نشر ریاضی، سال ۹، شمارهٔ ۲، صص ۱۳ـ۲۳

هندسهٔ ناجابجایی و فیزیک

کامران کاویانی*

۱. مقدمه

یکی از مهمترین موفقیتهای فیزیک در قرن بیستم وحدت‌بخشیدن به نیروهای الکترومغناطیسی، ضعیف و قویِ هسته‌ای در یک قالب ریاضی واحد تحت عنوان مدل متعارف ذرات بنیادی است. این مدل که صرفاً به شیوهٔ پدیده شناختی به‌دست آمده است دارای ۱۹ پارامتر آزاد است که باید از آزمایش استخراج شوند. جرم لپتونها، کوارکها و بوزنهای پیمانه‌ای و همچنین ضرایب جفت‌شدگی و زوایای ترکیب حالات کوارکی از این دسته‌اند. این مدل موفقترین مدل برای توصیف همهٔ اندرکنشهای بین ذرات بنیادی است. البته این نخستین باری نیست که اتحاد نیروها در فیزیک اتفاق می‌افتد، یعنی صورتبندی ریاضی واحدی ارائه می‌شود که می‌تواند همزمان چند نیرو را با هم توصیف کند. شاید بتوان گفت که برای اولین بار ماکسول توانست با استفاده از معادلات $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ و $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \circ$ که در آن j^μ، ۴ـبردار جریان و $F^{\mu\nu}$ و $\tilde{F}^{\mu\nu}$ به ترتیب شدت میدان الکترومغناطیسی و دوگان آن است، نشان دهد که چگونه می‌توان نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را در یک چارچوب متحد کرد. پس از ماکسول، مینکوفسکی علت اتحاد نیروهای الکتریکی و مغناطیسی را در این دانست که ماکسول ندانسته در معادلات خود زمان را همچون سه بُعد مکانی، بُعد محسوب کرده بود و در نتیجه با افزایش ابعاد از سه به چهار، وحدت الکتریسیته و مغناطیس امکان‌پذیر شد. از طرفی کار اینشتین در نسبیت عام و توصیف گرانش با مدلهای هندسی در ایجاد این فکر در بین بسیاری از فیزیکدانان که طبیعت دارای یک توصیف دقیق هندسی است بسیار مؤثر بود. با استفاده از استنباطهای فوق در اوایل قرن بیستم کالوتزا و کلاین با فرض یک بعد مکانی دیگر برای فضا و به عبارتی فرض یک فضای ۱ + ۴ بعدی سعی کردند مدل هندسی ارائه دهند تا دو نیروی شناخته شده تا آن زمان، یعنی الکترومغناطیس و گرانش، را متحد سازند و در این راه تا حد زیادی نیز موفق شدند. آنها به‌دلایل تجربی بعد پنجم را فشرده در نظر گرفتند و کنش هیلبرت‌ـاینشتین را در این فضای پنج بعدی بررسی کردند و ملاحظه نمودند با کوچکتر کردن شعاع فشرده‌سازیِ بعد اضافی، به کنش اینشتین‌ـماکسول خواهند رسید. بنابراین اتحاد نیروها می‌تواند ریشه در ساختار فضاـزمان داشته باشد. اینک سؤال این است: حال که ما سه نیرو از چهار نیروی طبیعت را در مدل متعارف ذرات متحد کرده‌ایم، ساختار فضاـزمان برای چنین اتحادی چگونه است؟ این سؤالی بود که در اوایل دههٔ هشتاد قرن بیستم فکر فیزیکدانانِ بسیاری معطوف به آن شد. آنها با استفاده از ایده‌های کالوتزا و کلاین سعی در طراحی فضاـزمانی با ابعاد اضافی داشتند که با فشرده‌سازی این ابعاد اضافی نهایتاً به لاگرانژیِ مدل متعارف برسند. ولی در اواخر همین دهه اغلب امیدها به یأس مبدل شد. مهمترین مشکل نیز تکدستی[1] ذرات بود. در تمام این روشها از خمینه‌های ریمانی به عنوان مدل فضاـزمان استفاده می‌شد، و فنون مرسوم در هندسهٔ دیفرانسیل کلاسیک به کار گرفته می‌شد. در سال ۱۹۸۹ آلن کُن[2] با استفاده از ابزارهای هندسهٔ دیفرانسیل ناجابجایی که خود مبتکر آن بود، برای فضاـزمان مینکوفسکی همانند کالوتزاـکلاین یک بعد اضافی در نظر گرفت، با این تفاوت که این بعد اضافی دیگر پیوسته نبود و صرفاً از دو نقطهٔ جدا از هم ساخته شده بود. در این حالت فضاـزمان به صورت دو خمینهٔ مینکوفسکی جدا از هم در می‌آمد. فرض فیزیکی آن بود که ذرات چپ‌دست در یک لایه و ذرات راست‌دست در لایهٔ دیگر قرار دارند. برای این منظور روی یک لایه، کلاف اصلی SU(۲)، و روی دیگری، یک کلاف U(۱) فرض کرد؛ سپس با استفاده از تعمیم قضیهٔ سوان[3] مطالب فوق را به زبان جبری بیان نمود و با در نظرگرفتن یک ساختار دیفرانسیل مناسب روی جبر نشان داد که کنش یانگ‌ـمیلز (که متناسب با توان دوم تانسور انحنای فضاست) منجر به کنش مدل متعارف می‌شود و در این راه نتایج جالبی نیز به‌دست آورد. با این رهیافت، اَبَر بار[4] صحیح برای ذرات چپ‌دست و

1. chirality 2. Alain Connes 3. Swan 4. hyper charge

راست‌دست پیدا شد، و مسألهٔ تکدستی ناپدید گردید. پتانسیل هیگز[1] به‌طور صحیح و طبیعی به‌دست آمد و میدان هیگز به صورت مؤلفهٔ میدان پیمانه‌ای در راستای بعد گسسته درآمد. همچنین بین برخی پارامترهای آزاد مدل رابطه برقرار شد.

ما در بخش بعد یک مدل پیمانه‌ای ساده را به تفصیل بررسی خواهیم کرد. به هر حال امروز یکی از مهمترین اهداف، استفاده از ابزار هندسهٔ ناجابجایی در ساختن مدلهایی برای ساختار فضاـزمان است. این امر به‌خصوص در انرژیهای بالا اهمیت فراوانی دارد، زیرا به‌نظر می‌رسد که در انرژیهای بالا ساختاری که برای فضاـزمان باید در نظر گرفت بسیار پیچیده‌تر از یک خمینه است. دستیابی به نظریه‌هایی که رفتار پدیده‌های فیزیکی را در انرژیهای بالا توصیف کنند یکی از حوزه‌های پرهیجان فیزیک نظری امروز بشمار می‌رود. برخی از فیزیکدانان معتقدند که نظریهٔ ریسمان که در آن ذرات بنیادی (یعنی بنیادیترین آجرهای ساختمان جهان) به صورت موجودات یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شوند و برهم‌کنشهای بین آنها به‌صورت اتصال و پاره‌شدن این ریسمانها توصیف می‌گردد، نظریهٔ اصلی برای فیزیک انرژیهای بالاست. اگر چنین باشد، این سؤال پیش می‌آید که چگونه در فضایی که بنیادیترین جزء آن نقطهٔ هندسی است (یک موجود صفربعدی) بنیادیترین موجودات فیزیکی، موجوداتی یک‌بعدی‌اند. شاید این امرْ انعکاس این مطلب باشد که در انرژیهای بالا، فضا دیگر ساختاری نقطه‌ای آن‌طور که در هندسهٔ معمولی وجود دارد نداشته باشد. در مطالعهٔ نظریهٔ ریسمان در سالهای اخیر به‌نظر می‌رسد که این ریسمانها حالتهای مؤثری از یک نظریهٔ تعمیم‌یافته به‌نام نظریهٔ M[2] هستند که در انرژیهای بالاتر (بیش از انرژی پلانک) وجود دارد. ما هنوز نظریهٔ M را به‌درستی نمی‌شناسیم و تنها برخی از خواص آن را می‌دانیم ولی شواهدی دیده شده است که به نظر می‌رسد در نظریهٔ M باید مختصات فضا را ناجابجایی در نظر گرفت. مثالهای دیگری از کاربردهای هندسهٔ ناجابجایی در فیزیک را می‌توان در جبرهای موضعی در نظریهٔ میدان کوانتمی در فضای مینکوفسکی دید. نظریهٔ میدانهای همدیس نیز مورد دیگری برای این کاربرد است. ما در ادامه به معرفی چند مدل ساخته شده در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی می‌پردازیم. ابتدا یک نظریهٔ میدان پیمانه‌ای ساده را در یک فضای دو لایه مطالعه می‌کنیم، سپس به کنش هیلبرت‌ـاینشتین در یک فضای دو لایه می‌پردازیم و در پایان نیز برخی معایب این مدلها را به اجمال بازگو می‌کنیم. سعی شده است این مقاله تا حد زیادی خودکفا باشد، لذا در متن آن مراجع چندانی مشاهده نمی‌شود ولی لازم به توضیح است که مرجع اصلی برای بخش ۲ (نظریهٔ میدان پیمانه‌ای) مقالات [۱] هستند و برای بخش ۳ (کاربرد هندسهٔ ناجابجایی در کنشهای مؤثر) مراجع [۲ و ۳] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین مراجع بخش ۴ (گرانش در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی) [۵، ۶، ۷، و ۸] هستند. در ضمن مرجع [۸] کتاب معروف آلن‌کُن در هندسهٔ ناجابجایی است که کسانی که مایل‌اند جنبه‌های ریاضی مطلب را با تفصیل بیشتری مطالعه کنند می‌توانند از آن استفاده برند.

در سراسر این مقاله از قرارداد جمع اینشتین یعنی به کار بردن a^ib_i به جای $\sum_i a^ib_i$، و موارد مشابه، استفاده شده است.

1. Higgs 2. M theory

۲. نظریهٔ میدان پیمانه‌ای $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی

در این مرحله می‌خواهیم یک مدل پیمانه‌ای با گروه تقارن پیمانهٔ $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ را که مدلی برای توصیف برهم‌کنشهای الکتروضعیف است در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی بررسی کنیم. در این حالت فضا را متشکل از حاصلضرب یک خمینهٔ اسپینی[1] ریمانی چهاربعدی X در یک مجموعهٔ گسستهٔ دونقطه‌ای در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر فضا را اصطلاحاً پنج‌بعدی، که بعد پنجم آن گسسته است، فرض می‌کنیم. چون می‌خواهیم تقارن $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ را مطالعه کنیم فرض می‌کنیم که روی یک لایه یک کلاف بدیهی $\mathrm{U}(1)$ و روی لایهٔ دیگر کلاف بدیهی $\mathrm{SU}(2)$ را داریم. می‌توان دید که اگر جبری را که فضای پایهٔ X را توصیف می‌کند $\mathcal{A}_1$ بنامیم، $\mathcal{A}_1$ جبر توابع روی X است. طبق قضیهٔ سوان، هر کلاف برداری E با مدول مقطعها[2]ی آن $\mathcal{E}$ مشخص می‌گردد. در این حالت برای سادگی سعی می‌کنیم قضیه را ساده کنیم یعنی E را با یک جبر نشان دهیم. به عبارت بهتر فرض کنیم که جبری مانند $\mathcal{A}$ وجود دارد که فضای هندسی مذکور را کلاً توصیف می‌کند یعنی $\mathcal{E}=\mathcal{A}$. در این صورت

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2 \qquad (1)$$

که $\mathcal{A}_2=M_1(\mathbb{C})\otimes M_2(\mathbb{C})$، و منظور از $M_n(\mathbb{C})$ جبر ماتریسهای $n\times n$ با درایهٔ مختلط است. چون $\mathcal{A}$ یک C^*ـجبر[3] است پس دارای نمایشی در یک فضای هیلبرت مانند $\mathcal{H}$ است. و با توجه به ساختار جبر $\mathcal{A}$ بدیهی است که می‌توان $\mathcal{H}$ را جمع مستقیم دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_\circ$ و $\mathcal{H}_1$ گرفت و نمایش زیر را برای عناصر جبر $\mathcal{A}$ انتخاب کرد

$$\pi(a)=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix};\ a\in\mathcal{A} \qquad (2)$$

که a_1 و a_2 به ترتیب ماتریسهای ۱ × ۱ و ۲ × ۲ با درایه‌هایی در $\mathcal{A}_1$ هستند. برای ایجاد ساختار دیفرانسیلی روی $\mathcal{A}$، در $\mathcal{H}$ عملگر خودالحاق و بیکرانی به‌نام عملگر دیراک D انتخاب می‌کنیم. اینکه D را چه باید انتخاب کرد تنها به نظریه‌ای بستگی دارد که دنبال آن هستیم و اصلاً انتخاب مشخصی برای آن وجود ندارد ولی باید علاوه بر خودالحاقی بودن در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر عنصر جبر مانند a، عملگر $[D,a]$ بیکران باشد.

۲. عملگر $(1+D^2)^{-1}$ یک عملگر فشرده در $\mathcal{H}$ باشد.

ما در اینجا D را به صورت

$$D=\begin{pmatrix} \partial\!\!\!/\otimes 1_{1\times1} & \gamma_5\otimes M_{12}\\ \gamma_5\times M_{21} & \partial\!\!\!/\otimes 1_{2\times2}\end{pmatrix};\ M_{12}^*=M_{21} \qquad (3)$$

در نظر می‌گیریم که در آن $\partial\!\!\!/=i\gamma^\mu\partial_\mu$ و γ^μها ماتریسهای دیراک هستند و داریم

$$\gamma_\mu^*=-\gamma_\mu,\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=-2\delta_{\mu\nu},\gamma_5=i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad (4)$$

1. spin manifold 2. sections 3. C^*-algebra

و متریک فضا نیز $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ است. از آنجا که هدف ما ساختن یک نظریهٔ یانگ‌ـمیلز است، باید از روی ۱ـفرم هموستار (به زبان جبر) ۲ـفرم انحنا را به‌دست آورد و سپس آن را به توان دو رساند. پس فرض کنید که ρ یک عنصر دلخواه در فضای ۱ـفرمهای $\Omega^1(\mathcal{A})$ باشد. به عبارت دیگر کلیترین شکل یک ۱ـفرم به‌صورت زیر است

$$\rho = \sum_i a^i db^i ; a^i, b^i \in \mathcal{A} \tag{5}$$

که در اینجا جبر دیفرانسیل جامع[1] به صورت $\Omega^*(\mathcal{A}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\Omega^n(\mathcal{A})$ تعریف می‌شود که $\Omega^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ و اصولاً $\Omega^n(\mathcal{A})$ نقش nـفرمهای دیفرانسیلی را در هندسهٔ ناجابجایی ایفا می‌کنند. نمایش $\Omega^*(\mathcal{A})$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نگاشت $\pi : \Omega^*(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H})$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\pi(a_0 da_1 \dots da_n) = a_0 [D, a_1] \dots [D, a_n]; a_i \in \mathcal{A} \tag{6}$$

منظور از $B(\mathcal{H})$ جبر عملگرهای کراندار در $\mathcal{H}$ است. بدین ترتیب نمایش ρ به عنوان یک ۱ـفرم در $\mathcal{H}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\pi(\rho) = \sum_i a^i [d, b^i] =$$
$$\sum_i \begin{pmatrix} a_1^i \ \partial\!\!\!/ b_1^i & \gamma_5 \odot a_1^i (M_{12} b_2^i - b_1^i M_{12} \\ \gamma_5 \otimes a_2^i (M_{21} b_1^i - b_2^i M_{21}) & a_2^i \ \partial\!\!\!/ b_2^i \end{pmatrix} \tag{7}$$

اینک $\pi(\rho)$ را به صورت $\pi(\rho) = \begin{pmatrix} A_1 & \gamma_5 \odot \varphi_{12} \\ \gamma_5 \odot \varphi_{21} & A_2 \end{pmatrix}$ می‌نویسیم که در آن

$$A_n = \sum_i a_n^i \ \partial\!\!\!/ b_n^i ; \ n = 1, 2$$
$$\varphi_{mn} = \sum_i a_m^i (M_{mn} b_n^i - b_m^i M_{mn}); \ m \neq n \tag{8}$$

حال می‌خواهیم ρ یک ۱ـفرم هموستار مناسب برای میدان پیمانه‌ای باشد. معنای آن در اینجا این است که $\rho = \rho^*$ و $\mathrm{Tr}(\gamma_5 \rho) = 0$. پس به‌سادگی از روابط بالا دیده می‌شود که

$$A_n^* = A_n , \varphi_{mn}^* = \varphi_{nm} \tag{9}$$

اینک ۲ـفرم انحنای θ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\theta = \rho^2 + d\rho \tag{10}$$

که در آن

$$d\rho = \sum_i [D, a^i][D, b^i] \tag{11}$$

1. universal differential algebra

قبل از ادامهٔ بحث، ناوردایی پیمانه‌ای را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قسمت فرمیونی لاگرانژی نظریه به صورت

$$\langle \Psi, (D + \pi(\rho))\psi \rangle \tag{12}$$

است که $D + \pi(\rho)$ نقش مشتق هموردا را دارد و می‌خواهیم عبارت فوق تحت تبدیل $\psi \to \psi' = g\psi$ ناوردا بماند که در آن g متعلق به گروه تقارن پیمانه است. چون $\mathcal{A}$ را چنان تعریف کردیم که اطلاعات کلافها را نیز در بر می‌گیرد پس $g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. به $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ گروه یکانی[1] جبر می‌گوییم و داریم

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \{ g \in \mathcal{A} | g^* g = 1 \} \tag{13}$$

ناوردایی قسمت فرمیونی تحت تبدیل فوق ایجاب می‌کند که

$$\rho \to \rho' = g\rho g^* + g d g^* \tag{14}$$

که اگر آن را برحسب عناصر جبر بنویسیم داریم

$$\rho' = \sum_i (g a^i) d(b^i g^*) - g[(\sum_i a^i b^i) - 1] d g^* \tag{15}$$

که با تعریف ۱ـفرم انطباق دارد. جملهٔ دوم عبارت بالا دقیقاً شکل جملهٔ اول را دارد که در آن

$$\sum_i a^i b^i - 1 \in A$$

بنابراین می‌توان کل عبارت فوق را به صورت

$$\rho' = \sum_i (g a^i) d(b^i g^*) \tag{16}$$

نوشت. در این صورت می‌گوییم اثر تبدیلات پیمانه‌ای روی عناصر a^i و b^i به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a^i \to a'^i = g a^i \qquad , \qquad b^i \to b'^i = b^i g^* \tag{17}$$

چنین نگرشی باعث می‌گردد که بتوان شرط $\sum_i a^i b^i = 1$ را بدون کاستن از کلیت قضیه، اعمال کرد. ما از این به بعد در ۱ـفرم‌های هموستاری که می‌سازیم شرط فوق را در نظر خواهیم گرفت و این باعث سادگی محاسبات خواهد شد. به سادگی دیده می‌شود که

$$d\rho \to d\rho' = dg\rho g^* + dg dg^* + g d\rho g^* - g\rho dg^* \tag{18}$$

اینک اگر به سراغ ۲ـفرم انحنا برویم ملاحظه می‌شود که تحت تبدیلات فوق داریم

$$\theta \to \theta' = g\theta g^* \tag{19}$$

1 unitary

توجه داریم که نمایش g در $\mathcal{H}$ به صورت زیر است

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, g_1 \in \mathrm{U}(1),\ g_2 \in \mathrm{SU}(2) \qquad (۲۰)$$

حال با توجه به تبدیل ρ تحت g، به تبدیل درایه‌های ρ تحت درایه‌های g می‌پردازیم. ملاحظه می‌شود که تبدیل ψ به $\psi' = g\psi$ منجر به تبدیلهای زیر می‌شود

$$A_n \to A'_n = g_n A_n g_n^* + g_n\ \partial\!\!\!/ g_n^*,\ n = 1, 2$$
$$(\varphi_{mn} + M_{mn}) \to (\varphi_{mn} + M_{mn})' = g_m(\varphi_{mn} + M_{mn})g^*,\ m \neq n. \qquad (۲۱)$$

روابط فوق از این لحاظ جالب‌اند که دقیقاً یادآور تبدیلات پیمانه‌ای روی میدانهای A_1 و A_2 به عنوان میدانهای $\mathrm{U}(1)$ و $\mathrm{SU}(2)$ هستند. میدان $\varphi_{mn} + M_{mn}$ نیز به صورت مخلوطی از $\mathrm{U}(1)$ و $\mathrm{SU}(2)$ تبدیل پیمانه پیدا می‌کند. A_1 و A_2 نقش میدانهای پیمانه‌ای نظریه و φ_{mn} نقش میدان هیگز و M_{mn} نقش مقادیر امید خلاء میدان هیگز را دارند. اینک به محاسبهٔ نمایش θ در $\mathcal{H}$ می‌پردازیم. مشکلی که در سر راه این محاسبه وجود دارد در جملهٔ $d\rho$ نهفته است. از محاسبهٔ مستقیم مشاهده می‌شود

$$d\rho = \begin{pmatrix} d\rho_{11} & d\rho_{12} \\ d\rho_{21} & d\rho_{22} \end{pmatrix} \qquad (۲۲)$$

که در آن

$$d\rho_{11} = \sum_i \partial\!\!\!/ a_1^i\ \partial\!\!\!/ b_1^i + \sum_i (M_{12}a_2^i - a_1^i M_{12})(M_{21}b_1^i - b_2^i M_{21})$$
$$= \partial\!\!\!/ A_1 + M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} - X_{11} \qquad (۲۳)$$

که در آن X_{11} چنین است

$$X_{11} = \sum_i a_1^i(\partial\!\!\!/^2 b_1^i + [M_{12}M_{21}, b_1^i]) \qquad (۲۴)$$

اینک فرض کنید a^i و b^iها را چنان انتخاب کنیم که $\rho = 0$. معنای آن این است که $\varphi_{mn} = A_n = 0$. پس انتظار داریم $d\rho$ هم صفر شود. در محاسبهٔ بالا ملاحظه می‌شود که در اولین درایهٔ $d\rho$، جمله‌ای مانند $\sum_i a_1^i\ \partial\!\!\!/^2 b_1^i$ وجود دارد که الزاماً صفر نیست؛ پس این جمله که به میدان کمکی[1] معروف است مانع از صفر شدن $d\rho$ می‌شود. پیدایش چنین اشکالی به نگاشتی که عناصر جبر را در فضای هیلبرت به صورت نمایش ماتریسی درمی‌آورد یعنی به $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ برمی‌گردد. به سادگی می‌توان نشان داد چنین نگاشتی برای عناصر $\Omega^1(\mathcal{A})$ نیز کارساز است ولی در مورد $\Omega^{n>1}(\mathcal{A})$ باید نگاشت تغییر کند و ما در اینجا این کار را نکرده‌ایم. در این حالت π نمی‌تواند نمایش خوبی برای $\Omega^*(\mathcal{A})$ باشد. برای رفع چنین مشکلی، اگر اصرار در به کار بردن نمایش π داریم، به جای $\Omega^*(\mathcal{A})$ باید $\Omega_D^*(\mathcal{A})$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود به کار بریم. می‌توان نشان داد که $\Omega_D^*(\mathcal{A})$ تحت عملگر دیفرانسیل d بسته است و بنابراین دارای نمایش درستی در $\mathcal{H}$ است.

$$\Omega_D^*(\mathcal{A}) = \Omega^*(\mathcal{A})/(\ker\pi + d\ker\pi) \qquad (۲۵)$$

منظور از $\ker\pi$، هستهٔ نمایش π است. اینک چون $d\rho$ یک ۲ـفرم است پس معنای مطالب فوق این است که X_{11} را با دست حذف کنیم. در نتیجه

$$d\rho_{11} = \partial\!\!\!/ A_1 + M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} \qquad (۲۶)$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که اگر $d\rho_{22}$ را نیز محاسبه کرده میدان کمکی مربوطه را حذف کنیم خواهیم داشت

$$d\rho_{22} = \partial\!\!\!/ A_2 + M_{21}\varphi_{12} + \varphi_{21}M_{12} \qquad (۲۷)$$

در مورد $d\rho_{12}$ و $d\rho_{21}$ مشکلی به‌وجود نمی‌آید و میدان کمکی ظاهر نمی‌شود

$$d\rho_{12} = -\gamma_5(\partial\!\!\!/\varphi_{12} + A_1M_{12} - M_{12}A_2) \qquad (۲۸)$$

اما هنوز مشکل ما حل نشده است. اگر به عبارت $d\rho_{11}$ برگردیم می‌بینیم که نحوهٔ انتخاب میدان کمکی کاملاً دلخواه است. **مثلاً** می‌توانیم $M_{12}\varphi_{21} + \varphi_{12}M_{21} - X_{11}$ را میدان کمکی فرض کنیم و آن را حذف کنیم. در این صورت باز شرط $\rho = 0 \Rightarrow d\rho = 0$ برقرار می‌شود. اما اگر این کار را بکنیم در نظریه چیزی به نام پتانسیل هیگز باقی نمی‌ماند. یک راه‌حل این مسأله بازگشت به عملگر دیراک D و تغییر آن به صورت زیر و انجام دوبارهٔ تمام محاسبات فوق است

$$D = \begin{pmatrix} \partial\!\!\!/ \otimes 1_{1\times 1} \otimes 1_{n\times n} & \gamma_5 \otimes M_{12} \otimes K_{12} \\ \gamma_5 \otimes M_{21} \otimes K_{21} & \partial\!\!\!/ \otimes 1_{2\times 2} \otimes 1_{n\times n} \end{pmatrix}; K_{12} = K_{21}^* = K \qquad (۲۹)$$

که در آن K ماتریسی است $n \times n$ که با عناصر جبر جابجا می‌شود، و مقصود از $1_{n\times n}$ ماتریس همانی $n \times n$ است. در واقع Kها به زوایای اختلاط کوارکی نسلهای مختلف ارتباط دارند. در این حالت داریم

$$\pi(\rho) = \begin{pmatrix} A_1 & \gamma_5 HK \\ \gamma_5 H^*K^* & A_2 \end{pmatrix} \qquad (۳۰)$$

که در آن $A_n = \sum_i a_n^i\ \partial\!\!\!/ b_n^i$ و نیز

$$H = \sum_i a_1^i(M_{12}b_2^i - b_1^iM_{12}) \qquad (۳۱)$$

اینک فرض می‌کنیم $M_{12} = \mu\binom{0}{1}$ و تعریف می‌کنیم:

$$I_{\mathrm{Y.M}} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}_w(\theta^2|D|^{-4}) = \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{tr}(\pi^2(\theta))) \qquad (۳۲)$$

[1] auxiliary field

که منظور از Tr_w، رد دیکس‌میه[1] است [۸]. همچنین منظور از Tr، تعیین‌رد روی ساختار ماتریسی جبر و منظور از tr، تعیین‌رد روی ساختار کلیفرد است. در نتیجه برای مدل فوق به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{Y.M}} = & \frac{1}{2}((F^{1}_{\mu\nu})^{I}_{J}(F^{1}_{\mu\nu})^{J}_{I} + (F^{2}_{\mu\nu})^{I}_{J}(F^{2}_{\mu\nu})^{J}_{I}) + 2\mathrm{Tr}(KK^{*})|\partial_\mu(K^{I} - H^{I}_{\circ}) \\ & + (A_{\mu 1})^{I}_{J}(H^{J} - H^{J}_{\circ}) - (H^{I} - H^{I}_{\circ})A_{\mu 2}|^{2} \\ & - (\mathrm{Tr}(KK^{*})^{2}(\mathrm{Tr}(KK^{*})))^{2}((H^{I} - H^{I}_{\circ})(H_{I} - H_{\circ I}) - \mu))^{2} \end{aligned} \tag{۳۳}$$

که منظور از $F^{m}_{\mu\nu}$ این است

$$F^{m}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{m}_{\nu} - \partial_\nu A^{m}_{\mu} + [A^{m}_{\nu}, A^{m}_{\mu}] \tag{۳۴}$$

و منظور از $(F^{m}_{\mu\nu})^{I}_{J}$ عنصر IJام از ساختار ماتریسی است. $H_\circ$ نیز مقدار امید در حالت خلاء میدان هیگز H است. در روابط بالا بهنجارش را چنان انتخاب کرده‌ایم که در آن $\mathrm{Tr}\,1 = 1$ فرض شده است. برای رسیدن به مدل متعارف ذرات بنیادی با تقارن $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ کافی است فرضهای زیر را در نظر بگیریم

$$A_1 = -\frac{1}{2} i g_2 A^{\alpha} \sigma_\alpha + i g_1 B \tag{۳۵}$$

و

$$A_2 = 2 i g_1 B \tag{۳۶}$$

که در آن σ_α ماتریسهای پائولی و A^{α} میدان پیمانه‌ای $\mathrm{SU}(2)$ و B میدان پیمانه‌ای $\mathrm{U}(1)$ است. برای کنش فرمیونی نیز باید به عبارت $I_{\mathrm{Y.M}}$، جملهٔ $\langle\psi, (D + \pi(\rho))\psi\rangle$ را اضافه کنیم.

اجازه بدهید که بیش از این جلو نرفته و بحث میدانهای پیمانه‌ای را با بیان نتایجی که تاکنون به دست آورده‌ایم به پایان ببریم.

اولین نتیجهٔ مهم آن است که در نوشتن کنش یانگ-میلز، میدان هیگز H با پتانسیل صحیح به‌دست می‌آید. و در طول محاسبهٔ میدان هیگز مانند میدان پیمانه‌ای ظاهر می‌شود. ثانیاً وجود ماتریس K که در کنش مانند ماتریس اختلاط کوبایاشی-ماساکاوا[2] ست نشان می‌دهد که باید بیش از یک نسل از ذرات را داشته باشیم و نهایتاً بین ضرایب جفت‌شدگی در کنش ارتباط برقرار شده است.

۳. کاربرد هندسهٔ ناجابجایی در کنشهای مؤثر

در بخش قبل میدان پیمانه‌ای $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ را به عنوان مثالی از یک نظریهٔ پیمانه‌ای بررسی کردیم ولی این مثال تنها قسمتی از نظریهٔ متعارف ذرات است که تقارن اولیهٔ آن $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ است. در مثال فوق شاهد ظاهر شدن میدان هیگز بودیم که باعث شکست تقارن $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ به $\mathrm{U}(1)_{em}$ می‌شود[3]. ولی بخش $\mathrm{SU}(3)$ را که منشأ برهمکنشهای قوی است حذف کردیم. این بخش در واقع مبین نظریهٔ QCD[4] است که در انرژیهای پایین شدیداً رفتار غیرخطی از خود نشان

1. Dixmier trace 2. Kobayashi-Masakawa Mixing

۳. منظور از em الکترومغناطیس است.

4. Quantum Choromo Dynamics

می‌دهد و نمی‌توان با استفاده از روش متداول اختلال به بررسی آن پرداخت. ما در این قسمت به مطالعهٔ QCD در انرژیهای پایین و در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی می‌پردازیم. چیزی که به دست خواهیم آورد کنش مؤثری برای QCD خواهد بود که به نظریهٔ اختلال تکدست معروف است. از این حقیقت پدیده شناختی به نام PCAC[1] شروع می‌کنیم که هادرونها (یا ذراتی که در برهمکنشهای قوی شرکت می‌کنند) در انرژیهای پایین برهمکنشهای ضعیفی با هم دارند. در نتیجه می‌توان کنش مؤثر را برحسب تکانه‌های میدان بسط اختلالی[2] داد. بنابراین لاگرانژی مورد نظر خود را به صورت

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \ldots \tag{۳۷}$$

می‌نویسیم که $\mathcal{L}^{(n)}$ معرف جملاتی از لاگرانژی است که نسبت به تکانه یا به عبارت بهتر نسبت به مشتقات میدان از مرتبهٔ n هستند. برای شروع، جبر مورد نیاز را به صورت

$$\mathcal{A} = (\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M}) \otimes M_N(\mathbb{C})) + M_N(\mathbb{C}) \tag{۳۸}$$

در نظر می‌گیریم. جبر فوق بیانگر فضایی است متشکل از یک خمینهٔ پنج‌بعدی $\mathbb{R}^4 \times S^1$ که در آن S^1 دایره‌ای است با شعاع کوچک و روی آن یک کلاف $\mathrm{U}(N)$ قرار دارد و در خارج از آن نقطه‌ای است که روی آن یک فضای برداری $\mathrm{U}(N)$ نیز واقع شده است. عملگر دیراک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$D = \begin{pmatrix} \not{\partial} \otimes 1_{N\times N} & \gamma_5 \otimes M \\ \gamma_5 \otimes M^{*} & 0 \end{pmatrix} \tag{۳۹}$$

به طوری که $MM^{*} = M^{*}M = 1_{N\times N}$. اینک بحث را به $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ یعنی گروه یکانی جبر $\mathcal{A}$ محدود می‌کنیم. در این صورت اگر L یک ۱-فرم به صورت زیر باشد

$$L = g\,dg^{*}, \qquad \forall g \in \mathcal{U}(\mathcal{A}) \tag{۴۰}$$

می‌توان dg^{*} را تعمیم ناجابجایی مشتق میدانِ g^{*} در نظر گرفت. در این صورت کلی‌ترین شکل $\mathcal{L}^{(n)}$ها را برای nهای مختلف می‌نویسیم. با توجه به اینکه $\mathcal{L}^{(n)}$ها اسکالرند داریم

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathrm{Tr}(K^{(1)}_{1} L), \tag{۴۱}$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathrm{Tr}(K^{(2)}_{1} L^{2}) + [\mathrm{Tr}(K^{(2)}_{2} L)]^{2}, \tag{۴۲}$$

$$\mathcal{L}^{(3)} = \mathrm{Tr}(K^{(3)}_{1} L^{3}) + \mathrm{Tr}(K^{(3)}_{2} L)\mathrm{Tr}(L^{2}) + [\mathrm{Tr}(K^{(3)}_{3} L)]^{3}, \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)} = & \mathrm{Tr}(K^{(4)}_{1} L^{4}) + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_{2} L^{2})]^{2} + \mathrm{Tr}(K^{(4)}_{3} L)\mathrm{Tr}(L^{3}) \\ & + \mathrm{Tr}(K^{(4)}_{4} L^{2})[\mathrm{Tr}(L)]^{2} + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_{5} L)]^{4} + [\mathrm{Tr}(K^{(4)}_{6} L)]^{2}\mathrm{Tr}(L^{2}) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

که در آن $K^{(i)}_{j}$ها ماتریسهای قطری هستند که عناصر آنها یعنی $(k^{(i)}_{j}, k'^{(i)}_{j})$ معرف ثابتهای جفت‌شدگی روی دو لایهٔ فضا هستند (خمینه و نقطهٔ خارج آن).

1. Partial Current Axial Current 2. perturbation expansion

اینک با فرض نمایش g به صورت $g = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix}$ و $\chi = MU'M^*$ خواهیم داشت $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(3)} = 0$، که این در واقع معرف ناوردایی لاگرانژی تحت تبدیلات لورنتس است که به‌طور طبیعی بدست می‌آید، و پس از ساده‌کردن $\mathcal{L}$ داریم

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & [-4k_1^{(2)} - 8m^2(3k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1) - 192m^2 k_2^{(2)}(k_2^{(2)} + k'^{(2)}_2)]\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \\
& + [-4(k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1) - 16m^2(k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1) - 192m^2(k_2^{(2)} + k'^{(2)}_2)^2] \\
& \quad \mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \\
& + (-2k_1^{(2)} + 16(k_2^{(2)})^2)[\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)]^2 - 4k_1^{(2)}\mathrm{Tr}(\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger) \\
& \quad \mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger) \\
& + 16k_1^{(2)}\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger) + 32k_2^{(2)}(k_2^{(2)} + k'^{(2)}_2) \\
& \quad \mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \\
& + 4(3k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1)\mathrm{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger)) \\
& \quad + 16(k_2^{(2)} + k'^{(2)}_2)^2[\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger)]^2 \\
& + 4(k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1)\mathrm{Tr}(\chi U^\dagger \chi U^\dagger + \chi^\dagger U \chi^\dagger U) \\
& \quad + 8(k_1^{(2)} + k'^{(2)}_1)\mathrm{Tr}(\chi\chi^\dagger)
\end{aligned} \tag{45}$$

خاطرنشان می‌کنیم که در محاسبات بالا $N = 3$ فرض شده است که منشأ آن تقارن $SU(3)$، طعم[1]، است. لاگرانژیِ فوق چیزی جز لاگرانژیِ نظریهٔ مؤثر اختلال تکدست نیست و می‌توان آن را با لاگرانژیِ اصلی نظریه که در آن ضرایب جفت‌شدگی L_i نامیده شده است [۴] مقایسه کرد. از این مقایسه به‌سادگی معلوم می‌شود که در اینجا بین این ثابتهای جفت‌شدگی ارتباطهایی برقرار شده است. در زیر روابط بین این ثابتهای جفت‌شدگی ملاحظه می‌شود

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{1}{2}(L_8 - L_5) \\
L_3 &= -4L_2 \\
L_4 &= L_6 \\
L_6 &= 4L_1 - 2L_2 \\
L_7 &= 0
\end{aligned} \tag{46}$$

این روابط که با استفاده از روابط صوری هندسهٔ ناجابجایی به‌دست می‌آیند با نتایج آزمایشگاهی تطابق قابل ملاحظه‌ای دارند. اگر $\mathcal{L}^{(5)}$ را نیز محاسبه کنیم خواهیم دید که

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(5)} = k^{(5)} \in^{ijklm} \mathrm{Tr}(U\partial_j U^\dagger \partial_j U \partial_k U^\dagger \partial_l U \partial_m U^\dagger); \\
i, j, k, l, m = 0, 1, 2, 3, 5
\end{aligned} \tag{47}$$

این جمله که به جملهٔ (Wess-Zumino-Witten-Novikov)WZWN در فیزیک شهرت دارد باعث حذف بینهایتهایی می‌شود که در محاسبهٔ کمیات فیزیکی به وسیلهٔ بقیهٔ جملات تولید می‌شوند («حذف نابهنجاری»). ما این لاگرانژی را تا مرتبهٔ ۵ به‌دست آوردیم. جملات مرتبهٔ بالاتر از راههای پدیده شناختی نیز محاسبه نشده‌اند تا مورد مقایسه قرار گیرند.

1. flavour

۴. گرانش در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی

علت اصلی مطالعهٔ مدلهای گوناگون فیزیک در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی در واقع این است که اطلاعات ما در مورد ساختارهای فضا در همسایگیهای بسیار کوچک نقاط چندان زیاد نیست. ابزار هندسهٔ ناجابجایی این امکان را به ما می‌دهد که مدلهای معمولی فیزیک، را که در فضای جابجایی معمولی بررسی شده‌اند به فضاهای ناجابجایی تعمیم دهیم و اثر تغییر ساختار فضا را بر این مدلها بررسی کنیم. مدل گرانش یکی از این مدلهاست. ما در اینجا سعی می‌کنیم که کنش هیلبرت-اینشتین را در یک فضای ساده که تنها کمی تعمیم‌یافته‌تر از فضا-زمان جابجایی معمولی است مطالعه کنیم. بنابراین توجه داریم که این تنها مدل برای بررسی گرانش در چارچوب، هندسهٔ ناجابجایی نیست. فضای مورد مطالعهٔ ما در واقع یک فضای پنج‌بعدی است که عبارت است از یک فضای ریمانی چهاربعدی که در یک فضای دونقطه‌ای ضرب شده است (مانند آن چیزی که در بخشهای قبل هم دیدیم). مزیت این بخش در این است که برخی مطالب با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌گیرند.

ابزار لازم: فرض کنید که X، فضای مورد بحث، عبارت از دو نسخه از یک خمینهٔ اسپینی چهاربعدی Y باشد یعنی

$$X = Y \times \mathbb{Z}_2 \tag{48}$$

در این صورت یک کلاف بدیهی $\mathbb{Z}_2$ به صورت $p : X \to Y$ داریم. $\mathcal{A}$، جبری که یک چنین فضایی را توصیف می‌کند، به صورت

$$\mathcal{A} = C^\infty_{\mathbf{R}}(Y) \oplus C^\infty_{\mathbf{R}}(Y) \tag{49}$$

می‌باشد که در آن منظور از $C^\infty_{\mathbf{R}}(Y)$ جبر توابع حقیقیِ بینهایت بار مشتق‌پذیر روی Y است. البته راحت‌تر خواهد بود که جبر $\mathcal{A}$ را به صورت زیرجبر ماتریسهای قطری 2×2 در جبر $M_2(\mathbb{C}) \otimes C^\infty(\mathrm{cliff}(T^*Y))$ در نظر بگیریم. به عبارت ساده‌تر اگر $a \in \mathcal{A}$، آنگاه

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} 1_{4\times4} \otimes f(x) & 0 \\ 0 & 1_{4\times4} \otimes g(x) \end{pmatrix} \tag{50}$$

که منظور از x نقطهٔ مورد نظر در فضای فوق است و $f, g \in C^\infty_{\mathbf{R}}(Y)$. در این حالت γ_5، عملگر تکدستی روی جبر کلیفرد است و عملگر درجه‌بندی $\mathbb{Z}_2$ را به صورت

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix} \tag{51}$$

در نظر می‌گیریم. این عملگر درجه‌بندی روی فضای

$$C^\infty(s_x) = C^\infty(s) \oplus C^\infty(s)$$

عمل می‌کند که s، کلاف اسپینوری روی Y است. برای مثال عملگر دیراک را به صورت

$$D = \begin{pmatrix} \gamma^\mu \otimes \partial_\mu & 1_{2\times 2} \otimes \psi + \gamma_5 \otimes \varphi \\ 1_{2\times 2} \otimes \psi + \gamma_5 \otimes \varphi & \gamma^\mu \otimes \partial_\mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma^a \epsilon^\mu_a \partial_\mu & \psi + \gamma_5 \varphi \\ \psi + \gamma_5 \varphi & \gamma^a \epsilon^\mu_a \partial_\mu \end{pmatrix} \qquad (۵۲)$$

در نظر می‌گیریم. در جملات غیرقطری، برخلاف بخشهای قبل علاوه بر جمله‌ای بر حسب γ_5، جمله‌ای متناسب با $1_{2\times 2}$ نیز داریم و از این نظر این عملگر دیراک تعمیم‌یافته‌تر از عملگرهای دیراک قبلی است. باید دقت کرد که ϵ^μ_aها، فیرباینها[1] و γ^a ماتریسهای دیراک در مختصات تراد[2] هستند. در ضمن به‌علت سادگی و روشن بودن مطالب از نوشتن علامت $\otimes$ در محاسبات خودداری کرده‌ایم. حال قبل از آنکه خود را درگیر محاسباتی چون محاسبهٔ هموستار، تاب و انحنا کنیم به محاسبات ساده‌تر ۱ـفرمها و ۲ـفرمها می‌پردازیم.

اگر $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{A})$، به‌سادگی دیده می‌شود که

$$a = \sum_i a_i [D, b_i], \ \forall a_i, b_i \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \sum_i \gamma^a \epsilon^\mu_a a_{i1} \partial_\mu b_{i1} & \sum_i (\psi + \gamma_5 \varphi) a_{i1}(b_{i2} - b_{i1}) \\ \sum_i -(\psi + \gamma_5 \varphi) a_{i2}(b_{i2} - b_{i1}) & \sum_i \gamma^a \epsilon^\mu_a a_{i1} \partial_\mu b_{i2} \end{pmatrix}$$

(۵۳)

اینک اگر تعریف کنیم

$$\alpha_5 := \sum_i a_{i1}(b_{i2} - b_{i1}) \qquad \alpha_{1\mu} := \sum_i a_{i1} \partial_\mu b_{i1}$$

$$\bar{\alpha}_5 := \sum_i a_{i2}(b_{i2} - b_{i1}) \qquad \alpha_{2\mu} := \sum_i a_{i2} \partial_\mu b_{i2}$$

$$\overline{\gamma} := (\psi + \gamma_5 \varphi)$$

و در نظر داشته باشیم که $\gamma^\mu = \gamma^a \epsilon^\mu_a$، خواهیم داشت:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma^\mu \alpha_{1\mu} & \overline{\gamma} \alpha_5 \\ -\overline{\gamma} \bar{\alpha}_5 & \gamma^\mu \alpha_{2\mu} \end{pmatrix} \in \Omega^1(\mathcal{A}) \qquad (۵۴)$$

رابطهٔ فوق شکل کلیترین ۱ـفرم را در مثال اخیر نشان می‌دهد. توجه داریم که $\alpha_{i\mu}$، α_5 و $\bar{\alpha}_5$ از عناصر جبر $\mathcal{A}$ و در واقع توابع معمولی

1. vierbeins

۲. منظور از مختصات تراد دستگاه مختصات متعامدی است که می‌توان به‌طور موضعی روی خمینهٔ (۴بعدی) بنا کرد. در این صورت فیربانیها عناصر ماتریس تبدیل دستگاه مختصات طبیعی و مختصات تراد هستند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به کتاب M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, Bristol, (1990) 244. مراجعه کرد.

هستند. بنابراین رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که پایه‌های ۱ـفرم یعنی معادلهای $dx^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$ و dx^5 چه می‌تواند باشد. (ما این را در زیربخش ۷.۴ خواهیم دید) اینک به محاسبهٔ ۲ـفرمها پرداخته، کلیترین شکل آنها را به‌دست می‌آوریم

$$d\alpha = d\sum_i a_i db_i = \sum_i [D, a_i][D, b_i] = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (۵۵)$$

که با کمی محاسبه می‌توان دید:

$$A_{11} = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \alpha_{1\nu} + (g^{55} + 2\gamma_5 \psi \varphi)(\alpha_5 - \bar{\alpha}_5) - \gamma^\mu \gamma^\nu \sum_i a_{i1} \partial \mu \partial_\nu b_{i1}$$

$$A_{12} = \gamma^\mu \gamma_5 \varphi(\partial_\mu \alpha_5 + \alpha_{1\mu} - \alpha_{2\mu}) + \gamma^\mu \psi(\partial_\mu \alpha_5 + \alpha_{1\mu} + \alpha^{2\mu}) - 2\gamma^\mu \psi \sum_i a_{i1} \partial_\mu b_{i2}$$

$$A_{21} = \gamma^\mu \gamma_5 \varphi(\partial_\mu \bar{\alpha}_5 + \alpha_{1\mu} - \alpha_{2\mu}) - \gamma^\mu \psi(\partial_\mu \bar{\alpha}_5 - \alpha_{1\mu} - \alpha^{2\mu}) - 2\gamma^\mu \psi \sum_i a_{i2} \partial_\mu b_{i1}$$

$$A_{22} = \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \alpha_{2\nu} + (g^{55} + 2\gamma_5 \psi \varphi)(\alpha_5 - \bar{\alpha}_5) - \gamma^\mu \gamma^\nu \sum_i a_{i2} \partial_\mu \partial_\nu b_{i2} \qquad (۵۶)$$

در محاسبهٔ بالا منظور از g^{55} چنین است: $g^{55} = \psi^2 + \varphi^2$.

در جملات فوق به‌راحتی می‌توان میدانهای کمکی را تشخیص داد. پس از حذف این میدانها، کلیترین شکل ۲ـفرمها به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$d\alpha = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \alpha_{1\nu} + 2\varphi\psi\gamma_5(\alpha_5 - \bar{\alpha}_5) & \varphi\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\mu \alpha_5 + \alpha_{1\mu} - \alpha_{2\mu}) \\ -\varphi\gamma^\mu\gamma_5(\partial_\mu \bar{\alpha}_5 + \alpha_{1\mu} - \alpha_{2\mu}) & \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \alpha_{2\nu} + 2\varphi\psi\gamma_5(\alpha_5 - \bar{\alpha}_5) \end{pmatrix}$$

(۵۷)

که در آن $\gamma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. از شکل $d\alpha$ ملاحظه می‌شود که پایه‌های ۲ـفرم از $\gamma^{\mu\nu}$ (به جای $dx^\mu \wedge dx^\nu$) ساخته شده است.

۱.۴ کلاف برداری روی جبر $\mathcal{A}$، متریک، هموستار، انحنا

در این مرحله چون می‌خواهیم گرانش را در یک فضای تعمیم‌یافته بررسی کنیم باید هندسهٔ ریمانی را نیز برای چنین فضایی تعمیم دهیم. لذا مفاهیمی مانند متریک، هموستار و ... را باید به سطح جبر تعمیم داد.

۱.۱.۴ کلاف برداری روی جبر $\mathcal{A}$. بنابر قضیهٔ سوان، یک کلاف برداری بدیهی روی خمینه‌ای که $\mathcal{A}$ آن را توصیف می‌کند، چنان است که مقطعهای آن کلاف برداری یک مدول آزادِ متناهی‌مولد[1] روی $\mathcal{A}$ می‌باشد. ما در بخشهای بعد این کلاف برداری را با $\mathcal{E}$ نشان خواهیم داد.

۲.۱.۴ هموستار روی $\mathcal{E}$. یک هموستار[2] روی $\mathcal{E}$ عبارت از نگاشت خطی

$$\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \qquad (۵۸)$$

1. finitely-generated free module 2. connection

است که دارای خاصیت زیر باشد

$$\forall \xi \in \mathcal{E}; a \in \mathcal{A}: \ \nabla(a\xi) = da \otimes \xi + a\nabla\xi \tag{۵۹}$$

۳.۱.۴ متریک هرمیتی روی $\mathcal{E}$. متریک هرمیتی و یا ساختار هرمیتی روی $\mathcal{E}$ عبارت است از نگاشتی به صورت

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A} \tag{۶۰}$$

به طوری که

$$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E} : \langle a_1\xi_1, a_2\xi_2 \rangle = a_1 \langle \xi_1, \xi_2 \rangle a_2^* \tag{۶۱}$$

و

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle^* = \langle \xi_2, \xi_1 \rangle \tag{۶۲}$$

و نیز $\langle \xi, \xi \rangle$ یک عنصر مثبت $\mathcal{A}$ باشد یعنی بتوان $\langle \xi, \xi \rangle$ را به صورت حاصلضرب aa^* (که $a, a^* \in \mathcal{A}$) نوشت و همچنین داشته باشیم

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \tag{۶۳}$$

مثال: $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ پایه‌ای برای $\mathcal{E}$ باشد می‌توان $\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij}$ را به عنوان متریک هرمیتی روی $\mathcal{E}$ به‌کارگرفت (باید توجه داشت که $\delta_{ij} \in \mathcal{A}$).

۴.۱.۴ هموستار هرمیتی روی $\mathcal{E}$. این هموستار، که آن را با ∇ نشان می‌دهیم، در شرط زیر صدق می‌کند

$$d < \xi, \eta > = < \nabla\xi, \eta > - < \xi, \nabla\eta >; \forall \eta, \xi \in \mathcal{E} \tag{۶۴}$$

۵.۱.۴ تعمیم هموستار از فضای $\mathcal{E}$ به فضای $\Omega_D(\mathcal{E})$. هموستار را روی $\mathcal{E}$ تعریف کردیم و دیدیم که نتیجهٔ اثر عملگر ∇ روی یک بردار $s \in \mathcal{E}$ موجودی در فضای $\Omega^1_D(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{E}$ است (منظور از $\Omega^n_D(\mathcal{A})$، فضای nـفرمهای دیفرانسیلی روی جبر $\mathcal{A}$، پس از حذف میدانهای کمکی است). واضح است که چون $\mathcal{E}$ یک مدول آزاد است پس دارای پایه است و چون متناهی‌ـمولد است پس تعداد پایه‌های آن متناهی است. اینک فرض کنید که مجموعهٔ $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ مجموعهٔ بردارهای پایهٔ $\mathcal{E}$ باشد، در این صورت علی‌القاعده $\nabla(s_i)$ باید به صورت ترکیبی خطی از $s_k \otimes \theta^j$ها باشد که θ^jها پایه‌های ۱ـفرم در $\Omega^1_D(\mathcal{A})$اند. پس

$$\nabla(s_i) = \gamma^k_{ji}\theta^j \otimes s_k = (\gamma^k_{ji}\theta^j) \otimes s_k \tag{۶۵}$$

که به γ^k_{ji}ها ضرایب هموستار می‌گوییم. با در دست بودن γ^k_{ji}ها، ∇ مشخص می‌شود. به هر حال چون $\gamma^k_{ji}\theta^j \in \Omega^1_D(\mathcal{A})$، این عناصر را به صورت زیر نامگذاری می‌کنیم

$$\gamma^k_{ji}\theta^j = \rho^k_i \in \Omega^1_D(\mathcal{A}) \tag{۶۶}$$

و به ρ^k_i، ۱ـفرم هموستار می‌گوییم. پس

$$\nabla(s_i) = \rho^j_i \otimes s_j \tag{۶۷}$$

اینک می‌توان اثر ∇ را که روی عناصر $\mathcal{E}$ تعریف شده است تعمیم داد و اثر آن را روی عنصری مانند $\rho^j_i \otimes s_j$ که در $\Omega^1_D(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{E}$ است تعریف کرد و اصولاً اثر ∇ را روی هر عنصر به صورت $\Omega_D(\mathcal{E}) = \Omega_D(\mathcal{A}) \times \mathcal{E}$ تعریف نمود. اینک، تعریف می‌کنیم که اگر $\alpha \in \Omega_D(\mathcal{A})$ و $s \in \mathcal{E}$، آنگاه

$$\nabla(\alpha s) = (d\alpha) \otimes s + (-)^{\deg\alpha}\alpha\nabla(s) \tag{۶۸}$$

که واضح است $\alpha s \in \Omega_D(\mathcal{E})$ و منظور از $\deg\alpha$ درجهٔ فرم α است.

۶.۱.۴ انحنا. با توجه به مطالب قسمت قبل می‌توان اثر ∇^2 را روی یک بردار مانند $\xi = a^i s_i \in \mathcal{E}$ محاسبه کرد که در آن $\{s_i\}$ پایهٔ $\mathcal{E}$ است و $a^i \in \mathcal{A}$.

بدین‌ترتیب:

$$-\nabla^2(a^i s_i) = a^i(d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k) \otimes s_j \tag{۶۹}$$

اما $d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k$ همان ۲ـفرم انحناست که در بخش میدانهای پیمانه‌ای تعریف کردیم. پس

$$-\nabla^2(s_i) = (d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k) \otimes s_j \tag{۷۰}$$

عملگر $-\nabla^2$ را با R نشان داده به آن عملگر انحنا می‌گوییم.

$$R(s_i) = R^j_i \otimes s_j \tag{۷۱}$$

ما در بحث میدانهای پیمانه‌ای ضرایب R^j_i را با θ نشان دادیم و در واقع، $\theta^j_i = d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k$ و $R(s_i) = \theta^j_i \otimes s_j$.

۲.۴ تبدیلات پایه روی $\mathcal{E}$ و اثر آن روی هموستار

فرض کنید که پایهٔ $\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ در $\mathcal{E}$ را به صورت زیر به پایهٔ $\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots \tilde{s}_N\}$ تبدیل کنیم

$$\tilde{s}_i = M^j_i s_j \tag{۷۲}$$

که $M^j_i \in \mathcal{A}$. در این صورت بنابر تعریف داریم

$$\nabla(\tilde{s}_i) = \tilde{\rho}^j_i \otimes \tilde{s}_j \tag{۷۳}$$

با توجه به پایه‌های s_i نیز رابطهٔ فوق چنین است

$$\nabla(s_i) = \rho^j_i \otimes s_j \tag{۷۴}$$

بنابراین به سادگی دیده می‌شود که

$$\tilde{\rho}^j_i = M^k_i\rho^l_k(M^{-1})^j_l + dM^k_i(M^{-1})^j_k \tag{۷۵}$$

و این همان رابطهٔ تبدیلات پیمانه‌ای است:

$$\tilde{\rho} = M\rho M^{-1} + dMM^{-1} \tag{۷۶}$$

و به همین ترتیب در مورد انحنا می‌توان دید که

$$\tilde{\theta} = M\theta M^{-1} \tag{۷۷}$$

۳.۴ خصوصیات هموستار هرمیتی

اگر ∇ یک هموستار هرمیتی باشد با توجه به (۷۴) می‌بینیم که

$$\rho^i_j = \rho^{*j}_i \qquad (۷۸)$$

و این در واقع همان شرطی بود که برای میدان پیمانه‌ای در بحث میدانهای پیمانه‌ای به‌کار بردیم.

۴.۴ تعمیم هموستار هرمیتی روی $\Omega_D(\mathcal{E})$

با توجه به تعریف ∇ در قسمتهای قبل، ∇ را یک هموستار هرمیتی روی $\Omega_D(\mathcal{E})$ می‌نامیم اگر

$$d\langle\varphi,\psi\rangle = \langle\nabla\varphi,\psi\rangle - (-)^{\deg\varphi\deg\psi}\langle\varphi,\nabla\psi\rangle\ \forall\varphi,\psi\in\Omega_D(\mathcal{E}) \qquad (۷۹)$$

۵.۴ گرانش و تعمیم هندسهٔ ریمانی به هندسهٔ ناجابجایی

تا اینجا تقریباً با تمام ابزارهای لازم برای بررسی گرانش در فضایی که با جبر دادهٔ شدهٔ $\mathcal{A}$ مشخص می‌گردد، آشنا شده‌ایم. تاب را نیز به زودی مطالعه می‌کنیم. اما مسیر اصلی در این بررسی آن است که بدانیم چه چیزی را باید به عنوان کلاف برداری $\mathcal{E}$ روی جبر $\mathcal{A}$ انتخاب کرد. پاسخ، $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ است. توجه داریم که $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ یک $\mathcal{A}$ـمدول پروژکتیو چپ و متناهی‌ـمولد است. برای بررسی گرانش، $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ را به عنوان کلاف برداری انتخاب می‌کنیم. بنابراین تمام محاسبات خود را بر روی کلاف کُتانژانت انجام می‌دهیم.

۶.۴ تاب

دیدیم که اثر $-\nabla^2$ روی $\mathcal{E}$ همان اثر انحنا روی $\mathcal{E}$ است و دیدیم که ۲ـفرم انحنا به صورت زیر است

$$\theta^j_i = d\rho^j_i + \rho^k_i\rho^j_k \qquad (۸۰)$$

این در واقع یکی از معادلات ساختاری کارتان است. در هندسهٔ دیفرانسیل معمولی ما ضرایب تاب[1] را به صورت $T^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$، که Γ^i_{kl}ها ضرایب هموستارند، تعریف می‌کنیم. از روی T^i_{kl}ها می‌توان ۲ـفرم تاب را تعریف کرد که در واقع نگاشتی به صورت $\Omega^1 \to \Omega^1\wedge\Omega^1$ است و چنین تعریف می‌شود

$$T(\theta^i) = \frac{1}{2}T^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l \qquad (۸۱)$$

اینک اگر $\rho^i_j = \gamma^i_{kj}\theta^k$ را در نظر بگیریم، آنگاه ۲ـفرم تاب وابسته به هموستار فوق در معادلهٔ ساختاری دوم کارتان یعنی:

$$T(\theta^i) = d\theta^i + \rho^i_l\wedge\theta^l \qquad (۸۲)$$

صدق می‌کند. به عبارت دیگر

$$\frac{1}{2}T^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l = d\theta^i + \rho^i_l\theta^l \qquad (۸۳)$$

[1] torsion

معادلات فوق اساس تعریف ما برای تاب در هندسهٔ ناجابجایی است. در واقع ما می‌خواهیم روی کلاف برداری $\mathcal{E}$ که هموستار ∇ را تعریف کرده‌ایم، فرمول تاب وابسته به آن را بنویسیم. در مثال مورد بحث ما، $\mathcal{E} = \Omega^1(\mathcal{A})$؛ پس θ^iها که ۱ـفرم هستند در معادلهٔ ساختاری کارتان، در واقع عناصری در $\mathcal{E}$ می‌باشند. پس می‌گوییم برای مثال هندسهٔ ناجابجایی ما تاب T چنان است که

$$T(s_i) = ds_i + \rho^l_i s_l \qquad (۸۴)$$

که s_lها پایه‌های $\mathcal{E}$اند.

۷.۴ محاسبهٔ تاب، انحنا و ... برای جبر $\mathcal{A}$ و عملگر دیراک Dی داده شده

در بخشهای قبل دیدیم که کلیترین شکل ۱ـفرم α به صورت زیر است (با توجه به جبر $\mathcal{A}$ و عملگر Dی داده شده):

$$\alpha = \begin{pmatrix}\gamma^\mu\alpha_{1\mu} & \bar\gamma\alpha_5\\ -\bar\gamma\bar\alpha_5 & \gamma^\mu_a\alpha_{2\mu}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma^a\epsilon^\mu_a\alpha_{1\mu} & \bar\gamma\alpha_5\\ -\bar\gamma\bar\alpha_5 & \gamma^a\mathcal{E}^\mu_a\alpha_{2\mu}\end{pmatrix} \qquad (۸۵)$$

اما می‌توان شکل فوق را برحسب پایه‌های مدول ۱ـفرمها نوشت:

$$\alpha = \alpha_\mu e^\mu + \alpha_5 e^5 \qquad (۸۶)$$

که

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix}\alpha_5 & 0\\ 0 & \bar\alpha_5\end{pmatrix}\in\mathcal{A}, \alpha_\mu = \begin{pmatrix}\alpha_{1\mu} & 0\\ 0 & \alpha_{2\mu}\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$$

$$e^\mu = \begin{pmatrix}\gamma^\mu & 0\\ 0 & \gamma^\mu\end{pmatrix}, e^5 = \begin{pmatrix}0 & \bar\gamma\\ -\bar\gamma & 0\end{pmatrix} \qquad (۸۷)$$

اینک برای پایهٔ تراد می‌توان صورت زیر را در نظر گرفت

$$E^a = \begin{pmatrix}\gamma^a & 0\\ 0 & \gamma^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^a_\mu\gamma^\mu & 0\\ 0 & e^a_\mu\gamma^\mu\end{pmatrix}, E^5 = \begin{pmatrix}0 & k\bar\gamma\\ -k\bar\gamma & 0\end{pmatrix} \qquad (۸۸)$$

که e^a_μها معکوس ϵ^μ_a هستند و k در E^5 ضریبی مانند e^a_μ در مورد E^a است.

اینک ضرب داخلی $\langle\ .,.\ \rangle$ یا متریک G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle\alpha,\beta\rangle = G(\alpha,\beta) = \mathrm{tr}(\pi(\alpha^*)\pi(\beta))1_{\mathcal{A}}; \forall\alpha,\beta\in\Omega^1_D(\mathcal{A}) \qquad (۸۹)$$

به‌سادگی دیده می‌شود

$$\langle E^a,E^b\rangle = \eta^{ab}1, \langle E^a,E^5\rangle = 0$$

$$\langle E^5,E^5\rangle = kk^*\bar\gamma^2 \qquad (۹۰)$$

که اگر بخواهیم $\langle E^5,E^5\rangle = 1$، آنگاه

$$kk^* = (\bar\gamma)^{-2} \qquad (۹۱)$$

۸.۴ محاسبهٔ انحنا و تاب

چون $\rho^{ki} \in \Omega^1(\mathcal{A})$ است پس در حالت کلی داریم

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} \gamma^\mu \rho^{AB}_{1\mu} & \bar{\gamma}\rho^{AB}_5 \\ -\bar{\gamma}\tilde{\rho}^{AB}_5 & \gamma^\mu \rho^{AB}_{2\mu} \end{pmatrix} \qquad (۹۲)$$

از طرف دیگر چون می‌خواهیم هموستار هرمیتی باشد پس

$$\rho^{AB} = (\rho^{BA})^* \qquad (۹۳)$$

یا به عبارت دیگر

$$\rho^{AB}_{1\mu} = -\rho^{BA}_{1\mu}, \rho^{AB}_5 = -\bar{\rho}^{BA}_5, \rho^{AB}_{2\mu} = -\rho^{BA}_{2\mu} \qquad (۹۴)$$

اینک با توجه به اینکه شکل کایترین ۲ـفرم را به‌دست آورده‌ایم می‌توان R^{AB} را محاسبه کرد.

$$R^{AB} = \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} R^{AB}_{1\mu\nu} + 2\varphi\psi\gamma_5 P^{AB}_1 & \varphi\gamma^\mu\gamma_5 Q^{AB}_\mu \\ -\varphi\gamma^\mu\gamma_5 \bar{Q}^{AB}_\mu & \gamma^{\mu\nu} R^{AB}_{2\mu\nu} + 2\varphi\psi\gamma_5 P^{AB}_2 \end{pmatrix}$$

(۹۵)

که در آن

$$\begin{aligned} R^{AB}_{i\mu\nu} &= \partial_\mu \rho^{AB}_{i\nu} - \partial_\nu \rho^{AB}_{i\mu} + \rho^{AC}_{i\mu} p^{CB}_{i\nu} \\ &\quad - \rho^{AC}_{i\nu} \rho^{AC}_{i\nu} \rho^{AC}_{i\nu} \rho^{CB}_{i\mu}; i = 1, 2 \\ Q^{AB}_\mu &= \partial_\mu \rho^{AB}_5 + \rho^{AB}_{1\mu} - \rho^{AB}_{2\mu} + \rho^{AC}_{i\mu} \rho^{CB}_5 - \rho^{CB}_{2\mu} \rho^{AC}_5 \\ P^{AB}_1 &= \rho^{AB}_5 + \rho^{BA}_5 + \rho^{AC}_5 \rho^{BC}_5 \\ P^{AB}_1 &= \rho^{AB}_5 + \rho^{BA}_5 + \rho^{CA}_5 \rho^{CB}_5 \end{aligned} \qquad (۹۵)$$

اینک به محاسبهٔ ۲ـفرم تاب می‌پردازیم. از روی رابطه‌ای که برای تاب تعریف کردیم داریم

$$T(E^A) = dE^A + \rho^{AB} \otimes s_B = dE^A + \rho^{AB} \otimes E^B$$

(۹۶)

که E^Aها همان پایه‌های تتراد هستند که در قبل معرفی کردیم. با توجه به عملگر دیراک D به سادگی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T(E^\alpha) &= dE^\alpha + \rho^{\alpha\beta} E^\beta + \rho^{\alpha 5} E^5; \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3 \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu}(\partial_\mu e^\alpha_\nu + \rho^{\alpha\beta}_{1\mu} e^\beta_\nu) - \tilde{\gamma}^2 k \rho^{\alpha 5}_5 & \gamma^\mu(\psi - \gamma_5\varphi)(\rho^{\alpha\beta}_5 e^\beta_\mu + k p^{\alpha 5}_{1\mu}) \\ -\gamma^\mu(\psi - \gamma_5\varphi)(\bar{\rho}^{\alpha\beta}_5 e^\beta_\mu + k \rho^{\alpha 5}_{1\mu}) & \gamma^{\mu\nu}(\partial_\mu e^\alpha_\nu + \rho^{\alpha\beta}_{2\mu} e^\beta_\nu) - \tilde{\gamma}^2 k \bar{\gamma}^{\alpha 5}_5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(۹۸)

و

$$T(E^5) =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma^{\mu\nu} \rho^{5\alpha}_{1\mu} e^\alpha_\nu - (\psi + \gamma_5\varphi)^2 k \rho^{55}_5 & \begin{bmatrix} \gamma^\mu[\psi(\partial_\mu k + k\rho^{55}_{1\mu} + \rho^{5\alpha}_5 e^\alpha_\mu) \\ +\gamma_5\varphi(\partial_\mu k + k\rho^{55}_{1\mu} - \rho^{5\alpha}_5 e^\alpha_\mu)] \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\gamma^\mu[\psi(\partial_\mu k + k\rho^{55}_{2\mu} + \bar{\rho}^{5\alpha}_5 e^\alpha_\mu) \\ +\gamma_5\varphi(\partial_\mu k + k\rho^{55}_{2\mu} - \bar{\rho}^{5\alpha}_5 e^\alpha_\mu)] \end{bmatrix} & \gamma^{\mu\nu} \rho^{5\alpha}_{2\mu} e^\alpha_\nu - (\psi + \gamma_5\varphi)^2 k \rho^{55}_5 \end{pmatrix}$$

(۹۹)

۹.۴ کنش هیلبرت‌ـاینشتین

اینک کنش هیلبرت‌ـاینشتین را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I_{\mathrm{H.E}} = (R^B_C E^C, E_B) \qquad (۱۰۰)$$

که منظور از $(.,.)$ عبارت زیر است

$$(\alpha, \beta) = \int \alpha.\beta^* = \mathrm{Tr}_w(\pi(\alpha\beta^*)|D|^{-d}) \qquad (۱۰۱)$$

پس $I_{\mathrm{H.E}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{H.E}} &= \int_Y \mathrm{Tr}((E_A)^* R^A_B E^B) \\ &= \int_Y [\epsilon^\mu_a \epsilon^\nu_b (R^{ab}_{1\mu\nu} + R^{ab}_{2\mu\nu}) + k\varphi^2 \epsilon^\mu_a (Q^{a5}_\mu \\ &\quad + \bar{Q}^{a5}_\mu - Q^{5a}_\mu - \bar{Q}^{5a}_\mu) - 4\varphi^2\psi^2 k^2 (P^{55}_1 + P^{55}_2)] \sqrt{g} d^4 y \end{aligned}$$

(۱۰۲)

حال اگر در عملگر دیراک، ψ را صفر فرض کنیم، این عملگر بسیار شبیه عملگر دیراک در بحث میدانهای پیمانه‌ای می‌شود. در این حالت شرط بدون تاب بودن را نیز اضافه می‌کنیم. این شرط بلافاصله حکم می‌کند که دو لایهٔ فضا از هر نظر مانند هم شوند و بدین ترتیب کنش به شکل زیر تقلیل پیدا می‌کند

$$I_{\mathrm{H.E}} = 2 \int_Y [R - 2\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma] \sqrt{g} d^4 y \qquad (۱۰۳)$$

در اینجا σ میدان جدیدی است که از روی k ساخته شده و ارتباط آن با k چنین است

$$k = e^\sigma \qquad (۱۰۴)$$

و این همان کنش هیلبرت‌ـاینشتین به اضافهٔ میدانِ معروف به دیلتون[1] است که در مطالعات کیهان‌شناسی مطرح می‌شود.

۵. ایرادهای مدلهایی که در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی ارائه می‌شوند

لااقل سه ایراد را می‌توان به خصوص در مورد مدلهای پیمانه‌ای که در چارچوب هندسهٔ ناجابجایی ارائه می‌شوند ذکر کرد.

۱. ناسازگاری با جریان بازبهنجارش. این به علت پیداشدن ارتباط بین برخی از پارامترهای مدل است [۹].

۲. عدم تطابق فضای هیلبرت فرمیونها با آنچه که در مدل متعارف ذرات بنیادی داریم [۱۰].

۳. با اینکه جبری که برای توصیف فضاـزمان و نیز هندسهٔ میدانهای پیمانه‌ای به‌کار می‌بریم همهٔ اطلاعات راجع به هموستار روی فضاـزمان و نیز روی کلافهای برداری را داراست، ولی نمی‌توان کنش هیلبرت‌ـاینشتین و یانگ‌ـمیلز را از یک اصل و یا صورتبندی واحد بدست آورد.

در مورد ایراد اول گفته می‌شود که جبری که برای مدلهای پیمانه‌ای به‌کار می‌بریم هنوز توصیف‌کننده یک فضای جابجایی (نقطه‌دار) است و این

1. Dilaton

امر منجر به یک کنش کلاسیک (و نه کوانتمی) می‌گردد و بنابراین نمی‌توان افت و خیزهای کوانتمی را در آن منظور کرد. در مورد ایراد دوم هنوز راه‌حل هندسی درستی ارائه نشده است. ولی در مورد مشکل سوم اخیراً آلن‌کن و یکی از همکارانش راه‌حلی ارائه کرده‌اند که طبق آن، با بررسی ویژه‌مقدارهای عملگر دیراک می‌توان کنش هیلبرت-اینشتین را به همراه قسمت یانگ-میلز به‌دست آورد [۱۱ و ۱۲].

سپاسگزاری

نگارنده بر خود لازم می‌داند از دکتر فرهاد اردلان که اولین مشوق و راهنمای او در زمینهٔ هندسهٔ ناجابجایی بوده‌اند و همچنین از دکتر احمد شفیعی‌ده‌آباد به‌خاطر کمکهای فکریشان تشکر کند.

مراجع

1. A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, "Grand unification in noncommutative geometry", *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 672, *Phys. Lett.* **B296** (1993) 109.

2. F. Ardalan and K. Kaviani, "Chiral perturbation theory in the framework of noncommutative geometry", *Int. J. Mod. Phys.* (8) **A11** (1996) 1502.

3. M. Alishahiha, F. Fatholahi and K. Kaviani, "Noncommutative geometry and chiral perturbation lagrangian", *Phys. Lett.* **B382** (1996) 369.

4. J. Gasser and H. Leutwyler, "Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark", *Nucl. Phys.* **B250** (1985) 465.

5. A. Connes and J. Lott, "Particle models and noncommutative geometry", *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B18** (1989) 29.

6. A. H. Chamseddine, G. Felder and J. Fröhlich, "Gravity in noncommutative geometry", *Comm. Math. Phys.* **155** (1993) 109.

7. A. H. Chamseddine, J. Fröhlich and O. Grandjean, "The gravitational sector in Connes-Lott formulation of the standard model", *J. Math. Phys.* (11) **36** (1995) 6255.

8. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

9. E. Alvarez, J. M. Gracia-Bondia and C. P. Martin, "Parameter restrictions in noncommutative geometry model do not survive standard quantum corrections", *Phys. Lett.* **B306** (1993) 55.

10. F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele, G. Sparano, "Fermion Hilbert space and fermion doubling in the noncommutative geometry approach to gauge theories", *Phys. Rev.* (10) **D55** (1997) 6357.

11. A. H. Chamseddine and A. Connes, "Universal formula for noncommutative geometry actions: unification of gravity and the standard model", *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4868.

12. A. H. Chamseddine and A. Connes, "The spectral action principle", *hep-th*/9606001.

******

* کامران کاویانی، پژوهشگاه دانشهای بنیادی و گروه فیزیک دانشگاه الزهرا

kaviani@theory.ipm.ac.ir