دوئل کننده و هیولا•

یان استیوارت
ترجمهٔ علیرضا جمالی

در پایان جلسه‌ای در کالج مهندسی کوپر زهیل از حضار پذیرایی شد و بخشهای علوم درمعرض بازدید قرارگرفتند. بانوی جوانی در هنگام ورود به آزمایشگاه فیزیك با مشاهدهٔ تصویر مقلوب خود در آینهٔ محدب بزرگی، ساده لوحانه به‌دوست همراهش اظهارداشت، «آینه را واژگون آویزان کرده‌اند!»

کلمنت و. دورل

«شلیك از بیست وپنج قدمی!» در ۳۰ مه ۱۸۳۲ یك انقلابی‌جوان فرانسوی درحین‌دوئل برسر بانویی، از ناحیهٔ شکم با گلولهٔ تپانچه‌ای مورد هدف قرار گرفت و روز بعد براثر ورم صفاق در گذشت. او را در گودال عمومی‌گورستان مون پارناس دفن کردند. درست پیش از این دوئل به‌دوستانش ناپلئون لبون و و. دلونی نوشت: «من قربانی یك زن بدکارهٔ رسوا خواهم شد. چراغ زندگیم در یك نزاع نکبت بار خاموش می‌شود. آه! چرا باید برای چنین چیز بیهوده و حقیری مرد!» جزئیات این‌واقعه روشن نیست؛ در واقع تا همین اواخر آن بانو به «استفانی د.» مشهور بود تا اینکه کارلوس اینفانتوزی به تحقیق فاش ساخت که وی استفانی-فلیشی پوترین دومتل[1]، دختر بسیار محترم یك فیزیکدان بوده‌است.

بازیگر این نمایش احساساتی همان شب نامهٔ دیگری به‌اوگوست شوالیه‌نوشت: «من کشفیات تازه‌ای در آنا لیز کرده‌ام.» و نامه را با این جمله خاتمه داد که «از ژاکوبی یا گاوس علناً درخواست کن عقیدهٔ خود را دربارهٔ اهمیت این قضیه‌ها و نه در مورد صحت آنها بیان کنند. امیدوارم بعدها کسانی پیدا شوند که سودشان را دراین ببینند که رمز این مطالب آشفته را کشف کنند.» این «مطالب آشفته»، به گفتهٔ تونی روتمن، «سرآغاز خلق شاخه‌ای از ریاضیات بود که اینك موجبات درك عمیق‌حوزه‌های متنوعی‌از علوم مانند حساب، بلورشناسی، فیزیك ذرات، و مواضع قابل حصول درمکعب روبیك را فراهم آورده‌است.»

این‌شاخه از ریاضیات، «نظریهٔ گروهها» و خالق تیره‌بخت آن، اواریست گالوا بود.

1. Stéphanie-Felicie Poterin du Motel

قالب معادله چیست؟

گالوا در مسأله‌ای قدیمی‌کار می‌کرد. همان‌گونه که می‌دانیم، معادلات درجهٔ ۱، ۲، ۳، و ۴ را می‌توان با دستور دقیقی، یعنی‌با عبارتی جبری که متضمن چیزی پیچیده‌تر از ریشه‌های nام، یا رادیکالها، نباشد حل کرد. ولی‌معادلهٔ درجهٔ پنجم‌دربرابر همهٔ تلاشها به‌منظوریافتن چنین‌دستوری ایستادگی می‌کرد. درسالهای ۱۸۰۰، توجه ریاضیدانان از مسألهٔ پیدا کردن راه حل به‌اثبات اینکه راه حلی رادیکالی موجود نیست معطوف گشت. پائولو روفینی در این زمینه کوشش بی‌نتیجه‌ای در ۱۸۱۳ به‌عمل‌آورد، و سرانجام مسأله در ۱۸۲۴ به‌وسیلهٔ آبل حل شد. برهان آبل شامل تحلیل پیچیده‌ای از درجات معادلاتی کمکی بودکه امکان داشت درطول فرایند حل، با فرض اینکه چنین راه‌حلی موجوداست، پیش آیند. ولی گالوا جاه‌طلبتر بود. گرچه معادلهٔ کلی‌از درجهٔ ۵ حلپذیر نیست، معادلات خاص زیادی از درجات نا کمتر از ۵ موجودند که با استفاده از رادیکالها حل می‌شوند. گالوا درپی روشی برای هر معادلهٔ مفروض‌بود، خواه این‌معادله به‌وسیلهٔ رادیکالها حلپذیرباشد خواه نباشد. جواب وی شگفت‌آور و بکربود. همه‌چیز به‌تقارنهای معادله بستگی دارد.

تقارن چیست؟

هرمان وایل درسلسله درسهای مشهورش در زمینهٔ تقارن می‌گوید «تقارن مفهومی است‌که بشر درطی اعصارکوشش‌کرده تا به‌وسیلهٔ آن‌نظم، زیبایی، وکمال رادرك وخلق‌کند.» هنگامی‌که ریاضیدانان ازتقارن صحبت می‌کنند چیزخیلی خاصی‌را درنظردارند: شیوه‌ای برای تبدیل یك شیء‌که ساختمانش را حفظ کند.

به‌عنوان مثال، مربعی را درنظربگیرید، و محدودهٔ آن‌رارسم کنید. اینك هرگاه مربع را حرکت دهید، معمولا درمحدودهٔ خود قرارنمی‌گیرد. ولی‌درست هشت حرکت وجود داردکه تحت این حرکات مربع در جای خود قرار می‌گیرد. این حرکات عبارت‌اند از اینکه مربع را

(۱) به‌حال خود بگذارید.
(۲) °۹۰ (درخلاف حرکت عقربه‌های ساعت) دوران‌دهید.
(۳) °۱۸۰ دوران دهید.
(۴) °۲۷۰ دوران دهید.
(۵) حول یك محور عمودی بچرخانید (مانند دری‌که حول لولایی می‌چرخد).
(۶) حول یك محور افقی بچرخانید.
(۷) حول یك قطر بچرخانید.
(۸) حول قطر دیگر بچرخانید.

هریك ازاین‌اعمال یك تقارن مربع‌است. هرگاه دو تقارن به‌نوبت إعمال شوند، به‌وضوح، مربع بازهم درمحدودهٔ خود واقع‌می‌شود؛ بنابراین، نتیجه،تقارنی دیگر است. به عنوان مثـال، ابتدا «°۹۰ دوران دادن» و سپس«°۱۸۰ دوران دادن» همان اثری را داردکه «°۲۷۰ دوران دادن» دارد. در اینجا می گوییم مجموعـهٔ تقارنها خاصیت‌گروه را دارد، یعنی «حاصلضرب» هردو تقارن یك تقارن است. مجموعـهٔ تقارنها راگروه تقارن مربع می‌نامیم. این گروه خاص شامل هشت عمل تقارن‌است: دراینجـا می گوییم این‌گروه دارای مرتبهٔ هشت است.

اینك یك سطح نامتناهی را درنظر بگیریدکه به‌طرزمعمول با آجرهـای مربعی فرش شده باشد. این طرح آجرفرش، هر هشت تقارن مربع رادارد وبه‌علاوه دارای بینهایت تقارن انتقالی‌است. کل طرح را می‌توان ۱، ۲، ۳، . . . واحد به‌طور افقی یا عمودی جابه‌جا کرد یا آن را به‌طرف بالا یا پایین، چپ یا راست انتقال داد، همین‌طور می‌توان آن را درصفحـه دوران داد، یـا آن را چرخاند (به‌طوری‌که چرخش درصفحه انجام نشود).

هرشیء ریاضی، هرچند مجرد، می‌توانـد تقارنهایـی داشته باشد. اینك این‌تقارنها به‌عنوان‌تبدیلاتی‌از این‌شیء‌که «قالب» آن را، یعنی ساختمان اساسی‌آن را، حفـظ می‌کنند تعریف می‌شوند. تقارنها از نو یك‌گروه تشکیل می‌دهند؛ یعنی، در صورتی‌کـه دو تقارن به‌نوبت إعمال شوند نتیجه باز تقارن دیگری است. روش مطالعهٔ تقارن به‌عنوان مفهومی کلی، نگریستن به خاصیتهای جبری این فرایندِ ترکیبِ تبدیلات‌است.

قالب معادله

این‌مفاهیم‌امروز بسیار روشنتر ازعصر گالوا هستندولی‌برای سهولت بیان، از دیدگاه جدید درتشریح ایده‌های وی سود خواهیم‌جست. یك معادله چه قالبی دارد؟ شیئی ریاضی‌که دراینجا به‌کار می آید، مجموعهٔ‌جوابهای معادله‌است.(یك معادلهٔ درجهٔ nام هموارهٔدارای n ریشهٔ حقیقی یـا مختلط‌است.) تبدیلات دراینجا عبارت ازطرق مختلف مرتب‌کردن این جوابهـا یعنی، جایگشتهای آنهاست. و قالب ـ ساختمانی‌که باید حفظ شود ـ دستگاهی از روابط جبری است‌که بین آنها برقراراست. این مفهوم را می‌توان به‌آسانی با استفاده از معادله‌ای کـه جوابهای آن به‌سادگی به‌دست می‌آیند درك‌کرد، مثلا معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$x^4-5x^2+6=0.$$

ریشه‌های این‌معادله عبارت‌اند از $\sqrt{2}$، $-\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، و $-\sqrt{3}$.

این ریشه‌ها را α، β، γ، δ می‌نامیم. واضح است‌کـه α و β یك «زوج جور» را تشکیل می‌دهند، و γ و δ نیز چنین وضعی دارند. درواقع، راهی‌برای تمیزدادن α وβ، صرفاً با به‌کاربردن معادلاتی با ضرایب گویا، وجود ندارد. مثلا α درمعادلهٔ $\alpha^2-2=0$ صدق می‌کند، β نیز صدق می‌کند. و $\alpha+\beta=0$؛ از طرفی با تعویض نقش α و β، $\beta+\alpha=0$ به‌دست می‌آیدکه آن نیزصادق است. همین‌طور، γ و δ (صرفاً با معادلاتی بـا ضرایب گویا) از لحاظ جبری غیرقـابل تمیزانـد. از طرف دیگر به‌سادگـی مـی‌توان گفت کـه α و γ متمایـزنـد، زیـرا $\alpha^2-2=0$ صادق است درصورتی‌که $\gamma^2-2=0$ چنین نیست. منظور ما این نیست‌کـه بین $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ هیچ تفاوتی نیست: واضح است کـه این دو مختلف‌العلامه‌اند. امااین‌تمایزعلامات‌را نمی‌توان‌تنها با به‌کاربردن معادلات‌چندجمله‌ای با ضرایب گویا آشکارساخت. هرگاه فهرستی از این‌چهارجواب‌را بنویسیم،درست‌چهارطریق‌برای مرتب‌کردن آنها ، بـه طوری کـه همهٔ معادلات صادق در تـرتیب اولیه در ترتیب جدید صادق باقی‌بمانند، وجود دارد. اینها عبارت‌اند از:

$$\alpha\beta\gamma\delta \quad | \quad \alpha\beta\delta\gamma \quad | \quad \beta\alpha\gamma\delta \quad | \quad \beta\alpha\delta\gamma.$$

این فهرست از جایگشتها را گروه گالوای این معادله می‌گویند. و اینك، فقط با نگاهی به‌این گروه گالوا، می‌توان گفت که معادله به‌کمك رادیکالها حلپذیراست یا نه. این‌موضوع‌کاملا آشکاراست، چنین نیست؟ نه؟ بسیار خوب، اگرشما دراین زمینه مبتدی هستید، موضوع راتوضیح می‌دهیم. گرچه بیان دستورالعمل اندکی‌مشکل است، ولی مـا سعی خود را خواهیم‌کـرد: نکتـهٔ اصلی در درك موضوع این‌است‌کـه ضابطهٔ قابل‌محاسبهٔ معینی برحسب ساختمان جبری داخلی گروه‌گالوا وجود دارد.

فرض‌کنیم‌گروه، G باشد. ممکن‌است G درداخل‌خود دستگاه کوچکتری از جایگشتها مانند H داشته باشد کـه آن نیز دارای خاصیت‌گروه باشد. در صورتی‌که چنین باشد، H را یك زیرگروه می‌نامیم. به‌علاوه،شرط‌فنی‌دیگری‌درموردH، موسوم به‌نرمال‌بودن، درکار می‌آید: اجازه دهید این اصطلاح را چنین معنی کنیم که H به‌طرز زیبایی داخل G می‌نشیند. اینك گالوا ثابت می‌کندکه یك معادله فقط وقتی با رادیکالها دقیقاً حلپذیر است‌که:

(۱) گروه آن G شامل زیرگروه نرمالی مانند H از مرتبهٔ کوچکترباشد؛
(۲) حاصل‌تقسیم مرتبهٔ G برمرتبهٔ H اول باشد؛
(۳) H شامل زیرگروه نرمالی مانند K از مـرتبهٔ کوچکتر باشد؛
(۴) حاصل‌تقسیم مرتبهٔ H برمرتبهٔ K اول باشد؛
(۵) و به‌همین‌ترتیب، تا بهزیرگروهی‌برسیم‌که تنهاشامل یك عضو G باشد.

چنین‌گروهی را حلپذیر می‌خوانند. (مفهوم آن این است‌کـه یك ریشهٔ nام رامی‌توان از تعدادی ریشهٔ pام، با pهای اول مختلف، به‌دست آورد. به‌عنـوان مثـال، ریشهٔ ششم، ریشهٔ دوم ریشهٔ سوم است، زیرا $3\times2=6$؛ و۲ و۳ اول هستند. هرریشهٔ pام، متناظر با مرحله‌ای در زنجیر G، H، K، ... از زیر گروهها است.)

معادلهٔ درجهٔ پنجم

بدیهی است که نتیجهٔ گالوا را فقط وقتی می‌توان به‌کار برد که روش پیشرفته‌ای برای تحلیل گروهها، زیرگروهها، زیرگروههای نرمال، مرتبه‌ها، وغیره دردست داشته باشیم. چنین روشهایی، که تا اندازه‌ای از کار گالوا ملهم‌اند، هم‌اکنون موجود می‌باشند. یکی از نتایج جانبی آنها توضیح رضایت‌بخشی دربارهٔ ویژگی خاص معادلهٔ درجهٔ پنجم است.

معادلهٔ درجهٔ nام کلی دارای روابط خاصی بین ریشه‌هایش نیست، بنابراین گروه گالوای آن گروه همهٔ جایگشتهای n ریشهٔ آن است. این گروه، گروه بسیار مشخصی است و به‌دست آوردن اطلاعاتی دربارهٔ آن چندان دشوار نیست. مخصوصاً، می‌توان ثابت کرد که این گروه درحالات $n=2$، $n=3$، یا $n=4$ یک گروه حلپذیر است، بنابراین معادلاتی از این درجات حلپذیر هستند. در واقع، روشهای به‌کار رفته درحل آنها را می‌توان با استفاده از نظریهٔ گروهها تفسیر و سازماندهی کرد. اما، وقتی که $n=5$ گروه G متشکل از همهٔ جایگشتها حلپذیر نیست. G از مرتبهٔ ۱۲۰ است، و زیرگروه نرمالی مانند H از مرتبهٔ ۶۰ دارد. نسبت

$$\frac{120}{60}=2$$

عددی اول است؛ بنابراین، شروع کار بسیار خوب است. ولی، چنانکه گالوا ثابت کرد، یگانه زیرگروههای نرمال H از مرتبه‌های ۶۰ و ۱ اند. تنها امکان موجود برای K، گروه با مرتبهٔ ۱ است؛ ولی در این صورت نسبت مرتبه‌ها ۶۰ = (۱/۶۰) است، که اول نیست. این گروه حلپذیر نیست، و معادله نیز چنین است.

نبوغ را خود پاداش بس

گالوا مبادی این نظریه را درهفده‌سالگی کشف کرد و برخی ازنتایج خود را به آکادمی علوم پاریس ارائه داد. مقالهٔ او رد، و نسخهٔ دستنویسش گم شد. وی نتایج خودرا دوبار دیگر هم ارائه داد، ودر هردوبار مقاله مفقود شد. گالوا رژیم ستمگر بوربونها را مورد حمله قرار داد، وبه‌انتقاد ازجامعه‌ای پرداخت که نوابغ رامحکوم می‌کند و به میانمایگان میدان می‌دهد. ولی در واقع شاید خودش دراین مسأله مقصر بود: وی سعی نکرد افکار خودرا به‌روشنی تشریح کند، و بدعتی که با ابهام توأم باشد، مخصوصاً راجع به‌مجهولی تمام‌عیار، محکوم به‌نابودی است. به‌هر تقدیر، گالوا جذب جریانات انقلابی شد، واز اکول نرمال [= دارالمعلمین] اخراج، ودستگیر شد. سپس تبرئه و مجدداً دستگیر و به‌مدت شش‌ماه در سن‌پلاژی زندانی شد. به‌سبب شیوع وبا او را به‌بیمارستان منتقل کردند، و با قید التزام آزاد شد. پس از این آزادی بود که وی درگیر اولین و یگانه ماجرای عشقی خود با استفانی واقعاً افسونگر شد. اگر آثار او در اختیار لیوویل قرار نمی‌گرفت، شاید همراه زندگیش نابود می‌شد؛ زیرا هم او بود که پس ازمرگ گالوا به‌بررسی مقالات برجای مانده از او پرداخت و در چهارم ژوئن ۱۸۴۳ آکادمی را مخاطب قرار داد: «امیدوارم توجه آکادمی را به‌این موضوع جلب کنم که در بین مقالات اواریست گالوا جوابی، که عمقش با دقتش برابری می‌کند، برای مسألهٔ زیبای ذیل پیدا کرده‌ام: آیا حل... با رادیکالها ممکن است؟»

وفور گروهها

اثر گالوا یکی از آثاری بود که راه را برای نظریهٔ جدید گروهها گشود. مؤلفین متعددی، در رأس آنان کوشی و ژوزف‌ـ‌لویی لاگرانژ، در زمینهٔ گروههای جایگشتها کار کردند. کامی ژوردان بسیاری از این آثار را در رسالهٔ ۱۸۷۰ خود نظریهٔ جایگشتها و معادلات جبری، تنظیم و عرضه کرد. درهمین اثنا موجودات دیگری شبیه گروههای جایگشتی که مرکب ازجایگشتها نبودند ظاهر شدند. به‌عنوان مثال، در ۱۸۴۹ اوگوست براوه[1] تقارنهای فضای سه‌بعدی را برای طبقه‌بندی ساختمان بلورها به‌کاربرد و این کار، ژوردان را به‌مطالعهٔ گروههایی که اعضای آنها جایگشت نیستند، بلکه تبدیلات خطی‌اند، هدایت کرد.

یکی دیگر ازمنابع بزرگ الهام، نظریهٔ گروههای پیوستهٔ سوفوس لی بود. یک مربع تنها دارای هشت تقارن متمایز است، چهاردوران وچهارانعکاس، بنابراین گروه تقارنهای آن متناهی، و مرتبه‌اش ۸ است. ولی برخی از اشکال، مانند دایره و کره، دارای حوزه‌ای پیوسته از تقارنها هستند. می‌توان یک دایره را به‌طور پیوسته تحت هر زاویهٔ دلخواه، و نیز یک‌کره را حول هر محور دلخواه چرخاند. بنابراین گروه تقارنهای دایره یاکره شامل پیوستاری از اعضا است. یک مقیاس تقریبی پیچیدگی گروه بُعد آن است که نشان می‌دهد چه تعداد پارامتر برای مشخص کردن اعضای آن لازم است. گروه تقارن دایره یک‌بعدی است (یک زاویهٔ دوران را مشخص می‌کنیم). گروه تقارن کره سه‌بعدی است (یک محور دوران انتخاب می‌کنیم، سپس طول وعرض «قطب» این محور را به‌کار می‌بریم، به‌علاوهٔ زاویهٔ دوران). روشهایی از آنالیز، مانند مشتقگیری و انتگرالگیری، را می‌توان به چنین گروههایی اعمال کرد. لی نظریهٔ گسترده‌ای عرضه کرد که یکی از بخشهای اصلی ریاضیات جدید شده‌است: گروههای لی.

نظریهٔ توابع مختلط نیز نوع دیگری از گروه را، که اعضای آن عبارت از تبدیلات کسری خطی به‌صورت

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

از اعداد مختلط‌اند، به‌وجود آورد. این تبدیلات درنظریهٔ توابع بیضوی حائز اهمیت‌اند، و هم اینها کنجکاوی آبل و گالوا را برانگیختند. نظریهٔ اعداد نیز گنجینه‌ای از اشیاء «گروهی» را به‌دست داد: اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n با عمل جمع، اعداد صحیح ناصفر به‌پیمانهٔ عدد اولی مانند p با عمل‌ضرب، رده‌های صورتهای درجهٔ دوم گاوس...

برنامهٔ ارلانگن

عامل دیگری که باعث پیشرفت نظریهٔ گروهها شد، برنامهٔ فلیکس کلاین برای وحدت بخشیدن به‌هندسه بود. این برنامه را کلاین به‌سال ۱۸۷۲ در ارلانگن طی یک سخنرانی مطرح کرد. در آن هنگام، هندسه به‌چند شاخهٔ مرتبط ولی‌متمایز تقسیم شده بود: هندسهٔ اقلیدسی و هندسهٔ نااقلیدسی، هندسهٔ انعکاسی و همدیس، هندسهٔ

---
1. Bravais

تصویری و آفین، هندسهٔ دیفرانسیل و به‌تازگی، توپولوژی نوظهور. حتی هندسه‌هایی با تعدادی متناهی نقطه و خط موجود بودند. کلاین درجستجوی نوعی نظم بود، و آن را درمفهوم هندسه به‌عنوان ناورداهای گروهی از تبدیلات یافت.

به‌عنوان مثال، هندسهٔ اقلیدسی را درنظر بگیرید. مفهوم اساسی این هندسه، مثلثهای قابل انطباق است؛ و دو مثلث در صورتی قابل انطباق‌اند که دارای یك شکل و یك اندازه باشند و به‌عبارت دیگر، یکی از آنها را بتوان با یك حرکت صلب صفحه به‌دیگری تبدیل کرد. اینك کلاین می‌گوید: حرکات صلب گروهی را تشکیل می‌دهند. بنابراین گروهی از تبدیلات صفحه داریم؛ وخاصیتهای مورد مطالعه در هندسهٔ اقلیدسی، مانند طولها و زاویه‌ها، خاصیتهایی هستند که تحت کنش این گروه تغییر نمی‌کنند. همین‌طور، این گروه درهندسهٔ هذلولوی مشتمل بر حرکتهای هذلولوی صلب است، در هندسهٔ تصویری عبارت از تبدیلات تصویری، ودر توپولوژی، تبدیلات توپولوژیك است. تمایز بین هندسه‌ها برنظریهٔ گروهها مبتنی است. کلاین اضافه می‌کند: گاهی از اوقات می‌توان از گروه برای تبدیل هندسه‌ها به یکدیگر استفاده کرد. اگر دو هندسهٔ به‌ظاهر متمایز اساساً دارای گروهی یکسان ـ گرچه با ظاهری متفاوت ـ باشند، آن دو هندسه در واقع یکی هستند. وی مثالهای متعددی ذکر می‌کند. به عنوان مثال، هندسهٔ خط تصویری مختلط اساساً با صفحهٔ انعکاسی حقیقی یکی است، و این نیز با صفحهٔ هذلولوی حقیقی یکسان است.

یکباره، دیدگاه کلاین وضوح و نظم را درجایی که اغتشاش و بی‌ترتیبی بدانجا راه یافته بود، مستقر کرد. (یك استثنا او را از تصفیهٔ کامل بازداشت: هندسهٔ خمینه‌های ریمان.) بنابراین امکان مقایسهٔ یك هندسه باهندسهٔ دیگر، استفاده از نتایج یکی برای اثبات قضایای دیگری، وتعیین اینکه کدام یك قویتر یا ضعیفتر است فراهم آمد. شاید هندسهٔ کلاسیك دیگر در تحقیقات ریاضی حوزهٔ اصلی و مهمی به‌شمار نرود؛ دلیلش تاحد زیادی این است که درقرن نوزدهم دراین حوزه تفحصات بسیار موفقیت آمیزی صورت گرفت؛ با همهٔ این احوال، این هندسه در ریاضیات به‌صورت حوزهٔ اصلی ومهمی باقی‌مانده‌است و برنامهٔ ارلانگن کلاین هنوز دارای نفوذ شگرفی است. از نشانه‌های موفقیت آن اینکه تأثیرش همیشه به‌وضوح حس نمی‌شود: این دیدگاه رواج عام یافته‌است.

گروههای مجرد

وقتی ریاضیدانان با این مسأله روبرو می‌شوند که باید قضیه‌ای را پانزده‌بار در پانزده مبحث مختلف ثابت کنند، معمولا درصدد برمی‌آیند سروسامانی به مسأله بدهند. در این مورد، کار سروسامان دادن را آرتور کیلی با پیشنهاد یك مفهوم کلیتر شروع کرد: مجموعه‌ای از عملگرها که هرگاه به نوبت اعمال شوند، نتیجه هم دراین‌مجموعه باشد. وی این را گروه مجردنامید. به‌علاوه کیلی می‌خواست که عملگرهایش روی چیزی عمل کنند. قدم نهایی عبارت بود از تعریف اصل موضوعی گروه، که شاید جزئی از «فولکلور» عمومی ریاضیات بود ولی ادوارد هانتینگتن آنرا در ۱۹۰۲ به‌صراحت بیان کرد. رهیافت جدید، این است: یك گروه مجموعه‌ای مانند G است، که در آن یك قانون ترکیب، یا ضرب، تعریف می‌شود. اگر g و h به G متعلق باشند، این حاصلضرب با gh نشان داده می‌شود. (علامت gh به‌معنی ضرب معمولی g و h نیست.) این ضرب باید درچهار خاصیت زیر صدق کند:

(۱) G بسته است: اگر g و h در G باشند، آنگاه gh نیز چنین است.

(۲) یك عضو همانی مانند ۱ در G هست که به‌ازای هر g، $1g = g = g1$.

(۳) هر g در G دارای یك عکس مانند g^{-1} است، به‌طوری که $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g$.

(۴) قانون شرکتپذیری، $g(hk) = (gh)k$ برقرار است.

گروههای جایگشتی گالوا، گروههای تبدیلات براوه و ژوردان، گروههای پیوستهٔ لی، وگروههای مجرد کیلی، جملگی در این شرایط صدق می‌کنند. شرط (۱) «خاصیت گروهی» گالواست؛ دیگرشرطها خاصیتهای اساسی مفیدی را بیان می‌کنند که در مورد تبدیلات خودبه‌خود برقرارند، ولی‌ممکن‌است اشیاء مجردترچنین خاصیتهایی را نداشته باشند. به‌عنوان مثال، اگر G مجموعهٔ اعداد صحیح، و «ضرب» gh همان جمع $g+h$ باشد، آنگاه هر چهار خاصیت برقراراست. همین‌خاصیتها دربارهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح به‌پیمانهٔ n برقرارند. بداین ترتیب، تودهٔ مغشوشی ازنتایج خاص برای مصداقهای مختلف مفهوم گروه، به‌تعداد قلیلی قضیهٔ کلی‌ساده کاهش یافت و ریاضیات زبانی قوی برای توصیف وبهره‌گیری از مفاهیم تقارن به‌دست آورد.

اتمهای تقارن

تحلیل معادلهٔ درجهٔ پنجم به‌گروهی مانند H منجر می‌شودکه تنها زیرگروههای نرمال آن بدیهی (یعنی از مرتبهٔ ۱) یا همهٔ H (در اینجا از مرتبهٔ ۶۰) هستند. چنین‌گروهی را ساده گویند. اگر گروهی را به‌صورت یك مولکول درنظربگیریم، در این صورت گروههای ساده اتمهای آن هستند. اساس فهم همهٔ گروهها، فهم گروههای ساده‌است. متأسفانه «ساده» در اینجا به‌معنی «آسان» نیست.

اولین‌دستاورد بزرگی که دراین حوزه به‌دست آمد، طبقه‌بندی گروههای سادهٔ لی بود. لی چهار «خانواده» از گروههای سادهٔ لی را کشف کرد که برحسب تبدیلات خطی فضای n بعدی تعریف می‌شوند. این کار به‌توسط ویلهلم کیلینگ درسال ۱۸۸۸ تکمیل و به‌توسط إلی کارتان درسال ۱۸۹۴ اصلاح شد. نتایج حاصل شایستهٔ ذکرند زیرا گروههای سادهٔ لی درسراسر ریاضیات ظاهر می‌شوند. نخست، چهارخانواده‌ای هستند که به‌توسط لی کشف شدند و نظریهٔ واحد، زیبا وقانع‌کننده‌ای دربارهٔ آنها وجود دارد. علاوه برآنها، پنج گروه استثنایی موجودند. بعدهای آنها ۱۴، ۵۲، ۷۸، ۱۳۳، و ۲۴۸ است، و چنانکه از این اعداد برمی‌آید، با الگوی واضحی مطابقت نمی‌کنند. وجود اینها ناشی‌ازیك «مشیت جبارانهٔ الهی» توصیف شده‌است، معهذا اینها به‌انواع «حوادث» عجیب و زیبا در ریاضیات مربوط می‌شوند و عدم وجودشان حلاوت ریاضیات را کمتر می‌کرد. به‌نظر می‌رسد علائم مرئی یك الگوی عمیقتر باشند که می‌توان آن را حس کرد ولی هنوز نمی‌توان به‌طور

کامل آن را درك کرد. درحال حاضر گروههای سادهٔ لی درفیزیك ریاضی متداول‌اند، و گروههـای استثنایی دارای پیامدهای مهمی برای ساختمانهای ممکن‌فضا‌ـزمان‌اند. شاید وجود اینها از «مشیتی الهی» ناشی شده باشد، ولی مشیتی که «جبارانه» نیست.

برهان ده‌هزارصفحه‌ای

معلوم شدکه مسألهٔ مقدماتیتر طبقه‌بندی گروههای متناهی ساده چندان هم رام‌شدنی نیست. ساختمان تحلیلی اضافی گروههای لی، گرچه بحث دربارهٔ این گروههـا را بدون توسل به‌وسایل فنی دشوارتر می‌کرد، ابزارهـای ریاضی زیادی را برای اثبات قضایـا فراهم ساخت. اطلاعات راجـع به‌گروههـای ساده درطی دهـهٔ ۱۹۰۰ به‌کندی گرد آمد، و بعد از آن تا ۱۹۵۷، کـه سدها شکسته شد، اتفاق چندانی نیفتاد.

ساده‌ترین گروههای ساده، گروههای «دوری»اندکه از اعداد صحیح به‌پیمانهٔ یك عدد اول، با عمل جمع، تشکیل می‌شوند. این گروهها نه‌تنها فاقد زیرگروههـای نرمال‌اند، بلکـه اصلا دارای زیرگروه نیستند. گروههای سادهٔ بعدی گروههای متناوب‌اند. اولین گروه از این دسته، از مرتبهٔ ۶۰ است و گروهی‌است که گالوا آن را در تحقیقاتش راجع به‌معادلـهٔ درجهٔ پنجم کشف کرد. بعد از اینها، متناظرهای متناهی چهار خانوادهٔ کلاسیك گـروههای سادهٔ لی‌اند کـه از تعویض اعداد مختلط با یك هیأت متناهی بـه‌دست می‌آیند. برخی از این گروهها را گالوا و ژوردان مـی‌شناختند. علاوه براینها، پنج گروه‌عجیب وجود دارد، که در ۱۸۶۱ و ۱۸۷۳ به توسط امیل‌ـلئونار ماتیو کشف شدند، و به‌چند «هندسهٔ متناهی» استثنایی مربوط‌اند. چگونگی وضع درآغازقرن، چنین بود.

صرفنظر از کار لئونارد دیکسن که موفق به یافتن متناظرهای گروههای‌لی استثنایی‌ازبعدهای ۱۴ و ۷۸ روی هیأتهای متناهی‌شد، برای مدت مدیدی پیشرفت خیلی اندکـی به‌دست آمد. سه‌گروه لی استثنایی دیگر به‌وضوح بحث وبررسی مشابهی را می‌طلبیـد ولی‌کسی راه درست اِعمال این ایـده را نتوانست پیدا کند. در ۱۹۵۷ کلود شواله روش‌واحدی را ابداع کردکه با آن، به‌ازای هرگروه لی ساده و هرهیأت متناهی، یك‌گروه سادهٔ متناهی تولید می‌شد. این گروههـا به‌گروههای ساده از نوع لی موسوم گشتند. روش دیگری، کـه منجر به‌تولید گروههای «تابدار» شد، به‌توسط روبرت استاینبرگ، میشیو سوزوکی، و ریمك ری[1] کشف گردید. ناگهان طلایهٔ نظم‌درمیانهٔ آشوب پدیدار شد. گروههای سادهٔ کشف شده عبارت بودنـد از گـروههای دوری، گـروههای متناوب، گروههای ازنوع لی وپنج گروه «متفرق»، یعنی آن گروههایی که به‌توسط ماتیوکشف شده بودند. این‌وضع یادآور فهرست جبرهای ساده لی است: تعداد زیادی خانوادهٔ درست و حسابـی و در بین آنها تعداد کمی افراد به‌دردنخور. آیا این الگو (یا فقدان آن) تکرار خواهد شد؟

قدم مهم را برای حل‌نهایی مسأله والترفایت وجان تامسن در ۱۹۶۳ برداشتند. اینان حدسی را که در ۱۹۰۶ به توسط ویلیام برنساید مطرح‌شده‌بود ثابت‌کردند، وآن‌حدس‌حاکی‌ازاین بودکه هرگروه سادهٔ‌متناهی (غیرازگروه دوری) دارای مرتبهٔ زوج است. برهان آنها مشتمل بر ۲۵۰ صفحه است و یك شمارهٔ‌کامل یك‌مجله را دربر می‌گیرد؛ و الگویی بـرای کار در زمینهٔ گروههای سادهٔ متناهی(هم ازلحاظ شیوه وهم ازلحاظ اندازه)است. این‌مقاله‌جبههٔ کاملا جدیـدی را گشود، زیـرا هـرگروه از مرتبهٔ زوج دارای عضوی مانند g است که $g^2 = 1$، و ریچـارد براوئر روشی برای استفاده از این اعضای خاص ابداع کرد. زونیمیر یانکو[1] در ۱۹۶۵ به‌کمك این روش گروه سـادهٔ متفرق جدیـدی کشف کـرد. سایر گروههای سادهٔ متفرق همراه نامهایی چون دونالد هیگمن، چارلز سیمز، ج. مك لافین[2]، م. سوزوکی، جان کانوی، دیترهلـد، برند فیشر، ر. لینز[3]، م. اونان و اروناس رودوالیس[4] به‌منصهٔ ظهـور رسیدند. برای مدت کوتاهی عده‌ای به‌این موضوع پرداختندزیرا عقیده این بودکه، برطبق قراین، این گروهها موجودند، ولی کسی عملا قادر به‌ساختن آنهـا نشده بود. تعیین تکلیف مسألـهٔ وجود، به‌محاسبات طولانی‌کامپیوتری نیازداشت. دشوارترین مورد، موردِ گروه هیولا (مانستر)، یا بزرگترین گروه متفرق بود که تجزیهٔ مرتبهٔ آن به‌عوامل اول عبارت‌است از

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

تردیدهایی دربین بودکه حتی‌کامپیوتربزرگی بتواند ازعهدهٔ چنین غولی برآید. در ۱۹۸۲ رابرت گریس، درمقابل حیرت همگان، هیولا را با دستهای خالی از پا درآوردـکاری به‌عظمت‌کار سنت جورج. وی این گـروه را به‌صورت یك گروه دورانی در فضای ۱۹۶۸۸۳ بعدی (کمترین بعد ممکن) ساخت.

با اتمام موفقیت‌آمیز برنامه‌ای تحقیقی‌کـه در دهـهٔ ۱۹۷۰ به‌توسط دانیل گورنستاین‌پایه‌ریزی شده بود، اینك معلوم‌شده‌است کـه درست بیست و شش گروه سادهٔ متفرق موجود است. با این گروههـا و خانواده‌های‌گروههای معلوم، فهرست گروههای سادهٔ متناهی‌کامل می‌شود. برهان کامل این موضوع بـه ۱۰۰۰۰ صفحهٔ چاپ شده بالغ می‌شود، و صدها ریاضیدان درآن سهیم بوده‌اند. این دستاورد، پیروزی عظیمی‌است.

با حل این‌مسألهٔ‌دیرپا وفوق‌العاده مهم، متخصصین‌نظریهٔ‌گروهها پیشتر رفتند. سؤالی‌که هنوزجواب‌کاملی به‌آن داده نشده‌این‌است: «کدام گروهها می‌توانند گروههای گالوا باشند؟» بهترین‌حدس‌این است‌که «همهٔ آنها»، ولی‌کسی‌تاکنون موفق به‌اثبات‌آن‌نشده‌است. شافاروویچ به‌اثبات این حکم نایل آمدکـه همهٔ گروههای حلپذیر گروههای گالوا هستند، و از این‌رو توجه متخصصان به‌گروههای ساده معطوف شده‌است. اخیـراً تامسن ثابت‌کرده‌است‌کـه گروه هیولا یك‌گروه‌گالواست.

تقارن اتمها

یکی از موارد استعمال نظریهٔ‌گروهها درتقارن بلوری‌است. اتمها درهربلور به‌صورت یك ساختمان تکراری منظم، یا شبکه، آرایش

---

1. Rimhak Ree

1. Zvonimir Janko
2. MacLaughlin
3. Lyons
4. Rudvalis

می‌یابند که دارای تقارن فراوانی است. از جملهٔ این تقارنها تقارنهای نقطه‌ای، هستند، یعنی تقارن آرایش اتمها حول مکانی مفروض در شبکــه، و تقارنهای انتقالی، یعنی تکرار ساختمان کل شبکــه در فاصله‌های ثابت درجهتهای خاص. یك مثال دوبعدی از این شبکه، آرایه‌ای نامتناهی از آجرهای مربعی است. در واقع، معلوم شده است که درست هفده نوع گروه تقارن بلورشناختی درصفحه وجود دارد — یا، به‌زبان روشنتر، طرح کاغذ دیواری هفده نوع اساسی دارد. در فضای سه‌بعدی درست سی‌ودو گروه نقطه‌ای داریم که به‌انضمام انتقالهــا ۲۳۰ نوع متمایــز تقارن بلوری حاصل می‌شود. ایــن طبقه‌بندی درفیزیك حالت جامــد اهمیت اساسی دارد. در فضای چهاربعدی ۴۷۸۳ نوع بلور وجود دارد؛ نتایج درمورد بعدهای بالاتر بسیار ناقص است.

فراسوی گروهها

طبقه‌بندی بلورها نشان می‌دهد که هیچ شبکهٔ بلوری نمی‌تواند دارای تقارن مرتبهٔ پنج (مانند یك پنج‌ضلعی) باشد و تنها می‌تواند تقارنهای مرتبهٔ ۲، ۳، ۴، و ۶ داشته باشد. ولی اخیراً فیزیکدانان حالتی از مادهٔ جامد، موسوم به‌شبه‌بلور کشف کرده‌اند که در آن تقارن مرتبهٔ ۵ اتفاق می‌افتد. از این نتایج برمی‌آید کــه نظریهٔ گروهها توصیف نهایی تقارن درطبیعت نیست. شبه‌بلور، ساختمان شبکــه‌ای عادی یك بلوررا ندارد. یعنی، هر گاه آن‌را از پهلو بچرخانید درجزئیات متفاوت به‌نظرمی‌رسد. با وجود این نوعی نظم گسترده در ساختمان آن هست: تعداد کمی جهت ممکن وجود دارد که پیوند بین اتمها می‌تواند در آن جهات باشد، واینها درهمه جای مادهٔ جامد یکسان هستند. این طرحها را راجرپنروز به‌عنوان یك تفریح ریاضی کشف کرد. پنروز دو نوع کاشی به شکل نیزه و بادبادك کشف کرد کــه می‌توانند بی‌هیچ‌تناوبی صفحه را بپوشانند. آلن مکای انواع سه‌بعدی این کاشیها را یافت. این ایده‌هــا درسال ۱۹۸۴ به‌توسط د. لوین[1] و پ. ج. اشتینهارت بر پایه‌های محکم ریاضی استوار گشتند؛ و شبه‌بلور پیش‌بینی شده در طبیعت را دانیل شکتمان[2] و دیگران در ترکیبی از آلومینیوم و منیزیم مشاهده کردند.

این کشف بدین‌معنی است کــه ابزار عادی بلورشناسی، یعنی نظریهٔ گروهها، برای بررسی همهٔ پدیده‌های «متقارن» کافی نیست. نظریهٔ گروهها به‌موفقیتهای چشمگیری نایل آمده است، ولی این حرف آخر نیست. ریاضیات باید با زمان پیش رود و نمی‌تواند برای همیشه به‌دستاوردهای گذشته‌اش دل خوش کند. مفهوم تقارن ممکن‌است نیاز به‌بسط داشته‌باشد؛ سایر تقارنهای «ممنوع» ممکن است در طبیعت ظــاهر شونــد. ریــاضیدانان و فیزیکدانان بــا مبارزطلبیهای تــازه‌ای رو به‌رو شده‌اند. جان مادوکس می‌گویــد «نتیجه هرچه بــاشد، متخصصین بلورشناسی باید قدری ریاضیات نامأنوس را فراگیرند.» همین‌طور ریاضیدانان.

****

● فصلی با عنوان «The duellist and the monster» از کتاب زیر

Ian Stewart, *The Problems of Mathematics*, Oxford University Press (1987).

---

1. Levine 2. Schechtman