

نسبیت خاص به انضمام شتاب*

گری هلزر*

ترجمه جهان‌شاه میرزاییگی

۱. مقدمه

ریک نوروود در شماره فوریه ۱۹۹۲ هانتلی خاطرنشان کرد که در دایره‌ای که با سرعت کافی حول محور خود می‌چرخد انقباض لورنتس-فیتزجرالد، مقدار π (خارج قسمت محیط بر قطر دایره) را به سه کاهش می‌دهد [۱۳، صفحه ۱۱۱]. پروفیسور داریو کاستلنوس، در نامه‌ای به ویراستار در شماره ژانویه ۱۹۹۳ این مجله اظهار داشت که، برعکس، نسبت محیط به قطر افزایش می‌یابد. نه کاهش، زیرا سنجه اندازه‌گیری محیط منقبض می‌شود [۲، صفحه ۶۹]. وی اضافه می‌کند که هندسه اقلیدسی در دستگاه مختصات چرخان صادق نیست. نوروود در شماره ژوئن-ژوئیه ۱۹۹۳، این ناسازگاری را به یک ابهام نسبت می‌دهد: آیا یک خط‌کش چرخان برای اندازه‌گیری دایره ثابت به کار می‌رود یا یک خط‌کش ثابت برای اندازه‌گیری دایره چرخان [۱۴، صفحه ۵۷۷]؟ وی در ادامه می‌گوید که این تحلیل نادرست است زیرا تحلیل دستگاه‌های شتابدار مستلزم نظریه نسبیت عام است نه نسبیت خاص. سپس سؤالی را مطرح می‌کند که نمی‌تواند به آن پاسخ دهد. فرض کنید یک قطار به قدری دراز است که تمامی یک مسیر دایره‌ای را اشغال می‌کند؛ یعنی سروته قطار در مسیر به هم می‌رسد. در سرعت‌های خیلی زیاد طول قطار کوتاه شده مسیر بلند را اشغال می‌کند. چگونه چنین چیزی ممکن است؟ این بگو مگوگوی این واقعیت است که ابزار ریاضی لازم برای مطالعه نسبیت مقدماتی در میان ریاضیدانان، آن‌طور که باید، شناخته شده نیست. درواقع، برای پاسخ‌دادن به سؤالی از نوع سؤال نوروود، که در بالا مطرح شد، نظریه نسبیت عام لازم نیست، بلکه فقط نظریه خمینه‌های (نیمه)ریمانی در حضور اجرام گرانشی لازم است. مطالعه نسبیت خاص بدون در نظر گرفتن شتاب به این دلیل نیست که استفاده از شتاب در این بحث قدغن است، بلکه صرفاً به این دلیل است که مؤلف نمی‌خواهد حسابان را

پیش‌نیاز آن فرض کند. البته، این هیچ مانعی در درس حسابان محسوب نمی‌شود.

کمتر از یک دهه دیگر نظریه نسبیت خاص صدساله می‌شود؛ با وجود این، هنوز این ایده پراهمیت جایگاهی در بخش‌های کاربردی درس‌های متعارف ما پیدا نکرده است. دلیل این امر شاید تا حدی این باشد که ریاضیدانان، برخلاف فیزیکدانان، هنوز فکر می‌کنند که نظریه نسبیت خاص را باید با استفاده از تبدیلات لورنتس مطالعه کرد [۲۰، صفحه ۹۵]. رهیافت مبتنی بر تبدیلات لورنتس با کاربرد حسابان ناسازگار است و برای پاسخ دادن به سؤالی از نوع سؤال نوروود مناسب نیست.

در اینجا به جای تبدیلات لورنتس از رهیافت هندسی استفاده می‌کنیم و برای هندسه اقلیدسی، مکانیک نیوتنی و مکانیک نسبیتی رهیافت واحدی به کار می‌بریم. برای سهولت، این بررسی به یک بُعد فضا و یک بعد زمان (یعنی، حرکت در امتداد یک خط راست) محدود شده است. این محدودیت تحلیل مستقیم سؤال نوروود را، که مستلزم دو بُعد فضا و یک بعد زمان است، منتفی می‌سازد اما در عین حال، موضوعات لازم برای تحلیل شهودی را به قدر کافی روشن می‌کند.

در چندین مورد به عنوان مطالبی برمی‌خوریم که می‌توان آنها را جداگانه برای یک مجموعه مسائل، متمم کاربردی یک درس، یا یک بحث کوتاه در درس معادلات دیفرانسیل یا حسابان به کار برد.

۲. مختصری در باره خمها در صفحه‌های اقلیدسی، گالیله‌ای و مینکوفسکیایی

این بخش به بحث کوتاهی در هندسه مورد نیاز می‌پردازد و شامل اصلاحات اندکی در نظریه اقلیدسی خمهاست.

۱.۲ انحنا در صفحه‌های اقلیدسی، گالیله‌ای و مینکوفسکیایی
 $\mathbb{R}^2$ را با صورت دوخطی زیر در نظر می‌گیریم

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \epsilon v_2 w_2 \quad (۱)$$

که در آن ϵ می‌تواند ۱، ۰، یا -۱ باشد. فاصله بین دو نقطه p و q با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\|p - q\| = |\langle p - q, p - q \rangle|^{1/2}$$

اگر $\epsilon = 0$ و p و q مختصه اول یکسان داشته باشند، فاصله (علامت‌دار) را تفاضل مختصه‌های دوم تعریف می‌کنیم؛ برای آشنایی با روش کلی، مرجع [۲۱] را ببینید. به‌ازای $\epsilon = 1$ ، صفحه اقلیدسی، به‌ازای $\epsilon = 0$ ، گالیله‌ای و به‌ازای $\epsilon = -1$ ، مینکوفسکیایی است. در مرجعهای [۲۱] و [۲۲] این سه صفحه را هندسه‌های مسطحه کیلی-کلاپن با شاخص سهموی فاصله می‌نامند. $\mathbb{R}^2$ با صورت دوخطی (۱) را به $\mathbb{P}_\epsilon$ نشان می‌دهیم. طول قوسی γ مستقیماً از $\sigma : I \rightarrow \mathbb{P}_\epsilon$ از $p = \sigma(a)$ تا $q = \sigma(b)$ را با انتگرال زیر تعریف می‌کنیم

$$L(a, b) = \int_a^b \|\sigma'(u)\| du$$

γ مستقیماً از $\sigma : I \rightarrow \mathbb{P}_\epsilon$ را، اگر به‌ازای تمامی u ها در I ، $\|\sigma'(u)\| \neq 0$ ، γ مستقیم می‌نامیم. طبق معمول، طول قوس هر γ مستقیم، مستقل از پارامتری‌سازی است و این γ ها را می‌توان نسبت به طول قوس پارامتری کرد. برای پارامتر طول قوس s و به‌ازای تمامی s ها داریم $\|\sigma'(s)\| = 1$. γ مستقیم در صفحه اقلیدسی، خمی است با یک بردار مماس که هرگز صفر نمی‌شود. در دو مورد دیگر ویژگی مستقیم بودن محدودکننده‌تر است. به‌ازای $\epsilon = -1$ ، بردارهای مماس باید ناصفر و ناموازی با هریک از بردارهای $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ باشند. به‌عنوان مثال، اگر مماس بر یک γ مستقیم در یک نقطه، بین $(-1, 1)$ و $(1, 1)$ قرار گیرد، آنگاه تمامی بردارهای مماس بر γ بین این بردارها قرار می‌گیرند. مخصوصاً γ های بسته نمی‌توانند مستقیم باشند. اگر $\epsilon = 0$ ، بردارهای مماس بر یک γ مستقیم باید ناصفر و ناموازی با $(0, 1)$ باشند؛ و در اینجا هم γ های بسته نمی‌توانند مستقیم باشند.

اگر $\langle v, w \rangle = 0$ ، بردارهای v و w در $\mathbb{P}_\epsilon$ متعامد نامیده و به‌صورت $v \perp w$ نوشته می‌شوند. بردارهای خودمتعامد را چارچوب^۱ می‌نامند. به‌ازای $\epsilon = 1$ ، فقط بردار صفر پایدار است. به‌ازای $\epsilon = 0$ ، بردارهای قائم و صفر، و به‌ازای $\epsilon = -1$ ، بردارهای صفر و بردارهای موازی با $(1, 1)$ و $(-1, 1)$ پایدارند.

تبدیل خطی $J : \mathbb{P}_\epsilon \rightarrow \mathbb{P}_\epsilon$ با ماتریس زیر، که آن نیز با J نشان داده می‌شود، هر بردار v را به بردار متعامد Jv می‌برد:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

اگر v پایدار نباشد و w بر v عمود باشد، آنگاه به‌ازای یک عدد حقیقی مانند k ، به‌راحتی می‌توان درستی رابطه $w = kJv$ را تحقیق کرد. اکنون فرض کنید که γ مستقیم $\sigma(s)$ نسبت به طول قوس پارامتری می‌شود. در این صورت، $\langle \sigma'(s), \sigma'(s) \rangle = \pm 1$. چون صورتهای دوخطی از قاعده حاصلضربی زیر پیروی می‌کنند

$$\langle f(s), g(s) \rangle' = \langle f'(s), g(s) \rangle + \langle f(s), g'(s) \rangle$$

نتیجه می‌گیریم $\sigma' \perp \sigma''$. اگر قرار دهیم $T(s) = \sigma'(s)$ و $N(s) = JT(s)$ ، نتیجه می‌شود که تابعی مانند $\kappa(s)$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

تابع $\kappa(s)$ را انحنا^۲ $\sigma(s)$ می‌نامند. بردار $T(s)$ ، بردار همای^۳ یک و بردار $N(s)$ ، بردار قائم^۴ یک است. چون $JN(s) = J^T T(s) = -\epsilon T(s)$ ، مستقیماً به فرمولهای فرجه می‌رسیم:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

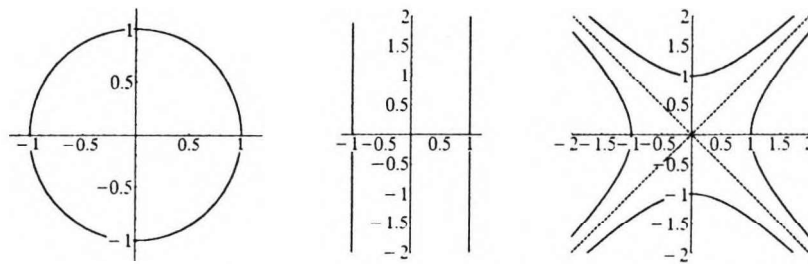
$$N'(s) = -\epsilon \kappa(s)T(s)$$

این، برای حالت اقلیدسی ($\epsilon = 1$)، تعریف معمولی انحناست. حالتهای گالیله‌ای و مینکوفسکیایی را می‌توان، به ترتیب، برای هندسی کردن مکانیک نیوتنی و نسبیتی به‌کار برد.

مکانیک نیوتنی. فرض کنید محل یک ذره متحرک بر روی یک خط با رابطه $x = f(t)$ داده شود که در آن t زمان است. جهان-خط نیوتنی ذره، خمی در $\mathbb{P}_0$ با ضابطه $(t, f(t)) = \sigma(t)$ است. این همان نمایش پارامتری طول قوس است زیرا $T(t) = \sigma'(t) = (1, f'(t))$ یک بردار یک در $\mathbb{P}_0$ است. بردار قائم واحد عبارت است از $(0, 1) = J^T T(t)$. چون $\kappa(t) = f''(t)$ تابع $T'(t) = (0, f''(t)) = f''(t)N(t)$ تابع $\kappa(t) = f''(t)$ است. انحنا^۲ از این رو، در این هندسی‌سازی مکانیک نیوتنی، انحنا^۲ شتاب^۵ است.

اگر $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ در $\mathbb{P}_0$ باشد، آنگاه معادله $\|\sigma'(t)\| = |x'(t)|$ نشان می‌دهد که به‌ازای ثابتی مانند a داریم $x(t) = a \pm t$. برای استفاده از این بحث در مکانیک، توجه خود را به γ هایی به‌صورت $\sigma(t) = (a + t, f(t))$ ، یعنی به ذراتی که در زمان به جلو پیش می‌روند، محدود می‌کنیم. در این صورت به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که طول قوس از $\sigma(t_1)$ تا $\sigma(t_2)$ همان زمان سپری‌شده $t_2 - t_1$ است.

مکانیک نسبیتی. در بحثهای نسبیت غالباً چارچوبهای مرجع مختلفی معرفی می‌شود. ما در این مقاله مختصات مفروض $\mathbb{P}_{-1}$ را چارچوب مرجع آزمایشگاه می‌نامیم.



شکل ۱ دایره‌های یک، به ترتیب، برای $\epsilon = 1$ ، $\epsilon = 0$ و $\epsilon = -1$

۲.۲ دایره‌ها، دورانها، و تابعهای مثلثاتی

دایره مجموعه‌ای از نقاط با فاصله معین از یک نقطه ثابت، به نام مرکز، است. دایره یک در $\mathbb{P}_\epsilon$ عبارت است از مجموعه نقاط p با ضابطه $\|p\| = 1$. دایره‌های یک در صفحه‌های اقلیدسی، گالیله‌ای، و مینکوفسکیایی در شکل ۱ نشان داده شده است.

دایره یک گالیله‌ای دو شاخه دارد که عبارت‌اند از خطهای قائم $x = \pm 1$ و هر نقطه بر محور y یک مرکز است. دایره یک مینکوفسکیایی چهارشاخه دارد که متشکل‌اند از یک زوج هذلولی قائم مزدوج با معادله‌های $x^2 - y^2 = \pm 1$. مجانبهای هذلولیهای دایره یک مینکوفسکیایی نیز در شکل ۱ رسم شده‌اند. این مجانبهای خمهای نورگونه هستند. بخش P_1 میان مجانبها و شامل محور y (محور زمان مکانیک نسبیتی) مخروط نور نامیده می‌شود. بخش شامل قسمت مثبت محور y مخروط نور آینده و بخش شامل قسمت محور y مخروط نور گذشته است. بردارهای مماس بر خمهای زمان‌گونه (به سمت آینده)، در صورت انتقال به مبدأ، در مخروط نور (آینده) قرار می‌گیرند. از این رو، می‌توان دو شاخه دایره یک‌ای را که محور x را قطع می‌کنند به صورت خمهای زمان‌گونه و دوشاخه‌ای را که محور y را قطع می‌کنند به صورت خمهای فضاگونه پارامتری کرد.

برای یافتن نمایش پارامتری طول قوس دایره یک $[\sigma(\phi) = (x(\phi), y(\phi))]$ ، با معادله زیر شروع می‌کنیم

$$x^2 + \epsilon y^2 = \pm 1$$

با مشتق‌گیری داریم $xx' + \epsilon yy' = 0$ که نشان می‌دهد $\sigma' \perp \sigma$ و در نتیجه $\sigma' = kJ\sigma$. برای نمایش پارامتری طول قوس، $k = \pm 1$ با قراردادن $-\phi$ به جای ϕ می‌توان جوابهای با $k = -1$ را از جوابهای با $k = 1$ به دست آورد. به این ترتیب به معادله دیفرانسیل ماتریسی $\sigma' = J\sigma$ می‌رسیم که جواب آن، برای تمامی ϕ های حقیقی، عبارت است از

$$\sigma(\phi) = e^{J\phi} \sigma(0)$$

تبدیل خطی با ماتریس $e^{J\phi}$ دوران به اندازه زاویه ϕ نامیده می‌شود. زاویه ϕ طول قوس در امتداد دایره یک از $\sigma(0)$ تا $\sigma(\phi)$ است. این طول قوس اندازه دادانی نامیده می‌شود. چون $\sigma(0)$ اختیاری است به نتیجه زیر می‌رسیم.

اگر u و v بردارهای یک‌ای باشند که اندای آنها در مبدأست و روی یک شاخه از دایره یک در $\mathbb{P}_\epsilon$ قرار داشته باشند، آنگاه دورانی وجود دارد که u را به v می‌برد.

باز هم فرض کنید محل یک ذره متحرک بر روی یک خط با رابطه $x = f(t)$ داده می‌شود که در آن زمان در چارچوب مرجع آزمایشگاه است. جهان-خط نسبیتی ذره خمی در $\mathbb{P}_{-1}$ با ضابطه $\sigma(t) = (f(t), t)$ است. این نمایش پارامتری طول قوس نیست زیرا $\langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle = [f'(t)]^2 - 1$ اگر σ منظم باشد، در حالت کلی ثابت نیست. قرار می‌دهیم $v = f'(t)$. چون ما می‌خواهیم $v = 0$ باشد، در هر خم $|v|$ نمی‌تواند برابر ۱ باشد. یکاهای به کار رفته در این مورد یکاهای منظم باید داشته باشیم $|v| < 1$. یکاهای به کار رفته در این مورد یکاهای هندسی هستند که در آنها زمان و فاصله برحسب یکاهای یکسانی اندازه‌گیری می‌شود و سرعت نور برابر ۱ است؛ مرجعهای $[15]$ ، $[20]$ ، یا $[10]$ را ببینید. طول قوس این خم را ویژه‌زمان می‌گویند. ویژه‌زمان مدت زمانی است که ساعت همراه ذره ثبت می‌کند (مقایسه کنید با حالت نیوتنی). فرض کنید τ ویژه‌زمان باشد. طبق تعریف طول قوس:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2}$$

چون $\sqrt{1 - v^2} < 1$ ، ساعت همراه ذره در مقایسه با ساعت واقع در چارچوب مرجع کندتر کار می‌کند. این نتیجه به پادادکس دوقلو یا پادادکس ساعت منجر می‌شود.

تعبیر فیزیکی انحنای $\kappa(t)$ شتابی است که ناظر سواد بر ذره می‌گیرد. ما در اینجا κ را ویژه‌شتاب می‌نامیم. مسأله، حرکت در امتداد یک خط مستقیم است، بنابراین می‌توانیم شخصی را در نظر بگیریم که سوار بر یک آسانسور بسته است و از یک شتاب‌سنج به عنوان وسیله اندازه‌گیری استفاده می‌کند. ویژه‌شتاب با شتاب مشاهده شده در چارچوب مرجع آزمایشگاه از طریق فرمول زیر مربوط می‌شود

$$\kappa = \frac{f''(t)}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

که در آن حرکت با رابطه $x = f(t)$ مشخص می‌شود. این رابطه، نوع مینکوفسکیایی فرمول استاندارد حسابان است (و به همان طریق به دست می‌آید).

هنگامی که $\langle \sigma'(t), \sigma'(t) \rangle$ مثبت، صفر، یا منفی است جهان-خط را، به ترتیب، فضاگونه، نورگونه، یا زمان‌گونه می‌نامند. جهان-خط ناظرها زمان‌گونه است. برای ناظرهای لخت، $\kappa(\tau) \equiv 0$. چون برای ناظرهای لخت $T(\tau)$ ثابت است، جهان-خط آنها یک خط مستقیم است. نقاط $\mathbb{P}_{-1}$ را رویداد می‌نامند و مختصات معین آزمایشگاه در $\mathbb{P}_{-1}$ را، آن‌طور که توسط یک ناظر لخت با جهان-خط $\sigma(t) = (0, t)$ اندازه‌گیری می‌شوند، مختصات فضا و زمان هر رویداد فرض می‌کنند.

۳.۲ زاویه‌ها، نابرابریها، و طول قوس

دورانها صورت دوخطی (۱) را حفظ می‌کنند. یعنی، برای هر زاویه ϕ و هر دو بردار v و w داریم

$$\langle e^{J\phi}v, e^{J\phi}w \rangle = \langle v, w \rangle$$

برای درک این نکته، ابتدا نشان دهید که $e^{J\phi}$ یک ماتریس متعامد است یعنی $(e^{J\phi})^T B e^{J\phi} = B$ که در آن

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

ماتریس صورت دوخطی است. راهنمایی: از $(e^{J\phi})^T B e^{J\phi}$ نسبت به ϕ مشتق بگیرید و توجه کنید که $J^T B + B J = 0$. چون وقتی بردارها به صورت ماتریسهای ستونی تعبیر شوند داریم $\langle v, w \rangle = v^T B w$ ، نتیجه به دست می‌آید.

گوییم دو بردار ناپایدار v و w ، از یک نوع‌اند اگر بردارهای یک‌زاویه (سودار) v_1 تا v و w_1 تا w برابر عدد ϕ است به گونه‌ای که $w_1 = e^{J\phi}v_1$. در این صورت، $v_1 = e^{J\psi_1}u$ و $w_1 = e^{J\psi_2}u$ که در آن، بسته به شاخه به خصوص دایره یک، $u = (\pm 1, 0)$ یا $u = (0, \pm 1)$. قرار می‌دهیم $\phi = \psi_2 - \psi_1$. در این صورت ϕ زاویه‌ای از v تا w است و، با تعبیر بردارها به عنوان ماتریسهای تک‌ستونی داریم

$$\begin{aligned} \langle v_1, w_1 \rangle &= \langle e^{J\psi_1}u, e^{J\psi_2}u \rangle = \langle u, e^{J\phi}u \rangle \\ &= u^T B e^{J\phi}u = \pm \cos_\epsilon \phi \end{aligned}$$

که در آن علامت منفی فقط وقتی ظاهر می‌شود که $\epsilon = -1$ و v و w بردارهای زمان‌گونه باشند. از این رو، برای بردارهای از یک نوع داریم

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \langle v_1, w_1 \rangle = \pm \|v\| \|w\| \cos_\epsilon \phi$$

که در آن ϕ زاویه از v تا w است و علامت منفی فقط وقتی ظاهر می‌شود که $\epsilon = -1$ و بردارها زمان‌گونه باشند. از این بحث مستقیماً به نابرابریهای زیر می‌رسیم.

نابرابری شوارتس. فرض کنید v و w بردارهایی از یک نوع باشند. در این صورت اگر $\epsilon = 1$ داریم $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$ و اگر $\epsilon = -1$ داریم $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \|w\|$ و سرانجام اگر $\epsilon = -1$ نتیجه می‌شود $|\langle v, w \rangle| \geq \|v\| \|w\|$.

با جرح و تعدیلی در استدلال متعارف در حالت اقلیدسی، به سادگی می‌توان به نابرابری زیر رسید.

البته، به ازای $\epsilon = 1$ تعداد زیادی از این دورانها وجود دارد، و مقادیر مختلف ϕ در ضرایب 2π با هم فرق می‌کنند. به ازای $\epsilon = 0$ و $\epsilon = -1$ ، ϕ منحصر به فرد است.

اکنون فرض کنید σ خم منظمی است که نسبت به طول قوس s پارامتری می‌شود. در این صورت $T(s)$ ، اگر به گونه‌ای انتقال یابد که ابتدای آن در مبدأ باشد، روی دایره یک قرار می‌گیرد. فرض کنید $\phi(s)$ زاویه از $T(0)$ تا $T(s)$ باشد. در این صورت $T(s) = e^{J\phi(s)}T(0)$ و داریم

$$\begin{aligned} \kappa(s)N(s) &= T'(s) = \phi'(s)J e^{J\phi(s)}T(0) \\ &= \phi'(s)JT(s) = \phi'(s)N(s) \end{aligned}$$

در این صورت $\kappa(s) = \phi'(s)$ و بنابراین $\kappa(s)$ آهنگ تغییر نسبت به طول قوس زاویه‌ای است که بردار مماس یک با یک خط ثابت می‌سازد.

در حالت اقلیدسی، این یک نتیجه متعارف است. برای حالت نیوتنی با ضابطه $\sigma(t) = (t, f'(t))$ واضح است که $\phi(t) = f'(t)$ سرعت است. در مکانیک نسبیتی، رابطه $\phi(\tau) = \kappa(\tau)$ نشان می‌دهد که مشتق ϕ نسبت به ویژه‌زمان، ویژه‌شتاب است. از این رو، می‌توان زاویه ϕ را ویژه‌سرعت نامید، که گاهی پارامتر سرعت نامیده می‌شود. از بحث مثلثاتی زیر نتیجه می‌شود که اگر جهان-خط در چارچوب مرجع آزمایشگاه با $x = f(t)$ مشخص داده شود، آنگاه $f' = \tanh \phi$.

امتحان مستقیم رابطه زیر با استفاده از تعریف تابع نمایی ماتریسی $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$ مشکل نیست

$$e^{J\phi} = \begin{pmatrix} \cos_\epsilon \phi & -\epsilon \sin_\epsilon \phi \\ \sin_\epsilon \phi & \cos_\epsilon \phi \end{pmatrix}$$

که در آن

$$\cos_\epsilon \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^n \phi^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin_\epsilon \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\epsilon)^n \phi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

به ازای $\epsilon = 1$ ، این توابع همان توابع معمولی سینوس و کسینوس هستند، به ازای $\epsilon = -1$ ، کسینوس و سینوس هیپربولیک، و به ازای $\epsilon = 0$ فقط $\cos_\epsilon \phi \equiv 1$ و $\sin_\epsilon \phi \equiv \phi$ هستند. در تمامی این موارد:

$$\cos_\epsilon^2 \phi + \epsilon \sin_\epsilon^2 \phi = 1$$

و

$$\partial_\phi \cos_\epsilon \phi = -\epsilon \sin_\epsilon \phi, \quad \partial_\phi \sin_\epsilon \phi = \cos_\epsilon \phi$$

با برابر قراردادن درایه‌های متناظر معادله ماتریسی:

$$e^{J(\phi+\psi)} = e^{J\phi} e^{J\psi}$$

فرمولهای مجموع به دست می‌آید

$$\cos_\epsilon(\phi + \psi) = \cos_\epsilon \phi \cos_\epsilon \psi - \epsilon \sin_\epsilon \phi \sin_\epsilon \psi$$

$$\sin_\epsilon(\phi + \psi) = \sin_\epsilon \phi \cos_\epsilon \psi + \cos_\epsilon \phi \sin_\epsilon \psi$$

برای ملاحظه بحثی در مثلثات این صفحه‌ها، مرجع [۲۱]، و برای مثلثات در $\mathbb{P}_1$ ، مرجع [۸] را ببینید.

که در آنها σ هر نقطه در صفحه است و T_0 روی دایره یکه قرار دارد. توجه کنید که برای هر جواب داریم

$$\langle T, T \rangle' = 2\kappa \langle JT, T \rangle = 0$$

و طول T ثابت است. در نتیجه s یک پارامتر طول قوس است. در حالت اقلیدسی، داریم $T_0 = (\cos \phi_0, \sin \phi_0)$ ؛ در مکانیک نیوتنی، $T_0 = (1, \phi_0)$ و در مکانیک نسبیتی، $T_0 = (\sinh \phi_0, \cosh \phi_0)$.

اکنون فرض کنید که $\sigma(s)$ و $\tau(s)$ دو خم پارامتری شده توسط طول قوس اند و $\kappa(s)$ ، تابع انحنای آنها، یکسان است. همچنین فرض کنید T_σ و T_τ ، به ترتیب، بردارهای مماس یکه این دو خم اند. اگر $T_\sigma(0)$ و $T_\tau(0)$ روی یک شاخه از دایره یکه باشند آنگاه زاویه ϕ ی وجود دارد که در رابطه زیر $T_\sigma(0) = e^{J\phi} T_\tau(0)$ صدق می کند. خم جدید $\rho(s)$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم

$$\rho(s) = (\sigma(0) - e^{J\phi} T_\tau(0)) + e^{J\phi} T_\tau(s)$$

چون ρ تصویر τ تحت یک همنهشتی مستقیم است، ρ نیز دارای تابع انحنای $\kappa(s)$ است. چون $\rho(0) = \sigma(0)$ و $T_\rho(0) = T_\sigma(0)$ ، هم σ و هم ρ جوابهای یک مسأله مقدار آغازی هستند و بنابراین برابرند. این نتیجه، قضیه بنیادی خمهای مسطح را اثبات می کند.

به ازای $\epsilon = 1$ و برای ذراتی که به ازای $\epsilon = 0$ و $\epsilon = -1$ در زمان به طرف جلو حرکت می کنند، عبارت مربوط به $e^{J\phi}$ برحسب توابع مثلثاتی را، در صورت معلوم بودن κ ، می توان برای بیان این خمها برحسب انتگرال به کار برد. این روابط، در صفحه اقلیدسی، عبارت اند از

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \int_0^s k(u) du + \phi_0, \quad x(s) = \int_0^s \cos \phi(u) du + x_0, \quad y(s) \\ &= \int_0^s \sin \phi(u) du + y_0. \end{aligned}$$

برای یک ذره نسبیتی (τ)، ویژه زمان عبارت اند از

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \int_0^\tau k(u) du + \phi_0, \quad x(\tau) = \int_0^\tau \sinh \phi(u) du + x_0, \quad t(\tau) \\ &= \int_0^\tau \cosh \phi(u) du + t_0. \end{aligned}$$

و برای یک ذره نیوتنی عبارت اند از

$$x(t) = \int_0^t \phi(u) du + x_0 \quad \text{و} \quad \phi(t) = \int_0^t k(u) du + \phi_0.$$

این فرمولها هنگامی که انتگرال گیری انجام پذیر باشد مفیدند. دستگاه اصلی معادلات دیفرانسیل برای محاسبات عددی ارجح است زیرا در این صورت نیاز به استفاده از توابع متعالی وجود ندارد. برای آشنایی با یک تابع همتمیک که جوابها را به دستگاه معادلات دیفرانسیل برمی گرداند مرجع [۹] را ببینید.

نابرابری مثلثی. فرض کنید v و w بردارهایی از یک نوع اند. در این صورت اگر $\epsilon = 1$ داریم $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ و اگر $\epsilon = 0$ یا $\epsilon = -1$ ، به ترتیب داریم $\|v+w\| \geq \|v\| + \|w\|$ و $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$ با استفاده از نابرابری مثلثی می توان نشان داد که

در میان خمهای منظم از نقطه p تا نقطه q در صفحه اقلیدسی، خط مستقیم دارای کمترین طول قوس است، طول قوس تمامی خمهای منظم از نقطه p تا نقطه q در صفحه گالیه ای یکسان است، در میان خمهای منظم از نقطه p تا نقطه q در صفحه مینکوفسکیایی، خط مستقیم دارای بزرگترین طول قوس است.

در مکانیک نسبیتی، طول قوس یک خم زمان گونه از رویداد p تا رویداد q برابر است با زمان ثبت شده توسط ساعتی که در امتداد خم از p به q می رود. اینکه دو ساعت که در امتداد دو جهان خط متفاوت از p به q می روند دو زمان سپری شده متفاوت را ثبت می کنند همان صورت عام پارادوکس دوقلوس است که در بخش ۱.۳ توصیف شد.

۴.۲ قضیه بنیادی خمهای مسطح

همنهشتی مستقیم دورانی است که به دنبال آن یک انتقال می آید:

$$\mathcal{T}(v) = a + e^{J\phi} v$$

این همنهشتیها فاصله های میان نقاط $\mathbb{P}_\epsilon$ را حفظ می کنند و یک زیرگروه از گروه طولپایبها تشکیل می دهند. این تبدیلهای مستقیم گالیه ای به ازای $\epsilon = 0$ و تبدیلهای مستقیم لورنتسی به ازای $\epsilon = -1$ می نامیم. اگر $\sigma(s)$ خمی با پارامتر طول قوس s و $\mathcal{T}$ یک همنهشتی مستقیم باشد، خم جدید زیر را تعریف می کنیم

$$\rho(s) = \mathcal{T}(\sigma(s)) = a + e^{J\phi} \sigma(s)$$

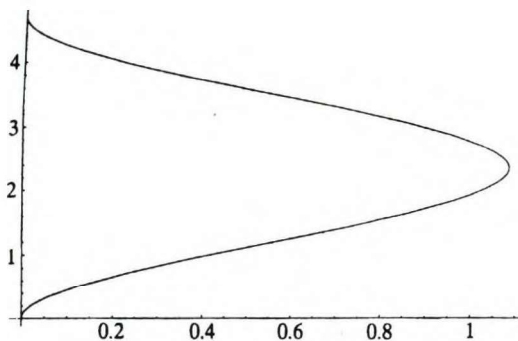
در این صورت s نیز پارامتر طول قوس برای ρ است و، چون J و $e^{J\phi}$ تعویض پذیرند، تابع انحنای ρ همان تابع انحنای s است. اگر $T(s)$ و $N(s)$ بردارهای مماس و قائم یکه σ باشند، آنگاه $e^{J\phi} T(s)$ و $e^{J\phi} N(s)$ بردارهای مماس و قائم ρ هستند.

برعکس، دو خم که با طول قوس پارامتری شده اند و تابع انحنای یکسان دارند، باید مستقیماً همنهشت باشند، به شرط آنکه بردارهای مماس یکه آنها روی یک شاخه از دایره یکه قرار گرفته باشد. این نتیجه را قضیه بنیادی خمهای مسطح می نامیم.

نظریه بنیادی خمهای مسطح از یکتایی جوابهای معادله های دیفرانسیل معمولی نتیجه می شود. مسأله مقدار آغازی را می توان به طور فشرده به صورت دستگاهی از دو معادله دیفرانسیل برداری با شرایط آغازی نوشت:

$$\sigma'(s) = T(s), \quad \sigma(0) = \sigma_0.$$

$$T'(s) = \kappa(s) J_\epsilon T(s), \quad T(0) = T_0.$$



شکل ۲

جهان-خط متشکل است از قوسهای هذلولوی و محاسبه دقیق امکان پذیر است. (بخش ۲.۳ را ببینید).

۲.۳. تکانه، انرژی و نیرو

قانون پایستگی. بردار مماس یکه، در محاسبات روزمره فیزیک، مانند تحلیل اثر برهمکنشهای ذره در شتاب دهنده، نقش مهمی بازی می کند. این امر بدین دلیل است که به جای قوانین پایستگی کلاسیک تکانه، انرژی و جرم، یک قانون واحد برحسب بردارهای مماس بر جهان-خطها به کار می رود.

به هر «ذره» عددی به نام جرم سکون وابسته است. در این مقاله ذراتی را که جرم سکون مثبت دارند بررسی می کنیم. برای تعمیم این بحث به ذرات نورگونه، مرجعهای [۱۱]، [۱۶] و [۱۷] را ببینید. اگر ذره ای با جرم سکون m_0 دارای جهان-خط σ ، بردار مماس یکه T ، و بردار قائم یکه N باشد، بردار تکانه نسبیتی یا چهار-تکانه ذره را به صورت بردار $P = m_0 T$ تعریف می کنیم. اکنون فرض کنید در لحظه $t = t_0$ در چارچوب آزمایشگاه، ذراتی با بردارهای تکانه نسبیتی $P_1, P_2, \dots, P_n$ برهمکنش می کنند. بعد از برهمکنش، ذرات جدیدی با بردارهای تکانه نسبیتی $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ به جای می ماند. قانون پایستگی عبارت است از

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m$$

فرض کنید که، در چارچوب آزمایشگاه، جهان-خط ذره ای با جرم سکون m_0 عبارت است از $\sigma(t) = (x(t), t)$ که در آن t از روی ساعت آزمایشگاه اندازه گیری می شود. بردار تکانه نسبیتی برابر است با

$$m_0 (d\sigma/d\tau) = m_0 (dt/d\tau) (d\sigma/dt) = \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

مؤلفه اول تکانه آزمایشگاه یا سه-تکانه و مؤلفه دوم انرژی ذره براساس اندازه گیری در آزمایشگاه است. جرم سکون ذره، کمینه انرژی آن است و هنگامی که ذره در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است انرژی آن کمینه است. در دستگاه یکاهاهی که در آنها سرعت نور واحد نیست این برابری جرم و انرژی با رابطه $E = m_0 c^2$ داده می شود که در آن ضریب تبدیل c سرعت نور است. برای توضیح این قانون پایستگی فرض کنید که در چارچوب مرجع آزمایشگاه دو تکه بتونه مساوی به جرم m_0 در حال سکون وجود دارد. این دو تکه را با شتاب به طرف همدیگر می فرستیم و این دو در زمان t_0 با سرعتهای مساوی و مخالف $\pm v_0$ با هم برخورد می کنند. فرض کنید که آنها

۳. نقاط شتابدار

مطالعه ذره نقطه ای نسبیتی که در یک بعد در حرکت است فقط مستلزم تعریف طول قوس است، یعنی زمانی که توسط ساعت روی ذره ثبت می شود، و دستگاه فرقه معادلات دیفرانسیل. در اینجا اثر عمده اتساع زمان است که براساس آن ساعت های متحرک در مقایسه با ساعت های ساکن واقع در چارچوب آزمایشگاه کند کار می کنند. برای توضیح این مطلب دو مثال می آوریم.

۱.۳. پارادکس ساعت

پارادکس ساعت، یا پارادکس دوقلو، شامل یک زوج دوقلو یکسان است که یکی به مسافرت میان ستاره ای می رود و دیگری در منزل می ماند. وقتی دوقلو مسافر برمی گردد، سن آنها دیگر یکسان نیست. سن دوقلو مانده در منزل از سن دوقلو مسافر بیشتر است. این مسأله را در درس حسابان هنگام بحث طول قوس می توان حل کرد. فرمول طول قوس و فرمول ویژه زمان فقط در یک علامت با هم فرق می کنند. فرمول طول قوس عبارت است از

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (dx/dt)^2} dt \quad (2)$$

و فرمول ویژه زمان چنین است

$$\tau = \int_a^b \sqrt{1 - (dx/dt)^2} dt \quad (3)$$

برای اجتناب از یکاهای هندسی، به جای $v = dx/dt$ قرار می دهیم v/c که در آن c سرعت نور در دستگاه یکاهای به کار رفته است.

تحلیل این موضوع، در صورت استفاده از تبدیلات لورنتس، نادقیق است زیرا هنگام برگشتن دوقلو مسافر شتاب به طور اجتناب ناپذیری تغییر می کند. اما، با استفاده از روابط (۲) و (۳) می توان صرفاً مسیر فضا-زمان، یعنی رابطه $\sigma(t) = (x(t), t)$ ، را برای مسافر انتخاب و طول قوس مینکوفسکیایی را محاسبه کرد. هر مسیر انتخاب شده ای این اثر را نشان می دهد. با استفاده از روشهای عددی می توان بر مشکلات فنی انتگرال گیری غلبه کرد.

اگر دستگاه معادلات دیفرانسیل فرقه را به کار ببریم می توانیم شتاب را مشخص کنیم. فرض کنید خلبان سفینه دوقلو مسافر موشکها را به گونه ای روشن می کند که شتاب ثابتی (آن طور که در سفینه اندازه گیری می شود) برای مدت یک سال به سفینه بدهد. بعد از یک سال، سفینه 180° درجه می چرخد و برای مدت یک سال بعد با شتاب کندشونده پیش می رود تا متوقف شود. روشن کردن موشکها برای سال بعد سفینه را به نیمه راه زمین برمی گرداند. در این نقطه دوباره سفینه 180° درجه می چرخد و سرانجام به زمین برمی گردد. جهان-خط در $\mathbb{P}_1$ در شکل ۲ رسم شده است. زمین در $x = 0$ واقع است و مسافرت در $t = 0$ شروع می شود. شتاب برابر است با ۱ سال نوری بر سال بر سال، که تقریباً برابر شتاب حاصل از گرانش بر زمین است. مسافرت، به زمان سفینه، چهار سال طول می کشد. جهان-خط دوقلو مسافر در شکل ۲ نشان داده شده است. جهان-خط دوقلو مانده در منزل، محور قائم است. برای ملاحظه جزئیات محاسبه عددی مرجع [۹] را ببینید.

چون $(4, 0) \approx \sigma(4)$ ، سن دوقلو مانده در منزل حدود ۴٫۷ سال و سن دوقلو مسافر ۴ سال است. چون K در این مثال ثابت تکه ای است،

که در آن

$$a = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}}, \quad \nu_0 = \nu(0)$$

از این رو با بزرگ شدن t سرعت به سرعت نور نزدیک می‌شود و می‌توان به ازای یک α مشخص زمان آزمایشگاه را برای شتاب دادن به ذره، مثلاً، تا ۹۹٪ سرعت نور به دست آورد. زمان ثبت شده توسط ساعت همراه ذره را می‌توان با استفاده از انتگرال زیر محاسبه کرد

$$\int \sqrt{1 - \nu^2} dt = \frac{1}{\alpha} \sinh^{-1}(\alpha t + a) + C$$

با انتگرال گرفتن از $\nu(t)$ به دست می‌آید

$$x(t) = \alpha^{-1} \sqrt{(\alpha t + a)^2 + 1} + b \quad (5)$$

که در آن

$$b = x_0 - \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - \nu_0^2}}, \quad x_0 = x(0)$$

این یک هذلولی است و حرکت با شتاب ثابت را غالباً حرکت هذلولوی می‌گویند. با فرض $\nu_0 = x_0 = 0$ برای سهولت، حرکت عبارت است از

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{\alpha^2 t^2 + 1} - 1) = \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{\alpha^3}{8} t^4 + \dots$$

که نتیجه نیوتنی $x(t) = \alpha t^2 / 2$ به اضافه جمله‌های مرتبه بالاتر است.

آلبرت و ایزاک توپ بازی می‌کنند. آلبرت اینشتین و ایزاک نیوتن، شانه به شانه همدیگر ایستاده‌اند و توپهای یکسانی را با سرعت و ارتفاع اولیه یکسان مستقیماً به طرف بالا پرتاب می‌کنند. توپ کدام یک بیشتر بالا می‌رود؟ توپ کدام یک مدت طولانی‌تری در هوا می‌ماند؟

با فرض اینکه $x(t)$ ارتفاع باشد و $x(0) = 0$ ، فرمولهای (۴) و (۵) نشان می‌دهند که توپ آلبرت در مدت زمان زیر به زمین برمی‌گردد (α در اینجا منفی است)

$$t = \frac{-2\nu_0}{\alpha \sqrt{1 - \nu_0^2}}$$

که در آن ν_0 سرعت اولیه است. چون توپ ایزاک در زمان $t = -2\nu_0 / \alpha$ به زمین برمی‌گردد، توپ آلبرت مدت زمان بیشتری در هوا باقی می‌ماند و مسافت بیشتری هم بالا می‌رود. دو خم بالایی در شکل ۳ نمودارهای ارتفاع دو توپ بر حسب زمان هستند.

اما برای اینکه توپ آلبرت با همان سرعت اولیه توپ نیوتن بالا برود باید انرژی بیشتری به آن بدهد. فرض کنید آلبرت و ایزاک توپهای خود را با انرژی یکسانی پرتاب می‌کنند. یعنی، آنها توپهای خود را با نیروی ثابت مساوی و

بر اثر برخورد به هم می‌چسبند و یک تکه جدید تشکیل می‌دهند. همچنین فرض کنید که P_1 و P_2 بردارهای تکانه تکه‌های اصلی در زمان t_0 و Q بردار تکانه تکه جدید باشد. در این صورت

$$Q = P_1 + P_2$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{m_0 \nu_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}} \right) + \left(\frac{-m_0 \nu_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}}, \frac{m_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}} \right) \\ &= \left(0, \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \nu_0^2}} \right) \end{aligned}$$

از این رو تکه جدید بتونه در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن و جرم سکون آن بزرگتر از مجموع جرم سکون‌های تکه‌های اولیه است. جرم سکون تکه جدید برابر است با

$$\frac{2m}{\sqrt{1 - \nu_0^2}} = 2m_0 + 2\left(\frac{1}{2}m_0 \nu_0^2\right) + \frac{2}{3}m_0 \nu_0^4 + \dots$$

بنابراین، با چشم‌پوشی از جمله‌های با توان بیشتر از دو، افزایش جرم سکون برابر است با انرژی جنبشی کلاسیک سیستم قبل از برخورد. انرژی به جرم تبدیل شده است.

براساس این محاسبات، می‌توان یک متمم کاربردی برای درس جبر خطی مقدماتی عرضه کرد که در آن از جبر برداری چهاربُعدی استفاده شود.

نیرو، سه‌نیرو مشتق سه‌تکانه نسبت به زمان آزمایشگاه است. با فرض ثابت بودن جرم سکون، نوشتن تکانه نسبیتی به صورت $P = (p, E)$ ، و به کار بردن فرمولهای فرنه داریم

$$\left(\frac{dp}{dt}, \frac{dE}{dt} \right) = \frac{dP}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dP}{d\tau} = m_0 \kappa J \frac{dT}{dt} = (m_0 \kappa, m_0 \kappa \frac{dx}{dt})$$

از این رو، با فرض ثابت بودن جرم سکون و حرکت راستخط، سه‌نیروی وارد بر یک ذره برابر است با

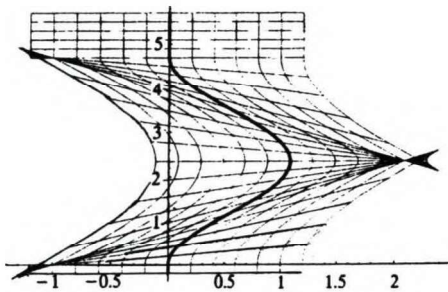
$$p' = m_0 \kappa = m_0 \frac{x''}{(1 - (x')^2)^{3/2}}$$

این رابطه جانشین نسبیتی قانون $F = ma$ نیوتن است. براساس این معادله می‌توان یک مجموعه مسأله کاربردی برای یک درس معادلات دیفرانسیل مقدماتی مطرح کرد. با فرض ثابت بودن نیروی F داریم

$$\frac{x''}{(1 - (x')^2)^{3/2}} = \frac{F}{m_0} = \alpha$$

با قرار دادن $\nu = x'$ یک معادله تفکیک‌پذیر با جواب زیر به دست می‌آید

$$\nu(t) = \frac{\alpha t + a}{\sqrt{(\alpha t + a)^2 + 1}} \quad (4)$$



شکل ۴ شبکه مختصات دوقلوهای مسافر

بنا به تعریف، مختصات (σ, τ) در چارچوب مرجع فرنه برای σ ، به صورت زیر با نقاط در چارچوب $\mathbb{P}_1$ مربوط می‌شوند

$$(x, t) = \sum (\sigma, \tau) = \sigma(\tau) + \sigma N(\tau) \quad (۶)$$

مفهوم فیزیکی چارچوب مرجع فرنه عبارت است از: مجموعه رویدادهای همزمان با ویژه‌زمان τ برای ناظر شتابدار با جهان-خط σ متشکل است از خط عمود بر بردار مماس $T(\tau)$ ، یعنی در راستای $N(\tau)$ قرار دارد، مقدار σ فاصله‌ای است که ناظر شتابدار اندازه می‌گیرد.

اگر سرعت، ν ، در چارچوب مرجع آزمایشگاه ثابت باشد، آنگاه با شرایط اولیه مناسب، $\sigma(t) = (\nu t, t)$ ، $d\tau/dt = \sqrt{1 - \nu^2}$ ، مقدار ثابت است و می‌توان نوشت $\tau = t\sqrt{1 - \nu^2}$. در این صورت فرمول (۶) به صورت زیر در می‌آید،

$$x = (\nu\tau + \delta)/\sqrt{1 - \nu^2}, \quad t = (\nu\delta + \tau)/\sqrt{1 - \nu^2}$$

که همان تبدیل لورنتس است.

شکل ۴، شبکه مختصات $\sigma\tau$ را برای دوقلوی شتابدار بخش ۱.۳ نشان می‌دهد. جهان-خط σ پررنگ است.

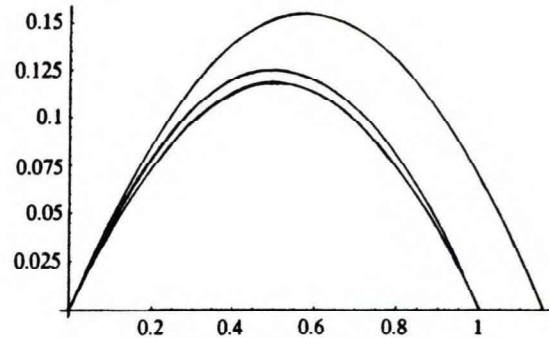
توجه کنید که این شبکه تکنیکی دارد و آن در نقاطی است که همزمان با دو یا چند مقدار متمایز از τ هستند. هرگاه بردار $N(\tau)$ ثابت نباشد وجود این تکنیکها اجتناب‌ناپذیر است؛ فرمولهای فرنه با $\epsilon = 0$ نشان می‌دهند که N در حالت نیوتنی ثابت است. برای اجتناب از این نقاط تکنیک، توجه خود را به ناحیه‌هایی محدود می‌کنیم که در آنها خمهای موازی $\sum(\delta, \tau)$ ، با δ ی ثابت، منظم‌اند. با استفاده از فرمولهای فرنه با $\epsilon = -1$ داریم

$$\frac{d}{d\tau}(\sigma(\tau) + \delta N(\tau)) = T(\tau) + \delta \kappa(\tau) T(\tau) = (1 + \delta \kappa(\tau)) T(\tau)$$

دستگاه مختصات یک ناظر شتابدار در ناحیه‌ای تعریف می‌شود که در آن وقتی $\kappa(\tau) > 0$ ، داریم $\delta > -1/\kappa(\tau)$ و وقتی $\kappa(\tau) < 0$ داریم $\delta \ll -1/\kappa(\tau)$.

ماتریس صورت دوخطی مینکوفسکی برحسب مختصات $\delta\tau$ عبارت است از

$$\begin{pmatrix} \langle \delta_\delta \sum, \partial_\sigma \sum \rangle & \langle \partial_\delta \sum, \partial_\tau \sum \rangle \\ \langle \delta_\tau \sum, \partial_\delta \sum \rangle & \langle \partial_\tau \sum, \partial_\tau \sum \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(1 + \delta \kappa(\tau))^2 \end{pmatrix}$$



شکل ۳ جهان-خط توپهای آلبرت و ایزاک

برای زمانهای مساوی شتاب می‌دهند. با فرض $\nu_0 = 0$ ، سرعت توپهای آلبرت و ایزاک، به ترتیب، برابر است با

$$\nu_A(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + 1}}, \quad \nu_1(t) = \alpha t$$

از این رو، به‌ازای نیروی یکسان، اگر توپ ایزاک با سرعت اولیه ν_1 رها شود آنگاه توپ آلبرت با سرعت اولیه زیر رها می‌شود

$$\nu_A = \frac{\nu_1}{\sqrt{1 + \nu_1^2}}$$

و در مدت زمان

$$t = \frac{-2\nu_A}{\alpha\sqrt{1 - \nu_A^2}} = -2\nu_1/\alpha$$

به زمین برمی‌گردد. دو توپ مدت زمان یکسانی در هوا باقی می‌مانند. توپ ایزاک تا ارتفاع بیشتری بالا می‌رود.

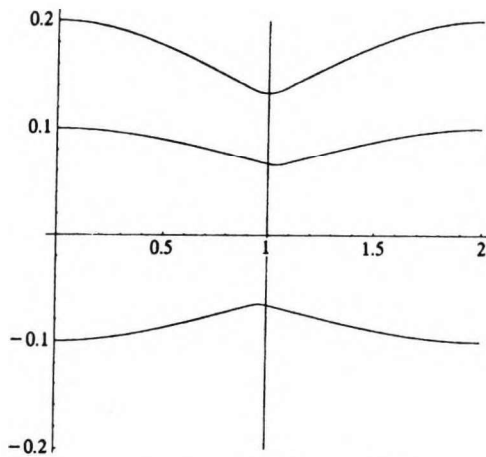
مسیرهای فضا-زمان دو توپ، با فرض جرم واحد در شکل ۳ رسم شده است. نیرو، در میدان گرانش زمین، ۱ سال نوری بر سال بر سال تقریب زده شده است. سرعت اولیه، به خاطر رسم بهتر نمودار، نسبتاً بزرگ و برابر $\nu_1 = 0.5$ فرض شده است. نمودار وسط مربوط به توپ ایزاک، نمودار بالا مربوط به توپ آلبرت با سرعت اولیه $\nu_A = 0.5$ و نمودار پایین مربوط به توپ آلبرت با سرعت اولیه $\nu_A = \nu_1/\sqrt{1 + \nu_1^2} = 1/\sqrt{5}$ است.

مسیرهای فضا-زمان توپهای آلبرت و ایزاک، به ترتیب، خمهایی با انحنای ثابت در $\mathbb{P}_0$ و $\mathbb{P}_1$ هستند. در مرجعهای [۲۱] و [۲۲] خمهای با انحنای ثابت در $\mathbb{P}_\epsilon$ را چرخه می‌گویند. به‌ازای $\epsilon = 1, -1$ ، چرخه‌ها (شاخه‌های) دایره‌ها و خطهای راست و به‌ازای $\epsilon = 0$ ، چرخه‌ها سهمیها و خطهای مستقیم (ناقائم) هستند.

۴. قطعه‌های شتابدار

انقباض طول مخصوص حرکت جسم گسترده است نه نقطه‌ای. در این موقعیت، برای تعریف دستگاه مختصات یک ناظر متحرک با مسیر فضا-زمان σ ، دستگاه کامل فرنه را به‌کار می‌بریم.

فرض کنید $\sigma(\tau)$ یک خم زمان‌گونه در $\mathbb{P}_1$ باشد که نسبت به ویژه‌زمان پارامتری شده است و دارای چارچوب مرجع فرنه $\{T(\tau), N(\tau)\}$ است.



شکل ۶ میله‌ای که دوقلوی مسافر با خود می‌برد.

در شکل ۶ نمودارهایی برای طول میله، آن‌طور که توسط دوقلوی «ساکن» در چارچوب مرجع آزمایشگاه اندازه‌گیری می‌شود، رسم شده که در دستگاه مختصات دوقلوی مسافر از $\delta = -1$ تا $\delta = 1$ گسترده است. این نمودارها مربوط به قسمت رفت مسافرت‌اند؛ نمودارهای قسمت برگشت با این نمودارها متقارن‌اند.

نمودار بالا طول میله است. نمودار پایین، فاصله (علامت‌دار) از دوقلوی مسافر تا انتهای پسین میله و نمودار وسط، فاصله از دوقلو تا انتهای پیشین میله است. توجه کنید که وقتی سرعت دوقلوی مسافر بیشینه است ($\tau = 1$) کل طول میله کمینه است، اما طول نیمه پسین اندکی قبل و طول نیمه پیشین اندکی بعد کمینه می‌شود. یعنی، از دید دوقلوی ساکن، طول نیمه‌های پیشین و پسین میله به‌طور متفاوت منقبض می‌شود.

جزئیات انقباض نه تنها به سرعت لحظه‌ای چارچوب شتاب‌دار بلکه به مکان میله در آن چارچوب نیز وابسته است.

آیا در این مثال چیز خاصی درباره «مرکز» میله وجود دارد؟ مرکز میله جایی است که ما چارچوب مرجع مسافر را در آن قرار داده‌ایم. در مورد چارچوب‌های وابسته به نقاط مختلف میله چه می‌توان گفت؟ این سؤال را در بخش بعد پاسخ می‌دهیم.

۲.۴ دو ناظر ساکن در یک چارچوب مرجع شتاب‌دار

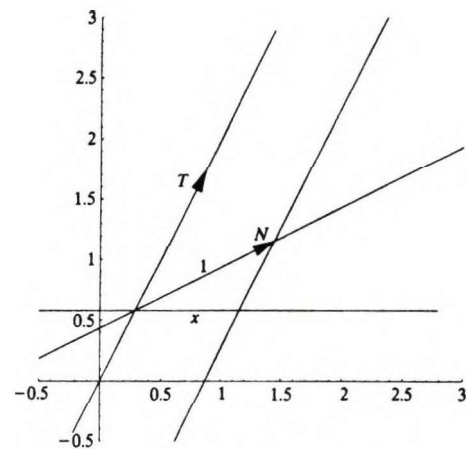
فرض کنید $\sigma(\tau)$ جهان-خط یک ناظر با چارچوب مرجع فرنی $\{T(\tau), N(\tau)\}$ است که در آن τ ویژه‌زمان، و ناظر دوم نسبت به ناظر اول ساکن است و در فاصله (علامت‌دار) δ از او قرار دارد. جهان-خط ناظر دوم را می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد

$$\rho(\tau) = \sigma(\tau) + \delta N(\tau)$$

این نمایش پارامتری ویژه‌زمان نیست. اگر فرض کنیم s پارامتر ویژه‌زمان برای ρ باشد آنگاه

$$\frac{ds}{d\tau} = \left\| \frac{d\rho}{d\tau} \right\| = \|T(\tau) + \delta \kappa(\tau) T(\tau)\| = 1 + \delta \kappa(\tau)$$

وقتی شتاب وجود دارد، ساعت‌های «سربالا» تندتر کار می‌کنند.



شکل ۵ انقباض طول برای ناظرهای لخت

برای حالت اقلیدسی، مرجع [۸، صفحه ۱۱۵] در مورد خمهای موازی را ببینید.

شبکه مختصات ناظر متحرک نمونه جالبی از دستگاه مختصات خمیده خطی است که می‌تواند در درس حسابان چندمتغیره به دانشجویان آموخته شود. یک تابع متنتیکا برای رسم شبکه مختصات ناظران شتابدار را می‌توان در مرجع [۹] یافت.

۱.۴ انقباض طول

جهان-خط یک ناظر لخت $\kappa(\tau) \equiv 0$ که با سرعت ν در $\mathbb{P}_1$ حرکت می‌کند عبارت است از $\sigma(\tau) = a + \tau T$ که در آن $T = (\sinh(\phi), \cosh(\phi))$ بردار مماس یک‌ه است و $\tanh(\phi) = \nu$. بردار قائم یک‌ه عبارت است از $N = (\cosh(\phi), \sinh(\phi))$. طول «میله»‌ای که این ناظر لخت با خود حمل می‌کند و از $\sigma(\tau) + lN$ تا $\sigma(\tau)$ گسترده است در چارچوب مرجع ناظر برابر l است. طول آن در چارچوب مرجع آزمایشگاه چقدر است؟

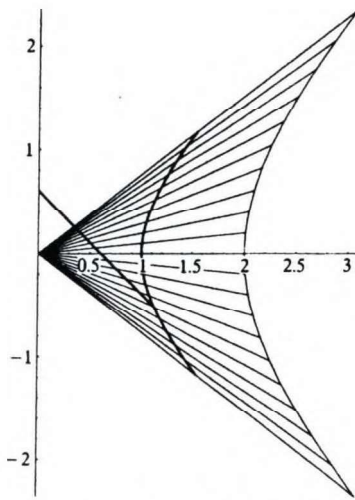
در شکل ۵ طول میله، x ، در زمان t در چارچوب مرجع آزمایشگاه برابر طول خط افقی‌ای است که از t ، واقع بر محور دوم، می‌گذرد یعنی توسط جهان-خط‌های دو انتهای میله قطع می‌شود. چون T بر N عمود است، l برابر است با طول تصویر عمودی بردار $(x, 0)$ بر امتداد N . با استفاده از فرمول تصویر عمودی داریم

$$l = \frac{\langle (x, 0), N \rangle}{\langle N, N \rangle} = \|(x, 0)\| \|N\| \cosh(\phi) \\ = x \cosh(\tanh^{-1}(\nu)) = \frac{x}{\sqrt{1-\nu^2}}$$

از این رو، $x = l(\sqrt{1-\nu^2})$ کوتاه‌تر از l است.

اگر $\kappa(\tau)$ ناصفر باشد، جهان-خط‌های موازی خمیده هستند و هیچ فرمول ساده‌ای برای آنها وجود ندارد. با وجود این، این مسأله با روش‌های عددی حل می‌شود. برای ملاحظه جزئیات محاسبه، مرجع [۹] را ببینید.

فرض کنید دوقلوی مسافر پارادکس ساعت (بخش ۱.۳) میله‌ای را با خود حمل می‌کند که طول آن به نظر مسافر ثابت است. طول این میله به نظر دوقلوی مانده در منزل چگونه تغییر می‌کند؟



شکل ۷. سرعت نور برای یک ناظر شتابدار

چون سرعت نور وقتی $\delta = 0^\circ$ برابر ۱ است، ممکن است گفته شود که سرعت نور در «نزدیک» ناظر شتابدار ثابت است. شکل ۷ نشان می‌دهد که برای ناظر شتابداری که در چارچوب مرجع آزمایشگاه با سرعت نور در حرکت است چگونه فوتونها می‌توانند کند و متوقف شوند. خم پررنگ، جهان-خط ناظری است که از $\tau = -1$ تا $\tau = 1$ شتابش ثابت و برابر ۱ است (حرکت هذلولوی). این جهان-خط قطعه‌ای از دایره‌ای که در $\mathbb{P}_1$ است. تکینگی این ناظر در مبدأ چارچوب مرجع آزمایشگاه واقع است. دستگاه مختصات ناظر شتابدار تمامی $\mathbb{P}_1$ را نمی‌پوشاند، بلکه فقط ربع خارج از مخروط نوری به طرف سمت راست مبدأ را می‌پوشاند. پرتوهای آمده از مبدأ، محورهای فضایی لحظه‌ای ناظر شتابدار هستند. این پرتوها توسط بازه‌های مساوی ویژه‌زمان ناظر شتابدار از هم جدا شده‌اند. خط مستقیم پررنگ، جهان-خط فوتون گسیل شده در $(5^\circ -)$ است. این فوتون در چارچوب مرجع آزمایشگاه در مدت زمان متناهی به $x = 0$ نزدیک می‌شود. برای ناظر شتابدار، جهان-خط فوتون باید بینهایت از خطهایی را که فاصله آنها به طور موقت برابر است قطع کند و بنابراین هرگز به تکینگی نمی‌رسد. چون فاصله تکینگی از ناظر شتابدار متناهی است، سرعت باید کند شود.

۴.۴ موشکهای به هم بسته شده و قطار روی خط آهن

قطار روی یک خط دایره‌ای را در نظر بگیرید. ما این وضعیت را یک چندضلعی در نظر می‌گیریم که رأسهای آن روی یک دایره ثابت قرار دارند. ابتدا، با اعمال شتاب یکسان به هر رأس، چندضلعی را از حالت سکون به دوران وامی داریم. براساس استدلال نورود، اضلاع چندضلعی (تقریباً) در جهت حرکت هستند، باید در چارچوب مرجع آزمایشگاه منقبض شوند. شعاع چندضلعی، که بر راستای حرکت عمود است، منقبض نمی‌شود. از این رو، نسبت محیط به قطر (در بحث نورود، π) تغییر می‌کند. توجه کنید که ما به همه رأسها شتاب یکسان می‌دهیم و بنابراین، در چارچوب مرجع آزمایشگاه، فاصله میان آنها نباید کاهش یابد که متناقض با اصل انقباض طول است. نوع راستخط این معما را پارادکس موشکهای به هم بسته می‌گویند.

توجه کنید که وقتی δ به تکینگی در $1/\kappa(\tau)$ نزدیک می‌شود ساعت ناظر دوم، به نظر ناظر اول، کند و سرانجام متوقف می‌شود.

بنا به اصل نظریه نسبیت عام اینشتین، ناظر در یک سفینه بدون پنجره در فضا نمی‌تواند میان شتاب ناشی از موتورهای سفینه خود و شتاب حاصل از میدان گرانشی اجرام نزدیک تمایز قائل شود. از این اصل نتیجه می‌شود که ساعت‌های «سربالا» در میدان گرانشی تندتر کار می‌کنند. درستی این گفته به تجربه ثابت شده است.

توجه کنید که اگرچه τ ویژه‌زمان ρ نیست، چارچوب مرجع فرنه در $\rho(\tau)$ عبارت است از $\{T(\tau), N(\tau)\}$ ، زیرا اینها بردارهای یکه در جهت درست هستند. در نتیجه خمهای مختصات فضاگونه برای هر دو ناظر یکسان هستند و خمهای مختصات زمانگونه دو ناظر فقط در پارامتری‌سازی با هم متفاوت‌اند. به نظر ناظر لخت، اثرهای انقباض میله، اگر با σ یا با ρ حمل شوند، یکسان‌اند. اما، تابعهای انحنای متفاوت‌اند. درواقع داریم

$$\frac{dT(\tau(s))}{ds} = \frac{dT}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{\kappa(\tau)}{1 + \delta\kappa(t)} N(\tau)$$

به‌خصوص، ویژه‌شتاب انتهای پیشین میله که توسط یک ناظر شتابدار حمل می‌شود، از ویژه‌شتاب انتهای پسین کمتر است. درواقع، ویژه‌شتاب در $\rho(\tau)$ ، همچنان که δ در $1/\kappa(\tau)$ به تکینگی نزدیک می‌شود، به بینهایت گرایش پیدا می‌کند. این بدان معنی است که لبه پیشین میله که تحت ویژه‌شتابی به بزرگی g قرار دارد نمی‌تواند ویژه‌طولی بزرگتر از g^{-1} داشته باشد، زیرا در این صورت می‌شکند. برای توضیح بیشتری در این مورد مرجع [۱۹] و مرجع [۲۰، مسأله ۱۴.۱] را ببینید.

۳.۴ سرعت نور در یک چارچوب مرجع شتابدار

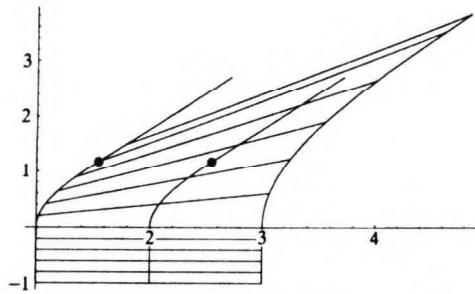
یک اصل اساسی نظریه نسبیت خاص این است که سرعت نور در همه چارچوبهای لخت برابر است. این اصل در مورد ناظرهای شتابدار معتبر نیست. چارچوب مرجع فرنه تصویر روشنی از این پدیده به‌دست می‌دهد. فرض کنید $\sigma(\tau)$ یک ناظر شتابدار با چارچوب فرنه $\{T(\tau), N(\tau)\}$ باشد که در آن τ ویژه‌زمان است. مسیر مختصات ناظر شتابدار با رابطه $\sum(\delta, \tau) = \sigma(\tau) + \delta N(\tau)$ داده می‌شود. یک ذره نورگونه در فضای $\delta\tau$ چه مسیری را دنبال می‌کند؟ فرض کنید رابطه $\rho(u) = (\delta(u), \tau(u))$ نمایش پارامتری جهان-خط یک ذره نورگونه است. در این صورت، با استفاده از فرمول صورت دوخطی در مختصات $\delta\tau$ که در بخش ۴ داده شد داریم

$$\left(\frac{d\delta}{du}\right)^2 - (1 + \delta\kappa(\tau))^2 \left(\frac{d\tau}{du}\right)^2 = 0$$

سرعت ذره برابر است با

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \pm(1 + \delta\kappa(\tau))$$

که در آن علامت به جهت بستگی دارد. اگر $\kappa(\tau) \neq 0$ ، آنگاه سرعت، اگر و فقط اگر $\delta = 0^\circ$ ، برابر ۱ است. با گرایش δ به تکینگی در $1/\kappa(\tau)$ ، سرعت نور به صفر نزدیک می‌شود.



شکل ۹ دستگاه مختصات دوقلوی شتاب دار سمت چپ

می شود کمتر از σ_1 است. دو موشک شتاب یکسانی دارند. در این صورت، میله ها از هم جدا خواهند شد.

اکنون چندضلعی چرخان را در نظر بگیرید. اگر به همه رأسها شتاب یکسان بدهیم، آنگاه چنانچه اضلاع چندضلعی رابط فیزیکی میان رأسها باشند می شکنند مگر اینکه شعاع را کم کنیم. اما، در این صورت، قطار از خط خارج می شود. شق دیگر این است که فرض کنیم طول اضلاع به صفر می رسد و به همه نقاط حلقه حاصل شتاب یکسان بدهیم. در این حالت محیط منقبض نمی شود و قطار روی خط باقی می ماند.

۵.۴ دوقلوهای با شتاب یکسان

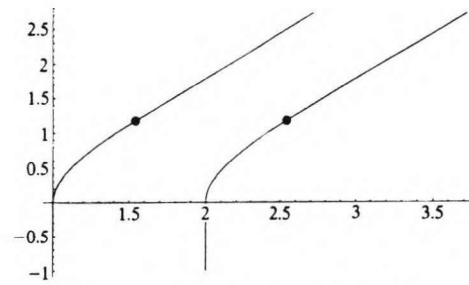
پارادکس دیگری در مورد مطالب بخش ۴.۴ وجود دارد. این پارادکس در مرجع [۲۰، مسأله ۱۳.۱] تحت عنوان پارادکس دوقلوهای با شتاب یکسان بررسی شده است.

فرض کنید خلبانهای دو سفینه دوقلوه هستند. وقتی سفینه ها در $\tau = 0$ شتاب می گیرند دوقلوه دقیقاً همسن هستند. از دید ناظر آزمایشگاه، شتاب دوقلوه یکسان است و سن و سال آنها همواره یکسان باقی می ماند. با وجود این، بعد از اینکه سفینه ها از نقطه قطع در $\tau = 1$ می گذرند هر دو در یک چارچوب مرجع لخت ساکن هستند و می پذیرند که دوقلوی سمت راست از دوقلوی سمت چپ پیرتر است.

برای اینکه بفهمیم چرا این طور است، شکل ۸ را بر شبکه مختصات دوقلوی دست چپ می گذاریم (شکل ۹).

وقتی رویدادهای روی دو جهان-خط در دستگاه مختصات خلبان سمت چپ همزمان اند، در چارچوب مرجع آزمایشگاه رویداد سمت راست دیرتر از رویداد سمت چپ به وقوع می پیوندد. چون دو خلبان در چارچوب مرجع آزمایشگاه همسن و سال هستند، خلبان سمت چپ باید به این نتیجه برسد که خلبان سمت راست از او پیرتر است زیرا، در سیستم شتاب دار، خطوط همزمانی به سمت راست اوج می گیرند. به طریق مشابه، خلبان سمت راست نتیجه می گیرد که خلبان سمت چپ جوانتر است زیرا خطوط همزمانی خلبان سمت راست (که در شکل نشان داده نشده است) نیز به طرف راست صعود می کند.

این تصویر همچنین ایراد بحث موشکهای به هم بسته را که در [۵] توصیف شده است مشخص می کند. بعد از این نتیجه گیری که طناب پاره می شود، مؤلفان این سؤال را مطرح می کنند که وضعیت از دید خلبان سمت چپ چگونه به نظر می رسد. با ادامه بحث، در ضمن زمانهای کوتاهتر و کوتاهتر



شکل ۸ جهان-خطهای موشکهای به هم بسته شده

دو سفینه یکسان در $x = 1$ و $x = 2$ ساکن هستند. سپس موتور موشکها برای مدت زمان مشخصی روشن می شود و بعد از خاموش شدن موتورها، موشکها شتاب و سرعت نهایی یکسان می گیرند. به عبارت دقیقتر، فرض کنید دو سفینه، که در این مثال آنها را بدون بعد فرض می کنیم، تابع شتاب مشترکی دارند که در $0 \leq \tau \leq 1$ همواره برابر ۱ و در غیر این صورت برابر صفر است. جهان-خطهای حاصل در شکل ۸ رسم شده است. در نقطه های روی نمودار، موتورها خاموش اند و سفینه ها به حالت خلاص پیش می روند. چون توابع انحنا یکسان اند و شرایط اولیه σ_2 همان شرایط اولیه σ_1 هستند که یک واحد به سمت راست جابه جا شده است، خم دوم نیز همان خم اول است که یک واحد به راست منتقل شده است (قضیه بنیادی خمهای مسطح). به نظر ناظر ساکن در چارچوب مرجع آزمایشگاه، فاصله میان دو سفینه هرگز تغییر نمی کند. از این رو، هیچ گونه کششی به طناب کشیده میان دو سفینه وارد نمی شود و طناب دست نخورده باقی می ماند.

اما بعد از خاموش شدن موتورها دو سفینه در یک چارچوب لخت متحرک ساکن هستند و بنابراین، بر اثر انقباض طول، طول طناب در این چارچوب مرجع بلندتر از طول آن قبل از روشن شدن موتورهاست. از این رو طناب کشیده می شود و اگر میزان کشیدگی بیشتر از حد کشسانی باشد پاره می شود. حق با کیست؟ ناظر آزمایشگاه که می گوید هیچ فشاری به طناب وارد نمی شود یا ناظرهای متحرک که می گویند طناب پاره می شود؟ بحثهای مفصل مربوط به این مسأله را می توان در مرجعهای [۵]، [۱۱]، [۳]، [۴]، [۶]، [۱۲]، و [۱۸] یافت.

در بیان مسأله پارادکس معلوم نیست که طناب دقیقاً چگونه شتاب می گیرد. اما، بدون توجه به نحوه شتاب طناب، آنچه مسلم است این است که لبه پسین توسط σ_1 و لبه پیشین توسط σ_2 حمل می شود. برای سادگی، به جای طناب از دو میله استفاده می کنیم: میله اول از $x = 0$ تا $x = 0.5$ در $\tau = 0$ گسترده است و توسط σ_1 حمل می شود و دومی از $x = 0.5$ تا $x = 1$ در $\tau = 0$ گسترده است و توسط σ_2 حمل می شود. همچنان که سفینه ها شتاب می گیرند، ناظر واقع در آزمایشگاه مشاهده می کند که انتهای پیشین میله اول به عقب به طرف σ_1 و انتهای پسین میله دوم به جلو به طرف σ_2 منقبض می شود؛ بخش ۱.۴ را ببینید. ناظر آزمایشگاه می بیند میله ها، که ابتدا با هم در تماس اند، از هم جدا می شوند. نتیجه می گیریم که اگر سرعت نهایی به اندازه کافی زیاد باشد، هر طنابی پاره خواهد شد.

به عبارت دیگر، از بخش ۲.۴ می دانیم که شتاب لبه پسین میله که توسط σ_2 حمل می شود بیشتر از σ_2 و شتاب لبه پیشین که توسط σ_1 حمل

17. Wolfgang Rindler, *Essential Relativity*, revised second edition, Springer-Verlag, New York, 1977.
18. J. E. Romain, A Geometrical Approach to Relativistic Paradoxes, *Amer. J. Physics* **31** (1963) 576-585.
19. Edwin R. Taylor, and A. P. French, Limitation on Proper Length in Special Relativity, *Amer. J. Physics* **51** (1983) 881-893.
20. Edwin Taylor, and John Archibald Wheeler, *Spacetime Physics*, Second Edition, W. H. Freeman and Co., New York, 1992.
21. I. M. Yaglom, *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.
22. I. M. Yaglom, B. A. Rozenfel'd, and E. U. Yasinskaya, Projective Metrics, *Russian Math. Surveys* **19** (1964) 49-107.

- Garry Helzer, "Special relativity with acceleration", *Amer. Math. Monthly*, (3) **107** (2000) 219-237.

* گری هلزر، دانشگاه مریلند، آمریکا

gah@math.umd.edu

شتاب، آنها نتیجه می‌گیرند که شتاب را می‌توان یک «پرش لحظه‌ای» در نظر گرفت. در نتیجه، خلبان سمت چپ «می‌بیند» که ابتدا خلبان سمت راست حرکت می‌کند — چیزی که به صورت آشکار در شکل ۹ غلط است. مسأله این است که «پرش لحظه‌ای»، تکنیکی در دستگاه مختصات ناظر شتاب‌دار را درست تا مبدأ بالا می‌آورد. یک چنین ناظری دیگر دستگاه مختصات ندارد.

مراجع

1. Graciela S. Birman, and Katsumi Nomizu, Trigonometry in Lorentzian Geometry, *Amer. Math. Monthly* **91** (1984) 543-549.
2. Dario Costellanos, Making π Equal 3, *Amer. Math. Monthly* **100** (1993) 69.
3. Edmond M. Dewan, Stress Effects due to Lorentz Contraction, *Amer. J. Physics* **31** (1963) 383-386.
4. E. Dewan, and M. Beran, Note on Stress Effects due to Relativistic Contraction, *Amer. J. Physics* **27** (1959) 517-518.
5. George F. R. Ellis, and Ruth M. Williams, *Flat and Curved Space-Times*, Oxford University Press, New York, 1988.
6. Arthur A. Evett, Note on the Separation of Relativistic Moving Rockets, *Amer. J. Physics* **28** (1960) 566.
7. Arthur A. Evett, A Relativistic Rocket Discussion Problem, *Amer. J. Physics* **40** (1972) 1170-1171.
8. Alfred Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, 1997.
9. Garry Helzer, Relativity and Plane Curves, *Mathematica notebook*, <http://www.math.umd.edu/~gah/Preprints.html>.
10. Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.
11. Gregory L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Applied Mathematical Sciences no. 32, Springer-Verlag, New York, 1992.
12. Paul J. Nawrocki, Stress Effects due to Relativistic Contraction, *Amer. J. Physics* **30** (1962) 771-772.
13. Rick Norwood, How to Make Pi Equal to Three, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992) 111.
14. Rick Norwood, More on pi, *Amer. Math. Monthly* **100** (1993) 577.
15. Barret, O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.
16. Wolfgang Rindler, *Introduction to Special Relativity*, second edition, Oxford University Press, Oxford, New York, 1991.