مجموعه‌های ژولیا

یحیی تابش، صفا نوربخش*

رفتارهای آشوبناك وتصادفی خصیصهٔ ذاتی بسیاری از دستگاههای تعینی غیرخطی است. درمطالعهٔ این قبیل پدیده‌ها معمولاً به‌پاسخی تحلیلی نمی‌توان دست یافت و بررسیهای کیفی وهندسی راهگشای شناخت ایـن دستگاههاست. این گونه بررسیها بـه‌کمك نظریـهٔ هندسی دستگاههای دینامیکی که در دهه‌های اخیرمدون شده‌است، امکانپذیر است. اصولاً دانشمندان در زمینه‌هـای مختلف علمـی توانمندی و زیبایی روشهای هندسی و بررسیهای کیفی دستگاههای دینامیکی را شناخته‌اند، زیرا مسائل غیرخطی متنوعی در فیزیك و شیمی تا بوم‌شناسی واقتصاد بامدلهایی ازاین دست قابل‌تبیین‌اند. ازاین‌رو مبحث دستگاههای دینامیکی غیرخطی در بیست سی‌سال اخیرمورد توجه زیادی واقع شده‌است.

حال ببینیم که یك نمونهٔ ساده از دستگاههای دینامیکی چیست؟ ابتدا تعریفی را یادآوری می‌کنیم. مجموعهٔ $\bar{\mathbb{C}}$ را مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$ می‌گیریم که یك نقطهٔ بینهایت[1] بـه‌آن افزوده‌ایم. حال تابعی تحلیلی چـون f را روی یك زیرمجموعهٔ باز $\bar{\mathbb{C}}$ در نظـر می‌گیریم. اگـر z_0 یك نقطهٔ شروع دلخواه در ایـن زیرمجموعه باشد، درآن صورت دنبالهٔ تکرری زیر

$$z_0,\ f(z_0),\ f(f(z_0)),\ f(f(f(z_0))),\ \ldots$$

یك دستگاه دینامیکی مختلط گسسته عرضه می‌کند. این دستگاه ما را با پرسشهای مشخصی روبه‌رو می‌سازد: آیا دنبالهٔ فوق به نقطهٔ ثابتی همگرا می‌شود؟ نسبت به‌نقاط شروع مختلف، همگرایی این دنباله چه وضعیتی دارد؟

به‌مثالی توجه‌کنید. فرض‌کنید $f(z)=z^2+c$، که درآن z و c اعـدادی مختلط‌اند، و c ثابت فـرض می‌شود. در ساده‌ترین حالت، فرض‌کنید $c=0$. دراین صورت در هـرمرحله یك عمل مربع‌کردن انجام می‌شود: $z_0 \to z_0^2 \to z_0^4 \to z_0^8 \to \ldots$. حـال، بسته به z_0، سه حالت متفاوت ممکن است پیش‌آید:

۱. وقتی $|z_0|<1$، طول اعـداد حاصل کوچکتر وکوچکتر می‌شوند، و دنبالهٔ فوق‌الذکر به صفر میل می‌کند؛ در ایـن حالت می‌گوییم صفر یك ربایندهاست. کلیهٔ اعدادی که طول آنها کوچکتر از واحد است به‌این رباینده جذب می‌شوند.

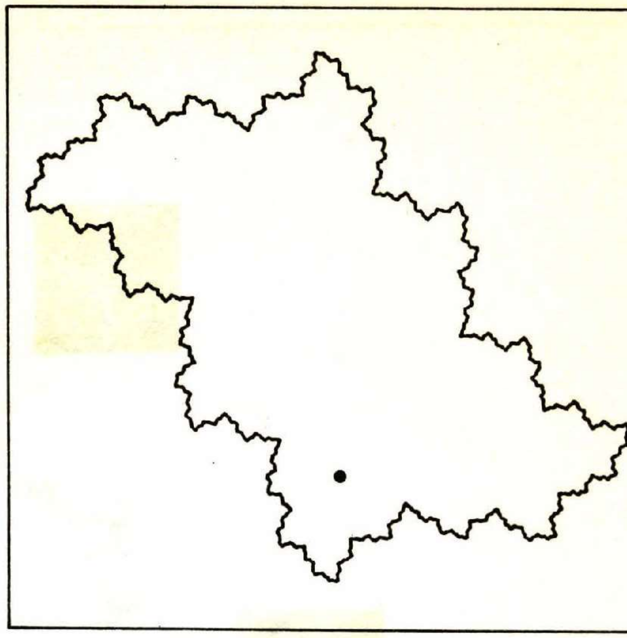
۲. وقتی $|z_0|>1$، طول اعداد بزرگترو بزرگترشده و بـه بینهایت میـل می‌کنند. بینهایت را نیز یك ربایندهٔ ایـن دستگاه می‌نامیم. هرنقطهٔ باطول بزرگتراز واحد به‌بینهایت جذب می‌شود.

۳. نقاط باطول واحد، طولشان تغییرنمی‌کند واین نقاط تحت اِعمـال متوالی نگاشت $f(z)=z^2$ روی دایرهٔ واحـد حرکت می‌کنند، و در واقع روی مرز بین دو پهنهٔ ربایش فوق‌الذکرکـه همان دایرهٔ واحد است باقی می‌مانند. رفتاراین دسته نقاط‌که روی دایرهٔ واحد می‌چرخند پیچیده است ولی در واقع، این پیچیدگی ظاهری است ونظام دقیقی دراینجا وجود دارد.

حال اگر پارامتر c را تغییر دهیم ومثلاً $|c|$ را کمی بزرگ کنیم، وضعیت بسیار پیچیده‌ترخواهد شد؛ هرچند درواقع وضعیتی مشابه حالت قبل حـادث می‌شود، یعنی هرنقطه‌ای یا به ربایند‌ه‌ای جذب می‌شود ویا روی مرز پهنه‌های ربایش تغییروضعیت می‌دهد، ولی این مرز دیگرخم همواری نیست بلکه شکل پیچیده‌ای دارد؛ درواقع خم سادهٔ بسته‌ای است‌که هیچ جا مشتقپذیرنیست وازنوعی "خود مشابه بودن" برخورداراست. این مرز درشکل ۱ آمده است، در این شکل یکی از ربایند‌ه‌ها در ناحیهٔ داخلی نیز مشخص شده است. چنین مرزهایی، نظیردایرهٔ واحد یا شکل پر پیچ‌وخم اخیر، مثالهـایی از مجموعهٔ ژولیا هستند. مجموعه‌های ژولیـا در دل دستگاههای دینامیکی مختلط گسسته جای دارند.

---

۱. ر.ك. خمهای جبری، نشرریاضی، سال‌اول، شمارهٔ۲، مرداد۱۳۶۷.



شکل ۱

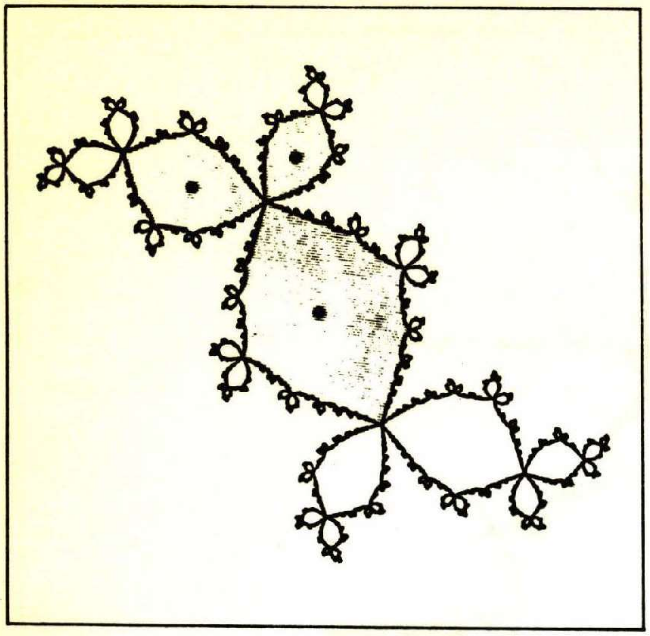
گاستون ژولیا[1]، و پیرفاتو[2] در حدود سالهای ۱۹۲۰ و در دوران جنگ جهانی اول، مستقل از یکدیگر، با انتشار مقالاتی به عرضهٔ ایده‌های اولیهٔ این مبحث تازه پرداختند که درآن سالها چندان اهمیتی نیافت ولی درسالهای اخیر مجدداً علاقهٔ ریاضیدانان را به‌خود جلب کرده است ودرقالب دستگاههای دینامیکی گسسته، از زمینه‌های مورد توجه ریاضیات روز است. شاید گرافیك کامپیوتری نیز که تجسم بخش بعضی ازساختارهای مجرد و ذهنی ریاضیات است، در ایجاد علاقه نسبت به این موضوع مؤثر بوده است.

به‌مثالی دیگرازاین دست نگاه می‌کنیم؛ همان نگاشت z^2+c را درنظر می‌گیریم که این بار $c=-0.12+0.74i$؛ دراین حالت مجموعهٔ ژولیا به‌شکل۲ است؛ دراینجا نیز وضعیتی مشابه حالات قبل پیش می‌آید. برخی ازنقاط صفحه تحت تکرر نگاشت z^2+c، به‌ربایندهٔ جذب می‌شوند و بعضی نقاط دیگرسرنوشت پیچیده‌ای دارند و تصویری مطابق شکل ۲ پدید می‌آورند که مجموعهٔ ژولیای این‌نگاشت است. ولی همان‌طورکه دیده می‌شود دراینجا دیگرخم سادهٔ بسته‌ای وجود ندارد بلکه در واقع بینهایت خم بسته وجود داردکه مجموعهٔ همبندی را می‌سازند. نقاط ناحیهٔ داخلی دیگر به‌ربایندهٔ واحدی جذب نمی‌شوند بلکه یك دور سه‌تایی وجود داردکه درشکل۲ دیده می‌شود.

شکلهای فوق به‌کمك گرافیك کامپیوتری ساخته شده‌اند و الگوریتم ساختن آنها از یکی از ویژگیهای مجموعهٔ ژولیا که پس ازاین ذکرخواهیم کرد، نتیجه می‌شود. در پیوست این نوشتار به‌معرفی این الگوریتم می‌پردازیم.

بازهم به‌نگاشت $f(z)=z^2+c$ بازمی‌گردیم. برحسب مقادیر مختلف برای پارامتر c، مجموعه‌های ژولیای متنوعی حادث می‌شوند؛درشکل۳ این مجموعه‌ها نمایانده شده است. مجموعه‌ای

1. Gaston Julia 2. Pierre Fatou



شکل ۲

که میان شکل قرار گرفته است و مجموعه‌های ژولیا در اطراف آن تشکیل شده‌اند، مجموعهٔ مندلبرات[1] است که ازاین مجموعه نیز بعداً سخن خواهیم گفت.

حال به‌بیان دقیقتر و ریاضی‌وارترمفاهیمی می‌پردازیم که ذکری گذرا ازآنها به‌میان آوردیم.

همان طورکه ذکرشد $\overline{\mathbb{C}}$ را برابر $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ می‌گیریم که $\mathbb{C}$، مجموعهٔ اعداد مختلط، است. $\overline{\mathbb{C}}$ همراه با ساختارتحلیلی تولید شده توسط $(\mathbb{C},\ z\to z)$ و $(\overline{\mathbb{C}}-\{0\},\ z\to 1/z)$، کرهٔ ریمان نام دارد. نگاشت گویای R را روی کرهٔ ریمان درنظر می‌گیریم:

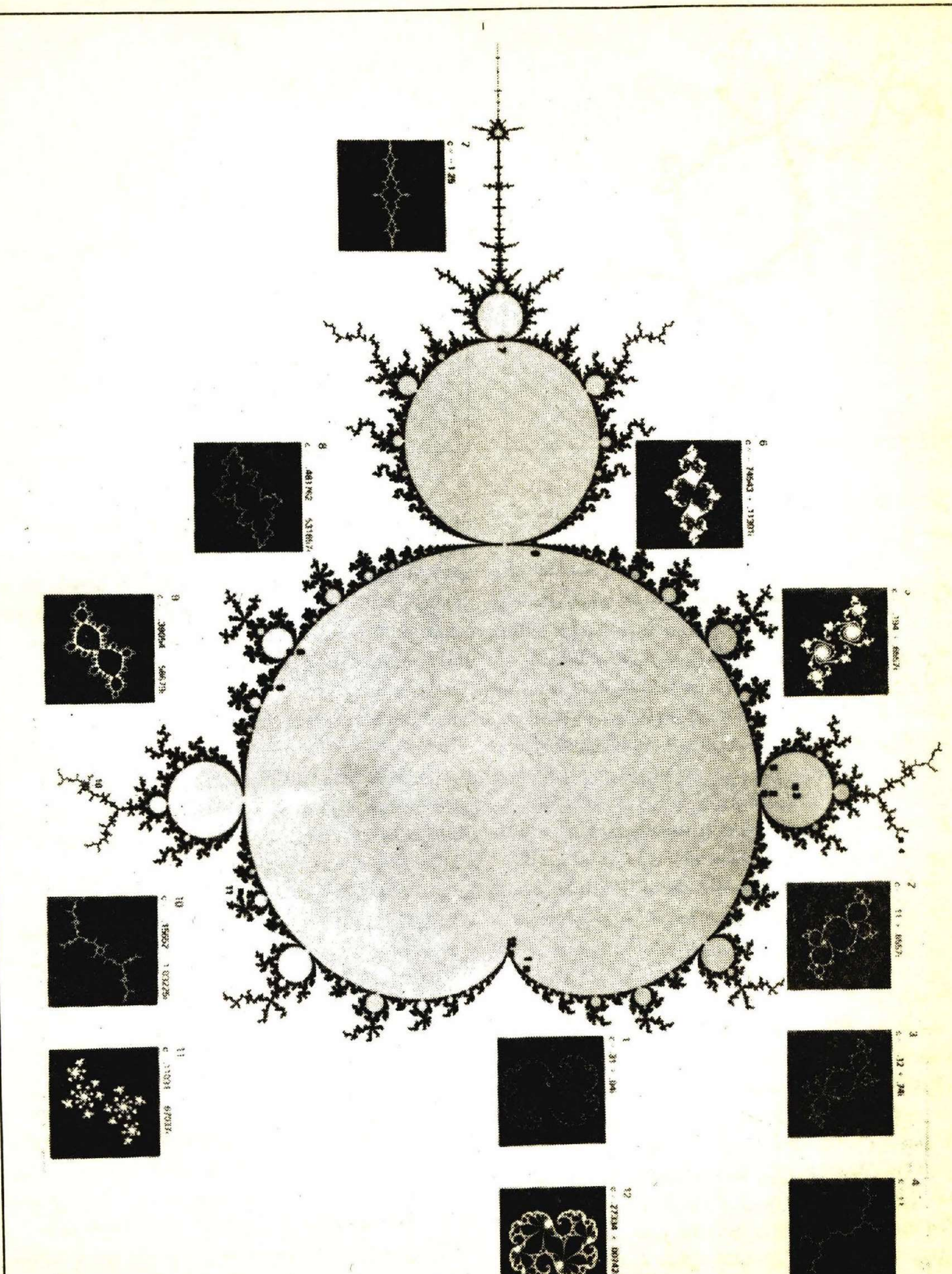
$$R(z)=p(z)/q(z),\ z\in\overline{\mathbb{C}}$$

که درآن p و q چندجمله‌ایهای بدون مقسوم‌علیه مشترك‌اند. R یك نگاشت تحلیلی روی کرهٔ ریمان است (نقاطی که به ∞ می‌روند همان قطبهای Rاند وحد نگاشت R در ∞ را برابر با مقدار R در ∞ می‌گیریم). درجهٔ R که برابراست با

$$\max\{\text{درجهٔ } p \text{ و درجهٔ } q\}$$

را بزرگتراز ۱ می‌گیریم. می‌خواهیم تحت تکرر روی نگاشت R، یعنی $R^n(z)=R(\dots(R(R(z)))\dots)$، سرنوشت نقاط مختلف روی $\overline{\mathbb{C}}$ را مورد مطالعه قراردهیم وازآنجا تعریف دقیقی ازمجموعهٔ ژولیا عرضه داریم. نخست پاره‌ای از مقدمات لازم را فراهم می‌کنیم: خانوادهٔ $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ازتوابع تحلیلی $R_\alpha: U\to\overline{\mathbb{C}}$ را در نظر می‌گیریم که درآن، U ناحیه‌ای از $\overline{\mathbb{C}}$ است و Λ یك مجموعهٔ اندیس است. خانوادهٔ $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ نرمال خوانده می‌شود اگرهر دنباله‌ای درآن دارای زیردنباله‌ای چون $\{R_n\}$ باشدکه $\{R_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به‌طور یکنواخت به‌نگاشتی چون $r: U\to\overline{\mathbb{C}}$ همگرا باشد. مفهوم دیگری که با نرمال بودن

1. Mandelbrot



شکل ۳

خانوادهٔ $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ برای نگاشتهای تحلیلی معادل است مفهوم همپیوستگی است. خانوادهٔ $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ در $a\in U$ همپیوسته است اگر به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عددی چون $\delta>0$ موجود باشدکه به‌ازای هر x که $d(x, a)<\delta$، و برای هر $\alpha\in\Lambda$ داشته‌باشیم: $d(R_\alpha(x), R_\alpha(a))<\varepsilon$. دراینجا d عبارت است‌ازفاصلهٔ نقاط روی S^2 (کرهٔ دوبعدی در $\mathbf{R}^3$) که‌روی سطح کره اندازه‌گیری می‌شود. در واقع کرهٔ S^2 به عنوان فضای توپولوژیك با $\bar{\mathbf{C}}$ همانریخت است. قضیهٔ کلاسیك زیردو تعریف اخیر را به‌یکدیگر مرتبط می‌سازد.

قضیه. خانوادهٔ $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ در U نرمال است اگروتنها اگردر هر نقطهٔ $a\in U$ همپیوسته باشد.

مفاهیم نرمال بودن و همپیوستگی، مفاهیم اساسی در تعریف مجموعهٔ ژولیا می‌باشند؛ لذا قبل‌از ارائهٔ تعریف مجموعهٔ ژولیا به تابلوی ۱ نگاه می‌کنیم تا این مفاهیم قدری روشنترشوند.

تابلوی ۱. همپیوستگی نگاشت $R(z)=z^2$

فرض کنید $D=\{z \mid |z|<1\}$؛ می‌خواهیم نشان دهیم خانوادهٔ $\{R^n(z)\}_{n\geq 1}$ درهرنقطهٔ $z_0\in D$ همپیوسته است. در اینجا $R(z)=z^2$ و $R^n(z)=R(\cdots(R(R(z)))\cdots)$؛ عدد $\delta>0$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $z_0=0$ آنگاه، $\delta=1/4$، و اگر $z_0\neq 0$، در آن صورت

$$\delta=\frac{1}{2}\operatorname{Min}\{|z_0|, 1-|z_0|\}$$

δ_0 را به‌این صورت تعریف می‌کنیم که $\delta_0=\delta+|z_0|$. بدین ترتیب برای هر z که $|z-z_0|<\delta$، داریم $|z|<\delta_0<1$ و بنابراین:

$$|R^n(z)|=|z^{2^n}|<\delta_0^{2^n}$$

وعددی صحیح چون N_0 وجود داردکه برای هر n بزرگتراز N_0 و هر z که $|z-z_0|<\delta$، داریم

$$|R^n(z)|<\frac{1}{4}$$

درنتیجه اگر $n\geq N_0+1$، و $|z-z_0|<\delta$، آنگاه

$$\begin{aligned}|R^n(z)-R^n(z_0)| &= |z^{2^n}-z_0^{2^n}|\\ &= |z^{2^{n-1}}-z_0^{2^{n-1}}|\,|z^{2^{n-1}}+z_0^{2^{n-1}}|\\ &= |R^{n-1}(z)-R^{n-1}(z_0)|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\ &< |R^{n-1}(z)-R^{n-1}(z_0)|\end{aligned}$$

وازاینجا نتیجه می‌شودکه خانوادهٔ $\{R^n(z)\}_{n\geq N_0+1}$ همپیوسته است. ولی بنابر یکی ازقضایای آنالیز، هرتعداد متناهی تابع که به یك خانوادهٔ همپیوسته اضافه شود، خانوادهٔ حاصل هم همپیوسته خواهد بود، لذا خانوادهٔ $\{R^n(z)\}_{n\geq 1}$ نیزهمپیوسته است.

درتابلوی ۱، همپیوستگی خانوادهٔ $\{R^n(z)\}$ برای $R(z)=z^2$ را در داخل دایرهٔ واحد دیدیم. در تابلوی ۲ نرمال بودن آن را نشان می‌دهیم.

تابلوی ۲. نرمال بودن نگاشت $R(z)=z^2$

بازهم فرض کنید $R(z)=z^2$، و $R^n(z)=R(\cdots(R(R(z)))\cdots)$ و $D=\{z \mid |z|<1\}$. می‌خواهیم ثابت کنیم $\{R^n(z)\}_{n\in N}$ یك خانوادهٔ نرمال است. فرض کنید

$$r_n=R^n|D$$

یعنی R^n را روی D درنظر بگیرید. ازآنجا که

$$r_n(D)\subset D$$

نتیجه می‌شود خانوادهٔ $\{r_n\}$ به‌طور یکنواخت کراندار است، و بنابرقضیه‌ای از آنالیز، این نتیجه حاصل می‌شود که خانوادهٔ $\{r_n\}$ در D نرمال است؛ بنابراین، $\{R^n\}$ نیزدر D نرمال است.

وقت آن رسیده است‌که مجموعهٔ ژولیا را تعریف کنیم.

تعریف. مجموعهٔ نقاطی ازکرهٔ ریمان راکه روی‌آنها خانوادهٔ $\{R^n\}_{n\in N}$ همپیوسته نیست، **مجموعهٔ ژولیای نگاشت R** می‌نامیم وآن را با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

درتکملهٔ‌این‌تعریف می‌افزاییم که مجموعهٔ $\bar{\mathbf{C}}-J(R)$، **مجموعهٔ فاتوی** نگاشت R نامیده می‌شود که آن را با $F(R)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $F(R)$ مجموعهٔ نقاطی ازکرهٔ ریمان است‌که خانوادهٔ $\{R^n\}_{n\in N}$ در یك همسایگی هر یك ازآنها نرمال است. نگاهی به‌تابلو ۳ می‌اندازیم تا براساس تعریف فوق ببینیم‌که مجموعهٔ ژولیای $R(z)=z^2$ دایرهٔ واحد است.

تابلوی ۳. مجموعهٔ ژولیای $R(z)=z^2$

درتابلوهای ۱و۲ دیدیم که $\{R^n(z)\}_{n\geq 1}$ درناحیهٔ داخلی دایره واحد، D، نرمال است. حال ثابت می‌کنیم که $\{R^n(z)\}$ در $\mathbf{C}-D$ نیز نرمال است. نگاشت $\phi:\mathbf{C}-D\to D$ را به صورت $\phi(z)=1/z$ تعریف می‌کنیم. ϕ یك یکریختی تحلیلی از $\mathbf{C}-D$ به D است و داریم

$$\phi^{-1}\circ R^n\circ\phi=R^n$$

چون $\{R^n\}$ در D نرمال است و ϕ یك یکریختی تحلیلی است نتیجه می‌شودکه $\{R^n\}$ در $\mathbf{C}-D$ نیز نرمال است.

ازطرف دیگر، $\{R^n\}$ در روی دایرهٔ $|z|=1$ نرمال نیست چون هرهمسایگی نقطه‌ای ازاین دایره مشتمل برنقاطی است که برخی‌به ∞ می‌روند وبرخی دیگربه ۰. لذا فاصلهٔ تصاویر این نقاط که به‌یکدیگر به‌اندازهٔ دلخواه نزدیك‌اند، تحت R^n از ε دلخواه کمترنمی‌توانند باشند. بدین‌ترتیب مجموعهٔ ژولیای نگاشت $R(z)=z^2$، دایرهٔ واحد است.

با یك توجه شهودی به‌مجموعهٔ فاتو و مجموعهٔ ژولیای نگاشت $R(z)=z^2$ می‌بینیم که در واقع هریك از اعضای مجموعهٔ فاتو دارای یك همسایگی‌اند که عناصر این همسایگی نوعاً تحت تکرر نگاشت $R(z)$ هم سرنوشت‌اند وکلیهٔ نقاط این همسایگی به‌سوی یکی از نقاط ثابت نگاشت جذب می‌شوند. ولی درمورد عناصر مجموعهٔ ژولیا چنین برداشتی درست نیست، یعنی هر همسایگی اعضای مجموعهٔ ژولیا، عناصری داردکه یا به سوی ربایندهای مختلف جذب می‌شوند و یا سرنوشت پیچیده‌ای دارند و روی دایرهٔ واحد می‌چرخند.

برخی ویژگیهای اولیهٔ مجموعهٔ ژولیا را می‌توان فهرست وار چنین ذکر کرد: مجموعهٔ ژولیا غیرتهی است، مجموعهٔ ژولیا بسته است، مجموعهٔ ژولیا فشرده است؛ وهمچنین

$$R(J(R))=J(R)=R^{-1}(J(R))$$

و بالاخره $J(R^n)=J(R)$.

اکنون قدم را فراتر می‌گذاریم و موضوع را قدری عمیقتر بررسی می‌کنیم. نخست چند اصطلاح دیگر:

نقطهٔ z_0 یك نقطهٔ تناوبی نگاشت $R(z)$ است هرگاه عدد صحیح و مثبت n موجود باشدکه $z_0=R^n(z_0)$. کوچکترین عدد n با این ویژگی را دورهٔ تناوب z_0 می‌نامیم. اگر $n=1$، z_0 نقطهٔ ثابت این نگاشت نامیده می‌شود. مدار مثبت یك نقطهٔ $z\in\overline{\mathbb{C}}$ عبارت است از

$$O^+(z)=\{z,\ R(z),\ R^2(z),\ \cdots\}$$

و مدار منفی این نقطه عبارت است از

$$O^-(z)=\{w\in\overline{\mathbb{C}}\,|\,R^n(w)=z\text{، } n \text{ به‌ازای یك عدد صحیح ومثبت}\}$$

اگر z_0 یك نقطهٔ تناوبی باشد، مدارمثبت z_0 یعنی $O^+(z_0)$ را نیز مدار تناوبی می‌نامیم.

مقدار ویژهٔ مدار تناوبی z_0، عبارت است از $\lambda=(R^n)'(z_0)$. با استفاده ازقاعدهٔ زنجیره‌ای می‌بینیم که λ روی همهٔ نقاط این مدار مقدارثابتی دارد.

یك نقطهٔ تناوبی z_0،

- ربایندهٔ قوی است هرگاه $|\lambda|=0$،
- رباینده است هرگاه $0\neq|\lambda|<1$،
- نقطهٔ خنثا است هرگاه $|\lambda|=1$،
- دافع است هرگاه $|\lambda|>1$.

P را مجموعهٔ کلیهٔ نقاط دافع و تناوبی نگاشت R می‌گیریم. دراین صورت:

قضیه . P در $J(R)$ چگال است. یعنی هرنقطه از $J(R)$ حد یك دنباله ازنقاط P است.

از این قضیه نتیجه می‌شودکه نقاط تناوبی دافع به مجموعهٔ ژولیا تعلق دارند و نقاط تناوبی رباینده در مجموعهٔ فاتو جای می‌گیرند. این مطلب راه مطلوبی برای ساختن مجموعهٔ ژولیای نگاشتهای مختلف پیش پای ما می‌گذاردکه در واقع الگوریتم کامپیوتری ساختن مجموعه‌های ژولیا برآن مبتنی است.

در تابلوی ۴، نحوهٔ پیدا کردن مجموعهٔ ژولیای نگاشت $R(z)=z^2$ را باتوجه به‌نتایج اخیر می‌بینیم.

تابلوی ۴. نقاط دافع تناوبی نگاشت $R(z)=z^2$

مجموعهٔ نقاط تناوبی نگاشت $R(z)=z^2$ عبارت است از:

$$\{0,\infty\}\cup\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^{2^n-1}=1\text{، } n \text{ به‌ازای عددصحیح ومثبت}\}$$

نقاط ۰ و ∞، نقاطی ثابت و ربایند‌ه‌اند، ولی مشتق $R(z)$ در ریشه‌های 2^n-1 ام واحد دارای قدرمطلق ۲ است که اکیداً از یك بزرگتراست. پس مجموعهٔ نقاط تناوبی دافع آن برابراست با:

$$A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,z^{2^n-1}=1\text{، } n \text{ به‌ازای عدد صحیح ومثبت}\}$$

بدین ترتیب داریم $A\subset S^1$، (S^1 دایرهٔ واحد است) می‌خواهیم نشان دهیم $\bar{A}=S^1$. مجموعه‌های A_n و B_n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_n=\{e^{2\pi i\alpha/2^n-1}\,|\,\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1\}$$

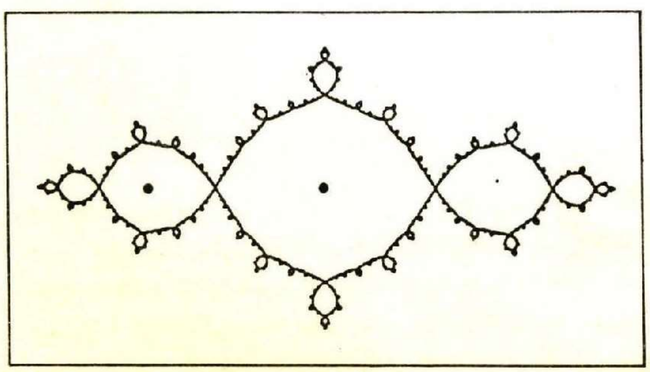
$$B_n=\{\alpha/2^n-1\,|\,\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-1\}$$

داریم $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و هرعنصردلخواه $z_0\in S^1$ را می‌توان به طور یکتا به‌صورت زیرنوشت:

$$z_0=e^{2\pi i\theta}\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

از پیوستگی تابع نمایی $x\to e^{2\pi ix}$ نتیجه می‌شود که کافی است نشان‌دهیم $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ در $[0,1]$ چگال است. عنصر دلخواه $0\leqslant\theta\leqslant1$ را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $\varepsilon>0$. در این صورت اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد آنگاه $1/(2^n-1)<\varepsilon$ وچون طول بازهٔ $(\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon)$ برابر با 2ε است، پس عدد صحیحی چون j وجود دارد که $j/(2^n-1)$ در بازهٔ $(\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon)$ قرار گیرد؛ یعنی، $(\theta-\varepsilon,\ \theta+\varepsilon)\cap B_n\neq\phi$ وحکم ثابت است.

بنا برقضیهٔ فوق، نقاط تناوبی دافع درمجموعهٔ ژولیا چگال‌اند. درواقع این نتیجه نقطهٔ آغازکار فاتو و ژولیا دربررسی نگاشتهای گویا بوده است که از آن تعریف معادل دیگری برای مجموعهٔ ژولیا حاصل می‌شود. به شکل ۴ نگاه می‌کنیم که مجموعهٔ ژولیای نگاشت $R(z)=z^2-1$ درآن به نمایش گذاشته شده است. در این شکل نقاط ۰ و ۱− نقاط ربایندهٔ قوی هستند.



شکل ۴

اگر $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ مجموعهٔ بازی باشد که $U \cap J(R) \neq \phi$، چون خانوادهٔ $\{R^n\}$ روی مجموعهٔ غیرتهی اخیر نرمال نیست، نتیجه می‌گیریم که $\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U)$ تمام $\mathbb{C}$، به‌استثنای حداکثر دو نقطه، را می‌پوشاند. می‌توان دید که این دو نقطهٔ استثنایی درصورت وجود، مستقل از U هستند ودر $F(R)$ جای می‌گیرند، ودر واقع نقاطی ثابت وربایندهایی قوی‌اند. بنابراین، $J(R) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n(U)$. ولی چون نقاط تناوبی دافع درمجموعهٔ ژولیا چگال‌اند، می‌توان زیرمجموعهٔ بازی چون W از U را طوری اختیار کرد که R روی W یك انبساط باشد. از فشردگی $J(R)$ نتیجه می‌شود که به‌ازای یك عدد صحیح n داریم: $J(R) \subset R^n(W) \subset R^n(U)$، و بنابراین حکم مهم زیر به‌دست می‌آید.

قضیه. اگر U مجموعهٔ بازی باشد که $U \cap J(R) \neq \phi$، آنگاه یك عدد صحیح ومثبت n وجود دارد که $J(R) \subset R^n(U)$.

ازاین قضیه، نتیجهٔ زیرحاصل می‌شود.

نتیجه. اگر $a \in J(R)$ آنگاه مدارمنفی a در مجموعهٔ ژولیا چگال است.

همچنین داریم:

قضیه. مجموعهٔ نقاطی از $J(R)$ که مدارمثبت آنها در $J(R)$ چگال است، خود در $J(R)$ چگال می‌باشد.

نتیجهٔ زیرنیز جالب توجه است.

نتیجه. اگر $J(R)$ نقطهٔ درونی داشته باشد، آنگاه مجموعهٔ ژولیای R همهٔ کرهٔ ریمان است.

جالب توجه است که ممکن است داشته باشیم $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$ یا $F(R) = \phi$، ولی $J(R)$ هیچگاه تهی نیست وهمواره نامتناهی است.

برای بیان نتایج بعدی دوتعریف زیررا یادآوری می‌کنیم: یك زیرمجموعه ازیك فضای متری را بیکاست[1] می‌نامیم هر گاه هرنقطهٔ آن یك نقطهٔ حدی‌اش باشد. مجموعه‌ای را کاملاً ناهمبند می‌نامیم که هیچ دونقطهٔ آن دریك زیرمجموعهٔ همبند قرارنگیرد.

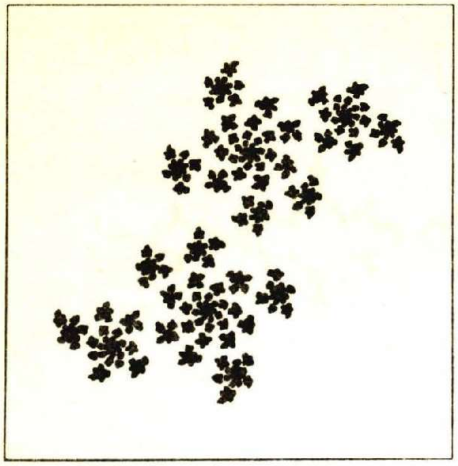
قضیه. مجموعهٔ ژولیا بیکاست است.

طبق قضیه‌ای در توپولوژی، هرفضای متری بیکاست کاملاً ناهمبند وفشرده، بامجموعهٔ کانتور همانریخت است. با استفاده از این حکم می‌توان انتظار داشت که برای بسیاری از نگاشتهای گویا، مجموعهٔ ژولیا با مجموعهٔ کانتور همانریخت باشد.

شکل ۵، مجموعهٔ ژولیای نگاشت $z \to z^2 + c$ برای یك c مناسب را نشان می‌دهد که درآن، مجموعهٔ ژولیا بامجموعهٔ کانتور همانریخت است.

قبل ازآنکه پیشتر برویم، برخی از ویژگیهای مجموعه‌های ژولیا را درتابلوی ۵ به‌طور خلاصه ذکرمی‌کنیم.

1. perfect



شکل ۵

تابلوی ۵. بعضی از ویژگیهای مجموعه‌های ژولیا

مجموعهٔ ژولیای نگاشت $R(z)$ را با J نمایش می‌دهیم.

- $J \neq \phi$.
- J بسته و فشرده است.
- $R(J) = J = R^{-1}(J)$.
- مجموعه‌های ژولیای R، و R^k، $k \in N$، یکی هستند.
- اگر J نقطهٔ درونی داشته باشد، آنگاه $J = \mathbb{C}$.
- نقاط تناوبی دافع در J چگال‌اند.
- اگر z یك نقطهٔ تناوبی دافع باشد، آنگاه $z \notin J$.
- اگر w یك نقطهٔ تناوبی دافع باشد، آنگاه

$$J = (\{z \in \mathbb{C} \mid R^n(z) = w$$

(بستار {برای یك عدد صحیح ومثبت n،

- اگر a یك نقطهٔ ثابت رباینده باشد و

$$A(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid R^n(z) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a\}$$

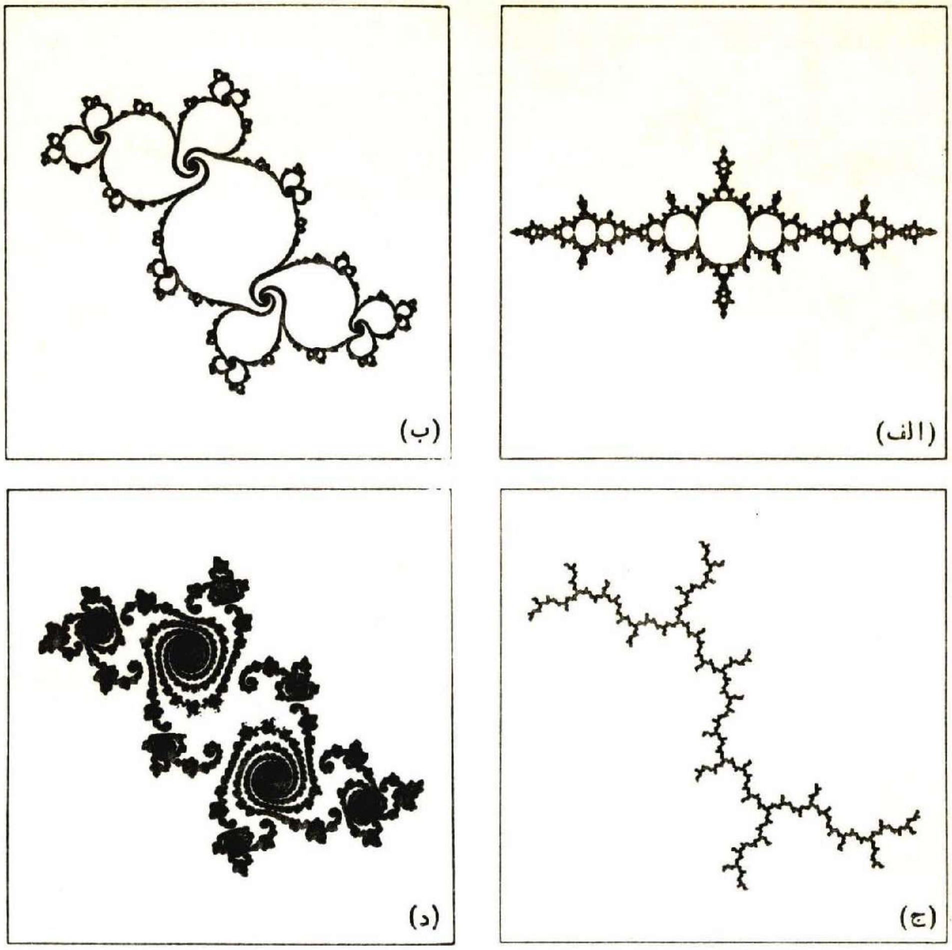
آنگاه، $J = (A(a)$ (مرز. اگر a یك ربایندهٔ قوی باشد بازهم این نتیجه درست است.

- J یا همبند است ویا همانریخت با مجموعهٔ کانتور.

در شکل ۶ نگاهی می‌اندازیم به چند مجموعهٔ ژولیا برای نگاشت $R(z) = z^2 + c$.

الف) مجموعهٔ ژولیا به‌ازای $c = -1/25$.
ب) مجموعهٔ ژولیای همبند.
ج) مجموعهٔ ژولیا به‌ازای $c = i$.
د) مجموعهٔ ژولیای همانریخت با مجموعهٔ کانتور.

حال می‌خواهیم ببینیم مجموعهٔ مندلبرات چیست وچه رابطه‌ای با مجموعهٔ ژولیا دارد. نگاشت $P_c(z) = z^2 + c$ را در نظر می‌گیریم. ∞ یك نقطهٔ ثابت و ربایندهٔ قوی این نگاشت است، و برای هر $c \in \mathbb{C}$، مجموعهٔ ژولیای نگاشت P_c که آن را با J_c



شکل ۶

نشان می‌دهیم عبارت است از (مرز $A(\infty)$) $= J_c$، که $A(\infty)=\{z\in C \mid R^n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty\}$. از خواص مجموعه‌های ژولیا نتیجه می‌شود که J_c یاهمبند است و یا همانریخت با مجموعهٔ کانتور. ازاین تمایز، تعریف زیر برای مجموعهٔ مندلبرات (که آن را با M نشان می‌دهیم) حاصل می‌شود؛

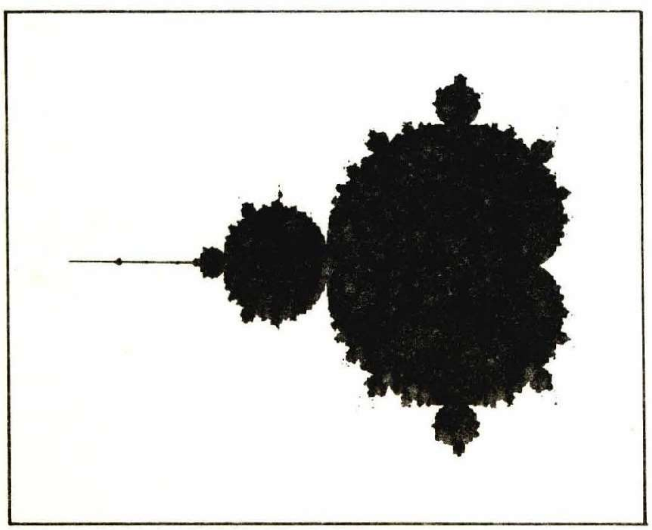
$$M=\{c\in C \mid J_c \text{ همبند است}\}$$

M یك مجموعهٔ همبند است وبنابرویژگیهای مجموعهٔ ژولیا نتیجه می‌شود که J_c همبند است اگروتنها اگر $0\notin A(\infty)$، بنابراین:

$$M=\{c\in C \mid P_c^k(0) \not\to \infty ،\ k\longrightarrow\infty\}$$

نتیجهٔ اخیرالگوریتمی برای بـه دست آوردن شکل مجموعهٔ مندلبرات به‌دست می‌دهدکه در پیوست بـه‌آن خواهیم پرداخت. در شکل ۷ مجموعهٔ مندلبرات را برای $R(z)=z^2+c$ می‌بینیم. درشکل۳ نیزمجموعهٔ مندلبرات ومجموعه‌های ژولیای تشکیل شده دراطراف آن را دیدیم.

کم‌کم ایـن مقال را به‌پایان می‌رسانیم و درگام آخـرنتایج پیشرفته‌تری را مطرح می‌سازیم و به مرز حدسها ومسائل حل نشده می‌رسیم.



شکل ۷

قبلاً دیدیم کـه اگر z_0 یك رباینده یایك ربایندهٔ قوی بـاشد آنگاه $O^+(z_0)$ در $F(R)$ جای دارد و اگراین مدار دافع باشد در $J(R)$ واقع می‌شود. حـال علاوه براینها، اگر U یك مؤلفهٔ همبندی $F(R)$ باشد که نقطهٔ تناوبی z_0 با دورهٔ تناوب n را در برداشته باشد،آنگاه $\{R^k\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ U به‌طور

یکنواخت به مدار مثبت z_0 همگرا می‌شود. در این حالت $\bigcup_{i=1}^{n} R^i(U)$ را مجذوب بلافصل مدار مثبت z_0 می‌نامیم. اگر z_0 یك نقطهٔ تناوبی R باشد، آنگاه $F(R)$ تعدادی متناهی مؤلفهٔ همبندی دارد که آنها را با V_i $(i=1,\ldots,k)$ نشان می‌دهیم. هریك از V_iها را یك گلبرگ z_0 می‌نامیم. تعریف زیر را نیز ارائه می‌کنیم و پس از آن به دسته‌بندی مؤلفه‌های پایدار $F(R)$ می‌پردازیم.

تعریف. فرض می‌کنیم مؤلفهٔ U از $F(R)$ تحت R پایدار باشد (یعنی $R(U)=U$). اگر U همبند ساده باشد و R روی آن با یك دوران روی D (دایره واحد درصفحهٔ اعداد مختلط) مزدوج باشد، U را یك ناحیه زیگل[1] می‌خوانیم. و درصورتی که U با یك حلقهٔ $D_r=\{z\in C \mid 1<|z|<r\}$ یکریخت باشد و R روی U با یك دوران در D_r مزدوج شود، آنگاه U را حلقهٔ ارمان[2] می‌نامیم.

قضیهٔ زیرمولفه‌های پایدار $F(R)$ را دسته‌بندی می‌کند.

قضیه. U را یك مؤلفهٔ پایدار $F(R)$ می‌گیریم. دراین‌صورت U یکی از پنج وضعیت زیر را دارد.

الف) مجذوب بلافصل یك نقطهٔ ثابت ربایندهٔ قوی است.

ب) مجذوب بلافصل یك نقطهٔ ثابت رباینده است.

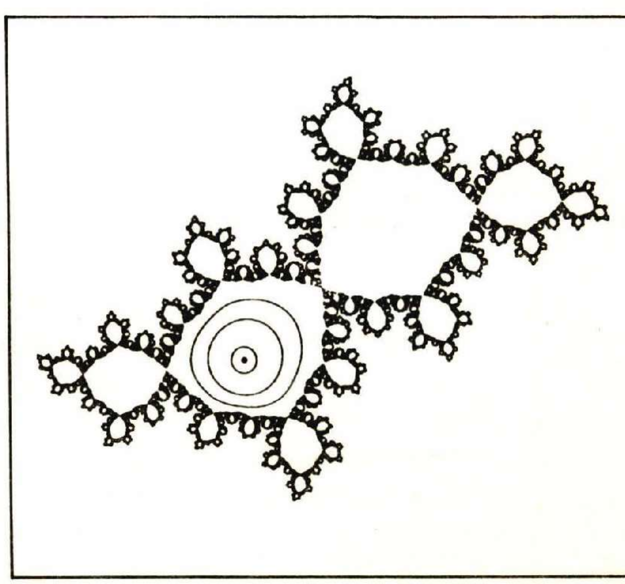
ج) گلبرگ یك نقطهٔ ثابت خنثا وگویاست.

د) ناحیهٔ زیگل است.

ه) حلقهٔ ارمان است.

درشکل ۸، ناحیهٔ زیگل در اطراف نقطهٔ ثابت برای نگاشت $R(z)=z^2+c$ نمایانده شده است که درآن

$$c=-0{,}39054-0{,}58679i$$



شکل ۸

توجه کنید که اگر U یك مؤلفهٔ تناوبی با دورهٔ تناوب n باشد، آنگاه U مؤلفه‌ای از $F(R^n)=F(R)$ است که تحت R^n پایدار می‌باشد. بنابراین به‌کمك قضیهٔ اخیر مؤلفه‌های تناوبی $F(R)$ مشخص می‌شوند. سالیوان درسال ۱۹۸۵ ثابت کرد که:

قضیه. مؤلفه‌های همبندی مجموعهٔ فاتو همگی پیش‌تناوبی‌اند.

مؤلفهٔ U پیش تناوبی است اگر به‌ازای یك عدد صحیح n، $R^n(U)$ تناوبی باشد.

سالیوان نشان داده است که تعداد مؤلفه‌های تناوبی متناهی است وسؤال زیررا مطرح کرده‌که تاکنون بی‌جواب مانده است.

سؤال. برای نگاشت R بادرجهٔ k، آیا تعداد مدارهای تناوبی مؤلفه‌های مجموعهٔ فاتو حداکثر $2k-2$ است؟

و دیگر؛

... هرخشتی کزین
برکنم آیم به سوی ماء معین[1]!

پیوست ۱

به‌نقش و رنگ پشت‌جلد نظرمی‌اندازیم. این رنگ‌آمیزیها نوعی زیبایی را در دل آشوب جلوه‌گر می‌سازند. رنگ‌آمیزیها روی ناحیه‌ای از صفحهٔ اعداد مختلط به موازات شکل گرفتن مجموعه‌های ژولیا، فاتو، ومندلبرات صورت می‌پذیرند. نمونه‌ای از روش رنگ‌آمیزی را در پیوست ۲ ارائه می‌کنیم. شکلهای پشت جلد عبارت‌اند از:

بالا، مجموعهٔ ژولیا؛ یك نقطهٔ ثابت به غیر از بینهایت وجود دارد.

سمت چپ و وسط، مجموعهٔ ژولیا، و ناحیهٔ زیگل در ناحیهٔ داخلی مجموعهٔ ژولیا.

سمت راست و وسط، مجموعهٔ مندلبرات.

پایین، مجموعهٔ ژولیا، درناحیهٔ داخلی مدارتناوبی رباینده با دورهٔ تناوب ۳ وجود دارد.

دراین شکلها ناحیهٔ داخلی برای نشان دادن پهنهٔ ربایش رنگ‌آمیزی شده است.

پیوست ۲

در این پیوست الگوریتمهایی برای تولید مجموعه‌های ژولیا و مجموعهٔ مندلبرات عرضه می‌کنیم.

مجموعهٔ ژولیا. فرض کنید $\bar{z}$ یك نقطهٔ دافع تناوبی نگاشت R باشد که $\bar{z}$ به‌مجموعهٔ ژولیای R تعلق دارد. هرگاه:

$$J_R^n=\{z\in \mathbb{C} \mid R^k(z)=\bar{z}\text{، } k\leqslant n \text{ برای یك مقدار}\}$$

چون

$$J(R)=\overline{\left(\bigcup_{n\geqslant 0} J_R^n\right)}$$

1. Siegel
2. Hermann

۱. از شعرمعروف "جوی و دیوار تشنه"، مولوی.

انتظار می‌رود که J_R^n برای n به‌اندازهٔ کافی بزرگ، تصویری از $J(R)$ عرضه کند. در واقع چون $J(R)=\overline{(\bigcup_{n\geqslant 0} R^{-n}(\bar z))}$، پس باید مقدار R^{-n} (حاصل n بار ترکیب R^{-1} باخودش) را در $\bar z$ پیدا کنیم. اگر $z_{n+1}=R(z_n)$، مدار منفی $w_{n+1}=R^{-1}(w_n)$ را که درآن $\bar z=w_0$، درنظرمی گیریم. با تشکیل دنبالهٔ تکرری فوق وتعیین نقاطی بامختصات متناظرعناصراین دنباله، روی صفحهٔ نمایش کامپیوتر، مجموعهٔ ژولیا حاصل می‌شود.

مجموعهٔ مندلبرات. می‌خواهیم الگوریتمی عرضه کنیم که براساس آن یك مجموعهٔ مندلبرات به‌دست آید و نواحی اطراف آن را نیز با شیوه مشخصی رنگ‌آمیزی کنیم. ابتدا یك ناحیهٔ مربع شکل روی صفحهٔ نمایش‌کامپیوتر درنظرمی گیریم. مختصات هر نقطهٔ دلخواه این ناحیه را (a, b) می‌نامیم، سپس با تغییر (a, b) در سرتاسرناحیهٔ مربع شکل به‌ازای هر

$$c=a+ib\,(i^2=-1)$$

حلقهٔ عملیاتی زیررا تشکیل می‌دهیم:

$$z \longleftarrow z^2+c$$

$$I \longleftarrow I+1$$

$$S \longleftarrow |z|$$

برای هر c، درآغاز z را برابرصفر می گیریم، و حلقه را آن‌قدر تکرار می کنیم تا S از ۲ بزرگترشود و یا I به ۱۰۰۰ برسد. چرا عدد ۲ را درنظر می گیریم؟ چون اگرطول z بزرگتراز ۲ شود، آنگاه z به سمت بینهایت میل خواهد کرد. هرنقطهٔ c که حلقهٔ فوق تا ۱۰۰۰ بار برای آن تکرار شود درمجموعهٔ مندلبرات قراردارد وآن را درصفحهٔ نمایش با رنگ سیاه مشخص می کنیم. سایرنقاط ناحیهٔ مربع‌شکل را بسته به‌اینکه حلقهٔ فوق برایشان چند مرتبه تکرارشود تا به‌بینهایت میل‌کنند (طولشان از۲ بزرگترشود) نسبت به تعداد رنگهای موجود در دستگاه کامپیوترمورد استفاده، دسته‌بندی می‌کنیم و به نقاط هر دسته یك رنگ نسبت می‌دهیم، و آن نقطه را در ناحیهٔ مربع شکل با رنگ نسبت داده شده رنگ‌آمیزی می‌کنیم. وقتی c در سرتاسر ناحیهٔ مربع شکل تغییر کند، آنگاه مجموعهٔ مندلبرات حاصل می‌شود.

منابع

1. P. Blanchard, *Complex Analytic Dynamics on The Riemann Sphere,* Belletin of The AMS, Vol. II, No. 1, July 1984.
2. S.D. Casey, *Formulating Fractals,* Computer Language, April 1987.
3. R.L. Devaney, *An Introduction to Chatic Dynamical Systems,* The Benjamin/Cummings, 1986.
4. H-O.Peitgen, P.H. Richter, *The Beauty of Fractals,* Springer Verlag, 1986.

تصاویراین مقاله به‌طورعمده ازمنبع [4] گرفته شده است.

۵. صفا، نوربخش. مجموعه‌های ژولیا، پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۶۶.

* یحیی تابش و صفا نوربخش، دانشگاه صنعتی شریف