سیصد و پنجاهمین سال معادلات دیفرانسیل*

گرهارت وانر
ترجمهٔ منوچهر وصال

«پس، آقای لبک شما در تاریخ علوم کار می‌کنید؟»
«نه دختر خانم، من در علوم کار می‌کنم»
نقل قول از ل. فلیکس

در ۱۶۳۸، سیصد و پنجاه سال پیش[1]، اولین مسائل معادلات دیفرانسیل پا به‌عرصهٔ وجود گذاشتند (دبون[2]، گالیله). جا دارد به‌مناسبت سیصد و پنجاهمین سال پیدایش این معادلات، مسائلی‌را که در آغاز نشو و نمای معادلات دیفرانسیل مطرح شده‌اند و از مشهورترین‌مسائل قرن هفدهم هستند ازنظر بگذرانیم. اینها مسائلی جالب‌اند و آموزش معادلات دیفرانسیل را پربار می‌کنند. واقعاً کدام شاگرد کنجکاوی است که شکل زنجیر آویزان، یا شکل بهینهٔ یک سورتمه، یا معادلهٔ تراکتریس توجهش را جلب نکند؟

مسأله‌های دبون

«گمان نمی‌کنم بتوان در حالت کلی عکس قاعدهٔ مرا برای مماسها به‌دست آورد، . . .»

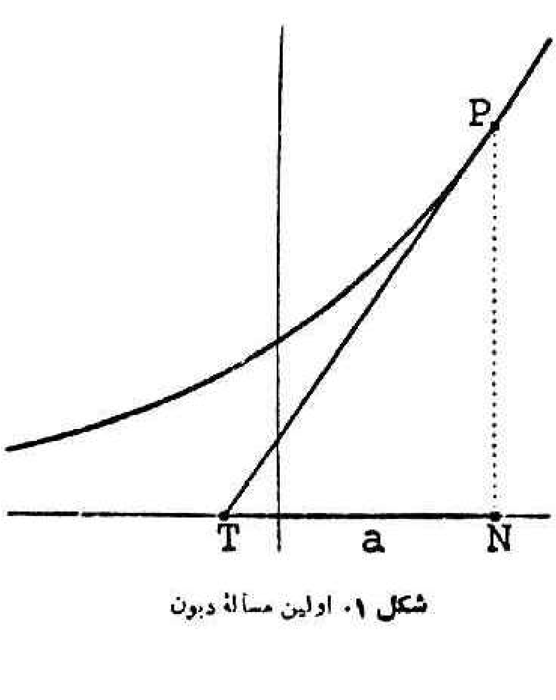
(ارادتمند مخلص شما، دکارت، ۱۶۳۹)

«پنج یا شش سال پیش، آقای دبون این سؤال را برای من و همچنین برای مشهورترین ریاضیدانان پاریس و تولوز مطرح کرد، اما تا آنجا که من اطلاع دارم هیچ یک از آنها جواب سؤال او را نداده‌اند. . .»

(دکارت از هشترشت، ژوئن ۱۶۴۵)

ف. دبون (۱۶۰۱–۱۶۵۲) اول کسی است که «هندسهٔ» دکارت‌را، که درسال ۱۶۳۷ منتشر شد، تدریس کرده است. درسال ۱۶۳۸ دبون مسائلی مطرح می‌کند که دکارت و فرما از حل آنها عاجز می‌مانند. ازمیان این مسائل، مسائل زیر را بررسی می‌کنیم:

مسألهٔ ۱. («خط سوم دبون»). یک خم $y(x)$ پیدا کنید که در هرنقطهٔ Pی آن‌طول پاره‌خطی که ازتقاطع قائم PN ومماس PT با محور xها به‌دست می‌آید همواره با عدد ثابتی مانند a برابر باشد (شکل ۱).

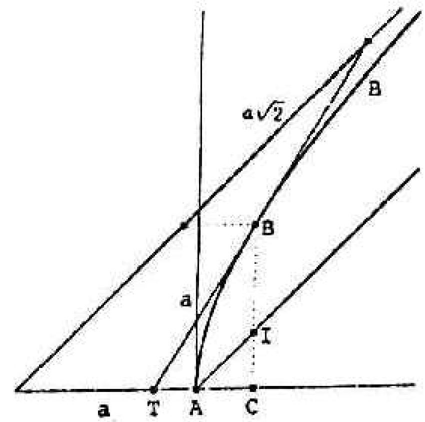


شکل ۱. اولین مسألهٔ دبون

۱. این مقاله در سال ۱۹۸۸ میلادی نوشته شده است.

2. F. Debeaune

مسألهٔ ۲. («خط دوم دبون» با بیان یوهان برنولی و لوپیتال[۱]).
«دو خط بینهایت AC و AI به‌گونه‌ای که زاویهٔ CAI برابر °۴۵ باشد مفروض‌اند؛ مطلوب است رسم خم ABB به‌گونه‌ای که اگر از یکی از نقاط دلخواه آن مانند B، عرض BC و مماس BT را رسم کنند، نسبت BC به CT همواره برابر با نسبت a به BI باشد.» (شکل ۲ و نیز ر.ك. تمرین ۱).



شکل ۲. دومین مسألهٔ دبون

«محاورات» گالیله

«آقای لایب‌نیتس به‌دو اشتباه بزرگ گالیله اشاره می‌کند. دو اشتباه این مرد که بی‌شك روشن‌بین‌ترین مرد زمان خود در این موضوع بوده، این است که حدس‌زده است، خم زنجیره، یك سهمی و خم سریعترین سقوط، یك دایره است.»

(یوهان برنولی، ۱۶۹۷)

بازهم در سال ۱۶۳۸: «محاورات و اثباتهای ریاضی[۲]» مشهور گالیله، محاوره‌های بین «سالویاتی[۳]»، «ساگردو[۴]» و «زیمپلیتسیو[۵]»، منتشر می‌شود: این محاورات درعرض چندین «روز» انجام می‌شود. در بین موضوعهایی که مورد بحث قرار می‌گیرند به دو نکتهٔ زیر توجه می‌کنیم:

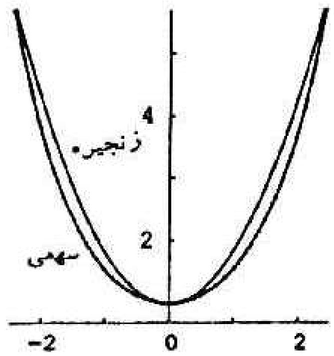
الف) (روز دوم، صفحهٔ ۱۸۶، روز چهارم، صفحهٔ ۳۱۰): یك زنجیر که به دو میخ یك دیوار آویزان شود «تقریباً . . . بالای یك سهمی قرار می‌گیرد».

ب) (روز سوم؛ قضیهٔ ۲۲ و تبصره): اگر جسمی بر اثر نیروی گرانش بلغزد، «سریعترین حرکت بین دو نقطه در طول کوتاهترین خم، یعنی در طول خط مستقیم، انجام نمی‌گیرد، بلکه روی قوسی از یك دایره انجام می‌شود».

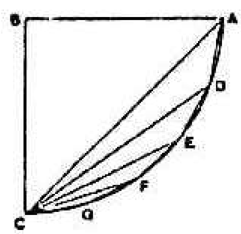
۱. در زبان فارسی l'Hospital را به جای لوپیتال معمولاً هوپیتال می‌نویسند.ـ م.
۲. نویسندهٔ مقاله فقط قسمت اول عنوان را آورده است، عبارت داخل پرانتز عنوان را کامل می‌کند:

Discorsi e Dimostrazioni Matematiche (Intorno a Due Nuove Scienze)

و عبارت داخل پرانتز به معنی (دربارهٔ دو دانش جدید) است. تکمیل و ترجمهٔ عنوان را مدیون ویراستار ارجمند آقای دکتر محمد هادی شفیعیها هستم.ـ م.
3. Salviati 4. Sagredo 5. Simplicio



شکل ۳. زنجیره و سهمی



شکل ۴. خم کوتاهترین زمان (رسم گالیله)

نکتهٔ اول مبهم است. کریستیان هویگنس در سال ۱۶۴۶؛ در سن ۱۷ سالگی با یك اثبات نظری محال بودن این نتیجه را ثابت می‌کند (تصور کنید چیزی را که دادگاههای تفتیش عقاید واتیکان بیهوده در جستجویش بودند، یك نوجوان پروتستان کشف می‌کند: اشتباه گالیله را!).

نکتهٔ دوم درسال ۱۶۹۶ به‌مسألهٔ مشهور خم کوتاهترین زمان منجر می‌شود.

نیوتن

«. . . و آنها به سریها هجوم می‌آورند، که در آن آقای نیوتن به‌راحتی از من پیشی گرفته است. . .»

(لایب‌نیتس)

نیوتن «روش فلوکسیون[۱]» یعنی روش مشتقگیری را درسال ۱۶۷۱ نوشت اما این اثر تا سال ۱۷۳۶ منتشر نشد [۳۵]. دراین اثر، از نظر نیوتن معادلات دیفرانسیل نظیر معادلات چند جمله‌ایهای شامل مشتق هستند. در «روش فلوکسیون» هیچ رابطه‌ای با مسائل مکانیك، که البته به‌معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم مربوط می‌شوند، دیده نمی‌شود. نیوتن معادلات دیفرانسیل را از راه سریهای نامتناهی حل می‌کند و روش را با مثالهایی که به تصادف انتخاب می‌کند، مانند

$$\left(\frac{dy}{dx}=\right)\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1-3x+y+x^2+xy \qquad (1)$$

1. Methodus fluxionum

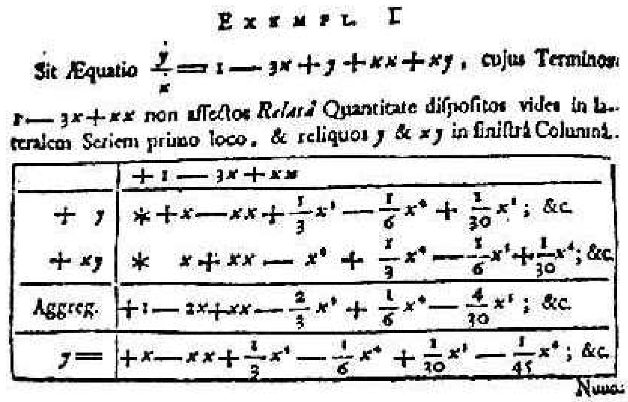
شرح می‌دهند[۱] (ر. ك. شكل ۵). برحسب اتفاق، این اولین معادلهٔ دیفرانسیلی است كه حل نشده است، جواب [ناقص] آن (با شرط اولیهٔ $y(0)=0$) چنین است

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6; \,\&c. \quad (۲)$$

این‌معادله با هیچ مسألهٔ هندسه یا مكانیك رابطه‌ای ندارد. به‌آسانی امكان داشت این روش را برای حل مسألهٔ اول دبون

$$y' = \frac{y}{a} \quad (۳)$$

به‌كار برند و به‌سری تیلر تابع نمایی دست یابند.


EXEMPL. I

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y=$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc

شكل ۵. راه‌حل معادلهٔ (۱) كه نیوتن ارائه‌كرده است.

(توجه كنید، «*» به‌معنی صفر است؛ درسطر «$+xy$»، حرف «x» اشتباه است.)

حل مسألهٔ اول دبون

«... پس باید فرما را كاشف واقعی حساب دیفرانسیل به‌شمار آوریم... لایب‌نیتس با ارائه نمادی‌كه... به‌غنای حساب دیفرانسیل افزوده است...»

(لاپلاس، نظریهٔ تحلیلی احتمالات، ۱۸۲۰)

«... كوششی به‌عمل آمده ولی مسأله حل نشده است»

(لایب‌نیتس، ۱۶۸۴)

درپاییزسال ۱۶۷۵، لایب‌نیتس حساب دیفرانسیل را، مستقل ازنیوتن، كشف می‌كند؛ و برای آن یك نماد عالی و یك روش استدلالی كه بیشتر هندسی است، معرفی می‌كند. اما لایب‌نیتس فیلسوف، حقوقدان، دیپلمات، وعالم علم كلام به‌قدری گرفتار است كه مجالی برای انتشار این كشف ندارد. تنها درسال ۱۶۸۴ درآكتا اروديتوروم[۲] [اعمال دانشوران] مطلبی [۱۷] منتشر می‌كند كه حاوی اشارهٔ مبهمی به حساب دیفرانسیل، و شامل حل مسألهٔ دبون است. (شكل ۶): اگر x و y به‌ترتیب طول وعرض نقطه‌ای برخم باشد و z عرض نقطهٔ به‌طول $x+b$ و b مقداری «بینهایت كوچك»، آنگاه بنابر قضیهٔ تالس

$$\frac{z-y}{b} = \frac{y}{a}$$

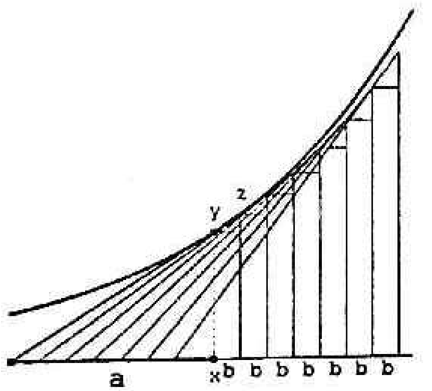
یا

$$z = \left(1 + \frac{b}{a}\right) y$$

به دست می‌آید. پس «دنبالهٔ حسابی» x، $x+b$، $x+2b$، $x+3b$، ... طولها به «دنبالهٔ هندسی»

$$y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y,\ \left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y,\ \dots \quad (۴)$$

عرضها تبدیل می‌شود، و لایب‌نیتس نتیجه می‌گیرد «بنابراین خم مربوطه، لگاریتمی است.»



شكل ۶. مسألهٔ اول دبون

مسألهٔ همزمانی

هیچكس بجز یاكوب برنولی از مقالهٔ سال ۱۶۸۴ لایب‌نیتس چیزی دستگیرش نشد. او وبه‌خصوص برادر كوچكش یوهان منشاء افزایشی شگفت‌انگیز در ارائهٔ نتایج ریاضی هستند كه از ۱۶۹۰ آغاز می‌شود. ازاین تاریخ تمام مسائل قدیمی یكی پس‌ازدیگری حل می‌شوند. «كار استادانهٔ» یاكوب حل مسألهٔ همزمانی است كه درسال ۱۶۹۰ در آ. ا. منتشر شده است [۱]:

مطلوب است خم $y(x)$ كه روی‌آن جسمی تحت‌تأثیر نیروی گرانش با یك سرعت قائم ثابت بلغزد.

این مسأله‌را لایب‌نیتس در ۱۶۸۷مطرح می‌كند و كریستیان هویگنس[۲] آن را در همان سال ۱۶۸۷ حل می‌كند. اما روشهایی كه هویگنس به‌كارمی‌برد روشهای حساب دیفرانسیل نیستند. به‌این جهت لایب‌نیتس (در آ. ا. ی سال ۱۶۸۹، صفحهٔ ۱۹۶) خواهان

---

۱. توضیح نیوتن برای حل معادلهٔ دیفرانسیل (۱) تقریباً چنین است: فرض كنید $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = 1-3x+y+xx+xy$؛ عبارت $1-3x+xx$ را كه به تابع بستگی ندارد در سطر اول بنویسید، و yو xy را در ستون سمت چپ قرار دهید.

2. Acta Eruditorum

۱. حروف اول آكتا اروديتوروم

۲. در متن مقاله نام هویگنس به صورت تجلیل‌آمیز «Vir Celeberrimus *Christianus Hugenius*» كه در قرن هفدهم معمول بوده، نوشته شده است.

«اثبات ترکیبی»[1] آن است.

برای فهمیدن «اثبات ترکیبی» یاکوب برنولی، یادآور می‌شویم که سرعت جسمی که از مبدأ بیفتد با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=-2gy \quad (s=\text{طول قوس}) \qquad (5)$$

«که آن را گالیله اولین بار معرفی و اثبات کرد». چون می‌خواهیم $dy/dt=-b$، از قضیهٔ فیثاغورس ($ds^2=dx^2+dy^2$) معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

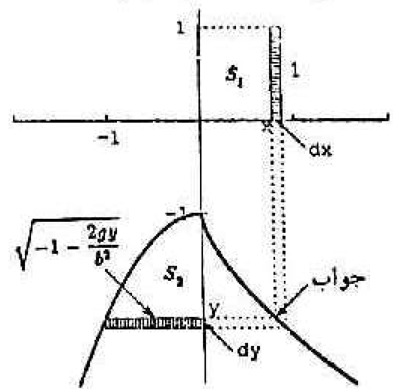
$$dx=-\sqrt{-1-\frac{2gy}{b^2}}\,dy. \qquad (6)$$

از این نتیجه می‌شود که دو سطح هاشور خوردهٔ «بینهایت کوچک» در شکل ۷ به‌ازای هر x با هم برابرند. در این هنگام است که یاکوب عبارت مشهور «و بنابراین انتگرالهای آنها برابر می‌شوند[2]» را می‌نویسد، که در آن واژهٔ «انتگرال» برای نخستین بار در تاریخ ریاضیات ظاهر می‌شود. به‌عبارت دیگر، دو سطح S_1 و S_2 در شکل ۷ نیز باید باهم برابر باشند. پس از انتگرالگیری جواب

$$x=\frac{b^2}{3g}\left(-1-\frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2} \qquad (7)$$

به‌دست می‌آید و لایب‌نیتس می‌نویسد «جواب، سهمیوار از درجهٔ ۳/۲ است...».

پس مسألهٔ همزمانی اولین معادلهٔ دیفرانسیلی را که با «انتگرالگیری» حل شده است، فراهم کرده است.



شکل ۷. خم همزمانی لایب‌نیتس

زنجیره [خم زنجیری]

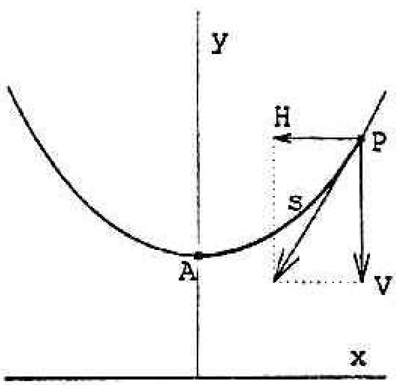
«من در اینجا اصلاً برهان آن را نمی‌آورم، زیرا آنهایی که این موضوعها را می‌فهمند به آسانی برهان را پیدا خواهند کرد و برای فهماندن مطلب به دیگران، باید بیش از حد توضیح دهم.»

(یوهان برنولی، ۱۶۹۲)

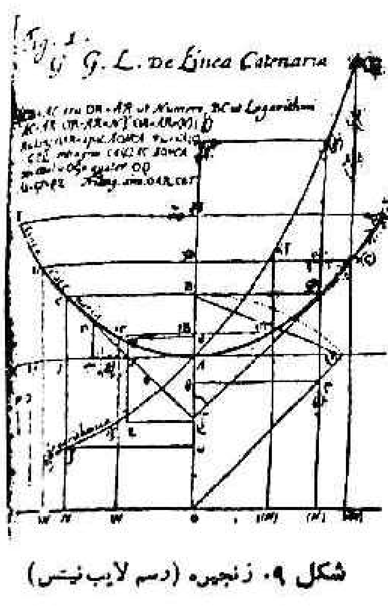
یاکوب در ۲. ۱. درسال ۱۶۹۰ درآخرمقاله‌اش [۱] به‌خوانندگان دانشمند حل مسألهٔ زنجیره یعنی وضع یك نخ (یا یك زنجیر) قابل انعطاف را پیشنهاد می‌کند. مسأله را در عرض سال ۱۶۹۰، لایب‌نیتس، هویگنس و یوهان برنولی، برادر کوچك یاکوب، حل می‌کنند. نوشته‌های لایب‌نیتس (۲. ۱. ۱۶۹۱) [۱۸] و یوهان برنولی [۴] در آکتاارودیتورم جوابها و بعضی ویژگیهای این خم (طول، گرانیگاه، کاربرد در محاسبهٔ لگاریتمها، و غیره) را شامل است اما یك کلمه راجع به‌اینکه این خم چگونه پیدا شده، در آنها نیست. خوشبختانه یوهان برنولی در درسهایی که به‌لوپیتال داده، [۵] شرح بیشتری دراین باره داده است: در نقطهٔ P از خم، نیروی افقی H و نیروی قائم V را درنظربگیریم (شکل ۸). پس

$$H=a, \quad V=q\cdot s$$

که درآنها a و q ثابت هستند (زیرا نیروی افقی خارجی وجود



شکل ۸. زنجیره



شکل ۹. زنجیره (رسم لایب‌نیتس)

ندارد) و V وزن زنجیر AP را نشان می‌دهد. چنین به‌دست می‌آید

$$p=\frac{dy}{dx}=\frac{V}{H}=\frac{qs}{a}$$

1. Demonstratio Synthetica
2. Ergo & horum Integralia aequantur

(y'، شیب خم، را p نامیده‌ایم.) یا بعد از دیفرانسیلگیری

$$c\,dp = ds = \sqrt{1+p^2}\,dx. \qquad (۸)$$

از اینجا به بعد، محاسبات یوهان خیلی پیچیده است. ما امروز با توابع هذلولوی آشنا هستیم و بی‌درنگ به‌دست می‌آوریم

$$c\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arcsinh}(p) = \frac{x-x_0}{c}$$

پس

$$p=\sinh\left(\frac{x-x_0}{c}\right) \Rightarrow y = K + c\cosh\left(\frac{x-x_0}{c}\right). \qquad (۹)$$

مسألهٔ دوم دبون

«این مسأله را آقای مارکی دلوپیتال و آقای برنولی مشترکاً حل کرده‌اند. بدین جهت هریك ازاین دو فکر کرده‌اند که حق دارند آن را به‌خود نسبت دهند. . .»

(کرامر، ۱۷۴۲)

یوهان در سال ۱۶۹۲ به پاریس سفر می‌کند و در آنجا با گیوم فرانسوا مارکی دلوپیتال (۱۶۶۱–۱۷۰۴) آشنا می‌شود. لوپیتال درعوض درسهای ریاضی به او پول کلانی می‌دهد. یوهان برای تحت‌تأثیر قرار دادن شاگردش بی‌درنگ حل مسألهٔ دوم دبون را شروع می‌کند و چنین به‌دست می‌آورد ([۶])

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y-x}. \qquad (۱۰)$$

با فرض $z=y-x$، پیدا می‌کند

$$\frac{z\,dz}{a-z} = dx. \qquad (۱۱)$$

پس جواب با به‌دست آوردن سطح هذلولی $z/(a-z)$ تعیین می‌شود. بنابراین اگر بخواهیم که $z(0)=0$، به‌دست می‌آوریم

$$x = -z + a\log\frac{a}{a-z}. \qquad (۱۲)$$

تراکتریس

«کلود پرو[1]، پزشك برجستهٔ پاریسی، فردی فوق‌العاده در مطالعات مکانیك و معماری. . . و عضو انجمن سلطنتی‌علوم درفرانسه به‌من و پیش ازمن به‌بسیاری دیگر حل‌این مسأله را پیشنهادکرده است. . .»

(لایب‌نیتس، ۱۶۹۳)

هنگام اقامت لایب‌نیتس در پاریس (۱۶۷۲–۱۶۷۶)، کالبدشناس و معمار مشهور، کلود پرو، حل مسألهٔ زیر را از او می‌خواهد:

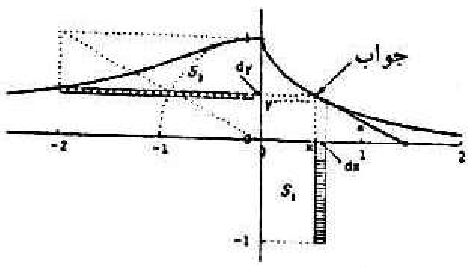
1. Claude Perrault (Claudius Perraltus)

کدام خم است که در هر نقطهٔ P ی آن طول قطعه‌ای ازمماس‌واقع بین P و محور xها (شکل ۱۰) برابر با مقدار ثابت a است؟ برای روشن‌کردن این سؤال از جیب جلیقه‌اش یك ساعت بغلی قاب نقره‌ای درمی‌آورد و آن را روی میز می‌لغزاند. تا جایی‌که او اطلاع داشت، هیچ ریاضیدان دیگری نتوانسته بود فرمول آن را پیدا کند. لایب‌نیتس جوابش را درسال ۱۶۹۳ در آ. ا. منتشر می‌کند [۱۹]، و تأکید می‌کند که مدتی مدید است که آن را می‌داند: چون

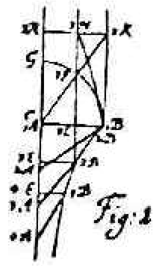
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} \qquad (۱۳)$$

یعنی

$$-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy = dx$$



شکل ۱۰. تراکتریس



شکل ۱۱. تراکتریس
(رسم لایب‌نیتس)

جواب با انتگرالگیری از $\sqrt{a^2-y^2}/y$ به‌دست می‌آید (شکل ۱۰). داریم (ر.ك. تمرین ۴):

$$x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy \qquad (۱۴)$$

$$= -\sqrt{a^2-y^2} - a\log\frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}.$$

معادلهٔ دیفرانسیل برنولی

یاکوب درضمن تعمیم مسألهٔ دبون به‌معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\cdot y + q(x)y^n \qquad (۱۵)$$

برمی‌خورد و بـرای حـل آن «زحمت زیادی متحمل می‌شود». برادرش را به‌مبارزه می‌طلبد و رسماً این‌مسأله را در آ. ا. در سال ۱۶۹۵ ([۲]) مطرح می‌کند. «از بخت بد» بلافاصله دو راه‌حل عالی به‌فکر یوهان می‌رسد ([۸]). راه‌حل اول درتمرین ۷ آمده است. راه‌حل دوم این است کـه $y(x)$ را حاصلضرب دو تابع می‌گیرد: $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. (درنوشتهٔ اصلی، $y=m\cdot z$). ازاین تساوی به‌دست می‌آید

$$\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u=p(x)\cdot u\cdot v+q(x)\cdot u^n\cdot v^n.$$

اینک می‌توان جمله‌ها را جداگانه برابر گرفت و به‌دست آورد

(۱۶ الف) برای u، $$\frac{du}{dx}=p(x)\cdot u$$

(۱۶ ب) برای v، $$\frac{dv}{dx}=q(x)u^{n-1}\cdot v^n$$

در حالت خاص $n=0$، فرمول (۱۵) معادلهٔ خطی ناهمگن است و فرمولهای (۱۶ الف) و (۱۶ ب) به «فرمول تغییر ثابتها» تبدیل می‌شوند.

خم کوتاهترین زمان

«دقیقاً یك سال پیش مسألهٔ سریعترین سقوط را به عنوان مسأله‌ای کاملاً جدید در مجلهٔ اکت دلاپیزیك[1] مطرح کردم، بی‌آنکه بدانم گالیله روی این مسأله کار کرده بوده است.»

(یوهان برنولی، ژوئن ۱۶۹۷)

«... ودریافتن دلیل انکسار ازروی اصل کلی ما که‌می‌گوید طبیعت همواره از کوتاهترین و آسانترین راهها عمل می‌کند.»

(فرما به دلا شامبر[2]، ۱۶۵۷)

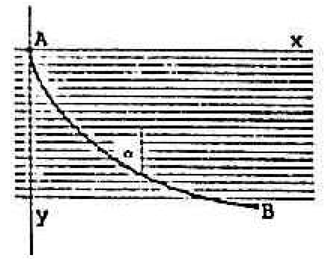
«اما چون تصور می‌کردم که‌کشف آن خیلی مشکل و مستلزم رفع موانع زیاد است، (زیرا این‌مسائل ماکسیمم و مینیمم معمولاً به‌عملیات خسته‌کنندهٔ طولانی منجر می‌شوند وعدم تقارنهای بسیار زیادی کـه در سر راه به‌آنها برمی‌خوریم به‌آسانی موجب درهم برهم‌شدن عملیات می‌شوند)، چندین سال دنبال آن را نگرفتم به‌انتظار اینکه شاید هندسه‌دانی فعالتر آن را کشف یا اثبات کند. هیچکس پیدا نشد کـه به‌این کار بپردازد؛ ...»

(فرما، ۱۶۶۴)

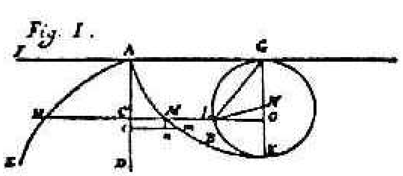
درپاییز سال ۱۶۹۶ یاکوب برنولی درمطالعات شخصیش به‌مسألهٔ خم کوتاهترین زمان می‌پردازد و مانند گالیله فکر می‌کند که جواب آن دایره است. این‌فرصت مناسبی است برای یوهان که برادرش را در انظار دیگـران گوشمالـی دهـد؛ در آ. ا. ی سال ۱۶۹۶ برگزاری مسابقه‌ای بزرگ را به‌منظور حـل این مسألـه اعـلام

1. Actes de Leipsic
2. De La Chambre

می‌کند ([۷]). در ژوئن ۱۶۹۷ مجله، جواب نیوتن را (که بدون نام است اما از «بیان نیشدارش» نویسندهٔ آن شناخته می‌شود) و همچنین جوابهای لایب‌نیتس، یوهان، لوپیتال و جواب یاکوب را که متأسفانه درست‌است، دریافت می‌کند. جواب یوهان زیباتر از همه است. یوهان مسألـه را از راه قیاس بـا نورشناسی حل می‌کند (شکل ۱۲):



شکل ۱۲. خم کوتاهترین زمان



شکل ۱۳. خم کوتاهترین زمان (رسم یوهان برنولی)

او به‌لایه‌های متعدد اجسام کـه در آنها «سرعت نور» بـا فرمول $v=\sqrt{2gy}$ مشخص می‌شود می‌اندیشد (ر.ك. [۴]). سریعترین راه، راهی است کـه همواره از قـانـون انکسار پیروی می‌کند (اصل فرما)

$$\frac{v}{\sin\alpha}=K.$$

ازاین رابطه با توجه به $\sin\alpha=1/\sqrt{1+y'^2}$ به‌دست می‌آید

$$\sqrt{1+y'^2}\cdot\sqrt{2gy}=K$$

یا

$$dx=\sqrt{\frac{y}{c-y}}\cdot dy. \qquad (۱۷)$$

همواره بنابر «و انتگرالهای آنها برابر می‌شوند»، با تبدیل متغیر

(۱۸ الف) $$y=c\cdot\sin^2 u=\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\cos 2u$$

به‌فرمول

(۱۸ ب) $$x=cu-\frac{c}{2}\sin 2u+K$$

می‌رسیم. پس جواب یك چرخزاد[1] است.

1. cycloide

مسائل برابرمحیطی

«با تمام دشواریهای ظاهری این مسائل، در همان لحظه‌ای که آنها را خواندم به‌آنها علاقه‌مند شدم، و ببینید که به چه موفقیتی دست یافتم. به‌جای سه ماهی که برای یافتن سرنخ به‌من فرصت داده بودند و به‌جای پیدا کردن جواب در بقیهٔ سال، برای یافتن راه، شروع کار و رسیدن به‌عمق تمام معما من در کل فقط سه‌دقیقه وقت صرف کردم؛ و حتی فراتر از آن، زیرا جوابهایی خواهم داد که هزار بار کلیترند...»

(یوهان برنولی، ۱۶۹۷)

اظهارنظر دربارهٔ مسائلی که در شمارهٔ دوم دسامبر ۱۶۹۷ ژورنال د ساوان[1] ذکر شده است. آقای **برنولی**، استاد دانشگاه بال، واضع این مسائل، ادعا می‌کند که جواب قسمت اصلی که به‌شکلهای برابرمحیط مربوط است کاملاً با حقیقت وفق ندارد. بدین‌جهت می‌خواهد... به‌سه چیز بپردازد... اولاً حدس بزند که دقیقاً چه تجزیه و تحلیلی برادرش را به‌جوابی که در مجله آمده رسانیده است. ثانیاً... مغالطه‌های آنرا نشان دهد... ثالثاً جواب واقعی همهٔ اجزاء مسأله را به‌دست آورد.

(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

پاسخ آقای **برنولی**، استاد دانشگاه گرونینگن، به‌اظهارنظر مندرج در شمارهٔ ۷ ژورنال د ساوان مورخ ۱۷ فوریهٔ ۱۶۹۸.

من در این اظهارنظر برادرم به‌خوبی می‌بینم که او به‌احتمال زیاد، چندان مایل نیست تسلیم منطق شود، بدون شك از ترس اینکه مجبور شود به‌عهدش وفا کند. در غیر این‌صورت پیشنهاد مرا می‌پذیرفت که آقای لایب‌نیتس، یکی از بزرگترین هندسه دانان این زمان، را حکم قرار دهیم. برای این منظور جوابهایم را به‌امانت نزد او فرستاده بودم، و بایستی جایزه را در اختیار او می‌گذاشتیم. یا اگر برادرم این ریاضیدان شایسته را قبول ندارد دلیلش را بگوید و دیگری را نام ببرد. زیرا من حاضرم قضاوت هرشخص بی‌طرفی را که به‌این‌موضوعها وارد باشد بپذیرم. والا هرچه اعتراض کند به‌هیچ‌وجه جوابی نخواهم داد، و به‌تمام‌مخالفتهایی که با من خواهند کرد اصلاً اعتنا نمی‌کنم، و به‌خوبی آنها را ازحالا پیش‌بینی می‌کنم...

(یوهان برنولی، ۱۶۹۸)

اظهارنظر آقای **برنولی**، استاد ریاضیات دانشگاه بال، دربارهٔ جواب برادرش که ۲۱ آوریل ۱۶۹۸ در این مجله درج شده است. قبل‌از انتشار پاسخم به راه‌حلهای برادرم، از او خواهش می‌کنم که راه‌حل آخرش را دوباره کاملاً مرور کند و تمام نکاتش را به‌دقت بررسی کند و بعد به‌ما بگوید که نقصی ندارد، به‌او اخطار می‌کنم که بعداز اینکه جوابم را دادم بهانهٔ شتابزدگی دیگر مسموع نخواهد بود.

(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

پاسخ آقای **برنولی**، استاد دانشگاه گرونینگن به‌اظهارنظری که در ۲۶ مه ۱۶۹۸ در این مجله درج شده است. چرا جوابهایی را که به‌مسأله‌های برادرم داده‌ام دوباره مرور کنم؟ می‌دانم چه باید بکنم، به‌یقین اگر به‌کشفهای جدید بپردازم بهتر از وقتم استفاده می‌کنم...

(یوهان برنولی، ۱۶۹۸)

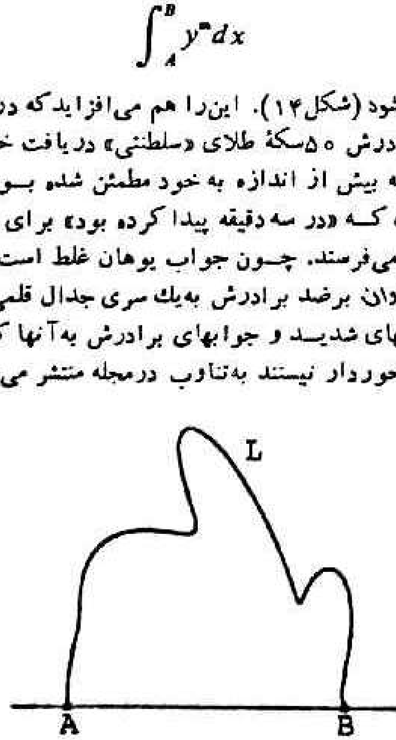
اظهارنظر دربارهٔ جوابی که در ۲۳ ژوئن ۱۶۹۸ در این مجله درج شده است. من، هرگز باور نداشتم که برادرم روش واقعی حل مسألهٔ برابرمحیطها را یافته باشد؛ اما حالا با اشکالی که برای مرور مجدد آنها می‌تراشد بیش‌از پیش در این باره مشکوك می‌شوم. زیرا علت‌گردن‌نگذاشتن او به‌چیزی که به‌چنین وقت‌کمی نیاز دارد جز بی‌اعتمادی به روش خودش چه می‌تواند باشد؛ اگر همان طور که می‌گوید برای یافتن راه، شروع کار و رسیدن به‌عمق تمام معما فقط سه‌دقیقه وقت صرف کرده است، واضح است که مرور چیزی که پیدا کرده است بیش از این وقت او را نخواهد گرفت. علاوه بر این به‌فرض آنکه دو برابر آن وقت صرف کند، آیا شش‌دقیقه‌که برای این بررسی صرف می‌شود خیلی از تعداد کشفهای جدیدش می‌کاهد؟...

(یاکوب برنولی، ۱۶۹۸)

در حل مسألهٔ خم کوتاهترین زمان، نحوهٔ تفکر یاکوب ظرافت کمتری دارد اما کلیتر است. برای اینکه از برادرش انتقام بگیرد، در همان مقاله ([۳]) به او حل مسألهٔ برابرمحیطها را پیشنهاد می‌کند: بین دو نقطهٔ مفروض A و B خمی به طول مفروض L بگذرانید به‌گونه‌ای که

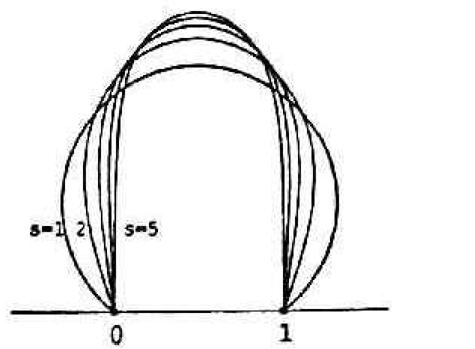
$$\int_A^B y^n dx$$

ماکسیمال شود (شکل ۱۴). این را هم می‌افزاید که درمقابل جواب صحیح، برادرش ۵۰ سکهٔ طلای «سلطنتی» دریافت خواهد کرد. یوهان، که بیش از اندازه به خود مطمئن شده بود، بی‌درنگ جوابش را، که «در سه دقیقه پیدا کرده بود» برای لایب‌نیتس و برای مجله می‌فرستد. چون جواب یوهان غلط است، یاکوب در ژورنال دساوان برضد برادرش به‌یك سری جدال قلمی می‌پردازد: این پرخاشهای شدید و جوابهای برادرش به‌آنها که از شدت کمتری برخوردار نیستند به‌تناوب در مجله منتشر می‌شوند.



شکل ۱۴. مسألهٔ برابرمحیطی

1. Journal des Savans



شکل ۱۵. جوابهای‌عددی برای $A=0$، $B=1$، $L=4$، $m=1, 2, \dots, 5$.

اویلر و لاگرانژ

جنگ بیرحمانهٔ دو برادر رقیب تا مرگ یاکوب درسال ۱۷۰۵ ادامه یافت. یوهان در دانشگاه بال جانشین او شد و چون مربی بسیار خوبی بود شاگردان استثنایی تربیت کرد: سه پسرش و به‌ویژه لئونهارت‌اویلر. اویلر به‌طور اصولی حل‌معادلات دیفرانسیل را بررسی‌می‌کند و، مستقل‌از ریکاتی، به‌حل اولین‌معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ بالاتر می‌پردازد. تمام این تحقیقات درجلدهای بیست و دوم و بیست و سوم مجموعهٔ آثار[1] او جمع‌آوری شده است (همچنین ر.ک. [I.۳]، [I.۴]، و [I.۵]). لاگرانژ اولین کسی‌است که به‌دستگاههای معادلات دیفرانسیل، در تحقیقاتش روی نظریهٔ صوت [۱۵] و به‌خصوص، در کتاب مکانیک تحلیلی مشهورش، می‌پردازد. (ضمناً این‌کتاب درسال ۱۷۸۸ منتشر شد و امسال دویستمین سال انتشار مکانیک لاگرانژ است!)

این قسمت را با این مطلب خاتمه می‌دهیم که اویلر درسال ۱۷۴۴ برای مسألهٔ کلی وردشها

$$\int_a^b F(x, y, y')dx=\min! \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}(F_{y'})-F_y\equiv F_{y'y'}y''+F_{y'y}y'+F_{y'x}-F_y=0 \qquad (۲۰)$$

را به دست آورد و با این‌کشف (ر.ک. [۱۱]؛ «... یکی از زیباترین تحقیقات ریاضی که تا به‌حال نوشته شده است»، (کاراتئودوری[2])) حساب وردشها را دگرگون کرد. در حالتی‌که F به x بستگی نداشته باشد معادلهٔ (۲۰) را می‌توان به‌صورت ساده‌تر

$$y'F_{y'}-F=K \qquad (۲۱)$$

درآورد. (با مشتقگیری از (۲۱) نسبت به x، درستی آن محقق می‌شود). در ۱۷۵۵، لاگرانژ در سن ۱۹ سالگی برهان جدیدی برای‌معادلات‌اویلر به‌دست می‌آورد ([۲۰]) ونظریه را به‌زیباترین صورتش درمی‌آورد. علاوه براین برای مسائلی ازنوع

$$\int_a^b F(x, y, y')dx=\min! \qquad (۲۲)$$

با شرط

$$\int_a^b G(x, y, y')dx=0$$

با قراردادن

$$\int_a^b \mathcal{L}(\lambda, x, y, y')dx=\min!\ (\max!) \qquad (۲۳)$$

به‌جای (۲۲)، مفهوم «ضریبهای لاگرانژ»[1] را در ریاضیات وارد می‌کند (ر.ک. [۱۶]، قسمت اول بخش IV، بند ۱). «تابع لاگرانژ $\mathcal{L}$» در (۲۳) با

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y, y')=F(x, y, y')-\lambda G(x, y, y')$$

تعریف می‌شود.

مسائل برابر محیطی، دنباله

این‌فرمولها را که در (۲۱) واردکنیم، مسألهٔ برابرمحیطی یاکوب برنولی به‌صورت

$$y'=\pm\sqrt{\frac{\lambda}{(K+y^m)^2}-1} \qquad (۲۴)$$

درمی‌آید. پس جواب با انتگرال زیر داده می‌شود

$$\int\frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda-(K+y^m)^2}}=x+C. \qquad (۲۵)$$

مقادیر ثابت C، K و λ برای تطبیق جواب با شرایط مرزی و طول L آمده‌اند. فقط به‌ازای $m=1$ این انتگرال را می‌توان حساب‌کرد (ر.ک. اویلر [۱۱] فصل ۵، مثال ۲؛ «که معادلهٔ‌کلی دایره است»).

به‌ازای $m>1$ با انتگرالهای «بیضوی» یا «فوق بیضوی» سروکار پیدا می‌کنیم و به‌روشهای عددی نیازمندیم. مثلا اگر فرض‌کنیم $A=0$، $B=1$ و $L=4$، ثابتهای K و λ در(۲۵) باید درشرطهای زیر صدق‌کنند (به‌دلیل تقارن خم کافی است نصف آن را که صعودی است درنظر بگیریم)

$$\int_0^{y_{max}}\frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda-(K+y^m)^2}}=0.5$$

$$(۲۶)$$

$$\int_0^{y_{max}}\frac{\sqrt{\lambda}\,dy}{\sqrt{\lambda-(K+y^m)^2}}=2$$

که در آن

$$y_{max}=(\sqrt{\lambda}-K)^{1/m}$$

---

1. Opera Omnia 2. C. Carathéodory

1. multiplicateur de Lagrange

مقداری از y است که به‌ازای آن مخرج صفر می‌شود. با یک روش تکراری (روش نیوتن) که با محاسبهٔ عددی انتگرالها (روش گاوس با نحوهٔ عمل خاص در مورد تکینگی در y_{max}) ترکیب شود مقادیر زیر به‌دست می‌آیند

m	K	λ
۱	−۰٫۶۳۴۹۹۴	۰٫۶۵۳۲۱۸
۲	−۰٫۶۳۲۲۸۷	۳٫۸۲۵۱۹۴
۳	−۰٫۶۰۷۷۴۷	۱۷٫۵۰۵۷۶۳
۴	−۰٫۴۴۴۴۷۶	۷۳٫۴۹۱۸۵۸
۵	۰٫۱۰۵۴۳۲	۲۹۶٫۴۱۶۸۸۹

جوابهای متناظر معادلهٔ (۲۴) درشکل ۱۵ دیده می‌شوند.

یوهان جواب خاص زیر را به‌دست آورده است

$$\int \frac{y^m\, dy}{\sqrt{a^{2m} - y^{2m}}} = x + C$$

که درست به نظر می‌رسد (ر. ک. (۲۵)). اما، جواب عمومیش غلط است و یاکوب به‌این نکته پی می‌برد و ابراز خشنودی می‌کند («... لااقل به‌ما بگوید که هیچ غلط چاپی در برابری او، $(dt^2 - dy^2) : dv = ddy$، وجود ندارد. و... اگر برابری غلط است، چنان‌که من مدعی آن هستم، بگوید مگر اینکه نخواهد دست از ادعاهایش بردارد»).

خاتمه

به‌خوانندگانی که به‌تفصیل بیشتری علاقه دارند توصیه می‌شود کتاب کوچک هوفمان ([۱۴]) را که کتابی است کاملاً مستند، مطالعه کنند. کارهای برادران برنولی، اویلر و لاگرانژ در «مجموعهٔ آثار» و در «آثار[1]» آنها در دسترس هستند. شرحی از کارهای کوشی، پئانو، پوانکاره، گرونوال در این زمینه و شرحی از روشهای عددی (آدامس، رونگه، کوتا) در کتاب [۱۳] آمده است (ر. ک. به‌خصوص بندهای I.۴ تا I.۱۶، II.۱ و III.۱).

تمرینها

۱. (دکارت ۱۶۳۹). نشان دهید که در دومین خم دبون، طول قسمتی از خط $y = x + a$ محدود به‌خط افقی و مماس بر نقطهٔ دلخواه B، برابر $a\sqrt{2}$ است (ر. ک. شکل ۲).

۲. جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱) را با شرط اولیهٔ $y(0) = 1$، با روش نیوتن به‌دست آورید.

۳. مسألهٔ اول دبون را با روشهای زیر حل کنید

الف) روش نیوتن

ب) جدا کردن متغیرها و انتگرالگیری

پ) روش لایب‌نیتس (فرمول (۴))

آنگاه سری تیلر برای e^x و فرمول زیر به‌دست می‌آید

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

۴. خطوط مرسوم در شکل ۱۰ را که برای حل مسألهٔ تراکتریس کشیده شده است تعبیر کنید. انتگرال (۱۴) را با استفاده از تبدیل $v^2 = y^2 - a^2$ حساب کنید.

۵. آیا شکل آرمانی برای کمان حمال یک پل، زنجیرهٔ وارون است؟

۶. انتگرال (۲۵) را به‌ازای $m = 1$ حساب کنید و نشان دهید که جواب آن یک دایره است.

۷. (یوهان برنولی ۱۶۹۷). با تبدیل $y = v^{1/(1-n)}$ معادلهٔ برنولی (۱۵) را به‌یک معادلهٔ خطی تبدیل کنید.

۸. (آونگ همزمان). نیروی مماسی جسمی که تحت‌تأثیر نیروی گرانش برخمی می‌لغزد برابر است با

$$mg \cdot \sin\alpha = mg \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

که در آن $p = y'$. مطلوب، معادلهٔ خمی است که در آن این نیرو با کمان s متناسب باشد، یعنی بخواهیم رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$s = c \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

درنتیجه، حرکت این جسم یک نوسان همساز محض خواهد بود و دورهٔ تناوب آن مستقل از دامنهٔ نوسان است.

راهنمایی: از (۲۶) (مانند (۸)) مشتق بگیرید و از

$$ds = \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{p} \cdot dy$$

استفاده کنید. به‌معادلهٔ (۱۷) می‌رسید («حرکتی که مسیر آن به‌طور غیرمنتظره برخم همزمانی هویگنس، خم کوتاهترین زمان خودمان، منطبق می‌شود» (یوهان برنولی)).

«این کشف کریستیان هویگنس، نابغه‌ترین ساعت‌ساز تمام دورانهاست» (ساعت نوسانی، پاریس ۱۶۷۳).

(زامرفلت، درس فیزیک نظری، جلد اول)

۹. خمی به‌طول L بیابید که مرکز گرانش آن پایینترین نقطهٔ ممکن باشد، یعنی

$$\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx = \min!$$

با شرط

$$\int_a^b \left(\sqrt{1 + y'^2} - \frac{L}{b - a}\right) dx = 0$$

نشان دهید که «جواب، یک زنجیره است» (اویلر [۱۱]، فصل

1. Œuvres

۷، بند ۷۳).

۱۰. با استفاده از معادلهٔ اویلر (۲۱) معادلهٔ خم کوتاهترین زمان (۱۷) را بیابید.

۱۱. نشان دهید که جواب مسألهٔ برابر محیطی (۲۵)، وقتی $m \to \infty$، به‌یک مثلث همگرا می‌شود.

(**تشکر و معذرت مترجم.** از همکاری و راهنماییهای پرارزش آقای دکتر میرشمس‌الدین ادیب سلطانی در ترجمهٔ عبارتهای لاتین سپاسگزارم و ازاینکه به‌علت ندانستن زبان لاتین ممکن است با وجود راهنماییهای بسیار مفید ایشان در ترجمه‌ام لغزشهایی وجود داشته باشد از خواننده معذرت می‌خواهم.)

مراجع

1. Jacob Bernoulli (1690). *Analysis problematis ante hac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio.* Acta Eruditorum. MDCLXXXX. pp. 217-219.
2. Jacob Bernoulli (1695). *Explicationes, Annotationes et Additiones ad ea qua in Actis sup. anni de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis.* Acta Eruditorum. MDCXCV. pp. 537-553.
3. Jacob Bernoulli (1697). *Solutio Problematum Fraternorum, Peculiari Programmate Cal. Jan. 1697 Groningae, nec non Actorum Lips. mense Jun. & Dec. 1696, & Febr. 1697 propositorum: una cum Propositione reciproca aliorum.* Acta Eruditorum MDCXCVII. pp. 211-217.
4. Johann Bernoulli (1691). *Solutio problematis funicularii, exhibita a Joh. Bernoulli, Basil. Med. Cand.* Acta Eruditorum MDCXCVI. p. 274.
5. Johann Bernoulli (1691). *Lectiones Mathematicae de Methodo integralium, aliisque, conscriptae in usum Ill. Marchionis Hospitalii, Cum Auctor Parisiis ageres Annis 1691 & 1692.* Opera Omnia. Tomus III. p. 384 (voir p. 426).
6. Johann Bernoulli et De L'Hospital (1692). *Solution du probléme que Monsieur De Beaune proposa autrefois à Mr. Des Cartes, & que l'on trouve dans la 79. de ses Lettres, Tom. 3...* Journal des Savans. 1692. p. 401. voir aussi: Acta Erud. 1693. p. 234.
7. Johann Bernoulli (1696). *Problema novum Mathematicis propositorum.* Acta Eruditorum MDCXCVI. p. 269.
8. Johann Bernoulli (1697). *De Conoidibus et Sphaeroidibus quaedam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositae.* Acta Eruditorum MDCXCVII. pp. 113-118.
9. Johann Bernoulli (1697). *Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, proposit. de invenienda Linea Brachystochrona.* Acta Eruditorum MDCXCVII. p. 206.
10. R. Descartes (1639). Lettre à Debeaune du 20 Fév. 1639.
11. L. Euler (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Lausannae & Genevae. Opera Omnia (intr. by Caratheodory) vol. XXIV. pp. 1-308.
12. Galileo Galilei Linceo (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze Attenenti alla mecanica & i movimenti locali.* MDCXXXVIII.
13. E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner (1987). *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.* Springer Verlag. 480 pp.
14. Jos. E. Hofmann (1956). *Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik.* Monographies de l'Enseignement mathématique. No. 3. Univ. Genève.
15. J. L. De Lagrange (1759). *Recherches sur la nature et la propagation du son.* Miscell. Taurinensia t. I. Œuvres t. 1. pp. 39-148.
16. J.L. De Lagrange (1788). *Mécanique analytique.* Paris. Œuvres t. 11 et 12.
17. G. Leibniz (1684). *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus.* Acta Eruditorum. MDCLXXXIV. p. 467.
18. G. Leibniz (1691). *De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos.* Acta Eruditorum. MDCXCI. p. 277.
19. G. Leibniz (1693). *Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione.* Acta Eruditorum. MDCXCIII. p. 385.
20. I. Newton (1671). *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum.* Edita Londini 1736. Opuscula mathematica vol. I. Traduit en français par M. de Buffon. Paris MDCCXL.

• G. Wanner. "Les equations différentielles ont 350 ans." *L'Enseignement Mathématique*. **34** (1988) 365-385.