نگاهی به تاریخ ریاضیات تحلیلی و جزءنگر

آرش رستگار

۳۰ آذر ۱۳۹۸

خلاصه

سبک شناختی تحلیلی و جزءنگر در برابر سبک شناختی کل‌نگر و سرتاسری موتور محرکه انجام ریاضیاتی است که از جزء به سوی کل حرکت می‌کند و کل را در سایه جزء تعریف می‌کند. این قسمت‌های ریاضیات که در آن نگاه تحلیلی و جزءنگر برقرار است در تاریخ تحول خود پدیده‌های به خصوصی را به نمایش می‌گذارند که در این مقاله مورد بحث قرار می‌گیرند.

مقدمه

ریاضی‌دانانی که تحلیلی و جزءنگر هستند گرایش به این دارند که به مفاهیم و ساختارهای خاصی در ریاضیات توجه کنند. بلکه به اشیای ریاضی به عنوان کلی که از اجزا ساخته شده است نگاه می‌کنند تا اجزایی که در کنار هم کل را شکل داده است. مثلاً نگاه جزءنگرانه به یک مثلث ساختن مثلث از اجزای سه رأس و سه پاره‌خط بین آن‌هاست، اما از نگاه کل‌نگرانه مثلث از سه خط سرتاسری تشکیل شده که دو به دو با هم موازی نیستند و قبل از آن باید مفهوم دو خط غیرموازی را بررسی کرد که به مفهوم زاویه منجر می‌شود. می‌بینیم که به مفهوم زاویه هم دو نگاه کل‌نگر و جزءنگر حکومت می‌کنند که یکی زاویه بین دو پاره‌خط و دیگری زاویه بین دو خط است. از دیدگاه کل‌نگر سه خط دو به دو متقاطع یک مثلث متناهی و سه مثلث نامتناهی را به دست می‌دهند. اضلاع این مثلث‌های نامتناهی از متمم اضلاع این مثلث‌های متناهی در خط شامل آن‌ها تشکیل شده‌اند. می‌توان به این اضلاع متمم متناهی طول منفی نسبت داد و به این مثلث‌های نامتناهی مساحت منفی به دست داد. اما روشن است که این نگاه متداول به یک مثلث نیست. ریاضی‌دانان تحلیلی و جزءنگر نگاه دیگری به مثلث دارند که یک کل ساخته شده از اجزا است. از دیدگاه ریاضی‌دانان کل‌نگر مطالعه مثلث یعنی مطالعه خانواده پیوسته‌ای از مثلث‌ها که پیوسته تغییر می‌کنند و از دیدگاه ریاضی‌دان جزءنگر مطالعه مثلث یعنی مطالعه شیئی صلب که از سه نقطه ثابت داده شده در صفحه تشکیل شده است. هر دوی این ریاضی‌دانان تصویری

هستند. ریاضی‌دانان کلامی جزءنگر یک مثلث را سه عدد مختلط یا سه نقطه با مختصات دکارتی در صفحه می‌بینند و ریاضی‌دانان کلامی کل‌نگر به این که از چهارضلعی به مثلث و از مثلث به بازه بسته با منطبق‌کردن دو نقطه همسایه چه بلایی بر سر احکام هندسی آورده می‌شود توجه دارند.

۱ اجزای مثلث و مثلثات

از دیدگاه جزءنگر مثلث از سه رأس و در لایه‌ای دیگر از سه رأس و سه پاره‌خط و در لایه‌ای دیگر از سه رأس و سه پاره‌خط و و سه زاویه و در مرحله بعد دایره محیطی و دایره محاطی و در مرحله بعد خطوط هم‌رسی مانند سه ارتفاع، سه نیم‌ساز، سه میانه و سه عمود منصف و در مراحل بعد اجزای بیش‌تری از اجزای اولیه درست می‌شوند، مانند دایره نه نقطه و خط اویلر و در نهایت همه این اجزا کل حقیقت یک مثلث را تشکیل می‌دهند. تقارن جایگاه سه رأس تعریف‌کننده در مثلث در سراسر فرمول‌های متریک و قضایای صادق درباره مثلث هویداست و با این که تقارن یک مفهوم کل‌نگرانه است، تقارن قضایا نسبت به رأس مثلث یک مفهوم جزءنگرانه است. مثلاً این تقارن در رابطه سینوس‌ها و هم‌رسی خطوط خاص در مثلث آشکار است. قضیه سوا بیان می‌کند که روابطی طولی که دارای این تقارن نمادین باشد می‌تواند هم‌رسی را نتیجه دهد که یک تقارن نمادین است. قضیه کسینوس‌ها در واقع می‌تواند بر پایه هر ضلع مثلث بنا شود و صورتی متقارن‌شده از قضیه فیثاغورس است. مثلثات یک روش محاسباتی برای اثبات قضایا به کمک روابط طولی است. در این روش تمام اجزای مثلث که دارای ناوردایی عددی هستند قابل محاسبه بر حسب طول سه ضلع مثلث یا به عبارت دیگر فاصله دو به دوی نقاط تشکیل‌دهنده مثلث هستند. از جمله فرمول هرون برای مساحت مثلث بر حسب اضلاع همین طور به دست می‌آید. کم‌کم روابط طولی تبدیل به یک روش تحلیلی و جزءنگر برای اثبات قضایا شد. بعضی از روابط طولی تقارن نسبت به سه ضلع را به نمایش می‌گذارند مانند قضیه هرون و بعضی این تقارن را می‌شکنند مانند قضیه فیثاغورس. فرمول‌های ساده مساحت پیش از هرون نیز این تقارن را می‌شکنند. نصف حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع را می‌توان بر هر سه ضلع مثلث بنا کرد. روی‌کرد جزءنگر در سراسر هندسه اقلیدسی غالب نبوده. برای مثال هندسه تبدیلات و همین طور حرکت پیوسته اشکال هندسی به عنوان روشی برای درک قضایا هر دو نگاهی کل‌نگر به اشکال هندسی دارند. مفاهیم هندسه اقلیدسی و هذلولوی و کروی نیز مفاهیمی کل‌نگرانه در هندسه هستند. هر چند می‌توان به کمک انحنای ثابت این مفاهیم کل‌نگرانه را بر حسب اجزاء نیز بیان کرد و راه را برای انجام دادن ریاضیات جزءنگر در اشیاء هندسی باز کرد چنانچه در بخش هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی خواهد آمد.

۲ حل معادله جبری به روش موضعی

معادله جبری اصولاً یک موجود سرتاسری است. لااقل آن طوری که دکارت آن‌ها را رسم می‌کند موجوداتی سرتاسری به دست می‌دهد. حل معادلات جبری در آغاز با کمک خط‌کش و پرگار انجام می‌شد و این روش توسط خیام به کمک گرفتن از سهمی نیز تعمیم داده شد. روش هندسی حل معادلات جبری نیز سرتاسری است. اما از جایی که خوارزمی روش جبر و مقابله را ابداع کرد حل معادله‌های جبری توسط روش‌های کلامی و جزءنگرانه هم ممکن شد. در این روش معادله را چنان تغییر متغیر می‌دهند تا ساده‌تر شود و با کمک تکنیک‌های محاسباتی از پیش‌تعیین‌شده قابل حل گردد. یا معادله درجه دوم را با روش کامل‌کردن مربع حل می‌کنند که روش شبیه ساده کردن ظاهر معادله جبری است. این روش‌ها تا درجه چهارم کار کردند اما گالوا با روش‌های کل‌نگرانه ثابت کرد حل معادله دل‌خواه از درجه پنجم به بالا با این روش ممکن نیست. روش دیگری برای پیدا کردن ریشه‌های معادله جبری روش تقریب عددی است مانند روش نیوتون. روش تقریب عددی نیز به نوعی تحلیلی و جزءنگرانه است و اگر چه دلیل کارآمدی این روش کلامی به زبان هندسی بیان می‌شود اما آن استدلال هندسی نیز تحلیلی و جزءنگرانه است. همین روش جزءنگرانه منجر به کشف ساختار کلی اعداد مختلط شد. اگر چه اعداد مختلط در کنار اعداد طبیعی هر دو نگاهی کل‌نگرانه به عدد دارند ولی روش‌های کلامی و جبری در اعداد طبیعی و اعداد مختلط در محاسبات بسیار کارآمدند. روش‌های تجزیه چندجمله‌ای و حتی روش اثبات قضیه اساسی جبر تحلیلی و جزءنگرانه است. اعداد چهارگان یا اعداد همیلتونی نیز به روش تحلیلی و جزءنگرانه کشف شدند. یا این که این ساختار نیز نگاهی کل‌نگر به ساختار عددی ناجابه‌جایی دارد. علم جبر از آغاز با داشتن مولدها و روابط یک گروه صورت پذیرفت. در حالی که گروه مفهومی کل‌نگرانه به تقارن اشکال هندسی است. حتی تقارن ریشه‌های یک معادله چندجمله‌ای که تقارنی مفهومی است کل‌نگرانه است. اما روش روابط بین مولدها روشی جزءنگرانه است که به ذات اولیه روش خوارزمی برمی‌گردد. البته جبر کل‌نگرانه هم داریم. نظریه رسته‌ها و روش‌های بین آن‌ها نگاهی کل‌نگرانه به ساختارهای جبری را به دست می‌دهد که دیگر جبر خوارزمی نیست بلکه جبری جدید است که توسط آیلنبرگ و مکلین بنیان‌گذاری شده است. نگاه کل‌نگرانه به حل معادلات گویا منجر به نظریه جبری اعداد مدرن و شاخه هندسه حسابی در نظریه اعداد شده‌اند.

۳ حسابان و حد و پیوستگی

روش حساب دیفرانسیل و روش حساب انتگرال هر دو روش‌هایی جزءنگرانه و تحلیلی در حل مسئله هستند و هر دو از جزء به سوی کل حرکت می‌کنند. مفاهیم مشتق و انتگرال هر دو موضعی هستند. انتگرال بر اصل برهم‌نهی استوار شده است که بر برهم‌نهی اجزاء برای به دست آوردن ناوردایی سرتاسری تکیه می‌کند. سال‌ها نگاه کل‌نگرانه به مفاهیم حسابان اجازه صورت‌بندی دقیق ریاضی آن را نمی‌داد چه ذات این رشته از ریاضیات جزءنگر است. در

نهایت در اوایل قرن نوزدهم کوشی مفاهیم حد و پیوستگی را به میان آورد و وایرشتراس این دو مفهوم را بر حسابان اپسیلون و دلتا استوار کرد و شاخه آنالیز ریاضی متولد شد وگرنه نگاه توپولوژیک به پیوستگی نگاه کل‌نگرانه به مفهوم پیوستگی است که در بخش توپولوژی جبری به آن خواهیم پرداخت. فضیه اساسی حسابان پل ارتباط مفهومی بین دو نظریه تحلیلی در دو طرف این پل است. نکته‌ای که باید به آن اشاره کرد این است که مفهوم حد در بی‌نهایت نیز مفهومی موضعی است نه سرتاسری. با توجه به نگاه توپولوژیکی مفهوم هم‌سایگی بی‌نهایت ظهور می‌کند که نشان می‌دهد حد در بی‌نهایت نیز مفهومی موضعی است نه سرتاسری. مفهوم فضای فشرده ممکن است خلطی بین مفاهیم سرتاسری و موضعی به وجود آورد. آیا انتگرال یک تابع یک ناوردای سرتاسری برای تابع محسوب نمی‌شود؟ البته. اما این مفهوم کلی از برهم‌نهی اجزاء پدید آمده است و تحلیلی است، بنابراین فضاهای با حجم متناهی نیز با روش‌های تحلیلی و جزءنگرانه مورد مطالعه قرار می‌گیرند. این که مشتق توابع چندجمله‌ای چندجمله‌ای است و این که مشتق توابع نمایی نمایی است به ظاهر کل‌نگرانه هستند ولی اثبات این نکات هم‌چنان به زبان جزءنگرانه انجام می‌شود. به روش نیوتون برای حل معادلات چندجمله‌ای و در واقع تقریب ریشه‌های معادلات با ضرایب حقیقی پیش از این اشاره کردیم که برآمده از مفاهیم تحلیلی و جزءنگرانه حساب مشتق است. نگاه جزءنگرانه به حسابان در صورت‌بندی حساب تفاضل متناهی نیز هویداست و لزومی ندارد مفاهیم حسابان در چارچوب ریاضیات پیوسته فرمول‌بندی شوند. در ریاضیات گسسته حساب انتگرال چیزی جز مجموع‌های نامتناهی نیست. مفهوم سری‌ها در حسابان پیوسته و گسسته هر دو ظاهر می‌شود که مفهومی جزءنگرانه است که حرکت از جزء به کل را به نمایش می‌گذارد. روش معادلات دیفرانسیل نیز روش تحلیلی برای حل مسئله است که از حسابان برخواسته است.

۴ حل عددی معادلات دیفرانسیل

حل عددی معادلات دیفرانسیل نگاهی تحلیلی و جزءنگرانه به معادلات دیفرانسیل دارد. بلکه شاخه سیستم‌های دینامیکی نیز گرچه کل‌نگرانه به حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازد، اما کل‌نگری آن از حرکت از جزء به کل نشأت می‌گیرد. جالب این‌جاست که با وجود حرکت در یک سیستم دینامیکی نگاه کل‌نگرانه بر آن حکومت نمی‌کند. در مورد کاربرد حسابان در فیزیک نیوتونی نیز چنین است و معادله حرکت یک شیء به طور موضعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در فیزیک لاگرانژی و هامیلتونی نگاه کل‌نگرانه‌تری حکومت دارد. اما در فرمول‌بندی نیوتون چنین نیست. نگاه کل‌نگرانه به سیستم‌های دینامیکی می‌شود مطالعه برگ‌بندی‌های روی یک خمینه که هم تصویری است و هم کل‌نگرانه. ولی با دینامیک و حرکت سیستم‌های دینامیکی پیوند نمی‌خورد. مدل‌سازی یک پدیده طبیعی توسط معادلات دیفرانسیل ممکن است کل‌نگرانه یا جزءنگرانه باشد. برای مثال معادله دیفرانسیل سیالات مثل معادله موج جزءنگرانه است. اما معادله دیفرانسیل شکار و شکارچی کل‌نگرانه است. چون تغییرات یک کل را مدل می‌کند.

تقریب عددی جواب‌های یک معادله دیفرانسیل نیز از این رو جزءنگرانه است که موضعی است. مدل‌سازی‌های موضعی از جزء به کل حرکت می‌کنند. در واقع این جزء در برابر کل یک جزء در برابر کل تصویری است. البته در بستر زمان هم جزء در برابر کل مدل می‌شود. پس به‌تر است بگوییم حل عددی معادلات دیفرانسیل جزء در برابر کل فضا–زمانی است. مثال جزء در برابر کل که غیر فضا–زمانی باشد ساختارهای جبری هستند که با مولدها و روابط بین آن‌ها تعریف می‌شوند. در این‌جا جزء در برابر کل به معنی اعضای یک مجموعه در برابر کل یک مجموعه تعبیر می‌شوند. نگاه کل‌نگرانه به ساختارهای ریاضی آن طوری که روش گروتندیک است که از نظریه رسته‌ها بهره می‌برد در مطالعه سیستم‌های دینامیکی پیاده نشده است. چون مفهوم مورفیسم بین سیستم‌های دینامیکی هنوز تعریف نشده است. نگاه جزءنگر در معادلات دیفرانسیل به مفاهیم هندسه دیفرانسیل توسط گاوس و هندسه ریمانی توسط ریمان تعمیم داده شدند که موضوع بخش بعدی است. جزء در برابر کل در هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی موضعی در برابر سرتاسری است. برای مثال این که از برهم‌نهی خمیدگی مشخصه اویلر به دست می‌آید حرکتی از جزء به کل است.

۵ هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی

هندسه دیفرانسیل از مفهوم انحنا شروع شد که مفهومی موضعی است و هندسه ریمانی از مفهوم متریک شروع شد که آن هم موضعی است. قضیه گاوس که از برهم‌نهی خمیدگی مشخصه اویلر به دست می‌آید که آن یک ناوردای سرتاسری است را می‌توان حرکتی از موضعی به سرتاسری در ریاضیات دانست. حرکت از موضعی به سرتاسری از هندسه به شاخه‌های دیگر ریاضی نیز رسوخ کرده است. برای مثال در نظریه اعداد اصل موضعی به سرتاسری در بسیاری از مسائل نظریه اعداد ظهور دارد. در نظریه اعداد مفاهیم موضعی بر اعداد اول استوار می‌شوند. این‌که ایده‌آل‌های اول همان مفهوم نقطه در میدان توابع هستند موتور محرک این لغت‌نامه است که مفهوم موضعی در نظریه اعداد را معنی می‌کند. مفاهیم فضای مماس، فرم دیفرانسیل، نقشه خمینه، همگی نگاهی جزء به کل دارند. برای مثال اگر چه فرم دیفرانسیل یک شیء سرتاسری است اما محاسبه با آن و کاربرد آن در نظریه خمینه‌ها با حرکت از جزء به کل ممکن می‌شود. ریمان در مقاله فلسفی معروف خود درباره فلسفه فضا درباره خمینه‌های گسسته نیز داد سخن داده است که متأسفانه تا امروز کسی این مفهوم را فرمول‌بندی نکرده است. اما این به ما می‌گوید که در فضاهای گسسته نیز مفهوم حرکت از موضعی به سرتاسری معنی دارد. مفهوم دگردیسی ناجابه‌جایی ساختارهای هندسی نگاهی کل‌نگرانه به یک هندسه دارد که در دگردیسی کوانتیزه کانسویچ قابل مشاهده است. مسائلی نظیر شمارش نرخ رشد ژئودزیک‌ها نیز با این که سرتاسری هستند ولی بر یک کل متشکل از اجزاء بنا شده‌اند. مفهوم هندسه آن طور که توسط کلاین در برنامه ارلانگن معرفی شد و بر گروه‌های تبدیل یک هندسه استوار است نگاهی کلی به یک هندسه است که در کارهای ترستون در رابطه با خمینه‌های بعد پایین پی‌گیری شد. ولی اثبات حدس ترستون نیز توسط روش‌های موضعی دگردیسی متریک توسط

معادلات حاکم بر آن ممکن شد. حدس ترستون با هدف اثبات حدس پوانکاره مطرح شد که خود یک نگاه سرتاسری دارد. پوانکاره با فرمول‌بندی شاخه توپولوژی به نگاهی سرتاسری به یک خمینه رسمیت بخشید با این حال روش‌های جزءنگرانه و تحلیلی در توپولوژیِ جبری توسط خود پوانکاره به کار رفتند که موضوع مطالعه ما در بخش بعد می‌باشد.

۶ توپولوژی جبری و روش‌های آن در جبر

توپولوژی جبری اواخر قرن نوزدهم توسط پوانکاره با معرفی گروه‌های پادهمانندی و همسانی برای فضاهای توپولوژیک به عنوان ناورداهای سرتاسری فرمول‌بندی شد. این در حالی بود که معرفی این ناورداهای سرتاسری نگاهی از جزء به کل داشت. گروه همسانی به مطالعه خم‌های بسته در فضا می‌پردازد و گروه پادهمانندی و گروه همانندی به مطالعه یک مثلث‌بندی فضا اشتغال دارند. هنر، تعریف ناورداهای سرتاسری به کمک روابط هم‌ارزی ماهرانه‌ای است که روی موجودات موضعی تعریف می‌شود و ساختارهای بسیار بزرگ را به ساختارهای کوچک خلاصه می‌کند که از انتخاب‌های انجام شده در مسیر ساخت ساختارهای بزرگ مستقل است و به یک ناوردای سرتاسری ساده منجر می‌شود. این روش در تعریف شاخص اویلر خمینه‌ها هم سابقه داشته است که مستقل از مثلث‌بندی فضای مورد بحث است اما به ناچار با انتخاب یک مثلث‌بندی تعریف می‌شده‌است. روش‌های جزء به کل توپولوژی جبری از طرفی وارد جبر شدند و جبر همانندی را ساختند و از طرف دیگر به عنوان روشی که در نهایت نگاه سرتاسری به فضا دارد به فرمول‌بندی نظریه رسته‌ها کمک کردند. در واقع یکی از موفقیت‌های نظریه رسته‌ها فرمول‌بندی جبری هم‌ارزی‌هایی بود که در نظریه همسانی تعریف می‌شد. بعدها در هندسه جبری نیز نظریه همانندی فرمول‌بندی شد که نگاهی سرتاسری به یک چندگونای جبری را به دست می‌داد. نظریه پادهمانندی نیز توسط حدس ویل و فرمول‌بندی‌های گروتندیک در هندسه جبری فرمول‌بندی شد و به حل مسایل مهمی از جمله فرضیه ریمان در حالت میدان توابع منجر شد. مفاهیمی مانند سایت و پشته نیز توسط گروتندیک تحت تأثیر مفاهیم توپولوژی جبری فرمول‌بندی شدند. وئودسکی نیز در فرمول‌بندی یک نظریه همسانی در توپولوژی جبری کوشش کرد و موفقیت‌های او منجر به تعریف جدیدی از مفهوم موتیو و اثبات حدس میلنور گردید. این سری از ایده‌ها به شدت به ارتباط بین هندسه جبری و نظریه اعداد کمک کردند که در جای خود به این ارتباط خواهیم پرداخت. در واقع نگاه کل‌نگرانه به بسیاری از ساختارهای هندسی و جبری تنها از نیمه دوم قرن بیستم مورد توجه قرار گرفتند و نگاه سنتی ریاضیات به ساختارهای ریاضی تحلیلی و جزء نگرانه بود.

۷ نظریه موضعی آنالیز

روش آنالیز در واقع توسط ارشمیدس خلق شد ولی در زمان نیوتون و لایب‌نیتز به شکوفایی رسید. اما تنها در زمان کوشی و وایرشتراس به زبان دقیق ریاضی بیان شد و برای دویست سال

به صورت شهودی به کار گرفته می‌شد. پس از فرمول‌بندی روش اپسیلون و دلتا به سرعت آنالیز فوریه و آنالیز مختلط و در نهایت آنالیز حقیقی فرمول‌بندی شدند و مفهوم هم‌گرایی و پیوستگی در هر سه این نظریات نقش محوری ایفا می‌کرد که به نگاهی جزءنگرانه و تحلیلی استوار شده بود. البته نگاه کل‌نگر در آنالیز نیز به زودی در قالب آنالیز تابعی شکل گرفت. فضاهای هیلبرت برای فرمول‌بندی مکانیک کوانتوم به کار رفتند و تکنیک‌های کل‌نگرانه وارد آنالیز موضعی نیز شدند ولی هنوز تکیه آنالیز موضعی به مفاهیم هم‌گرایی و پیوستگی بود. حتی سعی شد مفهومی سرتاسری از هم‌گرایی ارائه شود. برای مثال هم‌گرایی یک‌نواخت از سری این مفاهیم سرتاسری بود. اما باز هم نگاه جزء به کل در آنالیز موضعی توسعه‌یافته حاکم بود. برای مثال فضاهای هیلبرت را هم با همان تکنیک‌های جزء به کل آنالیز موضعی مطالعه می‌کردند. گروتندیک که کل‌نگر بود مسیر شناختی خود را از آنالیز تابعی آغاز کرد اما این عرصه را برای کل‌نگری مناسب ندید و به هندسه جبری تغییر رشته داد. از بین شاخه‌های آنالیز نظریه اندازه نگاهی کل‌نگر داشت که به سوی نگاه‌های هندسی‌تری مانند اندازه روی فضاهای مدولی حرکت کرد و نیز نظریه ارگودیک از آنالیز دور شد. نظریه احتمالات بازمانده نظریه اندازه در آنالیز به مفاهیم کل‌نگرانه می‌پرداخت ولی از تکنیک‌های جزءنگرانه آنالیز برای اثبات قضایا بهره می‌گرفت. بنابراین شاخه‌هایی که دغدغه‌های کل‌نگرانه در آنالیز داشتند به سویی حرکت کردند که مستقل از شاخه‌های موضعی آنالیز رشد کنند. نگاه موضعی به آنالیز به آنالیز حقیقی خلاصه نمی‌شود بلکه آنالیز مختلط به مشابه آنالیز موضعی در بستر اعداد مختلط می‌پرداخت. این منجر به هندسه مختلط و ظهور بسیاری از مفاهیم کلیدی در هندسه جبری مانند مفهوم بافه گردید که البته نگرش آن‌ها نیز جزءنگر و تحلیلی است و حرکت از جزء به کل دارد تا حرکت از کل به جزء. هندسه جبری تحلیلی و هندسه مختلط بر فرمول‌بندی شماها توسط گروتندیک روی حلقه دل‌خواه بسیار تأثیرگذار بود.

۸ هندسه جبری تحلیلی و هندسه مختلط

هندسه جبری روی $\mathbb{C}$ و هندسه مختلط در یک لغت‌نامه با هم متناظر می‌شوند. مفاهیم بافه از هندسه جبری مختلط وارد هندسه جبری تحلیلی و از آن‌جا وارد هندسه جبری روی حلقه دل‌خواه شدند. مفاهیم تابع تحلیلی یک متغیره و چند متغیره به نوبه خود به معادلات دیفرانسیل کوشی–ریمان تحویل می‌شوند که به آنالیز مختلط برمی‌گردد و انتگرال کوشی–ریمان یکی از پایه‌ای‌ترین تکنیک‌های محاسباتی در مورد توابع مختلط است. بسط تیلور مختلط هم مشابه بسط تیلور حقیقی برای تمام توابع تحلیلی قابل محاسبه است. توابع حقیقی که بسط تیلور حقیقی دارند توابع تحلیلی حقیقی خوانده می‌شوند. مفاهیم هندسه مختلط با مفاهیم هندسه جبری تحلیلی با قضیه GAGA به هم مرتبط می‌شوند. در واقع ساختارهای مختلط تحلیلی فشرده واحد ساختارهای جبری هستند. یک‌ریختی تحلیلی هم‌ارزی جدیدی بین خمینه‌های مختلط به دست می‌دهد. برای مثال بازهای هم‌بند ساده از صفحه اعداد مختلط با تمام صفحه مختلط یا با داخل گوی واحد هم‌ارز تحلیلی هستند و این دو باز بنیادی با یک‌دیگر قابل تمایز هستند. در صورتی

که اگر با تقریب نگاشت‌های دو سوی پیوسته آن‌ها را بررسی کنیم با هم‌دیگر هم‌ارز خواهند بود. مساله رده‌بندی بازهای صفحه مختلط توسط ریمان کاملا بررسی شد، اما بازهای ناهم‌ارز در فضاهای مختلط ابعاد بالا بسیار پیچیده‌تر هستند. نکته دیگر مشابه p–نقش اعداد مختلط و هندسه تحلیلی صلب روی میدان‌های p–نقش بسته جبری است که از طرفی مشابه هندسه تحلیلی مختلط است و از طرفی حرکت پیوسته و مرتب روی چنین فضاهایی ممکن نیست. لذا مشابه انتگرال کوشی–ریمان در چنین هندسه‌ای وجود ندارد. با این حال ماهلر مشابهی از بسط تیلور را در این هندسه‌ها ثابت می‌کند که بسیار دور از انتظار است. تشابه اعداد حقیقی و اعداد p–نقش در بستار جبری بسیار پیچیده می‌شود چرا که بستار جبری آن‌ها هر دو با میدان اعداد مختلط یکی است. بنابراین اعداد مختلط همه ساختارهای p–نقش را درون خود پنهان کرده است. بسیاری از ساختارهای موضعی آنالیز مختلط در ریاضی–فیزیک نیز خودی نشان می‌دهند. از آن جمله خمینه‌های کالابی–یائو است که مشابه مختلط فضا–زمان هستند.

۹ ریاضی فیزیک

نگاه مکانیک نیوتونی و نسبیتی بدون شک هر دو جزءنگرانه و تحلیلی است اما در مورد مکانیک کوانتوم و فرزندانش از جمله نظریه میدان‌های کوانتومی چنین نیست. ظاهراً نظریه میدان‌های کوانتومی کل‌نگر هستند و فضای هیلبرت نیز مدلی کل‌نگرانه برای مکانیک کوانتوم است اما این کل‌نگری بر نگرشی جزء به کل بنا شده است. هم‌چنین است نظریه ریسمان‌ها. فضای توابع از ریسمان به فضا–زمان ساختاری موضعی است نه سرتاسری. چون این توابع پوشا نیستند و همه فضا–زمان را پر نمی‌کنند. در واقع کسی در فیزیک تا کنون قادر نبوده است که نگاه کل به جزء به طبیعت ارائه کند. ذهن ما پدیده‌های طبیعی را تجزیه می‌کند و یک به یک و جدا جدا آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهد. به ناچار مدل‌های ریاضی ساخته شده برای مدل‌سازی طبیعت نیز همگی بر حرکت‌شناختی از جزء به کل بنا شده‌اند. بنابراین ریاضیاتی که برای مدل‌سازی حرکت از جزء به کل استفاده می‌شود به ناچار از نوع ریاضیاتی است که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. گفته می‌شود که گروتندیک در اواخر عمر به مدل‌سازی فیزیکی پدیده‌های طبیعی اشتغال داشته. اما کارهای او در دست‌رس محققان قرار نگرفت و لذا نمی‌توانم تصور کنم که یک ذهن کل‌نگر چه‌گونه در مورد مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی فکر می‌کند. روش لاگرانژ و روش هامیلتون در مکانیک کلاسیک نیز بر اساس حساب تغییرات بنا شده اند که آن هم به نوعی موضعی در برابر سرتاسری است. هم‌چنین آزمون مشتق اول که به ما می‌گوید هر کجا مشتق صفر شود نقطه کمینه یا بیشینه بودن محتمل است. توابعی که در مکانیک کلاسیک به کار می‌روند معادله سرتاسری ندارند. در هندسه تحلیلی و هندسه جبری توابع و ریختارها همه با معادلات سرتاسری داده می‌شوند که بر خلاف فیزیک مدل‌هایی کل‌نگر هستند. جزءنگری و نگاه تحلیلی در جبر و نظریه اعداد و ترکیبیات هم به کار برده شده اند که چندان در مدلسازی فیزیکی به کار نرفته‌اند. البته مدل‌سازی گسسته در فیزیک مسبوق به سابقه است اما چنین فیزیکی به هیچ وجه مورد توجه ترکیبیات‌دانان قرار نگرفت. البته با وجود این که ترکیبیات به نوعی هندسی است بیش‌تر مباحث ترکیبیات کل‌نگرانه است اما با این حال

ترکیبیات جزءنگرانه نیز وجود دارد که به آن خواهیم پرداخت.

۱۰ جبر موضعی

جبر سنتی همان جبر موضعی است که به مطالعه ساختارهای جبری می‌پردازد که با مولدها و روابط تولید شده‌اند. جبر موضعی در برابر جبر سرتاسری قرار دارد که به جبری گفته می‌شود که در چارچوب نظریه رسته‌ها انجام می‌شود. منظور ما از جبر موضعی میدان‌های موضعی نیست، آن طور که در نظریه اعداد نامیده می‌شوند. نظریه اعداد شاخه‌ای کل‌نگرانه است و نگاه کل‌نگر به حلقه‌ها و میدان‌ها دارد. برای مثال یک میدان اعداد با تنها یک چندجمله‌ای مشخص می‌شود و ناورداهای سرتاسری این میدان‌ها و حلقه اعداد صحیح آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند. هر چند بسیاری از این ناورداها در چارچوب حرکت از جزء به کل و به صورت تحلیلی تعریف می‌شوند. چنین ساختارهایی می‌توانند به زبان هندسی نیز مدل‌سازی شوند. برای مثال به جبرها می‌توان گراف نسبت داد یا به گروه‌هایی متناهیا تولیدشده که متناهی رابطه در آن‌ها صدق می‌کند گراف کیلی نسبت می‌دهند که به نوعی سعی می‌کند کل‌نگرانه این اشیا را مورد مطالعه قرار دهد ولی این کل‌نگری هم خود در سایه حرکت از جزء به کل است. دگردیسی جبرهای ناجابه‌جایی و دگردیسی کوانتیزه از مثال‌های برخورد کل‌نگر با ساختارهای جبری است. در واقع جبرهای ناجابه‌جایی آن طور که عمق‌نگری فلسفی نتیجه می‌دهد موجوداتی جبری نیستند بلکه هندسی هستند و باید با روش‌های هندسه مطالعه شوند. نظریه نمایش‌ها در جبر یک نگاه کل‌نگرانه به جبرهاست که معمولا توسط جبردانان انجام نمی‌شود بلکه نظریه نمایش‌ها در مرز جبر و سایر شاخه‌های ریاضیات قرار دارد. نظریه نمایش گروه‌های متناهی به نوعی ترکیبیاتی است و سعی در کل‌نگری ساختارهای متناهی دارد که مورد علاقه ترکیبیات‌دانان است. نظریه نمایش جبرهای لی به هندسه و نظریه نمایش‌های نامتناهی‌البعد گروه‌های لی به نظریه اعداد مربوط می‌شوند. لازم به یادآوری است که جبر شاخه‌ای کلامی است و ریاضی‌دانان کلامی اکثرا تحلیلی و جزءنگر هستند بنابراین بیش‌تر جبردانان به جبر موضعی گرایش دارند. جبردانان کل‌نگر جزء قلیلی از ریاضی‌دانان کلامی هستند که طبعا گرایش به فلسفه قاره‌ای نیز دارند. جبردانان جزءنگر به خاطر سبک شناختی خود گرایش به فلسفه تحلیلی دارند. تفکر کلامی بیش از هر جای دیگری در ریاضیات در شاخه جبر خود را نشان داد و ایرانیان در فرمول‌بندی تفکر جبری از پیش‌گامان بودند. تأکید بر جنبه‌های کلامی تمدن بسیاری از ابعاد تمدن ایرانی را در برگرفته است.

۱۱ نظریه اعداد موضعی

نظریه اعداد شاخه‌ای اصولا کل‌نگرانه است اما نگاه موضعی و جزءنگرانه در بخش‌هایی از نظریه اعداد که با آنالیز مخلوط شده است دیده می‌شود. محاسبات گاوس درباره سرعت رشد اعداد اول، تابع زتای ریمان در قرن نوزدهم با نظریه فرم‌های پیمانه‌ای و روش دایره‌ای هاردی و لیتلوود و نظریه L-تابع‌ها در قرن بیستم ادامه پیدا کرد. جزءنگری نظریه تحلیلی اعداد همه در ارتباط

با ساختار اعداد حقیقی است که هر بار به نوعی در کنار ساختارهای عددی ظهور پیدا می‌کند. البته می‌توان با نگاهی محاسباتی به میدان‌های اعداد، نظریه جبری اعداد را هم جزء جبر موضعی به حساب آورد اما حقیقت این است که کل‌نگری مناسب از لغت‌نامه بین میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع نقش بسیار مهمی در توسعه نظریه جبری اعداد ایفا کرده است. نظریه توابع زتا و L–تابع‌ها ارتباطی بین نظریه تحلیلی اعداد و آنالیز مختلط را هم به میان می‌آورد. بسیاری از ایده‌های آنالیز مانند آنالیز فوریه در نظریه تحلیلی اعداد مشابه‌سازی شده‌اند. از مصادیق دیگر جزءنگری در نظریه اعداد اصل موضعی به سرتاسری این که در فرم‌های مربعی ظهور پیدا کرد و خیلی زود به یک فلسفه کلی در سراسر نظریه اعداد تبدیل شد. تا جایی که با فرمول‌بندی حلقه‌های Adel و Idel سراسر نظریه فرم‌های مدولار قابل فرمول‌بندی به این زبان جدید شد. این روش به ما اجازه می‌دهد مطالعه گروه‌های لی روی میدان‌های موضعی را در کنار مطالعه گروه‌های لی روی میدان‌های سرتاسری بچینیم و در کنار هم مقایسه کنیم. از ظهورات دیگر نگاه موضعی به سرتاسری نظریه آراکلو بود که در واقع نظریه شماهای گروتندیک را به کمال رساند. با کمک نظریه آراکلو نظریه ارتفاع شکوفا شد و هنوز به شکوفایی خود ادامه می‌دهد. بسیاری از قضایا و حدس‌های مهم هندسه جبری برای واریته‌های حسابی نیز فرمول‌بندی شدند و در واقع این نگاه هندسی به نظریه جبری شماها را شکوفا کرد. روی هم رفته نظریه اعداد موضعی به جهت هم‌سایگی با آنالیز جزءنگر و تحلیلی است نه به جهت هم‌سایگی با جبر موضعی. این نکته‌ای است که در بخش قبل نیز به آن اشاره شد. این مفهوم جزءنگری به توپولوژی اعداد حقیقی نزدیک است. اما در شاخه ترکیبیات نگاه جزءنگرانه مجردتر شده و به اعضای یک مجموعه به عنوان اجزاء آن مجموعه نگاه می‌کند. از این رو جزءنگری در ترکیبیات به کلی با جزءنگری در شاخه‌های دیگر ریاضیات متفاوت است.

۱۲ ترکیبیات موضعی

ترکیبیات اصولا علمی تصویری است و ریاضی‌دانان تصویری غالبا کل‌نگر هستند. حتی مهارت اصلی ترکیبیات که شمارش است به نوعی کل‌نگرانه است. تعداد اعضای این مجموعه یک ناوردای سرتاسری است که به اجزاء خاصی تمرکز ندارد. اما هنوز نگرش‌های تصویری و جزءنگرانه به ریاضیات گسسته فراوان هستند. برای مثال یک گراف شیئی است که عموما از برهم‌نهی اجزاء تعریف می‌شود. هر چند در بسیاری از مثال‌ها گراف‌های وابسته به اشیاء ریاضی تعریفی سرتاسری دارند. بسیاری از ناورداهای گراف‌ها نیز ناورداهای سرتاسری هستند. ولی با این حال نظریه گراف نظریه‌ای جزءنگرانه است. اگر بخواهیم گسسته‌سازی حسابان را جزئی از ترکیبیات به حساب آوریم مانند نظریه سری‌های نامتناهی و نظریه تفاضل متناهی به ریاضیاتی خواهیم رسید که جزءنگرانه و تحلیلی است چرا که از گسسته‌سازی ریاضیاتی که خود جزءنگرانه و تحلیلی است به دست آمده است. البته این‌ها شاخه‌ای از آنالیز عددی است و کم‌تر کسی آن‌ها را جزئی از ترکیبیات به حساب می‌آورد. هندسه ترکیبیاتی از طرف دیگر

عموما کل‌نگرانه است و کل‌نگری ریاضیات تصویری بر آن حکومت می‌کند.

۱۳ کلام آخر

بررسی تاریخ ریاضیات تحلیلی و جزءنگر از این لحاظ اهمیت دارد که جوانانی که شاخه تحقیقاتی خود در ریاضیات را انتخاب می‌کنند و جزءنگر هستند با طبیعت ریاضیات تحلیلی و جزءنگر در شاخه‌های مختلف ریاضیات آشنا شوند و آن را با طبیعت ذهن و شناخت خود مقایسه کنند و ببینند به کدام ریاضیات انس بیش‌تری دارند. ممکن است تصور شود که این انتخاب‌ها به طور طبیعی انجام می‌شود و لزومی به نظریه‌پردازی شناختی ندارد. اما تجربه نشان داده است که بسیاری از ریاضی‌دانان به ریاضیاتی که مناسب سبک شناختی آن‌ها نبوده است پرداخته‌اند و در نتیجه به شکوفایی استعدادهای شناختی خود نزدیک نشده‌اند و یا کسانی که از استعداد متوسطی برخوردار بوده‌اند چون به شاخه‌ای که برای سبک شناختی ایشان مناسب بوده است پرداخته‌اند در تحقیقات خود بسیار موفق بوده‌اند.