نشر ریاضی، سال ۱۲، شمارهٔ ۱ و ۲، صص ۴ـ۱۱

نظریهٔ زایبرگ-ویتن چیست؟

پدرام صفری*

اشاره. این مقاله، گزارش‌گونه‌ای است بسیار مختصر از تحولات چند سال اخیر در نظریهٔ خمینه‌های چهاربعدی که به دنبال کشف معادلاتی توسط زایبرگ و ویتن صورت یافت. برای ملاحظهٔ شرح مفصلتر، خواننده می‌تواند به منابع انتهای مقاله رجوع کند. جنبهٔ هندسی این نتایج است که منظور نظر این نوشتار خواهد بود، گرچه فیزیکدانان و ریاضی-فیزیکدانان هم دیدگاههای خاص خود را در بارهٔ این مبحث دارند که نگارنده آن را به اهلش وامی‌نهد.

نگاه کلی

در پاییز سال ۱۹۹۴ میلادی، ادوارد ویتن[1] و ناتان زایبرگ[2]، ضمن کار بر روی نظریه‌های فرامتقارن پیمانه‌ای[3]، به معادلات دیفرانسیلی پی بردند که طبق روال فیزیکدانان باید همان نتایج نظریهٔ دانلدسن[4] را در مورد خمینه‌های چهار بعدی به‌دست می‌داد [W]. در عین حال این معادلات مزیت ویژه‌ای داشت: گروه پیمانه‌ای در این معادلات $\mathrm{U}(1)$ است، که گروهی است آبلی، و این امر محاسبات را بسیار ساده می‌کند. در ضمن، برخلاف نظریهٔ دانلدسن، فضای پیمانهٔ[5] وابسته به معادلات زایبرگ-ویتن فضایی است فشرده، و همین باعث می‌شود که از برخی مشکلات فنی اجتناب شود.

در فاصلهٔ چند ماه پس از کشف این نظریه، علاوه بر ارائه اثباتهای کوتاهتر و ساده‌تر از نتایج نظریهٔ دانلدسن، پیشرفتهایی نیز در نظریهٔ خمینه‌های چهاربعدی حاصل شد:

الف) اثبات حدس توم[6] توسط کرونهایمر[7] و مُروکا[8]

فرض کنید c یک ردهٔ هومولوژی دوبعدی در $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ باشد. رویه‌های دوبعدی متفاوتی در $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ می‌توانند نمایندهٔ این ردهٔ هومولوژی باشند ــ این امر نتیجه‌ای از نظریهٔ کوبوردیسم توم است. توجه کنید که اگر Σ چنین نماینده‌ای باشد، می‌توان با چسباندن دستوارهٔ[1] مناسب کوچکی، نمایندهٔ دیگری به‌دست آورد که گونهٔ[2] بزرگتری دارد. بنابراین برای گونهٔ این نماینده‌ها کران بالایی نیست. اما می‌توان از کران پایین گونه‌ها پرسید. حدس توم این بود که این کران پایین توسط یک خم جبری که ردهٔ c را نمایش می‌دهد محقَّق می‌شود (این خم جبری با تقریب جهت همواره وجود دارد). حدس توم بعداً صورت تعمیم‌یافته‌ای هم یافت. مورگان[3] این پرسش را مطرح کرد که آیا این حدس در حالتی که $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ با یک رویهٔ M با بعد مختلط ۲ جایگزین شود هم برقرار است یا نه. کرونهایمر و مروکا با استفاده از روشهای پیمانه‌ای دانلدسن، تعمیم حدس توم را در حالتی که $b_2^+(M) > 1$ ثابت کردند، ولی روش آنان در حالتی که $b_2^+ = 1$ (و به‌ویژه حالت $M = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$، که حدس اصلی توم بود) به اشکالات عمده‌ای برمی‌خورد [KM1-KM3]. نظریهٔ بدیع زایبرگ و ویتن راه را برای اثبات این حالت بازکرد: کرونهایمر و مروکا مسأله را در حالت $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ حل کردند [KM] و از سوی دیگر، مورگان، سابو[4]، و تاوبز[5] با روشهای مشابهی و با به‌دست آوردن یک فرمول ضربی[6]، تعمیم حدس توم را در حالتی که ردهٔ هومولوژی c عدد خودْتقاطعی[7] نامنفی داشته باشد به اثبات رساندند [MST]. نهایتاً سابو کلیترین صورت حدس توم را در حالتی که خمینه همتافته[8] باشد، و بدون هیچ فرضی روی عدد خودتقاطعی، ثابت کرد [OSz].

ب) نتایج تاوبز در هندسهٔ همتافته: $\mathrm{SW} = \mathrm{Gr}$

در عین حال، تاوبز معادل‌بودن ناورداهای زایبرگ-ویتن و ناورداهای گروموف[9] برای خمینه‌های چهار بعدی همتافته را ثابت کرد [T1-T8]. ناورداهای گروموف قبلاً براساس تعداد خمهای شبه‌هولومورف[10] در یک خمینهٔ همتافته تعریف شده بودند [G]. علاوه بر این، تاوبز مقدار ناوردا را برای خمینه‌های چهار بعدی همتافته با $b_2^+ > 1$ صریحاً محاسبه کرد. صورت این نتیجه را بعداً بیان خواهیم کرد.

1. Edward Witten 2. Nathan Seiberg
3. super-symmetric gauge theories 4. Simon Donaldson
5. moduli space 6. René Thom 7. Peter Kronheimer
8. Tomasz Mrowka

1. handle 2. genus 3. John W. Morgan
4. Zoltán Szabó 5. Clifford H. Taubes 6. product formula
7. self-intersection 8. symplectic 9. Michael Gromov
10. pseudo-holomorphic

ج) پیامدها در هندسهٔ جبری

علاوه بر اثباتهای کوتاهتر از نتایج قبلی نظریهٔ دانلدسن در هندسهٔ جبری، قضایای جدیدی هم به اثبات رسید، ازجمله ناوردایی کثیرگونه[1] تحت نگاشتهای هموار [FM1]، که درواقع تعمیمی از حدس وان دِوِن[2] است که قبلاً به کمک چندجمله‌ای‌های دانلدسن به اثبات رسیده بود، یعنی اینکه بُعدِ کُدایرا[3] ناوردایی هموار است [FQ]. به دلیل وجود ساختار مختلط، جوابهای معادلات زایبرگ-ویتن در بسیاری از حالات (مثلاً برای رویه‌های کِی‌لِر[4]) به‌طور صریح به‌دست می‌آیند [M]، [W].

د) بازنگری در نظریهٔ دانلدسن

با استفاده از نظریهٔ زایبرگ-ویتن، اثبات کوتاهتر و ساده‌تری از قابل‌توجه‌ترین قضیهٔ دانلدسن به‌دست آمد.

• قضیهٔ دانلدسن. فرمهای تقاطع منفی معین یک خمینهٔ چهاربعدی هموارِ بستهٔ ساده-همبند، قطری‌شدنی هستند.

برای توضیحات بیشتر در بارهٔ فرمهای تقاطع و این قضیه، رجوع کنید به [ک]. اثباتی از قضیهٔ فوق با استفاده از نظریهٔ زایبرگ-ویتن در [N] آمده است.

• حدس $\frac{11}{8}$. در یک خمینهٔ چهاربعدی هموارِ بستهٔ ساده-همبند، رتبهٔ[5] فرم تقاطع حداقل $\frac{11}{8}$ نشان[6] آن است.

برای رویه‌های $K3$، این حداقل محقق می‌شود، بنابراین تخمین فوق قابل بهبود نیست. اثبات $\frac{10}{8}$ ادعا شده است [F].

ه) نتایج داخلی و مسائل منبعث از نظریهٔ زایبرگ-ویتن

در اینجا به منظور تکمیل فهرست، تعدادی از قضایا و حدسهایی را که در خود نظریهٔ زایبرگ-ویتن جالب‌توجه‌اند ذکر می‌کنیم. در برخی موارد، حتی بیان صورت حکم مستلزم دانستن نظریه است، که خواننده را برای ملاحظهٔ توضیحات بیشتر به ادامهٔ مقاله ارجاع می‌دهیم.

• قضایای چسباندن[7] و فرمولهای ضربی. صورت عمومی مسأله چنین است. فرض کنید خمینهٔ چهاربعدی هموار و بستهٔ M توسط زیرخمینهٔ سه‌بعدی M_0 به دو قسمت M^+ و M^- تقسیم شده است. مراد، کسب اطلاعات در بارهٔ ناورداهای زایبرگ-ویتنِ M، یا حتی توصیف جوابها و فضای پیمانهٔ زایبرگ-ویتنِ M است، در صورتی‌که اطلاعات مشابه در مورد $M^\pm$ و M_0 داده شده باشد. مسألهٔ در حالتهای خاصی که M_0 به‌صورت $S^1 \times \Sigma$ باشد، که Σ یک رویهٔ ریمانی است، یا به‌صورت یک فضای تاربندی شده زایفرت[8] باشد، مثلاً بر اثر جراحی روی یک گره[9] یا زنجیر[10] به‌دست آمده باشد، یا در حالت کلی در نقاط تحویل‌ناپذیر فضای پیمانهٔ M_0، تحت شرایط معقولی حل شده است [MST]، [MOY]، [S].

• فرمولهای «گذار از دیوار»[11]. در حالتی که $b_2^+(M) = 1$، ناوردای خمینهٔ M به متریک روی آن نیز وابسته است. فضای متریکهای روی M

1. plurigenera 2. Van de Ven 3. Kodaira 4. Kähler
5. rank 6. signature 7. gluing 8. Seifert-fibered space
9. knot 10. link 11. wall-crossing formulas

به‌طور مشخص به حجره[1]هایی تقسیم‌بندی می‌شود و گذار از یک «دیوار» برای عبور از یک حجره به حجرهٔ مجاور، ناوردا را طبق فرمول معینی یک واحد کم یا زیاد می‌کند، حداقل در حالتی که $b_1(M) = 0$ و بعد فضای زمینه مثبت و زوج باشد [M]. نتایجی نیز برای حالت $b_1(M) > 0$ در دست است.

• قضایای «صفر»[2]. موارد متعددی وجود دارد که ناوردای زایبرگ-ویتن صفر می‌شود، مثلاً اگر خمینهٔ مورد نظر به‌صورت جمع همبند[3] دو خمینهٔ M_1 و M_2 باشد که $b_2^+(M_i) > 0$؛ چنین خمینه‌ای خمینهٔ تحویل‌پذیر[4] خوانده می‌شود. حکم فوق خود نتیجه‌ای از قضیهٔ چسباندن است.

• حدس مینیمال. با توجه به قضیهٔ صفر خمینه‌های تحویل‌پذیر، و این نکته که خمینه‌های همتافته ناورداهای ناصفر دارند، تاوبز حدس زد که خمینه‌های همتافته، عناصر ساختمانی خمینه‌های چهاربعدی باشند، دست‌کم در حالت خمینه‌های ساده-همبند، یعنی هر چنین خمینه‌ای جمع همبند خمینه‌های همتافته باشد. سابو برای این حدس مثال ناقضی ساخت، یعنی خمینهٔ ساده-همبند تحویل‌ناپذیری که همتافته هم نیست [Sz]. درواقع خانواده‌ای از این مثالها وجود دارد [FS]. برخلاف بعد سه — که حدس هندسی‌سازی[5] ترستن[6] تجزیه‌ای از خمینه‌های سه‌بعدی به اجزای شناخته‌شده پیش می‌نهد — هنوز هیچ حدس صورت‌بندی‌شده‌ای برای شناسایی خمینه‌های چهاربعدی دوام نیافته است.

• هم‌ارزی نظریهٔ دانلدسن با نظریهٔ زایبرگ-ویتن و برنامهٔ فیهان[7]-لِنِس[8]. ویتن با توجه به استدلالها و قراین فیزیکی معتقد است که نظریهٔ ایشان با نظریهٔ دانلدسن هم‌ارز است و محاسبات یک نظریه را می‌توان متناظراً در نظریهٔ دیگر انجام داد. برنامه‌هایی برای اثبات ریاضی این مطلب در پیش است که شاید فعالترین آنها در حال حاضر برنامهٔ فیهان-لنس باشد [FL]. در این برنامه، تعمیمهایی از نظریهٔ زایبرگ-ویتن به گروههای پیمانه‌ای ناآبلی‌ای همچون $\mathrm{PU}(2)$ در نظر گرفته می‌شوند.

• حدس «ساده نوع»[9]. تصور بر این است که ناوردای زایبرگ-ویتن برابر صفر است مگر آنکه بعد فضای پیمانه صفر باشد. تمام مثالهای بررسی‌شده تاکنون این حدس را تأیید می‌کنند ولی هنوز اثبات یا ردی برای حکم کلی وجود ندارد. در حال حاضر این شاید مهمترین و سرسخت‌ترین حدس موجود در نظریهٔ زایبرگ-ویتن باشد.

معادلات زایبرگ-ویتن

فرض کنید M یک خمینهٔ چهاربعدی هموار، جهتدار، بسته (فشرده و بی‌لبه) و همبند باشد. M را به یک متریک ریمانی نیز مجهز کنید. (بعداً خواهیم دید که اگر $b_2^+(M) > 1$، ناورداهای تعریف‌شده مستقل از متریک ریمانی خواهند بود، یعنی ناورداها فقط به ساختار هموار M بستگی دارند.) همچنین یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(4)$ برای M تثبیت کنید [تابلوی اسپین]. معادلات و ناورداهای زایبرگ-ویتن برحسب این ساختار Spin^c بیان می‌شوند. برای مقاصد عملی

1. chamber 2. vanishing 3. connected sum 4. reducible
5. geometrization 6. William Thurston 7. Feehan 8. Leness
9. simple type

گروه اسپین

فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد. فضای $\oplus_{n=۰}^{\infty}\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n}$ را به ایده‌آل دوطرفهٔ تولیدشده با عناصرِ به شکل $v\otimes v+||v||^{۲}۱$ برای هر $v\in V$ تقسیم کنید. فضای خارج‌قسمتی به همراه ضرب $\otimes$ یک جبر $\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ـمدرج[1] است که جبر کلیفرد[2] خوانده شده با $\mathrm{Cl}(V)$ نشان داده می‌شود. معمولاً با مختلط‌شدهٔ[3] این جبر سروکار داریم: $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)=\mathrm{Cl}(V)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. اگر عنصری از $\mathrm{Cl}(V)$ به‌صورت حاصل‌ضرب تعداد زوجی از عناصر V باشد آن‌را یک عنصر زوج می‌خوانیم. عناصر فرد به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. زوج و فردبودن با توجه به رابطهٔ هم‌ارزی فوق خوش‌تعریف است و درجه‌بندی مذکور در بالا را به‌دست می‌دهد: $\mathrm{Cl}(V)=\mathrm{Cl}_{۰}(V)\oplus\mathrm{Cl}_{۱}(V)$. (در ضمن توجه کنید که $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ به‌عنوان یک فضای برداری با $\Lambda^*(V)\otimes\mathbb{C}$ یکریخت است.)

اگر $\{e_{۱},\dots,e_n\}$ پایه‌ای یکه و متعامد برای V باشد، عنصر $\omega_{\mathbb{C}}=i^{[\frac{n+۱}{۲}]}e_{۱}e_{۲}\dots e_n$ یک عنصر حجم برای $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ خوانده می‌شود. محاسبه‌ای سرراست نشان می‌دهد که $\omega_{\mathbb{C}}^{۲}=۱$. ضرب کردن از چپ در $\omega_{\mathbb{C}}$، یک یکریختی خطی $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)\to\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ القا می‌کند که مقادیر ویژهٔ ±۱ دارد و در نتیجه تجزیه‌ای به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{l}(V) &= \mathbb{C}\mathrm{l}^+(V) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}^-(V)\\ &= \mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V)\oplus\mathbb{C}\mathrm{l}_{۱}^+(V)\oplus\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^-(V)\oplus\mathbb{C}\mathrm{l}_{۱}^-(V)\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که اگر V زوج بعدی باشد، $\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V)$ به‌عنوان یک جبر با $\mathbb{C}\mathrm{l}(W)$ یکریخت است، که W زیرفضایی از V با نقص بعد دو است:

$$V=W\oplus\mathbb{R}^{۲}$$

همچنین، $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ یک جبر ماتریسی ۲×۲ روی $\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V)$ است:

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)\cong\mathbb{C}\mathrm{l}(W)\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{۲})$$

و $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{۲})\cong M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$. بنابراین، به کمک قضیهٔ آرتین‌ـودربرن[4] و به‌استقراء می‌توان ثابت کرد که اگر $\dim V=۲n$، $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ یکریخت با جبر ماتریسی $M_{۲^n\times۲^n}(\mathbb{C})$ است و نمایش مختلط تحویل‌ناپذیر یگانه‌ای چون $S(V)$ دارد؛ عمل $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ روی $S(V)$، یک یکریختی

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)\cong\mathrm{End}(S(V))=S(V)\otimes S^*(V)$$

القا می‌کند. ضرب در $\omega_{\mathbb{C}}$ نیز یک یکریختی خطی

$$S(V)\to S(V)$$

القا می‌کند که مقادیر ویژهٔ ±۱ دارد و لذا تجزیه‌ای به صورت

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded 2. Clifford algebra 3. complexified
4. Artin-Wedderburn

القا می‌کند که مقادیر ویژهٔ ±۱ دارد و لذا تجزیه‌ای به صورت $S(V)=S^+(V)\oplus S^-(V)$ حاصل می‌شود. تحت این تجزیه، $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ به‌صورت ماتریسی زیر تجزیه می‌شود:

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V)=\begin{pmatrix}\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V) & \mathbb{C}\mathrm{l}_{۱}^-(V)\\ \mathbb{C}\mathrm{l}_{۱}^+(V) & \mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^-(V)\end{pmatrix}$$

یعنی

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V)=\mathrm{Hom}(S^+(V),S^+(V))=\mathrm{End}(S^+(V)),\\ &\mathbb{C}\mathrm{l}_{۱}^+(V)=\mathrm{Hom}(S^+(V),S^-(V)),\\ &\qquad\cdots\end{aligned}$$

علاوه بر این، در حالت خاص $\dim V=۴$، تحت یکریختی $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ و $\Lambda^*(V)\otimes\mathbb{C}$ به عنوان فضاهای برداری، $\mathbb{C}\mathrm{l}_{۰}^+(V)$ به

$$(\Lambda_+^{۲}(V)\otimes\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}(\frac{۱+\omega_{\mathbb{C}}}{۲})$$

نگاشته می‌شود و جزء دوم این تجزیه درواقع «اثر» تبدیل خطی است.

حال زیرگروهی از گروه ضربی یکال[1]های $\mathrm{Cl}(V)$ را در نظر بگیرید که با بردارهای به طول یک تولید شده‌اند. اشتراک این زیرگروه با $\mathrm{Cl}_{۰}(V)$ را $\mathrm{Spin}(V)$ می‌نامیم. اگر به‌جای $\mathrm{Cl}(V)$ از $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ استفاده کنیم، گروه $\mathrm{Spin}^c(V)$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$\mathrm{Spin}^c(V)=\mathrm{Spin}(V)\underset{\{\pm۱\}}{\times}\mathrm{U}(۱)$$

می‌توان نشان داد که $\pi_{۱}(\mathrm{SO}(n))=\mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$ و $\mathrm{Spin}(n)$ یگانه گروه پوششی دو لایهٔ همبند $\mathrm{SO}(n)$ است ($n>۲$). در ضمن،

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spin}(۳)=\mathrm{SU}(۲)\\ &\mathrm{Spin}(۴)=\mathrm{SU}(۲)\times\mathrm{SU}(۲)\\ &\mathrm{Spin}^c(۴)=\mathrm{SU}(۲)\times\mathrm{SU}(۲)\times\mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\}\end{aligned}$$

توجه کنید که با توجه به تجزیهٔ بالا از $\mathrm{Spin}^c(۴)$، افکنشهای متنوعی از این گروه به گروههای لی دیگر قابل تعریف است، مثلاً اگر برای تمیز گذاشتن بین مؤلفهٔ اول و دوم در تجزیهٔ $\mathrm{Spin}^c(۴)$ به ترتیب از نمادهای + و − استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\mathrm{Spin}^c(۴)=\mathrm{SU}(۲)^+\times\mathrm{SU}(۲)^-\times\mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\}$$

$$\begin{array}{ll}\nearrow & \mathrm{SU}(۲)^+\times\mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\}=\mathrm{U}(۲)^+\\ \to & \mathrm{SU}(۲)^-\times\mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\}=\mathrm{U}(۲)^-\\ \searrow & \mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\}=\mathrm{U}(۱)\end{array}$$

1. unit

حال اگر به این امر کلی توجه کنیم که هر کلاف اصلی با تعیین دوگان‌دور[1] های تعریف‌کنندهٔ آن مشخص می‌شود، و نیز اینکه هر همریختی گروهی $\rho : G \to H$ را می‌توان با دوگان‌دورهای $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ ترکیب کرد تا دوگان‌دورهای $h_{\alpha\beta} = \rho \circ g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to H$ را به‌دست آورد، نتیجه می‌گیریم که هر $\mathrm{Spin}^c(۴)$ـکلاف اصلی، به نوبهٔ خود دو $\mathrm{U}(۲)$ـکلاف و یک $\mathrm{U}(۱)$ـکلاف به‌طور طبیعی تعریف می‌کند. اگر نمایش استاندارد $\mathrm{U}(۲)$ روی $\mathbb{C}^۲$ و $\mathrm{U}(۱)$ روی $\mathbb{C}^۱$ را منظور کنیم، کلافهای برداری وابسته عبارت خواهند بود از S^+، S^- و $\mathscr{L}$، که $S^\pm$ کلافهای برداری مختلط با رتبهٔ دو و $\mathscr{L}$ یک کلاف خطی مختلط (با رتبهٔ یک) روی M است. این کلافهای برداری مختلط به‌ترتیب کلاف اسپینورهای مثبت، اسپینورهای منفی و دترمینان نامیده می‌شوند. داریم:

$$\mathscr{L} = \det(\widetilde{P}) = \det(S^+) = \det(S^-)$$

از سوی دیگر، به‌کمک روشهای توپولوژی جبری، و توجه به این نکته که Gـکلافهای اصلی غیریکریخت روی M متناظرند با عناصر گروه کوهومولوژی $H^۱(M;G)$، می‌توان ثابت کرد که هر خمینهٔ چهاربعدی جهتدار دارای یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(۴)$ است و تعداد این ساختارها متناظر است با $H^۲(M;\mathbb{Z})$. (این مطلب در مورد ساختار $\mathrm{Spin}(۴)$ الزاماً صحیح نیست.) یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(۴)$ روی M به‌معنای زیر است. کلاف مماس M را در نظر بگیرید. با توجه به جهتدار بودن M و مجهزبودن آن به یک متریک ریمانی، $\mathrm{SO}(۴)$ـکلاف اصلی مماس متناظر، P، را بسازید. دوگان‌دورهای چنین کلافی درواقع همان دوگان‌دورهای کلاف مماس $TM \to M$ هستند: $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{SO}(۴)$. یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(۴)$ روی M یعنی ترفیعهایی از دوگان‌دورهای مزبور به $\mathrm{Spin}^c(۴)$ به‌نحوی که ترفیعها هم در شرط دوگان‌دور صدق کنند.

1. cocycle

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}^c(۴) \arrow[d, "p"] \\
U_\alpha \cap U_\beta \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"'] & \mathrm{SO}(۴)
\end{tikzcd}$$

(دراینجا، $p : \mathrm{Spin}^c(۴) \to \mathrm{SO}(۴)$ افکنش طبیعی است که به صورت $\mathrm{Spin}(۴) \times \mathrm{U}(۱)/\{\pm۱\} \to \mathrm{Spin}(۴)/\{\pm۱\}$ به‌دست می‌آید.)

معادلاً، یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(۴)$ روی M یعنی ترفیعی از کلاف اصلی مماس به یک $\mathrm{Spin}^c(۴)$ـکلاف اصلی:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}^c(۴) \arrow[r] \arrow[dr, "p"'] & \widetilde{P} \arrow[dr, dashed] & \\
 & \mathrm{SO}(۴) \arrow[r] & P \arrow[d] \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

یادداشت. خمینه‌های مختلط، یک ساختار Spin^c طبیعی دارند: فضای مماس یک $\mathrm{U}(n)$ـکلاف است و نگاشت

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n) &\to \mathrm{SO}(۲n) \times \mathrm{U}(۱) \\ A &\mapsto (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(شمول طبیعی)}}}{\imath(A)}, \det(A)) \end{aligned}$$

ترفیعی به $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{Spin}^c(۲n)$ دارد:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Spin}^c(۲n) = \mathrm{Spin}(۲n) \times_{\{\pm۱\}} \mathrm{U}(۱) \arrow[d] \\
\mathrm{U}(n) \arrow[ur, dashed] \arrow[r] & \mathrm{SO}(۲n) \times \mathrm{U}(۱)
\end{tikzcd}$$

تذکر فوق برای خمینه‌های تقریباً مختلط هم برقرار است.

می‌توان فرض کرد که این ساختار توسط یک کلاف خطی مختلط $\mathscr{L}$ روی M مشخص شده است. در ضمن S^+ و S^- را کلافهای اسپینورهای مثبت و منفی روی M وابسته به ساختار Spin^c مذکور بگیرید [تابلوی اسپین]. معادلات زایبرگ‌ـویتن درواقع یک دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی است. این دستگاه از دو معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای مرتبهٔ یک به‌صورت زیر تشکیل شده است.

$$(\mathrm{SW}) \begin{cases} F_A^+ = \psi \otimes \psi^* - \frac{۱}{۲}|\psi|^۲ I & (۱) \\ \partial\!\!\!/_A(\psi) = ۰ & (۲) \end{cases}$$

مجهولات این دستگاه عبارت‌اند از یک هموستار A روی کلاف $\mathscr{L} = \det(\widetilde{P})$ و یک اسپینور مثبت $\psi \in \Gamma(S^+)$. اکنون به شرح مختصر معادلات مزبور می‌پردازیم.

(۱) در این معادله، $F_A \in \Omega^۲(M; i\mathbb{R})$ خمیدگی هموستار A است و $F_A^+ = F_A + *F_A$ جزء خودْدوگان[1] آن [تابلوی هموستار]. توجه کنید که $i\mathbb{R}$ جبر لی وابسته به گروه کلاف خطی $\mathscr{L}$ است که عبارت است از $\mathrm{U}(۱)$، و $*$ ستارهٔ هاج است. بنابراین سمت چپ معادلهٔ (۱) در $\Omega^۲_+(M; i\mathbb{R})$ قرار دارد. برای توضیح سمت راست معادله، بنویسید $\psi = \binom{\psi_۱}{\psi_۲}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \psi \otimes \psi^* &= \begin{pmatrix} \psi_۱ \\ \psi_۲ \end{pmatrix} \otimes (\overline{\psi}_۱ \ \overline{\psi}_۲) = \begin{pmatrix} \psi_۱\overline{\psi}_۱ & \psi_۱\overline{\psi}_۲ \\ \psi_۲\overline{\psi}_۱ & \psi_۲\overline{\psi}_۲ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\psi_۱|^۲ & \psi_۱\overline{\psi}_۲ \\ \psi_۲\overline{\psi}_۱ & |\psi_۲|^۲ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. self-dual

و در ضمن

$$\psi\otimes\psi^* \in\Gamma(S^+\otimes(S^+)^*)=\Gamma(\mathrm{Hom}(S^+,S^+))=\Gamma(\mathrm{Cl}^+_\circ(\widetilde{P}))$$

از نحوهٔ تعریف $\mathrm{Cl}^+_\circ$ مشخص می‌شود که این کلاف برداری یکریخت است با $\Lambda^2_+(M)\oplus\mathbb{C}(\frac{1+\omega}{2})$، و بررسی این یکریختی نشان می‌دهد که مؤلفهٔ اول این جمع همبند متناظر است با همریختیهایی در $\mathrm{Hom}(S^+,S^+)$ که اثر[1] آنها صفر است. با توجه به اینکه $\mathrm{tr}(\psi\otimes\psi^*-\frac{1}{2}|\psi|^2I)=0$، سمت راست معادلهٔ (۱) هم در $\Omega^2_+(M;i\mathbb{R})$ قرار دارد و لذا هر دو طرف معادله از یک سنخ هستند. در ضمن دقت کنید که این معادله نسبت به ψ از درجهٔ دوم است.

(۲) در این معادله $\partial\!\!\!/_A:\Gamma(S^+)\to\Gamma(S^-)$ عملگر دیراک وابسته به هموستار A است. این معادله درواقع بیان می‌کند که ψ یک اسپینور همساز[2] است. [تابلوی هموستار].

فضای پیمانه و ناوردای زایبرگ‌ـ‌ویتن

ابتدا به فضای جوابهای معادلات (SW) توجه می‌کنیم، یعنی زیرمجموعه‌ای از $\mathscr{C}(\widetilde{P})=\mathscr{A}(\mathscr{L})\times\Gamma(S^+)$ که متشکل از عناصر (A,ψ) با شرط $\mathrm{SW}(A,\psi)=0$ است، که

$$\mathrm{SW}(A,\psi)=(F_A^+-\psi\otimes\psi^*+\frac{1}{2}|\psi|^2I,\ \partial\!\!\!/_A(\psi))$$

در حالت کلی این فضا می‌تواند حتی تهی باشد یا بینهایت بعدی. درواقع توجه کنید که اگر (A,ψ) جوابی برای این معادلات باشد، هر تبدیل پیمانه‌ای، یعنی هر نگاشت کلافی
$$\sigma:\begin{tikzcd} \widetilde{P} \arrow[rr] \arrow[dr] && \widetilde{P} \arrow[dl] \\ & M \end{tikzcd}$$
، این جواب را به جواب دیگری تبدیل خواهد کرد. به بیان دیگر، $((\det\sigma)^*A,S^+(\sigma^{-1})(\psi))$ هنوز هم در معادلات (SW) صدق می‌کند. به این ترتیب از هر جواب (A,ψ) می‌توان به تعداد نگاشتهای کلافی جواب جدید تولید کرد. به عبارتی، گروه تبدیلات پیمانه‌ای $\mathscr{G}(\widetilde{P})=\mathrm{Aut}(\widetilde{P})$، که متناظر است با نگاشتهای $M\to Z(\mathrm{Spin}^c(4))=S^1$، روی $\mathscr{C}(\widetilde{P})$ عمل می‌کند. مدار عمل این گروه بُعد نامتناهی دارد. به منظور انجام عملیات هندسی و محاسبات آنالیزی مجاز در این فضاهای بینهایت‌بعدی، ترجیح می‌دهیم که با تتمیم[3] فضاهای مزبور کار کنیم. پس فضاهای $\mathscr{A}(\mathscr{L})$ و $\Gamma(S^+)$ و در نتیجه $\mathscr{C}(\widetilde{P})=\mathscr{A}(\mathscr{L})\times\Gamma(S^+)$ را به نُرمهای سوبولف L^2_2 مجهز کرده، و تتمیم آنها را با نُرم فوق در نظر می‌گیریم [تابلوی سوبولف]. همچنین تتمیم $\mathscr{G}(\widetilde{P})=\mathrm{Maps}(M,S^1)$ را با نُرم L^2_3 در نظر می‌گیریم. اینها خمینه‌های هیلبرت هستند و بسیاری از قضایای مهم آنالیز ــ ازجمله قضایای تابع ضمنی و تابع وارون ــ برای آنها برقرار است.

درواقع فضای مورد علاقهٔ ما، که فضای پیمانه نامیده می‌شود، فضای جوابهای معادلات (SW) است با تقریب عمل گروه پیمانه‌ای. این فضا، با توپولوژی خارج‌قسمت، یک فضای هاسدورف است [M]. پایاگر[4] جواب

1. trace 2. harmonic 3. completion 4. stabilizer

(A,ψ) عبارت است از

$$\mathrm{Stab}(A,\psi)=\begin{cases}\{1\} & \psi\neq 0\\ S^1=\{M\to S^1\ \text{نگاشتهای ثابت}\} & \psi=0\end{cases}$$

جواب (A,ψ) را که $\psi\equiv 0$ «تحویل‌پذیر»[1] می‌خوانیم و در غیر این‌صورت «تحویل‌ناپذیر»[2]. (این نامگذاری در قیاس با نظریهٔ دانلدسُن صورت گرفته است و محتوای مفهومی ندارد.) فضای پیمانهٔ معادلات SW، یعنی فضای جوابهای معادلات زایبرگ‌ـ‌ویتن، با تقریب یکی‌گرفتن جوابهایی که با یک تبدیل پیمانه‌ای به هم تبدیل می‌شوند، در حالت کلی یک خمینهٔ هموار با بُعد متناهی نیست. برای رفع این مشکل، اختلالی[3] جزئی در معادلات به نحو زیر ایجاد می‌کنیم.

$$(\mathrm{SW}_h)\begin{cases} F_A^+=\psi\otimes\psi^*-\frac{1}{2}|\psi|^2I+ih & (1)_h\\ \partial\!\!\!/_A(\psi)=0 & (2)\end{cases}$$

که در آن $h\in\Omega^2_+(M;\mathbb{R})$ دو-فرمی خودْدوگان است. فضای جوابهای این معادلات، $\mathscr{S}_h(\widetilde{P})$، نیز تحت عمل گروه تبدیلات پیمانه‌ای ناورداست و در ضمن برای h نوعی[4]، جواب تحویل‌پذیر ندارد. فضای خارج‌قسمتی، یعنی فضای پیمانهٔ $\mathscr{M}_h(\widetilde{P}):=\mathscr{S}_h(\widetilde{P})/\mathscr{G}(\widetilde{P})$ نیز مانند $\mathscr{M}(\widetilde{P})$ فضایی هاسدورف است. به هر جواب $(A,\Psi)\in\mathscr{S}_h(\widetilde{P})$ یک همبافت بیضوی[5] نظیر می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 0\to\Omega^0(M;i\mathbb{R})&\xrightarrow{\mathscr{D}^0}\Omega^1(M;i\mathbb{R})\oplus\Gamma(S^+)\\ &\xrightarrow{\mathscr{D}^1}\Omega^2_+(M;i\mathbb{R})\oplus\Gamma(S^-)\to 0\end{aligned}\qquad(\mathscr{E})$$

در این همبافت بیضوی، $\mathscr{D}^0$ درواقع مشتق عمل گروه $\mathscr{G}(\widetilde{P})$ روی $\mathscr{C}(\widetilde{P})$ و $\mathscr{D}^1$ بخش خطی‌شدهٔ معادلات SW_h است.

$$\mathscr{D}^0(f)=(2df,-f.\Psi)$$

$$\mathscr{D}^1(\alpha,\psi)=\begin{pmatrix} d^+\alpha & -B(\Psi,\psi)\\ \frac{1}{2}\alpha.\Psi & \partial\!\!\!/_A(\psi)\end{pmatrix}$$

در روابط بالا، . نشان‌دهندهٔ ضرب کلیفرد، $d^+\alpha$ نمایانگر جزء خودْدوگان $d\alpha$ و B فرم دوخطی متناظر با فرم درجهٔ دوم ظاهر شده در معادلات SW است:

$$B(\Psi,\psi)=\Psi\otimes\psi^*+\psi\otimes\Psi^*-(\mathrm{Re}<\Psi,\psi>)I$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نگاشتهای $\mathscr{D}^0$ و $\mathscr{D}^1$ مستقل از اختلال h هستند. این همبافت دارای سه گروه کوهومولوژی است. صفر بودن $H^0(\mathscr{E})$ به‌معنای یک‌به‌یک بودن $\mathscr{D}^0$ و معادل با تحویل‌ناپذیربودن جواب (A,Ψ) است. $H^2(\mathscr{E})$ فضای مانع[6] نامیده می‌شود و صفرشدن آن به معنی عادی[7]بودن نقطهٔ $\xi=(A,\Psi)$ در $\mathscr{M}_h(\widetilde{P})$ است. هر دوی این موارد،

1. reducible 2. irreducible 3. perturbation 4. generic
5. elliptic complex 6. obstruction space 7. regular

هموستار و مشتق هموردا، خمیدگی، عملگر دیراک

یک هموستار روی کلاف اصلی $P \xrightarrow{\pi} M$ یعنی یک یک-فرم $\omega \in \Omega^{۱}(P;\mathrm{g})$ که در دو خاصیت زیر صدق می‌کند:

الف) اگر $R_g : P \to P$ با $R_g(p) = p\cdot g$ داده شده باشد در این صورت $R_g^*\omega = g^{-۱}\omega g$؛

ب) برای $p \in P$ داده شده، اگر $R_p : G \to P$ با $R_p(g) = p\cdot g$ تعریف شده باشد آنگاه $R_p^*\omega = \omega_{MC}$، که

$$\omega_{MC} = g^{-۱}dg \in \Omega^{۱}(G;\mathrm{g})$$

یگانه یک-فرمی است که تحت ضرب از سمت چپ در عناصر G ناورداست و در $e \in G$ همانی است.

فضای تمام هموستارهای روی P، فضایی است مستوی که مدل آن فضای برداری $\Omega^{۱}(M;\mathrm{ad}P)$ است. $\mathrm{ad}P = P \underset{G \circlearrowright \mathrm{ad}}{\times} \mathrm{g}$ کلاف برداری وابسته به کلاف اصلی P و نمایش الحاقیِ گروه G بر جبر لی خود g است:

$$\mathrm{ad} : G \times \mathrm{g} \to \mathrm{g}$$

$$(g, v) \mapsto gvg^{-۱}$$

فرض کنید $E = P \underset{G \circlearrowright \rho}{\times} V$ کلاف برداری وابسته به کلاف اصلی P و نمایش ρ گروه G روی فضای برداری V باشد، یعنی $\rho : G \to GL(V)$ یک همریختی گروهی است و $E = P \times V/\sim$، که

$$(p\cdot g, v) \sim (p, \rho(g)\cdot v)$$

در این صورت، هموستار $\omega \in \Omega^{۱}(P;\mathrm{g})$ یک مشتق هموردا $\nabla : \Omega^{i}(M;E) \to \Omega^{i+۱}(M;E)$ تعریف می‌کند. تعاریفی برای هموستار، انتقال موازی، ترفیع خمها و ... روی یک کلاف برداری وجود دارد که به آنها نمی‌پردازیم، ولی آنها همگی متناظرند با مشتقهای هموردا روی آن کلاف. فضای هموستارهای روی کلاف برداری E را با $\mathscr{A}(E)$ و فضای مقاطع آن کلاف را با $\Gamma(E)$ نمایش می‌دهیم.

خمیدگی یک هموستار $\omega \in \Omega^{۱}(P;\mathrm{g})$، دو فرمی $\Omega \in \Omega^{۲}(M;\mathrm{ad}P)$ است به‌طوری که $\pi^*\Omega \in \Omega^{۲}(P;\mathrm{g})$ در رابطهٔ

$$\pi^*\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

صدق می‌کند.

اکنون به توصیف عملگر دیراک می‌پردازیم. فرض کنید M به یک ساختار $\mathrm{Spin}^c(۴)$ مانند $\widetilde{P}$ مجهز شده باشد و $\mathscr{L} = \det(\widetilde{P})$ به یک هموستار A. با تثبیت یک متریک ریمانی برای M، هموستار یگانهٔ لوی-چیویتا برای TM به‌دست می‌آید. با توجه به اینکه

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Spin}^c(۴) = \mathrm{Spin}(۴) \underset{\{\pm ۱\}}{\times} \mathrm{U}(۱) & \\ & \swarrow \qquad \searrow & \\ \mathrm{Spin}(۴)/\{\pm ۱\} = \mathrm{SO}(۴) & & \mathrm{U}(۱)/\{\pm ۱\} = \mathrm{U}(۱) \end{array}$$

و هر یک از دو کلاف اصلیِ حاصل از افکنشهای مزبور مجهز به یک هموستار است ($\mathrm{U}(۱)$-کلاف همان $\mathscr{L}$ و $\mathrm{SO}(۴)$-کلاف همان TM است)، هموستاری نیز برای $\mathrm{Spin}^c(۴)$-کلاف $\widetilde{P}$ تعریف می‌شود. بالاخص هموستارهایی برای کلافهای برداری S^+، S^- و $S = S^+ \oplus S^-$ به‌دست می‌آید. اگر $\nabla : \Omega^{۰}(M;S^{\pm}) \to \Omega^{۱}(M;S^{\pm})$ مشتقگیری هموردای وابسته باشد، عملگر دیراک $\not{\partial}_A : \Gamma(S^{\pm}) \to \Gamma(S^{\mp})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\{e_{۱}, e_{۲}, e_{۳}, e_{۴}\}$ پایه‌ای یکه و متعامد برای T_xM باشد. $e_j \in T_xM$ را می‌توان به‌عنوان عنصری از جبر کلیفرد $\mathrm{Cl}(۴)$ در نظر گرفت. از آنجا که S یک $\mathrm{Cl}(۴)$-مدول است، e_j را می‌توان در عناصر S ضرب کلیفرد کرد. برای $\psi \in \Gamma(S)$ تعریف می‌کنیم

$$\not{\partial}_A(\psi) = \sum_{j=۱}^{۴} e_j \cdot \nabla_{e_j}(\psi)$$

محاسبهٔ سرراستی نشان می‌دهد که این تعریف مستقل از انتخاب پایه است.

یعنی صفرشدن $H^{۰}(\mathscr{E})$ و $H^{۲}(\mathscr{E})$، را می‌توان با انتخاب نوعیِ h محقق ساخت. «عادی بودن» نقطهٔ ξ به این معنی است که فضای مماس $\mathscr{M}_h$ در این نقطه درواقع همان فضای مماس زاریسکی $H^{۱}(\mathscr{E})$ است. بنابراین نقطهٔ ξ نقطهٔ تکین[۱] نیست. درواقع با انتخاب نوعیِ h می‌توان مطمئن بود که $\mathscr{M}_h(\widetilde{P})$ خمینه‌ای هموار است و بُعد آن همان اندیس[۲] همبافت بیضوی $\mathscr{E}$، که از طریق قضیهٔ اتیا-سینگر[۳] قابل محاسبه است و برابر است با

$$d = \frac{۱}{۴}(c_{۱}(\mathscr{L})^{۲} - ۲\chi(M) - ۳\sigma(M))$$

که در آن $c_{۱}(\mathscr{L})$ ردهٔ چرن اول کلاف خطی $\mathscr{L} = \det(\widetilde{P})$، $\chi(M)$ شاخص اویلر خمینه و $\sigma(M)$ نشان تقاطعی آن است [M]. به‌کمک روشهای آنالیزی و فرمولهای از نوع بوکنر[۱] در هندسهٔ ریمانی می‌توان ثابت کرد که $\mathscr{M}_h(\widetilde{P})$ فشرده نیز هست [M].

توجه کنید که $\mathscr{M}_h(\widetilde{P})$ ممکن است تهی باشد، حتی اگر بُعد صوری[۲] آن یعنی d مثبت باشد. ما هنوز هیچ جوابی برای معادلات نیافته‌ایم. درواقع به‌کمک تخمینهای خمیدگی می‌توان نشان داد که $\mathscr{M}(\widetilde{P})$ فقط برای تعدادی متناهی Spin^c-ساختارِ $\widetilde{P}$ ناتهی است و بعد صوری نامنفی دارد [M].

---

1. singular 2. index 3. Atiyah-Singer

1. Bochner type 2. formal dimension

فضاهای سوبولف

نُرم سوبولف روی فضای مقاطع یک کلاف برداری E به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$||s||_{L^p_k} = \left(\int_M \sum_{i=0}^{k} ||\nabla^i s||^p\right)^{1/p}, \quad k\in\mathbb{N},\ 1<p<\infty$$

که $s\in\Gamma(E)$ و ∇ یک هموستار روی E است.

تتمیم فضای $\Gamma(E)$ با نرم L^p_k را با $\Gamma_{L^p_k}(E)$ یا $L^p_k(E)$ نمایش می‌دهیم. احکام زیر برای فضاهای سوبولف برقرارند:
- مقاطع C^∞ در $L^p_k(E)$ چگال‌اند.
- (سوبولف) نشانندهٔ پیوسته‌ای چون $L^p_k \hookrightarrow L^{p'}_{k'}$ وجود دارد اگر $k' \le k$ و $k'-\frac{n}{p'} \le k-\frac{n}{p}$، که در آن n بعد خمینهٔ M است. نشانندهٔ مزبور عملگری فشرده است اگر $k'<k$ و $k'-\frac{n}{p'}<k-\frac{n}{p}$.
- نشانندهٔ پیوسته‌ای چون $L^p_k\hookrightarrow C^r$ وجود دارد اگر $r\le k-\frac{n}{p}$. در اینجا $r>0$. نشانندهٔ مزبور فشرده است اگر $r<k-\frac{n}{p}$.
- ضرب پیوسته‌ای چون $L^{p_1}_{k_1}\otimes L^{p_2}_{k_2}\to L^p_k$ وجود دارد اگر $k\le\min(k_1,k_2)$ و $k-\frac{n}{p}\le(k_1-\frac{n}{p_1})+(k_2-\frac{n}{p_2})$.

در حالاتی خاص، مثلاً وقتی‌که M یک رویهٔ کِی‌لِر باشد، می‌توان معادلات زایبرگ‌ـویتن را به صراحت حل کرد و مشاهده کرد که $\mathscr{M}(\widetilde P)$ عملاً می‌تواند ناتهی باشد.

حال می‌توان کلافی خطی روی $\mathscr{M}_h(\widetilde P)$ به شرح زیر ساخت. به‌جای گروه تبدیلات پیمانه‌ای $\mathscr{G}(\widetilde P)$، گروه تبدیلات پیمانه‌ای «پایه‌دار»[1] $\mathscr{G}^0(\widetilde P)$ را در نظر بگیرید و فضای خارج‌قسمتی $\widetilde{\mathscr{M}}_h(\widetilde P) := \mathscr{S}_h(\widetilde P)/\mathscr{G}^0(\widetilde P)$ را بسازید. یک تبدیل پیمانه‌ای پایه‌دار تبدیلی است که در یک نقطهٔ مشخص و تثبیت‌شدهٔ $p_0\in M$ به‌صورت همانی عمل می‌کند. به‌عبارت دیگر، تابع متناظر $g: M\to S^1$ در شرط $g(p_0)=1$ صدق می‌کند. از آنجا که $\mathscr{G}(\widetilde P)/\mathscr{G}^0(\widetilde P)\simeq \mathrm{U}(1)$، $\widetilde{\mathscr{M}}_h(\widetilde P)$ یک U(۱)ـکلاف روی $\mathscr{M}_h(\widetilde P)$ است و در نتیجه دارای ردهٔ چرن اولی چون $\mu\in H^2(\mathscr{M}_h,\mathbb{Z})$ است.

اکنون می‌خواهیم ناوردای زایبرگ‌ـویتن خمینهٔ M و Spin^{c}ـساختار $\widetilde P$ را تعریف کنیم. اگر $d=\dim(\mathscr{M}_h)$ فرد باشد، ناوردای مزبور را صفر می‌گیریم. اگر $d=\dim(\mathscr{M}_h)$ زوج باشد، $\mu^{d/2}\in H^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}_h,\mathbb{Z})$ و قرار می‌دهیم

$$\mathrm{SW}(M,\widetilde P) := \int_{\mathscr{M}_h}\mu^{d/2}$$

($\mathscr{M}_h$ دارای یک جهت طبیعی است هرگاه جهتی برای $H^0(M;i\mathbb{R})\oplus H^1(M;i\mathbb{R})\oplus H^2_+(M;i\mathbb{R})$ تثبیت شود.) ثابت می‌شود که اگر $b_2^+(M)>1$، ناوردای بالا خوش‌تعریف است و به انتخابهای مختلف انجام شده (متریک ریمانی، دو‌ـفرمِ h، ...) بستگی ندارد و فقط به ساختار هموار M و ساختار Spin^c معین وابسته است. اگر

1. based

$b_2^+(M)=1$، در بسیاری موارد «فرمولهای گذار از دیوار» وجود دارند که نحوهٔ تغییر ناوردای فوق را بر اثر تغییر متریک ریمانی محاسبه می‌کنند. در این حالت، ناوردا برای متریکهای ریمانیی محاسبه می‌شود که $[c_1(\mathscr{L})]$ در $H^2(M;\mathbb{R})$ بر $\mathscr{H}^2_+$ تحت حاصلضرب ناوی[1] عمود نیست، که در آن $\mathscr{H}^2_+$ فضای دو‌ـفرمهای خودْدوگانِ همساز تحت متریک ریمانی مزبور است. در چنین حالتی، معادلات SW و اختلالات کوچک آن جوابِ تحویل‌ناپذیر ندارند. حال مقدار ناوردای زایبرگ‌ـویتن به‌صورتی که در قبل تعریف شد بستگی به حجره‌ای دارد که متریک ریمانی در آن واقع است. دیوارهای این حجره عبارت‌اند از فضای متریکهایی چون g که فرم خودْدوگان وابسته به آن، $\omega(g)$، بر $c_1(\mathscr{L})$ عمود است. اگر $H_1(M;\mathbb{Z})=0$، گذار از یک دیوار مقدار ناوردا را به‌اندازهٔ $(-1)^{d/2}$ عوض می‌کند، که d بعد $\mathscr{M}(\widetilde P)$ است.

مثالها

۱. ناوردای زایبرگ‌ـویتن خمینه‌های کِی‌لِر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. فرض کنید $\widetilde{P_0}$ ساختار Spin^c طبیعی چنین خمینه‌ای باشد [تابلوی اسپین]. در این صورت $\det(\widetilde{P_0}) = K_M^{-1} = \Lambda^{2,0}M$ و ناورداهای زایبرگ‌ـویتن چنین هستند: $\mathrm{SW}(\widetilde{P_0})=1$، $\mathrm{SW}(-\widetilde{P_0})=\pm1$ و ناورداهای سایر ساختارها صفرند. (علامت $\mathrm{SW}(-\widetilde{P_0})$ به‌طور مشخص قابل تعیین است و به دو ناوردای هندسی جبری M بستگی دارد: $(-1)^{1+p_g-q}$.) درواقع، فضای پیمانه به‌طورکاملاً صریح قابل توصیف است. فضای جوابهای SW، با تقریب پیمانه، با فضای زیر متناظر است:
- اگر $\deg(\mathscr{L})<0$، که $\mathscr{L}=\det(\widetilde P)$: با فضای زوجهای $(\overline\partial_{\mathscr{L}},\alpha)$، که $\overline\partial_{\mathscr{L}}$ یک ساختار هولومورف روی $\mathscr{L}$ است و α مقطع هولومورف ناصفری از $\mathscr{L}_0=\sqrt{K\otimes\mathscr{L}}$؛ با تقریب یکی بودن ساختار هولومورف و ضرب مقاطع در عددی ثابت.
- اگر $\deg(\mathscr{L})>0$: با فضای زوجهای $(\overline\partial_{\mathscr{L}},\beta)$، که در اینجا β مقطع هولومورف ناصفری از $\sqrt{K\otimes\mathscr{L}^{-1}}$ است؛ با همان تقاریب بالا.
- اگر $\deg(\mathscr{L})=0$: با فضای هموستارهای پادْخودْدوگان[2] روی $\mathscr{L}$؛ با تقریب پیمانه.

به‌علاوه، اگر $\mathscr{L}_0$ تاب کلاف Spin^c (پیچشِ افزون بر کلاف طبیعی) و A_0 هموستار روی آن باشد،

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= K^{-1}\otimes\mathscr{L}_0^2\\ S^+(\widetilde P) &= \Lambda^0(M;\mathscr{L}_0)\oplus\Lambda^{0,2}(M;\mathscr{L}_0)\\ S^-(\widetilde P)&=\Lambda^{0,1}(M;\mathscr{L}_0)\\ \not\partial &= \sqrt{2}(\overline\partial+\overline\partial^*)\\ \not\partial_A &= \sqrt{2}(\overline\partial_{A_0}+\overline\partial^*_{A_0})\end{aligned}$$

۲. تاوبز ثابت می‌کند که برای خمینه‌های همتافته با $b_2^+>1$، مقدار ناوردای SW برای ساختار K^{-1} برابر یک است (تعمیم قضیهٔ فوق) و در ضمن

1. cup product 2. anti self-dual (ASD)

برابر ناوردای گروموف است (که از شمارش تعداد خمهای شبه‌هولومورف به‌دست می‌آید).

۳. فضای پیمانهٔ S^4 فقط از نقاط تحویل‌پذیر تشکیل شده است (به موجب اتحاد بوکنر و مثبت بودن خمیدگی اسکالر S^4).

۴. $\mathbb{CP}^2\#\mathbb{CP}^2$ یک خمینهٔ همتافته نیست. چون بُعد فضای پیمانه به پیمانهٔ دو همنهشت است با $1-b_1+b_2^+$، که برای این خمینه عدد $1-0+2=3$ را به‌دست می‌دهد، پس بُعد فضای پیمانه فرد است و ناوردای زایبرگ‌ـویتن صفر.

سپاسگزاری

نگارنده از حمایت مالی پژوهشگاه دانشهای بنیادی (IPM) در هنگام تهیهٔ این مقاله سپاسگزار است.

مراجع

[ک] کاشانی، سیدمحمدباقر؛ خمینه‌های چهاربعدی؛ نشر ریاضی ۱۲ (دی ۱۳۷۳) ۸ـ۱۲.

[F] Furuta, "Monopole equation and the $\frac{11}{8}$ conjecture", preprint, 1995.

[FL] P. M. N. Feehan, T. G. Leness, et al, Series of articles on $PU(2)$ monopoles, preprints available at
http://www. math. ohio-state. edu/~feehan/preprints. html.

[FM] Robert Friedman and John W. Morgan, "Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants", *J. Algebraic Geom.*, (3) **6** (1997) 445-479.

[FQ] Robert Friedman and Zhenbo Qin, "On complex surfaces diffeomorphic to rational surfaces", *Invent. Math.*, (1) **120** (1995) 81-117.

[FS] Ronald Fintushel and Ronald J. Stern, "Knots, links, and 4-manifolds", *Invent. Math.*, (2) **134** (1998) 363-400.

[G] M. Gromov, "Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds", *Invent. Math.*, (2) **82** (1985) 307-347.

[KM] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "The genus of embedded surfaces in the projective plane", *Math. Res. Lett.*, (6) **1** (1994) 797-808.

[KM1] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Gauge theory for embedded surfaces. I.", *Topology*, (4) **32** (1993) 773-826.

[KM2] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, Gauge theory for embedded surfaces. II. "*Topology* , (1) **34** (1995) 37-97.

[KM3] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, "Embedded surfaces and the structure of Donaldson's polynomial invariants. ", *J. Differential Geometry*, (3) **41** (1995) 573-734.

[M] John W. Morgan, *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-manifolds*, volume 44 of Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ (1996).

[MOY] Tomasz Mrowka, Peter Ozsváth, and Baozhen Yu, "Seiberg-Witten monopoles on Seifert fibered spaces", *Comm. Anal. Geom.*, (4) **5** (1997) 685-791.

[MST] John W. Morgan, Zoltán Szabó, and Clifford Henry Taubes, "A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture", *J. Differential Geom.*, (4) **44** (1996) 706-788.

[N] Liviu I. Nicolaescu, *Notes on Seiberg-Witten Theory*, volume 28 of Graduate Studies in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000).

[OSz] Peter Ozsváth and Zoltán Szabó, "The symplectic Thom conjecture", *Ann. of Math. (2)*, (1) **151** (2000) 93-124.

[S] Pedram Ṣafari, *A Gluing Theorem for Seiberg-Witten Moduli Spaces*, PhD thesis, Columbia University (2000).

[Sz] Zoltán Szabó, "Simply-connected irreducible 4-manifolds with no symplectic structures", *Invent. Math.*, (3) **132** (1998) 457-466.

[T1] Clifford Henry Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms", *Math. Res. Lett.*, (6) **1** (1994) 809-822.

[T2] Clifford Henry Taubes, "The Seiberg-Witten Gromov invariants", *Math. Res. Lett.*, (2) **2** (1995) 221-238.

[T3] Clifford Henry Taubes, "More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants", *Math. Res. Lett.*, (1) **2** (1995) 9-13.

[T4] Clifford Henry Taubes, *Seiberg Witten and Gromov Invariants for Symplectic 4-manifolds*, edited by Richard Wentworth, International Press, Somerville, MA (2000).

[T5] Clifford Henry Taubes, "Gr=SW: counting curves and connections, *J. Differential Geom.*, (3) **52** (1999) 453-609,

[T6] Clifford Henry Taubes, "Gr→SW: from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions", *J. Differential Geom.*, (2) **51** (1999) 203-334.

[T7] Clifford Henry Taubes, "SW→Gr: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves", *J. Amer. Math. Soc.*, (3) **9** (1996) 845-918.

[T8] Clifford Henry Taubes, "Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4", *J. Differential Geom.*, (4) **44** (1996) 818-893.

[W] Edward Witten, "Monopoles and four-manifolds", *Math. Res. Lett.*, (6) **1** (1994) 769-796.

******

* پدرام صفری، دانشگاه صنعتی شریف

safari@sharif.edu