

گفتگوهای درباره هندسه و دگرديسی

امیرحسین اکبرطباطبایی، آرش رستگار

پیاده سازی و بازنویسی: محمدمهدی نسیمی

آرش رستگار: هندسه چیست- عرض شود که کمی راجع به هندسه چیست صحبت کنیم. و این هم بدیهی است که آن جوابی که شما از آن لذت ببرید نیست. ولی خب هندسه همان عالم رسم است دیگر، که جبر هم همان عالم اسم باشد. جبر همان کلمه است، و تصویر همان صورت است دیگر. و حالا ممکن است شما بگویید که، بابا بیاید و بنشینید روی زمین و نزدیک ریاضی صحبت کنید. بگذارید یک جمله دیگر بگویم بعد می آیم و می نشینم زمین. تقدیر از قدر و اندازه می آید، اندازه در شهر ما، خراسان ما، در قوچان ما اندازه است، اندازه همان هندسه است. یعنی، حدیث هم داریم، خدا تقدیر را با دستکاری در هندسه عالم جاری می کند، بنابراین هندسه عالم همان چیزی است که به آن می گویند تقدیر. بنابراین همان صورت است دیگر، پس هندسه همان صورت است. حالا اگر من بیایم دوباره کمرم را بگذارم در طناب شما که وصل است به لنگر، که یک کشتی هم آن جاست که فکر کنیم آن کشتی هنوز نشکسته و روی آب است، این طوری بخواهم صحبت بکنم، خب فرمولبندی های مختلفی از این که هندسه چیست ما داریم. ما یک تفکر شهودی مادر داریم که آن از vision و بینایی مان و تجربه بینایی مان می آید. این است که، آن بدنمند است و در نرون هامان پایه گذاری شده است. بعد می آیم می بینیم عملگرایانه هندسه انجام دادن یعنی چه؟ بعد می آیم که عوالم مان را بسط دهیم، حالا به هر معنی ای، و بعد می گوئیم خب ما همین کارها را این جا هم می کنیم، پس این هم هندسه است. بنابراین هندسه ناجابجایی Alain Connes به همین معنی هندسه است. و آن Rosenberg و Kontsevich هم به همین معنی هندسه است که می آیند رسته quasi-coherent sheaf های روی فضا را می گیرند که دیگر هم مثل durov نیست که شما یک ساختار جبری داشته باشید و specش را بگیرید که دوست ندارید این کار را بکنید. و مثال های دیگری هم هست، مثلا هندسه پیوسته Von Neumann که از تلاش هایش برای درست کردن مدلی برای مکانیک کوانتوم بوده که توصیه می کنم آن را هم ببینید، کارهای قبل جنگ جهانی اش است که بعد از جنگ جهانی آمد آمریکا و دیگر ادامه نداد، ولی الآن می تواند خیلی مهم باشد، چون آن جا مفهوم بعد در معنی فضای هندسی ناجابجایی آن می تواند به طور پیوسته حرکت کند، که همان چیزی است در فیزیک احتیاج دارند، ولی خب دیگر بر نمی گردند ببینند مبانی ریاضی اش چه می تواند باشد. این هندسه است. یا یک جای دیگری باز، گروتندیک برای چه می آمد این قدر خودش را زحمت داد برای scheme های غیر نوتری EGA را نوشت؟ غیر نوتری یعنی چه؟ یعنی مفهوم نقطه ندارید، ایده آل ماکسیمال ندارید، مفهوم نقطه ندارید. چرا مفهوم نقطه نداشتن برایش مهم بود؟ بخاطر کوانتوم، می خواست با آن فیزیک انجام دهد. بعد هم که رفت در آن دهکده تنها زندگی کرد آخر عمرش، همه اش سعیش آن بود که با آن ریاضیاتی که دارد فیزیک انجام دهد. کوانتوم را بسازد. حالا کوانتوم را من می دانم، ولی لابد نسبیت را هم می خواست بسازد. و نمی دانم که چقدر موفق بود و چقدر نبود، دیگر record از او نداریم، از کاغذها و یادداشت هایش، یا من ندارم، حالا نمی دانم Leila Schneps دارد، همچنین چیزی در دسترسش هست یا خیر. ولی خب از آن شناخت برمی آید دیگر، من که انسان شناس هستم، می فهمم که چی به چیست، لازم نیست که کاغذهای، یادداشت های گروتندیک را ببینم. عرض شود که این از هندسه چیست، و دقیقا همین ها است که ما ورژن گسسته ای از آن نداریم. اگر شما بخواهید یک شیء گسسته را و یک پدیده های گسسته ای را based on continuous phenomena درست کنید، مثلا مثل آنالیز عددی و نمی دانم ورژن گسسته قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در finite difference equations و این ها، اگر می خواستید همچنین کاری بکنید، دیگر آن کم گسسته نبود، شما آن را نشانده اید در کم پیوسته. می شود همان تفکر پیوسته. ولی هدف این است که شما همه چیز را بتوانید، هر کاری اینجا می کنید در آن ورژن گسسته داشته باشید، یعنی به جای فضای مماس باید یک چیزی داشته باشید، بجای فرم دیفرانسیلی باید یک چیزی داشته باشید و مانند این. حالا من، از آن پریدن هایی که، شما از یک عالم می خواهید بروید آن طرف ولی جاذبه نمی گذارد، ۲ دسی متر می پرید، بعد دوباره برمی گردید، یک ذره کارهایی انجام دادم. مثلا یک research project داریم که آن جا می گوید بیایید منیفلدهایی را در نظر بگیرید که فضای مماسشان فضای برداری

نیست، اجتماعی از فضاهای برداری است. و من این مشاهده را داشتم که برای همچنین موجوداتی هم، مثلاً یک کره است با یک نخ که قطب شمال را به قطب جنوب وصل می‌کنید، این منیفلد نیست، ولی به آن معنی که گفتم فضای مماسش اجتماعی از فضاهای برداری است. برای همچنین چیزی فرم دیفرانسیلی تعریف می‌شود و فضای فرم‌های دیفرانسیلی فضای برداری می‌شود. همه کتاب Bott-Tu را می‌شود انجام داد. این‌ها را انجام داده است یکی از دوستان، بعد متأسفانه قضیه دوگانی پوانکاره در نمی‌آید، باید باز فرمول بندی کنیم، یک جایی درست باید بکنیم، هنوز فرمول بندی هامان را درست نکرده‌ام. یا الآن دارند دوستان ورژن مختلط این را درست می‌کنند ببینند برای همچنین منیفلدهای مختلطی که همچنین تکنیکی‌هایی دارند که فضای مماسشان اجتماعی از فضاهای برداری است، آیا می‌شود Hodge decomposition درست کرد؟ که جای دیگر، جور دیگر، ثابت شده و ما در هندسه جبری singular variety هم داریم، پس اینجا هم می‌شود کرد. پس فقط نکته این است که ببینیم که آن تکنیک‌های آنالیز تابعی Sobolev space این‌ها را می‌شود در این ورژن درست کرد یا نه. یا آن آنالیز فوریه‌ای که برای گروه‌های locally compact و گروه‌های گسسته dual هم می‌کنند را می‌شود تبدیلش کرد به اجتماعی از گروه‌های فشرده که اشتراک‌هایشان همان گروه‌های فشرده‌اند، که دوگانش بشود اجتماعی از گروه‌های گسسته که اشتراک‌هایشان گروه‌های گسسته‌اند، و کل داستان گروه گسسته نیست، همچنین چیزی. این یک پرش خیلی کوتاه است، ولی خب خیلی راه است تا ما به یک جایی برسیم که گسسته را هندسه ببینیم. و ذهن بشر به جایی برسد که به آسمان نگاه می‌کند بگوید این‌ها هندسه است. ولی در دنیای پایین، هندسه چیزی نیست جز آن‌چه که ساختارهای تصویری شناختی می‌فهمند و جبر چیزی نیست جز آن‌چه که ساختارهای شناختی کلامی می‌فهمند و ما می‌دانیم که در برابر حقیقت، این‌ها دو زبان‌اند، حقیقت فراتر از این دو زبان است، حقیقت تجلی می‌کند در این دو زبان و این که شما می‌گویید که راجع به عدد و شکل و این‌ها همه حرف زده‌اند و این‌ها، این حرف‌هایی که من می‌گویم را کسی نزده است. عدد همان شکل است، در آن جایی که بستر حقیقت است. و باز این دارد از آن قلمرویی که شما به آن می‌گویید ریاضی دور می‌شود که باز، برای من دور نمی‌شود، ولی خب شما یک مرزهایی کشیدید دور یک چیزهایی به آن‌ها بگویید ریاضی. ولی اشکالی ندارد همه این‌ها را می‌شود متجلی کرد در آن عوالم پایین‌تر و چه چیز را حالا به ما می‌گوید؟ می‌گوید که شما یک مفهوم عدد بگویید، یک مفهوم فضا بگویید، که من یکی گفتم دیگر، گفتم آن چیزی که به آن می‌گویند نگاه سریع، که یک نوزاد دارد، که با یک نگاه تشخیص می‌دهد دو تا سه تا شیء را از هم، و این که مثلاً دو منهای یک می‌شود یک، و یک به علاوه یک می‌شود دو. در چهار ماهگی، چهار ماه و نیمی که این‌ها را در آن مقاله برایتان فرستادم. و این که شما به چندتا نقطه نگاه می‌کنید، و شما بیابید از روی آن یک عدد درست کنید، ساختار عددی درست کنید، ساختارهای هندسی درست کنید. یک مقاله دیگر هم هست، research project شماره ۴ نمی‌دانم ۴ است، ۵ است، که آن‌جا می‌گوید که بیا یک کاری کنیم که مجموعه‌های محدب مثل عدد رفتار کنند. آن هم باز می‌گوید که می‌شود، و شما آن‌جا را نگاه کن ببین آن هم یک فرمالیسم دیگری از عدد است، ولی شما را راضی نمی‌کند، می‌گوید که در آن‌جا که به حقیقت مربوط است، این همان عددی است که من قبلاً می‌شناختم. حالا می‌پرسید یک چیزی بگویم یک جور دیگر عدد باشد، بعد می‌گویم که یک جور دیگر عدد باشد، پس چگونه می‌گویید عدد است؟ می‌گویید که خب شباهتش کمتر باشد، تفاوت‌هایش بیشتر باشد. یا بروم در بستر پارمنیدس و دمکریسوس و بعد هم که جوهر و عرض را درست کردند بگویند باطناً عدد باشد، ظاهراً عدد نباشد و بعد می‌گویم خب همان شکل همین است دیگر، باطناً عدد است، ظاهراً عدد نیست. بنابراین یک ذره، سؤال فلسفی‌تان جوابش بدیهی است. ولی خب، چرا آن سؤال فلسفی می‌تواند ما را motivate کند که ریاضیات خوب و جدید تولید کنیم، باشد من تلاشم را می‌کنم ببینم از دستم چه بر می‌آید. ولی حالا برگردیم به سؤال هندسه چیست، که اگر بخواهیم از Alain Connes فراتر برویم، از Rosenberg و Kontsevich فراتر برویم، از Durov فراتر برویم، و این که نخواهیم آن‌قدر هم بالا برویم، خب دیگر خیلی optionی که من مثال بزنم باقی نمی‌ماند بجز این که بگویم: خب motive همان هندسه است دیگر. Motive، چه‌ها هستند motive‌ها؟ motive‌ها موجوداتی‌اند که کوهومولوژی دارند، موجوداتی هستند که automorphic representation می‌شود به آن‌ها وابسته کرد، نمایش گالوا می‌شود به آن‌ها وابسته کرد، ما انتظار داریم L-function‌شان از فرضیه ریمان پیروی کند، ما انتظار داریم که این‌ها solid باشند، نشود deform‌شان کرد، این‌ها چیزهایی هستند که از motive می‌دانیم. ولی آها!، چرا این‌ها دقیق دقیق نیست؟ و الآن آن آدم‌هایی هم که گفتند ما motive را درست کردیم، مثل Voevodsky و این‌ها می‌بینی که این حرف‌هایی که من گفتم اصلاً ندارند در کارهایشان. چرا نیست؟ چون که motive فرم است دیگر، motive که اسم نیست که، ساختار نیست، motive فرم است، رسم است. یک محدودیت‌هایی برای یک حقایقی است که ما داریم در نظر می‌گیریم، و می‌شود

برای آن محدودیت‌ها ساختار درست کرد و این ساختارها هم یگانه نیست. برای همین است که پارادایم‌های مختلفی می‌شود درست کرد برای این که motive چیست. برای همین است که اجازه می‌دهد Voevodsky بیاید برای خودش یک کارهایی بکند، گونچاروف برای خودش یک کارهایی بکند و مانند این. پس این هم از هندسه چیست. حالا اگر شما بگویید عدد چیست، می‌گویم یک جورهایی عدد همان ساختار است دیگر، ساختارهای ریاضی همان عدد است. بعد می‌گویید نه دیگر آن قدر، من هنوز operation می‌خواهم. خب اگر operation می‌خواهید که بروید در آن مقاله Durov که چه تعریف عمیقی از این که چه موجوداتی موجودات جبری اند کرده، و آن وقت روی field with one element هم یک جورهایی راجع به عدد صحبت می‌کند، و توسیع‌های دایره‌بری‌اش هم باز تویش عدد دارد، چون این‌ها را که با F_p تنسور می‌کنید، base extend می‌دهید و همه F_p ها را می‌دهد. باز هم من یک research proposal دارم که آنجا class field theory را روی field with one element به وجود آورده. این هم از عدد چیست، و یک نگاه جدیدی به عدد. عرض شود که این دو تا مثال از عدد را که مجموعه‌های محدب می‌توانند به عنوان عدد فهمیده شوند، و روی field with one element هم ما می‌توانیم class field theory داشته باشیم، آن‌ها را جلال پیردایه که دانشجوی ارشدم بود سفارش داد، اصلاً نقش او این بود، نقش او همین است، گفت برایم toy model درست کنید، آرش برایم toy model درست کنید. شما هم سفارش بدهید، یک ذره بگویید، مثلاً بگویید آرش برایم یک مفهوم عدد درست کنید، که این طوری باشد، اینطوری باشد، اینطوری باشد، یک مفهوم هندسه درست کنید، که این طوری باشد، این طوری باشد، مثلاً من الآن نمی‌دانم در مفهوم شما از هندسه، فقط فضا هست، یک شیء هندسی که در آن فضا زندگی می‌کند هست، این‌ها را یک ذره برایم بگویید، من برایتان ببینم می‌توانم فوت کنم در گل و یک پرنده درست کنم؟ شاید هم توانستم، تا حالا که شده. نمونه‌هایش بوده. بنابراین برایم یک مقدار توصیف کنید چه دوست دارید، من ببینم، try کنم، ببینم می‌توانم یا نه.

امیرحسین اکبرطباطبایی: سفارش یک معنی از هندسه- برویم سراغ هندسه. کاری که این جا کردید این است که بپردازیم به جواب سوال من که هندسه خوب چیست؟ عدد متفاوت را اگر بخواهیم بفهمیم باید چه چیزهایی را در نظر بگیریم؟ که نباید این طور باشد. این‌ها را نباید با هم قاطی کنیم. آن را باید جدا مصرف کنیم. آن سوال من از شماست که شما که هندسه خوب بلدید به من بگویید که این هندسه که مثلاً تحت این شرایط که آرش هم می‌گوید، که بگو که خوب چیست؟ نمی‌شود همین طوری که، خب درست هم می‌گویید. بیایید سفارشتان را بدهید من ببینم حالا اگر در دست و بالم چیزی هست یا می‌تونم بسازم، خب برایتان درست کنم که چرا که نه. ولی این سوال من است، و این رو به نظرم نباید قاطی کنیم با آن هندسه‌ای که با همان فرمون جبر و ترکیبیات و این‌ها آمدم. یعنی این جا هم طبیعتاً در هندسه، با این که یک ذره می‌گویید، ولی آن فرمان نمی‌روید که خب بگویم که هندسه چه کارهایش را نکرده‌اند و انتقاداتان را بکنید که این چه وضعیه؟ و... این‌هایش را شما نمی‌گویید. بیشتر می‌پردازید به جواب سوال من و بنابراین آن فرمت ما متأسفانه در شکل هندسه‌اش کمی عقیم می‌ماند. دعوای هندسه رو نمی‌کنید، بنابراین یک کم هندسه هم برای ما تولید کنید، و آن ناظر باشد به همان فرمت که هندسه این است و آن است. چرا اینجوری است؟ و چه وضعیست و این‌ها، یک سری اعتراض‌های معمولی که می‌کنید که قشنگ همه‌اش را هم بگویید. بعد می‌گویید که خب حالا به من سفارش را بدهید. یک سری پیشنهادات می‌دهید درباره عدد چیست، ولی نه آن طور به کار من نمی‌آید. گفتم، برای این که خب من نمی‌گویم چه می‌خواهم. این که نمی‌شود همین طوری. اگر یک ایده‌هایی دارید بگویید، که گفتید هم، ولی مثلاً آگه یکیش به کار من آمد بتوانم بردارم از بین این‌هایی که تعارف می‌کنید که به نظر می‌آید که این‌ها نمی‌خورد به کار من، یا دست کم نمی‌خوره ظاهرش. توضیح دادن این که من چه می‌خواهم، خیلی کار سختیست. برای این که باید آن وقت کل setting که دارم کار می‌کنم را توضیح بدهم که برای خودش یک داستان خیلی عریض و طویلی است و کاملاً یک دنیای دیگری هست که اصلاً به نظرم نالازم هم هست. به جای آن می‌توانم کار آسان‌تری بکنم و همین پیشنهاد شما را قبول کنم که هندسه‌ای که دلم می‌خواهد را درخواست بدهم. بگویم اصلاً شما این را دیدید جایی؟ بیایید به من پیشنهاد بدهید حالا یک سری جاها را پیشنهاد می‌دهید که من اتفاقاً سرک هم کشیدم. یا مثلاً یک شکل جوجه‌ایش را برای من بسازید و تحویل بدهید که من ببینم به کار می‌آید یا نه، خیلی کار سختی خواهد بود، برای این که در عمل معلوم می‌شود که چیست. ولی در مدلی که من می‌خواهم خیلی توی هم نیست. فرض کنیم که این هندسه‌ای که می‌خواهیم، چنین چیزی است که سفارش غیرعادی هست، ولی اشکالی ندارد. این طور است که شما به هندسه جبری فکر کنید. اسکیم یک جانوری است، با متدی که می‌دانیم و ما فعلاً کاری به آن نداریم، بصورت موضعی اسکیم آفین است و اسکیم آفین را موجود ساده تری تلقی می‌کنیم که من این‌ها را به هم چسبانده‌ام و اسکیم گرفته‌ام و آن وقت چیزهای مختلف نظریه اسکیم را مطالعه می‌کنیم. مدول مربوطه و کوهمولوژی و... توپوس و... حالا چیزی که من می‌دانم این است.

اگر بخواهم هندسه را خیلی دست باز تعریف نکنم، این تعریف را می‌کنم که من در کوتیشن، یک سری موجودات ساده دارم که به معنی relatively از آن سر در می‌آورم، و شیء هندسی هم از چسباندن این‌ها به هم به دست می‌آید. طبیعتاً بسته به setting فرق می‌کند. بسته به این که چه چیزی موجودات ساده‌ام هستند، که مثلاً در یک کتگوری به من داده می‌شوند. آن را موجود ساده می‌گیرم، به فرض حلقه‌های جابجایی باشد یا spectrum آن، که مثلاً قرار است opposite آن باشد که الآن برای من الآن و در این سطح مهم نیست، و بعد باید یک فرمتی از چسب هم بدهم که یک جور نگاشت باز و این‌ها هم احتیاج دارم که در طول این نگاشت باز، این‌ها را بهم بچسبانم. این را که من همین الآن هم می‌توانم بنویسم در یک نصف صفحه که یک کتگوری و خانواده‌ای از نگاشت‌ها و... تعریف کنم. این که کار سختی نیست. این که این به دردی بخورد، یعنی به اندازه کافی به آن ساختمان داده باشم، مهم است. یعنی تعریف من از خانواده‌های باز، بستارهای خوبی داشته باشد و... و هم‌زمان آن قدر عمومیت دارد که مثلاً هندسه دیفرانسیل را در بر دارد، اسکیم در هندسه جبری را در بر دارد، منیفلد را در بر دارد و مثال‌های عجیب و غریب من را هم باید در بر داشته باشد. اما چون هنوز نمی‌دانیم چه هست، به آن کاری نداریم فعلاً. یک عالم چیزهای مختلف را باید در بر داشته باشد و حتماً یک نسخه trivial هم دارد که اگر آن فضا را خیلی گسترده در نظر بگیریم، هر توپوسی می‌تواند باشد، هر فضای توپولوژیکی می‌تواند باشد و... بستگی به حالتان دارد. این کار ساده‌ای است، و کمتر از یک نصف روز زمان می‌برد. اما این که آن نظریه آن قدر غنی باشد که بتوان درباره آن چیز ثابت کرد، مثلاً آن چیزهایی که در هندسه جبری ثابت می‌کنیم، یک مقداری از آن را به این‌جا منتقل کرد. یک مقدار قابل توجهی از آن، که خیلی بدیهی نیست. مثلاً من اگر یک مفاهیم خیلی طبیعی مثلاً یک کوهمولوژی طبیعی داشته باشم روی این‌ها و... یک کارهایی که قبلاً به‌طور هموار می‌توانستم انجام بدهم را اینجا هم بتوانم انجام دهم. طبیعتاً یک سری از آن‌ها را هم نمی‌توانم انجام دهم. آن وقت راضی می‌شوم. این کمی subjective هست و معلوم نیست که من چه چیزی می‌خواهم. بنابراین این تجربه ریاضی شماسست که به شما می‌گوید که من دقیقاً چه چیزی می‌خواهم. چیزی که همه این‌ها را unify می‌کند، اما بدیهی هم نیست. راه هم می‌رود و شروع به کار می‌کند و چند چیز نابدیهی هم می‌توان درباره‌اش اثبات کرد. طبیعتاً روش اثبات من هم، آن قضایای پایه‌ای که اثبات می‌کنم، برمی‌گردد به این که همه را localized می‌کنم. به این معنی که به سراغ آن کتگوری که به من دادید، می‌روم. آن‌جا چیزی را ثابت می‌کنم و بعد نشان می‌دهم که تحت چسباندن حفظ می‌شود و می‌آیم بالا. چیزهای پایه‌ای را این طور ثابت می‌کنم که این‌ها احتمالاً خیلی سخت نیست. اگر به اندازه کافی چسباندن درست و حسابی داشته باشم، و مثلاً نگاشت‌های باز من نسبت به یک چیزهایی بسته باشد، می‌توانم این کار را بکنم. اما طبیعتاً با این شکل از یک حدی بیشتر پیش نمی‌رود. یک setting این شکلی، که مثالی که خوب بشود، به این راحتی‌ها نمی‌شود ساخت. ولی ممکن است که یک کسی به دلایلی کنج‌کاو شده باشد که این را چگونه می‌توان درست کرد؟ کاربردی در نظرش هست و این‌ها، ولی حداقل اولش را در نظرش است که به شکل خیلی عمومی بنویسد. لوری در آن مجموعه که اگر اشتباه نکنم، به آن فضای ساختار می‌گوید، در آن چندتایی‌های دیراک هندسه جبری derived در setting بی‌نهایت از این کارها می‌کند. آن‌جاها را خیلی کلی می‌نویسد، ولی او هم خیلی به سمت generality جلو نمی‌رود و generality خیلی general است. یک چنین چیزی و به نظرم این، این طوری یک مثال نیست، و واقعاً develop کردن یک نظریه است. البته اگر لازم باشد، بیشتر شبیه این است که اگر جایی از این جنس روش که کمی زیادی کلی است، که چندتا هم می‌گویید و من هم سرک کشیده‌ام. از این نوع اگر دیدید، حتماً به من بگویید که احتمالاً خیلی هم به درد من خواهد خورد و خیلی خوب می‌شود. ولی اگر هم نباشد، تعجب نمی‌کنم. چون کمی زیادی مجرد است و این سطح از unification را ریاضیدان خیلی طبیعی است که بگوید اول باید کار من بیفتد که چنین setting مجردی درست کنم، بی‌کار که نیستم.

آرش رستگار: دگر دیسی- این باشد راجع به deformation، بعد که راجع به deformation صحبت کردم، یک ذره هم راجع به هندسه‌ای که شما دارید صحبت می‌کنم. عرض شود که من قبلاً گفته‌ام که به نظر من مفاهیم local و global، و مفاهیم جزء و کل به یک معنایی در ساختار ذهنی ما دوگان هستند، یعنی می‌شود روی یک فضای مدولی حرکت کرد که مفهوم کل برود جای جزء، و جزء برود جای کل. مثل همان dream که دکتر رنجر مطلق ICTP داشت راجع به bosonic fermionic symmetry. شما در هندسه‌تان دوست دارید مفاهیم local و global به همین معنایی که هست یک جوری وجود داشته باشد. و این هم خوب است، این هم می‌شود یک سفارش. حالا ببینیم با این سفارش چه می‌شود گفت. عرض شود که اگر ما مفهوم local داریم، به این معنی که نقاطی که نزدیک به هم هستند معنی دارد، معنای استعاره‌ای آن می‌شود که اشیائی که شبیه به هم هستند، نزدیک می‌شود همان شبیه در استعاره ذهن در آن مقاله دستنویس که برایتان نوشتم هست. بنابراین در واقع یک جوری انگاری که این هندسه‌ها فضای مدولی‌اند و با تغییرات کمی، اگر شما آن اشیاء universal

objectت‌ان را روی fiber تغییر دهید، حرکت دهید، با تغییرات کمی آن بقیه اشیاء نزدیکش را بدست می‌آورید. آن‌ها به هم، به این معنی نزدیک هستند، نه به معنای فاصله، ساختارشان با deformation کمی بدست می‌آید که آن را هم باز می‌شود به معنای فاصله برگرداند، ولی طوری نیست. این را شما می‌گویید هندسه. و خیلی هم چیز خوبی است، تعریف خوبی است و به همان ایده deformation هم مربوط می‌شود. پس برای همین بود که من این حرف‌ها را گفتم و می‌خواهیم راجع به deformation صحبت کنیم. خب تاریخ این مسئله این است که مسئله تغییر و ثبوت است، و مسئله دموکریتوس و پارمنیدس است، و مسئله جوهر و عرض است، و این که یک چیزهایی از یک شیء ثابت باشد، یک چیزهایی تغییر کند، و بعد ما بگوییم چون آن چیزهایش ثابت است، همان شیء است و چون آن چیزهایش تغییر کرده، تغییر کرده، deform شده. بنابراین شما، مثلا deformation ساختارهای مختلط، یا deformation ساختارهای هموار روی منیفلد، شبیه همین می‌شود. یعنی چه؟ یعنی یک ساختار توپولوژیک را فیکس می‌کنیم، ساختار دیفرانسیلی، مشتق گرفتن را اجازه می‌دهید حرکت کند، بشود یک منیفلد، تغییر کند، بشود یک منیفلد که به عنوان یک منیفلد مشتق‌پذیر همان نیست، ولی به عنوان یک منیفلد توپولوژیک همان است. بعضی وقت‌ها هم این کار را نمی‌شود پیوسته انجام داد، مجبوریم بپریم، مثلا روی کره ۴ بعدی بود ۲۸ ساختار داریم؟ ساختار دیفرانسیلی داریم که تشکیل گروه می‌دادند. خب این‌ها که نمی‌شود حرکت کرد بینشان، و این یک مفهومی از حرکت کردن از یک چیزی به چیزهای نزدیکش می‌شود هندسه، و یک جوری این همان مفهوم فضای مدولی است، deformation. و این نگاه به هندسه، و خب در گراف‌ها گفتم مثلا شما یک خانواده از گراف‌ها را که در نظر بگیرید، با یک تغییر کوچک موضعی در گراف، شاید بتوانید آن عضو آن خانواده از گراف‌ها را ببرید به یک گراف شبیه که نزدیکش هستند در آن خانواده‌ها. آن زیر هم یک رأسی بگذارید به رأس زیر آن یکی وصل کنید. این هم می‌شود deformation این، صورتی گسسته در مثلا گراف‌ها. و توی جبر شما یک اشیائی دارید که خارج قسمت می‌گیرید، مثلا از $\mathbb{Z}$ یک عالمه خارج قسمت می‌گیرید و می‌شود F_p ها. می‌توانید بگویید این F_p ها، یک خانواده پیوسته‌ای از چیزها هستند که همه‌شان در آن $\mathbb{Z}$ خلاصه می‌شوند، و آن $\mathbb{Z}$ یک جورهایی universal object است برای همین F_p ها یا اگر دوست دارید برای همین $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ ها. و این ایده universal object در جبر، خیلی گروتندیک بسطش داده است که کی، چه مجموعه‌ای از اشیاء، عضو جهانی دارند؟، که criteria گروتندیک سخت است ولی Schlessinger آمده و criteria local artinian ringها را ساده کرده و شده Schlessinger criteria، این منتها یک criteria Pridham هم هست که شبیه Schlessinger است ولی برای $\mathbb{Z}$ -مدول‌ها کار می‌کند، لازم نیست local object باشد، مثلا روی $\mathbb{Z}_p$ باشند یا روی $\mathbb{Q}_p$ باشند و deformشان کنیم. این از این Deformation در جبر را راجع به آن صحبت کردم، deformation در هندسه را ثابت کردم و گفتم که وقتی deformation داریم، معمولا یک فضای مدولی یا فضای مدولی محلی از این deformation ها داریم. و یک فضایی که پارامتریزه می‌کند این deformationها را و بعد یک اعتراضی من کردم به ترکیبیات که یک جور deformation هندسی من propose کردم که وجود نداشت برای گراف‌ها مثلا، یا برای اشیاء ترکیبیاتی، که به چه معنی دو شیء ترکیبیاتی به هم نزدیک باشند، با یک روش گسسته ساده‌ای به هم تبدیل شوند، مثلا دو تا کلمه با یک گام یا از یک حرفی اضافه کردن در یک جای خاصی یا جا به جا کردن با حرف همسایه به هم نزدیک باشند، یا دو تا جایگشت به هم نزدیک باشند، از این جور چیزها. بعد ولی، یک مفهوم deformation دیگر هست که به شمارش برمی‌گردد که من آن را جدا توضیح می‌دهم، آن مفهوم جبری‌اش است که می‌گوید چرا ترکیبیات‌دان‌ها universal object ندارند؟ یعنی چه مثلا اگر داشته باشند؟ مثلا دایره‌هایی که گروه‌های $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ هستند، یک دایره است، یک گراف nتایی است، این‌ها همه خارج قسمت‌های یک universal object هستند که آن $\mathbb{Z}$ باشد. همچنین پدیده‌ای در ترکیبیات وجود ندارد، همین‌جا توقف می‌کنم، منتظر بازخورد، ببینم شما از این ایده deformation در ترکیبیات رضایت دارید؟

امیرحسین اکبرطباطبایی: تشریح deformation- یک مقدار درباره deformation حرف بزنیم. عرض به حضورتان که این را می‌گویم برای مخاطبی که قرار است بخواند بعدا. این توضیحی که شما می‌دهید فوق العاده است، خیلی عالی خیلی تمیز است و از اعتراضات به ترکیبیات این‌جا می‌گویید که، باز مثال هم می‌زنید اتفاقا نمی‌کنید و رها همین‌طوری که ما خودمان برویم بفهمیم، جبری برایمان مثال می‌زنید که یک مقدار ناروشن است، ولی طوری نیست، بعد چیز هم برایمان مثال می‌زنید، اصل قضیه که عرض کنم که هندسه است هم مثال می‌زنید و می‌گویید چرا اصلا آدم باید در هندسه این‌طوری فکر کند و

غیره، که خیلی خوب است. ولی من هنوز حسم این است که این را اگر یک کسی که ریاضی بلد است نه خیلی، بشنود، احتمالاً یک مقدار، این مناسب کسی است که خوب یک چیزهای پایه‌ای را می‌فهمد، ایده‌های پایه‌ای را دارد، و خیلی لذت می‌برد از این که شما می‌گویید. و برای این که من این gap را پر کنم و به آن امید که آن روزی که آن دانشجوی فصولی قرار است این را بخواند خوشحال می‌شود که اول بفهمد که این چیزهای پایه‌ای که کلمات گنده‌ای‌اند و ممکن است بترسانندش، این‌ها چه هستند، بعد، یا ایده‌های پشتش چه هستند، بعد نوشته شما را آن‌طور که شایسته است appreciate می‌کند. الآن به نظر می‌آید که باید یک سطح از استعداد خاصی را می‌داشت که می‌فهمید دیگر، appreciate می‌کرد دیگر، که چقدر این چیزی که می‌گویید همه جانبه و قشنگ است و هست واقعا. من می‌خواهم این gap را پر کنم و فضولی کنم در کار شما و یک کوچک توضیح دهم، و هیچ چیز مهمی هم دارم نمی‌گویم، فقط برای کسی می‌گویم که برای اولین بار است که deformation می‌شنود که یعنی جی. چون من تصورم این است که اگر شما همین‌طوری یک لیسانس ریاضی گرفته باشید بعید است که مثلاً deformation به گوشتان خورده باشد. و عرضم به حضورتان که البته خب یعنی بد، ولی خب به نظرم این‌طور است، و فضای مدولی و این‌ها بعید است که به گوششان خورده باشد، و اگر هم خورده باشد احتمالاً خیلی ترسناک است که این‌ها وای چقدر چیزهای مهمی‌اند. حالا شما حتماً یک چیزهای خوبی هم اضافه می‌کنید بعد. ولی من هم یک پنی کوچولو که دارم را این‌جا خرج کنم. این‌طور که شما توضیح می‌دهید، حالا شما deformation را معنی خیلی وسیعی هم می‌گیرید که خیلی خوب است. من این‌طوری توضیح می‌دادم که اگر قرار بود یکی از من پرسد که این‌هایی که دکتر رستگار گفت خوب است، حالا deformation اصلاً چی هست؟ تغییر دادن را که ما می‌فهمیم ولی یعنی چه. من این‌طور می‌گفتم که، یک تمایلی اصولاً در ریاضیات هست، مستقل از این که هندسی باشد یا نباشد، و آن این است که ما یک چیزی را می‌فهمیم وقتی که تغییرش دهیم. و از روی تغییرش شروع می‌کنیم به فهمیدنش. بعد شما می‌پرسید که این تغییر چطور باید باشد و این‌ها، خب این دیگر انواع و اقسام و تنوعی دارد، ولی خیلی از اوقات هم ما به تغییرات بی‌نهایت کوچک علاقه داریم. که این را رویش تاکید نمی‌کنید، تغییر را معنی وسیع‌تری می‌گیرید که چرا هم نباید بی‌گیرید؟ خوب کاری هم می‌کنید که می‌گیرید، ولی خیلی از اوقات هم ما تغییرات بی‌نهایت کوچک دوست داریم به دلایلی. دلایلش هم این است که، بی‌نهایت کوچک خب روشن نیست که یعنی چه، ولی همین‌طوری دورهمی انگار که مثلاً اپسیلون تا من تغییر می‌دهم که مثلاً اپسیلون خیلی کوچک است، مربع اپسیلون صفر است و این قرار است که این حس را به من بدهد که به خاطر این که خیلی کم تغییر می‌دهم، این تغییر خطی است به یک معنی‌ای، چون مربع اپسیلون صفر است، و این خطی بودن یعنی ساده بودن و من سر در می‌آورم از این تغییر خطی. و این کمک می‌کند که مثلاً من بفهمم که این را اگر یک ذره جابجایی کنم، چه اتفاقی می‌افتد. بعد در مقیاس بزرگتر هم آرام آرام این کمک بکند که در حد، در واقع بفهمم که چه اتفاقی دارد می‌افتد. این از این! بعد خب حالا شما این‌ها را تغییر می‌دهید، این شیء، یک ساختار من به شما می‌دهم، اعم از این که هندسه، اصلاً، نمی‌دانم یک جبر باشد، یک گروه باشد، یک حلقه باشد، یک همان‌طور که می‌گویید که این کار را نمی‌کنند که کار بدی می‌کنند که یک ساختار ترکیبیاتی باشد، گراف باشد، هر چیز. در یک خانواده‌ای، و پشت سر هم تاکید می‌کنید هر از گاهی، مهم است، ولی برای این که به اندازه کافی appreciate بشود که این in families شما اساساً این تمایل است شما این را به عنوان یک خانواده، یک خانواده در حال تغییری، شما ببینیدش، بعد این‌جا این احتیاج دارد که این بر حسب چه چیزی تغییر کند. یک پارامتری هست، خیلی از اوقات، این پارامتر یک عدد حقیقی است مثلاً، روی یک چیزی است، روی یک پارامتر اسکالری است مثلاً. خیلی اوقات یک ساختاری است، آنی که تغییر را هدایت می‌کند و آن مثلاً گاهی یک حلقه‌ای است، که یک حلقه‌ای عوض می‌شود، آن پارامتر یک حلقه است و آن شیء خیلی سنگین‌تر و پیشرفته و این‌هاست. ولی همین‌طوری پایین و خیلی دورهم و این‌ها، مثلاً شیء شما می‌تواند باشد یک خم مثلاً، یک خم جبری. بعد شما می‌توانید این را اپسیلون تا از جایش بچرخانید، برای این که یک مثال خیلی بی‌مزه زده باشم. یک اپسیلون تا بچرخانید. یک تغییرات این‌طوری‌ای بدهید که خیلی کوچولو تا جابه‌جایش کنید، از این کارها بکنید. و بعد خب این، بر حسب این پارامتر این‌ها تغییر می‌کنند. کجا تغییر می‌کنند؟ آن‌جایی که تغییر می‌کنند را معمولاً می‌گیرند و به آن می‌گویند فضای مدولی. که خب حالا up to یک quotient هم هست خیلی از اوقات و این‌ها که حالا کار ندارم. بنابراین، من هر نقطه‌ای در آن فضای جدید من، یک شیئی قبلی است، آن یک جور configuration space است. همه امکانات آن‌جا هست از آن شیئی مورد نظر من، مثلاً همه گراف‌های از یک‌جوری آنجا هستند، و بعد به هم تبدیل می‌شوند، آن تبدیل شدن، آن هندسه‌ای که آن داخل هست، آن توپولوژی‌ای که، آن چسبی که آن داخل هست، آن تغییری که آن داخل هست، در فضای مدولی قرار است که «تغییرات این اشیاء به یکدیگر» باشد و بعد در واقع in family و من می‌فهمم

که چه اتفاقی دارد برای این‌ها می‌افتد. این‌طور. حالا این تغییر یک ذره، اصلاً تغییر به معنی وسیع کلمه خیلی روشن است مفهومی، وقتی که ما هندسی فکر می‌کنیم. خیلی روشن است دیگر، روشن است که به لحاظ شهودی منظورم است. که خم داریم و نمی‌دانم شیئی هندسی داریم و این‌ها. حالا یک مقدار ممکن است مجردتر باشد که یعنی چه که یک هندسه تغییر می‌کند مثلاً، یک ساختمان مثلاً یک منیفلد مشتق‌پذیر که شما مثال می‌زنید این یعنی چه، این یک مقدار سخت‌تر می‌شود فهمش به لحاظ شهودی، ولی خب این‌طوری می‌شود فهمید که این‌ها همیشه یک موجوداتی هستند که پارامترهایشان در یک جایی هستند، به ما چه؟ به فرض برای این که بخواهیم آسانش کنیم. در مورد جبر این را نمی‌گویید، ولی من یک مقدار فضولی می‌کنم در کار شما و می‌گویم که در جبر هم ممکن است بگویید که، خب باشد، شیئی هندسی تغییر می‌کند و من می‌فهمم، من یک چیزی هم قبلش باید بگویم که این را هم بارها گفتید من اضافه کنم، که این توضیحش را که مردم بفهمند که چون اهمیت این را هم خیلی حرف می‌زنید و در جبر قرار است درباره‌اش زیادتر حرف بزنیم، این است که از شیئی rigid حرف می‌زنید. یعنی می‌گویید که چون اهمیت دارد یک deformation، خب rigid جانوری است که deform نمی‌شود. یعنی یک مقدار اندکی کوچولو که می‌خواهی تغییرش دهی، این تغییر نمی‌کند، خیلی سفت می‌ایستد همان‌طوری که هست. مثلاً تعبیرتان در دیفرانسیل، خب این مثال فوق العاده است دیگر که اصلاً وقتی شما گسسته تا، ۵ تا ۶ تا ۸ تا ساختمان مختلف دارید خب چه تغییری شما می‌خواهید بدهید؟ این‌ها می‌پزند روی یکدیگر. بنابراین تغییر نرمی به یک معنی‌ای حالا، نیست. و آن‌وقت‌ها ما با شیئی rigid طرف هستیم. که شیئی است که تغییری دست کم در اندازه جزئی کوچک، وقتی ما تغییرات پارامترمان را می‌دهیم، این تکان نمی‌خورد، شیش سفت است. حالا، بعد یکی ممکن است از شما بپرسد که یک جایی می‌گویید سردستی که مثلاً یکی بپرسد که آقا گروه، خیلی شیئی rigid است، گروه را چطور شما می‌خواهید عوض کنید؟ من یک مقدار حالا تخفیف می‌دهم و می‌گویم حلقه. من اگر یک جبر شرکت‌پذیر اصلاً به فرض، اصلاً یک حلقه شرکت‌پذیر من دارم، شما ممکن است که اولین بار الآن این حرف من را که شنیده باشید که deformation چیست، خوشتان می‌آید و می‌گویید چقدر قشنگ گفت و دستش درد نکند، حالا مثلاً حلقه را شما deform کنید ببینم. چطور می‌خواهید حلقه را deform کنید؟ و بعد من جوابم این است که خب حلقه را الآن من برای شما deform می‌کنم. شما فرض کن که در ساختمانم، مثلاً جمعی حلقه را من ثابت نگه داشته‌ام و می‌خواهم ضرب را مثلاً عوض کنم. منتها نرم عوض کنم به یک معنی‌ای. به این معنی که من یک ضرب دارم، یک خانواده از ضرب بدهم بجای آن یکدانه‌ای که شما به من دادید با آن جبرتان، من یک خانواده بدهم که این ضرب یک جایی در آن خانواده باشد، آن خانواده تغییر دارد می‌کند، به خاطر این، من توانایی این را پیدا می‌کنم که جبرم را تکان بدهم و وقتی جبرم را تکان بدهم، شروع می‌کنم به فهمیدن این که این جبرم چطور دارد رفتار می‌کند. منتها خب شما جبر را به من دادید، جبر را من باید یاد بگیرم، زرنک باشم تکان دهم. خب چگونه تکان می‌دهم؟ این به عنوان یک تمرینی که بروند با دست حل بکنند مفرح است به نظرم، شما احتمالاً تایید می‌کنید. که بیایید یک ضرب جدید تعریف کنید، بگویید ضرب جدید a و b در جبر هست همان ضرب قدیمش به اضافه آن که یک ذره تکانش دهیم، یک ذره تکانش دهیم یعنی مثلاً $ef(a, b)$ که بر حسب a و b یعنی یک مقداری، یک ضربی از یک ϵ کوچک خطی تغییرش دارم می‌دهم، طبیعتاً بسته به a و b های مختلف هم جاهای مختلف، تغییرات مختلف، این شکل کلی خطی تغییر دادن یک ضرب است دیگر. خب بعد این ضرب که نباید هر ضربی باشد، این شرکت‌پذیر باید بماند دیگر مثلاً. می‌نویسم، شرکت‌پذیری ضرب جدید را می‌نویسم، این تبدیل می‌شود به شرکت‌پذیری ضرب قدیمی به اضافه یک رابطه‌ای که روی f باید باشد. این را خوشمزه است که یکی بنشیند و بنویسد. بعد می‌شود گفت که حالا کی، هر دو تا این ضرب‌ها را هم یکی می‌گیرم، وقتی مثلاً تبدیلی باشد که، تبدیل مثلاً bijection جبری‌ای باشد که یکی را به آن یکی تبدیل می‌کند، بعد می‌شود up to آن مثلاً در نظر گرفت، و حالا کار ندارم به این. و این‌ها یک ارتباطاتی هم اگر شنیده‌اند مردم، به کوهومولوژی و این‌ها دارد. این جور می‌شود این ضرب را تکان دارد، خیلی اوقات وقتی یک حلقه‌ای من به شما داده‌ام، این حلقه rigid است، یعنی آن ضرب جدید را من بنویسم با آن f و این‌ها، هیچ اتفاقی نمی‌افتد، همان می‌افتد روی خودش، نمی‌توانم تکانش دهم، خیلی اوقات rigid نیست، شروع می‌کند تکان خوردن، همین شبیه این چیزهایی که شما دوست دارید و مثال می‌زنید که مثلاً حلقه تقسیم را داریم و این‌ها، این‌ها شروع می‌کنند آرام تکان خوردن، وقتی یک چیزی آرام تکان می‌خورد، همان‌طور که شما بارها می‌گویید، یک حسی به ما می‌دهد که ها! درست است که این‌ها جبر هستند، ولی یک هندسه‌ای هم این‌جا در کار است. پس هر جایی که یک چیزی آرام دارد تکان می‌خورد در خانواده‌ای، بوی هندسه می‌آید. این‌ها را من سعی کردم که به زبان ساده‌تری توضیح دهم، مقدمات کلماتی که به کار می‌برید این طرف و آن طرف را. و شما حتماً به این اضافه می‌کنید هزارتا چیز. حالا بعد

یک چیزی را جواب می‌دهید که سؤال خوبی است، می‌گویید که خیلی خوب، من حالا یک شیء گسسته داشتم، همین حالا منبر شما رفتید که اشیاء rigid هستند، اگر چندتا دانه تغییر کنند و شما چکار می‌خواهید بکنید با یک شیء گسسته، گسسته چطور تغییر می‌کند و این‌ها؟ خوب حالا که آنی که نگفتید این است که یک وقت‌هایی هست که اشیاء deform می‌شوند با یک متغیرهایی که اسکالر نیست، مثلاً روی یک ساختاری تکان می‌خورند و این‌ها، مثل همین fibration که مثال می‌زنید و این‌ها. و آن موقع‌ها می‌شود خیلی حرف‌ها زد و این‌ها. مثلاً یک نمونه‌اش این است که مجموعه، حالا از universality و این‌ها هم حرف می‌زنید که من وارد نمی‌شوم، مجموعه مثلاً گاهی روی یک ساختاری تغییر می‌کند، یک گروه روی یک ساختاری تغییر می‌کند، لزوماً آن ساختار یک پارامتر مثلاً حقیقی یا جبری لزوماً نیست، می‌تواند یک ساختار مثلاً هندسی اصلاً باشد و این‌ها. بنابراین این دست ما را باز می‌کند که ما variation را مفهومش را گسترش دهیم، deformation را گسترش دهیم، حالا deformation کم و زیاد باید روشن باشد که یعنی چه کم، مطلبی است این ولی به هر حال. اما شما اصلاً می‌گویید آقا حرف‌های گنده گنده نزنید، بیا من برای این بچه مثال بزنم، مثال خوب دارم می‌زنم، که مثالان هم خیلی خوب است. یک مثال کمی مجرد می‌زنید، مجرد که نیست، ولی یک مقدار کمتر جزئیات دارد و concrete است، می‌گویید که گراف، آن گراف را شما بردار، خیلی اوقات کارهایی که ما می‌خواهیم بکنیم یک ذره یک ذره می‌کنیم، محلی می‌کنیم، کوچولو می‌کنیم، این همان deformation کوچولو است و این‌ها همه در یک فضای مدولی ای زندگی می‌کنند. خوب این کجاست در ترکیبیات؟ چرا یک ترکیبیات‌دان این را مطالعه نمی‌کند؟ چون خیلی طبیعی است و اصلاً باید بکند، یعنی از نان شب واجب‌تر است. یک چیز دیگری که اعتراض دارید که اصلاً، حالا فکر نکن که فقط گراف است، مثلاً من یک ساختمان ترکیبیاتی به شما می‌دهم، یک رشته اصلاً، مثلاً خیلی خوب است، رشته بزرگی من اضافه می‌کنم به آنی که در ذهن شما حتماً هست، یک رشته خیلی درازی، مثلاً ۵۰۰۰ کلمه داخلش است، ۵۰۰۰ هزار حرف داخلش است، از a و b مثلاً، a و b خالی. $abbabb$ بزرگ. ۵۰۰۰ حرف، دو تا از این‌ها را در نظر بگیرید، این دو تا را، یکی‌اش را من می‌گویم deform شده توسط آن یکی است وقتی کوچک تغییر کند، کوچک بودن را این‌جا مثلاً می‌گیرم که دو تا دانه تغییر کند، یک دانه تغییر کند، همان است، یک حرفش عوض می‌شود. خوب بعد با این یک حرف عوض کردن‌ها من به هر چیزی می‌توانم برسم و این‌ها، خوب همه این رشته‌ها را بریزم یکجا، همه رشته‌هایی که با تغییرات این بدست می‌آیند که حالا از قضا این‌جا می‌شود همه رشته‌ها، یک فضای مدولی دارد. و deformationهای کوچک دارم. آیا ترکیبیات‌دان مطالعه می‌کند همچنین چیزی را؟ آیا مطالعه می‌کند که آقا این فضای مثلاً رشته‌ها را با آن deformationهای کوچکش در نظر بگیریم، این را in families مطالعه کنیم و بعد وقت‌هایی که، مثلاً یکی بدانیم و این‌ها. می‌کند این کار را؟ یک کم کج و معوج و این‌ها و خیلی بی‌مزه، من تجربه ترکیبیاتی‌ام می‌گوید که می‌کند، ولی به هیچ دردی نمی‌خورد. آن کاری را که باید بکند نمی‌کند، چرا نمی‌کند؟ چون بلد نیست، چون درس نخوانده است. برمی‌گردیم به آن‌هایی که آن‌جا گفتید. من امیدوارم که این همه حرف زدم مخاطبم البته که طبیعتاً شما نیستید، شما از من بهتر همه این‌ها را بلدید، من فقط چیز کردم، شرح و تفصیل دادم به سؤالتان و کلمات کلیدی‌ای که بارها قرار است در ادامه استفاده کنید در شکل کلی بدون جزئیات فنی، یعنی به عنوان شهود، مثل فضای مدولی، مثل deformation و این‌ها من تصورم این است که مردم که یک جبری پاس کرده‌اند و، یعنی می‌شود انتظار داشت گروه بدانند، حلقه بدانند، مدول بدانند حالا دیگر، یک مقدار منیفلد و این‌ها شنیده باشند، رویه و نمی‌دانم از این چیزها. ولی شاید نشنیده باشند deformation و این چیزی به ما یاد بدهد که اصلاً شما مثلاً خودت اگر دانشجویی، از فردا یاد بگیر in families نگاه کنی به امور. Deformationها را فکر کنی که چطور می‌شود که این را deform کرد؟ این فضولی را بکن وقتی که جاهای مختلفی می‌روی، یا اصلاً حتی lead شو برو سرچ کن ببین درباره نظریه دگردیسی، مثلاً درباره جبر، مثلاً deformation of algebras چیست اگر تا حالا ندیدی. که خدا را شکر کسی این چیزها را نمی‌بیند، من نمی‌دانم چرا، ما چه را به که یاد می‌دهیم، من نفهمیده‌ام هنوز. امیدوارم که شما که صاحب اثرید از من که شارحش هستم راضی بوده باشید. بنابراین من فکر می‌کنم که این‌جا خیلی در شکل کمال و به تمام، در واقع ما در این مورد حرف زدیم که یک کمی هم من اضافه کنم، یک جایی هم قبلاًها گفته بودید که fibration مهم است. من این fibration را هم بنشانم در همین deformation، شما هم این‌طوری می‌گوییدها، ولی من هم بکنم این کار را. که این fibration، ایده fibration را هم توضیح بدهم، که ایده fibration این است که ما این پایین دو تا فضا داریم، فضا به معنی وسیع کلمه. دو تا موجود داریم، دو تا چه می‌دانم، هر چیز. یکی این پایین است و یکی آن بالا. آن پایینی فرض کنید یک تعدادی نقطه است و مسیری که به یکدیگر وصل می‌کند آن‌ها را، برای این که یک ایده‌ای داشته باشید. اساساً در این پایین یک notion از تغییر هست به یک معنی‌ای. مثلاً می‌تواند یک سری نقطه و،

مثلا می‌تواند یک خط چیز باشد، پارامتری از اعداد حقیقی باشد و در حد تغییر کردن عدد در آن، که این یک notion از variation است مثلا. می‌تواند discrete باشد، مثلا یک سری رأس باشد و یک سری خط که به هم وصل هستند و جهت‌دار که داریم، این‌طوری مثلا تغییر می‌کنیم. می‌تواند یک گراف باشد، اصلا چندتا باشد مثلا. رشته خیلی از اوقات هست آن زیر در application. بستگی دارد دیگر، ولی یک چیزی هست با یک notion از تغییر، خیلی مجرد فکر کنیم. بعد بالای هر نقطه‌ای از این، این پایینی هم اصولا تشکیل شده است از نقاطی و بعد تغییراتی، مثلا در شکل مجردش. بالای نقاط این یک سری fiber است، یک فایبری از یک سری نقطه‌های دیگر و بعد تغییر که می‌کند که این فایبر هم تغییر می‌کند. یعنی بالا هر کدام یک فایبری است. تصور کنید، و بعد انگار که این پایین وقتی نقطه تغییر می‌کند که پارامتر شماسست، فایبر تغییر می‌کند. و حالا این یعنی چه، و این نرم تغییر کردن فایبر یعنی چه، بستگی دارد به contextهای مختلف، معانی مختلفی می‌دهد، در توپولوژی یک معنی می‌دهد، هزارتا معنی می‌دهد در واقع، وقتی در توپولوژی جبری حرف می‌زنیم از فضای پوششی ممکن است حرف بزنیم، از fibration به معنی واقعا fibration آن‌جا حرف بزنیم، در رشته‌ها از fibration داریم می‌توانیم حرف بزنیم، هزار جور معنی دارد، ولی اساسا ایده این است که یک fibration آن‌جا هست و بعد این نرم حرکت می‌کند روی آن fiberش، آن fiber کل فایبر آن بالا شروع می‌کند تغییر کردن، نقطه‌هایش مثلا می‌رود به نقطه‌های دیگری. حالا چه مربوط است این که ما گفتیم به deformation؟ روشن است دیگر. همان‌طور که شما گفتید روشن است ربطش. ربطش این است که این هم تغییر است، این‌جا یک فایبری دارد تغییر می‌کند، درست است؟ یک فایبری، ولی از ساختارها دارد تغییر می‌کند به فرض. و این دو جور نگرش هم هست که این‌ها به هم مربوط هستند. یعنی یک جور می‌شود، اصولا هم دگرپسای را می‌شود به عنوان یک fibration دید و برعکس. این‌طوری که اگر من روی یک دنیای پارامتری که دارم، حالا عدد است، نمی‌دانم همین گراف است، هر چه که هست. آن‌جا اگر من یک تغییر دارم، شروع می‌کنم تغییر دادن یک ساختاری روی آن. یک راهش این است که من همه امکانات ممکن را که بالای هر نقطه دارم جمع کنم و یک fibration بنویسم، بگویم که همه اطلاعات static انگار دارم که عکسش را می‌گیرم که آقا این‌جا این بوده، آن‌جا آن بوده، آن‌جا آن بوده و حالا یک عالم اطلاعات چیز هم هست، یا به عنوان variation به عنوان تابع نگاه می‌کنم مثلا، مثالی که می‌خواهم بزنم این است که شما می‌توانید به یک تابعی از مثلا اعداد حقیقی به اعداد حقیقی دو جور نگاه کنی، یکی به عنوان چیزی، عدد حقیقی‌ای که روی یک عدد حقیقی دارد تغییر می‌کند با پارامتر عدد حقیقی، یک جور دیگر هم می‌توانید نگاه کنید به عنوان یک سری نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ که عکسش است، که دارد می‌گوید که بالای هر نقطه $\mathbb{R}$ این نقطه است. حالا گاهی هم یک دانه هم نیست، یک عالم تا هست، و این اصلا مسئله‌ای است که پیش می‌آید، چند مقداری است که مهم می‌شود. این هم کلمه fibration اگر بعدا ما استفاده کردیم، که مردم یک ایده‌ای داشته باشند که یعنی چه. و شما دفعه قبل هم می‌گویید، حالا معادل است دیگر، اساسا این دو تا فکر با هم معادل است، یک جورهایی می‌شود گفت که معادلا، بجای این که بگوییم deformation کجاست؟ می‌گوییم fibration کجاست؟ که تو چرا در ترکیبیات fibration نداری؟ چرا مثلا یک سری گراف بالای گراف دیگر به عنوان یک fiber رده‌بندی نمی‌شوند؟ این چه صیغه‌ای است که ما داریم؟ که کاملا حرف خب درستی است و ما اساسا نداریم. حالا بعدتر درباره morph و چیزهای دیگر هم می‌خواهید حرف بزنید که ربط وثیقی هم دارد به این حرف‌ها. مخصوصا درباره شیء جهانی می‌خواهید حرف بزنید که چه بهتر.

آرش رستگار: استعاره‌های لاکف و نونس- عرض شود که آشنایی با کارهای لاکف و نونس در فلسفه ریاضی، اگرچه انتقادات زیادی به ایشان داشتم، ولی باعث شد که نگاه جدیدی به آموزش ریاضی پیدا کنم که هماهنگ با همان نگاه بدنمند و embodiedشان باشد. از جمله حرف‌هایی که این‌ها می‌زنند، چند تا استعاره است که راجع به حساب پایه، به وجود آمدن حساب پایه صحبت می‌کنند. این‌ها می‌گویند که ما در چند روزگی حتی، آزمایش‌هایی نشان می‌دهد که نوزادان اعداد یک و دو و این‌ها را تشخیص می‌دهند. و بعد با استعاره‌هایی، این مفهومان از عدد را که در مغزشان کاشته شده، تعمیم می‌دهند، این استعاره‌ها به طور خلاصه، اولی‌اش استعاره گردایه است. که می‌گوید گردایه یک عدد است، همان‌طور که شما، چه می‌دانم، چند تا شکلات را می‌ریزید در یک ظرف، دو تا ظرف را بریزید روی هم عین جمع است، یکی کمی‌اش را بردارید عین تفریق است، ضرب و تقسیم را هم همین‌طوری درست می‌کنیم، از روی این مفاهیم ذاتی عدد که در ذهن کاشته شده، اعداد طبیعی را می‌سازند. بعدی می‌گوید ساختمان عدد است، دو تا ساختمان را روی هم می‌گذاریم، یک ساختمان دیگری می‌سازیم، می‌شود ۵، و ۵ را می‌شود به زیرساختمان‌هایی تجزیه کرد، که با این می‌آیند مفهوم کسرها را می‌سازند، و بعد اعداد گویا را

می‌سازند. سومی این است که پاره فیزیک عدد است، پاره فیزیک همان صورت زندگی روزمره پاره خط است، که می‌گوید دو تا پاره خط را دنبال هم بگذاریم، مثل جمع اعداد می‌ماند، این چیزی است که باعث می‌شود اعداد حقیقی درست شود، کمک می‌کند که ما با اعداد اندازه‌گیری کنیم. چهارمی می‌گوید که یک نقطه که روی پاره خط حرکت می‌کند از سرش تا ته آن، عدد است، یعنی عدد یک‌جور حرکت است، که این منجر می‌شود که ما بعداً نقطه روی محور را با عدد متناظر کنیم، و بعد اعداد منفی به وجود بیاید، هم اعداد منفی صحیح و منفی گویا و منفی حقیقی. بعد من این چهارتا استعاره پایه را، یک استعاره پایه جدید به آن اضافه کردم که این‌ها چون تاریخ ریاضی نمی‌دانستند به آن توجه نکردند. و آن استعاره خیام است، استعاره خیام می‌گوید که اقلیدس ضرب دو تا طول را یک مساحت تعریف می‌کند، و این مشکل بعد دارد، حالا بین ۴۰۰ سال قبل از نیوتون خیام عجب حرفی زده، و گفته من نسبت را عدد می‌گیریم، بنابراین می‌گوید نسبت یک عدد است، و این به نظر من یک حرفی در foundation است، این استعاره هم عواقبی در ریاضیات داشته که راجع به آن صحبت می‌کنم، علاوه بر این، این‌ها فکر می‌کنند بومبلی، رافائل بومبلی کسی است که نقطه را روی محور اعداد گرفته، هم عصر است با دکارت و اعداد منفی را معرفی کرده. در صورتی که، این که شما خط را مدلی برای زمان بگیرید، حرکت نقطه روی خط را مدلی برای زمان بگیرید، کار خیام است، و روی هندسه تحلیلی دکارت هم تاثیر داشته، و دکارت هم ثابت شده است که به آن کتاب‌ها دسترسی داشته و عربی می‌دانسته و مانند این. این نتیجه تحقیقات رشدی راشد است.

آرش رستگار: استعاره-خیام-گروتندیک- اما این استعاره‌ها خودشان تبدیل به چه چیزهایی شدند و ترکیب‌هایشان تبدیل به چه چیزهایی شد در ریاضیات؟ استعاره گردایه در ریاضیات، مفهوم مجموعه را درست کرد، استعاره ساختمان، مفهوم ساختار را درست کرد، در واقع گفت ساختار عدد است، یا ساختار تعمیم مفهوم عدد است. استعاره پاره فیزیک، مفهوم ناوردا را درست کرد، گفت ما به یک ساختمان می‌توانیم یک ناوردا نسبت دهیم، و استعاره حرکت نقطه روی پاره خط، دگرذیسی ساختارها را درست کرد که همان ایده فلسفی گروتندیک بود و استعاره نسبت خیام، که همان استعاره دگرذیسی هم برای خیام بود، در واقع، استعاره نسبتش هم باز همان مفهوم این که به جای یک وارپته جبری، مورفیزم‌های آن‌ها را به عنوان شیئی بگیریم و مطالعه کنیم، و مثلاً هرزبروخ-ریمان-رخ را به جایش گروتندیک-ریمان-رخ گذاشت، این عرض شود که منجر به باز همان ایده گروتندیک شد که باید نسبی فکر کنیم، relative فکر کنیم. خیلی خوب، و بعد این‌ها را من عرض کردم که این نکته را بگویم، که قبلاً هم با شما مطرح کرده بودم، که به نظر من این دو تا استعاره را گروتندیک قاطی کرده است، یعنی می‌گوید دگرذیسی ساختارهای ریاضی، همان تفکر نسبی نگاه کردن و در نظر گرفتن مورفیزم بین دو شیئی به شکل یک شیئی است، که البته شما مخالفت کردید، ولی می‌خواهم دلایلم را بگویم که ببینم شما چه عکس‌العملی دارید. یکی این که استعاره نسبت در جاهای دیگر ریاضی وارد شده است، مثلاً در کارهای فورستنبرگ، مورفیزم بین ساختارها آمده که اصلاً شما خانواده‌ای نمی‌بینید، این یک. دو این که ما مفهوم دگرذیسی را، هم مفهوم دگرذیسی جبری داریم، هم مفهوم دگرذیسی هندسی داریم، و چندین مفهوم دگرذیسی دیگر هم حتماً هست، بنابراین آن مثال گروتندیک که وارپته جبری را به وارپته جبری دیگر نگاشت می‌کند و می‌شود fiber تصویر معکوس یک نقطه را در نظر گرفت و آن نقطه را که حرکت می‌دهیم، fiber هم حرکت می‌کند، که هم‌زمان هم می‌شود آن را ایده دگرذیسی گرفت و هم ایده نسبی فکر کردن گرفت، همه جا در دگرذیسی ساختارهای ریاضی همچنین امکاناتی نداریم. و حتی اگر به زبان فلش‌ها هم بتوانید ترجمه کنید و بگویید: ببینید این همان تفکر محلی به سرتاسری و چسباندن و این‌هاست، باز هم من لزوماً قبول ندارم که همیشه این ترجمه به نحو قوی‌ای کار می‌کند و به خصوص که خیلی جاها در ریاضی هست که اصلاً ما fiber product نداریم، fiber product معنی‌اش این نیست که دگرذیسی نداریم، و بله می‌فهمم که وقتی شما شلسینگر criteria در نظر می‌گیرید برای universal deformation ring که همان موضوعی است که، deformation ساختارهای جبری، که ما مطرح کردیم، شما می‌گویید که باید فانکتورمان به fiber product احترام بگذارد. خب ولی تنها مسیر ما برای کار کردن با deformation‌ها که لزوماً شلسینگر و گروتندیک و این‌ها نیست. و البته باز مثل همیشه می‌توانید بگویید که خب اگر نیست پس چیست؟ بسازیدش، و البته این کار می‌برد ساختنش، و اگر هم بسازم با زحمت زیاد، خب بله عواقب فلسفی خیلی زیادی دارد. ولی لزوماً موقع فکر فلسفی، من فکرم را به خاطر نداشتن مثال نمی‌بندم، وقتی یک چیزی متصور است، متصور است دیگر، بنابراین خلاصه‌ای که من دارم این است، که گروتندیک در واقع نقشش در ریاضیات فهمیدن استعاره‌های خیام بوده است، و تازه، او دو تا استعاره مختلف را یکی تصور کرده، و نزد خیام آن‌ها دو تا چیز مختلف هستند و عملاً هم در ریاضیات که نگاه می‌کنید این دو تا ایده به طور

مستقل روی ریاضی تاثیر گذاشته‌اند و این perspective جدیدی به مفهوم دگردیسی می‌دهد، چون آن را از مفهوم fibration دارد متمایزش می‌کند، که هر دگردیسی‌ای لزوماً fibration و لزوماً به زبان relative thinking قابل ترجمه نیست. و باز هم حتی اگر شما بگویید نزد یک نظریه رسته‌دان، یک نفر که متخصص نظریه کتگوری است، به زبان فلش‌ها همه این داستان‌ها قابل ترجمه است، باز برای نتیجه‌گیری فلسفی من کفایت نمی‌کند، چون اصلاً به نظر من هنوز نظریه رسته‌ها چون درون ساختارها را در نظر نمی‌گیرد عقیم است، و اگر هم در نظر بگیرد، حالا در ادامه حرف‌هایی که قبلاً زدیم، باز این روابط بین شیء‌ها و ساختارها، خیلی نزدیک است به ساختار، خودش یک ساختار است. هنوز آنقدر از زمین دور نشده که بشود به عنوان یک فرم گرفت آن‌ها را، مثل یک حقیقت پشت صحنه‌ای که مثلاً در آنالوژی‌ها تجلی می‌کند و ما می‌گوییم که این احتمالاً فرم است، ما به آن دسترسی نداریم، این دو تا پارادایم‌ها به هم وصل نمی‌شوند. همچنین جایگاهی را نظریه رسته‌ها به نظر من هنوز ندارد. حتی شاید capable هم نیست، یعنی آن کارهایی که، improvement، کارهایی که در تصور من می‌گنجند، کافی نیست.

امیرحسین اکبرطباطبایی: پاسخ به محل نزاع. عرض به حضورتان که درباره این‌هایی که گفتید، درست هم می‌گویید که قبلاً هم حرف زدیم و این‌ها، درباره کلیاتش و این استعاره‌های مختلف و این‌ها توضیحاتی داده بودید قبلاً. ولی خوب بعد یک اختلافی هم داشتیم، حالا سطحی البته، ولی به هر حال، و الآن به شکل دقیق‌تر دارید با آن اختلاف مخالفت می‌کنید و می‌گویید که هنوز فکر می‌کنید که، اگر بخواهم محل نزاع را روشن کنم، استعاره نسبت، که نسبت می‌دهید به خیام، و استعاره مثلاً حرکت یا دگردیسی و این‌ها، این دو تا را گروتندیک یکی کرده که اشتباه است و دو تا است. و ظاهراً من هم قائل هستم که نه این‌ها واقعاً یکی است. همان‌طور که قبلاً گفتیم و این محل اختلاف ماست. بعد دلیل فنی‌ای هم که می‌آورید که خوب است، من دارم خلاصه می‌کنم، این است که context‌هایی هم هست که شما fibration ندارید خوب. و وقتی fibration ندارید معنی‌اش این نیست که نمی‌توانیم درباره حرکت حرف بزنیم، و بنابراین چیز است، یک جای کار غلط است، این‌ها واقعاً جدی یکی نیست، حتی به لحاظ فنی هم. من می‌شنوم که چه می‌گویید، و می‌خواهم هم موافقت کنم هم مخالفت. اساساً مخالفم به یک معنی ضعیفی از کلمه، بگذارید توضیح دهم که یعنی چه. می‌خواهم بگویم که در واقع می‌خواهم این را توضیح دهم که حالا fibration هم نداشتیم نداشتیم، آن قدر مهم نیست. نمی‌خواهم هم به زبان رسته‌ای بگویم که همه این‌ها را می‌شود نوشت، که می‌شود نوشت، ولی مهم نیست. واقعاً همان‌طور که می‌گویید، مهم این است که آن هسته اصلی فکر این‌جا پایدار می‌ماند، یا به زور داریم با زبان‌های مختلف سعی می‌کنیم بنویسیمش. من حرفم این است که ما وقتی رسته‌ای نگاه می‌کنیم، morph مهم است. اساساً نقش اصلی را یک morph دارد. مثلاً در رسته‌ای که محل بحث ماست، از یک a به یک b . حرف من این است که fibration هم یک جور نگاه کردن به قضیه هست، درست است، و بعد امکاناتش هم موجود نیست همیشه، که درست است، ولی بیابیم fibrational نگاه نکنیم، من می‌گویم همین نگاشتی که از a به b داریم، آن موقع هم همین منظورم بوده، fibration یک evidence است که این‌طور می‌شود، ولی به نظرم همین‌طور خالی هم می‌شود. فرض کنید که یک نگاشتی دارید از a به b و بعد این نگاشت را دو جور می‌شود خواند، به لحاظ مثلاً فلسفی-شهودی مثلاً. یکی نسبت a و b ، نسبت b به a است مثلاً، به یک معنی‌ای. که این را من فکر نکنم مخالفتی داشته باشید که این همان relative و نسبت و این‌هاست که می‌گویید که گروتندیک هم می‌گوید که خوب اشکالی در آن نیست. این یکی را از آن سوا می‌کنید، و می‌گویید که حرکت چه؟ من می‌گویم که خوب همین نگاشتی که از a به b است، یک وقتی همین a و b ، همین‌طوری تپل اشیاء بدون ساختمانی هستند که همین‌طوری کیلی نشسته‌اند آن‌جا و آنوقت شما می‌گویید که آهان این دو تا موجود من، من دارم به نسبت این‌ها فکر می‌کنم وقتی به morph از a به b فکر می‌کنم. یک وقتی هم a را به منزله جانوری که در آن نقطه هست، ساختار درونی دارد فکر می‌کنید، آنوقت f که از a می‌رود به b ، آنوقت می‌شود تعبیر کرد که این دارد به هر نقطه‌ای، یک نقطه‌ای در b نسبت می‌دهد، حالا نقطه هم به معنی وسیع کلمه. و آن وقت می‌شود گفت که در واقع این f توضیح دارد می‌دهد که حرکت کردن یک نقطه‌ای که در b است بر اساس پارامتری که در a است و به یک معنی من حرکت می‌فهمم از این، و این‌طور است که می‌پندارم که این‌ها در اصل یکی هستند و گروتندیک هم اشتباه نمی‌گوید. حالا گروتندیک هم البته به این صراحت و این‌ها نمی‌گوید که حالا ما بعد متهمس کنیم که می‌گوید یا نمی‌گوید و اشتباه می‌کند. ولی به هر حال این دو تا را یکی گرفتن آن‌چنان هم کار بدی نیست به نظرم. حالا اصلاً کار به fibration هم ندارم. یعنی دارم نمی‌گویم که نگاشتی که دارد از a می‌رود به b را یک fibration روی b در نظر بگیرید که همیشه این امکان

را نداریم، حرفم این است که f که از a می‌رود به b را به عنوان یک نگاشت خالی می‌شود به منزله a در واقع جهان پارامترتان است و b براساس آن تغییر می‌کند نگاه کنید. حالا البته می‌توانید بگویید که یک وقت‌هایی دگرذیسی‌ها این‌طوری هستند که آن پارامتر در رسته ما نیست و مثلاً ما داریم درباره‌ی چه می‌دانم اشیاء جبری و اشیاء هندسی چه حرف می‌زنیم، یک بازه I هم هست که پارامتر آن است مثلاً، که بیرون است اصلاً قاطی این‌ها نیست، که حرف درستی است. این‌جاها می‌شود با همان رسته و این‌ها سر و تهش را هم آورد، یک کارهایی کرد که همه‌اش یکی شود، ولی خب متوجه هستم که به حق شما باید بگویید که نه این دیگر واقعا همان نیست، که حرف بدی نیست، این‌جا آن‌جایی است که می‌گوییم حالا مخالفم، ولی حالا همچنین هم یک مقدار هم موافقم، ولی اصلاً گیرم که این‌ها یکی هم هست به لحاظ فنی، حالا می‌خواهم یک گام جلوتر بروم و بگویم که اصلاً چه مهم است، برای این که همان‌طور که مثال زدید درباره‌ی اعداد و این‌ها مثلاً، فرض کنید ما داریم درباره‌ی اعداد طبیعی و این‌ها فکر می‌کنیم مثلاً، خب این‌جا چه مثلاً با استعاره‌ی گردایه فکر کنیم، چه با استعاره‌ی مثلاً ساختار، چه با بقیه‌شان، این‌ها همه‌اش یکی است دیگر، نتیجه‌اش این است که همان اعداد است با همان ساختمان‌های جمع و ضرب و این‌هایشان، حالا متوجه هستم که بعضی‌ها به ما بیشتر امکانات می‌دهند که حالا منفی هم بشود، کسری هم بشود و غیره. ولی فعلاً فقط به اعداد فکر کنید به فرض، و خب اصلاً این‌ها تا جایی که به اعداد مربوطند، همه‌شان یکی هستند، ولی نتیجه‌شان یکی است، خودشان که یکی نیستند، یعنی اصلاً گیرم حتی، یعنی فرض کنید که دارم سه‌ل می‌گیرم، که اصلاً همه‌ی این‌ها با هم معادلند، در تایید نهایی، و هیچ کاری مثل آن منفی و کسری و این‌ها نیست که یکی بکند و یکی نتواند، اصلاً همه‌شان فقط یک کار می‌توانند بکنند گیرم، خب بعد چه مهم است به یک معنی‌ای؟ به این معنی که من وقتی با استعاره‌های مختلف فکر می‌کنم به یک چیزی، گیرم هم که استعاره‌هایش یکی باشند، جورهای مختلفی می‌بینم امور را دیگر، چیزهای مختلفی می‌بینم. مثلاً من یک دوگانی دارم که هندسه همان جبر است مثلاً، خب ولی در یک موردی مثلاً. ولی خب مهم است که یک وقت این طرفی نگاه می‌کنم یک وقت آن طرفی، چیزی به من یاد می‌دهد، درست است؟ یاد می‌دهد به من که یک جور استعاره برای یک کاری بهتر است فکر کردنش، و یکی برای یک کار دیگر. حالا حرفم این است که گیرم هم که این حرف درست باشد، یعنی طرفدار گروتندیک باشیم به تعبیر شما، این دو تا را بگویم یکی است اصلاً. صرف این که یکی باشد که به درد ما نمی‌خورد که، مهم اجازه‌ی این است که ما می‌توانیم یک وقتی این‌طوری فکر کنیم، یک وقتی آن‌طوری فکر کنیم، راجع به اشیاء و فکر کنیم که این حرکت است اصلاً، و واقعا هم ما در عمل می‌بینیم که این‌ها فرق می‌کند با هم استعاره‌هایش. یعنی به معنی این که گیرم حتی معادل هم باشند، ولی در عمل دو جور مختلف نگاه کردن است واقعا. که یک وقت من به عنوان تغییر نگاه کنم به این، یک وقت به منزله نسبت نگاه کنم. می‌خواهم یک مقدار چیز کنم، بگویم اصلاً حالا آن بحث ما که من موافقم و مخالفم یک مقداری و این‌ها که گفتم چرا، حالا گیرم که حرف من درست باشد، حرف گروتندیک درست باشد و این‌ها یکی باشد، ولی واقعا در عمل یکی نیست، یعنی در عمل جورهای مختلف نگاه کردن کاملاً نگاه مختلفی به امور است و چیزهای مختلفی می‌شود دید و یاد گرفت و این‌ها، و بنابراین می‌شود بدون کاستن از کلیت فرض کرد که این‌ها با هم فرق می‌کنند اصلاً. یعنی در واقع حرفم این است که بجای این که، شاید کار ما این است که استعاره‌ها را نه در حد تساوی، مثلاً فنی‌شان در نظر باید بگیریم، که شاید اصلاً همه‌ی این‌ها یکی باشد که می‌تواند، مثلاً در یک تعبیر خیلی معقولی باشد که همه‌ی این‌ها یکی می‌شود اصلاً، در حد تعمیم معقولی. چه مهم است؟ مهم این است که آنی که در عمل بر انسان می‌گذرد این است که جورهای مختلف است این‌ها و به لحاظ شناختی هر کدام از این‌ها از دیگری تمایز دارد. چون وقتی ما فکر می‌کنیم آن‌طوری و در عمل آن‌طوری می‌اندیشیم، جور دیگری می‌بینیم و چیزهای دیگری یاد می‌گیریم، حالا گیرم هم که می‌شود آن‌ها را معادل آن طرفی هم نوشت، خب بشود نوشت مثلاً، نه؟ در واقع بودن این‌ها مهم نیست، نمودن این‌ها مهم است و در نمود این‌ها بر ما متفاوتند. بنابراین اصلاً متفاوت فرض کنیم‌شان هم کار بدی به نظرم نکردیم. این هم از دو سنتی حقیر.

آرش رستگار: درباره بودن و شدن- اولاً که بسیار شیوا بیان کردید و چقدر هم نکات به‌حق را گفتید. من در ادامه چون آخرش به بود و نمود اشاره کردید، یک صحبت دیگری هم که باز یادم نیست، فکر می‌کنم قبلاً با هم کردیم هم دوباره این‌جا یادآوری می‌کنم که نوشته شود. و آن مسئله بین بودن و شدن است که در فلاسفه باستان، از پارمنیدس و دموکریتوس، سر این که فرمولبندی بودن درست است یا شدن، خیلی بحث بوده و در مورد، تمدن‌هایی هم بوده‌اند که در آن‌ها بودن یا شدن مورد تاکید بوده‌اند، مثلاً تمدن ایران و تمدن هند به اساطیر اهمیت می‌دادند بجای تاریخ که آن به خاطر تاکیدشان بر جنبه‌های ایستا و نگاه بودن بوده، یا تمدن غرب مثلاً یا چین ما می‌دانیم که به شدن تاکید داشته‌اند. بعد در چین هم

تاریخ‌نویسی خیلی، چین باستان، می‌گویند بهشت تاریخ نویسان است. و سرآخر هم هایدگر در تمدن غرب می‌گوید اصلا بودن را باید به شدن تقلیل داد، هستی در بستر زمان است. و اما من باز از لاکف و نونس یک نکته‌ای را یاد گرفتم که به زبان فلسفه که ترجمه کردم دیدم این چقدر مهم است. لاکف و نونس می‌گویند که در کتابشان، calculus لاینیتز با dx کارش را راه می‌اندازد و dx یک موجود است، یک هستی است و calculus نیوتون با حدگیری کارش را می‌کند و برخلاف لاینیتز با یک هستی مثل dx سر و کار ندارد. ولی در نهایت جفتشان چکار می‌کنند؟ علم calculus را به ما می‌دهند دیگر. و همان کارآمدی را دارد که چه آن‌طور بسازیمش و چه این‌طور. چیزی که من یاد گرفتم این بود که این را به زبان بودن و شدن ترجمه کردم، و گفتم تأویل این دو فرمولبندی یا روش ساختن calculus، تأویلش، آن حقیقت پشت صحنه‌اش، این است که زبان بودن و زبان شدن برای شناخت ما معادل هستند، عین عقل و شهود، عین تصویری و کلامی، عین جزءنگر و کل‌نگر، این‌ها دو زبان‌اند، بعضی وقت‌ها ممکن است یک نفر تصمیم بگیرد با زبان بودن بفهمد، یک نفر ممکن است تصمیم بگیرد با زبان شدن بفهمد و توانایی‌های این‌ها برای ساختار شناختی ما معادل هستند. حالا لزوماً راجع به استعاره‌ها، چون ما می‌خواهیم نگاه‌های مختلفی ازشان بیرون بکشیم، از هر کدامشان، نقطه‌ای نیست که مرکزی داشته باشد، این که یک استعاره‌ای معادل یک استعاره دیگر باشد از لحاظ شناختی. ولی خب این با توجه به این که گفتید که ممکن است هم technically دو تا استعاره یکی باشد، ولی در point of view متفاوت هستند، می‌خواستم این نکته را هم بگویم که گاهی هم در point of view که به ما می‌دهند متفاوت هستند، ولی برای ساختار شناختی انسانی توانایی معادلی دارند. یعنی این یک آینه‌ای است، آن یک آینه‌ای است، حقایق در این‌ها تجلی می‌کنند. همان‌طور که آن یکی آینه خوبی است، این یکی هم آینه‌ای به همان خوبی است. و این هم به نظر من نکته درس‌آموزی است، چون به زندگی روزمره مربوط می‌شود، ما راجع به مسائل مختلف اتفاقات تاریخ، وقایع دور و برمان، فرمولبندی‌های مختلفی داریم، و ساختار علی مختلفی مثلاً در ذهنمان در نظر می‌گیریم، و مدل می‌کنیم وقایعی که دیدیم. ولی باید حواسمان باشد که ما قرار نیست با آینه نفر بغل‌دستی‌مان فکر کنیم، قرار است تصویری که در آینه ماست با تصویری که در آینه اوست انطباق داشته باشد، آینه‌هامان قرار نیست انطباق داشته باشد، فرمولبندی‌ها قرار نیست یکی باشد، و این خیلی نکته مهمی است، برای کسی که درس می‌خواند شایسته است این حکمت را بلد باشد. این به خاطر من آمد از صحبتی که شما کردید و مثل همیشه شما زبان صحیح‌تری برای این که چطوری راجع به مسئله فکر کنیم، نسبت به آن فرمولبندی من ارائه کردید. یک نکته ولی هست باز به ذهن من می‌آید، اینکه شما a و b را مجموعه بدانید یا مجموعه‌ای از نقاط بدانید، یا حتی کل آن را مجموعه‌ای از اجزاء بدانید، که مینیمال هستند مثل نقطه، زیرجزء ندارند، زیرساختار ندارند، ما در قرن بیستم دیگر از این رد شدیم. با مثال‌های Von Neumann که سعی می‌کرد حلقه‌های غیرنوتری ناجابجایی بدهد که از رویش فضاهای تصویری‌ای درست کند، که آن هندسه پیوسته به وجود آمد که مفهوم بعد می‌توانست پیوسته در آن حرکت کند، که فیزیک‌دان‌ها هم به آن احتیاج دارند قبلاً گفتم، تا عرض شود که نظریه مجموعه‌ها که باز ما اجازه بدهیم که آن گرافمان از دو طرف یا از پشت نامتناهی باشد، یعنی پرانتزهامان تمام نشوند، هرچقدر بخواهند بتوانند عقب بروند. گرافش نقطه شروع نداشته باشد، نقاط شروع نداشته باشد، همچنین اشیائی را در کوانتوم، همچنین چیزهایی را ما در ریاضی داشتیم، تجربه ریاضیمان اجازه می‌دهد، زندگی مادیان اجازه می‌دهد، که ساختارهایی را در نظر بگیریم که شیئی مینیمال ندارند. آن مثالی هم که من داشتم موجودات خودمتشابه cofinite که پس به نوعی متناهی هستند، و می‌شود راجع به آن‌ها ریاضی انجام داد، آن هم این خاصیت را دارد که هر شیئی زیر اشیائی دارد، و هیچ‌وقت به اشیاء مینیمال نمی‌رسیم. بنابراین، بله من متوجه این بودم که a به b نگاشت می‌شود اگر مجموعه‌ای از نقاط باشند، همان در واقع یک جورهایی fibration است، و اگر حتی a مجموعه نقاط هم نباشد یک کلی باشد که متشکل از اجزاء است، به خصوص که آن اجزاء مینیمال باشند، می‌شود آن را fibration تصور کرد، ولی خب تجربه ریاضی ما، ما را از این مرز گذرانده که تصور کنیم همیشه این‌طوری است، و دقیقاً من داشتم برای همچنین چیزهایی، عرض شود که، زمین را آماده می‌کردم، که همچنین چیزهایی را می‌شود کاشت. برای مثال، من متوجه هستم که ما مثلاً در $\text{quantum field theory}$ نسبت را آوردیم در ذرات بنیادی، ولی اگر من بتوانم یک فرمولبندی‌ای از مکانیک بدهم که آن‌جا شیئی مینیمال دیگر ندارم، یا از calculus بدهم که شیئی مینیمال ندارم، باعث خوشحالی‌ام می‌شود، احساس می‌کنم بیرون آن دنیایی که شیئی مینیمال، مثل نقطه که شیئی مینیمال هندسی است، بیرون آن دنیا هم می‌تواند برای من امن باشد، آن‌جا هم چیزهای آشنایی پیدا می‌شوند. یک مثالی در کارهای دکتر اکرمی هست، او هیات علمی دانشگاه سمنان است، ipm من دیدمش، آن‌جا visitor است. او می‌آید به جای نقطه bump-function ‌هایی را می‌گیرد که بعد این فضا نامتناهی البعد می‌شود، و بعد حالا می‌توانید به زبان

کوانتوم هم ترجمه‌اش کنید، طوری نیست. ولی به این زبان هم calculus انجام می‌دهد، هم فیزیک انجام می‌دهد، هم نسبیت انجام می‌دهد، هم نمی‌دانم، اصل عدم قطعیت انجام می‌دهد، همه چیز، شیرین به این زبان ترجمه می‌شود. و من فکر می‌کنم ارزش دارد آدم شناختش را ورزیده بکند برای همچنین مثال‌هایی، برای روز مبادا!

امیرحسین اکبرطباطبایی: نقطه چیست. عرضم به حضورتان که به به، خیلی چیزهای قشنگی گفتید درباره بودن و شدن بالاختص و آن مقایسه خیلی شیرین درباره حساب دیفرانسیل که بیان شدن و بودن که برای لایبنیتز و نیوتون است، که خیلی قشنگ هم می‌نشیند تعبیرتان به هر دوی این‌ها، و اگر بگردیم هست هم از این مثال‌ها که این دو جور نگاه کردن، این یکی از به‌ترین مثال‌هاست به نظرم، خیلی خوشمزه است و حالا نتیجه‌ای هم که می‌گیرید نمی‌دانم باید چقدر سفت پایش ایستاد، اما به هر حال این نتیجه خوشمزه‌ای است که این دو تا، دو جور نگاه کردن است که اساساً هم فرقی نمی‌کند. حالا حتماً هم موافق هستید که بسته به جایش یکی از یکی بهتر است. مثلاً ما می‌دانیم که نگاه لایبنیتزی خیلی ثمربخش‌تر است به آنالیز تا مثلاً نگاه نیوتونی، دست کم در بخش‌های زمین از قضیه. اما خوب این که دست کم زورشان یکی است و حتماً یکی به درد یک کاری می‌خورد و آن یکی نمی‌خورد، این پدیده‌ای است که توجه کردن به آن واقعاً ارزشمند است، و اصلاً همان‌طور که می‌گویید یک مشاهده مهم و قشنگی است. و بعد یک نکته‌ای هم می‌گویید درباره این، در واقع دارید مخالفت می‌کنید با من باز هم، که آن نگاشت که من می‌گویم از a به b که نسبت سر جایش است، ولی من می‌گویم تعبیر کنید به حرکت، و می‌گویم که عین این است که به ازای هر نقطه‌ای در a ، نقطه را هم به معنی موسع کلمه می‌گیرم، یک چیزی داریم نسبت می‌دهیم به b ، بعد شما اعتراض می‌کنید که نه، باشد، این را که من هم بلدم، منتها حرفم این است که آخر نقطه کجا بود؟ اصلاً نقطه به معنی موسعی که تو می‌گویی کجا بود؟ به این معنی که مثلاً یک جزئی است، نداریم که. من وقتی که دارم می‌گویم نقطه به معنی موسع، یک notion خیلی مشخصی در ذهنم است که بعید است که در برابر مثال‌هایی که می‌زنید کم بیاورد و الآن توضیح می‌دهم، چیز ساده‌ای هم هست البته و هیچ، حالا درست است که به کار می‌برم نقطه، به آن معنی‌ای که، در واقع به معنی generalized point که کار می‌برم نقطه را، ولی واقعاً هیچ جایش فرض نمی‌کنم جدا که اجزاء ندارد یا می‌شود شکستش یا اتمی است یا چی. تنها کاری که باید بکنیم این است که جانور مربوطه را identify کنیم به طور یکتایی؛ همین کار را باید بکنیم. و آنی هم که در ذهن من است به عنوان نقطه، حالا می‌شود نقاط دیگری تصور کرد و این‌ها، شما در یک رشته دارید زندگی می‌کنید بالاخره دیگر، اگر نسی دارید نگاه می‌کنید به اشیائتان و این‌ها. آن شیء a تان را اگر در نظر بگیرید، من منظورم از نقطه، generalized element های a است، یعنی نگاشت‌هایی که از هر جایی می‌آیند به a . همه این نگاشت‌ها را اگر در نظر بگیرید که تمام رفتار نسبی از پایین a است، این به طور یکتایی a را مشخص می‌کند دیگر، به خاطر این که یکی از این‌ها هم همانی است مثلاً، همه رفتار a را ما می‌توانیم با این نگاشت‌ها encode کنیم، که شکل فرمال این حرفی که من می‌زنم لم yoneda است دیگر. حالا به هر حال، می‌شود a را تصور کرد به جای یک شیء، یک مجموعه‌ای از نگاشت‌ها به داخل a از جاهای مختلف، حالا اگر رشته‌تان کوچک باشد. اگر نباشد، این‌ها مهم نیست حالا. این‌ها را می‌توانیم نقطه‌های a تصور کنید، یعنی اجزائی از a منتها جزء نه به این معنی که تکه تکه ندارد، فقط به این معنی که همه این‌ها روی هم a را به طور یکتایی مشخص می‌کنند. بعد نگاشت f از a به b را می‌توانید بخوانید به معنی نگاشتی، به معنی تابعی که هر نگاشت وارد شونده به a را می‌برد، compose می‌کند، به نگاشتی وارد شونده به b ، و با این تعبیری که من گفتم، هر نقطه a را داریم می‌فرستیم به یک نقطه b . به این معنی است که من دارم می‌گویم که می‌شود بدون کاستن از کلیت، همیشه می‌شود a را فرض کرد که در واقع مجموعه‌ای، حالا بعضی وقت بزرگ و بعضی وقت پارامتری، بسته به مورد و اندازه و این‌ها که مهم نیست، به منزله مجموعه‌ای از نقاط می‌شود تصور کرد و خوب همان‌طور که روشن است من هیچ جایی دارم فرض نمی‌کنم که کوچک‌ترین ندارم، بنابراین اصلاً این نگاه گروتندیکی است این، خوب طبیعتاً از من نیست و از مدرسه گروتندیک و دیگران بعدتر از اوست که این‌طور نگاه کنند و این‌طور نگاه کردن آن وقت، نتیجه‌اش می‌شود اینی که من می‌گویم و همانی که شما دوست دارید، آن زمینی که می‌گویید آماده کنیم. متوجه هستم که البته این یک هواپیماست و خیلی هم بستگی به چیز دارد، شما رشته‌تان باید یکتا باشد، یک رشته باشد و قاطی نکنید و امور و این‌ها با هم را، همه این‌ها را بلدم، اما بالاخره بدون این که لازم باشد که، عرض به حضورتان که، اشیاء را بشکنیم و نقطه پیدا کنیم و مجموعه فرض کنیم و ساختار، حتی اگر مجموعه بود، مثل گروه و نمی‌دانم حلقه و اسکیم و غیره، بعد این را باید کاهش دهیم به نقطه‌هایی که ممکن است نباشد. بدتر، در شرایطی که با اشیاء کوانتومی طور مثلاً سر و کله می‌زنید، که اطلاعات را نمی‌توانید تقلیل دهید به یک مجموعه‌ای

از نقاط، در واقع یک سری هاله‌ای هست آن‌ها که روی هم می‌افتد و نمی‌افتد و entanglement و غیره که بسیار حرف صحیح و این‌هایی است، مستقل از همه این‌ها، همیشه می‌توانید وانمود کنید که آن شیئی که دارید مجموعه‌ای از نقاطی است، به یک معنی وسیعی از کلمه، یک سری از ویژگی‌های نقطه مثل هیچ چیز در آن نبودن را از دست می‌دهید طبیعتاً، ولی یک عالم کارهایی را که می‌توانستید قبلاً بکنید، هنوز هم می‌توانید بکنید. در واقع آنی را که از دست می‌دهید و آنی را که به دست می‌آورید ما امروزه می‌دانیم که چه است. می‌دانیم که در آنی که از دست می‌دهید، نگرش کلاسیک است، منطق کلاسیک است، آنی که بدست می‌آورید، تقریباً همه ریاضیات ساختی است، به شرطی که در درون توپوس انجام شود، در واقع نظریه توپوس است. اگر قول بدهید که از مجموعه گذر کنید به توپوس، یعنی هر چیزی که می‌گویید فقط در مجموعه به فرض درست نباشد، در همه توپوس‌های مثلاً گروتندیکی درست باشد، آن وقت دارید قول می‌دهید که این notion ساختی نظریه توپوسی از مجموعه، notion است که survive می‌کند در این تعبیر وسیع‌تر، می‌شود تقریباً هر چیزی را گرفت مجموعه، به یک تعبیری، اگر لازم است. خب البته که یک عالم دنگ و فنگ دارد، یک چیزهایی حفظ نمی‌شود و غیره و این‌ها، که همه این‌ها را می‌دانیم، اما می‌شود خیلی، مجموعه خیلی مهم‌تر از این حرف‌هاست در واقع، این تعبیر نقطه‌ای که کمک می‌کند به فکر کردن ما را می‌شود survive کرد در واقع. و به این تعبیر من می‌گویم که فرض کنید که نقطه به نقطه می‌رود که خب وفادار هم هست تعبیر به practice گروتندیک. این هم از یک نکته‌ای که فقط به ذهنم رسید که در اضافه این مطلبی که می‌گفتید بگویم و دیگر هم که باقی ارادت.

آرش رستگار: مفهوم نقطه در هندسه حسابی- خیلی ممنون، خیلی روشن‌گر و آموزنده و با عواقب فلسفی فراوان. عرض شود که یک چیزهای جالبی من از این حرف شما یاد گرفتم، که گفتم تعریف بکنم. یکی این که این نگاه نظریه رسته‌ها که برون‌نگری است، در برابر آن نگاه درون‌نگری، یا جامعه‌شناسی ساختارهاست به جای روانشناسی ساختارها، این را من آمدم دیدم که اصلاً نمی‌شود با آن مبارزه کرد، به خاطر این که شما تا بگویید نه این‌طور نیست، می‌گوید که خب من که نگفتم تصویر همه morphism یعنی چه، شاید معنی morphism بعداً تعمیم پیدا کرد، همه حرف‌هایی که من گفتم درست شد. یا این ساختار من، باز فرمول‌بندی شد یک طوری شد یک عالم morphism دیگر درست شد، که همه آن چیزهایی را که شما می‌گویید در آن نیست، باشد. بنابراین این، عرض شود که، یک نظریه به قول پوپر ابطال‌ناپذیر است. یعنی این که شما، این یک طور نگاه است، یک فرمول‌بندی‌ای نیست، و این درست نیست که ما به این فکر کنیم که از آن بگذریم، bypass کنیم، بلکه باید به عنوان یک نگاه از آن استفاده کنیم، همان‌طور که آن نگاه درون‌گرایانه برای ما مفید بود، این نگاه برون‌گرایانه هم برای ما مفید است، حالا می‌خواهید قاطی‌اش هم بکنید قاطی‌اش کنید. این نگاه برای من جدید بود. یکی دیگر چیزی که برای من جدید بود، این نگاه شما که گفتید نقاط درواقع morphism‌ها هستند، حالا ما در هندسه حسابی دیده بودیم‌ها، مثلاً spec هر میدانی را نگاشت می‌کردی، اگر میدان k بود می‌گفتیم به این k -point یا $spec O_k$ را نگاشت می‌کردیم، می‌گفتیم نقطه روی O_k ، حلقه اعداد صحیح است. ولی هیچ‌وقت من به این فکر نکرده بودم که به همه morphism‌ها بگوییم نقطه. چرا دیگر مثلاً شما یک اسکیم روی S داشتید از S به آن نگاشت می‌کردید به آن می‌گفتیم S -point، ولی باز هم من هنوز این درکی را که شما دیگر از هر کجا یک morphism بود به این شیئی من، به این بگویم نقطه، همچنین چیزی را نفهمیده بودم، با این که این قدر هم در دنیای زندگی کرده بودم که مهیا بود برای من که این را بفهمم، و این هم خیلی خوب بود و، و یک انقلابی در من به وجود آمد، و آن این که اصلاً شاید باید به هندسه بگوییم مجموعه زیرساختارهای یک ساختار، مجموعه زیرساختارهای یک ساختار، یا همه زیرساختارهای از یک جنس خاص، یا همه ساختارهایی که morphism می‌شوند به این شیئی از یک جنس خاص، و این کلمه «همه» کلمه کلیدی باشد برای مفهوم فضا. بعد شما می‌توانید توپولوژی هم بگذارید، اگر آن درون‌ساختارها را هم در نظر بگیرید، می‌توانید بگویید morphism‌هایی که تصویرشان یک چیز است به آن‌ها می‌گوییم نزدیک هستند. یا morphism‌هایی که تصویرشان یک چیز نیست ولی تصویرشان یک زیرساختاری را تولید می‌کند، همه morphism‌هایی که تصویرشان در آن زیرساختار است، می‌گوییم به هم نزدیک هستند، می‌شود یک همسایگی از این دو تا و نگاه‌هایی از این قبیل. می‌تواند یک مفهوم تعمیم‌یافته‌ای از هندسه باشد. این هم یک پنی و نصفی من، یک پنی و نصفی از دو پنی کمتر است، ولی شما دیدگاه‌ها را نسبت به این چیزی که گفتم بگویید، آن وقت آن نصف پنی را که من نگه داشتم را هم بهتان می‌دهم، آن وقت می‌شویم مساوی.

امیرحسین اکبرطباطبایی: هندسه گروتندیکی - عرضم به حضورتان که بله، دقیقا همین طور است که می فرمایید، من به منزله آدمی که گرایش های خیلی زیاد ساختارگرایانه دارم خیلی با شما، بنابراین در این موارد و این تعبیری که می کنید خیلی موافق هستم. بالاخص که حالا آن نکته اصلی در واقع حرف من را می کشید بیرون، به قشنگی می گوید که اصلا نقطه را می شود گرفت هر نگاشتی در هر رسته ای، هر morphism در هر رسته ای حالا که این طوری شد. و می شود به منزله نقطه مثلا هم دامنه مثلا به آن نگاه کرد، مثلا یک نگاشتی از a به b را می شود گفت $a - \text{point of } b$. و بعد یک گام هم جلوتر می روید و می گوید ببایم هندسه را اصلا تعریف کنیم همینی که تعریف کردید. عرض به حضورتان که خیلی هم عالی و کاملا هم هم راستاست با آنهایی که من هم بعضی وقتها به آن فکر می کنم و اینها. ولی باید بگویم که متاسفانه این نگرش را همین طوی full force و به همین شیوه آن مرحوم گروتندیک به ما، نه تنها فقط در حد ایده به ما یاد داده است، بلکه در حد نظریه هم انجام داده است. به این معنی که این چنین، بیشتر از این چنین، ولی بگذارید من بیان خودش را بگویم. بیان خودش این طور می شود که، شما از من بهتر بلدید ولی در این context این طوری کلی، جالب می شود گفتنش که، بله هر رسته ای را اصلا با همین تعبیری که شما می گوید، نقطه را که خب او می گیرد، اصلا همین نسبی نگاه کردن در نگاه گروتندیک، در حقیقت همین قدر کلی است که هر موردی، نه فقط درباره اسکیم ها مثلا، که آنجا full force این اتفاقات را آنجا می بینیم که همه چیز را نسبی انجام می دهد، ولی واقعیت هم این است که قائل است که اصلا کلا هر جایی، امور نسبی است و این را باید نقطه آن گرفت، حالا نقطه بعضی وقت رزرو است برای چیزهای ویژه تری، بعضی وقت برای چیزهای کلی، آن دیگر چیز است، مسئله است برای خودش. ولی خب این نگرش را طبیعتا دارد، بعد یک گام جلوتر که شما می روید این است که آقا اصلا ببایید هندسه را هم تعریف کنیم تمام بشود برود، چرا که نه؟ البته آنجا هم هنوز درون نگرانه به قول خودتان فکر می کنید، یعنی مثلا می گوید که ساختار را همه زیرساختارهایش را بگیریم و اینها، باز با morph فکر نمی کنید و آن وقت اگر گروتندیک بود ناراحت می شد، که نه دوباره برگشتید به بیان درون نگرانه، این جا باید بمانیم همین طوری در ساختار برون نگرانه. عرض به حضورتان که، حالا برون نگرانه اش این طور می شود که، همین تعبیر شما، که اگر من به شما یک رسته بدهم، هر چیز، حالا گاهی با یک ذره ساختمان بسته به کاربردتان، حالا ما اینها را همه را ignore می کنیم. یک رسته من به شما می دهم، هر چیز، بعد به شما عرض به حضورتان یک توپولوژی هم می دهم. یعنی آن چیزی که کم است، که این جا از آن هم حرف می زنید یک ذره جلوتر که اصلا من می توانم یک توپولوژی بدهم، چرا که نمی توانم؟ یک چند تا توپولوژی هم پیشنهاد می کنید که بد نیست. بعد گروتندیک می گوید که من یک رسته به شما می دهم، یک توپولوژی، حالا توپولوژی چیست؟ توپولوژی خودش است، آئی که ما امروز می گوئیم گروتندیک توپولوژی. یک توپولوژی به شما می دهم، یک notion به هم چسبانند می دهم، هندسه بدون، در نگاه گروتندیکی، بدون معنی به هم چسبانند هیچ محلی از اعراب ندارد. بنابراین base، حداقل notion که مدنظرش است به هم چسبانند است. یک جور به هم چسبانند، یک جور پوششی به شما می دهم، یعنی اصل notion که بالقوه آن جاست، که هندسه را هندسه می کند به تعبیر او، فکر نمی کنم البته هیچ وقت به صراحت این طوری بگوید، ولی خب شما می بینید دیگر، عرض به حضورتان که توپولوژی در واقع و هندسه و همه اینها، یک رسته است و یک پوشش؛ که ما به این می گوئیم توپولوژی گروتندیک. این هم یک نکته مهمی درش هست، نکته مهم این که، خب پوشش به همان معنی ای که توپولوژی گروتندیک تعریف می کند، و شما از من بهتر بلدید، و لازم هم نیست که بگویم، عرض کنم که نکته ای هم در این هست، نکته ام این است که نگاه را عوض می کند، این شکلی که، مهم باز نیست، خب ما یک وقتی، وقتی می خواهیم هندسی فکر کنیم، جوان ترند نسل بشر، نه خیلی هم، به معنی نزدیک به هم بودن فکر می کنند که بعد منجر می شود به متریک، بعد یک مقدار جلوتر نزدیک می شود که نزدیک بودن همچنان هم خیلی آنالیزش خوب در می آید، اما آنقدر notion مثلا روباتی نیست که شما بتوانید استفاده کنید همه جا سنبه ای و اینها، و بعد سر و کله بازها پیدا می شود که آرام آرام هم می آیند و می گیرند در واقع صحنه را از متریک، به طوری که دیگر کاملا، مثلا انگار یک نقطه اوجی آن جا هست که ما می فهمیم compact تعریف دقیقش همانی است که الآن می دانیم و متفاوت است با آن میلیون ها notion فشرده که بعضی هایش هم بر اساس باز نیست. یک جورهایی می برد بازی را، در توپولوژی البته. که انگار که نزدیک بودن آن قدر مهم نیست که باز بودن مهم است. حالا خود این یک بحث فلسفی جالبی حولش هست که حالا من کار ندارم، بعد گروتندیک انگار این نگاه را عوض می کند، خب باز بودن یک جور زیرمجموعه بودن یا بخشی از چیزی بودن هم هست، آن چنان برون نگرانه به تعبیر شما نیست. این مرد فقید، شیوه اش این است که نه، آئی که مهم است، آئی که هندسه، آئی که توپولوژی را توپولوژی می کند در واقع، نه بازها، که به هم چسبانند بازهاست، در واقع اجتماع بازها و حالا اشتراک بازهاست،

پوشاندن یک فضا است که مهم است. یعنی یک سری هستند نه همه، که آن یک سری با ویژگی‌های خوبی می‌پوشانند، حالا این تعبیری که شما هم داشتید که قشنگ بود، که مورف هر فضایی به b را می‌شود نه فقط به معنای $a - point$ ، مثلا $a -$ جزء b گرفت. بعد بعضی از این نگاشت‌ها را قائل است که یک b بگیرید، در بعضی از این نگاشت‌ها قائل است که، توپولوژی گروتندیک هستند، که من می‌توانم این‌ها را به معنی بازه‌ایم تعبیر کنم، ولی اگر بخواهم وسیع‌تر نگاه کنم، می‌توانم باز را فراموش کنم اصلا، می‌توانم بگویم که این نگاشت‌ها می‌پوشانند فضای من را. این نگاشت‌ها خوب‌های من هستند که فضا را می‌پوشانند. و خوب بودنشان هم یعنی آن‌هایی که من می‌توانم، حالا می‌شود این‌جا این را پرسید دیگر، مثلا اگر من این را به یکی می‌گفتم، طبیعتا می‌پرسید که دست هم درد نکند، خیلی هم قشنگ و بامزه بود و این‌ها، حالا آن نگاشت‌های خوب را هم باز می‌گذاریم دیگر، می‌توانیم چیزهای مختلفی انتخاب کنیم، ولی ویژگی‌های خوب بودن خانواده خوبی از نگاشت‌ها، که قرار است توپولوژی یا یک پوششی را تعریف کند، باید یک مبنایی داشته باشد دیگر، آن مبنا چیست؟ و جواب آن مبنا، مبنای شهودی فلسفی که در هر موردی می‌شود یک طوری دیدش، این است که، عرض به حضورتان که، این‌ها آن‌هایی هستند که اجازه می‌دهند هندسه من localize شود. یعنی کلا آن چیزی که ما بلدیم این است که، باز اجازه می‌دهد به من که localize کنم داده‌ام را، حالا همه‌اش را هم که نمی‌آید، بعد باید به هم بچسبانم و برگردانم، و دوباره همه‌اش برنمی‌گردد و، ولی این رفت و برگشت است که امر هندسی را هندسی می‌کند دیگر، نه؟ حالا به یک تعبیر خیلی گله‌گشادی. و بعد بنابراین این‌ها این خوب بودنشان را باید از آن‌جا بگیرند که این برویم و برگردیم و این‌ها خوب رفتار می‌کند، که بعد این منجر می‌شود به یک سری ویژگی‌های رسته که دقیقا همان‌هایی است که تعریف توپولوژی گروتندیک را می‌دهد. بنابراین آن مرد فقید همین‌طور نگاه می‌کند که، یک site به تعبیر خودش که می‌گیرد، یعنی یک رسته و توپولوژی گروتندیک رویش، بعد روی این توپوس هوا می‌کند، sheaf هایش را می‌گیرد و بعد نظریه توپوس را درست می‌کند، و قائل است که دو تا اگر کشف مهم کرده باشد، توپوس و اسکیم است، و توپوس هم مهم‌تر از اسکیم است به تعبیر خودش، امروز ما، برعکس فکر می‌کنند ریاضیدانان، می‌گویند که اسکیم مهم‌تر است. حالا، البته که این هم دعواست، ولی بالاخره ریاضیدان‌ها، ریاضیدان‌هایی که خیلی جدی ریاضیدان هستند، دعوا احتمالا می‌کنند که اهمیت این دو تا غیر قابل مقایسه است با هم. حالا، این هم در واقع یک قرانی تاریخی‌اش این وسط، ولی همه این‌هایی که می‌گویند در واقع مردی پیاده می‌کند، و کل نظریه توپوس هم در واقع، توپوس آن چیز است، آن شیء هندسی چاق و چله‌ای هست که ما می‌سازیم با این توپولوژی، بعد مطالعه می‌کنیم، بعد این قدر هم، ماشاالله خدا حفظش کند، کلی گرفته که بعد معلوم می‌شود که، که خوب هم هست، البته بدی‌اش هم این است که نظریه کم‌زور می‌شود، به نسبت مثلا نظریه اسکیم. خب خیلی کلی، دیگر دارم همه چیز را می‌گیرم نقطه، همه‌جور توپولوژی‌ای می‌گیرم، متفاوت است با این که اشیاء ساده‌ای می‌گیرم، و به هم می‌چسبانم، و می‌کنمش اسکیم. و آن اشیاء ساده هم از حلقه می‌آیند، و بنابراین من یک کنترلی دارم رویشان، و بدیهی است که بالاخره دست بسته است. ولی به هر حال، آن grand revolution که این‌جا هست، که از آن اوست، این است که این را هر چیز بگیرید، شما می‌توانید این را شیء هندسی فرض کنید با همین، اگر توپولوژی‌اش را داشته باشید، اگر notion درست پوشش را داشته باشید، و به اضافه آن حرفی که زدم که پوشش در واقع آنی است که هندسه را هندسه می‌کند، اگرچه خیلی کلی است، البته خیلی هم کم‌جان دیگر طبیعتا. همان قدری که توپولوژی در آن تعریف خیلی کلی‌اش، همان قدر جان دارد دیگر. می‌توانم به این تعبیر بگویم که آن‌جا به جا کردن گروتندیکی نگاه، این است که آنی که مهم است باز نیست، اجتماع و اشتراک است، یا حالا این طوری که بازها نسبت به آن بسته‌اند در توپولوژی، این تغییر نگاه مهمی است. و بعد آن وقت می‌بینیم که هر جانوری که واقعا این وسط پیدا می‌کنیم، از هندسه دیفرانسیل بگیرید تا چیز، این‌ها همه به یک توپوس، یک شیء هندسی عجیب و غریب منجر می‌شوند، که مطالعه‌اش کمابیش معادل مطالعه آن شیء هندسی معمولی ماست، و این the most generalized notion هندسه است، که البته حالا دقیق‌ترش این است که، این در واقع the most generalized notion فضای توپولوژیک است، نه؟ چون دارم توپولوژی را تعمیم می‌دهم. برای این که هندسه باشد، حالا هندسه و این‌ها را، هندسه و توپولوژی را در این سطحی که ما الان داریم قصه می‌گوییم و این‌ها، خب جا به جا به کار می‌برند مردم دیگر، نگاه هندسی و این‌ها یکی است. اما اگر بخواهم یک مقدار specific تر بگویم، انگار که هندسه اما، رزرو است، کمابیش به لحاظ تاریخی از مثلا ۱۹۷۰ این‌ها به بعد، از قبلش هم همین‌طور، از بعد از ظهور نظریه توپوس و این‌ها، به نظرم هندسه رزرو است برای موردی که شبیه به اسکیم، آن اشیاء کوچکی که شما با آن می‌چسبانید، یا آن بازه‌ایان مثلا به فرض یا آن پوشش‌ها، این‌ها هر چیزی نیستند که ویژگی توپولوژیک دارند، انگار هر توپولوژی‌ای نیستند، این‌ها سر و کله‌شان از جای آسان به یک معنی‌ای پیدا می‌شود. مثلا، این‌ها از یک جنس

دیگری اند، آن «همه» شما را ندارد، «همه» ندارند. حالا آن جا هم «همه» نیستند بازها، بازتر است دستتان، این جا دستتان بسته تر است. یک چیزهایی اند با یک ساختارهای خیلی خاص تری. خب طبیعتا بیشتر یاد می گیریم، حلقه اند، spec of ring هستند در واقع، عرض به حضورتان که، باز در R هستند که قرار است مثلا هندسه دیفرانسیل به ما بدهد، یا هندسه منیفلد به ما بدهد، بسته به آن که آن نگاشت ها را مشتق پذیر می گیریم یا نمی گیریم، ولی ایده همین است دیگر، من رسته ام را می گذارم جلوی من، و حالا گاهی آن خانواده ای که، آن $a - \text{point}$ هایی که در واقع خفت کردم، آن ها موجوداتی هستند، کل این رسته و موجوداتی که در آن هستند ساده اند به یک معنی ای، گاهی نه، لزوما سادگی ای هم ندارند. حالا سادگی هم خودش یعنی چه و این ها، که روشن نیست، ولی شهودا ما بلدیم دیگر که من، اگر می شود این طور فکر کرد، که در توپولوژی، اگر من محدود کنم، یک توپولوژی به شما می دهم، هیچ چیز نمی دانید، اگر خودتان را، فقط می دانید این توپولوژی روی یک فضای X است که X را هم نمی دانید، خیلی مجرد. Localize کردن به باز به شما چیزی یاد نمی دهد، می روید و می آید و این ها، ولی چیز بیشتری یاد نمی دهد. آن U باز همان قدر فضا است که کل فضا. و فرقی با شکل هندسی این است که وقتی من Localize می کنم به U ، U چون ساده تر است، چیز یاد می گیرم، می فهمم! این حلقه است، spec of ring است، پس فلان، این باز در R است مثلا، پس فلان، این طوری. و انگار که این دو تا است، آن توپولوژی notion یک حالت فراکتالی دارد، Localize کردنش هنوز خودش است، ولی هندسه می رود بیرون، انگار یک گام بالاتر است با چسباندن از چیزهای ساده به دست آمده است، آن اما یک موجود فراکتالی است، به لحاظ فلسفی باز هم. حالا اما، این کارها را بنده خدا همه را می کند، و نظریه اش را هم توسعه می دهد، و خیلی شیک و این ها، که حالا ما بلدیم البته، و شما هم باز دوباره خیلی بهتر از من بلدید، ولی یک کار قشنگی هم هست که به لحاظ تاریخی هم اهمیت دارد، این است که این ها را هم صرف تعمیم دادن و دیدن این ها نمی کند، که خیلی هم تمیز این کار را می کند، که اگر هم فقط این کار را می کرد، این کارها را می کند که حدس Weil ثابت شود. و نکته اصلی این است که، آن جا می دانیم ما که، رسته مربوطه، که آن جا حالا رسته اسکیم های روی یک پایه است، ولی حالا کاری نداریم، باز دوباره یک رسته داریم، حالا رسته اسکیم ها است، بعد این را این جا یک توپولوژی ای هست به معنی پوشش است، که همان etale topology است به معنی پوشش، که توپولوژی به معنی معمولی ای نمی بیند آن را، باز دوباره شما هزار بار بهتر از من بلدید، چون توپولوژی زاریسکی این قدر refined نیست که امور را ببیند به این دلیل، بعد این در واقع، خیلی جذاب و هیجان انگیز است، که یک توپولوژی یک جور پوششی، یک جور هندسه ای، یک جور چسباندنی، در شکل خیلی تعمیم یافته ای هست، که من نمی توانم کاهشش بدهم این پایین، بنابراین بهتر است که در شکل مجرد ببینم که هندسه چیست، همین طور که شما داشتید تعریف می کردید، و چسباندن چیست و غیره، که بعد برای من آشکار شود که، آن هندسه هم به معنی هندسی، که تا قبلش من آن را نمی توانستم ببینم، به خاطر این که زیادی خودم را مثلا محدود گرفتم، و البته که نظریه توپوس رفت و زندگی مستقل خودش را پیدا کرد، نسبت به این که مثلا فقط در حوزه هندسه جبری جا پیدا کند، آن چنان هم نه ولی، به هر حال یک هوا مغفول و این ها ماند تا الآن ها، و حالا به دلایلی که به نظرم خیلی هم غیرمنصفانه نیست، اما حالا محل بحث ما نیست. این همه حرف زدم من برای شما، همه اش را هم که بهتر از من بلدید، و همین طور تکراری گفتم فقط برای ثبت در تاریخ، و که در واقع آن نیم پنی را بیاورید و به ما بدهید، حالا فکر می کنم که من از دو پنی بیشتر حرف زدم، حالا content wise نه، ولی به اندازه طول فکر کنم راحت یک دلار حرف زدم، بله، ارادت.

آرش رستگار: هندسه فضاهای مدولی- بسیار یاد گرفتم از اینها که فرمودید، و چون این ها ثبت می شود باید حتما این را بگویم برای دانشجویها که بدانند که این که شما همه اش تکرار می کنید که، شما می گوید که همه این ها را شما بلدید بهتر، این یک کلمه کلیدی ای است، از این لحاظ که مردم خیلی چیزها را فکر می کنند بلدند، ولی درستش این است که بلد نیستند. یا این که حالا به یک معنی هایی بلدند، الآن موضوع آن چیزهایی که بلد هستند نیست، من دارم، یعنی شما دارید یک perspective جدیدی مطرح می کنید. نکات ریزی اینجا هست که حالا شاید هیچ کس توجه نکرده و من حالا آن چیزی که می گوید، بلد هم باشم، که نیستم، ولی از این نکاتی که شما می گوید خیلی چیزها یاد می گیرم. مثلا خب من نظریه توپوس هیچ وقت نخوانده ام، ولی خب با etale site و flat site، با جفتشان مجبور بودم بخاطر رشته ام خیلی کار کنم و چون یک دانه هم نیست، دو تاست، آدم به اضداد می فهمد که پشت صحنه چیست، که پشت صحنه همان نظریه توپوس است. ولی باز شما یک جورهایی گفتید توپوس رزرو می شود برای فضای توپولوژیک، و هندسه برای آن جایی که موجودات ساده ای را به هم می چسبانیم، این را هم می فهمم، و یک جورهایی هم این دو تا عالم با هم قاطی شده است دیگر. یعنی شما، چندین نگاه

شبهه نظریهٔ توپوس هست، حالا در هندسهٔ جبری ناجابجایی و فرمول‌بندی‌های مختلفش، مثلاً در kontsevich -Rosenberg، این‌ها می‌آیند با رستهٔ $\text{quasi-coherent sheaf}$ ‌های روی یک فضا کار می‌کنند، و می‌گویند که می‌شود هندسه انجام داد. یا، چیزهای زیادی هست، $\text{triangulated categories}$ ، dg-categories ، $\text{A-infinity categories}$ ، توئن و واکوئیه روی F_1 و هندسه جبری روی F_1 و برای همهٔ این‌ها که حرف‌های شما درست است نظریهٔ توپوس است، ولی همین توئن با یک همکاری که ایتالیایی است می‌آیند $\text{homotopical algebraic geometry}$ را روی یک توپوس انجام می‌دهند. انواع مختلف این‌ها هست، یعنی ما هندسه جبری روی توپوس داریم، نمی‌دانم، $\text{homotopical algebra}$ روی $\text{differentiable graded algebras}$ داریم و انواع دنیاهای مختلف و خیلی از این‌ها هم باز با این که توپوس است یا شبیه آن فرمول‌بندی توپوس است، باز هم آن نگاهی که شما موجودات ساده را به هم می‌چسبانید، مفهوم آفین در آن معنی دارد، چون رسته را هم می‌شود در آن localize کرد و الی آخر. و حالا با این، حالا آشنایی خیلی جزئی که من با این‌ها دارم، باز هم هنوز صحبت‌های شما یک عالم نکات ریز perspective دارد که من متوجهش می‌شوم، این‌ها می‌ماند، فقط هم من نیستم که گوش بدهم، آدم‌های متخصص هم هستند که گوش بدهند و این‌ها از بین نمی‌رود. perspective ‌هایی که شما دارید ثبت می‌شود و ان شاء الله توسعه پیدا می‌کند و ریاضیات را پیش می‌برد. این از تشکر من. دوم آن که آن نیم پنی. یک نگاهی هم من داشتم از بچگی که شبیه آن کلمهٔ «همه» است و به فرمول‌بندی رسته هم نزدیک نیست، هر چند که ممکن است بعضی وقت‌ها ما مجبور باشیم که، فرمول‌بندی اسکیم هم کافی نیست و باید از stack استفاده کنیم، نگاه فضای مدولی است. یعنی هندسه یک چیزی است که فضای مدولی یک چیزی باشد. حالا شما می‌گویید یک منیفلد هم فضای مدولی نقطه است، حالا من می‌گویم که یک ذره بیشتر از این، یعنی شیئی جهانی ما داشته باشیم، $\text{relative dualizing sheaf}$ بتوانیم تعریف کنیم. مثلاً شما فضای مدولی خم‌های بیضوی را که می‌گیرید، یک خم بیضوی جهانی رویش داری، خبر در همهٔ واریته‌های شیمورا شما شیء جهانی دارید. یا شاید روی همهٔ فضاهای مدولی بتوانید بگویید یک شیء جهانی دارید، همان fibration که شما می‌گفتید. این هم یک نگاهی است، که ما بگوییم هندسه نباید مجموعه‌ای از نقاط باشد، باید مجموعه‌ای از نقاطی باشد که یک چیز دیگر را نمایش می‌دهند، حتماً باید یک فضای مدولی باشد، و بعد این‌طوری غنی‌تر می‌شود. چون آن زیان فضای مدولی، ریاضیاتی که ما داریم روی فضای هندسی کار می‌کنیم را غنی می‌کند. الان هندسه به معنای کلی‌اش این‌طوری نیست که روی یک فضای مدولی تصور شود، چه هندسهٔ مختلط، چه هندسهٔ حقیقی. و برای همین من خواهش کردم که دکتر نریمان آن مجموعه مقالاتی که به نظرش می‌رسد و ما هم می‌توانیم به آن مجموعه contribution داشته باشیم، راجع به فضای مدولی خم‌های جبری، که فرمول‌بندی‌های مختلف دارد، و با نگاه‌های مختلف ریاضی به آن حمله می‌شود، یکی با یک نگاه سؤال می‌پرسد و مردم با یک نگاه دیگر جوابش را می‌دهند، و این‌ها این هندسه را غنی‌تر می‌کند. و این هم آن نیم پنی‌ای که من می‌خواستم بگویم. نکاتی که فرمودید شما هم بسیار روشن‌گر بود و هم یک مجموعهٔ بسیار منسجم و قشنگی را به دست داد.

امیرحسین اکبرطباطبایی: نگاهی دقیق‌تر- عرض به حضورتان که من یک نکته‌ای بگویم دربارهٔ این تاکید مداوم که «آقا شما این‌ها را بهتر از من بلدید»، این‌ها چیز نیست، دست کم در بیان من به منزله تعارف خالی خالی یا برای این که همین‌طوری یک چیزی گفته باشیم، از این کارهایی که انسان در تعارف‌های معمول و این‌ها می‌کند نیست واقعاً. یک بار اخلاقی‌ای دارد که چون حالا این‌ها مهم است، که می‌گویید در تاریخ ثبت کنیم و این‌ها، من این را هم بگویم. هم به منزلهٔ روشن‌گری و هم به منزلهٔ این که خبر چیز بدی هم نیست. چیز است، یکی از کارهای بدی که آدمی زاد در زندگی به نظر من می‌تواند بکند این است که یک چهارتا چیز کوچک یاد بگیرد، بعد بیفتد دوره که آقا این این‌طوری است، آن آن‌طوری است، این‌ها را من همه را بلدم، lecture بدهد دربارهٔ این‌ها. بدتر از این‌ها، برود میان آدم‌هایی که کار بلد قضیه هستند و بنشینند در محضر آنها از این افاضات بکند. هم‌زمان همان‌طور که احتمالاً شما هم موافق هستید، هم قائم که این هم نیست که ما، بالاخره رفتیم یک چیزی یاد گرفتیم، بچه‌ام اصلاً، من دانشجوی ترم یک هستم، چهارتا چیز کوچک رفتم یاد گرفتم، هیچ ایرادی ندارد، اظهار نظر کنم، برای خودم اتخاذ موضع کنم، احمقانه، ناپخته، جوانم مثلاً، و این‌ها، و این استقلال رای را اگر قرار باشد شما از بچگی نداشته باشید، بزرگ هم بشوید هیچ چیز نمی‌شوید. به هر حال عادت کنید که استقلال رای داشته باشید، حالا رای هم می‌تواند چرند باشد. چیزی که مهم است این رعایت اخلاق است در استقلال رای. که شما مداوماً حواستان باید باشد که دارید چه چیزی را به چه کسی می‌گویید. و یکهو جوّ شما را نگیرد که خیلی چیز شدین. به اضافهٔ این که در ادب گفتار هم

درست‌تر می‌یابیم که آدمی زاد سطح خودش را هی معین کند که، آقا من این‌جا هستم، در این مورد، و زیبا نمی‌یابم که مثلاً من که دارم درباره‌ی چه می‌دانم site etale حرف می‌زنم، نه مثلاً درباره‌ی نظریه‌ی اثبات حساب، که تخصصم هست، ولی وقتی دارم درباره‌ی site etale حرف می‌زنم، در محضر شما حرف می‌زنم که کار شما این است، درسش را خواندید، یک عمر کارش را کردید، اصلاً خیلی خیلی seriously زمینه‌ی کاری شماست، دقیقاً به خاطر این که نظریه‌ی اعداد مربوطه هم هست و این‌ها، دیگر یک حالت زشتی دارد، یک قباحتی دارد در مذاق من، که بیایم اینجا بایستم، دستم را بگذارم روی کمرم و شروع کنم درباره‌ی site و این‌ها حرف زدن. این تأکید درباره‌ی کمتر کردن آن خجالت است، و اخلاقاً درست کردنش است که نه، من می‌دانم که شما این‌ها را بهتر از من بلدید حقیقتاً، ولی بالاخره حالا من هم یک دو تا نکته‌ی بامزه به ذهنم رسید حالا، این هم بدم نمی‌آید که بگویم، یا برای مخاطب بگویم یا اصلاً برای شما بگویم، همین‌طوری یک بار برای این که خوشمزه است، یک بار دیگر هم این‌طوری گفته باشمش، این نیست که شما نمی‌دانید، یا دارم هم چیز مهمی می‌گویم و این‌ها، ولی ادب حکم می‌کند که وقتی شما دارید درباره‌ی این حرف می‌زنید، این را appreciate کنید وقتی که دارید می‌گویید، که نه من متوجهم که شما این‌ها را از من بهتر بلدید ها! این‌ها تخصص شماست و این‌ها، ولی حالا من هم این یک دو پی‌ام را بگویم. این به نظرم فقط تعارف نیست، جزو سلامت، عرض به حضورتان، آکادمیک است که انسان در برابر دیگری که تخصصش است، کاری را که بهتر بلد است و این‌ها، حالا واقعا هم بهتر بلد است، گاهی واقعا بهتر بلد نیست و فقط مدرکش را دارد، که خب آن به نظر من حالا آن قدر هم مهم نیست به هر حال، ولی وقتی یک نفر تخصصش خیلی جدی، این ادب و احترام اصلاً به نظرم مهم و واجب است، برای سلامت خودش واجب است که مداوماً حواسش باشد که افاضاتی که می‌کند، هیچ اشکالی ندارد اصلاً، ممکن است مهم‌ترین حرف‌های قرن را هم بزند که نمی‌زنم من، ولی آن ادب را هم حواسش باید باشد. نه فقط صرف ادب، برای این که ادب چیز است، کارگاه تربیتی درست و غلط است، و شما ممکن است که، اول از ادب خارج می‌شوید، و کم‌کم از صدق حرف‌هایتان هم خارج می‌شوید، برای اینکه نظام تصحیح خودتان را دارید از کار می‌اندازید این‌طوری. این را هم گفتم بگویم درباره‌ی این نکته‌ای که گفتید، و اما برسیم سر درس‌مان که می‌گویید که این‌هایی که من گفتم که حالا قشنگ است و این‌ها فقط یک نکته‌ای را اضافه می‌کنید که حالا این هندسه هم آن‌چنان تکلیفش با توپولوژی به این معنی‌ای که حالا توپوس هم حالا هم‌زمان عین آن است، آن‌چنان هم معلوم نمی‌کند و این‌ها، که حق با شماست. ولی من هم هنوز مخالفت‌م را می‌خواهم نگه دارم. به نظرم مرکز‌کشی‌شان یک مقدار بهتر از اینی هست که می‌گویید. حالا آن فضای مدولی این‌ها هم قشنگ است، ولی بگذارید قبل از آن برسم به این که می‌گویید که چیز است، خب اصلاً من اگر بخواهم حرف شما را فرمال بگویم هم این‌طور می‌شود که اصلاً ما الآن بلدیم امروز، همین etale نمونه‌اش، که هر فضایی، هر فضایی که هر کسی به آن می‌گوید هندسی، منیفلد و غیره، شما می‌توانید اسکیم، هرچی، توپوس متناظر نسبت بدهید. عکسش، یک چیز است، حالا برعکسش آن‌چنان درست نیست، ولی به هر حال یک جور زیادی هم می‌شود ساختشان از هم و بعد اسکیم را هم گسترش دادند notion را بعداً و خیلی آن‌چنان خط‌کشی درستی هم نیست آن که locally simple و این‌ها، آن هم آن‌چنان حرف درستی هم نیست، که من با شما موافقم، ولی چرا می‌گویم که باز یک مقداری مخالف هستم؟ به خاطر این که این مثال‌هایی که می‌زنید، که همه‌شان هم مثال‌های عالی‌ای هستند، هر کدام‌شان را که نگاه کنیم می‌افتد در یکی از این دو دسته واقعا. دسته‌ای که ما داریم توپوس را گسترش می‌دهیم، حالا با اضافه کردن، با رفتن به توپوس بالاتر به فرض، با اضافه کردن ساختار هموتوپی، حالا مثلاً می‌تواند این هموتوپی توپوس باشد، به آن سبکی که مثلاً توئن این‌ها توسعه دادند. می‌تواند مثلاً higher topos theory به سبک higher category theory باشد که لوری توسعه داده است، می‌تواند عرضم به حضورتان که این dg-categories و نمی‌دانم از این جنس مثلاً مختصات‌دار طوری‌ها باشد که این‌ها همه در یک فضا قرار می‌گیرد که ما داریم نظریه‌ی توپوس را گسترش می‌دهیم. یک طرف دیگری هم هست که یک جورهایی می‌شود ادعا کرد که داریم اسکیم را گسترش می‌دهیم. منتها این قدر نمی‌پریم که بیایم آن قدر بالا، منتها هنوز یک locally simple بودن هست، مثلاً مثال می‌زنید از آن مقاله‌ی روزنبرگ که چیز را درست می‌کنند، دارند تعمیم می‌دهند برای ناجابجایی، و عرض به حضورتان که بعد quasi-coherent sheaf مهم است و این‌ها، باز آن quasi-coherent sheaf دارد آن locally بودن را capture می‌کند. یا مثلاً این فضای ناجابجایی کلاً که داریم، یک همچنین کاری می‌کند، در خود آن نسخه‌ی توئن که قبل گفتم یا در آن نسخه‌ی لوری که دوباره قبل گفتم، که آنجا توپوسش است، اینجا نسخه‌ی اسکیمش هست که کوچک‌تر است. حالا بیان‌ها متفاوت است، ولی باز اینجا هم هست. این‌جا مثلاً سر و کله‌ی یک مونوئیدی پیدا می‌شود در نسخه‌ی مثلاً توئن، که ما آن را گرفتیم، یا یک higher algebraی سر و کله‌اش پیدا می‌شود که ما رسته‌ی آن‌ها را گرفتیم، و بعد روی آن اسکیم بالاتر مثلاً می‌خواهیم

سوار کنیم که stack و این‌ها همه آنجا باشند، دوباره آن locally simple مثلا چه می‌دانم یک higher A_1 algebra است به فرض، یا higher algebra است، یا derived algebra است، یا حالا بعد dually derived scheme است، یا dually affine scheme است و غیره، آن نسخهٔ توئن را می‌گوییم یک مونوئیدی هست که internal است، به یک رشته‌ای که این قرار است نقش حلقه را بازی کند، یک ساده در برابر پیچیده هم، چسباندن هم هست همیشه، این‌ها هم هست. هنوز سفت من فکر می‌کنم که یک فرقی بین این دو تا نگارش هست. یکی یک مقدار، واقعا بیشتر از یک مقدار، تعمیم یافته‌تر است و روح توپولوژی دارد تا روح هندسه. این را از مورفیس‌هایشان بهتر می‌شود فهمید، که مورفیس‌هایشان را شما اینجا که می‌گیرید، مثلا مال ring space theory هستند، یا locally ring space و این‌ها، حالا نسخه‌های کلی‌اش که یک ساختمان‌های بیشتری را حفظ می‌کنند، آن طرف ولی شما اساسا دارید اجتماع دلخواه و اشتراک را حفظ می‌کنید. حالا مورفیس‌های هندسی در نظریهٔ توپوس که نسخهٔ چه می‌دانم مثلا stuffed و تپل‌تر پیوسته است، یک حال این‌طوری، من حسم همیشه این است، حالا که البته که می‌تواند حرف بی‌ربطی هم باشد، ولی کاملا هم موافق هستم با شما که این وسط این وسط‌ها خیلی blurry شده. ولی اوج این blurry به نظرم، حالا درست نیست این حرف که بگویم مرز بین هندسه و توپولوژی از بین رفته است، که همین دعوایی که ما الآن داریم می‌کنیم، ولی به یک تعبیری می‌شود هندسه را معادل جبر دید، و واقعا مرز جبر و توپولوژی به طرز جالبی از بین رفته است با این ماشین جدید توپوس نامتناهی. توضیح این‌که در دنیای معمولی که ما بلدیم، در دنیای رشته‌ای معمولی که مثلا دنیای گروتندیکی است، ما اینجا توپوس داریم، که مثلا فضای توپولوژیک تعمیم یافته است، بعد مثلا رشته‌های آبلی هم داریم، رشته‌های آبلی، چه می‌دانم، رشته‌های آبلی تعمیم یافته است به فرض، دنیای خطی تعمیم یافته است، آن دنیای غیرخطی است مثلا و این دنیای خطی. حالا بعد این‌که مثلا به هر اسکیم و این‌هایی هم که داریم رشته‌های آبلی نمی‌دانم derived category نسبت می‌دهیم و این‌ها کار ندارم، مثلا می‌شود تصور کرد که، می‌خواهم فاصله بگذارم که، نمی‌خواهم بگویم که هندسه شده همان، ولی می‌خواهم بگویم که به هندسه ما بلد بودیم که اشیاء خطی‌ای نسبت بدهیم، حالا آن quasi-coherent sheaf و این‌ها هم نمونه‌اش، اشیاء خطی بلدیم نسبت بدهیم یک‌جورهایی، و بعد این اشیاء خطی همیشه خودشان را سوا نگه می‌داشتند در تاریخ مثلا پنجاه سال اخیر، از مثلا اشیاء غیرخطی توپوس. مثلا توپوس را، دقیقش این است، توپوس را، رشتهٔ آبلی این‌ها خیلی، عین هم هستند دیگر. این‌جا دوباره از آنجایی است که باید تاکید کنم که این را شما بهتر از من بلدید که این‌ها عین هم هستند، فقط انگار که یک هوا برداشته‌ایم این را تغییر داده‌ایم، یک چیزهایی اینجا می‌شود آنجا نمی‌شود و این‌ها. آدمی‌زاد این دو تا نظریه را که می‌خواند همه‌اش این‌طوری است که به قرآن این‌ها دو تا حالت خاص یک نظریه‌اند، ولی آن را باید نوشت. حتی این حسم این است که یک بعد از ظهر به من بدهید من می‌نشینم این را می‌نویسم، این قدر نزدیک هستند این دو تا به هم. بعد تلاش‌های خیلی زیاد، به تعداد، شده است و یکی از معقول‌ترین unification‌های این دو تا را فرید ارائه داده است اگر اشتباه نکرده باشم، یادم باشد درست، و بعد ما می‌بینیم که هیچ مثالی وجود ندارد که هر دو باشد همزمان در آن تعمیم، جز فکر کنم رشتهٔ تهی اگر اشتباه نگویم، یک رشتهٔ بدیهی است به هر حال این وسط. که یعنی خیلی بد، احمقانه است چنین چیزی دیگر، که این‌ها عین هم هستند، چطور یک مشترک، یعنی به هیچ وجه اصولشان در حین این‌که عین هم هستند، جلوی هم را می‌گیرند، هیچ‌کس نیست که همزمان هم این‌ها درست باشند هم آن‌ها. که خیلی حس عجیبی است دیگر، دوتا چیز که دو روی یک سکه‌اند، ولی واقعا هم دو رو هستند، با هم هیچ‌طور دوست نمی‌شوند، که آدم را واقعا ناراحت می‌کنند. اتفاقی که جدید و جالب است که افتاده این است که در حضور ساختمان بی‌نهایت، انگار که شما همه چیز را up to homotopy می‌کنید، نرم می‌کنید، هر دو تا اصول موضوعه سازی توپوس و آن یکی دوستش آبلی‌ها، چیزی که نتیجه‌اش است این‌که اسم‌های این دو تا می‌شود infinity topos و آن یکی می‌شود infinity stable category یا topos. بعد حالا جالب است که آن وقت این دو تا اشتراکات زیادی دارند. یعنی شما با یک توپوس اگر شروع کنید، خطی‌اش کنید، کاری که قبلا می‌کردید، مثلا توپوس را می‌گرفتید، توپوس مثلا همهٔ اسکیم‌های فلان‌دار و خطی می‌کردید، سر از رشته‌های آبلی در می‌آوردید و بدبخت می‌شدید. دیگر توپوس نیست، ساختمان‌های توپوسی‌تان از بین می‌رفت. الآن این‌طوری است که با یک infinity topos شروع می‌کنید، آن را stable می‌کنید که خطی شود، وقتی خطی شد هنوز infinity topos است و این فوق العاده است. و این دقیقا آن حس یکی بودن این‌ها را capture می‌کند، مثال خوبی هم هست، برای این‌که همیشه می‌گویید شما که مماثلات و این‌ها، که این دو تا عین هم هستند، ولی هیچ مثال مشترکی ندارند به راحتی هم نمی‌شود unify‌شان کرد به نحو غیر بدیهی‌ای، برای این‌که این‌ها را واقعا unify کنین باید خیلی بروید بالا، همه چیز را up to homotopy بنویسید و آن‌جا به

طور طبیعی ای این‌ها unify می‌شوند یک‌ه‌و. آنی که باید اتفاق می‌افتد، این از بین رفتن مرز این دو، حالا درست هم نیست واقعا گفتن این که از بین می‌رود مرزهایشان، بالاخره یکی stable است و یکی نیست، ولی این stabilize کردن ما را از دنیای توپوسی بیرون نمی‌اندازد. این خودش باز یک موفقیتی است، باز به هم نزدیک‌تر می‌شوند، باز هم بهتر می‌شوند. یکی یک حالت خاص آن یکی است، ولی یک حالت خاص بی‌ربطی نیست. به این معنی شاید که می‌شود از هندسهٔ مثلا خیلی نزدیک‌تر شده که از این حالت چه می‌دانم جزئا ساده و این‌ها یک هوا انسان دست بکشد مثلا. این جزئا ساده را می‌شود جابه‌جا کرد با یک چیز خطی‌شو، چیزی که می‌شود مثلا با یک stable به آن نسبت داد و بعد، عرض به حضورتان که، آن خطی‌شو شما را نمی‌اندازد بیرون. بنابراین انگار که داریم می‌گوییم که با یک سری توپوسی، یک توپوسی بسازید که آن توپوس کوچک‌تر که توپوس‌های محلی‌اند، توپوس‌های بدی نباشند. ولی خب این intuition‌هایی که شما می‌گویید را من کاملا متوجه هستم که همه بگیریم و بعد برداریم و هر چیزی را می‌شود محلی کرد اگر ساختار به اندازهٔ کافی باشد، و هر چیزی را می‌شود محلی تصور کرد که حرف درستی است، نکته این است که اگر همهٔ این کارها را بکنید، دقیقا نظریهٔ توپوس می‌گیرید با همان گرایش چیز، اصلا همین که از site می‌رسیم به توپوس یعنی همین دیگر. که با همان attitude معمول ساده به پیچیده، با همین تعبیر «همه» را واقعا در نظر گرفتن، می‌رسید به این که توپوس را به عنوان هندسه ببینید، که این‌جا را کاملا با شما موافقم، اما بعد وقتی که دارید هندسه‌تان را درست می‌کنید، می‌بینید که یک چیزی کم است، آن ساده‌ها تان خیلی زیادی دلخواهی هستند، برای همین هندسه‌تان خیلی تپلی نمی‌شود، خوب نمی‌شود. حالا آن چه هندسه را خوب می‌کند، آن ساده بودن چیست؟ مثلا می‌شود یک نفر بگوید که یک خطی‌سازی خوبی آن‌جا هست مثلا، یا یکی حالا، این، چه می‌دانم، گروتندیک که دیگر خیلی گام را عجیب فراتر گذاشته، آن را گذاشته حلقه، که دیگر حلقه را بگذارم. توئن ما را یک مقدار جلوتر می‌برد. می‌گوید نه، internal یک مونوئیدی باشد که دیگر compose بتوانم بکنم یک چیزی را با یک چیز دیگر، توابعی آنجاست که می‌توانم ترکیب بکنم با هم. دیگر این را هم نمی‌خواهی بگذاری مثلا؟ به طور محلی روی یک چیزی؟ و بعد حالا آن طرف می‌گوید که اصلا این تابع‌ها و این‌ها مهم نیستند، خود quasi-coherent sheaf مهم است. یکی می‌تواند این را بردارد بگوید نه اصلا آن خطی‌سازی است که این‌جا مهم است. این را من بلد نیستم که واقعا چیست که مهم است و هندسه را هندسه می‌کند. هندسه به معنی این که چاق می‌شود، چیز می‌شود در آن ثابت کرد. خالی خالی توپولوژی نمی‌ماند، این‌ها را من هنوز عقم قد نداده است که بفهمم، به نظرم بشر هم هنوز جواب درست و درمانی برایش ندارد. این هم از این بحث. عرض به حضورتان که و در نهایت این‌جا دیگر زیاد حرفی ندارم، این ایدهٔ شما را دوست داشتم، خیلی، که تعبیرتان این است که بگذارید حالا جواب، الآن یک طوری دارم وانمود می‌کنم که انگار دارید جواب جمله قبل من را می‌دهید که من نفهمیدم آخر که چه هندسه را هندسه می‌کند، شما می‌گویید که من فهمیدم. هندسه را این هندسه می‌کند که، یک چیزی وقتی شیء هندسی است که در واقع فضای مدولی یک شیء دیگری است. که تعبیر خوشمزه‌ای است. من این طوری هیچوقت به قضیه نگاه، انگار که از آن طرفی، مثلا من دارم با اجزاء و موضعی و از داخل نگاه می‌کنم، با نگاشت‌هایی که می‌روند داخل نگاه می‌کنم، شما با نگاشت‌هایی که می‌آیند بیرون از یک چیز دیگر دارید نگاه می‌کنید مثلا. یک چیز متفاوت ولی به نظر خوشمزه‌ای است، و احتمالا مثلا در شکل اعلایش یک دوگانی ای اینجا هست، که مثلا دو جور می‌شود به هر چیزی نگاه کرد و اگر به اندازهٔ کافی مثلا شیء هندسی‌تان تپل باشد، خوب باشد، می‌شود دو جور به آن نگاه کرد، و بازی با این دو جور هم خیلی فایده دارد. این را حالا بیا بید برایمان به نظرم مثال بیشتر بزنید و توضیح بدهید و این‌ها که خیلی خوب می‌شود. خود من هم دوست دارم که یک مقدار فکر کنم یک مقدار به این که به شکل فلسفی ای این چه عواقبی دارد، مثلا آن شیئی که این فضای مدولی آن است هم برایش ویژگی‌ای قائل می‌شوید یا می‌گویید که نه صرف همین که این فضای مدولی آن باشد خودش یک عالم ساختار به من می‌دهد. متوجه هستم، توضیح هم دادید که مبنای، خوب هم می‌گویید به دکتر نریمان عزیز که بیا این‌ها را به ما بگوید که اصلا دیگر خیلی بهتر است، عالی می‌شود. که فرمالیسمی هم روی زمین است، که مثال‌هایش را هم می‌زنید که خوب است، ولی این نگاه خیلی نگاه fibrational است در برابر مثلا نگاه variational نسبیتی که من دارم از آن حرف می‌زنم. انگار جابه‌جا کرده‌اید مثلا نگاهتان را که fibration اصل است. که اساسا فرقی نمی‌کند این حرف ما با آن Grothendieck construction این‌ها که بلدیم فرمال در یک سطحی، ولی یک نگاه به لحاظ فلسفی مستقل شیطنت‌باری است در ذهن من. دوست دارم، فضولی‌ام می‌شود که ببینم چیزهای مختلف را این طوری بخوانم و فقط این طوری بخوانم. چه شکلی، چه از آب در می‌آید و انگار که مبنای شما این است که پارامتری کردن خیلی مهم است. همهٔ امکانات یک چیزی را در نظر گرفتن، این خیلی مهم است. حالا در آن فضا و در بستری و با چیزی که مجاز است و این‌ها، و این خیلی حرف حسابی و چیز است،

انسان کنجکاو می‌شود که ببیند که این چقدر به ما امکانات می‌دهد. مثلاً اولین چیزی که داریم به آن نگاه می‌کنم این است که آن وقت در نگاه شما توپولوژی طبیعی چیست مثلاً. آنجا توپولوژی گروتندیک و این‌ها داریم که ایده طبیعی این است که یک چیزهایی یک چیزهایی را پوشش می‌دهند، همان‌طور که حرف زدیم. این‌جا انگار که یک ایده دیگری باید باشد دیگر نه؟ مثلاً نسخه دوگان همان توپولوژی است که آن چسب بین این‌ها، آن نرم حرکت کردن بین این‌ها مثلاً چیست؟ احتمالاً مربوط است به این که lift چگونه می‌خواهیم بکنید مورف‌هایتان را دیگر، نه؟ اگر مثلاً من یک چیزی را تکان می‌دهم، شما می‌خواهید ببینید fiberتان چگونه تکان می‌خورد دیگر، نه؟ یک همچنین حالی باید باشد. یعنی fibrationتان، fibration باشد یک حال این‌طوری‌ای دیگر، نه؟ این‌ها را بیایید اگر ایده‌هایی دارید بگویید، من هم دوست دارم فکر کنم همین‌طوری محض تفریح ببینم این نگاه، با این فرمان، خالی خالی، چگونه می‌شود بین این‌ها مثلاً افتراق ایجاد کرد. واضح است که همین already هم اگر این‌ها یکی باشند، واضح است که یکی یک وقت یک چیزی به ما یاد می‌دهد، یکی یک چیز دیگری یک وقت دیگری. ولی یکی مناسب‌تر است به این معنی که کلی‌تر از برای notion هندسه تا آن دیگری مثلاً. حتی می‌تواند باز هم یکی باشد، ولی طبیعی‌تر هندسه در شکل اعلا خود این‌جا دیده شود. آن هم یک حرفی است، کلاً نگاه خیلی دلپذیری است، این‌جا از آن جاهاست که من هم بلدم اینوری آنوری نگاه کنم، من هم fibrational معادل است با فلان این‌ها را این‌طوری بلدم فکر کنم، ولی انگار که یکی وزن فلسفی بیشتری در ذهن من دارد، نسبی و به قول شما خیامی، آن یکی هم وزن جدی‌ای دارد ولی چیز است، primitive فکر کردن من، در یک contextهایی هم هست انصافاً، ولی بگذارید این‌طوری بگویم، به هندسه وقتی می‌خواهم فکر کنم، در شکل تعمیم‌یافته آن این‌طوری فکر نمی‌کنم هیچ‌وقت، که خب این اصلاً خودش این یک درس خوبی است، حالا انسان باید بنشیند فکر کند که از این‌جا ما یک هندسه، «هندسه» واقعاً در شکل کلی‌اش، همان‌طوری که آن جناب آن‌جا درست کرده می‌گیریم. حالا مستقل از این‌که آن‌ها را بازنویسی کنیم، با Grothendieck construction بشود fibration چیزی روی توپوس چیزی، همین‌طوری ذاتی این‌جا دیده می‌شود چیزی یا خیر. به هر حال خیلی هم عالی.