مقاله کلاسیک

آیا منظومهٔ شمسی پایدار است؟•

یورگن موزر*
ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

مسألهٔ پایداری

مسألهٔ پایداری در مکانیک کلاسیک یعنی پایداری منظومهٔ شمسی، قرنهاست که منجمین و ریاضیدانان را مجذوب خود ساخته است. بیان ساده‌ای از این مسأله این است که آیا منظومهٔ شمسی در آیندهٔ دور همین شکل کنونی خود را حفظ خواهد کرد یا پس از زمانی طولانی، بعضی از این سیاراتْ منظومهٔ شمسی را ترک می‌کنند و یا برخوردهایی رخ خواهد داد که به یک تغییر فاجعه‌آمیز منجر می‌شود. قوانین حاکم بر حرکت سیارات از زمان نیوتن یعنی حدود ۳۰۰ سال است که شناخته شده‌اند. در تخمین اولیه، سیارات در مدارهای بیضی‌شکلی حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانونهای بیضی قرارگرفته است. اما این فقط یک تقریب خام از حرکت واقعی سیارات است. نیروهای بین سیارات، اختلالهایی ایجاد می‌کنند که باعث تغییر مداوم اما بسیار آرام شکل این مدارهای بیضوی می‌شوند. توصیف این تغییرات یا به‌اصطلاح «اختلالهای دیرپا»[1]ی این مدارهای بیضوی، مسأله‌ای است که در چارچوب نظریهٔ کلاسیک اختلال بررسی می‌شود. امروزه قابل تصور است که نیروهای نسبتاً ضعیف بین سیارات بعد از مدت زمانی به اندازهٔ کافی طولانی، به قدری مدارهای کنونی را تغییر دهند که یک سیاره از منظومه خارج شود و یا اینکه برخوردی رخ دهد. برای مثال می‌توان تصور کرد که خروج از مرکز یک سیاره به‌طور پیوسته افزایش یابد تا اینکه فاصلهٔ نزدیکترین نقطهٔ مدار آن به خورشید [حضیض خورشیدی[2]] آنقدر کم شود که سیاره با رویداد ناگواری مواجه گردد. هر چند چنین سرانجامی با مشاهدات ما طی میلیونها سال گذشته همخوانی ندارد، ولی ارائهٔ یک اثبات ریاضی برای رخ‌ندادن این وضعیت به کمک معادلات حرکت، بحث کاملاً متفاوتی است.

درواقع در نوشتگان ریاضی موجود، تعداد قابل ملاحظه‌ای اثبات پایداری وجود دارد. تقریباً ۱۰۰ سال پس از انتشار کتاب پرینکیپیا ی نیوتن، لاگرانژ اثبات مشهور خود را برای پایداری منظومهٔ شمسی ارائه کرد. لاپلاس و پواسن هم اثباتهای دیگری از این دست ارائه دادند، و ممکن است این سؤال پیش بیاید که چرا دوباره پس از ۲۰۰ سال، این مسأله دوباره مطرح شده است. به‌طور کلی برای درستی یک حکم، یک اثبات کافی است و عرضهٔ چندین اثبات ممکن است شنوندهٔ نقاد را به درستی مطالب مشکوک کند. اما در اینجا، مسأله، تقریبهای محاسبهٔ نیروی اختلال‌زا تا توانهای اول و دوم جرم سیاره است، که این تقریبها درجات دقت متفاوتی دارند. یعنی عملاً مدت زمان زیادی لازم است تا تغییر در مدارهای بیضوی به حد قابل ملاحظه‌ای برسد. زومرفلد[1] در کتاب مشترک خود با کلاین، خیلی موجز از «شبه‌اثبات» لاپلاس برای پایداری منظومهٔ شمسی سخن می‌گوید. با این حال باید دید این تقریبها تا چه اندازه اعتبار دارند. اگر ملاحظات خود را به چند دهه یا چند قرن محدود کنیم، این اثباتهای پایداری، نتایج درستی به‌دست می‌دهند، لکن از این نمی‌توان نتیجه‌ای در بارهٔ حرکت طی میلیونها سال به‌دست آورد. در قدیم محاسبهٔ عملی مکانهای سیارات یا به‌اصطلاح استخراج تقویم نجومی، که مورد توجه بابلیان هم قرار گرفته بود، بیش از تخمینهای طولانی‌بُرد مورد علاقه بود. نظریهٔ اختلال درواقع برآمده از لزوم محاسبهٔ مدارها با دقت هر چه بیشتر است. این مسأله را امروزه می‌توان حل کرد، ولی در آن نکتهٔ یأس‌آوری برای نظریه‌پردازان وجود دارد؛ زیرا اکنون می‌توان به کمک ماشینهای محاسبهٔ نوین نتایج را به‌طور مستقیم و حتی دقیقتر از آنچه از نظریهٔ اختلال به دست می‌آید محاسبه کرد. امروزه تقویمها در سالنامهٔ نجومی دریایی در واشینگتن[2] به همین روش حساب می‌شوند.

اما درست همین جاست که مسألهٔ ریاضی آغاز می‌شود. استخراج ویژگیهای اساسی یک مسأله و ایده‌آل کردن آن از روشهای آزموده شده و درست ریاضی است. به خاطر همین، ما به خود سیارات منظومهٔ شمسی که اجرام گسترده‌ای هستند نمی‌پردازیم و از همهٔ انواع نیروها از قبیل بادهای خورشیدی و اثرات نسبیتی صرف‌نظر می‌کنیم. در عوض یک مسأله ایده‌آل

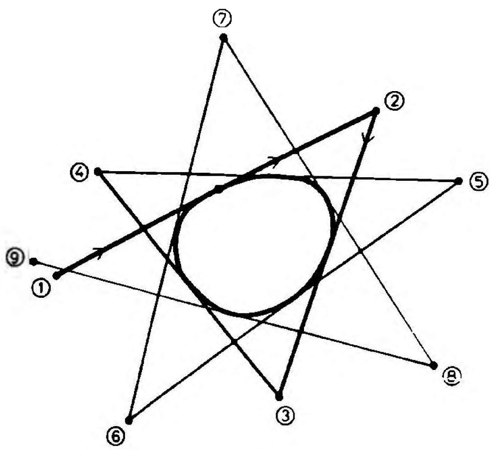
1. secular perturbations 2. perihelion

1. Sommerfeld 2. Nautical Almanac in Washington

شده را در نظر می‌گیریم و n نقطهٔ جرمی را که براساس قوانین نیوتن در فضای سه‌بعدی در حال حرکت هستند، مطالعه می‌کنیم. معمولاً فرض می‌شود که $n-1$ تا از این نقطه‌های جرمی خیالی در مقایسه با آن نقطهٔ باقیمانده که قرار است نقش خورشید را داشته باشد، جرمهای خیلی کوچکی دارند. به‌علاوه به دنبال بررسی حرکت در یک بازهٔ زمانی محدود نیستیم، بلکه می‌خواهیم حرکت را تا ابد مطالعه کنیم. اکنون، این یک مسألهٔ کاملاً ریاضی است که جواب آن مصداق خیلی محدودی در دنیای واقعی دارد، ولی به جهت اینکه حرکت را برای تمام زمانها توصیف می‌کند، به نکات ظریف بسیار حیرت‌انگیزی منجر می‌شود. حتی این مسأله ریاضی ایده‌آل شده هم دست‌کم ۱۰۰ سال پیش صورت‌بندی شد و اصطلاحاً با عنوان مسألهٔ n جسم شناخته می‌شود. در قرن گذشته، این مسأله محل توجه فراوانی بود و همان‌طور که خواهیم دید، دیریکله که امروزه به خاطر کارهای ماندگارش در نظریهٔ اعداد مشهور است، و وایرشتراس که متخصص نظریهٔ توابع بود و پوانکاره، ریاضیدان همه فن حریف، نقشهای اساسی در بررسی این مسأله بازی کردند. به این ترتیب، این مسأله عبارت است از توصیف رفتار اختلالهای دیرپا روی بازه‌های زمانی طولانی و حتی برای تمام زمانها. آیا تغییر در شکل و مکان مدارها می‌تواند پیکربندی منظومهٔ سیاره‌ای را به‌طور کامل تغییر دهد؟ لاگرانژ در ارتباط با اثبات قضیهٔ پایداریش، نشان داد که اختلالات تحت تأثیر نوسانهای دوره‌ای هستند و از این رو بدون کران افزایش نمی‌یابند. دورهٔ این نوسانها نسبتاً طولانی است و از ۵×۱۰^۴ تا ۲×۱۰^۶ سال تغییر می‌کند. اما باید توجه کرد که در اینجا با یک تقریب سروکار داریم و این گفته را به معنای خاصی می‌توان تظریفی از توصیف دیرینهٔ مدارهای سیارات به‌وسیلهٔ افلاک تدویر[1] در نظر گرفت.

اما در بازه‌های زمانی به طول چند میلیون سال چه رخ می‌دهد؟ این سؤال نوعی مسألهٔ تشدید[2] است که در آن حرکات هشت سیارهٔ منظومهٔ شمسی، نقش نوسانگرها را بازی می‌کنند. البته تشدید در سیستمهایی رخ می‌دهد که دارای فرکانسی منطبق بر یکی از ویژه‌فرکانسهای آن سیستم یا مضرب صحیحی از آن باشد. ساده‌ترین پدیدهٔ تشدید مربوط به هل‌دادن یک تاب است. با نیروهای نسبتاً کوچکی که به تناوب و با همان فرکانس تاب وارد شود می‌توان دامنهٔ نوسان تاب را به اندازهٔ دلخواه افزایش داد یا حتی می‌توان باعث وارونه شدن تاب شد. در مورد منظومهٔ شمسی این قبیل پدیده‌ها نقش اساسی ایفا می‌کنند. درواقع چون هیچ اصطکاکی درکار نیست، اگر نوسانی یک بار رخ دهد، دیگر از بین نمی‌رود. به همین دلیل است که در سیستمهای نامیرا، برعکس همهٔ آزمایشهای فیزیکی روزمره و تابهای معمولی، اثرات تشدید تا این اندازه حساس است. در منظومهٔ شمسیِ ما تشدیدهای زیادی وجود دارد. مثلاً معلوم شده است که نسبت فرکانس مشتری به زحل حدود ۵/۲ است و این یعنی اینکه بعد از ۵ سال زحلی، مشتری ۲ بار دور خورشید می‌گردد، البته در صورتی که نیروها پس از این دوره در همان جهت قبلی اثر کنند. درواقع این وضعیت اثری قوی روی مدار مشتری می‌گذارد، اختلالی که دورهٔ آن در تقریب اولیه حدود ۹۰۰ سال است.

ولی در واقعیت باید چنین تشدیدهایی را برای تمام نسبتهای فرکانسی گویا و حتی تشدیدهایی که در آنها ترکیبی خطی از فرکانسهای با ضرایب صحیح



شکل۱

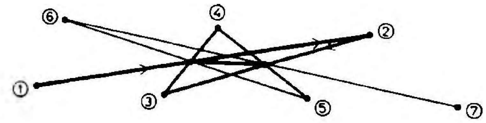
صفر می‌شود (فرکانسهای متوافق) هم انتظار داشته باشیم. اما طبعاً این امر نامعقول است زیرا اعداد گویا چگال‌اند و از نظر فیزیکی فرقی بین فرکانسهای گویا وگنگ وجود ندارد. ولی در حوزهٔ ریاضی این قبیل تمایزها کاملاً ضروری‌اند و لذا با یک موقعیت تعارض‌آمیز مواجه می‌شویم. نوشتن معادلات حرکت برای مسألهٔ n جسم کار خیلی ساده‌ای است، لکن درک شهودی آنها غیرممکن است. بنابراین بهتر است، یک مسألهٔ هندسی خیلی ساده را توضیح دهیم که حاوی بعضی از مشکلات مسألهٔ n جسم است و می‌تواند الگوی خاصی برای حرکت سیارات هم باشد (شکل ۱). یک شکل تخم‌مرغی در صفحه در نظر می‌گیریم و «حرکت مداری» در خارج آن را به این صورت تعریف می‌کنیم: از نقطهٔ ۱ در خارج این شکل یکی از دو مماس را رسم می‌کنیم و آن را تا نقطهٔ ۲ که هم‌فاصله با نقطهٔ ۱ تا محل تماس است، امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ ۲ مماس بعدی را رسم می‌کنیم و آن را تا نقطهٔ ۳ که مجدداً هم‌فاصله با نقطهٔ ۲ تا محل تماس است، امتداد می‌دهیم. با ادامهٔ این کار، «مدار» نقطهٔ ۱ به‌دست می‌آید. آیا این دنباله از نقاط می‌تواند بیکران باشد؟ این مسأله، نظیر مسألهٔ پایداری است. هر چند این مسأله کاملاً ابتدایی به نظر می‌رسد ولی واقعاً مشکل است. می‌توان نشان داد برای خمهایی که به اندازهٔ کافی هموارند (۵ بار مشتق‌پذیرند) و انحنای مثبت دارند، مدارها همواره کراندارند، یعنی پایداری برقرار است.

قابل توجه است که در این مسألهٔ ساده، هموار بودن خم مرزی باید نقش داشته باشد، اما اگر وجود گوشه را برای مرز مجاز بدانیم چه رخ می‌دهد؟ ساده‌ترین حالت، یک چندضلعی است. درواقع این نگاشت در این حالت پیوسته نیست ولی مسألهٔ پایداری هنوز معنای روشنی دارد. با این حال برای چندضلعی در حالت کلی، اینکه آیا مدارها کراندارند یا نه یک مسألهٔ حل‌نشده باقی‌مانده است. ولی دو حالت خاص وجود دارد که می‌توان آنها را به‌طور کامل بررسی کرد:

۱) وقتی تخم‌مرغ به یک دوضلعی تباهیده می‌شود، هر مدار در امتداد یک جفت خط مستقیم به بینهایت می‌رود (شکل ۲).

۲) اگر تخم‌مرغ یک مثلث باشد، همهٔ مدارها بسته‌اند اما دوره‌های متفاوت دارند. نقاط متعلق به مدارهای هم‌دوره، شش‌ضلعی‌ها و مثلثهایی تشکیل می‌دهند که یک خانه‌بندی جالب از صفحه به وجود می‌آورد. نقاط روی شش‌ضلعی‌ها دارای دوره‌های ۳، ۹، ۱۵، ۲۱، ... و به‌طور

1. epicycles 2. resonance



شکل۲

کلی $3(2j-1)$، $j = 1, 2, \dots$، و نقاط روی مثلثها دارای دوره‌های ۱۲، ۲۴، ۳۶، ... و به‌طور کلی $12j$، $j = 2, 3, \dots$، هستند (شکل ۳). برای مربع هم می‌توان مسأله را به‌راحتی بررسی کرد، اما حتی برای یک چهارضلعی کلی هم مسألهٔ فوق هنوز حل نشده است.

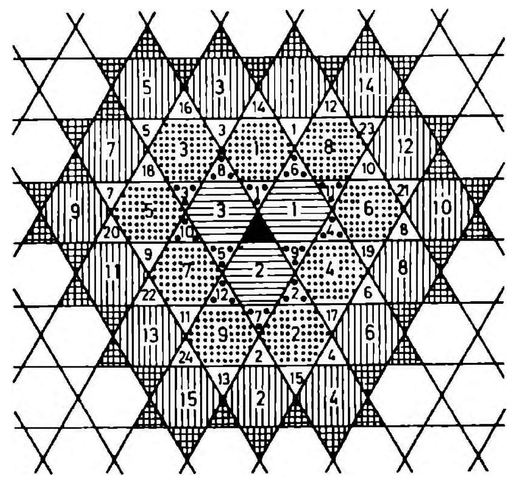
مسألهٔ جایزه‌دار

اکنون به حرکت سیارات و صورتبندی ریاضی مسأله و حل آن برمی‌گردیم. تلاش می‌کنیم مختصات اختلالهای دیرپا را به‌طور تحلیلی به کمک سریهای فوریهٔ تعمیم‌یافته تشریح کنیم. اینها سریهایی هستند که جملات آنها به شکل

$$A_j \cos(j_1\omega_1 + \dots + j_s\omega_s)t +$$
$$B_j \sin(j_1\omega_1 + \dots + j_s\omega_s)t$$

با فرکانسهای معین ω_1، ...، ω_s و فرکانسهای ترکیبی $j_1\omega_1 + \dots + j_s\omega_s$اند. این دیدگاه چندان متفاوت با نظریهٔ فلک تدویر نیست ولی از نظر ریاضی دقیقتر است. این قبیل توابع، امروزه به توابع شبه‌تناوبی موسوم‌اند. درواقع ریاضیدانان مختلفی، مثلاً وایرشتراس، موفق شده‌اند با فرض اینکه ω_1، ...، ω_s نامتوافق هستند (یعنی نسبت گویا ندارند) چنین بسط سری را به‌طور صوری به‌دست آورند. اما ممکن است این سریها همگرا نباشند و بنابراین سودمندی آنها محل تردید است. ولی اگر این سریها همگرا باشند، نوسانات کوچک، در تغییرات بیضی را توصیف می‌کنند. تغییرات عناصری که به این ترتیب توصیف می‌شوند، همواره در یک محدودهٔ مفروض قرار می‌گیرند.

مسألهٔ ریاضی مورد نظر را این‌طور می‌توان بیان کرد: «برای یک دستگاه دلخواه از نقطه‌های جرمی که یکدیگر را براساس قوانین نیوتن جذب می‌کنند،



شکل۳

با فرض اینکه هیچ دو نقطه‌ای با هم برخورد ندارند، مختصات هر نقطه را برای تمام زمانها به‌صورت مجموع یک سری یکنواخت-همگرا که جملاتش از توابع شناخته‌شده تشکیل شده‌اند، ارائه دهید.» این، ترجمهٔ لغت به لغت مسألهٔ جایزه‌داری است که اُسکار دوم پادشاه سوئد در سال ۱۸۸۵، یعنی حدود ۹۰ سال قبل، مطرح کرد. جایزه را هانری پوانکاره بُرد هر چند او واقعاً مسأله را حل نکرد. کار بزرگ او درواقع نشان داد که این بسطهای سری، علی‌رغم تمام انتظارات، واگرا هستند و از این‌رو وجود ندارند. تعجب‌برانگیزتر اینکه در سال ۱۹۶۳ یک ریاضیدان جوان و برجسته موفق شد در میانهٔ دههٔ سوم زندگی خود این مسأله را حل کند و وجود چنین جوابهایی را با دقت کامل دست‌کم در مورد مسألهٔ ۳ جسم به اثبات رساند. این ریاضیدان، ولادیمیر آرنولد از شاگردان کولموگوروف بود که خود چند سال قبل از آن سنگ این اثبات را بنا نهاده بود. البته روایت دقیقتر این است که این کشف براساس کارهای بسیاری از ریاضیدانان دیگر صورت گرفت و اساساً ایده‌های اثبات به نتایج کارهای پوانکاره برمی‌گردد.

در دههٔ ۱۹۴۰، زیگل اولین مسأله از این دست را حل کرد، اما صورتبندی او از مسأله، ایده‌آل‌شده‌تر بود و واقعاً قابل استفاده در مسائل مکانیکی نبود. در سال ۱۹۵۴ کولموگوروف نشان داد که برای بعضی از سیستمهای مکانیکی، به یک معنی، اکثر جوابها شبه‌تناوبی‌اند. او به یکی از روشهای ممکن حل اشاره کرد. اما اثبات واقعی را ۸ سال بعد آرنولد و در حالت خاص نویسندهٔ این مقاله ارائه دادند. در تداول امروزی، این نظریه با علامت اختصاری KAM شناخته می‌شود[۱]. نتیجهٔ اصلی این نظریه، تضمین وجود جوابهای شبه‌تناوبی برای رده‌های معینی از معادلات دیفرانسیل است که مسألهٔ n جسم را هم دربرمی‌گیرند. بسطهای سری مورد بحث به‌ازای انتخابهای خاصی از فرکانسها همگرا هستند، اما برای فرکانسهای دیگر بی‌معنی‌اند. نتیجهٔ اخیر را قبلاً پوانکاره ثابت کرده بود. مدارهایی که چنین نمایشی [همگرا] دارند، دقیقاً همانهایی‌اند که هیچ تشدیدی برای آنها رخ نمی‌دهد. اما چون این مدارهای فاقد تشدید می‌توانند به دلخواه به مدارهای دیگر نزدیک باشند، امکان دارد یک اختلال به دلخواه کوچک در مقادیر اولیه، یک مدار شبه‌تناوبی پایدار را به مداری ناپایدار تبدیل کند. با این حال می‌توان نشان داد که مدارهای ناپایدار خیلی نادرند، یا به زبان تخصصی‌تر، اندازهٔ آنها در فضای فاز نسبتاً کوچک است. این مطلب به مفهوم جدیدی از پایداری منجر می‌شود که در آن محدودیتها فقط روی اکثریت مدارهایی خاص اعمال می‌شوند. اینکه آیا مدارهای ناپایدار نسبتاً نادر، واقعاً وجود دارند یا نه هنوز یک مسألهٔ حل نشده است. در اینجا باید بگوییم ــ و بعداً نشان خواهیم داد ــ که این مفهوم ضعیف پایداری کاملاً بامعنی است و از نظر کاربردهای فیزیکی، رضایت‌بخش است.

کاربردهای جدید

اما پیشرفت بزرگ در این زمینه درکدام قسمت بوده است؟ اگر تعیین مدارها را بتوان به خوبی به کمک ماشینهای محاسبه انجام داد، چنین اثباتی بیهوده و دست‌کم از نظر دارندگی دیر به نظر می‌رسد. به این ایراد این‌گونه می‌توان پاسخ داد که:

---

۱. مرکب از حرف اول نامهای کولموگوروف، آرنولد، و موزر.

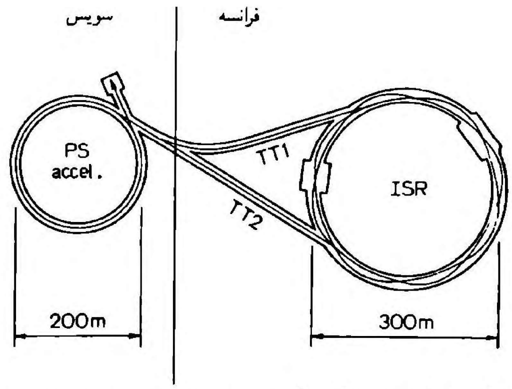
۱. پایداری سیستمهای نامیرا برای همهٔ زمانها اساساً با محاسبات متناهی قابل تعیین نیست و از این رو از حیطهٔ کاری ماشینهای محاسبه خارج است.

۲. مهمتر اینکه، چنین نتیجه‌ای که اتفاقاً به‌خودی خود از نظر ریاضی مورد علاقهٔ فراوان است، در تحقیقات نظری در مکانیک آماری اهمیت اساسی دارد. پیشرفت مکانیک آماری این امید را پدید آورده است که اغلب سیستمهای مکانیکی، دست‌کم وقتی از تعداد زیادی ذره تشکیل شده باشند، ارگودیک هستند؛ به این معنی که پس از مدت زمانی به اندازهٔ کافی طولانی، رفتارشان کاملاً مستقل از شرایط اولیه است. اما این مطلب در تقابل صریح با پایداری قرار دارد. در واقع، طی قرن گذشته، فیزیکدانان تلاش کرده‌اند با چنین دیدگاهی نشان دهند که اگر مدت زمانی طولانی صبر کنیم، تمام سیستمهای مکانیکی چنین رفتار ناپایداری از خود بروز می‌دهند. اما به کمک کارهایی که در دههٔ گذشته انجام شده، اکنون یک‌بار و برای همیشه ثابت شده است، که بسیاری از سیستمهای واقعی این‌گونه نیستند.

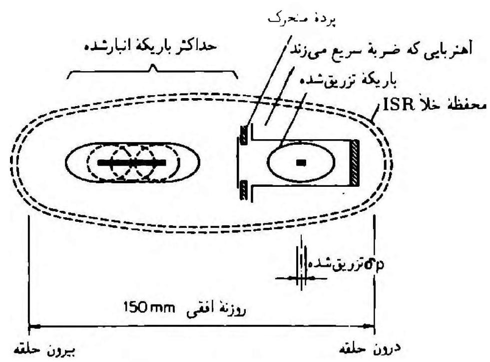
۳. بالاخره دلیل سومی هم وجود دارد که کم‌وبیش تصادفی به نظر می‌رسد: قضایای ریاضی نظریهٔ KAM فقط دربارهٔ منظومه‌های سیاره‌ای نیست بلکه با سیستمهای هامیلتونی کلی (و در نتیجه سیستمهایی که فرایندهای حرکتی نامیرا را توصیف می‌کنند) سروکار دارد و بنابراین قابل استفاده برای بسیاری از مسائل دیگر هم هست. این دقیقاً نمونه‌ای از سودمندی یک صورت‌بندی ریاضی کلی است. یکی از این کاربردها، مسألهٔ پایداری شتابدهنده‌های پروتون است که از دههٔ ۱۹۵۰ تاکنون به تعداد هر چه زیادتر و اندازه‌های بزرگتر ساخته شده‌اند. هدف این ماشینها، شتاب‌دادن به الکترونها و پروتونها تا رسیدن به سرعتهای خیلی زیاد و آنگاه پرتاب آنها به سمت یک هدف است، تا نتایج تجزیهٔ حاصل از این برخورد یعنی ذرات بنیادی جدید مشاهده شوند. هر چه انرژی ذره بیشتر باشد، مشاهدات حاصل هم جالبتر خواهند بود. برای رسیدن به چنین سرعت بالایی، پروتونها در یک محفظهٔ دایره‌ای آنقدر شتاب داده می‌شوند تا ذرات به سرعتی نزدیک سرعت نور برسند. این محفظه، مثلاً در مورد سنکروترن پروتون[1] در سرن[2] در ژنو، محیطی به طول بیش از ۶۰۰ متر دارد، و برای ایجاد خلأ کامل و جلوگیری از برخورد ذرات به مولکولهای هوا، هوای آن کاملاً تخلیه می‌شود. به کمک تعدادی آهنربا، میدانی مغناطیسی ایجاد می‌شود که این میدان ذرات را در یک مسیر تقریباً دایره‌ای حفظ می‌کند. اینجاست، که مسألهٔ پایداری مطرح می‌شود، زیرا میدان مغناطیسی باید طوری ایجاد شود که پروتونها خیلی از مسیر دایره‌ای موردنظر منحرف نشده و انرژی خود را در برخورد با دیوارهٔ محفظه از دست ندهند. در این فرایند، ذرات میلیونها بار دور محفظهٔ خلأ می‌گردند.

در ساختن این شتابدهنده‌ها، مسألهٔ پایداری نکته‌ای اساسی است. هر چند در آغاز به این قانع بودند که آزمونهایی با ماشین محاسبه انجام دهند، اما خیلی زود معلوم شد که پس از چند تکرار، خطای اجتناب‌ناپذیر محاسباتی، از کنترل خارج می‌شود و دنبال کردن یا تخمین‌زدن مسیرها غیرممکن می‌گردد. بنابراین به نتایجی نظری نیاز بود که نشان دهد می‌توان پایداری را در چنین سیستمی روی بازهٔ زمانی خیلی طولانی تضمین کرد و این دقیقاً اهمیت نظریه‌ای را می‌رساند که مشغول توصیف آن هستیم. آخرین پردهٔ این نمایش را حلقه‌های انبارنده[3] اجرا می‌کنند که یکی از آنها از سال ۱۹۷۱ تاکنون در سرن مشغول فعالیت است. (شکل ۴). به‌طور کلی، کار این دستگاهها،

1. proton synchrotron 2. CERN 3. storage rings



شکل ۴ الف مقطعی از محفظهٔ خلأ در محل منحرف‌کنندهٔ باریکه، که فرایند انبارکردن را نشان می‌دهد



شکل ۴ ب آرایش حلقه‌های انبارندهٔ متقاطع (ISR)

شتاب دادن پروتونها در دو محفظهٔ دایره‌ای در جهتهای مخالف و سپس برخورددادن آنها با یکدیگر است. به این طریق، نه تنها مطابق انتظار، انرژی حاصل از برخورد دو برابر می‌شود، بلکه به دلیل اثرات نسبیتی، انرژی تا توان دوم افزایش می‌یابد. برای حرکت دادن پروتونها در دو جهت مختلف، این حلقه‌های انبارنده (حلقه‌های انبارندهٔ متقاطع، ISR) به سنکروترون پروتون متصل می‌شوند و تعداد زیادی پروتون به تناوب، از یک جهت یا جهت مخالف به درون حلقهٔ انبارنده وارد می‌شود. این پروتونها طی فرایندی که ۳ تا ۱۱ ساعت طول می‌کشد، در آنجا انبار می‌شوند تا با یکدیگر برخورد داده شوند.

ساختن این دستگاه مشکلات فنی غیرقابل باوری دارد و آن‌قدر محتاج دقت است که ممکن است کارخانجات ساعت‌سازی سوئیس هم از عهدهٔ چنین دقتی برنیایند. در اینجا باید مقایسه‌ای انجام دهیم که برای مسألهٔ پایداری ما اهمیت دارد. طی فرایند انبارش، بسته‌های کوچک پروتون باید 10^{10} تا 10^{11} بار دور یک مسیر دایره‌ای بگردند و در این مدت درون تونلی بمانند که مقطع آن ۱۶ در ۵ر۲ سانتی‌متر است. اگر یک دوران پروتون را در حلقهٔ انبارنده معادل با یک سال در مسألهٔ نجومی بگیریم، آنگاه عدد فوق زمانی بیش از عمر زمین را نشان می‌دهد، یعنی در این قیاس باید پروتونها را در مدت زمانی طولانیتر از عمر منظومهٔ شمسی در شکل کنونیش، دنبال کنیم. گذشته از این فیزیکدانان و مهندسین می‌توانند شرایط و پارامترها را به دلخواه خود عوض کنند. این مثال را به این دلیل مطرح کردیم که نیازمند پایداری روی بازه‌هایی زمانی است که از هر آنچه در ۱۰۰ سال قبل در نجوم

تصور می‌شد، طولانیتر است و بنابراین به یک معنی، مسألهٔ پایداریِ ایده‌آل‌شده روی بازه‌های زمانی نامتناهی را توجیه می‌کند. البته اگر چنین توجیهی لازم باشد. وقتی نتایج نظریهٔ KAM را برای این حالت به‌کار می‌بریم، معلوم می‌شود که اغلب پروتونهای شتاب‌یافته در مسیر دایره‌ای درون حلقه‌های انبارنده باقی می‌مانند، اما مدارهای نسبتاً نادری هم هستند که به کند شدن و کمی هدر رفتن باریکه‌های پروتون منجر می‌شوند. این هدر رفتن‌ها در این مورد اجتناب‌ناپذیرند و مشاهده هم می‌شوند. اینکه آیا آن مدارهای خاص را می‌توان مسبب این هدر رفتن دانست، هنوز باید حل‌نشده تلقی شود به این دلیل که بسیاری از نیروها و اثرات اضافی که بر ذرات اثر می‌گذارند و ممکن است آنها را منحرف کنند، لحاظ نشده است. این کاربردها انگیزه‌های خوبی برای تحقیقات ریاضی‌اند. یقیناً باید پرسید چگونه است که این مسألهٔ دیرینهٔ پایداری، در حالی‌که جاذبهٔ خود را برای منجمین از دست داده است، ناگهان مطرح و حل می‌شود؟ یک پاسخ خوب به این پرسش این است که گسترش شتابدهنده‌های پروتون در احیای دلبستگی به این مسأله مؤثر بوده است.

پایداری مدارهای تناوبی

می‌خواهیم پدیدهٔ تشدید دیگری را توضیح دهیم که هم در نجوم و هم در فیزیک انرژی بالا پدید می‌آید. این پدیده، مسألهٔ پایداری مدارهای تناوبی، یعنی جوابهایی است که بعد از یک زمان معین به وضعیت اولیهٔ خود برمی‌گردند. در اینجا به دنبال شرایطی هستیم که تحت آنها مدارهایی که شرایط اولیه‌شان نزدیک به یک مدار تناوبی است، همیشه نزدیک آن باقی بمانند. چنین مدارهایی، پایدار نامیده می‌شوند. فقط همین مدارهای پایدار هستند که معمولاً قابل مشاهده‌اند. بهترین مثالِ آن هم مدار دایره‌ای در حلقه‌های انبارنده است که در بالا تشریح شد. در این مدارها اختلالهای کوچک، به تغییرات بزرگ منجر نمی‌شود. برای اینکه معلوم کنیم آیا این مدارهای دایره‌ای پایدارند یا نه باید از فرکانسهای بتاترون ω_r و ω_z و فرکانس مداری ω، که متعلق به نوسانهای دستگاه خطی‌شده هستند استفاده کرد. نظریه نشان می‌دهد که در حالت کلی تشدید غیرخطی یا ناپایداری زمانی رخ می‌دهد که این فرکانسها در رابطهٔ $n\omega_r + m\omega_z = p\omega$، صدق کنند که در آن n، m و p اعدادی صحیح‌اند که $4 \leq |n| + |m|$. از طرف دیگر رابطه‌هایی از این دست با فرض $|n| + |m| > 4$ چندان ضرری ندارند. درواقع آزمایشها نشان می‌دهند که در حالت اول، هدررفتگی در باریکه‌های پروتون مشاهده می‌شود ولی در حالت دوم این هدر رفتن قابل چشم‌پوشی است. به بیان نادقیق، تشدیدهای با مرتبهٔ کوچکتر یا مساوی ۴ خطرناک و تشدیدهای با مرتبهٔ بیش از ۴ بی‌ضرر هستند.

پدیدهٔ مشابهی هم در نجوم رخ می‌دهد. همان‌طورکه می‌دانید، در منظومهٔ شمسی علاوه بر سیاره‌های اصلی، هزاران سیارک نیز موجودند که به دور خورشید می‌گردند و مدارهای آنها عمدتاً بین مریخ و مشتری قرار دارد. چون جرم این سیارکها خیلی کوچک است، اثری بر سیاره‌ها ندارند ولی مشتری حرکت آنها را شدیداً دچار اختلال می‌کند. شاهد این مدعا، مشاهده‌ای است که توسط کرک‌وود[1] انجام شده است. او متذکر می‌شود که فرکانسهای سیارکها به‌طور یکنواخت روی یک بازه توزیع نشده‌اند بلکه شکافهایی، موسوم به شکافهای کرک‌وود، در آنها مشاهده می‌شود. این وضعیت را می‌توان مشابه با شکافهای موجود در حلقه‌های زحل انگاشت زیرا آنجا هم پدیده‌ای شبیه به این رخ می‌دهد. اگر حرکت میانگین سیارکها را با ω_a و حرکت میانگین مشتری را با ω_j نشان دهیم، محسوسترین شکافها با فرمول

$$\frac{\omega_j}{\omega_a} = \frac{n}{m}, \qquad |n-m| = ۱, ۲, ۳, ۴$$

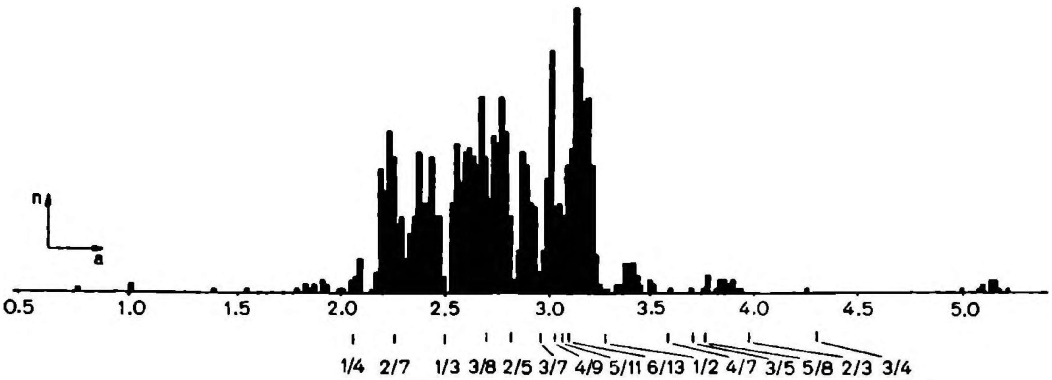
مشخص می‌شوند و این یعنی تشدید از مرتبهٔ کوچکتر یا مساوی ۴. می‌ماند آن مدارهای تناوبی را مشخص کنیم که پایداریشان متناظر با شرایط فوق است. فرض می‌کنیم مشتری روی یک مدار دقیقاً دایره‌ای حرکت می‌کند و سیارکها روی مدارهایی تقریباً دایره‌ای در همان صفحه در حال حرکت هستند، به‌طوری که این آرایه یعنی مثلث تشکیل شده از خورشید، مشتری و سیارک پس از یک دورهٔ زمانی معین به وضعیت اولیهٔ خود برگردد. پوانکاره قبلاً این مدارهای تناوبی را به‌دست آورده بود. مدارهایی که تشدید مذکور در بالا برای آنها رخ نمی‌دهد پایدارند و در نتیجه وضعیت کاملاً روشن است: شکافها متناظرند با مدارهای ناپایدار. هر چند اینها همه تقریبهای خامی از وضعیت واقعی هستند، ولی پدیدهٔ وجود شکافها را به‌خوبی توصیف می‌کنند. شرح ریاضی این پدیده به‌طور دقیق در نظریهٔ KAM داده می‌شود، هر چند ایده‌های اصلی را می‌توان درکارهای برکاف که کار پوانکاره را دنبال کرد یافت.

یادداشت تاریخی

شرح تاریخی مختصر زیر، مسألهٔ پایداری و چگونگی پیشرفت عظیم آن را روشن می‌سازد. چاپ نامه‌های وایرشتراس به سونیا کووالفسکی که چندی پیش صورت گرفت، شرایط مساعدی فراهم آورد که انگیزهٔ این یادداشت بوده است. این نامه‌ها حاوی مطالب بسیار جالبی در بارهٔ موضوع مورد بحث ماست و اگر نامه‌ها چاپ نمی‌شدند، آن مطالب حتی برای ریاضیدانان هم چندان شناخته شده نبودند. وایرشتراس نقش بسیار اساسی در ریاضیات نیمهٔ دوم قرن ۱۹ داشت و ریاضیدانانی از سراسر دنیا به برلین می‌آمدند تا سخنرانیهای او را بشنوند. علاقهٔ اصلی و دلمشغولی تمام زندگیش، نظریهٔ توابع بود اما علاقه‌ای جدی هم به نجوم داشت و در سال ۱۸۸۰ـ۱۸۸۱ سمیناری در بارهٔ نظریهٔ اختلال در نجوم ارائه داد. او ایده‌هایش را در این باره و مخصوصاً در بارهٔ مسألهٔ پایداری در چندین نامه به سونیا کووالفسکی تشریح کرد. نظر به اینکه وایرشتراس نتایج خود را خیلی به اکراه و پس از بازبینی همه‌جانبه به چاپ می‌رساند، این مکاتبات غیررسمی از ارزش خاصی برخوردارند.

سونیا کووالفسکی در ۲۰ سالگی برای تحصیل ریاضیات از روسیه به برلین آمد که در آن زمان اقدام واقعاً ماجراجویانه‌ای به‌شمار می‌آمد. یقیناً داشتن دانشجوی دختر در آن زمان مرسوم نبوده است و به همین دلیل سونیا از حضور در کلاس محروم بود. در نتیجه وایرشتراس به‌طور خصوصی به او آموزش می‌داد. در اثر این روابط، دوستی عمیقی بین آن دو ایجاد شد که تا پایان عمر کووالفسکی دوام داشت. کووالفسکی، ریاضیدان برجسته و مشهوری شد و به مقام استادی ریاضیات در دانشگاه استکهلم رسید، گرچه متأسفانه او این شغل را دو سال قبل از مرگ نابهنگامش در ۴۱ سالگی به‌دست آورد. گذشته از روابط شخصی، نامه‌های وایرشتراس به سونیا کووالفسکی

1 Kirkwood



شکل۵ تعداد سیارکها به عنوان تابعی از a، نصف طول قطر بزرگ. مقادیر aی متناظر با کسرهای معینی از دورهٔ گردش مشتری در زیر شکل مشخص شده‌اند. برخی از این «تشدیدها» شکافهایی در توزیع سیارکها ایجاد کرده‌اند.

حاوی تعداد زیادی ایده و پیشنهاد ریاضی است که اطلاعاتی ارزشمند از نحوهٔ تفکر او به‌دست می‌دهند. اما نشانه‌های بسیار مشخصی، مثلاً در نامهٔ ۱۵ اوت ۱۸۷۸، یافت می‌شود از اینکه او از قبل وقت خود را مصروف بسطهای سری صوری برای جوابهای شبه‌تناوبی مسألهٔ n جسم و همگرایی آنها کرده بود. به این ترتیب شکی نیست که وایرشتراس در تعقیب همان مسأله‌ای بوده که اکنون بالاخره حل شده است.

چرا وایرشتراس این‌قدر مطمئن بود که نمایشهای سری او عملاً همگرا هستند؟ پاسخ این سؤال هم معلوم شده است. دیریکله، جانشین گاوس در گوتینگن، قبلاً در سال ۱۸۵۸ به شاگردش کرونکر گفته بود که روشی کاملاً نوین برای بررسی و حل مسائل مکانیک یافته است. دیریکله سال بعد مُرد بدون اینکه هیچ نوشته‌ای در بارهٔ کشفیات خود برجای گذاشته باشد. اما کرونکر یادداشتهای دیریکله را به سراسر دنیای ریاضیات که در جستجوی کشف این ایده‌های مفقود بود، رساند. امروزه نام دیریکله اساساً با نظریهٔ اعداد که در واقع موضوع علاقهٔ اصلی او بود عجین شده است، حال آنکه کارهای او در فیزیک ریاضی کمتر شناخته شده‌اند. این کارها مشتمل ند بر مبانی نظریهٔ سریهای فوریه، محاسبات پایداری شاره‌های در حال دوران ، کارهایی در هیدرودینامیک، محکهای پایداری نقاط تعادل و غیره. چون آثار منتشرشدهٔ دیریکله به خاطر دقت زیاد در روشها و اثباتها شهرت داشتند، شکی نبود که یادداشت دیریکله می‌بایست جدی به‌حساب آورده می‌شد. و وایرشتراس مخصوصاً علاقه‌مند بود این مسأله را روشن سازد و این گنج را کشف کند. وقتی در سال ۱۸۸۵ به تشویق میتاگ‌ـلفلر، جایزه‌ای برای یک اکتشاف ریاضی مهم تعیین شد، وایرشتراس این مسأله را به‌عنوان یکی از سؤالهای جایزه‌دار مطرح کرد. کمیتهٔ جایزه هم از وایرشتراس، ارمیت و میتاگ‌ـلفلر تشکیل شده بود. و این جریان بود که بعداً به نوشتهٔ ۲۰۰ صفحه‌ای پوانکاره منجر شد، کاری که اثر زیادی بر پیشرفتهای بعدی این موضوع گذاشت. این کار پوانکاره برای وایرشتراس دلسردکننده بود هر چند عمیقترین تحسینها را نسبت به آن ابراز کرد. دلیلش این بود که پوانکاره نشان داد بسط سری در نظریهٔ اختلال در حالت کلی واگراست و به این ترتیب امیدهای وایرشتراس مبدل به یأس شد. ضمناً این پدیدهٔ واگرایی برای خود پوانکاره هم کمی دردسر درست کرد که او با روشی کاملاً جسورانه بر آن فائق آمد. بسطهای سری مجانبی که در نظریهٔ شاره‌ها و موضوعات کاربردی دیگر از آنها استفاده می‌شود و نیزکاربرد سریهای واگرا در محاسبات عددی همگی به ایده‌های پوانکاره باز می‌گردند. با این حال وایرشتراس همچنان مسألهٔ همگرایی را دنبال کرد و دریافت که هر چند استدلالهای پوانکاره کاملاً درست‌اند، اما واقعاً ثابت نمی‌کنند که سری مورد بحث واگراست. قضایای وجودی برای جوابهای شبه‌تناوبی که امروزه شناخته شده‌اند، حاکی از آن‌اند که چنین سریهایی به‌ازای فرکانسهای معین همگرا هستند و این دقیقاً همان نکته‌ای بود که وایرشتراس به آن اشاره کرد. بالاخره پس از ۷۰ سال اکنون می‌توان به این سؤال وایرشتراس در بارهٔ همگرایی پاسخ مثبت داد. طبیعی است که دیگر تعیین اینکه آیا نتایج جدید واقعاً با تلاشهای دیریکله تطابق یا ارتباط دارند یا نه غیرممکن است.

آنچه در این مقاله بیان شد نباید این اعتقاد نادرست را به وجود آورد که ریاضیات صرفاً به‌وسیله کاربردهای عملی هدایت می‌شود یا اینکه علت وجودی آن را باید در حل این قبیل مسائل جست، بلکه همواره تعامل بین حوزه‌های مختلف مطالعاتی است که منجر به خلق مفاهیم جدید می‌شود. بالاخره آیا منظومهٔ شمسی پایدار است؟ صریحاً بگوییم، پاسخ هنوز نامعلوم است و این سؤال به نتایج خیلی عمیقی منجر شده است که احتمالاً مهمتر از پاسخ اصل سؤال هستند.

* * * * * *

- Jürgen Moser, “Is the solar system stable?”, *The Mathematical Intelligencer*, (1) **2** (1980) 65-71.

این مقاله براساس نخستین سخنرانی از مجموعهٔ سه سخنرانی پائولی تنظیم شده که در ژانویهٔ سال ۱۹۷۵ در «مؤسسهٔ عالی فنی فدرال» در زوریخ ارائه شده ست. مقاله ابتدا در مجلهٔ نوده زورخر تسایتونگ، شمارهٔ ۱۴ مه ۱۹۷۵ به زبان آلمانی به چاپ رسیده است.

* یورگن موزر در زمان نوشتن این مقاله در مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در نیویورک، مشغول کار بوده ست.