نگاهی به ریاضیات در اسپانیای دورهٔ اسلامی•

یان پیتر هوخندایک*
ترجمهٔ محمد باقری

۱. مقدمه

از قرن هفتم تا یازدهم میلادی [اول تا پنجم هجری]، بخش وسیعی از اسپانیا و پرتغال کنونی جزو ممالک اسلامی به‌شمار می‌آمد. در این نوشتار همه‌جا منظورم از «اسپانیای اسلامی» آن بخش از شبه‌جزیرهٔ ایبری است که در قلمرو حکومت اسلامی بود. اسپانیای اسلامی اصطلاح کاملاً درستی نیست، زیرا در اوایل سده‌های میانه، اسپانیا وجود نداشت، اما کانونهای مهم علمی آن سرزمین در سده‌های میانه (قرطبه [کوردوبا]، سرقسطه [ساراگوسا]، طلیطله [تولدو])[1] همگی در اسپانیای کنونی واقع‌اند. تا همین اواخر، نظر رایج چنین بود که اهمیت اسپانیا در تاریخ ریاضیات تنها به‌خاطر نقش آن در انتقال ریاضیات از عربی به لاتین بوده است. طی پانزده سال اخیر مطالعهٔ منابع خطی منتشرنشده، این دیدگاه را دگرگون کرد. اکنون می‌دانیم که در اسپانیای اسلامی طی قرن یازدهم میلادی [پنجم هجری] ریاضیدانان خلاقی می‌زیستند. در این مقاله خواهم کوشید تا تصوری از کار آنان در خواننده ایجاد کنم. فرض را بر آن می‌گذارم که خواننده هیچ‌گونه آشنایی قبلی با تاریخ ریاضیات ندارد و مطلب را با اشاراتی کلی دربارهٔ زمینهٔ تاریخی موضوع آغاز می‌کنم.

۲. زمینهٔ تاریخی

یونانیان باستان، پیش از سال ۳۰۰ قبل از میلاد هندسه را به‌صورت یک دستگاه استنتاجی درآوردند. ریاضیات یونان تا قرن سوم میلادی شکوفایی داشت و از آن پس رو به افول گذاشت. رومیها به ریاضیات نظری توجهی نداشتند و سنت ریاضیات یونانی به رکود گرایید تا آنکه دوباره به دست مسلمانان احیا شد. در حوالی سال ۸۰۰ میلادی [۱۸۵ هجری] خلفای بغداد این شهر را به‌صورت پایتخت علمی جهان درآوردند. به دستور آنان بسیاری از متنهای ریاضی و نجومی یونانی (از جمله اصول اقلیدس، آثار ارشمیدس، آپولونیوس و غیره) و همچنین آثاری به سانسکریت از هند، به عربی ترجمه شد. این سرآغاز علوم عربی — یعنی علوم نوشته‌شده به عربی — بود. هنگام به‌کار بردن اصطلاحی چون «ریاضیات عربی» باید به‌خاطر داشته باشیم که سهم عمده‌ای از آن، حاصل کار ریاضیدانان غیر عرب به‌ویژه ایرانیان بود.

اسپانیای اسلامی از بغداد خیلی دور بود و مدتی طول کشید تا پای علم به آنجا برسد. در قرن دهم میلادی [چهارم هجری] در اسپانیای اسلامی شوق فراوانی برای آموختن علم وجود داشت و در پایتخت یعنی شهر قرطبه، کتابخانه‌ای با بیش از ۴۰۰۰۰۰ جلد کتاب دایر بود. در آن زمان ریاضیات و نجوم در سطح مقدماتی و در حد کاربردهای روزمره مثلاً در احکام نجوم و تعیین اوقات آموخته می‌شد. در حوالی سال ۱۰۰۰ میلادی [۳۹۰ هجری] توجه به نجوم و ریاضیات نظری در آنجا عمیقتر شد. قرن یازدهم میلادی [پنجم هجری] دورهٔ طلایی علوم در اسپانیای اسلامی است. بعد از قرن یازدهم میلادی، وسعت اسپانیای اسلامی کاهش یافت و فعالیت علمی در آن رو به افول گذاشت.

مسیحیان طی قرنهای یازدهم و دوازدهم میلادی [پنجم و ششم هجری] بخش بزرگی از اسپانیای کنونی را باز پس گرفتند: طلیطله در سال ۱۰۸۵ میلادی [۴۷۸ هجری] و سرقسطه در ۱۱۱۸ [۵۱۲ هجری] تسخیر شد. پایان گرفتن سلطهٔ مسلمانان بر این نواحی به معنای پایان یافتن کامل سنت علمی آنان نبود و در قرن دوازدهم میلادی [ششم هجری] دستنوشته‌های عربی فراوانی در اسپانیا به لاتین ترجمه شد. به‌ندرت کسانی از اهمیت این امر در تاریخ ریاضیات آگاه‌اند. در اوایل سده‌های میانه ریاضیات عملاً در اروپای غربی وجود نداشت: نکات معدودی از ریاضیات مقدماتی در متنها و دایرةالمعارفهای لاتین ذکر می‌شد، اما کمتر کسی با طرز اثبات قضیه‌ها آشنا بود. از طریق ترجمه‌های لاتینی قرن دوازدهم [ششم] بود که مسیحیان با ریاضیات به‌عنوان علمی استنتاجی روبه‌رو شدند. دوران خلاقیت در ریاضیات در اسپانیای اسلامی درست پیش از تسلط مجدد مسیحیان بر بخش اعظم اسپانیا و نهضت ترجمه‌ای که ذکرش رفت قرار می‌گیرد.

۳. منابع و اوضاع تحقیق

پاره‌ای از آثار ریاضیدانان و منجمان قرن یازدهم [پنجم] به‌صورت اصلی عربی به دست ما رسیده است. نسخه‌های خطی این آثار به دست خود مؤلفان نوشته نشده، بلکه بعدها در جهان اسلام یا در اسپانیای مسیحی

1. Córdoba, Zaragoza, Toledo

سده‌های میانه رونویسی شده است، که در آنجا نجوم عربی مطالعه می‌شد (مثلاً در بار آلفونسوی خردمند در قرن سیزدهم [هفتم]). چند تا از این متنها تنها به‌صورت ترجمه‌های لاتینی یا عبری آنها که در سده‌های میانه فراهم آمده بر جای مانده‌اند. همچنین می‌توان رد پای ریاضیات قرن یازدهم [پنجم] را در آثار مؤلفان متأخرتر (از اسپانیای مسلمان یا مسیحی یا شمال آفریقا) یافت. با این همه، مدارک موجود در این زمینه بسیار ناقص است و تاریخچهٔ ریاضیات در قرن یازدهم را باید با تلفیق اطلاعات جزئی و پراکنده‌ای از اینجا و آنجا ترسیم کرد. هنوز همهٔ منابع مربوط به آن دوره مطالعه نشده و نسخه‌های خطی زیادی هست که باید ویرایش و ترجمه بشود. پژوهشگران متعددی در سراسر جهان روی این مطالب کار می‌کنند. مهمترین مرکز پژوهش در زمینهٔ علوم اسپانیای اسلامی، بخش زبان عربی دانشگاه بارسلون به مدیریت خولیو سامسو[1] است. این مرکز تعدادی از منابع را ویرایش و منتشر کرده و خولیو سامسو اخیراً نخستین تحقیق معتبر دربارهٔ علوم اسپانیای اسلامی را که شامل نتایج کارهای انجام‌شده تا سال ۱۹۹۲ میلادی است به انتشار رسانده است [۵].

۴. اشارات کلی

در تاریخ ریاضیات اسپانیای اسلامی، بین حساب و جبر از یک سو، و هندسه و مثلثات از سوی دیگر می‌توان تمایزی قائل شد. در حساب و جبر، ظاهراً اسپانیای اسلامی از شرق عقبتر بود. ریاضیدانان قرن یازدهم [پنجم] متنهایی از شرق را به کار می‌بردند که در خود شرق منسوخ شده بود، مثل حساب و جبر خوارزمی (حدود ۲۱۵ هجری). دستاوردهای تازه‌تر ریاضیات مشرق زمین در اسپانیای اسلامی شناخته‌شده نبود. در هندسه و مثلثات اوضاع به قرار دیگری بود. ریاضیدانان اسپانیای اسلامی در سطحی همتراز همکاران خود در شرق اسلامی کار می‌کردند و از بسیاری یافته‌های جدید در شرق باخبر بودند.

در اینجا قصد ندارم نام همهٔ ریاضیدانها را با آثارشان وکارهایی که در هندسه و مثلثات کرده‌اند ردیف کنم، زیرا برای غیرمتخصصان ملال‌آور خواهد بود.[2] به‌جای این کار، دو نمونهٔ مشخص را به‌طور نسبتاً مشروح بررسی خواهم کرد.

۵. مؤتمن و کتاب استکمال او

اولین نمونه‌ای که عرضه می‌کنم، مؤتمن بن هود، پادشاه سرقسطه (در شمال شرقی اسپانیا) است که در سال ۱۰۸۵ [۴۷۸ هجری] درگذشت. حکومت سرقسطه یکی از خرده حکومتهایی بود که از تجزیهٔ اسپانیای اسلامی در قرن یازدهم پدید آمده بودند. مؤتمن در عین حال ریاضیدان هم بود وکتاب ریاضی مفصلی به‌نام کتاب الاستکمال نوشت [۱]. تا مدتها تصور می‌شد که این اثر از بین رفته است، اما بخشهای متعددی از آن چندی پیش در چهار نسخهٔ خطی عربی بی‌نام و نشان یافته شد [۲]. این نسخه‌ها در وضعیت بسیار نامطلوبی نگهداری شده بود زیرا مهمترین آنها (در کپنهاک) آسیب دیده و بسیاری از برگهای آن گم شده بود. در نتیجه، متنی که در دسترس ما بود در یازده

1. Julio Samsó

۲. پس دربارهٔ نوعی اسطرلاب که زرقالی ابداع کرد و مطالب زیادی دربارهٔ آن نوشته‌شده، سخن نخواهم گفت. این نوع اسطرلاب مثل اسطرلاب معمولی بر اساس تسطیح کره طراحی می‌شود ولی قطب تصویر در آن به‌جای قطب شمال، نقطهٔ اعتدال بهاری است.

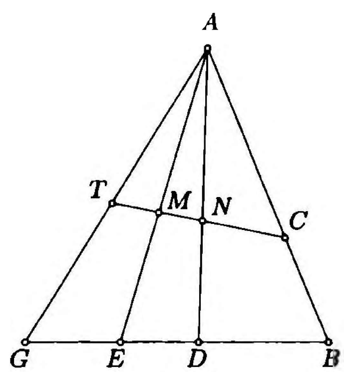
موضع، افتادگی داشت. در سال ۱۹۹۵ میلادی، نسخهٔ کاملی از استکمال که در قرن سیزدهم [هفتم] تهیه شده، یافته شد. مؤتمن در کتاب استکمال مبانی ریاضیات را با رعایت ترتیب فلسفی و با همهٔ برهانهای مربوط به آنها عرضه می‌کند. این اثر تا حدی شبیه کتاب اصول ریاضیات[1] بورباکی است. مؤتمن بخش اعظم مطالب کتاب استکمال خود را از آثار موجود اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس و ریاضیدانان دیگری از دورهٔ باستان یا از قلمرو شرقی جهان اسلام گرفته است. با این حال، پاره‌ای قضایا «تازه»اند، بدین‌معنی که در هیچ یک از نوشتارهای دورهٔ باستان و سده‌های میانه که می‌شناسیم یافت نمی‌شوند. دو مثالی که در پی می‌آید هنوز در هندسهٔ نوین مطرح است:

(۱) (شکل ۱) در «قضیهٔ ۱۶ از باب ۳ از نوع ۱ از نوع ۳» مؤتمن مثلث ABG و نقاط D و E را بر قاعدهٔ آن و قاطع $TMNC$ را که AG را در T، AE را در M، AD را در N و AB را در C قطع می‌کند، در نظر می‌گیرد.[2] او ثابت می‌کند که

$$(TC : CN) \cdot (NM : MT) = (GB : BD) \cdot (DE : EG)$$

به بیان امروزی، این کهنترین بیان موجود از پایایی منظری (تصویر مرکزی) نسبتهای ناهمساز، در صورت نسبتاً تعمیم‌یافتهٔ آن است. (اثباتی مربوط به یونان باستان برای حالت خاصی که در آن B و C بر هم منطبق باشند، در مجموعهٔ ریاضی پاپوس اسکندرانی وجود دارد.)

(۲) قضیهٔ منسوب به سوا[3] (شکل ۲) در حاشیهٔ کتاب استکمال به‌عنوان «قضیهٔ ۱۸ از باب ۳ از نوع ۱ از نوع ۳» بیان و اثبات شده است.[4] مثلث ABG را با نقاط D بر ضلع BG، H بر ضلع AG و Z بر ضلع AB در نظر می‌گیریم. در این صورت، سه پاره‌خط AD، BH و GZ یکدیگر را در



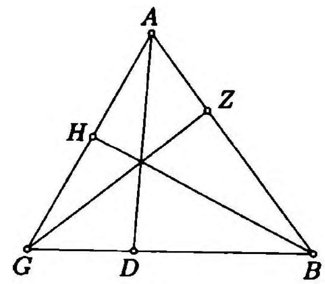
شکل۱

1. Éléments de Mathématique

۲. در ریاضیات یونان باستان و سده‌های میانه مفهوم عدد حقیقی وجود نداشت. در ریاضیات این دوره‌ها، پاره‌خط مفهومی بنیادی است؛ پاره‌خط دارای طول نیست، بلکه خود یک طول (مثبت) است. پاره‌خطها را می‌توان با یکدیگر مقایسه کرد و نظریه‌ای در باب نسبتهای بین پاره‌خطها وجود داشت. نسبتها را می‌شد مرتب کرد، و نسبت بین دو پاره‌خط با نسبت بین دو عدد صحیح قابل مقایسه بود. همهٔ خطهای راست کراندار بودند؛ هر خط راست را می‌شد به‌طور نامحدود امتداد داد، ولی خط راست بی‌پایان وجود نداشت.

3. Ceva

۴. چون قضیه با شماره ذکر شده، جزو متن اصلی بوده که هنگام کتابت ابتدا به اشتباه از قلم افتاده است.



شکل۲

یک نقطه قطع می‌کنند اگر و تنها اگر

$$(BZ:ZA)\cdot(AH:HG)=(BD:DG)$$

(این حکم با دو بار استفاده از قضیهٔ منلائوس اثبات می‌شود.) این قضیه به‌نام جووانی سوا که آن‌را در سال ۱۶۷۸ میلادی بیان کرد خوانده شده، ولی شاید اکنون باید نام آن‌را به «قضیهٔ مؤتمن» تغییر دهیم.

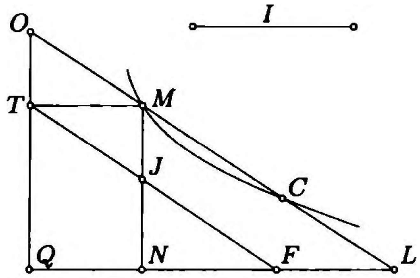
در بخشهای موجود از کتاب استکمال، مؤتمن هیچ‌گاه کارها و قضیه‌های خودش را از آنچه برگرفته از منابع دیگر است جدا نمی‌کند. در ریاضیات عربی به‌ندرت به نسبتهای ناهمساز بر می‌خوریم، اما می‌دانیم که این نسبتها در اثر گمشدهٔ اقلیدس دربارهٔ پوریسمها[1] که صورتی از آن به عربی برگردانده شد، وسیعاً به کار رفته بود. بنابراین تصور می‌کنم که مؤتمن قضیهٔ نسبتهای ناهمساز خود را از ترجمهٔ عربی یک اثر یونانی که اکنون بر جای نمانده گرفته است (اگر چنین باشد، اطلاعات تازه‌ای دربارهٔ ریاضیات یونانی از یک منبع مربوط به اسپانیای اسلامی قرن یازدهم [پنجم] کسب کرده‌ایم). دقیقاً نمی‌دانم که قضیهٔ منسوب به سوا را می‌توان به مؤتمن نسبت داد یا نه.

تنها چند قضیهٔ نسبتاً پیچیدهٔ دیگر هست که آنها را با اطمینان نسبی می‌توان به مؤتمن نسبت داد. اکنون دربارهٔ نمونه‌ای بحث خواهم کرد که صورت ساده‌شده‌ای است از یک ترسیم عرضه‌شده به‌وسیلهٔ ابن‌هیثم (هندسه‌دانی که در اوایل قرن یازدهم [پنجم] در مصر فعال بود)، که مبتنی بر ترسیمی از یونان باستان است. توضیحی که در پی می‌آید قدری وقت‌گیر خواهد بود، ولی ارزش آن را دارد زیرا تصوری از قابلیت مؤتمن در ریاضیات به‌دست می‌دهد. سعی می‌کنم مطالب کلی را عرضه کنم و از پرداختن به جزئیات برهانها که به تناسبها و مثلثهای متشابه مربوط می‌شود خودداری کنم. در نمادگذاری از آنچه ابن‌هیثم به‌کار برده است پیروی می‌کنم [۴، صص ۳۱۵ـ۳۱۸].

ترسیم مربوط به یونان باستان چنین است (شکل ۳). مستطیل $TQNM$ و پاره‌خط راست I مفروض‌اند. می‌خواهیم پاره‌خط TJF را که MN را در J و امتداد QN را در F قطع می‌کند چنان رسم کنیم که $FJ=I$. راه‌حل: یک هذلولی گذرنده از M با مجانبهای TQ و QN رسم می‌کنیم. (در دورهٔ باستان و سده‌های میانه، تنها یک شاخهٔ هذلولی در نظر گرفته می‌شد.) دایره‌ای به‌مرکز M و به شعاع I می‌کشیم. محل تقاطع این دو را C می‌نامیم. اکنون TF را به موازات MC رسم می‌کنیم. این همان خط مطلوب است.

اثبات آن آسان است: MC را امتداد می‌دهیم تا QT را در O و QN را در L قطع کند. بنا به خواص متوازی‌الاضلاعها، $TJ=OM$

1. Porisms



شکل ۳

و $TF=ML$، پس $FJ=ML-OM$. طبق خاصیتی از هذلولی داریم: $OM=CL$. پس $FJ=MC=I$. توجه کنید که این مسئله را با خط‌کش و پرگار نمی‌توان حل کرد.

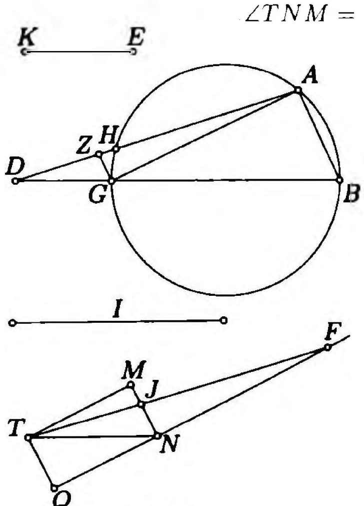
ابن‌هیثم هندسه‌دان مصری، در حوالی سال ۱۰۴۰ [۴۳۰] این ترسیم را به‌صورت نسبتاً پیچیده‌ای جزو یک رشته قضایای مقدماتی برای مطالعهٔ بازتاب در آینه‌های کروی در کتاب مناظر خود به‌کار برد.

ابن‌هیثم دایره‌ای به قطر مفروض BG و نقطهٔ مفروض A را بر این دایره در نظر می‌گیرد (شکل ۴). پاره‌خط EK نیز مفروض است. او می‌خواهد خط راستی گذرنده از A رسم کند که دایره را در H و قطر را در D قطع کند به‌طوری‌که $DH=EK$. نقطهٔ D خارج از دایره فرض می‌شود.

ایدهٔ اصلی کار بدین قرار است. ابتدا DH را دلخواه فرض می‌کنیم. ابن‌هیثم خط GZ را موازی با BA می‌کشد که DH را در Z قطع می‌کند. او نشان می‌دهد که $AZ:DG=BG:DH$. (از ذکر جزئیات چشم می‌پوشم).

بنابراین $DH=EK$ اگر و تنها اگر $AZ:DG=BG:EK$. متأسفانه طول DG را نمی‌دانیم، ولی اندازهٔ زاویه‌های به رأس G معلوم است: $\angle DGZ=\angle GBA$ و $\angle ZGA=\angle GAB=90^\circ$.

ابن‌هیثم در اینجا یکی از شگردهای مورد علاقه‌اش را به‌کار می‌برد که عبارت از ترسیم شکلی کمکی متشابه با شکل اصلی است. پاره‌خط NT را به‌طول معلوم دلخواه اختیار می‌کنیم و مستطیل $TMNQ$ را چنان می‌سازیم که $\angle TNM=\angle DGZ$.



شکل۴

پاره‌خط I را چنان اختیار می‌کنیم که $I : NT = BG : EK$ و (با استفاده از ترسیم یونانی) TJF را چنان می‌یابیم که $FJ = I$. سپس D را چنان به‌دست می‌آوریم که $\angle GAD = \angle NFT$. پس $GAZD$ با $NFJT$ متشابه است. بدین ترتیب

$$AZ : DG = FJ : NT = I : NT = BG : EK$$

از آنجا که $AZ : DG = BG : DH$، معلوم می‌شود که چنانکه مطلوب مسأله بود، $DH = EK$. توجه کنید که پاره‌خط معلوم NT در شکل کمکی متناظر با پاره‌خط مجهول GD در شکل اصلی است.

مؤتمن ترسیم ابن‌هیثم را براساس سه نکتهٔ زیر ساده کرد و تعمیم داد:

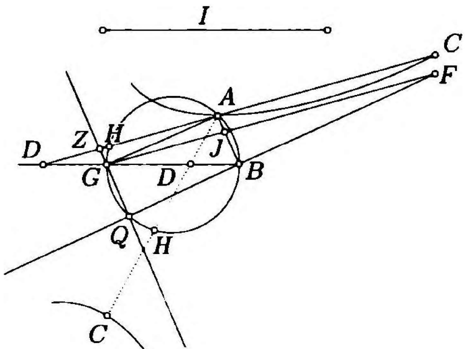
(۱) چون در شکل ۴، NT پاره‌خطی به طول دلخواه است، می‌توانیم آن را با پاره‌خط معلومی در شکل اصلی، مثلاً با BG مساوی بگیریم. با این کار، شکل کمکی و شکل اصلی به‌صورت مناسبی بر هم منطبق می‌شوند و ترسیم به‌صورت زیر درمی‌آید (شکل ۵). مستطیل $GABQ$ را کامل می‌کنیم، هذلولی گذرنده از A و با مجانبهای GQ و QB را رسم می‌کنیم. پاره‌خط I را چنان اختیار می‌کنیم که $I : BG = BG : EK$ و نقطهٔ C را از تقاطع هذلولی و دایره به مرکز A و به شعاع I به‌دست می‌آوریم. CA را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ ABG را در H و خط BG را در D قطع کند. با استفاده از چند تناسب و مثلثهای متشابه[1] می‌توان ثابت کرد $AC : BG = BG : DH$. از آنجا که $AC = I$ و $I : BG = BG : EK$، داریم $DH = EK$، که مطلوب مسأله بود.

(۲) تا اینجا دربارهٔ حالتی بحث کرده‌ایم که در آن D خارج از دایره است. مؤتمن توجه کرد که مسألهٔ مشابهی را که در آن D داخل دایره باشد نیز می‌توان حل کرد. برای این کار نقاط برخورد شاخهٔ دیگر هذلولی را با دایرهٔ به مرکز A و به شعاع I پیدا می‌کنیم و همان روش استدلال قبلی را به‌کار می‌بریم (خط‌چین در شکل ۵). مؤتمن اثباتی کلی برای این دو حالت مختلف عرضه کرده است. ابن‌هیثم راه‌حل تازه و اساساً متفاوتی برای وقتی‌که D داخل دایره است دارد.

(۳) مؤتمن توجه کرد که $GABQ$ می‌تواند به‌جای مستطیل، متوازی‌الاضلاع دلخواهی باشد. پس لازم نیست فرض کنیم BG قطر دایره است؛ A، B، و G می‌توانند سه نقطهٔ متمایز دلخواه بر یک دایره باشند. در حالت کلی نقطهٔ Q بر این دایره واقع نیست.

خلاصهٔ مطالب فوق: مؤتمن در مقایسه با ابن‌هیثم مسألهٔ فوق را در صورتی کلیتر و از راهی بسیار کوتاهتر حل کرد. طول راه‌حل ابن‌هیثم برای دو حالت مسأله، ده برابر راه‌حل کلی مؤتمن است. این امر نشان می‌دهد که مؤتمن توانایی اصلاح کار ابن‌هیثم را، که خود یکی از مهمترین هندسه‌دانان دورهٔ اسلامی بوده، داشته است.

به دلایلی که در زیر می‌آید، راه‌حل کلی این مسأله (شکل ۵) باید از آن خود مؤتمن باشد. این راه‌حل بین یک رشته ترسیمهای هندسی واقع شده



شکل۵

است که به‌وضوح از مناظر گرفته شده‌اند. ابن‌هیثم این اثر را در حوالی سال ۱۰۳۰ [۴۲۰ هجری] در سن نسبتاً بالایی در مصر نوشت و این کمتر از ۵۰ سال پیشتر از زمان تألیف کتاب استکمال به‌دست مؤتمن بود. ظاهراً در بخش شرقی جهان اسلام در قرن یازدهم کسی مناظر ابن‌هیثم را به‌طور جدی مطالعه نکرده بود. توصیفی از علوم اسپانیای اسلامی به روایت صاعد اندلسی و مربوط به حوالی سال ۱۰۶۵ [۴۶۰ هجری] در دست است که می‌گوید تنها سه نفر به «فلسفهٔ طبیعی» علاقه دارند: مؤتمن و دو نفر دیگر (که نام آنها را می‌برد)[1]. از آن دو نفر دیگر هیچ تألیفی در ریاضیات سراغ نداریم و شهرت ریاضی آنان نزد معاصرانشان به هیچ وجه با شهرت مؤتمن قابل مقایسه نیست. بدین ترتیب تنها مؤتمن می‌تواند راه‌حل مذکور را عرضه کرده باشد.

وجود بسیاری راه‌حلهای مشابه راه‌حل فوق در کتاب استکمال مؤید این انتساب است. به‌عنوان مثال می‌توان مسألهٔ معروف آپولونیوس (ترسیم دایره‌ای مماس بر سه دایرهٔ مفروض با خط‌کش و پرگار) را ذکر کرد. راه‌حل مؤتمن برای این مسأله نیز از کار ابن‌هیثم الهام گرفته، ولی در اینجا هم بسیار کوتاهتر و روشنتر از راه‌حل پیچیدهٔ ابن‌هیثم است. نمونهٔ دیگر، ساده کردن روش ابراهیم ابن سنان (هندسه‌دان قرن دهم [چهارم] اهل بغداد) برای محاسبهٔ مساحت قطعهٔ سهموی، به‌وسیلهٔ مؤتمن است. مؤتمن تنها هندسه‌دانی از اسپانیای اسلامی قرن یازدهم میلادی نبود که روی موضوعهای پیچیده کار می‌کرد. بین سالهای ۱۰۸۷ [۴۸۰] و ۱۰۹۶ [۴۹۰]، هندسه‌دانی به نام ابن سیّد بلنسی نظریه‌ای در باب منحنیهای درجات بالا تدوین کرد و آن‌را برای تقسیم دایره به بخشهایی به تعداد دلخواه و درج تعداد دلخواهی واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض به‌کار برد[2]. کتاب او بر جا نمانده است و تنها اطلاعی که از آن داریم توصیف مبهمی است که ابن باجهٔ فیلسوف از آن می‌کند [۱].

این نمونه‌ها نشان می‌دهد که تحقیقات هندسی در اسپانیای اسلامی در سطحی بسیار بالاتر از آنچه پانزده سال پیش گمان می‌رفت بوده است.

---

۱. توضیح: چون A، B، G، H روی یک دایره واقع‌اند، داریم $DA.DH = DB.DG$، پس می‌توان نوشت (در مثلثهای متشابه) $DH : DG = DB : DA = BG : AZ$. بنابراین، $JF : BG$ (در مثلثهای متشابه) $= DG : DH = AZ : DG$. در شکل ۳ باتوجه به اینکه $JF = MC$، تساوی $JF = AC$ ثابت می‌شود. جزئیات بیشتر در [۶] هست.

۱. این دو نفر، ابن‌نباش بجانی و ابوالفضل‌بن حسدای اسرائیلی هستند. [نقل از کتاب التعریف بطبقات‌الامم اثر صاعد اندلسی، ویراستهٔ دکتر غلامرضا جمشید نژاد اول، ص ۱۶۴، در دست چاپ]—م.

۲. n واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض a و b عبارت‌اند از n پاره‌خط $x_1, \dots, x_n$ چنان که داشته باشیم $a : x_1 = x_1 : x_2 = \dots = x_n : b$.

۶. جیّانی و مفهوم «نظرات کواکب» در احکام نجوم

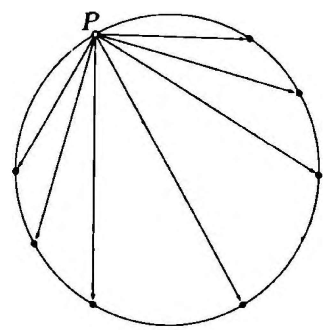
داشتن تصور روشنی از وضع ریاضیات در اسپانیای اسلامی بدون توجه به کاربردهای آن در نجوم و احکام نجوم میسر نیست. برای نمونه، مسأله‌ای علمی از احکام نجوم را که به‌وسیلهٔ ابوعبدالله محمد ابن معاذ جیّانی ریاضیدان قرن یازدهم [پنجم] حل شده است[1]، مطرح می‌کنم. احکام نجوم امروزه شبه‌علم به‌شمار می‌آید، ولی در تاریخ ریاضیات سده‌های میانه بسیار مهم بود، زیرا یکی از زمینه‌های عمده‌ای بود که ریاضیات در آن کاربرد مشخص داشت. ابتدا چند نکتهٔ مقدماتی از نجوم را یادآوری می‌کنم.

در نظریه‌های سیاره‌ای دورهٔ باستان و سده‌های میانه، مواضع سیارات بر کرهٔ آسمان، با مختصاتی به نام «طول سماوی» و «عرض سماوی» بیان می‌شد. در اینجا دایرهٔ اصلی مبدأ، دایرةالبروج یعنی مسیر ظاهری خورشید حول زمین در زمینهٔ ثوابت است. نقطهٔ صفر روی دایرةالبروج، نقطهٔ اعتدال بهاری، یعنی موضع خورشید در آغاز بهار، و طول سماوی هر سیارهٔ کمان بین نقطهٔ اعتدال بهاری و تصویر قائم سیاره بر دایرةالبروج است. این کمان در جهت حرکت خورشید اندازه‌گیری می‌شود. در اینجا به عرض سماوی یعنی کمانی که اندازهٔ انحراف سیاره از دایرةالبروج را نشان می‌دهد کاری نداریم. در دورهٔ اسلامی، نظریهٔ قابل قبولی برای پیش‌بینی طول سماوی خورشید، ماه و سیارات روی دایرةالبروج در هر مکان و در هر لحظه از زمان وجود داشت و کتابچه‌های فراوانی در توضیح محاسبات لازم، شامل جدولهای مورد نیاز برای این کار موجود بود. هر چند که نجوم آن دوره زمین مرکزی — و نه خورشید مرکزی — بود، این امر بر دقت پیش‌بینی‌های مذکور اثر نمی‌گذاشت.

اکنون به توضیح مفهوم «نظر»[2] در احکام نجوم می‌پردازم. فرض اساسی احکام نجوم سده‌های میانه این بود که خورشید، ماه و سیارات بر حوادث روی زمین اثر می‌گذارند و از موقعیت این اجسام آسمانی می‌توان آینده را با میزانی از احتمال پیش‌بینی کرد. این پیش‌بینی‌ها بسیار پیچیده بودند و یکی از چیزهای مختلفی که در احکام نجوم باید در نظر گرفته می‌شد، صورتبندیهای خاص بین سیارات بود که آنها را نظرات کواکب می‌نامیدند. مفهوم این اصطلاح بدین قرار است. احکامیان معتقد بودند که هر سیاره از موضع خود بر دایرةالبروج هفت «شعاع نظر» به‌سوی سایر نقاط دایرةالبروج می‌تاباند. (بر اساس نظریهٔ باستانی رؤیت، انسان از طریق تاباندن شعاعهای نظر از چشم خود، و نه به خاطر ورود نور به چشمش اشیا را می‌بیند.) اگر سیارهٔ دیگری به‌اندازهٔ کافی به انتهای این شعاع نظر نزدیک باشد، به‌وسیلهٔ سیارهٔ اول «دیده» (در لاتین adspectus) می‌شود، و در این صورت می‌گویند دو سیاره ناظر به یکدیگرند.

برای محاسبهٔ نظرات سیاره‌ها دو روش وجود داشت. بر اساس روش ساده‌تر، این هفت شعاع به نقاطی از دایرةالبروج با فواصل زاویه‌ای ۶۰°، ۹۰°، ۱۲۰°، ۱۸۰° در هر دو جهت می‌تابیدند (شکل ۶). پس دو سیاره ناظر به یکدیگرند اگر تفاضل طولهای سماوی آنها ۶۰° الی آخر باشد. این روش به مسأله‌های ریاضی جالبی منجر نمی‌شود.

بسیاری از احکامیان دورهٔ اسلامی، به دلایلی که بر من روشن نیست، روش پیچیده‌تری را قبول داشتند که من آن‌را روش «استوایی» تعیین نظرات

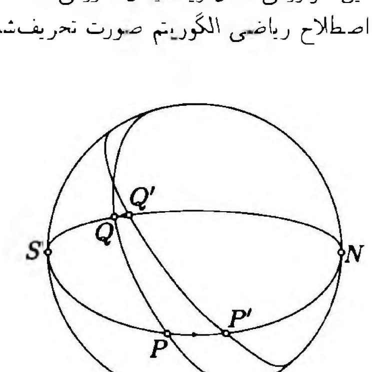


شکل۶

می‌نامم. مفهوم این اصطلاح به قرار زیر است. ابتدا سیارهٔ P را که بر دایرةالبروج واقع است بر نقطهٔ P' که برخوردگاه استوای آسمانی[1] با نیمدایرهٔ عظیمهٔ گذرنده از P و نقطهٔ شمال N و نقطه *جنوب S بر افق است، تصویر می‌کنیم. از P' زاویه‌های ۶۰°، ۹۰°، ۱۲۰°، ۱۸۰° را روی استوای آسمانی در هر دو طرف جدا می‌کنیم (در شکل ۷ داریم $P'Q' = ۶۰^\circ$). برای هر یک از هفت نقطهٔ Q' که به این روش پیدا می‌کنیم، تصویر وارون به‌دست می‌آوریم: نیمدایرهٔ عظیمهٔ $NQ'S$ را می‌کشیم و برخوردگاه آن‌را با دایرةالبروج Q می‌نامیم. بدین ترتیب، بر اساس روش «استوایی»، سیارهٔ واقع در نقطهٔ P هفت شعاع نظر به هفت نقطهٔ Q می‌تاباند.

اگر $P'Q'$ برابر با ۶۰°، ۹۰°، یا ۱۲۰° باشد، کمان PQ مقدار متغیری دارد که تنها وابسته به طول سماوی P نیست، و گرچه عجیب می‌نماید، به عرض جغرافیایی راصد و وقت (محلی) نیز بستگی دارد. (پس به این نتیجهٔ نسبتاً غریب می‌رسیم که تابش شعاعهای نظر هر سیاره از دیدگاه راصدهای مختلف روی زمین متفاوت است. ظاهراً احکامیان اشکالی در این امر نمی‌دیدند.)

روش «استوایی» تعیین نظرات کواکب علی‌رغم دشواریش (یا شاید درست به همین سبب) کاملا رایج بود. در قرن نهم [سوم] خوارزمی جدولهایی برای محاسبهٔ نظرات کواکب طبق روش استوایی، با استفاده از تقریبی خام، برای بغداد تهیه کرد. این خوارزمی همان ریاضیدان معروفی است که کتابی در جبر نوشته است و اصطلاح ریاضی الگوریتم صورت تحریف‌شدهٔ نام اوست.



شکل۷

۱. برای اطلاع بیشتر دربارهٔ جیّانی نگاه کنید به: ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۵، صص ۲۱۷، ۲۱۸ ـم.

۲. ابوریحان بیرونی در التفهیم (چاپ همائی، بابک، تهران، ۱۳۶۲، ص ۳۴۵) معادل فارسی «نگریستن» را برای نظر به‌کار برده است ـم.

۱. استوای آسمانی برخوردگاه کرهٔ آسمان است با صفحه‌ای که از محل ناظر بر محور عالم یعنی بر خط گذرنده از قطبهای شمال و جنوب آسمان عمود شود.

این جدولها بعداً یعنی در حوالی سال ۱۰۰۰ [۳۹۰]، بوسیلهٔ مهمترین ریاضیدان اسپانیای اسلامی آن دوره یعنی مسلمه‌بن احمد مجریطی (مجریط صورت معرب مادرید است) برای قرطبه محاسبه شده‌اند. مجریطی جدولهای خوارزمی را برای یک عرض جغرافیایی دیگر و با یک روش ریاضی پیچیده‌تر (اما همچنان تقریبی) مجدداً محاسبه کرد.

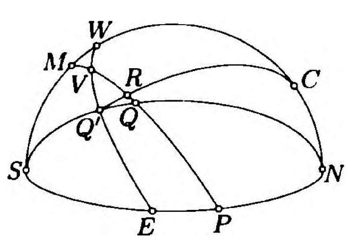
اکنون به بحث دربارهٔ محاسبهٔ دقیق نظرات کواکب طبق روش استوایی جیّانی می‌پردازم [۳]. او یکی از بهترین ریاضیدانان قرن یازدهم بود که منصب قضاوت نیز داشت. وی در جیّان[1] [با تلفظ اصلی «خائن»] که در جنوب اسپانیاست زندگی می‌کرد.

برای سهولت توضیح، فرض می‌کنم که سیارهٔ P روی افق شرقی قرار دارد و نقطهٔ اعتدال بهاری به نصف‌النهار نزدیک است. حالت کلی هم چندان دشوارتر از این نیست در اینجا به بیان پاره‌ای از محاسبات که در زمان جیّانی معمول بود نمی‌پردازم. و برای وضوح نمادهای امروزی جبر را بهکار می‌برم. منبع من متن عربی منتشرنشده‌ای از جیّانی دربارهٔ «نظرات» کواکب است که نسخهٔ خطی منحصر به فرد آن در اسپانیای (مسیحی) قرن سیزدهم کتابت شده است.

شکل ۸ ربعی از کرهٔ آسمان را که بالای افق و در طرف شرق نصف‌النهار است نشان می‌دهد. همهٔ کمانهای این شکل، کمانهای دایره‌های عظیمه یعنی فصل مشترک کره با صفحه‌های گذرنده از مرکز آن هستند. نقاط E، S و N، نقاط شرق، جنوب و شمال روی افق هستند. چون نقطهٔ P بر افق شرقی واقع است، P' «تصویر» آن بر نقطهٔ شرق یعنی E می‌افتد. نقطهٔ C قطب شمال آسمانی است. $NCWMS$ نصف‌النهار است که دایرةالبروج را در M و استوای آسمانی WVE را در W قطع می‌کند. نقطهٔ V، نقطهٔ اعتدال بهاری است. پس $\angle PVE = \epsilon$، همان میل دایرةالبروج است که در نجوم عربی مقدارش را معمولاً $23°35'$ می‌گرفتند. همچنین $\angle VES = 90 - \phi$ که در آن ϕ عرض جغرافیایی است که آن هم معلوم فرض می‌شود (فرض بر آن است که محل راصد در نیمکرهٔ شمالی، بین استوا و دایرهٔ شمالگان است). توجه کنید که $CN = \phi$. همچنین فرض می‌کنیم که کمان VP یعنی طول سماوی P معلوم است.

برای محاسبهٔ نظر «تسدیس راست» P، کمان EQ' را برابر با $60°$ روی استوای آسمانی جدا می‌کنیم و نیمدایرهٔ $SQ'N$ را رسم می‌کنیم تا دایرةالبروج را در Q قطع کند. اکنون می‌خواهیم VQ را محاسبه کنیم.

جیّانی کمان CQ' را رسم می‌کند تا دایرةالبروج را در نقطهٔ R قطع کند. چون C قطب شمال آسمانی است و Q' بر استوا قرار دارد، $\angle CQ'V$ قائمه است.



شکل۸

[1] J. Jaén

کمان VE که «مطلع» P خوانده می‌شود از طریق محاسبهٔ عادی یا با مراجعه به «جدول مطالع» برای عرض جغرافیایی مورد نظر بهدست می‌آید.

روی استوای آسمانی داریم $EQ = 60°$، $EW = 90°$، پس با داشتن EV می‌توانیم $Q'V$ و VW را بهدست آوریم. با داشتن این کمانها هم می‌توانیم کمانهای زیر را محاسبه یا در جدول پیدا کنیم: VR، VM (از جدول مطالع مستقیم؛ اینها طولهای مربوط به بعدهای VQ' و VW هستند) و $Q'R$، MW (از جدول میلها). از طرف دیگر، $WS = 90° - \phi$، پس می‌توان نوشت (کمان MS)=(کمان WS)−(کمان WM). اکنون مقدار این کمیتها معلوم است: (کمان MS)= a، (کمان RM)= A، (کمان $Q'R$)= δ؛ همچنین می‌دانیم $CS = 180 - \phi$.

مرحلهٔ بعدی بحث، فوق‌العاده مهم است.

فرض می‌کنم (کمان QR) = x. جیّانی قضیهٔ کروی منلائوس را بهصورت زیر بهکار می‌برد:

$$\frac{\sin MQ}{\sin QR} = \frac{\sin MS}{\sin SC} \times \frac{\sin CQ'}{\sin Q'R}$$

منلائوس منجمی یونانی بود که در حوالی سال ۷۰ میلادی [۵۷۰ قبل از هجرت] در رم می‌زیست و متن یونانی کتابش دربارهٔ هندسهٔ کروی گم شده ولی ترجمهٔ عربی آن در دست است. خود منلائوس بهجای تابع مثلثاتی سینوس، تابع دیگری، یعنی «وتر» را بهکار می‌برد که عربها سینوس [=جیب] را که منشأ هندی داشت جایگزین آن کردند. سینوسی که در سده‌های میانه بهکار می‌رفت به اندازهٔ یک ضریب ثابت با سینوس امروزی فرق داشت. چون در اینجا با نسبت بین سینوسها سروکار داریم، این ضریب ثابت را می‌توان نادیده گرفت.

پس خواهیم داشت

$$\frac{\sin(A+x)}{\sin x} = \frac{\sin a}{\sin \phi} \times \frac{\sin 90}{\sin \delta}$$

طرف راست این معادله مقدار معلوم c است. پس جیّانی باید x را از معادلهٔ زیر که در آن A و c معلوم‌اند بهدست آورد

$$\frac{\sin(A+x)}{\sin x} = c \qquad (1)$$

جیّانی در یکی از آثار قبلیش [۷] نشان داده بود که چگونه معادلهٔ (۱) را می‌توان بهمعادلهٔ زیر تحویل کرد

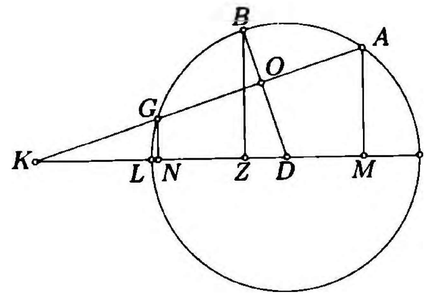
$$\tan\left(\frac{A}{2} + x\right) = \frac{c+1}{c-1} \times \tan\frac{A}{2} \qquad (2)$$

وی در همان اثر جدولی هم برای تابع تانژانت[1] به ازای هر درجه تا $89°$ تنظیم کرده بود[2]. با استفاده از این جدول x را بآسانی می‌توان یافت. در مسألهٔ فوق داریم x+ (کمان RV)= (کمان $Q'V$).

جیّانی معادلهٔ (۲) را از معادلهٔ (۱) با استدلال هندسی زیر بهدست آورد (شکل ۹، [۷، شکل ۴]). روی یک دایرهٔ مبنا کمان معلوم A را بهصورت کمان

۱. جیّانی برای تانژانت نام خاصی نداشت و آن را به عنوان نسبت سینوس به کسینوس ذکر می‌کرد.

۲. همچنین برای هر ربع درجه بین $89°$ و $89°45'$.



شکل۹

AG که در B نصف شده است، و کمان مجهول x را به‌صورت کمان GL نشان می‌دهیم. مرکز دایره را D می‌نامیم، خطهای DL و AG را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کنند و عمودهای GN، BZ و AM را بر DK فرود می‌آوریم. محل برخورد BD و AG را O می‌نامیم.

اکنون داریم $\tan(A/۲ + x) = BZ : ZD$. با توجه به تشابه مثلثها در شکل، می‌توان نوشت

$$BZ : ZD = KO : OD = (KO : OG).(OG : OD)$$

همچنین داریم

$$AK : KG = AM : GN = \sin(A + x) : \sin x = c$$

پس

$$KO : OG = (KG + KA) : AG = (c + ۱) : (c - ۱)$$

بالاخره داریم $OG : OD = \tan A/۲$.

در اینجا راه‌حل مسأله را برای یک حالت خاص شکل بررسی کرده‌ایم. این راه‌حل قابل تعمیم است: در برخی حالات به‌جای علامت مثبت در معادلهٔ (۱) علامت منفی خواهیم داشت. جیّانی این حالت را هم در [۷] بررسی کرده است.

معلوم نیست که آیا جیّانی هیچ‌گاه جدولهای نظرات را محاسبه کرد تا آنها را جایگزین جدولهای پیشینیان معروف خود خوارزمی و مجریطی بکند یا نه. اما می‌دانیم که جیّانی جدولهایی برای تسویهٔ بیوت در احکام نجوم بر اساس همین روش تدوین کرده است. احکامیان کرهٔ آسمان را به ۱۲ بیت (خانه) تقسیم می‌کردند که شبیه ۱۲ قاچ پرتقال بود و طبق نظر جیّانی این کار باید به‌همان روش استوایی که در نظرات به‌کار می‌رفت انجام می‌شد. کمانهایی از استوا که بین نصف‌النهار و افق واقع بود باید به سه قسمت ۳۰ درجه‌ای تقسیم می‌شد و از نقاط تقسیم Q' باید نیمدایره‌های $NQ'S$ الی آخر ترسیم می‌شد که مرزهای بیوت بودند. جیّانی جدولهایی برای طول سماوی کمانهای VQ به‌عنوان تابعی از طول سماوی نقطهٔ P روی افق شرقی تنظیم کرد، چنانکه احکامیان می‌توانستند از روش تسویهٔ بیوت او استفاده کنند.

روشن است که احکام نجوم مسائلی جدی پیش روی ریاضیدانان می‌گذاشت. البته لازم نبود که همهٔ احکامیان از محاسبات ریاضی سر درآورند، اما همیشه لازم بود کسانی با جنبه‌های تخصصی آن آشنا باشند. کاربردهای ریاضیات در احکام نجوم و هیئت بسیار پیشرفته‌تر ازکاربردهای پیش پاافتادهٔ آن در مساحی، امور دیوانی و بازرگانی بود.

هدفم از عرضهٔ این دونمونه (مؤتمن و جیّانی) ترسیم نمایی از کار ریاضیدانان اسپانیای اسلامی قرن یازدهم [پنجم] در هندسه و مثلثات بوده است. طی این دوره در ریاضیات هیچ انقلابی صورت نگرفت که با آنچه در دورهٔ باستان و در قرن هفدهم میلادی رخ داد قابل مقایسه باشد. اما با روشهای هندسی دورهٔ باستان و قلمرو شرقی اسلام به صورتی مستقل و خلاق برخورد شد. در این زمینه‌ها، ریاضیدانان اروپای غربی تا فرارسیدن عهد نوزایی از اسلاف خود در اسپانیای اسلامی فراتر نرفتند. بنابراین اسپانیای اسلامی در تاریخ ریاضیات اروپای سده‌های میانه موقعیت منحصر به فردی دارد.

مراجع

1. A. Djebbar, *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, M. Folkerts et al. (eds.), Vestigia Mathematica. Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard. Amsterdam 1993, pp. 79-91.

2. J. P. Hogendijk, *The geometrical parts of the* Istikmāl *of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century), an analytical table of contents*, Arch. Internat. Hist. Sci. **41** (1991), 207-281.

3. ———, *Applied mathematics in 11th century Islamic Spain: Ibn Muʿādh's computation of the astrological houses and rays*, to appear in Centaurus.

4. A. I. Sabra, *Ibn al-Haytham's lemmas for solving "Alhazen's problem"*, Arch. Hist. Exact Sci. **26** (1982), 299-324.

5. J. Samsó, Las Ciencias de los Antiguos en al-Andalus, Madrid, 1992.

6. J. P. Hogendijk, "Al-Mu'taman's simplified lemmas for solving 'Alhazen's problem' ", in Josep Casulleras, Julio Samsó (eds.), *From Baghdad to Barcelona*: Studies in the *Islamic Exact Sciences in Honour of Prof. Juan Vernet*, Barcelona: Universitat de Barcelona. 1996 (Anuari de Filologia XIX (1996) B-2), vol. 1, pp. 59-10.

7. M. Villuendas, La trigonometria europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Muʿāḏ, El Kitāb maŷhūlāt, Barcelona, 1979.

* * * * * *

• Jan P. Hogendijk, "Mathematics in medieval Islamic Spain", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994*, Birkhäuser Verlag, Switzerland (1995) 1568-1580.

* یان پیتر هوخندایک، بخش ریاضی دانشگاه اوترخت، هلند