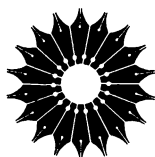




تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی

(تحریری نوین از بیرونی نامہ)

ابوالقاسم قربانی



تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی

(تحریری نوین از بیرونی نامه)

ابوالقاسم قربانی



تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی

(تحریری نوین از بیرونی نامه)

تألیف دکتر ابوالقاسم قربانی

ویراسته دکتر محمدادی شفیعیه

نسخه پرداز: مسعود رزدام

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

چاپ اول ۱۳۷۴

تعداد ۲۵۰۰

حروفچینی: TEX-پارک مرکز نشر دانشگاهی

لیتوگرافی: نقش

چاپ و صحافی: نیل

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

قربانی، ابوالقاسم. ۱۲۹۰-

تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی (تحریری نوین از بیرونی نامه) / ابوالقاسم قربانی. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۴.

ده ۴۶۷ ص.: مصور. - (مرکز نشر دانشگاهی: ۷۵۶. ریاضی، آمار، و کامپیوتر: ۹۷)

ISBN: 964-01-0756-5

کتابنامه: ص ۴۴۱-۴۵۶

۱. ابوریحان بیرونی، محمد بن احمد، ۳۶۲-۴۴۰ ق- نقد و تفسیر. ۲. ریاضیات- متون قدیمی تا قرن ۱۴. الف. مرکز نشر دانشگاهی. ب. عنوان. ج. عنوان: بیرونی نامه.

۵۱۰/۹۲

۴ ق ۲ الف / ۲۹ QA

۷۴-۱۲۰۷ م

کتابخانه ملی ایران

فهرست

صفحه	عنوان
هفت	دیباچه
۱	بخش اول: زندگینامه بیرونی و شخصیت علمی او
۱	الف - خلاصه زندگینامه بیرونی
۵	ب - شخصیت علمی بیرونی از نظر متفکران شرق و غرب
۹	ج - بیرونی و «احکام نجوم»
۱۲	د - منتخباتی از نوشته‌های خود استاد
۱۶	بخش دوم: شخصیت ریاضی بیرونی
۱۶	الف - بیرونی ریاضیدان
۱۷	ب - یادآوری برخی از کارهای ریاضی بیرونی
۱۹	ج - بیرونی و ریاضیات یونانی و هندی
۲۲	د - بیرونی و تاریخ ریاضیات
۲۴	ه - بیرونی و فن تألیف و تصنیف
۲۶	بخش سوم: فهرست آثار ریاضی و نجومی بیرونی
۲۶	الف - آماری از کلیه آثار بیرونی
۳۰	ب - مشخصات آثار ریاضی و نجومی موجود بیرونی

۴۶	ج - فهرست آثار ریاضی و نجومی مفقود بیرونی
۵۲	د - فهرست آثاری که ابونصر عراق، استاد بیرونی، به نام وی نوشته است
۵۵	بخش چهارم: خلاصه کتاب «راشیکات الهند»
۵۵	الف - موضوع کتاب «راشیکات»
۵۶	ب - خلاصه مطالب کتاب «راشیکات»
۶۹	بخش پنجم: منتخباتی از کتاب «آثارالباقیه»
۶۹	الف - مختصری درباره کتاب «آثار الباقیه»
۷۰	ب - طلیسان مضاعف
۷۳	ج - مسئله شطرنج و محاسبه $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$
۸۲	د - چند نوع تصویر جسم نما از مخترعات بیرونی
۹۵	بخش ششم: تحقیق درباره کتاب «استخراج الاوتار»
	مقدمه
۹۵	الف - اهمیت کتاب «استخراج الاوتار»
۹۶	ب - چگونگی تدوین بخش حاضر
۹۷	بند اول
۹۷	الف - کتاب استخراج الاوتار و نسخه های موجود آن
۱۰۰	ب - تفاوت های مهم نسخه های چاپی «جد» و «چم» با نسخه خطی «عل»
۱۰۱	ج - درباره نسخه های چاپی و نسخه خطی «عل» چه می توان گفت؟
۱۰۳	بند دوم
۱۰۳	مقدمه کتاب «استخراج الاوتار»
	الف - متن عربی مقدمه کتاب «استخراج الاوتار» از روی نسخه های چاپی «جد»
۱۰۳	ص ۳ و «چم» ص ۳۲
۱۰۴	ب - ترجمه مقدمه فوق به فارسی
۱۰۵	ج - مقدمه «استخراج الاوتار» از روی نسخه «عل»
۱۰۵	د - ترجمه آزاد عبارات فوق به فارسی
۱۰۷	بند سوم
۱۰۷	قضایای کتاب «استخراج الاوتار»

۱۰۷	الف - صورت قضیه اول
۱۰۸	ب - برهانهای قضیه اول
۱۳۳	ج - صورت قضیه دوم
۱۳۵	د - برهانهای قضیه دوم
۱۵۱	ه - صورت قضیه سوم
۱۵۲	و - برهانهای قضیه سوم
۱۵۴	ز - صورت قضیه چهارم
۱۵۴	ح - برهانهای قضیه چهارم
۱۵۹	ط - تبصره‌ای درباره قضایای چهارگانه مذکور
۱۵۹	بند چهارم
۱۵۹	مسائل کتاب «استخراج الاوتار»
۱۵۹	الف - مقدمه
۱۶۰	ب - مسائل هندسی و جبری و نجومی
۱۹۰	ج - مسائل مربوط به محاسبه وترهای دایره
۱۹۶	بند پنجم
۱۹۶	پایان کتاب «استخراج الاوتار»
۱۹۸	بخش هفتم: تحقیق درباره کتاب «مقالید علم الهیة»
۱۹۸	الف - معرفی کتاب و ارزش علمی آن
۲۰۴	ب - خلاصه مقدمه کتاب «مقالید»
۲۰۸	ج - فهرست مندرجات کتاب «مقالید»
۲۱۳	د - منتخباتی از کتاب «مقالید»
۲۳۸	بخش هشتم: تحقیق درباره مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی»
۲۳۸	الف - مختصری درباره کتاب «قانون مسعودی»
۲۴۱	ب - موضوع مقاله سوم «قانون مسعودی» و چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر
۲۴۴	ج - بررسی مقدمه مقاله سوم «قانون مسعودی»
۲۴۴	د - باب اول از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۲۶۴	ه - باب دوم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۲۷۹	و - باب سوم از مقاله سوم «قانون مسعودی»

۲۸۹	ز - باب چهارم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۰۱	ح - تحقیقات دیگر بیرونی درباره تثلیث زاویه
۳۰۶	ط - دنباله باب چهارم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۱۷	ی - باب پنجم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۲۲	یا - باب ششم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۲۶	یب - باب هفتم از مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۳۵	یج - سه باب آخر مقاله سوم «قانون مسعودی»
۳۳۶	بخش نهم: فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم»
۳۳۶	الف - مختصری درباره کتاب «التفهیم»
۳۳۸	ب - موضوع این بخش از کتاب حاضر و چگونگی تدوین آن
۳۳۹	ج - فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم»
۴۲۱	بخش دهم: زندگینامه مختصر ریاضیدانان
۴۳۹	فهرست منابع و مآخذ
۴۵۷	بقیه فهرست اصطلاحات ریاضی
۴۶۰	فهرست اسامی کتابها و مقالات و رسالات
۴۶۵	فهرست اسامی ریاضیدانان

به نام خداوند جان و خرد

دیباچه

یک - چرا این کتاب را «تحریری نوین از بیرونی نامه» نامیدم؟

در سال ۱۳۵۳ خورشیدی کتابی با عنوان «بیرونی نامه» شامل تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی نوشتم که توسط انجمن آثار ملی ایران انتشار یافت و نسخه‌های آن در ظرف چند ماه نایاب شد و دیگر هم فرصت تجدید چاپ آن دست نداد. از آنجا که در ریاضیات دوره اسلامی خود را شیفته کارهای بیرونی می‌دیدم، پس از انتشار آن کتاب همواره سرگرم بررسی آثار او و یا مقالاتی بوده‌ام که به زبانهای اروپایی درباره شخصیت علمی یا آثار مختلف وی نوشته می‌شد و در ضمن این مطالعات، مطالب تازه و نکات بدیعی را که می‌یافتم برای تکمیل کتاب خود یادداشت می‌کردم، و هرچه بیشتر با تحقیقات تازه درباره آثار آن استاد آشنا می‌شدم بیشتر به نقایص و کمبودهای کتاب خود پی می‌بردم و به‌لزوم تصحیح و تنقیح مطالب آن مصمم‌تر می‌شدم. رفته‌رفته حجم این یادداشتها به اندازه‌ای شد که گنجاندن آنها در لابه‌لای مطالب «بیرونی نامه» کار درستی به نظر نمی‌آمد؛ زیرا ممکن بود که به روانی و یکدست بودن عبارات آن لطمه بزند و یا نظم طبیعی مطالب آن را از بین ببرد. علاوه بر این چون ترتیب بخشهای آن کتاب محتاج تغییر و تصحیح بود بر آن شدم که همه مطالب «بیرونی نامه» و یادداشتهای مذکور را روی هم بریزم و بخش جدیدی نیز به منظور تکمیل مطالب کتاب بر آنها بیفزایم^۱ و کتابی از نو پدید آورم که دست‌کم از نظر خودم بی‌عیب و نقص باشد. این تألیف جدید را که با «بیرونی نامه» سابق تفاوت‌های اساسی دارد «تحریری نوین از بیرونی نامه» نامیدم تا در مواقع ارجاع به مطالب آن اشتباهی با «بیرونی نامه» سابق پیش نیاید.

۱. بخش ششم کتاب حاضر

دو - موضوع هر یک از بخشهای دهگانه کتاب حاضر

۱- هدف اصلی از تألیف کتاب حاضر تحقیق در آثار ریاضی نابغه نامی ایران، ابوریحان بیرونی بوده است و نه پژوهش در شرح زندگانی و سایر آثار علمی او. با این حال برای آنکه ریاضیدانانی که این کتاب را مطالعه می‌کنند هنگام مراجعه به آن، اطلاعاتی درباره تاریخ حیات او در دست داشته باشند، خلاصه زندگی‌نامه وی را که از منابع معتبر فراهم آورده‌ام با شمه‌ای از آنچه را که متفکران بزرگ درباره شخصیت علمی او نوشته‌اند در آغاز بخش اول آورده‌ام، و برای آنکه تصور نشود که ریاضیدانی زبردست و متفکری بزرگ همچون ابوریحان بیرونی به احکام نجوم و خرافات معتقد بوده است، فصلی به عنوان «بیرونی و احکام نجوم» به این بخش افزوده‌ام و در آن عدم اعتقاد استاد را به احکام نجوم نشان داده‌ام و در آخرین بخش منتخباتی از نوشته‌ها و عقاید خود استاد بیرونی را زینت بخش صفحات کتاب خود ساخته‌ام.

۲- در بخش دوم، شخصیت علمی بیرونی را آن‌گونه که از بررسی آثار او استنباط کرده‌ام مورد بحث قرار داده‌ام.

۳- در بخش سوم آماری، تا آنجا که ممکن بوده است دقیق، از کلیه تألیفات بیرونی به دست داده و مشخصات آثار موجود و فهرست آثار مفقود استاد را در ریاضیات و نجوم معین کرده‌ام تا کار کسانی که بخواهند تحقیق در این آثار را دنبال کنند آسانتر باشد.

۴- در بخش چهارم خلاصه کتاب «راشیکات الهند» تألیف بیرونی را که موضوعش نسبت و تناسب نزد ریاضیدانان هندی و مقایسه آن با ریاضیات یونانی است آورده‌ام.

۵- در بخش پنجم منتخباتی از کتاب «آثار الباقیه» را که مشتمل بر حل مسائل جالب توجه و چند نوع تصویر جسم‌نما از مخترعات بیرونی است شرح داده‌ام.

۶- در بخش ششم، کتاب «استخراج الاوتار» تألیف بیرونی را که موضوعش محاسبه وترهای دایره است مورد تحقیق قرار داده‌ام. این بخش از کتاب حاضر دارای مسائل متعددی است که ممارست در آنها برای علاقه‌مندان به علم هندسه سرگرمی بسیار جالب توجهی است.

۷- بخش هفتم مشتمل است بر معرفی یکی از مهمترین آثار ریاضی بیرونی، یعنی کتاب «مقالید علم الهیة». این اثر همان‌گونه که ثابت کرده‌ام، نخستین کتاب مثلثات کروی است که به رشته تحریر درآمده است.

۸- بخش هشتم که یکی از مهمترین بخشهای کتاب حاضر است، مشتمل است بر تحقیق درباره مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی». امیدوارم این پژوهش برای کسانی که بخواهند آن کتاب نفیس را ترجمه کنند مفید واقع شود.

۹- بخش نهم برای استفاده کسانی است که با ریاضیات دوره اسلامی چندان آشنایی ندارند. به این منظور فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی قدیمی کتاب «التفهیم» را که اغلب آنها به زبان فارسی است در این بخش فراهم آورده و معادل هر اصطلاح را به زبان انگلیسی (و گاهی به زبان

فرانسوی) در مقابل آن ثبت کرده و هر جا لازم بوده به شرح اصطلاحات و تاریخچه آنها پرداخته‌ام. شاید برای کسانی که ریاضی می‌دانند ولی با اصطلاحات ریاضی قدیم آشنا نیستند و می‌خواهند کتابهای ریاضی دوره اسلامی را مورد بررسی قرار دهند مطالعه این بخش از کتاب که مشتمل بر شرح بیش از دویست اصطلاح است بهترین وسیله شروع به کار باشد.

۱۰- در بخش دهم در حدود پنجاه تن از ریاضیدانان دوره اسلامی را که نامشان در این کتاب آمده به اختصار معرفی و مفیدترین منابعی را که احیاناً برای تحقیق در احوال و آثار آنان موجود است ذکر نموده‌ام.

سه - علامتهای قراردادی

ش = شکل

ص = صفحه

صص = صفحات

← یعنی «رجوع کنید به»

علامت * در بالای نام هر ریاضیدان نشانه آن است که خلاصه زندگینامه وی در بخش دهم آمده است.

در مورد ثبت تاریخها هر جا عدد سال بدون ذکر نوع آن نوشته شده باشد مقصود سال هجری قمری است. در جاهایی که لازم بوده است علاوه بر تاریخ هجری قمری، تاریخ میلادی نظیر آن را در سمت راست آن نوشته و آنها را با یک خط مورب از هم جدا کرده‌ام. مثلاً ۴۲۱/۱۰۳۰ یعنی سال ۴۲۱ هجری قمری که تقریباً مطابق است با سال ۱۰۳۰ میلادی.

چهار - یادداشت

فهرست آثاری که تاکنون غیر از کتاب حاضر، درباره احوال و آثار ریاضیدانان ایرانی نوشته و منتشر کرده‌ام:

۱- «دو ریاضیدان ایرانی و شمه‌ای درباره عددهای متحاب»، از انتشارات مدرسه عالی دختران ایران. در سال ۱۳۴۷ خورشیدی (در ۶۴ صفحه).

۲- «ریاضیدانان ایرانی از خوارزمی تا ابن سینا» از انتشارات مدرسه عالی دختران ایران. در سال ۱۳۵۰ خورشیدی (در ۳۶۷ صفحه).

۳- «کاشانی‌نامه - تحقیق در احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی» از انتشارات دانشگاه تهران. در سال ۱۳۵۰ خورشیدی (در ۲۷۶ صفحه). این کتاب در سال ۱۳۵۲ با عنوان تحقیق درجه اول در رشته علوم و فنون برنده جایزه بهترین کتاب سال گردید و در سال ۱۳۶۸ خورشیدی توسط مرکز نشر دانشگاهی تجدید چاپ شد.

۴- «نسوی‌نامه - تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی» از انتشارات بنیاد فرهنگ

ایران. در سال ۱۳۵۳ خورشیدی (در ۲۱۰ صفحه). این کتاب در سال ۱۳۷۰ توسط مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی تجدید چاپ شد.

۵- «بیرونی‌نامه - تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی». از انتشارات انجمن آثار ملی ایران. در سال ۱۳۵۳ خورشیدی (در ۶۱۹ صفحه).

۶- «تحریر استخراج الاوتار» (تحریر دو کتاب از استاد ابوریحان بیرونی درباره محاسبه وترهای دایره). از انتشارات انجمن آثار ملی ایران. در سال ۱۳۵۵ خورشیدی (در ۲۸۰ صفحه).

۷- «فارسی‌نامه - شرح احوال و آثار کمال‌الدین فارسی، ریاضیدان و نورشناس ایرانی». از انتشارات مؤسسه نشر هما در سال ۱۳۶۳ خورشیدی (در ۱۵۵ صفحه).

۸- «زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری». از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۶۵ خورشیدی (در ۵۶۳ صفحه).

۹- «بوزجانی‌نامه - زندگی و آثار ابوالوفای بوزجانی»، با همکاری آقای محمدعلی شیخان^۱. از انتشارات سازمان انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی، در سال ۱۳۷۱ خورشیدی (در ۲۲۱ صفحه). این کتاب در سال ۱۳۷۲ جایزه بهترین کتاب سال را دریافت داشت.

مقاله‌ها

۱- «خوارزمی و کتاب حساب او» (مجله آشتی با ریاضیات. دفتر ۶، بهمن ماه ۱۳۶۳ خورشیدی، ص ۶۴۸ تا ۶۶۵).

۲- «بررسی کتاب هندسه بنوموسی» (مجله آشنائی با ریاضیات. جلد اول. اسفند ماه ۱۳۶۳ خورشیدی، ص ۳۶ تا ۵۴).

۳- «بررسی کتاب جبر و مقابله تألیف ابوعبدالله خوارزمی» (مجله آشنائی با ریاضیات. جلد ۲۳. خردادماه ۱۳۶۸ خورشیدی، ص ۴۴ تا ۷۶) و چند مقاله دیگر در مجلات سخن و سخن علمی و یکان و یغما و راهنمای کتاب و آشتی با ریاضیات.

در خاتمه وظیفه خود می‌دانم از همه دوستانی که به علت ضعف بینایی‌ام در به چاپ رساندن این کتاب مرایاری کرده‌اند به‌ویژه از آقای مسعود رزدام که نسخه‌پردازی این کتاب را به عهده داشته‌اند، از صمیم قلب سپاسگزاری کنم.

ابوالقاسم قربانی

۱. پیش‌نویس مطالب این کتاب را سالها قبل از چاپ و انتشار آن فراهم آورده و حتی بعضی از قسمتهای آن را چاپ و منتشر کرده بودم (رجوع شود به «ریاضیدانان ایرانی»، مقاله دوازدهم، صص ۱۲۰ تا ۱۵۸، «مجله آشنائی با ریاضیات»، جلد سوم، مردادماه ۱۳۶۴، صص ۳۱۷ تا ۳۳۲ و جلد یازدهم، آذرماه ۱۳۶۵، صص ۴۲۱ تا ۴۳۰ و جلد دوازدهم، بهمن‌ماه ۱۳۶۵، صص ۵۱۸ تا ۵۲۹).

بخش اول

زندگینامه بیرونی و شخصیت علمی او

مشمول بر: خلاصه زندگینامه بیرونی - شخصیت علمی بیرونی از نظر متفکران شرق و غرب - بیرونی و احکام نجوم - منتخباتی از نوشته‌های بیرونی.

الف - خلاصه زندگینامه بیرونی

موضوع اصلی کتاب حاضر تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی است و نه پژوهش در شرح زندگانی و سایر آثار علمی او. چه در این باره تاکنون تحقیقات ارزنده‌ای به زبانهای مختلف توسط دانشمندان شرق و غرب صورت گرفته و هنوز هم عده‌ای از اساتید سرگرم تحقیق در احوال و آثار وی هستند. با این حال برای آنکه نخستین بخش این کتاب با ذکر سرگذشت استاد شروع شده باشد، خلاصه زندگینامه وی را که از منابع مختلف فراهم آورده‌ام در اینجا نقل می‌کنم. و چون منابع مذکور در بیشتر موارد با هم مشابه هستند لازم ندیدم که جز در موارد ضروری به مأخذ هر مطلب اشاره کنم.

۱/۱- استاد ابوریحان محمدبن احمد بیرونی یکی از نوابغ روزگار و نمونه کامل هوشمندی و زیرکی و پُراکاری ایرانی و از جمله بزرگترین دانشمندان دوره اسلامی است که بدون تردید عمق و اصالت آثارش در میان دانشمندان قرون وسطی بی‌نظیر است. وی نه فقط یکی از بزرگترین مفاخر ایران، بلکه یکی از بزرگترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است و با ملاحظه جمیع جهات می‌توان

به تحقیق او را از زمره دانشمندان بزرگی دانست که تاکنون پا به عرصه وجود گذاشته‌اند.

۱/۲- بیرونی ریاضیدانی بود زیر دست و مبتکر که علوم هیئت و نجوم و فیزیک عصر خود را به حد کمال می‌دانست و در تاریخ و جغرافیای ریاضی و گاهشماری و زبان شناسی تبیّر داشت. وی تقریباً در همه علوم متداول زمان خود به استثنای کیمیا به تحقیق پرداخت. گذشته از اینها سیّاح زیرک و نکته سنجی بود که سنن و عقاید ملل را می‌نگریست و با بی طرفی و بدون تعصّب درباره آنها قضاوت می‌کرد.

بعداً شمه‌ای از عقاید بعضی از دانشمندان بزرگ دنیا را درباره شخصیت علمی بیرونی نقل خواهم کرد.^۱ و در بخش جداگانه‌ای به بحث درباره شخصیت ریاضی وی خواهم پرداخت.

۱/۳- بیرونی از خانواده‌ای ایرانی و شیعه^۲ در سوم ماه ذیحجه سال ۳۶۲ هجری قمری، مطابق با چهارم سپتامبر سال ۹۷۳ میلادی، در بیرون خوارزم^۳ (ناحیه مصّب آمودریا در ساحل جنوبی دریاچه آرال) پابه عرصه وجود نهاد. وی اوایل عمر خود را در موطن خود گذرانید و به خوارزمشاهیان معروف به آل عراق که در «کاث» فرمانروا بودند پیوست^۴ و نزد استادانی مانند ابونصر منصور بن علی بن عراق*، ریاضیدان بزرگ آن عصر، به فراگرفتن علوم ریاضی و جز آن سرگرم بود و از همان آغاز جوانی به تحقیق و تألیف می‌پرداخت^۵ و با دانشمندان دیگر مرآوده و مکاتبه علمی داشت.^۶ خود او نوشته است که در هنگامی که هیجده ساله بوده به رصد می‌پرداخته است.^۷

۱/۴- بیرونی بدون تردید در سالهای ۳۸۴/۹۹۴ و ۳۸۵/۹۹۵ یعنی هنگامی که ۲۲ تا ۲۳ سال داشته هنوز در خوارزم بوده، چه خود او نوشته است که در آن سالها در ساحل غربی رود جیحون (آمودریا) و جنوب شهر خوارزم به رصد می‌پرداخته است.^۸

۱. ← بند «ب» از همین بخش شماره‌های ۱/۱۶ تا ۱/۲۴.

۲. شاید از شیعه زیدیه بوده چه در کتاب «آثارالباقیه» (چاپ زاخاتو، ص ۳۳۱) زید بن علی بن حسین را امام نامیده نوشته است «وقد قتل الامام زید بن علی...» و نیز- «قانون مسعودی» (چاپ حیدرآباد، ص ۲۵۵): مقتل زید بن علی بن الحسین بن علی و تصلیه الکوفه علیهم السّلام و نیز- «آثارالباقیه» (چاپ زاخاتو، ص ۶۷ دوسطر اول).

۳. مرحوم دکتر معین در ذیل صفحه ۲۵۰ از «تعلیقات چهار مقاله» (چاپ سوّم، سال ۱۳۳۳) با ذکر دلایلی نوشته است: «بیرون قلعتی بود در خراسان که گاهی این ناحیت را داخل ثغور خوارزم نیز می‌شمردند و استاد بزرگوار ابوریحان از اینجا برخاست.»

۴. ← مطلبی که از مرحوم بدیع الزّمان فروزانفر در ذیل صفحه ۲۵۱ از «تعلیقات چهار مقاله» نقل شده است.

۵. چنانکه در بخش هفتم کتاب حاضر خواهیم دید بیرونی کتاب «مقالید علم الهیة» را که یکی از مهمترین آثار ریاضی اوست در سنین جوانی نوشته است.

۶. برای آگاهی یافتن از مسائلی که بین بیرونی و ابن سینا* به وسیله مکاتبه مطرح بوده است ← «لفت نامه» حرف الف صفحات ۴۷۰ به بعد.

۷. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۲۱۸: و این موافق است با آنچه در جوانی خود یافتیم که گمان می‌کنم در سال ۳۸۰ هجری یا نزدیک آن بود. ارتفاع نیمروزی را در هریک از دو اعتدال در خوارزم به حساب زیج حبش حاسب* با حلقه‌ای که جز نیم درجه را نشان نمی‌داد اندازه گرفتم.

۸. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۲۱۵: «در سال ۳۸۵ هجری میل اعظم را در روستای بوشکا نزار روستاهای کرانه غربی جیحون در مقابل شهر خوارزم رصد کردم».

در آن موقع ظاهراً بیرونی در رصدخانه‌ای مشغول کار بوده زیرا افزارهایی به کار می‌برده که مخصوص رصدخانه است.^۹

۱/۵- ابوریحان در سال ۳۸۵/۹۹۵ پس از انقراض خاندان آل عراق، به دست مأمون بن محمد والی جرجانیه و قتل ابو عبدالله محمد بن احمد آخرین حکمران آل عراق^{۱۰}، بناچار جلای وطن کرد و مدت چندسال توانست در یک جا بماند^{۱۱} و از این شهر به آن شهر می‌رفت.

به احتمال قوی در همین سالها بوده که استاد زمانی به ری رفته و چنانکه خود در مقدمه کتاب «مقالید علم‌الهیة» نوشته است در آنجا با خجندی* (ابومحمود) و کوشیار بن لبان گیلی* ملاقات کرده است. هنگامی که بیرونی در ری بسر می‌برده با پریشانی دست به گریبان بوده و بعداً وضع وی بهبود یافته است.^{۱۲} شاید در همین ایام بوده که وی به طبرستان نزد ابوالعباس مرزبان بن رستم بن شروین از امیرزادگان آل باوند و صاحب کتاب «مرزبان نامه» رفته و کتاب «مقالید علم‌الهیة» را بنام او نوشته است. و نیز می‌دانیم که بیرونی مدتی نیز نزد منصور دوم پسر نوح سامانی (۳۸۷-۳۸۹ ه.ق) بوده است چه او را به عنوان حامی خود ستوده است.^{۱۳}

۱/۶- در سال ۳۸۷/۹۹۷ باز بیرونی در خوارزم بوده چه خود نوشته است که در آن سال در خوارزم اقامت داشته و با بوزجانی* (ابوالوفا) که در آن هنگام در بغداد بوده به وسیله مکاتبه قرار صدی را گذاشته بوده است.^{۱۴}

۱/۷- بیرونی در سال ۳۸۸/۹۹۸ به جرجان (ناحیه ولایت قدیم ایران، در گوشه شرقی دریای خزر، مطابق ولایت استراباد) رفت و چند سالی در آنجا در خدمت شمس المعالی قابوس و شمشگیر گذرانید و کتاب «آثارالباقیه» را که نخستین اثر مشهور او و به زبان عربی است (احتمالاً در حدود سال ۳۹۰/۱۰۰۰) به نام وی تألیف کرد. البته بعداً در آن کتاب تصحیحاتی به عمل آورد و مطالبی به آن افزود.

۹. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» صص ۸۲ و ۸۳: «آهنگ آن داشتیم که در سالهای ۳۸۴ و ۳۸۵ هجری به رصد‌هایی بپردازم، و برای این کار دایره‌ای به قطر پانزده ذراع با چیزهای بایسته دیگر فراهم کردم».

۱۰. ← «تعلیقات چهار مقاله» ذیل صفحه ۲۵۱ یادداشت شماره ۲.

۱۱. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۸۳: «و پس از آن روز چنان پریشانی‌هایی میان دو مهتر خوارزم پیدا شد که من ناگزیر کار را فرو گذاشتم و در جایی پناه جست و سپس امان خواستم و از وطن دور شدم. و پس از آن مدت چند سال نتوانستم در یک جا بمانم تا آنگاه که روزگار آرامش خاطر بهره من کرد و من به کارهایی از جهان پرداختم که نادانان در آن بر من رشک می‌بردند و خردمندان دلسوزی می‌نمودند».

۱۲. ← «ترجمه فارسی آثارالباقیه»، ص ۳۹۹. در آنجا خطاب به شمس‌المعالی نوشته است: «روزگاری که از ساحت عالی دور بودم، و از سعادت خدمت شریف محروم، در ری شخصی را دیدم که در شمار علمای صناعت نجوم بود... این شخص بسیار بر من تکبر و نخوت نمود و من در آن وقت از جمیع جهات گرفتار و پریشان بودم، پس از آنکه از پریشانی و گرفتاری من کاسته شد گفته مرا تصدیق نمود».

۱۳. دایرة‌المعارف اسلام، چاپ دوم فرانسوی، بخش هفتم، ج ۱، ص ۱۲۷۸.

۱۴. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید»، ص ۲۱۸: «با ابوالوفا محمد بن محمد بوزجانی چنان قرار گذاشته بودم که او در بغداد و من در خوارزم کسوف ماه را رصد کنیم».

۱/۸- بیرونی که با لهجه ایرانی خوارزم تربیت یافته بود و زبان فارسی را در محاوره به کار می برد به علت امکانات فراوان علمی زبان عربی، مدافع آن بود و ترجیح می داد که در آثار علمی خود از زبان عربی استفاده کند. با این حال بعضی از کتابهای علمی خود، مانند کتاب «التفهیم» را به زبان فارسی هم نوشته است.

نوشته اند که بیرونی علاوه بر زبان فارسی و عربی زبانهای سعدی و ترکی و سریانی و عبری را نیز می دانسته است.^{۱۵}

۱/۹- بیرونی پیش از سال ۳۹۹/۱۰۰۸ به موطن خود بازگشت و در جرجانیه (پایتخت مأمونیان خوارزم) مورد احترام شاهزاده ابوالحسن علی بن مأمون قرار گرفت و مدت هفت سال نزد برادر وی یعنی خوارزمشاه ابوالعباس مأمون بن مأمون بسر برد و از معتمدان او بود.^{۱۶}

ابوالعباس، مانند سایر سلاطین سلسله مأمونیان خوارزم، مردی علم دوست و هنرپرور و دربارش محل اجتماع علما و حکما بود که از آن جمله ابو نصر عراق* و ابن سینا* و ابوسهل مسیحی و ابن الخمار بودند. ابوالعباس در سال ۱۷-۴۰۷/۱۰۱۶ به دست سپاهیان شورشی خود به قتل رسید و سلطان محمود غزنوی به بهانه خونخواهی خوارزمشاه به خوارزم لشکر کشید و آنجا را فتح کرد. در همین سال ۱۷-۴۰۷/۱۰۱۶ بیرونی در جرجانیه به رصد می پرداخته است. چه خود او نوشته است که در آن سال در جرجانیه (پایتخت مأمونیان خوارزم) بزرگترین ارتفاع نصف النهاری خورشید را اندازه گرفته است.^{۱۷}

۱/۱۰- سلطان محمود در مراجعت به غزنه در سجستان (افغانستان) در بهار سال ۴۰۸ ه.ق ابوریحان و عده ای از علمایی را که در جرجانیه بودند همراه خود به غزنه برد.^{۱۸} ابن سینا* و ابوسهل عیسی بن یحیی مسیحی طبیب قبلا از جرجانیه به جرجان رفته بودند. بیرونی از آن پس در غزنه مستقر شد و شاید شغل رسمی منجمی دربار سلطان محمود را به عهده داشت و در بیشتر لشکرکشیهای محمود غزنوی به هند در ملازمت او بود. بیرونی از مسافرت به هند استفاده کرد و با علما و حکمای آن سرزمین مصاحبت داشت و علوم اسلامی و یونانی را به آنان آموخت و در عین حال به فراگرفتن زبان سانسکریت و بعضی از لهجه های محلی هند و معارف هندیان و استقصاء در افکار و فلسفه آنان همت گماشت و گنجینه ای سرشار از اطلاعات گران بها اندوخت و بدین گونه مواد اولیه اثر مشهور خود موسوم به «تحقیق ماللهند» را فراهم آورد.

۱۵. — «دایرة المعارف اونيورسالیس» ج ۳، چاپ ۱۹۶۸، ص ۳۳۳.

۱۶. برای آگاهی یافتن از مأموریتی که خوارزمشاه ابوالعباس به وی داد — شماره ۱/۴۴ کتاب حاضر.

۱۷. — «ترجمة فارسی کتاب تحدید» ص ۵۴: «و اما بار دوم در سال ۴۰۷ هجری بود که در جرجانیه بزرگترین ارتفاع نصف النهاری خورشید را به میانجیگری ربع دایره اندازه گرفتم...».

۱۸. نوشته اند که ابو نصر عراق را نیز همراه این علما به غزنه برد. اما در مورد ابو نصر عراق گفته دیگری هم هست به این شرح: در کتاب «طبقات الشافعیه» نقل شده که سلطان محمود به بهانه اینکه در املاک ابونصر عراق مسجدی ساخته شده بوده او را به سوء اعتقاد متهم کرده و در سال ۴۰۸/۱۰۱۷ که به جرجانیه رفته فرمان داده است که ابونصر عراق را با سایر متهمان به دار آویزند. (کتاب «طبقات الشافعیه» چاپ مصر، طبع اول، ج ۴، ص ۳۰۶).

۱/۱۱- بیرونی چنانکه گفتیم مذهب شیعه داشت ولی مردی آزاداندیش و عاری از تعصب بود. اما سلطان محمود غزنوی در تسنن متعصب بود و در استیصال شیعه و معتزله و اسماعیلیه و قرامطه اهتمام تمام داشت. بدیهی است که در این شرایط ابوریحان همواره از جان خود بیمناک بود.^{۱۹}

۱/۱۲- محمود غزنوی در سال ۴۲۱/۱۰۳۰ درگذشت. در زمان سلطنت سلطان مسعود، فرزند محمود (۱۰۴۲-۴۳۳/۱۰۳۰)، بیرونی آسایش خاطر یافت و سومین اثر مشهور خود «قانون مسعودی» را که دایرةالمعارف نجوم و هیئت آن زمان است در سال ۴۲۱/۱۰۳۰ به سلطان مسعود اهدا کرد. و البته بعداً در آن کتاب تصحیحاتی بعمل آورد.

۱/۱۳- در سلطنت مودود بن مسعود (۱۰۴۸-۴۴۰/۱۰۴۲) نیز بیرونی مورد عنایت سلطان بود و کتاب «الجواهر فی معرفة الجواهر» از آثار او در این عهد است.

۱/۱۴- بیرونی در آخرین اثر خود یعنی کتاب «الصَّیْدَةُ* فی الطب» که درباره داروهای طبی است، اظهار داشته که سن او در موقع نوشتن آن کتاب از هشتاد سال متجاوز بوده است. بنابراین سال وفات بیرونی را که معمولاً سال ۴۴۰/۱۰۴۸ ذکر می‌کنند باید کمی بعد از ۴۴۲/۱۰۵۰ دانست.^{۲۰}

۱/۱۵- نوشته‌اند^{۲۱}: «آنگاه که بیرونی «قانون مسعودی» را تصنیف کرد سلطان او را پیلواری سیم جایزه فرستاد و وی آن مال به خزانه بازگردانید و گفت: من از آن بی نیازم چه عمری در قناعت گذارده‌ام و دیگر بار مرا ترک‌خوی و عادت سزاوار نیست... دست و چشم و فکر او هیچگاه از عمل باز نماند و دائم در کار بود مگر به روز نوروز و مهرگان یا برای تهیه احتیاجات معاش. او گندم‌گون و بطین بود و محاسنی انبوه داشت.»

«و فقیه ابوالحسن علی...گوید آنگاه که نفس در سینه او به شماره افتاده بود بر بالین وی حاضر آمدم. در آن حال از من پرسید حساب جدات فاسده را که وقتی مرا گفתי باز گوی که چگونه بود. گفتم اکنون چه جای این سؤال است. گفت ای مرد کدام یک از این دو بهتر؟ این مسئله بدانم و بمیرم و یا نادانسته و جاهل درگذرم. و من آن مسئله باز گفتم، فراگرفت و از نزد وی باز گشتم و هنوز قسمتی از راه نیموده بودم که شیون از خانه او برخاست.»

ب- شخصیت علمی بیرونی از نظر متفکران شرق و غرب

همه دانشمندانی که به بررسی آثار مختلف علمی بیرونی پرداخته‌اند چنان تحت تأثیر نبوغ او قرار گرفته‌اند که هر یک به نحوی شخصیت علمی او را ستوده‌اند.

۱۹. «مصاحب: ابوریحان» ص ۱۵.

* در «بوالو» و «دایرةالمعارف فارسی» صیدله نیز آمده است.

۲۰. «دایرةالمعارف اسلام» چاپ دوم به زبان فرانسوی، ج ۱، ص ۱۲۷۴.

۲۱. «لغت نامه» حرف الف، ص ۴۶۱ ستون دوم به نقل از شهرزوری.

اینک عقیده عده‌ای از متفکران را درباره شخصیت علمی وی در اینجا نقل می‌کنم.^{۲۲} البته بعداً درباره آنچه خود از مطالعه آثار ریاضی او استنباط کرده‌ام به بحث خواهم پرداخت.^{۲۳}

۱/۱۶- نوشته پروفیسور ادوارد زاخاو* در مقدمه کتاب «آثارالباقیه». نقل از «تعلیقات چهار مقاله» صفحه ۲۵۴ (این مطالب را علامه محمد قزوینی به فارسی برگردانده است.)

«از تضاعیف مصنفات ابوریحان روی هم رفته می‌توان مشرب و عقیده وی را به دست آورد. ابوریحان دوست «حقیقت» من حیث هی هی بوده است، و هیچ چیز را در دنیا بر آن ترجیح نمی‌داده و حقیقت را برای هیچ غرض و مقصدی پنهان نمی‌کرده، و در ابطال موهومات و قطع ریشه خرافات خودداری نداشته و دقیقه‌ای کوتاهی نمی‌نموده است. مذهبش مسلمان مایل به تشیع ولی مسلمان خشک و خشن و متعصب نبوده است. نسبت به نژاد عرب، خراب‌کننده مسجد ساسانیان، بغض و نفرت شدیدی داشته و در محبت بلکه عشق به هر چیز و هر کس که به نژاد پارسی و ایرانی تعلق داشته بی اختیار بوده است.»

۱/۱۷- نوشته زاخاو در مقدمه کتاب «ماللهند» نقل از «لغت نامه» حرف الف، ص ۴۸۳.

«بیرونی در کتاب خویش آنچه را شخصاً دیده و شنیده، و به نحو مبسوط و مفصلتر آنچه را شخصاً خوانده و فرا گرفته است، برای ما حکایت می‌کند و با دماغی مأنوس به مطالعات و استدلالات ریاضی و فلسفی به موضوعهایی که تحت مطالعه قرار می‌دهد نزدیک شده و به سبک تعلیمات ارسطو و افلاطون و بطلمیوس و جالینوس در آن تحقیق و هر موضوعی را با روح انتقادی عصر حاضر، در معرض دقت و بحث می‌آورد و به نحوی از عهده انجام منظور بر می‌آید که بالاتفاق نظر اعتماد و اعجاب محققان را به خود جلب می‌کند.»

«بیرونی عادتاً از هرگونه افکار خرافی آزاد و مبرا است و برای درک حقیقت هر منظوری از خودگذشتگی بی حد ابراز و از تحمل هیچگونه رنج و مشقت روگردان نیست و هیچ فرصتی را تا وقتی که به طور کلی با نحو خاصی راه حق و صواب را به دست آورد فوت نمی‌کند....»

«وی پیش از هر چیز دوستدار حقیقت است و جداً با باطل و حق‌کشی معاندت دارد. در حالی که هیچگاه شخصیت خود را در بحث‌های علمی کتاب دخیل نمی‌کند در پاره‌ای موارد که موضوع هتک حرمت و اهانت در بین آید شخصاً چون یک نفر مبارز مدافع از حق و واقع و یگانه سوار میدان ملکات فاضله یا نامداری که جریده نکونامی و عواطف عالی به نامش مهور و سر تا پای وجودش از جرئت و تهور ترکیب شده پا به عرصه میدان می‌گذارد و مادام که در نظرش امری نیک یا موضوعی صواب مورد حمله و دستخوش تجاوز است از وارد آوردن ضربت‌هایی برنژده و

۲۲. این مطالب را از منابع مختلف اقتباس و یا ترجمه کرده و آنها را بر حسب تقدم تاریخ انتشار اصل منابع مذکور مرتب ساخته‌ام.

۲۳. ← بخش دوم کتاب حاضر.

قاطع و متوالی خودداری ندارد.»^{۲۴}

۱۸/۱- نوشته کارادو* در کتاب «متفکران اسلام»^{۲۵}. نقل از «مصاحب: ابوریحان» ص ۱۰.
«اینک می‌رسیم به شخصیتی فکری که از حیث مرتبه کاملاً در درجه اول است و در آثار علمی قرون وسطی مقامی خاص دارد و او بیرونی است. با آنکه از عصر بیرونی قرن‌ها می‌گذرد، قیافه وی هنوز تازه و جوان است؛ گویی شخصیت ممتاز او از عصر وی جدا و به زمان ما نزدیک شده است. ماهیت و پختگی فکر او مانند متفکران کنونی است. بیرونی نکته‌سنج و تیزبین و فکرش موشکاف و نافذ است، و در تحلیل و تشریح مسائل سخت کنجکاو می‌باشد.»

«بیرونی خاطره کسانی چون لئوناردو داونچی و لایبنیتز را به ذهن می‌آورد؛ مانند دیگر متفکران بزرگ، در زمینه‌های بسیار متنوع قدرت دارد. فیلسوف است، سیاح است، زبان‌شناس است، ادیب و شاعر است، ریاضیدان است، منجم است، و عالم جغرافیاست و در یکایک این امور مقامی شامخ دارد. اما چیزی که مخصوصاً آثار او را ممتاز می‌سازد این است که مسائل را در عین حال هم از جنبه فلسفی و هم از نظر ریاضی بررسی می‌کند.»

۱۹/۱- نوشته محقق شهیر جورج سارتن** در کتاب «مقدمه تاریخ علم».^{۲۶}

«اگر بگویم که نیمه اول سده یازدهم میلادی نقطه اوج پیشرفت اندیشه‌ها بوده اغراق نگفته‌ایم. علت اصلی اینکه آن دوره چنین امتیاز و توفقی داشت وجود بیرونی و ابن سینا در آن عصر بود. این دو دانشمند، که یکدیگر را هم می‌شناختند، کاملاً با هم متفاوت بودند. بیرونی نماینده طبقه‌ای از متفکران است که فکر نوظلب و نقاد دارند. ابن سینا فکری تألیفی و ترکیبی داشت. بیرونی بیش از یک کاشف بود و از این حیث طرز فکر او به افکار علمی جدید نزدیکتر است...».

«بیرونی از خانواده‌ای ایرانی و شیعه متولد شد. در مذهب عاری از تعصب بود ولی احساسات ملی و ضد عربش تا پایان عمر به قوت خود باقی ماند. وی سیاح و فیلسوف و ریاضیدان و منجم و جغرافیادان و دانشمندی جامع بود. او یکی از بزرگترین دانشمندان عالم اسلام و با ملاحظه جمیع جهات یکی از بزرگترین دانشمندان همه قرون و اعصار است. فکر نکته‌سنج، سعه صدر، عشق به حقیقت و تهور فکری وی تقریباً در قرون وسطی بی نظیر است.»^{۲۷}

۲۴. مقدمه‌ای که بیرونی بر کتاب «مقالید علم الهیة» در دفاع از استاد خود ابو نصر عراق* در مورد تقدم وی در اختراع «شکل مغنی» نوشته است و آنچه را در آنجا درباره بوزجانی* (ابوالوفا) گفته بهترین دلیل صحت عقایدی است که زاخانو بیان کرده است. (بخش هفتم کتاب حاضر).

* Carra de Vaux

۲۵. *Les Penseurs de l'islam*. چاپ ۱۹۲۱، جلد دوم، فصل سوم.

** George Sarton

۲۶. ترجمه از کتاب «Introduction to the History of science»، چاپ ۱۹۲۷، جلد اول، صص ۶۹۳، ۷۰۷.

۲۷. در ترجمه عبارات اخیر از «مصاحب: ابوریحان» ص ۱۱ نیز استفاده کرده‌ام.

۱/۲۰- نوشتهٔ پروفیسور آرثر اِپم پوپ* در مقالهٔ «بیرونی به عنوان یک متفکر».^{۲۸}

«در هر فهرستی که از اسامی دانشمندان بزرگ جهان فراهم آید باید نام بیرونی را در سطرهای نخستین آن ذکر کرد. هر کتابی که دربارهٔ تاریخ ریاضیات یا نجوم یا جغرافیا یا مردم شناسی یا تاریخ مذهب نوشته شود کامل نخواهد بود مگر آنکه سهم بزرگی که بیرونی در هر یک از این علوم دارد، در آن شناسانده شود. بیرونی یکی از متفکران همهٔ قرون و اعصار است و دارای امتیاز چشمگیری است و آن امتیاز دارا بودن صفات ضروری است که در عین حال پرداختن به مطالعات علمی و تحقیقات اجتماعی را برای یک فرد امکان پذیر می‌سازد. بیرونی نمونه‌ای است از متفکران بزرگی که به همهٔ جهانیان و همهٔ زمانها تعلق دارند. از آثار بیرونی که در هزار سال پیش از این به رشتهٔ تحریر در آمده می‌توان سلسله‌ای دراز از مطالبی استخراج کرد که پیشرو عقاید و افکار و روشهایی هستند که امروزه آنها را تازه و نو می‌انگارند.»

۱/۲۱- نوشتهٔ دکتر غلامحسین مصاحب. (نقل از رسالهٔ «ابوریحان بیرونی».)^{۲۹}

«ابوریحان بیرونی یکی از بزرگترین دانشمندانی است که تاکنون پا به عرصهٔ وجود نهاده‌اند. روح تحقیق و تدقیق، فکر نکته سنج و موشکاف، ذوق سلیم و هوش سرشار، سعهٔ صدر و انصاف و عشق به حقیقت و بی پروایی او در دریدن پرده‌های تعصب و خرافات برای رسیدن به آن، در قرون وسطی بی نظیر است، و باینکه قرن‌ها از زمان او می‌گذرد، پختگی فکر و روش تحقیق وی مانند دانشمندان کنونی است. وی علوم و فنون و اعتقادات و عادات ملل غیر اسلامی را بطور صحیح و خالی از تعصب فراگرفت. احاطهٔ او در ادیان و ملل و نحل حیرت انگیز است. در مطالعهٔ دقیق کتب از هر قبیل که پیش از او و در عصر وی به عربی و فارسی و هندی تألیف شده بود یگانه بود. ابوریحان سخت مخالف تعصب در علم بود و بر ضد آنان که عرب را بر دیگر اقوام در این امر ترجیح می‌دهند شرح تنیدی نوشته است.

ابوریحان بیرونی نه فقط یکی از بزرگترین مفاخر ایران بلکه از بزرگترین مفاخر دنیای علم و تحقیق است.»

۱/۲۲- نوشتهٔ دکتر سید حسین نصر (نقل از رسالهٔ «ابوریحان، معرفی یک دانشمند».)^{۳۰}

«ابوریحان کاملاً از هویت خود هم به عنوان یک مسلمان و هم یک ایرانی آگاه بود. درحالی‌که چنانکه از مقدمهٔ کتاب الصيدله برمی‌آید، او به علّت امکانات فراوان علمی زبان عربی، مدافع سرسخت آن بود، به تمدن قبل از اسلام ایران نیز افتخار می‌کرد. و از اینکه مقداری از میراث ایران باستان در اثر تهاجم اعراب از بین رفته بود افسوس می‌خورد. صداقت و بی نظری علمی او در تحقیق و تفحص باعث شد که بیرونی هم یک مسلمان متدین و معتقد باشد و هم یک پژوهشگر

* Arthur Upham Pope

۲۸. ترجمه از کتاب «Al-Biruni Commemoration Volume» چاپ ۱۹۵۱، ص ۲۸۱.

۲۹. ← «مصاحب: ابوریحان»، ص ۲۸.

۳۰. ← «نصر: ابوریحان».

بی تعصب و بی نظر که به مطالعه تمدنها و فرهنگ‌های مختلف و من جمله فرهنگ ایران که از آن خود او بود می‌پرداخت.»

«...او یکی از افراد معدود در تاریخ اسلام است که توانست فکر تحلیلی یک ریاضیدان را با خصوصیات فکری یک مؤرخ که با شرح و توصیف و ترکیب مطالب تاریخی سروکار دارد توأم سازد.»

۱/۲۳- نوشته شادروان مجتبی مینوی (نقل از «بررسی‌هایی درباره ابوریحان بیرونی»)^{۳۱}. «بیرونی از آن علمای حسود و بخیل نبود که آنچه را که می‌دانند و به آن رسیده‌اند از دیگران پنهان کنند، به عکس بسیار به نشر علم حریص بود و می‌خواست هر چه را می‌داند به دیگران بیاموزد و به همین جهت است که کتابهای خود را به عربی می‌نوشت، زیرا که زبان علم در آن روزگار لسان عربی بود و بیشتر کسانی که اهل کسب علم و تحصیل معرفت بودند عربی می‌دانستند و به عربی می‌نوشتند و می‌خواندند، و فارسی از برای کتابت مطالب علمی پخته و آماده نشده بود و فارسی خوانها چندان طالب تحصیل علم نبودند...».

۱/۲۴- نوشته دکتر ذبیح‌الله صفا^{۳۲} («فرق او (= بیرونی) در تحقیق مطالب با سایر دانشمندان اسلامی در آن است که طریقه استقراء و استنتاج را در کار اتخاذ کرده است. وقتی که بحثهای او و سپس کیفیت وصول او را به نتایج آن بحثها مطالعه می‌کنیم درست مانند آن است که با یکی از محققان عالی مقام معاصر خود در جهان روبرو هستیم. در شیوه کار او آنچه که حکومت قطعی دارد عقل است اما نه عقل مجرد، بلکه عقلی که دلایل خود را از عوالم واقعی تجربه با تحقیقات علم به دست می‌آورد...».

ج - بیرونی و «احکام نجوم»^{۳۳}

۱/۲۵- بعضی از دانشمندان را عقیده بر آن است که ابوریحان به صحت «احکام نجوم» اعتقاد داشته است. گمان می‌کنم که این رأی از آنجا پیدا شده است که نخستین بار پروفیسور ادوارد زاخاو در مقدمه‌ای که بر کتاب «ماللهند» بیرونی نوشته (صفحه ۲۵ آن مقدمه) متذکر شده است که:^{۳۴} «من این مطلب را که بیرونی معتقد به تأثیر سیارات در عالم تحت قمر بوده است یقین می‌پندارم، اگر چه خود او هرگز چنین چیزی نگفته است.»

دلیلی که زاخاو بر این عقیده خود می‌آورد این است که می‌گوید «به دشواری می‌توان این امر

۳۱. «بررسیهایی درباره بیرونی» ص ۲۵.

۳۲. «احوال و آثار ابوریحان بیرونی» ص ۱۵۲.

۳۳. مقصود از علم نجوم (Astrology) طریقه‌ای برای غیب‌گویی مبتنی بر این نظریه است که ستارگان در کارهای آدمی مؤثرند. در مآخذ اسلامی به اسامی «علم احکام»، «صناعت احکام»، «علم نجات» و «علم تنجیم» نیز خوانده شده و عالم این (به اصطلاح) علم را «احکامی» (Astrologer) نامند. (دایرةالمعارف فارسی، ج ۱، ص ۶۱: احکام نجوم).

۳۴. نقل از «ترجمة انگلیسی التفهیم» ذیل صفحه ۲۱۰.

را توجیه کرد که اگر بیرونی به حقیقت احکام نجوم معتقد نبود چرا آن اندازه وقت و همت صرف بررسی و مطالعه آن کرد.»

اما بدون تردید هیچ کس صالحتر از خود بیرونی نیست که بگوید به احکام نجوم معتقد بوده یا نبوده است. نه تنها بیرونی هرگز ادعا نکرده است که به احکام نجوم معتقد است بلکه در هر فرصتی که به دست آورده در آثار خود ابطال احکام و سستی مقدمات آن را به صراحت متذکر شده است. گذشته از این بیرونی هیچ گاه خود را منجم به معنی احکامی نشمرده و در سرتاسر آثارش هر جا از احکامیان سخن به میان آورده سیاق عبارتهای وی طوری است که گویی از طبقه‌ای غیر از همفکران و همکاران خود گفتگو می‌کند. اینک چندین شاهد از آثار خود بیرونی در اینجا می‌آورم تا حقیقت امر روشن شود. گمان می‌کنم که از مطالعه این شواهد بخوبی معلوم می‌شود که استاد به احکام نجوم معتقد نبوده است.

۱/۲۶- در آغاز باب پنجم از کتاب «التفهیم» می‌نویسد: ۳۵

«چون بدینجای رسیدیم و اشارت کردیم به سخنانی که به علم عدد و هندسه رود و آگاهی دادیم از چگونگی افلاک و راه نمودیم به دانستن تقویم و به کار داشتن اسطرلاب و ز آن به پرداختیم، وقت آمد که نیز سخنانی که میان منجمان رود اندر احکام نجوم بجای آریم که قصد پرسنده این بود. و نزدیک بیشترین مردمان احکام نجوم ثمره علم‌های ریاضی است. هر چند که اعتقاد ما اندرین ثمره و اندرین صناعت مانده اعتقاد کمترین مردمان است.»

۱/۲۷- باز در «التفهیم» در جواب این سؤال که: «چرا یکی چیز را با کویکی چند یاد کرده همی آید و به برخی مخالف آید؟» می‌نویسد: ۳۶

«اصل این حدیث سستی مقدمات این صناعت و آشفتگی قیاس‌هاش است... و این مردمان (= احکامیان) را اندرین باب در-ت (= عادت و همت) نیست تا تمیز کنند. و آنچه اندر کتاب‌های ایشان است مختلف نبود پس، بلکه متضاد نیز.»

۱/۲۸- باز در «التفهیم» دربارهٔ ارباب مثلثات می‌نویسد: ۳۷

«و اما حشویان منجمان این هر سه ستاره بجمله و بیک وقت خداوند مثله دارند... و بحق نشنوند و کی باز گردند از چیزی که عمر بدان بگذاشتند و کتابها پر کردند از حکم‌های سه گانی بر آن و شاخ بر شاخ زدن.»

۱/۲۹- و نیز در جای دیگری از «التفهیم» می‌نویسد: ۳۸

«و اما حشویان منجمان که تمویه و زرق دوست تر دارند از راه راست، چون کسی ایشان را از چنین مسئله پرسد او را باز گردانند و بفرمایند تا سه شب بر آن اندیشه بخشید و بروز و هم از آن

۳۵. «التفهیم فارسی» ص ۳۱۶.

۳۶. «التفهیم فارسی» ص ۳۶۰.

۳۷. «التفهیم فارسی» صص ۳۹۹ و ۴۰۰.

۳۸. «التفهیم فارسی» ص ۵۳۸.

خالی ندارد، آنکه بپرسد. و من این را وجهی ندانم جز محکم شدن حماقت. و سپس این امر پدید آمدن دروغشان و تباهی حکم تاگناه بر پرسنده حواله تواند کردن که آنچه فرمودندش نیکو بجای نیاورد.»

۱/۳۰- و نیز «التفهیم» در جواب سؤال «خبی و ضمیر کدامند؟» می‌نویسد: «و منجمان را اندرین به عاجل الحال فضااحت باشد.»

۱/۳۱- و در آخر باب پنجم «التفهیم» که مخصوص احکام نجوم است می‌نویسد: ۳۹
«و چون بدین جای رسیدیم از صناعت نجوم اندر و کفایت دیدیم مرمتدی را. و گر از این قسمتها بگذرد خویشان را و صناعت را تعریض کرده دارد مر سخره را و ریشخند را چنانک اکنون است.»

۱/۳۲- در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است: ۴۰
«پس چون بهره‌مندی از کار دین به کار دنیا تجاوز کند، آنچه دریافتن جهت جاها یاد کردیم برای رسیدن بنفع ودوری جستن از زیان سودمند است. و دیگر اینکه اصحاب صناعت تنجیم را برای تقویم ستارگان و تصحیح مراکز اوتاد و جز آن... مفید است. چه صناعت احکام، با آنکه ریشه‌هایش سست و شاخه‌هایش ناتوان و مقیاس‌هایش پریشان است و در آن گمان بریقین می‌چربد، اگر موضوع آن اشکالی باشد که سیارات نسبت به یکدیگر بر حسب خود فلک و بر حسب افقها پیدا می‌کنند، در صورتی نتیجه بخش است که موضوع آن درست باشد و اگر این موضوع درست شد، چون مکانی که برای آن حساب می‌شود مجهول باشد، حکمی که بر طالعهای اجتماع‌ها و استقبال‌ها می‌شود، در حقیقت خلاف واقع است، و اگر این را درست بشماریم، باید بگوییم که در این صورت موضوع صناعت حساب ایشان است نه جاها و سیارات و اشکال آنها، و نتیجه آن می‌شود که صناعت احکام نجوم را با خطوط هشتمین (؟) و اتفاقات و زجر و طیره یکی بدانیم.»
۱/۳۳- بیرونی در آغاز مقاله یازدهم کتاب «قانون مسعودی» اصولا علت پیدایش صناعت احکام نجوم را بیان کرده و نوشته است: ۴۱

«این صناعت (= علم هیئت و نجوم) که همه کتاب «قانون مسعودی» به آن اختصاص دارد، با وجود استغنائی ذاتی از جهت نفاست قدری که دارد، چنان است که دلهایی که کیفیت لذت را جز در مقدمات رنجهای جسمانی و سودمندی را جز در امور دنیایی تصور نمی‌کنند، به آن گرایش و میلی ندارند. و چون به آن گرایشی ندارند از آن روگردان می‌شوند و کسانی را که اهل آنند دشمن

۳۹. «التفهیم فارسی» ص ۵۳۹- عبارت «التفهیم عربی» که شادروان استاد همائی در ذیل همان صفحه آورده در این موضوع رساتر است و کمی اضافه دارد:

«وعند البلوغ الی هذا الموضع من صناعة التنجیم کفایة و من تعذاتها فقط عرض نفسه و صناعة لما بلغته الان می السخریة والاستهزاء و قد حملها المنتسبون الیها فضلا عن المنفعین عنها»

۴۰. «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۲۵۳.
۴۱. «قانون مسعودی» ج ۳، ص ۱۳۵۴، این مطالب را دوست ارجمندم جناب آقای احمد آرام از عربی به فارسی برگردانده است.

می‌دارند. به این جهت است که پیشینیان به پیش‌بینیِ بودنیهای جهان از روی قضایای علم هیئت پرداختند و برای دست یافتن به شناسایی قبلی تأثیرات افلاک راههایی قرار دادند که از روی آنها چیزی شبیه به اقناع و قبول خاطر فراهم می‌شد. و پیش خود چنان تصوّر می‌کردند که احکام نجوم ثمره علم هیئت است. و در این امر یقین داشتند که دیگران در پی ایشان خواهند رفت و می‌پنداشتند که مردمانی که خواستار پیشدانی قضایا هستند، تا هرچه بیشتر سود برند و از زیان بگریزند، به سبب استفاده‌ای که از احکام نجوم می‌برند دیگر در پرداختن به علم نجوم و هیئت ملامتشان نخواهند کرد و بلایی بر سرشان نخواهند آورد.^{۴۲}

د - منتخباتی از نوشته‌های خود استاد

در بند «ب» از همین بخش شمه‌ای از عقاید دانشمندان را درباره شخصیت علمی بیرونی نقل کردم. و بعداً درباره شخصیت ریاضی وی نیز بحث خواهم کرد. اینک برخی از نوشته‌های خود او را که روشنگر عقاید و روشهای علمی او و یا مشتمل بر نکته‌هایی از دوران زندگانی وی است و یا در قسمتهای مختلف کتاب حاضر به آنها ارجاع و استناد شده و از آثار مختلف استاد انتخاب کرده‌ام زینت بخش صفحات این کتاب قرار می‌دهم.

۱/۳۴ - «فانتی لا آبی قبول الحق من ای معدن وجدته»^{۴۳}

یعنی: از پذیرفتن سخن درست از هر کانی که آن را یافته باشم خودداری نمی‌ورزم.^{۴۴}
 ۱/۳۵ - «وانما فعلت ما هو واجب علی کل انسان ان یعمله فی صناعته من تقبّل اجتهاد من تقدمه بالمنة، و تصحیح حلال ان عثر علیه بلا حشمة... و تخلید مایلوخ له فیها تذکره لمن تأخر عنه بالزمان و اتی بعده».^{۴۵}

یعنی: «آنچه را که من انجام داده‌ام چیزی است که بر هر انسانی واجب است که آن را در صناعت خود عمل کند. یعنی کوششهایی را که پیشینیان وی برای پیشرفت آن صناعت بعمل آورده‌اند با سپاسگزاری بپذیرد و اگر متوجه لغزشها و اشتباهاتی از گذشتگان شود آنها را بی پروا تصحیح کند... و آنچه را در آن صناعت بر او مکشوف شود ثبت و ضبط کند تا برای آیندگان جاویدان به‌یادگار بماند.»

۱/۳۶ - «ان البرهان من القضية قائم مقام الروح من الجسد، و بجملة النوعین یحصل العلم

۴۲. و نیز ← ۱/۳۷ و ۱/۴۵ کتاب حاضر. در آنجا نیز گفته‌هایی از استاد نقل شده که بی اعتقادی او را به احکام نجوم می‌رساند.

۴۳. نسخه عکسی کتاب تحدید «به زبان عربی» متعلق به نگارنده ص ۱۰۵.

۴۴. «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۸۵.

۴۵. «قانون مسعودی» صص ۴ و ۵.

بالاستیقان، لاقتران الحجة به والتبيان»^{۴۶}

یعنی: «برهان برای قضیه به منزله جان در بدن است و از بهم پیوستن آنها علم بی گمان حاصل می شود.»

۱/۳۷- «چون در کار مردم این روزگار می نگریم، و می بینیم که همگان در همه جا سیمای نادانی به خود گرفته اند، و با اصحاب فضل دشمنی می ورزند، و هر کس را که به زیور دانش آراسته است می آزارند و گونه گونه ستم و بیداد درباره او می کنند، نزدیک است که آنچه اصحاب صناعت احکام نجوم در دورها و تأثیرات کواکب در سده ها و هزاره های آن گفته اند، و گردش همه کارهای جهان را از روی آن دانسته اند، باور دارم.»

«با آنکه امت بر گمراهی یک سخن نمی شود، چنان است که گویی همگان بر نیک شمردن ناپسندترین خویها و زیانمندترین آنها که آزمندی نه بر راه درست آن است، گرد هم آمده اند. در میان ایشان نمی بینی جز دستی که دراز است و از پستی خودداری نمی ورزد و به آزر و بزرگمنشی باز نمی گردد. در این باره بر مرکب همچشمی سوارند و از هر فرصتی برای بیشتر نمودن این آزمندی بهره می گیرند، و کار بجایی کشیده است که یکباره دانشها را ترک گفته اند و به خدمتگزاران دانش بیزاری می نمایند.»^{۴۷}

۱/۳۸- «پیش از این بر آن بودم که راهی را که بطلمیوس در کتاب جاو غرافیا (جغرافیا)، و جیهانی و دیگران در کتابهای مسالک آورده اند، یکجا بیاورم تا پراکنده ها فراهم و دشواریها آسان شود و این فن به کمال برسد.»

«نخست به تصحیح مسافت ها و نام های جاها و شهرها پرداختم و این کار را با پرسیدن از کسانی که به آنجاها رفته بودند، و محک زدن و درست کردن گفته های آنان با یکدیگر، به انجام رسانیدم. و برای دست یافتن به آنچه می خواستم، از بخشیدن مال و جاه دریغ نورزیدم. نیمکره ای به قطر ده ذراع (!) ساختم تا بر روی آن طولها و عرضها را از روی مسافتات بیرون آورم، چه به سبب تنگی وقت و زیادی کار فرصت آن نبود که این نتایج را از روی محاسبه پیدا کنم. ولی آنچه که به دست می آوردم، از ترس از دست رفتن سلامت و پیش آمدن پیشامدهای ناگوار، ثبت می کردم و به حافظه نمی سپردم. و چون ناگهان بدبختی بر من فرو ریخت، بر آنچه گفتم همان گذشت که بر دیگر کوششها و پژوهشهای من گذشت و چنان از میان رفت که کان لم تقن بالامس [گویی دیروز مسکون نبوده است]. و اگر خدا بازگشت را آسان کند - که بر آن تواناست - در تمام کردن آن درنگ نخواهم کرد.»^{۴۸}

۱/۳۹- «اگر روزگار بدان گونه که به بطلمیوس و دانشوران پیش از وی خوش نشان داد

۴۶. «قانون مسعودی» ص ۵.

۴۷. «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۱.

۴۸. «ترجمه فارسی کتاب تحدید» صص ۱۵ و ۱۶ - و ذیل شماره ۱۱ ص ۳ کتاب حاضر. در آنجا مطلب جالبی از قول بیرونی نوشته ام.

به ما نیز چنین کند، می‌توانیم طولها را از همین راه تصحیح کنیم.»^{۴۹}

۱/۴۰- «می‌بینیم که مردمان برای به دست آوردن روزی تلاش می‌کنند و در این راه از سختی‌ها و چیزهای مایهٔ ترس باک ندارند، در صورتیکه هر کس در این دنیا روزانه بیش از یکی دوبار به خوراک نیاز ندارد، ولی همین کس از چیزی غافل می‌ماند که هر شبانه روز می‌بایستی پنج بار به آن برخیزد و برای خوشبختی در جهان دیگر نباید در کار آن خللی وارد شود، و چنان گمان دارد که با وجود فرصت و توانایی داشتن به شناختن آن [یعنی قبله] نادانی می‌تواند پوزشخواه او شود.»^{۵۰}

۱/۴۱- «...و این مایه سرگردانی است و باید بار دیگر امتحان و رصد شود. و کیست که مرا در این باره یاری کند؟ چه به سبب فراخی آن زمین و پرهیز از ناکاریهای کسانی که در آن پراکنده‌اند، عملی کردن این آزمایش نیازمند اقتدار است. و من برای این کار سرزمین‌های میان دهستان چسبیدهٔ به جرجان و میان جایگاه ترکان غُر را برگزیدم، ولی تقدیر یاری نکرد و همت کسانی که باید در این کار به من مدد رسانند سُستی گرفت.»^{۵۱}

۱/۴۲- «و مثالها برای حسابگر راهنماست و در آزمایش و امتحان به او مدد می‌سازد، چه با چندان پریشانی فراوانی که دارم خود را از سهو کردن در محاسبه ایمن نمی‌بینم؛ و خداست که آدمی را به رفتن راه راست کامیاب می‌کند.»^{۵۲}

۱/۴۳- «و این موافق است با آنچه به رصد یافتیم، با ابوالوفا محمد بن محمد بوزجانی * چنان قرار گذاشته بودم که او در بغداد و من در خوارزم کسوف ماهی را رصد کنیم، و این رصد در سال سیصد و هشتاد و هفت هجری صورت گرفت و از مقایسهٔ میان دو عمل نتیجه چنان شد که اختلاف ساعت میان نصف‌النهارهای این دو شهر نزدیک یک ساعت مستوی است.»^{۵۳}

۱/۴۴- در تاریخ بیهقی^{۵۴} به نقل از کتاب «مسامره فی اخبار خوارزم» تألیف بیرونی مطالب زیر، دربارهٔ مأموریتی که از طرف خوارزمشاه ابوالعباس مأمون بن مأمون به وی داده شده بوده آمده است:

«و نیز جانب امیر محمود تا بدان جایگاه نگاه داشت (مقصود ابوالعباس است) که امیرالمؤمنین القادر بالله رحمه الله علیه وی را خلعت و عهد و لوا و لقب فرستاد عین الدوله وزین‌الملله، به دست حسین سالار حاجیان و خوارزمشاه اندیشید که نباید امیر محمود بیازارد و بحثی نهد و گوید چرا بی وساطت و شفاعت من او خلعت ستاند از خلیفت و این کرامت و مزیت یابد. بهر حال از بهر مجاملت مرا پیشباز رسول فرستاد تا نیمهٔ بیابان و آن کرامت در سرّ از وی فراستدم و به خوارزم

۴۹. «ترجمهٔ فارسی کتاب تحدید» ص ۱۳۰.

۵۰. همان کتاب، ص ۱۸۳.

۵۱. «ترجمهٔ فارسی کتاب تحدید» ص ۱۸۷.

۵۲. همان کتاب، صص ۲۰۷ و ۲۰۸.

۵۳. همان کتاب، ص ۲۱۸.

۵۴. تاریخ بیهقی، صص ۶۶۸ و ۶۶۹.

آوردم و بدو سپردم. و فرمود تا آنها را پنهان کردند. و تا لطف حال بر جای بود آشکارا نکردند. و پس از آن چون آن وقت که می‌بایست که این خاندان بر افتد آشکار کردند تا بود و رفت آنچه رفت.»
 ۱/۴۵- بیرونی در سال ۴۲۷ ه.ق به خواهش یکی از دوستانش فهرست کتابهای تألیف محمد بن زکریای رازی و در دنبال آن فهرست آثار خود را که تا آن تاریخ نوشته بوده ثبت کرده است. در ضمن این فهرست مطالب زیر را درباره ناخوشی و رؤیای خود نوشته است:^{۵۵}
 «هنگامی که رنجها و خواریه‌ها به کسی روی آور می‌شوند، اگر چه آن کس از داناترین و زیرکترین مردمان باشد، باز به جستجوی شادی بر می‌خیزد و از نیکی‌ها به نشاط در می‌آید و از آنچه از دیدن آنها بیزار است دلتنگ می‌گردد و آنها را به فال بد می‌گیرد و از آنچه در خواب خوش بیند مسرور می‌گردد، به فال و احکام نجوم متمایل می‌گردد. من نیز به مقتضای طبع بشری خود چنین بودم و در یکی از چنین اوقات از منجمان خواستم که به عواقب مولد من نظر کنند. آنان ابتدا به استخراج طول عمر من پرداختند و بین آنان در این امر اختلاف شدید بود. بعضی از آنان عمر مرا شانزده سال و بعضی دیگر چهل و اندی سال دانستند و البته اینها راست نبود زیرا سن من در آن هنگام از پنجاه سال متجاوز بود. اما بعضی دیگر از منجمان عمر مرا کمی بیش از شصت سال دانستند.»

«هنگامی که به این سن رسیدم امراض گوناگون به من روی آوردند که بعضی از آنها در آن واحد مرا رنج می‌دادند و بعضی دیگر گاه به گاه به سراغم می‌آمدند. تا آنجا که استخوانهایم کوفتگی گرفت و بدنم ضعیف شد و از حرکت باز ماند و حواسم پریشان گردید. و پس از آنکه پیری قوایم را فرسوده بود بهبودی یافتم.»

«در شب تحویل عمرم به سن شصت و یک سالگی در خواب چنان دیدم که گویی مترصد هلال ماه نو بودم و در جایی که باید ماه نو ظاهر شود آن را جستجو می‌کردم و در محل فرود آمدن آن تأمل می‌کردم و از دیدن آن عاجز بودم. در آن هنگام کسی به من گفت «ماه نو را رها کن. تو صد و هفتاد بار دیگر آن را خواهی دید» (خله فانک ابنه مائة و سبعین). سپس بیدار شدم و آن چهارده سال و دو ماه قمری^{۵۶} را به سال شمسی تحویل کردم و از آن پنج ماه و نیم کاستم و به سالهای بزرگ عطار د رسیدم^{۵۷} که گفته بودند در وقت ولادت من مستولی بوده است. با این حال به آنچه گفتم دل‌بستگی ندارم»

۵۵. ترجمه و تلخیص از متن عربی فهرست مذکور که زاخاو در مقدمه «آثار الباقیه» (صفحه XXXXVI=۴۶) آورده است: «والذی ذکرته من تأویل رؤیای، فاعلم انّ للانسان فی محنة و نكابة و ان كان اعقل الناس و اکسیهم لایزال»

۵۶. صد و هفتاد ماه می‌شود چهارده سال و دو ماه قمری (۱۷۰=۱۴×۱۲+۲).

۵۷. درباره سالهای کواکب ← «الفهم فارسی» ص ۳۶۵ و درباره سالهای بزرگ عطار د ← همان کتاب، ص ۳۹۳.

بخش دوم

شخصیت ریاضی بیرونی

مشمول بر: بیرونی ریاضیدان - یادآوری بعضی از کارهای ریاضی وی - بیرونی و ریاضیات یونانی و هندی - بیرونی و تاریخ ریاضیات

در بند «ب» از بخش اول کتاب حاضر عقیده عده‌ای از دانشمندان را درباره شخصیت علمی بیرونی نقل کردم. اینک به ذکر چند نکته درباره شخصیت ریاضی این نابغه بزرگ می‌پردازم.

الف - بیرونی ریاضیدان

اگر چه بیرونی در اکثر رشته‌های علوم زمان خود به پژوهش پرداخته، اما اصولاً به ریاضیات دلبستگی داشته و بیشتر وقت و همت خود را صرف تحقیقات ریاضی نموده است. او خود نوشته است^۱ که به علم ریاضی تعلق داشته و به آن دلبسته و منسوب بوده و از وقتی که خود را شناخته از آن منصرف نشده است.

هر چند بیرونی در شعبه‌های مختلف علم به تصنیف و تألیف پرداخته ولی اصالت فکر و نبوغ وی در آثار ریاضی و نجومی^۲ که از وی باقی مانده بهتر ظاهر و هویداست. دلبستگی وی به

۱. «قانون مسعودی» صص ۳ و ۴: «ثم كنت متعلقاً بطرف من اطراف العلم الرياضي، متمسكاً به منتسباً اليه، لم تعد همتي مذكنت».

۲. مقصود علم نجوم تعلیمی (Astronomy) است و نه فن احکام نجوم (Astrology).

ریاضیات از این رو معلوم می‌شود که هر جا در تصنیفات خود فرصت مناسبی به دست آورده از پیش کشیدن مطالب ریاضی و بحث در آنها کوتاهی نکرده است.^۳

بیرونی ریاضیدانی است بصیر و نکته‌سنج و برکار که بیشتر آثارش نتیجه پژوهشها و کنجکاویاها و رصدها و محاسبات خود اوست. نمونه‌ای از نکته‌سنجیها و ریزه‌کاریهای او را در مسائل ریاضی می‌توان از مطالعه مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» دریافت.^۴ و مثلاً سرتاسر کتاب «تحدید نهایات الاماکن»^۵ وی مشتمل بر تحقیقات و رصدها و محاسباتی است که شخصاً درباره جغرافیای ریاضی انجام داده و نتایج آنها را با آثار دیگران مقایسه کرده است.

برای کسی که بخواهد به عظمت مقام بیرونی در ریاضیات پی ببرد بهترین راه مطالعه دقیق آثار موجود اوست که با شمه‌ای از آنها در بخشهای آینده کتاب حاضر آشنا خواهید شد. و هر چه دانشمندان بیشتر در آثار او کاوش می‌کنند بهتر به مقام رفیع و مرتبه بلند وی پی می‌برند. برای آنکه پشت‌کار خارق‌العاده بیرونی در تحقیقات ریاضی تا اندازه‌ای معلوم شود می‌توان از آمار و ارقام کمک گرفت.

در بخش سوم کتاب حاضر خواهید دید که از ۱۵۳ کتاب و رساله و مقاله که بیرونی به رشته تحریر در آورده، ۱۱۵ فقره درباره ریاضیات و نجوم و احکام نجوم بوده است. از همه این ۱۵۳ کتاب و رساله فقط ۳۵ اثر باقی مانده که ۲۲ جلد از آنها درباره ریاضیات خالص و عملی است. از طرف دیگر در کتاب حاضر فقط درباره قسمتهای مختصری از پنج کتاب بیرونی گفتگو به میان آمده است که مثلاً یکی از آنها کتاب «قانون مسعودی» است. حال با در نظر گرفتن اینکه کتاب «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد دکن، دارای ۱۴۸۷ صفحه است، و در بخش هشتم کتاب حاضر فقط در حدود ۱۰۰ صفحه از آن کتاب مورد بحث قرار گرفته است، معلوم می‌شود که برای بررسی همه آثار ریاضی و نجومی بیرونی چند جلد کتاب، نظیر کتاب حاضر باید نوشت. با این حال می‌توان با مراجعه به آنچه در بخشهای مختلف این کتاب مورد بحث قرار گرفته است تا اندازه‌ای به اهمیت آثار ریاضی وی پی برد.

ب - یادآوری برخی از کارهای ریاضی بیرونی

اینک به ذکر چند نمونه از کارهای ریاضی بیرونی می‌پردازیم:

۳. مثلاً در کتاب «آثارالباقیه» که موضوعش گاهشماری است وقتی خواسته است چگونگی ثبت ارقام را در طبلسان مضاعف شرح دهد به محاسبه مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی پرداخته است (← بند «ب» از بخش پنجم کتاب حاضر).

۴. ← بخش هشتم کتاب حاضر.

۵. ← بخش سوم کتاب حاضر.

یک) محاسبهٔ مجموع $\sum_{K=0}^{63} 2^K$. این مجموع را در کتاب «آثارالباقیه» به کمک دو قضیه حساب کرده و آن را مساوی با:

$$\sum_{K=0}^{63} 2^K = \sum_{K=1}^{64} 2^{K-1} = 18446744073709551616$$

به دست آورده است.^۶

دو) اختراع چند نوع تصویر جسم نما. در پایان کتاب «آثارالباقیه» چند روش بدیع برای تصویر نقاط سطح کره بر یک صفحه اختراع کرده و مزیت آنها را بر روشهای دیگر شرح داده است.^۷ سه) اثبات دستور محاسبهٔ وتر $\alpha/2^{n+1}$. در مقالهٔ سوم کتاب «قانون مسعودی» پس از بیان دستور محاسبهٔ وتر یک چهارم کمائی که وتر آن معلوم است، آن دستور را تعمیم داده و صحت دستور زیر را ثابت کرده است:

$$\frac{\alpha}{2^{n+1}} = \sqrt{r \times \frac{\left(\frac{\alpha}{2^n} \text{ وتر}\right) \times \left(\frac{\alpha}{2^{n-1}} \text{ سهم}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2^n} \text{ وتر}\right) + \left(\frac{\alpha}{2^{n-1}} \text{ نصف}\right)}}$$

در این دستور α اندازهٔ یک کمان و n عددی است طبیعی و r شعاع دایره است.^۸ چهار) محاسبهٔ تقریبی C_1 . اندازهٔ تقریبی ضلع نه ضلعی منتظم محاطی را با روشهای مختلف و از جمله به وسیلهٔ حل معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3 = x + 1$ تا خامسه یعنی با پنج رقم کسری شصتگانی حساب کرده است.^۹

پنج) بررسی مسئلهٔ تثلیث زاویه. بیرونی این مسئله را به بیش از دوازده مسئلهٔ هندسی دیگر معادل با آنها تبدیل کرده است.^{۱۰}

شش) محاسبهٔ تقریبی وتر یک درجه. این مسئلهٔ مهم را بیرونی با دو روش حل کرده و اندازهٔ وتر یک درجه را تا خامسه، یعنی با پنج رقم کسری شصتگانی، حساب کرده و نتیجهٔ محاسبات خود را با محاسبات بطلمیوس در این باره مقایسه کرده است.^{۱۱}

هفت) محاسبهٔ تقریبی نسبت $\frac{1}{H}$. مقدار تقریبی نسبت قطر دایره به محیط آن را بیرونی با روشی بدیع به دست آورده است.^{۱۲}

۶. ← بند «ج» از بخش پنجم کتاب حاضر.

۷. ← بند «د» از بخش پنجم کتاب حاضر.

۸. ← مسئلهٔ چهارم از بخش هشتم کتاب حاضر شمارهٔ ۸/۳۷.

۹. ← باب سوم از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» در بخش هشتم کتاب حاضر شمارهٔ ۸/۴۱.

۱۰. ← قسمت اول باب چهارم از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» در بخش هشتم کتاب حاضر.

۱۱. ← بند «ط» از بخش هشتم کتاب حاضر شمارهٔ ۸/۶۹.

۱۲. ← بند «ی» از بخش هشتم کتاب حاضر.

هشت) تشکیل جدول جیبها به فرض آنکه شعاع دایره واحد باشد. بیرونی همچنانکه امروزه معمول است شعاع دایره را مساوی با واحد گرفته و جیبها را ۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه با چهار رقم کسری شصتگانی حساب کرده است.^{۱۳}

نه) تدوین مثلثات کروی به صورت مستقل. علم مثلثات کروی نخستین بار توسط بیرونی در کتاب «مقالید علم الهیة» به صورت مستقل تدوین و تنظیم شد. وی قضایای معروف به «شکل مُغنی» و «شکل ظلی» را که معاصران ایرانی وی اختراع کرده بودند با شرح تاریخیچه و مورد استعمال آنها در علم هیئت، جمع آورده و به کار بردن آن دو قضیه را به جای «شکل قطاع» به ریاضیدانان توصیه کرده است. و در آن کتاب استدلال ساده و زیبایی برای قضیه زیر در مثلثات مسطحه از خود آورده است:^{۱۴}

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ج - بیرونی و ریاضیات یونانی و هندی

بیرونی نه تنها همه ریاضیات نظری و عملی یونانی را که از راه ترجمه به دست ریاضیدانان دوره اسلامی رسیده بود به حد کمال می دانسته بلکه مطالب آنها را با نکته سنجی خاص خود مورد دقت و موشکافی قرار داده است. در آنچه از آثار وی باقی مانده است بارها به اسامی دانشمندان معروف یونانی برمی خوریم.

مانند:

اِرخس (Hipparchus). مثلاً در «ترجمه فارسی کتاب تحدید» صفحات ۶۳ و ۶۵ و ۲۶۱.

اِراطِستَینِس (Eratosthenes = اراتستن). مثلاً در «ترجمه فارسی کتاب تحدید» صفحات ۶۳ و ۶۵.

اِریسِطَرخس (Aristarchus). مثلاً در «قانون مسعودی» صفحات ۸۹ و ۶۴۱ و ۶۴۲.

اِرشِمیدِس (Archimedes). مثلاً در «قانون مسعودی» صفحات ۲۷۳ و ۶۱۷ و ۹۸۸ و ۱۳۰۲.

اِقلیدس (Euclides). مثلاً در «قانون مسعودی» صفحات ۲۷۵ و ۳۶۳.

بطلِمیوس (Ptolemaeus یا Ptolemy). مثلاً ۱۷۲ بار در «قانون

مسعودی» و ۱۷ بار در کتاب «التفهیم» و ۱۶ بار در کتاب «تحدید نهایات الاماکن».^{۱۵}

۱۳. ← بند «یا» از بخش هشتم کتاب حاضر.

۱۴. ← بخش هفتم کتاب حاضر.

۱۵. ← فهرست اعلام کتابهای مذکور.

تئون اسکندرانی (Theon). مثلاً در کتاب «قانون مسعودی» صفحات ۸۷ و ۱۲۹ و ۱۳۳ و در «ترجمه فارسی کتاب تحدید» صفحه ۲۵۶.
مانالائوس (Menelaus) یا منلائوس. مثلاً در «مقالید علم الهیة» صفحه ۱ و «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد صفحه ۴۹.

گذشته از این بیرونی بعضی از اسامی کتابهای ریاضی یونانی را در آثار خود آورده که در هیچ یک از تاریخهای ریاضی ذکری از آنها نشده است. مثلاً در کتاب «استخراج الاوتار»^{۱۶} از «کتاب سارینوس الثیائی فی الاصول الهندسیة» استدلالی برای یک قضیه هندسی نقل کرده و نیز در کتاب «قانون مسعودی»^{۱۷} استدلالی از همین شخص ذکر کرده است.
مقصود از این سارینوس ثیائی^{۱۸} به احتمال قوی همان سارینوس آنتیسایی* است که به قول سارتن^{۱۹} در قرن چهارم میلادی می زیسته^{۲۰} و مورخان ریاضی دو کتاب از وی را درباره «مقطع استوانه» و «مقطع مخروط» ذکر کرده اند، ولی هیچ یک از آنان از «کتاب فی الاصول الهندسیه» وی اطلاعی به دست نداده اند. همچنین بیرونی در «کتاب استخراج الاوتار»^{۲۱} از «کتاب الدوائر الارشمیدس» گفتگو به میان آورده است. نام کامل این کتاب «کتاب الدوائر المتماسه» است که ابن ندیم در کتاب «الفهرست» در ذیل نام ارشمیدس ثبت کرده است. معلوم می شود که این کتاب تا زمان بیرونی وجود داشته است ولی بعداً مفقود گردیده. مورخان ریاضی نوشته اند^{۲۲} که نام کتاب فوق فقط در آثار ریاضیدانان دوره اسلامی ذکر شده است و اثری از آن در دست نیست.

در زمانی که بیرونی در هند اقامت داشته آثار مهم ریاضی و نجومی هندیان را مطالعه و بررسی کرده و عده ای از آنها را به عربی نقل نموده^{۲۳} و درباره عده ای دیگر از آنها در کتابهای خود به بحث و نقادی پرداخته^{۲۴} و ضمناً بعضی از آثار مهم ریاضی یونانی را به لغت سانسکریت

۱۶. «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۷.

۱۷. «قانون مسعودی» صص ۳۰۰ و ۱۲۸۳.

۱۸. ثیبا (= تبس-طیبه) ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۲۶۸.

* Serenus of Antissa

۱۹. ← «سارتن I» ج ۱، ص ۳۵۳.

۲۰. درباره احوال و آثار «سارینوس» ← : «کانتور Vor» ج ۱، ص ۴۸۹ تا ۴۹۱ (بهترین مرجع) - «مونوکلا H» ج ۱، صص ۳۱۴ و ۳۱۵ - «هیث H» ج ۲، ص ۵۱۹ تا ۵۲۶ - «کازری H» صص ۴۵ و ۴۶.

۲۱. «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۷.

۲۲. ← «هیث A» ص ۳۸ مقدمه.

۲۳. مانند «غرة الزیجات» و «فی سنکلت الاعداد» و «ترجمه کتاب الموالید الصغیر لیراهمیه» ← ۳/۲۹ و ۳/۳۸ و ۳/۱۲۰ کتاب حاضر.

۲۴. مانند «کیفیه رسوم الهند فی تعلم الحساب» ← ۳/۳۶ کتاب حاضر. و «فی ان رأی العرب فی مراتب العدد اصوب من رأی الهند فیها» ← ۳/۳۷.

برگردانده است،^{۲۵} و ریاضیات یونانی را به هندیان آموخته و در بعضی از رسالات خود مشکلات منجمان هندی را حل کرده است.^{۲۶}

اما کار بیرونی در این زمینه به ترجمه کتابهای ریاضی از یک زبان به زبان دیگر پایان نمی‌پذیرد. وی در نتیجه تبحری که در ریاضیات و تسلطی که به زبانهای عربی و سانسکریت داشته توانسته است آثار ریاضی یونانی و هندی را با یکدیگر مقایسه کند و کوشیده است که ریاضیات عملی را با ریاضیات استدلالی یونانی درهم آمیزد. کتاب «راشیکاتالهند» وی یکی از نمونه‌های بارز این کوشش است که آن را در بخش چهارم کتاب حاضر مورد بررسی قرار داده‌ام.

* * *

برای آنکه مطلب فوق بهتر روشن شود لازم است که تباین بارز و آشکاری را که بین ریاضیات قدیم یونانی و ریاضیات قدیم هندی مشهود است شرح دهیم:

ریاضیدانان هندی بیشتر ریاضیات را برای مورد استعمال آن در نجوم می‌خواستند و بیشتر آنان منجمانی بودند که ریاضیات را به خدمت نجوم می‌گرفتند. اما نزد یونانیان ریاضیات وجود مستقلی داشت و آنان ریاضیات را برای خود آن می‌خواستند و نه به عنوان ابزاری برای علم نجوم. در هند فقط پیشوایان فرقه‌های مذهبی بودند که به ریاضیات می‌پرداختند و حال آنکه در یونان هر کس علاقه‌مند به تحصیل ریاضیات بود می‌توانست به آن دسترسی پیدا کند. علاوه بر این هندیان محاسبان خوبی بودند که در هندسه چندان دست نداشتند و حال آنکه یونانیان در هندسه نبوغ درخشانی از خود نشان می‌دادند و کمتر به محاسبات عملی توجه می‌کردند. حتی مثلثات که بخش جالب توجهی از ریاضیات هندی است بر اساس محاسبه پایه‌ریزی شده بود. در صورتی که مبنای مثلثات یونانی بر هندسه قرار داشت.

هندیان کتابهای خود را بیشتر به شعر می‌نوشتند و مفاهیم ریاضی را با عباراتی مبهم و اسرارآمیز بیان می‌کردند. و حال آنکه یونانیان برای بیان روشن و منطقی مفاهیم ریاضی بر یکدیگر سبقت می‌گرفتند.

ریاضیات هندی بیشتر جنبه تجربی داشت و بندرت در آن به استدلال و استنتاج توجه می‌شد. در صورتی که یکی از مشخصات ریاضیات یونانی پافشاری در بیان مطالب با استدلالهای دقیق و منطقی بود.

ریاضیات هندی یکدست نیست و در آن مفاهیم مهم و مطالب پیش پا افتاده دوش به دوش یکدیگر دیده می‌شود. اما گویی یونانیان با غریزه خاصی مطالب مهم و اساسی ریاضی را از سایر

۲۵. مانند «ترجمه اصول اقلیدس». ۳/۴۳. و ترجمه کتاب «اصطrolاب». ۳/۱۰۵ کتاب حاضر.

۲۶. مانند «الجوابات عن المسائل الواردة من منجمی الهند» ۳/۶۶ و ۳/۶۷ کتاب حاضر.

مطالب جدا می‌کردند و بیشتر به قسمتهای اساسی آن می‌پرداختند.^{۲۷}

بیرونی کوشیده است که هم ریاضیات یونانی و هم ریاضیات هندی را که تا زمان وی به‌وسیله ترجمه کتابها و رسالات به‌دست ریاضیدانان دوره اسلامی رسیده بود بررسی کند. وی از ریاضیات هندی آنچه را جالب توجه و بدیع دیده، مانند شمار اعشاری^{۲۸} و به‌کار بردن جیب^{۲۹} به‌جای وتر و غیره، در آثار خود مورد استفاده قرار داده و آنچه را نپسندیده مورد انتقاد قرار داده است.^{۳۰} گذشته از این تا آنجا که میسر بوده است این دو سبک را با هم مقایسه کرده و یا با هم در آمیخته است. مثلاً در بخش چهارم کتاب حاضر خواهیم دید که بیرونی چگونه مسئله نسبت و تناسب را هم از جنبه ریاضیات یونانی و هم از حیث ریاضیات هندی مورد بحث قرار داده و آنها را با هم مقایسه کرده است.

د - بیرونی و تاریخ ریاضیات

بیرونی تنها به مطالعه و بررسی کتابهای ریاضی و نجومی پیشینیان و معاصران خود اکتفا نکرده بلکه در یکایک آنها غور و تفحص کرده و هر جا مطلب بدیع و جالب توجهی دیده آن را در آثار خود با ذکر نام مبتکر آن ستوده و هر جا لغزش یا خطایی دیده با کمال صراحت آن را متذکر شده و به اصلاح آن کوشیده است.

مثلاً درباره «اسطرلاب زورقی» که سجزی* (ابوسعید) اختراع کرده بوده در کتاب «استیعاب الوجوه الممكنة فی صنعة الاسطرلاب» نوشته است^{۳۱}: «نوعی از اسطرلاب ساده و یگانه از ابوسعید سجزی دیدم که مرکب از شمالی و جنوبی نبود و آن را «اسطرلاب زورقی» نامیده بود. و او را به سبب این اختراع بسیار ستودم. چه اختراع او متکی بر اصل مستقلى بود که مبنای آن عقیده بعضی از کسانی است که معتقدند که حرکت کلی مرئی ناشی از حرکت زمین است و نه حرکت کره سماوی».

و نیز وقتی «سُدس فخری» را که از اختراعات خجندی* (ابومحمود) است پسندیده درباره

۲۷. ← «ایوز H» ص ۱۹۱.

۲۸. مثلاً کتاب «تذکره فی الحساب والعدّ بارقام السند والهند» را درباره شمار اعشاری نوشته بوده است ← ۳/۳۴ کتاب حاضر.

۲۹. ← ۸/۱۰ کتاب حاضر.

۳۰. مثلاً کتاب «فی ان رأی العرب فی مراتب العدد اصوب من رأی الهند فیها» در این باره بوده است.

۳۱. «وقد رأیت لابی سعید السجزی اسطرلاباً من نوع واحد بسیط غیر مرکب من شمالی و جنوبی سماة الزورقی، فاستحسنته جداً لاختراعه اياه على اصل قائم بذاته مستخرجه مما یعتقد بعض الناس ان الحركة الکرة المریة الشرقیة للارض دون الفلک».

آن رساله‌ای تألیف کرده^{۳۲} و در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» آن را ستوده و نوشته است^{۳۳}: «این سدس فخری، از لحاظ بزرگی و درستی، بر هر چه پیش و پس از آن به‌کار رفته برتری دارد». بسیاری از تألیفات بیرونی در نقادی و تصحیح و تکمیل آثار دیگران است. مانند رساله‌هایی که نام آنها را در شماره‌های ۳/۴۹ و ۳/۵۰ و ۳/۵۱ و ۳/۵۲ و ۳/۵۴ و ۳/۶۰ و ۳/۷۱ و ۳/۷۲ کتاب حاضر ذکر کرده‌ام.

به این ترتیب بیرونی نام عده‌ای کثیر از ریاضیدانان و منجمان معاصر خود یا کسانی را که در قرنهای پیش از زمان وی می‌زیسته‌اند و همچنین نام تألیفات آنان را در آثار خود ثبت کرده و از این راه خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات و نجوم انجام داده است. در نوشته‌های وی به نام عده‌ای از دانشمندان و تألیفات آنان بر می‌خوریم که اگر او ذکری از آنان به میان نیاورده بود نامی از آنان باقی نمانده بود و به قسمتی از تحقیقات آنان که اصل آنها از بین رفته است از روی کتابهای بیرونی پی می‌بریم.

مثلاً در کتاب «استخراج الاوتار»^{۳۴} بیرونی برای یک قضیه ساده هندسی بیست و یک برهان از خود و از ریاضیدانان دیگر ذکر کرده که نام بعضی از آنان و یا نام تألیفات آنان در هیچ کتاب دیگری، غیر از آثار بیرونی، نیامده است. مانند آذرخور پسر استاد جُشنَس* و «کتاب فی الاصول الهندسیه» از سارینوس ثیبائی که قبلاً به آن اشاره کردم و غیره.

گذشته از اینها بیرونی در بسیاری از تألیفات خود در ضمن بحث از موضوعات ریاضی و نجومی تاریخچه آنها را ثبت کرده و مانند یک مورخ ریاضی امروزی سهمی را که هر یک از دانشمندان در کشف یا اختراع تازه‌ای داشته‌اند معین کرده است. مقدمه کتاب «مقالید علم الهیته» وی نمونه بارزی از توجهی است که او به تاریخ علوم داشته است.^{۳۵}

بیرونی در قضاوت درباره آثار دیگران و ثبت تاریخچه آنها بسیار جدّی بوده و از اینکه کسی کار دیگران را به خود نسبت دهد سخت بر می‌آشفته و می‌کوشیده است که تا سرحد امکان حقیقت را روشن کند. با این حال هرگز در این امر جانب انصاف را فرو نگذاشته و تعصب به خرج نداده است.

مثلاً در بخش هفتم کتاب حاضر خواهیم دید که چگونه درباره ابداع «شکل مُغنی» که بوزجانی* (ابوالوفا) و خجندی* (ابومحمود) مدّعی کشف آن بوده‌اند، و او حق تقدّم را در اختراع آن شکل از ابونصر عراق* می‌دانسته، بین آنها قضاوت کرده و حق هر کس را در ابداع این شکل معین کرده است. اما در عین حال جانب انصاف را از دست نداده و با وجود آنکه ابوالوفا را به علت

۳۲. ← ۳/۲۷ کتاب حاضر.

۳۳. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۸۱.

۳۴. ← بخش ششم کتاب حاضر.

۳۵. ← بند «ب» از بخش هفتم کتاب حاضر.

آنکه آن اختراع را به خود نسبت داده سرزنش کرده^{۳۶} باز در مورد «شکل ظلی» نوشته است^{۳۷} که این قضیه بسیار مفید، بلامنازع، از مخترعات بوزجانی است.

۵- بیرونی و فن تألیف و تصنیف

بیرونی در تصنیفات و تألیفات خود فضل فروشی نکرده و در حالی که بر یک مطلب کلی و همه فروع و نکته‌های باریک آن وقوف کامل داشته وقتی خواسته است از آن مطلب در موضعی از کتابهای خود گفتگو کند به همان اندازه که محل اقتضا داشته اکتفا کرده و احتیاجی به آنکه معلومات جامع خود را به رخ خواننده بکشد نمی‌دیده است.

مثلاً در کتاب «مقالید علم الهیة» هنگامی که خواسته است حق تقدم استاد خود ابونصر عراق* را در اختراع «شکل مغنی» به ثبوت برساند، به مناسبت مقام، استدلالهای مختلفی از ریاضیدانان معاصر خود برای آن قضیه ذکر کرده و خود نیز آن را در حالت کلی ثابت کرده است. اما وقتی در مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» خواسته است خلاصه علم مثلثات را که مورد احتیاج منجمان است به زبان ساده شرح دهد، چون بنای کار او در آن کتاب به اختصار بوده، استدلالی بسیار ساده از خود، هم در مورد مثلث کروی و هم در مورد مثلث مسطح، بیان کرده و دیگر به تفصیل نپرداخته است.

در تصنیفاتی که در ریاضیات عالی دارد به شرح جزئیات توجه نکرده و خواننده را به تفکر و پژوهش وا داشته است، تا آنجا که خواننده برای درک برخی از مطالب ناچار است مدتی به محاسبه و تفکر بپردازد. مثلاً وقتی در «قانون مسعودی» خواسته است ضلع نه ضلعی منتظم محاطی را حساب کند^{۳۸} و احتیاج به حل معادله

$$1 + 3x = x^2$$

پیدا کرده روش حل این معادله را ننوشت (وایکاش می‌نوشت!) و فقط به ذکر جواب آن اکتفا کرده است. اما، در کتابهایی که برای مبتدیان نوشته از آوردن تعاریف کوتاه و دقیق به زبان ساده دریغ نورزیده است. گویی اصرار داشته که عبارات او ساده و درگوش خواننده خوش آهنگ باشد. مثلاً در «التفهیم» می‌نویسد:

عدد چیست؟ جمله‌ای است از یکها گرد آمده...^{۳۹}
عدد اول کدام است؟ این آن است که او را جز یکی نشمرد...^{۴۰}

۳۶. ← ۷/۲۹ کتاب حاضر.

۳۷. ← ۷/۱۰۴ کتاب حاضر.

۳۸. ← باب سوم از بخش هشتم کتاب حاضر.

۳۹. ← «عدد» در بخش نهم کتاب حاضر.

۴۰. ← «عدد اول» در بخش نهم کتاب حاضر.

فلک چیست؟ جسمی است چون گوی گردنده اندر جای خویش...^{۴۱}
 با این حال تا آنجا که میسر بوده در دقت تعاریف کوشیده است. مثلاً در کتاب «التفهیم» در
 تعریف مثلثهای متشابه، تساوی زوایای دو مثلث را برای تشابه آنها کافی دانسته و تناسب اضلاع
 آنها را به صورت حکمی اثبات پذیر بیان کرده است.^{۴۲}
 همچنین در کتاب «استخراج الاوتار» که آن را برای تمرین و ممارست مبتدیان تألیف کرده دو
 قضیه ساده را از یونانیان گرفته و از آنها دو قضیه دیگر استنتاج کرده و استدلالهای متعدد و گوناگون
 از ریاضیدانان دیگر با ذکر اسامی آنان آورده و مورد استعمال آن قضایا را در حل مسائل متنوع
 از جبر و مثلثات و هیئت و نجوم به کار برده تا ریزه کاریهای هندسه و روش حل و بحث مسائل
 ریاضی را به خواننده بیاموزد.^{۴۳}

۴۱. ← «التفهیم فارسی» ص ۵۶.

۴۲. ← «مثلثهای متشابه» در بخش نهم کتاب حاضر.

۴۳. ← بخش ششم کتاب حاضر.

بخش سوم

فهرست آثار ریاضی و نجومی بیرونی

مشمول بر: آماری از کلیه آثار بیرونی - مشخصات آثار ریاضی و نجومی موجود بیرونی - فهرست آثار ریاضی و نجومی مفقود بیرونی - فهرست آثاری که «ابونصر عراق»، استاد بیرونی، به نام وی نوشته است.

الف - آماری از کلیه آثار بیرونی

۳/۱- بیرونی در سال ۴۲۷ ه.ق. بنا به خواهش شخصی، فهرستی از آثار محمد بن زکریای رازی تهیه کرد و در دنبال آن فهرست، اسامی و عنوانهای ۱۱۳ جلد کتاب یا رساله را که خود تا آن زمان نوشته بود^۱ و همچنین اسامی ۲۵ جلد کتاب یا رساله را که دیگران به نام وی نوشته بودند ثبت کرد.^۲ البته این ۱۱۳ کتاب یا رساله که بیرونی اسامی آنها را آورده شامل همه آثار او نیست زیرا او چندین سال پس از آن تاریخ زنده بوده و به طور مداوم به تحقیق و تصنیف و تألیف می پرداخته است.

۳/۲- در سال ۱۹۵۵ میلادی بوالو* مقاله جامعی به زبان فرانسوی درباره کتاب شناسی آثار

۱. فهرست این ۱۱۳ جلد کتاب یا رساله را در «لغت نامه» حرف الف، صص ۴۶۷ تا ۴۶۹ خواهید یافت.
۲. دوازده جلد آن را ابونصر عراق* و دوازده جلد دیگر را ابوسهل عیسی بن یحیی مسیحی جرجانی و یک جلد دیگر را ابوعلی حسن بن علی جیلی به نام بیرونی نوشته اند (← بند د از همین بخش).

بیرونی نوشت^۳ و در آن تحقیقاتی را که پیش از وی سوتر* و ویدمان** راجع به این موضوع انجام داده بودند^۴ تکمیل کرد و ۱۸۰ فقره کتاب و رساله و مقاله را به نام بیرونی ثبت کرد و همه اطلاعاتی را که درباره هر یک از آنها به دست آورده بود نوشت. این تحقیق بوالو بسیار ارزنده و مفید و قابل تمجید است و تا آنجا که اطلاع دارم کاملترین کاری است که تاکنون در این زمینه انجام یافته است. اما بوالو اسامی ۲۵ فقره کتاب یا رساله را که دیگران به نام بیرونی نوشته اند در جزو آثار او ثبت کرده و همه را در یک ردیف آورده است. علت این امر این بوده است که بیرونی خود در فهرست مذکور پیش از ذکر اسامی و عنوانهای کتابهایی که دیگران به نام وی نوشته اند عبارتی آورده و آن این است: «و ما عمله غیرى باسمى فهو بمنزلة الرئایب فى الحُجور و القلائد على الثُحور لا امیز بینهما و بین الابناء»^۵.

یعنی: «آنچه را دیگران به نام من نوشته اند به منزله نادرتهای من هستند که در آغوش من پرورش یافته اند و همچون گردن‌بندهایی هستند که در پیش سینه من جا دارند و من بین آنها و آثار خود فرقی نمی‌گذارم».

با این حال البته نمی‌توان آثار دیگران را از بیرونی دانست. گذشته از این ۲۵ جلد کتاب، باز بوالو چهار کتاب را که از دیگران است نیز به نام بیرونی ثبت کرده است (شماره‌های ۱۲۶ و ۱۴۰ و ۱۷۸ و ۱۷۹ فهرست وی) و نام کتاب «قانون مسعودی» را یک بار هم به عنوان «زیج مسعودی» به حساب آورده است (شماره ۱۴۱ فهرست وی). بنابراین روی هم رفته باید اسامی ۳۰ جلد کتاب را از فهرست بوالو حذف کرد و به این ترتیب از ۱۸۰ جلد کتابی که به بیرونی نسبت داده است در واقع ۱۵۰ جلد از خود بیرونی است.

۳/۳- از طرف دیگر دو جلد کتاب از آثار بیرونی در ایران و یک جلد دیگر در احمدآباد هند^۶ به دست آمده است که بوالو از آنها اطلاع نداشته است.

بنابراین تاکنون اسامی ۱۵۳ اثر از بیرونی شناخته شده است که یا بیرونی خود در فهرست آثارش نام آنها را ثبت کرده و یا در آثار خود از آنها نام برده و به آنها اشاره کرده و یا اینکه نسخه‌های خطی آنها به دست آمده است.

از این ۱۵۳ فقره کتاب یا رساله که به احتمال قوی از بیرونی است تا آنجا که اطلاع داریم فقط ۳۵ جلد از دستبرد حوادث محفوظ مانده است و بوالو فقط از وجود ۲۹ جلد از آنها مطلع بوده است.

۳. عنوان این مقاله این است:

“L’oeuvre d’al-Biruni, Essai bibliographique”

← «بوالو» در فهرست منابع کتاب حاضر.

* H. Suter. ** E. Wiedemann

۴. ← «بوالو» ص ۱۶۷، یادداشت شماره ۲۷.

۵. ← «بوالو» ص ۱۶۶.

۶. ← ۳/۲۱ و ۳/۲۸ و ۳/۲۹ کتاب حاضر.

۳/۴- شش جلد کتاب دیگر که بوآلّو از وجود آنها مطلع نبوده است به شرح زیر است:

۱- «مقالید علم الهیة» که نسخه خطی آن در ایران موجود است (← بخش هفتم کتاب حاضر).

۲- «رسالة فی معرفة سمت القبله» (← ۳/۲۱).

۳- «رسالة فی الاضطراب» (← ۳/۲۸).

۴- «مقاله فی التحلیل و التقطیع للتعدیل» (← ۳/۳۰).

۵- «غرة الزیجات» (← ۳/۲۹).

۶- «جمع الطرق السائرة فی معرفة اوتار الدایره» (← ۳/۱۳).

۳/۵- از ۳۵ جلد کتاب و یا رساله که گفتم از آثار بیرونی موجود است، ۲۲ جلد مربوط به ریاضیات و نجوم (یا احکام نجوم) است و ۱۳ جلد دیگر درباره موضوعهای دیگر است که از بحث ما خارج است.^۷

البته همه این ۲۲ کتاب یا رساله هر یک درباره موضوعی مستقل از ریاضیات و نجوم نیست. مثلاً کتاب «قانون مسعودی» یک «دایرة المعارف» از معلومات نجومی زمان بیرونی است که موضوع مقاله سوم آن علم مثلثات مسطح و کروی است. همچنین کتاب «التفهیم» درباره حساب و هندسه و هیئت و احکام نجوم است.

۳/۶- گفتم که ۲۲ جلد از آثار موجود بیرونی درباره ریاضیات و هیئت و نجوم (یا احکام نجوم) است و اینها را نمی توان به طور مطلق دسته بندی کرد. اما می توان به وجه نسبی و تقریبی این ۲۲ فقره کتاب و رساله را از دو نوع دانست و آنها را به دو دسته کلی تقسیم کرد. دسته اول کتابها یا رسالاتی هستند که یا موضوع آنها ریاضیات محض است و یا قسمتی از آنها مربوط به ریاضیات محض است. و دسته دوم آنهايي هستند که مربوط به ریاضیات کاربردی هستند. اینک اسامی این کتابها را از جهت این تقسیم بندی در اینجا می آورم و بعداً درباره هر یک از آنها اطلاعاتی به دست خواهم داد.^۸

یک - ریاضیات محض

آثار موجود بیرونی که یا منحصرأً درباره ریاضیات محض نوشته شده و یا قسمتی از آنها مربوط به ریاضیات محض است عبارت اند از:

ریاضیات عمومی (و هیئت و احکام نجوم): (۱)- «التفهیم لاوائل صناعة التنجیم»

حساب: (۲) «فی راشیکات الهند»

۷. این سیزده جلد کتاب عبارت اند از کتابها یا رسالاتی که بوآلّو اسامی آنها را در شماره های ۷۶- ۹۳- ۹۸- ۱۴۷- ۱۵۶- ۱۵۷- ۱۵۸- ۱۶۶- ۱۶۸- ۱۷۰- ۱۷۱- ۱۷۲- ۱۷۳ فهرست خود آورده است.

۸. ← بند «ب» از همین بخش.

هندسه: } (۳) - «استخراج الاوتار فی الدوائر...»
(۴) - «جمع الطرق السائرة...»

مثلثات: } (۵) - «مقالید علم الهيئة»
(۶) - «مقاله سوم کتاب قانون مسعودی»
(۷) - «کتاب ابی ریحان الی ابی سعید»

دو- ریاضیات کاربردی

آثار موجود بیرونی که موضوع آنها موارد استعمال ریاضیات است عبارت اند از:
گاهشماری: (۸) - «آثار الباقیه»

جغرافیای ریاضی: } (۹) - «فی تسطیح الصور و تبطیح الکور»
(۱۰) - «تحذید نهایات الاماکن»
(۱۱) - «فی استخراج قدر الارض»
(۱۲) - «رسالة فی معرفة سمت القبلة»

فیزیک ریاضی: } (۱۳) - «افرادالمقال فی امرالاضلال»
(۱۴) - «مقاله فی النسب التی بین الفلزات و الجواهر فی الحجم»

آلات نجوم: } (۱۵) - «استیعاب الوجوه الممكنة فی صناعة الاضطربلاب»
(۱۶) - «تسهيل التصحيح الاضطربلابی»
(۱۷) - «حکایة الآلة المسماة السدس الفخری»
(۱۸) - «رسالة فی الاضطربلاب»

نجوم و احکام نجوم: } (۱۹) - «غرة الزیجات»
(۲۰) - «مقاله فی التحلیل و التقطیع»
(۲۱) - «الدرر فی سطح الاکر»
(۲۲) - «تمهید المستقر»

۳/۷- برای تکمیل این آمار باید متذکر شوم که از ۱۵۳ اثر بیرونی چنانکه قبلاً گفتیم فقط ۳۵ جلد موجود است و از بقیه یعنی ۱۱۸ جلد آن متأسفانه فعلاً اطلاعی در دست نیست و ظاهراً از بین رفته است. از این ۱۱۸ جلد به طور تقریب می‌توان گفت ۹۳ جلد آنها مربوط به ریاضیات محض و کاربردی و ۲۵ جلد درباره موضوعات دیگر بوده است. فهرست ۹۳ جلد مذکور را بعداً ذکر خواهم کرد (← بند «ج» از همین بخش).

۳/۸- خلاصه اینک آنچه را در صفحات پیش نوشتم به وجه زیر خلاصه می‌کنم:

ریاضیات و نجوم و احکام نجوم	ریاضیات محض: ۷ جلد	} آثار موجود بیرونی
موضوعات دیگر	ریاضیات کاربردی: ۱۵ جلد	
ریاضیات و نجوم و احکام نجوم	۱۳ جلد	} آثار از بین رفته بیرونی
موضوعات دیگر	۹۳ جلد	
	۲۵ جلد	

۱۵۳ جلد

عده کل آثار بیرونی

ب- مشخصات آثار ریاضی و نجومی موجود بیرونی

۳/۹- دیدیم که ۲۲ کتاب یا رساله یا مقاله از بیرونی درباره ریاضیات و هیئت و نجوم موجود است. اینک می‌پردازم به ذکر مشخصات این ۲۲ فقره کتاب. و چون عده‌ای از آنها را جداگانه در کتاب حاضر مورد بررسی قرار داده‌ام، برای رعایت جانب اختصار، در اینجا فقط به ذکر نام آنها اکتفا کرده و بخشی از کتاب حاضر را که هر یک از آنها در آن مورد بحث قرار گرفته است معین می‌کنم. شماره‌هایی که بعد از عنوان هر کتاب بین [] گذاشته‌ام برای ارجاع به شماره‌های مقاله «بوالو» است که آن را در فهرست منابع کتاب حاضر معرفی کرده‌ام.^۹

اولاً- ریاضیات محض

۳/۱۰- (یک)- «التفهیم لاوائل صناعة التنجیم»^{۱۰} [۷۳].

۳/۱۱- (دو)- «فی راشیکات الهند»^{۱۱} [۳۸].

۳/۱۲- (سه)- «استخراج الاوتار فی الدائر بخواص الخط المنحنی الواقع فیها»^{۱۲} [۶۴].

۹. بوالو در مقاله خود ترجمه فرانسوی عنوانهای همه آثار بیرونی را آورده است.

۱۰. ← بخش نهم کتاب حاضر.

۱۱. ← بخش چهارم کتاب حاضر.

۱۲. ← بخش ششم کتاب حاضر.

۳/۱۳- (چهار)- «جمع الطرق السائره فی معرفة اوتارالدائرة».^{۱۳}

۳/۱۴- (پنج)- «مقالید علم الهیة»^{۱۴} [۷].

۳/۱۵- (شش)- «مقاله سوم کتاب قانون مسعودی»^{۱۵} [۱۰۴].

۳/۱۶- (هفت)- «کتاب ابی ریحان الی ابی سعید» [۱۸۰].

این رساله مختصری است که در آن بیرونی اثبات «شکل مغنی» را از استاد خود ابونصر عراق* برای سجزی* (ابوسعید) نقل کرده است. یک نسخه خطی از این رساله مختصر در کتابخانه لیدن به شماره ۱۰۰۷ موجود است^{۱۶} که در پایان آن نوشته شده «کتاب ابی ریحان الی ابی سعید رحمة الله».

می دانیم که سه تن از ریاضیدانان بزرگ معاصر بیرونی یعنی ابونصر عراق* و خجندی* (ابومحمود) و بوزجانی* (ابوالوفا) مدعی اختراع «شکل مغنی» بوده اند و در بخش هفتم کتاب حاضر خواهیم دید که بیرونی در مقدمه کتاب «مقالید علم الهیة» به تفصیل در این باره بحث کرده و حق تقدم را از استاد خود ابونصر عراق* دانسته و نوشته است که هنگامی که در ری بوده با خجندی* (ابومحمود) و کوشیارگیلی* ملاقات و راجع به این موضوع با آنان مذاکره کرده است. به احتمال قوی بیرونی رساله مورد بحث را برای اثبات صحت رأی خود به ریاضیدان معاصرش سجزی* (ابوسعید) نوشته و استدلال استادش ابونصر عراق* را در مورد «شکل مغنی» در مثلثات مسطحه و مثلثات کروی برای سجزی* شرح داده است.

ثانیاً- ریاضیات کاربردی

۳/۱۷- (هشت)- «آثارالباقیه»^{۱۷} [۱۰۵].

۳/۱۸- (نه)- «فی تسطیح الصور و تطبیح الکون» [۴۸].

موضوع این کتاب مختصر، تصویر صور سماوی و مواضع شهرها و کشورها بر صفحه است.^{۱۸} بیرونی خود از آن در فهرست آثارش نام برده و نوشته است که اصل آن در ده ورقه بوده است. یک نسخه خطی از آن در کتابخانه لیدن به شماره ۱۰۶۵ موجود است و قسمتی از آن در پایان کتاب «آثارالباقیه» آمده است^{۱۹} که ترجمه فارسی آن را در بخش پنجم (از شماره ۵/۱۶ به بعد) کتاب حاضر خواهید یافت. همین قسمت را فیورینی* به زبان ایتالیایی ترجمه کرده و همه کتاب

۱۳- ← بخش ششم کتاب حاضر.

۱۴- ← بخش هفتم کتاب حاضر.

۱۵- ← بخش هشتم کتاب حاضر.

۱۶- «فهرست لیدن» ج ۳، ص ۵۰- «بروکلمان S_۱»، ص ۸۶۱، ش ۱۷- «بوالو» ص ۲۴۰، ش ۱۸۰.

۱۷- ← بخش پنجم کتاب حاضر.

از روی نسخه خطی لیدن توسط سوتر به زبان آلمانی ترجمه و تفسیر شده است.^{۲۰}
 ۳/۱۹- (ده). «تحدید نهایات الاماکن لتصحيح مسافات المساکن» [۱۹]. یعنی: «تعیین مختصات جغرافیایی مکانها برای تصحیح فواصل شهرها».

موضوع این کتاب بیشتر مربوط به جغرافیای ریاضی است و در آن از تعیین عرض و طول جغرافیایی شهرها و میل دایرة البروج و اندازه‌گیری زمان خسوف و اختلاف طولهای جغرافیایی و روش تعیین سمت قبله بحث شده است.

بیرونی خود در پایان بخش اول این کتاب نوشته است^{۲۱}: «و باید دانست که آنچه اکنون مقصود من است، هرچند از راه آن به عمد بیرون رفتم، این است که: به‌طور کلی راههایی را آشکار کنم که از آنها جاهای روی زمین از جهت طول، میان خاور و باختر و از جهت عرض میان شمال و جنوب، به‌درستی دانسته شود و فاصله میان آنها به‌دست آید، و آشکار شود که هر نقطه یا شهر در کدام جهت از نقطه یا شهر دیگر واقع است؛ و اما آنچه مخصوصاً موردنظر است اینکه همه اینها را برای شهر غزنه که پایتخت کشور مشرق است اندازه بگیریم، چه این شهر، به گمان آن کس که تقدیر را از بشر می‌داند، به تقدیر بشری وطن من است، و همه تقدیر در حقیقت مخصوص خدای یگانه است. و در آن اگر بتوانم پیوسته به آنچه از خاطر دور نمی‌شود از رصدکردن و کوشش علمی می‌پردازم، و قبله آن را درست می‌کنم^{۲۲} که این کار تنها برای خودم نیست بلکه همه مردمان آن در این باره با من انبازند و هر کس که از این شهر بگذرد نیز در آن شریک خواهد بود.»

یک نسخه خطی نفیس از این کتاب در استانبول (سلطان فاتح، شماره ۳۳۸۶) در ۱۷۱ ورق (۳۴۰ صفحه) موجود است که کتابت آن در ماه رجب سال ۴۱۶ ه.ق. (سپتامبر ۱۰۲۵ میلادی) در غزنه و در زمان حیات بیرونی به‌پایان رسیده است. و اگرچه برخی از محققان نوشته‌اند که ممکن است این نسخه دستخط خود بیرونی باشد ولی مسلم است که خط خود بیرونی نیست.^{۲۳} فیلم این نسخه خطی در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران^{۲۴} موجود است و عکس آن را دوست عزیزم آقای دکتر منوچهر ستوده به من اهداء کرده است.

متن عربی کتاب «تحدید» از روی نسخه خطی مذکور، در سال ۱۹۶۲ میلادی هم در قاهره

۲۰. ← «بروکلمان S₁» ص ۸۷۴، ش ۱۳.

۲۱. «ترجمة فارسی کتاب تحدید» صص ۳۴ و ۳۵.

۲۲. یعنی «جهت صحیح قبله را در شهر غزنه می‌یابم».

۲۳. ← مقاله شادروان مجتبی مینوی در «بررسیهایی درباره بیرونی» ص ۳۸.

۲۴. ← «فهرست میکروفیلمها» ج ۱، ص ۲۹۷.

و هم در آنکارا به چاپ رسیده است. منتخباتی از این کتاب به زبانهای مختلف ترجمه و تفسیر شده است.^{۲۵}

در سال ۱۹۶۷ میلادی آقای جمیل علی متن کتاب «تحدید» را به زبان انگلیسی ترجمه کرده^{۲۶} و در مقدمه آن نوشته است که آقای دکتر کندی مشغول نوشتن شرحی بر این کتاب است. خوشبختانه دانشمند گرانمایه آقای احمد آرام این کتاب نفیس را به وجه شایسته‌ای به زبان فارسی برگردانده است.^{۲۷} معظم‌له نسخه خطی ترجمه خود را پیش از شروع به چاپ برای استفاده در اختیار من گذاشته است و همه قسمتهایی را که در کتاب حاضر از «کتاب تحدید» نقل کرده‌ام از روی ترجمه ایشان است.

۳/۲۰- (یازده)- «مقالة فی استخراج قدر الارض برصد انحطاط الافق عن قتل الجبال» [۲۴]. یعنی: «محاسبه اندازه (شعاع) کره زمین به وسیله رصد انخفاض افق از قله‌های کوهها». نسخه خطی منتخبی از این مقاله در کتابخانه برلین به شماره ۵۷۹۴ موجود است و ویدمان در سال ۱۹۰۸ میلادی مقاله‌ای در شرح آن نوشته است.^{۲۸}

۳/۲۱- (دوازده)- رساله فی معرفة سمت القبلة [بوآلو ندارد]. از این رساله سه نسخه خطی به شرح زیر در کتابخانه‌های ایران موجود است و ظاهراً در خارج از ایران نسخه‌ای از آن در دست نیست.

الف- در کتابخانه مجلس شورای ملی. فیلم و عکس همین نسخه در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران موجود است. (فیلم شماره ۱۶۶۰ و عکس شماره ۵۵۵۷).

ب- در کتابخانه دانشکده الهیات^{۲۹} (به شماره مج ۳۴۱/۲) این نسخه چنین شروع می‌شود: «نعنی بسمت القبلة هنا فی الافق...» و چنین ختم می‌شود: «نخط علی ظل المقیاس خطا فهو خط السمّت». این رساله به غلط «الکتاب فی استعمال الاسطرلاب» خوانده شده است.

ج- و نیز در کتابخانه دانشکده الهیات^{۳۰} (به شماره مج ۵۱/۲ د). آغاز و انجام این نسخه مانند نسخه قبل است.

د- در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران^{۳۱} به شماره ۱۹۷۱/۲.

۲۵. ← «بوآلو» ص ۱۸۳.

۲۶. عنوان این ترجمه این است:

The Determination of the Coordinates of positions for the Correction of Distances between Cities (Amer. Uni. of Beirut, 1967).

۲۷. ← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» در فهرست منابع کتاب حاضر.

۲۸. ← «بروکلمان S» ص ۸۷۴، ش ۱۶- «بوآلو» ص ۱۸۴، ش ۲۴.

۲۹. ← «فهرست الهیات»، ج ۱، ص ۲۸۲.

۳۰. ← «فهرست الهیات»، ج ۱، ص ۲۲۳.

۳۱. ← «فهرست دانشگاه»، ج ۸، ص ۵۸۳.

۳/۲۲- (سیزده)- افرادالمقال فی امر الاظلال [۱۵]. یعنی: «تکگفتار درباره سایه‌ها^{۳۲}» این کتاب را بیرونی به نام شیخ ابوالحسن مسافرین حسن^{۳۳} نوشته و نسخه خطی از آن در بانکپور موجود است.^{۳۴}

این کتاب در جزو «رسائل البیرونی» در سال ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده (رساله دوم از مجموعه مذکور) اما متأسفانه گذشته از آنکه غلط چاپی فراوان دارد ناقص است. و قسمتی از آن اشتهاً وارد کتاب «فی حرکات الشمس» تألیف ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قره* شده است که آن نیز در جزو «رسائل ابن سنان» در سال ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده (رساله سوم از مجموعه مذکور).

چون مدت زیادی از وقت من برای پی بردن به این مطلب گرفته شد برای آنکه محققان دیگری که بخواهند این کتاب را مورد بررسی و تحقیق قرار دهند گرفتار همین سرگردانی نشوند لازم می‌دانم در اینجا نتیجه بررسیهای خود را بنویسم.

۳/۲۳- این نکته شایان توجه است که یک نسخه خطی به شماره ۲۴۶۸ در کتابخانه بانکپور موجود است که مجموعه‌ای است شامل عده زیادی رساله از بیرونی و غیره. گمان می‌کنم که این نسخه، قبل از تجلید، اوراقش جابه‌جا شده بوده و در موقع صحافی به این امر توجه نشده است. در نتیجه اوراق قسمتهایی از بعضی از کتابها و رسالات آن مجموعه وارد اوراق کتابها و رسالات دیگر همان مجموعه شده است. و در موقعی که در حیدرآباد دکن خواسته‌اند این کتابها را جداگانه چاپ کنند متوجه این امر نشده‌اند. به همین علت است که مثلاً قسمت مهمی از کتاب «التحلیل و التقطیع للتعدیل» بیرونی، که تاکنون جزو آثار گمشده بیرونی به‌شمار می‌رفت، در جزو کتاب «استخراج الاوتار» در «رسائل البیرونی» به چاپ رسیده است.^{۳۵} در هر صورت می‌گویم که بدون تردید: مطالبی که از صفحه ۳۴ (سطر نهم به بعد) کتاب «فی حرکات الشمس^{۳۶}» تا صفحه ۶۳ (سه سطر اول) همان کتاب به چاپ رسیده دنباله مطالب کتاب «افرادالمقال» تألیف بیرونی است که باید بعد از سطر نهم صفحه ۵ کتاب «افرادالمقال» به چاپ رسیده باشد.

این قسمت مشتمل بر بقیه فهرست کتاب «افرادالمقال» و سه باب اول آن و قسمتی از باب چهارم آن است.

اینک برای آنکه فهرست مطالب کتاب «افرادالمقال» و بابه‌ای آن به‌طور کامل در دست باشد فهرست زیر را از روی دو نسخه چاپ شده «افرادالمقال» تألیف بیرونی و «فی حرکات الشمس»

۳۲. «اظلال» جمع «ظل» به معنی سایه است و ممکن است «تائزانت» و «کتائزانت» نیز معنی دهد.

۳۳. بیرونی کتاب «تهذیب الفصول الفرغانی» را نیز برای همین شخص نوشته است ← ۳/۴۸ و ۳/۶۰ کتاب حاضر.

۳۴. «بوالو» ص ۱۸۱، ش ۱۵.

۳۵. ← ۳/۳۰ کتاب حاضر.

۳۶. تألیف ابراهیم بن سنان بن ثابت. رساله سوم از «رسائل ابن سنان» چاپ حیدرآباد دکن، ۱۹۴۸ میلادی.

تألیف ابراهیم بن سنان * در اینجا تشکیل می‌دهم و به صفحات چاپ شده آن دو کتاب ارجاع می‌کنم:

مقدمه کتاب «افرادالمقال»: از صفحه ۳ «افرادالمقال» تا سطر هشتم همان کتاب و سپس از سطر نهم کتاب «فی حرکات الشمس» تا آخر سطر دوازدهم همان کتاب.

باب اول کتاب «افرادالمقال»: «فی ان الحاجة الى الحركة الاولى فی السماء نحو المغرب ضرورية فی هذا المطلوب منها» از سطر سیزدهم صفحه ۳۸ کتاب «فی حرکات الشمس» تا آخر سطر اول صفحه ۴۱ همان کتاب.

باب دوم کتاب «افرادالمقال»: «فی ذکر النور والظلمه والضياء والظل» از سطر دوم صفحه ۴۱ کتاب «فی حرکات الشمس» تا پایان صفحه ۵۷ همان کتاب.

باب سوم کتاب «افرادالمقال»: «فی ذکر التغيرات التي تلحق الظل فی المقدار والوضع» از آغاز صفحه ۵۸ کتاب «فی حرکات الشمس» تا کلمه اول «المائله» از سطر چهارم صفحه ۶۳ همان کتاب و سپس از سطر دهم صفحه ۵ کتاب «افرادالمقال» تا پایان صفحه ۸ کتاب «افرادالمقال».

چون بقیه مطالب کتاب «افرادالمقال» در همان کتاب «رسائل البيروني» چاپ شده موجود است، فقط به ذکر عنوان بابها و صفحات کتاب «افرادالمقال» چاپی اشاره می‌کنم.

باب چهارم: «فی ما يرسمه اطراف الظل فی الافاق» صص ۹ تا ۱۱.
باب پنجم: «فی التغيرات التي تلحق الظل من جهة اختلاف وضع المضي فی السمک» صص ۱۲ تا ۲۳.

باب ششم: «فی الطريق الذي ينتظم به استعمال الظل و المقياس» صص ۲۳ تا ۲۸.
باب هفتم: «فی الاقسام التي تقسم بها المقياس» صص ۲۹ تا ۴۱.
باب هشتم: «فی نقل انواع الاظلال بعضها الى بعض» صص ۴۱ تا ۴۹.
باب نهم: «فی الظل المستوی و الارتفاع و استخراج احدهما من الاخر اذا كان مجهولا» صص ۴۹ تا ۵۷.

باب دهم: «فی الظل المعکوس و الارتفاع و استخراج احدهما من الاخر اذا كان مجهولا» صص ۵۷ تا ۵۹.

باب یازدهم: «فی الاشتراك بين نوعی الظل و تناسيها و استخراج احدهما من الاخر» صص ۵۹ تا ۶۱.

باب دوازدهم: «فی جداول، تشتمل على الاظلال مفروغا من حسابها و كيفية أخذها» صص ۶۱ تا ۶۹.

باب سیزدهم: «فی اثبات انواع الاظلال فی الاسطرلاب» صص ۶۹ تا ۷۳.

باب چهاردهم: «فی اثبات ظل السالم فی الاسطرلاب» صص ۷۳ تا ۸۱.

باب پانزدهم: «فی الاظلال المقیسة علی السطوح المائله اوعلى غيرها» صص ۸۱ تا ۹۰.

باب شانزدهم: «فی معرفة ظل نصف النهار فی کل يوم مفروض» صص ۹۰ تا ۹۴.

باب هفدهم: «فی ظل الاعتدال فی کل بلد» صص ۹۴ تا ۹۹.

باب هیجدهم: «فی تصحیح سمت نصف النهار بظللین اوبسمتین متساویین» صص ۹۹ تا ۱۱۲.

باب نوزدهم: «فی تصحیح خط نصف النهار» صص ۱۱۲ تا ۱۱۵.

باب بیستم: «فی استخراج خط نصف النهار بثلاثة اظلال متوالیه» صص ۱۱۵ تا ۱۲۰.

باب بیست و یکم: «فی استخراج خط نصف النهار بقیسة واحدة کیف اتفقت» صص ۱۲۰ تا ۱۲۵.

باب بیست و دوم: «فی مقادیر النهار واللیل و فصول المطالع» صص ۱۲۵ تا ۱۳۸.

باب بیست و سوم: «فی معرفة الماضي والباقي من النهار بالظل» صص ۱۳۸ تا ۱۵۳.

باب بیست و چهارم: «فی معرفة السمات و مطالعه» صص ۱۵۳ تا ۱۶۰.

باب بیست و پنجم: «فی حکایة آراء لائمة فی اوقات الصلوة و ما یضطر الیه فی تحقیقها»

صص ۱۶۰ تا ۱۸۰.

باب بیست و ششم: «فی اثبات خطوط اوقات الصلوة و الساعات علی الآلات» صص ۱۸۰ تا ۱۹۴.

باب بیست و هفتم: «فی استعمال الظل فی الشكل القطاع و حساب علم الهيئة» صص ۱۹۴ تا ۲۰۲.

باب بیست و هشتم: «فی معرفة ابعاد الارضیة و السماویة و أعمدة الجبال بالاظلال» صص ۲۰۲ تا ۲۰۹.

باب بیست و نهم: «فی الابعاد السماویة التي ترجع فیها الى الاظلال» صص ۲۱۰ تا ۲۱۶.

باب سی و ام: «فی ذکر اشیاء تتصل بالظل و لم تشبه بما تقدم» صص ۲۱۶ تا ۲۲۶.

۳/۲۴- (چهاردهم)- «مقاله فی النسب التي بین الفلزات و الجواهر فی الحجم» [۶۳].

یعنی: «مقاله درباره نسبتهای که بین حجم فلزات و سنگهای قیمتی موجود است»

موضوع این مقاله در واقع تعیین جرم مخصوص مواد معدنی مختلف است، و یک نسخه

خطی از آن در بیروت موجود است و عده‌ای از دانشمندان اروپایی آن را مورد بررسی و تحقیق

قرار داده و درباره آن چندین مقاله به زبانهای آلمانی و فرانسوی نوشته‌اند^{۳۷} که از همه آنها مهمتر

مقاله ویدمان است.

ابوالفتح عبدالرحمان خازنی * منتخباتی از آن را در مقاله سوم کتاب «میزان الحکمه» آورده^{۳۸} و در فهرست کتاب خود نوشته است^{۳۹}: «المقالة الثالثة في النسب بين الفلزات والجواهر في الحجم لابي الريحان البيروني خمسة ابواب». فهرست بابهای این مقاله در کتاب «میزان الحکمه» به شرح زیر است:

باب اول: فی نسب الفلزات الذائبه و اوزانها بالرصد و الاعتبار (در شش فصل).

باب دوم: فی رصد الجواهر الحجرية و نسب بعضها الى بعض في الحجم (در چهار فصل).

باب سوم: فی رصد اشیاء سوى الفلزات و الجواهر (در دو فصل).

باب چهارم: فی مقياس الماء و اعتبار ذراع مكسر من الماء و الفلزات... (در سه فصل).

باب پنجم: فی دراهم تضاعيف بيوت الشطرنج... (در چهار فصل).

بیرونی در این مقاله تحقیقات دقیقی دربارهٔ جرم مخصوص اجسام مختلف به عمل آورده است که به قول الدو میهلی* از جالب توجه ترین نتایجی است که توسط مسلمانان در فیزیک تجربی به عمل آمده است.^{۴۰}

بیرونی برای تعیین جرم مخصوص اجسام آلتی به کار می برده که آن را «الآلة المخروطة» نامیده است.^{۴۱} و این در واقع نخستین و قدیمیترین نوع چگالی سنج** بوده است.^{۴۲} برای تعیین جرم مخصوص یک جسم ابتدا وزن آن را به دقت تعیین می کرده و سپس آن را در «آلة المخروطة» که پر از آب بوده فرو می برده و وزن آبی را که از آلت خارج می شده معین می کرده و نسبت وزن جسم را به وزن آب هم حجم آن، جرم مخصوص جسم می گرفته است.

بیرونی جرم مخصوص چندین جسم را به دقت تعیین کرده است. به عنوان مثال بعضی از نتایج او را در جدول زیر می آوریم تا دقت نتایجی که به دست آمده معین شود. این مقادیر بر اساس مقدار ۱۹/۲۶ برای جرم مخصوص طلا به دست آمده است.^{۴۳}

۳۸. ← «میزان الحکمه» صص ۵۵ تا ۷۸.

۳۹. ← «میزان الحکمه» ص ۱۲.

* Aldo Mieli.

۴۰. ← «میهلی S» ص ۱۰۱.

۴۱. شکل تقریبی این آلت را در مقابل صفحه ۵۹ از کتاب «میزان الحکمه» خواهید یافت.

** Pycnomètre

۴۲. ← دایرة المعارف فارسی: چگالی سنج.

۴۳. اقتباس از «میهلی S» ص ۱۰۱ و «مصاحب: ابوریحان» ص ۳۱.

ماده	نتایج بیرونی	نتایج کنونی
جیوه	۱۳۷۴	۱۳۵۹
مس	۸۰۹۲	۸۰۸۵
مفرغ	۸۰۶۷	۸۰۴ (تقریباً)
آهن	۷۰۸۲	۷۰۷۹
قلع	۷۰۲۲	۷۰۲۹
سرب	۱۱۴۰	۱۱۳۵

۳/۲۵- (پانزده)- «کتاب فی استیعاب الوجوه الممكنة فی صنعة الاصطربلاب»

یعنی: «بررسی همه جانبه روشهای ممکن در ساختن اسطرلاب» [۴۶].

این کتاب را بیرونی پیش از سال ۳۹۰ ه.ق برای ابوسهل عیسی بن یحیی جرجانی* تألیف کرده است^{۴۴} و یکی از مهمترین و جامعترین کتابهایی است که درباره اسطرلاب نوشته شده.

چندین نسخه خطی از این کتاب در کتابخانه‌های اروپا^{۴۵} و چند نسخه خطی از آن در ایران موجود است به شرح زیر:

یک نسخه در کتابخانه مجلس شورای ملی به شماره ۱۵۰ (فهرست مجلس، ج ۲، ص ۸۱) و فیلم آن در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران به شماره ۱۶۶۰ (فهرست میکروفیلمها، ج ۱، ص ۶۲۵) و عکس آن نیز در همان کتابخانه به شماره ۵۵۵۷.

دو نسخه در کتابخانه مدرسه سپهسالار به شماره‌های ۷۰۵ و ۷۰۶ (فهرست سپهسالار، بخش سوم، ص ۱۲۳) که ظاهراً اولی با یک واسطه از روی نسخه خط مصنف نوشته شده است. و نیز ← صص ۲۲۲ و ۲۸۱ جلد اول «فهرست الهیات».

این کتاب را چند تن از دانشمندان اروپایی مورد تحقیق و بررسی قرار داده و مقدمه آن را که از حیث تاریخ آلات نجومی بسیار مهم است به زبانهای مختلف ترجمه کرده و درباره آن مقاله‌ها نوشته‌اند.^{۴۶}

اینک فهرست مطالب این کتاب را از روی نسخه عکسی شماره ۵۵۵۷ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران در اینجا نقل می‌کنم تا محتویات آن معلوم شود:^{۴۷}

دستورالدوایر - عمل دستورالاقطار - کیفیة الانتفاع بدستورالدوایر - عمل المدارات علی الصفایح - عمل الافق و مقنطرات الارتفاع - عمل خطوط الساعات الزمانيه - عمل منطقة البروج و قسمتها فی العنکبوت و یسمی شبکه - عمل رؤس الکواکب الثابته فی العنکبوت - طریق اخر فی استخراج

۴۴. ← «کراوزه S»، ص ۴۷۹.

۴۵. ← «بوآلو O» ص ۱۹۱، ش ۴۶ - «بروکلمان S» ص ۸۷۳، ش ۶۵ - «کراوزه S»، ص ۴۷۹، ش ۲/۲۱۸.

۴۶. ← «بوآلو O» ص ۱۹۱، ش ۴۶.

۴۷. این نسخه چنین شروع می‌شود: «الحمد لله حق حمده، و صلوته علی محمد نبیه و عبده و علی آله و اصحابه - کتاب محمد بن احمد البیرونی فی استیعاب الوجوه الممكنة فی صنعة الاصطربلاب - الانفس الصافیة ذوات فروع و اشتیاق الی تصور الموجودات...».

رؤس الكواكب الثابتة فى العنكبوت - معرفة ابعاد الكواكب عن معدل الثَّهَار - معرفة الدرجات التى بتوسط السماء مع الكواكب و يسمى الممرلها - عمل دواير السموت - وجه فى عمل هذه الدواير لابی محمد السیفی - وجه عملها لابی محمود حامد بن الخضر الخجندی - عمل رؤس الكواكب الثابتة فى العنكبوت باستعمال دواير السموت - تخطيط مقنطرات الانحطاط - تصحيح الاضطراب القديمة و تقویمها لوقت مفروض - خرق العنكبوت و تشبیكها - عمل صفيحة التسيير - تخطيط الافق المطلع للبروج على خلاف نضدها - تخطيط الساعات الزمانية على ظهر العضاده - عمل الاضطراب الزورقى - عمل الاضطراب المسطرى - عمل الاضطراب الصليبي - عمل الاضطراب اللولبي - حساب انصاف اقطار المدارات بجدول الاصل - استنباط مقادير الدواير و اوضاعها من جدول الاصل للاضطراب الشمالى - استخراج مساطر المختلفة من دستور المقنطرات - تخطيط الدوائر التى تحد البيوت الاثنى عشر عند التسوية على مذهبي - عمل الاضطراب الملقب بالرصدى - عمل الاضطراب المُبَطَّخ - عمل الاضطراب المبطح بانضمام قطبي الكرة - عمل الاضطراب الكامل بالتسطيح الاضطرابي - جوامع معانى كتاب ابى حامد الصغانى فى تسطیح التام - تخطيط القطوع الناقصه على السطوح المستوية - تسطیح المدارات فى الشمالى الاضطراب و جنوبيه باختلاف قطب التسطیح - الاخبار عن كيفية شكل الافق و المقنطرات فى كل واحد من نوعى الاضطراب - استخراج قطرى القطع الناقص - عمل الافق اوالمقنطره قطعاً ناقصاً لاضطراب الشمالى - عمل الافق اوالمقنطرات قطعاً مكافئاً لاضطراب الشمالى - طريق آخر فى تخطيط القطع المكافى - عمل الافق اوالمقنطرات قطعاً زايداً لاضطراب الشمالى - وجه آخر فى تخطيط القطع الزايد لابی نصر منصور بن على بن عراق فى كتاب السموت - حكاية البركار التام وصفة حركاته - عمل القطع الناقص بالبركار التام - عمل القطع المكافى بالبركار التام - عمل القطع الزايد بالبركار التام - عمل الافق و المقنطرات بانواع القطوع لاضطراب الجنوبى كما تقدم ذلك فى الشمالى - عمل المقنطره فى الاضطراب الجنوبى - مقدمات لتسطيح الدواير التى تحد السموت - تسطیح دائرة اول السموت - عمل دائرة من دواير الارتفاع معلومة البعد فى الافق عن فلک نصف الثَّهَار قطعاً ناقصاً - عمل قطعاً مكافياً - عمل قطعاً زايداً - استخراج رؤس الكواكب الثوابت فى العنكبوت - طريق آخر فى استخراجها - ضعة حق (كذا) القمر - عمل الصفيحة الكسوفية - عمل الالة المهياه لمعرفة رؤية الالهة.

۳/۲۶- (شازنده)- «فى تسهيل التصحيح الاضطرابي والعمل بمركبته من الشمالى والجنوبى»

[۴۷].

يعنى: «چگونگی آسان کردن تصحيح اضطرابي و به کار بردن آلات مرکب از اسطرلابهای شمالی و جنوبی». در این گونه اسطرلابها یک قسمت از منطقه البروج به مرکز قطب شمال روی صفحه استوا تصویر می شود و قسمت دیگری از آن به مرکز قطب جنوب روی همان صفحه تصویر می گردد.

یک نسخه خطی از این رساله در برلین به شماره ۵۷۹۴ و ظاهراً یک نسخه دیگر از آن در پاریس به شماره ۲۴۹۸/۱ موجود است.^{۴۸}

ویدمان در سالهای ۱۹۰۸ و ۱۹۱۱ میلادی دو مقاله درباره این رساله نوشته و نالینو متن عربی یک قسمت مختصر از پایان این رساله را در کتاب «علم الفلك» آورده و همان قسمت را برنی* در کتاب «یادنامه بیرونی به انگلیسی» آورده است.^{۴۹}

اینک ترجمه فارسی همین قسمت را از کتاب «تاریخ نجوم اسلامی» در اینجا نقل می‌کنم:^{۵۰} «این دانشمند بزرگوار (=بیرونی) در آخر کتاب اسطرلاب خود فصلی در شناختن اندازه محیط زمین آورده، و پس از بیان طریق متعارفی دقیق این اندازه‌گیری چنین نوشته است: «و برای دانستن آن روشی ذهنی هست که با برهان، صحت آن اثبات می‌شود ولی حل کردن آن، به علت خردی اسطرلاب و کوچکی مقدار چیزی که بر آن بنا می‌شود، دشوار است. و راه کار آن است که بر قله کوهی مشرف بر دریا یا بر دشت همواری بالاروی و غروب خورشید را رصد کنی، و از این راه مقدار انحطاطی را که گفتیم به دست آوری؛ و ارتفاع کوه را در جیب مستوی زاویه متمم زاویه انحطاط ضرب کنی و سپس حاصل را بر جیب معکوس خود زاویه انحطاط تقسیم کنی و (دو برابر) خارج قسمت را در بیست و دو ضرب و حاصل را بر هفت تقسیم کنی، تا از این راه مقدار محیط زمین را، بنا بر واحدی که با آن ارتفاع کوه را اندازه گرفته‌ای به دست آوری. و برای ما در مورد این انحطاط و مقدار آن در مواضع بلند تجربه‌ای دست نداد.^{۵۱} و آنچه ما را در بیان این روش جرأت داد، گفته نیریزی* (ابوالعباس) به نقل از ارسطولس است که بلندترین ارتفاع کوه، بنابر آنکه شعاع کره زمین تقریباً سه هزار و دویست میل باشد، پنج میل و نیم است. محاسبه نشان می‌دهد که مقدار انحطاط در کوهی به این بلندی باید تقریباً سه درجه بوده باشد. و در مانند این گونه چیزها باید به تجربه و امتحان توسل شود، و کامیابی جز از جانب خداوند دانای توانا نیست^{۵۲}».

۳/۲۷- (هفده). «حکایة الآلة المسماة السدس الفخری» [۱۶۹].

یعنی: «حکایت آلتی که به «سدس فخری» موسوم است». یک نسخه خطی از این رساله در بیروت موجود است و ل. شیخو** در مجله «المشرق» مقاله‌ای درباره آن نوشته است.^{۵۳}

۴۸. ← «بوآلو O» ص ۱۹۲، ش ۴۷.

* H. Barani

۴۹. ← «بوآلو O» ص ۱۹۲، ش ۴۷ و «علم الفلك» ص ۲۸۹ تا ۲۹۲ - «یادنامه بیرونی به انگلیسی» ص ۳۲.

۵۰. ← «تاریخ نجوم اسلامی» ص ۳۶۲.

۵۱. بیرونی پس از نوشتن کتاب «فی تسهیل التصحیح» این روش را عملاً انجام داده است. ← «تاریخ نجوم اسلامی» ص ۳۶۴ به بعد - «ترجمه فارسی کتاب تحدید» ص ۱۹۴ به بعد - «قانون مسعودی»، صص ۵۳۰ و ۵۳۱.

۵۲. برهان صحت این روش را در منابع زیر خواهید یافت: «تاریخ نجوم اسلامی» ص ۳۶۳ به بعد - «یادنامه بیرونی به انگلیسی» ص ۳۲ به بعد.

** L. Cheikho

۵۳. ← «بوآلو O» ص ۲۳۷، ش ۱۶۹.

می‌دانیم که «سدس فخری» از اختراعات خجندی* (ابومحمود) است. بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» از «سدس فخری» نام برده و عمل خجندی* (ابومحمود) را با آن آلت حکایت کرده و نوشته است^{۵۴}: «و سپس ابومحمود حامد بن خضر خجندی، به فرمان فخرالدوله در کوه طبرک چسبیده به شهر ری، دو دیوار متوازی بر خط نصف النهار به فاصله هفت ذراع از یکدیگر ساخت، و بر روی دو دیوار طاقی زد که در آن سوراخ گردی به قطر یک وجب درآورده بود؛ و مرکز این سوراخ را مرکز سدس دایره‌ای به قطر ۸۰ ذراع^{۵۵} قرار داد که بر خط نصف النهار میان دو دیوار نهاده بود؛ سطح آن سدس با تخته و روی تخته با صفحه برنجین پوشیده شده و هریک از درجات^{۵۶} محیط آن به سیصد و شصت قسمت تقسیم شده بود که هر قسمت نماینده ده ثانیه بود. خورشید از این سوراخ بر سطح نصف النهار می‌تابید. و ابومحمود چنبری به اندازه نوری که بر زمین می‌افتاد ساخت که مرکز آن محل تقاطع آشکار دو قطر آن بود؛ این چنبر را بر محیط روشنی [آفتاب] می‌گذاشت و از روی محل قرار گرفتن مرکز آن، فاصله میان خورشید و سمت الرأس را به دست می‌آورد^{۵۷}». و باز بیرونی در همان کتاب «تحدید» درباره عظمت «سدس فخری» نوشته است^{۵۸}: «و این سدس فخری، از لحاظ بزرگی و درستی، بر هر چه پیش و پس از آن به کار رفته، برتری دارد، چه ابومحمود در ساختن اصطلاحها و افزارهای دیگر یگانه زمان بوده».

۳/۲۸- (هجده)- «رسالة فی الاطرلاب» [یوآلو ندارد]. چند نسخه خطی از این رساله در ایران موجود است و تا آنجا که اطلاع دارم در فهرستهای کتابخانه‌های خارج از ایران نیامده است. این نسخه‌ها عبارت‌اند از:

الف- نسخه خطی شماره ۱۹۷۱/۲ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران که در ۴۳ صفحه و ۶۷ باب است و چنین شروع می‌شود^{۵۹}: «بسمه، قال الاطرلاب اشرف الآلات المستعملة فی صناعة النجوم و مخصوص من بينها بخفة المؤنة فی الثقل و الاستعمال مع سرعة الايقان علی المطلوب من احوال فلک الثابتة...» به نظر نمی‌آید که این همان «رسالة فی استعمال الاطرلاب الکری» باشد که در فهرست آثار مفقود بیرونی ذکر خواهم کرد.^{۶۰}

ب- نسخه‌های خطی شماره‌های (مج ۵۱ د) و (مج ۳۴۱ د) کتابخانه دانشکده الهیات^{۶۱} که عنوان اولی «کتاب الاستیعاب فی علم الاطرلاب» و عنوان دومی «کتاب الاستیعاب فی معرفة الاطرلاب» است. ولی این هر دو رساله غیر از کتاب «استیعاب الوجوه الممكنة فی صناعة الاطرلاب» است

۵۴. ← «ترجمة فارسی کتاب تحدید» ص ۷۶.

۵۵. در ترجمه فارسی «تحدید نهایات الاماکن» ص ۷۶ در این موضع کلمات «به قطر ۸۰ ذراع» از قلم افتاده است.

۵۶. در همان کتاب و همان صفحه در این موضع کلمات «هریک از درجات آن» از قلم افتاده است.

۵۷. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره سدس فخری ← «قربانی: ریاضیدانان» صص ۱۶۴ تا ۱۶۶.

۵۸. «ترجمة فارسی کتاب تحدید» ص ۸۱.

۵۹. ← «فهرست دانشگاه» ج ۸، ص ۵۸۳.

۶۰. ← ۳/۱۰۱ همین کتاب.

۶۱. ← صص ۲۲۲ و ۲۸۱ و ۲۸۲ «فهرست الهیات».

که ذکرش در شماره ۳/۲۵ کتاب حاضر گذشت. هر دو نسخه چنین شروع می‌شود: «بسمه: حسبی الله و نعم الوکیل و علیه توکلت و الیه انیب. قال الاسطرلاب اشرف الآلات المستعملة فی صناعة النجوم...»

ممکن است نسخه خطی موجود در رامپور، که بوالو در تصحیحات و اضافات مقاله خود (ص ۳۹۲، ش ۴۶) به آن اشاره کرده، با این نسخه‌ها یکسان باشد.

۳/۲۹- (نوزده)- «غرة الزیجات» [بوالو ندارد].

این ترجمه عربی کتاب «کرنه تلکه»^{۶۲} توسط بیرونی است و یک نسخه خطی از آن در یکی از کتابخانه‌های احمدآباد هند پیدا شده است. باید دانست که بیرونی خود در عده‌ای از آثارش بارها به این کتاب اشاره کرده. از جمله در کتاب «تحقیق مالهند» چاپ حیدرآباد صفحات ۱۲۱ و ۲۶۶ و ۲۸۹ و ۳۶۴ و ۳۸۴ و ۳۹۲ و ۴۱۰ و ۴۱۹ و ۴۲۰ و ۵۱۱ و ۵۱۳. و در کتاب «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد صفحات ۹۷۳ و ۱۳۱۳. و در کتاب «تمهید المستقر» چاپ حیدرآباد صفحات ۲۷ و ۳۲. و در کتاب «افرادالمقال» چاپ حیدرآباد صفحات ۱۰۷ و ۱۳۶ و ۱۵۲. در آغاز نسخه مذکور آمده است: «زیج بجیانند البانارسى الذی سماه کرن تلک و معنا غرة الزیجات - قال الاستاد ابوالریحان محمد بن احمد البیرونی، کنت وجدت فی الهند زیجا مختصراً صغیراً عمله بجیان بن جیانند و هو احد المفسرین بیلد البانارس المقصود عندهم بالتعظیم من جهة الخلخلة و سماه غرة الازیاج و احب بعض اصداقنا نقله الى العربی...»^{۶۲}

۳/۳۰- (بیست)- «مقالة فی التحلیل و التقطیع للتعدیل» [۱۱]. بیرونی خود نام این کتاب را به صورت زیر در فهرست آثارش آورده است: «و بسؤال احد من شک فی جداول تعدیل الشمس ولم یهتد لطریق تحلیل حبش لها: مقالة فی التحلیل و التقطیع للتعدیل فی ۷۰ ورقة». و معلوم می‌شود که استاد این کتاب را برای شخصی که درباره جداولهای تعدیل شمس^{۶۳} شک داشته و روش تحلیلی حبش حاسب* را درست به کار نبسته بوده نوشته است.

بوالو نام این کتاب را در جزو آثار مفقود بیرونی ثبت کرده و نسخه‌ای از آن نمی‌شناخته است.^{۶۴} خوشبختانه در ضمن مطالعه و تحقیق در کتاب «استخراج الاوتار» از روی چاپ حیدرآباد، به این نکته برخوردیم که مطالب آن منشئت و پراکنده است و مضامین آن به هم مربوط نیست، و چون می‌دانستیم^{۶۵} که این نسخه چاپی از روی نسخه‌ای خطی به چاپ رسیده که اوراق آن

* Karana Tilaka

۶۲. برای کسب اطلاعات بیشتر در این باره ← «مجله آریانا» سال بیست و یکم (میزان ۱۳۴۲) شماره نهم، صفحات ۱ تا ۴ - این مقاله مختصرشده مقاله دیگری است به قلم سید صمد حسین رضوی که اصل آن به زبان انگلیسی در مجله Islamic Culture مجلدات ۳۷ (سال ۱۹۶۳) و ۳۸ (سال ۱۹۶۴) و ۳۹ (سال ۱۹۶۵) چاپ شده است.

۶۳. مقصود از «تعدیل شمس» تبدیل حرکت متوسط خورشید به حرکت حقیقی است.

۶۴. ← «بوالو» ص ۱۸۰، ش ۱۱.

۶۵. ← ۳/۲۳ کتاب حاضر.

پیش از صحافی پراکنده و با هم مخلوط شده بوده است، حدس زدم که ممکن است اوراق کتاب دیگری در نسخه خطی مذکور با اوراق کتاب «استخراج الاوتار» درهم شده و چاپ‌کنندگان کتاب «استخراج الاوتار» متوجه این مطلب نشده باشند.

و این حدس من وقتی قریب به یقین شد که دیدم در صفحه ۱۰۹ همان کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد دو قضیه که اساس کتاب «استخراج الاوتار» است از نو، به عنوان مقدمه مطرح و ثابت شده است و در آغاز آن آمده است:

«و اذ قد تبین هذا نحتاج ان نبین مقدمتین تصل احدا هما بالآخری علی انی کنت افردت للخواص التي سنح منهما کتاباً کافياً، و لکن لابد من اشارة اليهما واحدا هما هی هذه».

و شک نیست که بیرونی دو قضیه را که در ابتدای کتاب «استخراج الاوتار» آورده و به وجه مختلف و متعدد آنها را ثابت کرده دیگر آنها را در وسط همان کتاب به عنوان مقدمه نمی‌آورد. و نمی‌نویسد که «کتاب جداگانه‌ای در خواصی که از این دو قضیه استنباط می‌شود نوشته‌ام».

خلاصه پس از صرف وقت و حوصله بی حساب یقین حاصل کردم که مقداری از کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد یعنی از صفحه ۱۳۸ تا چهار سطر اول صفحه ۱۵۴ آن و نیز از صفحه ۱۸۵ تا نیمی از سطر اول صفحه ۲۲۰ آن متعلق به یکی از آثار ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قره* است و یکی از دلایل انکارناپذیر این امر این است که در صفحه ۱۵۳ آمده است: «وقد کان لجدی ابی الحسن ثابت فی ذلک ترکیب علی هذه الجهة» و پیداست که ابوالحسن ثابت بن قره* جد بیرونی نبوده است.^{۶۶}

در ضمن همین تحقیقات چنین نتیجه گرفتم که از صفحه ۱۰۹ تا صفحه ۱۱۵ «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد مقدمه کتاب «فی التحلیل و التقطیع للتعدیل» بیرونی است که قسمتی از آن نیز در صفحات ۲۲۰ به بعد آن چاپ شده است. و از صفحه ۱۱۵ تا صفحه ۱۷۸ «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد بقیه مطالب کتاب «فی التحلیل و التقطیع» است.

بنابراین مقداری از کتاب «فی التحلیل و التقطیع للتعدیل» به صورت چاپ شده (ولی دارای غلطهای زیاد) فعلاً موجود است که اگر نسخه خطی اصل آن به دست کسی که واجد شرایط باشد بیفتد شاید بتواند قسمت اعظم این کتاب را از روی آن استخراج کند.

اینک فهرست مطالب کتاب «فی التحلیل و التقطیع للتعدیل» را که تا آنجا که توانسته‌ام از روی نسخه چاپی «استخراج الاوتار» بیرون آورده‌ام در اینجا می‌نویسم تا اگر کسی خواست در آن کتاب تحقیقی به عمل آورد مورد استفاده قرار دهد. شماره‌هایی که در دنبال هر مطلب نوشته‌ام اشاره است به صفحات کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد دکن. خاطرنشان می‌کنم که مقاله‌های

۶۶. جالب توجه است که آقای «استاد احمد سعیدالدمرداش» که به قول خود کتاب «استخراج الاوتار» را مورد تحقیق علمی قرار داده و آن را در سال ۱۹۶۵ در مصر به چاپ رسانیده متوجه این مطلب نشده است.

دوم و سوم این کتاب هریک دارای شانزده فصل است و عنوانهای فصلها تقریباً یکی است. جز آنکه فصلهای مقاله سوم استدلال فصلهای مقاله دوم است.

مقدمه (به طور ناقص) (از صفحه ۱۰۹ تا ۱۱۴ و احتمالاً از صفحه ۲۲۰ تا ۲۲۴) مقاله دوم - فی تعدید الحسابات لحل التعديل... (۱۱۵).

فصل اول - فی حل التعديل لنصف الدور بحساب انتجه الخاطر لی (۱۱۵).

فصل دوم - فی حل التعديل بحساب سنج لی من خواص الخط المنعطف فی قوس دائره. (۱۱۷).

فصل سوم - فی حل التعديل بحساب آورده محمد بن جابر البتانی * فی زیجه (۱۱۸).

فصل چهارم - فی حل التعديل بحساب آورده محمد بن ابراهیم الفزاری * فی زیج السند - هند الكبير (۱۲۰).

فصل پنجم - فی حل التعديل بالحساب الذى يقتضيه كتاب المجسطی (۱۲۱).

فصل ششم - فی حل التعديل بحساب استخراجته (۱۲۲).

فصل هفتم - فی حل التعديل بحساب اتجه لی (۱۲۳).

فصل هشتم - فی حل التعديل بحساب تهيأ لی استخراجته (۱۲۴).

فصل نهم - فی حل التعديل بحساب ادتنی اليه الفكرة (۱۲۵).

فصل دهم - فی حل التعديل بحساب آورده ابوداود سليمان بن عصمة * فی زیجه الذى عمله للنيرين (۱۲۶).

فصل یازدهم - فی حل التعديل بحساب کان اتفاق لی استخراجته (۱۲۸).

فصل دوازدهم - فی حل التعديل بحساب آورده ابوالعباس فرغانی * فی تعليله لزیج محمد بن موسى الخوارزمی * (۱۲۸).

فصل سیزدهم - فی حل التعديل بحساب مختصر تضمنته رسالة مجهوله... (۱۲۹).

فصل چهاردهم - فی حل التعديل بحساب اتفاق لی (۱۳۰).

فصل پانزدهم - فی حل التعديل بحساب آورده حبش * فی زیجه (۱۳۱).

فصل شانزدهم - فی الطرق الحائده عن نهج الصواب ممّا ذکرها اصحاب الزیجات و غیرهم فی حل التعديل (۱۳۱).

مقاله سوم - فی ذکر البراهین الهندسیة علی الطرق الحسابیه فی حل التعديل (۱۳۳).

فصل اول - فی برهان لی علی الحساب الذى انتجه الخاطر لی (۱۳۴).

فصل دوم - فی برهان علی حساب سنج لی من خواص الخط المنحنی فی قوس الدائره (صفحه ۱۳۶ تا آخر صفحه ۱۳۷).

فصل سوم - فی حکایة برهان البتانی^{۶۷} علی ما آورده هو والهاسمی * من الحساب (۱۵۵).

۶۷. در نسخه چاپی به غلط «البتانی» ثبت شده است. ← عنوان فصل سوم از مقاله دوم که ذکرش گذشت.

فصل چهارم - فی علة ما اورده الفزاری * فی زیج السند - الهند الكبير من الحساب (۱۵۶).
 فصل پنجم - فی حکایة برهان الحساب الذی یشتمل علیه کتاب المجسطی (۱۵۸).
 فصل ششم - فی برهان لی علی حساب استخراجته (۱۵۹).
 فصل هفتم - فی برهان لی علی حساب کان اتجه لی (۱۶۱).
 فصل هشتم - فی برهان لی علی حساب تهيأ لی استخراجه (۱۶۳).
 فصل نهم - فی برهان لی علی حساب ادتنی الیه الفكرة (۱۶۴).
 فصل دهم - فی حکایة برهان سلیمان بن عصمه * فی حسابیه الذی اورده فی زیج النیرین (۱۶۵).

فصل یازدهم - فی برهان کان اتفق لی استخراجه (۱۶۷).
 فصل دوازدهم - فی برهان علی حساب الفرغانی * فی علل زیج الخوارزمی (۱۶۸).
 فصل سیزدهم - فی حکایة برهان صاحب الرسالة التي ظننت انه سليمان * او ابو جعفر * علی حسابیه المختصر الذی ضمنه ایها (۱۷۰).
 فصل چهاردهم - فی برهان لی علی حساب کان اتفق لی (۱۷۱).
 فصل پانزدهم - فی برهان لی علی عمل حبش * فی زیجه (۱۷۲).
 فصل شانزدهم - فی علل الطرق الحائده عن نهج الصواب ما ذکرها اصحاب الزیجات و غیرهم فی حل التعديل (۱۷۴).

در آغاز صفحه ۱۷۹ «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد آمده است «المقالة الرابعة فی معرفة ماتقدم ذكره بصنوف الاشتراك الواقعه بينها» و مطالب صفحات بعد از آن متشکست است. نمی دانم این مقالة چهارم از همین کتاب «حل التعديل» است یا نیست.

۳/۳۱ - (بیست و یک) - «کتاب الدرر فی سطح الأکر» [۱۴۳].
 یک نسخه خطی از این کتاب در کتابخانه بودلیان موجود است. ۶۸
 ۳/۳۲ - (بیست و دو) - «تمهید المستقر لتحقیق معنی الممر» [۴۵].

این کتاب درباره نجوم و احکام نجوم است و نسخه خطی آن در بانکپور موجود است. ۶۹
 و در جزو «رسائل البیرونی» در سال ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن چاپ شده است (رسالة سوم از مجموعه مذکور). در سال ۱۹۵۹ میلادی این کتاب توسط محمد صفوری و عدنان افرام به انگلیسی ترجمه و با مقدمه و تفسیر توسط دکتر کندی در دانشگاه امریکایی بیروت با عنوان زیر به چاپ رسید:

“Al-Bîrûnî on Transit”, American University of Beirut, Oriental Series, No. 32, 1959.

۶۸. ← «بوالو O» ص ۲۲۶، ش ۱۴۳ - مقدمة متن «آثار الباقیه» چاپ زاخاؤ، ص XXXIX (= ۴۹).

۶۹. ← «بوالو O» ص ۱۹۰، ش ۴۵.

این ترجمه توسط کارمودی* در صفحات ۲۵۲ و ۲۵۳ جلد ۵۳، سال ۱۹۶۲ مجله «ایسیس» و توسط Owen Gingerich در صفحات ۹۹ و ۱۰۰ سال ۱۹۶۰ مجله اسکای اند تلسکوپ** معرفی شده است.

ج - فهرست آثار ریاضی و نجومی مفقود بیرونی

۳/۳۳- گفتیم که از آثار موجود بیرونی فقط ۲۲ فقره مربوط به ریاضیات و نجوم است و در صفحات قبل آنها را معرفی کردم. غیر از اینها بیرونی ۹۳ جلد کتاب یا رساله یا مقاله درباره ریاضیات و نجوم و احکام نجوم داشته که ظاهراً از بین رفته است. البته ممکن است بعضی از این آثار که فعلاً در دسترس نیست، و نمی‌توان درباره موضوع آنها اظهار نظر قطعی کرد، همه از یکدیگر مستقل نبوده و بعضی از آنها یک کتاب بوده باشد که با عنوانهای متفاوت نامگذاری شده‌اند.

در هر صورت اینک فهرست عنوانهای این ۹۳ جلد کتاب یا رساله را در اینجا ثبت می‌کنم که اگر بعدها بعضی از آنها در کتابخانه‌ها یافته شد (و این امر بسیار ممکن است) بتوان به چگونگی واقعی موضوع آنها پی برد.

اگرچه این آثار فعلاً مفقود هستند و نمی‌توان به‌طور قطع آنها را برحسب موضوع تقسیم‌بندی کرد، باز تا آنجا که از روی عنوانها و اسامی آنها برمی‌آید آنها را به چند دسته تقسیم می‌کنم و درباره بعضی از آنها نکات مختصری را یادداشت می‌نمایم. شماره‌هایی که در آخر عنوان هر کتاب یا رساله بین علامت [] نوشته‌ام برای ارجاع به شماره‌های ترتیب مقاله «بوالو» است که آن را در فهرست منابع کتاب حاضر معرفی کرده‌ام.^{۷۰}

۱- حساب

۳/۳۴- (یک)- «تذکره فی الحساب و العدّ بارقام السند و الهند» [۳۴].

متن این کتاب از بین رفته ولی قسمت مختصری از آن در «آثارالباقیه» نقل شده است.^{۷۱}

۳/۳۵- (دو)- «فی استخراج الکعب و اضلاع ماورائه من مراتب الحساب» [۳۵].

۳/۳۶- (سه)- «کیفیه رسوم الهند فی تعلم الحساب» [۳۶].

۳/۳۷- (چهار)- «فی ان رأى العرب فى مراتب العدد اصوب من رأى الهند فیها» [۳۷].

۳/۳۸- (پنج)- «فی سنکلت الاعداد»

بوالو در صفحه ۱۸۸ مقاله خود کلمه «سنکلت» را به صورت «سکلت» ثبت کرده و نوشته است که معنی آن معلوم نیست. اما در «التفهیم فارسی» (ص ۳۸) و «التفهیم عربی» (ص ۹۲) این کلمه به صورت سنکلت (Sankalita) نوشته شده و شادروان همایی توضیح جامعی درباره

* F.J Carmody. ** Sky and Telescope

۷۰. بوالو در مقاله خود «بوالو» ترجمه فرانسوی همه عنوانهای کتابها و رساله‌ها و مقاله‌های بیرونی را آورده است.

۷۱. ← ۵/۱۰ کتاب حاضر.

آن داده و نوشته است که معنی این کلمه «به هم جمع شده و به هم جمع کرده» است. بیرونی خود در «التفهیم» نوشته است «عددهای مثلث کدامند؟ این آن است که عددهای متوالی از یکی تا آنجا که خواهی گرد کنی و این آن است که هندوان او را سنکلت خوانند.»^{۷۲} مقصود از عددهای مثلث که آنها را به فرانسوی *Nombres triangulaires* می نامند، اعدادی است که از جمع کردن عددهای طبیعی متوالی ابتدا از یک حاصل می شود مانند ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و غیره. عدد شماره n این رشته به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ است. گمان می کنم که موضوع رساله مورد بحث محاسبه اعداد مصور بوده است. اعداد مصور اعدادی هستند که بتوان آنها را به وسیله نقاطی نشان داد که به طور منظم در یک شکل هندسی ساده جا گرفته باشند. مثل عددهای مثلث و عددهای مربع و عددهای مخروط و جز آنها.^{۷۳} ۳/۳۹- (شش)- «ترجمة مافی براهم سدهاند من طرق الحساب» [۴۰]. ۳/۴۰- (هفت)- «منصوبات الضرب» [۴۱].

۲- هندسه^{۷۴}

۳/۴۱- (هشت)- «مقالة فی ان لوازم تجزیء المقادیر لا الی نهاية قریبة من امر الخطین اللذین یقربان ولا یلتقیان فی الاستبعاد» [۶۷]. گمان می کنم که به احتمال قوی آنچه در صفحات ۱۸۱ تا ۱۸۴ کتاب «استخراج الاوتار» در حیدرآباد دکن به طبع رسیده متعلق به این رساله بوده که صفحات آن در نسخه خطی اصل آن با هم مخلوط شده.^{۷۵} ۳/۴۲- (نه)- «تحصیل الراحة بتصحیح المساحة» [۸۸]. از این کتاب بیرونی در صفحه ۱۴ کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد نام برده است. ۳/۴۳- (ده)- «ترجمة کتاب فی اصول الهندسة لاقليدس الی لغة الهند» [۱۷۵].

۳- مثلثات

۳/۴۴- (یازده)- «مقالة فی نقل خواص الشكل القطاع الی مایغنی عنه» [۶۶].

۴- تصویر جسم نما

۳/۴۵- (دوازده)- «تکمیل صناعة التسطیح» [۱۱۰]. ۳/۴۶- (سیزده)- «استیعاب فی تسطیح الكرة» [۱۳۹].

۷۲. ← «التفهیم فارسی» صص ۳۸ و ۳۹.

۷۳. ← بخش نهم کتاب حاضر شماره ۹/۱۲۹.

۷۴. بوالو در شماره ۶۶ مقاله خود «مقاله فی نقل خواص الشكل القطاع الی مایغنی عنه» را جزو هندسه دانسته است ولی به احتمال قوی این مقاله درباره مثلثات بوده است و نام آن را در شماره ۳/۴۴ نوشته ام.

۷۵. ← ۳/۲۳ کتاب حاضر.

۳/۴۷- (چهارده)- «کتاب تسطیح الكرة» [۱۴۲].

۵- مساحی

۳/۴۸- (پانزده)- «تذکره فی المساحة للمسافر المقوی» [۶۵].

ظاهراً این مسافر مقوی همان ابوالحسن مسافر است که بیرونی کتابهای شماره ۳/۲۲ و ۳/۶۰ همین فهرست را به نام او نوشته است.

۶- نجوم و هیئت

۳/۴۹- (شانزده)- «المسائل المفیده و الجوابات السدیده، فی علل زیج الخوارزمی*» [۱].

سوتر در سال ۱۹۰۳ در طی مقاله‌ای اظهار نظر کرده بود که کتاب «تعلیل الزیج الخوارزمی» که توسط ابن عزرای اسرائیلی به عبرانی ترجمه شده همین کتاب بوده است ولی بعداً معلوم شد که نظر وی درست نبوده و مؤلف آن کتاب احمد بن المثنی بن عبدالکریم بوده است.^{۷۶} بیرونی خود مسئله‌ای از این کتاب را در کتاب «استخراج الاوتار» آورده است.^{۷۷}

۳/۵۰- (هفده)- «ابطال البهتان بایراد البرهان علی اعمال الخوارزمی* فی زیجه» [۲].

بیرونی خود مسئله‌ای از این کتاب را در کتاب «استخراج الاوتار» آورده است.^{۷۸}

۳/۵۱- (هیجده)- «کتاب الوساطة» [۳].

بیرونی درباره این کتاب در فهرست آثار خود نوشته است: «و عثرت لابی الحسن الاهوازی* علی کتاب فی هذا الباب ظلم فی الخوارزمی* فاضطرت الی عمل کتاب الوساطة بینهما فی ۶۰۰ ورقه^{۷۹}».

۳/۵۲- (نوزده)- «تکمیل زیج حبش* بالعلل و تهذیب اعماله من الزلل» [۴].

از این کتاب بیرونی در صفحه ۱۵ کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد نام برده است. و یک استدلال درباره محاسبه وتر مجموع و وتر تفاضل دو کمان از دایره از کتاب مذکور در اواخر نسخه خطی «استخراج الاوتار» موجود در لیدن آورده است.

۳/۵۳- (بیست)- «جوامع الموجود لخاطر الهنود فی حساب التنجیم» [۵].

۳/۵۴- (بیست و یک)- «تهذیب زیج الارکند» [۶].

۳/۵۵- (بیست و دو)- «خیال الکسوفین عندالهند» [۸].

۳/۵۶- (بیست و سه)- «فی امر الممتحن و تبصیر ابن کیسوم المفتتن» [۹].

۳/۵۷- (بیست و چهار)- «اختلاف الاقاویل لاستخراج التحاویل» [۱۰].

۷۶. ← «تاریخ نجوم اسلامی» ص ۴۱۳، ش ۱۲- «علم الفلك» ص ۳۳۳، ملحق ۱۳.

۷۷. ← «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۲۱- و نیز ← همان کتاب، ص ۷۵.

۷۸. ← «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۷۸.

۷۹. ← صفحه XXXX (۴۰=) از مقدمه کتاب «آثار الباقیه» چاپ زاخان.

- ۳/۵۸- (بیست و پنج)- «فی تهذیب الطرق المحتاج الیها فی استخراج هیئة الفلک عندالموالید و تحویل السنین و غیرها من الاوقات» [۱۲].
- ۳/۵۹- (بیست و شش)- «مفتاح علم الهیئة» [۱۳].
- ۳/۶۰- (بیست و هفت)- «تهذیب فصول الفرغانی*» [۱۴].
- بیرونی خود درباره این کتاب نوشته است: «و عملت علی هیئة فصول الفرغانی لابی الحسن مسافر کتابا سمیته تهذیب فصول الفرغانی فی ۲۰۰ ورقه» و نیز رجوع کنید به شماره های ۳/۲۲ و ۳/۴۸ کتاب حاضر. آن کتابها را نیز بیرونی برای همین ابوالحسن مسافر نوشته است.
- ۳/۶۱- (بیست و هشت)- «کتاب فی استعمال دوائر السموت لاستخراج مراكز البیوت» [۱۶].
- ۳/۶۲- (بیست و نه)- «مقالة فی طالع قبة الارض و حالات الثواب ذوات العروض» [۱۷].
- ۳/۶۳- (سی)- «مقالة صغیره فی اعتبار مقدار اللیل و النهار فی جمیع الارض لتعریف کون السنة یوما تحت القطب» [۱۸].
- ۳/۶۴- (سی و یک)- «کتاب فی تحقیق منازل القمر» [۶۱].
- ۳/۶۵- (سی و دو)- «فی الفحص عن نوادر ابی حفص عمر بن الفرخان*» [۶۲].
- ۳/۶۶- (سی و سه)- «الجوابات عن المسائل الوارده من منجمی الهند» [۷۱].
- ۳/۶۷- (سی و چهار)- «الجوابات عن المسائل العشر الکشمیریة» [۷۲].
- ۳/۶۸- (سی و پنج)- «تویر المنهاج الی تحلیل الازیاج» [۱۰۰].
- ۳/۶۹- (سی و شش)- «التطبیق الی تحقیق حركة الشمس» [۱۰۱].^{۸۰}
- از این کتاب بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» (چاپ حیدرآباد صفحه ۶۹) نام برده است.
- ۳/۷۰- (سی و هفت)- «الارشاد الی ما یدرک و لا ینال من الابعاد» [۱۰۶].
- ۳/۷۱- (سی و هشت)- «جلاء الازهان فی زیج البتانی*» [۱۱۱].
- ۳/۷۲- (سی و نه)- «علل زیج جعفر المکنی بابی معشر*» [۱۱۳].
- ۳/۷۳- (چهل)- «الزیج المسعودی» [۱۴۱].
- به احتمال قوی این همان «قانون مسعودی» است.
- ۳/۷۴- (چهل و یک)- «اختصار المجسطی» [۱۴۴].
- ۳/۷۵- (چهل و دو)- «کتاب فی لوازم الحركتین» [۱۴۵].
- ۳/۷۶- (چهل و سه)- «کتاب الاستشهاد باختلاف الارصاد» [۱۴۶].
- بیرونی خود در سه موضع از کتاب «آثارالباقیه» از کتاب فوق نام برده است.
- یکجا درباره طول سال شمسی می نویسد:^{۸۱} «علت اختلافی که درکمیت سال در رصدهای مختلف مشاهده می شود از جهت چگونگی روشهایی که برای درک حقیقت آن به کار می رود
۸۰. در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» ص ۱۱۴، نام این کتاب «التطریق الی تحقیق حركة الشمس» آمده است.
۸۱. «آثارالباقیه» ص ۱۰.

نیست. بلکه علت آن است که اجرام سماوی بزرگ و آلتی که برای رصد آنها به کار می رود کوچک هستند و دقت کافی ندارند» و اشاره می کند که در کتاب «الاستشهاد باختلاف الارصاد» تألیف خود در این باره بیشتر گفتگو کرده است.

و باز در همان کتاب به کتاب فوق اشاره کرده می نویسد: ^{۸۲} «همان گونه که من در بیشتر کتابهای خود و مخصوصاً در کتاب «الاستشهاد باختلاف الارصاد» عمل کرده ام».

و نیز در همان «آثارالباقیه» درباره استخراج دوری نقطه اوج از نقطه اعتدال ربیعی می نویسد: ^{۸۳} «این روش قدما در استخراج اوج بود... واستاد من ابونصر منصور بن علی بن عراق * مولی امیرالمؤمنین را درباره استخراج اوج روشی است که در آن رصد سه نقطه دلخواه از فلک البروج، پس از به دست آوردن مقدار سال شمسی، مورد احتیاج است و من در کتاب «الاستشهاد باختلاف الارصاد» ثابت کرده ام که...»

۳/۷۷ (چهل و چهار) - «کتاب فی اعتبار مقدار اللیل و النهار بطریق تبعد عن مواضع المنجمین و القابهم» [۱۵۵].

۳/۷۸ (چهل و پنج) - «ترجمة کتاب المجسطی لبطلمیوس الی لغة الهند» [۱۷۶].

۳/۷۹ (چهل و شش) - «مقالة فی الکلام علی الکواکب ذوات الاذناب و الذوائب» [۵۸].

۳/۸۰ (چهل و هفت) - «مقالة فی تصفح کلام ابی سهل القوهی * فی الکواکب المنقضة» [۶۰].

۳/۸۱ (چهل و هشت) - «فی غروب الشمس عند منارة اسکندریه» [۲۵].

۳/۸۲ (چهل و نه) - «مقالة فی علة علامات البروج فی الزیجات من حروف الجمل» [۹۴].

۳/۸۳ (پنجاه) - «تصور امر الفجر و الشفق فی جهتی الشرق و الغرب من الافق» [۱۰۹].

۳/۸۴ (پنجاه و یک) - «مقالة فی دلالة الاثار العلویة علی الاحداث السفلیة» [۵۶].

بیرونی یک مسئله از این کتاب را در کتاب «استخراج الاوتار» آورده است. ^{۸۴}

۳/۸۵ (پنجاه و دو) - «فی ابطال ظنون فاسده خطرت علی قلوب بعض الاطباء فی امر

الکواکب الحادثة فی الجو» [۵۷].

۳/۸۶ (پنجاه و سه) - «مقالة فی مضیئات الجو الحادثة فی العلو» [۵۹].

۳/۸۷ (پنجاه و چهار) - «مقالة فی البحث عن الطریقة المتعرفه المذکورة فی کتاب الاثار

العلویة» [۶۹].

۷ - جغرافیای ریاضی

۳/۸۸ (پنجاه و پنج) - «کتاب تهذیب الاقوال فی تصحیح العروض و الاطوال» [۲۰].

۳/۸۹ (پنجاه و شش) - «کتاب تصحیف المنقول من العرض و الطول» [۲۱].

۸۲. همان کتاب، ص ۲۵.

۸۳. «آثارالباقیه» صص ۱۸۴ و ۱۸۵.

۸۴. ← «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۷۹.

از این کتاب بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» به عنوان «کتاب فی تصحیح المقول بین العرض و الطول» نام برده است.^{۸۵}
 ۳/۹۰- (پنجاه و هفت)- «مقالة فی تصحیح الطول و العرض لمساکن المعمور من الارض» [۲۲].

- ۳/۹۱- (پنجاه و هشت)- «مقالة فی تعیین البلد من العرض و الطول» [۲۳].
 ۳/۹۲- (پنجاه و نه)- «فی اختلاف ذوی الفضل فی استخراج العرض و الميل» [۲۷].
 ۳/۹۳- (شصت)- «کتاب الاجوبة و الاسئلة لتصحیح سمت القبلة» [۲۸].
 ۳/۹۴- (شصت و یک)- «ایضاح الادله علی کیفیة سمت القبلة» [۲۹].
 ۳/۹۵- (شصت و دو)- «تهذیب شروط العمل لتصحیح سموت القبل» [۳۰].
 ۳/۹۶- (شصت و سه)- «فی تقویم القبلة بیست بتصحیح طولها و عرضها» [۳۱].
 ۳/۹۷- (شصت و چهار)- «فی الانبعاث لتصحیح القبلة» [۳۲].
 ۳/۹۸- (شصت و پنج)- «تلافی عوارض الزلّة فی کتاب دلائل القبلة» [۳۳].
 ۳/۹۹- (شصت و شش)- «تحذید المعموره و تصحیحها فی الصورة» [۱۱۲].

۸- آلات نجومی و غیره

- ۳/۱۰۰- (شصت و هفت)- «فی ما اخرج ما فی قوة الاضطراب الی الفعل» [۴۹].
 ۳/۱۰۱- (شصت و هشت)- «فی استعمال الاضطراب الکرّی» [۵۰].
 ظاهراً این کتاب غیر از رساله‌ای است که در شماره ۳/۲۸ نامش را آورده‌ام.
 ۳/۱۰۲- (شصت و نه)- «مقالة فی تعبیر المیزان لتقدیر الازمان» [۵۱].
 ۳/۱۰۳- (هفتاد)- «فی تحصیل الآن من الزمان عند الهند» [۵۲].
 ۳/۱۰۴- (هفتاد و یک)- «الکتابة فی المکایل و الموازین و شرایط الطیار و الشواہین» [۱۰۷].

۳/۱۰۵- (هفتاد و دو)- «ترجمة کتاب فی الاضطراب لابی ریحان الی الفة الهند» [۱۷۷].

۹- گاهشماری

- ۳/۱۰۶- (هفتاد و سه)- «تذکرة فی الارشاد الی صوم النصارى و الاعیاد» [۵۳].
 ۳/۱۰۷- (هفتاد و چهار)- «فی الاعتذار عما سبق لی فی تاریخ الاسکندر» [۵۴].
 ۳/۱۰۸- (هفتاد و پنج)- «کتاب تنقیح التواریخ و امثال ذلک» [۱۰۳].

۱۰- اقلیم‌شناسی (Climatology)

- ۳/۱۰۹- (هفتاد و شش)- «فی الاختلاف الواقع فی تقاسیم الاقالیم» [۲۶].

۳/۱۱۰- (هفتاد و هفت)- «مقالة فی صفة اسباب السخونة الموجودة فی العالم و اختلاف فصول السنة» [۶۸].
 ۳/۱۱۱- (هفتاد و هشت)- «كتاب تقاسیم الاقالیم» [۱۵۴].

۱۱- احکام نجوم

۳/۱۱۲- (هفتاد و نه)- «تجريد الشعاعات و الانوار عن الفضاء المدونه فی الاسفار» [۴۲].
 بیرونی از این کتاب در کتاب «مقالید علم الهیة» (نسخه خطی، صفحات ۳۷ و ۴۱) نام برده است.

۳/۱۱۳- (هشتاد)- «مقالة فی تحصیل الشعاعات بابعـد الطرق عن الساعات» [۴۳].
 ۳/۱۱۴- (هشتاد و یک)- «فی مطرح الشعاع ثابتاً علی تغییر البقاع» [۴۴].
 ۳/۱۱۵- (هشتاد و دو)- «المسائل البلخیة فی المعانی المتعلقة بانکسار الصناعة» [۷۰].
 ۳/۱۱۶- (هشتاد و سه)- «مقالة فی تقسیط القوى و الدلالات بین اجزاء البیوت الاثنی عشر» [۷۴].

۳/۱۱۷- (هشتاد و چهار)- «مقالة فی حکایة طریق الهند فی استخراج العمر» [۷۵].
 ۳/۱۱۸- (هشتاد و پنج)- «فی الارشاد الی تصحیح المبادئ اشتمل علی النمودارات» [۷۷].
 ۳/۱۱۹- (هشتاد و شش)- «مقالة فی تبیین رأی البطلمیوس فی السالخداه» [۷۸].
 ۳/۱۲۰- (هشتاد و هفت)- «ترجمة کتاب الموالید الصغیر لبراهیمهر» [۷۹]. نام صحیح براهیمهره* است.

۳/۱۲۱- (هشتاد و هشت)- «التنبیه علی صناعة التمویه و هی احکام النجوم» [۹۹].
 ۳/۱۲۲- (هشتاد و نه)- «البرهان المنیر فی اعمال التسییر» [۱۰۲].
 بیرونی از کتاب فوق در کتاب «مقالید علم الهیة» (نسخه خطی صفحه ۳۹) نام برده است.
 ۳/۱۲۳- (نود)- «كتاب الشمس الشافیة للنفوس» [۱۴۸].
 ۳/۱۲۴- (نود و یک)- «ارشاد فی احکام النجوم» [۱۴۹].
 ۳/۱۲۵- (نود و دو)- «فی صفیحة التسییر» [۱۵۱].
 ۳/۱۲۶- (نود و سه)- «كتاب المدخل الی علم النجوم و علی حدود النحوس و المواضع القاطعة بالتجارب» [۱۵۲].

د- فهرست آثاری که ابونصر عراق، استاد بیرونی، به نام وی نوشته است**
 در قسمت الف از همین بخش گفتیم که ابونصر عراق، استاد بیرونی، و دو تن از دانشمندان دیگر ۲۵ رساله به نام بیرونی یا در جواب سؤال او نوشته‌اند و بیرونی در فهرستی که به سال ۴۲۷ ه.ق از

آثار محمد بن زکریای رازی و تألیفات خود تا آن زمان تهیه کرده، درباره این ۲۵ رساله نوشته است: «این آثار بمنزله نادرتهای من هستند که در آغوش من پرورش یافته‌اند و همچون گردن‌بندهایی هستند که در پیش سینه من جا دارند و من بین آنها و آثار خود فرق نمی‌گذارم.»

اینک فهرست آن دوازده رساله‌ای را که ابونصر عراق، استاد بیرونی، به نام وی نوشته است و قسمت مهم آنها مربوط به ریاضی و نجوم است در اینجا ثبت می‌کنم.^{۸۶} فقره از این رساله‌ها در سالهای ۱۹۴۷ و ۱۹۴۸ میلادی توسط جمعیت دایرةالمعارف عثمانی در مجموعه «رسائل ابونصر» در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

۱- کتاب فی السموت [۱۱۴].

۲- کتاب فی علة تنصیف التعديل عند اصحاب السند هند. [۱۱۵].

۳- کتاب فی تصحيح كتاب ابراهيم بن سنان فی تصحيح اختلاف الكواكب العلوية [۱۱۶].

سه رساله فوق در مجموعه چاپ شده «رسائل ابونصر» دیده نمی‌شود.

۴- رساله فی براهین اعمال حبش بجدول التقويم [۱۱۷]. - در جزو «رسائل ابونصر» (رساله چهارم)، در ۷۱ صفحه به چاپ رسیده است.

۵- رساله فی تصحيح ما وقع لابى جعفر الخازن من السهو فی زيچ الصفائح [۱۱۸]. در جزو «رسائل ابونصر» (رساله سوم)، در ۵۰ صفحه به چاپ رسیده است.

۶- رساله فی مجازات دوائر السموت فی الاضطراب [۱۱۹]. - در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله چهاردهم)، در ۲۷ صفحه به چاپ رسیده است.

۷- رساله فی جدول الدقائق [۱۲۰]. - در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله پنجم)، در ۴۰ صفحه به چاپ رسیده است.

۸- رساله فی البراهین علی عمل محمد بن الصباح فی امتحان الشمس [۱۲۱]. - در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله دوم)، در ۱۵ صفحه به چاپ رسیده است.

۹- رساله فی الدوائر التي تحدا الساعات الزمانية [۱۲۲]. - در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله اول)، در ۱۲ صفحه به چاپ رسیده است.

۱۰- رساله فی البرهان علی عمل حبش فی مطالع السموت فی زیجه [۱۲۳]. در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله یازدهم)، در ۹ صفحه به چاپ رسیده است.

۱۱- رساله فی معرفة القسی الفلکیة بطریق غیر طریق النسبة المؤلفة [۱۲۴]. در جزو «رسائل ابونصر»، (رساله هشتم)، در ۱۳ صفحه به چاپ رسیده است و یکی از مهمترین رساله‌هایی است که ابونصر عراق درباره «شکل مغنی» به بیرونی نوشته است.^{۸۷}

۸۶. فهرست دوازده رساله را که ابوسهل عیسی بن یحیی مسیحی جرجانی و یک رساله دیگر را که ابوعلی حسن بن علی جیلی به نام بیرونی نوشته‌اند. در «لغت‌نامه دهخدا» حرف الف، صفحات ۴۶۹ و ۴۷۰ خواهد یافت.

۸۷. ← بخش هفتم کتاب حاضر.

۱۲- رسالة فی حل شبهة عرضت فی الثالثة عشرة من کتاب الأصول [۱۲۵]. جزو «رسائل ابونصر»، (رسالة هفتم)، در ۶ صفحه به چاپ رسیده است. این رساله را ابونصر عراق در جواب سؤالاتی که ابوریحان بیرونی درباره مشکلات مقاله سیزدهم اقلیدس کرده بوده، نوشته است.

* * *

بخش چهارم

خلاصه کتاب «راشیکات الهند»

مشمول بر: موضوع کتاب «راشیکات» - خلاصه مطالب کتاب راشیکات.

الف - موضوع کتاب «راشیکات»

۴/۱- کتاب «راشیکات الهند» کتاب مختصری است به زبان عربی که موضوع آن بحث دربارهٔ نسبت و تناسب است و در سال ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن توسط «دایرة المعارف عثمانیه» به چاپ رسیده^۱ (در ۳۰ صفحه) و دو نسخه خطی از آن موجود است.^۲

اهمیت این کتاب مختصر از لحاظ تاریخ ریاضیات از این جهت است که بیرونی آنچه را دربارهٔ نسبت و تناسب در ریاضیات هندی یافته با آنچه در این باره از ریاضیات یونانی به کشورهای اسلامی رسیده بوده درهم آمیخته و آنها را با هم تلفیق کرده و پیش از او کسی این کار را انجام نداده بوده است.

بیرونی کوشیده است تا مسائل تناسب را که هندیان با ذکر قاعده‌هایی عملاً حل می‌کردند بر مبنای ریاضیات یونانی مورد بحث قرار دهد. به همین جهت است که در آغاز کار تعریف نسبت و تناسب را همان‌گونه که در بین ریاضیدانان مسلمان متداول بوده است بیان کرده سپس به حل مسائل تناسب با روش هندیان و ذکر اصطلاحات آنان در این مورد پرداخته است. قسمت اعظم

۱. رسالهٔ چهارم از «رسائل البیرونی» که عنوان آن «مقاله فی راشیکات الهند» است.

۲. ← «بوالول» ص ۱۸۸، ش ۳۸. در آنجا عنوانهای دو مقاله را که به زبان آلمانی دربارهٔ «راشیکات الهند» نوشته‌اند خواهید یافت (من این دو مقاله را در اختیار نداشته‌ام).

این مسائل همان مسائلی هستند که امروزه ما آنها را مسائل تناسب مستقیم و معکوس و مرکب می‌نامیم. در بعضی از مسائل تناسب مرکب که در کتاب «راشیکات» آمده عدّه معلومات حتی به هفده هم می‌رسد.

۴/۲- چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر- چون بیرونی در آغاز کتاب «راشیکات» به بحث درباره «نسبت مؤلف» پرداخته و وجه تسمیه آن و حالات مختلف آن را مورد بررسی قرار داده است، و از طرف دیگر «نسبت مؤلف» در حل مسائل مثلثات کروی در نجوم قدیم اهمیت اساسی داشته است، در صفحات آینده، قسمت اول کتاب «راشیکات» را با تفصیل بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهم و محتویات قسمتهای بعدی آن را که در واقع مسائل ساده‌ای هستند بااختصار ذکر می‌کنم. و یک بار دیگر متذکر می‌شوم که، مانند همه آثاری که از بیرونی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده، نسخه چاپی کتاب «راشیکات» نیز غلط فراوان دارد که تا آنجا که میسر بوده است کوشیده‌ام آنها را تصحیح کنم. ضمناً خاطر نشان می‌کنم که ترجمه عبارات از عربی به فارسی ترجمه آزاد است و نه تحت‌اللفظی. یعنی مفهوم عبارات را به فارسی نوشته‌ام. و جز در موارد ضروری و مهم، عبارات عربی را نقل نکرده‌ام. و برای مطالب مختلف عنوانهایی اختیار کرده‌ام تا مسائل از یکدیگر تفکیک شود و فهم آنها آسانتر باشد.

ب- خلاصه مطالب کتاب «راشیکات»

۴/۳- تعریف نسبت- کتاب «راشیکات الهند» با تعریف «نسبت» شروع می‌شود و این تعریف تقریباً همان تعریفی است که در کتاب «اصول اقلیدس» آمده است،^۳ جز اینکه بیرونی آن را مفصلتر بیان کرده و نوشته است:

«نسبت مابین مقادیر متجانس صورتی است از صورتهای اضافات که از جهت کمیت حاصل می‌شود. و هرگاه یکی از آن مقادیر مجهول باشد می‌توان آن را از روی مقادیر دیگر به دست آورد.»^۴ (مقایسه کنید با تعریف نسبت در بخش نهم کتاب حاضر) سپس بیرونی به توضیح پرداخته و نوشته است:^۵ «و بین هر مقدار و هریک از مقادیر دیگری که همجنس آن هستند نسبتی هست، خواه بتوانیم آن نسبت را پیدا کنیم و خواه بیان آن از حیث ظاهر میسر نشود. مثل نسبت بین قطر دایره و محیط آن که بیان نسبت آنها به علت اینکه اولی خط مستقیم و دومی مستدیر (=منحنی)

۳. ← «تحریر اقلیدس» ص ۷۱ و «هیث E» ج ۲، ص ۱۱۴.

۴. «راشیکات» ص ۱: «النسبة فيما بين المقادير المتجانسة هي صورة من صورالاضافات تحصل لها من جهة الكمية فيعرف بها احدهما من الاخران كان غير معلوم».

۵. «راشیکات» ص ۱: «وما من مقدار الاوله الى جميع المقادير التي تشاركه في الجنس نسبة ما سواء وقف عليها اولم يوصل اليها من جهة صورته كالتی بين القطر والدور من اجل الاستقامة والاستدارة و أؤ (در نسخه چاپی: والا) من جهة صمه كالتی بين القطر والضلع لاجل التباين. فالنسبة اذن حاصلة ابدأ بين كل مقدارين متجانسين حصولا بالاطلاق. ثم لاتنحصر بذاتها حتى تصير محدودة او معلومة الا اذا اذوجت باخری فوقفت عندها على النسبتين».

است به ظاهر میسر نیست.^۶ و همچنین مانند نسبت بین قطر مربع و ضلع آن به جهت اصم بودن آن.^۷ دو مقدار متجانس همیشه علی‌الطلاق نسبتی دارند. اما یک نسبت به تنهایی معلوم و محدود نمی‌شود مگر اینکه آن را با نسبت دیگری روبه‌رو کنیم.^۸

در اینجا بیرونی از کتاب «اصول اقلیدس» سخن به میان آورده و نوشته است: «و کمترین عده مقادیری که بین آنها تناسب^۹ برقرار می‌شود سه مقدار است» و به این دلیل است که اقلیدس گفته است که کمترین عده جمله‌های تناسب سه است.^{۱۰} سپس بیرونی افزوده است: «اگر دو نسبت بین مقادیر متمایز داشته باشیم^{۱۱} کوچکترین عده جمله‌های تناسب چهار خواهد بود...».

آنگاه بدون آنکه از تصاعد حسابی و تصاعد هندسی گفتگو به میان آورد، رشته عددهای طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... را که تفاضل هر دو جمله متوالی آن ثابت و مساوی با واحد است با رشته تصاعد هندسی ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ... که نسبت هر جمله از آن به جمله ماقبل آن ثابت و مساوی با ۲ است مقایسه کرده و گفته است^{۱۲} همان گونه که عده جمله‌های تصاعد حسابی نامتناهی است، عده جمله‌های تصاعد هندسی نیز نامتناهی است.

سپس می‌گوید که مسائل مربوط به سایر انواع نسبتها از روی تناسب ساده حل می‌شود و اساس همه محاسبات متداول در معاملات و در نجوم و مساحات تناسب ساده است.

آنگاه به اینکه اقلیدس در قضیه شانزدهم از مقاله ششم کتاب «اصول» ثابت کرده است^{۱۳} که حاصل ضرب طرفین تناسب مساوی با حاصل ضرب وسطین آن است^{۱۴} اشاره نموده و نتیجه گرفته است که اگر سه جمله از جمله‌های تناسب معلوم باشد جمله چهارم آن را می‌توان حساب کرد. و پس از بیان روش حل تناسب ساده گفته است که: در ترتیب تناسب به حالت‌های مختلف از «عکس نسبت» و «ابدال نسبت» و «ترکیب نسبت» و «تفصیل نسبت» و «قلب نسبت» برمی‌خوریم.^{۱۵}

۴/۴- **ترای راشیکه**- بیرونی پس از بیان این کلیات به تعریف اصطلاح تناسب ساده در بین

۶. یعنی با علائم کنونی نسبت $\frac{1}{2}$. بیرونی خود مقدار تقریبی نسبت $\frac{1}{2}$ را در «قانون مسعودی» حساب کرده است. (قسمت «ی» بخش هشتم کتاب حاضر) اصم بودن عدد π در سال ۱۷۶۱ م توسط لامبرت و متعالی بودن آن در سال ۱۸۸۲ م توسط لیندمان به‌ثبوت رسید.

۷. می‌دانیم که نسبت قطر مربع به ضلع آن مساوی با $\sqrt{2}$ و عددی است اصم.
۸. تا تناسب حاصل شود.

۹. «تناسب» در بخش نهم کتاب حاضر.

۱۰. «تحریر اقلیدس» ص ۷۲: «اقل مایقع فيه التناصب ثلثة حدود» و «هیت E» ج ۲، ص ۱۱۴.

۱۱. مثل نسبت دو زاویه مرکزی در دایره و نسبت کمانهای مقابل آنها.

۱۲. «راشیکات» ص ۲: «وکما ان الفرد غیر واقف عن التزايد بالتفاضل المستوی...».

۱۳. «راشیکات» ص ۲.

۱۴. «تحریر اقلیدس» ص ۹۱ - «هیت E» ج ۲، ص ۲۲۱.

۱۵. برای تعریف این اصطلاحات ← بخش نهم کتاب حاضر.

هندیان پرداخته و گفته است^{۱۶} که چون برای حل تناسب ساده معلوم بودن سه جمله از چهار جمله آن لازم است هندیان تناسب ساده را برای راشیکه *Trairāsika* می نامند، یعنی سه خانه. و در بیان وجه تسمیه ترای راشیکه می گوید راش یعنی برج و راشیکه یعنی موضعی از صورت فلکی. و می افزاید که منجمان هندی بیوت دوازده گانه را راشیکه می نامند و تناسب ساده را از آن جهت ترای راشیکه می گویند که معلومات لازم برای حل تناسب سه است و در موقع حل تناسب، آن سه معلوم را در سه خانه قرار می دهند. و هندیان در حسابهای خود طریق عددی به کار می برند و صحت نتیجه را به وسیله آزمایش معین می کنند، و برخلاف یونانیان، استدلال هندسی را به کار نمی برند.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 15 & ? \end{array}$$

آنان دو خط متقاطع به شکل فوق رسم می کنند تا چهار موضع پدید آید و مثلاً می گویند: اگر پنج به پانزده باشد، سه به چند است؟ سپس ۱۵ را به مکان خالی انتقال می دهند به شکل فوق و آن را در عدد فوق خود یعنی ۳ ضرب می کنند تا ۴۵ حاصل شود. بعد ۴۵ را به ۵ تقسیم می کنند ۹ حاصل می شود و این ۹ جواب مسئله است که باید آن را در مکان خالی قرار داد (به شکل زیر).

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 15 & 9 \end{array}$$

و این همان است که قبلاً ذکر کردیم زیرا چنانکه گفتیم در عمل ضرب، دو قطر این شکل نظیر یکدیگرند.

$$(5 \times 9 = 3 \times 15)$$

و هرگاه ۱۵ را به ۵ که در فوق آن است تقسیم کنیم ۳ حاصل می شود. و ۳ مساوی است با خارج قسمت تقسیم ۹ بر ۳. و اگر ۳ را در ۳ ضرب کنیم ۹ حاصل می شود. و علت این امر این است که چنانکه گفتیم در عمل تقسیم، اضلاع این شکل (یعنی ستونها) نظیر یکدیگرند.

۴/۵- تکریر نسبت- سپس بیرونی به تعریف «تألیف نسبت» و «تکریر نسبت» می پردازد و به قول خود این مطالب را برای مزید اطلاع خواننده کتاب «علی وجه الاخبار» بیان می کند و می گوید:^{۱۷}

ممکن است مقادیر متوالی نسبت ثابتی داشته باشند مانند اعداد:

۱۶. «راشیکات» ص ۳.

۱۷. «راشیکات» ص ۴.

$$۳ \text{ و } ۹ \text{ و } ۲۷ \text{ و } ۸۱ \text{ و } ۲۴۳ \text{ و } ۷۲۹ \text{ و } \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\dots \text{ ششم و پنجم چهارم سوم دوم اول}$$

(که نسبت هر جمله به جمله بعدی $\frac{1}{3}$ است). در این صورت نسبت جمله اول به جمله سوم مساوی با مربع نسبت جمله اول است به جمله ثانی.

$$\frac{3}{27} = \left(\frac{3}{9}\right) \left(\frac{3}{9}\right) = \left(\frac{3}{9}\right)^2 \quad \text{یعنی:}$$

و این را نسبت مثناة بالتکریر یعنی «دوباره گفته» می نامند. همچنین نسبت جمله اول به جمله چهارم مساوی است با قوة سوم نسبت جمله اول به جمله دوم.

$$\frac{3}{81} = \left(\frac{3}{9}\right) \left(\frac{3}{9}\right) \left(\frac{3}{9}\right) = \left(\frac{3}{9}\right)^3 \quad \text{یعنی:}$$

و این را نسبت مثلثة بالتکریر یعنی «سه باره گفته» می نامند. و به همین قیاس می توان نسبت مرتبة بالتکریر و غیره را تعریف کرد.^{۱۸}

واضح است که این مطلب مربوط به تصاعد هندسی زیر است:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}$$

که اگر جمله های متوالی آن را (از چپ به راست) t_1 و t_2 و ... و t_n و قدر نسبت تصاعد را q بنامیم دستور زیر را داریم $t_n = t_1 \cdot q^{n-1}$ که بیرونی آن را با در نظر گرفتن اینکه $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{q}$ ، به صورت زیر بیان کرده است:

$$\boxed{\frac{t_1}{t_n} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{n-1}}$$

۴/۶- تألیف نسبت- سپس می گوید^{۱۹} که اگر جمله های متوالی همه به یک نسبت نباشند، بلکه نسبت های آنها مختلف باشد، نسبت جمله اول به جمله سوم تألیف می شود^{۲۰} از نسبت جمله اول به جمله دوم و از نسبت جمله دوم به جمله سوم.

۱۸. ← این اصطلاحات در بخش نهم کتاب حاضر.

۱۹. «راشیکات» ص ۴: «ثم ان لم تتحفظ التوالی علی نسبة واحدة ...».

۲۰. و نیز ← تعریف «نسبت مؤلف» در بخش نهم کتاب حاضر.

یعنی اگر سه جمله مانند a_1 و a_2 و a_3 داشته باشیم معلوم است که:

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3}$$

و اگر چهار جمله مانند a_1 و a_2 و a_3 و a_4 داشته باشیم معلوم است که:

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_2}{a_3} \times \frac{a_3}{a_4}$$

سپس می‌گوید: تکریر نسبت، نوع و تألیف نسبت، جنس آن است. به عبارت دیگر «تکریر نسبت» حالت خاصی از «تألیف نسبت» است. و به این جهت است که اقلیدس گفته است^{۲۱} که: می‌گویند یک نسبت از چند نسبت تألیف شده است هرگاه اگر بعضی از آن نسبتها را به بعضی دیگر بزنیم نسبت مذکور حاصل شود.

بیرونی به عنوان مثال اعداد زیر را در نظر گرفته است:

$$۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۱۲۰$$

و گفته است:

$$\frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴} \text{ و } \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۳} \text{ و } \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

پس:

$$\frac{۵}{۳۰} = \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۳۰} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}$$

در اینجا نسبت $\frac{۵}{۳۰}$ تألیف شده است از حاصل ضرب $\frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۱۰}{۳۰}$ یعنی از حاصل ضرب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ می‌توان گفت که $\frac{۵}{۳۰}$ مساوی است با نصف ثلث.

باید متوجه بود که همچنانکه در «التفهیم فارسی» آمده است^{۲۲} «مؤلف» یعنی «بهم کرده» و در اینجا مقصود از تألیف جمع نیست بلکه ضرب است. و در واقع تألیف از جهت الفاظ است که می‌گوئیم $\frac{۵}{۳۰}$ مساوی است با نصف ثلث یعنی $\frac{۱}{۲}$ از $\frac{۱}{۳}$.

همچنین

$$\frac{۵}{۱۲۰} = \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۳۰} \times \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴}$$

در اینجا نسبت $\frac{۵}{۱۲۰}$ تألیف شده است از حاصل ضرب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$. و همچنین یک نسبت ممکن است از چندین نسبت تألیف شود.

بیرونی سپس می‌گوید: ^{۲۳} «گاهی به جای آنکه بگویند نسبت a به b تألیف شده است از نسبت

۲۱. «راشیکات» ص ۵: «ولهذا قال اقلیدس يقال ان النسبة مؤلفة من عدد نسبت اذا ضوعفت بعضها ببعض فاحدث تلك النسبة» و «تحریر اقلیدس» ص ۸۲ و «هیث E» ج ۲، ص ۱۸۹، تعریف ۵.

۲۲. «نسبت مؤلف» در بخش نهم کتاب حاضر.

۲۳. «راشیکات» ص ۶: «و زبنا قيل بدل التألیف ان نسبة ...».

c به d و از نسبت e به f (یعنی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$) می‌گویند:

نسبت a به b مساوی است با نسبت c به d مثلاً به نسبت e به f . اما اصطلاح اول بهتر و معنی آن رساتر است.

۴/۷- مورد استعمال نسبت مؤلفد بیرونی پس از مقدمات فوق نسبتی را که از دو نسبت دیگر تألیف شده باشد مورد بررسی قرار می‌دهد. علت این امر این است که این‌گونه نسبت پیش از اختراع شکل‌های «مغنی» و «ظلی»^{۲۴} در نجوم و در محاسبه جیبها در شکل قطاع^{۲۵} به‌کار می‌رفته و بعد از آن هم باز مورد استعمال داشته است. او مثال زیر را در نظر می‌گیرد:^{۲۶}

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$$

و می‌گوید، در این نسبت شش مقدار هست و هرگاه یکی از آنها مجهول و بقیه معلوم باشد می‌توان مقدار مجهول را حساب کرد. مثلاً اگر b مجهول باشد داریم:

$$b = \frac{a \cdot d \cdot f}{c \cdot e}$$

و می‌افزاید که در کتاب «راشیکات الهند» مقصودش فقط تعریف این نسبت بوده است و نه ذکر موضوع آن به تفصیل و با استدلال.

سپس می‌گوید^{۲۷} که عده‌ای از دانشمندان که معاصروی یا از حیث زمان مقدم بر وی بوده‌اند نسبت مؤلف از دو نسبت را در کتابهای خود مورد بحث و تحقیق قرار داده‌اند مانند ثابت بن قره* و نیریزی (ابولعباس)* و ابن البغدادی* و ابوجعفر خازن* و سجزی (ابوسعید)*. مقصود بیرونی ظاهراً کتابهای زیر است:

الف- «کتاب الی المتعلمین فی النسبة المؤلفة» تألیف ثابت بن قره*

ب- «شرح مجسطی» تألیف نیریزی* (ابوالعباس) که در آن نسبت مؤلف را مورد بررسی قرار داده است.

ج- «شرح مجسطی» تألیف ابوجعفر خازن* که در آن درباره نسبت مؤلف به تحقیق پرداخته است.

د- کتاب «النسبة المؤلفة» تألیف سجزی* (ابوسعید) که منحصرأ درباره نسبت مؤلف نوشته شده است.

۲۴. — قسمت «د» از بخش هفتم کتاب حاضر.

۲۵. — اصطلاح «شکل قطاع» در بخش نهم کتاب حاضر.

۲۶. «راشیکات» ص ۶.

۲۷. «راشیکات» ص ۱۷.

۴/۸- بررسی نسبت مؤلف - بیرونی پس از ذکر اسامی دانشمندانی که «نسبت مؤلف» را مورد بررسی و تحقیق قرار داده‌اند می‌گوید^{۲۸} از جمله این تحقیقات این است که: اگر بین شش مقدار، همچنانکه قبلاً گفتیم، نسبت مؤلف برقرار باشد:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \times \frac{a_5}{a_6} \quad (۱)$$

هریک از دو نسبت ساده [مقصود دو نسبت $\frac{a_1}{a_2}$ و $\frac{a_3}{a_4}$ است] که در تألیف نسبت اول [یعنی $\frac{a_1}{a_2}$] به‌کار می‌روند خود از نسبت اول و عکس نسبت دیگر تألیف می‌شوند. یعنی

$$\frac{a_5}{a_6} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_3}{a_4} \quad \text{و} \quad \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_5}{a_6}$$

سپس می‌گوید: ^{۲۹} اگر چه شش مقداری را که در تألیف نسبت به‌کار می‌روند می‌توان به پانزده طریق مختلف با هم ترکیب کرد،^{۳۰} اما هر دو مقدار دلخواه از شش مقدار مذکور را نمی‌توان صورت و مخرج یک نسبت قرار داد. مثلاً با دو مقدار از سه مقدار a_1 و a_4 و a_6 نمی‌توان یک نسبت تشکیل داده آن را از باقی مقادیر تألیف کرد. و همچنین با دو مقدار از سه مقدار a_2 و a_3 و a_5 تشکیل یک نسبت مؤلف ممکن نیست.

[زیرا تساوی (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_3 \cdot a_5$$

و واضح است که از این تساوی نمی‌توان مثلاً نسبت $\frac{a_1}{a_2}$ را به دست آورد.]

اما می‌توانیم ابتدا a_1 را جداگانه با a_2 یا a_3 یا a_5 بگیریم و هر یک از سه نسبت $\frac{a_1}{a_2}$ و $\frac{a_1}{a_3}$ و $\frac{a_1}{a_5}$ را از دو نسبت تألیف کنیم. سپس a_2 و a_3 را جداگانه با a_4 و a_6 بگیریم و هر یک از نسبت‌های $\frac{a_2}{a_4}$ و $\frac{a_2}{a_6}$ و $\frac{a_3}{a_4}$ و $\frac{a_3}{a_6}$ را از دو نسبت تألیف کنیم و بعد a_4 را با a_5 بگیریم و a_5 را با a_6 اختیار کرده هر یک از نسبت‌های $\frac{a_5}{a_6}$ و $\frac{a_4}{a_6}$ را از دو نسبت تألیف کنیم. به این ترتیب نه نسبت مختلف به دست می‌آید که هر یک از آنها را می‌توان از دو نسبت تألیف کرد.

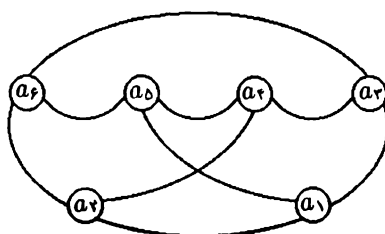
بیرونی در اینجا نموداری رسم کرده و گفته است^{۳۱} که در شکل زیر هر دو مقدار را که به وسیله یک خط منحنی به هم وصل شده می‌توان صورت و مخرج یک نسبت قرار داد و آن را از دو نسبت دیگر تألیف کرد.

۲۸. «راشیکات» ص ۷: «ان النسبة اذا تألفت بين ستة مقادير كما ذكرنا كانت كل واحدة من النسبتين البسيطتين اللتين منهما التأليف مؤلفة من النسبة المؤلفة الاولى و من خلاف النسبة البسيطة الباقية».

۲۹. «راشیکات» ص ۸، سطر اول به بعد.

۳۰. بیرونی در اینجا دستور ترکیب شش شیء را دوبه دو به‌کار برده است که امروزه چنین می‌نویسیم: $C_6^2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = ۱۵$

۳۱. «راشیکات» ص ۹.



شکل ۱

بیرونی سپس گفته است که هر یک از نسبتهای نهگانه مذکور را به دو طریق می‌توان از دو نسبت تألیف کرد. مثلاً نسبت $\frac{a_1}{a_2}$ را به دو صورت زیر می‌توان تألیف نمود:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_6} \times \frac{a_5}{a_4} \quad \text{و} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \times \frac{a_5}{a_6}$$

و بنابراین هیجده گونه نسبت مؤلف حاصل می‌شود.

و هرگاه عکس هر یک از این نسبتها را در نظر بگیریم روی هم رفته سی و شش حالت به دست می‌آید. اما بیرونی عکس نسبتها را به علت واضح بودن مطلب در نظر نگرفته و جدول صفحه بعد را برای به خاطر سپردن هیجده نسبت مذکور تشکیل داده است.^{۳۲} (این بود شرحی که بیرونی در این باره نوشته است.)

به زبان ساده تر می‌توان رابطه

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \quad (۲)$$

را به صورت زیر نوشت:

$$a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot e \quad (۳)$$

و هرگاه این تساوی برقرار باشد می‌توان از روی آن هیجده نسبت مؤلف را به دست آورد. زیرا اگر مثلاً a را از سمت چپ رابطه (۳) صورت و b را از سمت راست آن مخرج قرار دهیم، نسبت $\frac{a}{b}$ را به دو وجه زیر می‌توان تألیف کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{f} \times \frac{e}{d} \quad \text{و} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$$

^{۳۲} در کتاب «راشیکات الهند» چاپ حیدرآباد، ص ۹ این جدول با حروف جتل نوشته شده و دارای چندین غلط است که در اینجا تصحیح کرده‌ام.

شماره	نسبتی که از دو نسبت تألیف می‌شود	نسبت اول	نسبت دوم
۱	$a_1 : a_2$	$a_3 : a_4$	$a_5 : a_6$
۲	$a_1 : a_2$	$a_3 : a_6$	$a_5 : a_4$
۳	$a_1 : a_3$	$a_2 : a_4$	$a_5 : a_6$
۴	$a_1 : a_3$	$a_2 : a_6$	$a_5 : a_4$
۵	$a_1 : a_5$	$a_2 : a_4$	$a_3 : a_6$
۶	$a_1 : a_5$	$a_2 : a_6$	$a_3 : a_4$
۷	$a_2 : a_4$	$a_1 : a_3$	$a_6 : a_5$
۸	$a_2 : a_4$	$a_1 : a_5$	$a_6 : a_3$
۹	$a_2 : a_6$	$a_1 : a_5$	$a_4 : a_3$
۱۰	$a_2 : a_6$	$a_1 : a_3$	$a_4 : a_5$
۱۱	$a_3 : a_4$	$a_1 : a_2$	$a_6 : a_5$
۱۲	$a_3 : a_4$	$a_1 : a_5$	$a_6 : a_2$
۱۳	$a_3 : a_6$	$a_4 : a_2$	$a_1 : a_5$
۱۴	$a_3 : a_6$	$a_1 : a_2$	$a_4 : a_5$
۱۵	$a_4 : a_5$	$a_3 : a_1$	$a_2 : a_6$
۱۶	$a_4 : a_5$	$a_2 : a_1$	$a_3 : a_6$
۱۷	$a_5 : a_6$	$a_1 : a_2$	$a_4 : a_3$
۱۸	$a_5 : a_6$	$a_1 : a_3$	$a_4 : a_2$

همچنین می‌توان a را از سمت چپ رابطه (۳) و c یا e را از سمت راست آن گرفت و هریک از نسبت‌های $\frac{a}{e}$ و $\frac{a}{c}$ را به دو وجه مانند فوق تألیف کرد:

$$\frac{a}{c} = \frac{e}{f} \times \frac{b}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{c} = \frac{e}{d} \times \frac{b}{f}$$

و

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{f} \times \frac{b}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{e} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{f}$$

به این ترتیب دیده می‌شود که اگر a را صورت و یکی از حروف سمت راست رابطه (۳) را مخرج قرار دهیم شش نسبت می‌توان با شش مقدار مفروض تألیف کرد. بنابراین اگر هریک از

حروف سمت چپ رابطه (۳) را جداگانه به سه حرف سمت راست آن رابطه نسبت دهیم نه نسبت به دست می‌آید که هر یک از آنها را به دو وجه می‌توان تألیف کرد. پس روی هم رفته هیجده نسبت مؤلف حاصل می‌شود. و این در حالتی است که حروف سمت چپ رابطه (۳) را صورت نسبت قرار دهیم. و اگر عکس این نسبتها را هم در نظر بگیریم سی و شش نسبت مؤلف حاصل خواهد شد.

سپس بیرونی به ذکر حالت خاصی پرداخته که در آن دو مقدار از شش مقداری که در نسبت مؤلف موجودند با هم مساوی باشند، که البته در این حالت تناسب ساده به دست می‌آید، و حاصل را در جدولی ثبت کرده است.

۴/۹- **نسبتهای معطوف**- بیرونی پس از شرح تألیف نسبت، به عطف نسبتها (النسبة المعطوفة بالواو) نیز اشاره کرده و گفته است^{۳۳} که مقصود از نسبتهای معطوف حاصل جمع آنهاست. و به عنوان مثال معادله زیر را با همان نسبتهایی که در مثال تألیف نسبت به کار برده بود تشکیل داده.

$$\frac{39}{x} = \frac{5}{10} + \frac{10}{30} + \frac{30}{120}$$

و آن را به ترتیب زیر حل کرده است:

$$\frac{39}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

یا

$$39 = \frac{26}{24}x$$

و از آنجا

$$x = 36$$

۴/۱۰- **مسئله تناسب مرکب نزد هندیان**- بیرونی پس از ذکر مقدمات فوق که در واقع اشاره به مطالبی است که در بین ریاضیدانان دوره اسلامی تا زمان وی درباره نسبت مؤلف معمول بوده به شرح مسئله «تألیف نسبت» در بین هندیان پرداخته و نوشته است:^{۳۴}

۳۳. «راشیکات» ص ۱۱: «فاما اذا اجتمعت النسبة المعطوفة بالواو لم تكن النسبة التي بارائها مؤلفة منها بل مشابهة لها.»

۳۴. «راشیکات» ص ۱۳، «واما الهند فانهم يسمون المقادير التي تتألف منها النسبة پنج راشیک لان مفروضاته خمسة توضع في خمسة مواضع و يطلب منها السادس و يسلكون في استخراج المجهول طريقاً يعمه مع ما قبله و بعده و هو الذي قدم في تری راشیک.»

و اما هندیان مقادیری که از آنها نسبت تألیف می‌شود پنجه راشیکه (Panca rāsika) می‌نامند. زیرا عدّه مفروضات آن پنج است که آنها را در پنج موضع قرار می‌دهند و مقدار ششم را جستجو می‌کنند. و برای پیدا کردن این مجهول روشی به‌کار می‌برند که شبیه همان روشی است که در ترائی‌راشیکه مورد استفاده است (رجوع کنید به شماره ۴/۴) و برای پنجه راشیکه و حل آن مثال زیر را آورده است:

مسئله ۱- اگر ۱۰ درهم در ۲ ماه ۵ درهم سود بدهد. ۸ درهم در ۳ ماه چه اندازه سود خواهد کرد؟^{۳۵}

بیرونی می‌گوید که این مقادیر را هندیان به صورت زیر می‌نویسند:

۱۰	۸
۲	۳
۵	

در شکل فوق جای خالی محل مجهول (یعنی سود ۸ درهم در ۳ ماه) است و همیشه جای مجهول را در پایین شکل قرار می‌دهند.

برای حل این تناسب مرکب عدد ۵ را به طرف راست انتقال می‌دهند به این شکل

۱۰	۸
۲	۳
	۵

و آن را در اعدادی که در ستون سمت راست شکل اخیر در فوق ۵ قرار گرفته ضرب می‌کنند. می‌شود $۱۲۰ = ۵ \times ۳ \times ۸$ سپس اعدادی را که در ستون سمت چپ قرار گرفته نیز درهم ضرب می‌کنند، می‌شود $۲۰ = ۲ \times ۱۰$ آن‌گاه ۱۲۰ را بر ۲۰ تقسیم می‌کنند عدد ۶ که جواب مسئله است حاصل می‌شود.

این مطلب شایسته توجه است که امروزه ما نیز برای حل تناسب مرکب اعداد معلوم را تقریباً مانند فوق ولی در دو سطر (به جای دو ستون) می‌نویسیم.

آن‌گاه بیرونی این روش هندی را با «نسبت مؤلف» مقایسه می‌کند. و در واقع برای راه حل هندیان دلیل می‌آورد (که چون مطلب بسیار ساده است از شرح آن صرف نظر می‌کنم). و این مثال جالب توجهی است از کوششی که ریاضیدانان دوره اسلامی به عمل آورده‌اند تا ریاضیات کاربردی هندیان را مطابق با اسلوب ریاضیات یونانی با استدلال بیان کنند.

۳۵. «راشیکات» ص ۱۳: «وللمثال فیقال ان عشرة دراهم ربحت فی الشهرین خمسة دراهم فالثمانیه فی ثلاثة اشهرکم تریح- مثالی نظیر این را در کتاب «تاریخ ریاضیات هندی» ج ۱، ص ۲۱۳ خواهید یافت که آن را از کتاب «لیلا وتی» نقل کرده‌اند.

سپس بیرونی یک مسئله تناسب مرکب را که در آن سه نسبت یعنی شش مقدار دخالت دارد در نظر می‌گیرد و هر بار صورت یا مخرج یکی از سه نسبت را مجهول و بقیه را معلوم اختیار می‌کند تا نشان دهد که این روش کلی است و مسائل زیر را عنوان و آنها را حل می‌کند. مطلب جالب توجه در اینجا این است که حتی در مواقعی که تناسبها معکوس هستند نیز، با تغییر مکان دادن معلومات، مسئله را با همین روش حل می‌کند. اینک مسائل مذکور:

مسئله ۲- اگر ۱۰ نفر کارگر در دو روز ۵ ذراع از زمینی را حفر کنند، ۸ نفر در ۳ روز چند ذراع حفر خواهند کرد؟^{۳۶}

$$\left(\text{جواب: ذراع } 6 = \frac{10 \times 5 \times 3}{10 \times 2} \right)$$

مسئله ۳- اگر ۱۰ نفر کارگر در ۲ روز ۵ ذراع از زمینی را حفر کنند، ۸ نفر در چند روز ۶ ذراع حفر خواهند کرد؟^{۳۷}

$$\left(\text{جواب: روز } 3 = \frac{10 \times 2 \times 6}{8 \times 5} \right)$$

مسئله ۴- اگر ۸ نفر در ۳ روز ۶ ذراع مکعب از زمینی را حفر کنند ۵ ذراع از همان زمین را چند نفر در ۲ روز حفر خواهند کرد؟^{۳۸}

$$\left(\text{جواب: نفر } 10 = \frac{5 \times 8 \times 3}{6 \times 2} \right)$$

سپس می‌گوید که برای اجناس بهادار نیز روش هندی شبیه به همین است و مثال زیر را می‌آورد:

مسئله ۵- اگر بهای ۱۰۰ دانه به (سفرجل) ۱۰ درهم و بهای ۱۰۰ دانه انار (رمانه) ۸ درهم باشد بهای چند انار مساوی با بهای ۲۰ به خواهد بود؟^{۳۹}
(جواب: بهای ۲۵ انار)

۴/۱۱- نسبت متکافی- بیرونی سپس به تناسب معکوس که ریاضیدانان دوره اسلامی آن را نسبت متکافی یا «تکافی النسبة» می‌نامیدند^{۴۰} می‌پردازد و می‌گوید که هندیان تناسب معکوس را نیز به کار می‌برند^{۴۱} و آن را «ویسته ترای راشیکه» (*Vyastatrairāsika*) می‌نامند و به عنوان

۳۶. «راشیکات» ص ۱۴: «عشرة رجال حفروا فی یومین خمسة اذرع...».

۳۷. «راشیکات» ص ۱۴: «عشرة نفر حفروا فی یومین...».

۳۸. «راشیکات» ص ۱۷: «فان قيل ان الثمانية نفر حفروا...».

۳۹. «راشیکات» ص ۱۹: «كان سائلاً سأل وقال مائة سفرجل بعشر دراهم...».

۴۰. «نسبت متکافی» در بخش نهم کتاب حاضر.

۴۱. «راشیکات» ص ۱۹: «و يستعملون ایضا الاربعة الاعداد المتناسبه بالتکافی، و هی النسبة التي تعطيها الابعاد

مثال مسئله زیر را حل می‌کند:

مسئله ۶- اگر بهای یک کنیز ۲۰ ساله ۸ درهم باشد بهای کنیز ۴۰ ساله چند درهم خواهد بود؟^{۴۲}
(جواب: ۴ درهم)

۴/۱۲- سپته راشیکه- آنگاه بیرونی به مسائلی که در آنها چهار نسبت یعنی ۷ مقدار معلوم و یک مجهول به‌کار می‌آید پرداخته و می‌گوید که این را به‌هندی سپته راشیکه (*Septa rāsika*) می‌گویند و به‌عنوان مثال مسئله زیر را حل می‌کند:^{۴۳}

مسئله ۷- اگر بهای قطعه‌ای از چوب صندل به طول ۵ انگشت و به عرض ۳ انگشت و به ضخامت ۴ انگشت ۳۰ درهم باشد، قطعه‌ای از همان چوب که طولش ۸ انگشت و عرضش ۶ انگشت و ضخامتش ۲ انگشت باشد چند درهم خواهد بود؟

$$\left(x = \frac{8 \times 6 \times 2 \times 30}{5 \times 3 \times 4} = 48 \text{ درهم} \right) \text{ (جواب: ۴۸ درهم)}$$

۴/۱۳- مسائل دیگر- بعد از حل مسئله فوق بیرونی از نوه راشیکه (*nava rāsika*) سخن به میان می‌آورد^{۴۴} و آن تناسب مرکبی است که در آن عده معلومات ۹ است و یک مجهول دارد، و پس از آن از اکدشه راشیکه یعنی تناسب مرکبی که در آن عده معلومات یازده است و یک مجهول دارد گفتگو می‌کند^{۴۵} و پس از آن حتی مسائل تناسبی را که در آنها عده معلومات به ۱۷ نیز می‌رسد مورد بحث قرار می‌دهد و برای هر یک از آنها مثالی می‌آورد، که برای احتراز از طولانی شدن کلام و به‌علت مقدّماتی بودن آن مسائل از ذکر آنها صرف‌نظر می‌کنم.

→

مع الانتقال عن مراکزها.

۴۲. صورت این مسئله در کتاب «راشیکات» ص ۱۹ چنین آمده است: «اذا كان جذر بنت العشرين ثمانية دراهم فجذر بنت الاربعين كم يكون»- نظیر این مسئله را بیرونی در کتاب «ماللهند» (چاپ حیدر آباد، ص ۲۶۶-۲۶۷) نیز آورده و از قول هندیان نوشته است: «اذا كان اجرة (جذر؟) الزانية و هي ابنة خمس عشرة مثلاً عشرة دراهم فكمن يكون اذا صارت ابنة اربعين»- و نیز رجوع کنید به ترجمه انگلیسی ماللهند توسط زاخاتو، ج ۱، ص ۳۱۳.

۴۳. «راشیکات» ص ۲۰: «قطعة صندل طولها خمسة اصابع...».

۴۴. «راشیکات» ص ۲۲.

۴۵. «راشیکات» ص ۲۳.

بخش پنجم

منتخباتی از کتاب «آثارالباقیه»

مشمول بر: مختصری درباره کتاب «آثارالباقیه» - طیلسان مضاعف - مسئله شطرنج و محاسبه $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$ - چند نوع تصویر جسم نما از مخترعات بیرونی.

الف - مختصری درباره کتاب «آثارالباقیه»

۵/۱- عنوان کامل این کتاب «آثارالباقیه عن القرون الخالیه» است که بیرونی آن را در حدود ۳۹۰ هجری قمری که در دربار شمش المعالی قابوس و شمگیر می زیسته به نام آن پادشاه تألیف کرده است.

متن عربی «آثارالباقیه» با مقدمه مشروحی به زبان آلمانی در سال ۱۸۷۸ میلادی در لایپزیک و ترجمه انگلیسی آن در سال ۱۸۷۹ میلادی در لندن هر دو توسط مستشرق معروف آلمانی ادوارد زاخائو به چاپ رسیده است^۱ و نسخه های خطی متعدد از متن عربی آن موجود است^۲ و به زبان فارسی ترجمه شده است.^۳

«آثارالباقیه» از آثار معروف و معتبر بیرونی و کتابی است محققانه که مؤلف در آن گاهشماری و تقویم اقوام مختلف (ایرانیان، یونانیان، مسیحیان، صابئه، یهود، عرب جاهلی، مسلمان) را بررسی

۱. ← مقاله مجتبی مینوی در کتاب «بررسیهایی درباره بیرونی» صص ۲۷ و ۳۷ و ۳۸.

۲. ← «بوالو» ص ۲۱۲، ش ۱۰۵.

۳. ← «ترجمه فارسی آثارالباقیه» در فهرست منابع کتاب حاضر.

کرده و آنها را با هم مقایسه نموده و منشأ هر یک را توضیح داده است. بیرونی دربارهٔ هر یک از اعیاد تفصیلات فراوان تاریخی یا روایتی می‌آورد و بدین جهت کتاب «آثارالباقیه» علاوه بر فواید دیگر، اطلاعات فراوان دربارهٔ مذاهب دارد.^۴

عده‌ای از دانشمندان دربارهٔ موضوعهای مختلف کتاب «آثارالباقیه» به تحقیق پرداخته و مقالاتی در این زمینه نوشته و به چاپ رسانیده‌اند.^۵ از جملهٔ این تحقیقات یکی مقاله‌ای است به قلم ادوارد زاخاو دربارهٔ مسئلهٔ شطرنج^۶ که در همین بخش آن را مورد بررسی قرار داده‌ام.

ب - طیلسان مضاعف

۵/۲- بیرونی در فصل پنجم از کتاب «آثارالباقیه»، که عنوان آن «گفتار دربارهٔ استخراج بعضی از تواریخ از بعضی دیگر...» است^۷ برای آنکه بتوان تاریخهایی را که در زیجها و رصد‌ها مستعمل است به یکدیگر تبدیل کرد، جدولی ترتیب داده است^۸ مشتمل بر عدهٔ روزهایی که بین مبدأهای تاریخهای مختلف فاصله است و آن را «طیلسان مضعّف» نامیده است،^۹ و در ضمن تشریح جدول مذکور به مسئلهٔ تضعیف خانه‌های شطرنج اشاره کرده و مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی را که جملهٔ اول آن یک و قدر نسبت آن دو وعدهٔ جمله‌های آن ۶۴ باشد حساب کرده است. البته جدول مذکور (یعنی طیلسان مضاعف) رابطه‌ای با مسئلهٔ شطرنج ندارد و بیرونی فقط برای آنکه روش نوشتن اعداد را در دستگاههای مختلف شمار نشان دهد، به عنوان مثال از مسئلهٔ شطرنج استفاده کرده است.

در آغاز این بخش از کتاب حاضر، طیلسان مضاعف را به جهت فایدهٔ آن و مسئلهٔ شطرنج را به جهت روشی که بیرونی برای حل آن به کار برده است مورد بررسی قرار می‌دهم.

۵/۳- طیلسان مضاعف- این طیلسان (صفحهٔ ۷۲) جدولی است به شکل مربع مستطیل که ابعاد آن هر یک به ده قسمت متساوی تقسیم شده و دارای صدخانه است. در امتداد قطری که از بالا و سمت راست به طرف پایین و سمت چپ جدول کشیده شده ده‌خانه قرار دارد که در آنها اسامی تاریخهای مختلف نوشته شده است. جدول به وسیلهٔ این قطر به دو مثلث تقسیم می‌شود. در مثلث زیرین، در خانهٔ روبه‌روی هر دو تاریخ، عدهٔ روزهایی که بین مبدأهای آن دو تاریخ فاصله است با ارقام هندی ثبت شده است.^{۱۰} در مثلث فوقانی، در خانهٔ روبه‌روی هر دو

۴. «مصاحب: ابوریحان» ص ۱۹.

۵. ← «بوآلو» ص ۲۱۳.

۶. «زاخاو A».

۷. «آثارالباقیه» ص ۷۲ به بعد: «القول علی استخراج التواریخ بعضها من بعض...».

۸. «آثارالباقیه» ص ۱۳۷.

۹. عین این جدول را از روی کتاب «آثارالباقیه» چاپ زاخاو در صفحهٔ ۷۲ کتاب حاضر به چاپ رسانده‌ام.

۱۰. نظیر این جدول در کتاب «التفهیم» نیز هست با این تفاوت که در آنجا جدول به صورت مثلثی است قائم‌الزاویه

تاریخ دو نوع عدد نوشته شده است. یکی در بالا و دیگری در زیر آن. عددی که در بالا قرار دارد در دستگاه شمار شصتگانی نوشته شده و عده روزهایی را که بین مبدأ دو تاریخ مذکور فاصله است نشان می‌دهد. عددی که در زیر ثبت شده همان عدد بالایی است، اما در دستگاه شمار دهگانی (معمولی) و با حروف جمل (به جای ارقام هندی) نوشته شده است.

مثلاً در خانه مقابل دو تاریخ یزدگردی و هجری، در مثلث زیرین عدد ۳۶۲۳ خوانده می‌شود و این عده روزهایی است که بین مبدأ تاریخ یزدگردی و مبدأ تاریخ هجری فاصله است. اما در مثلث فوقانی در خانه روبه‌روی دو تاریخ مذکور دو سطر دیده می‌شود. یکی در بالاست که در آن نوشته شده ۱. کج و دیگری در زیر آن است و در آن نوشته شده جیوج.

مقصود از ۱. کج همان عدد ۳۶۲۳ است که در دستگاه شمار شصتگانی نوشته شده و معادل است با $۳۶۲۳ = ۲۳ + (۶۰) \times ۰ + (۶۰)^۲ \times ۱$ و مقصود از جیوج نیز همان عدد ۳۶۲۳ است که ارقام آن با حروف جمل نوشته شده است:

ج	و	ب	ج
↓	↓	↓	↓
۳	۶	۲	۳

بیرونی خود علت اینکه هر عدد را در جدول مذکور به سه صورت مختلف ثبت کرده است چنین بیان می‌کند: «این اعداد را از آن جهت به سه نوع مختلف ثبت کردیم تا اگر شکی درباره حروف اعداد و ارقام روی دهد هر یک از انواع سه گانه شاهی برای نظیر خود باشد.^{۱۲} یعنی اگر اشتباهی در یکی از سه صورت (به وسیله کاتبان) روی دهد بتوان از روی دو صورت دیگر آن را تصحیح کرد.»

۵/۴- روش استفاده از طلیسان مضاعف-بیرونی راه استفاده از جدول مذکور را به شرح زیر بیان کرده است:^{۱۳}

«اگر کسی یکی از تاریخها را بداند و بخواهد تاریخ دیگری را از روی آن استخراج کند باید تاریخ معلوم را به روزها تبدیل کند یعنی عده روزهایی را که از مبدأ آن تاریخ تا زمان معلوم می‌گذرد حساب کند و نام آن را اصل بگذارد. و سپس عده روزهایی را که بین مبدأهای دو تاریخ معلوم و مطلوب فاصله است بیابد و آن را تعدیل بنامد. و اگر مبدأ تاریخ معلوم مقدم بر مبدأ تاریخ مطلوب

→ که هر ضلع زاویه قائمه آن هفت‌خانه و وتر آن نیز هفت خانه دارد و تنها اعداد در دستگاه شمار دهگانی ثبت شده است (التفهیم فارسی ص ۲۴۱). بیرونی درباره این جدول نوشته است: «و ندر این جدول که به کردار منبر است نهادیم روزها را، آنج از هر تاریخ است تا به دیگر تاریخ، بدان خانه که میانی باشد هر دو تاریخ را چون از یکی به درازگیری و از دیگر به پهنای هر دو انگشت به یکجا آیند. (التفهیم فارسی، ص ۲۳۹).

۱۱. — «چگونگی ثبت اعداد» در بخش نهم کتاب حاضر.
۱۲. «آثارالباقیه» ص ۱۳۵، سطر ۲۲ به بعد «ترجمه فارسی آثارالباقیه» ص ۱۶۸.

۱۳. «آثارالباقیه» ص ۱۳۶- «ترجمه فارسی آثارالباقیه» ص ۱۶۸.

باشد «تعدیل» را از «اصل» کم کند. و هرگاه مبدأ تاریخ معلوم بعد از مبدأ تاریخ مطلوب باشد «تعدیل» را به «اصل» بیفزاید. آنچه به دست آید عده روزهای تاریخ مطلوب است. سپس باید عده روزهای تاریخ مطلوب را به مقدار [= عده روزهای سال منسوب به این تاریخ تقسیم کرد. خارج قسمت مساوی با عده سالهای کامل این تاریخ خواهد بود. باقیمانده تقسیم مذکور را باید به ماهها تبدیل کرد، مطابق با عده روزهایی که برای هر ماه ذکر کردیم.

ج - مسئله شطرنج و محاسبه $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$

۵/۵- مسئله شطرنج-یکی از مسائل حساب که از دیرباز مورد توجه معلمان و محصلان ریاضی بوده مسئله تضاعیف خانههای شطرنج است. این مسئله داستانی دارد که به شکلهای مختلف نقل شده و یک روایتش این است^{۱۴} که شاه از مخترع شطرنج می پرسد که چه پاداشی را برای اختراع خود شایسته می داند. مخترع شطرنج از شاه تقاضا می کند که برای خانه اول شطرنج یک دانه گندم و برای خانه دوم آن دو دانه گندم و برای خانه سوم آن چهار دانه (= ۲^۲) و همچنین برای هر یک از شصت و چهار خانه شطرنج به تعداد دو برابر خانه قبل از آن دانه گندم به او بدهند. شاه ابتدا به این درخواست می خندد. ولی بعد متوجه می شود که نمی تواند تقاضای او را عملی کند. زیرا چنانکه بعداً خواهیم دید مجموع دانه های گندمی که مخترع شطرنج درخواست کرده بود مساوی است با

$$18'446'744'073'709'551'615$$

و اگر فرض کنیم که یک متر مکعب گندم شامل ۲۰ میلیون دانه باشد مقدار مطلوب تقریباً مساوی خواهد بود با

$$922'337'020'3685$$

یعنی بیش از ۹۰۰ میلیارد متر مکعب گندم. و این چندین برابر مقدار گندمی است که اگر در همه خشکیهای کره زمین بکارند، حاصل خواهد شد.

۵/۶- مقصود از محاسبه $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$ -مسئله تضاعیف بیوت شطرنج و یا به طور خلاصه مسئله شطرنج، با اصطلاحات کنونی، عبارت است از محاسبه مجموع جمله های یک تصاعد هندسی که جمله اول آن ۱ و قدر نسبت آن ۲ و عده جمله های آن ۶۴ باشد و می دانیم که چنین تصاعدی به صورت زیر نوشته می شود (از چپ به راست):

$$1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{61}; 2^{62}; 2^{63}$$

که جمله شصت و چهارم آن $۲^{۶۳}$ است. و نیز می دانیم که دستور کلی محاسبه مجموع جمله های تصاعد هندسی عبارت است از:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

که در آن a جمله اول و q قدر نسبت و n عدّه جمله هاست. و متذکر می شوم که جمله شماره n این تصاعد به صورت $t_n = a \cdot q^{n-1}$ نوشته می شود.

در مسئله شطرنج که $a = 1$ و $q = 2$ و $n = 64$ ، مجموع جمله ها مساوی است با:

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = S_{64} = 2^{64} - 1$$

پس در واقع مطلوب مسئله شطرنج محاسبه $(2^{64} - 1)$ است.

۵/۷- حل مسئله شطرنج توسط بیرونی- قبلاً گفتیم که مسئله شطرنج در کتاب «آثارالباقیه» فقط به عنوان مثال برای تشریح چگونگی نوشتن اعداد «طیلسان مضاعف» در دستگاه های مختلف شمار به کار رفته است.

استاد در این باره نوشته است: ^{۱۵}

«مثال ذلک بشیء غیر مجهول. و هوانامتی ضربنا مال مال مال الستّة عشر فی نفسه واسقطنا من المبلغ واحداً کان ذلک هو ما یجتمع فی جمیع بیوت رقعة الشطرنج من التضاعیف اذا ابتدی فی الاوّل منها بواحد و یكون کل ذلک بارقام الهند..»

۱۸۰۴۴۶۰۷۴۴۰۰۷۳۰۷۰۹۰۵۵۱۶۱۵

و یكون مرفوعاً بستین الی ما ارتفع ^{۱۶}

ل ل ک ز ط ه ج ن م لا ه یه

و یكون منقولاً الی حروف الجمل

ه ا و ا ه ط ع ج ز م د ز و د د ح ا

فاذا نقلت هذه الحروف علی ولائها الی ارقام الهندحصل العدد المذكور»

یعنی ^{۱۷}: برای مثال از چیز معلومی استفاده می کنیم و آن این است که هرگاه مال مال مال ^{۱۸} ۱۶، [یعنی: $16^8 = (((((16)^2)^2)^2)^2)^2)^2$] را در نفس خود ضرب کنیم [یعنی 16^{16} را حساب کنیم]

۱۵. «آثارالباقیه» ص ۱۳۵- «زاخاتو A» ص ۱۴۸.

۱۶. این عدد در «ترجمه فارسی میزان الحکمه» (ص ۷۸) غلط ثبت شده (در عددی که با حروف جمل نوشته شده، رقم دوم از سمت چپ یعنی صفر حذف شده است).

۱۷. برای آنکه درک مطلب آسان باشد عبارات عربی را به طور آزاد ترجمه کرده ام یعنی در واقع مفهوم آنها را نوشته ام.

۱۸. یکی از معانی اصطلاح «مال» (رجوع کنید به اصطلاح «مال» در بخش نهم کتاب حاضر) قوه دوم عدد است. بنابراین مال مال مال a یعنی قوه هشتم a : $a^8 = ((a^2)^2)^2$.

و از حاصل یک واحد بکاهیم [یعنی: ۱ - ۱۶۱۶ را حساب کنیم] آنچه به دست می آید مساوی خواهد بود با مجموع اعداد خانه های رقعۀ شطرنج به شرط آنکه در خانۀ اوّل آن یک و در خانۀ دوّم آن دو و در خانۀ سوّم آن دو برابر آن یعنی چهار و در هر خانه دو برابر عدد خانۀ پیش از آن را بنویسیم.^{۲۱} و این مجموع با ارقام هندی چنین نوشته می شود:

$$۱۸۰۴۴۶۰۷۴۴۰۰۷۳۰۷۰۹۰۵۵۱۰۶۱۵$$

و مرفوع آن^{۲۰} در دستگاه شمار شصتگانی چنین است^{۲۱} (از چپ به راست):

$$۳۰, ۳۰, ۲۷, ۹, ۵, ۳, ۵۰, ۴۰, ۳۱, ۰, ۱۵$$

و اگر به جای ارقام هندی از حروف جُمَل استفاده کنیم عدد مذکور چنین نوشته می شود (از چپ به راست):

ه	ا	و	ا	ه	ط	ع	ج	ز	م	ز	و	د	د	ح	ا
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۱	۵	۱	۶	۵	۹	(۷۰)	۳	۷	(۴۰)	۴	۷	۶	۴	۴	۸

به نحوی که اگر این حروف را به ترتیب به ارقام هندی تبدیل کنیم عدد مذکور، در دستگاه اعشاری، حاصل خواهد شد.

۵/۸- روش بیرونی در محاسبۀ $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$ - بیرونی برای حل مسئلۀ شطرنج یعنی در واقع محاسبۀ (۱ - ۲^{۶۴}) می گوید^{۲۲} دو اصل زیر را باید به کاربرد:^{۲۳}
 اصل اول-^{۲۴} هرگاه عدد یکی از شصت و چهار خانۀ شطرنج را به قوّۀ دو برسانیم عدد خانه ای حاصل می شود که دوری آن از خانۀ مذکور مساوی است با دوری آن خانه از خانۀ اوّل.^{۲۵}

۱۹. عددی را که به این ترتیب در هر خانۀ شطرنج نوشته شود «عدد آن خانه» می نامند. مثلاً عدد خانۀ سوّم مساوی است با ۴ و عدد خانۀ چهارم مساوی است با ۸.
۲۰. ← «برداشتن عدد» در بخش نهم کتاب حاضر.
۲۱. ← «چگونگی ثبت اعداد» در بخش نهم کتاب حاضر. یعنی:

$$۳۰ \times (۶۰)^{۱۰} + ۳۰ \times (۶۰)^9 + ۲۷ \times (۶۰)^8 + ۹ \times (۶۰)^7 + ۵ \times (۶۰)^6 + \dots + ۳۱ \times (۶۰)^2 + ۰ \times (۶۰)^1 + ۱۵$$

۲۲. «آثارالباقیه» ص ۱۳۸ - «زاخاؤ A» ص ۱۴۹: «ان لتضعیف الشطرنج و حسابہ اصلین...».
۲۳. برای آنکه فهم مطالب آسان باشد عبارات عربی را به طور آزاد ترجمه کرده گاهی مطالبی بر متن افزوده ام.
۲۴. (احدهما انه) متی ضرب ما فی بیت ما من البیوت الاربعة و الستین فی نفسه وقع المرتفع فی البیت الذی بعده منه کعبه البیت المضروب من الواحد.
۲۵. مقایسه کنید با مقدّمۀ اوّل شماره ۵/۱۱.

مثال- اگر عدد خانه پنجم را که ۱۶ است به قوه دو برسانیم ۲۵۶ حاصل می شود. و این عدد خانه نهم است. و دوری خانه نهم از خانه پنجم مثل دوری خانه پنجم است از خانه اول.

تبصره - اصل اول درواقع حالت خاصی از قضیه زیر است:

قضیه - در هر تصاعد هندسی که جمله اول آن واحد باشد، جمله ای که فاصله اش از جمله مفروضی مساوی با فاصله این جمله از جمله اول باشد مساوی با مربع جمله مفروض است. برهان - تصاعد هندسی زیر را که جمله اولش یک و قدر نسبتش q است در نظر می گیریم

$$1; q; q^2; q^3; \dots; q^n; \dots$$

جمله شماره $n + 1$ این تصاعد q^n است و این جمله n جمله بعد از جمله اول قرار دارد. اکنون ملاحظه می کنیم که جمله ای که n جمله بعد از q^n قرار دارد عبارت است از جمله ای که شماره اش $2n + 1$ است. این جمله مساوی است با q^{2n} و واضح است که $q^{2n} = (q^n)^2$.

اصل دوم- هرگاه عدد یکی از شصت و چهار خانه شطرنج را بگیریم و یک واحد از آن بکاهیم آنچه به دست می آید مساوی است با مجموع اعداد همه خانه هایی که پیش از خانه مذکور قرار دارند.^{۲۷}

مثال- اگر عدد خانه ششم را که ۳۲ است بگیریم و یک واحد از آن کم کنیم ۳۱ حاصل می شود و این ۳۱ مساوی است با مجموع همه اعداد خانه های اول تا پنجم. یعنی:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

تبصره - اصل دوم درواقع همان دستور مجموع n جمله از تصاعد هندسی است که به صورت زیر نوشته می شود:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

و چون در مسئله شطرنج $a = 1$ و $q = 2$ است به صورت زیر درمی آید:

$$S_n = 2^n - 1$$

باید متوجه بود که 2^n جمله شماره $n + 1$ تصاعد و S_n مجموع همه جمله هایی است که پیش از جمله شماره $n + 1$ قرار دارند.

بیرونی پس از بیان این دو اصل می گوید:^{۲۸}

۲۶. واما الاصل الثانی فهو انامتی اخذنا ما فی بیت من البیوت و اسقطنا منه واحداً کان الباقی مساویاً لجمع ما فی البیوت التي قبله.

۲۷. مقایسه کنید با مقدمه دوم شماره ۵/۱۱.

۲۸. «أثارات الباقیه» ص ۱۳۸ - «زخاتو A» ص ۱۵۰.

«و معنی ضرب مال مال مال الستة عشر فی نفسه هو ضرب ما فی البیت الثالث و الثلثین فی نفسه لیحصل ما فی البیت الخامس و الستین و اذا أسقط منه واحدٌ یحصل جمیع ما فی الرقعة. و مال لَج الذی یرتفع من ضرب ما فی بیت یَز و مال یَز ما یرتفع من ضرب ما فی بیت ط و مال ط ما یرتفع من ضرب ما فی بیت هـ و هو الستة عشر المذکوره».

به طور خلاصه مفهوم و حاصل عبارات فوق این است که:

عدد خانه پنجم رقعة شطرنج ۱۶ است.^{۲۹} پس بنابر اصل اول، مربع ۱۶ یعنی ۱۶^۲ عدد خانه نهم است. و مربع ۱۶^۲ یعنی ۱۶^۴، عدد خانه هفدهم است. و بنابر همان اصل، مربع ۱۶^۴ یعنی ۱۶^۸، عدد خانه سی و سوم است.^{۳۰}

حال اگر ۱۶^۸ را که عدد خانه سی و سوم است در خودش ضرب کنیم عدد ۱۶^{۱۶} حاصل می شود که بنابر اصل اول، عدد خانه شصت و پنجم است.^{۳۱} و اگر یکی از ۱۶^{۱۶} بکاهیم عدد (۱ - ۱۶^{۱۶}) حاصل می شود که بنابر اصل دوم، مجموع اعداد همه شصت و چهار خانه شطرنج است.

بیان دیگری از روش فوق

۵/۹- در کتاب «آثارالباقیه»^{۳۲} بعد از ذکر قاعده فوق عباراتی از «کتاب الارقام»^{۳۳} تألیف بیرونی نقل شده که آن نیز با مختصر تفاوتی تکرار همان مطالب فوق است با این تفاوت که روشتر بیان شده است.

ظاهراً چنین به نظر می آید که این عبارات ابتدا در متن «آثارالباقیه» نبوده و بعداً کسی برای روشن شدن موضوع آنها را از «کتاب الارقام» بیرونی گرفته و مثلاً به عنوان حاشیه بر آن کتاب افزوده است. با این حال در آخر آن عبارات به مثالی که در متن «آثارالباقیه» آمده از قول خود بیرونی اشاره شده است.^{۳۴}

در هر صورت برای تکمیل موضوع ذیلأً به نقل عین عبارات عربی «آثارالباقیه» و شرح آن به زبان فارسی می پردازم (عبارات زیر تنها قسمتی است که از «کتاب الارقام» بیرونی باقی مانده است).
۵/۱۰- عباراتی که از «کتاب الارقام» بیرونی در صفحه ۱۳۸ «آثارالباقیه» ذکر شده است:

«قال ابوریحان فی کتاب الارقام أريدُ أبین الطريق الی حساب الشطرنج لِیَتَدَرَّبَ فی مزاوَلته و ممَّا یجب أَن یَقَدَّمَ له هو أَن تعرف أَن تضاعیف زوج الزوجِ مَهما اخذَ مُتَبَاعِدةً مُتَوَالِیَةً فان کانت

۲۹. اعداد پنج خانه اول عبارت اند از: ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶.

۳۰. عدد خانه سی و سوم ۱۶^۸ است که به اصطلاح قدما می شود: «مال مال الستة عشر».

۳۱. البته اگر برای سهولت بیان فرض کنیم که رقعة شطرنج، یک خانه شصت و پنجم نیز داشته باشد.

۳۲. «آثارالباقیه» ص ۱۳۸، سطر ۱۱ به بعد- «زاخا و A» ص ۱۵۱.

۳۳. عنوان کامل این کتاب «تذکره فی الحساب و العد بارقام السند و الهند» است که از تألیفات بیرونی در علم حساب بوده و متأسفانه از بین رفته است- (۳/۳۴).

۳۴. «آثارالباقیه» ص ۱۳۹، سطر ۹ و ۱۰: «...بقی جمیع ما فی بیوت العرصة اعنی العدد الذی مَثَّلْنَا به اولاً».

فرداً لها واسطه واحده و ضربنا احدى الحاشيتين فى الاخرى مساو لضرب احدى الواسطتين فى الاخرى. فهذا احد ما يجب ان يعرف قبله. و الآخر انا اذا اَرَدْنَا جَمْعَ تلك العِدَّة المفروضة من تضاعيف زوج الزوج أَضَعَفْنَا اعْظَمَهَا و هو الاخير و القينامنه أَضَعَرَهَا و هو الاول فيبقى مجموع تلك التضاعيف، واذا تَقَرَّرَ ذلك زِدْنَا فى بَيُوتِ رُقْعَةِ الشطرنج بيتاً يكون خامساً و ستين. و معلومٌ أنَّ عدده الذى فيه من تضاعيف زوج الزوج المبتدئة من الواحدِ مساوٍ لمجموع ما فى جميع بيوت العرصة و زيادة أولها الذى هو الواحد الاول. فاذا نَقِصَ منه واحدٌ بقى ما فى جميع البيوت، فاذا جَعَلْنَا هَذَا الْبَيْتَ و الاولَ حاشيتين كان البيت الذى فيه لَح واسطه لهما و هى الواسطه الاولى. و اذا جعلنا بيت لَح و البيت الاول حاشيتين كان بيتٌ يز واسطه لهما. و هى الثانية. و اذا جعلنا بيت يز و البيت الاول حاشيتين كان بيت ط واسطه لهما و هى الثالثة و اذا جعلنا بيت ط و البيت الاول حاشيتين كان بيت ه واسطه و هى الرابعة و اذا جعلنا بيت ه و البيت الاول حاشيتين كان بيت ج واسطه و هى الخامسة و اذا جعلنا بيت ج و البيت الاول حاشيتين كان بيت ب واسطه و هى السادسة و فيه اثنان. و اذا ضربنا الاثنين فى نفسها اجتمع مضروب البيت الاول فى بيت ج لكن فى الاول واحدٌ فما اجتمع اذن هو الواسطه الخامسة فى بيت ج و هى اربعة نُضْرِبُهَا فى مثلها فيكون ستة عَشَرَ و هى الواسطه الرابعه فى بيت ه فنضربها فى مثلها فيكون ٢٥٦ و هى الواسطه الثالثه فى بيت ط و اذا ضربناها فى مثلها اجتمع ٦٥٥٣٦ و هى الواسطه الثانيه فى بيت يز و اذا ضربناها فى مثلها اجتمع ٤٠٢٩٤٠٩٦٧٠٢٩٦ و هى الواسطه الاولى فى بيت لَح فاذا ضربناها فى مثلها اجتمع ١٨٠٤٤٦٠٧٤٤٠٠٧٣٠٧٠٩٠٥٥١٠٦١٦ فاذا اسقطنامنه واحداً و هو الذى فى البيت الاول بَقِيَ جميع ما فى بيوت العرصة اعنى العدد الذى مثلنا به اولاً».

شرح عبارات فوق به زبان ساده و با اصطلاحات متداول کنونی چنین است:
 ۵/۱۱- ذکر دو مقدمه-بیرونی برای محاسبه تضاعیف خانه‌های شطرنج ابتدا دو مقدمه ذکر کرده است.

مقدمه اول^{۳۵} -تضاعیف زوج الزوج^{۳۶} را که به صورت زیر نشان داده می‌شود در نظر می‌گیریم:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{n-1}$$

اگر عددهای از جمله‌های سمت چپ این رشته را در نظر بگیریم دو حالت رخ می‌دهد: اولاً اگر عددهای جمله‌ها فرد باشد مانند رشته محدود زیر:

$$1, 2, 4, 8, 16$$

۳۵. مقایسه کنید با اصل اول شماره ۵/۸.

۳۶. «زوج الزوج» در بخش نهم کتاب حاضر.

یک عدد در وسط قرار دارد که آن را واسطه می‌نامیم و آن ۴ است. حال اگر دو حاشیه (یعنی جمله‌های اول و آخر رشته) را که اعداد ۱ و ۱۶ هستند در هم ضرب کنیم مربع واسطه یعنی 4^2 به دست می‌آید.

$$1 \times 16 = 4^2$$

ثانیاً اگر عدّه جمله‌ها زوج باشد مانند رشته محدود زیر:

$$1, 2, \underbrace{4, 8}, 16, 32$$

واسطین

دو عدد در وسط قرار دارد که عبارت‌اند از ۴ و ۸ که آنها را واسطین می‌نامیم. حال اگر دو حاشیه (یعنی جمله‌های اول و آخر رشته) را که اعداد ۱ و ۳۲ هستند در هم ضرب کنیم حاصل مساوی با حاصل ضرب دو واسطه خواهد شد:

یعنی:

$$1 \times 32 = 4 \times 8$$

تبصره - این مقدمه در واقع حالت خاصی از قضیه کلی زیر است:

قضیه - در هر تصاعد هندسی محدود حاصل ضرب دو جمله متساوی الفاصله از دوطرف مساوی است با حاصل ضرب جمله‌های اول و آخر آن.

برهان - تصاعد هندسی محدود زیر را که دارای n جمله است در نظر می‌گیریم و قدرنسبت آن را q می‌نامیم:

$$a, b, c, \dots, h, k, l$$

حاصل ضربهای $al, bk, ch, \dots$ باهم مساویند. زیرا مثلاً برای اثبات تساوی $al = bk$ ، با توجه به تساویهای $b = aq$ و $l = kq$ ، می‌نویسیم:

$$al = \frac{alq}{q} = \frac{(aq)l}{q} = \frac{bl}{q} = \frac{bkq}{q} = bk$$

در حالت خاصی که عدّه جمله‌ها، یعنی n ، فرد باشد جمله وسط، واسطه هندسی بین جمله‌های اول و آخر خواهد بود.

مقدمه دوم-^{۳۷} هرگاه بخواهیم مجموع جمله‌های رشته تضاعیف زوج الزوج ابتدا از واحد را حساب کنیم، بزرگترین جمله یعنی جمله آخر را دو برابر می‌کنیم و کوچکترین جمله یعنی جمله اول را از آن می‌کاهیم. مجموع مطلوب به دست می‌آید.

یعنی در واقع برای محاسبهٔ مجموع n جمله از تصاعد هندسی

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$$

دستور زیر را به کار می‌بریم:

$$S_n = 2^n - 1$$

و این حالت خاصی از دستور کلی $S = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$ است که در شمارهٔ ۵/۶ بیان کردیم.
۵/۱۲- حل مسئلهٔ شطرنج با استفاده از دو مقدمهٔ فوق - بیرونی پس از بیان دو مقدمهٔ فوق می‌گوید:

یک خانه به خانه‌های رقعۀ شطرنج می‌افزاییم و فرض می‌کنیم رقعۀ شطرنج شصت و پنج خانه داشته باشد. بنابر مقدمهٔ دوم اگر از عددی که از تضاعیف زوج‌الزوج ابتدا از واحد، در این خانهٔ شصت و پنجم قرار می‌گیرد یک واحد بکاهیم حاصل مساوی خواهد بود با مجموع همهٔ اعداد ۶۴ خانهٔ شطرنج.

حال اگر خانهٔ شصت و پنجم و خانهٔ اول را دو حاشیه (=دو طرف) بگیریم بنا بر مقدمهٔ اول خانهٔ سی و سوم بین آنها واسطه است. و اگر خانهٔ سی و سوم و خانهٔ اول را دو حاشیه بگیریم خانهٔ هفدهم بین آنها واسطه است. و اگر خانهٔ هفدهم و خانهٔ اول را دو حاشیه بگیریم خانهٔ نهم بین آنها واسطه است. و اگر خانهٔ نهم و خانهٔ اول را دو حاشیه بگیریم خانهٔ پنجم بین آنها واسطه است. و اگر خانهٔ پنجم و خانهٔ اول را دو حاشیه بگیریم خانهٔ سوم بین آنها واسطه است. بالاخره اگر خانهٔ سوم و خانهٔ اول را دو حاشیه بگیریم خانهٔ دوم بین آنها واسطه است و عدد این خانه ۲ است. اگر ۲ را مربع کنیم حاصل مساوی با حاصل ضرب عدد خانهٔ اول و خانهٔ سوم می‌شود و چون عدد خانهٔ اول ۱ است پس حاصل ضرب یعنی ۴ مساوی با عدد خانهٔ سوم است. و چون ۴ را مربع کنیم حاصل، یعنی ۱۶، عدد خانهٔ پنجم است و اگر ۱۶ را مربع کنیم حاصل، یعنی ۲۵۶، عدد خانهٔ نهم است و اگر ۲۵۶ را مربع کنیم حاصل، یعنی ۶۵۵۳۶، عدد خانهٔ هفدهم است. و اگر ۶۵۵۳۶ را مربع کنیم حاصل، یعنی ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۶، عدد خانهٔ سی و سوم است. و اگر عدد اخیر را مربع کنیم عدد زیر حاصل می‌شود:

$$1804460744073709551616$$

و این عدد خانهٔ شصت و پنجم است. و اگر یک واحد از این عدد بکاهیم بنا بر مقدمهٔ دوم مجموع همهٔ اعداد شصت و چهار خانهٔ عرصهٔ شطرنج به دست می‌آید.

۵/۱۳- نتیجه- بنابر آنچه گذشت بیرونی در دو کتاب از تألیفات خود مجموع $\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$ را به دو طریق که اندکی با هم تفاوت دارند حساب کرده و حاصل را به صورت زیر درآورده است:^{۳۸}

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 18,446,744,073,709,551,615$$

۵/۱۴- محسوس کردن عدد فوق-بیرونی پس از محاسبه عدد بیست رقمی فوق برای آنکه بزرگی آن نمایان و محسوس شود آن را متوالیاً بر اعداد ۱۰۰۰۰ و ۸ و ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ تقسیم کرده، آخرین خارج قسمت را مساوی با ۲۳۰۵ یافته و عباراتی نوشته^{۳۹} که مفهوم آنها را می‌توان به زبان ساده چنین بیان کرد:

اگر بر سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه وجود داشته باشد که از هر کوه ۱۰۰۰۰ رودخانه جاری شود و در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قطار استر (=قاطر) باشد که هر قطار مرکب از ۱۰۰۰۰ استر باشد و هر استر ۸ کیسه حمل کند و در هر کیسه مثلاً ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد باز عده همه این گندم‌ها کوچکتر از عدد بیست‌رقمی فوق خواهد بود.

تبصره- خازنی* (عبدالرحمان) منجم و دانشمندی که در قرن ششم هجری می‌زیست در قسم سوم از مقاله سوم کتاب «میزان‌الحکمه»^{۴۰} شرح مفصلی درباره مسئله شطرنج نوشته و برای قابل درک کردن عدد تضاعیف خانه‌های شطرنج مثالی آورده‌است. نظیر این مثال را محمد باقر یزدی* ریاضیدان ایرانی که در قرن یازدهم هجری می‌زیست نیز در فصلی از کتاب «عیون‌الحساب»^{۴۱} ذکر کرده که خلاصه آن این‌است:

اگر ۲۵۶ کشور فرض کنیم که در هر کشور ۲۵۶ شهر و در حوالی هر شهر ۲۵۶ دیه و در هر دیه ۲۵۶ سرا و در هر سرا ۲۵۶ خزانه و در هر خزانه ۲۵۶ صندوق و در هر صندوق ۲۵۶ کیسه و در هر کیسه ۲۵۶ مثال طلا باشد مجموع وزن آن طلاها منهای یک مثقال مساوی است با عدد تضاعیف خانه‌های شطرنج یعنی (۱ - ۲۶۴).

۵/۱۵- تعمیم دستور محاسبه تضاعیف واحد- اگر چه بیرونی محاسبه مجموع تضاعد

هندسی

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63}, \dots$$

را فقط در موردی که عده جمله‌ها ۶۴ است بیان کرده ولی نحوه بیان وی طوری است که می‌توان این قاعده را تعمیم داد. و این کاری است که کاشانی* (غیاث‌الدین جمشید) در باب سوم از مقاله

۳۹. «آثارالباقیه» ص ۱۳۹- «زاخاتو A» صص ۱۵۵ و ۱۵۶: «و لا یَضْبَطُ کَثْرَتُهُ الا بِأَن یُقَسَّمْ عَلٰی عَشْرَةِ اَلْفٍ حَتٰی یَصِیْرَ بَدْرًا...» (در سطر ششم صفحه ۱۵۶ «زاخاتو A» دوبار ۱۰۰۰ نوشته شده و یکی از آنها زاید است).

۴۰. «میزان‌الحکمه» ص ۷۴ به بعد- این شرح به اختصار در «ترجمه فارسی میزان‌الحکمه» صص ۷۶ تا ۸۲ آمده‌است.

۴۱. فصل فی ذکر بعض المسائل الحسابیه التي تعین الحساب علی استخراج المجهولات (مسئله یازدهم).

پنجم کتاب «مفتاح الحساب» انجام داده و مجموعه‌های

$$\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

و

$$\sum_{i=1}^n a \times 2^{i-1} = a(2^n - 1)$$

را حساب کرده و باز هم مسئله را تعمیم داده و مجموع توانهای متوالی هر عدد دلخواه را به صورت زیر به دست آورده است:^{۴۲}

$$\sum_{i=1}^n a^i = a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

د - چند نوع تصویر جسم‌نما از مخترعات بیرونی

۵/۱۶- بیرونی در پایان کتاب «آثارالباقیه»^{۴۳} چند روش برای تصویر جسم‌نما بیان کرده و کارهای دیگران را در این باره شرح داده و نقایص آنها را خاطر نشان کرده و راه اصلاح آن نقایص را با ذکر روشهایی که خود اختراع کرده نشان داده است که در اینجا به شرح آنها می‌پردازم.

بیرونی در این مورد اصطلاح «تسطیح» را به کار برده است. اما چون این اصطلاح امروزه به معنای دیگری در هندسه ترسیمی و رقومی به کار می‌رود، برای آنکه اشتباهی رخ ندهد، اصطلاح «تصویر» را به جای آن به کار می‌برم. ضمناً خاطر نشان می‌کنم که تنها به ترجمه عبارات عربی «آثارالباقیه» اکتفا نکرده و مطالب را به وجهی که قابل درک باشد بیان کرده‌ام و برای آنکه مطالب از هم تفکیک شود، برای هر مطلب عنوانی انتخاب کرده‌ام.

و نیز خاطر نشان می‌کنم که بیرونی این روشهای تصویر را هم در نجوم برای تصویر صورتهای سماوی بر صفحه استوای فلکی، و هم در جغرافیا برای تصویر موضع شهرها بر صفحه استوای زمین به کار برده و پس از بیان فایده تصاویر در نجوم و جغرافیا نوشته است:

«و از هیچکس در این باره مطلبی نیافتم تا آن را نقل کنم، ولی آنچه را به خاطر می‌رسد بیان می‌کنم»^{۴۴} و به این ترتیب با صراحت کامل بیان کرده است که این روشها از اختراعات خود اوست.

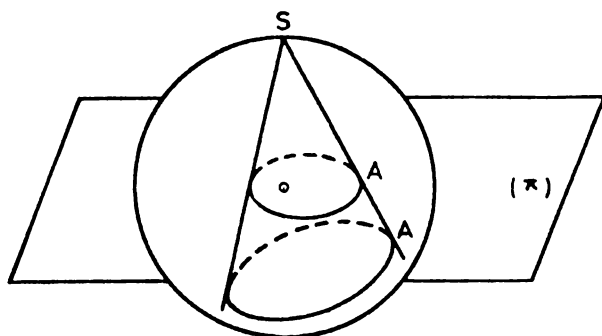
۵/۱۷- تصویر مخروطی-بیرونی در تعریف تصویر شکلهای کروی بر یک صفحه می‌گوید:^{۴۵} تصویر دایره‌های عظیمه و صغیره و نقاط واقع بر سطح کره بر صفحه، به این طریق امکان‌پذیر است

۴۲. ← «قربانی: کاشانی نامه» چاپ اول ص ۱۵۰ به بعد و چاپ دوم ص ۱۱۷ به بعد.

۴۳. «آثارالباقیه» از صفحه ۳۵۷ به بعد ترجمه فارسی «آثارالباقیه» صص ۴۱۵ تا ۴۲۲.

۴۴. «آثارالباقیه» ص ۳۵۷ سطر هشتم: «ولم اجد لاحد قولا فی ذلک فاخیکه ولکنی اذکر فیہ ما یخْطُرُ ببالی فُلِیْعُذَرُ الناظر.»

۴۵. «آثارالباقیه» ص ۳۵۷: «و اقول ان تسطیح...» (در بیان مطلب به منظور سهولت بیان کمی تغییر داده‌ام).



شکل ۲

که صفحه‌ای یکی از دایره‌های عظیمه کره را صفحه‌ی تصویر و یکی از دو قطب^{۴۶} آن دایره، مثلاً S را مرکز تصویر قرار دهیم. در این صورت تصویر هر نقطه مانند A از کره (واقع بر نیمکره‌ای که مرکز تصویر در آن واقع نیست) عبارت خواهد بود از فصل مشترک خط راست SA با صفحه‌ی تصویر (π)، و تصویر هر دایره مانند (C) از کره (واقع بر نیمکره‌ای که مرکز تصویر در آن واقع نیست) عبارت خواهد بود از فصل مشترک صفحه‌ی تصویر با سطح مخروطی به رأس S و دایره‌ی هادی (C). (واضح است که باید فقط یک نیمکره را تصویر کرد).

این نوع تصویر مخروطی در اسطرلاب به کار می‌رود. در اسطرلاب شمالی قطب جنوب را مرکز تصویر قرار می‌دهند و در اسطرلاب جنوبی قطب شمال را. (صفحه‌ی تصویر در هر دو مورد صفحه‌ی معدل النهار است).

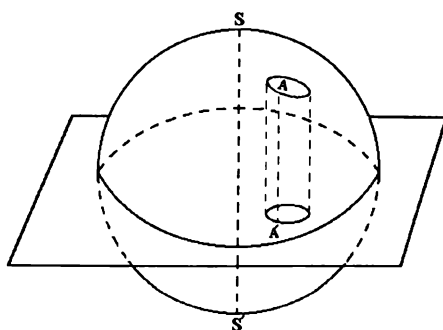
واضح است که در این نوع تصویر، تصویرمدارها، که به موازات صفحه‌ی تصویر هستند، دایره و تصویر نصف النهارها، که از مرکز تصویر می‌گذرند، پاره خطهای راست خواهند بود. سپس می‌گوید:^{۴۷} صغانی * (ابوحامد) به جای آنکه مرکز تصویر را یکی از دو قطب صفحه‌ی تصویر انتخاب کند نقطه‌ای از محور صفحه‌ی تصویر را که در داخل یا در خارج کره واقع است مرکز تصویر اختیار کرده است و واضح است که در این صورت تصویر (دایره‌ها) عبارت خواهند بود از خط راست یا دایره یا بیضی یا سهمی یا هذلولی^{۴۸} (فصل مشترکهای مخروط مصور با صفحه‌ی تصویر بر حسب اوضاع مختلف آنها) و پیش از صاغانی این نوع تصویر عجیب سابقه نداشته است.

۵/۱۸- تصویر استوانی-آن‌گاه بیرونی از یک نوع تصویر که خود مخترع آن است سخن به

۴۶. ← «قطب» در بخش نهم کتاب حاضر.

۴۷. «آثارالباقیه» ص ۳۵۷: و قد نقل ابو حامد الصغانی رأس المخروطات عن القطبین....

۴۸. اصطلاحات بیضی و سهمی و هذلولی را به ترتیب به جای «قطع ناقص» و «قطع مکانی» و «قطع زاید» به کار برده‌ام. ← «مخروط» در بخش نهم کتاب حاضر.



شکل ۳

میان می‌آورد و می‌گوید: نوع دیگری از تصویر هست که من آن را تصویر استوانی نامیده‌ام و هیچ‌یک از اصحاب این صنعت پیش از من آن را ذکر نکرده‌است.^{۴۹} شرح این گونه تصویر از این قرار است:

محور صفحه تصویر، یعنی محور دایره عظیمه‌ای را که صفحه آن صفحه تصویر اختیار شده، SS' می‌نامیم و برای تصویر کردن نقطه‌ای مانند A از سطح کره خطی از آن نقطه به موازات SS' رسم می‌کنیم تا صفحه تصویر را در نقطه A' که تصویر نقطه A خواهد بود قطع کند. تصویر هر دایره متعلق به سطح کره عبارت خواهد بود از فصل مشترک استوانه‌ای که قاعده‌اش همان دایره و مولدش موازی با محور تصویر باشد. (این در واقع همان تصویر قائم است که امروزه به‌کار می‌بریم.)

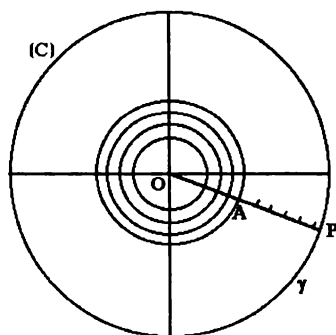
واضح است که در این نوع تصویر، دایره‌ها فقط یا خط و یا دایره و یا بیضی خواهند بود (زیرا می‌دانیم که تصویر قائم دایره در حالت کلی بیضی است - مقصود این است که در این تصویر دیگر سهمی و هذلولی به‌دست نخواهد آمد.)

بیرونی می‌گوید: کتابی که با عنوان «فی استیعاب الوجوه الممكنه فی صنعة الاسطرلاب» تألیف کرده‌ام مشتمل بر همه این تصویرهاست. اما شکلهایی که در این نوع تصویر به‌دست می‌آیند با شکل اصلی که روی سطح کره است یکسان نیستند. زیرا طولهای متساوی که روی کره هستند در تصویر بسیار تغییر می‌کنند، مخصوصاً اگر بعضی از آنها نزدیک قطبها و بعضی دیگر دور از آنها باشند.

بیرونی در اینجا علت اختراع این گونه تصویر را با وجود معایش توجیه می‌کند و می‌گوید: غرض از تشکیل اسطرلاب^{۵۰} این نیست که شکلهای مطابق با آنچه دیده می‌شود باشند. بلکه مقصود

۴۹. «آثارالباقیه» ص ۳۵۷: «و منه نوع سمیة الاسطوانی و لم یصل بی أنَّ احدا من اصحاب هذه الصناعة ذكره قبلی...».

۵۰. درباره تاریخچه اسطرلاب و شرح انواع آن ← مقاله پروفیسور هارتنر (W. Hartner) در دایرةالمعارف اسلام



شکل ۴

آن است که بعضی از آنها را ثابت نگاهداشته و بعضی را به حرکت درآورند. و نتیجه‌ای که از این حرکات در اسطرلاب به دست می‌آید در اوقات مختلف در فلک موافق است (بنابراین به کار بردن این گونه تصویر در اسطرلاب اشکالی ایجاد نمی‌کند).

سپس می‌گوید: غرض از تصویر ستارگان و یا مواضع شهرها بر یک صفحه این است که به اوضاع نسبی آنها از روی تصویر پی ببریم. اما خطهای راست با خطهای مستدیر (=منحنی) متناسب نیستند و همچنین شکلهایی که بر سطح کره هستند پس از تصویر تغییر می‌کنند، و ناچار شکل تقریبی به دست می‌آید.

۵/۱۹- تصویر در اسطرلاب مُبَطَّخ- پیرونی می‌گوید^{۵۱}: یکی از راههایی که برای رسیدن به این مقصود اختیار کرده‌ام عمل اسطرلاب مُبَطَّخ^{۵۲} است که وصف آن از این قرار است: دایره‌ای دلخواه مانند (C) به مرکز O رسم می‌کنیم، و هر چه این دایره بزرگتر باشد بهتر است، و آن دایره را به وسیله دو قطر عمود بر هم به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم.^{۵۳} و یکی از شعاعهای دایره (C) متعلق به این دو قطر را به نود قسمت متساوی تقسیم کرده، نود دایره متحد‌المرکز رسم می‌کنیم که مرکز مشترک آنها مرکز دایره (C) باشد و هر یک از آنها از یکی از نقاط تقسیم شعاع مذکور بگذرد. این دایره‌ها با هم موازی خواهند بود و فاصله آنها از یکدیگر متساوی است ($\frac{1}{9}$ شعاع دایره). سپس دایره (C) را به ۳۶۰ قسمت متساوی (درجه) تقسیم کرده هر یک از نقاط تقسیم را به مرکز دایره (C) وصل می‌کنیم (به این ترتیب نود دایره متحد‌المرکز و ۳۶۰ شعاع از دایره (C) رسم می‌شود).

پس از انجام این عمل دایره (C) را فلک البروج (=دایره البروج) و مرکز آن O را یکی از دو

→ چاپ جدید ردیف Asturlab- و یا به «دایره المعارف فارسی» ج ۱، ص ۱۳۶ (اسطرلاب).

۵۱. «آثارالباقیه» ص ۳۵۸: «فاحداً الطرق التي تؤدنا الى ذلك هو عمل الاصطرلاب المبطخ...».

۵۲. در التفهیم فارسی (ص ۲۹۷) آمده است: وز اسطرلاب لونی است او را مبطخ خوانند و مقنطراتش و منطقة البروج اندرو گردنبوند و لکن فشرده پهن چون خربزه وزین جهت مبطخ خوانند (بطیخ= خربزه).

۵۳. از تقسیم این دایره به چهار قسمت متساوی در اعمال بعد استفاده نشده است (!)

قطب فلک البروج می‌انگاریم. و روی فلک البروج (یعنی دایره (C)) نقطه‌ای مانند γ اختیار کرده (شکل ۴) آن را اول برج حمل فرض می‌کنیم، و مواضع (= مختصات) ستارگان را از روی کتاب «مجسطی» و یا از روی زیج بتانی * (محمد بن جابر) یا «کتاب الکواکب الثابتة» تألیف صوفی * (ابوالحسن) در زمان مفروضی به دست می‌آوریم. آن‌گاه یکی از ستارگان واقع در نیمکره‌ای را که می‌خواهیم تصویر کنیم، می‌گیریم و اندازه بعد آن ستاره را ابتدا از نقطه γ در جهت از راست به چپ روی دایره (C) جدا می‌کنیم. نقطه P که به این ترتیب به دست می‌آید فاصله‌اش روی دایره (C) از نقطه γ (یعنی اندازه قوس $P\gamma$) مساوی با طول ستاره مفروض خواهد بود. سپس نقطه P را به مرکز دایره (C) یعنی نقطه O وصل می‌کنیم. و ابتدا از نقطه P روی شعاع مذکور به اندازه عددی که عرض ستاره مفروض است از دایره‌های متحدالمرکز مذکور می‌شماریم تا به نقطه A برسیم. این نقطه موضع ستاره مفروض خواهد بود. نقطه A را به اندازه «قدر» ستاره مفروض (از قدرهای ششگانه) رنگ زرد یا آبی می‌زنیم. سپس همین عمل را برای همه ستارگانی که عرض آنها در یک جهت هستند (یعنی همه ستارگانی که یا در نیمکره شمالی واقع‌اند و یا در نیمکره جنوبی) انجام می‌دهیم. به این ترتیب تصویر همه ستارگانی که در یک نیمکره هستند به دست می‌آید. سپس این عمل را برای ستارگانی که در نیمکره دیگر هستند نیز انجام می‌دهیم تا مواضع آنها به دست آیند. و این مواضع را به رنگ لاجوردی در می‌آوریم تا از ستارگان واقع در نیمکره اول متمایز باشند.

پس از آنکه مواضع ستارگان یک نیمکره به دست آمد ستارگانی را که متعلق به هر یک از صورت‌های سماوی (مانند دَب اکبر و فرس اعظم و غیره) هستند در نظر می‌گیریم و شکل صورت سماوی مذکور را رسم می‌کنیم.

بیرونی پس از شرح این نوع تصویر که آن را برای اسطرلاب مبطلّخ اختیار کرده می‌گوید:^{۵۵} «اما این نوع تصویر را نمی‌پسندم زیرا صورت‌های سماوی که در فلک البروج هستند تصاویرشان را نمی‌توان به طور کامل رسم کرد. چه تصویر بعضی از آنها در تصویر یک نیمکره واقع می‌شود و تصویر بعضی دیگر در نیمکره دیگر. اگر هم (برای آنکه تصویر همه صورت‌های فلکی به طور کامل رسم شوند) در خارج دایره (C) نود دایره متحدالمرکز رسم کنیم که مرکز همه آنها نقطه O یعنی مرکز دایره (C) باشد (و ۳۶۰ شعاع مذکور را امتداد دهیم) واضح است که کار از نظام خارج خواهد شد. زیرا ستارگانی که تصاویرشان در خارج دایره (C) واقع می‌شوند وضع نسبیشان با وضع نسبی ستارگان در کره سماوی بسیار اختلاف پیدا خواهد کرد. چه اگر مرکز دایره (C) را قطب شمال بگیریم ستارگانی که در حوالی قطب جنوب هستند تصاویرشان بسیار پراکنده می‌گردد. به قسمی که از اندازه معمولی خارج می‌شود، و شبیه تصویر کسی می‌شود که بخواهد ستارگان را بر صفحه

۵۴. شکل ۴ نه کامل است و نه به اندازه حقیقی و فقط برای توضیح مطلب رسم شده است.

۵۵. «أما الباقية» ص ۳۵۸: «ولكننا نكره من أجل أنّ الصور التي على فلک البروج لا يمكن فيه اتمام تصويروها بل يَنقُ بعضُ اعضائها في هذا النصف والباقي في ذلك...».

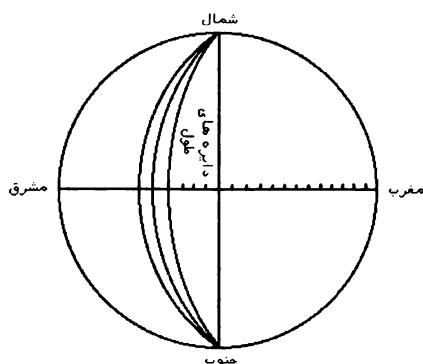
دایره‌ای که از دو قطب فلک البروج می‌گذرد مانند تصویر اسطرلابی تصویر کند، و در این تصویر ستارگانی که نزدیک محیط هستند تصاویرشان به هم بسیار نزدیک می‌شود و آنهایی که در حوالی مرکز تصویر واقع می‌شوند از هم دور می‌افتند.

بیرونی پس از ذکر نقایص این نوع تصویر می‌گوید: ^{۵۶} «برای رفع این عیب تدبیر دیگری اندیشیده‌ام که به وسیله آن بعضی از معایب طریقه قبل مرتفع می‌گردد و آن این است:

۵/۲۰- نوعی دیگر از تصویر-دایره‌ای رسم کرده آن را به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و در نقاط تقسیم اسامی جهات چهارگانه (مشرق و مغرب و شمال و جنوب) را می‌نویسیم. و شعاعهایی را که از چهار نقطه تقسیم می‌گذرد به طور نامحدود امتداد می‌دهیم. و هریک از چهار شعاع مذکور را به نود قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم. و همچنین محیط دایره را به ۳۶۰ جزء متساوی قسمت می‌کنیم، سپس روی خط مشرق و مغرب مراکز دایره‌هایی را جستجو می‌کنیم که هریک از آنها از یکی از نقاط تقسیم قطر و از نقطه شمال و جنوب بگذرد. ^{۵۷} سپس قسمتهایی از این دوایر را که در داخل دایره اول واقع می‌شوند رسم می‌کنیم. به این ترتیب ۱۸۰ کمان حاصل می‌شود که قطر (مشرق و مغرب) به وسیله آنها به قسمتهای متساوی تقسیم می‌گردد و همه آنها از نقاط شمال و جنوب می‌گذرند. اینها را دایره‌های طول می‌نامیم. ^{۵۸}

سپس در امتداد شعاعی که از نقطه شمال می‌گذرد مراکز دایره‌هایی را جستجو می‌کنیم که دارای شرایط زیر باشند:

اگر ربع دایره‌ای که نقطه مغرب را به نقطه شمال وصل می‌کند به نود قسمت متساوی (درجه) تقسیم کنیم و نقاط تقسیم را از طرف نقطه مغرب به طرف نقطه شمال از یک تا نود شماره بگذاریم



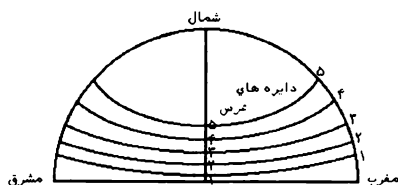
شکل ۵

۵۶. «آثارالباقیه» ص ۳۵۹: «فَلَنُخْتَلِّ لَهُ حِيلَةً أُخْرَى تُزِيلُ عَنْهَا بَعْضَ مَا كَرِهْنَا فِي الْعَمَلِ الْمَقْدَمِ...».

۵۷. روش یافتن این مراکز را بعداً شرح می‌دهد. ← ۵/۲۲

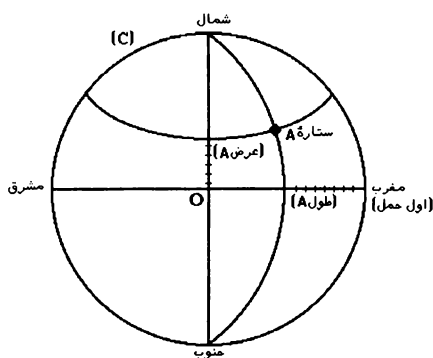
۵۸. شکل‌های ۵ و ۶ نه کامل است و نه به اندازه حقیقی و فقط برای توضیح مطلب رسم شده است.

و همچنین شعاعی که مرکز را به نقطه شمال وصل می‌کند به نود قسمت متساوی تقسیم کرده آنها را از مرکز به طرف نقطه شمال از ۱ تا ۹۰ شماره بگذاریم هر دایره باید از نقاط تقسیمی که روی ربع دایره و روی شعاع دارای یک شماره هستند بگذرد. کمانهایی از همه این دایره‌ها را که در داخل دایره اول واقع می‌شوند رسم می‌کنیم. نود کمان به دست می‌آید. سپس عین این عمل را در طرف جنوب انجام می‌دهیم نود کمان دیگر حاصل می‌شود. این ۱۸۰ کمان دایره را که هر یک از دوایر طول به وسیله آنها به ۱۸۰ قسمت می‌شود دایره‌های عرض می‌نامیم.



شکل ۶

سپس نقطه مغرب را اول حمل و خط مشرق-مغرب را منطقه البروج می‌انگاریم و ابتدا از نقطه اول حمل روی خط مشرق-مغرب (که آن را دایره البروج انگاشته‌ایم) درجات طول ستاره را می‌شماریم تا به دایره طول آن ستاره برسیم؛ بعد روی دایره طول به عدد درجات عرض ستاره مفروض جدا می‌کنیم تا به دایره عرض ستاره برسیم و موضع ستاره مفروض به دست آید.



شکل ۷

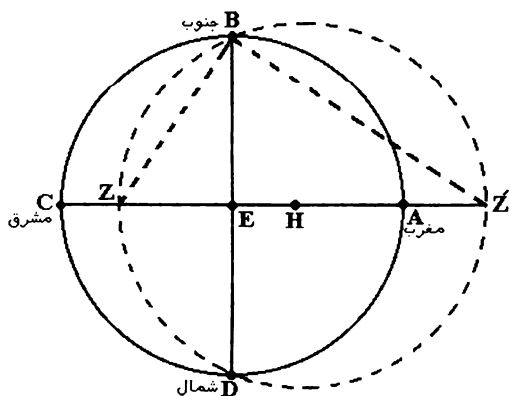
به این ترتیب تصویر یک نیمکره حاصل می‌شود. سپس شکل دیگری رسم می‌کنیم که در آن نقطه مغرب را اول «میزان» می‌انگاریم و عمل را ادامه می‌دهیم تا تصویر نیمکره دیگر به دست آید. بعداً همانگونه که در روش قبل ذکر کردیم ستارگانی را که صورت سماوی تشکیل می‌دهند در نظر گرفته شکل صورت سماوی را رسم می‌کنیم.

۵/۲۱- مورد استعمال روش فوق در جغرافیا-بیرونی گفته است: اگر بخواهیم نقشه شهرها را رسم کنیم شکلی مانند شکل فوق رسم می‌کنیم، با این تفاوت که از نقطه مغرب (روی خط مشرق-مغرب) تقسیماتی مساوی با طول شهر مفروض و روی دایره طول مقدار عرض آن را جدا می‌کنیم تا موضع شهر به دست آید. و همچنین برای نیمکره دیگر نقشه‌ای دیگر تشکیل می‌دهیم و این طریق صناعی^{۵۹} برای این عمل است.

۵/۲۲- روش تعیین مراکز دایره‌های طول-پس از بیان دستورالعمل فوق بیرونی به استدلال صحت آن می‌پردازد و می‌گوید:^{۶۰}

اتاکسانی هستند که می‌خواهند طول و عرض ستارگان را حساب کرده آنها را در جداولی قرار دهند و استفاده از این جداول را بر اعمال صناعی ترجیح می‌دهند. و بنابراین بر ما واجب است که طریقه یافتن قطرهای دایره‌های طول و عرض و مقدار دوری مراکز آنها را از مرکز دایره تصویر بیان کنیم تا مقصودمان به طور کامل حاصل شود:

دایره $ABCD$ را به مرکز E رسم کرده آن را به وسیله دو قطر عمود بر هم AEC و BED به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم. و نقطه A را مغرب و نقطه B را جنوب و نقطه C را مشرق و نقطه D را شمال می‌نامیم. و هریک از چهار شعاع EA و EB و EC و ED را به ۹۰ قسمت متساوی و دایره را به ۳۶۰ قسمت متساوی (درجه) تقسیم می‌کنیم. اکنون به عنوان مثال نقطه Z را روی شعاع EC می‌گیریم. می‌خواهیم مرکز دایره BZD را



شکل ۸

۵۹. مقصود از طریق صناعی روش عملی یعنی در واقع دستورالعمل نهیه تصویر است. بیرونی پس از بیان این دستورالعمل چنانکه خواهیم دید برهان صحت آن را می‌آورد.

۶۰. «آثارالباقیه» ص ۳۶۰: «ومن الناس من یميل الى الخشباتان و یحصلها فی جداول و یؤثرها علی الاعمال الصناعیه...».

که یکی از دوایر طول است معین کنیم. این مرکز روی شعاع EA و یا روی امتداد آن واقع است. فرض می‌کنیم که این دایره به طور کامل رسم شده باشد و مرکز آن را H و انتهای دیگر قطر آن را Z' می‌نامیم مثلث ZBZ' قائم‌الزاویه است و داریم:

$$EZ.EZ' = \overline{EB}^2 \quad (۱)$$

اما $EZ' = EH + HZ'$ و $HZ' = HZ$ پس رابطه (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$EZ(EH + HZ) = \overline{EB}^2$$

بنابراین

$$EH + HZ = \frac{\overline{EB}^2}{EZ} \quad (۲)$$

اگر $\frac{۱}{۲}$ شعاع EC را واحد بگیریم فاصله EZ برحسب این واحد معلوم است. این طول را a می‌نامیم. EB نیز برحسب همان واحد معلوم و مساوی با ۹۰ است. پس نظر به رابطه (۲) داریم:

$$EH + HZ = \frac{(۹۰)^2}{a} = \frac{۸۱۰۰}{a}$$

اکنون به دو طرف این تساوی مقدار $EZ = a$ را می‌افزاییم:

$$EH + HZ + EZ = \frac{۸۱۰۰}{a} + a$$

از روی شکل ۸ واضح است که طرف چپ این تساوی مساوی با $EH + HZ' + EZ$ یعنی مساوی با ZZ' و یا $2HZ$ است. پس:

$$HZ = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۸۱۰۰}{a} + a \right)$$

به این ترتیب طول شعاع دایره مذکور یعنی فاصله مرکز آن از نقطه معلوم Z به دست آمد و می‌توان مرکز آن H را روی امتداد قطر CA به وسیله پرگار یافت. این عمل ما را از انجام محاسبه فاصله دومرکز یعنی طول EH بی‌نیاز می‌دارد. اگر بخواهیم EH را حساب کنیم چون $ZE = a$ و HZ معلوم است، داریم:

$$EH = ZH - ZE$$

و این بود حل مسئله از راه محاسبه.

۵/۲۳- بعد مجاز و محاسبه آن- در اینجا بیرونی پس از شرح چگونگی یافتن مرکز دایره طول، اصطلاح تازه بعد مجاز را تعریف کرده چگونگی یافتن آن را بیان می‌کند.

اگر نقطه B یعنی نقطه جنوب را به نقطه H یعنی مرکز دایره طول BZD وصل کنیم تا دایره را در نقطه T قطع کند، کمان AT را بعد مجاز می‌نامیم. برای یافتن اندازه بعد مجاز عمود TS را بر BD فرود آورده نقطه T را به D وصل می‌کنیم.

چون اضلاع مثلث قائم‌الزاویه BEH بر حسب واحدی که قبلاً در نظر گرفتیم (یعنی $\frac{1}{6}$ شعاع دایره (C)) معلوم است ($EB = 90^\circ$ و EH را قبلاً حساب کردیم پس وتر BH را نیز می‌توان حساب کرد) می‌توانیم اندازه هر ضلع آن مثلث را با واحدی که $\frac{1}{6}$ شعاع دایره باشد حساب کنیم. به این طریق که اندازه هر ضلع را در 60° ضرب کرده حاصل را بر 90° تقسیم می‌کنیم. به این ترتیب اندازه‌های اضلاع مثلث BEH بر حسب کسرهای شصتگانی به دست می‌آید (به فرض آنکه شعاع دایره 60° باشد).

اما سه مثلث قائم‌الزاویه BEH و $BT D$ و TSD متشابه‌اند و داریم:

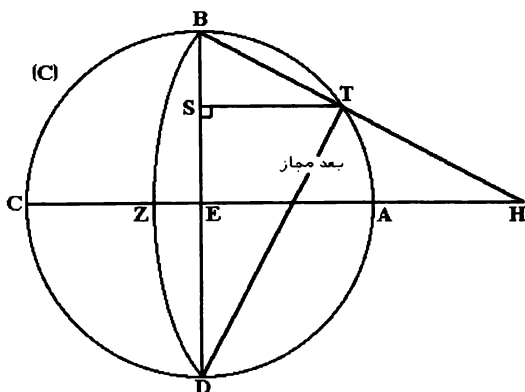
$$\frac{ST}{DT} = \frac{EB}{BH} \text{ (ب)} \quad \text{و} \quad \frac{HE}{HB} = \frac{DT}{DB} \text{ (الف)}$$

بنابراین DT از روی رابطه (الف) معلوم می‌شود:

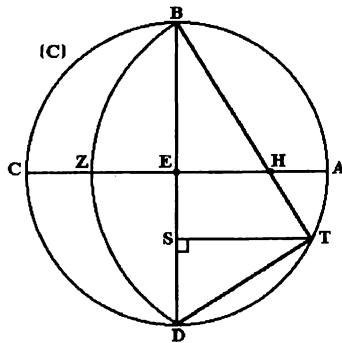
$$DT = \frac{HE \cdot DB}{HB}$$

و سپس ST از روی رابطه (ب) به دست می‌آید:

$$ST = \frac{DT \cdot EB}{BH}$$



صورت اول: مرکز H خارج از دایره (C) است.



صورت دوم: مرکز H در داخل دایره (C) است.

شکل ۱۰

اما برحسب آنکه مرکز H در خارج دایره (C) و یا در داخل آن باشد دو صورت رخ می‌دهد. در شکل ۹ پیداست که TS جیب کمان BT و در شکل ۱۰ پیداست که TS جیب کمان DT است. پس در هر دو حالت اگر کمان نظیر جیب TS را در جدول جیبها به‌دست آورده و آن را از ۹۰ درجه کم کنیم کمان AT یعنی «بعد مجاز» حاصل می‌شود.^{۶۱} (در اینجا بیرونی راه دیگری نیز برای به‌دست آوردن بعد مجاز بیان کرده است که از ذکر آن صرف‌نظر می‌کنم).

۵/۲۴- روش تعیین مراکز دایره‌های عرض-یکی از دایره‌های عرض مثلاً دایره LKM را در نظر می‌گیریم و مرکز آن را H می‌نامیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که بنابر آنچه در شماره ۵/۲۰ گفتیم اندازه‌های دو کمان AM و CL و پاره خط FK هر سه از حیث عدد یکی هستند و فقط آحادی که برای اندازه‌گرفتن آنها به کار می‌رود با هم فرق دارند (مثلاً اگر کمان AM مساوی با $\frac{5}{36}$ دایره باشد پاره خط FK هم $\frac{5}{36}$ شعاع است و اندازه هر دو با عدد ۵ نشان داده می‌شود). (شکل ۱۱).

اکنون از نقطه M عمود MO را بر قطر BD فرود می‌آوریم. OM جیب کمان DM است که اندازه آن معلوم است. و FO جیب کمان AM است که آن هم معلوم است. اکنون مقدار FK را که برحسب $\frac{1}{36}$ شعاع دایره معلوم است برحسب واحد $\frac{1}{36}$ شعاع دایره حساب می‌کنیم و سپس تفاضل $KO = FO - KF$ را به‌دست می‌آوریم.

اگر دایره LKM را کامل کرده انتهای دیگر قطری را که از K می‌گذرد K' بنامیم، واضح است که مثلث KMK' قائم‌الزاویه و MO ارتفاع آن است و داریم

$$\overline{OM}^2 = OK \cdot OK'$$

۶۱. خاطر نشان می‌کنم که در «آثار الباقیه» جاب زاخا، صفحه ۳۶۱ سطر دوم در حروف اشتباه شده و باید چنین باشد: «و تقسم المجتمع علی حب فیخرج دط ثم تضرب دط فی ب ه و تقسم المجتمع علی حب فیخرج طس».

بنابراین TC معلوم است. از طرف دیگر دو مثلث CST و HFA متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{TC}{SC} = \frac{AH}{FH}$$

و از آنجا

$$SC = \frac{TC \times FH}{AH}$$

پس SC نیز معلوم است. و چون SC معلوم شد SA هم که تفاضل قطر AC با SC است معلوم می‌شود. اکنون واضح است که در مثلث قائم‌الزاویه ATC که TS ارتفاع آن است داریم:

$$\overline{TS}^2 = SC.SA$$

و از آنجا

$$TS = \sqrt{SC.SA}$$

TS جیب کمان مجاز است و چون قوس نظیر آن را بیابیم بعد مجاز به دست می‌آید. (در اینجا نیز بیرونی راه دیگری برای به دست آوردن کمان مجاز بیان کرده است که از ذکر آن صرف نظر می‌کنم).

* * *

بخش ششم

تحقیق درباره کتاب «استخراج الاوتار» مقدمه

الف - اهمیت کتاب «استخراج الاوتار»

کتاب «استخراج الاوتار» که بیرونی آن را در هزار سال پیش از این نوشته امروزه از چند جهت شایان دقت و جالب توجه است.

اولاً برای دانش آموزان و دانشجویان و سایر کسانی که به علم هندسه دلبستگی دارند مطالعه این کتاب سرگرمی بسیار دلپذیری است. چه بیرونی در این کتاب چهار قضیه هندسی را مورد بحث قرار داده و برای هر یک از آنها استدلالهای متعدد و گوناگون از خود و از سایر ریاضیدانانی که در عصر وی و یا پیش از وی می زیسته اند آورده، سپس آنها را در حل بیش از سی مسئله هندسی و جبری و نجومی به کار برده است. مقایسه این استدلالهای متنوع با یکدیگر و روش به کار بردن آنها در حل مسائل گوناگون، گذشته از اینکه آموزنده و برای ممارست در علم هندسه بسیار مفید است، به خواننده کتاب نشان می دهد کسانی که در هزار سال پیش از این سرگرم مطالعه ریاضی بوده اند تا چه اندازه درباره نکته های این علم به موشکافی می پرداخته و آثار قدما و معاصران خود را مورد بحث و تحقیق قرار می داده اند و چگونه قضایای نظری را در حل مسائل عملی به کار می برده اند. ثانیاً برای کسانی که به تاریخ ریاضیات دلبستگی دارند مطالعه کتاب «استخراج الاوتار» از این جهت مغتنم است که بیرونی، همان گونه که عادت او بوده، هر روش و طریقه را به نام صاحب آن

ثبت کرده و اسامی عده‌ای از ریاضیدانان را در این کتاب آورده و از آثار ریاضی آنان نام برده و استدلال‌هایی از آنها برای قضایای هندسی نقل کرده است که در هیچ کتاب دیگری آنها را نمی‌توان یافت. مثلاً استدلال‌هایی که برای مسائل هفتم و هشتم (از بند چهارم بخش حاضر) از یونانیان نقل کرده هر دو بدیع و یگانه برهان‌هایی هستند که در این باره از دورانهای بسیار قدیم برای حل این مسائل به دست ما رسیده است. همچنین نام «سارینوس ثیبائی» و کتاب «فی‌الاصول الهندسیة» او را که بیرونی استدلالی از آن نقل کرده^۱ در جای دیگر جز در آثار بیرونی نمی‌یابیم. و نیز بیرونی در کتاب «استخراج‌الاوتار» از کتاب «الدوائر المتماصة لارشمیدس» گفتگو به میان آورده و حال آنکه مورخان ریاضی مغرب زمین از وجود چنین کتابی اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند (رجوع کنید به یادداشت ذیل همین مقدمه). نمونه‌های یاد شده نشان می‌دهد که تا چه اندازه مطالعه کتاب «استخراج‌الاوتار» نیز مانند سایر آثار بیرونی از جهت تاریخ ریاضیات و روشن کردن بسیاری از نکات مبهم آن مفید می‌تواند بود.

بالاخره کتاب «استخراج‌الاوتار» کتابی است که به قلم یکی از بزرگترین ریاضیدانان ایرانی نوشته شده و از زمره میراث‌های گرانمای علمی ما ایرانیان است که باید به حفظ و بزرگداشت آنها همت گماریم و آنها را از زبان عربی که از طلوع اسلام تا حدود قرن یازدهم هجری زبان علمی دوره اسلامی بوده به زبان فارسی برگردانیم تا استفاده از آنها برای هم‌میهن‌انمان میسر باشد.

ب - چگونگی تدوین بخش حاضر

ابوریحان بیرونی دو کتاب راجع به استخراج‌اوتار دایره به زبان عربی نوشته است که درباره نسخه‌های خطی موجود و نسخه‌های چاپی آنها و ترجمه‌های یکی از آنها به زبان آلمانی و شرح دیگری به زبان عربی در بند اول بخش حاضر به اندازه کافی توضیح داده‌ام. اگر چه عنوان این دو کتاب با هم متفاوت است و متن آنها نیز با هم اختلافاتی دارد ولی هدف اصلی آنها محاسبه وترهای دایره بر حسب قطر آن است. اگر تنها به ترجمه متن این کتابها به زبان فارسی اکتفا می‌کردم چندان سودی از آن عاید نمی‌گردید. بر آن شدم که همه مطالب مهم این دو کتاب را از نو به وجهی مدون سازم که هم فهم آنها برای خواننده کتاب سهل و ساده باشد و هم چیزی از نکته‌های علمی و تاریخی آنها حذف نشود و علاوه بر این هر جا مورد داشته باشد بتوانم به شرح مطالب پیچیده و ذکر نکات تاریخی لازم بپردازم.

نظر به جهات فوق در سال ۱۳۵۵ خورشیدی کتابی با عنوان «تحریر استخراج‌الاوتار» تألیف کردم که حاوی همه مطالب دو کتاب مذکور هست و برای آنکه مطالب متن آن کتاب از حواشی آن متمایز باشد در پایان هر قضیه یا مسئله توضیحاتی به عنوان «یادداشت» افزوده‌ام که با حروف ریز به چاپ رسیده است. این بخش از کتاب حاضر خلاصه و فشرده همان کتاب «تحریر استخراج‌الاوتار»

است که از آن حواشی پایان قضایا و مسائل و نیز عکس نسخه خطی موجود در لیدن حذف شده است.

این بخش از کتاب حاضر را به پنج بند به شرح زیر تقسیم کرده‌ام:

در بند اول درباره نسخه‌های موجود کتاب «استخراج الاوتار» و تفاوت‌های مهم آنها با یکدیگر به بحث پرداخته‌ام.

در بند دوم، مقدمه هر یک از دو نسخه موجود کتاب «استخراج الاوتار» را مورد بحث قرار داده به ترجمه آنها به زبان فارسی پرداخته‌ام.

در بند سوم، چهار قضیه هندسی را که اساس کتابهای «استخراج الاوتار» است شرح داده استدلال‌های مختلف آنها را ثبت کرده‌ام.

در بند چهارم، سی مسئله را که با استفاده از چهار قضیه مذکور حل شده است نوشته‌ام و این مسائل را به دو دسته تقسیم کرده‌ام. دسته اول مشتمل بر مسائل هندسی و جبری و نجومی است و دسته دوم مسائل مربوط به محاسبه وترهای دایره است.

در بند پنجم، پایان کتاب استخراج الاوتار را از روی نسخه‌های مختلف مورد بحث قرار داده‌ام.

یادداشت درباره کتاب «الدوائر المتماصة»

ابن‌ندیم در کتاب «الفهرست»^۲ کتاب «الدوائر المتماصة» را به نام ارشمیدس ثبت کرده و مورخان ریاضی از وجود این کتاب اظهار بی‌اطلاعی کرده‌اند. اما پس از تحقیق متوجه شدم که کتاب «الدوائر المتماصة» تألیف ارشمیدس را ثابت بن‌قره از یونانی به عربی ترجمه کرده و متن عربی این ترجمه در سال ۱۹۴۷ میلادی توسط جمعیت دایرة المعارف عثمانی در جزو «رسائل ابن‌قره» در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است. برهان اول قضیه اول «استخراج الاوتار» (از بند سوم بخش حاضر) و برهان سوم قضیه اول همان بند که از ارشمیدس است در پایان کتاب «الدوائر المتماصة» آمده است.

بند اول

الف - کتاب استخراج الاوتار و نسخه‌های موجود آن

ابوریحان درباره استخراج اوتار دایره، یعنی محاسبه وترهای دایره برحسب قطر آن، دو کتاب با عنوانهای زیر نوشته بوده است:

۲. ترجمه فارسی «الفهرست» ص ۴۸۰.

یک) یکی با عنوان مقالة فی استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحني الواقع فيها که آن را ظاهراً در سال ۴۱۸ ه.ق نوشته بوده^۳ و در هر صورت نام آن را در فهرستی که در سال ۴۲۷ ه.ق از آثار خود ترتیب داده در جزو کتابهای آورده است که در آن تاریخ تألیف آنها را به پایان رسانیده بوده.^۴

دو) و دیگری با عنوان جمع الطرق السائرة فی معرفة اوتار الدائرة که در سال ۴۲۷ ه.ق هنوز کامل نشده بوده و بیرونی نام آن را در فهرست مذکور در شمار آثاری که می خواسته بعداً آنها را کامل و پاکنویس کند ذکر کرده است.^۵ نام این کتاب را بیرونی در فهرست آثار خود به صورت فوق آورده ولی در پایان کتاب «استخراج الاوتار» چاپ قاهره نام آن به صورت زیر آمده است: «کتاب عملته لحصر الطرق السائرة فی استخراج اوتار الدائرة».

از کتاب «استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحني الواقع فيها» یک نسخه خطی در مجموعه شماره ۲۴۶۸/۴۲ کتابخانه بانکپور (خدا بخش پاتنا) و یک نسخه در قاهره و یک نسخه در کتابخانه مرادملا در استانبول موجود است^۶ و دوبار هم به شرحی که خواهد آمد در حیدرآباد دکن و قاهره به چاپ رسیده است.

نسخه خطی «عل»

یک نسخه خطی دیگر از کتاب «استخراج الاوتار» با همان عنوان «استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحني...» در کتابخانه لیدن به شماره ۱۰۱۲ موجود است که با نسخه های مذکور تفاوت های اساسی دارد و کتابی کامل به نظر می رسد. بعداً درباره این نسخه و تفاوت های آن با نسخه های دیگر کتاب «استخراج الاوتار» گفتگو خواهیم کرد و نتیجه خواهیم گرفت که به احتمال قوی این نسخه را می توان نسخه ای از کتاب «جمع الطرق السائرة فی معرفة اوتار الدائرة» دانست.

این نسخه را در تهیه بخش حاضر اساس کار قرار داده ام و در متن کتاب حاضر از آن با علامت اختصاری «نسخه عل» (یعنی عکس نسخه موجود در لیدن) نام برده ام. عکس صفحات این نسخه را در صفحات ۱۴ تا ۵۵ کتاب «قربانی: تحریر استخراج الاوتار» خواهید یافت.

۳. در پایان نسخه خطی «استخراج الاوتار» موجود در بانکپور آمده است: «و فرغ ابوریحان من تصنیفه فی رجب سنة ثمانی عشرة و اربعمئة».

۴. «آثار الباقیه» چاپ زاخاو صفحه XXXIV سطر اول.
۵. بیرونی در کتاب «آثار الباقیه» (چاپ زاخاو صفحه XXXVI) در بحثی که درباره طول عمر خود کرده نوشته است: «فکان قد فنی و لم یبق منه غیر الجزة والقصة الالشیء واحد و هو اتمام ما علی الید من النواقص و تبیض السواد فی التعالیق» و سپس نام عده ای از آثار خود را که هنوز ناقص بوده و از جمله نام کتاب «جمع الطرق السائرة...» را آورده است.

۶. «بوالو O» ص ۱۹۷، شماره ۶۴.

ترجمه نسخه خطی «عل» به زبان آلمانی

سوتر محقق و دانشمند سوییسی^۷ در سال ۱۹۱۱ میلادی کتاب «استخراج الاوتار» را از روی نسخه خطی «عل» به زبان آلمانی ترجمه کرد و با شرح و تفسیر استادانه‌ای که بر آن نوشت منتشر ساخت.^۸ در تهیه بخش حاضر از این اثر سوتر استفاده فراوان برده‌ام.

استخراج الاوتار چاپ حیدرآباد

(از این چاپ در بخش حاضر با نشانه اختصاری «چد»، یعنی چاپ دکن، نام برده‌ام.)
در سال ۱۹۴۸ میلادی جمعیه دایرة المعارف العثمانیه در حیدرآباد دکن کتاب «استخراج الاوتار فی الدائرة...» را از روی نسخه خطی موجود در بانکپور به وضع مغشوشی به چاپ رسانید. همان‌گونه که در بخش سوم در ضمن (شماره ۳۰) کتاب حاضر توضیح داده‌ام نسخه خطی ۲۴۶۸ بانکپور که کتاب «استخراج الاوتار» جزوی از آن است مجموعه‌ای است مرکب از عده‌ای از آثار بیرونی و دیگران. ظاهراً اوراق این مجموعه پراکنده و جابه‌جا شده و در نتیجه قسمتهایی از بعضی از کتابها و رساله‌های آن وارد اوراق کتابها و رساله‌های دیگر موجود در همان مجموعه شده است.^۹ از جمله پس از تحقیق معلوم شد که:

فقط مطالبی که از صفحه ۳ تا اواسط صفحه ۱۰۸ کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد و سپس از وسط صفحه ۲۲۴ تا پایان صفحه ۲۲۶ همان چاپ آمده مربوط به کتاب «استخراج الاوتار» تألیف بیرونی است. که احیاناً در بعضی از مواضع آن افتادگی دارد و مغلوط هم به چاپ رسیده است.

استخراج الاوتار چاپ مصر

(از این چاپ در کتاب حاضر با علامت اختصاری «چم» یعنی چاپ مصر نام برده‌ام.)
در سال ۱۹۶۵ میلادی آقای احمد سعید الدیمزداش کتاب «استخراج الاوتار» را بنا به گفته خودش از روی دو نسخه موجود در کتابخانه بانکپور و کتابخانه مرادملا در استامبول با افزودن مطالبی به عنوان شرح در مصر به چاپ رسانید.

مطالبی که آقای احمد سعید الدیمزداش به عنوان متن کتاب «استخراج الاوتار» در چاپ خود آورده همان مطالبی است که در چاپ حیدرآباد آمده، با همان وضع آشفته و درهم و برهم، و مخلوطی است از کتاب «استخراج الاوتار» و مطالب پراکنده‌ای از کتابهای دیگر که ذکرش گذشت، و در این چاپ به اختلاف نسخه‌ها جز در یک مورد اشاره نشده است.

۷. درباره احوال و آثار وی — ایسیس (Isis) جلد پنجم سال ۲۳ — ۱۹۲۲ صفحات ۴۰۹ تا ۴۱۷ (تاریخ تولد وی چهارم ژانویه ۱۸۴۸ و تاریخ وفات وی هفدهم ماه مارس ۱۹۲۲ است).

۸. — «سوتر ۸» در فهرست منابع کتاب حاضر.

۹. — شماره ۳۰ از بخش سوم کتاب حاضر.

جای تعجب است که آقای «استاد احمد سعیدالدرداش» که بقول خود کتاب «استخراج الاوتار» را مورد تحقیق علمی قرار داده عبارت زیر را بدون اندک دقت از قول بیرونی به چاپ رسانیده است: «و قد کان لجدی ابی الحسن ثابت فی ذلک ترکیب علی هذه الجهة»^{۱۰} و متوجه نشده است که ابوالحسن ثابت بن قزّه جدّ بیرونی نبوده است. علت این اشتباه آن است که همان‌گونه که پیش از این نوشتیم اصولاً این قسمت از کتاب چاپ مصر، بخشی از کتاب «فی طریق التحلیل و الترتیب» تألیف ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قره است و اصولاً ربطی به «استخراج الاوتار» تألیف بیرونی ندارد.

ب - تفاوت‌های مهم نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» با نسخه خطی «عل»
نسخه خطی «عل» با آن قسمت از نسخه‌های چاپی «چد» و «چم» که مربوط به «استخراج الاوتار» است تفاوت‌های فراوان دارد که بسیاری از آنها اساسی و بعضی جزئی است. گذشته از این بعضی از این اختلافات طوری است که نمی‌توان قبول کرد که کسی جز خود بیرونی در آنها دست برده و تغییر داده باشد، و با اطمینان می‌توان گفت که هر دو متن را خود بیرونی در دو زمان مختلف تدوین کرده است. چون اگر بخواهم همه این اختلافات را شرح دهم مطلب بسیار به درازا خواهد کشید این است که به‌عنوان نمونه به ذکر چند فقره از مهمترین آنها اکتفا می‌کنم.

یک) چنانکه در بند دوم بخش حاضر خواهیم دید قسمتی از مقدمه نسخه خطی «عل» با مقدمه نسخه‌های چاپی تفاوت دارد و از دقت و موشکافی در مطالب آن چنین بر می‌آید که بیرونی نسخه «عل» را پیش از متن نسخه‌های چاپی انشاء کرده بوده است.

دو) پایان نسخه‌های چاپی با پایان نسخه خطی «عل» نیز، چنانکه در بند پنجم بخش حاضر خواهیم دید، اختلاف بارز دارد. به این معنی که بیرونی در اولی متذکر شده است که و تریک درجه را در کتاب خود موسوم به «تکمیل زیج حبش بالعلل و تهذیب اعماله من الزلزل» به‌دست آورده است. اما در پایان نسخه خطی «عل» نوشته است که همه ریاضیدانان از محاسبه دقیق و تریک درجه عاجز مانده‌اند و فقط آن را به تقریب حساب کرده‌اند. از این اختلاف چنین بر می‌آید که بیرونی در موقع تألیف نسخه «عل» هنوز کتاب «تکمیل زیج حبش» را تألیف نکرده بوده است. سه) در نسخه‌های چاپی برای حالات مختلف شکل مربوط به قضیه اول بحثی شده است^{۱۱} که در نسخه خطی «عل» دیده نمی‌شود.

چهار) در نسخه‌های چاپی ابتدا چهار قضیه هندسی که در واقع اساس کتاب «استخراج الاوتار» را تشکیل می‌دهند بیان و برای هر یک استدلال‌های مختلف ذکر شده است. اما در نسخه خطی «عل» فقط دو قضیه اول و دوم از چهار قضیه مذکور جداگانه بیان و به طرق مختلف ثابت شده و دو قضیه سوم و چهارم، تقریباً در ضمن استدلال‌ها و حل مسائل، مورد استفاده واقع گردیده است

۱۰. ← «چد» صفحه ۲۸۶ سطر هشتم از پایین صفحه.

۱۱. ← «چد» صص ۵ و ۶ - «چم» صص ۳۳ و ۳۴.

و این مهمترین اختلاف نسخه خطی «عل» با نسخه‌های چاپی است و تردیدی نمی‌توان داشت که این تغییرات را خود بیرونی در تألیف خود داده و متن هر دو نسخه به‌دست خود او انشاء شده است. از بررسی ترتیب این قضایا معلوم می‌شود که بیرونی ابتدا متن نسخه خطی «عل» را نوشته و چون در این متن مطالب فشرده بوده بعداً این ترتیب را به هم زده و قضایا را به وجهی که در نسخه‌های چاپی آمده مرتب کرده است.

پنج) در نسخه‌های چاپی این نکته که می‌توان بعضی از چهار قضیه مذکور را از سه قضیه دیگر نتیجه گرفت، جداگانه و به تفصیل بیان شده است.^{۱۲} در صورتی که در نسخه خطی «عل» این مطلب در دنبال هر یک از استدلالهای قضیه دوم آمده و بیرونی بعضی از این استدلالها را مقدم (سابق) و بعضی دیگر را تابع (لاحق) نامیده است.^{۱۳} و این نیز یکی از اختلافهای اساسی نسخه خطی «عل» با نسخه‌های چاپی است و مؤید این نظر است که متون هر دو نسخه را خود بیرونی انشا کرده است.

شش) در نسخه‌های چاپی چند استدلال برای قضایای دوم و سوم ذکر شده که در نسخه خطی «عل» دیده نمی‌شود؛ مانند برهانهایی که در بخش حاضر به‌عنوان برهانهای دهم و دوازدهم قضیه دوم و برهانهای اول و دوم قضیه سوم ثبت کرده‌ام. همچنین در نسخه‌های چاپی برخی از مسائل هست که در نسخه خطی «عل» نیامده است، مانند مسئله‌ای که به‌عنوان مسئله سی‌ام در بخش حاضر نوشته‌ام و چند مسئله دیگر.^{۱۴} این مطلب نیز مؤید آن است که بیرونی متن نسخه‌های چاپی را بعد از نسخه خطی «عل» نوشته بوده است.

ج - درباره نسخه‌های چاپی و نسخه خطی «عل» چه می‌توان گفت؟

از مقایسه نسخه‌های چاپی و نسخه خطی «عل» از «استخراج الاوتار» و دقت در طرز بیان و روش تقسیم‌بندی مطالب آنها و مشاهده اختلافاتی که مختصری از آنها را شرح دادم می‌توان نتیجه گرفت که:

اولاً نسخه خطی «عل» کتابی است در حد خود کامل و افتادگی ندارد و در سلسله مطالب آن گسیختگی دیده نمی‌شود. این نسخه با یک مقدمه شروع شده و سپس دو قضیه هندسی یکی پس از دیگری در آن مطرح گردیده و برای هر یک از آنها چندین استدلال از ریاضیدانان مختلف ذکر شده است. آنگاه راه حل عده‌ای از مسائل هندسی و جبری و نجومی در آن شرح داده شده و بالاخره مسائل اساسی مربوط به استخراج اوتار دایره در آن مطرح و حل گردیده و در پایان کتاب بحثی کلی درباره استخراج وتر یک درجه پیش کشیده شده و بیرونی در آنجا متذکر شده است که همه ریاضیدانان در محاسبه وتر یک درجه کوشیده‌اند ولی هیچ‌کس آن را به تحقیق به‌دست

۱۲. ← «چد» صص ۴۲ تا ۴۵ و ۴۸ و ۴۹- «چم» صص ۸۲ تا ۸۵ و ۸۹ و ۹۰.

۱۳. ← قسمت «ج» از بند سوم بخش حاضر.

۱۴. ← «چد» صص ۶۹ تا ۷۱ و صص ۱۰۵ تا ۱۰۸- «چم» صص ۱۲۰ تا ۱۲۲ و صص ۱۶۱ تا ۱۶۳.

نیاورده است.

ثانیاً نسخه‌های چاپی شامل قسمت مهم و اساسی کتاب «استخراج الاوتار» هست ولی مطالب مفصلی از کتابهای دیگر با آن مخلوط شده است. و روی هم رفته آن قسمت از نسخه‌های چاپی که مربوط به «استخراج الاوتار» است مطالبش پخته‌تر و رساتر و منظم‌تر از مطالب نسخه خطی «عل» است و تقریباً با اطمینان می‌توان گفت که بیرونی متن نسخه «عل» را پیش از متن نسخه‌های چاپی تألیف و تدوین کرده بوده است.

ثالثاً با در نظر گرفتن اینکه بیرونی دو کتاب درباره استخراج وترهای دایره نوشته بوده و با دقیق شدن در اختلافات اساسی که متن نسخه‌های چاپی با نسخه خطی «عل» دارد می‌توان احتمالاً نسخه خطی «عل» را نسخه‌ای از کتاب «جمع الطرق السائرة فی معرفة اوتارالدائرة» دانست که بیرونی قبلاً آن را نوشته بوده و به قول خود، چنانکه قبلاً گفتم، می‌خواسته است در آن دست ببرد و آن را اصلاح کند.

در اینکه متن نسخه‌های چاپی را، پس از حذف قسمتهای الحاقی، می‌توان متن کتاب «استخراج الاوتار بخواص الخط المنحنی...» دانست تردیدی نیست. چه در پایان نسخه‌های چاپی آمده است: ^{۱۵} «وقد سلکت فی استخراج وترالجزء الواحد فی شرحی لعلل زیج حبش طریقاً آخر. ثم جمعت ذلک الی ما للقدماء والمحدثین فی کتاب عملته لحصر الطرق السائرة فی استخراج اوتار دائرة.» پس بدون تردید نسخه‌های چاپی مشتمل بر قسمتهایی از کتاب «استخراج الاوتار بخواص الخط المنحنی...» است که بیرونی در آن به تألیف دیگر خود یعنی به کتاب «جمع الطرق السائرة...» اشاره کرده است. عبارت فوق در پایان نسخه خطی «عل» دیده نمی‌شود و در آنجا مطلب اصولاً به‌نحو دیگری بیان شده است.

با این حال برای اینکه نسخه خطی «عل» را نسخه متن کتاب «جمع الطرق السائرة فی معرفة اوتارالدائرة» بدانیم یک اشکال باقی می‌ماند و آن این است که عنوان این نسخه خطی «استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص...» است و نه «جمع الطرق السائرة...» شاید این عنوان را کاتب نسخه خطی «عل» نظر به اینکه کتاب «استخراج الاوتار فی الدائرة...» شهرت بیشتری داشته از خود افزوده باشد والله اعلم.

بند دوم

مقدمة كتاب «استخراج الاوتار»

الف - متن عربى مقدمة كتاب «استخراج الاوتار» از روى نسخه هاى چاپى (جد: ص ٣-چم: ص ٣٢).

بسم الله الرحمن الرحيم - كتاب ابى الزحان محمد بن احمد البيرونى فى استخراج الاوتار فى الدائرة بخواص الخط المنحنى الواقع فيها: وقفت على ما استعلمتني من السبب الداعى اياى الى الولوع بتصحيح دعوى لقدماء اليونانيين، فى انقسام الخط المنحنى فى كل قوس بالعمود النازل عليه من منتصفها، والتفجير عن خواصه حتى نستبين لاجله، الى الاشتغال بما يذكره محمد بن زكريا الرازى من فضول الهندسة، من غير أن يشعر بحقيقة الفضول التى هى الزيادة على الكفاية فى كل شىء. فانه لو شعر بها لوجد نفسه، مرتبكة فى فضول الوسوسة التى أفسد بها، قلوبا متجافية عن الديانة. أو شرهة بفضول الدنيا الى العتاد والرياسة، وليس مقدار الكفاية من الهندسة، ما ظنه الرازى وأشار بفلسفته اليه ثم عادى باقيه، ولم يزل الناس أعداء ما جهلوا.

قال الله تعالى (واذلم يهتدوا به فيقولون هذا افك قديم)، وأنت لو تحققت ماهية الهندسة، وأنها معرفة نسبة الأجناس الواقعة تحت الكمية بعضها إلى بعض، وأنها هى التى تتوصل بها لمعرفة مقدار كل ما نحتاج إليه، من مزروع ومكيل وموزون، ما بين مركز العالم وبين أقصى محسوس عنه، وعرفت أن بها تعقل الصور مجردة عن المواد، ويتصور حقيقة البرهان تصور انطباع، حتى لا يذهب على القيم بها ما يذهب على كثير من المحصلين فى المنطق مهما لزم مسلك صناعته، ثم نرتقى بوساطة التدريب بها من المعالم الطبيعية الى المعالم الالهية، التى تمتنع لغموض معانيها وصعوبة مأخذها، ودقة طرائقها وجلالة أمرها، وبعد تصورها عن أن يتقاد لكل أحد، أو يدركها من عدل عن سنن البرهان لما عدلتنى عن ذلك.

وذلك أن تفعل اذا لم أقتنع فى المطلوب بالطريق الموصل إليه، دون تضييع الزمان فى طلب طرق أخرى إليه، ثم لم يسفر فى آخر الامر عن نتائج هى عمدة علم الهيئة.

فأما كثرة الطرق، فسبب جمعى اياها تدريب المتعلم بتنوعها ثم اتحادها و لأنها كانت لى فى الغربية مؤسسة، ولأسامر من فارقتهم من الاصدقاء مذكرو، وقد

أثبتها لك لتأملها و تعرف كيف آل جميعها الى النكتة الواحدة، و ما تثمره الفوائد
 في العاقبة، فيتهد عذرى لديك فيما حمت حوله من عذلى، و رب لائم ملیم،
 و ما التوفیق الامن عندالله تعالى.*

ب - ترجمه مقدمه فوق به فارسی

آگاه شدم بر آنچه از من پرسیده بودی که به چه سبب به اثبات این ادعای یونانیان که «چون از وسط کمانی از دایره عمودی بر خط شکسته محاط در آن فرود آید، آن خط شکسته را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند» اصرار می‌ورزم و دریافتن خواص آن می‌کوشم. حتی به این جهت مرا به آنچه که محمد بن زکریای رازی «فضول هندسه» خوانده است نسبت داده بودی. ولی او خود از حقیقت «فضول» که افزودن بر اندازه کفایت در هر چیز است آگاه نبود، و گر نه گرفتار فضول و سوسه‌ای نمی‌شد که با آن دل‌های گریزان از دین، یا آزمند به فزونی مال و ریاست، را تباه کرده است. اندازه کافی هندسه آن نیست که رازی پنداشته و در فلسفه خود به آن اشاره کرده^{۱۶} و سپس با بازمانده آن دشمنی نموده است. آری هنوز مردمان دشمن چیزهایی هستند که نمی‌دانند.

خدای تعالی فرموده است: و اذ لم یهتدوا به، فسیقولون هذا افک قدیم^{۱۷} (= و چون به آن راه نبردند، می‌گویند این دروغی کهن است). و اگر تو در ماهیت هندسه تحقیق می‌کردی و می‌دانستی که آن شناختن نسبت جنسهای واقع در زیر کمیت به یکدیگر است، و اینکه وسیله‌ای است که با آن به شناختن هر چه پیمودنی و سنجیدنی است که میان مرکز جهان و دورترین نقاط محسوس آن واقع است دسترس حاصل می‌شود، و می‌دانستی که به وسیله هندسه تعقل صورتهای مجرد از ماده امکان‌پذیر است، و در نتیجه ممارست آن حقیقت برهان در ذهن نقش می‌بندد، و کسی که با هندسه سر و کار دارد هر اندازه لازم باشد در صناعت خود پیش می‌رود و مانند بسیاری از محصلان منطق به بیراهه نمی‌افتد، و می‌دانستی که با تمرین در هندسه از نمودارهای طبیعت به نمودارهای الهی ارتقا حاصل می‌شود، که به علت پیچیدگی معانی و دشواری اصول و باریکی راهها و عظمت امر و دوری تصور آن از ذهن، راه یافتن به آن و دریافتن آن برای کسی که از راههای روشن برهان عدول کند ممکن نیست، مرا به این کار ملامت نمی‌کردی.

و این برای آن است که اگر کسی برای رسیدن به مطلوب از راهی که می‌خواهد به آن برسد بدون تباه کردن وقت توفیق نیافت، درصدد جستن راه دیگری برآید تا از نتایجی که به آن می‌رسد و در علم هیئت اهمیت دارد محروم نماند.

* و نیز ← جلد: ص ۳.

۱۶. ← یادداشت شماره ۱ پایان این بند.

۱۷. ← یادداشت شماره ۲ پایان این بند.

و اما اینکه من راههای فراوان را جمع آورده‌ام، برای آن است که متعلم با گونه‌گونی آنها و اینکه همه به یک نتیجه می‌انجامد، تمرین کند و آشنا شود و دیگر اینکه چنین کاری برای من در غربت مونس بود و با دوستانی که از ایشان دور افتاده بودم حدیث می‌گفتم و این کار یادآور ایشان بود. همه را ثبت کردم تا خوب در آنها تأمل کنی و بدانی که چگونه بازگشت همه آنها به یک نکته است. فوایدی که در پایان نصیب تو می‌شود عذرخواه پرورشی من خواهد بود که سبب سرزنش کردن تو شده است. و چه بسیار ملامت‌گر که خود سزاوار ملامت شدن است و توفیق جز از جانب خدا نیست.

ج - مقدمه «استخراج الاوتار» از روی نسخه «عل»

از تطبیق این مقدمه با مقدمه نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» که متن و ترجمه آن را در صفحات قبل دیدیم می‌توان مشاهده کرد که بخش اعظم ۱۳ سطر اول مقدمه نسخه خطی «عل» با ۲۱ سطر اول مقدمه نسخه‌های چاپی تقریباً با هم یکی است، با این تفاوت که در مقدمه نسخه «عل» نام محمد بن زکریای رازی ذکر نشده است. اما عبارات زیر که از سطر چهاردهم به بعد نسخه «عل» آمده است با قسمت اخیر مقدمه نسخه‌های چاپی اختلاف کلی دارد.

«... ولک ابدک الله ان تعذلنی علی ما ذکرک لوکنت تولیت استخراج تلک الطرق باسرها فضیعت الزمان فیما یکفی منه الیسیر او لم یحصل منها آخر الامر ما هو العمدۃ فی علم الهیئۃ اعنی استخراج الاوتار فی الدایره و نسبت مقادیرها الی مقدار القطر و اجزائه المفروضۃ له. لکن هذه الدعوی وقعت، بین یدی جماعۃ من فضلاء اهل هذا العلم فاجتهد کل منهم فی تصحیحها و اقامۃ البرهان علیها. فاجتمع عندی منها ما کنت اکرر النظر فیہ حبا للعلم و تعلیلا للنفوذ عن غلیل الاشواق الی اولئک الفضلاء ایام الغریبۃ و ...* ذلک صرف الفکرۃ الیه حتی شارکهم فی اقامۃ البرهان علیہ علی ما یبین فی خلال الکلام و صار اصلا من الاصول الهندسیۃ ثبت علیہ جوابات کثیره من المسایل سئلته و قد جمعت کل ذلک لک و اصفت کل طریقہ الی صاحبها کما هو عادتی لتنظر فیها و تعرف مآل جمیعها الی النکتۃ الواجده و ما ینتج منه اخیرا من الوصول الی معرفۃ الاوتار فیتهد عذری لیدیک فیما حمت حوله من عذلی و رب لائم ملیم و ما التوفیق الا من عندالله تعالی.

د - ترجمه آزاد عبارات فوق به فارسی

و تو، که خدایت تأیید کند، در آن صورت حق داشتی مرا بر آنچه گفتم سرزنش کنی که من به استخراج همه این روشها می‌پرداختم و وقتم را در چیزی تباه می‌کردم که به دست آوردن اندکی از آن کافی می‌بود، یا اینکه بالاخره در نتیجه این کوششها آنچه در علم هیئت اهمیت اساسی دارد،

* در این موضع از نسخه خطی (سطر اول از صفحه دوم) کلمه‌ای نوشته شده که نتوانستم بخوانم.

یعنی استخراج وترهای دایره و نسبت‌های مقادیر آنها به قطر و اجزای مفروض آن به دست نمی‌آمد. اما این قضیه به دست عده‌ای از فضلاء اهل این علم افتاد و هر یک از آنها در تصحیح و اثبات آن کوشیدند و عده‌ای از این برهانها نزد من گرد آمد و من به سبب دلبستگی به علم و فرو نشانیدن آتش شوقی که به آن دانشمندان در ایام غربت داشتم در آنها مکرر نظر می‌کردم و در آنها بسیار می‌اندیشیدم تا آنجا که خود نیز چنانکه در متن کتاب دیده می‌شود برای آن قضیه برهانها آوردم و این قضیه یکی از اصول هندسی شد که به وسیله آن می‌توان جواب بسیاری از مسائل را که از من پرسیده شده بود به دست آورد. پس همه آنها را برای تو جمع‌آوری کردم و همان‌گونه که عادت من است، هر روش و طریقه را به نام صاحب آن ثبت کردم^{۱۸} تا تو در آنها نظر کنی و بدانی که همه آنها به یک نکته واحد برمی‌گردد. و نتیجه‌ای که بالاخره از آن یک نکته حاصل می‌شود دست یافتن به شناخت اوتار دایره است. و این خود عذرخواه من در پیش تو است که نمی‌بایستی مرا ملامت کرده باشی و چه بسا ملامتگر که خود سزاوار ملامت شدن است و توفیق جز از جانب خداوند عزیز حکیم نیست.

یادداشت‌های مربوط به بند دوم

(۱) محمد بن زکریای رازی کتابی با عنوان «کتاب الرد علی من اشتغل بفضول الهندسة» نوشته بوده است (← ترجمه فارسی «تاریخ‌الحکماء» با مقابله و تصحیح و حواشی و مقدمه به کوشش خانم دکتر بهین دارائی، تهران ۱۳۴۷، ص ۳۷۵ - در متن عربی «تاریخ‌الحکماء» چاپ (Lippert)، ص ۲۷۳ و همچنین در ترجمه فارسی «الفهرست» توسط آقای م. تجدد، ص ۵۳۲، نام این کتاب درست ثبت نشده است. عنوان صحیح آن همان است که در فوق نوشته‌ام).

به عقیده آقای دکتر مهدی محقق اینکه بیرونی می‌گوید رازی مقدار کفایت از هندسه را در فلسفه خود اشاره کرده ناظر است به عبارتی که رازی در کتاب «السيرة الفلسفية» آورده است (← «السيرة الفلسفية» چاپ یونسکو به اهتمام دکتر مهدی محقق، تهران ۱۳۴۳، ص ۱۲۲).

(۲) قسمت آخر از آیه یازدهم سورة ۴۶ (سورة الاحقاف).

(۳) این حقیقتی است انکارناپذیر و بیرونی از این راه خدمت بزرگی به تاریخ ریاضیات کرده است.

قضایای کتاب «استخراج الاوتار»

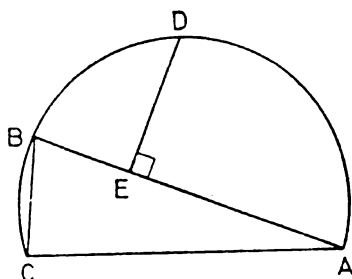
در کتاب «تحریر استخراج الاوتار» همان گونه که اشاره شد در پایان هر یک از قضایا و استدلالهای این بند یادداشتهای مفیدی درباره برخی از مطالب نوشته شده است که برای رعایت جانب اختصار در کتاب حاضر آنها را حذف کرده ام. خوانندگان برای کسب اطلاعات بیشتر می توانند به کتاب مذکور مراجعه کنند.

الف - صورت قضیه اول

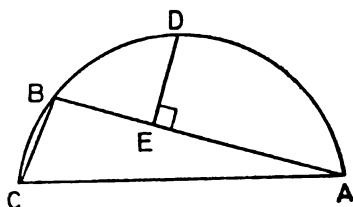
صورت قضیه اول - اگر خط شکسته ABC که دو ضلع آن AB و BC متساوی نیستند در کمان ABC از دایره ای محاط باشد و از نقطه D وسط کمان ABC عمود DE را بر ضلع بزرگتر خط شکسته فرود آوریم، پای این عمود وسط خط شکسته ABC خواهد بود.

فرض $\left. \begin{array}{l} \text{اولاً کمان } ABC \text{ کمانی است از دایره و } AB > BC \\ \text{ثانیاً نقطه } D \text{ وسط کمان } ABC \text{ است} \\ \text{ثالثاً } DE \perp AB \end{array} \right\}$

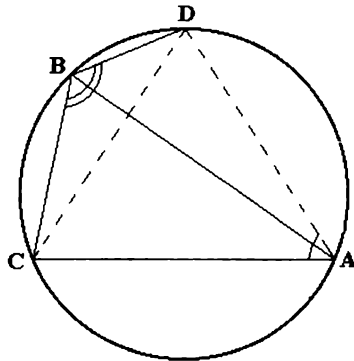
حکم: $AE = EB + BC$



شکل ۱۳



شکل ۱۲



شکل ۱۴

(و نیز ← به «قربانی: ت» صص ۶۴ و ۶۵ و ۶۶).

تبصره - شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول دارای خاصیتی است که اگر چه بیرونی در آغاز کتاب «استخراج الاوتار» به آن اشاره نکرده است اما چنانکه بعداً خواهیم دید در استدلالها آن را به کار برده است. مثلاً رجوع کنید به برهان پنجم قضیهٔ اول. آن خاصیت این است:

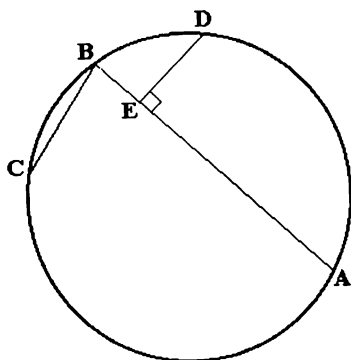
اگر بر کمان AC از یک دایره نقطهٔ دلخواه B را اختیار کرده وسط کمان ABC را نقطهٔ D بنامیم به شرط آنکه وتر AB از وتر BC بزرگتر باشد زاویهٔ DBC منفرجه خواهد بود. زیرا واضح است که مثلث ADC متساوی الساقین است ($DA = DC$) و بنابراین زاویهٔ DAC حاده است. پس زاویهٔ DBC که مکمل آن است منفرجه است. (شکل ۱۴).

توجه کنید - چون شکل هندسی مربوط به قضیهٔ اول در همهٔ برهانهایی که برای این قضیه ذکر خواهد شد مورد احتیاج است، در آغاز هر برهان شکل را با قراردادهای زیر رسم کرده از تکرار ذکر این قراردادهای خودداری خواهم کرد. البته در هر استدلال این شکل را که اساس کار است به وجه مناسب تکمیل خواهم نمود.

در شکل ۱۵ نقطهٔ D وسط کمان AC از دایره و نقطهٔ B نقطهٔ دلخواهی متعلق به کمان ADC است به قسمی که $AB > BC$ و نقطهٔ E پای عمودی است که از نقطهٔ D (وسط کمان ABC) بر وتر بزرگتر AB فرود آمده است. حکم قضیهٔ اول این است که: $AE = EB + BC$.

ب - برهانهای قضیهٔ اول

برهان اول قضیهٔ اول - نخستین برهان از ارشمیدس در کتاب دوائر (و کتاب سارینوس ثبائی



شکل ۱۵

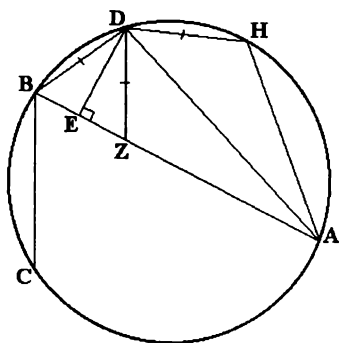
فی الاصول الهندسية).

روی دایره کمان DH را مساوی با کمان DB جدا کرده DH و DB را رسم می‌کنیم (شکل ۱۶). سپس روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ و DA را رسم می‌کنیم، داریم: $DB = DZ$ (زیرا DE عمود منصف پاره خط BZ است) و $\widehat{HA} = \widehat{BC}$ (زیرا D وسط کمان ABC است و $\widehat{BD} = \widehat{DH}$ است).

پس: $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DBA}$ (اندازه آنها یکی است)

یعنی: $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ (زیرا مثلث DBZ متساوی الساقین است). اما $\widehat{DZB}$ زاویه خارجی مثلث ADZ است. پس:

$$\widehat{DZB} = \widehat{ZAD} + \widehat{ZDA}$$



شکل ۱۶

و $\widehat{ZAD}$ همان $\widehat{DAB}$ است. پس از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ZDA} = \widehat{HDA}$$

بنابراین دو مثلث DZA و DHA در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها متساویند. پس
اما $AZ = AH$ و $AH = BC$ و $ZE = EB$ پس:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

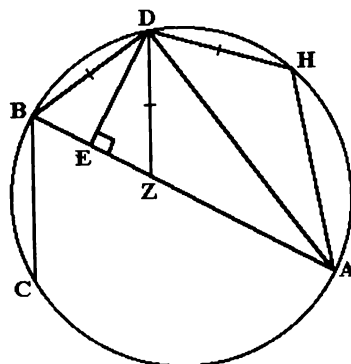
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← به «قربانی ت» صص ۶۸ و ۶۹).

برهان دوم قضیهٔ اول - نخستین برهان از ابوسعید محمد بن علی ضریر جرجانی* - این برهان
با اندک اختلافی شبیه برهان اول ارشمیدس است.

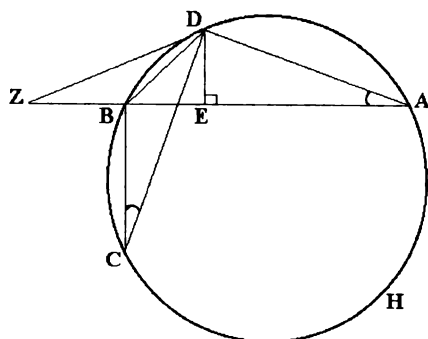
کمان AH را روی دایره مساوی با کمان BC و پاره خط AZ را روی AE مساوی با AH
جدا می‌کنیم (شکل ۱۷). داریم: $\widehat{DH} = \widehat{DB}$ (زیرا از دو کمان متساوی AD و DC دو کمان
متساوی را کم کرده‌ایم). پس: $\widehat{HAD} = \widehat{DAZ}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه روی کمانهای متساوی
هستند). بنابراین دو مثلث DAH و DAZ متساویند (در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها). پس
 $HD = ZD$ از طرف دیگر $BD = DZ$ (زیرا هر دو با DH مساویند) بنابراین مثلث BDZ
متساوی الساقین است و ارتفاع DE منصف قاعده BZ است. بنابراین:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



شکل ۱۷



شکل ۱۸

(و نیز ← به «قربانی ت» ص ۷۰).

برهان سوّم قضیّه اول - دوّمین برهان از ارشمیدس در کتاب دوائر. AB را امتداد داده روی آن EZ را مساوی با EA جدا می‌کنیم و پاره‌خطهای DA و DC و DB و DZ را رسم می‌کنیم. داریم: $AD = DC$ (زیرا D وسط کمان ABC است). $AD = DZ$ (زیرا DE عمود منصف پاره‌خط AZ است). (شکل ۱۸) پس $DA = DC = DZ$. از طرف دیگر دو زاویه A و C محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند، پس $\widehat{DAB} = \widehat{DZB} = \widehat{DCB}$ و چون کمان DA با کمان DC مساوی است اگر کمان CHA را بر هر یک از آنها بیفزاییم کمانهای متساوی $DAHC$ و $DCBA$ حاصل می‌شوند، اما زاویه DBC رو به‌روی کمان $DAHC$ و زوایای DAB و ADB مجموعاً رو به‌روی کمان $DCBA$ می‌باشند (زاویه DAB رو به‌روی کمان DB و زاویه ADB رو به‌روی کمان BCA است) پس معلوم می‌شود که:

$$\widehat{DBC} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

از طرف دیگر زاویه DBZ زاویه خارجی مثلث ADB است پس:

$$\widehat{DBZ} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$$

از دو تساوی فوق معلوم می‌شود که $\widehat{DBC} = \widehat{DBZ}$.

و قبلاً نیز دیدیم که $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$. بنابراین دو زاویه از مثلث DZB با دو زاویه از مثلث DCB نظیر به‌نظیر با هم برابرند پس زوایای سوّم آنها نیز با هم مساویند و چون در این دو مثلث ضلع BD مشترک است این دو مثلث متساویند و در نتیجه $ZB = BC$ و چون

$$ZB + BE = EA$$

پس

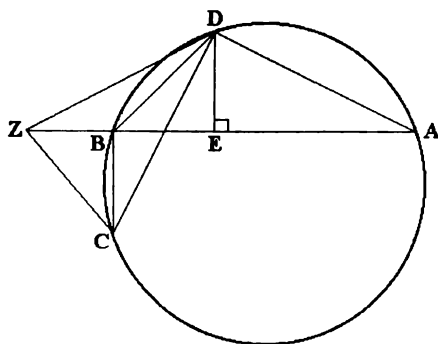
$$CB + BE = EA$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۷۲).

برهان چهارم قضیهٔ اول - نخستین برهان از آذرخور* پسر استاد جُشَنَش - این برهان با اندک اختلاف شبیه برهان قبل است.

AB را امتداد داده EZ را مساوی با AE جدا می‌کنیم (شکل ۱۹) و پاره‌خطهای DA



شکل ۱۹

و DB و DC و DZ و ZC را رسم می‌کنیم. چون DE عمود منصف پاره‌خط AZ است و $DA = DZ$ و چون نقطهٔ D وسط کمان ABC است $DA = DC$ بنابراین $\widehat{DAB} = \widehat{DZB}$ و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند) پس $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$. حال گوییم چون مثلث DZC متساوی‌الساقین است $\widehat{DZC} = \widehat{DCZ}$ و اگر از این دو زاویهٔ متساوی دو زاویهٔ متساوی DCB و DZB را کم کنیم می‌ماند:

$$\widehat{BCZ} = \widehat{BZC}$$

پس مثلث BZC متساوی‌الساقین است و $BZ = BC$ و چون $ZB + BE = EA$

بنابراین

$$BC + BE = AE$$

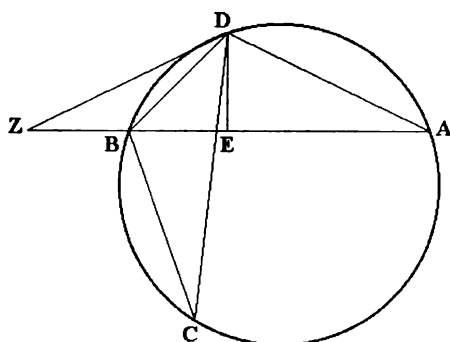
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۷۴).

برهان پنجم قضیهٔ اوّل - سومین برهان از ارشمیدس در «کتاب الدوائر». بیرونی نوشته است که این برهان را در کتاب «مسائل» از یونانیان دیده و احتمال داده است که شاید آن کتاب از آپولونیوس باشد که یوحنا بن یوسف آن را از یونانی به عربی ترجمه کرده است.

این برهان اصولاً مانند برهان دوم ارشمیدس است، که آن را به عنوان برهان سوم قضیهٔ اوّل نوشتیم، جز اینکه در این برهان تساوی دو مثلث ZDB و CDB با استفاده از قضیهٔ هفتم مقالهٔ ششم «اصول اقلیدس» ثابت شده است بدون آنکه مستقیماً به آن قضیه اشاره شده باشد.

AB را امتداد داده روی آن EZ را مساوی با AE جدا می‌کنیم و پاره خطهای DA و DB و DC و DZ را رسم می‌کنیم. (شکل ۲۰)



شکل ۲۰

DC وتری است از دایره و کمان DBC از نیمدایره کوچکتر است. این کمان نمی‌تواند از نیمدایره بزرگتر باشد زیرا کمان AD با آن مساوی است و ممکن نیست دو کمان متساوی از دایره جدا کنیم که هر یک از نیمدایره بزرگتر باشد مگر در صورتی که قسمتی از آنها مشترک باشد. بنابراین زاویهٔ DBC که محاط در کمان DBC است منفرجه می‌باشد. از طرف دیگر AD وتری از دایره است و کمان DCA بزرگتر از نیمدایره است و زاویهٔ DBA که در این کمان محاط است (روبه روی کمان AD است) حاده است، پس زاویهٔ DBZ (که مکمل آن است) منفرجه است. از طرف دیگر $\widehat{DZB} = \widehat{DCB}$ (زیرا هر دو مساوی با زاویهٔ A هستند) و $DC = DZ$ (زیرا هر دو مساوی با DA هستند).

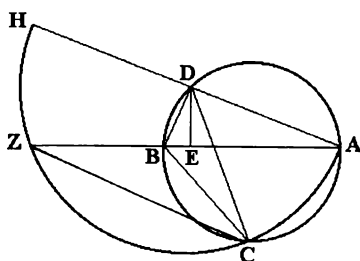
بنابراین $\frac{DC}{DB} = \frac{DZ}{DB}$ پس در دو مثلث DBC و DBZ زاویهٔ C مساوی با زاویهٔ Z و اضلاع دو زاویهٔ دیگر (یعنی زوایای به رأس D) متناسب هستند و علاوه بر این هر یک از دو زاویهٔ DBC و DBZ منفرجه می‌باشند. پس (بنا به قضیهٔ هفتم مقالهٔ ششم کتاب «اصول اقلیدس») زوایای دیگرشان نظیر به نظیر متساوی است، پس دو مثلث متشابهند (و چون ضلع BD در آنها مشترک

است) پس دو مثلث متساوی می‌شوند و در نتیجه $BZ = BC$ بنابراین

$$BC + BE = AE$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی: ت» صص ۷۶ و ۷۷).

برهان ششم قضیهٔ اول - دومین برهان از ابوسعید ضریر جرجانی*. وتر AD را امتداد داده روی آن DH را مساوی با DA جدا می‌کنیم و به مرکز D و به شعاع DH دایره‌ای رسم می‌کنیم. (شکل ۲۱). واضح است که این دایره از نقاط A و C می‌گذرد و ADH قطر آن است. سپس



شکل ۲۱

AB را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطهٔ Z قطع کند و ZC و DC را رسم می‌کنیم. داریم:
 $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند). $\widehat{ADC} = 2\widehat{AZC}$ (زیرا یکی مرکزی و دیگری محاطی است و روبه‌روی یک کمان هستند)
پس

$$\widehat{ABC} = 2\widehat{AZC}$$

اما $\widehat{ABC} = \widehat{AZC} + \widehat{ZCB}$ (زاویه خارجی مثلث ZBC در رأس B) از دو تساوی اخیر با در نظر گرفتن اینکه $\widehat{AZC}$ همان $\widehat{BZC}$ است نتیجه می‌شود:

$$\widehat{BZC} = \widehat{ZCB}$$

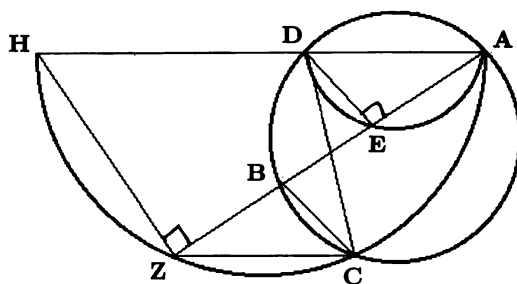
یعنی مثلث BZC متساوی‌الساقین است و $ZB = BC$.
بنابراین

$$ZB + BE = BC + BE$$

$$AE = BC + BE$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۸۱).

برهان هشتم قضیهٔ اول - دومین برهان از سجزی* (ابوسعید). به قطر AD نیم‌دایرهٔ AED را رسم می‌کنیم و AD را امتداد می‌دهیم و روی آن DH را مساوی با DA جدا می‌کنیم و به قطر AH نیم‌دایرهٔ ACH را رسم می‌کنیم و AB را امتداد می‌دهیم تا آن را در نقطهٔ Z قطع کند و ZC و ZH را رسم می‌کنیم. (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

(چون دو دایرهٔ AED و ACH در نقطهٔ A بر هم مماس هستند*) داریم:

$$\frac{AD}{DH} = \frac{AE}{EZ}$$

زیرا دو زاویهٔ AED و AZH قائمه‌اند و دو مثلث AED و AZH متشابه‌اند. و چون AD با DH مساوی است، پس $AE = EZ$.

از طرف دیگر دو زاویهٔ محاطی ADC و ABC که محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند متساویند. و زاویهٔ ADC در نیم‌دایرهٔ ACH مرکزی و زاویهٔ AZC در همان نیم‌دایره محاطی است، پس: $\widehat{ABC} = 2\widehat{AZC}$ ، بنابراین

$$\widehat{BZC} = \widehat{BCZ} \quad (\text{یعنی همان } \widehat{AZC})$$

* مماس بودن دو دایرهٔ AED و ACH بر هم، در نقطهٔ A صحیح است ولی تذکر این موضوع در استدلال قضیه ضروری نیست.

(زیرا از طرفی زاویه ABC که زاویه خارجی مثلث AZC است مساوی است با مجموع BZC و BCZ و از طرف دیگر $\widehat{ABC} = 2\widehat{BZC}$) پس $BC = BZ$ و چون

$$ZE = ZB + BE = AE$$

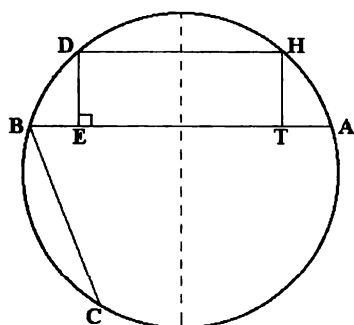
پس

$$BC + BE = AE$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۸۳).

برهان نهم قضیه اول - سومین برهان از سجزی* (ابوسعید).

از نقطه D وسط کمان ABC خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه H قطع کند (شکل ۲۴)، و از نقطه H خطی به موازات DE رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه T



شکل ۲۴

قطع کند. داریم: $\widehat{BD} = \widehat{AH}$ (زیرا دو وتر BA و DH متوازی‌اند). و چون $\widehat{AD} = \widehat{DC}$ (زیرا نقطه D وسط کمان ABC است) پس $\widehat{DH} = \widehat{BC}$ (نتیجه کم کردن تساوی اول از تساوی دوم عضویه عضو) و بنابراین $DH = ET = BC$ (زیرا شکل $DHTE$ مستطیل است).
از طرف دیگر واضح است که $AT = BE$ (زیرا هر دو، نسبت به قطری از دایره که عمود بر AB رسم شود قرینه یکدیگرند). بنابراین

$$AT + TE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۸۴).

برهان دهم قضیهٔ اول - نخستین برهان از قاضی ابوعلی حسن بن حارث حبوبی*.
کمان AZ را مساوی با کمان DB جدا کرده عمود ZH را بر AB فرود می‌آوریم و AZ و DB را رسم می‌کنیم (شکل ۲۵).

چون دو زاویهٔ ZHA و DEB قائمه‌اند و دو زاویهٔ ZAB و DBA متساویند (زیرا هر دو محاطی و روبه‌رو به دو کمان متساوی ZDB و DZA هستند)، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AZH و BDE متساوی‌اند. پس $ZH = DE$ و چون این دو پاره خط علاوه بر متساوی بودن متوازی هم هستند، پس $ZD = EH$ (زیرا شکل $DZHE$ مستطیل است) از طرف دیگر $DZ = BC$ (زیرا کمانهای روبه‌روی آنها متساویند) بنابراین $EH = BC$ و از آنجا:

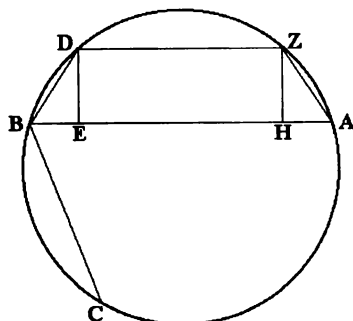
$$AH + HE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۸۵).

برهان یازدهم قضیهٔ اول - دومین برهان از ابوعلی حبوبی*. روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DZ را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ H قطع کند و پاره خطهای DB و AH و HC را رسم می‌کنیم (شکل ۲۶). داریم: $\widehat{AZH} = \widehat{DZB}$ (دو زاویهٔ متقابل به رأس) و $\widehat{AHZ} = \widehat{DBZ}$ (محاطی و روبه‌رو به یک کمان) و چون $\widehat{DZB} = \widehat{DBZ}$ (زیرا DE عمود منصف پاره خط BZ است) پس $\widehat{AHZ} = \widehat{AZH}$ ، یعنی $AH = AZ$.

از طرف دیگر $\widehat{AHD} = \widehat{DHC}$ (محاطی و روبه‌رو به دو کمان متساوی AD و DC). پس $\widehat{DHC} = \widehat{AZH}$ (دو چیز متساوی با یک چیز). اما این دو زاویه نسبت به دو خط AB و CH و قاطع ZH متبادل داخلی هستند و چون متساویند پس CH با AB موازی است



شکل ۲۵

خواهد شد) حاصل می‌شود: $AH = BC$ (بنا به فرض) $AD = DC$ (زیرا D وسط کمان ABC است) و $\hat{A} = \hat{C}$ (زیرا هر دو محاطی و روبه‌رو به یک کمان هستند). بنابراین مثلث DAH با مثلث DCB مساوی است (در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها)

پس

$$DH = DB$$

اما چون DE عمود منصف پاره خط BZ است پس $DZ = DB$. از دو تساوی فوق نتیجه می‌شود $DH = DZ$ یعنی مثلث DZH متساوی الساقین است و بنابراین $\widehat{DZH} = \widehat{DZH}$. از طرف دیگر مثلث BDH ، چنانکه دیدیم، نیز متساوی الساقین است پس:

$$\widehat{DBH} = \widehat{DHB} \text{ یا } \widehat{DZH}$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\widehat{DZH} = \widehat{DBH}$$

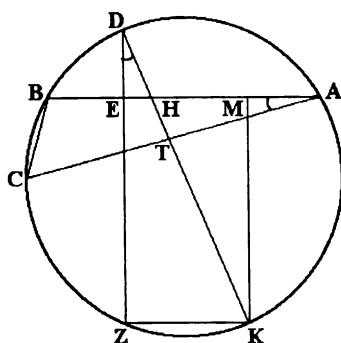
یعنی زاویه خارجی Z از مثلث BZD مساوی با زاویه داخلی B از همان مثلث است و این ممکن نیست. (بنابراین AZ نمی‌تواند از BC بزرگتر باشد) به همین طریق می‌توان ثابت کرد که AZ نمی‌تواند از BC کوچکتر باشد پس $AZ = BC$ و بنابراین:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۸۸).

برهان سیزدهم قضیهٔ اوّل - نخستین برهان از شتی * (ابوعبدالله محمد بن احمد).
عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگر Z قطع کند. و قطر DK از دایره را که از نقطهٔ D می‌گذرد رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ H و AC را در نقطهٔ T قطع کند (شکل ۲۸). این قطر بر AC عمود است (زیرا نقطهٔ D وسط کمان ABC است). اکنون KM را به موازات ZE رسم کرده Z را به K وصل می‌کنیم و می‌گوییم دو مثلث AHT و DHE متشابهند (زیرا هر دو قائم‌الزاویه‌اند و زوایای به‌رأس H از آنها با هم مساوی است) بنابراین

$$\widehat{TAH} = \widehat{EDH}$$



شکل ۲۸

پس $ZK = BC$ (وترهای رو به رو به زوایای محاطی متساوی) از طرف دیگر چهارضلعی $ZKME$ مستطیل است زیرا زاویه Z از آن رو به رو به قطر DK یعنی قائمه است و زوایای M و E از آن نیز قائمه‌اند. پس $ZK = EM$ و چون دیدیم $ZK = BC$ پس $EM = BC$ و چون عمود KM مساوی با عمود ZE است پس $AM = BE$ بنابراین داریم.

$$AM + ME = BE + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۹۰).

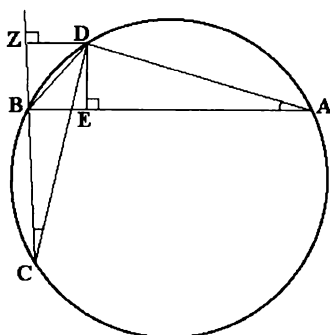
برهان چهاردهم قضیهٔ اول - دومین برهان از آذرخور* پسر استاد جُشش.
(بیرونی از بین همهٔ برهانهایی که برای قضیهٔ اول در کتاب «استخراج الاوتار» آورده این برهان را برای ذکر در کتاب «قانون مسعودی» انتخاب کرده است).

پاره خط CB را امتداد داده از نقطهٔ D عمود DZ را بر آن فرود می‌آوریم و پاره خطهای AD و DC را رسم می‌کنیم (شکل ۲۹). این دو پاره خط متساویند. (زیرا نقطهٔ D وسط کمان ABC است.) از طرف دیگر دو زاویهٔ A و C که هر دو محاطی و روبه روی کمان DB هستند متساویند. پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AED و CZD (در حالت وتر و یک زاویهٔ حاده) با هم مساویند و $DZ = DE$ و همچنین

$$CZ = AE \quad (۱)$$

از تساوی $DZ = DE$ نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDZ و BDE که در وتر مشترکند با هم مساویند. پس

$$ZB = EB \quad (۲)$$



شکل ۲۹

و از روی شکل واضح است که $CZ = ZB + BC$ و یا نظر به رابطه (۲)

$$CZ = EB + BC \quad (۳)$$

از تساویهای (۱) و (۳) حاصل می‌شود: $AE = EB + BC$.

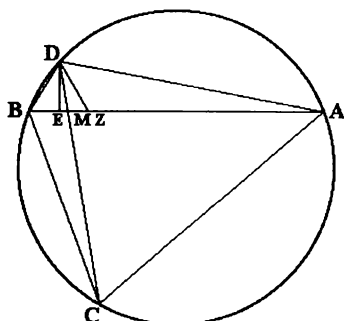
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۹۲).

برهان پانزدهم قضیهٔ اول - دومین برهان از شتی* (ابوعبدالله).

روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا کرده DA و DZ و DC و DB و AC و BC را رسم می‌کنیم (شکل ۳۰).

دو مثلث DZB و DAC هر دو متساوی‌الساقین هستند و دو زاویهٔ DCA و DBZ از آنها که محاطی و روبه‌روی کمان AD هستند متساویند. پس $\widehat{ADC} = \widehat{ZDB}$.



شکل ۳۰

حال اگر فصل مشترک DC و AB را نقطه M بنامیم و زاویه ZDM را که بین دو زاویه متساوی فوق‌الذکر مشترک است حذف کنیم باقی می‌ماند:

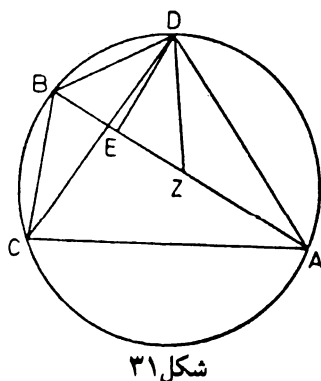
$$\widehat{BDC} = \widehat{ZDA}$$

از طرف دیگر در دو مثلث BDC و ZDA داریم $AD = DC$ (زیرا نقطه D وسط کمان ADC است) و $DZ = DB$ (زیرا مثلث DBZ متساوی‌الساقین است). پس دو مثلث مذکور متساویند و نتیجه می‌شود: $AZ = BC$ بنابراین:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۹۳).

برهان شانزدهم قضیهٔ اول - دومین برهان از ابونصر عراق* (منصور بن علی).
از روی AB پاره خط AZ را مساوی با BC جدا و پاره خطهای AD و BD و ZD را رسم می‌کنیم (شکل ۳۱). داریم: $AD = DC$ و $AZ = BC$ و $\widehat{DCB} = \widehat{DAB}$ (زیرا هر دو



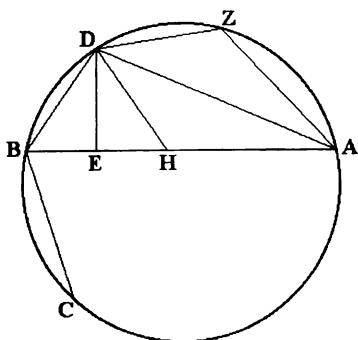
شکل ۳۱

محاطی و روبه‌روی کمان BD هستند). بنابراین دو مثلث BDC و ZDA متساویند و در نتیجه $DZ = DB$ یعنی مثلث DBZ متساوی‌الساقین است و بنابراین ارتفاع DE از آن قاعده BZ را نصف می‌کند. یعنی داریم: $BE = EZ$ و چون $AZ = BC$ پس:

$$AZ + ZE = AE = BE + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۹۴).

برهان هفدهم قضیهٔ اوّل - از ابوعلی حسن بن حسین بصری (معروف به ابن هیثم *).
 کمان DZ را مساوی با کمان DB و پاره خط EH را مساوی با EB جدا کرده، پاره خطهای
 DB و DZ و AZ و AD و DH را رسم می‌کنیم. (شکل ۳۲). چون $\widehat{DZ} = \widehat{DB}$ پس:



شکل ۳۲

$\widehat{ZAD} = \widehat{DAB}$ و چون $DB = DH$ پس:

$$\widehat{DBA} = \widehat{DHE} \quad (۱)$$

و چون چهارضلعی $BDZA$ محاطی است داریم:

$$\widehat{AZD} + \widehat{ABD} = ۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{AZD} + \widehat{DHE} = ۱۸۰^\circ \quad (۳)$$

از طرف دیگر

$$\widehat{DHE} + \widehat{DHA} = ۱۸۰^\circ \quad (۴)$$

از تساویهای (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$\widehat{AZD} = \widehat{DHA}$$

پس زوایای دو مثلث AZD و AHD نظیر به نظیر متساویند و چون ضلع AD در آنها مشترک است پس این دو مثلث متساوی می‌شوند و در نتیجه $AZ = AH$. اما $AZ = BC$ زیرا دو

وتر روبه‌رو به کمانهای متساوی هستند (چون نقطه D وسط کمان ABC است و $\widehat{BD} = \widehat{DZ}$ پس $\widehat{AZ} = \widehat{BC}$) بنابراین $AH = BC$ و چون $HE = BE$ پس:

$$AE = BE + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۹۵ و ۹۶).

برهان هجدهم قضیهٔ اوّل - نخستین برهان از بیرونی.

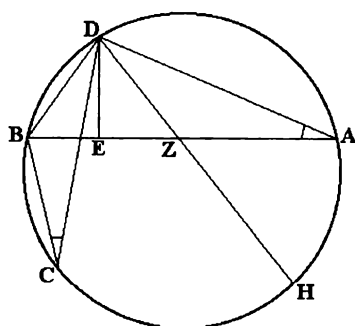
(در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» این برهان، مانند تبصره‌ای، در دنبال برهان دیگری

آمده است. اما در نسخه «عل» بیرونی آن را جداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده است.)

پاره‌خطهای DB و DC و DA را رسم کرده از روی EA پاره‌خط EZ را مساوی با EB

جدا می‌کنیم و DZ را رسم کرده آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه H قطع کند. (شکل ۳۳).

می‌دانیم $AD = DC$ زیرا وترهای دو کمان متساوی هستند. و چون دو مثلث DZE و DBE



شکل ۳۳

متساویند (DE عمود منصف پاره‌خط BZ است) پس:

$$DB = DZ \quad (۱)$$

از طرف دیگر

$$\widehat{BCD} = \widehat{BAD} \quad (۲)$$

زیرا هر دو محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند. و نیز می‌گوییم

$$\widehat{DZB} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD} \quad (\text{زاویهٔ خارجی مثلث}).$$

و چون دو زاویه DZB و DBZ با هم مساویند از تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\widehat{DBZ} = \widehat{ZDA} + \widehat{ZAD}$$

بنابراین

$$\widehat{DBZ} - \widehat{ZAD} = \widehat{ZDA} \quad (۳)$$

اما

$$\widehat{DBZ} \text{ اندازه} = \frac{\widehat{AD}}{۲} \text{ اندازه}$$

و

$$\widehat{ZAD} \text{ اندازه} = \frac{\widehat{DB}}{۲} \text{ اندازه}$$

پس از تساوی (۳) نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ZDA} \text{ اندازه} = \frac{\widehat{AD}}{۲} \text{ اندازه} - \frac{\widehat{DB}}{۲} \text{ اندازه}$$

اما چون نقطه D وسط کمان ABC است، طرف راست تساوی اخیر مساوی است با:

$$\widehat{ZDA} \text{ اندازه} = \frac{\widehat{BC}}{۲} \text{ اندازه یعنی:}$$

و از طرف دیگر

$$\widehat{ZDA} \text{ اندازه} = \frac{\widehat{AH}}{۲} \text{ اندازه (زاویه محاطی)}$$

بنابراین $\widehat{AH} = \widehat{BC}$ پس:

$$\widehat{BDC} = \widehat{ZDA} \quad (۴)$$

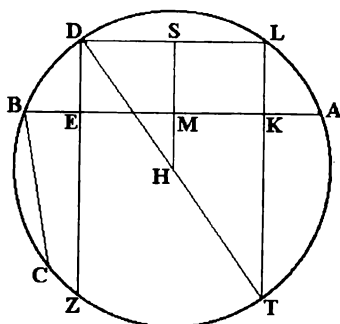
از تساویهای (۱) و (۲) و (۴) معلوم می‌شود که دو مثلث ADZ و CDB متساویند. بنابراین $AZ = BC$ و

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۹۹).

برهان نوزدهم قضیهٔ اول - دومین برهان از بیرونی.

(در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» این برهان در دنبال برهان دیگری آمده است. اما در نسخه «عل» بیرونی آن را جداگانه نوشته و به نام خود ثبت کرده است.)
عمود DE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه Z قطع کند و قطر DHT از دایره را که از نقطه D می‌گذرد رسم می‌کنیم (H مرکز دایره است) (شکل ۳۴). و از نقطه T خط TKL را



شکل ۳۴

به موازات DZ رسم می‌کنیم.

چون DL و DZ از دو انتهای یک قطر به موازات یکدیگر رسم شده‌اند داریم: $\widehat{DCZ} = \widehat{TAL}$. اکنون D را به L وصل می‌کنیم. زاویهٔ قائمه DLT قائمه است (زیرا روبه‌رو به قطر DT است) و علاوه بر این می‌دانیم که زوایای LKE و DEK قائمه‌اند. پس چهارضلعی $DEKL$ مستطیل است و بنابراین $LD = EK$.

اکنون از نقطه H مرکز دایره خط HMS را به موازات DZ رسم می‌کنیم. این خط بر وترهای AB و DL عمود است و آنها را نصف می‌کند. پس $LS = SD$ و $AM = MB$ واضح است که $EM = MK$ پس نتیجه می‌شود که $AK = EB$ و $LD = KE = BC$ (زیرا کمان LD با کمان BC مساوی است) پس داریم:

$$AK + KE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۰۰).

برهان بیستم قضیهٔ اول - سومین برهان از بیرونی.

بنابراین سه نقطه D و B و T بر یک استقامت قرار دارند و خط راست DBT عمود منصف پاره خط CK است. بنابراین $DC = DK$. اما $DA = DC$ پس $DA = DK$ پس عمود DE پاره خط AK را نصف می کند و بنابراین

$$AE = EB + BK$$

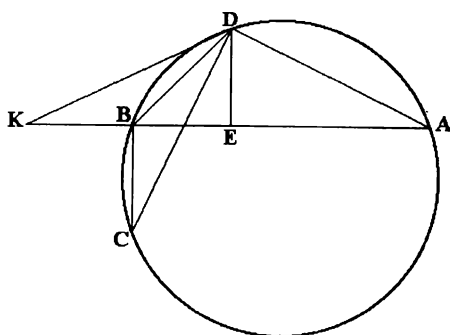
و چون $BK = BC$ پس:

$$AE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.
تبصره - در این برهان اشتباهی رخ داده و آن این است که نوشته شده است: «از نقطه B عمود BT را بر CK فرود می آوریم» و پیش از آنکه ثابت شود که سه نقطه D و B و T بر یک استقامت هستند نوشته شده است که: «زاویه DBC زاویه خارجی مثلث BTC است». احتمال اینکه این اشتباه از ابوریحان بیرونی باشد بسیار کم است. شاید او اثبات این امر را که سه نقطه D و B و T بر یک استقامت هستند پیش از این مسئله در کتاب «فی المسائل المفیده...» آورده باشد.

در هر صورت این اشتباه را می توان به وجه زیر رفع و برهان را تکمیل کرد.

AB را از طرف B امتداد داده روی آن BK را مساوی با BC جدا و پاره خطهای DK و DA و DB و DC را رسم می کنیم (شکل ۳۶).



شکل ۳۶

واضح است که دو زاویه DBK و DBA مکمل یکدیگرند. اکنون دو زاویه DBC و DBA را در نظر می گیریم. این دو زاویه هر دو محاطی هستند و اولی روبه روی کمان DAC و دومی روبه روی کمان DA است. اما $\widehat{DA} = \widehat{DBC}$. پس اندازه مجموع دو زاویه DBC و DBA

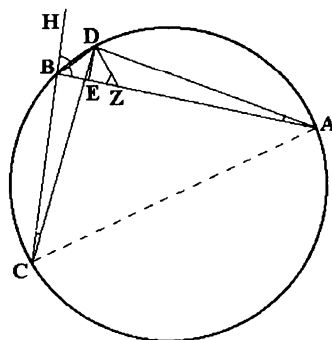
مساوی است با نصف مجموع اندازه‌های دو کمان DBC و DAC یعنی ۳۶۰ درجه پس این دو زاویه مکمل یکدیگرند. اکنون می‌گوییم که چون زوایای DBC و DBK هر دو مکمل زاویه DBA هستند با هم مساویند. بنابراین دو مثلث DBC و DBK در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها متساویند. (BD مشترک و $BK = BC$ و $\widehat{DBC} = \widehat{DBK}$) و در نتیجه $DC = DK$ و چون می‌دانیم که $DA = DC$ (زیرا نقطه D وسط کمان ABC است) پس: $DA = DK$ یعنی مثلث DAK متساوی‌الساقین است و بنابراین عمود DE قاعده AK از مثلث را نصف می‌کند و بنابراین $AE = EB + BK$ و یا

$$AE = EB + BC$$

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۰۴).

برهان بیست و یکم قضیهٔ اول - چهارمین برهان از بیرونی.
(در نسخهٔ «عل» این برهان با عنوان «برهان رابع لی استعمالته فی علل زیج حبش» ثبت شده است، اما در نسخه‌های چاپی «استخراج‌الاورار» در دنبال برهانهای دیگر و بدون عنوان آمده است).

روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا، و DZ و DB را رسم می‌کنیم. واضح است که $DB = DZ$. (شکل ۳۷)



شکل ۳۷

سپس DA و DC را رسم می‌کنیم و BC را از طرف B امتداد می‌دهیم تا نیم خط BH به‌دست آید. چون زاویهٔ محاطی DBC روبه‌روی کمان DAC است اندازهٔ زاویهٔ DBH مساوی با اندازهٔ نصف کمان DBC است و این کمان مساوی است با کمان AD . و چون زاویهٔ محاطی DBA روبه‌روی کمان AD است پس:

$$\widehat{DBA} = \widehat{DBH} = \widehat{DZE}$$

بنابراین $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$ (مکملهای دو زاویه متساوی) و از طرف دیگر $\widehat{DBC} = \widehat{DZA}$ (محاطی و روبه روی یک کمان) پس زوایای دو مثلث ADZ و CDB نظیر به نظیر با هم مساویند و چون در این دو مثلث $DB = DZ$ پس دو مثلث با هم مساویند و در نتیجه $AZ = BC$ اما می دانیم که $EB = ZE$ پس:

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۰۷).

تبصره - بیرونی در ذیل این برهان مطلب زیر را افزوده است:

از این رو معلوم می شود که: اگر وترى از دایره قاعده مشترک دو مثلث (محاطی) باشد که یکی از آنها متساوی الساقین باشد و دیگری نباشد محیط مثلث اول بزرگتر از محیط مثلث دوم است. زیرا اگر وتر AC را رسم کنیم این وتر را می توان قاعده مشترک دو مثلث ABC و ADC دانست که اولی متساوی الساقین است و دومی متساوی الساقین نیست. اما $AD > AE$ (مایل و عمود) و

$$(EB + BC = AE \text{ زیرا}) \quad DC (= AD) > BE + BC$$

از جمع دو نامساوی فوق عضو به عضو حاصل می شود:

$$AD + DC > AE + BE + BC$$

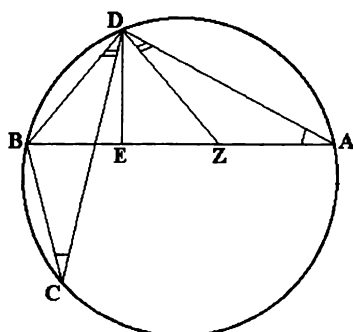
و اگر به دو طرف نامساوی فوق AC را بیفزاییم معلوم می شود که:

$$\text{محیط مثلث } ABC > \text{محیط مثلث } ADC$$

برهان بیست و دوم قضیه اول - پنجمین برهان از ابوریحان.

(این برهان در نسخه «عل» نیامده است. اما در نسخه های چاپی «استخراج الاوتار» برهانی برای تساوی دو پاره خط AZ و BC ذکر شده که بیرونی آن را از کتاب خود موسوم به «تحصیل الراحة بتصحیح المساحة» نقل کرده است که می توان آن را به صورت زیر کامل کرد و برهان دیگری برای اثبات قضیه اول دانست).

نقطه D را به نقاط A و B و C وصل کرده نقطه Z را روی وتر AB طوری اختیار می کنیم که زاویه ADZ مساوی با زاویه BDC باشد. (شکل ۳۸) چون زوایای A و C متساویند. (محاطی و روبه روی یک کمان هستند) و $AD = DC$ دو مثلث ADZ و CDB (در حالت دو زاویه و



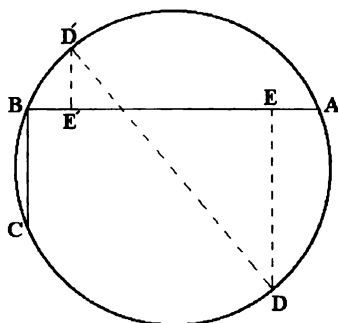
شکل ۳۸

ضلع بین آنها) با هم مساوی هستند و در نتیجه $AZ = BC$ و $DZ = BD$. پس مثلث DBZ متساوی الساقین است و بنابراین ارتفاع DE قاعده BZ آن را نصف می‌کند یعنی $ZE = EB$ بنابراین

$$AZ + ZE = EB + BC$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - بیرونی این برهان را ابتدا برای حالتی ذکر کرده است که کمان ABC و خط شکسته ABC در یک طرف خط راست AC واقع باشند (مانند شکل ۳۸). سپس افزوده است که اگر کمان AC و خط شکسته ABC در دو طرف خط راست AC باشند (مانند شکل ۳۹) یعنی



شکل ۳۹

اگر به جای آنکه وسط کمان ABC را بگیریم، وسط کمان AC را که بقیه دایره است اختیار کنیم و آن را نقطه D بنامیم و از D عمود DE را بر AB فرود آوریم دیگر نقطه E وسط خط شکسته

ABC نخواهد بود. بلکه در این صورت باید انتهای دیگر قطر مار بر D یعنی نقطه D' را اختیار کنیم تا قضیه صحت داشته باشد. یعنی داشته باشیم $AE' = E'B + BC$ (و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۰۹).

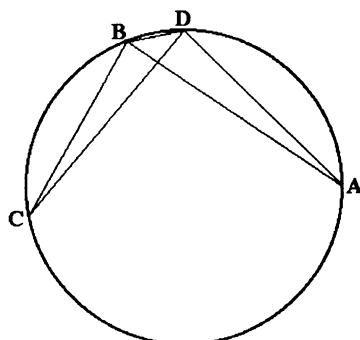
ج - صورت قضیه دوم

مقدمه. بیرونی در پایان برهانهایی که برای قضیه اول ذکر کرده نوشته است: این بود آنچه از روشهای دانشمندان درباره برهان آوردن بر این قضیه می دانستم. اما یونانیان را قضیه دومی نیز هست که می رزان در این صنعت (= هندسه) برهانهایی برای درستی آن آورده اند. در بعضی از این برهانها ناچار باید از قضیه اول یعنی از خاصیت خط شکسته محاط در دایره استفاده کرد. در این صورت قضیه اول مقدمه ای برای قضیه دوم خواهد بود. اما در برخی دیگر از این برهانها احتیاجی به استفاده از قضیه اول نیست، بلکه برعکس می توان قضیه اول را با استفاده از آنها به ثبوت رسانید. در این حالت قضیه دوم را می توان مقدمه ای برای قضیه اول دانست.

اینک با برشمردن برهانهایی که برای این قضیه آورده اند به این مطلب توجه کرده در هر مورد بین قضیه مقدم و قضیه تابع آن تمیز قائل خواهم شد.

سپس قضیه دوم را با عبارتی بیان کرده است که می توان آن را با اصطلاحات کنونی به صورت ساده زیر درآورد.

صورت قضیه دوم - اگر کمانی مانند AC از دایره ای را در نظر گرفته وسط آن را نقطه D بنامیم و نقطه دلخواه دیگری مانند B را روی همان کمان اختیار کنیم رابطه زیر بین وترهای AD و AB و BD و BC برقرار خواهد بود: (شکل ۴۰)



شکل ۴۰

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2 \quad (۱)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{اولاً } AC \text{ کمانی است از دایره} \\ \text{ثانیاً نقاط } B \text{ و } D \text{ روی کمان } AC \text{ واقعند.} \\ \text{ثالثاً } \widehat{AD} = \widehat{DC} \end{array} \right\} \text{فرض}$$

حکم قضیه دوم یعنی رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

مربع هریک از دو وتر AD و CD که نقطه D وسط کمان AC را به دو سر آن وصل می‌کنند مساوی است با حاصل ضرب فواصل نقطه دلخواه B متعلق به کمان AC از دو سر همان کمان به علاوه مربع BD .

* * *

ابوریحان همین قضیه را با استفاده از اصطلاح «جیب»^{۱۹} به وجهی دیگر نیز عنوان کرده است.

اگر نقطه D وسط کمان AC از یک دایره و نقطه B متعلق به همان کمان باشد داریم:

$$(\widehat{AD} \text{ جیب})^2 = (\widehat{BD} \text{ جیب})^2 + \widehat{BC} \text{ جیب} \times \widehat{AB} \text{ جیب}$$

و این معادل است با اتحاد مثلثاتی زیر: (اگر α و β دو کمان متوالی از یک دایره باشند آنگاه داریم):

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta + \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

* * *

بیرونی در پایان قضیه دوم افزوده است:
و هریک از دانشمندان مذکور (= میرزان در علم هندسه) در کاستن از دشواری اثبات این قضیه کوتاه کردن آن کوشیده‌اند و این برهان به صورتهای مختلف در آمده است.

* * *

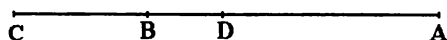
۱۹. درباره اصطلاح «جیب» و انواع آن، ← همین اصطلاح در بخش نهم کتاب حاضر.

تبصره - اگر نقاط A و D و B و C بر یک خط راست واقع باشند باز حکم فوق بنا بر قضیه پنجم از مقاله دوم اصول اقلیدس صحیح است. این قضیه را می‌توان با اصطلاحات کنونی چنین بیان کرد:

اگر پاره‌خطی مانند AC را در نظر گرفته وسط آن را نقطه D بنامیم و روی AC نقطه دلخواه B را اختیار کنیم رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 = AB \cdot BC + \overline{BD}^2$$

(شکل ۴۱).



شکل ۴۱

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۱۳ و ۱۱۴).

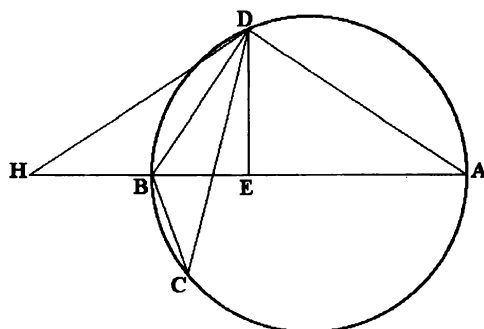
د - برهانهای قضیه دوم

(آنچه در تبصره پایان برهانهای قضیه اول نوشته‌ام درباره برهانهای قضیه دوم نیز صادق است).
برهان اول قضیه دوم - از یکی از یونانیان و سجزی* (ابوسعید) و ابوعلی بصری (= ابن هیثم*).

بیرونی در آغاز برهان متذکر شده است که آن را در مسائلی که یوحنا بن یوسف از یونانی به عربی ترجمه کرده است یافته و خاطر نشان کرده است که ابوسعید سجزی و ابوعلی بصری این قضیه را برحسب اتفاق همین‌گونه ثابت کرده‌اند.
ابتدا ملاحظه می‌کنیم که:

هرگاه نقطه دلخواهی روی قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین اختیار کنیم که آن را به دو قسمت نامتساوی تقسیم کند و آن نقطه را به رأس مثلث وصل کنیم حاصل ضرب دو قطعه قاعده به علاوه مربع پاره‌خطی که نقطه تقسیم را به رأس مثلث وصل می‌کند مساوی است با مربع ساق مثلث.

برهان قضیه فوق - روی قاعده AH از مثلث متساوی الساقین DAH ($DA = DH$) نقطه دلخواه B را قسمی اختیار می‌کنیم که DB بر AH عمود نباشد و D را به B وصل می‌کنیم. (شکل ۴۲) باید ثابت کنیم که:



شکل ۴۲

$$AB \times BH + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

دایره محیطی مثلث ADB را رسم کرده^{۲۰} عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. چون E وسط AH است و نقطه B پاره خط AH را به دو قسمت نامتساوی تقسیم کرده است (نظر به قضیه پنجم از مقالة دوم اصول اقلیدس) داریم:

$$\overline{AE}^2 = AB \times BH + \overline{EB}^2$$

اگر به دو طرف تساوی فوق $\overline{DE}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = AB \times BH + \overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 \quad (۱)$$

اما $\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2$ (از مثلث قائم الزاویه AED) و $\overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BD}^2$ (از مثلث قائم الزاویه BED) بنابراین تساوی (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BH + \overline{BD}^2 \quad (۲)$$

پس از بیان این مقدمه گوئیم:

۲۰. این دایره در قسمت دوم برهان به کار خواهد آمد.

در ضمن برهانهای قضیه اول ثابت شد که اگر کمان DBC مساوی با کمان AD باشد و BC و DC را رسم کنیم خواهیم داشت $BH = BC$ بنابراین تساوی (۲) به صورت زیر در می آید:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

* * *

ابوریحان در پایان این برهان نوشته است که قضیه دوم در این مورد از لواحق^{۲۱} محسوب می شود. (زیرا در برهان آن از قضیه اول استفاده شده است). و افزوده است: اما سجزی* (ابوسعید) و ابوعلی بصری (= ابن هیثم*) ابتدا خط شکسته ABC را در کمان $ADBC$ از دایره محاط کرده و ثابت کرده اند که در این صورت

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و برای اثبات این رابطه BH را روی امتداد AB مساوی با BC جدا کرده (و با استفاده از قضیه اول ثابت کرده اند که مثلث ADH متساوی الساقین است) و برهان را مانند فوق کامل کرده اند. (و نیز ← «قربانی ت» صفحات ۱۱۷ و ۱۱۸).

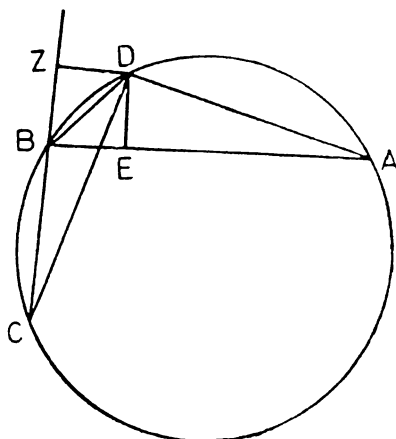
برهان دوم قضیه دوم - نخستین برهان از ابونصر عراق* (منصور بن علی). می خواهیم ثابت کنیم که:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

CB را از طرف B امتداد داده از نقطه D عمود DZ را بر آن فرود می آوریم. (شکل ۴۳). همچنین از نقطه D عمود DE را بر AB فرود آورده پاره خطهای DB و AD و DC را رسم می کنیم. چون زاویه ABC محاطی است و اندازه آن مساوی است با همه دایره منهای کمان $ADBC$ تقسیم بر دو، پس اندازه زاویه ABZ (که مکمل زاویه ABC است) مساوی است با نصف اندازه کمان $ADBC$ و چون کمان AD نصف کمان $ADBC$ است، پس خط BD زاویه ABZ را نصف می کند و داریم:

$$\widehat{EBD}(=\widehat{ABD})=\widehat{DBZ}$$

۲۱. ابوریحان از قضایای اول و دوم هر کدام را که ثابت شده فرض شود و در برهان قضیه دیگر از آن استفاده شود «مقدمه» یا «سابق» نامیده و آن را که با استفاده از قضیه دیگر ثابت شود «تابع» یا «لاحق» خوانده است.



شکل ۴۳

بنابراین دو مثلث قائم الزاویه DEB و DZB (در حالت وتر و یک زاویه حاده) متساویند.
پس:

$$BE = BZ \quad (۱)$$

(از این تساوی بعداً استفاده خواهد شد). حال گوییم که در مثلث قائم الزاویه DZC داریم:

$$\overline{DC}^2 = \overline{CZ}^2 + \overline{DZ}^2 \quad (۲)$$

و در مثلث قائم الزاویه DBZ داریم:

$$\overline{DZ}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BZ}^2 \quad (۳)$$

از تساویهای (۲) و (۳) معلوم می شود که:

$$\overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CZ}^2 - \overline{BZ}^2 \quad (۴)$$

اکنون برای محاسبه $\overline{CZ}^2 - \overline{BZ}^2$ ملاحظه می کنیم که: $CZ = CB + BZ$ و چون دو طرف این تساوی را مربع کنیم حاصل می شود:

$$\overline{CZ}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BZ}^2 + ۲CB \times BZ$$

و از آنجا:

$$\overline{CZ}^{\vee} - \overline{BZ}^{\vee} = \overline{CB}^{\vee} + \vee CB \times BZ$$

و یا

$$\overline{CZ}^{\vee} - \overline{BZ}^{\vee} = CB(CB + \vee BZ) \quad (5)$$

اما در قضیه اول ثابت کردیم که $AE = EB + BC$. از روی این تساوی با در نظر گرفتن رابطه (۱) معلوم می‌شود:

$$AB = BC + \vee BZ$$

و چون این مقدار را در رابطه (۵) قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\overline{CZ}^{\vee} - \overline{BZ}^{\vee} = BC \times AB$$

و بنابراین تساوی (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\overline{DC}^{\vee} = \overline{BD}^{\vee} + BC \times AB$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - ابوریحان در پایان این برهان افزوده است که:

چون در این برهان تساوی $AE = EB + BC$ یعنی حکم قضیه اول را بدون برهان پذیرفتیم پس در اینجا قضیه دوم از «لواحق» است. (زیرا از روی قضیه اول ثابت شده است). (و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۲۱).

برهان سوم قضیه دوم - دومین برهان از ابونصر عراق* (= ابونصر جعدی).

پاره خط CB را از طرف B امتداد داده عمود DH را بر آن فرود می‌آوریم و پاره خط HZ را روی امتداد CB مساوی با BH جدا و AD و DB و DC را رسم می‌کنیم (شکل ۴۴). داریم:

$$\overline{DC}^{\vee} = \overline{DH}^{\vee} + \overline{HC}^{\vee}$$

(از مثلث قائم‌الزاویه DHC). و $\overline{DH}^{\vee} = \overline{DB}^{\vee} - \overline{BH}^{\vee}$ (از مثلث قائم‌الزاویه DHB). از دو تساوی فوق نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \overline{DC}^{\vee} &= \overline{DB}^{\vee} - \overline{BH}^{\vee} + \overline{CH}^{\vee} = \overline{DB}^{\vee} - \overline{BH}^{\vee} + (BC + BH)^{\vee} = \\ &= \overline{DB}^{\vee} + \overline{BC}^{\vee} + \vee BH \times BC \end{aligned}$$

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۲۳).

برهان چہارم قضیہٴ دوّم - از سجزی * (ابوسعید).

پاره خط AB را از طرف B امتداد داده روی آن نقطه Z را طوری اختیار می‌کنیم که مثلث ADZ متساوی‌الساقین باشد. (یعنی به مرکز D و به شعاع DA کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه Z قطع کند) و دایره محیطی مثلث ADZ را رسم می‌کنیم و DB را امتداد می‌دهیم تا این دایره را در نقطه H قطع کند و ZH را رسم می‌کنیم. چون از نقطه B دو قاطع در دایره بزرگتر رسم شده است (چنانچه در هندسه دیده‌ایم) داریم: (شکل ۴۵)

حال گوئیم در دو مثلث DBZ و DZH دو زاویه DZB و DHZ متساویند (زیرا هر دو محاطی و روبه روی دو کمان متساوی ZD و AD از دایره بزرگتر هستند) و زاویه ZDB در آنها مشترک است پس این دو مثلث متشابهند و داریم:

$$\frac{DH}{DZ} = \frac{DZ}{BD}$$

و از آنجا:

$$BD \times DH = \overline{DZ}^2$$

چون این مقدار را در تساوی (۲) قرار دهیم حاصل می شود:

$$AB \times BZ + \overline{BD}^2 = \overline{DZ}^2$$

اما از قضیه اول نتیجه می شود $BZ = BC$ و می دانیم که $DZ = AD$ پس رابطه فوق را می توان چنین نوشت:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{DC}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

تبصره - ابوریحان در پایان این برهان افزوده است:

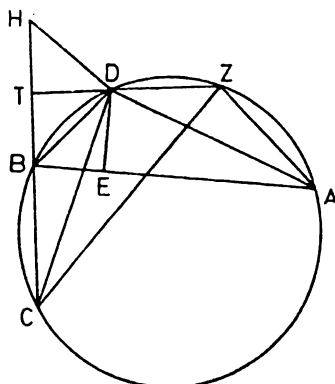
«چون در این برهان تساوی $BZ = BC$ را دانسته فرض کردیم (یعنی در واقع از قضیه اول استفاده کردیم) پس در اینجا قضیه دوم از «لواحق» است اما اگر مانند قبل ابتدا قضیه دوم را (از راه دیگری) ثابت کنیم و سپس از آن قضیه اول را نتیجه بگیریم در این صورت قضیه دوم از «سوابق» خواهد شد.»

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۲۶).

برهان پنجم قضیه دوم - از شتی * (ابوعبدالله).

از کمان AB کمان AZ را مساوی با کمان BC جدا کرده وتر CZ را رسم می کنیم. (واضح است که چون نقطه D وسط کمان ABC است $\widehat{BD} = \widehat{DZ}$). سپس CB را از طرف B امتداد داده روی آن CH را مساوی با CZ جدا می کنیم. و پاره خطهای DC و DH و DA و DB و DZ را رسم می کنیم. (شکل ۴۶).

چون در دو مثلث DHC و DZC دو ضلع CH و CZ متساوی و ضلع DC مشترک است و دو زاویه HCD و ZCD متساویند (زیرا محاطی و روبه روی دو کمان متساوی BD و DZ هستند) دو مثلث مذکور متساویند و بنابراین $DH = DZ$. و چون $DZ = DB$ پس



شکل ۴۶

$DH = DB$ ، یعنی مثلث DHB متساوی الساقین است. پس اگر از نقطه D عمود DT را بر BH فرود آوریم واضح است که نقطه T وسط پاره خط BH است. اکنون می‌گوییم که پاره خط BH در نقطه T نصف شده و نقطه C در امتداد آن قرار دارد. پس (بنا به قضیه ششم مقالة دوم «اصول اقلیدس») داریم:

$$HC \times BC + \overline{BT}^2 = \overline{CT}^2 \quad (۱)$$

و چون به دو طرف این تساوی مقدار $\overline{TD}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$HC \times BC + \overline{BT}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{CT}^2 + \overline{TD}^2 \quad (۲)$$

اما $\overline{BT}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{BD}^2$ (از مثلث قائم‌الزاویه BTD) و $\overline{CT}^2 + \overline{TD}^2 = \overline{CD}^2$ (از مثلث قائم‌الزاویه CTD) پس تساوی (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$HC \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$$

اما از روی شکل واضح است که $AB = HC$ پس داریم:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

تبصره ۸- بیرونی در پایان این برهان افزوده است:

«چون در این برهان از قضیه اول استفاده نکرده‌ایم در اینجا می‌توان قضیه دوم را از «سوابق»

محسوب داشت.»

تبصره ۲- اثبات قضیه اول از روی قضیه دوم توسط شتی* (ابوعبدالله)

ابوریحان یک برهان دیگر از شتی* (ابوعبدالله) برای قضیه اول ذکر کرده است که قسمت اول آن عیناً مانند برهان فوق است و اینک برای مزید فایده بقیه آن را در اینجا نقل می‌کنم. شتی* (ابوعبدالله) خواسته است که قضیه اول را از قضیه دوم نتیجه بگیرد. به این ترتیب: پس از آنکه درستی تساوی زیر

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \quad (۳)$$

یعنی حکم قضیه دوم (بدون استفاده از قضیه اول) ثابت شد از نقطه D عمود DE را بر AB فرود آورده ملاحظه می‌کنیم که:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 \quad (\text{از مثلث قائم‌الزاویه } BDE)$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 \quad (\text{از مثلث قائم‌الزاویه } ADE)$$

پس رابطه (۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$AB \times BC + \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2$$

و چون $\overline{DE}^2$ را از دو طرف رابطه فوق کم کنیم حاصل می‌شود:

$$AB \times BC + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 \quad (۴)$$

بنابراین مجموع دو پاره خط AB و BC (نظر به عکس قضیه پنجم از مقاله دوم «اصول اقلیدس») در نقطه E نصف می‌شود.

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۲۹ و ۱۳۰).

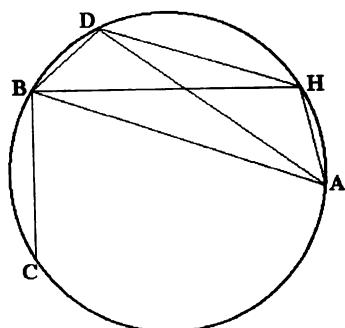
برهان ششم قضیه دوم - نخستین برهان از ابوریحان بیرونی.

از نقطه D وسط کمان ABC وتر DH را به موازات AB می‌کشیم و پاره خطهای AH و AD و BH و BD را رسم می‌کنیم. (شکل ۴۷). چون کمانهای AD و DC با هم و کمانهای AH و BD نیز با هم مساویند داریم: $\widehat{DH} = \widehat{BC}$. بنابراین وترهای DH و BC با هم مساویند. چون چهارضلعی $AHDB$ در دایره محاط است (نظر به قضیه بطلمیوس) داریم:

$$AD \times BH = DH \times AB + AH \times BD$$

اما $AD = BH$ و $AH = BD$ و $DH = BC$ بنابراین:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$



شکل ۴۷

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
تبصره ۱- در پایان این برهان بیرونی افزوده است:
«چون در این برهان از قضیه اول استفاده نکرده‌ایم این نیز جزو «سوابق» است (یعنی مانعی ندارد که از آن برای اثبات قضیه اول استفاده کنیم)».

تبصره ۲- این برهان که از بیرونی است ساده‌ترین برهانهایی است که در کتاب «استخراج الاوتار» برای قضیه دوم بیان شده است. با این حال معلوم نشد که چرا ابوریحان در کتاب «قانون مسعودی» که بنای آن بر اختصار بوده برهان دیگری برای این قضیه ذکر کرده که از برهان فوق مفصلتر است.^{۲۲}
(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۳۱ و ۱۳۲).

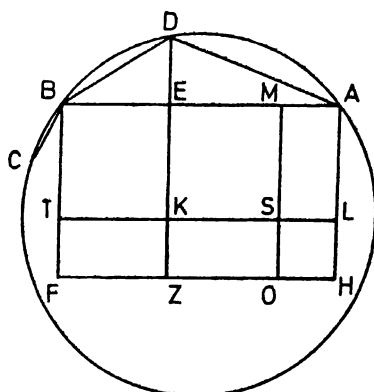
برهان هفتم قضیه دوم - دومین برهان از ابوریحان بیرونی.

از نقطه D (وسط کمان ABC) عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. و روی AE مربع $AEZH$ را بنا می‌کنیم (شکل ۴۸). و نیز روی BE مربع $BEKT$ را می‌سازیم. و TK را امتداد می‌دهیم تا AH را در نقطه L قطع کند. و روی EA پاره خط EM را مساوی با EB جدا کرده از M خطی به موازات EZ رسم می‌کنیم تا KL را در نقطه S و ZH را در نقطه O قطع کند و مستطیل $ABFH$ را کامل می‌کنیم.

نظر به قضیه اول واضح است که $AM = BC$ (زیرا E وسط خط شکسته ABC است و $EM = EB$).

(در اینجا استدلال را کمی خلاصه کرده‌ام) و با در نظر گرفتن دو مربع $AEZH$ و $EBTK = MEKS$ واضح است که $AM = KZ = TF$ و

$$(مساحت مربع $BTKE$) - (مساحت مربع $AEZH$) = (مساحت مستطیل $TFHL$)$$



شکل ۴۸

یعنی

$$LT \times TF = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

و چون $LT = AB$ و دیدیم که $TF = AM = BC$ پس رابطه فوق را می توان چنین نوشت:

$$AB \times BC = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

اگر به دو طرف این تساوی مقدار $\overline{BD}^2$ را بیفزاییم حاصل می شود:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \quad (۱)$$

اما $\overline{BD}^2 - \overline{BE}^2 = \overline{ED}^2$ (از مثلث قائم الزاویه EBD) پس رابطه (۱) چنین نوشته می شود:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 \quad (۲)$$

از طرف دیگر $\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2$ (از مثلث قائم الزاویه EAD) پس تساوی (۲) به صورت زیر در می آید:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.
تبصره - بیرونی در پایان این برهان افزوده است:

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

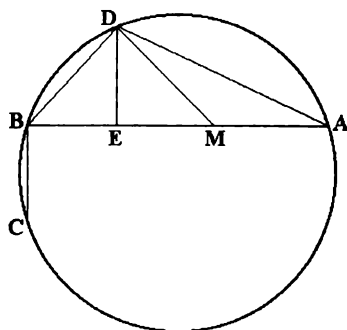
تبصره - در پایان این برهان ابوریحان افزوده است:

«و هذا من السوابق» یعنی چون در برهان فوق از قضیه اول استفاده نکرده‌ایم مانعی ندارد که برای قضیه اول از آن استفاده کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۳۵).

برهان نهم قضیه دوم - چهارمین برهان از ابوریحان بیرونی.

عمود DE را از نقطه D (وسط کمان ABC) بر AB فرود آورده EM را روی EA مساوی با EB جدا می‌کنیم (شکل ۵۰). به این ترتیب نقطه E وسط پاره خط MB است و چون نقطه



شکل ۵۰

A در امتداد BM واقع است (نظر به قضیه ششم مقاله دوم «اصول اقلیدس») داریم:

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 = \overline{AE}^2$$

چون به دو طرف این تساوی مقدار $\overline{DE}^2$ را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$AB \times AM + \overline{EM}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 \quad (۱)$$

اما در مثلث‌های قائم‌الزاویه DEB و AED داریم:

$$\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 \quad \text{و} \quad \overline{DE}^2 + \overline{EM}^2 (= \overline{EB}^2) = \overline{BD}^2$$

پس رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$AB \times AM + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 \quad (۲)$$

از طرف دیگر در قضیه اول ثابت شد که $AM = BC$ پس تساوی (۲) را می توان چنین نوشت:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

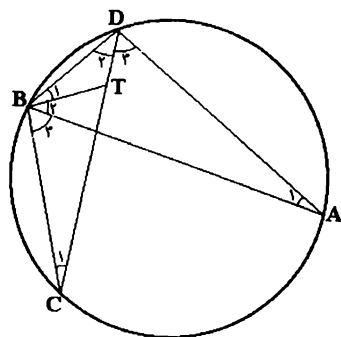
تبصره - در پایان این برهان ابوریحان افزوده است: «به همان دلیل که چند بار گفته ایم این برهان نیز از «لواحق» است.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۳۷).

برهان دهم قضیه دوم - از ابوالحسن* بن بامشاد قاینی.

(این برهان در نسخه خطی «عل» نیامده ولی در نسخه های چاپی «استخراج الاوتار» دیده می شود).

از نقطه B خط BT را (مطابق با شکل ۵۱) طوری رسم می کنیم که $\widehat{B_1} = \widehat{DBT}$ مساوی



شکل ۵۱

با زاویه C_۱ شود. در این صورت واضح است که دو مثلث DCB و DBT که دارای یک زاویه مشترک (در رأس D) و دو زاویه متساوی هستند متشابهند و داریم:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{BD}{TD}$$

و از آنجا:

$$\overline{BD}^2 = CD \times TD \quad (۱)$$

اکنون می گوئیم مجموع دو زاویه D_۲ و C_۱ که هر دو محاطی و روبه روی کمانهای CB و BD هستند مساویست با زاویه ABD که محاطی و روبه روی کمان AD است (زیرا $\widehat{AD} = \widehat{DBC}$) یعنی داریم:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{C}_1 + \hat{D}_2$$

و چون $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ پس

$$\hat{B}_r = \hat{D}_r \quad (۲)$$

از طرف دیگر

$$(\widehat{ADC}) \hat{B}_r = \hat{D}_r \quad \text{یعنی } \hat{D}_r \quad (۳)$$

زیرا هر دو محاطی و روبه روی کمان AC هستند. از جمع دو تساوی (۲) و (۳) عضو به عضو حاصل می شود

$$\hat{B}_r + \hat{B}_r = \hat{D}_r + \hat{D}_r$$

یعنی $\widehat{CBT} = \widehat{ADB}$ و چون

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

(هر دو محاطی و روبه روی یک کمان هستند) پس دو مثلث ADB و CBT متشابهند و داریم
یعنی $\frac{AB}{CT} = \frac{AD}{BC}$

$$AB \times BC = AD \times CT \quad (۴)$$

اکنون دو تساوی (۱) و (۴) را عضو به عضو با هم جمع می کنیم حاصل می شود:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = AD \times CT + CD \times TD$$

و یا با در نظر گرفتن اینکه $CD = AD$:

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = CD(CT + TD)$$

و یا

$$AB \times BC + \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۳۹ و ۱۴۰).

برهانهای یازدهم و دوازدهم قضیه دوم - یک برهان دیگر برای قضیه دوم از ابوریحان بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» ذکر شده است.^{۲۳}

در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: ص ۳۸-چم: ص ۷۶) یک برهان از ابوالحسن بصری برای قضیه دوم آمده است که چون مفصل و نارساست از ذکر آن صرفنظر می‌کنم و یک مطلب هم از سلیمان بن عصمة * سمرقندی ذکر شده (جد: ص ۳۶-چم: ص ۷۴) که الحاقی به نظر می‌آید.

۵- صورت قضیه سوم

در نسخه خطی «عل» از کتاب «استخراج الاوتار» این قضیه و قضیه چهارم، هیچ یک جداگانه نیامده است ولی در ضمن بعضی از برهانهای دو قضیه اول و دوم ثابت شده و مورد استفاده قرار گرفته است. با این حال چون در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: صفحات ۳۹ تا ۴۵-چم: صفحات ۷۸ تا ۸۵) این قضیه جداگانه آمده و چند برهان برای آن بیان شده است اینک به ذکر آن می‌پردازیم.

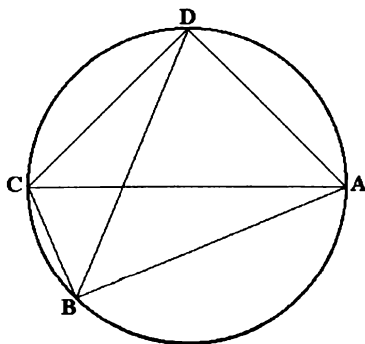
ابوریحان این قضیه را به عنوان اتمام قضیه دوم ذکر کرده و آن را قسم دیگری از قضیه دوم دانسته و نوشته است: «اتمام هذه الدعوى الثانية بقسمها الثانى حتى تكون دعوى ثالثة».

صورت قضیه سوم - این قضیه را می‌توان به صورت ساده زیر بیان کرد:

اگر وسط کمان AC از دایره‌ای را نقطه D بنامیم و در دنبال کمان AC دیگر CB از دایره را در نظر بگیریم رابطه زیر بین وترهای این کمانها برقرار خواهد بود (شکل ۵۲):

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2$$

به عبارت دیگر:



شکل ۵۲

اگر در یک دایره به کمان مفروض AC کمان BC را بیفزاییم، حاصل ضرب وتر مجموع این دو کمان در وتر کمان BC به علاوه مربع وتر نصف کمان مفروض مساوی خواهد بود با مربع وتر مجموع نصف کمان مفروض و کمان BC .

تبصره - درباره رابطه این قضیه با قضیه ششم مقاله دوم «اصول اقلیدس» ← «قربانی ت» صص ۱۴۲ تا ۱۴۴.

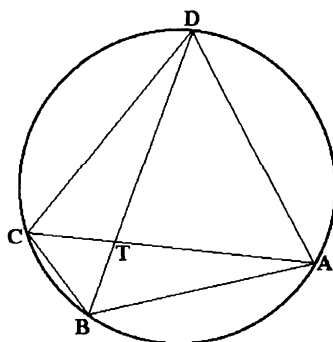
و - برهانهای قضیه سوم

(در همه شکل‌های مربوط به این برهانها نقطه D وسط کمان AC از دایره و کمان BC دنباله کمان ADC است) و باید ثابت کنیم

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{DB}^2$$

برهان اول قضیه سوم - از ابوالحسن بن بامشاد قاینی *

نقطه D وسط کمان AC را به نقطه B وصل کرده فصل مشترک BD و AC را نقطه T می‌نامیم. (شکل ۵۳).



شکل ۵۳

دو مثلث BAT و BDC متشابهند. زیرا $\widehat{CBD} = \widehat{DBA}$ (نقطه D وسط کمان ADC است) و $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (محاظی و روبه‌روی یک کمان هستند) پس داریم: $\frac{AB}{BT} = \frac{DB}{BC}$ و یا

$$AB \times BC = BT \times DB \quad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث CTD و BCD متشابهند. زیرا زاویه D در هر دو مشترک است و $\widehat{DCT} = \widehat{DBC}$ (زیرا محاطی و روبه‌روی دو کمان متساویند) پس داریم: $\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{TD}$ و یا

$$\overline{CD}^2 = BD \times TD \quad (۲)$$

از جمع دو تساوی (۱) و (۲) عضو به عضو حاصل می شود:

$$AB \times BC + \overline{CD}^2 = BT \times DB + DB \times TD = DB(BT + TD)$$

یعنی

$$AB \times BC + \overline{CD}^2 = \overline{DB}^2$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۴۶).

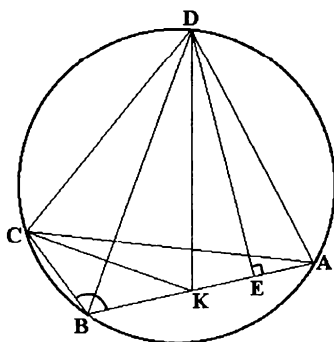
برهان دوم قضیه سوم - از ابوجعفر خازن*.

برهان ابوجعفر خازن* اصولاً مانند برهان ابوالحسن بامشاد است جز اینکه وی تساوی $AB \times BC = BT \times DB$ یعنی رابطه (۱) برهان اول را از تشابه دو مثلث ABD و TBC به دست آورده و تساوی $\overline{CD}^2 = DB \times TD$ یعنی رابطه (۲) برهان اول را از تشابه دو مثلث BAD و ATD و در نظر گرفتن تساوی $AD = CD$ نتیجه گرفته است.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۴۷).

برهان سوم قضیه سوم - از شخصی نامعلوم.

A را به B وصل کرده روی AB طول BK را مساوی با BC جدا می کنیم و پاره خطهای KD و KC را رسم می نماییم و از نقطه D عمود DE را بر AB فرود می آوریم (شکل ۵۴).



شکل ۵۴

دو مثلث BKD و BCD در حالت دو ضلع و زاویه بین آنها متساویند ($BK = BC$ و BD مشترک). بنابراین $KD = CD$ و چون نقطه D وسط کمان AC است داریم:

$$KD = CD = DA$$

پس مثلث DKA متساوی الساقین است و عمود DE قاعده آن یعنی KA را نصف می‌کند. پس نقطه E وسط پاره خط KA است و چون نقطه B در امتداد آن قرار دارد (نظر به قضیه ششم مقاله دوم «اصول اقلیدس») داریم:

$$BA \times BK + \overline{EK}^2 = \overline{EB}^2$$

به دو طرف این تساوی مقدار $\overline{DE}^2$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$AB \times BK + \overline{EK}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 \quad (۱)$$

و چون ملاحظه کنیم که $BK = BC$ و $\overline{EK}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{DK}^2 = \overline{DC}^2$ (از مثلث قائم الزاویه DEK) و $\overline{EB}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{BD}^2$ (از مثلث قائم الزاویه BDE) رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$AB \times BC + \overline{DC}^2 = \overline{BD}^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۴۸).

ز - صورت قضیه چهارم

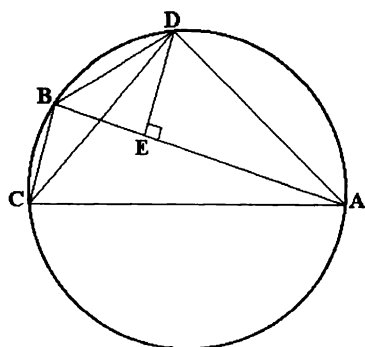
این قضیه نیز مانند قضیه سوم در نسخه خطی «عل» نیامده است. با این حال چون در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: ص ۴۵-چم: ص ۸۵) جداگانه ذکر و چند برهان برای آن بیان شده اینک به ذکر آن می‌پردازم.

صورت قضیه چهارم - اگر AC کمانی از دایره و نقطه D وسط آن و B نقطه دلخواهی متعلق به آن باشد و از D عمود DE را بر AB فرود آوریم، تفاضل مساحت‌های مثلث متساوی الساقین ACD و مثلث ABC مساوی است با حاصلضرب $DE \times EB$ (یعنی دو برابر مساحت مثلث BED). (شکل ۵۵).

ح - برهان‌های قضیه چهارم

(شکل مربوط به قضیه چهارم عیناً همان شکل مربوط به قضیه اول است. یعنی در همه این برهانها نقطه D وسط کمان AC و B نقطه دلخواهی متعلق به کمان AC و DE عمود بر AB است).

برهان اول قضیه چهارم - نخستین برهان از ابوریحان بیرونی.



شکل ۵۵

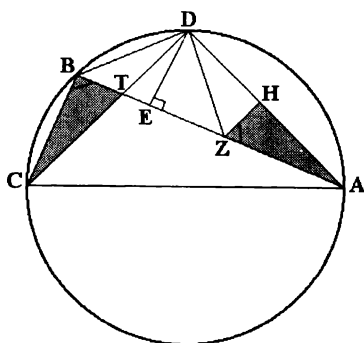
فصل مشترک CD و AB را نقطه T می‌نامیم و مساحت هر شکل را با علامت s که در سمت چپ اسم آن شکل می‌نویسیم (شکل ۵۶) معین می‌کنیم. مثلاً $s \cdot ADC$ یعنی مساحت مثلث ADC . باید ثابت کنیم که:

$$\delta = s \cdot ADC - s \cdot ABC = DE \times EB \quad (۱)$$

سطح مثلث ATC بین سطحهای دو مثلث ADC و ABC مشترک است. اگر این قسمت مشترک را از سطحهای آن دو مثلث حذف کنیم برای اثبات رابطه (۱) کافی است نشان دهیم که:

$$\delta = s \cdot ADT - s \cdot BTC = DE \times EB$$

برای این کار از روی پاره خط EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا می‌کنیم. واضح است که در این صورت $BD = DZ$ ، و چون در قضیه اول ثابت کرده‌ایم که نقطه E وسط خط



شکل ۵۶

شکسته ABC است (یعنی $AE = EB + BC$) پس $AZ = BC$ و دو مثلث AZD و CBD (در حالت سه ضلع) با هم مساویند.
 اکنون نقطه H را روی AD طوری اختیار می‌کنیم که زاویه AZH مساوی با زاویه CBT شود. در این صورت داریم:

$$s \cdot AZH = s \cdot CBT$$

و از روی شکل واضح است که:

$$s \cdot ADT - s \cdot CBT = s \cdot ADT - s \cdot AZH = s \cdot DTZH \quad (۱)$$

و چون

$$s \cdot DHZ = s \cdot DTB$$

پس

$$s \cdot DTZH = s \cdot DBZ \quad (۲)$$

اما مساحت مثلث متساوی الساقین DBZ مساوی است با $DE \times EB$ (ارتفاع ضرب در نصف قاعده) پس تساوی (۱) را با در نظر گرفتن تساوی (۲) می‌توان چنین نوشت:

$$s \cdot ADT - s \cdot CBT = s \cdot DBZ = DE \times EB$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۵۱).

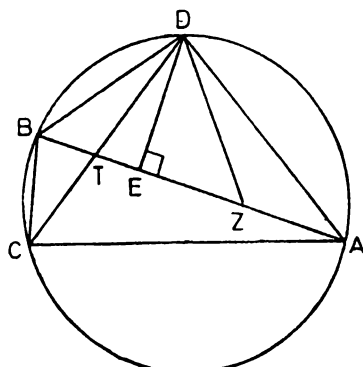
برهان دوم قضیه چهارم - دومین برهان از ابوریحان بیرونی.

مانند برهان اول فصل مشترک AB و CD را نقطه T می‌نامیم و روی EA پاره خط EZ را مساوی با EB جدا می‌کنیم. (شکل ۵۷). واضح است که در این صورت $BD = DZ$ و چون در قضیه اول ثابت کرده‌ایم که: $EA = EB + BC$ پس $AZ = BC$ و در نتیجه دو مثلث AZD و CBD (در حالت سه ضلع) متساویند. و از روی شکل واضح است که:

$$s \cdot AZD - s \cdot BTC (= s \cdot CBD - s \cdot BTC) = s \cdot DBT$$

به دو طرف این تساوی مقدار $s \cdot DTZ$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$s \cdot AZD + s \cdot DTZ - s \cdot BTC = s \cdot DBT + s \cdot DTZ$$



شکل ۵۷

یعنی:

$$s \cdot ADT - s \cdot BTC = s \cdot DBZ \quad (۱)$$

اما

$$s \cdot DBZ = DE \times EB$$

و از طرف دیگر اگر به هریک از دو جمله تفاضل طرف چپ تساوی (۱) مقدار $s \cdot ATC$ را بیفزاییم این تفاضل تغییر نمی‌کند و داریم:

$$s \cdot ADT - s \cdot BTC = s \cdot ADC - s \cdot ABC$$

بنابراین تساوی (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$s \cdot ADC - s \cdot ABC = DE \times EB$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قربانی ت» ص ۱۵۳).

برهان سوّم قضیه چهارم - این برهان از ابونصر جعدی است (= ابونصر عراق*).
فصل مشترک AB و CD را نقطه M می‌نامیم و روی EA پاره خط EZ را مساوی با BE و روی AD پاره خط AH را مساوی با CM جدا می‌کنیم. (شکل ۵۸).
واضح است که دو مثلث AHZ و CMB با هم و دو مثلث DHZ و DMB با هم مساویند و از روی شکل پیداست که:

$$s \cdot BMC + s \cdot BMD + s \cdot DMZ = s \cdot ADM$$

۶۷ و ۶۸) - چون این برهان مفصل و متن عربی آن ناقص است از ذکر آن صرف نظر می‌کنم. از شتی * (ابوعبدالله) برهانهای سیزدهم و پانزدهم قضیه اول و برهان پنجم قضیه دوم را قبلاً ذکر کرده‌ام. (و نیز ← تبصره (۲) ذیل برهان پنجم قضیه دوم).

ط - تبصره‌ای درباره قضایای چهارگانه مذکور

بیرونی در چند مورد خاطر نشان کرده است که می‌توان برهان بعضی از این چهار قضیه را مقدم قرار داد و بعد با استفاده از آن قضایای دیگر را ثابت کرد.

مثلاً در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: ص ۴۸ - چم: ص ۸۹) آمده است: «و هذه الخواص مشتبكة بعضها ببعض تصح احدا هما من صحة الاخرى» و در همان نسخه‌ها (جد: ص ۴۲ - چم: ص ۸۲) درباره قضایای دوم و سوم آمده است: «و هاتان الخاصيتان تشبكان حتى تصح احدهما الاخرى و تصح بنفسها منفردة».

خود بیرونی در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: صص ۴۴ و ۴۵ - چم: صص ۸۲ تا ۸۵) این عمل را درباره قضایای دوم و سوم انجام داده است.

همچنین در نسخه خطی «عل» (ص ۸) ابتدا قضیه دوم ثابت شده و بعداً قضیه اول از آن نتیجه گرفته شده است (← تبصره (۲) ذیل برهان پنجم قضیه دوم) - همچنین در بسیاری از برهانهای قضایای دوم و سوم و چهارم از قضیه اول استفاده شده است. برای احتراز از طولانی شدن کلام از ذکر این موارد خودداری می‌کنم.

بند چهارم

مسائل کتاب «استخراج الاوتار»

الف - مقدمه

پس از بیان و اثبات چهار قضیه مذکور در بند قبل، بیرونی روی هم رفته سی مسئله مختلف را با استفاده از آن قضایا حل کرده است که در این بند به ذکر آنها می‌پردازم.

در نسخه خطی «عل» (که در آن فقط دو قضیه از قضایای مذکور جداگانه مطرح و ثابت شده) در آغاز این مسائل آمده است (عل: ص ۱۸):

«و لقد حل هذان الشكلان من الاصول الهندسية محلاً جليلاً...»

اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (که در آنها هر چهار قضیه جداگانه مطرح و ثابت شده) در آغاز این مسائل چنین آمده است (جد: ص ۴۹ - چم ص ۹۰):

«و هذه الخواص التي قدمناها معدودة من الاصول الهندسية، و لذلك رجعت اليها في مطلوبات كثيرة خرجت بها، و انا اذكر عدة عن ذلك، و متى اتفق لغيري منها شيء نسبته اليه و سميته باذن الله تعالى و عونه».

حاصل و خلاصه هر دو عبارت مذکور این است که:
 «قضایایی که قبلاً ذکر کردیم معدودی از خواص اصلی هندسه هستند و در حل بسیاری از مسائل می توان از آنها استفاده کرد که اینک به ذکر عده ای از آنها می پردازم و راه حل هایی که از خود من نیست به نام صاحبانشان ثبت می کنم».

تبصره - این سی مسئله را می توان به دو دسته متمایز تقسیم کرد. دسته اول (مشمول بر ۱۵ مسئله):

پنج مسئله اول مربوط به ترسیم مثلث به وسیله ستاره و پرگار است. مسئله ششم مربوط به محاسبه پاره خط هایی است که پای یک ارتفاع مثلث روی قاعده نظیر آن پدید می آورد.
 مسئله هفتم برهان درستی دستور محاسبه مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن است.
 مسئله هشتم برهان درستی دستور محاسبه مساحت چهارضلعی محاطی بر حسب اضلاع آن است.

مسائل نهم و دهم مسائلی هستند که در کتاب های جبر قدیمی ذکر شده است.
 مسائل یازدهم و دوازدهم و سیزدهم و چهاردهم و پانزدهم مسائلی هستند که در هیئت و نجوم به کار می روند.

دسته دوم (مشمول بر ۱۵ مسئله):
 مسائل شانزدهم تا سی ام مربوط به محاسبه اوتار دایره هستند.

ب - مسائل هندسی و جبری و نجومی

مسئله اول - ترسیم دو خط راست که یکی از نقطه معلوم A و دیگری از نقطه معلوم C بگذرند و یکدیگر را در نقطه ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویه ABC مساوی با زاویه معلوم α و مجموع $AB + BC$ مساوی با طول معلوم l باشد (صورت این مسئله را به دو وجه زیر نیز می توان بیان کرد):

الف - دو نقطه A و C و زاویه α و پاره خط TH به طول l مفروض است. می خواهیم نقطه ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره خط AC از آن نقطه به زاویه α دیده شود و مجموع دو پاره خط AB و BC مساوی با l باشد.

ب - از مثلث ABC زاویه B و ضلع AC و مجموع دو ضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید.

بیرونی تاریخچه این مسئله را چنین شرح داده است:

(یعنی در واقع پاره‌خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند).
برهان - پاره‌خط DE را رسم می‌کنیم واضح است که DE بر AB عمود است. و چون این عمود از وسط کمان ADC فرود آمده است (بنا بر قضیهٔ اوّل) داریم:

$$AE = EB + BC$$

اما داشتیم

$$EA = \frac{1}{4}l$$

پس:

$$EB + BC = \frac{1}{4}l$$

و (از جمع دو تساوی اخیر عضویه عضو حاصل می‌شود):

$$(AE + EB) + BC = AB + BC = l$$

از طرف دیگر زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ α است زیرا نقطهٔ B روی کمان درخور زاویهٔ α واقع است.

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز «قربانی ت» صص ۱۶۲ و ۱۶۳).

مسئلهٔ دوّم - ترسیم دو خط راست که یکی از نقطهٔ معلوم A و دیگری از نقطهٔ معلوم C بگذرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویهٔ ABC مساوی با زاویهٔ معلوم α و (قدر مطلق) تفاضل $AB - BC$ مساوی با طول معلوم l باشد.
(صورت این مسئله را به دو وجه زیر نیز می‌توان بیان کرد):

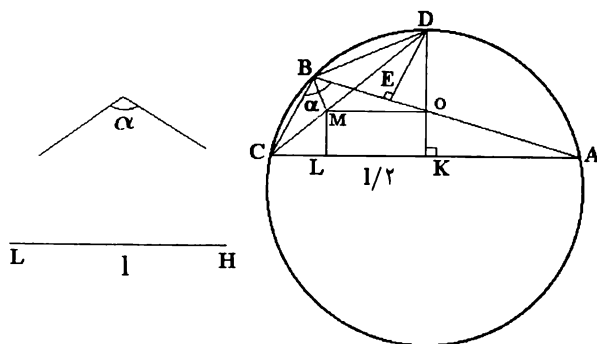
الف - دو نقطهٔ A و C و زاویهٔ α و پاره‌خط TH به طول l مفروض است می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن نقطه به زاویهٔ α دیده شود و قدرمطلق تفاضل دو پاره‌خط AB و BC مساوی با l باشد.

ب - از مثلث ABC زاویهٔ B و ضلع AC و تفاضل دو ضلع دیگر معلوم است آن مثلث را رسم کنید).

راه حل اوّل مسئلهٔ دوّم از بیرونی - نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و وسط آن کمان را نقطهٔ D می‌نامیم و کمان ADC را تا

شرط امکان مسئله - شرط امکان مسئله این است که LZ از $AD (= CD)$ بزرگتر نباشد (زیرا اگر LZ از CD بزرگتر باشد وقتی وتر DB را مساوی با LZ رسم کنیم نقطه B در خارج کمان DC واقع خواهد شد).

راه حل دوم مسئلهٔ دوم از بیرونی - نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α نظیر پاره خط AC را رسم می‌کنیم و وسط آن را نقطهٔ D می‌نامیم و D را به C وصل می‌کنیم و از نقطهٔ D عمود DK را بر AC فرود می‌آوریم و (مطابق با شکل ۶۱) پاره خط KL را روی



شکل ۶۱

AC مساوی با $l/2$ جدا می‌کنیم و از نقطه L خط LM را به موازات DK و از نقطه M (که بر DC واقع است) MO را به موازات KL رسم می‌کنیم (نقطه O روی DK واقع است). سپس وتر DB را مساوی با DM اختیار کرده (نقطه B باید روی کمان DC واقع شود) و پاره‌خطهای AB و BC را رسم می‌کنیم. (پاره‌خطهای AB و BC جواب مسئله‌اند).

برهان - از نقطه D عمود DE را بر AB فرود می آوریم واضح است که دو مثلث DBE و DCK متشابهند. زیرا دو زاویه DBE و DCK هر دو محاطی و روبه روی کمان AD واقعند و هر یک از دو زاویه DEB و DKC قائمه اند. و چون MO با CK موازی است پس مثلثهای DMO و DBE نیز متشابهند.

اما $DM = DB$ پس دو مثلث DMO و DBE متساویند بنابراین $MO = BE$ اما $MO = KL$ پس $BE = KL = l/2$ از طرف دیگر BE مساوی با نصف $AB - CB$ است.

پس:

$$\sphericalangle BE = AB - BC$$

$$AB - BC = l$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(و نیز ← «قرآنی‌ت» صص ۱۶۷ و ۱۶۸).

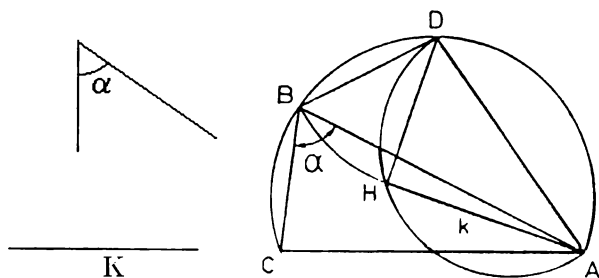
مسئله سوم– ترسیم دو خط راست که یکی از نقطه معلوم A و دیگری از نقطه معلوم C بگذرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویه ABC مساوی با زاویه معلوم α و حاصل ضرب $AB \times BC$ مساوی با مربع طول معلوم K باشد.

(صورت این مسئله را به دو وجه زیر نیز می‌توان بیان کرد:

الف - دو نقطه A و C و زاویه α و پاره خطی به طول معلوم K مفروضند. می خواهیم نقطه ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره خط AC از آن نقطه به زاویه α دیده شود و حاصل ضرب $AB \times BC$ مساوی K^2 باشد.

ب - از مثلث ABC زاویه B و ضلع AC و حاصل ضرب دو ضلع دیگر معلوم است، آن مثلث را رسم کنید.

راه حل اول مسئله سوم از بیرونی - نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویه α نظیر پاره خط AC را رسم می‌کنیم و وسط آن کمان را نقطه D می‌نامیم و D را به A وصل می‌کنیم. سپس به قطر AD نیمدایره‌ای (مطابق با شکل ۶۲) رسم کرده در آن وتر AH را مساوی



شکل ۶۲

با طول K می‌کشیم و نقاط D و H را به هم وصل می‌کنیم. آنگاه درکمان درخور مرسوم، وتر DB را مساوی با DH اختیار و پاره‌خطهای AB و BC را رسم می‌کنیم و می‌گوییم:

$$AB \times BC = K^{\mathfrak{r}}$$

(و $\widehat{ABC} = \alpha$ یعنی در واقع AB و BC جواب مسئله‌اند).
برهان - نظر به قضیة دوم داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

بنابراین:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC \quad (۱)$$

اما (در مثلث قائم‌الزاویه ADH):

$$\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2 = \overline{AH}^2$$

و چون $DH = BD$ پس:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AH}^2 \quad (۲)$$

از دو تساوی (۱) و (۲) حاصل می‌شود:

$$\overline{AH}^2 = AB \times BC$$

و چون $AH = K$ پس:

$$AB \times BC = K^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(یکی دیگر از شرایط مسئله این بود که زاویه ABC مساوی با α باشد. چون نقطه B روی کمان درخور زاویه α واقع است این شرط نیز برقرار است).
راه حل دوم مسئله سوم از شنی * (ابوعبدالله) - (بیرونی نوشته است که این راه حل شبیه راه اول است).

نقاط A و C را به هم وصل کرده کمان درخور زاویه α نظیر پاره خط AC را رسم می‌کنیم و نقطه A را به وسط کمان AC که آن را D می‌نامیم وصل می‌نماییم و فرض می‌کنیم که K از AD کوچکتر باشد و گر نه حل مسئله ممکن نخواهد بود.

سپس وتر DB را به قسمی رسم می‌کنیم که $\overline{DB}^2 = \overline{AD}^2 - K^2$ باشد و نقطه B را به نقاط A و C وصل می‌کنیم و می‌گوییم $AB \times BC = K^2$ (یعنی AB و BC جواب مسئله‌اند).

سپس پاره‌خطهای CH و CL و CD را رسم می‌کنیم. زاویه ADC مساوی با زاویه ABC است. زیرا هر دو محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند. بنابراین (مکملهای آنها یعنی) دو زاویه LDC و HBC نیز با هم مساویند. و چون دو زاویه ALC و AHC در دایره بزرگتر محاطی و روبه‌روی یک کمان هستند، متساویند. پس دو مثلث LDC و HBC متشابهند. اما مثلث LDC متساوی‌الساقین است پس مثلث HBC نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و داریم: $BH = BC$. پس تساوی $K^2 = AB \times BH$ به صورت زیر در می‌آید:

$$AB \times BC = K^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
(تساوی زاویه ABC با α واضح است. زیرا نقطه B روی کمان درخور زاویه α واقع است.)
(و نیز «قربانی ت» صص ۱۷۳ و ۱۷۴).

مسئله چهارم - ترسیم دو خط راست که یکی از نقطه معلوم A و دیگری از نقطه معلوم C بگذرند و یکدیگر را در نقطه‌ای مانند B قطع کنند به قسمی که زاویه ABC مساوی با زاویه معلوم α و نسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با نسبت معلوم $\frac{l}{K}$ باشد.

(صورت این مسئله را به دو وجه زیر نیز می‌توان بیان کرد:

الف - دو نقطه A و C و زاویه α و نسبت $\frac{l}{K}$ مفروض‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای مانند B بیابیم به قسمی که پاره‌خط AC از آن نقطه به زاویه α دیده شود و نسبت $\frac{AB}{BC}$ مساوی با $\frac{l}{K}$ باشد.
ب - از مثلث ABC زاویه B و ضلع AC و نسبت دو ضلع دیگر معلوم است. آن مثلث را رسم کنید.)

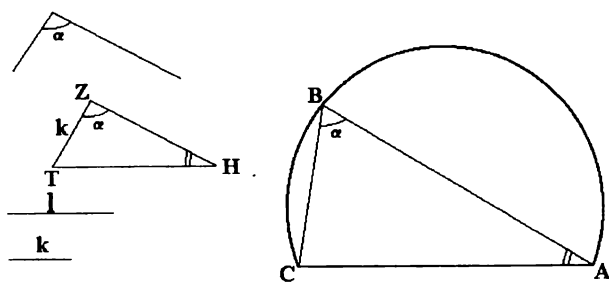
راه حل - زاویه‌ای مساوی با زاویه α ساخته رأس آن را Z می‌نامیم و روی دو ضلع آن دو پاره‌خط ZH و ZT را به ترتیب مساوی با l و K جدا و پاره‌خط TH را رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویه α نظیر پاره‌خط AC را رسم کرده زاویه CAB را مساوی با زاویه THZ می‌سازیم و پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم و می‌گوییم مسئله حل شده است (یعنی درواقع خطهای BA و BC جواب مسئله‌اند).

برهان - زاویه TZH مساوی با زاویه ABC و زاویه THZ مساوی با زاویه CAB است. (شکل ۶۴) بنابراین دو مثلث HBT و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{HZ}{ZT} = \frac{l}{K}$$

پس خطوط راست BA و BC جواب مسئله‌اند.

تبصره - در پایان حل این مسئله در نسخه خطی «عل» (صفحه ۳۵) عبارات زیر آمده است:



شکل ۶۴

«و هذا الاخير وان لم يتصل بخواص الخط المنحنى فاني جئت به لينسلق به مما ذكرته من هذه المسائل الى ساير انواعها التي تؤدي اليها القسمة. فلم يكن الغرض في ذكرها استيفاء جميعها حتى اتعرض منها بجميع ما يحتمله تنويع القسمة. لكنني حكيت منها ما اتفق لى الجواب عنه مستنبطاً من خواص تلك الدعاوى المتقدمة كما سيأتى على جميع ما اتفق من ذلك لى و لغيري».

اما در نسخه‌های چاپی «استخراج الاوتار» (جد: ص ۵۷-چم: ص ۱۰۰). عبارات فوق فشرده و مختصر شده به صورت زیر آمده است:

«و لم يتصل هذا الاخير بما نحن فيه من الخواص المتقدمة لكنه لما اتصل بالفن تبعه لينسلق به الى ما يتممه، اذ لم يكن الغرض في ذكر ما تقدم استيفاء ما تؤدي اليه القسمة فيه، و تنويع جنسه، و لكنني حكيت ما اتفق فيه جواب مستنبط من الخواص المذكورة».

برای درک مقصود بیرونی از این عبارات کافی است ملاحظه کنیم که چهار نخستین مسئله را که شرح آنها گذشت می‌توان یک جا به صورت زیر مطرح کرد:

از مثلث ABC ضلع AC و زاویه روبه‌روی آن B و یکی دیگر از معلومات زیر در دست است می‌خواهیم آن مثلث را رسم کنیم:

$AB + BC$	اول: مجموع دو ضلع
$ AB - BC $	دوم: تفاضل دو ضلع
$AB \times BC$	سوم: حاصل ضرب دو ضلع
$\frac{AB}{BC}$	چهارم: نسبت دو ضلع

بیرونی این مسئله را در سه حالت اول با استفاده از خواص خط شکسته محاط در دایره حل کرده اما راه حلی که برای حالت چهارم ذکر کرده است ربطی به خواص مذکور ندارد. به این دلیل است که می‌گوید: «اگر چه مسئله اخیر (= مسئله چهارم) ربطی به خواص خط

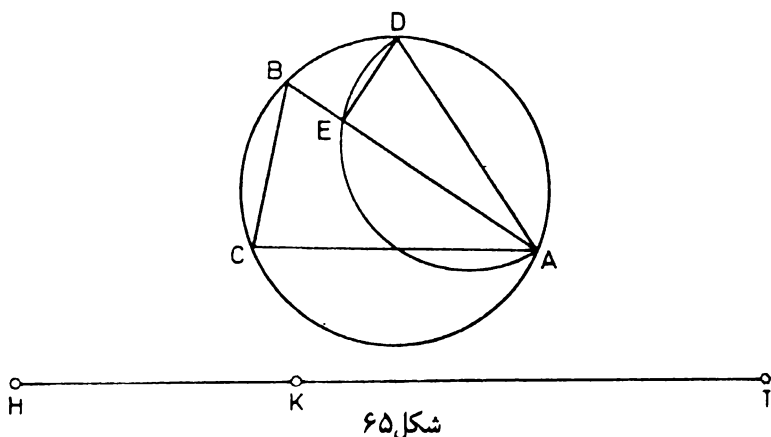
شکسته محاط در دایره (= چهار قضیه مذکور در بند سوم) ندارد ولی چون این مسئله از نوع سه مسئله اول است آن را در اینجا ذکر می‌کنیم. (زیرا در سه مسئله اول یکی از معلومات، مجموع یا تفاضل یا حاصل ضرب دو ضلع AB و BC است و طبیعی است که یک بار هم این معلوم را نسبت دو ضلع مذکور بگیریم). گذشته از این مقصودم این نبوده است که در اینجا همیشه راه حل‌های ممکن مسائل مذکور را ذکر کنم بلکه فقط راه حل‌هایی را که در آنها از خواص خط شکسته محاط در دایره استفاده می‌شود ذکر کرده‌ام و درباره بقیه مسائل نیز، خواه راه حل آنها از من باشد و خواه نباشد، نیز همین کار را کرده‌ام.»

(و نیز «قربانی ت» صص ۱۷۷ و ۱۷۸).

مسئله پنجم - محاط کردن مثلثی در دایره‌ای مفروض به قسمی که مجموع اضلاع آن مساوی با پاره خط معلوم HT باشد.

راه حل بیرونی - باید طول HT از محیط مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره مفروض محاط شود بزرگتر نباشد (تا حل مسئله ممکن گردد).

روی پاره خط HT نقطه دلخواهی مانند K اختیار می‌کنیم. و وتر AC را در دایره مفروض مساوی با HK رسم می‌کنیم سپس کمان AC را در نقطه D نصف کرده نقطه A را به نقطه D وصل می‌نماییم. آنگاه به قطر AD نیم‌دایره‌ای (در داخل دایره مفروض) رسم می‌کنیم و وتر AE را در آن نیم‌دایره مساوی با نصف پاره خط KT می‌سازیم. سپس AE را امتداد می‌دهیم تا کمان AC را در نقطه B قطع کند و نقطه B را به C وصل می‌کنیم. محیط مثلث ABC (که در دایره مفروض محاط شده) مساوی با طول HT است. (شکل ۶۵).



شکل ۶۵

برهان - پاره خط AC مساوی با HK است. و پاره خط AE که (بنابر قضیه اول) نصف طول خط شکسته ABC است مساوی با نصف KT است. بنابراین همه طول خط شکسته

ABC مساوی با KT است. پس محیط مثلث ABC مساوی با طول HT است. و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. (و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۸۰ و ۱۸۱).

مسئله ششم - برهان درستی دستور ارشمیدس درباره محاسبه طول ارتفاعات مثلثی که اضلاع آن معلوم باشد^{۲۵} و محاسبه پاره‌خطهایی که پای هر ارتفاع روی قاعده نظیر خود پدید می‌آورد. ارشمیدس گفته است: مربع یکی از اضلاع را از مربع ضلع دیگر کم کرده حاصل را بر قاعده تقسیم می‌کنیم. اگر آنچه را که به این ترتیب به دست می‌آید به قاعده بیفزاییم و نصف آن را بگیریم طول پاره‌خط بزرگتری که پای ارتفاع روی قاعده پدید می‌آورد نتیجه خواهد شد. و اگر آن را از قاعده کم کنیم و نصف آن را بگیریم طول پاره‌خط کوچکتری که پای ارتفاع روی قاعده پدید می‌آورد به دست خواهد آمد.

خلاصه مطلب این است که اگر در مثلث ADB پای ارتفاع نظیر رأس D را روی AB نقطه E بنامیم داریم:

$$AE = \frac{1}{2} \left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right)$$

و

$$BE = \frac{1}{2} \left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right)$$

برهان اول بیرونی - مثلث ADB را در نظر گرفته (شکل ۶۶) ارتفاع DE (نظیر قاعده AB) و دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. و روی دایره محیطی کمان DC را مساوی با کمان DA جدا کرده BC را رسم می‌کنیم و روی AE مربع AZ و روی BE مربع ET را می‌سازیم* و روی EA پاره‌خط EM را مساوی با EB جدا کرده از نقطه M خط MO را موازی با EZ و از نقطه T خط TKL را موازی با AB می‌کشیم و مستطیل AF را کامل می‌کنیم.

چون $\overline{DB}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BE}^2$ (در مثلث قائم‌الزاویه BED)

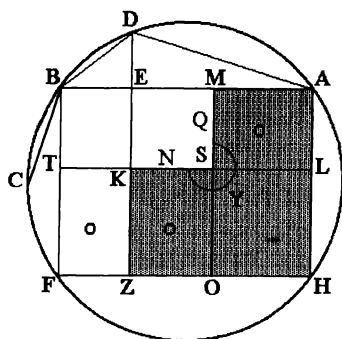
و $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2$ (در مثلث قائم‌الزاویه AED)

بنابراین اگر تساوی اول را عضوبه عضو از تساوی دوم کم کنیم:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

^{۲۵}. بیرونی در این برهان فقط طول پاره‌خطهایی را که پای ارتفاع روی ضلع مقابل پدید می‌آورد حساب کرده است نه خود ارتفاع را.

* هر چهارضلعی به وسیله اسامی دو رأس متقابل آن نامیده شده است.



شکل ۶۶

و واضح است که تفاضل $\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$ مساوی با مساحت غَلَم^{۲۶} QYN (یعنی مساحت قسمتی که روی شکل هاشور خورده) است.
از طرف دیگر چون $TK = KS = SM$ و $TF = KZ = AM$ بنابراین مستطیلهای ML و KO و TZ متساویند. پس:

$$\text{مساحت غَلَم } QYN = \text{مساحت مستطیل } TH$$

(و این مساحت چنانکه دیدیم مساویست با $(\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2)$).
اما چون: $AM = CB$ (زیرا نقطه E وسط خط شکسته ABC است و $BE = EM$)،
پس: $TF = AM = BC$.

$$\begin{aligned} \text{و بنابراین:} \quad \text{مساحت مستطیل } TH &= AB \times BC \\ (\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2) &= AB \times BC \quad (\text{یعنی:}) \\ BC &= (\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2) / AB \quad (\text{بنابراین:}) \end{aligned}$$

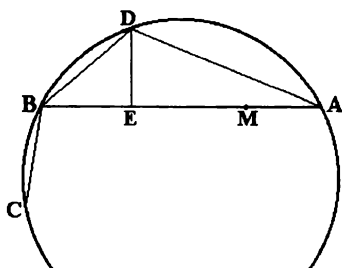
و اگر این مقدار BC را با قاعده AB جمع کنیم طول خط شکسته ABC به دست می آید و نصف آن یعنی AE مساوی است با طول قسمت بزرگتر قاعده.
[یعنی مطابق با آنچه که ارشمیدس گفته است:

$$\left[AE = \frac{1}{2} \left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right) \right]$$

و اگر مقدار BC را از قاعده AB کم کنیم BM باقی می ماند و نصف آن یعنی BE مساوی با طول قسمت کوچکتر قاعده است.

$$[BE = \frac{1}{2} \left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right)] \text{ یعنی مطابق با گفته ارشمیدس:}$$

برهان دوم بیرونی که از برهان اول ساده‌تر است - مثلث ADB را در نظر گرفته ارتفاع DE نظیر قاعده AB و دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. و روی آن کمان DC را مساوی با کمان DA جدا و نقطه B را به C وصل می‌کنیم. سپس روی EA پاره خط EM را مساوی با EB جدا می‌نماییم. (شکل ۶۷).



شکل ۶۷

چون (بنا به قضیهٔ دوّم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + AB \times BC$$

پس:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

و از آنجا

$$\frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} = BC$$

و اگر این مقدار BC را با قاعده AB جمع کنیم طول خط شکسته ABC به دست می‌آید و نصف آن مساوی با AE یعنی قسمت بزرگتر قاعده است.

$$\left[AE = \frac{1}{2} \left(AB + \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right) \right] \text{ یعنی}$$

و اگر این مقدار BC را از قاعده AB کم کنیم BM باقی می‌ماند و نصف آن مساوی با EB یعنی قسمت کوچکتر قاعده است.

$$\left[EB = \frac{1}{2} \left(AB - \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} \right) \right]$$

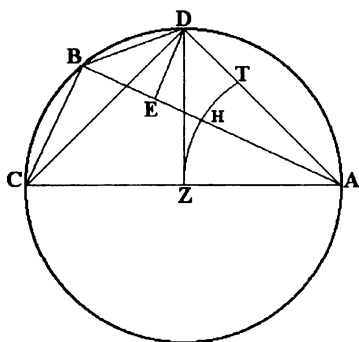
(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۸۷ تا ۱۸۹).

مسئله هفتم- برهان درستی دستور ارشمیدس درباره مساحت مثلث بر حسب اضلاع آن از شتی* (ابوعبدالله).

ارشمیدس گفته است: هرگاه مساحت سطح یک مثلث را بخواهیم، تفاضل نصف مجموع اضلاع آن را با هر ضلع می‌گیریم. سپس یکی از این تفاضلهای سه گانه را در دیگری و حاصل را در سومی ضرب می‌کنیم و این حاصل ضرب را در نصف مجموع اضلاع مثلث ضرب کرده جذر حاصل را می‌گیریم مساحت سطح مثلث به دست می‌آید.

برهان - شتی* (ابوعبدالله) برهان درستی دستور فوق را چنین بیان کرده است:

مثلث ABC را در نظر گرفته دایره محیطی آن را رسم می‌کنیم و وسط کمان ABC را نقطه D می‌نامیم و از نقطه D عمود DE را بر AB و عمود DZ را بر AC فرود می‌آوریم و پاره‌خطهای AD و DC و DB را رسم می‌کنیم (شکل ۶۸). سپس به مرکز A و به شعاع AZ



شکل ۶۸

کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه H و AD را در نقطه T قطع کند.

تا اینجا مقدمه استدلال را از روی نسخه «عل» ترجمه کردم. اما چون بقیه استدلال به وجهی طولانی بیان شده و در بعضی از مواضع متن عربی افتادگی و اشتباه کتابت دارد و فهم آن آسان نیست بهتر دیدم که خلاصه این استدلال را به وجهی که برای خواننده به سهولت قابل فهم باشد، مطابق با آنچه از متن عربی مفهوم می‌شود، بیان کنم.

شتی* (ابوعبدالله) در این استدلال از دو قضیه اول و چهارم استفاده کرده است: از قضیه اول مطابق با شکل حاصل می‌شود:

$$AE = EB + BC$$

(۱)

قضیه چهارم را مطابق با شکل می توان چنین نوشت (Δ یعنی مساحت مثلث)

$$\Delta \cdot ADC - ۲\Delta \cdot BDE = \Delta \cdot ABC \quad (۲)$$

اکنون می گوئیم: واضح است که دو مثلث قائم الزاویه DEB و DZA متشابه اند و داریم:

$$\frac{DZ}{AZ} = \frac{DE}{BE} \quad (۳)$$

با ضرب کردن صورت و مخرج هر یک از دو نسبت فوق در یک مقدار مناسب می توان تساویهای زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{\overline{DZ}^۲}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{\overline{AZ}^۲} = \frac{\overline{DE}^۲}{DE \times BE} = \frac{DE \times BE}{\overline{BE}^۲}$$

و از خواص نسبتهای متساوی حاصل می شود:

$$\frac{\overline{DZ}^۲ - \overline{DE}^۲}{DZ \times AZ - DE \times BE} = \frac{DZ \times AZ - DE \times BE}{\overline{AZ}^۲ - \overline{BE}^۲} \quad (۴)$$

اکنون مقادیر چهار جمله تناسب (۴) را جداگانه حساب می کنیم.

اولاً - از دو مثلث قائم الزاویه AED و AZD می توان صورت نسبت طرف چپ رابطه (۴) را چنین نوشت:

$$\overline{DZ}^۲ - \overline{DE}^۲ = \overline{AE}^۲ - \overline{AZ}^۲$$

و یا

$$\overline{DZ}^۲ - \overline{DE}^۲ = (AE + AZ)(AE - AZ) \quad (۵)$$

و اگر محیط مثلث ABC را $۲P$ بنامیم چون نظریه قضیه اول

$$AZ = \frac{AC}{۲} \quad \text{و} \quad AE = \frac{AB + BC}{۲}$$

معلوم می شود که:

$$AE + AZ = \frac{AB + BC + CA}{۲} = P \quad (۶)$$

و

$$AE - AZ = \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2} = P - AC \quad (۷)$$

و اگر مقادیر $(AE + AZ)$ و $(AE - AZ)$ را از روابط (۶) و (۷) در رابطه (۵) قرار دهیم صورت نسبت طرف چپ تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$\overline{DZ}^2 - \overline{DE}^2 = P(P - AC) \quad (۸)$$

ثانیاً - وسطین تناسب (۴) با هم مساویند و می‌توان هر یک از آنها را چنین نوشت:

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \Delta \cdot ADC - 2\Delta \cdot BDE$$

و مقدار طرف راست تساوی فوق بنا بر قضیه چهارم مساوی است با مساحت مثلث ABC . بنابراین وسطین تناسب (۴) چنین نوشته می‌شود:

$$DZ \times AZ - DE \times BE = \Delta \cdot ABC \quad (۹)$$

ثالثاً - مخرج نسبت طرف راست تناسب (۴) را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{AZ}^2 - \overline{BE}^2 = (AZ + BE)(AZ - BE) \quad (۱۰)$$

اما

$$BE = \frac{AB - BC}{2} \text{ و } AZ = \frac{AC}{2}$$

(زیرا نقطه E نظر به قضیه اول وسط خط شکسته ABC است) پس تساوی (۱۰) چنین نوشته می‌شود:

$$\overline{AZ}^2 - \overline{BE}^2 = \left(\frac{AC}{2} + \frac{AB - BC}{2} \right) \left(\frac{AC}{2} - \frac{AB - BC}{2} \right)$$

و چون محیط مثلث ABC را $2P$ نامیده‌ایم داریم:

$$\overline{AZ}^2 - \overline{BE}^2 = (P - BC)(P - AB) \quad (۱۱)$$

حال اگر مقادیر طرفهای چپ تساوی (۸) و (۹) و (۱۱) را در رابطه (۴) منظور کنیم نتیجه می‌شود:

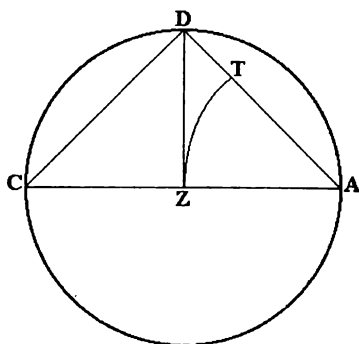
$$\frac{P(P - AC)}{\Delta \cdot ABC} = \frac{\Delta \cdot ABC}{(P - BC)(P - AB)}$$

$$(\Delta \cdot ABC)^2 = P(P - AC)(P - BC)(P - AB)$$

و یا

$$\Delta \cdot ABC = \sqrt{P(P - AC)(P - BC)(P - AB)}$$

شنی * (ابوعبدالله) پس از اثبات دستور فوق حالتی را که مثلث متساوی الساقین باشد در نظر گرفته و باز دستور کلی را در این حالت خاص به وجه زیر ثابت کرده است:
فرض می‌کنیم که مثلث ADC متساوی الساقین باشد (شکل ۶۹). ($AD = DC$) و دایره



شکل ۶۹

محیطی مثلث و ارتفاع DZ نظیر ضلع AC را رسم می‌کنیم و به مرکز A و به شعاع AZ کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا AD را در نقطه T قطع کند.
اگر صورت و مخرج نسبت $\frac{DZ}{AZ}$ را یک بار در DZ و یک بار در AZ ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{DZ}^2}{DZ \times AZ} = \frac{DZ \times AZ}{\overline{AZ}^2} \quad (\text{الف})$$

اکنون مقادیر چهار جمله تناسب (الف) را جداگانه حساب می‌کنیم:
اولاً - از روی شکل واضح است که:

$$\overline{DZ}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AZ}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AT}^2 = (AD - AT)(AD + AT)$$

و یا

$$\overline{DZ}^2 = DT(AD + AZ) \quad (\text{ب})$$

اما اگر محیط مثلث را $2P$ بنامیم واضح است که:

$$DT = P - 2AZ = P - AC \quad \text{و} \quad AD + AZ = P$$

پس تساوی (ب) به صورت زیر در می آید:

$$\overline{DZ}^2 = (P - AC)P \quad (\text{ج})$$

ثانیاً - طرفین تناسب (الف) که با هم مساوی هستند هر کدام مساوی با مساحت مثلث ADC است. پس

$$DZ \times AZ = \Delta \cdot ADC \quad (\text{د})$$

ثالثاً - مخرج نسبت طرف راست تناسب (الف) یعنی $\overline{AZ}^2$ را می توان چنین نوشت:

$$\overline{AZ}^2 = AZ \times ZC$$

اما واضح است که $AZ = (P - AD)$ (زیرا $AD + AZ$ نصف محیط است) و $ZC = P - CD$ بنابراین داریم:

$$\overline{AZ}^2 = (P - AD)(P - CD) \quad (\text{ه})$$

اکنون اگر مقادیر طرفهای چپ تساویهای (ج) و (د) و (ه) را در تساوی (الف) منظور کنیم حاصل می شود:

$$\frac{(P - AC)P}{\Delta \cdot ADC} = \frac{\Delta \cdot ADC}{(P - AD)(P - CD)}$$

و از آنجا

$$(\Delta \cdot ADC)^2 = P(P - AC)(P - AD)(P - CD)$$

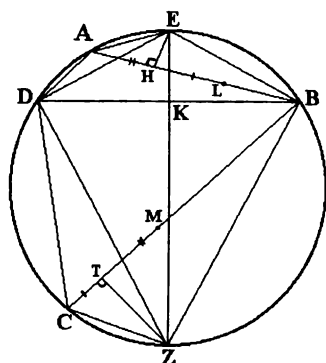
و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۹۵ - ۱۹۶).

مسئله هشتم- برهان درستی دستور محاسبه مساحت چهارضلعی محاطی دلخواه که منسوب به هندیان است از شتی* (ابوعبدالله).

هرگاه بخواهیم مساحت چهارضلعی محاطی دلخواهی را بدانیم نصف مجموع اضلاع آن را حساب می‌کنیم و تفاضل آن را با هر یک از اضلاع چهار ضلعی به دست می‌آوریم. سپس جذر حاصل ضرب این چهار تفاضل را می‌گیریم مساحت چهارضلعی به دست می‌آید.

برهان - چهارضلعی $ABCD$ را که در یک دایره محاط است در نظر می‌گیریم (شکل ۷۰). و کمانهای BAD و BCD را به ترتیب در نقاط E و Z نصف می‌کنیم و پاره خطهای BE و



شکل ۷۰

ED و DZ و BZ و EA و EZ را می‌کشیم و از نقطه E عمود EH را بر AB و از نقطه Z عمود ZT را بر BC فرود می‌آوریم و نقطه تقاطع BD را با EZ نقطه K می‌نامیم.

واضح است که $ED > EA$ و چون دو مثلث قائم‌الزاویه EDK و EHA متشابه هستند از نامساوی فوق معلوم می‌شود که

$$DK > AH$$

از طرف دیگر چون نقطه T بنا به قضیه اول وسط خط شکسته BCD است پس

$$BT = \frac{BC + DC}{2}$$

بنابراین

$$BT > DK$$

(زیرا قطر دایره و عمود منصف BD و DK نصف DB است) پس به طریق اولی داریم:

$$BT > AH$$

به همین طریق ثابت می شود که

$$BH > CT$$

اینک روی پاره خط BH نقطه L را طوری می گیریم که:

$$HL = CT \quad (۱)$$

و روی پاره خط BT نقطه M را طوری اختیار می کنیم که:

$$TM = AH \quad (۲)$$

اگر طول اضلاع چهارضلعی $ABCD$ را به ترتیب $AB = a$ و $BC = b$ و $CD = c$ و $DA = d$ و نصف محیط چهارضلعی را P بنامیم نظر به قضیه اول داریم.

$$BH = \frac{a+d}{2} \quad (\text{نقطه } H \text{ وسط خط شکسته } BAD \text{ است})$$

و

$$BT = \frac{b+c}{2} \quad (\text{نقطه } T \text{ وسط خط شکسته } BCD \text{ است})$$

بنابراین

$$BH + BT = \frac{a+b+c+d}{2} = P$$

به همین طریق معلوم می شود که:

$$HA + AD + DC + CT = P$$

اکنون تفاضلهای $(P-a)$ و $(P-b)$ و $(P-c)$ و $(P-d)$ را با در نظر گرفتن تساویهای فوق و دو تساوی (۱) و (۲) حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} P - a &= (BH + BT) - AB = BH + BT - AH - HB = \\ &= BT - AH = BT - MT = BM \end{aligned}$$

یعنی

$$(P - a) = BM \quad (۳)$$

و

$$\begin{aligned} P - b &= (BH + BT) - BC = BH + BT - BT - TC = \\ &= BH - TC = BL \end{aligned}$$

یعنی

$$(P - b) = BL \quad (۴)$$

و

$$\begin{aligned} P - c &= HA + AD + DC + CT - CD = (HA + CT) + AD \\ &= AL + AD \end{aligned}$$

یعنی

$$(P - c) = AL + AD \quad (۵)$$

و

$$\begin{aligned} P - d &= HA + AD + DC + CT - AD = (HA + CT) + CD = \\ &= CM + CD \end{aligned}$$

یعنی

$$(P - d) = CM + CD \quad (۶)$$

اکنون اگر مساحت چهارضلعی $ABCD$ را S بنامیم برای اثبات حکم قضیه یعنی اثبات تساوی:

$$S = \sqrt{(P - a)(P - b)(P - c)(P - d)}$$

نظر به روابط (۳) و (۴) و (۵) و (۶) کافی است ثابت کنیم که:

$$S^2 = BM \times BL \times (AL + AD)(CM + CD)$$

و یا:

$$\frac{BL(AL + AD)}{S} = \frac{S}{BM(CM + CD)} \quad (۷)$$

برای اثبات صحت این تساوی می‌گوییم سه مثلث قائم‌الزاویه EHA و EBZ و CTZ متشابه هستند و داریم:

$$\frac{EB}{BZ} = \frac{EH}{HA} = \frac{CT}{TZ} \quad (۸)$$

اکنون صورت و مخرج هر یک از سه نسبت فوق را یک بار در صورت و یک بار در مخرج همان نسبت ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EB}^{\vee}}{EB \times BZ} &= \frac{EB \times BZ}{\overline{BZ}^{\vee}} \\ \frac{\overline{EH}^{\vee}}{EH \times HA} &= \frac{EH \times HA}{\overline{HA}^{\vee}} \quad \text{و} \\ \frac{\overline{CT}^{\vee}}{CT \times TZ} &= \frac{CT \times TZ}{\overline{TZ}^{\vee}} \quad \text{و} \end{aligned}$$

و چون همهٔ نسبت‌های فوق نظر به روابط (۸) با هم مساویند نظر به خاصیت نسبت‌های متساوی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{EB}^{\vee} - (\overline{EH}^{\vee} + \overline{CT}^{\vee})}{EB \times BZ - (EH \times HA + CT \times TZ)} &= \\ = \frac{EB \times BZ - (EH \times HA + CT \times TZ)}{\overline{BZ}^{\vee} - (\overline{HA}^{\vee} + \overline{TZ}^{\vee})} \quad (۹) \end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که تساوی (۹) همان تساوی (۷) است که صحت آن را ثابت کرده‌ایم. اولاً - صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \overline{EB}^{\vee} - (EH^{\vee} + \overline{CT}^{\vee}) &= (\overline{EB}^{\vee} - \overline{EH}^{\vee}) - \overline{HL}^{\vee} = \overline{HB}^{\vee} - \overline{HL}^{\vee} = \\ &= (HB + HL)(HB - HL) = (HB + HL) \times BL = \\ &= (AL + AD) \times BL \end{aligned}$$

بنابراین صورت نسبت طرف چپ تساوی (۹) مساوی با صورت نسبت طرف چپ تساوی (۷) است.

ثانیاً - از روی شکل واضح است که $EB \times BZ = s \cdot EBZD$ از طرف دیگر نظر به قضیه چهارم داریم:

$$\Delta \cdot BED - \Delta \cdot BAD = EH \times HA$$

$$\Delta \cdot BZD - \Delta \cdot BCD = ZT \times CT$$

و اگر دو تساوی اخیر را عضوبه عضو با هم جمع کنیم حاصل می شود:

$$s \cdot BEZD - s \cdot ABCD = EH \times HA + ZT \times CT$$

بنابراین هر یک از وسطین تناسب (۹) را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} EB \times BZ - (EH \times HA + CT \times TZ) = \\ = s \cdot EBZD - (s \cdot EBZD - s \cdot ABCD) = s \cdot ABCD = S \end{aligned}$$

پس وسطین تناسب (۹) همان وسطین تناسب (۷) هستند.

ثالثاً - مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \overline{BZ}^2 - (\overline{HA}^2 + \overline{TZ}^2) &= (\overline{BZ}^2 - \overline{TZ}^2) - \overline{TM}^2 = \\ &= \overline{BT}^2 - \overline{TM}^2 = (BT - TM)(BT + TM) = BM(CT + CD + \\ &+ TM) = BM \times (CD + CM) \end{aligned}$$

پس مخرج نسبت طرف راست تساوی (۹) مساوی با مخرج نسبت طرف راست تساوی (۷) است و قضیه ثابت می شود.

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۱۹۷ و ۲۰۳).

مسئله نهم- مسئله دو درخت خرما و نهر آب و دو پرنده، مسئله‌یی که ذکر آن در کتابهای جبر و مقابله متداول است. صورت مسئله این است:

دو درخت (خرما) AH و BZ به طولهای معلوم بر دو کنار نهری به عرض معلوم AB قرار دارند. یک ماهی در سطح آب ظاهر می شود و دو پرنده از سر دو درخت به سمت آن (به خط مستقیم و با سرعتهای متساوی) پایین می آیند. و در یک لحظه به ماهی می رسند. می خواهیم فاصله محل ظهور ماهی را از کنار نهر و همچنین فاصله‌ای را که هریک از دو پرنده در هوا پیموده‌اند (تا به ماهی رسیده‌اند) حساب کنیم.

راه حل بیرونی - (البته فرض این است که محل ظهور ماهی و نقاط A و B یعنی پاهای دو درخت بر یک استقامت هستند). (شکل ۷۱).

اما قبلاً دیدیم که:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

پس لازم می‌آید که:

$$\overline{AT}^2 - \overline{BT}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2$$

یعنی هم DT بر AB عمود است و هم DE و این ممکن نیست (پس همچنانکه گفتیم DE بر AB عمود است).

اینک دایره محیطی مثلث ADB را رسم کرده روی آن کمان DBC را مساوی با کمان AD جدا می‌کنیم. خط شکسته ABC در این دایره محاط شده و از نقطه D وسط کمان ADC عمود DE بر AB فرود آمده است. و (بنا به قضیه دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = AB \times BC$$

و از آنجا:

$$BC = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{AB} = \frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{AB}$$

اما (بنا به قضیه اول):

$$AB + BC = 2AE$$

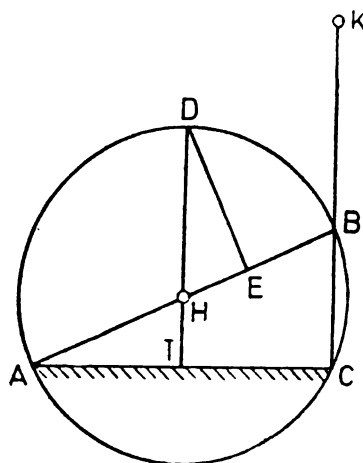
بنابراین:

$$AE = \frac{1}{2}(BC + AB) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{BZ}^2 - \overline{AH}^2}{AB} + AB \right)$$

و این فاصله محل ظهور ماهی از پای درخت AH است. اگر AE را از AB کم کنیم فاصله نقطه E از پای درخت BZ به دست می‌آید.
(و نیز ← «قربانی ت» صص ۲۰۶ تا ۲۰۸).

مسئله دهم— مسئله چوب شکسته که ذکر آن در کتابهای جبر و مقابله آمده است. صورت مسئله این است:

چوب (CK) عمود بر سطح زمین نصب شده است. این چوب در نقطه‌ای مانند B شکسته و سر آن در نقطه A به زمین رسیده است (شکل ۷۲). طول چوب (CK) معلوم و فاصله سر آن



شکل ۷۲

که به زمین رسیده از پای آن (AC) نیز معلوم است، می‌خواهیم محل شکستگی چوب (یعنی در واقع AB و BC) را معلوم کنیم.

راه حل بیرونی - دستوری را که بیرونی برای حل این مسئله داده است می‌توان به صورت زیر در آورد:

$$AB = \frac{CK}{2} + \frac{\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{\left(\frac{CK}{2}\right)}$$

$$CB = \frac{CK}{2} - \frac{\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{\left(\frac{CK}{2}\right)}$$

برهان - دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه ABC را رسم کرده کمان ABC را در نقطه D نصف می‌کنیم و از نقطه D عمود DE را بر AB و عمود DT را بر AC فرود می‌آوریم. چون عمود DT از وسط کمان ABC بر وتر AC فرود آمده است از مرکز دایره می‌گذرد. پس نقطه H فصل مشترک DT با AB (که قطر دایره است) مرکز دایره است.

دو مثلث قائم‌الزاویه ATH و DEH (در حالت وتر و یک زاویه حاده) متساویند و $DE = AT$. از طرف دیگر داریم: $\frac{AE}{ED} = \frac{DE}{EB}$ (و یا $EB = \frac{DE^2}{AE}$) زیرا اگر نقطه D را به نقاط A و B وصل کنیم مثلث ADB در رأس D قائم‌الزاویه و DE ارتفاع وارد بر وتر آن است). اما AE مساوی با نصف طول میله است (زیرا بنا به قضیهٔ اول داریم: $AE = \frac{AB+BC}{2}$ و $AB = BK$) بنابراین مقدار EB معلوم است (زیرا دیدیم که $EB = \frac{DE^2}{AE}$ و $DE = AT = \frac{AC}{2}$ معلوم و

$AE = \frac{CK}{۲}$ نیز معلوم است) پس داریم:

$$EB = \left(\frac{AC}{۲}\right)^۲ \bigg/ \left(\frac{CK}{۲}\right)$$

بنابراین

$$AB = AE + EB = \frac{CK}{۲} + \left(\frac{AC}{۲}\right)^۲ \bigg/ \left(\frac{CK}{۲}\right)$$

و

$$BC = CK - AB = \frac{CK}{۲} - \left(\frac{AC}{۲}\right)^۲ \bigg/ \left(\frac{CK}{۲}\right)$$

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۲۱۱ و ۲۱۲).

مسئله یازدهم- مسئله ای است مربوط به علم هیئت که بیرونی آن را از مقاله «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل»، تألیف خود،^{۲۷} استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخه «عل»، صفحه ۴۱ چنین است: «حل التعدیل و تقطیعه لنصف الفلک الخارج المركز لی من کتابی المخصوص بهذا المعنی».

راه حل همین مسئله در صفحات ۱۱۵ تا ۱۱۶ و برهان آن در صفحات ۱۳۴ تا ۱۳۶ از کتاب «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد نیز آمده است. و چنانکه در بند اول بخش حاضر نوشته ام این قسمت از چاپ حیدرآباد مربوط به همان کتاب «فی التحلیل والتقطیع للتعدیل» تألیف بیرونی است که اشتباهاً جزو «استخراج الاوتار» چاپ شده است. از ترجمه حل این مسئله که مربوط به هیئت و مفصل است صرف نظر می کنم. (و نیز ← «قربانی ت» ص ۲۱۳).

مسئله دوازدهم- مسئله ایی است مربوط به علم هیئت که بیرونی آن را از کتاب «فی المسائل المفیده والجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی»، تألیف خود^{۲۸} استخراج و نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخه «عل» چنین است: «معرفة القطعة المنكسفة من احد النیرین لی من کتابی فی المسائل المفیده والجوابات السدیده فی علل زیج الخوارزمی».

از ترجمه حل این مسئله که مربوط به علم هیئت و مفصل است صرف نظر می کنم. (و نیز ← «قربانی ت» ص ۲۱۳).

مسئله سیزدهم- برهانی است بر یک عمل نجومی.

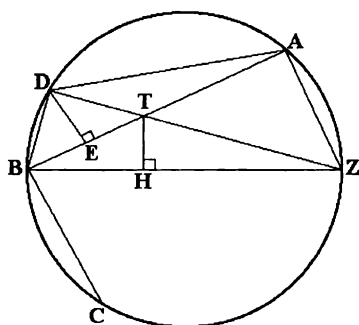
۲۷. — بخش سوم کتاب حاضر شماره ۳۰.

۲۸. — بخش سوم کتاب حاضر شماره ۴۹.

عنوان مسئله در نسخه «عل» چنین است: «برهان عمل محمد بن الصباح فی رصد الشمس» و در نسخه های چایی چنین: «اقامة البرهان علی عمل لمحمد بن الصباح فی رصد المیل الاعظم». از ترجمه حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف نظر می کنم.

مسئله چهاردهم- این مسئله به گفته ابوریحان در محاسبه ابعاد مورد نیاز واقع می شود و بیرونی آن را از مقاله «فی دلالة الآثار العلویة علی الاحداث السفلیة» که خود نوشته بوده نقل کرده است. صورت مسئله این است:

دو مثلث ZAB و BDZ در رأسهای D و A قائمه و در ضلع BZ مشترک اند. (شکل ۷۳). از نقطه تقاطع دو خط AB و ZD که آن را T می نامیم عمود TH را بر BZ فرود می آوریم.



شکل ۷۳

می خواهیم طول TH را به فرض آنکه اضلاع دو مثلث مذکور معلوم باشند حساب کنیم. راه حل بیرونی - اگر به قطر BZ دایره ای رسم کنیم این دایره از نقاط A و D می گذرد. نقطه A را به نقطه D وصل می کنیم. طول AD بر حسب اضلاع دو مثلث ZAB و BDZ معلوم است. زیرا چهارضلعی $ADBZ$ محاطی است و (نظر به قضیه بطلمیوس) داریم:

$$AB \times DZ = AZ \times DB + AD \times BZ$$

در این تساوی طول همه پاره خطها بنا به فرض معلوم است مگر طول AD . بنابراین طول AD از تساوی فوق معلوم می شود.

اکنون روی دایره محیطی دو مثلث کمان DBC را مساوی با کمان AD جدا می کنیم و از نقطه D عمود DE را بر AB فرود می آوریم. خط شکسته ABC در دایره محاط است و از نقطه D وسط کمان ADC عمود DE بر AB فرود آمده است. بنابراین نقطه E وسط این خط شکسته است و (نظر به قضیه دوم) داریم:

$$\overline{AD}^2 = AB \times BC + \overline{BD}^2$$

از تساوی فوق مقدار BC به دست می آید و بنابراین مقادیر AE و EB معلوم می شوند (و همچنین می توان DE را از روی مثلث قائم الزاویه BED حساب کرد). و چون زاویه BDT قائمه و DE عمود بر BT است داریم:

$$BE \times ET = \overline{DE}^2$$

از روی این تساوی مقدار ET به دست می آید و بنابراین مقدار $BT = BE + ET$ معلوم است.

از طرف دیگر:

$$\frac{TB}{TH} = \frac{ZB}{ZA}$$

و از روی این تناسب مقدار TH به دست می آید.

(و نیز ← «قربانی ت» ص ۲۱۶).

مسئله پانزدهم- مسئله ای است مربوط به علم هیئت که بیرونی آن را از کتاب «فی ابطال البهتان بایراد البرهان علی اعمال الخوارزمی»، تألیف خود،^{۲۹} نقل کرده است.

عنوان مسئله در نسخه «عل» چنین است: «معرفة قوس رجوع الكواكب من كتابی فی ابطال البهتان بایراد البرهان علی اعمال الخوارزمی».

از ترجمه حل این مسئله که مربوط به هیئت است صرف نظر می کنیم.

* * *

در پایان این مسائل در نسخه «عل» صفحه (۴۵) این عبارت آمده است:

«و قد يمكن الى وجود المطلوب سلوك طريق اسهل من الذى يتفق فى الوقت الا ان الغرض فى صرفها الى امر واحد هو الا بانه عن محل خاصيتين المذكورتين من هذه الصناعة والارشاد الى كيفية التصرف فيها».

همین عبارت با اندک اختلافی در نسخه چد (ص ۸۴) و در نسخه چم (ص ۱۳۳) نیز آمده است. خلاصه معنی عبارت مذکور این است: «برای این مسائل راه حل های ساده تری از آنچه ذکر کردیم وجود دارد. اما غرض ما فقط این بود که مورد استعمال خاصیت های خط شکسته محاط در دایره و چگونگی تصرف در آنها را نشان دهیم».

ج - مسائل مربوط به محاسبه وترهای دایره

چون مسائل مربوط به محاسبه وترهای دایره به طور کلی و با تفصیل بیشتر در مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» آمده و آن مقاله در بخش هشتم کتاب حاضر مورد بررسی قرار گرفته است، برای اجتناب از طولانی شدن کلام، راه حل برخی از مسائل کتاب «استخراج الاوتار» را در این بخش حذف کرده و به بخش هشتم کتاب حاضر ارجاع کرده‌ام. و نیز برای کسب اطلاع بیشتر خواننده می‌تواند به شماره مسئله مورد نظر به کتاب «استخراج الاوتار» رجوع کند.

مسائلی که از این به بعد می‌آید همه مربوط به محاسبه وترهای دایره است به همین دلیل بیرونی برای این قسمت از کتاب عنوان زیر را انتخاب کرده است:

استعمال خاصية الخط المنحنى فى استخراج اوتار القسى فى الدائرة المعلومه القطر.

و در آغاز این فصل افزوده است: «و اذ قد تقدم ذكر ما وقع به الوعد فى اول الكلام فانى اعود الى تمام الایجاد واقول...».

مسئله شانزدهم- محاسبه وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم باشد. (از بیرونی).
(← بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۴).

مسئله هفدهم- محاسبه وتر دو برابر کمانی که وتر آن معلوم باشد.
(درباره این مسئله ← بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۵).

مسئله هیجدهم- محاسبه وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم باشد.
(درباره این مسئله ← بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۶).

مسئله نوزدهم- محاسبه وتر نصف مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم باشد. هر دو کمان از دایره به قطر معلوم که وترهای آنها معلوم باشد وتر نصف مجموعشان نیز معلوم است.
مثال: اگر وترهای AB و BC معلوم باشند و کمان AD مساوی با کمان DC باشد می‌خواهیم وتر AD را حساب کنیم. (شکل ۷۴).

راه حل بیرونی - از نقطه D که وسط کمان ABC است، عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم و از مرکز دایره که آن را H می‌نامیم پاره‌خطهای HT و HK را به ترتیب بر خط راست DE و خط راست AB عمود می‌کنیم.

واضح است که HK نصف وتر مکمل کمان AB است و TE با آن مساوی است. (برای اینکه این مطلب روی شکل دیده شود کافی است قطر AHR را رسم کرده ملاحظه کنیم که HK نصف BR است و کمان BR مکمل کمان AB است. تساوی $TE = HK$ نتیجه مستطیل بودن شکل $EKHT$ است). پس TE معلوم است.

$$AE - EB = BC$$

(بنابراین قطر AB و وتر BC به دست می‌آید.)

دستور - (عبارتی را که بیرونی برای محاسبه قطر و وتر BC نوشته است می‌توان به صورت زیر در آورد. برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم $AB + BC$ را S و طول معلوم وتر AC را l می‌نامیم. در این صورت):

$$\text{قطر} = AB = \frac{S}{2} + \frac{l^2}{2S}$$

$$BC = \frac{S}{2} - \frac{l^2}{2S}$$

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۲۳۷ و ۲۳۸).

مسئله بیست و یکم- محاسبه وتر یک کمان و وتر کمان مکمل آن به فرض آنکه قطر دایره معلوم و مجموع دو وتر مذکور نیز معلوم باشد ولی آن دو وتر جداگانه معلوم نباشند.

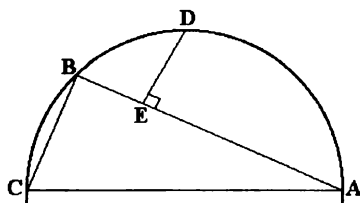
این مسئله مانند مسئله بیستم مورد استعمال عملی برای محاسبه وترهای دایره ندارد. با این حال از این جهت جالب توجه است که حل آن به حل یک دستگاه دو معادله دو مجهولی منجر می‌شود که به وسیله خاصیت اول خط شکسته محاط در دایره (= قضیه اول) بسیار آسان حل می‌شود.

راه حل اول بیرونی - مثلاً فرض می‌کنیم قطر AC معلوم و مجموع دو وتر AB و BC نیز معلوم باشد و می‌خواهیم هر یک از این دو وتر را حساب کنیم.
کمان ABC را در نقطه D نصف می‌کنیم و از نقطه D عمود DE را بر AB (وتر بزرگتر) فرود می‌آوریم. چون خط شکسته ABC در نقطه E نصف می‌شود و AB بنا به فرض بزرگتر از BC است داریم: (شکل ۷۶).

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2 \quad (۱)$$

از طرف دیگر (در مثلث قائم‌الزاویه ABC) داریم:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad (۲)$$



شکل ۷۶

از تساوی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{2} \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \quad (۳)$$

اما $\overline{AE}^2$ معلوم است، زیرا $AE = \frac{AB+BC}{2}$ ، بنابراین EB از روی تساوی (۳) که در آن $\overline{AC}^2$ نیز معلوم است به دست می‌آید. حال اگر EB را با AE جمع کنیم AB حاصل می‌شود و اگر EB را از AE کم کنیم BC به دست می‌آید.

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

دستور - (عبارتی را که بیرونی برای محاسبه AB و BC نوشته است می‌توان به صورت زیر در آورد - برای آنکه این دستور ساده شود مجموع معلوم $AB + BC$ را S و طول قطر دایره را که نیز معلوم است d می‌نامیم. در این صورت):

$$AB = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \left(\frac{S}{2}\right)^2}$$

و

$$BC = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \left(\frac{S}{2}\right)^2}$$

تبصره- بیرونی در دنبال این دستور (در نسخه «عل») راه حل دیگری از خود ذکر کرده و در آغاز آن نوشته است: «وجه آخر فی معرفة ذلک لی». ولی در واقع این همان راه اول است که در آن رابطه (۳) را به صورت:

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{EB}^2$$

نوشته است و از روی آن $2\overline{EB}^2$ و در نتیجه EB را استخراج کرده است. جالب توجه است که در نسخه‌های چاپی این راه حل از راه حل اول جدا نشده و فقط مطلب فوق به صورت تبصره‌ای نوشته شده و با جمله «و ان شئنا...» یعنی «و اگر بخواهیم...» شروع می‌شود. (← جد: ص ۱۰۳ سطر دوم به بعد - جم: ص ۱۵۸ سطر چهارم به بعد.)

(و نیز ← «قربانی ت» صص ۲۴۰ و ۲۴۱ و ۲۴۲).

مسئله بیست و دوم- محاسبه وتر تفاضل دو کمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وتر مجموع آن دو کمان - و محاسبه وتر مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم است برحسب وتر تفاضلشان. (درباره این مسئله ← بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۸).

مسئله بیست و سوم- (همان مسئله بیست و دوم است که بیرونی راه حلی برای آن از خود ذکر کرده است) - محاسبه وتر مجموع و وتر تفاضل (دو کمان) یکی از روی دیگری. (← به بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۶).

مسائل بیست و چهارم و بیست و پنجم و بیست و ششم- این سه مسئله با مسئله بیست و هفتم یکی است. بیرونی برای هر یک از این مسائل راه حلی از خود و یا از ابونصر عراق ذکر کرده است. این راه حلها مفصل و دستورهایی که برای آنها داده شده پیچیده است و نتیجه آنها یکی است. بهترین راه حل که بیرونی از خود ذکر کرده در بخش هشتم کتاب حاضر (شماره ۳۸) آمده است. و صورت مسئله بیست و هفتم چنین است:

مسئله بیست و هفتم- محاسبه وتر مجموع و وتر تفاضل.

مقدمه مسائل بیست و هشتم و بیست و نهم (بیش از مسائل بیست و هشتم و بیست و نهم عبارت زیر در نسخه «عل» آمده است):

و یمكن استخراج امهات الاوتار بهذه الخاصية على مثال استخراجنا لها في علل زيغ حبش و انا احكيهاها هنا فان الموضع لائق به.

یعنی: «با استفاده از خط شکسته محاط در دایره می‌توان وترهای مهم دایره را حساب کرد، همان گونه که بعضی از آنها را در کتاب «فی علل زیغ حبش» استخراج کرده‌ایم. و در اینجا آنها را

ذکر می‌کنیم زیرا جای مناسب برای ذکر آنها همین جا است.»

توضیح - مقصود از وترهای مهم دایره (امهات اوتار) وترهای روبه‌رو به کمانهای ۱۲۰° درجه (= ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی = وترالثلث) و ۹۰° درجه (وترالرابع) و ۷۲° درجه (وترالخمس) و ۶۰° درجه (وترالسدس) و ۴۵° درجه (وترالثلثم) و ۳۶° درجه (وترالعشر) است که بیرونی دستور محاسبه همه آنها را در باب اول مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» (جلد اول صفحات ۲۷۱ تا ۲۸۰) با استدلال بیان کرده است (← بخش هشتم کتاب حاضر شماره‌های ۱۲ تا ۳۳). در کتاب «استخراج الاوتار» (نسخه «عل») بیرونی پس از آنکه قضایای مربوط به وترها را ذکر کرده نوشته است که وترهای مهم دایره را می‌توان با استفاده از خاصیت خط شکسته محاط در دایره به دست آورد. و به عنوان مثال محاسبه وترهای روبه‌رو به کمان ۴۵° درجه و ۳۶° درجه را از کتاب «فی علل زیج حبش» تألیف خود نقل کرده است.

در باره وترهای مهم دیگر و چگونگی محاسبه آنها بیرونی در کتاب «قانون مسعودی» توضیح لازم و کافی داده است. (← بخش هشتم کتاب حاضر شماره ۳۹) و صورت مسئله‌های بیست و هشتم و بیست و نهم چنین است:

مسئله بیست و هشتم - محاسبه وتر یک هشتم دایره. (= ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی).

مسئله بیست و نهم - محاسبه وتر یک دهم دایره (= ضلع ده ضلعی منتظم محاطی).

مسئله سی‌ام - در کتابهای «استخراج الاوتار» چاپی، یک مسئله دیگر مربوط به محاسبه اوتار دایره هست که در نسخه «عل» نیست و بیرونی آن را با استفاده از خواص خط شکسته محاط در دایره به دو طریق حل کرده است. صورت آن مسئله این است:

«معرفة كل واحد من وترين لقوسين متواليتين اذا كانت نسبتة احدهما الى الاخر معلومة و وتر مجموعها معلوماً».

یعنی: محاسبه هر یک از دو وتر (AB و BC) متعلق به دو کمان متوالی (AB و BC) از دایره به قطر معلوم که نسبت آنها ($\frac{AB}{BC}$) معلوم و وتر مجموع آن دو کمان (AC) نیز معلوم باشد. (← -جد: صص ۱۰۴ و ۱۰۵ -جم: صص ۱۵۹ تا ۱۶۱).

بند پنجم

پایان کتاب «استخراج الاوتار»

در نسخه «عل» (ص ۵۴) آمده است: «و من هذه الاشكال بعد حصول امهات الاوتار فی الدایرة

ی‌مکن استخراج سایرها...».

یعنی: «با استفاده از این قضایا پس از آنکه وترهای مهم را در دایره به دست آوردیم می‌توانیم وترهای دیگر را به طریقی که در کتاب «مجسطی» به کار رفته است حساب کنیم. به این ترتیب که از روی دستور محاسبه وتر تفاضل دو کمان می‌توان وتر تفاضل $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{5}$ دایره را به دست آورد. (یعنی با دانستن وتر کمان 60° درجه و وتر کمان 72° درجه می‌توان وتر 12° درجه را حساب کرد). و از روی دستور محاسبه وتر نصف یک کمان می‌توان به وتر 3° درجه رسید. (یعنی از روی وتر 12° درجه و وتر 6° درجه و از روی آن وتر 3° درجه را حساب کرد). و از روی دستور محاسبه وتر اضعاف یک کمان و محاسبه وتر مجموع دو کمان می‌توان وترهای همه کمانها را سه درجه به سه درجه (ابتدا از وتر سه درجه) به دست آورد.»

«اما در محاسبه وتر یک درجه 3° همه عاجز مانده‌اند و همین ناتوانی باعث آن شده است که برای استخراج آن انواع حیل‌ها را به کار برند تا آن را به تقریب، و نه به تحقیق، حساب کنند.»

«پس تو، که خدایت تأیید کند، درباره آنچه برایت (در این کتاب) گرد آورده‌ام نیک بیندیش و در آن کاوش کن تا از این راه به چشمه‌های زیرکی و تیزی‌نی برسی و زنگ غفلت از عقل تو زدوده گردد و به آنچه فهم عوام به آن نارساست دست یابی و میان تو و من موجبات ملامت از میان برود...»

این بود ترجمه تقریبی عباراتی که در پایان نسخه «عل» آمده است. اما در پایان نسخه‌های چاپی کتاب «استخراج الاوتار» (چد: ص ۲۲۶-چم: ص ۲۸۶) قسمت اخیر مطالب فوق با دو جمله اضافی به شرح زیر دیده می‌شود:

«و قد سلکت فی استخراج و ترالجزء الواحد فی شرحی لعل زیج حبش طریقا آخر. ثم جمعت ذلک الی ما للقدماء والمحدثین فی کتاب عملته لحصر الطرق السائرہ فی استخراج اوتار الدائرہ.»

«فاجل ایدک اللہ فکرک، فیما جمعتہ لک و تحققہ حتی تنفتح علیک به...».

بخش هفتم

تحقیق درباره کتاب «مقالید علم الهیة»

مشمول بر: معرفی کتاب و ارزش علمی آن - خلاصه مقدمه کتاب «مقالید» - فهرست مطالب کتاب «مقالید» - منتخباتی از کتاب «مقالید».

الف - معرفی کتاب و ارزش علمی آن

۷/۱- کتاب «مقالید علم الهیة» یکی از مهمترین آثار بیرونی در ریاضیات و چنانکه خواهیم دید نخستین کتاب کامل «مثلثات کروی» است که به رشته تحریر در آمده است. البته شرح و تفسیر این کتاب ارجمند به وجهی که در خور اهمیت آن باشد مستلزم تألیف کتابی جداگانه است. ولی چون تاکنون هیچ یک از محققان، به علت عدم دسترسی به نسخه خطی موجود آن، مطالب این کتاب را مورد شرح و تفسیر و نقادی قرار نداده اند^۱ در اینجا به معرفی آن پرداخته منتخباتی از آن را نقل می‌کنم.

۷/۲- عنوان کامل این کتاب «مقالید علم الهیة ما یحدث فی سطح بسیط الکره»^۲ است و

۱. فقط آقای دکتر کندی در مقاله مختصری، پس از اشاره به مطالب مقدمه آن، فهرست مندرجات آن را به زبان انگلیسی نقل کرده است. (← «کندی M» در فهرست منابع کتاب حاضر) - بعداً در سال ۱۹۸۰ میلادی خانم دوبارنو M.th.DEBARNOT کتاب مقالید را به زبان فرانسوی ترجمه و با متن عربی آن و مقدمه‌ای بسیار جامع در فرانسه به عنوان پایان نامه تحصیلات خود تألیف کرد. یک نسخه ماشین شده از این کتاب در اختیار اینجانب است که در صفحه پانزدهم مقدمه آن از کتاب بیرونی نامه در جزو منابع خود نام برده است. (← «دوبارنو، مقالید» در فهرست منابع کتاب حاضر.)

۲. برای رعایت جانب اختصار در این بخش همه جا این کتاب را «مقالید» نامیده‌ام.

بیرونی آن را به نام ابوالعباس مرزبان بن رستم بن شروین از امیر زادگان آل باوند و مؤلف کتاب «مرزبان نامه» نوشته است. شادروان استاد جلال الدین همایی درباره تاریخ تألیف این کتاب تحقیقی به عمل آورده است. به نظر ایشان بیرونی این کتاب را بین سالهای ۳۸۵ تا ۳۹۰ هجری قمری یعنی هنگامی که در حدود ۲۳ تا ۲۶ سال داشته نوشته است.

۷/۳- خوشبختانه یک نسخه خطی از این کتاب نفیس در کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار در تهران (به شماره ۵۹۷/۲۳) محفوظ است که در ۲۳ برگ می باشد و فیلم آن نیز (به شماره ۳۵۹۷) در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران موجود است و عکس صفحات آن را در پایان بخش هفتم کتاب بیرونی نامه خواهید یافت.

بیرونی در فهرست تألیفات خود، آنجا که از کتاب «مقالید» نام برده، عدّه صفحات آن را ۱۵۵ ورقه معین کرده است. اما نسخه خطی حاضر فقط در ۴۴ صفحه است. با این حال از مطالعه دقیق این نسخه خطی معلوم می شود که کامل است و افتادگی ندارد. علت اختلاف بین اعداد ۱۵۵ ورقه و ۴۴ صفحه ظاهراً این است که صفحات نسخه موجود بزرگ و خط آن ریز و هر صفحه آن دارای ۲۹ سطر است. و با مقایسه صفحات این نسخه با صفحات نسخه خطی موجود کتاب «تحدید نهایت الاماکن» که در زمان حیات وی نوشته شده است^۲ معلوم می شود که این اختلاف فقط ناشی از مقدار مطلبی است که در هر صفحه گنجانده شده و مربوط به نقص نسخه موجود نیست.

اگر چه نسخه موجود بسیار کم غلط دارد ولی متأسفانه بدون نقطه و در اکثر مواضع بد خط و ناخوانا نوشته شده و استفاده از آن آسان نیست.

* * *

۷/۴- کتاب «مقالید» بیرونی از چند جهت دارای اهمیت فوق العاده است. ولی چون علمای تاریخ ریاضیات تا این اواخر از وجود نسخه خطی آن بی خبر بودند قدر و اهمیت واقعی این اثر نفیس از نظر آنان پوشیده مانده است. بنابراین باید جهات اهمیت این کتاب را شرح دهم.

۷/۵- اگر چه نام این کتاب «مقالید علم الهیة» است ولی در حقیقت موضوع اصلی آن علم «مثلثات کروی» است. و بهتر بگویم، چنانکه نشان خواهیم داد، این نخستین کتاب «مثلثات کروی» است که مستقل از علم نجوم به رشته تحریر در آمده است. و اگر بیرونی آن چیزهایی (یا اشکالی) را که بر سطح کره حادث شود «کلید دانش هیئت» نامیده به علت آن بوده است که در واقع «مثلثات کروی» کلید علم هیئت است و بدون دانستن «مثلثات کروی» بحث در علم هیئت امکان پذیر نیست. گذشته از این خود بیرونی متوجه این نکته بوده است، چه پس از آنکه در نیمه اول کتاب

۳. نسخه خطی شماره ۳۳۸۶ کتابخانه فاتح استامبول که عکس آن را دوست عزیزم آقای دکتر منوچهر ستوده به من اهدا کرده است. (جالب توجه است که بیرونی در فهرست آثار خود عدّه اوراق کتاب «تحدید» را ۱۰۰ ورقه معین کرده و نسخه خطی مذکور دارای ۱۷۱ ورقه است).

قضایای مهم مثلثات کروی را شرح داده، در نیمه دوم آن وقتی خواسته است مورد استعمال عملی این قضایا را شرح دهد، نوشته است: «چگونگی به کار بردن آنچه درباره «شکل مغنی» گفتیم و توابع آن در شناختن اندازه‌های کمانهای فلکی». و باز در پایان کتاب نوشته است: «اما احوال کواکب در افلاکشان... فن دیگری است و متعلق به این موضوع نیست. چه از تحقیق این مطالب قصد دیگری جز تمهید طریق برای پرسنده و ارشاد او به استعمال «شکل مغنی» به جای «شکل قطّاع» در کمانهای فلکی نداشتیم...»

ملاحظه می‌شود که بیرونی خود با صراحت کامل موضوع کتاب را «شکل مغنی» و استعمال آن به جای «شکل قطّاع» معرفی کرده و آنچه در قسمت دوم کتاب نوشته منحصرأ مورد استعمال مثلثات کروی است، و خود نوشته است که بحث در احوال کواکب، یعنی علم هیئت، موضوع فن دیگری است.

بنابر آنچه گذشت یکی از جهات اهمیت فوق‌العاده کتاب «مقالید» این است که، بر عکس قداما که همیشه در آثار خود «مثلثات کروی» را به عنوان مبحثی از علم نجوم و هیئت بیان می‌کردند، بیرونی در این کتاب «مثلثات کروی» را اصل قرار داده و محاسبه اندازه کمانهای فلکی را به عنوان مورد استعمال آن ذکر کرده است. و در تاریخ ریاضیات این نخستین بار است که به این مطلب بر می‌خوریم. البته پیش از بیرونی رساله‌هایی درباره «شکل قطّاع» و جز آن نوشته شده بود ولی هیچ یک از آنها را نمی‌توان کتاب کاملی در مثلثات کروی دانست. به اصطلاح کنونی می‌توان گفت که کتاب «مقالید» یک کتاب مثلثات کروی و حل مسائل آن است.

۷/۱۶- می‌دانیم که علمای ریاضی دوره اسلامی در اواخر قرن چهارم هجری متوجه این امر شده بودند که به کار بردن «شکل قطّاع» یعنی در واقع قضیه منلاؤس در مثلثات کروی، در محاسبات و اعمال نجومی بسیار مشکل است. و چند تن از آنان که همه بدون استثنا ایرانی بودند درصدد رفع این دشواری برآمدند. و دو قضیه مهم ابداع و اختراع کردند که هم ساده هستند و هم می‌توان آنها را بجای «شکل قطّاع» به کار برد. یکی از این دو قضیه «شکل مغنی» یعنی بی‌نیاز کننده از «شکل قطّاع» است و دیگری «شکل ظلی» است که هر کدام فروعی دارند و بعداً به بیان و استدلال آنها خواهیم پرداخت.

بیرونی در مقدمه کتاب «مقالید» مخترعان این دو قضیه و هر کس را که به نحوی در این کار دخالت داشته معرفی کرده و سوابق امر را شرح داده و ادّعی هر یک از ریاضیدانان معاصر خود را در کشف این دو قضیه بیان کرده و سهم هر یک از آنان را در این باره درست مانند یک مورخ ریاضی امروزی تعیین کرده است. بنابراین مطالعه مقدمه کتاب «مقالید» بسیاری از نکات مبهم تاریخ ریاضیات را چنانکه خواهیم دید روشن می‌سازد.

۷/۱۷- علاوه بر بحث فوق بیرونی استدلالهای مختلف و متفاوتی را که ریاضیدانان معاصری برای هر یک از قضایای مذکور یا مقدمات آنها بیان کرده‌اند با ذکر نام آنان به تفصیل شرح داده و

عنوان کتابها و مقالاتی که این استدلالها را از آنها نقل کرده معین نموده است. و چون اصل عده‌ای از این کتابها و مقالات از بین رفته کتاب «مقالید» با کمی حجمش برای پژوهندگان تاریخ ریاضی گنجینه‌ای است گرانبها. گذشته از این چون بیرونی در نیمه اول کتاب، در ضمن شرح استدلال قضایا به نقل از دیگران، در اکثر موارد خود نیز استدلالی بدیع به آنها افزوده و در نیمه دوم کتاب راه به کار بردن قضایای مذکور را در حل ۳۵ مسئله از مسائل مثلثات کروی و هیئت و کمانهای فلکی نشان داده است، برای کسانی که بخواهند در این رشته از ریاضیات قدیم اطلاعاتی جامع به دست آورند و در آن ممارست کنند کتاب «مقالید» یکی از منابع پر بهاست.

۷/۸- چون کتاب «کشف‌القناع عن اسرار شکل القطاع»^۴ تألیف خواجه نصیرالدین طوسی* در سال ۱۳۰۹/۱۸۹۱ به زبان فرانسوی ترجمه و با متن عربی آن در قسطنطنیه انتشار یافت^۵ و در دسترس پژوهندگان قرار گرفت عده‌ای از دانشمندان آن را مورد بحث و نقادی قرار دادند^۶ و رفته رفته آن کتاب شهرت جهانی یافت. و چون هنوز مورخان ریاضی از وجود نسخه خطی کتاب «مقالید» اطلاع نداشتند، تا آن را مورد بررسی قرار دهند، همه متفق القول بر آن بودند که کتاب «کشف‌القناع» نصیرالدین طوسی* نخستین کتابی است که در علم مثلثات، جدا از علم هیئت و نجوم، تألیف شده است. ولی اکنون مطالعه کتاب «مقالید» نشان می‌دهد که این نظر درست نبوده بلکه بدون تردید باید گفت که کتاب «مقالید» بیرونی نخستین کتاب جامعی است که درباره «مثلثات کروی» مستقل از هیئت و نجوم تصنیف شده است.

البته نصیرالدین طوسی* با استفاده کامل از کتاب «مقالید» و کتابهای دیگر که پیش از وی تألیف شده بود مانند کتاب «جامع قوانین علم‌الهیة» تألیف علی بن فضل‌الله سالار* و جز آن، همه مطالب مربوط به «شکل قطاع» در مثلثات مسطح و کروی، را در یک جا جمع آورده است و عظمت و جلال آن کتاب در جای خود محفوظ و خدمتی که خواجه نصیر* از این راه کرده است مشکور و شایسته احترام و تقدیر است. اما پس از پیدا شدن کتاب «مقالید» دیگر نمی‌توان «کشف‌القناع» را نخستین تألیف در علم مثلثات دانست و حق تقدم ابوریحان بیرونی دست کم درباره مثلثات کروی مسلم و انکارناپذیر است.

۷/۹- در مقام مقایسه این دو کتاب با یکدیگر، یعنی کتاب «مقالید علم‌الهیة» بیرونی و کتاب «کشف‌القناع» نصیرالدین طوسی*، در اینجا از ذکر چند نکته ناگزیریم:

بیرونی دو قضیه مهم و اساسی را که در عصر وی توسط ایرانیان ابداع و اختراع شده بود معرفی کرده و برتری و سهولت استعمال آنها را بر «شکل قطاع» که از مخترعات یونانیان است با

۴. من در تحقیقات خود از نسخه عکسی این کتاب که به شماره ۶۷۰۳ در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران موجود است، و اصل آن متعلق به کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار است، استفاده کرده‌ام.

۵. — «ترجمه فرانسوی کتاب کشف‌القناع» در فهرست منابع کتاب حاضر.

۶. از جمله Carra de Vaux. — جلد بیستم، دوره هشتم «روزنامه آسیایی» (Journal asiatique) صص

بیانی روشن و قاطع نشان داده است. و چه در کتاب «مقالید» و چه در سایر آثار خود بارها به این نکته اشاره کرده است که به کار بردن «شکل قَطَاع» در علم نجوم کاری است دشوار و باید به جای آن «شکل مغنی» و یا احياناً «شکل ظَلّی» را به کار برد. و در کتاب «قانون مسعودی» که در واقع باید آن را دایرةالمعارف علم نجوم در عصر بیرونی دانست آنجا که از «شکل قَطَاع» سخن به میان آورده^۶ به جای آنکه مانند دیگران به بحث مفصل درباره آن شکل و حالات مختلف آن بپردازد «شکل مغنی» را جانشین آن کرده و با صراحت کامل نوشته است که «استعمال البسائط اسهل من استعمال المركبات» و استادانه به دیگران آموخته است که از آن پس باید «شکل قَطَاع» را، اگر چه ریاضیدانان دوره اسلامی تا اندازه‌ای آن را منقّح و آراسته کرده‌اند، به گنجینه تاریخ ریاضیات سپرد و به جای آن در عمل «شکل مغنی» را که اختراعی نو و بدیع و به کاربردش ساده و آسان است مورد استفاده قرار داد. پس کتاب «مقالید» را می‌توان اثری پیشرو و بدیع و تحقیقی نو و تازه دانست.

اما کتاب «کشف‌القناع» نصیرالدین طوسی* که بدون تردید از حیث شمول آن بر مطالب متنوّع برای طالبان علم کتابی پر ارزش و برای پژوهندگان تاریخ ریاضیات دوره اسلامی از منابع اصلی است، با وجود آنکه در حدود ۲۵۰ سال بعد از کتاب «مقالید» نوشته شده بدعت و تازگی «مقالید» را ندارد و موضوع اصلی آن هنوز بحث در «نسبت مؤلف» و «شکل قَطَاع» و حالات مختلف آن است.

بیرونی در کتاب «مقالید» اختراعات تازه‌ای را که موجب پیشرفت علم مثلّثات بوده مورد بحث و نقّادی قرار داده راه استفاده از آنها را به طالبان علم آموخته است. اما نصیرالدین طوسی* در کتاب «کشف‌القناع» مجموعه اطلاعات پیشینیان خود را در علم مثلّثات، البته با کمال مهارت، مدوّن ساخته و اگر چه گاهی از خود برهانه‌های ماهرانه‌ای بر بعضی از قضایا افزوده است ولی محتویات آن در هر صورت همان مطالبی است که از پیشینیان خود اقتباس کرده است.

برای آنکه حق مطلب بهتر ادا شود بعضی از محاسن و معایبی را که مورّخان ریاضی برای کتاب «کشف‌القناع» خواجه نصیرالدین* ذکر کرده‌اند در اینجا گوشزد کرده نشان می‌دهم که کتاب «مقالید» بیرونی اکثر آن محاسن را دارد و در عین حال از آن عیوب می‌رَست. تا با در نظر گرفتن اینکه خواجه نصیرالدین* کتاب خود را در حدود ۲۵۰ سال بعد از کتاب «مقالید» بیرونی نوشته است ارزش علمی هر یک از آنها بهتر روشن شود.

یکی از نکاتی که مورّخان ریاضی موجب اهمّیت فوق‌العاده کتاب «کشف‌القناع» می‌دانند این است که می‌گویند «شکل مغنی» در مثلّثات مسطحه یعنی رابطه

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

در مثلث *ABC* نخستین بار در آن کتاب به وجه جالب توجهی ثابت شده است.

اما باید دانست که، چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، این استدلال بدیع را بیرونی در حدود دو قرن و نیم پیش از نصیرالدین طوسی* در فصل هشتم از مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» آورده^۸ ولی متأسفانه خواجه نصیرالدین* در ضمن ذکر این استدلال نام مبتکر آن یعنی بیرونی را نیاورده است. و البته ادعا هم نکرده که این استدلال از خود اوست. و چون مورخان ریاضی این استدلال را نخستین بار در کتاب «کشف القناع» دیده و به کتاب «مقالید» هم دسترسی نداشته‌اند آن را از خواجه نصیر* دانسته‌اند.^۹ گذشته از این معلّم بیرونی یعنی ابونصر عراق* نیز همین قضیه را به وجه دیگری که به زیبایی روش بیرونی نیست در رساله «المسائل الهندسیه» ثابت کرده است.^{۱۰} یکی دیگر از محاسنی که برای کتاب «کشف القناع» خواجه نصیر طوسی* ذکر کرده‌اند این است که نوشته‌اند که، بر عکس ریاضیدانان دیگر دوره اسلامی، نصیرالدین طوسی* در آن کتاب اسامی عده‌ای از کسانی را که قضایای جدیدی پیدا کرده‌اند ثبت کرده و از این راه به تاریخ ریاضیات کمک شایانی کرده است.^{۱۱}

البته نصیرالدین طوسی* این کار را کرده اما حقیقت آن است که این روش پسندیده را بیرونی دو قرن و نیم پیش از وی نه تنها در کتاب «مقالید» بلکه در بیشتر آثار خود مانند کتاب «استخراج الاوتار» و «قانون مسعودی» و جز آنها به کار بسته است و چون خواجه نصیر* از کتاب «مقالید» استفاده می‌کرده به تبعیت از بیرونی اسامی ریاضیدانان را آورده است. نویسنده این سطور، که سالیان دراز است در کتابهای ریاضیدانان دوره اسلامی به تحقیق و تفحص می‌پردازد، هیچ یک از ریاضیدانان دوره اسلامی را نمی‌شناسد که به اندازه بیرونی در ثبت نام ریاضیدانان و منجمان در حین اشاره به آثار آنان، اهتمام و کوشش کرده باشد. و امروزه ما اسامی بسیاری از ریاضیدانان و منجمان دوره اسلامی و اسامی کتابهای آنان، و حتی اسامی عده‌ای از ریاضیدانان یونانی را، در کتابهای بیرونی می‌یابیم که جز ذکری که بیرونی از آنها به میان آورده اطلاع دیگری از آنان نداریم. و اگر بیرونی به ذکر نام آنان مبادرت نکرده بود اسامی آنان از صفحات تاریخ حذف شده بود. اما از خرده‌هایی که بحق بر کتاب «کشف القناع» گرفته‌اند یکی این است که نوشته‌اند خواجه نصیرالدین* در مقاله دوم آن کتاب بحثی طولانی و خسته کننده درباره عده نسبت‌هایی که در شکل قطاع سطحی می‌توان تألیف کرد به میان کشیده و در فصل دهم مقاله دوم آن کتاب عده این نسبتها را به ۴۹۷۶۶۴ تخمین زده است. مورخان ریاضی این بحث طولانی را بیهوده دانسته‌اند و حقیقت هم همین است.

۸. ← «قانون مسعودی» ج ۱، ص ۳۴۶.

۹. مثلاً ← «سارتن I» ج ۲، ص ۱۰۰۴ و منابعی که سارتن در همان صفحه ذکر کرده است.

۱۰. ← ۷/۸۰ کتاب حاضر.

۱۱. مثلاً ← مقاله کارادوکو با عنوان «Traité du quadrilatère» در جلد بیستم، دوره هشتم، صفحات ۱۷۶ تا ۱۸۱ مجله روزنامه آسیایی به چاپ رسیده است.

اما بیرونی چنانکه قبلاً دیدیم^{۱۲}، در رساله «راشیکات الهند» هیچده حالت کلی برای این نسبتها داده و آنها را در جدولی ذکر کرده است و همین قدر هم برای درک مطلب لازم و کافی بوده است. از این بابت می‌توان گفت که کتاب «کشف القناع» در این مورد سیر قهقرای داشته است. با این وصف باید گفت که، اگر چه تقریباً همه مطالبی را که نصیرالدین طوسی* در کتاب «کشف القناع» آورده از دیگران است، با این حال خود گاهی استدلالهایی غیر از آنچه دیگران بیان کرده‌اند برای قضایا ذکر کرده و مخصوصاً هنری که وی در تألیف این مطالب و تدوین آنها به وجه علمی از خود نشان داده جالب توجه و قابل تحسین است.

ب - خلاصه مقدمه کتاب «مقالید»

در چاپ اول کتاب بیرونی‌نامه مختصری از مقدمه کتاب «مقالید» را شرح دادم. ولی چون این مقدمه از حیث تاریخ ریاضیات بسیار مهم است، در اینجا ترجمه آن قسمت را عیناً از روی نسخه عربی می‌آورم.^{۱۳} برای سهولت ارجاع مطالب این مقدمه را به چند قسمت تقسیم و شماره‌بندی کرده‌ام.

۷/۱۰- کتاب کلیدهای دانش هیئت (درباره) شکلهایی است که بر سطح کره حادث می‌شود که ابوریحان محمد بن احمد بیرونی برای اِضْهِبْ جِلْجِلان فذشوارجرشاه ابوالعباس مرزبان بن رستم بن شروین مولی امیرالمؤمنین تصنیف کرد.

طبیعت ما بر آن است که کسانی را که به ما نیکی می‌کنند دوست بداریم و کسی که کسی را دوست دارد در پی آن است که آنچه در دل دارد به محبوب خود اظهار و بیان کند. و اگر به محبت طبیعی، وظیفه سپاسگزاری از یاریها و پشتیبانیها افزوده شود آنگاه خدمت حقیقی واجب و بندگی همیشگی لازم می‌شود. مثال این، کشش قلب من است به محبت خالص و دوستی بی آلاش نسبت به شخص مولانا الاصبهیدالجلیل السید جیلجیلان فذ شوارجرشاه که خداوند تعالی، جهان را با درازی مدت زندگانی او آباد کند و سعادت بندگان را با دوام قدرت او و ثبات دولت او حفظ فرماید. او که افزون بر این مرا به خدمت پذیرفت و به دوستی خود مفتخر ساخت، و در حق من از روی جوانمردی کرم و انعام فرمود بدون آنکه خدمتی در خور و شایسته انجام داده باشم. از این پس، او که خدا عمرش را افزون کند، تا هستم و هر جا باشم مالک حیات من است. و از طریق عقل که محک همه چیزهاست شایسته نیست که لحظه‌ای انسان از وظیفه شکرگزاری نسبت به مولای خود غفلت ورزد. بلکه بر عکس بر بنده لازم است که به قدر وسع و امکان خود بکوشد که از عهده شکر مولای خود برآید، چه او بخواهد و چه نخواهد.

۱۲. ← بخش چهارم کتاب حاضر، شماره ۸.

۱۳. همان‌گونه که قبلاً تذکر دادم در سال ۱۹۸۰ میلادی خانم دوبارنو M.th.Debarnot ترجمه کتاب «مقالید» را با متن عربی آن انتشار داد. در ترجمه این مقدمه از آن کتاب استفاده فراوان کرده‌ام.

۷/۱۱- آغاز کتاب - می‌گویم هر گاه دایره‌های عظیمه بر سطح کره یکدیگر را قطع کنند از این تقاطع شکلهای مختلف ایجاد می‌شود. و در کرهٔ سماوی از تقاطع دایره‌های عظیمه، کمانهای میل و عرض ستارگان و «سعة مشارق» و اختلاف مطالع و کمانهای شب و روز و ارتفاع و انحطاط و سمتها و مطالع و نیز زوایای به اندازه‌های مختلف بر حسب اختلاف این دایره‌ها پدید می‌آید. و شناختن اندازه‌های اینها از روی یکدیگر و استخراج مقداری که مجهول است از روی مقادیر معلوم جز با دانستن نسبت بین جیبهای آن کمانها امکان‌پذیر نیست و در این کار اساس عمل شکل موسوم به «قطاع» است و آن شکلی است که از تقاطع چهار دایرهٔ عظیمه بر سطح کره پدید می‌آید که دو به دو یکدیگر را در نقطه‌های مختلف قطع کنند.

بطلمیوس این قضیه را در نوع دوازدهم از مقالهٔ اول کتاب «مجسطی» ذکر کرده است و نیز این قضیه در کتاب «کریات» تألیف مانالاؤس که از حیث زمان بر کتاب «مجسطی» مقدم است نیز آمده، و نسبتهایی که در قطاع کروی هست از دو نسبت تألیف می‌شود و در آن شش مقدار به کار می‌رود که نسبت دو مقدار از آنها مساوی است با حاصل ضرب نسبت دو مقدار در نسبت دو مقدار دیگر.

۷/۱۲- در شرح این شکل و به کار بردن اقسام آن ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی* و ابو جعفر محمد بن حسین خازن* در شرحی که هر یک از آنان بر کتاب «مجسطی» نوشته‌اند مطالبی ذکر کرده‌اند و نیز ابو جعفر خازن* در «زیج صفایح» و ابونصر منصور بن علی بن عراق (ابونصر عراق)* در کتاب «تهذیب‌التعالیم» آن را خلاصه کرده‌اند و ابوالحسن ثابت بن قُرّه* کتابی در نسبتهای مؤلف و اقسام آنها و استعمال آنها و کتابی دیگر در «شکل قطاع» و آسان کردن عمل با آن نوشته است. و بیشتر متأخران مانند ابن بغدادی* و سلیمان بن عصمت* و سجزی* (ابو سعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل) و دیگران دربارهٔ این شکل به تحقیق پرداختند زیرا این قضیه از ارکان علم هیئت است تا آنجا که بدون آن هیچ یک از آنچه را ذکر کردیم به دست نمی‌آمد. این بود که اصول آن را بررسی کردند و موارد استعمال آن را یافتند و آن را به کار بردند.

۷/۱۳- و این تحقیقات جریان داشت تا زمان به ما رسید که دورهٔ عجایب و غرایب و چیزهای تازه و جمع میان اضداد است. مقصود این است که اگر چه معاصران ما می‌بینند که قلمرو معلوماتشان وسعت یافته و اگر چه اهل علم مایل هستند که در همهٔ علوم به کمال برسند و فضل و دانش آنان انتشار یابد وقتی که موفق می‌شوند آنچه را پیشینیان از فهم آن عاجز بودند استنباط کنند باز نزد آنان رفتاری دیده می‌شود که با آنچه گفتیم مغایرت دارد. رقابت شدیدی بین آنان که دست اندرکار عام‌اند پیدا شده و به یکدیگر حسادت می‌ورزند، ستیزه و نزاع فراوان است و هر کس حسرت کار دیگری را می‌برد و از اینکه آنچه را متعلق به او نیست به خود نسبت دهد افتخار می‌کند. این یکی اکتشافات دیگری را به خود می‌بندد و از آن بهره می‌برد و می‌خواهد که دیگران این را نادیده بگیرند و حتی وقتی کسی به خدعهٔ او پی می‌برد فوراً به دشمنی با او و تعقیب او بر می‌خیزند همان گونه

که بین جماعتی از افاضل عصر ما درباره تسبیح دایره و تثلیث زاویه و تضعیف مکعب و جز اینها دیده شده و همچنین است اتفاقی که در بین طایفه‌ای از علمای زمان ما رخ داد درباره قضیه‌ای که فراگرفتن آن آسان و اثبات و به کار بردن آن ساده است (مقصود «شکل مغنی» است) و می‌توان در عمل آن را به جای «شکل قطاع» به کار برد و قائم مقام آن دانست.

۷/۱۴- و من که از تعصب و اصرار بر باطل برکنارم و به فضیلت صاحب (= مخترع) آن اقرار دارم و او را می‌شناسم و می‌خواهم حق او را ادا نمایم مصمم شدم که آنچه را از احوال آنان می‌دانم بنویسم تا وقتی که مولایم «الاصبه‌الدلیل جلیلیان ادامه الله علوه» به کارهای آنان نظر افکند خلاف آنچه را من درباره آنان می‌دانم تصور نکند. و پس از حکایت کردن احوال آنان قضیه مذکور و برهانهایی را که بر آن آورده‌اند و چگونگی استعمال آن را به یاری خدا بیان خواهم کرد.

۷/۱۵- بیان این قضیه و آنچه را هر یک از دانشمندان در این باره انجام داده‌اند:

ابو سعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل (معروف به سجزی*) چندین راه برای استخراج سمت قبله با حساب و با اندازه‌گیری مساحی به وسیله آلاتی که نتایج آنها مختلف بود و برهانهایی آنها معلوم نبود، از فضلالی مهندسان گردآورده بود. من به او گفتم که مولای برگزیده من ابونصر منصور بن علی بن عراق*، که خدا او را مؤید بدارد، در آوردن برهانهایی حسابی برای امثال اینها بسیار قوی و کنجکاو و سریع‌الادراک است. او از من خواست که از استاد بخواهم که در این دستورها تأمل و تحقیق کند و درستی آنها را بیازماید و معلوم دارد که از چه راهی به دست آمده‌اند. بنا به استدعای من ابونصر کتابی درباره این سؤال نوشت و آن را «کتاب سموت» نامید و به آنچه مطلوب ابوسعید بود جواب داد و ضمناً مقدّماتی را که برای این شکل (مغنی) لازم است در بعضی از مواضع آن کتاب بیان کرد بدون آنکه فصل جداگانه‌ای به آن اختصاص دهد زیرا احتیاجی به این کار نداشت. خبر کتاب سموت به ابوالوفا محمد بن محمد بوزجانی* که در آن هنگام در بغداد بود رسید. و او با من درباره موضوع آن کتاب مکاتبه کرد و من کتاب را برایش فرستادم، در جواب خود کتاب را پسندیده بود ولی نوشته بود که کاش نویسنده کتاب در آن از روش قدما که «شکل قطاع» و «نسبت مؤلف» را به کار می‌برند پیروی نمی‌کرد و اظهار کرده بود که او برای شناختن «سمت» راه جدیدی می‌شناسد که از روش ابونصر مختصرتر و بهتر است.

من آنچه را که او گفته بود به ابونصر اظهار داشتم، ابونصر گفت که این روش را در «کتاب سموت» هم از جهت دل‌بستگی که به آثار قدما داشته به کار بسته و هم به دلیل اینکه می‌خواسته دستورهایی را که دیگران درست به وسیله همین «شکل قطاع» ثابت کرده‌اند محقق کند. از این گذشته جواب آنچه را ابوالوفا گفته، آسان است زیرا کافی است به دو موضع از کتاب «سموت»، که محل آن را به من نشان داد، رجوع کند و برهان آن را ببیند، ابونصر به این هم اکتفا نکرد و بعد از آن رساله‌ای برای من نوشت و در آن این شکل (مغنی) را ثابت کرد و راه به کار بردن آن را نشان داد.

۷/۱۶- سپس بعد از یک سال ابوالوفا هفت مقاله از کتابی را که نوشته و آن را «مجسطی ابوالوفا» نامیده بود برای من فرستاد که در آن برای همان شکل (=مغنی) برهانی ساده آورده و آن را در همه امور علم هیئت در کتاب خود به کار بسته بود.

۷/۱۷- پس از آنکه من بر این مطالب وقوف حاصل کردم و از معلومات آنان بهره فراوانی بردم برای آن شکل برهانی آوردم که با تصور خطوط در داخل کره فهم آن آسان است و راههای ساده استعمال آن را همچنانکه در این کتاب بیان خواهم کرد، نشان دادم.

پس از آن به ری رفتم و در آنجا ابو محمود حامد بن خضر خجندی* را ملاقات کردم و او کتابی که در اعمال شبانه درباره ستارگان ثابت نوشته بود به من نشان داد که در اوایل آن همین قضیه را با برهان مفصلی که با برهانهای دیگر فرق داشت بیان کرده و آن را «قانون هیئت» نامیده بود.

۷/۱۸- بعد از آن ابوالحسن کوشیار بن لبان جیلی* را دیدم که سرگرم نوشتن کتابی بود و در آغاز آن همان شکل را بدان صورت که ابو محمود آورده ذکر کرده بود و آن را «شکل مغنی» یعنی بی نیازکننده از «شکل قطاع» نامیده بود و با همان شکل بیشتر مطالبی را که بطلمیوس در مقاله دوم «مجسطی» آورده است شرح داده بود. علت اقدام او به این کار این بود که در این قضیه «شکل مغنی» فقط یک نسبت ساده به کار می‌رود که غیر مؤلف است و مقادیری که در آن مورد احتیاج است بیش از چهار مقدار نیست و سادگی تصور و آسانی عمل با یک نسبت ساده و رجحان آن بر «نسبت مؤلف» بر کسی پوشیده نیست.

۷/۱۹- و اما ابونصر، چون از احوال علمی او آگاهم و از کتابخانه او هنگام تحصیل ریاضیات استفاده‌ها برده‌ام و هر چه استخراج کرده بر من املا کرده است و می‌دانم که هرگز چیزی را که از دیگران است به خود نسبت نمی‌دهد و درباره کسانی که با هم نزاع دارند به داد حکم می‌کند و با آنکه نزد کسانی که از او در علم پایین ترند درس نخوانده، از منسوب داشتن خود به ایشان ابا نمی‌کند و با وفور دانش و ذکا و هوش فوق‌العاده‌ای که دارد چنین می‌کند، هرگز او را متهم نمی‌کنم که این قضیه را از کس دیگری گرفته باشد، بلکه چنین فکری هرگز به خاطر من خطور نمی‌کند.

۷/۲۰- و اما راجع به ابوالوفا، او را ندیده‌ام و از او، به اندازه‌ای که از دیگران آگاهم، آگاهی ندارم. ولی تعجب می‌کنم که پس از دیدن «کتاب سموت» و توجه به این دو شکل که صاحبش باید به آنها افتخار کند چگونه آنها را کاملاً نادیده وانمود می‌کند. اگر افتخار او به قضیه مذکور است و این قضیه را در کتابی که در اختیار دارد دیده است که در اوّل آن به صراحت ذکر شده که آنچه را از کربیات در یکی از طرق معین کردن سمت قبله به کار رفته است می‌توان از طریق دیگری که در آن به «نسبت مؤلف» احتیاجی نباشد به دست آورد و در آخر آن نیز ذکر شده است که از این راه روش تعیین میلها و مطالع را بدون احتیاج داشتن به آنچه بطلمیوس با «شکل قطاع» گفته است می‌توان تعیین کرد. و اگر افتخار او به طریقه تعیین سمت قبله است، این مطلب جز آنچه عیناً در

زیج حبش حاسب آمده، نیست که چیزی بر آن افزوده نشده مگر آنکه به چند قسم تقسیم شده و در فصول مختلف ذکر گردیده است. و به جای اصطلاح «طول معدّل» اصطلاح «تعدیل طول» و به جای «عرض معدّل» اصطلاح «تعدیل عرض» آورده است. ولی باز هم سعیش مشکور است و من ایرادی بر او ندارم جز اینکه این بی انصافی لایق فضل و کمال او نیست و جداً از او قبیح است که به اختراع روش تعیین سمت قبله که در کتاب «سموت» اختراع آن آمده افتخار کند.

۷/۲۱- و اما ابو محمود (خجندی)* مدّعی بود که در اختراع این شکل بر ابوالوفا پیشی داشته و ابوالوفا این شکل را از او گرفته است با اختلافی که در برهانهای آنها هست و بعداً ذکر خواهم کرد، حقیقت بر من معلوم نیست و ممکن است که حق تقدم برای هر دوی آنان باشد.

۷/۲۲- و اما کوشیار در حضور ابو محمود (خجندی)* اعتراف کرد که جز تهذیب و ایجاز و تنقیح این شکل کاری نکرده است.

این بود حقایقی که می‌خواستم در این باره ذکر کنم و اکنون می‌پردازم به اصل مطلب و پیش از این مقدماتی را که به آنها بعداً احتیاج هست شرح می‌دهم.

ج - فهرست مندرجات کتاب «مقالید»

۷/۲۳- اگر چه بیرونی خود برای کتاب «مقالید» تقسیماتی از قبیل باب و فصل و غیره قایل نشده است ولی می‌توان آن را از دو باب متمایز مرکب دانست. باب اول مرکب است از ذکر قضایای «معنی» و «ظلی» و مقدمات آنها و استدلالهای گوناگونی که هریک از ریاضیدانانی که نامشان در مقدمه کتاب ذکر شده برای آن قضایا آورده‌اند. باب دوم مشتمل است بر مورد استعمال این قضایا در محاسبه کمانهای فلکی از روی یکدیگر. و در واقع راه به کار بردن عملی قضایایی است که در باب اوّل آمده است. اینک فهرست مطالب این دو باب را در اینجا ذکر می‌کنم و در این مورد فقط عنوان قضایا را می‌آورم و استدلال بعضی از آنها را بعداً ذکر خواهم کرد. شماره‌هایی که در پایان هر قسمت آورده‌ام شماره صفحات نسخه عکسی کتاب «مقالید» است که از صفحه ۴۶۱ تا پایان صفحه ۵۰۴ کتاب بیرونی نامه به چاپ رسیده است.^{۱۴}

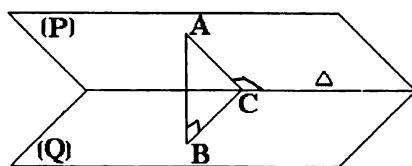
اولاً - فهرست مندرجات باب اوّل «مقالید»

۷/۲۴- یک - مقدمه‌ای که ابونصر عراق* در کتاب «تهذیب‌التعالیم» برای «شکل قطاع» بیان کرده است (صص ۳ و ۴):

اگر دو صفحه P و Q در خط (Δ) متقاطع باشند و از نقطه A واقع در یکی از آنها مثلاً P خط AB را بر صفحه دیگر Q و خط AC را بر فصل مشترک (Δ) عمود می‌کنیم، خط BC که پاهای این دو عمود را به هم وصل می‌کند بر

۱۴. خاطرنشان می‌کنم که بیرونی خود هیچ گونه تقسیم بندی در کتاب «مقالید» قایل نشده است و شماره‌هایی که از این به بعد در آغاز مطالب قرار داده‌ام برای تکنیک مطالب و سهولت ارجاع است.

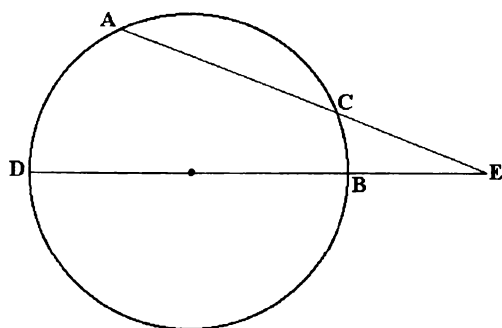
فصل مشترک (Δ) عمود است. (شکل ۷۷)



شکل ۷۷

این در واقع همان قضیه سه عمود است و بیرونی برای آن یک استدلال از ابو نصر عراق* و یک استدلال از خود آورده است.

۷/۲۵ - دو - مقدمه‌ای که ابوالوفای بوزجانی* در «مجسطی» خود برای «شکل مغنی» آورده است (ص ۴) و این از مقدماتی است که بطلمیوس برای «شکل قطاع» ذکر کرده است:



شکل ۷۸

اگر در دایره‌ای امتداد وتر AC امتداد قطر DB را در نقطه E قطع کند (شکل ۷۸).
رابطه زیر برقرار است:^{۱۵}

$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB \text{ کمان}}{CB \text{ کمان}}$$

۷/۲۶ - سه - استدلال ابونصر عراق* بر «شکل مغنی» مستخرج از رساله «القسی الفلکیة» (ص ۴) و شرح آن با عنوان «زیادة فی شرح ما ذکره ابونصر فی ذلک» (ص ۵).

۱۵. استدلال این قضیه را در صفحه ۱۶۲ کتاب «قربانی: نسوی نامه» خواهید یافت.

- ۷/۲۷- چهار- طریق دیگری برای اثبات «شکل مغنی» از ابونصر عراق* (ص ۵ و ۶).
- ۷/۲۸- پنج- طریق ابوالوفای بوزجانی* در اثبات مقدمه «شکل مغنی» مستخرج از «مجسطی ابوالوفا» (ص ۶).
- ۷/۲۹- شش- طریق دیگری از ابوالوفای بوزجانی* در اثبات مقدمه «شکل مغنی» (صص ۶ و ۷).
- بیرونی در پایان این برهان نوشته است که پس از آنکه ابوالوفا «شکل مغنی» را ثابت کرده دعوی دیگری را عنوان نموده که بسیار جالب توجه است و آن دعوی این است:
- نسبت جیبهای کمانهایی که میلها از دایره عمود بر آنها جدا می‌کنند مساوی است با نسبت ظل‌های این میلها.
- (این شکل موسوم به «شکل ظلّی» است - ۷/۱۰۳).
- ۷/۳۰- هفت- تعریف ظلّ و اقسام آن از ابوالوفای بوزجانی* (ص ۷).
- ۷/۳۱- هشت- «شکل ظلّی» از ابوالوفای بوزجانی* (ص ۸).
- ۷/۳۲- نه- یکی از دو استدلال ابونصر* بر «شکل مغنی» مستخرج از کتاب «السموت» (ص ۸).
- ۷/۳۳- ده- طریق دوم از ابونصر* مستخرج از کتاب «السموت» (ص ۹).
- در پایان این استدلال بیرونی نوشته است^{۱۶} که: «ابونصر* در پایان این قضیه متذکر شده است که از این روش برای شناختن مطالع در کره منتصبه و کره‌های مایل می‌توان از راهی غیر از آنچه بطلمیوس با استفاده از «شکل قطاع» بیان کرده استفاده کرد، و نمی‌فهمم که چگونه ابوالوفا بعد از وقوف به این کتاب به خود اجازه داده است که به این قضیه تفاخر کند».
- ۷/۳۴- یازده- روش ابو محمود خجندی* در اثبات مقدمه «شکل مغنی» که آن را «قانون هیئت» نامیده است (ص ۱۰).
- ۷/۳۵- دوازده- اختصار ابوالحسن کوشیار جیلی* در برهان این شکل، که او این را «مغنی» نامید (ص ۱۱).
- در پایان این استدلال بیرونی نوشته است که:^{۱۷} «نه ابو محمود* و نه کوشیار*، هیچ یک از آنان، بعد از بیان این مقدمه، به اثبات تناسب جیبهای اضلاع با جیبهای زوایای رو به روی آنها اصلاً نپرداخته‌اند. بلکه امکان چنین چیزی را بعید می‌دانستند. و حال آنکه این قضیه چه در مورد مثلث مسطحه و چه در مورد مثلث کروی برقرار است...».
- ۷/۳۶- سیزده- روش ابوالعباس نیری* و ابو جعفر خازن* در تفسیری که هریک از آنان بر «مجسطی» بطلمیوس نوشته‌اند که فقط قضیه‌ای است در معرفت میل‌های جزئی و شبیه

۱۶. «مقالید» ص ۹: «وذكر ابونصر فی آخر هذا الشكل انه ينتج...».

۱۷. «مقالید» ص ۱۱، سطرهای هفتم به بعد از آخر صفحه.

چیزی است که ابو محمود خجندی* ذکر کرده و بسیار از آن آسانتر است، بدون آنکه خواسته باشند قانونی برای علم هیئت و به جای «شکل قطاع» بیابند (ص ۱۲).

۷/۳۷- چهارده - قضیه‌ای که ابوالعباس نیری* در تفسیر خود بر «مجسطی» آورده و منجر به «شکل مغنی» می‌شود. (ص ۱۲).

در پایان این قضیه بیرونی نوشته است^{۱۸} که: ابوالعباس نیری* در تفسیر خود بر «مجسطی» و ابو جعفر خازن* در تفسیر خود بر «مجسطی» و نیز در «زیج صفائح» برای معرفت مطالع و میلیهای آنها قضایای مخصوصی ذکر کرده‌اند که نزدیک یکدیگرند و همه آنها به مقدمه «شکل مغنی» بر می‌گردد.

۷/۳۸- پانزده - روش بیرونی در اثبات مقدمه «شکل مغنی» (ص ۱۳).

۷/۳۹- شانزده - تقسیم بندی مثلثهای کروی بر حسب انواع زوایای آنها و حل آنها (از صفحه ۱۳ تا صفحه ۲۱).

ثانیاً- فهرست مندرجات باب دوم کتاب «مقالید»

۷/۴۰- مطالب باب دوم کتاب «مقالید» را در واقع می‌توان مورد استعمال «شکل مغنی» و «شکل ظلی» در علم هیئت دانست. بیرونی خود در آغاز آن نوشته است: «چگونگی استعمال آنچه درباره شکل مغنی گفتیم»^{۱۹} و در پایان آن نوشته است. «اما احوال کواکب در افلاکشان موضوع فن دیگری است که مورد بحث این کتاب نیست. زیرا غرض ما از تحقیق این مطلب فقط آن بود که راه استعمال «شکل مغنی» را به سؤال کننده بنمایانیم تا از استعمال «شکل قطاع» در کمانهای فلکی بی نیاز باشد»^{۲۰}.

بیرونی در این بخش از کتاب «مقالید» کلیه مسائلی را که در علم هیئت مربوط به محاسبه کمانهای کره سماوی، یا در علم جغرافیا مربوط به محاسبه کمانهایی مفروض بر کره زمین می‌شود، یکی پس از دیگری مورد بحث قرار داده و در اغلب این مسائل راه حل خود را با آنچه پیش از زمان وی در کتابهای نجوم آمده مقایسه کرده است.

۷/۴۱- در اینجا عنوانهای این مطالب را نقل می‌کنم تا کسانی که در علم هیئت قدیم تخصص دارند بر آنها وقوف یابند. ضمناً متذکر می‌شوم که در کتاب «مقالید» برای این مطالب شماره‌ای ذکر نشده و شماره‌هایی که در آخر هر عنوان نوشته‌ام برای ارجاع به صفحات نسخه کتاب «مقالید» است که در صفحات ۴۶۱ تا پایان صفحه ۵۰۴ بیرونی نامه به چاپ رسیده است.^{۲۱}

۱۸. «مقالید» صفحه ۱۳، سطر دوم به بعد.

۱۹. «مقالید» ص ۲۱.

۲۰. «مقالید» ص ۴۳.

۲۱. ترجمه این عنوانها را به فارسی لازم ندیدم. زیرا کسانی که با هیئت قدیم سر و کار دارند آنها را خواهند دانست و گذشته از این همه این عنوانها مرکب از اصطلاحاتی است که بین اهل فن بیشتر به همان صورت عربی مشهور است. ترجمه فرانسوی این عنوانها را در مقاله دکتر کندی خواهید یافت: — به «کندی M» در فهرست منابع کتاب حاضر.

- ٧/٤٢- یک-معرفة ميل اى درجة شئنا من فلك البروج عن معدّل التّهار (ص ٢٢).
- ٧/٤٣- دو-معرفة عرض اية درجة شئنا (ص ٢٢).
- ٧/٤٤- سه-معرفة مطالع اية درجة شئنا فى الفلك المستقيم (ص ٢٢).
- ٧/٤٥- چهار-معرفة سعة مشرق اية درجة شئنا (ص ٢٢).
- ٧/٤٦- پنج-معرفة تعديل نهار اى درجة شئنا (ص ٢٣).
- ٧/٤٧- شش-معرفة مطالع اية درجة شئنا فى اى عرض اردنا (ص ٢٣).
- ٧/٤٨- هفت-معرفة عرض البلد و تعديل التّهار و سعة المشرق بعضها من بعض (ص ٢٣).
- ٧/٤٩- هشت-معرفة بعد الكوكب عن معدّل التّهار (ص ٢٤).
- ٧/٥٠- نه-طريق آخر فى استخراج بعد الكوكب عن معدّل التّهار (ص ٢٥).
- ٧/٥١- ده-معرفة درجة التى ترمع الكوكب ذى العرض فى فلك التّهار (ص ٢٥).
- ٧/٥٢- يازده-طريق آخر فى استخراج درجة الممر (ص ٢٥).
- ٧/٥٣- دوازده-معرفة الدرجة التى يطالع مع طلوع الكوكب (ص ٢٦).
- ٧/٥٤- سیزده-معرفة ما دار من الفلك من لذن طلوع الشمس او الكوكب الى وقت ارتفاع له مفروض فى اى عرض شئنا (ص ٢٧).
- ٧/٥٥- چهارده- معرفة الدائر من الفلك بحسب ما استعمل فى الزيجات (ص ٢٩).
- ٧/٥٦- پانزده- طريق آخر لمعرفة الدائر من الفلك (ص ٣٠).
- ٧/٥٧- شانزده- معرفة طالع الوقت من قبل الدائر من الفلك (ص ٣٠).
- ٧/٥٨- هفده-معرفة الدائر من الفلك بقياس احد الكواكب الابدية الظهور (ص ٣٠).
- ٧/٥٩- هجده- معرفة مقادير الزوايا الحادّة من تقاطع فلك البروج و كل واحد من الافق و فلك نصف التّهار (ص ٣١).
- ٧/٦٠- نوزده-معرفة الزاوية الحادّة من تقاطع فلك البروج مع فلك التّهار (ص ٣١).
- ٧/٦١- بیست-معرفة الزاوية الحادّة من تقاطع دائرة الارتفاع مع فلك البروج (ص ٣٢).
- ٧/٦٢- بیست و یک-معرفة درجة الطالع من درجة وسط السماء اذا لم يكن لاقليمها (لاقليمنا) مطالع معلومه (ص ٣٢).
- ٧/٦٣- بیست و دو-معرفة ابعاد سموت الكواكب عن خط الاعتدال من قبل ارتفاعها (ص ٣٣).
- ٧/٦٤- بیست و سه-معرفة مطالع السموت (ص ٣٤).
- ٧/٦٥- بیست و چهار-معرفة سموت القبلة و سموت البلدان بعضها من بعض (ص ٣٤).
- ٧/٦٦- بیست و پنج-معرفة ابعاد المساكن المعلومة الطول و العرض بعضها من بعض (ص ٣٥).
- ٧/٦٧- بیست و شش-معرفة قوس نهار رؤية الهلال و الكوكب (ص ٣٦).
- ٧/٦٨- بیست و هفت-البرهان على عمل حبش الحاسب* فى رصد الكواكب (ص ٣٦).
- ٧/٦٩- بیست و هشت-معرفة مطرح شعاعات الكواكب على مذهبي (ص ٣٧).

۷/۷۰- بیست ونه- مطرح شعاعات الكواكب على مذهب البتانی و* الصوفی* (ص ۳۸).

۷/۷۱- سی- معرفة التسييرات (ص ۳۸).

۷/۷۲- سی ویک- طریق آخر (ص ۳۹).

۷/۷۳- سی و دو- عمل تسوية الاثنی عشر بالطریق المشهوره (ص ۴۰).

۷/۷۴- سی و سه- عمل تسوية البيوت على مذهب حبش* (ص ۴۰).

۷/۷۵- سی و چهار- عمل تسوية البيوت على مذهبی (ص ۴۱).

۷/۷۶- سی و پنج- استخراج خط نصف النهار بالدائرة الهندية و معرفة خط نصف النهار فی ای موضع شئت (ص ۴۳).

د- منتخباتی از کتاب «مقالید»

۷/۷۷- در صفحات قبل، کتاب «مقالید» را معرفی کردم و مطالب مقدمه آن و فهرست مندرجات آن را شرح دادم. اینک در اینجا منتخباتی از آن را می‌آورم تا بیشتر مورد استفاده دوستداران ریاضیات واقع گردد. و چون برای اثبات «شکل مغنی» و «شکل ظلی» و مورد استعمال آنها در حل مثلثهای کروی ناچار باید مقدمات و تعاریفی را ذکر کرد، این تعاریف و مقدمات را از همان کتاب «مقالید» و یا از سایر آثار بیرونی و مخصوصاً از کتاب «قانون مسعودی» انتخاب کرده و آنها را طوری مرتب نموده‌ام که هم مطالب به هم پیوسته باشند و هم بیان آنها به وجهی ساده صورت گیرد.

۷/۷۸- شکل مغنی در مثلثات مسطحه- مقصود از «شکل مغنی» در مثلثات مسطحه قضیه زیر است:

قضیه - در هر مثلث ABC اگر اضلاع رو به رو به زوایای A و B و C را به ترتیب a و b و c بنامیم رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

این قضیه را ریاضیدانان دوره اسلامی بعد از اثبات «شکل مغنی» در مثلثات کروی، ثابت کرده‌اند. مدارک موجود نشان می‌دهد که بیرونی از استاد خود ابو نصر عراق* پرسیده بود که آیا «شکل مغنی» که در مثلثات کروی ثابت شده است در مورد مثلثهای مسطحه هم صحت دارد یا نه؟ و ابونصر عراق* در رساله «المسائل الهندسیه»^{۲۲} جواب او را داده و نوشته است که جواب این سؤال مثبت است و آن را ثابت کرده و برای اثبات آن دو حالت تمیز داده است. اول آنکه یکی از زوایای مثلث قائمه باشد و دوم حالت کلی. سپس بیرونی خود در کتاب «قانون مسعودی» قضیه را به وجه بسیار جالب توجهی به ثبوت رسانیده است.

۲۲. «رسالة المسائل الهندسیه» رساله دهم از مجموعه «رسائل ابی نصر...الی البیرونی» است که در سال ۱۳۶۶ هجری قمری در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده و دارای ۲۱ صفحه و مشتمل بر ۱۵ مسئله هندسی است.

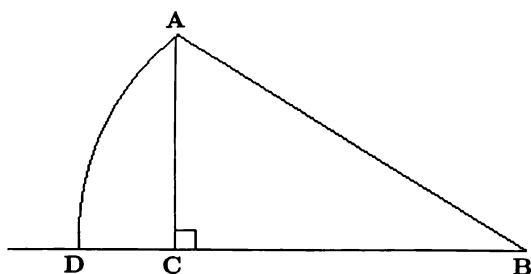
در اینجا ابتدا عین جواب ابونصر عراق* را به بیرونی و ترجمه فارسی آن، و همچنین استدلال ابونصر را بر قضیه فوق از رساله «المسائل الهندسیه» و سپس استدلال بیرونی را از کتاب «قانون مسعودی» نقل می‌کنم تا هم برهان آن و هم تاریخچه آن در اختیار خوانندگان کتاب حاضر باشد. ۷/۷۹- ابونصر عراق* مسأله دوازدهم از رساله «المسائل الهندسیه» (ص ۱۵) را چنین شروع کرده است:

«لما تحققت فی المثلثات الکائنة علی سطح الكرة من دوائرها العظام ان نسبة جیب احد اضلاعه الی جیب الضلع الثانی کنسبة جیب الزاوية الّتی تقابل الضلع الاول الی جیب الزاوية الّتی تقابل الضلع الثانی، سألت هل هذا الحکم عام لجميع المثلثات اعنی الکائنة من القسی و الکائنة من الخطوط المستقیمة، و جوابنا فی ذلك نعم».

یعنی: «پس از آنکه ثابت کردم که، در مثلثهایی که بر سطح کره از تقاطع دایره‌های عظیمه پدید می‌آیند، نسبت جیب هر یک از اضلاع به جیب ضلع دوم مساوی است با نسبت جیب زاویه روبه روی ضلع اول به جیب زاویه روبه روی ضلع دوم، سؤال کردی که آیا این حکم برای همه مثلثها اعم از مثلثهای کروی و مثلثهایی که اضلاع آنها خطوط راست هستند درست است یا نه. جواب ما به این سؤال مثبت است.»

۷/۸۰- برهان ابونصر عراق بر شکل مغنی در مثلثات مسطحه- سپس ابونصر عراق* قضیه مذکور را در رساله «المسائل الهندسیه» (ص ۱۶) چنین ثابت کرده است:

اولاً فرض می‌کنیم که زاویه C از مثلث ABC قائمه باشد. و به مرکز B و به شعاع AB کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه D قطع کند. (شکل ۷۹). در این صورت



شکل ۷۹

واضح است که AC جیب* کمان AD از دایره مرسوم است. و از طرف دیگر اندازه زاویه مرکزی B مساوی است با اندازه کمان AD . پس در دایره مذکور:

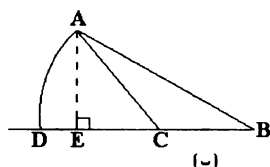
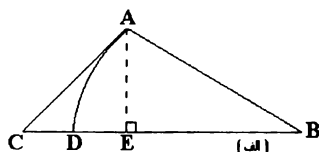
$$AC = \widehat{B} \text{ جیب}$$

از طرف دیگر در همان دایره مرسوم جیب زاویه قائمه C مساوی است با شعاع AB بنابراین داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویه قائمه } C}{\text{جیب زاویه } B}$$

وقضیه ثابت است.

ثانیاً فرض می‌کنیم که زاویه C قائمه نباشد. باز به مرکز B و به شعاع BA کمانی از دایره رسم می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در نقطه D قطع کند شکل (۸۰ الف و ب). و از نقطه A



شکل ۸۰

عمود AE را بر خط BC فرود می‌آوریم. در این صورت بنا به حالت اول در مثلث قائم الزاویه AEB داریم:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\text{جیب زاویه قائمه } E}{\text{جیب زاویه } B}$$

و نیز در مثلث قائم الزاویه ACE بنا به حالت اول داریم:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\text{جیب زاویه } ACE = \text{جیب زاویه } ACB}{\text{جیب زاویه قائمه } E}$$

و چون این دو تساوی را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{جیب زاویه } C}{\text{جیب زاویه } B}$$

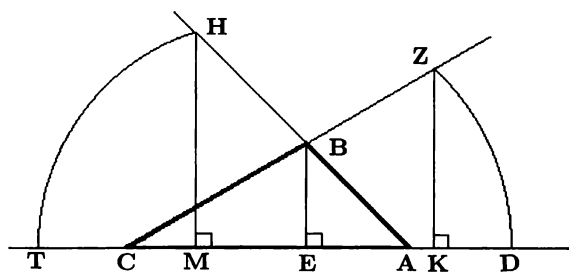
و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

۷/۸۱- برهان بیرونی بر شکل مغنی در مثلثات مسطحه - بیرونی این قضیه را در باب هشتم از مقاله سوم «قانون مسعودی»^{۲۳} به ثبوت رسانیده و روش وی چنانکه دیده می شود بسیار بدیع و ساده است. همین روش را خواجه نصیرالدین طوسی* در کتاب «کشف القناع» آورده ولی از مخترع آن سخن نگفته است.

مثلث ABC را در نظر گرفته اضلاع BC و CA و AB را به ترتیب a و b و c می نامیم، می خواهیم ثابت کنیم که مثلا:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

مطابق با شکل ۸۱ به مرکز A و به شعاع واحد دایره ای رسم می کنیم تا خطوط راست AB



شکل ۸۱

و AC را به ترتیب در نقاط H و T قطع کند. همچنین به مرکز C و به شعاع واحد دایره ای رسم می کنیم تا خطوط راست CB و CA را به ترتیب در نقاط Z و D قطع کند. و از H و Z عمودهای HM و ZK را بر خط راست AC فرود می آوریم. واضح است که:

اندازه کمان $HT =$ اندازه زاویه A از مثلث ABC

و جیب زاویه $BAC = HM$

و اندازه کمان $DZ =$ اندازه زاویه C از مثلث ABC

و جیب زاویه $ACB = ZK$

اکنون عمود BE را از نقطه B بر AC فرود می آوریم. دو مثلث ABE و AHM متشابه اند

و داریم:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AH}{HM} \quad (۱)$$

همچنین دو مثلث CBE و CZK متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{ZK}{ZC} \quad (۲)$$

اکنون تساویهای (۱) و (۲) را عضو به عضو در هم ضرب می‌کنیم، چون AH و CZ مساوی با واحد هستند، حاصل می‌شود:

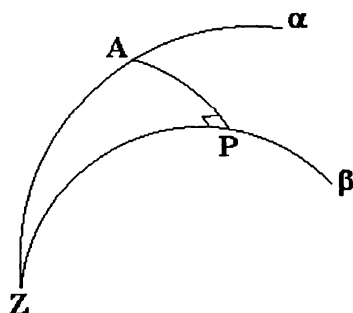
$$\frac{AB}{BC} = \frac{ZK}{HM} = \frac{C}{A} \quad \begin{array}{l} \text{جیب زاویه} \\ \text{جیب زاویه} \end{array}$$

وقضیه ثابت است.

۷/۸۲- تعریف میل اول و میل دوم - در شماره‌های قبل قضیه «مغنی» را در مثلثات مسطحه بیان و ثابت کردیم. اینک برای بیان قضیه «مغنی» در مثلثات کروی ابتدا باید «میل» را تعریف و سپس یک قضیه مقدماتی را ثابت کنیم.

۷/۸۳- تعریف میل اول - از آنچه بیرونی در کتاب «مقالید» (ص ۵) آورده، تعریف میل اول چنین استنباط می‌شود:

دو دایره عظیمه (α) و (β) واقع بر سطح کره را در نظر گرفته نقطه تقاطع آنها را Z می‌نامیم. (شکل ۸۲). سپس روی دایره (α) نقطه دلخواه A را اختیار کرده از آن دایره عظیمه‌ای

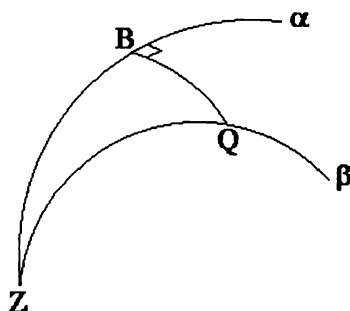


شکل ۸۲

می‌گذاریم که دایره (β) را در نقطه P به زاویه قائمه قطع کند. در این صورت کمان AP را میل اول (یا بطور خلاصه میل) کمان AZ نسبت به دایره (β) می‌نامند. هر جا اصطلاح «میل» به طور مطلق استعمال شود مقصود میل اول خواهد بود:

میل اول کمان ZA نسبت به دایره (β) = کمان AP (که بر دایره β عمود است)

۷/۸۴- تعریف میل ثانی^{۲۴} - اگر دایره‌های عظیمه (α) و (β) از سطح کره را که در نقطه Z متقاطع هستند (شکل ۸۳)، در نظر بگیریم و از نقطه اختیاری B واقع بر دایره (α) دایره



شکل ۸۳

عظیمه‌ای بگذرانیم که بر همان دایره (α) عمود بوده دایره (β) را در نقطه Q قطع کند، در این صورت کمان BQ را میل ثانی یا عرض کمان ZB نسبت به دایره (β) می‌نامند:

میل ثانی کمان ZB نسبت به دایره (β) = کمان BQ (که بر دایره α عمود است)

باید متوجه بود که هر دو میل را نسبت به دایره (β) تعریف کردیم. اما در مورد «میل اول» دایره AP بر دایره (β) عمود است و در مورد «میل ثانی» دایره BQ بر همان دایره (α) عمود می‌باشد.

اصطلاح «میل ثانی» را ابوالوفای بوزجانی* به کار برده و اصطلاح «عرض» را به جای «میل ثانی» بیرونی وضع کرده است.

۷/۸۵- حکم قضیه مقدماتی یا «قانون هیئت» - پیش از ذکر قضیه «معنی» در مثلثات

کروی احتیاج به یک قضیه مقدماتی داریم.

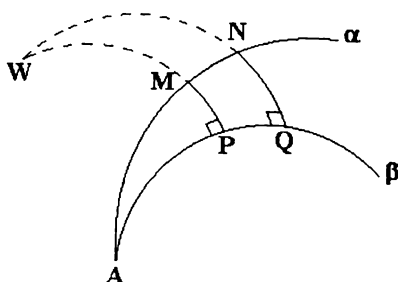
این قضیه را ابو محمود خجندی* «قانون هیئت» نامیده و بعضی از ریاضیدانان دیگر همین قضیه مقدماتی را جزوی از «شکل معنی» دانسته آن را با «شکل معنی» یک جا ثابت کرده‌اند. عنوان این قضیه این است:

در سطح کره نسبت جیبهای دو کمان AM و AN که روی یک دایره عظیمه اختیار شوند مساوی است با نسبت جیبهای میلهای (اؤل) آنها نسبت به یک دایره عظیمه دیگر. به عبارت دیگر:

در سطح کره نسبت هر کمان از دایره عظیمه به میل آن کمان نسبت به دایره عظیمه دیگر مقداری است ثابت.

۲۴. از این تعریف در شماره ۷/۱۰۳ استفاده خواهیم کرد.

توضیح- دو دایره عظیمه (α) و (β) از سطح کره را که در نقطه A متقاطع هستند در نظر گرفته روی یکی از آنها، مثلاً روی دایره (α) ، دو نقطه دلخواه M و N را اختیار می‌کنیم (شکل ۸۴). و از این دو نقطه دو دایره عظیمه می‌گذرانیم که دایره (β) را به زاویه قائمه قطع کنند.



شکل ۸۴

مطابق تعریف شماره ۷/۸۳ کمانهای MP و NQ به ترتیب میل کمانهای AM و AN نسبت به دایره (β) هستند و حکم قضیه این است:

$$\frac{\sin \widehat{AM}}{\sin \widehat{AN}} = \frac{\sin \widehat{MP}}{\sin \widehat{NQ}}$$

باید متوجه بود که دایره‌های عظیمه MP و NQ که هر دو بر دایره (β) عمود هستند، یکدیگر را در نقطه w که قطب دایره (β) است قطع می‌کنند.

۷/۸۶- مبتکران قضیه مقدماتی- بنابراین از گفته بیرونی بر می‌آید:

اولاً- ابونصر عراق* و ابوالوفای بوزجانی* هر دو این قضیه را به عنوان یکی از دعاوی «شکل مغنی» بیان کرده‌اند و نام جداگانه‌ای بر آن ننهاده‌اند.

ثانیاً- ابو محمود خجندی* این قضیه را از راهی طولانی ثابت کرده و آن را مبنای کتاب «اعمال اللیل بالکواکب الثابتة» خود قرار داده و نام آن را «قانون الهیة» گذاشته است ولی به «شکل مغنی» یعنی رابطه

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

در مثلث کروی پیش از دیگران پی نبرده و مدعی بوده است که «قانون هیئت» را ابوالوفای بوزجانی* از وی اقتباس کرده بوده است. بیرونی برهان ابومحمود خجندی* را بر این قضیه مقدماتی در کتاب «مقالید» (ص ۱۰) آورده است.

ثالثاً کوشیار بن لبان گیلی* همین قضیه را از ابومحمود خجندی* گرفته و استدلال آن را خلاصه کرده و نام «شکل مغنی» را بر آن نهاده است. وجه تسمیه این قضیه به «شکل مغنی» این بوده که این قضیه منجمان را از به کار بردن «شکل قطاع» بی نیاز می‌دارد. بیرونی برهان کوشیار* را بر شکل فوق در کتاب «مقالید» (ص ۱۱) آورده است.

کوشیار* خود نزد بیرونی اقرار کرده که این قضیه را از خجندی* گرفته و فقط آن را تهذیب و تنقیح کرده است.

رابعاً ابوالعباس نیریزی* و ابو جعفر خازن* هر یک در تفسیری که بر کتاب «مجسطی» نوشته‌اند و ابو جعفر خازن* در «زیج صفائح» به قضیه‌ای شبیه به این قضیه پی برده‌اند. ولی مقصود آنها محاسبه میلها بدون استفاده از «شکل قطاع» بوده و به اصل دعوی «شکل مغنی» نرسیده‌اند. بیرونی این قضیه و برهان آن را از نیریزی* و ابوجعفر خازن* در کتاب «مقالید» (ص ۱۲) آورده است.

۷/۸۷- برهان قضیه مقدماتی از بیرونی-گفتم که عده‌ای از ریاضیدانان ایرانی هر یک به نحوی قضیه مقدماتی (شماره ۷/۸۵) را ثابت کرده‌اند. در اینجا برهان بیرونی را از کتاب «مقالید» ذکر می‌کنم و متذکر می‌شوم که بیرونی برهان ساده‌تری در یک حالت خاص نیز برای این قضیه در کتاب «قانون مسعودی» (ص ۳۵۴) ذکر کرده است.

اینک برهان بیرونی در حالت کلی (← «مقالید» ص ۱۳).

فرض می‌کنیم که کمانهای AB و AC هر یک ربع دایره عظیمه باشند و روی $\widehat{AB}$ دو نقطه دلخواه M و N را اختیار کرده از آنها دو کمان عظیمه^{۲۵} MP و NQ را بر کمان AC عمود می‌کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$\frac{\sin \widehat{AM}}{\sin \widehat{MP}} = \frac{\sin \widehat{AN}}{\sin \widehat{NQ}}$$

مرکز کره را O می‌نامیم (شکل ۸۵) و از نقاط M و N دو دایره صغیره به موازات دایره عظیمه AC رسم کرده^{۲۶} فصل مشترکهای آنها را با دایره عظیمه BC به ترتیب نقاط E و F می‌نامیم و از نقاط M و N عمودهای MG و NH را بر OB فرود می‌آوریم. واضح است که:

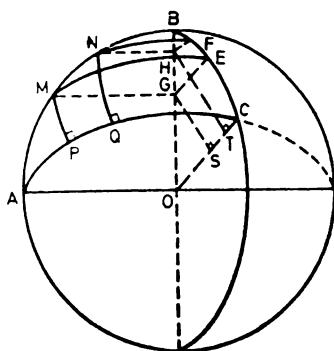
$$OG = \sin \widehat{AM}$$

$$OH = \sin \widehat{AN}$$

سپس از نقاط G و H عمودهای GS و HT را بر شعاع OC فرود می‌آوریم و HF و GE را رسم می‌کنیم. خط GE هم در صفحه مدار ME و هم در صفحه دایره عظیمه BC

۲۵. مقصود دو کمان از دو دایره عظیمه عمود بر دایره عظیمه AC است.

۲۶. این دو دایره صغیره را مدارهای موازی با دایره عظیمه AC می‌نامند.



شکل ۸۵

واقع است. و همچنین خط OC هم در صفحه دایره عظیمه AC و هم در صفحه دایره عظیمه BC واقع است. و واضح است که $OC \parallel GE$. و چون GS بر OC عمود است پس بر GE نیز عمود است. پس:

$$GS = \sin \widehat{CE}$$

و چون

$$\widehat{CE} = \widehat{MP}$$

پس:

$$GS = \sin \widehat{MP}$$

و به دلیلی مشابه این داریم:

$$HT = \sin \widehat{NQ}$$

اکنون در مثلث OHT که خط GS به موازات ضلع HT از آن رسم شده است داریم:

$$\frac{OG}{GS} = \frac{OH}{HT}$$

یعنی:

$$\frac{\sin \widehat{AM}}{\sin \widehat{MP}} = \frac{\sin \widehat{AN}}{\sin \widehat{NQ}}$$

و حکم ثابت است.

۷/۸۸- تبصره- اگر کمان AN ربع دایره باشد اندازه کمان NQ مساوی با اندازه زاویه A خواهد بود و داریم:

$$\frac{\sin \widehat{MP}}{\sin \widehat{AM}} = \sin A \quad \text{یا} \quad \frac{\sin \widehat{AM}}{\sin \widehat{MP}} = \frac{1}{\sin A}$$

یعنی: در مثلث قائم الزاویه AMP (که زاویه P از آن قائمه است) نسبت سینوس یکی از اضلاع زاویه قائمه به سینوس وتر آن مساوی است با سینوس زاویه روبه رو به ضلع مذکور. این رابطه را امروزه در مثلث قائم الزاویه کروی ABC ($C = 90^\circ$) چنین می‌نویسند:

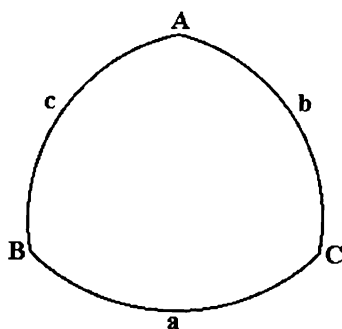
$$\sin a = \sin c \cdot \sin A$$

و

$$\sin b = \sin c \cdot \sin B$$

۷/۸۹- حکم شکل مغنی در مثلثات کروی- مقصود از «شکل مغنی» در مثلثات کروی قضیه زیر است:

قضیه - در هر مثلث کروی جیبهای اضلاع با جیبهای زوایای روبه روی آنها متناسب اند.^{۲۷} یعنی اگر مثلث کروی ABC را در نظر گرفته (شکل ۸۶) و اضلاع روبه روبه زوایای A و B و C



شکل ۸۶

۲۷. ابونصر عراق* در رساله «القسى الفلكية» (ص ۳) عنوان این قضیه را چنین بیان کرده است: «إذا كان على سطح كرة مثلث اضلاعه من اعظم الدوائر الواقعة عليها فان جيوب تلك الاضلاع مع جيوب القسى التى بمقدار الزوايا التى تؤثر فى المثلث متناسبة».

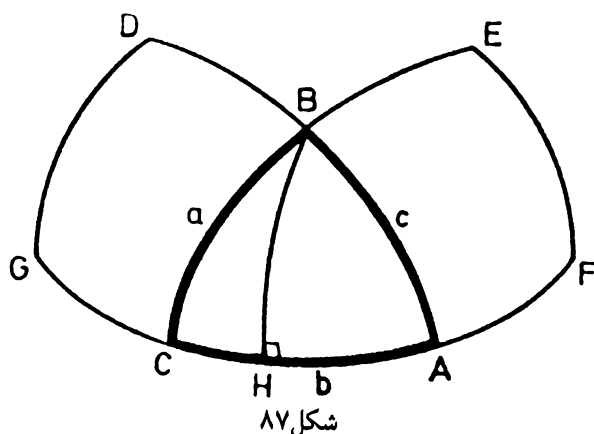
را به ترتیب a و b و c بنامیم داریم:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

۷/۹۰- برهان بیرونی بر شکل مغنی-بیرونی قضیه فوق را در کتاب «قانون مسعودی» (ص ۳۵۵) با روشی شبیه آنچه در مورد مثلث مسطح گفتیم (ش ۷/۸۱) ثابت کرده و حکم قضیه را چنین بیان کرده است:

«ثم نقول ان الامر فى المثلثات الكائنة من قسى دوائر عظام مشاكل لما قدمناه فى المثلثات المستقيمة الاضلاع، و ذلك ان جيوب اضلاع هذه القسى تتناسب كتناسب جيوب الزوايا التى تقابلها كل واحد لنظيره».

و اینک برهان او: مثلث کروی ABC را در نظر گرفته (شکل ۸۷)، اضلاع آن را که کمانهای



شکل ۸۷

دایره عظیمه هستند a و b و c می نامیم می خواهیم ثابت کنیم:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

کمان AB را از طرف B تا نقطه D امتداد می دهیم تا کمان AD ربع دایره شود. به همین قسم کمان CB را از طرف B تا نقطه E ادامه می دهیم تا $\widehat{CE}$ ربع دایره شود. همچنین کمان AC را از دو طرف ادامه می دهیم تا کمانهای CAF و ACG ربع دایره شوند. و از نقاط E و F یک کمان از دایره عظیمه و همچنین از نقاط D و G یک کمان از دایره عظیمه می گذرانیم. واضح است که:

$$\widehat{A} \text{ اندازه} = \widehat{GD} \text{ اندازه}$$

$$\widehat{C} \text{ اندازه} = \widehat{EF} \text{ اندازه}$$

از نقطه B کمان دایره عظیمه BH را بر $\widehat{AC}$ عمود می‌کنیم. نظر به قضیه مقدماتی شماره ۷/۸۵ داریم:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BH}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}}$$

و همچنین:

$$\frac{\sin \widehat{BH}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

چون دو تساوی فوق را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin \widehat{AD}}{\sin \widehat{DG}} \times \frac{\sin \widehat{EF}}{\sin \widehat{EC}}$$

اما چون کمانهای AD و EC ربع دایره هستند سینوس آنها مساوی با واحد است. و از طرف دیگر واضح است که $\sin \widehat{EF} = \sin C$ و $\sin \widehat{DG} = \sin A$ پس تساوی فوق چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\sin \widehat{AB}}{\sin \widehat{BC}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

یعنی:

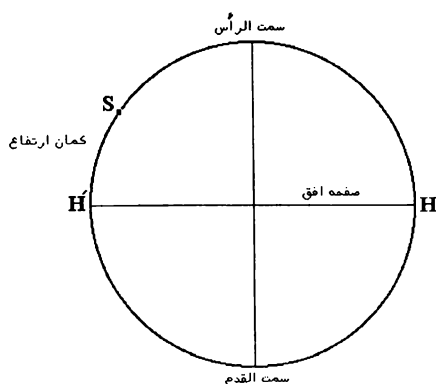
$$\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

و یا

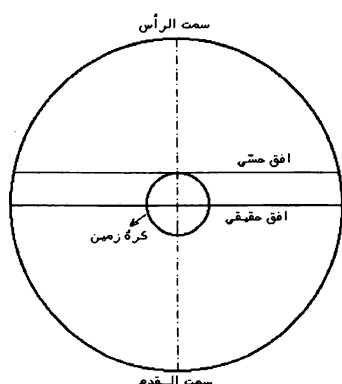
$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

و تساوی $\frac{\sin b}{\sin B}$ با هر یک از نسبت‌های فوق به همین طریق ثابت می‌شود.

۷/۹۱- مقدمات شکل ظلی- چون آنچه را بیرونی درباره «ظَلّ» و انواع آن در کتاب «قانون مسعودی» (باب هشتم از مقاله سوم) و در کتاب «مقالید» (ص ۷) نوشته است بسیار فشرده می‌باشد، اینک مفاهیم مختلف و تعاریف لازم را جدا از یکدیگر شرح می‌دهم تا فرا گرفتن آنها آسان باشد. و خاطرنشان می‌کنم که آنچه در این باره می‌نویسم از نوشته‌های خود بیرونی در دو کتاب مذکور، اقتباس شده است.



شکل ۸۹



شکل ۸۸

۷/۹۲- افق حقیقی- اگر مرکز زمین را مرکز کره سماوی فرض کنیم، افق حقیقی دایره عظیمه‌ای است از کره سماوی که دو قطب آن «سمت الرأس» و «سمت القدم» باشد.

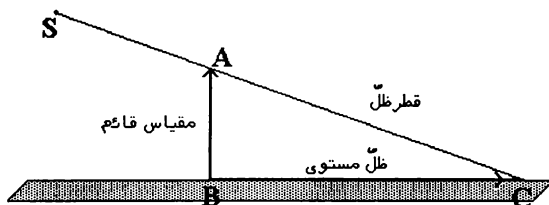
۷/۹۳- افق حسی- افق حسی هر مکان دایره‌ای است از کره سماوی که صفحه آن در آن مکان مماس بر سطح کره زمین باشد. (شکل ۸۸).

بنابراین صفحات افق حقیقی و افق حسی با هم موازی هستند و فاصله آنها از یکدیگر مساوی با شعاع کره زمین است. ولی چون شعاع کره زمین در مقام مقایسه با ابعاد سماوی ناچیز است این دو صفحه را بر هم منطبق می‌انگارند.

۷/۹۴- دایره ارتفاع- کمان ارتفاع- دایره ارتفاع هر ستاره در مکان و زمان معینی عبارت است از دایره عظیمه‌ای از کره سماوی که از مرکز آن ستاره و از قطب افق یعنی از «سمت الرأس» بگذرد. (شکل ۸۹). کمان ارتفاع هر ستاره کمانی است از دایره ارتفاع که بین صفحه افق و آن ستاره قرار دارد.

۷/۹۵- انواع ظلّ نزد قدما- پیش از بیان آنچه بیرونی درباره «ظلّ» گفته است، برای آنکه مطلب کاملاً روشن شود، لازم است خاطر نشان کنم که قدما دو نوع «ظلّ» یعنی «سایه» در نظر می‌گرفته‌اند.

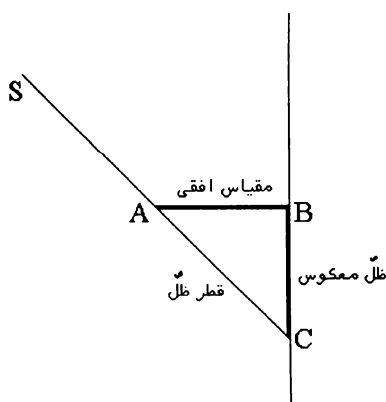
۷/۹۶- ظلّ مستوی- فرض کنیم که میله مستقیمی مانند AB داشته باشیم و آن را عمود بر صفحه افق مکان نصب کنیم. چون می‌خواهیم «ظلّ» یعنی سایه این میله را بر صفحه افق مورد بحث قرار دهیم طول این میله را مقیاس قائم و نقطه A را رأس مقیاس می‌نامیم (شکل ۹۰). اکنون اگر، مثلاً خورشید، در نقطه S باشد، شعاعی که از S بر رأس مقیاس یعنی نقطه A می‌تابد صفحه افق را در نقطه C قطع می‌کند. در این صورت BC را ظلّ مستوی یا ظلّ بسیط یا ظلّ



شکل ۹۰

مبسوط نظیر مقیاس AB می‌نامند. در این مقام پاره خط AC را قطر ظلّ می‌گویند. وجه تسمیه این «ظلّ» به «ظلّ مستوی» یا «ظلّ بسیط» این است که این ظلّ بر صفحه افق واقع است.

۷/۹۷- ظلّ معکوس- اکنون اگر فرض کنیم که میله AB ، یعنی مقیاس، عمود بر صفحه دیوار قائمی نصب شده باشد (مقیاس افقی) (شکل ۹۱). شعاعی که از خورشید به رأس مقیاس



شکل ۹۱

یعنی نقطه A می‌تابد صفحه دیوار را در نقطه C قطع می‌کند.

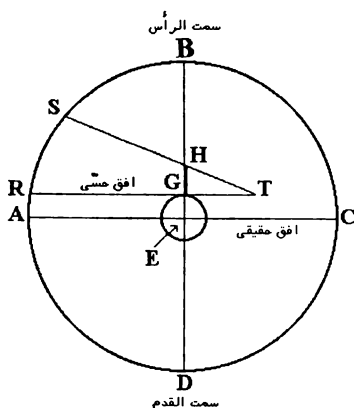
در این صورت BC را ظلّ معکوس یا ظلّ منتصب نظیر مقیاس AB می‌نامند. در این مقام نیز پاره خط AC را قطر ظلّ می‌گویند.

وجه تسمیه این ظلّ به معکوس این است که رأس ظلّ مطابق شکل در پایین نقطه A قرار می‌گیرد.

۷/۹۸- تعریف انواع ظلّ در آثار بیرونی

مقدمه- پس از بیان این مقدمات باید دید بیرونی در تعریف ظلّ و انواع آن چه می‌گوید. آنچه

در اینجا می نویسم از کتابهای «قانون مسعودی» (فصل هشتم از مقاله سوم، صفحات ۳۳۲ به بعد) و «مقالید» (صفحه ۷ به بعد) تألیف بیرونی اقتباس شده است. فرض می کنیم در زمان معینی خورشید در نقطه S باشد (شکل ۹۲). و دایره ارتفاع خورشید



شکل ۹۲

را در این زمان رسم می کنیم و مرکز آن را E می نامیم. و قطری از دایره ارتفاع خورشید را که در صفحه افق حقیقی واقع است AC می نامیم و قطر BD را بر آن عمود می کنیم. بنابراین مطابق با شکل، نقطه B سمت الرأس و نقطه D سمت القدم خواهد بود.

اکنون فصل مشترک خط EB (یعنی شعاعی که مرکز عالم را به سمت الرأس وصل می کند) را با سطح کره زمین نقطه G می نامیم. (نقطه G در واقع محل رصد روی کره زمین است) و از G خطی به موازات AC رسم می کنیم تا کره سماوی را در نقطه R قطع کند. به این ترتیب خط GR در صفحه افق حسی واقع می شود. در این صورت ارتفاع خورشید کمان AS و ارتفاع محسوس آن کمان RS است. اما چون شعاع کره زمین در مقام مقایسه با ابعاد سماوی ناچیز است کمان AR نیز بسیار ناچیز خواهد بود.

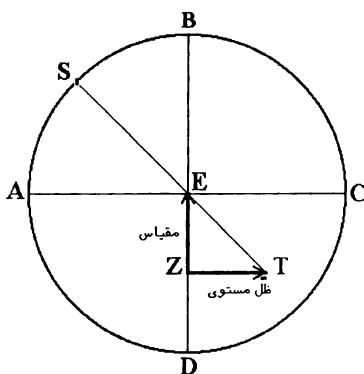
حال اگر، مطابق با شکل، GH را مقدار مقیاس بگیریم و «ظّل مستوی» آن را بر صفحه افق حسی GT بنامیم، بنا به گفته بیرونی می توان از GE یعنی شعاع کره زمین صرف نظر کرد و نقطه R را منطبق بر نقطه A دانست و ظّل مستوی نظیر مقیاس GH یعنی GT را بر صفحه افق حقیقی منطبق انگاشت.

۷/۹۹- ظّل مستوی و ظّل معکوس- بیرونی پس از بیان این مقدمات می گوید («قانون

مسعودی» ص ۳۳۳):

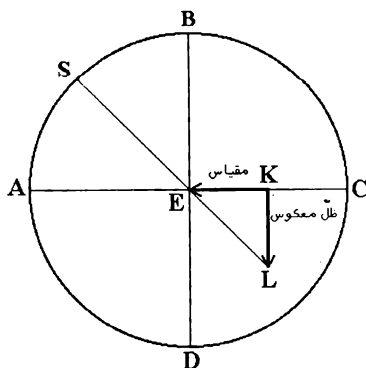
برای سهولت بیان رأس مقیاس را در نقطه E (مرکز عالم) فرض می کنیم. و مقدار مقیاس را

روی شعاع ED که عمود بر سطح افق است پاره خط EZ می‌گیریم (شکل ۹۳). و از Z خطی



شکل ۹۳

به موازات افق AC رسم می‌کنیم تا امتداد شعاع نورانی SE را در نقطه T قطع کند، در این صورت ZT ظل مستوی یا ظل مبسوط نظیر مقدار مقیاس EZ و ET قطر ظل است. اکنون اگر به جای آنکه مقدار مقیاس را عمود بر سطح افق بگیریم، آن را منطبق بر صفحه افق اختیار کنیم (شکل ۹۴) و EK را مطابق با شکل مقدار مقیاس بگیریم و از نقطه K خطی عمود

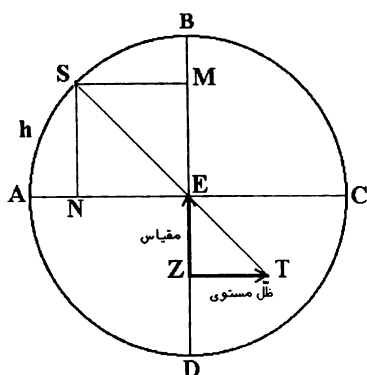


شکل ۹۴

بر افق AC رسم کنیم تا امتداد شعاع نورانی SE را در نقطه L قطع کند، در این صورت KL ظل معکوس نظیر مقدار مقیاس EK و EL قطر ظل است.

بیرونی خاطرنشان کرده است (مقالید، صفحه ۸) که هر جا مطلقاً از «ظل» گفتگو شود و صفت آن (یعنی بسیط یا معکوس بودن آن) ذکر نگردد مقصود «ظل معکوس» خواهد بود. ۷/۱۰۰- رابطه بین ظل بسیط و ارتفاع خورشید- اندازه ارتفاع خورشید، یعنی کمان AS .

را h می‌نامیم (شکل ۹۵). و از نقطه S عمود SN را بر افق AC فرود آورده از S نیز خطی به



شکل ۹۵

موازات AC رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطه M قطع کند. واضح است که:

$$SN = \widehat{AS} \text{ جیب} = \sin h$$

$$EN = \widehat{AS} \text{ تمام جیب} = SM = \cos h$$

$$EZ = \text{مقدار مقیاس} \quad \text{و}$$

$$ZT = \text{ظل مستوی} \quad \text{و}$$

اما دو مثلث SEN و ETZ متشابه‌اند و داریم:

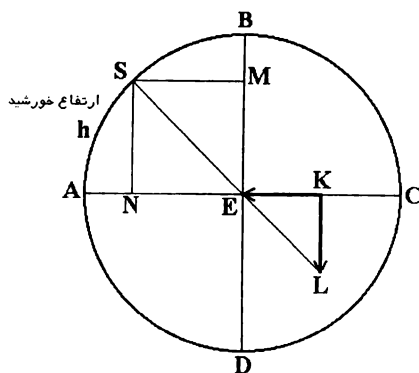
$$\frac{SN}{EZ} = \frac{EZ}{ZT}$$

یعنی

$$\frac{\sin h}{\cos h} = \frac{\text{مقدار مقیاس قائم}}{\text{ظل بسیط}} \quad (۱)$$

پس اگر ارتفاع h خورشید و مقدار مقیاس معلوم باشد، ظل مستوی (یا بسیط) معلوم خواهد شد. و برعکس اگر ظل بسیط ZT و مقدار مقیاس معلوم باشد، مقدار قطر ظل یعنی پاره خط ET را، که وتر مثلث قائم‌الزاویه EZT است، می‌توان حساب کرد. و چون ES که جیب کل است معلوم است (به قول بیرونی مساوی با واحد است)، می‌توان SN یعنی جیب ارتفاع خورشید را از روی تناسب $\frac{SN}{ES} = \frac{EZ}{ET}$ حساب کرد.

۷/۱۰۱- رابطه بین ظلّ معکوس و ارتفاع خورشید- اگر باز ارتفاع خورشید یعنی کمان AS را h بنامیم و این بار شکل مربوط به ظلّ معکوس را در نظر بگیریم (شکل ۹۶). و مانند شماره



شکل ۹۶

قبل عمودهای SN و SM را به ترتیب بر AC و BD فرود آوریم باز دومتثل SME و EKL متشابه‌اند و معلوم می‌شود که:

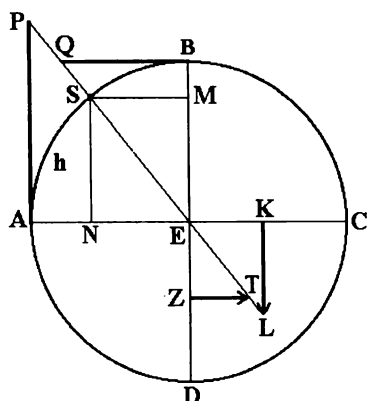
$$\frac{\sin h (= EM)}{\cos h (= SM)} = \frac{\text{ظلّ معکوس} (= KL)}{\text{مقیاس افقی} (= KE)} \quad (۲)$$

اگر دو مقیاس افقی و قائم را متساوی اختیار کنیم از رابطه (۱) شماره قبل و رابطه (۲) فوق معلوم می‌شود که ظلّ مستوی و ظلّ معکوس عکس یکدیگر هستند.

۷/۱۰۲- تعمیم مفهوم ظلّ- ظلّ یک کمان دایره- دیدیم که تا اینجا فقط از ظلّ (بسیط یا معکوس) نظیر یک مقیاس گفتگو به میان آمد و مقیاس هم پاره‌خطی راست اختیار شد.

بیرونی (شاید به پیروی از ابوالوفا بوزجانی*) گفته است که چون مقیاس اختیاری است و به چیزی بستگی ندارد، اگر شعاع دایره را به منزله مقیاس اختیار کنیم، می‌توان مفهوم ظلّ را برای کمان دایره نیز تعریف کرد، و با این تعمیم مفهوم ظلّ، می‌توان ظلّ یک کمان و جیب آن را از روی یکدیگر به دست آورد.

روی دایره به مرکز E و به شعاع EA کمان AS را در نظر گرفته قطر AC و قطر BD عمود بر آن را رسم می‌کنیم (شکل ۹۷). و از نقطه A مماسی بر دایره رسم کرده شعاع ES را امتداد می‌دهیم تا مماس مرسوم را در نقطه P قطع کند. و از نقطه B خطی به موازات قطر AC رسم می‌کنیم تا EP را در نقطه Q قطع کند. اکنون ظلّ معکوس و ظلّ بسیط و قطرهای آنها را در



شکل ۹۷

مورد کمان AS به طریق زیر تعریف می‌کنیم:

$$AP = \widehat{AS} \text{ ظل معکوس}$$

$$BQ = \widehat{AS} \text{ ظل بسیط}$$

$$EP = \widehat{AS} \text{ قطر ظل معکوس}$$

$$EQ = \widehat{AS} \text{ قطر ظل بسیط}$$

اکنون اگر مقیاسهای قائم و افقی را که در شکلهای قبل در نظر گرفته بودیم باهم مساوی اختیار کرده آنها را روی شکل فوق نیز رسم کنیم مثلثهای LEK و SEN و PEA باهم مشابه خواهند بود و خواهیم داشت:

$$\frac{AP}{EA} = \frac{NS}{EN} = \frac{KL}{KE}$$

$$\frac{\widehat{AS} \text{ ظل معکوس کمان}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{\widehat{AS} \text{ جیب کمان}}{\widehat{AS} \text{ جیب تمام کمان}} = \frac{\widehat{AS} \text{ ظل معکوس مقیاس افقی}}{\text{مقیاس افقی}} \quad \text{یعنی:}$$

همچنین مثلثهای TEZ و SEM و QEB مشابه خواهند بود و خواهیم داشت:

$$\frac{EB}{BQ} = \frac{EM}{SM} = \frac{EZ}{ZT}$$

یعنی:

$$\frac{\text{شعاع دایره}}{\widehat{AS} \text{ ظل بسیط کمان}} = \frac{\widehat{AS} \text{ جیب کمان}}{\widehat{AS} \text{ جیب تمام کمان}} = \frac{\text{مقیاس قائم}}{\widehat{AS} \text{ ظل بسیط مقیاس قائم}}$$

ملاحظه می‌شود که اصطلاحات «تانژانت» و «کتانژانت» که امروزه به کار می‌رود درست به ترتیب معادل با اصطلاحات «ظَلّ معکوس» و «ظَلّ بسیط» هستند که بیرونی به کار برده و اگر شعاع دایره را واحد بگیریم (چنانچه بیرونی گرفته است) و کمان AS را h بنامیم روابط فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} h &= \frac{\sin h}{\cos h} \\ \operatorname{cotg} h &= \frac{\cos h}{\sin h}\end{aligned}$$

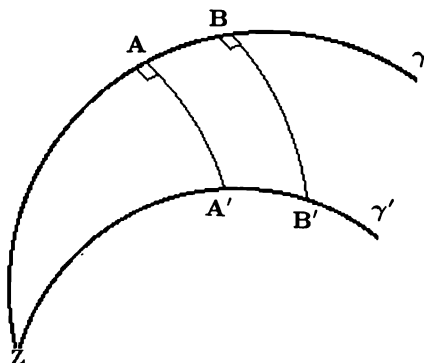
و

۷/۱۰۳- حکم شکل ظلی- مقصود از شکل ظلی قضیه زیر است:^{۲۸}

قضیه - هرگاه در سطح کره، دو دایره عظیمه (γ) و (γ') یکدیگر را در نقطه Z به زاویه حاده قطع کنند و روی یکی از آنها دو نقطه دلخواه A و B را اختیار کرده و از آنها دو کمان دایره عظیمه عمود بر همان دایره (γ) اخراج کنیم تا دایره دیگر (γ') را در نقاط A' و B' قطع کنند داریم:

$$\frac{\sin \widehat{ZA}}{\sin \widehat{ZB}} = \frac{\operatorname{tang} \widehat{AA'}}{\operatorname{tang} \widehat{BB'}}$$

چون کمانهای عظیمه AA' و BB' (شکل ۹۸) که عمود بر دایره (γ) هستند میلهای ثانی^{۲۹}



شکل ۹۸

کمانهای ZA و ZB نسبت به دایره (γ') هستند می‌توان قضیه فوق را چنین بیان کرد:

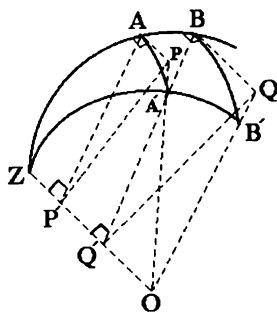
۲۸. ← «مقالید» ص ۸.

۲۹. ← ۷/۸۴ بخش حاضر.

در سطح کره نسبت جیبهای دو کمان ZA و ZB از یک دایره عظیمه مساوی است با نسبت ظلّهای دو میل ثانی آنها نسبت به دایره عظیمه دیگری که از نقطه Z بگذرد و با دایره عظیمه ZAB زاویه حاده تشکیل دهد.

۷/۱۰۴- مخترع شکل ظلّی- بیرونی اختراع «شکل ظلّی» را بلامنازع از «ابوالوفای بوزجانی»^{۳۰} دانسته و نوشته است که این قضیه از جهت مورد استعمال آن در علم هیئت بسیار مهم است. با در نظر گرفتن وقوف کاملی که بیرونی به تاریخ ریاضیات زمان خود داشته و اینکه ابوالوفای بوزجانی^{*} معاصر وی بوده است، تردید نمی توان داشت که مخترع «شکل ظلّی» بوزجانی^{*} بوده مضافاً به اینکه هیچ کس در آن زمان مدّعی اختراع این شکل نبوده است.

۷/۱۰۵- برهان شکل ظلّی از ابوالوفای بوزجانی^{*}- از نقاط A و B دو خط عمود بر صفحه دایره عظیمه ZAB اخراج کرده (شکل ۹۹)، مرکز کره را O می نامیم و O را به A' و B'



شکل ۹۹

وصل کرده امتداد می دهیم تا دو عمود مذکور را در نقاط P و Q قطع کنند و از نقاط P و Q عمودهای PP' و QQ' را بر شعاع OZ فرود می آوریم و پاره خطهای AP' و BQ' را رسم می کنیم. واضح است که:

$$AP = \tan \widehat{AA'} \text{ و } AP' = \sin \widehat{ZA}$$

$$BQ = \tan \widehat{BB'} \text{ و } BQ' = \sin \widehat{ZB}$$

چون دو خط PP' و QQ' با هم موازیند و $AP \parallel BQ$ پس:

$$B\widehat{Q}Q' = A\widehat{P}P'$$

و چون $P\hat{A}P' = Q\hat{B}Q' = 90^\circ$ پس دو مثلث $P'PA$ و $Q'QB$ متشابه‌اند و بنابراین:

$$\frac{AP'}{BQ'} = \frac{AP}{BQ}$$

یعنی:

$$\frac{\sin \widehat{ZA}}{\sin \widehat{ZB}} = \frac{\tan \widehat{AA'}}{\tan \widehat{BB'}}$$

و حکم ثابت است.

۷/۱۰۶- تبصره- اگر کمان ZB ربع دایره باشد، اندازه کمان BB' مساوی با اندازه زاویه Z می‌شود و رابطه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\sin \widehat{ZA}}{1} = \frac{\tan \widehat{AA'}}{\tan \widehat{Z}}$$

یعنی: در مثلث قائم‌الزاویه کروی سینوس یکی از اضلاع زاویه قائمه مساوی است با نسبت تانژانت ضلع دیگر به تانژانت زاویه روبه‌رو به همین ضلع.
امروزه این رابطه را در مثلث کروی قائم‌الزاویه ACB ($\widehat{C} = 90^\circ$) به صورت زیر می‌نویسند:

$$\sin b = \tan a \cdot \cotg A$$

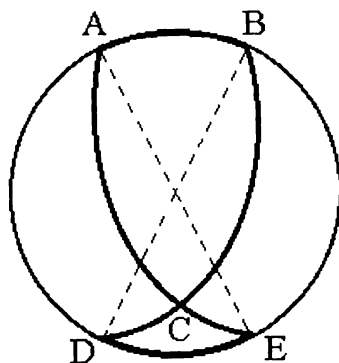
$$\sin a = \tan b \cdot \cotg B$$

۷/۱۰۷- حل مثلثهای کروی در کتاب «مقالید»- چنانچه پیش از این هم گفتیم برای بحث کامل درباره محتویات کتاب «مقالید» باید کتاب جداگانه‌ای نوشت. در اینجا به ذکر مطالب مهمی که بیرونی درباره حل مثلثهای کروی گفته است اکتفا می‌کنم. کسانی که بخواهند در این باره تحقیقات بیشتری به عمل آورند می‌توانند به صفحات ۱۳ تا ۲۱ کتاب «مقالید» که در صفحات ۴۷۳ تا ۵۰۴ کتاب بیرونی‌نامه به چاپ رسیده است مراجعه کنند.

۷/۱۰۸- تقسیم‌بندی مثلثهای کروی- بیرونی برای حل مثلثهای کروی فقط مثلثهایی را در نظر گرفته که هر یک از اضلاع آنها کوچکتر از نیم‌دایره باشند، و ابتدا مثلثهای کروی را برحسب نوع زوایای آنها مطابق با جدول زیر به ده نوع تقسیم کرده است.
در حالت‌های اول و دوم و سوم سه زاویه مثلث از یک نوع، یعنی یا هر سه حاده یا هر سه قائمه و یا هر سه منفرجه هستند.

زاویه A	زاویه B	زاویه C
۱ حاده	حاده	حاده
۲ قائمه	قائمہ	قائمہ
۳ منفرجه	منفرجه	منفرجه
۴ حاده	حاده	قائمہ
۵ حاده	حاده	منفرجه
۶ قائمہ	قائمہ	حاده
۷ قائمہ	قائمہ	منفرجه
۸ منفرجه	منفرجه	حاده
۹ منفرجه	منفرجه	قائمہ
۱۰ حاده	قائمہ	منفرجه

در حالت‌های چهارم و پنجم دو زاویه حاده و زاویه سوم یا قائمه و یا منفرجه است.
 در حالت‌های ششم و هفتم دو زاویه از مثلث قائمه و زاویه سوم آن یا حاده و یا منفرجه است.
 در حالت‌های هشتم و نهم دو زاویه از مثلث منفرجه و زاویه سوم آن یا حاده و یا قائمه است.
 بالاخره در حالت دهم زوایای مثلث یکی حاده و یکی قائمه و یکی منفرجه است.
 سپس بیرونی نشان داده است که حالت‌های اول و هشتم با هم و حالت‌های سوم و پنجم با هم و
 حالت‌های چهارم و نهم با هم از لحاظ حل مثلث یکسان هستند. به این معنی که اگر مثلث کروی
 ABC را در نظر بگیریم (شکل ۱۰۰) و هر یک از اضلاع AC و BC آن را تا نیم‌دایره کامل کنیم



شکل ۱۰۰

تا مثلث CDE به دست آید و مثلث CDE نظیر مثلث ABC بنامیم، مثلاً مثلث حالت اول
 نظیر مثلث حالت هشتم خواهد بود و حل آنها به یک مسئله منجر می‌شود.
 به عبارت دیگر اگر مثلث ABC از نوع اول باشد، یعنی سه زاویه آن هر سه حاده باشند

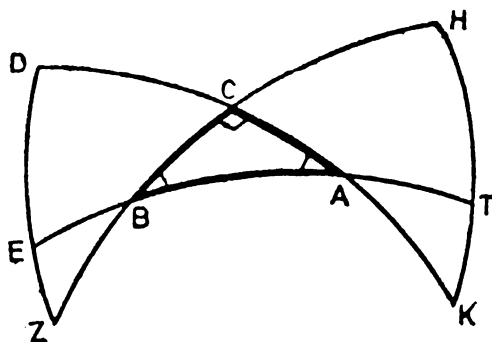
مثلت نظیر آن یعنی CDE از نوع هشتم خواهد بود، یعنی دو زاویه آن منفرجه و یک زاویه آن حاده خواهد بود، و در این دو حالت حل مثلث به یک مسئله منجر می‌شود. همچنین مثلثهای حالتهای سوم و پنجم نظیر یکدیگر و مثلثهای حالتهای چهارم و نهم نیز نظیر یکدیگرند.

بنابراین برای حل مثلث کروی کافی است فقط حالتهای زیر را در نظر بگیریم:

نوع اول: مانند (نوع هشتم)	سه زاویه حاده - یا دو زاویه منفرجه و یک زاویه حاده
نوع دوم	سه زاویه قائمه
نوع سوم: مانند (نوع پنجم)	سه زاویه منفرجه - یا دو زاویه حاده و یک زاویه منفرجه
نوع چهارم: مانند (نوع نهم)	دو زاویه حاده و یک زاویه قائمه - یا دو زاویه منفرجه و یک زاویه قائمه
نوع ششم	دو زاویه قائمه و یک زاویه حاده
نوع هفتم	دو زاویه قائمه و یک زاویه منفرجه
نوع دهم	یک زاویه حاده و یک زاویه منفرجه و یک زاویه قائمه

۷/۱۰۹- چگونگی حل مثلث کروی در حالات فوق - سپس بیرونی ابتدا انواع دوم و ششم و هفتم را که هر یک دست کم دو زاویه قائمه دارند و حل آنها ساده است مورد حل و بحث قرار داده است.

آنگاه به نوع چهارم پرداخته یعنی مثلث کروی را که زاویه C از آن قائمه و زوایای دیگرش حاده هستند حل کرده است. برای این کار مطابق با (شکل ۱۰۱) هر یک از اضلاع مثلث را تا



شکل ۱۰۱

ربع دایره ادامه داده و دو دایره یکی به قطب A و یکی به قطب B رسم کرده تا امتداد اضلاع را قطع کرده‌اند. به این ترتیب دو «قطاع» $ADZB$ و $BHKA$ به دست می‌آید که هر یک از آنها از تقاطع چهار ربع دایره پدید آمده است. به قسمی که

$$\text{اندازه کمان } DE = \text{اندازه زاویه } A$$

$$\text{اندازه کمان } HT = \text{اندازه زاویه } B$$

و در حالت‌های مختلف، مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{C} = 90^\circ$) را برحسب آنکه دو زاویه غیر قائمه و یا یک ضلع و یک زاویه غیر قائمه از آن معلوم باشند با استفاده از شکل فوق حل کرده‌است. آن‌گاه به انواع اول و سوم و دهم پرداخته و حل آنها را مورد بحث قرار داده است.

۷/۱۱۰- تبصره- این مطلب جالب توجه است که بیرونی در این مبحث دستور ترکیب شش شیء را دو به دو یعنی به اصطلاح امروزی دستور $15 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = C_6^2$ را به کار بسته و برای آن اصطلاح «القرانات الثنائیه فی الاعداد الستة» را استعمال کرده‌است.

* * *

بخش هشتم

تحقیق دربارهٔ مقالهٔ سوّم کتاب «قانون مسعودی»

مشمّل بر: مختصری دربارهٔ کتاب «قانون مسعودی»-موضوع مقالهٔ سوّم آن کتاب و چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر-مقدمهٔ مقالهٔ سوّم «قانون مسعودی» باب اوّل-باب دوّم-باب سوّم-باب چهارم-تحقیقات دیگر بیرونی دربارهٔ تثلیث زاویه-دنبالهٔ باب چهارم-باب پنجم-باب ششم-باب هفتم-سه باب آخر.

الف - مختصری دربارهٔ کتاب «قانون مسعودی»

۸/۱- کتاب «القانون المسعودی» یکی از مهمترین و مفصلترین آثار بیرونی است.^۱ این اثر نفیس و بی‌مانند در حقیقت دایرةالمعارفی است که زبدهٔ معلومات مربوط به هیئت و نجوم و مثلثات کروی و جغرافیای ریاضی عصر بیرونی را دربر دارد و از اُتّهات کتابهایی است که در علوم مذکور در طی قرون متوالی مورد اعتماد و مراجعه و استفادهٔ ریاضیدانان و منجمان بزرگ دورهٔ اسلامی بوده و همواره دانشمندان نکات دقیق و مطالب عمیق آن را مورد بحث و تحقیق قرار داده‌اند.

مثلاً ریاضیدان بزرگ ایرانی غیاث الدین جمشید کاشانی رئیس رصدخانهٔ سمرقند در نامه‌ای که، در حدود چهار صد سال بعد از تألیف «قانون مسعودی» از سمرقند برای پدرش که مقیم کاشان

۱. مفصلترین کتابی که بیرونی در فهرست آثار خود پیش از پایان یافتن «قانون مسعودی» ذکر کرده است کتاب «تحقیق ماللهند» است که عدهٔ اوراق آن را ۷۰۰ ورقه تعیین کرده است. متن کتاب «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد مشتمل بر ۱۴۸۷ صفحه است.

بوده فرستاده است^۲ به‌اینکه نکته‌ای از آن کتاب مورد بحث ریاضیدانان بوده اشاره کرده و نوشته است:^۳

«روزی بندگان حضرت سلطنت^۴، خلدالله ملکه و سلطانه به مطالعه مشغول بود و قاضی زادهٔ رومی در آن مجلس بوده، حوالت برهانی به «قانون مسعودی» کرده بودند. در آن مجلس قانون را حاضر فرمودند، آن برهان را طلبیده در آن (؟)، چون در مجلس محقق نمی‌شد، قاضی زاده قانون را به‌وثاق برده که تحقیق کند، بعد از دو روز باز برده و گفته همانا در این محل تَرکی (= افتادگی) هست که مسئله به‌تمام از آن بیرون نمی‌آید، نسخهٔ دیگر باید طلبید و به آن مقابله کرد. این بنده در آن دو روز به حَمَی یومیّه از خانه بیرون نرفته، در آن حالت پیش رفته بود. هنوز قاضی زاده در مجلس بود، همین که نظر بندگان حضرت سلطنت پناهی بر این بنده افتاد، فرمود که مولانا این مسئله را بیرون آورد و «قانون مسعودی» به‌دست این بنده داد همین که پنج شش سطر از آن مسئله فرو خواند، تمامی مسئله را بیان کرد، و هیچ ترک در آن مسئله نبود ...»

باری، بیرونی این اثر بزرگ را در طی چند سال^۵ فراهم آورده و آن را به سلطان مسعود غزنوی تقدیم کرده است.

۸/۲- نسخهٔ چاپی «قانون مسعودی» - دانشمند آلمانی ماکس کراوزه (Max Krause)، که متأسفانه در سنین جوانی در جنگ بین‌الملل دَوَم کشته شد^۶، متن «قانون مسعودی» را با صرف چند سال وقت تصحیح کرده بود. ولی پیش از آنکه آن متن تصحیح شده را به‌طبع برساند در سال ۱۹۴۳ میلادی در بمباران شهر هامبورگ درگذشت. متن تصحیح شدهٔ او را مادرش در اختیار جمعیت دایرةالمعارف عثمانیه گذاشت و در حیدرآباد دکن در سه جلد در سالهای ۱۹۵۴ و ۱۹۵۶ به‌چاپ رسید. ولی متأسفانه، در نتیجهٔ عدم دقت چاپ‌کنندگان، غلطهای زیادی در این چاپ راه یافته است.

در پایان جلد سَوَم این چاپ دو مقاله به‌زبان انگلیسی یکی به قلم پروفیسور وینتر* با عنوان «مقام قانون مسعودی در تاریخ علم» و دیگری به‌قلم سید حسن برنی** با عنوان «بیرونی و قانون مسعودی وی» به‌چاپ رسیده که بسیار قابل استفاده است.

از «قانون مسعودی» نسخه‌های خطی متعدّد موجود است و دربارهٔ قسمتهایی از مطالب آن چندین مقاله به‌زبانهای اروپایی نوشته شده است.^۷

۲. دربارهٔ این نامه — «قربانی: کاشانی نامه» ص ۳ به‌بعد.

۳. — «مجلهٔ آموزش و پرورش» سال دهم، شمارهٔ سَوَم، صفحهٔ ۱۲.

۴. مقصود العنیک است.

۵. در بین سالهای ۴۲۱ و ۴۲۷ ه. ق.

۶. از این دانشمند یک مقاله دربارهٔ بیرونی و یک مقالهٔ پرارزش دربارهٔ معرفی نسخه‌های خطی ریاضی کتابخانه‌های استانبول باقی مانده است. — «ایندکس اسلامیکوس» جلد اول شماره‌های ۴۶۶۲، ۵۴۶۷.

* H. J. J. Winter ** S. H. Barani

۷. — «بوآلول» صص ۲۱۰ و ۲۱۱- در آنجا بوآلول فهرست مقالاتی را که تا سال ۱۹۵۵ میلادی دربارهٔ «قانون

۸/۳. فهرست مختصری از مندرجات «قانون مسعودی» - کتاب «قانون مسعودی» مشتمل بر یازده «مقاله» است و هر مقاله آن به چندین «باب» تقسیم شده است. بیرونی خود برای مقالات یازدهگانه این کتاب عناوین جداگانه‌ای اختیار نکرده و فقط فهرست عنوانهای بابهای هر مقاله را آورده است.

نالیانو* دانشمند خاورشناس ایتالیایی در کتاب نفیس «علم الفلك» مباحث مقالات یازدهگانه «قانون مسعودی» را به صورت زیر خلاصه کرده است:^۸ (شماره صفحاتی که در دنبال شماره هر مقاله ذکر کرده‌ام برای ارجاع به «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد است.)

مقاله اول (صص ۲۱ تا ۹۳):^۹ اصول و مبادی علم هیئت به اجمال و اختصار.
مقاله دوم (صص ۹۴ تا ۲۷۰): گاهشماری اقوام و ملل مختلف و تطبیق آنها با یکدیگر.
مقاله سوم (صص ۲۷۱ تا ۳۶۰): علم مثلثات و مخصوصاً مثلثات کروی.^{۱۰}
مقاله چهارم (صص ۳۶۱ تا ۵۰۵): دایره‌های کره آسمانی و مختصات که از آنها حاصل می‌شود، و آنچه به سبب حرکت روزانه ظاهری کره آسمان برگرد زمین پدید می‌آید، همچون مطالع بروج در فلک مستقیم و وسعت مشارق و مغارب و ارتفاعهای خورشید در اقلیمهای مختلف و سپس شناسایی عرضهای بلاد به وسیله سایه‌های مقیاسها (المقیاس) و آنچه بدان ماند.
مقاله پنجم (صص ۵۰۶ تا ۶۰۵): صورت زمین و ابعاد آن و چگونگی اندازه گرفتن طولهای بلاد و محاسبه مسافت میان دو شهر که طول و عرض آنها معلوم است و جهت قبله و مسایل گوناگون مربوط به طول و عرض جغرافیایی و تقسیم زمین به اقالیم و تعیین طول و عرض شهرهای معروف.
مقاله ششم (صص ۶۰۶ تا ۷۲۴): حرکات خورشید و کیفیت بیان کردن آنها وسیله اشکال هندسی.

مقاله هفتم (صص ۷۲۵ تا ۸۷۴): حرکات ماه و توضیح آنها به وسیله اشکال هندسی و بیان اختلاف منظرهای ماه در ارتفاع و طول و عرض.

مقاله هشتم (صص ۸۷۵ تا ۹۸۵): اتصالات تیرین [= خورشید و ماه] و کسوفهای آنها و محاسبه رؤیت هلال.

مقاله نهم (صص ۹۸۶ تا ۱۱۵۸): ستارگان ثابت و منازل قمر در آنها.

مقاله دهم (صص ۱۱۵۹ تا ۱۳۵۳): حرکات پنج ستاره سرگردان [= سیارات] از حیث طول

→ مسعودی» نوشته شده آورده است. باید آن فهرست را با مراجعه به متممهای اول و دوم کتاب «ایندکس اسلامیکوس» کامل کرد - و نیز - قسمت زبانهای اروپایی در کتاب «نصر: کتابشناسی بیرونی».

* Carlo Alfonso Nallino

۸. ← «تاریخ نجوم اسلامی» صص ۴۸ و ۴۹.

۹. این مقاله دارای یازده باب است و باب سوم آن (صص ۵۴ تا ۶۳) در تعریف دایره‌ها و کمانهای سماوی است و مطالعه آن برای کسانی که بخواهند با تعاریف مقدّماتی علم هیئت قدیم آشنا شوند یکی از منابع بسیار مفید است. عنوان این باب این است: «فی اقتصاص الدوائر السماویة و صفة القابها للتعریف فی الاستعمال».

۱۰. این مقاله را در بند «ج» از همین بخش از کتاب حاضر مورد بحث قرار داده‌ام (شماره ۸/۱۰ به بعد).

و عرض و بیان آن به شکل هندسی و ایستادن و رجوع این ستارگان و فواصل آنها از زمین و بزرگی و پیدایی و ناپیدایی آنها و پوشیده شدن بعضی از آنها به بعضی دیگر.

مقالهٔ یازدهم (صص ۱۳۵۴ تا ۱۴۸۲): مسایلی از حساب مثلثات کروی و علم هیئت کروی که اصحاب احکام نجوم برای کارهایی که می‌کنند به آنها نیاز دارند، همچون: تسویه بیوت دوازدهگانه و محاسبهٔ اتصالات کواکب و مطارج شعاع و تسیر و تبدیل سالهای عالم و مولید و انتهایات و ممرات و جز اینها.

ب - موضوع مقالهٔ سوّم «قانون مسعودی» و چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر

۸/۴ - موضوع مقالهٔ سوّم^{۱۱} کتاب «قانون مسعودی» بحث در مثلثات و مخصوصاً مثلثات کروی است که اساس ریاضی همهٔ استدلالهای علم هیئت و نجوم است، و می‌توان این مقاله را خلاصه‌ای از علم مثلثات دانست که در هیئت و نجوم مورد نیاز است.

البته چون در تألیف کتاب «قانون مسعودی» بنای کار بیرونی بر مراعات جانب اختصار بوده است^{۱۲}، تا بتواند آن همه مطالب مهم و متنوع را در یک کتاب بگنجاند، در مقالهٔ سوّم آن نیز بیشتر به مطالب مورد نیاز پرداخته است. و در مورد قضایای مهمی که در تألیفات دیگر خود به تفصیل آنها را مورد بحث قرار داده، و برای هر یک از آنها چندین استدلال ذکر کرده است، در این مقاله به مناسبت مقام برای هر قضیه ساده‌ترین استدلال را ذکر کرده تا مطلب به درازا نکشد. و این خود نشانهٔ بارزی از هنر بیرونی در فن تصنیف و تألیف است.

۸/۵ - متن عربی این مقاله در سال ۱۹۶۵ میلادی جداگانه با عنوان «المقالة الثالثة من القانون المسعودی» در قاهره به چاپ رسیده است^{۱۳} ولی متأسفانه من به آن دسترسی پیدا نکردم و همان متن «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد را مورد استفاده قرار دادم و غلطهای چاپی آن را تصحیح کردم.

۸/۶ - این مقاله را دانشمند آلمانی کارل شوی* در سال ۱۹۲۴ میلادی به زبان آلمانی ترجمه کرد و ترجمهٔ او، متأسفانه پس از درگذشت وی، توسط روسکا (J. Ruska) و ویلایتر** در سال ۱۹۲۷ در هاننور با عنوان «تعالیم منجم ایرانی ابوریحان بیرونی در مثلثات» به چاپ رسید.^{۱۴}

کارل شوی با ترجمهٔ آلمانی این مقاله از «قانون مسعودی» خدمت بزرگی در شناساندن

۱۱. در چاپ حیدرآباد این مقاله در نود صفحه است (از ۲۷۱ تا ۳۶۰) که هیجده صفحهٔ آن از (۳۰۸ تا ۳۲۵) جدول جیبها و شش صفحهٔ آن (از ۳۴۱ تا ۳۴۵) جدول ظلهاست.

۱۲. چنانکه خود فرموده است: «وقد كان من شرطنا الاقتصار في كل مطلب على طريق واحد مهما كان مهبطاً على القوانين الهندسية» («قانون مسعودی» ص ۲۸۷).

۱۳. ← نصر: «کتابشناسی بیرونی» ص ۱۲.

* C. Schoy ** H. Wieleitner

۱۴. ← «شوی T» در فهرست منابع کتاب حاضر.

شخصیت ریاضی بیرونی به دانشمندان مغرب زمین انجام داد. مثلاً دانشمند فقید جرج سارتن که جلد اول اثر ارجمند و نفیس خود «مقدمه تاریخ علم» را در سال ۱۹۲۷ میلادی منتشر ساخت، با وجود آنکه به مناسبت اهمیت مقام علمی بیرونی نیمه اول قرن یازدهم میلادی را در آن کتاب «عصر بیرونی» نامیده و درباره زندگی و آثار وی بحث کرده بود^{۱۵}، پس از انتشار ترجمه مذکور نوشت که ای کاش این ترجمه را قبلاً دیده بود تا بهتر بتواند مقام بیرونی را در ریاضیات معرفی کند.^{۱۶}

اگر چه ترجمه آلمانی کارل شوی در بعضی از مواضع (ظاهراً به علت نقص نسخه های خطی «قانون مسعودی» که وی در اختیار داشته) احتیاج به تصحیح دارد ولی زحمتی را که برای این ترجمه متحمل شده شایان تحسین است و من از ترجمه وی در نوشتن این بخش از کتاب حاضر استفاده فراوان کرده ام (اگر چه در تفسیر و شرح مطالب در بسیاری از مواضع از وی تبعیت نکرده ام). ۸/۷- و نیز آقای م. ا. کاظم* در طی مقاله مختصری که در سال ۱۹۵۱ میلادی با عنوان «بیرونی و مثلثات» نوشت^{۱۷} اهمیت مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» را از جهت تاریخ علم مثلثات مورد بحث قرار داد و بحق اظهار نظر کرد که بیرونی قبل از نصیرالدین طوسی مثلثات را به صورت علمی مستقل در آورد.

۸/۸- فهرست مطالب مقاله سوم از کتاب «قانون مسعودی» - مقاله سوم «قانون مسعودی» مشتمل بر نه باب است به شرح زیر (شماره صفحاتی که در پایان عنوان هر باب آورده ام شماره صفحه ای از «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد است که آن باب در آن آغاز می شود):
باب اول- در محاسبه وترهای مهم (فی امتهات الاوتار و استخراجها: ص ۲۷۱).
باب دوم- در محاسبه توابع وترهای مهم (فی توابع امتهات الاوتار: ص ۲۸۰).
باب سوم- چگونگی محاسبه ضلع نه ضلعی منتظم محاطی (فی التمثل لاستخراج وتر التسع: ص ۲۸۶).

باب چهارم- چگونگی محاسبه وتر یک درجه (فی التمثل لاستخراج وتر الجزء الواحد من ثلثائة وستين جزء ۱: ص ۲۹۲).

باب پنجم- در نسبت بین قطر و محیط دایره (فی النسبة التي بين القطر و بين الدور ص ۳۰۳).

باب ششم- در اختیار عدد قطر به منظور محاسبه وترهای دایره برحسب آن (فی اختیار عدد القطر يكون تقطیع الاوتار بحسبه: ص ۳۰۵).

باب هفتم- دریافتن جیب کمانی که اندازه وتر آن معلوم باشد و یافتن اندازه کمانی که جیب

۱۵- «سارتن I» ج ۱، ص ۷۰۷.

۱۶- مجله «ایسیس» ج ۱۰، سال ۱۳۲۸، ص ۴۹۵.

آن معلوم باشد (فی التجییب و التقویس: ص ۳۲۶).

باب هشتم- در تعیین سایه‌های مقیاسها در نور و تعریف انواع ظل و استعمال آنها (فی اظلال الاشخاص^{۱۸} فی الضیاء و تعریف انواع الظل و استعماله: ص ۳۳۲).

باب نهم- در شکل قطاع کروی و نسبت‌هایی که بین جیبهای آن موجود است (فی الشكل القطاع الکری و النسب الواقعة بین جیوبه: صفحات ۳۵۴ تا ۳۶۰).

تبصره- در صفحهٔ ۳۵۹ «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد آمده است: «الباب العاشر فی النسب الواقعة فی القطاع بین الجیوب و الأظلال» ولی این در واقع فصلی از همان باب نهم است و عنوان «الباب العاشر» را ظاهراً نسخه نویسان به متن کتاب افزوده‌اند و این مطلب کاملاً از فهرستی که در مقدمهٔ کتاب آمده پیداست.

۸/۹- چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر- در صفحات آیندهٔ این بخش کوشیده‌ام تا مطالب هفت باب اول مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی» را که از جهت تاریخ ریاضیات اهمیت فراوان دارد به زبان ریاضی امروزی برگردانم، به‌وجهی که فهم آنها برای دانش‌آموزان و دانشجویان فارسی زبان میسر و آسان باشد. خاطرنشان می‌کنم که آنچه در صفحات آینده آمده است ترجمهٔ تحت اللفظی متن «قانون مسعودی» نیست، بلکه بجای آنکه عبارات عربی را به فارسی برگردانم، مفهوم آنها را با علائم و اصطلاحات ریاضی کنونی بیان کرده‌ام. و در اغلب موارد عین عبارات عربی را در ذیل صفحات آورده‌ام تا اگر کسی خواست بتواند به آنها رجوع کند. ضمناً هر جا لازم بوده است، بدون آنکه از خود چیزی به آنچه بیرونی گفته است بیفزایم، به اندازهٔ کافی برای روشن شدن مطلب توضیح داده‌ام. و چون برخی از مطالب مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی» از نظر تاریخ ریاضیات حائز اهمیت است در مواقع مناسب و مقتضی از ذکر نکات تاریخی به عنوان تبصره کوتاهی نکرده‌ام.

دنبالهٔ این بخش از کتاب حاضر را که در حقیقت شرح هفت باب اول از مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی» است به هفت باب تقسیم کرده‌ام. اما چون مطالب بابهای هشتم و نهم آن مقاله در کتاب «مقالید علم الهیة» بیرونی با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار گرفته و در بخش هفتم کتاب حاضر آنها را بررسی کرده و در آنجا به مطالب این دو باب نیز اشاره کرده‌ام در این بخش از تکرار آنها خودداری نموده‌ام.

شاید بتوان گفت که مطالبی که دربارهٔ مثلثات در بخش هفتم کتاب حاضر گذشت و آنچه از اینجا تا پایان این بخش در این باره آمده شامل همهٔ موضوعهای مهمی است که بیرونی در آثار خود راجع به علم مثلثات آورده است.

۱۸. در اینجا مقصود از «اشخاص» شاخصها و به معنی «مقایس» جمع «مقیاس» است.

ج - بررسی مقدمه مقاله سوم «قانون مسعودی»

۸/۱۰- مقدمه بیرونی در آغاز این مقاله نوشته است^{۱۹} که در صناعت نجوم عملی، برای اندازه‌گیری کمانهای دایره عملاً به اعداد نیازمندیم. و اهل فن کتابهایی را که در این باره تألیف می‌شود زیجات^{۲۰} نامیده‌اند، از زین (= زیک) که به فارسی زه می‌گویند یعنی وتر. و اسم وتر به هندی جیبا^{۲۱} و نصف آن جیبارد است. اما هندیان چون فقط نصف وترها را استعمال می‌کنند، از جهت تخفیف در لفظ، اسم وتر را به جای نصف آن به کار می‌برند.

عده‌ای از وترهای دایره به منزله پایه‌هایی هستند که بقیه وترها بر آنها بنا می‌شوند و اینها قائم مقام کسرهایی هستند که مخرج‌هایشان از ۲ تا ۱۰ است. و همان‌گونه که کسرهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{6}$ را رؤوس می‌نامند این وترها را وترهای مهم (= امتهات اوتار) می‌گویند.

۸/۱۱- تبصره - چنانکه ملاحظه می‌شود قدما کسرهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{6}$ را که به زبان عربی به ترتیب نصف و ثلث و ربع و ... و عشر خوانده می‌شوند، رؤوس می‌نامیدند.

در زمان کاشانی هر کسری که صورتش عدد یک بود کسر مجرّد خوانده می‌شد.^{۲۲} مانند $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و غیره. کسرهای مجرّد را که به انگلیسی Unit fractions ترجمه کرده‌اند مصریان قدیم به کار می‌بردند. آنان هر کسر را به استثنای کسر $\frac{2}{3}$ به مجموع چند کسر مجرّد تبدیل می‌کردند. مثلاً کسر $\frac{4}{9}$ را به شکل $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ می‌نوشتند.^{۲۳} این عمل به وسیله جدولهای مخصوصی انجام می‌گرفت.

د - باب اول از مقاله سوم «قانون مسعودی»

در استخراج وترهای مهم^{۲۴}

۸/۱۲- بیرونی در آغاز این باب نوشته است^{۲۵}: ناچاریم که در این موضع قطر دایره را برحسب عدد [یعنی اندازه قطر دایره را] معلوم فرض کنیم تا بتوانیم اندازه وترهای دیگر را برحسب آن به دست آوریم. درباره کمیّت قطر دایره بعداً تحقیق خواهیم کرد. اگر چه قطر دایره را در محاسبه معلوم فرض می‌کنیم ولی واضح است که قطر نظیر کسر $\frac{1}{2}$ می‌باشد زیرا قطر، وتر روبه‌روی نصف دایره است. درباره وترهای نظیر کسرهای مهم دیگر یعنی $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{6}$ ذیلاً گفتگو خواهیم کرد.

پس از پایان مقدمه فوق بیرونی ابتدا دستور عملی محاسبه وترهای مهم را برحسب

۱۹. «قانون مسعودی» ۲۷۱: «ان هذه الصناعة اذا اريد اخراجها الى الفعل ...».

۲۰. ← لغت «زیج» در «دایرةالمعارف فارسی» و نیز در «لغت‌نامه».

۲۱. ← لغت «جیب» در «دایرةالمعارف فارسی».

۲۲. ← «قربانی: کاشانی نامه» ص ۹۸.

۲۳. ← «ایوز H» ص ۴۰.

۲۴. الباب الأول فی امتهات الاوتار و استخراجها.

۲۵. «قانون مسعودی» ص ۲۷۱: «لا بدّلنا فی هذاالموضع من فرض قطر الدایره معلوما بعدد...».

قطر (یا شعاع) بیان می‌نماید و یا عدم امکان محاسبهٔ آنها را گوشزد می‌کند و سپس به برهان صحت این دستورها می‌پردازد.

۸/۱۳- وتر یک سَوَم دایره^{۲۶} - «برای یافتن وتر یک سَوَم دایره، قطر را در نصف مجموع آن با نصف خودش ضرب کرده جذر مقدار حاصل را می‌گیریم. و یا اینکه قطر را در $\frac{۲}{۴}$ خودش ضرب کرده جذر مقدار حاصل را استخراج می‌کنیم.»
اگر قطر دایره را d و وتر یک سَوَم دایره یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی را $C_۲$ بنامیم دستور فوق چنین نوشته می‌شود:

$$C_۲ = \sqrt{d \left(\frac{d + \frac{d}{۲}}{۲} \right)} = \sqrt{d \times \frac{۳}{۴}d}$$

(برای اثبات صحت این دستور ← ۸/۲۵). اگر شعاع دایره را r بنامیم واضح است که دستور فوق معادل است با:

$$C_۲ = r\sqrt{۳}$$

۸/۱۴- وتر یک چهارم دایره^{۲۷} - «برای یافتن وتر یک چهارم دایره (یعنی ضلع مربع محاطی) جذر نصف حاصل ضرب قطر را در خودش می‌گیریم.»
اگر قطر دایره را d و وتر یک چهارم دایره یعنی ضلع مربع محاطی را $C_۴$ بنامیم دستور فوق چنین نوشته می‌شود:

$$C_۴ = \sqrt{\frac{d \times d}{۲}} = \sqrt{\frac{d^۲}{۲}}$$

(برای اثبات صحت این دستور ← ۸/۲۶). و می‌دانیم که دستور فوق را امروزه برحسب شعاع r به صورت $C_۴ = r\sqrt{۲}$ می‌نویسند.

۸/۱۵- وتر یک پنجم دایره^{۲۸} - «برای یافتن وتر یک پنجم دایره قطر را در خودش و سپس در عدد ۵ ضرب کرده حاصل را بر ۱۶ تقسیم می‌کنیم و جذر این مقدار را گرفته یک چهارم قطر را از آن می‌کاهیم و حاصل را به قوهٔ ۲ می‌رسانیم و این حاصل را با مربع شعاع جمع می‌کنیم و جذر مقدار حاصل را می‌گیریم.»

۲۶. «قانون مسعودی» ص ۲۷۱: «فاذا اردنا وتر ثلث الدور ضربنا القطر فی...».

۲۷. «قانون مسعودی» ص ۲۷۲: «واذا اردنا وتر الربع اخذنا...».

۲۸. «قانون مسعودی» ص ۲۷۲: «واذا اردنا وتر الخمس ضربنا القطر فی...».

به فرض آنکه قطر دایره d باشد و تریک پنجم دایره یعنی ضلع پنج ضلعی منتظم محاطی که آن را C_5 می‌نامیم، مطابق با دستور فوق، چنین نوشته می‌شود:

$$C_5 = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5d^2}{16}} - \frac{d}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

(برای اثبات صحت این دستور $\leftarrow 8/31$) و می‌دانیم که این دستور را امروزه برحسب شعاع r چنین می‌نویسند:

$$C_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

۸/۱۶- و تریک ششم دایره^{۲۹} - «اما و تریک ششم دایره مساوی است با نصف قطر (یعنی شعاع) و آن مساوی با فاصله دو سر پرگاری است که با آن دایره را رسم کرده‌ایم.»
یعنی اگر شعاع دایره را r و ضلع شش ضلعی منتظم محاطی را، که و تریک ششم دایره است، C_6 بنامیم داریم:

$$C_6 = r$$

۸/۱۷- و تریک هفتم دایره^{۳۰} - بیرونی نوشته است: «تا کنون در زمان ما راهی برای یافتن اندازه و تریک هفتم دایره پیدا نشده است. و در نجوم هم احتیاجی به دانستن اندازه آن برحسب اعدادی که برای اندازه‌گیری دایره و اجزای آن به کار می‌رود نیست.»

تبصره - می‌دانیم که در مقاله چهارم «اصول اقلیدس» روش محاط کردن مثلث و مربع و پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم و پانزده ضلعی منتظم در دایره به وسیله ستاره و پرگار بیان شده است. پس به وسیله نصف کردن پی‌درپی زاویه یا کمان می‌توانیم چندضلعیهای منتظمی که عده اضلاع آنها 2^n یا $2^n \times 3$ یا $2^n \times 5$ یا $2^n \times 15$ باشد نیز در دایره محاط کنیم. تقریباً تا قرن نوزدهم میلادی روش محاط کردن هیچ‌یک از چندضلعیهای دیگر به وسیله ستاره و پرگار در دایره شناخته نشده بود. در سال ۱۷۹۶ میلادی ریاضیدان بزرگ آلمانی کارل فریدریک گاوس (Carl Friedrich Gaus) نشان داد که چندضلعی منتظمی را که عده اضلاعش عدد اول باشد فقط در صورتی به وسیله ستاره و پرگار می‌توان در دایره محاط کرد که عده اضلاع آن به صورت:

$$f(n) = 2^{(2^n)} + 1$$

۲۹. «قانون مسعودی» ص ۲۷۲: «و اما وتر السدس فهو مسا و لنصف القطر...».

۳۰. «قانون مسعودی» ص ۲۷۲: «معرفة وترالسبع - هذا...».

باشد^{۳۱}. به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4$ به ترتیب حاصل می شود:

$$f(n) = 3, 5, 17, 257, 65537$$

که همه عدد اول هستند. بنابراین چندضلعیهای منتظمی را که عددهٔ اضلاعشان اعداد ۱۷ یا ۲۵۷ یا ۶۵۵۳۷ باشد نیز می توان به وسیلهٔ ستاره و پرگار در دایره محاط کرد و این را یونانیان نمی دانستند. تاکنون جز مقادیر فوق برای $f(n)$ هیچ مقدار اولی شناخته نشده است.

بیرونی گفته است که تا عصر روی راهی برای یافتن و تریک هفتم دایره یعنی ضلع هفت ضلعی منتظم محاطی شناخته نشده بوده است و بنابر آنچه گذشت می دانیم که در زمان ما هم چنین روشی با استفاده از ستاره و پرگار در دست نیست، همان گونه که مثلاً برای محاط کردن نه ضلعی منتظم به وسیلهٔ ستاره و پرگار در دایره راهی نمی شناسیم.

مقصود بیرونی از اینکه می گوید، در نجوم احتیاجی به یافتن اندازهٔ و تریک هفتم دایره برحسب اعدادی که برای اندازه گرفتن دایره به کار می رود نیست، این است که چون در نجوم کسرهایی شصتگانی به کار می رود احتیاجی به اندازهٔ ضلع هفت ضلعی منتظم محاطی یعنی و تریک هفتم دایره نیست. زیرا عدد ۷ مخرج هیچ یک از کسرهایی شصتگانی نیست، یعنی عدد ۶۰ را نمی شمرد و احتیاجی پیدا نمی کنیم که برای محاسبهٔ وترهای دیگر اندازهٔ C_7 را بدانیم.

(بعداً در شمارهٔ ۸/۱۹ خواهیم دید که برای C_9 این طور نیست).

۸/۱۸. و تریک هشتم دایره^{۳۲}. «برای یافتن و تریک هشتم دایره نصف قطر را در تفاضل نصف قطر و و تریک چهارم دایره ضرب می کنیم و این حاصل را از مربع نصف قطر کم کرده جذر حاصل را می گیریم تا و تریک هشتم دایره حاصل شود».

اگر شعاع دایره را r بنامیم برای محاسبهٔ و تریک هشتم دایره یعنی ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی که آن را C_8 می نامیم مطابق با دستور فوق داریم:

$$C_8 = \sqrt{r^2 - r(r\sqrt{2} - r)}$$

(برای اثبات صحت این دستور $\leftarrow 8/32$). می دانیم که امروزه این دستور را به صورت $C_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ می نویسند.

۸/۱۹. و تریک نهم دایره^{۳۳}. «وتریک نهم دایره نیز از جهت اینکه راهی برای یافتن آن در دست نیست، مانند و تریک هفتم دایره است. اما در صورتی که در نجوم احتیاجی به و تریک هفتم

۳۱. $\leftarrow$ «ایوز H » ص ۱۲۳.

۳۲. «قانون مسعودی» ص ۲۷۲: «اذا اردنا وتر الثمن ضربنا نصف القطر فی فضل ما بینہ و بین (*) و ترالرربع والقینا...» در نسخهٔ چاپی در این عبارت آنجا که علامت (*) گذاشته ام کلمهٔ «ضعف» نوشته شده و زیادی است.

۳۳. «قانون مسعودی» ص ۲۷۳: «حال وتر التسع کحال وتر السبع...».

دایره نیست، نیاز به وتر یک نهم دایره زیاد است. بعداً تدابیری را که برای محاسبه آن به کار می رود خواهیم دید.»

تبصره - در تبصره ذیل شماره ۸/۱۷ دیدیم که نه ضلعی منتظم محاطی را نمی توان به وسیله ستاره و پرگار در دایره محاط کرد. بیرونی می گوید که در صورتی که در نجوم احتیاجی به C_7 نداریم (زیرا عدد ۷ مخرج کسرهای شصتگانی را نمی شمرد) اما احتیاج به محاسبه (تقریبی) C_9 زیاد است. برای این محاسبه تقریبی $\leftarrow ۸/۴۱$.

۸/۲۰ - وتر یک دهم دایره^{۳۴} - «اما محاسبه وتر یک دهم دایره در ضمن محاسبه وتر یک پنجم دایره معلوم خواهد شد.»

تبصره - اگر چه در اینجا بیرونی دستور جداگانه ای برای محاسبه ضلع ده ضلعی منتظم، که آن را C_{10} می نامیم، بیان نکرده اما چنانکه خواهیم دید (شماره ۸/۲۹) این دستور را در ضمن مطالب دیگر آورده است. ضمناً صحت رابطه $r^2 = (C_5)^2 + (C_{10})^2$ را ثابت کرده (شماره ۸/۳۰) و گفته است که هرگاه یکی از دو مقدار C_5 یا C_{10} معلوم باشد دیگری را می توان با استفاده از رابطه فوق حساب کرد.^{۳۵}

با این حال بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» دستور زیر را برای محاسبه وتر یک دهم دایره یعنی C_{10} آورده است:^{۳۶}

«برای محاسبه وتر یک دهم دایره مربع نصف قطر را با یک چهارم آن جمع کرده از جذر این مقدار یک چهارم قطر دایره را کم می کنیم.»
اگر قطر دایره را d بنامیم مطابق با دستور فوق داریم:

$$C_{10} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{4}$$

(برای اثبات صحت این دستور $\leftarrow ۸/۲۹$).

پس از بیان دستورهای فوق، بیرونی به اثبات صحت آنها می پردازد. و برای این کار سه قضیه مقدماتی ذکر می کند و سپس از آنها برای ثابت کردن دستورهای مذکور استفاده می کند. این سه قضیه مقدماتی از جمله همان قضایایی هستند که بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» ذکر کرده که در بند سوم بخش ششم کتاب حاضر

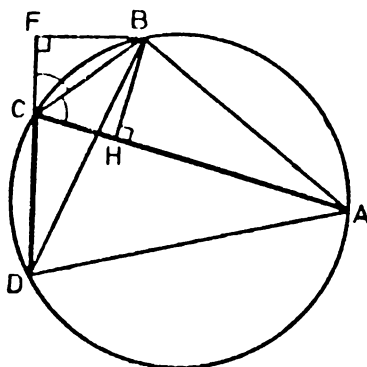
۳۴. «قانون مسعودی» ص ۲۷۳: «اما وتر العشر فهو المحفوظ فی عمل وتر الخمس».

۳۵. و نیز $\leftarrow ۸/۲۸$.

۳۶. «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۸۵ و ۸۶: «معرفة وتر العشر فی الدائرة... و حسابها ان یزاد علی مضروب نصف القطر فی نفسه...».

نقل شد. اما از همهٔ استدلالهایی که در کتاب «استخراج الاوتار» برای هریک از این قضایا آمده، بیرونی در کتاب قانون مسعودی فقط یکی از آنها را انتخاب و شرح داده است و بمنظور جامع بودن این بخش از کتاب حاضر آنها را در اینجا تکرار می‌کنم.

۸/۲۱- قضیةٔ مقدماتی اول از ارشمیدس^{۳۷} - اگر خط شکسته ACD در کمان دایرة ACD محاط باشد و از وسط کمان ACD که آن را نقطهٔ B می‌نامیم عمود BH را بر ضلع بزرگتر خط شکسته فرود آوریم، نقطهٔ H پای این عمود وسط خط شکسته خواهد بود. برهان قضیةٔ اول- نقطهٔ B وسط کمان ACD است و از نقطهٔ B عمود BH را بر AC که ضلع بزرگتر خط شکستهٔ ACD است فرود آورده‌ایم. می‌خواهیم ثابت کنیم که: $AH = HC + CD$. (شکل ۱۰۲).



شکل ۱۰۲

از نقطهٔ B عمود BF را بر خط راست CD فرود می‌آوریم و پاره‌خطهای AB و BC و BD را رسم می‌کنیم. چون اندازهٔ زاویهٔ محاطی BCD مساوی با نصف اندازهٔ کمان BAD است، پس اندازهٔ زاویهٔ BCF که مکمل زاویهٔ BCD است مساوی است با اندازهٔ نصف کمان BCD . اما اندازهٔ زاویهٔ محاطی BCA مساوی است با نصف اندازهٔ کمان BA و از طرف دیگر $\widehat{BA} = \widehat{BCD}$ پس:

$$\widehat{BCA} = \widehat{BCF}$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCF و BCH در حالت وتر و یک زاویهٔ حادّه با هم مساویند و بنابراین $FB = BH$ و $CH = CF$.

۳۷. این قضیه در «قانون مسعودی» ص ۲۷۳ چنین بیان شده است: «مقدمة لارشمیدس مبرهنة بغیر برهانه...».

حال گوئیم دو مثلث قائم الزاویه ABH و DBF متساویند (زیرا $AB=BD$ و $\widehat{H}=\widehat{F}=90^\circ$ و $BH=BF$) بنابراین $AH=DF$. اما $CH=CF$ بنابراین $AH=FC+CD=CH+CD$ یعنی نقطه H وسط خط شکسته ACD و قضیه ثابت است.

۸/۲۲- قضیه مقدماتی دوم^{۳۸}- بیرونی با در نظر گرفتن همان مفروضات قضیه اول می‌گوید: دو وتر AC و CD که رو به رو به دو قسمت کمان ACD هستند همان خاصیتی را دارند که پاره‌خطی که به دو پاره نامتساوی تقسیم شود دارد،^{۳۹} و این خاصیت این است:

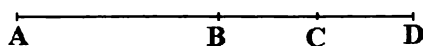
$$AC \cdot CD + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

برهان قضیه دوم^{۴۰}- (فرض این قضیه این است: خط شکسته ACD در کمان دایره ACD محاط شده و $AC > CD$ و نقطه B وسط کمان ACD است.) از نقطه B عمود BF را بر خط راست CD فرود می‌آوریم. در مثلث BCD زاویه C منفرجه و پاره خط CF تصویر ضلع BC روی خط راست CD است و داریم: (شکل ۱۰۴)

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 + 2DC \cdot CF \quad (۱)$$

اکنون اگر پاره خط CF را از طرف F به اندازه خودش امتداد دهیم تا نقطه T به دست آید ($CF = FT$) نقطه F وسط پاره خط CT خواهد بود و پاره خط CT در نقطه D به دو پاره خط

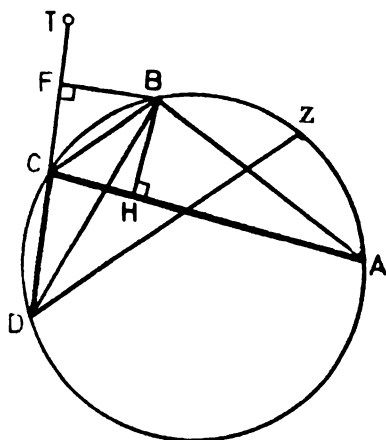
۳۸. «قانون مسعودی» ص ۲۷۴: «واقول ان هذه القوس فی اوتار اقسامها...».
 ۳۹. مقصود بیرونی قضیه پنجم از مقاله دوم کتاب اصول اقلیدس است و آن قضیه این است: اگر پاره خط AD را در نقطه C به دو پاره خط نامتساوی تقسیم کنیم و وسط AD را نقطه B بنامیم رابطه زیر برقرار است:



شکل ۱۰۳

$$AC \cdot CD + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

← «هیث E» ج ۱، ص ۳۸۲. در آنجا بحث جالب توجهی درباره این قضیه خواهید یافت.
 ۴۰. بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» ده برهان مختلف برای این قضیه ذکر کرده است.



شکل ۱۰۴

نقصانی تقسیم می‌شود و (بنابه قضیهٔ ششم از مقالهٔ دوم کتاب «اصول اقلیدس»)^{۴۱} داریم:

$$TD \times DC + \overline{CF}^2 = \overline{FD}^2 \quad (۲)$$

اما

$$FD = FC + CD$$

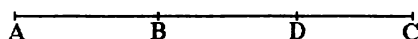
پس:

$$\overline{FD}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD \times FC$$

نابراین رابطهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$TD \times DC + \overline{CF}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{CD}^2 + 2CD \times FC$$

۴۱. قضیهٔ ششم مقالهٔ دوم کتاب «اصول اقلیدس» این است:



شکل ۱۰۵

اگر نقطهٔ B وسط پاره خط AD و نقطهٔ C روی خط AD و در خارج از پاره خط AD باشد رابطهٔ زیر برقرار است:
 $\overline{BC}^2 = AC \times CD + \overline{AB}^2 \leftarrow$ «هیث E» ج ۱، ص ۳۸۵ در آنجا بحث جالب توجهی دربارهٔ این قضیه خواهد یافت.

و یا

$$TD \times DC = \overline{CD}^2 + 2CD \times FC$$

اما $TD = AC$ ، زیرا اگر روی کمان AB کمان AZ را مساوی با کمان CD جدا کرده و وتر DZ را رسم کنیم، واضح می‌شود که AC و DT هر دو با DZ مساوی هستند (DT و DZ) نسبت به خط DB قرینه یکدیگرند) پس داریم:

$$AC \times DC = \overline{CD}^2 + 2CD \times FC \quad (۳)$$

اکنون اگر در رابطه (۱) به جای BD مقدار مساوی آن AB را قرار دهیم و به جای $\overline{DC}^2 + 2DC \times CF$ از روی رابطه (۳) مقدار مساوی آن $AC \times DC$ را بگذاریم حاصل می‌شود:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + AC \times CD$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.
۸/۲۳- قضیه مقدماتی سوم^{۴۲}- اگر نقطه B وسط کمان AD از دایره باشد و کمان DC را به کمان AD بیفزاییم رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$AC \times CD + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$$

و یا

$$AC \times CD + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

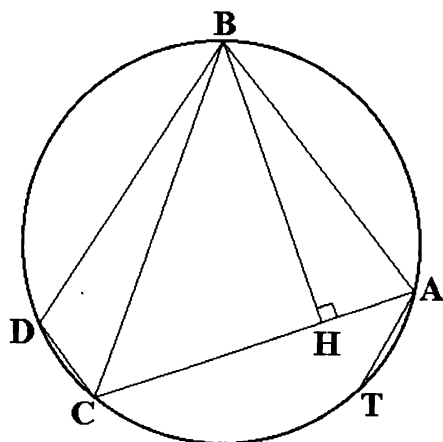
در حقیقت این قضیه و قضیه دوم یکی هستند با این تفاوت که در قضیه دوم نقطه C روی کمان ABD جا دارد و در این قضیه نقطه C روی دایره خارج از کمان ABD واقع است. برهان قضیه سوم- مطابق با شکل ۱۰۶ کمان AT را مساوی با کمان DC اختیار کرده و ترها را رسم می‌کنیم. در این صورت می‌بینیم که خط شکسته CAT در کمان CBT محاط شده و نقطه B وسط این کمان است. پس بنابر قضیه دوم داریم:

$$AC \times AT + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

اما $AT = CD$ و $AB = BD$ پس تساوی فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$AC \times CD + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$$

۴۲. «قانون مسعودی» ص ۲۷۴: «وفی قوة هذا الشكل ان قوس اد...».



شکل ۱۰۶

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۸/۲۴- تبصره- بیرونی در پایان برهان قضیهٔ فوق مطالبی افزوده که هم بسیار جالب توجه است و هم احتیاج به شرح و توضیح دارد:

«اگر عمود BH را بر وتر AC فرود آوریم خط شکستهٔ CAT در نقطهٔ H نصف خواهد شد. یعنی $CH = HA + AT$ (و یا $CH = HA + CD$).^{۴۳} این گفتهٔ بیرونی بنابر قضیهٔ اول واضح است، زیرا در شکل ۱۰۶ کمان CAT در نقطهٔ B نصف شده و از وسط آن یعنی نقطهٔ B عمود BH را بر ضلع بزرگتر خط شکستهٔ CAT که AC است فرود آورده‌ایم.

مقصود بیرونی از اینکه در دنبال عبارت فوق افزوده است که «و آن کان تنصیفه ایاه علی صورة اخرى» این است که در شکل ۱۰۴ نقطهٔ H وسط خط شکستهٔ ACD است ولی در شکل ۱۰۶ دیگر نقطهٔ H وسط خط شکستهٔ ACD نیست بلکه وسط خط شکستهٔ TAC است.

سپس بیرونی گفته است: «واکثر اشکال المقالة الثانية من کتاب اقلیدس تطرد علی اوتار القوس المقسومه بمثل اقسامها».^{۴۴}

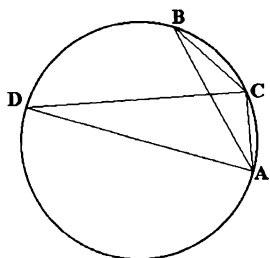
مقصود این است که همان‌گونه که قضایای دَوم و سَوَم که در شماره‌های ۸/۲۲ و ۸/۲۳ بیان کردیم به ترتیب نظیر قضایای پنجم و ششم از مقالهٔ دَوم کتاب «اصول اقلیدس» دربارهٔ تقسیم پاره‌خطها هستند، برای بیشتر قضایای مقالهٔ دَوم کتاب اقلیدس نیز می‌توان نظایری برای اوتار کمانهای دایره که مانند پاره‌خطها تقسیم شوند پیدا کرد.

۴۳. «قانون مسعودی» ص ۲۷۵: «فاذا انزلنا عمود ب ه...».

۴۴. کارل‌شوی این عبارت را تحت‌اللفظی ترجمه کرده و در مقابل آن علامت؟ قرار داده است. («شوی T » ص ۴).

برای آنکه مطلب واضحتر شود ابتدا در اینجا قضایای دوم و سوم مذکور را با نظایر آنها از مقاله دوم کتاب «اصول اقلیدس» روبه روی یکدیگر قرار می دهیم:

قضیه دوم (شماره ۸/۲۲ کتاب حاضر)

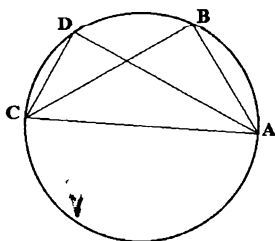


شکل ۱۰۸

نقطه B وسط کمان ABD و نقطه C نقطه ای اختیاری از همان کمان است و داریم:

$$AC \times CD + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

قضیه سوم (شماره ۸/۲۳ کتاب حاضر)

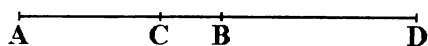


شکل ۱۱۰

نقطه B وسط کمان ABD و نقطه C نقطه ای اختیاری از دایره بیرون از کمان ABD است و داریم:

$$AC \times CD + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

قضیه پنجم از مقاله دوم کتاب «اصول اقلیدس»:

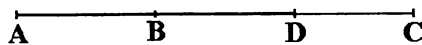


شکل ۱۰۷

نقطه B وسط پاره خط AD و نقطه C نقطه ای اختیاری از آن پاره خط است و داریم:

$$AC \times CD + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$$

قضیه ششم از مقاله دوم کتاب «اصول اقلیدس»:



شکل ۱۰۹

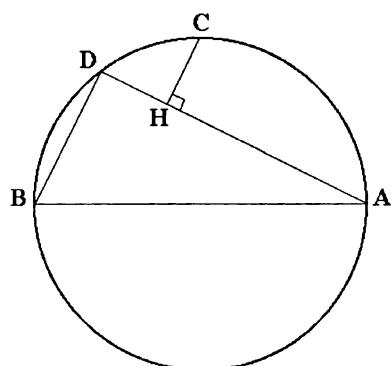
نقطه B وسط پاره خط AD و نقطه C نقطه ای اختیاری در امتداد پاره خط AD است و داریم:

$$AC \times CD + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

بنا به گفته بیرونی می توان نظیر بعضی از قضایای مقاله دوم کتاب «اصول اقلیدس» که مربوط

به تقسیم پاره‌خطهای راست و روابط بین آنهاست، قضایایی دربارهٔ اوتار کمانهای دایره ذکر کرد. اینک برای آنکه نشان دهم که گفتهٔ بیرونی درست است به‌عنوان مثال قضیهٔ نهم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» را با نظیر آن برای اوتار کمانهای دایره در اینجا می‌آورم:

قضیهٔ نهم مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس»^{۴۵} قضیهٔ نظیر آن:



شکل ۱۱۲

نقطهٔ C وسط کمان AB و نقطهٔ D نقطهٔ دلخواهی از همان کمان است. اگر از نقطهٔ C عمود CH را بر AD فرود آوریم به‌سهولت می‌توان ثابت کرد که:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2(\overline{AH}^2 + \overline{HD}^2)$$

همچنین مثلاً می‌توان نظیر قضیهٔ دهم از مقالهٔ دوم «اصول اقلیدس» قضیه‌ای در مورد اوتار دایره بیان کرد و غیره.

پس از بیان این سه قضیهٔ بیرونی به اثبات دستورهایی که در شماره‌های ۸/۱۳ تا ۸/۲۰ بیان کردم می‌پردازد، به‌شرح زیر:

۸/۲۵. اثبات صحت دستور محاسبهٔ C_7 ^{۴۶} - فرض می‌کنیم AHC قطر دایره و کمان AB یک سوم دایره (یعنی ۱۲۰ درجه) باشد. می‌خواهیم $AB = C_7$ را برحسب قطر دایره حساب کنیم. (شکل ۱۱۳).

واضح است که کمان BC یک ششم دایره (یعنی ۶۰ درجه) است. از نقطهٔ D وسط وتر

۴۵. ← «هیث E» ج ۱، ص ۳۹۲.

۴۶. «قانون مسعودی» ص ۲۷۵ سطر چهاردهم به‌بعد: «ثم لیکن قوس اب ثلث دایره...».

از تساویهای (۱) و (۲) و (۳) حاصل می‌شود:

$$\frac{d}{۴} \times \frac{۳}{۴}d = \frac{\overline{AB}^۲}{۴}$$

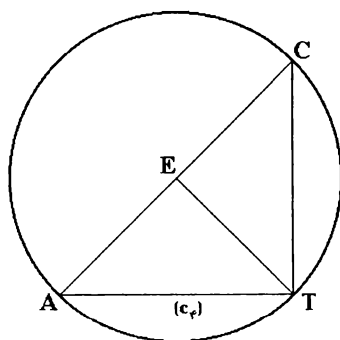
یعنی

$$C_r = AB = \sqrt{d \times \frac{۳}{۴}d}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۸/۲۶- اثبات دستور محاسبهٔ C_r (← ۸/۱۴).

فرض می‌کنیم AC قطر دایره و نقطهٔ T وسط کمان AC یعنی وتر AT وتر ربع دایره باشد: (شکل ۱۱۴) $AT = C_r$. چون $TA = TC$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ AET داریم:



شکل ۱۱۴

$$\overline{AT}^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{ET}^۲ = ۲\overline{AE}^۲$$

و اگر قطر دایره را d بنامیم معلوم می‌شود که:

$$\overline{AT}^۲ = ۲ \left(\frac{d}{۲} \right)^۲ = \frac{d^۲}{۲}$$

و از آنجا:

$$C_r = AT = \sqrt{\frac{d^۲}{۲}}$$

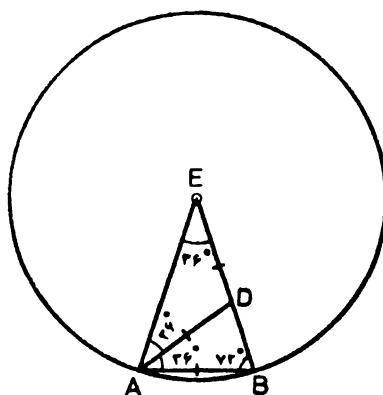
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اثبات دستورهای محاسبه C_5 و C_{10} - (۸/۱۵ و ۸/۲۰).

چون این قسمت از کتاب «قانون مسعودی» مفصل و مطالب آن به هم آمیخته است برای روشن شدن موضوع، آن را در چند قسمت جداگانه بیان می‌کنیم:

۸/۲۷ الف - اثبات اینکه اگر شعاع دایره را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم قسمت بزرگتر آن ضلع ده ضلعی منتظم محاطی یعنی C_{10} خواهد بود.^{۲۷}

فرض می‌کنیم که در مثلث AEB هر یک از زوایای A و B دو برابر زاویه E باشد. (بنابراین مثلث AEB متساوی‌الساقین است و $\hat{A} = \hat{B} = 72^\circ$ و $\hat{E} = 36^\circ$) و به مرکز E و شعاع $EA = EB$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، (چون زاویه مرکزی E مساوی با 36° درجه است پس کمان AB یک دهم دایره و وتر AB ضلع ده ضلعی منتظم محاطی یعنی C_{10} است) و نیمساز زاویه EAB را رسم کرده پای آن را روی EB نقطه D می‌نامیم. (شکل ۱۱۵)



شکل ۱۱۵

چون زاویه DAB مساوی با 36° درجه می‌شود و زاویه B مساوی با 72° درجه است پس زاویه ADB نیز مساوی با 72° درجه و مثلث ABD متساوی‌الساقین است یعنی $AD = AB$. از تساوی دو زاویه EAD و AED که هر کدام 36° درجه است معلوم می‌شود که $AD = DE$ بنابراین دو مثلث متساوی‌الساقین AEB و DAB متشابه هستند و داریم:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad (۱)$$

و یا

$$EB \times BD = \overline{AB}^2$$

و یا

$$EB \times BD = \overline{ED}^2 \quad (۲)$$

از این رابطه معلوم می‌شود که شعاع EB در نقطهٔ D به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است و پاره خط ED قسمت بزرگتر آن است. و چون $ED = AB$ پس:
اگر شعاع دایره را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم قسمت بزرگتر آن مساوی با $C_{۱۰}$ خواهد بود، و همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.
۸/۲۸- تبصره از روی رابطهٔ (۲) شمارهٔ قبل می‌توان $AB = ED = C_{۱۰}$ را حساب کرد. زیرا اگر شعاع دایره را r بنامیم $DB = EB - ED = r - C_{۱۰}$ ، و رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$r(r - C_{۱۰}) = (C_{۱۰})^2$$

و یا

$$(C_{۱۰})^2 + r(C_{۱۰}) - r^2 = ۰$$

فقط ریشهٔ مثبت این معادله قابل قبول است و داریم:

$$C_{۱۰} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} - ۱)$$

اما بیرونی این مطلب را طور دیگر بیان کرده است:

$$۴۸. C_{۱۰} = \sqrt{\frac{5d^2}{۱۶}} - \frac{d}{4} \text{ ب-اثبات دستور}$$

از رابطهٔ (۱) قسمت (الف) با ترکیب نسبت حاصل می‌شود:

$$\frac{EB + AB}{EB} = \frac{AB + BD}{AB}$$

و یا

$$(EB + AB) \times AB = (AB + BD) \times EB \quad (۳)$$

اکنون شعاع دایره را r می‌نامیم، $EB = r$ و می‌دانیم که $AB = ED$
پس

$$AB + BD = ED + BD = EB = r$$

و رابطه (۳) به صورت زیر درمی‌آید:^{۴۹}

$$(r + C_{۱۰}) C_{۱۰} = r^2 \quad (۴)$$

اولاً از روی این رابطه معلوم می‌شود که اگر مجموع $r + C_{۱۰}$ را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنیم قسمت بزرگتر آن r و قسمت کوچکتر آن $C_{۱۰}$ خواهد بود.
ثانیاً اگر به دو طرف رابطه (۴) مقدار $\left(\frac{r}{۲}\right)^2$ را اضافه کنیم (یعنی کاری کنیم که طرف چپ تساوی (۴) مربع کامل شود) خواهیم داشت:^{۵۰}

$$r \times (C_{۱۰}) + (C_{۱۰})^2 + \left(\frac{r}{۲}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{۴}$$

و یا

$$(C_{۱۰} + \frac{r}{۲})^2 = \frac{۵r^2}{۴}$$

و از آنجا:

$$C_{۱۰} = \sqrt{\frac{۵r^2}{۴}} - \frac{r}{۲}$$

که اگر قطر دایره را d بنامیم یعنی به جای R مقدار $\frac{d}{۲}$ را قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$C_{۱۰} = \sqrt{\frac{۵d^2}{۱۶}} - \frac{d}{۴} \quad (۵)$$

۸/۳۰-ج- اثبات اینکه بین شعاع دایره و $C_۵$ و $C_{۱۰}$ رابطه زیر برقرار است:^{۵۱}

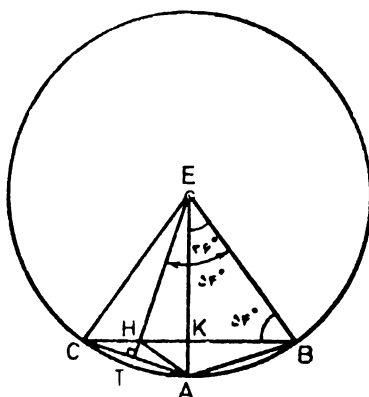
$$(C_۵)^2 = (C_{۱۰})^2 + r^2$$

۴۹. بیرونی رابطه (۴) را به وجه دیگری نیز ثابت کرده است. ← «قانون مسعودی» ص ۲۷۹ سطر دهم به بعد.

۵۰. «قانون مسعودی» ص ۲۷۷ سطر ۱۷ به بعد: «وعلى ما تبين فى المقالة الثانية عشر من كتاب الاصول ...».

۵۱. «قانون مسعودی» ص ۲۷۷ سطر آخر به بعد: «ثم لتقرر قوس: ا ج...».

در دایرهٔ به مرکز E و به شعاع r کمان AB را مساوی با یک دهم دایره و کمان BC را مساوی با یک پنجم دایره می‌گیریم و پاره‌خطهای AB و BC و AE را رسم می‌کنیم و فصل مشترک EA را با BC نقطهٔ K می‌نامیم. پس $AB = C_1$ و $BC = C_5$ و واضح است که زاویهٔ K قائمه و زاویهٔ EBK مساوی با ۵۴° درجه است. اکنون از نقطهٔ E پاره‌خط EH را مطابق با شکل ۱۱۶ طوری رسم می‌کنیم که زاویهٔ HEB مساوی با زاویهٔ EBK یعنی ۵۴° درجه شود.



شکل ۱۱۶

در این صورت مثلث متساوی‌الساقین HEB با مثلث متساوی‌الساقین ECB مشابه است و داریم:

$$HB \times BC = \overline{EB}^2 \quad \text{و یا} \quad \frac{EB}{BC} = \frac{HB}{EB} \quad (۶)$$

اکنون پاره‌خط EH را ادامه می‌دهیم تا AC را در نقطهٔ T قطع کند. داریم:

$$\widehat{CHT} = \widehat{EHB} = ۷۲^\circ$$

زیرا مثلث HEB متساوی‌الساقین و هر یک از زوایای قاعدهٔ آن ۵۴° درجه است و از طرف دیگر $\widehat{ACB} = ۱۸^\circ$.

پس در مثلث CHT زاویهٔ T مساوی با ۹۰° درجه است (زیرا مجموع دو زاویهٔ دیگر آن $۹۰^\circ = ۷۲^\circ + ۱۸^\circ$ درجه است) پس نقطهٔ T پای عمود HT بر CA است و $CT = TA$ ، و اگر A را به H وصل کنیم مثلث متساوی‌الساقین HCA با مثلث متساوی‌الساقین ACB مشابه می‌شود و داریم:

$$\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

و یا

$$CH \times BC = \overline{AC}^2 \quad (۷)$$

اکنون دو تساوی (۶) و (۷) را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$(CH + HB) \times BC = \overline{EB}^2 + \overline{AC}^2$$

و چون $CH + HB$ مساوی با CB است داریم:

$$\overline{BC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AC}^2$$

یعنی

$$\boxed{(C_5)^2 = (C_{10})^2 + r^2} \quad (۸)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

$$۸/۳۱ - \text{دلائبات دستور } \left(\sqrt{\frac{5d^2}{16}} - \frac{d}{4} \right)^2 + \left(\frac{d}{4} \right)^2 = C_5$$

صحت این رابطه، چنانکه بیرونی اشاره کرده است، از روی رابطه (۸) شماره قبل به فرض معلوم بودن C_{10} به دست می‌آید. به این ترتیب که مقدار C_{10} را از روی رابطه (۵) شماره ۸/۲۹ در رابطه (۸) شماره قبل قرار می‌دهیم و به جای r مقدار $\frac{d}{4}$ را می‌گذاریم حاصل می‌شود:

$$(C_5)^2 = \left(\sqrt{\frac{5d^2}{16}} - \frac{d}{4} \right)^2 + \left(\frac{d}{4} \right)^2$$

یعنی

$$C_5 = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{5d^2}{16}} - \frac{d}{4} \right)^2 + \left(\frac{d}{4} \right)^2}$$

چنانکه در شماره ۸/۱۵ گفتیم دستور فوق را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت:

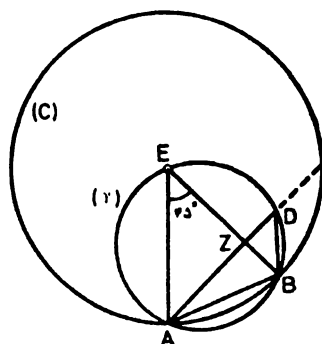
$$C_5 = \frac{r}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$۸/۳۲ - \text{دلائبات دستور } C_8 = \sqrt{r^2 - r(r\sqrt{2} - r)} \leftarrow (۸/۱۸).$$

بیرونی در اثبات این دستور از طرفی به اختصار پرداخته و به ذکر رؤوس مطالب اکتفا کرده و از طرف دیگر چون می‌خواسته است از قضایای مقدماتی اول و دوم (شماره‌های ۸/۲۱ و ۸/۲۲) استفاده کند راهی طولانی رفته است که اینک به شرح آن می‌پردازم.^{۵۲}

۵۲. راه ساده‌تری برای محاسبه C_8 در شماره ۸/۳۳ ذکر کرده‌ام.

فرض کنیم که در دایرهٔ (C) به مرکز E و به شعاع R کمان AB یک‌هشتم دایره یعنی وتر AB ضلع هشت ضلعی منتظم محاطی باشد که آن را C_8 می‌نامیم و می‌خواهیم طول آن را برحسب r حساب کنیم. (شکل ۱۱۷).



شکل ۱۱۷

دایرهٔ محیطی مثلث AEB را رسم کرده آن را (γ) می‌نامیم و از نقطهٔ A عمود AZ را بر EB فرود آورده آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (γ) را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. واضح است که زاویهٔ E مساوی با 45° درجه است و پاره خط EZ نصف ضلع مربع محاط در دایرهٔ (C) است یعنی:

$$EZ = \frac{r\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

بیرونی گفته است: و به سهولت می‌توان ثابت کرد که در دایرهٔ (γ) نقطهٔ A وسط کمان $EABD$ است و خط شکستهٔ EBD در این کمان محاط شده است. پس عمود AZ که از وسط این کمان بر ضلع بزرگتر خط شکستهٔ مذکور فرود آمده، بنابر قضیهٔ اول (شمارهٔ ۸/۲۱) آن را نصف می‌کند. یعنی:

$$EZ = ZB + BD \quad (2)$$

و نظر به قضیهٔ دوم (شمارهٔ ۸/۲۲) داریم:

$$\overline{EA}^2 = EB \times BD + \overline{AB}^2$$

اما $EA = EB = r$ و $AB = C_8$ پس رابطهٔ فوق چنین نوشته می‌شود:

$$r^2 = r \times BD + (C_8)^2$$

و از آنجا

$$(C_8)^2 = r^2 - r \times BD \quad (3)$$

از طرف دیگر گفتیم که نقطه Z وسط خط شکسته EBD است (تساوی ۲) پس:

$$BD = 2EZ - EB$$

و نظر به رابطه (۱) معلوم می‌شود:

$$BD = 2 \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} \right) - r = r\sqrt{2} - r$$

و اگر این مقدار را در رابطه (۳) قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$(C_8)^2 = r^2 - r(r\sqrt{2} - r)$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۸/۳۳- تبصره بدون به کاربردن قضایای اول و دوم می‌توان C_8 را مستقیماً حساب کرد: در مثلث قائم‌الزاویه AZB (شکل ۱۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} (C_8)^2 &= \overline{AB}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{ZB}^2 \\ &= \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} \end{aligned}$$

و از آنجا $C_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

۵- باب دوم از مقالة سوم «قانون مسعودی»

در توابع وترهای مهم^{۵۲}

در این باب بیرونی پنج مسئله مهم مربوط به محاسبه اوتار دایره را بر حسب قطر آن حل کرده و برای هر یک از آنها دستوری داده است. به این ترتیب که ابتدا دستور حل مسائل را یک جا بیان کرده و سپس به اثبات صحت آنها پرداخته است.

به منظور آنکه خواننده کتاب حاضر مجبور نشود برای بررسی حل یک مسئله به صفحات مختلف کتاب رجوع کند، برهان حل هر مسئله را در دنبال دستور

حل همان مسئله نوشته‌ام و برای هر مسئله شماره‌ای اختیار کرده‌ام تا ارجاع به آنها آسان باشد. خاطرنشان می‌کنم که آنچه در اینجا می‌نویسم ماحصل گفته‌های بیرونی است و نه ترجمهٔ تحت‌اللفظی عبارات آن.

۸/۳۴- مسئلهٔ اوّل^{۵۴}- محاسبهٔ وتر مکمل کمانی که وتر آن معلوم باشد.

دستور- هرگاه بخواهیم وتر مکمل کمانی را که وتر آن معلوم است به دست آوریم، وتر معلوم را با قطر جمع کرده نصف آن را در دو موضع ثبت می‌کنیم و تفاضل قطر را با یکی از آنها حساب کرده حاصل را در آنچه در موضع دیگر نوشته‌ایم ضرب می‌کنیم و نتیجه را همیشه چهار برابر کرده جذر این حاصل را می‌گیریم.

توضیح- اگر قطر دایره را d و وتر کمان معلوم α را a بنامیم دستور فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\text{وتر کمان } (\alpha - 180^\circ) = \sqrt{4 \left(\frac{d+a}{2} \right) \left(\frac{d-a}{2} \right)}$$

که البته می‌توان آن را به صورت سادهٔ زیر درآورد:

$$\text{وتر کمان } (\alpha - 180^\circ) = \sqrt{d^2 - a^2}$$

برهان^{۵۵}- در دایرهٔ به مرکز E و به قطر $AC = d$ کمان $BC = \alpha$ و وتر آن $BC = a$ را معلوم فرض می‌کنیم. (شکل ۱۱۸) می‌خواهیم وتر کمان AB را که مکمل کمان α است برحسب a و d حساب کنیم.

عمود منصف وتر AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از مرکز دایره یعنی نقطهٔ E می‌گذرد و دایره را در نقطهٔ Z قطع می‌کند که وسط کمان ACB است. از نقطهٔ Z عمود ZH را بر قطر AC فرود می‌آوریم. چون خط شکستهٔ ACB در کمان ACB محاط شده و از وسط این کمان عمود ZH را بر وتر بزرگتر AC (قطر) فرود آورده‌ایم بنا به قضیهٔ مقدّماتی اوّل (شمارهٔ ۸/۲۱) پای این عمود یعنی نقطهٔ H وسط خط شکستهٔ ACB است. یعنی:

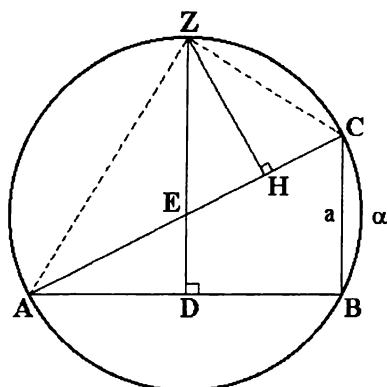
$$AH = HC + CB$$

و واضح است که

$$AH = \frac{AC + CB}{2} = \frac{d + a}{2} \quad (۱)$$

^{۵۴}. «قانون مسعودی» ص ۲۸۰: «معرفة وتر تنمة كل قوس معلومة الوتر...».

^{۵۵}. «قانون مسعودی» ص ۲۸۳، سطر ششم به بعد: «ولیکن فی الشکل...» و نیز «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، ص ۸۷.



شکل ۱۱۸

و

$$HC = \frac{AC - CB}{۲} = \frac{d - a}{۲} \quad (۲)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ZAC داریم:

$$\overline{ZH}^۲ = AH \times HC = \left(\frac{d+a}{۲}\right) \left(\frac{d-a}{۲}\right) \quad (۳)$$

و چون دو مثلث قائم الزاویه EZH و EAD متساویند (در حالت وترو یک زاویه حاده) پس

$$ZH = AD = \frac{AB}{۲}$$

و رابطه (۳) به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{\overline{AB}^۲}{۴} = \left(\frac{d+a}{۲}\right) \left(\frac{d-a}{۲}\right)$$

و از آنجا

$$AB = \sqrt{۴ \left(\frac{d+a}{۲}\right) \left(\frac{d-a}{۲}\right)}$$

و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

و از آنجا

$$BE = \frac{\overline{AB}^2}{BT} \quad (۱)$$

در مثلث قائم الزاویه ABE داریم:

$$\overline{EA}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$$

یعنی با در نظر گرفتن رابطه (۱):

$$\overline{EA}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{AB}^2}{BT} \right)^2$$

و از آنجا

$$EA = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{AB}^2}{BT} \right)^2}$$

و چون $AB = a$ و $BT = d$ و $AC = 2AE$ پس:

$$AC = 2AE = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{d} \right)^2}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۸/۳۶- مسئلهٔ سوم^{۵۸}- محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم باشد.

دستور- برای محاسبهٔ وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم باشد، مربع نصف وتر معلوم را با مربع نصف تفاضل قطر و وتر مکمل کمان معلوم جمع کرده جذر آن را می‌گیریم.
و یا: قطر را در نصف تفاضل قطر و وتر کمان مکمل کمان مفروض ضرب کرده جذر حاصل را می‌گیریم.

توضیح- اگر قطر دایره را d و وتر کمان معلوم α را a بنامیم دستور فوق به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\frac{\alpha}{2} \text{ وتر} = \sqrt{\left[\frac{d - (180^\circ - \alpha) \text{ وتر}}{2} \right]^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2} \quad (۱)$$

و یا

$$\frac{\alpha}{2} \text{ وتر} = \sqrt{d \left[\frac{d - (180^\circ - \alpha) \text{ وتر}}{2} \right]} \quad (۲)$$

و نظر به رابطه (۳) حاصل می‌شود:

$$\overline{BC}^2 = \frac{d - (180^\circ - \alpha)}{2} \times d$$

و چون از طرفین تساوی فوق جذر بگیریم دستور (۲) حاصل می‌شود.

۸/۳۷- مسئله چهارم^{۶۰}- محاسبه وتر یک چهارم کمانی که وتر آن معلوم باشد و همچنین محاسبه وترهای کمانهایی که از نصف کردنهای متوالی کمان مفروض به دست می‌آیند.

تبصره - این مسئله یکی از مهمترین مسایل این باب و نمونه بارز زبردستی بیرونی در تعمیم مسایل ریاضی است. بیرونی در اینجا به فرض معلوم بودن وتر کمان α دستور محاسبه وترهای هر یک از کمانهای $\frac{\alpha}{4}$ و $\frac{\alpha}{8}$ و $\frac{\alpha}{16}$ و $\frac{\alpha}{32}$ و ... را بیان می‌کند. و در حقیقت یک رابطه تراجعی^{۶۱} به دست می‌دهد که چنانکه بعداً خواهیم دید در ریاضیات قدیم سابقه نداشته و تا قرن شانزدهم میلادی نظیری برای آن نمی‌شناسیم. بیرونی خود کاملاً به اهمیت این دستور وقوف داشته و در آغاز آن نوشته است: «هذا وان اغنی عنه ما تقدم ففیه شیء ما تسهیل سنستعمل». یعنی اگرچه قبلاً دستور محاسبه وتر نصف کمانی را که وتر آن معلوم باشد بیان کرده‌ایم و دیگر به حل این مسئله احتیاج نداریم، اما در این مسئله چیزی هست که موجب سهولت عملهای بعدی است.

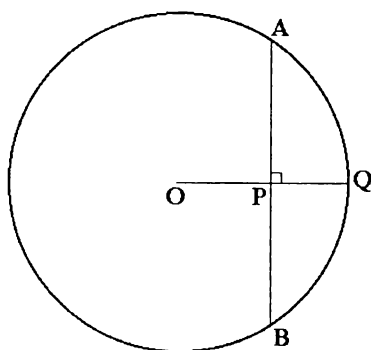
دستور - برای یافتن وتر یک چهارم کمان مفروض α (که وتر آن را معلوم فرض می‌کنیم) نصف تفاضل قطر را با وتر کمان $(180^\circ - \alpha)$ محفوظ اول (G_1) می‌نامیم. و نصف وتر کمان مفروض را محفوظ دوم (G_2) می‌خوانیم. و نصف وتر نصف کمان مفروض را، که قبلاً روش محاسبه آن را بیان کردیم، محفوظ سوم (G_3) می‌نامیم. سپس وتر نصف کمان مفروض را در G_1 ضرب کرده حاصل را بر مجموع وتر نصف کمان مفروض و G_2 تقسیم می‌کنیم، و نصف خارج قسمت این تقسیم را که محفوظ چهارم (G_4) می‌نامیم در قطر ضرب می‌کنیم و جذر آن را می‌گیریم تا وتر یک چهارم کمان مفروض حاصل شود.

۶۰. «قانون مسعودی» ص ۲۸۱ و ۲۸۲- چون این مسئله و حل آن از جهت تاریخ ریاضیات اهمیت دارد عیناً دستور بیرونی را در اینجا نقل می‌کنم (اگر چه مفصل است): معرفة وتر ربع القوس المعلومة الوتر و اوتار ما بعده من تتمتها و ما یؤدی الیه التصفیف- هذا و ان اغنی عنه ما تقدم ففیه شیء ما من تسهیل ما سنستعمل. فلنسم نصف فضل ما بین القطر و بین وتر تمة القوس المفروضة محفوظاً اولاً، و نصف وتر القوس المعطاة محفوظاً ثانياً، و نصف وتر نصفها الذی استخرجناه آنفاً محفوظاً ثالثاً، ثم نضرب وتر نصفها فی الم محفوظ الاول و نقسم ما اجتمع علی مجموع وتر النصف و الم محفوظ الثانی، فما خرج نضرب نصفه و هو الم محفوظ الرابع فی القطر. و نأخذ جذر المبلغ فیکون وتر ربع القوس المعطاة، و نصف هذا الوتر هو الم محفوظ الخامس، و علی قیاس ذلک نضرب لمعرفة وتر ثمن هذه القوس وتر ربعها فی الم محفوظ الرابع، و نقسم ما بلغ علی مجموع وتر ربعها و الم محفوظ الثالث، و نضرب نصف ما یرج و هو الم محفوظ السادس فی القطر فیتجمع مربع وتر ثمنها و ما بعد ذلک منه علی هذه بمنزلة عمله من وتر ربعها).

۶۱. به فرانسوی Relation de récurrence - به آلمانی Rekursionformeln.

سپس نصف این وتر را محفوظ پنجم (G_5) می‌نامیم و به قیاس آنچه گفتیم برای یافتن وتر یک هشتم کمان مفروض وتر یک چهارم آن را در G_4 ضرب کرده حاصل را بر مجموع وتر یک چهارم و G_4 تقسیم می‌کنیم، و نصف خارج قسمت این تقسیم را محفوظ ششم (G_6) نامیده آن را در قطر ضرب می‌کنیم و جذر آن را می‌گیریم تا وتر یک هشتم کمان مفروض به دست آید. و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

توضیح - برای سهولت بیان ابتدا کمان AB از دایره به مرکز O و به شعاع r را در نظر گرفته اندازهٔ آن را برحسب رادیان α می‌نامیم و عمودی از مرکز O بر وتر AB فرود می‌آوریم تا وتر AB را در نقطهٔ P و کمان AB را در نقطهٔ Q قطع کند (شکل ۱۲۱) و برحسب قرار داد:



شکل ۱۲۱

اولاً به جای آنکه بگوییم «وتر روبه روی کمان α » برای رعایت اختصار می‌گوییم «وتر α ». ثانیاً پاره خط PQ یعنی فاصلهٔ وسط وتر از وسط کمان را «سهم α » می‌نامیم.^{۶۲} با قراردادهای فوق دستورهای بیرونی را می‌توان چنین نوشت:

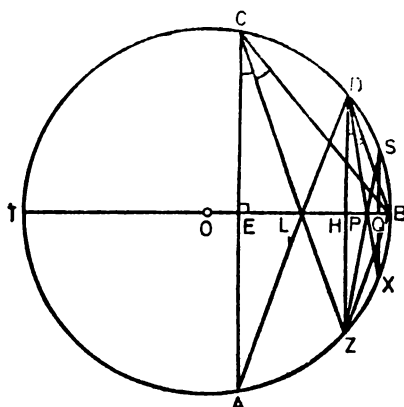
$$\frac{\alpha}{4} \text{ وتر} = \sqrt{r \times \frac{(\frac{\alpha}{4} \text{ وتر}) \times (\alpha \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{4} \text{ وتر}) + (\alpha \text{ نصف وتر})}} \quad (۱)$$

$$\frac{\alpha}{n+1} \text{ وتر} = \sqrt{r \times \frac{(\frac{\alpha}{n+1} \text{ وتر}) \times (\frac{\alpha}{n} \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{n+1} \text{ وتر}) + (\frac{\alpha}{n} \text{ نصف وتر})}} \quad (۲)$$

برهان^{۶۳} - کمان $\widehat{AC} = \alpha$ از دایره به مرکز O و به شعاع r را در نظر گرفته آن را در نقاط D و B و Z به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم (شکل ۱۲۲) و وسط کمان BD را S

۶۲. ← بخش نهم کتاب حاضر شماره ۸۵.

۶۳. «قانون مسعودی» ص ۲۸۵ سطر یازدهم به بعد: «فاما وتر ربع القوس و ما دونه بالتصنيف...» - خاطر نشان ←



شکل ۱۲۲

می‌نامیم. در این صورت: $\widehat{CD} = \widehat{DB} = \widehat{BZ} = \widehat{ZA} = \frac{\alpha}{4}$ و

$$\widehat{SB} = \frac{\alpha}{8}$$

اکنون قطر TOB را رسم کرده نقطه C را به نقاط Z و B و نقطه D را به نقاط A و Z و B و نقطه S را به نقاط Z و B وصل می‌کنیم (SB روی شکل رسم نشده است) و فصل مشترک خطوط حاصل را با قطر TB مطابق با شکل نام می‌گذاریم.

واضح است که قطر TB محور تقارن شکل است و نقاط A و Z به ترتیب قرینه‌های نقاط C و D نسبت به TB هستند. بنابراین CZ و AD یکدیگر را روی قطر TB در نقطه‌ای مانند L قطع می‌کنند و با قراردادهای قبلی داریم:

$$\widehat{AC} = \alpha \text{ و } AC = (\text{وتر } \alpha) \text{ و } BC = DZ = (\text{وتر } \frac{\alpha}{4}) \text{ و } DB = (\text{وتر } \frac{\alpha}{4})$$

و

$$BS = (\text{وتر } \frac{\alpha}{8}) \text{ و } SQ = \frac{SX}{2} = (\text{نصف وتر } \frac{\alpha}{4})$$

→ می‌کنم که آنچه به عنوان برهان نوشته‌ام شرح گفته‌های بیرونی در این باب است و نه ترجمه تحت‌اللفظی عبارات او، ضمناً برای مطالبی که از روی شکل واضح هستند دلیل نمی‌آورم تا استدلال خلاصه و روشن باشد.

آنچه را بیرونی محفوظ اول و دوم و سوم نامیده عبارت‌اند از:

$$\text{محفوظ اول} = G_1 = EB = (\alpha \text{ سهم})$$

$$\text{محفوظ دوم} = G_2 = \frac{AC}{2} = CE = (\alpha \text{ نصف وتر})$$

$$\text{محفوظ سوم} = G_3 = \frac{DZ}{2} = DH = (\alpha \text{ نصف وتر})$$

(بقیهٔ محفوظها یعنی G_4 و G_5 و G_6 را بعداً معین خواهیم کرد).

اینک می‌پردازیم به محاسبهٔ (وتر $\frac{\alpha}{4}$).

محاسبهٔ وتر $\frac{\alpha}{4}$ - چون CZ نیمساز زاویهٔ ECB است داریم:

$$\frac{CE}{CB} = \frac{EL}{LB}$$

و پس از ترکیب نسبت:

$$\frac{CE + CB}{CB} = \frac{EL + LB}{LB} = \frac{EB}{LB}$$

و از آنجا

$$LB = \frac{CB \times EB}{CE + CB}$$

بنابراین مقدار LB معلوم است و با قراردادهای قبلی داریم:

$$LB = \frac{(\frac{\alpha}{4} \text{ وتر}) \times (\alpha \text{ سهم})}{(\alpha \text{ نصف وتر}) + (\frac{\alpha}{4} \text{ وتر})} = \frac{(\frac{\alpha}{4} \text{ وتر}) \times G_1}{(\frac{\alpha}{4} \text{ وتر}) + G_2} \quad (3)$$

از روی شکل می‌توان به آسانی دریافت که چهار ضلعی $LDBZ$ لوزی است و نقطهٔ H وسط LB است یعنی HB مساوی است با نصف LB . اما HB مساوی است با $(\frac{\alpha}{4} \text{ سهم})$ و این همان چیزی است که بیرونی آن را محفوظ چهارم نامیده است.

$$HB = \frac{LB}{2} = G_4 = \left(\frac{\alpha}{4} \text{ سهم} \right)$$

حال گوئیم که چون نقطهٔ H تصویر نقطهٔ D روی قطر است داریم:

$$\overline{BD}^2 = TB \times HB = 2r \times HB$$

و چون $HB = \frac{LB}{۲}$ پس:

$$BD = \sqrt{۲r \times \frac{LB}{۲}} = \sqrt{r + LB}$$

اما BD مساوی با (وتر $\frac{\alpha}{۴}$) است بنابراین با در نظر گرفتن رابطه (۳) داریم:

$$\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر} = \sqrt{r \times \frac{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) \times (\alpha \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) + (\alpha \text{ نصف و تر})}} \quad (\text{الف})$$

و این همان دستور (۱) است که می‌خواستیم صحت آن را ثابت کنیم.

* * *

بیرونی این دستور را تعمیم داده و آن را برای محاسبه (وتر $\frac{\alpha}{۸}$) و سپس برای محاسبه (وتر $\frac{\alpha}{۱۶}$) و غیره به‌کار برده است. به این ترتیب:

محاسبه وتر $\frac{\alpha}{۸}$ - چون خط DP نیمساز زاویه HDB است داریم:

$$\frac{DH}{DB} = \frac{HP}{PB}$$

و پس از ترکیب نسبت:

$$\frac{DH + DB}{DB} = \frac{HP + PB}{PB} = \frac{HB}{PB}$$

و از آنجا:

$$PB = \frac{DB \times HB}{DB + DH}$$

اما می‌دانیم که $DB = (\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) = G_۲$ و $HB = (\frac{\alpha}{۴} \text{ سهم}) = G_۳$ و $DH = (\frac{\alpha}{۴} \text{ نصف و تر})$ پس PB معلوم است.

$$PB = \frac{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) \times (\frac{\alpha}{۴} \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) + (\frac{\alpha}{۴} \text{ نصف و تر})} \quad (۴)$$

[بیرونی نصف PB یعنی QB را که $(\frac{\alpha}{۴} \text{ سهم})$ است $G_۵$ نامیده است] اما چون نقطه Q تصویر نقطه S روی قطر TB است داریم:

$$\overline{BS}^r = TB \times QB = ۲r \times QB$$

و چون $QB = \frac{PB}{۲}$ (زیرا چهار ضلعی $PSBX$ لوزی است) پس:

$$BS = \sqrt{۲r \times \frac{PB}{۲}} = \sqrt{r \times PB}$$

اما BS مساوی با (وتر $\frac{\alpha}{۸}$) است. پس با در نظر گرفتن تساوی (۴) داریم

$$\frac{\alpha}{۸ \text{ وتر}} = \sqrt{r \times \frac{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) \times (\frac{\alpha}{۴} \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{۴} \text{ وتر}) + (\frac{\alpha}{۴} \text{ نصف})}} \quad (\text{ب})$$

بیرونی در پایان این استدلال گفته است «والعمل فیما بعده علی هذا المثال» یعنی (وتر $\frac{\alpha}{۱۶}$) و (وتر $\frac{\alpha}{۴}$) و غیره را می‌توان مانند فوق حساب کرد.

تعمیم دستورهای (الف) و (ب) - دستورهای (الف) و (ب) را می‌توان همان گونه که بیرونی گفته است تعمیم داد و به صورت زیر درآورد: اگر n عددی صحیح و بزرگتر از صفر باشد داریم:

$$\frac{\alpha}{۲n+۱ \text{ وتر}} = \sqrt{r \times \frac{(\frac{\alpha}{۲n} \text{ وتر}) \times (\frac{\alpha}{۲n-۱} \text{ سهم})}{(\frac{\alpha}{۲n} \text{ وتر}) + (\frac{\alpha}{۲n-۱} \text{ نصف})}}$$

و این یک دستور تراجعی است یعنی در آن می‌توان به جای n هر عدد طبیعی را قرار داد. تبصرهٔ ۱- بیرونی این دستور را در هزار سال پیش به دست آورده است. تا آنجا که اطلاع داریم نخستین کسی که در اروپا دستورهای تراجعی برای توابع مثلثاتی به دست آورد فرانسواویت* ریاضیدان فرانسوی بود که از ۱۵۴۰ تا ۱۶۰۳ میلادی می‌زیست. وی (در حدود شش قرن بعد از بیرونی) دستوری برای محاسبهٔ $\cos n\theta$ برحسب $\cos \theta$ وقتی که n یکی از مقادیر صحیح ۱ تا ۹ را اختیار کند پیدا کرد.^{۶۴}

تبصرهٔ ۲- با وجود آنکه استدلال بیرونی چنانکه دیدیم روشن و زیباست نمی‌فهمم چرا کارل شوی آن را از راه پیچیدهٔ دیگری تعبیر و تفسیر کرده است.^{۶۵}
۸/۳۸- مسئلهٔ پنجم^{۶۶} - محاسبهٔ وتر تفاضل و وتر مجموع دو کمان که وترهای آنها معلوم باشند.

دستور^{۶۷} - وتر کمان کوچکتر را یک بار در وتر کمان بزرگتر و بار دیگر در وتر مکمل کمان بزرگتر

* François Viète

۶۴. — «ایوز H » ص ۲۲۴ و «کازری H » ص ۱۳۸ و نیز — «شوی T » صفحات ۱۰ تا ۱۲.

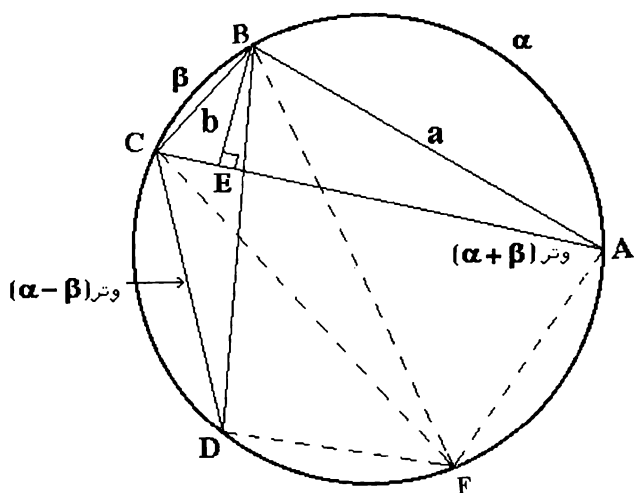
۶۵. — «شوی T » صفحات ۱۰ تا ۱۲.

۶۶. «قانون مسعودی» ص ۲۸۲: «معرفة وتر تفاضل کل قوسین معلومتی الوتر و وتر مجموعها».

۶۷. عبارات عربی که بیرونی برای این دستور آورده فشرده و پیچیده است. با این حال سعی کرده‌ام که ترجمهٔ آنها هم مطابق با اصل و هم از نظر ریاضی درست باشد.

ضرب کرده هر دو حاصل را بر قطر تقسیم می‌کنیم، سپس حاصلی را که از وتر بزرگتر به دست آمده مربع می‌کنیم و جذر تفاضل آن را با مربع وتر بزرگتر می‌گیریم و آن را جذر محفوظ می‌نامیم. آنگاه اگر وتر تفاضل دو کمان را خواستیم حاصلی را که از ضرب وتر مکمل کمان بزرگتر به دست آمده از جذر محفوظ کم می‌کنیم و اگر وتر مجموع دو کمان را خواستیم همان حاصل را با جذر محفوظ جمع می‌کنیم.

توضیح - قطر دایره را d و اندازه کمانهای AB و BC را به ترتیب α و β می‌نامیم ($\alpha > \beta$) و اندازه وترهای AB و BC را به ترتیب a و b می‌گیریم. (شکل ۱۲۳).



شکل ۱۲۳

روی شکل ۱۲۳ واضح است که AC وتر مجموع $(\alpha + \beta)$ است. برای آنکه وتر $(\alpha - \beta)$ را روی شکل ظاهر کنیم کمان BCD را مساوی با α جدا می‌کنیم. واضح است که CD وتر $(\alpha - \beta)$ می‌شود. می‌خواهیم AC و CD را بر حسب a و b و d حساب کنیم. دستوری را که بیرونی داده می‌توان با روابط زیر بیان کرد:

$$(\alpha - \beta) \text{ وتر} = CD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{d}\right)^2} - \frac{b\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \quad (۱)$$

$$(\alpha + \beta) \text{ وتر} = AC = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{d}\right)^2} + \frac{b\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \quad (۲)$$

که البته می‌توان آنها را به صورت ساده زیر نوشت:^{۶۸}

$$\text{وتر}(\alpha - \beta) = \frac{a\sqrt{d^2 - b^2} - b\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \quad (۱)'$$

$$\text{وتر}(\alpha + \beta) = \frac{a\sqrt{d^2 - b^2} + b\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \quad (۲)'$$

برهان^{۶۹} - کمان BCD را مساوی با α اختیار می‌کنیم (شکل ۱۲۳) و از نقطه B عمود BE را بر وتر AC فرود می‌آوریم.

نکته مهم مسئله محاسبهٔ AE و CE برحسب a و b و d است.

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که $DB = AB$ یعنی نقطهٔ B وسط کمان ACD است و خط شکستهٔ ACD در این کمان محاط شده و از وسط کمان یعنی نقطهٔ B عمود BE را بر AC فرود آورده‌ایم. پس نظر به قضیهٔ مقدماتی اول (شمارهٔ ۸/۲۱) نقطهٔ E وسط خط شکستهٔ ACD است. یعنی

$$AE = EC + CD$$

از این رو حاصل می‌شود:

$$CD = AE - CE \quad (۳)$$

و از طرف دیگر داریم:

$$AC = AE + CE \quad (۴)$$

بنابراین، چنانکه گفتیم، برای محاسبهٔ AC و CD کافی است AE و CE را به دست آوریم. اینک می‌گوییم که واضح است که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE و BFA متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{AB}$$

و از آنجا

$$BE = \frac{AB \times BC}{BF}$$

۶۸. اثبات صحت این دستور با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس بسیار آسان است.

۶۹. «قانون مسعودی» ص ۲۸۳ سطر دوازدهم به بعد: «ثم لیکن وتر: اب و ب ج معلومین...» و نیز «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، صص ۹۱ تا ۱۰۰.

یعنی:

$$BE = \frac{ab}{d} \quad (۵)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ABE داریم $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$. پس با در نظر گرفتن رابطه (۵) و اینکه $AB = a$ حاصل می‌شود:

$$AE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{d}\right)^2} \quad (۶)$$

و این همان چیزی است که بیرونی در دستور خود آن را جذر محفوظ نامیده است. باز از تشابه همان دو مثلث BCE و BFA حاصل می‌شود $\frac{BC}{CE} = \frac{BF}{FA}$ و از آنجا

$$CE = \frac{BC \times FA}{BF} \quad (۷)$$

و در مثلث قائم الزاویه BFA داریم $\overline{FA}^2 = \overline{BF}^2 - \overline{BA}^2$ یعنی: $FA = \sqrt{d^2 - a^2}$ که چون آن را در رابطه (۷) قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$CE = \frac{b\sqrt{d^2 - a^2}}{d} \quad (۸)$$

اکنون مقادیر CD و AC از روی روابط (۳) و (۴) با در نظر گرفتن روابط (۶) و (۸) مطابق با دستور بیرونی به دست می‌آید:

$$CD = (\alpha - \beta) \text{ وتر} = AE - CE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{d}\right)^2} - \frac{b\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$$

$$AC = (\alpha + \beta) \text{ وتر} = AE + CE = \sqrt{a^2 - \left(\frac{ab}{d}\right)^2} + \frac{b\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$$

۸/۳۹- بیرونی در پایان این باب روش محاسبه بعضی از وترهای دیگر دایره را نشان داده و نوشته است^{۷۰}:

بعضی از وترهای مهم دایره را می‌توان با استفاده از مسایل قبل به دست آورد، مثلاً $C_۳$ را از روی $C_۶$ به دست آورد. زیرا $C_۳$ وتر کمان مکمل روبه روی $C_۶$ است (مسئله اول شماره ۸/۳۴). و

۷۰. «قانون مسعودی» ص ۲۸۶، سطر هشتم به بعد: «وقد يتوصل الى بعض انتهات الاوتار من بعض...».

نیز می‌توان گفت که C_7 وتر دو برابر کمان مقابل C_6 است (مسئلهٔ دوم-شمارهٔ ۸/۳۵). همچنین C_5 را می‌توان از روی C_{10} حساب کرد و C_8 را از روی C_4 به‌دست آورد. زیرا C_8 وتر نصف کمان مقابل C_4 است و غیره.

و از روی مسئلهٔ تنصیف (مسئلهٔ سَوَم شمارهٔ ۸/۳۶) می‌توانیم C_{24} را از روی C_7 ، $(\frac{1}{24} = \frac{1}{3 \times 8})$ ، و C_{20} را از روی C_5 ، $(\frac{1}{20} = \frac{1}{5 \times 4})$ ، معلوم کنیم. و از روی وترهایی که به‌دست آورده‌ایم می‌توان (با استفاده از مسئلهٔ ۵) مقدار C_{120} را حساب کرد. همچنین می‌توان کسرهای را چندان نصف کرد تا وتر یک درجه و نیم و $\frac{1}{4}$ درجه حاصل گردد. (وذلك ما اردنا ان نبین).

و- باب سَوَم از مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی»

چگونگی محاسبهٔ ضلع نه ضلعی منتظم محاطی^{۷۱}

۸/۴۰- بیرونی در آغاز این باب نوشته است:^{۷۲}

اگر با اصول هندسی (یعنی به‌وسیلهٔ ستاره و پرگار) می‌توانستیم زاویه را به‌سه جزء متساوی تقسیم کنیم و تر یک سَوَم کمان (روبه‌روی آن) به‌دست می‌آمد. و در آن صورت می‌توانستیم ضلع نه ضلعی منتظم محاطی (C_9) را به‌دست آوریم. زیرا ضلع نه ضلعی منتظم محاطی و تر یک سَوَم کمان 120° درجه است که وتر آن معلوم است.

اگر چه در این کتاب (= قانون مسعودی) شرط ما این بود که در بیان هر مطلب به یک راه اکتفا کنیم، بنابر آنکه آن راه مبنی بر اصول هندسی باشد، اما در مورد مسئلهٔ محاسبهٔ C_9 چنین نیست (یعنی نمی‌توان C_9 را به‌وسیلهٔ ستاره و پرگار به‌دست آورد) بلکه برای محاسبهٔ آن (به‌وجه تقریبی) باید راهی اندیشید. بنابراین ممکن است کسی برای حل (تقریبی) این مسئله راهی را انتخاب کند که دیگران را به‌آن دسترسی نباشد.

همان‌گونه که برای به‌دست آوردن و تر یک سَوَم کمانی که وتر آن معلوم است راهی وجود ندارد، برای رسم هندسی و تر یک نهم دایره (C_9) نیز راهی نمی‌شناسیم. و تقسیم دایره به نه قسمت متساوی فقط به‌وسیلهٔ حرکت دادن آلات رسم و به‌کاربردن قطوع مخروطی امکان‌پذیر است. و این روش برای محاسبات عددی فایدهٔ چندانی ندارد.

۸/۴۱- محاسبهٔ اندازهٔ تقریبی C_9 -بیرونی سپس اندازهٔ تقریبی C_9 را به‌طریق زیر حساب

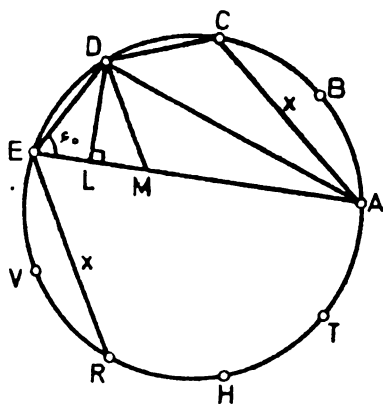
کرده است:

فرض می‌کنیم دایره به نه قسمت متساوی تقسیم شده باشد.^{۷۳} و نقاط تقسیم را متوالیاً A و B و C و D و E و V و R و H و T می‌نامیم. (شکل ۱۲۴). AE روبه‌روی کمان $\frac{1}{9}$ دایره و ER و تر روبه‌روی کمان $\frac{1}{9}$ دایره است.

۷۱. «قانون مسعودی» ص ۲۸۶: «الباب الثالث فی التمثّل لاستخراج وتر التسع».

۷۲. «قانون مسعودی» ص ۲۸۶: «لو امکن قسمة الزاویه بثلاثة اقسام...».

۷۳. «قانون مسعودی» ص ۲۸۷ سطر یازدهم به بعد: «فلنقسم الدائرة اتساعاً...».



شکل ۱۲۴

اکنون ملاحظه می‌کنیم که خط شکسته AER در کمان AER محاط شده و اگر از وسط این کمان یعنی نقطه D عمود DL را بر ضلع بزرگتر این خط شکسته یعنی بر AE فرود آوریم بنابر قضیه مقدماتی اول (شماره ۸/۲۱) نقطه L وسط خط شکسته AER است. یعنی:

$$AL = LE + ER$$

و واضح است که

$$LE = \frac{AE - ER}{2}$$

اگر از نقطه L روی LA طول LM را مساوی با EL جدا کنیم حاصل می‌شود:

$$DE = DM \text{ و } AM = ER$$

و چون زاویه DEL روبه‌روی کمان $\frac{2}{3}$ یعنی $\frac{1}{3}$ دایره است پس زاویه $DEL = 60^\circ$ و مثلث EDM متساوی‌الاضلاع است و $DE = EM$. از طرف دیگر، چنانکه گفتیم خط شکسته AER در کمان ADR محاط شده و نقطه D وسط کمان مذکور است. پس بنابر قضیه مقدماتی دوم (شماره ۸/۲۲) داریم:

$$AE \times ER + \overline{ED}^2 = \overline{AD}^2 \quad (۱)$$

و اگر طول ED را واحد بگیریم و طول ER را x بنامیم حاصل می‌شود:

$$AE = EM + MA = ED + ER = ۱ + x$$

و رابطهٔ (۱) به این صورت درمی‌آید:

$$(1+x)x + 1 = \overline{AD}^2$$

و یا

$$\overline{AD}^2 = x^2 + x + 1 \quad (2)$$

و نیز چون خط شکستهٔ ADE در کمان ACE محاط شده و نقطهٔ C وسط کمان مذکور است باز بنابر قضیهٔ مقدماتی دوم (شمارهٔ ۸/۲۲) داریم:

$$AD \times DE + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 \quad (3)$$

اما وتر AC که روبه‌روی کمان $\frac{1}{4}$ دایره است مساوی است با ER یعنی x و DC مساوی است با ED یعنی واحد. پس رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت:

$$AD \times 1 + 1 = x^2$$

و از آنجا:

$$\overline{AD}^2 = (x^2 - 1)^2 \quad (4)$$

از روابط (۲) و (۴) حاصل می‌شود:

$$x^2 + x + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

و از آنجا

$$3x^2 + x = x^4$$

و چون دو طرف را بر x تقسیم کنیم (فاذا حططناها مرتبة) داریم:^{۷۴}

$$1 + 3x = x^3 \quad (5)$$

بیرونی پس از تشکیل دادن این معادله که مجهول آن طول ER است می‌گوید:^{۷۵} درجات این معادله پی در پی نیستند تا نسبتهای متوالی از آنها حاصل شود و راه‌حلی جز از طریق استقراء

۷۴. معادلهٔ (۵) به عربی چنین بیان می‌شود: «واحدًا وثلاثة اشیاء تعدل مکعبا».

۷۵. «قانون مسعودی» ص ۲۸۸ سطر بازدهم: «و مراتبها لاتتلاصق حتی تتوالی فی النسبة ولبس الا الاستقراء».

ندارد. و اگر استقراء را انجام دهیم،^{۷۶} به فرض آنکه وتر $\frac{1}{4}$ دایره یعنی ED مساوی با واحد فرض شود، حاصل می‌شود:^{۷۷}

$$ER = x = ۱; ۵۲, ۴۵, ۴۷, ۱۳$$

و AE برحسب این مقدار مساوی است با

$$AE = ۱ + x = ۲; ۵۲, ۴۵, ۴۷, ۱۳$$

اکنون $AE \times ER$ یعنی $x(1+x)$ را حساب می‌کنیم و به حاصل مربع DE یعنی واحد را می‌افزاییم تا از روی رابطه (۱) مقدار $\overline{AD}$ به دست آید. حاصل می‌شود:

$$\overline{AD}^2 = ۱'۰۷۴'۸۸۱'۴۶۹'۴۶۹'۸۸۹ \text{ (نامنه)}$$

یعنی

$$\overline{AD}^2 = \frac{۱'۰۷۴'۸۸۱'۴۶۹'۴۶۹'۸۸۹}{(۶۰)^8}$$

صورت کسر اخیر را α می‌نامیم پس $\overline{AD}^2 = \alpha \times \frac{1}{(60)^8}$ و این مربع AD است وقتی که DE را واحد بگیریم. یعنی در واقع:

$$\left(\frac{AD}{DE}\right)^2 = \alpha \times \frac{1}{(60)^8}$$

بنابراین نسبت $\frac{AD}{DE}$ را داریم و این یک عدد خالص است که بستگی به هیچ واحدی ندارد. حال اگر شعاع دایره را واحد بگیریم می‌دانیم که AD یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی مساوی با $\sqrt{3}$ خواهد بود. و اگر در تساوی فوق به جای AD مقدار آن $\sqrt{3}$ را قرار دهیم و DE را که ضلع نه ضلعی منتظم محاطی است C_9 بنامیم حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{C_9}\right)^2 = \alpha \times \frac{1}{(60)^8}$$

۷۶. متأسفانه بیرونی نوشته است که چگونه این معادله را حل کرده و ریشه تقریبی آن را به دست آورده است. اگر او این مطلب را توضیح داده بود معلوم می‌شد که در زمان وی مسلمین معادلات درجه سوم را از چه راهی حل می‌کردند و چگونه می‌توانستند ریشه معادله درجه سوم را با این دقت به دست آورند! کارل شوی نوشته است (← «شوی T» ص ۱۹) که پروفسور ودمیر (A. Wedemeyer) استاد دانشگاه برلین ریشه معادله مورد بحث (معادله ۵) را با روش هورنر (Horner) حل کرده و ریشه تقریبی آن را مساوی با $۱,۸۷۹'۳۸۵'۲۴۱'۸ = x$ یافته است. عددی که بیرونی به دست آورده در دستگاه شمار دهگانی چنین نوشته می‌شود: $x = ۱,۸۷۹'۳۸۵'۲۴۶'۸$ که با مقایسه با عدد فوق معلوم می‌شود که هشت رقم اعشاری آن دقیق است.

۷۷. ← ۹/۱۲. در آنجا روش نوشتن اعداد را در دستگاه شمار شصتگانی شرح داده‌ام.

$$(C_1)^2 = \frac{3 \times (60)^8}{\alpha}$$

بیرونی مقدار تقریبی C_1 را به فرض آنکه شعاع دایره واحد باشد حساب کرده و آن را در دستگاه شمار شصتگانی مساوی با مقدار زیر یافته است:^{۷۸}

$$C_1 = 0; 41, 2, 32, 41, 55$$

این عدد در دستگاه شمار دهگانی چنین نوشته می‌شود:^{۷۹}

$$C_1 = 0.6844'040'2740$$

۸/۴۲. محاسبهٔ C_{18} به منظور استفاده از آن برای محاسبهٔ C_1 .

بیرونی پس از آنکه C_1 را به طریق فوق به دست آورده است مقدار C_{18} را از راه دیگری حساب کرده و گفته است که با در دست داشتن C_{18} می‌توان C_1 را حساب کرد (با استفاده از مسئلهٔ دوم شمارهٔ ۸/۳۵). روش بیرونی در محاسبهٔ C_{18} این است:^{۸۰}

در دایرهٔ به مرکز O کمان AB را مساوی با $\frac{1}{18}$ دایره (نصف تسع) اختیار می‌کنیم، به قسمی که زاویهٔ AOB مساوی با $\frac{260}{18}$ (تسع قائمین $= \frac{180}{1}$) یعنی 20° درجه شود. و چون مثلث AOB متساوی‌الساقین است هر یک از دو زاویهٔ OAB و OBA مساوی با 80° درجه (اربعهٔ اتساع قائمین $= \frac{2 \times 180}{1}$) می‌شود. (شکل ۱۲۵).

اکنون زاویهٔ BAC را مساوی با $\frac{1}{4}$ زاویهٔ BAO (یعنی مساوی با 20° درجه) می‌سازیم. دو مثلث ABC و OAB که دو زاویه از آنها با هم مساوی است متشابه هستند و داریم:

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

و اگر در اینجا AB را x فرض کنیم و AO یعنی شعاع دایره را واحد بگیریم حاصل می‌شود:

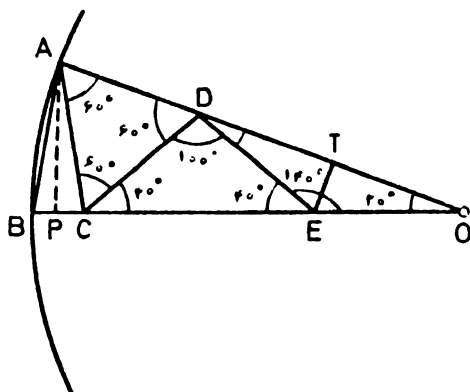
$$BC = x^2$$

بنابر آنچه گفتیم اندازهٔ زاویهٔ CAO مساوی با 60° درجه است؛ اکنون به مرکز C و به شعاع CA کمانی رسم می‌کنیم تا OA را در نقطهٔ دیگر D قطع کند. مثلث ACD متساوی‌الاضلاع

۷۸. «قانون مسعودی» ص ۲۸۸، سطر دوم از آخر صفحه: «فاذا استخراجنا واخذنا جذره کان وتر التسع...».

۷۹. «شوی T » ص ۱۹، یادداشت شمارهٔ ۳.

۸۰. «قانون مسعودی» ص ۲۸۹، سطر دوم به بعد: «ثم لیکن ه مرکز دائرة...».



شکل ۱۲۵

می‌شود و زاویه OCD مساوی با 40° درجه می‌گردد. سپس مانند فوق DE را مساوی با CD رسم می‌کنیم. زاویه DEC نیز مساوی با 40° درجه می‌شود و زاویه DEO مساوی با 140° درجه می‌شود و زاویه $E\hat{D}O = DOE$ مساوی با 20° درجه می‌شود. و پاره‌خطهای AB و AC و EO و DE و CD با هم مساویند و هریک از آنها مساوی با x است. اکنون عمود AP را بر OB و عمود ET را بر OA فرود می‌آوریم. دو مثلث AOP و EOT متشابه هستند و داریم:

$$\frac{OE}{OT} = \frac{OA}{OP}$$

و یا

$$\frac{OE}{2OT} = \frac{OA}{2OP}$$

و اگر OP را به اندازه خودش از طرف P امتداد دهیم تا نقطه M به دست آید ($MP = PO$) داریم:^{۸۱}

$$\frac{OE}{2OT} = \frac{OA}{OM} \quad (۱)$$

اما $OE = x$ و $2OT = OD = 1 - x$ و $OA = 1$. از طرف دیگر $OM = 2OP$ و چون دیدیم که $BC = x^2$ پس:

$$OM = 2OP = 2(OB - PB) = 2\left(OB - \frac{BC}{2}\right) = 2 - x^2$$

۸۱. نقطه M روی شکل مشخص نشده است.

پس رابطه (۱) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2-x^2}$$

و یا

$$3x = 1 + x^3$$

بیرونی ریشهٔ تقریبی این معادله را مساوی با مقدار زیر درآورده است:

$$x = 0; 20, 50, 16, 1$$

و این وتر $\frac{1}{18}$ دایره (نصف التوسع) یعنی ضلع هجده ضلعی منتظم محاطی (C_{18}) است و وتر $\frac{1}{9}$ دایره یعنی C_9 را می توان از روی آن حساب کرد. مقصود این است که با معلوم بودن C_{18} می توان C_9 را با استفاده از دستور محاسبهٔ وتر دو برابر کمانی که وترش معلوم باشد (شمارهٔ ۸/۳۵) به دست آورد. در این مورد دستور مذکور این است:

$$C_9 = 2\sqrt{(C_{18})^2 - \frac{(C_{18})^4}{4}}$$

۸/۴۳- محاسبهٔ C_9 به طریق صناعی.

توضیح - بیرونی پس از آنکه C_9 را یک بار از راه جبری به دست آورده و بار دیگر، چنانکه در شمارهٔ قبل دیدیم روش محاسبهٔ تقریبی آن را از روی C_{18} بیان کرده، به ذکر روش دیگری پرداخته که خود آن را روش صناعی (= عملی) نامیده است.^{۸۲} چه اساس این روش اصولا با جبر و مقابله تفاوت دارد.

پیش از آنکه به نقل مطالب بیرونی در این باره بپردازیم، چون در محاسبات این قسمت عملهای مکرر انجام یافته و عدهٔ اعداد و ارقام آنها زیاد است و ممکن است همین امر موجب دشواری فهم مطلب شود ابتدا خلاصهٔ روش بیرونی را شرح می دهیم: بیرونی ابتدا وتر 30° درجه و وتر 12° درجه را جداگانه با استفاده از آنچه در بابهای اول و دوم گفته است به دست آورده و سپس با به کار بردن دستور محاسبهٔ وتر مجموع دو کمان وتر 42° درجه را حساب کرده است.

۸۲. «قانون مسعودی» ص ۲۹۰، سطر چهارم به بعد: «و نسلک فی مقاربه و ترالتوسع طریقا صناعیا لانحراف الجبر و المقابله فیہ عن اصوله».

سیس کمان 30° درجه را اساس محاسبات قرار داده و کمان 42° درجه را مجموع اول نامیده است. آن گاه ربع مجموع اول را با اساس (یعنی 30° درجه) جمع کرده مجموع دوم را به دست آورده و وتر آن را حساب کرده است. سپس به ترتیب ربع مجموع دوم را با اساس جمع کرده مجموع سوم را به دست آورده و وتر آن را حساب کرده است. و به همین نحو عمل را ادامه داده تا اینکه به مجموع یازدهم یعنی حاصل جمع مجموع دهم با اساس رسیده است.

مجموع یازدهم تقریباً 40° درجه و وتر آن تقریباً مساوی با C_9 است. با این تدبیر بیرونی اندازه تقریبی ضلع نه ضلعی منتظم محاطی را حساب کرده است.

روش صناعی-بیرونی گوید و تریک دوازدهم (وتر نصف السدس) محیط دایره (یعنی C_{12}) را به فرض آنکه قطر دایره ۲ باشد حساب کرده ام و چنین در آمده است:^{۸۳}

$$C_{12} = 0; 31, 3, 29, 49, 38 (= 30^\circ \text{ وتر})$$

و وتر یک سی ام (وتر خمس السدس) دایره (C_{20}) از تفاضل مابین یک پنجم و یک ششم (تفاضل مابین الخمس و السدس) دایره به دست می آید:

$$C_{20} = 0; 12, 32, 36, 17, 46 (= 12^\circ \text{ وتر})$$

و مجموع این دو کمان 42° درجه است. این مجموع را مجموع اول می نامیم و وتر آن را از روی دستور محاسبه وتر مجموع دو کمان به دست می آوریم می شود:

$$15, 57, 14, 0, 43 = 0; \text{ وتر } 42^\circ = \text{ وتر مجموع اول}$$

یک چهارم مجموع اول یعنی $(\frac{1}{4} \times 42^\circ)$ عبارت است از 10° درجه و $30'$ دقیقه. این را ربع اول می نامیم و وتر آن را از روی دستوری که برای محاسبه وتر یک چهارم کمان بیان کردیم (مسئله چهارم شماره ۸/۳۷) به دست می آوریم:

$$56, 41, 48, 10, 0 = 0; \text{ وتر } 30' = 10^\circ = \text{ وتر ربع اول}$$

اکنون کمان 30° درجه را (برای محاسبات بعدی) اساس قرار داده به آن ربع اول (یعنی 10° درجه و $30'$ دقیقه) را می افزاییم تا مجموع دوم (یعنی 40° درجه و $30'$ دقیقه) به دست آید و وتر آن را حساب می کنیم:

$$6, 34, 2, 32, 41 = 0; \text{ وتر } 30' = 40^\circ = \text{ وتر مجموع دوم}$$

۸۳. چون اعدادی که در نسخه «قانون مسعودی» چاپ حیدرآباد ثبت شده دارای غلطهای فراوان است همه اعداد این قسمت را از روی مقالة کارل شوی نقل کرده ام (← «شوی T» ص ۲۱ و ۲۲).

یک چهارم ۴۰ درجه و ۳۰ دقیقه یعنی ربع دَوَم می‌شود ۷, ۳۰; ۱۰۰ و وتر آن را حساب می‌کنیم.

$$۱۰, ۲۰, ۴۲, ۵۳; ۱۰۰ = \text{وتر ربع دَوَم}$$

اکنون مجموع سَوَم و وتر آن و ربع سَوَم و وتر آن را حساب می‌کنیم و عمل را ادامه می‌دهیم:

$$۷, ۳ + ۱۰۰; ۳۰ = \text{مجموع سَوَم}$$

$$۴۱, ۹, ۱۵, ۲۶ = \text{وتر مجموع سَوَم}$$

$$۱, ۵۲, ۳۰; ۴ = \text{ربع سَوَم}$$

$$۱۰, ۲۹, ۱۸, ۳۸, ۲۶ = \text{وتر ربع سَوَم}$$

$$۱, ۵۲, ۳۰; ۴۰ = \text{مجموع چهارم}$$

$$۴۱, ۶, ۲۹, ۲۸, ۱۳, ۲۴ = \text{وتر مجموع چهارم}$$

$$۰, ۲۸, ۷, ۳۰; ۴ = \text{ربع چهارم}$$

$$۱۰, ۲۸, ۰, ۳۷, ۱۵ = \text{وتر ربع چهارم}$$

$$۰, ۲۸, ۷, ۳۰; ۴۰ = \text{مجموع پنجم}$$

$$۴۱, ۴, ۰, ۲۲, ۳۹ = \text{وتر مجموع پنجم}$$

$$۰, ۷, ۱, ۵۲, ۳۰ = \text{ربع پنجم}$$

$$۱۰, ۲۷, ۳۸, ۳۷, ۱۴ = \text{وتر ربع پنجم}$$

$$۰, ۷, ۱, ۵۲, ۳۰; ۴۰ = \text{مجموع ششم}$$

$$۴۱, ۲, ۳۹, ۳۷, ۱۵, ۶ = \text{وتر مجموع ششم}$$

$$۰, ۱, ۴۵, ۲۸, ۷, ۳۰ = \text{ربع ششم}$$

$$۱۰, ۲۷, ۳۳, ۶, ۱۱ = \text{وتر ربع ششم}$$

$$۰, ۱, ۴۵, ۲۸, ۷, ۳۰; ۴۰ = \text{مجموع هفتم}$$

$$۴۱, ۲, ۳۷, ۲۵, ۵۳ = \text{وتر مجموع هفتم}$$

$$۰, ۰, ۲۶, ۲۲, ۱, ۵۲, ۳۰ = \text{ربع هفتم}$$

$$۱۰, ۲۷, ۳۱, ۴۴, ۲۶ = \text{وتر ربع هفتم}$$

$$\begin{aligned} ۳۰^\circ + \text{ربع هشتم} = ۴۰^\circ; ۰, ۰, ۲۶, ۲۲, ۱, ۵۲, ۳۰ \\ \text{وتر مجموع هشتم} = ۰; ۴۱, ۲, ۳۳, ۸, ۲ \\ \text{ربع هشتم} = ۱۰^\circ; ۰, ۰, ۶, ۳۵, ۳۰, ۲۸, ۷, ۳۰ \\ \text{وتر ربع هشتم} = ۰; ۱۰, ۲۷, ۳۱, ۲۳, ۴۲ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۰^\circ + \text{ربع نهم} = ۴۰^\circ; ۰, ۰, ۶, ۳۵, ۳۰, ۲۸, ۷, ۳۰ \\ \text{وتر مجموع نهم} = ۰; ۴۱, ۲, ۳۲, ۴۸, ۳۵ \\ \text{ربع نهم} = ۱۰^\circ; ۰, ۰, ۱, ۳۸, ۱۲, ۳۷, ۱, ۵۲, ۳۰ \\ \text{وتر ربع نهم} = ۰; ۱۰, ۲۷, ۳۱, ۱۸, ۳۳ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۰^\circ + \text{ربع دهم} = ۴۰^\circ; ۰, ۰, ۱, ۳۸, ۱۲, ۳۷, ۱, ۵۲, ۳۰ \\ \text{وتر مجموع دهم} = ۰; ۴۱, ۲, ۳۲, ۴۳, ۴۳ \\ \text{ربع دهم} = ۱۰^\circ; ۰, ۰, ۰, ۲۴, ۴۳, ۹, ۱۵, ۲۸, ۷, ۳۰ \\ \text{وتر ربع دهم} = ۰; ۱۰, ۲۷, ۳۱, ۱۷, ۱۵ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳۰^\circ + \text{ربع یازدهم} = ۴۰^\circ; ۰, ۰, ۰, ۲۴, ۴۳, ۹, ۱۵, ۲۸, ۷, ۳۰ \\ \text{وتر مجموع یازدهم} = ۰; ۴۱, ۲, ۳۲, ۴۲, ۲۹ \end{aligned}$$

و این حاصل با مقدار وتر یک نهم دایره (یعنی: مقدار $C_1 = ۴۰^\circ$ درجه) که آن را به تقریب (در شماره ۸/۴۱) به دست آوردیم موافق است. زیرا زیادی مجموع یازدهم بر C_1 در منزل چهارم [یعنی از جنس $\frac{1}{(۶۰)^۲}$ است] است^{۸۴} و این تقریباً مساوی است با $\frac{1}{۲۱۹۹۷۴۷}$ درجه و بنابر این تفاوت بین حاصل فوق و C_1 از جنس خامسه به بعد است.

۸۴. وتر مجموع یازدهم که در فوق حساب کردیم مساوی است با

$$۰; ۴۱, ۲, ۳۲, ۴۲, ۲۹$$

و مقدار C_1 که در شماره ۸/۴۱ به دست آوردیم مساوی است با

$$۰; ۴۱, ۲, ۳۲, ۴۱, ۵۵$$

و ملاحظه می شود که اختلاف این دو مقدار از مرتبه رابعه به بعد است. در واقع تفاضل آنها ۳۴ خامسه یعنی $\frac{۲۴}{(۶۰)^۵}$ می باشد که بیرونی آن را تقریباً مساوی $\frac{1}{۲۱۹۹۷۴۷}$ گرفته است.

ز- باب چهارم از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» چگونگی محاسبهٔ وتر یک درجه ^{۸۵}

بیرونی در این باب ابتدا دوازده مسئله را که مسئلهٔ تثلیث زاویه به آنها منجر می‌شود طرح کرده و در مورد هر مسئله نشان داده است که اگر آن مسئله حل شود مسئلهٔ تثلیث زاویه نیز حل خواهد شد. علت اینکه بیرونی در آغاز این باب که موضوعش محاسبهٔ وتر یک درجه است به مسئلهٔ تثلیث زاویه پرداخته این است که می‌خواسته است بعداً از تثلیث زاویه برای محاسبهٔ وتر یک درجه استفاده کند. علاوه بر مسایل فوق که بیرونی خود ذکر کرده است ابوسعید سجری* نیز چند مسئله راجع به تثلیث زاویه از وی نقل کرده است که در دنبال مسایل فوق آنها را ذکر خواهیم کرد.

بیرونی پس از بررسی مسئلهٔ تثلیث زاویه به دشواری محاسبهٔ Cv یعنی وتر یک هفتم دایره اشاره کرده و آن‌گاه با چند روش مختلف به محاسبهٔ وتر یک درجه پرداخته است و ضمناً به کارهایی که ریاضیدانان دیگر در این باره انجام داده‌اند نیز اشاره کرده است.

قسمت اول باب چهارم-مسئلهٔ تثلیث زاویه

۸/۴۴- بیرونی در مقدمهٔ این باب نوشته است:^{۸۶}

«ابتدا مقدماتی را بیان می‌کنیم که اگر دست یافتن به آنها امکان‌پذیر باشد می‌توان زاویهٔ مفروضی را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد.»

۸/۴۵- مقدمهٔ اول^{۸۷}- زاویهٔ مرکزی AEB را در دایره‌ای در نظر گرفته و تر BD را به موازات قطر AEC رسم می‌کنیم. زاویهٔ CED با زاویهٔ AEB مساوی می‌شود. پس: اگر بتوانیم از نقطهٔ D قاطع DZK را طوری رسم کنیم که دایره را در نقطهٔ دیگر Z و امتداد قطر AC را در نقطهٔ K قطع کند و قسمت خارجی آن ZK مساوی با شعاع دایره شود تثلیث زاویهٔ $AEB = CED$ ممکن خواهد بود.

اکنون فرض می‌کنیم که ترسیم قاطع DZK با شرط مذکور ممکن باشد. یعنی فرض می‌کنیم ZK مساوی با شعاع دایره باشد (و نشان می‌دهیم که در این صورت می‌توان زاویهٔ AEB را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد.) (شکل ۱۲۶).

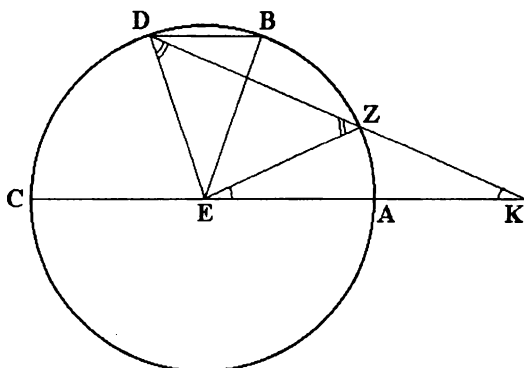
نقطهٔ Z را به مرکز دایره وصل می‌کنیم دو مثلث ZKE و EZD متساوی‌الساقین هستند و داریم: $\widehat{K} = \widehat{ZEK} = \widehat{EZD} = \widehat{EDZ}$

بنابراین

۸۵. «قانون مسعودی» ص ۲۹۲: «الباب الرابع فی التحل لاستخراج وتر الجزء الواحد من ثلاث مائة و ستين جزءاً».

۸۶. «قانون مسعودی» ص ۲۹۲: «نقدم الاشياء التي اذا تسلم حصولها...».

۸۷. «قانون مسعودی» ص ۲۹۲ سطر چهارم به بعد «فلتكن هي: ا ه ب علي: ه...».



شکل ۱۲۶

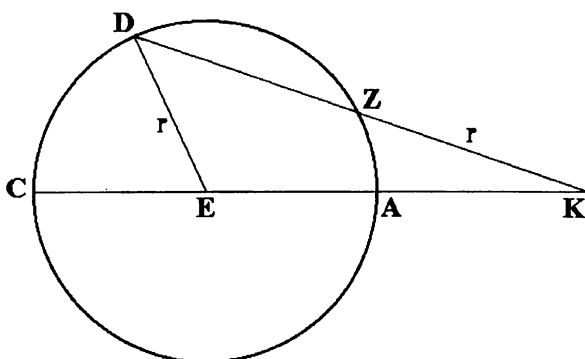
$$\widehat{EDZ} = 2\widehat{ZKE}$$

$$\widehat{DEC} = \widehat{EDK} + \widehat{K} \quad \text{اما (زاویه خارجی مثلث DEK)}$$

پس

$$\widehat{DKE} = \frac{1}{3}\widehat{DEC}$$

یعنی زاویه ZEA یک سوم زاویه AEB است و این نخستین مقدمه برای تثلیث زاویه است. ۸/۴۶- تبصره- چنانکه ملاحظه می شود بیرونی در این مقدمه مسئله تثلیث زاویه را موکول به حل مسئله زیر کرده است: «در دایره به مرکز E و به شعاع r زاویه مرکزی CED را در نظر می گیریم. (شکل ۱۲۷).

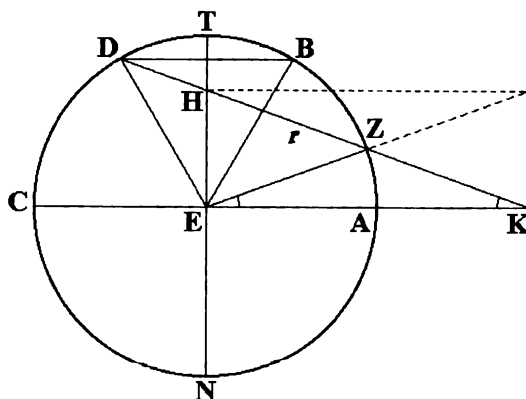


شکل ۱۲۷

می‌خواهیم از نقطهٔ D قاطعی چنان رسم کنیم که دایره را در نقطهٔ دیگر Z و امتداد قطر CA را در نقطهٔ K قطع کند و ZK مساوی با r باشد.»
به عبارت دیگر بیرونی گفته است که: اگر بتوانیم قاطع DZK را با شرط فوق رسم کنیم مسئلهٔ تثلیث زاویه امکان‌پذیر خواهد بود.

به همین طریق، چنانکه خواهیم دید، بیرونی در یازده مقدمهٔ دیگر نیز هر بار مسئلهٔ تثلیث زاویه را به حل یک مسئلهٔ هندسی موکول کرده است.

۸/۴۷- مقدمهٔ دوم^{۸۸}- فرض می‌کنیم که ترسیم خط DZK چنانکه گفتیم امکان‌پذیر باشد (یعنی قاطع DZK طوری رسم شده باشد که ZK مساوی با شعاع دایره باشد).
قطر NT را عمود بر قطر AC رسم کرده فصل مشترک DZ با NT را نقطهٔ H می‌نامیم. (شکل ۱۲۸). در این صورت: $ZE = ZH$ زیرا KH قطر مستطیلی است که دو ضلع آن HE



شکل ۱۲۸

و EK هستند و چون $\widehat{KE} = \widehat{ZEK}$ پس ZE متعلق به قطر دیگر آن مستطیل است و نقطهٔ Z وسط آن قطر است. پس: $ZH = ZK = ZE = r$ بنابراین شرطی را که در مقدمهٔ اول ذکر کردیم می‌توان به صورت زیر تغییر داد:

اگر بتوانیم از نقطهٔ D قاطع DHZ را طوری رسم کنیم که شعاع ET را در نقطهٔ H و دایره را در نقطهٔ Z قطع کند و HZ مساوی با شعاع دایره باشد تثلیث زاویهٔ AEB امکان‌پذیر خواهد بود. و این مقدمهٔ دوم برای مسئلهٔ تثلیث زاویه است.

۸/۴۸- مقدمهٔ سوم^{۸۹}- اگر فرض کنیم که قاطع DHZ با برقرار بودن شرطی که در مقدمهٔ

۸۸. «قانون مسعودی» ص ۲۹۲، سطر چهاردهم به بعد: «وایضاً فان خط...».

۸۹. «قانون مسعودی» ص ۲۹۳، سطر دوم به بعد: «وایضاً فان ضرب:...».

برعکس اگر رابطه (۴) برقرار باشد می‌توان از روابط (۲) و (۳) نتیجه گرفت

$$HZ = ET = r$$

پس می‌توان شرطی را که در مقدمهٔ دوم ذکر کردیم به‌صورت زیر تغییر داد:

اگر بتوانیم از نقطه D قاطع DHZ را طوری رسم کنیم که شعاع ET را در نقطه H و دایره را در نقطه Z قطع کند و رابطه زیر برقرار باشد:

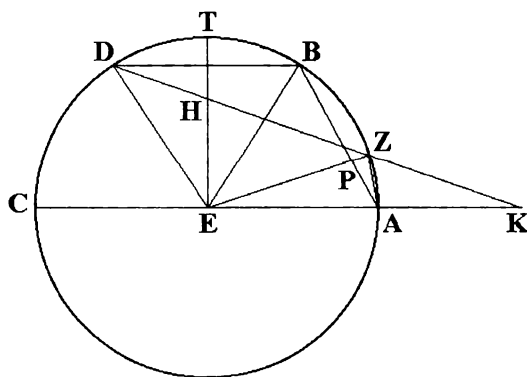
$$DH \times ET + \overline{EH^{\vee}} = \overline{ET^{\vee}}$$

مسئلهٔ تثلیث زاویه امکان یذیر خواهد بود.

و این مقدمه سوم برای مسئله تثلیث زاویه است.

تبصره - ← ۸/۶۲- در آنجا همین مسئله را با عبارت دیگری خواهید یافت.

۸/۴۹- مقدمهٔ چهارم^{۱۱}- باز اگر فرض کنیم که یکی از شرایط مقدمات قبل برقرار باشد (یعنی خلاصه زاویه AEZ یک سوم زاویه AEB باشد، یعنی $\widehat{AZ} = \frac{1}{3}\widehat{AB}$) و فصل مشترک AB را با EZ نقطهٔ P بنامیم، مثلث APZ متساوی الساقین است. (شکل ۱۳۰). زیرا زوایای آن

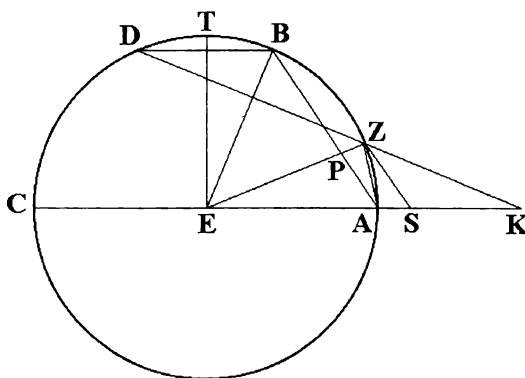


شکل ۱۳۰

نظیر به نظیر با زوایای مثلث متساوی الساقین EAZ مساویند. در واقع زاویه Z در هر دو مشترک است و اندازه زاویه مرکزی AEZ مساوی با اندازه کمان AZ است و اندازه زاویه محاطی ZAB مساوی با نصف اندازه کمان BZ است و چون $\widehat{AZ} = 2\widehat{BZ}$ پس $\widehat{AEZ} = \widehat{ZAP}$. پس می توان شرط قبل را به صورت زیر تغییر داد:

اگر بتوانیم شعاع EZ را طوری رسم کنیم که وتر AB را در نقطه P قطع کند و تساوی $AP = AZ$ برقرار باشد تثلیث زاویه AEB امکان پذیر خواهد بود. و این مقدمه چهارم برای مسئله تثلیث زاویه است.

تبصره - $\leftarrow ۸/۶۱$ در آنجا همین مسئله را با بیان دیگری خواهید یافت.
 $۸/۵۰$ مقدمه پنجم^{۱۲} - اکنون فرض می کنیم که شعاع EZ با شرط فوق رسم شده باشد (یعنی فرض می کنیم $AP = AZ$) و از نقطه Z خطی به موازات AB رسم می کنیم تا EK را در نقطه S قطع کند (شکل ۱۳۱). واضح است که $\frac{ES}{SZ} = \frac{EA}{AP}$ و چون $AP = AZ$ پس



شکل ۱۳۱

$\frac{ES}{SZ} = \frac{EA}{AZ}$ و برعکس اگر این تساوی برقرار باشد AP مساوی AZ خواهد بود.

پس می توان شرط فوق را به صورت زیر تغییر داد:

اگر بتوانیم شعاع EZ را طوری رسم کنیم که وتر AB را در نقطه P قطع کند به قسمی که اگر از نقطه Z خط SZ را به موازات AB رسم کنیم نسبت $\frac{ES}{SZ} = \frac{EA}{AZ}$ برقرار باشد تثلیث زاویه AEB امکان پذیر خواهد بود.

و این مقدمه پنجم برای تثلیث زاویه است.

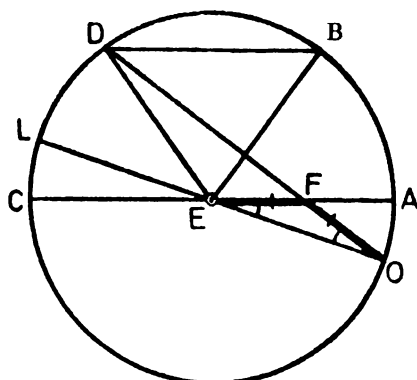
$۸/۵۱$ مقدمه ششم^{۱۳} - شعاع دایره را r می نامیم و می گوئیم:

اگر بتوانیم قاطع DFO را مطابق با شکل ۱۳۲ طوری رسم کنیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$DF \times FE + \overline{FE}^2 = r^2 \quad (۱)$$

۹۲. «قانون مسعودی» ص ۲۹۳، سطر پانزدهم به بعد: «و ایضا نخرج...»

۹۳. «قانون مسعودی» ص ۲۹۴، سطر اول به بعد: «و ایضا فانخرج...»



شکل ۱۳۲

از دو طریق به مطلوب می‌رسیم. (یعنی می‌توانیم زاویه $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم.)
طریق اول - این است که داریم:

$$(2) \quad \text{قوت نقطه } F \text{ نسبت به دایره} = DF \times FO = AF \times FC$$

(دو وتر در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند) و از طرف دیگر نظر به قضیهٔ پنجم مقالهٔ دوم کتاب «اصول اقلیدس»^{۹۴} داریم:

$$(3) \quad AF \times FC + \overline{EF}^2 = r^2$$

از مقایسهٔ سه رابطهٔ (۱) و (۲) و (۳) معلوم می‌شود که^{۹۵}:

$$DF \times FO = DF \times FE$$

یعنی

$$(4) \quad FO = EF$$

اکنون شعاع OE را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ L قطع کند. از تساوی (۴) معلوم می‌شود که مثلث FEO متساوی‌الساقین است. پس دو زاویهٔ FOE و LEC با هم مساویند. بنابراین

۹۴. ← پاورقی شمارهٔ ۳۹ مربوط به شمارهٔ ۸/۲۲ همین بخش.

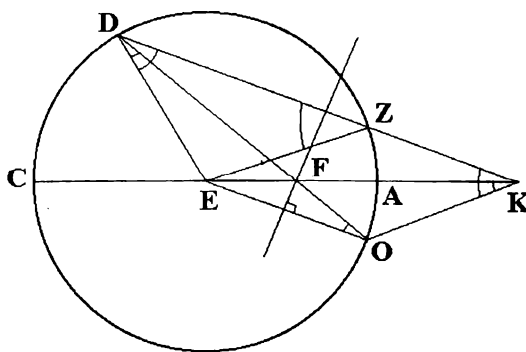
۹۵. کارل شوی در ترجمهٔ این قسمت اشتباه کرده (← «شوی T » ص ۲۴) زیرا عبارت «ف د ف ف ف ف و ف ف ه واحد» را مطابق با شکلی که به‌کار برده چنین ترجمه کرده است: $DF \times FE \times FH = 1$ و این معنی ندارد.

کمان LD که روبه‌روی زاویهٔ محاطی O است دو برابر کمان LC است که مقابل زاویهٔ مرکزی LEC است.

پس $\widehat{CL} = \frac{1}{3}\widehat{CD}$ و تقسیم زاویه DEC به سه قسمت مساوی امکان پذیر می‌شود. و این مقدمه ششم برای مسئله تثلیث زاویه است.

۸/۵۲- مقدمه هفتم^{۱۶}- در مقدمه ششم گفتیم که اگر قاطع DFO را با شرط مذکور رسم کنیم از دو طریق به مطلوب می‌رسیم و طریق اول را شرح دادیم.

طریق دوم این است که اگر در همان شکل قبل OK را طوری رسم کنیم که مساوی با OE شود واضح است که دو مثلث متساوی الساقین DEO و EOK که زوایای مجاور به قاعده آنها با هم و ساقهای آنها با هم مساویند متساوی می شوند. پس قاعده های آنها نیز با هم مساوی است یعنی $DO = EK$ و چون $FO = EF$ (رابطه ۴ شماره قبل) پس اگر عمود منصف پاره خط EO را رسم کنیم این عمود منصف محور تقارن چهار ضلعی $KOED$ است. (شکل ۱۳۳). بنابراین EO موازی است با DK و $\widehat{DKO} = \widehat{EDK}$ و چون مثلث EZD متساوی الساقین



شكل ۱۳۳

است یس:

$$E\hat{Z}D = E\hat{D}Z = D\hat{K}O$$

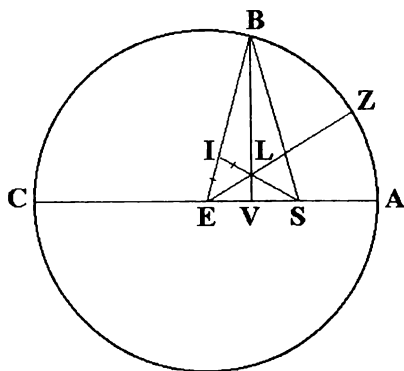
بنابراین خط OK با خط EZ موازی است. پس چهارضلعی $KOEZ$ متوازی الاضلاع (در واقع لوزی) است و KZ مساوی با EO یعنی مساوی با شعاع دایره است. پس نقطه K همان نقطه‌ای است که در مقدمهٔ اول (شمارهٔ ۸/۴۵) آن را به دست آوردیم. (یعنی KZ را به اندازهٔ شعاع دایره رسم کردیم). بنابراین:

اگر بتوانیم قاطع DFO را به قسمی رسم کنیم که اگر OK را مساوی با شعاع دایره بگیریم DF مساوی با FK گردد مسئله تثلیث زاویه را حل کرده ایم.

و این مقدمه هفتم برای مسئله تثلیث زاویه است.

۸/۵۳- مقدمه هشتم^{۱۷}- عمود BV را از نقطه B بر قطر AEC فرود می‌آوریم و روی VA پاره خط VS را مساوی با VE جدا و BS را رسم می‌کنیم.

اگر بتوانیم قاطع SLI را مطابق با شکل ۱۳۴ چنان رسم کنیم که LI مساوی با IE



شكل ١٣٤

شود مسئلهٔ تثلیث زاویه را حل کرده‌ایم.

زیرا در این صورت $I\hat{L}E = I\hat{E}L$ و چون زاویه ILE زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین LES است. پس $I\hat{E}L = I\hat{L}E = \angle L\hat{S}E = \angle L\hat{E}S$. پس اگر خط EL را امتداد دهیم تا دایره را در نقطه Z قطع کند داریم: $I\hat{E}L = \angle Z\hat{E}A$ پس کمان ZA یک سَوم کمان AB و زاویه AEZ یک سَوم زاویه AEB است.

و این مقدمه هشتم برای مسئله تثلیث زاویه است.

در اینجا بیرونی افزوده است که^{۱۸} مسئلهٔ تثلیث زاویهٔ BEC منجر به تثلیث زاویهٔ AEB می‌شود، زیرا هر یک از آنها مکمل دیگری است.

مقصود این است که اگر زاویه AEB که آن را α درجه می‌گیریم به سه قسمت متساوی تقسیم شود می‌توان زاویه BEC را که مساوی $(180^\circ - \alpha)$ درجه است به سه قسمت متساوی تقسیم

۹۷. «قانون مسعودی» ص ۲۹۵، سطرینجم به بعد.

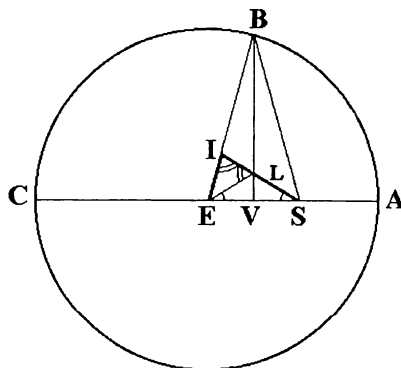
۹۸. «قانون مسعودی» ص ۲۹۵، سطر سیزدهم: «و قسمة زاویه: ب ه ج...».

کرد. زیرا

$$\frac{1}{3}(180^\circ - \alpha) = 60^\circ - \frac{\alpha}{3}$$

۸/۵۴- تبصره روش مقدمه هشتم به قولی از شنی * (ابوعبدالله) است (← «کهل G » صص ۱۸۴ و ۱۸۵) و به قول دیگر از ابوالحسن شمسی هروی * است (← «وپکه: جبر ختام» ص ۱۱۸). به احتمال قوی قول دوم درست است و ظاهراً «الشتی» تصحیف «الشمسی» است.
۸/۵۵- مقدمه نهم^{۱۱}- باز عمود BV را بر شعاع EA فرود آورده VS را روی VA مساوی با EV جدا می‌کنیم.

اگر بتوانیم قاطع SLI را مطابق با شکل ۱۳۵ طوری رسم کنیم که LS مساوی با



شکل ۱۳۵

EI شود مسئله تثلیث زاویه را حل کرده‌ایم.

زیرا در این صورت $EI = LS = EL$ و زاویه ILE مساوی با زاویه EIL است. و زاویه LIE دو برابر زاویه ISE است. اما زاویه BEC ، که زاویه خارجی مثلث IES است، مساوی با مجموع دو زاویه S و I می‌باشد. پس زاویه S یک سوم زاویه CEB است. به این ترتیب می‌توان زاویه CEB را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد. و این مقدمه نهم برای مسئله تثلیث زاویه است. تبصره - ← ۸/۶۶ - در آنجا همین مسئله را با عباراتی دیگر خواهید یافت.

۸/۵۶- مقدمه دهم^{۱۰}- باز از نقطه B عمود BV را بر EA فرود آورده روی VA پاره خط VS را مساوی با EV جدا می‌کنیم و فرض می‌کنیم قاطع SLI طوری رسم شده باشد که EL

۹۹. «قانون مسعودی» ص ۲۹۵، سطر پانزدهم به بعد...
۱۰۰. «قانون مسعودی» ص ۲۹۵ سطر نوزدهم به بعد- در این قسمت عبارات نسخه چاپی نارسا و مغلوط است و محل نقطه ح معلوم نیست - مطلب را از روی قرائن تصحیح کرده‌ام.

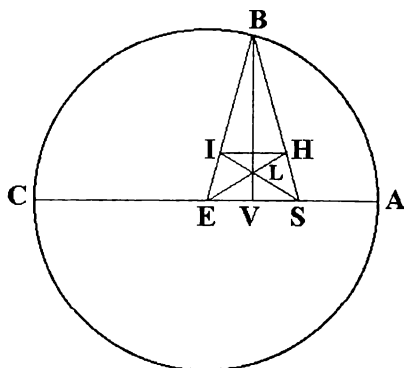
مساوی با EI باشد. اگر از نقطهٔ I خطی به موازات ES رسم کنیم تا BS را در نقطهٔ H قطع کند، دو مثلث SLE و ILH متشابه خواهند بود و خواهیم داشت: $\frac{SE}{EL} = \frac{IH}{HL}$ و چون بنابه فرض $EL = EI$

پس:

$$\frac{SE}{EI} = \frac{IH}{HL} \quad (۱)$$

و برعکس اگر تساوی (۱) برقرار باشد EL مساوی با EI خواهد بود. بنابراین:

اگر بتوانیم از نقطهٔ S قاطع SLI را طوری رسم کنیم که هرگاه از نقطهٔ I خط IH به موازات EA رسم شود تساوی (۱) برقرار باشد، مسئلهٔ تثلیث زاویه را حل کرده ایم. (زیرا در این صورت $EI = EL$ و بنابر مقدمهٔ نهم مسئله حل شده است) و این مقدمهٔ دهم برای مسئلهٔ تثلیث زاویه است. (شکل ۱۳۶).



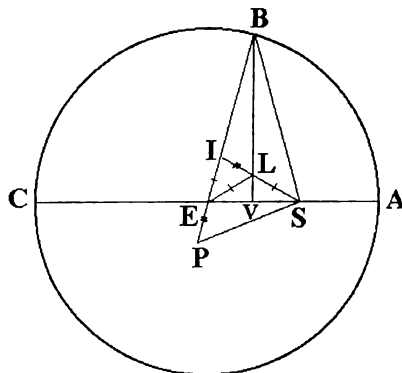
شکل ۱۳۶

۸/۵۷- مقدمهٔ یازدهم- (متن چاپی «قانون مسعودی» در این موضع ظاهراً افتادگی دارد. ۱۰۱ ولی مطلب درست است و می توان آن را چنین بیان کرد):

اگر بتوانیم در امتداد پاره خط BE نقطهٔ P را طوری تعیین کنیم که اگر زاویهٔ PSI را مساوی با زاویهٔ IPS بسازیم رابطهٔ: $BI \times IE = BE \times PE$ برقرار باشد مسئلهٔ تثلیث زاویه را حل کرده ایم. (شکل ۱۳۷).

فرض می کنیم که شرایط فوق برقرار باشد. رابطهٔ مذکور را می توان چنین نوشت:

$$\frac{BI}{BE} = \frac{PE}{IE} \quad (۱)$$



شکل ۱۳۷

از طرف دیگر چون BL نیمساز زاویه B از مثلث BIS است داریم:

$$\frac{BI}{BS} = \frac{IL}{LS} \quad (۲)$$

و چون $BE = BS$ طرفهای چپ دو تساوی (۱) و (۲) با هم مساویند و بنابراین $\frac{PE}{EI} = \frac{IL}{LS}$ از ترکیب نسبت در تناسب اخیر حاصل می‌شود:

$$\frac{PE + EI}{EI} = \frac{IL + LS}{LS}$$

و یا

$$\frac{IP}{EI} = \frac{IS}{LS}$$

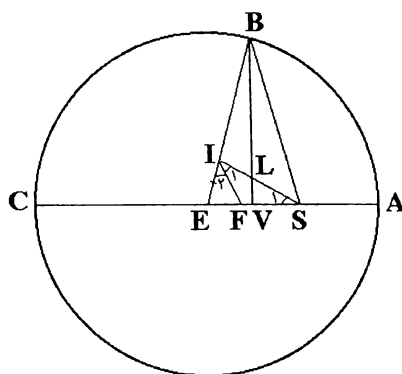
اما بنا به فرض مثلث ISP متساوی الساقین است و $IP = IS$ پس $EI = LS$ و این همان شرطی است که در مقدمه نهم دیدیم که اگر برقرار باشد مسئله تثلیث زاویه حل شده است. و این مقدمه یازدهم برای حل مسئله تثلیث زاویه است.

(← ۸/۶۳ در آنجا مسئله فوق را با عباراتی دیگر خواهید یافت.)

۸/۵۸- مقدمه دوازدهم^{۱۰۲} - (بیان بیرونی در این قسمت پیچیده است اما راه‌حلی که ارائه کرده کاملاً درست است و می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه کرد):

۱۰۲. «قانون مسعودی» ص ۲۹۶، سطر دوازدهم به بعد: کارل شوی پس از ترجمه دو سطر از مقدمه دوازدهم نوشته است که چون نسخه‌های خطی «قانون مسعودی» که وی در اختیار داشته مغلوط بوده نتوانسته است این مقدمه را بفهمد (← «شوی T» ص ۲۵ سطر آخر به بعد) - در واقع نسخه چاپی حیدرآباد نیز در این قسمت مغلوط است و من آن را از روی قرائن تصحیح کرده‌ام.

فرض کنیم که می‌خواهیم زاویهٔ مرکزی BEC را به سه قسمت مساوی تقسیم کنیم. از نقطهٔ B عمود BV را بر قطر AC فرود می‌آوریم (شکل ۱۳۸). و روی VA پاره خط VS را مساوی



شکل ۱۳۸

با VE جدا می‌کنیم.

اگر بتوانیم قاطع SLI را مطابق با شکل طوری رسم کنیم که چون نیمساز زاویهٔ SIE را رسم کنیم و پای آن را روی ES نقطهٔ F بنامیم FI مساوی با FS شود، مسئله حل خواهد شد.

زیرا چون $IF = FS$ پس $\hat{I}_1 = \hat{S}_1$ و چون IF نیمساز زاویهٔ EIS است. پس $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ بنابراین $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \hat{S}_1$. اما زاویهٔ BEC زاویهٔ خارجی مثلث EIS است و مساوی است با مجموع سه زاویهٔ متساوی I_1 و I_2 و S_1 . پس هر یک از سه زاویهٔ I_1 و I_2 و S_1 یک سوم زاویهٔ BEC هستند و مسئلهٔ تثلیث زاویه به شرط مذکور حل شده است. (وقتی زاویهٔ BEC به سه قسمت مساوی تقسیم شد تقسیم زاویهٔ AEB نیز به سه قسمت مساوی میسر است) و این مقدمهٔ دوازدهم برای حل مسئلهٔ تثلیث زاویه است.

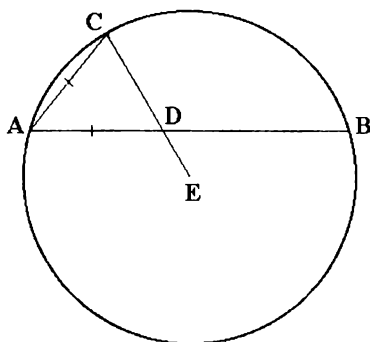
ح - یادداشت - تحقیقات دیگر بیرونی دربارهٔ تثلیث زاویه

۸/۵۹- در صفحات قبل دوازده مسئله را که بیرونی به عنوان مقدمهٔ مسئلهٔ تثلیث زاویه بیان کرده است، دیدیم. بی‌مناسبت نیست که در اینجا متذکر شوم که سجری* (ابوسعید) که از معاصران بیرونی بوده در یکی از تألیفات خود که به «رسالة فی قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلاثة اقسام متساوية» موسوم است، هشت مسئله از بیرونی ذکر کرده است که حل همهٔ آنها به حل مسئلهٔ تثلیث زاویه منجر می‌گردد. ۱۰۲

پس $\hat{K}_1 = \hat{D}_2$ پس دو مثلث متساوی الساقین ADG و AED متساویند (زیرا زوایای مجاور به قاعدهٔ آنها با هم و ساقهایشان با هم مساوی است) پس $DE = GD$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که $GD = FG$ یعنی زاویهٔ مرکزی BAC به وسیلهٔ خطوط AD و AG به سه قسمت متساوی تقسیم شده است.

برعکس اگر زاویهٔ BAD مساوی با یک سوم زاویهٔ BAC باشد تناسب (۱) برقرار خواهد بود.

۸/۶۱- مسئلهٔ دوم^{۱۰۵} - (که نتیجهٔ مسئلهٔ اول است) - دایرهٔ به مرکز E و وتر AB از آن را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم شعاع EDC را طوری رسم کنیم که AC مساوی با AD باشد (شکل ۱۴۰).



شکل ۱۴۰

تبصره - این مسئله را مقایسه کنید با مقدمهٔ چهارم (شمارهٔ ۸/۴۹).

۸/۶۲- مسئلهٔ سوم^{۱۰۶} - زاویهٔ ABC را در نظر گرفته روی دو ضلع آن دو طول متساوی BA و BC را جدا می‌کنیم. (شکل ۱۴۱). می‌خواهیم از نقطهٔ C خط CD را طوری رسم کنیم که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$CD \times AB + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

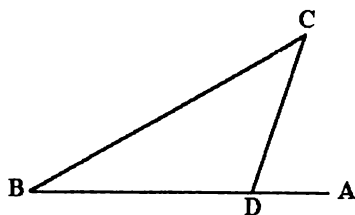
تبصره - این مسئله را مقایسه کنید با مقدمهٔ سوم (شمارهٔ ۸/۴۸).

۸/۶۳- مسئلهٔ چهارم^{۱۰۷} - مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) را در نظر گرفته

۱۰۵. ← «ویکه: جبر ختّام» صص ۱۱۹ و ۱۲۲.

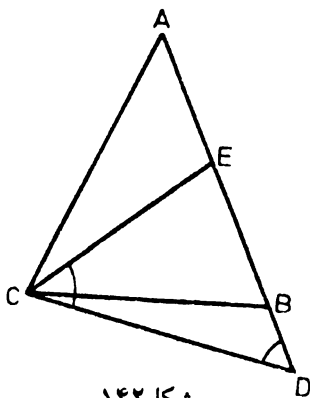
۱۰۶. ← «ویکه: جبر ختّام» صص ۱۱۹ و ۱۲۱.

۱۰۷. ← «ویکه: جبر ختّام» ص ۱۲۴ شمارهٔ ۱.



شکل ۱۴۱

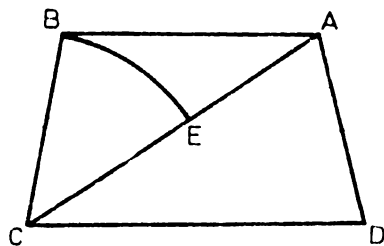
می‌خواهیم روی امتداد ساق AB نقطه D را طوری اختیار کنیم که اگر زاویه ECD را مساوی با زاویه EDC بسازیم رابطه زیر برقرار باشد: $AE \times EB = AB \times BD$. (شکل ۱۴۲).



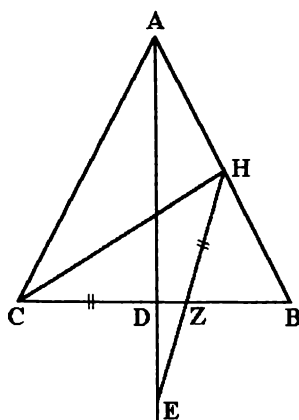
شکل ۱۴۲

تبصره - این مسئله را مقایسه کنید با مقدمه یازدهم (شماره ۸/۵۷).

۸/۶۴ - مسئله پنجم^{۱۰۸} - دوزنقه متساوی الساقین $ABCD$ را که در آن AB با CD موازی و AD با BC مساوی است در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴۳). و روی قطر CA نقطه E را طوری



شکل ۱۴۳



شکل ۱۴۴

اختیار می‌کنیم که $CE = CB$ به فرض آنکه رابطه $\frac{CD}{BC} = \frac{AB}{AE}$ برقرار و زوایای دوزنقه و ضلع CD معلوم باشند می‌خواهیم اضلاع دیگر دوزنقه را حساب کنیم.

۸/۶۵ - مسئلهٔ ششم^{۱۰۹} - مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) مفروض است (شکل ۱۴۴)، می‌خواهیم امتداد ارتفاع AD را مطابق با شکل به وسیلهٔ مورب EZH به قسمی قطع کنیم که ZE مساوی با BZ و ZC مساوی با HZ باشد.

۸/۶۶ - مسئلهٔ هفتم^{۱۱۰} - مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) را در نظر می‌گیریم. و ارتفاع AD از آن را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۵). می‌خواهیم قاطع BZE را مطابق با شکل طوری رسم کنیم که EC مساوی با ZB باشد.

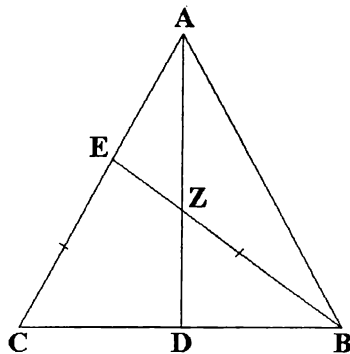
تبصره - این مسئله را مقایسه کنید با مقدمهٔ نهم (شمارهٔ ۸/۵۵).
۸/۶۷ - مسئلهٔ هشتم^{۱۱۱} - زاویهٔ B از مثلث ABC قائمه است. رأس B را به نقطهٔ D وسط وتر AC وصل می‌کنیم. می‌خواهیم از نقطهٔ C قاطع CZE را به قسمی رسم کنیم که رابطهٔ زیر برقرار باشد (شکل ۱۴۶):

$$\frac{BZ}{CE} = \frac{BD}{AC}$$

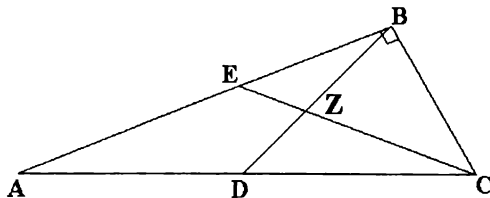
۱۰۹. ← همان کتاب، ص ۱۲۴، شمارهٔ ۳.

۱۱۰. ← همان کتاب، ص ۱۲۴، شمارهٔ ۴.

۱۱۱. ← همان کتاب، ص ۱۲۴، شمارهٔ ۵.



شکل ۱۴۵



شکل ۱۴۶

ط - دنبالهٔ باب چهارم از مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی»

۸/۶۸- دربارهٔ محاسبهٔ C_1 و C_7 - بیرونی گفته است:^{۱۱۲} معلوم است که مسئلهٔ تقسیم دایره به سه قسمت متساوی (و محاسبهٔ ضلع نه ضلعی منتظم محاطی) رجوع می‌شود به مسئلهٔ تقسیم دو سَوَم زاویهٔ قائمه^{۱۱۳} به سه قسمت متساوی. بنابراین محاسبهٔ وتر روبه‌روی یک نهم دایره دشوار نیست. پس از وترهای مهم فقط C_7 یعنی وتر روبه‌روی یک هفتم دایره باقی می‌ماند و آن بسیار

۱۱۲. «قانون مسعودی» ص ۲۹۷، سطر یازدهم به بعد. عنوانی که برای این قسمت اختیار کرده‌ام در متن نیست و فقط برای روشن شدن مطلب است. در متن، مطلب چنین است: «ثم من المعلوم ان المتسع متعلق بانقسام ثلثی الزاویه القائمة اثلاثا، و قد انزاحت العلة من وترا لتسع. ولم یبق من اثقات الاوتار و رؤوسها غیر وترا لتسع، وهو ابعد عن الحصول لمباينة الاعداد الستينية التي يستعملها المنجمون فی کسور الواحد مقدار قوسه، فان ثلاث مائة والستین غیر منقسمة علی سبعة مع استعمال الاجزاء الستينية فی کسورها، فکانه وتر مجهول الکمية لقوس غیر منطوق بها کالجذور

الصم» (کارل شوی چند موضع از عبارات فوق را درست ترجمه نکرده است) — «شوی T» ص ۲۶).

۱۱۳. زیرا $\frac{1}{3}$ زاویهٔ قائمه 60° درجه می‌شود و $\frac{1}{3}$ شصت درجه، 20° درجه است و چون می‌توانیم وتر دو برابر کمانی را که وترش معلوم است حساب کنیم (شمارهٔ ۸/۳۵) پس محاسبهٔ وتر 40° درجه یعنی ضلع نه ضلعی منتظم محاطی میسر است.

دور از دسترس است. علت این امر آن است که کسرهای شصتگانی که منجمان به کار می‌برند با اندازهٔ کمان یک هفتم دایره متباین است. زیرا 360° در دستگاه شمارهٔ شصتگانی بر عدد ۷ قابل قسمت نیست (و اگر 360° را در آن دستگاه بر ۷ تقسیم کنیم قسمت کسری آن نامختوم خواهد بود یعنی هرگز به صفر نخواهد رسید). پس اندازهٔ وتر یک هفتم دایره عددی منطق نیست و از این حیث مانند جذراصم است.

سپس افزوده است: ^{۱۱۴} و اگر از تحقیقاتی که بزرگان زمان ما مانند کوهی* (ابوسهل) و ابوالجود* در این باره به عمل آورده‌اند نفعی عاید می‌شد از ذکر آن خودداری نمی‌کردیم.^{۱۱۵} $8/69$ - دو راه برای محاسبهٔ وتر یک درجه ^{۱۱۶} - با استفاده از اندازهٔ C_4 دو راه برای محاسبهٔ وتر یک درجه به دست می‌آید:

نخست اینکه تفاضل بین یک نهم و یک دهم دایره مساوی با چهار درجه است

$$\left(\frac{360}{9} - \frac{360}{10} = 40 - 36 = 4^\circ \right)$$

و هرگاه وترهای آن دو کمان معلوم باشند وتر تفاضل آنها (یعنی وتر 4° درجه) معلوم می‌شود و از آن رو وتر یک درجه نیز به دست می‌آید.

اما راه دوم این است که وتر یک هیجدهم دایره (وتر نصف التسع $= C_{18}$) را قبلاً حساب کردیم^{۱۱۷} و وتر روبه‌رو به کمان ده درجه مساوی است با:

$$15, 17, 31, 27, 10, 0^\circ = \text{وتر ده درجه}$$

و وتر 12° درجه را نیز قبلاً حساب کردیم^{۱۱۸} پس وتر دو درجه از روی دستور تفاضل^{۱۱۹} به دست می‌آید:

$$58, 25, 39, 5, 2, 0^\circ = \text{وتر دو درجه}$$

و وتر یک درجه از روی دستور وتر نصف کمان^{۱۲۰} حاصل می‌شود:

$$35, 11, 49, 2, 1, 0^\circ = \text{وتر یک درجه}$$

۱۱۴. «قانون مسعودی» ص ۲۹۷، سطر هفدهم به بعد: «ولو كان ما خاض فيه المبرزون...».

۱۱۵. کارل شوی این عبارت را طوری دیگر ترجمه کرده و گویا اشتباه کرده است «← شوی T » ص ۲۶، سطر یازدهم به بعد.

۱۱۶. این عنوان در متن نیست و آن را برای تفکیک مطالب از یکدیگر افزوده‌ام. در متن «قانون مسعودی» ص ۲۹۷، سطر نوزدهم به بعد چنین آمده است: «و قد انفتح من المتسع الى وتر الجزء الواحد طريقان...».

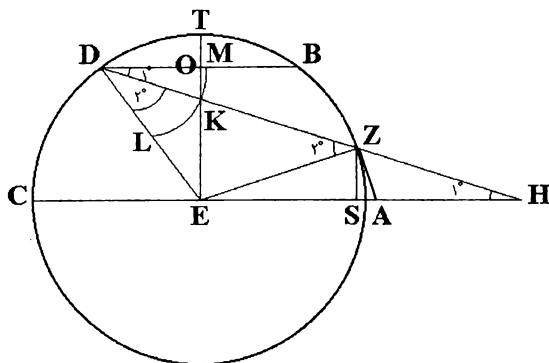
۱۱۷. $8/42 \leftarrow$

۱۱۸. $8/43 \leftarrow$

۱۱۹. $8/38 \leftarrow$

۱۲۰. $8/36 \leftarrow$

۸/۷۰- محاسبه وتر یک درجه با استفاده از مسئلهٔ تثلیث زاویه^{۱۲۱} - اما از راه تثلیث زاویه، فرض می‌کنیم که در دایره به مرکز E و به قطر AC کمان AB سه درجه باشد (شکل ۱۴۷). کمان AZ را مساوی با یک سوم کمان AB (یعنی مساوی با یک درجه) می‌گیریم. معلوم است



شکل به اندازه حقیقی نیست

شکل ۱۴۷

که اگر BD را به موازات قطر AC رسم کرده خط DZ را امتداد دهیم تا امتداد قطر CA را در نقطه H قطع کند و فصل مشترک DZ را با شعاع ET که عمود بر AC است، K بنامیم هر یک از دو پاره خط KZ و ZH مساوی با شعاع دایره خواهند بود. (زیرا هر یک از دو مثلث ZEH و ZEK متساوی الساقین هستند). اکنون به مرکز D و به شعاع DK کمان LKM را مطابق با شکل رسم می‌کنیم (M روی DB و L روی DE است) و فصل مشترک ET با BD را O می‌نامیم. در این صورت واضح است که:

$$\frac{DKL \text{ سطح قطاع}}{DKM \text{ سطح قطاع}} = \frac{2}{1}$$

واز طرف دیگر:

$$\frac{\text{سطح مثلث } DEK}{\text{سطح مثلث } DKO} > \frac{2}{1}$$

(زیرا مساحت مثلث DKE از مساحت قطاع DKL بزرگتر و مساحت مثلث DKO از مساحت قطاع DKM کوچکتر است).

۱۲۱. «قانون مسعودی» ص ۲۹۸، سطر هفتم به بعد. این عنوان در متن نیست و مطلب چنین شروع می شود: «واما من جهته ثلث الزاوية فليكن قوس اب...».

اما نسبت مساحت دو مثلث DEK و DKO (که در ارتفاع راس D مشترک‌اند) مساوی است با نسبت قاعده‌های آنها یعنی مساوی است با نسبت $\frac{EK}{KO}$ پس:

$$\frac{EK}{KO} > \frac{2}{1} \quad (۱)$$

یعنی $EK > 2KO$ و از ترکیب نسبت در رابطه (۱) حاصل می‌شود:

$$\frac{EK + KO}{KO} > \frac{2 + 1}{1}$$

یعنی

$$EO > 3KO \quad (۲)$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که: EO معلوم است:

$$EO = AB \text{ وتر دو برابر کمان } AB = 6^\circ \text{ نصف وتر}$$

و OD نیز معلوم است: ۱۲۲

$$OD = \text{نصف وتر } 174^\circ = (180^\circ - 6^\circ) \text{ نصف وتر}$$

اما OK مجهول است و راهی برای محاسبهٔ آن نداریم و فقط از رابطه (۲) می‌دانیم که $KO < \frac{EO}{4}$. بنابراین KO را تقریباً مساوی با مقداری کوچکتر از $\frac{EO}{4}$ اختیار می‌کنیم و بعداً چنانکه خواهیم دید با تجسس معلوم می‌کنیم که این مقدار تقریبی اختیاری تا چه اندازه دقیق است. چون بنابر آنچه گذشت KO و DO معلوم شد مقدار DK که وتر مثلث قائم‌الزاویه DKO است معلوم می‌شود و از روی آن DH به دست می‌آید:

$$DH = DK + 2KZ$$

اکنون درصدد جستجوی راهی بر می‌آییم که بینیم مقداری که برای KO اختیار کرده‌ایم تا چه اندازه با حقیقت وفق می‌دهد.

از تشابه دو مثلث KEH و KOD حاصل می‌شود: $\frac{EK}{OK} = \frac{KH}{DK}$ و یا پس از ترکیب نسبت $\frac{EK+OK}{OK} = \frac{KH+DK}{DK}$ یعنی $\frac{OE}{OK} = \frac{HD}{DK}$ و یا

$$OE \times DK = OK \times HD \quad (۳)$$

در تساوی فوق مقادیر OE و DK و OK و HD چنانکه گفتیم معلوم‌اند پس می‌توانیم تساوی (۳) را برای سنجش صحت مقدار OK به‌کار ببریم. به این طریق که به‌جای پاره‌خطها اندازه‌های آنها را قرار می‌دهیم. اگر تساوی درست بود که معلوم می‌شود KO را درست اختیار کرده‌ایم. و اگر دو طرف تساوی با هم مساوی در نیامد، مقدار OK را به اندازه کافی کم یا زیاد می‌کنیم تا خطایی که حاصل می‌شود آنقدر کوچک باشد که به حسابها ضرری نرساند.

پس از آنکه KO با تقریب کافی به‌دست آمد از روی آن EK را حساب می‌کنیم ($EK = EO - KO$). آن‌گاه از نقطه Z عمود ZS را بر قطر AC فرود می‌آوریم. داریم $ZS = \frac{1}{2}EK$ و واضح است که ZS نصف وتر ZB است و کمان ZB دو سوم کمان AB یعنی مساوی با دو درجه است که وتر نصف آن مطلوب ماست (یعنی وتر یک درجه) و این چیزی است که می‌خواستیم آن را بیابیم.

بیرونی پس از بیان مقدمات فوق می‌گوید: EO یعنی نصف وتر دو برابر کمان AB (یعنی وتر ۶ درجه) را حساب کردیم شد:

$$EO = 0; 3, 8, 24, 34$$

و مقداری کمتر از یک سوم آن را گرفتیم و آن را اندازه OK فرض کردیم:

$$OK = 0; 1, 2, 45, 7, 37, 5$$

اگر این مقادیر را در رابطه (۳) قرار دهیم هر یک از دو طرف تساوی تا مرتبه سادسه‌ها چنین به‌دست می‌آید:

$$(OE \times DK = OK \times HD \#) 0; 3, 8, 10, 47, 37, 13$$

و اختلاف مقادیر دو طرف تساوی (۳) فقط در مراتب از سادسه به بعد است که عملاً به‌کار نمی‌آید. اکنون SZ را حساب می‌کنیم:

$$SZ = \frac{EK}{2} = \frac{EO - KO}{2} = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14$$

و از روی SZ (با استفاده از دستور محاسبه وتر نصف کمانی که وتر آن معلوم است^{۱۳}) مقدار AZ یعنی وتر یک درجه به‌دست می‌آید:

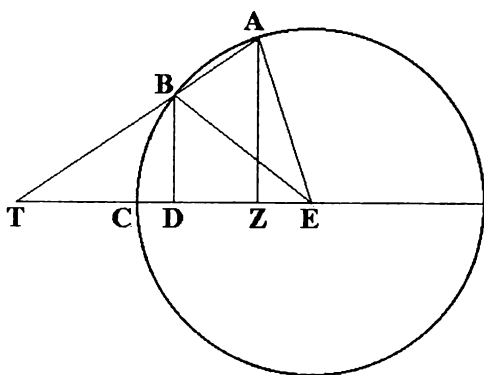
$$\boxed{AZ = 0; 1, 2, 49, 51, 48 \text{ درجه}}$$

و این مقدار با مقداری که برای وتر یک درجه (در شماره ۸/۶۹) یافتیم فقط در مرتبه خامسه‌ها اختلاف دارد.

۸/۷۱- روش بطلمیوس در محاسبهٔ وتر یک درجه^{۱۲۴} - روش بطلمیوس در محاسبهٔ وتر یک درجه این است که او ابتدا نسبت بین دو کمان نامتساوی و نسبت بین وترهای آنها را باهم مقایسه کرده است.

و ما روش او را در این مقایسه به وجهی که سارینوس^{۱۲۵} از وی نقل کرده است ذکر می‌کنیم زیرا بیان او آسانتر است.

دو کمان AC و BC را روی دایرهٔ به مرکز E در نظر گرفته فرض می‌کنیم $\widehat{AC} > \widehat{BC}$. سپس از نقاط A و B عمودهای AZ و BD را بر قطری که از نقطهٔ C می‌گذرد فرود می‌آوریم (شکل ۱۴۸). و پاره‌خطهای EA و EB و AB را رسم کرده AB را امتداد می‌دهیم تا امتداد



شکل ۱۴۸

EC را در نقطهٔ T قطع کند و می‌گوییم:

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{BC}} > \frac{AZ}{BD}$$

زیرا می‌دانیم که:

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{A\hat{E}B}{B\hat{E}C} = \frac{\text{مساحت قطاع } AEB}{\text{مساحت قطاع } BEC} \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AEB}{\text{مساحت قطاع } BEC} > \frac{\text{مساحت مثلث } AEB}{\text{مساحت مثلث } BET} \quad (۲)$$

۱۲۴. «قانون مسعودی» ص ۳۰۰، سطر اول به بعد: «و اما بطلمیوس فطریقه فی التبحل له...».

۱۲۵. در بخش دوم کتاب حاضر شرحی دربارهٔ سارینوس نوشته‌ام.

زیرا

مساحت قطاع AEB < مساحت مثلث AEB مساحت مثلث BEC > مساحت مثلث BET

اما رابطه (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AEB}{\text{مساحت قطاع } BEC} > \frac{AB}{BT} \quad (۳)$$

زیرا دو مثلث AEB و BET در ارتفاع نظیر راس E مشترک‌اند، پس نسبت مساحت آنها مساوی با نسبت قاعده نظیر آنهاست.

از نامساوی (۳) با ترکیب نسبت حاصل می‌شود:

$$\frac{\text{مساحت قطاع } AEC}{\text{مساحت قطاع } BEC} > \frac{AT}{BT} \quad (۴)$$

اما $\frac{AT}{BT} = \frac{AZ}{BD}$ بنابراین از مقایسه تساوی (۱) و نامساوی (۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\widehat{2AB}}{\widehat{2BC}} > \frac{\widehat{2AZ}}{\widehat{2BD}} \quad \text{و یا} \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{AZ}{BD}$$

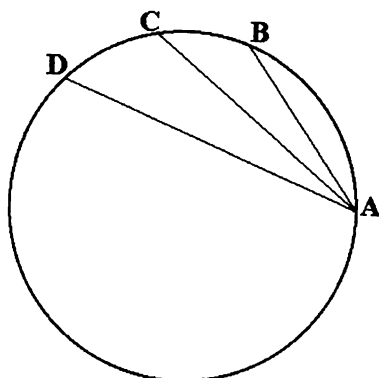
و معلوم است که $\widehat{2AZ}$ وتر کمان $\widehat{2AC}$ است و $\widehat{2BD}$ و $\widehat{2BC}$ وتر کمان $\widehat{2BC}$. بنابراین قضیه زیر ثابت شد: ۱۲۶

قضیه - در هر دایره نسبت کمان بزرگتر به کمان کوچکتر بزرگتر است از نسبت وتر اولی به وتر دومی.

تبصره - تا آنجا که اطلاع داریم این قضیه را نخستین بار اریستارخوس ساموسی* ریاضیدان و منجم یونانی حوزه علمی اسکندریه که در حدود ۲۸۰ قبل از میلاد می‌زیست به‌کار برده بدون آنکه آن را ثابت کند. بنابراین در آن زمان این قضیه بین ریاضیدانان معروف بوده است. (← «هیث H » ج ۲ و ص ۵ «کانتور V » ج ۱، ص ۳۲۱- برای کسب اطلاع از احوال و آثار اریستارخوس ← «سارتن I » ج ۱، ص ۱۵۶). استدلال قضیه فوق چنانکه در مجسطی آمده در کتاب «هیث H » ج ۲، ص ۲۸۲ و «کانتور V » ج ۱، ص ۴۱۸ نقل شده است.

۱۲۶. «قانون مسعودی» ص ۳۰۰، سطر شانزدهم به بعد: «فنسبته ضعف قوس اج...».

بطلمیوس پس از اثبات این قضیه کمان AC از دایره را مساوی با یک درجه و کمان AD را مساوی با یک درجه و نیم و کمان AB را مساوی با نصف کمان AD یعنی $\frac{2}{3}$ درجه گرفته است. (شکل ۱۴۹). و چون اندازهٔ وترهای AB و AD را می‌دانسته خواسته است از روی آنها وتر AC



شکل ۱۴۹

(وتر یک درجه) را حساب کند. (و گفته است):
بنابر قضیهٔ فوق

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}} > \frac{AC}{AB}$$

اما:

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \frac{1}{3}\widehat{AB}$$

پس:

$$AC < AB + \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}AB \quad (= \text{وتر یک درجه}).$$

و چون بطلمیوس وتر AB و $\frac{4}{3}$ آن را چنین حساب کرده بوده:

$$\frac{4}{3}AB = ۱; ۲, ۵^{\circ} \quad \text{و} \quad AB = ۰; ۴۷, ۸$$

نتیجه گرفته است که

$$AC < ۱; ۲, ۵^{\circ}$$

(۵)

از طرف دیگر بنا به قضیه فوق داریم:

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AD}} < \frac{AC}{AD}$$

و چون

$$\widehat{AC} = \frac{2}{3}\widehat{AD}$$

پس

$$AC > \frac{2}{3}AD$$

و بطلمیوس وتر AD را چنین حساب کرده:

$$AD = ۱; ۳۴, ۱۵ \text{ وتر } \frac{1}{4} \text{ درجه}$$

و دو سوّم آن را $۱; ۲, ۵۰$ گرفته است. پس:

$$AC > ۱; ۲, ۵۰ \quad (۶)$$

و چون AC یعنی وتر یک درجه بنابر نامساویهای (۵) و (۶) باید در آن واحد هم کوچکتر و هم بزرگتر از مقدار $۱; ۲, ۵۰$ باشد پس مقدار واقعی آن را می‌توان مساوی با $۱; ۲, ۵۰$ گرفت. بطلمیوس مقدار فوق را (که مقدار تقریبی است) برای وتر یک درجه به دست آورده اما در حقیقت این مقداری است که کسرهای شصتگانی آن از مرتبه ثانی به بعد دقیق نیست. زیرا بطلمیوس اندازه‌های وترهای AB و AD را فقط تا مرتبه ثانی حساب کرده است. و هرگاه ثالته‌ها و مراتب بعدی را نیز به حساب آوریم خواهیم داشت:

$$AD = ۱; ۳۴, ۱۴, ۴۲, ۱۴, ۱, ۵۷, ۱۱ \text{ وتر یک درجه و نیم}$$

و اگر از این مقدار یک سوّم آن را کم کنیم باقی می‌ماند:

$$۱; ۲, ۴۹, ۴۸, ۱۲, ۴۱, ۱۸, ۷, ۲۰ \text{ وتر یک درجه} \quad (۷)$$

از طرف دیگر:

$$AB = ۰; ۴۷, ۷, ۲۴, ۴۷, ۳۱, ۳۶, ۳۳ \text{ وتر } \frac{3}{4} \text{ درجه}$$

و اگر یک سوّم این مقدار را به خودش بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$(۸) \quad ۱; ۲, ۴۹, ۵۳, ۳, ۲۲, ۸, ۴۴ = \text{وتر یک درجه}$$

و ملاحظه می‌شود که دو عددی که در تساویهای (۷) و (۸) برای مقدار وتر یک درجه به دست آوردیم با هم مساوی نیستند و همانگونه که گفتیم فقط تا مرتبهٔ ثانیه‌ها با هم یکسان هستند. و اگر بخواهیم که تساوی تا مرتبهٔ ثلثه‌ها نیز برقرار باشد در عمل پیش می‌رویم و از وتر $\frac{۲}{۴}$ درجه یک سوّم آن را می‌کاهیم حاصل می‌شود:

$$(۹) \quad ۰; ۳۱, ۲۴, ۵۶, ۳۲ = \text{وتر } \frac{۱}{۲} \text{ درجه}$$

اما

$$\frac{۳}{۸} \text{ وتر } ۰; ۲۳, ۳۳, ۴۲, ۵۱ \text{ درجه}$$

و اگر به این مقدار یک سوّم آن را بیفزاییم حاصل می‌شود:

$$(۱۰) \quad ۰; ۳۱, ۲۴, ۵۷, ۸ = \text{وتر } \frac{۱}{۲} \text{ درجه}$$

و دیده می‌شود که دو مقدار که در تساویهای (۹) و (۱۰) برای وتر $\frac{۱}{۲}$ درجه به دست آمد تا مرتبهٔ ثلثه‌ها با هم یکی هستند. و اگر این یک سوّم را به جای افزودن به وتر $\frac{۲}{۸}$ درجه از آن کم کنیم حاصل می‌شود:

$$(۱۱) \quad ۰; ۱۵, ۴۲, ۲۸, ۳۴ = \text{وتر } \frac{۱}{۴} \text{ درجه}$$

اما

$$\frac{۳}{۱۶} \text{ وتر } ۰; ۱۱, ۴۶, ۵۱, ۲۸ \text{ درجه}$$

و اگر یک سوّم این مقدار را به خودش اضافه کنیم حاصل می‌شود:

$$(۱۲) \quad ۰; ۱۵, ۴۲, ۲۸, ۳۷ = \text{وتر } \frac{۱}{۴} \text{ درجه} = \text{وتر } \frac{۴}{۱۶} \text{ درجه}$$

و ملاحظه می‌شود که دو مقداری که در تساویهای (۱۱) و (۱۲) برای وتر یک چهارم درجه به دست آمد تا مرتبهٔ ثلثه‌ها با هم موافق هستند.

اما سجزی* (یعقوب)، $\frac{2}{4}$ درجه را با ۳ درجه ترکیب کرده^{۱۲۷} (و وتر یک درجه را از این راه به دست آورده) پس وتر این مجموع (یعنی وتر $\frac{15}{4}$ درجه) معلوم است و چون ما آن را استخراج کردیم چنین یافتیم:

$$\text{وتر } 3\frac{3}{4} \text{ درجه} = 3; 55, 34, 18, 37$$

و یک چهارم این کمان مساوی است با $\frac{15}{16}$ درجه و وتر آن:

$$\text{وتر } \frac{15}{16} \text{ درجه} = 0; 58, 54, 15, 7$$

حال ملاحظه می‌کنیم که تفاضل بین یک درجه و $\frac{15}{16}$ درجه مساوی است با $\frac{1}{16}$ درجه و داریم:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\circ} = \frac{1}{15} \left(\frac{15}{16}\right)^{\circ}$$

یعنی اگر بخواهیم $\frac{15}{16}$ درجه را تا یک درجه کامل کنیم باید $\frac{1}{15}$ آن را به خودش بیفزاییم. و سجزی* (یعقوب) گفته است که پس به همین نحو اگر بخواهیم وتر $\frac{15}{16}$ درجه را تا وتر یک درجه کامل کنیم باید $\frac{1}{15}$ آن را به خودش بیفزاییم. به عبارت دیگر:

$$\left(\text{وتر } \frac{15}{16} \text{ درجه}\right) + \frac{1}{15} \left(\text{وتر } \frac{15}{16} \text{ درجه}\right) = \text{وتر یک درجه}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & \left(0; 58, 54, 15, 7\right) + \frac{1}{15} \left(0; 58, 54, 15, 7\right) = \text{وتر یک درجه} \\ & = 1; 2, 49, 52, 7 \end{aligned}$$

و به این ترتیب وتر یک درجه به دست می‌آید بدون آنکه به راه طولانی که بطلمیوس رفته است احتیاج پیدا شود.

و چه نیکو بود روشی که سجزی* (یعقوب) برای منظور خود به کار برده اگر پایان آن خراب از کار در نمی‌آمد. و کسی که به انصاف حکم کند می‌داند که امر بین این دو نفر (بطلمیوس و یعقوب سجزی) یکسان است و از هم جدا نیست. جز اینکه بطلمیوس عمل خود را از روی بصیرت (آگاهانه) انجام داده و یعقوب نفهمیده به نتیجه رسیده است.^{۱۲۸}

۱۲۷. علت این انتخاب این است که چون $3\frac{3}{4}$ درجه نزدیک ۴ درجه است پس یک چهارم آن نزدیک یک درجه است.

۱۲۸. «قانون مسعودی» ص ۳۰۲ سطر هجدهم به بعد: «وما احسن تल्प یعقوب لمرامه لولا افساده الخاتمة...».

ی - باب پنجم از مقالهٔ سَوم «قانون مسعودی»^{۱۲۹} در نسبت قطر دایره به محیط آن^{۱۳۰}

۸/۷۲- بیرونی در آغاز این باب عباراتی آورده^{۱۳۱} که مفهومی این است:

وقتی چیزهایی را می‌شماریم در واقع یکی از آنها را واحد اختیار می‌کنیم. اما در کمیتهای متصل مانند طول و غیره واحد وجود خارجی ندارد. و باید برای اندازه‌گیری هر کمیّت مقداری از آن را برحسب قرارداد واحد اختیار کنیم. مثلاً منجمان برای اندازه‌گیری کمانهای دایره یک سیصد و شصت محیط را درجه (جزء) اختیار کرده و هر درجه را به قسمتهای شصتگانی (دقیقه و ثانیه و غیره) تقسیم کرده‌اند. اصل این مطلب ناشی از این است که عدد ۳۶۰ واسطهٔ عددی بین عدّهٔ روزهای سال شمسی و عدّهٔ روزهای سال قمری است،^{۱۳۲} بدون اینکه این امر (تقسیم دایره به ۳۶۰ جزء) اضطراری باشد. و محیط دایره به قطر آن نسبتی دارد. پس همچنین اندازهٔ محیط هم به اندازهٔ قطر دارای نسبتی است، اگر چه این نسبت اصم است.

۸/۷۳- محاسبهٔ اندازهٔ تقریبی نسبت قطر دایره به محیط آن.^{۱۳۳}

برای دانستن این نسبت (به وجه تقریبی) دایره‌ای به قطر AC و به مرکز E رسم می‌کنیم. و از نقطهٔ A عمود AT را بر قطر AC اخراج می‌کنیم و E را به Z وصل می‌کنیم^{۱۳۴} و امتداد می‌دهیم تا عمود مذکور را در نقطهٔ T قطع کند. (شکل ۱۵۰) چون ZS (یعنی عمودی که از نقطهٔ Z بر AC فرود آید) نصف ضلع صد و هشتاد ضلعی منتظم محاط در دایره، یعنی نصف وتر روبه‌روی کمان ۲ درجه است، می‌دانیم که:^{۱۳۵}

$$\angle ZS = (0; 2, 5, 39, 43, 36)$$

۱۲۹. این باب از مقالهٔ سوم «قانون مسعودی» را اسمیث (D. E. Smith) به انگلیسی ترجمه کرده و در مجلهٔ The American Math. Monthly (جلد ۲۳، سال ۱۹۲۶، شمارهٔ ۶، صفحات ۳۲۳ تا ۳۲۵) به چاپ رسانیده است.

۱۳۰. «قانون مسعودی» ص ۳۰۳: «الباب الخافس فی النسبة التي بین القطر و بین الدور».

۱۳۱. «الوحدة وان سرت فی المعدودات فان الواحد فی ذوات المواد...».

۱۳۲. این دلیل که بیرونی برای تقسیم دایره به سیصد و شصت درجه آورده جالب توجه است ولی فرضی بیش نیست.

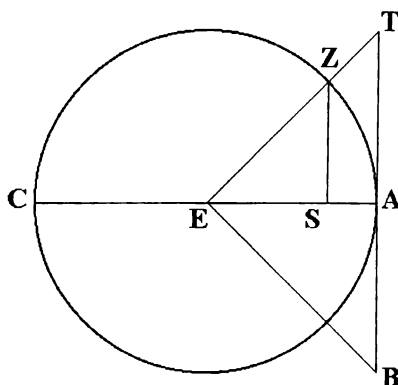
۱۳۳. «قانون مسعودی» ص ۳۰۳، سطر هشتم به بعد: «ولتقريب المعرفة منها نعيد من الشكل...».

۱۳۴. در متن عربی چگونگی انتخاب نقطهٔ Z روی دایرهٔ معین نشده است ولی از مطلب بعدی معلوم می‌شود که بیرونی زاویهٔ AEZ را مساوی با یک درجه اختیار کرده است.

۱۳۵. معلوم نیست چرا بیرونی در اینجا وتر روبه‌روی کمان دو درجه را بزرگتر از مقدار درست آن اختیار کرده است. وی جیب کمان یک درجه را که نصف وتر روبه‌روی کمان دو درجه است در جدول جیب «قانون مسعودی» (ص ۳۰۸) درست حساب کرده و آن مساوی است با:

(۰; ۱, ۲, ۴۹, ۴۳) که دو برابرش می‌شود (۰; ۲, ۵, ۳۹, ۲۶). اگر بیرونی این عدد را درست اختیار کرده بود

نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می‌شد. ضمناً باید خاطر نشان کنم که غیاث الدین جمشید کاشانی در «رسالهٔ محیطیه» خود این اشتباه را متذکر شده است. ← «قربانی: کاشانی نامه» چاپ اول، ص ۱۷۳-چاپ دوم، ص ۱۳۶، ش ۲۳۶.



شکل به اندازه حقیقی نیست

شکل ۱۵۰

و از این رو مجموع اضلاع صد و هشتاد ضلعی منتظم محاطی مساوی است با:

$$۶; ۱۶, ۵۹, ۱۰, ۴۸$$

و اگر قطر دایره را ۲ واحد بگیریم داریم:

$$\frac{\text{قطر}}{۶; ۱۶, ۵۹, ۱۰, ۴۸} = \frac{۱}{۳; ۸, ۲۹, ۳۵, ۲۴} \quad (۱)$$

و محیط دایره از مجموع اضلاع این صد و هشتاد ضلعی منتظم محاطی بزرگتر است. پس:

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} < \frac{۱}{۳; ۸, ۲۹, ۳۵, ۲۴}$$

و چون داریم:

$$\frac{ZS}{SE} = \frac{TA}{AE}$$

پس نتیجه می‌شود: ۱۳۶

$$TA = ۰; ۱, ۲, ۵۰, ۱۹, ۴۳$$

۱۳۶. در متن «قانون مسعودی» (ص ۳۰۴، سطر اول) به جای مقدار AT به غلط (۱۱, ۴۳, ۴۹, ۱, ۰) که جیب یک درجه است نوشته شده. در صورتی که TA ظل یک درجه است و مقدار آن چنانکه از دو برابرش (یعنی مقدار BT که بیرونی خود حساب کرده) معلوم می‌شود باید (۴۳, ۱۹, ۵۰, ۲, ۱, ۰) باشد که در ترجمه نوشتم. بیرونی خود در جدول اظلال «قانون مسعودی» (ص ۳۴۱) مقدار ظل یک درجه را (۱۷, ۵۰, ۲, ۱, ۰) ثبت کرده ولی در اینجا دو برابر آن را بیش از مقداری که خود به دست آورده محسوب داشته است!

و بنابراین:

$$BT = 2AT = 0; 2, 5, 40, 39, 26$$

و این BT ضلع صد و هشتاد ضلعی منتظم محیطی است که مجموع اضلاع آن مساوی است با: ۱۳۷

$$6; 17, 1, 58, 19$$

پس:

$$(2) \quad \frac{\text{قطر}}{\text{مجموع اضلاع } 180 \text{ ضلعی منتظم محیطی}} = \frac{1}{3; 8, 30, 59, 10}$$

و محیط دایره از مجموع اضلاع این صد و هشتاد ضلعی منتظم محیطی کوچکتر است. پس:

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} > \frac{1}{3; 8, 30, 59, 10}$$

بنابر آنچه گذشت نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{3; 8, 29, 35, 24} > \frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} > \frac{1}{3; 8, 30, 59, 10}$$

بنابراین محیط دایره بین دو مقدار $(3; 8, 29, 35, 24)$ و $(3; 8, 30, 59, 10)$ محصور است که تفاوتشان فقط یک ثانیه و $\frac{2}{5}$ ثانیه است. ۱۳۸

و بهتر است که همان‌گونه که بطلمیوس در مقالهٔ ششم کتاب «مجسطی» عمل کرده است نصف مجموع (= واسطهٔ حسابی) آنها را بگیریم تا نسبت قطر به محیط تقریباً مساوی شود با:

$$(3) \quad \frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{1}{3; 8, 30, 17, 16, 46, 30}$$

کسرهای شصتگانی مخرج سمت راست تساوی (۳) از $\frac{1}{3}$ کوچکتر است و تفاضل آن با $\frac{1}{3}$ تقریباً

۱۳۷. توجه کنید این عدد مانند بسیاری از اعداد دیگر در «قانون مسعودی» چایی غلط ثبت شده است.

۱۳۸. در متن «قانون مسعودی» ص ۳۰۴ سطر هفتم «خمسها» نوشته شده ولی $\frac{2}{5}$ صحیح است.

$\frac{1}{129}$ کسر $\frac{1}{7}$ است. ۱۳۹

رابطه (۳) را می‌توان چنین نوشت ۱۴۰

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{518'400'000}{1'628'681'471} \quad (4)$$

۱۳۹. اگر کسرهای شصتگانی مخرج طرف راست رابطه (۳) را α بنامیم

$$(\alpha = 0; 8, 30, 17, 16, 46, 30)$$

بیرونی می‌گوید:

$$\frac{1}{7} - \alpha = \frac{1}{129} \times \frac{1}{7}$$

و این کاملاً درست است. زیرا اگر α را بر حسب کسر اعشاری حساب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{7} \# 0.142857 \quad \text{اما} \quad \alpha \# 0.14746$$

بنابراین

$$\frac{1}{7} - \alpha = 0.00111$$

اما

$$\frac{1}{129} \times \frac{1}{7} = 0.00110$$

و واضح می‌شود که:

$$\frac{1}{7} - \alpha \# \frac{1}{129} \times \frac{1}{7}$$

۱۴۰. اگر کسر طرف راست رابطه (۳) را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{1}{3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{(60)^2} + \frac{17}{(60)^3} + \frac{16}{(60)^4} + \frac{46}{(60)^5} + \frac{30}{(60)^6}}$$

و اعمال لازم را در دستگاه شمار اعشاری انجام دهیم و صورت و مخرج کسر حاصل را به ۹ ساده کنیم، کسر سمت راست رابطه (۴) حاصل می‌شود.

و اگر محیط دایره را چنانکه معمول است ۳۶۰ جزء بگیریم قطر آن می‌شود: ۱۴۱

$$۱۱۴ + \frac{۹۵۴'۳۱۲'۳۰۶}{۱'۶۲۸'۶۸۱'۴۷۱}$$

بیرونی در پایان این قسمت افزوده است: ۱۴۲ اما بطلمیوس اولاً کسر مقدار فوق را حذف کرده است و ثانیاً خواسته است که مقدار قطریکی از عقود ۱۴۳ باشد. اما ۱۱۴ بین دو عقد ۱۱۰ و ۱۲۰ واقع است. و چون یکی از این دو (یعنی ۱۱۰) برحسب شعاع دایره (که ۶۰ اختیار می‌شود) به عدد کسری تبدیل می‌گردد و دیگری (یعنی ۱۲۰) عدد صحیح درمی‌آید بطلمیوس ۱۲۰ را برای مقدار قطر ترجیح داده است ما نیز مانند او ۱۲۰ را اختیار می‌کنیم. زیرا نصف آن (۶۰) موافق با مخرج کسره‌های شصتگانی است که جز آنها در نجوم استعمال نمی‌شود.

۸/۷۴- تبصره- عکس مقدار سمت راست تساوی (۳) شمارهٔ قبل مساوی است با ۳۱۴۱۷۴۲ و عکس مقدار سمت راست تساوی (۴) همان شماره مساوی است با ۳۱۴۱۷۴۴. این دو عدد دو مقدار تقریبی برای عدد π (پی) هستند.

بنابراین مقادیر تقریبی که از محاسبهٔ بیرونی برای π (پی) پی به دست می‌آید کمی پیشتر از مقدار تقریبی ۳۱۴۱۶۶ است که دقیقتر است و یونانیان و هندیان پیش از وی برای پی حساب کرده بودند. علت این امر این است که بیرونی همان‌طور که قبلاً گفتیم مقدار وتر روبه‌روی کمان دو درجه و همچنین ظلّ یک درجه را زیاده‌تر از مقادیر واقعی آنها که خود وی در جدول جیب و جدول اضلال «قانون مسعودی» حساب کرده، اختیار نموده است. و اگر این مقدار را صحیح اختیار می‌کرد نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می‌شد. با وجود این مطالب این باب از «قانون مسعودی» نشان می‌دهد که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی خود روش جدیدی برای محاسبهٔ نسبت قطر دایره به محیط آن و در نتیجه برای محاسبهٔ عدد π داشته‌اند. بیرونی در اینجا مستقیماً راه روشن و عملی حل مسئله را نشان می‌دهد و روش وی بسیار بهتر از روشی است که ابن هیثم مصری در رسالهٔ «تربیع دایره» خود به کار برده است. ۱۴۴

برای کسب اطلاع از تاریخچهٔ عدد π ← به یکی از منابع زیر: «اسمیت H» ج ۲، صص ۳۰۷ تا ۳۳۳- «قربانی: تاریخ پی»- و صص ۹۱ تا ۹۷ کتاب «ایوز H».

۱۴۱. زیرا اگر در رابطه (۴) محیط را ۳۶۰ بگیریم حاصل می‌شود.

$$\text{قطر} = \frac{۵۱۸'۴۰۰'۰۰۰ \times ۳۶۰}{۱'۶۲۸'۶۸۱'۴۷۱} = ۱۱۴ + \frac{۹۵۴'۳۱۲'۳۰۶}{۱'۶۲۸'۶۸۱'۴۷۱}$$

۱۴۲. «قانون مسعودی» ص ۳۰۴، سطر پانزدهم به بعد: «اما بطلمیوس فانه اسقط الکسر اولاً...».

۱۴۳. مقصود از عقود (جمع عقد) در اینجا مضربهای عدد ۱۰ است. برای توضیحات بیشتر دربارهٔ معنی عقود ←

«قربانی: کاشانی نامه» چاپ اول، ص ۵۶- چاپ دوم، ص ۴۴.

۱۴۴. «شوی T» ص ۳۲. یادداشت شمارهٔ ۲.

یا - باب ششم از مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی»

در اختیار کردن عدد قطر (دایره) و محاسبهٔ وترها برحسب آن.^{۱۴۵}

در آغاز این باب بیرونی ابتدا علت اینکه قطر دایره را مساوی با ۲ واحد اختیار کرده بیان می‌کند.^{۱۴۶}

سیس شرح می‌دهد که چرا هنگام تشکیل دادن جدول جیبها فاصلهٔ بین اندازهٔ کمانها را پانزده دقیقه اختیار کرده و اشاره کرده است که اگر عمل محاسبه طولانی نبود بهتر بود که جیب کمانها را دقیقه به دقیقه حساب می‌کرد.

۸/۷۵- اختیار عدد قطر^{۱۴۷} اگر چه نسبت بین قطر دایره محیط آن را [چنانکه در باب پنجم دیدیم] می‌توان با تقریب کافی معین کرد ولی در محاسبهٔ اوتار دایره احتیاجی به آن نسبت نداریم. زیرا در این مورد فقط به نسبت بین وترها نیازمندیم و این نسبتها به عدد قطر بستگی ندارد. و چون می‌خواهیم نصف وتر دو برابر کمان را که به هندی جیب^{۱۴۸} نامیده می‌شود به‌کار ببریم، چه استعمال آن آسانتر است و هم اسم آن کوتاهتر است، ترجیح می‌دهیم که قطر را مساوی با ۲ واحد بگیریم تا اینکه نصف آن (= شعاع دایره)، که جیب اعظم^{۱۴۹} و گاهی نیز جیب کلی نامیده می‌شود، مساوی با واحد شود، و در اعمالی که انجام می‌دهیم ضرب کردن در آن و تقسیم کردن بر آن آسان باشد، و زحمتی را که اگر شعاع دایره را (طبق معمول زمان) شصت بگیریم برای تبدیل آن به دقیقه‌ها (= کسرهای شصتگانی) وجود دارد از بین برود.

پس به فرض اینکه جیب اعظم (= شعاع دایره) مساوی با واحد باشد سایر جیبها را حساب کرده در جدول جیبها (= جداول جیوب) ثبت می‌کنیم.

۸/۷۶- علت محاسبهٔ کمانها ۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه^{۱۵۰} اما اینکه در تشکیل دادن جدول جیبها تنها به محاسبهٔ جیب درجه‌های درست اکتفا نکرده کسرهای درجه را (۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه) نیز در نظر گرفته‌ایم علتی دارد که اینک به شرح آن می‌پردازیم.

دایرهٔ به قطر AC را در نظر گرفته فرض می‌کنیم AB کمان معلومی از این دایره باشد. چون جیب هر کمان (بنا به تعریف) عمودی است که از یک سر آن بر قطری که از سر دیگر آن می‌گذرد

۱۴۵. «قانون مسعودی» ص ۳۰۵: «الباب السادس فی اختیار عدد القطر یكون تقطیع الاوتار بحسبه».

۱۴۶. باید دانست که واحد گرفتن شعاع دایره در هنگام محاسبهٔ جیبها یکی از مهمترین ابتکارات بیرونی است. به‌قسمی که اگر جدول جیبهای کتاب «قانون مسعودی» را به دستگاه شمارهٔ دهگانی تبدیل کنیم درست جدول سینوسهایی که امروزه به‌کار می‌بریم حاصل می‌شود.

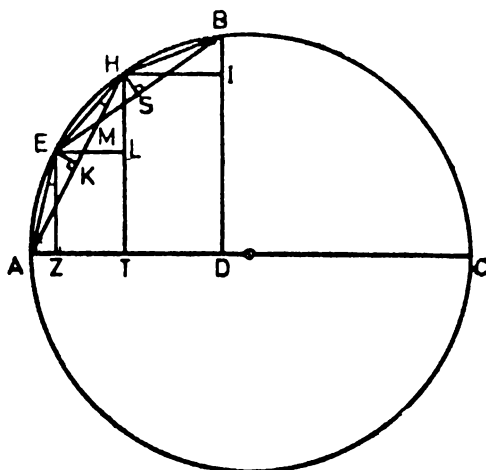
۱۴۷. این عنوان در متن نیست و مطلب چنین شروع می‌شود: «ان النسبة بین القطر و الدور و ان اتضحت علی قدر ما احتملت فانا فی امر الاوتار غیر محتاجین الیها...».

۱۴۸. دربارهٔ این اصطلاح ← «فریانی: کاشانی نامه» چاپ اول، صص ۱۲۷ و ۱۲۸- چاپ دوم، ص ۱۰۰.

۱۴۹. ← ۴۳ بخش نهم کتاب حاضر.

۱۵۰. «قانون مسعودی» ص ۳۰۵- این عنوان در آنجا نیست و مطلب چنین شروع می‌شود: «و اما السبب الداعی الی تعدی الاقسام اصحاب من المحيط...».

فرود آید، پس عمود BD که از نقطهٔ B بر قطر AC فرود آید جیب کمان AB است. (شکل ۱۵۱).



شکل ۱۵۱

از روی جدول جیبها دیده می‌شود که بنای ما بر آن بوده است که کمانهای متوالی که جیبهای آنها را در جدول قرار داده‌ایم دارای تفاضل ثابت باشند (۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه). اما آنچه در آنجا عمل کرده‌ایم دور از تحقیق است زیرا تفاضل جیبها با تفاضل کمانها متناسب نیست.

توضیح اینکه فرض می‌کنیم AB کمانی باشد که می‌خواهیم آن را به چند پارهٔ متساوی تقسیم کنیم، خواه این کمان یک درجه باشد و یا بیشتر و یا کمتر. کمان AB را در نقاط E و H به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و جیبهای BD و HT و EZ را رسم می‌نماییم. و به موجب عملی که به تعدیل به تفاضل مابین دو سطر^{۱۵۱} مشهور است تفاضل جیبهای سه کمان AB و AH و AE را روی شکل به وسیلهٔ پاره‌خطهای EZ و HL و BI ظاهر می‌سازیم. و وترها را مطابق با شکل رسم می‌کنیم. و عمود EK را بر AH فرود می‌آوریم. دو زاویهٔ AEZ و EHA که محاطی و روبه‌روی کمانهای متساوی هستند با هم مساویند. و دو مثلث قائم الزاویهٔ AEZ و EHK با هم مساویند. اگر فصل مشترک EL با AH را M بنامیم واضح است که $HM < HK$. پس $HM < EZ$. از طرف دیگر $HL < HM$ پس به طریق اولی $HL < EZ$. همچنین

$$EL > EM \text{ و } EM > EK = AZ$$

۱۵۱. دربارهٔ اصطلاح تعدیل مابین السطرين (interpolation) ← باب اول از مقالهٔ دوم «شرح زیج الغ بیک» توسط فاضل بیرجندی (عبدالعلی).

پس به طریق اولی

$$EL > AZ$$

و اگر از نقطه H عمود HS را بر EB فرود آوریم مثلث SHB با هر یک از دو مثلث KEH و ZAE مساوی می شود و با استدلالی شبیه آنچه گذشت معلوم می شود که

$$(IH > EL) BI < HL$$

و از این رو واضح می گردد که تفاضل جیبهای EZ و HT و BD با هم مساوی نیستند و هر کدام آنها که به مبدأ مشترک کمانها نزدیک باشند بزرگترند و برعکس.

$$EZ > HL > BI$$

و نیز معلوم می شود که سهمهای^{۱۵۲} این کمانها یعنی سهمهای AZ و AT و AD همچنین با هم مساوی نیستند و در ربع دایره هر کدام که به مبدأ مشترک کمانها نزدیکتر باشند کوچکترند و برعکس:

$$AZ < ZT < TD$$

و به این دلیل (که تفاضل کمانها با تفاضل جیبها متناسب نیستند) اگر دقت عمل به واسطه درازایش دشوار نمی بود شایسته تر بود که جیبها را برای هر یک از دقیقه های کمان حساب کنیم تا ارقامی که از آنها (به ناچار) صرف نظر می کنیم ارقامی از کسرهای شصتگانی باشند که در محاسبه به کار نمی آیند. و البته بهتر بود که چنین کنیم زیرا که مدار صناعت نجوم بر جداول جیبها و مرجع اعمال زیجها نیز همان جداول است.

مقدار وتر یک درجه و جیب آن را می دانیم. و در تنصیف یک درجه به دوبار اکتفا می کنیم (یعنی یک درجه را دوبار نصف می کنیم تا ۱۵ دقیقه حاصل شود) زیرا راه محاسبه وتر یک سوم کمانی را که وتر آن معلوم باشد می دانیم. و از طرف دیگر وتر $\frac{2}{3}$ کمان یک درجه (= ۴۵ دقیقه) از روی دستور محاسبه وتر یک چهارم کمانی که وترش معلوم باشد به دست می آید. پس وتر یک سوم آن (یعنی وتر ۱۵ دقیقه) معلوم می شود. بنابر این در تشکیل دادن جدول جیبها مبدأ را ۱۵ دقیقه گرفتیم و کمانهای متوالی را با تفاضل (ثابت) پانزده دقیقه اختیار کردیم.

۸/۷۷- جداول جیب- جدول جیبها در صفحات ۳۰۸ تا ۳۲۵ کتاب «قانون مسعودی» ثبت شده است. این جداول از راست به چپ به ترتیب زیر به چهار ستون تقسیم گردیده:

درج	دقایق	الجیوب	التعادیل	الفضول
سطر عدد القسی	دقایق	ثوانی	ثوانی	ثوانی
دقایق	ثوانی	ثوانی	ثوانی	ثوانی
دقایق	ثوانی	ثوانی	ثوانی	ثوانی

درستون سمت راست (سطر عددالقسمی) اندازهٔ کمانها با تفاضل ثابت ۱۵ دقیقه از مبدأ ۱۵ دقیقه شروع شده و تا ۹۰ درجه ثبت گردیده است.

در ستون «الجیوب» درمقابل اندازهٔ هر کمان جیب آن با چهار رقم شصتگانی از راست به چپ با حروف جمل نوشته شده است (دقیقه‌ها-ثانیه‌ها-ثالثه‌ها-رابعه‌ها).

در ستون سمت چپ (الفضول) در مقابل هر کمان (α) تفاضل جیب آن با جیب کمان سطر بعد یعنی جیب $(\alpha + ۱۵')$ ثبت گردیده است.

در ستون «التعادل» در مقابل اندازهٔ هر کمان چهار برابر عددی که در ستون «الفضول» است نوشته شده. زیرا چنانکه خواهیم دید در موقع استفاده از جداول جیب غالباً به چهار برابر تفاضل دو جیب متوالی احتیاج پیدا می‌شود. فایدهٔ ستون «التعادل» این است که در هنگام عمل مجبور نمی‌شویم که چهار برابر تفاضل را جداگانه حساب کنیم.

اینک برای نمونه صفحهٔ اول از جداول جیب را با تغییرات مختصری در اینجا نقل می‌کنم. به این ترتیب که اولاً اعداد را در دستگاه شصتگانی ولی با ارقام هندی می‌نویسم و ثانیاً کسرهای شصتگانی را از چپ به راست ثبت می‌کنم. مثلاً جیب یک درجه و چهل و پنج دقیقه را که در متن به صورت:

$$\boxed{۱} \boxed{مط} \boxed{نو} \boxed{نظ} \quad (\text{از راست به چپ})$$

نوشته شده آن را به شکل:

$$\boxed{۱۹} \boxed{۵۶} \boxed{۴۹} \boxed{۱} \quad (\text{از چپ به راست})$$

می‌نویسیم. و واضح است که مقصود از آن بر طبق آنچه در شمارهٔ ۹/۱۲ خواهیم دید عدد زیر است:

$$۰; ۱, ۴۹, ۵۶, ۱۹$$

که در دستگاه شمار دهگانی چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{۱}{۶۰} + \frac{۴۹}{(۶۰)^۲} + \frac{۵۶}{(۶۰)^۳} + \frac{۱۹}{(۶۰)^۴}$$

شاید این توضیح بی‌مورد نباشد که در ستون «کمانها» مقصود از درجه و دقیقه عبارت است از درجه و دقیقهٔ کمان و حال آنکه در ستون جیبها مقصود از دقیقه و ثانیه و ثالثه و رابعه، مراتب کسرهای شصتگانی است. به عبارت دیگر در ستون کمانها واحد، درجه یعنی $\frac{۱}{۶۰}$ محیط دایره است ولی در ستون جیبها واحد، شعاع دایره است که آن را بیرونی یک فرض کرده است.

جدول جیبها

(صفحة ۳۰۸ از کتاب قانون مسعودی چاپ حیدرآباد)

قوس		جیب				تعدیل			تفاضل	
دقیقه	درجه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	رابعه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	ثانیه
۱۵	۰	۲۸	۴۲	۱۵	۰	۵۲	۴۹	۲	۱	۴۲
۳۰	۰	۵۶	۲۴	۳۱	۰	۴۰	۴۹	۲	۱	۴۲
۴۵	۰	۲۱	۷	۴۷	۰	۲۸	۴۹	۲	۱	۴۲
۰	۱	۴۳	۴۹	۲	۱	۱۲	۴۹	۲	۱	۴۲
۱۵	۱	۱	۳۲	۱۸	۱	۴۸	۴۸	۲	۱	۴۲
۳۰	۱	۱۳	۱۴	۳۴	۱	۲۴	۴۸	۲	۱	۴۲
۴۵	۱	۱۹	۵۶	۴۹	۱	۵۲	۴۷	۲	۱	۴۱
۰	۲	۱۷	۳۸	۵	۲	۲۰	۴۷	۲	۱	۴۱
۱۵	۲	۷	۲۰	۲۱	۲	۴۰	۴۶	۲	۱	۴۱
۳۰	۲	۴۷	۱	۳۷	۲	۰	۴۶	۲	۱	۴۱
۴۵	۲	۱۷	۴۳	۵۲	۲	۸	۴۵	۲	۱	۴۱
۰	۳	۳۴	۲۴	۸	۳	۲۰	۴۴	۲	۱	۴۱
۱۵	۳	۳۹	۵	۲۴	۳	۲۰	۴۳	۲	۱	۴۰
۳۰	۳	۲۹	۴۶	۳۹	۳	۲۴	۴۲	۲	۱	۴۰
۴۵	۳	۵	۲۷	۵۵	۳	۱۶	۴۱	۲	۱	۴۰
۰	۴	۲۴	۷	۱۱	۴	۸	۴۰	۲	۱	۴۰
α		$\sin \alpha$				$4 \times \Delta$			Δ	

یب - باب هفتم از مقاله سَوَم «قانون مسعودی»

در تجیب و تقویس^{۱۵۳}

۸/۷۸- ابتدا باید متذکر شوم که تجیب یعنی یافتن جیب کمان وقتی که اندازه آن کمان معلوم باشد.

و تقویس یعنی یافتن اندازه کمانی که جیب آن در دست باشد.

بیرونی در آغاز این باب مقدمه‌ای آورده که خلاصه آن این است:

در جدولهای جیب اندازه کمانها با فواصل متساوی (۱۵ دقیقه به ۱۵ دقیقه) در ستون عدد

کمان نوشته شده و در مقابل هر کمان در ستون جیب حصه آن کمان، یعنی جیب نظیر آن، ثبت گردیده است.^{۱۵۴} عمل کردن با این جداول عبارت از این است که اگر اندازه کمانی معلوم باشد اندازه^{۱۵۳}. «قانون مسعودی» ص ۳۲۶: «الباب السابع فی التجیب و التقویس».^{۱۵۴}. در اینجا بیرونی نوشته است: «ربما كانت تلك الحصص خطوطا مستقيمة و ربما كانت زوايا اوقسيا توترها» ظاهراً مقصود از این عبارت این است که گاهی جیب یک کمان یا یک زاویه معلوم است و می‌توان از روی جداول،

جیب آن را بیاییم و اگر اندازهٔ جیب در دست باشد، اندازهٔ کمان نظیر آن را حساب کنیم. برحسب عادت این عمل دَوم (= یافتن کمان نظیر یک جیب معلوم) را در همهٔ جداول تقویس می‌نامند. اگر چه بعضی از مؤلفان زیج اصطلاح «تجیب» را هم برای یافتن جیب به‌کار می‌برند و هم برای یافتن سهم. اما ما هر عمل را با لقبی که شایستهٔ آن است خواهیم نامید.

۸/۷۹- تنقیح کمان^{۱۵۵} هرگاه کمانی داشته باشیم و بخواهیم جیب آن را بیاییم ابتدا آن کمان را تنقیح می‌کنیم. به این معنی که اگر آن کمان از ۹۰ درجه کمتر بود عین آن را به‌کار می‌بریم و اگر از ۹۰ درجه بیشتر و از ۲۷۰ درجه کمتر بود قدر مطلق تفاضل آن را با ۱۸۰ درجه می‌گیریم. و اگر اندازهٔ کمان از ۲۷۰ درجه بیشتر بود تفاضل آن را با ۳۶۰ درجه اختیار می‌کنیم. و برای رعایت اختصار، و پیشگیری از اشتباه، کمبود (= قصور) کمان را از نود درجه تمام کمان^{۱۵۶} و کمبود کمان را از ۱۸۰ درجه تنمۀ کمان و کمبود آن را از ۳۶۰ درجه تکملۀ کمان می‌نامیم.

۸/۸۰- تجیب کمان با روش معمولی^{۱۵۷} - اگر بخواهیم جیب کمان مفروضی را به‌دست آوریم ابتدا کمان را منقح می‌کنیم. سپس در ستون کمانها اندازهٔ کمان را جستجو می‌کنیم. اگر عین آن را یافتیم در ستون جیبها عدد نظیر آن را می‌گیریم.

اما اگر عین کمان مفروض را در ستون کمانهای جدول نیافتیم، کمانی را می‌گیریم که از همه به آن نزدیکتر و از آن کوچکتر باشد (یعنی بزرگترین کمانی را می‌گیریم که از کمان مفروض کوچکتر باشد) و آن را از کمان مفروض کم می‌کنیم. سپس این تفاضل را در مقدار تعدیل (که در ستون تعدیل روبه‌روی اندازهٔ کمان مفروض ثبت شده) ضرب و حاصل را با جیب مذکور جمع می‌کنیم تا جیب مطلوب به‌دست آید.

تبصره - ^{۱۵۸} این قاعده را می‌توان با یک تساوی بیان کرد. فرض می‌کنیم α کمان مفروض باشد که عین آن در جدول نیست. بزرگترین کمانی را که از α کوچکتر و در جدول هست α' می‌نامیم و تفاضل $\alpha - \alpha'$ را Δ می‌خوانیم و مقدار تعدیل نظیر کمان α' را t می‌گیریم. در این صورت:

$$\boxed{\alpha \text{ جیب} = \alpha' \text{ جیب} + t \times \Delta} \quad (۱)$$

مثال - فرض می‌کنیم می‌خواهیم جیب کمان ۳ درجه و ۲۲ دقیقه را حساب کنیم. این کمان در جدول نیست و نزدیکترین کمان به آن که از آن کوچکتر و در جدول موجود است ۳ درجه و ۱۵

کمان نظیر آن را یافت و گاهی خود کمان در دست است و می‌توان جیب نظیر آن را حساب کرد.

۱۵۵. امروزه به‌جای اصطلاح «تنقیح کمان» می‌گوییم تحویل به ربع اول.

۱۵۶. امروزه به جای «تمام کمان» می‌گوییم «متم کمان» و به جای «تنمۀ کمان» می‌گوییم «مکمل کمان».

۱۵۷. «قانون مسعودی» ص ۳۲۶، سطر شانزدهم: «تجیب القوس علی الرسم المعهود».

۱۵۸. این تبصره و مثال آن در متن نیست.

دقیقه است. بنابر قاعده فوق داریم:

$$\begin{aligned}\alpha' &= 3^\circ, 15' \text{ و } \alpha = 3^\circ, 22' \\ \Delta &= \alpha - \alpha' = 3^\circ, 22' - 3^\circ, 15' = 7' \\ \alpha' \text{ جیب} &= 0; 3, 24, 5, 39 \\ t &= (\text{تعدیل}) = 0; 1, 2, 43, 20 \\ t \times \Delta &= (0; 1, 2, 43, 20) \times \frac{7}{60} = 0; 0, 7, 19, 3, 20\end{aligned}$$

(برای ضرب t در ۷ دقیقه باید t را در ۷ ضرب کرد و هریک از ارقام شصتگانی را یک مرتبه تنزل داد.)

$$\begin{aligned}\alpha \text{ جیب} &= 0; 3, 24, 5, 39 + 0; 0, 7, 19, 3 \\ &= 0; 3, 31, 24, 42\end{aligned}$$

۸/۸۱. محاسبه جیب با دقت بیشتر^{۱۵۱} دستوری را که بیرونی داده است می‌توان با اصطلاحات کنونی چنین بیان کرد:

اگر بخواهیم جیب کمان α را حساب کنیم، و α عیناً در جدول موجود نباشد، بزرگترین کمانی را که از α کوچکتر و در جدول موجود است α' نامیده تفاضل $\Delta = \alpha - \alpha'$ را حساب می‌کنیم. سپس در ستون تفاضلها (ستون الفضول) تفاضل نظیر کمان α' را یافته آن را D' و تفاضلی را که بلافاصله پیش از D' است (در جدول در بالای D' قرار دارد) گرفته آن را D می‌نامیم^{۱۶۰} و اختلاف این دو تفاضل را حساب کرده آن را δ می‌خوانیم. در این صورت جیب α از دستور زیر به دست می‌آید.^{۱۶۱}

$$\boxed{\alpha \text{ جیب} = \alpha' \text{ جیب} + \frac{4}{60} \times \Delta \times \left(D - \frac{4}{60} \times \Delta \times \delta \right)} \quad (2)$$

تبصره - برای سهولت کار کسانی که بخواهند عبارات متن عربی دستور فوق را با بیان ریاضی آن تطبیق کنند عین عبارات عربی و معادل ریاضی آنها را در داخل دو قلاب در اینجا می‌آوریم:

۱۵۹. «قانون مسعودی» ص ۳۲۷: «تدقیق التجیب».
۱۶۰. بیرونی این تفاضل یعنی تفاضل نظیر کمان $(\alpha' - 15')$ را «سابق» نامیده است.
۱۶۱. در این دستور مقصود از $\frac{4}{60}$ چهار دقیقه است که برای احتراز از اشتباه آن را به این صورت نوشته‌ام.

«متی اخذنا الجیب الذی بحیال اقرب قوس فی سطر العدد $[\alpha']$ الی ما معنا $[\alpha]$ و حفظناه اخذنا الفضل الذی یقابل الموجود فی جدول الفضول $[D']$ و الفضل الذی فوقه ایضاً $[D]$ و هو السابق. ثم ضربنا الفضل بین هذین الفضلین المأخوذین $[\delta = |D - D'|]$ فیما بقی معنا من القوس $[\Delta = \alpha - \alpha']$ یعنی $\Delta \times \delta$ را حساب می‌کنیم] ثم فی اربع دقائق $[\frac{4}{60} \times \Delta \times \delta]$ و نقصنا ما اجتمع من السابق $[\frac{4}{60} \times \Delta \times \delta]$ و ضربنا مابقی فی بقیه القوس ایضاً $[\Delta \times (D - \frac{4}{60} \times \Delta \times \delta)]$ ثم فی اربع دقائق ابدأ^{۱۶۲}

$$\left[\frac{4}{60} \times \Delta \times \left(D - \frac{4}{60} \times \Delta \times \delta \right) \right]$$

و زدنا المبلغ علی الجیب المأخوذ الذی حفظناه.

$$\left[\alpha' + \left(\frac{4}{60} \right) \times \Delta \times \left(D - \frac{4}{60} \times \Delta \times \delta \right) \right]$$

فیکون المجتمع حینئذ هو الجیب المدقق المطلوب للقوس». مثال - اینک مثالی را که کارل شوی^{۱۶۳} برای این دستور ذکر کرده است با مختصر اصلاحی در اینجا نقل می‌کنم.

می‌خواهیم جیب دقیق کمان ۱۵ درجه و ۲۱ دقیقه را حساب کنیم. مطابق با دستور فوق داریم:

$$21' \alpha = \alpha = 15^\circ \text{ کمان مفروض}$$

$$15' \alpha' = \alpha' = 15^\circ \text{ کمان موجود در جدول}$$

$$\Delta = \alpha - \alpha' = 6'$$

$$\alpha' \text{ جیب} = 0; 15, 46, 54, 45$$

$$\alpha' \text{ تفاضل نظیر} = 0; 0, 15, 8, 44$$

۱۶۲. «ابداً» در اینجا به معنی «همیشه»، هر چه باشد حاصل.

۱۶۳. «شوی T» ص ۴۱.

$$D' \text{ تفاضل پیش از } D' = 0; 0, 15, 9, 50$$

$$\delta = D - D' = 0; 0, 0, 1, 6$$

$$\delta \times \Delta = 0; 0, 0, 6, 36$$

$$\frac{4}{60} \times \delta \times \Delta = 0; 0, 0, 0, 26, 24$$

$$D - \frac{4}{60} \times \delta \times \Delta = 0; 0, 15, 9, 23, 36$$

$$\frac{4}{60} \times \Delta \times \left(D - \frac{4}{60} \times \delta \times \Delta \right) = 0; 0, 6, 3, 45, 26, 24$$

(کارل شوی در اینجا اشتباهاً به جای D مقدار D' را ثبت کرده ولی در محاسبه مقدار صحیح را به کار برده است).

$$\alpha \text{ جیب} = 0; 15, 46, 54, 45 + 0; 0, 6, 3, 45, 26, 24$$

$$\alpha \text{ جیب} = 0; 15, 52, 58, 30, 26, 24$$

(کارل شوی رقم رابعه را به جای 30 مساوی با 31 به دست آورده است) اگر جیب α را با دستور (۱) شماره $8/80$ حساب کنیم مقدار زیر به دست می آید:

$$\alpha \text{ جیب} = 0; 15, 52, 58, 14, 36$$

و ملاحظه می شود که این مقدار با مقداری که در فوق به دست آمد اندک اختلافی دارد و به قول بیرونی دقیقتر است.

۸/۸۲- تقویس جیب با روش معمولی.^{۱۶۴} (پیش از این دیدیم که اگر جیب کمانی معلوم باشد و بخواهیم کمان نظیر آن را بیابیم این عمل را تقویس جیب می نامند). اگر جیبی در دست باشد و بخواهیم کمان نظیر آن را بیابیم در جدول جیبها (یعنی در ستونی که جیبها در آن ثبت شده است) آن جیب را جستجو می کنیم. اگر عین آن جیب را یافتیم که کمان نظیر آن معلوم می شود.

اما اگر عین آن جیب در جدول موجود نبود جیبی را که از همه به جیب مفروض نزدیکتر و از آن کوچکتر است می یابیم و آن را جیب موجود می نامیم. و مقدار تعدیل نظیر آن را یادداشت می کنیم. سپس تفاضل جیب مفروض و جیب موجود را یافته حاصل را بر تعدیل تقسیم می کنیم و نتیجه را به کمان نظیر جیب موجود می افزاییم تا کمان مطلوب به دست آید.

۱۶۴. «قانون مسعودی» ص ۳۲۷: «تقویس الجیب علی الرسم المعهود».

تبصره - دستور فوق را می‌توان با یک تساوی بیان کرد. فرض می‌کنیم:

$$S = \text{جیب مفروض}$$

$$\alpha = \text{کمان مطلوب}$$

$$S' = \text{جیب موجود}$$

$$\alpha' = \text{کمان نظیر جیب موجود}$$

$$\Delta = S - S'$$

$$t = \text{تعديل نظير جيب موجود}$$

در این صورت:

$$\alpha = \alpha' + \frac{\Delta}{t} \quad (۳)$$

۸/۸۳- محاسبهٔ کمان نظیر یک جیب با دقت بیشتر-^{۱۶۵} دستور بیرونی را در این مورد می‌توان چنین بیان کرد:

جیب مفروض را S و کمان مطلوب را α و بزرگترین جیبی را که از جیب مفروض کوچکتر و در جدول موجود است S' و تفاضل $S - S'$ را Δ می‌نامیم. و در ستون تفاضلها (الفضول) تفاضل نظیر α' را یافته آن را D' و تفاضل بلافاصله پیش از آن را D و تفاوت مابین D و D' را δ می‌خوانیم. در این صورت کمان α از دستور زیر به دست می‌آید^{۱۶۶}:

$$\alpha = \alpha' + \frac{\Delta \times \left(\frac{۱۵}{۶۰}\right)}{D - \frac{\Delta \cdot \delta}{D'}} \quad (۴)$$

تبصره - برای آسان کردن کار کسانی که بخواهند عبارات متن عربی دستور فوق را با بیان ریاضی آن تطبیق کنند عین عبارات عربی و معادل ریاضی آنها را در بین دو قلاب در اینجا می‌آورم:

«و اذا وجدنا الاقرب $[S']$ الى الجيب الذى معنا $[S]$ و حفظنا قوسه $[\alpha']$ اخذنا ايضاً ما بحاله من الفضل $[D']$ و السابق للفضل الذى يحاذيه $[D]$. ثم القينا الموجود فى الجيوب مما معنا $[S - S']$ و ضربنا ما يبقی و هو بقيه الجيب $[\Delta = S - S']$ فى فضل ما بين الفضلين

۱۶۵. «قانون مسعودی» ص ۳۲۸: «تدقيق التقويس».

۱۶۶. در این دستور مقصود از $\frac{۱۵}{۶۰}$ ، پانزده دقیقه است که برای احتراز از اشتباه آن را به این صورت نوشته‌ام.

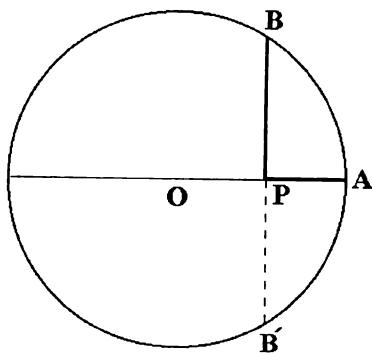
المأخوذین $[\delta = |D - D'|]$ یعنی $\Delta \times \delta$ را حساب می‌کنیم و قسمنا ما بلغ علی الفضل المحاذی $[\frac{\Delta \cdot \delta}{D'}]$ و نقصنا ما یرج من السابق للمحاذی $[D - \frac{\Delta \cdot \delta}{D'}]$. ثم قسمنا مضروب بقية الجیب $[\Delta]$ فی خمس عشرة دقيقة $[\Delta \times \frac{15}{60}]$ علی ما یبقی من السابق $\left\{ \frac{\Delta \times (\frac{15}{60})}{D - \frac{\Delta \cdot \delta}{D'}} \right\}$ فما خرج نزیده علی القوس المحفوظة

$$\left\{ \alpha' + \frac{\Delta \times \left(\frac{15}{60} \right)}{D - \frac{\Delta \cdot \delta}{D'}} \right\}$$

فیجتمع قوس ذلك الجیب».

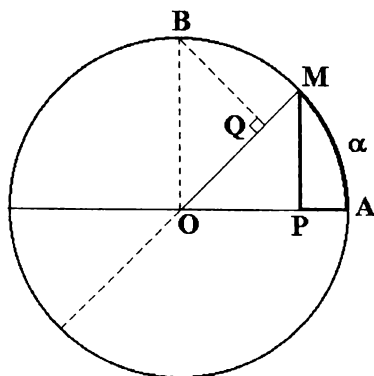
۸/۸۴- تسهیم کمان ^{۱۶۷}-سهم دو برابر هر کمان را جیب منکوس آن کمان می‌نامند. مثلاً در شکل زیر جیب کمان AB عبارت است از PB و جیب منکوس کمان AB عبارت است از PA که سهم دو برابر کمان AB است (یعنی سهم کمان BB'). (شکل ۱۵۲).

بیرونی می‌گوید که PA را که جیب منکوس کمان AB است برای رعایت اختصار سهم کمان AB می‌نامیم تا مجبور نشویم که جیب معمولی را (در مقابل جیب منکوس) جیب مستوی بنامیم. اگر کمانی از ۱۸۰ درجه زیاده‌تر باشد سهم ندارد که محتاج به تنقیح آن کمان شویم. سپس می‌گوید: برای تعیین سهم هر کمان جیب تقاضل آن کمان را با ۹۰ درجه می‌گیریم. و اگر کمان مفروض از ۹۰ درجه کمتر بود آن جیب را از واحد یعنی جیب کل که شعاع دایره است کم می‌کنیم. و اگر کمان مفروض از ۹۰ درجه بیشتر بود (و از ۱۸۰ درجه کمتر) جیب مذکور را به واحد (شعاع دایره) می‌افزاییم.



شکل ۱۵۲

توضیح - در شکل ۱۵۳ کمان α کوچکتر از 90° درجه است. و اگر آن را از 90° درجه کم



شکل ۱۵۳

کنیم ($\widehat{AB} = 90^\circ$) کمان $\widehat{BM} = 90^\circ - \alpha$ به دست می‌آید. اگر از نقطهٔ B عمود BQ را بر OM فرود آوریم واضح است که BQ مساوی با جیب ($90^\circ - \alpha$) است و از تساوی دو مثلث OBQ و MOP نتیجه می‌شود $BQ = OP$ پس:

$$PA = \alpha \text{ کمان سهم} = OA - OP = OA - BQ = 1 - (90^\circ - \alpha) \text{ جیب}$$

همچنین در شکل ۱۵۴ کمان α' بزرگتر از 90° درجه است. و اگر کمان $\widehat{A'B'} = 90^\circ$ را از آن کم کنیم کمان $\widehat{B'M'} = \alpha' - 90^\circ$ به دست می‌آید. و از روی شکل واضح است که $B'Q' = O'P'$ پس:

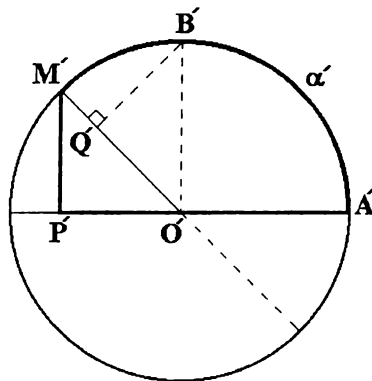
$$P'A' = \alpha' \text{ کمان سهم} = O'A' + O'P' = O'A' + B'Q' = 1 + (\alpha' - 90^\circ) \text{ جیب}$$

تبصره - با اصطلاحات امروزی و به فرض آنکه شعاع دایره مساوی با واحد باشد جیب منکوس یا سهم کمان α به طریق زیر به دست می‌آید: اگر $\alpha < 90^\circ$ (شکل ۱۵۳)، داریم:

$$\alpha \text{ جیب منکوس} = PA - 1 = \cos \alpha$$

اگر $90^\circ < \alpha' < 180^\circ$ (شکل ۱۵۴)، داریم:

$$\alpha' \text{ جیب منکوس} = P'A' = 1 + |\cos \alpha'|$$



شکل ۱۵۴

۸/۸۵- تقویس سهم^{۱۶۸} - اگر سهم کمانی را داشته باشیم و بخواهیم آن کمان را حساب کنیم، (قدر مطلق) تفاضل آن سهم را با واحد (یعنی شعاع دایره که همان جیب کل است) می‌گیریم و کمان نظیر آن را از روی جدول جیبها پیدا می‌کنیم. آنگاه اگر سهم مفروض بیشتر از واحد بود کمان مذکور را با 90° درجه جمع می‌کنیم و اگر سهم مفروض کمتر از واحد بود کمان مذکور را از 90° درجه کم می‌کنیم.

با توضیحاتی که در شماره قبل دادم مطلب واضح است.

۸/۸۶- بقیه باب هفتم از مقاله سوم مشتمل بر استدلال صحت دستورهای است که قبلاً برای تجیب و تقویس و تسهیم بیان شده است و چنین شروع می‌شود^{۱۶۹}:

«و نعود علی هذه الاعمال بالتعلیل...» و پس از این استدلالها بیرونی نوشته است^{۱۷۰}:

«قبلاً گفتیم که چرا بطلمیوس شعاع دایره را شصت اختیار کرده و چرا ما آن را واحد گرفتیم. و معلوم است که اگر مقداری بر حسب یکی از آنها معلوم باشد و بخواهیم آن را بر حسب دیگری حساب کنیم فقط به یک عمل رفع (= ضرب کردن در عدد 60°) و یا یک عمل خطّ (تقسیم کردن بر عدد 60°) احتیاج داریم.»

مقصود این است که اگر مثلاً مقدار وتری، بر حسب آنکه شعاع دایره را واحد فرض کرده باشیم، در دست باشد، کافی است آن را در 60° ضرب کنیم تا مقدار آن بر حسب آنکه شعاع دایره شصت باشد به دست آید.

۱۶۸. «قانون مسعودی» ص ۳۲۸: «تقویس السهم».

۱۶۹. «قانون مسعودی» ص ۳۲۹.

۱۷۰. «قانون مسعودی» ص ۳۳۲: «ولّا تا ذکرنا السبب الداعی الی اختیار بطلمیوس...».

سپس بیرونی گفته است^{۱۷۱}:

«اما اگر جیبی را بخواهیم که بعضی از هندیان آن را استعمال می‌کنند، و آن مبنی بر این است که شعاع دایره مساوی با ۱۵۰ دقیقه فرض شود، جیب را از جداول جیب (که در کتاب «قانون مسعودی» آمده است) استخراج و آن را در $2\frac{1}{4}$ ضرب می‌کنیم و برعکس. و عقاید هندیان در این باره مختلف است و در ذکر آنها فایده‌ای نیست و اشاره به همین یکی (یعنی ۱۵۰ دقیقه فرض کردن شعاع دایره) کافی است.»

یج - سه باب آخر مقالهٔ سَوَم «قانون مسعودی»

تا اینجا محتویات هفت باب اول مقالهٔ سَوَم کتاب «قانون مسعودی» را با تفصیل لازم مورد بررسی قرار دادیم. چون موضوع بابهای هشتم و نهم و دهم مقالهٔ سَوَم شرح انواع ظلّ و شکل قطاع سطحی و شکل قطاع کروی و شکل ظلّی است و این مطالب را در بخش هفتم کتاب حاضر که موضوع آن بررسی کتاب «مقالید علم‌الهیة» است مورد مطالعه قرار داده‌ام در اینجا از تکرار آنها خودداری می‌کنم.

* * *

بخش نهم

فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم»

مشمول بر: مختصری درباره کتاب «التفهیم»-موضوع و چگونگی تدوین این بخش از کتاب حاضر-فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم».

الف - مختصری درباره کتاب «التفهیم»

۹/۱-کتاب التفهیم و نسخه‌های چاپی آن- عنوان کامل این کتاب «کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم» است که ابوریحان بیرونی آن را به دو زبان فارسی و عربی نوشته است و هر دو متن آن به چاپ رسیده و به زبان انگلیسی نیز ترجمه شده است.

متن فارسی آن با «تصحیح و مقدمه و شرح و حواشی» توسط شادروان استاد جلال همائی در سالهای ۱۳۱۶ تا ۱۳۱۸ خورشیدی در تهران به طبع رسیده^۱ و طبع جدیدی نیز از آن در سال ۱۳۵۳ با تجدید نظر و تعلیقات و مقدمه تازه توسط انجمن آثار ملی انتشار یافت.

متن عربی کتاب «التفهیم» و ترجمه آن به زبان انگلیسی توسط رمزی رایت در سال ۱۹۳۴ میلادی در آکسفورد به چاپ رسیده است. در این چاپ صفحات متن عربی و ترجمه انگلیسی روبه روی یکدیگر قرار دارد.^۲

۱. از این چاپ در کتاب حاضر با نشانه «التفهیم فارسی» و به خصوص در این بخش، برای مراعات جانب اختصار با نشانه اختصاری «ت» یاد کرده‌ام.

۲. از این چاپ در کتاب حاضر با نشانه «ترجمه انگلیسی التفهیم» و به خصوص در این بخش، برای مراعات جانب اختصار با علامت اختصاری «T» یاد کرده‌ام و شماره‌هایی که به آنها ارجاع شده شماره‌های پایین صفحات ترجمه

۹/۲- موضوع و اهمیت کتاب «التفهیم»- شادروان استاد جلال همائی در مقدمه فاضلانه‌ای که بر طبع متن فارسی کتاب «التفهیم» نوشته است تحقیقی دقیق در معرفی آن کتاب به عمل آورده است که اینک چند مطلب از صفحات مختلف آن را در اینجا نقل می‌کنم:

«بالجمله استاد ابوریحان این کتاب را به خواهش ریحانه بنت‌الحسین خوارزمی با اسلوب و روشی که بهتر و برتر از آن تصور نمی‌شود به طریق شرح حدود و رسوم منطقی بدون ادله و براهین ریاضی و به تعبیر خود استاد بر سبیل مواضعات^۲ با موجزترین عبارات در چهار علم اصلی یعنی هندسه و حساب و هیئت و احکام نجوم و یک فن فرعی عملی یعنی اسطرلاب تألیف کرد.» (ت: صفحه «ی»).

«تاریخ تألیف این کتاب به طور قطع سال ۴۲۰ هجری قمری است مطابق سنه ۳۹۸ یزدگردی» (ت: صفحه «یا»).

«آثار ابوریحان در زبان عربی فراوان است. اما در فارسی یگانه اثری که از او باقی مانده همین کتاب التفهیم است که به عقیده من اگر همه جهات را از قبیل اشتغال بر مواضع علمی و فواید تاریخی و قدمت و صحت و اعتبار مطالب و اهمیت ادبی و امثال اینها را در نظر بگیریم، بی شبهه بزرگترین و بهترین یادگارهای فارسی است و در سراسر آثار فارسی بعد از اسلام، هیچ نظیر و مانندی برای آن نتوان یافت» (ت: صفحه «کو»).

«استاد ابوریحان خود این کتاب را به هر دو زبان فارسی و عربی نوشته به این طریق که آن را نخست به فارسی یا به عربی تألیف فرموده و سپس عیناً به زبان دیگر نقل کرده و به حدی در این کار مهارت و استادی به کار برده است که تمیز اصل از ترجمه دشوار می‌نماید تا جایی که بعضی پنداشته‌اند هر کدام تألیفی است مستقل بدون اینکه ترجمه دیگری باشد» (ت: صفحه «کز»).

«در میان کتب نشر فارسی که به اهمیت معروفند و به راستی هم در خور اهمیت‌اند هیچ کتابی را جامع همه خصوصیات و مزایا که در کتاب التفهیم فارسی موجود است سراغ نداریم» (ت: صفحه «نو»).

«شیوایی تعبیر، جزالت اسلوب، زیبایی و رسایی الفاظ و عبارات، پختگی و سختگی معانی، سندیت و اعتبار و استواری مطالب، قدمت اثر، تنوع مقالات و بحث کافی در هر موضوع، پر مغزی و اشتغال بر فواید علمی و ادبی بیشمار، پیراستگی از حشو و زوائد، خالی بودن از الفاظ و معانی ناپسند و نادرست، اینها همه جزو مزایا و خصایص این کتاب است که مجموع آنها را در هیچ‌یک از مؤلفات فارسی نتوانیم یافت» (ت: صفحات «نو» و «نز»).

انگلیسی است. برای عنوان انگلیسی این چاپ رجوع کنید به «ترجمه انگلیسی التفهیم» در فهرست منابع کتاب حاضر.

۳. ← به روبروی صفحه (۲۱۰ - T) سطر سوم «فقد آن لنا ان نذكر المواضع في صناعة احكام نجوم»- البته مقصود بیرونی از «مواضعات» در اینجا قراردادهایی است که بین علمای احکام نجوم در تعبیر اصطلاحات متداول در آن فن وجود دارد (قربانی).

۹/۳- اصطلاحات علمی کتاب «التفهیم»- کتاب «التفهیم» مشتمل بر پنج باب است: باب نخستین در هندسه- باب دوم در حساب و جبر و مقابله- باب سوم در هیئت و جغرافیا و معرفة الاقالیم- باب چهارم در اسطرلاب- باب پنجم در احکام نجوم. بیرونی در همه این پنج باب اصطلاحات مربوط به علم یا فن مورد بحث را به طریق سؤال و جواب شرح داده است. در واقع کتاب «التفهیم» گنجینه گرانمایی از اصطلاحات ریاضی و نجومی است که با کمال دقت و مهارت و با عبارات موجز و دقیق تعریف شده است. به قول شادروان استاد همائی: «یکی از جهات اهمیت کتاب التفهیم این است که استاد ابوریحان در نوشتن این کتاب کوششی بسزا داشته که تا می‌تواند به جای لغتها و اصطلاحهای علمی که در آن زمان به عربی متداول بوده است کلمات فارسی اصیل بگذارد. به طوری که هم عبارات مفهوم باشد و هم اسلوب کتاب از شیوایی و بلاغت ادبی نیفتد. و به راستی خوب از عهده برآمده و کاری شگرف انجام داده است. از این جهت کتاب التفهیم با قطع نظر از خصوصیات و مزایای دیگر، مخزن پرمایه‌ای است از لغات و اصطلاحات و ترکیبات قدیم فارسی» (ت: صفحه «نح»).

اگر کسی همه اصطلاحات ریاضی و نجومی کتاب «التفهیم» را به ترتیب الفبایی و با معادلهای آنها در یکی از زبانهای اروپایی فراهم آورد خدمتی بسزا به تاریخ علوم خواهد کرد که بدون تردید نزد محققان و دانشمندان مشکور خواهد بود. و این کاری است که نمونه‌ای از آن را در این بخش از کتاب حاضر فراهم آورده‌ام.

ب- موضوع این بخش از کتاب حاضر و چگونگی تدوین آن

۹/۴- شرح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم»- بابهای اول و دوم کتاب «التفهیم» که اولی در هندسه و دومی در حساب است مشتمل بر بیش از دویست اصطلاح ریاضی است که در این بخش از کتاب به شرح آنها می‌پردازم. اگر می‌خواستم شرح اصطلاحات مربوط به هیئت و نجوم و احکام نجوم و اسطرلاب را نیز در اینجا بیاورم حجم این بخش از کتاب تقریباً ده برابر می‌شد و تناسب بین بخشهای مختلف کتاب از بین می‌رفت. از طرف دیگر، شرح قسمتی از این اصطلاحات در این کتاب، که موضوعش معرفی آثار ریاضی بیرونی است، لازم می‌نمود. این است که فقط به شرح اصطلاحات مربوط به حساب و هندسه که در بابهای اول و دوم «التفهیم» آمده است اکتفا می‌کنم.^۴

این اصطلاحات را به ترتیب الفبایی مرتب کرده در مقابل هر اصطلاح معادل انگلیسی آن

۴. هدف اصلی من از نگارش این بخش این است که آنچه، از ریاضیات قدیم، دانستش برای درک مطالب سایر بخشهای کتاب حاضر لازم است در ضمن شرح این اصطلاحات بیاورم تا بتوانم در بخشهای دیگر کتاب به آنها ارجاع کنم.

را نوشته‌ام.^۵ در مواردی که اصطلاحی در متنهای عربی و فارسی «التفهیم» مختلف بوده است اصطلاح عربی را هم در مقابل اصطلاحات فارسی ثبت کرده‌ام و اگر این اختلاف ناچیز بوده از آوردن اصطلاح عربی خودداری کرده‌ام.

در همهٔ موارد ابتدا عین عبارات «التفهیم» فارسی را از روی چاپ تصحیح شده توسط شادروان استاد همائی و با همان رسم الخط آورده‌ام و اگر توضیح مختصری برای فهم معنی کلمه‌ای لازم بوده آن توضیح را بعد از آن کلمه بین دو قلاب قرار داده‌ام. سپس هر جا لازم بوده به شرح اصطلاحات و تاریخچهٔ آنها پرداخته‌ام و یا به منابع معتبر ارجاع کرده‌ام. البته برای مراعات جانب اختصار از شرح اصطلاحاتی که یا ساده هستند و یا امروزه متداول می‌باشند خودداری کرده‌ام. در جمع آوری و تدوین این اصطلاحات از دو متن فارسی و عربی کتاب «التفهیم» که شرحش گذشت استفاده کرده‌ام و چون تقریباً در همهٔ صفحات این بخش از کتاب ناچار بوده‌ام به دو متن مذکور ارجاع کنم دو علامت قراردادی زیر را به کار برده‌ام:

ت = متن فارسی «التفهیم» چاپ شادروان استاد همائی
 T = متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی «التفهیم» چاپ رمزی رایت

بنابراین نشانهٔ اختصاری (ت: ۴۱ = ۳۱ : T) یعنی رجوع کنید به صفحهٔ ۴۱ از متن فارسی یا صفحهٔ ۳۱ متن عربی کتاب «التفهیم». شماره‌های متن عربی شماره‌هایی است که در پایین صفحات ترجمهٔ انگلیسی چاپ رمزی رایت قرار دارد. ضمناً خاطرنشان می‌کنم که شماره‌هایی که در آغاز مطالب قرار داده‌ام به منظور سهولت ارجاع به آنهاست و نه شمارهٔ ترتیب اصطلاحات.

ج - فرهنگ مشروح اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم»

۹/۵- ابدال نسبت = Alternate ratio^۶

ابدال نسبت چیست؟ او نسبت نخستین بسوم همچون نسبت دوم بچهارم بود (ت: ۲۰ = ۱۲ : T).

یعنی: در هر تناسب نسبت جملهٔ اول به جملهٔ سوم مساوی با نسبت جملهٔ دوم به جملهٔ چهارم است. به عبارت دیگر از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می‌توان نتیجه گرفت $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و این را «ابدال نسبت» می‌گویند.

۵. و هر جا ترجمهٔ انگلیسی اصطلاحاتی را که رمزی رایت در ترجمهٔ انگلیسی «التفهیم» آورده درست و یا رسا نیافته‌ام صحیح آنها را نوشته‌ام.

۶. رمزی رایت اصطلاح «ابدال نسبت» را Permutation ترجمه کرده ولی معادل انگلیسی درست آن Alternate ratio است (← «هیث E» ج ۲، ص ۱۱۴، ش ۱۲ و ص ۱۳۴).

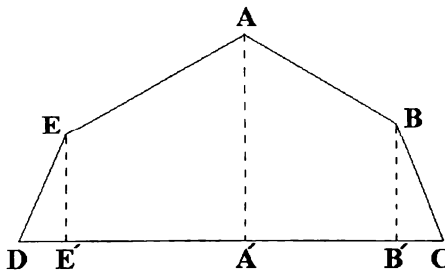
۹/۶. اجزای عدد = Aliquot parts.

«اجزا» جمع «جزو» است و بیرونی این اصطلاح را در ضمن تعریف اصطلاحات دیگر به کار برده است.^۷ مقصود از اجزای یک عدد صحیح مثبت شمارنده‌های (= مقسوم علیه‌های) آن عدد است به استثنای خود عدد. مثلاً اجزای عدد ۸ عبارتند از ۱ و ۲ و ۴. اصطلاح «جزو» به معنی «خارج قسمت» نیز به کار رفته است. ← اصطلاح «قسمت» (شماره ۹/۱۴).

۹/۷. ارتفاع شکل (= Height) = Altitude of figure

ارتفاع شکل چیست؟ ارتفاع بلندی باشد و آن بزرگترین عمودی باشد که از زاویه شکل فرود آید بر قاعده او یا بر استقامت قاعده (ت: ۲۴ = ۱۶ : T).

در این تعریف اصطلاح «زاویه» به جای «رأس» و اصطلاح «استقامت» به جای «امتداد» به کار رفته است و صفت «بزرگترین» که در مورد مثلث زاید است شاید به این مناسبت اضافه شده که مثلاً در شکل ۱۵۵ اگر CD را قاعده شکل بگیریم و از رأسهای A و B و E عمودهای AA' و BB' و EE' را بر خط راست CD فرود آوریم عمود از رأس A بزرگترین عمود و بنابراین ارتفاع شکل (نظیر قاعده CD) است. و ← «هیئت E » ج ۲، ص ۱۸۹، تعریف ۴.



شکل ۱۵۵

۹/۸. اضعاف = Multiples ← اصطلاح «امثال» (ش ۹/۱۰).

۹/۹. أطول الاقصرین = The longer of the short sides

اقصر الاقصرین = The Shorter of the short sides

پس دیگر ضلعها را نامی هست؟ آن ضلع [از مثلث] را که برابر [زاویه] قائمه یا منفرجه باشد او را ضلع مهین خوانند. و اندر مثلث قائم‌الزاویه خاصه او را قطر خوانند و وتر قائمه نیز خوانند. اما دو ضلع دیگر را، آنک از هر دو خردتر باشد او را اقصر الاقصرین گویند آن [= یعنی] کوتاهتر هر دو خرد و آنک از هر دو مهتر باشد او را أطول الاقصرین خوانند آن درازتر هر دو خرد (ت: ۱۱ = ۶ : T).

این دو اصطلاح امروزه نه متداول است و نه مفید. در این تعریف آنچه امروزه «وتر مثلث قائم الزاویه» می نامیم «قطر» نامیده شده است. نالینو در کتاب «علم الفلک» نوشته است که اصطلاح «قطر» برای ضلع روبه روی زاویه قائمه شایسته تر و درست تر از لفظ «وتر» مستعمل در این زمان است، چه زاویه قائمه در دایره جز مقابل به بزرگترین وتر، یعنی قطر نتواند بود؛ و زوایای دیگر خواه حاده و خواه منفرجه روبه روی اوتاری غیر از قطرند (← «تاریخ نجوم اسلامی» ص ۲۹۳، یادداشت شماره ۱۸).

۹/۱۰- امثال = Multiples

جزو و مثل چون باشد^۸؟ هرگاه اندازه ای دیگر اندازه را بپیماید بارها و او را سپری کند چنانکه چیزی نماند، آن پیماینده را جزو خوانند و ناچار خردتر باشد. و آن بزرگتر که پیموده شد، این جزو را امثال^۹ خوانند. و اضعاف نیز خوانند، ای دوتوها. زیرا که همچند جزو باشد چند بار (ت: ۱۸ = ۱۱ : T).

امروزه در مورد عددهای صحیح به جای «امثال» اصطلاح «مضرب» را به کار می بریم. مثلاً رشته مضربهای عدد ۵ عبارت است از: ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ و... و به جای «جزو» اصطلاح «مقسوم علیه» را به کار می برند و بهتر است «شمارنده» بگویند^{۱۰}. مثلاً شمارنده های عدد ۱۵ عبارتند از ۱ و ۳ و ۵. در مورد اصطلاح «اجزا» که جمع «جزو» است ← ۹/۶. لفظ «امثال» امروزه به صورت ترکیب در اصطلاح «مجموع امثال» به کار می رود. مثلاً اتحاد زیر را

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2bc + \dots$$

به صورت

$$(\sum a)^2 = \sum a^2 + 2 \sum ab$$

می نویسند و می خوانند: مربع مجموع امثال a [یعنی $(a + b + c + \dots)^2$] مساوی است با مجموع امثال a^2 [یعنی $a^2 + b^2 + c^2 + \dots$] به علاوه دو برابر مجموع امثال ab [یعنی: $ab + bc + \dots$].

۹/۱۱- برداشتن عدد = Ascending Reduction (رفع العدد)

برداشتن عدد چیست؟ چون ما عددی داریم اندر مرتبه ای از مرتبه های شستگانی و آن عدد بیشتر از شست باشد او را سوی آن مرتبه که زیر اوست برداریم، یعنی

۸. در «التفهیم» فارسی آمده است: «جزو و مثل چون باشد» و در «التفهیم» عربی نوشته شده است «ما الجز والامثال» و امثال صحیح تر می نماید زیرا اصطلاح «مثل» به معنی مورد بحث به صورت مفرد به کار نمی رود. شاید در اصل نسخه فارسی «التفهیم» هم «امثال» بوده و بعداً آن را به صورت «مثل» نوشته اند.

۹. یعنی: امثال این جزو.

۱۰. ← (۹/۱۰۲).

بر شست قسمت کنیم. اگر نیز از شست افزون بود بر شست قسمت کنیم تا سوی مرتبه زیرین برآید و همچنان همی کنیم تا بدرست رسد، اگر تواند رسید. آنگاه بایستیم (ت: ۴۵ = ۳۴ : T). شرح بقیه این مطلب در شماره ۹/۱۴ آمده است.

اصطلاح «برداشتن عدد» که معادل عربی آن «رفع العدد» است در اینجا یعنی تبدیل عددی که در دستگاه شمار دهگانی نوشته شده به معادل آن در دستگاه شمار شصتگانی.^{۱۱} مثلاً اگر ۱۱۰۴۵ ثانیه داشته باشیم، آن را به ۶۰ قسمت می‌کنیم می‌شود ۱۸۴ دقیقه (و ۵ ثانیه باقی می‌ماند). باز ۱۸۴ را بر ۶۰ تقسیم می‌کنیم می‌شود ۳ درجه (و ۴ دقیقه باقی می‌ماند). بنابراین ۱۱۰۴۵ ثانیه پس از «برداشتن» یعنی پس از رفع می‌شود ۳ درجه و ۴ دقیقه و ۵ ثانیه. به عبارت دیگر:

$$\frac{11045}{(60)^2} = 3 + \frac{4}{60} + \frac{5}{(60)^2} = 3 \text{ درجه}, 4 \text{ دقیقه}, 5 \text{ ثانیه}$$

این مطلب در خور توجه است که بیرونی اصطلاح «رفع» یعنی «برداشتن» را فقط در مورد کسره‌های شصتگانی بیان کرده است. در صورتی که اصطلاح «تجنیس» را، هم درباره کسره‌های متعارفی و هم درباره کسره‌های شصتگانی شرح داده است. («تجنیس» شماره ۹/۲۳).

۹/۱۲- چگونگی ثبت اعداد در دستگاه شمار شصتگانی در کتاب حاضر- چون در طی کتاب حاضر بارها ناچار بوده‌ام که اعداد را در دستگاه شمار شصتگانی بنویسم، و از طرف دیگر امروزه نوشتن اعداد در دستگاه شصتگانی با حروف جُمَل معمول نیست و باید اعدادی را که در آن دستگاه نوشته می‌شود طوری ثبت کرد که برای خواننده به آسانی قابل درک باشد، از این فرصت استفاده کرده آنچه را دانستن آن مورد لزوم است در اینجا می‌نویسم.

می‌دانیم که پایه دستگاه شمار دهگانی (معمولی) عدد ۱۰ است. یعنی واحد هر مرتبه (از راست به چپ) ده برابر واحد مرتبه پیش از آن و یک دهم واحد مرتبه بعد از آن است. مثلاً عدد ۳۷۹/۵۶۱ را در واقع می‌توان چنین نوشت^{۱۲}:

$$379/561 = 3 \times (10)^2 + 7 \times (10) + 9 + \frac{5}{10} + \frac{6}{(10)^2} + \frac{1}{(10)^3}$$

اما پایه شمار شصتگانی عدد ۶۰ است یعنی واحد هر مرتبه ۶۰ برابر واحد مرتبه پیش از آن و یک شصتم واحد مرتبه بعد از آن است.

۱۱. بیرونی کسره‌های ستینی (Sexagesimal) را به فارسی به صورت «شستگانی» و گاه نیز به شکل «شستگانی» نوشته است. در این کتاب (به استثنای عباراتی که از التهیم نقل می‌کنم) همه جا این اصطلاح را به صورت «شصتگانی» می‌نویسم. ← (قربانی: کاشانی نامه) چاپ اول، یادداشت ذیل صفحه ۱۰۹ (= ذیل صفحه ۸۶ چاپ دوم).

۱۲. و نیز ← «مرتبه‌های وضعی» شماره ۹/۱۸۳

قدما مرتبهٔ آحاد شمار شصتگانی را مرتبهٔ درجات می‌نامیدند و در جهت نزول هر درجه را به ۶۰ دقیقه و هر دقیقه را به ۶۰ ثانیه و هر ثانیه را به ۶۰ ثالثه و هر ثالثه را به ۶۰ رابعه و غیره قسمت می‌کردند. به نحوی که بعد از مرتبهٔ درجات در جهت نزول مرتبهٔ دقیقه‌ها و بعد از آن مرتبهٔ ثانیه‌ها و بعد از آن مرتبهٔ ثالثه‌ها و رابعه‌ها و خامسه‌ها و غیره قرار می‌گیرد که آنها را کسرهای شصتگانی (کسور ستینی) می‌نامیدند. و این مراتب را برعکس مراتب شمار دهگانی از راست به چپ می‌نوشتند. و اسامی مرتبه‌ها را یا در بالای ارقام قرار می‌دادند و یا نام آخرین مرتبه را در سمت چپ آن می‌نوشتند، مگر وقتی که قرینه‌ای برای دانستن نام مراتب در دست باشد. مثلاً ۲ درجه و ۲۴ دقیقه و ۱۱ ثانیه و ۴۵ ثالثه را با حروف جمل^{۱۳} به یکی از شکلهای زیر می‌نوشتند:

$$\begin{array}{c} \text{درجه} \quad \text{دقیقه} \quad \text{ثانیه} \quad \text{ثالثه} \\ \hline \text{ب} \quad \text{کد} \quad \text{یا} \quad \text{مه} \\ \text{(از راست به چپ بخوانید)} \end{array}$$

و یا:

$$\begin{array}{c} \text{ب} \quad \text{کد} \quad \text{یا} \quad \text{مه} \quad \text{ثالثه} \\ \hline \text{(از راست به چپ بخوانید)} \end{array}$$

این عدد را با ارقام هندی در دستگاه شمار معمولی می‌توان چنین نوشت:

$$۲ + \frac{۲۴}{۶۰} + \frac{۱۱}{(۶۰)^۲} + \frac{۴۵}{(۶۰)^۳}$$

و یا

$$۲ + \frac{۲۴}{۶۰} + \frac{۱۱}{(۶۰)^۲} + \frac{۴۵}{(۶۰)^۳}$$

و همچنین در جهت صعود هر ۶۰ درجه را یک واحد از مرتبهٔ بالاتر محسوب می‌داشتند و آن را واحد مرتبهٔ یک بار مرفوع یا به طور خلاصه مرتبهٔ مرفوع می‌نامیدند. و هر ۶۰ واحد «یک بار مرفوع» را یک واحد از مرتبهٔ بالاتر قرار می‌دادند و آن را واحد مرتبهٔ دوبار مرفوع یا «مثنی» و مرتبهٔ بعد از آن را مرتبهٔ سه بار مرفوع یا «مثالث» و مرتبهٔ بعدی را مرتبهٔ چهار بار مرفوع یا «مربع» و غیره می‌نامیدند.

از طرف دیگر برای نوشتن اعداد در دستگاه شمار شصتگانی ۵۹ رقم لازم است که قدما آنها را با ترکیب حروف جمل^{۱۴} می‌نوشتند.

بنابراین وقتی در کتابهای ریاضی قدیمی به عددی مانند زیر بر می‌خوریم:

۱۳. ۹/۱۰۰ ←

۱۴. ۹/۱۰۱ ←

سه بار مرفوع دو بار مرفوع مرفوع درجه دقیقه ثانیه ثالثه
یب ید ب نو مب کا لح

باید دانست که مقصود عدد زیر است:

$$۱۲ \times (۶۰)^۲ + ۱۴ \times (۶۰)^۲ + ۲ \times (۶۰) + ۵۶ + \frac{۴۲}{۶۰} + \frac{۲۱}{(۶۰)^۲} + \frac{۳۸}{(۶۰)^۳}$$

چون نوشتن این عدد به صورت فوق طولانی است بر حسب قرارداد آن را در کتاب حاضر چنین می‌نویسم:

$$۱۲, ۱۴, ۲, ۵۶; ۴۲, ۲۱, ۳۸$$

دیده می‌شود که این عدد از هفت رقم شصتگانی تشکیل یافته^{۱۵} که چهار رقم سمت چپ آن یعنی (۱۲) و (۱۴) و (۲) و (۵۶) ارقام قسمت صحیح و سه رقم سمت راست آن یعنی (۴۲) و (۲۱) و (۳۸) ارقام قسمت کسری هستند. علاوه بر این مرتبه‌های شصتگانی از چپ به راست در جهت نزولی نوشته شده است. ارقام مراتب مختلف به وسیله یک علامت، از هم جدا شده و قسمت صحیح عدد از قسمت کسری آن با علامت ؛ از هم مجزا گردیده است. به طور خلاصه در کتاب حاضر برای نوشتن اعداد در دستگاه شصتگانی از قرارداد زیر استفاده خواهد شد:

۹/۱۳- قرارداد مهم- در کتاب حاضر: ارقام شصتگانی را با ارقام هندی (به جای حروف جمل) و مراتب را بر خلاف قدام از چپ به راست می‌نویسم و بین هر دو مرتبه متوالی یک علامت، قرار می‌دهم و قسمت صحیح عدد را از قسمت کسری آن با علامت ؛ از هم جدا می‌کنم.
اینک چند مثال:

$$۴۳ \times (۶۰) + ۲۱ + \frac{۷}{۶۰} + \frac{۱۹}{(۶۰)^۲} \quad \text{یعنی } ۴۳, ۲۱; ۷, ۱۹$$

$$۳ + \frac{۱۶}{۶۰} + \frac{۷}{(۶۰)^۲} + \frac{۲۵}{(۶۰)^۳} \quad \text{یعنی } ۳; ۱۶, ۷, ۲۵$$

$$\frac{۵۳}{(۶۰)^۲} + \frac{۳۸}{(۶۰)^۳} \quad \text{یعنی } ۰; ۵۳, ۳۸$$

۹/۱۴- بیرونی در ضمن تعریف اصطلاح «برداشتن عدد» که در شماره (۹/۱۱) آن را شرح دادم نوشته است: «و درست هر چند بسیار باشد نباید برداشتن» مقصود این است که فقط ۱۵. در دستگاه شمار شصتگانی برای نوشتن اعداد به صفر و پنجاه و نه رقم احتیاج هست که آنها را با ترکیب حروف جمل می‌نویسند. مثلاً در عدد فوق ۱۲ یک رقم و ۱۴ یک رقم و ۵۶ یک رقم محسوب می‌شود. — ۹/۱۰۱.

قسمت کسری اعداد را باید در دستگاه شمار شصتگانی نوشت ولی قسمت صحیح عدد باید در دستگاه شمار دهگانی ثبت شود.

اصل این روش از یونانیان است. یونانیان اعداد را در دستگاه شصتگانی خالص نمی‌نوشتند بلکه دستگاه عددنویسی آنها ترکیبی بود از دستگاههای شصتگانی و دهگانی. مثلاً بطلمیوس در کتاب «مجسطی» طول سال را به صورت زیر نوشته است^{۱۶}:

$$۳۶۵ \quad ۱۴ \quad ۴۸$$

$$۳۶۵ + \frac{۱۴}{۶۰} + \frac{۴۸}{(۶۰)^2}$$

یعنی:

و چنانکه دیده می‌شود قسمت صحیح عدد در دستگاه دهگانی و قسمت کسری آن در دستگاه شصتگانی نوشته شده است.

با این حال بیرونی خود در کتاب «آثارالباقیه» مجموع تضاعیف خانه‌های شطرنج را رفع کرده است^{۱۷}. همچنین در «طیلسان مضاعف»^{۱۸} همه اعداد را هم در دستگاه دهگانی و هم مرفوع آنها را در دستگاه شصتگانی نوشته که به‌عنوان مثال چند عدد از آنها را در اینجا می‌آورم:

در دستگاه دهگانی	در دستگاه شصتگانی با حروف جَمَل (از راست به چپ)	در دستگاه شصتگانی موافق با قرارداد شماره ۹/۱۳
۱۵۴۷۶۰	مب نط ک	۴۲ , ۵۹ , ۲۰
۴۳۴۱	۱ یب کا	۱ , ۱۲ , ۲۱
۳۶۲۳	۱ ۰ کج	۱ , ۰ , ۲۳

عددهای ستون سمت چپ همه عددهای صحیح هستند که در دستگاه شمار شصتگانی نوشته شده‌اند و مثلاً

$$۴۲, ۵۹, ۲۰ = ۴۲ \times (۶۰)^2 + ۵۹ \times (۶۰) + ۲۰$$

۹/۱۵- بسیار پهلوی ← «شکل بسیار پهلوی» (شماره ۹/۹۴).

۹/۱۶- بسیط = Surface ← «سطح» (شماره ۹/۸۳).

۹/۱۷- بعدهای جایگاه = (ابعادالمكان) = Dimensions of space

۱۶. ← «لوکی R» ص ۴۱.

۱۷. ← ۵/۷.

۱۸. ← ۵/۳.

بعدهای جایگاه چه چیزند؟ سه گونه‌اند یکی درازا و دیگر پهنا و دیگر ژرفا. و چنان نیست که نام درازا بر بعدی افتد و بر دیگران نتواند افتادن و لکن این نامها با ضافت نهاده‌اند، هر گه که یکی را از آن بعدها طول نام کنی آن دیگر که بر او گردد عرض نام شود و آن سه دیگر که بر هر دو گردد آن را عمق خوانند. و عادت مردمان چنان رفته است که درازترین بعدی را طول نام کنند آئ (= یعنی) درازا و آنک از او کمتر است او را عرض نام کنند آئ (یعنی) پهنا و سدیگر را عمق نام کنند آئ ژرفا و اگر بلندی بود سمک گویند آئ بالا (ت: ۴ = ۲ : T).

۹/۱۸ - بلندی = (ارتفاع) Height ← «ارتفاع شکل» (شماره ۹/۷) و نیز به اصطلاح «بعدهای جایگاه» (شماره ۹/۱۷).

۹/۱۹ - پهلو = (الضلع) Side

← «مثلث» (شماره ۹/۱۶۸)، و به اصطلاح «مخروط» (شماره ۹/۱۷۷)، و به اصطلاح «قوت و طول» (شماره ۹/۱۵۲)، و به اصطلاح «تضلیع» (شماره ۹/۲۶)، و به اصطلاح «ستون راست» (شماره ۹/۸۱).

۹/۲۰ - پهنا = (عرض) Breadth ← «بعدهای جایگاه» (شماره ۹/۱۷).

۹/۲۱ - تالی (Consequent (Denominator)

مقدم و تالی کدامند؟ مقدم آن بود که از دو چیز بنسبت نخستین یاد کنی و تالی آن بود که از پس یاد کنی و مقدم را بدو منسوب کنی (ت: ۱۹ = ۱۲ : T).

امروزه به جای «مقدم» و «تالی» اصطلاحات «صورت نسبت» و «مخرج نسبت» را به کار می‌برند.

۹/۲۲ - تجذیر = Finding square root

تمویل و تجذیر چیست؟ — تمویل مال کردن بود. ازیرا کچون عدد را اندر مثل اوزنی آنچ گرد آید او را مال خوانند. همچون هفت کاندر هفت زنی چهل و نه گرد آید و این مال هفت است. و اما تجذیر آنست کچون مال دانی و خواهی که بدانی آن عدد که از او آمده است چون اندر خویش ضرب کردند. و آن عدد را جذر خوانند. چون هفت مر چهل و نه را. و جذر اصل بود زیرا که پهلولی مربع جذر مال بود و اصل وی که از خواست (ت: ۴۲ = ۳۲ : T).

مال، یعنی قوه (توان) دوم یا مربع عدد — امروزه به جای «تجذیر» اصطلاح «جذر گرفتن» یا «استخراج جذر» و به جای «تمویل» اصطلاح «به قوه دو رساندن» یا «به توان دو رساندن» می‌گوییم.

وجه تسمیه «جذر» که بیرونی بیان کرده جالب توجه است. می‌گوید که ضلع مربع مانند ریشه

(اصل) است که مربع از آن بیرون آمده. به همین دلیل است که مثلاً استخراج ریشه پنجم یک عدد را قدما «استخراج ضلع اول به فرض آنکه عدد مال کعب باشد» می‌گفتند.^{۱۹}

۹/۲۳- تجنیس = Reduction

تجنیس چیست؟- این آنست که درست و شکسته‌داری از مخرجی. آنگاه آن درستها را بمخرج ضرب کنی و آنج گرد آید بر کسریبفرای تا جمله از یکی جنس گردند (ت: ۴۴ = ۳۳ : T).

این تعریف تجنیس است در مورد کسرهای متعارفی. و بیرونی به عنوان مثال عدد کسری $\frac{3}{4}$ را ذکر کرده که می‌دانیم قدما آن را بصورت $\frac{3}{4}$ می‌نوشتند.^{۲۰} «و نموده او سه درست، و با آن چهار یکی، و نهادن او سه بود و یکی زیر و چهار زیر یکی».

بیرونی جمع کسرها را نیز تجنیس نامیده و نوشته است:

«و نیز چون کسرهای مختلف باشند جمله کردن آن تجنیس بود.»

و به عنوان مثال حاصل جمع دو کسر $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{7}$ را چنین به دست آورده است:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{31}{35}$$

کسر $\frac{31}{35}$ را که امروزه «سی و یک سی و پنجم» می‌خوانیم بیرونی «سی و یک از سی و پنجم» نامیده است.

و اما درباره کسرهای شصتگانی (ستینی) فرموده است:

و نیز چون کسور شست گانی بود آنک منجمان بکار دارند، چون دقیقه و ثانیه و مانند آن، اگر تجنیس خواهیم کردن زیرترین مرتبه را در شست ضرب کنیم و آنج گرد آید بر آن بیفزاییم که زیر اوست و نیز بشست ضرب کنیم و بر آن افزون کنیم که زیر اوست و همچنین همی کنیم تا به زیرترین مرتبه رسیم. پس آن همه از جنس آن مرتبه زیرین شده باشد (ت: ۴۴ = ۳۳ : T).

و سپس مثال زیر را ذکر کرده است:

$$\frac{3}{60} + \frac{4}{(60)^2} + \frac{5}{(60)^3} = \frac{11045}{(60)^3}$$

یعنی سه دقیقه و چهار ثانیه و پنج ثالثه می‌شود ۱۱۰۴۵ ثالثه.

۱۹. مثلاً در «مفتاح الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی (ص ۳۲) آمده است: «اردنا ان نستخرج الضلع الاول لهذا العدد... علی انه مال کعب» برای کسب اطلاع از معنی اصطلاح «مال کعب» و نظایر آن ← «قربانی: کاشانی نامه» ش ۱۱۹ و برای دانستن قاعده استخراج ریشه پنجم با روش کاشانی ← همان کتاب، ش ۱۴۶.

۲۰. برای کسب اطلاع بیشتر در این باره ← «قربانی: کاشانی نامه» ش ۱۶۲.

۹/۲۴- تخطی (= Trial and error)^{۲۱}

تخطی چیست؟- این آنست که بجذر بیرون آوردن یک مرتبه یا بیشتر دست بازدارى و بگوئى، در جذر بیرون آوردن، یکون لا یکون یکون، و بکعب بیرون آوردن، یکون لا یکون و لا یکون یکون. و گروهی بجای یکون يعطی گویند و مراد آنست تا مرتبه دهنده آخرین دانسته آید (ت: ۴۳ = ۳۳ : T).

چنانکه می‌دانیم، برای جذر گرفتن از عددی مفروض، ارقام آن عدد را از سمت راست دو به دو جدا می‌کنیم. یعنی عدد را از سمت راست به طبقه‌های دو رقمی تجزیه می‌کنیم. آخرین طبقه سمت چپ یک یا دو رقم خواهد داشت. (عده ارقام جذر مساوی است با عده این طبقات). سپس جذر تقریبی آخرین طبقه سمت چپ را می‌گیریم و عمل را چنانکه می‌دانیم ادامه می‌دهیم. همچنین برای استخراج کعب از عددی مفروض، ارقام آن عدد را از سمت راست به طبقه‌های سه رقمی تجزیه می‌کنیم. آخرین طبقه سمت چپ یک یا دو سه رقم خواهد داشت. (عده ارقام کعب مساوی است با عده این طبقات). سپس کعب تقریبی آخرین طبقه سمت چپ را استخراج می‌کنیم و عمل را چنانکه می‌دانیم ادامه می‌دهیم.

بیرونی این عمل جدا کردن ارقام را در هنگام استخراج جذر یا کعب عمل تخطی نامیده است و به جای آنکه بگوید ارقام عدد را در مورد جذر دو به دو جدا می‌کنیم گفته است ارقام را از سمت راست یکون و لا یکون می‌نامیم. و نیز به جای آنکه بگوید ارقام عدد را در مورد کعب سه به سه جدا می‌کنیم گفته است که آنها را یکون و لا یکون و لا یکون می‌نامیم.

در کتابهای حساب دیگر مانند «عیون الاصول»^{۲۲} تألیف کوشیار گیلی* و «شمارنامه»^{۲۳} تألیف محمد بن ایوب طبری* و «المقنع»^{۲۴} تألیف علی بن احمد نسوی* به جای این نوشته‌اند که در مورد جذر، ارقام را از سمت راست منطق و اصم (جذر و لاجذر) و در مورد کعب منطق و اصم و اصم (کعب و لا کعب و لا کعب) می‌نامیم.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی* در کتاب «مفتاح الحساب» کار را ساده کرده و گفته است^{۲۵} که عدد را از سمت راست به ادوار (= جمع دور) تجزیه می‌کنیم و عده ارقام هر دور مساوی است با شماره ریشه‌ای که می‌خواهیم بگیریم. مثلاً در مورد استخراج کعب، عدد را از سمت راست به

۲۱. رمزی رایت در ترجمه انگلیسی «الفهیم» اصطلاح «تخطی» را این گونه ترجمه کرده است و به نظم درست نمی‌آید و من در زبانهای فرانسوی و انگلیسی و آلمانی معادلی برای «تخطی» به مفهومی که بیرونی استعمال کرده است نمی‌شناسم.

۲۲. «قربانی: ریاضیدان» ص ۱۸۹ و ۱۹۱ (بابهای هشتم و دهم از کتاب «عیون الاصول» که عکس نسخه خطی آن در آنجا به چاپ رسیده).

۲۳. «شمارنامه» ص ۲۷ و ۳۵.

۲۴. «قربانی: نسوی نامه» ص ۶۶ و ش ۴۴.

۲۵. برای کسب اطلاع بیشتر در این باره - «قربانی: کاشانی نامه» ش ۱۲۶.

دوره‌های سه رقمی تجزیه می‌کنیم.

۹/۲۵- ترکیب نسبت = Composition of ratio

ترکیب نسبت چیست؟- این نسبت جمله نخستین و دوم بدوم همچون نسبت جمله سوم و چهارم به چهارم است. (ت: $۲۰ = ۱۳ - ۱۲$: T)

ترکیب نسبت یعنی تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را به صورت $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ نوشتن.

۹/۲۶- تضلیع = Finding Cube root

تکعب و تضلیع چیست؟- تکعب مکعب کردن است. چون عدد را به مثل خویش زنی و آنچ گرد آید هم بدو زنی مکعب کرده آید... و تضلیع پهلو کردن است [=کعب گرفتن] و معنی او آنست که مکعب داری و همی خواهی که آن عدد دانی که از او بجای آمد چون او را دو بار بدو درزدند... و گاهگاه این ضلع را کعب خوانند و گروهی از بهر سبک کردن سخن مکعب را کعب خوانند و آنکه ناچار کعبش را ضلع باید خواند تا مشتبه نشود (ت: $۴۳ = ۳۲$: T).

بیرونی در اینجا «تضلیع» را به معنی «ریشه سوم گرفتن» یا استخراج «کعب» در مقابل «تکعب» که به معنی «به قوه سه رساندن» است به کار برده. در کتابهای حساب دیگر استخراج ریشه شماره n را به طور کلی «استخراج ضلع اول از مضلعات» گفته‌اند.^{۲۶}

۹/۲۷- تفصیل نسبت = Separation of ratio

تفصیل نسبت چیست؟- این نسبت افزونی نخستین بر دوم بدوم چون نسبت افزونی سوم بر چهارم به چهارم است. (ت: $۲۰ = ۱۳$: T).

تفصیل نسبت یعنی تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را به فرض $a > b$ به صورت $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ نوشتن، (که امروزه تفصیل نسبت در صورت گفته می‌شود).

رمزی رایت اصطلاح «تفصیل نسبت» را Division نیز ترجمه کرده است و این درست به نظر نمی‌آید) ← «هیث E » ج ۲، ص ۱۱۵، ش ۱۵ و ص ۱۳۵).

۹/۲۸- تکعب = Cube

تکعب یعنی مکعب کردن و به قوه (توان) سه رساندن است ← «تضلیع» (شماره ۹/۲۶).

۹/۲۹- تمام جیب = Complement of Sine

تمام قوس و تمام جیب چیست؟- تمام قوس آن بود که با وی جمله کنی چهار یک دایره شود تمام. و از بهر این هرگاه که قوس را از نود بیفکنی تمام او بماند. و اما تمام جیب آنست که اگر بر وی افزایی راست شود با جیب بزرگ (ت: $۹ = ۵$: T).

۲۶. مثلاً در «مفتاح الحساب» (ص ۲۵) در باب استخراج ریشه شماره n آمده است: «فی استخراج الضلع الاول من المضلعات»

امروزه به جای اصطلاح «تمام قوس» اصطلاح «متمم قوس» را به کار می‌بریم. تمام جیب یعنی تفاضل جیب و شعاع دایره ← «جیب راست» (شماره ۹/۴۴).

۹/۳۰- تمام قوس = Complement of arc

امروزه به جای اصطلاح «تمام قوس» اصطلاح «متمم قوس» را به کار می‌بریم. ← «تمام جیب» (شماره ۹/۲۹).

۹/۳۱- تمویل = Square

تمویل یعنی به قوه (توان) دو رساندن یا مربع کردن یا مجذور کردن. ← «تجذیر» (شماره ۹/۲۲).

۹/۳۲- تناسب = Proportion

تناسب چه باشد؟— راست شدن دو نسبت یا بیشتر و کمترین میان سه اندازه بود. و نموده اوی نسبت پنجیک است. پس نخستین اندازه پنجیک اندازه دوم باشد و دوم پنجیک سوم. پس دو نسبت توانست بودن مگر بمیان سه مقدار (ت):
(۱۹ = ۱۱ : T).

مطابق با این تعریف «تناسب» یعنی مساوی بودن دو یا چند نسبت است

مثال: ۱ : ۵ : ۲۵ : ۱۲۵ : ...

یعنی: $\frac{1}{5} = \frac{5}{25} = \frac{25}{125} = \dots$

امروزه اصطلاح «تناسب» را بیشتر در مورد دو نسبت مساوی به کار می‌بریم. مانند تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و قدما این تناسب را «اربعه متناسبه» می‌نامیدند. ← «مقدارهای متناسب» (شماره ۹/۱۹۵).

بیرونی گاهی اصطلاح نسبت را به جای تناسب نیز به کار برده است.^{۲۷}

۹/۳۳- تیر ستون = (سهم الاسطوانه) = Axis of the cylinder . ← «ستون راست» (شماره ۹/۸۱).

۹/۳۴- تیر مخروط = (سهم المخروط) = Axis of the cone .

← «مخروط» (شماره ۹/۱۷۷).

۹/۳۵- جبر و مقابله = Algebra

جبر و مقابله چی باشد؟— چون چیزهایی باشد از گونه‌های مختلف و به مقدار برابر یک با دیگر باشند همچنان باشند که پله ترازو و زفانه ترازو راست شده و عمود او راست ایستاده. پس پیداست که اگر از یک پله ترازو چیزی برداریم از دیگر پله همچند آن بر باید داشتن باندازه تا عمود راست بماند و حال میان ایشان مانده نخستین بود. و نیز اگر بیک پله چیزی برفزاییم بدیگر نیز همچند آن بر باید افزودن.

اکنون چون بدو سو چیزهایی بحاصل شود باندازه یک با دیگر برابر و به یک سوی کمی باشد آن کمی را تمام کنیم. و بر دیگر سو همچند آن فزاییم. و این را جبر خوانند...

و اما مقابله آنست که بهر دو سو نگیریم، اگر آنجا چیزها بود از یک گونه کمترین بیفکنیم. و ز آنک بیشتر است همچند آن نیز بیفکنیم. (ت: ۴۸ = ۳۷ : T).

مقصود از اصطلاح «جبر» که قدما به کار می بردند به زبان کنونی حذف کردن جمله منفی از یک طرف معادله و افزودن همان جمله به علامت + در طرف دیگر بوده است. مثلاً معادله

$$x^2 - 2x = 10$$

پس از عمل «جبر» چنین می شود:

$$x^2 = 10 + 2x$$

اما «مقابله» یعنی حذف کردن یک جمله مشترک یا یک مقدار مشترک از دو طرف معادله. مثلاً معادله

$$10x^2 + 12 = x + 10$$

پس از عمل «مقابله» به صورت زیر درمی آید:

$$10x^2 + 2 = x$$

(← «قربانی: کاشانی نامه» چاپ اول، صص ۱۱۴ و ۲۱۰).

۹/۳۶- جذر = Square root

← «عدد مسطح» (شماره ۹/۱۱۸) و «تجزیر» (شماره ۹/۲۲).

۹/۳۷- جذر اصم و جذر منطق = Rational and surd roots

جذر منطق و اصم کدامند؟- جذر منطق آنست که حقیقت او به زبان توان گفتن و او را منطوق به نیز خوانند و مطلق و مفتوح یعنی گشاده. همچون سه نه را و چهار شانزده را. و اما جذر اصم آنست که هرگز حقیقت او بزبان در نیاید. چون جذر ده، که هرگز عددی نتوان یافتن که او را اندر مثل خویش زنی ده آید.

و اصم کر بود زیرا که جواب ندهد جوینده را تا نیابدش مگر بتقریب و نزدیک شدن با او بس (ت: ۴۲ = ۳۲ : T).

عبارت «اصم کر بود زیرا که جواب ندهد جوینده را تا نیابدش مگر بتقریب» بسیار جالب توجه است. یونانیان در حدود پنج قرن پیش از میلاد مسیح اصم بودن $\sqrt{2}$ را می‌دانستند و در حدود ۴۲۵ سال پیش از میلاد اصم بودن $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ و $\sqrt{8}$ و $\sqrt{10}$ و $\sqrt{11}$ و $\sqrt{12}$ و $\sqrt{13}$ و $\sqrt{14}$ و $\sqrt{15}$ و $\sqrt{17}$ را ثابت کردند. برای کسب اطلاع از تاریخچه «عددهای اصم» مثلاً «ایوز H » ص ۶۳ به بعد و یا به «اسمیث H » ج ۲، ص ۲۵۱ به بعد.

۹/۳۸- جزو = Aliquot

← «اجزای عدد» (شماره ۹/۶) و «امثال» (شماره ۹/۱۰).

«جزو» به معنی «خارج قسمت» نیز به کار رفته است. ← «قسمت» (شماره ۹/۱۴۱).

۹/۳۹- جسم = Solid

جسم چه چیز است؟—آن چیز است که یافته شود بیسودن و قائم بودن بتن خویش و جایگاه خویش پر کرده دارد و چیزی دیگر از آنک مانده او بود با وی اندر جایگاه او نتواند بودن (ت: ۳ = ۱ : T).

← یادداشت شماره ۳ ذیل صفحه ۳ «التفهیم فارسی» و نیز به «هیث E » ج ۳، ص ۲۶۲.

تعریف شماره ۱.

۹/۴۰- جهت = Side

← «شش جهت» (شماره ۹/۸۸).

۹/۴۱- جیب = Sine

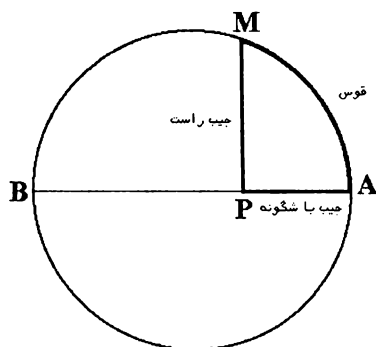
← «جیب راست» (شماره ۹/۴۴).

۹/۴۲- جیب باشگونه = (الجیب المعکوس) = Versed Sine

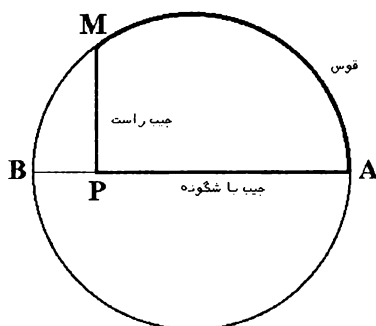
جیب باشگونه کدامست؟— سهم دوتوی [= دو برابر] قوس است. و اگر خواهی گوی آن خطی است که میان آغاز قوس باشد و میان آن سر جیب که برابر اوست. و بزرگترین جیبهای باشگونه همه قطر است. همچنانکه بزرگترین جیبهای راست نیم قطر است. (ت: ۹ = ۵ : T).

در شکل ۱۵۶ پاره خط PM «جیب راست» کمان AM است و پاره خط PA «جیب باشگونه» کمان AM است.

اگر کمان بین ۹۰ درجه و ۱۸۰ درجه باشد «جیب باشگونه» آن از شعاع دایره بزرگتر خواهد بود (شکل ۱۵۷). در شکلهای ۱۵۶ و ۱۵۷ پیداست که اگر نقطه M دایره را بپیماید ماکسیم مقدار پاره خط PM شعاع دایره و ماکسیم مقدار پاره خط PA قطر دایره خواهد بود. به همین دلیل است که استاد فرموده است: «و بزرگترین جیبهای باشگونه همه قطر است، همچنانکه بزرگترین جیبهای راست نیم قطر است.»



شکل ۱۵۶



شکل ۱۵۷

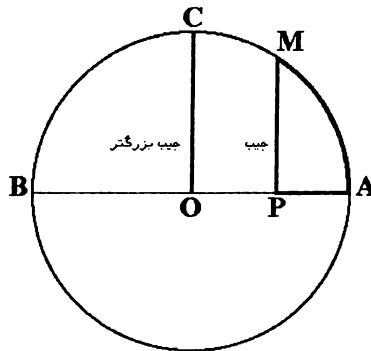
این نکته را نیز باید به خاطر داشت که «جیب راست» و «جیب باشکونه» نزد قدما به پاره خطهای PA و PM اطلاق می شده است. در صورتی که امروزه ما اصطلاح «سینوس» و «کسینوس» را به عنوان نسبت یعنی عدد مطلق در نظر می گیریم. ← «جیب راست» (شماره ۹/۴۴).

۹/۴۳- جیب بزرگتر = (الجیب الاعظم = الجیب کله) Radius .

جیب بزرگتر کدامست؟- نیم قطر دایره است و او را نیز همه جیب خوانند. (ت):

$$(T : ۴ = ۹)$$

قدما به جای اصطلاح «شعاع دایره» که امروزه به کار می بریم در مقام بحث از اندازه کمانها از اصطلاح «جیب بزرگتر» استفاده می کردند و در موارد دیگر اصطلاح «نیم قطر» را به کار می بردند. وجه تسمیه «جیب بزرگتر» این است که در شکل ۱۵۸ دیده می شود که وقتی نقطه M دایره را بپیماید ماکسیمم جیب کمان AM یعنی پاره خط PM شعاع دایره یعنی OC خواهد بود.

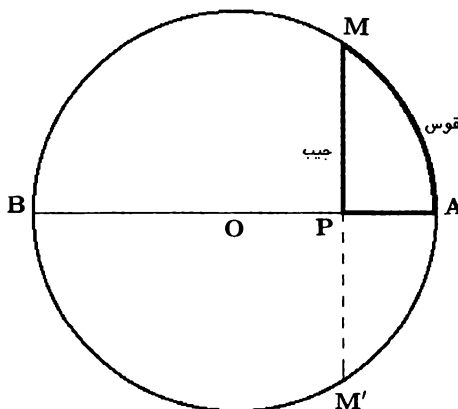


شکل ۱۵۸

امروزه چون شعاع دایره مثلثاتی را واحد می‌گیریم احتیاجی به اصطلاح «جیب بزرگتر» نیست.
 ۹/۴۴- جیب راست = (الجیب المستوی) = Natural Sine.

جیب راست چیست؟—اونیمه وتر دو توکرده [= دو برابر شده] قوس است. و اگر خواهی گوی که آن عمود است که از یک سر قوس فرود آید بر آن قطر که از دیگر سر قوس آید. و هرگاه که جیب شنوی مطلق، بی صفت، بدانک او راست است (ت: ۹ = ۵ : T).

مطابق با تعریف فوق در شکل ۱۵۹ پاره خط PM «جیب» کمان AM است. «جیب» در اصطلاح قدما یک پاره خط است و نه مانند اصطلاح «سینوس»، که امروزه به کار می‌بریم، یک نسبت.



شکل ۱۵۹

خاطر نشان می‌کنم که همان‌طور که بیرونی گفته است غالباً به جای اصطلاح «جیب راست» فقط «جیب» می‌گویند.

در بعضی از کتب ریاضی قدیم «جیب» را نیز به وجه زیر تعریف کرده‌اند که با تعریف فوق معادل است: «نصف وتر یک کمان را جیب نصف آن کمان می‌نامند.^{۲۸}»

در شکل ۱۵۹ نصف وتر MM' یعنی PM جیب نصف کمان MM' یعنی کمان AM است. ۹/۴۵- تبصره- باید متوجه بود که اصطلاح «جیب» که ریاضیدانان دوره اسلامی به کار برده‌اند با اصطلاح کنونی «سینوس» (sinus) فرق دارد. اولاً همچنانکه در شماره قبل گفتیم «جیب» یک پاره خط است و سینوس یک نسبت یعنی یک عدد مطلق. ثانیاً جیب هر زاویه مساوی با شصت برابر سینوس آن است. زیرا قدماً معمولاً شعاع دایره را شصت واحد می‌گرفتند و ما امروزه شعاع دایره مثلثاتی را واحد می‌گیریم. با این حال باید دانست که بیرونی شعاع دایره مثلثاتی را واحد می‌گرفته و به همین دلیل جدول جیبهای او در کتاب «قانون مسعودی» معادل با جدول سینوسهای کنونی است با این تفاوت که اعداد در دستگاه شمار شصتگانی نوشته شده است. مثلاً بیرونی جیب 30° درجه را در جدول جیب خود 30° دقیقه یعنی $\frac{30}{60}$ معین کرده که همان $\frac{1}{2}$ است که ما امروزه به عنوان سینوس 30° درجه می‌شناسیم.

چون اکثر ریاضیدانان دوره اسلامی شعاع دایره را 60° می‌گرفتند، و بنابراین در آثار آنان جیب یک کمان مساوی با شصت برابر سینوس آن است، مورخان ریاضی امروزه جیب کمان a را با علامت $\sin a$ «با S بزرگ» و سینوس آن را با علامت $\sin a$ (با s کوچک) نشان می‌دهند.

$$\sin a = 60 \times \sin a$$

اما هر جا پای نسبت به میان آید چون نسبت جیبها مساوی با نسبت سینوسهاست این دو اصطلاح را می‌توان به جای یکدیگر به کار برد. در کتاب حاضر برای آنکه اشتباهی پیش نیاید در اکثر موارد علامت $\sin a$ را برای نمایاندن جیب کمان a به کار برده‌ام. (در باره تاریخچه دو اصطلاح جیب و سینوس ← «قربانی: کاشانی نامه» شماره ۱۹۶).

۹/۴۶- جیب معکوس ← «جیب باشگونه» (شماره ۹/۴۲).

۹/۴۷- چهار سوها = (ذوات الاربعة اضلاع) = Quadrilaterals

چهارسوها چند گونه‌اند؟- نخستین مربع است که متساوی‌الاضلاع گویند. و این آنست که هر چهار پهلوی او با یکدیگر راست و برابر باشند و زاویه هر چهار قائمه باشد بر مثال خشت. دیگر مستطیل که درازا دارد و این آنست که هر چهار زاویه او قائمه باشد و هر دو قطر متساوی و هر پهلوی از او آن پهلوی را راست باشد که برابر اوست، و مخالف آن را که بدو پیوندد. و سه دیگر معین است و این آنست که هر چهار پهلوی او راست [متساوی] باشند و هر دو قطر یکدیگر را نه راست

بود. و همه زوایای او نه قائمه. و چهارم مانده معین است. و این آنست که هر دو قطر او نه راست بود و هر دو ضلع برابر یکدیگر را راست باشند و دیگر مخالف. و هرچ از چهار پهلوها جز این باشد او را منحرف خوانند مگر آن مضلعات که پهلوهای ایشان راست باشند که ایشان را از عدد پهلوها نامی بیرون آرند. چون پنج پهلو را که مخمس گویند و شش پهلو که مسدس خوانند و آنکه مسبع [= هفت ضلعی منتظم] و مثن [= هشت ضلعی منتظم] و آنچ از پس آنست. (ت: ۱۱ = ۷ : T).

چنانکه ملاحظه می‌شود بیرونی در این عبارات انواع چهار ضلعیها و نیز چند ضلعیهای منتظم را تعریف کرده است.

شکل معین را امروزه لوزی (Rhombus) می‌نامیم. و مانده معین (الشبه بالمعین) را لوزی وار می‌گوییم.

مطابق با تعریفی که بیرونی برای منحرف آورده است به اصطلاح کنونی منحرف یعنی چهار ضلعی دلخواه (نامشخص) که هیچ شرط معینی را دارا نباشد. غیاث‌الدین جمشید کاشانی* نیز در «مفتاح الحساب» (ص ۹۶) منحرف را همین گونه تعریف کرده و نوشته است «ما لم یکن علی هذه الاشکال یسمى منحرفاً».

اما منحرف را به معنی ذوزنقه نیز به کار برده‌اند (← «کشاف اصطلاح‌الفنون».)
مضلع یعنی «چند ضلعی» که کثیرالاضلاع نیز می‌گوییم.

۹/۴۸- حساب خطأین = Rule of false position

حساب خطأین چیست؟— بدین شمار آنجیز را که خواهد، عددی نهد چنانکه خواهد. اگر باتفاق راست آمد یافت. و اگر نه ناچاره او را خطا افتد، و مقدار آن خطا نگاه دارد، و دیگر باره عددی نهد چنانکه خواهد. اگر نیز یافت، و گر نه هم خطا کند. و آنگاه از این دو خطا صواب بیرون آرد، بطریقی که آن مشهور است میان شمارگران (ت: ۵۱ = ۴۰ : T).

حساب خطأین را از روی باب دوم از مقاله پنجم «مفتاح الحساب» در کتاب «کاشانی نامه» شماره ۲۲۱ شرح داده‌ام. به آنجا رجوع فرمایید.

۹/۴۹- حساب درم و دینار.

حساب درم و دینار کدام است؟— این حسابی است از جبر و مقابله بیرون آورده. و گاه‌گاه شیئهای مجهول بیشتر از یکی باشند. پس لقب و نام باید کردن تا بنیامیزند [= مخلوط نشوند]. گروهی دینار و درم و پیشیز نام کنند. و گروهی چون هندوان شیئها را گونه [= رنگ] دهند و گویند شیء ساده و شیء کبود و شیء زرد (ت: ۵۱ = ۴۰ : T)

در حل معادله‌های چند مجهولی، همچنانکه امروزه ما مجهولات را مثلاً X و Y و Z و غیره می‌نامیم، قدما آنها را شیء و درم و دینار می‌نامیدند و گاهی نیز به اسامی دیگری آنها را می‌خواندند. مثلاً ابوبکر کرجی * در کتاب «فخری»^{۲۹} در حل یک مسئله سه مجهولی مجهول اول را شیء و مجهول دوم را قسم و مجهول سوم را درهم نامیده است.

کاشانی در «مفتاح الحساب» نوشته است^{۳۰} که «ناچار باید مجهول را شیء یا دینار یا درهم یا نصیب یا سهم و یا جز اینها نامید و بیشتر مرسوم است که آن را شیء می‌نامند».

۹/۵۰ خط = Line

خط چیست؟—اگر بسیط را نهایت باشد آن نهایت او ناچاره خطی باشد و آن خط طولی باشد بی عرض و بُعد یکی کمتر باشد از بعدهای سطح، چنانکه بعدهای سطح یکی کمتر باشد از بعدهای جسم. زیرا که اگر خط را پهنا بودی سطح بودی و ما او را نهایت سطح نام نهادیم نه سطح... و اگر کسی سطح را از کاغذ تصور کند هر چند که کاغذ سطر است و خط از کرانه‌های وی داند آسانتر بود، تا چون وهم قوی گردد و آزمایش او فتد از محسوس به معقول رود (ت: ۳ = ۶: T).

برای آگاهی یافتن از تعریفهای مختلفی که قدما درباره خط کرده‌اند ← «هیث E » ج ۱، ص ۱۵۸ به بعد.

۹/۵۱ خط اندر خط زدن = (ضرب الخط فی الخط) Line $\times$ Line

خط اندر خط زدن چگونه بود؟—هر گه که یکی از آن دو خط بر سر دیگر عمود نهی و او را بر آن حال بکشی بی‌پهنا تا بدیگر سر رسد، از آن سطحی به جای آید متوازی الاضلاع بر روی آن دو خط گرد بر گردد باشند. اگر هر دو راست باشند آن سطح مربع بود و اگر مختلف باشند آن سطح مستطیل بود. (ت: ۱۵ = ۱۰: T).

ضرب کردن دو پاره خط در یکدیگر یعنی ساختن مستطیلی که آن دو پاره خط دو بعد آن باشند. قدما این مستطیل را سطح آن دو پاره خط می‌نامیدند. و همچنین حاصل ضرب دو عدد را مسطح و هر یک از دو عدد را ضلع آن حاصل ضرب می‌گفتند. در صدر مقاله هفتم «تحریر اصول اقلیدس» آمده است^{۳۱}: «العدد المسطح هو المجتمع من ضرب عدد فی عدد و یحیط به عددان هما ضلعاه» ← «هیث E » ج ۲، ص ۲۷۸ و ۲۸۷).

۹/۵۲ خط راست = (خط المستقیم) Straight line

۲۹. ← «ویکه F »، ص ۱۴۱ به بعد.

۳۰. «مفتاح الحساب» ص ۱۵۶: «فلا بدعن تسمیة المجهول بشیء او دینار او درهم او نصیب او سهم او غیرها و المجهود فی الاکثر ان نسمیه شیئاً».

۳۱. «تحریر اقلیدس» ص ۹۹.

سطح راست و خط راست کدامند؟ اما سطح راست کوتاهترین سطحست اندر میان دو خط که نهایت اواند. و خط راست کوتاهترین خطست اندر میان دو نقطه که نهایت اواند. اگر اندر سطح خطها بود برابر یکدیگر سطح راست بود. و همچنین هر گه که اندر خط نقطه‌ها باشد برابر یکدیگر آن خط راست بود. (ت: $T: 3 = 7$).

تعریفی که بیرونی برای خط راست و سطح راست (=صفحه) کرده است و مخصوصاً عبارات «اگر اندر سطح خطها بود برابر یکدیگر سطح راست بود» و «هرگاه اندر خط نقطه‌ها باشد برابر یکدیگر...» البته نارساست. زیرا برای توضیح آن ناچار باید بگوییم نقطه در برابر نقطه بودن یعنی چه و غیره. البته بعداً این تعریف در کتابهای هندسه تا اندازه‌ای اصلاح شده است. و این نمونه‌ای از تلاشهای مداوم ریاضیدانان در طی قرن‌هاست برای آنکه تعریفها جامع‌تر باشد. برای اطلاع یافتن از تعریفهای مختلفی که دربارهٔ خط راست کرده‌اند ← «هیث E» ج ۱، ص ۱۶۵ به بعد (تعریف ۴). امروزه در هندسه به جای تعریف خط راست آن را به عنوان اصطلاح تعریف نشده می‌پذیرند.

۹/۵۳- خطهای متوازی = Parallel lines

خطهای متوازی کدامند؟ آنند که اندر یک سطح باشند و دوری ایشان یک از دیگر همه یکی است. و چون ایشان را با استقامت بیرون آری (=ادامه دهی) بهر دو سو هرگز بهم نیایند (ت: $T: 7 = 12$).

← «هیث E» ج ۱، ص ۱۹۰ به بعد. در آنجا بحث جامعی دربارهٔ تعریف خطوط متوازی خواهید یافت.

۹/۵۴- خلاف نسبت = Inverted proportion

← «عکس نسبت» (شماره ۹/۱۳۴) در اینجا «نسبت» به معنی «تناسب» به کار رفته است.

۹/۵۵- دایره = Circle

دایره چیست؟ شکلی است بر سطحی که گرد بر گرد او خطی بود که نام او محیط است و دور نیز خوانند و بمیان او نقطه‌ایست که او را مرکز گویند (ت: $T: 4 = 8$).

مقصود از «شکلی است بر سطحی» شکل مسطح است که در صفحه قرار دارد. این نکته در خور توجه است که قدما «دایره» را به عنوان قسمتی از صفحه در نظر می‌گرفتند و آنچه را امروزه «دایره» می‌نامیم آنان «محیط دایره» یا «دور» می‌گفتند.

۹/۵۶- دایره بر شکل = (الشکل المحيط به الدایره) = Circumscribed circle of a polygon

دایره بر شکل چگونه بود؟ آن دایره بود که بیرون شکل راست پهلوی بود و بر همهٔ زاویه‌های او بگذرد. (ت: $T: 16 = 10$).

مقصود از «دایره بر شکل» دایرهٔ محیطی چند ضلعی منتظم است. در تعریف فوق اصطلاح «زاویه» به جای رأس به کار رفته است.

۹/۵۷- دایره‌های خرد و بزرگ = (الدوائر العظام و الصغار) = Great and small circles

دایره‌های بزرگ و خرد کدامند؟- این آن دایره را گویند که بر پشت [= سطح] کره‌ای باشد. و دایرهٔ بزرگ آن است که سطح او بر مرکز کره بگذرد و کره را به دو نیم کند و او را دو قطب بود به هر دو سو. و بعد ایشان از او هموار است. و همچنانکه اگر دایره‌ای بر سطحی خواهی کردن بر مرکز او کشی و پرگار به بعد نیم قطر او بگشائی، همچنان اگر دایرهٔ بزرگ بر پشت کره خواهی کشیدن، پرگار بمقدار پهلوی آن مربع باید گشادن که اندر آن دایره باشد. و اما دایرهٔ خرد آنست که سطح او بر مرکز کره نگذرد و کره را بدو بخش نه راست ببرد. و زاین جهت هر دو بعد او از هر دو قطب او راست نباشد. (ت: ۲۹ = ۲۰ : T).

بیرونی پس از تعریف «دایرهٔ عظیمه» برای ترسیم آن روی کره می‌گوید که باید دهانهٔ پرگار (کروی یا پرگار کج) را به اندازهٔ ضلع مربع محاط در دایرهٔ عظیمه باز کرد و این واضح است. زیرا هر دایرهٔ عظیمه روی کره دو قطب دارد و فاصلهٔ هر قطب از هر یک از نقاط آن دایرهٔ عظیمه مساوی با ضلع مربعی است که در یکی از دایره‌های عظیمهٔ کره محاط شود. اگر شعاع کره را R بنامیم اندازهٔ این فاصله مساوی $R\sqrt{2}$ خواهد بود.

۹/۵۸- درازا = (طول) = Length

← «بعدهای جایگاه» (شمارهٔ ۹/۱۷).

۹/۵۹- درازتر هر دو خرد = (اطول الاقصرین)

← «اطول الاقصرین» (شمارهٔ ۹/۹).

۹/۶۰- دوتوها = (اضعاف)

← «امثال» (شمارهٔ ۹/۱۰).

۹/۶۱- دُور = Circumference

← «دایره» (شمارهٔ ۹/۵۵).

۹/۶۲- ذوات الاربعة اضلاع

← «چهارسوها» (شمارهٔ ۹/۴۷).

۹/۶۳- رفع عدد

← «برداشتن عدد» (شمارهٔ ۹/۱۱).

۹/۶۴- زاویه = Angle

زاویه چیست؟- سپری شدن سطح بود و رسیدن او بنقطه‌ای که گرد برگرد او دو خط باشد یک با دیگر پیوسته نه بر راستی ایشان وز بهر این آنرا زاویهٔ مستقیمه

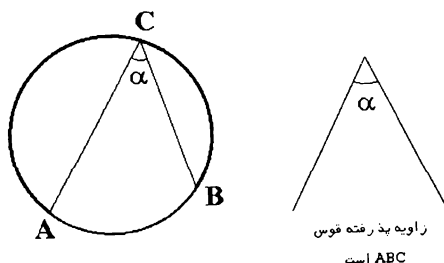
الخطین خوانند (ت: ۷ = ۳ : T).

باید متوجه بود که بیرونی گاهی اصطلاح «زاویه» را به جای اصطلاح «رأس» به کار برده است. برای کسب اطلاع از تعریفهای مختلفی که برای زاویه کرده‌اند ← «هیث E» ج ۱، ص ۱۷۶ به بعد (تعریف ۸). در آنجا بحث جامعی درباره مفهوم زاویه و انواع آن خواهید یافت.

۹/۶۵- زاویه پذیرفته قوس = (الزاویه التي قبلها القوس) = Angle in a segment

کدام زاویه است که پذیرفته قوس بود؟ هرگاه که از دو سر قوس دو خط بیرون آری چنانکه بر یکی نقطه از آن قوس گرد آیند و زایشان زاویه‌ای پدید آید، هر زاویه که این را راست بود [= با این مساوی باشد] آنرا پذیرفته قوس خوانند. (ت: ۱۶ = ۱۰ : T).

مقصود از زاویه پذیرفته کمان دایره، زاویه‌ای است که محاط در آن کمان است. یا هر زاویه دیگری که با آن مساوی باشد. نصیرالدین طوسی* در مقدمه مقاله سوم «تحریر اقلیدس» این زاویه را «الزاویه التي في القطعة» نامیده است.^{۳۲} (شکل ۱۶۰).



شکل ۱۶۰

رمزی رایت این اصطلاح را Angle in a segment ترجمه کرده و نیز می‌توان آن را Angle inscribed in an arc ترجمه کرد.

امروزه این اصطلاح را در هندسه اصولاً به صورت دیگری به کار می‌برند و به جای آنکه از زاویه گفتگو کنند از کمان سخن به میان می‌آورند و می‌گویند «کمان در خور زاویه α». علت این است که «کمان در خور زاویه» بیشتر در مسائل ترسیم هندسی به کار می‌آید.

۹/۶۶- زاویه تیز = (الزاویه الحاده) = Acute angle

و هر زاویه که قائمه کمتر باشد حاده خوانند [یعنی تیز. (ت: ۸ = ۴ : T)].

۳۲. «تحریر اقلیدس» ص ۴۶-و افزوده است: «الزاویه التي يحيط بها خطان يخرجان من نقطة ما على المحيط و يجوز ان قوسا منه يقال له التي على تلك القوس».

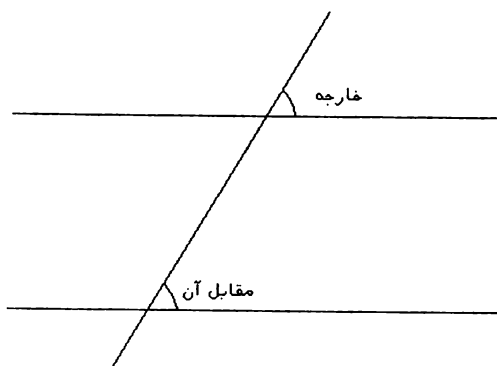
۹/۶۷- زاویه حاده ← شماره قبل.

۹/۶۸- زاویه خارج از خطهای متوازی = (الزاویه الخارجیه من الخطین المتوازیین) =

Exterior interior angles

زاویه خارج از خطهای متوازی کدامست؟ هر گاه که آن خط را که بر دو متوازی
اافتد بر استقامت بکشی آن زاویه که از هر دو بیرون پدید آید او را خارجه خوانند و
راست باشد آن اندرونی را که برابر اوست بدانسو کجا اوست (ت: ۱۴ = ۹ : T).

در اصطلاح کنونی، دو زاویه غیر مجاور را که در یک طرف خط قاطع و یکی از آنها بین دو
خط متوازی و دیگری در خارج آنها واقع باشد دو زاویه متقابل داخل و خارج می نامند و با هم
مساوی هستند. (شکل ۱۶۱)



شکل ۱۶۱

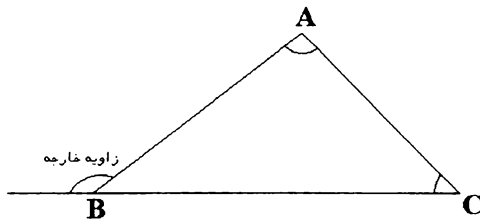
۹/۶۹- زاویه خارج از مثلث = (الزاویه الخارجیه من المثلث) Exterior angle to a triangle

زاویه خارج از مثلث کدامست؟ چون یکی پهلوی از مثلث بر استقامت بیرون
آری زاویه ای بحاصل آید بیرون از مثلث. و او را خارجه خوانند. و هر یکی
از آن دو زاویه مثلث که نه بر پهلوی خارجه باشد مقابله اندرونی خوانند. (ت:
۱۳ = ۸ : T).

امروزه اصطلاح زاویه مقابله اندرونی را به کار نمی بریم و «زاویه خارجه» را به صورت «زاویه
خارجی مثلث» استعمال می کنیم. (شکل ۱۶۲)

۹/۷۰- زاویه قائمه = Right angle

چون خطی راست بر خطی اافتد مانند زاویه ترازو بر عمودش آن دو زاویه کزین
سوی و آن سوی خطاند مر یکدیگر را راست باشند هر یکی را قائمه خوانند و آن
خط را عمود خوانند (ت: ۷ = ۴ : T).



شکل ۱۶۲

۹/۷۱- زاویه گشاده = (الزاویه المنفرجه) = Obtus angle

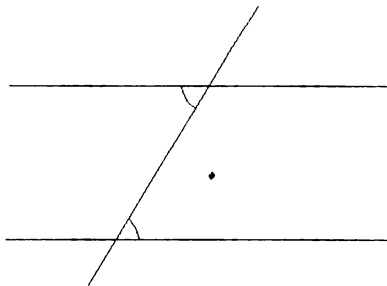
هر زاویه کز قائمه بیشتر باشد منفرجه خوانند آئ [= یعنی] گشاده (ت: ۸ = ۴ : T).

۹/۷۲- زاویه مقابله اندرونی ← «زاویه خارج از مثلث» (شماره ۹/۶۹).

۹/۷۳- زاویه های راست به تبادل ← ۹/۱۵۰

۹/۷۴- زاویه های متبادل = Alternate interior angles

زاویه های متبادل کدامند؟— چون خط راست بر دو خط متوازی افتد آن زاویه که یک پهلو باشد از آن خط اندرون این دو متوازی و آن زاویه که بدیگر پهلو باشد از آن خط آن را متبادل خوانند و هر دو متساوی باشند. (ت: ۱۳ = ۸ : T).



شکل ۱۶۳

۹/۷۵- زاویه های متقابل = Vertical angles

زاویه های متقابل کدامند؟— دو خط راست که یکدیگر را ببرد چهار زاویه از آن بحاصل شود، سر هر دوی بهم آمده بر نقطه ای، هرج برابر [= روبه رو] بود آن را متقابل خوانند و یکدیگر را راست باشند (ت: ۱۲ = ۸ : T).

ملاحظه می شود که در این تعریف بیرونی اصطلاح «برابر بودن» را به معنی «رو به رو بودن»

به کار برده است. «یکدیگر را راست بودن» یعنی «با هم مساوی بودن» امروزه «زوایای متقابل» را «زوایای متقابل به رأس» می‌گویند.

۹/۷۶- زدن = (الضرب) = Multiplication

بیرونی گاهی اصطلاح «زدن» را به معنی «ضرب کردن» به کار برده است. مثلاً در صفحه ۵۰ کتاب «التفهیم فارسی» می‌خوانیم: «و چون شیء بشیء زنی مال آید» یعنی حاصل ضرب X در X مساوی است با X^2 .

۹/۷۷- زوج = Even

زوج چیست؟-زوج جفت بود و این آن عدد است که بدو پاره ماننده یکدیگر توان کردن آئ [= یعنی] دو نیم. و اول جفتها دو است و زوجهای متوالی ۲ و ۴ و ۶ و ۸... (ت: ۳۴ = ۲۵ : T).

۹/۷۸- زوج الزوج = Evenly-even

زوج الزوج کدامست؟-این آنست که بدو نیم شود و نیمه او بدونیم شود و همچنین همیشه تا بیکی برسد. (ت: ۳۵ = ۲۵ : T).

زوج الزوج در اصطلاح کنونی یعنی یکی از توانهای صحیح و مثبت عدد دو و آن به صورت 2^n نوشته می‌شود.

۹/۷۹- زوج الزوج والفرد = Evenly-even-odd

زوج الزوج و الفرد کدامست؟-این آنست که بدونیم بیش از یکبار شود و بیکی نرسد چون دوازده. (ت: ۳۵ = ۲۵ : T).

«زوج الزوج و الفرد» یعنی عددی که مساوی باشد با حاصل ضرب یک عدد فرد در یکی از توانهای عدد ۲ و آن به صورت $2^n \cdot (2m + 1)$ نوشته می‌شود (m و n اعداد صحیح و مثبت‌اند).

۹/۸۰- زوج الفرد = Unevenly - even

زوج الفرد کدامست؟-این آنست که یکبار بدو نیم شود و بس و بیکی نرسد چون ده. (ت: ۳۵ = ۲۵ : T).

زوج الفرد یعنی عددی که مساوی باشد با حاصل ضرب یک عدد فرد در عدد ۲ و آن به صورت $2(2m + 1)$ نوشته می‌شود.

۹/۸۱- ستون راست = (الاسطوانة القائمة) = Right cylinder

ستون راست کدام است؟-جسمی است گرد. بن او و سر او دو دایره باشد یکدیگر را موازی. و تیرستون کوتاهترین خطی است میان دو مرکز سر و بن. و پهلوش کوتاهترین خطی است میان هر دو محیط ایشان. و چون اندیشی که خطی راست

بر محیط دایره عمود است و گرد بر گرد او بگردانی ستون از آن بحاصل آید. (ت: ۲۶ = ۱۸ : T).

امروزه به جای «ستون راست» اصطلاح «استوانه دَوَّار» را به کار می‌بریم.^{۳۳} تیرستون^{۳۴} یعنی «ارتفاع استوانه دَوَّار» و پهلوی ستون راست یعنی «مولد استوانه دَوَّار».

۹/۸۲- ستون کژ- (الاستوانة المایل) = Oblique cylinder

ستون کژ کدام است؟- این آن ستون است که تیر او بر سطح دایره سر و بُن او عمود نباشد و بود کاین سر و بُن دایره نباشد و لکن دو شکل متشابه هموار، چون دو مثلث یا دو مربع یا مانده آن از شکلهای بسیار پهلوی.^{۳۵} (ت: ۲۶ = ۱۸ : T)

امروزه «ستون کژ» را «استوانه مایل» می‌گویند. ملاحظه می‌شود که بیرونی در تعریف فوق اصطلاح «ستون کژ» را به معنی «منشور مایل» نیز دانسته است. با این حال «منشور» جداگانه در التفهیم تعریف شده است (← ۹/۱۹۹).

۹/۸۳- سطح = Surface

سطح چیست؟- جسم ناچاره بی‌نهایت نبود بهمه سوها و نهایت او سطح است. و این نام را از بام خانه گرفتند. و نیز او را بسیط گویند یعنی گستریده از یراک سطح بر جسم گسترده است. و سطح طول است و عرض بس. و از جسم به یک بُعد کمتر است و آن عمق است زیرا که اگر عمق نیز بودی و ما او را نهایت جسم نهادیم که جسم بدو سپری شود (ت: ۴ = ۲ : T).

۹/۸۴- سطح راست = (السطح المستقیم) = Plane surface
← «خط راست» (شماره ۹/۵۲).

امروزه «سطح راست» را «صفحه» می‌گویند. بیرونی «سطح راست» را کوتاه‌ترین سطح میان دو خط تعریف کرده است. تعریفی که عبدالعلی بیرجندی* در «شرح زیج الغ بیک آورده رساتر است. او نوشته: «سطح مستوی سطحی است که بر او خطوط مستقیمه اخراج توان کردن در جمیع جهات طول و عرض».

۹/۸۵- سهم = (به لاتینی Sagitta) = Arrow

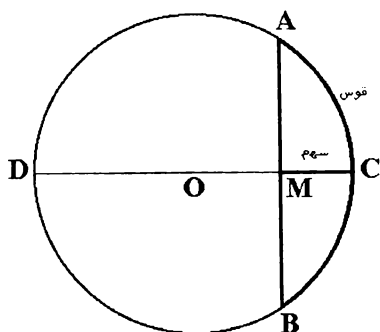
سهم کدامست؟- آن خط که میان نیمه وتر است و میان نیمه قوس. و او پاره‌ای باشد از قطر دایره. اگر قوس از نیمه دایره افزون بود سهم از نیم قطر افزون بود و اگر قوس از نیم دایره کمتر بود سهم از نیم قطر کمتر بود (شکل ۱۶۴).

(ت: ۴ = ۸ : T).

۳۳. ← «نه مقاله هندسه» تألیف «قربانی- صفاری» بخش دوم، ص ۱۲۰.

۳۴. ← (۹/۳۳)

۳۵. ← (۹/۹۴)



شکل ۱۶۴

در شکل ۱۶۴ پاره خط MC سهم کمان ACB و پاره خط MD سهم کمان ADB است. ملاحظه می‌شود که در اینجا بیرونی عمودی را که از وسط کمان بر وتر فرود آید، که می‌دانیم از وسط وتر می‌گذرد، سهم کمان نامیده است.

اما در «زیج الغ بیک» آمده است: «عمودی که از منتصف قوس بر منتصف وتر فرود آید سهم نصف آن قوس باشد» یعنی در واقع در شکل فوق پاره خط MC سهم کمان AC دانسته شده و نه سهم کمان AB .

عبدالعلی بیرجندی* در «شرح زیج الغ بیک» پس از ذکر عبارت فوق نوشته است: «و بعضی آنرا^{۳۶} سهم آن قوس گویند و این انسب است. اما اول اشهر است و آن را جیب معکوس نیز گویند. و بیان آنکه عمودی که از منتصف قوس بر وتر اخراج کنند بر منتصف وتر واقع شود مستفاد است از شکل بیست و نهم از ثالثة کتاب اصول. و این تعریف خاص است به سهم قوسی که زیاده از نصف (محیط دایره) نباشد. چه قوس زیاده از نصف را ضعف نیست. و می‌شاید که تخصیص به جهت آن باشد که در اعمال زیج احتیاج به سهم قوس زیاده از نصف واقع نیست... و تعریف شامل آن است که: سهم قوس قطعه‌ای است از قطر که واقع باشد میان جیب آن قوس و طرف همان قوس.»

غیاث‌الدین جمشید کاشانی* در «مفتاح الحساب» گوید^{۳۷}: «عمودی را که از وسط کمان بر وتر فرود آید بعضی سهم آن کمان و بیشتر ریاضیدانان سهم نصف آن کمان نامند».

۹/۸۶- شستگانی (کسرهای) = (کسور ستینی) Sexagesimal fractions

مقصود از کسرهای شستگانی کسرهایی است که مخرج آنها عدد ۶۰ یا یکی از قوای شصت باشد. بیرونی این اصطلاح را به صورت «شستگانی» با سین نوشته و در کتاب حاضر آن

۳۶. یعنی عمودی را که از وسط کمان بر وتر فرود آید.

۳۷. «مفتاح الحساب» ص ۱۰۶: «والعمود الخارج من منتصف القوس علی منتصف الوتر سهم لتلك القوس عند بعض و لنصف القوس عند الاکثرین».

را به صورت «شصتگانی» ثبت کرده‌ام. و چگونگی ثبت اعداد را در دستگاه شمار شصتگانی در شماره (۹/۱۲) کتاب حاضر شرح داده‌ام. و نیز ← (۹/۱۱) و (۹/۲۳).

۹/۸۷- شش پهلو = (مسدس) = Hexagon

← «چهار سوا» (شماره ۹/۴۷).

۹/۸۸- شش جهت = The six sides

شش جهت کدامند؟ آن نهائیهای این سه بعدند که گفتیم از دو جانب. و یکی از نهائیهای طول پیش نام است و دیگر پس. و یکی از نهائیهای عرض راست و دیگر چپ. و یکی از نهائیهای عمق زیر و دیگر زبر. (ت: ۴ = ۲ : T).

۹/۸۹- شکل = Figure

شکل چیست؟- صورتی بود که گرد بر گرد او یک خط باشد یا بیشتر. (ت: ۸ = ۴ : T).

در مقاله اول از «تحریر اقلیدس» آمده است: «الشکل ما احاط به حد او حدود» درباره این تعریف ← «هیث E» ج ۱، ص ۱۸۲، تعریف ۱۴.

باید متوجه بود که اصطلاح «شکل» به معنی «قضیه» یا «مسئله» نیز در ریاضیات دوره اسلامی فراوان به کار رفته است. معادل این اصطلاح در زبانهای فرانسوی و انگلیسی Proposition است. مثلاً شکل اول از مقاله اول اصول اقلیدس مسئله زیر است: «می‌خواهیم مثلث متساوی الاضلاعی روی یک پاره خط معلوم رسم کنیم». و حال آنکه مثلاً شکل پانزدهم از همان کتاب یک قضیه است: «دو زاویه متقابل به رأس که از تقاطع دو خط راست پدید آیند متساویند».

۹/۹۰- شکل آبی = (الشکل المائی) = Watery body

مقصود از شکل «شکل آبی» بیست وجهی منتظم^{۳۸} است. ← «شکل اندر کره» (شماره ۹/۹۲).

۹/۹۱- شکل آتشی = (الشکل الناری) = Fiery body

مقصود از «شکل آتشی» چهار وجهی منتظم^{۳۹} است. ← «شکل اندر کره» (شماره ۹/۹۲)

۹/۹۲- شکل اندر کره^{۴۰} = (الشکل المحیط به الکره) = Polyhedra inscribed in a sphere

چند شکل اندر کره تواند بود؟- اما هرگاه که شکل راست پهلو و راست زاویه بود و تألیف از یک گونه شکل خواهی کردن، جز پنج شکل اندر کره نتواند بودن. و این پنج شکل را بروی تشبیه و مانده کردن، نامزد کردند باصلهای عالم که فلک است و چهار طبع. و اما که از گوناگون شکلهای ترکیب خواهی کردن آنرا حد

۳۸. به انگلیسی Icosahedron.

۳۹. به انگلیسی Tetrahedron.

۴۰. به فرانسوی Polyèdre inscrit dans une sphère.

و شمار نیست. فاما آن پنج که گفتیم یکی مکعب است که گرد بر گرد او شش مربع است. و او را ارضی خوانند آی [= یعنی] زمینی. و دیگر از بیست مثلث متساوی الاضلاع است و او را مائی خوانند آئ آبی. و سیوم از هشت مثلث متساوی الاضلاع است و او را هوائی خوانند. و چهارم چون خُشک از چهار مثلث متساوی الاضلاع است و او را ناری خوانند آئ آتشی و پنجم از دوازده مخمس کرده است و او را فلکی خوانند. (ت: ۲۹ = ۲۰ : T).

در تعریف فوق مقصود از «شکل اندر کره» چند وجهی محاط در کره است و مقصود از «شکل راست و پهلوی راست زاویه» چند وجهی منتظم است. در کره فقط پنج چند وجهی منتظم می‌توان محاط کرد که قدما آنها را اجسام افلاطونی (Platonic bodies) یا Platonic polyhedra می‌خواندند. (← «اسمیث H» ج ۲، ص ۲۹۵).

اینکه بیرونی گفته است «و اما که از گوناگون شکلهای ترکیب خواهی کردن آن را حد و شمار نیست» مقصود چند وجهیهای نیم منتظم است. غیاث الدین جمشید کاشانی* در «مفتاح الحساب» دو نوع از چند وجهیهای نیم منتظم را، که همان اجسام ارشمیدسی هستند، معرفی کرده است. ۹/۹۳- شکل بر دایره = (الشکل المحیط بالدایره) = Figure circumscribed about a circle

شکل بر دایره کدام است؟ آن راست پهلوی که بیرون از دایره بود و هر ضلعی از آن او مماس بود آن دایره را (ت: ۱۶ = ۱۰ : T)

در اصطلاح امروزی این شکل را چند ضلعی محیطی می‌نامیم که ممکن است منتظم باشد یا نباشد ولی مقصود بیرونی چند ضلعی منتظم محیط بر دایره است.

۹/۹۴- شکل بسیار پهلوی (= مضلع) = Many-sided figure

بیرونی این اصطلاح را در ضمن تعریف اصطلاح «ستون کژ» (شماره ۹/۸۲) به کار برده و مقصود وی از این اصطلاح «چند ضلعی» است.

۹/۹۵- شکل زمینی = (الشکل الارضی) = Earthy body

مقصود از «شکل زمینی» مکعب است. ← «شکل اندر کره» (شماره ۹/۹۲).

۹/۹۶- شکل فلکی = Sphere (?)

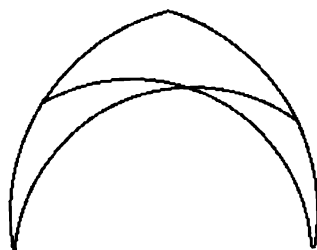
یعنی دوازده وجهی منتظم (Dodecahedron). ← «شکل اندر کره» (شماره ۹/۹۲).

نصیرالدین طوسی* در «تحریر اقلیدس» (ص ۱۹۴) نوشته است: «و هذا الشكل ينسب الى السماء».

۹/۹۷- شکل قَطَاع = Secant figure

شکل قَطَاع چیست؟ او از چهار دایره بزرگ (عظیمه) بجای آید که هر دوی ایشان بر یک نقطه بهم آمده باشند. و همچنان بود چون سر انگشت میانگی از هر دو

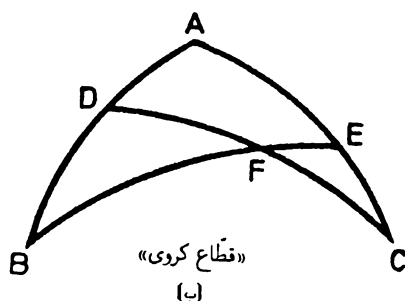
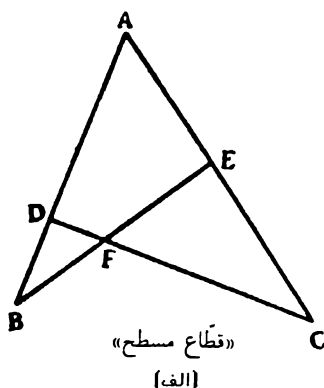
دست یکی بر دیگر نهی و هر دو سر انگشت غماز بر میانگاه انگشت میانکی
بنهی نموده او آید. (ت: ۳۲ = ۲۳ : T. شکل ۱۶۵).



شکل ۱۶۵

مقصود از «شکل قطاع» در ریاضیات دوره اسلامی دو چیز است:

اولاً «شکل قطاع» شکلی است هندسی که یا از تقاطع چهار خط راست که دویه دو یکدیگر را قطع کنند پدید می آید و آن را «قطاع مسطح»⁺ می نامند. (شکل ۱۶۶-الف). و یا از تقاطع چهار دایره عظیمه بر سطح کره پدید می آید و آن را «قطاع کروی» می نامند. (شکل ۱۶۶-ب).



شکل ۱۶۶

ثانیاً «شکل قطاع» قضیه ای است که در مورد شکل های فوق به صورت زیر بیان می شود:

+ «قطاع مسطح» امروزه چهار ضلعی کامل نامیده می شود.

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{DF} \times \frac{DB}{AB} \quad (\text{شکل قطاع مسطح})$$

$$\frac{\sin \widehat{CE}}{\sin \widehat{AE}} = \frac{\sin \widehat{CF}}{\sin \widehat{DF}} \times \frac{\sin \widehat{DB}}{\sin \widehat{AB}} \quad (\text{شکل قطاع کروی})$$

چون در بخش چهارم کتاب «نسوی نامه»^{۴۱} تألیف خود شرح مفصلی درباره شکل قطاع نوشته‌ام در اینجا به همین مختصر اکتفا کرده خاطر نشان می‌کنم که:

در بیشتر کتابهای تاریخ ریاضیات که به زبانهای اروپایی نوشته شده اصطلاح «قطاع» به فتح اول و تشدید دوم ضبط شده است. اما گاهی نیز آن را به کسر اول و تخفیف دوم و یا به ضم اول و تخفیف دوم ثبت کرده‌اند. این اصطلاح را مترجمان عربی به لاتینی به صورت figura alkata نقل نموده‌اند.

۹/۹۸ - شکل هوایی = Airy body

مقصود هشت وجهی منتظم (Octahedron) است. ← «شکل اندر کره» (شماره ۹/۹۲).

۹/۹۹ - شمار = (علم حساب) = Arithmetic

شمار چیست؟ بکار بردن عدد و خاصیت‌های او اندر بیرون آوردن چیزها إما [= یا] بجمله کردن و إما به پراکندن یعنی بفزودن یا بکاستن (ت: ۴۱ = ۳۱ : T).

۹/۱۰۰ - شمارها به حروف تازی = (اثبات الاعداد بحروف العرب) =

Arabic letters for numerals

شمارها بحروف تازی چگونه نویسند؟ این مواضعی است و اتفاق میان گروهی. و بتوانستندی کردن که بر حروف معجم کردندی آنک: ا، ب، ت، ث است. که عدد او نه آحاد را و نه عشرات و نه صدگان و یکی هزار بایشان بسنده باشد، از یراک بیست و هشت است. و لکن این مردمان ترتیب اعداد بحروف جمل کردند، از یراک این ترتیب آشکاره تر بود میان اهل کتاب پیش از عرب. و این است:

ابجد، هوز، حطی، کلمن، سعفص، قرشت، ثخذ، ضظغ

یکان	ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
دهگان	ی	ک	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰
صدگان	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
	۱۰۰۰								

و حصت هریک از این حروفها از شمار بدین جدول در است (ت: ۵۲).

نوشتن اعداد را با حروف فوق حساب جَمَل می‌نامند.^{۴۲} در حساب جَمَل مطابق با جدول فوق نُه حرف از الف تا ظا را برای یکان و از یا تا صاد را برای دهگان و از قاف تا ظا را برای صدگان و غین را به جای هزار می‌گیرند. اعداد دیگر را به وسیله ترکیب این حروف می‌نویسند و در موقع نوشتن حروف مرکب عدد بزرگتر را بر عدد کوچکتر به ترتیبی که در فارسی تلفظ می‌کنیم مقدم می‌دارند.

در اینجا چند عدد را هم به حساب جَمَل و هم با ارقام هندی می‌نویسم تا مطلب واضح شود:

یا	کد	نظ	قا	غقلد
۱۱	۲۴	۵۹	۱۰۱	۱۱۳۴

وعدّه هزارگان را مطابق با تلفظ فارسی بر حرف غین مقدم می‌دارند. مثال:

بغ	هغ	بغتکج
۲۰۰۰	۵۰۰۰	۲۴۲۳

برای نوشتن این حروف در زیجها قواعدی هست. از قبیل اینکه نقطه با و جیم و زا و یا را نمی‌گذارند و جیم را به شکل ح می‌نویسند تا با ح اشتباه نشود و غیره.

۹/۱۰۱- ارقام شمار شصتگانی- در اینجا از فرصت استفاده کرده روش نوشتن ارقام را در دستگاه شمار شصتگانی که آن را در شماره ۹/۱۲ کتاب حاضر شرح دادم می‌نویسم:

اگر چه در دستگاه شمار شصتگانی از حروف جَمَل برای نوشتن اعداد استفاده می‌کنند ولی باید متوجه بود که نوشتن اعداد در حساب جَمَل و در دستگاه شمار شصتگانی تفاوت دارد.

همان‌گونه که در دستگاه شمار دهگانی همه اعداد را به وسیله صفر و نه رقم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌نویسیم، در دستگاه شمار شصتگانی برای نوشتن همه اعداد به صفر و پنجاه و نه رقم (از یک تا پنجاه و نه) احتیاج هست که آنها را همان‌گونه که گفتم با ترکیب حروف جَمَل می‌نویسند به شرح زیر:

۴۲. و نیز — مقاله «ابجد» در «دایرة المعارف فارسی» و مقاله «حساب الجمل» در «دایرة المعارف اسلام» چاپ دوم فرانسوی.

۱	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
یا	یب	یج	ید	یه	یو	یز	یح	یط	ک
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
کا	کب	کج	کد	که	کو	کز	کح	کط	ل
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
لا	لب	لج	لد	له	لو	لز	لح	لط	م
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
ما	مب	مج	مد	مه	مو	مز	مح	مط	ن
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
نا	نب	نج	ند	نه	نو	نز	نح	نط	
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	

بنابراین در شمار شصتگانی ارقام از یازده تا پنجاه و نه به صورت مرکب نوشته می‌شود، مانند (۱۴=) و کز (۲۷=) و نط (۵۹=) و غیره.

۹/۱۰۲- شمردن

بیرونی اصطلاح شمردن را به معنی «عَدّ کردن» بارها در کتاب «التفهیم» به کار برده است. مثلاً در صفحه ۳۵ «التفهیم فارسی» می‌خوانیم: «عدد اول کدامست؟- این آنست که او را جز یکی نشمرد.» و همچنین در صفحه ۳۶ «التفهیم فارسی» آمده است:

«عددهای مشترک کدامست؟- مشترک آن باشد که عددی ایشان را بشمرد. چون ۱۵ و ۲۵ و ۳۰ که ۵ ایشان را بشمرد...» (و نیز ← «عدد مرکب» شماره ۹/۱۱۶).

از این اصطلاح زیبای فارسی که بیرونی آن را هزار سال پیش از این به کار برده می‌توان اصطلاح شمارنده را به جای «مقسوم علیه» به معنی «عَدّ کننده» یا «عامل» (Divisor) اقتباس کرد.

مثلاً شمارنده‌های عدد ۶ عبارت‌اند از ۱ و ۲ و ۳. به خصوص که «مقسوم علیه» در مقام تقسیم به کار می‌رود و ممکن است مقسوم بر مقسوم علیه قابل قسمت نباشد. مثلاً در تقسیم ۱۷ بر ۵ عدد ۵ «مقسوم علیه» هست ولی «شمارنده» عدد ۱۷ نیست.

۹/۱۰۳- شیء = Unknown

شیء چیست؟- چون جذر پیدا نبود که چند است او را شیء نام کنند. پس شیء جذر مجهول باشد. و چون شیء به شیء زنی مال آید. و لکن آن مال نیز مجهول بود (ت: ۵۰ = ۳۹ : T).

قدما «مجهول» را شیء می‌نامیدند (X) و مربع آن را مال می‌خواندند (X^2). همچنین عدد a را در مقام مقایسه با a^2 جذر می‌گفتند. و مقصود از عبارت «شیء جذر مجهول باشد» این است که اگر عددی مجهول باشد جذر مجهول آن را شیء می‌گویند. و حاصل ضرب شیء در شیء یعنی x^2 را مال می‌نامند. در مسائل چند مجهولی قدما مجهولها را مثلاً درم و دینار و غیره می‌نامیدند^{۴۳}. برای آگاهی یافتن از اصطلاحات «مال مال» و «کعب کعب» و غیره ← «قربانی: کاشانی نامه» شماره ۱۱۹.

۹/۱۰۴ - ضرب = Multiplication

ضرب چیست؟ عدد را چند بار عدد دیگر کردن است... (ت: ۴۱ = ۶۱ : T).

و نیز ← «زدن» (شماره ۹/۷۶).

۹/۱۰۵ - ضلع = Side

← «مثلث» (شماره ۹/۱۶۸) و «عددهای مجسم» (شماره ۹/۱۳۰).

۹/۱۰۶ - ضلع مهین = (الضلع الاعظم) = Longest side

یعنی ضلع مقابل به زاویه قائمه یا منفرجه در مثلث. ← «اقصر الاقصرین» (شماره ۹/۹).

۹/۱۰۷ - طول = Length

← «بعدهای جایگاه» (شماره ۹/۱۷) و اصطلاح «قوت و طول» (شماره ۹/۱۵۲).

۹/۱۰۸ - عدد = Number

عدد چیست؟ جمله ایست از یکها گرد آمده. و ازین جهت یکی را از عدد بیرون

آوردند و گفتند که عدد نیست زیرا که جمله نیست. (ت: ۳۴ = ۲۴ : T).

این همان تعریفی است که در کتاب «اصول هندسه اقلیدس» آمده است^{۴۴}:

«العدد هو الكمية المتألّفة من الواحدات». و ← «هیث E » ج ۲، ص ۲۸۰، تعریف شماره ۲.

۹/۱۰۹ - عدد اول = Prime Number

عدد اول کدامست؟ این آنست که او را جز یکی نشمرد، و او را هیچ پاره نبود مگر

آنک همنام او بود. (ت: ۳۵ = ۲۵ : T).

جمله «و او را هیچ پاره نبود» یعنی: بر هیچ عدد دیگر قابل قسمت نباشد...

یکی از قضایای مهم حساب استدلالی این است که: هر عدد غیر اول عبارت است از حاصل ضرب دو یا چند عدد اول.

این موضوع را می‌توان چنین تعبیر کرد: عددهای اول به منزله مصالح اولیه‌ای هستند که همه عددهای طبیعی دیگر را می‌توان با آنها ساخت.

۴۳. ← «حساب درم و دینار» شماره ۹/۴۹.

۴۴. «تحریر اقلیدس» ص ۹۹.

ریاضیدانان بزرگ در طی قرنهای متوالی خاصیت‌های عددهای اول را مورد تحقیق و بررسی قرار داده و سعی و کوشش فراوان به عمل آورده‌اند تا شاید بتوانند وضع نسبی عددهای اول را نسبت به عددهای دیگر معین کرده جای آنها را در رشته عددهای طبیعی معلوم سازند.

مهمترین نتایجی که قدما به دست آورده‌اند یکی اثبات نامتناهی بودن رشته عددهای اول است که توسط اقلیدس صورت گرفته است و یکی دیگر روش پیدا کردن عددهای اول کوچکتر از عدد مفروض است، که به وسیله «غریبال اراتستن» انجام می‌گیرد. برای کسب اطلاع بیشتر درباره عددهای اول مثلاً ← «ایوز H» صص ۱۴۶ به بعد.

۹/۱۱۰. عدد تام = Perfect number

عدد تام کدامست؟- آنست که اجزای او جمله کنی همچند او باشند. چون شش که او را سه، نیمه بود، و دو، سه یک، و یکی، شش یک. چون جمله کنی شش باشد (ت: ۳۸ = ۲۷ : T).

عدد تام عدد صحیحی است که مساوی با مجموع اجزای خود باشد. در شماره ۹/۶ دیدیم که اجزای هر عدد صحیح غیر اول اعدادی هستند که آن عدد را می‌شمرند (یعنی آن عدد بر آنها قابل قسمت است) و از آن کوچکترند.

مثلاً عدد ۶ «تام» است زیرا اجزای ۶ عبارت‌اند از ۱ و ۲ و ۳ و داریم:

$$۶ = ۱ + ۲ + ۳$$

خاطر نشان می‌کنم که «اجزای عدد» همان شمارنده‌های آن هستند به استثنای خود عدد. تا سال ۱۹۵۲ میلادی فقط دوازده عدد تام شناخته شده بود که نخستین سه عدد آنها عبارت‌اند از ۶ و ۲۸ و ۴۹۶.

در آخرین شکل (= قضیه) از مقاله نهم «اصول اقلیدس» به ثبوت رسیده است که اگر $۲^n - ۱$ عدد اول باشد آنگاه $(۲^n - ۱)(۲^{n-۱})$ عدد تام خواهد بود.^{۴۵}

این را دستور اقلیدس می‌نامند. عددهای تامی که به وسیله این دستور به دست می‌آیند همه زوج‌اند. وجود یا عدم عددهای تامی که فرد باشند از مسائل حل نشده تئوری اعداد است. فقط می‌دانیم که در سال ۱۹۵۷ میلادی ثابت شد که اگر عدد تام فردی وجود داشته باشد از $۱۰^{۲۱}$ بزرگتر است.

در سال ۱۹۵۲ میلادی پنج عدد تام جدید به وسیله ماشین محاسبه کشف شد که نظیر مقادیر ۵۲۱ و ۶۰۷ و ۱۲۷۹ و ۲۲۰۳ و ۲۲۸۱ برای n در دستور اقلیدس هستند. در سال ۱۹۵۷ یک عدد تام دیگر نظیر مقدار $۳۲۱۷ = n$ از دستور اقلیدس به دست آمد و در سال ۱۹۶۱ دو عدد تام دیگر را که نظیر مقادیر $۴۲۵۳ = n$ و $۴۴۲۳ = n$ از دستور اقلیدس حساب کردند. عدد

۴۵. ← «هیث E» ج ۲، ص ۴۲۱، قضیه ۳۶-و نیز به «اسمیت H» ج ۲، ص ۲۰.

تام نظیر $n = ۴۴۲۳$ دارای ۲۶۶۳ رقم است. بزرگترین عدد تام زوج که در ۱۹۷۱ پیدا شده عدد $(۱ - ۲۱۱۳۷)$ ۲۱۱۳۶ است که دارای ۱۲۰۰۳ رقم است. (برای کسب اطلاع بیشتر دربارهٔ عددهای تام ← «دیکسون H » ج ۱، صص ۳ تا ۳۳).

۹/۱۱۱- عدد زاید = Abundant number

عدد زاید کدامست؟... و عدد زائد آن بود که جملهٔ اجزای وی بیشتر باشند از وی.

چون دوازده که نیمهٔ او شش است و سه یک او چهار و چهار یک او، سه و شش

یک او دو. و دوازده یک او، یک. و جملهٔ آن شانزده باشد بیشتر از دوازده. (ت:

$$(T : ۲۵ = ۳۷$$

مقصود از عدد زاید عددی است که اگر اجزای آن (یعنی همهٔ شمارنده‌های کوچکتر از خود آن)^{۴۶} را با هم جمع کنیم حاصل از خود آن عدد بزرگتر شود.

مثلاً ۱۲ عددی است زاید. زیرا اجزای دوازده عبارت‌اند از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶ و مجموع این اجزا یعنی $۱۶ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۶$ از ۱۲ بزرگتر است.

دربارهٔ استخراج عددهای زاید مثلاً ← «درة التاج» بخش دوم، فن سوم، صفحهٔ ۱۴: «و اما طریق استخراج اعداد زایده و ناقصه آن است که...».

برای کسب اطلاعات دقیق و مشروح دربارهٔ عددهای زاید ← «دیکسون H » ج ۱، فصل اول.

۹/۱۱۲- عدد غیری = Oblong number

این اصطلاح در کتاب «التفهیم» در ضمن اصطلاح «عدد مسطح» تعریف شده است. ← ۹/۱۱۸ کتاب حاضر.

مقصود از «عدد غیری» حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است و اصطلاح انگلیسی آن Oblong است^{۴۷} معلوم نشد چرا رمزی رایت در ترجمهٔ انگلیسی «التفهیم» (۲۶ : T) این اصطلاح را به صورت Altered number ترجمه کرده است.

عددهای غیری متوالی عبارتند از $۳ \times ۲, ۴ \times ۳, ۵ \times ۴, \dots, n(n+1)$.
عددهای غیری متوالی از مجموع اعداد زوج متوالی به دست می‌آیند:

$$۲ + ۴ + ۶ + ۸ + \dots + ۲n = n(n+1)$$

مثلاً

$$۲ + ۴ = ۶ = ۲ \times ۳$$

$$۲ + ۴ + ۶ = ۱۲ = ۳ \times ۴$$

$$۲ + ۴ + ۶ + ۸ = ۲۰ = ۴ \times ۵$$

۴۶. ← ۹/۱۰۲.

۴۷. ← «هیث H » ج ۱، ص ۸۲.

واضح است که مستطیلهایی که با هر یک از اعداد غیری می‌توان ساخت (مثلاً مستطیل 3×2) هرگز با هم مشابه نمی‌توانند باشند. زیرا نسبت $\frac{n}{n+1}$ به ازای مقادیر مختلف n با هم متفاوت‌اند. در صورتی که مستطیلهایی که با اعداد مستطیل (شماره ۹/۱۷) می‌توان ساخت گاهی با هم مشابه هستند. مثلاً مستطیلهای 5×2 و 10×4 با هم مشابه‌اند. به همین دلیل است که اعداد «مسطح» را به دو دسته «اعداد مستطیل» و «اعداد غیری» تقسیم کرده‌اند.

۹/۱۱۳- عدد فرد = Odd number

← «فرد» شماره ۹/۱۳۸.

۹/۱۱۴- عدد متمم = Complement number

عدد متمم کدامست؟- چون جذر مربع چند بار جذر مربعی کنی آنج گرد آید او را متمم خوانند آئی تمام کننده. ازیراک از آن دو مربع با دو توی متمم مربعی نو شود، که جذر او جمله دو جذر آن دو مربع بود. و نموده او یک مربع را جذر دو. و دیگر مربع را جذر سه. اگر دو را سه باره کنی شش بود و این متمم است. زیرا که جمله چهار و نه با دو بار شش بیست و پنج بود و این مربعی است، جذر او پنج. (ت: ۳۶ = ۲۶ : T).

مطابق با تعریف فوق اگر a و b دو عدد صحیح باشند متمم اعداد a^2 و b^2 عدد ab است. دلیلی که بیرونی آورده این است که اگر a^2 و b^2 را با دو برابر ab (یعنی دو برابر متمم) جمع کنیم عددی حاصل می‌شود که جذر آن $a + b$ است.

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

علت این نام‌گذاری این است که اگر دو عدد مربع کامل مانند a^2 و b^2 داشته باشیم، در حالت کلی مجموع آنها یک مربع کامل نیست. (مثلاً مجموع ۴ و ۹ یعنی ۱۳ مربع کامل نیست) و اگر بخواهیم که این مجموع مربع کامل شود باید به $a^2 + b^2$ عدد $2ab$ را بیفزاییم تا مربع کامل شود (مثلاً اگر بخواهیم $9 + 4 = 13$ مربع کامل شود باید دو برابر 3×2 یعنی ۱۲ را به آن بیفزاییم تا ۲۵ به دست آید).

۹/۱۱۵- عدد مربع = Square number

مقصود عدد صحیحی است که مساوی با حاصل ضرب دو عدد صحیح متساوی باشد. ← «عدد مسطح» شماره ۹/۱۱۸.

۹/۱۱۶- عدد مرکب = Composite number

عدد مرکب چیست؟- این آنست که او را دو عدد یا بیشتر بشمرند. و او را پاره‌ها بود جز بهمنام. چون شش که یکی او را بشش بار بشمرد و شش یک او باشد.

و دو او را سه بار بشمرد و سه یک او باشد. و سه او را بدو بار بشمرد و نیمه او باشد. (ت: ۳۵ = ۲۵ : T).

«عدد مرکب» یعنی عددی که اول نباشد. مقصود از عبارت «او را پاره‌ها بود جز بهمنام» این است که عدد مرکب شمارنده‌ای غیر از خود دارد.

۹/۱۱۷- عدد مستطیل = Rectangular number

مقصود از «عدد مستطیل» حاصل ضرب دو عدد صحیح غیر متوالی است. مانند $۳ \times ۷ = ۲۱$ که ۳ و ۷ را اضلاع آن می‌نامند.

این اصطلاح در «التفهیم» در ضمن اصطلاح «عدد مسطح» تعریف شده است.

۹/۱۱۸- عدد مسطح = Plane number

عدد مسطح کدام است؟- آنست که از دو عدد بجای آید که یکی چند بار دیگر کنی. اگر این دو عدد یکدیگر را راست باشند این مسطح که از آن گرد آید مربع باشد. و یکی از این دو عدد او را جذر باشد. همچون سه که سه بار کنی نه شود. این ۹ مربع باشد و ۳ جذر او باشد. و اگر میان دو عدد یکی فضله بود آنچ گرد آید او را غیر خوانند (← ۹/۱۱۲) چون دوازده که از سه آید چهار بار کرده. و میان سه و چهار یکی فضله است، و گر میان آن دو عدد فضله بیش از یکی باشد او را مستطیل خوانند. چون دوازده، اگر از دو، شش بار کرده آید. که میان دو و شش فضله بیشتر از یکی است. و این دوازده از یک سو غیر است و از دیگر سو مستطیل. (ت: ۳۵ = ۲۶ : T).

البته به کار بردن کلمات «مسطح» و «مربع» و «مستطیل» درباره اعداد از اسامی شکل‌های هندسی اقتباس شده است. حاصل ضرب دو عدد صحیح را قدما «مسطح» یا «سطح» آن دو عدد می‌نامیدند و هریک از آن اعداد را «ضلع» حاصل ضرب می‌گفتند^{۴۸}. اما علت اینکه بیرونی حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی یعنی $n(n+1)$ را غیر نامیده است همان است که در شماره ۹/۱۱۲ شرح دادم.

۹/۱۱۹- عدد ناقص = Deficient number

عدد ناقص کدام است؟- عدد ناقص آنست که جزوهایش جمله کنی از وی کم باشد. چون هشت که نیمه او چهار باشد و چهار یک او دو. و هشت یک او یکی. و جمله آن هفت باشد از هشت کمتر. (ت: ۳۸ = ۲۷ : T).

مقصود از «عدد ناقص» عددی است که اگر اجزای آن را (یعنی همه شمارنده‌های آن را که از آن کوچکترند) با هم جمع کنیم حاصل از خود آن عدد کوچکتر شود. مثلاً ۸ عددی است ناقص.

زیرا اجزای ۸ عبارت‌اند از ۱ و ۲ و ۴ و مجموع این اجزا یعنی:

$$۱ + ۲ + ۴ = ۷$$

از خود هشت کمتر است.

درباره روش استخراج عددهای ناقص مثلاً ← «درة التاج»، بخش دوم، فن سوم، ص ۱۴: «و اما طریق استخراج اعداد زایده و ناقصه آن است که...».

برای کسب اطلاعات دقیق و مفصل درباره عددهای ناقص ← «دیکسن H» ج ۱، فصل اول.

۹/۱۲۰. عددهای اهرامی = Pyramidal numbers

عددهای اهرامی کدامند؟ این آنست که مربعات متوالی یک بر دیگر نهی تا همچون آن [سه] هرمی گردند که برابر مصراند. و بدیدار چنان بود که سنگهای ترازو یک بر دیگر نهی، خرد زبر بزرگ، تا چون پایهای گردند یکدیگر را بالا راست. و نموده او آنست که یکی نخستین مربع است. چون او را بر چهار نهی که دوم مربع است و آنگه هر دو را بر نه که سوم مربع است. آنگه بر شانزده که چهارم مربع است و همچنین تا آنجا که خواهی. و این را هندوان برک سنکلت^{۴۹} خوانند. و بود که این هرم از مکعبهای متوالی کرده آید و آنگاه بالای پایها راست نبود. و نموده او آنست که یکی نخستین مکعب است. او را بر هشت نهی که دوم مکعب است، آنگه بر بیست و هفت. آنگه بر شصت و چهار و این را هندوان کهن سنکلت^{۵۰} خوانند. و خاصیت عددها و نامهای ایشان بینهایت‌اند چنانکه عدد بینهایت است. پس چیزی از آن یاد کنیم که عدد اندر او بکار آید. (ت: ۴۰ = ۳۱ : T)

بیرونی «عددهای اهرامی» و «عددهای مخروط»^{۵۱} را جدا از هم تعریف کرده است. در زبانهای اروپایی همه این عددها را «اعداد اهرامی»^{۵۲} می‌نامند.

این اعداد با در نظر گرفتن مجموع یک یا دو یا سه یا چهار... یا چند جمله از رشته «عددهای مثلث»^{۵۳} یا رشته «عددهای مربع»^{۵۴} یا رشته «عددهای مخمس» و غیره حاصل می‌شوند. الفد عددهای اهرامی سه پهلوه^{۵۵} که بیرونی آنها را «عددهای مخروط» نامیده است،

۴۹. Varga-Varga sankalita یعنی مربع و Sankalita یعنی جمع کردن. ← ۳/۳۸ کتاب حاضر.

۵۰. G'hana-G'hana Sankalita یعنی مکعب (← ۳۱ : T).

۵۱. ← ۹/۱۳۱.

۵۲. Pyramidal numbers.

۵۳. ← ۹/۱۲۹.

۵۴. ← ۹/۱۳۲.

۵۵. Pyramidal triangular numbers.

عبارتند از:

$$۱, ۴, ۱۰, ۲۰, \dots$$

این اعداد از روی هم نهادن «اعداد مثلث» یعنی جمع کردن جمله‌های رشته اعداد مثلث به دست می‌آیند:

$$۱$$

$$۴ = ۱ + ۳$$

$$۱۰ = ۱ + ۳ + ۶$$

$$۲۰ = ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰$$

$$\dots$$

ب- عدددهای اهرامی چهارپهلوه که بیرونی آنها را «عدددهای اهرامی» نامیده است عبارتند از:

$$۱, ۵, ۱۴, ۳۰, \dots$$

این اعداد از روی هم نهادن «اعداد مربع» یعنی جمع کردن جمله‌های رشته اعداد مربع کامل حاصل می‌شوند:

$$۱$$

$$۵ = ۱ + ۴$$

$$۱۴ = ۱ + ۴ + ۹$$

$$۳۰ = ۱ + ۴ + ۹ + ۱۶$$

$$\dots$$

ج- عدددهای اهرامی پنج پهلوه که بیرونی از آنها سخن به میان نیاورده است عبارتند از:

$$۱, ۶, ۱۸, ۴۰, \dots$$

این اعداد از روی هم نهادن «اعداد مخمس» یعنی جمع کردن جمله‌های رشته اعداد مخمس حاصل می‌شوند.

«عدددهای مخمس» اعدادی هستند که از جمع کردن یک یا دو یا چند جمله از تصاعد حسابی $۱, ۴, ۷, ۱۰, \dots$ حاصل می‌شوند و عبارتند از:

$$۱, ۵, ۱۲, ۲۲, \dots$$

بنابراین «عددهای اهرامی پنج پهلو» عبارتند از:

$$\begin{aligned} 1 \\ 6 &= 1 + 5 \\ 18 &= 1 + 5 + 12 \\ 40 &= 1 + 5 + 12 + 22 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

۹/۱۲۱- عددهای تیری^{۵۶} = Beam numbers

← «عددهای مجسم» (شماره ۹/۱۳۰).

۹/۱۲۲- عددهای طبیعی = Natural numbers

عددهای طبیعی کدامند؟ آنند که ابتدا از یکی کنند و زیادت یک یک همی کنند. چون ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و...و نیز آن را عددهای متوالی خوانند. آئی [= یعنی] یک از پس دیگر (ت: ۳۴ = ۲۴ : T).

رشتهٔ عددهای صحیح متوالی را عددهای طبیعی نامیده‌اند زیرا این اعداد به وجهی طبیعی برای شمردن اشیا پدید آمده است و حال آنکه عددهای دیگر مانند $\frac{1}{2}$ و $\sqrt{2}$ و ۵٫۷۱ و غیره را از روی اعداد طبیعی ساخته‌اند.

۹/۱۲۳- عددهای لبنی^{۵۷} = Plinth numbers

← «عددهای مجسم» (شماره ۹/۱۳۰).

۹/۱۲۴- عددهای لوحی^{۵۸} = Scalene numbers

← «عددهای مجسم» (شماره ۹/۱۳۰).

۹/۱۲۵- عددهای متباین^{۵۹} = Coprime numbers

عددهای متباین کدامند؟ آنند که هیچ عدد ایشانرا نشمرد، چون نه و ده که هر دو را جز یکی نشمرد و بهیچ جزو هنبازی نیوفتد چون نیمه یا سیک. پس نه متباین است ده را آئی جدا [= یعنی جدا] از وی (ت: ۳۷ = ۲۷ : T).

عبارت «بهیچ جزو هنبازی نیوفتد» یعنی مثلاً ۳ که یکی از اجزای ۹ است عدد ۱۰ را

۵۶. ← «هیث E» ج ۲، ص ۲۹۰ و ۲۹۱.

۵۷. ← «هیث E» ج ۲، ص ۲۹۰ و ۲۹۱.

۵۸. ← «هیث E» ج ۲، ص ۲۹۰ و ۲۹۱.

۵۹. رمزی رایت این اعداد را Separate numbers ترجمه کرده است.

نمی‌شمرد و همچنین ۵ که یکی از اجزای ۱۰ است عدد ۹ را نمی‌شمرد. بزرگترین شمارندهٔ مشترک دو عدد متباین عدد یک است.

۹/۱۲۶- عددهای متحاب^{۶۰} Amicable numbers = Friendly numbers

عددهای متحاب کدامند؟ هر دو عددی که جمله [= حاصل جمع] جزوهای (شمارهٔ ۹/۶) یکی از ایشان چند [= مساوی با] عدد دیگر باشد و جملهٔ جزوهای دیگر چند عدد نخستین بود ایشانرا متحاب خوانند یعنی که یک مر دیگر را دوست دارند. و همیشه یکی از این دو عدد زائد (شمارهٔ ۹/۱۱۱) بود و دیگری ناقص (شمارهٔ ۹/۱۱۹). و نمودهٔ او دویست و بیست است و این عددی است زائد. نیمهٔ او ۱۱۰ و چهار یک او ۵۵ و پنجیک او ۴۴ و ده یک او ۲۲ و نیم دهیک [= یک بیستم] او ۱۱ و جزوی از سد و ده ۲، و جزوی از پنجاه و پنج ۴، و جزوی از چهل و چهار ۵ و جزوی از بیست و دو ۱۰، جزوی از یازده ۲۰ و جزوی از دویست و بیست ۱. و جملهٔ این جزوها دویست و هشتاد و چهارند. و آن دوم عدد ناقص است که نیمهٔ او ۱۴۲ و چهار یک او ۷۱ و جزوی از سد و چهل و دو ۲، و جزوی از هفتاد و یک ۴، و جزوی از دویست و هشتاد و چهار ۱. و جملهٔ این جزوها دویست و بیست است و آن نخستین عدد زائد را راست است. پس این هر دو دوست یکدیگرند. (ت: ۳۷ = ۲۸ : T).

مورخان ریاضی در این امر اتفاق نظر دارند که فیثاغورس و پیروان او نخستین قدمها را در بسط تئوری اعداد برداشتند. ایامبلیخوس^{۶۱} کشف «عددهای متحاب» را به فیثاغورس نسبت داده و گفته است که از او پرسیدند: دوست چیست؟ جواب داد «کسی که من دیگری باشد (Alter ego) همان‌گونه که اعداد ۲۲۰ و ۲۸۴ هستند».

دو عدد متحاب دو عددی هستند که هر یک از آنها مساوی با مجموع اجزای دیگری باشد. مثلاً ۲۸۴ و ۲۲۰ دو عدد متحاب هستند که کشف آنها را به فیثاغورس نسبت داده‌اند. زیرا اجزای عدد ۲۲۰ عبارتند از:

۱، ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲، ۴۴، ۵۵، ۱۱۰

مجموع این اجزا مساوی با ۲۸۴ است
همچنین اجزای عدد ۲۸۴ عبارت‌اند از

۱، ۲، ۴، ۷۱، ۱۴۲

۶۰. این جالب توجه است که بیرونی در «التفهیم عربی» این اصطلاح را به صورت «اعداد متحابه» و در «التفهیم فارسی» آن را به صورت «عددهای متحاب» (یعنی بدون های تأنیث) ثبت کرده است.

۶۱. Iamblichus-فیلسوف نو افلاطونی که در نیمهٔ دوم قرن سوم میلادی می‌زیست. ← «سارتن I» ج ۱، ص

و مجموع این اجزا مساوی است با ۲۲۰.

این زوج از اعداد متحاب در قدیم صورت اسرارآمیز به خود گرفت و وارد خرافات شد و نقش مهمی در سحر و جادو یافت. و می‌گفتند که اگر این دو عدد را روی دو طلسم ثبت کنند و دو کس آنها را با خود دارند آن دو کس همیشه با هم دوست کامل خواهند بود.

نکته جالب توجه در این باره این است که دانشمندی همچون ابن خلدون با وجود آنکه احکام نجوم را به حق باطل شمرده^{۶۲} و ممنوع شدن آن را توصیه کرده است،^{۶۳} در مورد عددهای متحاب می‌نویسد^{۶۴}: «و نیز ما در عملیات طلسمات شگفتیهایی در اعداد متحابه دیده‌ایم و آنها عبارتند از ۲۲۰ و ۲۸۴... و اصحاب طلسمات نقل کرده‌اند که این اعداد در الفت میان دو یار و وصال آنان تأثیری خاص دارد به شرط آنکه برای آنها دو تمثال ترتیب دهند... و بر هر یک از دو تمثال یکی از دو عدد را بگذارند و از عدد بیشتر آن را اراده می‌کنند که دوستی و مهر صاحب آن مورد نظر است، یعنی محبوب و بدین سبب خاصیت آن به حدی از لحاظ الفت و دوستی استوار میان دو یار فزونی می‌یابد که هیچ‌گاه یکی از دیگری جدا نمی‌شوند و مهر ناگسستگی پیدا می‌کنند و این گفتار صاحب کتاب «الغایة» و دیگر پیشوایان فن است، و تجربه نیز گواه بر درستی آن است».

۹/۱۲۷- در کشورهای اسلامی نخستین بار ثابت بن قره*، که در قرن سوم هجری (نهم میلادی) می‌زیست، رساله مهمی درباره عددهای متحاب نوشت موسوم به «مقاله فی استخراج اعداد المتحابه» و این نخستین تحقیق علمی درباره عددهای متحاب بود.^{۶۵}

بعد از ثابت بن قره*، اخوان الصفا* در رسایل خود و مسلمة بن احمد مجریطی* در کتاب «غایة الحکم» از این اعداد گفتگو کردند و بعداً کمال‌الدین فارسی* کتابی موسوم به «تذکره الاحباب فی بیان التحاب» نوشت و غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب «مفتاح الحساب» و محمد باقر بن زین‌العابدین یزدی* در کتاب «عیون الحساب» و علی قلیصادی* در شرح کتاب «تلخیص اعمال الحساب» درباره عددهای متحاب بحث کردند. و نیز در قسمت ارثاطیقی از دایرة المعارفهای اسلامی و عربی از این اعداد گفتگو شده است. مثلاً قطب‌الدین شیرازی* در کتاب «درة التاج» و محمد بن محمود املی* در کتاب «نفایس الفنون» مطالبی درباره این اعداد نوشته‌اند.^{۶۶}

۹/۱۲۸- قدما فقط زوج ۲۲۰ و ۲۸۴ از عددهای متحاب را می‌شناختند. تا زمانی که پییر فرما (Pierre de Fermat) ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۶۳۶ میلادی یک زوج جدید یعنی ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورد. دو سال بعد از آن دکارت (Descartes)، ریاضیدان و

۶۲. «ترجمة فارسی مقدمة ابن خلدون» ج ۲، ص ۱۱۰۵ به بعد: «فصل ۲۵ در ابطال صناعة نجوم و سستی مدارک و فساد و غایت آن».

۶۳. «ترجمة فارسی مقدمة ابن خلدون» ج ۲، ص ۱۱۰۹: «پس سزااست که این صناعة (= احکام نجوم) بر همه ساکنان اجتماع و شهرنشینان ممنوع و حرام شود. چه زیانهای بسیاری از آن به دین و دولتها می‌رسد».

۶۴. «ترجمة فارسی مقدمة ابن خلدون» ج ۲، ص ۱۰۵۲

۶۵. «قربانی: فارسی نامه بخش سوم».

۶۶. «قربانی: فارسی نامه بخش دوم».

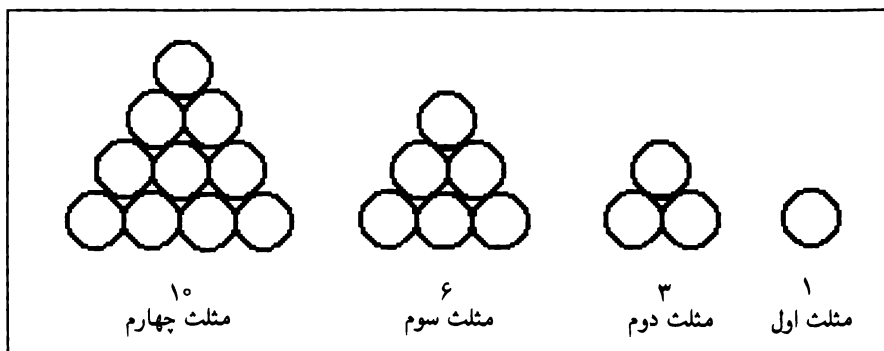
فیلسوف فرانسوی، یک زوج دیگر پیدا کرد. اویلر (Euler) ریاضیدان سویسی روشی علمی برای محاسبهٔ عددهای متحاب به کار برد و در سال ۱۷۴۷ میلادی فهرست ۳۰ زوج عددهای متحاب را فراهم آورد و بعد آن را تا ۶۰ زوج توسعه داد.

یکی از شگفتیهای تاریخ این اعداد این است که در سال ۱۸۸۶ میلادی جوانی شانزده سالهٔ ایتالیایی موسوم به نیکولو پاگانینی (Nicolo Paganini) یک زوج عددهای متحاب را که به نسبت کوچک هستند و تا آن زمان کسی آنها را نمی‌شناخت یعنی زوج ۱۱۸۴ و ۱۲۱۰ را به دست آورد.

امروزه بیش از ۴۰۰ زوج عدد متحاب شناخته شده است.^{۶۷}

۹/۱۲۹_ عددهای مثلث = Triangular numbers

عددهای مثلث کدامند؟ این آنست که عددهای متوالی [= طبیعی] از یکی تا آنجا که خواهی گرد کنی و این آنست که هندوان او را سنکلت^{۶۸} (Sankalita) خوانند. و نمودهٔ او آنست که یکی نخستین مثلث است. چنانکه گفتیم که اندر او همه چیزهاست بقوت. دوم مثلث جمله [= حاصل جمع] ۱، ۲ و این سه است. و سوم مثلث جمله ۱، ۲، ۳ و آن شش است. و مثلث چهارم جمله ۱، ۲، ۳، ۴ و آن ده است. وزین صورت چشم اندر یابد علت مثلثی عدد (ت):
 $(T : ۲۹ = ۳۸)$



شکل ۱۶۷

۶۷. برای کسب اطلاع بیشتر در مورد عددهای متحاب ← «قربانی: فارسی نامه بخش دوم» و «ایوز H» صفحات ۵۶ و ۷۲-اطلاعات عمیق و مفصلی دربارهٔ این اعداد در فصل اول جلد اول کتاب «دیکسون H» خواهید یافت.
 ۶۸. — ۳/۳۸ کتاب حاضر.

عددهای مثلث از جمع کردن عددهای طبیعی ابتدا از یک حاصل می‌شوند و صورت کلی آنها $\frac{n(n+1)}{2}$ است: (شکل ۱۶۷)

$$T_1 = 1 = 1$$

$$T_2 = 3 = 1 + 2$$

$$T_3 = 6 = 1 + 2 + 3$$

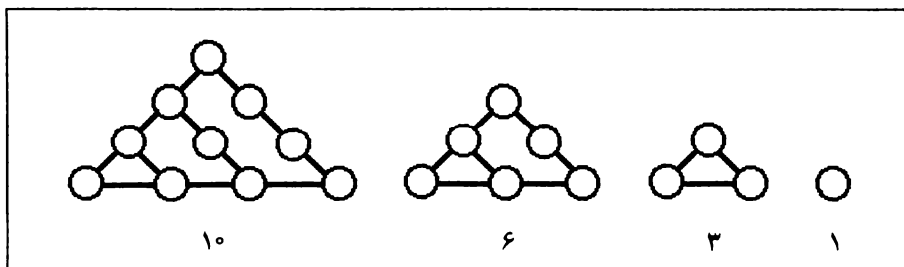
$$T_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$T_5 = 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

.....

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$$

شکلهای زیر وجه تسمیه این اعداد را به عددهای مثلث نشان می‌دهند:



شکل ۱۶۸

۹/۱۳۰- عددهای مجسم = Solid numbers

عددهای مجسم کدامند؟- این آن عددهاست که بحاصل آیند از عددی چند بار عدد کرده و آنج گرد آید چند بار عدد سوم کرده. اگر این سه عدد راست [= متساوی] باشند آنج گرد آید مکعب نام کنند و یکی از این عددها کعب او باشد. و گروهی مکعب را کعب نام کنند و یکی از آن سه عدد ضلع او. و نموده او آنست که سه را سه بار کنی نه آید. و چون نه را سه بار کنی بیست و هفت شود. و این

مکعب است و کعب او سه است. یا او کعب است و ضلع او سه. اگر از این عددها دو راست باشند و سیوم کهر آنچه گرد آید او را لبنی خوانند زیرا که خشت را ماند. و نموده او سه را سه بار کنی نه باشد و نه را دو بار کنی هژده باشد و این لبنی است. اگر دو راست باشند و سوم بزرگتر آنج گرد آید او را تیری خوانند. زیرا که مانده تیر بود که به بام خانه بکار برند. و نموده او سه را سه بار کنی نه باشد و نه را چهار بار کنی سی و شش باشد و این تیری باشد. اگر هر سه عدد یکدیگر را راست نباشد آنرا لوحی^{۶۹} خوانند زیرا که چون تخته بود. و نموده او سه، چهار بار دوازده بود، و دوازده پنج بار شصت بود و این لوحی است (ت: ۳۸ = ۲۸ : T).

قطب الدین شیرازی * در کتاب «درة التاج» اعداد مجسم را به اعداد مخروطی و اعداد منشوری و شش وجهی و غیره تقسیم کرده است.

درباره معادله‌های انگلیسی و یونانی اصطلاحاتی که در تعریف فوق به کار رفته است ← «هیث E» ج ۲، ص ۲۹۰، تعریف ۱۷.

۹/۱۳۱_ عددهای مخروط = Conical numbers

عددهای مخروط چگونه‌اند؟ هر گاه که مثلث‌های متوالی گرد همی کنی، از آن عددها آید همچون حسک [= خار خسک] و به هندوی سنکلت سنکلت^{۷۰} خوانند. و نخستین مخروط یکی است. چون یکی را بر مثلث دوم زبر نهی جمله ۱ و ۳ چهار پهلوی بود و این مخروط دوم است. و چون او را بر مثلث سوم نهی جمله ۱ و ۳ و ۶ ده بود و این مخروط سوم است و زین صورت پدید اوفتد. (ت: ۴۰ = ۳۰ : T).

بیرونی «عددهای اهرامی» (شماره ۹/۱۲۰) و «عددهای مخروطی» را جدا از هم تعریف کرده است. در زبانهای اروپایی همه این اعداد را «اعداد اهرامی» می‌نامند.

قطب الدین شیرازی * در کتاب «درة التاج» اعداد مخروطی را به مجسم ناری و مخروط مخمس و غیره تقسیم بندی کرده است. (← «درة التاج» بخش دوم، فن سوم، ص ۴۱). بر طبق تعریف بیرونی عددهای مخروط عبارت‌اند از مجموع جمله‌های رشته عددهای مثلث.

۶۹. و گاهی این اعداد را اجنبی خوانند (← «درة التاج» بخش دوم، فن سوم، ص ۱۴۲) و در زبانهای اروپایی Scalene می‌گویند (← «هیث E» ج ۲، ص ۲۹۰).
 ۷۰. در «التفهیم عربی» این اصطلاح به صورت «شنکلت» ثبت شده و حال آنکه در «التفهیم فارسی» به صورت سنکلت، سنکلت آمده است. ← ۹/۲۰ بخش حاضر.

$$۱ = ۱$$

$$۴ = ۱ + ۳$$

$$۱۰ = ۱ + ۳ + ۶$$

$$۲۰ = ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰$$

← بند «الف» از شماره ۹/۱۲۰ بخش حاضر.

۹/۱۳۲. عددهای مربع متوالی = Square Consecutive numbers

عددهای مربع متوالی چگونه‌اند؟ همچنان که اعداد متوالی گرد کردی و از وی مثلث آمد همچنان طاقهای او متوالی اگر گرد کنی مربعهای متوالی گرد آید. و نموده او آنست که مربع نخستین یکی است. چون بر او سه افزائی چهار شود. و این دوم مربع است. آنک از دو دوبار آمده است. و چون بر چهار پنج بیفزایی نه شود و آن مربع سوم است. آنک از سه بار سه آمده است. و زین صورت نیز مربعها دیده آید. (ت: ۳۹ = ۳۰ : T).

عددهای مربع از جمع کردن عددهای فرد متوالی ابتدا از یک حاصل می‌شوند و صورت کلی آنها n^2 است:

$$S_1 = ۱$$

$$S_2 = ۴ = ۱ + ۳ = ۲^2$$

$$S_3 = ۹ = ۱ + ۳ + ۵ = ۳^2$$

$$S_4 = ۱۶ = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۴^2$$

.....

$$S_n = ۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \dots + (2n - ۱) = \frac{n(2n)}{۲} = n^2$$

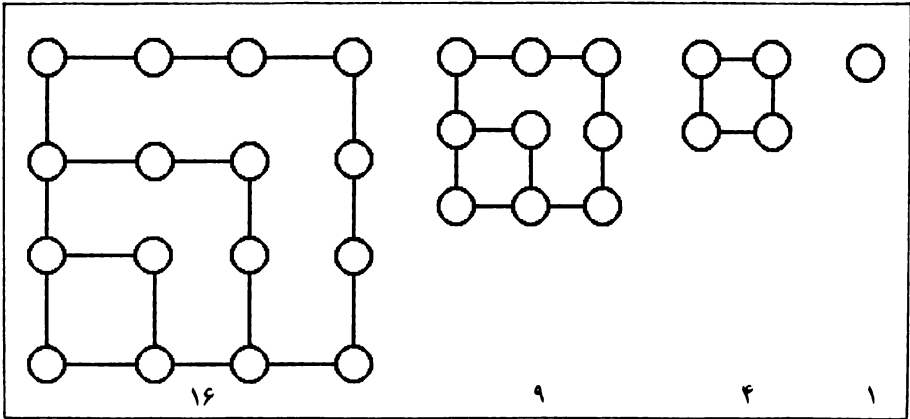
شکلهای زیر علت این نامگذاری (وجه تسمیه) را نشان می‌دهد:

در مورد «عددهای مربع متوالی» دو قضیه زیر را هم با در نظر گرفتن شکلهای هندسی و هم به وسیله محاسبه می‌توان ثابت کرد:

قضیه ۱ - هر عدد صحیح مربع مساوی است با مجموع دو عدد مثلث متوالی.

با در نظر گرفتن شکل ۱۷۰ واضح می‌شود که^۱: $S_4 = T_4 + T_3$ و به طور کلی

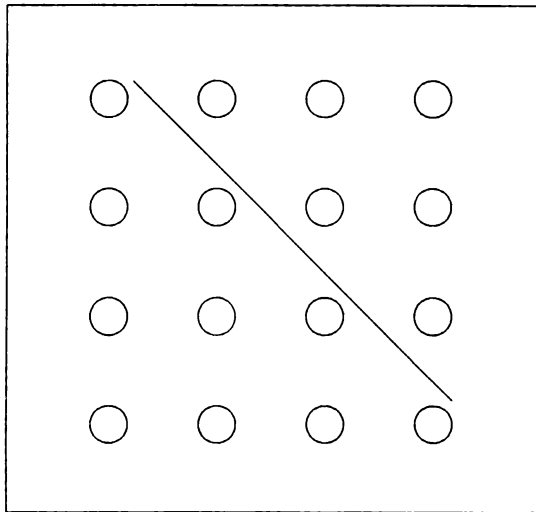
۱۷۰. T_n یعنی عدد مثلث شماره n و S_n یعنی عدد مربع شماره n .



شکل ۱۶۹

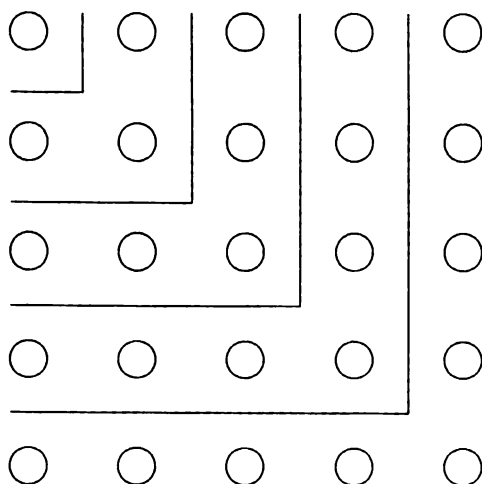
$S_n = T_n + T_{n-1}$ از طرف دیگر به وسیله محاسبه معلوم می شود که ^{۷۲}:

$$S_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = T_n + T_{n-1}$$



شکل ۱۷۰

قضیه ۲ - مجموع هر عده از عددهای فرد متوالی که از یک شروع شود عددی است مربع. صحت این قضیه با در نظر گرفتن شکل ۱۷۱ واضح می شود.



شکل ۱۷۱

از طرف دیگر از محاسبه مجموع n جمله از تصاعد حسابی که جمله های آن اعداد فرد متوالی ابتدا از یک باشند معلوم می شود که:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

۹/۱۳۳ - **عددهای مشترک** = Numbers With Common factors

عددهای مشترک کدامست؟- مشترک آن باشد که عددی ایشان را بشمرد چون ۱۵ و ۲۵ و ۳۰ که ۵ ایشان را بشمرد. پس همبازی ایشان بدان جزو است که همنام پنج است ای پنجیک. و هر یکی پنجیک دارد [= بر پنج قابل قسمت است] و پنجیک هر یکی از ایشان بجای عدد تمام کار کند و آن نسبت بجای دارد. نبینی که پنجیک پانزده نزدیک پنجیک بیست و پنج همچنان باشد چون پانزده نزدیک بیست و پنج، و آن سه پنجیک است. و همچنان پنجیک بیست و پنج نزدیک پنجیک سی چون بیست و پنج نزدیک سی باشد. آئ پنج دانگ. و این عدد که ایشان را بشمرد او را وفق خوانند میان ایشان. و چون عددها بر وفق خویش قسمت کنی آنچ بیرون آید ایشان را منظوی خوانند آئ نور دیده و بنموده ما آن سه عدد چون مسطوی شوند سه و پنج و شش باشند. (ت: ۳۶ = ۲۷ : T).

امروزه به جای اصطلاح «عددهای مشترک» اصطلاح «عددهای متوافق» را به کار می بریم.

مقصود از عبارت «پنجیک هر یکی از ایشان بجای عدد تمام کار کند» این است که: نسبت دو عدد متوافق مساوی با نسبت خارج قسمتهای آنها بر وقفشان می باشد. مثلاً ۱۵ و ۲۵ دو عدد متوافق اند و وقفشان ۵ است و داریم:

$$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

عددهای نوردیده یعنی خارج قسمتهای چند عدد متوافق بر وقفشان^{۷۳} مثلاً ۱۵ و ۲۵ و ۳۰ پس از نوردیده شدن به صورت ۳ و ۵ و ۶ در می آیند. «عددهای نوردیده» در واقع عددهایی هستند که جملگی نسبت به هم اولند (یعنی وقفشان واحد است).

۹/۱۳۴ - عکس نسبت = Inverted Proportion

عکس نسبت چیست؟- عکس بازگوه بود و این آنست که گوئی نسبت دوم بنخستین همچون نسبت چهارم بسوم و بنموده ما پنج بار است. و این عکس نسبت را خلاف نسبت نیز خوانند. (ت: ۲۰ = ۱۲ : T).

بنا به تعریف فوق عکس نسبت یعنی نوشتن تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به صورت $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. خاطر نشان می کنم که در اینجا بیرونی اصطلاح «نسبت» را به جای «تناسب» به کار برده است. ۹/۱۳۵ - غلم = Gnomon

غلم چیست؟- دو متمم^{۷۴} را با یکی از آن دو متوازی الاضلاع علم خوانند و نشان او پاره ای از دایره بود که بر هر سه بگذرد. (ت: ۱۴ = ۹ : T).

اصطلاح «غلم» ترجمه عربی اصطلاحی است یونانی که در زبانهای انگلیسی و فرانسوی Gnomon می گویند و در حساب و هندسه به دو معنی به کار می رود. مفهوم هندسی این اصطلاح به طور کلی این است:

اگر از یک متوازی الاضلاع مفروض، متوازی الاضلاع مشابهی با آن را که در یک رأس با آن شریک باشد جدا کنیم آنچه را باقی می ماند غلم خوانند. به عبارت دیگر «علم» شکلی است که اگر به یک چند ضلعی اضافه کنیم شکلی مشابه با آن به دست آید. (بخش پرداز زده در شکل ۱۷۳).

این اصطلاح به مناسبت معنی فوق در علم عدد نیز به کار رفته است:

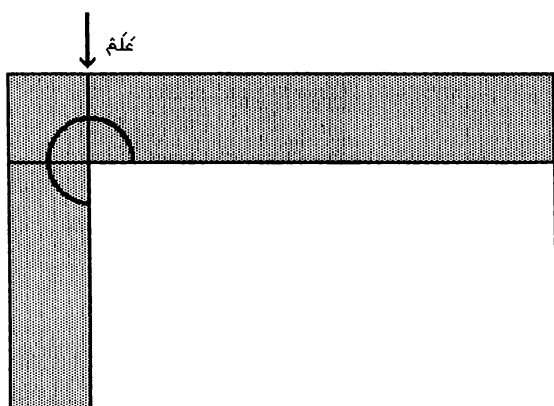
جمله های متوالی هر رشته عدد که از جمع کردن آنها یک «عدد مثلث» یا یک «عدد مربع» یا یک «عدد چند ضلعی» حاصل شود غلمهای آن اعداد خوانده می شوند.

مثلاً اگر عددهای طبیعی را ابتدا از یک متوالیاً با هم جمع کنیم «عددهای مثلث»^{۷۵} متوالی پدید می آید. پس عددهای طبیعی علمهای عددهای مثلث هستند.

۷۳. — «نور دیدن عدد» (شماره ۹/۲۱۳).

۷۴. — «متمم» (شماره ۹/۱۶۳).

۷۵. — «عددهای مثلث» (شماره ۹/۱۲۹).



شکل ۱۷۲

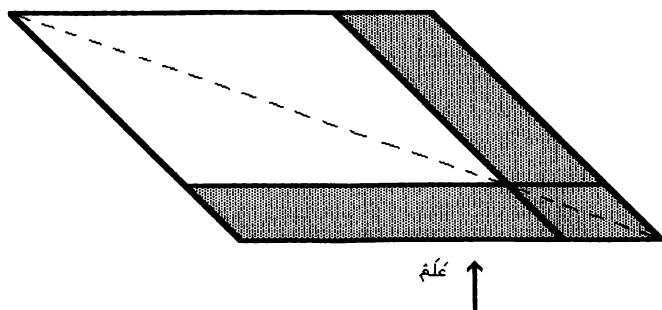
همچنین اگر عددهای فرد متوالی را ابتدا از یک با هم جمع کنیم «عددهای مربع»^{۷۶} متوالی حاصل می‌شوند. پس عددهای فرد متوالی علمهای عددهای مربع هستند. همچنین اگر جمله‌های تصاعد حسابی

... , ۱۳, ۱۰, ۷, ۴, ۱

(از راست به چپ بخوانید)

را با هم جمع کنیم «عددهای مخمس» پیدا می‌شوند که عبارت‌اند از:

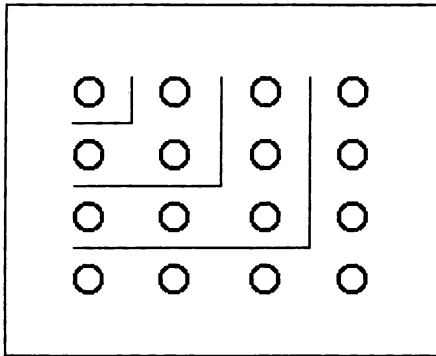
... , ۳۵, ۲۲, ۱۲, ۵, ۱



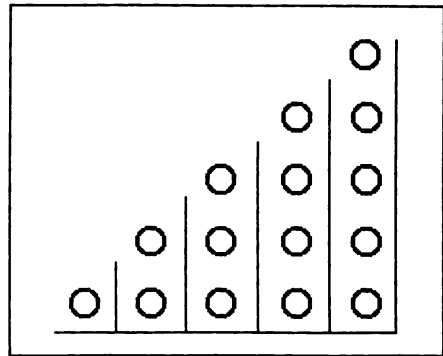
شکل ۱۷۳

۷۶. ← «عددهای مربع» (شماره ۹/۱۳۲).

پس ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و... علمهای «اعداد مخمس» هستند. وجه تسمیه این اعداد به «عَلَم» از مشاهده شکلهای ۱۷۴ و ۱۷۵ واضح می شود:



عددهای فرد علمهای اعداد مربع هستند
شکل ۱۷۵



عددهای طبیعی علمهای اعداد مثلث هستند
شکل ۱۷۴

به طوری کلی علمهای متوالی برای هر عدد « n ضلعی» دارای تفاضل ثابتی مساوی با $n - 2$ هستند.

برای کسب اطلاع بیشتر در این باره ← «هیث E » ج ۱، ص ۳۷۰ به بعد و نیز ← «کانتور V » ج ۱، ص ۱۶۱ به بعد— درباره استعمال اصطلاح Gnomon در نجوم ← «مونتوکلا H » ج ۱، ص ۳۰۴ به بعد.

Perpendicular = عمود ۹/۱۳۶

← «زاویه قائمه» (شماره ۹/۷۰).

Altitude of triangle = عمود مثلث ۹/۱۳۷

عمود مثلث و قاعده او چیست؟— عمود آنست که از زاویه مثلث بیرون آید بر آن ضلع که برابر زاویه است بر استقامت او بر زوایای قائمه. و این ضلع را که عمود بروی افتاد او را قاعده خوانند (ت: ۱۰ = ۶ : T)

اصطلاح «زاویه» در اینجا به معنی «رأس» به کار رفته است. رمزی رایت «عمود مثلث» را که به معنی «ارتفاع مثلث» است Perpendicular ترجمه کرده است. ولی درست آن Altitude یا Height است.

Odd [number] = فرد [عدد] ۹/۱۳۸

فرد چیست؟— فرد طاق بود. و این آنست که بدو نیم نتوان کردن تا شکسته با وی یاد نکنی. و اول طاقها سه است و فردهای متوالی ۳ و ۵ و ۷ و ۹ و ۱۱ و... (ت):

$$(T : 25 = 34).$$

یعنی عدد فرد آنست که بر ۲ قابل قسمت نباشد؛ حاصل تقسیم هر عدد فرد بر ۲ مرکب است از یک عدد صحیح به علاوه کسر $\frac{1}{2}$. این است که بیرونی گفته است: «بدو نیم نتوان کردن تا شکسته (=کسر) با وی یاد نکنی».

درباره تعاریف مختلف عدد فرد ← «هیث E » ج ۲، ص ۲۸۱ تعریفهای ۶ و ۷.
Oddly-odd = فردالفرد

فردالفرد کدامست؟ این آنست که او را عددی فرد بشمارد فردبار. چون ۹ که او را سه سه بار بشمرد. و چون پانزده که پنج او را سه بار بشمرد و سه او را پنج بار بشمرد (ت: $35 = 25 : T$).

فردالفرد یعنی عددی که مساوی با حاصل ضرب دو یا چند عدد فرد باشد. مثلاً 105 فردالفرد است زیرا مساوی است با 15×7 و یا 35×3 و یا $5 \times 3 \times 7$.

۹/۱۴۰ قاعدۀ مثلث = Base of triangle

← «عمود مثلث» (شمارۀ ۹/۱۳۷).

۹/۱۴۱ قسمت = Division

قسمت چیست؟ قسمت بیرون آوردن بهر یکی است از چیزها که قسمت همی کنی. و نموده او آنست که سی و پنج را خواهی که بر هفت ببخشی. آنرا درم نام کن و این را مردم. و حصت مردی از آن پنج درم باشد. و این را قِسم خوانند و نیز جزو خوانند. و آن را که همی بخشی مقسوم خوانند و آنک بر او بخشی مقسوم علیه (ت: $41 = 31 : T$).

در این تعریف کلمات «بهر» و «قسم» و «جزو» به معنی اصطلاح کنونی «خارج قسمت» به کار رفته است. اما جزو فقط وقتی می‌گویند که تقسیم باقیمانده نداشته باشد ($9/6$ ←).

۹/۱۴۲ قَطَاع = Secant figure

← «شکل قَطَاع» (شمارۀ ۹/۹۷).

۹/۱۴۳ قطب = Pole

قطب و محور چیست؟ قطب دایره از بهر کشیدن گویم^{۷۷}. و این آنست که پیش ازین یاد کردیم^{۷۸} که او بر پشت کره همچونان باشد چون مرکز دایره‌ای را که بر بسط [= صفحه] بود. و نیز قطب از بهر حرکت خوانیم. ازیراک کره بر خویشتن گردد و ناچاره دو نقطه بر پشت او ایستاده باشند برابر یکدیگر همچنانکه بر چرخ حقه‌گران بود. و آن خط که اندرون کره از قطب تا قطب پیوندد او را محور خوانند.

۷۷. یعنی برای رسم کردن دایره بر سطح کره.

۷۸. ← «دایره‌های خرد و بزرگ» (شمارۀ ۹/۵۷).

و او نیز همچنان ایستاده بود همچون دو قطب که نهایت اویند هر چند که کره
همی گردد (ت: ۳۱ = ۲۱ : T).

تعریف کنونی اصطلاحات «قطب» و «محور» کره عیناً مانند تعریف فوق است.
۹/۱۴۴ - قطر (دایره) = Diameter

قطر و وتر کدامند؟ هر خطی راست که اندر دایره بر مرکز گذرد و بهر دو سر به
محیط رسد او را قطر خوانند. و این قطر هر دایره را بدو نیم کند راست [= متساوی]
و اگر بر مرکز نگذرد او را وتر خوانند، و دایره را بدو پاره مختلف کند. او وتر بود هر
دو پاره را آنک یکی بیشتر است از نیمدایره و یکی کم از اوست. (ت:
۸ = ۴ : T).

در باره قطر متوازی الاضلاع ← (شماره ۹/۱۶۶).

۹/۱۴۵ - قطر (در مثلث قائم الزاویه) = Hypotenuse

← «اقصر الاقصین» (شماره ۹/۹).

۹/۱۴۶ - قطع زاید = Hyperbola

← (شماره ۹/۱۴۹).

۹/۱۴۷ - قطع مکافی = Parabola

← (شماره ۹/۱۴۹).

۹/۱۴۸ - قطع ناقص = Ellipse

← (شماره ۹/۱۴۹).

۹/۱۴۹ - قطوع مخروط = Conic sections

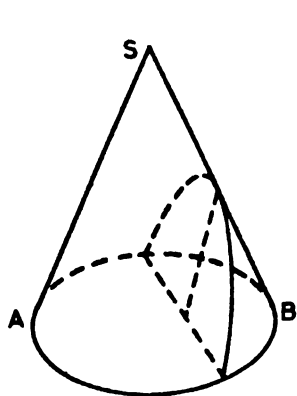
قطوع مخروط کدامند؟ اندر مخروط که او را بسطیحی بتری چون اره‌ای، پنج گونه
بریدن افتد. نخستین آنک بر سر [= رأس مخروط] بگذرد و از آن مثلثی آید از
خطهای راست کرده [= مثلث مستقیم الاضلاع]. و دیگر آنک موازی بود قاعده
او را. و آن دایره‌ای باشد خردتر از قاعده. و اگر [سطح بریده بر سر مخروط
نگذرد] موازی باشد پهلوی [= مولد] مخروط را او را قطع مکافی نام کنند. و گر
موازی نباشد پهلوی مخروط را ناچاره بدان پهلوی رسد که برابر آغاز بریدن است.
اگر رسیدن بدو [از] سوی قاعده بود او را قطع ناقص خوانند. و گر رسیدن بدو از
سوی سر مخروط باشد او را قطع زائد خوانند. و بمخروط جزاین بریدن نباشد مگر
مخروط کُز بود. آنگاه سطحی ببرد او را نه بر موازات قاعده و لکن به زاویه‌های
راست بتبادل^{۷۹}. آن بریده هم دایره‌ای بود (ت: ۲۷ = ۱۹ : T).

در قسمت اول این تعریف بیرونی برای معرفی قطوع مخروطی مخروط دَوَّار^{۸۰} را در نظر

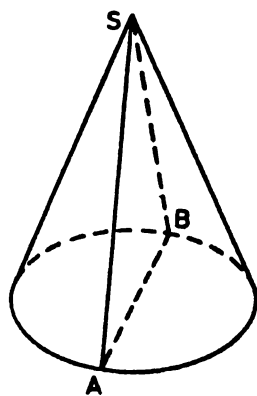
۷۹. ← ۹/۱۵۰.

۸۰. یعنی مخروطی که از دوران یک مثلث قائم الزاویه در حول یکی از اضلاع زاویه قائمه‌اش پدید آید.

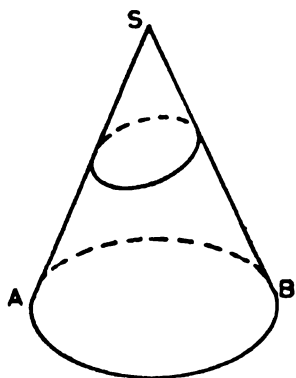
گرفته ولی در قسمت آخر به مخروط مستدیر مایل^{۸۱} نیز اشاره کرده است. بیرونی پنج حالت در نظر گرفته که از روی شکل‌های زیر واضح می‌شود:



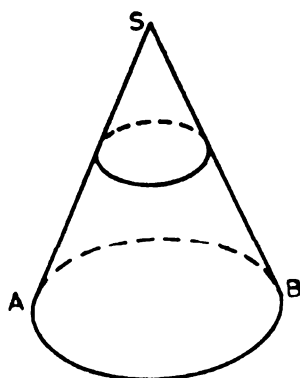
شکل ۱۷۷ صفحه قاطع موازی با مولد SA و مقطع قطع مکانی است.



شکل ۱۷۶ صفحه قاطع از رأس می‌گذرد و مقطع مثلث متساوی‌الساقین است.



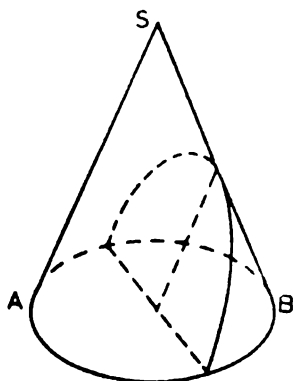
شکل ۱۷۹ صفحه قاطع با صفحه دایره قاعده موازی نیست ولی هر دو مولد SA و SB را قطع می‌کند و مقطع قطع ناقص است.



شکل ۱۷۸ صفحه قاطع موازی با صفحه قاعده و مقطع دایره است.

اصطلاحات «قطع ناقص» و «قطع مکانی» و «قطع زاید» به ترتیب ترجمه عربی اصطلاحات یونانی «الیپسیس» و «پارابله» و «هوپرله» هستند که امروزه به جای آنها به ترتیب اصطلاحات «بیضی» و «سهمی» و «هذلولی» را به کار می‌بریم.

۸۱. یعنی مخروطی که قاعده آن یک دایره و رأس آن یک نقطه غیر واقع بر محور دایره قاعده‌اش باشد.



شکل ۱۸۰ صفحه قاطع با صفحه قاعده موازی نیست و پاره خط SB را قطع می‌کند ولی نیم خط SA را قطع نمی‌کند و مقطع قطع زاید است.

یونانی	انگلیسی	اصطلاح کنونی	اصطلاح عربی
ellipsis = الیپسیس	Ellipse	بیضی	قطع ناقص
Parabole = پارابله	Parabola	سهمی	قطع مکافی
Hyperbole = هوپرله	Hyperbola	هذلولی	قطع زاید

پیش از زمان آپولونیوس (Apollonius) که در حدود قرن سوم پیش از میلاد مسیح می‌زیست یونانیان قطوع مخروطی را به وسیله سه مخروط دّوّار که زاویه رأس آنها حاده یا قائمه یا منفرجه باشد تعریف می‌کردند. و با قطع کردن یکی از این سه نوع مخروط دّوّار با صفحه‌ای که عمود بر مولد آن باشد بیضی و سهمی و هذلولی را به دست می‌آوردند.

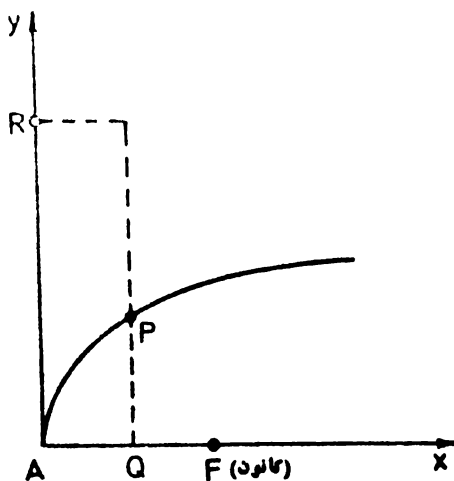
اصطلاحات یونانی «الیپسیس» و «پارابله» و «هوپرله» که بعداً در دوره اسلامی به «قطع ناقص» و «قطع مکافی» و «قطع زاید» ترجمه شد، نخستین بار توسط آپولونیوس وضع شد و وجه تسمیه یونانی آنها به قرار زیر است:

فیثاغوریان در مسائل مربوط به مساحتها قاعده یک مستطیل را روی یک پاره خط طوری قرار می‌دادند که یکی از رأسهای مستطیل بر یک سر پاره خط منطبق شود^{۸۲}. در این صورت اگر رأس دیگر قاعده مستطیل داخل پاره خط قرار می‌گرفت (یعنی قاعده مستطیل کوچکتر از پاره خط بود) این حالت را «الیپسیس» (یعنی ناقص) می‌گفتند. و اگر آن رأس مستطیل درست بر سر دیگر پاره خط منطبق می‌شد این حالت را «پارابله» (یعنی مکافی) می‌نامیدند. و اگر رأس مستطیل

۸۲. ریاضیدانان دوره اسلامی از این مسئله به عنوان «اضافه کردن مستطیل یا متوازی‌الاضلاع بر پاره خط» تعبیر می‌کردند. برای کسب اطلاع بیشتر در این باره — «هیث H » ج ۱، ص ۱۵۰ — «هیث E » ج ۱، ص ۳۴۳ — «مصاحب: حکیم خیام» ص ۵۸.

بیرون از پاره خط می افتاد این حالت را «هویربله» (یعنی زاید) می خواندند.

حال در شکل ۱۸۱ فرض می کنیم AX محور قاطع یک قطع مخروطی و نقطه P نقطه ای



شکل ۱۸۱

از آن قطع باشد. و از نقطه P عمود PQ را بر محور AX فرود می آوریم. و از نقطه A یعنی رأس قطع مخروطی عمودی بر AX اخراج کرده روی آن پاره خط AR را مساوی با ضلع قائم AP قطع مخروطی جدا می کنیم. سپس مستطیلی بنا می کنیم که یک ضلعش QA و مساحتش مساوی PQ^2 باشد و ضلع دیگر آن را بر پاره خط AR قرار می دهیم. اگر این ضلع کوتاهتر از AR باشد قطع مخروطی را «ناقص» و اگر مساوی با AR باشد قطع مخروطی را «مکافی» و اگر بزرگتر از AR باشد قطع مخروطی را «زاید» می نامند.

به عبارت دیگر اگر محور قاطع قطع مخروطی را محور طولها و مماس در رأس A بر قطع مخروطی را محور عرضها بگیریم و مختصات نقطه P واقع بر قطع را (x, y) و ضلع قائم قطع را p بنامیم سه حالت رخ می دهد:

$$Y^2 < px \quad \text{قطع مخروطی «قطع ناقص» است}$$

$$Y^2 = px \quad \text{قطع مخروطی «قطع مکافی» است}$$

$$Y^2 > px \quad \text{قطع مخروطی «قطع زاید» است}$$

۸۳. ضلع قائم قطع مخروطی، که آن را در زبانهای اروپایی Latus rectum می گویند، در مورد بیضی و هذلولی عبارت است از طول وترى که از یک کانون بگذرد و بر محور کانونی عمود باشد، و در مورد سهمی عبارت است از طول وترى که از کانون بگذرد و بر محور سهمی عمود باشد. امروزه در بعضی از کتابهای هندسه «ضلع قائم» را پارامتر و در بعضی از کتابهای دیگر «نصف ضلع قائم» را پارامتر می نامند.

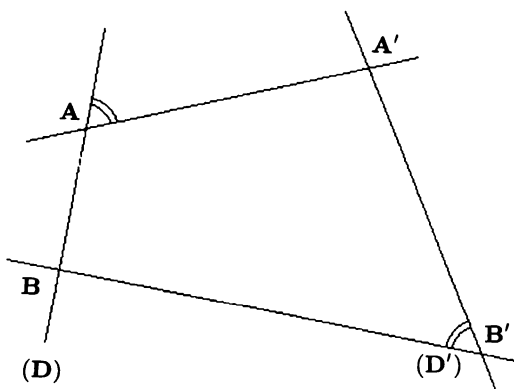
تبصره - با قراردادهای فوق اگر طول قطری از قطع (ناقص یا زاید) را که یک سرش نقطه A است d بنامیم معادله قطع در حالت قطع ناقص «بیضی»

$$y^2 = px - \frac{px^2}{d}$$

و در حالت قطع زاید (هذلولی) $y^2 = px + \frac{px^2}{d}$ خواهد بود.^{۸۴}

۹/۱۵۰- بیرونی در قسمت آخر تعریف قطوع مخروطی به مخروط کژی یعنی چنانکه گفتیم مخروط مستدیر مایل اشاره کرده و نوشته است: «مگر مخروط کژی بود. آنگاه سطحی ببرد او را نه بر موازات قاعده و لکن به زاویه‌های راست به تبادل، آن بریده هم دایره بود.»

مطلب فوق توضیحی لازم دارد: قبلاً متذکر می‌شوم که اگر دو خط راست (D) و (D') متعلق به یک صفحه را دو خط راست، AA' و BB' قطع کنند (شکل ۱۸۲) به طوری که چهار



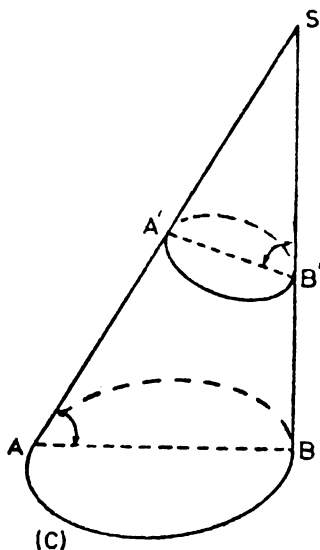
شکل ۱۸۲

نقطه A و A' و B و B' روی یک دایره واقع باشند، یعنی مطابق با شکل فوق زاویه A مساوی با زاویه B' باشد می‌گویند که دو خط AA' و BB' نسبت به دو خط (D) و (D') پاژ موازی^{۸۵} هستند. و این مفهوم همان اصطلاحی است که بیرونی به صورت «زاویه‌های راست به تبادل» بیان کرده است.

اکنون مخروط مستدیر مایلی در نظر گرفته رأس آن را S و دایره قاعده آن را (c) می‌نامیم. در این مقام صفحه‌ای که از رأس و مرکز دایره (c) بگذرد و بر صفحه قاعده مخروط مستدیر عمود باشد، صفحه اصلی مخروط نامیده می‌شود. در شکل ۱۸۳ صفحه SAB صفحه اصلی فرض

^{۸۴} برای کسب اطلاع بیشتر در این باره — : «مصاحب: حکیم خیام» ص ۲۹۲ به بعد و یا به «هیت H » ص ۱۳۴ به بعد.

^{۸۵} به فرانسوی = Antiparallèles به انگلیسی Antiparallel.



شکل ۱۸۳

شده است.

حال اگر پاره خط $A'B'$ را نسبت به دو مولد SA و SB پاد موازی با AB رسم کرده از آن خط صفحه‌ای عمود بر صفحه اصلی رسم کنیم، می‌گویند صفحه اخیر با صفحه دایره (C) پاد موازی است.

عبارتی که بیرونی نوشته است بیان قضیه زیر است که در کتابهای هندسه عالی آن را به روشهای گوناگون به ثبوت می‌رسانند.^{۸۶} قضیه - در مخروط مستدیر مایل هر مقطعی که صفحه آن با صفحه دایره قاعده پاد موازی باشد یک دایره است.

۹/۱۵۱ - قلب نسبت = Conversion

قلب نسبت چیست؟ - این نسبت نخستین زیادت او بر دوم چون نسبت سوم زیادت او بر چهارم (ت: ۲۰ = ۱۳ : T).

قلب نسبت یعنی تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را به صورت $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ نوشتن. در این تعریف نیز بیرونی اصطلاح «نسبت» را به جای تناسب به کار برده است. (در واقع قلب نسبت، همان تفصیل نسبت در مخرج است).

۹/۱۵۲ - قوت و طول = Power and root

قوت و طول چه باشد؟ - مربع را قوت خوانند و طول پهلوی اوست. چون گویند که

۸۶. مثلاً ← «هندسه کمیسر» صص ۴۷۴ (شماره ۵۷۰) و ۵۱۹ (شماره ۶۳۵) و یا «هندسه گیشارد» ج ۲، ص ۱۷۲.

قوت فلان خط چند فلان خط و فلان خط، بدانکه مربع او همچند مربعهای آن
هر دو خط است (ت: ۲۵ = ۱۷ : T).

اصطلاح «قوت» به معنی مربع طول یک پاره خط در کتابهای ریاضی عربی و فارسی دوره اسلامی بسیار به کار رفته است. وقتی می‌گویند «قوت فلان خط مساوی با فلان خط و بهمان خط است»^{۸۷} مقصود این است که مربع پاره خط اولی مساوی است با مجموع مربعات دو پاره خط دیگر. مثلاً در مثلث قائم‌الزاویه ABC که زاویه A از آن قائمه باشد وقتی می‌گویند: «قوت BC مساوی است با AB و AC » یعنی:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

۹/۱۵۳ - قوس = Arc

اصطلاح «قوس» را بیرونی در «الفهیم» جداگانه تعریف نکرده است.

۹/۱۵۴ - قوسهای متشابه = Similar arcs

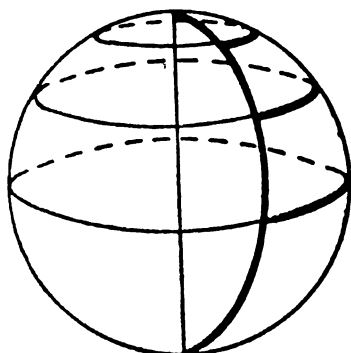
قوسهای متشابه کدامند؟ اما بر سطحهای راست آن باشند که میان دو خط راست اوافتند که بیرون آمدن ایشان از مرکز دایره‌های متوازی باشد سوی بزرگترین آن دایره‌ها - و اما بر پشت کره قوسهای متشابه آن باشد که میان دو دایره بزرگ اوافتند از دایره‌های متوازی، هرگاه که هر دو دایره بزرگ از قطب ایشان بیرون آمده باشد. و قوسهای متشابه همه خرد باشند یا یکی از ایشان بزرگ باشد و بس. و ایشان را متشابه از آن خوانند که نسبت همگان بدایره‌های خویش یکی باشد. اگر مثلاً یکی سه یک دایره خویش باشد همگنان نیز همچنان سه یک باشند از دایره‌های خویش (ت: ۳۱ = ۲۲ : T).

در هندسه مسطحه چون همه دایره‌ها با هم مشابه هستند می‌توان گفت که کمانهای متشابه از دایره‌های مختلف کمانهایی هستند که زاویه مرکزی روبه‌روی آنها با هم مساوی باشند.

بیرونی در تعریف فوق فقط دایره‌های متحد‌المرکز را در نظر گرفته است. هر دو کمان از چنین کمانهایی علاوه بر آنکه متشابه‌اند، «متجانس» نیز هستند. (در تجانسی که مرکز آن مرکز مشترک دو دایره و نسبت آن نسبت دو شعاع آنها باشد).

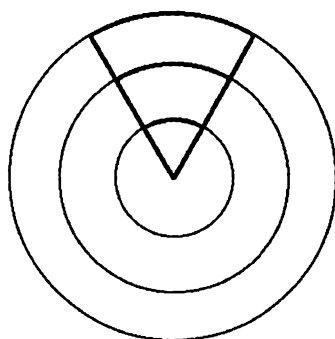
در هندسه فضایی، بیرونی دایره‌های صغیره‌ای را در نظر گرفته که صفحات آنها با هم موازی باشند و کمانهای متشابه‌ آنهايي از آن دایره‌ها را دانسته که بین دو دایره عظیمه واقع باشند که از دو قطب دایره‌های صغیره مذکور می‌گذرند.

۹/۱۵۵ - کره = Sphere



قوسهای متشابه بر سطح کره

شکل ۱۸۵



قوسهای متشابه در صفحه

شکل ۱۸۴

کره چیست؟- جسمی است گرد و یک سطح گرد بر گرد او همی گردد. و اندرون این جسم نقطه‌ایست که مرکز کره است و همه خطهای مستقیم که از این مرکز بیرون آیند و بدین سطح بیرونی رسند یکدیگر را مساوی باشند. و چون باندیشه‌گیری که دایره‌ای را بگردانی بر قطر خویش، و آن قطر نجنبند و بر جای باشد تا دایره بجای خویش بازآید، کره کرده دارد. (ت: ۲۸ = ۱۹ : T).

ملاحظه می‌شود که بر عکس امروزه که کره را سطح تعریف می‌کنیم و آن را مکان هندسی نقاطی می‌دانیم که از یک نقطه موسوم به مرکز به یک فاصله‌اند، بیرونی کره را جسم تعریف کرده است. و اینکه در آخر تعریف اشاره کرده است که کره از دوران دایره در حول یکی از قطره‌هایش به وجود می‌آید در اینجا هم دایره را قسمتی از صفحه دانسته که از دوران آن در حول یک قطر حجم به وجود می‌آید.

درباره تعریفهای مختلفی که درباره کره کرده‌اند ← «هیث E» ج ۳، ص ۲۶۹، تعریف ۱۴.

۹/۱۵۶- کسور شصتگانی = Sexagesimal fractions

← «تجنیس» (شماره ۹/۲۳ و شماره ۹/۱۲).

برای کسب اطلاع از محاسبه با کسرهای شصتگانی نزد قدما ← «قربانی: نسوی نامه» صص

۹۳ به بعد.

۹/۱۵۷- کعب = Cube root

← «تضلیع» (شماره ۹/۲۶) و «عده‌های مجسم» (شماره ۹/۱۳۰) و نیز به اصطلاح «مرتبه‌های

طبیعی» (شماره ۹/۱۸۲).

۹/۱۵۸- کوتاهترین هر دو خُرد

← «اقصر الاقصرین» (شماره ۹/۹).

۹/۱۵۹- گوشه = (زاویه) = Angle

← «مثلث» (شماره ۹/۱۶۸).

۹/۱۶۰- مال = Square of a number

← «تجذیر» (شماره ۹/۲۲) و «مرتبه‌های طبیعی» (شماره ۹/۱۸۲) و نیز به (شماره ۹/۱۰۳).
«مال کردن» یعنی به قوه دو رساندن.

۹/۱۶۱- مانند مُعین = الشبیه بالمعین = Rhomboid

به اصطلاح امروزی «مانند مُعین» یعنی «لوزی وار» ← «چهارسوها» (شماره ۹/۴۷) و نیز به اصطلاح «متوازی‌الاضلاع» (شماره ۹/۱۶۶).

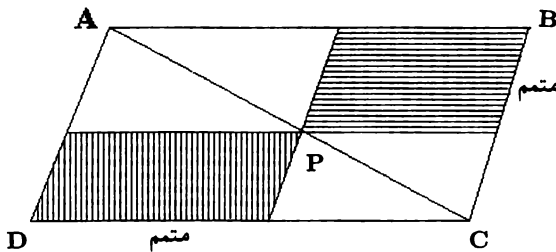
۹/۱۶۲- متماس = Tangents

متماس کدامست؟ مابین بسودن بود. و این میان هر دو دایره بود از اندرون اگر یکی خردتر باشد. و از بیرون هر چگونه باشند. و نیز میان دایره و خط راست باشد هر گاه که یک با دیگر بهم آیند بی‌آنکه یکی مر دیگر را ببرد (ت: ۱۵ = ۱۰ : T).

۹/۱۶۳- متمم = Complement of parallelogram

متمم کدامست؟ هرگاه که بر قطر سطحی متوازی‌الاضلاع دو سطح متوازی‌الاضلاع باشد، قطرهاى ایشان از قطر او سریکی با سر دیگر پیوسته باشند، آن دو باقی که از نخستین متوازی‌الاضلاع بماند بهر دو سوی دو متمم خوانند. (ت: ۱۴ = ۹ : T).

اگر از نقطه‌ای مانند P واقع بر قطر AC از متوازی‌الاضلاع ABCD (شکل ۱۸۶) دو



شکل ۱۸۶

خط به موازات AB و BC رسم کنیم چهار متوازی‌الاضلاع جدید پدید می‌آید که دو تا از آنها قطرهاشان AP و PC روی قطر متوازی‌الاضلاع نخستین قرار دارد. آن دو متوازی‌الاضلاع دیگر را متممهای متوازی‌الاضلاع ABCD می‌نامند. مساحت‌های این دو متمم با هم مساویند.

و نیز ← «هیث E» ج ۱، ص ۳۴۰ و ۳۴۱.

۹/۱۶۴- متمم قوس = Complement of arc

← «تمام جیب» (شماره ۹/۲۹).

۹/۱۶۵- متوازی = Parallel

← «خطهای متوازی» (شماره ۹/۵۳).

۹/۱۶۶- متوازی الاضلاع = Parallelogram

متوازی الاضلاع کدامست؟ آن سطح چهار پهلوست که هر دو ضلعی که برابر [= رو به روی] یکدیگر باشند متوازی باشند. و آن خط که به میان هر دو زاویه برابر [= رو به روی] یکدیگر کشیده آید قطر او بود. (ت: ۱۴ = ۹ : T).

در این تعریف اصطلاح «زاویه» به جای «رأس» آمده است. درباره انواع متوازی الاضلاع رجوع کنید به اصطلاح «چهارسوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۶۷- مثل (مفرد امثال) = Multiple

← «امثال» (شماره ۹/۱۰).

۹/۱۶۸- مثلث (انواع) = Triangle

مثلثها چند گونه اند؟ هر مثلث را سه گوشه است و برابر هر گوشه خطی راست است و او را ضلع خوانند ای [= یعنی] پهلو و او را نیز سه پهلو است. و از جهت این پهلوها بر مثلث سه نام افتد. یکی متساوی الاضلاع ای [= یعنی] راست پهلو. و این آنست که هر سه پهلو ی او مر یکدیگر را راست همچند باشند، و دوم متساوی الساقین ای راست پای و این آنست که دو پهلو ی از وی با یکدیگر راست باشند و سوم یا کمتر یا بیشتر. و سوم مختلف الاضلاع ای نه راست پهلو و این آنست که هیچ دو پهلو از وی با یکدیگر راست نباشند...

و از جهت گوشها بر مثلث سه نام افتد. یکی را از آن قائم الزاویه خوانند و این آنست که اندر او زاویه قائمه باشد. و دوم منفرج الزاویه و این آنست که اندر او زاویه منفرجه بود. و سوم حاد الزوايا و این آنست که اندر او نه قائمه بود و نه منفرجه که هر سه حاده باشد... (ت: ۹ = ۵ : T).

بیرونی اصطلاح «مثلثه» را به جای «مثلث» نیز به کار برده است. اینک معادلهای انگلیسی اصطلاحاتی که در این تعریف آمده است:

مثلث حاد الزوايا = Acute triangle

مثلث راست پای = Isoceles triangle

مثلث راست پهلو = مثلث متساوی الاضلاع = Equilateral triangle

مثلث قائم الزاویه = Right triangle

مثلث مختلف الاضلاع = مثلث نه راست پهلو = Scalene triangle

مثلث منفرج الزاویه = Obtuse triangle

۹/۱۶۹- مثلثهای متشابه = Similar tringles

مثلثهای متشابه کدامند؟- هر مثلثی که زاویه‌های او همچند زاویه‌های مثلثی دیگر باشد نظیر مر نظیر خویش را آنرا متشابه خوانند. و آن ضلعها که برابر هر دو زاویه متساوی باشند از هر دو مثلث بر یک نسبت باشند. (ت: ۲۴ = ۱۶ : T).

جالب توجه است که بیرونی شرط تشابه دو مثلث را فقط تساوی زوایای متناظر آنها دانسته است و می‌دانیم که حتی شرط تساوی دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برای تشابه آنها کافی است، بیرونی تناسب اضلاع دو مثلث متشابه را، پس از تعریف تشابه، به صورت قضیه بیان کرده است و این کمال دقت وی را می‌رساند. چه اگر زوایای دو مثلث نظیر به نظیر متساوی باشند اضلاع رو به روی زوایای متناظر بدون تردید متناسب خواهند بود (← «نه مقالة هندسه» بخش اول، صص ۱۶۳ به بعد. شماره‌های ۲۸۷ و ۲۹۲ و ۲۹۴).

۹/۱۷۰- مثلثة بالتکریر

← «نسبت مثناة بالتکریر» (شماره ۹/۲۰۵).

۹/۱۷۱- مثنی=هشت ضلعی (منتظم) = Octagon

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۷۲- مثناة بالتکریر

← «نسبت مثناة بالتکریر» (شماره ۹/۲۰۵).

۹/۱۷۳- محور = Axis

← «قطب» (شماره ۹/۱۴۳).

۹/۱۷۴- محیط (دایره) = Circumference

← «دایره» (شماره ۹/۵۵).

۹/۱۷۵- مخرج = Denominator

مخرج چیست؟- مخرج پارهای یکی درست است از پارهای کسر که تو بدو منسوب کنی و کسر همیشه خردتر بود از مخرج... و مخرج همیشه کمترین عددی باشد که آن کسر از او بیرون آید. نبینی که دو مژده را هم پنجیک بود. و سه و یازده را پنجیک بود. و لکن بسیارترین را حد نیست. و کمترین را حد است. پس آنچه بعد است اولیتر است به داشتن. (ت: ۴۳ = ۳۳ : T).

باید متوجه بود که در این تعریف کلمه «کسر» به جای اصطلاح «صورت کسر» که امروزه معمول است به کار رفته. قدام کسر را اصولاً کوچکتر از واحد می‌دانستند (به قول بیرونی: کسر همیشه خردتر بود از مخرج) و کسر را به دو نوع «کسر مفرد» و «کسر مرکب» تقسیم می‌کردند و برای هریک از این دو نوع نیز تقسیمات دیگری قایل بودند. مثلاً «کسر مفرد» را به «کسر مجرد» و «کسر مکرر» تقسیم می‌کردند و همچنین برای «کسر مرکب» انواع «کسر معطوف» و «کسر مستثنی» و «کسر مضاف» و «کسر منکسر» تمیز می‌دادند. (← «قربانی: کاشانی نامه» شماره‌های ۱۵۷ تا ۱۶۰).

۹/۱۷۶- تبصره - اصولاً پیش از دوره اسلامی محاسبه با کسرها در نزد ملل مختلف مطلب پیچیده‌ای بوده و روش محاسبه آنان با روش کنونی ما اختلاف داشته است. قدما از اینکه در آن واحد صورت و مخرج کسر را به منظور ساده کردن آن تغییر دهند احتراز می‌کردند. بابلیان غالباً کسرها را با مخرج ۶۰ (یا یکی از قوای ۶۰) می‌نوشتند. یعنی کسرهای شصتگانی^{۸۸} را به کار می‌بردند و رومیان عدد ۱۲ را به عنوان مخرج اختیار می‌کردند.

از طرف دیگر مصریان صورت کسر را واحد می‌گرفتند و مخرج را تغییر می‌دادند. آنان اصطلاح «کسر» را فقط در مورد «کسر مجرد» یعنی کسری که صورتش واحد باشد^{۸۹} به کار می‌بردند و هر کسری را که ممکن نبود به شکل کسر مجرد نوشت به مجموع کسرهای مجرد تبدیل می‌کردند. مثلاً کسر $\frac{2}{5}$ را به شکل $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ می‌نوشتند که معنی آن $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ است. البته مسئله مهم برای آنان این بود که همه کسرها را به مجموع کسرهای مجرد تبدیل کنند. برای این کار جداولی ترتیب داده بودند که به وسیله آنها هر کسر به صورت $\frac{2}{n+1}$ را، که در آن n مقادیر صحیح و مثبت بین ۱ و ۴۹ را می‌توانست اختیار کند، به مجموع کسرهای مجرد تبدیل می‌کردند. مثلاً کسر $\frac{2}{7}$ را به وسیله این جدول به شکل $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ یعنی $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ تبدیل می‌کردند. («کاثری H» ص ۱۲).

۹/۱۷۷- مخروط = Cone

مخروط چیست؟- جسمی است که قاعده او دایره باشد یا شکلی دیگر، وز آنجا کمتر همی شود تا نزدیک نقطه سپری شود. و او را ستونی [= استوانه‌ای] باشد، قاعده آن مخروط و آن [= قاعده] ستون یکی باشد، و سر مخروط مرکز آن دایره بود که بر بالا بود. اگر ستون راست بود مخروط او نیز راست بود. و اگر ستون کژ بود مخروطش نیز کژ بود. و مخروط همیشه سه یک ستونش باشد. وتیر^{۹۰} او آن خط باشد که از سر او بمرکز قاعده آید. و پهلوش آن خط راست است کز سر او محیط قاعده آید^{۹۱}. (ت: ۲۶ = ۱۸ : T).

در این تعریف بیرونی نظیر هر مخروط، استوانه‌ای در نظر گرفته که قاعده تحتانی آن قاعده همان مخروط و مرکز قاعده فوقانی آن رأس مخروط باشد. و این قضیه را خاطرنشان کرده است که: «حجم هر مخروط مساوی با یک سوم حجم استوانه‌ای است که ارتفاع و قاعده آن به ترتیب مساوی با ارتفاع و قاعده مخروط باشد» (شکل ۱۸۷).

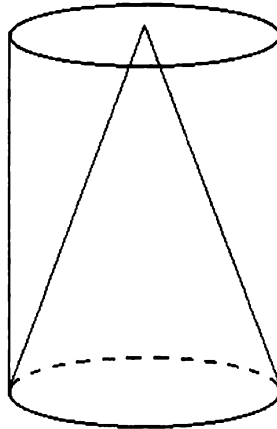
در باره تعاریف دیگر مربوط به مخروط ← «مفتاح الحساب» ص ۱۱۹ و «کشاف اصطلاحات الفنون» ج ۱، ص ۴۳۳.

۸۸. ← ۹/۱۵۶.

۸۹. به انگلیسی Unit-fraction.

۹۰. به عربی «سهم»؛ و «سهم المخروط هو الخط المستقیم الذی بین رأسه و بین مرکز قاعدته.» «التفهیم عربی» ص ۱۹.

۹۱. ترجمه انگلیسی عبارت آخرین تعریف توسط رمزی رأیت درست با متن عربی وفق نمی‌دهد.



شکل ۱۸۷

۹/۱۷۸- مخمس = (پنج ضلعی منتظم) = Pentagon

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۷۹- مدارات = Parallels

مدارات کدامند؟ آن دایره‌های خرد [= صغیره] که بر پشت کره یکدیگر را متوازی باشند. (ت: ۳۱ = ۲۲ : T).

مقصود از دایره‌های متوازی دایره‌های صغیره‌ای هستند که صفحات آنها با هم موازی باشند.

۹/۱۸۰- مربع = Square

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷) و نیز «عدد مسطح» (شماره ۹/۱۱۸).

۹/۱۸۱- مربعة بالتکریر

← «نسبت مثناة بالتکریر» (شماره ۹/۲۰۵).

۹/۱۸۲- مرتبه‌های طبیعی = Natural series Powers

مرتبه‌های طبیعی کدامند؟ هرگاه که یکی بنهی و او را به عددی در زنی [= ضرب کنی] و آنچ گرد آید هم بر آن عدد بزنی و پیوسته چنین کنی عددها بجای آید متناسب. نخستین را از آن پس یکی جذر خوانند و دوم مال و سوم کعب و چهارم مال مال و پنجم مال کعب و ششم کعب کعب. و باقی بر این قیاس رود. و نسبت یکی همیشه بجذر چون نسبت جذر باشد بمال، و چون نسبت مال بکعب و چون نسبت کعب بمال مال، و چون نسبت مال مال بمال کعب، و چون نسبت مال کعب بکعب کعب. و مثال آن بدو گونه است از عددها، یکی از ضرب به دو آمده است و از یکی از ضرب بسه (ت: ۴۶ = ۳۵ : T).

مقصود از «مرتبه‌های طبیعی» توانهای صحیح متوالی یک عدد است و به عبارت دیگر جمله‌های یک تصاعد هندسی است که نخستین جمله آن یک و قدر نسبت آن x باشد

$$1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots$$

و علت آنکه بیرونی نخستین جمله این تصاعد هندسی را یک اختیار کرده این است که خواسته است بعداً در شرح «مرتبه‌های وضعی» (شماره ۹/۱۸۳) یعنی عددنویسی در دستگاه شمار دهگانی از آن استفاده کند.

اصطلاحاتی که در این تعریف به کار رفته و معادلهای کنونی آنها به قرار زیر است:

اصطلاح قدیمی	مفهوم آن	معادل کنونی آن
جذر ^{۹۲}	پایه یک قوه (توان)	عدد a در مقام مقایسه با a^n
مال ^{۹۳}	قوة دوم عدد	a^2
کعب ^{۹۴}	قوة سوم عدد	a^3
مال مال	قوة چهارم عدد	a^4
مال کعب	قوة پنجم عدد	a^5
کعب کعب	قوة ششم عدد	a^6

برای نامیدن توانهای مختلف اعداد فقط دو لفظ «مال» و «کعب» را به کار می‌برند. و در صورت لزوم آنها را تکرار می‌کنند و قاعده این تکرار این است:

اولاً همیشه لفظ «مال» بر لفظ «کعب» مقدم است.

ثانیاً لفظ مال در هر توان بیش از دو بار به کار نمی‌رود.

ثالثاً برای نامیدن توان متوالی همواره لفظ «مال» به کعب و لفظ «مال مال» به مال کعب تبدیل می‌شود و اگر «مال» وجود نداشت نخستین لفظ «کعب» به «مال مال» تبدیل می‌گردد. از این قرار:

کعب کعب	= توان ششم
مال مال کعب	= توان هفتم
مال کعب کعب	= توان هشتم
کعب کعب کعب	= توان نهم
مال مال کعب کعب	= توان دهم
مال کعب کعب کعب	= توان یازدهم و غیره

۹۲ و ۹۳. در این مقام «جذر» را «ضلع اول» و «مال» را «مجذور» و «مربع» نیز می‌گویند.

۹۴. امروزه «کعب» را «مکعب» می‌گویم. در «التفهیم فارسی» آمده است: «و گروهی از بهر سبک کردن سخن «مکعب» را «کعب» خوانند و آنکه ناچار کعبش را «ضلع» باید خوانند.»

مقصود از قسمت اخیر تعریف «مرتبه‌های طبیعی» این است:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a^3}{a^4} = \dots$$

۹/۱۸۳- مرتبه‌های وضعی = Decimal places

مرتبه‌های وضعی کدامند؟- وضعی نهاده بود آنچ شمارگران بر آن اتفاق کردند و نهادند میان خویش و بشمار بکار بردند. و یک گونه از گونه‌های مرتبه‌های طبیعی، که اتفاق چنان کردند که یکی بده زده آید و آنچ گرد آید بده. و همیشه نسبت میان ایشان بده یک بود. و نخستین مرتبه از این مرتبه‌های وضعی احاد نام است. و اندراو یکی تا نه بود، و افزودن یک بیک. و دوم مرتبه عشرات نام است. و اندراو از ده تا نود باشد، و افزودن دهگان.^{۹۵} و سوم مرتبه مئین [= صدگان] نام است و اندراو از صد تا نهصد باشد و افزودن صدگان. و چهارم مرتبه الوف [= هزارگان] نام است و اندراو از هزار تا نه هزار بود و افزودن هزارگان.^{۹۶} و این چهارم بجای احاد بایستد زیرا که آن مرتبه که پس از اوست عشرات الوف [یعنی ده هزارگان] است، همچنانکه از پس احاد عشرات بود. پس نام یکمست هر دو را و لکن این الوف است. و هر عددی که به مرتبه‌ای باشد، یکی از آنک پیش اوست دهیک آن یکی باشد که اندر آن مرتبه است. و چون مرتبه خالی باشد از عددی بجای آن نشانی کنند از بهر نگاهداشتن او را که تهی است. و ما او را دایره خرد کنیم و او را صفر نام کنیم یعنی تهی. و هندوان او را نقطه کنند و... (ت: ۴۷ = ۳۶ : T).

ملاحظه می‌شود که این عبارات که در حدود هزار سال از تاریخ انشای آن می‌گذرد شامل وصف جامعی از مرتبه‌های وضعی یعنی دستگاه شمار دهگانی است. بیرونی پس از توصیف «مرتبه‌های طبیعی» که شرح آن در شماره ۹/۱۸۲ گذشت یعنی :

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$$

در شرح «مرتبه‌های وضعی» می‌گوید که به جای پایه x پایه 10 را می‌گذارند. و برای نوشتن اعداد در دستگاه شمار اعشاری از توانهای متوالی عدد ده استفاده می‌کنند. در واقع هر عدد را در دستگاه شمار دهگانی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_n(10)^n + a_{n-1}(10)^{n-1} + \dots + a_3(10)^3 + a_2(10)^2 + a_1(10) + a_0 \times 1$$

که در آن هر یک از ضرایب a_n یکی از ارقام $0, 1, 2, 3, \dots, 9$ است.

۹۵. یعنی «ده به ده» ← «التفهیم فارسی» صفحه قعد. پسوند «گان» به معنی تکرار است.

۹۶. یعنی «هزار به هزار».

در این صورت a_0 رقم یکان و a_1 رقم دهگان و a_2 رقم صدگان و a_3 رقم هزارگان و ... نامیده می‌شود.
مثلاً عدد ۸۷۲۰۵۴۲ یعنی:

$$۸ \times ۱۰^۶ + ۷ \times ۱۰^۵ + ۲ \times ۱۰^۴ + ۰ \times ۱۰^۳ + ۵ \times ۱۰^۲ + ۴ \times ۱۰ + ۲ \times ۱$$

قدما به جای لفظ «میلیون» که امروزه به کار می‌بریم می‌گفتند «هزار هزار» و به جای لفظ «بیلیون» (=میلیارد) می‌گفتند «هزار هزار هزار» و غیره.

عبارت «وضعی نهاده بود آنچ شمارگران بر آن اتفاق کردند و نهادند میان خویش و بشمار بکار بردند» که در آغاز تعریف «مرتبه‌های وضعی» آمده می‌رساند که انتخاب عدد ده به منزله پایه شمار دهگانی قراردادی است بین شمارگران. و می‌توان به جای عدد ده هر عدد دیگر مثلاً ۶۰ را اختیار کرد (← «برداشتن عدد» شماره ۹/۱۱).

بیرونی نوشته است. «هر عددی که بمرتبه‌ای باشد، یکی از آنک پیش اوست دهیک آن یکی باشد که اندر آن مرتبه است». امروزه می‌گوییم:

واحد هر مرتبه یک دهم واحد مرتبه بعدی است. مثلاً واحد مرتبه صدگان (یعنی ۱۰۰) یک دهم واحد مرتبه هزارگان (یعنی ۱۰۰۰) است.

این عبارت: «و چون مرتبه‌ای خالی باشد از عددی، بجای او نشانی کنند از بهر نگاهداشتن او را که تهی است. ما او را دایره خرد کنیم و او را صفر نام کنیم یعنی تهی و هندوان او را نقطه کنند» جالب توجه است و معلوم می‌دارد که قدمای ما صفر را به صورت دایره کوچکی می‌نوشته‌اند و روش ناپسند نوشتن نقطه به جای صفر در این اواخر مرسوم شده است.

۹/۱۸۴ - مرکز = Center ← دایره (شماره ۹/۵۵).

۹/۱۸۵ - مسبع = هفت ضلعی (منتظم) = Heptagon

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۸۶ - مستطیل = Rectangle

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۸۷ - مسدس = شش ضلعی (منتظم) = Hexagon

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۸۸ - مسقط حجر = Where the stone falls

مسقط حجر کدام است؟- آن نقطه است از قاعده که عمود بدو رسد. گروهی مردمان خردترین آن دو پاره را که قاعده از عمود منقسم می‌شود مسقط الحجر خوانند و این نه بسخن اندر خوراست و نه بمعنی (ت: ۱۰ = ۶ : T).

مسطط حجر یعنی پای ارتفاع مثلث. به فرض آنکه مثلث در وضعی باشد که ارتفاع آن خط قائم باشد.

۹/۱۸۹- مضلعات = (Regular) Polygon

یعنی چند ضلعی (منتظم) ← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۹۰- مَطْوِی

یعنی «نور دیده» ← «عددهای مشترک» (شماره ۹/۱۳۳).

۹/۱۹۱- مُعین = لوزی = Rhombus

← «چهار سوها» (شماره ۹/۴۷).

۹/۱۹۲- مفردات برابر یکدیگر = (المفردات المتعادل) = Simple equations

مفردات برابر یکدیگر چگونه اند؟- جبر و مقابله بر سه چیز همی رود. نخستین عدد است، جریده بی نام دیگر. و دوم عددی است که جذر باشد مالی را. و سوم عددی است که مال باشد جذر را و از میان ایشان سه گونه جفت آید. نخستین جذرها برابر عدد. و معنی او آنست که کدام مال است که یک جذر او یا چند جذر او برابر چندین عدد بود^{۹۷}. دوم مالها برابر جذرها. و معنی او آنست که کدام مال است یا چندین مال که برابر جذر یا چندین جذریکی از آن مالها باشد^{۹۸}. و سوم مالها برابر عدد. و معنی او آنست که کدام مال است یا چندین مال که برابر چندین عدد باشد^{۹۹} (ت: ۴۹ = ۳۸ : T).

مقصود از «مفردات» معادلاتی است که در هر طرف آن فقط یک جمله باشد. این معادلات با در نظر گرفتن اینکه اولاً قدما عددهای منفی را به کار نمی بردند و ثانیاً، تا زمان خیام بیشتر معادلات درجه اول و دوم را در نظر می گرفتند به سه نوع تقسیم می شد. از این قرار:

(a و b و c اعداد مثبت هستند)

$$\text{مفردات : } \begin{cases} ax = c & \text{جذرها برابر عدد} \\ ax^2 = bx & \text{مالها برابر جذرها} \\ ax^2 = c & \text{مالها برابر عدد} \end{cases}$$

برای کسب اطلاع از طبقه بندی معادلات در آثار دانشمندان اسلامی ← «مصاحب: حکیم خیام» ص ۱۴ به بعد.

۹/۱۹۳- مقابله

← «جبر و مقابله» (شماره ۹/۳۵).

۹۷. یعنی معادله $ax = c$ که در آن a و c اعداد مثبت هستند.

۹۸. یعنی معادله $ax^2 = bx$ که در آن a و b اعداد مثبت هستند.

۹۹. یعنی معادله $ax^2 = c$ که در آن a و c اعداد مثبت هستند.

۹/۱۹۴- مقترنات برابر یکدیگر = Composite equations

مقترنات برابر یکدیگر چگونه اند؟ این آنست که دو مفرد را برابر سوم ایشان کنی او را نیز سه جفت آید [به سه نوع است]... و مقرون نخستین از آن آنچ برابر عدد بود چون مالها و جذرها برابر عدد. و معنی او آنست که کدام مال است که اگر بروی جذر او یا چندین جذر او فزاییم برابر چندین عدد بود...^{۱۰۰} و مقرون دوم آنچ برابر جذر باشد، چون مالها و عددها برابر جذرها. و معنی او آنست که کدام مال است که اگر بروی چندین عدد افزائی برابر جذر خویش یا چندین جذر او باشد^{۱۰۱} و این مقرون دوم وقتها دو رویه بود، و سؤال از دو جواب احتمال کند... و مقرون سوم آنچ برابر مال بود چون جذرها و عدد برابر مال. و معنی او آنست که کدام مال است که برابر چندین عدد و چندین جذری از آن او باشد^{۱۰۲} (ت):
 $(T: 39 = 49)$

در متن فارسی «التفهیم» این اصطلاح به صورت مقترنات ثبت شده و در حاشیه صفحه ۴۹ «التفهیم فارسی» به صورت «مقترنات» اشاره شده و در «التفهیم» عربی به شکل «المقترنات المتعادله» آمده است. صورت درست این اصطلاح که در همه کتابهای دیگر نیز به کار رفته «مقترنات» است. مثلاً ابو عبدالله خوارزمی* در کتاب جبر و مقابله خود نوشته است^{۱۰۳}:

«و وجدت هذه الضروب الثلاثة التي هي الجذور والاموال والعدد يقترن فيكون منها ثلاثة اجناس مقترنة». نصیرالدین طوسی* در «رسالة جبر و مقابله» خود (صفحة ۱۵) نوشته است: «والمقترنات ثلاثة، الاول مال و شيء يعدل عدد...» عبدالحمید بن واسع جیلی* در کتاب جبر و مقابله خود فصلی دارد به نام «الضروریات فی المقترنات» که متن عربی و ترجمه انگلیسی آن به چاپ رسیده است^{۱۰۴}.

مقصود از مقترنات برابر یکدیگر معادلات درجه دوم است که چون قدما عددهای منفی را به کار نمی بردند آنها را به سه دسته تقسیم می کردند که با اصطلاحات کنونی به صورت زیر نوشته می شود:

۱۰۰. یعنی معادله $ax^2 + bx = c$ و a و b و c اعداد مثبت هستند (مثال: $x^2 + 10x = 39$).

۱۰۱. یعنی معادله $ax^2 + c = bx$ (مثال: $x^2 + 30 = 13x$).

۱۰۲. عبارت «التفهیم» فارسی که به نظر صحیح نمی آمد به قرینه از روی عبارت عربی تصحیح شد: «و معناه ای مال یساویه عدداً اذا زيد علی جذره او عده من اجزاء» یعنی معادله $ax^2 = bx + c$ (مثال: $x^2 = 5x + 6$).

۱۰۳. ← «جبر و مقابله خوارزمی» متن عربی ص ۵.

۱۰۴. ← «صایلی L».

(a و b و c اعداد مثبت هستند)

$$ax^2 + bx = c \quad \text{مالها و جذرها برابر عدد}$$

$$ax^2 + c = bx \quad \text{مالها و عدد برابر جذرها}$$

$$bx + c = ax^2 \quad \text{جذرها و عدد برابر مال}$$

برای کسب اطلاع از بحث در این معادلات در ریاضیات دوره اسلامی ← «گائثر O» ص ۵۱۱ به بعد. و نیز ← «مصاحب: حکیم خیام» ص ۱۱۴ به بعد.

۹/۱۹۵. مقدارهای متناسب (اقدار متناسبه) = Proportional magnitudes

مقدارهای متناسب کدامند؟- چهار چیز باشد که نسبت نخستین بدوم همچون نسبت سوم بچهارم بود. خواهی دوم همچند سوم باشد و خواهی نباشد. و خاصیت این آنست که نخستین بچهارم در زنی همچنان بود که دوم بسوم در زنی. و ضرب همیشه میان آن دو بود که یک با دیگر برابر باشند بر قطر. اما قسمت نباید مگر بدانک برابر باشند بر ضلع نه بر قطر. نبینی که اگر دوم بر نخستین قسمت کنی همچنان بود که چهارم بر سوم قسمت کنی و یک چیز بیرون آید از هر دو قسمت. و نیز اگر سوم بر نخستین قسمت کنی همچنان بود که چهارم بر دوم قسمت کنی (ت: ۱۹ = ۱۲ : T).

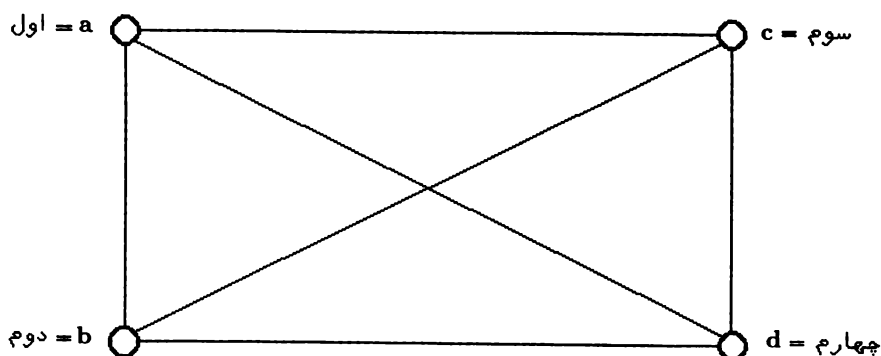
در تعریف اصطلاح «تناسب» (شماره ۹/۳۲) دیدیم که «تناسب» به قول بیرونی یعنی متساوی بودن چند نسبت مثل ۱ : ۵ : ۲۵ : ۱۲۵ : ۰۰۰ یعنی

$$\frac{1}{5} = \frac{5}{25} = \frac{25}{125} = \dots$$

مقصود از «مقدارهای متناسب» که در تعریف فوق آمده است، چیزی است که امروزه «تناسب» می‌نامیم. بیرونی در تعریف فوق تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را به صورت زیر تجسم کرده و خاصیت‌های زیر را از تناسب متذکر شده است: (شکل ۱۸۸). $ad = bc$ (و ضرب همیشه میان آن دو بود که یک با دیگر برابر باشند بر قطر)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \end{array} \right. \quad \text{(اما قسمت نباید مگر بدانک برابر باشند بر ضلع نه بر قطر).}$$

۹/۱۹۶. مقدم = Antecedent



شکل ۱۸۸

«مقدم» یعنی «صورت نسبت» ← «تالی» (شماره ۹/۲۱).

۹/۱۹۷ - مکعب = Cube

مکعب چیست؟-شکلی است مجسم همچون کعبتین نرد گرد بر گرد او شش مربع تا درازا و پهنا و بالای او یکسان باشد (ت: ۲۵ = ۱۷ : T).

این تعریف «مکعب» مربوط به شش وجهی منتظم است که قدما آن را «شکل زمینی» نیز می نامیدند (← ۹/۹۵). اما «مکعب عدد» را قدما «کعب» نیز می گفتند (← ۹/۱۸۲).

۹/۱۹۸ - منحرف = Trapezium = Quadrilateral

«منحرف» یعنی چهار ضلعی غیر مشخص و به معنی ذوزنقه نیز آمده است. (← شماره ۹/۴۷).

۹/۱۹۹ - منشور = Prism

منشور چیست؟-او شکلی است که بر پهلوها و سه سطح مربع باشد یا مستطیل و دو مثلث یکی زیر و یکی زیر. و گاه باشد که آن مربعها معین^{۱۰۵} [= لوزی] باشند و مستطیلها شبیه بالمعین^{۱۰۶} [= لوزی وار]. (ت: ۲۵ = ۱۸ : T).

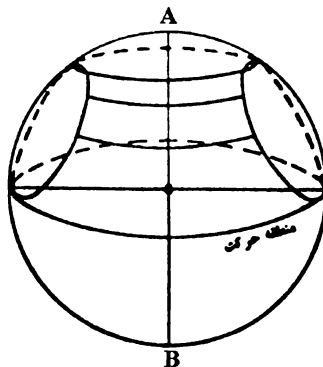
این تعریف منشور مثلث القاعده است که البته سطوح جانبی آن ممکن است مربع یا لوزی یا مستطیل و یا لوزی وار باشند.

در «تحریر اصول اقلیدس» توسط نصیرالدین طوسی* نیز منشور همین گونه تعریف شده

است^{۱۰۷}. اما در ترجمه انگلیسی «اصول اقلیدس» منشور به طور کلی تعریف شده است^{۱۰۸}
 ۹/۲۰۰. منطقه حرکت = Equator of movement

منطقه حرکت چیست؟- این آن دایره بزرگ بود که میان دو قطب باشد که حرکت کره با ایشان راست بود. وز بهر آن او را منطقه خوانند که جای کمر میانگاه بود. و آن منطقه بر خویشتن گردد و سطح او جز خویشتن رسم نکند. فاما دیگر دایره‌ها، چون کره گردد، یا کره را همی رسم کنند یا پاره‌ای را از او مانده چنبرد (ت):
 ۳۱ = ۲۲ : T.

اگر فرض کنیم که کره‌ای در حول یکی از قطرهای خود دوران کند، (شکل ۱۸۹) در این



شکل ۱۸۹

مقام دایره عظیمه‌ای که صفحه‌اش بر آن قطر عمود باشد منطقه حرکت نامیده می‌شود. وقتی کره در حول آن قطر دوران می‌کند این دایره و سطح آن روی خود حرکت می‌کند (او جز خویشتن رسم نکند). همچنین است دایره‌های صغیره‌ای که صفحات آنها عمود بر قطر مذکور باشد یعنی «مدارات».

اما دایره‌های عظیمه‌ای که از دو قطب بگذرند محیطشان سطح کره را رسم می‌کند و سطحشان حجم کره را می‌پیماید.

اگر دایره صغیره‌ای بر سطح کره فرض شود که صفحه‌اش بر قطر AB عمود نباشد و حول قطر AB از کره دوران کند از دوران آن جسمی حاصل می‌شود که بیرونی آن را به چنبرد تشبیه کرده است. (شکل ۱۸۹).

۹/۲۰۱. نسبت = Ratio

نسبت چه باشد؟- حالی است میان دو چیز همجنس که بدان حال اندازه یکی از

۱۰۷. «تحریر اقلیدس» ص ۱۵۵: «المنشور هو الذي يحيط به ثلثة سطوح متوازية الاضلاع و مثلثان».

۱۰۸. — «هیئت E» ج ۳، صص ۲۶۱ و ۲۶۸ تعریف ۱۳.

دیگر دانسته شود چون بدو قیاس کنی. چنانک مرد را پدر نام کنی چون بپسرش قیاس کنی. و او را نیز پسر نام کنی چون قیاس کنی بپدرش. همچنان چیز را نیز نیمه چیزی نام کنی و این را دو توی [= دو برابر] او. پس این حال را که بمیان ایشان افتد نسبت نام است (ت: ۱۹ = ۱۱ : T).

← بخش چهارم کتاب حاضر (شماره ۴/۳). در کتاب «هیث E» ج ۲، صص ۱۱۶ تا ۱۱۹، بحث جامع و جالبی درباره اصطلاح «نسبت» خواهید یافت. بیرونی گاهی کلمه «نسبت» را به جای «تناسب» نیز به کار برده است. درباره اعمالی که در مورد «نسبت» و «تناسب» انجام می‌شود، ← «ابدال نسبت» (شماره ۹/۵) و «ترکیب نسبت» (شماره ۹/۲۵) و «تفصیل نسبت» (شماره ۹/۲۷) و «عکس نسبت» (شماره ۹/۱۳۴) و «قلب نسبت» (شماره ۹/۱۵۱) و «نسبت متکافی» (شماره ۹/۲۰۳) و «نسبت مثناة بالتکریر» (شماره ۹/۲۰۵) و «نسبت مساوات» (شماره‌های ۹/۲۰۷ و ۹/۲۰۸) و «نسبت مؤلف» (شماره ۹/۲۱۱).

۹/۲۰۲. نسبت ذات وسط و طرفین = Mean and extreme ratio.

نسبت ذات وسط و طرفین چیست؟ هرگاه که خطی باشد بدو پاره کرده چنانک نسبت خردترین قسمتی بزرگترین همچنان باشد چون نسبت بزرگترین بجملة هر دوان، یعنی همه خط، این را نسبت ذات وسط و طرفین خوانند (ت: ۲۴ = ۱۷ : T).

هرگاه روی پاره خط AB نقطه M را طوری اختیار کنیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{MB}{AB}$$

و یا $\overline{MB}^2 = AM \cdot AB$ می‌گویند پاره خط AB در نقطه M به نسبت ذات وسط و طرفین



شکل ۱۹۰

تقسیم شده است. (برای توضیح بیشتر ← «نه مقاله هندسه» بخش اول، ص ۱۹۷).

۹/۲۰۳. نسبت متکافی = (تکافی النسبة) $\text{Inverse proportion} = 109$

نسبت متکافی کدام است؟ این آنست که دوم و سوم بیکی جانب باشند و این به کپان [= قبان] پیدا آید که نسبت دوری عقرب که جای آویختن زنجیرهاست از

علاقه^{۱۱۰} بدوری ناره^{۱۱۱} از علاقه، همیشه چون نسبت گرانی ناره است بگرانی بار (ت: ۲۵ = ۱۷ : T).

«نسبت متکافی» یعنی «تناسب معکوس». در «التفهیم فارسی» این اصطلاح به صورت «نسبت متکافی» و در «التفهیم عربی» به شکل «تکافی النسبة» ثبت شده و هر دو صورت در ریاضیات و مخصوصاً در فیزیک قدیم به کار رفته است.

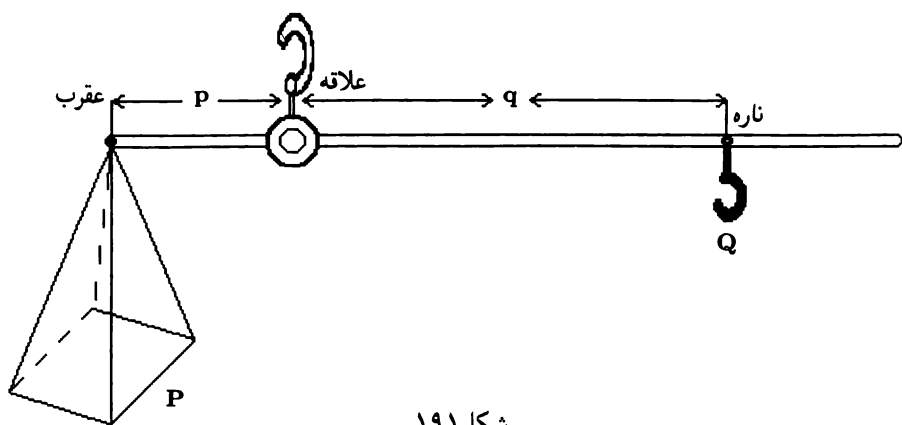
اگر دو مقدار P و Q از کمیتی به ترتیب با مقادیر p و q از کمیتی دیگر متناظر باشند، ولی نسبت $\frac{P}{Q}$ مساوی با $\frac{p}{q}$ نبوده بلکه مساوی با عکس آن $\frac{q}{p}$ باشد، در این صورت اصطلاحی که امروزه به کار می‌بریم این است که می‌گوییم P و Q معکوساً با p و q متناسب‌اند.

در قدیم این اصطلاح را به صورتهای زیر به کار می‌بردند:

مقادیر P و Q با مقادیر p و q به تکافؤ متناسب‌اند.

و یا: مقادیر P و Q با مقادیر p و q نسبت متکافی دارند.

مثالی که بیرونی برای نسبت متکافی در مورد قیان آورده بهترین مثال است. اگر در شکل ۱۹۱ وزن بار را P و وزن «ناره» را Q و فاصله «عقرب» از «علاقه» را p و فاصله «ناره» را از «علاقه» را



شکل ۱۹۱

q بنامیم، در فیزیک دیده‌ایم که وقتی قیان در حال تعادل باشد داریم:

$$P \times p = Q \times q$$

۱۱۰. علاقه به کسر عین یعنی هر چیزی که به آن چیزی را آویزند. در اینجا مقصود جای آویختن قیان است که آن را «معلق» نیز گفته‌اند. ← «میزان الحکمه» ص ۵۰ و شکل صفحه مقابل آن در همان کتاب.

۱۱۱. ناره یعنی سنگی که از قیان می‌آویزند به جهت وزن کردن اجناس سنگ قیان.

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$$

یعنی P و Q معکوساً با p و q متناسب‌اند. یا به اصطلاح قدما «به تکافو متناسب‌اند» یا «نسبت متکافی» دارند.

عبدالرحمان خازنی* در کتاب «میزان الحکمه» (ص ۴۳) این مطلب را چنین بیان کرده است: «ان کل عمود تعلق بنقطة غیرالوسط و يجعل على طرفیه ثقلان، نسبة احدهما الى الآخر كنسبة احد قسمی العمود الى الآخر بالتکافوء».

و نیز در صفحه ۳۹ همان کتاب آمده است: «و تكون نسبة احد البعدين الى الآخر كنسبة احد الثقلين الى الآخر بالتکافوء و انما صار وجود هذه النسبة المتکافئة علة لاستقرار الجرمين».

۹/۲۰۴ - نسبت مثلثه بالتکریر = Triplicate ratio ← ۹/۲۰۵

۹/۲۰۵ - نسبت مثناة بالتکریر = Duplicate ratio

نسبت مثناة بالتکریر کدام است؟- چون نسبت پیوسته شود میان اندازه‌ها تا نسبت نخستین بدوم چون نسبت دوم بسوم باشد و چون نسبت سوم بچهارم و چون نسبت چهارم به پنجم و همچنین. نسبت نخستین بسوم چون نسبت نخستین بدوم مثناة بالتکریر ای [= یعنی] «دوباره گفته». و نسبت نخستین بچهارم چون نسبت نخستین بدوم مثلثه بالتکریر یعنی «سه باره گفته». و پنجم مربعه بالتکریر ای «چهار باره گفته» و باقی بر این قیاس. نبینی که اگر این نسبت میان مقادیرها مثلاً نیمه باشد، نخستین از دوم نیمه باشد و از سوم نیمه نیمه تا این نیمه دوباره گفته آید. و نسبت از چهارم نیمه نیمه نیمه باشد، این نیمه را سه باره گفته آید. و نزدیک پنجم چهار بار. و همچنان تا اگر نسبت این نیمه نباشد و لکن سه یک یا چهار یک یا دیگر چیز از اجزا و اضعاف (ت: ۲۲ = ۱۴ : T).

«مثناة بالتکریر» با اصطلاحات کنونی یعنی : «به قوه دو» یا «به توان دو».

اگر چندین عدد داشته باشیم مانند a و b و c و d و e به قسمی که نسبت اولی به دومی مساوی باشد با نسبت دومی به سومی و مساوی باشد با نسبت سومی به چهارمی و غیره. یعنی

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$$

در این صورت واضح است که:

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

در این صورت می‌گویند که نسبت a به c مساوی است با نسبت a به b مثلاً بالتکریر. امروزه می‌گوییم نسبت $\frac{a}{c}$ مساوی است با نسبت $\frac{a}{b}$ به توان دو. همچنین می‌توان نوشت:

$$\frac{a}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

بنابراین می‌گویند نسبت $\frac{a}{d}$ مساوی است با نسبت $\frac{a}{b}$ مثلاً بالتکریر و امروزه می‌گوییم نسبت $\frac{a}{d}$ مساوی است با نسبت $\frac{a}{b}$ به توان سه. همچنین چون

$$\frac{a}{e} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

می‌گویند نسبت $\frac{a}{e}$ مساوی است با نسبت $\frac{a}{b}$ مربعة بالتکریر و امروزه می‌گوییم: نسبت $\frac{a}{e}$ مساوی است با نسبت $\frac{a}{b}$ به توان چهار.

برای روشن شدن موضوع چند مثال ذکر می‌کنم:
مثال ۱ - نسبت $\frac{a}{b}$ مساوی است با $\frac{3}{5}$ مثلاً بالتکریر یعنی:

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

مثال ۲ - نسبت $\frac{p}{q}$ مساوی است با $\frac{1}{4}$ مثلاً بالتکریر یعنی:

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

مثال ۳ - نسبت $\frac{m}{n}$ مساوی است با $\frac{7}{9}$ مربعة بالتکریر یعنی:

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{7}{9}\right)^4$$

(و) «هیث E » ج ۲، ص ۱۳۲، تعریف ۹ و ۱۰).

۹/۲۰۶ - نسبت مربعة بالتکریر ← ۹/۲۰۵.

۹/۲۰۷ - نسبت مساوات مضطرب^{۱۱۲} = Perturbed proportion

۱۱۲. رمزی رایت اصطلاح «نسبت مساوات مضطرب» را به انگلیسی Proportion by inordinate equality ترجمه کرده ولی ترجمه‌ای که در متن نوشته‌ام رساتر است. ← «هیث E » ج ۲، ص ۱۱۵، تعریف ۱۸ و ص ۱۳۶ همان کتاب.

نسبت مساوات مضطرب ای ناهموار کدام است؟- چون نسبت نخستین بدوم همچون نسبت چهارم به ششم باشد و نسبت دوم بینجم همچون نسبت سوم بچهارم باشد و میانه‌ها فکنده شود و کرانه‌ها متناسب بماند، نسبت نخستین بینجم همچنان باشد چون سوم به ششم و این را نسبت مساوات مضطرب خوانند... (ت: $T: 14 = 21$).

از این اصطلاح در شکل (= قضیه) بیست و سوم از مقاله پنجم از کتاب «اصول اقلیدس» استفاده شده^{۱۱۳} و خلاصه آن به زبان ساده این است:

اگر سه مقدار a_1 و a_2 و a_3 و سه مقدار a_4 و a_5 و a_6 داشته باشیم به قسمی که

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_6} \\ \frac{a_2}{a_5} = \frac{a_3}{a_4} \end{cases}$$

و

و تساویهای فوق را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_3}{a_6}$$

و این را نسبت مساوات مضطرب یا نسبت مساوات ناهموار می‌نامند.

۹/۲۰۸- نسبت مساوات منتظم^{۱۱۴} Ratio ex aequali =

نسبت مساوات منتظم ای هموار چیست؟- چون نسبت نخستین بدوم همچون نسبت سوم بچهارم باشد و نسبت دوم بینجم همچون نسبت چهارم به ششم باشد، و همچنین اگر بسیار باشد، کرانه‌ها یک با دیگر متناسب باشند. و این را نسبت مساواة گویند چون میانه‌ها بیرون آری. و معنی کرانه‌ها آن است که نسبت نخستین بماند بینجم همچون نسبت سوم بششم... (ت: $T: 13 = 21$).

این اصطلاح در شکل بیست و دوم از مقاله پنجم «اصول اقلیدس» به کار رفته^{۱۱۵} و مورد استعمال آن فقط قسمی نامگذاری است برای ارجاع و اشاره به قضیه زیر:

قضیه - اگر a و b و c و d ... مجموعه‌ای از مقادیر باشند و همچنین A و B و C و D

۱۱۳. — «هیئت E» ج ۲، ص ۱۸۱- و «تحریر اقلیدس» ص ۸۱: «اذا كان صنفان من المقادير متساويا العدة كل اثنين من صنف على نسبة اثنين من الصنف الاخر واضطربت النسب فانها في السماواة متناسبة».

۱۱۴. رمزی رایت این اصطلاح را به انگلیسی Proportion by ordinate equality ترجمه کرده ولی آنچه در متن نوشته‌ام رساتر است. — «هیئت E» ج ۲، ص ۱۱۵ و ۱۳۶، تعریف ۱۷.

۱۱۵. — «هیئت E» ج ۲، ص ۱۷۹ و «تحریر اقلیدس» ص ۸۰.

و...مجموعه دیگری از مقادیر نظیر مقادیر مجموعه اول باشند به قسمی که داشته باشیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{B}{C}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$$

.....

و آخرین نسبت $\frac{k}{l} = \frac{K}{L}$ باشد.

(صورت هر نسبت مخرج قبلی است).

اگر تساویهای فوق را عضو به عضو در هم ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$\frac{a}{l} = \frac{A}{L}$$

یعنی نسبت نخستین مقدار از مجموعه اول به آخرین مقدار از همان مجموعه مساوی است با نسبت مقادیر نظیر آنها از مجموعه دوم. و این را نسبت مساوات منتظم یا هموار می‌خوانند.

۹/۲۰۹ - نسبت مساوات ناهموار ← ۹/۲۰۷

۹/۲۱۰ - نسبت مساوات هموار ← ۹/۲۰۸

۹/۲۱۱ - نسبت مؤلف = Compound ratio

نسبت مؤلف کدام است؟-این مؤلف آئی [= یعنی] بهم کرده، همچون مثلاً بالتکریر باشد. و لکن آن از دو نسبت هموار (هموار) است چون نیمه نیمه. و این از دو نسبت مختلف است...و این چنان است که نسبت میان دو اندازه باشد. و آنکه میان ایشان اندازه سوم نهی از جنس ایشان. آن نسبت نخستین مؤلف شود از نسبت یکی از آن دو بمیان. و از نسبت میانه بدیگرم. همچنانکه، راه میان دو شهر مؤلف باشد از آن منزلها که اندر او باشد. و بجای مؤلف گاه‌گاه مثلاً گویند. تا نسبت اولین با آخرین چون نسبت اولین بمیانگی باشد مثلاً، بنسبت میانگین با آخرین. و اینجا مؤلف خویتر است از مثلاً و اندر خویتر (ت: ۲۳ = ۱۵ : T).

نسبت مؤلف یعنی نسبتی که از حاصل ضرب دو نسبت دیگر تألیف شده باشد مثل

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$$

و می‌گویند نسبت $\frac{a}{b}$ تألیف شده است از نسبت $\frac{c}{d}$ و نسبت $\frac{e}{f}$.

مثلاً نسبت $\frac{1}{6}$ مؤلف است از دو نسبت $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ زیرا

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

برای کسب اطلاع بیشتر در این باره ← بخش چهارم کتاب حاضر (شماره ۴/۶).
۹/۲۱۲ - نقطه = Point

نقطه چیست؟ — چون خط را نهایت باشد نهایت او نقطه بود و نقطه کمتر از خط باشد یک بعد و خط را جز طول نیست. و بدانکه نقطه را نه طول است و نه عرض و نه عمق و او نهایت همه نهایتهاست و از بهر این او را جزو نیست و صورتش بندد از محسوس به سر سوزن تیز. و هریک از سطح و خط و نقطه موجودند به جسم اما جدا از جسم ایشان را وجود نیست مگر بوهم بس (ت):
($T : 3 = 6$).

برای تعریفهای مختلفی که درباره نقطه کرده‌اند ← «هیث E» ج ۱، صص ۱۵۵ تا ۱۵۸، تعریف ۱. در آنجا بحث مفصلی در این باره خواهید یافت.

۹/۲۱۳ - نوردیدن عدد = (الطی) = Reduction to lowest terms

نوردیدن عدد چیست؟ — هرگاه که دو عدد بود مشترک^{۱۱۶} و هریکی را بر آن وفق قسمت کنی که میان ایشانست، آنج بیرون آید بجای ایشان کار تواند کردن و این نوردیدن ایشان بود (ت: $45 : 35 = T$).

نوردیدن صورت و مخرج کسر یعنی تبدیل کسر به کسر تحویل ناپذیر. بنابراین اگر دو عدد متوافق باشند یعنی بزرگترین شمارنده مشترک آنها بزرگتر از یک باشد برای نوردیدن آنها کافی است آن دو را بر وفقشان یعنی بزرگترین شمارنده مشترکشان تقسیم کنیم.

مثلاً اگر بخواهیم صورت و مخرج کسر $\frac{15}{33}$ را در نوردیم کافی است آنها را بر وفقشان که ۳ است تقسیم کنیم تا حاصل شود $\frac{5}{11}$ که معادل با کسر $\frac{15}{33}$ است.

۹/۲۱۴ - نیم قطر = (شعاع) = Radius

قدما به جای شعاع دایره اصطلاح «نیم قطر» را به کار می بردند.
← «جیب بزرگتر» شماره ۹/۴۳.

۹/۲۱۵ - وتر دایره = Chord ← ۹/۱۴۴.

۹/۲۱۶ - وتر مثلث قائم الزاویه = Hypotenuse ← ۹/۹.

۹/۲۱۷ - همچند = Equal = Equivalent

اصطلاح «همچند» مکرراً در «التفهیم» به معنی «مساوی با» و «معادل با» به کار رفته است.

مثلاً در صفحه ۱۰ «التفهیم فارسی» می‌خوانیم: «مثلث راست پهلوی. و این آنست که هر سه پهلوی او مر یکدیگر را راست همچند (=درست متساوی) باشند.

۹/۲۱۸- همه جیب=Radius ← ۹/۴۳.

۹/۲۱۹- هندسه = Geometry

هندسه چیست؟- دانستن اندازه‌ها و چندی یک از دیگر و خاصیت صورتها و شکل‌ها که اندر جسم موجود است. و علم عدد بدو کلی گردد از پس آنک جزوی بود و علم صورتِ عالم حقیقت گردد از پس آنک بتخمین بود. (ت: ۳ = ۱ : T).

۹/۲۲۰- یکی = (واحد) = unit

یکی چیست؟- آنست که یگانگی بر او افتد و بدو نام زده شود. و از تمامی وی آنست که کمی و بیشی نپذیرد وز حال خویش بضرب و قسمت نگردد و اندر قوت همه عددهاست و همه خاصیت‌های ایشان. و حال یکی اندر آن چیزها که شمرده شود بدو هر چند یگانگی او نه بحقیقت باشد و لکن نهادن مردمان یک با دیگر [نیز همچنان است]. و این یکی استاده است میان آن عددها که از مانده او گرد آید بجمله شدن و میان آن پاره‌ها که از او کمترند... (ت: ۳۳ = ۲۳ : T).

درباره تعریفهای مختلف «واحد» ← «هیث E» ج ۲، ص ۲۷۹ تعریف ۱.

رمزی رایت اصطلاح «یکی» یعنی «واحد» را به انگلیسی «one» ترجمه کرده ولی «Unit» بهتر است.

بخش دهم

زندگینامه مختصر ریاضیدانان

اسامی عده‌ای از ریاضیدانان دوره اسلامی در متن کتاب حاضر آمده و با علامت * ممتاز شده است. درباره آثار و احوال این ریاضیدانان در کتاب دیگر خود موسوم به «زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی» تا آنجا که اطلاع داشته‌ام بحث کرده‌ام. اینک برای آن عده از خوانندگان که احیاناً کتاب مذکور را در دسترس ندارند، به ذکر مختصری درباره هر یک از آنان می‌پردازم.

آذرخور پسر استاد جُشنش، ابوالحسن

ریاضیدانی بوده است معاصر با بیرونی، زیرا بیرونی در بعضی از مواضع کتاب «آثارالباقیه» مطالبی را که از او شنیده نقل کرده است. نام او در «آثارالباقیه»، چاپ زاخاتو، در سه موضع به صورتهای «ابوالحسن آذرخورای یزدانخسیس المهندس» و «ابوالحسن آذر، المهندس» و «آذرخور المهندس» و در «استخراج الاوتار» چاپ حیدرآباد، در دو موضع به صورت «آذرخور ابن اشتاذ جشنش» ثبت شده است. (←: «قربانی Z » ص ۱۱، ش ۱).

آملی ← محمد بن محمود آملی

ابراهیم بن سنان

ابواسحاق ابراهیم بن سنان بن ثابت بن قُره — مانند پدرش (سنان بن ثابت) و جدش ثابت بن قُره در علوم فلسفه و ریاضی و نجوم و طب مهارت داشت و مخصوصاً در هندسه زبردست بود و در زمان او کسی در این علم بر وی تقدم نداشت. در سال ۲۹۶/۹۰۸ در بغداد به دنیا آمد و نزد

پدر و معلمان دیگر فنون و علوم آن زمان را فرا گرفت و کتابهای بسیار تألیف کرد و در جوانی به سن ۳۸ سالگی در سال ۳۳۵/۹۴۶ درگذشت.

پنج رساله از وی به سال ۱۳۶۷/۱۹۴۸ در حیدرآباد دکن با عنوان «رسائل ابن سنان» به چاپ رسیده است که از آن جمله است «مساحة قطع المخروط المكافى». این رساله به زبان آلمانی نیز ترجمه شده است. روشی که ابراهیم بن سنان در این رساله برای محاسبه مساحت سهمی به کار برده است بسیار ساده‌تر از روش ارشمیدس و بهترین روشی است که پیش از اختراع حساب انتگرال در این مسئله به کار می‌رفت. (← «قربانی Z» ص ۱۲، ش ۲).

ابن بامشاد ← ابوالحسن، ابن بامشاد.

ابن البغدادی

ابوعبدالله حسن بن محمد بن حمله معروف به ابن البغدادی — (شرح احوال وی را در هیچ‌یک از منابع معتبری که در اختیار دارم نیافتم).

بیرونی در کتاب «مقالید علم الهیة» نام وی را به‌طور خلاصه «ابن البغدادی» و در جزو ریاضیدانان محدث و همردیف با سلیمان بن عصمة و ابوسعید سجزی آورده و از این‌رو معلوم می‌شود که وی معاصر با بیرونی بوده و یاکمی پیش از وی می‌زیسته است. کتاب «فی المقادیر المشتركة والمتباينة» از تألیفات ابن البغدادی در سال ۱۳۶۶/۱۹۴۷ در جزو «الرسائل المتفرقة فی الهیة للمتقدمین و معاصری البیرونی» در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است (در ۱۰۸ صفحه). بنا به گفته بیرونی (در مقدمه کتاب مقالید) وی کتاب یا مقاله‌ای درباره «شکل قطاع» نوشته بوده است.

ابن ترک ← عبدالحمید بن واسع جیلی

ابن سالار ← علی بن فضل‌الله سالار

ابن سنان ← ابراهیم بن سنان

ابن سینا ← ابوعلی سینا

ابن عراق ← ابونصر عراق

ابوبکر کرجی

ابوبکر محمد بن حسین (یا حسن) کرجی — تا چندی قبل به غلط وی را «کرخ» می‌نامیدند و او را به «کرخ» واقع در حومه بغداد منسوب می‌دانستند و از اهل عراق می‌شمردند. از ریاضیدانان بزرگ ایران در نیمه دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری و از مردم کرج واقع در نزدیکی تهران کنونی بوده است. سال وفات او را ۴۲۰/۱۰۲۹ نوشته‌اند.

از تألیفات مهم او در ریاضیات یکی کتاب «الفخری فی الجبر والمقابلة» است که وپکه منتخباتی از آن به زبان فرانسوی فراهم آورده و به چاپ رسانیده است. و دیگر کتاب «الکافی فی الحساب» است که به زبان آلمانی ترجمه شده و بر آن دو شرح به زبان عربی نوشته‌اند. تألیفات دیگر

وی در ریاضیات عبارت‌اند از: «البدیع فی الحساب» — «علل حساب الجبر والمقابلة و شرحها» — «مختصر فی الحساب والمساحة» — «فی الحساب الهند» و غیره. (← «قربانی Z» ص ۳۹۱، ش ۱۳۱).

ابوالجود محمد بن لیث

از ریاضیدانان بزرگ نیمه دوم قرن چهارم هجری و معاصر با بیرونی بوده و با وی و عده‌ای دیگر از ریاضیدانان زمان خود رابطه علمی داشته و چنین می‌نماید که در قلمرو پادشاهان سامانی یعنی خراسان و ماوراءالنهر می‌زیسته و در نزد آنان عزت و اعتبار داشته است. سال وفات او را در حدود ۴۰۰/۱۰۰۹ دانسته‌اند. وی در حل معادله درجه سوم مطالعاتی داشته و ظاهراً از نخستین کسانی بوده است که درصدد برآمده که بر اساس روشهای هندسی قدیمی راه حل کلی برای معادلات درجه سوم به دست آورد. از او هفت رساله یا مقاله که موضوع همه آنها مسائل هندسی است در دست است. (← «قربانی Z» ص ۶۹، ش ۲۴).

ابوجعفر خازن

ابوجعفر محمد بن حسین خراسانی خازن — یکی از بزرگترین رجال نجوم و ریاضی در نیمه اول قرن چهارم هجری بود که در خراسان متولد شد و در اواخر عمر یا تمام آن در ری می‌زیست و عمر طولانی یافت و در بین سالهای ۳۵۰/۹۶۱ و ۳۶۰/۹۷۱ درگذشت. در حساب و هندسه خبیر و عالم به تسبیر و ارصاء بود و در ساختن آلات نجومی و عمل به آنها بسیار مهارت داشت و در زمان خویش در این فن مشهور بود. از تألیفات وی در ریاضیات «زیج الصفائح» و «کتاب المسائل العددیه» و «تفسیر المجسطی» و «تفسیر صدرالمقالة العاشره من کتاب اقلیدس» را می‌توان ذکر کرد. (← «قربانی Z» ص ۶۳، ش ۲۳).

ابوحامد صاغانی

ابوحامد احمد بن محمد بن حسین صاغانی اسطرابی — اصلاً از اهل صاغان (قریه‌ای از مرو رود خراسان) بود و در بغداد می‌زیست و در ۳۷۹/۹۹۰ درگذشت. از منجمان بزرگ و علمای ریاضی و در علم هندسه و هیئت از اساتید مسلم عصر خود بود و در ساختن اسطرلاب و آلات رصد مهارتی بسزا داشت و به همین جهت به اسطرابی مشهور بود. کتاب «فی التسطیح التام» را به نام عضدالدوله دیلمی نوشت. (← «قربانی Z» ص ۲۹۲، ش ۹۴).

ابوالحسن، ابن بامشاد

ابوالحسن علی بن عبدالله بن محمد بن بامشاد قایینی — از منجمان و ریاضیدانان ایرانی که در زمان بیرونی و یا پیش از وی می‌زیست. دو مقاله از وی در دست است که از روی آنها نام و

کنیه و نسب او به طور دقیق معلوم می‌شود. و می‌توان دانست که وی لا اقل قسمتی از عمر خود را در زادگاه خود یعنی شهر قاین در خراسان گذرانیده است. این دو مقاله عبارت‌اند از: «مقالة فی استخراج ساعات ما بین طلوع الفجر و طلوع الشمس کل یوم من ایام السنة بمدينة قاین» و «مقالة فی استخراج تاریخ اليهود». این هر دو مقاله در حیدرآباد دکن در جزو «الرسائل المتفرقة فی الهیئة» به چاپ رسیده است.

بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» برهان دو قضیه هندسی را از ابن بامشاد نقل کرده است. (←: «قربانی Z» ص ۷۹، ش ۲۸).

ابوالحسن اهوازی

ریاضیدان و منجم ایرانی بود که به احتمال قوی در نیمه دوم قرن چهارم و شاید نیز در ربع اول قرن پنجم هجری می‌زیست و صاحب رساله‌ای است در شرح مقاله دهم «اصول اقلیدس». (←: «قربانی Z» ص ۷۵، ش ۲۶).

ابوالحسن ثابت ← ثابت بن قره

ابوالحسن شمس هروی

از احوال و آثار وی اطلاعی در دست نیست. ابوسعید سجزی (قرن چهارم هجری) یک راه حل تقریبی برای حل مسئله تثلیث زاویه از وی نقل کرده است.

ابوالحسن قصادی ← علی قصادی

ابوالحسن نسوی ← علی نسوی

ابوالحسن صوفی ← عبدالرحمان صوفی

ابوداود سلیمان ← سلیمان بن عصمة

ابوسعید سجزی

ابوسعید احمد بن محمد بن عبدالجلیل سجزی — از مردم سیستان و از مشاهیر ریاضیدانان و معارف منجمان قرن چهارم هجری و معاصر با ابوریحان بیرونی و عضدالدوله دیلمی بوده و ظاهراً بیشتر عمر خود را در شیراز گذرانده و بیرونی با وی (ظاهراً در ری) ملاقات کرده است. می‌دانیم که وی تا سال ۳۸۹/۹۹۹ زنده بوده و بنا بر قرائنی سال تولد او را می‌توان در حدود ۳۳۰/۹۴۱ دانست.

از آثار ریاضی سجزی پیداست که وی مخصوصاً در هندسه بسیار مهارت داشته و تحقیقاتی درباره تقاطع قطوع مخروطی به عمل آورده است. در بین ریاضیدانان و منجمان دوره اسلامی نخستین کسی که عملاً عقیده به حرکت وضعی کره زمین را به کار بست ابوسعید سجزی بود.

از آثار وی در حدود سی و هشت کتاب و رساله می‌شناسیم که در حدود بیست اثر از آنها مربوط به مسائل ریاضی از قبیل وصف قطوع مخروطی و تثلیث زاویه و ساختن اسطرلاب و ترسیم هفت ضلعی محاطی و شکل قطاع و غیره و بقیه آثارش درباره احکام نجوم است. (←: «قربانی Z» ص ۲۵۱، ش ۷۹).

ابوسهل کوهی

ابوسهل ویجن (بیژن) بن رستم کوهی — اصلاً از اهل طبرستان بود و در بغداد در ایام عضدالدوله و شرف‌الدوله می‌زیست و در سال ۳۷۸/۹۸۸ به دستور شرف‌الدوله رصدخانه‌ای در بغداد بنا کرد و در آن به رصد پرداخت. سال وفات او را ۴۰۵/۱۰۱۴ ثبت کرده‌اند. ابوسهل کوهی، علاوه بر آنکه منجمی دقیق و زبردست بود، در ریاضیات و به‌خصوص در هندسه مقامی شامخ داشت و به قول سارتن (در کتاب مقدمه تاریخ علم) هم خود را مصروف آن عده از مسائلی می‌کرد که ارشمیدس و آپولونیوس طرح کرده بودند و منجر به معادلات بالاتر از درجه دوم می‌شد و تحقیقات او در این باره جزو بهترین آثار هندسی دوره اسلامی است.

از آثار کوهی ۲۳ رساله و کتاب می‌شناسیم که البته بعضی از آنها مختصر است. کتاب «البرکارالتام» او به زبان فرانسوی ترجمه شده و سایر آثارش همواره مورد استفاده و ارجاع ریاضیدانان بزرگ بوده است. (←: «قربانی Z» ص ۴۲۱، ش ۱۳۵).

ابوسهل مسیحی

ابوسهل عیسی بن یحیی مسیحی ایرانی — مولد او جرجان و منشأ وی بغداد است. و در اقسام حکمت نظری به جودت ذهن معروف و در ادب و حسن خط مشهور بود و در ۳۹۰ یا ۴۰۱ ه.ق در گذشت. وی معاصر با بیرونی و ابوعلی سینا و به قول بعضی استاد ابوعلی بود. اثر عمده‌اش دایرة المعارف طبی است موسوم به «کتاب المائة فی الطب». ← لغت‌نامه مقاله «ابوسهل مسیحی».

ابوالعباس فرغانی

ابوالعباس احمد بن محمد بن کثیر فرغانی — یکی از بزرگترین منجمان قرن سوم هجری بود که در فرغانه از بلاد ماوراءالنهر متولد شد و در زمان مأمون خلیفه شهرت یافت و تا سال درگذشت المتوکل (۲۴۷/۸۶۱) هنوز زنده بود مهمترین اثر او عبارت است از «کتاب فی الحركات السماویة و جوامع علم النجوم» که در قرن دوازدهم میلادی به زبان لاتینی ترجمه شد و در نجوم اروپا تأثیر فراوان کرد.

ابوالعباس نیریزی

ابوالعباس فضل بن حاتم نیریزی — در نیمه دوم قرن سوم و اوایل قرن چهارم هجری شهرت و اعتبار داشت و معاصر با المعتضد خلیفه عباسی بود. مترجمان لاتینی وی را Anaritius می‌نامیدند. محققان اروپایی سال وفات او را ۲۳ - ۳۱۰/۹۲۲ دانسته‌اند. ابن ندیم در «الفهرست» نوشته است که نیریزی در علم نجوم و به‌ویژه در علم هیئت انگشت‌نما بود. ریاضیدانان بزرگ مانند بیرونی و خیام و کمال‌الدین فارسی در آثار خود از وی نام برده و به تحقیقات وی ارجاع کرده‌اند. از تألیفات او است:

شرح کتاب اصول اقلیدس — رساله فی بیان المصادرة المشهوره لاقلیدس — تفسیر کتاب المجسطی (این تفسیر بین ریاضیدانان و منجمان بسیار معروف بوده و بهترین تفسیر مجسطی خوانده شده است) — زیج کبیر و زیج صغیر و غیره. (←: «قربانی Z» ص ۵۱۳، ش ۱۶۴).

ابوعبدالله الشّتی

ابوعبدالله محمد بن احمد الشّتی — ریاضیدانی عالقدر و معاصر با بیرونی و ابوالجود محمد بن لیث بوده و یا پیش از زمان آنان می‌زیسته است. حکیم عمر خیام در کتاب جبر خود او را مهندسی فاضل معرفی کرده و بیرونی در کتاب «استخراج الاوتار» چندین استدلال برای قضایای هندسی از وی ذکر کرده است. (←: «قربانی Z» ص ۲۸۹، ش ۹۲).

ابوعبدالله محمد بن جابر ← بتّانی

ابوعبدالله محمد بن موسی ← خوارزمی

ابوعلی حبوبی

حسن بن حارث حبوبی خوارزمی، ابوعلی — فقیه و از علمای نیمه دوم قرن چهارم هجری و معاصر با ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی و ابن‌نصر عراق بوده و در ریاضیات دست داشته و کتابی درباره به‌کار بردن جبر و خطّ‌آین در حساب وصایا نوشته است موسوم به «کتاب الاستقصاء» که نسخه خطی آن موجود است. (←: «قربانی Z» ص ۹۰، ش ۳۶).

ابوعلی سینا

ابوعلی حسین بن عبدالله بن سینا — دانشمند و فیلسوف و طبیب و ریاضیدان ایرانی و معروفترین دانشمندان اسلام و یکی از بزرگترین دانشمندانی است که تاکنون پا به عرصه وجود گذاشته‌اند. در سال ۳۷۰/۹۸۰ در قریه افشته نزدیک بخارا چشم به جهان گشود و در سال ۴۲۸/۱۰۳۷ در همدان وفات یافت. مهمترین اثر ریاضی ابوعلی سینا همان است که در «کتاب الشفا» آورده و شامل سه جزو است: ارثماطیقی — موسیقی و هیئت. و نیز از او است:

«رساله فی تحقیق الزاویه» یا «رساله فی تحقیق مبادئ الهندسه» — «مختصر فی الهیئة» — «مختصر المجسطی» و غیره. (←: «قربانی Z» ص ۲۹، ش ۱۰).

ابوالفتح خازنی

ابوالفتح عبدالرحمان خازنی — مولد و منشأش دیار روم (یونان) بود و به غلامی علی خازن مروزی در آمد و در تحت توجه وی در مرو پرورش یافت و ریاضیات و فلسفه آموخت و در سال ۵۱۵/۱۱۲۱-۲۲ کتاب «میزان الحکمة» را که یکی از جالبترین کتابهای دوره اسلامی در مکانیک و فیزیک است نوشت. و دیگر از آثارش «زیچ معتبر سنجرى» است که آن را به نام سنجر بن ملکشاه بن الپارسلان تألیف کرده. و یکی دیگر از تألیفات او «کتاب الآلات العجیبة الرصدیة» است. «میزان الحکمة» به چاپ رسیده و ترجمه مختصری از آن نیز به فارسی چاپ شده است. (←: «قربانی Z» ص ۲۲۸، ش ۷۳).

ابومحمود خجندی

ابومحمود حامد بن خضر خجندی — از بزرگان علمای ریاضی و هیئت و به قول بیرونی یگانه عصر خویش در صنعت اسطrolab و آلات نجومی بود. در زمان عضدالدوله دیلمی در ری می زیست و «سدس فخری» را به نام فخرالدوله دیلمی ساخت و با آن در سال ۳۸۴/۹۹۴ میل کلی را اندازه گرفت. برهانی بر امتناع معادله $z^3 = y^3 + x^3$ آورده و یکی از کسانی است که مدعی اختراع «شکل مغنی» بوده است. وفات وی را در حدود سال ۳۹۰/۱۰۰۰ دانسته اند. (←: «قربانی Z» ص ۲۳۱، ش ۷۴).

ابومعشر بلخی

ابومعشر جعفر بن محمد بن عمر بلخی — از علمای معروف احکام نجوم بود و آثارش بیش از سایر کتابهای احکام نجوم در اروپای قرون وسطی شهرت داشت. مترجمان لاتینی او را «البومسَر» (Albumasar) می نامیدند. وی در سن تقریباً صد سالگی در سال ۲۷۲/۸۸۶ در واسط در گذشت.

مهمترین اثر وی «المدخل الکبیر» در احکام نجوم است که نفوذ زیادی در اروپای قرون وسطی داشته و به زبان لاتینی نیز ترجمه شده است و در آن تأثیری که علوم ایرانی و هندی در علوم اسلامی داشته است هویدا است. چندین تألیف دیگر نیز در احکام نجوم دارد.

ابونصر عراق

ابونصر منصور بن علی بن عراق جیلانی — ریاضیدان و منجم بلندپایه و استاد ابوریحان بیرونی و از خاندان آل عراق بود و در نیمه دوم قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری قمری در خوارزم

می‌زیست و معاصر با ابوعلی سینا بود و مدتی با او و بیرونی در دربار خوارزمشاه ابوالعباس مأمون بن مأمون می‌زیست. در ریاضیات و نجوم دارای تألیفات نفیسی است که عده‌ای از آنها از دستبرد حوادث مصون مانده است.

حکیم عمر ختّام در یکی از رسایل خود ابونصر عراق را در جزو ردیف اول و طبقه عالی علمای ریاضی برشمرده است. از مهمترین آثار ریاضی وی می‌توان «اصلاح کتاب مانالاوس فی الاشکال الکریّة» و «تهذیب التعالیم» و «رسالة فی معرفة القسی الفلکیه» و «المجسطی الشاهی» را نام برد. از آثار ابونصر عراق بیست و چهار کتاب و رساله شناخته شده که دوازده رساله از آنها را به نام بیرونی نوشته است. بیشتر آثار او به چاپ رسیده و یا موجود است. (←: «قربانی Z» ص ۱۱۲، ش ۴۳).

ابوالوفای بوزجانی

ابوالوفا محمّد بن محمّد بن یحیی بوزجانی — یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگترین ریاضیدانان دوره اسلامی است. در سال ۳۲۸/۹۴۰ در شهر بوزجان (تربت شیخ جام فعلی) تولد یافت و در سال ۳۴۸/۹۵۹-۶۰ به عراق مهاجرت کرد و تا آخر عمر در بغداد می‌زیست و در آنجا در حدود سال ۳۸۷/۹۹۷ درگذشت.

بوزجانی یکی از مشهورترین متجّمان و مهندسان زمان خود بوده و در کارهای علمی با ابوریحان بیرونی مکاتبه داشته است. اهمیت آثارش بیشتر بواسطه سهم بسزایی است که وی در پیشرفت علم مثلثات داشته است. کتاب «اعمال هندسی» وی بدیعترین و جالبترین اثری است که در دوره اسلامی درباره هندسه کاربردی پدید آمده است. (←: «قربانی - شیخان - بوزجانی نامه»).

اخوان الصفا

جمعیت سرّی فلسفی و عرفانی که در قرن چهارم هجری قمری در بصره و بغداد تشکیل یافت، هدف و مرام آن ترویج اخوت و صفا بین مردم و رفع اختلاف فکری و مذهبی از طریق ترویج حکومت عقل و تلفیق بین فلسفه و مذهب، و خلاصه ایجاد یک نوع مدینه فاضله در عالم بوده است... اخوان الصفا را بعضی از محققان به اسماعیلیه و قرامطه و بعضی به شیعه اثنی عشری منسوب داشته‌اند. حقیقت آن است که عقاید و آراء آنها به نحوی که از رسائل اخوان الصفا برمی‌آید تلفیقی از مذاهب صوفیه و متکلمین و حکماست. (←: «قربانی Z» ص ۱۲۵، ش ۴۷).

الغیبیک

پسر شاهرخ تیموری و ملقب به علاءالدوله و پادشاه سلسله تیموریان (از ۸۵۰ تا ۸۵۳ هجری قمری) بود. وی در ریاضیات دست داشت و «زیج الغیبیک» را به کمک علمای مشهوری مانند غیاث‌الدین جمشید کاشانی و معین‌الدین کاشانی و قاضی‌زاده رومی که در دستگاه او بودند در

۸۴۱ ه.ق به پایان رسانید. (← «قربانی Z» ص ۱۳۷، ش ۵۰).

اهوازی ← ابوالحسن اهوازی

بتانی

ابوعبدالله محمد بن جابر بن سنان حرّانی صابی — از بزرگترین منجمان مسلمان که پیش از ۲۴۴/۸۵۸ در حرّان یا نزدیک آنجا متولد شد. خاندانش اصلاً صابی بودند ولی خودش مسلمان بود. بیشتر عمر خود را در رقه (بر ساحل چپ فرات) گذراند و از ۲۶۴/۸۷۷ به بعد تمام وقت خود را صرف ارساد نجومی کرد و در ۳۱۷/۹۲۹ در نزدیک سامرا در گذشت. بزرگترین اثری که از وی به جا مانده «زیج» او است که به «زیج صابی» معروف است. و آن در قرن دوازدهم میلادی دو بار به لاتینی و در قرن سیزدهم میلادی به اسپانیایی ترجمه شد. زیج بتانی که مشتمل بر نتایج رصد‌های او است نه فقط در بسط نجوم در دوره اسلامی مؤثر بوده بلکه در قرون وسطی و اوایل دوره رنسانس در تکامل علم نجوم و مثلثات کروی در اروپا تأثیری عظیم داشته است. (← «قربانی Z» ص ۱۴۴، ش ۵۳).

بیرجندی ← عبدالعلی بیرجندی

ثابت بن قره

ابوالحسن ثابت بن قره مروان‌الحرّانی — به سال ۲۲۱/۸۳۶ در حرّان از بلاد بین‌النهرین متولد شد و در ۲۸۸/۹۰۱ در گذشت. از بزرگترین دانشمندان حوزه علمی بغداد و از برجسته‌ترین مترجمان زبانهای یونانی و سریانی به عربی و ریاضیدان و منجم زبردستی بود و در طب نیز مهارت داشت. بسیاری از آثار ریاضی و نجومی یونانیان به دست خود وی یا زیر نظروى به عربی ترجمه شد و برخی از ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد. کتابها و رساله‌های متعدد به او منسوب است که بعضی از آنها به زبانهای اروپایی ترجمه شده و درباره برخی دیگر از آنها تحقیقاتی توسط پژوهندگان به عمل آمده است. از جمله کارهای برجسته او در ریاضیات یکی دستوری است که برای محاسبه بعضی از عددهای متحاب بیان کرده^۱ و دیگر روش بدیعی است که برای محاسبه مساحت سهمی و حجم سهمیوار (Paraboloid) به کار برده است. فرزندان او سنان بن ثابت و نوه او ابراهیم بن سنان^۲ نیز از دانشمندان مشهور و در ریاضیات زبردست بودند.

گمان می‌کنم بهترین منبع برای کسب اطلاع از احوال و آثار ثابت بن قره فعلاً کتاب زیر است:

CARMODY, F. J. : The Astronomical Works of Thabit b. Qurra. university of California Press. 1960.

حامد بن خضر ← ابومحمود خجندی

۱. ← «قربانی: فارسی نامه» بخش سوم.

۲. — نام وی در همین فهرست.

حبش حاسب

احمد بن عبدالله مروزی ملقب به حبش حاسب — از شخصیت‌های برجسته سده‌های نخستین اسلامی که اصلش از مرو بود و در بغداد می‌زیست و در بین سالهای ۸۶۴/۲۵۰ و ۸۷۴/۲۶۰ در گذشت و عمرش نزدیک به صد سال رسید. ریاضیدانی بود زبردست و تردیدی نیست که تابعهای مثلثاتی جیب و جیب تمام و سهم و ظل اول و ظل ثانی را به خوبی می‌شناخته و با مهارت کامل آنها را به کار می‌برده است. وی سه «زیج» تألیف کرد که مهمترین آنها «زیج ممتحن» است و نیز «کتاب فی معرفة الکرة والعمل بها» و «کتاب العمل بذات الحلق لبطلمیوس من اعمال حبش بن عبدالله» از تألیفات او است. (—: «قربانی Z» ص ۲۲۱، ش ۷۰).

حبوبی — ابوعلی حبوبی

حسام‌الدین سالار — علی بن فضل‌الله سالار

حکیم عمرخیتام — خیتام

خازن — ابوجعفر خازن

خازنی — ابوالفتح خازنی

خجندی — ابومحمود خجندی

خواجه نصیر طوسی — نصیرالدین طوسی

خوارزمی

ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی — ریاضیدان و منجم و جغرافیادان و مورخ ایرانی و یکی از زبردست‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگترین عالم عصر خود بود که دوران فعالیت علمی او را می‌توان در اواخر قرن دوم و ثلث اول قرن سوم هجری دانست. وی در ریاضیات و مخصوصاً نجوم ایران قبل از اسلام و تعالیم مکتب جندی‌شاپور، که در زمان وی هنوز از خاطرها محو نشده بود، دست داشت و آنها را با ریاضیات هندی درآمیخت و نخستین کتابهای حساب و جبر و نجوم (زیج) را به زبان عربی نوشت. آثار او در بسط و پیشرفت ریاضیات، چه در کشورهای اسلامی و چه بعداً در کشورهای اروپایی، تأثیر فراوان داشت. از تألیفات او است، «مختصر من حساب الجبر و المقابلة» که به انگلیسی ترجمه شده و نیز «کتاب الجمع والتفریق» که به زبان لاتینی ترجمه گردیده است. (—: «قربانی Z» ص ۲۳۸، ش ۷۶).

خیتام

ابوالفتح (یا ابوحفص) غیاث‌الدین عمر بن ابراهیم خیتامی، معروف به حکیم عمرخیتام — در بین سالهای ۴۳۰ تا ۴۴۰ هجری (۱۰۳۸ تا ۱۰۴۸ میلادی) در نیشاپور یا حوالی آن متولد شد و در ۵۱۵ یا ۵۱۷ هجری (۱۱۲۱ یا ۱۱۲۳ میلادی) درگذشت. وی یکی از بزرگترین ریاضیدانان و منجمان دوره اسلامی است و رساله جبر او یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطایی در این علم

شناخته شده است. در مشرق زمین به واسطه سهم عمده‌ای که در اصلاح سال و ماه برای وی قائل بودند شهرت داشت و در اروپا به سبب ترجمه انگلیسی رباعیات وی توسط فیتز جرال (در ۱۸۵۹ میلادی) شهرت یافت. نوشته‌اند که به سمرقند و بلخ و هرات و ری و اصفهان و حجاز سفر کرد و در سال ۱۰۷۴/۴۶۷ سلطان ملک‌شاه سلجوقی وی و عده‌ای دیگر از منت‌جمان را مأمور اصلاح سال و ماه ایرانی کرد.

نتیجه این اصلاح را «تاریخ جلالی» می‌نامند که آغاز آن بنابر مشهور دهم ماه رمضان سال ۱۴۷۱ (۱۶ مارس ۱۰۷۹) بود. مهمترین تألیف ختیم در ریاضیات رساله جبر او است که آن را به نام قاضی القضاة ابوطاهر تدوین کرده است. این رساله در سال ۱۸۵۱ میلادی توسط فرانسوا وپکه به زبان فرانسوی ترجمه و تفسیر شد. شادروان دکتر غلامحسین مصاحب آن را به فارسی ترجمه کرده است. این ترجمه با رسالات دیگری از ختیم و بحث در آنها در سال ۱۳۳۹ ه.ش، توسط انجمن آثار ملی ایران در کتاب «حکیم عمر ختیم به عنوان عالم جبر» به چاپ رسیده است. برای کسب اطلاعات مفصل و دقیق درباره آثار ریاضی ختیم رجوع کنید به کتاب مذکور. (←: «قربانی Z» ص ۳۲۵، ش ۱۱۷).

سجری ← ابوسعید سجری

سلیمان بن عصمة

ابو داوود سلیمان بن عصمة سمرقندی — ریاضیدان و معاصر با ابوجعفر خازن بوده است. به قول بیرونی وی مؤلف رساله‌ای بوده موسوم به «رسالة فی مساحة ذوات النواحي» و نیز زیجی نوشته بوده است موسوم به «زیج عمل التیرین» و به قول نسوی تفسیری نوشته بوده است بر مجسطی بطلمیوس. رساله‌ای در شرح و تفسیر قسمتی از مقالة دهم اصول اقلیدس از وی موجود است. (←: «قربانی Z» ص ۲۶۴، ش ۸۲).

شمس‌الدین آملی ← محمد بن محمود آملی

شمسی هروی ← ابوالحسن شمسی هروی

الشنی ← ابو عبدالله الشنی

صاغانی ← ابوحامد صاغانی

صوفی ← عبدالرحمن صوفی

طبری ← عمر بن فرخان طبری

طبری ← محمد بن ایوب طبری

طوسی ← نصیرالدین طوسی

عبدالحمید بن واسع جیلی، ابوالفضل

قطعی در «تاریخ الحکماء» نوشته است: به علم حساب عالم و در آن شیوه متقدم بود و او را «ابن ترک الجیلی» خواندندی و مکتبی به «ابی محمد» نیز بود. تصانیف مشهوره در علم حساب دارد. از آن جمله است کتاب «الجامع فی الحساب» و آن مشتمل بر شش کتاب است و دیگر «نوادیر الحساب و خواص الاعداد».

ابن ندیم در «الفهرست» کتاب «المعاملات» (یعنی حساب عملی) را نیز به نام او ثبت کرده است.

تنها رساله‌ای که از وی با عنوان «الضرورات فی المقتربات من کتاب الجبر و المقابلة» در دست است به زبانهای ترکی و انگلیسی و فارسی ترجمه شده است. (←: «قربانی Z» ص ۲۹۸، ش ۹۷).

عبدالرحمان خازنی ← ابوالفتح خازنی

عبدالرحمان صوفی

ابوالحسین عبدالرحمان بن عمر صوفی رازی — فاضلی جلیل و منجمی عالی مقام و اصلاً از فسای فارس بود. در سال ۲۹۱/۹۰۳ در ری چشم به جهان گشود و در سال ۳۷۶/۹۸۶ به رحمت ایزدی پیوست. بنا به گفته خود وی در سال ۴۹-۳۳۷/۹۴۸ در اصفهان در صحبت ابن عمید (ابوالفضل محمد بن حسین)، وزیر معروف آل بویه، به سر می‌برد و در سال ۶۱-۳۴۹/۹۶۰ در دربار عضدالدوله دیلمی در اصفهان می‌زیست. وی منجم دربار عضدالدوله بود و اثر بسیار نفیس و معروف خود «صورالکواکب» را به نام آن پادشاه نوشت.

عضدالدوله به شاگردی وی در شناختن صورکواکب افتخار می‌کرد. شش کتاب از تألیفات وی درباره اسطرلاب و احکام نجوم و غیره می‌شناسیم که مهمترین آنها همان «کتاب صورالکواکب الثابته» است که بارها به چاپ رسیده و خواجه نصیر طوسی آن را به فارسی ترجمه کرده است. (←: «قربانی Z» ص ۳۰۰، ش ۹۸).

عبدالعلی بیرجندی

ملا عبدالعلی بن محمد بن حسین، نظام‌الدین بیرجندی — از ریاضیدانان و منجمان قرن دهم هجری بود که در سال ۹۳۴/۱۵۲۷ وفات یافت. بیشتر آثارش، در ریاضیات و نجوم، شرحهایی است که بر آثار دیگران نوشته و تألیف مستقل وی «بیست باب در تقویم» و «رسالة ابعاد و اجرام» است. از شرحهای وی می‌توان «شرح شمسیه الحساب» و «شرح تحریر مجسطی» و «شرح زیج الغیگ» به فارسی و «شرح تذکره نصیری» و «حاشیه شرح ملخص چغمینی» را نام برد. (←: «قربانی Z» ص ۱۷۳، ش ۵۷).

علی بن احمد ← علی نسوی

علی بن فضل الله سالار، حسام‌الدین

از علمای ریاضی قرن ششم هجری است. نصیرالدین طوسی نام وی را در کتاب «کشف‌القناع» آورده و مطالبی درباره «شکل قطاع» از وی نقل کرده است. از او است: «مقدمات لتبيين المصادرة التي ذكرها اوقليدس في صدر المقالة الاولى فيما يتعلق بالخطوط المتوازية» (← «خیامی نامه» صص ۲۸۱ تا ۲۹۴) و نیز کتاب «جامع قوانین علم‌الهیة» که نسخه خطی آن در استانبول موجود است، ظاهراً از تألیفات اوست. وی نیز زیجی تألیف کرده بوده است به نام «زیج شاهی» (←: «قربانی Z» ص ۲۲۶، ش ۷۲).

علی قلسادی

ابوالحسن علی بن محمد قرشی بسطی مشهور به قلسادی و ملقب به نورالدین — دانشمند و ریاضیدان مسلمان عرب اندلسی که قرن نهم هجری می‌زیست. وی آخرین ریاضیدان مهم از اعراب اسپانیا بود که از خود آثار بسیار باقی گذاشت. وی در یکی از آثار خود موسوم به «کشف‌الاستار عن علم‌الغبار» علامات و رموز جبری به‌کار برده است. از تألیفات اوست: «التبصره فی علم‌الحساب» و «کشف‌الجلباب عن علم‌الحساب» و «کشف‌الاستار عن علم حروف‌الغبار» و «قانون‌الحساب» و «شرح کتاب تلخیص ابن‌البناء مراکشی» و غیره. برخی از آثار وی به زبان فرانسوی ترجمه شده است. (←: «قربانی Z» ص ۳۵۶، ش ۱۲۷).

علی نسوی

ابوالحسن علی بن احمد نسوی — ریاضیدان و منجمی عالقدر و به‌خصوص در هندسه متخصص بود و در منطق و فلسفه و پزشکی نیز دست داشت. اصل وی از نسای خراسان بود و به سال ۳۹۳/۱۰۰۲ در شهر ری متولد شد و بخش مهمی از عمر خویش را در آن شهر گذراند و عمرش نزدیک به صد سال رسید. به سبب مهارتی که در ریاضیات داشت دانشمندان وی را استاد مختص نامیده‌اند. تألیفات مهم وی در ریاضیات عبارتند از:

۱- «المقنع فی‌الحساب الهندی» (برای کسب اطلاع از محتویات این کتاب ← «قربانی: نسوی‌نامه» صص ۱۱ تا ۱۴۵).

۲- «کتاب الاشباع فی شرح‌الشکل‌القطاع»

۳- «تفسیر کتاب مأخوذات ارشمیدس»

۴- «التجريد فی‌الهندسه»

۵- «الزیج‌الفاخر»

۶- «اختصار‌المجسطی»

برای کسب اطلاع مفصل درباره احوال و آثار نسوی ← «قربانی: نسوی‌نامه»

عمر بن فرخان طبری، ابوحفص

منجم و مهندس ایرانی از اهل طبرستان و یکی از مترجمان زبردست از فارسی به عربی بود. در خدمت یحیی بن خالد بن برمک به سر می برد. فضل بن سهل وزیر مأمون او را به ترجمه کتب عربی وا داشت. وی در حدود ۸۱۵/۲۰۰ درگذشت. هشت کتاب و رساله در فن احکام نجوم به وی نسبت داده اند.

عمر ختّام ← ختّام

غیاث الدّین جمشید کاشانی

ریاضیدانی عالیقدر و محاسبی ماهر و منجمی زبردست و مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و می توان او را به حق از برجسته ترین ریاضیدانان دوره اسلامی دانست. وی از حدود سال ۸۰۸/۱۴۰۶ تا پایان عمرش یعنی سال ۸۳۲/۱۴۲۹ فعالیت علمی داشت و در این مدت به تصنیف و تألیف رسالات و کتب ریاضی و نجومی پرداخت که مهمترین آنها «زیج خاقانی» و «مفتاح الحساب» و «رساله محیطیه» و «رساله وتر و جیب» است. آلت «طبق المناطق» را برای تعیین عروض کواکب اختراع کرد و کتاب «نزهة الحقائق» را در شرح آن نوشت. از جمله شاهکارهای ریاضی وی این است که او نخستین مخترع کسرهای اعشاری است و عدد پی (π) را با دقتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعد از وی در دنیا بی رقیب ماند، حساب کرد. و جیب زاویه یک درجه را با روش تکراری حل نوعی معادله درجه سوم به وجه بسیار جالب توجهی که تا زمان وی سابقه نداشت به دست آورد. کاشانی در حدود سال ۸۲۴/۱۴۲۱ به دعوت الغبیگ از کاشان به سمرقند رفت و مدیر رصدخانه سمرقند و مورد احترام الغبیگ و ریاضیدانان دیگری که در سمرقند می زیستند بود (جامعترین و مفصلترین کتابها در شرح احوال و آثار او کتاب «قربانی: کاشانی نامه» است).

فارسی ← کمال الدّین فارسی

فرغانی ← ابوالعباس فرغانی

فزازی ← محمد بن ابراهیم فزاری

فضل بن حاتم ← ابوالعباس نیریزی

قاضی زاده رومی

موسی بن محمد بن قاضی محمود رومی — از علمای ریاضی قرن نهم هجری بود در بروسه (Brussa) از بلاد ترکیه متولد شد. برای کسب علم به خراسان و ماوراءالنهر سفر کرد. در سمرقند به خدمت سلطان الغبیگ در آمد و پس از غیاث الدّین جمشید کاشانی مدیر رصدخانه سمرقند شد و در تألیف زیج الغبیگ شرکت جست. سال وفات او را بین سالهای ۸۴۰/۱۴۳۶ و ۸۵۰/۱۴۴۶ دانسته اند. از تألیفات او یکی شرح کتاب «اشکال التأسيس» تألیف شمس الدّین محمد بن اشرف

سمرقندی و دیگری شرح کتاب «الملخص فی الهیئة» تألیف محمود بن محمد چغمینی است. (←: «قربانی Z» ص ۳۴۲، ش ۱۲۲).
 قاینی ← ابوالحسن، ابن بامشاد

قطب‌الدین شیرازی

محمود بن مسعود بن مصلح، قطب‌الدین شیرازی — ریاضیدان و منجم و نورشناس و طبیب و فیلسوف و یکی از بزرگترین دانشمندان ایرانی در ادوار تاریخ بود. به سال ۳۷-۱۲۳۶/۶۳۴ در شیراز متولد شد. از خاندانی دانشمند بود و قسمتی از معلومات طبی را از پدر و خویشاوندانش در شیراز فرا گرفت. بعدها در حلقه شاگردان خواجه نصیرالدین طوسی در آمد و از فاضلترین و معروفترین شاگردان وی شد. بارها به خراسان و عراق عجم و عراق عرب و آسیای صغیر سفر کرد و بالاخره در سال ۸۳-۱۲۸۲/۶۸۱ قاضی سیواس و ملطیه شد و در سال ۱۳۱۱/۷۱۰ در تبریز درگذشت. تألیفات متعدد دارد که مهمترین آنها «نهاية الادراك فی دراية الافلاك» و «التحفة الشاهية فی الهیئة» و «زیج سلطانی» است (← «قربانی Z» ص ۳۵۱، ش ۱۲۵).

قلصادی ← علی قلصادی

کاشانی ← غیاث‌الدین جمشید کاشانی

کرجی ← ابوبکر کرجی

کمال‌الدین فارسی

حسن بن علی بن حسن، کمال‌الدین (ابوالحسن) فارسی — از علمای بزرگ ریاضی و فیزیک ایران و عالم اسلام در نیمه دوم قرن هفتم و اوایل قرن هشتم هجری است. وی از اهل فارس و شاگرد قطب‌الدین شیرازی بود و در سال ۱۲۶۶/۶۶۵ متولد شد و در نوزدهم ذی‌قعدة سال ۷۱۸/۱۳۱۸ در سن ۵۳ سالگی درگذشت. نام وی را به‌صورت محمد بن حسین نیز ثبت کرده‌اند. از تألیفات مهم وی یکی کتاب «تنقیح المناظر لذوی الابصار والبصائر» است که آن را در تنقیح «کتاب المناظر» ابن هیثم بصری نوشته و دیگر «تذکرة الاحباب فی بیان التحاب» درباره عددهای متحاب که نسخه خطی آن موجود است.

برای کسب اطلاعات بیشتر درباره آثار کمال‌الدین فارسی ← «قربانی: فارسی‌نامه».

کوشیار گیلی

کیا ابوالحسن کوشیار بن لبان گیلی — از ریاضیدانان و منجمان بزرگ ایران است که آثار ارزنده علمی خود را در نیمه دوم قرن چهارم هجری پدید آورده است. زمان زندگی او را می‌توان تقریباً در حدود بین سالهای ۹۴۱/۳۳۰ تا ۱۰۰۹/۴۰۰ دانست. تألیفات ریاضی مهم او عبارت‌اند از «کتاب فی اصول حساب‌الهند» و «عیون‌الاصول فی الحساب» و دوزیج یعنی «زیج جامع» و

«زیج بالغ» و چندین کتاب و رساله درباره احکام نجوم. کتاب حساب هندی وی مخصوصاً از این جهت حائز اهمیت است که در بین کتابهای حسابی که از دوره اسلامی به دست ما رسیده قدیمترین کتابی است که در آن ارقام هندی در ضمن اعمال حساب به کار رفته است و گذشته از این آن کتاب در نشر و بسط مفاهیم و اصطلاحات ریاضی نیز اهمیت دارد.*

(برای کسب اطلاعات بیشتر درباره آثار ریاضی وی و عکس نسخه خطی کتاب «عیون الاصول» ← «قربانی: ریاضیدانان ایرانی» صص ۱۶۹ تا ۱۹۴) (و نیز ←: «قربانی Z» ص ۴۱۴، ش ۱۳۴).

کوهی ← ابوسهل کوهی
مجریطی ← مسلمة بن احمد مجریطی

محمدباقر یزدی

محمدباقر بن زین العابدین یزدی — از ریاضیدانان دوره صفویه و معاصر با شاه عباس اول و شاه صفی و شاه عباس دوم بوده و می دانیم که در سال ۱۰۴۷/۱۶۳۷ زنده بوده و کمی پیش از سال ۱۰۶۹/۱۶۵۸ در گذشته است. در حدود ده کتاب و رساله از وی می شناسیم که از همه آنها معروفتر کتاب «عیون الحساب» وی است. نوه او نیز ریاضیدان بوده و شرحی بر «عیون الحساب» تحت عنوان «کفایة اللباب» نوشته است. کتاب «عیون الحساب» که به زبان عربی است به فارسی نیز ترجمه شده و نسخه خطی از آن در دست است. (←: «قربانی Z» ص ۴۳۶، ش ۱۳۷).

محمد بن ابراهیم فزاری

دانشمند و منجم مسلمان که خلیفه «المنصور» در سال ۱۵۷/۷۲۲-۳ وی را مأمور ترجمه کتاب «سدهانته» از سانسکریت به عربی کرد. ظاهراً به وسیله همین ترجمه بود که ارقام هندی وارد کشورهای اسلامی شد. تاریخ وفات محمد بن ابراهیم را بین سالهای ۱۸۰/۷۹۶ تا ۱۹۱/۸۰۶ نوشته اند.

محمد بن ایوب طبری، ابوجعفر

ریاضیدان و منجم و از اهل آمل و ملقب به «حاسب» بود و در نیمه دوم قرن پنجم هجری (و نه چنانکه بعضی نوشته اند در اواخر قرن چهارم هجری) می زیست. از تألیفات ریاضی وی کتاب «شمارنامه» و کتاب «مفتاح المعاملات» که هر دو به فارسی است به چاپ رسیده است. (←: «قربانی Z» ص ۴۴۴، ش ۱۳۹).

محمد بن جابر ← بتانی

* این کتاب اخیراً توسط آقای مهندس محمد باقری به فارسی ترجمه و منتشر شده است.

محمد بن عبدالعزيز هاشمی، ابوعلی

از احوال وی در هیچ یک از منابع اطلاع دقیقی نیافتیم. مطابق با تحقیقی که به عمل آورده‌ام وی از ریاضیدانان و منجمانی بوده که در نیمه اول قرن چهارم هجری شهرت و اعتبار داشته است. زیرا بیرونی در کتاب «تحدید نهایات الاماکن» نوشته است که وی در ذی قعدة سال ۳۲۰ هجری کسوفی را در شهر رقه رصد کرده است. گذشته از این رساله‌ای از وی درباره «حساب جذورالاصم» در دست است که آن را به نام ابوالفضل جعفر بن المکتفی نوشته و این جعفر بن المکتفی بالله به قول قفطی (در تاریخ الحکماء) در سال ۲۹۴/۹۰۶ متولد شده و در سال ۳۷۷/۹۸۷ وفات یافته است.

بیرونی نام دو کتاب از آثار محمد بن عبدالعزيز هاشمی را ذکر کرده است. یکی کتاب «الزیج الکامل» که از آن در «آثارالباقیه» نام برده و دیگری «کتاب تعلیل زیج الخوارزمی» که از آن در کتاب «استخراج الاوتار» یاد کرده است. (←: «قربانی Z» ص ۴۵۰، ش ۱۴۲).

محمد بن لیث ← ابوالجود محمد بن لیث

محمد بن محمود آملی

شمس‌الدین محمد بن محمود آملی — فیلسوف و دانشمند شیعه ایرانی که در حدود سال ۷۵۳/۱۳۵۲ درگذشت. معروفترین اثرش کتاب «نفایس الفنون فی عرایس العیون» است که دایرة المعارفی است به زبان فارسی، و آن را بین سالهای ۷۳۵/۱۳۳۴ و ۷۴۳/۱۳۴۲ نوشته است. «نفایس الفنون» در سال ۱۳۱۶ هجری قمری در تهران به چاپ سنگی رسیده است (در دو جلد، ۵۱۲ صفحه).

محمد بن موسی ← خوارزمی

مسلمة بن احمد مجریطی، ابوالقاسم

از اهل مادرید (مجریط) بود و در قرطبه نشو و نما کرد. نخستین دانشمند مسلمانی بود که در اسپانیا به شهرت رسید. منجم و ریاضیدان اما معتقد به طلسم و جادو بود و در بین سالهای ۳۹۵/۱۰۰۴ و ۳۹۸/۱۰۰۷ درگذشت. وی زیج خوارزمی را تحریر کرد و در آن تاریخهای فارسی را به سنوات هجری تبدیل نمود. کتابهایی درباره اسطرلاب و حساب (المعاملات) و کیمیا و غیره تألیف کرد که یکی از آنها کتاب «غایة الحکیم» است که در آن درباره خواص خرافی عده‌های متحاب ۲۲۰ و ۲۸۴ مطالبی نوشته است. (←: «قربانی Z» ص ۴۶۴، ش ۱۵۲).

نسوی ← علی نسوی

نصیرالدین طوسی

ابوجعفر محمد بن محمد معروف به خواجه نصیرالدین طوسی — فیلسوف و ریاضیدان و منجم و دانشمند ایرانی و یکی از بزرگترین ریاضیدانان و حکمای اسلامی که در سال ۶۷۲/۱۲۷۴

درگذشت. فهرست همه آثار ریاضی و نجومی وی در این مختصر نمی‌گنجد. او همه «کتب متوسطات» یعنی کتابهای ریاضی و نجومی را که محصلان قدیم بین هندسه اقلیدس و مجسطی بطلمیوس می‌خواندند به بهترین وجه تحریر کرد. از جمله تألیفات مهم او در ریاضیات کتاب «کشف القناع عن اسرار شکل القطاع» است که به زبان فرانسوی ترجمه شده و شهرت جهانی دارد. بسیار کتابها و مقالات درباره احوال و آثار او نوشته‌اند. در زبانهای اروپایی جامعترین شرح حال او را سارتن در کتاب «مدخل تاریخ علم» (سارتن I، ج ۲، صفحات ۱۰۰۱ تا ۱۰۱۲) نوشته است. (←: «قربانی Z» ص ۴۸۶، ش ۱۶۱).

نیریزی ← ابوالعباس نیریزی

هاشمی ← محمد بن عبدالعزیز

یزدی ← محمدباقر یزدی

فهرست منابع و مآخذ^۱ به ترتیب الفبایی علائم اختصاری آنها

آثار الباقیه

«آثار الباقیه عن القرون الخالیة» تألیف ابی الریحان محمد بن احمد البیرونی الخوارزمی چاپ ادوارد زاخاتو، لایپزیک سال ۱۸۷۸ م. با مقدمه‌ای به زبان آلمانی — در منابع اروپایی از این کتاب با عنوان زیر یاد می‌کنند:

“Chronologie orientalischer Völker” Von Albiruni. Herausgegeben Von Dr. C. Eduard Sachau. Leipzig, 1923.

احوال و آثار بیرونی

«احوال و آثار ابوریحان بیرونی» تألیف دکتر ذبیح‌الله صفا. از انتشارات اداره کل نگارش وزارت فرهنگ و هنر. تهران ۱۳۵۲ ه. ش.

استخراج الاوتار (چاپ حیدرآباد)

«رسالة فی استخراج الاوتار فی الدائرہ بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی، چاپ حیدرآباد دکن، توسط جمعیت دایرة المعارف عثمانیه، ۱۳۶۷ ه. ق. = ۱۹۴۸ میلادی.
(← ۳/۱۲ کتاب حاضر).

۱. نام کتابها یا مقاله‌های دیگری که مورد استفاده واقع شده و در این فهرست نیامده در متن کتاب حاضر یا در ذیل صفحات آن آمده است.

استخراج الاوتار (چاپ مصر)

«استخراج الاوتار فی الدائرة بخواص الخط المنحنی الواقع فیها» تألیف بیرونی، چاپ مصر، سال ۱۹۶۵ میلادی، مشتمل بر متن عربی و شرح ممزوج آن توسط احمد سعید الد مرداش به زبان عربی (در ۳۱۰ صفحه).

اسمیث H

SMITH. D. E.: "History of Mathematics", 2 Vol. Vol. I, 1951; Vol. II, 1953. Ginn and Company. U. S. A.

اصول اقلیدس = اصول هندسة اقلیدس

← «تحریر اقلیدس» در همین فهرست.

افراد المقال فی امر الاظلال

رسالة دّوم از «رسائل البیرونی» در ۲۲۶ صفحه که در ۱۳۶۷ ه. ق مطابق با ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است. در متن کتاب حاضر به عده‌ای از اشتباهات این چاپ اشاره شده است. (← شماره ۳/۲۳ کتاب حاضر).

التفهیم عربی (و ترجمه انگلیسی آن)

کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم، تصنیف ابی الریحان محمد بن احمد البیرونی، المکتوب فی غزنة سنة ۴۲۰، قد التزم طبعه و ترجمه الى اللغة الانكليزية فی اكسفورد، سنة ۱۹۳۴، رمزی رایت. "The book of instruction in the elements of the art of astrology". By Abû, l-Rayhan Muhammad ibn Ahmad al- Biruni. Written in Ghaznah, 1029 A. D. Reproduced from Brit. Mus. Ms. Or. 8349. The Translation facing the Text by R. Ramsay Wright, XVIII+674 p. London, Luzac, 1934.

جورج سارتن این کتاب را در مجله ایسیس، ج ۲۳، سال ۱۹۳۵، صفحات ۴۴۸ تا ۴۵۰ مورد نقادی قرار داده است.

التفهیم فارسی

«کتاب التفهیم لاوائل صناعة التنجیم تألیف استاد ابوریحان محمد بن احمد بیرونی» — با تصحیح و مقدمه و شرح و حواشی توسط شادروان استاد جلال همائی، از سال ۱۳۱۶ تا سال ۱۳۱۸ خورشیدی در تهران به چاپ رسیده است.
(← بخش نهم کتاب حاضر).

الفهرست

تألیف ابن ندیم، چاپ فلوگل: جلد اول، لایزیک ۱۸۷۱ م.

ایسیس

ISIS: "Official Quarterly Journal of the History of Science Society."

مجله ایسیس را دانشمند فقید جورج سارتن در سال ۱۹۱۳ میلادی تأسیس کرد.

ایندکس ایسلامیکوس

PEARSON, J. D.: "Index Islamicus 1906-1955". Cambridge 1958- "Supplement 1956-1960". Cambridge 1962 - "Second Supplement 1961-1965", Cambridge 1967.

ایوژ H

HOWARD EVES: "An Introduction to the History of Mathematics". Revised Edition, 1964, Holt, Rinehart and Winston, Inc.

بررسیهایی دربارهٔ بیرونی

«بررسیهایی دربارهٔ ابوریحان بیرونی بمناسبت هزارهٔ ولادت او» شمارهٔ ۱۱ از انتشارات شورای عالی فرهنگ و هنر. تهران ۱۳۵۲ ه. ش.

بروکلمان G-بروکلمان S

BROCKELMANN, Carl. "Geschichte der Arabischen literatur".

از چاپ دوم (۱۹۴۳-۱۹۴۹ م) جلدهای اول و دوم کتاب فوق با عنوانهای «بروکلمان G_۱» و «بروکلمان G_۲» و از متممهای آن با عنوانهای «بروکلمان S_۱» و «بروکلمان S_۲» نام برده‌ام.

بوآلوت O

BOILOT, D. J.: "L'œuvre d'al-Biruni: essai bibliographique". (Mélange de l'institut Dominicaine d'études orientales du Caire, vol. 2, 1955, pp. 161-25.

Corrigenda et addenda, aol. 3, 1956, pp. 391-396).

بوزجانی نامه ← قربانی-شیخان: بوزجانی نامه.

تاریخ بیهقی

تصنیف خواجه ابوالفضل محمد بن حسین بیهقی دبیر، باهتام دکتر غنی و دکتر فیاض، تهران ۱۳۲۴.

تاریخ الحکماء

تألیف جمال‌الدین قفطی، چاپ لیبرت، لایپزیک ۱۹۰۳ م.

تاریخ ریاضیات هندی

Datta, B., A. N. Singh; History of Hindu Mathematics, Bombay 1962.

تاریخ نجوم اسلامی

تاریخ نجوم اسلامی، ترجمه کتاب «علم الفلك، تاریخه عند العرب فی القرون الوسطی». تألیف کرلوفونسونلینو، ترجمه احمد آرام، تهران ۱۳۴۹ شمسی.
و ← «علم الفلك» در همین فهرست.

تحدید نهايات الاماكن

«کتاب تحدید نهايات الاماكن لتصحيح مسافات المساكن» تألیف بیرونی-یک نسخه خطی از متن عربی این کتاب در کتابخانه سلطان فاتح استانبول به شماره ۳۳۸۶ موجود است که در تاریخ ماه رجب سال ۴۱۶ هجری قمری (در زمان حیات بیرونی) نوشته شده است. عکس این نسخه را دوست ارجمندم آقای دکتر منوچهر ستوده به من اهداء کرده است.
در متن کتاب حاضر بیشتر از «ترجمه فارسی کتاب تحدید» استفاده کرده‌ام ولی گاهی نیز به متن عربی آن ارجاع کرده‌ام. (← «ترجمه فارسی کتاب تحدید» در همین فهرست).

تحریر اقلیدس

«تحریر اقلیدس فی علم الهندسه» توسط خواجه نصیرالدین طوسی، چاپ سنگی، تهران ۱۲۹۸ ه. ق.

تحقیق ماللهند

«فی تحقیق ماللهند من مقولة مقبولة فی القفل او مرذولة» تألیف بیرونی-چاپ حیدرآباد دکن، ۱۹۵۸ (برای کسب اطلاع از سایر چاپها و ترجمه‌های این کتاب ← «نصر: کتابشناسی بیرونی» ص ۱۰).

ترجمه انگلیسی التفهیم

← «التفهیم عربی» در همین فهرست.

ترجمه فارسی آثارالباقیه

«ترجمه آثارالباقیه ابوریحان بیرونی» توسط اکبر دانا سرشت متخلص به صیرفی، تهران ۱۳۲۱، ه. ش.

ترجمه فارسی الفهرست

توسط آقای م. تجدد، تهران ۱۳۴۳ ه. ش.

ترجمه فارسی تاریخ الحکماء

«تاریخ الحکماء» تألیف قطبی، ترجمه فارسی از قرن یازدهم هجری—مقابله، تصحیح، حواشی و مقدمه به کوشش خانم دکتر بهین دارائی، تهران ۱۳۴۷ ه. ش.

ترجمه فارسی کتاب تحديد

«کتاب تحديد نهايات الاماکن لتصحيح مسافات المساکن» تألیف ابوریحان...بیرونی ترجمه احمد آرام. شماره ۱۳۹۲ از انتشارات دانشگاه تهران-تهران ۱۳۵۲ ه. ش. (و نیز ← «تحدید نهايات الاماکن» در همین فهرست).

ترجمه فارسی مقدمه ابن خلدون

«مقدمه ابن خلدون» تألیف عبدالرحمن بن خلدون، ترجمه محمد پروین گنابادی، در دو جلد، شماره‌های ۴۴ و ۸۰ از انتشارات بنگاه ترجمه و نشر کتاب، تهران ۱۳۳۶ و ۱۳۳۷ ه. ش.

ترجمه فارسی میزان الحکمة

«ترجمه میزان الحکمة تصنیف ابوالفتح عبدالرحمن خازنی با مقدمه و تعلیقات توسط مدرس رضوی» شماره ۱۲ از انتشارات بنیاد فرهنگ ایران، تهران، ۱۳۴۶ خورشیدی. از متن عربی کتاب میزان الحکمة بیشتر استفاده کرده‌ام. ← «میزان الحکمة» در همین فهرست.

ترجمه فرانسوی کتاب کشف القناع

Traité du Quadrilatère, édité et traduit par Alexandre Pacha Caratheodory, Constantinople, 1891.

این ترجمه توسط Carra de Vaux در جلد بیستم دوره هشتم مجله «روزنامه آسیائی» (صص ۱۷۶ تا ۱۸۱) مورد نقادی قرار گرفته است.

تعلیقات چهار مقاله

«تعلیقات چهار مقاله نظامی عروضی» توسط دکتر محمد معین، چاپ سّوم، ۱۳۳۳ ه.ش.

جبر و مقابلة خوارزمی (و ترجمه انگلیسی آن).

ROSEN, Frederic: "The Algebra of Mohammed ben Musa" London 1831.

این کتاب مشتمل بر ترجمه انگلیسی و متن عربی کتاب «جبر و مقابلة خوارزمی» از روی نسخه خطی موجود در آکسفرّد است. (و ← «قربانی: ریاضیدانان ایرانی»، صص ۳۰ (م ۲۳) و ۳۲ (م ۳۴) و ۳۳ (م ۳۵) و ۳۷ و ۳۸).

جمع الطرق السائره فی معرفة اوتارالدایره

تألیف بیرونی. (← ۳/۱۳ کتاب حاضر).

خیامی نامه

تألیف شادروان جلال الدین همائی، جلد اول، تهران ۱۳۴۶ ه.ش.

داتا

DATTA, B.: Al-Biruni and the Origin of the Arabic numerals. (15 p).

(Proceedings of the Benares Mathematical Society Vol. 7, 1928).

دایرةالمعارف اسلام

ENCYCLOPAEDIA OF ISLAM=ENCYCLOPEDIA DE L'ISLAM.

چاپ جدید

دایرةالمعارف اونیورسالیس

ENCYCLOPAEDIA UNIVERSALIS, Paris 1968-1974.

دایرةالمعارف فارسی

به سرپرستی دکتر غلامحسین مصاحب، جلد اول (۱-س) چاپ اول، تهران ۱۳۴۵ ه.ش.

درةالتاج

«درةالتاج لغرةالدباج» تصنیف قطبالدین محمود شیرازی، بخش دوم، چاپ اول، تهران ۱۳۲۴ ه.ش.

دوبارنو «مقالید» یا «مقالید علم الهیة»

M. Th. DEBARNOT: "Les clefs DE L'ASTRONOMIE" d'Abū al-Rayhān Muhammad b. Ahmad al-BĪRūnĪ, Paris 1980.

دیکسون H

DICKSON, L. E. "History of the theory of Numbers." 3Vol. 1966, Chelsea publishing Company, New York.

راشیکات

«راشیکات الهند» — رسالة چهارم از «رسائل البيروني» در ۳۰ صفحه که در سال ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

رسائل ابن سنان

«رسائل ابن سنان، للعلامة ابراهيم بن سنان بن ثابت بن قُره...» مشتمل بر هفت رسالة زیر: الاسطرلاب — التحليل و التركيب — حركات الشمس — رسم القطوع — المساحة الهندسه و النجوم. این کتاب در سال ۱۳۶۷ ه. ق مطابق با ۱۹۴۸ میلادی در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

رسائل ابونصر

«رسائل ابي نصر منصور بن عراق الى البيروني» مشتمل بر ۱۵ رسالة زیر: ۱- الاسطرلاب، ۲- امتحان الشمس، ۳- تصحيح زيچ الصفائح، ۴- جدول التقويم، ۵- جدول الدقائق، ۶- رؤية الالهة، ۷- ضمیمه كتاب الاصول، ۸- القسی الفلكیه، ۹- كرية السماء، ۱۰- المسائل الهندسيه، ۱۱- مطالع السميت، ۱۲- اصلاح شكل مانبالاوس، ۱۳- منازعة اعمال الاسطرلاب، ۱۴- دوائر السموت فی الاسطرلاب، ۱۵- صنعة الاسطرلاب.

در سالهای ۱۹۴۷ و ۱۹۴۸ میلادی توسط جمعیت دایرة المعارف عثمانیه در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است.

رسائل البيروني

مشتمل بر چهار رساله: استخراج الاوتار فی الدائره — افراد المقال فی امرالظلال — تهديد المستقر لمعنى الممر — راشيكات الهند.

چاپ حیدرآباد دکن ۱۹۴۸ میلادی توسط جمعیت دایرة المعارف عثمانیه.

الرسائل المتفرقة فی الیهیئة

للمتقدمین و معاصری البیرونی، چاپ حیدرآباد، ۱۹۴۷ م.

رسالة جبر و مقابلة خواجه طوسی

شماره ۳۱۱ از انتشارات دانشگاه تهران که از روی نسخهٔ مکتوب در سال ۹۶۹ هجری به کوشش اکبر دانا سرشت در خرداد ماه ۱۳۳۵ ه.ش. به چاپ رسیده است (در ۲۳ صفحه).

رسالة «فی حرکات الشمس»

تألیف ابراهیم بن سنان بن ثابت. رسالة سوّم از «رسائل ابن سنان». ← «رسائل ابن سنان» در همین فهرست.

رسالة «القسی الفلکیة»

«رسالة فی معرفة القسی الفلکیة بعضها من بعض...» تألیف بیرونی. در این رساله در سال ۱۳۶۶ ه.ق. توسط جمعیت دایرة المعارف عثمانی در حیدرآباد دکن در جزو «رسائل ابی نصر... الی البیرونی» به چاپ رسیده است (رسالة هشتم از مجموعهٔ رسائل ابونصر) در ۱۳ صفحه.

رسالة محیطیة

تألیف غیاث الدین جمشید کاشانی. عکس نسخهٔ خطی، به خط دست مؤلف، موجود در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی. (← «قربانی: کاشانی نامه» صص ۱۵۹ تا ۱۹۵).

رسالة «المسائل الهندسیة»

تألیف ابونصر عراق. این رساله در مجموعهٔ «رسائل ابونصر» در سال ۱۳۶۶ ه.ق. در حیدرآباد دکن به چاپ رسیده است. (رسالة دهم از مجموعهٔ رسائل ابونصر) در ۲۱ صفحه.

زاخاو A

SACHAU, E.: "Algebraisches Über das schach bei Biruni" (Zeitschrift der deutschen morgenlandischen Gesellschaft, Vol. 29, 1876, pp. 148-156).

این مقاله دربارهٔ مسئلهٔ شطرنج است — دربارهٔ مسئلهٔ شطرنج نیز ← «قربانی: مسئلهٔ شطرنج» در همین فهرست.

سارتن I

SARTON, Georges: "Introduction to the History of Science," Vol. I, 1950, Vol. II and III (each in 2 parts), 1953, Baltimore.

سوتر A

SUTER, H: "Das Buch der Auffindung der Sehnen in Kreise von Abul-Raihan Muh. el-Biruni" (Bibliotheca Mathematica, III Folge, 11Band, 1910-1911, pp. 11-78).

این مقاله مشتمل بر ترجمه آلمانی متن کتاب «جمع الطرق السائرة فی استخراج الاوتار الدائرة» تألیف بیرونی (از صفحه ۱۱ تا صفحه ۶۴ مقاله) و شرح و تفسیر آن است (از صفحه ۶۴ تا صفحه ۷۸ مقاله) — این ترجمه و شرح بسیار استادانه انجام گرفته است.

سوتر M

SUTER, H.: "Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften..., Hefte 10, Leipzig, 1900).

سوتر P

SUTER, H.: "Über die Projektion der Sternbilder und Länder von al-Biruni" (Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und Medizin, Heft 4, pp. 79-93, Erlangen, 1922).

این مقاله ترجمه آلمانی رساله «فی تسطیح الصور و تبطیح الکور» تألیف بیرونی است.

شرح حال نابغه شهیر ایران ابوریحان

نوشته علامه علی اکبر دهخدا. این مقاله در مجله آموزش و پرورش، جلد ۱۵ شماره های ۷/۶/۵/۴/۳ صص ۸۱-۸۰ به چاپ رسیده و عین آن در «لغت نامه» ذیل عنوان ابوریحان نیز به چاپ رسیده است. من از «لغت نامه» استفاده کرده و در متن کتاب به آن ارجاع کرده‌ام.

شرح زیج الغ بیک

تألیف عبدالعلی بن محمد بن حسین نظام‌الدین بیرجندی. نسخه خطی شماره ۴۷۳ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران.

شمارنامه

تألیف محمد بن ایوب طبری، انتشارات بنیاد فرهنگ ایران (شماره ۷) تهران ۱۳۴۵ ه.ش.

شوی C

SCHOY, C: "Al-Biruni's Computation of the Value of π ." (The American Mathematical Monthly, Vol. 33; No 6, pp. 323-325).

این مقاله مشتمل بر ترجمه باب پنجم از مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» است. قانون مسعودی چاپی، ج ۱، ص ۳۰۳ و ۳۰۴ که عنوان آن «الباب الخامس فی النسبة التي بین القطر و بین الدور» است.

شوی M

SCHOY, C: "Al-Biruni's method of approximatin of chord 40° ". (American Mathematical Monthly Vol. 33, 1926, pp. 95-96).

شوی T

SCHOY, Carl.: "Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad al-Biruni." Hannover, 1927.

این کتاب را کارل شوی* در سال ۱۹۲۴ م. نوشت ولی بعد از مرگ وی در سال ۱۹۲۷ توسط روسکا** و ویلایتر*** نشر یافت. شصت و سه صفحه اول آن ترجمه مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» به زبان آلمانی است (← «قانون مسعودی» چاپی، ج ۱، ص ۲۷۱ تا ۳۶۰) در صفحات ۶۴ تا ۷۳ آن کارل شوی، به ترتیب درباره بابهای دوم و چهاردهم و هفدهم از مقاله چهارم و باب ششم از مقاله پنجم و باب یازدهم از مقاله چهارم «قانون مسعودی» بحث کرده است. (← «قانون مسعودی» چاپی، ج ۱، صص ۳۶۹ و ۴۴۲ و ۴۵۶ و ج ۲، ص ۵۲۶ و ج ۱، ص ۴۲۳). در صفحات ۷۴ تا ۸۴، رساله «عمل الدائرة المرسومة بسبعة اقسام متساوية لارشمیدس ترجمه ابوالحسن ثابت بن قره» از روی نسخه خطی موجود در قاهره (فهرست خدیویه، ج ۵، ص ۲۰۳) به زبان آلمانی ترجمه شده است. در صفحات ۸۵ تا ۹۱ کارل شوی رساله «فصل فی مقدمة ضلع المسيع» تألیف ابن هیثم را از روی نسخه خطی موجود در ایندیا افسس به زبان آلمانی ترجمه کرده است. صفحات ۹۲ تا ۱۰۰ کتاب مشتمل بر «بقیه جدول جیب» از روی «زیج الغیگ» و صفحات از ۱۰۱ به بعد مشتمل بر جداول ظل معکوس نیز از روی همان زیج است. این کتاب توسط جرج سارتن در جلد دهم مجله ایسیس، سال ۱۹۲۸ صفحه ۴۹۵ معرفی شده است. سارتن نوشته است که این اثر کارل شوی مطالبی اساسی به معلومات ما درباره علم مثلثات در دوره اسلامی می افزاید.

* برای کسب اطلاع از احوال و آثار کارل شوی ← «مجله ایسیس» ج ۹، سال ۱۹۲۷، ص ۸۳ تا ۹۵.

** J. Ruska *** H. Wieleitner

صایلی L

SAYILI, Aydin.: "Logical Necessities in Mixed Equations by Abd al Hamidibn Turk and the Algebra of his time" Ankara, 1962.

علم الفلك

«علم الفلك تاريخه عند العرب فى القرون الوسطى» ملخص المحاضرات التى القاها بالجامعة المصرية حضرة الفاضل السنيور كرولونينو. رم ۱۹۱۱ م. اين كتاب به فارسى ترجمه شده است. ← «تاريخ نجوم اسلامى» در همين فهرست.

عيون الحساب

تأليف ملا محمد باقر يزدى، نسخه خطى. (راجع به اين كتاب و شرح آن و ترجمه فارسى آن و نسخه هاى خطى آن ← «قربانى: دو رياضيدان ايرانى» صص ۳۴ و ۳۵).

فهرست الهيات

«فهرست نسخه هاى خطى كتابخانه دانشكده الهيات و معارف اسلامى». گردآورى و تنظيم سيد محمد باقر حجتى و محمد تقى دانش پژه. تهران، ۱۳۴۵ ه.ش.

فهرست دانشگاه

«فهرست نسخه هاى خطى كتابخانه مركزى دانشگاه تهران» تأليف محمد تقى دانش پژه در ۱۵ جلد.

فهرست سپهسالار

«فهرست كتابخانه سپهسالار» از محمد تقى دانش پژه و علينقى منزوى، بخش سوم و چهارم.

فهرست ليدن

Catalogus cod. orient. bibl. acad. Batav. auctore R. Dozy, P. de Jong et M. J. Goeje. Leiden, 1851-77.

فهرست مجلس

«فهرست كتابخانه مجلس شورى ملى» در ۱۹ جلد.

فهرست ميكروفيلمها

«فهرست ميكروفيلمهاى كتابخانه مركزى دانشگاه تهران» تأليف محمد تقى دانش پژه، تهران ۱۳۴۸ ه.ش.

فیورینی P

FIORINI, M.: "Le progezioni cartografiche di Albiruni" (Bollettino della Societa geografica italiana (3), Vol. 4, 1891, pp. 287-294).

قانون مسعودی

«کتاب القانون المسعودی»، تألیف بیرونی، چاپ حیدرآباد دکن، ۱۹۵۴-۱۹۵۶ میلادی در سه جزو. مجموعاً دارای ۱۴۸۷ صفحه به اضافه ۵۹ صفحه فهرست. ← بخش هشتم کتاب حاضر. در پایان جلد سوم این چاپ از «قانون مسعودی» مقاله زیر در ۷۵ صفحه به چاپ رسیده و در کتاب حاضر از آن استفاده شده است:

BARANI, Seyed Hasan: "Al-Biruni and his Magnum Opus Al-Qanun u'l-Mas'udi".

قربانی بیرونی نامه

تحقیق در آثار ریاضی استاد ابوریحان بیرونی، ریاضیدان و منجم بزرگ ایران. پژوهش و نگارش ابوالقاسم قربانی، شماره ۱۰۷ از سلسله انتشارات انجمن آثار ملی ۱۳۵۳ ه.ش. قربانی: ت ← «قربانی: تحریر استخراج الاوتار».

قربانی تاریخ پی

قربانی، ابوالقاسم: «تاریخ عدد پی در شرق و غرب»، مجله سخن، دوره ششم، شماره ۵، تیرماه ۱۳۳۴ خورشیدی. صفحات ۳۹۹ تا ۴۰۷.

قربانی تحریر استخراج الاوتار

تحریر «استخراج الاوتار» تألیف استاد ابوریحان بیرونی ریاضیدان و منجم بزرگ ایران، شماره ۱۲۴ از سلسله انتشارات انجمن آثار ملی سال ۱۳۵۵ ه.ش.

قربانی: دو ریاضیدان ایرانی

قربانی، ابوالقاسم: «دو ریاضیدان ایرانی و شمه‌ای درباره عددهای متحاب» از انتشارات مرکز تحقیقات علمی و تاریخی مدرسه عالی دختران ایران، تهران دی‌ماه ۱۳۴۷. این کتاب مشتمل بر شرح احوال و آثار کمال‌الدین حسن فارسی و محمد باقر یزدی و مختصری درباره عددهای متحاب است.

قربانی ریاضیدانان

قربانی، ابوالقاسم: «ریاضیدانان ایرانی — از خوارزمی تا ابن سینا». نشریه شماره ۱۴، مدرسه عالی دختران ایران، تهران ۱۳۵۰ خورشیدی — این کتاب مشتمل بر شرح احوال و آثار بیست و پنج نفر از ریاضیدانان ایرانی است.

قربانی: زندگینامه ریاضیدانان (=قربانی Z)

زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی از سده سوم تا سده یازدهم هجری قمری. از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، تهران سال ۱۳۶۵ ه.ش.

قربانی: قطب الدین شیرازی

قربانی، ابوالقاسم: مقاله «قطب الدین شیرازی، ریاضیدان بزرگ ایرانی» مجله راهنمای کتاب، سال یازدهم، شماره هشتم، صفحات ۴۲۹ تا ۴۳۵.

قربانی: کاشانی نامه

قربانی، ابوالقاسم: «کاشانی نامه — تحقیق در احوال و آثار غیاث الدین جمشید کاشانی ریاضیدان و منجم بزرگ ایرانی» انتشارات دانشگاه تهران، شماره ۱۳۲۲.

این کتاب جایزه بهترین کتاب سال ۱۳۵۰ خورشیدی را به دست آورد و تحقیق علمی درجه اول شناخته شد. چاپ دوم این کتاب در سال ۱۳۶۸ ه.ش. توسط مرکز نشر دانشگاهی تهران منتشر شد.

قربانی: مسئله شطرنج

قربانی، ابوالقاسم: «مسئله شطرنج» مجله سخن، دوره ششم، شماره ۶، سال ۱۳۳۴. صفحات ۵۰۳ تا ۵۰۶.

قربانی: مقاله «ابوالحسن بامشادقاینی»

مشتمل بر شرح احوال و آثار ابوالحسن قاینی. مجله یکان، شماره هشتم، دوره ششم-خرداد و تیر ۱۳۵۱.

قربانی: نسوی نامه

قربانی، ابوالقاسم: «نسوی نامه-تحقیق در آثار ریاضی علی بن احمد نسوی»-شماره ۱۴۵ از انتشارات بنیاد فرهنگ ایران-تهران ۱۳۵۱ خورشیدی. چاپ دوم این کتاب در سال ۱۳۷۰ ه.ش. توسط مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی تهران منتشر شد.

قربانی: Z ← قربانی زندگینامه.

قربانی-شیخان: بوزجانی نامه

شرح آثار و احوال ریاضی ابوالوفا بوزجانی ریاضیدان و منجم بزرگ ایرانی، پژوهش و نگارش ابوالقاسم قربانی و محمد علی شیخان. چاپ انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی (شرکت سهامی). سال ۱۳۷۱ ه.ش.

کازوری *H*

CAJORI, F.: "A History of Mathematics" Second Edition, New York, 1919.

کاظم *T*

KAZIM, M. A.: "Al-Biruni and trigonometry" (Al-Biruni Commemoration Volume, A. H. 1362 Calcutta "1951" pp. 161-170).

در این مقاله اهمیت مقاله سوم کتاب «قانون مسعودی» از جهت تاریخ علم مثلثات و پیشرفت آن علم مورد بحث قرار گرفته است. به عقیده نویسنده مقاله فوق، بیرونی بود که نخستین بار علم مثلثات را به عنوان علمی مستقل مورد بحث قرار داد و نه نصیرالدین طوسی چنانکه براونموهل (Braunmuhl, A.) در تاریخ مثلثات خود نوشته است.

کانتور *VOR*

CANTOR, M.: "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" Erster Band, Leipzig, 1907.

کراوزه *S*

KRAUSE, M.: "Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker" (Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abteilung B. Studien Band 3, 1936).

کشاف اصطلاحات الفنون

تألیف محمد علی الفاروقی التهانوی. دو جلد، کلکته ۱۸۶۲ میلادی.

کشف القناع

«کشف القناع عن اسرار شکل القطاع» تألیف خواجه نصیر الدین طوسی. عکس نسخه خطی شماره ۶۷۰۳ کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران که اصل آن در کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار تهران موجود است.

کندی M

KENNEDY, E. S.: "Al-Biruni's Maqalid Ilm al-Hay'a" (Journal of Near Eastern Studies, Vol. 30, 1971, pp. 308-314).

کهل G

KOHL, Karl.: "Zur Geschichte der Dreiteilung des Winkels" (Sitzunber. der Phys. med. Sozietät in Erlangen, 54 und 55 Band, 1922-1923 pp. 180-189).

گانتز O

"The Origin of the Ghubār Numerals, or the Arabian Abacus and the Articuli" Isis, Vol. 16, 1931.

گاهنامه

تألیف سیدجلال‌الدین طهرانی، سال ۱۳۱۱ خورشیدی.

لغت‌نامه

تألیف علامه دهخدا.

لوکی R

LUCKEY, Paul.: "Die Rechenkunst bei Gamshid b. Masûd al-kashi, mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens" (Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes, XXXI, I, Wiesbaden 1951).

متفکران اسلام

CARRA DE VAUX, B.: "Les Penseurs de l'islam", 5 Vols., Paris, 1921-6.

مصاحب: ابوریحان

«ابوریحان بیرونی» تألیف شادروان دکتر غلامحسین مصاحب. یادبود جشن تاجگذاری، آبان ماه ۱۳۴۶، دانشگاه ملی ایران.

مصاحب: حکیم خیام

«حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر» تألیف شادروان دکتر غلامحسین مصاحب، چاپ تهران ۱۳۳۹ خورشیدی، شماره ۳۸ از سلسله انتشارات انجمن آثار ملی.

مفتاح الحساب

تألیف غیاث الدین جمشید کاشانی، چاپ سنگی، تهران ۱۳۰۶ ه.ق. به ضمیمه رساله نزهة الحقائق و ذیل نزهة الحقائق — در پایان بعض نسخه‌های این چاپ — رساله «فی استخراج جیب الدرجة الواحدة» تألیف کاشانی و تحریر قاضی زاده رومی را که در ۱۱۹۹ ه.ق. در تهران به چاپ سنگی رسیده است افزوده‌اند.

در این کتاب هر جا به مفتاح ارجاع شده است مقصود «مفتاح الحساب» چاپی مذکور است.

مقاله «فی تکسیر الدائرة»

تألیف ارشمیدس و تحریر خواجه نصیر الدین طوسی. این مقاله در پایان کتاب «الکرة والاسطوانة» در جزو رسائل طوسی چاپ حیدرآباد دکن به طبع رسیده است. ترجمه انگلیسی مقاله تکسیر دایره با عنوان "Measurement of a circle" در کتاب «هیث A» (صفحات ۹۱ تا ۹۸) آمده است.

مقالید علم الهیئة

«مقالید علم الهیئة ما یحدث فی سطح بسیط الکرة» تألیف بیرونی. نسخه خطی شماره ۵۹۷/۲۳ کتابخانه مدرسه عالی سپهسالار تهران که فیلم آن به شماره ۳۵۹۷ در کتابخانه مرکزی دانشگاه تهران موجود است. و عکس صفحات آن در صفحات ۴۶۱ تا ۵۰۴ کتاب قربانی: بیرونی نامه به چاپ رسیده است. ← بخش هفتم همان کتاب.

مقدمه تاریخ علم

← «سارتن I» در همین فهرست.

مونتوکلا H

MONTUCLA, J. E.: "Histoire des mathématiques", 4 Vols., Paris, 1799-1802.

میزان الحکمة

متن عربی «کتاب میزان الحکمة» تألیف عبدالرحمن خازنی. چاپ حیدرآباد دکن سال ۱۳۵۹ ه.ش.

قسمتی از این کتاب به فارسی ترجمه شده است. ← به «ترجمه فارسی میزان الحکمة» در همین فهرست.

میه لی S

MIELI, Aldo.: "La science arabe et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale", Leiden, 1966.

نصر: ابوریحان

ابوریحان بیرونی—معرفی یک دانشمند و محقق برجسته. به قلم دکتر سید حسین نصر، به مناسبت هزاره ابوریحان تحریر یافته است، ۱۳۵۲ ه.ش.

نصر: کتابشناسی بیرونی

«کتابشناسی توصیفی ابوریحان بیرونی» به قلم سید حسین نصر. از انتشارات شورای عالی فرهنگ و هنر. تهران ۱۳۵۲ ه.ش.

نفایس الفنون

«نفایس الفنون فی عرایس العیون» تألیف علامه شمس الدین محمد بن محمود آملی. چاپ تهران، ۱۳۷۹ ه.ق. در سه مجلد.

نه مقاله هندسه

شامل هندسه مسطحه و هندسه فضایی و مخروطات و حاملها تألیف ابوالقاسم قربانی و حسن صفاری، کتابفروشی علی اکبر علمی، تهران ۱۳۳۲ ه.ش.

وپکه: جبر خیام

WOEPCKE, F.: "L'Algèbre d'Omar Alkhayyamî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits", Paris, 1851.

وپکه: F

WOEPCKE, F.: "Extrait du Fakri, traité, d'algèbre précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes", Paris 1853.

ویدمان P

WIEDEMANN, E.: "Über die Wage des Wechselns von al Châzinu und über die Lehre von den Proportionen nach al-Biruni," (Sitzungsberichten der Physikalisch Medizinischen Sozietät zu Erlangen, Vol. 48-49, 1916-17, pp. 1-15).

موضوع قسمتی از این مقاله (صفحات ۱ تا ۶) بحث دربارهٔ رسالهٔ «راشیکات هند» تألیف بیرونی است.

هندسهٔ کمیسر

COMMISSAIRE, H.: "Leçons de Géométrie", Paris 1932.

هندسهٔ گیشارد

GUICHARD, C.: "Traité de Géométrie". tome II, Cinquième édition, Paris 1923.

هیث A

HEATH, T. L.: "The Works of Archimeds". Dover publications, New York.

هیث E

HEATH, T. L.: "The Thirteen books of Euclid's Elements", 3 Vols. New York, 1956.

هیث H

HEATH, T. L.: "A History of Greek Mathematics", 2 Vols. Oxford 1921.

یادنامهٔ بیرونی به انگلیسی

Al-Biruni Commemoration Volume, A. H. 1362 Calcutta, 1951.

یوشکویچ G

JUSCHKEWITSCH, A. P.: "Geschichte der Mathematik im Mittelalter," 1964, Leipzig.

بقیه فهرست اصطلاحات ریاضی

در بخش نهم کتاب حاضر فهرست اصطلاحات ریاضی کتاب «التفهیم» را همراه با شرح آنها آورده‌ام. در اینجا فهرست بقیه اصطلاحاتی را که در بخشهای دیگر کتاب آمده است می‌نویسم. اعدادی که در داخل پرانتز گذاشته شده‌اند شماره صفحاتی است که در آنها توضیحات بیشتری درباره اصطلاح مورد نظر آمده است.

اختیار عدد قطر (۳۲۲)	تسهیم کمان (از ۳۳۲ تا ۳۳۴)
ارتفاع خورشید (از ۲۲۸ تا ۲۳۰)	تصویر استوانی (۸۳ تا ۸۵)
افق حسی (۲۲۵)	تصویر جسم‌نما (از ۸۲ تا ۹۴)
افق حقیقی (۲۲۵)	تصویر در اسطراب مَبْطَح (از ۸۵ تا ۸۷)
اکدشه راشیکه (۶۸)	تصویر مخروطی (۸۲، ۸۳)
اقمات الاوتار ۱۹۶، ۱۹۷، (از ۲۴۴ تا ۲۴۹)	تضاعیف زوج الزوج ← تضاعیف واحد
بعد مجاز (از ۹۱ تا ۹۴)	تضاعیف واحد (از ۸۱ تا ۸۲)
پنج راشیک (۶۵، ۶۶)	تقسیم‌بندی مثلثهای کروی (از ۲۳۴ تا ۲۳۶)
پنجه راشیکه ← پنج راشیک	تقویس (۳۲۶، ۳۲۷، از ۳۳۰ تا ۳۳۲)، ۳۳۴
تألیف نسبت ۵۹، ۶۰، ۶۵	تقویس سهم (۳۳۴)
تثلیث زاویه (از ۲۸۹ تا ۳۰۶)، از ۳۰۸ تا ۳۱۰	تکافی النسبة ← نسبت متکافی
تجیب (از ۳۲۶ تا ۳۳۰)، ۳۳۴	تکریر نسبت ۵۸، ۶۰
ترای راشیکه (۵۷، ۵۸)، ۶۶	تناسب مرکب از ۶۵ تا ۶۷
تسطیح ۸۲	تناسب معکوس ← نسبت متکافی
	تفقیح کمان ۳۲۷
	توابع وترهای مهم (از ۲۶۴ تا ۲۷۹)

- جیب (نزد هندیان) ۳۳۵
 جیبا (۲۴۴)
 جیبارد (۲۴۴)
 جیب منکوس (۳۳۲، ۳۳۳)
 حل مثلنهای کروی ۲۳۴، (۲۳۶، ۲۳۷)
 حل معادله درجه سوم ۲۴
 دایره ارتفاع (۲۲۵)
 دایره‌های طول (از ۸۷ تا ۹۲)
 دایره‌های عرض ۸۸، (از ۹۲ تا ۹۴)
 کسر مجرّد (۲۴۴)
 کمان ارتفاع (۲۲۵)
 کمان مجاز (= بعد مجاز) ۹۴
 زیج (۲۴۴)
 سینه راشیکه ۶۸
 سهم کمان ← جیب منکوس
 شطرنج ← مسئله شطرنج
 شکل ظلی ۱۹، ۲۴، ۶۱، ۲۰۰، ۲۰۲، ۲۰۸، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۲۴، (۲۳۲)، ۲۳۳، ۳۳۵
 شکل قَطّاع ۱۹، ۶۱، از ۲۰۰ تا ۲۱۱، ۲۲۰، ۳۳۵
 شکل مغنی ۷، ۱۹، ۲۳، ۲۴، ۳۱، ۵۳، ۶۱، ۲۰۰، ۲۰۲، از ۲۰۶ تا ۲۱۱، (۲۱۳)، ۲۱۴، از ۲۱۶ تا ۲۱۸، ۲۲۰، (۲۲۲)، ۲۲۳
 طلیسان مضاعف از ۷۰ تا ۷۳
 ظلّ بسیط (از ۲۲۵ تا ۲۳۲)
 ظلّ مبسوط ← ظلّ بسیط
 ظلّ مستوی ← ظلّ بسیط
 ظلّ معکوس (۲۲۶، ۲۲۸، از ۲۳۰ تا ۲۳۲)
 ظلّ منتصب ← ظلّ معکوس
 عدد π (بی) ۳۲۱
 قانون هیئت ۲۰۷، ۲۱۰، (۲۱۸)، ۲۱۹
 قطر ظلّ (۲۲۶، ۲۲۸، ۲۳۰، ۲۳۱)
 کسر مجرّد (۲۴۴)
 کمان ارتفاع (۲۲۵)
 کمان مجاز (= بعد مجاز) ۹۴
 مَبْطَخ ← تصویر در اسطرلاب مَبْطَخ
 مشاة ۶۱
 مسئله شطرنج (از ۷۳ تا ۸۲)
 میل اول (۲۱۷)
 میل دوم (۲۱۸)
 نسبت قطر به محیط (از ۳۱۷ تا ۳۲۱)
 نسبت متکافی (۶۷)
 نسبت مثلثه بالتکریر (۵۹)
 نسبت مشاة بالتکریر (۵۹)
 نسبت مربعه بالتکریر (۵۹)
 نسبت معطوف ۶۵
 نسبت مؤلف ۵۶، (از ۶۱ تا ۶۶)، ۲۰۲، ۲۰۶، ۲۰۷
 نَوَه راشیکه (۶۸)

وتریک ششم دایره (۲۴۶)

وتریک نهم دایره (۲۴۷، ۲۴۸، از ۲۷۹ تا ۲۸۸)،

۳۰۶، ۳۰۷

وتریک هجدهم دایره (از ۲۸۳ تا ۲۸۵)

وتریک هشتم دایره (۲۴۷، از ۲۶۲ تا ۲۶۴)

وتریک هفتم دایره (۲۴۶، ۲۴۷)، ۳۰۶، ۳۰۷

ویسته ترای راشیکه (۶۷، ۶۸)

وترهای مهم (اصلی) ← امتهات اوتار

وتریک پنجم دایره (۲۴۵، ۲۴۶، از ۲۵۸ تا

۲۶۲)

وتریک چهارم دایره (۲۴۵، ۲۵۷، ۲۵۸)

وتریک درجه (از ۲۸۹ تا ۳۱۶)

وتریک دهم دایره (۲۴۸، از ۲۵۸ تا ۲۶۲)

وتریک سوم دایره (۲۴۵، از ۲۵۵ تا ۲۵۷)

فهرست اسامی کتابها و مقالات و رسالات^۱

در این فهرست برای یافتن اسامی کتابها و رسالات و مقاله‌هایی که عنوان آنها با «کتاب فی» یا «رساله فی» یا «مقاله فی» یا «فی» شروع می‌شود باید به کلمه بعد از «فی» رجوع کرد. در ترتیب الفبائی اسامی کتابها الف و لام حرف تعریف در نظر گرفته نشده است.

آثارالباقیه ۳، ۶، ۱۷، ۱۸، ۲۹، ۳۱، ۴۶، ۴۹، ۵۰	استخراج قدر الارض ۲۹، ۳۳
از ۶۹ تا ۹۴، ۳۴۵	استخراج الکعب ۴۶
ابطال البهتان بایراد البرهان ۴۸، ۱۸۹	الاستشهاد باختلاف الارصاد ۴۹، ۵۰
ابطال ظنون فاسده... ۵۰	استعمال الاضطراب ۳۳
الاجوبة والاستئلة لتصحيح... ۵۱	استعمال الاضطراب الکرى ۴۱، ۵۱
اختصار المجسطی ۴۹	استعمال دوائر السموت ۴۹
اختلاف الاقاول لاستخراج التحویل ۴۸	استيعاب فی تسطیح الكرة ۴۷
اختلاف ذوی الفضل فی... ۵۱	استيعاب الوجوه الممكنه... ۲۹، ۳۸، ۴۱، ۸۴
الاختلاف الواقع فی تقاسیم... ۵۱	الاضطراب ۲۸، ۲۹، ۴۱
الارشاد الى تصحيح المبادئ... ۵۲	اصول اقلیدس ۵۶، ۵۷، ۱۱۳، ۱۳۶، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۸، ۱۵۲، ۱۵۴، ۲۴۶، ۲۵۱، از ۲۵۳ تا ۴۱۷، ۴۱۲، ۳۷۳، ۲۹۵، ۲۵۵
الارشاد الى ما يدرك... ۴۹	الاصول الهندسیه ۲۰، ۲۳، ۹۶، ۱۰۸، ۱۶۱
الارشاد فی احکام النجوم ۵۲	اعتبار مقدار الليل و النهار بطریق... ۵۰
الارقام ← تذکره فی الحساب...	اعتبار مقدار الليل و النهار فی جمیع الارض... ۴۹
استخراج اعداد المتحابه ۳۸۱	الاعتذار عما سبق لی فی... ۵۱
استخراج الاوتار ۲۰، ۲۳، ۲۵، ۲۹، ۳۰، ۳۴، ۴۲، ۴۳، ۴۵، از ۴۷ تا ۵۱، از ۹۵ تا ۱۹۷، ۲۰۳؛	
۲۴۹، ۲۴۸	

- اعمال الليل بالكواكب الثابتة ۲۱۹
افراد المقال فى امر الاظلال ۲۹، ۳۴، ۳۵
فى امر الممتحن و تبصير... ۴۸
الانبعاث لتصحیح القبلة ۵۱
ان رأى العرب فى مراتب العدد... ۴۶
ان لوازم تجزىء المقادير... ۴۷
ايضاح الادله على كيفية... ۵۱
البحث عن الطريقة... ۵۰
براهين اعمال حبش بجدول التقويم ۵۳
البراهين على عمل محمد بن صباح فى... ۵۳
البرهان على عمل حبش فى... ۵۳
البرهان المنير فى اعمال التسيير ۵۲
تبين رأى البطلميوس فى السالخداه ۵۲
تجريد الشعاعات و الانوار... ۵۲
تحديد ۱۱، ۱۷، ۱۹، ۲۹، ۳۲، ۳۳، ۴۱، ۱۹۹
تحديد المعموره و تصحيحها ۵۱
تحديد نهايات الاماكن ← تحديد
تحرير اقليدس ۳۶۰، ۳۶۶، ۴۱۱
تحصيل الآن من الزمان... ۵۱
تحصيل الراحة... ۴۷، ۱۳۱
تحصيل الشعاعات با بعد ۵۲
تحقيق مالهند ۴، ۶، ۹، ۴۲
تحقيق منازل القمر ۴۹
التحليل و التقطيع للتعديل ۲۸، ۲۹، ۳۴، ۴۲،
۴۳، ۱۸۷
تذكرة الاحباب فى بيان التحاب ۳۸۱
تذكرة فى الارشاد الى صوم... ۵۱
تذكرة فى الحساب والعَدَّ ۴۶، ۷۷
تذكرة فى المساحة للمسافر... ۴۸
تربيع دايره ۳۲۱
ترجمة كتاب فى اصطربلاب ۵۱
ترجمة كتاب فى اصول الهندسه ۴۷
ترجمة كتاب المجسطى... ۵۰
ترجمة كتاب المواليذ الصغير... ۵۲
ترجمة مافى براهم سدهاند... ۴۷
ترجمة فارسى كتاب تحديد ۳، ۲۰، ۲۳
ترجمة فارسى ميزان الحكمة ۷۴، ۸۱
تسطيح الصور و تبطيح الكور ۲۹، ۳۱
تسطيح الكرة ۴۸
تسهيل التصحيح الاصطربلابى... ۲۹، ۳۹
تصحیح الطول و العرض... ۵۱
تصحیح كتاب ابراهيم بن سنان فى... ۵۳
تصحیح ما وقع لابی جعفر الخازن... ۵۳
تصحیح المقول بين العرض... ۵۱
تصحیف المنقول من العرض... ۵۰
تصفح كلام ابى سهل ۵۰
تصور امر الفجر و الشفق ۵۰
التطبيق الى تحقيق حركة الشمس ۴۹
التطريق الى تحقيق حركة الشمس ۴۹
تعبير الميزان لتقدير الازمان ۵۱
تعليل الزيغ الخوارزمى ۴۸
تعيين البلد من العرض ۵۱
التفهيم ۴، ۱۰، ۱۱، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۲۸، ۴۶، ۴۷،
از ۳۳۶ تا ۴۲۰
التفهيم لاوائل صناعة التنجيم ← التفهيم
تقاسيم الاقاليم ۵۲
تقسيت القوى و الدلالات... ۵۲
تقويم القبلة بئست... ۵۱
تكميل زيغ حبش بالعلل... ۴۸، ۱۰۰
تكميل صناعة التسطيح ۴۷
تلافى عوارض الزلة فى... ۵۱

- تمهيد المستقر... ٢٩، ٤٢، ٤٥
- التنبه على صناعة التويمه و... ٥٢
- تنقيح التواريخ و امثال ذلك ٥١
- تتوير المنهاج الى تحليل الازياج ٤٩
- تهذيب الاقوال فى... ٥٠
- تهذيب التعاليم ٢٠٥، ٢٠٨
- تهذيب زيغ الاركند ٤٨
- تهذيب شروط العمل لتصحيح... ٥١
- تهذيب الطرق المحتاج اليها... ٤٩
- تهذيب الفصول الفرغانى ٤٩
- جامع قوانين علم الهيئة ٢٠١
- جبر و مقابله (خوارزمى) ٤٠٩
- جبر و مقابله (عبدالحميد بن واسع) ٤٠٩
- جبر و مقابله (نصيرالدين طوسى) ٤٠٩
- جدول الدقائق ٥٣
- جلاء الازهان فى زيغ البتاني ٤٩
- الجماهر فى معرفة الجواهر ٥
- جمع الطرق السائره فى معرفة... ٢٨، ٢٩، ٣١
- ٩٨، ١٠٢
- الجوابات عن المسائل العشر الكشميرية ٤٩
- الجوابات عن المسائل الوارده... ٣١، ٤٩
- جوامع الموجود لخواطر الهند... ٤٨
- حركات الشمس ٣٤، ٣٥
- حصر الطرق السائره فى... ٩٨، ١٠٢
- حكاية الآلة المسماة السدس الفخرى ٢٩، ٤٠
- حكاية طريق الهند فى استخراج العمر ٥٢
- حل شبهة عرضت فى الثالثة عشرة من... ٥٣
- خيال الكسوفين عند الهند ٤٨
- درة الناج ٣٧٤، ٣٨١، ٣٨٤
- الدرر فى سطح الأكر ٢٩، ٤٥
- دلالة الآثار العلوية ٥٠
- الدوائر التى تحدد الساعات الزمانية ٥٣
- الدوائر لارشميدس ← الدوائر المتعاسه
- الدوائر المتعاسه ٢٠، ٩٦، ٩٧، ١١١، ١١٣
- راشيكات الهند ٢٨، ٣٠، از ٥٥ تا ٦٨، ٢٠٤
- رسائل ابن سنان ٣٤
- رسائل ابن قره ٩٧
- رسائل ابونصر ٥٣
- رسائل البيرونى ٣٤، ٤٥
- زيغ الغيگ ٣٦٥
- زيغ بتانى ٨٦
- زيغ حبش حاسب ٢٠٨
- زيغ صفائح ٢٠٥، ٢١١، ٢٢٠
- زيغ مسعودى ٢٧، ٤٩
- السموت ٥٣، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢١٠
- سنكلت الاعداد ٤٦
- شرح زيغ الغيگ ٣٦٤، ٣٦٥
- شرح مجسطى (ابوجعفر خازن) ٦١
- شرح مجسطى (نيريزى) ٦١
- شمار نامه ٣٤٨
- الشموس الشافيه للنفوس ٥٢
- صفة اسباب السخونة الموجودة... ٥٢
- صفحة التسيير ٥٢

الصيدله ۸

الصيدنه في الطب ۵

طالع قبة الارض و حالات... ۴۹

علة تصيف التعديل عند... ۵۳

علة علامات البروج... ۵۰

علل زيغ جعفر المكنى بابى معشر ۴۹

علل زيغ حبش ۱۰۲، ۱۳۰

عيون الاصول ۳۴۸

عيون الحساب ۸۱، ۳۸۱

غاية الحكم ۳۸۱

غرة الزيجات ۲۸، ۲۹، ۴۲

غروب الشمس عند منارة اسكندريه ۵۰

الفحص عن نوادر ابى فحص عمر... ۴۹

الفخرى في الجبر والمقابلة ۳۵۷

قانون مسعودى ۵، ۱۱، از ۱۶ تا ۲۰، ۲۴، از

۲۷ تا ۲۹، ۳۱، ۴۲، ۴۹، ۱۲۱، ۱۴۵، ۱۵۰،

۱۹۰، ۱۹۶، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۶،

۲۲۰، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۷، از ۲۳۸ تا ۳۳۵،

۳۵۵

قسمة الزاوية المستقيمة الخطين ۳۰۱

القسى الفلكيه ← معرفة القسى الفلكيه

كتاب ابى ريحان الى ابى سعيد ۲۹، ۳۱

كتاب الى متعلمين في النسبة المؤلفه ۶۱

الكتابة في المكايل والموازن ۵۱...

كرنه تلكه ۴۲

كريات ۲۰۵

كشف القناع از ۲۰۱ تا ۲۰۴، ۲۱۶

الكلام على الكواكب ذوات... ۵۰

كواكب الثابتة (صور الكواكب) ۸۶

كيفية رسوم الهند في... ۴۶

لوازم الحركتين ۴۹

ما اخرج ما في قوة الاضطراب ۵۱

ماللهند ← تحقيق ماللهند

مجازات دوائر السموت في الاضطراب ۵۲

مجسطى ۸۶، ۱۴۷، ۱۹۷، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۱۰،

۲۱۱، ۲۲۰، ۳۱۲، ۳۱۹

مجسطى ابوالوفا ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۰

المدخل الى علم النجوم... ۵۲

المسائل البلخية في... ۵۲

المسائل المفيدة... في علل... ۴۸، ۱۲۸، ۱۲۹،

۱۸۷

المسائل الهندسيه ۲۰۳، ۲۱۳، ۲۱۴

مسامره في اخبار خوارزم ۱۴

مضيئات الجو الحادثة في العلو ۵۰

مطرح الشعاع ثابتاً على... ۵۲

معرفة سمت القبلة ۲۸، ۲۹، ۳۳

معرفة القسى الفلكيه بطريق ۵۳، ۲۰۹

مفتاح الحساب ۸۲، ۳۴۸، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۶۵،

۳۸۱، ۳۶۷

مفتاح علم الهيئة ۴۹

مقاليد علم الهيئة ۳، ۱۹، ۲۰، ۲۳، ۲۴، ۲۸، ۲۹،

۳۱، ۵۲، از ۱۹۸ تا ۲۳۷، ۲۴۳، ۳۳۵

المقنع في الحساب الهندى ۳۴۸

منصوبات الضرب ۴۷

ميزان الحكمة ٣٧، ٧٣، ٨١، ٤١٥

النسب التى بين الفلزات والجواهر فى الحجم ٢٩،

٣٦

النسبة المؤلفة ٦١

نفايس الفنون ٣٨١

نقل خواص الشكل القَطَّاع ٤٧

الوساطة ٤٨

فهرست اسامی ریاضیدانان

در این فهرست اعدادی که بین ۲ پراوتر گذاشته شده شماره صفحاتی است که در آنها خلاصه زندگینامه ریاضیدان مورد نظر آمده است.

ابوالحسن ثابت بن قره ← ثابت بن قره	آبولونیوس ۱۱۳، ۳۹۴
ابوالحسن شمس هروی ۲۹۸، (۴۲۴)	آذرخور ۲۳، ۱۱۲، ۱۲۱، (۴۲۱)
ابوالحسن قاینی ۱۴۹، ۱۵۲، ۱۵۳، (۴۲۳)	
(۴۲۴)	ابراهیم بن سنان ۳۴، ۳۵، ۴۳، ۱۰۰
ابوالحسن مسافر ← مسافرن حسن	(۴۲۲-۴۲۱)
ابوسعید سجری ۲۲، ۳۱، ۶۱، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷،	ابرخس ۱۹
۱۳۵، ۱۳۷، ۱۴۱، ۱۶۱، ۲۰۵، ۲۰۶، ۳۰۱،	ابن بامشاد ← ابوالحسن قاینی
(۴۲۴-۴۲۵)، ۳۱۶	ابن البغدادی ۶۱، ۲۰۵، (۴۲۲)
ابوسعید ضریر جرجانی ۱۱۰، ۱۱۴	ابن سالار ← حسام‌الدین سالار
ابوسهل کوهی ۳۰۷، (۴۲۵)	ابن سینا ← ابوعلی سینا
ابوسهل مسیحی ۴، ۳۸، (۴۲۵)	ابن عزرائی اسرائیلی ۴۸
ابوالعباس فرغانی (۴۲۵)	ابن هیشم ۱۲۴، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۵۱، ۳۲۱
ابوالعباس نیریزی ← نیریزی	ابوبکر کرجی ۳۵۷، (۴۲۲-۴۲۳)
ابوعبدالله شتی ← شتی	ابوجعفر خازن ۶۱، ۱۵۳، ۲۰۵، ۲۱۰، ۲۱۱،
ابوعلی بصری ← ابن هیشم	(۴۲۳)، ۲۲۰
ابوعلی سینا ۴، (۴۲۶)، (۴۲۷)	ابوالجود محمد بن لیث ۱۶۱، ۳۰۷، (۴۲۳)
ابوعلی حبیبی ۱۱۸، (۴۲۶)	ابوحامد صاغانی ۳۹، ۸۳، (۴۲۳)
ابوعلی حسن بن حسین بصری ← ابن هیشم	ابوالحسن آذرخور ← آذرخور
ابوالفتح خازنی ← خازنی	ابوالحسن اهوازی (۴۲۴)

ثابت بن قره ۴۳، ۶۱، ۹۷، ۱۰۰، ۱۶۱، ۲۰۵،
(۳۸۱، ۴۲۹)

ابومحمود حامد بن خضر ← خجندی
ابومعشر بلخی (۴۲۷)

حامد بن خضر ← خجندی
حبش حاسب ۲۰۸، (۴۳۰)
حسامالدین سالار ۲۰۱، (۴۳۳)
حسن بن حارث ← ابوعلی حبویی

ابونصر جعدی ← ابونصر عراق
ابونصر عراق ۳، ۴، ۲۳، ۲۴، ۲۶، ۳۱، ۳۹، ۵۰، از
۵۲ تا ۵۴، ۱۱۹، ۱۲۳، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۵۷،
۱۹۵، ۲۰۳، از ۲۰۵ تا ۲۱۰، ۲۱۳، ۲۱۴،
۲۱۹، (۴۲۷، ۴۲۸)

ابوالوفا ← بوزجانی
اخوان الصفا ۳۸۱، (۴۲۸)

خازنی، عبدالرحمان (ابوالفتح) ۳۷، ۸۱، ۴۱۵،
(۴۲۷)

اراتستن ۱۹، ۳۷۳
اراتستانس ← اراتستن

خجندی ۳، ۲۲، ۲۳، ۳۱، ۳۹، ۴۱، ۲۰۷، ۲۰۸،
۲۱۰، ۲۱۱، از ۲۱۸ تا ۲۲۰، (۴۲۷)

ارسطولس (?) ۴۰
ارشمیدس ۱۹، ۲۰، ۹۶، ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۱۱،
۱۱۳، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۴، ۲۴۹

خواجه نصیرالدین ← نصیرالدین طوسی
خوارزمی ۴۰۹، (۴۳۰)
خیام ۴۰۸، (۴۳۰، ۴۳۱)

اریستارخوس ۱۹، ۳۱۲
اریسطرخس ← اریستارخوس

دکارت ۳۸۲

اقلیدس ۱۹، ۵۴، ۵۷، ۶۰، ۳۷۳
الغیگ (۴۲۸، ۴۲۹)

اوایلر ۳۸۲

رازی ← محمد بن زکریا

بتانی ۸۶، ۴۲۹

سارینوس ثباتی ۲۰، ۲۳، ۹۶، ۱۰۸، ۳۱۱
سجزی ← ابوسعید سجزی
سرینوس ← سارینوس

بطلمیموس ۱۳، ۱۹، ۱۴۴، ۱۸۸، ۲۰۵، ۲۰۷،
۲۰۹، ۲۱۰، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۶، ۳۱۹،
۳۲۱، ۳۴۵

سلیمان بن عصمة سمرقندی ۱۵۱، ۲۰۵،
(۴۳۱)

بوزجانی ۳، ۱۴، ۲۳، ۲۴، ۳۱، ۲۰۶، از ۲۰۷ تا
۲۱۰، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۳۰، ۲۳۳، (۴۲۸)

شمسی هروی ← ابوالحسن شمسی هروی
شَتّی ۱۲۰، ۱۲۲، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۶،
۱۷۴، ۱۷۷، ۱۷۹، ۲۹۸، (۴۲۶)

پالگونئی، نیکولو ۳۸۲
تئون اسکندرانی ۲۰

صاغانی ← ابوحامد صاغانی

صفغانی ← ابوحامد صاغانی

صوفی ← عبدالرحمان صوفی

عبدالحمید بن واسع جیلی ۴۰۹، (۴۳۲)

عبدالرحمان خازنی ← خازنی

عبدالرحمان صوفی ۸۶، (۴۳۲)

عبدالعلی بیرجندی ۳۶۴، ۳۶۵، (۴۳۲)

علی بن فضل الله ← حسام‌الدین سالار

علی قلسادی ۳۸۱، (۴۳۳)

علی نسوی ۴۰۹، (۴۳۳)

عمر بن قُرخان طبری (۴۳۴)

عیسی بن یحیی ← ابوسهل مسیحی

غیاث‌الدین جمشید ← کاشانی

فرغانی ← ابوالعباس فرغانی

فرما ۳۸۱

فیثاغورس ۳۸۰

قاضی‌زاده رومی ۲۳۹، (۴۳۴، ۴۳۵)

قطب‌الدین شیرازی ۳۸۱، ۳۸۴، (۴۳۵)

کاشانی، غیاث‌الدین جمشید ۸۱، ۲۳۸، ۲۴۴،

۳۴۸، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۶۷، ۳۸۱، (۴۳۴)

کمال‌الدین فارسی ۳۸۱، (۴۳۵)

کوشیار بن لبنان ۳، ۳۱، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۱۰، ۲۲۰،

۳۴۸، (۴۳۶، ۴۳۵)

کوشیار گیلی ← کوشیار بن لبنان

کوهی ← ابوسهل کوهی

گوس، کارل فریدریش ۲۴۶

لامبرت ۵۷

لایبنیتز ۷

لئوناردو داوینچی ۷

مانالائوس ← منلائوس

محمد باقر یزدی ۸۱، ۳۸۱، (۴۳۶)

محمد بن ابراهیم فزاری (۴۳۶)

محمد بن ایوب طبری ۳۴۸، (۴۳۶)

محمد بن زکریای رازی ۱۵، ۵۳، ۱۰۴

محمد بن صباح ۱۸۸

محمد بن عبدالعزیز هاشمی (۴۳۷)

محمد بن علی ضریر ← ابوسعید ضریر

محمد بن محمود آملی ۳۸۱، (۴۳۷)

محمد بن لیث ← ابوالجود

مسافر بن حسن ۳۴، ۴۸

مسلمه بن احمد مجریطی ۳۸۱، (۴۳۷)

منصور بن علی بن عراق ← ابونصر عراق

منلائوس ۲۰، ۱۶۱، ۲۰۰، ۲۰۵

نصیرالدین طوسی از ۲۰۱ تا ۲۰۴، ۲۱۶، ۲۴۲،

۳۶۰، ۳۶۷، ۴۰۹، ۴۱۱، (۴۳۷، ۴۳۸)

نیریزی (ابوالعباس) ۴۰، ۶۱، ۲۰۵، ۲۱۰، ۲۱۱،

۲۲۰، (۴۲۶)

ویت، فرانسوا ۲۷۵

ویجن بن رستم ← کوهی

یوحنا بن یوسف ۱۱۳، ۱۳۵

یوحنا‌القس ← یوحنا بن یوسف

مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است

- آشنایی با اقتصادسنجی
- اسکار لانگه
- آشنایی با تاریخ ریاضیات (ج. ۱ و ۲)
- هاوارد ایزز
- آشنایی با تحقیق در عملیات (ج. ۱)
- حمدی طه
- آشنایی با توپولوژی و آنالیز نوین
- جی. اف. سیمونز
- آشنایی با دانش کامپیوتر
- توماس بارتی
- آشنایی با فرایندهای تصادفی
- هوئل، پورت، استون
- آشنایی با منطق ریاضی
- هربرت ب. اندرتون
- آشنایی با نابرابریها
- بکن باخ، بلمن
- آشنایی با نظریه اعداد
- آدامز، گولدشتین
- آشنایی با نظریه گروهها
- والتر لدرمن
- آمار ریاضی
- فروند، والبول
- آمار کاربردی (ج. ۱)
- نتر، واسرمن، ویتنور
- آمار مقدماتی (ج. ۱ و ۲)
- توماس و راندل ووناکات
- آمار ناپارامتری کاربردی
- کنور
- آموزش تدریس ریاضیات دبیرستانی
- بسلر، کولب
- آنالیز عددی مقدماتی (به شیوه الگوریتمی)
- کونت، دوبور
- آنالیز مختلط و کاربردهای آن
- ریچارد. ا. سیلورمن
- ابتکارهایی در ریاضیات
- راس هانسبرگر
- استنباط آماری ناپارامتری
- جین دیکسن گبینز
- اصول آماری در طرح آزمایشها (ج. ۱ و ۲)
- واینر
- اصول آنالیز حقیقی
- ربرت. جی. بارتل
- اعداد: گویا و گنگ
- ایوان نین
- اعداد مختلط
- والتر لدرمن
- المپیادهای ریاضی بین‌المللی (ج. ۱)
- گرایتز، سموتل
- المپیادهای ریاضی بین‌المللی (ج. ۲)
- مری کلمکین
- برنامه‌نویسی سیستم برای کامپیوترهای شخصی (PC)
- (ج. ۱ و ۲)
- مایکل تیشر
- تابع گاما
- امیل آرتین
- تبدیلهای هندسی (ج. ۱ و ۲ و ۳)
- ای. م. یاگلوم
- تحلیل واریانس و طرح آزمایشها
- دوگه، زیرو
- توابع متغیر مختلط
- د. ا. اتال
- توپولوژی، نخستین درس
- جیمز. ر. مانکرز
- جبر (ج. ۱)
- روزه گودمان
- جبر خطی
- مایکل اونان
- جبر خطی
- هافمن، کنزی
- جبر ماتریسها برای علوم زیستی و کاربردهای آماری آن
- سیرل
- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (ج. ۱ و ۲)
- لوئیس لیتهلد
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم اجتماعی)
- گرو دیس، شلی، ویلر
- حساب دیفرانسیل و انتگرال (ج. ۱)
- تام. م. آیوستل
- حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟
- و. و. سویر
- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (ج. ۱ و ۲)
- توماس، فینی
- دانستنهای اعداد بزرگ
- فیلیپ ج. دیویس

- روشهای آنالیز حقیقی
- ریچارد گولدبرگ
- روشهای بنیادی اقتصاد ریاضی (ج. ۱)
- ا. چینگ
- ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم؟
- ایوان نیون
- ریاضیات مهندسی پیشرفته (ج. ۱ و ۲)
- اروین کروییت سیگ
- زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی
- ابوالقاسم قربانی
- سری فوریه
- ی.ن. اسدودن
- طراحی منطقی دستگاههای رقمی
- فریدمن
- علم و هنر شبیه سازی سیستمها
- رابرت شانون
- فرمولهای ریاضی
- آگ. وگ.گ. تسپیکتن
- کاشانی نامه
- ابوالقاسم قربانی
- کاربردهای ریاضی
- لیوژیین
- کسرهای مسلسل
- کارل.د. اولدر
- گزیده هایی از نظریه اعداد
- اویستن اور
- مبانی ریاضیات
- استوارت، تال
- مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
- ی.ن. اسدودن
- مبانی نظریه تصمیم
- برنارد، لیندگرن
- مبانی نظریه صف
- گراس، هریس
- متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
- چرچیل، براون، ورهی
- مجموعه پرسشها و پاسخهای تشریحی درس ریاضی
- (ج. ۱ و ۲)
- از سال ۶۲ تا ۷۲
- شرح و پاسخ از پورکاظمی، کریمی
- مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا
- (ج. ۱ و ۲ و ۳)
- چارلز ت. سالکیند
- مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا
- (ج. ۴)
- آرتینو، گاکلیون، شل
- مسائل مسابقه های ریاضی مجارستان (ج. ۱ و ۲)
- یوزف کورشاک
- معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها
- جی.اف. سیمونز
- معماهای ابوالهول
- مارتین گاردنر
- مفاهیم و روشهای آماری (ج. ۱ و ۲)
- جاسون، باتاجاریا
- مقدمات معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی
- (ج. ۱)
- بويس، دیريما
- نابرابریهای هندسی
- نیکولاس.د. کارازینوف
- نخستین درس در جبر مجرد
- ف.ج. هیگینز
- نخستین درس در جبر مجرد (ج. ۱)
- جان.ب. فرالی
- نخستین گامها در آنالیز عددی
- هوسکینگ، جویس، ترنر
- نخستین مفاهیم توپولوژی
- چین، استینزاد
- نظریه آمار (ج. ۱ و ۲)
- برنارد. ولیندگرن
- نظریه اعداد
- ت.ه. جکسن
- نظریه طبیعی مجموعه ها
- پ.ر. هالموس
- نظریه گالوا
- مورتی، راماناتان، شوکلا
- نظریه مجموعه ها و کاربردهای آن
- تی.لین، فنگلین
- نظریه مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی
- کای لای چانگ
- نظریه نمونه گیری
- پرویز شیرانی
- نظریه و کاربردهای آنالیز عددی
- فیلیس، تیلور
- هندسه دیفرانسیل مقدماتی
- بارت اونیل
- هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی
- ماروین جی. گرینبرگ

مرکز نشر دانشگاهی

شابك: ۵-۷۵۶-۱۰۰-۱۶۳۰

۱۸۰۰۰ ریال