صدق ریاضی*

پال بناسراف
ترجمهٔ ضیاء موحد

اگرچه عنوان این کنفرانس «صدق ریاضی» است، به مباحث وسیع‌تر دیگری هم خواهم پرداخت، مباحثی که صدق ریاضی مفهوم مرکزی آنهاست و خود مبتنی بر این هستند که چگونه می‌توان صدق را در ریاضیات به درستی توضیح داد. مهم‌ترین این مباحث مبحث معرفت ریاضی است. حرف من این است که دو نوع علاقهٔ کاملاً مختلف وجود دارد که هر کدام جداگانه انگیزهٔ تعبیرهایی از ماهیت صدق ریاضی شده است: (۱) علاقه به داشتن یک نظریهٔ دلالت‌شناسی همگن که در آن، دلالت‌شناسی قضایای ریاضی هم‌سویِ دلالت‌شناسی گزاره‌های دیگر زبان باشد[1] و (۲) علاقه به اینکه این تعبیر از صدق ریاضی با معرفت‌شناسی معقولی پیوند خورده باشد. فرضیهٔ کلّی من این است که کم یا بیش همهٔ تعبیرهایی را که از مفهوم صدق منطقی می‌کنند می‌توان در خدمت یکی از این دو علاقه به قیمت صرف‌نظرکردن از دیگری دانست. از آن جایی که این باور دیگر را هم دارم که هر تعبیر کافی و وافی باید هر دو علاقه را برآورد، به این نتیجه رسیده‌ام که هیچ ترکیبی از دلالت‌شناسی و معرفت‌شناسی نیست که مدعی تعبیری از صدق و معرفت هم در داخل هم در خارج ریاضیات باشد و مرا عمیقاً ناراضی نکند. زیرا، چنانکه اشاره خواهم کرد، تعبیرهایی از صدق که مقولهٔ ریاضی و غیرریاضی را به روشهای مشابهی بررسی می‌کند به قیمت نامفهوم گذاشتن این مسأله تمام می‌شود که چگونه اصلاً می‌توانیم معرفت ریاضی داشته باشیم؛ از سوی دیگر، تعبیرهایی که برای قضایای ریاضی شرایط صدقی تعیین می‌کنند که تحقق آنها را می‌توانیم به‌وضوح بدانیم، این کار را به قیمت ناتوانی در ربط دادن این شرایط صدق با هر نوع تحلیلی از جمله‌ها می‌کنند، هر نوع تحلیلی که نشان دهد چگونه شرایط تعیین شده شرایط صدق آن جمله‌هاست. آنچه را گفتم، اگر بخواهم منظور خود را روشن کنم، باید تا حدی به‌تفصیل بیان کنم و امیدوار نیستم که در این متن محدود بتوانم این کار را انجام دهم. اما تلاش خواهم کرد که مطلب را به اندازه‌ای روشن کنم که خود بتوانید داوری کنید که آیا احتمالاً در این ادعا چیزی هست یا نه.

۱. من اینجا به تسامح این افسانه را باور می‌کنم که برای «گزاره‌های دیگر زبان» دلالت‌شناسی داریم، یا به عبارت دقیق‌تر، به تسامح باور می‌کنم که طرفداران دیدگاههایی که متکی به این علاقه‌اند، اغلب چنین فکر می‌کنند که، دست‌کم برای بخشهایی از زبان که اهمیت فلسفی دارد، این دلالت‌شناسی را دارند.

من این نکته را بدیهی فرض می‌کنم که هر تعبیر فلسفی رضایت‌بخشی از صدق، ارجاع[1]، معنی، و معرفت باید همهٔ این موارد را در بربگیرد و برای همهٔ گزاره‌هایی که این مفاهیم در مورد آنها اعمال می‌شود، کارا باشد[2] تعبیری از معرفت که برای گزاره‌های تجربی معینی در مورد اشیای فیزیکی با ابعاد متوسط کارا به‌نظر رسد اما در مورد معرفت نظری‌تر کارایی نداشته باشد رضایت‌بخش نیست ــ نه تنها به این دلیل که تمامیت ندارد بلکه به این دلیل که چه‌بسا نادرست هم باشد، حتی به عنوان تعبیرِ چیزهایی که به‌نظر می‌رسد در مورد آنها کفایت کامل دارد. اگر جز این فکر کنیم، گذشته از پیامدهای دیگر، از وابستگیهای متقابل معرفت خود در زمینه‌های مختلف غفلت کرده‌ایم. در مورد تعبیرهای صدق و ارجاع نیز وضع به همین منوال است. نظریهٔ صدق برای زبانی که با آن حرف می‌زنیم، استدلال می‌کنیم، نظریه و ریاضیات می‌سازیم، باید به همان نحو برای جمله‌های مشابه شرایط صدق مشابه به دست دهد. شرایط صدقی که به دو جملهٔ حاوی سور نسبت می‌دهیم باید به نحو مشابه نقش سورها را نشان دهد. هرگونه انحراف از چنین نظریهٔ همگنی باید انگیزهٔ بسیار نیرومندی داشته باشد تا ارزش بررسی پیدا کند. برای مثال، چنین انحرافی می‌تواند در نظریه‌ای ظاهر شود که از نقش سورها در استدلال ریاضی تعبیری به دست دهد متفاوت از نقش آنها در استدلالهای عادی روزانه در مورد مداد، فیل و معاون رئیس جمهور.

1. reference

۲. درواقع در این مقاله حرفی برای گفتن در باب معنی ندارم و عقیده‌ام این است که این مفهوم به حق بدنام است اما من به این دلیل آن را طرد نمی‌کنم. بررسیهای اخیر و چشمگیرترین آنها، بررسی کریپکی، دلالت بر این دارد که آنچه زمان درازی در باب معنی، یعنی "sense" به اصطلاح فرگه، گفته‌اند ارتباطش با صدق خیلی کمتر از آن است که فرگه و اخلاف بلافصل او می‌پنداشتند. آنچه نزدیکترین پیوند را با صدق دارد، ارجاع است و به همین دلیل من توجه خود را محدود به ارجاع خواهم کرد. اگر این را مسلم فرض کنیم که ارجاع می‌تواند تغییر کند بدون آنکه تغییر متناظری در معنی صورت گیرد، و صدق مربوط به ارجاع است آنگاه بحث از معنی تا حد زیادی بیرون از مجموعهٔ مسائلی خواهد بود که در این مقاله به آن می‌پردازیم. این اشاره‌ها را نباید به جای استدلال گرفت؛ تنها توضیحی بیش نیستند.

داوید هیلبرت در مقالهٔ «درباب بینهایت»[1] بر چنین تعبیری تأکید می‌کند. این تعبیر را به اختصار در پایین آورده‌ام. پایینتر از آن دربارهٔ شرایطی که انتظار دارم یک نظریهٔ کلی رضایت‌بخش صدق برای زبان داشته باشد، بیشتر صحبت خواهم کرد و همچنین دربارهٔ اینکه چگونه چنین تعبیری باید با آنچه تعبیر معقولی از معرفت می‌دانم پیوند یابد. در اینجا کافی است بگویم که اگرچه اغلبْ مناسب آن است که بحث خود را با زبان نظریه‌های صدق ریاضی عرضه کنم، باید همیشه به خاطر داشت که آنچه واقعاً محل بحث است دیدگاه جامع فلسفی ماست. در این مقاله استدلال خواهم کرد که این دیدگاه *به‌عنوان دیدگاهی جامع* رضایت‌بخش نیست ــ نه به این دلیل که از قرار معلوم تعبیر رضایت‌بخشی از صدق ریاضی نداریم یا ظاهراً تعبیر رضایت‌بخشی از معرفت ریاضی نداریم ــ بلکه بیشتر به این دلیل که تعبیری نداریم که این دو را به نحو رضایت‌بخشی با هم جمع کند. امید من این است که در نهایت فراهم آوردن چنین تعبیری ممکن باشد و امید بیشتر آنکه این مقاله با نمایانتر کردن موانعی که در این راه است به پیدایش چنین تعبیری کمک کند.

I. دو نوع تعبیر

به دو جملهٔ زیر توجه کنید:

(۱) دست‌کم سه شهر بزرگ قدیمیتر از نیویورک وجود دارد.

(۲) دست‌کم سه عدد تام بزرگتر از ۱۷ وجود دارد.

آیا این دو جمله شکل دستوری‌ـمنطقی یکسانی دارند؟ به بیان دقیقتر، آیا هر دو شکل زیر را دارند:

(۳) دست‌کم سه FG وجود دارد که نسبت R با a دارند*؟

در اینجا «دست‌کم سه ... وجود دارد» سور عددی است که می‌توان آن را به روش معمول منطقی به سورهای وجودی، متغیرها و این همانی تحلیل کرد**؛ «F» و «G» با دو محمول یک موضعی جایگزین می‌شوند، R با محمول دو موضعی، و a با نام عضوی از دامنهٔ تعبیر سورها. شرایط صدق (۱) و (۲) چیست؟ آیا تا حدودی متناظر با هم‌اند؟ در اینجا ابهام «بزرگ» و «قدیمیتر از» و ویژگیهای صفتهای متواطی و مشکک را در زبان که به موجب آن «شهر بزرگ» نه به معنای «بزرگ» و «شهر» بلکه بیشتر (اگرچه نه دقیقاً) به معنای بزرگ، در نسبت *با* شهر است در نظر نمی‌گیریم. از این پیچیدگیها که بگذریم آشکارا چنین به‌نظر می‌رسد که (۳) به دقت صورت

۱. ترجمه و تجدید چاپ در

Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.). *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press, 1983), 183-201.

* «F» و «G» در (۱) دو محمول «شهر» و «بزرگ» و در (۲)، «عدد» و «کامل» و «R» در (۱) نسبت «قدیمیتر» و در (۲) نسبت «بزرگتر» و «a» در (۱) «نیویورک» و در (۲) «۱۷» در ترجمه به زبان صوری منطق است. ـم.

** تحلیل (۳) به صورت

$(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Fx\&Fy\&Fz\&Gx\&Gy\&Gz\&x \neq y\&y \neq z\&x \neq z\&Rxa\&Rya\&Rza)$

است. ـم.

منطقی (۱) را نشان می‌دهد و بنابراین (۱) صادق است اگر و تنها اگر مداول «a» («نیویورک») نسبت نشان داده شده با «R» («x قدیمیتر است از y») را با دست‌کم سه عضو (از دامنهٔ تعبیر سورها) که محمولهای جانشین «F» و «G» («بزرگ» و «شهر») را صدق‌پذیر کنند داشته باشد. به‌نظر من این آن چیزی است که یک شرط صدق مناسب باید به ما بگوید و فکر می‌کنم این حرف درستی باشد. بنابراین اگر (۱) صادق است بدین دلیل است که شهرهای معلومی در نسبت معلومی با یکدیگر قرار دارند.

اما دربارهٔ (۲) چه باید گفت، آیا می‌توان اینجا نیز (۳) را صورت منطقی (۲) و نشان‌دهندهٔ شرایط صدق *آن* دانست؟ این پرسش، پرسش مهملی به‌نظر می‌رسد که به‌وضوح پاسخ آن این است که «البته». اما در تاریخ این موضوع (فلسفهٔ ریاضیات) پاسخهای فراوان دیگری وجود دارد. بعضیها (مثل خود من در گذشته و حال[1]) که مایل نیستند، به علت پیامدهای آن، تعبیر دلالت‌شناختی «استاندارد» را با دیدگاه افلاطونی در باب ماهیت اعداد ترکیب کنند از اسم دانستن ارقام پرهیز کرده‌اند و در نتیجه شکل (۳) را شکل منطقی (۲) نمی‌دانند. داوید هیلبرت، (نگاه کنید به پانوشت ۱ در ستون سمت راست) راهی متفاوت اما به همین اندازه مخالف، در پیدا کردن تعبیری رضایت‌بخش از کاربرد مفهوم بینهایت در ریاضی، برگزیده است. به یک تعبیر، هیلبرت مجموعه‌ای از احکام و روشها (احکام و روشهای ریاضیات «شهودی») را به عنوان مجموعه‌ای که نیازی به توجیه بیشتر ندارند، برمی‌گزیند. فرض کنید که اینها همه به معنایی که دقیقاً مشخص نشده است «متناهیانه تحقیق‌پذیر» باشند. از نظر هیلبرت احکامی از حساب که این خاصیت را ندارند ــ نوع احکام معینی که شامل سورها هستند ــ ابزارهایی هستند برای رفتن از احکام «حقیقی» یا «متناهیانه تحقیق‌پذیر» به احکام «حقیقی» به همان معنایی که ابزارگرایان در علوم طبیعی نظریه‌ها را راهی می‌دانند برای رفتن از جمله‌های مشاهده‌ای به جمله‌های نظری. هیلبرت این احکام «نظری» ریاضی را «عناصر ایده‌آلی» می‌نامید، و معرفی آنها را به معرفی نقاط «واقع در بینهایت» در هندسهٔ تصویری تشبیه می‌کرد: این عناصر را برای ساده‌تر کردن و زیباتر و آراسته‌تر کردن نظریه معرفی می‌کنیم، نظریه دربارهٔ اشیایی که به آنها توجه واقعی داریم. اگر معرفی آنها به تناقضی نینجامد و آن فایده‌های دیگر را هم داشته باشند کار ما موجه است: این است دلیل جستجوی برهان سازگاری برای نظام کامل حساب مرتبهٔ اول.

اگر این تقریر مجمل از دیدگاه هیلبرت، درست باشد، نشان می‌دهد که هیلبرت همهٔ احکام مسور را از نظر دلالت‌شناسی هم‌ارز یکدیگر نمی‌دانست. برای حساب، به گونه‌ای که هیلبرت آن را می‌دید، یافتن دلالت‌شناسی بسیار دشوار است، اما چه دشوار باشد چه نباشد، تعبیر این دلالت‌شناسی از سور در (۲) محققاً موافق تعبیر آن از سور در (۱) نخواهد بود. نظر هیلبرت که به اجمال آوردیم نفی کامل این است که (۲) براساس شکل منطقی (۳) ساخته شده باشد.

بنابر تعبیر دیگری از این گونه، شرایط صدق جمله‌های حساب بر مبنای استنتاج‌پذیری صوری آنها از مجموعهٔ معینی از اصول داده می‌شود. هنگامی که بخواهیم این دیدگاهها را در اسناد صدق و کذب به جمله‌های بستهٔ[2] حساب به‌کار بریم، قضایای ناتمامیت آنها را از بُن ویران می‌کند. این دیدگاهها را دست‌کم

۱. نگاه کنید به این مقالهٔ من:

"What Numbers Could Not Be", *Philosophical Review*, 74/1 (Jan. 1965): 47-73.

2. closed

تا حد سازگاری درونی نظام و با تسامحی در روش استنتاج (مثلاً با کاربرد قاعدهٔ ω در استنتاجهای مجاز) یا با چشم‌پوشی از تمامیت، می‌توان حفظ کرد. من چنین دیدگاههایی را، به دلیل اینکه اصطلاح بهتری ندارم و به دلیل اینکه تقریباً همیشه با جنبه‌های نحوشناختی[1] (ترکیبیاتی) جمله‌ها پیوند خورده‌اند، دیدگاههای «ترکیبیاتی» صدق ریاضی می‌نامم. اندیشهٔ اصلی دیدگاههای ترکیبیاتی این است که اسناد صدق و کذب به جمله‌های حساب بر مبنای مشخصات نحوشناختی (معمولاً برهانی) آنهاست. اغلب، صدق چنین تعریف می‌شود: استنتاج پذیری (صوری) از اصول معین (اغلب ادعای فروتنانه‌تری می‌کنند ــ ادعای صدق در S، که S نظام خاص مورد نظر است). در هر صورت، در چنین موردهایی، صدق، آشکارا برحسب ارجاع، دلالت یا صدق‌پذیری[2] تعریف نمی‌شود و از محمول «صدق» تعریفی نحوشناختی به دست می‌دهند.

همچنین بعضی دیدگاههایِ مربوط به صدق در حساب که بر مبنای آنها ادعا کرده‌اند اصول پئانو در باب مفهوم عدد تحلیلی است، به تعبیر من، «ترکیبیاتی» است. تعبیرهای مبتنی بر قرارداد[3] هم، چنین هستند زیرا آنچه آنها را قراردادی می‌سازد تقابل میان آنها و تقریر «رئالیستی» است که (۲) را بر مبنای (۳) همانند (۱) می‌داند.

و بالاخره به تمایزی دیگر می‌رسیم. به صرف اینکه دیدگاهی گزاره‌های ریاضی را به گزاره‌هایی دربارهٔ مسائل ترکیبیاتی، چه به نحو خودارجاع، چه جز آن، تعبیر کند، ترکیبیاتی شمرده نمی‌شود. زیرا چنین دیدگاهی ممکن است گزاره‌های ریاضی را، به روش «استاندارد»، برحسب نامها و سورهایی که دارند و برحسب صفتهایی که به عضوهای دامنهٔ تعبیرشان نسبت می‌دهند، تحلیل کند ــ یعنی مفهوم زیربنایی صدق همان مفهوم تارسکی باشد. تفاوت در این است که اگرچه طرفداران آن در تحلیل خود از زبان ریاضی، رئالیست هستند اما از افلاطونیان در این مسأله جدا می‌شوند که عالَم ریاضی را منحصراً شامل اشیاء ریاضی نامتعارف می‌دانند یعنی ریاضیات برای آنان محدود به فراریاضیات و از این نظر محدود به نحو است.

ارزیابی خود را از محاسن نسبی این رهیافتهای گوناگون به صدق جمله‌هایی چون (۲) به بخشهای بعد موکول می‌کنم. در اینجا تنها می‌خواهم تفاوت میان دیدگاههایی را که نحوشناسی روشنی (دلالت‌شناسی روشنی) برای احکام ریاضی دارند با دیدگاههایی روشن کنم که، با کنار نهادن چنین نحوشناسی و دلالت‌شناسی مشهودی، می‌خواهند شرایط صدق را بیان کنند (یا توزیع صدق و کذب موجود را مشخص کنند و تعبیری از آن به دست دهند) آن هم بر مبنای ملاحظاتی که آشکارا نه نحوشناختی است نه دلالت‌شناختی. در نهایت استدلال خواهم کرد که هر نوع تقریری محاسن و معایب خود را دارد: هر یک به مؤلفهٔ مهمی از تقریر فلسفی جامع منسجمی از صدق و معرفت می‌پردازد.

اما این مؤلفه‌ها چیستند و چگونه با یکدیگر مرتبط‌اند؟

II. دو شرط

الف. نخستین مؤلفهٔ چنین دیدگاه جامعی با مفهوم صدق ارتباط مستقیمتری دارد. برای منظور فعلی ما می‌توان آن را این شرط دانست که نظریهٔ صدق جامعی وجود داشته باشد که بر مبنای آن بتوان تأیید کرد که تعبیر آن از صدق ریاضی درواقع تعبیری از صدق ریاضی است. این تعبیر باید مستلزم شرایط صدقی برای قضایای ریاضی باشد که به‌وضوح شرایط صدق آنها باشد (نه اینکه، برای مثال، *صرفاً* شرایط قضیه بودن آنها در یک نظام صوری باشد). البته این بدان معنی نیست که قضیه‌ای از نظام صوری بودن نمی‌تواند شرط صدقی برای جمله‌ای یا مجموعه‌ای از جمله‌ها باشد. بلکه می‌خواهیم نظریه‌ای که قضیه بودن را به عنوان شرط صدق عرضه می‌کند *رابطهٔ میان صدق و قضیه بودن را هم توضیح دهد*.

بیان دیگر شرط اول ما این است که هر نظریه‌ای در باب صدق ریاضی با نظریه‌ای عمومی از صدق ــ نظریه‌ای از نظریه‌های صدق ــ توافق داشته باشد، نظریه‌ای که تأیید کند که جمله‌هایی که آن تعبیر «صادق» می‌داند درواقع هم صادق باشند. به‌نظر من این کار تنها می‌تواند براساس نظریه‌ای کلی برای، حداقل، زبان به عنوان یک کل انجام شود (فرض من این است که به روشی مناسب پارادوکس‌ها را کنار می‌گذاریم). شاید عملی بودن این شرط در مورد فعلی به این درخواست بینجامد که ابزار دلالت‌شناسی ریاضیات بخشی از زبان طبیعی مورد استفاده باشد و بنابراین هر تعبیر *دلالت‌شناختی* که می‌خواهیم از اسمها یا به‌طورکلی از اسمهای خاص، محمولها و سورها در زبان مادری بدهیم مشتمل بر آن بخشهایی از زبان مادری باشد که آن را زبان ریاضی[1] می‌شناسیم.

پیشنهاد من این است که اگر می‌خواهیم این شرط را برآوریم نباید به تعبیری رضایت دهیم که نتواند (۱) و (۲) را به روش مشابه با الگوی (۲) تطبیق دهد. ممکن است *تفاوتهایی* وجود داشته باشد اما این تفاوتها به گمان من در سطح تحلیل مدلول اسمهای خاص و محمولها خود را نشان می‌دهند. فرض من این است که چنین تعبیری تنها تعبیر تارسکی است و ویژگی ذاتی آن تعریف صدق است برحسب ارجاع (یا صدق‌پذیری) و بر مبنای نوع خاصی از تحلیل نحوشناختی‌ـدلالت‌شناختیِ زبان و بنابراین هر تحلیل مقبولی از صدق ریاضی باید تحلیل از مفهومی باشد که دست‌کم به معنای تارسکی مفهوم صدق باشد. به اعتقاد من، با امعان نظر بیشتر، این شرط با همهٔ تعبیرهایی که «ترکیبیاتی» نامیدم، ناسازگار است. از طرف دیگر تعبیری که (۲) را با (۱) و (۳) وفق می‌دهد به‌وضوح این شرط را برمی‌آورد، همچنان که شکلهای دیگر آن تعبیر را.

ب. پیش‌فرض شرط دوم من برای دیدگاه جامع این است که همهٔ ما معرفت ریاضی داریم و این معرفت به دلیل ریاضی بودن چیزی از معرفت کم ندارد. اما از آن جایی که معرفت ما معرفت به گزاره‌های صادق است، برای اینکه تعبیری از صدق ریاضی پذیرفتنی باشد باید با امکانِ داشتن معرفت ریاضی سازگار باشد: شرایط صدق قضایای ریاضی نباید چنان باشد که اطلاع ما را از برآورده‌شدن آن شرایط ناممکن کند. این بدان معنی نیست که صدقهایی ناشناختنی نمی‌توانند وجود داشته باشند بلکه بدین معنی است که همهٔ صدقها هم نمی‌توانند ناشناختنی باشند، زیرا بعضی از آنها را می‌شناسیم. بنابراین کمترین شرط این است که تعبیری رضایت‌بخش از صدق ریاضی باید با امکان دانستنی بودن بعضی از آنها سازگار باشد. به بیان قویتر، مفهوم صدق ریاضی، بدان گونه که توضیح داده شد، باید در تقریر جامعی از معرفت چنان ادغام شود که نشان دهد چگونه معرفتی را که از ریاضی داریم، داریم. در ریاضیات هر دلالت‌شناسی پذیرفتنی باید با یک معرفت‌شناسی پذیرفتنی هماهنگ باشد. برای مثال اگر می‌دانم که کلیولند میان نیویورک و شیکاگو واقع است بدین دلیل است که نسبتی میان شرایط صدق آن جمله و باور فعلی و

1. syntatic 2. satisfaction 3. convention

1. mathematese

«ذهنی» من وجود دارد (تعبیر ما از صدق و معرفت هرچه باشد، باید به این نحو در ارتباط با هم باشند). در ریاضیات هم به همین نحو باید امکان آن وجود داشته باشد که آنچه را برای صدق p لازم است با اعتقاد من که p، ارتباط دهیم. اگر چه این بسیار مبهم است، فکر می‌کنم می‌توان دید که چگونه شرط دوم بر تعبیرهایی که شرط اول را برمی‌آورند خط بطلان می‌کشد و به بسیاری از تعبیرهای دیگر که چنین نیستند میدان می‌دهد. زیرا هر تعبیر «استاندارد» متعارف (دست‌کم در مورد نظریهٔ اعداد و نظریهٔ مجموعه‌ها) شرایط صدق را برحسب شرایط صدق اشیایی به دست می‌دهد که ماهیت آنها، آنها را فراتر از دسترس ابزارهایی (برای مثال، ادراک حسی) قرار می‌دهد که برای ما شناخته شده‌ترند. از سوی دیگر تعبیرهای «ترکیبیاتی» معمولاً خاسته از حساسیت به همین واقعیت است و از این رو تقریباً همیشه مولود ملاحظات معرفت‌شناختی است. محاسن این تعبیرها در این است که تعبیری که از قضایای ریاضی به دست می‌دهند مبتنی بر روشهایی است که در توجیه صدق در ریاضی به‌کار می‌بریم: یعنی، برهان. تعجب‌آور نیست که به *اعتبار* چنین تعبیرهایی از صدق ریاضی، دیگر در مورد اینکه چگونه می‌توانیم معرفت ریاضی پیدا کنیم رمز و رازی وجود ندارد. در اینجا آنچه نیاز داریم تنها تقریری است از توانایی خود در یافتن برهانهای صوری و بررسی آنها[1]. در هر صورت اگر این بادکنک را در این نقطه فشار بدهیم در طرف صدق متورم می‌شود یعنی، هرچه مفهوم برهان را دقیق‌تر و محکم‌تر کنیم تعریف برهان با خواص ترکیبیاتی (به‌جای دلالت‌شناختی) پیوند نزدیکتری می‌یابد و چنین به‌نظر می‌رسد که ارتباط دادنِ آن با صدقِ آنچه از این راه «اثبات شده»، دشوارتر می‌شود.

بنابراین دو شرط داریم که هر یک جداگانه ضرری نمی‌رساند. در این مقاله، در مجموع از هر دو دفاع بیشتری خواهم کرد و با استدلال قویتری نشان خواهم داد که این دو با هم تقریباً هر تعبیری را که تاکنون از صدق ریاضی داده شده است، طرد می‌کنند. همچنین دو رهیافت اساسی به صدق ریاضی را که در بالا بدان اشاره شد به‌ترتیب بررسی خواهم کرد و در پرتو دو اصل اساسی که می‌خواهم پیشنهاد کنم مزایای هر یک را نسبت به دیگری خواهم سنجید. امیدوارم که این دو اصل خود در جریان این بررسی تا حدی روشن و تأیید شوند.

III. دیدگاه استاندارد

تعبیری «افلاطونی» را که (۲) را به شکل (۳) تحلیل می‌کند «دیدگاه استاندارد» می‌نامم. محاسن این دیدگاه زیاد است و ارزش آن را دارد که پیش از پرداختن به نقایص آن، محاسنش را ذکر کنیم.

همانگونه که گفتیم این تقریر شکل منطقی گزاره‌های ریاضی را با شکل تجربی مشابه آنها یکسان می‌گیرد یعنی گزاره‌های ریاضی و تجربی به شکلی یکسان شامل محمولها، اسمهای خاص، سورها و غیره هستند.

اما در مورد جمله‌هایی که از اسمها، محمولها و سورها ساخته نشده‌اند (یا به درستی تحلیل‌پذیر به آنها نباشند) چه باید گفت؟ به بیان نزدیکتر با موضوع، در مورد جمله‌هایی که به آن نوع زبانی تعلق ندارند که تارسکی برای آن صدق را تعریف کرده است چه باید گفت؟ به‌نظر من برای چنین زبانهایی (اگر وجود داشته باشند) به همان نوع تعبیری از صدق نیاز داریم که تارسکی

۱. البته انجام درست این کار وظیفه‌ای است سنگین. اما بار سنگین توضیح دلالت‌شناسی نظام و چگونگی معرفت بدان را از دوش ما برمی‌دارد و در عوض بر توانایی ما در تعیین خواص اشیای صوری که به شکل نحوشناختی خاصی تعریف شده‌اند، تکیه می‌کند.

برای زبانهای «ارجاعی» آورده است. فرض من این است که شرایط صدق برای زبانی (برای مثال، زبان انگلیسی [یا فارسی]) که زبان ریاضی بدان متعلق است باید به روش تارسکی ساخته و پرداخته شود. بنابراین تا حدی، این پرسش بخش قبل را که: شرایط صدق (۲) را چگونه می‌توان بیان کرد، می‌توان چنین تعبیر کرد که آیا بخشی از زبان طبیعی که در آن ریاضیات انجام می‌شود باید همان گونه تحلیل شود که، به اعتقاد من، مناسب بسیاری از بخشهای دیگر زبان است؟ اگر چنین است، تردیدهای من (که خلاصه‌ای از آن را در بخش بعد خواهم آورد) دربارهٔ اینکه چگونه می‌توان معرفت ریاضی را در یک معرفت‌شناسی کلی جای داد به‌وضوح موجه خواهد بود ــ اگرچه با ترمیم مناسبی در نظریه شاید بتوان از آنها رهایی یافت. از طرف دیگر، اگر ریاضیات به روش ارجاعی تحلیل شود آنگاه نه تنها نیاز به تعبیری از صدق (یعنی دلالت‌شناسی) برای این نوع زبان تازه داریم بلکه به *نظریهٔ* تازه‌ای *از نظریه‌های صدق* هم نیاز داریم که صدق در زبانهای ارجاعی (تسویری) را به صدق در این زبانهای تازه (که به روش تازه‌ای تحلیل می‌شوند) ارتباط دهد. اگر این تعبیر تازه را هم داشته باشیم باز هم مسألهٔ تعبیر معرفت ریاضی حل نشده باقی می‌ماند، اما احتمالاً مسألهٔ آسانتری خواهد بود زیرا وضع دلالت‌شناختی تازهٔ ریاضیات را در اغلب موارد ملاحظات معرفت‌شناختی پیش آورده است. در هر صورت در این مقاله در مورد این شق دیگر، بحث جدی نخواهم کرد، زیرا فکر نمی‌کنم هیچ کس تاکنون آن را عملاً انتخاب کرده باشد. زیرا این انتخاب علی‌رغم مقبولیت ظاهری و اولیهٔ آن به‌وضوح به معنای رد تعبیر «استاندارد» از معرفت ریاضی و نشاندن دلالت‌شناسی دیگری به جای آن است[1]. نظریه پردازان «ترکیبیات» که با آنان بحث کرده‌ام یا به آنان ارجاع داده‌ام هم خدا را می‌خواهند و هم خرما را: اینان ندانسته‌اند که شرایط صدقی که تعبیرشان برای زبان ریاضی فراهم می‌آورد با دلالت‌شناسی ارجاعی که مناسب آن زبان می‌دانند پیوند نیافته است. شاید نزدیکترین نامزد استثنایی دیدگاه هیلبرت باشد، دیدگاهی که خلاصه‌ای از آن را در آغاز این مقاله آورده‌ام. اما تعقیب بیشتر این دیدگاه ما را از هدف خود در اینجا دور می‌کند. بنابراین به ستایش خود از «دیدگاه استاندارد» بازمی‌گردیم.

یکی از مزایای اساسی این دیدگاه این است که شرایط صدق نظریه‌های ریاضی منفردی که چنین تعبیر شده‌اند، همان جمله‌های بازگشتی را دارند که خویشاوندان تجربی نه چندان بلندمرتبهٔ آنها. به عبارت دیگر، همهٔ اینها را می‌توان بخشهایی از زبانی واحد دانست که برای آن، صرف نظر از موضوع فرعی مورد مطالعه، تعبیر واحدی از سورها به دست می‌دهیم. نظامهای ریاضی و تجربی به اعتبار شکل منطقی از هم متمایز نمی‌شوند. اهمیت این مزیت را پیش از این متذکر شدم: یعنی آن نظریهٔ منطقی-دستوری که در زمینه‌های ساده‌تر و مهارپذیرتر به‌کار می‌بریم در اینجا بیشتر نیاز ما را برمی‌آورد. برای ما یک تعبیر یکنواخت کافی است و نیازی به اختراع تعبیر دیگری برای ریاضیات نداریم. این تعبیر برای هر نظریهٔ دستوری که با یک دلالت‌شناسی مناسب برای صدق گره خورده باشد، صادق است. طرفداری

۱. گاهی فکر می‌کنم این یکی از کارهایی است که هیلری پاتنم در مقالهٔ بحث‌انگیز خود «ریاضیات بدون مبانی»
'Mathematics Without Foundations', *Journal of Philosophy*, 64/1 (19 Jan. 1976):5-22.
می‌خواهد انجام دهد.

من از نظریه‌ای که نظریهٔ تارسکی می‌نامم صرفاً خاسته از این واقعیت است که تنها تعبیر کلی منظمی که از صدق داریم تعبیری است که تارسکی به ما داده است. یکی از پیامدهای صرفه‌جویانهٔ دیدگاه استاندارد این است که در آن همهٔ نسبتهای منطقی حکم یکسانی دارند و با تغییر موضوع تغییر نمی‌کنند. درواقع به ما کمک می‌کنند که مفهوم «موضوع» را تعریف کنیم. قاعده‌های استنتاج یکسانی می‌توان به‌کار برد و کاربرد آنها را همان نظریه‌ای توجیه می‌کند که تعبیر عادی ما از استنتاج را توجیه می‌کند و ما را از به‌کار بردن ملاک دوگانه بی‌نیاز می‌سازد. اگر دیدگاه استاندارد را طرد کنیم استنتاجهای ریاضی نیاز به توجیه تازه و خاصی پیدا خواهند کرد. اما در این دیدگاه کاربردهای استاندارد استنتاج با سورها با نوعی برهان سازگاری توجیه می‌شوند. صورت‌بندی نظریه‌ها در منطق مرتبهٔ اول برای توجیه خود نیاز به این تضمین (که قضیهٔ تمامیت فراهم می‌آورد) دارند که همهٔ نتایج منطقی اصول به شکل قضیه از آنها استخراج شوند. تعبیر استاندارد این تضمین را می‌دهد. اکنون پاسخهای روشن ما کارا به‌نظر می‌رسند. طرد دیدگاه استاندارد یعنی طرد این پاسخها و به دنبال پاسخهای تازه‌ای گشتن.

تا اینجا از مزایای این تعبیر سخن گفتیم و اما معایب آن.

چنانکه پیش از این ذکر شد، عیب اساسی دیدگاه استاندارد این است که به‌نظر می‌رسد این شرط را که تعبیر جامع ما از صدق ریاضی باید با تعبیر جامع ما از معرفت پیوند داشته باشد نقض می‌کند. کاملاً واضح است که، برای برملا کردن این عیب، باید طرحی از یک دلالت‌شناسی که دست‌کم تا حدی آن را درست می‌دانم، به دست دهم، طرحی که براساس آن صدقهای ریاضی، در تعبیر استاندارد، مستلزم برساختن معرفت نباشند. این طرح نیاز به گشت‌وگذاری در مباحث عمومی معرفت‌شناسی دارد. این کار را برای وقت دیگر می‌گذارم. و در اینجا به ذکر چکیدهٔ کوتاهی از جنبه‌های مهم دیدگاهی اکتفا می‌کنم که بیشتر به مسألهٔ ما مربوط می‌شود.

IV. تعبیر علّی معرفت

من در معرفت تعبیر علّی[1] را می‌پسندم. بنا بر این تعبیر برای اینکه فرد X بداند جملهٔ S صادق است باید نسبتی علّی میان X و مصادیق نامها، محمولها و سورهای S، وجود داشته باشد. از این گذشته، در ارجاع هم به نظریهٔ علّی اعتقاد دارم و از این‌رو صدق S با اینکه از سر علم S را تصدیق کنیم ارتباط علی‌مضاعفی پیدا می‌کند. امید است آنچه پس از این می‌آید ابهام این حکم را برطرف کند.

برای اینکه هرمیونه بداند شیء سرخی که در دست دارد سیب است، لازم است (یا دست‌کم نیاز به آن دارد) که در وضع (احتمالاً روانی) معینی باشد[2].

1. causal account

۲. می‌خواهم، در صورت امکان، از هرگونه موضع‌گیری در مجموعهٔ مباحث فلسفهٔ ذهن یا روانشناسی در باب ماهیت حالات روانی پرهیز کنم. در این مورد هر نظری که بنا بر آن هرمیونه با نگاه کردن به یک گربهٔ حقیقی روی یک فرش حقیقی بتواند بداند که گربه روی فرش است برای من کافی است. اگر نگاه کردن به گربه‌ای بر روی فرش هرمیونه را در حالتی قرار دهد که مایل باشید آن حالت را حالتی فیزیکی یا روانی یا حتی فیزیولوژیک بنامید، من هیچ ایرادی ندارم به شرطی که چنین حالتی، اگر حالت معرفت هرمیونه باشد، از نظر علّی به نحو مناسبی مرتبط با بودن گربه روی فرش باشد، هنگامی که هرمیونه نگاه می‌کند. اگر چنین حالتی وجود نداشته باشد بدا به حال دیدگاه من.

همچنین اوضاع و احوال دیگر هم باید مساعد باشند ــ دست‌کم تا حدی که اجازه دهند شیئی که در دست گرفته است سیب باشد. افزون بر این ــ و این بخشی است که بر آن تکیه می‌کنم ــ در شرایط عادی این امر که شیئی که هرمیونه در دست دارد سیب است باید در توضیح علّی از باور او که شیء سرخی که در دست دارد سیب است، به طریق مناسبی دخیل باشد. اما «طریق مناسب» چیست؟ در این باره توضیحی نخواهم داد. بعضی از نویسندگان آثاری منتشر کرده‌اند که به‌نظر می‌رسد در پی این توضیح باشند[1]، و علی‌رغم تفاوتهایی که دارند ظاهراً در یک مسألهٔ شهودی همه اتفاق نظر دارند، مسأله‌ای که فکر می‌کنم درست باشد، هرچند مشخص کردن آن بسیار دشوار است.

از آنچه هم‌اکنون خواهم گفت می‌توان فهمید که چنین دیدگاهی باید درست و زیربنای ادراک ما از معرفت باشد. فرض کنید ادعا کرده‌اند که X می‌داند که p.* اما ما فکر می‌کنیم که X نمی‌تواند بداند که p. اکنون چه دلیلی می‌توانیم برای نظر خود ارائه دهیم؟ اگر قبول داشته باشیم که X توانایی استنتاجهای عادی را دارد و p هم درواقع صادق باشد و غیره و غیره، آنگاه باید چنین استدلال کنیم که X نمی‌توانسته است به شواهد و دلایل مناسب دسترسی داشته باشد یعنی مُخبِر ضعیف چهاربعدی زمانی-مکانی X ارتباط علّی لازم را با زمینه‌های صدق جملهٔ p برای X برقرار نکرده است و X شواهد کافی برای دفاع از استنتاج خود (اگر چنین استنتاجی مناسب باشد) نداشته است. جملهٔ p شرایطی بر چگونگی وضع جهان تحمیل می‌کند. معرفت ما از جهان به اضافهٔ اطلاع ما از شرایطی که p معین می‌کند یعنی شرایط صدق p، اغلب به ما خواهند گفت که فرد معینی نمی‌توانسته است به شواهد کافی برای معرفت به p دسترسی داشته باشد و بنابراین ادعای معرفت او را نفی می‌کنیم.

در حال حاضر، این تعبیر از معرفت، در مورد اشیایی با اندازه‌های متوسط، تعبیری است در مسیر درست. از نظر علّی این تعبیر متضمن ارجاع مستقیم به امور معلوم است و از این طریق متضمن ارجاع به خود اشیاء. از این گذشته چنین معرفتی (به خانه، درخت، قارچ، ظرف نان) ناظر به واضح‌ترین موارد است و از نظر توضیح، آسانترین موارد.

سایر موارد معرفت را می‌توان براساس استنتاجهایی که مبتنی بر چنین مواردی هستند توضیح داد، اگرچه باید بستگیهای درونی متقابلی میان آنها وجود داشته باشد. این بدان معنی است که شامل معرفت ما به قانونهای کلی و نظریه‌ها و از طریق آنها شامل معرفت ما به آینده و بسیاری از مسائل گذشته باشد. این تعبیر نزدیک، به راههایی است که تجربه‌گرایان پیشنهاد کرده‌اند اما با اصلاح و ترمیم حساسی که شرایط علی مذکور در بالا به مسأله افزوده است. تعبیرهای جدید، این اصلاح را به حساب نمی‌آورند. زیرا می‌خواهند تمایز دقیقی میان «کشف» و «توجیه» بگذارند.

خلاصه آنکه جملهٔ p را همراه با معرفتهای دیگر خود به‌کار می‌بریم تا دامنهٔ شواهد مربوط و ممکن را مشخص کنیم. ما آنچه از X (دانندهٔ مفروض)

۱. بعضی از این آثار عبارت‌اند از:

Gilbert H. Harman, *Thought* (Princeton, Princeton University Press, 1973); Alvin I. Goldman, 'A Causal Theory of Knowing', *Journal of Philosophy*, 64/12 (22 June 1967): 357-72; Brian Skyrms, 'The Explication of "X knows that p" ', *Journal of Philosophy*, 64/12 (22 June 1967):373-89.

* «p» جمله‌ای است خبری مانند «این درخت سرو است» و «X» نام فردی مانند حسن است. بنابراین «X می‌داند که p»، در این مورد، یعنی: حسن می‌داند که این درخت سرو است. ـ م.

می‌دانیم به‌کار می‌بریم تا مشخص کنیم آیا نوع مناسبی از کنش و واکنش می‌توانسته است وجود داشته باشد یا نه، آیا باور فعلی X به جملهٔ p به نحو علّی و به طریق مناسب با امر واقع که ناشی از صدق p است ارتباط دارد یا نه — آیا شواهد او مأخوذ از دامنه‌ای که p مشخص کرده، هست یا نه. اگر نه، X نمی‌توانسته است بداند که p. ارتباط میان امری که اگر p صادق باشد، واقع می‌شود با عال باور X به p می‌تواند تغییر گسترده‌ای پیدا کند. اما همیشه ارتباطی هست و این ارتباط، زمینه‌های باور X به موضوع و محتوای p را گزارش می‌کند.

باید بتوان ارتباط مناسبی میان شرایط. صدق p (که با تعریف مناسبی از صدق برای زبانی که p جمله‌ای از آن است داده شده) و زمینه‌های معرفت ما به p برقرار کرد — دست‌کم در مورد جمله‌هایی که اطلاع از صدق آنها ذاتی ما نیست بلکه باید برای رسیدن به آن *تلاش کنیم*. اگر جز این باشد ارتباطی میان *داشتن آن زمینه‌ها* و *باور به اینکه جمله‌ای صادق است* برقرار نمی‌شود. داشتن آن زمینه‌ها را نمی‌توان در توضیح معرفت به p دخالت داد. نمی‌توان رابطهٔ میان p و توجیه باور به p بر مبنای آن زمینه‌ها برقرار کرد. اما برای معرفتی که به درستی نوعی از باور صادق موجه شمرده می‌شود این ارتباط باید برقرار شود. (البته نیازی نیست که هر معرفتی باور صادق موجه باشد تا معرفت، درست محسوب شود.)

با این مقدمه اکنون دیگر تعجب‌آور نیست اگر بگوییم جمع میان *این* دیدگاه در باب معرفت و دیدگاه استاندارد در باب صدق ریاضی، فهم امکان معرفت ریاضی را دشوار می‌کند. برای مثال، اگر اعداد همان ذواتی باشند که معمولاً فرض می‌شوند آنگاه نمی‌توان ارتباطی میان شرایط صدق قضایای نظریهٔ اعداد و شواهد مرتبط با افرادی که تصور می‌کنیم معرفت ریاضی دارند، برقرار کرد.[۱] دیگر توجیه اینکه چگونه به قضایای نظریهٔ اعداد معرفت پیدا می‌کنیم ناممکن خواهد شد. و این شرط دوم برای توجیه صدق ریاضی برآورده نمی‌شود زیرا هیچ توجیهی از این امر نداریم که چگونه شرایط صدق قضایای ریاضی برآورده می‌شوند. در اینجا این پاسخ واضح هم که بعضی از قضایا صادق‌اند اگر و تنها اگر از اصول معینی به کمک قاعده استخراج شده باشند، کمکی نمی‌کند. زیرا، آنچه مسلم است می‌توانیم تأکید کنیم که *آن* شرایط برآورده شده‌اند. اما در این حالت که صدق مستقیماً به روش استاندارد تعریف شده است آنچه کم داریم رابطهٔ صدق و برهان است. خلاصه آنکه اگرچه ممکن است شرط صدق بعضی قضایای نظریهٔ اعداد این باشد که از اصول معلومی با قواعد معلومی استنتاج شده باشند اما اگر بنا بر این باشد که این شرط پیوندی میان صدق و معرفت برقرار کند و اگر به کمک برهانهاست که ما به صدقهای ریاضی علم پیدا می‌کنیم آنگاه این شرط صدق باید خود از تعبیری از صدق نتیجه شده باشد.

البته اگر در نظریهٔ مجموعه‌ها تعبیری از *حساب* داده شود، نحوشناسی و دلالت‌شناسی *حساب* را می‌توان چنان تقریر کرد که شرایطی را که وضع کرده‌ایم در ظاهر برآورند. اما این به‌وضوح به دور باطل می‌انجامد زیرا در مورد نظریهٔ مجموعه‌ها همان پرسشهایی را باید مطرح کرد که برحسب آنها پاسخها تدوین می‌شوند.

۱. برای بیان شکلی معقول در مورد این نکته و نکته‌های مربوط دیگر رجوع کنید به:
Mark Steiner, 'Platonism and the Causal Theory of Knowledge', *Journal of Philosophy*, 70/3 (8 Feb. 1973): 57-66.

V. دو مثال

از صدق ریاضی و معرفت ریاضی تعبیرهای فراوانی کرده‌اند. نظریاتی که تاکنون از آنها دفاع کردم می‌خواهیم در مورد همهٔ این تعبیرها به‌کار رود. اما به جای پرداختن به همهٔ آنها، بقیهٔ این مقاله را به بررسی دو دیدگاه مهم اختصاص خواهم داد: یکی دیدگاه «استاندارد» و دیگری دیدگاه «ترکیباتی». نخست از تعبیر استاندارد به بیان کورت گودل آغاز می‌کنم که یکی از صریح‌ترین و روشنترین بیانهاست.

گودل خیلی خوب می‌داند که در تعبیر رئالیستی (یعنی استاندارد) از صدق ریاضی، توضیح چگونگی معرفت ما به اصول بنیادی باید ارتباط مناسبی با چگونگی تعبیر ما از ابزار ارجاعی نظریه داشته باشد. از این رو، در بحث، از اینکه چگونه می‌توان مسألهٔ پیوستار را حل کرد، و پس از اینکه دانستیم نمی‌توان آن را از اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج کرد، تصویر زیر را ترسیم می‌کند[۱]:

> ... واضح است که شیئهای نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی به جهان فیزیکی تعلق ندارند و حتی پیوند غیر مستقیم آنها با تجربهٔ فیزیکی بسیار ضعیف است.
>
> ... اما علی‌رغم دور بودن آنها از تجربهٔ حسی، از شیئهای نظریهٔ مجموعه‌ها نیز چیزی شبیه ادراک داریم و این از این واقعیت معلوم می‌شود که اصولْ خود را به عنوان [گزاره‌های] صادق بر ما تحمیل می‌کنند. من هیچ دلیلی نمی‌بینم که به این نوع ادراک، یعنی شهود ریاضی، اطمینان کمتری داشته باشیم تا به ادراک حسی که به ساختن نظریه‌های فیزیکی و امید بستن به اینکه ادراکهای حسی آینده با آنها سازگار درآیند، ترغیبمان می‌کند، و افزون بر این، ترغیبمان می‌کند که باور کنیم پرسشی که اکنون تصمیم‌ناپذیر است بی‌معنی نیست و چه‌بسا در آینده تصمیمی در مورد آن گرفته شود. تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌ها بعید است، که برای ریاضیات بیشتر از آن گرفتاری ایجاد کنند که فریبکاریهای حواس برای فیزیک ایجاد می‌کنند. کاملاً ممکن است شهودهای ریاضی تازه به تصمیم‌گیری دربارهٔ مسأله‌هایی مانند فرضیهٔ پیوستار کانتور بینجامد.

این تصویر مرا هم دلگرم می‌کند هم نگران می‌سازد. نگران از این نظر که بدون توجیه این امر که چگونه اصول «خود را به عنوان [گزاره‌های] صادق به ما تحمیل می‌کنند»، مقایسه آنها با ادراک حسی و علوم فیزیکی محتوای چندانی نخواهد داشت. زیرا آنچه در اینجا کم داریم دقیقاً همان چیزی است که اصل دوم من طلب می‌کند. یعنی تقریری از پیوند میان قوای معرفتی ما و اشیایی که می‌شناسیم. در علوم فیزیکی دست‌کم نقطهٔ شروع چنین تقریری، را داریم. در اینجا تنها آن باورهایی را معرفت می‌دانیم که بتوانیم آنها را به شکل مناسبی با قوای معرفتی خود ارتباط دهیم. ادراک ما از علم پابه‌پای ادراک ما از خود به عنوان عالِم پیش می‌رود. البته میان این دو تشابهی *ظاهری* وجود دارد زیرا به قول گودل، صحت اصول را با نتایج

1. Kurt Gödel, 'What Is Cantor's Continuum Problem?', revised version in Benacerraf and Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn., 483-4.
[ترجمهٔ فارسی: کورت گودل، «مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟»، ترجمهٔ ضیاء موحد، نشر ریاضی، سال ۲، شمارهٔ ۱ (فروردین ۱۳۶۸)، صص ۴۶ـ۵۴.]

اصول که به‌نظر می‌رسد «ادراک حسی» مستقیم‌تری (شهود روشن‌تری) از آنها داریم، «محقق» می‌کنیم اما از اینکه چگونه می‌توانیم حتی به این نتایج روشن‌تر علم پیدا کنیم، حرفی زده نمی‌شود. برای مثال نتایج «تحقیق‌پذیر» اصول بینهایت‌های بالاتر، گزاره‌هایی (تصمیم‌ناپذیر بدون این اصول) از نظریهٔ اعدادند که خود با محاسبه، تا حد هر عدد صحیح مفروضی، تحقیق‌پذیرند. اما برای اینکه این داستان سرانجامی داشته باشد باید به ما بگوید، *اگر این محاسبات همان معنایی را دارند که تعبیر استاندارد می‌خواهد*، چگونه به احکام محاسبات این حساب معرفت پیدا می‌کنیم. *این* چیزی است که نمی‌گوید. بنابراین، تشابه، تشابهی است ظاهری.

این بود جنبه‌هایی از این دیدگاه که مرا نگران می‌سازد. شاید جنبهٔ مهمتر و به‌نظر من دلگرم کننده، این است که ظاهراً توافقی با گودل داریم که گودل را بر آن داشته است تا تناظری میان ریاضیات و علوم تجربی برقرار کند. گمان می‌کنم گودل دریافته است که باید به گونه‌ای شکافی را که تعبیر رئالیستی و افلاطونی او از قضایای ریاضی ایجاد کرده است، پر کند، یعنی شکاف میان موجوداتی که موضوع ریاضی هستند و انسانی که می‌خواهد به آنها معرفت پیدا کند. گودل به جای ورروفتن با شکل منطقی قضایای ریاضی یا با ماهیت اشیای معلوم ریاضی، قوهٔ خاصی را در انسان وضع می‌کند که به کمک آن با این اشیا «ارتباط پیدا می‌کنیم». به‌نظر می‌رسد در تحلیل مسألهٔ بنیادی با هم موافقیم اما به‌وضوح در بحث معرفت‌شناسی ــ یعنی دربارهٔ راههایی که برای شناختن اشیا به روی ما باز است ــ توافقی نداریم.

اگر تعبیر ما از معرفت تجربی پذیرفتنی باشد تا حدی برای این است که می‌خواهیم در مورد معرفتِ نظری خود، که در بدو امر روشن نیست چگونه توجیه علی را باید در آن گنجانید، این ارتباط را آشکار کنیم. بنابراین وقتی به ریاضیات می‌رسیم نداشتن توجیهی منسجم از اینکه چگونه شهود ریاضی ما با صدق قضایای ریاضی مرتبط است، توجیه کلی ما را خدشه‌دار می‌کند.

به‌عنوان یک حاشیهٔ تاریخی مبتنی بر متون قدیم، نامعقول نیست اگر بگوییم افلاطون در توضیح علم ما به مُثُل، با توجه به ماهیتی که برای آنها قائل بود، به مفهوم *یادآوری*[1] متوسل می‌شد.[2]

دیدگاه «ترکیبیاتی» در مورد صدق ریاضیات ریشه‌های معرفت‌شناختی دارد. این دیدگاه با این مقدمه آغاز می‌کند که «اشیا»ی ریاضیات هرچه باشند معرفت ما محصول برهانهاست. برهانها را می‌نویسند یا می‌گویند یا می‌توانند بنویسند یا بگویند (و به عقیدهٔ بعضی باید بنویسند یا بگویند)؛ ریاضیدانان می‌توانند آنها را بررسی کنند و در مورد درستی آنها به توافق برسند. بیشتر از طریق این برهانهاست که به معرفت ریاضی می‌رسیم و آن را به دیگران انتقال می‌دهیم. خلاصه آنکه، این جنبه از معرفت ریاضی یعنی ابزارهای (اساساً زبانی) ایجاد و انتقال، پشتیبان دیدگاههایی هستند که آنها را «ترکیبیاتی» می‌نامم.

این دیدگاهها با توجه به نقش برهانها در حصول معرفت، مبانی صدق را در همین برهانها جستجو می‌کنند. دیدگاههای ترکیبیاتی از اینجا نیرو می‌گیرند که دریافته‌اند افلاطونیان نیل به معرفت را در لفافه‌ای از رمز و راز پیچیده‌اند. اگر به این دریافت این باور را هم بیفزاییم که ریاضیات کودکی است که ما خود

1. anamnesis

۲. آنگاه روح، از آنجا که فانی نیست، و بارها متولد شده و همهٔ موجودات را دیده است، چه در این جهان چه در آن جهان، به همهٔ آنها معرفت دارد. (Plato, Meno, 81)

پدر او هستیم (بنا بر این دیدگاهها، کشف ریاضی به‌ندرت کشفی است در مورد حقیقتی مستقل از ما) دیگر تعجب‌آور نیست اگر در توضیح تولد آن به اعمالی توجه کنیم که به نطفه بستن آن انجامیده است. بسیاری از توجیه‌هایی که از صدق ریاضی می‌کنند متعلق به این مقوله‌اند. شاید هم بتوان گفت تقریباً همه متعلق به این طرز تفکرند. من به تعدادی از آنها به‌اجمال اشاره کرده و نظر هیلبرت را در مقالهٔ «در باب بینهایت» خیلی کوتاه بررسی کرده‌ام. آخرین مثالی که می‌خواهم بررسی کنم توجیه‌های دیدگاه قراردادیان[1] است یعنی مجموعهٔ دیدگاههایی که صدق در منطق و ریاضی را محصول قراردادهای صریح می‌دانند و منظورشان از قراردادها اصلهای موضوع نظریه است. شاید در اینجا نیز با درهم آمیختن دیدگاههایی که طرفداران آنها به احتمال قریب به یقین می‌خواهند جدا از هم نگه داشته شوند، رعایت انصاف را نکرده باشم.

کواین در مقالهٔ کلاسیک خود در این موضوع[2]، با این نظر که صدقهای منطقی را باید محصول قرارداد دانست، با روشنی و قاطعیت برخورد کرده است، برخوردی به‌مراتب بهتر از آنچه از خود می‌توانم انتظار داشته باشم. کواین می‌گوید از آنجا که باید صدقِ بینهایت جمله را توجیه کنیم، توجیه باید کلی باشد نه مورد به مورد. اما توجیه کلی تنها با اصول کلی امکان‌پذیر است و اگر بنا باشد از ابتدا هیچ اطلاعی از منطق نداشته باشیم نمی‌توانیم موردهای منفرد را از اصول کلی استخراج کنیم: برای این کار نیاز به منطق داریم.

اگرچه این دلیل قانع کننده به‌نظر می‌رسد، می‌خواهم دلیل دیگری بیاورم اما نه از آن رو که این اسب مرده باز هم شلاق می‌خواهد بلکه از آن رو که دلیل کواین محدود به منطق است و دیگر آنکه نکته‌های مهمی که می‌خواهم آشکار کنم از دلیل کواین چنان که باید آشکار نمی‌شود. درواقع کواین در برابر طرفداران قراردادی بودن صدق در منطقْ اصولی را گردن می‌نهد که من می‌خواهم آنها را نفی کنم. کواین در مقابله با قراردادیان در مورد نیاز داشتن به توصیفی کلی از بینهایت صدقِ منطقی قبول می‌کند که اگر تعداد صدقهایِ منطقی متناهی بود طرفداران قراردادی بودن صدق شاید می‌توانستند حرف خود را به کرسی بنشانند. کواین می‌گوید:

> اگر اسناد صدق می‌توانست، به جای بینهایت بار در هر زمان، مورد به مورد انجام بگیرد، مشکل حلّ می‌شد؛ صدقهای منطق ... یکی پس از دیگری طبق دستور مشخص می‌شد و مسألهٔ استنتاج آنها از قراردادهای کلیتر پیش نمی‌آمد. (ص. ۳۴۴)

یعنی اگر می‌توانستیم راهی پیدا کنیم که جمله‌های منطق، صدق و کذب خود را آشکارا نشان دهند، اعتراض به طرفداران قرارداد رفع می‌شد زیرا صدق و کذب تمام جمله‌ها را تعیین کرده بودیم و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

تعجب من از این است که نوشتن مورد به مورد کلمهٔ «صادق» بدین گونه، چه کار مهمی را می‌تواند انجام دهد. بدون شک برای مشخص کردن مفهوم «صدق» کافی نیست که به هر جمله‌ای از زبان ارزشی نسبت دهیم [فرض کنید زبان ما، زبان مرتبهٔ اولی برای نظریهٔ مجموعه‌ها باشد] (حالا هر جمله‌ای را که تعداد اداتهای شرط آن زوج باشد «صادق» فرض کنید).

1. conventionalists

2. W. V. Quine, 'Truth by Convention', repr. in Benacerraf and Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics*, 2nd edn., 329-54.

چنین اِسناد ارزشی با محمول «صادق» چه تعینی به مفهوم صدق می‌بخشد؟ تنها کاربرد این کلمهٔ دوهجایی که کافی نیست. پیشنهاد تارسکی این بوده است که صدق‌پذیری قرارداد T شرط لازم و کافی تعریف صدق برای زبان خاصی است.[۱] صرف توزیع (بازگشتیِ) صدق و کذب میان جمله‌ها را می‌توان تا حدّ نظریه‌ای از صدق که قرارداد T را صادق کند، بالا برد. می‌توان به این نظریه به بهای مصادره به مطلوب دل خوش کرد و از مفهوم ترجمه که در صورت‌بندی قرارداد T مندرج است چشم پوشید. در اینجا آنچه از دست می‌دهیم هر چند بیان آن دشوار است، ابزاری است که تارسکی در تعریفهای صدق به‌کار برده است، یعنی تحلیل صدق برحسب مفاهیم «ارجاعیِ» نامگذاری، حمل، صدق‌پذیری و تسویر. تعریفی که جمله‌های متداول بازگشتی را در صورتهای متداول دستوری به‌کار نبرد اگر قرارداد T را هم صدق‌پذیر کند، چه‌بسا کافی نباشد. توضیح باید از طریق ارجاع و صدق‌پذیری داده شود و از این گذشته باید با تعبیری از ارجاع هم همراه باشد. اما دفاع از این ادعای آخر پیچیده‌تر از آن است که اینجا بدان بپردازیم[۲].

مقالهٔ کواین: «صدق به اعتبار قرارداد» مبین آن است که برای تعیین صدق و کذب همهٔ متنهایی که شامل کلمه‌ای هستند کافی است مدلول آن کلمه را معین کنیم. ممکن است چنین باشد اما به شرطی که از پیش مفهوم صدق را داشته باشیم و آنگاه مدلول کلمهٔ مورد نظر خود را در تعریف صدق جستجو کنیم. اما اینکه بخواهیم خود مفهوم صدق را هم از این طریق معین کنیم به‌وضوح تلاشی است نادرست. با این کار همان ابزاری را دور انداخته‌ایم که باعث گردید آن روش برای مفاهیم دیگر مؤثر از کار درآید. صدق و ارجاع دست در دست هم دارند. مفهوم ما از صدق به میانجی مفاهیمی عمل می‌کند که تارسکی در تعریف صدق برای زبانهای مورد نظر خود، به‌کار برده است. سهم تارسکی از قرارداد T بسیار فراتر می‌رود و شامل قالبهایی کلی در تعریف صدق هم می‌شود. اگر تحلیل صدق برای زبان با ابزارهای متداول حمل، تسویر و غیره انجام نگیرد، رضایت‌بخش نخواهد بود.

اگر این حرفها نزدیک به واقع باشد آنگاه روشن می‌شود که چرا دیدگاههای «ترکیبیاتی» در مورد ماهیت صدق ریاضی، به‌نظر من موفق نیستند. به‌نظر نمی‌رسد که این دیدگاهها در تعبیر صدق، طریق لازم را بپیمایند یعنی از طریق موضوع گزاره‌هایی که تعریف صدق آنها داده می‌شود. آنها با انگیزهٔ ملاحظات معرفت‌شناسی به شرایطی از صدق می‌رسند که برآورده شدن یا برآورده نشدن آنها را، ما موجودات فانی می‌توانیم تحقیق کنیم اما بهایی که می‌پردازند این است که نمی‌توانند ارتباطی میان این «شرایط صدق» و صدق گزاره‌های مربوطه برقرار کنند.

حتی اگر این نکته مسلّم شود که صدقهای منطق مرتبهٔ اول خاسته از قراردادها نیستند باز هم ممکن است ادعا کنند که بقیهٔ ریاضیات (برای منطق‌گرایان، نظریهٔ مجموعه‌ها و برای دیگران، نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریهٔ اعداد و موضوعهای دیگر) مرکب از قراردادهایی هستند که در منطق مرتبهٔ اول صورت‌بندی می‌شوند. این دیدگاه هم در معرض این انتقاد است که چنین مفهومی از قرارداد مستلزم صدق نیست[۱] و درواقع هم روشن است که نیست، زیرا، حتی اگر انتقادهای کلیتر را نادیده بگیریم، پس از ثابت نگه‌داشتن منطق، چه‌بسا معلوم شود که قراردادهایی که بدین طریق وضع کردیم حاوی تناقض‌اند. بنابراین نمی‌توان مطمئن بود که وضع قراردادها *ضامن* صدق باشند. اما اگر *ضامن* صدق نباشند چه چیزی مواردی را که صدق را ضمانت می‌کنند از مواردی که نمی‌کنند متمایز می‌کند؟ اینکه بگوییم سازگاری اصول با هم ضامن صدق است، پاسخ درستی نیست. اصرار بر این گفته یعنی تلقی نادرست از اهمیت این امر که *ناسازگاری دلیل* آن است که به صدق دست نیافته‌ایم. باز هم دلیل عمیقتر این است که وضع اصول، ارتباطی میان گزاره‌ها و موضوع آنها برقرار نمی‌کند ــ وضع ایجاد کنندهٔ صدق نیست. نهایت اینکه مجموعهٔ شرایط صدقِ (تعبیرهایِ) سازگار با وضعها را محدود می‌کند. اما این کافی نیست.

برای روشن کردن این نکته، جملهٔ معروف راسل را نقل می‌کنیم: «روش «وضع کردنِ» آنچه می‌خواهیم مزیتهای فراوانی دارد؛ این مزیتها همان مزیت دزدی است بر کار طاقت‌فرسای شرافتمندانه»[۲]. از دیدگاهی که من از آن دفاع می‌کنم این جمله صادق نیست. زیرا در دزدی دست‌کم چیزی به‌دست می‌آید، در حالی که از تعریف ضمنی، وضع اصول قراردادی و نظایر آنها صدق به‌دست نمی‌آید. اینها نه تنها نقص اخلاقی بلکه نقص عملی هم دارند.

* * * * * *

1. Alfred Tarski, 'The Concept of Truth for Formalized Languages', repr. in Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics* (NewYork: Oxford University Press, 1956), 152-278.
قرارداد T در صفحات ۱۸۷ـ۱۸۸ به‌صورت زیر ذکر شده است:

قرارداد T. تعریف صوری درستی از نماد «Tr» که در فرازبان صورت‌بندی شده *تعریفی کافی از صدق نامیده می‌شود*، اگر:

α) همهٔ جمله‌هایی که از دو شرطی «$x \in \mathrm{Tr}$ اگر و تنها اگر p» ساخته می‌شوند از نتایج آن باشند. "x" نامی است از هر جملهٔ زبان مورد بحث و p ترجمهٔ آن جمله به فرازبان است.

β) جملهٔ «به ازای هر $x \in \mathrm{Tr}$ آنگاه $x \in \mathrm{S}$» (یعنی "$\mathrm{Tr} \subseteq S$") از نتایج آن باشد.

۲. برای بحثی عالی از دیدگاهی مشابه رک.

Hartry Field, 'Tarski's Theory of Truth', *Journal of Philosophy*, 69/13 (13 July 1972): 347-75.

• این مقالهٔ ترجمهٔ متن سخنرانی پال بناسراف (Paul Benacerraf) با عنوان "Mathematical truth" در همایشی دربارهٔ «صدق ریاضی» است که به همت انجمن فلسفهٔ آمریکا و انجمن منطق نمادی در ۲۷ دسامبر ۱۹۷۳ برگزار شده است. متن اصلی نخستین بار در

Journal of Philosophy, (19) **70** (1973) 661-80

و سپس در جاهای دیگری از جمله در

The Philosophy of Mathematics, edited by W. D. Hart, Oxford University Press (1997)

به چاپ رسیده است.

پال بناسراف استاد فلسفهٔ دانشگاه پرینستن آمریکاست.

۱. همین استدلالها را در مورد دیدگاهی می‌توان کرد که احتمالاً تفاوتی با این یکی ندارد، دیدگاهی که در پاسخ به این پرسش، که چگونه بدانیم اصول موضوع صادق‌اند (زبان را با آموختن این اصول می‌آموزیم)، اصول موضوع را *تعریفهای ضمنی* مفاهیم موجود در آنها می‌داند (برخلاف دیدگاهی که چگونگی فهم مفاهیم تازه را شرح می‌دهد.)

2. Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (London: Allen and Unwin, 1919), 71