T' - T'')w) = 0.$$

و بنابراین $T' = T''$. اثبات فرمولهای $(aT)'$ ، $(T_1 + T_2)'$ ، $(T_1 T_2)'$ و T'' مستقیماً از یکتایی الحاقی نتیجه می شود و به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می شود، و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می شود.

(۱۲.۳۲) تعریف. یک تبدیل خطی $T \in L(V, V)$ را خود-الحاقی یا ارمیتی می نامند اگر $T = T'$ ؛ و چنانچه $TT' = T'T$ در این صورت T را نرمال می گویند.
مثال الف. فرض کنیم A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد و T یک تبدیل خطی که ماتریس آن نسبت به یک پایه یکا قائم برابر A باشد. در این صورت T یک تبدیل خود-الحاقی است.

تبدیلهای خود-الحاقی همیشه نرمال هستند. نمونه های تبدیلهایی که نرمال هستند ولی در حالت کلی خود-الحاقی نیستند تبدیلهای یکانی هستند.

قضیه اصلی این بخش این است که هر تبدیل نرمال همواره قطری شدنی است و ویژه بردارهای یک تبدیل نرمال متناظر با ویژه مقادیرهای متمایز بر هم عمودند. ما نخست چند قضیه مقدماتی را ثابت خواهیم کرد. و قضیه اصلی به صورت زیباتر و مفیدتری به نام قضیه طیفی بیان خواهد شد که نمایشگر ارتباط بین طیف T است، که بنابر تعریف، مجموعه ویژه مقادیرهای T عمل T بر روی فضای بردار V است.

(۱۳.۳۲) لم. فرض می کنیم T یک تبدیل نرمال روی V باشد. برای T و T' ویژه بردارهای مشترکی وجود دارند. برای یک چنین بردار v داریم $Tv = av$ و $T'v = \bar{a}v$.
برهان. چون C جبری-بسته است، یک ویژه مقدار a برای T وجود دارد. فرض می کنیم V_1 مجموعه همه بردارهای $v \in V$ باشد به طوری که $Tv = av$. اگر $v \in V_1$ ، با توجه به این که

$TT' = T'T$ ، نتیجه می‌شود که $TT'v = T'Tv = aT'v$ پس V_1 نسبت به تبدیل T' پایا می‌شود. اکنون در V_1 ویژه برداری برای T' به دست می‌آوریم، این بردار ویژگی مطلوب را خواهد داشت.

حال قرار می‌دهیم $Tv = av$ و $T'v = bv$ در این صورت

$$a(v, v) = (Tv, v) = (v, T'v) = (v, bv) = \bar{b}(v, v)$$

و بدین ترتیب چون $(v, v') \neq 0$ ، خواهیم داشت $a = \bar{b}$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

(۱۴.۳۲) لم. فرض می‌کنیم T یک تبدیل نرمال باشد و v و v' همزمان ویژه بردارهای T و T' باشند به طوری که v و v' به ویژه مقدارهای متمایز T متعلق باشند. در این صورت $(v, v') = 0$.

برهان. قرار می‌دهیم $Tv = av$ و $Tv' = bv'$ چون $a \neq b$ ، $Tv = av$ و $Tv' = bv'$ در فرض لم (۱۳.۳۲) صدق می‌کنند، خواهیم داشت $T'v = \bar{a}v$ ، $T'v' = \bar{b}v'$ بنابراین

$$\begin{aligned} a(v, v') &= (Tv, v') = (v, T'v') = (v, \bar{b}v') \\ &= b(v, v') \end{aligned}$$

چون $a \neq b$ ، پس $(v, v') = 0$.

(۱۵.۳۲) لم. فرض می‌کنیم $\{E_1, \dots, E_s\}$ مجموعه‌ای از تبدیلهای خطی V باشند به طوری که $\sum E_i = 1$ و $E_i E_j = 0$ اگر $j \neq i$. در این صورت برای هر i ، $1 \leq i \leq s$ ، $\{E_i\}$ خود-الحاقی است، اگر و تنها اگر زیرفضاهای $\{E_i V\}$ دوجه دو متعامد باشند. برهان. نخست فرض می‌کنیم که $\{E_i\}$ ها خود-الحاقی باشند. در این صورت قرار می‌دهیم $v = E_i(w)$ و $v' = E_j(w')$ برای $j \neq i$ ، خواهیم داشت

$$(v, v') = (E_i(w), E_j(w')) = (w, E_i E_j(w')) = 0$$

زیرا $E_i E_j = 0$ و $E'_i = E_i$

به‌ارون، فرض می‌کنیم که $(E_i V, E_j V) = 0$ اگر $j \neq i$. در این صورت $(V, E'_i E_j V) = 0$ و بنابراین $E'_i E_j = 0$ اگر $j \neq i$. با استفاده از قضیه (۱۱.۳۲)، همچنین داریم

$$1 = E'_1 + \dots + E'_s, \quad E'_i E'_j = 0, \quad i \neq j$$

پس

$$E_i = 1 E_i = (E'_1 + \dots + E'_s) E_i = E'_i E_i$$

و

$$E'_i = E'_i \cdot 1 = E'_i (E'_1 + \dots + E'_s) = E'_i E_i$$

بنابراین $E_i = E'_i$ ، و لم ثابت می شود.

اکنون آماده بیان قضیه اصلی درباره تبدیلهای نرمال هستیم.

(۱۶.۳۲) قضیه. (قضیه طیفی برای تبدیلهای نرمال). فرض می کنیم T تبدیلی نرمال

روی یک فضای برداری مختلط V مجهز به یک حاصلضرب داخلی ارمیتی باشد، و فرض می کنیم $\{a_1, \dots, a_s\}$ ویژه مقدارهای متمایز T باشند. در این صورت چند جمله‌بهای $\{f_1(x), \dots, f_s(x)\}$ در $C[x]$ وجود دارند به طوری که تبدیلهای $\{E_i = f_i(T)\}$ ، $1 \leq i \leq s$ ، خود-الحاقی هستند و در شرطهای $E_1 + \dots + E_s = 1$ ، و $E_i E_j = 0$ صدق می کنند اگر $i \neq j$. علاوه T را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$T = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_s E_s.$$

این گونه تجزیه T تجزیه طیفی T نامیده می شود.

برهان. نخست با استفاده از استقراء روی $\dim V$ ، ثابت می کنیم که T قطر شدنی است. این حکم برای $\dim V = 1$ روشن است، و می توانیم فرض کنیم که $\dim V > 1$. به موجب لم (۱۳.۳۲)، یک ویژه بردار مشترک w برای T و T' وجود دارد. فرض می کنیم W زیر فضای $S(w)$ تولید شده به وسیله w باشد. بنابر قضیه (۵.۳۲)، $V = W \oplus W^\perp$. ثابت می کنیم که $W^\perp$ نسبت به T و T' پایاست. فرض می کنیم $v \in W^\perp$. پس $(w, Tv) = (w, T'v) = 0$. زیرا w یک ویژه بردار هم برای T و هم برای T' است، و بنابراین $Tv \in W^\perp$ و $T'v \in W^\perp$. به آسانی ثابت می شود که تحدید T به $W^\perp$ نرمال است (جزئیات اثبات به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می شود). با استفاده از اصل استقراء، نتیجه می شود که T قطری شدنی است.

ما اکنون می توانیم از قضیه (۹.۲۳) برای یافتن چند جمله‌بهای $\{f_1(x), \dots, f_s(x)\}$ در $C[x]$ به قسمی که تبدیلهای $E_i = f_i(T)$ ، $1 \leq i \leq s$ ، در شرطهای

$$1 = \sum E_i, E_i E_j = 0 \quad \text{برای} \quad i \neq j$$

و

$$T = a_1 E_1 + \dots + a_s E_s.$$

صدق می کنند، استفاده نماییم. علاوه حاصل جمع مستقیم $V = E_1 V \oplus \dots \oplus E_s V$ است و $E_i V = \{v \in V \mid Tv = a_i v\}$ برای $1 \leq i \leq s$. آنچه برای اثبات باقی می ماند خود-الحاقی بودن E_i هاست. برای این منظور کافی است، بنابر لم (۱۵.۳۲)، نشان دهیم که زیرفضاهای $E_i V$ دوهو متعامدند. چون T و T' تعویضپذیرند، هر یک از زیرفضاهای $E_i V$ ، هم نسبت به T و هم نسبت به T' پایا هستند. و بنابراین تحدید T' به $E_i V$ نرمال است و قطری شدنی در $E_i V$. علاوه همه ویژه مقدارهای T' در $E_i V$ ، بنابر لم (۱۳.۳۲)، برابر با $\bar{a}_i$ هستند. پس هر بردار غیر صفر در $E_i V$ یک ویژه بردار هم برای T و هم برای T' است. و حالا می توانیم لم (۱۴.۳۲) را به کار بریم و نتیجه بگیریم که $(E_i V, E_j V) = 0$ ، اگر $i \neq j$ ، و قضیه ثابت می شود.

(۱۷.۳۲) فرع. فرض می‌کنیم T یک تبدیل نرمال روی V باشد. یک پایهٔ یکاقائم از V وجود دارد که از ویژه بردارهای T تشکیل شده است. این قضیه اساساً در قضیه (۱۶.۳۲) اثبات شده است و اثبات این فرع به‌عنوان تمرین گذاشته می‌شود.

این بخش را با یک مورد استعمال جالب قضیهٔ طیفی تمام و یادآوری می‌کنیم که هر عدد مختلط $z = \alpha + \beta i \neq 0$ را می‌توان به‌صورت قطبی $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ بیان کرد، که در آن r یک عدد حقیقی مثبت، و $\cos \theta + i \sin \theta$ یک عدد مختلط با یک قدرمطلق ۱ است. مورد استعمال، تعمیمی است بانتایج وسیع از اعداد مختلط در تبدیلهای یک فضای برداری با حاصلضرب داخلی ارمیتی. یک تبدیل یکانی به‌طور قطع نظیر یک عدد مختلط با قدرمطلق یک است. ما اکنون نظیر آن را برای یک عدد حقیقی مثبت تعریف می‌کنیم:

(۱۸.۳۲) تعریف. یک تبدیل خطی T روی V را مثبت می‌نامیم اگر T خود الحاقی و برای همهٔ بردارهای $v \neq 0$ عدد (Tv, v) عددی حقیقی و مثبت باشد.

(۱۹.۳۲) لم. همهٔ ویژه مقدارهای یک تبدیل خود-الحاقی T حقیقی‌اند. T مثبت است اگر و تنها اگر همهٔ این ویژه مقدارها مثبت باشند. برهان. فرض کنیم T خود-الحاقی و a یک ویژه مقدار T متعلق به ویژه بردار v باشد. در این صورت

$$(Tv, v) = (v, Tv) = \overline{(Tv, v)}$$

بنابراین (Tv, v) یک عدد حقیقی است. علاوه $Tv = av$ ایجاب می‌کند داشته باشیم $(Tv, v) = a(v, v)$ و

$$a = \frac{(Tv, v)}{(v, v)}$$

حقیقی است. اگر T مثبت باشد، فرمول بالا نشان می‌دهد که a مثبت است. به‌وارون فرض می‌کنیم که همهٔ ریشه‌های مشخصهٔ یک تبدیل خود-الحاقی T مثبت باشند. به‌موجب قضیهٔ طیفی (۱۶.۳۲) خواهیم داشت

$$T = \sum a_i E_i$$

که در آن a_i ها حقیقی و مثبت‌اند. فرض می‌کنیم که $v \in V$ به‌ازای برداری مثل $v_i \in V$ به‌صورت

$$v = \sum E_i v_i$$

تمرینها ۳۳۵

بیان شده و $v \neq 0$ باشد. در این صورت

$$(Tv, v) = \sum a_i (E_i v_i, E_j v_j) > 0$$

زیرا $v \neq 0$ و $(E_i v_i, E_j v_j) = 0$ اگر $i \neq j$.

اکنون می‌توانیم مورد استعمال قضیه طیفی را بیان کنیم. دقت شود که در این برهان، قضیه طیفی را برای تعیین جذریک تبدیل به کار می‌بریم. و از این واقعیت استفاده می‌کنیم که اگر $T = \sum \alpha_i E_i$ تجزیه T بر طبق قضیه (۱۶.۳۲) باشد، آنگاه به دلیل ویژگیهای E_i داریم: $T^2 = \sum \alpha_i^2 E_i$ و $T^3 = \sum \alpha_i^3 E_i \dots$

(۲۰.۳۲) قضیه. (تجزیه قطبی). فرض کنیم T یک تبدیل خطی وارونپذیر در یک فضای برداری مختلط V با حاصلضرب داخلی ارمیتی باشد. در این صورت $T = US$ بیان کرد، که در آن U یک تبدیل یکانی و S مثبت است. برهان. چون T وارونپذیر است، برای هر $v \neq 0$ عدد (Tv, Tv) حقیقی و مثبت است. پس $(T'Tv, v) = (Tv, Tv)$ نیز برای هر $v \neq 0$ حقیقی و مثبت است، و چون بنابر قضیه (۱۱.۳۲) داریم $(T'T)' = T''T' = T'T$ لذا $T'T$ یک تبدیل مثبت است. بنابراین، مطابق با لم (۱۹.۳۲)، تجزیه طیفی $T'T$ به صورت

$$T'T = \sum a_i E_i$$

انجام خواهد شد، که ویژه بردارهای $\{a_i\}$ حقیقی و مثبت‌اند. قرار می‌دهیم

$$S = \sum \sqrt{a_i} E_i$$

چون $E_i^2 = E_i$ و برای $i \neq j$ داریم $E_i E_j = 0$ ، پس به دست می‌آوریم $S^2 = T'T$. بعلاوه روشن است که S خودالحاقی و مثبت است. زیرا که ویژه مقادیرهای آن $\{\sqrt{a_i}\}$ ها هستند و $\{E_i\}$ ها خودالحاقی. چون همه ویژه مقادیرهای S مخالف با صفرند، S وارونپذیر است. قرار می‌دهیم $U = TS^{-1}$. پس $T = US$ که در آن S مثبت است. بعلاوه

$$U'U = (S^{-1})' T' T S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = 1$$

زیرا S^{-1} نیز خودالحاقی است و $S^2 = T'T$. بنابراین U یکانی است (← تمرین ۵ در زیر) و قضیه ثابت می‌شود.

تمرینها

در سراسر تمرینهای زیر، V یک فضای برداری متناهی-بعد روی C با حاصلضرب داخلی ارمیتی (u, v) است.

۱. ثابت کنید که تبدیلهای یکانی روی V نسبت به عمل ضرب یک گروه تشکیل می‌دهند.
۲. نشان دهید که یک ماتریس یکانی بالا مثلثی (که عناصر زیر قطر اصلی صفرند) باید به صورت قطری باشد.
۳. نشان دهید که

$$A = \begin{pmatrix} & \circ & i \\ -i & & \circ \end{pmatrix}$$

- یک ماتریس یکانی است. یک ماتریس یکانی مانند B پیدا کنید که BAB^{-1} یک ماتریس قطری باشد.
۴. فرض کنیم V^* فضای دوگان V باشد. نشان دهید که اگر $f \in V^*$ ، آنگاه یک بردار یکتای $w \in V$ وجود دارد به طوری که برای هر $v \in V$ داریم $f(v) = (v, w)$.
۵. نشان دهید که $U \in L(V, V)$ یکانی است اگر و تنها اگر $UU' = 1$ ، که در آن U' الحاقی تبدیل U است.
۶. نشان دهید که اگر $T \in L(V, V)$ نرمال باشد، آنگاه W یک زیر فضای T -پایای V است اگر و تنها اگر $W^\perp$ یک زیر فضای T' -پایا باشد.
۷. نشان دهید که اگر T تبدیلی نرمال با تجزیه طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ طبق قضیه (۱۶.۳۲) باشد، آنگاه $T' = \sum \bar{\alpha}_i E_i$ یک تجزیه طیفی T' است.
۸. نشان دهید که اگر U یک تبدیل یکانی باشد، نرمال است.
۹. نشان دهید که تبدیل نرمال T با تجزیه طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ یکانی است اگر و تنها اگر برای همه ویژه مقدارهای مشخصه α_i ی تبدیل T داشته باشیم $|\alpha_i| = 1$.
۱۰. نشان دهید که اگر $T = \sum \alpha_i E_i$ تجزیه طیفی یک تبدیل نرمال T باشد، آنگاه برای هر چندجمله‌یی $f(x) \in C[x]$ ، تابع خطی $f(T)$ یک تبدیل نرمال و با تجزیه طیفی $f(T) = \sum f(\alpha_i) E_i$ است.
۱۱. فرض کنیم T یک تبدیل نرمال با تجزیه طیفی $T = \sum \alpha_i E_i$ باشد. نشان دهید که یک تبدیل خطی $X \in L(V, V)$ با T تعویضپذیر است اگر و تنها اگر X با همه خود توانهای E_i تعویضپذیر باشد.
۱۲. فرض کنیم $(u, v)_1$ یک حاصلضرب داخلی ارمیتی دیگری روی V باشد. نشان دهید که یک تبدیل مثبت T نسبت به حاصلضرب داخلی داده شده (u, v) وجود دارد که برای هر u, v متعلق به V ، در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$(u, v)_1 = (Tu, v)$$

برخی از کاربردهای جبر خطی

در این فصل سه کاربرد جبر خطی را که هر یک مربوط به بخشهای متفاوتی از ریاضی است ارائه خواهیم داد. اولی در مسأله هندسی طبقه‌بندی گروههای متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی است، که تا حدی مکمل کاری است که در بخش ۱۴ دربارهٔ گروههای متقارن در صفحه شروع کرده بودیم. دومی نشان خواهد داد که چگونه زبان بردارها و ماتریسها در آنالیز برای تبدیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت به یک معادلهٔ دیفرانسیل تک‌بردارى مورد استفاده قرار می‌گیرد و سپس از راهی ظریف، با استفاده از تابع‌نمایی یک ماتریس، حل می‌شود. سرانجام، کاربردی را برای یک مسأله در جبر کلاسیک در مورد مجموع مربعات ارائه خواهیم داد.

۳۳. گروههای متقارن متناهی در فضای سه‌بعدی

کار خود را ضمن ملاحظاتى چند دربارهٔ تبدیلات متعامد بر روی یک فضای برداری حقیقی n بعدی V با حاصلضرب داخلی (u, v) شروع می‌کنیم. اگر $S \subset V$ ، مجموعهٔ همهٔ بردارهای $v \in V$ را که برای هر $s \in S$ تساوی $(s, v) = 0$ برقرار باشد، با $S^\perp$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $S^\perp$ همواره یک زیر فضا است و همان‌طور که در بخش ۳۰ نشان داده‌ایم، اگر S یک زیر فضا باشد، آنگاه:

$$V = S \oplus S^\perp$$

به‌ویژه، اگر x برداری غیر صفر باشد، $(x)^\perp$ زیر فضایی خواهد بود $(n-1)$ بعدی که

$$V = S(x) \otimes (x)^\perp$$

با بیان بخش ۱۰، $(x)^\perp$ ابر صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد. شاید ساده‌ترین نوع تبدیل خطی متعامد در V تبدیل T است که برای بردار غیر صفری مانند x تساویهای

$$Tx = -x$$

$$Tu = u \quad u \in (x)^\perp$$

را برقرار کند. اگر H معرّف ابر صفحه $(x)^\perp$ باشد، T یک تقارن نسبت به H نامیده می‌شود.* از لحاظ هندسی، T هر نقطه از V را بر روی قرینه آن نسبت به H می‌برد به‌طوری‌که عناصر H ثابت می‌مانند. ماتریس تقارن T نسبت به پایه‌ای که شامل پایه‌ای برای ابر صفحه‌ای است که بر اثر T و یک بردار عمود بر این ابر صفحه ثابت می‌ماند، به‌صورت زیر ارائه می‌شود

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

لذا، برای همه تقارنهای T نسبت به یک ابر صفحه داریم:

$$T^2 = 1, \quad D(T) = -1$$

اولین نتیجه مهم ما قضیه زیر است، که آ. کارتان و ژ. دیودونه داده‌اند، و بیان می‌دارد که هر تبدیل متعامد حاصلضرب چند تقارن است.

(۱.۳۳) **قضیه.** هر تبدیل متعامد بر روی فضای برداری n بعدی V با حاصلضرب داخلی، حاصلضرب حداکثر n تقارن است.

برهان. ** از استقراء بر روی n استفاده می‌کنیم، نتیجه برای $n=1$ واضح است، زیرا تنها تبدیلهای متعامد در فضای یک بعدی، ± 1 هستند. فرض کنید بعد (V) بزرگتر از ۱ باشد و قضیه برای تبدیلهای متعامد بر روی فضای $(n-1)$ بعدی صحیح باشد. گیریم T تبدیل متعامد مفروضی بر روی V باشد و $x \neq 0$ برداری در V .

* مسأله یکتایی قرینه نسبت به یک ابر صفحه مفروض در تمرینها مطرح شده است.

** برهان کلیتر این قضیه از آن آرتین است (که در کتابخانه آمده است).

گروههای متقارن متناهی در فضای سه بعدی ۳۳۹

حالت ۱. فرض کنید $Tx = x$ ؛ پس اگر $u \in H = (x)^\perp$ داریم:

$$(Tu, x) = (Tu, Tx) = (u, x) = 0$$

بنابراین $Tu \in H$ و T معرّف یک تبدیل متعامد بر روی فضای $(n-1)$ بعدی H است. بنابر فرض استقراء، تقارنهای $T_1, \dots, T_s$ از H ، برای $s \leq n-1$ وجود دارند به طوری که

$$Tu = T_1 \dots T_s u, \quad u \in H \quad (2.33)$$

هر کدام از T_i ها را به یک تبدیل خطی T'_i بر روی V با تعریف $T'_i u = T_i u$ و $T'_i x = x$ برای هر $u \in H$ و $s, i = 1, \dots, s$ ، توسیع می دهیم. نشان می دهیم که هر T'_i یک تقارن بر روی V است. یک زیر فضای $n-2$ بعدی $H_i \subset H = (x)^\perp$ وجود دارد که عناصرش بر اثر T_i ثابت می ماند، پس T'_i بردارهای ابر صفحه $H'_i = H_i + S(x)$ از V را ثابت نگاه می دارد. علاوه بر این اگر x_i مولد $H_i^\perp$ در H باشد، آنگاه $x_i \in (H'_i)^\perp$ و $T'_i x_i = T_i x_i = -x_i$. این ملاحظات نشان می دهند که T'_i تقارنی است نسبت به H'_i . بالاخره، از تعریف تبدیلیهای T'_i و (۲.۳۳) نتیجه می شود که:

$$T = T'_1 \dots T'_s$$

بنابراین نشان دادیم که هر تبدیل متعامدی که یک بردار را ثابت نگاه دارد حاصل ضرب حداکثر $n-1$ تقارن است.

حالت ۲. فرض کنید $Tx \neq x$ ؛ پس $u = Tx - x \neq 0$. فرض کنید $u \in H = (x)^\perp$ و H یک تقارن نسبت به H باشد. داریم.

$$(Tx + x, Tx - x) = (Tx, Tx) + (x, Tx) - (Tx, x) - (x, x) = 0$$

زیرا T متعامد است و صورت بالا متقارن. بنابراین $Tx + x \in H = (u)^\perp$ که $u = Tx - x$ داریم:

$$U(Tx + x) = Tx + x$$

چون U یک تقارن نسبت به $H = (Tx - x)^\perp$ است، داریم:

$$U(Tx - x) = -(Tx - x)$$

از جمع معادلات بالا، چنین به دست می آوریم:

$$2UT(x) = 2x$$

گروههای متقارن متناهی در فضای سه بعدی ۳۴۱

می‌کنیم و ارتباط آن را با مسئله کَلّی در تمرینها نشان می‌دهیم. اجازه دهید مطلب را با ذکر چند مثال از گروههای متناهی دوران در R_3 شروع کنیم. منظور از مرتبه یک گروه متناهی تعداد اعضای آن است. گروه دوری C_n از مرتبه n و گروه دوجهی D_n از مرتبه $2n$ ، که در بخش ۱۴ بحث شد، از نخستین مثالهاست.

برای رسانیدن منظور خود، در این بخش بهتر است D_n را گروه متقارن یک n ضلعی منتظم تلقی کنیم. تبدیل S در D_n ، که قرینه چندضلعی را نسبت به خط تقارن پیدا می‌کند، اگر چه معرف یک قرینه‌یابی است وقتی به عنوان یک تبدیل در صفحه انگاشته شود ولی، وقتی به عنوان یک تبدیل در R_3 نگریسته شود معرف یک دوران خواهد بود.

مثال دیگر، گروههای متقارن چند وجهیهای منتظم در R_3 است. دقیقاً ۵ تا از این چندوجهیها وجود دارند که در جدول زیر همراه با تعداد رئوس V ، تعداد یالهای E و تعداد وجوه F آورده شده‌اند.

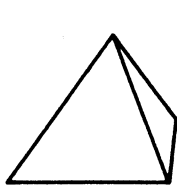
	F	E	V
چهاروجهی	۴	۶	۴
مکعب	۶	۱۲	۸
هشتوجهی	۸	۱۲	۶
دوازدهوجهی	۱۲	۳۰	۲۰
بیستوجهی	۲۰	۳۰	۱۲

(برای استخراج این فهرست، براساس فرمول اویلر برای چندوجهی «بدون سوراخ»، $F - E + V = 2$ ، به کتاب کورانت و رابینز و همچنین کتابهایی که وایل و کاکستر نوشته‌اند، و در کتابشناسی ذکر شده‌اند مراجعه کنید.) وجوه در حالت چهاروجهی مثلثهای متساوی الاضلاع، در حالت مکعب مربع، در حالت هشت وجهی مثلثهای متساوی الاضلاع، در حالت دوازده وجهی پنج ضلعی، و در حالت بیست وجهی مثلثهای متساوی الاضلاع هستند، — شکل (۱.۱۰).

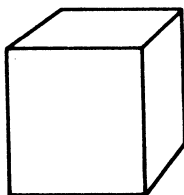
واضح است که می‌توانیم ۵ گروه دوران متفاوت از این شکلها به دست آوریم، این گروه در هر حالت مجموعه تمام دورانهایی است که شکل را بر روی خودش برمی‌گرداند. در بررسی نزدیکتر، می‌بینیم که مسأله چیز دیگری است. به عنوان مثال مکعب و هشتوجهی دوگان یکدیگرند بدین تعبیر که اگر یک شکل را گرفته مراکز وجوه آن را با پاره خطهایی به هم وصل کنیم، این پاره خطها یالهای چندوجهی دیگر می‌شوند، — شکل (۲.۱۰). بنابراین، هر دورانی که مکعب را به روی خود ببرد، تقارنی از هشتوجهی خواهد بود، و برعکس. همچنین ۱۲ وجهی و ۲۰ وجهی دوگان یکدیگرند. در نتیجه، از چندوجهیهای منتظم، فقط سه گروه دیگر به دست می‌آوریم: گروه T یا گروه دورانهای ۴ وجهی، گروه O یا گروه دورانهای هشتوجهی، و گروه I یا گروه دورانهای ۲۰ وجهی. اکنون می‌توانیم قضیه اصلی خود را بیان کنیم.

(۴.۳۳) قضیه. فرض کنید G یک گروه متناهی از دورانهای در R_3 باشد؛ پس G با یکی از

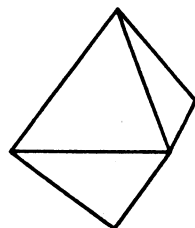
۳۴۲ برخی از کاربردهای جبر خطی



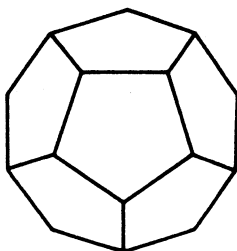
چهاروجهی



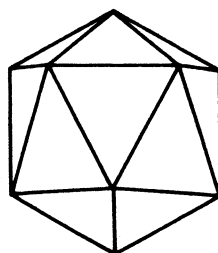
مکعب



هشتوجهی

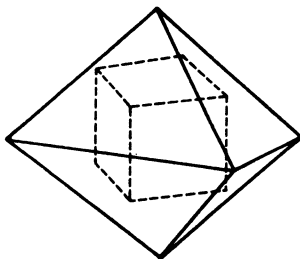


دوازدهوجهی



بیستوجهی

شکل ۱.۱۰



شکل ۲.۱۰

گروههای مذکور در زیر یکریخت است.

$$C_n \quad n = 1, 2, \dots$$

$$D_n \quad n = 1, 2, \dots$$

$$T, O, \text{ یا } \mathcal{I}$$

گروههای متقارن منتهای در فضای سه بعدی ۳۴۳

برهان. فرض کنید S کره واحد در R_3 ، متشکل از همه نقاط $x \in R_3$ باشد به طوری که $\|x\| = 1$. اگر $T \in G$ ، آنگاه $Tx \in S$ برای هر $x \in S$ ، و T براثر عمل آن بر روی اعضای کره S کاملاً مشخص شود، زیرا که S شامل یک پایه برای R_3 است. هر $T \in G$ ، به شرطی که $T \neq 1$ ، به موجب فرع (۳.۳۳)، نقاط متقاطر بر روی کره، و فقط این نقاط را، ثابت نگاه می‌دارد. این نقاط قطبهای T نامیده می‌شوند. از آنجا که G منتهای است، مجموعه همه قطبهای همه اعضای T از G به طوری که $T \neq 1$ مجموعه‌ای است منتهای از نقاط کره S ؛ این مجموعه را به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید p قطبی بر S باشد. روشن است که مجموعه همه اعضای T از G به طوری که p یک قطب T باشد، همراه با عضو همانی 1 ، یک زیر گروه G است، یعنی زیر مجموعه‌ای است از G که تحت عمل تعریف شده بر G خود یک گروه تشکیل می‌دهد. رتبه این زیر گروه، رتبه قطب p نام دارد و با v_p نمایش داده می‌شود.

سپس دو قطب p و p' را هم‌ارز می‌نامیم و می‌نویسیم $p' \sim p$ ، اگر و فقط اگر $p' = Tp$ برای برخی از $T \in G$. مجموعه همه قطبهای هم‌ارز با p رده هم‌ارزی p نامیده می‌شود. ثابت می‌کنیم که هر قطب به یک و فقط یک رده هم‌ارزی تعلق دارد. از آنجا که $1 \in G$ و $p = 1p$ ، لذا p به رده هم‌ارزی p تعلق می‌گیرد. حالا باید نشان دهیم که اگر قطب p به رده‌های هم‌ارزی p' و p'' تعلق گرفت، آنگاه این رده‌های هم‌ارزی برهم منطبق‌اند. فرض کنید q به رده هم‌ارزی p' متعلق باشد؛ پس $q \sim p'$ و $q = Tp'$ برای مقداری از $T \in G$. از آنجا که $p \sim p'$ و $p \sim p''$ ، داریم $p = T'p'$ و $p = T''p''$ برای $T' \in G$ و $T'' \in G$ ، و در نتیجه $p' = (T')^{-1}T''p''$. پس $q = T(T')^{-1}T''p''$ و لذا $q \sim p''$. ما نشان دادیم که رده هم‌ارزی p' مشمول در رده هم‌ارزی p'' است، و استدلال مشابهی مشمول معکوس را برقرار می‌سازد. این برهان، استدلال تعلق داشتن یک قطب به یک و فقط یک رده هم‌ارزی را کامل می‌کند.

(۵.۳۳) لم. قطبهای هم‌ارز یک مرتبه دارند.

برهان. فرض کنید $p' \sim p$ و $\mathcal{H}$ زیر گروهی است از G شامل همانی 1 همراه با اعضای که شامل p به عنوان قطب هستند، و فرض کنید $\mathcal{H}'$ زیر گروه متناظر برای p' باشد. فرض کنید $p = Tp'$. در این صورت یک بررسی ساده نشان می‌دهد که نگاشت $X \rightarrow TXT^{-1}$ یک نگاشت یک به یک از $\mathcal{H}'$ به روی $\mathcal{H}$ است، که لیم بالا را ثابت می‌کند.

(۶.۳۳) لم. فرض کنید p قطبی از مرتبه v_p و n_p تعداد قطبهای هم‌ارز با p باشد؛ پس $v_p n_p = N$ ، که N مرتبه G است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{H}$ زیر گروه مربوط به p باشد، برای $X \in G$ فرض کنید $X\mathcal{H}$ معرف مجموعه همه اعضای G باشد به طوری که $Y = XT$ ، برای برخی از $T \in \mathcal{H}$. ابتدا ملاحظه می‌کنیم، که برای هر $X \in G$ ، Xp یک قطب است و قطبهای Xp و $X'p$ یکی هستند اگر و فقط

* در این بحث از اعضای R_3 به عنوان نقاط صحبت می‌کنیم.

اگر $X' \in X\mathcal{H}$. بنابراین تعداد قطبهای هم‌ارز برابر با تعداد مجموعه‌هایی مجزا به شکل $X\mathcal{H}$ است. مجموعه $X\mathcal{H}$ هم‌مجموعهٔ چپ $\mathcal{H}$ شامل X نامیده می‌شود. حالا نشان می‌دهیم که هر عضوی از $\mathcal{G}$ متعلق به یک و فقط یک هم‌مجموعهٔ چپ است و تعداد اعضاء در هر هم‌مجموعهٔ چپ برابر v_p است. اگر $X \in \mathcal{G}$ ، آنگاه $X \in X\mathcal{H}$ زیرا $X = X \cdot 1 \in X\mathcal{H}$. حالا فرض کنید $X \in X'\mathcal{H} \cap X''\mathcal{H}$ ، نشان می‌دهیم که $X'\mathcal{H} = X''\mathcal{H}$ ؛ داریم، برای $Y \in X'\mathcal{H}$ ، $Y = X'T$ برای برخی از مقادیر $T \in \mathcal{H}$. علاوه بر این $X \in X'\mathcal{H} \cap X''\mathcal{H}$ ایجاب می‌کند که $X = X'T' = X''T''$ پس $T' = X'(X''T'')^{-1}T = X''T''(T')^{-1}T \in X''\mathcal{H}$. T' و T'' متعلق به $\mathcal{H}$. بنابراین $X'\mathcal{H} \subset X''\mathcal{H}$ ، و همچنین، $X''\mathcal{H} \subset X'\mathcal{H}$. بنابراین $X'\mathcal{H} = X''\mathcal{H}$ ، و ثابت کردیم که هر عضو $\mathcal{G}$ به هم‌مجموعهٔ چپ واحدی متعلق است. حال فرض کنید $X\mathcal{H}$ یک هم‌مجموعهٔ چپ باشد. بنابراین نگاشت $T \rightarrow XT$ ، یک نگاشت یک به یک از $\mathcal{H}$ به روی $X\mathcal{H}$ است، و هر هم‌مجموعهٔ چپ دارای v_p عضو است که مرتبهٔ $\mathcal{H}$ است.

نشان دادیم که تعداد قطبهای هم‌ارز p با تعداد هم‌مجموعه‌های چپ $\mathcal{H}$ در $\mathcal{G}$ برابر است. طبق آنچه نشان داده شد، این تعداد برابر با N/v_p است، و لیم ثابت می‌شود. اکنون می‌توانیم برهان قضیهٔ (۴.۳۳) را به پایان برسانیم. مجموعهٔ همهٔ جفتهای (T, p) را که در آن $1 \neq T$ ، $T \in \mathcal{G}$ ، و p یک قطب T است در نظر می‌گیریم. با شمارش جفتها از دو راه متفاوت* به دست می‌آوریم

$$2(N - 1) = \sum_p (v_p - 1)$$

و با گردآوری جملات طرف سمت راست برطبق رده‌های هم‌ارزی قطبها، C ، داریم

$$2(N - 1) = \sum_C n_C (v_C - 1)$$

که n_C تعداد قطبها در ردهٔ هم‌ارزی C ، و v_C مرتبهٔ یک قطب معمولی در C است [لیم (۵.۳۳)]، و عمل جمع بر روی رده‌های مختلف هم‌ارزی قطبها گرفته شده است. با استفاده از (۶.۳۳)، داریم:

$$2(N - 1) = \sum_C (N - n_C) = \sum_C \left(N - \frac{N}{v_C}\right)$$

از تقسیم بر N ، خواهیم داشت:

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_C \left(1 - \frac{1}{v_C}\right) \quad (7.33)$$

* ما ابتدا از این واقعیت استفاده می‌کنیم که $1 \neq T$ مربوط به دو قطب است و سپس هر قطب مربوط به $(v - 1)$ عضو $\mathcal{G}$ $T \neq 1$ است، به‌طوری‌که $1 \neq T$.

تمرینها ۳۴۵

سمت چپ بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۲ است؛ بنابراین حداقل دو ردهٔ C و حداکثر سه ردهٔ C وجود دارد. بقیهٔ استدلال، مطالعهٔ حسابی معادلهٔ (۷.۳۳) است.

حالت ۱. دو رده قطب از مرتبه‌های v_1 و v_2 وجود دارند. پس (۷.۳۳) به‌دست می‌دهد

$$\frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}, \quad 2 = \frac{N}{v_1} + \frac{N}{v_2}$$

و داریم $1 = N/v_1 = N/v_2$. این حالت فقط و فقط وقتی اتفاق می‌افتد که G دوری باشد.

حالت ۲. سه‌رده قطب از مرتبه‌های v_1, v_2, v_3 وجود دارند، که فرض می‌کنیم $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. پس (۷.۳۳) ایجاب می‌کند که

$$2 - \frac{2}{N} = \left(1 - \frac{1}{v_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{v_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{v_3}\right)$$

یا

$$1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

همگی v_i ها نمی‌توانند بزرگتر از ۲ باشند، پس $v_1 = 2$ و داریم

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

هر دو v_2 و v_3 نمی‌توانند $4 \leq$ باشند، پس ۳ یا ۲ $v_1 = 2$.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

حالت ۲ الف: $v_1 = 2, v_2 = 2$. بنابراین $v_3 = \frac{N}{2}$ و در این حالت G گروه دوجهی است

حالت ۲ ب: $v_1 = 2, v_2 = 3$. بنابراین داریم

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{2}{N}$$

و ۵ یا ۴ $v_3 = 3$. برای هر امکان v_3 داریم:

$v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 3$. بنابراین $N = 12$ و G گروه ۴ وجهی T است.

$v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4$. بنابراین $N = 24$ و G گروه هشت وجهی O است.

$v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 5$. بنابراین $N = 60$ و G گروه بیست وجهی I است.

تمرینها

۱. فرض کنید V یک فضای برداری با حاصلضرب داخلی باشد:

(الف) ثابت کنید که، اگر T_1 و T_2 تقارنهایی نسبت به یک ابرصفحه H باشند، آنگاه $T_1 = T_2$.

(ب) ثابت کنید که اگر T تبدیل متعامدی باشد که تمامی اعضای ابرصفحه H را ثابت نگاه دارد، آنگاه یا $T = 1$ ، و یا T تقارنی نسبت به H است.

(ج) فرض کنید T تقارنی نسبت به H باشد و فرض کنید $x_0 \in H^\perp$. ثابت کنید که T توسط فرمول زیر داده می‌شود:

$$T(x) = x - 2 \frac{(x, x_0)}{(x_0, x_0)} x_0, \quad x \in V$$

۲. فرض کنید $\mathcal{G}$ گروه تبدیلهای متعامد متناهی و $\mathcal{H}$ دورانی شامل $\mathcal{G}$ باشد. ثابت کنید که $\mathcal{H}$ یک زیر گروه $\mathcal{G}$ است و اگر $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ ، آنگاه برای هر عضو $X \in \mathcal{G}$ و $X \notin \mathcal{H}$ داریم

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup X\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} \cap X\mathcal{H} = \emptyset$$

۳. فرض کنید $\mathcal{G}$ گروه متناهی مفروضی از تبدیلهای خطی معکوس‌پذیر بر روی R_3 باشد. ثابت کنید که یک حاصلضرب داخلی $((x, y))$ بر R_3 وجود دارد به‌طوری‌که $T_i \in \mathcal{G}$ ها تبدیلهایی متعامد نسبت به حاصلضرب داخلی $((x, y))$ باشند. [راهنمایی: فرض کنید (x, y) حاصلضرب داخلی معمولی در R_3 باشد. $((x, y))$ را با تساوی

$$((x, y)) = \sum_{T_i \in \mathcal{G}} (T_i(x), T_i(y))$$

تعریف و ثابت کنید که $((x, g))$ ویژگیهای مطلوب را دارد. یادآوری می‌کنیم که همین استدلال را می‌توان برای گروههای متناهی معکوس‌پذیر تبدیلهای خطی در R_n برای عدد دلخواه n نیز به‌کار برد].

۴. فرض کنید $\mathcal{G}$ مجموعه تبدیلهای خطی روی C_2 باشد و C هیأت مختلطی باشد که ماتریسهای آن نسبت به یک پایه به‌صورت‌های زیر باشند:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید که $\mathcal{G}$ یک گروه متناهی تشکیل می‌دهد و پایه‌ای برای C_2 وجود ندارد که ماتریسهای اعضای $\mathcal{G}$ نسبت به پایه جدید همگی دارای ضرایب حقیقی باشند (راهنمایی: اگر چنین پایه‌ای وجود می‌داشت، آنگاه به‌موجب تمرین ۳ و قضایای بخش ۱۴، $\mathcal{G}$ بایستی یا با یک گروه دوری و یا با یک گروه دووجهی یکرخت می‌شد).

۳.۴. کاربرد در معادله‌های دیفرانسیل

در این بخش دستگاه معادله‌های دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اولی با ضرایب ثابت و توابع مجهول $y_1(t), \dots, y_n(t)$ را که در آنها t متغیر حقیقی و $y_i(t)$ ها توابع حقیقی-مقدارند در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر معادله‌های دیفرانسیلی به صورت زیر داده شده‌اند

$$\frac{dy_1}{dt} = \alpha_{11}y_1 + \dots + \alpha_{1n}y_n$$

(۱.۳۴)

$$\frac{dy_n}{dt} = \alpha_{n1}y_1 + \dots + \alpha_{nn}y_n$$

که $A = (\alpha_{ij})$ ماتریس ثابتی است n در n درایه‌های حقیقی. مسألهٔ یافتن مجموعهٔ جوابهای $y_1(t), \dots, y_n(t)$ را که با مجموعهٔ شرایط اولیهٔ $y_1(0), \dots, y_n(0)$ مشخص می‌شوند مورد بحث قرار خواهیم داد. مثلاً، اگر t زمان و $y_1(t), \dots, y_n(t)$ معرّف حرکت یک دستگاه مکانیکی باشند، می‌خواهیم چگونگی حلّ این معادله‌های حرکت را نشان دهیم مشروط به اینکه این توابع در لحظهٔ $t = 0$ مقادیر مشخصی اختیار کنند. ساده‌ترین حالت چنین دستگاهی، حالت یک معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

است و در این حالت از آشنایی که با حسابان مقدماتی داریم می‌دانیم که تابع

$$y(t) = y(0)e^{\alpha t}$$

جواب این معادلهٔ دیفرانسیل است که مقدار اولیهٔ $y(0)$ را در $t = 0$ اختیار می‌کند. نشان خواهیم داد که چگونه نظریهٔ ماتریسها می‌تواند برای حل یک دستگاه کلی (۱.۳۴) به همان سادگی مورد استفاده قرار گیرد. به این نکته نیز اشاره می‌کنیم که بحث ما متضمّن یک حالت خاص مسألهٔ حل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبه n با ضرایب ثابت است

$$\alpha \cdot \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{dt} + \alpha_n y = 0, \quad \alpha \neq 0$$

(۲.۳۴)

که α_i ها ضرایب حقیقی هستند. به جای این معادله می‌توان دستگاهی به شکل (۱.۳۴) قرار داد به شرطی که $y(t)$ را به عنوان تابع مجهول $y_1(t)$ بگیریم و مشتقات را به صورت زیر نامگذاری کنیم:

$$\frac{d^i y}{dt^i} = y_{i+1}(t), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

۳۴۸ برخی از کاربردهای جبر خطی

بنابراین توابع $y_1(t)$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2 \quad (۳.۳۴)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = -\frac{\alpha_n}{\alpha_*}y_1 - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_*}y_2 - \dots - \frac{\alpha_1}{\alpha_*}y_n$$

و برعکس، هر مجموعه از جوابهای دستگاه (۳.۳۴) یک جواب $y_1(t) = y(t)$ از معادله اولیه (۲.۳۴) را نیز خواهد داد. شرایط اولیه در این حالت مقادیری هستند که $y(t)$ و $n-1$ مشتق اولیه را در $t=0$ مشخص می‌کنند.

حالا به اصل بحث می‌پردازیم. توابع $y_1(t), \dots, y_n(t)$ را به شکل برداری (یا به صورت ماتریس $n \times 1$) نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

در اینجا، اگر بخواهیم به‌طور مجرد به آن نگاه کنیم، تابعی داریم که به هر مقدار حقیقی t یک بردار $\mathbf{y}(t) \in R_n$ را تخصیص می‌دهد. حدود چنین تابعی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) \\ \vdots \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y_n(t) \end{pmatrix}$$

به‌شرطی که همهٔ حدود $\lim_{t \rightarrow t_0} y_i(t)$ وجود داشته باشند.

بهتر است که همهٔ اینها را اندکی تعمیم دهیم. توابع:

$$t \rightarrow \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) \dots a_{1r}(t) \\ \dots \dots \dots \\ a_{s1}(t) \dots a_{sr}(t) \end{pmatrix}$$

را که به هر عدد حقیقی t یک ماتریس $\mathbf{A}(t)$ ی $s \times r$ را مربوط می‌کند که درایه‌هایش مقادیر مختلط $a_{ij}(t)$ هستند، در نظر می‌گیریم. برای تابع ماتریسی 1×1 ، می‌توان به‌ازای مقداری از

عدد مختلط u چنین تعریف کرد:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = u$$

به شرطی که برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $|t - t_0| < \delta$ رابطه $|a(t) - u| < \varepsilon$ را ایجاد کند که $|a(t) - u|$ معرف فاصله بین نقاط $a(t)$ و u در صفحه مختلط است. با استفاده از این حقیقت (که در بخش ۱۵ اثبات شده است) که برای اعداد مختلط u و v داریم:

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

به آسانی می‌توان نشان داد که قضایای معمولی حد در حسابان مقدماتی برای توابع مختلط مقدار برقرار است. سپس، همان‌گونه که در مورد تابع برداری $y(t)$ تعریف کردیم، می‌توانیم حد $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t)$ را تعریف کنیم:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)}{h} = \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \dots & \frac{da_{1r}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{s1}}{dt} & \dots & \frac{da_{sr}}{dt} \end{pmatrix}$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{11}^{(n)}(t) & \dots & \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1r}^{(n)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{s1}^{(n)}(t) & \dots & \lim_{n \rightarrow \infty} a_{sr}^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

که $\{\mathbf{A}_n(t)\}$ یک دنباله از توابع ماتریسی-مقدار $(a_{ij}^{(n)}(t))$ است. حالا می‌توانیم دستگاه معادلات دیفرانسیل اولیه (۱.۳۴) را به صورت فشرده‌تر زیر بیان کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y \quad (۴.۳۴)$$

که

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

تابعی است برداری-مقدار $\mathbf{A}y$ معرف حاصلضرب ماتریس ثابت $\mathbf{A}$ $n \times n$ در ماتریس y $1 \times n$ است.

۳۵۰ برخی از کاربردهای جبر خطی

موضوع قابل توجه این که معادله (۴.۳۴) را می‌توان دقیقاً همانند حالت یک بعدی حل کرد. برای روشن ساختن موضوع تعریف زیر را در نظر می‌گیریم:

(۵.۳۴) تعریف. فرض کنید B ماتریس $n \times n$ با ضرایب مختلط (β_{ij}) باشد. دنباله‌های ماتریسها را به صورت

$$E^{(n)} = I + B + \frac{1}{1!}B^2 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

و ماتریس نمایی را به صورت

$$e^B = \lim_{n \rightarrow \infty} E^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I + B + \frac{1}{1!}B^2 + \cdots + \frac{1}{n!}B^n \right)$$

تعریف می‌کنیم. البته قبل از همه بایستی وجود e^B ، به عبارت دیگر وجود حد دنباله $\{E^{(n)}\}$ تحقیق شود. فرض کنید ρ یک حد بالایی برای $\{|\beta_{ij}|\}$ باشد؛ پس برای همه (i, j) ها $|\beta_{ij}| \leq \rho$ فرض کنید $B^n = (\beta_{ij}^{(n)})$. پس مؤلفه (i, j) مربوط به $E^{(n)}$ عبارت است از:

$$\beta_{ij}^{(0)} + \beta_{ij}^{(1)} + \frac{1}{1!}\beta_{ij}^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\beta_{ij}^{(n)}$$

و بایستی نشان دهیم که این دنباله به سمت حدی میل می‌کند. معنی آن این است که نشان دهیم سری نامتناهی زیر همگراست:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_{ij}^{(k)}$$

و این را می‌توان با یک آزمون مقایسه‌ای ساده به صورت زیر بررسی کرد: با استقراء بر روی k ، ابتدا نشان می‌دهیم که برای $k = 1, 2, \dots$ داریم:

$$|\beta_{ij}^{(k)}| \leq n^{k-1} \rho^k, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

بنابراین هر جمله سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_{ij}^{(k)}$$

از لحاظ قدر مطلق از هر جمله متناظرش در سری با جمله‌های مثبت زیر کوچکتر است

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^{k-1} \rho^k$$

کاربرد در معادله‌های دیفرانسیل ۳۵۱

و این سری برای تمام ρ ها به موجب آزمون نسبت همگراست. این مطلب اثبات وجود e^B را برای همه ماتریسهای B کامل می‌کند.

حالا برخی از ویژگیهای تابع $e^B \rightarrow B$ را در زیر درج می‌کنیم و اثبات آنها را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم،

$$AB = BA \text{ که در صورتی که } e^{A+B} = e^A e^B \quad (۶.۳۴)$$

$$\frac{d}{dt} e^{tB} = B e^{tB} \quad n \times n \text{ برای همه ماتریسهای } B \quad (۷.۳۴)$$

$$S^{-1} e^A S = e^{S^{-1} A S}, S \text{ برای هر ماتریس معکوس پذیر } S \quad (۸.۳۴)$$

جواب (۴.۳۴) را حالا به صورت زیر می‌آوریم:

$$(۹.۳۴) \text{ قضیه. معادله دیفرانسیل برداری}$$

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

که در آن A ماتریس ثابت دلخواهی با ضریبهای حقیقی است، دارای جواب زیر است:

$$y(t) = e^{tA} \cdot y.$$

که مقدار اولیه y_0 را در $t = 0$ اختیار می‌کند.

برهان. واضح است که $y(0) = y_0$ ، و می‌ماند تحقیق کنیم که $y(t)$ حقیقتاً جواب این معادله دیفرانسیل است. ابتدا اشاره کنیم که، اگر $A(t)$ یک تابع ماتریسی باشد و B یک بردار ثابت، آنگاه

$$\frac{d}{dt} [A(t)B] = \frac{dA}{dt} \cdot B$$

از مشتقگیری از $y(t) = e^{tA} \cdot y_0$ و استفاده از (۷.۳۴)، داریم

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{d}{dt} e^{tA} \right) \cdot y_0 = (A e^{tA}) y_0 = A y(t)$$

که برهان قضیه را کامل می‌کند.

قضیه (۹.۳۴) مسأله مذکور در ابتدای این بخش را حل می‌کند، اما این راه حل باز از اهمیت عملی زیادی برخوردار نیست زیرا محاسبه ماتریس e^{tA} مشکل است. حالا نشان می‌دهیم که چگونه قضیه (۹.۲۴) در به دست دادن یک روش کلی برای محاسبه ماتریس e^{tA} می‌تواند، در صورت معلوم بودن ریشه‌های مختلط چندجمله‌یی مینیمال ماتریس A مورد استفاده قرار گیرد، فرض کنید

$$m(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \dots (x - \alpha_s)^{e_s}, \quad e_i > 0$$

۳۵۲ برخی از کاربردهای جبر خطی

چند جمله‌یی مینیمال A باشد. بنابراین ماتریس معکوس‌پذیر S ، احتمالاً با ضریبهای مختلط، وجود دارد که طبق قضیه (۹.۲۴)،

$$S^{-1}AS = D + N$$

که

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \alpha_1 & & & & & & \\ \hline & & & \alpha_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha_2 & & & \\ \hline & & & & & & & & \end{array} \right)$$

یک ماتریس قطری، و N پوچتوان است و $DN = ND$. علاوه، S ، D ، و N را می‌توان با روشهای بخش ۲۴ حل کرد. پس

$$A = S(D + N)S^{-1}$$

و، طبق (۶.۳۴) و (۸.۳۴)، داریم

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tS(D+N)S^{-1}} = S(e^{tD+tN})S^{-1} \\ &= Se^{tD}e^{tN}S^{-1} \end{aligned}$$

نکته جالب در تمامی اینها این است که e^{tD} و e^{tN} هر دو به راحتی قابل محاسبه‌اند؛ فقط یک ماتریس قطری به صورت زیر است:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} e^{\alpha_1 t} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & e^{\alpha_1 t} & & & & & & \\ \hline & & & e^{\alpha_2 t} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & e^{\alpha_2 t} & & & \\ \hline & & & & & & & & \end{array} \right)$$

کاربرد در معادله‌های دیفرانسیل ۳۵۳

در حالی که $e^{tN} = I + tN + \frac{t^2 N^2}{2} + \dots + \frac{t^{r-1} N^{r-1}}{(r-1)!} + \dots$ اگر $N^r = 0$. بردار جواب $y(t) = Se^{tD} e^{tN} S^{-1} y_0$ است.

مثال الف. معادله دیفرانسیل برداری

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{با} \quad \left(\frac{dy}{dt} = Ay \right)$$

را در نظر می‌گیریم. یک جواب y از معادله دیفرانسیل را که در شرط اولیه $y(0) = y_0$ نیز صدق می‌کند محاسبه می‌کنیم. چند جمله‌ی مینیمال A ، $x^2 + x - 2$ است و مشاهده می‌کنیم که A قطری شدنی است (چرا؟). ویژه مقدارهای A ، اعداد -2 و 1 هستند با ویژه بردارهای متناظر،

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

بنابراین $AS = SD$ ، که

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

داریم $A = SDS^{-1}$ پس

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$$

که

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

یک جواب y از معادله دیفرانسیل که در شرط اولیه $y(0) = y_0$ صدق می‌کند، به صورت زیر به دست می‌آید

$$y(t) = Se^{Dt}S^{-1}y_0.$$

مثال ب. e^{At} را در حالتی که A ماتریس زیر است محاسبه کنید

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

در این حالت A قطری شدنی نیست (چرا؟). مطابق تجزیه ژوردان [قضیه (۹.۲۴)] ماتریس A به صورت زیر در می‌آید

$$A = D + N$$

۳۵۴ برخی از کاربردهای جبر خطی

که

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

از آنجا که $ND = DN$ داریم

$$e^{At} = e^{Dt} e^{Nt} \quad \text{که}$$

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

تمرینها

۱. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نشان دهید که $AB \neq BA$. e^A , e^B , e^{A+B} را محاسبه کنید و نشان دهید که $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

بنابراین (۶.۳۴) بدون فرضیهایی نظیر $AB = BA$ برقرار نیست.

۲. نشان دهید که $D(e^A) = e^{\sum \alpha_i}$ که $\{\alpha_i\}$ ویژه مقادیرهای A هستند [راهنمایی: از قضیه صورت مثلثی (۱.۲۴) همراه با (۸.۳۴) استفاده کنید].

۳. نشان دهید که e^A همواره معکوس پذیر است و برای هر $A \in M_n(C)$ تساوی $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ برقرار است.

۴. فرض کنید $y(t)$ جوابی برای معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = Ay$ باشد به طوری که $y(0) = y$. ثابت کنید که

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}y) = 0$$

و بنابراین $y = e^{At}.y$. پس جواب معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dt} = Ay$ که در شرط اولیه داده شده صدق کند به طور یکتا مشخص می شود.

۵. ثابت کنید که $e^t A = e^t A$ که ${}^t A$ ترانزاده A است.

۶. ماتریس A را پاد متقارن گویند اگر ${}^t A = -A$ ، برای مثال ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرینها ۳۵۵

پادمتقارن است. نشان دهید اگر A یک ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه e^A ماتریسی است متعامد با دترمینان ۱+.

۷. با استفاده از روشهای این بخش اثبات کنید که معادله دیفرانسیل (مذکور در بخش ۱)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0, \quad m \text{ یک ثابت مثبت}$$

جواب یکتایی به شکل $A \sin mt + B \cos mt$ دارد به طوری که $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$.
۸. دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1 - 3y_2 \end{cases} \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

۹. e^{At} را درحالتی که A هر یک از ماتریسهای زیر باشد محاسبه کنید

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۱۰. فرض کنید A ماتریس ضرایب معادله دیفرانسیل برداری هم‌ارز با

$$\alpha_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_n y = 0$$

باشد. ثابت کنید که چندجمله‌یی مشخصه A به صورت زیر است

$$\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

۱۱. (اختیاری) مشتقگیری زیر از یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل برداری «غیر همگن» را تحقیق کنید

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t)$$

که $f(t)$ تابع برداری پیوسته مفروضی است از t . سعی کنید یک جواب به شکل $y(t) = e^{At}c(t)$ پیدا کنید، که $c(t)$ یک تابع برداری است که باید مشخص شود. مشتق بگیرید تا به دست آورید

$$\frac{dy}{dt} = Ae^{At}c(t) + e^{At}\frac{dc(t)}{dt} = Ay + f(t)$$

۳۵۶ برخی از کاربردهای جبر خطی

از آنجا که $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}$ ، به دست می‌آوریم [از آنجا که $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$]

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)$$

پس $\mathbf{c}(t)$ یک انتگرال نامعین از $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)$ است و می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)ds$$

پس $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)ds = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$. سرانجام تحقیق کنید که $\mathbf{y}(t)$ یک جواب این معادله دیفرانسیل است.

۳۵. مجموع مربعات و قضیه هورویتس

در بخش ۲۱ هیأت اعداد مختلط را با تعریف ضرب در R_2 بنا کردیم. دقیقتر بگوییم وقتی $z_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$ و $z_2 = \langle \gamma, \delta \rangle$ در R_2 ، داده شده بود تعریف کردیم

$$z_1 z_2 = \langle \alpha\gamma - \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma \rangle$$

و ثابت کردیم که این عمل همراه با جمع برداری، در اصل موضوعهای یک هیأت صدق می‌کند. همچنین نشان دادیم که عمل ضرب رابطه جالب زیر را با طول بردارها در R_2 دارد:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (۱.۳۵)$$

برای همه z_1 ها و z_2 ها در R_2 ، که $|z_1| = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ و قس علی‌هذا ... اعداد مختلط در بسیاری از بخشهای ریاضیات (از جمله جبر خطی!) چنان مفیدند، که طبیعی است سؤال شود که آیا انواع دیگر «اعداد مختلط»، هم وجود دارند که از ضرب بردارها در R_2 ، به دست آمده باشند و بتوانند بامشابه‌های خود در R_2 ارزش مساوی داشته باشند؟ ما در این بخش یکی از مراحل مهم در جهت جستجوی پاسخ رضایتبخش به این سؤال اساسی را بررسی خواهیم کرد.

اجازه بدهید کار خود را با بررسی نزدیکتر برخی ویژگیهای ضرب در R_2 ، که در بالا تعریف کردیم، شروع کنیم: اول از همه، این ضرب دوخطی است، بدین معنی که نگاشت

$$(z_1, z_2) \rightarrow z_1 z_2$$

نگاشتی است دوخطی در $R_2 \times R_2 \rightarrow R_2$. اثبات این حقیقت که بلافاصله از تعریف حاصل می‌شود به عهده خواننده واگذار می‌شود. ثانیاً، قانون جالب (۱.۳۵) نیز وجود دارد. البته ویژگیهای

مجموع مربعات و قضیه هورویتز ۳۵۷

دیگر هم وجود دارند، اما این دو به نحو شگفت‌انگیزی توانا هستند. برای مثال، تنها با استفاده از دوخطی بودن ضرب و (۱.۳۵)، ثابت خواهیم کرد که اگر $z \neq 0$ ، آنگاه معادله $zx = z'$ برای هر z' در R_z یک جواب دارد. این مطلب هم‌ارز با این حکم است که ضرب از چپ L_z ، که با $L_z(u) = zu$ تعریف می‌شود، برای $u \in R_z$ را بر روی خودش می‌نگارد. دوخطی بودن ضرب مستلزم تبدیل خطی بودن L_z در R_z است. همانی (۱.۳۵) ایجاب می‌کند که صفر-فضای L_z ، اگر $z \neq 0$ ، $\{0\}$ باشد، پس در نتیجه، برد L_z همان‌طور که می‌خواستیم، تمامی R_z است. مسأله‌ای را که در این بخش بررسی می‌کنیم، مسأله زیر است. ما از نماد $|x|$ برای طول یک بردار مفروض $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ در R_n ، $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ، استفاده می‌کنیم:

مسأله I. برای چه مقادیر n یک نگاشت دوخطی $(x, y) \rightarrow x * y$ از $R_n \times R_n \rightarrow R_n$ وجود دارد که تساوی

$$|x * y| = |x||y|$$

برای همه x و y ها در R_n برقرار باشد؟

برهان مذکور در بالا، در حالت R_2 ، نشان می‌دهد که اگر مسأله I برای یک عدد صحیح n جواب داشته باشد، آنگاه $z' = z * x$ و $z' = x * z$ برای $z \neq 0$ ، برای هر z' در R_n ، جواب دارد. پس R_n ، بر اثر جمع برداری و عمل ضرب $*$ ، در تمامی ویژگیهای یک هیأت، بجز احتمالاً در قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری و وجود عضو همانی برای ضرب، صدق خواهد کرد. اولین کار ما بیان این مسأله I به شکلی است آسانتر که بتوان با آن کار کرد. فرض کنید مسأله I جوابی برای مقداری از n داشته باشد و $e_1, \dots, e_n$ پایه‌ای یکا قائم برای R_n باشد. پس عددهای $\{\gamma_{pq}^{(i)}\}$ وجود دارند، که به‌طور یکتا توسط ضرب $*$ تعریف می‌شوند، و در تساوی

$$e_p * e_q = \sum_{i=1}^n \gamma_{pq}^{(i)} e_i$$

برای $1 \leq p, q \leq n$ ، صدق می‌کنند. ضرب بردارهای دلخواه را حالا می‌توان برحسب عددهای $\{\gamma_{pq}^{(i)}\}$ ، به‌شع زير، محاسبه کرد. فرض کنید $x = \sum x_p e_p$ و $y = \sum y_q e_q$ بردارهایی در R_n باشند، که به‌صورت ترکیبهای خطی از بردارهای پایه بیان می‌شوند. لذا دوخطی بودن نگاشت ایجاب می‌کند که:

$$\begin{aligned} x * y &= \left(\sum x_p e_p \right) * \left(\sum y_q e_q \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n x_p y_q (e_p * e_q) \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{i=1}^n x_p y_q \gamma_{pq}^{(i)} e_i \\ &= \sum z_i e_i \end{aligned}$$

که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^n \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

از آنجا که، $|x|$ ، $|y|$ و $|x * y|$ جذرهای مجموع مربعات مؤلفه‌هایشان هستند، مسئله I را حالا می‌توان به صورت زیر دوباره بیان کرد

مسئله II. برای چه مقادیری از n ، یک همانی به صورت

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

وجود دارد که برای هر انتخابی از اعداد حقیقی $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ برقرار باشد، به طوری که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^n \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

و ماتریسهای $C^{(i)} = (\gamma_{pq}^{(i)})$ ، $1 \leq i \leq n$ ، ماتریسهای ثابت (مستقل از x و y) با درایه‌های حقیقی باشند؟

مثال الف. در همانی برای مجموع دومربع، داریم:

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2$$

پس

$$z_1 = 1x_1y_1 + 0x_1y_2 + 0x_2y_1 - 1x_2y_2$$

و

$$z_2 = 0x_1y_1 + 1x_1y_2 + 1x_2y_1 + 0x_2y_2$$

ماتریسهای C_1 و C_2 در این حالت عبارت‌اند از

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اولین موفقیت در مسئله II را اوایل به دست آورد. او نشان داد که مسئله هنگامی که $n = 4$ ،

جواب دارد، یعنی

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \quad (2.35)$$

که

$$z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

$$z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$$

$$z_3 = x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2$$

$$z_4 = x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1$$

ماتریسها در این حالت عبارت‌اند از

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

خواننده شکاک می‌تواند، اگر بخواهد، درستی تساوی (۲.۳۵) را امتحان کند.

اتحاد (۲.۳۵) را اوایل برای اثبات قضیه لاگرانژ که، هر عدد صحیح مثبت مجموع مربعات ۴ عدد صحیح است، به‌کار برد. اتحاد (۲.۳۵) نشان می‌دهد که کافی است ثابت کنیم هر عدد اول مجموع ۴ مربع است، زیرا که هر عدد صحیح مثبت حاصلضرب چند عدد اول است.

اتحاد (۲.۳۵) در سده نوزدهم توسط همیلتن، از راه حاصلضرب کواترنیونهای که کشف کرده بود، مجدداً کشف شد. یک جواب مسئله برای $n = 8$ را آرثر کیلی در ۱۸۴۵ به‌دست آورد. این مسئله همین‌طور ماند تا اینکه در ۱۸۹۸ هورویتس قضیه زیر را اثبات کرد

(۳.۳۵) قضیه. (هورویتس، ۱۸۹۸). مسائل هم‌ارز I و II درباره ترکیب مجموع مربعات

فقط وقتی می‌تواند جواب داشته باشد که $n = 1, 2, 4, 8$.

برهانی که در اینجا می‌آوریم تقریباً از روی برهان اولیه هورویتس با بعضی اصلاحاتی که توسط دیکسن انجام گرفته، برداشته شده است. بحث تاریخی مفصلتر و برهان متفاوت دیگر، توسط کرتیس در اولین کتاب مندرج در کتابنامه ارائه شده است.

تا قبل از ارائه برهان هورویتس، به‌بعضی حقایق اولیه درمورد ماتریسهای متقارن و پادمتقارن احتیاج داریم.

۳۶۰ برخی از کاربردهای جبر خطی

(۴.۳۵) تعریف. ماتریس A ی n در n با درایه‌های حقیقی را متقارن می‌نامیم اگر ${}^tA = A$ و پادمتقارن اگر ${}^tA = -A$ ، که ${}^tA$ معرّف ترانهادۀ A است.

(۵.۳۵) لم. الف) هر ماتریس A ی n در n را می‌توان به صورت

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

یعنی به صورت مجموع یک ماتریس متقارن $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ و یک ماتریس پادمتقارن $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$. بیان کرد. بعلاوه، اگر $A = S_1 + S_2$ ، و S_1 ماتریس متقارن و S_2 ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه $S_1 = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ و $S_2 = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

ب) فرض کنید S ماتریس معکوس‌پذیر $n \times n$ پادمتقارنی باشد. در این صورت n زوج است، $n = 2m$ ، برای هر m .

برهان. ابتدا متقارن بودن $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ و پادمتقارن بودن $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ را بررسی می‌کنیم. داریم

$${}^t[\frac{1}{2}(A + {}^tA)] = \frac{1}{2}({}^tA + {}^{tt}A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$

و

$${}^t[\frac{1}{2}(A - {}^tA)] = \frac{1}{2}({}^tA - {}^{tt}A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

همان‌طور که می‌خواستیم. این حقیقت که A مجموع دو ماتریس مورد بحث است، واضح است. حالا فرض کنید

$$A = S_1 + S_2 = T_1 + T_2$$

که S_1 و T_1 متقارن هستند و S_2 و T_2 پادمتقارن. پس

$$S_1 - T_1 = T_2 - S_2$$

که هم متقارن است و هم پاد متقارن، و فقط چنین ماتریسی، ماتریس صفر است. پس برهان قسمت (الف) کامل شد.

برای برهان (ب) طبق فصل ۵، داریم.

$$D(S) = D({}^tS) = D(-S) = (-1)^n D(S)$$

از آنجا که طبق فرض $D(S) \neq 0$ ، داریم

$$(-1)^n = 1$$

مجموع مربعات و قضیه هورویتز ۳۶۱

و n زوج است.

برهان قضیه (۳.۳۵). ما از فرض مسأله این نتیجه را می‌گیریم که یک همانی نظیر مسأله II برای جميع مقادیر x و y برقرار است. می‌توانیم فرض کنیم که $n > 1$. ابتدا برای مجموعه‌ای از x های داده شده قرار می‌دهیم:

$$\alpha_{ij} = \sum_{p=1}^n \gamma_{pj}^{(i)} x_p \quad 1 \leq i, j \leq n$$

پس معادله $\sum z_i^2 = (\sum x_i^2)(\sum y_i^2)$ ، که

$$z_i = \sum_{p,q=1}^n \gamma_{pq}^{(i)} x_p y_q$$

به صورت زیر در می‌آید

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{1j} y_j\right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{nj} y_j\right)^2 \quad (۶.۳۵)$$

برای مجموعه ثابتی از x ها این همانی برای هر y برقرار است. بنابراین می‌توانیم هر y_j را برابر یک قرار دهیم و بقیه را برابر صفر، تا معادله‌های زیر حاصل شوند

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \dots + \alpha_{n1}^2$$

.....

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \alpha_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2 + \dots + \alpha_{nn}^2$$

از حذف جمله‌های شامل y_i^2 از دو طرف معادله (۶.۳۵)، خواهیم داشت

$$0 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_{1i} \alpha_{1j} + \alpha_{2i} \alpha_{2j} + \dots + \alpha_{ni} \alpha_{nj}) y_i y_j$$

حال قرار می‌دهیم $y_i = y_j = 1$ ، و بقیه y ها را صفر می‌گیریم تا به دست آوریم:

$$0 = 2(\alpha_{1i} \alpha_{1j} + \dots + \alpha_{ni} \alpha_{nj})$$

برای $1 \leq j, i \leq n$: معادله‌های به دست آمده را می‌توان به شکل فشرده‌تری نوشت:

$${}^t \mathbf{A}(\mathbf{A}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \mathbf{I} \quad (۷.۳۵)$$

۳۶۲ برخی از کاربردهای جبر خطی

که A ماتریس (α_{ij}) ی n در n است. حالا از این حقیقت که (۷.۳۵) یک همانی برحسب x هاست، استفاده می‌کنیم. طبق تعریف ماتریس ضرایب $\{\alpha_{ij}\}$ ، می‌توانیم بنویسیم:

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

که $A_1, \dots, A_2, A_n$ ماتریسهای ثابتی و مستقل از x و y هستند. مثلاً برای درک چگونگی کار این فرایند، برای $n = 2$ داریم

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 & x_1 \\ 0 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

از گذاردن عبارت حاصل برای A در فرمول (۷.۳۵) داریم

$$(x_1 {}^t A_1 + \cdots + x_n {}^t A_n) (x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) I \quad (8.35)$$

از مقایسه ضرایب x_i^2 در دو طرف (همان کاری را که برای y ها انجام دادیم)، به دست می‌آوریم

$${}^t A_i A_i = I \quad 1 \leq i \leq n$$

و بنابراین $(A_i)({}^t A_i) = I$ ، $1 \leq i \leq n$.

حالا B_i را به صورت $B_i = {}^t A_n A_1$ ، $i = 1, 2, \dots, n-1$ ، تعریف می‌کنیم. پس (۸.۳۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$(x_1 {}^t A_1 + \cdots + x_n {}^t A_n) (A_n {}^t A_n) (x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) I$$

و بنابراین با استفاده از این حقیقت که ${}^t A_i A_n = {}^t B_i$ داریم

$$\begin{aligned} (x_1 {}^t B_1 + \cdots + x_{n-1} {}^t B_{n-1} + x_n I) (x_1 B_1 + \cdots + x_{n-1} B_{n-1} + x_n I) \\ = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) I \quad (9.35) \end{aligned}$$

اکنون می‌توانیم از مقایسه ضرایب x_i^2 در دو طرف (۹.۳۵) به دست آوریم:

$${}^t B_i B_i = I, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

مجموع مربعات و قضیه هورویتز ۳۶۳

با حذف این جمله‌ها و قرار دادن $x_i = x_j = 1$ برای $i \neq j$ ، و صفر قرار دادن بقیه x ‌ها، داریم:

$${}^tB_i + B_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

و

$${}^tB_i B_j + {}^tB_j B_i = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$$

در اینجا نشان داده‌ایم که اگر مسأله ترکیب مجموع مربعات برای یک n مفروض جواب داشته باشد، آنگاه $n-1$ ماتریس پادمتقارن $B_1, \dots, B_{n-1}$ وجود دارند که در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$B_i^2 = -I, \quad B_i B_j = -B_j B_i \quad (10.35)$$

برای هر i و j ، با $i \neq j$.

حالا ثابت خواهیم کرد که این مجموعه از ماتریسها فقط برای $n = 2, 4$ یا 8 می‌توانند وجود داشته باشند.

اول از همه، معادله (10.35) نشان می‌دهد که ماتریسهای B_i پادمتقارن معکوس‌پذیرند، و در نتیجه طبق لم (5.35) n زوج است. اشاره کنیم که حالا نشان داده‌ایم که مسأله در اولین حالت حل نشده $n = 3$ ، جواب ندارد.

حالا فرض می‌کنیم n زوج است و مجموعه تمام حاصلضربهای:

$$\{B_{i_1} B_{i_2} \dots B_{i_r}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n-1, r \geq 1\}$$

را که می‌تواند از B_i ‌ها تشکیل یابد، در نظر می‌گیریم. اشاره کنیم که در چنین حاصلضربی، اگر B_1 پیدا شود آن را می‌توان طبق (10.35) به پشت B_i ‌ها تا به اولین مکان برد، در غیر این صورت حاصلضرب بجز، علامت $\pm$ در جلو آن تغییر نمی‌کند. با ادامه این روش برای دیگر موارد B_1 و سپس B_2 ، و غیره می‌توانیم حاصلضرب دلخواهی از B ‌ها را به شکل زیر بنویسیم

$$\pm B_1^{p_1} \dots B_{n-1}^{p_{n-1}}, \quad p_j \geq 0$$

سرانجام، چون $B_i^2 = -I$ ، $1 \leq i \leq n$ ، چنین حاصلضربی را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\pm B_1^{e_1} \dots B_{n-1}^{e_{n-1}}, \quad e_i = 0 \text{ یا } 1$$

2^{n-1} حاصلضرب ممکن وجود دارند. حالا بستگی خطی این حاصلضربها را تحقیق می‌کنیم.

(11.35) لم. حداقل نیمی از (2^{n-2}) ماتریسهای $\{B_1^{e_1} \dots B_{n-1}^{e_{n-1}} | e_i = 0 \text{ یا } 1\}$

ناسته خطی هستند.

۳۶۴ برخی از کاربردهای جبر خطی

برهان. ابتدا باید تشخیص دهیم که کدامیک از ماتریسها متقارن است و کدامیک پادمتقارن. فرض کنید

$$M = B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_r}, \quad r \leq n-1, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r \quad (12.35)$$

پس، با استفاده از (۱۰.۳۵)، داریم:

$$\begin{aligned} {}^t M &= {}^t (B_{i_1} \cdots B_{i_r}) = {}^t B_{i_r} \cdots {}^t B_{i_1} \\ &= (-1)^r B_{i_r} \cdots B_{i_1} \\ &= (-1)^{r+(r-1)} B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_r} \\ &= (-1)^{r+(r-1)+(r-2)} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} \cdots B_{i_r} \\ &= (-1)^{r+(r-1)+\cdots+1} B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_r} \\ &= (-1)^{r(r+1)/2} B_{i_1} \cdots B_{i_r} = (-1)^{r(r+1)/2} M \end{aligned}$$

بنابراین M متقارن است اگر و فقط اگر $r(r+1)/2$ زوج باشد، یا $r(r+1)$ بر ۴ بخشپذیر باشد. این حالت هنگامی اتفاق می افتد که r یا $r+1$ بر ۴ بخشپذیر باشند. فرض کنید رابطه بستگی خطی

$$\alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_k M_k = 0 \quad (13.35)$$

را بین ماتریسهای به شکل (۱۲.۳۵) داریم، که فرض می کنیم همه $\alpha_i \neq 0$. چنین رابطه ای را رابطه تحویلناپذیر بستگی خطی می نامند اگر همه زیرمجموعه های سره $\{M_1, \dots, M_k\}$ نابسته خطی باشند. به دلیل قسمت اول لم (۵.۳۵)، نتیجه می گیریم که در یک رابطه تحویلناپذیر بستگی خطی همه ماتریسها یا متقارن و یا همگی پادمتقارن هستند. حالا فرض کنید (۱۳.۳۵) یک رابطه تحویلناپذیر بستگی خطی باشد. از ضرب در $\alpha_1^{-1} M_1^{-1}$ ، می توانیم فرض کنیم که رابطه شکل زیر را دارد:

$$I = \beta_1 M_1 + \cdots + \beta_{k-1} M_{k-1} \quad (14.35)$$

که تمام ماتریسهای M_i متقارن هستند. فرض کنید، M_1 کوچکترین عدّه عاملها، r ، را داشته باشد، و $r < n-1$. اگر r بر ۴ بخشپذیر باشد، و

$$M_1 = B_{i_1} \cdots B_{i_r} \quad (15.35)$$

آنگاه می توانیم، با انتخاب $i_1, \dots, i_r \neq j$ و ضرب در B_j ، به دست آوریم:

$$B_j = \beta_1 M_1 B_j + \cdots + \beta_{k-1} M_{k-1} B_j$$

مجموع مربعات و قضیه هورویتز ۳۶۵

که B_j پادمتقارن و $M_1 B_j$ متقارن است، که با فرضی که در شروع برای یک رابطه تحویلناپذیر کردیم متناقض است. به عبارت دیگر، اگر $r + 1$ بر ۴ تقسیم پذیر باشد، آنگاه طرفین را می توان در B_{i_1} ضرب کرد، به طوری که دوباره $B_{i_1} M_1$ متقارن شود، در حالی که B_{i_1} پادمتقارن است، و دوباره با فرضی که در مورد یک رابطه تحویلناپذیر بستگی خطی کردیم متناقض می شود. پس تنها رابطه تحویلناپذیر ممکن شکل (۱۴.۳۵) به صورت زیر است:

$$I = aB_1 \cdots B_{n-1}$$

برهان فوق نشان می دهد که n بایستی بر ۴ بخش پذیر باشد. بنابراین تمام ماتریسهای M در (۱۲.۳۵) نابسته خطی هستند اگر n زوج باشد ولی بخش پذیر بر ۴ نباشد. حالا فرض کنید n بر ۴ بخش پذیر باشد. می گوئیم که مجموعه تمام حاصلضربها از حداکثر $\frac{1}{4}(n-2)$ عامل نابسته خطی هستند. تعداد این گونه ماتریسها، طبق قضیه دوجمله یی به قرار زیر است:

$$1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{\frac{1}{4}(n-2)} = \frac{1}{2} 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

دلیل نابستگی خطی بودن این است که اگر یک رابطه تحویلناپذیر بستگی خطی در میان آنها وجود داشته باشد، آنگاه از ضرب در حاصلضرب حداقل $\frac{1}{4}(n-2)$ عامل، می توان یک جمله را برابر I کرد، اما به دست آوردن $B_1 \cdots B_{n-1}$ برای جمله دیگر غیرممکن است. پس برهان لیم کامل می شود.

حال به اثبات قضیه برمی گردیم، ما مجموعه ای از 2^{n-2} ماتریس n در n نابسته خطی ساخته ایم و در نتیجه نامساوی زیر را داریم

$$2^{n-2} \leq n^2$$

که برای $n = 10$ غلط است (و برای $n = 2, 4, 6, 8$ صحیح است). از آنجا که $2^{n-2} > n^2$ ایجاب می کند که

$$2^{n+1-2} = 2 \cdot 2^{n-2} > 2n^2 > (n+1)^2$$

اگر $n > 3$ ، تنها مقادیر ممکن برای n ، اعداد ۲، ۴، ۶ یا ۸ هستند. بالاخره حالت خاص $n = 6$ را در نظر می گیریم. در این حالت همه $2^5 = 32$ ماتریس M در (۱۲.۳۵) نابسته خطی هستند. در میان اینها تعداد

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + 1 = 16$$

۳۶۶ برخی از کاربردهای جبر خطی

ماتریس پادمتقارن وجود دارد.

اما ما می‌توانیم مستقیماً ثابت کنیم (← تمرین) که دقیقاً

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

ماتریس پادمتقارن نابسته خطی در میان ماتریسهای 6 در 6 وجود دارد. بنابراین حالت $n = 6$ غیرممکن است. بدین ترتیب اثبات قضیه هورویتز کامل می‌شود.

تمرین: ثابت کنید که مجموعه ماتریسهای متقارن در $M_n(R)$ زیرفضایی به بعد

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تشکیل می‌دهند و ماتریسهای پادمتقارن زیرفضایی به بعد

$$1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

می‌سازند.

- Albert, A. A. (ed.), *Studies in Mathematics*, Vol. II: *Studies in Modern Algebra* (Buffalo: Mathematical Association of America, 1963).
- Artin, E., *Geometric Algebra* (New York: Interscience, 1957).
- Benson, C. T., and L. C. Grove, *Finite Reflection Groups* (Tarrytown-on Hudson, N.Y.: Bogden and Quigley, 1971).
- Birkhoff, G., and S. MacLane, *Survey of Modern Algebra*, rev. ed. (New York: Macmillan, 1953).
- Bourbaki, N., *Algèbre*, Chapitre 2, "Algèbre linéaire," 3rd ed. (Paris: Hermann, Actualités et Industrielles, no. 1144).
- Boyce, W. E., and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (New York: John Wiley, 1969).
- Courant, R., and H. Robbins, *What is Mathematics?* (New York: Oxford University Press, 1941).
- Gruenberg, K., and A. Weir, *Linear Geometry* (Princeton: Van Nostrand, 1967).
- Halmos, P. R., *Finite Dimensional Vector Spaces*, 2nd ed. (Princeton: Van Nostrand, 1958).
- Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. II: *Linear Algebra* (Princeton: Van Nostrand, 1953).
- Kaplansky, I., *Linear Algebra and Geometry* (Boston: Allyn and Bacon, 1969).
- MacLane, S., and G. Birkhoff, *Algebra* (New York: Macmillan, 1967).
- Noble, B., *Applied Linear Algebra* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1969).
- Noble, B., *Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering* (New York: The Mathematical Association of America and The Macmillan Company, 1967).
- Polya, G., *How to Solve It* (Princeton: Princeton University Press, 1945).
- Schreier, O., and E. Sperner, *Modern Algebra and Matrix Theory*, English translation (New York: Chelsea, 1952).
- Smith, K. T., *Primer of Modern Analysis* (Tarrytown-on Hudson, N.Y.: Bogden & Quigley, 1971).
- Synge, J. L., and B. A. Griffith, *Principles of Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1949).
- Van der Waerden, B. L., *Modern Algebra*, Vols. I and II, English translation (New York: Ungar, 1949 and 1950).
- Weyl, H., *Symmetry* (Princeton: Princeton University Press, 1952).

جوابهای تمرینهای انتخابی

برای مسائل عددی که نیاز به یک بررسی ساده بوده است، هیچگونه پاسخی داده نشده است. در مسائل نظری، توضیحات یا راهنماییهایی برای یک روش حل داده شده، ولی تمام جزئیات ذکر نشده است. البته معمولاً طرق صحیح زیادی برای حل یک مسئله خاص وجود دارد، و یک راه حل صحیح ممکن است همیشه با یکی از راه‌حل‌های داده شده در زیر موافق نباشد.

بخش ۲

۱. الف) حکم برای $k = 1$ برقرار است. فرض کنید برای $k \geq 1$ برقرار باشد. پس

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ = k^2 + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$$

۲. الف) $u = \alpha/\beta$ و $v = \gamma/\delta$ به ترتیب جوابهای معادله‌های $\beta u = \alpha$ و $\delta v = \gamma$ هستند. این معادله‌ها را در δ و β ضرب و باهم جمع کنید. تا به دست آورید $\beta\delta(u + v) = \alpha\delta + \beta\gamma$.
۳. فرض کنید برای مقداری از n ,

$$(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{n}\beta^n$$

پس

$$(\alpha + \beta)^{n+1} = (\alpha + \beta)^n(\alpha + \beta) = \binom{n}{0}\alpha^{n+1} + \binom{n}{1}\alpha^n\beta + \cdots \\ + \binom{n}{n}\alpha\beta^n + \binom{n}{0}\alpha^n\beta + \cdots + \binom{n}{n}\beta^{n+1}$$

جمله‌ها را با هم جمع و از تعریف $\binom{n+1}{k}$ استفاده کنید تا اثبات کامل شود.

بخش ۳

۱. الف) $\langle 1, 4, -2 \rangle$

ب) $\langle -2, 4, 2 \rangle + \langle -2, -1, 3 \rangle + \langle 0, 1, 0 \rangle = \langle -4, 4, 5 \rangle$

ت) $\langle -\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta + \gamma, \alpha - 3\beta \rangle$

۲. جوابهای خود را با گذاشتن در معادلات امتحان کنید

۶. چون $\vec{AB} = B - A$ ، و $\vec{CD} = D - C$ ، پس $\vec{AB} = \vec{CD}$ ایجاب می‌کند که $B - A = D - C$ بردار $X = C - A = D - B$ همان‌طور که می‌خواهیم رفتار خواهد کرد. به عکس، اگر $C = A + X$ ، $D = B + X$ ، آنگاه $C - D = (A + X) - (B + X) = A - B$

که از آنجا نتیجه می‌شود $\vec{AB} = \vec{CD}$ که از ضرب طرفین در ۱- حاصل شده است.

۷. الف) $\langle 1, \frac{1}{4} \rangle$ ب) $\langle 2, \frac{1}{4} \rangle$

۸. الف) و ب) رئوس متوازی‌الاضلاع هستند. ب) نیست

بخش ۴

۱. الف) زیرفضا نیست؛ ب) زیرفضاست؛ پ) زیرفضاست؛ ت) زیرفضا نیست؛ ث) زیرفضاست؛ ج) این مجموعه زیرفضاست اگر و فقط اگر $B = 0$ ؛ ج) زیرفضا نیست.

۳. الف) زیرفضاست؛ ب) زیرفضا نیست؛ پ) زیرفضاست؛ ت) زیرفضا نیست؛ ث) زیرفضاست؛ ج) زیرفضاست؛ ج) زیرفضاست؛ ح) این مجموعه زیرفضاست اگر و فقط اگر g تابع صفر باشد؛ به ازای جمع مقادیر x ، $g(x) = 0$.

۴. الف) نایسته خطی؛ ب) وابسته خطی، $-3 < 1, 1 \rangle + \langle 2, 1 \rangle + \langle 1, 2 \rangle = 0$ ؛ پ) نایسته خطی؛ ت) وابسته خطی، $0 = \langle \alpha, \beta \rangle - \langle 1, 0 \rangle + \langle 0, 1 \rangle$ ؛ ث) وابسته خطی، $0 = \langle -1, 0, 0 \rangle - 2 \langle 3, 1, 2 \rangle - \langle 1, 1, 2 \rangle$ ؛ ج) نایسته خطی؛ ج) وابسته خطی.

۵. $\{ \langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle \}$ یک جواب مسأله است.

۶. فرض کنید $f_1, \dots, f_n$ مجموعه‌ای متناهی از توابع چندجمله‌یی باشند. فرض کنید x^n بزرگترین توان x باشد که در هریک از چندجمله‌یهای $\{f_i\}$ با ضریب غیرصفر ظاهر می‌شود. پس هر ترکیب خطی از $f_1, \dots, f_n$ شکل $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ را دارد. اما قطعاً چندجمله‌یهایی مانند x^{n+1} وجود دارند که نمی‌توانند به این شکل بیان شوند. برای اطمینان در این امر، ملاحظه می‌کنیم که با $n+1$ بار مشتق گرفتن، تمام ترکیبات خطی $f_1, \dots, f_n$ صفر می‌شوند، در حالی که چندجمله‌یهایی وجود دارند که $(n+1)$ امین مشتق آنها مخالف صفر است.

۷. بله. فرض کنید S و T زیرفضا باشند، و $a, b \in S \cap T$. پس $a + b \in S$ و $a + b \in T$. بنابراین $a + b \in S \cap T$. همچنین، اگر $a \in S \cap T$ و $\alpha \in F$ و $\alpha a \in S \cap T$.

۸. نه. برای مثال، در R_2 ، فرض کنید $S = S(< 1, 0 >)$ ، $T = S(< 0, 1 >)$. پس $< 1, 1 > = < 1, 0 > + < 0, 1 > \notin S \cup T$

بخش ۵

۱. فرض کنید برای مثال، $b_1 = 0$. پس $b_1 + 0.b_2 + \dots + 0.b_r = 0$ و بردارهای $\{b_1, \dots, b_r\}$ نایسته خطی هستند.

۴. اگر df/dt متحد با صفر باشد، آنگاه f ثابت است. و $f = cf$ ، که f تابعی در همه جا برابر ۱ است. بعد زیرفضای شامل همه f های با مشتق صفر، برابر ۲ است.

۵. فرض کنید $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_m a_m$. پس $(\alpha_1 - \alpha'_1)a_1 + \dots + (\alpha_m - \alpha'_m)a_m = 0$. به دلیل نایسته خطی بودن $a_1, \dots, a_m$ داریم $\alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_m = \alpha'_m$.

بخش ۶

۲ و ۳. الف) وابسته خطی (رابطه بستگی خطی خود را در این مسأله و مسائل بعدی امتحان کنید) پایه‌ها: $< -1, 1 >$ و $< 0, 3 >$ ؛ ب) وابسته خطی، پایه‌ها: $< 2, 1 >$ و $< 0, 2 >$ ؛ پ) وابسته خطی، پایه‌ها: $< 1, 4, 3 >$ و $< 0, 3, 2 >$ ؛ ت) وابسته خطی، پایه‌ها: $< 1, 0, 0 >$ و $< 0, 1, 0 >$ ؛ ج) وابسته خطی؛ د) الف) وابسته خطی؛ ب) نایسته خطی.

بخش ۷

۱. تعلق ندارد. زیرفضای تولید شده توسط $< 1, 3, 4 >$ ، $< 4, 0, 1 >$ و $< 3, 1, 2 >$ دارای یک پایه $< 1, 3, 4 >$ ، $< 0, 4, 5 >$ است. هر ترکیب خطی دلخواه از این بردارها به شکل $< \alpha, 3\alpha + 4\beta, 4\alpha + 5\beta >$ است. اگر $< 1, 1, 1 >$ یکی از این ترکیبهای خطی باشد، آنگاه $1 = \alpha$ ، $3 + 4\beta = 1$ و $4 + 5\beta = 1$ و $\beta = -\frac{1}{4}$ و $4 - \frac{5}{4} \neq 1$.

۲. تعلق دارد. یک پایه پلّی شکل برای زیرفضا، $< 1, -1, 1, 0 >$ و $< 0, 2, 1, -1 >$ است. عضو نمادین این زیرفضا $< \alpha, -\alpha + 2\beta, \alpha + \beta - \frac{7}{4}\gamma, -\beta - \frac{1}{4}\gamma >$ است. از مقایسه با $< 2, 0, -4, -2 >$ ، $\alpha = 2$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 2$ را به دست می‌آوریم.

۳. فرض کنید $\{t_1, \dots, t_m\}$ پایه‌ای برای T باشد و $S \subset T$. پس طبق قضیه (۱.۵)، هر مجموعه‌ای از $1 + m$ بردار در S وابسته خطی است. فرض کنید $\{s_1, \dots, s_k\}$ مجموعه‌ای از بردارهای نایسته خطی در S باشد به طوری که هر مجموعه از $1 + k$ بردار وابسته خطی باشد. طبق لم (۱.۷)، هر بردار در S ترکیب خطی از $\{s_1, \dots, s_k\}$ است. بنابراین $\{s_1, \dots, s_k\}$

جوابهای تمرینهای انتخابی ۳۷۱

پایه‌ای برای S است و $\dim S \leq \dim T$. سرانجام، فرض کنید $\dim S = \dim T$ و $S \subset T$ و همچنین $\{s_1, \dots, s_m\}$ پایه‌ای برای S باشد. پس طبق قضیه (۱.۵)، $\{s_1, \dots, s_m, t\}$ برای هر $t \in T$ وابسته خطی است، زیرا $\dim T = m$. دوباره طبق لم (۱.۷)، $S = T$ و $t \in S$.
۴.۳. $\dim(S + T) \leq ۳$. بنابراین طبق قضیه (۵.۷)،

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T) \geq ۱$$

$$۵.۳. \dim(S \cap T) = ۲, \dim(S + T) = ۴, \dim S = \dim T = ۳.$$

۶.۴ بردار در V وجود دارند، ۳ زیرفضای یک‌بعدی، و ۳ پایه متفاوت.

بخش ۸

۱. الف) حلپذیر؛ ب) حلپذیر؛ پ) حلپذیر؛ ت) حلپذیر؛ ث) حلپذیر؛ ج) حلپذیر نیست؛ چ) حلپذیر نیست.

۲. یک جواب وجود دارد اگر و فقط اگر $\alpha \neq ۱$.

۳. کافی است ثابت کنیم که بردارهای ستونی ماتریس m در n ، با $n > m$ ، وابسته خطی است. بردارهای ستونی متعلق به R_m هستند، و چون n تا از این بردارها وجود دارند، طبق قضیه (۱.۵) وابسته خطی هستند.

۴. این قضیه نیز نتیجه‌ای است از قضیه (۱.۵).

بخش ۹

۱. بعد فضای جواب ۲ است. فرض کنید c_1, c_2, c_3, c_4 بردارهای ستونی باشند. پس $c_1 + c_2 - 2c_4 = 0$ و $c_1 + 3c_2 - 4c_4 = 0$. بنابراین $\langle 1, 3, -4, 0 \rangle$ و $\langle 1, 1, 0, -2 \rangle$ یک پایه برای فضای جواب است.

۲. ابعاد فضاهای جواب به صورت زیر هستند. جوابهای حقیقی بایستی امتحان شوند:

الف) صفر ب) یک پ) دو ت) یک ث) دو ج) یک چ) صفر

۳. طبق قضیه (۹.۸)، هر جواب به شکل $x + x_0$ است که x_0 جواب دستگاه غیرهمگن و x یک جواب دستگاه همگن است. بعد فضای جواب دستگاه همگن دو است، و جوابهای حقیقی به دست آمده را بایستی با قراردادن در معادله امتحان کرد.

۵. A, B ، و C بایستی در معادله‌های زیر صدق کنند:

$$3A + B + C = 0$$

$$-A + C = 0$$

یا

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

بعد فضای جواب دستگاه برابر یک است، بنابراین هر دو جواب غیرصفر ضربی از یکدیگرند.
۶. بایستی جواب غیرصفر دستگاه زیر را به دست آوریم:

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

رتبه ماتریس حداکثر ۲ است، بنابراین قطعاً یک جواب غیرصفر وجود دارد. برای اینکه نشان دهیم چنین جوابی متناسباند، بایستی نشان دهیم که رتبه آنها ۲ است. اگر رتبه یک باشد، آنگاه $\alpha = \gamma$ و $\beta = \delta$ ، و نقاط، برخلاف فرض، متمایز نیستند.

بخش ۱۰

۳. قضیه طبق قضیه (۶.۱۰) بلافاصله اثبات می شود.
۴. از آنجا که L تک بعدی است، $L = p + V$ ، که V فضای هادی است و $p \in L$. طبق (۲.۱۰) $q - p \in V$ و چون $\dim V = 1$ ، V متشکل از مضارب عددی $q - p$ است.
۵. این قضیه از تعریف ابرصفحه در تمرین ۳، و قضیه (۶.۱۰) حاصل می شود.
۶. برای مثال، در مورد مسأله اول، جواب متضمن به دست آوردن دو جواب مجزای دستگاه $x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$ و $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$ است. این عمل با روشهای بخشهای قبلی انجام می یابد.
۷. خطی که از p و q می گذرد، طبق تمرین ۴، همه بردارهای $p + \lambda(q - p)$ را شامل می شود. طبق (۲.۱۰)، $q - p$ متعلق به فضای هادی V است، و بنابراین $p + \lambda(q - p) \in V$ ، برای هر λ .
۹. $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) = 2$ و $\dim(S_1 + S_2) = 4$.
۱۰. طبق تمرین ۴، یک نقطه معمولی بر روی خط دارای شکل $x = p + \lambda(q - p)$ است، که $p = \langle 1, -1, 0 \rangle$ و $q = \langle -2, 1, 1 \rangle$. مختصات x را در معادله صفحه بگذارید و معادله را نسبت به λ حل کنید.

بخش ۱۱

۱. نگاشتهای قسمتهای (پ)، (ت)، (ث) تبدیلهای خطی هستند، و بقیه نیستند

جوابهای تمرینهای انتخابی ۳۷۳

$${}^2T : y_1 = 6x_1 + {}^2x_2 \quad .3$$

$$y_2 = {}^2x_1 - {}^2x_2$$

$$T - U : y_1 = -4x_1$$

$$y_2 = -x_2$$

$$T^2 : y_1 = 10x_1 - 4x_2$$

$$y_2 = -4x_1 + {}^2x_2$$

برای یافتن دستگاهی برای TU ، فرض می‌کنیم $U : \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle y_1, y_2 \rangle$ که $z_1 = -3y_1 + y_2$ ، $T : \langle y_1, y_2 \rangle \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle$ ؛ $y_2 = x_1$ ، $y_1 = x_1 + x_2$ ، $z_2 = y_1 - y_2$ ، $z_1 = x_2$ ، $z_2 = x_2$ ، $z_1 = -2x_1 - 3x_2$ که $TU : \langle x_1, x_2 \rangle \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle$ بنابراین $TU \neq UT$.

$$(DM)f(x) = D[xf(x)] = xf'(x) + f(x) \quad .4$$

$$MD f(x) = (Mf')(x) = xf'(x). DM \neq MD$$

۵. از ${}^\circ + {}^\circ = {}^\circ$ ، به دست می‌آوریم $T({}^\circ) + T({}^\circ) = T({}^\circ)$ ، پس $T({}^\circ) = {}^\circ$. از $T(-v) = -T(v)$ ، به دست می‌آوریم $T(v) + T(-v) = T({}^\circ) = {}^\circ$.

۶. تبدیلهای خطی که در (الف) و (ب) تعریف شده‌اند، یک‌به‌یک هستند، ولی بقیه نیستند.

۸. تبدیلهای خطی که در (الف) و (ب) تعریف شده‌اند پوشا هستند، ولی بقیه نیستند.

۹. فرض کنید T یک‌به‌یک باشد. پس دستگاه معادله‌های همگن که با قراردادن همه y_i ها برابر صفر تعریف می‌شود، فقط جواب بدیهی (${}^\circ$) دارد. بنابراین رتبه ماتریس ضرایب n است، و از بخش ۸ نتیجه می‌شود که T پوشاست. به عکس، اگر T پوشا باشد، رتبه ماتریس ضرایب n خواهد بود، با توجه به بخش ۹، دستگاه همگن فقط جواب بدیهی (${}^\circ$) دارد. بنابراین T یک‌به‌یک است. این ملاحظات، هم‌ارزی قسمتهای (الف)، (ب) و (پ) را نشان می‌دهند. هم‌ارزی با (ت) در قضیه (۱۳.۱۱) ثابت شده است.

۱۰. D چندجمله‌یهای ثابت را به صفر می‌نگارد، پس D یک‌به‌یک است. I هیچ چندجمله‌یی را روی چندجمله‌یی ثابت مخالف صفر نمی‌نگارد، پس I پوشا نیست. معادله $DI = 1$ ایجاب می‌کند که D پوشا و I یک‌به‌یک باشد.

بخش ۱۲

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad .۱$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, (1, 1, 2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

۴. ضرب DA هم‌ارز است با ضرب i امین سطر A در δ_i ، در حالی که از ضرب AD ، i امین ستون A در δ_i ضرب می‌شود.

۵. اگر $A = (\alpha_{ij})$ با همهٔ ماتریسهای قطری D تعویض‌پذیر باشد، آنگاه طبق مسألهٔ ۵، برای هر δ_i و δ_j در F داریم $\delta_i \alpha_{ij} = \alpha_{ij} \delta_j$. اگر $j \neq i$ ، نتیجه می‌شود $\alpha_{ij} = 0$.

۷. ماتریسهای (ب)، (پ)، (ت) و (ث) معکوس‌پذیرند. (الف) عکس‌پذیر نیست. فرمول معکوس را از راه ضرب ماتریسی امتحان کنید.

۸. هر تبدیل خطی در فضای بردارهای ستونی، برای یک ماتریس $n \times n$ دلخواه B ، شکل $B.x \rightarrow x$ را دارد. تبدیل خطی $x \rightarrow A.x$ معکوس‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک ماتریس B وجود داشته باشد که برای هر x ، $B(A.x) = A(B.x) = x$. طبق قانون شرکتپذیری (تمرین ۳)، این معادلات با $(BA)x = (AB)x = x$ برای هر x هم‌ارزند. سپس نشان دهید که برای یک ماتریس C n در n ، $Cx = x$ برای هر x $C = I_n$ هم‌ارز است. پس معادلات فقط نشان می‌دهند که A معکوس‌پذیر است. اگر A معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $x = A^{-1}b$ یک جواب معادلهٔ $Ax = b$ خواهد بود، زیرا که طبق قانون شرکتپذیری $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$. اگر x' یک جواب دیگر باشد، آنگاه $Ax = Ax'$ و از ضرب در A^{-1} ، به دست می‌آوریم $A^{-1}(Ax) = A^{-1}(Ax)$. نتیجه می‌دهد که $x = x'$.

بخش ۱۳

۱. این ماتریسها نسبت به پایه $\{u_1, u_2\}$ چنین اند

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ماتریس S نسبت به پایه جدید $\{w_1, w_2\}$ چنین است.

$$S' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{2}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = X^{-1}SX, \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

الف	ب	پ	ت
S رتبه ۱، هیچۀ ۱	معکوس پذیر نیست	$u_1 + u_2$	$u_1 + u_2$
T رتبه ۲، هیچۀ ۰	معکوس پذیر است	—	—
U رتبه ۳، هیچۀ ۰	معکوس پذیر است	—	—

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{رتبه } k, \text{ هیچۀ } 1$$

۴. رتبه T ، بعد $T(V)$ است. یک پایه برای $T(V)$ را می توان از میان بردارهای $T(v_i)$ انتخاب کرد. از آنجا که $T(v_i) = \sum_j \alpha_{ji} w_j$ ، $i = 1, \dots, n$ ، زیرمجموعه بردارهای $\{T(v_i)\}$ یک پایه برای $T(V)$ تشکیل می دهد، اگر و فقط اگر ستونهای متناظر ماتریس A از T یک پایه برای فضای ستونی A تشکیل دهند. بنابراین رتبه $\dim T(V) = (A)$.

۵. چون $\dim R_1 = 1$ ، رتبه T یک است. بنابراین طبق قضیه (۹.۱۳) $n(f) = n - 1$.

۶. فرض کنید $V_1 = n(f)$ ، پس طبق تمرین ۵، $\dim V_1 = n - 1$. فرض کنید v جواب ثابت معادله $f(v) = \alpha$ باشد (چرا یک جواب وجود دارد؟). پس مجموعه همه جوابها $v + V_1$ است، و یک خمینه خطی با بعد $n - 1$ است.

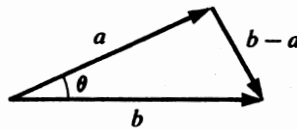
۹. اگر برای $S \neq 0$ ، تساوی $TS = 0$ برقرار باشد، آنگاه برای یک $v \in V$ ، $v_1 = S(v) \neq 0$ و $Tv_1 = 0$. به عکس، فرض کنید برای یک بردار غیرصفر v_1 ، $T(v_1) = 0$. یک پایه $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ از V که با v_1 شروع می شود، وجود دارد. S را بر روی این پایه با قراردادن $S(v_1) = v_1, S(v_2) = \dots = S(v_n) = 0$ تعریف می کنیم. بنابراین $S \neq 0$ و $TS = 0$.

۱۰. فرض کنید $ST = 1$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$ پایه ای برای V باشد. چون $ST = 1$ ، از اینجا نتیجه می شود که $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ نیز یک پایه برای V است. بر روی هر یک از اجزای پایه، $TS(Tv_i) = Tv_i$ پس TS با تبدیل همانی بر روی یک پایه سازگار است. بنابراین $TS = 1$.

بخش ۱۴

۱. (ث) دو بردار بر یکدیگر عمودند اگر و فقط اگر کسینوس زاویه بین آنها صفر باشد. بنابر قانون کسینوسها، داریم:

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \|b\| \cos \theta.$$



چون

$$\|b - a\|^2 = (b - a, b - a) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a, b)$$

داریم:

$$\cos \theta = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|}$$

بنابراین $a \perp b$ ، اگر و فقط اگر $(a, b) = 0$

ج) $\|a + b\| = \|a - b\|$ اگر و فقط اگر $(a + b, a + b) = (a - b, a - b)$ ، این عبارت برقرار است اگر و فقط اگر $(a, b) = 0$.

۲. الف) اگر x هم به $p + S$ و هم به $q + S$ متعلق باشد و هم به $q + S$ ، آنگاه $x = p + s_1 = q + s_2$ ، $s_1, s_2 \in S$ ، از اینجا نتیجه می‌شود که $p \in q + S$ و $q \in p + S$ ، و بنابراین $p + S = q + S$.
ب) به راحتی می‌توان نشان داد که مجموعه $L = p + S$ از همه بردارهایی به شکل $\{p + \lambda(q - p)\}$ ، خطی است شامل p و q . فرض کنید $L' = p + S'$ خطی شامل p و q باشد. پس $q - p \in S'$ و چون S و S' یک‌بعدی هستند، $S = S'$. چون خطوط L و L' همدیگر را قطع می‌کنند و دارای یک زیرفضای یک‌بعدی هستند، طبق الف) $L = L'$.

پ) r, q, p همخط‌اند اگر به یک خط $L = p + S$ متعلق باشند. در این حالت $q - p \in S$ و $q - r \in S$ و چون S یک بعدی است، $S(q - p) = S(q - r)$. به عکس، اگر $S(q - p) = S(q - r)$ ، خطوطی که با نقاط p و q ، و r مشخص می‌شوند دارای زیر فضاها یک بعدی واحدی هستند. پس طبق الف) برهم منطبق‌اند.

ت) فرض کنید $L = p + S$ و $L' = p' + S'$ خطوط مفروض باشند. طبق قسمتهای الف) و ب) می‌توانیم فرض کنیم $S \neq S'$. چون $\dim S = \dim S' = 1$ ، پس، $S \cap S' = 0$ اگر

جوابهای تمرینهای انتخابی ۳۷۷

x_1 و x_2 متعلق به $L \cap L'$ باشند، آنگاه $x_1 - x_2 \in S \cap S'$ ، پس $x_1 = x_2$. برای اینکه نشان دهیم که $L \cap L'$ تهی نیست، فرض کنید $S = S(s)$ ، $S' = S(s')$ ؛ پس باید λ و λ' را طوری به دست آوریم که $p + \lambda s = p' + \lambda' s'$ و این امر صحیح است زیرا هر ۳ بردار در R_2 وابسته خطی هستند.

$$\lambda = \frac{-(p-r, q-p)}{\|q-p\|^2} \quad ۳.$$

فاصله عمودی چنین است:

$$\|u-r\| = \left\| p-r - (p-r, q-p) \frac{q-p}{\|q-p\|^2} \right\|$$

بخش ۱۵

$$۱. \text{ الف) } \frac{1}{\sqrt{5}} < ۵, -۱, -۴, -۳ >, \frac{1}{\sqrt{5}} < ۱, ۱, ۱, ۰ >$$

$$۲. \text{ ب) } a(x^2 - x + \frac{1}{6}) \text{ و } \sqrt{12}(x - \frac{1}{4})$$

$$\text{که } a \text{ طوری انتخاب می شود که } \|f\| = ۱.$$

$$۳. \text{ فاصله توسط عبارت } \|v - (v, u_1)u_1\| \text{ داده می شود، که } v \text{ و } u_1 \text{ به صورتهای زیرند:}$$

$$\text{الف) } u_1 = < ۲, -۱ > / \sqrt{5}, v = < -۱, -۱ >$$

$$\text{ب) } u_1 = < ۱, ۱ > / \sqrt{2}, v = < ۱, ۰ >$$

$$\text{پ) } u_1 = < ۱, -۱ > / \sqrt{2}, v = < ۲, ۲ >$$

$$۵. \text{ الف) } (v, w) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j (u_i, u_j) = \sum \xi_i \eta_i$$

$$\text{ب) فرض کنید } v = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i \text{ پس } (v, u_k) = \sum_{i=1}^n \xi_i (u_i, u_k) = \xi_k$$

$$۶. \text{ طبق قضیه گرام-اسمیت، یک پایه یکا قائم } \{u_1, \dots, u_n\} \text{ از } R_n \text{ وجود دارد که با } u_1 \text{ شروع}$$

$$\text{می شود. ماتریسی که سطرهاى آن } u_1, \dots, u_n \text{ هستند ویژگیهای مطلوب را دارد.}$$

$$۹. \text{ فرض می کنیم } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ پایه یکا قائمی از } V \text{ باشد، و فرض می کنیم:}$$

$$w_1 = \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{1n}v_n$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_d = \alpha_{d1}v_1 + \dots + \alpha_{dn}v_n$$

$$\text{پایه ای برای } W \text{ باشد. بردار } x = x_1v_1 + \dots + x_nv_n \text{ به } W^\perp \text{ متعلق است اگر و فقط اگر}$$

۰. $(x, w_1) = \dots = (x, w_d) = 0$. پس $x_1, \dots, x_n$ بایستی جواب دستگاه همگن زیر باشند:

$$\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{d1}x_1 + \dots + \alpha_{dn}x_n = 0$$

حالا طبق فرع (۹.۴) نتیجه بلافاصله حاصل می‌شود.

۱۰. می‌توان نشان داد که پایه‌های یکا قاعده‌ای مثل $\{v_i\}$ و $\{w_i\}$ از V وجود دارند که $\{v_1, \dots, v_d\}$ پایه‌ای است برای W_1 و $\{w_1, \dots, w_d\}$ پایه‌ای برای W_2 . طبق قضیه (۱۱.۱۵)، تبدیل متعامدی چون T وجود دارد که برای هر i ، $Tv_i = w_i$. بنابراین $T(W_1) = W_2$.

۱۱. طبق تمرین ۷، $\dim S(n)^\perp = 2$. کافی است نشان دهیم که مجموعه P از همه p ها به طوری که $(p, n) = \alpha$ ، مجموعه جوابهای یک معادله خطی است. فرض کنید $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه یکا قائم برای R_3 باشد و فرض کنید $n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. پس $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ در $(p, n) = \alpha$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha$. این رابطه نشان می‌دهد که مجموعه همه p ها به طوری که $(p, n) = \alpha$ ، یک صفحه است. با استفاده از نتایج بخش ۱۰، می‌توانیم بگوییم که $P = p_0 + S(n)^\perp$ ، که p_0 یک جواب تثبیت شده $(p, n) = \alpha$ است.

(ب) بردار نرمال: $\langle 3, -1, 1 \rangle$

(پ) $x_1 - x_2 + x_3 = -2$ ، یا $(n, p) = -2$

(ت) صفحه شامل بردار نرمال n ، که از p می‌گذرد، مجموعه همه بردارهای x است به طوری که $(x, n) = (p, n)$ ، یا $(x - p, n) = 0$

(ج) بردار نرمال n بایستی طبق (ت) بر $\langle 1, 1, 1 \rangle - \langle 2, 0, -1 \rangle$ عمود باشد. بنابراین از روش قسمت (ث) استفاده کنید.

(چ) به طوری که در راهنمایی اشاره کرده بودیم، معادله دوم را به شکل $p_0 - p = \lambda n + (u - p)$ می‌نویسیم. از ضرب آن در n به طور داخلی، به دست می‌آید:

$$\lambda(n, n) + (u - p, n) = 0$$

(ح) داریم:

$$n = \langle 1, 1, -1 \rangle, p = \langle 0, 0, 1 \rangle, u = \langle 1, 1, 2 \rangle$$

پس

$$||p_0 - u|| = \frac{1}{\sqrt{2}} ||n|| \quad \text{پس فاصله برابر است؛} \quad \lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad 3\lambda + (u - p, n) = 0$$

بخش ۱۶

۱. (الف) ۲؛ (ب) ۰؛ (پ) ۰؛ (ت) دترمینانها در اینجا برابرند با (الف) ۰، (ب) ۱، (پ) ۱۳، (ت) ۳-، (ث) ۳

۲. با استفاده از ویژگیهای تابع دترمینان، داریم $D(A) = \alpha_1 \dots \alpha_n D(A')$ که

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سپس با انجام عملیات سطری مقدماتی بر روی A' نشان دهید که، به دست می آوریم:

$$D(A') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & * & * \\ & 1 & * & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \dots & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

۳. نشان دهید که با انجام عملیات سطری فقط از نوع ۲ ← [تعریف (۹.۶)] روی سطرهای شامل A_1 ، به دست می آوریم

$$D(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & * & * & & \\ \vdots & & & * & \\ 0 & \dots & * & & \\ & & \alpha_1 d_1 & & \\ \hline & 0 & & A_2 & \\ \hline & 0 & & 0 & \ddots & A_r \end{vmatrix}$$

برای عددهای $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1d_1}$ (که A_1 یک ماتریس d_1 در d_1 است) و $\alpha_{1d_1} \dots \alpha_{11}$. $D(A_1) = \alpha_{11} \dots \alpha_{1d_1}$ به طور مشابه می توان عملیات سطری مقدماتی را بر روی سطرهای شامل A_2 انجام داد، و به دست آورد:

$$D(\mathbf{A}) = \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline \alpha_{11} & * & * & & & \\ \vdots & & & & * & \\ \circ & \dots & * & & & \\ & & \alpha_{1d_1} & & & \\ \hline & & & \alpha_{21} & * & * \\ & & & \vdots & & \\ & & & \circ & \dots & * \\ & & & & & \alpha_{2d_2} \\ \hline \mathbf{O} & & & \mathbf{O} & & \\ \hline \mathbf{O} & & & \mathbf{O} & & \ddots \\ \hline \end{array}$$

که $D(\mathbf{A}_2) = \alpha_{21} \dots \alpha_{2d_2}$ با ادامه این روش $\mathbf{A}$ به شکل مثلی در می آید. با اعمال تمرین ۲، نتیجه نهایی را به دست می آوریم.
۴. آنچه که بایستی اثبات شود، این است که

$$D^*(a_1, \dots, a_n) = D^*(a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_n)$$

و این نتیجه طبق مفروضات (پ) و (ت) درباره D^* بلافاصله حاصل می شود.

بخش ۱۷

۱. با استفاده از تعریف و قضیه (۶.۱۶) داریم

$$\begin{aligned} D(<\xi, \eta>, <\lambda, \mu>) &= D(<\xi, \circ>, <\lambda, \circ>) \\ &+ D(<\xi, \circ>, <\circ, \mu>) + D(<\circ, \eta>, <\lambda, \circ>) \\ &+ D(<\circ, \eta>, <\circ, \mu>) = \xi\mu - \eta\lambda \\ D(<\xi, \circ>, <\lambda, \circ>) &= \circ \end{aligned}$$

زیرا که بردارهای آن وابسته خطی هستند. $D(<\xi, \circ>, <\circ, \mu>) = \xi\mu D(e_1, e_2)$
در حالی که $D(<\circ, \eta>, <\lambda, \circ>) = -D(<\lambda, \circ>, <\circ, \eta>) = -\lambda\eta$

بخش ۱۸

۲. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. قضیه (۳.۱۸) را برای این معادله به کار برید.

$$D(P_{ij}) = -1; D(B_{ij}(\lambda)) = 1; D(D_i(\mu)) = \mu. \quad ۳$$

این حقیقت که A حاصلضرب ماتریسهای مقدماتی است، در بخش ۱۲ نشان داده شده است.

۵. فرض کنید T تبدیل متعامد باشد. اگر A ماتریس T نسبت به یک پایهٔ یکا قائم باشد، آنگاه

$$A^t A = I, \text{ و چون } D(A) = D({}^t A) = 1 \text{ داریم } D(A)^t = 1$$

بخش ۱۹

۴. از بسط دترمینان برحسب سطر اول، مشاهده می‌کنیم که شکل $Ax_1 + Bx_2 + C$ به دست می‌آید. از گذاشتن (α, β) یا (γ, δ) به جای (x_1, x_2) دو سطر دترمینان برابر می‌شوند، و در نتیجه نقطه‌های (α, β) و (γ, δ) در $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ صدق می‌کنند.

۶. نگارهٔ مربع، متوازی الاضلاع $\{\lambda T(e_1) + \mu T(e_2) : 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ است. مساحت متوازی الاضلاع برابر $|D(T(e_1), T(e_2))|$ است، که $T(e_1)$ و $T(e_2)$ ستونهای ماتریس T نسبت به پایهٔ $\{e_1, e_2\}$ از R_2 هستند.

۷. چون

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & 0 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}$$

دترمینان برابر است با

$$\begin{vmatrix} \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 \\ \gamma_1 - \alpha_1 & \gamma_2 - \alpha_2 \end{vmatrix}$$

که برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است به یالهای $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ و $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ و $\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$. مساحت مثلث نصف مساحت این متوازی الاضلاع است.

۱۱. یک تبدیل متعامد T وجود دارد به طوری که

$$T(a_n/\|a_n\|) = e_n, \dots, T(a_1/\|a_1\|) = e_1$$

بنابراین

$$D(a_1, \dots, a_n) = |D(T)|D(e_1, \dots, e_n)\|a_1\| \dots \|a_n\| = \|a_1\| \dots \|a_n\|$$

بخش ۲۰

$$Q = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, R = -\frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{4}. \quad ۱$$

۲. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ صفهای متمایز f باشند. بنابراین $f = (x - \alpha_1)g_1$. چون $\alpha_2 \neq \alpha_1$ لذا $x - \alpha_2$ یک چندجمله‌یی اول است که f را عاد می‌کند اما $x - \alpha_1$ را عاد نمی‌کند. بنابراین

۳. $g_1, x - \alpha_1$ را عادی می‌کند و $f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)g_2$. با ادامه این طریق به دست می‌آوریم $\deg f \geq k$ و در نتیجه $f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)g$.
۴. اگر درجه f دو یا سه باشد، هر عاملگیری غیر ساده شامل یک عامل خطی خواهد بود، و در نتیجه یک صفر f است. این نتیجه غلط است اگر $\deg f > 3$. برای مثال $f = (x^2 + 1)^2$. هیچ صفری در R ندارد، اما در $R[x]$ اول نیست.
۵. فرض کنید m/n در معادله صدق می‌کند. از ضرب معادله حاصل در n^r به دست می‌آوریم:

$$a_r m^r + a_{r-1} m^{r-1} n + \dots + a_1 m n^{r-1} + a_0 n^r = 0$$

- بنابراین $n | a_r m^r$ را عادی می‌کند، و از آنجا که n, m را عادی نمی‌کند، همچنین $n | a_r$.
۷. در $Q[x]$ عاملهای اول عبارت‌اند از: (الف) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ ؛ (ب) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ ؛ (پ) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.
- در $R[x]$ عاملهای اول عبارت‌اند از: (الف) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ ؛ (ب) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.
۸. این فرایند بایستی خاتمه یابد، در غیر این صورت دنباله نامتناهی نزولی از اعداد صحیح نامنفی داریم، که مغایر اصل خوش-ترتیبی است. حالا فرض کنید $r_i \neq 0$ و $r_{i+1} = 0$. با توجه به نحوه تعریف r_i ها، $r_i | r_{i-1}$ و $r_i | r_{i+1}$. طبق معادله قبل مشاهده می‌کنیم که $r_i | r_{i-2}$. با ادامه این طریق به دست می‌آوریم $r_i | a$ و $r_i | b$. از طرف دیگر، با شروع از بالا، اگر $d | a$ و $d | b$ ، آنگاه $d | r$. طبق معادله بعدی داریم $d | r_1$. با ادامه این عمل سرانجام به دست می‌آوریم $d | r_i$. بنابراین $r_i = (a, b)$.
۹. الف) $x + 1$

بخش ۲۱

۱. $-10 + 10i, \frac{1}{11}(3 - 2i), \frac{1}{8}(3 + 4i)$.
۲. $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2 - 3 \cos \theta (\sin \theta)^2$. از مساوی قرار دادن قسمت حقیقی هر دو طرف در دستور $(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta$ به دست آمده است.
۳. $\lambda(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ که λ ریشه پنجم حقیقی عدد ۲ است و $k = 0, 1, 2, 3, 4, \theta_k = 2\pi k/5$.
۵. نگاشت یک به یکی که این یکریختی را تولید می‌کند عبارت است از

$$\alpha + i\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

۹. معادله $x^2 = -1$ در هیأت اعداد مختلط یک جواب دارد اما در یک هیأت مرتب نمی‌تواند جوابی داشته باشد.

بخش ۲۲

۲. فرض کنید $\{v_1, \dots, v_m\}$ پایه‌ای برای V باشد و $\{w_1, \dots, w_n\}$ پایه‌ای برای W . برای هر جفت (i, j) ، فرض کنید E_{ij} تبدیلی خطی باشد که $E_{ij}v_j = w_i$ و $E_{ij}v_k = 0$ اگر $k \neq j$. پس mn تبدیل خطی $\{E_{ij}\}$ پایه‌ای برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند.

۳. چندجمله‌یهای مینیمال به ترتیب $(x+1)(x-2)$ ، x^2-1 ، x^2+x-1 و x^2 هستند.

۴. الف) برای هر v_i ، $(T - \xi_1) \dots (T - \xi_n)v_i = 0$ زیرا که عاملهای $T - \xi_k$ تعویضپذیرند، و $(T - \xi_i)v_i = 0$.

ب) فرض کنید $m(x) = \prod (x - \xi_j)$ ، که ξ_i ویژه مقدارهای متمایز T هستند. طبق استدلال قسمت الف)، $m(T) = 0$. بنابراین چندجمله‌ی مینیمال T ، $m(x)$ را عادی می‌کند. کافی است نشان دهیم که اگر $m'(x) = \prod_{\xi_j \neq \xi_k} (x - \xi_j)$ آنگاه $m'(T) \neq 0$ داریم:

$$m'(T)x_k = \prod_{\xi_j \neq \xi_k} (\xi_k - \xi_j)x_k \neq 0.$$

و قضیه ثابت می‌شود.

۵. فرض کنید T معکوس‌پذیر باشد، و $m(x) = x^r + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ چندجمله‌ی مینیمال باشد. فرض کنید $\alpha_0 = 0$. بنابراین $m(x) = xm_1(x)$. بعلاوه، $m_1(T) \neq 0$ زیرا $m(x)$ چندجمله‌ی مینیمال است. پس $m(T) = Tm_1(T) = 0$ که مغایر با معکوس‌پذیر بودن T است. به عکس، فرض کنید $\alpha_0 \neq 0$. بنابراین $m(x) = m_1(x).x + \alpha_0$ برای یک چندجمله‌ی $m_1(x)$ ، و $m_1(T)T = -\alpha_0.1$ ، بنابراین $- \alpha_0^{-1}m_1(T) = T^{-1}$.

۶. الف) فرض کنید α یک ویژه مقدار T باشد. بنابراین برای مقداری از $v \neq 0$ ، $Tv = \alpha v$. پس $\alpha \neq 0$ (چرا؟) و $\alpha T^{-1}v = T^{-1}Tv$. در نتیجه $T^{-1}v = \alpha^{-1}v$. استدلال عکس، عین همین است.

ب) فرض کنید $Tv = \alpha v$ ، بنابراین $f(T)v = f(\alpha)v$.

۸. این نتیجه از این حقیقت ناشی می‌شود که ماتریسهای متشابه را می‌توان ماتریسهای یک تک-تبدیل خطی نسبت به پایه‌های متفاوت تلقی کرد و ویژه مقدارهای آنها ویژه مقدارهای تبدیل خطی هستند. برهان مستقیم را می‌توان به صورت زیر آورد. فرض کنید برای یک ماتریس معکوس‌پذیر S داشته باشیم $A = S^{-1}BS$ اگر $x \neq 0$ و $Ax = \alpha x$ ، آنگاه $B(Sx) = \alpha(Sx)$ و $Sx \neq 0$.

۹. ویژه مقدارها به صورت زیر هستند:

الف) $3, -1$ ؛ ب) $-1, -1$ ؛ پ) $1, -2$

ویژه بردارها از حل معادله زیر به دست می‌آیند:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

که A ماتریس داده شده و α یک ویژه مقدار A است. برای اطمینان خاطر نتایج خود را امتحان کنید.

۱۰. فرض کنید $Tv = \alpha v$ برای $\alpha \neq 0$. بنابراین $T^m v = \alpha^m v$ و در نتیجه $\alpha = 0$.
۱۱ و ۱۲. هر دو نتایج ساده قضیه (۸.۲۲) هستند.

بخش ۲۳

۲. چندجمله‌ی مینیمال $(x^2 - 1)$ است، که می‌توان به عاملهای خطی متمایز در $C[x]$ ، اما نه در $R[x]$ ، تجزیه کرد.
۳. چندجمله‌ی مینیمال، $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 - 1$ است. استدلال، از اینجا به بعد عین تمرین ۲ است.
۴. x^{n+1} ، چندجمله‌ی مینیمال D است.
۸. زیرا $d(x)|f(x)$ و $n[d(T)] \subset n[f(T)]$. به عکس، فرض کنید $f(T)v = 0$. از آنجا که $d(x) = a(x)m(x) + b(x)f(x)$ ، برای چندجمله‌یهای $a(x)$ و $b(x)$ داریم

$$d(T)v = a(T)m(T)v + b(T)f(T)v = 0$$

زیرا $f(T)v = 0$ و $m(x)$ چندجمله‌ی مینیمال است، پس $n[f(T)] \subset n[d(T)]$ و قضیه به اثبات می‌رسد.

بخش ۲۴

۱. الف) $(x + 2)^2$

ب) $(x + 2)^2$

پ) -2 (که در چندجمله‌یهای مینیمال و مشخصه ۲ بار ظاهر می‌شود)

ت) نه. زیرا چندجمله‌ی مینیمال حاصلضرب عاملهای خطی متمایز نیست.

ث) فرض کنید $v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ برداری با ضرایب مجهول باشد به طوری که $(T + 2)v = 0$. استفاده از تعریف T ، منجر به دستگاه معادلات همگن با جواب بدیهی $(1, -1)$ می‌شود. بنابراین $v_1 - v_2$ بردار مشخصه T است.

ج) پایه‌ای که ماتریس T را به ماتریس مثلثی شکل می‌برد، $w_1 = v_1 - v_2$ و $w_2 = v_2$ است. بنابراین $SB = AS$ ، که

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

جوابهای تمرینهای انتخابی ۳۸۵

ج) تجزیه ژوردان $T = D + N$ است، که D و N تبدیلیهای خطی هستند که ماتریسهای آنها نسبت به پایه $\{w_1, w_2\}$ و $-2I$ هستند.

۳. چندجمله‌یی مینیمال $T, x^2 + \alpha\beta$ است، که $\alpha\beta > 0$. چندجمله‌یی مینیمال حاصلضرب عاملهای خطی متمایز در $R[x]$ نیست و جواب سؤال نه است.

۴. از قضیه شکل مثلثی استفاده کنید.

۵. چندجمله‌یی مینیمال $T, x^2 - x$ را عادی می‌کند و در نتیجه دارای عاملهای خطی متمایز در $C[x]$ است. یک پایه از V که شامل بردارهای مشخصه است وجود دارد.

۶. چندجمله‌یی مینیمال، $x^r - 1$ را که دارای عاملهای خطی متمایز یعنی عاملهای $x - (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ، $k = 0, \dots, r-1$ ، $\theta_k = 2\pi k/r$ ، در $C[x]$ است، عادی می‌کند.

بخش ۲۵

الف. ۱

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

ب)

۲. شکلهای متعارف گویا به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. صورتهای متعارف گویا بر روی R به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

۴. صورتهای متعارف بر روی C به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} \end{pmatrix} \text{ و } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

۵. فرض کنید $\{v, Tv, \dots, T^{d-1}v\}$ پایه‌ای برای V باشد و

$$T^d v = \alpha_0 v + \alpha_1 T v + \dots + \alpha_{d-1} T^{d-1} v$$

ماتریس T نسبت به این پایه عبارت است از:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \alpha_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

بنابراین $D(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = \pm(x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0)$. از سوی دیگر $x^d - \alpha_{d-1}x^{d-1} - \dots - \alpha_0$

طبق لم (۶.۲۵) چندجمله‌یی مینیمال T است.

۶. ماتریسها در هر سه حالت بر روی C متشابه‌اند.

فهرست قسمتی از نمادهائی که به کار رفته‌اند

R	هیأت اعداد حقیقی
$a \in A$	عضویت در مجموعه
$A \subset B$	شمول مجموعه
$f: A \rightarrow B$	تابع (یا نگاشت) از A به B
$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$	برداری با مؤلفه‌های $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$
$\sum x_i$	مجموع
$\prod u_i$	حاصلضرب
$S(v_1, \dots, v_n)$	فضای برداری که توسط $\{v_1, \dots, v_n\}$ تولید (یا تنیده) شده است
$\mathcal{F}(R)$	فضای برداری همهٔ توابع حقیقی-مقدار بر روی R
$C(R)$	توابع پیوستهٔ حقیقی-مقدار بر روی R
$P(R)$	توابع چندجمله‌یی بر روی R
$L(V, W)$	تبدیل خطی از V به W
A, a	ماتریسها (که با دست به صورت $\tilde{a}$ و $\tilde{A}$ نوشته می‌شوند)
$A \sim B$	هم‌ارزی سطری ماتریسها
${}^tA, {}^tT$	ترانهاذهٔ ماتریس A و ترانهاذهٔ تبدیل خطی T
$ \alpha $	قدرمطلق
(u, v)	حاصلضرب داخلی
$\ u\ $	طول بردار u
$D(u_1, \dots, u_n), D(A), \det A, D(T)$	دترمینانهای یک مجموعه بردار، یک ماتریس، یک تبدیل خطی
$\text{Tr}(A), \text{Tr}(T)$	اثر ماتریس A یا اثر تبدیل خطی T
$n(T), T(v)$	صفر-فضا، برد یک تبدیل خطی $T: V \rightarrow W$
$F[x]$	چندجمله‌یهایی که ضرایب آنها در هیأت F هستند
$\bar{z}$	مزدوج عدد مختلط z
$V_1 \oplus V_2$	جمع مستقیم فضاهای برداری

$f(T)$	چندجمله‌یی در یک تبدیل خطی T
$S^\perp$	مجموعه بردارهای متعامد بر بردارها در S
e^A	توان یک ماتریس A
V^*	فضای-دوگان V
$V \times W$	حاصلضرب دکارتی V و W
$V \otimes W, T \otimes U, A \otimes B$	حاصلضرب تانسوری فضاهای برداری، تبدیلهای خطی و ماتریسها
$\wedge^k V, v \wedge w$	حاصلضرب گوه‌یی فضاهای برداری، بردارها
T'	الحاقی یک تبدیل خطی

فهرست راهنما

تانسورهای k تایی ۲۹۸	n -تایی ۲۲
- مقارن چپ ۲۹۹	اثر تبدیل خطی ۲۴۵
تبدیل خطی ارمیتی ۳۳۱	اصل استقرای ریاضی ۱۳
- خود الحاقی ۳۳۱	- خوش ترتیبی ۱۳
- خود توان ۲۲۹	بردار جواب ۶۳
- صفر-توان ۲۳۷	- ستونی ۶۳
- عادی ۹۴	- سطری ماتریس ۶۳
- قطری شدنی ۲۳۲	- قائم ۱۵۳
- نرمال ۳۳۱	بردارهای ستونی ۶۳
- وارونپذیر ۹۴	- نایسته خطی ۳۴، ۳۰
تبدیل متعامد ۱۴۹	- وابسته خطی ۱۴۴، ۳۴
- مقارن ۳۱۹	بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۱۹۹
- یکانی ۳۲۷	بسط ستونی درمیان ۱۷۷
تجزیه ژوردان ۲۴۱	- سطری درمیان ۱۷۸
- قطبی ۳۳۵	- کامل درمیان ۱۷۰، ۱۸۸
تحدید ۲۷۰	بعد فضای برداری ۴۲، ۴۳
ترانهادة تبدیل خطی ۲۷۴	پایه فضای برداری ۴۲
- ماتریس تبدیل خطی ۱۷۲	پایه یکا قائم ۱۴۴
ترانهش ۱۸۶	پایه های فضای برداری ۴۲
ترکیب مجموع مربعات ۳۵۹	پله یی شکل ۵۲
تشابه ماتریسها ۱۲۲	تابع پوشا ۸۸
تعریف تبدیل خطی ۸۸	تابع چندجمله یی ۳۱، ۱۹۸
- درمیان ۱۵۷	- خطی ۲۷۳
- گروه ۹۴	- دوخطی ۱۴۰، ۲۸۷
- ماتریس ۴۵	- دوسویی ۸۸
- مرتبه ۲۵۶	- معین، مثبت ۱۴۰
- هیأت ۱۱	تانسور مقارن چپ ۲۹۹

۳۹۰ فهرست راهنما

- زاویه ۱۴۴
- زیر هیأت ۱۱
- زیر فضای پایا ۲۲۷
- تجزیه ناپذیر ۳۰۵
- دوری ۲۵۴
- ستونی ۶۳
- سطری ماتریس ۶۳
- متناهی مولد ۳۲
- شکل متعارف زوردان ۲۶۲
- - گویا ۲۵۷
- نرمال زوردان ماتریس ۲۶۲
- صفر فضای تبدیل خطی ۱۲۴
- صورت پله‌یی ۵۲
- خطی ناتبهاگون ۲۷۷
- درجه دوم ۳۱۶
- دوخطی ۲۷۶
- صورت دوخطی متقارن ۲۸۴
- - متقارن چپ ۲۸۴
- - ناتبهاگون ۲۷۷
- ضرب تانسوری ۲۹۳، ۲۹۱
- داخلی ۱۴۰
- ماتریسها ۱۰۷
- ضریب دوجمله‌یی ۱۷
- طول بردار ۱۴۱
- طیف ۳۳۱
- عدد مختلط ۲۰۶
- عمل تقسیم برای چند جمله‌یها ۱۹۶
- عملهای سطری مقدماتی ۵۰
- عنصرهای نسبت بهم اول ۱۹۹
- فضاهای برداری دوگان ۲۷۹
- فضای برداری ۲۳
- - R_n ۲۲
- - تحویلناپذیر ۳۰۵، ۳۰۹
- تقارن تبدیل خطی ۱۳۶، ۳۳۸
- جایگشت ۱۸۴
- جواب بدیهی ۶۴
- نابدیهی ۶۴
- چندجمله‌یی تحویلناپذیر ۱۹۹
- مشخصه ۲۳۹، ۲۴۰
- مینیمال ۲۱۸
- حاصلضرب تانسورهای k تایی ۲۹۸
- تبدیلیهای خطی ۹۰
- داخلی ارمیتی ۳۲۶
- دکارتی ۲۸۴
- کرونگر ۲۹۳
- گووه‌یی ۲۲۹
- ماتریسها ۱۰۴
- حذف گاوسی ۴۷
- حلقه ۹۳
- حلقه تعویضپذیر ۹۳، ۹۴
- دامنه ۱۲۴
- دترمینان به عنوان تابع حجم ۱۸۱
- مینور ۱۸۰
- واندرموند ۱۹۰
- درجه چندجمله‌یی ۱۹۴
- دستگاه معادلات خطی ناهمگن ۶۴
- - - همگن ۶۴
- دستور کرامر ۱۷۹
- دوران ۱۳۶، ۳۱۵
- دیفرانسیل مرتبه اول ۳۴۷
- رابطه بستگی خطی ۳۴
- هم‌ارزی ۲۶۶
- رتبه ماتریس ۶۰، ۶۵
- روش ساختن دستگاه یکا قائم گرام-اشمیت ۱۴۶
- ریشه مشخصه ۲۲۱
- ریشه‌های واحد ۲۱۰

فهرست راهنما ۳۹۱

- ۲۲ توابع
- ۱۵۲ طولیای
- فضای جواب ۷۳
- خارج قسمت ۲۶۹
- دوگان ۲۷۳
- قانون شرکتپذیری در ضرب ماتریسها ۱۰۷
- قدر مطلق ۳۰۹
- فضای اصلی تجزیه ۲۳۰
- باقیمانده ۱۹۸
- حاصلضرب ۱۷۴
- دوموآور ۲۱۰
- شکل مثلثی ۲۳۶
- طیفی ۳۳۳
- عاملها ۱۹۹
- کیلی-هیلتن ۲۴۱
- مقسوم علیه مقدماتی ۲۵۷
- بکتایی تجزیه ۲۰۱
- کاملاً تحویلپذیر ۳۰۹
- گراف ۲۴۹
- گروه تقارن ۱۳۲
- تقارن شکل ۱۳۲
- دوری C_n ۱۳۴
- دوجهی ۱۳۴
- دوجهی D_n ۱۳۴
- گروههای متناهی دوران ۳۴۰
- متناهی دوران ۳۴۰
- ماتریس ۴۴
- $m \times n$ (در m) ۴۵
- افزوده ۶۵
- ضربها ۶۲
- قطری ۲۳۲
- متعامد ۱۵۱
- مقدماتی ۱۱۰
- ۳۵۰ نمایی
- وارونپذیر ۱۰۹
- وقوع ۲۴۹
- همراه ۲۵۸-۲۶۰
- یکه ۱۰۹
- ماتریسهای متشابه ۱۲۲
- مجموع مستقیم ۲۲۷، ۲۸۴
- مجموعه بردارهای یکا قائم ۱۴۴
- خارج قسمت ۲۶۸
- یکا قائم ۱۴۴
- محورهاى اصلی ۳۱۹
- مزدوج عدد مختلط ۲۰۹
- معادله چندجمله‌یی ۱۹۸
- معادله‌های همگن ۶۴
- مقسوم علیه‌های مقدماتی ۲۵۷، ۲۶۱
- مولدهای زیرفضا ۳۲
- نابرابری آدامار ۱۸۲
- نابستگی خطی ۳۴
- نامساوی کوشی-شوارتس ۱۴۱
- مثلثی ۱۴۲
- نشان جایگشت ۱۸۵
- وارون تبدیل خطی ۹۴
- ویژه بردار (بردار مشخصه) ۲۲۱
- ویژه مقدار (ریشه مشخصه) ۲۲۱
- هم‌ارزی سطری ۵۱
- همسازه ۱۷۷
- هیأت تابعهای گویا ۲۰۳
- جبری-بسته ۲۱۱
- خارج قسمت ۲۰۳
- عددهای جبری بسته ۲۱۱
- هیأت‌های مرتب ۱۲
- هیچه ۱۲۴
- یکریختی فضای برداری ۹۷
- هیأتها ۱۲

مرکز نشر دانشگاهی