

عدد چیست؟

آرش دستگار

عدد در ریاضیات به کدام سو می‌تواند پیش برود، توضیح خواهیم داد. در آخر نیز به یک جمع‌بندی در پاسخ به این سؤال که «عدد چیست؟» خواهیم پرداخت و دستاوردهای بشر را در پاسخ به این سؤال خلاصه خواهیم کرد.

عددهای طبیعی

درک عددهای طبیعی به ماقبل تاریخ برمی‌گردد، ولی بعدها بسیاری از مهارت‌های شناختی را به‌عنوان پیش‌نیاز می‌پذیرد. مفهوم تناظر یک‌به‌یک، نمادگذاری، ترتیب و توالی، یک نظام طبقاتی که در نمایش دهنده‌ی لحاظ شده است، الگوریتم‌های محاسباتی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و تنوع الگوریتم‌ها، تنوع برقراری تناظرهای یک‌به‌یک، مفهوم «تاورد» (تغییرناپذیر و پایا)، و بسیاری مفهوم‌های دیگر، در شناخت لازم برای درک عددهای طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. درک بشر از عددهای طبیعی خود در مرحله‌های متفاوتی دچار تحول شده است. برای مثال، نمایش عددهای طبیعی تا کشف نظام دهنده‌ی نمایش عددها، مسیری طولانی را طی کرده است؛ چرا که نمایش دهنده‌ی نیازمند صفر است.

حال می‌پرسیم شناختی که به این سطح از درک عدد رسیده به چه معناست؟ و انسان را چگونه تجهیز می‌کند؟ عددهای طبیعی ابزاری ساده‌کننده برای برقراری تناظرهای یک‌به‌یک هستند و به‌طور عمده کارکرد شمارش همین است. به مدد این ابزار شناختی، انسان مجبور نیست برای برقرارکردن تناظر یک‌به‌یک بین دو مجموعه از اشیاء، تعداد زیادی از آن‌ها را حمل کند و به‌طور فیزیکی تناظر یک‌به‌یک برقرار سازد. از جمله مصداق‌های برقراری تناظر یک‌به‌یک ناظر بین

اشاره

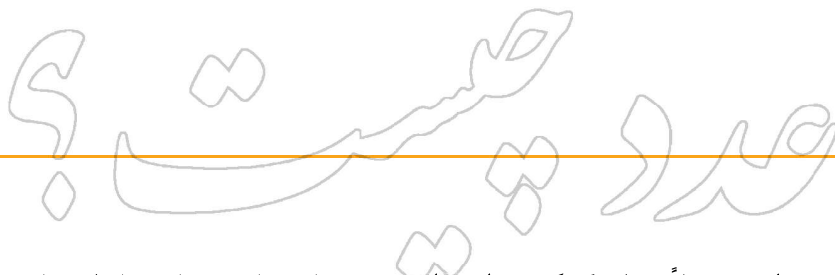
پاسخ به این سؤال که: عدد چیست؟ در تاریخ ریاضیات دچار تحولات بسیاری شده است. اما هنوز به سطحی نرسیده است که همه پدیده‌های طبیعی را بتوان «عددمند» کرد. در اینجا مسیر طی شده و مسیر پیش روی مفهوم عدد را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

اشاره

پاسخ به این سؤال که: عدد چیست؟ در تاریخ ریاضیات دچار تحولات بسیاری شده است. اما هنوز به سطحی نرسیده است که همه پدیده‌های طبیعی را بتوان «عددمند» کرد. در اینجا مسیر طی شده و مسیر پیش روی مفهوم عدد را مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

مقدمه

در مسیر تاریخ ریاضیات، پاسخ به این سؤال که: «عدد چیست؟» چه کارکردی دارد؟ و چگونه برای احصا و به‌حساب‌آوردن چیزی به کار می‌رود و موضوع این احصا چه می‌تواند باشد، در خود اطلاعات مهمی درباره‌ی شناخت ریاضی‌دانان ذخیره کرده است. در اینجا به این پرسش‌ها پاسخ می‌دهیم که ادراک مفهوم عدد و کاربرد آن در هر سطحی چه پیش‌نیازهای شناختی را لازم دارد و بعد چه عواقب شناختی را در پی دارد و شناخت ریاضی‌دان به هر سطح ادراک از مفهوم عدد چه توانایی‌هایی را برای او در پی دارد. همچنین انقلاب‌هایی را که در ادراک مفهوم عدد در ریاضیات اتفاق افتاده‌اند بررسی می‌کنیم و بعد به مفهوم عدد در قرن بیست‌ویکم می‌پردازیم و کاستی‌های آن را در احصا مورد مطالعه قرار خواهیم داد. همچنین درباره‌ی اینکه در آینده مفهوم



شد و محاسبه‌های عددهای مخلوط به زبان عددهای گویا ترجمه شدند. ادراک کسرهای واحد انسان را به شناختی مجهز می‌کند که کاربردش «اندازه‌گیری» است که همان کارکرد شمارش را دارد، ولی یک مرحله از آن پیشرفته‌تر است. اندازه‌گیری برای احصای تقریبی کمیت طول به کار می‌رود.

در اینجا مفهوم «تقریب» و مفهوم «تقریب دلخواه نزدیک» و مفهوم «دقت اندازه‌گیری» مطرح می‌شود که در مفهوم شمارش چندان آشکار نبود. در بستر شمارش هم، «شمارش تقریبی» می‌تواند معنی پیدا کند. در این نگاه جدید، شمارش هم نوعی اندازه‌گیری است و لذا می‌تواند به‌صورت تقریبی انجام شود. عددهای مخلوط کم‌کم صورت ریاضی مجردتری به خود گرفتند و فرمول‌بندی جدیدی پیدا کردند که به نام «عددهای گویا» شناخته می‌شوند.

عددهای گویا

به این نکته توجه داشته باشید که تا قبل از دکارت منظور از عددهای گویا، عددهای گویای مثبت به انضمام صفر بود. عددهای مخلوط فرمول‌بندی اولیه‌ای از عددهای گویا بودند که عددهای طبیعی را با کسرهای واحد ترکیب می‌کردند. اما عددهای گویا فرمول‌بندی جدیدی از عدد به‌دست می‌دهند که عددهای طبیعی را به شکل طبیعی‌تری درون خود می‌پذیرد. مفهوم ساده‌کردن کسر در کسرهای واحد هم وجود دارد، اما در عددهای گویا فرمول‌بندی طبیعی‌تری دارد. فرمول‌بندی عددهای گویا مقدمه‌ای برای مطالعه حل گویای «معادله‌های دیوفانتی»، در کنار حل این معادله‌ها در عددهای طبیعی است. بنابراین بیشتر عواقب نظری دارد تا عواقب عملی.

تجزیه به عوامل اول به قضیه مهمی تبدیل می‌شود. کشف اینکه همه عددها لزوماً قابل تجزیه به عوامل اول نیستند که توسط فیثاغورسیان انجام شد، ضربه‌ای محکم به تصویری وارد آورد که یونانیان از مفهوم عدد داشتند. نظریه‌ای که بیان می‌کرد، هر طولی با عددهای گویا قابل اندازه‌گیری است، با شکست مواجه شده بود. این موضوع از لحاظ شناختی بسیار مهم بود. چون اولین تجربه بشر در تئوری پردازی بود که یقین پیدا کرد در آن دچار خطا شده است؛ یقینی که به کمک روش استدلال ریاضی به‌دست آمده بود و از اولین دستاوردهای نظری این روش محسوب می‌شد.

اثبات نامتناهی بودن عددهای اول و اثبات اینکه $\sqrt{2}$ گویا نیست، از دستاوردهای مهم روش اثبات ریاضی محسوب می‌شوند که در نظریه عددها و هندسه به‌طور موازی به کار رفته‌اند. عددهای گویای مثبت اولین ساختار ریاضی محسوب می‌شوند. مفهوم ساختار وقتی بیرون کشیده شد که مشابهت

یک مجموعه با خودش است. مثلاً چوبانی که گوسفندانش را می‌شمارد، می‌خواهد ببیند آیا تناظر یک‌به‌یکی بین گوسفندان قبل از چرا و بعد از چرا وجود دارد؟ او می‌داند که اگر شمارش نشان دهد از تعداد گوسفندان کم شده است، یعنی تناظر یک‌به‌یک برقرار نمی‌شود و این یعنی به‌ویژه تناظر یک‌به‌یکی که هر گوسفندی به خودش مربوط می‌شود نیز وجود ندارد. این یعنی گوسفندی گم شده و از گله جدا مانده است.

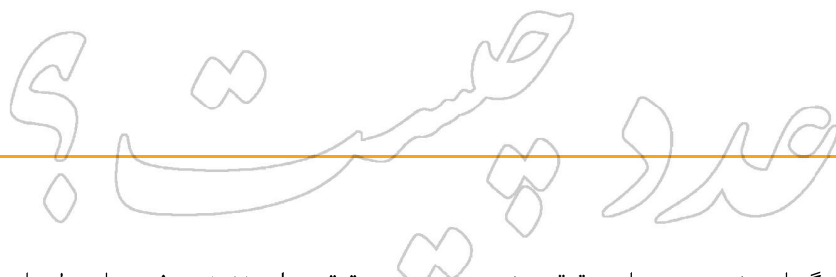
مهارت برقراری تناظر یک‌به‌یک به کمک شمارش، یک مهارت اولیه و بنیادی تمدن بشر است. تعامل اجتماعی بدون این مهارت بسیار ضربه می‌خورد؛ چون دادوستد مشکل می‌شود. مفهوم پول نیز وابسته به مفهوم شمارش عددهای طبیعی است. این مفهوم مقایسه ارزش کالاها را ممکن می‌کند و بدین‌وسیله دادوستد را آسان می‌سازد. همین ارتباطات اجتماعی عواقب بسیاری در شناخت بشر به دنبال داشته است. درک عددهای طبیعی از پیش‌نیازهای مهم زندگی جمعی و شکل‌گیری تمدن بشری است.

کسرهای واحد و عددهای مخلوط

مفهوم کسرهای واحد، در مصر باستان برای تقسیم نان بین کارگرانی که دستمزدشان سهمی از قرص نان بود، به‌وجود آمد. پیش‌نیاز درک این مفهوم، تقسیم قرص نان به تساوی بین چند نفر است. مفهوم تقسیم از محاسبه‌های مربوط به عددهای طبیعی بیرون می‌آید، اما در اینجا برای تقسیم یک واحد به کار رفته است. تناظر یک‌به‌یک به مفهوم تساوی بین قطعات نان که در واقع یک متغیر پیوسته هستند، تعمیم پیدا می‌کند. این مفهوم تساوی پیش از مفهوم کسر واحد نیز برای مقایسه متغیرهای پیوسته به کار می‌رفته که معاملات را تسهیل می‌کرده است. مثلاً برای مقایسه دو کیسه گندم، می‌توانستند وزن آن‌ها را مقایسه کنند و یا می‌توانستند از یک پیمانه برای احصای تعداد گندم‌ها در یک کیسه گندم بهره بگیرند.

تساوی شکل‌های هندسی مفهومی بود که در تقسیم قرص نان به کمک گرفته می‌شد. برای مثال، این سؤال که دایره را چگونه به کمک خط‌کش و پرگار به قسمت‌های مساوی تقسیم کنیم، در تمدن یونان بررسی و در کاشی‌کاری‌های اسلامی به کار گرفته شد. عددهای مخلوط به‌طور طبیعی برای احصای مزد کارگران به کار رفتند و حساب جمع و تفریق عددهای مخلوط، به‌عنوان توسعه‌ای از حساب عددهای طبیعی فرمول‌بندی شد.

در ادامه جمع و تفریق کسرها مطرح شدند که مفهوم‌هایی مانند تجزیه به عددهای اول و کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک را به‌وجود آوردند. کم‌کم زبان کسرهای بزرگ‌تر از واحد به‌عنوان یک زبان ساده‌کننده به کار گرفته



عدد حقیقی مواجه نشوند و مفهومیها و مدل سازی حرکت پیوسته هنوز برای ایشان پیچیده است. تعریف دقیق عددهای حقیقی در قرن نوزدهم توسط «دنباله‌های کوشی» و به‌طور مستقل به کمک «برش‌های دکیند» انجام گرفت که هر دو به‌نوعی بر مفهوم حد استوار بودند.

مفهوم متغیر

مفهوم متغیر به‌طور مستقل در دستان خیام و بهاسکارا (ریاضی‌دان هندی) خلق شد. در این مفهوم، نقطه‌ای که روی خط حرکت می‌کند، بر عددی که در محور عددها حرکت می‌کند، منطبق شده است. در نظر گرفتن خط به‌عنوان مدلی برای مجموعه همه عددهای حقیقی، مقدمات را برای در نظر گرفتن عددهای منفی فراهم می‌کند. نیم‌خط مدلی برای عددهای حقیقی مثبت خواهد بود. خط که ساختاری هندسی است، به یک ساختار عددی تبدیل خواهد شد. جمع و ضرب متغیرها نیازمند انتخاب مبدأ و انتخاب واحد است. خط با همین دو انتخاب به محور عددها تبدیل خواهد شد. این کار مفهوم دستگاه مختصات را در خود دارد و نسبت دادن عدد به یک نقطه کانونی و خداداد نیست. انتخاب دستگاه مختصات برای خط و صفحه سرنوشتی طولانی در علم فیزیک و مدل سازی ریاضی پدیده‌های طبیعی دارد.

اما حساب متغیرها آغاز تفکر جبری است. متغیر را می‌توان با یک عدد خاص و یا هر عددی دلخواه جایگزین کرد، ولی لزوماً با هیچیک از این عددها به‌طور بالفعل برابر نیست. این ساده‌ترین حالت مفهوم مکان هندسی یا مفهوم فضای «پودمانی» (مدولی) است که البته اینجا با صورت جبری آن سروکار داریم. این مفهوم متغیر در سیر تاریخی خود به مفهوم تابع منجر خواهد شد. آموزش فعلی مفهوم متغیر در ریاضیات مدرسه، بر آنچه گفتیم منطبق نیست. چرا که بر مفهوم حل معادله جبری استوار شده است که در نهایت متغیر مقادیرهای خاص عددی را به خود می‌پذیرد.

کلید به هم پیوستن مفهومیهای متغیر و حل معادله‌ها، ظهور عددهای منفی است. چون حل معادله به این سؤال تبدیل می‌شود که به ازای کدام مقادیرهای x ، دو طرف تساوی با هم برابرند و با وجود عددهای منفی این سؤال منطبق است با اینکه: به ازای کدام مقادیرهای x عبارتی بر حسب x ، مثلاً یک چندجمله‌ای، برابر صفر می‌شود که البته فرمول‌بندی هندسی آن به زبان تابع‌ها نیز امکان‌پذیر است. نسبت دادن حرکت یک ناورای عددی به حرکت یک شکل هم‌زمان با حفظ شرایط برای درک تغییر و مفهوم متغیر بسیار کارآمد است. زیرا در این حالت متغیر ما معنی دار است و به‌عنوان ناورای متحرک، تغییر

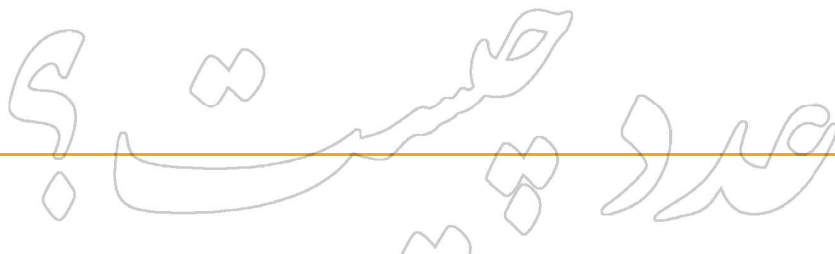
ساختاری عددهای گویای مثبت و عددهای حقیقی مثبت به نمایش گذاشته شد. هر دو ساختار عضو خنثای جمع و عضو خنثای ضرب و هر دو ساختار معکوس ضربی دارند. اما مثال $2\sqrt{2}$ به ما می‌گوید که این دو ساختار مشابه با هم یکی نیستند و بر هم منطبق نمی‌شوند. عددهای حقیقی به‌عنوان مدلی فرضی برای اندازه‌گیری طول‌های پاره‌خط معرفی شده بودند.

عددهای حقیقی

عددهای حقیقی تاریخی طولانی را پشت سر گذاشتند تا به‌طور دقیق تعریف شدند. اولین قدم توسط اقلیدس برداشته شد که جمع و ضرب پاره‌خط‌ها را به کمک ناوردهای طول و مساحت تعریف کرد. خیام این انتقاد را وارد کرد که حاصل ضرب دو عدد، دیگر از جنس طول نیست، بلکه از جنس مساحت است. این بود که پیشنهاد کرد عددهای حقیقی را به‌عنوان نسبت پاره‌خط‌ها یا مساحت‌ها تعریف کنیم. با این وصف جمع و ضرب نسبت‌ها خود را داشتند و به‌عنوان یک نسبت قابل تعریف بودند. نزد اقلیدس یک عدد حقیقی مثبت طول یک پاره‌خط بود و نزد خیام نسبت بین طول‌ها یا نسبت بین مساحت‌ها یا نسبت بین حجم‌ها و مانند آن بود. مفهوم‌های طول، سطح و حجم مفهوم عدد را به‌عنوان ناورای یک ساختار هندسی در نظر می‌گرفتند.

روابط عددی بین طول‌ها، مساحت‌ها و حجم‌ها نزد اقلیدس هویت جدیدی به مفهوم عدد می‌داد. قضیه فیثاغورس اولین نمونه از این نوع روابط طولی بود. روابط طولی مزبور اولین ظهور مفهوم قانون در تاریخ علم بودند. پیش‌نیاز شناختی این قوانین درک حرکت شکل در عین حفظ شرایط شکل است. مثلاً یک مثلث حرکت و تغییر کند و در عین حال همواره مثلث قائم‌الزاویه باقی بماند و بعد قضیه فیثاغورس به‌عنوان یک قانون و یک ساختار عددی ناوردا برای همه این مثلث‌ها در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای درک عددهای حقیقی، حرکت پیوسته یک شکل باید تصور شود و یک مثال مهم حرکت یک شکل، حرکت نقطه روی خط است که به مفهوم متغیر منجر می‌شود که در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت.

اینکه نقطه روی خط به‌عنوان مدلی برای تغییر پیوسته، مثلاً مدلی برای زمان در نظر گرفته شود، ایده‌ای بود که اولین بار توسط خیام مطرح شد و در نهایت در دستان دکارت به کشف عددهای منفی و اختراع مختصات دکارتی انجامید. مهارت کار با شکل‌های هندسی که در عین حفظ شرایط حرکت می‌کنند، برای دانش‌آموزانی که مسئله‌های هندسه اقلیدسی را حل می‌کنند، معمولاً در سنین دبیرستان شکل می‌گیرد. قبل از شکل‌گیری این مهارت شناختی بهتر است دانش‌آموزان با مفهوم



می‌شوند، فکر کنید. درست مثل خانواده‌ای از شکل‌های هندسی که در کنار هم مورد مطالعه قرار می‌گرفتند. بهتر است به مساحت یا حجم به‌عنوان تابعی از یک شکل که در حال حرکت است نگاه کرد و بعد کم‌کم تابع‌های مجردتر را تعریف کرد. حتی می‌توان به یک پاره‌خط مربع حاصل از آن را نسبت داد و این موجب درک هندسی مفهوم تابع خواهد شد. اینجا پیش‌نیاز درک مفهوم تابعی خواهد بود که عدد را به عدد می‌برد. دانش‌آموز انتظار خواهد داشت که هر تابعی فرمولی داشته باشد و این تصور تا سال‌ها مشکل‌ساز نخواهد بود.

پس برای معرفی مفهوم تابع از هندسه شروع می‌کنیم و بعد با تجرید آن به جبر بازمی‌گردیم. مفهوم تابع ترجمه عدد به شکل و حرکت از جبر به هندسه را به کمک مفهوم نمودار تابع در ذهن دانش‌آموز روان‌تر می‌کند. پیش‌نیاز شناختی درک مفهوم تابع این است که ذهن بتواند جسم متحرک را به‌عنوان جسم صلب تجرید کند و این کار با فضائنگاری زمان ممکن می‌شود. مثلاً اگر حرکت یک جسم را در فضا - زمان رسم کنیم، به یک شکل هندسی صلب خواهیم رسید. مثلاً نقطه‌ای را که روی یک محور حرکت می‌کند، به شکل نمودار یک تابع از محور زمان به محور عددها ببینیم. این درجه تجرید که جسم متحرک را ذهن بتواند صلب ببیند و به‌عنوان جسم صلب مطالعه کند، مرحله‌ای شناختی در علم هندسه است که پیش‌نیاز درک این نکته است که چرا مفهوم تابع همان مفهوم عدد متغیر است.

نتیجه و میوه چنین ادراکی در ذهن عواقب تکان‌دهنده‌ای دارد و از جمله آن‌ها مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی به کمک مفهوم تابع است. اگر مجموعه همه تابع‌ها را در نظر بگیریم، همان‌طور که همه عددها را در نظر می‌گرفتیم، می‌بینیم که تابع‌ها را نیز مانند عددها می‌توان جمع و ضرب کرد. این به ما می‌گوید که تابع‌ها نیز مانند عددها در یک ساختار عددی قرار می‌گیرند و این دلیل دومی است برای اینکه چرا مفهوم تابع به‌نوعی همان مفهوم عدد است که غنی‌سازی شده است.

ساختار عددی

عددهای طبیعی، عددهای صحیح، عددهای گویا و عددهای حقیقی همه ساختارهایی جبری هستند که امروز آن‌ها را به‌عنوان مثال‌های مادر برای نیم‌حلقه، حلقه‌های جابه‌جایی و میدان می‌شناسیم. همین نگاه سبب شد عددهای مختلط را به‌عنوان یک ساختار عددی ببذیریم، میدان‌های عددها و حلقه عددهای صحیح آن‌ها را مطالعه کنیم، به مطالعه میدان‌های تابع‌های گویا و یا میدان‌های تابع‌ها روی یک فضای هندسی دلخواه بپردازیم، و این موجودات را چون در یک ساختار عددی می‌نشینند، عدد

چیزی را نشان می‌دهد که حرکت آن در دست ما نیست. مثلاً یک مستطیل که حرکت می‌کند، مساحت آن نیز به‌عنوان یک عدد در حال تغییر است.

عددهای منفی

عددهای طبیعی که منفی می‌شوند و عددهای صحیح را می‌سازند و عددهای منفی گویا و عددهای منفی حقیقی موجوداتی رسمی (فرمال)، نمادین و مجرد هستند که توانایی کار و محاسبه با عددها را و نیز به‌کاربردن عددها را به‌عنوان ناوردهای پدیده‌های طبیعی توسعه می‌دهند. چنین کاربردهایی سبب می‌شوند که ذهن، آن‌ها را هم به رسمیت بشناسد. این مصداق‌های زندگی روزمره نوعی مجردسازی ریاضی هستند که آن مجردسازی را قابل قبول جلوه می‌دهند. نظریه عددهای منفی، هم آموختن ریاضی، هم شناخت عدد، هم مدل‌سازی هندسی عدد، و هم کاربرد عددها را آسان می‌کند. به جرئت می‌توان گفت بدون عددهای منفی علم جبر به پختگی لازم نمی‌رسید.

پیش‌نیازهای شناختی درک عددهای منفی، درک ضرب کردن در -1 - به‌عنوان یک عملگر روی محور عددهاست که بر تقارن مرکزی خط حول یک نقطه آن انطباق دارد: $(-1) \cdot 1 = 1$ بر درک هندسی همین عملگر استوار است که به یک نگاه کل‌نگرانه به عددها و به محور عددها نیاز دارد. البته دانش‌آموزان کلاس ششم به چنین درکی نمی‌رسند و روش کار با عددهای منفی را به خاطر می‌سپزند و درست نمی‌فهمند. مقایسه X و X کمک بزرگی به این کل‌نگری می‌کند که در کلاس‌های بالاتر مطرح می‌شود. پس پیش‌نیاز شناختی درک عددهای منفی درک هندسی تبدیل مرتبه 2 روی محور عددهاست که به ورزیدگی فراوان در درک تبدیلات شکل‌های ساده هندسی نیاز دارد. اما ساختار شناختی، پس از اینکه به عددهای منفی مجهز شد، چه توانایی‌هایی به دست آورد؟

«حرکت هندسه به جبر» مهارتی است که در مفهوم متغیر و در مفهوم عددهای حقیقی نیز حاضر بود و در اینجا امکان حرکت از جبر به هندسه و بازگشت از هندسه به جبر تجربه می‌شود. بنابراین ذهن از یک «صیگان» (پارادایم) به صیگان دیگر می‌رود و بازمی‌گردد و بین آن‌ها رفت‌ووبرگشت می‌کند. این پدیده جدیدی است که در شناخت اتفاق می‌افتد. در آینده دانش‌آموز با مشابه هندسی بسیاری از مفهوم‌های جبری و مشابه جبری بسیاری از مفهوم‌های هندسه مواجه خواهد شد.

مفهوم تابع

به تابع به‌عنوان خانواده‌ای از عددها که در کنار هم مطالعه



فرض کنیم.

همین‌طور می‌توان رسته‌ای از رسته‌ها را در نظر گرفت. در اینجا سعی بر این است که به‌جای ساختن یک ساختار از درون، آن را از طریق ریختارهایش به ساختارهای دیگر مطالعه کنیم. این عمل را برون‌شناسی ساختارها یا جامعه‌شناسی ساختارهای نامم که در برابر درون‌شناسی ساختارها یا روان‌شناسی ساختارها قرار می‌گیرد که روش سنتی در ریاضیات بوده است.

مسلماً چنین نگاهی به ساختار بسیار کل‌نگرانه است و مطالعه ساختارها در چنین «صورت‌گرایی» (فرمالیسمی) ساختار شناختی انسان را ساختار ساز و ساختار شناس می‌کند و این همان کاری است که لایه تجرید عقل انسان انجام می‌دهد. پس می‌توان گفت: «مطالعه ساختارهای ریاضی عقل را تقویت می‌کند و آن را برای مطالعه ساختارهای پیچیده‌تر، از جمله ساختارهای اسمای الهی، آماده می‌کند.

دگردیسی ساختارهای ریاضی

همان‌طور که عدد حرکت می‌کند و مفهوم متغیر و مفهوم تابع را می‌سازد، یک ساختار ریاضی نیز می‌تواند حرکت کند و مفهوم خانواده ساختارهای ریاضی را به‌دست دهد که آن را در چارچوب دگردیسی ساختارهای ریاضی مطالعه می‌کنند. دگردیسی در ساختارهای هندسی معنای متفاوتی با دگردیسی در ساختارهای جبری دارد. دگردیسی هندسی همان مفهوم هندسی خانواده‌ای از ساختارهای هندسی است که خود به‌عنوان یک فضای هندسی مرجع در نظر گرفته می‌شود و به یک فضای پایه دگردیسی نگاشته می‌شود. تار بالای سر هر نقطه دقیقاً همان فضایی است که در حال دگردیسی است. به کمک مفهوم فضای «پودمانی» (مدولی)، دگردیسی هندسی به حرکت یک نقطه در یک فضا تبدیل می‌شود که شبیه همان مفهوم متغیر است.

مفهوم دگردیسی در جبر یک ساختار جبری مرجع است که به چندین ساختار جبری خارج‌قسمت خلاصه می‌شود. این ساختار جبری مرجع را خانواده ساختارهای خلاصه‌شده در نظر می‌گیرند. فرق بین دگردیسی جبری و دگردیسی هندسی در این است که فضاهای هندسی و دگردیسی‌شده زیر فضاهای فضای هندسی مرجع هستند، اما در دگردیسی جبری، ساختارهای جبری و دگردیسی‌شده ساختارهای خارج‌قسمت ساختار جبری مرجع هستند. در هر حال، دگردیسی هندسی و دگردیسی جبری به‌نوعی شبیه هم‌اند.

همان‌طور که در هندسه فضاهای پودمانی تعریف می‌شوند که خانواده همه فضاهای هندسی از یک دست را «پارامتریزه» می‌کنند، در جبر نیز ساختارهای جبری جهانی تعریف می‌شوند که کوچک‌ترین ساختار جبری هستند که ساختارهای جبری

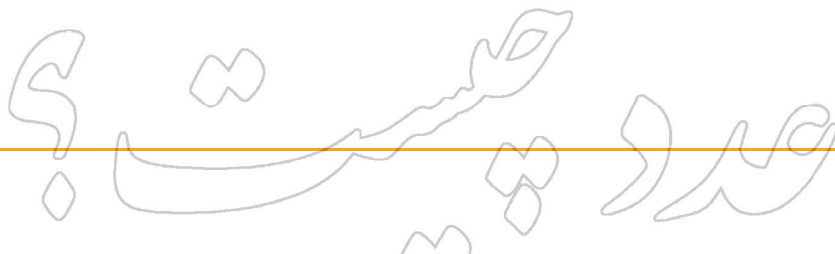
امروز می‌دانیم که می‌توان به هر عضو یک حلقه جابه‌جایی به‌عنوان عدد نگاه کرد و می‌دانیم صحیح‌تر است حلقه‌های ناجابه‌جایی را ساختاری هندسی فرض کنیم و نه یک ساختار عددی! به دلایل این تبعیض نژادی در جایی دیگر و در فرصتی دیگر خواهیم پرداخت. مسلماً درک مفهوم ساختار عددی به کل‌نگری به مجموعه همه عددهای مورد مطالعه نیاز دارد. بلکه اعمال حسابی را نیز لازم است کل‌نگرانه بفهمیم. از این رو درک نظریه جبری عددها اگرچه کلامی است، اما کل‌نگرانه است.

از ابزارهای مطالعه ساختارهای عددی نمایش این ساختارها برحسب مولدهاست که پیش‌نیاز آن درک مفهوم ریاضیات ساختارگرا و قابل‌محاسبه است. ساختارهای عددی متفاوت هر کدام کارآمدی خاصی به شناخت می‌دهند که برخی پرکاربردترند، مانند میدان عددهای مختلط $\mathbb{C}$ و برخی تخصصی‌ترند، مثل میدان‌های موضعی و میدان‌های سراسری که در نظریه عددها وارد می‌شوند. درک مفهوم ساختار عددی تنوع عجیبی به پاسخ سؤال «عدد چیست؟» می‌دهد و این درک وقتی ظرفیت (پتانسیل) واقعی خود را نشان می‌دهد که به مطالعه مفهوم ساختار ریاضی به‌طور کلی بپردازیم که به‌نوبه خود درک آن بر درک ما از ساختار عددی سایه خواهد انداخت و آن را پیش خواهد برد.

مفهوم ساختار در ریاضیات

باید تعریفی جهان‌شمول در ریاضیات به‌دست دهیم که ساختارهای جبری، ساختارهای هندسی، ساختارهای تجزیه و تحلیلی (آنالیزی) و ساختارهای ترکیبیاتی را در بر بگیرد، تا بعد بتوانیم همه این ساختارها را در کنار هم مطالعه کنیم، پیش‌نیازهای شناختی آن‌ها را بشناسیم و عواقب شناختی آن‌ها را مطالعه کنیم. اما تاکنون همین قدر می‌دانیم که ریختار بین ساختارها، زیرساختارها، ابرساختارها و ساختارهای خارج‌قسمت، مفهوم‌هایی کلیدی در مطالعه ساختارها هستند. مثلاً می‌توان به ساختارهای خارج‌قسمت به‌عنوان ساختارهای خلاصه‌شده ساختار اولیه نگاه کرد.

مفهوم ریختار بین ساختارها، همانند حرکت از یک صیغگان (پارادایم) به یک صیغگان دیگر است. به یک ساختار ریاضی می‌توان به‌عنوان یک عالم نظر کرد و ریختار بین ساختارها را رابطه‌ای شناختی بین آن دو عالم در نظر گرفت. البته زبان نظریه رسته‌ها این ریختار را به کار می‌گیرد و در آن ریختار بین رسته‌ها تعریف می‌شود که به آن «تبدیل طبیعی» می‌گویند و آن نگاشتی از عالمی از عوالم به عالمی دیگر از عوالم است و



مورد نظر را پارامتریزه می‌کند. بنابراین تمام اطلاعات ساختارهای جبری دگردیسی‌شده در یک ساختار جبری بزرگ خلاصه می‌شوند. با مطالعه ساختار جبری جهانی آماده خواهیم شد دگردیسی ساختارهای عددی را که نوعی از ساختارهای جبری هستند، مطالعه کنیم و به تعریفی جدید از شمارش برسیم.

ساختارهای جهانی

همان‌طور که حد یک‌سری نقطه هم‌گرا روی محور عددی تعریف می‌شود، حد یک‌سری عدد هم قابل تعریف است. در نظریه رسته‌ها حد مستقیم و حد معکوس یک‌سری ساختار ریاضی نیز به کمک نمودارهای ریختارهای بین ساختارها قابل تعریف است. حد یک‌سری ساختار با یک خاصیت جهانی تعریف می‌شود. خاصیت جهانی حد مستقیم و معکوس چنین است که شیء جهانی باید در یک نمودار جابه‌جایی بزرگ صدق کند و اگر شیء دیگری نیز در همان نمودار جابه‌جایی صدق کرد، بین آن شیء و شیء جهانی ریختاری وجود داشته باشد که همه نمودارها را جابه‌جا کند.

حد یک‌سری ساختار را هم به‌صورت درون‌شناسی و هم به‌صورت برون‌شناسی می‌توان تعریف کرد. مفهوم حد ساختارها در هر رسته‌ای وجود ندارد. در بسیاری از مثال‌های عملی، حد یک‌سری ساختار همه اطلاعات آن ساختارها را در خود ذخیره دارد. بنابراین گویی همه ساختارها در یک ساختار خلاصه و یا احصا شده‌اند. این همان کاری است که شمارش انجام می‌دهد. بلکه این کار از شمارش بیشتر رفته است و همه اطلاعات را حفظ می‌کند. بنابراین بهتر است این روش شمارش را «احصا» بنامیم. در احصا یک‌سری ساختار را در یک ساختار یگانه خلاصه می‌کنیم و می‌گنجانیم. در احصا، ساختارهای احصاشده نقش عدد را ایفا می‌کنند و ساختار حاصل احصا نقش شمارش را بر عهده دارد. با این وصف، می‌بینیم که مفهوم عدد به مفهوم ساختار ریاضی تعمیم پیدا کرده و مفهوم شمارش و اندازه‌گیری هم به تناسب معنی جدیدی یافته است.

نظریه رسته‌ها و مفهوم خاصیت جهانی و ساختار جهانی در نیمه اول قرن بیستم ارائه شده‌اند و دیدگاه جدیدی به شمارش ساختارها محسوب می‌شوند. حال به عواقب فلسفی مفهوم احصای ساختارها و پیش‌نیازهای شناختی و عواقب شناختی آن خواهیم پرداخت. پاسخ به این سؤال‌ها دیدگاهی جدید نسبت به پاسخ این پرسش را که «عدد چیست» پیش روی ما قرار خواهد داد.

عواقب شناختی شمارش توسط ساختار جهانی

همان‌طور که عددهای حقیقی در نهایت به شکل حد یک‌سری عدد گویا صورت دقیق ریاضی پذیرفتند، بسیاری از

دگردیسی ساختارهای حسابی

پس از درک ساختار به‌عنوان تعمیم عدد، به ساختارهای حسابی برمی‌گردیم. منظور از ساختارهای حسابی ساختارهایی هستند که روی یک حلقه دلخواه و به‌خصوص روی حلقه عددهای صحیح قابل تعریف هستند. این ساختارها را می‌توان به ساختارهایی روی میدان‌های متناهی که خارج‌قسمت‌های ساختار عددهای صحیح هستند نگاشت و در آن ساختارها خلاصه کرد. پس از دیدگاهی یک ساختار روی عددها صحیح، دگردیسی ساختارهایی روی میدان‌های متناهی است. این حقیقتی است که اهمیت عددهای اول را تا عمیق‌ترین اعماق به نمایش می‌گذارد. مفهوم «شما» و به‌خصوص «شماهای حسابی» که به ساختارهای روی عددهای صحیح مربوط می‌شوند، از همین جا ناشی می‌شود. بنابراین یک شما روی عددهای صحیح



هم به‌نوعی حاصل شمارش و یا بهتر بگوییم احصای ساختارهایی روی میدان‌های متناهی است.

البته شماهای روی ساختار عددهای صحیح و سایر ساختارهای روی عددهای صحیح نیز می‌توانند در خانواده‌هایی مطالعه و در ساختارهای بزرگ‌تری احصا شوند. در آنچه گفتیم، می‌توان به‌جای عددهای صحیح، حلقه عددهای صحیح و میدان‌های عددی را گذاشت، یا حلقه عددهای صحیح موضعی در میدان‌های موضعی گذاشت و ساختارهای متفاوت روی این حلقه‌ها را در یک ساختار یگانه خلاصه کرد. این ساختارها را «ساختار جهانی حسابی» می‌نامند و مصداق روشن‌تری از شمارش ساختارها یا بهتر بگوییم احصای ساختارها هستند. با معرفی ساختارهای جهانی حسابی می‌خواهیم بگوییم برای درک مفهوم احصا مجبور نیستیم پای خود را از شاخه نظریه عددهای بیرون بگذاریم. درون همین شاخه ریاضی پیچیدگی‌های لازم و مثال‌های کافی برای درک مفهوم احصا وجود دارد. به‌علاوه، در این مثال‌های حسابی ارتباط احصا و معنی شمارش سنتی روشن‌تر از قبل قابل‌فهم است.

ساختارهای جهانی حسابی

اینکه خلاصه‌کردن ساختارها در یک ساختار بزرگ را «شمارش» بنامیم و به کمک آن بین ساختارها تناظر ایجاد کنیم، اولین بار توسط وایلز در اثبات زمین شکافنده‌اش از قضیه فرما ظاهر شد و پس از آن، این تعمیم از معنی شمارش به‌صورت روزافزونی مورد توجه نظریه عددهادانان قرار گرفت. وایلز به کمک حلقه دگردیسی جهانی همه نمایشهای گالوایی وابسته به خم‌های بیضوی را در یک نمایش گالوایی بزرگ خلاصه کرد و به کمک «جبر هکه» همه اطلاعات فرم‌های «پودمانی» (مدولار) را در یک نمایش گالوایی دیگر خلاصه کرد و به‌منظور اثبات یکرخت‌بودن این دو حلقه بزرگ، تناظر یک‌به‌یکی بین خم‌های بیضوی و فرم‌های پودمانی تناظر یک‌به‌یک برقرار ساخت. برقراری این تناظر یک‌به‌یک که قبلاً توسط شیمورا- تانیاما- ویل حدس زده شده بود، به ما نشان می‌دهد که چرا خلاصه‌کردن چندین ساختار در یک ساختار مادر، همان نقشی را ایفا می‌کند که شمارش می‌توانست ایفا کند، و آن نقش، برقراری تناظر یک‌به‌یک است؛ تناظر یک‌به‌یکی که بین ساختارهای ریاضی برقرار می‌شود. از آنجا که هنوز نتوانسته‌ایم به‌طور مستقیم به هر خم بیضوی یک فرم پودمانی نسبت بدهیم، روش وایلز برای برقراری تناظر یک‌به‌یک شاهکاری در برون‌شناسی تناظرهای یک‌به‌یک است. شاید روزی فن‌هایی (تکنیک‌هایی) در دسترس ما قرار بگیرند که بتوانیم با ساختار درونی یک خم بیضوی، مستقیماً فرم

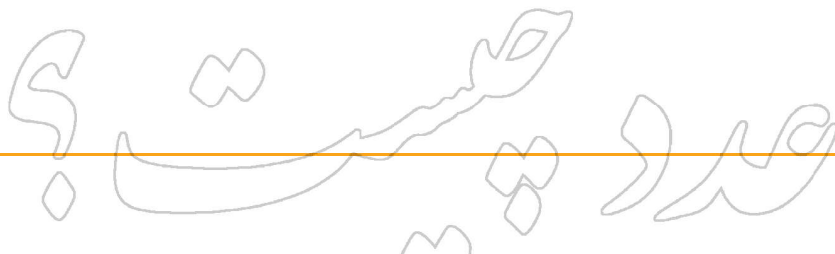
پودمانی وابسته به آن را بسازیم. آن روز دیگر روش وایلز برای برقراری تناظر یک‌به‌یک ناکارآمد جلوه خواهد کرد و مصنوعی به نظر خواهد رسید. اما وایلز در واقع هدیه‌ای به شناخت نظریه عددهادانان اعطا کرده است که ماندگار خواهد ماند و آن هدیه تعمیمی از مفهوم شمارش است. در احصا، یک ساختار ریاضی می‌تواند برای احصای ساختارهای ریاضی دیگر به کار رود. اگر پدیده‌های طبیعی را در یک شیء یا ساختار ریاضی احصا کنیم، به این کار «مدل‌سازی ریاضی» می‌گویند.

مفهوم مدل‌سازی ریاضی

در چارچوب فیزیک زندگی روزمره، اولین مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های طبیعی در تاریخ بشر توسط ارشمیدس انجام شد و آن در کشف مفهوم «هرم» بود. در چارچوب فیزیک کلان و ستاره‌شناسی نیز مدل‌های ریاضی فراوانی برای حرکت ستارگان ارائه شدند که در این زمینه از مدل ائودوکسوس، مدل بطلمیوس، مدل نیوتن و مدل نسبیت انیشتین می‌توان نام برد. پس از اختراع حسابان و فرمول‌بندی مکانیک نیوتنی، بسیاری از پدیده‌های طبیعی توسط معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی شدند. یک معادله دیفرانسیل از آنجا که با متناهی عدد مشخص می‌شود، می‌تواند به‌عنوان احصای عددی پدیده‌های طبیعی تلقی شود. کم‌کم مفهوم مدل ریاضی تعمیم پیدا کرد و به معنی تقریب پدیده‌های طبیعی با یک ساختار ریاضی درآمد. به‌تدریج این ساختارهای ریاضی برای مطالعه پدیده‌های انسانی نیز به کار رفتند.

گاهی پیش می‌آمد که یک مدل ریاضی مشترک برای مطالعه چندین پدیده متفاوت طبیعی و انسانی به کار گرفته می‌شد. این بود که مدل‌های ریاضی نیز به‌خودی‌خود موضوع مطالعه قرار گرفتند. اما همیشه اینطور تصور می‌شد که یک مدل ریاضی، پدیده‌های مورد نظر را تقریب می‌زند و به‌طور تقریبی مطالعه می‌کند. همیشه می‌توان برای مطالعه دقیق‌تر، مدل ریاضی بهتری ارائه کرد. اما این مدل‌های ریاضی دقیق و دقیق‌تر با هم مرتبط نیستند و نمی‌توان بایدهال‌سازی، یک مدل ریاضی جهانی برای یک پدیده ارائه کرد که آن را با هر تقریب دلخواهی قابل‌مطالعه کند و تقریب بزند. این نوعی از شناخت تقریبی پدیده‌ها بود.

در چنین شناختی انتخاب یک مدل می‌تواند عواقب عملی و نظری خاصی داشته باشد که ریاضی‌دان باید مواظب باشد صحت و صدق هر یک از این عواقب را در پدیده‌ای طبیعی جداگانه به نقد بگذارد. اینجا مفهوم جدیدی ظهور می‌کند و آن «مدل شناختی» است. شناختی که با مدل‌سازی موضوع مورد مطالعه می‌تواند بشناسد و چنین شناختی قوانین خود را دارد. اما



می‌تواند بسیاری از موضوع‌ها را که قبلاً قابل شناخت نبودند، در تور شناخت محصور کند.

مفهوم مدل‌سازی رایانه‌ای

مدل‌سازی رایانه‌ای نوع خاصی از مدل‌سازی ریاضی است که در عصر اطلاعات ظهور کرده است. در این نوع مدل‌سازی معمولاً از ساختن یک ساختار ریاضی پرهیز می‌شود و می‌کوشند پدیده به زبان داده‌های عددی و نه به زبان ساختار ریاضی ترجمه شود. چون رایانه می‌تواند حجم بالایی از عددها را در قالب مدل‌سازی تحلیل کند، مدل‌سازی رایانه‌ای می‌تواند پدیده‌هایی را مطالعه کند که لزوماً ریاضی نیستند. از جمله، رایانه آب‌وهوای منطقه‌های متفاوت کره زمین را مدل‌سازی می‌کند. چرا که این سامانه آشوبناک است و مدل‌سازی تقریبی آن توسط معادله‌های دیفرانسیل عملاً کارآمد نیست.

جالب اینجاست که وقتی فون نویمان اولین رایانه را در مؤسسه مطالعات عالی پرینستون ساخت، اولین موضوعی را که توسط کامپیوتر مدل‌سازی کرد، همین پیش‌بینی آب‌وهوا بود. در آن زمان محاسبه رایانه‌ای هوای فردا ۲۴ ساعت طول می‌کشید و عملاً نتیجه محاسبه‌ها بی‌فایده می‌ماند. با رشد فناوری و ساختن رایانه‌های سریع‌تر و دارای حافظه بیشتر و رشد الگوریتم‌های نگهداری، استفاده و حفاری داده‌ها، هوش مصنوعی ظهور کرد. یادگیری ماشین حاصل نیم‌قرن تاریخ فناوری داده‌هاست. یادگیری ماشین مدل‌سازی رایانه‌ای را معنای جدیدی بخشیده و مرزهای شناخت پدیده‌های طبیعی و انسانی را بسیار به پیش برده است. در اینجا شناخت ماشین جایگزین شناخت انسان می‌شود و به جای اینکه انسان پدیده‌ها را مطالعه و تحلیل کند، این کار توسط ماشین انجام می‌گیرد. دیگر نیازی به مدل‌سازی رایانه‌ای پدیده‌ها توسط انسان نیست. تنها کافی است انسان داده‌ها را جمع‌آوری کند و در اختیار ماشین بگذارد که این کار را هم می‌توان به فناوری واگذار کرد.

مفهوم داده و یادگیری ماشین

داده‌های رایانه‌ای لزوماً داده‌های عددی نیستند، اما در زبان رایانه، همه چیز به عدد ترجمه می‌شود و یادگیری ماشین، یعنی مفهوم‌سازی و شناخت، به کمک حجم بالای داده‌های عددی صورت می‌پذیرد. فلسفه کلی این است که اگر همه داده‌های مربوط به یک پدیده را در بستر زمان ثبت کنیم، علی‌الاصول باید بتوانیم به کمک این داده‌ها پدیده را مطالعه کنیم. اما این کار به علم جدیدی نیاز دارد و آن علم چگونگی استخراج اطلاعات معنی‌دار از داده‌های عددی است. این کار همان چیزی است که

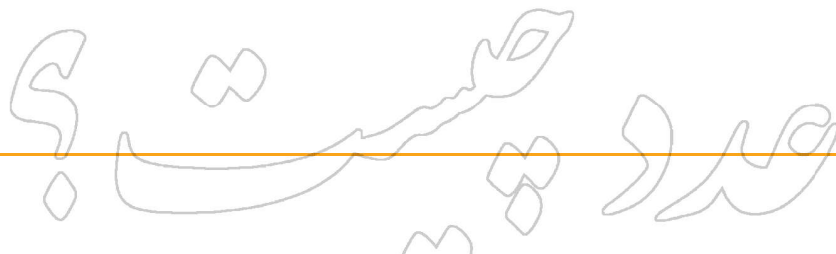
این فناوری بشر را به این سمت هل می‌دهد که شناخت را الگوریتمی کند. چرا که اگر شناخت الگوریتمی شود، قابل عرضه به رایانه خواهد بود. بسیاری از مصداق‌های شناخت بشری در زندگی مدرن پیش از این به صورت الگوریتم‌ها ترجمه شده‌اند؛ مانند فقه، پزشکی و قضاوت. در آینده نزدیک خواهیم دید که این وظایف به عهده رایانه گذاشته خواهند شد و بشر فرصت پیدا می‌کند روی لایه‌های عمیق‌تری از شناخت، از جمله شناخت معنویات و ماوراءالطبیعه، تمرکز کند. در این صورت سؤال‌هایی از این قبیل مطرح خواهند شد که:

- آیا ماوراءالطبیعه نیز توسط عددها (و یا اگر بخواهیم می‌توانیم پیرسیم توسط ساختارها) قابل مطالعه است؟
- آیا انسان و شناخت انسانی را می‌توان با عددها یا با ساختارها مدل‌سازی کرد؟
- آیا می‌توان ذهن انسان را توسط مدل‌های ریاضی بهتر شناخت؟
- آیا می‌توان کل شناخت انسان را به عنوان یک ساختار شناختی مطالعه کرد؟
- آیا در شناخت ما چیزی فراتر از ساختارها وجود دارد؟ یا اینکه شناخت ما اسیر ساختارهاست؟

به‌سوی «کل شی احصیناه عدداً»

عبارت «کل شی احصیناه عدداً» به این موضوع اشاره می‌کند که همه چیز بر حسب عدد (به همان معنی باستانی عدد) قابل احصا است. یا آنکه می‌گویند مفهوم عدد چنان قابل تعمیم است که هر چیزی را می‌توان با عدد احصا کرد. جوان‌تر که بودم به برداشت دوم گرایش بیشتری داشتم و هرچه پیرتر می‌شوم، به‌سوی برداشت اول میل می‌کنم. برداشت دوم به ما می‌گوید جهان خلقت را مطالعه کنید تا ببینید عدد چیست و ریاضیات را پیش ببرید. برداشت اول به ما می‌گوید که عدد همان است که می‌دانید و بکوشید آن را برای شناخت بهتر پدیده‌ها در جهان خلقت به کار ببرید.

به‌طور خلاصه، در جوانی به کمال نظری گرایش بیشتری داشتم و در پیری به کمال عملی. اما آنچه بر من آشکار است اینکه سراسر تاریخ عدد، ظهور مفهوم‌های ساختار ریاضی، مدل‌سازی ریاضی، مدل‌سازی رایانه‌ای و یادگیری ماشین را در این آیه می‌توان دید. برای مثال، یادگیری ماشین می‌گوید حتی شناخت



تصویری با یکدیگر متحد شوند. این یک ژرف‌نمای (پرسپکتیو) بسیار بلندمدت به آیندهٔ ریاضیات و آیندهٔ فناوری به دست ما می‌دهد. این ژرف‌نما به ما می‌گوید که شناخت بشر به کدام سو می‌رود و تعریف انسان چه تحولی می‌یابد و دربارهٔ سرنوشت بشر نکته‌های مهمی را به ما گوشزد می‌کند.

عدد چیست؟

باز می‌گردیم به این سؤال که: «عدد چیست؟» اگر ۲۰ سال پیش می‌خواستم جواب این سؤال را بدهم می‌گفتم: «عدد ساختاری ذهنی یا بهتر بگویم ساختاری شناختی است که در ساختار شناختی انسان ذخیره شده است.» اما اگر امروز بخواهم با نگاه به دستاوردهای عصر اطلاعات پاسخ بدهم، می‌گویم: «عدد یک الگوی ذخیره‌سازی شده در حافظهٔ رایانه است.» و چه کسی گفته است که یک‌سری صفر و یک یا یک‌سری چراغ‌های خاموش و روشن یک موجود جبری است؟ در نگاه من، آنچه را که در حافظهٔ رایانه ذخیره‌شده به راحتی می‌توان به عنوان یک تصویر فهمید. پس اینکه ما با داده‌ها به عنوان عدد برخورد می‌کنیم تابع ذهن ماست نه تابع فناوری.

بازگردیم به تعریف ۲۰ سال پیش. شاید عدد در تعریف ساختار ذهنی آن یک تصویر باشد که در ذهن حک شده است و یا صحیح‌تر بگویم یک الگوی ارتباط نرونی و یا یک الگوی زنجیره‌ای شلیک نرون‌ها باشد. با این تصویر ذهنی می‌توان گفت: عدد یک تصویر در ذهن است که در بستر زمان میکروسکوپی تعریف می‌شود. از اینجا می‌توان ایده گرفت که عدد در رایانه هم به همین صورت ذخیره بشود. این زبانی خواهد بود که همهٔ مفاهیم ذهنی می‌توانند به آن زبان در رایانه ذخیره شوند. به معنایی، این الگوی ارتباط نرونی صلب است و به معنایی هم در بستر زمان کارایی پیدا می‌کند و در بستر زمان نیز قابل تغییر است؛ همان‌طور که در ذهن چنین است.

پس اگر بخواهیم از ساختارهای عددی خارج شویم و از بیرون عدد را تعریف کنیم، می‌گوییم: «عدد تصویری است که در بستر زمانی بسیار کوتاه می‌تواند حرکت کند.» آیا فناوری جدید تصویربرداری توسط دوربین‌های تلفن همراه را دیده‌اید؟ این تصویرها دقیقاً همان چیزی هستند که مفهوم عدد را در ذهن تداعی می‌کنند! آری سراسر تاریخ عدد را که نگاه کنید، مفهوم حرکت عدد به‌طور زیرپوستی در آن گنجانده شده است. عدد چیزی است که می‌تواند حرکت کند. دوباره نگاه کنید به آیهٔ «کل شیء احصیناه عددا» و دوباره نگاه کنید به آیهٔ «لیس کمثله شیء». همه حرکت می‌کنند جز الله!

بشر توسط عددها قابل احصا است. در عربی مفهوم شیء با مفهوم آن در فارسی تفاوت دارد. حتی مفاهیم‌ها نیز شیء محسوب می‌شوند. هر چه در تور شناخت بیفتد، شیء به‌شمار می‌رود. تنها خداوند است که در تور شناخت انسانی نمی‌افتد. «لیس کمثله شیء»، یعنی خداوند قابل احصا توسط عدد نیست که نتیجه می‌دهد خداوند قابل شناخت و لذا قابل پیش‌بینی نیست.

خداوند همهٔ این بساط شناخت را برای بشر پهن کرده است تا بشر بفهمد اینکه خداوند قابل شناخته شدن نیست یعنی چه. سراسر زندگی‌ام را که نگاه می‌کنم، می‌بینم که خداوند اصرار دارد به من بفهماند که تو مرا نمی‌شناسی. حتی مرا مبتلا کرده به اینکه بین هم‌نوعانم شناخته نشوم یا اینکه چنین احساسی داشته باشم، تا تأکید کند که: «ببین و بفهم که شناخته شدن یعنی چه. اینکه خداوند چقدر تنه‌است و در عین تنهایی از هم‌نشین بی‌نیاز است. یک برداشت دیگر از آیهٔ «کل شیء احصیناه عددا» برمی‌آید؛ اینکه احصای عددی کل شیء تنها از عهدهٔ خداوند برمی‌آید و از توان شناخت انسان خارج است. نام خداوند «المحصی» است و انسان تنها می‌تواند به این نام تقرب بجوید.

ژرف‌نمای (پرسپکتیو) فلسفهٔ عدد در برابر شکل

یک فلسفهٔ تکان‌دهنده، توازی داستان عدد و شکل در تاریخ ریاضیات و تاریخ شناخت است. به‌طرز عجیبی به نظر می‌رسد این دو رودخانهٔ موازی در عصر اطلاعات وجود ندارند. رایانه کاملاً به کمک عددها می‌شناسد. این موضوع به ما می‌گوید که باید مفهوم داده مشابه تصویری داده باشد و یادگیری ماشین نیز در زبان داده‌ها تصویر مشابهی داشته باشد. فناوری امروز تصویرها را به زبان عددها ترجمه می‌کند. شاید فردا روزی فناوری جدیدی ظهور کند که عددها را به زبان تصویرها ترجمه و شناخت را به زبان تصویری مدل‌سازی کند. این نکته در فناوری عملی هنوز اتفاق نیفتاده است، اما در ساختار شناختی بشری، ادراک تصویری موازی با ادراک کلامی و یافته‌های شهودی موازی با یافته‌های عقلانی در سراسر مسیر شناخت پراکنده شده‌اند.

به این نکته باید توجه کرد که در آغاز تاریخ ریاضی مفاهیم‌های عدد و شکل با هم عجین بوده‌اند. مثلاً برای بسیاری از عددها شکل تصور می‌شد. مثلاً عددهای مثلثی، عددهای مربعی، عددهای مخمسی و عددهای مسدسی مورد مطالعه قرار می‌گرفتند. عددهای مثلثی هنوز هم مطرح هستند و عددهای مربعی بسیار پرکاربرد هستند. تاریخ عدد و شکل قاعداً باید به سویی پیش برود که دوباره مفهوم عدد و شکل با هم متحد شوند. فناوری نیز باید به سویی پیش برود که یادگیری ماشینی عددی با یادگیری ماشینی