ماجرای یک روز عجیب: از گروتندیک تا کُن و کُنتسویچ

تحول مفاهیم فضا و تقارن•

پیر کارتیه*

ترجمهٔ حسن حقیقی

۱. پیشگفتار

اینکه همصدا با دیگران در تجلیل از مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES) چیزی بر اساس تجربهٔ شخصی خودم بگویم، فایدهٔ چندانی نخواهد داشت، ولی من به هیچ‌وجه تسهیلاتی را که آن مؤسسه طی سالهای متمادی برای تحقیق فراهم کرده بود، و به‌خصوص فرصتهای برگزاری نشستها و تبادل اطلاعات علمی را که مکرراً تجدید می‌شد از یاد نمی‌برم.

یکی از محسنات بزرگ مؤسسه این بود که در آنجا هیچ سد و مرزی بین ریاضیات و فیزیک نظری وجود نداشت. همواره درهم‌تنیدگیِ زیادی بین این دو حوزه وجود داشت که طی زمان رو به فزونی بوده است. از همان اوایل کار مؤسسه، لویی میشل به خاطر علاقه‌اش به نظریهٔ گروهها یکی از پلهای ارتباطی بین این دو رشته بود. امروز که چشم‌انداز علمی نسبت به چهل سال گذشته تغییرات زیادی کرده است، این همجوشی طبیعی به نظر می‌آید و هیچ‌کس سؤال نمی‌کند که کُن یا کنتسویچ[1] فیزیکدان است یا ریاضیدان. من مدتها بین این دو حوزه در رفت‌وآمد بودم، آن هم زمانی که این کار برخلاف گرایشهای جاری بود، و طبعاً از درآمیختگیِ فعلی این دو رشته استقبال می‌کنم.

مؤسسه در ده سال اول تأسیس خود زیر سیطرهٔ علمی گروتندیک بود که امیدوارم هیچ‌کس این موضوع را فراموش نکند. من او را در دهه‌های ۵۰ و ۶۰، به‌خصوص از طریق بورباکی، به‌خوبی می‌شناختم. در مؤسسه هرگز باهم نبودیم؛ او در سال ۱۹۷۰ آنجا را ترک گفت و من در ژوئیهٔ ۱۹۷۱ به مؤسسه پیوستم. گروتندیک از فیزیک و مسائل ریاضی آن الهام نمی‌گرفت، نه به خاطر اینکه ذهن او توانایی درک این مبحث را نداشت ــ او قبل از ۱۹۶۷ در این زمینه فکر کرده بود ــ بلکه اصول اخلاقی که وی از آن تبعیت می‌کرد سبب شده بود تا فیزیک، به‌خصوص پس از فاجعهٔ هیروشیما، به دنیای تاریک خارج از ذهن او رانده شود. جالب است که بعضی از بارورترین ایده‌های گروتندیک دربارهٔ ماهیت فضا و تقارن، به‌طور طبیعی با مسیرهای جدید در فیزیک پیوند یافته‌اند. این آمیزشِ به دور از انتظار ــ و جنبه‌های گاه طنزآمیز آن ــ است که من علاقه‌مندم در اینجا دربارهٔ آن صحبت کنم. «ماجرای یک روز عجیب»، همان‌طور که می‌دانید، عنوانی فرعی است که به داستان عروسی فیگارو نوشتهٔ بومارشه[1] داده شده است و ذکر آن در عنوان این مقاله اشاره به این وصلت غیرمنتظرهٔ ریاضی و فیزیک دارد. از فاصلهٔ دور، دلیل زیادی برای تعجب وجود ندارد. مفاهیم فضا و تقارن آنچنان اساسی‌اند که درکانونِ هر بررسیِ علمی جدی قرار می‌گیرند. ریاضیدانان تأثیرگذار بسیاری همچون برنهارد ریمان و هرمان وایل، این مفاهیم را به‌عنوان مفاهیمی متناظر در فیزیک و ریاضیات بررسی و تحلیل کرده‌اند.

۲. مختصری دربارهٔ زندگی گروتندیک

گروتندیک کتابی مفصل و مملو از دیدگاههای شخصی، به نام کاشت و برداشت (که تا این زمان چاپ نشده) نوشته است که به دشواری می‌توان حکایت زندگی شخصی وی را به‌خصوص در زمان کودکی‌اش در آن پیدا کرد. در مجموعهٔ سه جلدی جشن‌نامهٔ گروتندیک[2] که من به مناسبت شصتمین سالگرد تولد او چاپ کرده‌ام، مقدمهٔ مختصر و تحلیل نسبتاً مفصلی از کارهای گروتندیک به قلم دیودونه آمده است. شرح زندگی وی در آنجا شتاب‌زده و اجمالی است. به‌علاوه در مورد پروژه‌های اولیهٔ او اطلاعات کمی به‌دست می‌دهد. لوران شوارتس[3] در زندگینامهٔ خودنوشتش [Sc] ذکری از دانشجوی خود گروتندیک به میان می‌آورد ولی به‌طور گذرا و با بی‌دقتی‌های بسیار. اطلاعاتی که من

1. M. Kontsevich

1. Beaumarchais 2. Grothendieck Festschrift

3. Laurent Schwartz

دربارهٔ زندگی گروتندیک دارم از خود او به‌دست آورده‌ام که با اسناد و مدارک دیگری تکمیل شده و شرح زیر بر اساس آنها نوشته شده است.

ابتدا باید از شخصیت جالب توجه پدر و مادر او یاد کنم. نام پدر وی شاپیرو[1] بود. نام کوچک پدرش را نمی‌دانم. او در حوالی ۱۸۹۰ در شهر کوچکی در نزدیکی محلی که اکنون مرز روسیه، اوکراین و روسیهٔ سفید است، به دنیا آمد. خاستگاه همهٔ شاپیروها یک ناحیهٔ جغرافیایی بسیار کوچک است. احتمالاً پدر بزرگ الکساندر گروتندیک عضو فرقهٔ یهودیان حسیدی[2] بوده که شاپیروها به آن تعلق دارند. حسیدیان یهودیان متعصبی بودند که به زبان امروزی می‌توان آنها را بنیادگرا نامید. بعضی از آنها آنچنان مجذوب خدا بودند که خود را در برج کوچکی که پنجره‌ای رو به بیرون داشت محبوس می‌کردند و مؤمنان از طریق آن پنجره به آنها، به‌عنوان صدقه، غذا می‌دادند. هنگامی که گروتندیک را ملاقات می‌کردم، تصویری از پدرش را که توسط هم‌بازداشتگاهی او در اردوگاه فرانسوی ورنه[3] در سال ۱۹۴۲ کشیده شده بود، می‌دیدم. شباهت بسیار زیادی به تصویر پسری داشت که ما در ابتدای جشن‌نامه آورده بودیم، با سری تراشیده و چشمانی شرربار.

آن‌طور که الکساندر به من گفته، سیر زندگی سیاسی پدرش حکایت انقلابهای اروپا در سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۴۰ است. بر اساس مرزبندیهای آن زمان، او در روسیه به دنیا آمد. به همراه انقلابیون آن زمان، در شورش انقلابی ۱۹۰۵ علیه تزار شرکت کرد؛ پس از سرکوب انقلاب به سیبری تبعید شد و بیش از ده سال را در زندان گذراند. در سال ۱۹۱۷، وقتی که تبعیدیان جلای وطن کرده برای براندازی امپراتوری تزاری به روسیه بازگشتند، از زندان آزاد شد. دو انقلاب در سن‌پترزبورگ به‌وقوع پیوست، یکی انقلاب منشویکی در فوریهٔ ۱۹۱۷ و دیگری انقلاب بلشویکی در اکتبر ۱۹۱۷. شاپیرو یکی از رهبران حزب «انقلابی سوسیالیست چپ» بود. افراد این حزب ابتدا با بلشویکها در اکتبر ۱۹۱۷ متحد شدند و پس از آن، خیلی زود رودرروی لنین قرارگرفتند و همچون بسیاری از انقلابیون، اعم از بلشویک و غیربلشویک، توسط لنین تصفیه شدند [۱].

اروپا پس از فروپاشی دو امپراتوری مرکزی [اتریش و آلمان]، بر اثر چند حرکت انقلابی ناآرام شده بود: روزا لوگزامبورگ و اسپارتاکیستها در برلین در ۱۹۱۹، شوراهای مونیخ، و انقلاب بلاکن در مجارستان. به اینها باید وقایع مختلف جنگ داخلی روسیه را، که یکی از آنها جنبش ماخنو[4] در اوکراین [۲] بود، بیفزاییم. پدرگروتندیک در تمامی این جنبشها شرکت داشت. طی سالهای دهۀ ۱۹۲۰ بیشتر در آلمان می‌زیست و در درگیریهای سیاسی و مسلحانهٔ احزاب چپ با هیتلر و نازیها شرکت می‌کرد. او در آلمان با هانکا گروتندیک، یک زن یهودی اهل شمال آلمان [۳]، آشنا شد. این زن در ۲۸ مارس ۱۹۲۸ در برلین پسری از شاپیرو به دنیا آورد که همان قهرمان داستان ماست. من اطلاع چندانی دربارهٔ بچهٔ قبلی او، یعنی خواهر بزرگ‌تر الکساندر ندارم. هیتلر خیلی زود به قدرت رسید. پس از ۱۹۳۳، آلمان برای انقلابیون یهودی جای بسیار خطرناکی بود و این زوج به فرانسه گریختند و پسرشان را با هویت مخفی در یک مدرسهٔ شبانه‌روزی خصوصی لیبرال نزدیک هامبورگ گذاشتند.

در سال ۱۹۳۶، جنگ داخلی اسپانیا درگرفت. شاپیرو همچون سیمون ویل (خواهر آندره ویل ریاضیدان معروف) در مبارزه علیه فاشیستهای فرانکو به میلیشیای آنارشیست F·A·I پیوست. ظاهراً هانکا گروتندیک طی این مدت در فرانسه مانده بوده است. در هر حال او در سال ۱۹۳۸ به دنبال پسرش فرستاد. در این زمان جمهوری‌خواهان اسپانیایی به میدی[5] گریخته

1. Shapiro 2. Hasidic 3. Vernet 4. Makhno 5. Midi

بودند. اردوگاههای پناهندگان دایر شده و بعضی از آنها به بازداشتگاه تبدیل شده بودند ــ نمی‌خواهم تا آنجا پیش بروم که بگویم اردوگاه کار اجباری. در ورنه و درگورس در پیرنه، اردوگاههایی برای نگهداری موقت تمامی «خارجیان خطرناک» با عجله برپا گردیده بود: یهودیان آلمانی، آنارشیستهای اسپانیایی و تروتسکیستها [۴]. اعلام جنگ در ۳ سپتامبر ۱۹۳۹، همان‌طور که می‌توان تصور کرد، به بهبود وضع این انسانهای بی‌پناه کمکی نکرد. پس از تسلیم فرانسه در ژوئن ۱۹۴۰، بسیاری از زندانها گشوده شدند، از جمله زندانی در روئن[1] که آندره ویل در آن بود. خانواده گروتندیک، به‌طور موقت خارج از زندان بودند. در اکتبر ۱۹۴۰، دولت ویشیِ مارشال پتن، قوانین ضد یهود را که خارج از مناطق اشغال‌شده نیز قابل اجرا بودند اعلان کرد. شاپیرو به اردوگاه ورنه برده شد و به همراه سایر زندانیان، او را مستقیماً به آشویتس فرستادند و در سال ۱۹۴۲ فوت کرد؛ این یکی از شرم‌آورترین رویدادها در تاریخ فرانسه است.

زندگی گروتندیک و مادرش در قلمرو حکومت ضد یهودیِ ویشی به سختی و زحمت می‌گذشت. آزادی آنها توسط جنبش مقاومت پروتستان در سه‌ون[2] مقدور شد. پاستور تروکمه، مدیر مدرسهٔ خصوصی پروتستان در شامبون سورلینیون (موسوم به کولژ سونول[3]) این محل را که سابقاً تفریحگاهی زیبا و محل رفت‌وآمد افراد طبقهٔ بالای جامعه پروتستان بود به یک مرکز مقاومت نظامی و روحی در مقابل اشغالگران نازی تبدیل کرد [۵]. گروتندیک شاگرد کولژ سونول بود و در محلی به نام «کانون سویس» که بچه‌های ملیتهای مختلف را پناه می‌داد، سکنی داشت [۶]. پس از دریافت مدرک دیپلم [۷]، گمان می‌کنم با توصیهٔ پروتستانها، دانشجوی مون‌پلیه شد. اغلب گفته شده است که او قوی‌تر از معلمانش بود و همیشه به حداکثر تعمیم در ریاضیات علاقه داشت. در پاییز ۱۹۴۸ دورهٔ کارشناسی خود را به پایان رساند و با در دست داشتن توصیه‌نامه‌ای از معلمش در مون‌پلیه به اِلی‌کارتان [۸]، به پاریس آمد.

در اینجا حکایت کودکی و نوجوانی مسیح خاتمه می‌یابد و زندگی اجتماعی پیامبر شروع می‌شود که سالهای ۱۹۴۹ تا ۱۹۷۰ را در برمی‌گیرد. این دوره به نظر من آنقدر شناخته شده است که نیازی به تشریح آن در اینجا نیست و خواننده می‌تواند به داستانی که دیودونه روایت می‌کند، اگر چه نسبتاً مختصر است، مراجعه کند. فقط یادآور می‌شوم که گروتندیک در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۷ به آنالیز تابعی علاقه‌مند بود. پایان‌نامهٔ او شاهکار است [Gr1]، اما مقاله‌ای از او که بیشترین تأثیر را گذاشت، بدون تردید مقالهٔ [Gr2] است که نقطهٔ شروع نظریهٔ هندسی فضاهای باناخ است. سپس طی سالهای ۱۹۵۶ تا ۱۹۷۰، هندسهٔ جبری و جبر هومولوژیک را به‌صورت کاملاً جدیدی عرضه کرد و آنگاه زندگی علمی او اساساً پایان یافت.

سعی می‌کنم دلایل خاتمهٔ غیرمنتظرهٔ چنان زندگی شگفت‌آور و پرباری در سن ۴۲ سالگی را تحلیل کنم. دلیل ارائه شده این بود که او پی برده است که وزارت دفاع، بخشی از هزینهٔ مؤسسه را تأمین می‌کند. امروزه منابع تأمین مالی مؤسسه در مقایسه با زمان موشان[4] آشکارتر است و تا جایی که می‌دانم، هنوزکمکهای مالی مختصری از طرف D·R·E·T [۹] به مؤسسه می‌شود. برای فهمیدن علل عکس‌العمل تندوتیز گروتندیک باید گذشتهٔ وی و اوضاع سیاسی روز را در نظر داشت. او پسر یک مبارز آنارشیست بود که عمرش را وقف انقلاب کرده بود. گروتندیک شناخت چندانی از پدرش نداشت و او

1. Rouen 2. Cévennes 3. Collège Cévenol 4. Motchane

را بیشتر از طریق روایتهای مجیزگونه مادرش شناخته بود. در سراسر دوران کودکی‌اش آواره و بی‌خانمان بود[۱۰] و با گذرنامهٔ سازمان ملل (موسوم به گذرنامهٔ نانسن[1]) سفر می‌کرد. او همیشه از رفت‌وآمد به مکانهای «بهتر» ابا داشت و در میان تهیدستان احساس راحتی بیشتری می‌کرد. همبستگی میان افراد بی‌خانمان احساس دلسوزی نیرومندی در او برمی‌انگیخت. گروتندیک با اصول اخلاقی خودش زندگی می‌کرد و درِ خانه‌اش همیشه به روی افرادِ به‌اصطلاح ولگرد باز بود. در آخر به این نتیجه رسید که مؤسسه یک قفس طلاکاری شده است که او را از زندگی واقعی دور کرده است. از دست دادن اعتماد به نفس و احساس تردید نسبت به ارزش فعالیت علمی نیز بر این دلایل افزوده شد. اولین بار در سال ۱۹۵۷ در یک کنگرهٔ بورباکی تردیدهایش را با من در میان گذاشت و گفت که می‌خواهد به فعالیتهایی غیر از ریاضیات بپردازد[۱۱]. شاید تأثیر یک «سندروم نوبل» را نیز باید در نظر گرفت. پس از دریافت مدال فیلدز در کنگرهٔ ریاضیدانان در مسکو در سال ۱۹۶۶، وقتی روی آخرین مراحل (تعیین‌کنندهٔ) اثبات حدسهای ویل کار می‌کرد و شاید کم‌کم می‌فهمید که لازم خواهد بود دولین[2] برنامه‌ای را که او برای خودش طرح کرده بود به انجام برساند (دولین در سال ۱۹۷۴ این کار را انجام داد) و شاید با تسلیم شدن در برابر این دیدگاه زیانبار که سن ۴۰ سالگی زمان پایان یافتن خلاقیت ریاضی است، ظاهراً به این اعتقاد رسید که دورهٔ اوج خود را پشت سر گذاشته است و از آن به بعد فقط قادر خواهد بود حرفهای خودش را با تأثیر کمتری تکرار کند.

حال و هوای زمانه نیز تأثیری عمیق در این تصمیم داشت. فاجعهٔ دومین جنگ ویتنام از سال ۱۹۶۳ تا ۱۹۷۲، وجدان افراد بسیاری را بیدار کرده بود. تعداد زیادی از دوستان و اطرافیان وی علیه جنگ ویتنام مبارزه می‌کردند. عدهٔ قابل توجهی از ریاضیدانان فرانسوی، از جمله او و من، به اقدام مشخصی دست زدند و به هانوی سفر کردند. شورش دانشجویی ۱۹۶۸ فرانسه تا اندازهٔ زیادی معلول این جنبش بود. جنبه‌های آنارشیستی آن جاذبه‌هایی برای او داشت و به او قبولاند که دیگر یک انسان آواره و بی‌پناه نیست و از رهبران جامعهٔ علمی به‌شمار می‌آید. جنبش مه ۱۹۶۸ افراد دیگری مانند شواله[3]، ساموئل[4] و گودمان[5] از گروه بورباکی را نیز برانگیخت. جنگ سرد در اوج خود و خطر یک مقابلهٔ اتمی خیلی نزدیک به واقعیت بود. مسائل ازدیاد جمعیت، آلودگی و توسعهٔ کنترل نشده، هر آنچه امروزه تحت نام حفاظت محیط زیست نامیده می‌شود، نیز به‌تدریج جلب توجه می‌کرد. دلایل زیادی بودند که علم را زیر سؤال ببرند.

او با طبع عجولی که داشت عکس‌العمل نشان داد و گروه کوچک «نجات» را بنیاد نهاد. هر از گاهی با اعمال ناشیانه و افراطی خود اوقات آنهایی را که دیدگاههای مشترک سیاسی با او داشتند تلخ می‌کرد[۱۲]. راه او خیلی نزدیک به راه سیمون ویل بود و آنارشیسم سیاسی وی بیش از پیش رنگی مذهبی پیدا می‌کرد. در حالی‌که کاتولیک‌گری سیمون ویل (در سال ۱۹۴۲!) به شدت ضد یهودی بود، بودایی‌گرایی گروتندیک شباهت زیادی به اعمال اجداد حسیدی‌اش داشت[۱۳]. مدتهای مدید پذیرای همهٔ انواع «هیپی‌ها» و عناصر حاشیه‌ای اجتماع بود که این رفتار منجر به اعلام جرمی علیه وی شد و در سال ۱۹۷۷ در محاکمه‌ای بی‌معنی بنا بر قانونی که در ۱۹۴۵ تصویب شده بود و ملاقات با خارجیان را جرم می‌شمرد، مجرم شناخته شد. او که از بازی در نقش یک سقراط مدرن لذت می‌برد به شش ماه زندان تعلیقی و

1. Nanssen 2. Deligne 3. Chevalley 4. Samuel 5. Godement

پرداخت ۲۰۰۰۰ فرانک محکوم شد. به نظر من جدایی قطعی وی از علم به این واقعه باز می‌گردد. بعد از آن بیشتر و بیشتر از فعالیت علمی کنار کشید و به انزوا پناه برد. بعد از ۱۹۹۳ دیگر آدرس پستی نداشت و در دهکدهٔ کوچکی در پیرنه سکنی گزید. عدهٔ بسیار معدودی در آنجا با او ملاقات کرده‌اند. اگر بتوانم به حرف آخرین بازدیدکنندگانش اعتماد کنم، شیطان به مشغلهٔ ذهنی او تبدیل شده است. به نظر او شیطان در همه جای جهان در حال فعالیت است، هماهنگی الهی را از بین می‌برد و سرعت $300000\ \mathrm{km/sec}$ نور را به $299887\ \mathrm{km/sec}$ تبدیل می‌کند!

با این حال او همان گروتندیکی است که در کسب اشتهار برای مؤسسهٔ مطالعات عالی در ده سال اول تأسیس آن سهم مؤثری داشت. او همان شخصی است که ما ایده‌های مهمی درباره فضا و تقارن را که من اکنون می‌خواهم درباره آنها صحبت کنم مدیون او هستیم.

۳. دربارهٔ ماهیت فضا و نقاط آن

مسألهٔ اصلی، نقطه‌های فضاست. سابقهٔ این بحث به نیوتن و لایب‌نیتس باز می‌گردد. از نظر لایب‌نیتس، عناصر سازندهٔ همهٔ اشیا، چه مادی و چه معنوی، «موناد‌ها» هستند که «بدون پنجره»اند (می‌توان گفت هیچ ساختمان داخلی ندارند) و تنها چیزی که مهم است، ارتباط متقابل آنهاست. در اینجا به نظر می‌آید اولین «تعریف»ی را که بورباکی در ابتدای بحث نظریهٔ مجموعه‌ها آورده، پذیرفته‌ایم:

> مجموعه از عناصری تشکیل شده که این قابلیت را دارند که ویژگیهای معینی داشته باشند و روابط معینی بین آنها و یا بین آنها و عناصر مجموعه‌های دیگر برقرار باشد.

از دیدگاه هستی‌شناختی، عناصر یا نقاط از پیش وجود دارند و مسأله این است که آنها را سازماندهی کنیم و ساختاری به آنها بدهیم. از نظر فیزیکی، می‌توان همانند نیوتن وجود یک فضای مطلق را که در آن پدیده‌ها رخ می‌دهند، اصل پنداشت؛ مکانها از پیش تعیین‌شده‌اند و مقدر است که جایگاه رویدادهای مربوط به ماده باشند.

در مقابل، در فلسفه ماخ[1]، فضا به‌وسیلهٔ ماده تعیین می‌شود. پیشرفته‌ترین شکل ریاضی آن یقیناً به‌وسیلهٔ معادلات گرانشی اینشتین

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R = 8\pi\kappa T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

مشخص می‌شود. سمت راست، $T_{\mu\nu}$ به‌وسیلهٔ مادهٔ موجود تعیین می‌شود، یا در شکل جدیدتر تابعی است از میدانهای غیرگرانشی، در حالی‌که سمت چپ فقط تابعی از میدان گرانشی $g_{\mu\nu}$ است که با تانسور متریکی که هندسه را تعریف می‌کند مشخص می‌شود. برخلاف نظر نیوتن، همان‌طور که انحنای نور در میدان گرانشی نشان می‌دهد، فضا دیگر فقط یک ظرف نیست بلکه بازیگری در فیزیک است. از نظر اینشتین و ماخ، نقطه فقط نشانه‌ای است که شناسایی یک رویداد را میسر می‌سازد.

موناد هیچ ساختاری ندارد، نقطه نیز هیچ ساختاری ندارد. همین موضوع دربارهٔ اتم در اندیشه‌های یونانیان قدیم نیز صادق است: غیرقابل تقسیم است و بنابراین نمی‌تواند هیچ سازوکار داخلی را آشکار کند. هیچ جزئی ندارد، ولی می‌تواند مشخصه‌ای خارجی، یقیناً اندازه و شاید شکل، داشته باشد[۱۴]. اما

1. Mach

تاریخ فیزیک ما را با بازیهای عروسکی روسی مأنوس ساخته است. مولکول در نظر شیمیدانها تشکیل‌شده از اتمها، که خودشان یک ابر الکترونی و یک هسته دارند و هسته مرکب از پروتونها و نوترونهاست که معلوم شده مجموعه‌ای از کوارکها می‌باشند و عجالتاً فرض شده غیرقابل تقسیم‌اند. از لحاظ ریاضی، دیدگاه نوین راجع به پیوستار فقط دو سطح را از پیش فرض می‌کند. به‌عنوان مثال، خط راست مرکب از نقاطی از پیش‌موجود است. در مقابل، دیدگاه کلاسیک قرن هیجدهم سلسله مراتبی از بینهایت کوچکها و بینهایتهای از مراتب متفاوت را می‌پذیرد. به‌ازای یک مرتبهٔ داده شده، بینهایت کوچکهایِ بلافاصله از مرتبه بالاتر به‌صورت نقاطی بدون ساختار ظاهر می‌شوند، تا اینکه جعبه‌ای را که تشکیل می‌دهند باز می‌کنیم، و آنگاه آشکار می‌شود که بینهایت کوچکهای از مرتبه‌ای بالاتر، به‌طور موقت نقش نقاط را ایفا می‌کنند. براوئر و تا اندازه کمتری هرمان وایل کوشیدند نظریهٔ ریاضی پیوستار را بر اساس این ایده‌ها پایه‌ریزی کنند.

صورتهای اصل موضوعی متعدد هندسه نیز با مسائلی مشابه مواجه‌اند. در نظر اقلیدس، شکلهای هندسی وجود دارند و هر نقطه، فقط عضوی از یک شکل است، شاید ابتدایی‌ترین عضو، زیرا فرض شده نه بعدی دارد، و نه طولی و نه پهنایی و نه ضخامتی. اشکال یکدیگر را تولید می‌کنند. هر خط مفروض D با این خاصیت که از دو نقطهٔ داده شدهٔ P و Q می‌گذرد تعریف می‌شود، ولی نقطه‌ای چون P، به‌عنوان محل تلاقی دو خط D و Δ تعریف می‌شود. دایره با تعیین مرکز و شعاعش تعریف می‌شود.... مسلماً یک خاصیت تعیین‌کننده وجود دارد. دو خط یا دو دایره که دارای نقاط یکسانی هستند مساوی‌اند، اما دیدگاه اقلیدس این نیست که خط را به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط بپذیرد. شکل به معنای مورد نظر اقلیدس، بیش از مجموعهٔ ساده‌ای از نقاط است. این دیدگاه سنتی، تکوینی است: خطوط تولید می‌شوند. دیدگاه جدید، هستی‌شناختی است: نقاط از پیش وجود دارند و به‌خودی خود هیچ هویتی ندارند، به مانند مونادها، آنها فقط می‌توانند روابطی داشته باشند. همین نوع دوگانی در منطق صوری رخ می‌دهد. از نظر نحوی، فرمولها و قواعدی پایه‌ای برای تولید فرمولها یا قواعد جدید وجود دارند که مجموعهٔ فرمولهای موجود را بدون هیچ محدودیتی گسترش می‌دهند. از نظر معناشناختی، این بینهایت بالقوهٔ فرمولها، در تقابل با بینهایتِ بالفعل تمام فرمولها در عالم تصور که یک بار برای همیشه ساخته شده‌اند، قرار می‌گیرد[۱۵].

نظریهٔ مشبکه‌ها را برکاف[1] ابداع کرد وگلیونکو[2] طی دههٔ ۱۹۲۰ توسعه داد. هدف گلیونکو از جمله این بود که یک دستگاه اصل موضوعی برای هندسهٔ تصویری ارائه کند. در این دستگاه خمینه‌های خطی از همه ابعاد، در یک سطح قرار داده شده‌اند. رابطهٔ اساسی وقوع (یا شمول) است: خط مستقیم Δ در صفحهٔ Π قرار می‌گیرد. پس از آن مفاهیم مشتق‌شدهٔ تقاطع و اجتماع را به‌دست می‌آوریم (به‌عنوان مثال، صفحه به‌وسیلهٔ یک نقطه و یک خط تعریف می‌شود). نتیجهٔ طبیعی این رهیافت پیدایش هندسه‌های ترکیبیاتی روتا[3] و کراپو[4] (همچنین موسوم به ماتروییدها) بوده است[CR]. جبری‌سازی منطق توسط بول و ون (در قرن نوزدهم) براساس همان راهبرد تنظیم شده است. مفروض اولیه یک گزاره یا ادعاست و استلزام گزاره‌ها نقش وقوع خمینه‌های خطی را ایفا می‌کند.

به‌منظور کاربست همین روشها در توپولوژی، به‌عنوان سومین مثال از مشبکه‌ها، باید فضا را نه با نقاطش بلکه با مجموعه‌های بازش مشخص ساخت. این دیدگاه به‌طور صریح درکارهای ارزمن[5] مشهود است. اما ایده‌های براوئر هم که به‌وسیلهٔ وایل در پیوستار[1] بازسازی شده و تعمیق یافته‌اند به آن ختم می‌شوند. براوئر در تأمل روی مسألهٔ مشهور بسطهای اعشاری بی‌پایان، امکان تأیید تساوی دو عدد را مورد انتقاد قرار داد[۱۶] اما عقیده داشت که مفهوم بازهٔ $]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$ موجه است، یعنی، بررسی صحت نابرابری $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ (اگر برقرار باشد) طی یک فرایند متناهی امکان‌پذیر است. اما گام اساسی را گروتندیک برداشت. وی با الهام از ایدهٔ ریمان درباره رویهٔ پشته‌شده روی یک صفحهٔ ریمان، به‌جای مجموعه‌های باز یک فضا، فضاهای پشته‌شده روی آن را قرار داد[۱۷]. همین وضعیت را با در نظرگرفتن رستهٔ بافه‌های $\mathfrak{F}(X)$ روی X می‌توان توصیف کرد. ساختمانهای روی فضاهای توپولوژیک تبدیل می‌شوند به (و جایگزین می‌شوند با) ساختمانهای روی رسته‌های بافه‌ها. گروتندیک با یک مرحلهٔ اضافی تجرید به پیروی از لوور[2] و تیرنی[3] مفهوم مجرد «توپوس» را مطرح کرد که از نظر او نهایتِ تعمیم مفهوم فضا بود. اما مفهوم توپوس آنقدر کلی هست که رستهٔ «همهٔ» مجموعه‌ها تشکیل یک توپوس بدهد. پس از کانتور و هیلبرت، که از بیرون رفتن از بهشت کانتور امتناع کرد، سعی شد تا تمام ریاضیات را در چارچوب توپوس خاص مجموعه‌ها قرار دهند. گروتندیک مدعی شد می‌توان ریاضیات را به‌صورت هر توپوسی، هر چه باشد، بازنویسی کرد. از مدتها پیش، براوئر و هیتینگ[4] خاطر نشان ساخته بودند که قواعد حساب گزاره‌های شهودگرایانه به قواعد کار کردن با مجموعه‌های باز شبیه‌اند. این موضوع در نظریهٔ توپوس روشن گردید: در هر توپوس $\mathfrak{T}$ یک شیئ منطقی Ω وجود دارد که «عناصر»ش ارزشهای صدق توپوس می‌باشند. وقتی $\mathfrak{T}$ توپوس مجموعه‌هاست، ارزشهای کلاسیک (صادق/کاذب) را داریم. اما وقتی توپوس $\mathfrak{T}$، توپوس بافه‌ها روی X است، ارزشها متناظر می‌شوند با زیرمجموعه‌های باز X [۱۸].

۴. به سوی مفهوم طیف

بیایید به‌طور موقت نظر گروتندیک دربارهٔ فضا را بپذیریم. فضایی چون X با استفاده از توپوس بافه‌های روی X، یعنی $\mathfrak{F}(X)$ توصیف می‌شود. نقش نقاط چیست؟ اگر a یک نقطهٔ X باشد، می‌توان ابتدا به آن «پالایهٔ» $\mathfrak{U}_a$ از زیرمجموعه‌های باز U از X را، که شامل a هستند، یعنی همسایگی‌های باز a را نظیرکرد[۱۹]. یکی گرفتن نقطهٔ a با پالایهٔ $\mathfrak{U}_a$ به یک راهبرد ثمربخش می‌انجامد. برای غنی‌ترکردن فضای X، نقاط ایده‌آلی را که متناظر پالایه‌های دیگرند، معرفی می‌کنیم. به این طریق است که بورباکی، تکمیل‌شدهٔ یک فضای یکنواخت را می‌سازد و فشرده‌سازی‌های متنوعی (مثل فشرده‌سازی استون-چخ)، به‌علاوهٔ مرزهای متنوع دیگری در نظریهٔ پتانسیل یا نظریهٔ دستگاههای دینامیکی تصادفی یا تعیّنی تعریف می‌شود.

دیدگاه مشابهی در نظریهٔ مدلها در منطق رایج است. مدل Mای از یک مجموعهٔ $\mathcal{P}$ ازگزاره‌ها، اعتبار بخشیدن به گزاره‌های معین A را در پی داردکه با

$$M \vdash A$$

نشان داده می‌شود. به‌جای مدل M می‌توان ردهٔ $\mathcal{P}_M$ ازگزاره‌هایی را که توسط M اعتبار می‌یابند در نظر گرفت که یک پالایه نیز هست[۲۰]. یک مدل سازگار است اگر همهٔ گزاره‌ها در آن معتبر نباشند. همین مفهوم را می‌توان به این‌صورت نیز بیان کرد که مدل M به‌طور همزمان یک گزارهٔ A و نقیض آن $\overline{A}$ را معتبر نمی‌کند. در مقابل یک مدل جازم است اگر

1. Birkhoff 2. Glivenko 3. Rota 4. Crapo 5. Ehresmann

1. Das Kontinuum 2. Lawvere 3. Tierney 4. Heyting

به‌ازای هر گزارهٔ A، یا A را معتبر کند یا $\overline{A}$ را. در مدل جازم می‌توان تابع ارزه [ارزیاب] $v(A)$ (یا به‌طور دقیق‌تر $v_M(A)$) را معرفی کرد که مقدار ۱ را می‌گیرد اگر M، A را معتبر کند و مقدار ۰ را، اگر چنین نکند.

حال خواص جبری زیر را داریم

$$v(A) + v(B) = v(A \wedge B) + v(A \vee B) \qquad (۲)$$

$$v(T) = ۱, \qquad v(F) = ۰ \qquad (۳)$$

که می‌توان آنها را تعریف یک ارزه نیز در نظر گرفت [**۲۱**]. این مفهوم شکلهای متفاوتی پیدا می‌کند:

۱. هر ارزه روی مجموعهٔ مجموعه‌های باز یک فضای X با یک فرا پالایه (از مجموعه‌های باز) روی X متناظر می‌گردد؛

۲. به‌جای اینکه بخواهیم ارزهٔ $v(A)$ی یک گزاره فقط مقادیر ۰ یا ۱ را بگیرد، ممکن است به‌طورکلی‌تر فرض کنیم که $v(A)$ می‌تواند هر عدد حقیقی بین صفر و یک باشد. این تقریباً همان راهبرد منطق فازی است [**۲۲**].

حال ترفندی را به‌کار می‌بریم که یکی از جالب‌ترین موفقیتهای ریاضیات قرن بیستم بوده است. مجدداً یک جبر $\mathcal{P}$ از گزاره‌ها [**۲۳**] و مجموعهٔ Ω از همه ارزه‌های روی $\mathcal{P}$ را در نظر می‌گیریم. به هر گزارهٔ A، به کمک دوگانی، مجموعهٔ $[A]$ از همهٔ ارزه‌های v را به‌طوری که $v(A) = ۱$، یا، به عبارت دیگر مجموعهٔ تمام مدلهای جازم را که به A اعتبار می‌دهند، نظیر می‌کنیم. تناظر $A \rightleftarrows [A]$ این امکان را فراهم می‌کند که جبر گزاره‌های $\mathcal{P}$ را رده‌ای از زیرمجموعه‌های Ω در نظر بگیریم. ترکیبهای عطفی و فصلی به‌ترتیب اشتراک و اجتماع مجموعه‌ها می‌شوند:

$$[A \wedge B] = [A] \cap [B], \qquad [A \vee B] = [A] \cup [B] \qquad (۴)$$

این بیانی از قضیهٔ نمایش استون[1] است، الگویی برای بسیاری نتایج دیگر [**۲۴**]. فضای Ω فضای استون جبر بولی $\mathcal{P}$ نامیده می‌شود و با قدری تسامح آن را طیف $\mathcal{P}$ می‌نامیم.

پیدایش نظریهٔ کوانتومی در دهه‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ منجر به ابداع مفهوم حالت شد که دربرگیرندهٔ مفهوم ارزه است. از اینجا به بعد فرض می‌کنیم فضای X فضایی فشرده [**۲۵**] است و به آن فضای باناخ $A = C^{\circ}(X;\mathbb{C})$، متشکل از توابع پیوسته روی X، با مقادیر مختلط و با نرم

$$||f|| = \sup\{|f(a)| : a \in X\} \qquad (۵)$$

را نظیر می‌کنیم. همچنین می‌توان حاصلضرب دو تابع، $f_۱ f_۲$، و مزدوج مختلط f، f^*، را تعریف کرد. یک حالت روی A فُرمی خطی چون η روی A است که در قواعد زیر صدق کند [**۲۶**]

$$\eta(ff^*) \geq ۰, \qquad \eta(۱) = ۱ \qquad (۶)$$

حالت η محض نامیده می‌شود اگر هیچ‌گاه آمیزهٔ $\eta = ۱/۲(\eta_۱ + \eta_۲)$ از دو حالت متمایز نباشد. قضیهٔ نمایش گلفاند حاکی است که رابطهٔ

$$f(a) = \eta(f) \qquad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } A \qquad (۷)$$

1. Stone

تناظری یک‌به‌یک بین نقاط a از X و حالتهای محض η از جبر باناخ A تعریف می‌کند. به این ترتیب ابزاری برای بازیابی فضای X با استفاده از جبر باناخ A در دست داریم.

مفهوم پالایهٔ یک جبر بولی مشابه مفهوم ایده‌آل در یک جبر باناخ جابه‌جایی است. در هر دو حالت، یک رابطهٔ شمول و بنابراین مفهوم پالایهٔ ماکسیمال یا ایده‌آل ماکسیمال [**۲۷**] وجود دارد. طیف جبر بولی $\mathcal{P}$ (یا جبر باناخ $A = C^{\circ}(X;\mathbb{C})$) را می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ پالایه‌های ماکسیمال (یا ایده‌آلها) تعبیر کرد. در نظریهٔ اعداد، ایدهٔ در نظرگرفتن مجموعهٔ ایده‌آلهای اول حلقهٔ $\mathfrak{O}_K$، متشکل از اعداد صحیح جبری در یک میدان عددی K (یک توسیع جبری و متناهی میدان اعداد گویا) منسوب به ددکیند است. در نظر او، این مجموعه مشابه حسابی مجموعهٔ نقاط یک خم جبری است. تلاشهای زیادی در دههٔ ۱۹۵۰ صورت گرفت تا وسیع‌ترین بنیان ممکن برای هندسهٔ جبری ساخته شود. دوگام مهم در این مسیر عبارت است از:

۱. یک میدان جبری‌ـبستهٔ k و یک زیرواریتهٔ X از فضای آفین k^n با مختصات $T_۱$، …، T_n را در نظر بگیرید. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ ایده‌آل چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب در k باشد که آن چندجمله‌ایها روی X متحد صفرند. همچنین فرض کنیم A حلقهٔ خارج‌قسمتی $k[T_۱, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ باشد. خواص هندسی ذاتی X (خواصی از X که مستقل از خواص ناشی از غوطه‌وری X در k^n است) به خواص حلقهٔ A ترجمه می‌شود. به‌خصوص نقاط X با ایده‌آلهای ماکسیمال حلقهٔ A نظیر می‌شوند (این معنای قضیهٔ صفرهای هیلبرت است). شباهت این قضیه با قضیهٔ نمایش گلفاند آشکار است. این شباهت، یکی از نقاط آغاز نظریهٔ بافه‌های منسجم[1] جبری سِر[2] است [Se].

۲. حال یک واریتهٔ جبری آفین یا تصویری X را که روی میدان k تعریف شده [**۲۸**] در نظر بگیرید. فرض نمی‌شود که میدان k به‌طور جبری بسته است، اما X مجموعه‌ای تحویل‌ناپذیر است. می‌توان میدان $K = k(X)$ از توابع گویا روی X، و به‌ازای هر نقطهٔ $x \in X$، حلقهٔ $\mathfrak{O}_x$ از توابع گویای تعریف‌شده در نقطهٔ x را تعریف کرد. به‌طور کلی اگر Y یک زیرواریتهٔ تحویل‌ناپذیر X باشد، حلقهٔ موضعی X در Y را می‌توان تعریف کرد و با $\mathfrak{O}_{X,Y}$ نشان داد. زاریسکی نظریهٔ حلقه‌های موضعی را ابداع کرده بود اما این شواله بود که در سمینار خود [CC] در ۱۹۵۶، گردایهٔ $\mathfrak{O}_{X,Y}$، که آن را اسکیم [طرح، گرتهٔ] X (برای متغیر Y) نام نهاده بود، پایهٔ نظریه قرار داد. او یک بیان اصل موضوعی از اسکیمها به‌دست داد.

ضروری بود این نظرات ترکیب شوند و محدودیتهای قبلی (که k به‌طور جبری بسته است و یا X تحویل‌ناپذیر است) از میان برداشته شوند. گروتندیک بعد از تلاشهای مقدماتی گوناگون [**۲۹**] دریافت که چگونه با استفاده از توپولوژی زاریسکی [**۳۰**] مفهوم کلی اسکیم و بافه‌ای از حلقه‌های موضعی را تعریف کند. البته باید در نظر داشت که فضایی که گروتندیک به یک واریته نظیر کرد، مجموعهٔ نقاطش نیست بلکه مجموعهٔ زیرواریته‌های تحویل‌ناپذیر آن است. این است معنای کلمهٔ اسکیم! اما برای اینکه بدانید نقاط چیستند بخش بعد را ببینید.

حال نکته‌ای نهایی دربارهٔ اصطلاح طیف. در فیزیک، هر نوع اتم یا مولکول یک طیف مشخصه متشکل از خطوط گسیلی یا جذبی‌اش دارد. مکانیک کوانتومی اینها را به‌عنوان مقادیر مشخصهٔ یک عملگر همیلتنی تعبیر

1. coherent sheaves 2. Serre

می‌کند که روی فضای هیلبرت معینی عمل می‌کند. بنابراین طبیعی است که از طیف گسستهٔ همیلتنی صحبت کنیم. نوارهای گسیل یا جذب با یک طیف پیوسته نظیر می‌شوند. در اوایل دههٔ ۱۹۳۰، فون نویمان موفق شد تعریفی عالی از مفهوم عملگر (بیکران) خود الحاق H روی یک فضای هیلبرت $\mathfrak{H}$ و طیفهای آن به‌دست دهد. نقش گلفاند در دههٔ ۱۹۴۰ در پیشبرد این موضوع این بود که یک جبر باناخ جابه‌جایی A به عملگر H نسبت داد و یکریختی‌ای از A به روی $C^{\circ}(S;\mathbb{C})$ تعریف کرد. از این منظر تحول معنای طیف را می‌توان فهمید. در نظر گروتندیک، طیف یک حلقهٔ جابه‌جایی، از ایده‌آلهای اول آن (همان‌طور که ددکیند پذیرفته بود) تشکیل شده است.

۵. نقاط و نمایشها

اگر همهٔ نقاط به‌طور ذاتی از یکدیگر غیرقابل تمیز باشند، فقط می‌توانند از نظر مکان با هم متفاوت باشند. به بیان دیگر، نقطه‌ای مثالی وجود دارد که سایر نقاط نمایشهایی از آن نقطه هستند. حال این ایده را به زبانی ریاضی‌تر بیان می‌کنیم. ما فضایی را معرفی می‌کنیم که از یک نقطهٔ ۱ تشکیل شده است. برای هر نقطهٔ a از یک فضای X، یک نگاشت یکتا یا نمایش از فضای ۱ به فضای X وجود دارد که تک نقطهٔ ۱ را به نقطهٔ a از X می‌نگارد. نظریهٔ رسته‌ها بیان ریاضی ایدهٔ نمایش (یا تبدیل) است. ما رده‌ای از اشیا (یا فضاها) و تبدیلات f از یک شیئ X به یک شیئ دیگر Y، و امکان ترکیب این تبدیلات را داریم. «ایدهٔ» نظریهٔ رسته‌ها این است که فقط فضاها و تبدیلات را به‌جای نقاط در نظر بگیریم. اما در بیشتر رسته‌ها، شیئی مانند ۱ وجود دارد که با این واقعیت مشخص می‌شود که دقیقاً یک تبدیل از X، شیئ X هر چه باشد، به ۱ وجود دارد. بنابراین می‌توان هر تبدیل از ۱ به X را یک نقطهٔ X نامید، اما کاملاً ممکن است که یک شیئ هیچ نقطه‌ای به این معنا نداشته باشد[۳۱].

برای نمونه جبرهای بولی را بررسی می‌کنیم. ترکیب عطفی $A \wedge B$ و ترکیب فصلی $A \vee B$ را عملیات پایه در یک جبر بولی $\mathcal{P}$ می‌گیریم. رابطهٔ مقایسه‌ای $A \leq B$ در واقع با $A = A \wedge B$ و $B = A \vee B$ مترادف است. نمایشی چون f از یک جبر بولی $\mathcal{P}$ در جبر بولی دیگر $\mathcal{P}'$ نگاشت f از $\mathcal{P}$ در $\mathcal{P}'$ است که از قواعد[۳۲]

$$f(A \vee B) = f(A) \vee f(B), \qquad f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B) \quad (۸)$$

تبعیت می‌کند. یک جبر بولی که با ۱ نمایش داده می‌شود، وجود دارد و از دوعنصر ۰ و ۱ به همراه قواعد[۳۳]

$$۰ \wedge ۰ = ۰ \wedge ۱ = ۱ \wedge ۰ = ۰ \qquad ۱ \wedge ۱ = ۱$$

$$۱ \vee ۱ = ۰ \vee ۱ = ۱ \vee ۰ = ۱ \qquad ۰ \vee ۰ = ۰$$

تشکیل شده است و از اینها نتیجه می‌شود $۰ \leq ۱$. برای هر جبر بولی $\mathcal{P}$ یک و فقط یک نمایش از ۱ در $\mathcal{P}$ وجود دارد و ارزه‌های $\mathcal{P}$ نمایشهای $\mathcal{P}$ در ۱ هستند. برای ایجاد سازگاری با طرحی کلی که در بالا تشریح شد، از شیوهٔ دوگان‌سازی یا «وارون‌سازی جهت» استفاده می‌کنیم. نمایشی از $\mathcal{P}$ در $\mathcal{P}'$ را یک «نمایش وارون» $\mathcal{P}'$ در $\mathcal{P}$ می‌نامیم. به این ترتیب طیف $\mathcal{P}$ مجموعهٔ «نمایشهای وارون» ۱ در $\mathcal{P}$ خواهد بود.

لزوم وارون‌سازی جهت پیکانها در حالت نمایش گلفاند واضح‌تر دیده می‌شود. اگر X و Y فضاهایی فشرده باشند، هر نگاشت پیوستهٔ u از X به Y یک نمایش u^* از جبر $B = C^{\circ}(Y;\mathbb{C})$ در جبر $A = C^{\circ}(X;\mathbb{C})$ در جهت وارون تعریف می‌کند. برعکس، هر نمایش Φ [۳۴] از جبر B در جبر A از یک نگاشت پیوسته و یکتای u از X به Y، از طریق رابطهٔ $\Phi = u^*$، به‌دست می‌آید. فضای تک‌نقطه‌ای متناظر با جبر اعداد مختلط، $\mathbb{C}$، است، و فضای X را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ نمایشهای جبر $A = C^{\circ}(X;\mathbb{C})$ در جبر $\mathbb{C}$ تعبیر کرد. به بیان کلی‌تر، اگر A یک جبر باناخ جابه‌جایی با عنصر ۱ باشد، حالتهای محض A، نمایشهای A در $\mathbb{C}$ هستند که این تعبیر جدیدی از طیف A به‌دست می‌دهد.

هندسهٔ جبری برای مدتهای مدیدی با مسألهٔ معادلاتی که هیچ جواب مشترکی ندارند، یعنی فضاهایی که هیچ نقطه‌ای ندارند، مواجه بود. برای مثال، دایره‌ای موهومی در صفحه در نظر می‌گیریم. می‌توان فرض کرد معادلهٔ دایره به‌صورت

$$x^{۲} + y^{۲} + a^{۲} = ۰ \quad (۹)$$

نوشته شده است. مسلماً، اگر عدد حقیقی $a \neq ۰$ داده شده باشد، هیچ نقطه‌ای با مختصات حقیقی x و y در (۹) صدق نمی‌کند. اعداد مختلط ابداع شدند تا جوابهایی برای چنین معادلاتی به‌دست دهند. از دیدگاه گروتندیک، ابتدا باید جبر خارج‌قسمتی $\mathfrak{O} = \mathbb{R}[X,Y]/(X^{۲}+Y^{۲}+a^{۲})$ را معرفی کرد. آنگاه Γ، دایرهٔ (۹)، طیف حلقهٔ $\mathfrak{O}$ است، یعنی مجموعهٔ ایده‌آلهای اول آن. جوابهای مختلط (۹) یا به عبارت دیگر، نقاط مختلط دایرهٔ Γ، با نمایشهای $\mathbb{R}$ـخطی $\mathfrak{O}$ در $\mathbb{C}$ متناظر می‌شوند. با توجه به این مثال، این فکر به ذهن می‌رسد که برای هر جبر جابه‌جایی A روی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ $\Gamma(A)$ از نمایشهای $\mathbb{R}$ـخطی $\mathfrak{O}$ در A را، که آنها را Aـنقطه‌های Γ می‌نامیم، معرفی کنیم. دایرهٔ «حقیقی» Γ (یعنی دایره‌ای که معادله‌اش ضرایب حقیقی دارد) هیچ $\mathbb{R}$ـنقطه‌ای ندارد، اما تعداد زیادی $\mathbb{C}$ـنقطه دارد. در مورد یک اسکیم دلخواه، در نظر گرفتن Aـنقطه‌ها برای همهٔ جبرهای جابه‌جایی، یادآوری حالت آشنایی را میسر می‌سازد[۳۵]. برای مثال، اگر A یک گروه اسکیم باشد، Aـنقطه‌ها برای هر A، یک گروه $G(A)$ را، به معنای استاندارد آن، می‌سازند.

در نظر گرفتن توپوس $\mathfrak{F}(X)$ از بافه‌های روی یک فضای توپولوژیک X ارائهٔ توسیعی دیگر از مفهوم نقطه را به شیوهٔ گروتندیک امکان‌پذیر می‌کند. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و u نگاشتی پیوسته از X به Y باشد، یک تابعگون هموردای u_* و یا تابعگون پادوردای u^* را به u نسبت می‌دهیم. اگر F بافه‌ای روی X و G بافه‌ای روی Y باشد، آنگاه u_*F بافه‌ای روی Y و u^*G بافه‌ای روی X خواهد بود. u_*F را می‌توان با رابطهٔ

$$u_*F(V) = F(u^{-۱}(V))$$

به‌ازای هر مجموعهٔ باز V در Y مشخص کرد. به‌علاوه، تابعگونهای u_* و u^* الحاقی هستند به این معنا که نمایشهای $F \to u^*G$ از بافه‌های روی X، در تناظری یک‌به‌یک با نمایشهای $u_*F \to G$ از بافه‌های روی Y قرار می‌گیرند. این خاصیت، تابعگون u^* را به‌طور ضمنی مشخص می‌کند.

توپوس $\mathfrak{Set}$ از مجموعه‌ها را می‌توان توپوسی از بافه‌های روی فضایِ فروکاسته به یک نقطه در نظر گرفت. بنابه آنچه تاکنون گفته شده، انتخاب یک نقطهٔ a از یک فضای توپولوژیک X به این ترتیب، دو تابعگون الحاقی

$$\mathfrak{F}(X) \underset{a_*}{\overset{a^*}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Set}$$

را تعریف می‌کند. تابعگون a^* به هر بافهٔ روی X، تار آن[۳۶] در نقطهٔ a را منسوب می‌کند. چنین شرطی آشکار می‌کند که چرا دولین و گروتندیک، «نقطه» و «تابعگون تاری» را مترادف با هم به‌کار می‌برند.

۶. به‌سوی هندسهٔ ناجابه‌جایی

بحث دربارهٔ فضاهای بدون نقطه یا با تعداد بسیارکمی نقطه را ادامه می‌دهیم. برای مثال، گروهی مانند G را که فرض می‌شود گسسته است و روی یک فضای فروکاسته به یک نقطه، $*$، عمل می‌کند، در نظر بگیرید. دربارهٔ فضای مدارهای G در فضای $*$ چه می‌توان گفت؟ در نگاه اول، فقط یک مدار وجود دارد و اثری ازگروه G نیست. لیکن پاسخهای دقیق‌تری به‌دست آمده است:

۱. بر اساس نظر آرمان بورل [Bo]، نباید تفاوتی بین دو فضای هوموتوپیکـ هم‌ارز قائل شد. بنابراین فضای $*$ جای خود را به یک فضای انقباض‌پذیر EG می‌دهد که G روی آن آزادانه عمل می‌کند. به این ترتیب، فضای مدارهای G در $*$، یعنی $BG = EG/G$ به‌عنوان پایهٔ بافهٔ اصلی EG، با گروه G، تعبیر می‌گردد. به بیان کلی‌تر اگر گروه G روی یک فضای X عمل کند، فضای مدار «درست»، که با $X//G$ نشان داده می‌شود، خارج‌قسمت $X \times EG$، با عمل قطری G، می‌باشد. آنچه هم‌اکنون بیان شد، روش فضای رده‌بندی است.

۲. بر اساس نظر گروتندیک [Gr3] می‌توان توپوس $\mathfrak{E}_G$ از مجموعه‌ها را، که گروه G روی آن عمل می‌کند در نظر گرفت. این Gـمجموعه‌ها را باید به‌عنوان بافه‌های روی فضای اسرارآمیز مدارهای G در $*$ تعبیر کرد. از دیدگاه شیوهٔ ساخت قبلی، $\mathfrak{E}_G$ را می‌توان توپوس رده‌بندی‌کنندهٔ G نامید، زیرا BG فضای رده‌بندی‌کنندهٔ G نامیده می‌شود. حال به‌طور کلی‌تر فرض می‌کنیم گروه G به‌طور پیوسته روی یک فضای توپولوژیک X عمل می‌کند. می‌توان فضای طبیعی مدارها، یعنی X/G را تعریف کرد. اما ممکن است فضای X/G نامتعارف باشد و فقط مجموعه‌های باز «بدیهی» (کل فضا و مجموعهٔ تهی)[۳۷] را داشته باشد. در این مورد اطلاعاتی که توسط بافه‌های روی X/G ارائه می‌شود، این فضا را به‌صورت یک فضای تک‌نقطه‌ای مطرح خواهد کرد. در این حالت گروتندیک پیشنهاد کرد به‌جای بافه‌های روی X/G، بافه‌های F روی X، با عمل سازگار G روی F و X، در نظرگرفته شود. به‌جای توپوس $\mathfrak{F}(X/G)$، توپوس $\mathfrak{F}(X;G)$ از بافه‌های هموردش روی X قرار می‌گیرد.
فضای رده‌بندی‌کنندهٔ BG، گروههای هومولوژی‌ای دارد که دقیقاً همان گروههای هومولوژی گروه G به مفهوم جبری آن است. تکنیکهای کوهومولوژی بافه‌ها، به توپوس‌ها تعمیم می‌یابند. با به‌کار بستن این تکنیکها روی توپوس $\mathfrak{F}(X;G)$، تعریف گروههای کوهومولوژی هموردش برای Gـفضای X را میسر می‌سازند. آنها را همچنین می‌توان به‌عنوان گروههای کوهومولوژی فضای ناموجود X/G تعبیر کرد.

۳. حال روش آلن کُن [Co] را تشریح می‌کنیم. روی یک فضای گسستهٔ X، با تعداد متناهی نقطه، هر بافهٔ F از فضاهای برداری روی X، دقیقاً مجموعهٔ تمام تارهای $(F_a)_{a\in X}$ است و مقاطع F فضای برداری $\Gamma(F) = \bigoplus_{a\in X} F_a$ را تشکیل می‌دهند. جبر $\mathbb{C}^X$ از توابع روی X به‌وسیلهٔ ضرب، روی این فضا عمل می‌کند. به این ترتیب در آنالیز هیلبرتی، تعابیر زیر را داریم:

(الف) هر بافهٔ روی یک فضای موضعاً فشردهٔ X، با یک نمایش برگشتی[۳۸] جبر $C^\circ_\infty(X;\mathbb{C})$ از توابع پیوسته روی X که در بینهایت صفر می‌شوند، متناظر است.
(ب) عمل گروه G[۳۹] با نمایش یکانی گروه G در یک فضای هیلبرت متناظر است.

همان‌طورکه می‌دانیم، به هرگروه موضعاً فشردهٔ G، می‌توان یک C^*ـجبر چون $C^*(G)$ نسبت داد[۴۰] به‌طوری‌که نمایش یکانی G با نمایش برگشتی $C^*(G)$ متناظر می‌شود. در چشم‌اندازکُن، این جبر $C^*(G)$ با یک فضای رده‌بندی‌کنندهٔ BG متناظر می‌شود. وقتی G گروهی جابه‌جایی با دوگان پونتریاگین $\hat{G}$ است، C^*ـجبرهای $C^*(G)$ و $C^\circ_\infty(\hat{G},\mathbb{C})$ یکریخت هستند. به این ترتیب انتظار می‌رود ارتباطاتی نزدیک بین BG و $\hat{G}$ وجود داشته باشد و در واقع نیز چنین است، اگر $G = \mathbb{Z}^n$ آنگاه $BG = \hat{G} = U(۱)^n$. معهذا باید یادآور شد که BG فقط با تقریب هوموتوپی تعریف می‌شود، در حالی‌که $\hat{G}$ به‌طور یکتا تعریف می‌گردد.
با مراجعه به حالتی که یک گروه G روی فضای X عمل می‌کند، درمی‌یابیم که نظیر یک کلاف (یا بافهٔ) Gـهموردش روی X، با یک زوج سازگار از نمایشها، یکی از $C^\circ_\infty(X;\mathbb{C})$ و دیگری از G، روی یک فضای هیلبرت ارائه می‌شود. اینکه چگونه می‌توان یک C^*ـجبر $C^*(X;G)$ تعریف کرد که نمایشهای برگشتی آن متناظر با زوجهای توصیف‌شده در بالا باشند، معلوم شده است. این جبر نقش جبر توابع پیوسته روی فضای مدارهای G در X را ایفا می‌کند.
حالت برگ‌بندی‌ها را نیز می‌توان همین‌طور بررسی کرد. این وضعیت را در نمودار زیر خلاصه می‌کنیم

$$\begin{tikzcd}
\text{واریتهٔ } X \text{ با برگ‌بندی } \mathfrak{F} \arrow[dr] & & G\text{ـفضای } X \arrow[dl] \\
& \text{گروهوار توپولوژیک } \mathfrak{G} \arrow[dl, "\text{کُن}"'] \arrow[dr, "\text{گروتندیک}"] & \\
C^*\text{ـجبرهای } C^*(\mathfrak{G}) \arrow[rr, dashed, "?", "\text{تاپیا}"'] & & \text{توپوس } \mathfrak{G}\text{ـمجموعه‌ها}
\end{tikzcd}$$

این دو نظریه به توسط مفهوم گروهوار وحدت می‌یابند. گروهوارها تعمیم گروهها هستند و بسیاری از مفاهیم و احکام نظریهٔ گروهها به آنها تعمیم می‌یابند. به‌خصوص مفهوم $\mathfrak{G}$ـمجموعه و C^*ـجبر $C^*(\mathfrak{G})$ را داریم (به شرطی که $\mathfrak{G}$ موضعاً فشرده باشد). C^*ـجبر $C^*(X;G)$ دقیقاً C^*ـجبر $C^*(\mathfrak{G})$ است که $\mathfrak{G}$ یک گروهوار موضعاً فشرده است که از عمل G روی X ساخته می‌شود. حالتهای دیگر مشابه حالت اخیر هستند.
حال هم‌ارزی‌های طبیعی زیر را داریم:
۱. هموتوپی برای فضاهای توپولوژیک؛
۲. هم‌ارزی توپوس؛
۳. هم‌ارزی موریتا برای C^*ـجبرها.
ناورداهای «توپولوژیک» باید با این هم‌ارزی‌ها سازگار باشند. مشخصهٔ نامتعارف عمل یک گروه یا برگ‌بندی به این‌صورت تعبیر می‌شود که توپوس وابسته (یا C^*ـجبر) هم‌ارز با توپوس یک فضای معمولی نیست. تعبیر آن در مورد C^*ـجبر، این است که این جبر، به مفهوم مورد نظر موریتا، با یک

C^*ـجبر جابه‌جایی هم‌ارز نیست، به عبارت دیگر، اساساً ناجابه‌جایی است. حال می‌توان معنای عبارت «هندسهٔ ناجابه‌جایی» را فهمید. مقایسهٔ مختصری بین دیدگاههای کن و گروتندیک انجام شده است (مقالهٔ [Ta] از تاپیا را ببینید).

نقاط یک فضای تعمیم‌یافته چیستند؟ نقاط یک توپوس را در قسمت ۵ تعریف کردیم. نقاط یک C^*ـجبر رده‌های هم‌ارزی نمایشهای برگشتی تحویل‌ناپذیر هستند[۴۱].

۷. تقارنهای داخلی

این حدس را مطرح کردیم که همهٔ نقاط شبیه به یکدیگر نیستند ــ چندین نوع موناد وجود دارد. به این ترتیب این سؤال پیش می‌آید که آیا یک نقطه می‌تواند تقارنهایی داشته باشد؟ حالت ساده‌ای را که یک گروه متناهی G روی یک خمینهٔ فشردهٔ X عمل می‌کند و فضای طبیعی مدارهای X/G را در نظر می‌گیریم. اگر ξ مدار $G \cdot x$ یک نقطهٔ x از X باشد، دلایل متعددی وجود دارد که G_x یعنی پایدارساز[۴۲] نقطهٔ x در G، گروه تقارنهای نقطهٔ ξ از X/G است. به‌خصوص، G گروه تقارنهای نقطهٔ سادهٔ $*/G$ (بخش ۶ را ببینید) است. این نتیجه، ناکافی بودن دیدگاه مبتنی بر بافه‌ها روی خارج‌قسمت سادهٔ X/G را نشان می‌دهد. ویژگی غریب بافه این است که آنچه در یک نقطه معلوم است، در تمام نقاط به اندازهٔ کافی نزدیک نیز بدون ابهام معلوم است و اینکه امکان شاخه شاخه شدن را از بین می‌برد[۴۳]. این نکات ساده در نظریهٔ ساتاکه[1] دربارهٔ Vـخمینه‌ها (که ترستن[2] آنها را "اُربیفُلد" نامید) بسط داده شده و کاربردهای متعددی در فیزیک ریاضی پیدا کرده است.

مسألهٔ تقارنهای داخلی در فیزیک ذرات بنیادی مسأله‌ای بسیار جدی است. مدل کالوزا‌ـکلاین[3] در ۱۹۲۰، برای وحدت دادن میدانهای گرانشی و الکترومغناطیسی ارائه شد. برای روشن شدن موضوع نخست استوانهٔ دواری با محور D و شعاع r (نقاطی از فضای ۳بعدی که به فاصلهٔ r از خط D قرار دارند) را در نظر می‌گیریم. هر صفحه که بر محور D عمود باشد، استوانه را در دایره‌ای به شعاع r قطع می‌کند و استوانه اجتماع این دایره‌های دوبه‌دو مجزاست. اگر شعاع r خیلی کوچک باشد، هر یک از دوایر را می‌توان با مرکزش یکی گرفت و استوانه از محورش قابل تمایز نخواهد بود. بُعد تراوردی[4] فشرده شده است. مسلماً هر دایره گروه دورانهایی چون Γ دارد و وقتی دایره منقبض شده به مرکزش تبدیل می‌شود، این گروه نباید نادیده انگاشته شود. بنابراین می‌توان Γ را گروه تقارنهای داخلی هر نقطه از خط D همراه با یک بعد اضافی در نظر گرفت. به زبانی فنی‌تر، استوانه به‌صورت بافهٔ اصلی با پایهٔ D و گروه Γ ظاهر می‌شود. به مدل کالوزا‌ـکلاین برمی‌گردیم و به جای فضا‌ـزمان ۴بعدی $M^۴$ ، فضایی ۵بعدی در نظر می‌گیریم که از فراگستری[5] هر نقطهٔ $M^۴$ به یک دایرهٔ «خیلی کوچک» به‌دست می‌آید. به این ترتیب، گروه تقارنهای داخلی که به هر نقطه نظیر می‌گردد همان گروه قبلی، $\Gamma = \mathrm{SO}(۲)$ است که به‌طور ضمنی در تغییر پیمانهٔ پتانسیل الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود[۴۴].

برای در نظرگرفتن میدانهای دیگری علاوه بر میدان الکترومغناطیسی، و ذرات دیگری علاوه بر الکترون و فوتون، همان راهبرد به‌کار گرفته شد و گروه $\mathrm{SO}(۲)$ (یکریخت با $\mathrm{U}(۱)$)، جای خود را به گروههای $\mathrm{SU}(۲)$ و $\mathrm{SU}(۳)$ یا حتی گروههای پیچیده‌تری همچون $E_۸$ در بعضی مدلها داد. در این روش به‌جای فضای ۴بعدی $M^۴$ یک فضای $d + ۴$بعدی قرار می‌گیرد که d بعد گروه است. در دههٔ ۱۹۶۰ تلاشی برای یکپارچه کردن گروه تقارنهای خارجی فضا‌ـزمان پوانکاره با گروه تقارنهای داخلی صورت گرفت. حصول این وحدت به دلایل ریاضی به مانع برخورد[۴۵].

دیدگاه گروتندیک این امکان را فراهم می‌آورد که گروه تقارنهای داخلی یک نقطه را معرفی کنیم. نکتهٔ اصلی در این کار به شرح زیر است: فرض کنید دو ردهٔ $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ داده شده است. می‌توان تبدیلات رسته‌ها (موسوم به «تابعگونها») را تعریف کرد، مثلاً $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$. همچنین تبدیلات بین تابعگونها را بر اساس طرح زیر تعریف کرد:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi"] & \mathcal{C}'. \end{tikzcd}$$

تابعگونها می‌توانند ترکیب شوند، همان‌طور که تبدیلات بین تابعگونها می‌توانند ترکیب شوند. بنابراین می‌توان از گروه خودریختیهای یک تابعگون $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$، یعنی تبدیلات $T \overset{\Phi}{\Rightarrow} T$ که دارای وارون‌اند، صحبت کرد. چون نقطه به مفهوم مورد نظر گروتندیک، به‌عنوان تابعگونی بین توپوس‌ها تعبیر می‌شود، این ترفند مؤثر واقع شده است. نقطه یک گروه تقارنها دارد. برای مثال گروتندیک با این فرض که X یک فضای توپولوژیک باشد و a یک نقطهٔ X، گروه بنیادی $\pi_۱(X;a)$ی فضای X در نقطهٔ a را به‌عنوان گروه خودریختیهای تابعگون تاری a^* تعریف می‌کند که به زیرتوپوس $\mathfrak{F}_{lc}(X)$ از بافه‌های موضعاً ثابت روی X، تحدید شده است:

$$a^* : \mathfrak{F}_{lc}(X) \to \mathfrak{Set}$$

به عبارت دیگر، گروه بنیادی $\pi_۱(X;a)$ به‌عنوان گروه تقارنهای یک نقطهٔ a در نظر گرفته می‌شود. به یمن معرفی طیف یک میدان، گروه گالوای $\mathrm{Gal}(K/k)$ یک توسیع میدان را نیز می‌توان به‌عنوان گروه تقارنهای یک نقطه تعبیر کرد.

همین ایده را می‌توان برای باز تعبیر قضیهٔ دوگانی تاناکا‌ـکرین[1] به‌کار گرفت. فرض کنیم G یک گروه فشرده باشد. ردهٔ $\mathfrak{Rep}_G$ را که اشیای آن نمایشهای خطی متناهی‌بعد پیوستهٔ گروه Gاند[۴۶]، در نظر می‌گیریم. همچنین ردهٔ $\mathfrak{Vect}_f$ متشکل از فضاهای برداری متناهی‌بعد مختلط و تبدیلات خطی را نیز در نظر می‌گیریم. تابعگون «تاری»، $\Phi : \mathfrak{Rep}_G \to \mathfrak{Vect}_f$، به نمایش π، فضای برداری V_π را که روی آن عمل می‌کند نسبت می‌دهد. گروه G را می‌توان به‌عنوان گروه خودریختیهای این تابعگون Φ که حاصلضرب تانسوری را به معنای مناسبی حفظ می‌کند، باز یافت[۴۷].

تعبیر این قضیه این است که گروه G فقط به‌واسطهٔ ردهٔ نمایشهای $\mathfrak{Rep}_G$اش وجود دارد. در واقع استفاده از گروهها برای طبقه‌بندی ذرات بنیادی مشابه این است. در زنجیرهٔ تقارنهای شکسته‌شده برای هادرونها

$$\mathrm{SU}(۳) \supset \mathrm{SU}(۲) \supset \mathrm{U}(۱)$$

آنچه مهم است فقط نمایش این گروهها و قواعد شاخه‌شاخه شدن آنها[۴۸] برای سازمان‌دهی خانوادهٔ هادرونها به چندتایه‌ها و بعد جدا کردن اعضای چندتایه به‌وسیلهٔ بار الکتریکی آنها، می‌باشد (گروه $\mathrm{U}(۱)$، همان‌طور که در بالا تشریح شد با میدان الکترومغناطیسی متناظر می‌شود).

1. Satake 2. Thurston 3. Kaluza-Klein
4. transversal dimension 5. blow up

1. Tannaka-Krein

مسأله‌ای که به این ترتیب پیش می‌آید، این است که یک صورت اصل موضوعی برای رسته‌هایی به شکل $\mathfrak{Rep}_G$ به‌دست دهیم. چنین صورتی هم توسط دولین در جشن‌نامهٔ گروتندیک [De]، به‌عنوان گسترشی از برنامهٔ گروتندیک، و هم مستقلاً به‌وسیلهٔ دو فیزیکدان، دوپلیچر[1] و رابرتز[2] [DR] که از نظریهٔ میدانهای پیمانه‌ای الهام گرفته‌اند، به‌دست آمده است.

۸. «من رؤیایی دارم»

رؤیای نافرجام گروتندیک ارائهٔ نظریه‌ای دربارهٔ موتیفها بود که به‌خصوص نظریهٔ گالوا و توپولوژی را متحد سازد. در حال حاضر ما فقط اجزای پراکنده‌ای از این نظریه را در دست داریم، اما می‌خواهم بحث را با ذکر یک پیشرفت بزرگ و غیرقابل انتظار به پایان آورم که در آن فیزیک و ریاضی دوباره در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند.

اویلر اولین فردی بود که سری $\zeta(k)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ به‌ازای $k=2,3,\ldots$ را بررسی کرد. به‌خصوص فرمولهای $\zeta(2)=\pi^2/6$ و $\zeta(4)=\pi^4/90$ از آن او هستند. او اولین فردی هم بود که سریهای چندگانه از یک نوع (اعداد اویلر_زاگیر [Za])

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\sum n_1^{-k_1}\cdots n_r^{-k_r} \qquad (10)$$

را در نظر گرفت که در آنها جمع روی همهٔ اعداد صحیح $n_1,\ldots,n_r$ که $n_1>n_2>\ldots>n_r\geq 1$، انجام می‌شود. حاصلضرب دو تا از این گونه اعداد، ترکیب خطی اعدادی از یک نوع خواهد بود. ما اولین حالت جالب توجه، یعنی

$$\zeta(a)\zeta(b)=\zeta(a+b)+\zeta(a,b)+\zeta(b,a) \qquad (11)$$

را که با عملیات مقدماتی سریها قابل اثبات است بیان می‌کنیم. حدس زده می‌شود که تمام روابط چندجمله‌ای با ضرایب گویا بین اعداد $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ از این روابط حاصلضربی و دیگر روابط مشابه قابل استخراج است. برای اینکه شمه‌ای از اهمیت این حدس را بیان کنم، یادآور می‌شوم که از این حدس نتیجه می‌شود اعداد $\zeta(3)$، $\zeta(5)$، ... اعدادی متعالی‌اند. تا مدتها فقط این نکته معلوم شده بود که $\zeta(3)$ ناگویاست (آپری[3]، ۱۹۷۹)، اما اخیراً ریووآل[4] این نتیجه را تعمیم داده و ثابت کرده است تعداد نامتناهی عدد در دنبالهٔ $\zeta(3)$، $\zeta(5)$، ... ناگویا هستند [Ri].

مجموعهٔ ترکیبهای خطیِ اعداد $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ با ضرایب گویا، که در آن $k_1+\cdots+k_r=d$، را با $\mathfrak{A}_d$ نمایش می‌دهیم. فرمولهای حاصلضرب نشان می‌دهند که

$$\mathfrak{A}_d\cdot\mathfrak{A}_{d'}\subset\mathfrak{A}_{d+d'}$$

بنابراین مجموع مستقیم $\mathfrak{A}_0=\mathbb{Q}$، $\mathfrak{A}_1$، $\mathfrak{A}_2$، ...، یعنی $\mathfrak{A}$ یک جبر جابه‌جایی روی میدان اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، است. درینفلد[5]، یک گروه GRT_1، موسوم به گروه (مدرج) گروتندیک_تایک‌مولر[6] را معرفی کرده است. این گروه یک اسکیم از گروهها روی میدان $\mathbb{Q}$ است و بنابراین یک جبر لی دارد که با $\mathfrak{grt}_1$ نمایش داده می‌شود. برای تشریح این جبر لی، لازم است من اطلاعات دقیقی دربارهٔ معادلهٔ کنیژنیک[7]_زامولودچیکف[8]، که نقشی اساسی در نظریهٔ

1. Doplicher 2. Roberts 3. Apéry 4. Rivoal 5. Drinfeld
6. Teichmüller 7. Knizhnik 8. Zamolodchikov

میدانهای همدیس بازی می‌کند، به‌دست دهم. حدس زده می‌شود که جبر لی $\mathfrak{grt}_1$ یک جبر آزاد لی با مولدهای ψ_3، ψ_5، ψ_7، ...، است که به شیوه‌ای طبیعی، با اعداد $\zeta(3)$، $\zeta(5)$، $\zeta(7)$، ... متناظر می‌شوند. به‌علاوه GRT_1 نقش گروه گالوا را برای اعداد متعالیِ به شکل $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ ایفا می‌کند، زیرا این گروه (بنا بر حدس) روی جبر $\mathfrak{A}$ به‌وسیلهٔ خودریختیها عمل می‌کند [۴۹].

در مؤسسه، کُن و کُنتسویچ، تقریباً به‌طور همزمان کشف کردند که گروه GRT_1 به‌طور طبیعی در مسائل بنیادی فیزیک پیش می‌آید.

۱. کُن و کرایمر [CK] کشف کردند که چگونه جبر لی $\mathfrak{grt}_1$ (و سایر جبرهای لی مشابه) را که روی جبر متناظر با نمودار فاینمن عمل می‌کند بسازند. این جبر یک نوع جدید تقارن را نمایش می‌دهد، روی هیچ مدل خاصی از نظریهٔ میدان عمل نمی‌کند، اما یک ردهٔ کامل از لاگرانژیهای ممکن را صفر می‌کند.

۲. کُنتسویچ [Ko] اخیراً مسألهٔ کوانتش به‌وسیلهٔ تغییر شکل برای خمینه‌های پواسون را حل کرده است. مجموعهٔ تمام کوانتشهای ممکن یک گروه تقارنها دارد و کُنتسویچ حدس می‌زند که این گروه با GRT یکریخت است.

در هر دو مسأله، اعداد $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ به‌صورت مقادیر انتگرالهای خاصی ظاهر می‌شوند.

آیا می‌توان وصلتی بهتر از این، به مناسبت چهل‌امین سالگرد تأسیس مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی [فرانسه] و سی‌امین سالگرد جدا شدن گروتندیک از آن، تصور کرد؟

۹. پی‌نوشت (دسامبر ۲۰۰۰)

مقالهٔ حاضر در سپتامبر ۱۹۹۸ به زبان فرانسه نوشته شد. من از فرصتی که با ترجمهٔ مقاله به انگلیسی پیش آمد، برای اصلاح چند مورد بی‌دقتی در شرح زندگی الکساندر گروتندیک، استفاده کردم. از دوستان و همکارانی که به من کمک کردند تا این خطاها را تصحیح کنم تشکر می‌کنم، اما بیم آن را نیز دارم که همهٔ موارد را اصلاح نکرده باشم.

امروزه هم دیدگاه من دربارهٔ مسألهٔ فضا با آنچه در بالا شرح داده شد تفاوتی ندارد. اما دربارهٔ آخرین بخش، «رؤیایی دارم»، شرح و تفصیل بیشتری لازم است. طی دو سال گذشته، پیشرفتهای چشمگیری هم در ریاضیات و هم در ادراک فیزیکی رخ داده است.

از جنبهٔ ریاضی، ما آموخته‌ایم بین اعداد چندزتایی $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ و همتاهای نمادین آنها $Z(k_1,\ldots,k_r)$ تمایز قائل شویم. اینها نشانه‌هایی هستند که فقط مقید به روابط شناخته شدهٔ چندجمله‌ای بین اعداد $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$اند. از تعاریف این اعداد به‌وسیلهٔ سریها و انتگرالها می‌توان دو خانواده از روابط درجهٔ دوم بین آنها استخراج نمود. به‌علاوه با مطالعهٔ دقیق منظم‌سازی[1] سریهای واگرای $\zeta(1,k_2,\ldots,k_r)$ سومین مجموعه از روابط به‌دست می‌آید. این سه نوع رابطه آنهایی هستند که برای تعریف نماد $Z(k_1,\ldots,k_r)$ به‌کار می‌روند. ژان اکال[2] (اورسی، فرانسه) اعلام کرده که چندزتایی‌های نمادین، یک جبر چندجمله‌ای $\mathfrak{A}^{\mathrm{symb}}$ آزاد می‌سازند. اثبات کامل این ادعا، در رساله دانشجوی من ژرژ راسینه[3]، به همراه تعریف یک گروه اسکیم جدید، DM_0، که حدس زده می‌شود با GRT_1 یکی باشد، آمده است. احکام زیادی باقی‌مانده که ثابت نشده است، برای مثال، انگارهٔ متعالی بودن، با

1. regularization 2. Jean Ecalle 3. George Racinet

این مضمون که مقداردهی عددی $Z(k_1,\dots,k_r) \longmapsto \zeta(k_1,\dots,k_r)$ نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathfrak{A}^{\mathrm{symb}}$ به $\mathbb{R}$ است. فقط خاطر نشان می‌کنم که ریووآل [Ri] حکم کلاسیک آپری را در مورد اینکه $\zeta(3)$ ناگویاست (۱۹۷۹) به میزان بسیار زیادی بهتر کرده است. خواننده را به یک مقالهٔ مروری در دست انتشار [Ca] در این زمینه ارجاع می‌دهیم.

از نظر فیزیکی، کار کُن و کرایمر دربارهٔ بازبهنجارش در نظریهٔ میدان کوانتومی تعمیق یافته است. آنچه به «فرمول جنگل» زیمرمان موسوم است، به‌وسیلهٔ کرایمر به زبان جبرهای هوپف ترجمه شده وکُن ابزار مؤثر تجزیهٔ برکاف را معرفی کرده است. من با الهام از نظریهٔ گروههای جبری، همهٔ موضوعات را به زبان ماتریسهای مثلثی نمایی بازنویسی کرده‌ام و به همراه دانشجویم، مارکوس برگ[1]، ابزاری عملی برای محاسبهٔ جمله‌های ترازگر[2] ساخته‌ایم. در سطحی عمیق‌تر، قدرت پیشگویی من بیش از آن بود که فکر می‌کردم، و دلایل بسیاری وجود دارد که باور کنیم یک «گروه گالوایی عظیم» که روی ثابتهای بنیادی نظریه‌های فیزیکی عمل می‌کند، وجود دارد. این گروه باید ارتباط نزدیکی با گروه GRT_1 داشته باشد و ممکن است در نهایت به فهم مقدار عددی ثابت ساختارِ ظریف [۵۰]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

که معمایی دیرپاست، کمک کند.

برای اینکه مقاله در حال‌وهوایی خوش‌بینانه پایان پذیرد، یادآور می‌شوم «رؤیا»یی که دو سال پیش به‌صورت شبحی مبهم در مه دیده بودم، ممکن است به واقعیت بپیوندد و تاکنون منشأ تحقیقات جالب‌توجه فراوانی بوده است.

یادداشتها

۱. در کتاب مشهور جان رید، ده روزی که دنیا را تکان داد، که شرح نسبتاً رمانتیکی از انقلاب اکتبر ۱۹۱۷ است، تصویر شاپیرو آمده است.

۲. اوکراین از ۱۹۲۰ تا ۱۹۲۴ استقلال کوتاه‌مدتی داشت. جنگی مسلحانه بین سرخها (بلشویکها)، سفیدها (طرفداران تزار) و ماخنویستها در آنجا درگرفته بود. جنبش اخیر، برخی جنبه‌های قیام دهقانی را با ملی‌گرایی اوکراینی ترکیب کرده بود. آنارشیستهای اسپانیایی آن را، به غلط یا به درست، الگویی از یک قیام دهقانی خودانگیخته می‌دانستند. در اوکراین مستقل کنونی، ماخنو حداقل از نظر احزاب ملی‌گرا، قهرمان ملی به حساب می‌آید.

۳. بارها از من سؤال شده است که آیا «گروتندیک» نامی هلندی است؟ پاسخ این است که گویش ساکنان آلمان شمالی از لحاظ زبانشناختی به فلاندری نزدیک است.

۴. برخلاف ادعاهای مکرری که در تبلیغات فرانسوی می‌شود، این اردوگاهها از اواخر ۱۹۳۸ و نه از سپتامبر ۱۹۳۹ دایر شدند. در تاریخ اخیر اردوگاههای جدیدی برای «ملتهای دشمن» دایر شد.

۵. ورماخت هرگز جرئت نکرد به سراغ این مناطق کوهستانی برود که مردم آن به‌خود می‌بالیدند که از ماجرای الغای فرمان نانت در ۱۶۸۴ درس مقاومت آموخته‌اند.

۶. در دهۀ ۱۹۶۰، با معلم قبلی او در کولژ سونول، که در آستانهٔ بازنشستگی بود، باب آشنایی را گشودم. ملاقاتی بین گروتندیک و وی ترتیب دادم که برای هر دوی آنها بسیار هیجان‌انگیز بود.

۷. در فرانسه، مدرکی که پس از قبولی در آخرین امتحان دورهٔ دبیرستان (baccalauréat) داده می‌شود و مجوز ورود به تمامی دانشگاههای آن کشور است.

۸. هندسه‌دان مشهور، الی کارتان، که در آن موقع پیر و ناتوان شده بود. اما پسر او هانری کارتان ستارهٔ در حال طلوع (و پدر خواندهٔ) ریاضیات فرانسه در دهۀ ۱۹۴۰ بود. هانری کارتان همیشه پیوندهای نزدیکی با مناطق پروتستان جنوب فرانسه داشت و میزبان طبیعی گروتندیک در پاریس بود.

1. Marcus Berg 2. counter-terms

۹. مخفف "Direction de la Recherche et des Études Techniques" (ادارهٔ تحقیق و مطالعات فنی)، یک بنگاه تأمین بودجه وابسته به وزارت دفاع.

۱۰. مدارک تابعیت او در فاجعهٔ برلن در ۱۹۴۵ ناپدید شد.

۱۱. مادرش در آلمان به نوشتن رُمان و شعر اشتغال داشت. او در این فکر بود که همین راه را ادامه دهد.

۱۲. دو واقعهٔ مشهور را می‌توان ذکر کرد، یکی در سپتامبر ۱۹۷۰ در نیس و دیگری در ژوییهٔ ۱۹۷۲ در آنورس. او از یک «عقیدهٔ عمومی ریاضی»، که خیلی موافق با تز او بود، با اعلامیه‌های عجولانه‌اش روی برگرداند و تمهیدات سیاسی ظریف دوستانش را بر باد داد؛ آنچه را با ماهها تلاش به‌دست آمده بود، در ده دقیقه از بین برد.

۱۳. او مدت مدیدی رژیم غذایی خاصی را رعایت می‌کرد که ممکن است ناشی از گرایش او به یهودیت یا بودایی‌گری باشد.

۱۴. یادآور می‌شویم اصطلاح اتمهای به‌هم چسبیده (hooked atoms) جزو اصطلاحات رایج شده است.

۱۵. در جبر، دیدگاه بالقوه عبارت است از تعریف یک گروه یا جبر به توسط مولدها و روابط؛ دیدگاه بالفعل عبارت است از تعریف آن به‌صورت مجموعه‌ای از عناصر که به‌وسیلهٔ عملها ساختار یافته‌اند.

۱۶. زیرا برای این تأیید، از پیش فرض می‌شود که می‌توان صحت و سقم تعداد نامتناهی تساوی را در میان ارقام اعشاری بررسی کرد.

۱۷. که تعبیر معینی از تابعهای چند مقداری تحلیلی (یا تمامریخت) را به‌دست می‌دهد.

۱۸. این امر ابداع منطقی را امکان‌پذیر می‌سازد که در آن hic و nunc در نظر گرفته می‌شود. به اهتمام بنابو (J. Bénabou) اقدامی به‌منظور تدوین مبانی «مناسب روز» برای منطق حقوق، به‌خصوص در مواردی که به حقوق فدرال یا بین‌المللی مربوط می‌شود، صورت گرفته است.

۱۹. خاصیت پالایه بودن $\mathfrak{A}_a$ به‌معنای زیر است: اگر U و V به $\mathfrak{A}_a$ تعلق داشته باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز به $\mathfrak{A}_a$ تعلق دارد و همچنین همهٔ مجموعه‌های باز U' که شامل Uاند.

۲۰. این به آن معناست که اگر گزاره‌های A و B در $\mathcal{P}_M$ باشند آنگاه ترکیب فصلی $A \wedge B$ (بخوانید A و B) و هر گزارهٔ دیگری که از A نتیجه شود نیز در $\mathcal{P}_M$ است.

۲۱. در اینجا $T(F)$ نشان‌دهندهٔ هر گزارهٔ درست (غلط) است.

۲۲. کاراتئودوری و کاپوس (Kappos) با استفاده از این روش جانشینی برای ساختار اصل موضوعی احتمال، که از آن کولموگورف است، ساختند. این روش علی‌رغم اهمیت فلسفی‌اش به لحاظ فنی پرزحمت‌تر از رهیافت کولموگوروف است، به‌خصوص برای مطالعهٔ فرایندهای تصادفی.

۲۳. به بیان دقیق‌تر، یک جبر بولی.

۲۴. این نتیجه به‌طور پسینی نشان می‌دهد که دیدگاه کاراتئودوری و کاپوس دربارهٔ احتمال کلی‌تر از دیدگاه کولموگوروف نیست.

۲۵. در حالتی که X موضعاً فشرده است، تغییرات جزئی خاصی ضروری است.

۲۶. تابعی که مقدار ثابت ۱ را روی X داشته باشد با ۱ نمایش داده می‌شود.

۲۷. پالایهٔ ماکسیمال معمولاً فرا پالایه نامیده می‌شود.

۲۸. یا حتی یک واریتهٔ مجرد به مفهوم مورد نظر ویل.

۲۹. سِر ابتدا مجموعهٔ ایده‌آلهای ماکسیمال یک حلقهٔ جابه‌جایی A را که محدود به شرایط معینی بود در نظر گرفت. بعد مارتینو (Martineau) به او خاطر نشان ساخت که استدلالهای او برای هر حلقهٔ جابه‌جایی معتبر می‌ماند به شرط آنکه به‌جای ایده‌آلهای ماکسیمال همهٔ ایده‌آلهای اول را در نظر بگیرد. بعداً من تعریفی برای اسکیم پیشنهاد کردم که معادل تعریف گروتندیک بود. در رساله‌ام کار خود را به چارچوبی مشابه کار شِواله محدود کردم، تا از توضیح پُر طول‌وتفصیل مقدمات پرهیز کنم.

۳۰. در تعریف شواله، گردایه‌ای از حلقه‌های موضعی $(V_s)_{s\in S}$ که دارای یک میدان کسرهای K هستند، در دست است. زیرمجموعه‌ای چون U از S در توپولوژی زاریسکی باز است اگر یک زیرمجموعهٔ F از K وجود داشته باشد به‌طوری که $s \in U$ اگر و تنها

اگر $F \cap V_s$ ناتهی باشد. سپس $\mathfrak{D}(U) = \underset{s\in U}{\cup} V_s$ را تعریف می‌کند و بعد این گردایه از حلقه‌ها، بافهٔ ساختاری روی S را می‌سازد.

۳۱. برای مثال، در رستهٔ کلافها روی یک پایهٔ S، «نقاط» کلاف E برشهای سراسری (global sections) هستند. بسیاری از کلافهای جالب، چنین برشهایی ندارند. کلاف هوپف (کرهٔ $\mathbb{S}^3$ از بعد ۳، تاربندی شده روی $\mathbb{S}^2$ با تارهایی همسانریخت با $\mathbb{S}^1$) مثالی از آن است. در نظر فیزیکدانان کلاف هوپف همان تک‌قطبی دیراک است.

۳۲. به این ترتیب رابطهٔ (۴) می‌تواند برحسب نمایشهای جبرهای بولی تعبیر شود.

۳۳. اگر ۱ را به‌طور معمول به‌عنوان «صادق» و ۰ را به‌عنوان «کاذب» تعبیر کنیم، این جبر بولی، قواعد عام برای انجام عملیات صادق و کاذب را به‌دست می‌دهد.

۳۴. به عبارت دیگر Φ نگاشتی خطی از B به A است به‌طوری که $\Phi(bb') = \Phi(b)\Phi(b')$ و $\Phi(1_B) = 1_A$، عنصر همانی A را با 1_A و عنصر همانی B را با 1_B نمایش می‌دهیم.

۳۵. این ایده در واقع به آندره ویل [We]، که آن را در هندسهٔ دیفرانسیل معرفی کرد، باز می‌گردد. برای مثال اگر A دارای پایهٔ ۱، ε با $\varepsilon^2 = 0$، روی $\mathbb{R}$ باشد، Aـنقطه‌های واریتهٔ X نقاط کلاف مماس TX از X هستند. در حالتی کلی‌تر، فضاهای جت [فشانه]ها به این طریق بررسی می‌شوند. من در رسالهٔ ۱۹۵۸ خود ایده‌ای مشابه برای گروههای جبری مطرح کردم که امکان کاربرد مؤثر آنچه را که به یک‌گونگی‌های جدایی‌ناپذیر (inseparable isogenies) معروف است میسر ساخت. این مسأله شامل نمایشهای $f : G \to H$ گروههای جبری است که نگاشتهای دوسویی یا نقاط هستند ولی یکریختی نیستند. منظورم از نقطه، kـنقطه‌ها هستند، که k میدان پایه است با این فرض که دارای مشخصهٔ $p > 0$ و به‌طور جبری بسته است.

۳۶. این بنا بر تعریف، حد استقرایی مجموعه‌های $F(U)$ است که U روی همهٔ همسایگیهای باز نقطهٔ a تغییر می‌کند.

۳۷. اگر بخواهیم مثالی ساده بیاوریم، X یک دایره است و G مرکب از دورانهایی به اندازهٔ یک زاویهٔ $n\theta$ است که در آن n یک عدد صحیح دلخواه و $\theta/2\pi$ عدد گنگ است.

۳۸. اگر A یک C^*ـجبر و $\mathfrak{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، یک نمایش برگشتی A در $\mathfrak{H}$ نگاشتی خطی چون $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ است به‌طوری که

$$\pi(ST) = \pi(S)\pi(T),\ \ \pi(1) = 1,\ \ \pi(S^*) = \pi(S)^*$$

مجموعهٔ عملگرهای خطی کراندار روی $\mathfrak{H}$ با $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ نمایش داده می‌شود.

۳۹. فرض می‌شود گروه G موضعاً فشرده است. در حالت خاص ممکن است گسسته باشد.

۴۰. فضای توابع روی G که به مفهوم لبگ نسبت به اندازهٔ هار انتگرال‌پذیرند، با $L^1(G)$ نمایش داده می‌شود. این فضا یک جبر باناخ است که عمل ضرب آن پیچش است. یک حالت η روی $L^1(G)$ یک تابعک خطی پیوسته با نرم ۱ روی $L^1(G)$ است به‌طوری که به‌ازای هر $f \in L^1$، $\eta(f * f^*) \geq 0$ است. نرم طیفی به‌عنوان کوچک‌ترین کران بالای $\|f\|_S$ از اعداد $\eta(f * f^*)^{1/2}$، که η روی مجموعهٔ حالتها تغییر می‌کند، تعریف می‌شود. آنگاه جبر $C^*(G)$ به‌صورت تکمیل‌شدهٔ $L^1(G)$ در نرم طیفی به‌دست می‌آید.

۴۱. بنا بر قضیهٔ سگال‌ـگلفاندـنایمارک، برای هر حالت محض η روی C^*ـجبر A، یک نمایش برگشتی تحویل‌ناپذیر $\pi_\eta : A \to \mathcal{L}(\mathfrak{H}_\eta)$ و یک بردار ψ_η در فضای هیلبرت $\mathfrak{H}_\eta$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای S در A، $\eta(S) = \langle \psi_\eta | \pi_\eta(S) | \psi_\eta \rangle$. با قرار دادن $\eta \equiv \eta'$ اگر π_η هم‌ارز با $\pi_{\eta'}$ باشد، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ حالتهای محض تعریف می‌کنیم. آنگاه هر نقطهٔ A، یک ردهٔ هم‌ارزی از حالتهای محض است.

۴۲. مجموعهٔ عناصر g از G به‌طوری که $g \cdot x = x$.

۴۳. پدیدهٔ شاخه‌شاخه شدن برای توابع تحلیلی از یک متغیر مختلط کاملاً شناخته شده است. در یک نقطهٔ شاخه‌ای z_0 از مرتبهٔ n، استفاده از سری توانی $(z - z_0)^{1/n}$ ضروری است، اما این ریشهٔ nام دارای n شاخه در z_0 می‌باشد. این n شاخه جای خود را به‌طور دوری بین خودشان عوض می‌کنند، که از اینجا ایدهٔ گروه دوری در نقطهٔ z_0، که مرتبه‌اش n، مرتبهٔ شاخه‌شاخه شدن است، به ذهن متبادر می‌شود.

۴۴. اگر مؤلفه‌های پتانسیل الکترومغناطیسی را با A_μ نشان دهیم، می‌بینیم که مؤلفه‌های میدان الکترومغناطیسی به‌صورت $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ هستند. اندیسهای μ و ν مقادیر ۰، ۱، ۲ و ۳ متناظر با مختصات x^0، x^1، x^2، و x^3 در فضاـزمان را می‌گیرند، و ما از نماد $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ استفاده کرده‌ایم. یک تغییر در پیمانه هم‌ارز است با اینکه A_μ را با $A_\mu + \partial_\mu \Phi$، که تغییری در $F_{\mu\nu}$ ایجاد نمی‌کند، جایگزین کنیم. اما با معین کردن Φ، در هر نقطهٔ x از M^4 دورانی به اندازهٔ زاویهٔ $e\Phi(x)/\hbar$ برای دایره‌ای که تقارن داخلی x را بیان می‌کند، تعریف می‌شود. یادآور می‌شویم که e نشان‌دهندهٔ بار الکتریکی بنیادی است و $\hbar = h/2\pi$، که h ثابت پلانک است.

۴۵. بنا بر قضایای کلاسیک الی کارتان، نمی‌توان گروهی ساخت که توسیع گروه خارجی به‌وسیلهٔ گروه داخلی باشد. بهترین کاری که می‌توان انجام داد ضرب مستقیم است. یعنی اجازه ندهیم که بر هم عمل کنند.

۴۶. فرض کنیم π نمایش G روی فضای V_π و π' روی فضای V'_π باشد. هر تبدیل از π به π' یک تبدیل خطی T از V_π به $V_{\pi'}$ است به‌طوری که به‌ازای هر عنصر g از G، $T\pi(g) = \pi'(g)T$.

۴۷. خودریختیِ تابعگون Φ به این طریق تعریف می‌شود که به هر نمایش π از G یک عملگر خطی وارون‌پذیر S_π در فضای V_π که π روی آن عمل می‌کند، نظیر می‌شود. برای هر تبدیل T از π به π'، قاعدهٔ $TS_\pi = S_{\pi'}T$ را اعمال می‌کنیم. سازگاری با حاصلضرب تانسوری، به‌وسیلهٔ رابطهٔ $S_{\pi\otimes\pi'} = S_\pi \otimes S_{\pi'}$ بیان می‌شود. سپس قضیهٔ دوگانی بیان می‌کند که اگر S_π در این شرایط صدق کند، یک عنصر یکتای g از G وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر نمایش π، $S_\pi = \pi(g)$.

۴۸. که توصیف می‌کند چگونه یک نمایش تحویل‌ناپذیر یک گروه، پس از اینکه نمایش گروه به زیرگروه تحدید می‌شود، به نمایشهای تحویل‌ناپذیر یک زیرگروه تجزیه می‌شود.

۴۹. برای راهنمایی متخصصان یادآور می‌شویم که شرح قبلی، یک شرح اجمالی و غیردقیق از نظریهٔ «موتیف‌های ناهم‌سطح تیت [Tate]» است.

۵۰. عددی بی‌بعد است که در تحلیل الکترودینامیک کوانتومی نمودارهای فاینمن ظاهر می‌شود. در حال حاضر هنوز معلوم نیست که آیا می‌توان آن را از اصول اولیه برحسب ثابتهای ریاضی استنتاج کرد یا نه‌ـم.

مراجع

[Bo] A. Borel, "Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts," *Ann. Math.* (2) **57**,115-207 (1953). MR **14**:490e

[CC] H. Cartan and C. Chevalley, *Géométrie algébrique*, École Normale Supérieure 1955/6, Benjamin reprint.

[CK] A. Connes and D. Kreimer, "Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry," Quantum Field Theory: Perspective and Prospective (C. DeWitt-Morette and J.-B. Zuber, eds.), Kluwer, Dordrecht, 1999, 59-109. CMP 2000:05; *Commun. Math. Phys.* **199**, 203-242 (1998). MR **99h**:81137

[CR] H. Crapo and G. C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, MIT Press, Cambridge, MA (1970). MR **45**:74

[De] P. Deligne, "Catégories tannakiennes," in: *Grothendieck Festschrift*, Vol. II, 111-195. *Progress in Math.*, Vol. 87, Birkhäuser, Boston (1990). MR **92d**:14002

[DR] S. Doplicher and J. E. Roberts, "Endomorphisms of C^*-algebras, cross-products and duality for compact groups," *Ann. Math.* (2) **130**, 75-119 (1989). MR **90j**:46058

[Gr1] A. Grothendieck, "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires," *Mem. Amer. Math. Soc.* No. 16 (1955). MR **17**:

763c; *Sem. Bourbaki, Vol, 2*, Exp. No, 69, 193-200 (1995). CMP 98:09

[Gr2] A. Grothendieck, "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques," *Bol. Soc. Mat.* **8**, São Paulo, 1-79 (1953). MR **20**:1194

[Ko] M. Kontsevich, "Quantization deformation of Poisson manifolds I," q-alg 9709040.

[Sc] L. Schwartz, *Un mathématicien oux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris (1997). CMP 98:17

[Se] J.-P. Serre, "Faisceaux algébriques cohérents," *Ann. Math.* (2) **61**, 197-278 (1955). MR **16**:953c

[Ta] J. Tapia, "Quelques spectres en K-théorie topologique des algèbres de Fréchet et applications à l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur une variété", preprint IHÉS/M/91/37.

[We] A. Weil, "Théorie des points proches sur les variétés différentiables," *Colloque de Géométrie Différentielle* (Strasbourg, 1953), C. N. R. S., 111-117. MR **15**:828f; =*Oeuvres Scientifiques*, vol. II, Springer-Verlag, 1980, 103-109.

[Za] D. Zagier, "Values of zeta functions and their applications," *Progress in Math.*, **120**, Birkäuser, Basel, 497-512 (1994). MR **96k**:11110

آثار بنیادی

[Gr3] A. Grothendieck et al., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer Lect. Notes in Math., **269**, **270**, **305** (1972/3). MR **50**:7130; MR **50**:7131; MR **50**:7132

[Co] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994). MR **95j**:46063

مراجع تکمیلی

[Ca] P. Cartier, "Fonctions polylogarithmes, nombres polyzétas et groupes unipotents" (to appear in the Bourbaki Seminar. year 2000-1).

[Ri] T. Rivoal, "La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs", *C. R. Acad. Sci. Paris*, series I, 267-270 (2000). CMP 2001:02

******

• Pierre Cartier, "A mad day's work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich, the evolution of concepts of space and symmetry", *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S)*, (4) **38** (2001) 389-408.

این مقاله در اصل به مناسبت چهلمین سالگرد تأسیس مؤسسهٔ مطالعات علمی (IHES) فرانسه در سال ۱۹۹۸ نوشته شده و راجر کوک (Roger Cooke) آن را از فرانسه به انگلیسی برگردانده است.

* پیر کارتیه، ریاضیدان بنام فرانسوی که سالها عضو گروه بورباکی بوده است و آثار مهمی در هندسهٔ جبری، نظریهٔ اعداد، نظریهٔ گروهها، نظریهٔ احتمال، و فیزیک دارد. کارتیه اکنون عضو مؤسسهٔ مطالعات عالی علمی (IHES) فرانسه است. نشانی اینترنتی او:

cartier@ihes.fr