تمبری سرشار از منطق•

یوهان فان بنتام*

ترجمهٔ محمدصالح زارع‌پور

تمبری با یک فرمول منطقی

پاییز گذشته، ادارهٔ پستِ هلند به یمن تلاشهای دیرک وان دالن[1] از اولین تمبر خود که منقش به سیمای یک ریاضیدان و منطقدان است، رونمایی کرد. رسانه‌ها در سطح گسترده‌ای به نابغهٔ ملی ما لوئیتزن اخبرتوس یان براوئر[2] (۱۸۸۱ـ۱۹۶۶) پرداختند؛ و صدای ایشان، رساتر از همیشه، تا سر حد تقدیس و به عرش بردن او، در مقالهٔ رودی کوزبروک[3] در روزنامهٔ وزین ان. آر. سی. هندلس‌بلد[4] پژواک داشت.

اما برای بسیاری، یک سؤال همچنان باقی مانده است. فرمول روی تمبر

$$\not\models A \vee \neg A$$

به چه معنی است؟ خوب، شاید بهتر باشد که کاری به رمز و راز نهفته در فرمولهای فنی نداشته باشیم. شعار امسال جشن گرامیداشت دویست سالگی آکادمی سلطنتی علوم هلند[5]، «جادوی علم» است؛ اما از کجا معلوم که این جادو، جادوی سیاه[6] از آب در نیاید.

اصل طرد شق ثالث[7]

اما این [جادوی سیاه تلقی شدن] برای فرمول منطقی روی این تمبر، که این روزها بر سر زبان هلندیها افتاده است، مایهٔ افسوس خواهد بود. آنچه این فرمول به‌طور خلاصه نشان می‌دهد، نفی یک اصل مهم منطق کلاسیک، یعنی اصل طرد شق ثالث، توسط براوئر است. این اصل، که از روزگار باستان شناخته شده است، می‌گوید به‌ازای هر گزارهٔ A، یا خود A و یا نقیض آن («نه A» یا به‌طور صوری «$\neg A$») برقرار است. توجه کنید که طرد شق ثالث نمی‌گوید که ما می‌دانیم کدام‌یک از این دو شق محقق می‌شود؛ بلکه می‌گوید علی‌الاصول یکی از این دو شق محقق می‌شود. این اصل بی‌ضرر و بدیهی به نظر می‌رسد؛ و در ظاهر به سختی می‌توان از پذیرش آن امتناع کرد. در

1. Dirk van Dalen 2. Luitzen Egbertus Jan Brouwer
3. Rudy Kousbroek 4. *NRC Handelsblad*
5. Royal Dutch Academy of Sciences KNAW
۶. black magic یا dark magic نوعی جادو در جهت اهداف بدخواهانه و شوم.ـم.
7. The Law of the Excluded Middle

ضمن بد نیست چند کلمه در خصوص نمادهای روی تمبر بگوییم. منطقدانان نماد $\models$ را برای نشان دادن اعتبار[1] یک گزاره به‌کار می‌برند؛ و آن خط مورب کوچک هم برای نشان دادن نقیض این حکم به‌کار می‌رود [یعنی نشان دادن عدم اعتبار یک گزاره]. اما چرا نقض این حکم را با همان نماد نقیض $\neg$ نمی‌نویسیم؟ برای توضیح این مسأله باید کندوکاو عمیق‌تری انجام دهیم. معمولاً نمادهای ساده در منطق، همانند ریاضیات، پس‌زمینهٔ عمیقی دارند.

منطق گزاره‌ای کلاسیک

ابتدا نگاهی به منطق، آن چنان که در زمان دانشجویی براوئر بوده است، می‌اندازیم (اگر کسی بخواهد می‌تواند مدخل مربوط به او در دفتر امتحانات دانشگاه آمستردام را ببیند؛ ما هنوز هم از دفتر مشابهی برای ثبت سوابق امتحانها و دفاعیهٔ پایان‌نامه‌ها استفاده می‌کنیم). اجازه دهید سریع‌تر پیش برویم. حتی از زمان ارسطو و رواقیون می‌دانیم که بسیاری از استدلالها در حول و حوش مجموعهٔ کوچکی از مفاهیم اساسی سیر می‌کنند؛ مفاهیمی نظیر «و» (عطف، $\wedge$)، «یا» (فصل، $\vee$) و «نه» (نفی، $\neg$). هرکس در این موضوع شک دارد، کافی است سوار یک قطار هلندی شود و نگاهی به مسافران آن بیندازد. روزنامه‌های رایگان مترو[2] و اسپایتز[3] پرخواننده‌ترین نشریات منطق در این سیاره هستند! پازلهای سودوکوی آنها همه در مورد الگوهای منطقی هستند؛ الگوهایی نظیر اینکه «این مربع باید یک رقم x یا y داشته باشد؛ اما این رقم نمی‌تواند x باشد؛ پس y است». اگر این را با استفاده از نمادهای

1. validity 2. *Metro* 3. *Spits*

روی تمبر بنویسیم و «A» را به جای گزارهٔ «این مربع رقم x را دارد» و «B» را به جای گزارهٔ «این مربع رقم y را دارد» قرار دهیم، خواهیم داشت:

$A \vee B, \neg A \models B,$ (B از مقدمات $A \vee B$ و $\neg A$ نتیجه می‌شود)

نظام ریاضی چنین قواعدی، «منطق گزاره‌ای کلاسیک»، از قرنها پیش شناخته شده است. جورج بول[1] در کتاب قوانین تفکر[2] (منتشرشده به سال ۱۸۴۷) این نظام را به شکلی زیبا به زبان جبری مدون کرد. جبر بولی در حقیقت نوعی حساب دودویی با دو ارزش صدق ۰ ('کاذب') و ۱ ('صادق') است. پیش از آن در حوالی سال ۱۷۰۰، کار مشابهی توسط لایب‌نیتس انجام شده بود. او در رؤیای ماشین محاسبه‌ای بود که بتواند اعتبار منطقی را با محاسبهٔ دودویی بیازماید. چندی بعد، از سال ۱۹۵۰، قوانین بولی بر رایانه‌های شما حاکم شدند و هنوز هم این قوانین، علی‌رغم همهٔ چیزهایی که ضمیمه‌های علمی روزنامه‌ها در خصوص روشهای نوین محاسبهٔ کوانتومی می‌گویند، بر رایانه‌ها حاکم‌اند.

سه اصل مهم

حال به آن «اصول مهم» می‌پردازیم. سه قانون یا اصل بنیادین جبر بولی در حقیقت صورتهای ریاضی جدیدی از سه اصل منطق سنتی هستند. اصل اول این است:

اصل این‌همانی[3] $\quad A = A$

این چیز عجیبی نیست: $0 = 0$ و $1 = 1$ و این همان است. حتی آدم ستیزه‌جویی مثل براوئر هم هرگز این اصل را هدف انتقاد قرار نداد. در ادامه، تعبیری جدید و شگفت‌انگیز از این اصل را خواهیم دید؛ اما فعلاً به دومین اصل کلاسیک منطق می‌پردازیم:

اصل امتناع تناقض[4] $\quad \neg(A \wedge \neg A)$

این اصل می‌گوید یک گزاره نمی‌تواند در یک زمان هم صادق باشد و هم کاذب. به نظر می‌رسد که این اصل، علی‌رغم برخی زمزمه‌هایی که در محافل دیالکتیکی و عرفانی به گوش می‌خورد (و خود حکایتی دارد)، چالش‌برانگیز و مسأله‌ساز نیست؛ و فی‌الواقع: براوئر هم هیچ‌گاه به این اصل نتاخت.

اصل امتناع تناقض در فرهنگهای دیگری نیز که منطق در آنها مستقلاً بالیده است نمود دارد؛ مثلاً سنت موئیستی[5] در چین، در حوالی سال پانصدِ قبل از میلاد، این اصل را به‌صورت یکی از قواعد گفت‌وگو[6] تقریر می‌کند: تناقض در میان [آرای] طرفین گفت‌وگو پذیرفته نیست و باید مرتفع بشود.

1. George Boole 2. *Laws of Thought* 3. The Law of Identity
4. The Law of Non-Contradiction
۵. موئیسم (mohism یا moism) یک مکتب فلسفی چینی است که توسط موزی (Mozi یا Mo Tzu که در حوالی سالهای ۴۷۰ تا ۳۹۱ میلادی زندگی می‌کرده است) بنیان گذاشته شد. آرای این مکتب در تعارض جدی با آئین کنفوسیوس (Confucianism) و آئین تائو(Taoism) بود و رقیب جدی این دو مکتب در دورهٔ بهار و پائیز (Spring and Autumn Period) تمدن چین. این سه مکتب در کنار قانون‌گروی (Legalism) مهم‌ترین مکاتب فلسفی چین در آن دوران محسوب می‌شوند. فرقه‌ای از موئیسم دل‌بستهٔ منطق و حل معماهای منطقی بود. مهم‌ترین چهرهٔ این فرقه گنگ‌سان لانگ (Gongsun Long) است.ـم.
6. conversation

گذارهای فرهنگی برای یک منطقدان کاملاً طبیعی است. پیش از این هم لایب نیتس چین را به چشم یک طرف جدی در گفت‌وشنود فرهنگی می‌دید و حتی (خودسرانه) امپراتوری رم را به ارتباط مذهبی با چین توصیه کرد.

سنت موئیسم بر سومین اصل مهم ما، که پیش‌تر آن را دیدیم، نیز صحه می‌گذارد:

اصل طرد شق ثالث $\quad A \vee \neg A$

از نظر بول این گزارهٔ مرکب همیشه ارزش ۱ دارد. اگر A ارزش ۰ داشته باشد، $\neg A$ ارزش ۱ خواهد داشت و بنابراین، با اعمال جمع [دودویی در جبر بول]، این ترکیب فصلی ارزش ۱ خواهد داشت. اگر هم A ارزش ۱ را داشته باشد ماجرا به طریق مشابهی فیصله می‌یابد. گزینهٔ سومی در میان نیست. در اینجا هم تعبیر موئیستی بیشتر رو به سوی گفت‌وگو دارد. طرفین یک گفت‌وگو باید یکی از گزاره‌های A یا $\neg A$ را انتخاب[1] کنند، اگر چه در بدو امر ندانند که کدام‌یک از آنها درست است. به این نکته باز خواهیم گشت.

این سومین اصل مهم، از دوران یونان باستان مورد مناقشه بوده است. خود ارسطو این اصل را در مورد گزاره‌هایی که دربارهٔ آینده هستند، مشکوک می‌دانست. اینکه فردا یک جنگ دریایی رخ خواهد داد، هنوز صادق یا کاذب نیست، مگر اینکه آینده جبراً متعین باشد.

در ضمن، انواع تمبرهای یونانی در اندازه‌ها و با طرحهای گوناگون دربارهٔ ارسطو موجود است:

فرهنگهای دیگر هم می‌دانند که چگونه منطقدانان خود را گرامی دارند. در سراسر جهان اسلام هنوز هم تمبرهای تازه‌ای از حکیم بزرگ ابن سینا (که در حوالی سال ۱۰۰۰ میلادی می‌زیسته است) منتشر می‌شود، اگر چه این تمبرها بیشتر نوآوریهای پزشکی او را تجلیل می‌کنند تا نوآوریهای منطقی او را:

1. choose

انتقاد براوئر: از صدق تا اثبات‌پذیری[1]

مشکل براوئر با $A \vee \neg A$ چه بود؟ اینکه این تمبر هلندی یک اصل معتبر را صورتبندی نمی‌کند بلکه انتقادی از رأی دیگران و مجادله با ایشان را نشان می‌دهد، کاملاً جالب توجه است. چنانکه فریتس فان اوستروم[2]، رئیس انجمن سلطنتی، یک بار در مراسمی در گورستان بلاریکوم[3] که براوئر در آن آرام گرفته است گفت: «این سنگ قبر بر روی تاریخی طولانی از مجادلات قرار گرفته است که به عقیدهٔ من، خانمها و آقایان، تمام و کمال در روح این مرحوم جای دارد». اما تردید براوئر در مورد طرد شق ثالث از دیدگاه «شهودیِ» ایجابی او در مورد صدق ریاضی نشأت گرفت. این برآمده از منش ریاضیدانی است که اشیا را می‌سازد و صفات آنها را به‌طور ساختی اثبات می‌کند. طبق این نظر، که توسط هیتینگ در ۱۹۲۹ تصریح شد، اما از آرای ساختگریان روسی معاصر نظیر کولموگروف هم برمی‌آید، برهانهای گزاره‌های مرکب را می‌توان به‌طور نظام‌مند از برهانهای مؤلفه‌های ساده‌تر آنها ساخت. این [ایده] برای مفاهیم اساسی بولی، چنین به‌کار می‌رود. برهانی برای یک ترکیب عطفی $A \wedge B$ شامل یک جفت برهان است که یکی از آنها برای A و یکی برای B است. برهانی برای یک ترکیب فصلی $A \vee B$ برهانی برای A یا برهانی برای B است، و برهانی برای سالبهٔ $\neg A$ ردّیه‌ای بر A است، یا به بیان دقیق‌تر روش مؤثری[4] که هر برهان برای A را به برهانی برای تناقض آشکار تبدیل کند.

بنابر این تقریر، اصل طرد شق ثالث دستخوش یک تغییر نهادین می‌شود. در این تعبیر جدید، این اصل می‌گوید که هر گزارهٔ ریاضی یا اثبات‌پذیر[5] است و یا ابطال‌پذیر[6]. البته این حرف قابل دفاع نیست؛ و در حقیقت غلط است. از قضایای ۱۹۳۱ گودل می‌دانیم که «ناتمامیت»[7] عرف ریاضیات است. در بسیاری از نظریه‌های معمول حساب، آنالیز یا نظریهٔ مجموعه‌ها، بعضی گزاره‌ها نه ابطال‌پذیر هستند و نه اثبات‌پذیر (البته با این فرض که این نظریه‌ها سازگار هستند). کورت گودل را بزرگ‌ترین منطقدان از زمان ارسطو تا به حال می‌دانند؛ با این همه تنها تمبری که نصیب او شده است، تمبری است که به‌صورت محدود برای کلکسیون‌داران در وطنش اتریش چاپ شد:

با این همه، باز هم ایراد و نقد براوئر به هیچ‌وجه مطلق نیست، به‌خصوص که او می‌پذیرد که در بسیاری از دستگاههای ریاضی استدلال مبتنی بر طرد شق ثالث پذیرفته است، به شرط آنکه به اندازهٔ کافی «ساده» باشند و به‌طور خاص، اگر ساختاری متناهی داشته باشند. اما به عقیدهٔ او تعمیم این اصل به ساختارهای نامتناهی قابل مناقشه است.

1. provability 2. Frits van Oostrom 3. Blaricum
4. effective method 5. provable 6. refutable 7. incompleteness

آیا هنوز هم دربارهٔ یک چیز حرف می‌زنیم؟

شما ممکن است بلافاصله معترض شوید که انتقاد فوق متوجه اصل طرد شق ثالث کلاسیک نیست. چون در اینجا یک تغییر اساسی رخ داده است، و به جای صحبت از صدق، از اثبات‌پذیری صحبت می‌کنیم. بنابراین، براوئر با منطق کلاسیک، در مختصات خودش، نزاع نمی‌کند؛ او مختصات را تغییر داده است. تأکید بر این تمایز، راه‌حلی کدخدامنشانه[1] و یادآور تمایل تاریخی هلندیها به تسامح و تساهل است؛ و ممکن است مورد علاقهٔ بسیاری از منطقدانان حرفه‌ای هم باشد. منطق کلاسیک در خصوص صدق محق است؛ و در مقابل براوئر هم در خصوص اثبات‌پذیری محق است. اگر شما ستیزه‌جو هستید و همچنان سرتان برای دعوا درد می‌کند، باید با بعضی موضع‌گیری‌های ایدئولوژیک هم دست‌وپنجه نرم کنید. برخی پیروان «تحقیق‌پذیری»[2] فلسفی مدعی هستند که اثبات‌پذیری، یا به‌طور کلی‌تر تحقیق‌پذیری، تنها تعبیر معقول[3] از صدق است. بنابراین، منطق کلاسیک نظامی تهی از معنا می‌شود که در بهترین حالت «صرفاً برای هواداران دو آتشهٔ خودش درست است». اما در واقعیت، اگر چه تحقیق‌پذیری برخی طرفداران مشهور دارد، کلیسای فلسفی کوچک‌تری [در قیاس با کلیسای کلاسیک] است.

منطق شهودی: جایگزینِ ساختی

حتی اگر همهٔ اینها هم درست باشد، باز هم صرف انتقاد از منطق دیگران، دلیل فضیلت علمی نیست. آنچه دیدگاه براوئر را تا این اندازه قابل توجه می‌کند در حقیقت آن موضع ایجابی است که در پس دیدگاه کلی او نسبت به ریاضیات سر بلند می‌کند، نظامی که امروز به نام منطق شهودی شناخته می‌شود. تعبیر اثباتی [یا برهانی] مفاهیم منطقی، نظامی از قوانین را به همراه خود دارد که سازگاری و زیبایی را در هم‌می‌آمیزد. مثلاً اصل امتناع تناقض همچنان برقرار است، به این معنی که ممکن نیست هم برهانی برای A داشته باشیم و هم ابطالی برای آن؛ و این امر خود برهانی برای $\neg(A \wedge \neg A)$ است. به‌علاوه بسیاری از اصول مفید دیگر نیز، با یک رنگ‌وبوی تازهٔ نظریهٔ برهانی[4] همچنان برقرار هستند. به‌طور خاص، همهٔ استنتاجات مورد نیاز برای حل سودوکوی شما به‌طور شهودی نیز صحیح هستند و این می‌تواند مایهٔ آرامش خاطر شما باشد وقتی که با قطار به خانه برمی‌گردید. چیزی که اتفاق می‌افتد این است که اصول کلاسیک استدلال به انواعی «تقسیم می‌شوند»؛ بعضی از آنها به‌طور شهودی برقرار هستند و بعضی نیستند. یک مثال زیبا روش مشهور «برهان خلف»[5] است. در منطق کلاسیک می‌توان $\neg A$ را با فرض A و نتیجه گرفتن تناقض از آن، اثبات کرد. این الگوی معمول از نظر فرد شهودگرا کاملاً خالی از اِشکال است؛ اما منطق کلاسیک در عین حال یک نوع الگوی رازآمیزتر هم دارد: اثبات گزارهٔ A با فرض $\neg A$ و نتیجه گرفتن تناقض از آن. این روش دوم به‌طور شهودی قابل قبول نیست: «ابطالِ ابطال‌پذیری» خود یک برهان ایجابی نیست. البته این روش چیزی را اثبات می‌کند؛ اما این چیز صرفاً نقض مضاعف A یا همان $\neg\neg A$ است. در حالی‌که شهودگرایان

۱. تعبیر اصلی متن «polder solution» است؛ در هلند «polder» به زمینهای پست ساحلی که با سدبندی کشت می‌شوند، گفته می‌شود.ـم.

2. verificationism 3. sensible 4. proof-theoretic
5. proof by contradiction

هم‌ارزی دو گزارهٔ $\neg\neg A$ و A را که در منطق کلاسیک معتبر است، رد می‌کنند. به‌طور کلی آنها گزارهٔ اول را ضعیف‌تر از گزارهٔ دوم می‌دانند.

از برهان به اطلاعات

به مرور زمان این امکان به‌وجود آمده است که منطق شهودی را به روشهای جدیدی، و نه صرفاً با استفاده از مفهوم برهان، تعبیر کنیم؛ که این روشها در کنار تعبیر اصلی براوئر نکات جالبی را برای ما آشکار می‌کنند. اورت بث[1]، همکار براوئر در دانشگاه آمستردام در دههٔ ۱۹۵۰، شهودگرایی را به‌وسیلهٔ مدلهای معناشناختی مراحل افزایش اطلاعات[2]، از کم به زیاد، تعبیر کرد، به‌طوری که گزاره‌ها همیشه در مراحل این فرایند تعبیر می‌شوند. یک ریاضیدان، یا به‌طور عام یک فاعل شناسا، هر چه در این مراحل پیش می‌رود به‌تدریج اطلاعات بیشتری را به‌دست می‌آورد؛ و بدین ترتیب شاهد یک همزیستی مسالمت‌آمیز بین دو نظام منطقی هستیم. در آخرین مرحلهٔ فرایندهای رشد اطلاعات، که در آنها همهٔ اطلاعات موجود هستند، منطق کلاسیک برقرار است. اما در مراحل مقدماتی، که ما در طول زندگی در آنها قرار داریم، برخی قوانین منطق کلاسیک ممکن است برقرار نباشند. اجازه دهید که نقیض A را در مرحله‌ای از مدل صادق بدانیم که A پیش از این مرحله رد شده است: هیچ مرحلهٔ غنی‌تری A را صادق نمی‌کند. تحت این تعبیر به‌سادگی می‌بینیم که طرد شق ثالث در حالت کلی رد خواهد شد. یک مدل بسیار سادهٔ اطلاعات با دو مرحله را در نظر بگیرید؛ یک مرحلهٔ آغازین که در آن هنوز A را نداریم و یک مرحلهٔ پایانی که در آن A را داریم:

در مرحلهٔ اول، A طبق فرض برقرار نیست. اما بر مبنای تقریری که کمی قبل از نقیض ارائه دادیم، نقیض A هم برقرار نیست؛ چرا که ما در مرحلهٔ دوم A را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، ترکیب فصلی $A \vee \neg A$ در مرحلهٔ اول برقرار نیست.

قدری نکته‌سنجی در اینجا لازم است. در معناشناسی بث و به‌طور کلی در منطق شهودی، تفاوت ظریفی بین گفتن اینکه در موقعیتی «A برقرار نیست» و گفتن اینکه در آن موقعیت «نقیض A برقرار است» وجود دارد، که در حقیقت شما آن را بر روی تمبر دیدید. انتقاد براوئر با یک «خط مورب» کوچک که نمایندهٔ نفی ضعیف «نه» است، صورت‌بندی شده است. این انتقاد با نفی قوی خودِ شهودگرایی، $\neg$، صورت‌بندی نشده است. این امر حتی ناممکن است؛ چنانکه براوئر نفی قوی طرد شق ثالث را متناقض می‌داند و بنابراین اصل زیر به‌صورت شهودی معتبر است:

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

اما آیا این اصل با حذف یک حشو، یعنی دو نفی، همان طرد شق ثالث نیست؟ چنین به نظر می‌رسد اما: چنانکه پیش از این دیدیم اصل کلاسیک $A \leftrightarrow \neg\neg A$ از لحاظ شهودی نامعتبر است... تمایز [A و $\neg\neg A$ در منطق شهودی] به‌سادگی در مدلهای بث قابل رؤیت است: $\neg\neg A$ به این معناست

1. Evert Beth 2. information

که برای هر مرحله، مرحله‌ای بعدی وجود دارد که در آن A صادق می‌شود («A حتمی‌الوقوع است»)، اما این به معنای آن نیست که A در همین مرحله و همین حالا صادق است. ممکن است شما بدانید که چه کسی در مقابل شما ایستاده است اما «هنوز به هم معرفی نشده باشید». برای مثال در مرحلهٔ ۱ از تصویر قبل، $\neg\neg A$ صادق است اما A نیست.

در اینجا به یک نقطهٔ مهم افتراق روشها می‌رسیم. برای بسیاری، آنچه پیش‌تر آمد نوعی بازی تحمل‌ناپذیر با نقیضهاست؛ اما در نظر دیگران، راه بر شیوهٔ تفکر نوینی گشوده می‌شود که از تمایزات لطیفی که در منطق کلاسیک مغفول مانده است، پرده برمی‌دارد. در هر حال، به نظر منصفانه می‌رسد که بگوییم منطق شهودی توصیفی سازگار و ظریف از استدلال ساختی[1] در بستری از برهان، اطلاعات و محاسبه فراهم می‌کند. منطق شهودی به‌منظور کنار زدن منطق کلاسیک از جایگاه منطقی معیار و به حاشیه راندن آن طراحی نشده است اما در هر حال جایگاه خود را در مبانی ریاضیات و علوم رایانه پیدا کرده است. این جایگاه، چنانکه بعضی پیروان متعصب براوئر در دوران جدید دوست دارند، وسیع نیست. در عین حال چنانکه برخی کتابهای درسی منطق نشان می‌دهند هم محدود نیست؛ چه آن کتابهایی که شهودگرایی را مغفول می‌گذارند و چه آنهایی که از آن به مثابهٔ «انقلابی که شکست خورد» یاد می‌کنند.

داستان ادامه دارد: شهودگرایی و بازیهای گفت‌وشنودی

شهودگرایی معمولاً در همراهی با مبانی ریاضیات و برهانهای محض دارای دقتِ فرازمینی، جایی برای ضعف بشری و ناسازگاری باقی نمی‌گذارد. اما افکار و ایده‌ها سیر تکاملی خود را دارند و ما می‌توانیم به‌نحو کاملاً مقبولی کارهای براوئر را در ادامهٔ سنت منطقی بسیار متفاوتی قرار دهیم که به روزگار باستان می‌رسد؛ یعنی الگوهای منطقی گفت‌وشنود[2] و مباحثه، و در حقیقت شاید این چشم‌اندازی درخور برای ریاضیات باشد. برهان، چنانکه ظاهراً بسیاری از مردم فکر می‌کنند، «پایان‌دهندهٔ یک گفت‌وگو»[3] نیست؛ بلکه تلاش غایی برای ایضاح یک مطلب برای دیگران و برقراری ارتباط بین الاذهانی است. بنابراین داستان اصول منطقی ما چرخشی در جهت احتجاج و بازیها پیدا می‌کند.

در اواسط دههٔ ۱۹۵۰، این چرخش توسط منطقدان آلمانی پاول لورنتسن[4] که در جستجوی مبنایی از اصول منطقی در مباحثات و تعاملات روزمرهٔ ما بود، انجام شد. ایدهٔ قابل توجه او این بود که اعمال منطقی اصلی «یا»، «و» و «نه» می‌توانند نقش «تغییردهندهٔ وضعیت» را ایفا کنند، نه فقط در رایانهٔ بولی، بلکه در مباحثه[5]. وقتی من از $A \vee B$ دفاع می‌کنم، شما می‌توانید من را ناگزیر کنید که انتخاب کنم که در آخر از کدام‌یک [از A یا از B] دفاع کنم. بنابراین، هر ترکیب فصلی یک انتخاب[6] را پیش روی مدعی آن می‌گذارد؛ و به‌طور مشابه هر ترکیب عطفی نیز یک انتخاب را پیش روی منتقد آن می‌گذارد: چون مدعی ترکیب عطفی ملتزم به هر دو مؤلفهٔ آن است. بنابراین، یک بازی احتجاجی بین مدعی یک گزاره و منتقد آن آغاز می‌شود؛ و تفسیری که همین الان ارائه شد، بلافاصله در یک رفتار جذاب «پویا»[7] تبیین می‌کند

1. constructive reasoning 2. dialogue
3. conversation stopper 4. Paul Lorenzen 5. discussion
6. choice 7. dynamic

که چرا از یک منظر صوری، عطف و فصل به‌طور مشابه رفتار می‌کنند. در حقیقت اینها عمل یا انتخاب یکسانی هستند که توسط بازیکنان متفاوتی انجام می‌شوند. به‌علاوه، در یک گفت‌وشنود، تعاملات جالبی به‌وسیلهٔ سومین عملگر جبر بولی یعنی نفی منطقی انجام می‌شود. این عملگر یک تغییر نقش را باعث می‌شود: دفاع از $\neg A$ حمله به A است، و به‌عکس. در حقیقت، قابلیت «قرار دادن خود در جای دیگری» اساسی‌ترین دستاورد شناختی بشری قلمداد می‌شود. به این طریق، منطق ساختار تعامل معقول میان طرفین گفت‌وگو را تبیین می‌کند.

با این تعبیر، لورنتسن یک استنتاج منطقی را معتبر می‌داند اگر مدعی نتیجهٔ آن یک استراتژی برد[1] داشته باشد: یعنی روشی برای بازی که منجر به برد او در برابر هر مدافع مقدمات آن استنتاج شود. در اینجا به یک مثال ساده مبتنی بر قوانین ابتدایی سودوکو می‌پردازیم. وقتی در مقابل کسی که از مقدمات $A \vee B$ و $\neg A$ دفاع می‌کند، از نتیجهٔ B دفاع می‌کنید، ابتدا به ترکیب فصلی حمله می‌کنید و او را مجبور می‌کنید که انتخاب کند. اگر پاسخ او B باشد که شما بازی را می‌برید؛ و اگر انتخاب او A باشد، آنگاه شما با خیال آسوده به A حمله می‌کنید، چون او خود را در موقعیت شرم‌آور «خود متناقض بودن» در یک گفت‌وگو قرار داده است: A، $\neg A$. البته استراتژیهای عمومی برد ممکن است بسیار پیچیده‌تر از این استراتژی ساده باشند: هر چه باشد، ارائهٔ استدلال موفق به هیچ‌وجه توانایی پیش‌پا افتاده‌ای نیست.

ارتباط این موضوع با تمبر ما این است: ما همچنان به فکر آن هستیم... آنچه لورنتسن مشاهده کرد این است که در این تعبیر به زبان بازی، اصل طرد شق ثالث مقبول نیست. مدافع $A \vee \neg A$ نیازی به یک استراتژی کلی ندارد که به او بگوید کدام‌یک را انتخاب کند تا ببرد. در حقیقت گزاره‌های معتبر منطقی که در بازیهای گفت‌وشنودی لورنتسن برای آنها استراتژی برد وجود دارد، دقیقاً همان گزاره‌های معتبر منطق شهودی براوئر هستند! اگر چه باید گفت که در این ضمن، برخی بازیهای گفت‌وشنودی پیدا شده‌اند که با منطق کلاسیک انطباق دارند و تفاوت آنها با سایر بازیها در حقیقت در روندهایی است که به‌طور دستوری اضافه شده‌اند. قواعد مباحثه در این بازیها این امکان را به مدافع یک ترکیب فصلی می‌دهد که بعداً در انتخاب اولیهٔ خود تجدیدنظر کند. بنابراین، منطق شهودی صادقانه‌تر است در حالی که منطق کلاسیک به رفتار بشری نزدیک‌تر. لورنتسن به‌وضوح اولی را ترجیح می‌دهد. او به واقع انسان پرهیبتی است. زمانی که استادیار جوانی بودم، یک بار که برای نهار در دانشگاه گرونینگن با او همراه شدم، نزدیک بود از ترس قالب تهی کنم.

منطق وحل بازیها

کار لورنتسن تأثیر اندکی در مبانی ریاضیات داشته است و نقش آن حداکثر محدود بوده است به اینکه منبع الهامی برای «نظریهٔ احتجاج»[2] به‌طور کلی باشد، حتی در هلند که سرزمین مادری شهودگرایی است. اما این ایده که منطق و بازیها به‌طور طبیعی به هم گره می‌خورند به جای مانده است؛ و حتی در این روزها بسیار بیشتر نمود پیدا می‌کند. تأثیر اساسی در اینجا برآمده از علم انفورماتیک (که گاهی علوم رایانه خوانده می‌شود) است، یک رشتهٔ بنیادین که در آن منطق هنوز مبنایی برای مطالعهٔ فرایندهای شامل اطلاعات و محاسبه فراهم می‌کند. و محاسبه در معنای جدید آن، چنانکه با توجه به نقش ای‌ـمیل و اینترنت در زندگی خود می‌دانید، مدتهاست که دیگر صرفاً بخشی از مدارهای بولی در یک دستگاه محاسبهٔ منزوی نیست؛ بلکه یک تعامل پیچیده بین فرایندهای اطلاعاتی است که در شبکه‌های بزرگی از «عاملها» گسترده است.

این ارتباط با علم انفورماتیک واجد جنبه‌هایی است که بیشتر آنها از طریق منطق کلاسیک پیش می‌روند و حتی بیش از این، در عرصهٔ بازیها، طرد شق ثالث بهترین دوران خود را می‌گذراند! برای ملاحظهٔ این موضوع، اجازه دهید که در زمان به عقب برگردیم و به یکی از معاصران براوئر برسیم: ریاضیدان آلمانی ارنست تسرملو[1] که یکی از بنیانگذاران نظریهٔ مجموعه‌های جدید است. تسرملو به این سؤال علاقه‌مند بود: «بهترین موقعیت برای شروع بازی شطرنج چیست؟» (ریاضیدانان بزرگ دامنهٔ علایق وسیعی دارند). در ۱۹۱۳ تسرملو قضیهٔ زیر را اثبات کرد که حالا به نام او مشهور است. در یک بازی متناهی میان دو بازیکن با دو نتیجهٔ ممکن «برد» و «باخت» که در آن هر دور بازی باید در تعداد متناهی مرحله خاتمه یابد، یکی از دو بازیکن باید استراتژی برد داشته باشد. در اینجا برهان ریاضی جذابی برای این قضیه ارائه می‌دهیم:

«فرض کنید که بازی تنها یک مرحله به طول می‌انجامد و بازیکن I شروع می‌کند. آنگاه یا I حرکتی دارد که او را برنده می‌کند (و بنابراین استراتژی برد او «انتخاب چنین حرکت پیروزی‌بخشی» است)، یا اینکه همهٔ حرکات آغازی منجر به باخت I می‌شود؛ و در این‌صورت بازیکن II یک استراتژی برد دارد («منتظر بمان و ببر»). برای وقتی هم که بازی دو مرحله به طول می‌انجامد فقط استدلال ارائه‌شده را تکرار می‌کنیم. یا بازیکن شروع‌کننده حرکتی دارد که با انجام آن در موقعیتی قرار می‌گیرد که در آن یک استراتژی برد دارد و بنابراین یک استراتژی برد در کل بازی دارد— یا همهٔ حرکتهای او منتهی به موقعیتی خواهند شد که در آن بازیکن دیگر یک استراتژی برد دارد و بنابراین بازیکن دوم یک استراتژی برد در کل بازی دارد؛ و به همین ترتیب برای بازیهای طولانی‌تر».

این خط‌مشی استدلال را حتی می‌توان برای نوشتن یک الگوریتم مکانیکی به‌کار گرفت که درخت همهٔ حرکات ممکن در یک بازی متناهی را می‌پیماید وگره به گره مشخص می‌کند که کدام بازیکن استراتژی برد دارد. این الگوریتم مبنای همهٔ روشهای پیچیده‌تری است که امروزه بازیها را با استفاده از رایانه حل‌وفصل می‌کنند؛ طراحی این روشها صورتی از یک «فرا بازی» است که گروه هلندی IKAT/MICC ما در ماستریخت یکی از مهم‌ترین بازیکنان بین‌المللی آن است.

البته شطرنج نتیجهٔ سومی هم دارد، یعنی تساوی. قضیهٔ تسرملو در این حالت می‌گوید که یا یکی از بازیکنان یک استراتژی برد دارد و یا بازیکن دیگر یک «استراتژی نباختن» دارد که تضمین می‌کند او همیشه می‌برد یا مساوی می‌کند. این حکم را قهرمان هلندی شطرنج جهان ماکس ایو[2] مستقلاً در ۱۹۲۹ دوباره کشف کرد. از آن زمان، یعنی تقریباً یک قرن بعد از حکم تسرملو، ما هنوز نمی‌دانیم که کدام‌یک از این دو حالت برای

1. winning strategy 2. argumentation theory

1. Ernst Zermelo 2. Max Euwe

شطرنج برقرار است: درخت کامل بازی شطرنج بزرگ‌تر از آن است که بتوان سراسر آن را جستجو کرد و به این معنی، حتی طرد شق ثالث متناهی یک ایده‌آل است که لزوماً منجر به دانش بالفعل نمی‌شود. البته شمارش معکوس ساعت برای شطرنج شروع شده است. اخیراً برای بازی تخته‌ای «چکرز»[1] که به نوعی معادل امریکایی «دامسپل»[2] هلندی است، ۱۵ سال کار مداوم رایانه پاسخ تسرملو را داده است: بازیکن شروع‌کننده یک استراتژی نباختن دارد.

اگر کسی قدری دربارهٔ طرح استدلال تسرملو فکر کند، نقش محوری طرد شق ثالث، و به راستی قدرت و زیبایی این اصل، روشن خواهد بود. البته شهودگرایان اعتراضی ندارند: بازیهای مورد نظر متناهی بوده‌اند. برای بازیهای نامتناهی، مسائل به سرعت حساس‌تر می‌شود؛ و ما این سر نخ را در زمینه‌های دیگر پی می‌گیریم. تمهای منطقی اغلب از یک حوزهٔ آکادمیک به حوزهٔ دیگر می‌روند و همین کوچ منزل به منزل آنهاست که تا این اندازه جذابشان می‌کند.

بازیهای نامتعین، نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ بازیها

بازی‌ای که در آن یکی از دو بازیکن استراتژی برد دارد، متعین[3] نامیده می‌شود. آیا همهٔ بازیها متعین هستند؟ با این سؤال ساده، درست در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها قرار می‌گیریم. مثالهایی از بازیهای نامتناهی نامتعین پیدا شده‌اند اما ساختار آنها عمیقاً به اصول ریاضی‌ای که فرد برای مجموعه‌ها مفروض می‌گیرد وابسته است، به‌ویژه به «اصل موضوع انتخاب»[4] مشهور. بنابراین، در دههٔ ۱۹۶۰ پیشنهاد یک تغییر اساسی داده شد و آن اینکه متعین بودن همهٔ بازیها را اصل بگیریم. این اصل موضوع تعین[5] را می‌توان به‌صورت «طرد شق ثالث معتبر است» تلقی کرد؛ اما در پس آن نتایج ریاضی زیبایی هستند که چهارنعل می‌تازند. امروزه اجماعی وجود دارد که نظریهٔ مجموعه‌ها به اصول جدیدی نیاز دارد، اما کمتر اجماعی در این مورد وجود دارد که: کدام اصول، و اصل تعین تنها یک گزینه است. در هر حال، ممکن است گفته شود که در اینجا بازیها منبع الهام مهمی هستند.

اما نظریهٔ مجموعه‌ها هنوز نظریهٔ بازیها[6]، در معنای اقتصادی معمولِ آن، نیست. زمینهٔ اخیر ترجیحات پیچیده‌تری را که یک بازیکن، فراتر از برد و باخت، نسبت به نتیجهٔ یک بازی در نظر می‌گیرد توضیح می‌دهد. در این راستا، نظریهٔ ریاضی بازیها بر «تعادلها»[7]یی که بین استراتژیهای منتخب بازیکن برقرار می‌شود تأکید می‌کند؛ که در آنها هیچ کس نمی‌تواند درآمد خود را با انحراف یک‌طرفه افزایش دهد. فیلم اخیر «یک ذهن زیبا»[8] قدری دربارهٔ این نظریهٔ تعادل می‌گوید و مقدار زیادی دربارهٔ زندگی تراژیک بانی اصلی آن جان نش[9]. در واقع، تعادلهای نش تعامل بین بازیکنان را در ورای چارچوب تسرملو توضیح می‌دهد و برای مطالعهٔ اقتصادی واقع‌گرایانه و رفتار اجتماعی ضروری است. اما حتی در این حوزهٔ غنی‌تر، روابط ثمربخشی بین منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها سر برمی‌آورد که در بعضی مواقع به‌عنوان «تعاملات هوشمند»[10] معرفی می‌شوند.

1. Checkers 2. Damspel 3. determined
4. Axiom of Choice 5. Axiom of Determinacy
6. game theory 7. equilibria 8. A Beautiful Mind
9. John Nash 10. intelligent interaction

به نظر می‌رسد که از تمبر خود خیلی دور شده‌ایم. اما حتی در این حوزهٔ وسیع‌تر هم باز به براوئر برخورد می‌کنیم، براوئری دیگر که بی‌تردید در توپولوژی پیشگام است؛ توپولوژی شاخه‌ای از ریاضیات است که در قرن بیستم به‌عنوان مجردترین نوع مطالعهٔ ساختارهای فضایی به‌وجود آمد. عمدهٔ شهرت براوئر در نزد ریاضیدانان متکی به قضیهٔ نقطهٔ ثابت[1] اوست، یک نتیجهٔ اساسی و بنیادین با طیف وسیعی از کاربردهای هیجان‌انگیز. این قضیه می‌گوید که همهٔ توابع پیوسته بر روی فضاهای توپولوژیک مناسب دارای «نقاط ثابت» هستند: نقاطی مثل x که در آنها مقدار تابع $f(x)$ خود x است. حالا تعادلهای نظریهٔ بازیها و نقاط ثابت توپولوژیک بسیار مرتبط به هم از آب در می‌آیند و چنانکه جان‌فون نویمان نشان داد، قضایای مهمی از نظریهٔ بازیها از قضیهٔ براوئر نتیجه می‌شوند. از قضا براوئر در اثبات قضیهٔ خود هیچ محدودیت شهودگرایانه‌ای اعمال نکرده است و در حقیقت، اگر بخواهیم صریح‌تر صحبت کنیم، قضیهٔ نقطهٔ ثابت از دیدگاه شهودگرایانه حتی غیرقابل اثبات است (بحث دربارهٔ معادلهای ساختی آن همچنان ادامه دارد...). بنابراین، اگر چه براوئر علیه طرد شق ثالث موعظه می‌کرد اما با گناه ارتکاب آن بیگانه نیست.

منطق، محاسبهٔ متقابل و جبر خطیِ بازی

حکایت طولانی ما از شهودگرایی براوئری، منطقِ کلاسیک، علم انفورماتیک، نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ بازیها یک پیچ هیجان‌انگیز دیگر در انتهای خود دارد. طرد شق ثالث همیشه به‌عنوان منبعی برای بصیرتهای جدید باقی می‌ماند. برای رسیدن به مرز تحقیقات جاری، ما در ابتدا به مفاهیم اولیهٔ خودِ منطق که هنوز هم محل بحث است باز می‌گردیم. در بازیها، گفت‌وشنود و احتجاج، تعامل بین دو یا چند نفر، موضوع اصلی است و فرایند پیچیده‌ای را خلق می‌کند که در طول زمان به‌وقوع می‌پیوندد. اما در این صورت تعبیر اولیهٔ ما از ترکیب فصلی «A یا B» به‌عنوان انتخابی برای یکی از زیربازیهای A، B مؤثر به نظر می‌رسد، چون آن انتخاب باید در آغاز «به‌طور کلی»[2] انجام شود، در هنگامی که ما هیچ نمی‌دانیم که در اثر هر کدام از این انتخابها چه روی خواهد داد. به همین دلیل پیشنهاد شده است که یک صورت منطقی دیگر از انتخاب هم اضافه شود. در این حالت A و B هر دو به‌طور موازی بازی می‌شوند و بازیکنی که باید دست به انتخاب بزند می‌تواند در هر نوبت بازی خود «به‌طور موضعی»[3] تصمیم بگیرد که حرکت بعدی در کدام‌یک از دو بازی [یعنی A یا B] انجام شود. این انتخابِ با تأخیر یادآور همان چیزی است که پیش‌تر در گفت‌وشنودهای لورنتسن برای منطق کلاسیک و نیز، با قدری خوش‌بینی تاریخی، در سنت موئیستی چین دیدیم. یک مثال معروف و مکرراً کشف‌شده، از شطرنج گرفته می‌شود. در شطرنج روشی هست که شما می‌توانید با آن قدری بابی فیشر[4] را اذیت کنید، روشی که به نام استراتژی «کپی کت»[5] شناخته می‌شود:

«شما دو بازی شطرنج را به‌طور مشابه انجام می‌دهید؛ یکی را با مهرهٔ سفید و دیگری را با مهرهٔ سیاه. اجازه بدهید که فیشر با مهرهٔ سفید آغاز کند؛ آنگاه حرکت او را در بازی دیگر با مهرهٔ سفید خود تقلید کنید و منتظر بمانید

1. fixed point theorem 2. globally 3. locally

۴. Bobby Fisher (۱۹۴۳ـ۲۰۰۸)؛ استاد بزرگِ آمریکایی‌ـایسلندی شطرنج که یازدهمین قهرمان جهان بود.ـم.

5. Copy Cat

و او را مجبور کنید تا با مهرهٔ سیاه به حرکتِ شما پاسخ دهد. بعد این پاسخ را در بازی دیگر کپی کنید (شما بازیکنی هستید که می‌توانید از یک بازی به بازی دیگر بروید)؛ به همین ترتیب ادامه دهید. در این‌صورت هر دو بازی رشتهٔ یکسانی از حرکات را خواهد داشت و شما باید یکی از آن دو بازی را ببرید (یا در هر دو مساوی کنید)».

مفهوم متناظر «ترکیب فصلی موازی»[1] $A + B$ در حوالی سال ۱۹۷۰ به‌عنوان یک عمل منطقی جدید توسط ریاضیدان آمریکایی آندراس بلاس[2] و با مطالعه بر روی گفت‌وشنودهای لورنتسن معرفی شد. چنانکه پیش‌تر دیدیم، در بازیها، طرد شق ثالث کلاسیک ضرورتاً برای همهٔ انتخابهای اولیهٔ ترکیب فصلی $\vee$ برقرار نیست. بازیکن شروع‌کننده در

$$A \vee \neg A$$

برای داشتن یک استراتژی برد باید در همان شروع، انتخاب درستی داشته باشد و بنابراین، باید یک استراتژی برد برای A یا $\neg A$ به‌طور جداگانه داشته باشد. اما این دقیقاً همان چیزی است که در بازیهای نامتعین برقرار نیست (مگر اینکه ما اصل تعین را فرض بگیریم). اما استدلال کپی کت به هیچ‌وجه فرض نمی‌کند که بازی متعین باشد و بنابراین نشان می‌دهد که در حالت کلی، اصل منطقی

$$A + \neg A$$

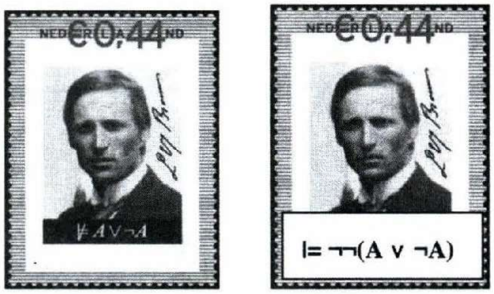
بدون هیچ محدودیتی معتبر است! به بیان دیگر انتخابِ «با تأخیر» یا «متقابل» $A + B$ در اصل طرد شق ثالث صدق می‌کند. بنابراین اعتبار این اصل وابسته به این است که ترکیب فصلی را چگونه تعبیر کنیم و به همین دلیل گزینه‌های مجاز مختلفی وجود دارد. در این شرایط، ناگهان با جهان غنی‌تر جدیدی از اعمال منطقی با قوانین مختص خود مواجه می‌شویم. مشاهداتی شبیه این به‌صورت غنی‌تری از جبر بازیها، با عملگرهای بیشتری در مقایسه با تعداد عملگرهای منطق کلاسیک یا شهودی، منتهی شده است. تلاشهای مهمی در سالهای اخیر توسط ژان-ایوز ژیرار[3] و سامسون آبرامسکی[4] انجام شده است و این زمینه همچنان در حال شکوفایی است. بنابراین، معلوم شده است که جبر بولی تنها گوشه‌ای از یک نظریهٔ زیبای عمومی دربارهٔ رفتارهای متقابل پیچیده است.

این منظرهٔ جدید منطق به‌عنوان تعاملی معقول بین عاملان متعدد، رادیکال‌تر از آن است که بیشتر دانشگاهیان آن را هضم کنند. اما معانی جدید جالبی به اصول کلاسیک منطق که ما داستان خود را با آنها آغاز کردیم، می‌دهد. این امر را در مورد طرد شق ثالث دیدیم اما به همین اندازه در مورد اصول معمولی و نامحسوسی نظیر اصل اولیهٔ این‌همانی نیز صادق است. از اصل پیش‌پا افتادهٔ $A = A$ این قاعدهٔ کپی کت برمی‌آید که «Aی خودت را در Aی من انجام بده» و این ناگهان کلیدی برای تعامل می‌شود. این چشم‌انداز جدالهای کهنه‌ای بین مدافعان و نقادان طرد شق ثالث برانگیخته است که اکنون تا حدی منسوخ شده است. با تمیز بین $\vee$ و $+$ و عملگرهای دیگر بازیها، کل مناقشه در خصوص «منطقهای رقیب» یک درجه پررنگ‌تر می‌شود.

1. parallel disjunction 2. Andreas Blass 3. Jean-Yves Girard
4. Samson Abramsky

یک سری تمبر؟

بسیار روشن است که کار پست هلند در طراحی این تمبر کامل نیست. تمبر براوئر صرفاً فرمولی را که نشانگر مخالفتی با منطق کلاسیک است ارج می‌نهد. به نظر معقول است که دست‌کم یک گزارهٔ ایجابی را هم به‌صورت یک قانون معتبر شهودی اضافه کنیم:



اما جذاب‌تر از همهٔ اینها یک سری مرکب از سه تمبر می‌بود که با تمبری منقش به تعبیر جدید طرد شق ثالث مبتنی بر بازیها ختم شود:

تعیین ارزش این تمبرها را با کمال میل به سرویس پست واگذار می‌کنم.

نتیجه

این تقریباً همهٔ چیزی است که در مورد براوئر و طرد شق ثالث می‌توان گفت؛ یا نه.

سپاسگزاری

مترجم از دکتر محمد اردشیر به خاطر معرفی این مقاله و نیز توصیه‌های ارزشمند ایشان بعد از مطابقت ترجمه با اصل مقاله سپاسگزار است.

* * * * * *

• Johan van Benthem, "A stamp full of logic", *De Gids*, March 2008, pp. 191-205

"*De Gids*" یک نشریهٔ ادبی هلندی‌زبان است.

این مقاله با اجازه و حسن استقبال نویسنده برای چاپ در نشر ریاضی به فارسی ترجمه شده است.

* یوهان فان بنتام، دانشگاه آمستردام، هلند
johan@science.uva.nl