تاریخچهٔ موضوعیِ کوتاهی از
نظریهٔ هومولوژی و هوموتوپی در قرن بیستم*

پیتر هیلتن
ترجمهٔ سعید ذاکری

چند روز اخیر به‌یاد این افتاده‌ام که درحدود بیست‌وپنج سال‌پیش، وقتی‌که برای نخستین بار دراین سرزمین قصد اقامت کردم، ازمن دعوت‌شدکه در جشن افتتاح سالن‌وان‌ولك[1] درساختمان ریاضیات دانشگاه ویسکانسین شرکت کنم. درآنجا بودکه من یك واژهٔ جدید امریکایی، یعنی banquet، را یاد گرفتم که معنایش با آنچه در انگلستان ازاین واژه مستفاد می‌شود کاملا فرق داشت[2]. اما از این مهمتر، باید احترام عمیق خود را نسبت به‌بعضی سخنرانان بعد از شام به یاد بیاورم که می‌توانستند سرگذشت یك واقعه را بسیار مفصلتر از خود واقعه شرح دهند. به همین خاطر خیلی مراقبم که شرح‌سرگذشت‌توپولوژی جبری درقرن حاضررا بیشتر ازخوداین سرگذشت طول وتفصیل ندهم. درحقیقت مجبورم مطالب‌را گلچین کنم و سریع از آنها بگذرم. بنابراین از اینکه بخش زیادی از بررسی من لزوماً چندان عمیق نخواهد بود، پیشاپیش پوزش می‌خواهم. مایلم صحبت خود را از دورهٔ نخست، که تاسال۱۹۲۶ را دربر می‌گیرد، آغازکنم، و این دورانی است که پژوهشهای پوانکاره، نظریهٔ هومولوژی [مانستگی] را به‌او الهام کرد.

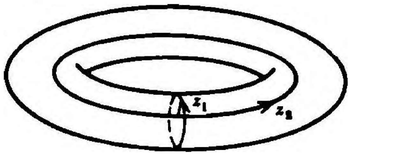
درخلال دوره‌ای پیش از دورانی که هم‌اکنون درنظر دارم، پوانکاره مفهوم گروه بنیادی را ابداع یا کشف کرده بود (اینکه این‌کارابداع نامیده شودیاکشف، به‌دیدگاه افراد بستگی دارد).او در دورهٔ موردنظرمقالاتی منتشرکردکه درآنهاچیزی‌رابررسی کرده بود که می‌توانیم آن را چندگونای جبری[3] بنامیم، یعنی آرایشی از نقاط درفضاهای اقلیدسی با بعد بالا، که با معادلات‌ونامعادلات چندجمله‌ای مشخص می‌شوند؛ ونیز توجه خود را به‌چیزی‌معطوف کرد که می‌توانیم آن را میدان برداری وتعمیمهای آن روی چنین چندگوناهایی بنامیم.همین مطلب او را به‌بررسی موضوعی‌هدایت کردکه امروزه هومولوژی این‌چندگوناها خوانده می‌شود. به‌ویژه،

1. Van Vleck Hall

۲. banquet در انگلستان به ضیافت خیلی مجلل (با سخنرانی) گفته می‌شود درحالی که در آمریکا به ضیافت ساده‌تر (با سخنرانی) هم اطلاق می‌شود. ـ م.

3. algebraic variety

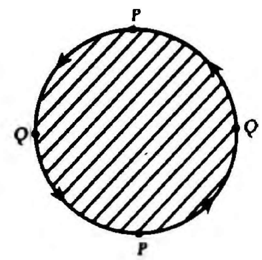
او به‌اهمیت آنچه که بعدها عدد بتی نامیده شد، واساساً تعیین‌کنندهٔ تعداد سوراخهایی است که شکل موردنظر دارد، ونقش این اعداد درحل مسائل مربوط به‌میدانهای‌برداری توجه‌کرد. به‌عنوان مثالی ساده، چنبره را درنظر می‌گیریم (شکل ۱)، که البته یك‌چندگونای جبری است، و به‌وضوح دوسوراخ یك‌بعدی دارد. این‌دو سوراخ، دور[1]هایی هستند که هیچ‌جای چنبره را دربر نمی‌گیرند. از لحاظ صوری، چنبره خود یك سوراخ دوبعدی است، و هر نقطهٔ مفروض یك سوراخ صفربعدی‌را تشکیل می‌دهد. مسائل‌مربوط به‌جوابهای معادلات دیفرانسیل روی چنبره، بامسائل‌مربوط به مثلا کره‌متفاوت است، زیرا کره عدد بتی یك‌بعدی متفاوتی نسبت به‌چنبره دارد.



شکل ۱. چنبره، به‌همراه دو سوراخ یا دوریك‌بعدی اساسیش، z_1 و z_2.

علاوه براینها، پوانکاره تشخیص دادکه درلابلای این مطالب نکتهٔ ظریف دیگری نیز وجود دارد، یعنی پدیده‌ای‌که امروزه آن را بـه عنوان ضرایب تاب[2] می‌شناسیم. منظور از ضرایب تاب را می‌توان اساساً با صفحهٔ تصویری حقیقی تشریح کرد. این صفحه‌را می‌توان بایك قرص مستدیر نمایش دادکه درآن، نقاط متقاطرروی لبهٔ قرص یکی درنظر گرفته می‌شوند (شکل ۲). این موجود را نمی‌توان‌درفضای‌سه‌بعدی تجسم کرد، بنابراین می گذاریم‌همین‌طور دوبعدی بماند، وبه‌همین خاطر از اینکه مجبورم آن را بـه این صورت روی‌تخته‌سیاه نشان بدهم نمی‌توانم پوزش بخواهم.اکنون اگر به مسیری‌که از P به P برمی‌گردد توجه‌کنیم، این مسیر یك دور خواهد بود. خود این دور هیچ چیزی را دربر نمی‌گیرد،اما اگر آن را تکرار کنیم،دوتا ازاین دورها قرص را دربرمی‌گیرند.

1. cycle   2. torsion coefficients



شکل ۲. صفحهٔ تصویـری حقیقی، بـه همراه دور یك‌بعدی اساسیش، $z_1=PQP$، به‌طـوری کـه z_1 قرص را دربـر نمی‌گیرد، اما $2z_1$ دربرمی‌گیرد.

این مطلب پدیدهٔ وجود دورهـایی را نشان مـی‌دهدکـه خودشان دربرگیرندهٔ چیزی نیستند، اما مضاربی از آنها چیزی را دربـر می‌گیرند.

دراینجا می‌خواهم براین‌نکته تأکیدکنم که ما با عدد سروکار داریم. اعداد بتی‌واقعاً عددند ودرهر بعدی اعداد بتی وجوددارند. ضرایب تاب نیز عددند.

نامهای دیگری کـه در دوران پیشگامان بزرگ این نظریـه به‌آنها برمی‌خوریم عبارت‌اند از آلکسـاندر(معمولا نام آلکساندر بانظریهٔ گرهها همراه است، اما اوکارهای زیاد دیگری نیز انجام داده کـه بعداً بـه‌آن اشاره خواهم کـرد)، و وبلن[1] (او یکی از کتابهای مهم، یعنی تحلیل جا[2]، را نوشت؛ تحلیل جا نـامی است که درابتدا به‌توپولوژی داده بودند؛ تفاوت اساسی میان‌واژه‌های تحلیل جا وتوپولوژی، درانتخاب بین دو فرهنگ لاتین ویونانی نهفته است؛ هردوی اینها یك معنا می‌دهند). وبلن عقیده داشت که حق استفاده ازواژهٔ توپولوژی منحصر به‌ریاضیات نیست، چراکه این‌واژه‌خارج ازریاضیات نیزوجود دارد. دراینجا باید ازبراوئر نیز نـام ببرم، و این را به‌فال نیك می‌گیرم، چون می‌دانم کارل دوبووره[3] دراینجاراجع به‌براوئرسخنرانی کرده‌است. نام‌براوئر، به‌ویژه با ایدهٔ درجهٔ یك نگاشت پیوند خورده است، ومن بعداً به این‌موضوع بازخواهم گشت. علاوه براینها باید اذعان‌کنم که وان کمپن[4] ولفشتس نیزپژوهشهای راهگشایی دراین‌زمینه انجام‌دادند. این‌افراد، هرچندکه نامشان را دراین دوران آغازین آوردم، بار دیگر به‌ماجرای ما بازخواهندگشت. پرداختن تفصیلی به‌سهـم هر یك‌ازآنها یقیناً تمام وقت سخنرانی را پرخواهـدکرد. بنابرایـن قصد من واقعاً این است که به‌سال ۱۹۲۷ بپردازم، سالی‌که به‌زعم من یکی‌ازسالهای طلایی این نظریه است. اما درمورد لفشتس‌مایلم اظهارنظری کاملا شخصی بکنم، زیرا به‌عقیـدهٔ من درمیان تمامـی ریاضیدانان، افتخار معرفی اساوبمند مفهوم چندوجهـی به‌معنـای وسیعش متعلق به‌لفشتس است. وقتی کـه همکاری بسیار لذت‌بخش خودم را با ژان پدرسن[5] آغازکردم، خیلی زود فهمیدم که ازبخت بد، وجود زبان مشترك میان ما جـدایی انداخته است، چرا که ما عبارتهای دقیقاً مشابهی به‌کار می‌بردیم که معـانی متفاوتی داشتند.

1. O. Veblen
2. *Analysis Situs*
3. Karel de Bouvère
4. van Kampen
5. Jean Pedersen

به‌خصوص‌واژهٔ «چندوجهی» مانع‌ازشکل گیری رابطهٔدوستانهٔ‌کاملا خوشایندی بین مـا مـی‌شد. امـا ببینیم «چند وجهی» یعنی چه، و رده‌بندی چندوجهیها به‌چه معناست؟ازدیدگاه توپولوژیدان امروز، چندوجهی واژه‌ای استاندارد است، وبه‌مفهـوم فضای توپولوژیك زمینهٔ یك ساختار ترکیبیاتی است که‌نسبت به‌ساختارهایی ترکیبیاتی که هندسه‌دانهـا، یا متخصصان هندسهٔ ترکیبیاتی، مجـازمی‌شمرند خیلی کلیتراست؛ و رده‌بندی‌چندوجهیها ازنظرتوپولوژیدان عموماً با کمك همـانریختـی، ومحتملا با هم‌ارزی ترکیبیـاتی، صورت می‌گیرد، ولی بازهم‌مفهوم آن متفاوت باچیزی‌است که‌هندسه‌دانها به‌کار می‌برند (شکل ۳ را نگاه‌کنید). فکر می‌کنم بشود گفت کـه دردسر ما از لفشتس آغاز می‌شود. اندیشهٔ همـانریختی میان چند وجهیها ایده‌ای بسیار راهگشاست، و همچون همهٔ دیگـر مفـاهیم خوب ریاضی، پرسشهایی‌که به‌بار آورده است بیش‌از پرسشهایی است‌که به‌آنها پاسخ داده است.

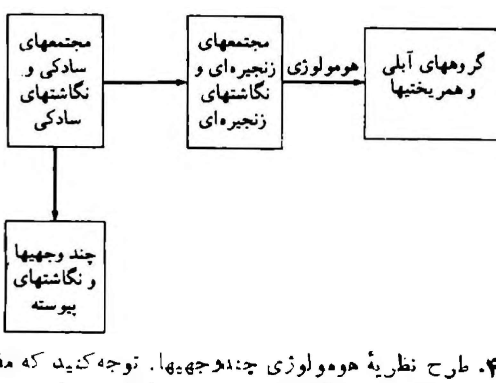
شکل ۳. مکعب وهشت‌وجهی، که ازنظرتوپولوژیدان هم‌ارزند، ولی از دیدگاه هندسه‌دان چنین نیستند.

اکنون بـا این‌مقدمهٔ بسیارکوتاه درمـورد دوران آغـازین نظریه، می‌خواهم به‌سالهـای ۱۹۲۶–۱۹۲۷ بپردازم. دلیـل این انتخاب آن است که در این‌سالهـا آلکساندروف و هوپف[1] در گوتینگن بودند. هردوشان درآنجا حکم مهمان را داشتند، و این مثال جالبی‌ازنعمتِ داشتنِ مهمان ریاضی است! آلکساندروف اهل اتحاد شوروی، و هوپف درآن‌زمان ساکن برلین بود. هر دو نفر شدیداً تحت تأثیرکارهای لفشتس قرارگرفته‌بودنـد، و به‌ویژه بین آنها بحث برسر قضیهٔ نقطـهٔ ثابت لفشتس داغ بود. آنها فهمیده بودندکه این‌قضیه‌به‌نوعی‌تعمیم مفهوم مشخصهٔ اویلر-پوانکاره است، و تحقیق درمورد درستی این‌امر را هم آغازکرده بودند. درکنار اعداد بتی‌که پوانکاره‌آنهارا معرفی کرده‌بود، عددوسوم به‌مشخصهٔ اویلـر یك ناورداى توپولوژیك بود. آلکسانـدروف و هوپف دریافتند که قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس، که البته با نمادگذاری نسبتاً ناشیانه‌ای بیان‌شده‌بود، ارتباط‌نزدیکی بااین‌مفاهیم دارد. درواقع چنین می‌نمود که هرگاه قضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس را برای نگاشت همانی یك‌فضا به‌خودش به‌کاربندیم، مشخصهٔ اویلر-پوانکاره را به دست خواهد داد. اما نکتهٔ جالب آن‌است که‌درهمین‌زمان امی‌نوتر نیز در گوتینگن بود؛تنها پـافشاری هیلبرت بود کـه اورا درآنجا نگه‌داشته‌بود. ازدید هیلبرت، گوتینگن‌مکانی برای‌فعالیت‌ریاضیدانها بود، و مرد یا زن‌بودن نمی‌توانست تأثیری بر این‌امر داشته‌باشد. البته درآن روزها این‌دیدگاه طرفدار بسیارکمی داشت. امی‌نوتر

1. Hopf

دریافت که نباید به آنچه که آلکساندروف و هوپف بررسی می‌کنند و لفشتس قبلا بررسی کرده بود به‌دیدهٔ عدد نگریست، بلکه باید آن را به‌عنوان گروه آبلی تلقی کرد. بنابراین انصافاً باید افتخار درك جایگاه ریاضی این ناورداهای توپولوژیك، و نه کشف آنها، را به امی‌نوتر داد. بدین ترتیب بود که امی‌نوتر به مفهوم گروههای هومولوژی رسید، و دریافت که اعداد بتی و ضرایب تاب صرفاً ناورداهای عددی رده‌های یکریختی از گروههای آبلی متناهیاً تولیدشده‌هستند. اگر گروه آبلی متناهیاً تولیدشدهٔ A را در نظر بگیریم، می‌توانیم آن‌را به‌شکل جمع مستقیم گروه آبلی آزاد F و خانواده‌ای از گروههای دوری A/h_i بنویسیم، که در آن $h_1 | h_2 | \ldots$. به‌علاوه رتبهٔ بخش آبلی آزاد F و اعداد h_i ناورداهای گروه Aاند. اگر A گروه هومولوژی از بعد مثلا d باشد، آنگاه رتبه‌اش dامین عدد بتی است، و h_iها ضرایب تاب‌اند. خوب، می‌بینید که این مطلب نسبت به‌اینکه صرفاً اعداد را در نظر بگیریم پیشرفت مهمی به‌شمار می‌رود، زیرا به‌سادگی این امکان‌را به‌ما می‌دهد که نسبت به کل مسألهٔ هومولوژی رهیافت بسیار پویاتری در پیش بگیریم. به‌همین‌خاطر، دیگر نه‌فقط اعداد بتی و ضرایب تاب، بلکه بیش‌از آن، گروههای هومولوژی هستندکه به چندوجهی نسبت داده می‌شوند. اما نتایج کار امی‌نوتر فراتر ازاینها بود.

در اینجا پرسشی طبیعی پیش می‌آید: چگونه می‌توان یك چندوجهی را به‌چندوجهی دیگری تبدیل کرد؟ چگونه می‌توان این چندوجهی را به‌آن چندوجهی نگاشت؟ در وهلهٔ اول اندیشهٔ نگاشت سادکی[1] چندوجهی به‌ذهن متبادر می‌شود، که یك همریختی بین گروههای هومولوژی القا می‌کند. اگر یادتان باشد گفتم که رتبهٔ F ناورداست، اما خود F چنین نیست. یك همریختی از گروهی آبلی به‌گروه آبلی دیگر، بخش‌آزاد این‌گروه را به‌بخش آزاد آن‌یکی نمی‌فرستد، وحتی بخشهای Z/h_i را نیز تحت‌خود حفظ نمی‌کند. درواقع وضعیت می‌تواند در اینجا کاملا پیچیده باشد؛ ممکن است بخش آزاد این گروه به‌بخش متناهی آن گروه فرستاده‌شود. بنابر این، با این دیدگاه نظریهٔ گروه‌گرایانه، می‌توان تنها گامی در راه شناخت‌تبدیلات هومولوژی برداشت. این‌موضوع درآن‌زمان برای فهم حقیقی مطلب، هم از نظر مفهومی و هم از جنبهٔ انگیزه‌بخشی، پیشرفت بزرگی بود، وهمچنین منجر به‌طرح پرسش بسیار واضحی شد: نگاشتهای سادکی همریختیهایی بین گروههای هومولوژی القا می‌کنند. درحالت‌کلی‌درمورد توابع صرفاً پیوسته روی چندوجهی موردنظر چه می‌توان گفت؟ البته اکنون قصد ندارم در مورد پیشینهٔ کامل *Hauptvermutung*[2] که خود وقت زیادی خواهد گرفت، صحبت کنم. پس‌این پرسشها را درمورد ساختارهای ترکیبیاتی گوناگون روی چندوجهیها کنار می‌گذارم، اما سؤالی که بداهتاً پیش‌می‌آید این‌است: آیا می‌توان هر نگاشت پیوسته روی‌فضاهای توپولوژیك زمینه‌را با تبدیل ترکیبیاتی مناسبی روی چندوجهیها تقریب‌زد؟ قضیهٔ تقریب سادکی، که سروکله‌اش تقریباً در همین دوران پیدا شد، پاسخی‌مثبت به‌این‌پرسش‌بود. و به‌این گونه سیمای واقعی هومولوژی کم‌کم پدیدارشد. فعلا توافق می‌کنیم که این‌ردهٔ خاص‌از فضاها را بررسی کنیم، یعنی چندوجهیها ونگاشتهای‌سادکی بین‌آنها به‌عنوان‌ساختاری ترکیبیاتی. ممکن‌است بگویید که می‌توان مطلب را خیلی بی‌پیرایه‌تر عنوان‌کرد، یعنی چندوجهی را می‌توان ـ با فراموش‌کردن‌ساختار ترکیبیاتیش ـ صرفاً یك‌فضای‌توپولوژیك در نظر گرفت که دراین‌صورت نگاشتهای سادکی، صرفاً نگاشتهایی پیوسته‌خواهندبود. پیش‌ازهرچیز باید بگویم که به‌کمك چندوجهیها و نگاشتهای سادکی، می‌توان مجتمعهای زنجیره‌ای[1] و نگاشتهای زنجیره‌ای را ساخت. یعنی به‌زنجیره‌های فضای مورد بحث نظر می‌افکنیم. زنجیره‌ها ترکیبیاتی‌خطی ازسادکها هستند، وسادکها به‌نوبهٔ خودمثلثهایی‌تعمیم‌یافته‌اند که‌فضای‌مارا چنان بخشبندی‌می‌کنند که به‌یك چندوجهی مبدل‌شود. سرانجام، بادر نظر گرفتن گروههای‌هومولوژی این مجتمع‌زنجیره‌ای، گروههای‌هومولوژی‌فضا به‌دست‌خواهدآمد. ابتدامجتمعهای زنجیره‌ای ونگاشتهای زنجیره‌ای، و سپس گروههای هومولوژی و همریختیها را تعریف می‌کنیم. برای چندوجهی، یك ساختارچندوجهیگون دلخواه روی فضا اختیارمی‌کنیم، وبعد نشان می‌دهیم که گروههای هومولوژی حاصل تنها به‌فضای زمینه بستگی دارند. این، جان‌کلام درمورد ناوردایی توپولوژیك گروههای هومولوژی‌است. از یك تابع پیوستهٔ دلخواه با یك تقریب به‌یك نگاشت سادکی می‌رسیم. البته انتخابهای گوناگونی برای این تقریب وجود دارد، اما هر تقریبی‌که‌اختیار کنیم، همریختی‌القاشده روی گروههای هومولوژی یکسان خواهد بود. نموداری‌که در اینجا کشیده‌ام (شکل۴)، و بین مراحل آن دهها سال فاصلهٔ زمانی است، اساساً مباحثی را نشان می‌دهدکه افراد فوق درحین تشریح ایده‌های هومولوژی مورد بررسی قرار داده‌اند. هستهٔ اصلی تمام این ایده‌ها عبارت است از این‌مطلب‌که گروههای هومولوژی حقیقتاً تحت هوموتوپی ناوردا هستند، یعنی نگاشتهای پیوستهٔ هوموتوپیك، همریختی هومولوژی یکسانی القا می‌کنند. مثال زیبایی را نگاشتهای f روی کرهٔ nبعدی S^n به‌دست می‌دهند. چون H_nS^n دوری نامتناهی‌است، همریختی هومولوژی القا شده در بعد n، تنها یك عدد صحیح است، که درجهٔ f نام دارد. قضیهٔ براوئر-هوپف‌می‌گوید که‌درجهٔ f، ناوردای‌یکتای‌ردهٔ هوموتوپی f است.



شکل۴. طرح نظریهٔ هومولوژی چندوجهیها. توجه‌کنید که مفاهیم مهمی از هوموتوپی به‌نگاشتهای پیوسته، سادکی و زنجیره‌ای وابسته است.

1. simplicial map

۲. *فرضیهٔ اصلی* (در مورد خمینه‌های ترکیبیاتی) عبارت است از این فرضیه که خمینه‌های ترکیبیاتی n بعدی همسانریخت، باید همسانریختی قطعه به قطعه خطی داشته باشند. ـ م.

1. chain complexes

در اینجا باید از اولین شخصی که با این موضوع ارتباط پیدا می‌کند، و از قرار معلوم هنوز زنده است، نام ببرم: ویتوریس[1]، ریاضیدان اتریشی، ساکن اینسبروك. ویتوریس یکی از دو نفری است که باید افتخار کشف این مطلب را به او داد که بی آنکه فضای مورد نظر، فضای زمینهٔ چندوجهی باشد، می‌توان گروههای هومولوژی را تعریف کرد. او مفهوم گروه هومولوژی را روی یك فضای صرفاً توپولوژیك تعریف کرد (حتی به نظر می‌رسد که ویتوریس، مستقل از امی نوتر، اهمیت مفهوم گروه را در این زمینه تشخیص داده بود). به این ترتیب روی فضاهای دلخواه، گروههای هومولوژی معنی پیدا کردند. این کار را ویتوریس با پوشش فضا با مجموعه‌های باز انجام داد. شخص دومی که این افتخار باید نصیبش شود، چك[2] ریاضیدان اهل چکسلواکی است. تا جایی که می‌دانم، این دو تن مستقل از یکدیگر ولی با روشهای متفاوتی عمل کردند. هر دو نفر این کار را با پوشش فضا با مجموعه‌های باز انجام دادند؛ مجموعه‌های باز در تعریف چك مشابه رئوس یك مجتمع سادکی[3] رفتار می‌کردند. در این صورت مطابق تعبیر چك، تعدادی متناهی مجموعهٔ باز یك سادك تولید می‌کردند اگر و تنها اگر اشتراکشان تهی می‌بود. بدین ترتیب او به این مجموعه‌های باز همچون رئوس یك مجتمع می‌نگریست، و بنابراین از دیدگاه امروزی، کار چك عبارت بود از بررسی عصب[4] یك پوشش، که مجتمع سادکی مجردی است که در آن یك مجتمع زنجیره‌ای و گروههای هومولوژی به یکدیگر الصاق شده‌اند.

اما ویتوریس راه دیگری در پیش گرفت. او مجموعه‌های باز را اختیار کرد و گفت که گردایه‌ای از نقاط فضا (به یك مفهوم) تشکیل سادك می‌دهند هر گاه همهٔ آنها در یکی از مجموعه‌های پوششی قرار بگیرند. امروزه این دو دیدگاه را به معنای واقعی دوگان یکدیگر می‌شناسیم. اولین کسی که دوگانی تعاریف ویتوریس-چك را مدلل کرد، ریاضیدان بسیار خوب کانادایی، هیو داوکر[5] بود، که با کمال تأسف همین اواخر درگذشت. درهمین باب باید از مایر[6] اسم ببرم که نامش ــ همچنانکه نام هاینه همواره با بورل می‌آید ــ همواره به عنوان بخشی از مایر-ویتوریس آورده می‌شود. در هومولوژی مفهومی به نام دنبالهٔ مایر-ویتوریس وجود دارد. هوپف نیز این موضوع را تصدیق کرده است که مایر در مقاله‌ای که در ۱۹۲۹ منتشر کرد، مستقل از امی نوتر تشخیص داده بود که تعریف هومولوژی با گروهها سروکار دارد. اگر کمی پا را از زمان مورد بحث فراتر بگذاریم، به سال ۱۹۳۲ که کتاب سرنوشت‌ساز آلکساندروف، و ۱۹۳۵ که کتاب مهم آلکساندروف و هوپف نوشته شد می‌رسیم. کتاب اخیر به عنوان جلد ۱ منتشر شد، اما جلد ۲ ی آن هرگز نوشته نشد (دلیل این امر، ظهور نظریهٔ کوهومولوژی بود). این کتاب فوق‌العاده تأثیرگذار بود، و حکم نوعی کتاب مقدس را برای مطالعهٔ توپولوژی جبری داشت. شیوهٔ نگارش آن بسیار زیبا بود. البته نسخهٔ اصلی آن به زبان آلمانی نوشته شده بود، اما حتی اگر زبان آلمانی هم نمی‌دانستید، آن‌را آسانتر از اغلب کتابهای انگلیسی می‌فهمیدید. هدف از نوشتن آن، روشن ساختن جوهر نظریه بود. شکلهای زیبای آن هم که جای خود دارد.

درسال ۱۹۳۵، که به حق سالی طلایی بود، وقایع زیادی رخ داد. در تابستان این سال همایشی بین‌المللی در مسکو برگزار شد. هوپف شاگرد جوان خود، اشتیفل[1] را به مسکو فرستاد. اشتیفل به تازگی مطالعهٔ وجود جواب معادلات دیفرانسیل را از دیدگاه هومولوژی شروع کرده و به ایده‌ای رسیده بود که امروزه آن‌را رده‌های مشخصه[2] می‌نامیم. وقتی که اشتیفل مقالهٔ خود را در همایش مسکو می‌خواند، هسلر ویتنی[3] (یك ریاضیدان دیگر که هنوز زنده است*!) در بین حاضران جلسه بود. پس از جلسه ویتنی به سراغ اشتیفل آمد و به او گفت: «بسیار جالب است، این تقریباً همان چیزی است که دارم دربارهٔ آن تحقیق می‌کنم» ــ منظور ویتنی چیزی بود که امروزه می‌توان آن‌را فضاهای تاری[4] نامید. آلکساندروف نیز اظهار داشت که این فضاهای تاری را آنها (پیروان مکتب روسی) مورد بررسی قرار داده‌اند. البته آنها این فضاها را حاصلضربهای تابیده[5] می‌نامیدند. بدینسان در این همایش مسکو به طرز خارق‌العاده‌ای تبادل آرا صورت گرفت. اکنون در مورد رده‌های اشتیفل-ویتنی صحبت می‌کنیم. اینها در حکم رده‌های مشخصهٔ کوهومولوژی روی یك خمینهٔ مشتق‌پذیر حقیقی‌اند. این رده‌ها اکنون کاملا شناخته شده‌اند، اما در آن‌زمان هنوز در مرحلهٔ تکوین بودند. درهمین سال بود که مفهوم کوهومولوژی[همانستگی] نیز شکل گرفت و معلوم شد که کوهومولوژی با ساختار حلقه سروکار دارد. اما رشد نظریهٔ کوهومولوژی در آن‌زمان بسیار کند صورت می‌گرفت، و دلیل سادهٔ این امر آن بود که توپولوژیدانها اندیشهٔ امی نوتر را به آسانی درنمی‌یافتند. توپولوژیدانها، علی‌رغم برتریهای واضح دیدگاه جبری، همچنان منحصراً هندسی فکر می‌کردند، و من روی این واژهٔ «منحصراً» تأکید دارم. این طرز فکر اشتباه بود، و نکتهٔ جالب درمورد هوپف، بزرگترین توپولوژیدان آن‌زمان، این است که او هرگز میانهٔ خیلی خوبی با ایدهٔ کوهومولوژی نداشت. علت این امر به ایدهٔ زنجیره‌ها مربوط می‌شود که پیش از این به آن (به طور ناقص) اشاره کردم. یك زنجیره ترکیبی خطی از سادکهاست. مثلا اگر نوعی مثلث‌بندی برای فضا داشته باشیم، درحالت یك بعدی زنجیره را می‌توان ترکیبی از یالها با چندگانگی معینی در نظر گرفت. هوپف همواره زنجیره را نوعی مسیر می‌پنداشت که روی چندوجهی پیموده می‌شود، و نگرش جاری نسبت به هومولوژی و کوهومولوژی چنین بود: اگر مثلا به یك یال مشخص نگاه کنیم، این یال جهت‌یافته دو رأس خواهد داشت که ضریب یکی ۱+ و ضریب دیگری ۱− است، یعنی به این یال مرز آن را نسبت می‌دهیم. کار دیگری که می‌توانیم انجام دهیم این است که به این یال تمام مثلثهایی را که یکی از اضلاعشان همین یال است، یعنی دوگان مرز[6] این یال، را نسبت

1. Vietoris 2. Čech 3. simplicial complex
4. nerve 5. Hugh Dowker 6. Mayer

1. Stiefel 2. characteristic classes 3. Hassler Whitney

* ویتنی درسال ۱۹۸۹ در سن ۸۲ سالگی درگذشت.ــم.

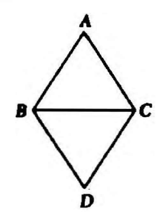
4. fiber spaces 5. twisted products

6. coboundary

این اصطلاح فعلا معادل مناسبی در فارسی ندارد و واژهٔ «هم مرز» که گاهی برای آن به کار می‌رود گمراه کننده است. همان طور که در این مقاله دیده می‌شود، مفاهیم

←

دهیم (شکل ۵). پس در یک‌حالت بعد را کاهش می‌دهیم، و درحالت دیگر افزایش. کاهش بعد همان هومولوژی، و افزایش آن کوهومولوژی است. این دیدگاه، گرایش جاری در آن زمان بود، و درواقع تحت نفوذ آلکساندروف، روسها سالیان سال از هومولوژی پایینی و بالایی سخن می‌گفتند. اما این نظرگاه بی‌عیب نبود، زیرا به‌مفهوم رایج در جبر خطی، کوهومولوژی دوگان هومولوژی است، به‌عبارت دیگر اگر ۱- زنجیره‌ها را به‌عنوان ترکیبات خطی یالها درنظر بگیریم، باید ۱- دوگانْ زنجیره[1]‌ها را به‌عنوان توابعی بر این یالها تصور کنیم. پس باید میان یک یال و تابعی که بر آن یال مقدار ۱ را به‌خود می‌گیرد، تمایز قائل‌شویم. این‌تمایز دقیقاً فرق میان یک‌عنصر پایهٔ یک فضای برداری و عنصر پایهٔ وابسته به‌آن درفضای دوگان است. پس دوگان زنجیره‌ها را باید توابعی بر روی سادکها در نظر گرفت. اگرچه هوپف این ایده را دریافته بود، نمی‌توانست آن‌را به‌کار ببندد، زیرا به‌زعم او هومولوژی جنبهٔ صرفاً هندسی داشت. این ایده، که توابعی را بررسی کنیم که مقادیرشان در یک گروه آبلی آزاد دلخواه است و بر روی یالها یا مثلثهای یک چندوجهی تعریف شده‌اند، اندیشه‌ای بود که به‌کلی با افکار هوپف مغایرت داشت.



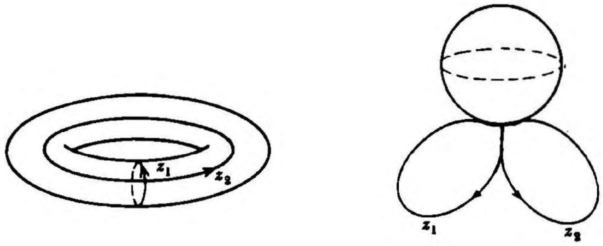
شکل ۵. مرز BC عبارت‌است‌از $C-B$. دوگانْ مرز BC عبارت‌است از $ABC+DBC$.

تکوین نظریهٔ کوهومولوژی زمان بسیارزیادی به‌درازا کشید، زیرا درابتدا تعبیر درستی از آن نشده بود. همچنین این احساس وجود داشت که می‌توان ساختاری ضربی در کوهومولوژی وارد کرد که در هومولوژی وجود نداشته باشد. کوشش زیادی صرف انجام این کارشد. آلکساندروف که پیش‌ازاین از او نام بردم یکی از پیشگامان این کار بود وتلاشهایش عاقبت در ۱۹۳۵ به‌ثمر رسید. این‌امر، علاوه‌برغنا بخشیدن به‌ساختار، موجب شد نسبت به‌نظریهٔ هومولوژی قدرت بیشتری برای تشخیص تمایز میان فضاها به‌دست آید، زیرا کاملا ممکن است دو فضای توپولوژیک ساختار گروه

---

coboundary، cochain، و cocycle، دوگانهای مفاهیم boundary، chain، و cycle هستند. گروه ریاضی مرکز نشردانشگاهی فعلا، تا زمانی که اصطلاحات بهتری پیشنهاد نشده، معادلهای «دوگانْ مرز»، «دوگانْ زنجیره»، و «دوگانْ دور» را برای اصطلاحات دستهٔ اول پیشنهاد کرده است. ضمناً گروه ریاضی مرکز برای homology معادل «مانستگی» و برای cohomology معادل «همانستگی» را پیشنهاده کرده و مترجم این مقاله اولین باری که این اصطلاحات ظاهر شده‌اند پیشنهاد مرکز را در داخل کروشه آورده است. ـ م.

1. cochains



شکل ۶. چنبره وچنبرهٔ حلقه‌به‌گوش، متشکل از یک‌کره ودوحلقه که دریک نقطه به‌یکدیگر وصل شده‌اند. حاصلضرب z_1z_2 روی‌چنبره برابر خود چنبره است، درحالی که روی چنبرهٔ حلقه به‌گوش، $z_1z_2=0$.

آبلیشان در کوهومولوژی یکسی باشد، اما در واقع ساختارهای ضربی متفاوتی داشته باشند. اگر از یک‌سو چنبره و ازسوی دیگر شکلی رادرنظر بگیریم که اینجامی بینیم (شکل ۶)، آنگاه هومولوژی دومی همان‌ساختار جمعی چنبره را دارد، اما تمایزآن با چنبره در ساختار ضربی کوهومولوژی آن است. حاصلضرب دودوگان‌دور[1] یک‌بعدی روی‌چنبره برابرخودچنبره است، درحالی که درشکل‌دوم این‌حاصلضرب برابر صفر خواهد بود. بدین‌ترتیب بود که گام بزرگی درجهت پیرایش‌نظریهٔ کوهومولوژی برداشته شد. جالب است بدانیم که هوپف، که احترام بسیارزیادی برای او قائلم، با این اندیشه‌ها چندان دمساز نبود. او پیشتردرمورد خمینه‌ها دریافته بود که هرگاه نگاشتی چون f ازخمینهٔ mبعدی M به‌خمینهٔ nبعدی N درنظر بگیریم، آنگاه حلقه‌های اشتراکی ازخمینه‌ها داریم. منظور ازیک‌حلقهٔ اشتراک[2] این است که دو دور روی خمینه درنظر بگیریم و به‌اشتراک آنها در موضعی‌دلخواه روی خمینه نگاه‌کنیم. هوپف با عزیمت از همین نقطه چیزی را تعریف کرد که آن را همریختی برگشتی[3] می‌نامید. همریختی برگشتی چیزی بود که f آن‌را القا می‌کرد ونگاشتی ازهومولوژی مرتبهٔ $(n-p)$ی خمینهٔ N به‌هومولوژی‌مرتبهٔ $(m-p)$ی‌خمینهٔ M، به‌ازای pی‌دلخواه، بود. او این‌مفهوم را تعریف کرد و نام همریختی برگشتی را به‌آن داد. خوب، این واقعاً چه بود؟ پاسخ آن است که تحت‌دوگانی موجودروی خمینه، هومولوژی مرتبهٔ $(n-p)$ی N اساساً همان کوهومولوژی مرتبهٔ pی N، وهومولوژی مرتبهٔ $(m-p)$ی M همان کوهومولوژی مرتبهٔ pی M است. پس‌این همریختی، چیزی نیست مگر نگاشت القایی در نظریهٔ کوهومولوژی. هوپف این همریختی برگشتی را تعریف کرد و طریقهٔ شگفت انگیزی را که این همریختی بعد هومولوژی را تغییر می‌دهد، روشن ساخت، اما گام در مسیری اشتباه گذارد. البته دلیل این‌اشتباه آن بود که کوهومولوژی، به‌خاطر متکی‌بودن بر فضاهای‌برداری دوگان، پادوردا[4]ست. یک‌نگاشت خطی ازیک فضای برداری به‌فضای برداری دیگر در اختیار داریم که نگاشت دوگانی ازفضای‌دوگان دومی به‌فضای دوگان‌اولی، درجهت‌عکس، القامی کند. هوپف با آن‌بینش بسیاربسیار عمیقش، ایدهٔ درست را

---

1. cocycles
2. intersection ring
3. Umkehrshomomorphismus
4. contravariant

به‌دست آورده‌بود، اما بجز تشریح این ایده به‌این‌طریق، کار دیگری نکرد. از این تنها نکتهٔ قابل انتقاد در کارهای ریاضی هوپف که بگذریم، به‌یکی از کارهای بزرگ او در ۱۹۳۵ می‌رسیم. در دسامبر ۱۹۳۵ همایشی در جنوا برگزار شد، ودر آن الی کارتان توجه همگان را به‌خاصیت جالب گروههای کلاسیك لی جلب کرد. او خاطرنشان کرد که همهٔ گروههای کلاسیك لی دارای این ویژگی‌اند که اعداد بتی آنها ــ او هنوز هم از اعداد بتی صحبت می کرد ــ دقیقاً مانند اعداد بتی حاصلضرب کره‌های با بعد فردند. بنابراین اگر هریك از گروههای کلاسیك لی، یعنی سری گروههـــای متعامد، گروههای یکانی، و گروههای همتافته[1]، را انتخاب کنیم، هریك از این گروهها به‌نوعی شبیه به‌حاصلضرب دکارتی کره‌های با بعدفرد رفتارمی کنند. البته این‌موضوع را می‌توان به‌سادگی مبتنی بر مشاهدات تجربی دانست، به‌این‌معنی که کارتان همهٔ این گروهها را با اعداد بتی آنها می‌شناخت، وکاری که کرد این‌بود که تنها این پدیده‌را درمورد آنها مشاهده کرد. اما هیچ توضیحی دراین‌باب در دست نبود. اوهمگان را به‌یافتن چنین توضیحی فراخواند. باید این‌را نیز اضافه کنم که سابقهٔ این‌مطالب به‌افرادی چون براوئر، پونتریاگین، و ارسمان[2]، برمی‌گردد. پس از آن کارتان پرسش طبیعی بعدی‌را مطرح کرد، و آن اینکه آیا حکـــم فوق برای‌پنج گروه لی استثنایی نیز برقرار است؟

چرا گروههای کلاسیك لی همواره مشابه حاصلضرب کره‌های با بعد فرد رفتار می‌کنند؟ هوپف دراین‌باره فکرکرد و به‌پاسخ آن رسید. او دریافت که برای پاسخگویی به‌این‌پرسش، بخش‌ناچیزی ازساختار گروههای کلاسیك لی مورد نیاز است. درواقع همهٔ آن چیزی‌کـــه اساساً لازم است، یك‌فضای توپولوژیك به‌همراه ضربی پیوسته روی آن‌است که یك همانی‌دوطرفه‌داشته‌باشد. به‌همین‌خاطر مفروضات ما عبارت خواهدبود از یك‌فضای فشرده تا هومولوژی مورد نظرمان متناهیاً تولیدشده‌باشد، ویك‌ضرب با همانی دوطرفه. این همهٔ آن‌چیزی‌است کـــه لازم است! نبوغ باورنکردنی هوپف درتشخیص این موضوع همواره مرا تحت تأثیر قـــرار داده‌است، زیرا درزمانی که او دراین‌باره‌کار می‌کرد، دقیقـــاً دو مثال از این پدیده شناخته‌شده‌بود که هیچ‌یك گروه لی نبود. یکی کرهٔ هفت‌بعدی بود، و یقیناً سخن بی‌مزه‌ای‌است اگر بگوییم کرهٔ هفت‌بعدی مشابه حاصلضربی‌از کره‌های با‌بعد فرد رفتار می کند! و مثال‌دیگر فضای تصویری حقیقی هفت‌بعدی‌بود. دراین‌حالت‌نیز تشابه با حاصلضرب کره‌های با بعد فرد چنـــدان هیجان‌انگیز نیست، چرا کـــه فضای تصویری‌حقیقی هفت‌بعدی، خمینه‌ای‌جهت‌پذیر است که کرهٔ‌هفت‌بعدی یك‌پوشش دولایهٔ آن است. از دیدگاه اعداد بتی، واضح است که این‌فضا کاملا شبیه به کرهٔ هفت‌بعدی رفتار می کند. پس می‌بینیم که در آن‌زمان مثال‌جالبی در دست‌نبود، اما هوپف اینهارا دستمایه‌ای برای توضیح مطلب قرار داد و این آغاز نظریهٔ جبرهـــای هوپف بود که امروزه قلمروی‌پربار است. اکنون تعداد بیشماری‌مثال‌برای خمینه‌های به‌اصطلاح هوپف در دست‌است که‌حتی گروه‌توپولوژیك نیستند. پس می‌بینیم که درسال ۱۹۳۵ چه‌وقایع مهمی روی‌داد.

اینك وقت آن است که درمورد گروههای هوموتوپی صحبت کنیم. موازنهٔ بسیار زیبایی میان گروههای هومولوژی‌و گروههای هوموتوپی وجود دارد. تعریف گروههـــای هومولوژی فوق‌العاده دشوار است، امـــا یك‌بار که این‌کار صورت گرفت، محاسبهٔ آنها بسیارساده‌است. ازسوی دیگر تعریف گروههای هوموتوپی به‌غایت ساده است، اما محاسبهٔ آنهـــا اساساً غیرممکن است. گروههـــای هوموتوپی تعمیمی از گروه بنیادی‌اند. درمورد گروه بنیادی، کافی است به‌رده‌های هوموتوپی نگاشتهای یك‌دایره به‌فضای موردنظر بنگریم، اما در مورد گروههـــای هوموتوپی بالاتر، نگاشت کره‌ها لازم است.

درواقع افتخار ابداع گروههای‌هوموتوپی‌را نباید‌به‌هورویچ[1] داد. حقیقت امر آن‌است که این افتخار باید نصیب چك شود. در همایشی در وین به‌سال ۱۹۳۱، چك مقاله‌ای ارائه کرد که در آن گروههای‌خاصی‌را ازدیدگاه هوموتوپی توصیف کرده‌بود. اوهیچ کاربردی برای این گروهها سراغ نداشت. به‌علاوه، تنها قضیه‌ای که ثابت کرده‌بود این بود که این گروهها تعویض‌پذیرند. دیگران، خصوصاً آلکساندروف، چك‌را متقاعد کردند که این گروهها چندان جالب‌توجه نخواهند‌بود، زیرا چنین تصور می‌شد که‌هر نوع اطلاعاتی که بتوان از گروههای آبلی به دست آورد، ریشه در هومولوژی دارد. هورویچ گروههای‌هوموتوپی‌را مجدداً تعریف کرد و بلافاصله در یك مجموعهٔ چهارمقاله‌ای که به‌صورت مقدماتی انتشار یـــافت کاربردهای‌مهمی از آنهارا به‌دست‌داد. دراین‌مجموعهٔ‌چهارمقاله‌ای، او اهمیت موضوعی را نشان داد‌که امروزه آن را نظریهٔ انسداد[2] می‌نامیم. همانگونه‌که استین‌راد[3] بعدها‌خاطرنشان کرده‌است، مسألهٔ اساسی‌را که در توپولوژی با آن سروکار داریم، اغلب می‌توان چنین‌تنظیم کرد. یك‌شیء X، یك‌شیء Y، زیرفضایی از X به‌نام L، ونگاشتی پیوسته چون g از L به Y در اختیار داریم. سؤال این است: آیا تابع پیوستهٔ g را می‌توان به‌تمام X گسترش داد؟ جالب است بدانیم که بسیاری از سؤالات در توپولوژی و خارج آن‌را می‌توان به‌مسألهٔ فوق تحویل کرد. هورویچ نشان داد‌که این نوع مسائـــل را می‌توان بر حسب انسدادهـــایی خاص که رده‌هـــای کوهومولوژی X به‌پیمانهٔ L اند و ضرایبشان‌در گروههای‌هوموتوپی Y اند حل کرد (درواقع معمولا نمی‌توان‌این‌گونه‌پرسشها را پاسخ داد، زیرا نمی‌توان انسدادها را محاسبه‌کرد!). این ایلنبرگ[4] بود که کل نظریهٔ انسداد را به‌صورتی کاملا اصولی و منظم درآورد. هورویچ اهمیت گروههـــای هوموتوپی را نشان داد، و قضیهٔ مهمی درمورد ارتباط بین هوموتوپی وهومولوژی به‌نام قضیهٔ یکریختی هورویچ ثابت کرد. اونشان داد‌که همواره می‌توان یك همریختی از گروه هوموتوپی nام به‌گروه هومولوژی nام تعریف کرد. اگر فضا چنان‌باشد‌که همهٔ $(n-1)$ گروه هوموتوپی نخستش $(n \geqslant 2)$ بدیهی باشند، آنگاه این همریختی درواقع یکریختی خواهد بود. بنابراین اولین نمود اهمیت همریختی هورویچ این‌است که ممکن است یکریختی باشد. این‌موضوع تعمیمی از قضیهٔ کلاسیکی بود که پیشتر پوانکاره به‌آن توجه‌کرده‌بود، قضیه‌ای که درحالت $n=1$ می‌گوید گروه هومولوژی مرتبهٔ اول همان نسخهٔ آبلی شدهٔ گروه

---

1. symplectic groups
2. Ehresmann

---

1. Hurewicz
2. obstruction theory
3. Steenrod
4. Eilenberg

بنیادی است. درابعاد بالاتر، گروههای هوموتوپی خود آبلی‌اند و بنابراین نیازی به آبلی کردنشان نیست. واین بهترین چیزی است که می‌توان ازدیدگاه آلکساندروف اظهار داشت؛ به‌عبارت دیگر، نخستین جایی که گروههای هوموتوپی وارد معرکه می‌شوند جایی است که آنها صرفاً گروه هومولوژی هستند. ازاین نقطه که بگذریم، واگرایی این دو مفهوم ازیکدیگر بسیار جالب است، به‌طوری که می‌توان گفت هومولوژی وهوموتوپی نسبت به یکدیگر حالت مفاهیمی مکمل را پیدا می‌کنند. اگر بخواهم تنها یك نکته درمورد سهم اندك خودم در تحول این موضوع بگویم، آن نکته یقیناً همکاریم با اکمان[1] است. ما نشان دادیم که گرچه گروههای هومولوژی و هوموتوپی اساساً متمایزند، روند ساختن گروههای کوهومولوژی و گروههای هوموتوپی را می‌توان نسخه‌های دوگانی ازدقیقاً یك فرایند تلقی کرد. به‌بیان دیگر، ساختار حقیقی نظریهٔ کوهومولوژی را می‌توان تصویر آینه‌ای ساختار نظریهٔ هوموتوپی دانست. البته نتایجی که ما به‌دست آوردیم، ارتباطی اساسی بین دو نظریه به‌دست می‌دهد.

یکی از نامهایی که از آن یاد نکردم، هنری وایتهد است. باید بگویم کاری که هنری وایتهد انجام داد، متضمن اندیشه‌ای بسیار زیبا بود. با برگشت به آغاز نظریهٔ هومولوژی، می‌بینیم فضای توپولوژیکی که هومولوژی می‌پذیرد، دراصل مجهز به ساختاری ترکیبیاتی بوده است. ویتوریس و چك با تعریف هومولوژی برای فضاهای توپولوژیك دلخواه، آن‌را از قید ساختار ترکیبیاتی آزاد کردند. ازسوی دیگر هوموتوپی دراصل روی فضاهای توپولوژیك دلخواه تعریف شده بود، وکاری که وایتهد کرد این بود که ساختاری ترکیبیاتی روی فضا اعمال کرد ونشان داد که چگونه این ساختار ترکیبیاتی می‌تواند بینشی درباب گروههای هوموتوپی فضا به‌دست دهد. این نتایج اول‌بار درمقالاتی آمدند که او پیش‌ازجنگ نوشت، وبعدها خودش آنها را بازنویسی کرد. وایتهد می‌گفت کارهای پیش‌از جنگش با آثار کارل مارکس ازاین‌جهت شباهت دارند که اغلب مورد استناد قرار می‌گیرند اما هرگز خوانده نمی‌شوند. پس از جنگ اوکوشید قسمت زیادی ازکارهایش‌را به‌زبان جبری دوباره بیان کند. من اولین شاگرد او پس‌ازجنگ دوم جهانی بودم؛ وبه همین‌دلیل بود که درآن‌زمان تحت تأثیر افکار او قرار گرفتم واین محتملا نقش زیادی در گرایش اولیهٔ من داشته‌است.

***

پرسش: هنگامی که من توپولوژی جبری می‌خواندم، هرگز نفهمیدم که اصلا امی‌نوتر کاری در این زمینه انجام داده باشد. آیا این نظری رایج است؟

پاسخ: خیر. هوپف درمورد سهم فوق‌العاده زیاد امی‌نوتر، وبینش شگفت‌انگیزی که او داشت، اظهار نظری صریح کرده‌است. او گفت تا زمانی که امی‌نوتر خاطرنشان نکرده بود، آنها هرگز تشخیص نداده بودند که دربررسی هومولوژی با گروههای آبلی سروکار دارند. هوپف اهمیت دیدگاه جبری درهومولوژی را دریافته بود، اما با کوهومولوژی میانهٔ خوبی نداشت. به‌گفتهٔ او زمانی که همهٔ آنها در گوتینگن جمع شده بودند و صحبت می‌کردند، فضای عجیبی برآنجا حاکم بود. امی‌نوتر به‌صحبتهای آنها گوش داد و سپس برگشت و گفت: «خوب، چیزی که شما واقعاً دارید درباره‌اش صحبت می‌کنید، گروههای آبلی است». آنها با اعداد بتی کار می‌کردند وبه امی‌نوتر گفتند که اعداد بتی باخمینه‌ها سروکاردارند، اما او گفت که جان کلام در گروههای آبلی نهفته است، و بنابراین باید از همریختی صحبت کرد. اما دراثباتهای پیشین برای ناوردایی، هیچ ردپایی از این واقعیت نمی‌توان یافت. اندرو والاس کتاب خوبی در بـاب نظریهٔ هومولوژی دارد. او دریك لم کوچك این واقعیت را بیان می‌کند که هرنگاشت بین فضاها یك همریختی بین گروههـای هومولوژی القا می‌کند، و نیز تـرکیب دو نگاشت، القاکنندهٔ تـرکیب دو همریختی است. خوب، این همهٔ آن چیزی است که ناوردایی توپولوژیك از آن سخن می‌گوید، ولم مزبور صریحاً می‌گوید که می‌توان ازیك نظریه به‌نظریهٔ دیگر، ازتوپولوژی به‌جبر، رفت. این، واقعیت هومولوژی راآشکار می‌کند، واین دیدگاهی است که امی‌نوتر آن را روشن ساخت. بگذارید تنها یك حکایت کوتاه نقل کنم، آن‌هم بـه‌خاطر اینکـه اینجا سرزمین پـولیاست. به‌مناسبت هشتادسالگی پولیا، من که در زوریخ به‌سرمی‌بردم به‌مراسم جشن تولد او دعوت شدم. در آنجا هوپف و او دربارهٔ امی‌نوتر بحث می‌کردنـد. یکی از آنها اصرار داشت کـه امی‌نوتر خیلی زشت بود، و دیگری با حرارت آن را انکار می‌کرد.

پرسش: چرا بعضی توپولوژیدانها از به‌کار بستن روشهای جبری عاجزند؟ آیـا آنها صرفاً احساس می‌کنند کـه این روشها نتایج ارزشمندی به‌دست نخواهند داد؟

پاسخ: سابق براین احساس می‌شد که همهٔ توپولوژی از هندسه، و تا حدودی هم آنالیز، نشأت می‌گیرد. پوانکاره بـه‌مفهوم وسیع کلمه، آنالیزدان بود. به‌نظر من اینکه جبر ابزار دست هندسه‌دان شود، اندیشه‌ای عجیب وغریب بود. این‌روزها چنین ایده‌ای طبیعی به‌نظر می‌رسد، اما آن‌وقتها بسیار عجیب بود. در ۱۹۳۵، ریاضیدان بزرگی چون الی کارتان هنوز ایده‌ای جز اعداد بتی نداشت. پس چنین اندیشه‌ای برای آنها خیلی بیگانه بود، و این چیزی بود که واقعاً جلوی آنها را می‌گرفت. مثلا دردسر ریاضیدانها رابامفهوم کوهومولوژی و سردرگمی بسیاری از آنهارا درمواجهه با «مرز بالایی» درنظر بگیرید، که درآن هرتلاشی به‌بیراهه می‌رفت! آنها می‌دیدند که گرچه از مثلا یك نگاشت سادکی نگاشتی از زنجیره‌ها به‌دست می‌آید، این نگاشت با مرز بالایی تعویض‌پذیر نیست. عقیدهٔ هوپف این بود که باید فرض کرد نگاشت به‌نحوی از مسیری دیگر برمی‌گردد. چرا طرز فکر این گونه بود؟ به‌خاطر آنکه آنها به‌بیان جبری، دوگان زنجیره‌هـا را توابعی بر زنجیره‌هـا نمی‌دانستند. به‌عنوان مثالی دیگر، هرچندکه آلکساندروف وهوپف در ارتباط باقضیهٔ نقطهٔ ثابت لفشتس، بررسی هومولوژی بـا ضرایب گویارا طبیعی می‌دانستند، ریاضیدانها چنین می‌پنداشتند که هومولوژی با ضرایب گویا صرفاً وسیله‌ای برای خلاص شدن از تاب‌است. آنها چنانکه مـا امروزه تلقی می‌کنیم، هومولوژی با ضرایب گویا را به‌عنوان راهی برای به‌دست‌آوردن ساختار فضای بـرداری تلقی نمی‌کردند. با گویا گرفتن ضرایب، یك فضای برداری جالب‌روی اعداد گویا به‌دست‌می‌آوریم. پس می‌توانیم تنها از بعد این‌فضای برداری صحبت کنیم. اما درآن موقع چنین ایده‌هایی مطرح نبود. همین‌جا باید اضافـه کنم کـه هنری وایتهد، در یکی از مقاله‌های

---

1. Eckmann

پیش‌از جنگ، اندیشهٔ اصلی دنبالهٔ دقیق[1] درهوموتوپی را معرفی کرد، اما شیوهٔ بیان او برای ما فوق‌العاده مبهم بود. به‌جای اینکه خیلی ساده بگوید هستهٔ یك همریختی تصویر همریختی پیشین در دنباله است، عبارات پیچیده‌ای به‌کار برده بود، چراکه از نظر او هوموتوپی نگاشتهای به‌توی X با هوموتوپی نگاشتهای به‌توی زیرفضای A از X تفاوت داشت. در هرحالت او منظور خود از دقیق‌بودن دنباله را نوشت، وبنا براین با دونگاشت جز ئیت‌سروکار داشت، که یکی از یك مسیر، ودیگری از مسیر دیگر می‌رفت.

تکوین همهٔ این ایده‌های جبری مدت زمان زیادی بـه درازا کشید زیرا آنهاکه‌درنظریهٔ هومولوژی‌وهوموتوپی‌تحقیق‌می‌کردند جبردان نبودند، وجبردانهـا نیز به‌موضوع علاقه‌ای نداشتند. تنها متخصص جبرمجردکه به‌این موضوع‌علاقه نشان‌داد، امی‌نوتر بود.

پرسش: این روزها متداول است که روشهای یك شاخهٔ ریاضیات برای حل مسائل شاخهٔ دیگری بـه‌کار بسته شود. آیـا توپولوژی جبری نخستین مبحثی بودکه چنین شیوه‌ای در آن به‌کار گرفته شد؟

پاسخ: به‌طور اصولی بله، مگر آنکه بگوییم این‌کار پیشتر درمورد نظریـهٔ تحلیلی اعـداد انجام شده بود. در آنجا روشهای آنالیز کلاسیك را برای بـه‌دست‌آوردن نتایجی درنظریهٔ اعداد بـه‌کار می‌گیریم. با این حال به‌تعبیری درآنجا آنالیز حرف اول وآخر را می‌زند. اما در توپولوژی، دو روش به‌طرزهم‌زمان؛ به‌کار گرفته می‌شوند. نمی‌توان گفت یکی از روشها بردیگری چیرگی دارد، بلکه ارتباطاتی میان دو روش به‌وجود می‌آید، وامروزه این‌ارتباط به‌مفهومی بسیار قویتر شده است، زیرا به‌کمك توپولوژی، می‌توان ساختارهای جدید جبری بناکرد ونیز می‌توان نتـایجی جبری بـا استفاده از توپولوژی به‌دست آورد. با استفاده از فضاهای‌پوششی می‌توان‌قضایایی‌درنظریهٔ ترکیبیاتی‌گروهها به‌دست آوردکه‌بدون روشهای توپولوژیك به‌دشواری به‌دست می‌آیند. پس می‌بینیم که کاربرد دوطرفه است. امروزه نظریهٔ‌کوهومولوژی در تمام پیکرهٔ ریاضیات، از معادلات دیفرانسیل گرفته تا عملگرهای دیفرانسیلی‌و جزآن رخنه کرده‌است.و البته، نظریهٔ هومولوژی به‌صورت‌ابزاری اساسی درهندسهٔ جبری درآمده است.

****

● این متن یك سخنرانی است که به پرسش و پاسخ ختم شده است. ترجمه از منبع زیر به عمل آمده است:

Peter Hilton, "A brief, subjective history of homology and homotopy theory in this century," *Mathematics Magazine*, (5) **61** (1988) 282-291.

1. exact sequence