مسألهٔ پیوستار کانتور چیست؟*

کورت گودل

ترجمهٔ ضیاء موحد

۱. مفهوم عدد اصلی

مسألهٔ پیوستار کانتورچیزی نیست جزاین پرسش: درفضای اقلیدسی روی یك خط راست چند نقطه وجود دارد؟ پرسش دیگری معادل با آن، این است: چند مجموعهٔ متمایز ازعددهای صحیح وجود دارد؟

البته این پرسش تنها پس‌ازآنکه مفهوم "عدد" را به‌مجموعه‌های نامتناهی تعمیم دادیم، می‌تواند طرح شود؛ از این رو می‌توان در منحصر به‌فرد بودن روش این تعمیم و بنابراین، در توجیه بیان مسأله به‌شکل سادهٔ بالا نیز شك کرد. اما بررسی دقیقتر نشان می‌دهدکه تعریف‌کانتور از عددهای نامتناهی در واقع این ویژگی منحصر به‌فرد بودن‌رادارد زیرا "عدد" دراطلاق آن به‌مجموعه‌های نامتناهی هر معنایی هم بدهد، محققاً می‌خواهیم این ویژگی را داشته باشد که تعداد شیئهای متعلق به‌یك مجموعه اگر هم کسی ویژگیها یانسبتهای میان آنها (برای مثال، رنگها یا توزیع‌فضایی آنها) را به‌هرشکلی تغییر دهد، تغییر نکند، مشروط به‌اینکه شیئها همان شیئها باشند. از اینجا بی‌درنگ نتیجه می‌شودکه دومجموعه (دست‌کم‌دومجموعه از شیئهای تغییرپذیر جهان فضا ـ زمان) عدد اصلی یکسانی‌دارند اگر میان عضوهای آنها بتوان تناظری‌یك به‌یك برقرارکرد و این تعریف‌کانتور از تساوی میان عددهاست. زیرا اگرچنین تناظری میان دومجموعهٔ A و B وجودداشته باشد، ممکن است (دست‌کم از لحاظ نظری) ویژگیها و نسبتهای هر عضو از A را به‌ویژگیها و نسبتهای عضو متناظر آن در B تبدیل کرد. با این‌کار، A به‌مجموعه‌ای‌که مطلقاً نامتمایز از B باشد تبدیل می‌شود و بنابراین، همان‌عدد اصلی B را هم خواهد داشت. برای‌مثال، اگر فرض‌کنیم یك مربع و یك پاره خط به‌تمامی از نقطه‌های مادی پر شده باشند (چنانکه در هرنقطه از هرکدام تنها یك نقطهٔ مادی جا گرفته باشد) بنابریك واقعیت اثبات پذیر می‌توان نتیجه‌گرفت‌که میان نقطه‌های مربع و پاره خط، و بنابراین میان نقطه‌های مادی متناظر با‌آنها نیز، یك تناظر یك به یك وجود دارد؛ یعنی نقطه‌های مادی مربع را می‌توان چنان مرتب‌کردکه درست پاره خط را پرکنند و به‌عکس. البته در چنین بررسیهایی تنها به‌شیئهای مادی پرداخته می‌شود، اما تعریفی از مفهوم "عدد" را که به‌نوع شیئهایی که باید شمرده شوند بستگی پیداکند، دشوار بتوان رضایتبخش‌دانست.

بنابراین گمان نمی‌رود راه دیگری جزاین وجود داشته باشدکه تعریف‌کانتور را از تساوی دوعدد بپذیریم، تعریفی‌که به‌آسانی آن‌را می‌توان به‌تعریفی از "بزرگتر بودن" و "کوچکتر بودن" برای عددهای نامتناهی، با این قرارداد تعمیم داد: عدد اصلی M از مجموعهٔ A را کوچکتر ازعدد اصلی N از مجموعهٔ B می‌نامیم اگر M متفاوت از N اما مساوی‌عدد اصلی زیر مجموعه‌ای از B باشد. اینکه عددی اصلی با خاصیت معینی وجود دارد، بنابه‌تعریف به‌این معنی است که مجموعه‌ای با این عدد اصلی وجود دارد. برپایهٔ این تعریفها می‌توان ثابت‌کردکه بینهایت اعداد اصلی نامتناهی مختلف یا"توان" وجود دارند وبه‌ویژه، تعداد زیرمجموعه‌های هرمجموعه همیشه بزرگتر ازتعداد عضوهای آن مجموعه است؛ ازاین گذشته می‌توان (بدون‌کاربرد روشهای دلبخواهی) اعمال حساب را به عددهای نامتناهی (از جمله جمع و ضرب با هرتعداد نامتناهی از جمله‌ها یا عاملها) تعمیم داد وعملاً تمام قاعده‌های‌معمولی محاسبه را ثابت‌کرد.

اما، حتی پس‌از انجام همهٔ این‌کارها، مسألهٔ تعیین عدد اصلی یك مجموعهٔ خاص، مانند پیوستار خطی، تعریف دقیق و مناسبی پیدا نخواهدکرد مگر اینکه برای نمایش عددهای اصلی نامتناهی یك‌نمایش "طبیعی" داشته باشیم، مانند نشانه‌گذاری‌دهدهی‌عددهای صحیح. اما بنابراین قضیه که برای هر عدد اصلی و هرمجموعه‌ای از عددهای اصلی [۱] تنهایك عدد اصلی وجود داردکه به‌ترتیب اندازه بی‌درنگ پس‌از آنها می‌آید واینکه‌عدد اصلی هرمجموعه در جایی ازرشته‌ای‌که چنین به‌دست می‌آید، ظاهر می‌شود، چنین نمایش طبیعی وجود دارد [۲]. این قضیه این امکان را فراهم می‌آوردکه آن عدد اصلی‌که بی‌درنگ پس از مجموعهٔ عددهای متناهی می‌آید با $\aleph_0$ (که توان "مجموعه‌های نامتناهی‌شمارا"ست) نشان داده شودوعدد اصلی پس‌از آن با $\aleph_1$ و...؛ عددی‌که پس‌از همهٔ $\aleph_i$ها که i یك عدد صحیح است می‌آید با $\aleph_\omega$، و عدد بعدی با $\aleph_{\omega+1}$ و...، و نظریهٔ عددهای ترتیبی روش ادامه دادن هرچه بیشتر این رشته‌ها را به دست می‌دهد.

۲. مسألهٔ پیوستار، فرضیهٔ پیوستار، و نتیجه‌های جزیی که تاکنون دربارهٔ صدق آن به‌دست آمده است

بنابراین، تحلیل عبارت "چند"، بی‌هیچ‌ابهام به‌معنایی مشخص‌برای پرسشی‌که در دومین سطر این مقاله طرح شد انجامید: مسأله این است‌که پیداکنیم کدام‌یك‌از $\aleph$ها تعداد نقطه‌های یك خط راست یا (آنچه به‌همان معنی است) تعداد هرپیوستار دیگر (با هر شماره‌ای ازابعاد) در فضایی‌اقلیدسی است. کانتور پس‌ازاینکه ثابت‌کرداین تعداد بزرگتر از $\aleph_0$ است، حدس زدکه $\aleph_1$ باشد. بیان معادل آن این است: توان هرزیر مجموعهٔ نامتناهی از پیوستار یا توان مجموعهٔ عددهای‌صحیح است یاتوان‌تمامی پیوستار. فرضیهٔ‌پیوستار کانتور همین است.

اما اگرچه نظریهٔ مجموعه‌های‌کانتور اکنون بیش‌ازهفتاد سال رشد یافته است واین‌مسأله آشکارا اهمیت عظیمی برای آن‌دارد، هنوز دربارهٔ این پرسش‌که‌توان پیوستار چیست یا اینکه آیا زیرـ مجموعه‌های‌آن‌شرطی راکه هم‌اکنون‌بیان‌کردیم برمی‌آورند هیچ چیزی ثابت نشده است، مگراینکه (۱) توان پیوستار عددی اصلی از نوع خاص مشخصی، یعنی حد تعداد شمارایی از عددهای اصلی‌کوچکتر نیست [۳] و(۲) گزاره‌ای‌که هم‌اکنون دربارهٔ زیرـ مجموعه‌های پیوستار ذکرشد برای بخش بینهایت‌کوچك مشخصی از این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌های تحلیلی [۴]، صادق‌است [۵].

حتی کران بالایی، هراندازه بزرگ، نمی‌توان برای توان پیوستار درنظر گرفت. کیفیت عدد اصلی پیوستار هم بیش‌از کمیت آن شناخته شده نیست. معلوم نیست که این عدد عادی است یا منفرد، دسترس‌پذیر[1] است یا دسترس‌ناپذیر[2]. و (مگر درمورد نتیجهٔ منفی کونیگ) خصلت هم پایانی[3] (به فهرست تعریفها در انتهای مقاله نگاه‌کنید) آن چیست. افزون برنتیجه‌هایی که هم‌اکنون بـه‌آنها اشاره‌کردیم، تنها چیزی‌که دانسته شده شمار زیادی از پیامدهای حدس کانتور است [۶۰] و بعضی گزاره‌های معادل با آن.

این شکست قطعی وقتی چشمگیرتر می‌شود که مسأله در ارتباط با مسائل کلی حساب عددهای اصلی بررسی شود: می‌توان به‌آسانی ثابت‌کرد که توان پیوستار برابـر با $2^{\aleph_0}$ است. از اینجا روشن می‌شودکه مسألهٔ پیوستار پرسشی است خاسته از "جدول ضرب" عددهای اصلی، یعنی، مسألـهٔ محاسبهٔ یك حاصل ضرب نـامتناهی مشخص (در واقع ساده‌ترین حاصلضربی که بتوان ساخت و پیش پاافتاده نباشد). درهرصورت هیچ حاصلضرب نامتناهی (ازعوامل بزرگتر از ۱) نیست‌که بتوان چنین کران بالایی آن نسبت داد. تمام آنچه دربارهٔ مقدار حاصلضربهای نامتناهی می‌دانیم دوکران پایین است‌که‌کانتور وکونیگ به‌دست داده‌اند (کران پایین‌دومی مستلزم قضیهٔ منفی مذکور در بالا دربارهٔ توان پیوستار است) و چند قضیه دربـارهٔ تبدیل ضربهایی کـه عوامـل مختلف دارنـد به‌صورتهای نمایی وتبدیل این صورتها به‌صورتهای‌نمایی با پایه‌ها یا نماهای کوچکتر. این قضیه‌ها تمام مسألهٔ محاسبهٔ حاصلضربهای نامتناهی را به‌محاسبهٔ $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)}$ و کاربرد عملهای اصلی معینی در عددهای ترتیبی، مانند یافتن حد رشته‌هایی از آنها، تبدیل می‌کند [۶]. تمام ضربها وتوانها را به‌آسانی می‌توان محاسبه‌کرد [۷] به شرطی‌که "فرضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ پیوستار" به‌کار رود، یعنی به‌شرط این فرض‌که برای هر α، $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. یا به‌بیان دیگر، اینکه شمارهٔ زیرمجموعه‌های‌هرمجموعه با توان $\aleph_\alpha$، برابرست‌با $\aleph_{\alpha+1}$. اما بدون کاربرد هیچ‌فرض اثبات‌ناپذیر، حتی‌نمی‌دانیم که‌آیا $m < n$ مستلزم $2^m < 2^n$ هست یانیست (اگرچه، آشکارا مستلزم $2^m \leqslant 2^n$ هست) یا حتی اینکه $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ هست یا نه.

۳. بیان دوبارهٔ مسأله برپایهٔ تحلیلی ازمبانی نظریهٔ مجموعه‌ها ونتیجه‌هایی که در این راستاها به‌دست آمده‌اند

اندکی نتیجه‌ها، حتی درمورد بنیادیترین پرسشها در ایـن زمینه، شاید تا اندازه‌ای مربوط به‌دشواریهای صرفاً ریاضی بـاشد؛ اما به‌نظر می‌رسد (ر.ك بخش ۴) دلیلهای ژرفتری هم درکار باشد و حل‌کامل این‌مسأله‌ها را تنها با تحلیل عمیقتر (ازآنچه درریاضیات معمـول است) از معنیهای اصطلاحهـای مندرج در آنها (مـانند "مجموعه"، "تناظر یك به یك" وغیره.) و اصلهای موضوعی کـه زیر بنای‌کاربرد آنها هستند بتوان به‌دست آورد. انواع متعددی‌از این‌گونه تحلیلها پیش ازاین پیشنهاد شده است. ببینیم این تحلیلها برای مسألهٔ ما چه به‌دست می‌دهند.

پیش‌از هر چیز شهودگرایی براوئر را داریم‌که نتیجه‌های آن آشکارا ویران‌کننده‌اند. در این‌نـوع تحلیل، تمام‌نظریـهٔ $\aleph$های بزرگتراز $\aleph_1$ به‌عنوان چیزی‌بی‌معنی‌طرد می‌شود ([۳۶]ص۵۶۹). از حدس‌کانتور تعبیرهای گوناگونی می‌شودکه تمام آنها، اگرچه به‌خودی‌خود بسیار جالب‌اند، اما از مسألهٔ اصلی بکلی متفاوت‌اند و به‌پاسخهایی می‌انجامندکه تا اندازه‌ای مثبت وتا اندازه‌ای منفی هستند([۳۵]جلد I ص ۹؛ جلد III ص ۲). درهرصورت، در این زمینه‌چنین نیست‌که هرچیزی‌به‌اندازهٔ‌کافی روشن‌شده باشد. دیدگاه "نیمه شهودی" پوانکاره و وایل [۸] از بخشهای اساسی نظریـهٔ مجموعه‌هاکمتر چیزی باقی می‌گذارد.

درهرحال این تلقی منفی از نظریـهٔ مجموعه‌های کانتور، و از ریاضیات رسمی، کـه یك تعمیم طبیعی از آن است، بـه‌هیچ وجه حاصل ضروری پژوهشی دقیقتر در مبانـی آنها نیست، بلکه تنها نتیجهٔ تصور فلسفی خاصی از ماهیت ریاضیات است، تصوری که شیئهای ریاضی را تنها تاحدی می‌پذیردکه بتوان آنها رابه‌عنوان چیزهایی‌که خود می‌سازیم، یا دست‌کم، چیزهایی که بتوانند به تمامی برای شهود ریاضی ما مشهود باشند، تعبیرکرد. به‌اعتقاد من، برای‌کسی که شیئهای ریـاضی را مستقل از روشی کـه آنها را می‌سازیم و مستقل از داشتن شهود به یك یك آنها موجود می‌داند وآنچه می‌خواهد تنها این‌است‌که مفهومهای‌کلی ریاضی بایـد به اندازهٔ‌کافی برای ما روشن باشندکه بتوانیم درستی وصدق‌اصلهای موضوع مربوط به‌آنها را درك‌کنیم، یك‌مبنای رضایتبخش‌ازنظریهٔ مجموعه‌های کانتور به‌تمام معنی و وسعت اصلی آن وجـود دارد، یعنی یك روش اصل موضوعی از نظریهٔ مجموعه‌ها با تعبیری کـه خلاصهٔ آن در پایین داده می‌شود.

درآغاز ممکن است چنین به‌نظربرسدکه پارادوکسهای خاسته از نظریهٔ مجموعه‌ها چنین برنامه‌ای را با شکست روبه‌روکنند، اما بررسی دقیقتر نشان می‌دهدکه این پارادوکسها هیچ مشکلی به‌بار نخواهندآورد. اینها مسائلی‌بسیارجدی‌هستند، امانه برای‌ریاضیات، بلکه بـرای منطق ومعرفت شناسی. در ریـاضیات (دست‌کـم در ریاضیات امـروز، به اضافهٔ تمام نظریـهٔ مجموعه‌های کانتور) مجموعه‌هایی‌که با آنها کار داریم، مجموعه‌های عددهای صحیح هستند، یا عددهای گویا (یعنی مجموعه‌های دوتاییهای مرتبی از عددهای صحیح)، یا عددهای‌حقیقی (یعنی‌مجموعه‌هایی ازعددهای گویا)، یا تابعهایی از عددهای حقیقی (یعنی مجموعه‌هایی از دوتاییهای مرتبی از عددهای حقیقی)، واز این‌گونه. هنگامی که قضیه‌هایی را دربـارهٔ همهٔ مجموعه‌ها (یا به طورکلی وجـود مجموعه‌هایی را) تصدیق می‌کنیم، همیشه این قضیه‌ها را می‌توان بی‌هیچ دشواری چنین تعبیرکردکه برای مجموعه‌هایی ازعددهای صحیح، همچنانکه برای مجموعه‌هایی از مجموعه‌های اعـداد صحیح، و مجموعه‌هایی از این‌گونه، صادق هستند (این به‌ترتیب به‌این معنی است‌که مجموعه‌هایی ازعددهای صحیح وجود دارند، یا مجموعه‌هایی از مجموعه‌های عددهای صحیح، یا ... که دارای خاصیت بیان شده هستند). به‌هرحال این مفهوم از مجموعه [۹]، که بنا برآن مجموعه چیزی است که از عددهای صحیح (یـا از شیئهای دیگری که تعریف دقیق و مناسبی دارند) با کاربرد مکرر [۱۰] عمل "مجموعه‌ای از" [۱۱] به‌دست می‌آید، نه‌چیزی‌که از تقسیم‌کردن‌کل همهٔ چیزهای موجود به‌دو رسته به‌دست‌آمده باشد، هرگز به‌هیچ تناقضی نینجامیده است؛ یعنی‌کاربردکاملاً "طبیعی" و

---

1. accessible 2. inaccessible 3. character of cofinatity

"غیرانتقادی" این مفهوم از مجموعه تاکنون سازگاری خود را به‌تمامی به‌اثبات رسانده است [۱۲].

اما، ازاین گذشته، اصلهای موضوعی که مبنای کاربرد نامقید این مفهوم از مجموعه یا، دست‌کم، زیرمجموعه‌ای از آنهاست، زیرمجموعه‌ای که برای تمام برهانهای ریاضی که تاکنون طرح‌شده‌اند (مگر برای قضیه‌های مربوط به وجود عددهای اصلی بی‌اندازه بزرگ، ر.ك. یادداشت [۱۶]) کفایت کند، باچنان دقتی درنظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها فرمولبندی شده‌اند [۱۳] که این پرسش راکه آیا گزارهٔ مفروضی نتیجهٔ آنها هست یا نه می‌توان به‌کمك منطق ریاضی به یك مسألهٔ صرفاً ترکیبیاتی تبدیل کرد، مسأله‌ای مربوط به‌عملیات روی نشانه‌ها که حتی افراطی‌ترین شهودیان نیز آن را ناچار به عنوان امر معنی داری بپذیرند. بنابراین مسألهٔ پیوستار کانتور، صرف‌نظر ازاینکه چه دیدگاه فلسفی انتخاب شود، دست‌کم این‌معنی را برای خود حفظ می‌کند: یافتن اینکه آیا جوابی وجود دارد یا نه، واگر دارد، یافتن اینکه‌کدام، مسأله‌ای است که می‌توان آن را ازاصلهای موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، بدانگونه‌که درنظامهای مذکور فرمولبندی شده‌اند، استنتاج کرد.

البته اگرموضوع دراین راستا تعبیر شود (با فرض سازگاری اصلهای موضوع) برای فرضیهٔ کانتور، به‌اعتبار عقلی، سه امکان وجود دارد: ممکن‌است اثبات‌پذیر، ابطال‌ناپذیر، یاتصمیم ناپذیر باشد[۱۴]. شق سوم (که تنها فرمولبندی دقیقی است از فرضیهٔ مذکور، که [می‌گوید] احتمالاً دشواریهای مسأله صرفاً ریاضی نیستند)، از همه محتملتر است و، درحال حاضر، جستجوی برهانی برای آن نویدبخشترین راه درگیری بااین مسأله است. هم‌اکنون نتیجه‌ای دراین راستا به‌دست‌آمده است، یعنی، اینکه فرضیهٔ کانتور با اصلهای موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، به‌شرط آنکه این اصلها سازگار باشند (ر.ك. بخش ۴)، ابطال‌پذیر نیست.

به‌هرحال، بایدتوجه داشت،که براساس دیدگاهی که در اینجا پذیرفته شده است، آوردن برهانی ازتصمیم‌ناپذیری فرضیهٔ کانتور بااستفاده ازاصلهای مقبول نظریهٔ مجموعه‌ها (برخلاف، برای مثال، برهان غیرجبری بودن عدد π) به‌هیچ وجه مسأله را حل نمی‌کند. زیرا اگر معنیهای حدود اولیهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، بدانگونه که در صفحه‌های ۴۷–۴۸ و یادداشت [۱۱] شرح داده شدند، به عنوان معنیهای درست پذیرفته شوند، آنگاه چنین نتیجه می‌شودکه مفهومها وقضیه‌های نظریهٔ مجموعه‌ها حقیقتی‌کاملاً معین راتوصیف می‌کنند که درآن فرضیهٔ کانتور بایدیاصادق باشد یاکاذب. بنابراین تصمیم‌ناپذیری این فرضیه از اصلهای مفروض‌کنونی تنها بدین معنی است‌که این اصول توصیف کاملی ازآن حقیقت را در برندارند. چنین باوری به هیچ وجه غیرحقیقی نیست زیرا می‌توان راههایی را نشان دادکه به‌کمك آنها درمورد پرسشی‌که با اصلهای معمولی، تصمیم‌ناپذیراست، تصمیمی اتخاذ کرد.

نخست‌اینکه‌اصلهای موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها به‌هیچ وجه‌نظام درخود بسته‌ای را نمی‌سازند، بلکه، درست برعکس، همین مفهوم از مجموعه [۱۵] که آنها برآن استوارند، مبین گسترش آنها با اصلهای موضوع تازه‌ای است که وجود تکرارهای بیشتر عمل "مجموعه‌ای از" را بیان می‌دارند. همچنین‌این‌اصلها را می‌توان‌به صورت گزاره‌هایی‌که مبین وجود عددهای‌اصلی‌بسیار بزرگ (یعنی وجود مجموعه‌هایی با این عددهای اصلی) باشند، فرمولبندی کرد. ساده‌ترین این "اصلهای موضوع بینهایت" قوی، وجود عددهای دسترس‌ناپذیر بزرگتر از $\aleph_0$ (به‌معنای ضعیفتر یا قویتر) را بیان می‌کند. معنای اصل اخیر، تقریباً، چیزی جز این نیست که کل مجموعه‌هایی‌که باکاربرد روشهای مجموعه‌سازی مذکور دراصلهای دیگر به‌دست می‌آید، خود مجموعهٔ دیگری است (و، بنابراین، مبنای تازه‌ای است برای کاربردهای بیشتراین روشها) ([۷۱] ص ۲۹). اصلهای موضوع بینهایت دیگر را نخستین بار ماهلو[1] فرمولبندی کرد [۱۶]. این اصلها نه تنها آشکارا نشان می‌دهندکه نظام اصل موضوعی نظریهٔ مجموعه‌هاکه امروز به‌کارمی‌رود، کامل نیست، بلکه نشان می‌دهندکه می‌توان بدون [روشهای] دلبخواهی و اختیاری به‌آنها اصلهای تازه‌ای ضمیمه کردکه منحصراً مفهوم مجموعهٔ مذکور دربالا را آشکار کنند.

می‌توان ثابت کردکه این‌اصلها نتیجه‌هایی هم دارندکه‌ازحوزهٔ عددهای متناهی بسیار بزرگ‌که موضوع اصلی آنهاست خیلی فراتر می‌روند: می‌توان نشان دادکه هریك از این اصلها، به‌فرض سازگاری، شمارهٔ گزاره‌های تصمیم‌پذیر راحتی درزمینهٔ‌معادله‌های دیوفانتی افزایش می‌دهد. و اما در مورد مسألهٔ پیوستار، امید اندکی به‌حل آن به‌کمك اصلهای موضوع بینهایتی است که بر اساس مبانی ماهلو می‌توان وضع کرد (برهانی که برای ابطال‌ناپذیری فرضیهٔ پیوستار در بالاذکرکردیم برای همهٔ اینها بی‌هیچ تغییری به‌کارمی‌رود). اما اصلهای دیگری هم مبتنی بر مبانی دیگری وجود دارند (ر.ك. یادداشت [۱۶])؛همچنین ممکن‌است، غیراز اصلهای معمول، اصلهای بینهایت و اصلهای مذکور در یادداشت [۱۵]، اصلهای (تاکنون ناشناختهٔ) دیگری برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجودداشته باشندکه درك عمیقتری‌از مفهومهای بنیادین منطق وریاضی به‌ما امکان دهدکه آن‌اصول‌را نتیجه‌های منطقی‌این مفهومها بشناسیم (ر.ك.، برای مثال، یادداشت [۱۹]).

دوم‌اینکه‌حتی اگر ضرورت ذاتی اصل موضوعی تازه رانادیده بگیریم، حتی در موردی هم‌که هیچ ضرورت ذاتی نداشته باشد، بازهم به‌روشی دیگر، یعنی، با مطالعهٔ استقرایی "موفقیت" آن، تصمیمی‌مبتنی براحتمال دربارهٔ صدق آن می‌توان گرفت. موفقیت در اینجا به‌معنای مثمر نتیجه بودن، به‌ویژه، نتیجه‌های "تأییدپذیر" است،یعنی، نتیجه‌های اثبات‌پذیر بدون‌کمك‌اصلی تازه، نتیجه‌هایی که‌کشف برهانهای‌آنها به‌کمك اصل‌موضوع تازه بسیار ساده‌تر و آسانتراست وامکان خلاصه‌کردن‌برهانهای مختلف‌زیادی‌را دریك برهان فراهم می‌آورند. اصلهای موضوع نظام عددهای حقیقی، که شهودیان آنها را رد می‌کنند، به‌این معنی تا حدی تأیید شده‌اند، با اتکا به‌این واقعیت‌که نظریهٔ تحلیلی اعداد اغلب به‌ما اجازه می‌دهدکه قضیه‌هایی ازنظریهٔ اعداد را ثابت‌کنیم‌که بعد می‌توان، به‌شیوه‌ای پرزحمتتر با روشهای ابتدایی،آنها را به‌تأیید رسانید. برای تأیید، درجهٔ بسیار بالاتری از این نیزمی‌توان تصور کرد. چه بسا اصلهایی وجود داشته باشند که نتیجه‌های تأییدپذیرشان چنان فراوان باشند وچنان پرتوی برتمام موضوع بیفکنند، وچنان روشهای توانایی درحل مسأله‌ها پدیدآورند (وحتی درموارد ممکن

1. P. Mahlo

مسأله‌ها را با برهانهای سازنده حل کنند) که، صرف‌نظر از اینکه آیا ذاتاً ضروری هستند یا نه، ناچار به پذیرش آنها، دست‌کم به همان معنایی که هر نظریهٔ فیزیکی جاافتاده را می‌پذیریم، باشیم.

۴. نگرشهایی دربارهٔ این پرسش که: به‌چه معنی و درچه‌راستایی می‌توان به‌امید راه حلی برای مسألهٔ پیوستار بود؟

اما آیا چنین ملاحظاتی با مسالهٔ پیوستار مناسبتی دارند؟ آیا برای حل‌ناپذیری آن بااصلهای موضوع پذیرفته شده، نشانه‌های روشنی وجود دارد؟ فکر می‌کنم دست‌کم دو نشانه وجود داشته باشد:

نشانهٔ اول خاسته از این واقعیت است که دو ردهٔ تعریف شدهٔ کاملاً مختلف ازشیئها وجود دارند که هر دو تمام اصلهای نظریهٔ مجموعه‌ها راکه تاکنون وضع شده‌اند، صدق‌پذیر می‌کنند. یك رده، مرکب ازمجموعه‌هایی است که به‌روش معینی برحسب خاصیتهای عضوهایشان تعریف‌پذیرند[۱۷]؛ ردهٔ دیگر مرکب ازمجموعه‌هایی به‌معنای تعددهای دلخواه واختیاری هستند بدون توجه به‌اینکه آیا می‌توانند یا چگونه می‌توانند تعریف شوند. حال، پیش از آنکه معلوم شود چه شیئهایی را باید شمرد و برپایهٔ چه تناظرهای یك‌به یکی، به‌دشواری می‌توان به‌امکان تعیین تعداد آنها امیدوار بود، مگر احتمالادرموارد حسن‌اتفاق. اما اگر کسی سخن گفتن ازمجموعه‌ها را، مگر به‌معنای دایره‌های مصداقهای خواص تعریف‌پذیر، بی‌معنی بداند مشکل هم می‌تواند انتظار داشته باشدکه بدون کاربرد این شرط، یعنی اینکه مجموعه‌ها دایره‌های مصداقهای خواص تعریف‌پذیر هستند، که به‌عقیدهٔ او ویژگی اساسی مجموعه‌هاست، بیش از بخش کوچکی از مسأله‌های نظریهٔ مجموعه‌ها قابل حل باشند. به‌هرحال، این ویژگی از مجموعه‌ها دراصلهای پذیرفته شدهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها نه‌صراحتاً فرمولبندی و نه‌ضمناً گنجانیده شده است. بنابراین، براساس هریك از این دودیدگاه، اگرآنچه را هم در بخش ۲ گفتیم در حساب آوریم، می‌توان حدس زد که مسألهٔ پیوستار براساس اصلهایی که تاکنون وضع شده‌اند حل شدنی نیست، اما، از سوی دیگر، ممکن است به‌کمك یك اصل تازه که مبین یا مستلزم چیزی دربارهٔ تعریف‌پذیری مجموعه‌ها باشد، حل شدنی گردد[۱۸].

بخش دوم این حدس اکنون تأیید شده است؛ یعنی، مفهوم تعریف‌پذیری مذکور در یادداشت [۱۷] (که خود درنظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌هاتعریف‌پذیراست) استنتاج فرضیهٔ تعمیم یافتهٔ پیوستار را ازاین‌اصل که هرمجموعه به‌این‌معنی‌تعریف‌پذیراست، در نظام اصل‌موضوعی نظریهٔ مجموعه‌ها،ممکن گردانیده است [۱۹]. ازآنجاکه معلوم شده است که سازگاری این اصل (که از این‌پس آن‌را "A" می‌نامیم) بااصلهای دیگر را می‌توان، به‌فرض‌سازگاری این اصلهای دیگر، اثبات‌کرد، این امر (صرف نظر از هر موضع فلسفی که‌نسبت‌به‌تعریف‌پذیری اتخاذ‌کنیم)سازگاری فرضیهٔ‌پیوستار را بااصلهای موضوع نظریهٔ‌مجموعه‌ها، به‌شرط سازگار بودن خود این اصلها، نشان می‌دهد[۲۰]. ساختار این برهان مانند برهان سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی است، به‌کمك الگویی در داخل‌هندسهٔ اقلیدسی. یعنی، از اصلهای نظریهٔ مجموعه‌ها نتیجه می‌شود که مجموعه‌های تعریف‌پذیر به‌معنای مذکور در پیش، الگویی برای نظریهٔ مجموعه‌ها می‌سازند که گزارهٔ A و، بنابراین، فرضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ پیوستار درآن صادق است.

دومین دلیل در تأیید حل ناپذیری مسألهٔ پیوستار برپایهٔ اصلهای معمول را می‌توان مبتنی بر واقعیتهای مشخصی (که در زمان کانتور ناشناخته بوده‌اند) کردکه به‌نظر می‌رسد مبین این باشندکه حدس‌کانتور ازکارغلط درخواهد آمد [۲۱]، درصورتی که،ازسوی دیگر،رد این‌حدس برمبنای اصلهایی که امروز پذیرفته شده‌اند، منطقاً ناممکن است.

یکی از این واقعیتها وجود خاصیتهای مشخصی ازمجموعه‌های نقطه‌ای (که مبین بی‌اندازه نادر بودن چنین مجموعه‌هایی است) می‌باشد. در این مورد، موفق شده‌اند که وجود مجموعه‌های ناشمارایی با این خاصیتها را ثابت‌کنند اما هیچ راه معینی وجود نداردکه ازآن راه بتوان وجود نمونه‌هایی با توان پیوستار را به اثبات رسانید. خاصیتهایی از این نوع (از زیرمجموعه‌های یك خط راست)اینهاهستند: (۱) ازنخستین‌رسته برهرمجموعهٔ‌کامل‌بودن ([۶۱] ص ۲۷۰، و [۴۹])، (۲) درج شدن دریك مجموعهٔ صفر با هرنگاشت پیوستهٔ یك‌به‌یك خط برخود ([۵۵]ص ۳۵، و [۶۱] ص ۲۷۰). خاصیت دیگری ازهمین نوع پوشش‌پذیر بودن است با بینهایت بازه با هرطول مفروض. اما در این حالت تاکنون هیچ‌کس موفق نشده است‌که حتی وجود نمونه‌هایی ناشمارا را ثابت‌کند. ولی از فرضیهٔ پیوستار در هرسه حالت چنین نتیجه می‌شودکه نه تنها نمونه‌هایی از توان پیوستار وجود دارند [۲۲] بلکه حتی نمونه‌هایی وجود دارند که با هر انتقال خط راست (تاحد تعدادی شمارانقطه) درخود درج می‌شوند. ([۶۲] ص۴۳)

نتیجه‌های بسیار نامحتمل‌دیگر فرضیهٔ پیوستار اینها هستند:(۱) زیر مجموعه‌هایی از خط راست با توان پیوستار وجود دارندکه با هر مجموعهٔ چگال از بازه‌ها (تا حد تعدادی شمارا از نقطه‌ها) پوشانده می‌شوند [۵۳]؛ (۲) زیر مجموعه‌هایی بینهایت بعدی از فضای هیلبرت وجود دارندکه شامل هیچ زیر مجموعهٔ ناشمارایی با بعد متناهی (درمعنای منگر ـ اوریسون[1]) نیستند ([۴۷] ص ۸)؛ (۳) یك دنبالهٔ نامتناهی A^i از تجزیه‌های هر مجموعهٔ M ازتوان پیوستار به‌تعداد پیوستاری از مجموعه‌های دوبه‌دو جدا ازهم A_x^i وجود داردکه مجموعهٔ $A^i_{x_i}$ را به‌هرراهی انتخاب‌کنیم، برای هر i، $\prod_{i=0}^{\infty}(M - A^i_{x_i})$ شماراست. [۲۳] (۱) و (۳)، حتی اگر به‌جای "توان پیوستار"، "$\aleph_1$" را بگذاریم، بسیار نامحتمل‌اند.

ممکن است‌گفته شود بسیاری از نتیجه‌هایی هم‌که در نظریهٔ مجموعه‌های‌نقطه‌ای بدون‌کاربرد فرضیهٔ پیوستار به‌دست آمده‌اند، خیلی دور از انتظار و احتمال‌اند ([۳۳] ص۳۴۶). اما، اگر این حرف صادق هم باشد، در اینجا وضعیت باز به‌این اعتبار متفاوت است‌که در بیشتر آن موردها (مانند،برای مثال،خمهای پئانو) امر به‌ظاهر مخالف را می‌توان با عدم توافق میان مفهومهای شهودی هندسی خودمان و مفهومهای نظریهٔ مجموعه‌هاکه در قضیه‌ها وارد می‌شوند، توضیح داد. همچنین،این امر بسیار مشکوکی است که، برخلاف گزاره‌های متحمل و متعددی‌که مستلزم نقیض فرضیهٔ پیوستارند، حتی یك‌گزارهٔ محتمل نمی‌شناسیم که مستلزم فرضیهٔ پیوستار باشد. اعتقاد من این‌است‌که، با روی هم نهادن همهٔ‌آنچه گفته شد، دلیل خوبی داریم‌که احساس‌کنیم نقش فرضیهٔ پیوستار

1. Menger-Urysohn

در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌کشف اصلهای موضوع تازه‌ای خواهد انجامید که رد حدس کانتور را ممکن خواهند کرد.

تعریف برخی از اصطلاحها

تعریفهای ۴–۱۵ راجع به زیرمجموعه‌های خط راست است، اما آنها را عیناً می‌توان برای زیرمجموعه‌های فضاهای اقلیدسی از هر بعد به‌کار برد به شرط آنکه "بازه" را همان "درون یك متوازی السطوح" بگیریم.

۱. منظور من از خصلت هم پایانی عدد اصلی m (که با کوتهنوشت "$cf(m)$" نشان داده می‌شود) کوچکترین عدد n ی است که m، برابر مجموع n عدد کوچکتر از m باشد.

۲. عدد اصلی را عادی گوییم اگر $cf(m)=m$، و اگر چنین نباشد، منفرد است.

۳. عدد اصلی نامتناهی m را دسترس ناپذیر گوییم اگر عادی باشد و هیچ مقدم بلافصلی نداشته باشد (یعنی، هرچند حد عددهای کوچکتر از m است اما حد کمتر از m عدد از این گونه عددها نیست)؛ چنین عددی را دسترس ناپذیرقوی گوییم اگر هر حاصلضرب (و بنابراین، هر حاصلجمع) کمتر از m عدد کوچکتر از m، کوچکتر از m باشد ([۶۶] ص ۶۸).

از فرضیهٔ پیوستار نتیجه می‌شود که این دو مفهوم معادل‌اند. $\aleph_0$ آشکارا دسترس ناپذیر است، وهمچنین دسترس ناپذیر قوی. در عددهای متناهی، ۰ و ۲، و تنها همین دو عدد، دسترس ناپذیرند. تعریفی از دسترس ناپذیری که بتوان برای عددهای متناهی به‌کار برد، این است: m دسترس ناپذیر است اگر (۱) هر مجموع کمتر از m عدد کوچکتر از m، کوچکتر از m باشد، و (۲) تعداد عددهای کوچکتر از m مساوی m باشد. این تعریف، برای عددهای ترامتناهی، با تعریف بالا یکی است و از عددهای متناهی، ۰ و ۱ و ۲ با این تعریف دسترس ناپذیر می‌شوند. از اینجا معلوم می‌شود که دسترس ناپذیری و دسترس ناپذیری قوی برای عددهای متناهی معادل نیستند و این، معادل بودن آنها را برای عددهای ترامتناهی که از تعمیم فرضیه نتیجه می‌شوند، تا اندازه‌ای مشکوك می‌سازد.

۴. مجموعه‌ای از بازه‌ها را چگال گویند اگر هر بازه نقطه‌های مشترکی با بازهٔ دیگری از آن مجموعه داشته باشد. (نقطه‌های انتهایی هر بازه، نقطه‌های آن بازه به‌شمار نمی‌آیند.)

۵. مجموعهٔ صفر مجموعه‌ای است که آن را بتوان با بینهایت مجموعه از بازه‌ها که جمع طولهای آنها به هر اندازهٔ دلخواه کوچك باشد، پوشانید.

۶. یك همسایگی از نقطهٔ P، بازه‌ای است که شامل P باشد.

۷. یك زیرمجموعهٔ A از B را چگال در B گوییم اگر هر همسایگی از هر نقطهٔ B شامل نقطه‌هایی از A باشد.

۸. نقطهٔ P بیرون از A است اگر یك همسایگی داشته باشد که در آن هیچ نقطه‌ای از A نباشد.

۹. می‌گوییم زیر مجموعهٔ A از B در هیچ جا چگال در B نیست اگر نقطه‌هایی از B که در بیرون A هستند، چگال در B باشند، یا (به بیان معادل) اگر برای هیچ بازهٔ I، اشتراك IA چگال در IB نباشد.

۱۰. یك زیرمجموعهٔ A از B را از نخستین دسته در B می‌نامیم اگر مجموع تعداد شمارایی از مجموعه‌هایی باشد که درهیچ کجا چگال در B نباشند.

۱۱. مجموعهٔ A را از نخستین دسته بر B می‌نامیم اگر اشتراك AB از نخستین دسته در B باشد.

۱۲. نقطه P را نقطهٔ حدی مجموعهٔ A می‌نامیم اگر هر همسایگی از P شامل بینهایت نقطه از A باشد.

۱۳. مجموعهٔ A را بسته می‌نامیم اگر شامل تمام نقطه‌های حدی خود باشد.

۱۴. یك مجموعه را کامل می‌نامیم اگر بسته باشد و هیچ نقطهٔ منفرد (یعنی نقطه‌ای با یك همسایگی که شامل هیچ نقطهٔ دیگری از مجموعه نباشد) نداشته باشد.

۱۵. مجموعه‌های بورل به عنوان کوچکترین نظامی از مجموعه‌ها تعریف می‌شوند که در اصلهای زیر صدق کنند:

الف) مجموعه‌های بسته مجموعه‌های بورل هستند.

ب) متمم یك مجموعهٔ بورل یك مجموعهٔ بورل است.

پ) مجموع تعداد شمارایی از مجموعه‌های بورل یك مجموعهٔ بورل است.

۱۶. یك مجموعه را تحلیلی می‌نامیم اگر تصویر متعامد یك مجموعهٔ بورل از فضایی با بلافاصله یك بعد بالاتر باشد. (بنابراین هر مجموعهٔ بورل، البته، تحلیلی است.)

پیوست ویرایش دوم [۱۹۶۳]

از هنگام انتشار مقالهٔ پیش، تعدادی نتیجهٔ تازه به‌دست آمده است؛ از این نتیجه‌ها می‌خواهم آنهایی را که فایدهٔ خاصی در ارتباط با بحثهای پیش دارند، ذکر کنم.

۱. هینال[1] ثابت کرده است که اگر $2^{\aleph_0} \neq \aleph_2$ را بتوان از اصلهای موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها استنتاج کرد، $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ را هم می‌توان از آنها نتیجه گرفت ([۴۳] ص ۱۳۱). اگر برای فرضیهٔ پیوستار کانتور بشود از اصلهای نظریهٔ مجموعه‌ها برهانی آورد، که، احتمالاً نمی‌شود، این نتیجهٔ شگفت‌انگیز می‌تواند حل مسألهٔ پیوستار را بسیار آسان سازد.

۲. بعضی از نتیجه‌های تازه و گزاره‌های معادل فرضیهٔ کانتور را می‌توان در ویرایش تازهٔ کتاب سیرپینسکی [۶۰] یافت. در ویرایش اول ثابت شده بود که فرضیهٔ پیوستار با این گزاره معادل است که صفحهٔ اقلیدسی مجموع تعداد شمارایی از "خمهای تعمیم یافته" است (که خم تعمیم یافته، مجموعه‌ای نقطه‌ای است که با یك معادلهٔ $y=f(x)$ در یك دستگاه مختصات دکارتی تعریف می‌شود). در ویرایش دوم [۳۴] (ص ۲۰۷) تذکر داده شده است که با این فرض بسیار ضعیفتر که توان پیوستار عدد دسترس ناپذیری نیست، می‌توان ثابت کرد که صفحهٔ اقلیدسی مجموع "خمهای تعمیم یافته"‌ای است که تعداد آنها کمتر از پیوستار است. اثبات عکس این قضیه به این فرضیه که $2^{\aleph_0}$ برابر است با کوچکترین عدد دسترس‌ناپذیر بزرگتر از $\aleph_0$، تا اندازه‌ای اعتبار می‌بخشد. در هرصورت، درمورد این استنباط احتیاط فراوان باید کرد، زیرا ظاهر پارادوکس‌گونهٔ این حالت (مانند "خمهای" پئانو) مربوط به (دست کم تا

---

1. A. Hajnal

اندازه‌ای) انتقال دادن شهود هندسی ما از خمها به‌چیزهایی است که تنها بعضی ازویژگیهای خمها را دارند. توجه کنید که هیچ‌چیز از این نوع در پیامدهای مخالف شهود فرضیهٔ پیوستار که در صفحه‌های ۴۹–۵۰ ذکر شد، دخالت ندارد.

۳. کوراتوفسکی شکل قویتری از فرضیهٔ پیوستار را ([۵۰] ص ۱۳۱) فرمولبندی کرده است که سازگاری آن از برهان سازگاری مذکور در بخش ۴ نتیجه می‌شود. آنگاه نتیجه‌های گوناگونی از این فرضیهٔ جدید استنتاج کرده است.

۴. درسالهای اخیر نتیجه‌های تازهٔ بسیارجالبی دربارهٔ اصلهای بینهایت به‌دست آمده است (ر.ك. یادداشتهای [۱۳] و [۱۶]).

در مخالفت با دیدگاهی که در بخش ۴ از آن پشتیبانی کردیم، چنین گفته شده است ([۳۹] ص ۱۷۶) که اگرمعلوم شود که مسألهٔ پیوستار کانتور براساس اصلهای موضوع پذیرفته شدهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها تصمیم‌ناپذیراست پرسش دربارهٔ صدق آن معنای خود را از دست خواهد داد، درست همانگونه که برای ریاضی‌دانان پرسش‌دربارهٔ صدق اصل پنجم اقلیدس با به‌اثبات رسیدن سازگاری هندسهٔ نااقلیدسی بی‌معنی گردید. به‌همین دلیل می‌خواهم تذکر دهم که وضعیت در نظریهٔ مجموعه‌ها، چه از نظر ریاضی وچه از نظر معرفت شناسی بسیار متفاوت با وضعیت در هندسه است.

برای‌مثال، درمورد اصل موضوع وجود عددهای دسترس‌ناپذیر (که می‌توان تصمیم‌ناپذیربودن آن را ازاصلهای نظریهٔ‌مجموعه‌های فون نویمان - برنیز[1]، به‌شرط سازگار بودن آن با این اصلها، ثابت کرد) از نظر ریاضی عدم تقارن چشمگیری میان نظامی‌که این اصل‌راتصدیق می‌کند و نظامی‌که تکذیب، وجود دارد [۲۵].

یعنی، دومی (اما نه اولی) الگویی داردکه می‌توان آن را تعریف کرد و نشان دادکه الگویی از نظام اصلی (گسترش نیافته) است. این بدین معنی است‌که اولی گسترشی به مفهوم بسیار قویتر است. واقعیت خیلی مربوط دیگر این است‌که تصدیق (اما نه نفی) این اصل مستلزم قضیه‌های تازه‌ای دربارهٔ عددهای صحیح است (که صدق هرنمونهٔ آن را با محاسبه می‌توان بررسی کرد). بنابراین معیار صدقی‌که در صفحهٔ ۴۸ شرح دادیم برای تصدیق، اما نه برای نفی، تا حدی مصداق پیدا می‌کند. کوتاه سخن، تنها تصدیق، گسترشی پرثمر به‌بار می‌آورد وحال آنکه نفی بیرون از دامنهٔ بسیار محدود خودعقیم است. می‌توان نشان دادکه‌فرضیهٔ پیوستارکانتور هم برای نظریهٔ اعداد عقیم و درالگویی ساخت‌پذیر درنظام اصلی صادق است، در صورتی‌که برای فرض‌دیگری دربارهٔ توان پیوستار شاید چنین نباشد. از سوی دیگر هیچ یك‌از این عدم تقارنها برای اصل پنجم اقلیدس موردی پیدا نمی‌کند. به بیان دقیقتر، هم این اصل موضوع و هم نقیض آن گسترشهایی در مفهوم ضعیف هستند.

از جنبهٔ معرفت‌شناسی باید گفت‌که‌تنها هنگامی برهانی‌ازتصمیم‌ناپذیری پرسشی را بی‌معنی می‌کندکه نظام اصلهای مورد بررسی به‌عنوان نظامی فرضی - قیاسی تعبیر شود؛ یعنی معنیهای حدود اولیه نامعین گذاشته شوند. برای مثال در هندسه پرسش از اینکه آیا اصل‌پنجم اقلیدس صادق‌است یا نه معنای‌خود را حفظ می‌کند

اما به‌شرط اینکه حدود اولیه به‌معنای معینی، یعنی به‌معنای رفتار جسمهای صلب، شعاعهای نور و ازاین‌گونه، گرفته شوند. درنظریهٔ مجموعه‌ها نیز وضع به‌همین‌گونه است، تنها تفاوت این است که در هندسه معنایی‌که معمولاً امروز ازآن اخذ می‌کنند بیشتر دربارهٔ فیزیك است تاشهودهندسی و، بنابراین، مسألهٔ متناهی‌تصمیم‌گیری بیرون ازحوزهٔ ریاضی قرارمی‌گیرد. ازسوی دیگر، شیئهای‌نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی به‌روشی‌که‌در صفحه‌های ۴۷–۴۸ ویادداشت [۱۱] شرح داده شد، آشکارا به‌جهان فیزیکی تعلق ندارد و حتی پیوند غیرمستقیم آنها با تجربهٔ فیزیکی بسیار ضعیف است (واین اصولاً مربوط به این واقعیت است‌که مفهومهای نظریهٔ مجموعه‌ها تنها نقش اندکی در نظریه‌های فیزیکی امروز دارند).

اما، علی‌رغم دور بودن آنها ازتجربهٔ حسی، از شیئهای نظریهٔ مجموعه‌ها نیز چیزی‌مانند ادراك داریم واین از این واقعیت معلوم می‌شودکه اصلها خود را به‌عنوان [گزاره‌های] صادق برما تحمیل می‌کنند. من هیچ دلیلی نمی‌بینم که به‌این نوع ادراك، یعنی،شهود ریاضی، اطمینان‌کمتری داشته باشیم تا به‌ادراك حسی‌که به‌ساختن نظریه‌های فیزیکی وامید بستن به‌اینکه ادراکهای حسی آینده با آنها سازگار درآیند، ترغیبمان می‌کند، وافزون براین، ترغیبمان می‌کندکه باورکنیم پرسشی‌که اکنون تصمیم‌ناپذیر است بی‌معنی نیست وچه بسا درآینده تصمیمی دربارهٔ آن‌گرفته شود. تناقضهای نظریهٔ مجموعه‌هابعید است‌که برای ریاضیات بیشترازآن‌گرفتاری ایجادکنندکه فریبکاریهای حواس برای فیزیك ایجاد می‌کنند. اینکه کاملاً ممکن است شهودهای ریاضی تازه به تصمیم‌گیری دربارهٔ مسأله‌هایی مانند فرضیهٔ پیوستارکانتور بینجامد، مطلبی است که پیش‌ازاین (صفحات ۴۸–۴۹) به‌آن اشاره کردیم.

باید به‌یاد داشت‌که شهود ریاضی لازم‌نیست چون‌قوه‌ای تصور شودکه دانشی بی‌واسطه از شیئهای مورد نظر به ما دهد. بلکه‌به‌نظر می‌رسد، همانگونه‌که در تجربهٔ فیزیکی، در اینجا نیز ایده‌های خود را ازآن شیئها براساس چیزدیگری‌که بی‌واسطه [به‌ما] داده شده است می‌سازیم. تنها [تفاوت این است که] در اینجا این‌چیز دیگر داده‌های حواس نیست یا در درجهٔ اول داده‌های حواس[1] نیست. اینکه چیزی غیراز داده‌های حواس واقعاً بی‌واسطه داده می‌شود از این واقعیت نتیجه می‌گردد (مستقل از ریاضیات) که حتی ایده‌های ما راجع به‌شیئهای فیزیکی شامل اجزاء کیفاً متفاوتی از داده‌های‌حواس یا صرفاً ترکیبهایی از داده‌های حواس هستند، مانند ایدهٔ شیء فی‌نفسه، درصورتی‌که، از سوی دیگر، با تفکرخود نمی‌توانیم از نظرکیفی عنصرهای تازه‌ای بیافرینیم بلکه تنها آن چیزهایی راکه داده شده‌اند می‌توانیم دوباره پدیدآوریم وبا هم ترکیب‌کنیم. آشکارا این "داده" که مبنای ریاضیات است با عنصرهای انتزاعی مندرج درایده‌های تجربی‌ما پیوستگی نزدیکی دارند [۲۶]. به‌هرصورت، از اینجا، همانگونه که کانت اظهار کرده است، به‌هیچ وجه نتیجه نمی‌شودکه این داده‌های نوع دوم، به‌این دلیل‌که نمی‌توانند به‌تأثیرهای چیزهای مشخصی‌برابزارهای

1. von Neumann-Bernays

۱. گودل "sensation" را در اینجا با نظر به‌جملهٔ قبل به‌معنای محتوای احساس به‌کار برده نه عمل احساس. از این‌رو آن را به "داده‌های حواس" ترجمه کردیم. - م.

حسی ما ارتباط داده شوند، چیزهایی صرفاً ذهنی هستند. بلکه آنها نیز ممکن است جنبه‌ای از حقیقت عینی را نمایش دهند، ولی، برخلاف داده‌های حسی، حضور آنها درما چه بسا مربوط به‌نوع دیگری از نسبت میان ما وحقیقت باشد.

به‌هرحال، پرسش از وجود عینی شیئهای شهود ریاضی (که، اتفاقاً، صورت دقیق دیگری ازپرسش از وجود عینی‌جهان خارج است) برای مسألهٔ مورد بحث ما در اینجا، نتیجهٔ قطعی به بار نمی‌آورد. صرف واقعیت روانشناختی وجود شهودی که به‌اندازهٔ کافی واضح باشدکه‌اصلهای نظریهٔ‌مجموعه‌ها ورشته‌های گسترشهای تازه‌ای ازآنها را پدیدآورد، کافی است که به‌پرسش در بارهٔ صدق وکذب گزاره‌هایی مانند فرضیهٔ پیوستار کانتور معنی ببخشد. درهر صورت، آنچه شاید بیش از هر چیز دیگر پذیرفتن این معیار از صدق را درنظریهٔ مجموعه‌ها توجیه می‌کند این واقعیت است که توسلهای مدام به‌شهود ریاضی نه تنها برای یافتن جوابهای نامبهم برای پرسشهای نظریهٔ مجموعه‌های ترامتناهی ضروری است بلکه برای حل مسأله‌های نظریهٔ اعداد متناهی (ازنوع حدس گلدباخ) هم که در بامعنایی وبی‌ابهامی مفهومهای دخیل درآنها مشکل بتوان شك کرد، ضروری است. این امر خاسته ازاین واقعیت است که‌در هرنظام اصل موضوعی، بینهایت گزارهٔ تصمیم ناپذیر از این نوع وجود دارد.

پیش ازاین گفته شد (صفحات ۴۸–۴۹) که غیرازشهود ریاضی معیاری(اگرچه تنها‌محتمل) دیگری‌ازصدق برای اصلهای موضوع ریاضی وجود دارد یعنی معیار باثمربودن آنها برای ریاضیات و، افزون براین، احتمالاً برای فیزیك. به هرحال این معیار، اگرچه ممکن‌است درآینده قطعیت پیداکند، بازهم نمی‌توان آن‌رابخصوص درمورد اصلهای نظریهٔ مجموعه‌ها (مانند اصلهای راجع به‌عددهای اصلی بزرگ) به‌کاربرد، زیرا ازپیامدهای آن در دیگرزمینه‌ها آگاهی ما بسیار اندك است. ساده‌ترین حالت‌کاربرد معیار مورد بحث هنگامی پیش می‌آید که یك اصل از نظریهٔ مجموعه‌ها پی‌آمدهایی در نظریهٔ اعداد داشته باشدکه صدق آنهارا تا هرعدد داده شده بتوان با محاسبه بررسی کرد. به‌هرحال، براساس آنچه تا امروز معلوم شده است، محتمل ساختن صدق هیچ اصل نظریهٔ مجموعه‌ها با این روش ممکن نیست.

پی‌نوشت

اندکی پس از تمام کردن دستنویس این مقاله پال کوهن [۳۷] مسألهٔ این پرسش راکه آیا فرضیهٔ پیوستارکانتور با اصلهای فون نویمان-برنیز برای نظریهٔ مجموعه‌ها (از جمله اصل انتخاب) اثبات‌پذیر است یا نه، با پاسخ منفی حل کرد. و معلوم گردید که برای دامنهٔ وسیعی از $\aleph_\nu$، تساوی $\aleph_\nu = 2^{\aleph_0}$ [با اصلهای دیگر] سازگار است وگسترشی است به معنای ضعیف (یعنی مستلزم هیچ قضیهٔ تازه‌ای ازنظریهٔ اعداد نیست). اینکه‌آیا برای مفهوم مناسبی ازتعریف "استاندارد"، $\aleph_\nu$ی تعریف‌پذیری که قضیهٔ‌کونیگ (ر.ك. ص۶) آن را طرد نکند وجود داشته باشدکه برای‌آن این موضوع صدق نکند هنوز پرسشی است‌بدون پاسخ (البته، باید فرض‌کردکه وجود این $\aleph_\nu$ موردبحث یااثبات پذیراست یا [به‌شکل یك اصل] وضع شده است).

یادداشتها و مراجع

۱. دربارهٔ این پرسش که چرامجموعهٔ همهٔ عددهای اصلی وجود ندارد به‌یادداشت [۱۲] نگاه‌کنید.

۲. در اثبات‌این‌قضیه (ر.ك. [۴۰]) نیاز به‌اصل‌موضوع‌انتخاب داریم. امامی‌توان‌گفت‌که این‌اصل، تقریباً ازهردیدگاه‌ممکن، همان‌اندازه بنیاد درستی داردکه اصلهای‌دیگر. سازگاری این اصل با اصلهای دیگر نظریهٔ مجموعه‌ها که معمولاً از مفروضات ما هستند به‌اثبات رسیده است، به‌شرط‌آنکه این اصلهای دیگرسازگار باشند (ر.ك. [۴۲]). از این گذشته می‌توان براساس هرنظام از شیئهایی که اصلهای دیگر را صدق‌پذیر کنند یك‌نظام از شیئهایی تعریف‌کرد که این‌اصلها و اصل‌انتخاب را صدق‌پذیر کنند. نکتهٔ آخر این‌که اصل‌انتخاب به همان‌اندازه روشن و واضح است‌که اصلهای نظریهٔ مجموعه‌ها برای مفهوم "خالص" مجموعه که در یادداشت [۱۱] شرح داده شده است.

۳. ر.ك. [۴۵] ص ۶۸ یا [۲۹] ص ۱۶۷. کشف کنندهٔ این قضیه، کونیگ، آنچه اظهارکرده بیش ازآن چیزی است که در واقع ثابت‌کرده است ([۴۸] ص ۱۷۷).

۴. ر.ك. فهرست تعریفها درپایان قسمت اصلی مقاله.

۵. ر.ك. [۴۵] ص ۳۲. به این پرسش حتی در مورد متممهای مجموعه‌های تحلیلی تاکنون جوابی‌داده نشده است. تنها می‌توان ثابت کرد که توان این مجموعه‌ها یا $\aleph_0$ است یا $\aleph_1$ یا توان پیوستار یااینکه این مجموعه‌ها متناهی‌هستند (ر.ك. [۴۹] جلد ۱ ص ۲۴۶).

۶. این فروکاستن را می‌توان براساس نتیجه‌ها و روشهای مذکور در مقاله‌ای از تارسکی [۶۵] انجام داد.

۷. برای‌عددهای عادی $\aleph_\alpha$ این رابطه‌ها بی‌درنگ به‌دست می‌آیند:

$$\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

۸. ر.ك. [۷۵]. اگر روش ساختن مجموعه‌ها که دراین اثر شرح داده شده‌است (ص ۲۰) مکرر، به‌دفعات نسبتاً زیاد (ترامتناهی)، به‌کار رود، می‌توان دقیقاً عددهای حقیقی مدلی ازنظریهٔ مجموعه‌ها راکه در بخش ۴ ذکر شده‌است، مدلی راکه فرضیهٔ پیوستار درآن صادق باشد، به‌دست آورد.

۹. باید اعتراف کرد که روح نظامهای ریاضیات مجرد جدید، به‌ویژه نظریهٔ رسته‌ها، از این مفهوم از مجموعه فراتر می‌رود، چنانکه، برای‌مثال، درخود ـ کاربردپذیری [self-applicability] رسته‌ها این راآشکارامی‌توان دید (ر.ك. [۵۶]). اما به‌نظرنمی‌رسد که اگر رسته‌های ترازهای مختلف ازهم متمایز شوند ازمحتوای ریاضی نظریه چیزی‌کاسته‌گردد. اگر برهانهایی‌که ازنظر ریاضی جالب‌اند وجود داشته باشند که از این تعبیر درست بیرون نیایند آنگاه تناقضهای‌نظریهٔ مجموعه‌ها مسأله‌ای‌جدی‌برای‌ریاضیات‌خواهند شد.

۱۰. منظور ازاین عبارت این است که تکرار ترامتناهی را نیزدربر بگیرد؛ یعنی کل مجموعه‌هایی که با تکرار متناهی به‌دست می‌آید خود یك مجموعه به شمار می‌آید و مبنای کاربردهای بیشتر عمل "مجموعه‌ای از" قرار می‌گیرد.

۱۱. عمل" مجموعه‌ای از xها" را (که درآن حوزهٔ مقدارهای متغیر "x" نوع‌معلومی ازشیئهاست) نمی‌توان به‌گونهٔ رضایتبخشی‌تعریف کرد (دست‌کم در وضع دانش کنونی ما)، اما می‌توان آن را با عبارتهای دیگری‌که بازشامل‌مفهوم مجموعه هستد، مانند، "تعدد"[1] ("فراهم‌نهی"[2]، "بخش"[3]) بیان‌کرد. تصورما از "تعدد" چیزی‌است موجود درخود، صرف‌نظر ازاینکه‌آن را بتوانیم با تعداد متناهی

---

1. multitude 2. combination 3. part

از کلمه‌ها (به‌گونه‌ای کـه مجموعه‌های تصادفی را کنار نگذارد) تعریف کنیم یا نه [ساختار دستوری چندجملهٔ آخر در متن آشفته است و آنهـا را در ترجمه به نزدیکتریـن ساختار درست متن بازسازی کردیم. ـ م.].

۱۲. از این تـوضیح دربارهٔ اصطلاح "مجموعه" بی‌درنگ نتیجه‌می‌شود که مجموعهٔ تمام مجموعه‌ها یا مجموعه‌های دیگری با حوزهٔ مشابهی از مصداقها نمی‌تواند وجود داشته بـاشد، زیرا هر مجموعه‌ای که با این روش بـه‌دست آید بی‌درنگ به‌کار بردهـای بیشتر عمل "مجموعه‌ای از" و بنابراین به‌وجود مجموعه‌هـای بزرگتر امکان می‌دهد.

۱۳. ر.ك. بـرای مثال، [۳۵] جلد ۲ ص ۶۵، جلد ۶ ص ۱، جلد ۷ ص ۶۵ و ۱۳۳، جلد ۸ ص ۸۹؛ [۶۸] ص ۲۱۹؛ [۶۹] ص ۲۲۷؛ [۴۲]؛ [۳۱]. با افزودن اصلهای موضوع بسیارقوی بینهایت، اخیراً تأسیس نظامهای اصل موضوعی بسیار زیباتر و کارامدتری ممکن گردیده است.

۱۴. درصورتی کـه اصلها ناسازگار بودند برای فرضیهٔ کانتور، به‌اعتبار عقلی، شق نهایی چهارمی ممکن می‌گردید، یعنی، فرضیه با اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها هم اثبات‌پذیر بود هم ابطال‌ناپذیر.

۱۵. به همین گونه مفهوم "خاصیت مجموعه" (دومین حد اولیهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها) بیانگر گسترشهای مداوم اصلهایی است‌که ناظر به‌این مفهوم‌هستند. ازاین‌گذشته، مفهومهای "خاصیت خاصیت مجموعه" و از این‌گونـه را می‌توان درکار آورد. اصلهای تازه‌ای کـه به این‌گونه به‌دست می‌آیند، تا آنجایی‌که به‌نتیجه‌های آنهـا برای گزاره‌هـای راجع به‌دامنه‌هـای محدودمجموعه‌ها (مانند فرضیهٔ پیوستار) مربوط‌می‌شود، (تا اندازه‌ای‌که‌امروزمی‌دانیم) دراصلهای مجموعه‌ها مندرج‌اند.

۱۶. ر.ك. [۵۷] صص ۱۹۰ ـ ۲۰۰ و [۵۸] صص ۲۶۹ ـ ۲۷۶. در هرحال، ازتقریر ماهلو ازاین موضوع، به‌نظر نمی‌رسدکه عددهایی کـه تعریف می‌کند، واقعاً وجود داشته بـاشند. درسالهای اخیر پیشرفت چشمگیری در موضوع اصلهای بینهایت حاصل شده است. به‌ویژه بعضی از آنها برمبناهایی به‌تمامی متفاوت از مبانی ماهلو فرمولبندی‌شده‌اند، و دینا اسکات ثابت‌کرده است‌کـه یکی ازآنها مستلزم‌نقیض‌گزارهٔ A (مذکور درصفحه‌۴۹) است. بنابراین برهان سازگاری فرضیهٔ پیوستارکه درصفحهٔ ۴۹ ذکر شد، اگر این‌اصل را اضافه‌کنیم، پذیرفته نخواهد شد. درهر حال، اینکـه این اصلهـا پیامدهای منطقی مفهوم عمومی‌مجموعه به‌معنایی که ماهلو درنظر داشت، هستند تا کنون روشن نشده است. ر.ك. [۶۷] ص ۱۳۴؛ هانف و اسکات [۴۴] ص ۴۴۵. ازدیل‌لیوی اصلهای ماهلو را از یك اصل کلی در باب همهٔ مجموعه‌ها([۵۲]ص ۲۳۳)استنتاج‌کرده است. همچنین ر.ك. [۳۲] ص ۱ کـه درآن تقریباً تمام اصلهـای نظریهٔ مجموعه از اصل لیوی استنتاج شده‌است.

۱۷. یعنی، تعریف‌پذیر به‌ترتیبهای‌معین، "برحسب عددهای ترتیبی" (یعنی، به بیانی تقریبی، با این فرض‌که برای هرعـدد ترتیبی، نمادی‌که برآن دلالت‌کند داده شده‌است). ر.ك. [۴۱] و [۴۲]. البته پارادوکس‌ریچارد دراین‌نوع از تعریف‌پذیری پیش نمی‌آید، زیرا کل عددهای ترتیبی قطعاً شمارا نیست.

۱۸. برنامـهٔ هیلبرت هم برای‌حل برای مسألهٔ پیوستار (ر.ك.[۴۶] ص ۱۶۱)، کـه، در هر صورت، هرگز اجرا نگردید، مبتنی بر بررسی همهٔ تعریفهای ممکن عددهای حقیقی بود.

۱۹. از سوی دیگر، از اصلی‌که به‌یك معنی مخالف با این یکی است، احتمالاً می‌توان نفی حدس کانتور را استنتاج‌کرد. منظور من اصلی است‌که (همانند اصل‌تمامیت هیلبرت درهندسه) خاصیت ماکسیممی ازنظام همهٔ مجموعه‌ها را بیان‌کند، درصورتی که اصل A خاصیت مینیممی را بیان می‌کند. توجه‌داشته باشید کـه تنها یك خاصیت ماکسیمم بـا مفهوم مجموعهٔ مذکـور در یادداشت[۱۱] هماهنگ می‌نماید.

۲۰. ر.ك. [۴۱]، و [۴۲] ص ۲۲۰. از این موقعیت می‌خواهم برای تصحیح یك اشتباه در علامت‌گذاری و یك غلط چاپی که در این مقاله رخ داده‌است، استفاده‌کنم: درسطرهای ۲۵ـ۲۹، ص ۲۲۱؛ سطرهای۴ـ۶ و ۱۰، ص ۲۲۲؛ وسطرهای ۱۱ـ۱۹، ص ۲۲۳، همه‌جا باید‌به‌جای حرف α (درتمام موردهای‌آن) μ نهاد. همچنین درقضیهٔ ۶، ص ۲۲۲، میان $\Phi_\alpha(x)$ و $\Phi_\alpha(x')$ علامت "$\equiv$" نهاده‌شود. برای اجرای تفصیلی‌تمام مرحله‌های برهان ر.ك. [۴۲].

۲۱. لـوسین در [۵۴] نیز نظرهـایی در همین جهت ابرازکرده است. همچنین ر.ك. [۶۰].

۲۲. بـرای حالت سوم ر.ك. [۶۰]، ویرایش اول، ص ۳۹، قضیهٔ ۱.

۲۳. ر.ك. [۳۴]، گـزارهٔ $(\mathcal{Q})$. این گزاره معادل فرضیهٔ پیوستاراست.

۲۴. یا [۶۳]. برای نتیجه‌هـای مربـوط دیگرر.ك. [۵۱] ص ۱۵ و [۶۴] ص ۱۸.

۲۵. همین عدم تقارنها در پایینترین ترازهای نظریهٔ مجموعه‌ها نیز، جایی‌که سازگاری اصلهای مورد بحث کمتر موضوع تردید شکاکان قرار می‌گیرد، رخ می‌دهد.

۲۶. تـوجه‌کنید کـه رابطهٔ نزدیکی میان مفهوم مجموعه کـه در یادداشت[۱۴] شرح داده شد ومقوله‌های خرد ناب، به‌مفهوم کانت، وجود دارد. یعنی، وظیفهٔ هردو "سنتز" به‌معنای تولید وحدتهایی از کثرتهاست (برای مثال، در کانت، ایدهٔ تولید شیء واحـدی از جنبه‌های گوناگون آن).

۲۷. مگر اینکه کسی بـا تصمیم‌گیریهای (محتمل) استقرایی قـانع شود،مانند بررسی صدق قضیه تاعددهای خیلی بزرگ، یا روشهای استقرایی نامستقیمتر (ر.ك. صص ۴۹ و ۵۳).

۲۸. یعنی گزاره‌های کلی دربارهٔ عددهای صحیح‌که صدق هرنمونهٔ آن را بتوان تعیین‌کرد.

29. Bachmann, H. 1955. "Transfinite Zahlen," *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,* n.s. vol. 1.

30. Bernays, p., 1937-54. "A System of Axiomatic Set Theory," parts 1-7. *Journal of Symbolic Logic,* vols. 2,6,7,8,13, and 19.

31. Bernays, p., 1958. *Axiomatic Set Theory.* With a historical introduction by Abraham A. Fraenkel. Amsterdam: North-Holland.

32. Bernays, p., 1961. "Zur Frage der Unendlichkeitsschemata in der axiomatischen Mengenlehre." In *Essays on the Foundations of Mathematics, Dedicated to A.A. Fraenkel on His Seventieth Anniversary.* Edited by Y. Bar-Hillel, E.I.J. Poznanski, M.O. Rabin, and A. Robinson. Jerusalem: Magnes Press, Hebrew University.

33. Blumenthal, L. 1940. "A Paradox, a Paradox, a Most Ingenious Paradox." *American Mathematical Monthly,* vol. 47.

34. Braun, S., and Sierpiński, W. 1932. "Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu," *Fundamenta Mathematicae,* vol. 19.

35. Brouwer, L.E.J. 1907. *Over de grondslagen der wiskunde.* Doctoral thesis, Municipal University of Amsterdam, 1907. Amsterdam and Leipzig: Mass and van Suchtelen; Groningen: Noordhoff.

36. Brouwer, L.E.J., 1909. "Die möglichen Mächtigkeiten." In *Atti de IV Congresso Internazionale dei Matematici* (Rome, 1908), 3 vols. Edited by G. Castelnuovo. Rome: Salviucci.

37. Cohen. P.J. 1963 a. "The Independence of the Continuum Hypothesis," part 1. *Proceedings of the National Academy*

56. MacLane, S. 1961. "Locally Small Categories and the Foundations of Set Theory." In *Infinitistic Methods. Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics* (Warsaw, 1959). London and NewYork: Pergamon Press.
57. Mahlo, P. 1911. "Über lineare transfinite Mengen." *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften,* vol. 63. Leipzig: Teubner.
58. Mahlo, P., 1913. "Zur Theorie und Anwendung der ρ_0= Zahlen. II." *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften,* vol. 65. Leipzig: Teubner.
59. Scott, D. 1961. "Measurable Cardinals and Constructible Sets." *Bulletin de L'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques,* vol. 9.
60. Sierpiński, W. 1934 a. *Hypothèse du Continu. Monografie Matematyczne,* vol. 4. Warsaw: Z Subwencji Funduszu Kultury Narodowej: 2nd ed., NewYork: Chelsea, 1956.
61. Sierpiński, W., 1934 b. "Sur une extension de la notion de l'homéomorphie." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 22.
62. Sierpiński, W., 1935 a. "Sur deux ensembles linéaires singuliers," *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa: Scienze Fisiche e Matematiche,* 2nd ser. vol. 4.
63. Sierpiński, W., 1951. "Sur quelques propositions concernant la puissance du continu." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 38.
64. Sikorski, R. 1951. "A Characterization of Alephs." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 38.
65. Tarski, A. 1925. "Quelques théorèmes sur les alephs." *Fundamenta Mathematicae*, vol. 7.
66. Tarski, A., 1938. "Über unerreichbare Kardinalzahlen," *Fundamenta Mathematicae,* vol. 30.
67. Tarski, A., 1962. "Some Problems and Results Relevant to the Foundations of Set Theory." In *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress* (Stanford, Calif.). Edited by E. Nagel, p. Suppes, and A. Tarski. Stanford, Calif.: Stanford University Press.
68. von Neumann, J., 1925. "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre." *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 154. Translated as "An Axiomatization of Set Theory" by S. Bauer-Mengelberg and D. Føllesdal in van Heijenoort 1967.
69. von Neumann, J., 1929. "Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre." *Journal für reine und angewandte Mathematik*, vol. 160.
70. weyl, H. 1918. *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Leipzig: Veit; reprinted, Berlin and Leipzig: Gruyter, 1932.
71. Zermelo, E., 1930. "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 16.

• Kurt Gödel,"What is Cantor's continuum problem?" *Philosophy of Mathematics*, Selected readings, Second Edition, Edited by Paul Benacerraf and Hilary Putnam, Cambridge University Press (1985) 470.

of Sciences, vol. 50.
38. Cohen, P.J., 1964. "The Independence of the Continuum Hypothesis," part 2. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* vol. 51.
39. Errera, A. 1953. "Le Problème du continu." *Atti della Accademia Ligure di Scienze e Lettere* (Genova), vol. 9.
40. Fraenkel, A.A., and Bar-Hillel, Y. 1958, *foundations of Set Theory,* Amsterdam: North-Holland; 2nd rev. ed. by A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Lévy, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics,* vol. 67. Amsterdam: North-Holland, 1973.
41. Gödel, K., 1939. "Consistency-Proof for the Generalized Continuum-Hypothesis." *Proceedings of the National Academy of Sciences,* vol. 25.
42. Gödel, K., 1940. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the Axioms of Set Theory. Annals of Mathematics Studies,* no. 3. Princeton: Princeton University Press; London: Oxford University Press, Milford; reprinted, Princeton University Press, 1951, 1953, and 1958.
43. Hajnal, A. 1956. "On a Consistency Theorem Connected with the Generalized Continuum Problem." *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik,* vol. 2.
44. Hanf, W.P., and Scott, D. 1961. "Classifying Inaccessible Cardinals." *Notices of the American Mathematical Society,* vol. 8.
45. Hausdorff, F. 1914. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Veit; 2nd rev. ed., Berlin and Leipzig: de Gruyter, 1927; 3rd ed., 1935. Translated as Hausdorff 1949.
46. Hilbert, D., 1926. "Über das Unendliche." *Mathematische annalen,* vol. 95. Translated as "On the Infinite" by E. Putnam and G.J. Massey in Benacerraf and Putnam 1964 and by S. Bauer-Mengelberg in van Heijenoort 1967. Reprinted in this volume.
47. Hurewicz, W. 1932. "Une remarque sur l'hypothèse du continu." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 19.
48. König, J. 1905. "Zum Kontinuum-Problem." *Mathematische Annalen,* vol. 60.
49. Kuratowski, C. 1933-50. *Topologie,* 2 vols. *Monografie Matematyczne,* vols. 3 and 21; 2nd ed., Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1948-52. Translated as Kuratowski 1966-8.
50. Kuratowski, C., 1948. "Ensembles projectifs et ensembles singuliers." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 35.
51. Kuratowski, C., 1951. "Sur une charactérisation des alephs." *Fundamenta Mathematicae,* vol. 38.
52. Lévy, A. 1960. "Axiom, Schemata of Strong Infinity in Axiomatic Set Theory." *Pacific Journal of Mathematics,* vol. 10.
53. Lusin, N. 1914. "Sur un problème de M. Baire." *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (Paris), vol. 158.
54. Lusin, N., 1935. "Sur les ensembles analytiques nuls." *Fundamenta mathematicae,* vol. 25.
55. Lusin, N., and Sierpiński, W. 1918. "Sur quelques propriétés des ensembles." *Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, ser. A: Sciences Mathématiques.*