

اعداد «مناسب» لئونهارت اویلر

گوته فرای *

ترجمه کریم احمدی دلیر

۱. مقدمه

لئونهارت اویلر بزرگترین و تأثیرگذارترین ریاضیدان قرن هجدهم بود و حتی تا امروز پرکارترین ریاضیدان همه اعصار به شمار می‌رود. کشفیات او در ریاضیات و در بسیاری از شاخه‌های علوم به قدری زیاد است که مجموعه آثار او در حدود ۸۵ جلد می‌شود. اویلر در همه زندگی خود مشتاقانه بر روی مسائل نظریه اعداد کار کرد. او هفتاد ساله و تقریباً کور بود که ضمن تفحص درباره اعداد اول بزرگ موفق به کشف اعداد مناسب شد. بین این اعداد و نظریه هیأت‌های رده‌ای وابستگی نزدیکی وجود دارد و مسائل حل‌نشده بسیاری در مورد آنها مطرح است.

۲. مجموعه‌های مربعات

فرما، اویلر و لاگرانژ به این نتیجه اساسی، که سر آغاز واقعی نظریه هیأت‌های رده‌ای بود، دست یافتند: اعداد اولی که با صورتهای درجه دوم دوتایی صحیح خاصی نمایش داده می‌شوند همگی در تصاعدهایی حسابی صدق می‌کنند یعنی می‌توان آنها را با شرایط هم‌نهشتی مشخص کرد و بنابراین به صورتهای خطی قابل نمایش اند. در نتیجه، یک هیأت رده‌ای (یعنی یک توسیع آبله) چون L روی اعداد گویای Q وجود دارد به قسمی که همه اعداد اولی که به یک صورت نمایش داده می‌شوند قانون تجزیه واحدی در L دارند. این نتیجه را اولین بار فرما در ۲۵ دسامبر ۱۶۴۰ در نامه‌ای به دوشتش مرسن ذکر کرد.

قضیه ۱. هر عدد اول فرد چون p برابر است با مجموع مربعات دو عدد طبیعی، یعنی به صورت $p = x^2 + y^2$ است که در آن $x, y \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ، اگر و فقط اگر $p \equiv 1 \pmod{4}$.
به علاوه، این نمایش منحصر به فرد است و x و y نسبت به هم اول اند، $(x, y) = 1$.

اویلر این قضیه را بیش از یک قرن بعد در سال ۱۷۵۵ ثابت کرد. در سال ۱۷۵۸، اویلر متوجه شد که عکس قضیه نیز درست است و آن را ثابت کرد.

قضیه ۲. اگر عدد طبیعی فردی، چون $n (n > 1)$ را فقط به یک طریق بتوان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نامنفی دوتایی به صورت $n = x^2 + y^2$ نمایش داد که در آن $x, y \in N$ (مجموعه اعداد صحیح نامنفی است)، و اگر علاوه بر آن x و y نسبت به هم اول باشند آنگاه n یک عدد اول است.

بدین ترتیب معیاری به دست می‌آید که بر اساس آن می‌توانیم اول بودن یا نبودن عدد طبیعی مفروض n را بیازماییم. کافی است همه x هایی را که از $n/2$ کمترند از n کم کنیم و ببینیم آیا عدد مجذور کاملی چون y^2 دقیقاً یکبار پیدا می‌شود یا نه و آیا به ازای این x ، y و n نسبت به هم اول اند یا نه.

با توجه به قضیه ۱ این روش را می‌توان فقط برای اعدادی مانند n به کار گرفت که در ضابطه $n \equiv 1 \pmod{4}$ صدق کنند. به علاوه اویلر برای تعمیم آن در مورد n هایی که به شکل $n \equiv 3 \pmod{4}$ هستند، نمایشهای $n = x^2 + 2y^2$ و $n = x^2 + 3y^2$ را که قبلاً فرما بررسی کرده بود، و حالت کلیتر $n = ax^2 + by^2$ را که در آن a و b اعداد طبیعی دلخواه و نسبت به هم اول باشند، بررسی کرد. نتایج اویلر که در سالهای ۱۷۷۴ و ۱۷۶۳ انتشار یافتند عبارت‌اند از:

قضیه ۳. الف) عدد اول فردی چون p قابل نمایش به صورت $x^2 + 2y^2$ است یعنی $p = x^2 + 2y^2$ که در آن $x, y \in N$ ، اگر و فقط اگر $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$. این نمایش منحصر به فرد است و x و y نسبت به هم اول اند.

ب) برعکس، اگر $n > 1$ یک عدد طبیعی فرد باشد که دقیقاً به یک طریق قابل نمایش به صورت $n = x^2 + 2y^2$ باشد ضابطه $x, y \in N$ باشد و x و y نسبت به هم اول باشند، آنگاه n یک عدد اول است.

قضیه ۴. الف) عدد اولی مانند p ، غیر از ۲ و ۳، قابل نمایش به صورت $x^2 + 3y^2$ است، یعنی $p = x^2 + 3y^2$ که در آن $x, y \in N$ ، اگر و فقط اگر $p \equiv 1 \pmod{3}$. این نمایش منحصر به فرد است و x و y نسبت به هم اول اند.

در $(x, y) = 1$ صدق کنند، الزاماً به شکل $n = 4t^2$ یا $n = 4tp$ یا $n = tp$ است که t يك مقسوم علیه a, b و p يك عدد اول فرد و s يك عدد طبیعی است.

اویلر در این تعریف صراحتاً امکان $n = 4t^2$ با ضابطه $t \neq 1$ را ذکر نکرد اما این حالت را بایستی در نظر گرفت. توجه کنید که صورت مناسب $x^2 + my^2$ در شرط (م) صدق می کند زیرا اگر $n > 1$ الزاماً فرد باشد، آنگاه $p = 4n$ و از شرط $(x, my) = 1$ نتیجه می شود $t = 1$ چون t يك مقسوم علیه m و n است و بنابراین هر عامل اول t يك مقسوم علیه x و my است.

پس از آن اویلر نتیجه زیر را ثابت کرد:

قضیه ۶. فرض کنید $a, b \in \mathbb{N}$ و $(a, b) = 1$ ؛ در این صورت $ax^2 + by^2$ مناسب است اگر و فقط اگر هودت $x^2 + aby^2$ مناسب باشد.

اویلر در برهانش فرض کرد که a و b بر مجذور هیچ عددی تقسیم پذیر نیستند، اما بعداً خواهیم دید که این فرض لازم نیست (قضیه ۱۳ را ببینید). از این قضیه تعریف زیر حاصل می شود.

تعریف ۷. عدد طبیعی m مناسب نامیده می شود اگر صورت $x^2 + my^2$ مناسب باشد.

چنین عدد m برای جستجوی اعداد اول بزرگ و برای تحقیق در اینکه عدد مفروض n اول است یا نه، حقیقتاً مناسب (به مفهوم عادی کلمه) است. اویلر از روش خود برای جستجوی اعداد اول چندین مثال ارائه داد (به بخشهای ۲ و ۸ مراجعه کنید).

۴. محك اویلر

سپس اویلر درصدد مشخص کردن همه اعداد مناسب بر آمد و در سال ۱۷۷۸ نتیجه تجربی زیر را ارائه کرد:

قضیه ۸. ۶۵ عدد زیر مناسب هستند: (جدول زیر صفحه)

او اضافه کرد که این جدول را با به کارگیری محك زیر که ما آن را «محك اویلر» می نامیم، «خیلی راحت» به دست آورده است.

قضیه ۹. عدد $m \in \mathbb{N}$ مناسب است اگر و فقط اگر هر عدد طبیعی

(ب) برعکس اگر عدد طبیعی فرد $n > 1$ فقط به يك طریق قابل نمایش به صورت $n = 2^2 + 3y^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbb{N}$ و اگر x و y نسبت به هم اول باشند آنگاه n عددی اول است.

اویلر همه قسمت های قضیه ۳ را بجز آن قسمت که می گوید اگر $p \equiv 3 \pmod{8}$ آنگاه p قابل نمایش به صورت $p = x^2 + 2y^2$ است، اثبات کرد. اما او فقط نیمه اول قضیه ۴ را ثابت کرد. اثبات کامل قضایای ۳ و ۴ اولین بار توسط لاگرانژ در سال ۱۷۷۵ ارائه شد. اویلر به كمك نیمه دوم قضیه ۴ مثلاً توانست نشان دهد که $12 = 3 \times 4 = 10002 + 3 \times 1000003 = n$ اول است در حالی که

$$n = 10003 = 1002 + 3 \times 12 = 162 + 3 \times 572$$

اول نیست. در حقیقت $1429 = 7 \times 204$ ، که از اینجا دو عامل آن را می توان به كمك دو نمایش مختلف پیدا کرد.

۳. اعداد مناسب

متأسفانه، به دست آوردن قضایایی نظیر قضایای ۲ و ۳ و ۴ در مورد حالت کلی $ax^2 + by^2$ امکان ندارد. این مطلب با در نظر گرفتن $x^2 + 11y^2$ روشن می شود، زیرا $12 = 11 \times 1 + 1 = 2^2 + 15$ تنها نمایش عدد ۱۵ به صورت $x^2 + 11y^2$ است اما ۱۵ يك عدد اول نیست. بنابراین اویلر به طرح سؤال زیرین رهنمون شد: کدام اعداد طبیعی m در ضابطه (م) زیر صدق می کنند؟

اگر $n > 1$ عدد طبیعی فردی باشد که دقیقاً به يك طریق قابل نمایش به صورت $n = x^2 + my^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbb{N}$ آنگاه n يك عدد اول است.

اگر عددی طبیعی مانند m در ضابطه (م) صدق کند، يك عدد مناسب نامیده می شود. اویلر اعداد مناسب را در سال ۱۷۷۸ به طور دقیقتر از راه زیر معرفی کرد:

تعریف ۵. يك صورت $ax^2 + by^2$ که در آن $a, b \in \mathbb{N}$ و $(a, b) = 1$ ، يك صورت مناسب نامیده می شود هرگاه در شرط زیر صدق کند:

هر عدد طبیعی $n > 1$ که دقیقاً به يك طریق قابل نمایش به صورت $n = ax^2 + by^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbb{N}$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۱۳	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۲	۲۴	۲۵	۲۸
۳۰	۳۳	۳۷	۴۰	۴۲	۴۵	۴۸	۵۷	۵۸	۶۰
۷۰	۷۲	۷۸	۸۵	۸۸	۹۳	۱۰۲	۱۰۵	۱۱۲	۱۲۰
۱۳۰	۱۳۳	۱۶۵	۱۶۸	۱۷۷	۱۹۰	۲۱۰	۲۳۲	۲۴۰	۲۵۳
۲۷۳	۲۸۰	۳۱۲	۳۳۰	۳۴۵	۳۵۷	۳۸۵	۴۰۸	۴۶۲	۵۲۰
۷۶۰	۸۴۰	۱۳۲۰	۱۳۶۵	۱۸۴۸					

n به صورت

$$n = m + x^2 < 2m, x \in \mathbb{N}, (x, m) = 1$$

الزاماً به یکی از چهار صورت $n = p^2$ ، $n = 2p$ ، $n = p$ یا $n = 2^k$ باشد، که در آنها p يك عدد فرد اول است و $s \in \mathbb{N}$.

این محك، به نوبه خود، توسط اویلر از نتیجه زیر به دست آمده که اشاره آشکاری به اعداد مناسب ندارد.

قضیه ۱۰. اگر يك عدد مرکب $r \cdot s$ ، $(r > s)$ فقط به يك طریق قابل نمایش به صورت $x^2 + my^2$ باشد که در آن $x, y \in \mathbb{N}$ و $(x, my) = 1$ و $(rs, mxy) = 1$ ، آنگاه بینهایت عدد مرکب دیگر با همین خاصیت وجود دارند. به ویژه، اگر این فرض برقرار باشد، همواره چنین عدد مرکبی با ضابطه $rs < 2m$ وجود دارد.

اویلر خودش محك مذکور در قضیه ۹ را در مورد اعداد $m = 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ به کار برد. به عنوان مثال، برای

$$m = 13 \text{ داریم } 13 + 1^2 = 14 = 2p$$

$$13 + 2^2 = 17 = p$$

$$13 + 3^2 = 22 = 2p$$

$$13 + 4^2 = 29 = p$$

$$13 + 5^2 = 38 = 2p$$

$$13 + 6^2 = 49 = p^2$$

بنابراین $m = 13$ بایستی مناسب باشد. همین طور برای $m = 15$ داریم

$$15 + 1^2 = 16 = 2^4$$

$$15 + 2^2 = 19 = p$$

$$15 + 4^2 = 31 = p$$

و نتیجه می گیریم که ۱۵ مناسب است. از طرف دیگر، ۱۴ مناسب نیست زیرا

$$14 + 1^2 = 15 = 3 \times 5.$$

همان طور که گروب در سال ۱۸۷۴ خاطر نشان کرد، برهان اویلر برای قضیه ۹ شکافهای مهمی دارد. با این حال، گروب توانست نشان دهد که این محك حقیقتاً لازم است اما مسأله کافی بودن محك، علی رغم اظهار گاوس در کتاب حساب دیوفانتی که «اثبات آن آسان است»، همچنان يك مسأله حل نشده است. بدین ترتیب بایستی برهانی را که برای مناسب بودن ۱۳ و ۱۵ ارائه شد ناقص دانست. از طرف دیگر، گروب از نظریه صورتهای درجه دوم گاوس محکی را به دست آورد که به محك اویلر شبیه است (به قضیه ۱۵ نگاه کنید).

هنگامی که اویلر دید علی رغم کوششهای خود برای ادامه محاسباتش تا ۳۰۰۰ و بعداً تا ۱۰۰۰۰، عدد مناسب دیگری بزرگتر از ۱۸۴۸ نیافتاده است متعجب شد، و برای درك این پدیده، توزیع اعداد مناسب را مطالعه کرد و ۱۰ خاصیت زیر را یافت:

قضیه ۱۱. ۱. اگر m مناسب باشد و $m = t^2$ ، آنگاه $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

۲. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 3 \pmod{4}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب است.

۳. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 4 \pmod{8}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب است.

۴. اگر $k^2 m$ مناسب باشد، آنگاه m مناسب است.

۵. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 2 \pmod{3}$ ، آنگاه $9 \nmid m$ مناسب است.

۶. اگر $m > 1$ مناسب باشد و $m \equiv 1 \pmod{4}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب نیست.

۷. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 2 \pmod{4}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب است.

۸. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 8 \pmod{16}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب نیست.

۹. اگر m مناسب باشد و $m \equiv 16 \pmod{32}$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب نیست.

۱۰. اگر m مناسب باشد و به ازای يك عدد اول p داشته باشیم $m + a^2 = p^2 < 2m$ ، آنگاه $4 \nmid m$ مناسب نیست.

برهانهای اویلر برای خاصیتهای ۴، ۶، ۸ و ۹ بالا، کاملاً دقیق نبودند اما گروب در سال ۱۸۷۴ توانست اثبات کاملی از قضیه ۱۱ ارائه دهد. گروب که در حقیقت اثباتهایی از صورتهای تعمیم یافته چندتا از خاصیتهای فوق به دست داد، نشان داد که همه آنها پیامدهای سادهای از نظریه صورتهای درجه دوم گاوس هستند.

۵. محك گاوس و محك گروب

قضیه اصلی گاوس درباره اعداد مناسب، که مقاله گروب مبتنی بر آن است، به شرح زیر است:

قضیه ۱۲. الف) عدد طبیعی m مناسب است اگر و فقط اگر هرگونه صورتهای درجه دوم دوقابی صحیح اولیه سره با دترمینان $d = -m$ دقیقاً شامل يك رده سره از صورتهای اولیه سره باشد، یا به عبارت دیگر ب) عدد طبیعی m مناسب است اگر و فقط اگر هر رده سره از صورتهای درجه دوم دوقابی صحیح اولیه سره با دترمینان $d = -m$ يك رده مبهم سره از صورتهای اولیه سره باشد.

برای ملاحظه تعریف این مفاهیم و جزئیات بیشتر به [۶] یا [۷]، که مقاله ای در دست چاپ است، مراجعه کنید.

گاوس مسلماً اثباتی از این قضیه به دست داده است، اما امتیاز انتشار اثبات برای اولین بار (۱۸۷۴)، به گروب متعلق است. از محك قضیه ۱۲ فوراً قضیه زیر نتیجه می شود که قضیه ۶ حالت خاصی از آن است:

قضیه ۱۳. اگر a, b, a', b' اعدادی طبیعی با ضابطه $(a, b) = 1$ ، $(a', b') = 1$ و $ab = a'b'$ باشند آنگاه صورت $F = ax^2 + by^2$ مناسب است اگر فقط اگر $F' = a'x^2 + b'y^2$

$$30 + 1^2 = 31 = p$$

$$30 + 2^2 = 34 = 2 \times 17 = 2p$$

$$30 + 3^2 = 39 = 3 \times 13 = 3p$$

و بنابراین $m = 30$ مناسب است. در نتیجه $m = 120$ نیز مناسب است.

ع. مسأله کامل بودن جدول اویلر

این حدس اویلر که جدولش (قضیه ۸) شامل همه اعداد مناسب است، همچنان یک حدس اثبات نشده است، ولی به نظر می رسد این مسأله در شرف حل باشد. اولین پیشرفت در این زمینه، مروهون چاولا است که در سال ۱۹۳۴ نشان داد فقط تعدادی متناهی عدد مناسب وجود دارد. اثبات او مبتنی بر مقاله‌ای از هایلبرون^۲ و نیز این خاصیت است که

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h(d)}{g(d)} = \infty$$

که در آن $h(d)$ تعداد رده‌های سره و $g(d)$ تعداد گونه‌های صورت‌های درجه دوم دوتایی با دترمینان d است. با استفاده از فرمول مجانبی زیگل و فرمول عدد رده‌ای تحلیلی، بریگز و چاولا (۱۹۵۲) و بعداً گراسوالد (۱۹۶۳) و واینبرگر (۱۹۷۳) گام‌های دیگری در حل این مسأله برداشتند. نتیجه این پیشرفت‌ها آن است که در حقیقت این جدول کامل است مگر احتمالاً با یک عدد بیشتر^۱

۷. کاربردها

اویلر اعداد مناسب را برای جستجوی اعداد اول یا تشخیص اول بودن اعداد مفروض به کاربرد و نتایج خوبی به دست آورد. او علاوه بر مثالهایی که قبلاً در بخش ۲ ذکر شد، به وسیله عدد مناسب $m = 232$ همه اعداد اول p به شکل $p = 1 + 232y^2$ با ضابطه $1 \leq y \leq 300$ را تعیین کرد. به علاوه، اعداد اول به شکل $p = x^2 + 13y^2$ و $p = 40x^2 + 1848y^2$ را مورد مطالعه قرار داد و به وسیله همه اعداد اول p به شکل $p = 197^2 + 1848y^2$ با ضابطه $1 \leq y \leq 100$ را یافت. در حقیقت، ۲۲ عدد اول از این نوع وجود دارد و بزرگترین آنها عبارت است از

$$P = 197^2 + 1848 \times 100^2 = 185188090.$$

تا آن زمان این عدد بزرگترین عدد اول شناخته شده به استثنای عدد اول مرسن $1 - 2^{31}$ بود که آن هم توسط اویلر کشف شده بود.

از نظریه هیأت‌های رده‌ای و از محک گاوس، می‌توان یکی دیگر از خاصیت‌های مهم اعداد مناسب را نتیجه گرفت که اینک به شرح آن می‌پردازیم:

مناسب باشد.

این قضیه از محک گاوس (قضیه ۱۲) نتیجه می‌شود، به این ترتیب که F' و F صورت‌های اولیه سره‌اند زیرا $(a, b) = 1$ و $(a', b') = 1$ و دارای دترمینان یکسان $d = -ab = -a'b'$ هستند.

محک گاوس همراه با نظریه تحویل صورت‌های درجه دوم اساس محک زیر است، که قابل انتساب به گروب می‌باشد.

قضیه ۱۴. عدد طبیعی m مناسب است اگر و فقط اگر هر عدد طبیعی n که به صورت $n = m + x^2$ با ضابطه $x \in \mathbb{N}$ و $x < \sqrt{m/3}$ باشد به شکل $n = rs$ ، با ضابطه $r, s \in \mathbb{N}$ و $r \geq 2x$ و $s \geq r$ تجزیه نشود مگر اینکه $r = s$ یا $r = 2x$.

توجه کنید که طبق محک گروب نیز ۱۳ و ۱۵ اعداد مناسب‌اند. حال اجازه دهید که چند مثال دیگر را مورد بررسی قرار دهیم. برای $m = 48$ تجزیه‌های زیر را داریم

$$48 + 1^2 = 49 = 7 \times 7 : r = s$$

$$48 + 2^2 = 52 = 4 \times 13 : r = 2x$$

$$48 + 3^2 = 57$$

$$48 + 4^2 = 64 = 8 \times 8 : r = s$$

هیچ تجزیه دیگری به صورت $n = rs$ با ضابطه $r \geq 2x$ و $s \geq r$ وجود ندارد. بنابراین، $m = 48$ مناسب است. به همین طریق $m = 60$ مناسب است زیرا

$$60 + 1^2 = 61$$

$$60 + 2^2 = 64 = 8 \times 8 : r = s$$

$$60 + 3^2 = 69$$

$$60 + 4^2 = 76$$

اما $m = 11$ مناسب نیست زیرا داریم $11 + 1^2 = 12 = 3 \times 4$ و در آن $s > r > 2x$.

گروب همه اعداد مناسبی را که قابل قسمت بر یک مجذور $k^2 \neq 1$ هستند، نص کرد. او برای بقیه این اعداد محک زیر را به دست آورد که شبیه محک اویلر است که به طوری که اشاره شد تاکنون ثابت نشده است.

قضیه ۱۵. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ بزرگ مجذور کامل قابل قسمت نباشد و $m \neq 3, 7, 15$. آنگاه m مناسب است اگر و فقط اگر هر عدد طبیعی n به شکل $n = m + x^2$ با ضابطه $x \in \mathbb{N}$ و $x < \sqrt{m/3}$ به شکل $n = 2tp$ ، $n = tp$ یا $n = p^2$ نیز باشد، که در آن t یک مقسوم علیه m و p یک عدد فرد اول است.

به عنوان مثال، عدد $m = 120$ را بررسی می‌کنیم. به موجب خاصیت‌های ۷ و ۱۴ از قضیه ۱۱ نتیجه می‌گیریم که $m = 4(2k + 2)$ ، $k \in \mathbb{N}$ مناسب است اگر و تنها اگر $2k + 2$ مناسب باشد. بنابراین ۱۲۰ مناسب است اگر و فقط اگر ۳۰ مناسب باشد. با به کارگیری قضیه ۱۵، نظر به اینکه ۳۰ غیر قابل تقسیم بر یک مجذور کامل است در می‌یابیم که

قضیه ۱۶. فرض کنید m عددی طبیعی است. آنگاه همه اعداد اول p به شکل $p = x^2 + my^2$ با ضابطه $x, y \in \mathbb{N}$ می توان با شرایط همبستگی نسبت به يك پیمانه f مشخص کرد اگر دقتها اگر m مناسب باشد.

عدد f را هادی m می نامند. به خاطر آورید که برای $m = 1, 2, 3$ به ترتیب $f = 4, 8, 3$ را پیدا کردیم (به قضایای ۱، ۳ و ۴ مراجعه کنید).

ولی این مسیرهای تحقیق و این نتایج به هیچ وجه همه امکانات نهفته در مفهوم اعداد مناسب اوایل را به کار نگرفته اند. برای اینکه کار برد کاملاً متناوبی را نام برده باشیم، به کاری از هیلف اشاره می کنیم که در سال ۱۹۶۳ نشان داد (به صفحه ۵۷، [۱] مراجعه کنید) که اعداد مناسب با مسائل مقداره ویژه در فیزیک مرتبط اند. میراث ریاضی اوایل حقیقتاً گنجینه ای لایزال است.

مراجع

1. Baltes, H.P. and Hilf, E. R.: Spectra of Finite Systems. Bibliographisches Institut, Zürich, 1976
2. Chowla, S.: An Extension of Heilbronn's Class Number Theorem. Quarterly. J. Math. (Oxford) 5 (1934), 304-307
3. Chowla, S. and Briggs, W.E.: On discriminants of binary quadratic forms with a single class in each genus. Canadian J. Math. 6 (1954), 463-470
4. Euler, L.: Opera Omnia. Series Prima. Teubner, Leipzig, 1911
5. Fermat, P.: Oeuvres. Tome 2, 212-217, Gauthier-Villars, Paris, 1894
6. Frei, G.: On the Development of the Genus of Quadratic Forms. Ann. Sci. Math. Québec 3 (1979), 5-62
7. Frei, G.: Les nombres convenables de Leonhard Euler. (To appear)
8. Gauss, C.F.: Disquisitiones arithmeticae. Leipzig, 1801 (or: Untersuchungen über höhere Mathematik. Herausgegeben von H. Maser, Springer, Berlin, 1889)
9. Grosswald, E.: Negative discriminants of binary quadratic forms with one class in each genus. Acta Arithmetica 8 (1963), 295-306
10. Grube, F.: Ueber einige Eulersche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen. Zeitschrift für Mathematik und Physik 19 (1874), 492-519
11. Lagrange, J. -L.: Recherches d'arithmétique, 1773 et 1775. Oeuvres, Tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1867
12. Steinig, J.: On Euler's Ideonal Numbers. Elemente der Mathematik 21 (1966), 73-88
13. Weinberger, P. J.: Exponents of the class groups of complex quadratic fields. Acta Arithmetica 22 (1973), 117-124

- Günther Frei, "Leonhard Euler's convenient numbers," *The Mathematical Intelligencer*, (3) 7 (1985) 55-64.