

ریاضیات "ظاهر" و ریاضیات "باطن"

آرش رستگار

دانشگاه صنعتی شریف
موسسه مطالعات پیشرفته

خلاصه

در جهت معرفی یک فلسفه ریاضی تصویری و کلنگر، مفاهیم ریاضیات ظاهر و ریاضیات باطن معرفی می‌شوند و تجلی و عروج بین لایه‌های تجرید ریاضیات مورد بررسی قرار می‌گیرند و مثال‌هایی ارائه می‌شوند. مفاهیم مشابهت و مماثلت مفاهیم و ساختارهای ریاضی تعریف شده و شهود به عنوان مهارت اصلی شناخت در ریاضیات تصویری و کلنگر معرفی می‌گردد.

مقدمه

اکثر فلسفه‌های ریاضی مدرن کلامی و جزءنگر هستند. معرفی یک فلسفه ریاضی مدرن که مانند فلسفه افلاطون تصویری و کلنگر باشد در دستور کار ما قرار دارد. در نگاه تصویری و کلنگر به ریاضیات چندین لایه تجرید برای ریاضی در نظر گرفته می‌شود که برخی نسبت به برخی دیگر ظاهری‌تر و برخی نسبت به برخی دیگر باطنی‌تر هستند. این طبقات تجرید هستی از انسان‌شناسی اسلامی وام گرفته شده‌اند. بین این طبقات رابطه‌ی تجلی از باطن به ظاهر و رابطه‌ی عروج از ظاهر به باطن برقرار است.

مفاهیم و ساختارهایی را که ظاهر یکسان و باطن متفاوت دارند "مشابه" و مفاهیم و ساختارهایی را که باطن یکسان ولی ظاهر متفاوت دارند "متماثل" می‌نامیم. مشابهت و مماثلت از مفاهیم کلیدی در ریاضیات تصویری و کلنگر هستند. بر خلاف ریاضیات کلامی و جزءنگر که اثبات و استنتاج به روش اقلیدس در دستور کار قرار دارد، در ریاضیات تصویری و کلنگر تخیل و شهود نقش اصلی کشف را برعهده گرفته است. این بدان معنی نیست که در ریاضیات تصویری و کلنگر خبری از اثبات و استنتاج نیست یا در ریاضیات کلامی و جزءنگر خبری از تخیل و شهود نیست. بلکه بار اصلی در ریاضیات تصویری و کلنگر بر دوش شهود و تخیل است و بار اصلی در ریاضیات کلامی و جزءنگر بر دوش اثبات و استنتاج. این ساختار چند لایه که برای حقیقت ریاضی در نظر گرفته می‌شود بر گرفته از فلسفه اسلامی و انسان‌شناسی اسلامی است که مبانی عرفان اسلامی در آن تأثیرگذار هستند. مبانی عرفان نظری به نوبه خود تحت تأثیر فلسفه تصویری و کلنگر افلاطون تدوین شده‌اند. در واقع عرفان نظری و تاریخ تحول مفاهیم کلیدی آن موازی با فلسفه غرب و تاریخ تحول مفاهیم کلیدی آن در نظر گرفته شده‌اند که دو شاهراه فلسفه هستند که از آراء افلاطون و ارسطو سرچشمه گرفته‌اند. ابتدا به معرفی و تبیین مفاهیم کلیدی عرفان نظری که در فلسفه ریاضی تصویری و کلنگر مورد استفاده قرار خواهیم داد می‌پردازیم و سپس به مصداق‌های آن‌ها در ریاضیات باز می‌گردیم.

"ظاهر" در برابر "باطن"

انسان‌شناسی تصویری و کلنگر بر صحنه گذاشتن بر چندین لایه تجرید هستی بنا شده است که از ظاهری‌ترین لایه تجرید که جسد نام دارد تا باطنی‌ترین لایه تجرید که ذات نام دارد گسترده شده‌اند. اینکه آیا تعداد لایه‌های تجرید متناهی یا نامتناهی است و اینکه اگر متناهی است، چند لایه تجرید هستی داریم چندان مورد تأکید نیست و به بررسی مدل‌های متناهی چندلایه‌ای در حد یک مدل برای ساختار هستی کفایت می‌شود. مدل افلاطون از لایه‌های تجرید از سه لایه جسد و نفس و روح تشکیل شده است که در فرمول‌بندی

ملاصدرا جسد، مثال و عقل نام می‌گیرند. در تمدن چین باستان مدل‌های پنج لایه‌ای و در عرفان اسلامی مدل‌هایی هفت‌لایه‌ای به کار می‌روند. ما با مدلی هفت لایه‌ای که لایه‌های تجرید آن جسد، نفس، قلب، روح، عقل، نور و هویت هستند کار خواهیم کرد. این لایه‌های تجرید به صورت خطی مرتب شده‌اند و هر کدام لایه‌ی ظاهری برای لایه‌ی تجرید بعدی و لایه‌ی باطنی برای لایه‌ی تجرید قبلی هستند. به جز جسد که باطن چیزی نیست و هویت که ظاهر چیزی نیست. در مدل‌های تجرید هستی نامتناهی می‌توان فرض کرد هر لایه‌ی تجرید هستی باطنی دارد که ممکن است بر ما مکشوف نباشد. اما همواره جسد ظاهری‌ترین لایه‌ی تجرید هستی است و بر همه‌ی ادراکات آشکار است. ظاهر در برابر باطن مشخصاتی دارد. مثلاً هرچه یک لایه‌ی تجرید ظاهری‌تر باشد کثرت‌تر و هرچه باطنی‌تر باشد وحدت بیشتری دارد. یا یک لایه‌ی تجرید هرچه ظاهری‌تر باشد آشکارتر و در دسترس‌تر و هرچه باطنی‌تر باشد پنهان‌تر و دور از دیدرس‌تر خواهد بود. ظاهری‌ترین لایه‌ی تجرید هستی بر همه آشکار و باطنی‌ترین لایه‌ی تجرید از همه پنهان است. از باطنی‌ترین لایه‌ی تجرید هستی تنها می‌توان با کمک تجلیات آن ادراکی حاصل نمود. از این رو در یک رویکرد به محتویات باطنی‌ترین لایه‌ی تجرید، حقیقت گفته می‌شود. در یک فلسفه‌ی تصویری و کل‌نگر از ریاضیات وجود لایه‌ی تجرید شامل حقایق ریاضی فرض می‌شود. اینکه حقیقت چگونه با تجلی بر ما آشکار می‌شود و یا اینکه از لایه‌های تجرید ظاهری‌تر چگونه می‌توان به محتویات لایه‌های تجرید باطنی‌تر پی برد و یا اینکه ظاهر چگونه حکایت از باطن دارد نیازمند تبیین و بررسی است. در جهت دیگر حرکت از پایین به بالا وجود دارد که به آن عروج گفته می‌شود که به نوبه‌ی خود به آن خواهیم پرداخت. نکته‌ی مهم این‌که چرا باید حقیقت بین لایه‌های تجرید حرکت کند؟

تجلی از باطن به ظاهر

حرکت تجلی از باطن به ظاهر، حقیقت جهت مثبت زمان است. یعنی زمان فیزیکی تصویر و تجلی حرکت از باطن به سمت ظاهر است. در واقع هستی از باطن به سمت ظاهر جاری شده است. یعنی ابتدا لایه‌های تجرید باطنی خلق شده‌اند و سپس با کمک تجلی مرحله به مرحله لایه‌های تجرید ظاهری‌تر به مرحله‌ی خلقت رسیده‌اند. سوال اینکه حرکت از پنهان به سمت آشکار شدن و حرکت از وحدت به سمت کثرت چرا در ذات هستی قرار گرفته است؟ پاسخ اینکه طبیعت خلقت حرکت از ذات اقدس الهی به سمت عالم ماده است. حال باید دید این تجلی مانند تصویر آینه‌ای از عالمی به عالم پایین‌تر است یا اینکه عالم پایین‌تر خود تجلی‌گاه عالم بالاتر است؟ یا اینکه تجلی‌گاه خود حاصل یک تجلی است و بعد این عالم که خود تجلی عالم بالاتر است تجلی‌گاهی برای تجلی حقایق عالم بالا خواهد بود؟ سوال دیگر اینکه آیا رابطه‌ی تجلی خطی است یا غیر خطی؟ آیا عوالم هویت تا جسد به ترتیب در یکدیگر تجلی می‌کنند و تجلی هویت در جسد بواسطه‌ی پنج عالم نور، عقل، روح، قلب و نفس صورت می‌گیرد؟ یا مستقیم هویت با جسد ارتباط برقرار می‌کند؟ تا جایی که ما می‌توانیم دنبال کنیم ایده‌ی تجلی اولین بار در تاریخ فلسفه توسط افلاطون مطرح شد. او فرض کرد مفاهیم ریاضی از عالم مُثُل افلاطون به عالم ذهن تجلی می‌کنند. به این معنی که هستی این مفاهیم در عالم مُثُل پررنگ‌تر، حقیقی‌تر و واقعی‌تر است تا حضور آنان در ذهن ما. چنین فرضی عواقب فلسفی جدی ندارد تا وقتی که مساله‌ی عروج مطرح شود. اینکه ذهن ما می‌تواند بر عالم مُثُل تاثیر بگذارد. چنین ایده‌ای در فلسفه‌ی افلاطون مشاهده نمی‌شود اما در فلسفه‌ی اسلامی و انسان‌شناسی اسلامی مشابه حرکت از باطن به ظاهر در جهت دیگر هم وجود دارد که از آن به عروج تعبیر می‌شود. قائل شدن به عروج عواقب فلسفی فراوانی دارد که از جمله‌ی آن‌ها تجلی آن در محور زمان است. یعنی در محور زمان یکی حرکت اختیاری رو به عقب وجود دارد. یعنی آینده در گذشته هم می‌تواند تاثیر بگذارد همانطور که گذشته آینده را می‌سازد. شاید چنین فرضی برای ذهن مخاطب دور از واقعیت برسد لذا آن را به زبان دیگری بیان می‌کنیم. اتفاقاتی که قرار است در آینده واقع شوند مقدماتشان در گذشته فراهم شده است. اتفاقاً چنین دیدگاهی درباره‌ی زمان جایی برای

اختیار باز می‌کند و زمان را از علیت مکانیکی دکارتی نجات می‌دهد. حال بینیم مبانی حرکت عروج از ظاهر به سمت باطن کدام هستند.

عروج از ظاهر به باطن

عروج از ظاهر به باطن، حرکت از کثرت به سمت وحدت و از آشکار به سمت پنهان است و در واقع همان حرکتی است که جا را برای کمال و ارتقاء انسان فراهم می‌کند. در واقع عروج اعمال ما حرکتی به سمت آخرت است و آخرت باطن عالمی است که در آن زندگی می‌کنیم. البته اسماء "اول" و "آخر" و عواقب فلسفی آن در فلسفه‌ی ریاضی را در مقاله‌ی دیگری بررسی خواهیم کرد. بنابر این فرض، عالم ظاهر بر عالم باطنی‌تر تاثیر گذار است. عالم جسد بر عالم نفس و عالم نفس بر عالم قلب و عالم قلب بر عالم روح و عالم روح بر عالم عقل و عالم عقل بر عالم نور و عالم نور بر عالم هویت دسترسی دارند. این دسترسی را نمی‌توان به تجلی آینه‌ای تشبیه کرد بلکه از جنس دیگریست. چیزی شبیه اینکه افکار ما گفتار ما و گفتار ما اعمال ما و اعمال ما عادات ما و عادات ما شخصیت ما را می‌سازند. چیزی که در عالم ظاهر محکم می‌شود، حقیقت آن در عالم باطن پدیدار می‌شود. چنان‌که می‌توان فرض کرد وقایع عالم ظاهر تجلی حقیقتی در عالم باطن هستند. اما این حرکت از ظاهر به سوی باطن ایجاد شده است و اینجا تغییرات باطن، معلول تغییرات ظاهر هستند. نه بر عکس. این به انسان اجازه می‌دهد که بر آینده‌ی خود تاثیر بگذارد. یعنی انسان بتواند بر آنچه در آینده بر او تجلی خواهند کرد حرکت ایجاد کند. پس بنا بر فرض تجلی و عروج، آینده بر گذشته و گذشته بر آینده هر دو تاثیر خواهند گذاشت. به تعبیری حقیقت از باطن به سوی عالم ظاهر حرکت می‌کند و از عالم ظاهر به سوی باطن باز می‌گردد و به اصطلاح می‌گویند این دو قوس دایره‌ی وجود را کامل می‌کنند. فرض کنید لایه‌های تجرید هستی خطی باشند در اینصورت دو قوس وجود در پی یکدیگر قرار می‌گیرند. اما اگر فرض کنید عروج و تجلی بین همه‌ی الیه‌های تجرید هستی مستقیم هستند در این صورت چندین قوس وجود خواهیم داشت چرا که حرکات رفت و برگشتی حقیقت در همه‌ی لایه‌های تجرید دیده می‌شوند. در واقع هر یک از این دو فرض چیزی بیش از یک مدل شناختی نیستند و کار کردن با مدل خطی بسیار راحت‌تر از مدل غیر خطی است. از این رو پس از این با مدل خطی کار خواهیم کرد و فرض می‌کنیم حقیقت ریاضی به ترتیب از عوالم هویت، نور، عقل، روح، قلب و نفس می‌گذرد و به علم جسد می‌رسد. سپس از عالم جسد به ترتیب این مراتب را طی می‌کند و به عالم هویت باز می‌گردد که می‌گوییم قوس وجود را کامل می‌کند. از این پس هر حقیقتی را به شکل این حرکت دایره‌وار از بالا به پایین و برعکس بررسی خواهیم کرد.

تجلی و عروج دو قوس وجود

هر مفهوم ریاضی را از این پس با تمام حقایق باطنی آن در پشت صحنه و تمام حرکات از بالا به پایین و از پایین به بالا بین این لایه‌های تجرید حقیقت در نظر خواهیم گرفت. با این وصف، با توجه به حرکت از وحدت به کثرت ممکن است دو مفهوم مختلف، پشت صحنه یا باطن یکسانی داشته باشند که به آن مماثلت گفته می‌شود. یعنی می‌گوییم این دو مفهوم مثل همدیگر هستند یا شباهت باطنی دارند. در برابر این مفهوم مشابهت باطنی، شباهت ظاهری قرار دارد. یعنی ممکن است دو مفهوم ظاهراً شبیه باشند ولی باطن متفاوتی داشته باشند. مشابهت و مماثلت دو مفهوم کلیدی در یک فلسفه‌ی تصویری و کل‌نگر از ریاضیات هستند و باید مفاهیم لغت‌نامه و آنالوژی را در سایه‌ی این مفاهیم کلیدی شناخت و تبیین کرد. شباهت بین دو تئوری ریاضی ممکن است ظاهری یا باطنی باشد. و اگر شباهت ظاهری باشد بدین معناست که حقیقت مشترکی در پشت صحنه‌ی دو تئوری وجود ندارد و اگر شباهت باطنی باشد چنین حقیقت مشترکی وجود دارد و مثلاً این نتیجه می‌دهد که یک تئوری کلی وجود دارد که هر دو تئوری مماثل حالت خاص آن تئوری کلی هستند. مثلاً قضیه‌ی هرزبروخ-ریمان-رخ نمی‌تواند دو تعمیم گروتندیک-ریمان-رخ و عطیه-سینگر را داشته باشد و باید بتوان

این دو تعمیم را با هم متحد کرد و یک تئوری کلی‌تری بدست داد که هر دو نظریه را در حالت خاص به دست ما بدهد، چنین دیدگاهی به حرکت از ظاهر به باطن و برعکس، عواقب فلسفی فراوانی در فلسفه‌ی ریاضی خواهد داشت و آن به نوبه‌ی خود بر روش ریاضی انجام دادن ریاضی‌دانان و اینکه چه انتظار داشته باشند بتوانند بسازند تاثیرگذار خواهد بود. در این نقطه، از کلیات مبانی فلسفی نزول خواهیم کرد به عواقب این کلیات در فلسفه‌ی ریاضیات و به زبان مفاهیم ریاضی و قضایای ریاضی و تئوری‌های شناخته شده‌ی ریاضی سخن خواهیم گفت. لازم است تبیین کنیم وقتی از ظاهر و باطن در ریاضیات سخن می‌گوییم دقیقاً چه منظوری داریم و وقتی از تجلی و عروج صحبت می‌کنیم دقیقاً چه می‌خواهیم بگوییم. مثال‌های مشابهت و مماثلت در ریاضیات کدام‌ها هستند و دقیقاً چه چیزی است که از آن با عنوان حقیقت ریاضی نام می‌بریم. مثلاً یک مفهوم ساده‌ی ریاضی مانند نقطه یا خط یا عدد حقیقت پشت صحنه‌ی آن چیست و در نظام فلسفی جدید چگونه راجع به هر مفهوم فکر خواهیم کرد. از مفهوم مشابهت آغاز می‌کنیم و سعی می‌کنیم لغت‌نامه و آنالوژی را در سایه‌ی مفهوم مشابهت بشناسیم.

مشابهت در ریاضیات

در اینجا منظور ما از مشابهت شباهت ظاهری است. هر دو چیزی که شبیه باشند یا شباهت ظاهری دارند یا شباهت باطنی. شباهت باطنی را مماثلت می‌نامیم و شباهتی که باطنی نباشد را همان مشابهت می‌گیریم. گاهی بین دو تئوری، لغت‌نامه یا آنالوژی‌ای پیدا می‌شود که نمی‌توان آن را به مبانی برد و ربط عمیقی بین دو نظریه پیدا کرد. اگر حقیقت مشترکی وجود داشته باشد که هر دو تئوری از آن نتیجه شوند و تجلی آن حقیقت باشند آن را مماثلت می‌گیریم. اگر چنین ربطی غایب باشد آن لغت‌نامه یا آنالوژی مشابهت خوانده می‌شود. فرض ما این است که در مفهوم مشابهت حقیقتی نهفته است. یعنی اینطور نیست که هر مشابهتی در واقع مماثلت باشد اما ارتباط حقیقت‌های پشت صحنه پر ما آشکار نباشد. ما فرض می‌کنیم که دو حقیقت متمایز ممکن است تجلیات مشابهی داشته باشند که از خود آن دو حقیقت متمایز کثیرتر باشند. یعنی کثرت می‌تواند موجب شباهت شود. نمونه مشابهت در ریاضیات می‌تواند لغت‌نامه‌ی ویتا بین توزیع مقادیر توابع مختلط و تقریب دیوفانتی در نظریه‌ی اعداد باشد. نمونه‌ی دیگر می‌تواند مشابهت بین گره‌ها در خمینه‌های سه‌بعدی و ایده‌آل‌های اول در میدان‌های اعداد باشد. نمونه‌ی دیگر مشابهت بین مجموعه‌های ژولیا و نقاط حدی گروه‌های کلابنی باشد. نمونه‌ی دیگر می‌تواند مشابهت بین میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع در نظریه‌ی اعداد باشد. نمونه‌ی دیگر می‌تواند مشابهت نظریه‌ی آراکلو بین نظریه‌ی تقاطع در هندسه‌ی جبری و نظریه‌ی تقاطع در وارپته‌های آراکلو باشد. کاربرد مشابهت توسعه‌ی یک نظریه بر اساس نظریه‌ی دیگری است که پس از آن توسعه یافته است. ما از یکی از دو نظریه‌ی مشابه ایده می‌گیریم و قضایایی در نظریه‌ی دیگر فرمول‌بندی می‌کنیم و سپس سعی می‌کنیم قضایای فرمول‌بندی شده را اثبات کنیم. بسیاری از حدس‌های مهم در نظریه اعداد که شاکله‌ی این رشته در قرن بیستم را شکل داده‌اند به همین روش فرمول‌بندی شده‌اند. گاهی این مشابهت بین روش‌های اثبات در دو تئوری مشابه نیز وجود دارد که کار را بسیار ساده‌تر می‌کند و گاهی این مشابهت تنها بین ساختار ارتباطی مفاهیم و صورت‌بندی قضایا دیده می‌شود. خیلی وقت‌ها هم نتایج به صورت حدس باقی می‌مانند. قضایا را با کمک محاسبات کامپیوتری برای بسیاری از مثال‌ها بررسی می‌کنند و از صحت آن اطمینان حاصل می‌کنند ولی روشی برای اثبات آن‌ها در حالت کلی پیدا نمی‌شود. و سال‌ها ریاضی‌دانان را به خود مشغول می‌کند.

مماثلت در ریاضیات

مثال‌های مماثلت که معروف و شناخته شده باشند در ریاضیات فراوان نیست. چرا که ریاضی‌دان‌های اهل باطن فراوان نیستند. اما ما سعی خواهیم کرد با ارائه‌ی مثال‌هایی مفهوم

مماثلت در ریاضیات را معرفی کنیم، ممکن است دو نظریه که شباهت ظاهری ندارند از حقیقت مشترکی متجلی شده باشند یا پدیده‌ی مشترکی در هر دو نظریه حکم‌فرما باشد. برای مثال این پدیده‌ی مشترک می‌تواند هذلولی بودن باشد. ریاضیات هذلولوی در شاخه‌های بسیاری از ریاضیات مطرح می‌شود، حتی در بسیاری از تئوری‌ها پدیده‌های هذلولی، سهموی و بیضوی هر سه حضور دارند و شباهت‌های سرتاسری در ریاضیات بین ریاضیات هذلولی دیده می‌شود و هم بین ریاضیات سهموی و هم بین ریاضیات بیضوی. مثلاً در ریاضیات هذلولوی قضایای متناهی فراوان است و در ریاضیات سهموی ساختارهای جبری فراوانند و در ریاضیات بیضوی اشیائی مثل دایره و کرات ابعاد بالا نقش مهمی ایفا می‌کنند. با این وصف می‌توان فرض کرد در سه‌گانگی بیضوی، سهموی و هذلولوی حقیقتی هست که در جای جای ریاضیات تجلی می‌کند و خود را به زبان‌های مختلف و فرمول‌بندی‌های مختلف که لزوماً همه به هم مربوط نیستند نمایش می‌دهد. این یعنی در یک نظریه‌ی جدید که اشیاء از یک طیف را شامل می‌شود می‌توان به دنبال تجلیات پدیده‌های هذلولوی، سهموی و بیضوی بودن گشت. یک نکته‌ی جالب نامگذاری اشتباه خم‌های بیضوی است که نظریه‌ی معروفی در نظریه اعداد و هندسه جبری را به خود اختصاص می‌دهد. در واقع نظریه خم‌های بیضوی یک نظریه سهموی است. چرا که خم‌های بیضوی ساختار گروهی دارند که یک ساختار جبری است. در باره‌ی ریاضیات هذلولوی، سهموی و بیضوی مقاله‌ی دیگری در دست داریم که این نکات را در آن‌جا به تفصیل بررسی خواهیم کرد. اینکه برخی شاخه‌های ریاضی گسسته و برخی پیوسته هستند و برخی هندسی و برخی جبری هستند نیز به ظاهر تجلی حقیقت دیگری در ریاضیات است. دوگانگی‌های مختلفی در ریاضیات مشاهده می‌شود که دوگانگی پیوسته-گسسته و دوگانگی هندسی-جبری و دوگانگی کل‌نگر-جزء‌نگر از مهم‌ترین دوگانگی‌های شناخته‌شده هستند. بعضی از این دوگانگی‌ها ریشه در ساختار شناختی ریاضی‌دانان دارند که در مقالاتی به آن‌ها پرداخته‌ایم. اما بعضی دیگر مانند دوگانگی گسسته-پیوسته به حقیقت ریاضی مربوط می‌شوند نه به ساختار شناختی. به نظر می‌رسد هر نظریه‌ی پیوسته‌ای مشابه گسسته و هر نظریه‌ی گسسته‌ای مشابه پیوسته دارد، مماثلت و مشابهت در همه‌ی شاخه‌های ریاضی به کار برده می‌شوند اما در هر شاخه‌ای معمولاً یکی از آن‌ها حضورش بر دیگری غلبه دارد.

کدام ریاضی‌دانان "ظاهری" هستند؟

ریاضی‌دانانی که موضوع تحقیق آن‌ها بر مشابهت بنا شده است "ظاهری" خوانده می‌شوند. شباهت‌های ظاهری بین ساختار مفاهیم و فرمول‌بندی قضایا هدایتگر این ریاضی‌دانان است. چنین ریاضی‌دانانی در اثر تجربه‌ی چنین ریاضیاتی به این سمت و سو تربیت می‌شوند که ظاهربین و سطحی نگر باشند. گاهی نیز شاخه‌ای از ریاضیات چنان است که بدست آوردن درکی عمقی از آن چنان دشوار است که به ناچار محققان یک رشته را به سطحی‌نگری و ظاهربینی سوق می‌دهد. معمولاً شاخه‌هایی که بر لغت‌نامه‌ها و آنالوژی‌ها تکیه می‌کنند چنین طبیعتی دارند. مهمترین شاخه‌های ظاهری نظریه‌ی اعداد و هندسه‌ی جبری هستند که به خاطر پیچیدگی فلسفی درک مفهوم عدد و شهود دشوار حقیقت این مفهوم، بر لغت‌نامه‌ها و آنالوژی‌ها تکیه می‌کنند. اما باید اذعان کرد که اکثر ریاضی‌دانان به طوری آماري ظاهری و سطحی‌نگر هستند و اهرم ظاهربینی از مهم‌ترین اهرم‌ها در توسعه‌ی ریاضیات بوده است. گرایش به باطن در تاریخ ریاضیات به ندرت و به سختی اتفاق افتاده است و همیشه یک کشف باطنی انقلاب بزرگی محسوب شده است. مثلاً تساوق حسابان گسسته و حسابان پیوسته که یکی توسط لایبنیتز و دیگری توسط نیوتن فرمول‌بندی شدند از مهمترین وقایع تاریخ ریاضیات است و یا ظهور هندسه هذلولوی در قرن نوزدهم انقلابی در هندسه بوجود آورد و یا فرمول‌بندی هندسه دکارتی که صورت جبری هندسه اقلیدسی بود قدم بزرگی در تساوق فرمول‌بندی جبری در برابر فرمول‌بندی هندسی به شمار می‌رفت و انقلاب بزرگی را موجب شد. حل جبری معادلات چند جمله‌ای درجه پایین در برابر حل هندسی آن‌ها نیز قدم

بزرگی در برقراری این تساوق بود. در واقع هندسی بودن یا جبری بودن و پیوسته بودن یا گسسته بودن مرزهای مهمی در شاخه‌های ریاضی ایجاد کردند. هندسه هندسی و پیوسته و ترکیبیات هندسی و گسسته است. آنالیز جبری و پیوسته و جبر و نظریه اعداد گسسته و جبری هستند. این‌طور ریاضیات به چهار شاخه‌ی مهم هندسه، ترکیبیات، جبر و نظریه اعداد، و آنالیز تقسیم می‌شود. نمی‌توان گفت تساوق تفکر هندسی و تفکر جبری یک آنالوژی و ظاهر بینی است و یا تساوق تفکر پیوسته و گسسته یک آنالوژی و ظاهرنگری است. بلکه این شباهت‌ها باطنی و عمیق هستند و در تجلیات حقیقت پشت صحنه ریشه دارند. حال نوبت به آن رسیده است که به توصیف ریاضی‌دانان "باطنی" بپردازیم.

کدام ریاضی‌دانان "باطنی" هستند؟

ریاضی‌دانانی که موضوع تحقیق آن‌ها بر مماثلت‌ها بنا شده است "باطنی" خوانده می‌شوند. مثلاً اینکه هندسه مماثل و مساوق با جبر است و یا مفهوم پیوسته مماثل مفهوم گسسته است یا دوگانی که خود یک نوع مماثلت است به روش‌هایی در ریاضیات اشاره می‌کنند که به آن روش‌های باطنی یا باطن‌گرا گفته می‌شود. تقسیم ریاضیات به ریاضیات هذلولوی، سهموی و بیضوی از دیگر مثال‌های مماثلت است. تلاش‌ها در تعریف مفهوم هذلولوی بودن برای چندگونا‌های جبری از ابعاد بالاتر در همین جهت قرار می‌گیرند. فرمول‌بندی گروه‌های هذلولوی توسط گرومو در همین خط فکری می‌گنجد. معرفی سیستم‌های دینامیکی هذلولوی همین نقش را ایفا می‌کند. با اینکه مفاهیم بیضی، سهمی و هذلولی بسیار قدیمی هستند و در یونان باستان معرفی شده‌اند اما هندسه هذلولوی تنها در قرن نوزدهم کشف شد و اینکه ریاضیات هذلولوی معنی دارد زائیده تفکر قرن بیستم در ریاضی است و اینکه ریاضیات هذلولوی، سهموی، بیضوی یک سه‌گانگی است در قرن بیست و یکم مطرح شده است. تحقیق ریاضی بر اساس مماثلت‌ها ریاضی‌دانان را به سوی باطن‌گرایی و باطن‌بینی سوق می‌دهد و آنان را تشویق می‌کند که عمیق‌تر فکر کنند و به حقیقت پشت پرده بپردازند. مهارت‌های ریاضی‌دانان باطنی و ریاضی‌دانان ظاهری تحت تاثیر روند فکری آنان متفاوت است. ریاضی‌دانان باطنی بر شهود بیشتر تکیه می‌کنند تا بر اثبات. در حالی که ریاضی‌دانان ظاهری اثبات را مهم‌تر می‌دانند تا شهود. نمی‌توان نقش اثبات را در شکل‌گیری پیکر توهمند ریاضیات در تاریخ چند هزار ساله‌ی آن نادیده انگاشت و نمی‌توان هم گفت که ریاضی‌دانان ظاهرگرا از شهود بی‌نیاز هستند. اما ریاضی‌دانان ظاهرگرا اول اثبات می‌کنند و بعد به شهود می‌پردازند برخلاف ریاضی‌دانان باطن‌گرا که از شهود شروع می‌کنند و به سمت اثبات حرکت می‌کنند. شهود و اثبات دو بال پرواز ریاضی‌دانان هستند و همواره هر دو در تفکر ریاضی حضور دارند. شهود کل‌نگر و اثبات جزءنگر است. کل‌نگری و جزءنگری از دیگر تقسیم‌بندی‌های ساختار شناختی است که به چگونگی تجلیات حقایق پشت صحنه باز می‌گردد. ما اعتقاد داریم که کل‌نگری و جزءنگری دوگان یکدیگرند و در حالت خاص کل‌نگری و جزءنگری مساوق هستند. بین ریاضیات کل‌نگرانه و ریاضیات جزءنگرانه شباهت باطنی یا همان مماثلت برقرار است. چنین تساوقی بین شهود و اثبات نیز به عنوان مهارت‌های اصلی ریاضی وجود دارد.

اثبات در برابر شهود

اثبات مرحله به مرحله، دارای ترتیب و در بستر زمان است و شهود دفعی و خارج از زمان است و به مفهوم فضا شباهت بیشتری دارد. همان‌طور که فضا و زمان را باید در کنار هم فهمید و مطالعه کرد، اثبات و شهود هم دو مفهومی هستند که با یکدیگر عجین شده‌اند و نمی‌توان آن‌ها را از هم جدا کرد. همین‌طور باطن‌گرایی و ظاهربینی در هم تنیده‌اند. نمی‌توان تنها با باطن‌بینی و با فرار از ظاهربینی به شناخت درستی دست پیدا کرد و ظاهر بینی در غیبت باطن‌بینی به ادراک موفقی منجر نمی‌شود. اما باید توجه داشت که همان‌طور که کل‌نگری در بعضی غلبه دارد و جزء نگری در بعضی دیگر، در برخی ریاضی‌دانان اثبات قوی‌تر

است و در بعضی دیگر شهود و این عواقبی در نحوه‌ی ریاضیات انجام دادن آن‌ها خواهد داشت. مثلاً همفکری و تفکر جمعی در چارچوب اثبات بسیار راحت‌تر است تا در چارچوب شهود. به ندرت پیش می‌آید که شهود حاصل یک کار جمعی تلقی شود. هرچند که چنین هست و شهود جمعی ممکن است پیش بیاید. هم ممکن است جمعی با هم همفکری کنند و در نتیجه‌ی همفکری شهود مشترکی به دست دهند و هم ممکن است جمعی به حالتی از شناخت دست پیدا کنند که به طور همزمان حقیقت مشترکی را شهود کنند. مثلاً وحی به زنبور عسل یک شهود جمعی است که همزمان حاصل می‌شود و خداوند به یک زنبور عسل خاصی به تنهایی وحی نمی‌کند تا شهد گل‌ها را بجشد و عسل تولید کند. و یا امکان سخن گفتن و ظهور زبان برای انسان یک وحی دسته جمعی است و شهودی گروهی را طلب می‌کند. حتی امکان اثبات برای ریاضیدانان یک شهود دسته جمعی است. اینکه ریاضیات می‌تواند توسط اثبات توسعه پیدا کند حاصل شهود دسته جمعی ریاضیدانان است. می‌توان گفت اثبات ابزار ظاهری کشف و شهود ابزار باطنی کشف است. یا اینکه اثبات ابزاری برای کشف ظاهر در ریاضیات و شهود ابزاری برای کشف باطن هستند. اینکه تفکر هندسی مساوق با تفکر جبری است حاصل شهود است و نه اثبات و اینکه تفکر پیوسته مساوق با تفکر گسسته است باطن نگرانه است و نه ظاهرگرایانه. بنابراین ریاضیدانان ظاهری بیشتر با اثبات مشغول هستند و ریاضیدانان باطنی بیشتر به شهود می‌پردازند. همانطور که اثبات با تقلید آموخته می‌شود، ریاضیدانان باطنی شهود را نیز با تقلید از یکدیگر می‌آموزند. شهود نیز مانند اثبات آموختنی است اما نیازمند پیشینه شناختی لازم در ریاضیدان است.

کشف ظاهر در برابر کشف باطن

همانطور که باطن ریاضیات کشف شدنی است ظاهر آن نیز کشف شدنی است. منتها کشف ظاهر در دسترسی همگان قرار دارد ولی کشف باطن نیاز به آموزش و سبک شناختی دارد که در دسترس همگان نیست. البته ریاضیدانان کل‌نگر در اثبات و کشف ظاهر ضعیف‌تر از ریاضیدانان جزء نگر هستند. در مورد تجربه‌ی کشف دو گزارش مشهور وجود دارد. یکی گزارش وایلز از کشف خود هنگام اثبات قضیه‌ی فرما یا به طور کلی در توصیف روند کشف که آن را چون گشتن به دنبال کلید برق در اتاقی تاریک تشبیه می‌کند. اشیاء درون اتاق را یک‌به‌یک و با کمک لمس کردن می‌یابد و تشخیص می‌دهد تا جایی که آنقدر اتاق را می‌گردد تا کلید برق را روشن می‌کند و جایگاه تمام اشیاء را می‌بیند. در برابر گزارش میرزاخان‌ی از کشف کل‌نگر خود قرار گرفته است که آن را تشبیه به گم شدن در جنگلی تاریک می‌کند. از تپه‌ای بالا می‌رود و خورشید را می‌بیند و از بالای تپه هندسه‌ی جنگل را و راه خروج از آن را مشاهده می‌کند. این دو گزارش بسیاری از ابعاد کشف ظاهر در برابر کشف باطن را رمزگونه در خود دارند. مثلاً اینکه در کشف ظاهر ریاضیدان کاشف ساخته‌های دست بشر است تا حقیقت و در کشف باطن ریاضیدان کاشف خلق خداست تا ساخته‌های دست بشر. این دو نوع کشف در تناظر با دو ساختار شناختی هستند و نمی‌توان از یک ریاضیدان انتظار داشت مانند ریاضیدان دیگری کشف کند. آن‌چه برای ما اهمیت دارد درک چگونگی ارتباط بین ظاهر ریاضیات و باطن ریاضیات است. در عین اینکه وجود هر دو را به عنوان یک حقیقت پذیرفته باشیم. باطن ریاضیات چه تاثیری بر ظاهر ریاضیات می‌گذارد و ظاهر ریاضیات چگونه باطن آن را تحت تاثیر قرار می‌دهد؟ آیا فقط باطن بر ظاهر حکومت دارد یا اینکه ظاهر نیز بر چگونگی باطن دسترسی دارد؟ آیا ظاهر و باطن ریاضیات دو عالم جدا از هم هستند و یا حرکتی بین آن‌ها وجود دارد و بده و بستان دارند؟ ما قائل به این هستیم که حرکت از ریاضیات باطنی به ریاضیات ظاهری و هم از ریاضیات ظاهری به ریاضیات باطنی ممکن است که اولی را تجلی و دومی را عروج می‌نامند. تجلی شاهراهی از باطن به سوی ظاهر است ولی عروج کوره راهی از ظاهر به سمت باطن می‌باشد. بنابراین تجلی دادن حقایق باطنی ریاضی کاری معمول است و بسیاری از ریاضیدانان آن را به عنوان روش

ریاضی خود برگزیده‌اند اما عروج ریاضی تنها برای معدودی از ریاضی‌دانان در تاریخ ریاضیات ممکن شده است.

تجلی ریاضیات "باطنی" در ریاضیات "ظاهری"

عموم ریاضی‌دانان به توسعه‌ی ریاضیات به طور عرضی اشتغال دارند و ریاضیات را از باطن به ظاهر حرکت نمی‌دهند. اما اقلیتی از ریاضی‌دانان که ریاضی‌دانان باطنی هستند در جهت تجلی ریاضیات از باطن به ظاهر تلاش می‌کنند. ریاضی‌دانانی که با توجه به تساوق تفکر هندسی و تفکر جبری، جبر و یا هندسه را توسعه می‌دهند از این گونه هستند. مثلاً تلاش‌هایی که در جهت فرمول‌بندی هندسه ناجابجایی صورت می‌گیرد از این دست هستند که سعی می‌کنند با موجودات جبری به زبان هندسه برخورد کنند. همینطور تلاش‌های دکارت در جبری سازی هندسه تلاش در تجلی حقیقت باطنی ریاضیات است. اینکه تلاش کنیم از تساوق ریاضیات پیوسته و ریاضیات گسسته استفاده کنیم چنین دستاوردی است. مثلاً سعی کنیم مشابه ریاضیاتی را که در هندسه و آنالیز انجام می‌دهیم در جبر و ترکیبیات پیاده سازی کنیم. البته اکثر ترکیبیات‌دان‌ها اینقدر عمیق نیستند و به گسسته‌سازی ریاضیات پیوسته اشتغال ندارند و به طور عرضی علم ترکیبیات را توسعه می‌دهند. تلاش در جهت توسعه‌ی ریاضیات هذلولوی از جمله کارهای پوانکاره و کلاین و گرومو و مردل و لنگ نیز از جهتی تجلی ریاضیات باطنی در ریاضیات ظاهری است. بررسی ساختارهایی که سهموی هستند و شاکله‌ی جبری دارند از جمله کارهای لی و کارتان و وایل و آیل و تحقیقات در زمینه‌ی خم‌های بیضوی که البته موجوداتی سهموی هستند نیز از جهتی تجلی ریاضیات باطنی در ریاضیات ظاهری است. ریاضی‌دانانی که به ترویج کل‌نگری یا جزءنگری می‌پردازند لزوماً به تجلی باطن اشتغال ندارند بلکه تنها سبک شناختی خود را پیگیری می‌کنند. اینکه ریاضی‌دانی بتواند بین ریاضیات کل‌نگرانه و ریاضیات جزءنگرانه تساوق ایجاد کند مثل "اصل موضعی به سرتاسری" در ریاضیات و هندسه این خود تجلی ریاضیات باطنی در ریاضیات ظاهری محسوب می‌شود. این که کل از برهم‌نهی اجزاء تشکیل شده است اصلی باطنی در ریاضیات است. در برابر تجلی از باطن به ظاهر عروج از ظاهر به باطن قرار دارد که از تجلی نادرتر است. تنها در معدود لحظاتی در تاریخ ریاضیات روند تأثیر ظاهر بر باطن و حرکت حقیقت باطنی ریاضیات و تغییر آن دیده می‌شود. مثلاً تاریخ تحول مفهوم خط از خط راست تا ژئودزیک از آغاز بر شاکله‌ی مفهوم خط قابل پیاده سازی است و نمی‌توان گفت مفهوم خط یا حقیقت آن در اثر توسعه‌ی ریاضیات دچار تحول و تغییر شده است. حتی ظهور خط در هندسه‌های متناهی چنین تغییری را نشان نمی‌دهد.

عروج ریاضیات "ظاهری" در ریاضیات "باطنی"

از طرف دیگر مفهوم نقطه در هندسه پیوسته که توسط فون نویمان بنا شده است دچار تحول حقیقی شده. پیش از آن نقطه یک شیء هندسی مینیمال است ولی در هندسه پیوسته شیء هندسی مینیمال وجود ندارد. این هندسه بنایی برای فرمول‌بندی فیزیک کوانتم قرار گرفت که موضعی نیست. چرا که مدلی برای فیزیک ذرات بنیادی نمی‌تواند موضعی باشد در صورتی که مدل نسبیتی فضا-زمان که مدل گرانش سرتاسری است در واقع موضعی است و پیش‌بینی امواج گرانشی در واقع نتیجه‌ی همین موضعی بودن مدل گرانشی سرتاسری است. مثال دیگر عروج ریاضیات "ظاهری" در ریاضیات "باطنی" توسعه‌ی نظریات همانندی و پادهمانندی در جای‌جای ریاضیات است. به طوری که یک موتیو از دیدگاه گروتندیک یک نظریه‌ی پادهمانندی تصور می‌شود در حالی که نظریه‌ی (پاد)همانندی ساخته‌ی دست بشر است. گرچه بر حقیقتی باطنی بنا شده است و آن حقیقت باطنی وحدت مفاهیم عدد و شکل است که پایه‌ی ظهور نظریه‌ی همانندی است و به قدمت ریاضیات فیثاغورسی می‌باشد. مثال دیگر ظهور توپولوژی و مفهوم پیوستگی است که راه به سوی باطن باز کرده است. هرچند به طور شهودی درک ما از پیوستگی بر تجربه‌ی بیرونی ما استوار است که لزوماً بر

حقیقتی استوار است اما ایده‌ی حرکت و پیوستگی اصولاً ساخته‌ی دست بشر است. ولی چنان ارتقا یافته که تساوی بین ریاضیات پیوسته و ریاضیات گسسته یک حقیقت غیر قابل انکار است. از خیام تا دکارت و از نیوتن تا کوشی و ددکینند در فرمول‌بندی حرکت پیوسته نقش داشته‌اند و این روند تحول باطن همچنان ادامه دارد و خاتمه نیافته است. مفهوم حرکت پیوسته همچنان در حال تحول در باطن حقیقی آن است. در واقع عروج ریاضیات ظاهری در ریاضیات باطنی پدیده‌ی نادر و مجردی است که از آن به معراج ریاضی‌دان تعبیر می‌شود. مسلماً چنین تفکری در فلسفه‌ی ریاضی تحت تاثیر عرفان اسلامی و انسان‌شناسی اسلامی است و مسلماً چنین فلسفه‌ای از ریاضی تصویری و کل‌نگرانه است که بر خلاف فلسفه‌ی غربی بنیان‌گذاری شده است. فلسفه‌ی ریاضیات معمول ارسطویی و کلامی و جزء‌نگرانه است که در مقاله‌ای جداگانه به تفاوت این دو نگاه به فلسفه‌ی علم و علی‌الخصوص فلسفه‌ی ریاضی پرداخته‌ایم. در تحقیق دیگری به مفاهیم "اول" و "آخر" در ریاضیات خواهیم پرداخت که باز به نوعی به حرکت از ظاهر به باطن و برعکس اشاره دارند.