دستاوردهای پژوهشهای اخیر در ریاضیات

(۱)

مطلبی که در اینجا می‌خوانید، ترجمهٔ یکی از پیوستهای گزارش معروف به گزارش دیویدII است که در سال ۱۹۹۰ زیر نظر مجمع ملی تحقیقات آمریکا انتشار یافته‌است. در سال ۱۹۸۴ گزارش مشابهی انتشار یافت که به نام رئیس کمیتهٔ تهیه‌کنندهٔ آن به گزارش دیوید معروف شد و ترجمهٔ یکی از پیوستهای آن را تحت عنوان "صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات" در سه شمارهٔ اول نشر *ریاضی* خواندید. هدف از تهیه و انتشار این گزارشها بررسی و تشریح وضع ریاضیات آمریکا و برنامه‌ریزی برای پیشبرد آن و تأمین حمایتهای مادی و معنوی از آن است. در پیوستی که ترجمه‌اش در اینجا می‌آید، مهمترین دستاوردهای پژوهش ریاضی در سطح جهانی و در دورهٔ پنجساله‌ای که به ۱۹۹۰ منتهی می‌شود، شرح داده‌شده است. اصل مطلب در شمارهٔ اکتبر سال ۱۹۹۰ مجلهٔ *نوتیسز*، ارگان خبری انجمن ریاضی آمریکا، چاپ شده‌است. ترجمهٔ این مطلب به علت طولانی بودن آن در دو شمارهٔ *نشر ریاضی* می‌آید.

در این پیوست [ازگزارش دیویدII] شرحی از دستاوردهای پژوهشی علوم ریاضی و چشم‌اندازها و امکاناتی که این دستاوردها پدید آورده‌اند می‌آید. غنا و تنوع این نتایج که قسمتهای اصلی ریاضیات و حوزهٔ وسیعی از کاربردها را در بر می‌گیرند، نشانگر دقّت، بارآوری، ژرفا، و وسعت پژوهشهای جاری در علوم ریاضی است. وحدت‌یابی و پیوندهای ثمربخش حوزه‌های اصلی ریاضیات، افزایشِ روزافزون کاربردهای ریاضیات (که اغلب با پیدا شدن کاربردهای غیرعادی و غیرمنتظره همراه است) و نقش رو به رشد کامپیوتر، از موضوعهایی هستند که در این توصیفها نشان داده می‌شوند.

تأکید بر این نکته ضروری است که این فهرست فقط گزیده‌ای از دستاوردها را در بردارد. منظور این نبوده که فهرستی جامع و کامل یا دستورکاری برای مطالعات آینده ارائه شود. بسیاری از نتایج و چشم‌اندازهای مهم، به علت کمبود جا در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرند. اگر الگوهای گذشته تکرار شوند، نتایج جدیدی که اکنون نمی‌توانیم تصور آنها را بکنیم به‌دست خواهند آمد و امکانات و راههای نوینی پدید خواهند آورد؛ نکتهٔ جالب و مهم این است که بسیاری از دستاوردهای مورد بحث در این پیوست، در پیوستِ "صورتبندی نظم عالم: نقش ریاضیات" ازگزارش دیوید ۱۹۸۴ پیش‌بینی نشده‌بودند[1].

* * * * *

۱. پیشرفتهای جدید در زمینهٔ معادله‌های دیفرانسیل جزئی

یک روند مهم در ۱۵ سال گذشته، پیشرفت بزرگی بوده، که در درک معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی به‌دست آمده است. بسیاری از پدیده‌های فیزیکی از قبیل جریان سیال، میدانهای الکترومغناطیسی، گرانش، وگرما با معادله‌های دیفرانسیل جزئی توصیف می‌شوند. به‌طور کلی می‌توان گفت که معادله‌های دیفرانسیل جزئی خطی بر ارتعاشهای کوچک یا آشفتگیهای کوچک نسبت به وضعیت تعادل حاکم‌اند و معادله‌های غیرخطی برآشفتگیهای بزرگ. دنیای واقعی، غیرخطی است. از اواسط دهٔ ۱۹۷۰، شناخت ما از معادله‌های غیرخطی بسیار عمیقتر شده است. و بالاخره، در همین چند سال گذشته، برخی از مهمترین معادله‌های مربوط به هندسه، فیزیک، و مهندسی را با موفقیت مطالعه کرده‌اند. از جملهٔ مهمترین مسأله‌هایی که اخیراً حل شده‌اند، مسأله‌های زیرند.

تشکیل شوک در موجهای غیرخطی

در فضای یک بعدی، یک آشفتگی اولیهٔ کوچک هموار، طبق هر معادلهٔ موج واقعا غیرخطی پس از مدت محدودی به‌صورت شوک منتشر می‌شود. در بیش از چهار بعد، چنین شوکهایی تشکیل نمی‌شوند. در سه بعد، «بیشتر» معادلات موج به شوک می‌انجامند ولی این امر مدت زمانی که به‌صورت نمایی است طول می‌کشد. به‌علاوه، ردهٔ مهمی از معادلات (آنهایی که در یک خاصیت هندسی طبیعی موسوم به «شرط پوچی» صدق می‌کنند)، شوک نمی‌سازند. اخیراً پیشرفتهای مهمی در مورد یکی از مهمترین معادلات غیرخطی یعنی معادلات اینشتین برای موجهای گرانشی به‌دست آمده‌است. تصویر مبسوطی از نحوهٔ رفتار موجهای گرانشی، در مسافتهای طولانی و پس از مدت زمانی طولانی، در دست داریم. هنوز مسأله‌های بسیار دشوار و جالبی در زمینهٔ معادلات اینشتین باقی مانده است که از میان آنها، تشکیل سیاهچاله‌ها توجه خاصی را می‌طلبد.

---

[1] . در اینجا فهرست نام افرادی که به تهیهٔ پیوست کمک کرده‌اند، فهرست مباحث پیوست و خلاصهٔ آنها آمده‌است که در ترجمه حذف شده‌ـم.

معادله‌های بیضوی

ردهٔ مهم دیگری از معادلات دیفرانسیل جزئی در هندسه، وقتی می‌خواهیم رویه‌هایی با خمیدگیِ از پیش تعیین شده بسازیم، مطرح می‌شوند. این معادلات، معادلات دیفرانسیل بیضوی غیرخطی، نام دارند. اخیراً یک قضیهٔ کلی در بارهٔ منظم بودن جوابهای معادلات بیضوی با شرایط مرزی ثابت شد که بررسی شرایط مرزی را که ناگزیر در مسائل واقعی پیش می‌آیند امکان‌پذیر ساخت. این نتیجه، در تحلیل معادلات دیفرانسیل جزئی گامی اساسی به‌جلو بود.

همچنین پیشرفت مهمی در زمینهٔ بعضی معادلات بیضوی تکین یعنی معادلاتی که «در حد بحرانی غیرخطی»اند حاصل شده است. اگر می‌شد جملهٔ غیرخطی در این‌گونه معادلات قدری ضعیفتر شود، آنگاه معادله را می‌توانستیم به‌عنوان اختلال کوچکی از مسألهٔ خطی در نظر بگیریم. ولی در صورتی که غیرخطی بودن، به‌حدی بحرانی برسد این‌کار ناممکن می‌شود. معادلهٔ برجسته‌ای از این نوع، در مسألهٔ یامابه (Yamabe) مطرح می‌شود که در آن، تغییر شکل یک خمینهٔ خمیده تا زمانی که خمیدگی (اسکالر) ثابتی داشته باشد، خواست مسأله است. اخیراً جواب کاملی برای این مسأله پیدا شده است.

مسأله‌های آزاد مرز

کوه یخی که در دریا در حال ذوب شدن است، جریان روغن و آب از یک منبع، و رشد بلور، مثالهایی از مسائل آزاد مرز هستند که معادلات دیفرانسیل جزئی بر آنها حاکم‌اند. در مورد کوه یخ در حال ذوب، جریان دما در کوه یخ تابع یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی سهموی است، جریان دما در آبِ اطراف کوه یخ از معادلهٔ دیگری تبعیت می‌کند، و مرز بین یخ و آب با معادلهٔ سومی مشخص می‌شود. به‌این‌ترتیب دستگاهی از سه معادله تشکیل می‌شود. دشواری این مسأله ناشی از این واقعیت است که حوزه‌های برقراری این معادلات دیفرانسیل با زمان تغییر می‌کنند و پیشاپیش معلوم نیستند. تکنیکهایی که اخیراً پیشنهاد شده‌اند به قضایای جدید انتظام در مسائل آزاد مرز انجامیده‌اند، و نوید نتایج بیشتری را می‌دهند.

معادله‌های دیفرانسیل جزئیِ دقیقاً حل‌پذیر

نکتهٔ جالب توجه این است که تعدادی از معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی، دقیقاً حل‌پذیرند. این معادله‌ها جوابهایی پایدار (سولیتونهایی) را که حتی پس از برهمکنش با سولیتونهای دیگر پایدار می‌مانند، می‌پذیرند. اخیراً از معادلات سولیتونها برای حل مسألهٔ شوتکی (Schottky) که مسألهٔ حل نشدهٔ مهمی در نظریهٔ رویه‌های ریمانی بود استفاده شده است.

برای روشن شدن شیوهٔ حل معادله‌های سولیتونی می‌توان موردِ معادلهٔ کورتوِگ ـ دووریز (Korteweg-de Vries یا به اختصار، KdV) را مثال آورد. این معادله، انتشار امواج آب را در یک کانال تنگ و طولانی توصیف می‌کند. در هر لحظه از زمان، فرض می‌کنیم موج آب به شکل صلب و ثابت باشد. سپس این شکل صلب را با ذرات آزمایشی کوانتیدهٔ خیالی بمباران می‌کنیم. با مطالعهٔ نحوهٔ پراکندگی ذرات می‌توان شکل موج را بازسازی کرد. پس، داده‌های مربوط به پراکندگی، توصیف دیگری از موج را در یک زمان مشخص امکانپذیر می‌سازند. بنابراین، به‌جای اینکه بپرسیم شکل موج چگونه با زمان تغییر می‌کند، می‌توان پرسید که داده‌های مربوط به پراکندگی چگونه با زمان تغییر می‌یابند. اگر معادلهٔ KdV بر حسب داده‌های پراکندگی بازنویسی شود، بسیار ساده می‌شود و جواب کامل را می‌توان با جستجو و آزمون یافت.

به‌ویژه، رفتار بسیار پایدار سولیتونها برای حالتِ معادلهٔ KdV تبیین می‌شود.

تعدادی از معادله‌های دیفرانسیل جزئی را که از نظر فیزیکی جالب‌اند، اخیراً به روشهای مشابهی کاملاً حل کرده‌اند؛ از جملهٔ آنها، معادلهٔ کادومتسف‌ـپتویاشویلی (Kadomtsev-Petviashvili یا به اختصار، K-P) برای امواج آبِ تقریباً دوبعدی، و معادلات سینوسی گوردون و معادلات غیرخطی شرودینگر است. جوابهای صریح معادلهٔ K-P نتایج آزمایشها در مخازن آب را با موفقیت پیش‌بینی کرده‌اند، و ترکیبی از تحلیل نظری و عددی برای مدلسازی رفتار یک پیوند جوزفسن به‌کار رفته است. ارتباطهای جالب توجهی بین جوابهای صریح موجهای غیرخطی، جوابهای دقیق مسائل مکانیک آماری در دوبعد، و چندجمله‌ایهای جونز مربوط به گرهها پیدا شده است که برخی از آنها را ذیلاً در بخشهای مربوط به گذارهای فاز و توپولوژی شرح می‌دهیم.

۲. گرداب در جریانِ سیال

یک موضوع مهم در بسیاری از مسأله‌ها از جمله مسألهٔ تعیین مسیر گردباد و مطالعهٔ جریان عبور خون از قلب، خوب مخلوط شدن سوخت در کاربوراتورها، پرواز هواپیما و کشف کهکشانهای دور از روی حرکت جتهای کهکشانی به‌وسیلهٔ تلسکوپ رادیویی، حرکت گردابی است.

بیشتر این‌گونه پدیده‌ها به‌وسیلهٔ مجموعهٔ پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی موسوم به معادلات ناویرـاستوکس توصیف می‌شوند. این معادله‌ها از قوانین حرکت نیوتن به‌دست می‌آیند و اثرهای اصطکاکی چسبندگی را در بر دارند. شهود ما حکم می‌کند که این اثر اصطکاکی در هوا و یا در آبی که به‌سرعت در حال حرکت است فوق‌العاده کوچک باشد، و آزمایشها هم این مطلب را تأیید می‌کنند. وقتی این ضریب صفر می‌شود معادلات دیفرانسیل جزئی ساده‌تری به‌دست می‌آیند که به معادلات اویلر موسوم‌اند. این معادلات برای بررسی حرکت و تجمع گردابها دقت کافی دارند.

با شبیه‌سازیهای کامپیوتری بزرگ مقیاسی که اخیراً با استفاده از این معادلات انجام شده، به‌طور غیرمنتظره‌ای آشکار شده است که لایه‌هایی که چرخشها در آنجا روی‌هم انباشته می‌شوند، به‌طرز جالبی تجمع می‌کنند. در اثر این کشفیات، نظریهٔ ریاضی جدیدی در باب «نوسانها و تمرکزها» با استفاده از نظریهٔ پتانسیل و اندازه‌های برخالی (هاوسدورف) پدید آمده است. انواع تازه‌ای از «جوابها» برای معادلات اویلر ارائه شده است. یکی از دستاوردهای این نظریه، ضابطهٔ صریحی برای آزمودن این امر است که آیا محاسبات عددی برای لایه‌های گردابی واقعاً به جوابهای معادلات اویلر همگرایند یا خیر. همگرایی در مورد بسیاری از محاسبات مهم محقق شده است.

لایه‌های گردابی درکاربردهایی که ذکرکردیم به سیالی مربوط می‌شوند که با سرعت زیادی حرکت می‌کند ولی سرعتش از سرعت صوت خیلی کمتر است. وقتی لایه‌های گردابی فراصوتی هستند، مثلاً در مورد سفینه‌های فضایی جدید و در مورد جتهای کهکشانی در اختر فیزیک، پدیده‌های کاملاً متفاوتی رخ می‌نمایند. موفقیتی که اخیراً با تلفیق محاسبات کامپیوتریِ بزرگ مقیاسِ و نظریهٔ جدید ریاضی به‌دست آمده، کشف مکانیسم جدیدی از ناپایداری غیرخطی برای لایه‌های گردابی فراصوتی است. شبیه‌سازیهای بزرگ مقیاسِ جدید نشان داده‌اند که همهٔ لایه‌های گردابی فراصوتی، ناپایداری غیرخطی دارند و به این ترتیب، پیش‌بینیهای مبنی بر پایداری را که در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ به‌عمل می‌آمد، باطل کرده‌اند.

یکی از مهمترین مسأله‌های دینامیک سیالات، که در ادامهٔ مطالعهٔ گردابها مطرح می‌شود، فهم تلاطم است. تلاطم وقتی روی می‌دهد که اثر اصطکاکی

فوق‌العاده کوچک باشد، ولی قابل چشم‌پوشی نباشد. فهم تلاطم مستلزم تحلیل ریاضی جوابهای معادلات اویلر و ناویر-استوکس در حد چسبندگی کوچک است. این تحلیل در حال شکل‌گیری است.

۳. طراحی هواپیما

در طی پنج سال گذشته شبیه‌سازیهای کاملی از هواپیما انجام شده است. چنین محاسبه‌ای معمولاً با استفاده از معادله‌های مانای اویلر آغاز می‌شود که جریان خارج از قشر مرزی را به‌دقت توصیف می‌کنند. این جریانها تا زمانی که عدد ماخ، M، به ۱ نزدیک نشده، هموارند. برای اعداد ماخی که در حدود سرعت صوت‌اند یعنی کوچکتر از ۱ ولی نزدیک به آن هستند، شوکهای کوچکی در یک بالوارهٔ (airfoil) معمولی ایجاد می‌شود که نیروی وایس‌کشی (drag) را بسیار افزایش می‌دهد. بنا به یک قضیهٔ ریاضی، تقریباً در هیچ حالتی از این‌گونه شوکها نمی‌توان اجتناب کرد. چون راندمان هواپیما در حالت کروز ینگ[1] تقریباً متناسب با ML/D است که در آن L نیروی بالابر و D نیروی وایس‌کشی است، برای تولیدکنندگان ضرورت دارد هواپیمایی طراحی کنند که شوکها را به حداقل برساند. البته اگر M از ۱ تجاوز کند، شوکها قابل اجتناب یا حتی قابل کاهش نیستند و راندمان هواپیما ـ مانند راندمان کنکورد ـ اندک است. در ۱۵ سال گذشته، تلاش زیادی برای طراحی مقاطع عرضی دوبعدی بالواره به‌طوری که در یک سرعت کروزینگ یا در محدوده‌ای از این سرعتها با عدد M کوچکتر از ۱، کمترین شوکها را داشته باشند، به‌عمل آمده‌است. وقتی مقطعی از یک بال انتخاب می‌شود، جریان در شرایط طراحی محاسبه می‌شود و با نتایج حاصل از تونلهای باد مقایسه می‌گردد.

برای انجام دادن محاسبه در مورد کل هواپیما، امکانات محاسباتی جدید به‌کار گرفته می‌شود. شکلهای پیچیدهٔ هندسی، ریاضیات جدیدی را، نه‌تنها برای گسسته سازی معادلات بلکه همچنین برای محاسبه کردن داده‌های بسیار زیاد، طلب می‌کند. در حال حاضر مسأله این است که شوکهای با ابعاد بالاتر و لایه‌های گردابی را مشخص کنند تا همان‌طور که در بخش پیشین اشاره کردیم اثرات چسبندگی پیش‌بینی شود. مفیدترین نتیجهٔ شبیه‌سازیها تعیین تغییرات فشار سطح برحسب پارامترهایی از قبیل عدد ماخ و زاویهٔ حمله (angle of attack) است. تغییر دادن پارامترها در کامپیوتر خیلی راحت‌تر از کار کردن با اعداد بیشماری است که از آزمایشها در یک تونل باد به‌دست می‌آیند.

مدل ساده‌ای که از معادله‌های اویلر به‌دست می‌آید، از آنجا که پرواز هواپیما اساساً پایدار است، بسیار خوب است ولی تعدادی از عوامل اساسی در آن نادیده گرفته می‌شوند. علی‌رغم تلاشهای زیاد، هنوز هیچ مدل مناسب ریاضی برای قشر مرزی متلاطم وجود ندارد و وقتی چنین مدلی پیدا شود، میزان محاسبات را دستکم به‌اندازهٔ افزودن یک بعد افزایش می‌دهد. هدف نهایی طراحی، انتخاب یک توزیع فشار بهینه و سپس یافتن شکلی برای هواپیماست که با آن متناظر باشد. این‌گونه مسائل هم میزان محاسبات لازم را بسیار افزایش می‌دهند. امید دست‌اندرکاران این است که با افزایش سرعت سخت‌افزار کامپیوتر و اصلاح الگوریتمها، رسیدن به این هدفها میسر شود.

موضوعی که از اهمیت خاص برخوردار است، طراحی موتورهای هواپیماست. یک مثال معمولی در این زمینه، شبیه‌سازی کمپرسور توربینی است که در آن، خمهای دمای لحظه‌ای محاسبه می‌شوند. این محاسبه مبتنی است بر معادلات ناویر-استوکس وابسته به زمان. شبیه‌سازیها، «رد»های چسبندگی را که به‌وسیلهٔ تیغه‌ها ایجاد می‌شود نشان می‌دهند و نیز نشان می‌دهند که چگونه بعضی از تیغه‌ها، این ردها را به قطعات مختلف تجزیه می‌کنند و الگوی جریان فوق‌العاده پیچیده‌ای را پدید می‌آورند. توصیف و تنظیم این الگوی جریان بدون دردست داشتن مدلهای ریاضی قابل اعتماد و شبیه‌سازیهای کامپیوتری، دشوار یا غیرممکن است.

برای سرعتهای زیاد در ارتفاعات خیلی بالا، شبیه‌سازیهای عددی نیز در طراحی هواپیما و فضاپیما به‌کارگرفته می‌شوند. در این ارتفاعها، هوا ممکن است به اجزای اتمیش تجزیه شود و حتی سرانجام یونیزه شود و وضعیتی پدید آید که شبیه‌سازی آن به‌وسیلهٔ آزمایشهایی که در زمین انجام می‌گیرند فوق‌العاده دشوار باشد. در نتیجه، در فرایند طراحی هواپیماهای سریع‌السیر یا سفینه‌هایی که وارد جو می‌شوند، باید از شبیه‌سازیهای عددی جریان همراه با مدلهای شیمیایی مناسب هوا استفاده شود.

گولدهامر و رابرت بهترین توصیف را از وضعیت این رشته به‌طور خلاصه به‌دست داده‌اند:

> امروز این رشته به مرحله‌ای از پیشرفت رسیده‌است که برای مهندس طراح، دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) دیگر موضوع آزار دهنده‌ای نیست که گهگاه به‌وسیلهٔ پژوهشگری تحمیل شود بلکه یک ابزار مقدماتی طراحی آئرودینامیکی در هر مسأله‌ای است و تونل باد هم بیشتر نقش یک ابزار ارزیابی و تأیید نتایج را پیدا کرده است.

۴. فیزیولوژی

در قلمرو فیزیولوژی، مدلسازی ریاضی در ده سال اخیر مقام شایسته‌ای یافته است. امروزه مدلهایی محاسباتی از قلب، کبد، لوزالمعده، گوش، و بسیاری اندامهای دیگر در دست داریم. خیلی از این مدلها مبتنی بر دینامیک سیالات‌اند.

دینامیک سیالات فیزیولوژیک، تاریخچه‌ای طولانی و درخشان دارد. لئوناردو داوینچی اول‌بار گردابهایی را توصیف کرد که در پشت دریچه‌های قلب تشکیل می‌شوند و به دریچه‌ها امکان می‌دهند وقتی که هنوز جریان خون به سمت جلو ادامه دارد، با بسته شدن، از بازگشت خون جلوگیری کنند. لئونهارت اویلر اولین کسی بود که معادلات دیفرانسیل جزئی را برای جریان خون در شریانها نوشت. با شکوفایی تکنولوژی کامپیوتر و الگوریتمهای عددی در دوران اخیر، امکان بی‌سابقه‌ای برای شبیه‌سازی عملکردهایی از بدن انسان که با دینامیک سیالات تطبیق می‌کند، فراهم شده است؛ این شبیه‌سازی برای تشخیص و درمان بیماریها به حد کافی دقت دارد.

مثلاً، جریان خون در قلب با دستگاه معادلات مربوط به حرکت دیواره‌های ماهیچه‌ای قلب، لتهای کشسان دریچه‌های قلب، و خونی که در حفره‌های قلب جریان دارد، توصیف می‌شوند. جوابهای کامپیوتری به ما امکان می‌دهند که هر دو حالت طبیعی و معیوب را مطالعه کنیم و به طراحی دستگاههای عاریتی از قبیل دریچه‌های مصنوعی و قلب مصنوعی بپردازیم. روشهایی که به‌کار می‌روند بسیار عمومی‌اند و آنها را می‌توان درهر مسأله‌ای که در آن، سیالی با محیط کشسانی که هندسهٔ پیچیده‌ای دارد برهمکنش داشته باشند، به‌کار برد. از جملهٔ اینها، جریان سوسپانسیونها، لخته شدن خون، انتشار موج در گوش داخل، جریان خون در سیاهرگها و سرخرگها و جریان هوا در ریه هستند. نظیر بیشتر کارهایی که در دینامیک سیالات محاسباتی می‌شود، این امر نیز تکنولوژی کامپیوتر را به جلو برده است و پیشرفتهای بعدی، وابستگی

---

[1] یعنی هنگامی که هواپیما در ارتفاع ثابت با سرعت یکنواختی حرکت کند. ـ م.

زیادی به تکامل و فراوانی سوپر کامپیوترها در آینده دارد.

تحقیقات اولیه در این زمینه با به‌دست آوردن یک مدل کامپیوتری دوبعدی از سمت چپ قلب آغاز شد. این مدل برای آزمایشهای کامپیوتری در مورد دریچهٔ میترال ــ که تقارن مناسب را برای بررسیهای حالتِ دو بعدی دارد ــ طرح شد. آزمایشهای کامپیوتری با آزمایشهای فیزیولوژیک ــ از قبیل آزمایشهای مربوط به زمان‌بندی بهینهٔ انقباض دهلیز نسبت به‌انقباض بطن ــ مقایسه شدند و نتایج موفقیت آمیزی به‌دست آمد. در مطالعات پارامتری که به طرحهای بهینهٔ دریچه‌های قلبی عاریتی انجامید، مدل کامپیوتری به‌قدر کافی قابل اعتماد از آب در آمد.

با پیدایش سوپر کامپیوترها، امکان این کار در حالت سه‌بعدی فراهم شده است و به‌این‌ترتیب، چشم‌اندازی از کاربردهای دیگر از قبیل جریان گذرنده از دریچهٔ آئورتی، پیامدهای مکانیکی آسیب موضعی به دیوارهٔ قلب، برهمکنشهای بطن راست و چپ، الگوهای جریان خون در قلب جنینی، مکانیک سیالات بیماریهای قلبی مادرزادی، و طراحی ابزارهایی برای کمک به‌کار بطن یا حتی طراحی قلب مصنوعی کامل پدید آمده‌است.

یک کدِ «تار ــ سیال» سه‌بعدیِ همه‌منظوره تهیه شده که معادلات حرکتِ سیال تراکم‌ناپذیر چسبنده‌ای را که با سیستم شناوری از تارهای انقباض‌پذیر یا کشسان همراه شده باشد، با استفاده از معماریِ برداری کری (Cray) حل می‌کند. کد تار ــ سیال در مسائلی مورد آزمون قرارگرفته که مربوط‌اند به لولهٔ چنبره‌وار شناوری مرکب از دولایه از تارهایی که به‌طور مارپیچ حرکت می‌کنند. در یکی از این آزمونها تارها انقباض‌پذیر (یعنی ماهیچه‌ای) بودند و با فرستادن موجی از انقباض ماهیچه‌ای به اطراف لوله، تلمبه‌زنی میسر شد. با انقباضی به‌اندازهٔ کافی قوی، دیده شد که سیال با سرعت موج انتقال می‌یابد.

هم اکنون در حال ساختن یک مدل سه‌بعدیِ مبتنی بر تار از قلبِ چهار محفظه‌ای و رگهای بزرگ مجاور هستند تا همراه با کد تار ــ سیال همه منظوره‌ای که در بالا گفته شد از آن استفاده شود. این مدل شامل بطنهای راست و چپ، دریچه‌های آئورتی و ریه‌ای همراه با سینوسها و قسمتهای ابتدایی شریانهای آنها و انواعی ابتدایی از دریچه‌های میترال و سه‌لتی است.

۵. تکنیکهای تصویربرداری در پزشکی

در پنج سال گذشته، پیشرفتهای مهمی در تصویربرداریِ پزشکی به‌دست آمده که مبتنی بر بعضی از تبدیلهای معکوس در ریاضیات است. تصویربرداریِ برشی به کمک کامپیوتر (سی.تی.اسکن CAT) دیگر یک مبحث پژوهشی نیست بلکه تکنیک تثبیت شده و جاافتاده‌ای است. پیشرفتهای جدیدی در تصویربرداری به‌کمک تشدید مغناطیسی (MRI) و برش نگاری به کمک گسیل پوزیترون (ET) حاصل شده است. دو تکنیک اخیر از لحاظ ریاضی شباهتی سطحی با سی.تی.اسکن دارند زیرا در هر سه تکنیک، کمیت یا تصویر سه‌بعدیِ موردنظر به‌طور غیرمستقیم اندازه‌گیری می‌شود و تصویر واقعی با تبدیل معکوسِ کمیات اندازه‌گیری شده به‌دست می‌آید.

در روش MRI، یک آهنربای بزرگ و سیمی که دور آن پیچیده شده، میدان مغناطیسی تشدیدی داخل بدن بیمار را اندازه می‌گیرند که ناشی از چگالی نامعلومی از اتمهای ئیدروژن است که مانند آهنرباهای چرخان کوچکی عمل می‌کنند. در روش ریاضیی که برای تعیین چگالی ئیدروژن به‌کار می‌رود، از معکوس تبدیل فوریه که بر سیگنال اندازه‌گیری شده إعمال می‌شود، استفاده می‌گردد. با این کار، تعیین چگالی اسپینهای مغناطیسی یا غلظت اتمهای ئیدروژن در داخل بدن امکان‌پذیر می‌شود و این نیز به نوبهٔ خود تصویری از بافت درونی به‌دست می‌دهد که شبیه سی.تی.اسکن ولی خیلی بهتر از آن است. در این تصویر، استخوانها سیاه به‌نظر می‌رسند نه سفید، زیرا در حالی که پرتو X را بسیار تضعیف می‌کنند، چگالی ئیدروژن آنها کم است و بیشتر، از کلسیم تشکیل شده‌اند. در MRI هم مانند CAT، ریاضیات یکی از مهمترین ابزارهاست و کاربرد اصلی آن در اینجا، یافتن معکوسِ مبدّل فوریه، به‌طور سریع و دقیق است.

ریاضیات جدیدی که در برش نگاری به کمک گسیل پوزیترون (ET) بکار می‌رود بسیار متفاوت با ریاضیات به‌کار رفته در CAT یا MRI است و شامل یک فرایند تبدیل معکوس غیرخطی است. در روش ET، ترکیبی از قبیل گلوکز وارد بدن می‌شود که اتمهای کربن در این ترکیب، ایزوتوپهای رادیواکتیو کربن هستند. شمارش رادیواکتیویته به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از آشکارسازها که بدن را احاطه کرده‌اند انجام می‌گیرد. به‌کمک داده‌های حاصل از شمارش و با تبدیل معکوس، چگالی گسیل به‌دست می‌آید یعنی معلوم می‌شود که متابولیسم بدن، هستهٔ رادیواکتیو را در کجا قرار داده است. الگوریتم زیبا و ظریفی که اخیراً به‌دست آمده، یک چگالی گسیل ایجاد می‌کند که در تقریب اول، احتمال دیدن داده‌های مشاهده شدهٔ واقعی را ماکسیمم می‌کند. این الگوریتم درستنمایی ماکسیمم که مبتنی بر آمار است، محدودیت اصلی روش ET، یعنی محدودیت آن از لحاظ شمارش را مشخص می‌کند. ریاضیاتی که در اینجا به‌کار می‌رود شامل تبدیلهای فوریه نیست بلکه متضمن همگرایی یک الگوی تکرار غیرخطی است. با توجه به کاربرد عام ریاضیات، نباید تعجب کرد که این الگوریتم فقط از لحاظ کاربرد در ET تازگی دارد وگرنه الگوریتم مشهوری است که برای اولین بار در دههٔ ۱۹۶۰ در مسأله‌ای مربوط به گشودن رمزهای شوروی مطرح شد. برش نگاری به کمک گسیل، تا کنون بیشتر برای مطالعهٔ متابولیسم بدن انسان به کار رفته است تا به‌عنوان یک روش بالینی.

۶. تغییر اقلیم کرهٔ زمین

از میان مسائل فراوانِ محیط زیست که در سالهای اخیر توجه عموم را به خود جلب کرده‌اند شاید تأثیر احتمالی فعالیتهای انسان در اقلیم کرهٔ زمین، عواقب گسترده‌تری داشته باشد. بنابه نظریهٔ گلخانه‌ای، تغییری که اخیراً در ترکیب گازهای جو پیش آمده، باعث گرم شدنِ تدریجی سطح زمین و سرد شدن جو بالایی خواهد شد و این امر به تغییر بی‌سابقهٔ آب و هوای زمین خواهد انجامید. ولی تغییرات طبیعی اقلیم ممکن است این افزایش دما را از نظر مخفی کند، بنابراین نیاز مبرمی به بررسی کمّیِ اثر گلخانه‌ای در چارچوب یک مدل اقلیمی کرهٔ زمین برای گذشته، حال، و آینده داریم.

اصول اساسی نظریه مبتنی است بر مفهوم تعادل اقلیمی، یعنی اینکه تابش دریافتی از خورشید، که در اتمسفر و در سطح زمین جذب می‌شود، باید برابر با انرژی گرماییِ بازتابیده به فضا باشد. این موازنه، دمای متوسط سطح زمین را معین می‌کند. اثر گلخانه‌ای وقتی به‌وقوع می‌پیوندد که بخشی از تابش خروجی به‌وسیلهٔ ذرات و مولکولهای جو بالایی جذب شود. منظور از جو بالایی، فاصلهٔ ۱۰ تا ۱۵ کیلومتری سطح زمین است.

مدلهای کلی گردش در حالت سه‌بعدی، وسیله‌ای هستند برای شبیه‌سازی اقلیم در مقیاسهای زمانیی که برای بررسی اثر گلخانه‌ای مناسب باشد. این مدلها، که به کمک آنها دستگاهی از معادله‌های دیفرانسیل جزئی غیرخطی به‌روش عددی حل می‌شود، برای محاسبهٔ اختلافهای بین یک وضعیت اقلیمی که در معرض افزایش گازهای گلخانه‌ای قرار دارد و یک وضعیت جاری، به‌کار می‌روند. معادله‌های اساسی، همان معادله‌های اویلرند که ساده‌سازیهایی در

آنها انجام می‌شود تا نازکی جو نسبت به فواصل روی سطح زمین به‌حساب آورده شود. در پیش بینیهای درازمدت باید تعدیل گرمای اقیانوسها در مقیاس زمانیِ چند دهه منعکس باشد و لازم است مدلهایی طرح شوند که برای این منظور مناسب باشند. نکتهٔ مهم این است که نباید فقط میانگین دماهای سطحی را در نظر داشت بلکه تغییرات دما برحسب فضا و زمان نیز باید به‌حساب آورده شوند. زیرا پیامدهای آنها ممکن است به همان اندازه مهم باشد. در این بررسیها به کدهای صحیح و براوردهای دقیقی از میزان حساسیت نسبت به گازهای گلخانه‌ای مختلف نیاز داریم. همانند سایر محاسبات مربوط به جریانهای ژئوفیزیکی، مدلهای قابل اعتمادی از تلاطم لازم است تاانتقال تلاطم براورد شود.

از لحاظ نظری، یک هدف اساسی عبارت است از توصیف دینامیکی «مینیمال» جو-دریا-خشکی به‌طوری که بر اساس آن بتوان در مقیاس زمانی چند دهه، براوردهای قابل اعتمادی از تغییر اقلیم به‌دست آورد. به کمک روشهایی از نظریهٔ دستگاههای دینامیکی (بخش بعد را ببینید) می‌توان بعد سیستم را کاهش داد و از این طریق «رباینده‌ای» را که فقط شامل متغیرهای دینامیکی ضروری برای بررسی اثر گلخانه‌ای است، مجزا ساخت و مطالعه کرد. پس از آن محاسبات مبسوط، ولی مقرون به‌صرفه‌ای در مورد تأثیرپذیری اقلیم امکان‌پذیر می‌شود و ادراک جدیدی از تأثیر افزایش گازهای گلخانه‌ای بر تعادل اقلیمی به‌دست می‌آید.

۷. دینامیک آشوب

رصدهای اولیهٔ مسیرهای اجسام سماوی ظاهراً نشان می‌داد که این اجسام حرکتی تناوبی یا، در بدترین حالت، شبه تناوبی دارند که به آسانی به زبان ریاضی قابل توضیح است. ولی در آغاز قرن بیستم پوانکاره پی برد که رفتار مسیرهای اجسام سماوی ممکن است بسیار پیچیده و نشان دهندهٔ حرکتی «آشوبناک» باشد که همواره نوسانی ولی نامنظم و غیرتناوبی است. همچنین پوانکاره به یک ویژگی مهم دستگاههایی که مسیرهای آشوبناک دارند پی برد و آن، وابستگی شدید به داده‌های اولیه است. این موضوع از نظر دانشمندان اهمیت بسیار دارد زیرا خطای بسیار کوچکی در اندازه‌گیریِ مربوط به حالت فعلی دستگاه ممکن است منجر به پیش‌بینیهای غیرواقعی در مورد حالت دستگاه در درازمدت بشود.

در سال ۱۹۶۳ دستگاه خاصی از معادلات دیفرانسیلِ مربوط به هواشناسی مورد بررسیِ عددی مفصلی قرار گرفت و مسیرهای آشوبناک غیرمنتظره‌ای کشف شد. این امر نه‌تنها نشان دهندهٔ وجود مسیرهای آشوبناک در یک دستگاه غیرهمیلتنی خاص بلکه الهام‌بخشِ مسیرهای تازهٔ پژوهش در نظریهٔ دستگاههای دینامیکی بود. ریاضیدانان و دانشمندان علوم تجربی به این نتیجه رسیده‌اند که رفتار بسیار پیچیده‌ای که پوانکاره از آن سخن می‌گفت، و در این محاسبات برای انواع جدیدی از رباینده‌ها نشان داده شد، در واقع در انواع بسیار زیادی از دستگاههای غیرخطی عملی مربوط به اکولوژی، اقتصاد، فیزیک، شیمی، مهندسی، مکانیک سیالات و هواشناسی دیده می‌شود.

ظهور کامپیوتر برای دست یافتن به این پیشرفتها ضروری بوده است ولی بینشهای عمیق ریاضی هم به همان اندازه اهمیت داشته است. نظریهٔ دستگاههای دینامیکی از سنت ریاضی پرباری برخوردار است که به بسیاری از شاخه‌های ریاضی مربوط می‌شود: توپولوژی، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ اندازه و ارگودیک، و ترکیبیات. همگی در ادراک دستگاههای دینامیکی، به‌ویژه آنهایی که رفتار آشوبناک دارند، نقش داشته‌اند. مثلاً، در دستگاههایی دینامیکی‌که دو یا چند رباینده دارند (یعنی چند نوع رفتار در دراز مدت، وابسته به حالت اولیه) تواناییِ پیش‌بینیِ رفتار در دراز مدت مستلزم داشتن اطلاعات مبسوط از مرز بین این انواعِ مختلفِ حالتهای اولیه است. این مرزها ممکن است فوق‌العاده پیچیده و عجیب -یعنی به‌صورت برخالی- باشند. این مرزهای برخالی در حال حاضر تحت مطالعهٔ دانشمندانی قرار دارند که با سیستمهای فیزیکی سروکار دارند، و نیز توپولوژیدانانی که می‌بینند ساختارهای ریاضی جالبی در این پدیده به‌گونه‌ای طبیعی رخ می‌نمایند.

پیشرفت مهم دیگر، پی‌بردن به این نکته است که وقتی به موازات تغییر پارامتری از دستگاه، در جریان یک رشتهٔ نامتناهی از «انشعابهای مضاعف کنندهٔ دورهٔ تناوب»، آشوب رخ می‌دهد، می‌توان نظام خاصی را انتظار داشت. مفاهیمی که این نظام را توضیح می‌دهند در نهایت به اثباتهای دقیقی از این پدیده انجامیده‌اند. در نخستین اثبات دقیق، تحلیل مبسوطی به کمک کامپیوتر با استفاده از فرایندی موسوم به آنالیز بازه‌ای صورت گرفت : همهٔ محاسبات با در نظر گرفتن کرانهای خطا انجام شد و بنابراین، نتایج در بازه‌هایی قرار گرفتند. کامپیوتر، بازه‌هایی را که جوابهای صحیح در آنها قرار داشت جمع و ضرب کرد تا همهٔ خطاها کاملاً محدود شوند.

در تحلیل دستگاههای دینامیکی، نیاز بسیاری به محاسبهٔ عواملی دینامیکی به‌غیر از رباینده‌های آشوبناک داریم. اکنون ریاضیدانان شروع به ابداع روشهای عددی تازه‌ای برای محاسبهٔ‌خمینه‌های پایدار و ناپایداری که پوانکاره از آنها سخن می‌گفت کرده‌اند. همین‌طور، مشخص کردن «خمینه‌های لَخت» برای معادلات دیفرانسیل جزئی، راه امیدبخشی است به سوی تبدیل دینامیکِ اساسیِ یک دستگاه دینامیکیِ بینهایت بعدی به دینامیک یک دستگاه متناهی‌البعد مناسب، و بالاخره، تحقیقات ریاضی روی دستگاههای دینامیکی بدون توجه به کاربردهای فوری آنها، از قبیل توصیف شارشهای پیچیده روی کره‌ها، باعث پیدایش دیدگاههای مهمی در این زمینه شده است.

۸. آنالیز موجکی

آنالیز موجکی (wavelet analysis)، یکی از دستاوردهای جدید و هیجان‌انگیز ریاضیات محض که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است، امروز کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه‌های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است.

آنالیز موجکی هم مانند آنالیز فوریه با بسط تابعها سروکار دارد ولی این بسط برحسب «موجکها» انجام می‌شود. موجک، تابع مشخص مفروضی با میانگین ۰ است، و بسط برحسب انتقالها و اتساعهای این تابع انجام می‌گیرد، برخلاف چندجمله‌ایهای مثلثاتی، موجکها در فضا به‌طور موضعی بررسی می‌شوند و به‌این‌ترتیب، ارتباط نزدیکتری بین بعضی از توابع و ضرایب آنها امکانپذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می‌توان با استفاده از موجکها فرمولبندی کرد و اطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری به‌دست آورد. به‌طور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتمهای عددی سریع برای محاسبهٔ عملگرهای انتگرالی (که لزومی ندارد از نوع "نوردی "باشند) اثر می‌گذارد.

آنالیز موجکی حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریهٔ لیتلوود ـ پیلی و کالدرون ـ زیگموند) است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسشهای مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشینهای انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز همساز ارائه شدند. مستقل از این نظریه

که در درونِ ریاضیات محض جای دارد، صورتهای مختلفی از این رهیافت چندمقیاسی (multiscale) را در طی دههٔ گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری (به شکل فیلترهای آینه‌ای متعامد و الگوریتمهای هرمی)، و استخراج نفت، دیده‌ایم. آنالیز موجکی همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنالهای گذرایی که سریعاً تغییر می‌کنند، صدا و سیگنالهای صوتی، جریانهای الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه‌ای، و داده‌های طیف‌نمایی NMR، و در کنترل نیروگاههای برق از طریق صفحهٔ نمایش کامپیوتر، بکار رفته است. و نیز به‌عنوان ابزاری علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده‌ای که در تلاطم ظاهر می‌شوند، جریانهای جوی، و در بررسی ساختارهای ستاره‌ای از آن استفاده شده است. این آنالیز به‌عنوان یک ابزار عددی می‌تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسباتِ بزرگ مقیاس بکاهد به‌این‌ترتیب که با تغییر هموار ضرایب، ماتریسهای متراکم را به شکل تُنُکی که به‌سرعت قابل محاسبه باشد درآورد. راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه‌هایی شده است که قادر به کدگذاری به‌نحوی بسیار کارا، و فشرده‌سازی سیگنالها و تصاویرند.

۹. نظریهٔ اعداد

در نظریهٔ اعداد طی پنج سال گذشته پیشرویهای مهمی در چندین جبهه انجام شده است و این پیشرویها نیز به‌نوبهٔ خود فرصتها و امکانات هیجان‌انگیز تازه‌ای را فراهم کرده‌اند. یکی از دستاوردها، پیشرفت مهمی است که در شناخت ما از اصل به اصطلاح «موضعی به سراسری» در مورد بعضی خمهای جبری حاصل شده است. ایدهٔ اصل «موضعی به سراسری» که در قضیهٔ کلاسیک هاسه‌ـمینکوفسکی مستتر است، به یک معادلهٔ درجهٔ دوم همگن (بر حسب متغیرهای بسیار) و جوابهای آن مربوط می‌شود. برای روشن شدن موضوع، حالت سادهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$aW^۲ + bX^۲ + cY^۲ + dZ^۲ + eWX + fYZ = ۰$$

که در آن ضرایب a، b، c، d، e، و f اعدادی صحیح‌اند. اگر این ضرایب را ثابت بگیریم، پرسشی که می‌خواهیم پاسخ آن را بیابیم این است که آیا مقادیری صحیح برای متغیرهای W، X، Y،و Z (که همگی صفر نباشند) وجود دارند که معادلهٔ بالا را به اصطلاح «حل کنند» یعنی به‌ازای آنها طرف چپ معادله صفر باشد؟ قضیهٔ هاسه‌ـمینکوفسکی می‌گوید که پاسخ مثبت است اگر و تنها اگر (۱) عدد صحیحی چون D موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر عدد صحیح N مقادیر صحیحی از W، X، Y، و Z (وابسته به N) وجود داشته باشند که D بزرگترین مقسوم‌علیه‌شان باشد و در این شرط که

$$aW^۲ + bX^۲ + cY^۲ + dZ^۲ + eWX + fYZ$$

مضربی از N باشد صدق کنند؛ و (۲) اعداد حقیقی W، X، Y، و Z وجود داشته باشند که معادلهٔ بالا را «حل کنند».

دلایلی (که به فهم شهودی چنین مسأله‌هایی کمک می‌کنند) در دست است که محکهای (۱) و (۲) را حاکی از وجود جوابهای موضعی نابدیهی برای این معادله تصورکنیم، و جوابهای صحیح معادله را جوابهای سراسری بینگاریم. اصطلاح «موضعی به سراسری» از اینجا آمده است.

در جستجو برای یافتن حوزه‌های وسیعتری که در آنها اصل «موضعی به سراسری» یا صورت تعدیل شده‌ای از آن صادق باشد، قضیهٔ هاسه‌ـمینکوفسکی بسیار پرثمر بوده است. می‌توان این سؤال را مطرح کرد که تا چه حدی حکم مشابه در مورد معادله‌های همگن از درجهٔ بالاتر از ۲ برقرار است؟ یک قضیهٔ قدیمی حاکی است که چنین اصلی برای خمهای درجهٔ ۳ برقرار نیست.

یک جانشینِ اصل «موضعی به سراسری» در مورد معادله‌های نوع بالا («خمهای ازگونهٔ یک»)، که (اگر به‌دقت بکار رود) به اندازهٔ اصل «موضعی به سراسری» اولیه مفید است، حدس شافاروویچ ـ تیت است. این حدس حاکی است که، با ملاحظات مقتضی، میزان «برقرار نبودن اصل موضعی به سراسری» را به‌وسیلهٔ یک گروه متناهی می‌توان سنجید. این گروه شافاروویچ‌ـتیت که تعیین می‌کند اصل موضعی به سراسری درکجا برقرار نیست به‌خودی خود مفهوم مهمی است و دروازه‌ای است که باید از آن عبور کرد تا بتوان مطالعهٔ حسابی عمیقی از خمهای بیضوی به‌عمل آورد و حدسهایی را که راهنمایِ تحقیقات بیشتری در این زمینه‌اند بیان کرد. اثبات حدسهای شافاروویچ‌ـتیت و حدسهای برچ (Birch) و سوینرتن‌ـدایر (Swinnerton-Dyer) که مربوط به آنها هستند، از هدفهای بزرگ و دراز مدت این رشته است و قسمتی از آنها اخیراً در چارچوب بسیار جالبی ثابت شده است.

مبحث دیگری از نظریهٔ اعداد که فعالیت بسیار زیادی در آن انجام شده، هندسهٔ جبری حسابی است. این فعالیت به‌ویژه در تحقیقات روی قضیهٔ حسابی ریمان‌ـرُخ، در حدسهایی که نوعی وحدت بین مسائل دیوفانتی و نظریهٔ نوانلینا و هندسهٔ دیفرانسیل ایجاد می‌کنند، و در نتایج جدیدی که اثباتی تازه و بسیار «هندسی» از حدس موردل روی هیأتهای تابعی به‌دست می‌دهند، جلوه‌گر شده است. این اثبات را ممکن است بتوان به اثبات جدید و مشابهی درچارچوب هیأت اعداد تبدیل کرد.

سومین تحول چشمگیر پنج سال گذشته، حدسها و نتیجه‌هایی است که برخی از مسأله‌های دیوفانتی قدیمی را درکانون مباحثی قرار می‌دهد که به‌نظر می‌آید در پیشرفت قریب‌الوقوع نظریهٔ اعداد اهمیت داشته باشند. مثلاً می‌توان از حدسهای اخیر سر(Serre) یاد کرد که الهامبخش تحقیقات بسیار مهمی در زمینهٔ صورتهای پیمانه‌ای است. در دنبالهٔ این ایده‌ها، اخیراً با استفاده از یک تکنیک هوشمندانه که قبلاً ابداع شده بود، نشان داده‌اند که حدس شیمورا‌ـتانیاما‌ـویل (حاکی از اینکه همهٔ خمهای بیضوی روی Q پیمانه‌ای هستند) قضیهٔ فرما را نتیجه می‌دهد. و بالاخره، حدس زیبا و ساده‌ای (که غالباً آن را حدس ABC می‌نامند) به این‌صورت مطرح شده است: ثابتی عمومی چون e وجود دارد به قسمی که اگر A و B اعدادی صحیح و نامنفی با ضابطهٔ $C = A + B$ باشند، آنگاه $|A \cdot B \cdot C|$ کوچکتر از e امین توان رادیکال $A \cdot B \cdot C$ است؛ منظور از رادیکال یک عدد، حاصلضرب عوامل اول متمایز آن است. یک پیامد بلافصل حدس ABC، صورتی «مجانبی» از آخرین قضیهٔ فرماست. همچنین تعداد بسیار زیادی از نتایج عمیق دیگر نیز از همین حدس به‌دست می‌آیند.

۱۰. توپولوژی

دوتا از بنیادیترین مسأله‌های توپولوژی اینها هستند:

۱. فرض کنید دو خمینهٔ M و M' داده شده‌اند (خمینه، تعمیم n بعدی رویه است). چگونه می‌توان تشخیص داد که این دو خمینه از نظر توپولوژیک یکی هستند، مانند کره و رویهٔ بیضیوار، یا از نظر توپولوژیک متفاوت‌اند، مانند کره و چنبره؟ برای تمیزدادن خمینه‌های متفاوت، به جستجوی ناورداها می‌پردازیم.

۲. فرض کنید یک خمینهٔ K در خمینهٔ دیگری چون M از بعد بالاتر، به‌وسیلهٔ دو نگاشت متفاوت نشانده شود. آیا می‌توان یکی از دو نشاننده را

به دیگری تبدیل کرد؟ در بنیادیترین و کلاسیکترین حالت، نگاشتی که دایرهٔ K را در فضای سه‌بعدی معمولی M بنشاند مورد بررسی قرار می‌گیرد. چنین نشانندهای یک گره است و هدف این است که بفهمیم چه وقتی یک گره مفروض را می‌توان بازکرد و به‌طور کلیتر، چه وقتی یک گره مفروض را می‌توان به گره دیگر تبدیل کرد. در اینجا هم برای تمیزدادن نشانندههای نامعادل K در M به جستجوی ناورداها می‌پردازیم.

این‌گونه مسأله‌ها در مورد خمینه‌های M با بعد ۵ و بالاتر در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ و اوائل دهه ۱۹۷۰ اساساً حل شدند. حالتهای ۳ و ۴ بُعدی بسیار دشوارترند و هنوز تا درک کامل آنها راه زیادی داریم. با این حال در همین چند سال گذشته پیشرفت مهمی در زمینهٔ بعدهای پایین حاصل شده است.

مثلاً، در مورد مسألهٔ (۱) در حالت ۴ بعدی، نقش همواریِ هم‌ارزیهای ممکنِ خمینه‌های M و M' تحت بررسی قرار گرفته است. در این زمینه اخیراً مثال جالب زیر پیدا شد: خمینه‌ای ۴ بعدی و هموار چون M وجود دارد که از نظر توپولوژیک با فضای اقلیدسی ۴ بعدی معمولی R^4 تحت یک نگاشت ناهموارِ «پرپیچ و خم» هم‌ارز است، ولی نمی‌توان آن را با همواری به فضای اقلیدسی تبدیل کرد. عجیبتر اینکه، معلوم شده تعداد چنین مثالهای متفاوتی بینهایتِ ناشمار است. این پدیده در حالت دیگری جز حالت ۴ بعدی رخ نمی‌دهد و کشف آن از دو لحاظ باعث شگفتی شد، یکی اینکه رفتار خمینه‌ها در حالت ۴ بعدی تا این حد با رفتاری که در حالات دیگر دیده شده بود فرق دارد، و دوم به‌خاطر منبعِ جالب این اکتشاف، زیرا ناورداهای اساسیی که برای تمایز خمینهٔ ۴ بعدی نامتعارف از فضای اقلیدسی معمولی به‌کار می‌روند از بررسی معادلات یانگ-میلز نشأت گرفته‌اند و این معادلات، ابتدا در فیزیک ذرات مطرح شدند. به‌این‌ترتیب، ارتباط مهمی بین فیزیک ذرات و توپولوژی برقرار شده است.

در بررسی مسألهٔ (۱) در حالت ۳ بعدی نیز ناورداهای مهمی کشف شدند که به ناورداهای کسن (Casson) موسوم‌اند. این ناورداها اخیراً پرتوی از روشنایی بر یک مسألهٔ بنیادی و کلاسیک توپولوژی یعنی حدس پوانکاره افکنده‌اند. این حدس حاکی است که در حالت ۳ بعدی، کره تنها خمینهٔ ممکن (بستهٔ بدون مرز) است که ساده‌ترین ناوردای توپولوژیک آن، یعنی گروه بنیادی، صفر است. مشابه این حدس در همهٔ حالات بجز حالت ۳ بعدی ثابت شده است. حالت چهار بعدی به‌عنوان بخشی ازکاری که در بالا شرح دادیم، ثابت شد. ولی حالت ۳ بعدی بسیار دشوار است و این حدس ممکن است اصلاً در این حالت غلط باشد. شیوهٔ متعارف برای به‌دست آوردن مثال ناقض، مبتنی بر به اصطلاح ناوردای روخلین (Rokhlin) بود. تحقیقات مبتنی بر ناورداهای کسن نشان داد که با این شیوه، مثال ناقض به‌دست نمی‌آید.

پیشرفت چشمگیر دیگری که اخیراً در توپولوژی به‌دست آمده، مربوط است به مسألهٔ (۲) در چارچوب مبحث کلاسیک گره‌ها. ناوردای اصلی در نظریهٔ کلاسیک گره‌ها، چندجمله‌ای الکساندر بود که در دههٔ ۱۹۳۰ عرضه شد. ضعف چندجمله‌ای الکساندر در این است که نمی‌تواند بین گره و تصویر آینه‌ای آن تمیز دهد. در ۱۹۸۴، در جریان مطالعهٔ مسائلی در زمینهٔ جبرهای فون نویمان (شاخه‌ای از آنالیز تابعی که از مکانیک کوانتومی سرچشمه می‌گیرد)، فرمولهایی کشف شدند که شباهت عجیبی با فرمولهای جبری کلاسیک در مطالعهٔ گره‌ها و تافته‌ها (braids) داشتند. پیگیری این رابطه، به کشف ناوردای جدید قدرتمندی ازگره‌ها و پیوندها انجامید که اکنون به چندجمله‌ای جونز موسوم است و این مزیت مهم را دارد که یک گره را از تصویر آینه‌ای‌اش تمیز می‌دهد محاسبهٔ آن نیز آسان است.

هم چندجمله‌ای جونز و هم نتایج مربوط به خمینه‌های چهار بعدیِ نامتعارف، از مسائلی ریاضی که ارتباطات محکمی با فیزیک دارند، سرچشمه گرفته‌اند. این امر باعث پیدایش این حدس شد که می‌توان یک نوع نظریهٔ کوانتومی میدان، شکل نامتعارفی از قوانین فیزیک ذرات، ساخت که در آن، کمیتهایی که به‌طور تجربی قابل مشاهده‌اند، ناورداهای توصیف شده باشند. چنین نظریهٔ کوانتومی اخیراً ساخته شده و اگرچه بسیار معقول به‌نظر می‌رسد، هنوز اثبات دقیقی برای آن داده نشده است. یافتن اثبات کامل و دقیقی از این محاسبات، موضوعی است که محققان را به مبارزه می‌طلبد.

۱۱. هندسهٔ همتافته

یکی از دستاوردهای اساسی ریاضیات قرن نوزدهم، مکانیک همیلتنی بود. بر سیستمی مکانیکی متشکل از تعداد زیادی ذره، که بدون اصطکاک حرکت کنند، دستگاه پیچیده‌ای از معادلات دیفرانسیل حاکم است. همیلتن نشان داد که این معادلات وقتی همیلتنین (انرژی کل دستگاه) را نقطهٔ شروع بگیریم، شکل متعارف ساده‌ای پیدا می‌کنند. مکانیک همیلتنی تقارنهای نهفته در مسائل مکانیک کلاسیک را آشکار کرد و درکشف مکانیک آماری و نظریهٔ کوانتومی فوق‌العاده مهم بود.

امروز، ریاضیدانان مکانیک همیلتنی را از دیدگاهی سراسری و توپولوژیک بررسی می‌کنند. اساسیترین مفهوم مورد مطالعه، «خمینهٔ همتافته» است، یعنی رویه‌ای از بعد بالا که روش همیلتن برای سیر از توابع همیلتنی به معادلات دیفرانسیل روی آن قابل اجراست. مطالعهٔ خمینه‌های همتافته، هندسهٔ همتافته نامیده می‌شود و این هندسه در چند سال گذشته دستخوش دگرگونی عظیمی شده است. پیشرفت مهمی در این زمینه، کاربرد معادلات بیضوی غیرخطی (ر.ک. بخش ۱، «پیشرفتهای جدید در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی») و خمهای تمامریخت (holomorphic) بود. به‌این‌ترتیب، صورتی از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ باکاربردهای بسیار به‌دست آمد که از جملهٔ آنها، نشان دادن وجود ساختارهای همتافتهٔ نامتعارف روی فضای اقلیدسی و تعیین تکلیف حدسهایی قدیمی در مورد تعداد نقاط ثابت تبدیلهای همتافته بود. حل و فصل این حدسها هم به‌نوبهٔ خود ارتباط نزدیکی با کوهومولوژی فلور (Floer) در توپولوژی دارد.

اگر یک ساختار همتافته را به رویه‌ای با انرژی ثابت محدود کنیم، یک «ساختار سایشی» (contact structure) به‌دست می‌آوریم. علاوه بر پیشرفتهایی که اخیراً در هندسهٔ همتافته به‌دست آمده، تحقیقات مهمی هم در زمینهٔ ساختارهای سایشی انجام شده است. به‌خصوص، از طریق «زیاد پیچاندن» روی قرصهای نشانده شده، ساختارهای سایشی نامتعارفی روی فضای اقلیدسی کشف کرده‌اند که با ساختارهای سایشی متعارف تمایز دارند. اخیراً با استفاده از هندسهٔ سایشی نشان داده‌اند که به هر خمینهٔ بازی که فارغ از موانع توپولوژیک بدیهی باشد می‌توان ساختاری مختلط بخشید و خمینه را در فضای اقلیدسی N بعدی مختلط نشاند. (این امر در بعد ۶ به بالا صادق است). این حکم، آنالیز مختلط، هندسهٔ سایشی، و توپولوژی را به‌هم مربوط می‌سازد.

در مرز هندسهٔ همتافته و دستگاههای دینامیکی، شاخهٔ مهمی از ریاضیات واقع است که با إعمال مکرّر نگاشتهای حافظ مساحت صفحه سروکار دارد. چنین نگاشتهای ϕ، بنیادیترین نمونه‌های تبدیلات همتافته هستند و علاوه بر اهمیت نظری در داخل ریاضیات، در بسیاری از موارد کاربردی از مدارهای اخترواره‌ها گرفته تا محصورسازی پلاسما در ماشین توکاماک مطرح می‌شوند. همان‌طور که در بخش دینامیک آشوب توضیح دادیم، إعمال مکرّر ϕ ممکن

است به رفتار ناپایدار بسیار پیچیده‌ای بینجامد.

ولی در مورد نگاشتهای حافظ مساحت، رفتار آشوبناک با دستهٔ بزرگی از مدارهای کاملاً پایدار و قابل پیش‌بینی ــ و تقریباً تناوبی ــ همزیستی دارد. چنین رفتار پایداری روی خانواده‌ای از خمها موسوم به خمهای ک.ا.م. (کولموگوروف ــ آرنولد ــ موزر) دیده می‌شود. این خمها نقاط ثابت ϕ را که حول آنها نگاشت تاب می‌خورد احاطه می‌کنند. کشف خمهای ک.ا.م. (کام) تحول مهمی در دههٔ ۱۹۵۰ و دههٔ ۱۹۶۰ بود. فهم این مسأله که چگونه صفحه به نواحیی با رفتار پایدار و رفتار ناپایدار تقسیم می‌شود، مهم و دشوار است. یک حالت خاص این مسأله، پیش‌بینی اندازهٔ بزرگترین خم کام است. این موضوع از لحاظ کاربردها اهمیت دارد زیرا نظریهٔ قدیم کام متأسفانه فقط می‌توانست به خمهای بسیار کوچک بپردازد. در ده سال گذشته، وجود خمهای کامی که اندازهٔ مناسب داشته باشند، ثابت شده است. اخیراً به کمک کامپیوتر، اندازه‌های بزرگترین خمهای کام (برای مثالهای فرضاً نمونه) از نگاشتهای حافظ مساحت با دقت ۱۰٪ محاسبه شده است.

در حالت کلیتر، در مورد از میان رفتن پایداری نگاشتهای پیچشی حافظ مساحت این عقیده وجود داشت که خمهای کام را تشدیدها (رزونانسها)ی غیرخطی‌که در مدارهای با «بسامد» نامطلوب پیش می‌آیند، تخریب می‌کنند. در همین چند سال اخیر کشف شده است که رفتار پایدار حتی در مورد بسامدهای تشدیدی ادامه می‌یابد. گرچه تشدیدها، خمهای نظریهٔ کام را تخریب می‌کنند، مجموعه‌های کانتور پایداری با بعد برخالی کوچکتر از ۱ باقی می‌ماند، و این تجدیدنظر مهمی است در این باره که پایداری چگونه در دستگاههای غیرخطی پیچیده به‌وجود می‌آید. با این‌حال، کارهای زیادی در این زمینه مانده است که باید انجام شود. فهم کامل نگاشتهای حافظ مساحت صفحه، هدف دوردستی است.

۱۲. هندسهٔ غیر جابه‌جایی

یکی از دستاوردهای مهم دههٔ ۱۹۶۰ برقراری ارتباط نزدیکی بین آنالیز از یک طرف و توپولوژی و هندسه از طرف دیگر است. وحدتِ این شاخه‌هایِ ریاضیات که دور از هم به‌نظر می‌رسیدند، صحنه را برای ارتباطات درونیِ متعدد که خصیصهٔ ریاضیات امروز است آماده کرد. پیدایش نظریهٔ جدید شاخص این مسیر را هموار ساخت. اولین گام ریاضیدانان این بود که پی بردند ناورداهای هندسی خمینه‌ها را می‌توان به‌عنوان ناورداهای آنالیزیِ بعضی از عملگرهای لاپلاس و عملگرهای دیراک رویِ این خمینه‌ها محاسبه کرد. شکل مجردی از این ایده‌ها به نظریهٔ K موسوم شده است.

در پنج سال گذشته شاهد تجدید حیات نظریهٔ K بودیم که به کشف هومولوژی دوری، کوهومولوژی دوری، کوهومولوژی دوری تام، و تابعکهای مدرج (یا ابر تابعکهای) KMS انجامید. این مباحث متفاوت، همگی نظرگاههایی بوده‌اند که در رشتهٔ جدید هندسهٔ غیر جابه‌جایی مطرح شده‌اند. اساساً نشان داده شده که مفاهیم هندسه دیفرانسیل به حالت غیر جابه‌جایی بسط می‌یابند. به‌ویژه، حساب صورتهای دیفرانسیل و هومولوژی جریانها (currents) را می‌توان تعمیم داد به‌طوری که فضاهایی از قبیل برگهای یک برگبندی، فضای دوگان یک گروه گسستهٔ ناآبلی متناهیاً تولید شده (یا گروه لی)، یا فضای مداریِ کنش چنین گروهی بر یک خمینه را در بر بگیرد.

در نظر گرفتن چنین فضاهایی به‌عنوان مجموعه‌های نقطه‌ای به‌صلاح نیست زیرا در این‌صورت، ابزارهای معمولی نظریهٔ اندازه، توپولوژی، یا هندسهٔ دیفرانسیل برای بررسی آنها کارساز نیستند. با انتساب یک جبر متعارف به هر یک از این فضاها، بهتر می‌شود آنها را درک کرد. در مورد خمینهٔ معمولی، این جبر یک جبر جابه‌جایی (تعویض‌پذیر) از توابعی روی خمینه است، مانند جبر توابعِ اندازه‌پذیر اساساً کراندار روی خمینه (برای نظریهٔ اندازه)، جبر توابع پیوستهٔ صفر شونده در بینهایت (برای توپولوژی)، یا جبر توابع هموار با تکیه‌گاه فشرده (برای هندسه). در قلمرو هندسهٔ غیر جابه‌جایی به‌جای این جبرها، جبرهایی غیر جابه‌جایی در نظرگرفته می‌شود. در حالات خاص، این جبرها، جبرهای فون نویمان یا جبرهای C^* هستند و به تعمیم کوهومولوژی دورام و به کاربردهایش، نظریهٔ K، و نظریهٔ شاخص، می‌انجامند.

چارچوب اساسی برای مطالعهٔ این‌گونه مسائل یک جبر Z_2ـ‌مدرج یعنی وابرش (derivation) مدرجی از جبر، و اثر(trace)ی است که در بعضی اصول اساسی دوره‌ای بودن صدق می‌کند. یک نتیجهٔ اساسی در این حوزه، انتساب یک کوسیکل دوری به این ساختار و ساختن یک مشخصهٔ چرن برای این وابرش است. در حالت جابه‌جایی، ساختن این مشخصه به نظریهٔ کوهومولوژی معمولی دورام و نظریهٔ Kی مربوط به آن تحویل می‌یابد. در حالت غیر جابه‌جایی، چارچوب کلیتر است.

۱۳. گرافیک کامپیوتری به منزلهٔ یک ابزار ریاضی

در سالهای اخیر، نقش گرافیک کامپیوتری هم در قسمت درونی ریاضیات و هم در ریاضیات کاربردی اهمیت روزافزون یافته است. یکی از مباحث اصلی ریاضیات که در آن گرافیک اهمیت اساسی دارد، نظریهٔ رویه‌هاست. در این زمینه، مسائل پیچیده‌ای که مهارنشدنی به‌نظر می‌رسیدند به‌وسیلهٔ بصیرت حاصل ازگرافیک کامپیوتری کلاً یا جزئاً حل شده‌اند.

نمونه‌ای از این مسائل در نظریهٔ رویه‌ها، که از بررسی لایه‌های صابون نشأت گرفته، تاریخچه‌ای طولانی دارد. اگر یک حلقهٔ سیمی را در محلول صابون فرو بریم و سپس درآوریم، لایه‌ای از صابون روی آن تشکیل می‌شود و خصوصیت این لایه این است که در میان تمام رویه‌هایی که آن حلقهٔ سیمی مرزشان است، کمترین مساحت را دارد. مسألهٔ یافتن این رویهٔ مینیمال به‌آسانی به‌صورت مسأله‌ای در حساب وردشها بیان می‌شود و بنابراین، به مطالعهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی خاص، یعنی معادلهٔ رویهٔ مینیمال، تحویل می‌یابد. گرچه توصیف جوابهای این معادله دشوار نیست ولی رفتارکلی این جوابها موضوع بسیار ظریف و دشواری است و مسأله‌های حل نشدهٔ زیادی در این زمینه وجود دارد.

این مسأله‌ها اهمیت فیزیکی هم دارند. مثلاً، لایهٔ صابون فیزیکی خودش را قطع نمی‌کند (یعنی، «نشانده شده» است)، ولی این خاصیت را نمی‌توان از روی نمایش متعارف جوابهای معادلهٔ رویهٔ مینیمال معلوم کرد. در واقع تا پنج سال پیش فقط دو رویهٔ مینیمال نشانده شدهٔ کامل ــ یعنی بدون لبه ــ را می‌شناختند. این دو رویه، صفحهٔ معمولی و یک رویهٔ دورانی به نام زنجیره‌وار (کاتنوئید) بودند. حدس زده می‌شد که اینها تنها رویه‌های مینیمال نشانده شدهٔ کامل باشند.

در ۱۹۸۳ مثال جدیدی از رویهٔ مینیمال پیدا شد که دارای توپولوژیِ چنبره‌ای بود که در سه نقطه سوراخ شده باشد. بنا به شواهدی مبتنی بر نظریهٔ توابع بیضوی، به نظر می‌رسید که این رویه مثال ناقض خوبی برای حدس بالا باشد. ولی پیچیدگی معادلات معرف، بررسی مستقیم مسألهٔ نشاندن را دشوار می‌ساخت. وقتی ازکامپیوتر برای رسم نمودارهایی از این رویه کمک گرفتند، دیده شد که رویه از تقارنهایی اضافی برخوردار است که در توصیف تحلیلی محض در نظر گرفته نشده است. این تقارنها نه‌تنها تجسم رویه را آسانتر ساختند بلکه الهامبخش زنجیره‌ای از استدلال شدند که سرانجام به ابطال حدس انجامید. به‌علاوه، با الهام از برخی ویژگیهای این رویه، تعمیمی

به‌دست آمد که به ریاضیدانان امکان داد خانواده‌ای نامتناهی از رویه‌های مینیمالِ کامل نشانده شده را بسازند. این مثالهای جدید به مبحث کلی رویه‌های مینیمال نیرو بخشیدند و پیشرفتهای جدید در این مبحث، ارتباط نزدیکی با گرافیک کامپیوتری داشته است.

اخیراً مسأله‌های کلیتری در زمینهٔ حساب وردشها به کمک فنون گرافیک کامپیوتری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این فنون در صورتبندی و آزمودن حدسها بسیار مفیدند. واضح است که شناخت ما از مسائل سراسری و مسائل و پایداری در حساب وردشها به کمک گرافیک کامپیوتری هر روز بیشتر می‌شود. مثلاً در ۱۹۸۸ اولین شبیه‌سازیها و تجسمهای خوشه‌های حباب صابون و سایر پیکربندیهای انرژی بهینه در سه‌بعد محاسبه و نمایش داده شدند. به‌این‌ترتیب، به‌خصوص، مطالعهٔ دقیق و انجام آزمایش در زمینهٔ هندسهٔ فصل مشترکها میسر شد، و نیز برنامه‌هایی ارائه شدند که علی‌الاصول، ترسیم تعاملیِ (interactive) رویه‌های با مساحت مینیمال را امکان‌پذیر می‌سازند. گرهی در فضا رسم کنید و نوعِ توپولوژیک رویهٔ موردنظر را مشخص کنید. سپس برنامه، رویهٔ مینیمال زیبایی متعلق به آن رده را محاسبه می‌کند و نمایش می‌دهد. در همین راستا، برای اولین بار، محاسبه و نمایش بعضی از رویه‌های مینیمال بلورین بسیار جالب میسر شده است.

در مسیری کاملاً متفاوت، نظریه‌ای به نام «گروههای اتوماتیک» ارائه شده است که نظریه‌ای است در بارهٔ آن‌دسته از گروههای نامتناهی که با اتوماتونهای حالت متناهی می‌توان آنها را تحلیل کرد، مثلاً مسأله‌های «کلمه‌ای» که با کامپیوتر قابل حل‌اند. موضوعاتی که این نظریه با آنها سروکار دارد، مشابه مباحثی هستند که در ساختن برنامه‌های کلمه‌پردازی به‌کار می‌روند. گروههای اتوماتیکِ نوعی شامل گروههای هندسه‌اند. از یک برنامهٔ کامپیوتری در جستجوی مجموعهٔ حدی بعضی از گروههای شبه‌فوخسی استفاده شده است. به‌طور کلی، این نظریه برای تدوین فهرستی از خمینه‌های سه‌بعدی هذلولوی به‌کمک کامپیوتر لازم است. این کار آغاز شده و در حال پیشرفت است.

۱۴. جبرهای لی و گذارهای فاز

در پنج شش سال گذشته شاهد ارتباط متقابل و جالبی بین شاخه‌های مختلفی از ریاضیات محض و نظریهٔ فیزیکی گذارهای فاز در یک مدل دو بعدیِ دنیا بوده‌ایم. باید توجه داشت که فیزیک در دو بعد، صرفاً یک موضوع نظریِ جالب نیست: پدیده‌های سطحی و نوارهای نازک مصداقهای تجربی نظریه‌هایی هستند که در اینجا در بارهٔ آنها بحث می‌کنیم. دوران جدید [در این زمینه] در ۱۹۴۴ آغاز شد که لارس اُنساگر مدل ایزینگ را در بارهٔ فرومغناطیس بری شبکه‌های دوبعدی حل کرد. این مدل، ساده‌ترین تصویر ممکن را از یک آهنربا به‌دست می‌دهد: «اسپینها»یی که فقط می‌توانند اسپین «بالا» یا «پایین» (روی نقاط یک شبکهٔ فضایی) باشند و جفت‌شدگی آنها از طریق برهمکنشهای دوبه‌دویی است که موازی و همسوبودن اسپینها را میسر می‌سازند. راه حل اُنساگر برای اولین بار نشان داد که یک گذار فاز با رفتار غیرتحلیلی کمیتهای فیزیکی متعددی همراه است: مثلاً مغناطش خودبه‌خودی، وقتی دمای T به‌مقدار بحرانی‌اش، T_c میل می‌کند، با آهنگی متناسب با $(T-T_c)^\beta$ کاهش می‌یابد که در آن، β یک نمای مشخصه است. متعاقب آن، دستگاههای مکانیکیِ آماریِ دقیقاً حلپذیر دیگری پیدا شدند و در نتیجه، ردهٔ بزرگی از مدلهای دوبعدی کاملاً انتگرالپذیر فراهم آمد.

ویژگی جالبی که در همهٔ این مدلها (و همچنین در مطالعات مبتنی بر آزمون و خطا که در زمینهٔ سیستمهای بسیاری، مسائل مربوط به نفوذ آب (percolation)، و سایر سیستمهای دوبعدی) دیده‌شده این است که نماهای مشخصه‌ای که‌نشاندهندهٔ حالت غیر تحلیلی بحرانی هستند همیشه اعداد گویا هستند. یک نتیجهٔ عمیق حاصل از پیشرفتهای ریاضی در خلال دههٔ ۱۹۸۰ آن است که حال این اعداد گویا را به عنوان معرف نمایشهای یک جبر تقارن سیستم می‌شناسند، همان طور که در اوایل قرن بیستم، رازهای طیف اتمی با استفاده از نظریهٔ نمایش گروه دورانی سه بعدی درک و بیان می‌شد.

با معرفی مجموعه‌ای طبیعی از جبرهای لی با بعد نامتناهی (جبرهای کاتس‌ـمودی) که توسیعهایی مرکزی از جبرهای طوقه‌ایِ جبرهای لیِ کلاسیک هستند، راهی برای پیشرفت در این زمینه گشوده شد. در همین حال، جبر لیِ دیگری با بعد نامتناهی، جبر ویرازورو (Virasoro) وارد مدلهای تشدید دوگان و نظریهٔ ریسمان در فیزیک شد. گرچه مدلهای دوگان در دههٔ ۱۹۷۰ بیشتر اهمیت خود را در نظر فیزیکدانان از دست داده بودند، ولی این مدلها منشاء پیشرفتهای مهمی در ریاضیات شدند. مثلاً، به دست آمدن فرمولی برای دترمینان شکل پادگراییِ مدول با بیشترین وزن از جبر ویرازورو، فرمولهایی برای مشخصه‌های نمایشهای انتگرالپذیر جبرهای کاتس‌ـمودی و ساختن این نمایشها به‌طور صریح برحسب عملگرهای گردابی.

پیشرفتهای جنبهٔ مکانیک آماری این مقوله در ۱۹۸۴ با پی‌بردن به این مطلب شروع شد که ناوردای همدیس مورد انتظار برای یک سیستم فیزیکی دو بعدی در نقطه‌ای بحرانی، به صوت یک تقارن تحت دو جبر ویرازورو تحقق پذیر است. توسیع مرکزی خاصی که بوسیلهٔ یک «بار» مثبت c پارامتری می‌شود، خصوصیات سیستم فیزیکی را مشخص می‌کند. معلوم شد نماهای بحرانی عبارت‌اند از بیشترین وزنهای نمایشهای جبر. نشان داده شده که نمایشهای بسیار خاصی هستند که به ازای $c < 1$ به‌اصطلاح تبهگن هستند و وزنها و بارهای گویای خاصی دارند و استدلال گردید که برخی از اینها متناظرند با مدلهای فیزیکی شناخته شده، به خصوص مدل ایزینگ. بعداً نشان دادند که با فرض فیزیکی اضافی یکانی بودن، همهٔ سیستمهای آماری بحرانی $c < 1$ را می‌توان رده‌بندی کرد و نماهای آنها را محاسبه نمود. با ترجمهٔ این تحلیل به‌زبان فیزیک، محاسبهٔ صریح تابعهای همبستگی مجانبی برای نظریه‌های $c < 1$ میسر شد و به‌این ترتیب، عملاً نشان داده شده که همهٔ آنها کاملاً قابل حل‌اند.

از آن زمان تاکنون، با استفاده از نظریهٔ جبرهای کاتس‌ـمودی پیشرفتهایی در نظریه‌های $c > 1$ حاصل شده است. نشان داده شده که این جبرها به‌صورت جبرهای تقارن یک نظریهٔ میدان دو بعدی ظاهر می‌شوند. سپس معلوم شد که تقارن همدیس ارتباط نزدیکی با جبر تقارن کاتس‌ـمودی دارد: جبر ویرازورو به‌وسیلهٔ یک شگرد جبری در جبر پوشندهٔ جبرکاتس‌ـمودی قرار داده می‌شود. این امر تعداد زیادی نمایش ویرازوروی ملموس جدید، و مهمتر از همه به اصطلاح ساختمان همرده‌ای، را در اختیار ما می‌گذارد. نشان داده‌اند که نمایش مفروضی از جبرکاتس‌ـمودی به دسته‌ای از نمایشهای ویرازورو، متناظر با زیر جبرهای جبرلی، می‌انجامدو به این ترتیب، دستهٔ نامتناهی کلیتری از سیستمهای آماری بحرانی بر مبنای تقارن مشخص شد. امکان رده‌بندی این همه سیستم مکانیکی آماری که رفتار بحرانی نشان می‌دهند، ولو در دوبعد، ده سال پیش رؤیایی دست نیافتنی به نظر می‌رسید.

۱۵. نظریهٔ ریسمان

برخی از هیجان‌انگیزترین پیشرفتهای جدید ریاضی از نظریهٔ ریسمان در فیزیک نشأت گرفته‌اند که به اصطلاح «نظریه‌ای در بارهٔ همه‌چیز» است. این نظریه، نمونهٔ بارزی از یک دانش فیزیکی است که نیاز زیادی به مطالب

پیشرفتهٔ ریاضی دارد و عجیب است که بیشتر این مطالب قبلاً به وسیلهٔ ریاضیدانانی که در زمینهٔ ریاضیات «محض» کار می‌کرده‌اند فراهم آمده‌است. پیدایش این نظریهٔ فیزیکی، علاقه به این مطالب ریاضی را تجدید کرد و بصیرتها و دیدگاههای جدیدی هم پدید آورد. سرعتِ این تأثیر متقابل بیسابقه بوده است.

برای یک فرد غیر متخصص، جالبترین جنبهٔ نظریهٔ ریسمان این است که در این نظریه به‌جای اینکه ذرهٔ فیزیکی ایده‌آل را به‌صورت یک «ذرهٔ نقطه‌ای» متمرکز در نظر بگیرند، به‌صورت ریسمانی فوق‌العاده کوچک، ولی دارای طول در نظر می‌گیرند. ذره‌ای نقطه‌ای که در طول زمان در فضا حرکت می‌کند مسیری را می‌پیماید که «جهان خط» آن ذره نامیده می‌شود و پیشینهٔ فیزیکی ذره را مشخص می‌کند. ریسمانی که در طول زمان در فضا حرکت می‌کند رویه‌ای را می‌پیماید که «جهان رویه» نامیده می‌شود. ریاضیات مربوط به رویه‌ها بسیار پیچیده‌تر از ریاضیات مربوط به خمهاست. بنابراین، مبانی نظریهٔ ریسمان خیلی پیچیده‌تر از نظریه‌های فیزیکی قبلی است.

راه ورود ریاضیات جدید به نظریهٔ ریسمان را اصول ناوردایی باز کرده است. این اصول ایجاب می‌کنند که پارامترهای مزاحم را در شرح و توصیف نظریه کنار بگذاریم. سه تا از این گونه اصول در این زمینه مطرح‌اند: *ناوردایی پارامتر* روی ریسمان (مشخص کردن مکان روی ریسمان از لحاظ فیزیکی بی‌معناست)، *ناوردایی همدیس* روی جهان رویه (قبل از ظهور جرم فقط زاویه‌ها مهم‌اند نه طولها)؛ *ناوردایی پیمانه‌ای* روی ریسمان (کمیتهای فیزیکی مستقل از چارچوب مرجع هستند). اصل اخیر قبلاً تأثیر عمیقی بر فیزیک و ریاضیات گذاشته است و مبنای همهٔ توصیفات فعلی از الکترومغناطیس و ذرات بنیادی است. ناوردایی پارامتر به نظریهٔ گروه تقارن بینهایت بعدی دایره، یعنی گروه دیفئومرفیسم نیازمند است. ناوردایی پیمانه‌ای به نظریهٔ جبرها و گروههای کاتس‌ـمودی بینهایت بعدی مربوط می‌شود. این مباحث هم به دلایلی که به خود ریاضیات مربوط می‌شود و هم به خاطر کاربردی که به عنوان «جبرهای کارنت» در نظریه‌های فیزیکی قبلی داشتند، در ریاضیات اهمیت یافتند، و بالاخره ناوردایی همدیس، مطالب زیادی را از هندسهٔ جبری و نظریهٔ هنگها برای رویه‌های ریمانی (نظریهٔ تایک‌مولر) طلب می‌کند. این امر بسیار عجیب است زیرا قبلا هندسهٔ جبری بسیار دور از عوالم فیزیک به‌نظر می‌رسید.

وقتی ماده وارد کار می‌شود و توصیف اثرهای گرانشی لازم می‌آید، نظریهٔ فعلی ریسمان ایجاب می‌کند که به جای نقاط فضازمان، رویه‌های شش بعدی بستهٔ بسیار کوچکی را در نظر بگیریم! برای بازیابی فیزیکی که در مقیاسهای بزرگتر می‌شناسیم، هندسهٔ این رویه‌ها باید از معادلاتی مشابه معادلات اینیشتن در نسبیت عام تبعیت کند. این مطالب را قبلاً ریاضیدانان بررسی کرده‌اند. انگیزهٔ آنان در این مطالعات از هندسهٔ جبری و معادلات دیفرانسیل جزئی نشأت گرفته است و موضوع اخیر، همواره عمده‌ترین وسیلهٔ تبادل ایده‌ها و نتایج بین فیزیک و ریاضی بوده است.

نظریه ریسمان، مسأله‌های ریاضی بسیاری را مطرح کرده که موضوعِ مطالعات آینده‌اند. مهمترین این مسأله‌ها ظاهراً با بررسی رویه‌ها باتقریب هم ارزی همدیس (همانند هم ارزی همدیس فوق‌الذکر)، و نیز با توپولوژی و هندسهٔ اشکالِ با بعد پایین (رویه‌های سه و چهار بعدی) ارتباط دارند. ویتن فهرستی فیزیکی از تمامی هندسهٔ با بعد پایین به دست داده است. این فهرست، مجموعهٔ بزرگی از مسائل و ساختارهای عمیقی است که از نظر فیزیکی اهمیت دارند. مثلاً، در مطالعهٔ گروهها در فضای سه بعدی، این تصویر فیزیکی شامل بررسیهای جدید کاملی از پیچیده‌ترین مطالعات درگروهها (از جمله چند جمله‌ای جونز، بخش ۱۰) می‌باشد. از سوی دیگر، نظریهٔ فیزیکی ریسمان به مطالعهٔ ما در هندسهٔ بینهایت بعدی شکل و جهت دقیقتری می‌دهد. باب این مطالعه در سالهای آینده باز خواهد بود.

نکته‌ای که هم در نظر فیزیکدانان و هم برای ریاضیدانان عجیب و مجهول است، این است که همان مطالب ریاضی که از دیدگاه محض و زیبایی شناختی مهم و اساسی بودند، در این نظریهٔ فیزیکی مورد نیازند. باید تأکید کرد که این نوع ریاضیات، محصول دورانی از تاریخ ریاضیات است که تجریدگرایی بیشتر از همیشه رواج داشته است.