ریاضیات بیضوی، ریاضیات سهموی و ریاضیات هذلولوی

آرش رستگار

دانشگاه صنعتی شریف

موسسه‌ی مطالعات پیشرفته

خلاصه: در این مقاله به رده بندی سه‌گانه‌ی ریاضیات بیضوی، سهموی، هذلولوی می‌پردازیم و سعی خواهیم کرد خصوصیات فلسفی هر کدام را مطالعه نموده و برشماریم. در این مسیر دیدگاه‌هایی جدید در مورد حدس پوانکاره و برنامه‌ی لنگلندز ارائه خواهد شد.

مقدمه: ریاضیات کروی و تاثیر آن بر ریاضیات باستان و ریاضیات سهموی و تاثیر آن بر ریاضیات دوران میانه به خصوص بر ریاضیات اسلامی در بعد ریاضیات هذلولوی و تاثیر آن بر ریاضیات مدرن و ارتباط بین این سه دیدگاه نسبت به حقیقت ریاضی و نتایج کاربردی آن به خصوص در نجوم مورد بررسی قرار خواهند گرفت. علی الخصوص نجوم کروی در یونان باستان و نجوم اقلیدسی یا دکارتی در قرن شانزدهم تا قرن نوزدهم و ظهور نجوم هذلولوی در اوائل قرن بیستم و عواقب آن مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. در پایان، ورود این مفاهیم به نظریه اعداد و نقش کلیدی آن‌ها در تاریخ حل مسائل هندسه‌ی دیوفانتی را مرور خواهیم کرد. در طی این مسیر صورتی هندسه جبری از حدس پوانکاره و نکاتی در باب معرفی یک دگردیسی هذلولوی و کروی از برنامه لنگلندز مطرح خواهند شد.

خلاصه

در این مقاله از مفهوم باستانی بیضوی، سهموی و هذلولی شروع می‌کنیم و تا پیدایش هندسه‌ی بیضوی، هندسه‌ی سهموی و هندسه‌ی هذلولوی در قرن نوزدهم پیش می‌رویم و شاخص‌های فلسفی این سه‌گانگی را مطالعه می‌کنیم تا جایی که به معرفی ریاضیات بیضوی، ریاضیات سهموی و ریاضیات هذلولوی می‌پردازیم.

مقدمه

خم‌های بیضوی از اشیاء کلیدی در نظریه‌ی اعداد معاصر هستند و نقش کلیدی در حل بسیاری از مسائل حل نشده‌ی نظریه‌ی اعداد داشته‌اند. این خم‌ها را از این رو بیضوی می‌خوانند که معادله‌ی آن‌ها در محاسبه‌ی محیط بیضی مطرح می‌شوند. ساختار جبری این خم‌ها اولین بار توسط آبل، ریاضی‌دان نروژی، کشف شد و به نوعی آغاز ظهور هندسی جبری مختلط را نوید می‌داد.

نکته‌ی جالب اینجاست که به دلایل بسیار قابل قبولی می‌توان نام این خم‌ها را خم‌های سهموی گذاشت به خصوص به خاطر اینکه این خم‌ها تخت هستند و پوشش جهانی آن‌ها نیز هندسه‌ی تخت دارد. با این نگاه باید خم‌هایی که پوشش جهانی آن‌ها از هندسه هذلولوی برخوردار است هذلولوی، خم‌هایی که پوشش جهانی آن‌ها صفحه‌ی اعداد مختلط است سهموی، و خم‌هایی که پوشش جهانی آن‌ها کره‌ی ریمان است که محدود به کره می‌شود را خم‌های بیضوی نامید.

خم‌های سهموی(که نام معروف آن خم‌های بیضوی است) از این خاصیت ریاضیات سهموی برخوردارند که یک ساختار جبری روی این خم‌ها وجود دارد که در واقع این ساختار جبری ساختار یک گروه آبلی است. این ساختار گروهی از ساختار گروهی فضای پوششی به ارمغان گرفته شده است. در این مقاله سعی خواهیم کرد مرزهایی برای ریاضیات بیضوی و ریاضیات سهموی و ریاضیات هذلولوی معرفی کنیم و خصوصیات فلسفی مشترک ریاضیات در هر شاخه را مورد مطالعه قرار دهیم.

از جمله نکاتی که بررسی خواهیم کرد تعمیم‌پذیری دوگانی بین بیضی و هذلولی به یک دوگانی بین ریاضیات بیضوی و ریاضیات هذلولوی است. همچنین اینکه آیا ریاضیات سهموی همیشه حد مفاهیمی در ریاضیات هذلولوی یا ریاضیات بیضوی است یا خیر مورد تامل و بررسی قرار خواهند گرفت.

1 – مفهوم باستانی "بیضوی، سهموی و هذلولوی"

2.1 – مقاطع مخروطی

بیضی، سهمی و هذلولی اولین بار به عنوان مقاطع مخروط دوسویه در یونان باستان معرفی شدند و سپس به عنوان مکان‌های هندسی در هندسه مسطحه وارد شدند. البته مخروط دوسویه مقاطع دیگری هم دارد که مانند بیضی، سهمی و هذلولی ناتکین نیستند. اگر صفحه‌ای مخروط دوسیه را چنان قطع کند که از راس مخروط بگذرد، اشتراک قاطع با مخروط، یک نقطه، دو خط متقاطع و یا یک خط دوگانه خواهد بود که

از راس مخروط می‌گذرد. با تقریب تشابه یک خانواده یک پارامتری از بیضی‌ها هست که در حد به یک سهمی میل می‌کند. همچنین با تقریب تشابه یک خانواده یک پارامتری از هذلولی‌ها هست که در حد به یک سهمی میل می‌کنند در حالی که هر دو سهمی متشابهند. بنابراین سهمی حد فاصل بین طیف بیضی‌ها و طیف هذلولی‌ها قرار گرفته است. این دوگانگی بین بیضی‌ها و هذلولی‌ها در حالت تکینی وجود ندارد.

خانواده‌ی یک پارامتری از دو خط متقاطع وجود دارد که به یک خط دوگانه در حد میل می‌کند اما این خانواده یک پارامتری دوگانی در این حالت تکینی ندارد. یا اگر دقیق‌تر توجه کنیم این خانواده خود دوگان است و در دوطرف به یک خط دوگانه در حد میل می‌کند. این کشف بزرگ دکارت بود که این خم‌های تکین و ناتکین دقیقاً اشکال مختلف خم‌های درجه دو در صفحه هستند. حتی حالت نقطه‌ی تکین به عنوان مجموعه جواب‌های یک خم درجه دو قابل بازسازی است.

دوگان بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ، یک هذلولی به معادله‌ی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ می‌باشد. در تعریف مکان هندسی نیز بیضی و هذلولی با دو کانون و یک عدد مشخص می‌شوند و اگر یکی از دو کانون به بی‌نهایت میل کند، بیضی و هذلولی هر دو به یک سهمی میل می‌کنند. قابلیات تعریف کانون یکی از خاصیت‌های بیضی، سهمی و هذلولی در ریاضیات باستان است که در تعریف مدرن بیضوی، سهموی و هذلولی مشابه ندارد. تعریف مکان هندسی بیضی و هذلولی نیز در هندسه مسطحه به تعریف مکان هندسی سهمی میل نمی‌کند. لذا در هندسه مسطحه نیز دوگانی بین بیضی و هذلولی صورتی ساده پیدا می‌کند: بیضی و هذلولی دوگان صفحات مقطع عمود برهم دارند به طوری که اشتراک این دو صفحه‌ی متقاطع خطی عمود بر محور مخروط دوسویه باشد. حتی می‌توان این تناظر یک‌به‌یک را به تک‌تک بیضی‌ها و هذلولی‌ها که مقطع مخروط هستند توسعه داد.

2 – مفهوم مدرن "بیضوی، سهموی و هذلولوی"

2.1 – هندسه کروی

سه‌گانگی بیضوی، سهموی، هذلولوی به معنای مدرن آن در قرن نوزدهم با کشف هندسه‌ی هذلولوی پدیدار شد. اما دوگان هندسه هذلولی که به آن هندسه‌ی کروی گفته می‌شود قدیمی‌ترین هندسه‌ی مورد مطالعه‌ی بشر بوده است. بخصوص که کره شکلی متناهی است و مدل کروی بطلمیوس از حرکت اجرام سماوی بر مدلی متناهی از عالم خلقت بنا شده است. البته قبل از بطلمیوس مدل‌های کروی متناهی دیگری به کار می‌رفته اما نجوم باستان در مدل کروی بطلمیوس به تکامل رسید. ظهور مثلثات کروی که به نوعی مقدم بر مثلثات مسطحه بود منجر به پیشرفت نجوم بطلمیوسی شد. در مدل بطلمیوسی ستارگان و سیارات بر کراتی سوار بر هم که لزوماً مرکز آن‌ها زمین نمی‌باشد استوار شده است. در مدل ائودوکسوس که مقدم بر مدل بطلمیوس است تمامی کُرات زمین را در مرکز خود دارند. اما در مدل بطلمیوس چنین نیست. قضیه‌ی سینوس‌ها توسط ابن عراقی، استاد ابن‌سینا،

فرمول‌بندی و اثبات شد. لذا می‌توان گفت مشابهت نظری بین مثلثات کروی و مثلثات مسطحه در ریاضیات باستان مکشوف بوده است.

کُرات هرچه شعاعشان بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود به یک سطح مسطح نزدیک‌تر می‌شوند چرا که همواره خمیدگی آن‌ها کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شود. اینکه کُرات مماس بر یک صفحه در نقطه‌ی داده شده با بزرگ شدن شعاع به آن صفحه‌ی مماس میل می‌کند صورت دقیق‌تری از این است که چرا مثلثات کروی در حد به مثلثات مسطحه میل می‌کند و علی الخصوص چرا این دو علم مثلثات با هم متشابهند. اما اینکه هندسه مسطحه حد هندسه‌های کروی است در عهد باستان مکشوف نبوده است و به مشابهت مفهومی این دو علم کفایت می‌شده است. ضمناً به اینکه شعاع کره‌ی سماوی متناهی نیست توجه نمی‌کردند و همه کُرات را با یک علم مثلثات منطبق بر هم می‌دیدند و به نوعی به وحدت هندسه کروی اعتقاد داشتند. مفهوم خمیدگی کره بعدها در قرن نوزدهم مطرح شد و هندسه‌های کروی را در یک طیف قرار داد که در آن‌ها مجموع زوایای هر مثلث بیش از π رادیان می‌باشد. در حالی که در هندسه مسطحه مجموع زوایای هر مثلث دقیقاً π رادیان است که خود یک حالت حدی هندسه‌های کروی است.

2.2 – هندسه اقلیدسی

اصل توازی در هندسه اقلیدسی یا مشابه آن در هندسه کروی پیش از قرن نوزدهم مقایسه نمی‌شد. بلکه مفهوم توازی در هندسه کروی غایب بود. اما هندسه اقلیدسی در بُعد دو و سه از زمان تالس به مفهوم یونانی آن پایه‌گذاری شد. پیشینه‌ی هندسه‌ی اقلیدسی در تمدن مصر و بابل پایه‌گذاری شده بود. اما در تمدن مصر و بابل تنها اشیاء ساده‌ی هندسی مورد مطالعه قرار می‌گرفتند در حالی که در هندسه اقلیدسی مفهوم اثبات ریاضی به تکامل رسید. در این سیر تکاملی از تالس تا فیثاغورس و از افلاطون تا ارسطو نقش مهمی را ایفا کردند. مثلاً نگرش اصول موضوعه‌ای به هندسه و اصل موضوع توازی و صورت‌های مختلفی از آن که معادل بودند توسط ارسطو پایه‌گذاری شد. در یونان باستان هندسه‌های 2-بُعدی و 3-بُعدی اقلیدسی، هم‌زمان توسعه یافتند و مبنایی برای مطالعه‌ی کُرات و هندسه مخروطات بدست دادند. در همین بستر بود که مفاهیم باستانی بیضی، سهمی و هذلولی مطرح شدند. هندسه اقلیدسی چندین بار در مناطق جغرافیایی مختلف دچار انقلاب‌هایی شد. اما اصول آن همانطور که امروز هست پابرجا ماند. از اتفاقات مهم در بستر هندسه اقلیدسی نجوم دکارتی بود که در آن فضای 3-بُعدی که در آن زندگی می‌کنیم نامتناهی است. در چنین نجومی است که جسم متحرک که بر آن نیرویی وارد نمی‌شود به حرکت مستقیم الخط خود به طور یکنواخت ادامه می‌دهد. این اصل نیز اولین بار توسط دکارت مطرح شد و بر فیزیک نیوتنی تاثیر گذاشت. دکارت بر اسپینوزا و اسپینوزا بر لایب‌نیتز به طور موازی تاثیرگذار بودند و نیوتن و لایب‌نیتز به طور کمابیش مستقل مبانی حسابان امروزی را پایه‌گذاری کردند. مثلثات اقلیدسی در بین ریاضی‌دانان اسلامی به تکامل رسید و صورت‌بندی مستقلی از مثلثات کروی پیدا کرد به طوری که در اثبات قضایای هندسه به کار گرفته شد. پیش از حسابان مثلثات اقلیدسی یکی از ماشین‌های محاسبه‌ی معروف از هندسه تلقی می‌شد. ریاضی‌دانان

اسلامی از تشابه مثلثات کروی و مثلثات اقلیدسی به عنوان دو نظریه سود بردند و مثلثات اقلیدسی را به کمال رساندند. همزمان با پیدایش علم جبر مثلثات اقلیدسی نیز مجرد شد تا جایی که این تحولات به بستر حسابان پیوست و به صورت مدرن خود در آمد و سینوس و کسینوس و تانژانت به عنوان توابع حقیقی مطرح شدند. یک خاصیت مهم هندسه اقلیدسی پذیرفتن ساختار جبری مختصات دکارتی بود که در هندسه کروی مشابهی نداشت. هندسه‌های اقلیدسی ابعاد بالاتر نیز تنها پس از کشف جبر خطی در قرن نوزدهم مطرح شدند.

2.3 – هندسه هذلولوی

هندسه هذلولوی به طور مستقل توسط گاوس، لباچسفکی و بولیایی کشف شد اما اولین مدل‌های هندسه هذلولوی توسط پوانکاره و کلاین مطرح شدند. پیش از کشف این مدل‌ها هندسه هذلولوی به عنوان یک امکان بدون تناقض برای هندسه مسطحه مطرح بود اما پس از کشف این مدل‌ها به عنوان یک هندسه مستقل موازی با هندسه‌ی کروی (که از این پس آن را هندسه بیضوی می‌نامیم) و هندسه‌ی اقلیدسی(که از این پس آن را هندسه‌ی سهموی می‌نامیم) مطرح شد. به طوری که هندسه سهموی حد بین هندسه‌های بیضوی و هندسه‌های هذلولوی قرار گرفت.

این نکته که هندسه‌ی سهموی یگانه است اما خانواده‌ای یک پارامتری از هندسه‌های بیضوی و هندسه‌های هذلولوی وجود دارد که به این حالت حدی میل می‌کنند دلیلی بر شباهت این هندسه‌ها به مفاهیم بیضی، سهمی و هذلولی در ریاضیات باستان قرار گرفت. البته مدل‌هایی که برای هندسه بیضوی مطرح شد با کره ارتباط داشتند و مدل‌هایی از هندسه هذلولوی با هذلولی‌گون ارتباط داشت. همچنین مشابه هذلولوی مثلثات اقلیدسی و مثلثات کروی توسط گاوس و لباچفسکی و بولیایی کشف شده بودند که به این ایده که هندسه‌های بیضوی و هندسه‌های هذلولوی دوگان یکدیگرند قوت می‌بخشید. بدین صورت بود که مفاهیم مدرن بیضوی، سهموی و هذلولوی شکل گرفتند. هدف این مقاله این است که این سه‌گانگی را مبنایی فلسفی قرار دهیم برای اینکه سه شاخه‌ی ریاضیات بیضوی، ریاضیات سهموی و ریاضیات هذلولوی را مرزبندی کنیم و شاخص‌های آن‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم. از آن‌جا که تاثیرات این هندسه‌ها بر نجوم از نجوم کروی شروع می‌شود و به نجوم دکارتی و سپس نجوم نسبیتی منجر می‌شود ریاضیات بیضوی، سهموی و هذلولوی را با همین ترتیب مورد بررسی قرار خواهیم داد. در نهایت به مفهومی از ریاضیات بیضوی می‌رسیم که به بیضی ربط چندانی ندارد و مفهومی از ریاضیات سهموی که به سهمی بی‌ربط است و مفهومی از ریاضیات هذلولوی که با هذلولی مستقیماً مرتبط نیست. هر چند که همین روابط سه‌گانه در هندسه بیضوی، سهموی و هذلولوی به خصوص در هندسه سهموی پیش از موعد کم‌رنگ شده‌اند. این بیگانگی از سه جنبه‌ی هندسه بیضوی، سهموی و هذلولوی ریاضیات تا حدی پیش رفته است که خم‌های مختلط فشرده با گونه‌ی یک که باید قائدتاً خم‌های سهموی خوانده شوند با نام خم‌های بیضوی معروفند تنها به خاطر اینکه به محاسبه‌ی محیط بیضی مربوط هستند.

3 – ریاضیات بیضوی

3.1 – دایره و کرات

دایره و کره 2-بُعدی از عهد باستان در ریاضیات مطرح بوده‌اند. شاید اولین بار تالس تعریف مکان هندسی دایـره و کـره را مطـرح کـرده باشـد یـا لااقـل می‌دانیم کـه این تعاریف بر تالس مکشـوف بوده‌انـد. فرمول‌هـایی بـرای مسـاحت دایـره در تمـدن‌های باستانی داده شده که بر حسب شـعاع دایـره تعریـف شـده انـد و این نشـان می‌دهـد تعریف دقیق دایره همراه با مرکز آن در این تمدن‌ها در دسترس بوده است. کـره 3-بُعدی و کُرات بالاتر حاصل جبری سازی‌های ریاضیات در اواخر قـرن نـوزدهم هسـتند. این تئوری‌ها منجر به خمینه‌های فشرده ابعاد بالا و حدس پوانکاره شدند کـه در اوایـل قرن بیست و یکم توسط پرلمان ثابت شد. ایده‌ی بیضی به عنوان تعمیمی از دایره بـا دو کانون در یونان باستان معرفی شد و مـورد مطالعـه قـرار گـرفت و اینکـه دایـره و بیضی دو مثال از مقاطع مخروط هستند نیز به یونان باستان بر می‌گردد. این ایده کـه دوایر مماس بر یک خط در نقطه داده شده بـه سـوی خـط میـل می‌کننـد و دایـره در حالت حدی می‌تواند تبدیل به خط شود و کره در حـالت حـدی می‌توانـد صـفحه باشـد انقلاب فلسفی مهمی در ریاضیات بوجود آورد به خصوص که این اولین بـاری بـود کـه یک شیء ریاضی در حد یک شیء ریاضی دیگر میل می‌کرد. اینکه دایره و خط بایـد از لحاظ فلسفی به یک زبان فهم شوند در تصویر کنج نگاشتی به زیبـاترین شـکل ظهـور پیدا کرد. اینکه دایره در حالت حدی نقطه است نیز به ما می‌گوید خط و نقطه و دایره باید به زبان مشترکی فهم شوند که این فلسفه تنها بعد از پیدایش هندسه تصویری در قرن هفدهم ظهور پیدا کرد. دوگانگی بین خط و نقطه نیز از اتفاقات فلسـفی مهم در ریاضیات بیضوی بود. اینکـه فضـای افکنشـی بـه ریاضـیات بیضـوی تعلـق دارد نکته‌ای است که باید موشکافی شود و مورد نقد قرار گیرد. از طرفی فضای افکنشی فشرده است و از این لحاظ به دایره و کره شباهات دارد و از طرف دیگر فضای افکنشی یک بعدی همان دایره است و فضای افکنشی 2-بُعدی یک فشرده سـازی همگن از صـفحه است که درسـت خاصـیت کـره 2-بُعـدی را دارد. آیـا این نتیجـه می‌دهـد کـه فضـاهای متقارن را به طور کلی باید جزئی از ریاضـیات بیضـوی بـه شـمار آورد؟ فکـر نمی‌کنم لزوماً چنین باشد چرا که فضـای متقـارن بـا نظریـه نمایشـهای گروه‌هـای لی مربـوط می‌شود که همانطور که خواهیم دید جـزئی از ریاضـیات سـهموی خواهـد بـود. بـا این وصف، فضای افکنشی را همچنان جزئی از ریاضیات بیضوی می‌گـیریم چـون فشـرده است و هم اینکه یک فضای مدولی است.

3.2 – فضاهای افکنشی

دایـره و کـره از فشرده‌سـازی خـط و صـفحه بدسـت می‌آینـد و این در تصـویر کنج نگاشتی دقیق‌تر فرمول‌بنـدی شـده اسـت. امـا اینکـه آیـا فشـرده سـازی‌های دیگـری متصورند منجر به ظهور $RP(1)$ $RP(2)$ و پس از کشف اعداد مختلـط منجـر بـه $CP(1)$ می‌شود که نشان می‌دهد در نهایت کره نیز خود یک فضای افکنشی اسـت. حالات کلی‌تر $RP(n)$ و $CP(n)$ در قرن بیستم مـورد مطالعـه قـرار گرفتنـد. یـک خاصـیت دایـره و کـره کـه بـه فضـاهای افکنشـی قابـل تعمیم اسـت این اسـت کـه

خانواده‌ای یک پارامتری از متریک‌های همگن روی این فضاها قابل تعریف است کـه بـا یک ضریب سـاده مشـخص می‌شـود. امـا مفهـوم خمیـدگی دایـره و کـره مربـوط بـه نشستن آن‌ها در فضای اقلیدسی می‌شود که به حـالت فضـاهای افکنشـی تعمیم پیـدا نمی‌کند. مفهوم تخت یا خمیده در هندسه افکنشی غایب است. بعد از کشف فضـاهای افکنشی در می‌یابیم که یک این فضاها یک فضای مدولی هستند. مثلاً $RP(2)$ فضای خطوط گذرنده از نقطه‌ای در R^3 است. این خاصیت در $RP(1)$ کـه دایـره اسـت نیز دیده می‌شود. کره هم به عنوان $CP(1)$ فضای خطوط گذرنده از مبدا در C^2 می‌باشد. از همین جا این خاصیت $RP(2)$ که فضای خطوط در آن یا در واقع فضای $RP(1)$ هایی که در $RP(2)$ می‌نشینند خود با یک فضـای $RP(2)$ قابـل تطـبیق است آغاز مفهوم دوگـانی در ریاضـیات بـوده اسـت. دوگـانی در ریاضـیات سـهموی و هذلولوی نیز قابل فرمول‌بندی است. لذا نمی‌توان آن را یک پدیده در ریاضیات بیضوی محسوب کرد. اما این جا بود که برای اولین بار دوگـانی خـط و نقطـه حـتی در سـطح اصول موضوعه هندسه مطرح شد. بعدها فضـاهای افکنشـی بـه فضـاهای گراسـمانی $RG(m,n)$ و $CG(m,n)$ تعمیم یافتند که فضای صـفحات m بعـدی گذرنـده از یـک نقطه در R^n یا C^n را نمایش می‌دهند. این مثال‌ها منجر شد که ایده فضای مدولی به طور مستقل مورد توجه قرار بگیرد. البته این ایده به نوعی در ایده مکـان هندسـی خطوط یا مکان هندسی نقاط در یونان باستان ظهور داشته و مثلاً مفهوم خط ممـاس بر یک دسته خطوط به فضای مدولی شباهت دارد. بیضی و سهمی و هذلولوی هر سه مکان هندسی هستند و نمی‌توان ایده‌ی فضای مدولی را محـدود بـه ریاضـیات بیضـوی دانست اما فشرده سازی فضاهای مدولی بسیار شباهت به فشرده سـازی صـفحه در $RP(2)$ و $CP(1)$ دارد و قطعاً به ریاضیات بیضوی تعلق می‌گیرد.

3.3 – فضاهای مدولی و فشرده سازی آن‌ها

تعدادی از فضاهای مدولی در هندسه جبری نقش مهمی ایفا می‌کنند. فضـای مـدولی خم‌های گونه g ؛ فضای مدولی خم‌های بیضوی کـه گـونه‌ی یـک دارنـد، فضـای مـدولی واریته‌های آبلی از قدیمی ترین این فضاهای مدولی هستند که به ترتیب با نماد های M $X(1)_g$، و A_g نمایش داده می‌شوند. این فضاهای مدولی روی C قابل تعریف هستند ولی گاهی ساختار شمایی را نیز به خود می‌پذیرند. این فضاهای مدولی هم بـه عنـوان واریته‌های جبری روی C و هم بـه عنـوان شـماهای روی Z قابـل فشرده‌سـازی هستند. می‌توان گفت ایده‌ی فشرده‌سازی این فضاهای مـدولی از فضـاهای افکنشـی گرفته شده است. گاهی چندین فشرده‌سـازی وجـود دارد ولی فشرده‌سـازی‌هایی هم هستند که خود، فضای مدولی توسعه یافته‌ای هستند. یک خاصیت مهم فضاهای مدولی روی Z این است که فضاهای مدولی روی هر پایه‌ی دیگری را با یـک تغیـیر پایـه بـه دست می‌دهند و دیگر اینکه فضاهای جهانی اشیاء مربوط به فضای مدولی بـالای سـر فضای مدولی زندگی می‌کند و به فضای مدولی نگاشته می‌شود و خود به طور طبیعی قابل فشرده‌سازی است. روی فضای مدولی M_g خم گونه‌ی g جهانی زنـدگی می‌کنـد و روی فضای مدولی خم‌های بیضـوی خم بیضـوی جهـانی زنـدگی می‌کنـد و روی فضـای مـدولی واریته‌هـای آبلی از بُعـد g ، واریته‌هـای آبلی جهـانی از بُعـد g زنـدگی می‌کنـد. خم‌های بیضوی خموار بعد g بـا خم‌هـای بیضـوی تکین قابـل فشـرده سـازی هسـتند و

خم‌های بیضوی گونه با $C^{¿}$ قابل فشرده سازی هستند که خود ساختار گروهی دارد ولی غیر فشرده است. واریته‌های آبلی از گونه‌ی g با واریته‌های نیمه آبلی قابل فشرده سازی هستند که همانند فضاهای مدولی مشابه از ابعاد پایین‌تر است. این فشرده سازی درست شبیه فشرده سازی فضاهای افکنشی در ابعاد بالاست. X(1) حالت خاص M_g و A_g برای $g=1$ می‌باشد و به نوعی پدیده‌هایی از هر دو نوع فضای مدولی را در خود ذخیره کرده است. مشابه میتوان ادعا کرد که M_g برای $g\geq 2$ فضایی مدولی از خم‌های هذلولوی است و شاید بهتر باشد آن را به عنوان یک موجود هذلولوی تلقی کرد. در پاسخ می‌گوییم که هنگام فشرده سازی خم‌های بیضوی و خم‌های کروی نیز دارد کار می‌شوند که تصویر بالا را خراب می‌کنند. بعلاوه صحیح نیست به خاطر ظهور اشیاء هذلولوی بخشی از ریاضیات را هذلولوی یا بیضوی بنامیم. بلکه این ساختار فلسفی آن ریاضیات است که هذلولوی یا بیضوی بودن آن را مشخص می‌کند. مثلاً خم‌های بیضوی صحیح‌تر است خم‌های سهموی خوانده شوند.

3.4 – مثلثات کروی

مثلثات کروی از عهد باستان برای محاسبات نجومی به کار می‌رفته است. اگر چه بطلمیوس در توسعه‌ی آن تلاش فراوان کرد اما پیش از او نیز چنین مثلثاتی به کار می‌رفته است. حتی دلایلی وجود دارد که مثلثات کروی بر مثلثات مسطحه سابق بوده است و بسیاری از قضایای مثلثات مسطحه با کمک مشابهت بین مثلثات مسطحه و مثلثات کروی به دست آمده‌اند. برای مثال در تاریخ ریاضی ثبت شده است که در کلاس درس ریاضی ابن سینا از ابونصر عراقی در مورد قضیه سینوس‌ها در مثلثات کروی می‌پرسد که آیا مشابهی در مثلثات مسطحه دارد؟ روز دیگر ابن عراقی با رساله‌ای که در آن قضیه سینوس‌های مسطحه ثابت شده بود نزد شاگردش ابن سینا باز می‌گردد. شباهت مثلثات کروی و مثلثات مسطحه بیش از شباهت مفهومی است بلکه می‌توان گفت به نوعی مثلثات کروی در حد به مثلثات مسطحه میل می‌کند چرا که هر چه شعاع کره سماوی بزرگتر باشد، خمیدگی کره سماوی کم‌تر می‌باشد و کره سماوی به یک صفحه مسطح نزدیک‌تر خواهد بود. لذا حتی اشیاء روی کره سماوی به اشیاء روی فضای مسطح میل می‌کنند. بنابراین شباهت این تئوری‌های ریاضی بسیار عمیق‌تر از شباهت مفهومی است. گویی حقیقت مشترکی در هر دو تجلی کرده است. این نکته پس از کشف مثلثات هذلولوی بسیار جدی‌تر به نظر می‌رسد.

قضیه فیثاغورس که یکی از مهم ترین قضایای ریاضی است مشابهی در هندسه کروی و مشابهی در هندسه هذلولوی دارد. چهارضلعی‌های محاطی در هندسه کروی و هندسه مسطحه از روابط طولی خاصی پیروی می‌کنند که شاید بتوان گفت از خواص دایره و کره به شمار می‌رود. اینکه مکان هندسی نقاطی که یک پاره خطی را به زاویه ثابتی می‌بینند بخشی از دایره است، از دیگر خصوصیات مهم دایره در هندسه‌های مختلف است. بسیاری از قضایای مربوط به دوایر به بیضی‌ها تعمیم پیدا می‌کنند. البته شاید این قضایا مشابه هذلولوی و سهموی هم داشته باشند اما معمولا فشرده بودن بیضی نقش مهمی در فرمول‌بندی این قضایا دارد. ریاضیاتی که دایره و بیضی در آن نقش مهمی ایفا می‌کنند در نجوم بطلمیوسی یا نجوم کروی باستان اهمیت پیدا می‌کند چرا که در این نظریه حرکت باید لزوماً بر مبنای حرکت دایره‌ای

توجیه شود در حالی که در فیزیک نیوتنی، حرکت سهموی همان اهمیت حرکت بیضوی را داراست و حرکت هذلولوی نیز چنین است.

3.5 – نجوم کروی

نجوم یونان باستان هم در فرمول‌بندی ائودوکسوس و هم در فرمول‌بندی بطلمیوس بر حرکت دورانی یا دایره‌ای کُرات بنا شده است و اصولاً با این فلسفه که حرکات سماوی دایره‌وار است توجیه می‌شود. در نجوم ائودوکسوسی همه‌ی این کُرات به مرکز زمین هستند اما در نجوم بطلمیوسی که ساده‌تر از مدل ائودوکسوس می‌باشد چنین نیست. جالب اینجاست که با هر تقریبی می‌توان با حرکت کُرات سوار بر هم حرکت ستارگان روی کره سماوی را تقریب زد لذا از لحاظ ریاضی مدل ائودوکسوس یا بطلمیوس هیچ کمبودی ندارد. آنچه در نجوم کروی فرض مهمی است که اصول دیگر این نگاه به آسمان را نتیجه می‌دهد، متناهی بودن فضاست. از دیدگاه یونان باستان آسمان متناهی است و ستارگان بر روی کره‌ای فرضی به نام کره سماوی سوار هستند. در چنین مدلی از آسمان جایی برای حرکت مستقیم الخط وجود ندارد و هر حرکتی دایره وار است یا هر حرکتی باید به ناچار با ترکیبی از حرکات دایره وار مدلسازی شود. نجوم کروی باید در برابر نجوم تخت یا نجوم دکارتی مطالعه شود که در آن از R^3 فضای تخت 3-بُعدی به عنوان مدلی از آسمان استفاده می‌شود و حرکت در اصل و پایه آن باید مستقیم الخط باشد و اگر نباشد به خاطر نیرویی است که بر جسم وارد می‌شود. فیزیک نیوتنی در فضای تخت دکارتی بنا شده است. مفهوم کره 3-بُعدی به عنوان مدلی متناهی از آسمان که زمین را به عنوان نقطه‌ای از نقطه همگن خود می‌پذیرد و نه به عنوان مرکز کره‌ی سماوی بسیار مدرن است و در عهد باستان مطرح نبوده است. هر چند که این مدل هم به نوعی بازسازی مدل‌های باستانی یونانیان به زبان مدرن است. کره 3-بُعدی به عنوان مدلی از آسمان در حال انبساط است و حرکت مستقیم الخط در آن تنها به نظر مستقیم الخط است وگرنه هر حرکتی متناهی است. خط به عنوان مدلی برای حرکت نامتناهی نقطه اولین بار توسط خیام مطرح شد که خود از طلایه داران ریاضیات سهموی است که به آن خواهیم پرداخت. در واقع ریاضیات سهموی توسط ایرانیان بنیان‌گذاری شده است و خیام و خوارزمی نقش مهمی در آن داشته‌اند. فرمول‌بندی علم جبر و حل جبری معادلات از اصول اولیه ریاضیات سهموی است. بعدها این تلاش‌ها منجر به مدل دکارتی از آسمان شد و اصل دکارت که حرکت مستقیم الخط اصالت دارد مطرح شد. اما مبانی روش جبری دکارت توسط خیام و خوارزمی از پیش صورت بندی شده بود.

4 – ریاضیات سهموی

4.1 – جبر خطی

جبر خطی به معنای مدرن آن که شامل ساختار و اصول موضوعه فضاهای برداری می‌شود، زاییده‌ی قرن نوزدهم است اما مبانی 2-بُعدی و 3-بُعدی آن توسط دکارت و نیوتن فرمول‌بندی شده است که به قرن شانزده و هفده بر می‌گردد. ساده ترین

ساختار سهموی خط، صفحه و فضای 3-بُعدی است که امروزه آن‌ها را با مدلهای مدلسازی می‌کنند. R به عنوان محور اعداد توسط دکارت معرفی شد و هم او بود که اعداد منفی را به طور صوری تعریف کرد. نقاط صفحه و فضا را با دوتایی و سه تایی‌های مرتب نمایش داد و خط و صفحه و دایره و بیضی و سهمی و هذلولوی را با معادلات جبری نمایش داد. نمایش اشکال ساده هندسی با معادلات جبری و نه با خاصیت مکان هندسی در واقع بلوغ ریاضیات سهموی بود. روشهای جبری توسط ریاضیدانان فرانسوی توسعه داده شدند و حل معادلات درجه سوم توسط رادیکال‌ها در مسیر خط مسیر حرکت تفکر جبری در ریاضیدانان اسلامی به الجزایر و مراکش و از آنجا به ایتالیا و سپس فرانسه به تکامل رسید. در واقع ریاضیات ایتالیا و فرانسه با ریاضیات سهموی و تفکر جبری شکوفا شد هرچند هندسه اقلیدسی نیز به نوعی در حیطه ریاضیات سهموی قرار گرفته است. یونانیان از اینکه ریاضیات سهموی به خاطر پذیرفتن ساختارهای جبری اهمیت دارد مطلع نبودند. حتی از اینکه هندسه اقلیدسی حدی از هندسه‌ی کروی است مورد توجه آنان نبود. اگر هم مثلث کروی را در نظر می‌گرفتند اما متوازی الاضلاع کروی را مطالعه نمی‌کردند و یا خصوصیات چهارضلعی‌های محاطی روی کره را نمی‌دانستند و یا اینکه روی کره مستطیل وجود ندارد محل توجه آنان نبود. جبر یونانیان به حل معادلات گسسته دیوفانتی محدود می‌شود و به روابط طولی که قضیه فیثاغورس و مثلثات نهایت آن بود. این دکارت بود که کشف کرد همه‌ی دنیای هندسی یونان باستان قابل فرمول‌بندی و بازسازی به روش جبری در چارچوب ریاضیات سهموی است. از اینجا تا تعریف مجرد ساختار جبری در نیمه دوم قرن نوزدهم راه زیادی بود که از مسیر تئوری پردازان بزرگی چون کرونکر، وبر، ددکیند و گالوا می‌گذشت. جالب اینجاست که قرن نوزدهم هم زمان هنگامه فرمول‌بندی ریاضیات هذلولوی نیز بود و سه هندسه کروی، مسطحه و هذلولوی در کنار هم این عصر ظهور کردند و سه گانه بیضوی، سهموی، هذلولوی اهمیت یافت. در زمان هیلبرت و جریان اصول موضوعه‌ای سازی ریاضی مفهوم ساختار ریاضی به پختگی رسید و ریاضیات سهموی به کمال دست پیدا کرد.

4.2 – ساختارهای جبری

هر چند مفهوم معادله در یونان باستان و حتی زودتر وجود داشت و جبر و مقابله در زمان خوارزمی مطرح شدند و روش جبری برای مدلسازی همه ریاضیات مدل مناسبی توسط دکارت شناخته شد مفهوم ساختار جبری تنها در قرن نوزدهم به عنوان یک کل فرمول‌بندی شد. پس از نظریه گالوا مفهوم گروه بیرون کشیده شد و پس از کشف مشابهت آنالوژی میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع، مفهوم میدان بیرون کشیده شد و کم‌کم حلقه اعداد صحیح و سپس حلقه‌های آبلی و حلقه‌های نوتری در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم مطرح شدند. از طرف دیگر مفهوم گروه به واریته‌های آبلی و گروه‌های لی و جبرهای لی توسعه یافت. توسط جبر مدرن و نظریه اعداد مدرن هم زمان و به صورت موازی صورت گرفتند و هم نشینی آن با هندسه جبری منجر به ظهور شاخه‌ای به نام هندسه حسابی شد. توسعه مفاهیم حساب و جبر از هندسه و سایر شاخه‌های ریاضی بن‌مایه گرفت و مشابهت‌ها بین زیر

شاخه‌های جبر و زیر شاخه‌های هندسه توسعه حساب و جبر را تحت کنترل خود درآوردند. ریاضیدانان بسیاری هم پیدا شدند که جبر را فارغ از سرچشمه‌های آن به طور اصل موضوعه‌ای دنبال کردند و مبانی ریاضیات کلامی را طرح ریزی کردند. ریاضیاتی که در آن تنها با نمادهای جبری سر و کار داشتند نه با مفهوم فضا. بعد از هیلبرت R, R^2 و R^3 نیز بر اساس اعداد صحیح و ساختارهای جبری فرمول‌بندی شدند و مفهوم ساختار جبری به مفهوم ساختار ریاضی توسعه پیدا کرد که توسط زبان شناسان به علوم انسانی وارد شد، تا جایی که جامعه‌شناسان از ساختارها سخن گفتند و حتی ساختارهای انقلاب‌های علمی را مورد مطالعه قرار دادند. خصوصیات این ریاضی را باید بلوغ جبر در دوران ظهور هندسه دکارتی جست. در واقع این هندسه دکارتی است که به ما می‌گوید که به چه ساختاری، ساختار جبری بگوییم و به چه ساختاری، ساختار هندسی و از آن نقطه در تاریخ ریاضیات است که ساختارهای جبری و ساختارهای هندسی به عنوان دو زبان ریاضی موازی برای فرمول‌بندی حقیقت ریاضی به کار گرفته شدند. نمی‌توان گفت هندسه علمی سهموی ایت اما تمامی هندسه در داخل هندسه سهموی قابل مدل‌سازی است. مدل‌هایی از هندسه کروی و هندسه هذلولوی در R^2 و R^3 قابل فرمول‌بندی است. هر چند هندسه هذلولوی و هندسه کروی نیز می‌توانند میزبان چنین مدل‌هایی از دو هندسه دیگر باشند.

4.3 – هندسه تحلیلی

در هندسه تحلیلی نه تنها نقطه صورت عددی به خود گرفت بلکه خط و دایره و صفحه و کره و مخروط و بیضی و سهمی و هذلولوی به صورت معادلاتی خود نمایی کردند. مقاطع مخروطی به شکل جواب‌های حقیقی معادلات درجه 2 متحد شدند. مفاهیم توازی و تعامد و زاویه نیز در این فرمول‌بندی جبری وارد شدند و به این ترتیب همه هندسه اقلیدسی به زبان جبری ترجمه شد. لازم به ذکر است که هنوز در این دوران مفهوم عدد حقیقی مفهومی شهودی بوده و تا زمان ددکیند و کوشی تعریف دقیق اعداد حقیقی به درازا کشید. اولین کسی که خط را مدلی برای حرکت و تغییر در نظر گرفت خیام بود. مفهوم معادلات دیوفانتی نیز به صورت جواب‌های صحیح و گویای معادلات جبری در هندسه تحلیلی وارد شد و هندسه و نظریه اعداد بعد از فیثاغورس دوباره به وحدت رسیدند. این فرمول‌بندی جبری فضای تخت به عنوان ساختار ریاضی و به عنوان یک کل در هندسه کروی ممکن نبود و در هندسه هذلولوی که بعدها ظهور پیدا کرد نیز ممکن نشد. از میان اشیاء هندسه کروی تنها دایره و کره‌ی 3-بُعدی بودند که ساختار گروهی داشتند. از این رو این دو شیء از خود خصوصیاتی سهموی نیز نشان می‌دهند و در ریاضیات سهموی نیز نقش ایفا می‌کنند. این ساختار گروهی اولین بار در خم‌های بیضوی حقیقی توسط آبل کشف شدند و به خاطر شباهت آن‌ها به ساختار دایره هم می‌توان آن‌ها را خم‌های بیضوی نامید. اما در حقیقت دایره و خم‌های بیضوی به عنوان گروه جزئی از ریاضیات سهموی هستند و باید آن‌ها را خم‌های سهموی نامید. هندسه تحلیلی جای پای فرمول‌بندی فیزیک نیوتنی را باز کرد و مفاهیم مشتق و انتگرال و سری‌های نامتناهی ظهور پیدا کردند و شاخه آنالیز به طور رسمی شکل گرفت که خود جزئی از ریاضیات سهموی است. البته 200 سال طول کشید که به فرمول‌بندی دقیق حد و مشتق و انتگرال معرفی شوند و

استانداردهای آنالیز همپای استانداردهای حساب خودنمایی کنند. همزمان اعداد حقیقی مدل‌سازی شدند و هندسه نیز به فرمول‌بندی محکمی همپای حساب دسترسی پیدا کرد. ظهور ریشه در محاسبات مساحت قطعه‌ای از سهمی در عهد باستان توسط ارشمیدس و مفهوم مماس بود که توسط فرما در عصر دکارت معرفی شدند و مفاهیم مساحت و مماس توسط قضیه اساسی حسابان با یکدیگر پیوند داده شدند. این جا بود که ریاضیات به سه شاخه جبر، هندسه و آنالیز تقسیم شد.

4.4 - هندسه جبری

تمایز هندسه جبری و هندسه تحلیلی در چند نکته است. یکی اینکه ابعاد بالاتر در هندسه جبری مورد مطالعه قرار می‌گیرند، دیگر اینکه در هندسه جبری با میدان دلخواه کار می‌کنیم در حالی که هندسه تحلیلی محدود به میدان R است. دیگر اینکه در هندسه جبری لزوماً با واریته‌های آفین سر و کار نداریم در حالی که در هندسه تحلیلی چنین است. دیگر اینکه در هندسه جبری فضای توابع چند جمله‌ای یا گویا روی واریته اهمیت دارد که در هندسه تحلیلی تنها خود واریته مورد مطالعه است و معمولاً رویه‌های جبری درجه یک و دو در هندسه تحلیلی مطالعه می‌شوند. اینکه چرا هنوز هندسه جبری را ریاضیات سهموی می‌دانیم به این خاطر است که ساختار جبری میدان پایه نقشه مهمی در مطالعه واریته‌های جبری ایفا می‌کنند. بعلاوه بین میدان‌های توابع و میدان‌های اعداد آنالوژی عمیقی مشاهده می‌شود. می‌توان بخشی از ریاضیات هذلولوی را در ریاضیات سهموی مدل‌سازی کرد. برای مثال خم‌های فشرده هذلولوی را می‌توان با ساختارهای جبری روی C مدل‌سازی کرد و یا می‌توان سعی کرد مفهوم هذلولوی بودن را برای واریته‌های ابعاد بالاتر مطرح کرد و برخی از این واریته‌ها را هذلولوی دانست. به علاوه آنالوژی بین هندسه جبری روی C و هندسه مختلط نقش مهمی در توسعه هندسه جبری داشته است. این روند کلی که آنالوژی‌ها در توسعه ریاضیات سهموی نقش مهمی ایفا کرده اند غیر قابل انکار است. حتی آنالوژی ابعاد پایین و ابعاد بالا که به شهود نزدیک نیستند بسیار در فرمول‌بندی کلی جبر خطی و هندسه تحلیلی و هندسه جبری اهمیت داشته است. روش‌های حل مسائل در هندسه جبری بیشتر جبری است تا هندسی. به علاوه هندسه جبری قابل مطالعه روی حلقه دلخواه نیز هست که منجر به مفهوم شما و سپس مفهوم پشته شده است که در نظریه اعداد که خود جزوی از ریاضیات سهموی است کاربرد بسیار دارند. مفهوم زاویه که هنوز در هندسه تحلیلی حاضر است در هندسه جبری غایب است و این زنجیره اتصال با هندسه اقلیدسی را قطع کرده است. یکی از مشکلات تعمیم مفهوم زاویه روی میدان دلخواه عدم قابلیت تعمیم آن به ابعاد بالا و میدان‌های غیر از R است. بنابراین مثلثات اقلیدسی ابعادی از ریاضیات سهموی را در خود پنهان کرده است که در هندسه جبری تعمیم پیدا نکرده‌اند. مثلاً قضیه فیثاغورس در هندسه تحلیلی قابل تعمیم است اما در هندسه جبری وجود ندارد. به علاوه مفهوم تعامل نیز در هندسه جبری غایب است. هر چند در گروه‌های لی این مفهوم وارد می‌شود.

4.5 – مثلثات اقلیدسی

در مثلثـات اقلیدسـی قضـیه سـینوس‌ها و قضـیه کسـینوس‌ها نقش عمـده‌ای در این تئوری دارند که حد قضایایی در هندسه کروی هسـتند. بـه علاوه این قضـایا در هندسـه هذلولوی نیز قابل فرمول‌بندی هستند که به نوبه‌ی خـود بـه صـورت‌بندی سـهموی این قضایا میل می‌کنند. می‌توان از مثلثات اقلیدسی به عنوان اولین ماشینری در ریاضیات که برای حل مسئله به کار رفت نام برد. ماشینری دوم هرچند که به مثلثات اقلیدسـی بر نمی‌گردد اما به هندسه اقلیدسـی مربـوط می‌شـود و آن ماشـینری روابـط طـولی است. در علم هندسه اقلیدسی چندین ماشینری طراحی و فرمول‌بندی شده است که در جهت اثبات قضایا به کار برده می‌شوند و بسیاری از این ماشینری‌ها به ابعاد بـالاتر قابل تعمیم هستند مثل ماشینری اعداد مختلط که برای حل مسائل هندسـه مسـطحه به کار می‌رود که به ماشینری اعداد هامیلتونی برای حل مسـائل هندسـه اقلیدسـی در بُعد سه به کار رفته است. ماشینری عمدتاً متعلق به ریاضیات سهموی هستند. چرا که از روش جبری کمک می‌گیرنـد. قضـیه کسـینوس‌ها در واقـع همـان قضـیه فیثـاغورس است که از حالت متعامد به حالت کلی تعمیم داده شده است. امـا قضـیه سـینوس‌ها نکته جالبی در خود نهفته دارد و آن تقارن نسبت به اضـلاع و رئـوس مثلث اسـت. این تقارن یک تقارن هندسی نیست بلکه یک تقارن جبری و یک تقارن مفهـومی اسـت کـه تقارن خط و نقطه را در دل خود نهفته است. در واقع قضیه سینوس‌ها، تقارن خــط و نقطه را به تقارن فاصله و زاویه تعمیم می‌دهد. این تقارن فاصله و زاویـه بـه هندسـه افکنشی توسعه نمی‌یابد اما می‌تـوان حـالات حـدی مثلث را کـه بـه هندسـه افکنشـی مربوط می‌شوند مثلاً وقتی یک راس به بی نهایت می‌رود را در نظر گرفت و بررســی کرد که قضایای هندسه اقلیدسی در حالت حدی افکنشی چه صورتی به خود می‌گیرند. در نظر گرفتن این حالات حدی در هندسه اقلیدسی معمـول نبـوده اسـت. امـا اهمیت دارد چرا که تقارن خط و نقطه به هندسه افکنشی توسعه می‌یابد. حالت حـدی قضـیه سینوس‌ها و قضیه کسینوس‌ها علی الخصوص برای مثلثی کـه یـک راس در بی نهـایت دارد برقرار است. این حالات حدی به عنوان حالت حـدی مثلث‌هـای کـروی نـیز قابـل احترام هستند. هرچند در نجوم دکـارتی این حالت‌هـای حـدی اهمیت ندارنـد. چـرا کـه فضای قابل مشاهده تنها در بخشی متناهی هرچنـد بـزرگ اسـت از R^3 قـرار گرفتـه است.

4.6 – واریته‌های آبلی و نیمه آبلی و گروه‌های لی

واریته‌های آبلی و نیمه آبلی و فضای مدولی آن‌هـا بـه ریاضـیات سـهموی تعلـق دارد. گروه‌های لی و نظریه‌ی نمایش آن‌ها نـیز چـنین هسـتند. علی الخصـوص مفهـوم فـرم پیمانه‌ای چه در حـالت خـاص فضـای مـدولی خم‌هـای بیضـوی (کـه مـا آن‌هـا خم‌هـای سهموی می‌نامیم) چه در حالت خاص فضای مدولی واریته‌های آبلی و نیمه آبلی) و هم در حالت کلی نمایش‌هـای گروه‌هـای لی بـا تعریـف لنگلنـدز همـه جـزئی از ریاضـیات سهموی هستند. این ریاضیات با ریاضـیات نظریـه اعـداد کـه خـود جـزئی از ریاضـیات سهموی است توسط برنامه لنگلندز مرتبط شده است. اینجا نکته بسیار مهمی نهفتــه است و آن اینکه برنامه لنگلندز باید بتواند حد ریاضیاتی هـذلولوی و هم حـد ریاضـیاتی بیضوی قرار بگیرد و در این زمینه تلاشی صورت نگرفته است شخصاً مقالاتی دارم که

تلاش می‌کنند مشابهی از هذلولوی از مفهوم نمایش گالوایی ارائه کنند اما هنوز مشابهی هذلولوی از مفهوم موتیو و مشابهی هذلولوی از مفهوم فرم‌های پیمانه‌ای سراغ ندارم. از طرف دیگر وضع خیلی بدتر است. از مثلث موتیو فرم‌های پیمانه‌ای و نمایش‌های گالوایی هیچکدام مشابه بیضوی ندارند. ساختار حسابی نیز در گروه‌های لی جبری وارد می‌شوند و به صورت اپراتورهای هکه ظهور می‌کنند که خود باید حد اپراتورهایی در ریاضیات هذلولوی و ریاضیات بیضوی قرار بگیرد که این نظریه نیز غایب است. می‌بینیم که تقسیم ریاضیات به ریاضیات بیضوی، سهموی و هذلولوی عواقب فلسفی فراوانی دارد که توسعه ریاضیات را به سمت و سویی خاص هدایت می‌کند. شاید بهتر باشد واریته‌های آبلی و نیمه آبلی و گروه‌های لی به طور کلی را فضاهای سهموی بنامیم. چرا که همه آن‌ها ساختار جبری گروهی به خود می‌پذیرند. علی الخصوص دایره و کره‌ی 3-بُعدی ساختار سهموی به خود می‌پذیرند و جزوی از ریاضیات سهموی هستند. می‌توان گفت که دایره نیز حدی از بیضی هاست که دوباره تصویر میل کردن ریاضیات بیضوی به ریاضیات سهموی خود را نشان می‌دهد. اما این تصویر قابل تعمیم به ابعاد بالا نیست چرا که در بین کُرات n-بعدی تنها S^1 و S^3 ساختار گروهی می‌پذیرند.

4.7 – نجوم دکارتی

مشهور است که ایزاک بارو استاد نیوتن مبانی فلسفی ترجمه فضا و زمان به زبان ریاضی را طراحی کرد. اما به نظر اینجانب اولین قدم‌ها توسط خیام و آخرین قدم‌ها توسط دکارت برداشته شد. از این رو نجوم سهموی را نجوم دکارتی نامیده‌ام. جالب اینجاست که محاسبات نجومی خیام تا عصر کامپیوتر از لحاظ دقت محاسبه بی نظیر بوده است و او همان کسی است که مبانی نجوم دکارتی را فراهم کرده است. از خصوصیات نجوم دکارتی ترجمه سه بُعد به فرمول‌بندی جبری است که به عمیق‌ترین وجهی توسط نیوتن به کار گرفته شده است. از جمله ضرب خارجی بردارها که تنها در بعد سوم قابل فرمول‌بندی است. از خصوصیات نجوم دکارتی مفهوم ناظر است که یک دستگاه مختصات مخصوص به خود را حمل می‌کند و هر کسی فیزیک را در دستگاه مختصات خود مطالعه می‌کند. دستگاه‌های مختصات باید توسط یک ناظر فرض شوند و می‌توانند همراه ناظر حرکت شتابدار و بدون شتاب داشته باشند. این مفهوم دستگاه مختصات ناظر که سوار بر نجوم دکارتی می‌شود مدیون تلاش‌های گالیله است. کسی تلاش نکرده است که مفاهیم نجوم دکارتی را در نجوم کروی بازسازی کند. در واقع کسی لزوم عملی برای این فرمول‌بندی ندیده است. اما از لحاظ فلسفی بازسازی نجوم دکارتی در نجوم بطلمیوسی عواقب فراوان خواهند داشت و به فهم بهتر نجوم بطلمیوسی منجر خواهد شد. هرچند نجوم مسیر دیگری اختیار کرد و از نجوم دکارتی به سمت نجوم لورنتسی و نسبیت خاص حرکت کرد که به ریاضیات هذلولوی تعلق دارد. نجوم در سیر تحولی خود هرگز به گذشته رجوع نکرد. اما این شیوه فیزیکدانان است نه شیوه ریاضیدانان. ریاضیدانان همواره سعی می‌کنند حد و مرز توانایی‌های فرمول‌بندی‌های قدیمی را بهتر درک کنند. شاید بتوان نجوم دکارتی را در یک کره‌ی 3-بُعدی که همواره در حال بزرگ‌تر شدن و تخت‌تر شدن است فرمول‌بندی کرد. با این روش می‌توان دید فلسفه متناهی بودن عالم

خلقت با توجه به دانش روز تا کجا قابل توسعه است و آیا با مانعی جدی در روند توسعه خود برخورد خواهد کرد؟ نکته جالب دیگر سرعت متناهی نور در نجوم لورنتسی است و هر چه این عدد به بی نهایت نزدیک‌تر شود نجوم لورنتسی به نجوم دکارتی نزدیک‌تر خواهد شد و در حد نجوم لورنتسی به نجوم دکارتی میل خواهد کرد. یک نکته مهم دیگر در نجوم لورنتسی ادغام مفاهیم فضا و زمان است که مقدمات آن توسط نیوتن برآورده شده است. جالب اینجاست که در پایان کتاب نور شناخت نیوتن این تحولات در نجوم دکارتی را از صدها سال قبل پیش بینی کرده بود.

5 - ریاضیات هذلولوی

5.1 – نیم‌صفحه‌ی پوانکاره و نیم‌فضای پوانکاره و دیسک کلاین

اولین مدل‌های هندسه هذلولوی دیسک کلاین و نیم‌صفحه‌ی پوانکاره بودند که هر دو به بُعدِ سوم نیز قابل تعمیم هستند. جالب است که همانند هندسه کروی، هندسه‌ی هذلولوی می‌تواند در چهارچوب هندسه سهموی مدل شود. تنها با کشف مدل‌های هندسه هذلولوی بود که مفهوم مدل برای یک هندسه درک شد. و حتی هندسه‌های کروی به عنوان یک مدل برای عدم برقراری اصل توازی در نظر گرفته شدند. متریک روی کره و متریک روی نیم‌صفحه پوانکاره در اواخر قرن نوزدهم معرفی شدند و مفهوم خط با مفهوم ژئودزیک توسعه داده شد که مقدمه‌ی ظهور نجوم لورنتسی را فراهم کرد. پس از انتخاب متریک همگن روی نیم‌صفحه‌ی پوانکاره به طور دقیق‌تری روشن شد که چرا هندسه‌های هذلولوی در حد به هندسه سهموی یا همان هندسه اقلیدسی تخت میل می‌کنند. مدل دیسک کلاین از لحاظ هندسی ساده‌تر است به خصوص که مفهوم خط در این مدل مانند هندسه اقلیدسی تخت به نظر می‌رسد. اما مدل پوانکاره برای محاسبات مناسب‌تر است و فرمول متریک از پیچیدگی کمی برخوردار است. البته مدل‌های هندسه هذلولوی به همین دو مدل محدود نیستند و مدل‌های دیگری نیز برای هندسه هذلولوی مطرح شده‌اند که از معروف‌ترین آن‌ها مدل هذلولی‌گون است که خط راست در آن به شکل هذلولوی است. در نیم‌صفحه‌ی پوانکاره ژئودزیک‌ها یا خط راست عمود بر مرز هستند و یا جزئی از دوایر عمود بر مرز که داخل نیم‌صفحه قرار دارند. مشابه صفحه‌ی تخت در نیم‌فضای پوانکاره: جزئی از صفحه‌ی تخت که بر مرز عمود است می‌باشد یا جزئی از نیم‌کره‌ای که بر صفحه‌ی مرز عمود است و داخل نیم‌فضای پوانکاره قرار دارد. فضای افکنشی در هندسه کروی و هذلولوی منطبق بر همان فضای افکنشی سهموی است. یعنی هندسه موضعی خطوط همان است که در هندسه سهموی محاسبه شده بود. نیم‌فضای پوانکاره به بُعد دلخواه تعمیم پیدا می‌کند و مفهوم خمینه هذلولوی بر اساس همین تعمیم پایه‌گذاری می‌شود.

تنها مثال ملموس از فضای هذلولوی چهاربُعدی فضا-زمان لورنتسی است و ابعاد بالاتر باید با روش جبری فهم شوند. فضای دست آمده از حاصلضرب فضاهای هذلولوی را باید قائدتاً هذلولوی بدانیم. همانطور که حاصل‌ضرب دوایر 1-بُعدی را که ساختار جبری دارند یک فضای سهموی حساب می‌کنیم و حاصل‌ضرب بیضی را نیز یک فضای بیضوی می‌گیریم. در بُعد یک، بازه‌ی بسته‌ی بیضی، بازه‌ی باز هذلولوی و خط

راست، سهموی محسوب می‌شوند. خط راست حالت حدی بازه‌ی باز و بـازه‌ی بسـته است درست همـانطور کـه هندسـه‌ی سـهموی حـد هندسـه‌ی کـروی و حـد هندسـه‌ی هذلولوی است.

5.2 – هندسه هذلولوی

با تقسیم نیم صفحه‌ی پوانکاره بر عمل گروه‌های کلاینی رویه‌هـای ریمـانی هـذلولوی بدست می‌آیند که همه‌ی آن‌ها یک متریک همگن با انحنای منحنی ثـابت از نیم‌صـفحه‌ی پوانکاره به ارث می‌برند. با تقسیم نیم‌فضای پوانکاره بر عمل گروه‌های گسسته که به طور کاملاً نا پیوسته عمل می‌کنند، خمینه‌های هذلولوی بدست می‌آیند کـه یـک متریـک همگن با انحنای منفی ثابت می‌پذیرند. این تصویر به ابعاد بالا هم تعمیم پیدا می‌کنـد و خمینه‌های هذلولوی n-بُعدی را بدست می‌دهد. هندسـه هـذلولوی 2-بُعـدی را در بخش دیگری مطالعه خواهیم کرد. امـا هندسـه هـذلولوی 3-بُعـدی نقش مهمی در رده‌بنـدی هندسه‌های 3-بُعدی فشرده که توسط ترستون پیشنهاد شد ایفا می‌کنـد. این رده‌بنـدی در نهایت توسط پرلمان به اثبات رسید. می‌توان حاصل‌ضـرب خمینه‌هـای هـذلولوی را نیز موجوداتی هذلولوی فرض کرد اما ساده‌ترین آن‌ها در بُعد چهار ظاهر می‌شوند کـه رنگ شهود 3-بُعـدی بشـر را نمی‌پذیرنـد. ژئودزیک‌هـا در خمینه‌هـای هـذلولوی توسـط ژئودزیک‌ها در نیم‌فضای پوانکاره القا می‌شـوند و قبـل از تقسـیم بـر عمـل گروه‌هـای کلاینی هندسه نسبتاً ساده‌ای دارند. چرا فضای مدولی خمینه‌های هـذلولوی فشـرده از گونه‌ی دو به بالا را جزء هندسه‌ی سهموی می‌گیریم و نـه هندسـه‌ی هـذلولوی؟ در این صورت ناچاریم فضای مدولی خم‌های بیضوی را نیز (که نزد ما سهموی هستند) فضای سهموی بگیریم. بعلاوه فضای مدولی متناظر در مورد گـونه‌ی صـفر را نمی‌تـوانیم بـه عنوان یک خمینه بررسی کنیم. چون هندسه کره‌ی ریمان قابل دگردیسی نیست. پاسخ اینکه هنگام فشرده سازی فضای مدولی گونه‌ی g از فضاهای مدولی گونه‌هـای پـایینتر بخصوص گونه‌ی یک استفاده می‌شود. لـذا نمی‌تـوان این فضـای مـدولی را وابسـته‌ی صرف به اشیاء هـذلولوی دانسـت. مثـل دو خم بیضـوی (سـهموی) کـه در یـک نقطـه اشتراک دارند در مرز فضای مدولی خم‌های گونه‌ی دو ظـاهر می‌شـود. امـا در نهـایت فرم‌های مدولار روی فضاهای مدولی گونه‌ی یک تعریف می‌شوند که اشـیائی سـهموی هستند. مشابه فرم‌های مدولار روی فضاهای مدولی M_g یا فشرده سـازی آن‌هـا وجـود ندارنـد. می‌تـوان این چـنین موجـوداتی را روی M_g تعریـف کـرد و آن‌هـا را دگردیسـی هذلولوی فرم‌های پیمـانه‌ای دانسـت. آیـا می‌تـوان بـرای چـنین موجـوداتی L-تابع‌هـایی وابسته کرد و خصوصیات مشابه L-تابع‌های حسابی در آن‌ها یافت؟ یا اینکه آیا می‌تـوان مفهومی مشابه موتیو در هندسه هذلولوی تعریف کـرد کـه بـه موجـودات بـالا متنـاظر شوند؟ توجـه کنیـد کـه در اینجـا نظـریه‌ی نمایش‌هـای گروه‌هـای لی همـانطور کـه در نظریه‌ی لنگلندز نقش ایفا کردند، حضور ندارند و M_g فضای متقـارن وابسـته بـه عمـل هیچ گروه لی نیست.

5.3 – گروه‌های هذلولوی

نظریه‌ی گروه‌های هذلولوی و فضاهای متریک هـذلولوی توسـط هندسـه‌دان معـروف گروموف معرفی شـدند. سـاده‌ترین مثـال گروه‌هـای هـذلولوی گروه‌هـای آزاد نـاآبلی هسـتند. گروه‌هـای آزاد آبلی گروه‌هـای هـذلولوی محسـوب نمی‌شـوند. بسـیاری از قضایایی که در مـورد گروه‌هـای آزاد صـادق هسـتند بـا کمـک تکنیک‌هـایی هندسـی بـه گروه‌های هذلولوی تعمیم پیدا می‌کنند. جالب اینجاست که گروه‌هـای بنیـادی رویه‌هـای ریمانی هذلولوی نیز گروه‌های هذلولوی هستند. شاید بتوان مفهوم گروه‌های هـذلولوی را به کامل‌سازی پادمتناهی گروه‌های هذلولوی نیز توسعه داد و این‌گونه گـروه بنیـادی جبری رویه‌های ریمانی فشرده یا غیر فشرده ولی با ساختار جبری مورد مطالعه قـرار می‌گیرند که گروه گـالوا روی این گروه‌هـای پادمتنـاهی عمـل می‌کننـد و چـیزی شـبیه نمایش‌های گالوایی آبلی را بدست می‌دهند. در واقـع، بـا در نظـر گـرفتن عمـل گـروه گالوا روی گروه بنیادی موتیویک چندین نمایش گالوایی بدست می‌آیـد کـه اولین آن‌هـا همان نمایش گالوایی وابسته به واریته ژاکوبی خم هذلولوی اسـت کـه خـود موجـودی سهموی است. مفهوم گروه‌های متناهیاً نمایش‌پذیر هذلولوی بر هذلولوی بودن گـراف کیلی این گروه‌ها نسبت به مجموعه متناهی از مولدها کـه از پیش ثـابت گرفتـه شـده اسـت، بـه عنـوان یـک فضـای متریـک بنـا شـده اسـت. یـک نکته‌ی جـالب در مـورد خودریختی‌های گروه‌های هذلولوی معادل حدس پوانکاره است که بر اساس گروه‌هـای بنیـادی خم‌هـای گـونه‌ی g و ارتبـاط خودریختی‌هـای این گروه‌هـا بـا خودریختی‌هـای گروه‌های آزاد پوششی آن‌هـا فرمول‌بنـدی می‌شـود. بـا فرمول‌بنـدی حـدس مشـابهی درباره‌ی گروه‌هایی بنیادی جـبری می‌تـوان مشـابه هندسـه جـبری حـدس پوانکـاره را فرمول‌بندی کرد. به نظر می‌رسد توسعه‌ی نظریه‌ی گروه‌های هـذلولوی بـه گروه‌هـای پادمتناهی زبان لازم برای حمله به این حدس پوانکاره‌ی تعمیم یافته را فـراهم خواهـد کرد. جالب است که با وجود اینکه گروه‌ها موجوداتی سهموی هستند می‌توان قسـمتی از آن‌ا را به عنوان ریاضیات هذلولوی مطالعه کرد. در واقع، همـانطور کـه پیش از این اشـاره کـردیم می‌تـوان هندسـه‌های کـروی و هـذلولوی را داخـل هندسـه سـهموی مدل‌سازی کرد. لذا نباید از ظهور سرفصل گروهای هذلولوی تعجب کرد. همانطور که به آن خواهیم پرداخت یکی از خصوصیات ریاضیات هذلولوی قضایای متناهی است کـه در ریختارهای بین گروه‌های هذلولوی نیز مشاهده می‌شود. قضایای متناهی در هندسه مختلط و در هندسه دیوفانتی نیز ظهور می‌کنند که آن‌ها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

5.4 – مثلثات هذلولوی

در بـدو تولـد هندسـه هـذلولوی، مثلثـات هـذلولوی 2-بُعـدی معـرفی شـدند کـه از خصوصیات بارز آن ظهور سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی بود. بسط تیلـور این دو تابع نشان می‌دهد که قضایای سینوس‌ها و کسینوس‌ها در هندسه هـذلولوی در حـد به قضایای سینوس‌ها و کسینوس‌ها در هندسه اقلیدسی میل می‌کنند. جالب اینجاسـت که این توابع مستقل از هندسه هذلولوی در فیزیک روزمره ظهور پیدا می‌کنند. مثلاً یک طناب کشیده شده به خاطر وزنش قوسی برمی‌دارد که مشابه نمودار تابع کسـینوس هذلولوی است. بنابر تعمیم هذلولوی قضیه‌ی کسـینوس‌ها قضـیه‌ی فیثـاغورس نـیز در

هندسه هذلولوی مشابهی دارد. مجموع زوایای مثلث در هندسه هذلولوی کمتر از 180 درجه هستند و این محاسبات مثلثات هذلولوی را پیچیده‌تر می‌کند. هرچند امکان فرمول‌بندی مثلثات هذلولوی عواقب فلسفی بسیاری دارد اما در عمل به عنوان یک ماشینری کاربرد چندانی ندارد چرا که تنها در بُعد دو قابل فرمول‌بندی است و فضا-زمان لورنتس چهاربُعدی است و فرموبندی 1+1 بُعدی آن کاربردی فیزیکی ندارد. شاید بتوان با کمک مثلثات هذلولوی محاسباتی را روی رویه‌های ریمانی هذلولوی و ژئودزیک‌های آن‌ها انجام داد که از چنین محاسباتی سراغی ندارم. سینوس هذلولوی و کسینوس هذلولوی یک هذلولی را پارامتریزه می‌کنند که منجر به فرمول‌بندی هذلولی مثلثاتی(مشابه دایره‌ی مثلثاتی) می‌شود که در نظام آموزش قدیمی ایران مورد توجه بوده است. اما به مرور حذف و فراموش شده است. می‌توان از هذلولی مثلثاتی در محاسبات حسابان درست مانند دایره‌ی مثلثاتی کمک گرفت. به خاطر ندارم حل مساله‌ای در هندسه را با کمک ماشینری مثلثات هذلولوی دیده باشم اما در مقاله‌ای، "علی خزلی" سعی کرد مفهوم مخروط هذلولوی را معرفی کند و مقاطع مخروطی در هندسه هذلولوی را رده بندی کند که تحقیق بسیار ارزنده‌ای است.

مقاطع مخروطی مشابه در هندسه کروی از پیش بررسی شده بود. مثلاً مفهوم بیضی روی سطح کره به صورت مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل کروی آن‌ها از دو نقطه داده شده ثابت است خواصی بسیار مشابه خواص بیضی در هندسه سهموی دارد. در نهایت تحقیقات خزلی منجر به زبانی برای مطالعه هم‌زمان مقاطع مخروطی در هرسه هندسه بیضوی، سهموی و هذلولوی به طور هم‌زمان شد که از لحاظ تجرد زبان ریاضی بی‌نظیر است. قضایای این رده‌بندی و هم اثبات این قضایا در هر سه هندسه بیضوی، سهموی و هذلولوی معنی می‌پذیرند که اولین مثالی در ریاضیات است که هم‌زمان درباره‌ی عوالم موازی صحبت می‌شود.

5.5 – رویه‌های ریمانی هذلولوی

رویه‌های ریمانی هذلولوی از آغاز معرفی نظریه رویه‌های ریمانی اهمیت یافتند و ظهور مفهوم هذلولوی توسط قضیه‌ی نگاشت ریمان پایه‌گذاری شد. فضای پوششی هر رویه‌ی ریمانی بنابر قضیه‌ی نگاشت ریمان؛ کره ریمان، صفحه‌ی اعداد مختلط یا نیم‌صفحه‌ی پوانکاره است که با سه هندسه بیضوی، سهموی و هذلولوی متناظرند. نکته‌ی جالب اینکه خم‌های بیضوی(یا سهموی آن‌طور که ما نام‌گذاری می‌کنیم) فضای پوششی صفحه‌ی اعداد مختلط را می‌پذیرند. همینطور C^∞ که ساختار گروهی دارد فضای پوششی C را می‌پذیرد. این دلیل کافی برای در نظر گرفتن واریته‌های آبلی و نیمه آبلی و در حقیقت تمام گروه‌های لی به عنوان جزئی از هندسه سهموی خواهد بود. یکی از خصوصیات رویه‌های ریمانی هذلولوی متناهی مرفیسم‌های بین دو رویه‌ی ریمانی هذلولوی ثابت گرفته شده می‌باشد. گروه بنیادی رویه‌های ریمانی هذلولوی نیز گروه‌های متناهیاً نمایش داده شده هذلولوی هستند. لذا گروه‌های بنیادی جبری رویه‌های هذلولوی جبری نیز باید هذلولوی محسوب شوند. یکی دیگر از ابعاد رویه‌های ریمانی هذلولوی نظریه‌ی تایشمولر است که برای مطالعه‌ی فضای مدولی رویه‌های ریمانی نیز به کار می‌رود. رویه‌های ریمانی هذلولی معمولاً در چهارچوب هندسه مختلط مطالعه می‌شوند و کاربردهای فراوانی در قسمت‌های مختلف ریاضیات دارند.

از جمله مطالعه‌ی هندسه‌های مختلط ابعاد بالا با برگ بندی 1-بُعدی مختلط به مطالعه‌ی رویه‌های ریمانی هذلولوی منجر می‌شود. در نظریه‌ی ریسمان ها که از نظریات مدرن در فیزیک است رویه‌های ریمانی نقش مهمی ایفا می‌کنند و به قسمت‌هایی مستقل از ریاضیات ارتباط پیدا می‌کنند. شاید بتوان گفت قضیه‌ی نگاشت ریمان سومین باری در تاریخ ریاضیات است که تقسیم ریاضیات به ریاضیات بیضوی، سهموی و هذلولوی در آن ظهور پیدا می‌کند. در قرن بیستم مفاهیم سه‌گانه بیضوی، سهموی و هذلولوی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی وارد شده‌اند که نمونه‌های آن‌ها در مقاله‌ای از همین مولف جمع‌آوری شده است. رویه‌های ریمانی غیر فشرده معمولاً ساختار جبری نمی‌پذیرند اما در ریاضی-فیزیک نظریه‌ی رشته‌ها اهمیت پیدا می‌کنند. رویه‌های ریمانی هذلولوی غیر فشرده نیز قابل رده‌بندی هستند و می‌توان بر اساس رده‌بندی رویه‌های ریمانی فشرده آن‌ها را نیز رده‌بندی کرد. مطالعه‌ی خمینه‌های 3-بُعدی هذلولوی نیز از شاخه‌های مهم هندسه است که توسط ترستون پیشرفت‌های قابل توجهی داشته است. نویسنده از وارد شدن خمینه‌های هذلولوی ابعاد بالا در نظریه‌ی رشته‌ها اطلاعی ندارد.

5.6 – نجوم هذلولوی

نجوم هذلولوی توسط لورنتس بنیان‌گذاری شد که منجر به ظهور نظریه‌ی نسبیت خاص توسط انیشتین گردید. هرچند ریاضی‌دان مشهور پوانکاره نیز نظریه‌ی مشابهی را چند روزی زودتر از انشتین به چاپ رساند. پس از دو سال انشتین نظریه‌ی نسبیت عام خود را مطرح کرد که نظریه‌ی نسبیت خاص را تحت الشعاع قرار داد. امروز نظریه‌ی نسبیت در محاسبات GPS کاربرد دارد که در زندگی روزمره‌ی همه وارد شده است. گمان نمی‌کنم محاسبات نسبیتی در منظومه‌ی شمسی بر اساس نسبیت خاص مبنای تقویمی دقیق‌تر از تقویم خیام قرار گرفته باشند. تقویم خیام خود بر مبنای مدل بطلمیوسی است و نه مدل دکارتی که نجوم نیوتنی بر آن استوار شده است. در واقع نظریه‌ی خمینه‌ها برای مطالعه‌ی هندسه‌ی فضای 3-بُعدی مطرح شد و نظریه گروه‌های بنیادی و حدس پوانکاره به همین دلیل اهمیت دارند که به هندسه فضای 3-بُعدی مربوط می‌شوند. نظریه‌ی خمینه‌های چهار بُعدی نیز به هندسه‌ی فضا-زمان ارجاع دارند. حدس پوانکاره در ابعاد پنج به بالا توسط اسمیل و در ابعاد چهار و سه به ترتیب توسط فریدمن و پرلمان به اثبات رسیدند. اگر هندسه فضا-زمان یا هندسه فضا متناهی و فشرده باشد احتمالاً بسیاری از ژئودزیک‌ها خود را قطع می‌کنند لذا امکان این وجود دارد که تصویری که ما از جمعی از ستارگان می‌گیریم در جای دیگری از آسمان تکرار شده باشد. ولی تا کنون چنین گزارشی از منجمان نشنیده‌ایم. بعلاوه هندسه‌ی موضعی ژئودزیک‌ها تغییر می‌کنند و نور ستارگان فاقد چیزی شبیه DNA است که بتوان گفت دو ستاره‌ی متمایز نور مشابهی دارند. به خصوص که ژئودزیک نور ستارگان، آن‌ها را در زمان‌های متفاوتی در گذشته به نمایش می‌گذارند و ستارگان ممکن است در مراحل مختلفی از عمر خود مشاهده شوند. مسیر سیاره‌های منظومه‌ی شمسی توسط نسبیت انشتین تصحیح شده و با اندازه گیری تا پنج رقم اعشار تایید شده است. جالب اینجاست که نیوتن پیش از انشتین در کتاب نور شناخت خود اینکه جرم بتواند به انرژی تبدیل شود و اینکه نور بتواند توسط ستارگان سنگین

خم شود را پیش‌بینی کرده بود. نظریه‌ی نسبیت عام می‌گوید که هندسه‌ی فضا-زمان به طور سرتاسری هذلولی است که به ما اجازه می‌دهد نجوم نسبیتی را نجوم هذلولوی بنامیم.

5.7 – قضایای متناهی در نظریه اعداد

یکی از خصوصیات ریاضیات هذلولوی قضایای متناهی است. نقاط تعریف شده روی یک میدان اعداد از یک خم گونه‌ی صفر معمولاً نامتناهی است و نقاط تعریف شده روی یک میدان اعداد از یک خم سهموی تشکیل یک گروه متناهیاً تولید شده آبلی می‌دهد که با احتمال $\frac{1}{2}$ متناهی و با احتمال $\frac{1}{2}$ نامتناهی است. اما بنا بر حدس مردل که توسط فالتینگز ثابت شد تعداد جوابهای حسابی خم‌های هذلولوی همیشه متناهی است. بررسی جواب‌های حسابی خم‌های سهموی توسط پوانکاره آغاز شد و توسط مردل به اثبات رسید و ویل آن را به واریته‌های آبلی توسعه داد. از ابزارهای مهم برای اثبات تناهی جواب‌های حسابی معادلات دیوفانتی نظریه ارتفاع است که توسط نورسکات فرمول‌بندی شد و توسط بسیاری دیگر تعمیم داده شد. یک منبع مهم نظری برای تعمیم نظریه ارتفاع به نظریه آراکلو می‌باشد که به فشرده سازی مصنوعی شماهای حسابی می‌پردازند. مطالعه قضایای تناهی هنوز هم مسئله‌ای مهم در هندسه دیوفانتی است. بسیار سعی شده که قضیه مردل به ابعاد بالاتر تعمیم داده شود که هنوز جوابی نهایی پیدا نکرده است. لنگ سعی کرد شرطی جبری روی خمینه‌های جبری ابعاد بالا بگذارد که تناهی نقاط گویا را نتیجه دهد. یکی از پیشنهادهای لنگ مناسب بودن کلاف پادممماس است. تلاش‌های دیگری در هندسه مختلط برای تعمیم مفهوم هذلولوی با ابعاد بالا صورت گرفته است که ترجمه‌ی موفقی به تناهی نقاط گویا نداشته است. پیدا کردن شرطی هندسی که واریته‌های جبری ابعاد بالا با تعداد متناهی نقطه گویا را رده بندی کنند از مهمترین مسائل باز در هندسه دیوفانتی است. ریاضیات لنگ، فالتینگز، ویتا، ژانگ نقش مهمی در مطالعه مسئله تناهی در هندسه دیوفانتی داشته است. فراموش نکنید که نظریه اعداد خود بخشی از ریاضیات سهموی است که در داخل آن ریاضیات هذلولوی مدل شده است. در نهایت نتیجه می‌گیریم که بررسی ریاضیات بیضوی، سهموی و هذلولوی سهم مهمی در هدایت ریاضیدانان به سوی مرزهای آینده ریاضیات ایفا کرده است و حتی در داخل ریاضیات سهموی رده بندی سه‌گانه بیضوی، سهموی و هذلولوی نقش مهمی در درک ما از پدیده‌های ریاضی ایفا می‌کنند.