

چه مسائلی در ریاضیات امروز بنیادی هستند؟

آرش رستگار

خلاصه: دیدگاه های مختلف به یک فلسفه عملی برای انجام دادن ریاضیات هر کدام پاسخ متفاوتی درباره اینکه چه مسائلی بنیادی هستند، پیش پا می گذارند. در اینجا برای چند فلسفه معروف پاسخ به این سوال را بررسی می کنیم.

مقدمه:

یک ریاضیدان مراحل پختگی را که طی می کند، فعالیت ریاضی او به فلسفه های عملی مختلفی گرایش پیدا می کند. در سطح دبیرستان، فعالیت ریاضی چیزی جز محاسبات نیست. در سطح کارشناسی، فعالیت ریاضی چیزی جز ساختن اشیا و کشف مفاهیم ریاضی نیست. در سطح کارشناسی ارشد، فعالیت ریاضی به اثبات قضایا تاکید دارد. در سطح دانشجویان دکترا، ریاضیات یک فعالیت حل مسئله است. پس از دوره دکتری، معمولاً ریاضیدانان پس از سال ها تلاش فلسفی به سطحی می رسند که فعالیت ریاضی ایشان تئوری پردازی برای بازکردن راه کسانی است که به مسائل مهم فکر می کنند. عده کمی از ریاضیدانان به این پختگی می رسند که ریاضیات را وسیله شناخت ساختار شناختی انسان قرار می دهند و این که چه مسائلی اهمیت دارند را کاملاً از دیدگاه دیگری مشاهده می کنند. نادر ریاضیدانانی، فعالیت ریاضیات را یک فعالیت حقیقت شناسانه می بینند. در این دیدگاه، انجام ریاضیات چیزی شبیه یک فعالیت عرفانی در جستجوی حقیقت است که نگاه این افراد به کلی نسبت به مسائل مبنایی متفاوت است.

الف) ریاضیات علم محاسبه است.

برای پاره ای از ریاضیدانان، انجام دادن ریاضی به معنی انجام دادن محاسبات بر اساس اشیا ریاضی و مفاهیمی است که در طی تاریخ ریاضی ساخته شده اند. آنها به دنبال کشف مفاهیم جدید یا ساختن ساختارهای جدید نیستند. تحقیق برای این ریاضیدانان، به معنی مربوط کردن مفاهیم موجود و اشیا موجود از طریق محاسبات جدید است، به طوری که بعضی بر اساس بعضی دیگر محاسبه شوند. وقتی چنین ریاضیدانی یک کار تحقیقاتی را ارزشیابی می کند، از خود سؤالاتی از نظیر این ها می پرسد که چه تکنیک های محساباتی در این مقاله به کار رفته اند که قبلاً پیدا نشده بودند؟ چه ناوردهای جدیدی محاسبه شده است؟ از دید چنین ریاضیدانانی، ریاضیاتی بنیادی است که محساباتی باشد و مفاهیم آن چندین بار در محاسبات تکرار شوند این تجربه ریاضی، بسیار شبیه ریاضی انجام دادن در سطح دبیرستان است. در سطح دبیرستان، معلم مفاهیم و اشیا ریاضی را به دانش آموزان معرفی می کند و از آنان می خواهد آنها را به هم مرتبط سازند و بدین وسیله محساباتی انجام دهند و مسائلی محساباتی را حل کنند. شاخه هایی که محاسبه محض هستند، زمین بازی ایده آل چنین ریاضیدانانی هستند. البته ممکن است در این شاخه ها ریاضیدانانی تحقیق کنند که از دسته اول عمیق تر باشند. اما این شاخه ها زمین بازی ایده آل برای ریاضیدانان عمیق تر نیست. بلکه ایشان به شاخه های دیگر گرایش پیدا می کنند.

اگر تاریخ ریاضیات را به زبان ریاضیات محاسباتی نگاه کنیم، اولین سیستم محاسباتی، الگوریتم های محاسبات عددی بودند که قدمت آنها به عهد باستان می‌رسد، ولی شکوفایی آنها در ریاضیات علمی اسلامی بود. الگوریتم های محاسبه در سراسر سرزمین های اسلامی گسترده شدند و سپس از الجزایر به ایتالیا و بعد فرانسه انتقال یافت و مقدمات جبر مدرن را فراهم آوردند. سیستم محاسباتی بعدی که اهمیت داشت، مثلثات مسطحه و مثلثات کروی بود که در اندازه گیری زمین و در نجوم کاربرد داشتند. سومین سیستم محاسبه که می‌خواهم نام ببرم، روابط طولی در هندسه بود که ابزاری برای اثبات قضیه ها محسوب می‌شد. چهارمین سیستم محاسبه که به نظرم می‌رسد، مختصات دکارتی بود که منجر به هندسه جبری شد. پنجمین سیستم محاسبه، حساب دیفرانسیل و انتگرال بود که به سری ها و مفهوم بی‌نهایت می‌پرداخت. سیستم محاسبه دیگر، آنالیز عددی به خصوص حل عددی و یا حتی حل به معنای عام دیفرانسیل بود. سیستم محاسبه دیگر، حل معادلات چندجمله ای بود که به نوعی تعمیمی از حل معادلات دیوفانتی محسوب می‌شد. سیستم محاسبه دیگر، هندسه دیفرانسیل بود که به نوعی ادامه آنالیز و حسابان محسوب می‌شد. مثلثات هذلولوی نیز در همان قرن یعنی قرن نوزدهم ظهور کرد.

(ب) ریاضیات علم ساختن اشیا و کشف مفاهیم است.

برای گروهی از ریاضیدانان، انجام دادن ریاضی در مورد کار با اشیا و مفاهیم مهم است. اینکه سعی کنند آن‌ها را بفهمند و به هم مرتبط کنند و یا حتی کشف و یا خلق کنند. آن‌ها وقتی احساس لزوم می‌کنند، اشیا ریاضی را خلق می‌کنند و هرگاه انگیزه پیدا می‌کنند، مفاهیم جدیدی تعریف می‌کنند. نوع ریاضیاتی که انجام می‌دهند، حول اشیا و مفاهیمی است که به آن علاقه دارند. اینطور نیست که هرگز محاسبه انجام ندهند. بلکه ارزش محاسباتشان را با نتیجه ای که در فهم مفاهیم و اشیا ریاضی به دست می‌دهند، ارزشیابی می‌کنند. در فرایند تحقیق، این ریاضیدانان، مفهوم خلق می‌کنند و اشیا جدید ریاضی می‌سازند. وقتی مقاله ای تحقیقی را ارزیابی می‌کنند، سعی می‌کنند دستاوردهای آن مقاله را به زبان اشیا و مفاهیم ریاضی ترجمه کنند. تاریخ ریاضیات برای ایشان تاریخ دگرذیسی مفاهیم است و تاریخ تغییر فرمول بندی های اشیا ریاضی است. این ریاضیدانان سعی می‌کنند آینده ریاضی را به زبان اشیا و مفاهیمی ببینند که در آینده مورد تاکید ریاضیدانان خواهد بود. زمین بازی اسن ریاضیدانان، شاخه هایی از ریاضیات است که بسیار قدیمی هستند و مفاهیم و اشیا ریاضی در آنان چندین بار مورد تحول قرار گرفته است. البته ممکن است در این شاخه ها ریاضیدانانی تحقیق کنند که از این دسته عمیق تر باشند. اما این شاخه ها زمین بازی ایده آل برای ریاضیدانان عمیق تر نیست. بلکه ایشان به شاخه های دیگری گرایش پیدا می‌کنند.

اگر تاریخ ریاضیات را به زبان مفهومی مطالعه کنیم، می‌توان مفاهیمی از ریاضیات را لیست کرد که گویی تاریخ ریاضیات حول این مفاهیم شکل گرفته اند. مفاهیم ایده آل سازی شده ریاضی را اولین بار تالس معرفی کرد و با این کار استاندارد برای همیشه ریاضیات پیش پا گذاشت. فیثاغورس از تالس الهام گرفت و مفهوم اثبات در ریاضیات را دقیق تر کرد و برای اثبات ریاضی استاندارد گذاشت. افلاطون اولین کسی بود که اشیائی ریاضی را ساخت که از طبیعت الهام نگرفته بود. بعد از او شاگردش ارسطو واضع نظام اصول موضوعه ای برای ریاضیات بود که در دستان اقلیدس به استاندارد همیشگی برای اثبات بدل شد. ارشمیدس سری های نامتناهی را محاسبه کرد و مقدمات حسابان را فراهم کرد. مفاهیم مربوط به جبر، مثل چندجمله ای و متغیر و مفهوم تابع در دستان دکارت به کمال رسید. محاسبات جبری قبل از دکارت با جبر بعد از دکارت قابل مقایسه نبود. مفهوم اعداد منفی را نیز دکارت معرفی کرد. نیوتن و لایبنیتز، مفاهیم

حسابان را نیز پایه ریزی کردند و هر دو از ایزاک بارو استاد نیوتن الهام گرفتند. مکانیک نزد اوایلر، لاگرانژ، لژاندر و هامیلتون چندین بار فرمول بندی شد و این فرمول بندی ها برای بازسازی مفاهیم مکانیک به زبان های جدید به کار رفتند. حد و پیوستگی توسط کوشی و وایرشتراوس مطرح شد و کمک کرد که پس از ۲۰۰ سال حسابان به صورتی دقیق فرمول بندی شود. نظریه میدان ها نزد گالوا فرمول بندی شد و گالوا بسیاری از مفاهیم میدان ها و گروه ها و عمل گروه و تقارن و تناظر گالوایی را از آن بیرون کشید. آبل هندسه جبری مختلط را ابداع کرد که تعمیمی از فرمول بندی هندسه دکارتی روی اعداد حقیقی بود. گاوس نظریه اعداد مدرن را فرمول بندی کرد و هندسه توسط ریمان طراحی و فرمول بندی شد. توپولوژی جبری و مفاهیم آن توسط پوانکاره پیش پا گذاشته شد و مفهوم مدل ریاضی توسط کلاین مطرح شد. فضای هیلبرت بعد از هیلبرت به عنوان مدلی برای فرمول بندی محاسباتی مفاهیم مکانیک و کوانتوم مطرح شد.

ج) ریاضیات علم اثبات قضیه است.

ریاضیدانانی هستند که برای آنها انجام دادن ریاضیات، هنرشان فرمول بندی و اثبات قضایاست. ایشان خود را مانند یک ماشین اثبات می بینند که در مورد آنچه ممکن است درست باشد، حدس می زنند و سعی می کنند برای حدس خود اثباتی دقیق بیابند یا برای آن مثال نقضی پیدا کنند. این ریاضیدانان، وقتی قضیه خود را اثبات می کنند، حتی اگر اثبات ایشان روشنگر نباشد، رضایت کامل دارند. برای این ریاضیدانان، یاد گرفتن ریاضی یعنی یاد گرفتن قضایایی که قبلاً ثابت شده اند و تحقیق ریاضی یعنی اثبات قضایای جدید. ایشان وقتی یک مقاله تحقیقاتی را می بینند، می پرسند: چه قضایایی در آن اثبات شده و این قضایا چقدر مهم هستند و چقدر در اثبات قضایای دیگر به کار می آیند. ارزش تحقیق به کارآمدی قضایای اثبات شده در اثبات دیگر قضایاست. روشهای اثبات برای این ریاضیدانان بسیار ارزشمند است. تاریخ ریاضیات برای چنین ریاضیدانانی تاریخ قضایا و تعمیم های آنهاست. آینده ریاضیات تعلق دارد به حدس های دقیق و دورنگرانه ای که امیدوارند آنها را از همان روشهایی که حدس می زنند اثبات کنند. چنین دیدگاهی از ریاضیات برای هر ریاضیدانی در دسترس نیست. کار سخت و تجربه بلندمدت لازم است تا ریاضیدانی قضایایی را از پیش ببیند که به این زودیا قابل اثبات نیستند. شاخه هایی از ریاضیات هستند که حول حدس های مهمی دور می زنند که باید اثبات شوند. اثبات ها لازم نیست روشنگر یا محاسباتی باشند. معمولاً دانشجویان کارشناسی ارشد چنین نگرشی به ریاضیات دارند. اما بعضی از ریاضیدانان در این مرحله باقی می مانند.

اگر تاریخ ریاضیات را به زبان اثبات قضیه نگاه کنیم، می توان تحول ساختار ریاضی را حول تحولاتی که در مفهوم اثبات رخ داد مطالعه کرد. دقت تعریف اشیا ریاضی توسط تالس و دقت در فرمول بندی اثبات ریاضی توسط فیثاغورس شکل گرفت. اثبات محاسباتی قضایا، به کمک مثلثات و روابط طولی ریشه در کاربردهای مثلثات کروی در نجوم توسط بطلمیوس داشت. اثبات توسط اصول موضوعه، توسط ارسطو مطرح شد و فلسفه اصل موضوعه ای ریاضیات توسط او بنا شد. نزد اقلیدس، کل ریاضیات بر اساس نظام اصول موضوعه ای ارسطو فرمول بندی شد و به طور گسترده مورد استفاده ریاضیدانان قرار گرفت. قبل از اینکه دکارت روش جبری اثبات را به وجود بیاورد و لایبنیتز از تبدیل های هندسی کمک بگیرد تا مفهوم اثبات را دگرگون کند، تلاش های خیام و ابن هیثم به ترتیب مقدمات این دست و پنجه نرم کردن ها را فراهم آوردند. قبل از اینکه نیوتون و لایبنیتز حساب بینهایت ها را به وجود بیاورند، ارشمیدس و بهاسکارا مقدمات تلاش های آنها را فراهم کردند. اثبات حل پذیری و وجود یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل و بررسی تعداد جواب های معادلات جبری انقلابی دیگر در مفهوم اثبات پیاده کرد. گاوس برای قضایایی در نظریه اعداد

چندین اثبات داد و این کار دغدغه اثبات های روشنگر را بوجود آورد. در کتاب جردن، اثبات به روش جبری به کمال خود رسید و براونر مفهوم ریاضیات ساختارگرا را پیش پا نهاد.

د) ریاضیات علم حل مسئله است.

برای گروهی دیگر از ریاضیدانان، ریاضیدان علم حل مسائل مهم است. مسائل مهمی هستند که حل آن ها، کلیدی برای حل بسیاری از مسائل دیگر می باشند. توانایی فرمول بندی مسئله برای این ریاضیدانان به همان اهمیت حل مسائلی است که فرمول بندی می کنند. یادگیری ریاضیات برای این ریاضیدانان، درس آموختن از شکست ها و موفقیت های ریاضیدانان در حل مسائل مهم است. ایشان تاریخ ریاضیات را به زبان حل مسائل می فهمند و یادگیری ریاضیات، یادگیری روش های پیشین حل مسئله است. تدریس ریاضی یعنی چگونه اهمیت یک مسئله را تشخیص دهیم و چگونه مسائل را فرمول بندی کنیم و چگونه سعی کنیم مسئله را با تکنیک های قدیمی حل کنیم و در صورت عدم موفقیت سعی کنیم تکنیک های جدیدی برای حل مسئله پیشنهاد کنیم. فیزیکدانان بسیار سریع تر از ریاضیدانان برای رسیدن به چنین مرحله ای تربیت می شوند. اگر ریاضیدانی از این دسته، بخواهد کار تحقیقی ریاضیدانی دیگر را ارزشیابی کند، می پرسد این کار تحقیقی به مطالعه چه مسائلی میپردازد و چرا این مسائل مهم هستند و چقدر در حل این مسائل پیشرفت حاصل شده و این پیشرفت ها چقدر در حل مسائل دیگر راه گشاست. شاخه هایی از ریاضیات هستند که حول مسائل مهمی دور میزنند و به این ریاضیات، ریاضیات مسئله محور گفته می شود.

اگر بخواهیم تاریخ ریاضیات را به زبان حل مسائل مهم بنویسیم، می توان لیستی از مسائل را بدست داد که زنجیره تحولات تاریخ ریاضی را بر ما آشکار سازد. مسئله عدد و شکل و اتحاد آنها از فیثاغورسیان شروع شد و تا امروز به زبان نظریه همانندی و پادهمانندی هنوز مورد توجه است. خیلی از تحولات ریاضی حول همین مسئله شکل گرفت. مسئله فرمول بندی اصل موضوعه ای ریاضیات از ارسطو شروع شد و تا هیلبرت و گودل ادامه پیدا کرد. مسئله تقارن و مسئله رده بندی از احجام افلاطونی منتظم شروع شد و امروز همه ریاضیات را فرا گرفته است. مسئله محاسبه مساحت و انتگرال، از باستانی ترین مسائل است که از عهد باستان تا نظریه اندازه و احتمالات کار روی آن بسط داشته است. مسئله نمایش جبری و حل معادله جبری از زبان دکارت رسمی شد، اما از زمان خوارزمی مطرح شده بود. و امروز به صورت حل کلی معادلات درآمده است. مسئله بی نهایت کوچک ها و بی نهایت بزرگ ها از ارشمیدس و بهاسکارا شروع شد و منجر به ظهور حسابان و سر آخر منجر به ظهور آنالیز نااستاندارد و حدس پیوستار گردید. مسئله مماس و مشتق از زمان هندسه اقلیدسی یونانیان مطرح بود، به ظهور مفهوم مشتق منجر شد و سر آخر حساب وردش ها را به وجود آورد که حجم بزرگی از فیزیک امروز را شامل می شود. مسئله معادلات دیفرانسیل تحول پیدا کرد و منجر به ظهور نظریه سیستم های دینامیکی و حل کیفی معادلات دیفرانسیل شد. ریاضیات ساختنی از رسم توسط خط کش و پرگار در کتاب اقلیدس شروع شد و تا ریاضیات شهود گرایی براونر ادامه پیدا کرد. مسئله حل پذیری معادلات توسط رادیکال ها و ریاضیات محاسباتی از نظریه گالوا و هندسه جبری گذشت و روش های جبر هذلولوی را هم در بر گرفت. مسئله خم های بیضوی و نقاط صحیح و گویای آنها از فرما تا وایلز را درگیر خود کرد. مسئله تعمیم اعداد مختلط به عنوان تعمیمی از اعداد حقیقی منجر به کشف چندین ساختار عددی شد. مسئله ارائه مدلی برای فضا، از نیوتن و استادش ایزاک بارو شروع شد و در دستان ریمان به پختگی رسید و هنوز هم در شاخه های ریاضی مختلف مانند هندسه ناجابجایی و

مکانیک کوانتومی و نظریه میدان ها ادامه دارد. مسئله توپولوژی و مفهوم نزدیکی از پوانکاره شروع شد و به اعداد p -نقش رسید. مسئله فضای هیلبرت و ریاضیات بی نهایت بعدی از اوایل قرن بیستم شروع شد.

ه) ریاضیات علم تئوری پردازی است.

در مرزهای علم ، ریاضیدانان دغدغه راه سازی برای ریاضی دانان مسئله حل کن توسط تئوری پردازی را دارند. این تئوری های جدید وظیفه بالا بردن و پیشرفت تکنیک های حل مسئله را به عهده دارند. و یا روش های مناسب تری برای محاسبه ناورداها و کشف مفاهیم جدید ارائه میدهند ، و یا برای یک نظریه قدیمی فرمول بندی جدیدی ارائه می دهند که دستاورد های بهتری از فرمول بندی قدیمی داشته باشد. یاد گیری ریاضی، مطالعه تئوری هایی است که قبلا در ریاضیات مطرح شده اند و این که چگونه تئوری پردازی کنند و چگونه تئوری پردازی ها را ارزشیابی کنند. تحقیق در زمینه تئوری پردازی، تئوری پروری های جدید و فرمول بندی های جدیدی است که بیشتر به درد مسئله حل کن ها بخورد.

این ریاضیدانان، یک تحقیق ریاضی را این طور ارزشیابی می کنند که چقدر راه را برای آیندگان باز می کن؟ تاریخ ریاضیات، تاریخ فرمول بندی های جدید تئوری های ریاضی است. هر چه بهتر یک تئوری ما را برای آینده دور تری آماده کند، آن تئوری ارزشمندتر است. برای بیشتر ریاضیدانان این عمیق ترین سطحی از ریاضیات است که قابل فهم است. یا به عبارت دیگر، این فهم از ریاضیات عمیق ترین سطحی از درک است که برای بیشتر ریاضیدانان می تواند در دسترس باشد. سطوح عمیق تری از ریاضیات نیز وجود دارد که معدودی از ریاضیدانان از عمق شناختی لازم برای درک ریاضیات در چنین سطحی برخوردارند.

بسیاری از تاریخ ریاضیات را می توان به زبان تئوری پردازی بیان کرد. تئوری های ریاضی، سراسر تاریخ ریاضیات را پوشش می دهند. تئوری حل معادلات دیوفانتی توسط دیوفانتوس مطرح شد و تئوری هندسه اقلیدسی بعد از تالس مورد قبول قرار گرفت. تئوری مثلثات کروی در دستان بطلمیوس به اوج خود رسید و در دستان ریاضیدانان اسلامی به فرمول بندی کامل مثلثات مسطح انجامید. در زمان گاوس و بولیایی و لباچفسکی تئوری مثلثات هذلولوی نیز طراحی شد. در تاریخ هندسه اقلیدسی شاهد چندین نظریه هندسی بودیم. از جمله هندسه افکنشی، قطب و قطبی و هندسه انعکاس، هندسه نسبت همساز و ناهمساز و بسیاری تئوری های مانند آن. دکارت نظریه ساختار های جبری را پیش کشید و نیوتن نظریه حساب نامتناهی ها را غنا بخشید. لایب نیتز نظریه حساب بی نهایت کوچک ها و اوایلر نظریه معادلات دیفرانسیل و نیوتن تا لژاندر و لاگرانژ و هامیلتون مکانیک کلاسیک را بنیان گذاری کردند. نظریه جبری اعداد مدرن، واضع آن گاوس بود. نظریه توابع تحلیلی توسط ریمان به نظریه رویه های ریمانی مربوط شد. نظریه حد توسط کوشی مطرح شد و نظریه سیستم های دینامیکی توسط پوانکاره معرفی شد. نظریه گالوا شاهکار تئوری پردازی است. هیچ ریاضیدانی در سنین جوانی مانند گالوا به تئوری پردازی نپرداخته است. آبل هندسه جبری را بنیان گذاری کرد. بسیاری از نظریه های ریاضی در قرن نوزدهم بنیان گذاری شدند.

و) ریاضیات علم شناخت شناسی است.

عمده کمی از ریاضیدانان به این پختگی می رسند که ریاضیات را وسیله شناخت ساختار شناختی انسان قرار می دهند. یعنی میخواهند به کمک ریاضیات بفهمند انسان چه می فهمد و چه نمی فهمد و چه می تواند بفهمد و چه نمی تواند بفهمد. این ریاضیدانان را ریاضیدانان شناختی می نامند. ایشان ریاضیات را برای

پیشرفت ریاضیات یا برای ارتباط با خواننده تحقیقات شان انجام نمی دهند. بلکه دلیل شخصی برای انجام ریاضیات دارند. ریاضیات از لحاظ شناختی اینان را ارضا می کند. انجام دادن ریاضی، یعنی انقلاب در ساختار شناختی ریاضیدان. این کار دیدگاهی جدید به همه آنچه می دانند، به دست می دهد. یاد گرفتن ریاضی تقریباً همان تحقیق ریاضی است و آموزش ریاضی یعنی دسترسی به ساختار شناختی دیگر ریاضیدانان. باید اول ساختار شناختی دانشجو را شناخت و بعد تصمیم گرفت چه موضوعی را باید به ایشان آموزش داد و چگونه بر ساختار شناختی ایشان تأثیر گذاشت. به چه جهتی باید ایشان را راند و چه نوع ریاضیاتی می تواند این کار را با ایشان بکند. و تاریخ ریاضیات برای هر ساختار خاص چگونه باید فهمیده شود. برای چنین ریاضیدانانی، تحقیق ریاضی یعنی کشف توانایی های ناشناخته انسان. وقتی چنین ریاضیدانی، تحقیق ریاضی دیگری را ارزشیابی می کند، از خود می پرسد: این تحقیق چه نتایجی در فهم شناخت انسان داشته است؟ یک ذهن ریاضی پس از این اکتشافات شناختی، چه چیزهای جدیدی را می تواند بفهمد؟ آیا این تحقیق تأثیری بر استانداردهای شناختی انسان خواهد داشت؟ آیا این تحقیق تأثیری بر زبان تخیل و شناخت و برد تخیل انسان خواهد داشت؟

تاریخ ریاضیات، برای چنین ریاضیدانی، تاریخ دستاوردهای شناختی ریاضیات است. اما چنین ریاضیدانی به تاریخ همه شاخه های علم و بلکه به همه شاخه های تاریخ، به همین دلیل علاقه مند است. پس چنین ریاضیدانی علاقه هایی بسیار گسترده در علوم مختلف پیدا می کند و به درجه ای می رسد که یک فیلسوف علم می شود و حتی یک فیلسوف تاریخ و یک فیلسوف آموزشی. دیدگاه یک ریاضیدان شناختی درباره آینده ریاضیات به زبان کشف قسمت های شناخته نشده شناخت انسان بیان می شود. این قسمت های شناخته نشده ممکن است امروز جزو شاخه های دیگر علم یا فلسفه محسوب شوند. اما ریاضیدان شناختی می خواهد این دستاوردهای شناختی را به زبان ریاضی در دسترس قرار دهد. بنابراین، چنین ریاضیدانی یک ریاضیدانی است که به همه ریاضیات زمان خود و بسیاری از علوم دیگر زمان خود تسلط دارد. به چنین شناختی از ریاضیدان، یک شناخت جهانی گفته می شود.

نزد ریاضیدانان شناختی، تاریخ ریاضیات را انقلاب های شناختی آن است که می سازد. اولین انقلاب در ریاضیات توسط ریاضیات زیردستان تالس بود که یافته های باستانی را مرتب و منسجم کرد. افلاطون کسی بود که نظریه عالم صغیر و عالم کبیر و نظریه عالم مثل را مطرح کرد و این انقلاب شناختی مهمی درباره چیستی ریاضیات بود. ارسطو نظام اصل موضوعه ای ریاضیات را برپا کرد و این نکات و عواقب شناختی فراوانی داشت و روی ریاضیدانان تأثیر به سزایی گذاشت که تا امروز ادامه دارد. ارشمیدس سری های نامتناهی را مطالعه کرد که مبنای ریاضیات پیوسته مدرن گردید. دکارت روش جبری را طراحی کرد و این فکر که هر مسئله ای را باید بشود به زبان جبر ترجمه کرد، شناخت ما را از ریاضیات عوض کرد. گالوا با مطالعه مفهوم تقارن و ارائه متناظر گالوایی، مقدمات مفهوم دیکشنری بین دو نظریه ریاضی را فراهم کرد. گاوس با محاسبات فراوان و مجردی که در نظریه جبری اعداد انجام داد، ما را به شناخت جدیدی از مفهوم عدد و مفهوم ساختار عددی رساند. ریمان شاگرد گاوس، همین کار را برای مفهوم فضا انجام داد. کلاین با مطالعه گروه های گسسته، و سوفوس لی با مطالعه گروه های پیوسته انقلاب شناختی دیگری را پی ریزی کردند. کانتور و نظریه مجموعه ها انقلابی در مبانی ریاضیات به وجود آورد. براونر ریاضیات ساختنی را بنیان گذاری کرد. راسل پارادوکس معروف خود را مطرح کرد و راه را برای انقلاب شناختی گودل باز کرد. هیلبرت ریاضیات فرمال را تئوری سازی کرد و انیشتن دگرذیسی متریک فضا را مطرح کرد و ما را با فضای غیرثابت آشنا کرد. وایل که استاد تقارن و نظریه جبرها بود، کاشف پزیترون شد و

فون نویمان آغازگر هندسه ناجابجایی بود که مفهوم هندسه را برای همیشه عوض کرد. گروتندیک هندسه حسابی را به وجود آورد و عدد و شکل را دوباره با هم آشتی داد و وئودسکی نظریه اثباتی ارائه داد که اثبات را قابل ارائه کردن به کامپیوتر برای چک کردن صحت محاسبات می ساخت. این ها مهم ترین اتفاقات شناختی در تاریخ ریاضیات بودند.

(ز) ریاضیات علم حقیقت شناسی است.

ریاضیدانانی نادر هستند که انجام ریاضیات برای آنان چیزی درباره شناخت انسان نیست، بلکه چیزی درباره شناخت حقیقت است. آنها به یک حقیقت بالاتر که در ریاضیات تجلی می کند اعتقاد دارند. این حقیقت بالاتر در علوم دیگر نیز تجلی می کند و برای همین است که ریاضیات ابزار مهمی برای فرمول بندی یک زبان مناسب برای مطالعه علوم دیگر نیز هست. در نگاه این ریاضیدانان، ریاضیات وحدت دارد و یک شاخه جدا نیست. بلکه همه علوم بشری وحدت دارند.

در این دیدگاه، تحقیق ریاضی تلاش پایان ناپذیر برای درک حقیقت اولیه است که همه ریاضیات از تجلی این حقیقت پیدا شده است. این نیازمند هنر تاویل ریاضیات است. اگر چنین ریاضیدانی بخواهد تحقیق یک ریاضیدان دیگر را ارزشیابی کند، از خود می پرسد: چقدر شناخت این ریاضیدان آیینه خوبی برای نشان دادن حقیقت بوده است؟ و چقدر این ریاضیدان در هنر تاویل قوی است؟ و چقدر خوب می تواند محتوایی را که به او الهام شده است را بفهمد؟ تاریخ ریاضی و تاریخ علم، یعنی تاریخ درک حقیقت بالاتر و مجردتر. در این دیدگاه، ذهن انسان، کاشف عالمی است که حقیقت در آن زندگی می کند و خالق و به وجود آورنده تجلیات این حقیقت است. آینده ریاضیات و علوم دیگر، چیزی نیست جز تلاش بیشتر برای درک حقیقت، و تابعی است از طبیعت حقیقت تجلی یافته و قابلیت بشر برای درک این حقیقت تجلی یافته.