حدس بیبِرباخ*

پاول تسورن*

ترجمهٔ جعفر زعفرانی

لودویگ بیبرباخ ۱۹۳۳

داستان یك مسألهٔ مشهور و اثبات شگفت‌آور دبرانژ

مقدمه

مهمترین خبر ریاضی در سال ۱۹۸۴، اثبات حدس ۶۸ سالهٔ بیبرباخ بود. لویی دبرانژ[1] از دانشگاه پردو مسأله‌ای را حل‌کرد که فلیکس براودر ازدانشگاه شیکاگو آن را با این‌عبارت توصیف کرد: "یکی ازمشهورترین حدسهای آنالیز کلاسیك، حدسی که مدت مدیدی ریاضیدانان را‌به‌مبارزه می‌طلبید". ماجرا در بهارسال ۱۹۸۴ آغاز شد؛ با سخنرانیهای دبرانژ در اروپا و توزیع پیش‌چاپها[2] و مکاتبات خصوصی خبر به‌سرعت در جهان ریاضی‌پخش شد. حتی نیویورك‌تایمز درشمارهٔ چهارم سپتامبر۱۹۸۴ داستان را (البته به‌طور نادرست) گزارش داد. راستی این همه سروصدابرای چه بود؟

جزئیات اثبات استادانهٔ دبرانژخارج ازبحث ماست. درعوض ما در اینجا (بیشتر) به خود حدس می‌پردازیم. این حدس چه می‌گوید؟ چرا شخصی آن را حدس زد؟ از نتایج جزئی کدامها "واضح‌اند"؟ چرا این همه ریاضیدان با این شدت مدت مدیدی روی‌این مسأله‌کار کرده‌اند؟ چه‌کسانی درحل‌آن شرکت داشته‌اند؟ پیامدهای آن چیست؟

یکی از دلایل جذابیت حدس بیبرباخ بیان سادهٔ آن است ــ حدس می‌گوید که تحت محدودیتهای مناسبی ضرایب سری توانی چندان بزرگ نیستند. به‌عبارت دقیقترفرض‌کنید

$$f(z)=z+a_۲z^۲+a_۳z^۳+\cdots$$

یك سری توانی از z با ضرایب مختلط $a_۲$، $a_۳$، ... باشد. اگر $f(z)$ برای تمام اعداد مختلط z، $(z=x+iy)$که در شرط $۱>(x^۲+y^۲)^{۱/۲}=|z|$ صدق می‌کنند، همگرا و$f(z)$ دراین مجموعهٔ zها یك به‌یك باشد، آنگاه

حدس بیبرباخ. به‌ازای $n=۲,۳,\ldots$ داریم $n\geqslant|a_n|$. نابرابری برای هر n اکید است مگرآنکه f "دورانی" از **تابع‌کواب**[3]

$$k(z)=\sum_{n=۱}^{\infty} nz^n=z+۲z^۲+۳z^۳+\cdots$$

باشد. (اصطلاح "دوران" درآخر این بخش تعریف خواهد شد.)

حدس بیبرباخ اساساً ادعایی درمورد فرینال بودن تابع‌کواب است. بنابراین، شناخت تابع‌کواب و اینکه چرا این تابع نامزد طبیعی "بزرگترین" بودن‌ــ به‌معنی مورد نظر دراین حدس‌ــ است موضوعی است‌که در این مقاله به‌کرات خواهد آمد.

حدس بیبرباخ برای اولین‌بار درپانوشت‌مقاله‌ای از ریاضیدان آلمانی، لودویگ بیبرباخ، درسال ۱۹۱۶ مطرح شد [۴]. نتیجهٔ اصلی‌این مقاله قضیهٔ ضریب دوم است: $۲\geqslant|a_۲|$ وبرابری، اساساً تنهابرای تابع‌کواب برقراراست. چنانکه ملاحظه خواهیم کرد، برای درك حدس بیبرباخ ونظریهٔ توابع تك‌ارز به‌طورکلی،

1. de Branges 2. preprints 3. Koebe

940 Gesamtsitzung vom 20. Juli 1916. — Mitteilung vom 6. Juli

Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.

Von Prof. Dr. LUDWIG BIEBERBACH
in Frankfurt a. M.

(Vorgelegt von Hrn. FROBENIUS am 6. Juli 1916 [s. oben S. 775].)

مقاله

[1] Daß $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\sum n z^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.

و پانوشتی‌که بقیهٔ ماجرا را به‌دنبال آورد.

نتایج قضیهٔ بیبرباخ حداقل به‌اندازهٔ خود قضیه مهم‌اند. خود بیبرباخ قضایای مشابه دیگری در مورد ضریب ثابت نکرده‌است. قبل از اثبات کلی دبرانژ، درستی $|a_n| \leqslant n$ تنها برای $n \leqslant ۶$ معلوم شده بود.

با الفاظ حدس بیبرباخ در حساب دیفرانسیل و انتگرال حقیقی آشنا هستیم، ولی حدس بیبرباخ اساساً در آنالیز مختلط معنی‌دار و جالب است. منظور این مقاله در واقع تشریح بعضی از زمینه‌های تاریخی و ریاضی حدس بیبرباخ است؛ نه‌خلاصه‌ای است جامع‌ازمجموعهٔ عظیم تحقیقات در زمینهٔ نظریهٔ توابع تك‌ارز (که شامل هزاران مقاله می‌باشد، ر. ك. [۲]) و نه توصیف دقیقی است از راه‌حل دبرانژ. این مقاله درواقع گزیده‌ای است از: آنچه در پشت پرده می‌گذرد، نتایج مربوط، و تمرینهایی که یا به‌خود حدس و یا به‌ایده‌ها و تکنیکهای مهم آن ربط دارند. ما کمتر به‌دستاورد مهیج دبرانژ می‌پردازیم، کار ما بیشتر مربوط می‌شود به‌صحنه‌ای که در آن نقش اجرا می‌شود ـ نورپردازی، منظره و آرایش صحنه.

چرا با وجود منابع غنی‌وکتابها ومقالات توصیفی‌جالب (برای مثال [۳]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۱]، [۱۴] و [۱۵]) اقدام به‌نوشتن چنین‌مقاله‌ای کردم؟ این‌مقاله، که اگر بائرنشتین[1] [۳] عنوان "حدس بیبرباخ برای توریستها" را قبلاً به‌کار نبرده بود ممکن‌بود عنوانش همین باشد، سرآغاز ومقدمه‌ای است براین‌منابع که تسلط بیشتری بر آنالیز مختلط را طلب می‌کنند. فرض ما این است که خواننده تنها با مقدمات اولیهٔ موضوع (درسطح متون کارشناسی) آشناست، چراکه بیشتر آنچه‌که در اینجا مورد استفاده قرارمی‌گیرد صریحاً تعریف می‌شود. چون تمام‌کارهای ذکرشده شامل‌مراجع گسترده‌ای هستند، در اینجا از ذکر مرجع برای قضایای متعارف مورد بحث، خودداری می‌کنیم.

حدس بیبرباخ چه می‌گوید؟

صفت "تحلیلی" که درمورد توابع مختلط ـ مقدار ازیك متغیرمختلط به‌کار می‌رود به‌معنی "پیوسته‌ـمشتقپذیری به مفهوم مختلـط" است؛ یعنی f تابعی از z است که در حوزهٔ D از $\mathbf{C}$ تعریف شده است، و حد

$$\lim_{z \to z_\circ} \frac{f(z) - f(z_\circ)}{z - z_\circ} = f'(z_\circ)$$

وجود دارد و تابعی پیوسته از $z_\circ$ است. این‌تعمیم ازتوابع‌حقیقی به‌توابع مختلط بی‌اهمیت به‌نظر می‌رسد اما در واقع چنین نیست. توابع‌تحلیلی‌ویژ گیهای خوشایندی دارندکه توابع حقیقی‌مشتقپذیر ازآنها بهره‌ای ندارند. مهمترین‌آنها، این است که هرتابع‌تحلیلی را می‌توان بـه‌صورت یك‌سری تیلر (مختلط) در حول هرنقطهٔ $z_\circ$ متعلق به‌حوزه‌اش بسط داد؛ یعنی

$$f(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!}$$

1. A.Baernstein

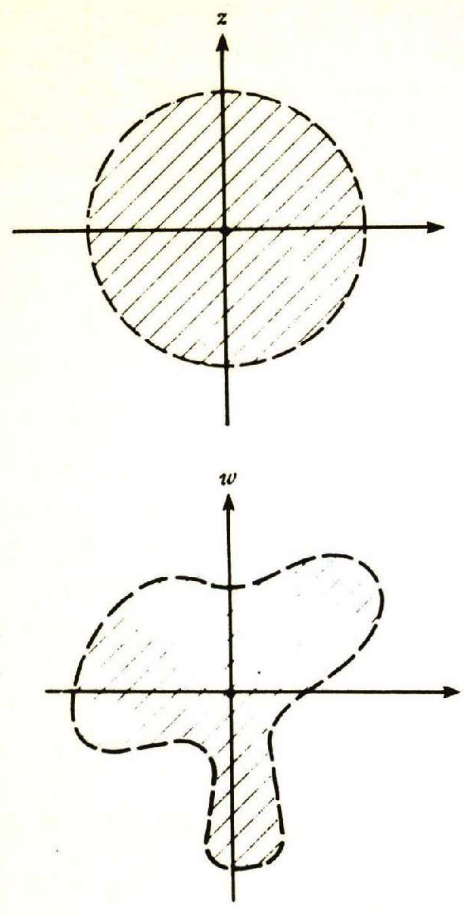
سری فوق در هرهمسایگی مستدیر به‌مرکز z_0 که تماماً در D قرار بگیرد همگراست. (برعکس، هرسری توانی $\sum a_n z^n$ که به ازای هر z در D همگرا باشد در D یك تابع تحلیلی تعریف می‌کند.) هیچ‌یك ازاین‌مطالب برای یك تابع حقیقی‌مشتقپذیردرست نیست؛ f ممکن‌است بیش از یك‌بار مشتقپذیر نباشد و لذا اصلاً سری تیلر ندارد: اگر سری تیلر f وجود داشته باشد ممکن است واگرا باشد؛ اگر هم همگرا باشد ممکن است به‌حدی غیر از f همگرا باشد.

در نتیجه، یك تابع تحلیلی که در حوزه‌ای تعریف شده است، حداقل موضعاً یك سری توانی است. یك تابع تحلیلی $f(z)$ که روی **قرص یکهٔ** باز $\{z : |z| < 1\}$ در $\mathbf{C}$ ــ که ازاین پس آن را با D نشان می‌دهیم ــ تعریف شده است به‌طور همه‌جایی یك سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (همگرا)است. دنبالهٔ $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$، متشکل از ضرایب سری توانی رفتار f را کاملاً معین می‌کند. اکنون چگونه ویژگیهای تحلیلی و هندسی f (مثلاً تك ارزی، کرانـدار بودن و تحدب) در ویژگیهای ضرایب سری توانی f (برای‌مثال‌میزان نمو، ونیز کرانهای تك‌تك آنها) منعکس می‌شوند؟ حدس بیبرباخ (که حالا قضیهٔ دبرانژ است) مشهورترین "مسألهٔ ضریبی" از این نوع است.

حدس بیبرباخ به‌توابعی مربوط می‌شود که در قرص یکه، هم تحلیلی و هم **تك‌ارز** باشند. در آنالیز مختلط، "تك ارز" معادل اصطلاح "یك به یك" است (یعنی $f(z_1) \neq f(z_2)$ مگر آنکه $z_1 = z_2$). معادل "تك‌ارز تحلیلی" در زبان آلمانی[1] به معنای ساده، ودر زبان‌روسی[2] به‌معنای یکپارچه است. این‌واژه‌هاهمگی بریك ویژگی‌هندسی تابع تك‌ارز $w = f(z)$ تأکیـد دارند: این تابع، قرص یکهٔ D در صفحهٔ zها را به‌طور دوسویی روی حوزهٔ $f(D)$ در صفحهٔ wها می‌نگارد (ر.ك. شکل۱). در مقابل، تابع p-ارز $f(z) = z^p$ قرص D را روی D می‌نگارد ولی هر نقطهٔ تصویر (به‌جز $w = 0$) دارای p نقطه پیش‌تصویرمتمایز است. برای تجسم بهتر، می‌توان تصور کرد که نگاشت $f(z) = z^p$، D درصفحهٔ zها را روی یك رویهٔ مارپیچگونه با p لایه ("صفحه") که در صفحهٔ wها برفراز D چرخ می‌زند به‌طور تك‌ارز می‌نگارد.

مهمترین ویژگی توابع تحلیلی تك‌ارز، **قضیهٔ** معروف **نگاشت ریمان** است که در سال ۱۸۵۱ بیان شده است: هر زیرحوزهٔ سره از صفحهٔ مختلط که ساده‌ـهمبند (بدون "حفره") باشد، تصویرقرص یکه تحت یك‌نگاشت تحلیلی تك‌ارز $f(z)$ است. نگاشت $f(z)$ با حوزهٔ D، نقطهٔ تصویری $f(0)$ در D، و شرط اینکه $f'(0)$ یك عدد مثبت حقیقی باشد، به‌طوریکتا مشخص می‌شود. اگر توابع تحلیلی تك‌ارز را به‌عنوان "نگاشتهای ریمان" درنظربگیریم، این سؤال طبیعتاً پیش می‌آید که بازتاب ویژگیهای تحلیلی f و ویژگیهای هندسی حوزهٔ تصویر $f(D)$ بر یکدیگر چگونه است. این در واقع دیدگاه نظریهٔ توابع هندسی است که حدس بیبرباخ تا قبل از اثبات دبرانژ، مسألهٔ اصلی آن بود.

حدس بیبرباخ، آن‌طور که معمولاً بیان می‌شود، ادعایی درمورد



شکل۱

دستهٔ خاصی از توابع تحلیلی تعریف شده در D است.

تعریف. **ردهٔ توابع تحلیلی تك‌ارز نرمال شده** که با S نمایش داده می‌شود دسته‌ای از توابع تحلیلی تك‌ارز مانند $f : D \to \mathbf{C}$ است که

۱. $f(0) = 0$

۲. $f'(0) = 1$

شرایط ۱ و۲ گویای این مطلب‌اندکه یك تابع در S دارای سری توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

فرضهای نرمالساز در واقع با حذف ثابتهای نامربوط، حدس بیبرباخ را ساده جلوه می‌دهند. خوشبختانه این نرمالسازیها بدون ضررند: اگر f یك تابع تحلیلی تك‌ارز در D باشد، آنگاه $g(z) = (f(z) - f(0))/f'(0)$ در S است، و ویژگیهای f به‌سهولت از ویژگیهای g نتیجه می‌شوند. از نظر هندسی، g از f بدین‌صورت به‌دست می‌آید: نخست انتقال حوزهٔ تصویر با بردار $f(0)$، سپس انبساط با عامل $|f'(0)|$، وبالاخره دوران به اندازهٔ زاویهٔ $\arg(f'(0))$. تمام این اعمال وارونپذیرند.

1. schlicht 2. odnolistni

تابع همانی $z = f(z)$ به‌یك مفهوم نخستین نمونهٔ S است: در واقع نرمالسازی بدین‌معنی است که هر تابع در S تا مرتبهٔ اول در مبـدأ بر تابع همانی منطبق است. مهمترین تابـع تحلیلی تك‌ارز غیربدیهی، تابع کواب $k(z)=z/(1-z)^{2}$ است کـه به افتخار ریاضیدان آلمانی کواب، که از جمله‌کارهایش ارائهٔ اولین اثبات درست قضیهٔ نگاشت ریمان است، نامگذاری شده است. با استفاده از رابطهٔ

$$k(z)=z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right]$$

به‌سهولت می‌توان دید که k دارای سری توانی

$$k(z)=z+2z^{2}+3z^{3}+4z^{4}+\cdots$$

است که به‌ازای هر z در D همگراست. بیبرباخ حدس زد که k نقطهٔ‌مقابل تابع همانی است ــ همهٔ ضرایب k درحد امکان بزرگ‌اند. چرا بیبرباخ این‌مطلب را تقریباً هفتاد سال پیش از آنکـه اثبات شود حدس زد؟ به‌عنوان اولین قدم در جهت شناخت k، صریحاً نشان می‌دهیم که k در D تك‌ارز است و تصویر آن را هم‌می‌یابیم. از اتحاد

$$k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2}-1\right]$$

نتیجه می‌شود که $k(z)$ ترکیب نگاشتهای

$$s=\frac{1+z}{1-z},\qquad t=s^{2},\qquad w=\frac{1}{4}(t-1)$$

به‌ترتیب ارائهٔ آنهاست. اولی، یك تبدیل‌کسری خطی‌است که D را به‌طـور تك‌ارز روی نیمصفحهٔ راست صفحهٔ sـها می‌نگارد. نگاشت $t=s^{2}$ وقتی‌کـه به نیمصفحهٔ راست محدود شود یك به‌یك است و تصویرش تمـام صفحهٔ tـها منهای محور حقیقی غیر مثبت است. نگاشت آخری از همه ساده‌تر است: انتقال به‌انـدازهٔ یك واحد به‌طرف چپ و سپس انبساط با عامل $1/4$ (ر.ك. شکل ۲).

آیا تابع کواب در بین توابع در S تنها تابعی است که دارای بزرگترین ضرایب ممکن است؟ جواب این سؤال "علی‌الاصول، ولی نه‌کاملاً" مثبت است: برای یك تابع مفروض در S، با روش زیر می‌توان بینهایت تابع دیگر در S ساخت که قدرمطلق ضرایب همگی آنها یکسان باشند: اگر $f(z)$ در S، و α یك عدد حقیقی دلخواه باشد، می‌نویسیم

$$f_{\alpha}(z)=e^{-i\alpha}(fe^{i\alpha}z)$$

تابع f_{α} به‌دوران f موسوم است، چراکه نگاشت $z\to e^{i\alpha}z$ از نظر هندسی دوران $\mathbf{C}$ حول $z=0$ و به‌اندازهٔ زاویهٔ α رادیان در خلاف جهت ساعت است. پس، f_{α} از ترکیب f با دو دوران در دو جهت مخالف به‌اندازهٔ α رادیان به‌دست می‌آید که یکی قبل‌از f و دیگری بعد از آن قـرار می‌گیرد. (عمل آخر k_{α} را در S نگه می‌دارد.) با نماد سریهای توانی، اگر

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}z^{n}$$

آنگاه

$$f_{\alpha}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_{n}z^{n}$$

که در آن $b_{n}=a_{n}e^{i(n-1)\alpha}$. چون $|e^{i\alpha}|=1$، داریم $|a_{n}|=|b_{n}|$.
اکنون می‌توانیم حدس بیبرباخ را دقیقاً بیان‌کنیم و بگوییم کـه تابع فرینال k "صرفنظر از دوران" یکتاست.

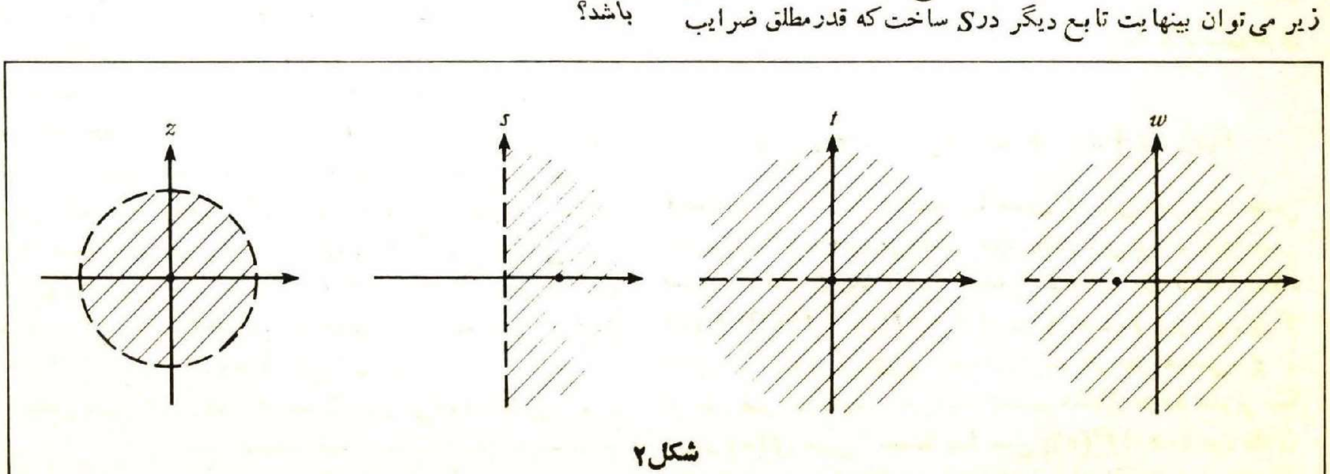
حدس بیبرباخ. اگر $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}z^{n}$ در S باشد، آنـگاه به‌ازای هر $n\geqslant 2$، $|a_{n}|\leqslant n$. اگر برای هـر n، $|a_{n}|=n$، آنگاه f دورانی از تابع کواب است.

حدس بیبرباخ به‌چه معنی است؟ چرا پذیرفتنی است؟

دستهٔ بی‌پایان مسائل بهینه‌سازی زیر را درنظر بگیرید: به‌ازای هر $n\geqslant 2$، در S تابعی چون $f\left(=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}z^{n}\right)$ بیابید که در آن $|a_{n}|$ تا آنجا کـه ممکن است بزرگ باشد. دو سؤال بلافاصله مطرح می‌شوند:

۱. آیا به‌ازای هر n، و تمـام fهای در S کران مطلقی برای $|a_{n}|$ وجود دارد؟

۲. اگر ضرایب nام توابع در S کراندار باشند، آیا یك تابع در S وجود دارد که nامین ضریب آن، یعنی a_{n}، با این کران برابر باشد؟



شکل۲

جواب هردو سؤال مثبت است؛ هدف نخست ما این است که (البته بدون پذیرش حدس بیبرباخ) بفهمیم چرا.

چرا ضرایب nام توابع در S کراندارند؟ به‌عنوان یك تجربهٔ ذهنی، ببینید همگرایی سری توانی $\sum a_n z^n$ یك تابـع در S چـه محدودیتی برای a_n ایجاد می‌کند. فرمول کوشی-آدامار در مورد شعاع همگرایی سری توانی ایجاب می‌کند که برای‌هر $R>1$، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/R^n=0$. (به‌طور اختصار، وقتی که $n\to\infty$، به‌طور مجانبی $|a_n|<R^n$). اگرچه شرط کـوشی- آدامـار تندی رشد دنبالهٔ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ را محدود می‌کنـد، ولـی به‌هیچ‌وجه محدودیتی برای هیچ ضریب خاصی ایجاد نمی‌کند. مثلاً هرچند جمله‌ای، یك‌سری توانی‌همگراست وضرایب چندجمله‌ای‌می‌توانند اعداد مختلط دلخواه باشند. تجربهٔ مـا به‌پایان رسید واین مطلب معلوم شدکه‌صرف تحلیلی بودن، کراندار بودن ضرایب توابع در S را ایجاب نمی‌کند. اینك لازم‌است به‌ویژگی تك‌ارزی‌که درحالت مختلط درمقایسه باحالت حقیقی قویتر وپیچیده‌تر است نظرافکنیم.

برای روشن شدن تفاوت بین حالات حقیقی ومختلط ببینیدآیا یك "حدس بیبرباخ با متغیر حقیقی" وجود دارد که جالب باشد؟

فرض‌کنید $f(x)=x+\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ یك تابـع یـك به‌یك تحلیلی حقیقی باشدکه برای تمام xهای در بازهٔ حقیقی $(-1, 1)$ تعریف شده است، و درآن a_nها ثابتهای حقیقی‌هستند. آیا هیچ‌محدودیتی روی اندازهٔ مثلاً a_3 وجود دارد؟ جواب منفی است: a_3 هر عدد مثبتی که باشد، چندجمله‌ای $x+a_3x^3$ تك‌ارز است. در واقع، هر چندجمله‌ای فرد بـا ضرایب مثبت، یکنوا-صعودی است، بنابراین هیچ‌کرانی درمورد ضرایب اندیسهای فـرد وجود ندارد. نتیجه: حدس بیبرباخ اساساً یك مسألهٔ مختلط است ــ در بحث متغیرهای حقیقی هیچ مشابه جالبی ندارد.

پس، چه ارتباطی بین تك ارزی (یك تابـع مختلط) و اندازهٔ a_nها وجود دارد؟ نخست توجه می‌کنیم که تکجمله‌ای مختلط z^n در D یك تابع n به‌یك است. (توجه داشته باشید کـه با تکجمله‌ای حقیقی x^n بر $(-1, 1)$ چقدر متفاوت است!) به‌زبانی شهودی، اگر a_nها زیاد بزرگ باشند، توانهای چند ارز z^n، جملهٔ تك‌ارز z را به نابودی تهدید می‌کنند. قضیهٔ زیر ایـدهٔ کلی را روشن می‌سازد.

قضیه. فرض کنید $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n$ یك چند جمله‌ای از درجهٔ n باشد، اگر f در D تك‌ارز باشد، آنـگاه $|a_n|\leqslant 1/n$.

برهان. تابع

$$f'(z)=1+2a_2z+\ldots+na_nz^{n-1}$$

$$=na_n\left(\frac{1}{na_n}+\ldots+z^{n-1}\right)$$

را درنظربگیرید. بنابرقضیهٔ بنیادی جبر، چندجمله‌ای داخل پرانتز $(n-1)$ ریشهٔ مختلط c_1، ...، c_{n-1} (که ممکن است برخی از آنها تکراری باشند) دارد. بنابراین $f'(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه‌کرد:

$$f'(z)=na_n(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_{n-1})$$

چـون f در D تك‌ارز است، $f'(z)$ ریشه‌ای در D ندارد. (با حالت حقیقی مقایسه‌کنید!) بنابراین‌کلیهٔ c_iها در خارج D هستند، یعنی به‌ازای هر i، $1\leqslant|c_i|$. چون f در S است، همان‌طور که ادعا شده بود داریم

$$1=|f'(0)|=|na_n|\ \ |c_1|\ \ |c_2|\ldots|c_{n-1}|\geqslant|na_n|$$

عکس این مطلب غلط است ولی:

تمرین. فرض‌کنید $f(z)=z+a_nz^n$. نشان دهیدکـه $f(z)$ در D تك‌ارز است اگر و تنها اگر $|a_n|\leqslant 1/n$.

کلید سؤالهای ۱ و ۲ این واقعیت است که S یك زیرمجموعهٔ فشرده از فضای تمام توابع تحلیلی در D است. دراینجاتوپولوژی فضای‌توابع‌همان‌توپولوژی‌**همگرایی‌یکنواخت‌درفشرده‌هاست**: یك دنبالهٔ (f_n) ازتوابع تحلیلی در D همگرا به‌یك تابع‌تحلیلی f است اگر (f_n) در هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ D به f یکنواخت ـ همگرا باشد. تابع‌ك T که به‌هر تابع تحلیلی‌در D، nامین ضریب‌ماکلورنش را که

$$T(f)=T(\sum a_nz^n)=a_n$$

است نظیرمی‌کند، در این توپولوژی پیوسته است. بنابراین T در S به‌قدر مطلق ماکسیمم خود می‌رسد.

ما در اینجا نمی‌خواهیم فشردگی در فضاهای توابع تحلیلی‌را به‌دقت بحث کنیم. به‌زبـان ساده، S فشرده است زیرا که بسته و **موضعاًکراندار (یا نرمال)** است. "بسته" به‌معنای آن است که حد یك دنبالهٔ همگرا از توابع در S، خود یك تابع در S است.قسمت جالب این خاصیت S، قضیهٔ مهم هورویتس[1] است: حد یك‌دنبالهٔ همگرا از توابع تحلیلی تك‌ارز، یا تحلیلی تك‌ارز است یاثابت. (نرمالسازیهای در S دومین‌امکان را رد می‌کنند.) "موضعاً کراندار بودن" بدین‌معنی است‌که برای هر r در $(0, 1)$، عدد مثبتی مانند $M(r)$ وجود داردکه اگر $|z|<r$، و اگر f در S باشد، آنگاه $|f(z)|<M(r)$. تعجب‌آور اینکه موضعاً کراندار بودن S از قضیهٔ ضریب‌دوم بیبرباخ نتیجه می‌شود ــ یك‌کران یکنواخت‌برای دومین ضریب منجر می‌شود به‌اینکه ضرایب دیگر همه کرانهایی داشته باشند. این مطلب در بخش بعد نشان داده خواهد شد.

با فرض آنکه‌کرانهایی‌برای ضرایب توابع در S وجود داشته باشد، چرا باید ضرایب تابـع‌کواب از آنهـا باشد؟ اینك نشان می‌دهیم‌که از چند لحاظ k "بزرگترین" عضو S است.

در آغاز، حوزهٔ تصویر تابع یعنی

$$k(D)(=\mathbf{C}-\{x:x\leqslant -1/4\})$$

را درنظر می گیریم. این مجموعـه در حد امکان "بزرگ" است: اضافه‌کردن هرمجموعهٔ بازبه $k(D)$ تداخل‌ایجاد می کند و ویژگی تك‌ارزی و تحلیلی بودن k از بین می‌رود. یکی دیگر ازویژگیهای فرینال k مربوط به‌این است‌که مرز $k(D)$ درصفحهٔ wها درفاصلهٔ

1. A.Hurwitz

۱/۴ از ۰ قرار دارد. در ۱۹۰۷ کواب نشان داد که تصویر $f(D)$ تحت هر نگاشت در S شامل یک قرص باز $\{|w|<\rho\}$ به‌شعاع ثابتی چون ρ مستقل از f است. بیبرباخ از قضیهٔ ضریب دوم نتیجه گرفت که (همان‌طور که کواب حدس زده بود) ۱/۴ بزرگترین مقدار ممکن برای ρ است، وتنها برای k و دورانهایش ρ برابر با ۱/۴ است. این نتیجه که به **قضیهٔ ربعی کواب** موسوم است گویای این مطلب است که اعوجاج حوزهٔ D پس از تصویر کردن آن تحت یک تابع در S چندان زیاد نیست: مرز حوزهٔ تصویر نمی‌تواند به‌مرکز خیلی نزدیک بشود. چون فاصلهٔ مرز $k(D)$ از مرکز دقیقاً ۱/۴ است، تابع کواب حداکثر اعوجاج مجاز را دارد. همچنین است در مورد $k_\alpha(z)=e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$، دورانهای تابع کواب: تصویر $k_\alpha(D)$ همان $k(D)$ است که حول مبدأ به‌اندازهٔ α رادیان دوران یافته است. تقارن $k(D)$ نشانهٔ ضمنی فرینگی آن است. مانند خود D (که تصویر D تحت دیگر نگاشت فرینال در S، یعنی $f(z)=z$، است)، $k(D)$ مشخصهٔ سادگی و نظم اشیاء فرینال را دارد.

شهود تحلیلی و همچنین هندسی به‌ما می‌نمایانند که باید تابع کواب را برگزینیم. مثلاً، ضرایب ماکلورن یک تابع f متناسب با مشتقات f در مبدأاند. چون در $f(z)=z$ که یکی از دو فرینه است، هیچ‌گونه اعوجاجی وجود ندارد، تمام مشتقات دیگر صفرند. و در $k(z)=\sum nz^n$ اعوجاج (به‌مفهوم قضیهٔ ربعی) ماکسیمال است. طبیعی است حدس بزنیم که k فرین دیگر باشد.

این بخش را با یک هشدار به‌پایان می‌رسانیم: مدرک غیررسمی برای حدس بیبرباخ آسان به‌دست می‌آید. مدرک صادق است ولی سهولت به‌دست آوردن آن گمراه‌کننده است؛ تاریخ نشان می‌دهد که به‌دست آوردن برهانهای دقیق بسیار مشکل است.

ضریب دوم

بخش قبلی ـ به‌صورتی غیررسمی ـ می‌گوید که به‌ازای هر $n\geqslant 2$، مسألهٔ ماکسیمم‌سازی $|a_n|$ در بین توابع در S جوابی دارد و احتمالاً جواب آن k است. اینک دیگر وقت آن است که مطلبی هم اثبات کنیم. قضیهٔ دومین ضریب بیبرباخ اولین شاهد ملموس برای حدس کلی بیبرباخ است. نتایج آن (به‌ویژه قضیهٔ اعوجاج که فشرده بودن S را ایجاب می‌کند) وسایل اصلی برای ادامهٔ مطالعهٔ حدس‌اند. برهان قضیه، ایده‌های اصلی و تکنیکهای نظریهٔ توابع تک‌ارز را روشن می‌کند و نشان می‌دهد که توابع کواب به‌عنوان فرینه‌ها چگونه ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ بیبرباخ (۱۹۱۶). اگر $f=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد، آنگاه $|a_2|\leqslant 2$، و برابری برقرار است اگر و تنها اگر $f(z)$ دورانی از تابع کواب باشد.

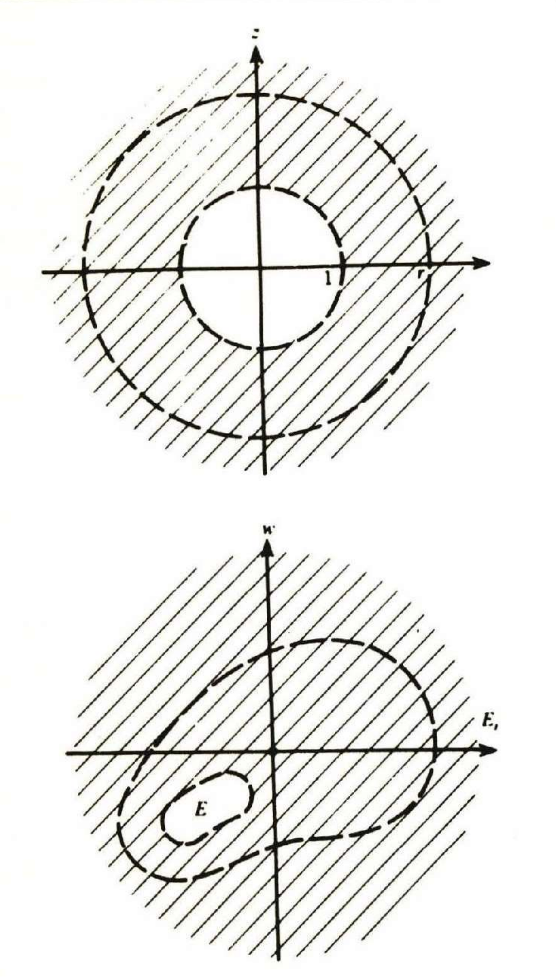
یک روش اساسی برای به‌دست آوردن نابرابریهایی از نوع بیبرباخ، این است که ضرایب سری توانی را به‌مساحت (غیر منفی) بعضی از نواحی صفحهٔ مختلط مربوط سازیم. اولین نتیجه از این نوع، **قضیهٔ مساحت** است که گرونوال در سال ۱۹۱۴ آن را ثابت کرده است. این قضیه به S مربوط نمی‌شود بلکه به‌ردهٔ خاصی از توابع تحلیلی تک‌ارز مربوط است.

تعریف. فرض کنید Σ ردهٔ توابع

$$g(z)=z+b_0+\frac{b_1}{z}+\dots=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}$$

را نشان دهد که در $\Delta=\{z:|z|>1\}$ تحلیلی و تک‌ارز هستند.

(توابع در Σ همگی به‌این منظور نرمال شده‌اند که در بینهایت یک قطب ساده با ماندهٔ یک داشته باشند.) اگر g متعلق به Σ باشد، $\mathbf{C}-g(\Delta)$، متمم تصویر حوزه، را E می‌نامیم (ر.ک. شکل۳).



شکل۳

می‌توانیم امیدوار باشیم که "مساحت" E را برحسب b_nها به‌دست آوریم. گیومه به‌این دلیل لازم است که ممکن است E کاملاً نامنظم باشد. حل مسأله به‌این ترتیب است که E را از خارج با حوزه‌های سادهٔ $E(r)=\mathbf{C}-\{g(z):|z|>r\}$ تقریب بزنیم. سپس مساحت E را به‌صورت

$$(E\text{ مساحت})=\lim_{r\to1^+}(E(r)\text{ مساحت})$$

تعریف کنیم. چون، $\gamma(r)$، خمهای مرزی $E(r)$، هموار (درواقع، تحلیلی) هستند، درونشان مساحت دارند و با استفاده از صورت مختلط

قضیهٔ گرین مـی‌توان آنها را محاسبه کرد؛ در واقع اگر بنویسیم $g(z)=w=u+iv$، آنگاه

$$\frac{1}{\pi}(\text{مساحت}\ E(r))=\frac{1}{\pi}\iint_{E(r)} du\,dv$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\iint_{E(r)} d\bar{w}\,dw$$

زیرا $du\,dv=(1/2i)\,d\bar{w}\,dw$. بنابر قضیهٔ گرین، داریم

$$\frac{1}{\pi}(\text{مساحت}\ E(r))=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)}\bar{w}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} g(z)g'(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}g'(re^{it})g(re^{it})\,dt$$

که در آن از تعویضهای متغیر $w=g(z)$ و $z=re^{it}$ استفاده شده است. (هشدار: تك‌ارزی g در اینجا به کار رفته است.) توابع g و g' را به‌صورت سری توانی نوشته، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{\pi}(\text{مساحت}\ E(r))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{it}+\sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n}e^{-int}\right)$$

$$\left(re^{-it}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_n r^{-n}e^{int}\right)dt$$

$$=r^2-\sum_{n=1}^{\infty} r^{-2n}n|b_n|^2$$

در برابری آخر از تعامـد توانهای متمایز e^{it} استفاده شده است. چون مساحت $E(r)\geqslant 0$، در مجموعهای جزئی برای هر $m>0$ داریم

$$\sum_{n=1}^{m} r^{-2n}n|b_n|^2\leqslant r^2$$

اینك با حدگیری $r\to 1^+$، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{n=1}^{m} n|b_n|^2\leqslant 1,\qquad m=1,2,\ldots$$

بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که:

قضیهٔ مساحت. اگر $g=z+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ متعلق به Σ باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\leqslant 1$.

نتیجه. اگر $g(z)$ متعلق بـه Σ باشد، آنـگاه $|b_1|\leqslant 1$. برابری برقرار است اگر و تنها اگر $g(z)=z+b_0+e^{i\alpha}/z$، (که در آن $|e^{i\alpha}|=1$).

قضیهٔ مساحت مربوط به‌توابع در Σ است، ولی‌در واقـع به‌طور غیرمستقیم به‌براوردهای ضرایب برای ردهٔ S منجر می‌شود. اگر با یك تابع در S شروع کنیم، می‌توان با اطـلاع از ضرایب و با به‌کاربردن تبدیلات جبری، یك تابع در Σ ساخت. نکتهٔ اصلی برهان بیبرباخ همین است.

برهان قضیهٔ بیبرباخ. تابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S مفروض است؛ توابع کمکی زیر را می‌سازیم

$$g(z)=(f(z^2))^{1/2},\qquad h(z)=\frac{1}{g(1/z)}$$

(تابع $f(z^2)$ دارای ریشهٔ دوم تحلیلی تك‌ارز است چرا کـه f تك‌ارز است.) یك محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $h(z)$ در Σ است و دارای سری لوران زیر است:

$$h(z)=z-\frac{a_2}{2z}+\cdots$$

نتیجهٔ قضیهٔ مساحت ایجاب می‌کند که $|a_2|\leqslant 2$؛ برابری برقرار است اگر و تنها اگر $h(z)=z+b/z$ که در آن $|b|=1$. تابع h را برحسب f به‌دست می‌آوریم، نتیجه می‌شود:

$$h(z)=z+\frac{b}{z}\quad\text{اگر و تنها اگر}\quad f(z)=\frac{z}{(1+bz)^2}$$

تابع $f(z)$ همان‌طور که ادعاشده بود از تابع کواب با یك دوران به‌دست می‌آید.

از اصلی که در بالا مشاهده شد ــ شروع کردن با یك تابع در S و یا در Σ، اجرا کردن تبدیلی جبری وسپس به‌کاربردن یك قضیهٔ ضریبی شناخته شده درنتیجهٔ به‌دست آمـده ــ چندین نتیجهٔ جالب قضیهٔ بیبرباخ به‌دست می‌آید. برخی از این نتایج به‌اندازهٔ خود قضیهٔ ضریب دوم، حدس بیبرباخ را روشن‌می‌کنند. نمونـه‌ای از این نتایج به‌قرار زیر است:

قضیهٔ ربع‌کواب. فرض‌کنید $f=z+a_2z^2+\cdots$ در S باشد، و فرض کنید $f(D)$ شامـل w_0 نباشد (یعنی $f(z)\neq w_0$ هرگـاه $|z|<1$). در این صورت $|w_0|\geqslant 1/4$ و برابری می‌تواند برقرار باشد اگر و تنها اگر f دورانی از تابع کواب باشد.

برهان. تابع مبدل

$$g(z)=\frac{w_0 f(z)}{w_0-f(z)}=h(f(z))$$

که در آن $h(w)=w_0w/(w_0-w)$ تك‌ارز است‌زیراکه h (در $\mathbf{C}-\{w_0\}$) تك‌ارز است. با محاسبهٔ مشتقات g در مبدأ داریم

$$g(z)=z+\left(a_2+\frac{1}{w_0}\right)z^2+\cdots$$

در نتیجه، g در S است و بنابر قضیهٔ بیبرباخ، $|a_2+1/w_0|\leqslant 2$. بنابر نابرابری مثلثی $|w_0|\geqslant 1/4$؛ برابری تنها وقتی ممکن است که $|a_2|=2$. در این حالت f دورانی از k است.

قضیهٔ بیبرباخ می‌گوید برای یك تابع f در S، $|f''(0)|\leqslant 4$. این نتیجه را می‌توان از مبدأ به‌هر نقطهٔ دلخواه دیگر z_0 در D، به‌وسیلهٔ ترکیب با تبدیل کسری خطی

$$A(w)=\frac{w+z_0}{1+w\bar{z}_0}$$

انتقال داد. چون A نگاشتی تحلیلی و تك‌ارز در D روی خودش است، با شرط $A(0)=z_0$، ترکیب $f(A(w))$ تحلیلی و تك‌ارز است، ولی نرمال نشده است. با قراردادن

$$h(w)=\frac{f(A(w))-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

آن را نرمال می‌کنیم؛ سپس با یك محاسبهٔ طولانی (ولی سرراست) می‌توان نشان داد که

$$h(w)=w+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\bar{z}_0\right]w^2+\cdots$$

از قضیهٔ بیبرباخ (با حذف اندیس ۰ در z_0) نتیجه می‌شود که

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad |z|<1$$

با «انتگرالگیری» از نابرابری اخیر، کران بالا و کران پایینی برای $|f'(z)|$ و $|f(z)|$ برحسب $|z|$ به‌دست می‌آید:

قضیهٔ اعوجاج. اگر f در S باشد و $|z|<1$، آنگاه

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \qquad (1)$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \qquad (2)$$

(«اعوجاج» در اینجا به‌این معنی است که نگاشت f فواصل کوچك نزدیك z را با عامل $|f'(z)|$ بزرگ می‌کند.)

برهان. با قراردادن $z=re^{i\alpha}$ در نابرابری قبل از قضیه داریم:

$$\frac{4}{1-r^2}\geqslant\left|e^{i\alpha}\frac{f''(re^{i\alpha})}{f'(re^{i\alpha})}-\frac{2r}{1-r^2}\right| =\left|\frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^3)f'(re^{i\alpha})]\right|$$

برابری اخیر از محاسبهٔ مستقیم حاصل می‌شود. اینك با انتگرالگیری در طول پرتو از ۰ تا z، به‌دلیل اینکه $f'(0)=1$، داریم

$$|\log[(1-r^2)f'(re^{i\alpha})]| =\left|\int_0^r\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\log[(1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha})]\right]d\rho\right| \leqslant\int_0^r\left|\frac{\partial}{\partial\rho}\log[(1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha})]\right|d\rho \leqslant\int_0^r\frac{4}{1-\rho^2}d\rho=2\log\frac{1+r}{1-r}$$

از قسمت حقیقی $\log[(1-r^2)f'(re^{i\alpha})]$ نتیجه می‌شود که

$$-2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\leqslant\log[(1-|z|^2)|f'(z)|] \leqslant 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

که هم‌ارز با (۱) است. (۲) به‌طریقی مشابه اثبات می‌شود.

قضایای اعوجاج برای هرگونه تحلیل بیشتر توابع تحلیلی تك‌ارز نقش اساسی دارند. تابع کواب نقش معمول خود را دارد: تمام نابرابریها اکیدند مگر اینکه f دورانی از k باشد.

اینك می‌توانیم به‌سؤالی که در بالا در مورد وجود کرانهایی برای تك‌تك ضرایب توابع در S مطرح شد پاسخ دهیم. تنها چیزی که از بخش قبل بی‌جواب مانده است نشان دادن موضعاً کراندار بودن S است. معنی طرف راست (۲) دقیقاً همین است: اگر $|z|<r$، آنگاه

$$|f(z)|\leqslant k(r)=\frac{r}{(1-r)^2}$$

بالاخره می‌دانیم که کرانهایی برای ضرایب وجود دارند. همچنین از (۲) می‌توان براوردهای (مسلماً غیرجالبی) برای ضرایب به‌دست آورد.

تمرین. نشان دهید که برای هر f در S، و $n=2, 3, \ldots$ داریم $|a_n|\leqslant n^2e^2/4$.

راهنمایی. نابرابری کوشی را به‌کار ببرید: اگر $f(z)=\sum a_nz^n$ تحلیلی باشد و به‌ازای $|z|<r$، داشته باشیم $|f(z)|\leqslant M$، آنگاه $|a_n|\leqslant M/r^n$.

در بخش بعد برای ضرایب براورد بسیار بهتری به‌دست خواهیم آورد. با وجود این، به‌عنوان آخرین نتیجهٔ قضیهٔ بیبرباخ، براورد بهتری برای a_3 به دست می‌آوریم. (از تمرین بالا برآورد $|a_3|\leqslant 16{,}63$ به‌دست می‌آید.)

قضیه. اگر f در S باشد، آنگاه $|a_3|\leqslant 5$.

برهان. تابع

$$g(z)=1/f(1/z)=z-a_2+(a_2^2-a_3)z^{-1}+\cdots$$

در Σ است. بنا بر قضیهٔ مساحت $|a_2^2-a_3|\leqslant 1$؛ پس

$$|a_3|\leqslant|a_2^2-a_3|+|a_2|^2\leqslant 1+4=5$$

تاریخچهٔ دو برهان کلاسیك، و حل دبرانژ

قضیهٔ نگاشت ریمان وجود یك تابع تحلیلی تك‌ارز از D روی هر زیرحوزهٔ سرهٔ ساده‌ـ همبند مفروض از صفحهٔ مختلط را تضمین می‌کند. نظریهٔ توابع تك‌ارز، مطالعهٔ ویژگیهای ملموس (به‌خصوص ویژگیهای فرینال) «نگاشتهای ریمان» است. اولین واقعیت همان طور که قبلاً بحث شد این است که S نرمال است؛ این مطلب تضمین می‌کند که مسائل فرینال (مانند ماکسیمم شدن ضریب nام) جواب دارند. این قضیهٔ بنیادی را اول بار کواب که بدون اغراق بنیانگذار این رشته محسوب می‌شود در سال ۱۹۰۷ ثابت کرد.

اینکه توابع کواب نقش خاصی‌در S بازی می‌کنند، حتی پیش از مطرح شدن‌حدس بیبرباخ درسال ۱۹۱۶ نیز آشکار بود. مثلاً، درسال ۱۹۱۴ گرونوال[1] این‌ویژگی k را (همراه با چند ویژگی دیگر) ثابت‌کردکه اگر f در S باشد و $|z|<1$، آنگاه

$$|k(-|z|)| \leqslant |f(z)| \leqslant |k(|z|)|$$

که بدین‌معنی است که $|k(z)|$ بر روی هر دایرهٔ $r=|z|$، با بزرگترین ماکسیمم و کوچکترین مینیمم همهٔ توابع در S برابر می‌شود (این مطلب از قضیهٔ اعوجاج نیز نتیجه می‌شود). با این همه شاهد برای فرینال بودن k در S، این حدس که تك‌تك ضرایب k نیز ماکسیمم است مطمئناً در اذهان بوده است؛ سهم بیبرباخ بیشتر دراثبات قضیهٔ ضریب دوم ونتایج آن بوده است تا درطرح خود حدس (ر.ك. همچنین به [۱۱] فصل‌دوم).

پیشرفت در زمینهٔ حدس بیبرباخ درچندین‌جهت به‌وقوع‌پیوست. سه "نوع" از نتایج جزئی به‌شرح زیرند:

۱. $|a_n| \leqslant n$ برای n خاص
۲. $|a_n| \leqslant n$ برای زیرردهای خاصی از S
۳. $|a_n| \leqslant Cn$ برای C به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ

(برای مشاهدهٔ پیشرفت در سایرجهات به [۳] و[۷] رجوع کنید.)

نتایج نوع اول به‌کندی به‌دست آمده‌اند. قضیهٔ ضریب سوم $|a_3| \leqslant 3$، را لاونر[2] ریاضیدان چك که بعدها به‌آمریکا مهاجرت کرد درسال ۱۹۲۳ ثابت نمود. اثبات او عمیق، ظریف، وکاملاً با اثبات قضیهٔ دوم بیبرباخ متفاوت است. روش معادلهٔ دیفرانسیل جزئی لاونر از یك طرف به‌خاطر قدمتش و ازطرف دیگربه‌خاطر ظاهرشدنش در اثبات دبرانژ برای حدس کلی قابل توجه است. متجاوز از سی‌سال هیچ قضیهٔ دیگری ازنوع "$|a_n| \leqslant n$" ثابت نشد و پس از آن هم روشها متفاوت بودند. در سال ۱۹۵۵ گارابدیان[3] و شیفر که هردو در آن زمان از همکاران لاونر در استانفورد بودند با استفاده از حساب تغییرات ویژه‌ای در S ثابت‌کردندکه $|a_4| \leqslant 4$. قضایای ضرایب ششم و پنجم به‌ترتیب درسالهای ۱۹۶۸ و۱۹۷۲ به‌دست‌آمدند. تاسال۱۹۸۴ برهانهای پیچیدهٔ قبلی بازبینی و تلخیص شده بودند، ولی برای تمام nهای بزرگتر از ۶ حدس هنوز پا برجا بود.

نوانلینا[4] در۱۹۲۰ و روگوسینسکی[5] و دیودونه (مستقلاً در حدود سال۱۹۳۰) بدواً دوقضیه اثبات‌کردندکه مربوط به‌دو تا از "زیررده"هاست. این قضیه‌ها به‌ترتیب حکم می‌کنند که حدس بیبرباخ برای حالات زیربرقرار است: برای توابعی که،(یك) در S دارای برد ستاره‌گون هستند (یعنی $f(D)$ شامل قطعه خط واصل بین‌هرنقطهٔ آن ومبدأ است)،و(دو) تمام ضرایب آنهاحقیقی هستند. (لاونرحالت خاصی از(یك) را درسال ۱۹۱۷ ثابت‌کرده بود.) در جهتی کمی متفاوت، نشان داده شده بود که زیررده‌های معینی از S در براوردهای دقیقتری ازنمو ضرایب صدق می‌کنند. مثلاً،کلونی[6] و پومرنك[7] در سال ۱۹۶۶ نشان دادندکه ضرایب توابع کراندار در S در براورد مرتبهٔ نمو زیر

$$|a_n| = O(n^{-1/2-\alpha})$$

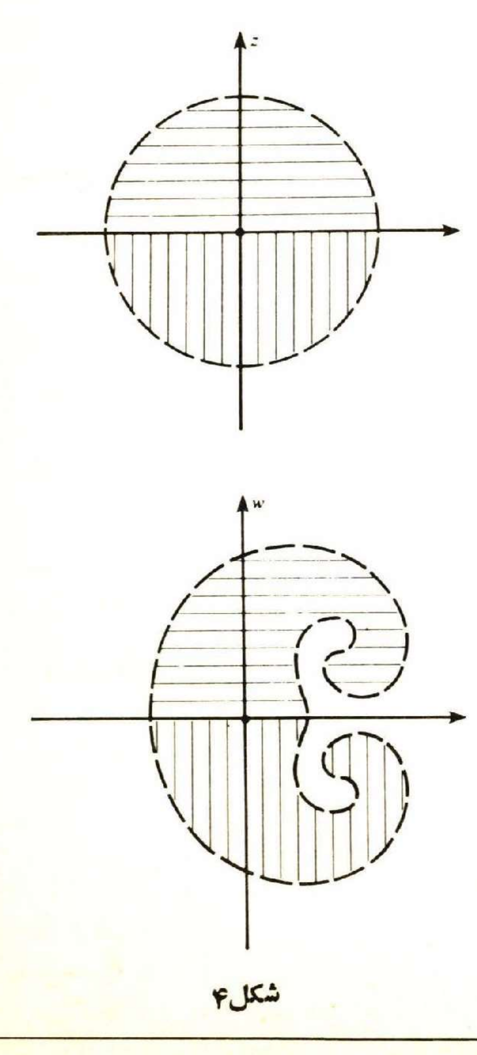
صدق می‌کنند؛ (α عدد مثبتی است‌که بهترین مقدارش برمامجهول است). درکارهای‌تازهٔ دیگرنشان داده شده است که برای تابعهایی در Sکه (سه) $|a_2| \leqslant 1.05$، یا (چهار) در توپولوژی مناسبی، f "نزدیك" تابع‌کواب باشد، یا (پنج) f از k "دور" باشد، داریم $|a_n| \leqslant n$. به‌عنوان مثال ما دراینجا (دو) را ثابت می‌کنیم.

قضیه. فرض‌کنید $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ در S باشد، و هر یك از a_nها حقیقی باشد، آنگاه $|a_n| \leqslant n$.

برهان. چون a_nها حقیقی هستند، اتحاد

$$f(\bar{z})=\sum a_n\bar{z}^n=\sum \overline{a_n z^n}=\overline{f(z)}$$

برای هر z در D برقرار است. نتیجه اینکه برد f نسبت به‌محور حقیقی‌متقارن است؛ در حالت خاص، $f(z)$ حقیقی است اگر و (چون f تك‌ارز است) تنها اگر z حقیقی باشد. علاوه براین، چون $f'(0)=1$، f نیمهٔ بالای (متناظراً نیمهٔ پایین) D را روی نیمهٔ بالای (متناظراً نیمهٔ پایین) $f(D)$ می‌نگارد. (شکل ۴ را ملاحظه کنید.)



شکل۴

---

1. Gronwall
2. K.Loewner
3. P.Garabedian
4. R.Nevanlinna
5. W. Rogosinski
6. J.Clunie
7. Ch. Pommerenke

اگر f را در مختصات قطبی به‌صورت سری توانی (با شرط $a_1=1$) بنویسیم، داریم

$$\begin{aligned} f(z)=(re^{i\alpha}) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\alpha} \\ &= \sum a_k r^k \cos(k\alpha) + i\sum a_k r^k \sin(k\alpha) \\ &= U(z)+iV(z) \end{aligned}$$

که در آن U و V توابعی از z با مقادیر حقیقی هستند. در ریاضیات عمومی دیده‌اید که اگر m و n اعداد صحیح باشند، آنگاه توابع مثلثاتی به‌صورت $\sin(n\alpha)$ یا $\cos(m\alpha)$ دو به‌دو در انتگرال‌گیری نسبت به α در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ متعامدند، ولی

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n\alpha)]^2\, d\alpha = \pi$$

بنابراین، به‌ازای هر $r<1$

$$|a_n r^n| = \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\alpha) V(re^{i\alpha})\, d\alpha \right|$$

چون تابع انتگرالده تابع زوجی از α است،

$$\begin{aligned} |a_n r^n| &= \frac{2}{\pi}\left| \int_{0}^{\pi} \sin(n\alpha) V(re^{i\alpha})\, d\alpha \right| \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(n\alpha) V(re^{i\alpha})|\, d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(n\alpha)| V(re^{i\alpha})\, d\alpha \end{aligned}$$

برابری اخیر از خاصیت نگاشت f نتیجه می‌شود ــ اگر α در $[0, \pi]$ باشد، $V(z)$ غیرمنفی است. اکنون از یک نابرابری محتملاً ناآشنا ولی سرراست آنالیز حقیقی استفاده می‌کنیم (برای اثبات آن می‌توانید مثلاً به‌صفحهٔ ۳۵۶ از [۱۲] رجوع کنید):

$$|\sin(n\alpha)| \leqslant n\sin(\alpha), \qquad 0\leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad n=1,2,\ldots$$

با توجه به‌این نابرابری داریم

$$\begin{aligned} |a_n r^n| &\leqslant \frac{2}{\pi} n \int_0^{\pi} \sin(\alpha) V(re^{i\alpha})\, d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} n \int_0^{2\pi} \sin(\alpha) V(re^{i\alpha})\, d\alpha \\ &= na_1 = n \end{aligned}$$

چون $r<1$ دلخواه است، می‌توان r را از طرف پایین به‌یک میل داد و بدین ترتیب اثبات را کامل کرد.

حدس زده می‌شد که مرتبهٔ بزرگی a_nها خطی باشد؛ و سالها پیش این حدس ثابت شده بود. اولین قضیهٔ خوب از نوع $|a_n|\leqslant Cn$ در سال ۱۹۲۵ ارائه شد؛ لیتلوود ثابت کرد که برای هر f در S داریم

$$|a_n| \leqslant en$$

مهمترین قسمت، برآورد انتگرال لیتلوود است (ر.ک. صفحهٔ ۳۸ از [۸]): اگر $0<r<1$ و اگر f در S باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|\, d\alpha \leqslant \frac{r}{1-r}$$

با پذیرفتن این مطلب، قضیه مستقیماً نتیجه می‌شود. فرض کنید $f(z)=\sum a_n z^n$، آنگاه

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

(این ساده‌ترین صورت قضیهٔ انتگرال کوشی است و با محاسبهٔ مستقیم می‌توان آن را به‌دست آورد.) می‌نویسیم $z=re^{i\alpha}$ و $dz=ire^{i\alpha}\,d\alpha$، پس

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{2\pi}\left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\alpha})}{r^n e^{in\alpha}}\, d\alpha \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|\, d\alpha \\ &\leqslant \frac{1}{r^{n-1}-r^n} \end{aligned}$$

این نابرابری برای هر r در $(0, 1)$ برقرار است. به‌آسانی می‌توان نشان داد که طرف راست در $r=1-1/n$ مینیمم است. این مقدار r را در نابرابری اخیر می‌گذاریم، و نتیجه می‌گیریم که

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^{n-1}-r^n} = n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en$$

در سال ۱۹۷۴ بائرنشتین نشان داد که k دارای بزرگترین میانگین انتگرالی ممکن از هرمرتبه است و به‌این‌ترتیب نابرابری انتگرال لیتلوود را بهتر کرد: به‌ازای هر f در S و هرعدد حقیقی p، داریم

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|^p\, d\alpha \leqslant \int_0^{2\pi} |k(re^{i\alpha})|^p\, d\alpha$$

در حالت $p=1$، از محاسبهٔ طرف راست نتیجه می‌شود که

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|\, d\alpha \leqslant \frac{r}{1-r^2}$$

تمرین. با تقلید از اثبات قبلی نشان دهید که

$$|a_n| \leqslant \frac{e}{2} n \approx 1.36\, n$$

برای هر تابع مفروض f در S، با نوشتن

$$g(z)=f(z^2)^{1/2} = z+\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$$

یك تابع فرد تك‌ارز به‌دست می‌آید. (قبلاً این عمل را در اثبات قضیهٔ بیبرباخ انجام دادیم.) اگر $f=k$، آنگاه

$$k(z^2)^{1/2} = z+z^3+z^5+z^7+\cdots$$

یعنی برای هر k، $b_k = 1$. در سال ۱۹۳۲ لیتلوود و پالی به این حدس طبیعی دست یافتند که برای هر تابع فرد در S، $|b_k| \leqslant 1$. (آنها ثابت کردند که $|b_k| < 14$.)

تمرین. با استفاده از وارون تبدیل ریشهٔ دوم، نشان دهید که از حدس لیتلوود-پالی حدس بیبرباخ نتیجه می‌شود.

حدس لیتلوود-پالی را سال بعد فکت[1] و سگو رد کردند و این موجب شد رابرتسون به حدس کمی ضعیفتر $|b_k| \leqslant 1$ به‌مفهوم میانگین، هدایت شود:

حدس رابرتسون (۱۹۳۶). اگر $g(z)=z+b_3z^3+b_5z^5+\cdots$ در S باشد، آنگاه $1+|b_3|^2+|b_5|^2+\cdots+|b_{2n-1}|^2 \leqslant n$.

حدس رابرتسون هم حدس بیبرباخ و حتی صورت قوی آن را ایجاب می‌کند. (ر.ك. صفحهٔ ۶۶ از [۸].) در واقع این همان چیزی است که دبرانژ به‌طور غیرمستقیم ثابت کرد.

با تکرار تبدیل ریشهٔ دوم، به‌ریشه‌های از مرتبهٔ بالاتر، و به‌یك مفهوم حدی، به‌لگاریتم یك تابع تحلیلی تك‌ارز هدایت می‌شویم. در سال ۱۹۳۹، گرونسکی ردهٔ جدیدی از نابرابریهای ضریبی‌را به‌دست آورد که بعدها ثابت شد قدم مهمی‌درجهت یك راه‌حل کلی برای حدس بیبرباخ می‌باشد. گرونسکی با یك تابع f در S شروع کرده، ضرایب c_{jk} تابع

$$\log\frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} z^j w^k$$

را که نسبت به‌دو متغیر z و w تحلیلی است مورد مطالعه قرار داد.

نابرابریهای گرونسکی خانواده‌ای نامتناهی از براوردهای "ضرایب لگاریتمی" c_{jk} است. (به‌طور رسمی، حکم این است که کران ماتریسهای نامتناهی (c_{ij}) وابسته به‌توابع در S با نرم مناسبی، یك است.)

با ارائهٔ نابرابریهای گرونسکی، یك سؤال مشکل باقی می‌ماند: چگونه اطلاعات مربوط به‌ضرایب لگاریتمی c_{jk} را می‌توان برای براورد a_n، ضرایب تیلری معمولی a_n از تابع f، به‌کار برد، یعنی چگونه می‌توان نابرابریهای گرونسکی را به "توان" رسانید. تکنیکهای گوناگونی در سالهای شصت و هفتاد توسط لبدف[2] و میلین[3] درشوروی و توسط فیتزجرالد در آمریکا ارائه شد و برای بهتر کردن قضایای پیشین "$|a_n| \leqslant Cn$" به‌کار رفت، از آن جمله قبل از سال ۱۹۷۸ هوروویتس نشان داد که $|a_n| < 1{,}0657n$. (برای مشاهدهٔ کوششهایی که برحسب تاریخ در جهت تقلیل C شده است مقالهٔ [۱۳] را ملاحظه کنید.)

1. M. Fekete
2. N. A. Lebedev
3. I.M.Milin

کارلبدف و میلین منجر به‌حدس بسیار جالب زیر شد:

حدس لبدف-میلین (۱۹۶۷). اگر f در S باشد و

$$\log f(z)/z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

آنگاه،

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|c_k|^2-\frac{4}{k}\right)\leqslant 0, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

چون برای تابع کواب، $\log k(z)/z=\sum_{k=1}^{\infty}(2/k)z^k$، به‌نظر می‌رسد آشکار باشد که برای هر f در S و هر k، $|c_k| \leqslant 2/k$. این پندار حاکی از خوشبینی بیش از اندازه است-می‌توان نشان داد که درستی این پندار، درستی حدس لیتلوود-پالی را ایجاب می‌کند. حدس لبدف-میلین، مانند حدس رابرتسون می گوید که این مطلب که آشکار به‌نظر می‌رسد درحدی ضعیفتر، یعنی به‌مفهوم میانگین n ضریب اول، درست است. لبدف ومیلین نشان دادند که حدس آنها حدس رابرتسون را که قویتر از حدس بیبرباخ است ایجاب می‌کند. بدین ترتیب بعضی‌از کارشناسان متعجب شدند که چیزی که دبرانژ ثابت کرده است دقیقاً همان حدس لبدف-میلین است.

اثبات دبرانژ دوعنصر اصلی دارد - یکی دستگاهی از توابع وزنی وابسته به‌زمان و دیگری معادلهٔ دیفرانسیل لاونر (قسمتی از اثبات کلاسیك ضریب سوم)، که آن نیز وابسته به‌یك پارامتر زمان است. دبرانژ از ترکیب اینها، صورتی وابستهٔ به‌زمان ازنابرابری لبدف-میلین می‌سازد که به‌ازای $t=\infty$ آشکارا معتبر و بانابرابری لبدف-میلین به ازای $t=0$ برابر است. انتخاب زیرکانه (و به‌نظر یکی از کارشناسان "معجزه آسا"ی) توابع وزنی تضمین می‌کند که وقتی t به‌صفر برمی‌گردد، نابرابری برقرار است. ویژگی‌لازم توابع وزنی به‌یك نابرابری در چندجمله‌ایهای فوق هندسی تعمیم یافته منجر می‌شود.

کامپیوتر هم در جستجوی دبرانژ برای راه‌حل، اما نه دراثبات نهایی او، نقشی داشته است. دبرانژ در مرحله‌ای از اواخر کارش با گوتسچی از گروه علوم کامپیوتر دانشگاه پردو تماس گرفت تا به‌کمك‌او، درستی‌نابرابری‌را که حدس‌زده بود بااستفاده ازاعداد بیازماید. نتایج اعجاب‌آوروحاصل-اثبات حدس بیبرباخ درمورد سی‌ضریب اول- گواه دلگرم‌کننده‌ای از این امر بود که روش کلی دبرانژ به‌نتیجه خواهد رسید. این‌نتایج همچنین‌موجب‌شد گوتسچی با اسکی ازدانشگاه ویسکانسین تماس بگیرد و از او بخواهد که جویا شود آیا نابرابری قبلاً ثابت شده است یا نه. تعجب آور اینکه، این نابرابری در یك‌کار مشترك اسکی‌وگاسپردرسال۱۹۷۶ ثابت شده بود [۹]. براثریك اتفاق جالب، یك ویژگی توابع خاص با متغیر حقیقی، اثبات یك قضیهٔ مختلط را تکمیل کرد.

برهان دبرانژ که در آغاز طولانی بود، نخست با شك وتردید روبه‌رو شد. قبلاً برهانهایی نادرست ازحدس بیبرباخ ارائه شده بود. با این حال، برهان جدید در سمینار نظریهٔ توابع هندسی لنینگراد (که میلین نیز عضو آن بود) در پنج جلسهٔ طولانی در

آوریل و مه ۱۹۸۴ تأیید شد. نسخهٔ اولیهٔ برهان به‌صورت پیش‌چاپ انتشار یافت [۶]. این برهان، بعداً بازبینی و خلاصه شد؛ و حالا برخی از برهانهای مربوط به‌هریك از ضرایب خاص از این برهان [کلی] به‌مراتب طولانیتر ومشکلترند. برهان دبرانژ درسال ۱۹۸۵ چاپ شد [۵]. (برای ملاحظهٔ برهانهایی با اندکی اختلاف، و نیز برای توضیحات بیشتر [۱۵]، [۱۰]، [۹] را ببینید.)

کار ریاضیدانان روی حدس بیبرباخ باعث آفرینش وپیشرفت نظریه‌هایی (از قبیل روش تغییراتی شیفر و نظریـهٔ دیفرانسیلهای مربعی) شد که هرچند الزاماً در راه‌حل دبرانژ به کار گرفته نشد ولی در جاهای دیگرکاربرد پیداکردند. این البته بدان معنی نیست که دبرانژ ازکارهای پیشینیان استفاده‌ای نکرده است. روش‌لاونر، حدس لبدف-میلین (و به‌طور ضمنی نابرابریهای گرونسکی) وقضیهٔ اسکی-گاسپر- همراه با سهم عظیم دبرانژ- همه درحل نهایی تأثیر فوق‌العاده‌ای داشتند.

هرچند معروفترین مسألهٔ نظریهٔ توابـع هندسی حل شده است، ولی‌هنوزسؤالهای مهمی دراین‌رشته باقی‌است. مثلاً، برآوردهای دقیقی برای ضرایب توابـع تحلیلی p-به‌یك نرمـال شده، برای توابع در Σ و برای توابـع در S بـا نمو محدود هنوز شناخته نشده‌اند. ازکار دبرانژ در یك گردهمایی بین‌المللی که در مارس ۱۹۸۵ در دانشگاه پردو برگزار شد تجلیل شد، و بسیاری مسائل جدید وجهتهای تحقیقاتـی جدید پیشنهاد شد. در دانشگاه مریلند، سال تحصیلی ۱۹۸۵-۱۹۸۶ سال ویژهٔ آنالیـز مختلط اعلام شد. چگونه و درکجا تکنیکهای خاص دبرانژ به‌کار خواهند رفت، در آینده روشن خواهد شد، ولـی مسلم به‌نظر می‌رسد کـه دستاورد دبرانژ محرکـی برای کارهای جدید وجالب در توابـع خاص، نظریهٔ بهینه‌سازی، آنالیز تابعی و آنالیزمختلط خواهد بود.

مراجع

1. R. Askey and G. Gasper, Positive Jacobi polynomial sums II, Amer. J. Math., 98(1976) 709-737.
2. S. Bernardi, Bibliography of Schlicht Functions, Mariner, Tampa, 1983.
3. A. Baernstein, Bieberbach's conjecture for tourists, Lecture Notes in Math., vol. 908, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 48-72.
4. L. Bieberbach, Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften, 1916, 940-955.
5. L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Math., 154(1985) 137-152.
6. ———, A proof of the Bieberbach conjecture, Steklov Math. Inst., preprint E-5-84, Leningrad, 1984, 9-21.
7. P. L. Duren, Coefficients of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc., 83(1977) 891-909.
8. ———, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York, 1983.
9. C. FitzGerald, The Bieberbach conjecture: retrospective, Notices Amer. Math. Soc., 32 (1985) 2-6.
10. ———, Ch. Pommerenke, The de Branges theorem on univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 290(1985) 683-690.
11. A.W. Goodman, Univalent Functions, Vols. I,II, Mariner, Tampa, 1983.
12. E. Hille, Analytic Function Theory, Vol. II, Chelsea, New York, 1962.
13. D. Horowitz, A further refinement for coefficient estimates of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 71 (1978) 217-219.
14. Ch. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.
15. ———, The Bieberbach conjecture, Math. Intelligencer, 7 (no. 2, 1985).

• Paul Zorn, "The Bieberbach conjecture," *Math. Mag.*, (3) **59** (1986) 131-148.

★ پاول تسورن، کالج سینت اولاف آمریکا