آنالیز مختلط و نظریهٔ عملگرها

کریم صدیقی*

علاقه‌مندان نظریهٔ عملگرها از اهمیت آنالیز مختلط در این نظریه آگاهی کامل دارند. انجام بررسی جامعی در زمینهٔ کاربردهای آنالیز مختلط دراین رشته کار آسانی نیست، و نیاز به‌تتبع فراوان دارد. دراین بررسی قصد ما این است که نشان دهیم این دو رشته ارتباط زیادی باهم‌دارند و توصیه می‌کنیم که کسانی که می‌خواهند وارد صحنهٔ عملگرها شوند حتماً توشه‌ای غنی از ابزار و ادوات آنالیز مختلط با خود به همراه داشته باشند تا درضمن کار دچار سختی نشوند. برای نشان‌دادن ارتباط این دو رشته ازطرق مختلفی می‌توان وارد شد. شیوهٔ ما انتخاب چند مثال است که درآنها این ارتباط به وضوح دیده می‌شود.

ما پس از ذکر تعریفهای اساسی نشان می‌دهیم که تابع حلال تحلیلی است و کاربردهای آن را ملاحظه می‌کنیم. سپس قضیهٔ فولده‌ـپوتنام را شرح می‌دهیم که در اثبات آن از قضیهٔ لیوویل استفاده می‌شود. آنگاه ارتباط بین عملگر انتقال وزین و فضای توابع را بررسی می‌نماییم. مبحث بعدی عملگر ترکیبی است که امروزه مورد علاقهٔ بسیاری از ریاضیدانان است. طیف این عملگر را درحالت خاصی معین می‌کنیم. آخرین مبحث، نابرابری هاردی است که به‌کمک آن نشان می‌دهیم فضای برگمن یک فضای غنی است. فضای برگمن نیز همان‌طور که می‌دانیم جایگاه مهمی در نظریهٔ عملگرها دارد.

فضای هیلبرت و عملگرخطی

به‌منظور آشنایی بیشتر با موضوعات مورد بحث، ابتدا به ذکر تعاریفی چند می‌پردازیم. با مفهوم فضای برداری کم و بیش آشنا هستیم. می‌دانیم که یک فضای برداری تحت عمل جمع و همچنین ضرب اسکالر بسته است. یک‌ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط V، یک تابع عددی از زوجهای مرتب متشکل از بردارهای x و y است، به‌طوری که

الف) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

ب) به‌ازای هر اسکالر α و β داریم

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$$

ج) $(x,x)\geqslant 0$، و تساوی $(x,x)=0$ برقرار است اگر و تنها اگر $x=0$.

اگر یک فضای برداری مجهز به‌یک‌ضرب داخلی باشد آن‌را یک فضای ضرب داخلی گوییم. دقت کنید که در هر فضای ضرب داخلی رابطهٔ $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ یک نرم تعریف می‌کند که فضا لزوماً نسبت به‌این نرم کامل نیست. درحالت خاص تعریف زیر را داریم.

تعریف. یک فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گویند.

اینک به‌ذکر چند مثال از فضای هیلبرت می‌پردازیم.

مثال ۱ــ فضاهای L^2 و l^2. فرض کنید (X,Σ,μ) یک فضای اندازه شامل مجموعهٔ X، σـجبر Σ حاوی زیرمجموعه‌های X، و اندازهٔ μ باشد. در این صورت $L^2(\mu)$ فضای تمام توابع Σـاندازه‌پذیر $f:X\to\mathbf{C}$ است که در رابطهٔ

$$\|f\|_2=\int_X |f|^2\,d\mu<\infty$$

صدق می‌کنند. برای f و g در $L^2(\mu)$ ضرب داخلی را به‌این صورت تعریف می‌کنیم

$$(f,g)=\int_X f\bar{g}\,d\mu.$$

یکی از نتایج نظریهٔ اندازه، هیلبرت بودن فضای $L^2(\mu)$ است.

فضای l^2 که حاوی تمام دنباله‌های $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ با ضابطهٔ $\sum|x_n|^2<\infty$ است، حالتی خاص از فضاهای فوق است. ضرب داخلی $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ را در l^2 چنین تعریف می‌کنیم

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n.$$

مثال ۲ـ فضای برگمن. اگر G یک‌مجموعهٔ باز درصفحهٔ مختلط $\mathbf{C}$ باشد، آنگاه $L_a^2(G)$ مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی $f : G \to \mathbf{C}$ است به‌طوری‌که

$$\iint_{\mathbf{C}} |f(z)|^2\, dA(z) < \infty$$

که در آن $dA(z) = dx\, dy$ ، $z = x + iy$ ، اندازهٔ لبگ‌دوبعدی مساحت است. فضای $L_a^2(G)$ را فضای برگمن G می‌گویند. در حقیقت این فضا زیرفضایی از $L^2(dA)$ است، پس برای اثبات هیلبرت‌بودن آن کافی است نشان دهیم که $L_a^2(G)$ زیرفضایی بسته از $L^2(dA)$ است. برای این‌کار به‌چند موضوع نیازمندیم.

اگر f تابعی تحلیلی درهمسایگی گوی بستهٔ

$$\overline{B(a,r)} = \{z : |z-a| \leqslant r\}$$

باشد، آنگاه مقدار f درنقطهٔ a از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(a,r)} f(z)\, dA(z).$$

در این صورت با نوشتن $f(z) = f(z) \cdot 1$ در انتگرال فوق و به‌کار بردن نابرابری هولدر (کوشی-شوارتس) داریم

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \left(\iint |f|^2\right)^{1/2} \left(\iint_{B(a,r)} 1^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi r^2} \|f\|_2\, r\sqrt{\pi}$$

$$\leqslant \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \|f\|_2 .$$

حال اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L_a^2(G)$ و f در $L^2(dA)$ باشد به‌طوری‌که $\|f_n - f\|_2 \to 0$ ، نشان می‌دهیم که f در $L_a^2(G)$ است و بدین‌وسیله هیلبرت بودن این فضا را اثبات می‌کنیم. اگر $\overline{B(a,r)} \subseteq G$ و ρ کمتر از فاصلهٔ بین $\overline{B(a,r)}$ و ∂G باشد آنگاه چون به‌ازای هر z در $B(a,r)$ داریم $\overline{B(z,\rho)} \subseteq G$، بنابراین

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leqslant \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_2 .$$

بنابه قضیهٔ مونتل تابع تحلیلی g وجود دارد به‌طوری‌که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ G ، به طور یکنواخت، $f_n \rightrightarrows g$. چون $\|f - f_n\|_2 \to 0$ ، با استفاده ازقضیهٔ ریس-فیشر زیردنبالهٔ $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد به‌طوری که $f_{n_k}(z) \to f(z)$ $a.e.\ dA$. پس $f = g$ $a.e.\ dA$ و درنتیجه $f \in L_a^2(G)$.

درحالتی‌که $G = D = \{z : |z| < 1\}$ قرص واحد باشد، هرتابع f در $L_a^2(D)$ یک‌سری توانی به‌صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

دارد. همچنین با اندازهٔ لبگ نرمال شدهٔ $dA = (1/\pi)\, dx\, dy$ روی D داریم

$$\|f\|_2 = \left(\sum \frac{|a_n|^2}{n+1}\right)^{1/2}$$

مثال ۳ـ فضای هاردی. فرض‌کنید $dm = (1/2\pi)\, d\theta$ اندازهٔ لبگ نرمال شده روی دایرهٔ واحد $T = \{z : |z| = 1\}$ باشد و $L^2 = L^2(m)$. برای‌هر g در L^2 ضرایب فوریهٔ g به‌صورت‌زیر تعریف می‌شوند

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

فضای هاردی H^2 را چنین تعریف می‌کنیم

$$H^2 = \{f \in L^2 : \hat{f}(n) = 0 \quad \forall\, n < 0\}.$$

به‌راحتی می‌توان دیدکه H^2 یک‌زیرفضای بستهٔ L^2 و درنتیجه یک فضای هیلبرت است. برای این‌کار دنبالهٔ $\{f_k\}$ را در H^2 درنظر گرفته و فرض کنید در L^2، $f_k \to f$. دراین‌صورت برای هر $n \in Z$، $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$. حال‌اگر $n < 0$ آنگاه $\hat{f}_k(n) = 0$ پس $\hat{f}(n) = 0$ و درنتیجه $f \in H^2$.

طرق دیگری نیز برای تعریف فضای H^2 وجود دارد که همگی با یکدیگر معادل‌اند. فرض‌کنید $H^2(D)$ مجموعهٔ تمام توابع تحلیلی $f : D \to \mathbf{C}$ باشد به‌طوری‌که

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta < \infty .$$

اگر برای هر f در $H^2(D)$ مقدار متناهی‌فوق را به $\|f\|_2$ نمایش دهیم، آنگاه $H^2(D)$ یک‌فضای هیلبرت است. درحقیقت نگاشت $f \to f^*$ از $H^2(D)$ به H^2 که به‌صورت حد شعاعی تعریف شده، یعنی

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$$

یک‌همریختی‌طولپا از $H^2(D)$ به‌روی H^2 تعریف‌می‌کند. به‌کمک این نگاشت می‌توانیم هر دوفضا را یکی درنظر بگیریم. همچنین هرتابع f در $H^2(D)$ یک‌سری توانی به‌صورت

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

داردکه نرم‌آن از رابطهٔ $\|f\|_2 = \left(\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}$ به‌دست می‌آید.

اگر a نقطه‌ای در D باشد، آنگاه p_a یعنی هستهٔ پواسون نظیر a را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$p_a(e^{it}) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it} + a}{e^{it} - a}\right).$$

برای هرتابع f در H^2 تابع نظیرآن g در $H^2(D)$ انتگرال پواسون f است یعنی

$$g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) p_a(e^{it})\, dt .$$

مثالهای دیگری نیز از فضاهای هیلبرت وجود دارد که برای آشنایی با آنها باید به کتابهای آنالیز تابعی مراجعه نمود.

طیف. اگر H یک فضای هیلبرت و $T : H \to H$ یک تبدیل خطی باشد به‌طوری که

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in H,\ x \neq 0\right\} < \infty$$

گوییم که T کراندار است و مقدار فوق را با $\|T\|$ نمایش می‌دهیم.

تبدیل خطی کراندار را عملگر می‌نامیم.

عملگر T روی فضای هیلبرت H را درنظر بگیرید. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $T-\lambda$ وارون‌پذیر نباشد، طیف T نامیده و به $\sigma(T)$ نمایش می‌دهیم. حالات مختلفی وجود دارد که این عملگر وارون‌پذیر نیست. به‌عنوان مثال، اگر $T-\lambda$ یک به یک نباشد، یعنی $\ker(T-\lambda) \neq (0)$، آنگاه $T-\lambda$ وارون‌پذیر نیست. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $\ker(T-\lambda) \neq 0$، طیف نقطه‌ای T نامیده، آن را به $\sigma_p(T)$ نمایش می‌دهیم. اگر به‌ازای هر x در H عدد ثابت C وجود داشته باشد به‌طوری که $\|Tx\| \geqslant C\|x\|$، گوییم که T از پایین کراندار است. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط λ را به‌طوری که $T-\lambda$ از پایین کراندار نباشد، طیف نقطه‌ای تقریبی T گفته و به $\sigma_{ap}(T)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$. جالب است بدانیم که $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ از بردارهای واحد H وجود داشته باشد به‌طوری که $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$.

هم‌ارزی یکانی. عملگر $U : H \to K$ از فضای هیلبرت H به فضای هیلبرت K را یکانی گویند هرگاه $U^*U = UU^* = I$. عملگر T روی فضای هیلبرت H با عملگر S روی فضای هیلبرت K هم‌ارز یکانی است هرگاه عملگر یکانی $U : H \to K$ وجود داشته باشد به‌طوری که $UT = SU$.

ضرب بلاشکه

از مفاهیم دیگری که مورد نیاز ماست ضرب بلاشکه می‌باشد که اینک به‌ذکر آن می‌پردازیم. فرض کنید $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط غیر صفر در قرص واحد D باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه حاصلضرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}$$

روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ D به‌طور یکنواخت همگرا باشد آن است که $\prod|\alpha_n|$ همگرا باشد، یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

درحالتی که این شرط برقرار است، حاصلضرب فوق یک تابع داخلی تعریف می‌کند که صفرهایش دقیقاً α_1، α_2، ... هستند. به‌خاطر داشته باشید که تابع تحلیلی $f : D \to D$ را داخلی گویند هرگاه وقتی z روی شعاعی که $e^{i\theta}$ را به‌مبدأ وصل می‌کند به $e^{i\theta}$ میل کند، $|f(z)|$ به $a.e$ میل کند.

برای اینکه مطالب فوق را درک کنیم اشاره‌ای به‌اثبات آنها می‌نماییم. قرار می‌دهیم

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}.$$

هر B_n روی قرص واحد بسته تحلیلی است و $|B_n(e^{i\theta})| = 1$. اگر دنبالهٔ $\{B_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ D به‌طور یکنواخت به‌تابعی چون B همگرا باشد، واضح است که B در D تحلیلی بوده و کران آن ۱ است. حال اگر حاصلضرب نامتناهی روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص واحد به‌طور یکنواخت همگرا باشد، فوراً دیده می‌شود که B تابع تحلیلی کرانداری است که فقط در نقاط α_1، α_2، ... صفر دارد. بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty.$$

برای اثبات همگرایی حاصلضرب نامتناهی وقتی که $\Sigma(1-|\alpha_n|) < \infty$، ابتدا نشان می‌دهیم که $\{B_n\}$ در H^2 همگراست. ملاحظه کنید که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B_n - B_m|^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (|B_n|^2 + |B_m|^2 - 2 \operatorname{Re} B_n B_m) \, d\theta.$$

حال چون $|B_n| = |B_m| = 1$ و $\bar{B}_m = 1/B_m$ (روی دایرهٔ واحد) پس

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B_m - B_n|^2 \, d\theta - 2\left(1 - \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n}{B_m} d\theta\right).$$

اگر $n > m$ آنگاه B_n/B_m تحلیلی است و

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{B_n}{B_m} \, d\theta = \frac{B_n}{B_m}(0) = \prod_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|.$$

درنتیجه

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |B_n - B_m|^2 \, d\theta = 2\left(1 - \prod_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|\right).$$

چون حاصلضرب نامتناهی $\prod|\alpha_k|$ همگراست، در H^2 داریم $B_n \to B$. اکنون به‌آسانی می‌توان نشان داد که روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ قرص واحد، $B_n \to B$. همچنین زیردنباله‌ای از B_n تقریباً همه‌جا روی T به B همگراست پس روی T، $|B| = 1$، در نتیجه B تابعی داخلی است.

اکنون ضرب بلاشکه تابعی تحلیلی به‌صورت

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\alpha}_n}{|\alpha_n|} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z}\right]^{k_n}$$

است که در آن k، k_1، k_2، ... اعداد صحیح نامنفی، و α_n اعداد غیرصفر متمایز در قرص واحدند و $\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^{k_n}$ همگراست.

اکنون که مقدمات لازم را کسب کرده‌ایم می‌توانیم وارد بحث اصلی خود شویم.

حلال یک عملگر و حساب تابعی

فرض کنید H یک فضای هیلبرت و T عملگری روی H باشد. گردایهٔ تمام عملگرهای روی H را به $B(H)$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ $\rho(T)=\mathbf{C}\setminus\sigma(T)$ را مجموعهٔ حلال T و برای هر λ در $\rho(T)$ عملگر

$$R(\lambda, T)=(\lambda-T)^{-1}$$

را حلال T گویند. دراین قسمت ثابت می‌کنیم که تابع $\lambda\mapsto R(\lambda, T)$ از $\rho(T)$ به $B(H)$ تحلیلی است. این تابع را به F نمایش داده و با رعایت اختصار می‌نویسیم

$$R(\lambda)=(\lambda-T)^{-1}.$$

با استفاده از برابری

$$R(\lambda)-R(\lambda_0)=(\lambda_0-\lambda)R(\lambda)R(\lambda_0)$$

می‌توان نوشت

$$\frac{F(\lambda)-F(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}=-R(\lambda)R(\lambda_0).$$

حال اگر $\lambda\to\lambda_0$، $R(\lambda)\to R(\lambda_0)$، پس $F'(\lambda_0)$ وجود دارد و برابر است با

$$F'(\lambda_0)=-R(\lambda_0)^2=-(\lambda_0-T)^{-2}.$$

اکنون فرض کنید $f:G\to\mathbf{C}$ تحلیلی باشد و $\sigma(T)\subset G$. دراین‌صورت عملگر $f(T)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R(\lambda, T)\,d\lambda$$

که در آن Γ یک خم بستهٔ ساده (خم ژوردان) در G است به‌طوری که $\sigma(T)\subseteq \mathrm{Int}(\Gamma)$، و دراینجا $\mathrm{Int}(\Gamma)$ مجموعهٔ تمام نقاط صفحهٔ مختلط است که عدد گردشی آنها نسبت به Γ برابر با یک می‌باشد. درحقیقت

$$\mathrm{Int}(\Gamma)=\{\lambda\in C: n(\Gamma, \lambda)=1\}.$$

همچنین $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Ext}(\Gamma)=\{\lambda\in C: n(\Gamma, \lambda)=0\}.$$

مطلبی که در اینجا باید به‌آن توجه داشت این است که تعریف $f(T)$ بستگی به‌خم ژوردان مربوطه ندارد. این حقیقتی است که به‌کمک قضیهٔ کوشی اثبات می‌گردد. برای اثبات به‌کتب آنالیز تابعی مراجعه شود.

چون

$$T=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda R(\lambda, T)\,d\lambda$$

پس برای هر x در H،

$$Tx=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda R(\lambda, T)x\,d\lambda.$$

درحقیقت Tx حد بردارهایی به‌شکل زیر است

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)R(\lambda_k, T)x.$$

اگر $H(\sigma(T))$ مجموعهٔ تمام توابع f تحلیلی در یک همسایگی $\sigma(T)$ باشد، در این صورت نگاشت $f\to f(T)$ از $H(\sigma(T))$ به $B(H)$ یک همریختی جبری است. همچنین اگر $f(\lambda)\equiv 1$ آنگاه $f(T)=I$ و اگر $f(\lambda)\equiv\lambda$ آنگاه $f(T)=T$، به‌علاوه اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی روی G، $\phi(T)\subset G$، و f_n به طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشردهٔ G به f همگرا باشد، آنگاه $\|f_n(T)-f(T)\|\to 0$ هرگاه $n\to\infty$.

یکی دیگر از موضوعات جالب توجه، خودتوان ریتس است که اینک به‌شرح آن می‌پردازیم.

خودتوان ریتس. اگر Δ زیرمجموعه‌ای از $\sigma(T)$ باشد به‌طوری که Δ بسته و در توپولوژی نسبی $\sigma(T)$ باز باشد، آنگاه $\sigma(T)=\Delta\cup(\sigma(T)\setminus\Delta)$. دومجموعهٔ باز مجزای G_1 و G_2 را در صفحه طوری در نظر بگیرید که $\Delta\subset G_1$ و $\sigma(T)|\Delta\subset G_2$. سیستم خمهای بستهٔ ژوردان Γ را در G_1 طوری انتخاب می‌کنیم که $\Delta\subset\mathrm{Int}(\Gamma)$ و $\sigma(T)\setminus\Delta\subset\mathrm{Ext}(\Gamma)$. اگر $f=\chi_{G_1}$ تابع مشخصهٔ G_1 باشد آنگاه f درهمسایگی $G_1\cup G_2$ از $\sigma(T)$ تحلیلی است و درنتیجه می‌توان $E(\Delta)=f(T)$ را تعریف نمود. چون $f=f^2$، پس $E(\Delta)^2=E(\Delta)$ یعنی $E(\Delta)$ خودتوان است. این عملگر را خودتوان ریتس می‌نامند. درحقیقت

$$E(\Delta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, T)\,d\lambda.$$

به‌راحتی دیده‌می‌شود که $\sigma(T|_{E(\Delta)H})=\Delta$ و $TE(\Delta)=E(\Delta)T$.

اگر λ_0 یک نقطهٔ مجزای $\sigma(T)$ باشد آنگاه با قراردادن $\Delta=\{\lambda_0\}$ می‌توان $E(\lambda_0)$ را تعریف نمود. درضمن λ_0 یک نقطهٔ منفرد نگاشت $\lambda\to R(\lambda)$ از $\rho(T)$ به $B(H)$ است و بسط لورن این نگاشت حول λ_0 در گوی محذوف

$$0<|\lambda-\lambda_0|<r=\mathrm{dist}\,(\lambda_0, \sigma(T)\{\lambda_0\})$$

به‌صورت زیر می‌باشد

$$(\lambda-T)^{-1}=\sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n T_n$$

که در آن

$$T_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}R(\lambda, T)\,d\lambda$$

و γ دایره‌ای به‌مرکز λ_0 و به‌شعاع کمتر از r است.

چگونگی نقطه منفرد λ_0 ازنظر قطب، یا نقطهٔ اساسی بودن، اطلاعاتی ارزشمند درمورد عملگر T در اختیار ما قرار می‌دهد. دراین مورد قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه. اگر λ_0 یك نقطهٔ مجزای $\sigma(T)$ باشد، آنگاه λ_0 قطب مرتبهٔ n حلال $(\lambda-T)^{-1}$ است اگر و تنها اگر $(\lambda_0-T)^n E(\lambda_0)=0$ و $(\lambda_0-T)^{n-1}E(\lambda_0)\neq 0$.

اثبات: بسط سری لورن

$$(\lambda-T)^{-1}=\sum_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n T_n$$

را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که λ_0 قطب مرتبهٔ n است اگر و تنها اگر به‌ازای $k>n$، $T_{-n}\neq 0$ و $T_{-k}=0$. اگر G_1 و G_2 دومجموعهٔ باز مجزا باشند به‌طوری‌که $\lambda_0\in G_1$ و $\sigma(T)\setminus\{\lambda_0\}\subset G_2$، و Γ یك خم بستهٔ ساده (خم ژوردان) در G_2 باشد به‌طوری‌که $\sigma(T)\setminus\{\lambda_0\}\subset \mathrm{Int}(\Gamma)$ و $\lambda_0\in\mathrm{Ext}(\Gamma)$ و γ دایره‌ای حول λ_0 در G_1 باشد، دراین‌صورت اگر $f=\chi_{G_1}$ مشخصهٔ G_1 باشد آنگاه $f(T)=E(\lambda_0)$. حال اگر $k\geqslant 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}T_{-k}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}(\lambda-\lambda_0)^{k-1}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma+\Gamma}f(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k-1}(\lambda-T)^{-1}\,d\lambda\\&=E(\lambda_0)(T-\lambda_0)^{k-1}.\end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر ازآنجا به‌دست می‌آید که $\gamma+\Gamma$ یك خم سادهٔ بستهٔ (خم ژوردان) در همسایگی $G_1\cup G_2$ از طیف T است. بنابراین قضیه اثبات می‌گردد.

موضوع دیگری که از اهمیت وافری برخوردار است، قضیهٔ نگاشت طیفی است که اینك به‌شرح آن می‌پردازیم.

قضیهٔ نگاشت طیفی. اگر f تابعی تحلیلی در یك همسایگی طیف T باشد آنگاه

$$\sigma(f(T))=f(\sigma(T)).$$

اثبات: اگر $\lambda_0\in\sigma(T)$، دراین‌صورت $g\in H(\sigma(T))$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(\lambda)-f(\lambda_0)=(\lambda-\lambda_0)g(\lambda)$$

پس

$$f(T)-f(\lambda_0)=(T-\lambda_0)g(T).$$

چون $T-\lambda_0$ وارون‌پذیر نیست پس $f(T)-f(\lambda_0)$ نیز وارون‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین رابطهٔ $f(\sigma(T))\subset\sigma(f(T))$ اثبات شده است.

به‌عکس اگر $\alpha\notin f(\sigma(T))$ آنگاه،

$$g=(f-\alpha)^{-1}\in H(\sigma(T))$$

پس $g(\lambda)(f(\lambda)-\alpha)=1$ و درنتیجه $g(T)(f(T)-\alpha)=I$ یعنی $\alpha\notin\sigma(f(T))$. نشان داده‌ایم که $\sigma(f(T))\subset f(\sigma(T))$ و تساوی فوق ثابت می‌شود.

یکی از قضایای بسیار مهم که در اثبات آن از ابزار آنالیز مختلط استفاده می‌شود این است:

قضیهٔ فولده-پوتنام

اگر N و M دو عملگر نرمال روی فضاهای هیلبرت H و K باشند و $A:H\to K$ عملگری باشد که در رابطهٔ $AN=MA$ صدق می‌کند آنگاه داریم $AN^*=M^*A$.

اثبات: از فرض قضیه نتیجه می‌شود که به‌ازای $0\leqslant j$، $AN^j=M^jA$؛ بنابراین برای هر چندجمله‌ای p داریم $Ap(N)=p(M)A$. چون تابع نمایی حد چندجمله‌ایهاست می‌توان نوشت $Ae^{i\bar zN}=e^{i\bar zM}A$ و یا $A=e^{-i\bar zM}Ae^{i\bar zN}$. و چون تابع نمایی دارای این خاصیت است که $e^{C+D}=e^Ce^D$ هرگاه $CD=DC$، با استفاده از اینکه N و M نرمال هستند می‌توان محاسبهٔ زیر را برای تابع تعریف شده انجام داد

$$\begin{aligned}f(z)&=e^{-izM^*}Ae^{izN^*}\\&=e^{-izM^*}e^{-i\bar zM}Ae^{i\bar zN}e^{izN^*}\\&=e^{-i(zM^*+\bar zM)}Ae^{i(\bar zN+zN^*)}.\end{aligned}$$

ازآنجا که $zM^*+\bar zM$ و $\bar zN+zN^*$ هرمیتی هستند توابع نمایی فوق یکانی هستند؛ بنابراین $\|f(z)\|\leqslant\|A\|$. چون تابع $f:C\to B(H,K)$ تابعی همه‌جا تحلیلی (تام) می‌باشد، با استفاده از قضیهٔ لیوویل نتیجه می‌گیریم که f مقدارش ثابت است، یعنی

$$0=f'(z)=-iM^*e^{-izM^*}Ae^{izN^*}+ie^{-izM^*}AN^*e^{izN^*}.$$

حال اگر قرار دهیم $z=0$ نتیجه می‌شود که $AN^*=M^*A$، و قضیه اثبات می‌شود.

فضاهای توابع

فرض کنید H یك فضای هیلبرت و $\{e_n\}$ یك پایهٔ متعامد برای H باشد و T عملگری روی H باشد که در رابطهٔ

$$Te_n=\omega_n e_{n+1} \qquad (1)$$

صدق می‌کند و در آن $\{\omega_n\}$ یك دنبالهٔ کراندار از اعداد مختلط است. دراین‌صورت گوییم که T یك عملگر انتقال وزین با وزن $\{\omega_n\}$ است. اگر $n\in Z$، T را عملگر انتقال وزین دوطرفه و اگر $n=1,2,3,\ldots$، T را عملگر انتقال وزین یك‌طرفه می‌گویند. می‌توان نشان داد که یك‌چنین T با یك عملگر انتقال وزین با وزن $\{|\omega_n|\}$ هم‌ارز یکانی است. بنابراین در بررسیهایی که صورت می‌گیرد می‌توان وزن را مثبت فرض کرد. همچنین دیده می‌شود

$$T^n e_k=\omega_k\omega_{k+1}\cdots\omega_{k+n-1}e_{k+n}.$$

با قدری کار بیشتر می‌توان نشان داد که

$$\|T^n\|=\sup_k|\omega_k\omega_{k+1}\cdots\omega_{k+n-1}|.$$

درحالتی که T یك‌طرفه است درمورد الحاقی آن یعنی T^* داریم

$$\begin{cases}T^*e_0=0\\T^*e_n=\omega_{n-1}, & n\geqslant 1.\end{cases}$$

روش دیگری نیز برای معرفی عملگرهای فوق هست. دراین‌روش وزن موردنظر را درون فضایی قرارمی‌دهیم که خود تشکیل یك فضای هیلبرت می‌دهد و آنگاه عملگر انتقال وزنی را به صورت عملگری که روی این فضا تعریف می‌شود به‌دست می‌آوریم. اینك به‌شرح جزئیات این‌کار می‌پردازیم.

نماد f را روی $\mathbf{C}$ به‌کمك ضرایب‌مختلط $\hat{f}(n)$ چنین‌تعریف می‌کنیم

$$f(z)=\sum_{n\in Z}\hat{f}(n)z^{n}.$$

این سری صرفاً جنبهٔ صوری دارد و فعلا صحبتی از همگرایی به‌میان نمی‌آوریم. اگر $\hat{f}(n)=0$ برای $n<0$، آنگاه یك‌سری توانی داریم و درحالت‌کلی سری لورن به‌دست می‌آید.

تعریف. فرض‌کنید $\{\beta(n)\}_{n\in Z}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به‌طوری‌که $\beta(0)=1$. دوفضای $H^{2}(\beta)$ و $L^{2}(\beta)$ را به ترتیب مجموعهٔ کلیهٔ سریهای‌توانی و مجموعهٔ کلیهٔ سریهای لورن درنظر می‌گیریم که برای آنها شرط زیر برقرار باشد

$$\|f\|^{2}=\|f\|_{\beta}^{2}=\sum|\hat{f}(n)|^{2}(\beta(n))^{2}<\infty.$$

ملاحظه‌کنید که درحالت $\beta\equiv 1$ فضای $H^{2}(\beta)$ همان فضای‌هاردی H^{2} است. این دوفضا با ضرب داخلی

$$\langle f,g\rangle=\sum\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}(\beta(n))^{2}$$

فضاهای هیلبرت هستند. به‌منظور بررسی‌خواص مشترك این دوفضا آنها را با نماد مشترك H نمایش‌می‌دهیم. تبدیل‌خطی M_{z} (ضرب در z) را روی H چنین تعریف می‌کنیم

$$(M_{z}f)(z)=\sum\hat{f}(n)z^{n+1},\quad f\in H.$$

ملاحظه می‌شود که دنبالهٔ $\{f_{k}\}$، که در آن $f_{k}(z)=z^{k}$، تشکیل یك‌پایهٔ متعامد برای H می‌دهد. همچنین $M_{z}f_{k}=f_{k+1}$.

قضیه. تبدیل خطی M_{z} روی $L^{2}(\beta)$ یا $H^{2}(\beta)$ همارز یکانی با یك عملگر انتقال وزنی یك به‌یك است. به‌عکس، هر عملگر انتقال وزنی یك به‌یك با انتخاب مناسبی از β، همارز یکانی با M_{z} است.

اثبات: چون $M_{z}f_{k}=f_{k+1}$ پس M_{z} عملگر انتقال وزنی با وزن $\{\omega_{k}\}$ نسبت به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\{f_{k}/\|f_{k}\|\}$ است که در آن $\omega_{n}=\|f_{k+1}\|/\|f_{k}\|=\beta(k+1)/\beta(k)$.

به عکس، فرض‌کنید T یك‌عملگر انتقال وزنی نسبت به‌پایهٔ متعامد یکهٔ $\{e_{n}\}$ باشد. قرار می‌دهیم $\beta(0)=1$ و

$$\beta(n)=\omega_{0}\cdots\omega_{n-1}\quad(n>0).$$

چنانچه عملگر انتقال وزنی دوطرفه باشد، قرارمی‌دهیم

$$\beta(-n)=(\omega_{-1}\cdots\omega_{-n})^{-1}\quad(n>0)$$

عملگر یکانی $U:H\rightarrow H$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$Ue_{n}=\frac{f_{n}}{\|f_{n}\|}.$$

حال برای $n>0$،

$$UTe_{n}=U(\omega_{n}e_{n+1})=\omega_{n}\frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|}=\frac{\omega_{n}f_{n+1}}{\beta(n+1)}=\frac{f_{n+1}}{\beta(n)}.$$

ازطرف دیگر

$$M_{z}Ue_{n}=M_{z}\frac{f_{n}}{\|f_{n}\|}=\frac{f_{n+1}}{\|f_{n}\|}=\frac{f_{n+1}}{\beta(n)}.$$

درحالت سری لورن نیز مشابه فوق عمل می‌کنیم. بنابراین $M_{z}U=UT$.

ازقضیهٔ فوق نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه. M_{z} کراندار است اگر و فقط اگر

$$\sup_{k}\frac{\beta(k+1)}{\beta(k)}<\infty.$$

دراین حالت

$$\|M_{z}^{n}\|=\sup_{k}\frac{\beta(k+1)}{\beta(k)},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

تعویضگرها

فرض‌کنید A گردایه‌ای از عملگرهای فضای هیلبرت H باشد. تعویضگر A که آن را با A' نمایش می‌دهیم مجموعهٔ تمام عملگرهای B است به‌طوری‌که برای هر $A\in A$، $BA=AB$. در این‌قسمت سعی ما بر آن است که تعویضگر M_{z} را مشخص‌سازیم. ابتدا به‌شرحی مقدماتی نیازمندیم.

اگر f و g دوسری لورن صوری باشند، ضرب آنها را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم. قرارمی‌دهیم $h=fg$ که درآن

$$h(z)=\sum\hat{h}(n)z^{n},\quad\hat{h}(n)=\sum_{k\in Z}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k);$$

درحالت سری توانی صوری، به‌ازای هر $n<0$،

$$\hat{f}(n)=\hat{g}(n)=0;$$

و بنابراین $\hat{h}(n)$ به‌صورت یك‌مجموع متناهی است و مسأله‌ای از بابت همگرایی ایجاد نمی‌شود.

تعریف. مجموعهٔ کلیهٔ سریهای توانی $\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{\phi}(n)z^{n}$ را که در رابطهٔ $\phi H^{2}(\beta)\subset H^{2}(\beta)$ صدق می‌کنند با $H^{\infty}(\beta)$ نمایش می‌دهیم. به‌همین‌طریق $L^{\infty}(\beta)$ مجموعهٔ تمام سریهای‌لورن $\phi(z)=\sum\hat{\phi}(n)z^{n}$ است به‌طوری‌که $\phi L^{2}(\beta)\subset L^{2}(\beta)$. با توجه به‌تعریف فوق می‌توان برای هر ϕ در $H^{\infty}(\beta)$ $(L^{\infty}(\beta))$ تبدیل‌خطی M_{ϕ} راروی $H^{2}(\beta)$ $(L^{2}(\beta))$ به‌صورت $M_{\phi}f=\phi f$ تعریف کرد و کراندار بودن آن را مورد بحث قرار داد. در بحث ما M_{ϕ} کراندار خواهد بود، بدین‌معنی‌که یا کراندار بودن M_{ϕ} از ابتدا معین است و یا اینکه شیوه‌هایی نظیر قضیهٔ گراف بسته وجود دارد که کراندار بودن M_{ϕ} را تضمین می‌کند. همچنین می‌توان نشان داد که $M_{\phi}M_{\psi}=M_{\phi\psi}$.

قضیه. اگر A عملگری روی $L^{2}(\beta)$ $(H^{2}(\beta))$ باشد که با M_{z}

تعویض می‌شود، آنگاه برای یک ϕ در $(H^\infty(\beta))L^\infty(\beta)$، $A=M_\phi$.

اثبات: فرض کنید $\phi=Af_0$. دراین‌صورت داریم

$$Af_k=AM_z^kf_0=M_z^kAf_0=z^k\phi=\phi f_k\quad(k\geqslant 0)$$

وانگهی درحالتی که A روی $L^2(\beta)$ تعریف شده باشد داریم

$$z^{-k}(Af_k)=M_z^{-k}Af_k=M_z^{-k}A(M_z^kf_0)=Af_0=\phi\quad(k<0).$$

اینک تابع λ_n را چنین تعریف می‌کنیم: $\lambda_n(g)=\hat{g}(n)$. در این صورت،

$$\lambda_n(Af_k)=\lambda_n(\phi f_k)=\hat{\phi}(n-k).$$

قرار می‌دهیم $g=\sum\hat{g}(k)f_k$. چون این سری در نرم همگراست داریم $Ag=\sum\hat{g}(k)Af_k$. درنتیجه

$$\lambda_n(Ag)=\sum\hat{g}(k)\lambda_n(Af_k)=\sum\hat{g}(k)\hat{\phi}(n-k)$$

که برای هر n همگراست. بنابراین $A=M_\phi$.

عملگر ترکیبی و طیف آن

تابع تحلیلی $\phi:D\to D$ با ضابطهٔ $|\phi(e^{it})|=1$ a.e. را تابع داخلی گوییم. اگر ϕ یک تابع داخلی باشد عملگر

$$C_\phi:L^2(m)\to L^2(m)$$

را که با ضابطهٔ $C_\phi f=f\circ\phi$ تعریف می‌شود عملگر ترکیبی گوییم. ملاحظه کنید که $\phi:T\to T$ یک تبدیل اندازه‌پذیر است و اندازهٔ $m\phi^{-1}$ را روی T القا می‌کند که به‌صورت

$$m\phi^{-1}(\Delta)=m(\phi^{-1}(\Delta))$$

تعریف می‌شود. حال اگر $a=\int\phi\,dm$، در این صورت $dm\phi^{-1}/dm=p_a$ که p_a همان هستهٔ پواسون نظیر نقطهٔ a است یعنی $p_a(e^{it})=Re(e^{it}+a/e^{it}-a)$. برای اثبات این مطلب ملاحظه کنید که ضرایب فوریهٔ p_a و $dm\phi^{-1}/dm$ متساوی‌اند، یعنی

$$\int e^{int}\,dm\phi^{-1}=\int\phi^n\,dm=a^n=\int e^{int}p_a\,dm,\quad n\geqslant 0.$$

برای $n<0$ نیز از رابطهٔ فوق مزدوج می‌گیریم.

به‌طوری‌که درزیر دیده می‌شود، C_ϕ یک عملگر کراندار است و $\|C_\phi\|=((1+|a|)/(1-|a|))^2$. داریم

$$\|C_\phi f\|^2=\int|f\circ\phi|^2\,dm=\int|f|^2\,dm\phi^{-1}$$

$$=\int|f|^2p_a\,dm.$$

از نامساوی

$$\frac{1-|a|}{1+|a|}\leqslant p_a\leqslant\frac{1+|a|}{1-|a|}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\|C_\phi\|\leqslant\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/2}$$

اثبات تساوی در رابطهٔ فوق از پیوستگی p_a نتیجه می‌شود.

درحالتی که ϕ یک تبدیل کسری باشد، محاسبهٔ طیف آن امکان‌پذیر است. هر تبدیل کسری ازقرص واحد به‌خودش به‌صورت

$$\phi(z)=\frac{az+c}{\bar{c}z+\bar{a}}\quad(|a|^2-|c|^2=1)$$

نوشته می‌شود. نقاط ثابت ϕ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$z=(i\,\mathrm{Im}\,a\pm((|c|^2-(\mathrm{Im}\,a)^2)^{1/2})/c$$

البته به‌شرط اینکه $c\neq 0$.

اینک سه حالت درنظر می‌گیریم:

(۱) $|\mathrm{Im}\,a|<|c|$. دراین حالت دونقطهٔ ثابت داریم که یکی در داخل قرص واحد و دیگری بیرون آن است. گوییم که ϕ بیضوی است.

(۲) $|\mathrm{Im}\,a|=|c|$. در این حالت فقط یک نقطهٔ ثابت و آن هم روی دایره وجود دارد. گوییم که ϕ سهموی است.

(۳) $|\mathrm{Im}\,a|>|c|$. دراین حالت دونقطهٔ ثابت و هردو هم روی دایره وجود دارد. گوییم که ϕ هذلولوی است.

رفتار عملگر C_ϕ در حالات فوق اختلاف اساسی دارد. به‌عنوان نمونه طیف C_ϕ را درحالت سهموی به‌دست می‌آوریم.

قضیه. اگر ϕ سهموی باشد طیف C_ϕ برابر است با دایرهٔ واحد.

اثبات: نشان می‌دهیم که شعاع طیفی C_ϕ و C_ϕ^{-1} هردو با یک برابرند. این خود ثابت می‌کند که طیف C_ϕ درون دایرهٔ واحد قراردارد. با اضافه نمودن این مطلب که دایرهٔ واحد درون طیف نقطه‌ای هر C_ϕ است قضیه اثبات می‌گردد.

ابتدا فرض می‌کنیم $\phi(1)=1$ که این کار را می‌توان با یک انتقال انجام داد. حال تبدیل $\gamma(z)=i(1+z/1-z)$ را که قرص واحد را به نیمصفحهٔ بالایی می‌نگارد درنظر گرفته قرار می‌دهیم $\psi=\gamma\circ\phi\circ\gamma^{-1}$. این تبدیل، نیمصفحهٔ بالایی را به‌خودش می‌نگارد وداریم $\psi(\infty)=\infty$. پس به‌ازای عددحقیقی $b\neq 0$، $\psi(\omega)=\omega+b$. چون

$$\psi^n(\omega)=\omega+nb=\gamma\circ\phi^n\circ\gamma^{-1}\omega$$

داریم

$$\phi^n(0)=\gamma^{-1}\circ\psi^n(\gamma(0))=\gamma^{-1}(i+nb)=\frac{nb}{2i+nb}.$$

پس

$$\|C_\phi^n\|^2=\frac{1+|nb/(2i+nb)|}{1-|nb/(2i+nb)|}$$

$$=\frac{|2i+nb|+n|b|^2}{|2i+nb|^2-n^2b^2}\leqslant(n|b|+1)^2.$$

درنتیجه، شعاع طیفی $r(C_\phi)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$r(C_\phi)\leqslant \overline{\lim}\,(n|b|+1)^{1/n}=1\,.$$

چون ۱ درطیف نقطه‌ای هرعملگر ترکیبی قراردارد، $r(C_\phi)=1$. حال با ملاحظه اینکه ϕ^{-1} نیز سهموی است دیده می‌شود که $r(C_\phi^{-1})=1$، پس طیف C_ϕ درون دایرهٔ واحد است.

نابرابری هاردی

فضای H^1 تشکیل شده است از تمام توابع f که روی قرص واحد D تعریف شده و تحلیلی باشند و همچنین

$$\sup_{r<1}\frac{1}{2\pi}\int|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

متناهی باشد. این مقدار را با $\|f\|_1$ نمایش می‌دهیم. تحت این نرم فضای H^1 یك فضای باناخ است. نامساوی هاردی اینك به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه. فرض‌کنید f تابعی در H^1 با سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ باشد. دراین صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a_n|\leqslant\pi\|f\|_1\,.$$

اثبات: ابتدا قضیه را درحالتی بررسی می‌کنیم که $a_n\geqslant 0$. دراین‌صورت چون

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{1}{n}$$

داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a_nr^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\theta)\mathrm{Im}f(re^{i\theta})\,d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\pi\|f\|_1\,.$$

اکنون r را به‌سمت ۱ میل می‌دهیم و با فرض $a_n\geqslant 0$ نتیجه به دست می‌آید.

درحالت کلی f را به‌صورت $f=gh$ می‌نویسیم که در آن g و h در H^2 هستند و چنین تعریف می‌شوند

$$g=B\sqrt{\frac{f}{B}}\,,\quad h=\sqrt{\frac{f}{B}}$$

که در آن B ضرب بلاشکهٔ تولیدشده توسط صفرهای f می‌باشد. اگرسریهای توانی g و h به‌صورت زیر باشند

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\,,\quad h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که توابع

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|z^n\,,\quad H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|z^n$$

نیز در H^2 هستند. درحقیقت

$$\|G\|_2=\|g\|_2\,,\quad \|H\|_2=\|h\|_2$$

قرارمی‌دهیم $F=GH$. واضح است که F در H^1 قراردارد و

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_nz^n$$

که در آن $a'_n\geqslant 0$. همچنین $|a_n|\leqslant a'_n$. طبق قسمت اول داریم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a'_n\leqslant\pi\|F\|_1\,.$$

اما

$$\|F\|_1\leqslant\|G\|_2\|H\|_2=\|g\|_2\|h\|_2=\|f\|_1$$

و اثبات کامل است.

اکنون به‌فوریت از نابرابری هاردی نتیجه می‌شود $H^1\subset L^2_a(D)$. کافی‌است ملاحظه‌کنیدکه برای $f\in H^1$ داریم

$$\|f\|_2^2=\sum\frac{|a_n|^2}{n+1}\leqslant(\max|a_n|)\sum\frac{|a_n|}{n+1}\leqslant\pi\|f\|_1^2\,.$$

مراجع

1. J. Conway, *Subnormal Operators*, Pitman (1981).
2. P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York (1970).
3. K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1962).
4. E. Nordgren, "Composition operators," *Canadian J. Math.*, **20** (1963) 442-449.
5. A. Shields, "Weighted shift operators and analytic function theory," Topics in Operator Theory (C.M. Pearcy. ed.) Amer. Math. Soc., (1974) 49-128.

****

★ دکتر کریم صدیقی، دانشگاه شیراز